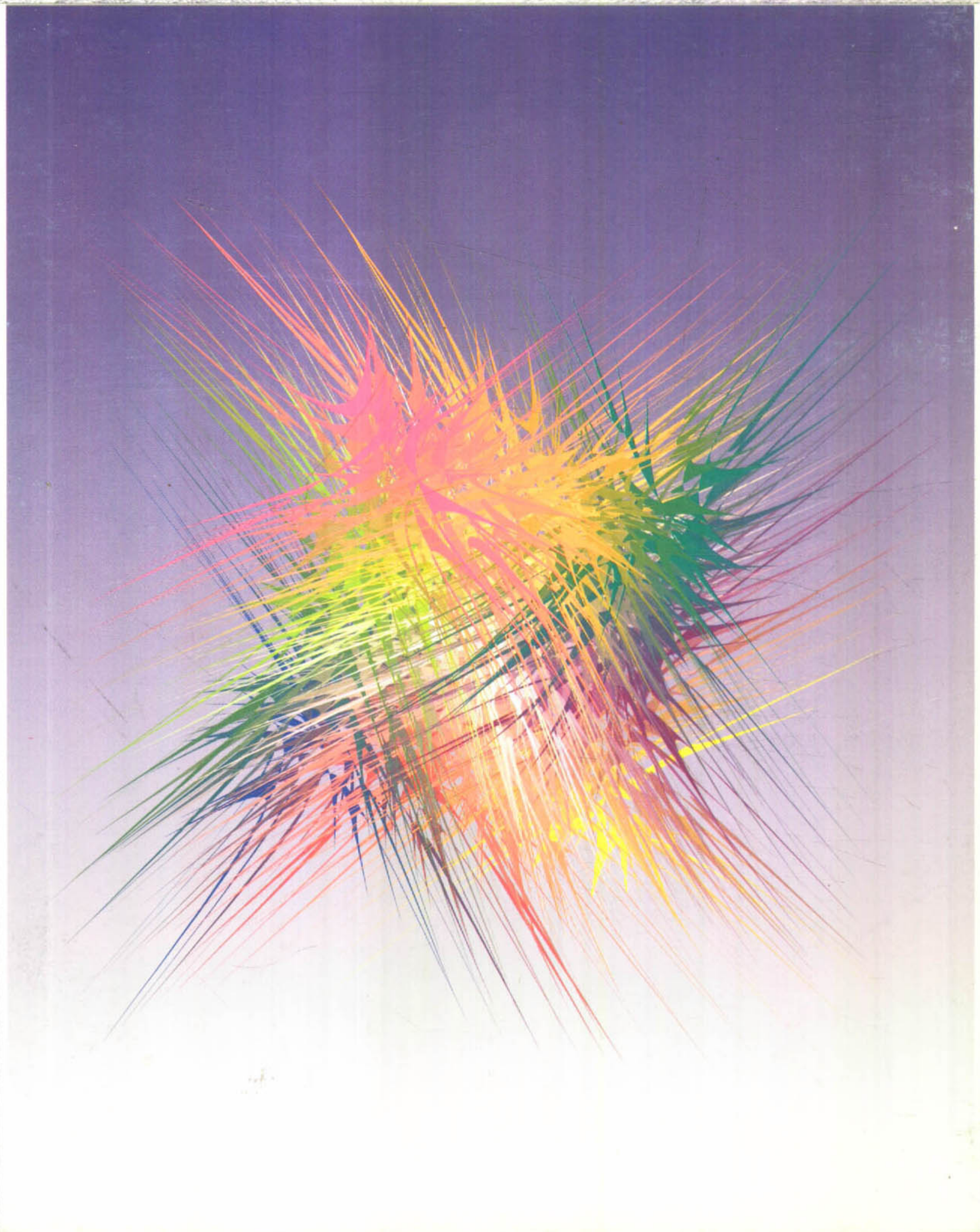
مجله ریاضی

برهان

۲۹

برای دانش آموزان دبیرستان

سال نهم، شماره اول، تابستان ۱۳۷۸، بها ۲۰۰۰ ریال



بسم الله الرحمن الرحیم

انتشارات مدرسه وابسته به وزارت آموزش و پرورش

□ صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه □ مدیر مسؤول: محمود ابراهیمی
□ سردبیر: حمیدرضا امیری □ مدیر داخلی: میرشهرام صدر
□ اعضای هیأت تحریریه: آقایان: □ حمیدرضا امیری □ محمدهاشم رستمی □ احمد قندهاری □ میرشهرام صدر
□ هوشنگ شرقی □ سیدمحمدرضا هاشمی موسوی □ غلامرضا یاسی پور (با تشکر از همکاری ارزندهٔ آقای پرویز شهریاری)
□ مدیرفنی: هوشنگ آشتیانی □ طراح گرافیک: امیر بابایی □ چاپ و صحافی: چاپخانه مدرسه

مطالب این شماره

■ **سال نهم، تابستان ۱۳۷۸، شمارهٔ اول.**

برهان تمامی دبیران محترم و دانش آموزان عزیز را در زمینه های زیر دعوت به همکاری می کند:

● نگارش مقاله های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتابهای ریاضی دبیرستان) ● طرح مسائل کلیدی (برای دانش آموزان) به همراه حل آنها ● طرح مسائل مسابقه ای (برای دانش آموزان) به همراه حل آنها ● طرح معماهای ریاضی
● نگارش یا ترجمهٔ مقاله های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

■ هیأت تحریریه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافهٔ مقاله‌ها آزاد است.
■ مقاله‌های وارده باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.
■ مقاله‌های مجله با رسم‌الخط انتشارات مدرسه به چاپ خواهد رسید.
■ مقاله‌های رسیده مسترد نمی‌شود.

برهان هر سه ماه یک شماره منتشر می‌شود.

نشانی: خیابان سپهبد قرنی، خیابان سپند شرقی، پلاک ۳۸
تلفن: ۶-۸۸۹۶۷۶۵، ۷۱-۸۸۰۴۵۶۸، دورنویس (فاکس): ۸۸۲۰۵۹۹، صندوق پستی: ۱۴۱۵۵/۱۹۴۹
تلفن امور مشترکین: ۹-۸۸۰۰۳۲۴

کد ۷۵۵/۱

حرف اوّل

حافظ، وظیفهٔ تو دعا گفتن است و بس　　　در بند آن مباش که نشنید یا شنید

مهربانم!

می خواهم تو را پند بدهم؟ نه. می خواهم مقدمه ای بنویسم بر اندرزنامه؟ نه! می خواهم با «تو» صمیمانه حرف بزنم؛ البته که معلمانه هم! برهان به دوستی و آشنایی با تو افتخار می کند. همهٔ آن عزیزانِ همراه و همدل که در مایه وری برهان، نقش دارند و حضور زنده، خیر و سعادت و بهروزی تو را می خواهند و آراسته بودنِ گوهر وجودِ تو را به نور ایمان.

اگر هر از گاهی در گوشه ای از برهان، کلام رنگِ سفارش و نصیحت می گیرد، به خاطر حفظ تناسب است! به خاطر حفظ اعتدال و میزان و رعایتِ حساب و کتاب است و دو دوتا چهارتا! مگر می شود که ماهنامه ای یا فصلنامه ای ریاضی، دور از حساب حرف بزند؟!

حرفِ حساب این که عزیزانِ نوجوان ما، قدر گوهرِ وجود معلمان خود را بدانند! همهٔ معلمان، عزیزند و سرفراز؛ اما نگین وجودِ معلمِ درس ریاضی را باید که ارج نهاد.

«او» با عشق و سوز و درایت می گوید؛ «او» در پرتو ایمان و سواد و تجربه ای که دارد، با آن بیانِ روشن و سرِ حوصله، به تو درس می دهد و سعی می کند که تو بهتر و بیشتر بدانی و برای فردا آماده شوی و مهیّا. جای تأسف و دریغ است که اگر سکوت و نظم و رعایتِ ادب تو، کار را بی سامان کند و آشفته. گاهی گفتن و چگونه گفتن، هنر است و گاهی هنر، در نوع سکوت است!

معلم که درس می دهد، سکوت و خوب شنیدن و حوصله و دقّتِ تو، به او شوق و ذوقِ بهتر گفتن را می دهد.

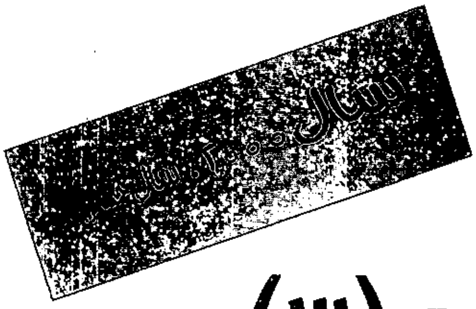
عزیزم!

مهربانم!

تو نمی خواهی که معلم، بهتر و بیشتر بگوید و تو همراه با چراغ و آینه زندگی کنی؟!

می دانم که خوبان، راه و رسمِ زندگی در خوبیها را می دانند. می دانم که ...

سردبیر



از تاریخ بیاموزیم (۳)

● پرویز شهریاری

دوره‌های تکامل تاریخ ریاضیات[1]

گفتیم که ریاضیات، برای پیشرفت خود، راهی دراز پیموده است: برای این که بتوانیم، با سادگی بیشتر، قانونمند بودن این پیشرفت را نشان دهیم و دیدگاه‌های اصلی، که راه را برای این پیشرفت گشوده‌اند، تشخیص دهیم، باید پیش از همه، دوره‌های تکامل ریاضیات را بروشنی از هم جدا کنیم.

این پرسش پیش می‌آید که چگونه این دوره‌ها را تقسیم کنیم و چه اصلهایی باید راهنمای این تقسیم باشد؟ آیا باید این دوره‌ها را به دلیل دانشمندان برجسته‌ای تعیین کرد که مسأله‌های زیادی در جهتهای مختلف طرح کرده‌اند و در طول سالهای زیادی دربارهٔ مسیرهای اساسی فکری که باید در ریاضیات دنبال می‌شد، نقشی تعیین‌کننده داشته‌اند؟ یا آن که باید دوره‌های مسیر تاریخی ریاضیات را به‌وسیلهٔ ملتهایی تعیین کرد که در گذشته توانسته‌اند به گنجینهٔ دانش بشری، ذخیرهٔ قابل توجهی بیفزایند؟ یا شاید بتوان دوره‌های مختلف تاریخ ریاضیات را، با توجه به تقسیم تاریخ جامعهٔ انسانی، براساس شکلهای مختلف تولید اقتصادی، طرح ریخت؟ در این صورت، باید از ریاضیات جامعهٔ ابتدایی، دوران نظام بردگی، فئودالیسم، سرمایه‌داری و دوران پس از آن صحبت کرد.

ولی روشن است که هیچ یک از این سه روش، نمی‌تواند راضی‌کننده باشد. در واقع، اگر دوره‌های مختلف پیشرفت ریاضیات را، برای نمونه، با روش اخیر بپذیریم، به‌طور طبیعی این پرسش پیش می‌آید که: بین ریاضیات دوران بردگی با ریاضیات جامعهٔ ارباب و رعیتی چه اختلافی وجود دارد؟ یا چه مرزی، ریاضیات نظام سرمایه‌داری را از ریاضیات نظام فئودالی جدا می‌کند؟... پرسشهایی که بدون پاسخ می‌مانند.

این روشهای تقسیم دوره‌های گذشتهٔ تاریخ ریاضیات، از این جهت راضی‌کننده نیستند که یا بر پایهٔ جنبه‌های خاص و غیراساسی تکامل دانش قرار گرفته‌اند و یا از ویژگیهای درونی ریاضیات، که بسیار جدّی است، منحرف شده‌اند. وقتی از تاریخ ریاضیات و مرحله‌های آن سخن می‌گوییم، در درجهٔ اوّل، باید به شرطهای

اصلی مربوط به تکامل خود ریاضیات بپردازیم و سپس، بستگی این شرطها و دلیل تأثیر آنها را در چیزهایی از نوع اقتصاد، نظامهای اجتماعی، تکامل صنعت و دانشهای تجربی، دیدگاه‌های گوناگون فلسفی و غیر آن، بررسی کنیم.

تاریخ ریاضیات را به چهار دورهٔ مختلف می‌توان تقسیم کرد :

۱. دورهٔ زایش ریاضیات ؛

۲. دورهٔ ریاضیات مقدماتی ؛

۳. دورهٔ ریاضیات با کمیتهای متغیر ؛

۴. و سرانجام، دورهٔ ریاضیات کنونی.

آغاز دورهٔ نخست، در ژرفای سده‌های گذشته کم می‌شود. تردیدی نیست که مفهومهای نخستین ریاضیات، با خود وجود جامعهٔ انسانی همراه است : تصورهایی از نوع «بیشتر» و «کمتر»، «برابری»، «فاصلهٔ کوتاهتر»، در مرحله‌های ابتدایی انسانهای نخستین هم، ولو به صورت ناآگاهانه، وجود داشته است. نیازهای زندگی، انسان را وامی‌داشت تا به محاسبه بپردازد و راهی برای اندازه‌گیری طول، سطح یا حجم پیدا کند. ذخیرهٔ آگاهیهایی که روی هم انباشته می‌شد، فزونی می‌یافت. ولی این، هنوز حکم یک مجموعهٔ پراکنده را داشت و به عنوان عنصرهای شاخهٔ مستقلی از دانش، که موضوع خاص و روش کار خاصی داشته باشد، احساس نمی‌شد. می‌توان دورهٔ زایش ریاضیات را، به عنوان یک دانش مستقل، نزدیک به شش سده پیش از میلاد دانست ؛ ولی این، یک تاریخ مشروط است : زیرا بسیاری از ملتها خیلی دیرتر توانستند درک ریاضی خود را، به این دوره برسانند (و هستند قومهایی که هنوز به این مرحله نرسیده‌اند). در مقالهٔ بعدی خواهید دید، از نوعی محاسبه صحبت شده است که در بین برخی قومها، در سدهٔ نوزدهم و آغاز سدهٔ بیستم دیده شده است.

در این دوره، ریاضیات مقدماتی پایه‌ریزی شده است. انسانهای ناشناخته‌ای با کار خلاق خود و براساس تجربه‌های بسیار، مسأله‌هایی را طرح کردند و به گنجینهٔ دانش بشری افزودند. این آفریننده‌های بی‌نام دانش بشری، به دلیل نیازهای زندگی اقتصادی، به کشفهای خود جهت دادند، بتدریج راه عمل کردن با عددهای طبیعی را شناختند، سپس به بررسی عددهای کسری راهنمایی شدند و شروع به محاسبهٔ حجم جسمهایی کردند که کم و بیش پیچیده بود. در همین دوره، وسیله‌های کمکی برای ساده‌تر کردن محاسبه (چه محاسبهٔ مربوط به آنچه در اختیار داشتند و چه برای محاسبه‌های بازرگانی و داد و ستد) اختراع شد. گرچه این اختراعها، در دید ما بسیار ساده‌اند، گرچه دانش بشری در این دوره، خیلی ابتدایی است ؛ ولی همین گامهای نخستین بود که پایه‌های پیشرفت فرهنگ انسانی را ریخت. اگر انسان امروز، توانایی و دانش بی‌اندازه‌ای دارد، تنها به این دلیل است که نسلهای متوالی، با تکیه به تجربه‌ها و کشفهای نسلهای پیشین، توانستند سطح دانش خود را روزبه‌روز بالاتر ببرند.

روشن است برای دانش ریاضیات در این دورهٔ کهن، بیش از همه یادداشتها و صورت حسابهای مربوط به زندگی اقتصادی آن زمان، اهمیت دارد.

دورهٔ دوم، همان‌طور که گفتیم، دورهٔ ریاضیات مقدماتی نامیده می‌شود. آنچه امروز به‌طور عمده در دبیرستان یاد می‌گیریم، در این دوره شکل گرفته است. ولی آنچه به‌طور اساسی، این دوره را از گذشته جدا می‌کند، این است که مفهومهای ریاضی، به صورتی علمی درآمدند ؛ بویژه، سده‌های ششم یا پنجم پیش از میلاد را می‌توان آغاز شکل گرفتن ریاضیات، به عنوان دانشی که موضوع ویژهٔ خود و روش بررسی خاص خود را دارد، به‌شمار آورد. ریاضیات از مجموعهٔ پراکندهٔ «نسخه‌هایی» که برای زندگی روزمره قابل استفاده بود، به یک دستگاه معرفت علمی تبدیل شد. در این دوره، هندسه، پایهٔ نظریهٔ عددها، جبر، مثلثات روی صفحه و کره به نظم درآمد. ریاضیات، به کندی و بسختی خود را از قید تجربه آزاد کرد و درستی نتیجه‌گیریها را، نه در مشاهده و آزمایش روی نمونه‌های خاص، بلکه از راه استدلال منطقی و برای همهٔ حالتهای ممکن، به‌دست می‌آورد.

پایان دورهٔ دوم را باید آغاز سدهٔ هفدهم میلادی دانست ؛ زمانی به دلیل نیاز به مطالعهٔ حرکت و تغییر از دیدگاه ریاضیات، اندیشه‌ها و مفهومهای تازه‌ای در ریاضیات پدید آمد. بی‌تردید بررسی مفهومهای تازه، به مسأله‌هایی نزدیک بود که در برابر جامعهٔ بشری قرار داشت. اگر به یادآوریم که این دوره، زمان کشفهای بزرگ جغرافیایی و پیشرفت بی‌اندازهٔ دریانوردی و توجه بیش از اندازه به آگاهیهای اخترشناسی است، اگر به یاد آوریم که همین دوره،

زمان رشد تند تولید کارگاهی و پیشرفت رشتهٔ توپخانه است، آن‌وقت بسادگی قانع می‌شویم، همهٔ مسأله‌هایی که به این مناسبتها طرح می‌شد، نمی‌توانست براساس جبر و هندسهٔ مقدماتی حل شود ؛ به اندیشه‌ها و مفهومهای تازه‌ای نیاز بود که در واقع هم به‌وجود آمدند. این اندیشه‌ها در نقطه‌های مختلفی از سرزمین اروپا و بویژه در کشورهایی که صنعت و بازرگانی رونق بیشتری داشت، پیدا شد، و به این ترتیب شرطهای لازم، برای آغاز دورهٔ سوم پیشرفت فراهم شد.

دورهٔ ریاضیات با کمیتهای متغیر، به این ترتیب، مشخص می‌شود که ریاضیات به بررسی جریانها می‌پردازد. در نظر اول، ریاضیات این دوره، به پژوهش و بررسی کمیّتهای متغیر یک تابع مربوط می‌شود. اندیشهٔ محورهای مختصات به‌طور اساسی، به‌گونه‌ای به‌روش هندسی تبدیل شد که به صورت رابطه‌های تابعی نشان داده می‌شود. به شاخه‌هایی که پیش از آن در ریاضیات وجود داشت، هندسهٔ تحلیلی و آنالیز ریاضی هم اضافه شد. آموزش تابع، و به حساب آخر، بررسی کمیتهای متغیر، در سرفصل ریاضیات قرار گرفت. بررسی شکلهای فضایی هم، به یاری آنالیز ریاضی آغاز شد. ولی در هر حال، ریاضیات از مرزهای فضای واقعی سه‌بعدی خارج نشد. همچنین قانونهای کمیّتی، تنها به وسیلهٔ کمیّتهایی بیان می‌شد که مقدارهای عددی را می‌پذیرفتند. چه مقدارهای متغیرها و چه مقدارهای تابعها، تنها می‌توانستند مقدارهای عددی را بپذیرند.

روشن است که دورهٔ سوم، نه تنها برای خود ریاضیات، مرحلهٔ تکاملی بزرگی بود ؛ بلکه برای تعبیر ریاضی پدیده‌های طبیعت و هم برای پیشرفت صنعت، بارور و سازنده بود.

با تکیه برپیشرفت آنالیز ریاضی، توانستند قانونهای اساسی فیزیک را به صورت ریاضی بیان کنند ؛ از راه محاسبه، به کشفهای تازه‌ای دربارهٔ پدیده‌های فیزیکی دست یافتند که تا آن زمان، از راه تجربه و آزمایش مشاهده نشده بود. به عنوان یکی از نمونه‌های درخشان توانایی آنالیز ریاضی و شناخت پدیده‌های طبیعی، کشف سیارهٔ جدید دستگاه خورشیدی است که تقریباً در یک زمان، به‌وسیلهٔ دو اخترشناس، «آدامس» و «لوِریه» انجام شد. بعدها در سال ۱۹۳۰ میلادی، از همین راه «پلوتن» سیارهٔ نهم دستگاه خورشیدی هم کشف شد که مدار آن، خیلی پیشتر، در سال ۱۸۱۵ به‌وسیلهٔ «پ. لوول» اخترشناس امریکایی محاسبه شده بود.

ولی سدهٔ نوزدهم، تنها سدهٔ پیشرفت کمیّتی ریاضیات نبود، تنها امکانهای تازهٔ بررسی پدیده‌های طبیعت را از دیدگاه ریاضیات همراه نداشت ؛ بلکه به دلیل تأثیر جدّی و متقابل دانشهای تجربی و ریاضیات در یکدیگر، منجر به تغییر کیفی خود ریاضیات شد. به مناسبت این تغییرها، ریاضیات در نیمهٔ دوم سدهٔ گذشته، چهرهٔ خود را چنان به‌طور اساسی و جدّی تغییر داد که دیگر به آستانهٔ مرحلهٔ تازهٔ خود، مرحلهٔ چهارم تکامل ریاضیات، رسید.

چه خطهایی، این مرحلهٔ چهارم را از سه مرحلهٔ پیشین جدا می‌کند؟ پیش از هر چیز، موضوع ریاضیات، بی‌اندازه گسترش یافته است. ریاضیات، بجز کمیّتهای عددی، از کمیتهای دیگری هم، مثل بردارها، تانسورها و سینورها استفاده می‌کند. همراه با فضای سه بعدی اقلیدسی، به بررسی چنان فضاها و موضوعهای هندسی می‌پردازد که بکلی طبیعت دیگری دارند. درستی منطقی هندسه‌های نااقلیدسی، مثل هندسهٔ اقلیدسی تأیید شده است. فضاهای چند بعدی و سپس فضای nبعدی بررسی می‌شود. این موضوعهای تازه را، تا اندازهٔ زیادی، فیزیک در برابر ریاضیات گذاشته است. مضمون جبر به طور اساسی تغییر کرده است. جبر، از دانشی که به روشهای حلّ معادله‌های جبری می‌پرداخت، به دانشی تبدیل شده است که دستگاههایی از چیزهای با طبیعتهای مختلف را مطالعه می‌کند و عملهایی را دربارهٔ این چیزها انجام می‌دهد که، از نظر ویژگی، بی‌شباهت به عملهای جمع و ضرب نیست.

تمامی شیوهٔ اندیشهٔ ریاضی دگرگون شده است و ریاضیدانان، باز هم تلاش می‌کنند دایرهٔ این مفهومها را (مفهومهایی را که در حوزهٔ عمل ریاضیات قرار دارند) گسترش دهند. اگر در گذشته، صدها سال وقت لازم بود تا عددهای منفی یا مختلط پذیرفته شوند، امروزه به هر اندازه که لازم باشد، دستگاههای جبری با کیفیتهای گوناگون ساخته می‌شود. در نمونهٔ هندسه لباچوسکی، امکان پدید آوردن نظریه‌های ریاضی تازه‌ای، با روشهای انتزاعی، مطرح است. با همهٔ اینها، روشن شده است که نظریه‌های ریاضی، که به این ترتیب شکل می‌گیرند، می‌توانند برای تجزیه و تحلیل پدیده‌ها و

روندهای موجود در طبیعت، به کار روند. به همان اندازه که ریاضیات به سمت انتزاع می‌رود، به همان اندازه که به ظاهر از مشاهدهٔ مستقیم پدیده‌های طبیعت دور می‌شود، به همان اندازه هم نیرومندتر می‌شود و امکان بیشتری برای بررسی مجموعه‌ای از ویژگیهای طبیعت پیدا می‌کند.

به این ترتیب، در همان حال که مضمون ریاضیات گسترش یافته و در جهت مفهومهای تازه‌ای پیش‌رفته است، به صورت شگفتی‌آوری ژرفتر شده و بستگی همه جانبه و بی‌نظیری با دانشهای تجربی و حالتهای کاربردی پیدا کرده است. برای نمونه، می‌توان از خودکار کردن ادارهٔ سازمانهای تولیدی نام برد که با استفادهٔ گسترده از رایانه‌ها (که بر پایهٔ توضیح ریاضی و منطقی مسیر صنعت ساخته شده‌اند) پیشرفت بی‌اندازه‌ای کرده است.

اکنون که با دیدی کلی و کوتاه، تاریخ ریاضیات را بررسی کردیم، می‌توانیم متوجه شویم که بین پیشرفت ریاضیات و دگرگونیهای اقتصادی و اجتماعی، بستگی مستقیمی وجود ندارد. در جریان صدها سال، شکل تازهٔ نظام اجتماعی، از پیشرفت دانش جلو گرفت و آن را به عقب برد. کافی است بحران اندیشهٔ علمی را در طول سالهای سده‌های میانه به یاد آوریم. موفقیّتهای دانش یونانی، بکلی فراموش شد. پس از پیشرفت استثنایی ریاضیات در یونان باستان، سده‌هایی بر جهان گذشت که در اروپا بسختی می‌شد کسی را یافت که از عهدهٔ انجام چهار عمل اصلی حساب برآید.

ولی تأثیر تکامل جامعه و تغییر رابطهٔ تولیدی را بر پیشرفت دانشها، نمی‌توان این گونه ساده، شبیه آنچه دربارهٔ توقف پیشرفت دانشها و به وجود آمدن کیفیت تازه‌ای در معرفت بشری، در نظر گرفت. ریاضیات، همراه با طبقه‌های اجتماعی از میان نمی‌رود و با نابودی یک نظام اجتماعی و به قدرت رسیدن نظامی دیگر، نابود نمی‌شود یا تغییر ماهیت نمی‌دهد. قانونهای حساب توانسته است به همهٔ شکلهای مختلف اجتماعی و به همهٔ طبقه‌ها خدمت کند... مسأله را باید به صورت دیگری دید. هر شکل تازهٔ نظام اجتماعی با آرزوهای جدید علمی و با دیدگاه‌های جدیدی نسبت به زندگی اجتماعی و هدف آن، همراه است. به این دلیل، برخورد نسبت به دانشها و تصور دربارهٔ آن تغییر می‌کند، سمت تازه‌ای برای بررسیهای علمی پیدا می‌شود و در برابر قانونهای علمی، مسأله‌های تازه‌ای قرار می‌دهد.

لازم است دوباره نحوهٔ تقسیم تاریخ ریاضیات را به دوره‌های مختلف یادآوری کنیم. در واقع، بررسیهای مربوط به ریاضیات مقدماتی، بعدها و در گرماگرم دورهٔ سوّم هم ادامه داشت. این بررسیها، امروز هم کنار گذاشته نشده است و بی‌تردید در آینده ادامه می‌یابد. از سوی دیگر در کارهای ارشمیدس (سدهٔ سوّم پیش از میلاد) نمونهٔ کامل آغاز محاسبهٔ انتگرالی دیده می‌شود. ولی این مطلب به آن معنا نیست که، آغاز دورهٔ سوّم را، از زمان ارشمیدس بدانیم؛ زیرا ریاضیات یونانی در مجموع خود، خیلی دور از آنالیز ریاضی بود و بویژه شرایط مادی تکامل جامعه، نمی‌توانست مسأله‌هایی را مطرح کند که به آنالیز ریاضی مربوط شوند. تقسیم تاریخ ریاضیات به دوره‌های مختلف، تصوری کلی دربارهٔ قانونهای اصلی تکامل ریاضیات و رهنمونهای کلی مفهومهای آن در دوره‌های مختلف می‌دهد. این تقسیم‌بندی، وسیله‌ای است برای درک خطهای کلی پیشرفت ریاضیات از یک پله به پلهٔ بعدی و این که، هر کدام از این پله‌ها، بر پلهٔ پیش از خود تکیه دارد و در ضمن، شرایط لازم را برای شکل گرفتن پلهٔ بعدی فراهم می‌کند. کشفهای جداگانهٔ دانشمندان که موجب پیشرفت دانش می‌شود، می‌تواند گواهی بر این مطلب باشد.

لایب‌نیتس هم، دربارهٔ اهمیت بررسی تاریخ دانش برای «هنر کشف کردن» اشاره‌هایی دارد. در یکی از نوشته‌های او که پس از مرگش چاپ شد، آمده است:

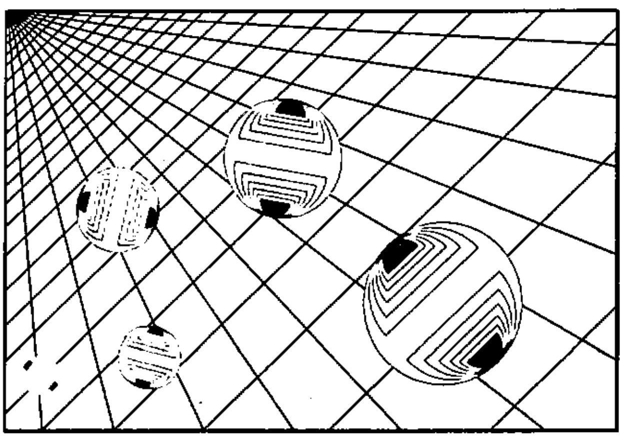
«این مطلب، بسیار جالب است که بتوانیم سرچشمهٔ کشفهای مهم را پیدا کنیم؛ بویژه کشفهایی که با نیروی اندیشه، و نه به‌صورت تصادفی انجام گرفته است. تاریخ نه تنها از این جهت جالب است که پاداش هر کسی را درخور خودش می‌دهد و دیگران را برمی‌انگیزد که به این جمع بپیوندند؛ بلکه بیش از همه، از این جهت مهم است که آشنایی با نمونه‌های اساسی در تکامل هنر کشف کردن، نقشی جدّی برای دانش دارد.»

به این اعتقاد لایب‌نیتس، بویژه در زمان ما، باید تکیه کرد؛ زیرا اکنون از همهٔ افراد جامعه، توقّع می‌رود که ویژگی و توانایی «هنر کشف کردن» را داشته باشند.

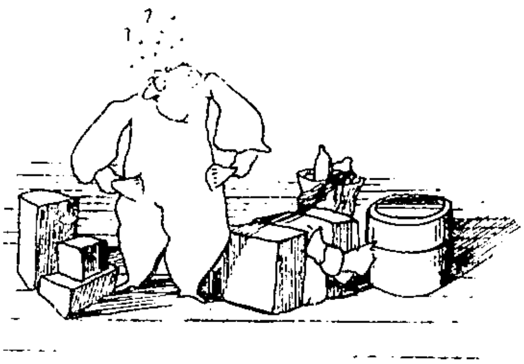
در پایان، یادآور می‌شوم، مدتهاست که تاریخ ریاضیات، اهمیت و موجودیت خود را به کرسی نشانده است. نخستین تاریخ هندسه، در سدهٔ چهارم پیش از میلاد، به‌وسیلهٔ اُدموس رودسی، شاگرد ارسطو نوشته شد. لایب‌نیتس رساله‌ای دربارهٔ محاسبهٔ دیفرانسیلی نوشت. در میانهٔ سدهٔ هجدهم (در سال ۱۷۵۸ میلادی) مونتوکلا، تاریخ ریاضیات را در دو جلد تنظیم کرد. پس از این زمان، تاریخ ریاضیات، به عنوان موضوعی که علاقه‌مندی بسیاری را به خود جلب کرده بود، درآمد؛ بویژه هر دانشمندی دربارهٔ کارهای خودش، به‌طور منظم به بررسیهای تاریخی توجه کرده است؛ زیرا احساس می‌کرد که باید مقام اندیشه‌ها و نوآوریهای خود را در بین آگاهیهایی که از پیش روی هم جمع شده بود، پیدا کند. تا اندازهٔ زیادی، معلمان هم به سوی تاریخ ریاضیات کشش پیدا کردند؛ زیرا از این راه، نه تنها می‌توانستند مجموعهٔ گرانبهایی از آگاهیها را در اختیار دانش‌آموزان قرار دهند؛ بلکه در ضمن، به این وسیله می‌شد برای تنظیم بحثهایی که در نوآوریهای آینده و پیشرفت فرهنگ انسانی اثر کرده است، راهی جست و جو کنند.

پاورقی

۱. دیدگاه نویسندهٔ مقاله را دربارهٔ نحوهٔ تکامل ریاضیات، بدون هیچ تغییری آورده‌ایم؛ ولی این دیدگاه با همهٔ سودمندیهایی که دارد، نمی‌تواند حق همهٔ ملتها را در ساختمان ریاضیات امروزی ادا کند. در بخش دوم کتاب، که بعد از مقاله‌های استادان تاریخ ریاضیات می‌آوریم، با گستردگی بیشتری در این‌باره صحبت خواهیم کرد.



تفریح اندیشه ۱

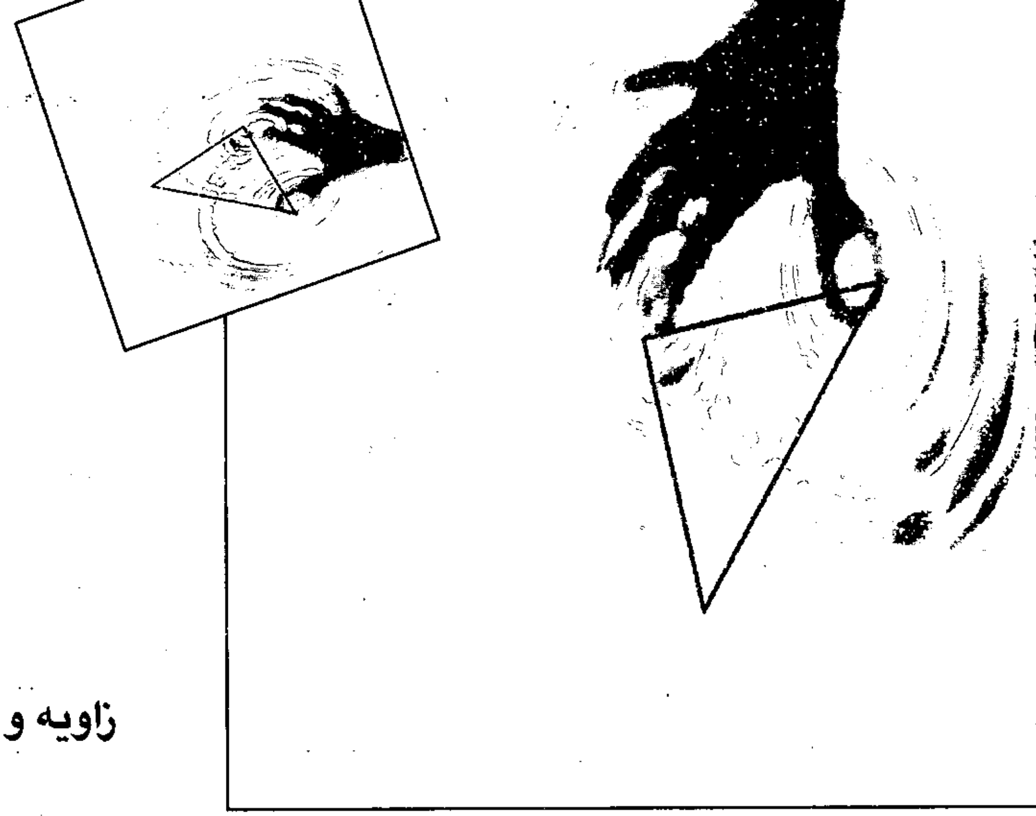


مهرداد تمام پول خود را در پنج مغازه‌ای که از آنها خرید کرده بود خرج کرد. او در هر مغازه پنج ریال بیشتر از نصف مبلغی را که به هنگام ورود به آن مغازه داشت، خرج کرده است.

مهرداد قبل از خرید چقدر پول داشته است؟

● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمه سیمین‌دخت ترکپور

جواب در صفحهٔ ۸۸



در حاشیهٔ مثلثات

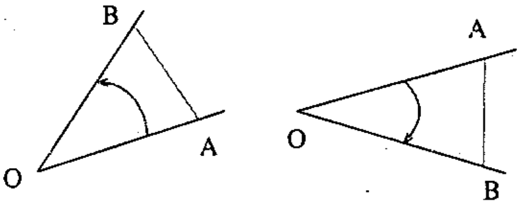
(قسمت اوّل)

زاویه و مقیاسهای اندازه‌گیریِ آن

● حمیدرضا امیری

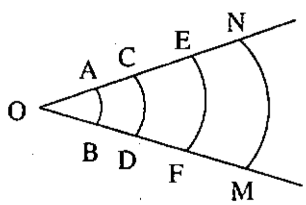
تعریف زاویه:

هرگاه نیمخطی مانند OA، حول یکی از نقاطش دوران کند (برای راحتی نقطهٔ ابتدا یعنی O را در نظر می‌گیریم) تا به وضعیت جدید OB برسد (مطابق شکل ۱). آن قسمت از صفحه که باید نیمخط OA جاروب کند تا بر وضعیت ثانویه خود یعنی OB منطبق شود، زاویه بین OA و OB می‌نامیم. به‌طورکلّی، زاویه از دوران یک نیمخط حول یکی از نقاطش حاصل می‌شود.



شکل ۱

با توجه به تعریف زاویه، واضح است که می‌توان زاویه‌ای چون $\angle MON$ را (مطابق شکل ۲) با هر یک از کمانهای AB، CD، EF یا MN نمایش داد.



شکل ۲

مقیاسهای اندازه‌گیری زاویه *(درجه، گراد، رادیان و اجزای آنها ـ مسأله‌های حل شده)*

الف) تعریف درجه و اجزای آن: هرگاه نیمخطی چون OA حول نقطهٔ O، آن‌قدر دوران کند تا بر خودش منطبق شود، شکل حاصل یک دایره بوده و گوییم نیمخط OA یک دوران کامل انجام داده است. اگر این دوران کامل را (دایره را) به ۳۶۰ قسمت تقسیم کنیم، اندازهٔ یک قسمت از این ۳۶۰ قسمت را ۱ درجه می‌نامیم. به عبارت دیگر، اندازهٔ زاویه‌ای در یک دایره را که اندازهٔ کمان روبه‌روی آن $\frac{1}{360}$ محیط دایره باشد، ۱ درجه می‌نامیم.

اجزای درجه، عبارت است از : دقیقه و ثانیه که بترتیب با نمادهای (′) و (″) نمایش می‌دهیم. هر درجه، ۶۰ دقیقه و هر دقیقه ۶۰ ثانیه است (مشابه رابطهٔ ساعت و دقیقه و ثانیه).

برای تبدیل این اجزا به یکدیگر، به این صورت عمل می‌کنیم که اگر بخواهیم درجه را به دقیقه یا ثانیه، و یا دقیقه را به ثانیه تبدیل کنیم، عمل ضرب را انجام می‌دهیم و بعکس.

مسألهٔ ۱: اندازهٔ زاویه‌ای برابر است با $\alpha = 25°,20',45''$، اندازهٔ این زاویه را :

الف) برحسب دقیقه ب) برحسب ثانیه ج) برحسب درجه محاسبه کنید.

برحسب دقیقه $\alpha = (25° \times 60) + 20' + (\frac{45}{60}) =$

$$۱۵۰' + ۲۰' + \frac{۳'}{۴} = ۱۷۰/۷۵'$$

برحسب ثانیه $\alpha = (۲۵^\circ \times ۳۶۰۰) + (۲۰' \times ۶۰) + ۴۵'' =$

$$۹۰۰۰۰'' + ۱۲۰۰'' + ۴۵'' = ۹۱۲۴۵''$$

برحسب درجه $\alpha = ۲۵^\circ + (\frac{۲۰}{۶۰}) + (\frac{۴۵}{۳۶۰۰}) =$

$$۲۵ + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۸۰} = \frac{۶۰۸۳}{۲۴۰}$$

ب) تعریف گراد و اجزای آن: هرگاه نیمخطی چون OA یک دوران کامل انجام دهد و این دوران کامل را به ۴۰۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، اندازهٔ هر قسمت از این اقسام را یک گراد می‌نامیم ($\frac{۱}{۴۰۰}$ از یک دوران کامل، ۱ گراد نام دارد). به‌طور خلاصه، ۱ گراد اندازهٔ زاویه‌ای است که اندازهٔ کمان روبه‌روی آن زاویه در دایره، $\frac{۱}{۴۰۰}$ اندازهٔ محیط دایره است.

پرسش: اگر اندازهٔ زاویهٔ α یک درجه و اندازهٔ زاویهٔ β یک گراد باشد، کدام بزرگترند؟ اجزای گراد عبارت است از : دسیگراد، سانتیگراد و میلیگراد، که هر گراد ۱۰ دسیگراد و هر دسیگراد ۱۰۰ سانتیگراد (هر گراد ۱۰۰ سانتیگراد) و هر سانتیگراد ۱۰ میلیگراد (هر گراد ۱۰۰۰ میلیگراد) می‌باشد. در این‌جا نیز برای تبدیل اجزای بزرگتر به کوچکتر، عمل ضرب و برای تبدیل اجزای کوچکتر به بزرگتر، عمل تقسیم را انجام می‌دهیم.

مسألهٔ ۲: اندازهٔ زاویه β عبارت است از ۱۰۰ گراد (gr)، ۲۰ دسیگراد (dgr)، ۴۴ سانتیگراد (cgr) و ۱۲ میلیگراد (mgr). اندازهٔ این زاویه را :

الف) برحسب گراد ب) برحسب دسیگراد ج) برحسب سانتیگراد د) برحسب میلیگراد محاسبه کنید.

الف) برحسب گراد $\beta = ۱۰۰_{gr} + (\frac{۲۰}{۱۰})_{gr} + (\frac{۴۴}{۱۰۰})_{gr}$

$$+(\frac{۱۲}{۱۰۰۰})_{gr} = (۱۰۲/۴۵۲)_{gr}$$

ب) برحسب دسیگراد $\beta = (۱۰۰ \times ۱۰)_{dgr} + ۲۰_{dgr}$

$$+(\frac{۴۴}{۱۰})_{dgr} + (\frac{۱۲}{۱۰۰})_{dgr} = (۱۰۲۴/۵۲)_{dgr}$$

روش دوم : برحسب دسیگراد $\beta = (۱۰۲/۴۵۲)_{gr}$

$$\times ۱۰ = ۱۰۲۴/۵۲_{dgr}$$

ج) برحسب سانتیگراد $\beta = (۱۰۰ \times ۱۰۰)_{cgr} + (۲۰ \times ۱۰)_{cgr}$

$$+۴۴_{cgr} + (\frac{۱۲}{۱۰})_{cgr} = (۱۰۲۴۵/۲)_{cgr}$$

روش دوم : برحسب سانتیگراد $\beta = (۱۰۲۴/۵۲)_{dgr}$

$$\times ۱۰ = ۱۰۲۴۵/۲_{cgr}$$

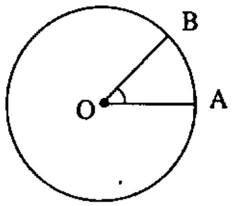
د) برحسب میلیگراد $\beta = (۱۰۰ \times ۱۰۰۰)_{mgr} + (۲۰ \times ۱۰۰)_{mgr}$

$$+ (۴۴ \times ۱۰)_{mgr} + ۱۲_{mgr} = (۱۰۲۴۵۲)_{mgr}$$

روش دوم : برحسب میلیگراد $\beta = (۱۰۲۴۵/۲)_{cgr} \times ۱۰$

$$= ۱۰۲۴۵۲_{mgr}$$

ج) تعریف رادیان: دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OA را در نظر می‌گیریم (شکل ۳). اگر شعاع OA آن‌قدر دوران کند تا اندازهٔ کمان به‌دست آمده از این دوران (کمان AB) برابر با اندازهٔ شعاع دایره، یعنی OA شود، اندازهٔ زاویهٔ روبه‌روی چنین کمانی را، یک **رادیان** می‌نامیم (۱ رادیان، اندازهٔ زاویه‌ای است که اندازهٔ کمان مقابل آن زاویه، برابر با شعاع دایره باشد).



شکل ۳

$\overline{\overset{\frown}{AB}} = \overline{OA} \Rightarrow \angle AOB =$ ۱ رادیان

برای محاسبهٔ اندازهٔ محیط دایره برحسب رادیان، کافی است محیط دایره را به اندازهٔ کمانی که زاویهٔ روبه‌رو به آن ۱ رادیان است، تقسیم کنیم، در این‌صورت، اگر شعاع دایره را L بنامیم، خواهیم داشت :

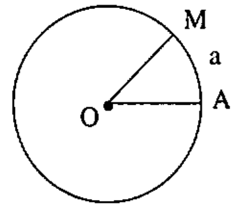
$$\text{اندازهٔ محیط دایره برحسب رادیان} = \frac{\text{محیط دایره}}{\text{اندازهٔ طول کمانی برابر با شعاع}}$$

$$= \frac{۲\pi L}{L} = ۲\pi$$

تبصره: با توجه به تعاریف درجه، گراد و رادیان، اندازهٔ محیط دایره عبارت است از : ۳۶۰درجه یا ۴۰۰ گراد یا ۲π رادیان.

رابطهٔ تبدیل مقیاسهای اندازه‌گیری زاویه به یکدیگر ـ مسأله‌های حل شده

دایره‌ای به مرکز O و به شعاع L را در نظر می‌گیریم، اگر طول کمان AM را مطابق شکل (۴) a بنامیم، خواهیم داشت:



شکل ۴

$$a=\frac{\text{محیط دایره} \times \text{اندازهٔ زاویه روبه‌روی کمان AM برحسب درجه}}{۳۶۰}$$

$$a=\frac{\text{محیط دایره} \times \text{اندازهٔ زاویه روبه‌روی کمان AM بر حسب گراد}}{۴۰۰}$$

$$a=\frac{\text{محیط دایره} \times \text{اندازهٔ زاویه روبه‌روی کمان AM بر حسب رادیان}}{۲\pi}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{اندازهٔ زاویه برحسب درجه} \\ a=\frac{۲\pi L\times D}{۳۶۰} \\ \text{اندازهٔ زاویه برحسب گراد} \\ a=\frac{۲\pi L\times G}{۴۰۰} \\ \text{اندازهٔ زاویه برحسب رادیان} \\ a=\frac{۲\pi L\times R}{۲\pi} \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\frac{۲\pi L\times D}{۳۶۰}=\frac{۲\pi L\times G}{۴۰۰}=\frac{۲\pi L\times R}{۲\pi}$$

$$\Rightarrow\frac{D}{۳۶۰}=\frac{G}{۴۰۰}=\frac{R}{۲\pi}$$

$$\Rightarrow\boxed{\frac{D}{۱۸۰}=\frac{G}{۲۰۰}=\frac{R}{\pi}}\ (۱)$$

توجه ۱: D را اندازهٔ زاویه برحسب درجه می‌خوانیم و G را اندازهٔ زاویه برحسب گراد و هیچ‌گاه D را درجه و G را گراد نمی‌خوانیم و همین‌طور R را.

توجه ۲: با توجه به دو نسبت اوّل رابطهٔ (۱) داریم:

$$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{G}{۲۰۰}\Rightarrow\boxed{\frac{D}{۹}=\frac{G}{۱۰}}\ (۲)$$

و فراموش نمی‌کنیم که از رابطهٔ (۲) فقط و فقط برای تبدیل درجه و گراد به یکدیگر استفاده می‌کنیم و هر کجا که پای رادیان به میان کشیده شود، پای رابطهٔ (۱) را باید به میان کشید!

مسألهٔ ۳: اندازهٔ زاویهٔ α عبارت است از $\alpha=۳۲/۶_{gr}$، اندازهٔ این زاویه را:

الف) برحسب درجه ب) برحسب رادیان، محاسبه کنید.

داریم $\frac{D}{۹}=\frac{G}{۱۰}\Rightarrow\frac{D}{۹}=\frac{۳۲/۶}{۱۰}\Rightarrow ۱۰D=۲۹۳/۴$

$\Rightarrow D=۲۹/۳۴$

حال ۰/۳۴ را به دقیقه و ثانیه تبدیل می‌کنیم:

$۰/۳۴=۰/۳۴\times ۶۰=(۲۰/۴)'$ برحسب دقیقه

و حالا $۰/۴'$ را به ثانیه تبدیل می‌کنیم:

$۰/۴=۰/۴'\times ۶۰=۲۴''$ برحسب ثانیه

پس اندازهٔ زاویه α بر حسب درجه، یعنی D، برابر است با:

$\alpha=۲۹^{\circ},\ ۲۰',\ ۲۴''$

ب) طبق رابطه تبدیل داریم: $\frac{G}{۲۰۰}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow\frac{۳۲/۶}{۲۰۰}=\frac{R}{\pi}$

$\Rightarrow ۳۲/۶\pi=۲۰۰R\Rightarrow R=۰/۱۶۳\pi\Rightarrow$

$\alpha=۰/۱۶۳\pi$ رادیان

مسألهٔ ۴: اگر ۲/۱ برابر اندازهٔ زاویه‌ای برحسب گراد را به اندازهٔ همان زاویه، برحسب درجه اضافه کنیم، عدد ۴۵ به‌دست می‌آید. اندازهٔ این زاویه را برحسب رادیان محاسبه کنید.

طبق فرض مسأله داریم: $۲/۱G+D=۴۵\Rightarrow$

$D=۴۵-۲/۱G\ \ (۱)$

از طرفی داریم: $\frac{D}{۹}=\frac{G}{۱۰}\overset{(۱)}{\Rightarrow}\frac{۴۵-۲/۱G}{۹}=\frac{G}{۱۰}$

(دو مجهول را به یک مجهول تبدیل کردیم.)

$\Rightarrow ۴۵۰-۲۱G=۹G\Rightarrow ۴۵۰=۳۰G\Rightarrow G=۱۵$

اندازهٔ زاویه برحسب گراد

و نیز داریم: $\frac{G}{۲۰۰}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow\frac{۱۵}{۲۰۰}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow R=\frac{۱۵}{۲۰۰}\pi\Rightarrow$

$R=\frac{۳}{۴}\pi$

(اندازهٔ زاویه بر حسب رادیان)

مسألهٔ ۵: اندازهٔ زاویه‌ای برحسب رادیان، برابر است با حاصل تقسیم 5π بر اندازهٔ همان زاویه برحسب درجه، اندازهٔ این زاویه را بر حسب گراد محاسبه کنید :

طبق فرض داریم : $R = \frac{5\pi}{D}$

از طرفی طبق رابطهٔ تبدیل داریم : $\frac{R}{\pi} = \frac{D}{180} \overset{R=\frac{5\pi}{D}}{\Rightarrow} \frac{\frac{5\pi}{D}}{\pi}$

$$= \frac{D}{180} \Rightarrow \frac{\cancel{5}\pi}{D\pi} = \frac{D}{180} \Rightarrow D^2 = 900 \Rightarrow D = \pm 30$$

از طرفی : $\frac{D}{9} = \frac{G}{10} \Rightarrow \frac{\pm 30}{9} = \frac{G}{10} \Rightarrow 9G = \pm 300$

$$\Rightarrow G = \pm 33/\overline{3}$$

توجه بسیار مهم : همان‌طور که در مسائل گذشته مشاهده کردید، ما هیچ‌گاه D را به معنای درجه در نظر نگرفته‌ایم یا G را به معنای گراد یا R را به معنای رادیان ؛ بلکه D یعنی اندازهٔ زاویه‌ای برحسب درجه، G یعنی اندازهٔ زاویه‌ای برحسب گراد و R یعنی اندازهٔ زاویه برحسب رادیان، که توجه به این نکته، کمک قابل توجهی در حل مسائل می‌کند.

مسألهٔ ۶: در مثلث ABC، اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A} = 80^\circ$ و اندازهٔ زاویه C برحسب گراد $\frac{5}{3}$ اندازهٔ زاویهٔ B است، برحسب درجه، ثابت کنید مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

طبق فرض داریم : $\hat{C}_{gr} = \frac{5}{3}\hat{B}^\circ$

از طرفی $\hat{A} = 80^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 100^\circ \quad (1)$

حال اندازهٔ زاویهٔ $\hat{C}$ را که برحسب گراد داریم، برحسب درجه به‌دست می‌آوریم تا رابطه دیگری بین زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ برحسب درجه به‌دست آید و با توجه به رابطهٔ (۱) دو معادله دو مجهول به‌دست آید.

داریم : $\frac{D}{9} = \frac{G}{10} \overset{\hat{C}_{gr} = \frac{5}{3}\hat{B}^\circ}{\Rightarrow} \frac{D}{9} = \frac{\frac{5}{3}\hat{B}}{10} \Rightarrow 10D = \frac{45}{3}\hat{B}$

$$\Rightarrow D = \frac{45}{30}\hat{B} \Rightarrow D = \frac{15}{10}\hat{B}$$

(اندازهٔ زاویهٔ C برحسب درجه) $\Rightarrow \hat{C}^\circ = \frac{15}{10}\hat{B}^\circ$

طبق رابطهٔ (۱) داریم: $\hat{B} + \hat{C} = 100^\circ \Rightarrow \hat{B} + \frac{15}{10}\hat{B} = 100$

$$\Rightarrow \frac{25}{10}\hat{B} = 100 \Rightarrow 25\hat{B} = 1000$$

$\Rightarrow \hat{B} = 80^\circ$ و چون $\hat{A} = 80^\circ \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = 80^\circ$

پس مثلث متساوی‌الساقین است.

مسألهٔ ۷: α چه زاویه‌ای است، اگر حاصلضرب 900π در تفاضل عکس اندازه‌های آن برحسب درجه و گراد، برابر با دو برابر اندازهٔ آن برحسب رادیان باشد؟

طبق فرض داریم: $900\pi(\frac{1}{D} - \frac{1}{G}) = 2R$

این معادله دارای ۳ مجهول است ؛ ابتدا با استفاده از رابطهٔ $\frac{D}{9} = \frac{G}{10}$ ، معادله را به ۲ مجهول تبدیل می‌کنیم :

$$\frac{D}{9} = \frac{G}{10} \Rightarrow 10D = 9G \Rightarrow D = \frac{9}{10}G$$

$$\Rightarrow 900\pi(\frac{1}{\frac{9G}{10}} - \frac{1}{G}) = 2R \Rightarrow 900\pi(\frac{10}{9G} - \frac{1}{G}) = 2R$$

$$\Rightarrow \cancel{900}^{100}\pi(\frac{1}{\cancel{9}G}) = 2R \Rightarrow \frac{100\pi}{G} = 2R \Rightarrow R = \frac{100\pi}{2G}$$

$= \frac{50\pi}{G}$ پس $\boxed{R = \frac{50\pi}{G}}$

از طرفی داریم $\rightarrow \frac{R}{\pi} = \frac{G}{200} \Rightarrow \frac{\frac{50\pi}{G}}{\pi} = \frac{G}{200}$

$$\Rightarrow \frac{50\pi}{G\pi} = \frac{G}{200} \Rightarrow G^2 = 10000$$

$\Rightarrow G = 100$ اندازهٔ زاویهٔ α برحسب گراد

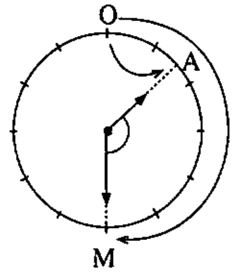
$$\alpha = 100_{gr} \Rightarrow \alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2rad}$$

تعیین زاویه‌های بین عقربه‌های ساعت در ساعتهای مختلف ـ مسأله‌های حل شده

صفحهٔ ساعت را دایره شکل فرض می‌کنیم و برای محاسبهٔ

بین عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم : (این روش با ذکر مثالی توضیح داده می‌شود).

مطابق (شکل ۵) مثلاً زاویهٔ بین عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار در ساعت ۱/۵ را با توجه به تعریف زاویه، می‌توان با کمان AM نمایش داد که این کمان از تفاضل کمان OA از کمان OM به‌دست می‌آید ؛ یعنی : محاسبهٔ این زاویه مستلزم محاسبهٔ کمان OA که همان انحراف عقربه ساعت‌شمار است و محاسبهٔ کمان OM که انحراف عقربهٔ دقیقه‌شمار است، می‌باشد. انحراف این عقربه‌ها را در حالت کلّی، به‌ازای گذشت هر دقیقه بررسی می‌کنیم ؛ با توجه به این‌که صفحهٔ ساعت، دایره و °۳۶۰ است و نیز به ۱۲ قسمت تقسیم شده، هر قسمت یعنی : فاصلهٔ هر عدد با عدد بعدی $\frac{۳۶۰}{۱۲} = ۳۰^\circ$ می‌باشد، پس،



شکل ۵

عقربه ساعت شمار	دقیقه
°۳۰	۶۰
x = ۰/۵	۱

(عقربهٔ ساعت‌شمار، هریک دقیقه، ۰/۵ درجه منحرف می‌شود)

عقربه دقیقه شمار	دقیقه
°۳۰	۵
x = ۶	۱

(عقربهٔ دقیقه‌شمار، هر یک دقیقه، ۶ درجه منحرف می‌شود)

تذکر ۱: عقربهٔ دقیقه‌شمار، فاصلهٔ ۲ عدد متوالی ساعت ؛ یعنی °۳۰ را در ۵ دقیقه و ساعت شمار را در ۱ ساعت یا ۶۰ دقیقه طی می‌کند، که از این مطالب، در تناسبهای فوق استفاده شده است.

تذکر ۲: برای محاسبهٔ انحراف عقربهٔ دقیقه‌شمار، فقط دقیقه‌های وقتِ موردنظر را در عدد ۶ ضرب می‌کنیم و برای محاسبهٔ انحراف عقربه ساعت‌شمار، ساعت و دقیقهٔ وقت موردنظر را به دقیقه تبدیل کرده و در ۰/۵ ضرب می‌کنیم. مثلاً، در مورد یافتن زاویهٔ عقربه‌های ساعت در همان ساعت ۱/۵ (شکل ۵) داریم :

انحراف دقیقه‌شمار $= ۳۰ \times ۶ = ۱۸۰^\circ$

انحراف ساعت‌شمار $= [(۱ \times ۶۰) + ۳۰] \times ۰/۵ = ۹۰ \times ۰/۵$

$= ۴۵^\circ$

زاویهٔ بین دو عقربه $= ۱۸۰^\circ - ۴۵^\circ = ۱۳۵^\circ$

مسألهٔ ۸: در ساعت ۳ و ۳۵ دقیقه و ۴۵ ثانیه، زاویهٔ بین عقربه‌های ساعت و دقیقه شمار را حساب کنید.

برای حلِّ مسأله، ابتدا ثانیه را به دقیقه تبدیل کرده و با دقیقه‌های وقتِ موردنظر جمع می‌کنیم :

ثانیه ۴۵ $= \frac{۴۵}{۶۰} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow$

جمع دقیقه و ثانیه بر حسب دقیقه $= ۳۵ + \frac{۳}{۴} = \frac{۱۴۳}{۴}$ دقیقه

انحراف دقیقه‌شمار $= \frac{۱۴۳}{۴} \times ۶ = \frac{۴۲۹}{۲}$

انحراف ساعت‌شمار $= \left[(۳ \times ۶۰) + \frac{۱۴۳}{۴}\right] \times ۰/۵$

$= (۱۸۰ + \frac{۱۴۳}{۴}) \times \frac{۱}{۲} = (\frac{۸۶۳}{۴}) \times \frac{۱}{۲} = \frac{۸۶۳}{۸} \Rightarrow$

زاویه بین ۲ عقربه $= \frac{۴۲۹}{۲} - \frac{۸۶۳}{۸} = \frac{۱۷۱۶ - ۸۶۳}{۸} = (\frac{۸۵۳}{۸})^\circ$

تبصره: با توجه به این‌که عقربهٔ ثانیه‌شمار، فاصلهٔ هر دو عدد متوالی ساعت را در مدت ۵ ثانیه طی می‌کند، داریم :

	ثانیه
°۳۰	۵
x = ۶	۱

یعنی عقربهٔ ثانیه‌شمار، هر یک ثانیه، ۶ درجه منحرف می‌شود ؛ بنابراین، با همان روش بالا و با محاسبهٔ انحراف عقربهٔ ثانیه‌شمار، می‌توان زاویهٔ بین این عقربه و دو عقربهٔ ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار را نیز به‌دست آورد.

نسبتهای مثلثاتی و مثلث قائم‌الزاویه

مثلث قائم‌الزاویه:

تعریفها و قضیه‌هایی در ذیل خواهد آمد که بعضی از آنها حتی

فراوان در مباحث آینده مورد استفاده قرار خواهند گرفت، این قضیه‌ها را بدون اثبات بیان کرده‌ایم.

تعریف: هر مثلث که دارای یک زاویه قائمه باشد، مثلث قائم‌الزاویه می‌نامیم.

تعریف: در هر مثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبه‌رو به زاویه قائمه را وتر می‌نامیم.

قضیهٔ ۱: (فیثاغورس) در هر مثلث قائم‌الزاویه، اندازهٔ مربع وتر، برابر است با مجموع مربعات اندازه‌های دو ضلع دیگر.

قضیهٔ ۲: در هر مثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰ درجه، نصف وتر است.

قضیهٔ ۳: هرگاه وتر و یک زاویهٔ حادّه از مثلث قائم‌الزاویه‌ای، با وتر و یک زاویه حاده از مثلث قائم‌الزاویه دیگر، برابر باشند، آن دو مثلث متساویند.

تعریف نسبتهای مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه:

الف) اگر α، زاویه‌ای در مثلث قائم‌الزاویه باشد، سینوس این زاویه، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sin\alpha = \frac{\text{اندازهٔ ضلع روبه‌رو به } \alpha}{\text{اندازهٔ وتر}}$$

ب) اگر α، زاویه‌ای حادّه در مثلث قائم‌الزاویه باشد، کسینوس این زاویه، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\cos\alpha = \frac{\text{اندازهٔ ضلع مجاور به } \alpha}{\text{اندازهٔ وتر}}$$

ج) اگر α، زاویه‌ای حاده در مثلث قائم‌الزاویه باشد، تانژانت این زاویه، به‌صورت زیرتعریف می‌شود:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{اندازهٔ ضلع روبه‌رو به } \alpha}{\text{اندازهٔ ضلع مجاور به } \alpha}$$

د) اگر α، زاویه‌ای حاده در مثلث قائم‌الزاویه باشد، کتانژانت این زاویه، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\cot g\alpha = \frac{\text{اندازهٔ ضلع مجاور به } \alpha}{\text{اندازهٔ ضلع روبه‌رو به } \alpha}$$

هـ) عکسِ کسینوس هر زاویه را سکانت آن زاویه می‌نامیم:

$$\sec\alpha = \frac{۱}{\cos\alpha}$$

و) عکسِ سینوس هر زاویه را کسکانت آن زاویه می‌نامیم:

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{۱}{\sin\alpha}$$

تبصرهٔ ۱: با توجه به بند «ج» و «د»، مشاهده می‌شود که $\operatorname{tg}\alpha$ و $\cot g\alpha$ عکس یکدیگرند، یعنی:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{۱}{\cot g\alpha},\ \cot g\alpha = \frac{۱}{\operatorname{tg}\alpha} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha.\cot g\alpha = ۱$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{tg}^n\alpha.\cot g^n\alpha = ۱}$$

پس $\operatorname{tg}\alpha$ و $\cot g\alpha$ از هر توانی، عکس یکدیگر و حاصل‌ضربشان مساوی یک می‌شود.

تبصرهٔ ۲: با توجه به تعریف تانژانت، سینوس و کسینوس که قبلاً ذکر کردیم، داریم:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{اندازهٔ ضلع روبه‌رو به } \alpha}{\text{اندازهٔ ضلع مجاور به } \alpha} \Rightarrow$$

حال صورت و مخرج را بر اندازه وتر تقسیم می‌کنیم

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{\dfrac{\text{اندازهٔ ضلع روبه‌رو به } \alpha}{\text{اندازهٔ وتر}}}{\dfrac{\text{اندازهٔ ضلع مجاور به } \alpha}{\text{اندازهٔ وتر}}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

پس ثابت شد: $\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$ (۱)

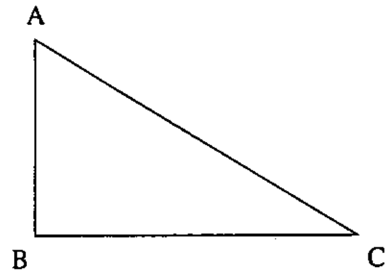
و داریم $\rightarrow \cot g\alpha = \frac{۱}{\operatorname{tg}\alpha} \Rightarrow \boxed{\cot g\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$ (۲)

نتیجه:

$$(۱) \Rightarrow \sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha.\cos\alpha,\ \cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$$

$$(۲) \Rightarrow \cos\alpha = \sin\alpha.\cot g\alpha,\ \sin\alpha = \frac{\cos\alpha}{\cot g\alpha}$$

فرض کنیم: مثلث ABC در رأس B قائمه باشد (شکل ۱) در این صورت، طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم: $\overline{AB}^۲ + \overline{BC}^۲ = \overline{AC}^۲$



شکل ۱

حال دو طرف این رابطه را بر $\overline{AC}^{۲}$ (مربع اندازه وتر) تقسیم می‌کنیم که در این‌صورت خواهیم داشت :

$\frac{\overline{AB}^{۲}}{\overline{AC}^{۲}}+\frac{\overline{BC}^{۲}}{\overline{AC}^{۲}}=۱$ که با توجه به تعریفهای سینوس وکسینوس برای زاویه‌های حادّه داریم :

$$\frac{\overline{AB}^{۲}}{\overline{AC}^{۲}}+\frac{\overline{BC}^{۲}}{\overline{AC}^{۲}}=۱\Rightarrow \boxed{\sin^{۲}C+\cos^{۲}C=۱}$$

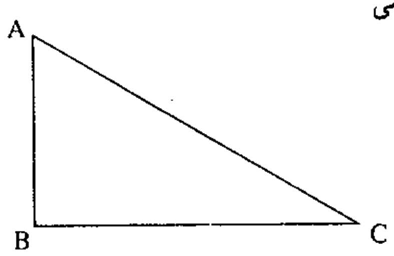
یا $\boxed{\cos^{۲}A+\sin^{۲}A=۱}$

پس اگر به‌طورکلّی α، زاویه‌ای حادّه در مثلث قائم‌الزاویه باشد، رابطهٔ زیر همواره برقرار است، که آن را رابطهٔ اساسی مثلثات می‌نامیم. $\boxed{\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱}$

رابطهٔ بالا را با توجه به روابط بین نسبتهای مثلثاتی زاویه‌های منفرجه و حاده، می‌توان تعمیم داده و به‌طورکلّی برای هر زاویه (حاده، منفرجه و قائمه) اثبات کرد.

محاسبهٔ نسبتهای مثلثاتی زاویه‌های ۳۰، ۶۰ و ۴۵ درجه:

الف) زاویهٔ ۳۰ درجه : در مثلث قائم‌الزاویه ABC فرض کنیم $\hat{C}=۳۰^{\circ}$ (شکل ۲) طبق قضیه ضلع روبه‌روی این زاویه، نصف وتر است ؛ یعنی



شکل ۲

$$\overline{AB}=\frac{\overline{AC}}{۲}\Rightarrow \overline{AC}=۲\overline{AB} \text{ از طرفی داریم}\rightarrow \sin C=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

$$\Rightarrow \sin ۳۰^{\circ}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\cancel{\overline{AB}}}{۲\cancel{\overline{AB}}}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \sin ۳۰^{\circ}=\frac{۱}{۲}$$

حال با توجه به فرمول اساسی مثلثات، یعنی $\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱$ ، داریم :

$$\sin^{۲}۳۰^{\circ}+\cos^{۲}۳۰^{\circ}=۱\Rightarrow (\tfrac{۱}{۲})^{۲}+\cos^{۲}۳۰^{\circ}=۱$$

$$\Rightarrow \cos^{۲}۳۰^{\circ}=۱-\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}$$

$$\Rightarrow \cos ۳۰^{\circ}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\xrightarrow[\text{تعریف تانژانت}]{\text{باتوجه به}} tgx=\frac{\sin x}{\cos x}\Rightarrow tg۳۰^{\circ}=\frac{\sin ۳۰^{\circ}}{\cos ۳۰^{\circ}}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}$$

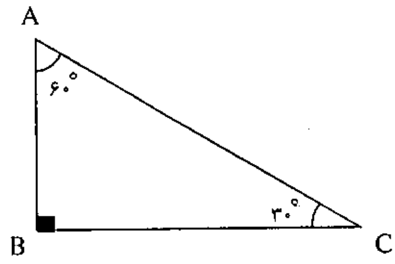
$$\Rightarrow tg۳۰^{\circ}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}\overset{\text{گویا می‌کنیم}}{=}\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

و نیزداریم $\cot gx=\frac{\cos x}{\sin x}\Rightarrow \cot g۳۰^{\circ}=\frac{\cos ۳۰^{\circ}}{\sin ۳۰^{\circ}}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۱}{۲}}$

$$\Rightarrow \cot g۳۰^{\circ}=\sqrt{۳}\ \ (\cot gx=\frac{۱}{tgx}\Rightarrow \cot g۳۰^{\circ}=\frac{۱}{tg۳۰^{\circ}}$$

$$=\frac{۱}{\frac{۱}{\sqrt{۳}}}=\sqrt{۳})$$

ب) زاویه ۶۰° : فرض کنیم در مثلث قائم‌الزاویه ABC زاویهٔ $\angle A=۶۰^{\circ}$ (مطابق شکل ۳) با توجه به این که مجموع زاویه‌های داخلی مثلث ۱۸۰ درجه است، لذا $\angle C=۳۰^{\circ}$ پس طبق قضیه ضلع روبه‌روی این زاویه، یعنی AB، نصف وتر است $AC=۲AB$ یا $AB=\frac{AC}{۲}$



شکل ۳

داریم: $\cos 60^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{2AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

طبق فرمول اساسی $\Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

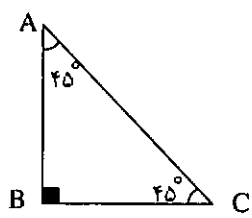
$$\Rightarrow \sin^2 60^\circ = 1 - \cos^2 60 = 1 - (\tfrac{1}{2})^2 = 1 - \tfrac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin^2 60 = \frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{\sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$tg 60^\circ = \frac{\sin 60}{\cos 60} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow cotg 60 = \frac{1}{tg 60}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ج) زاویه 45° : فرض کنیم مثلث ABC در رأس B قائمه و زاویهٔ $\angle C = 45^\circ$، بنابراین واضح است که $\angle A = 45^\circ$ (مجموع زاویه‌های داخلی 180° است)؛ یعنی مثلث ABC یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است (مطابق شکل ۴) پس $AB = BC$.



شکل ۴

$$\left.\begin{array}{ll} \text{از طرفی} & \sin A = \sin 45^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{AB}{AC} \\ \text{و} & \cos A = \cos 45^\circ = \frac{AB}{AC} \end{array}\right\} \Rightarrow \sin 45^\circ = \cos 45^\circ \quad (1)$$

طبق فرمول اساسی داریم : $\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ = 1$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \sin^2 45^\circ + \sin^2 45^\circ = 1$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 45^\circ = 1 \Rightarrow \sin^2 45^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \boxed{\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

پس $tg 45^\circ = \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \boxed{tg 45^\circ = 1}$

چون

$$cotg 45^\circ = \frac{1}{tg 45^\circ} \Rightarrow \boxed{cotg 45^\circ = 1}$$

E
ECE
ECUCE
ECE
E

درشکل بالا با استفاده از حروف مجاز، به چند طریق کلمهٔ ECU را می‌توان خواند؟

● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمه سیمین‌دخت ترکبور

جواب در صفحهٔ ۸۸

مفاهیم حسابان در اسلام و هند

(قسمت اوّل)

مترجم: غلامرضا یاسی‌پور

نویسنده: VICTOR J. KAT2
University of Discrit of Columbia
Washington, DS 20008

مقدمه

آیزاک نیوتن، برداشت خود از حسابان[1] را حدود سالهای ۱۶۶۵ تا ۱۶۷۰ میلادی ابداع کرد. یکی از مفاهیم اصلی نیوتن، در انجام این کار، مفهوم سری توانی[2] بود. وی در این باره اعتقاد داشت که مفهوم مزبور را، با استفاده از شباهت آن با کسرهای دهدهی نامتناهی[3] حساب، اختراع کرده است [g. Vol. III,P. 33]. البته، نیوتن، از کارهای انجام گرفته در حل مسألهٔ سطح، یکی از مفاهیم اصلی موضوعی که قرار بود حسابان خوانده شود، آگاه بود و به خوبی می‌دانست که سطح زیر خم[4] $y = x^n$، بین $x = ۰$ و $x = b$ با $b^{n+۱}/(n+۱)$ معلوم می‌شود. (این قاعده، در دههٔ ۱۶۳۰، توسط چند ریاضیدان، از جمله بوناونتورا کاوالیری[5]، ژیلزپرسون، رُبروال[6]، پی‌یر فرما[7]، مطرح شده بود.)

نیوتن، با گسترش سری توانی برای نمایش توابع[8] گوناگون، توانست از این قاعدهٔ اساسی برای یافتن سطحهای زیر خمهای گوناگون بسیاری استفاده کند و بعکس، با استفاده از فرمول سطح[9]، توان گسترش سریهای توانی را یافت. به عنوان مثال، سری توانی $y = \arcsin x$ را، در ارتباط با تعریف آن بر حسب سطح و استفاده از فرمول سطح، مطرح کرد. سپس، سری توانی سینوس را، با حل معادلهٔ $y = \arcsin x$ برای $x = \sin y$ با استفاده از عکس سری مورد بحث، به دست آورد.

اما آنچه نیوتن نمی‌دانست، این بود که هم فرمول سطح ـ که خیال می‌کرد حدود ۳۵ سال پیش مطرح شده است ـ و هم سری توانی مربوط به سینوس، صدها سال پیش، در ناحیه‌های دیگری از جهان، کشف شده بود.

فرمول سطح مورد بحث، حدود هزار سال پس از میلاد در مصر، و سری توانی سینوس، همچنین کسینوس و آرک تانژانت، احتمالاً در قرن چهاردهم میلادی، در هندوستان مطرح شده بود. در این مقاله، توسعهٔ این دو فرمول را مورد بحث قرار خواهیم داد.

اما پیش از بازگشتن، به مصر قرن یازدهم، ابتدا به بحثی می‌پردازیم که فرما و روبروال، به سال ۱۶۳۶، در برداشتشان از فرمول سطح انجام داده‌اند.

روبروال، در اکتبر سال مزبور، در نامه‌ای به فرما نوشت که می‌تواند سطح زیر خمهای به صورت $y = x^k$ را، با استفاه از فرمولی بیابد که، تاریخچهٔ آن را در دنیای اسلام پی خواهیم گرفت و مربوط به مجموعهای توانهای اعداد طبیعی[10] است:

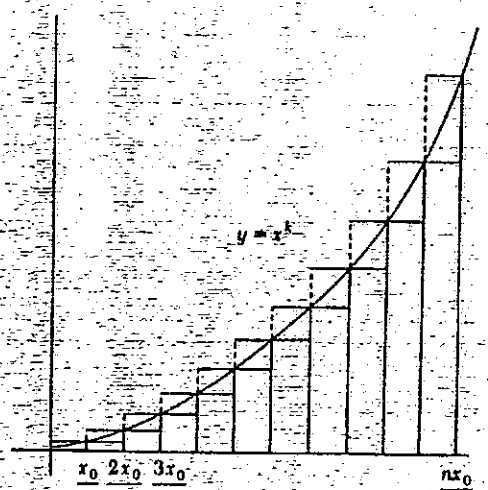
مجموع عددهای مربع[11]، همواره بزرگتر از یک سوم مکعبی است که ریشهٔ بزرگترین مربعها را به عنوان ریشهٔ خود داراست و همین مجموع مربعها، با حذف بزرگترین مربع مربوطه، کوچکتر از یک سوم همان مکعب است، نیز مجموع مکعبهای مربوطه، از یک چهارم توان چهارم[12] بزرگتر، و با حذف بزرگترین مکعب، از یک چهارم توان مزبور کوچکتر است، و غیره [5, P. 221].

به عبارت دیگر، یافت سطح ناحیهٔ مطلوب، به فرمول زیر وابسته است:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^k < \frac{n^{k+1}}{k+1} < \sum_{i=1}^{n} i^k$$

فرما، در پاسخ نوشت که، این مطلب را می‌دانسته و مانند روبروال، آن را در تعیین سطح زیر نمودار[۱۳] $y = x^k$، روی بازهٔ[۱۴] $[0 \,,\, x_0]$، به کار برده است.

هر دو دانشمند، ملاحظه کرده بودند که اگر بازهٔ مبنا به n زیر بازهٔ[۱۵] برابر، هر یک به طول x_0/n، تقسیم، و روی هر زیر بازهٔ مستطیلی[۱۶] که ارتفاع آن، عرض نقطهٔ انتهایی راست آن است، بنا شود (شکل ۱ را ملاحظه کنید)؛ آن‌گاه مجموع مساحتهای این N مستطیل محیطی[۱۷]، عبارت است از:



شکل ۱

$$\frac{x_0^k}{n^k}\frac{x_0}{n} + \frac{(2x_0)^k}{n^k}\frac{x_0}{n} + \dots + \frac{(nx_0)^k}{n^k}\frac{x_0}{n}$$

$$= \frac{x_0^{k+1}}{n^{k+1}}(1^k + 2^k + \dots + n^k)$$

به همین ترتیب، آن دو توانستند مجموع مساحتهای مستطیلهای محاطی[۱۸] مربوطه را محاسبه کنند؛ مستطیلهایی که ارتفاع آنها عرض نقطهٔ انتهایی چپ زیر بازهٔ نظیر است. در واقع، اگر A، سطح زیر خم، بین ۰ و x_0 باشد؛ آن‌گاه

$$\frac{x_0^{k+1}}{n^{k+1}}(1^k + 2^k + \dots + (n-1)^k) < A < \frac{x_0^{k+1}}{n^{k+1}}(1^k + 2^k + \dots + n^k)$$

تفاضل[۱۹] بین عبارتهای[۲۰] بیرونی این نابرابری[۲۱]، همان سطح آخرین مستطیل محیطی سمت راست است و فرما با توجه به این که x_0 و $y_0 = x_0^k$ ثابت هستند، می‌دانست که می‌توان تفاضل مزبور را بسادگی و با استفاده از این که مقدار n را به قدر کافی بزرگ در نظر بگیریم، از هر مقدار تخصیص یافته، کمتر کرد.

از نابرابری مورد استثنای روبروال، نتیجه می‌شود که هم سطح A و هم مقدار

$$x_0^{k+1}/(k+1) = x_0 y_0/(k+1)$$

بین دو مقداری فشرده شده‌اند که تفاضلشان به ۰ نزدیک می‌شود. به این ترتیب، فرما و روبروال دریافتند که سطح مورد نظر $x_0 y_0/(k+1)$ است.

در این مورد، این پرسش واضح مطرح می‌شود که چگونه این دو دانشمند، به کشف فرمولهایی برای مجموعهای توانها نائل شدند؟ اما در حال حاضر، پاسخی برای این پرسش در دست نیست؛ چه در آثار روبروال، چیزی بیش از نامهٔ ذکر شده وجود ندارد، و تمام چیزی هم که از فرما، در نامه‌هایش به مارین مرسن[۲۲] و روبروال، دربارهٔ این موضوع در دست داریم، گزاره‌ای عمومی بر حسب عددهای مثلثی[۲۳]، عددهای هرمی[۲۴]، و سایر عددهایی است که به صورت ستونهای مثلث پاسکال[۲۵] رخ می‌دهند. (توجه داشته باشیم که کار فرما، در حدود بیست سال پیش از زمانی که پاسکال، مطالب خود را دربارهٔ مثلث حسابی[۲۶] منتشر کرد، انجام گرفته است؛ اما مثلث مزبور، بیش از ششصد سال پیش از آن زمان، به صورتهای بسیاری در چین، خاورمیانه، افریقای شمالی و اروپا انتشار یافته است[۲۷]. مرجع زیر را ملاحظه کنید: ([4], PP. 191-192; 241 - 242; 324-325).

آنچه که فرما در این باره می‌گوید، چنین است: آخرین ضلع، ضربدر در بزرگتر بعدی، دو برابر مثلث را تشکیل می‌دهد. آخرین ضلع، ضربدر مثلث ضلع بزرگتر بعدی، سه برابر هرم را تشکیل می‌دهد. آخرین ضلع، ضربدر هرم ضلع بزرگتر بعدی، چهار برابر مثلث در مثلث[۲۸] را تشکیل می‌دهد، و همین‌طور و با همین تقریر تا بی‌نهایت [5,P. 230].

گزارهٔ فرما را می‌توان، با استفاده از نمادنویسی[۲۹] جدید ضرایب دو جمله‌ای[۳۰]، به صورت زیر نوشت:

$$n\binom{n+k}{k} = (k+1)\binom{n+k}{k+1}$$

از این فرمول، می‌توان به ازای هر نوبت k، با شروع از $k = 1$، فرمول صریحی[۳۱] برای مجموع توان kام، با استفاده از ویژگیهای مثلث پاسکال، به دست آورد. به عنوان مثال، اگر $k = 2$، داریم:

$$n\binom{n+1}{2} - \ldots \text{[illegible]}$$

$$= 3\sum_{j=2}^{n+1}\frac{j(j-1)}{2} - 2\sum_{i=1}^{n}\frac{i(i+1)}{2} - 2\sum_{i=1}^{n}\frac{i(i+1)}{2}$$

بنابراین،

$$2\frac{n}{3}\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{n} i^2$$

و

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n^3+3n^2+2n}{3} - \frac{n^2+n}{2} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

$$= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

در حالت عمومی، فرمول مجموع[32] به صورت

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \frac{n^{k+1}}{k+1} + \frac{n^k}{2} + P(n)$$

است، که در آن، $P(n)$، چند جمله‌ای[33] بر حسب n ی، با درجه‌ای[34] کمتر از k است و نابرابری زوبروال می‌تواند به ازای هر k اثبات شود.

در این باره، از این موضوع که استخراج[35] فرما شبیه فوق بوده یا خیر، بی‌خبریم؛ زیرا وی تنها فرمول مجموعی، به ازای $k = 4$، را به طور صریح بیان کرده و توضیح دیگری از شیوهٔ خود به دست نداده است.

مجموعهای توانهای صحیح[36] در مصر قرن یازدهم

اما فرمولهای مربوط به مجموعهای توانهای kام، دست کم تا $k = 4$ نیز، صورتی از نابرابری زوبروال، حدود ۶۵۰ سال پیش از نیمهٔ قرن هفدهم، توسط ابوعلی‌الحسن‌بن‌الحسن‌بن‌الهَیثَم (ابن هیثم) (۹۶۵ ـ ۱۰۳۹ میلادی)[37]، که در اروپا به الهازن[38] معروف است، مطرح شده است.

فرمولهای مربوط به مجموعهای مربعها و مکعبها، حتی از این تاریخ نیز زودتر بیان شده‌اند. مورد مربوط به مربعها، توسط ارشمیدس[39]، حدود ۲۵۰ پیش از میلاد، در رابطه با تعیین مساحت سهمی[40] بیان شد؛ در حالی که مورد مربوط به مکعبها، گرچه احتمالاً برای یونانیان شناخته شده بوده است، اولین بار به طور صریح، توسط آریابهاتا[41]، حدود ۵۰۰ میلادی، در هند، مکتوب گردید [2,PP.37-38].

کشف فرمول مربوط به مربعها مشکل نیست و فرمول مکعبها نیز، با اندکی تجربه، تقریباً آشکار است؛ در حالی که، بعکس، فرمول مربوط به توانهای چهارم واضح نیست، و اگر کسی بتواند روشی برای تعیین این فرمول کشف کند، می‌تواند روش تعیین فرمول مجموع هر توان درست[42] را به دست آورد.

در واقع، ابن هیثم چگونگی طرح فرمول مربوط به توانهای kام، از $k = 1$ تا $k = 4$ را نشان داد؛ تمام اثباتهای وی، ذاتاً، مشابه کشف و اثبات فرمولهای مربوط به مجموع هر توان مفروض از عددهای صحیح[43]، و بسادگی قابل تعمیم به آن است، و احتمالاً این موضوع که وی چنین تعمیمی[44] را بیان نکرده، از این لحاظ بوده که، برای حل مسألهٔ مورد علاقهٔ خود، یعنی محاسبهٔ حجم[45] سهمی واری[46] خاص، تنها فرمولهای توانهای دوم و چهارم نیاز داشته است.

پیش از بررسی کار ابن هیثم، بد نیست مختصری از دنیای علم در اسلام، سخن به میان آوریم (برای بررسی مفصل [1] را ملاحظه کنید). طی قرن نهم میلادی، مأمون، خلیفهٔ عباسی، برای گسترش شیوه‌های علمی در دنیای اسلام، پژوهشگاهی[47]، موسوم به بیت‌الحکمه[48]، در بغداد تأسیس، و دانشمندانی از تمام نواحی تحت نفوذ خلیفه، دعوت کرد. دانشمندان مزبور نه تنها مسلمان، که مسیحی، یهود و زرتشتی نیز بودند.

هدف این دانشمندان، در مرحلهٔ اول، ترجمهٔ بهترین آثار ریاضی و علمی از یونان و هند به زبان عربی، و در مرحلهٔ دوم، ایجاد مفاهیم جدید ریاضی و علمی بر مبنای این آثار بود.

گرچه، بیت‌الحکمه، در حدود دو قرن بعد از میان رفت، بسیاری از حکومتهای مناطق اسلامی، به حمایت خود از دانشمندان در امر پژوهشهای علمی ادامه دادند؛ زیرا دریافته بودند که پژوهشهای مزبور در کارهای عملی ارزشمندند.

به این ترتیب بود که ابن هیثم، متولد بصره در عراق امروزی، توسط الحکیم خلیفه، برای بررسی پروژهٔ کنترل رود نیل، به مصر دعوت شد، و گرچه پروژهٔ مزبور هیچ گاه به ثمر ننشست؛ اما ابن هیثم، مهمترین اثر خود، في المناظر[49] را در هفت باب و در مصر به وجود آورد.

في المناظر در اوایل قرن سیزدهم میلادی به لاتین ترجمه شد و طی چندین قرن بعد، در اروپا، به بررسی و بحث در آن پرداخته شد.

شهرت ابن هیثم، به عنوان ریاضیدان[50]، از قرون وسطی تا

حال حاضر، بیشتر به خاطر مسألهٔ الحسن[51]، او است، که مسألهٔ یافتن نقطه یا نقاطی واقع بر رویهٔ منعکس کننده‌ای است که نوری که از یکی از دو نقطهٔ خارج از رویه به آن (ها) برخورد می‌کند و از دیگری می‌گذرد.

الحسن، در باب پنجم **فی المناظر**، راه حلهای خود را برای رویه‌های گوناگونی، از کروی[52] گرفته تا استوانه‌ای[53] و مخروطی[54]، مقعر[55] و محدب[56]، مطرح می‌کنند. دستاوردهای وی، که مبتنی بر شش لم[57] جداگانهٔ به اثبات رسیده دربارهٔ ترسیمهای هندسی[58] است، نشان می‌دهد که وی از هر دو بخش هندسهٔ مقدماتی[59] و پیشرفتهٔ[60] یونانیها آگاهی کامل داشته است.

اندیشهٔ اصلی ابن هیثم در اثبات فرمولهای مجموع، استخراج[61] معادلهٔ زیر بوده است:

$$(n+1)\sum_{i=1}^{n} i^{k} = \sum_{i=1}^{n} i^{k+1} + \sum_{p=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{p} i^{k}\right) \qquad (*)$$

طبیعی است که وی این نتیجه را در صورت عمومی آن بیان نکرده و تنها به بیان آن در مورد عددهای صحیح خاص، یعنی $n = 4$ و $k = 1,2,3$ پرداخته است؛ اما اثبات وی، به ازای هر یک از این kها، با استفاده از استقرا[62] بر n انجام گرفته و بلافاصله، بر هر مقدار k، تعمیم پذیر[63] است. (برای تفصیل واقعهٔ [7] را ملاحظه کنید.) در این جا به بررسی اثبات ابن هیثم، به ازای $k = 3$ و $n = 4$، می‌پردازیم:

$$\begin{aligned}
&(4+1)(1^3+2^3+3^3+4^3)\\
&= 4(1^3+2^3+3^3+4^3)+1^3+2^3+3^3+4^3\\
&= 4.4^3+4(1^3+2^3+3^3)+1^3+2^3+3^3+4^3\\
&= 4^4+(3+1)(1^3+2^3+3^3)+1^3+2^3+3^3+4^3
\end{aligned}$$

به دلیل این که معادلهٔ (*)، به ازای $n = 3$، راست در نظر گرفته شده است،

$$\begin{aligned}
&(3+1)(1^3+2^3+3^3)\\
&= 1^4+2^4+3^4+(1^3+2^3+3^3)+(1^3+2^3)+1^3
\end{aligned}$$

در این صورت، معادلهٔ (*)، به ازای $n = 4$، اثبات می‌شود و به این ترتیب، می‌توان، استدلال[64] ابن هیثم را، بر حسب اصطلاحات[65] جدید، بسادگی تشکیل، و با استفاده از استقرا بر n و به ازای هر مقدار k، اثباتی به دست داد.

در این مرحله، ابن هیثم از دستاورد خود برای استخراج فرمولهایی، برای مجموعهای توانهای درست، استفاده می‌کند و ابتدا، به اثبات فرمولهای مجموع در مورد مربعها و مکعبها می‌پردازد:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \left(\frac{n}{3}+\frac{1}{3}\right)n\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n}{4}+\frac{1}{4}\right)n(n+1)n = \frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}$$

در این جا به این اثباتها نمی‌پردازیم و تنها به استخراج نتیجه‌ای مشابه[66] برای توانهای چهارم توجه، و خاطر نشان می‌کنیم که اگر چه خود ابن هیثم، این نتیجه را تنها به ازای $n = 4$ به دست آورده، آن را، به ازای هر n دلخواه، بیان کرده است. بنابراین، برای استخراج فرمول مورد بحث در این حالت، با نمونه‌برداری از روش وی، و با استفاده از شیوه‌های جدید، کارمان را با توجه به فرمولهای مربوط به مجموعهای مربعها و مکعبها، برای نوشتن معادلهٔ (*) به صورت زیر، آغاز می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
(n+1)\sum_{i=1}^{n} i^3 &= \sum_{i=1}^{n} i^4 + \sum_{p=1}^{n}\left(\frac{p^4}{4}+\frac{p^3}{2}+\frac{p^2}{4}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n} i^4 + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} i^4 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^3
\end{aligned}$$

در این صورت نتیجه می‌گیریم که:

$$(n+1)\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{5}{4}\sum_{i=1}^{n} i^4 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^3 + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$\frac{5}{4}\sum_{i=1}^{n} i^4 = \left(n+1-\frac{1}{2}\right)\sum_{i=1}^{n} i^3 - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} i^4 &= \frac{4}{5}\left(n+\frac{1}{2}\right)\sum_{i=1}^{n} i^3 - \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{n} i^2\\
&= \frac{4}{5}\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{n}{4}+\frac{1}{4}\right)n(n+1)n - \frac{1}{5}\left(\frac{n}{3}+\frac{1}{3}\right)n\left(n+\frac{1}{2}\right)\\
&= \left(\frac{n}{5}+\frac{1}{5}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)n(n+1)n - \left(\frac{n}{5}+\frac{1}{5}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)n.\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

ابن هیثم دستاورد خود را به طور شفاهی، به گونه‌ای بیان می‌کند که در نمادنویسی جدید، به صورت زیر ترجمه می‌شود:

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \left(\frac{n}{5}+\frac{1}{5}\right)n\left(n+\frac{1}{2}\right)\left[(n+1)n-\frac{1}{3}\right]$$

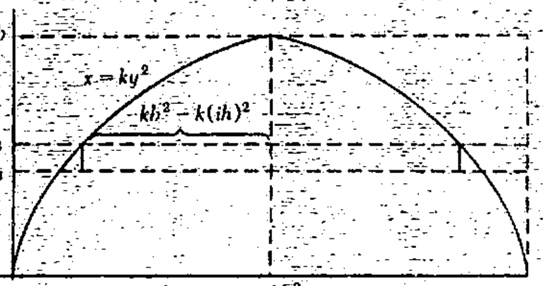
این نتیجه را می‌توان به صورت یک چند جمله ای نیز نوشت :

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}$$

آشکار است که از این فرمول می‌توان، مانند استفادهٔ فرما و روبروال از نابرابری روبروال، در اثبات رابطهٔ زیر بهره برد :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n} i^4}{n^5}=\frac{1}{5}$$

ابن هیثم از دستاورد خود در مجموعهای توانهای درست، برای انجام دادن کاری استفاده کرد که آن را انتگرال‌گیری[۶۷] می‌نامیم، و بخصوص، دستاورد مزبور را در تعیین حجم[۶۸] جسم[۶۹] ساخته شده از دوران سهمی[۷۰] $x = ky^2$ حول خط[۷۱] $x = kb^2$، عمود بر محور[۷۲] سهمی، به کار برد و نشان داد که این حجم، $\frac{8}{15}$ حجم استوانه‌ای[۷۳] به شعاع[۷۴] kb^2 و ارتفاع[۷۵] b است. (شکل ۲ را ملاحظه کنید.)



شکل ۲

استدلال صوری[۷۶] ابن هیثم، استدلال اِفنائی متعارفی[۷۷] از نوع یونانی بود که از برهان خلفی[۷۸] دوگانه استفاده می‌برد ؛ اما روش وی در ذات، شامل برش دادن استوانه و سهمی‌وار به n قرص[۷۹]، هر یک به ضخامت[۸۰] $h = \frac{b}{n}$، و سپس جمع کردن قرصهاست. iامین قرص سهمی‌وار دارای شعاع $kb^2 - k(ih)^2$ است و بنابراین حجم :

$$\pi h(kh^2n^2 - ki^2h^2)^2 = \pi k^2h^5(n^2-i^2)^2$$

را داراست. در این صورت، حجم کل[۸۱] سهمی‌وار مورد بحث، به طور تقریب، برابر است با :

$$\pi k^2h^5\sum_{i=1}^{n-1}(n^2-i^2)^2 = \pi k^2h^5\sum_{i=1}^{n-1}(n^4-2n^2i^2+i^4)$$

اما از آن جا که ابن هیثم از فرمولهای مجموعهای مربعهای درست و توانهای چهارم آگاه بود، توانست محاسبه کند که :

$$\sum_{i=1}^{n-1}(n^4-2n^2i^2+i^4)=\frac{8}{15}(n-1)n^4+\frac{1}{30}n$$

$$=\frac{8}{15}n.n^4-\frac{1}{2}n^4-\frac{1}{30}n$$

و بنابراین :

$$\frac{8}{15}(n-1)n^4<\sum_{i=1}^{n-1}(n^2-i^2)^2<\frac{8}{15}n.n^4$$

اما حجم برشی معمولی[۸۴] از استوانهٔ محیطی[۸۳] مربوطه $\pi h((kb)^2)^2 = \pi k^2h^5n^4$ است و بنابراین حجم کل استوانه $\pi k^2h^5n.n^4$ است ؛ در حالی که حجم استوانهٔ بدون برش بالایی، $\pi k^2h^5(n-1)n^4$ است. در این صورت، نابرابری فوق نشان می‌دهد که حجم سهمی‌وار مورد بحث بین $\frac{8}{15}$ استوانهٔ بدون برش بالایی و $\frac{8}{15}$ کل استوانه است.

از آن جا که برش بالایی را می‌توان با بزرگ کردن به قدر کفایت n، در حد مطلوب کوچک کرد، نتیجه می‌شود که حجم سهمی‌وار، چنان که اظهار کردیم، به طور دقیق $\frac{8}{15}$ حجم استوانه است.

فرمول مجموع توانهای چهارم ابن هیثم، در سایر نواحی دنیای اسلامی و تا چند قرن بعد هم ظاهر شده است. این فرمول در آثار ابوالحسن بن حیدر (در حدود ۱۴۱۳ میلادی)، که در مراکش کنونی می‌زیسته و آثار ابوعبدالله بن قاضی (۱۴۳۷ـ۱۵۱۵ میلادی)، که وی نیز ساکن مراکش بوده، آورده شده است. (برای تفصیل بیشتر [۳] را ملاحظه کنید.)

گذشته از این، فرمول یاد شده را می‌توان در **مفتاح الحساب**[۸۴] غیاث‌الدین جمشید کاشانی (حدود ۱۴۹۲ میلادی) نیز یافت : ریاضیدان و منجمی که بیشتر دوران با برکت عمر خویش را در سمرقند ــ که در حال حاضر در ازبکستان قرار دارد ــ در دربار **الغ بیگ** گذرانده است.

اما این نکته، که ریاضیدانان مزبور، چگونه از این فرمول آگاه شده‌اند یا برای چه هدفی آن را به کار برده‌اند، نامعلوم است.

یادداشتها :

1. Calculus
2. Power Series
3. Infinite Decimal Expansions
4. Curve
5. Bonaventura Cavalieri
6. Gilles Persone de Roberval
7. Pierre de Fermat
8. Functions
9. Area Formula
10. Natural Numbers

۱۱. Square Numbers، یعنی اعداد $۱^۲$، $۲^۲$، $۳^۲$، $۴^۲$ و...، قضیه به صورت ریاضی چنین است :

$$۱^۲+۲^۲+۳^۲+\cdots+(n-۱)^۲<\frac{۱}{۳}n^۳<۱^۲+۲^۲+۳^۲+\cdots+(n-۱)^۲+n^۲$$

12. Fourth Power
13. Graph
14. Interval
15. Subinterval
16. Rectangle
17. Circumscribed Rectangle
18. Inscribed Rectangles
19. Defference
20. Expressions
21. Inequality
22. Marin Mersenne
23. Triangular Numbers
24. Pyramidal Numbers
25. Pascal's Triangle
26. Arithmetical triangle

۲۷. از ریاضیدانان ایرانی، ابوبکر محمدبن حسین کرجی، ریاضیدان نیمهٔ دوم قرن چهارم و اوایل قرن پنجم هجری نیز به این کار پرداخته است.

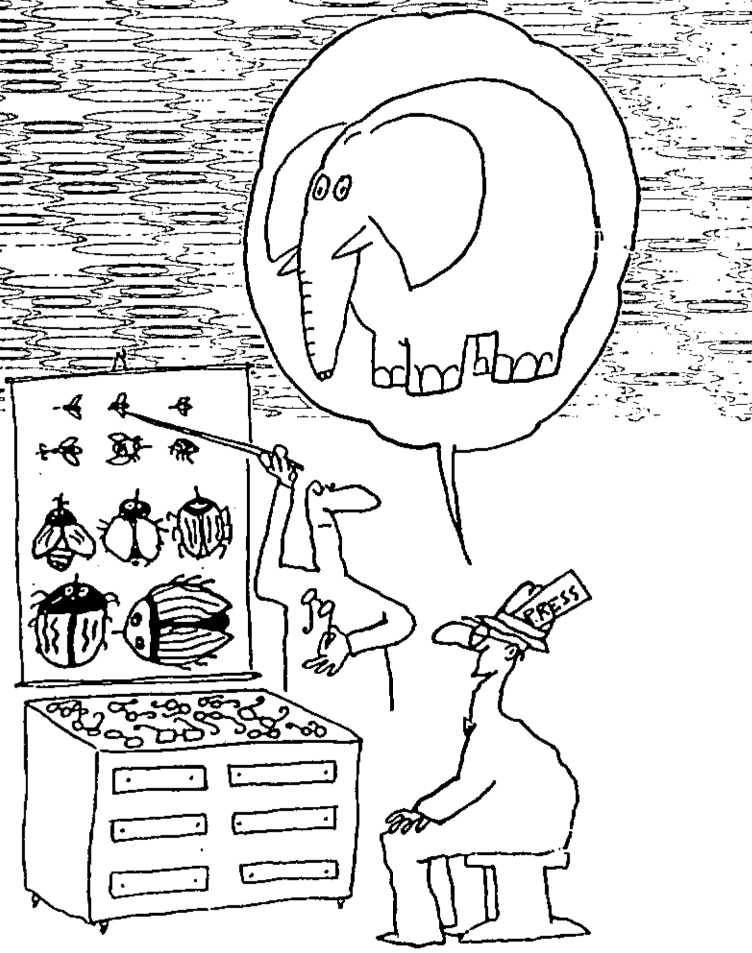
28. Triangulotriangle
29. Notation
30. Binomial Coefficients
31. Explicit Formula
32. Sum for Mula
33. Polynomial
34. Degree
35. Derivation
36. Sums of Integer Powers

۲۷. مطابق با ۳۵۴ ـ ۴۳۰ هجری، برای شرح حال این ریاضیدان مسلمان، به زندگینامهٔ ریاضیدانان دورهٔ اسلامی، ابوالقاسم قربانی رجوع کنید.

38. Alhazen
39. Archimedes
40. Quadrature of Parabola
41. Aryabhata
42. Integral Power
43. Integer Numbers
44. Generalization
45. Volume
46. Paraboloid
47. Research Institute
48. House of Wisdom
49. Optics
50. Mathematician
51. Alhazen's Problem
52. Spherical
53. Cylindrical
54. Conical
55. Concave
56. Convex
57. Lemma
58. Geometrical Constructions
59. Elementary
60. Advanced
61. Equation
62. Induction
63. Generalizable
64. Argument
65. Terminology
66. Analogus Result
67. Integration
68. Volume
69. Solid
70. Parabola
71. Line
72. Axis
73. Cylinder
74. Radius
75. Height
76. Formal Argument
77. Exhaustion Argument
78. Reductio ad Absurdum
79. Disk
80. Thickness
81. Total volume
82. Typical slice
83. Circumscribing Cylinder
84. The Caculator's Key

مسأله

حلّ مسأله‌های ریاضی (۴)



● عبدالحسین مصحفی

پرسشهای چند گزینه‌ای

بیش از چند دهه نیست که پرسشهای چند گزینه‌ای را در آزمونها به‌کار می‌برند. بنابر آن‌که آزمون برای چه کار باشد، آزمون‌دهندگان در چه پایهٔ تحصیلی باشند و تعدادشان کم باشد یا زیاد، تعداد گزینه‌های هر پرسش می‌تواند یک، دو، چهار یا پنج باشد. پرسشهای تک گزینه‌ای از گونهٔ همان پرسشهای معمولی‌اند که در برابر هر پرسش، باید پاسخ درست آن داده شود. در نمونه‌ای از این گونه پرسشها، هر پرسش به صورت جمله‌ای با یک جای خالی نموده می‌شود و آزمون دهنده باید آن جای خالی را با نوشتن پاسخی که به گمانش درست می‌نماید، پر کند؛ مانند:

«مجموع زاویه‌های هر nضلعی کوژ برابر با ... درجه است.»

در پرسشهای دو گزینه‌ای، هر پرسش با دو پاسخ همراه است و آزمون دهنده باید دریابد کدام یک از دو گزینه پذیرفتنی است و آن را نشانه بگذارد؛ مانند:

«اگر احتمال روی دادن یک پیشامد برابر با a باشد، احتمال روی ندادن آن پیشامد برابر با ○ $-a$ ، ○ $1-a$ است.»

پرسشهای چهار یا پنج گزینه‌ای دو گونه‌اند؛ در یک گونهٔ آنها بعضی از گزینه‌ها، که ممکن است هیچ‌کدام یا همهٔ آنها نیز باشد، پذیرفتنی و بقیهٔ آنها کنارگذاشتنی هستند؛ مانند:

دو نقطهٔ A و B و همچنین دو نقطهٔ C و D نسبت به خط Δ قرینهٔ یکدیگرند و A و C در یک طرف Δ واقعند. اگر AC و BD در P، و AD و BC در Q برخورد کنند، در این صورت، از گزاره‌های:

الف) هریک از دو نقطهٔ P و Q بر Δ واقع است.

ب) خط Δ نیمساز زاویهٔ APB و همچنین نیمساز زاویهٔ CQD است.

ج) هیچ‌یک از دو نقطهٔ P و Q در هیچ حالتی نمی‌تواند مرکز تقارن دو پاره خط AC و BD باشد.

د) دو قطر چهارضلعی $PCQD$ برهم عمودند.

هـ) خطی که وسط AC را به وسط BD وصل می‌کند، در هر حالت، بر یکی از دو نقطهٔ P یا Q می‌گذرد.

کدام یا کدامها نادرستند؟

در این گونه از پرسشهای چند گزینه‌ای، هریک از گزینه‌ها

باید جداگانه بررسی و معلوم شود پذیرفتنی است یا نه.

در گونهٔ دیگر پرسشهای چهار یا پنج گزینه‌ای، تنها یکی از گزینه‌ها پذیرفتنی است؛ مانند :

«هرگاه α اندازهٔ یکی از زاویه‌های یک مثلث باشد، درکدام‌یک از حالتهای :

الف) $P = tg\alpha \cdot cotg\alpha$ ب) $P = \cos\alpha + \cos^4\alpha$

ج) $P = \sin\alpha + \sin^3\alpha$ د) $P = \sin\alpha - \sin^3\alpha$

مقدار P ممکن است عددی منفی باشد؟»

در این‌گونه از پرسشهای چند گزینه‌ای، همین که معلوم شود کدام گزینه را باید پذیرفت، کار پایان می‌یابد و بررسی گزینه‌های دیگر، لزومی ندارد. در ایران، چه در آزمونهای ورودی دانشگاه‌ها و چه در آزمونهای دیگر، پرسشهای چهار گزینه‌ای تک پذیره‌ای را به کار می‌برند. در این نوشتار هم از این پس، تنها این‌گونه پرسشها بررسی می‌شوند.

چگونگی طرح و توزیع پرسشها

طرح پرسشهای چند گزینه‌ای مربوط به یک آزمون، بررسیهایی همه‌جانبه را لازم دارد و مهارت و کارایی ویژه می‌خواهد. پرسشها نباید پیش‌پا افتاده باشند و نباید تلاش فکری سخت یا محاسبه‌هایی وقتگیر را ایجاب کنند. اگر مسأله‌ای را مطرح می‌کنند، باید کوچک و رام شدنی باشد. مجموعهٔ پرسشهای هر آزمون باید دو جنبهٔ اساسی را دارا باشند : نخست آن‌که پرسشها از نظر سادگی و دشواری در پنج گروه باشند : ساده، به نسبت ساده، متوسط، بالاتر از متوسط یا دشوار، و هرکدام از اینها درصد معیّنی از مجموع پرسشها را تشکیل دهند. دیگر آن‌که، پرسشها از نظر هدفهای آموزشی و پرورشی نیز به نسبتهای معین توزیع شده باشند و هرکدام یکی از جنبه‌های یادگیری و یادآوری، فهم و درک صحیح مفهومها، توانایی کاربرد قاعده‌ها و فرمولها، تفکر استدلالی، داشتن استعدادهای ویژه و نیروی ابتکار و خلّاقیت را مورد سنجش قرار دهد. چگونگی توزیع پرسشها چه ازنظر سادگی و دشواری، و چه ازنظر هدفهای آموزشی و پرورشی، بستگی به هدفی دارد که آزمون برای آن انجام می‌گیرد. پراکندگی پرسشهای دارای جنبه‌های مختلف، تصادفی است و این طور نیست که بترتیب، از ساده به دشوار، مرتّب شده باشند.

رو به رویی با پرسشهای چندگزینه‌ای

شناخت ساختار و ویژگیهای پرسشهای چندگزینه‌ای، چگونگی برخورد با آنها را به‌دست می‌دهد.

● سهم هر پرسش از مدت زمان نموده شده برای آزمون، معمولاً بیش از دو دقیقه نیست و پرسشها از هرگونه که باشند امتیاز برابر دارند. پراکندگی پرسشهای ساده و دشوار، ترتیب معین ندارد. از این رو، نخستین کار باید این باشد که پرسشها را بسرعت ازنظر گذراند و تنها آنهایی را نشانه زد که ذهن، پاسخشان را آماده دارد. با هر بار از سرگیری این روند کار، هم تعداد زیادی امتیاز به‌دست می‌آید و هم مقدار زیادی وقت برای پرسشهایی که فکر کردن یا محاسبه را لازم دارند، ذخیره می‌شود.

● پرسشهایی که با شیوهٔ درست طرح شده باشند، هیچ کدامشان تلاش فکری سخت یا محاسبه‌ای پیچیده را لازم ندارد. اگر یک پرسش با چنین وضعی به‌نظر می‌رسد، یا به نکته‌ای از آن توجه نشده است و راه ساده‌ای دارد و یا این‌که آن را باید رها کرد و به پرسشهای دیگر پرداخت.

● در روبه‌رویی با هر پرسش، تنها کاری که ارزش دارد، یافتن گزینهٔ پذیرفتنی آن است. چگونگی دستیابی به این گزینه، هیچ ارزشی ندارد. از این رو، برای پرسش با زمینهٔ جبری، لازم نیست حتماً روش جبری را به کار برد. اگر روش هندسی ساده‌تر باشد و وقت کمتری را بگیرد، صرفه با آن است. برای پرسش با زمینهٔ هندسی هم می‌توان روش جبری را به‌کار برد.

● چون از چهار گزینه، تنها یکی از آنها را باید پذیرفت، همین که آن گزینه معلوم شد، بررسی گزینه‌های دیگر لزومی ندارد و اگر با بررسی سه تا از گزینه‌ها معلوم شد که هیچ‌کدام پذیرفتنی نیست، دلیل بر پذیرفتنی بودن گزارهٔ باقیمانده است و بررسی آن دیگر بی‌مورد است.

● هرگاه گزینه‌هایی از یک پرسش، هم‌ارز باشند، پذیرفتنی نیستند و بررسی آنها مورد ندارد.

● هرگاه پرسش عبارت از یک مسأله باشد، برای دستیابی به گزینهٔ پذیرفتنی آن، می‌توان روش برهان مستقیم و روش برهان خلف را به‌کار برد. در روش برهان مستقیم، می‌توان پرسش را به‌صورت یک مسأله حل کرد و جواب آن را به‌دست آورد. در روش برهان خلف، معلوم می‌شود کدام گزینه‌ها نمی‌توانند جواب آن مسأله باشند و باید کنار گذاشته شوند.

● بنابر قانونهای احتمال، گزیدن شانسی گزینه‌های پذیرفتنی، سودی را دربی نخواهد داشت. اگر برای همهٔ پرسشهای یک آزمون، شانسی عمل شود، احتمال دارد امتیاز ناچیزی به‌دست آید. اما اگر روی پرسشهایی به شیوهٔ درست عمل شود و روی بقیهٔ پرسشها کار به شانس سپرده شود، آن امتیازهای به‌دست آمده هم تباه می‌شوند.

● در آزمون با پرسشهای چندگزینه‌ای، مانند هر آزمون دیگر، کامیابی با آن دسته از آزمون دهندگان است که در فراگیری درسها تنها به حفظ قاعده‌ها بسنده نکرده باشند ؛ تعریفها و هر مفهوم دیگر را عمقی و با همهٔ نکته‌های مربوط به آنها آموخته باشند و در حلّ مسأله‌ها ورزیدگی لازم را به‌دست آورده باشند. دانش‌آموزانی با این گمان که پاسخ دادن به پرسشهای چند گزینه‌ای، روندی ویژهٔ خود و بی‌ارتباط با حلّ مسأله‌ها را دارد، در زمینهٔ حلّ مسأله‌ها آن‌گونه که شاید و باید تلاش نمی‌کنند. در صورتی که پرسشهای ساده و متوسط یک آزمون را اکثریت آزمون دهندگان، پاسخ درست می‌گویند و تنها آنان که بتوانند پاسخ دادن به پرسشهای بالاتر از متوسط و دشوار را نیز از عهده برآیند، از بقیه جلو می‌افتند. اینان آن دسته از آزمون دهندگان خواهند بود که در حلّ مسأله‌ها هم خود را ورزیده کرده باشند. اگر پایهٔ درسی ضعیف باشد و چنانچه اندیشه برای حلّ مسأله به‌کار نرفته و ورزیده نشده باشد، به کامیابی در آزمونهای با پرسشهای چندگزینه‌ای هم امیدی نمی‌توان داشت.

● همراه با توانمندی بنیهٔ درسی و ورزیدگی در حلّ مسأله‌ها، به‌دست آوردن هر چه بیشتر پرسشهای آزمونهای پیشتر، انجام گرفته و تمرین با آنها، همچنین شرکت در آزمونهای آزمایشی، از جمله عاملهای مؤثر برای کامیابی در چنین آزمونهایی محسوب می‌شوند. این فعالیتها هم آن‌گاه نتیجه‌ای مؤثر را به دنبال خواهند داشت که، در هر مورد از آنها ذهن به کار افتاده باشد. از این رو، لازم است که چنین تمرینهایی نیز با شیوه‌ای صحیح به کار روند. چنین شیوه‌ای، در نوشتاری دیگر یادآوری می‌شود.

چند نمونه از پرسشهای چهارگزینه‌ای

۱. اگر سه عدد حقیقی و مثبت a، b و c چنان باشند که $a^2 = b^2 + c^2$، در این صورت از نابرابریهای :

(۱) $a > b + c$ (۲) $a < b + c$

(۳) $a > |b - c|$ (۴) $a < |b - c|$

کدام یا کدامها همواره برقرار است؟

الف) تنها (۱)   ب) تنها (۴)

ج) (۱) و (۴)   د) (۲) و (۳)

این پرسش به‌نظر می‌رسد که در زمینهٔ جبر است. اگر بخواهیم روش جبری را به‌کار ببریم، عملهایی هرچند نه زیاد را به دنبال دارد. امّا اگر به این نکته توجه کنیم که a، b و c اندازه‌های سه ضلع یک مثلث قائم‌الزاویه‌اند و به یاد آوریم که در هر مثلث، هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر، کوچکتر و از تفاضل آنها بزرگتر است، بدون انجام دادن هیچ عمل و خیلی فوری درمی‌یابیم که گزینهٔ (د) پاسخ درست است.

۲. دوجمله‌ای $x^4 + 1$ اگر تجزیه شود، کدام یک از عاملهای زیر را دربر خواهد داشت؟

الف) $x^2 + 1$ ب) $x^2 - 1$

ج) $x^2 -$ [illegible]   د) $x + 1$

در این پرسش، اگر بخواهیم روش مستقیم را به‌کار ببریم و $x^4 + 1$ را تجزیه کنیم، مدت زمانی را باید صرف آن کنیم. اما اگر به یاد داشته باشیم که یک چندجمله‌ای $P(x)$ تنها آن‌گاه بر $x^n + a$ بخش‌پذیر است که اگر در آن x^n را برابر با $-a$ بگیریم، حاصل صفر شود، می‌بینیم که در $P(x) = x^4 + 1$ اگر x^2 را برابر با -1، یا x^2 را برابر با ۱ و یا x را برابر با -1 بگیریم، در هیچ حالت، $x^4 + 1$ برابر با صفر نمی‌شود. گزینه‌های (الف، ب و د) کنارگذاشته می‌شوند و گزینهٔ (ج) پذیرفتنی است.

۳. به فرض $a \neq 0$ معادلهٔ :

$$\frac{x}{a} + \frac{a}{x} = \frac{4}{\frac{x}{a} + \frac{a}{x}}$$

الف) جواب ندارد.   ب) یک ریشهٔ مضاعف دارد.

ج) دو ریشهٔ مضاعف دارد.   د) چهار ریشهٔ متمایز دارد.

معادله به‌سادگی، به دو معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود :

$$\frac{x}{a} + \frac{a}{x} = 2 \ , \ \frac{x}{a} + \frac{a}{x} = -2$$

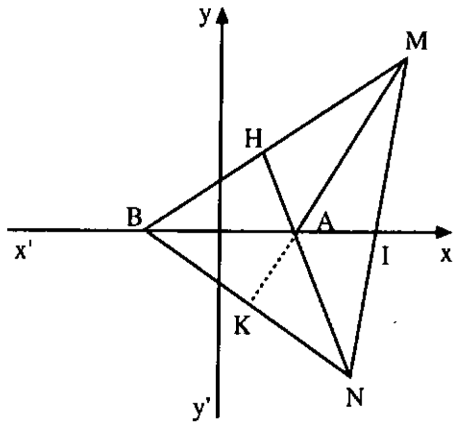
اکنون به‌نظر می‌رسد که باید هریک از این دو معادله را مرتّب کرد و علامت مبیّن آن را به‌دست آورد. اما اگر به این ویژگی آشنا باشیم که «مجموع هر عدد و عکس آن از ۲ بزرگتر یا از ۲− کوچکتر و تنها آن‌گاه برابر با ۲± است که آن عدد برابر با ۱± باشد» بدون هیچ محاسبه، درمی‌یابیم که $x = a$ ریشهٔ مضاعف

معادلهٔ یکم و $x = -a$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ دوم است و گزینهٔ (ج) پذیرفتنی است.

۴. در صفحهٔ محورهای عمود برهم $x'x$ و $y'y$ دو نقطهٔ ثابت $A(1,0)$ و $B(-1,0)$ و نقطهٔ متغیر $M(a,b)$ داده شده‌اند. عمودی که در A بر BM و عمودی که در B بر AM رسم شود، با یکدیگر در $N(x,y)$ برخورد می‌کنند. دو مقدار x و y برابرند با :

الف) $x = a \;,\; y = \dfrac{a^2 - 1}{b}$ ب) $x = a + 1 \;,\; y = \dfrac{a^2 - 1}{b}$

ج) $x = a - 1 , y = \dfrac{1 - a^2}{b}$ د) $x = a \;,\; y = \dfrac{1 - a^2}{b}$



این پرسش در زمینهٔ هندسهٔ تحلیلی بیان شده است. اگر روش تحلیلی را به کار ببریم، باید ضریب زاویه‌ای دو خط AM و BN و پس از آن معادله‌های دو خط AH و BK را به‌دست آوریم و این دو معادله را با هم حل کنیم که این محاسبه‌ها مدتی از وقت ما را می‌گیرد. اگر شکل را به صورت هندسی آن درنظر بگیریم، می‌بینیم که N نقطهٔ برخورد دو ارتفاع از مثلث ABM است ؛ پس MN ارتفاع سوم این مثلث و بر $x'x$ عمود است و بنابراین، طول نقطهٔ N همان طول نقطهٔ M و برابر با a است. اکنون مثلث BMN و ارتفاعهای آن را درنظر می‌گیریم و درمی‌یابیم دو مثلث IAM و IBN متشابهند و به دست خواهیم آورد که $IM \cdot IN$ با $IA \cdot IB$ برابر است و عرض نقطهٔ N برابر با $\dfrac{1 - a^2}{b}$ به‌دست می‌آید.

این نکته یادآوری می‌شود که در روش هندسی حلّ یک مسأله، آن‌گاه وقتی کمتر از روش تحلیلی صرف می‌شود که برای حلّ مسأله‌های هندسه، کارایی و آمادگی ذهنی وجود داشته باشد.

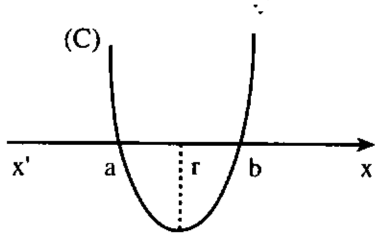
۵. بین اندازه‌های زاویهٔ A، دو ضلع b و c، d نیمساز زاویهٔ داخلی A و S مساحت مثلث ABC رابطهٔ $(b + c)d = 2\sqrt{2}S$ برقرار است. زاویهٔ A از این مثلث :

الف) حاده است. ب) منفرجه است.

ج) قائمه است. د) قائمه نیست.

در این پرسش، گزینه‌ها با شیوهٔ درست گزیده نشده‌اند ؛ یکی از دو گزینهٔ (الف) و (د) یا (ب) و (د) که درست فرض شود، دیگری نیز درست خواهد بود و این خلاف یکتا بودن گزینهٔ پذیرفتنی در هر پرسش است. بنابراین، گزینهٔ (ج) درست و پذیرفتنی است و کار روی رابطهٔ داده شده، مورد ندارد.

۶. چندجمله‌ای $P(x)$ و مشتق آن $Q(x)$، دو تابع $y = P(x)$ و $y' = Q(x)$ را نشان می‌دهند. هرگاه منحنی C نمودار تابع y'، نسبت به محور طولها به شکل زیر باشد، نمودار تابع y :



الف) در دو نقطهٔ به طولهای a و b با محور طولها برخورد می‌کند.

ب) در نقطهٔ به طول a ماکسیمم و در نقطهٔ به طول b می‌نیمم است.

ج) در نقطهٔ به طول a می‌نیمم و در نقطهٔ به طول b ماکسیمم است.

د) در نقطهٔ به طول r عطف و بر محور طولها مماس است.

این پرسش ممکن است برای دانش‌آموزانی ناآشنا به‌نظر آید ؛ اما اگر توجه کنند که منحنی C علامت مشتق را به‌دست می‌دهد (هرجا که منحنی بالای $x'x$ باشد، مشتق مثبت و هرجا که منحنی زیر $x'x$ باشد، مشتق منفی است) بسادگی خواهند داشت :

x	$-\infty$		a		b		$+\infty$
y'	$+\infty$	+	0	−	0	+	$+\infty$
y	$-\infty$	↗	M	↘	m	↗	$+\infty$

و نتیجه می‌گیرند که گزینهٔ (ب) درست و پذیرفتنی است. این نکته هم یادآوری می‌شود که بخش نخست گزینهٔ (د) درست، اما بخش

دوم آن نادرست است. منحنی نمودار تابع y دارای نقطهٔ عطف به طول r است، اما در این نقطه، موازی با $x'x$ (یا واقع بر آن) نمی‌تواند باشد.

پاسخهای تمرین (۳)

۱. فرض مسأله می‌شود $ab = P$ و حکم آن می‌شود $t = u$. اگر فرض درست باشد، یعنی عمل ضرب بدرستی انجام گرفته باشد، حکم $t = u$ نیز درست است.

عکس مسأله : اگر $t = u$ ، آن‌گاه $ab = P$ که معتبر نیست ؛ اگر در عمل ضرب، این اشتباه روی داده باشد که مضربی از ۹ به P افزوده یا از آن کم شده باشد، باز هم $t = u$ ، اما $ab \neq P$ خواهد بود.

عکس نقیض مسأله : اگر $t \neq u$ ، آن‌گاه $ab \neq P$ ، که درست است.

متقابل مسأله : اگر $ab \neq P$ ، آن‌گاه $t \neq u$ ، که در حالت کلی درست نیست.

خلاف مسأله : اگر $ab \neq P$ ، آن‌گاه $t = u$. یا این‌که اگر $t \neq u$ ، آن‌گاه $ab = P$ ، که نادرست است.

۲. فرض مسأله : $A \subset B$ و $B \subset C$ ، $C \subset A$

حکم مسأله : $A = B = C$

برهان مسأله : از دو رابطهٔ $A \subset B$ و $B \subset C$ ، نتیجه می‌شود $A \subset C$ و از این رابطه و رابطهٔ $C \subset A$ ، نتیجه می‌شود $A = C$. در این صورت داریم $B \subset A$ و از این رابطه و رابطهٔ $A \subset B$ ، به‌دست می‌آید $A = B$ ؛ بنابراین $A = B = C$.

عکس مسأله : اگر $A = B = C$ ، آن‌گاه $C \subset A$ ، $B \subset C$ و $A \subset B$ که درست است ؛ زیرا از دو مجموعهٔ برابر، هرکدام زیرمجموعهٔ دیگری است.

عکس نقیض مسأله : اگر از سه مجموعهٔ A، B و C هیچ دوتای آنها با هم برابر نباشند، آن‌گاه هریک از این سه مجموعه، زیرمجموعهٔ هریک از دوتای دیگر نمی‌تواند باشد، که درست است.

متقابل مسأله : اگر هریک از سه مجموعهٔ A، B و C، زیرمجموعهٔ هریک از دو تای دیگر نباشد، آن‌گاه هیچ دو تای آنها با هم برابر نیست، که درست است.

خلاف مسأله : اگر هریک از سه مجموعهٔ A، B و C، زیرمجموعهٔ هریک از دو تای دیگر باشد، آن‌گاه هیچ دو تای از آنها با هم برابر نیست، که مسأله‌ای نادرست است.

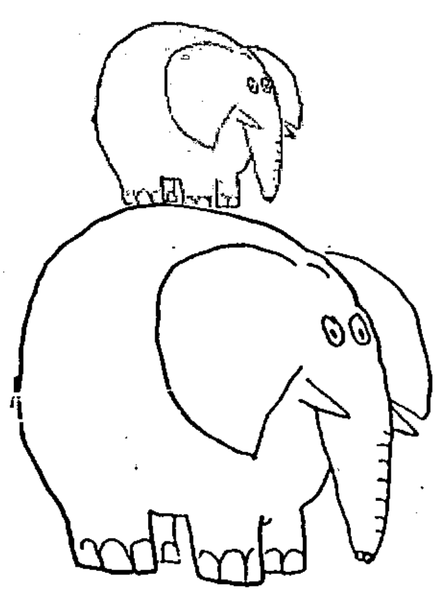
بیان صحیح مسأله : برای آن‌که $A = B = C$ لازم و کافی است که $A \subset B$ و $B \subset C$ و $C \subset A$.

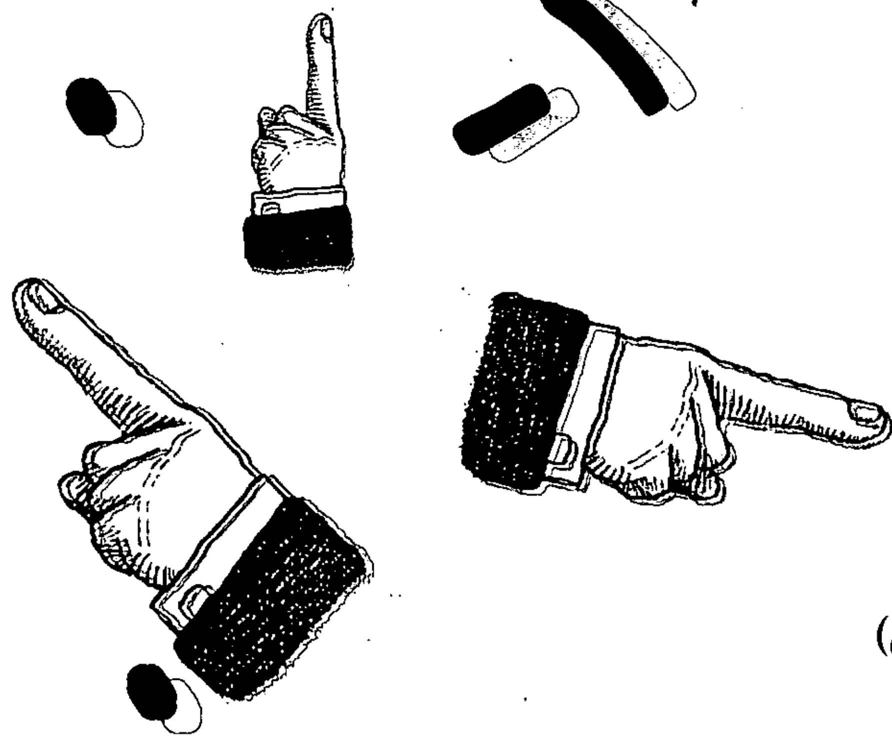
۳. خلاف مسأله می‌شود : «اگر a و b نسبت به هم اول باشند، دو عدد $s = a + b$ و $p = ab$ مقسوم‌علیهی مشترک بزرگتر از یک دارند». اگر k این مقسوم علیه مشترک باشد، p بر k بخش‌پذیر است و چون a و b نسبت به هم اولّند، پس یکی از دو عدد a یا b مثلاً a بر k بخش‌پذیر است. در این صورت، a و $s = a + b$ هر دو بر k بخش‌پذیرند و نتیجه می‌شود b نیز بر k بخش‌پذیر است و نسبت به a اوّل نیست که خلاف فرض است. بنابراین، خلاف مسأله نادرست و خود مسأله درست است.

۴. شعاع دایره برابر است با $CM = \sqrt{AC \cdot BC}$ و مسأله عبارت می‌شود از رسم پاره‌خطی که واسطهٔ هندسی دو پاره‌خط AC و BC باشد. رسم این پاره‌خط را از راه‌های گوناگون می‌توان انجام داد. یک راه آن چنین است : نیمدایرهٔ به قطر AC وعمودی که در B بر AC رسم شود، در نقطهٔ T برخورد می‌کنند و CT واسطهٔ هندسی AC و BC و برابر با شعاع دایره است.

نقطهٔ B داخل دایرهٔ مکان M واقع می‌شود ؛ زیرا شعاع دایره که واسطهٔ هندسی CB و CA است، از CB بزرگتر و از CA کوچکتر است.

۵. در مسألهٔ (الف) چهارضلعی به رأسهای B، C، P و Q محاطی است و این مسأله، بیان دیگری از مسألهٔ (ب) است. مسأله را به‌صورتهای دیگر هم می‌توان بیان کرد.





حد

(دانش‌آموزان دورهٔ پیش‌دانشگاهی)

• احمد قندهاری

حد، یکی از مفاهیم بنیادی در ریاضی است ؛ به طوری که مباحث اصلی دیگری مانند پیوستگی، مشتق‌پذیری، انتگرال و ... به آن وابسته است.

وقتی درمورد حد بحث می‌کنیم، منظور ما بررسی رفتار یک تابع است، وقتی که متغیر آن به عدد مشخصی، بسیار نزدیک می‌شود ؛ ولی هیچ‌گاه به آن نمی‌رسد. پیش از ورود به بحث حد، به موارد زیر باید توجه کرد :

۱ـ همسایگی عدد حقیقی a [1]:

الف: هر بازهٔ باز شامل عدد حقیقی a را یک همسایگی عدد حقیقی a گویند. برای مثال، اگر $a=۲$ ، آن‌گاه بازه‌های $(۱،۶)$ ، $(۰،۵)$، $(-۱،۱۰)$ را یک همسایگی عدد ۲ گویند.

ب: همسایگی متقارن:

بازهٔ $(a-r\,,\,a+r)$ را یک همسایگی متقارن عدد a گویند.

مثال: بازهٔ $(۲-\frac{۱}{۲},۲+\frac{۱}{۲})$ را یک همسایگی متقارن عدد ۲ گویند. و بازهٔ $(۴-\frac{۱}{۵},۴+\frac{۱}{۵})$ را یک همسایگی متقارن عدد ۲ گویند.

ج: همسایگی متقارن محذوف:

اگر از همسایگی متقارن عدد a، خود عدد a را برداریم، این همسایگی را همسایگی متقارن محذوف گویند :

$(a-r,a+r)-\{a\}$

برای مثال، همسایگی $(۵-\frac{۱}{۱۰},۵+\frac{۱}{۱۰})-\{۵\}$ را یک همسایگی متقارن محذوف عدد ۵ گویند.

د: بهترین شکل نشان دادن همسایگی متقارن محذوف عدد a با شعاع r، به صورت $۰<|x-a|<r$ می‌باشد که خود به خود $x\neq a$ را می‌رساند.

$$۰<|x-a|<r \Rightarrow -r<x-a<r\ ,\ x\neq a$$

یا $a-r<x<a+r$ و $x\neq a$

همسایگی متقارن عدد a با شعاع r را با نماد $N(a,r)$ [2] نیز نشان می‌دهند ؛ یعنی :

$$N(a,r)=(a-r,a+r)$$

مثال:

$$N(۳,\frac{۱}{۱۰})=(۳-\frac{۱}{۱۰},۳+\frac{۱}{۱۰})$$

مثال: اگر همسایگی $N(a,\varepsilon)$ به صورت $(\frac{۱۳}{۴},\frac{۱۵}{۴})$ باشد، a و ε را بیابید.

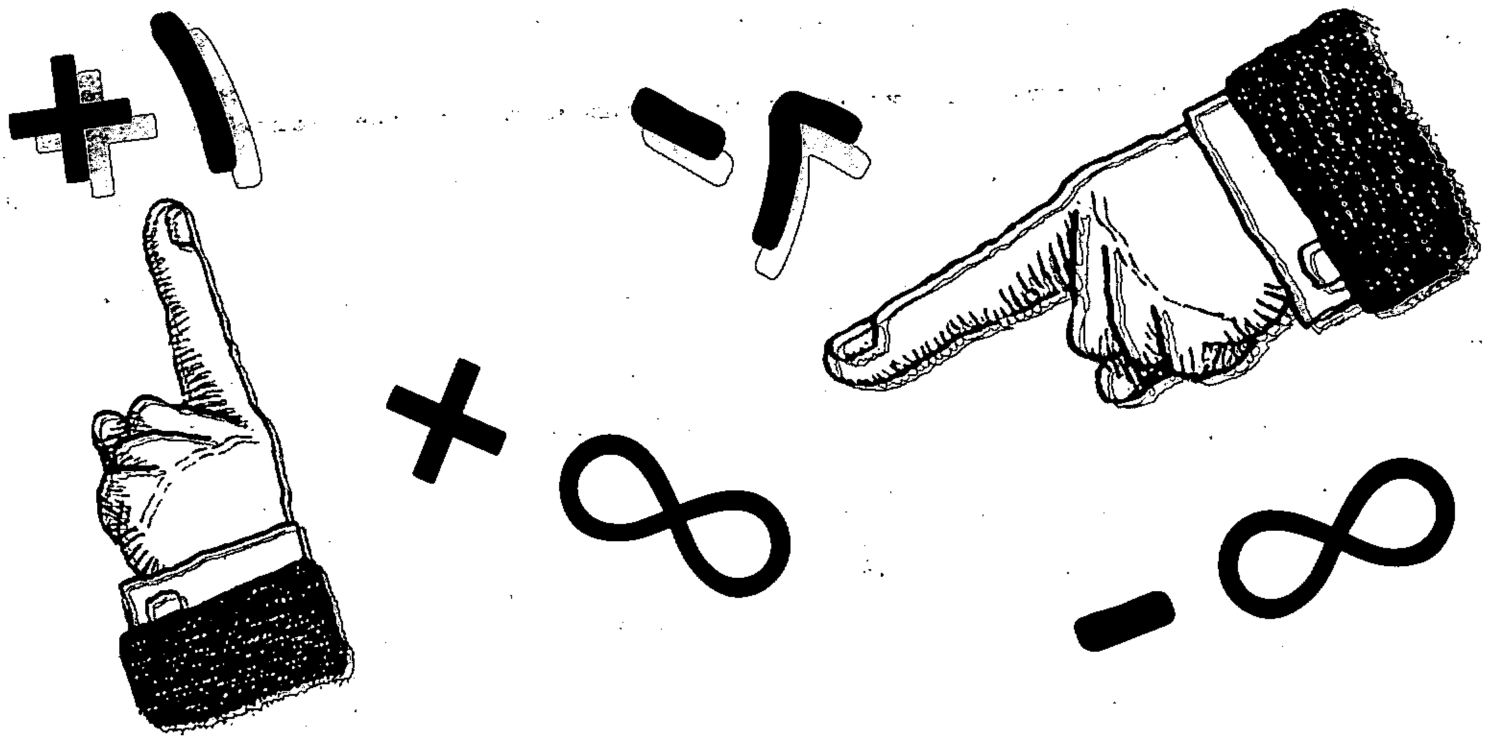
حل:

$$N(a,\varepsilon)=(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a-\varepsilon=\frac{۱۳}{۴}\\ a+\varepsilon=\frac{۱۵}{۴}\end{cases}\Rightarrow a=\frac{۷}{۲}\ ,\varepsilon=\frac{۱}{۴}$$

تست: اشتراک دو همسایگی $N(۱,\frac{۱}{۲})$ و $N'(۰,۱)$ کدام است؟

۱) $(۱,\frac{۳}{۲})$ ۲) $(-۱,\frac{۱}{۲})$



۳) $(\frac{1}{2},1)$　　　۴) $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

حل: گزینهٔ (۳) درست است؛ زیرا :

$$N(1,\frac{1}{2})=(1-\frac{1}{2},1+\frac{1}{2})=(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$$

$$N'(0,1)=(0-1,0+1)=(-1,1)$$

$$N\cap N'=(\frac{1}{2},\frac{3}{2})\cap(-1,1)=(\frac{1}{2},1)$$

۲ـ تغییرات |x| وقتی x در بازه‌های مختلف باشد:

الف: اگر x در یک بازه مثبت باشد، قدرمطلق x نیز در همان بازه است. مثال :

$$2<x<5 \Rightarrow 2<|x|<5$$

ب: اگر x در یک بازه منفی باشد، قدرمطلق x در بازه قرینه آن است. مثال :

$$-3<x<-1 \Rightarrow 1<|x|<3$$

$$-7<x<-2 \Rightarrow 2<|x|<7$$

ج: اگر x در یک بازه که شامل عددهای منفی و مثبت باشد، آن‌گاه قدرمطلق x ازخود صفر تا قدرمطلق، بزرگترین عدد بازه قرار می‌گیرد. مثال :

$$-4<x<10 \Rightarrow \begin{cases}-4<x<0 \Rightarrow 0<|x|<4\\ 0\le x<10 \Rightarrow 0\le|x|<10\end{cases} \Rightarrow 0\le|x|<10$$

$$-8<x<3 \Rightarrow \begin{cases}-8<x<0 \Rightarrow 0<|x|<8\\ 0\le x<3 \Rightarrow 0\le|x|<3\end{cases} \Rightarrow 0\le|x|<8$$

تست: اگر $2<x<5$، آن‌گاه، $|x-3|$ درکدام یک از بازه‌ها قرار دارد؟

۱) $[1,2]$　　　۲) $[0,2]$

۳) $[0,3]$　　　۴) $[0,2[$

حل: گزینهٔ (۴).

$$2<x<5 \Rightarrow 2-3<x-3<5-3$$

$$\Rightarrow -1<x-3<2 \Rightarrow 0\le|x-3|<2$$

حد

ورود به مبحث حد را با مثالی شروع می‌کنیم :

مثال: تابع به معادلهٔ $f(x)=\dfrac{3x^2-2x-1}{x-1}$ با شرط $x\neq1$ را درنظر می‌گیریم. این تابع برای تمام مقادیر x بجز $x=1$ تعریف شده است. می‌خواهیم رفتار f(x) را وقتی x نزدیک به ۱ ولی مخالف با ۱ است، مورد بررسی قرار دهیم.

الف: فرض کنیم، x مقادیر۰/۲۵ ، ۰/۵۰ ، ۰/۷۵ ، ۰/۹ ، ۰/۹۹ ، ۰/۹۹۹ و ۰/۹۹۹۹ را بپذیرد، این عمل به این معناست که x را با مقادیر کمتر از ۱ به سمت ۱ نزدیک کرده‌ایم. مقادیر f(x) را برای مقادیر فوق و در جدول صفحه بعد نشان می‌دهیم :

x	۰/۲۵	۰/۵۰	۰/۷۵	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	۰/۹۹۹۹
f(x)	۱/۷۵	۲/۵	۳/۲۵	۳/۷	۳/۹۷	۳/۹۹۷	۳/۹۹۹۷

به‌طوری که جدول نشان می‌دهد، وقتی x، با مقادیر کمتر از ۱ به سمت عدد ۱ میل می‌کند، f(x) به طور مرتب به عدد ۴ نزدیک و نزدیکتر می‌شود.

ب: فرض کنیم x مقادیر ۱/۷۵، ۱/۵۰، ۱/۲۵، ۱/۱، ۱/۰۱، ۱/۰۰۱ و ۱/۰۰۰۱ را بپذیرد، این عمل به این معناست که x را با مقادیر بزرگتر از ۱ به سمت ۱ نزدیک کرده‌ایم، مقادیر f(x) را برای این مقادیر x در جدول زیر نشان می‌دهیم :

x	۱/۷۵	۱/۵۰	۱/۲۵	۱/۱	۱/۰۱	۱/۰۰۱	۱/۰۰۰۱
f(x)	۶/۲۵	۵/۵	۴/۷۵	۴/۳	۴/۰۳	۴/۰۰۳	۴/۰۰۰۳

با ملاحظهٔ دقیق، به دو جدول بالا نتیجه می‌گیریم که، وقتی x به عدد ۱ نزدیک و نزدیکتر می‌شود، f(x) به عدد ۴ نزدیک و نزدیکتر می‌شود و هرچه x به عدد ۱ نزدیکتر شود، f(x) به عدد ۴ نزدیکتر می‌شود.

از جدولهای قبل نتایج زیر به‌دست می‌آید :

وقتی $\begin{cases} x=۰/۹ \\ \text{یا} \\ x=۱/۱ \end{cases}$، آن‌گاه $\begin{cases} f(x)=۳/۷ \\ \text{یا} \\ f(x)=۴/۳ \end{cases}$ ؛ یعنی وقتی x به اندازهٔ ۰/۱ کمتر یا بیشتر از ۱ است، f(x) به اندازهٔ ۰/۳ کمتر یا بیشتر از ۴ است.

وقتی $\begin{cases} x=۰/۹۹ \\ \text{یا} \\ x=۱/۰۱ \end{cases}$، آن‌گاه $\begin{cases} f(x)=۳/۹۷ \\ \text{یا} \\ f(x)=۴/۰۳ \end{cases}$ ؛ یعنی وقتی x به اندازهٔ ۰/۰۱ کمتر یا بیشتر از ۱ است، f(x) به اندازهٔ ۰/۰۳ کمتر یا بیشتر از ۴ است.

همچنین وقتی $\begin{cases} x=۰/۹۹۹ \\ \text{یا} \\ x=۱/۰۰۱ \end{cases}$، آن‌گاه $\begin{cases} f(x)=۳/۹۹۷ \\ \text{یا} \\ f(x)=۴/۰۰۳ \end{cases}$ ؛ یعنی وقتی x به اندازهٔ ۰/۰۰۱ کمتر یا بیشتر از ۱ است، f(x) به اندازهٔ ۰/۰۰۳ کمتر یا بیشتر از ۴ است و بالاخره وقتی $\begin{cases} x=۰/۹۹۹۹ \\ \text{یا} \\ x=۱/۰۰۰۱ \end{cases}$، آن‌گاه $\begin{cases} f(x)=۳/۹۹۹۷ \\ \text{یا} \\ f(x)=۴/۰۰۰۳ \end{cases}$ ؛ یعنی وقتی x به‌اندازهٔ ۰/۰۰۰۱ کمتر یا بیشتر از ۱ است، f(x) به اندازهٔ ۰/۰۰۰۳ کمتر یا بیشتر از ۴ است.

این نتایج را می‌توان به صورتهای زیر نشان داد :

$$|x-۱|<۰/۱ \Rightarrow |f(x)-۴|<۰/۳$$

$$|x-۱|<۰/۰۱ \Rightarrow |f(x)-۴|<۰/۰۳$$

$$|x-۱|<۰/۰۰۱ \Rightarrow |f(x)-۴|<۰/۰۰۳$$

$$|x-۱|<۰/۰۰۰۱ \Rightarrow |f(x)-۴|<۰/۰۰۰۳$$

اکنون برای بررسی این وضعیت، از دیدی دیگر، ابتدا مقادیر f(x) را درنظر می‌گیریم. مشاهده می‌کنیم که اگر x را به اندازهٔ کافی به عدد ۱ نزدیک کنیم، می‌توانیم f(x) را به هر اندازهٔ دلخواه که بخواهیم، به عدد ۴ نزدیک کنیم ؛ به بیان دیگر : می‌توانیم $|f(x)-۴|$ را به هر اندازه که بخواهیم، کوچک کنیم ؛ به شرطی که x را به اندازهٔ کافی به عدد ۱ نزدیک کنیم ؛ یعنی $|x-۱|$ را به اندازهٔ کافی کوچک کنیم. به صورت کلّی‌تر می‌تواند $|f(x)-۴|$ از هر عدد مثبت مفروض ε کوچکتر شود ؛ به شرطی که $|x-۱|$ از عدد مثبتی مانند δ که به طور مناسب اختیار می‌شود، کوچکتر باشد.

در نابرابریهای بالا، نتایج زیر برای ε و δ وجود دارد.

اگر $\varepsilon=۰/۳$، آن‌گاه $\delta=۰/۱$

اگر $\varepsilon=۰/۰۳$، آن‌گاه $\delta=۰/۰۱$

اگر $\varepsilon=۰/۰۰۳$، آن‌گاه $\delta=۰/۰۰۱$

اگر $\varepsilon=۰/۰۰۰۳$، آن‌گاه $\delta=۰/۰۰۰۱$

پس برای هر $\varepsilon>۰$ (ε به قدر کافی کوچک) دلخواه، δ ی مناسبی یافت می‌شود.

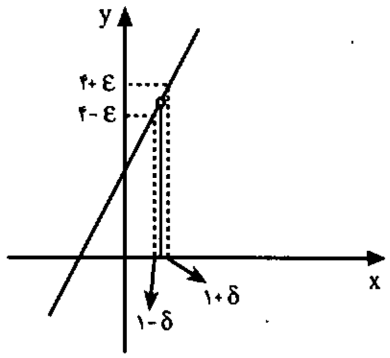
تعبیر هندسی این بحث چنین است :

$$f(x)=\frac{۳x^۲-۲x-۱}{x-۱}=\frac{(۳x+۱)(x-۱)}{x-۱}=۳x+۱ \text{ ، } x\neq ۱$$

نمودار $f(x)=۳x+۱$ را با شرط $x\neq ۱$ رسم می‌کنیم.

$x=۰ \Rightarrow f(۰)=۱$

$x=-۱ \Rightarrow f(-۱)=-۲$



به طور خلاصه می‌توان گفت که مقدار δ به ε بستگی دارد و هر چه‌قدر ε را کوچکتر اختیار کنیم، δ نیز کوچکتر خواهد شد.
بنابراین، در مورد تابع f می‌توان نوشت :
$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=4$ ؛ زیرا برای هر $\varepsilon>0$ هرقدر کوچک یک $\delta>0$ ی وجود دارد که

$$0<|x-1|<\delta \Rightarrow |f(x)-4|<\varepsilon$$

حال، این آمادگی را داریم که حدّ تابع را در حالت کلّی تعریف کنیم.

۱ـ تعریف:

فرض کنید f تابعی باشد، در تمام نقاط بازهٔ I که شامل عدد حقیقی a است (بجز احتمالاً در خود a) تعریف شده باشد. حدّ تابع f(x) وقتی x به سمت a میل می‌کند، برابر عدد حقیقی L است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$. اگر برای هر $\varepsilon>0$ هر چه‌قدر کوچک، عدد مثبتی مانند δ وجود داشته باشد که :

$$|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

یا بنویسیم :

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \ni |x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

برای اثبات رابطهٔ فوق، چنین عمل می‌کنیم :
$|f(x)-L|<\varepsilon$ را با جایگذاری عبارت f(x) در آن حل می‌کنیم تا به رابطهٔ $|x-a|<\delta$ برسیم.
در حقیقت باید δ را بر حسب ε پیدا کنیم و توجه داشته باشیم که، باید برای δ ی به‌دست آمده بتوان از نابرابری $|x-a|<\delta$ به نابرابری $|f(x)-L|<\varepsilon$ رسید.

مثال: در تابع به معادلهٔ $f(x)=3x-1$ ، داریم

$$\left\{\lim_{x\to 3} f(x)=8\right.$$

نخست: δ ای برای $\varepsilon=0/001$ بیابید.
دوم: مسأله را در حالت کلّی حل کنید.

حل نخست: $|f(x)-8|<0/001$

$$\Rightarrow |3x-1-8|<\frac{1}{1000}$$

$$\Rightarrow |3x-9|<\frac{1}{1000} \Rightarrow |3(x-3)|<\frac{1}{1000}$$

$$\Rightarrow 3|x-3|<\frac{1}{1000}$$

$$\Rightarrow |x-3|<\frac{1}{3000} \Rightarrow \delta=\frac{1}{3000}$$

توجّه: $\delta\le\frac{1}{3000}$ نیز درست است ؛ زیرا :

$$|x-3|<\delta\le\frac{1}{3000} \Rightarrow |x-3|<\frac{1}{3000}$$

$$\Rightarrow 3|x-3|<\frac{1}{1000} \Rightarrow |3(x-3)|<\frac{1}{1000}$$

$$\Rightarrow |3x-9|<\frac{1}{1000} \Rightarrow |3x-1-8|<\frac{1}{1000}$$

$$\Rightarrow |f(x)-8|<\frac{1}{1000}$$

حل دوم: ثابت می‌کنیم که برای هر $\varepsilon>0$ هر چه‌قدر کوچک، عدد مثبتی مانند δ وجود دارد که

$$0<|x-3|<\delta \Rightarrow |f(x)-8|<\varepsilon$$

$$|f(x)-8|<\varepsilon \Rightarrow |3x-1-8|<\varepsilon \Rightarrow |3x-9|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow |3(x-3)|<\varepsilon \Rightarrow 3|x-3|<\varepsilon \Rightarrow |x-3|<\frac{\varepsilon}{3}$$

$$\Rightarrow \delta\le\frac{\varepsilon}{3}$$

مسألهٔ (۱): با استفاده از تعریف حدّ تابع، ثابت کنید $\left\{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)=-4\right.$.

حل: ثابت می‌کنیم :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \ni |x-2| < \delta \Rightarrow |f(x)+4| < \varepsilon$$

$$|f(x)+4| < \varepsilon \Rightarrow |x^2-4x+4| < \varepsilon \Rightarrow |(x-2)^2| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 < \varepsilon \Rightarrow |x-2| < \sqrt{\varepsilon} \Rightarrow \delta \le \sqrt{\varepsilon}$$

مسألهٔ (۲): با استفاده ازتعریف حدّ تابع، ثابت کنید

$$\lim_{x\to 1}(x^2-5x) = -4$$

حل: باید ثابت کنیم :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \ni |x-1| < \delta \Rightarrow |f(x)+4| < \varepsilon$$

$$|f(x)+4| < \varepsilon \Rightarrow |x^2-5x+4| < \varepsilon \Rightarrow |(x-1)(x-4)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |x-1|\times|x-4| < \varepsilon$$

در این‌جا از همسایگی متقارن محذوف عدد ۱ استفاده می‌کنیم با شعاع $r=1$:

$$|x-1| < 1 \Rightarrow -1 < x-1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2$$

در بازهٔ $0 < x < 2$، یک کران بالای $|x-4|$ را پیدا می‌کنیم، ابتدا، $x-4$ را می‌سازیم، سپس $|x-4|$ را می‌سازیم ؛ آن‌گاه یک کران بالای آن را پیدا می‌کنیم :

$$0 < x < 2 \Rightarrow 0-4 < x-4 < 2-4$$

$$\Rightarrow -4 < x-4 < -2 \Rightarrow 2 < |x-4| < 4$$

اگر $0 < x < 2$، یک کران بالای $|x-4|$ عدد ۴ است، می‌نویسیم :

$$\text{اگر} \quad \underbrace{|x-1|\times 4}_{(1)} < \varepsilon \Rightarrow \underbrace{|x-1|\times|x-4|}_{(2)} < \varepsilon$$

زیرا عبارت (۱) بزرگتر از عبارت (۲) است. اگر عبارت بزرگتر، کوچکتر از ε باشد، آن‌گاه عبارت کوچکتر هم، کوچکتر از ε می‌شود. در نتیجه :

$$|x-1|\times 4 < \varepsilon \Rightarrow |x-1| < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow \delta \le \text{Min}\left\{r, \frac{\varepsilon}{4}\right\}$$

$$\text{یا} \quad \delta \le \text{Min}\left\{1, \frac{\varepsilon}{4}\right\}$$

می‌توان نشان داد برای δ ی به‌دست آمده از نابرابری $0 < |x-1| < \delta$ به نابرابری $|f(x)+4| < \varepsilon$ خواهیم رسید.

مسألهٔ (۳): با استفاده از تعریف حدّ تابع، ثابت کنید :

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{x-4} = -1$$

حل: باید ثابت کنیم :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \ni |x-3| < \delta \Rightarrow |f(x)+1| < \varepsilon$$

$$|f(x)+1| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{x-2}{x-4}+1\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{x-2+x-4}{x-4}\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\frac{2x-6}{x-4}\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{2(x-3)}{x-4}\right| < \varepsilon \Rightarrow |x-3|\times\frac{2}{|x-4|} < \varepsilon$$

در این‌جا یک همسایگی متقارن محذوف برای عدد ۳ درنظر می‌گیریم با شعاع $r=\frac{1}{2}$:

$$0 < |x-3| < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < x-3 < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{5}{2} < x < \frac{7}{2}$$

حال یک کران پایین $|x-4|$ را در این بازه پیدا می‌کنیم :

$$\frac{5}{2} < x < \frac{7}{2} \Rightarrow \frac{5}{2}-4 < x-4 < \frac{7}{2}-4$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2} < x-4 < -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < |x-4| < \frac{3}{2}$$

یک کران پایین $|x-4|$، $\frac{1}{2}$ است .

می‌نویسیم :

$$\text{اگر} \quad \underbrace{|x-3|\times\frac{2}{\frac{1}{2}}}_{(1)} < \varepsilon \Rightarrow \underbrace{|x-3|\times\frac{2}{|x-4|}}_{(2)} < \varepsilon$$

زیرا عبارت (۱) از عبارت (۲) بزرگتر است، اگر عبارت بزرگتر از ε کوچکتر باشد ؛ آن‌گاه عبارت کوچکتر هم از ε کوچکتر خواهد شد.

$$\Rightarrow |x-3|\times 4 < \varepsilon \Rightarrow |x-3| < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow \delta \le \text{Min}\left\{r, \frac{\varepsilon}{4}\right\}$$

$$\delta \le \text{Min}\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{4}\right\}$$

مسألهٔ (۴): با استفاده از تعریف حدّ تابع، ثابت کنید :

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2}{x-2} = 7$$

حل: باید ثابت کنیم :

$$\forall \varepsilon>۰ \quad \exists \delta>۰ \quad \ni |x-۳|<\delta \Rightarrow |f(x)-۷|<\varepsilon$$

$$|f(x)-۷|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{x^۲-۲}{x-۲}-۷\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{x^۲-۷x+۱۲}{x-۲}\right|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\frac{(x-۳)(x-۴)}{x-۲}\right|<\varepsilon \Rightarrow |x-۳|\times\frac{|x-۴|}{|x-۲|}<\varepsilon$$

حال یک همسایگی متقارن محذوف برای عدد (۳) انتخاب می کنیم با شعاع $r=\frac{۱}{۲}$:

$$|x-۳|<\frac{۱}{۲} \Rightarrow -\frac{۱}{۲}<x-۳<\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۵}{۲}<x<\frac{۷}{۲}$$

حال وقتی $\frac{۵}{۲}<x<\frac{۷}{۲}$ یک کران بالایی برای $|x-۴|$ و یک کران پایینی برای $|x-۲|$ پیدا می کنیم.

$$\frac{۵}{۲}<x<\frac{۷}{۲} \Rightarrow \frac{۵}{۲}-۴<x-۴<\frac{۷}{۲}-۴$$

$$\Rightarrow -\frac{۳}{۲}<x-۴<-\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲}<|x-۴|<\frac{۳}{۲}$$

کران بالا $(\frac{۳}{۲})$ است.

$$\frac{۵}{۲}<x<\frac{۷}{۲} \Rightarrow \frac{۵}{۲}-۲<x-۲<\frac{۷}{۲}-۲$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}<x-۲<\frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲}<|x-۲|<\frac{۳}{۲}$$

کران پایین $(\frac{۱}{۲})$ است.

می نویسیم :

$$\text{اگر}\quad \underbrace{|x-۳|\times\frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۱}{۲}}}_{(۱)}<\varepsilon \Rightarrow \underbrace{|x-۳|\times\frac{|x-۴|}{|x-۲|}}_{(۲)}<\varepsilon$$

عبارت (۱) بزرگتر از عبارت (۲) است، اگر عبارت بزرگتر، کوچکتر از ε باشد ؛ آن‌گاه عبارت کوچکتر، کوچکتر از ε خواهد شد.

$$|x-۳|\times ۳<\varepsilon \Rightarrow |x-۳|<\frac{\varepsilon}{۳} \Rightarrow \delta \le \mathrm{Min}\left\{\frac{۱}{۲},\frac{\varepsilon}{۳}\right\}$$

تمرین: با استفاده از تعریف حدّ تابع، ثابت کنید :

$$۱)\ \left\{\lim_{x\to۲}\frac{x^۲+۲}{۵x-۸}=۳\right.$$

$$\left\{\lim_{x\to۲}\frac{x^۲-۳}{x^۲-۳x+۳}=۱\right.$$

۲ـ حدّ چپ و حدّ راست:

تعریف: فرض کنیم تابع f در یک بازهٔ باز (a,b) تعریف شده باشد، می‌گویند تابع f در a، حد راست برابر L دارد و می‌نویسند $\lim_{x\to a^+} f(x)=L$ هرگاه برای هر $\varepsilon>۰$ هر چه‌قدر کوچک، عدد $\delta>۰$ وجود داشته باشد که اگر $۰<x-a<\delta$ ؛ آن‌گاه $|f(x)-L|<\varepsilon$ یا :

$$\forall \varepsilon>۰ \quad \exists \delta>۰ \quad \ni ۰<x-a<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

تعریف: فرض می کنیم تابع f در یک بازهٔ باز (c,a) تعریف شده باشد، می‌گویند تابع f در a حدّ چپ برابر L دارد و می‌نویسند $\lim_{x\to a^-} f(x)=L$ ، هرگاه : برای هر $\varepsilon>۰$ هر چه‌قدر کوچک، عدد $\delta>۰$ وجود داشته باشد که اگر $۰<a-x<\delta$ ؛ آن‌گاه $|f(x)-L|<\varepsilon$ یا :

$$\forall \varepsilon>۰ \quad \exists \delta>۰ \quad \ni ۰<a-x<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

مسألهٔ (۵): با استفاده از تعریف، ثابت کنید :

$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۳-۱}{|x-۱|}=۳$$

حل: باید ثابت کنیم :

$$\forall \varepsilon>۰ \quad \exists \delta>۰ \quad \ni ۰<a-۱<\delta \Rightarrow \left|\frac{x^۳-۱}{|x-۱|}-۳\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{x^۳-۱}{|x-۱|}-۳\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{(x-۱)(x^۲+x+۱)}{+(x-۱)}-۳\right|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow |x^۲+x+۱-۳|<\varepsilon \Rightarrow |x^۲+x-۲|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow |(x-۱)(x+۲)|<\varepsilon \Rightarrow |x-۱|\times|x+۲|<\varepsilon$$

حال یک همسایگی محذوف یکطرفه برای عدد ۱ درنظر می‌گیریم با شعاع $r=۱$:

$$\begin{cases} x\to ۱^+ \\ r=۱ \end{cases} \Rightarrow ۱<x<۲$$

سپس کران بالایی برای $|x+۲|$ پیدا می‌کنیم :

$$۱<x<۲ \Rightarrow ۳<x+۲<۴ \Rightarrow ۳<|x+۲|<۴$$

عدد (۴) یک کران بالای $|x+۲|$ در بازهٔ $۱<x<۲$ می‌باشد.

اگر $|x-۱|\times ۴<\varepsilon \Rightarrow |x-۱|\times|x+۲|<\varepsilon$

$$\Rightarrow |x-۱|\times ۴<\varepsilon \Rightarrow \underset{x\to ۱^+}{|x-۱|}<\frac{\varepsilon}{۴} \Rightarrow ۰<x-۱<\frac{\varepsilon}{۴}$$

$$\Rightarrow \delta \le Min\left\{۱,\frac{\varepsilon}{۴}\right\}$$

مسألهٔ (۶): با استفاده از تعریف، ثابت کنید :

$$\lim_{x\to ۱^-}\frac{x^۳-۱}{|x-۱|}=-۳$$

حل: باید ثابت کنیم :

$$\forall\varepsilon>۰ \quad \exists\delta>۰ \quad \ni ۰<۱-x<\delta \Rightarrow \left|\frac{x^۳-۱}{|x-۱|}+۳\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{\cancel{(x-۱)}(x^۲+x+۱)}{-\cancel{(x-۱)}}+۳\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|-(x^۲+x+۱)+۳\right|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|x^۲+x+۱-۳\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|x^۲+x-۲\right|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow |(x-۱)(x+۲)|<\varepsilon \Rightarrow |x-۱|\times|x+۲|<\varepsilon$$

حال یک همسایگی محذوف یکطرفه برای عدد ۱ در نظر می‌گیریم : $r=۱$

$$\begin{cases} x\to ۱^- \\ r=۱ \end{cases} \Rightarrow ۰<x<۱ \Rightarrow ۲<x+۲<۳$$

$$\Rightarrow ۲<|x+۲|<۳$$

یک کران بالای $|x+۲|$ برابر ۳ است.

اگر $|x-۱|\times ۳<\varepsilon \Rightarrow |x-۱|\times|x+۲|<\varepsilon$

$$\Rightarrow |x-۱|\times ۳<\varepsilon \Rightarrow |x-۱|<\frac{\varepsilon}{۳} \Rightarrow \delta \le Min\left\{۱,\frac{\varepsilon}{۳}\right\}$$

تمرین: با استفاده از تعریف، ثابت کنید :

$$۱)\ \lim_{x\to ۲^+}\frac{x^۳-۸}{|x-۲|}=۱۲ \qquad ۲)\ \lim_{x\to ۲^-}\frac{x^۳-۸}{|x-۲|}=-۱۲$$

قضیه: تابع f در نقطهٔ a حد دارد ؛ اگر و تنها اگر حدّ راست و حدّ چپ در نقطهٔ a موجود و با هم برابر باشند.

تمرین: با استفاده از تعریف، ثابت کنید :

$$۱)\ \lim_{x\to ۲^+}\frac{x+۴}{\lfloor -x\rfloor-۳}=-۱ \qquad ۲)\ \lim_{x\to ۱}\frac{۴x-۱}{۵x-۳}=\frac{۳}{۲}$$

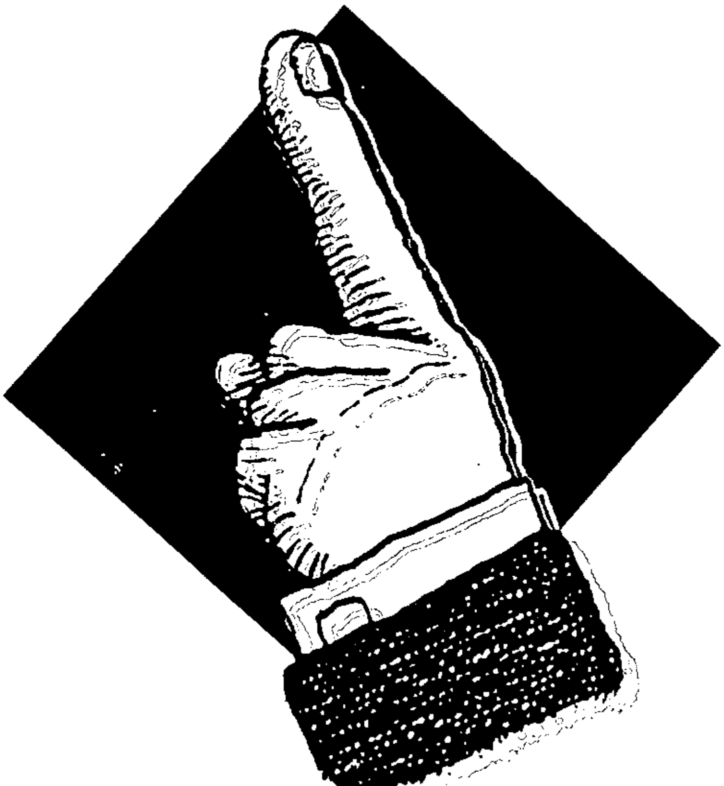
$$۳)\ \lim_{x\to ۳}(x^۲-۱۰x)=-۲۱ \qquad ۴)\ \lim_{x\to ۱}\sqrt{x^۲-۳x+۴}=\sqrt{۲}$$

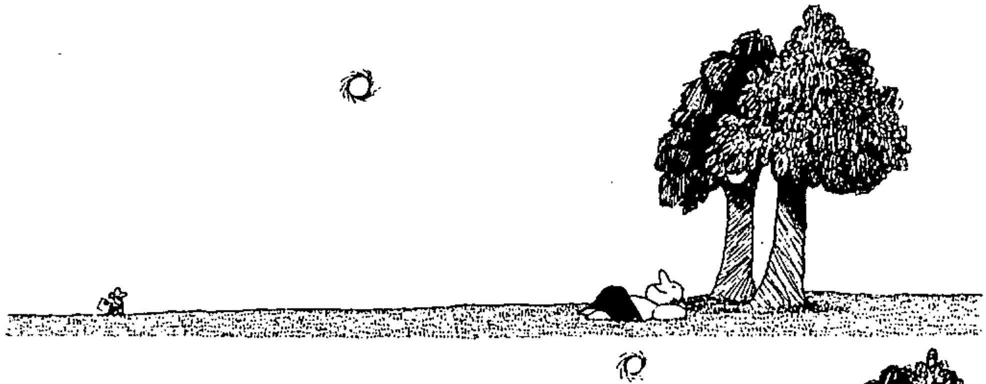
$$۵)\ \lim_{x\to ۲^+}\sqrt{x-۲}=۰ \qquad ۶)\ \lim_{x\to ۵^-}\sqrt{۵-x}=۰$$

یادداشتها :

۱ـ کلیهٔ عددها و بازه‌های مورد بحث، حقیقی‌اند.

۲ـ عدد N حرف اوّل کلمهٔ Neighbourhood است که به معنای همسایگی است.

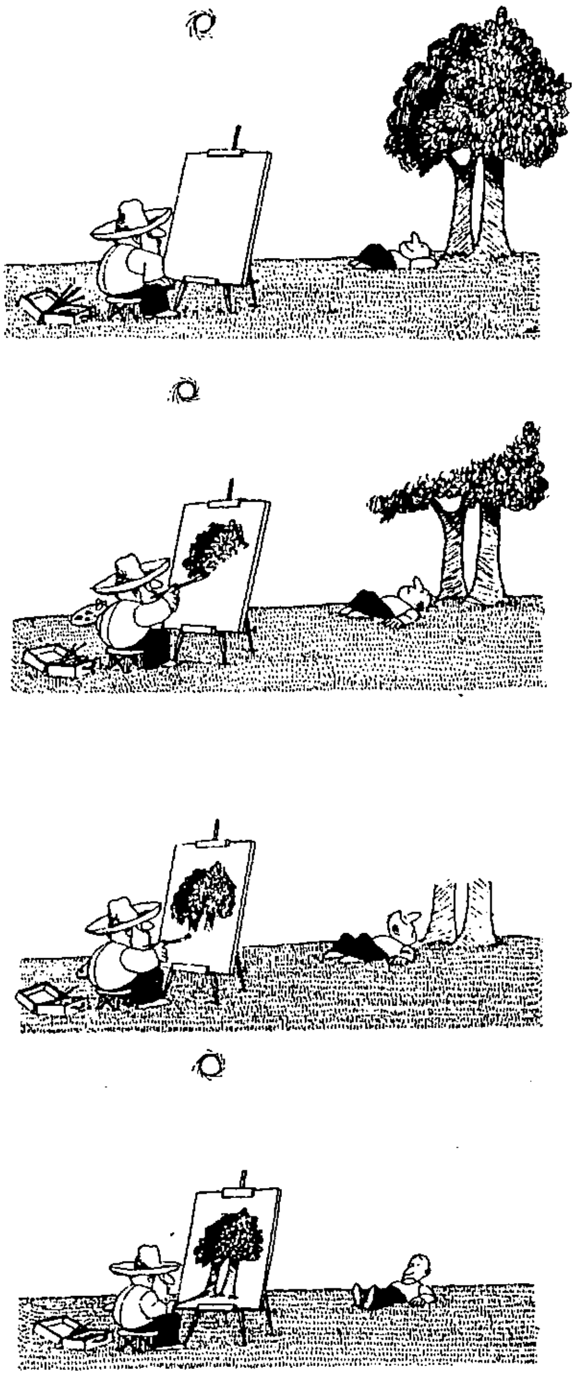




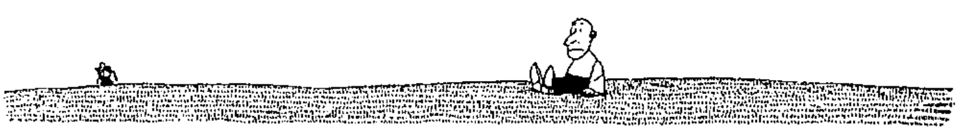
رشد و زوال

(دانش آموزان دورهٔ پیش دانشگاهی، رشته های ریاضی و تجربی)

● میرشهرام صدر



در این مقاله، یکی از کاربردهای مشتق و تابع نمایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای این منظور، کمیّتهایی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم که در حال افزایش (رشد) یا کاهش (زوال) هستند و آهنگ تغییرات آنها (رشد یا زوال) نسبت به زمان، متناسب با مقدار کمیّت اوّلیه است. برای مثال، اگر پول خود را نزدِ یکی از بانکها برای سرمایه‌گذاری بلندمدت، سپرده‌گذاری کنید پس از گذشت زمانی، مقدار پول افزایش (رشد) می‌یابد و متناسب با مقدار پول اوّلیه است. امّا در هر مادهٔ رادیواکتیو، بعد از مدتی، نصف اتمهای رادیواکتیو موجود در آن، متلاشی (زوال) می‌شود و این مدّت زمان را **نیمه عمر** مادهٔ رادیواکتیو گوییم. برای مثال، «رادیم» دارای نیمه عمر ۱۶۲۰ سال است؛ یعنی اگر هم اکنون یک گرم رادیم داشته باشیم، پس از گذشت ۱۶۲۰ سال، فقط ۰/۵ گرم آن فعّال باقی می‌ماند و پس از گذشت ۱۶۲۰ سال دیگر، تنها ۰/۲۵ گرم رادیم فعّال داریم. بنابراین، اگر زمان را با t واحد نمایش دهیم



و اندازهٔ کمیّت موجود در هر زمان ؛ A واحد باشد، آن‌گاه با فرض این که kعدد ثابتی است، آهنگ تغییرات کمیّت A نسبت به زمان t یعنی $\frac{dA}{dt}$ متناسب با مقدار A است ؛ پس داریم :

$$\frac{dA}{dt} = kA \qquad (۱)$$

اگر در حالی که t افزایش می‌یابد، به A افزوده شود، آن‌گاه $k > ۰$ و **قانون رشد طبیعی** برقرار است. اگر در حالی که t افزایش می‌یابد، A کاهش یابد، آن‌گاه $k < ۰$ و **قانون زوال طبیعی** برقرار است.

اکنون با توجه به رابطهٔ (۱) به دنبال معادله‌ای هستیم که به کمک آن، بتوان کمیّت Aرا در زمان t به دست آورد ؛ یعنی باید کمیّت A را برحسب t به دست آوریم. برای این‌منظور، نیازمند ابزار جدیدی به نام **انتگرال نامعین** هستیم ؛ بنابراین ابتدا، انتگرال نامعین را تعریف می‌کنیم و سپس به کمک آن، معادله‌ای با توجه به رابطهٔ (۱) به دست می‌آوریم که کمیّت A را درزمان t مشخص کند.

تابع اوّلیه (انتگرال معین)

تابع مشتق‌پذیر با ضابطهٔ $F(x) = x^۲ + ۳x + ۱$ را درنظر بگیرید. می‌دانیم مشتق این تابع به صورت زیر است :

$$F'(x) = ۲x + ۳$$

اکنون بنا به تعریف تابع باضابطهٔ $F(x) = x^۲ + ۳x + ۱$ را تابع اوّلیه (انتگرال نامعین) برای تابع با ضابطهٔ $f(x) = ۲x + ۳$ می‌نامند.

به همین ترتیب، اگر تابع با ضابطهٔ $G(x) = x^۲ + ۳x + ۵$ را درنظر بگیریم، خواهیم داشت :

$$G'(x) = ۲x + ۳$$

یعنی تابع با ضابطهٔ $G(x) = x^۲ + ۳x + ۵$ نیز یک تابع اوّلیه (انتگرال نامعین) برای تابع با ضابطه $f(x) = ۲x + ۳$ است. در نتیجه، اگر C یک عدد ثابت دلخواه باشد، هر تابع با ضابطهٔ $F(x) = x^۲ + ۳x + C$ تابع اوّلیه یا انتگرال نامعین تابع با ضابطهٔ $f(x) = ۲x + ۳$ است. در این حالت می‌نویسیم :

$$\int(۲x + ۳)dx = x^۲ + ۳x + C$$

و می‌خوانیم انتگرال نامعین تابع باضابطهٔ $f(x) = ۲x + ۳$ برابر تابع باضابطهٔ $F(x) = x^۲ + ۳x + C$ است.

تعریف. اگر f تابعی باشد که در بازه‌ای شامل فاصلهٔ $[a, b]$ تعریف شده باشد، آن‌گاه F را **تابع اوّلیه یا انتگرال نامعین** تابع f می‌نامند ؛ در صورتی که برای هر $x \in [a, b]$، داشته باشیم :

$$F'(x) = f(x)$$

تابع اوّلیه f را به صورت $\int f(x)dx$ نمایش می‌دهیم.

با توجه به تعریف بالا، اگر تابع F(x) یک تابع اوّلیه (انتگرال نامعین) برای تابع f(x) باشد، یعنی داشته باشیم : $F'(x) = f(x)$ و C یک عدد ثابت دلخواه باشد، چون مشتق تابع ثابت، برابر صفر است، آن‌گاه تابع $F(x) + C$ نیز تابع اوّلیه (انتگرال نامعین) برای تابع f(x) است ؛ بنابراین هر تابع که تابع اوّلیه (انتگرال نامعین) داشته باشد، بی‌شمار تابع اوّلیه دارد و در این حالت، تابع اوّلیه یا انتگرال نامعین تابع f(x) با تقریب یک عدد ثابت، به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

مثال ۱. تابع با ضابطه $F(x) = kx$، $(k \in \mathbb{R})$ را درنظر می‌گیریم ؛ چون $F'(x) = k$، بنابراین داریم :

$$\int kdx = kx + C$$

مثال ۲. تابع با ضابطهٔ $F(x) = \sin x$ را درنظر می‌گیریم ؛ چون $F'(x) = \cos x$، بنابراین داریم :

$$\int \cos xdx = \sin x + C$$

مثال ۳. تابع باضابطهٔ $F(x) = \frac{۱}{a}e^{ax}$، $(a \neq ۰)$ را درنظر می‌گیریم ؛ چون $F'(x) = e^{ax}$، بنابراین داریم :

$$\int e^{ax}dx = \frac{۱}{a}e^{ax} + C$$

مثال ۴. تابع با ضابطهٔ $F(x) = Ln|x|$ را درنظر می‌گیریم ؛ چون $F'(x) = \frac{۱}{x}$، بنابراین داریم :

$$\int \frac{1}{x}dx = \mathrm{Ln}|x| + C$$

اکنون در ادامهٔ بحث رشد و زوال، با استفاده از انتگرال نامعین و مثالهای بالا، کمیّت A را برحسب t از رابطه $\frac{dA}{dt}=kA$ به دست می‌آوریم :

$$\frac{dA}{dt}=kA \Rightarrow \frac{dA}{A}=kdt$$ (متغیرها از هم جدا شده‌اند)

$$\Rightarrow \int\frac{dA}{A}=\int kdt \Rightarrow \mathrm{Ln}|A| = kt + C_1$$

در نتیجه داریم :

$$|A| = e^{kt+C_1}$$

چون $A>0$ ، بنابراین :

$$A = e^{kt}\times e^{C_1}$$

با فرض این که $C=e^{C_1}$ خواهیم داشت :

$$A = Ce^{kt}$$

با توجه به رابطهٔ بالا، ملاحظه می‌کنیم که توانستیم A را برحسب t به دست آوریم و پس از این، در حلّ مسائل رشد و زوال، از این فرمول استفاده می‌کنیم.

مثال ۵. آهنگ افزایش طبیعی جمعیت شهری، متناسب با جمعیت آن شهر است. اگر در طی چهل سال، جمعیت از ۴۰۰۰۰ نفر به ۶۰۰۰۰ نفر افزایش یابد، چه موقع جمعیت به ۸۰۰۰۰ نفر می‌رسد؟

حل. فرض کنیم فاصلهٔ زمانی از آغاز t سال باشد. تعداد افراد جامعه در سال t ام را با A نمایش داده و معادلهٔ زیر، تعداد افراد جامعه را در سال t ام نشان می‌دهد :

$$A = Ce^{kt}$$

شرایط اولّیه، درجدول زیر مشخص شده است :

t	۰	۴۰	T
A	۴۰۰۰۰	۶۰۰۰۰	۸۰۰۰۰

در حالتی که $t=0$ و $A=40000$ خواهیم داشت :

$$40000 = Ce^{0} \Rightarrow C = 40000 \Rightarrow A = 40000e^{kt} \qquad (1)$$

از این شرط که $t=40$ و $A=60000$ نتیجه می‌شود که :

$$60000 = 40000e^{40k} \Rightarrow e^{40k} = \frac{3}{2} \Rightarrow k = \frac{1}{40}\mathrm{Ln}\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow k = \mathrm{Ln}\sqrt[40]{\frac{3}{2}}$$

با قرار دادن مقدار k در معادلهٔ (۱) داریم :

$$A = 40000e^{\mathrm{Ln}\sqrt[40]{\frac{3}{2}}t}$$

اگر در این معادله قرار دهیم $t=T$ و $A=80000$ ، نتیجه می‌شود که :

$$80000 = 40000e^{\mathrm{Ln}\sqrt[40]{\frac{3}{2}}T} \Rightarrow \mathrm{Ln}\sqrt[40]{\frac{3}{2}}T = \mathrm{Ln}2$$

$$\Rightarrow T = \frac{\mathrm{Ln}2}{\mathrm{Ln}\sqrt[40]{\frac{3}{2}}} \approx 68/38$$

بنابراین پس از گذشت ۶۸ سال و در سال شصت و نهم از لحظهٔ شروع، جمعیت این جامعه به ۸۰۰۰۰ نفر می‌رسد.

مثال ۶. در کشت معینی، آهنگ رشد تعداد باکتری، متناسب با تعداد باکتری موجود است، اگر تعداد باکتریها پس از گذشت ۳ ساعت، سه برابر شود و در پایان ۱۲ ساعت، تعداد آنها ۱۰ میلیون شود، در این صورت، چند باکتری در آغاز داشته‌ایم.

حل. شرایط اولّیه، در جدول زیر مشخص شده است :

t	۰	۳	۱۲
A	x	۳x	10^7

$$A = Ce^{kt}$$

در حالتی که $t=0$ و $A=x$ داریم :

$$x = Ce^{0} \Rightarrow C = x \Rightarrow A = xe^{kt}$$

در حالتی که $t=3$ و $A=3x$ ، نتیجه می‌شود که :

$$3x = xe^{3k} \Rightarrow 3 = e^{3k} \Rightarrow k = \frac{1}{3}\mathrm{Ln}3 = \mathrm{Ln}\sqrt[3]{3}$$

در حالتی که $t=12$ و $A=10^7$ ، خواهیم داشت :

$$۱۰^{۷} = xe^{۱۲ Ln \sqrt[۳]{۳}} \Rightarrow ۱۰^{۷} = xe^{Ln ۳^{۴}}$$

$$\Rightarrow x = \frac{۱۰^{۷}}{۳^{۴}} \approx ۱۲۳۴۵۷$$

مثال ۷. فرض کنید بهای یک گلدان عتیقه، با قدمت آن افزایش می‌یابد و آهنگ رشد بهای آن در هر زمان، متناسب با بهایش در همان زمان باشد. اگر بهای گلدان عتیقه در ده سال پیش ۲۵۰۰۰۰ تومان و بهای آن در حال حاضر ۳۵۰۰۰۰ تومان باشد، انتظار می‌رود در ۳۰ سال بعد، بهای گلدان عتیقه چه‌قدر باشد؟

شرایط اولّیه، در جدول زیر مشخص شده است :

t	۰	۱۰	۳۰
A	۲۵۰۰۰۰	۳۵۰۰۰۰	x

$$A = Ce^{kt}$$

در حالتی که $t = ۰$ و $A = ۲۵۰۰۰۰$، داریم :

$$۲۵۰۰۰۰ = Ce^{۰} \Rightarrow C = ۲۵۰۰۰۰ \Rightarrow A = ۲۵۰۰۰۰e^{kt}$$

در حالتی که $t = ۱۰$ و $A = ۳۵۰۰۰۰$ ، نتیجه می‌شود که :

$$۳۵۰۰۰۰ = ۲۵۰۰۰۰e^{۱۰k} \Rightarrow \frac{۷}{۵} = e^{۱۰k}$$

$$\Rightarrow k = \frac{۱}{۱۰} Ln \frac{۷}{۵} = Ln \sqrt[۱۰]{\frac{۷}{۵}}$$

در حالتی که $t = ۳۰$، خواهیم داشت :

$$A = ۲۵۰۰۰۰e^{۳۰ Ln \sqrt[۱۰]{\frac{۷}{۵}}} \Rightarrow A = ۲۵۰۰۰۰ \times (\frac{۷}{۵})^{۳}$$

$= ۶۸۶۰۰۰$ تومان

مثال ۸. طبق قانون نیوتن، برای کاهش دما در یک جسم، آهنگ تغییر دمای هر جسم، متناسب با اختلاف دمای جسم و دمای محیط اطراف آن است. اگر جسمی در هوای با دمای ۳۵ درجه باشد و طی ۴۰ دقیقه، دمای جسم از ۱۲۰ درجه به ۶۰ درجه برسد، دمای آن پس از ۱۲۰ دقیقه چه‌قدر است؟

حل. فرض کنیم از زمانی که جسم شروع به سرد شدن می‌کند، t دقیقه گذشته باشد و فرض کنیم دمای جسم در دقیقه t ام، A درجه باشد، چون آهنگ تغییر دما در جسم، متناسب با اختلاف دمای جسم و دمای محیط اطراف آن است، داریم :

$$(I) \quad \frac{dA}{dt} = k(A - ۳۵)$$

($(A - ۳۵)$ همان اختلاف دمای جسم و دمای محیط اطراف آن است.)

شرایط اولیه، در جدول زیر مشخص شده است :

t	۰	۴۰	۱۲۰
A	۱۲۰	۶۰	x

اگر در رابطهٔ (I) متغیرها از هم جدا شوند، داریم :

$$\frac{dA}{(A - ۳۵)} = kdt \Rightarrow \int \frac{dA}{(A - ۳۵)} = \int kdt$$

$$\Rightarrow Ln|A - ۳۵| = kt + C_{۱}$$

$$\Rightarrow |A - ۳۵| = e^{kt + C_{۱}}$$

چون $A - ۳۵ > ۰$ ، داریم :

$$A - ۳۵ = e^{kt} \times e^{C_{۱}}$$

با فرض $C = e^{C_{۱}}$ خواهیم داشت :

$$A = Ce^{kt} + ۳۵$$

در حالتی که $t = ۰$ و $A = ۱۲۰$ ، نتیجه می‌شود :

$$۱۲۰ = Ce^{۰} + ۳۵ \Rightarrow C = ۸۵ \Rightarrow A = ۸۵e^{kt} + ۳۵$$

در حالتی که $t = ۴۰$ و $A = ۶۰$ ، داریم :

$$۶۰ = ۸۵e^{۴۰k} + ۳۵ \Rightarrow e^{۴۰k} = \frac{۵}{۱۷}$$

$$\Rightarrow k = \frac{۱}{۴۰} Ln \frac{۵}{۱۷} = Ln \sqrt[۴۰]{\frac{۵}{۱۷}}$$

در حالتی که $t = ۱۲۰$، داریم :

$$A = ۸۵e^{۱۲۰ Ln \sqrt[۴۰]{\frac{۵}{۱۷}}} + ۳۵ = ۸۵ \times (\frac{۵}{۱۷})^{۳} + ۳۵ = ۳۷/۱۶^{\circ}$$

مثال ۹. اگر سود با نرخ سالیانه ۸ درصد و به‌طور پیوسته محاسبه شود، پس از چه مدت، ۵۰۰۰ تومان سپرده به ۱۰۰۰۰ تومان افزایش می‌یابد؟

$$k = ۰/۰۸ \Rightarrow A = Ce^{۰/۰۸t}$$

شرایط اوّلیه، در جدول زیر آمده است :

t	۰	T
A	۵۰۰۰	۱۰۰۰۰

در حالتی که $t=0$ و $A=5000$ ، داریم :

$$5000=Ce^{0} \Rightarrow C=5000 \Rightarrow A=5000e^{0/08t}$$

در حالتی که $A=10000$ ، خواهیم داشت :

$$10000=5000e^{0/08t} \Rightarrow t=\frac{Ln2}{0/08}=8/66$$

یعنی پس از گذشت هشت سال و در سال نهم، سپرده به ۱۰۰۰۰ تومان می‌رسد.

مثال ۱۰. نیمهٔ عمر فسفر رادیواکتیو ۱۴ روز است. اگر ۲ گرم از این ماده را در محفظه‌ای داشته باشیم، پس از ۲۸ روز، چه‌مقدار از آن فعّال باقی می‌ماند.

حل. شرایط اوّلیه، در جدول زیر مشخص شده است :

t	۰	۱۴	۲۸
A	۲	۱	x

$$A=Ce^{kt}$$

در حالتی که $t=0$ و $A=2$ ، داریم :

$$2=Ce^{0} \Rightarrow C=2 \quad ; \quad A=2e^{kt}$$

در حالتی که $t=14$ و $A=1$ ، نتیجه می‌شود که :

$$1=2\times e^{14k} \Rightarrow k=\frac{1}{14}Ln\frac{1}{2}=Ln\sqrt[14]{\frac{1}{2}}$$

در حالتی که $t=28$ ، خواهیم داشت :

$$A=2\times e^{Ln\sqrt[14]{\frac{1}{2}}\times 28}=2e^{28Ln\sqrt[14]{\frac{1}{2}}}=2e^{Ln(\frac{1}{2})^{2}}$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{2}=0/5$$

یعنی پس از ۲۸ روز، ۰/۵ گرم فسفر رادیواکتیو فعال داریم.

مسائل برای حل

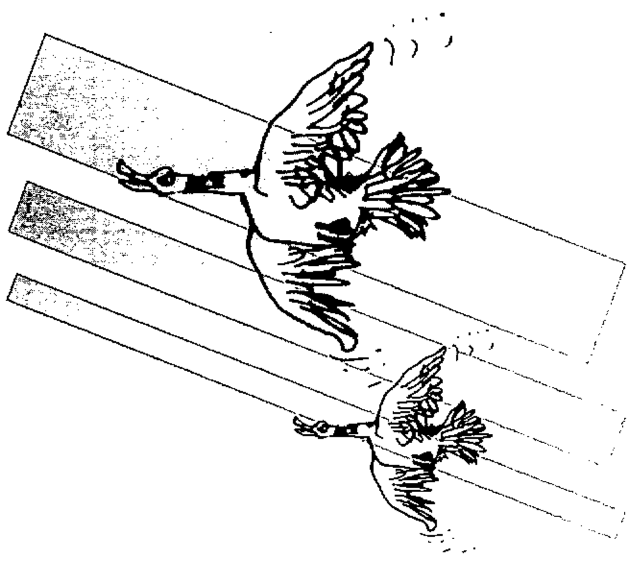
۱. آهنگ افزایش جمعیت شهر معینی، متناسب با جمعیت شهر است. اگر جمعیت در سال ۱۳۴۰ ، ۵۰۰۰۰ نفر و در سال ۱۳۷۰ ، ۷۵۰۰۰ نفر بوده باشد، جمعیت مورد انتظار در سال ۲۰۰۰ چند نفر است؟

۲. در کشت معینی، آهنگ رشد تعداد باکتری متناسب با تعداد باکتری موجود است. اگر در آغاز ۱۰۰۰ باکتری وجود داشته باشد و تعداد باکتریها در هر ۱۲ دقیقه، دو برابر شود، پس از گذشت چه مدت، تعداد باکتریها به 10^{6} می‌رسد؟

۳. در هر زمان، آهنگ واپاشی رادیم متناسب با مقدار موجود آن است. اگر اکنون ۶۰ میلیگرم رادیم داشته باشیم و نیمهٔ عمر آن ۱۶۹۰ سال باشد، ۱۰۰ سال دیگر چقدر رادیم خواهیم داشت؟

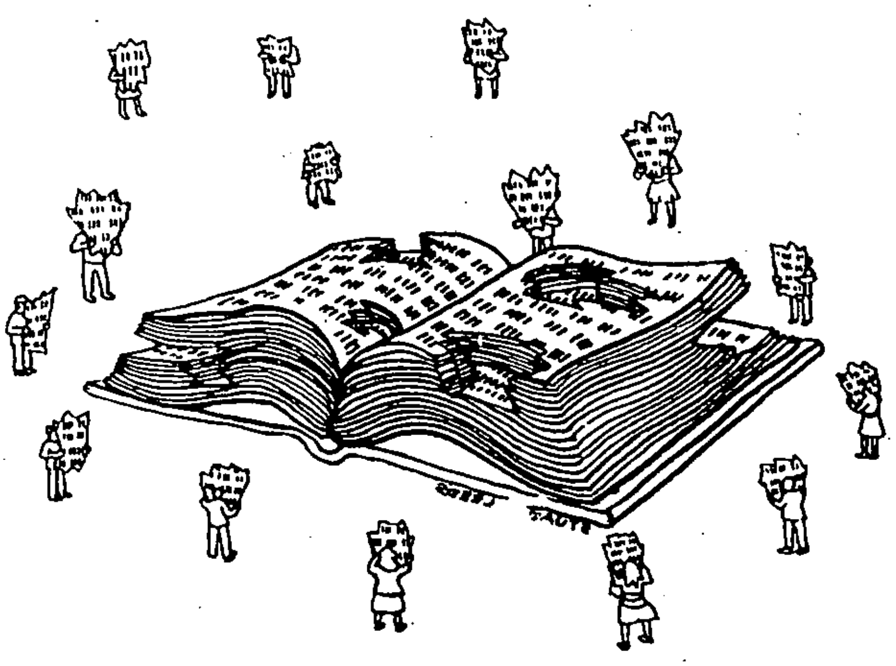
۴. پس از این که وسیله‌ای یک سال کار کند، در هر زمان، آهنگ استهلاک آن، متناسب با بهای همان وسیله در آن زمان است. اگر وسیله‌ای در اوّل فروردین ۱۳۶۹ خریداری شده باشد و بهای آن در اوّل فروردین ۱۳۷۰ ، ۷۰۰۰۰۰ تومان و در اوّل فروردین ۱۳۷۱ ، ۵۸۰۰۰۰ تومان بوده باشد، بهای مورد انتظار آن وسیله در اوّل فروردین ۱۳۷۵ چه‌قدر است؟

۵. اگر دمای جسمی در هوایی که دمای آن ۰ درجه است، طی ۴۰ دقیقه از ۲۰۰ درجه به ۱۰۰ درجه برسد، با استفاده از قانون نیوتن، برای سرد شدن (تمرین حل شدهٔ «۳») تعیین کنید که پس از چند دقیقهٔ دیگر، دمای آن به ۵۰ درجه می‌رسد؟



گشت و گذاری در
ریاضیات معاصر

• تهیه و تنظیم: غلامرضا یاسی پور



مقدمه: آغاز هزارهٔ سوّم و ابتدای قرن بیست و یکم میلادی، یعنی، سال ۲۰۰۰، برابر با یازدهم دیماه ۱۳۷۸ تا دهم دیماه ۱۳۷۹ را سال جهانی ریاضیات نام نهاده‌اند، و این اهمیت ریاضیات را در دنیایی که با هزارهٔ سوّم آغاز می‌شود نشان می‌دهد، ریاضیاتی که هدفِ ساختنِ نه تنها رایانه‌های هرچه پیشرفته‌تر را دارد که بر سرِ ابداع ماشینهای متفکر است و از قعر گل سیاه تا اوج زحل را درنوردیده.

مقاله‌هایی که از این شماره به بعد، تحت عنوان **گشت و گذاری در ریاضیات معاصر** منتشر می‌شود، با توجه به این نقش حیاتی ریاضیات در زندگی انسانها، و به توصیهٔ هیأت تحریریهٔ **مجلهٔ برهان** و برای آشنایی هرچه بیشتر خوانندگان این مجله، تهیه و تنظیم شده‌اند.

مقاله‌ها به سفارش هیأت تحریریهٔ مجله، کوتاه ؛ اما بسیار دقیق هستند و آشنایی مختصری به خوانندهٔ علاقه‌مند به ریاضیات می‌دهند و مطالب آنها با استفاده از دایرهٔ المعارف فشردهٔ ریاضیات نوشتهٔ ریاضیدانهای آلمانی تهیه و تنظیم شده‌اند.

* * *

رمزگذاری

از دوران باستان تا عصر حاضر، پیامهای سری بسیاری ارسال شده است، و نیاز به ارتباطهای مخفیانه، به طور سنتی، در موارد سیاسی و نظامی بسیاری رخ داده است.

* امروزه، مسألهٔ پیامهای سری، با به میان آمدن کاربردهای وسیعی از ارتباطهای الکترونیکی، حتی در مورد مذاکرات مالی نیز ضروری شده است. در نتیجه علاقهٔ بسیاری به روشهایی وجود دارد که پیامها را برای هر کس، غیر از دریافت کنندهٔ مورد نظر نامفهوم کند.

یکی از دستگاه‌های رمزی، مبتنی بر مسألهٔ پشت‌واره است، صورت این مسأله چنین است :

* با معلوم بودن مجموعه اعداد صحیح و مثبت a_1 تا a_n، و عدد صحیح S، مشخص کنید که کدامیک از عددهای مزبور، با جمع شدن با یکدیگر، S را به دست می‌دهند.

رایانه‌کاران نشان داده‌اند که رمزهای پشت واره‌ای، برای رمزنگاریِ کلید همگانی رضایت‌بخش نیستند.

* * *

مجموعه‌های هم توان

دو مجموعهٔ S و T را هم‌توان گویند اگر نگاشت دوسویی از S به T موجود باشد. عدد اصلی، رده‌ای از مجموعه‌های هم‌توان با مجموعه‌ای مفروض است. اعداد اصلیِ مجموعه‌های متناهی به اعداد طبیعی موسومند، و اعداد اصلی مجموعه‌های نامتناهی را

ترامتناهی می‌نامیم.

* در این صورت، و با توجه به تعاریف مربوطه، نمی‌توان با خانوادهٔ جمیع مجموعه‌ها، یا حتی با خانوادهٔ جمیع مجموعه‌های هم‌توان با مجموعه‌ای مفروض سر و کار داشت؛ زیرا این کار به پارادوکس راسل منجر می‌شود.

* برای اجتناب از این وضع، معمولاً تعریف مربوطه را به خانوادهٔ Fای محدود می‌کنیم که حتی‌الامکان بزرگ و ضروری باشد.

در این حالت، اعداد اصلی، خودِ مجموعه یعنی، خانوادهٔ مجموعه‌ها هستند، گرچه ممکن است بعدها گسترش دادن خانوادهٔ F ضروری شود.

* * *

فرض پیوستار

فرض پیوستار، بر این است که مجموعه‌ای نامتناهی از اعداد حقیقی یا شماراست یا عدد اصلی N را داراست.

در ۱۹۶۴ کوهن ثابت کرد که، اثبات فرض پیوستار، با استفاده از اصول موضوع مجموعه ـ نظری استاندارد، غیرممکن است.

* پیش از این، در ۱۹۳۸، گودل نشان داده بود که فرض پیوستار این اصول موضوع را نقض نمی‌کند.

این دو نتیجه، با هم نشان می‌دهند که فرض پیوستار از سایر اصول موضوع مجموعه ـ نظری مستقل است.

* اما خود پیوستار چیست؟ طبق تعریف، عدد اصلیِ مجموعهٔ اعداد حقیقی به عدد اصلیِ پیوستار موسوم است و با N یا C نمایش داده می‌شود.

عدد اصلیِ مجموعهٔ اعدادِ حقیقی، در بازهٔ باز (۱ , ۰) نیز N است؛ زیرا این بازه به طور دوسویی به مجموعهٔ جمیع اعداد حقیقیِ نگاشت می‌یابد.

* * *

قضیهٔ خوش ترتیبی

یکی از قضایای نظریهٔ مجموعه‌ها، قضیهٔ خوش ترتیبی است. این قضیه چنین است: بر هر مجموعهٔ S رابطه‌ای موجود است که تحت آن S خوش ترتیب است. کانتور این قضیه را به عنوان یکی از اصول تفکر در نظر گرفته، آن را به ترتیبی که خواهیم گفت معقول کرده بود، این ترتیب چنین است:

* عنصر دلخواه a. ی را از S اختیار می‌کنیم، سپس عنصر دومی، و همین‌طور الی آخر. اگر S نامتناهی باشد، دنبالهٔ

$$a_0, a_1, \ldots$$

را به دست می‌آوریم. اکنون یا S به اتمام رسیده است یا نه؛ اگر نه، فرآیند مزبور را تا زمانی که برای به اتمام رسیدن مجموعهٔ مورد بحث، لازم است ادامه می‌دهیم.

* اگر S توسط دنباله‌ای که عناصر مورد بحث در آن انتخاب شده‌اند مرتب شده باشد، در این صورت، هر زیر مجموعه دارای یک کوچکترین عنصر است؛ یعنی عنصری که ابتدا انتخاب شده است.

* * *

منطق ریاضی

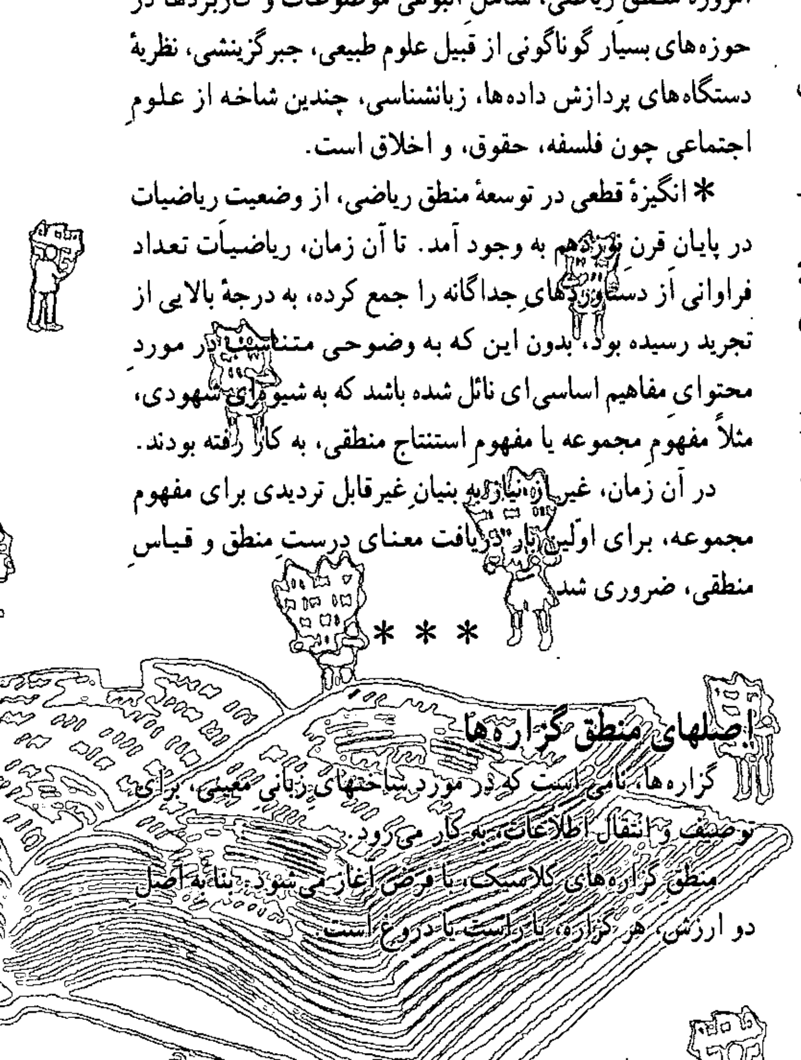
یکی از کارهای اصلیِ منطق ریاضی، بررسیِ تفکرِ صوری و استنتاج به کمکِ روشهای ریاضیِ مثلاً گرفته شده از جبر یا نظریهٔ الگوریتمهاست.

* اما این کار، که آغاز در فلسفه دارد، تنها کار آن نیست؛ امروزه منطق ریاضی، شاملِ انبوهی موضوعات و کاربردها در حوزه‌های بسیار گوناگونی از قبیل علوم طبیعی، جبرگزینشی، نظریهٔ دستگاه‌های پردازش داده‌ها، زبانشناسی، چندین شاخه از علومِ اجتماعی چون فلسفه، حقوق، و اخلاق است.

* انگیزهٔ قطعی در توسعهٔ منطق ریاضی، از وضعیت ریاضیات در پایان قرن نوزدهم به وجود آمد. تا آن زمان، ریاضیات تعداد فراوانی از دستاوردهای جداگانه را جمع کرده، به درجهٔ بالایی از تجرید رسیده بود، بدون این که به وضوحی متناسب در موردِ محتوای مفاهیم اساسی‌ای نائل شده باشد که به شیوه‌ای شهودی، مثلاً مفهومِ مجموعه یا مفهومِ استنتاج منطقی، به کار رفته بودند.

در آن زمان، غیر از نیاز به بنیانِ غیرقابل تردیدی برای مفهوم مجموعه، برای اولین بار دریافت معنای درستِ منطق و قیاسِ منطقی، ضروری شد.

* * *



اصلهای منطق گزاره‌ها

گزاره‌ها، نامی است که در موردِ ساختهای زبانی معینی، برای توصیف و انتقال اطلاعات، به کار می‌رود.

منطق گزاره‌های کلاسیک، با فرض آغاز می‌شود. بنا به اصل دو ارزشی، هر گزاره، یا راست است یا دروغ است

مفهومِ راستی یا صدق به کار رفته در این جا، که به ارسطو بازمی‌گردد، گزاره را در صورتی راست در نظر می‌گیرد که اظهار بیان شده با آن متناظر با حقیقتی باشد.

* اصل دو ارزش مورد بحث، در واقع دربرگیرندهٔ دو اصلِ زیر است: اصل اوّل، اصل طرد اوسط است که به موجب آن، هر گزاره راست یا دروغ است. اصل دوم، اصل طردِ تناقض است که بنا بر آن، گزاره‌ای وجود ندارد که هم راست، هم دروغ باشد.

* بنابراین، ردهٔ جمیع گزاره‌ها به دو زیر ردهٔ مجزا تقسیم می‌شود، که با نمادهای ۱ یا راست و ۰ یا دروغ نمایش داده و ارزش راستی نامیده می‌شوند، ارزشهای راستی مزبور را با T و F نیز نمایش می‌دهند.

* * *

رابطهای منطق گزاره‌ها

گزاره‌های منطق کلاسیک را می‌توان به کمک ادواتِ زبانی‌ای از قبیل نه، و، یا، و غیره به گزاره‌های پیچیده‌تر ترکیب کرد.

* بنا به دومین اصل اساسی، یعنی اصل توسیع، ارزش راستی یک گزارهٔ مرکب، منحصراً توسط ارزشهای راستیِ مؤلفه‌های آن معین می‌شود و به معنای آنها بستگی ندارد.

در نتیجه، چنین ترکیباتی را می‌توان به صورت توابعی در نظر گرفت که ارزشهای راستی را به n تایی‌های ارزشهای راستی، تخصیص می‌دهند.

* ادواتِ رابطیِ اغلب به کار رونده در منطق گزاره‌ها، متناظر با توابع ارزشِ نه، متناظر با اداتِ نه، تابع ارزش و، متناظر با اداتِ و، تابع ارزشِ یا، متناظر با اداتِ یا، تابع ارزش اگر ... آنگاه ... متناظر با همین ادات و تابع ارزش اگر و تنها اگر، متناظر با اداتِ اگر و تنها اگر است.

کارِ منطق گزاره‌ها عبارت است از: تحلیلِ ریاضیِ این مفاهیم، که برایِ این منظور در چهارچوبِ حسابی به نام حسابِ گزاره‌ها، فرمول بندی می‌شوند.

* * *

منطق و زبان ریاضی

عبارتهای حسابِ گزاره‌ها برای تنظیمِ حقایقِ رخ دهنده در ریاضیات کافی نیستند؛ ترجمهٔ فرمول‌بندی شده‌ای از زبان ریاضی، باید به طور قابل ملاحظه‌ای غنی‌تر باشد. در این مورد یکی از صورتهای خاص، استفادهٔ مکرّر از متغیرها و نمادهای مخصوص توابع یا رابطه‌هاست.

* متغیرها، نمادهای از پیش تخصیص یافته‌ای هستند که اشیای دلخواهِ حوزه‌ای قبلاً مشخص شده را نمایش می‌دهند. نمادهایی از قبیل ۰ و +، در حوزهٔ اعداد طبیعی، که معنایشان معین است، به ثابت‌ها موسوم‌اند.

ویژگی دیگر زبان ریاضی، امکانِ متغیرهایِ مقید، به کمک سورهای منطقِ محمولی است.

* در عبارتِ «اعداد p و q ای چنان وجود دارند که $2n = p + q$» نمادهای p و q توسط تابعگونِ محمولی ـ منطقیِ «وجود دارد» مقید شده‌اند، در حالی که متغیرِ n آزاد است.

آشکار شده که برای کاربردهایِ متغیرهایِ مقید در ریاضیات، دو عملِ منطقِ محمولیِ «وجود دارد» و «به ازای هر» کافی‌اند. بنابراین زبانهایِ منطقِ محمولی تنها مبتنی بر این نوع متغیرهایِ مقیدند.

* * *

زبانهای محمولی و الگوریتمی

زبانهایِ منطقِ محمولی توصیفی‌اند؛ یعنی عبارتهای چنین زبانهایی روابط رایج در ساختارهای ریاضی را توصیف می‌کنند.

زبانهایِ الگوریتمی، با توسعهٔ پردازش داده‌ها توسطِ ماشینها، اهمیت یافته‌اند. زبانهایِ الگوریتمی، دارای کاربردِ فرمان دادن، راه انداختنِ عملیات و هدایت کردنِ فرایندها هستند. مثالهایی از زبانهایِ الگوریتمیِ به کار رفته در تکنولوژی برنامه‌ریزی عبارتند از: PL1، FORTRAN، COBOL و غیره.

* حتی در زبانهایِ مقدماتی نیز بعضی عناصرِ الگوریتمی وارد شده‌اند: یک جمله را می‌توان به صورت دنباله‌ای از فرمانهایی در نظر گرفت که باید انجام گیرند؛ به عنوان مثال، $(x+1).y$ نمایشگر این دنباله است:

«۱ را با x جمع کن، آن گاه نتیجه را در y ضرب کن.»

* اما ظهور الگوریتمها، در چهارچوب ریاضیات و منطق، به‌صورتِ روشهایی عمومی برای حلِ جمیعِ مسائلِ رده‌ای مفروض، انجام گرفته است.

* * *

الگوریتم و توابع بازگشتی

مفهوم دقیق الگوریتم، شرطی لازم، برای تحقیقِ این پرسش

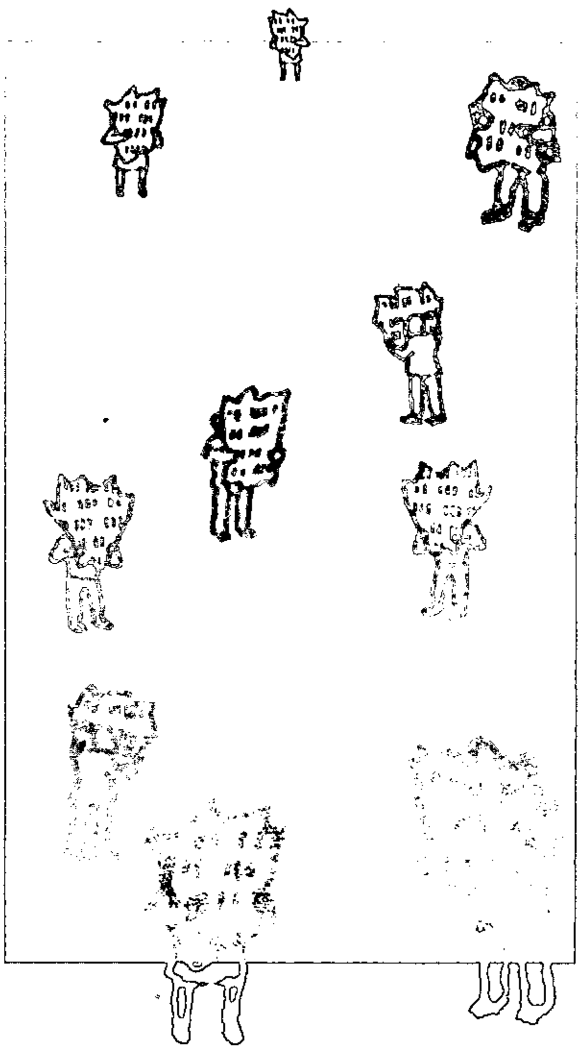
است که آیا مسائل خاصی از لحاظِ الگوریتمی حل‌پذیرند یا خیر؟ پرسشهایی چنین حتی در قرونِ وسطی نیز مورد بحث بودند.

* به عنوانِ مثال، حدودِ ۱۳۰۰ میلادی، ریموندوس لولوس «Raymundus Lullus» اصطلاحِ ایده را مطرح کرد که مقصود از آن روشی عمومی برای یافتنِ جمیعِ حقایق ممکن بود. ایده‌های مزبور زمانی به اوّلین اوجشان رسیدند که لایب نیتس دریافت که مفهومِ دقیقِ ایده شاملِ دو مفهومِ تشخیص و تولید است.

* این اندیشه بعد از لایب نیتس دنبال نشد. یکی از دلایلِ این دنبال نشدن آن بود که هنوز روشهای صوری کردن و تعبیر نمودنِ منطقِ ریاضی، که برای چنین بررسیهایی ضروری‌اند، وجود نداشتند.

در حالِ حاضر، می‌توان به کمک توابع بازگشتی، صورت دقیقِ تشخیص و روش تولید را به دست داد. این مفاهیم، ابتدا برایِ مجموعه‌های اعدادِ طبیعی تعریف شدند.

* * *



تفریح اندیشه ۳

۲ ۲ ۲ ۲ = ۰
۲ ۲ ۲ ۲ = ۱
۲ ۲ ۲ ۲ = ۲
۲ ۲ ۲ ۲ = ۳
۲ ۲ ۲ ۲ = ۴
۲ ۲ ۲ ۲ = ۵
۲ ۲ ۲ ۲ = ۶
۲ ۲ ۲ ۲ = ۱۰
۲ ۲ ۲ ۲ = ۱۲

در هر سطر، بین ارقام ۲ علامتهای + ، − ، × ، : و ( ) را طوری قرار دهید که یک تساوی به دست آید.

● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمه سیمین‌دخت ترکپور

جواب در صفحهٔ ۸۸

نگاهی به
معادله های سیاله

● علی بختیاری

۱. مقدمه و تاریخچه: هندسه و قسمتی از آنچه که امروزه ما آن را تحت عنوان نظریهٔ اعداد می‌شناسیم، از قدیمی‌ترین شاخه‌های ریاضیات محسوب می‌شوند. این قدمت، به چند هزار سال پیش و به تمدن بابل، یونان و مصر قدیم بازمی‌گردد. در این میان، یافتن جواب برای معادله‌هایی که از هندسه به‌دست آمده، جایگاه ویژه‌ای دارد. این‌گونه معادله‌ها، بیشتر در شاخهٔ دیگر ریاضی، یعنی جبر، بررسی می‌شود. اما آنچه که در حال حاضر به نظریهٔ اعداد مربوط می‌شود، مسألهٔ یافتن جوابهای صحیح (و حداکثر گویا) برای این معادله‌هاست که به بررسی حالت خاصی از آنها می‌پردازیم.

معادلهٔ $ax + by = c$ را در نظر می‌گیریم. این معادله را در حالتی که a، b و c ضرایبی صحیح هستند، معادلهٔ سیالهٔ خطی (درجهٔ اوّل) می‌نامیم. این معادله را گاهی معادلهٔ دیوفانتی می‌نامند. دیوفانتی از نام ریاضیدان یونانی «دیوفانتوس[1]» گرفته شده است. گرچه دیوفانتوس را نخستین کسی می‌دانند که در صورتبندی معادله‌های جبری تلاشهایی داشته؛ اما وی اوّلین کسی نبوده که به حلّ معادله‌های سیاله پرداخته است. کتاب «آریثمتیکا[2]»ی او که مهمترین اثر وی محسوب می‌شود، شامل حل حدود ۱۳۰ مسألهٔ نظریهٔ اعداد است. با ذکر تنها اطلاعی که از زندگی شخصی دیوفانتوس در دست است، به حلّ معادله‌های سیاله می‌پردازیم:

«دیوفانتوس یک ششم زندگی خود را در کودکی، یک دوازدهم آن را در جوانی و یک هفتم دیگر را در تجرّد به سر برد. پنج سال پس از ازدواج، صاحب پسری شد که چهارسال پیش از پدر درگذشت. سنّ او در لحظهٔ مرگ، نصف سنّ (نهایی) پدر بود.» (خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند سنّ دیوفانتوس را به دست آورد؛ در این صورت، به عدد ۸۴ خواهد رسید.)

۲. حلّ معادلهٔ سیال درجهٔ اوّل: معادلهٔ سیاله $ax + by = c$ را در نظر می‌گیریم. منظور از حلّ این معادله، به‌دست آوردن جوابهای صحیح آن، در صورت وجود، است؛ یعنی عددهای صحیح x و y را چنان بیابیم که در رابطهٔ $ax + by = c$ صدق کنند. چند سؤال اساسی مطرح می‌شود:

الف ـ آیا چنین مقادیری برای x و y وجود دارد؟

ب ـ آیا می‌توان تعداد جوابها را به دست آورد و آیا می‌توان تمام این جوابها را یافت؟

پ ـ آیا در مسائل کاربردی، تمام این مقادیر و جوابها «مناسب» هستند؟

و سؤالهای دیگر. قضیهٔ زیر، راهگشای ما در یافتن پاسخ این پرسشها خواهد بود. ابتدا یک لم را بدون اثبات بیان می‌کنیم. اثبات این لم معروف، ساده است.

لم. اگر $(a,b)=1$ و $a|bc$ آن‌گاه $a|c$ ■

قضیه: فرض کنیم معادلهٔ سیالهٔ $ax + by = c$ داده شده باشد و d بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد صحیح a و b باشد؛ یعنی $d = (a, b)$. در این صورت، معادلهٔ مذکور، جواب (صحیح)

دارد ؛ اگر و تنها اگر $d|c$. در این صورت، یعنی اگر $d|c$ ، آن‌گاه معادله دارای جوابهایی نامتناهی است.

اثبات: فرض کنیم x_0 و y_0 دو عدد صحیح باشند که در رابطهٔ $ax_0+by_0=c$ صدق کنند. از طرفی، فرض کرده‌ایم $d=(a,b)$ ، لذا $d|a$ و $d|b$ و با توجه به ویژگی بخش‌پذیری داریم $d|ax_0+by_0$ ؛ یعنی $d|c$. بعکس، فرض کنیم $d|c$. با توجه به الگوریتم اقلیدسی عددهای صحیح r و s چنان وجود دارند که $d=ar+bs$. همچنین عدد صحیح t چنان یافت می‌شود که $c=dt$. از دو رابطهٔ اخیر داریم: $c=dt=art+bst$. بنابراین $x=rt$ و $y=st$ یک جواب معادلهٔ سیاله داده شده‌اند و لذا مسألهٔ وجود جواب این معادله، حل خواهد شد. برای اثبات نامتناهی بودن تعداد جوابها، ابتدا فرض می‌کنیم $x=x_0$ و $y=y_0$ یکی از جوابهای معادلهٔ مذکور باشد ؛ یعنی $ax_0+by_0=c$. اگر x و y جواب دیگری برای این معادله باشند، خواهیم داشت :

$$ax+by=c=ax_0+by_0$$

درنتیجه : $a(x-x_0)=b(y-y_0)$ و لذا

$$(۱)\quad \frac{a}{d}(x-x_0)=\frac{b}{d}(y-y_0)$$

از طرف دیگر، از رابطهٔ $d=(a,b)$ ، رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$$(۲)\quad \left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)=۱$$

از رابطهٔ (۱) داریم : $\frac{b}{d}\Big|\frac{a}{d}(x-x_0)$. رابطهٔ (۲) و لم قبل نشان می‌دهند که $\frac{b}{d}\Big|(x-x_0)$ و لذا عدد صحیحی چون t وجود دارد که $x-x_0=\frac{b}{d}t$ ؛ یعنی $x=x_0+\frac{b}{d}t$. با جایگذاری این مقدار در (۱) مقدار y به دست می‌آید : $y=y_0-\frac{a}{d}t$ ؛ لذا به ازای هر عدد صحیح t، مقادیر مختلفی برای x و y حاصل می‌شود. براحتی دیده می‌شود x و y که توسط روابط بالا داده شده‌اند در معادله، صدق می‌کنند و لذا جواب این معادله هستند ؛ پس حکم قضیه ثابت می‌شود.■

قضیهٔ قبل، علاوه بر این که وجود جوابها را ثابت می‌کند، روش به‌دست آوردن آن را نیز بیان می‌کند. اغلب x_0 و y_0 را جواب اختصاصی و x و y که از روابط بیان شده به دست می‌آیند، جواب عمومی معادله نامیده می‌شوند. همچنین می‌توان گفت (x_0,y_0) یک جواب اختصاصی معادلهٔ مذکور است.

مثال. معادلهٔ $۲x+۵y=۱۱$ را حل کنید.

حل. داریم $۱=(۲,۵)$ و $۱|۱۱$ و لذا معادلهٔ داده شده، دارای جواب است. بنا به الگوریتم تقسیم اقلیدسی $۱=۲(-۲)+۵(۱)$ و درنتیجه : $۱۱=۲(-۲۲)+۵(۱۱)$. بنابراین $x_0=-۲۲$ و $y_0=۱۱$ یک جواب برای معادلهٔ مزبور است. کلیهٔ جوابها به شرح زیر خواهد بود :

$$x=-۲۲+۵t\ ,\ \ y=۱۱-۲t\ ;\ (t\in z)$$

مثال. معادلهٔ $۱۹x+۱۱۴y=۱۴$ را حل کنید.

حل. داریم $۱۹=(۱۹,۱۱۴)$ و با توجه به این که $۱۹\nmid۱۴$ لذا معادلهٔ داده شده، جواب (صحیح) ندارد.

۳. چند حالت خاص:

معادلهٔ $ax+by=c$ را در نظر می‌گیریم. اگر a و b نسبت به هم اوّل باشند ؛ یعنی $۱=(a,b)$ ، آن‌گاه $۱|c$ و لذا معادله جواب خواهد داشت و اگر (x_0,y_0) جواب اختصاصی آن باشد، جوابهای عمومی آن از روابط زیر به‌دست می‌آید :

$$x=x_0+bt\ ,\ \ y=y_0-at\ ;\ (t\in z)$$

در کاربرد، اغلب لازم است تنها جوابهای مثبت یا جوابهایی که در شرط خاصی صدق کنند، انتخاب شوند. بدین منظور، از روابطی که جوابهای عمومی را برحسب ضرایب و جوابهای اختصاصی بیان می‌کنند، استفاده می‌کنیم ؛ لذا ممکن است از تعداد نامتناهی جواب، تنها یک جواب قابل قبول باشد.

مثال. یک فروشنده قصد دارد ۵۱۰ بسته از یکی از کالاهای خود را برای مشتریان خود ارسال کند ؛ به‌طوری که به هر مشتری، ۲۰ یا ۵۰ بسته از این کالا تعلق بگیرد. این توزیع به چند طریق

امکان دارد؟

حل. معادلهٔ $۲۰x+۵۰y=۵۱۰$ را تشکیل می‌دهیم. با حلّ این معادله، مسأله حل خواهد شد. برای حلّ این معادله، جواب اختصاصی $(-۱۰۲,۵۱)$ به‌دست می‌آید. رابطه‌های زیر، جواب عمومی معادله را تعیین می‌کنند:

$x=-۱۰۲+۵t\ ,\ y=۵۱-۲t\ ;\ (t\in z)$

از طرفی x و y تعداد خریداران کالا را نشان می‌دهند و لذا نمی‌توانند منفی باشند. بنابراین، نامعادله‌های $x\ge ۰$ و $y\ge ۰$ به‌دست می‌آید. از حلّ این نامعادله‌ها برحسب t داریم:

$$۲۰/۴=\frac{۲۰۴}{۱۰}\le t\le\frac{۵۱}{۲}=۲۵/۵ \quad (t\in z)$$

و در نتیجه مقادیر زیر، برای t قابل قبول خواهند بود:

$t=۲۱,۲۲,۲۳,۲۴,۲۵$

بنابراین، به پنج روش می‌توان توزیع مورد نظر را انجام داد.

توجه می‌کنیم که منظور از جواب صحیح و مثبت، جوابی است که x و y هر دو مثبت باشند.

مثال. تمام جوابهای صحیح و مثبت معادلهٔ $۲x+۵y=۱۱$ را در صورت وجود، بیابید.

حل. در نخستین مثال بخش قبل، دیدیم جوابهای عمومی معادلهٔ داده شده، به‌صورت زیر است:

$x=-۲۲+۵t\ ,\ y=۱۱-۲t\ ,\ (t\in z)$

لذا برای این که x و y هر دو مثبت باشند، باید داشته باشیم:

$$۴/۴=\frac{۲۲}{۵}\le t\le\frac{۱۱}{۲}=۵/۵$$

لذا این معادله، تنها یک جواب مثبت $x=۳$ و $y=۱$ دارد که به ازای $t=۵$ حاصل می‌شود.

مثال. جوابهای صحیح و مثبت معادلهٔ $۷x+۱۶y=۲۰۹$ را به‌دست آورید.

حل. از حل معادلهٔ داده شده، جوابهای عمومی زیر حاصل می‌شوند:

$x=۷+۱۶t\ ,\ y=-۳-۷t\ \ (t\in z)$

با در نظر گرفتن $x\ge۰$ و $y\ge۰$، داریم: $-\frac{۷}{۱۶}\le t\le -\frac{۳}{۷}$ و با توجه به این که $t\in z$، لذا معادلهٔ داده شده، دارای جواب صحیح و مثبت نیست.

روشهای دیگری نیز برای حلّ معادلهٔ سیاله $ax+by=c$ وجود دارد؛ یکی از این روشها را با مثال زیر نشان می‌دهیم:

مثال. معادلهٔ سیاله $۶x-۲۱y=۱۵$ را حل کنید.

حل. ابتدا مشاهده می‌کنیم $(۶,۲۱)=۳|۱۵$. پس معادلهٔ داده شده، دارای جواب (صحیح) می‌باشد. قدرمطلق ضریب x، یعنی ۶ از قدرمطلق ضریب y، یعنی ۲۱ کوچکتر است. پس معادله را برحسب x حل می‌کنیم. داریم: $x=\frac{۱۵+۲۱y}{۶}$ و به دنبال مقادیر صحیح برای x هستیم. عددهای ۱۵ و ۲۱ را برحسب مضربی از ۶ می‌نویسیم و مقادیر صحیح را جدا می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$x=\frac{۱۲+۳+۱۸y+۳y}{۶} \text{ و لذا } x=۲+۳y+\frac{۱+y}{۲} \quad (*)$$

برای صحیح بودن x، باید $\frac{y+۱}{۲}$ مقدار صحیح داشته باشد. به این منظور، لازم است y مقداری فرد باشد؛ یعنی $y=۲k+۱$ که $k\in z$. با قرار دادن این مقدار در (*) داریم: $x=۷k+۶$.
درنتیجه، جوابهای عمومی معادله، به صورت زیر است:

$x=۷k+۶\ ,\ y=۲k+۱\ ,\ k\in z$

(توجه می‌کنیم که این مقادیر، در معادله صدق می‌کنند.)

این روش در برخی موارد، از روش قبلی کاراتر است؛ بویژه در حالتی که ضریب یکی از مجهولها برابر یک باشد، این روش توصیه می‌شود.

۴. تعمیم معادلهٔ سیالهٔ درجهٔ اوّل: آنچه تاکنون مطالعه کردیم، در واقع حالت خاصی از معادله‌های سیاله به‌شمار می‌آید. با دقت نظر بیشتر، یک معادلهٔ سیاله عبارت است از معادله‌ای با بیش از یک مجهول و ضرایب صحیح که جوابهای صحیح آن مورد نظر باشد. بنابراین، معادله‌های $x^۲+y^۲=z^۲$ و $۲x+۷y+۶z=۴$ و حتی $\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}=\frac{۱}{۱۴}$ نیز معادله‌های سیاله هستند. توجه کنید که معادلهٔ اخیر را می‌توان به صورت $xy=۱۴x+۱۴y$ نوشت. در این بخش، به بررسی معادلهٔ سیالهٔ

خطی می‌پردازیم و بررسی سایر معادله‌ها را به وقت دیگری موکول می‌کنیم.

فرض کنیم معادلهٔ سیالهٔ خطی زیر داده شده باشد :

$$(*)\quad a_۱x_۱+a_۲x_۲+...+a_nx_n=b$$

معادلهٔ (*) جواب (صحیح) دارد ؛ اگر و تنها اگر $d|b$ ، که در آن d بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک عددهای صحیح $a_۱$ ، $a_۲$ ، ... و a_n است ؛ یعنی $d=(a_۱,a_۲,...,a_n)$. اثبات این حکم، به کمک استقرا و با استفاده از این رابطه که $((a,b),c)=(a,b,c)$ انجام می‌گیرد و ما از اثبات آن خودداری می‌کنیم ؛ زیرا اثبات مانند حالت دو مجهولی انجام می‌گیرد. در این‌جا با ذکر یک مثال، روش کلی حلّ چنین معادله‌هایی را بیان می‌کنیم.

مثال. معادلهٔ $۲x+۳y+۴z=۵$ را حل کنید.

حل. ابتدا مشاهده می‌کنیم $۵|۱=(۲,۳,۴)$ ؛ زیرا $۱=(۲,۳)$ و لذا معادلهٔ داده شده دارای جواب می‌باشد. برای حلّ این معادلهٔ سه مجهولی، ابتدا آن را به معادلهٔ دو مجهولی تبدیل کرده و مانند قبل، آن را حل می‌کنیم. به این منظور، قرار می‌دهیم $۲x+۳y=w$ (در حالت کلی قرار می‌دهیم $ax+by=dw$ که در آن $d=(a,b)$) بنابراین، معادلهٔ داده شده، به صورت $w+۴z=۵$ تبدیل می‌شود. این معادله را به روش دوم ذکر شده در بخش قبل، حل می‌کنیم ؛ یعنی قرار می‌دهیم $w=۵-۴z$ و لذا به ازای $z=t$ ، داریم $w=۵-۴t$ و توجه می‌کنیم که $t\in z$ حال، معادلهٔ $۲x+۳y=۵-۴t$ را حل می‌کنیم. این معادله، جواب صحیح دارد ؛ زیرا $۵-۴t|۱=(۲,۳)$. با حل این معادله، جواب کلی زیر به دست می‌آید :

$$x=-۵+۴t+۳t' \quad , \quad y=۵-۴t-۲t' \quad ; \quad (t'\in z)$$

لذا جواب عمومی معادلهٔ داده شده، به‌صورت زیر می‌باشد :

$$x=-۵+۴t+۳t',\ y=۵-۴t-۲t',\ z=t\ ;(t,t'\in z)$$

توجه می‌کنیم که به ازای $t=۱$ و $t'=-۱$ ، یک جواب معادلهٔ مذکور، عبارت است از : $x=-۴$ و $y=۳$ و $z=۱$.

به همین ترتیب، می‌توان دستگاه معادله‌های سیاله را تشکیل داده و آنها را حل کرد. این مطالب را به خواست خدا در مقاله‌ای دیگر بررسی خواهیم کرد. مطلب این شماره را با ذکر چند تمرین به پایان می‌رسانیم.

الف. معادله‌های زیر را حل کرده، در صورت وجود جوابهای مثبت آن را مشخص کنید :

۱) $۱۷x+۱۳y=۱۰۰$

۲) $۱۰۱x+۱۰۲y+۱۰۳z=۱$

۳) $\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}=\frac{۱}{۱۴}$

ب. جوابهای صحیح دستگاه معادله‌های سیالهٔ زیر را به دست آورید :

$$\begin{cases}x+y+z=۱۰۰\\x+۶y+۲۱z=۱۲۱\end{cases}$$

(راهنمایی. برای حل این دستگاه، می‌توانید از هر معادله، یک معادله با دو مجهول به دست آورید و دستگاه جدیدی تشکیل دهید.)

تمرین زیر برای دانش‌آموزانی که با برنامه‌نویسی کامپیوتر آشنایی دارند، در نظر گرفته شده است :

پ. برنامه‌ای بنویسید که معادلهٔ سیالهٔ درجهٔ اوّلی با دو مجهول را حل کند و سپس تمام جوابهای مثبت آن را در صورت وجود پیدا کند.

پاورقی:

۱.Diophantus

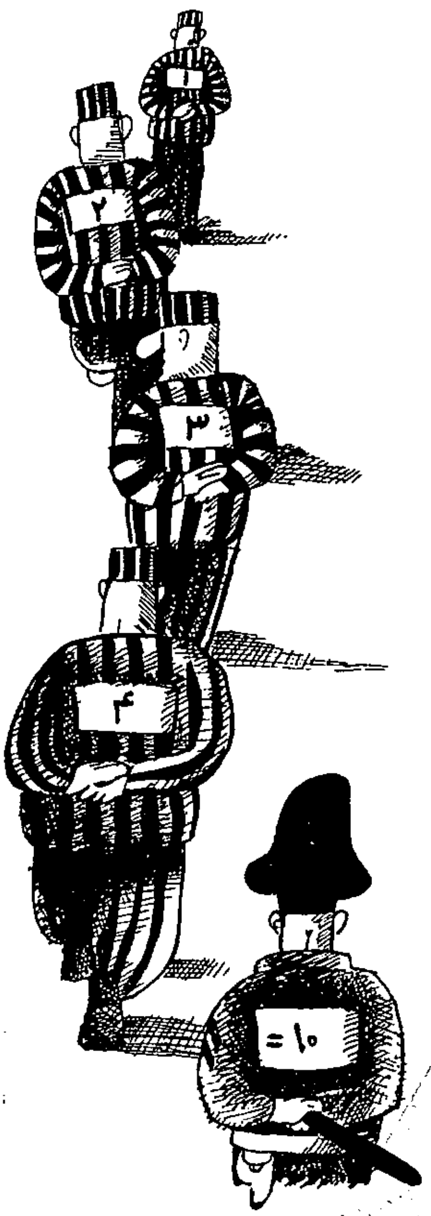
۲.Arithmetica

منابع:

۱ . Kenneth H.Rosen, Elementary Number Theory and Its Application (2nd ed.), ADDISON-WESLEY Pub.,1988

۲. هاورد. و. ایوز، آشنایی با تاریخ ریاضیات (جلد اوّل و دوم)، ترجمهٔ محمدقاسم وحیدی اصل، مرکز نشر دانشگاهی، (۱۳۷۲، ۱۳۷۳).

۳. ویلیام ج. لوک، مبانی نظریهٔ اعداد، ترجمهٔ محمدتقی دیبایی، انتشارات مبتکران، (۱۳۷۲).



دنباله و تصاعدهای عددی و هندسی

• سیّدمحمّدرضا هاشمی موسوی

یکی از اساسی‌ترین مفهومها در ریاضیات «دنباله» است ؛ زیرا مهمترین مفهومهای ریاضیات عالی بر پایهٔ آن ساخته شده است (مانند : مفهوم حد، که در آینده با آن آشنا خواهید شد).

دنبالهٔ عددی

هرگاه مجموعهٔ مرتّبی از عددها به‌دنبال هم بیایند، آن را «دنبالهٔ عددی» گویند. هر عدد از دنباله را **عضو** یا **جملهٔ دنباله** گویند : جملهٔ اوّل، جملهٔ دوم، ...، جملهٔ دهم، ... و جملهٔ nام.

به‌طور معمول، هر یک از جمله‌های دنباله را با a_1 ، a_2 ، ... و a_n نشان می‌دهند و با عددهای طبیعی ۱ ، ۲، ... و n مشخص می‌نمایند. بنابراین، دامنهٔ دنبالهٔ عددی، مجموعهٔ عددهای طبیعی است. در اصطلاح، a_1 را **جمله اوّل** و a_n را جملهٔ nام یا **جملهٔ عمومی** دنباله گویند.

مثال ۱. دنبالهٔ عددهای فرد و زوج طبیعی را به صورت زیر نشان می‌دهند :

(دنبالهٔ عددهای فرد طبیعی) : $1, 3, 5, 7, \dots, (2n-1), \dots \quad (n \in \mathbb{N})$

(دنبالهٔ عددهای زوج طبیعی) : $2, 4, 6, 8, \dots, 2n, \dots$

($\mathbb{N}$ مجموعهٔ عددهای طبیعی است)

مثال ۲. دنبالهٔ عددهای اوّل کوچکتر از ۲۰ به صورت زیر است :

$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$

مسألهٔ ۱. دنبالهٔ عددهای مثبت بخش‌پذیر بر ۳ را بنویسید و تعیین کنید عدد **۱۳۷۷** چندمین جملهٔ دنباله است.

حل: جملهٔ عمومی این دنباله، به صورت $3n$ است، که اگر در آن، مقدار n را بترتیب عددهای طبیعی $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ قرار دهیم، جمله‌های پی‌درپی دنبالهٔ مورد نظر به‌دست می‌آید :

$3, 6, 9, 12, \dots, 1377, \dots, 3n, \dots$

چون جملهٔ عمومی دنباله $3n$ است، بنابراین :

$$۳n = ۱۳۷۷ \;\; ; \;\; n = \frac{۱۳۷۷}{۳} = ۴۵۹$$

بنابراین، عدد **۱۳۷۷**، جملهٔ چهار صد و پنجاه و نهم دنباله است.

مسألهٔ ۲. جملهٔ عمومی یک دنباله $a_n = \frac{n(n+۱)}{۲}$ است، کدام جملهٔ این دنباله برابر **۵۵** است.

حل:

$$a_n = \frac{n(n+۱)}{۲} = ۵۵ \;\; ; \;\; n^۲ + n - ۱۱۰ = ۰ \;\; ;$$

$$(n+۱۱)(n-۱۰) = ۰$$

$$n \in \mathbb{N} : n-۱۰ = ۰ \;\; ; \;\; n = ۱۰ \;\; (\text{جملهٔ دهم})$$

مسألهٔ ۳. اگر عدد n، معرّف تعداد ضلعهای یک چندضلعی کوژ (محدب) باشد، تعداد قطرهای این چندضلعیها را به صورت یک دنبالهٔ عددی بنویسید.

حل: این مسأله را می‌توان با روشهای مختلف حل کرد، که ما برای اختصار، به روش مستقیم عمل می‌کنیم.

اگر در nضلعی، یک رأس را انتخاب کنیم، با وصل کردن آن به $(n-۳)$ رأس، قطرهایی از nضلعی به دست می‌آید که از این رأس گذشته‌اند؛ البته توجه داریم که برای پدید آمدن قطر، نمی‌توان هر رأس را به خودش یا به دو رأس مجاورش وصل کرد. به این ترتیب، از n رأس به تعداد $n(n-۳)$ قطر می‌گذرد؛ چون هر قطر مربوط به دو رأس، دو بار به حساب آمده است، پس تعداد قطرهای هر n ضلعی، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\text{جملهٔ عمومی دنباله}: \;\; a_n = \frac{۱}{۲}n(n-۳) \qquad (۱)$$

واضح است که اوّلین جملهٔ دنباله، با قرار دادن $n = ۳$ در رابطهٔ (۱)، تعیین می‌شود و جمله‌های بعدی دنباله نیز به ازای عددهای طبیعی بزرگتر از ۳ به‌دست خواهد آمد:

$$۰, ۲, ۵, ۹, ۱۴, \ldots, \frac{n(n-۳)}{۲}, \ldots$$

یک نوع خاصی از دنباله‌های عددی وجود دارند، که این‌گونه دنباله‌ها را به سبب صعودی یا نزولی بودن آنها، **«دنبالهٔ صعودی»** یا **«دنبالهٔ نزولی»** می‌نامیم.

دنبالهٔ حسابی (تصاعد حسابی)

دنباله‌ای است که هر جملهٔ آن، با افزودن عددی ثابت (غیرصفر) به جملهٔ قبل خود، به‌دست می‌آید. عدد ثابت دنباله را تفاضل مشترک یا **«قدر نسبت»** دنبالهٔ حسابی **(تصاعد حسابی)** می‌نامند و آن را با d نشان می‌دهند.

تعریف: اگر قدرنسبت دنبالهٔ حسابی مثبت باشد، آن دنباله را صعودی و اگر منفی باشد، دنباله را نزولی نامند. بنا به همین تعریف، بهتر است که به جای لفظ تصاعد حسابی، لفظ عام دنبالهٔ حسابی را به کار بریم؛ زیرا تصاعد به معنای صعود کردن است و درنتیجه لفظ «تصاعد نزولی» کاملاً غلط است و باید به جای آن، از لفظ «دنبالهٔ نزولی» استفاده کنیم.

مثال ۳. دنبالهٔ عددهای طبیعی، یک دنبالهٔ صعودی با قدرنسبت $d = ۱$ و جملهٔ اوّل $a = ۱$ است و دنبالهٔ عددهای صحیح منفی، یک دنبالهٔ نزولی با قدرنسبت $d = -۱$ و جملهٔ اوّل $a = -۱$ است.

تعیین جملهٔ عمومی (جملهٔ nام) دنبالهٔ حسابی (تصاعد حسابی)

جملهٔ اوّل دنبالهٔ حسابی را به $a(t_۱)$[۱] و قدرنسبت آن را به d نشان می‌دهیم. بنا به تعریف دنبالهٔ حسابی:

$$(\text{جملهٔ اوّل}) \;\; t_۱ = a \;\; , (\text{جملهٔ دوم}) \;\; t_۲ = a + d \;\; ,$$
$$(\text{جملهٔ سوم}) = t_۳ = [(a+d)+d] = a + ۲d \;, \ldots$$

دیده می‌شود که ضریب d در هر جمله، یکی کمتر از عددی است که مرتبهٔ آن جمله را مشخص می‌کند (زیرا d برای نخستین بار برای تعیین جملهٔ دوم به a افزوده شده است). پس، اگر عمل فوق را ادامه دهیم، به‌طور مثال، جملهٔ دهم برابر $t_{۱۰} = a + ۹d$ است و به‌طور کلی می‌توان نوشت:

$$(\text{جملهٔ nام}) \;\; t_n = a + (n-۱)d \;\; (\text{جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی})$$

مثال ۴. کدام جمله از دنبالهٔ حسابی زیر، برابر با **۵۶** است؟

$$۲, ۵, ۸, ۱۱, \ldots$$

حل: در این دنباله، جملهٔ اوّل **۲** و قدرنسبت **۳** است. اگر فرض کنیم که جملهٔ nام این دنباله، **۵۶** است، مطابق با دستور جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی:

$$t_n = a + (n-۱)d \;\; , \;\; a = ۲ \;\; , \;\; d = ۳ \;\; , \;\; t_n = ۵۶$$
$$۵۶ = ۲ + (n-۱)(۳) ; ۳(n-۱) = ۵۴ ; \;\; n-۱ = ۱۸ ; n = ۱۹$$

مسألهٔ ۴. جملهٔ kام یک دنبالهٔ حسابی برابر S و جمله nام آن برابر با P است؛ این دنباله را مشخص کنید.

حل: اگر جملهٔ اوّل دنبالهٔ مورد نظر را به $t_۱$ و جملهٔ عمومی (جملهٔ nام) آن را به t_n نشان دهیم، در این صورت:

$$\begin{cases} t_k = t_1 + (k-1)d = S \\ t_n = t_1 + (n-1)d = P \end{cases} \xRightarrow{\text{(از تفاضل دو رابطه)}}$$

$$d = \frac{S-P}{k-n} \quad \text{(قدر نسبت دنباله)}$$

$$t_1 = S-(k-1)d \quad \text{(جملهٔ اوّل دنباله)}$$

مسألهٔ ۵. اگر جملهٔ چهارم یک تصاعد حسابی ۲- و جملهٔ چهاردهم آن ۳۴ باشد، جملهٔ هفتادوهشتم آن را بیابید.

حل:

$$\begin{cases} t_4 = t_1 + (4-1)d = t_1 + 3d = -2 \\ t_{14} = t_1 + (14-1)d = t_1 + 13d = 34 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} t_1 + 3d = -2 \\ t_1 + 13d = 34 \end{cases}$$

از حل دستگاه:

$$\text{(جملهٔ اوّل)} \quad t_1 = -12/8 \;,\; d = 3/6 \quad \text{(قدر نسبت)}$$

$$t_{78} = -12/8 + 77 \times 3/6 = 264/4 \quad \text{(جملهٔ هفتادوهشتم)}$$

واسطه‌های حسابی (عددی)

در هر دنباله، جمله‌هایی را که بین دو جملهٔ متوالی قرار دارند، واسطهٔ عددی یا حسابی بین آن دوجمله گویند.

مثال ۵. در دنبالهٔ ...، ۹، ۷، ۵، ۳، ۱ عددهای ۳، ۵ و ۷ سه واسطهٔ حسابی بین ۱ و ۹ هستند. در این صورت، در اصطلاح می‌گویند که عددهای ۳، ۵ و ۷ سه واسطهٔ حسابی هستند که بین ۱ و ۹ درج شده‌اند. هرگاه سه جملهٔ متوالی، از یک دنبالهٔ حسابی را درنظر بگیریم، جملهٔ وسط را به‌طور مطلق، واسطهٔ حسابی (یا میانگین) بین دو جملهٔ دیگر می‌نامند. به‌طور مثال، عدد ۱۰ واسطهٔ حسابی (میانگین) عددهای ۹ و ۱۱ در دنبالهٔ ...، ۱۱، ۱۰، ۹، ۸ است.

درج واسطهٔ حسابی بین دو عدد

مقصود از درج m واسطهٔ حسابی بین دو عدد a و b، این است که یک دنبالهٔ حسابی تشکیل دهیم که $(m+2)$ جمله داشته و a و b بترتیب، جمله‌های اوّل و آخر آن باشند. پس، اگر a را جملهٔ اوّل دنباله و b را جملهٔ آخر دنباله بنامیم، می‌توان نوشت:

$$b = t_{m+2} = t_1 + (m+2-1)d = a + (m+1)d \;;$$

$$d = \frac{b-a}{m+1} \quad (m \in \mathbb{N})$$

در این‌جا، قدرنسبت دنبالهٔ مورد نظر به‌دست می‌آید. بنابراین، برای درج m واسطهٔ حسابی بین a و b، باید قدرنسبت $\frac{b-a}{m+1}$ را به جملهٔ اوّل، سپس به جملهٔ دوم و ... اضافه کنیم. واسطهٔ حسابی (میانگین) دو عدد a و b برابر با نصف مجموع آنهاست؛ زیرا اگر x، واسطهٔ حسابی a و b باشد، می‌توان نوشت:

$$d = x-a = b-x \;;\; x-a = b-x \;;$$

$$2x = a+b$$

درنتیجه:

$$x = \frac{a+b}{2} \quad \text{[x واسطهٔ حسابی (میانگین) a و b است.]}$$

مجموع جمله‌های دنبالهٔ حسابی متناهی (تصاعد حسابی)

مجموع جمله‌های دنبالهٔ حسابی را به S_n نمایش می‌دهیم؛ بنابراین:

$$S_n = t_1 + (t_1+d) + (t_1+2d) + \ldots + (t_n-2d) + (t_n-d) + t_n \qquad (1)$$

حال اگر جمله‌های مجموع (۱) را بعکس ترتیب بالا بنویسیم:

$$S_n = t_n + (t_n-d) + (t_n-2d) + \ldots + (t_1+2d) + (t_1+d) + t_1 \qquad (2)$$

از جمع برابریهای (۱) و (۲)، برابری زیر حاصل می‌شود:

$$2S_n = \underbrace{(t_1+t_n) + (t_1+t_n) + \ldots + (t_1+t_n)}_{\text{n مرتبه}} \;;$$

$$2S_n = n(t_1+t_n)$$

بنابراین:

$$S_n = \frac{n(t_1+t_n)}{2} \qquad (3)$$

با جایگزینی جملهٔ عمومی تصاعد $(t_n = t_1 + (n-1)d)$ در رابطهٔ (۳)، به دستور زیر می‌رسیم:

$$S_n = \frac{n}{2}[2t_1 + (n-1)d]$$

مثال ۶. مجموع n عدد طبیعی اوّلیه را حساب کنید.

حل: قدر نسبت دنبالهٔ عددهای طبیعی برابر ۱ است و جملهٔ اوّل آن نیز برابر ۱ است؛ بنابراین:

$$S_n = \frac{n}{2}[2 + (n-1)] = \frac{n(n+1)}{2} \;;$$

$$S_n = 1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

دنبالهٔ هندسی (تصاعد هندسی)

دنباله‌ای است که هر جملهٔ آن، با ضرب کردن جملهٔ پیش از آن در عددی ثابت غیرصفر و یک، به‌دست می‌آید. عدد ثابت را **نسبت مشترک** یا «**قدرنسبت**» دنبالهٔ هندسی گویند.

مثال ۷. دنبالهٔ زیر، یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت ۳ است:

۱, ۳, ۹, ۲۷, ۸۱, ...

تعیین جملهٔ عمومی (جملهٔ nام) دنبالهٔ هندسی (تصاعد هندسی)

جملهٔ اوّل دنباله را t_1 و قدرنسبت آن را q می‌نامیم. بنا به تعریف دنبالهٔ هندسی:

جملهٔ اوّل $= t_1$ ، جملهٔ دوم $= t_1 q = t_2$ ،

جملهٔ سوم $= t_1 q.q = t_1 q^2 = t_3, ...$

ملاحظه می‌شود که نمای q در هر جمله، یکی کمتر از عددی است که مرتبهٔ آن را مشخص می‌کند (زیرا q برای نخستین بار برای تعیین جملهٔ دوم در t_1 ضرب شده است) پس اگر عمل فوق را انجام دهیم، به‌طور مثال، جملهٔ بیستم دنبالهٔ هندسی، برابر $t_1 q^{19}$ است و به‌طور کلی می‌توان نوشت:

(جملهٔ nام تصاعد هندسی) $t_n = t_1 q^{n-1}$ (جملهٔ عمومی)

مسألهٔ ۶. جملهٔ ششم دنبالهٔ هندسی زیر را حساب کرده و تعیین کنید که آیا جمله‌ای از آن هست که برابر با $\frac{4}{243}$ باشد؟

۱۰۸, ۳۶, ۱۲, ۴, ...

حل: در این دنباله، $t_1 = 108$ و $q = \frac{36}{108} = \frac{1}{3}$ است، پس:

$$t_6 = t_1 q^{6-1} = 108(\frac{1}{3})^5 = \frac{4}{9}$$

اگر جملهٔ nام این دنباله، برابر با $\frac{4}{243}$ باشد، خواهیم داشت:

$$t_1 q^{n-1} = \frac{4}{243} \; ; \; 108(\frac{1}{3})^{n-1} = \frac{4}{243} \; ;$$

$$(\frac{1}{3})^{n-1} = \frac{4}{108 \times 243} = (\frac{1}{3})^8 \; ; n-1 = 8 \; ; \; n = 9$$

بنابراین، جملهٔ نهم این دنباله، برابر $\frac{4}{243}$ است.

مسألهٔ ۷. اگر جملهٔ nام یک دنبالهٔ هندسی، برابر R و جملهٔ mام آن برابر S باشد، دنباله را مشخص کنید.

حل: با توجه به جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی:

$$\begin{cases} t_n = t_1 q^{n-1} = R \\ t_m = t_1 q^{m-1} = S \end{cases} \Rightarrow \frac{t_n}{t_m} = \frac{t_1 q^{n-1}}{t_1 q^{m-1}} = \frac{R}{S} \; ;$$

$$q^{n-m} = \frac{R}{S}$$

$$k \in \mathbb{N} \; , \; n-m = 2k \; : \; q = \pm(\frac{R}{S})^{\frac{1}{n-m}} \; ,$$

$$n-m = 2k-1 \; : \; q = (\frac{R}{S})^{\frac{1}{n-m}}$$

$$t_1 = \frac{R}{q^{n-1}} \; ; \; t_1 = \frac{S}{q^{m-1}}$$

واسطه‌های هندسی

در یک دنبالهٔ هندسی، جمله یا جمله‌هایی را که بین دو جملهٔ نامتوالی قرار دارند، واسطه یا واسطه‌های هندسی بین آن دو جمله می‌نامند. به‌طور مثال، در دنبالهٔ ۸۰، ۴۰، ۲۰، ۱۰، ۵ عددهای ۱۰، ۲۰ و ۴۰، سه واسطهٔ هندسی بین عددهای ۵ و ۸۰ هستند. در این صورت می‌گویند: عددهای ۱۰، ۲۰ و ۴۰ سه واسطهٔ هندسی هستند که بین عددهای ۵ و ۸۰ درج شده‌اند.

هرگاه سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ هندسی را در نظر بگیریم، جملهٔ وسط را به‌طور مطلق، واسطهٔ هندسی بین دو جملهٔ دیگر می‌نامند. به‌طور مثال، اگر بخواهیم واسطهٔ هندسی بین دو عدد را تعیین کنیم، با فرض این که واسطهٔ هندسی دو عدد را x بنامیم:

$$a, x, b: \frac{x}{a} = \frac{b}{x} = q \; ; \; x^2 = ab \; ;$$

$$x = \pm\sqrt{ab} \qquad (ab \geq 0)$$

درج واسطه‌های هندسی بین دو عدد

مقصود از درج m واسطهٔ هندسی بین دو عدد معلوم a و b، این است که یک دنبالهٔ هندسی متناهی تشکیل دهیم که $(m+2)$ جمله داشته باشد و a و b بترتیب، جمله‌های اوّل و آخر آن باشند:

$$t_{m+2} = t_1 q^{m+2-1} \; ; \; b = aq^{m+1} \; ;$$

$q=(\frac{b}{a})^{\frac{1}{m+1}}$ (m عددی زوج باشد) ;

$q=\pm(\frac{b}{a})^{\frac{1}{m+1}}$ (m عددی فرد باشد)

بنابراین، برای درج m واسطهٔ هندسی بین a و b، کافی است قدرنسبت : $(\frac{b}{a})^{\frac{1}{m+1}}$ را در جملهٔ اول و سپس در جملهٔ دوم و ... ضرب کنیم. واسطهٔ هندسی بین دو عدد a و b، جذر حاصلضرب a در b، با شرط $ab>0$ است.

محاسبهٔ مجموع n جملهٔ دنبالهٔ هندسی

مجموع جمله‌های دنبالهٔ هندسی را به S_n نمایش می‌دهیم؛ بنابراین :

$$S_n=t_1+t_1q+t_1q^2+...+t_1q^{n-2}+t_1q^{n-1} \qquad (1)$$

اگر دو طرف رابطهٔ (۱) را در q ضرب کنیم :

$$qS_n=t_1q+t_1q^2+t_1q^3+...+t_1q^{n-1}+t_1q^n \qquad (2)$$

حال رابطهٔ (۲) را از رابطهٔ (۱) کم می‌کنیم :

$$S_n-qS_n=t_1-t_1q^n \ ;$$

$$S_n(1-q)=t_1(1-q^n) \ ;$$

$$S_n=\frac{t_1(1-q^n)}{(1-q)} \quad (q\neq 1)$$

مثال ۸. مجموع n جملهٔ دنبالهٔ هندسی $1,2,4,8,...,2^{n-1}$، برابر $S_n=\frac{1(1-2^n)}{1-2}$ یا $S_n=2^n-1$ است.

وقتی که $|q|<1$ و n بزرگترین عدد طبیعی فرض شود، دنبالهٔ هندسی نامتناهی است و مجموع جمله‌های آن (S) از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

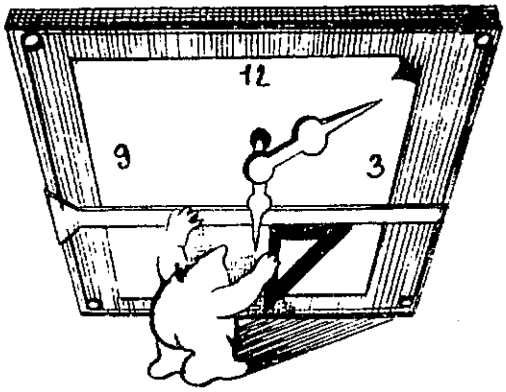
$$|q|<1: \ S=\frac{t_1}{1-q}$$ (مجموع جمله‌های دنبالهٔ هندسی نامتناهی)

مثال ۹. مجموع جمله‌های دنبالهٔ هندسی نامتناهی $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...$ را بیابید.

حل: $\boxed{S=2}$; $t_1=1, \ q=\frac{1}{2}: \ S=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$

یادداشتها :

۱. t حرف اول کلمهٔ لاتین (term) به معنای (جمله) است.



عقربه‌های ساعت شمار و دقیقه‌شمار ساعت، طی ۲۴ ساعت، چند بار زاویهٔ قائمه تشکیل می‌دهند؟

● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمه سیمین‌دخت ترکپور

جواب در صفحهٔ ۸۸

● محمد هاشم رستمی

شکل‌های هندسی

(قسمت هفدهم)

رویّه‌های درجهٔ دوم. رویه‌هایی که معادلهٔ آنها در دستگاه مختصات قائم $O-xyz$ به‌صورت کلی:

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Eyz+2Fzx+$$

$$2Gx+2Hy+2Iz+J=0$$

باشد، رویّه‌های درجهٔ دوم نامیده می‌شوند.

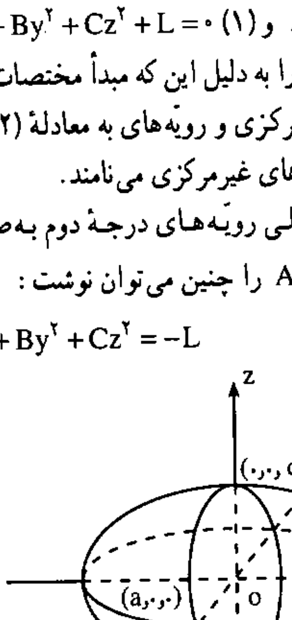
این معادله را می‌توان از طریق دوران یا انتقال محورها و یا هر دو، به یکی از دو معادلهٔ زیر تبدیل کرد:

$$Ax^2+By^2+Cz^2+L=0 \quad (1) \quad \text{و} \quad Ax^2+By^2+2Iz=0 \quad (2)$$

رویّه‌های به معادلهٔ (۱) را به دلیل این که مبدأ مختصات، مرکز تقارن آنهاست، رویّه‌های مرکزی و رویّه‌های به معادلهٔ (۲) را که این ویژگی را ندارند، رویّه‌های غیرمرکزی می‌نامند.

بیضوی. معادلهٔ کلی رویّه‌های درجهٔ دوم به‌صورت $Ax^2+By^2+Cz^2+L=0$ را چنین می‌توان نوشت:

$$Ax^2+By^2+Cz^2=-L$$



با تقسیم دو طرف این معادله بر $-L$ داریم:

$$-\frac{A}{L}x^2-\frac{B}{L}y^2-\frac{C}{L}z^2=1 \qquad (1)$$

اگر A، B و C هم‌علامت باشند؛ ولی علامتشان مخالف علامت L باشد، با انتخاب $-\frac{A}{L}=\frac{1}{a^2}$، $-\frac{B}{L}=\frac{1}{b^2}$ و $-\frac{C}{L}=\frac{1}{c^2}$، معادلهٔ (۱) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (2)$$

معادلهٔ (۲) رویّهٔ درجهٔ دومی را مشخص می‌کند که بیضوی یا بیضی‌گون یا بیضی‌وار نامیده می‌شود. a، b و c را نیمهٔ قطرهای بیضوی می‌گویند. صفحه‌های xOy، yOz و zOx صفحه‌های تقارن، مبدأ مختصات مرکز تقارن، و محورهای مختصات محور تقارن آن می‌باشند.

ثابت می‌توان کرد که فصل مشترک بیضوی با هر صفحه، یک بیضی است و به همین دلیل، آن را بیضوی می‌نامند. به عنوان مثال:

۱. فصل مشترک صفحه‌های مختصات $z=0$، $y=0$ و $x=0$ با بیضوی به معادلهٔ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ بترتیب، بیضیهایی به معادله‌های $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$، $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ و $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ است.

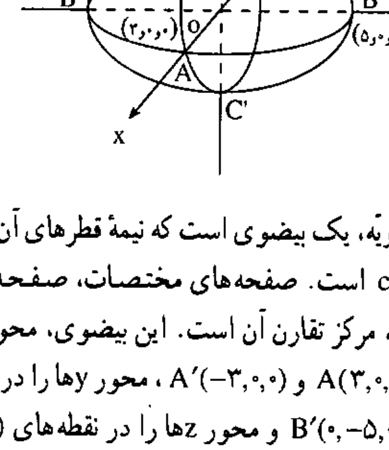
۲. اگر بیضوی را با صفحهٔ $z=h$، $(|h|<c)$ قطع کنیم،

بیضی به معادلهٔ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}$ به‌دست می‌آید، که نیمهٔ قطرهای آن $a_1=a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$ و $b_1=b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$ است و بیضی هایی که با تغییر h پدید می‌آید، متشابه‌اند؛ یعنی خروج از مرکز آنها برابر است.

تبصره. اگر محورهای بیضوی به معادلهٔ (۲) موازی محورهای مختصات و نقطهٔ $O'(\alpha,\beta,\gamma)$ مرکز آن باشد، معادلهٔ آن به صورت زیر است:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}+\frac{(z-\gamma)^2}{c^2}=1$$

مثال ۱. رویهٔ به معادلهٔ $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{16}=1$ را مورد بررسی قرار دهید و این رویه را رسم کنید.



حل. این رویه، یک بیضوی است که نیمهٔ قطرهای آن $a=3$، $b=5$ و $c=4$ است. صفحه‌های مختصات، صفحهٔ تقارن و مبدأ مختصات، مرکز تقارن آن است. این بیضوی، محور xها را در نقطه‌های $A(3,0,0)$ و $A'(-3,0,0)$، محور yها را در نقطه‌های $B(0,5,0)$ و $B'(0,-5,0)$ و محور zها را در نقطه‌های $C(0,0,4)$ و $C'(0,0,-4)$ قطع می‌کند. فصل مشترک این رویه با صفحهٔ xOy بیضی به معادلهٔ $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$، با صفحهٔ xOz بیضی به معادلهٔ $\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$ و با صفحهٔ yOz بیضی به معادلهٔ $\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{16}=1$ است.

مثال ۲. ثابت کنید معادلهٔ

$$3x^2+4y^2+z^2-12x-16y+4z-4=0$$

نمایشگر یک بیضوی است. مختصات مرکز و اندازهٔ نصف قطرهای آن را تعیین کنید.

حل. ثابت می‌کنیم این معادله را به صورت $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}+\frac{(z-\gamma)^2}{c^2}=1$ می‌توان درآورد.

داریم:

$$3x^2-12x+4y^2-16y+z^2+4z-4=0$$
$$\Rightarrow 3(x^2-4x)+4(y^2-4y)+(z^2+4z)-4=0$$
$$\Rightarrow 3\left[(x-2)^2-4\right]+4\left[(y-2)^2-4\right]+\left[(z+2)^2-4\right]-4=0$$
$$\Rightarrow 3(x-2)^2+4(y-2)^2+(z+2)^2=36$$
$$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{12}+\frac{(y-2)^2}{9}+\frac{(z+2)^2}{36}=1 \quad \text{معادلهٔ بیضوی}$$
$$\Rightarrow O'(2,2,-2) \quad \text{مختصات مرکز بیضوی}$$
$$a^2=12\Rightarrow a=2\sqrt{3},$$
$$b^2=9\Rightarrow b=3, c^2=36\Rightarrow c=6$$

نیمهٔ قطرهای بیضوی

مثال ۳. معادلهٔ بیضوی استاندارد (به مرکز مبدأ مختصات که قطرهایش روی محورهای مختصات واقعند) را که از نقطه‌های $(2,-1,1)$، $(-3,0,0)$ و $(1,-1,-2)$ می‌گذرد، بنویسید.

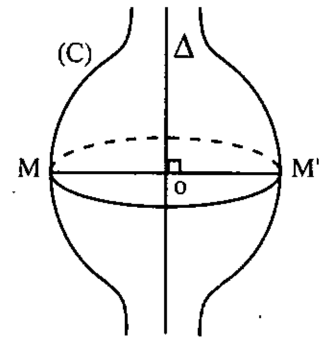
حل. بیضوی به معادلهٔ کلی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ را در نظر می‌گیریم. شرط آن که این بیضوی از نقطه‌های داده شده بگذرد، آن است که مختصات این نقطه‌ها در معادلهٔ آن صدق کند. بنابراین:

$$(2,-1,1)\Rightarrow \frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=1 \qquad (1)$$
$$(-3,0,0)\Rightarrow \frac{9}{a^2}+0+0=1 \qquad (2)$$
$$(1,-1,-2)\Rightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{4}{c^2}=1 \qquad (3)$$

از رابطه‌های (۱)، (۲) و (۳)، $a^2=9$، $b^2=\frac{9}{4}$ و $c^2=9$ و از آن‌جا، معادلهٔ بیضی‌گون به صورت $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{\frac{9}{4}}+\frac{z^2}{9}=1$ یا

$x^2 + 4y^2 + z^2 = 9$ به‌دست می‌آید.

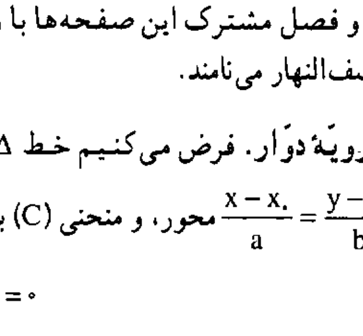
رویّه‌های دوّار. از دوران یک منحنی مسطح مانند (C) حول محوری مانند خط راست Δ که در یک صفحه قرار دارند، رویّه‌ای به‌وجود می‌آید که آن را رویّهٔ دوّار می‌نامند.



خط Δ محور و منحنی (C) منحنی مولّد رویّهٔ دوّار نامیده می‌شوند. هر نقطه مانند M از منحنی (C) هنگام دوران، دایره‌ای رسم می‌کند که صفحهٔ آن، عمود بر محور دوران و مرکز آن (نقطهٔ O) روی محور دوران است. این گونه دایره‌ها را مدار رویّهٔ دوّار می‌نامند. صفحه‌هایی را که از محور دوران می‌گذرند، صفحه‌های نصف‌النهار و فصل مشترک این صفحه‌ها با رویّهٔ دوّار را منحنی‌های نصف‌النهار می‌نامند.

معادلهٔ رویّهٔ دوّار. فرض می‌کنیم خط Δ به معادلهٔ $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ محور، و منحنی (C) به معادله‌های

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$



مولّد سطح دوّار باشند. برای تعیین معادلهٔ سطح دوّار، ملاحظه می‌کنیم که این رویّه از جابه‌جا شدن مداری پدید می‌آید که همواره متکی بر مولّد باشد.

مدار را می‌توان فصل مشترک کره‌ای که مرکز آن روی Δ واقع است، با صفحه‌ای عمود بر Δ دانست. بنابراین، معادلهٔ آن چنین است:

$$\begin{cases} (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = m \\ ax + by + cz + d = n \end{cases} \qquad (2)$$

با تغییر m و n کلیهٔ مدارها مشخص می‌شوند.

چون بین معادله‌های مدار و مولد، یعنی دستگاه‌های (۱) و (۲)، x، y و z را حذف کنیم، رابطه‌ای بین m و n به‌صورت $f(m,n) = 0$ به‌دست می‌آید، که چون در این رابطه به جای m و n مقدارهایشان را از دستگاه (۲) قرار دهیم، معادلهٔ رویّهٔ دوّار به‌دست می‌آید.

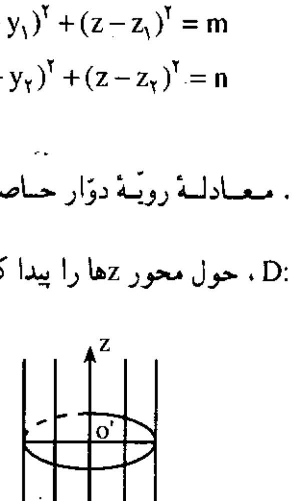
معادلهٔ صفحه را به‌صورت $ax + by + cz = n$ نیز می‌توان در نظر گرفت.

تبصره. مدار سطح دوّار را می‌توان فصل مشترک دو کره که مرکزهای آنها روی خط Δ محور رویّهٔ دوّار قرار دارد، در نظر گرفت. در این صورت، اگر (x_1, y_1, z_1) و (x_2, y_2, z_2) دو نقطهٔ واقع بر Δ باشند، معادلهٔ مدار به صورت:

$$\begin{cases} (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 = m \\ (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z_2)^2 = n \end{cases}$$

خواهد بود.

مثال ۱. معادلهٔ رویّهٔ دوّار حاصل از دوران خط $D: \begin{cases} y = x \\ y = -x + 2 \end{cases}$، حول محور zها را پیدا کنید.



حل. محور دوران (خط Δ) همان محور zها و منحنی هادی یعنی منحنی (c)، خط $D:\begin{cases} y=x \\ y=-x+2 \end{cases}$ است، که موازی محور zها می‌باشد. برای تعیین معادلهٔ این رویهٔ دوّار، مدار دلخواهی از آن را در نظر می‌گیریم که فصل مشترک صفحهٔ $z=n$ و کره‌ای به مرکز $O(0,0,0)$ و شعاع $\sqrt{m}$ باشد؛ یعنی:

$$\text{مدار}: \begin{cases} z=n \\ x^2+y^2+z^2=m \end{cases}$$

حال کافی است x، y و z را در چهار معادلهٔ زیر حذف کنیم:

$$\begin{cases} y=x \\ y=-x+2 \\ z=n \\ x^2+y^2+z^2=m \end{cases}$$

داریم:

$$x=1\ ,\ \ y=1 \Rightarrow 1+1+n^2=m \Rightarrow 2+n^2=m$$

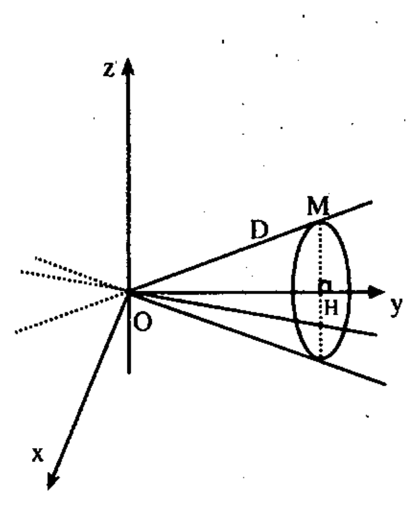
با جایگزینی $n=z$ و $m=x^2+y^2+z^2$ در رابطهٔ $2+n^2=m$ معادلهٔ این رویهٔ دوّار که یک سطح استوانی (استوانه‌ای دوّار) است، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$2+z^2=x^2+y^2+z^2 \Rightarrow x^2+y^2=2$$

نکته. فصل مشترک سطح استوانه‌ای دوّار با صفحه‌ای عمود بر محور این سطح دوّار یک دایره است. به عنوان مثال، مقطع سطح دوّار استوانه به معادلهٔ $x^2+y^2=2$ با صفحهٔ xOy به معادلهٔ $z=0$ (که بر محور Oz عمود است) دایرهٔ به معادلهٔ $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ z=0 \end{cases}$ است.

مثال ۲. معادلهٔ رویهٔ دوّار حاصل از دوران خط $\begin{cases} x=0 \\ y=3z \end{cases}$ حول محور yها را به‌دست آورید.

حل. منحنی مولّد این رویهٔ دوّار، خط $\begin{cases} x=0 \\ y=3z \end{cases}$، خط راستی واقع در صفحهٔ yOz است که از مبدأ مختصات می‌گذرد. از دوران این خط حول محور yها یک سطح مخروطی دوّار پدید



می‌آید. معادلهٔ یک مدار دلخواه از این رویهٔ دوّار به‌صورت $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=m \\ y=n \end{cases}$ است. حال بین چهار معادلهٔ

$$\begin{cases} x=0 \\ y=3z \\ x^2+y^2+z^2=m \\ y=n \end{cases}$$

مقدارهای x، y و z را حذف می‌کنیم. داریم:

$$\Rightarrow n=3z \Rightarrow z=\frac{n}{3} \Rightarrow 0+n^2+\frac{n^2}{9}=m$$

$$\Rightarrow 9m-10n^2=0$$

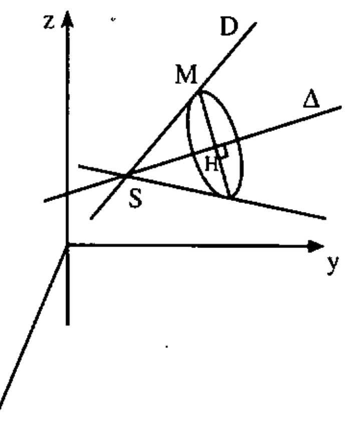
اکنون با جایگزین کردن مقدار به جای m و n معادلهٔ سطح مخروطی دوّار به‌دست می‌آید:

$$9(x^2+y^2+z^2)-10y^2=0$$

$$\Rightarrow 9x^2-y^2+9z^2=0$$

مثال ۳. معادلهٔ رویهٔ دوّار حاصل از دوران خط $D:\frac{x-x_0}{a'}=\frac{y-y_0}{b'}=\frac{z-z_0}{c'}$، حول خط $\Delta:\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ را تعیین کنید. (a' و b'، c') و (a و b، c) بترتیب، کسینوسهای هادی دو خط D و Δ می‌باشند.

حل. رویهٔ حاصل، یک سطح مخروطی دوّار، یا به‌طور خلاصه



یک مخروط است، که محور آن، خط $\Delta: \dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c}$ ، و مولّد آن، خط $D: \dfrac{x-x_0}{a'} = \dfrac{y-y_0}{b'} = \dfrac{z-z_0}{c'}$ است.

معادلهٔ یک مدار دلخواه از این رویه چنین است :

$$\begin{cases}(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = m \\ ax+by+cz = n\end{cases}$$

(m و n در دو معادلهٔ بالا متغیرند.)

اکنون بین دو معادلهٔ بالا و معادله‌های مولّد، یعنی در دستگاه زیر x، y و z را حذف می‌کنیم.

$$\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{a'} = \dfrac{y-y_0}{b'} = \dfrac{z-z_0}{c'} \\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = m \\ ax+by+cz = n\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\dfrac{(x-x_0)^2}{a'^2} = \dfrac{(y-y_0)^2}{b'^2} = \dfrac{(z-z_0)^2}{c'^2} = \dfrac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}{a'^2+b'^2+c'^2=1} = \dfrac{m}{1} = m \\ a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0) = n-ax_0-by_0-cz_0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x-x_0 = a'\sqrt{m}\ ,\ y-y_0 = b'\sqrt{m}\ ,\ z-z_0 = c'\sqrt{m} \\ a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0) = n-ax_0-by_0-cz_0\end{cases}$$

$$\Rightarrow aa'\sqrt{m}+bb'\sqrt{m}+cc'\sqrt{m} = n-ax_0-by_0-cz_0$$

$$\Rightarrow \sqrt{m}(aa'+bb'+cc') = n-ax_0-by_0-cz_0$$

و یا $m(aa'+bb'+cc')^2 = [n-(ax_0+by_0+cz_0)]^2$

امّا اگر زاویهٔ بین دو خط Δ و D را α اختیار کنیم، $\cos\alpha = aa'+bb'+cc'$ است.

بنابراین داریم : $m\cos^2\alpha = [n-(ax_0+by_0+cz_0)]^2$

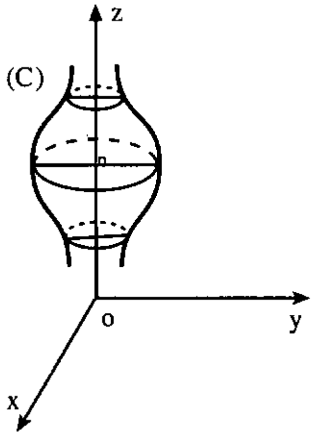
و با جایگزین کردن m و n در رابطهٔ بالا، معادلهٔ سطح مخروطی دوّار به صورت زیر به‌دست می‌آید :

$$\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]\cos^2\alpha = \left[ax+by+cz-(ax_0+by_0+cz_0)\right]^2$$

و یا :

$$\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]\cos^2\alpha = \left[a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)\right]^2$$

مثال ۴. معادلهٔ رویهٔ دوّاری را بنویسید که محور آن Oz و $f(x,z)=0$ ، معادلهٔ نصف‌النهاری از آن در صفحهٔ xOz باشد.



حل. می‌توان نصف‌النهاری به معادله‌های $\begin{cases}f(x,z)=m \\ y=0\end{cases}$ را مولّد این سطح دوّار دانست.

معادلهٔ مداری دلخواه از این رویهٔ دوّار چنین است :

$$\begin{cases}x^2+y^2 = m \\ y = n\end{cases}$$

از حذف x، y و z بین چهار معادلهٔ بالا، رابطهٔ زیر بین m و n به‌دست می‌آید :

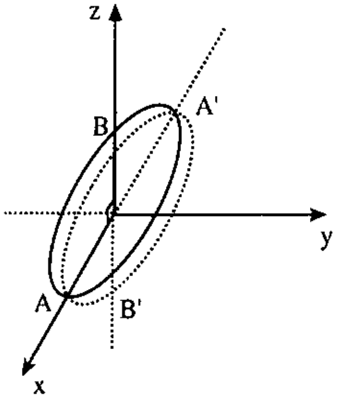
$$f(m,n)=0$$

پس معادلهٔ این رویهٔ دوّار چنین است :

$$f(\sqrt{x^2+y^2}\ ,\ z)=0$$

یعنی برای تعیین معادلهٔ این سطح دوّار در معادلهٔ نصف‌النهار به جای x^2، مقدار (x^2+y^2) را قرار می‌دهیم.

مثال ۵. معادلهٔ رویهٔ دوّار حاصل از دوران بیضی به معادلهٔ $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1 \\ y=0 \end{cases}$ حول محور zها را تعیین کنید.



حل. این بیضی را یک نصف‌النهار از رویهٔ دوّار حاصل، در نظر می‌گیریم. معادلهٔ یک مدار دلخواه از این رویهٔ دوّار، به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=m \\ z=n \end{cases}$$

اکنون بین چهار معادلهٔ دستگاه بالا ؛ x، y و z را حذف می‌کنیم. داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1 \\ y=0 \\ x^2+y^2+z^2=m \ \Rightarrow x^2+0+n^2=m \Rightarrow x^2=m-n^2 \\ z=n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{m-n^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}=1$$

با جایگزینی مقدارهای m و n در رابطهٔ بالا معادلهٔ رویهٔ دوّار به‌دست می‌آید:

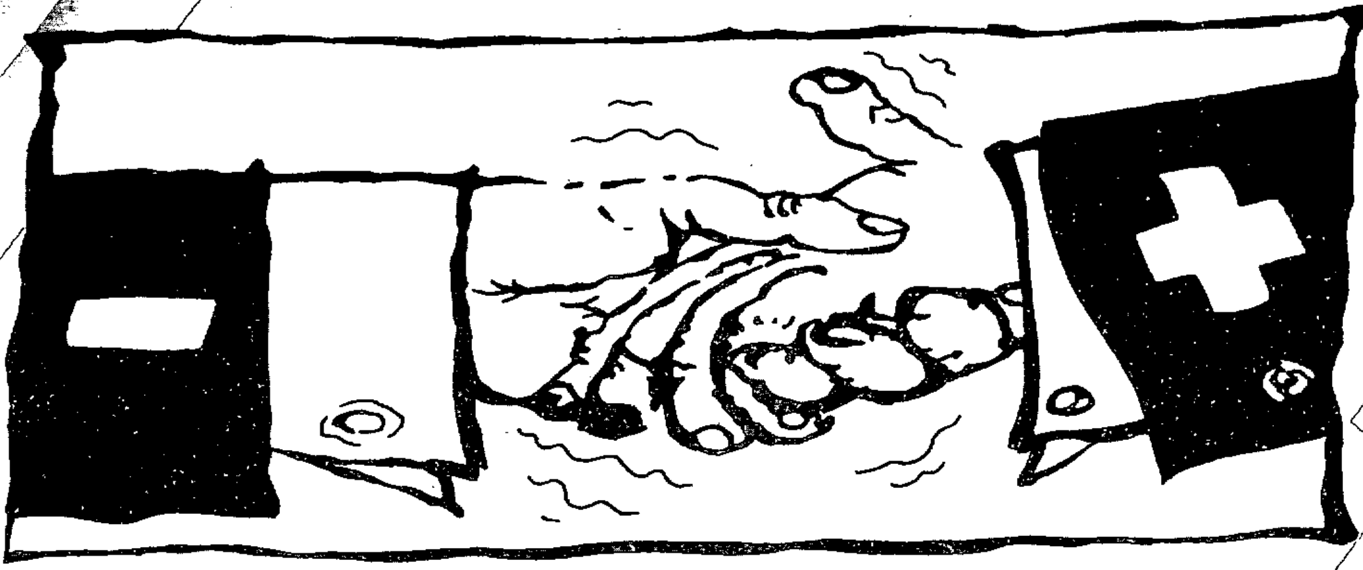
$$\frac{x^2+y^2+z^2-z^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$

محمدباقر یزدی از ریاضیدانان دورهٔ صفویه و معاصر با شاه عباس اوّل و شاه صفی و شاه عباس دوم بوده و کمی پیش از ۱۰۶۹ هجری درگذشته است.

مهمترین اثر ریاضی او، کتاب **عُیونُ الحساب** اوست که به عربی نوشته و می‌توان گفت که آن را به تقلید از **مفتاح الحساب غیاث‌الدین جمشید کاشانی** فراهم کرده است. با این همه، در عیون‌الحساب، مطالبی هست که در مفتاح‌الحساب دیده نمی‌شود. مثلاً یزدی در مطلب دوازدهم از باب اوّل کتاب خود، حالتهای خاصی از معادلهٔ درجهٔ پنجم را حل کرده است.

عنوان مطلب دوازدهم از باب اوّل عیون‌الحساب این است: «استخراج ریشهٔ اوّل از مُضلّعات زائده و ناقصه» و مقصود یزدی از مضلّعات زائده و ناقصه، عباراتی جبری است مثلاً به‌صورت $(x+123)x^4$ یا $(x^2+144)x^3$ و غیره.

زندگینامهٔ ریاضیدانان دورهٔ اسلامی ـ ابوالقاسم قربانی



تعیین علامت عبارتهای جبری، حلّ نامعادله ها

(قسمت اوّل)

● هوشنگ شرقی

برای حلّ نامعادله‌های خطی یا نامعادله‌های کسری که مجهول نامعادله در مخرج کسر باشد، لازم است از تعیین علامت عبارتهای جبری استفاده شود. در این‌جا ابتدا مفهوم تعیین علامت را شرح داده و سپس روشهای تعیین علامت عبارتهای جبری را می‌آموزیم و در نهایت، کاربرد تعیین علامت را در حلّ نامعادله‌های درجهٔ دوم و بالاتر، و نیز نامعادله‌های کسری توضیح می‌دهیم.

تعیین علامت : منظور از تعیین علامت یک عبارت جبری با یک مجهول، آن است که مشخص کنیم که این عبارت جبری، به‌ازای مقادیر مختلف آن مجهول، چه علامتی دارد. به‌عنوان مثال، کسر $A=\frac{x+1}{x-1}$ را درنظر بگیرید، می‌خواهیم ببینیم که به‌ازای چه مقادیر x، $A>0$ و به‌ازای کدام مقادیر آن، $A<0$ و چه موقع $A=0$ می‌شود. دربارهٔ چگونگی این کار در این قسمت بحث می‌کنیم.

۱) تعیین علامت عبارتهای جبری درجهٔ اوّل :

برای تعیین علامت عبارتهای جبری درجهٔ اوّل، ابتدا آنها را ساده می‌کنیم، تا به‌صورت $ax+b$ تبدیل شوند. آن‌گاه ریشهٔ عبارت فوق را به‌دست می‌آوریم ؛ یعنی جواب معادلهٔ $ax+b=0$ را به‌دست می‌آوریم : $ax+b=0 \Rightarrow x=-\frac{b}{a}$ ، آن‌گاه در یک جدول به‌صورت زیر، عبارت فوق را تعیین علامت می‌کنیم :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	مخالف علامت a		موافق علامت a

مثال: عبارت جبری $-2x+4$ را تعیین علامت کنید.

حل: همان‌طور که گفته شد، ابتدا ریشهٔ این عبارت را به‌دست می‌آوریم :

$$-2x+4=0 \Rightarrow -2x=-4 \Rightarrow x=2$$

حال در یک جدول مشابه جدول بالا، آن را تعیین علامت می‌کنیم.

x	$-\infty$	۲	$+\infty$
$-2x+4$	+		−

از روی این جدول، مشخص می‌شود که به‌ازای هر x که بزرگتر از ۲ باشد، علامت این عبارت، منفی و به‌ازای هر x که کوچکتر از ۲ باشد، علامت آن، مثبت و به‌ازای $x=2$ این عبارت،

مساوی صفر است. مثلاً به‌ازای $x=4$ که بزرگتر از ۲ است، داریم :

$$-2x+4=-2(4)+4=-8+4=-4<0$$

و به‌ازای $x=1$ که کوچکتر از ۲ است داریم :

$$-2x+4=-2(1)+4=-2+4=2>0$$

تمرین : هریک از عبارتهای جبری زیر را در جدولی مشابه این جدول تعیین علامت کنید :

۱) $-5x+3$ ۲) $6x-3$ ۳) $-2x+4+5x$

۲) تعیین علامت عبارتهای جبری درجهٔ دوم :

برای تعیین علامت عبارتهای جبری درجهٔ دوم، پس از آن که عبارت را ساده کردیم و به شکل کلی ax^2+bx+c تبدیل نمودیم، ابتدا مبین معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ را به‌دست می‌آوریم. در این جا سه حالت پیش می‌آید که در هر حالت، جدول تعیین علامت عبارت جبری، به‌صورت خاص خود رسم می‌شود :

الف) اگر $\Delta>0$ ، ریشه‌های معادله را از دستور $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ به‌دست می‌آوریم. جدول تعیین علامت عبارت جبری ax^2+bx+c به‌صورت زیر رسم می‌شود :

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
ax^2+bx+c	موافق علامت a	0	مخالف علامت a	0	موافق علامت a

$(x_2>x_1)$

توجه داشته باشید که x_1 و x_2 به‌ترتیب صعودی در جدول واقع می‌شوند.

مثال: تعیین علامت سه جمله‌ای درجهٔ دوم $5x^2+6x-11$.

حل: ابتدا سه جمله‌ای را مساوی صفر قرار می‌دهیم :

$$5x^2+6x-11=0$$

$$\Rightarrow \Delta=36-4(5)(-11)=256>0$$

$$\Rightarrow x=\frac{-6\pm\sqrt{256}}{10}=\frac{-6\pm16}{10}\Rightarrow x_1=\frac{-22}{10}=-\frac{11}{5}\ ,$$

$$x_2=\frac{10}{10}=1$$

اکنون عبارت فوق را در جدول زیر، تعیین علامت می‌کنیم :

x	$-\infty$	$-\frac{11}{5}$		1	$+\infty$
$5x^2+6-1$	+	0	−	0	+

مفهوم این جدول، آن است که عبارت فوق، وقتی که $-\frac{11}{5}<x<1$ باشد، منفی و به‌ازای هر $x>1$ یا $x<-\frac{11}{5}$ مثبت است. مثلاً به‌ازای $x=-3$ مثبت است :

$$5x^2+6x-11=5(-3)^2+6(-3)-11$$

$$=45-18-11=15>0$$

ولی به‌ازای $x=-2$ ($-\frac{11}{5}<-2<1$) منفی است :

$$5x^2+6x-11=5(-2)^2+6(-2)-11$$

$$=20-12-11=-3<0$$

مثال: عبارت درجهٔ دوم $4-x^2$ را تعیین علامت کنید.

حل: $4-x^2=0\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm2$

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$4-x^2$	−	0	+	0	−

از این جدول می‌فهمیم که اگر $-2<x<2$ باشد، $4-x^2>0$ و اگر $x>2$ یا $x<-2$ باشد، $4-x^2<0$ و به‌ازای $x=\pm2$ ، $4-x^2=0$ می‌باشد. (چرا؟)

تمرین : هریک از عبارتهای جبری زیر را تعیین علامت کنید :

۱) x^2+x-2 ۲) $4x^2-9$ ۳) $-2x^2-5x+7$

ب) اگر $\Delta=0$ ، معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ ، دارای ریشهٔ مضاعف به‌صورت $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$ است و در این حالت، علامت سه‌جمله‌ای، همواره موافق علامت a بوده و فقط در $x=-\frac{b}{2a}$ صفر است :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
ax^2+bx+c	موافق علامت a	0	موافق علامت a

مثال: عبارت جبری $4x^2-4x+1$ را تعیین علامت کنید.

حل: سه‌جمله‌ای فوق را مساوی صفر قرار می‌دهیم :

$$4x^2-4x+1=0\Rightarrow\Delta=16-16=0$$

$$\Rightarrow x_1=x_2=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$4x^2-4x+1$	$+$	0	$+$

یعنی سه‌جمله‌ای $4x^2-4x+1$ به‌ازای همهٔ مقادیر x همواره مثبت بوده و فقط به‌ازای $x=\frac{1}{2}$ مساوی صفر می‌شود.

تمرین : هریک از سه‌جمله‌ایهای زیر را، تعیین علامت کنید :

۱) x^2-2x+1 ۲) $-x^2+4x-4$ ۳) $-3x^2$

ج) اگر $\Delta<0$ ، معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ دارای جواب حقیقی نمی‌باشد و در این حالت، علامت سه‌جمله‌ای، همواره موافق علامت a است :

x	$-\infty$ $+\infty$
ax^2+bx+c	موافق علامت a

مثال: عبارت جبری $2x^2-x+1$ را تعیین علامت کنید.

حل: عبارت فوق را مساوی صفر قرار می‌دهیم :

$$2x^2-x+1=0 \Rightarrow \Delta=(-1)^2-4\times2\times1=1-8<0$$

x	$-\infty$ $+\infty$
$2x^2-x+1$	$+$ $+$ $+$

یعنی سه‌جمله‌ای $2x^2-x+1$ به‌ازای همهٔ مقادیر حقیقی، x همواره مثبت است.

مثال: ثابت کنید :

$$x\in\mathbb{R}\Rightarrow x(x+1)>-1$$

حل: اثبات نابرابری فوق، معادل است با اثبات نابرابری $x^2+x+1>0$ (چرا؟)

برای اثبات این نابرابری سه‌جمله‌ای، x^2+x+1 را تعیین علامت می‌کنیم :

x	$-\infty$ $+\infty$
x^2+x+1	$+$ $+$

$$x^2+x+1=0 \qquad \Delta=1-4<0$$

یعنی x^2+x+1 به‌ازای هر عدد حقیقی x همواره مثبت است و این معادل با آن است که :

$$x\in\mathbb{R}\Rightarrow x^2+x+1>0\Rightarrow x(x+1)-1$$

تمرین : هر یک از سه جمله‌ایهای زیر را تعیین علامت کنید.

۱) $-x^2+x-2$ ۲) $3x^2-x+1$

۳) برای تعیین علامت عبارتهای جبری که به‌صورت حاصل‌ضرب و تقسیم تعدادی عبارت جبری درجهٔ یک و دو باشند، ابتدا همهٔ عبارتهای تشکیل دهندهٔ آنها را در یک جدول، تعیین علامت می‌کنیم. آن‌گاه علامتهای این عبارتها را در هم ضرب می‌کنیم و علامت عبارت تشکیل یافته از آنها را در فاصله‌های مختلف به‌دست می‌آوریم. همچنین عبارت جبری فوق، روی ریشه‌های مخرج کسرها تعریف نشده و روی سایر ریشه‌ها مساوی صفر می‌شود.

مثال: عبارت $A=\frac{(x-1)(x^2-4)}{(3x-2)(2-x)}$ را تعیین علامت کنید.

حل: ابتدا چهار عبارتی را که از ضرب و تقسیم آنها کسر A به‌دست آمده است، مساوی صفر قرار داده و ریشه‌های آنها را به‌دست می‌آوریم :

$$x-1=0\Rightarrow x=1$$

$$x^2-4=0\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm2$$

$$3x-2=0\Rightarrow x=\frac{2}{3}$$

$$2-x=0\Rightarrow x=2$$

آن‌گاه این چهار عبارت را در یک جدول چهار سطری (هر عبارت در یک سطر) به‌طور جداگانه و مطابق دستورهای گفته شده، تعیین علامت می‌کنیم :

x	$-\infty$		-2		$\frac{2}{3}$		1		2		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-4		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
A		$+$	0	$-$	∞	$+$	0	$-$	∞	$-$	

از روی این جدول، مشخص می‌شود که اگر $x<-2$ یا $\frac{2}{3}<x<1$ باشد، $A>0$ و اگر $-2<x<\frac{2}{3}$ یا $1<x<2$ یا $x>2$ باشد، $A<0$ و به‌ازای $x=-2$ و $x=1$ ، $A=0$ و به‌ازای $x=\frac{2}{3}$ و $x=2$ ، کسر A تعریف نشده می‌باشد.

مثال: عبارت $P=\frac{(x^۲-۲x+۱)(x^۲-۹)}{(-x^۲+۴x)(۳-x)}$ را تعیین علامت کنید.

حل: مانند مثال قبل، عمل می‌کنیم :

$x^۲-۲x+۱=۰ \Rightarrow (x-۱)(x-۱)=۰ \Rightarrow x_۱=x_۲=۱$

(ریشهٔ مضاعف)

$x^۲-۹=۰ \Rightarrow x^۲=۹ \Rightarrow x=\pm ۳$

$-x^۲+۴x=۰ \Rightarrow x(-x+۴)=۰ \Rightarrow x=۰$ یا $x=۴$

$۳-x=۰ \Rightarrow x=۳$

x	$-\infty$		-۳		۰		۱		۳		۴		$+\infty$
$x^۲-۲x+۱$		+		+		+	۰	+		+		+	
$x^۲-۹$		+	۰	−		−		−	۰	−		−	
$-x^۲+۴x$		−		−	۰	+		+		+	۰	−	
$۳-x$		+		+		+		+	۰	−		−	
P		−	۰	+	∞	−	∞	−	∞	+	∞	−	

لازم به ذکر است که اگر عبارت جبری، به حاصلضرب عوامل درجهٔ یک یا دو تجزیه نشده باشد، قبلاً باید آن را به حاصلضرب عوامل تبدیل نمود و سپس آن را تعیین علامت کرد.

مثال: عبارت جبری $x^۳-x$ را تعیین علامت کنید.

حل: ابتدا عبارت $x^۳-x$ را به حاصلضرب عوامل تجزیه می‌کنیم :

$x^۳-x=x(x^۲-۱)=x(x-۱)(x+۱)$

اکنون با تعیین علامت سه عبارت x، $x-۱$ و $x+۱$ در یک جدول می‌توان عبارت $x^۳-x$ را تعیین علامت نمود.

$x=۰ \;;\; x-۱=۰ \Rightarrow x=۱ \;;\; x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱$

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
x		−		−	۰	+		+	
$x-۱$		−		−		−	۰	+	
$x+۱$		−	۰	+		+		+	
$x^۳-x$		−	۰	+	۰	−	۰	+	

از روی جدول، معلوم می‌شود که اگر $۱<x$ یا $-۱<x<۰$ باشد، $x^۳-x>۰$ و اگر $۰<x<۱$ یا $x<-۱$ باشد، $x^۳-x<۰$ و اگر $x=-۱,۰,۱$ باشد، $x^۳-x=۰$ است.

مثال: عبارت جبری $A=\frac{x+۲}{x-۲}-\frac{x+۳}{x-۳}$ را تعیین علامت کنید.

حل: ابتدا مخرج مشترک گرفته و عبارت A را ساده می‌کنیم :

$$A=\frac{(x+۲)(x-۳)-(x-۲)(x+۳)}{(x-۲)(x-۳)}$$

$$=\frac{x^۲-x-۶-(x^۲+x-۶)}{(x-۲)(x-۳)}=\frac{x^۲-x-۶-x^۲-x+۶}{(x-۲)(x-۳)}$$

$$\Rightarrow A=\frac{-۲x}{(x-۲)(x-۳)}$$

$-۲x=۰ \Rightarrow x=۰ \quad ; \quad x-۲=۰ \Rightarrow x=۲$

$x-۳=۰ \Rightarrow x=۳$

x	$-\infty$		۰		۲		۳		$+\infty$
$-۲x$		+	۰	−		−		−	
$x-۲$		−		−	۰	+		+	
$x-۳$		−		−		−	۰	+	
A		+	۰	−	∞	+	∞	−	

تمرین : هریک از عبارتهای جبری زیر را تعیین علامت کنید :

۱) $-۵x+۷$

۲) $-x^۲+۸$

۳) $۴x^۲+x-۵$

۴) $x^۲+۴x+۴$

۵) $۶x^۲-۵x$

۶) $\frac{(x-۲)(x-۳)}{(x^۲-۱)(x^۲+۱)}$

۷) $\frac{۱}{x+۱}-\frac{۱}{۲x}$

۸) $x^۴-x$

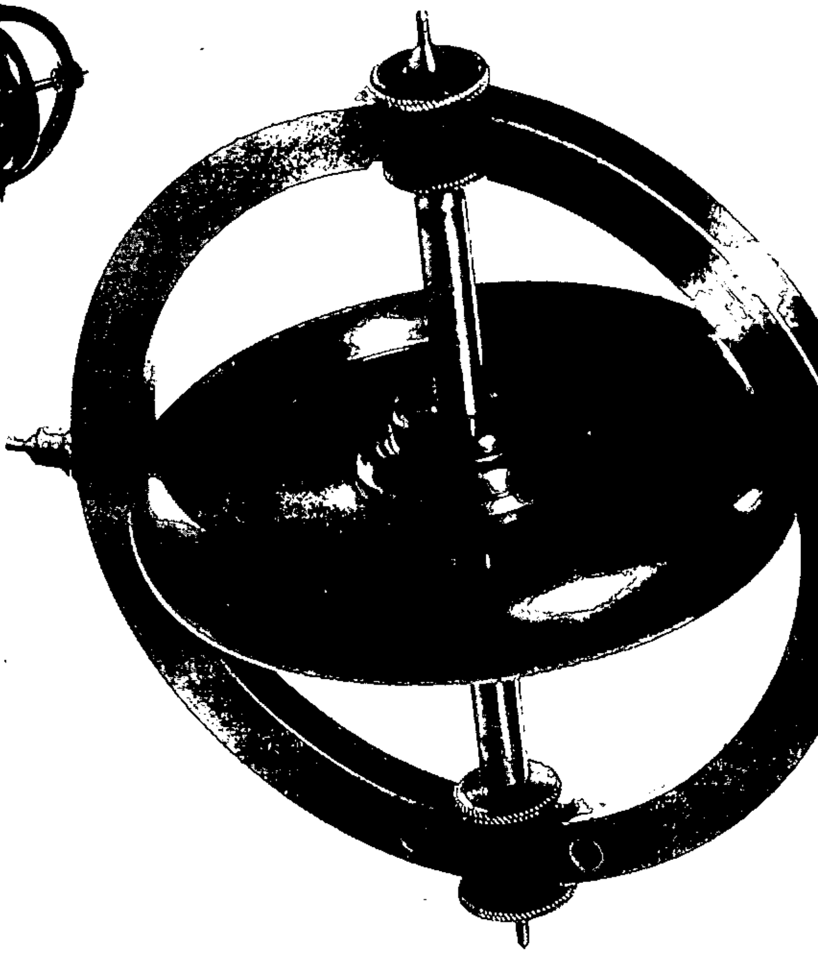
۹) $x^۴+x^۲-۲$

۱۰) $\frac{x^۲+۱}{x}-۲x$

۱۱) $\frac{x+۴}{x+۱}-\frac{x+۳}{x-۱}$

۱۲) $\frac{x^۲+۱}{x^۲-۱}-\frac{x^۲-۱}{x^۲+۱}$

۱۳) $\frac{(x^۲-۵x+۶)(x^۲-۴)}{(x^۲+x)(x^۲+x+۱)}$



قضیهٔ مقدار میانگین

(قسمت سوّم)

● محمدصادق عسگری

فرض کنیم f تابعی حقیقی و پیوسته بر بازهٔ $[a,b]$ و مشتق‌پذیر بر بازهٔ $]a,b[$ باشد. در این صورت وجود دارد $a<c<b$ ؛ به‌طوری که $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

اثبات: فرض کنیم $k=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ، ثابت می‌کنیم وجود دارد $a<c<b$ ؛ به‌طوری که $f'(c)=k$. تابع جدید $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ با $g(x)=f(x)-f(a)-k(x-a)$ را در نظر می‌گیریم ؛ چون f پیوسته و مشتق‌پذیر است. درنتیجه، g نیز روی بازهٔ $[a,b]$ پیوسته و مشتق‌پذیر است و

$$g(a)=f(a)-f(a)-k(a-a)=0$$

$$g(b)=f(b)-f(a)-k(b-a)$$

$$g(b)=f(b)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)$$

$$g(b)=f(b)-f(a)-f(b)+f(a)=0$$

یعنی $g(a)=g(b)=0$. بنابر قضیه رول وجود دارد $a<c<b$ ؛ به‌طوری که $g'(c)=0$.

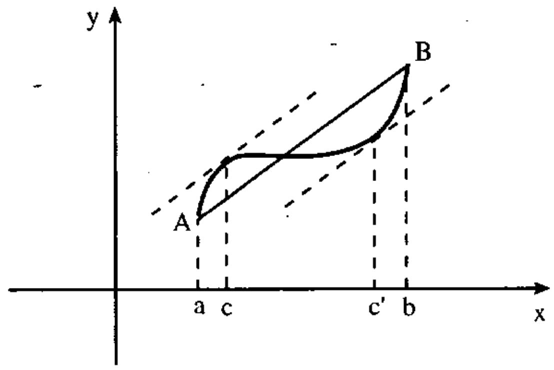
$$g(x)=f(x)-f(a)-k(x-a)$$

$$g'(x)=f'(x)-k$$

$$g'(c)=f'(c)-k=0\Rightarrow \boxed{f'(c)=k}$$

تعبیر هندسی قضیهٔ مقدار میانگین

اگر دو نقطهٔ $A\Big|^{a}_{f(a)}$ و $B\Big|^{b}_{f(b)}$ را روی نمودار تابع f در نظر بگیریم، در این صورت، عدد $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ شیب خط گذرنده از نقاط A و B است. بنابراین، قضیه بیان می‌کند که، اگر f مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه در نقطه‌ای به طول c خط مماس بر منحنی، موازی پاره‌خط AB است.



نتایج قضیه مقدار میانگین

نتیجهٔ ۱: اگر f بر بازهٔ $[a,b]$ پیوسته و بر بازهٔ $]a,b[$ مشتق‌پذیر باشد و عدد حقیقی مثبت M وجود داشته باشد ؛ به‌طوری که برای هر $a<x<b$ داشته باشیم $|f'(x)|\leq M$، آن‌گاه، $|f(b)-f(a)|\leq M|b-a|$.

اثبات: بنابر قضیهٔ مقدار میانگین وجود $a<c<b$ ؛ به‌طوری که $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ طبق فرض $|f'(c)|\leq M$، درنتیجه داریم :

$$\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|\leq M\Rightarrow|f(b)-f(a)|\leq M|b-a|$$

نتیجهٔ ۲: اگر f روی بازهٔ $[a,b]$ مشتق‌پذیر باشد و برای هر $a<x<b$ داشته باشیم $f'(x)=۰$ ، آن‌گاه f تابع ثابت است. $(f=cte)$

اثبات: فرض کنیم $a<x<b$ دلخواه و پس از این ثابت باشد. بنا به فرض تابع f روی بازهٔ $[a,x]$ پیوسته و بر بازهٔ $]a,x[$ مشتق‌پذیر است، طبق قضیهٔ مقدار میانگین، وجود دارد $a<c<x$ ؛ به‌طوری که $f'(c)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. بنا به فرض $f'(c)=۰$ ، درنتیجه $f(x)-f(a)=۰$ ؛ یعنی $f(x)=f(a)$. چون x دلخواه است، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که f تابع ثابت است.

نتیجهٔ ۳: اگر توابع حقیقی f و g بر بازهٔ $[a,b]$ مشتق‌پذیر باشند و برای هر $a<x<b$ ، داشته باشیم $f'(x)=g'(x)$ ، آن‌گاه $f(x)=g(x)+c$. (یعنی f و g با اختلاف یک مقدار ثابت c با یکدیگر مساوی هستند.)

اثبات: تابع جدید $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ را با ضابطهٔ $h(x)=f(x)-g(x)$ در نظر می‌گیریم. تابع h بر بازهٔ $[a,b]$ مشتق‌پذیر است و برای هر $a<x<b$ ، $h'(x)=f'(x)-g'(x)=۰$. بنابراین، طبق نتیجهٔ ۲، h یک تابع ثابت است ؛ یعنی عدد ثابت c هست ؛ به‌طوری که $h(x)=c$ ، درنتیجه، $f(x)-g(x)=c$ یا $f(x)=g(x)+c$.

مثال ۲۲: برای توابع زیر روی بازه‌های داده شده، شرایط قضیهٔ مقدار میانگین را بررسی کنید و در صورت برقراری شرایط، نقطه یا نقاط c مذکور در قضیه را بیابید.

الف) $f(x)=\sin x+\frac{x}{۲}$ روی $[-\pi,\pi]$.

حل: تابع f روی بازهٔ $[-\pi,\pi]$ مشتق‌پذیر است. طبق قضیهٔ مقدار میانگین، وجود دارد $-\pi<c<\pi$ ؛ به‌طوری که $f'(c)=\frac{f(\pi)-f(-\pi)}{\pi+\pi}$ یا $f'(c)=\frac{۱}{۲}$.

$$f(x)=\sin x+\frac{x}{۲}\Rightarrow f'(x)=\cos x+\frac{۱}{۲}$$

$$f'(c)=\cos c+\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\cos c=۰$$

$$\Rightarrow c=-\frac{\pi}{۲}\ ,\ \frac{\pi}{۲}$$

ب) $f(x)=\sqrt[۳]{x}$ روی بازهٔ $[-۱,۱]$.

حل: تابع f در نقطه‌ای به طول $x=۰$ از این بازه پیوسته است ؛ ولی مشتق‌پذیر نیست. در صورتی که اگر قرار دهیم : $f'(c)=\frac{f(۱)-f(-۱)}{۱+۱}$ یا $f'(c)=۱$ ، آن‌گاه داریم :

$$f(x)=\sqrt[۳]{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}$$

$$\Rightarrow f'(c)=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{c^۲}}=۱\Rightarrow\sqrt[۳]{c^۲}=\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow c^۲=\frac{۱}{۲۷}\Rightarrow c=\pm\frac{۱}{۳\sqrt{۳}}$$

$$\Rightarrow c=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۹}$$

یعنی شرایط قضیهٔ مقدار میانگین برقرار نیست. درصورتی که نقطهٔ c مذکور در قضیه وجود دارد.

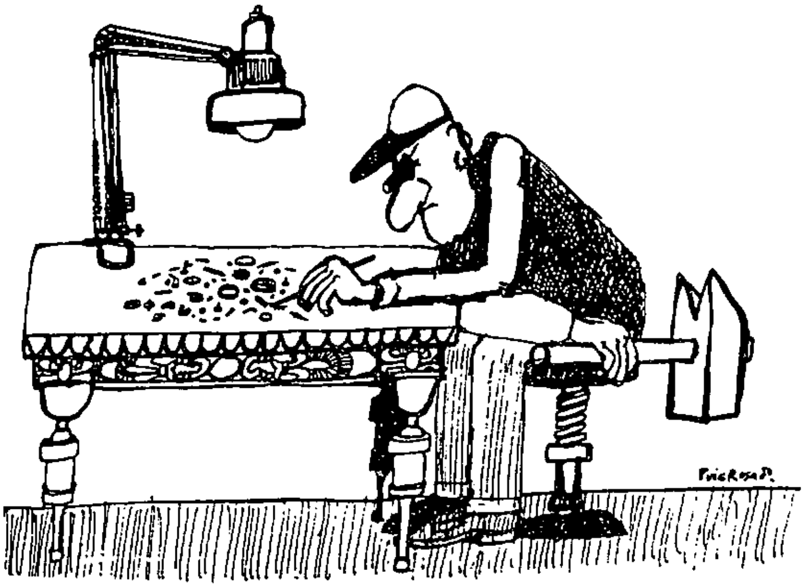
ج) تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ روی بازهٔ $[-۱,۱]$.

حل: تابع f در نقطه‌ای به طول $x=۰$ ناپیوسته است و اگر قرار دهیم : $f'(c)=\frac{f(۱)-f(-۱)}{۱+۱}$ یا $f'(c)=۱$ ، آن‌گاه داریم :

$$f(x)=\frac{۱}{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{-۱}{x^۲}$$

$$\Rightarrow f'(c)=\frac{-۱}{c^۲}=۱\ \Rightarrow\ c^۲=-۱\qquad \text{(معادله ریشه ندارد)}$$

یعنی شرایط قضیهٔ مقدار میانگین برقرار نیست و نقطهٔ c مذکور در قضیه نیز وجود ندارد.



جزء صحیح

(قسمت دوم)

● علی‌حسن‌زاده ماکویی

در شمارهٔ ۴ بهار ۷۷ مجلهٔ برهان (شمارهٔ ۲۴ مسلسل) در مورد جزء صحیح x یعنی $[x]$ (براکت x) مطالبی به اطلاع علاقه‌مندان رسید. اینک دنبالهٔ آن مطالب را با ذکر چند مثال، پی می‌گیرم.

الف: چند مثال در مورد معادله‌های براکتی

مجموعهٔ جواب معادله‌های زیر را تعیین کنید.

۱. $[۲x+۱]=-۲$

حل: $-۲\le ۲x+۱<-۱$ یا $-۳\le ۲x<-۲ \Rightarrow$

$\frac{-۳}{۲}\le x<-۱$ یا $x\in\left[\frac{-۳}{۲},\ -۱\right]$

۲. $\left|[۲x-۱]\right|=۲$

حل: $[۲x-۱]=۲\Rightarrow[۲x]-۱=۲\Rightarrow[۲x]=۳\Rightarrow\frac{۳}{۲}\le x<۲$ یا

$x\in\left[\frac{۳}{۲},\ ۲\right)$ یا $[۲x-۱]=-۲\Rightarrow[۲x]=-۱\Rightarrow-۱\le ۲x<۰$

$\Rightarrow x\in\left[\frac{-۱}{۲},\ ۰\right)\Rightarrow$

مجموعهٔ جواب $x\in\left[-\frac{۱}{۲},\ ۰\right)\cup\left[\frac{۳}{۲},\ ۲\right)$

۳. $\left|\left[x-۲[x]\right]\right|=۲$

حل: $[x]\in z\Rightarrow\left|\left[x-۲[x]\right]\right|=\left|[x]-۲[x]\right|=\left|[x]\right|$

$=۲\Rightarrow[x]=۲\Rightarrow x\in[۲,\ ۳)$ یا

$[x]=-۲$ یا $[-۲,\ -۱)\Rightarrow$

مجموعهٔ جواب $x\in[-۲,\ -۱)\cup[۲,\ ۳)$

۴. مجموع xهای متعلق به مجموعهٔ Z که در معادلهٔ $\left[\frac{x}{۳}-x+۱\right]=۱$ صدق می‌کنند، کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۱ ۳) ۳ ۴) -۴

حل: گزینهٔ دوم صحیح است ؛ زیرا :

$\left[\frac{x}{۳}-x+۱\right]=\left[-\frac{۲x}{۳}\right]+۱=۱$ یا $\left[\frac{-۲x}{۳}\right]=۰\Rightarrow$

$۰\le\frac{-۲x}{۳}<۱$ یا $\frac{-۳}{۲}<x\le۰,\ x\in\{-۱,\ ۰\},\ -۱+۰=-۱$

۵. مجموعهٔ جواب معادلهٔ $[۲x-۱]+[۶+۲x]=۱$ کدام است؟

۱) $[-۲,\ ۱)$ ۲) $\left[\frac{-۳}{۲},\ \frac{۱}{۲}\right)$

۳) $[-1, 1)$ ۴) $[-1, \frac{-1}{2})$

حل: گزینهٔ چهارم صحیح است ؛ زیرا :

$[2x]-1+[2x]+6=1$ یا $2\times[2x]=-4$

$$\Rightarrow -2\le 2x<-1\Rightarrow x\in\left[-1, -\frac{1}{2}\right)$$

۶. مجموعهٔ جواب معادلهٔ $[1+\log_2^x]+[2+\log_2^x]=5$ کدام است؟

۱) $[2, 4)$ ۲) $[\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$

۳) $[\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ ۴) $[1, 3)$

حل: گزینهٔ اوّل صحیح است ؛ زیرا :

$2[\log_2^x]=2$ یا $[\log_2^x]=1\Rightarrow 1\le\log_2^x<2$

$\Rightarrow 2\le x<4$ یا $x\in[2, 4)$

۷. مجموعهٔ ریشه‌های معادلهٔ $\left[\frac{x}{4}-2\right]=6$ در مجموعهٔ Z چند عضو دارد؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ۳

حل: گزینهٔ سوّم صحیح است ؛ زیرا :

$\left[\frac{x}{4}\right]=8\Rightarrow 8\le\frac{x}{4}<9$ یا $32\le x<36,\ x\in z$

$\Rightarrow$ (تعداد xهای صحیح) $n=36-32=4,$

$x\in\{32, 33, 34, 35\}$

۸. از مجموعه‌های زیر، کدام‌یک در معادلهٔ $|[1-x]|=3$ صدق می‌کند؟

۱) $(-1, 3]$ ۲) $(2, 3]$

۳) $(3, 4]$ ۴) هیچکدام

حل: گزینهٔ سوّم صحیح است ؛ زیرا :

$[1-x]=3$ یا $3\le 1-x<4$ یا $-3<x\le -2$

$[1-x]=-3$ یا $-3\le 1-x<-2$ یا $3<x\le 4$

۹. مجموعهٔ جواب معادلهٔ دترمینانی $\begin{vmatrix}[1-2x] & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-2$ کدام است؟

۱) $[\frac{1}{2}, 1)$ ۲) $(\frac{1}{2}, 1]$

۳) $[1, 2)$ ۴) $(1, 2]$

حل: گزینهٔ دوم صحیح است ؛ زیرا :

$2\times[1-2x]-1\times 0=-2$ یا $[-2x]=-2$

$$\Rightarrow -2\le -2x<-1\Rightarrow x\in\left(\frac{1}{2}, 1\right]$$

۱۰. اگر $f(x)=\begin{vmatrix}\left[x+\frac{4}{3}\right] & \left[x-\frac{7}{3}\right]\\ -2x+1 & 3\end{vmatrix}$، آن‌گاه $f(3)$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۱۹ ۳) ۲۰ ۴) ۱۲-

حل: گزینهٔ اوّل صحیح است.

$$f(x)=3\times\left[x+\frac{4}{3}\right]-(1-2x)\times\left[x-\frac{7}{2}\right]$$

$$\Rightarrow f(3)=3\times\left[\frac{13}{3}\right]-(-5)\left[-\frac{1}{2}\right]=3\times 4+5\times -1=7$$

۱۱. در تساوی $\begin{bmatrix}2 & -7\\ 3 & [x+1]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -7\\ 3 & 2[x]\end{bmatrix}$ مجموعهٔ جواب x کدام است؟

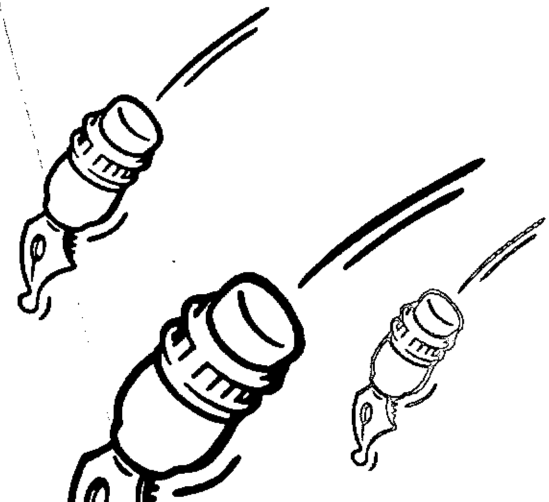
۱) $[1, 0)$ ۲) $[1, 2)$

۳) $[-2, -1)$ ۴) $[-1, 0)$

حل: گزینهٔ دوم صحیح است.

$[x+1]=2[x]$ یا $[x]+1=2[x]$ یا $[x]=1$

$\Rightarrow 1\le x<2$ یا $x\in[1, 2)$



آنچه از دوست رسد ...

با عرض سلام، خدمت همگی دانش‌آموزان و خوانندگان محترم مجلّهٔ ریاضی برهان

دوستان گرامی! هر روز، نامه‌های پُرمحتوا و مقاله‌ها و مسأله‌های شما در دفتر مجلّه به دستمان می‌رسد. از این که مجلّه را با دقت و حوصله مطالعه می کنید و پیشنهادها و انتقادهای سازندهٔ خود را برای ما ارسال می کنید، بسیار سپاسگزاریم. از همگی شما عزیزان تقاضا داریم که با ارائهٔ نقطه‌نظرها و طرحهای خود، ما را در هرچه کاملتر شدن و بهتر شدن مجلّهٔ خودتان، یاری فرمایید. در شماره‌های ۲۹ و ۳۰ مسائل کتابهای ریاضی دورهٔ دبیرستان و پیش‌دانشگاهی را با حلّ تشریحی و در شماره‌های ۳۱ و ۳۲ پرسشهای چهارگزینه‌ای این کتابها را با حلّ تشریحی ملاحظه خواهید کرد. لازم به تذکر است که از این به بعد، پاسخ مسائل و پرسشهای چهارگزینه را به شمارهٔ بعد، ارجاع نمی‌دهیم و آنها را یک جا به چاپ می‌رسانیم.

نام تعدادی از خوانندگان محترم مجلّه ریاضی برهان که برای ما نامه ارسال کرده‌اند:

آقایان : علی فدایی (بندرعباس)، کامران مرادی (کرمانشاه)، کاوه شهیم (کرج)، مسعود امیرکبیری (تبریز)، مجید علی‌مدد (تهران)، مصطفی فولادوند (مشهد مقدس)، مصطفی فولادکاد (مشهد مقدس)، وحید طاهری (تبریز)، پیروز رفیعی (تهران)، محمود قلی‌پور (رودسر)، همکار محترم جناب آقای ابراهیم رضایی (بهشهر)، آرش دبیرزاده (اصفهان)، بهروز بایرامی (آذربایجان غربی)، سیدمصطفی صفوی (تهران)، محمدحسین دائمی (بهشهر)، علی سقائیان (مشهد مقدس) و خانم‌ها : حمیده ابوالقاسمی (تهران)، آسیه جعفری (بجنورد)، سعیده بخشی (شیراز).

از همهٔ شما عزیزان به پاس ارسال مقاله و مسائل همراه با حل سپاسگزاریم. در صورت امکان از این مسأله‌ها در قسمت مسأله برای حل و مسائل مسابقه‌ای مجلّه استفاده خواهیم کرد و مقاله‌های شما را پس از تصویب در هیأت تحریریّه، چاپ خواهیم کرد.

همکار محترم جناب آقای قاسم علیپور از پیشنهادات سازندهٔ شما سپاسگزاریم، ان‌شاءا.. از این پیشنهادها جهت کاملتر شدن مجلّه، استفاده خواهیم کرد.

آقای مجتبی دلیری (مشهد مقدس) ؛ تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی یک مجموعهٔ n عضوی برابر با $\binom{n}{۲}$ است، که داریم : $\binom{n}{۲}=\frac{n(n-۱)}{۲}$ و فرمول شما با فرض این که $\alpha=\frac{n}{۲}-۱$ و $\beta=\frac{n}{۲}$ ، می‌توان به فرمول بالا رسید :

$$n\times(\frac{n}{۲}-۱)+\frac{n}{۲}=\frac{n(n-۱)}{۲}=\binom{n}{۲}$$

و این فرمول ساده‌تری است.

آقای پیمان علیجانی (رامسر) ؛ قضیهٔ زیر را می‌توان بدون استفاده از استقرای ریاضی و ساده‌تر اثبات کرد :

قضیه: فرض کنیم $n\in\mathbb{N}$ و $a\in\mathbb{Z}-\{۰,۱\}$ ، آن‌گاه $a^n\overset{a-۱}{\equiv}۱$.

می‌دانیم که : $q\in\mathbb{Z}$ ؛ $a^n-۱=(a-۱)\times q$.

بنابراین داریم :

$$(a-۱)\,|\,a^{n}-۱ \Rightarrow a^{n} \overset{a-۱}{\equiv} ۱$$

آقای رضا خواجوی‌نیا (اصفهان) ؛ در برهان ۲۸ دبیرستان مقالهٔ «تفکر الگوریتمی، هنر برنامه‌نویسی»، نوشتهٔ آقای عبدالحسین مصحفی آمده است، که تقریباً منطبق با مقاله‌ای که جنابعالی ارسال کرده‌اید، می‌باشد.

آقای محمدحسین دائمی (بهشهر) ؛ امتناع تثلیث زاویه به کمک خط‌کش غیر مدرّج و پرگار، ثابت شده است.

آقای کمال ظاهری (سردشت) ؛ از آن‌جا که مسائل ارسالی شما می‌تواند، مورد استفادهٔ علاقه‌مندان به ریاضی قرار گیرد، بنابراین، یکی از آنها را در زیر می‌آوریم :

مسأله. عبارت $۳۲^{x}+۲^{x}+۱$ را تجزیه کنید.

$$۳۲^{x}+۲^{x}+۱=(۲^{x})^{۵}+۲^{x}+۱$$

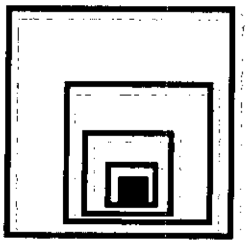
با فرض $۲^{x}=y$ ، داریم :

$$\begin{aligned} y^{۵}+y+۱ &= y^{۵}+y+۱+y^{۲}-y^{۲}=(y^{۵}-y^{۲})+(y^{۲}+y+۱) \\ &= y^{۲}(y^{۳}-۱)+(y^{۲}+y+۱) \\ &= (y^{۲}+y+۱)\left[y^{۲}(y-۱)+۱\right] \\ &= (y^{۲}+y+۱)(y^{۳}-y^{۲}+۱) \end{aligned}$$

در نتیجه داریم :

$$\begin{aligned} ۳۲^{x}+۲^{x}+۱ &= \left[(۲^{x})^{۲}+۲^{x}+۱\right]\left[(۲^{x})^{۳}-(۲^{x})^{۲}+۱\right] \\ &= (۴^{x}+۲^{x}+۱)(۸^{x}-۴^{x}+۱) \end{aligned}$$

مسأله مسابقه‌ای



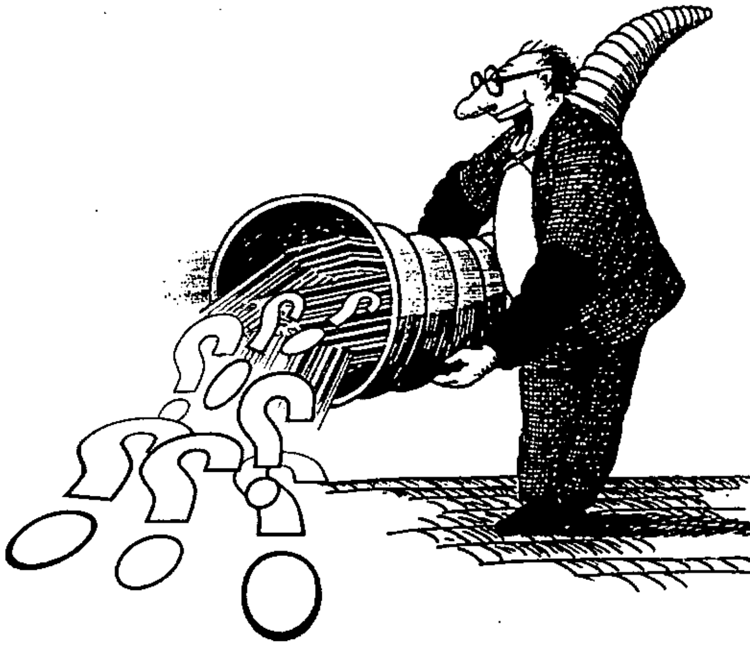
باقیمانده تقسیم عدد زیر را بر ۵ به دست آورید :

$$S=۱^{n}+۲^{n}+۳^{n}+۴^{n}+۵^{n}+۶^{n}+۷^{n}+۸^{n}$$

در اواخر قرن نوزدهم، هنگامی که جمعی بنای عظیم ریاضی را تکمیل می‌کردند، جمع دیگری درصدد بودند اساس آن را بکلّی تغییر دهند ؛ زیرا این علم نیز از حمله و هجوم عاملان خرابی و نابودی برکنار نمانده بود.

دانشمندان ریاضی، از اوایل قرن نوزدهم، بدون ملاحظه پیش‌رفته و نتایج بسیاری گرد آورده بودند. آن‌گاه از زمان کوشی به بعد، جانشینان ایشان شروع به دقت در نتایج سابق‌الذّکر کردند. بدیهی‌ترین مفاهیم را با نهایت عدم اطمینان مورد موشکافی دقیق قرار دادند و ادراکاتی را که فقط حاصل مکاشفه بود، از زیر ذرّه‌بین انتقاد و امتحان گذراندند. اصول موضوع و متعارفی را تجزیه و تحلیل کامل کردند و آنها را تا قلمرو اعداد خالص پیش بردند، و به این ترتیب، ملاحظه کردند بسیاری از مفاهیم که واضح و مبرهن فرض می‌شوند، متّکی بر شهرتهای غلط گذشته‌اند و بنای باعظمت هندسه و آنالیز، در بسیاری از نقاط، متّکی بر فن است و درنتیجه، لازم دیدند آن را از نو بنیاد نهند.

تاریخ علوم ـ پی‌یر روسو ـ حسن صفاری



مسائل برای حل

□ احمد قندهاری
□ محمد هاشم رستمی
□ حمید رضا امیری
□ میرشهرام صدر
□ سید محمدرضا هاشمی موسوی

❖ ریاضیات ۱

۱. در صورتی که مجموعه‌های A، B و M (مرجع) به صورت زیر باشند:

$A=\{2,4,6,8\}\ ,\ B=\{3,4,6,8\}\ ,\ M=\{1,2,3,\ldots,9\}$

حاصل هر یک از عبارتهای $A\cap B$، $A\cup B$، $A-B$ و $A\cap B'$ را بیابید و نشان دهید و درستی برابری $A-B=A\cap B'$ را تحقیق کنید.

۲. از رابطهٔ زیر، مقدار عددی x را بیابید.

$5^{x+2}=20\times 5^{x}+5\times 5^{2}\times 5^{3}\times 5^{4}\times 5^{5}$

۳. بین $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{3}$ چهار عدد گویا بنویسید.

۴. اگر $A=x^{2}-x+3$ ، $B=x+2$ و $C=3(x-1)^{2}$ ، حاصل $A-B+C$ را بیابید.

۵. باقیماندهٔ تقسیم $(8x^{2}-4+2x^{3}+6x):(x-2)$ را بیابید.

۶. حاصل عبارتهای زیر را بیابید:

۱) $p=(x+1)(x^{2}+1)(x^{4}+1)(x^{8}+1)$

۲) $q=(x+y+z)\left[(x+y)^{2}+z^{2}-xz-yz\right]$

۷. عبارتهای زیر را تجزیه کنید:

۱) $a^{3}b^{2}(a^{2}+b)+a^{3}b^{3}+a^{2}b^{5}$

۲) $x^{5}-x^{4}+x^{3}-x^{2}-x+1$

۸. بزرگترین مقسوم علیه مشترک (ک.م.م) و کوچکترین مضرب مشترک (ک.م.م) دو عبارت $a^{4}+a^{3}+a^{2}b+ab$ و $a^{3}+3a^{2}+2a$ را بیابید.

۹. اگر $a+b=1$ و $ab=-1$ ، حاصل عبارتهای زیر را بیابید.

۱) $p=(a^{3}+b^{3})(a^{2}+b^{2})$

۲) $q=(a-b)^{4}$

۱۰. کسرهای زیر را ساده کنید. $(x \notin \{-1,0,1\})$

$$1)\ A=\frac{-x^2+2x-1}{1-x^2}$$

$$2)\ B=\frac{(x^3-1)^2(x+1)^2x^4}{(x^4-x^2)^2}$$

❖ ریاضیات ۳

۱. مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $2<\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ را بیابید.

۲. به ازای چه مقادیری از m عبارت: $p=(m^2-1)x^2-2mx-1$ ، همیشه منفی است؟

۳. معادله‌های زیر را حل کنید:

$$1)\ \frac{x^3-x^2-x}{x^2-1}+\frac{2x}{x+1}=\frac{x}{x-1}$$

$$2)\ \sqrt{4x+8}-\sqrt{6x-3}=1$$

۴. حاصل عبارتهای زیر را بیابید و گنگ یا گویا بودن هر یک را مشخص کنید.

$$1)\ \sqrt[3]{\sqrt{2}-1}\times\sqrt[6]{3+2\sqrt{2}}$$

$$2)\ (8-2\sqrt{15})(\sqrt{5}-\sqrt{3})^{1304}\times(\sqrt{5}+\sqrt{3})^{1306}$$

۵. نمودار تابع با قانون زیر را رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases}x^2-2x+1 & x\geq 1\\ x-1 & x<1\end{cases}$$

۶. دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x^2-9}+\sqrt{18-2x^2}$ را بیابید.

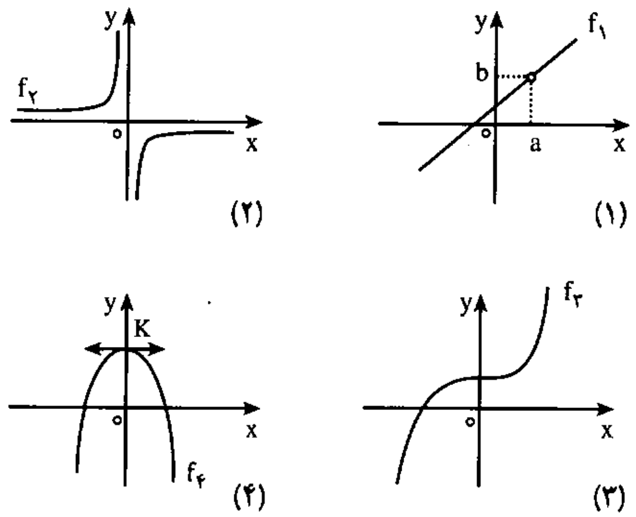
۷. در تابع با قانون زیر، اگر $f(-1)=2$ و $f(1)=-1$ ، حاصل $f[f(2)]$ را بیابید.

$$f(x)=\begin{cases}ax^2+b & x\geq 1\\ ax+b+2 & x<1\end{cases}$$

۸. ابتدا $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ را برای تابع با ضابطهٔ $y=f(x)=x^3-4$ محاسبه کرده و سپس با صرف نظر از جمله‌های شامل Δx ، صعودی یا نزولی بودن تابع f را مشخص کنید.

۹. مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که قرینهٔ نقطهٔ $A(p+2,4q)$ نسبت به محور yها نقطهٔ $A'(3,-8)$ باشد.

۱۰. تعیین کنید از نمودارهای زیر، کدام یک تابع پوشا در IR را نشان می‌دهد؟ (با ذکر دلیل)



۱۱. معادلهٔ لگاریتمی زیر را حل کنید:

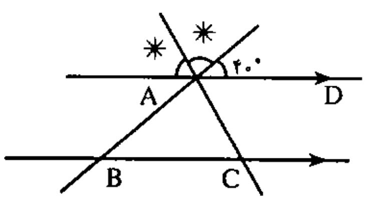
$$\log 2x+\log(2x+1)=\log\sqrt[3]{2}+\frac{2}{3}\log 2$$

۱۲. مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ زیر را بیابید.

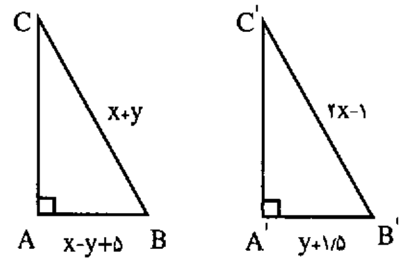
$$\log\frac{x+2}{3}>-1$$

❖ هندسه ۱

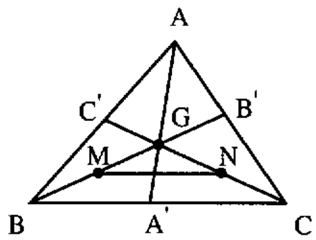
۱. در شکل پیکانهای همجهت خطهای موازی و علامت * زاویه‌های همنهشت را نشان می‌دهند. اندازهٔ زاویه‌های مثلث ABC را بیابید.



۲. در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ همنهشت ABC ($\hat{A}=۹۰^\circ$) و $A'B'C'$ ($\hat{A'}=۹۰^\circ$)، $A'B' \cong AB$ است. اندازهٔ x و y را بیابید.

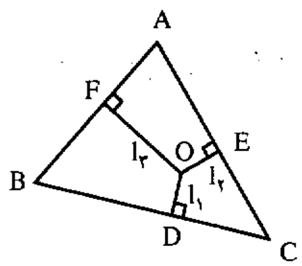


۳. G نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث ABC است. اگر نقطه‌های M و N بترتیب، وسطهای GB و GC باشند، نسبت مساحت مثلث GMN به مساحت مثلث ABC را به دست آورید.



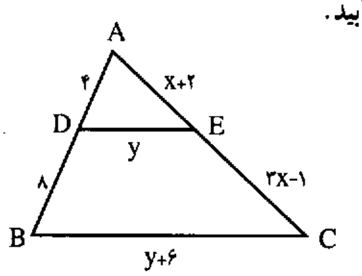
۴. مربعی معادل مستطیلی است که نسبت طول به عرضش، برابر ۵ است؛ اگر قطر این مستطیل برابر $۲\sqrt{۱۳}$ باشد، اندازهٔ ضلع مربع را بیابید.

۵. فاصلهٔ نقطهٔ O واقع در درون مثلث ABC از سه ضلع BC، AC و AB را بترتیب $l_۱$، $l_۲$ و $l_۳$ می‌نامیم. ثابت کنید:



$$\frac{l_۱}{h_a}+\frac{l_۲}{h_b}+\frac{l_۳}{h_c}=۱$$

۶. در مثلث ABC، $DE \parallel BC$ است. با توجه به شکل، اندازهٔ x و y را بیابید.



۷. دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابهند. اگر $\frac{a+b}{a'+b'}=\frac{۳}{۴}$ باشد، نسبت مساحتهای این دو مثلث را بیابید (ضلعهای AB، AC و BC بترتیب متناظر ضلعهای $A'B'$، $A'C'$ و $B'C'$ می‌باشند).

۸. قاعدهٔ یک متوازی‌السطوح مایل لوزی به قطرهای ۲۴ و ۱۰ سانتیمتر است. اندازهٔ هر یال جانبی آن ۴۰ سانتیمتر و زاویهٔ هر یال با صفحهٔ قاعده ۶۰ درجه است. اندازهٔ حجم این متوازی‌السطوح را بیابید.

❖ ریاضی ۵

۱. اگر $A=\{x|x\in \mathbb{R}, x>-۲\}$، $B=\{x|x\in \mathbb{R}, -۳<x<۵\}$ و $C=\{x|x\in \mathbb{R}, x<-۳\}$ باشد، بازه‌های $A\cup B\cup C$ و $(A\cap C)\cup B$ را مشخص کنید.

۲. دو تابع $f(x)=\frac{ax+b}{x+۲}$ و $g(x)=۲x^۲+x+۱$ داده شده‌اند. اندازهٔ a و b را چنان بیابید که نمودار تغییرات این دو تابع در دو نقطه به طولهای ۰ و ۱- متقاطع باشند.

۳. دامنهٔ تعریف هر یک از تابعهای زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x)=\log_{x-۲}(۹-x^۲)$

ب) $f(x)=\sqrt{x-۲}-\sqrt{۳-x}$

۴. اگر $f(x)=\frac{x+۱}{x-۱}$ و $g(x)=\sqrt{x}$ باشد:

الف. دامنهٔ تابع $(gof)(x)$ را با استفاده از تعریف، به دست آورید.

ب. ضابطهٔ تابع $(gof)(x)$ را بیابید.

پ. اندازهٔ $(fog)(۴)$ را تعیین کنید.

۵. اگر $\sqrt{\frac{3}{x-2}}=f\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$ باشد، $\lim_{x\to 5} f(x)$ را محاسبه کنید.

۶. حدّ هر یک از تابعهای زیر را به ازای مقدار داده شده، به دست آورید.

الف) $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+5x^2+8x+4}{x^4+4x^3+3x^2-4x-4}$

ب) $\lim_{x\to \frac{2\pi}{3}^-}\frac{\sin(2x-\frac{\pi}{3})}{1+\cos(2x-\frac{\pi}{3})}$

پ) $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{2x-4}$

۷. اندازهٔ a و b را چنان بیابید که تابع $f(x)=\begin{cases} ax^2+b\ , & x>3 \\ 2x+a\ , & x<3 \\ 4\ , & x=3 \end{cases}$ در نقطهٔ $x=3$ پیوسته باشد.

۸. مشتق هر یک از تابعهای زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x)=(x^2+x)^3(\sqrt{x}+1)^2$

ب) $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})\cos x^2$

۹. جدول تغییرات و نمودار تابع $y=x^3+3x^2$ را رسم کنید.

۱۰. آهنگ تغییرات نسبی حجم و سطح کل مکعب مستطیل به ابعاد x ، $x+1$ و $x-1$ را وقتی x از ۲ تا ۲/۵ تغییر کند، تعیین کنید. همچنین آهنگ تغییرات آنی حجم و سطح کل این مکعب مستطیل را در $x=4$ به دست آورید.

❖ حسابان ۱

۱. دو تابع به معادله‌های $y^2-2xy+2x^2-2=0$ مفروضند. دامنه و برد هر یک را بیابید.

۲. اگر $f(x)=x^2-3x+1$ و $g(x)=-2x+1$ ، a را چنان بیابید تا داشته باشیم $f(g(a))=g(f(a))$

۳. صفرهای تابع به معادلهٔ $f(x)=x^2\cos^2\alpha-x+\sin^2\alpha$

را بیابید.

۴. اگر باقیماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $2x-3$ و $x+1$ به ترتیب ۱ و ۴− باشد، باقیماندهٔ تقسیم $f(x)$ را بر $2x^2-x-3$ بیابید.

۵. تابع به معادلهٔ $f(x)=\sqrt[3]{x}+1$ مفروض است. اولاً ثابت کنید f در IR یک به یک است، ثانیاً ثابت کنید:

$$f^{-1}(f(x))=f\left(f^{-1}(x)\right)$$

۶. ثابت کنید:

$$\frac{\sin x+\sin 7x+\sin 13x}{\cos x+\cos 7x+\cos 13x}=\tan 7x\left(x\neq\frac{k\pi}{3}\pm\frac{\pi}{9}\right)$$

۷. حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos x}{1-\sin x}$

ب) $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-4x}+x-1)$

۸. ثابت کنید اگر $f(x)=\sin 2x$ ، آنگاه $f'(x_0)=2\cos 2x_0$.

۹. تابع به معادلهٔ $y=ax^2+bx+c$ ، $(b<0)$ مفروض است. a، b و c را چنان بیابید تا منحنی تابع محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع کند و ۱− مقدار می‌نیمم تابع باشد و منحنی تابع بر خط به معادلهٔ $y=2x-6$ مماس باشد.

۱۰. جدول تغییرات و منحنیهای دو تابع به معادله‌های $y_1=\frac{2x+1}{2x-1}$ و $y_2=x^2-2x-3$ را در یک صفحهٔ محورهای مختصات رسم کنید.

❖ حساب دیفرانسیل و انتگرال ۱

۱. ثابت کنید قرینهٔ قرینهٔ هر عدد حقیقی، خود آن حقیقی است؛ یعنی: $-(-x)=x$ (اگر $x\in \mathrm{IR}$).

۲. ثابت کنید دنبالهٔ $\{a_n\}$ که در آن $a_1=\sqrt{3}$ و $a_{n+1}=\sqrt{3+2a_n}$ همگرا است.

۳. اگر $\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n+3}=\frac{1}{2}\right.$ ، $n\in N$ ، از کدام مرتبه به بعد

$\left|\frac{n-1}{2n+3}-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{440}$.

۴. نوع سری $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{2}{k}-\frac{1}{k+1})$ را با اثبات کامل مشخص کنید.

۵. حاصل سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k-3}}{2^{3k-2}}$ را بیابید.

۶. ثابت کنید تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sin\frac{1}{x-4}$، در $x=4$ حد ندارد.

۷. تابع به معادلهٔ

$$f(x)=\begin{cases}2\lfloor 2\sin x\rfloor+a & x>\frac{\pi}{3}\\ b\left\lfloor x-\frac{\pi}{3}\right\rfloor & x<\frac{\pi}{3}\\ \lfloor 3\cos x-\sqrt{3}\rfloor+2 & x=\frac{\pi}{3}\end{cases}$$

در $x=\frac{\pi}{3}$ پیوسته است. a و b را بیابید.

۸. تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}ax^4-4x & x>1\\ bx^2+1 & x\le 1\end{cases}$ در $x=1$ مشتق‌پذیر است. a و b را بیابید.

۹. اگر $f(x)=x^3+x$، آنگاه $(f^{-1})'(2)$ را بیابید.

۱۰. استوانه‌ای به شعاع قاعده ۱۰ سانتیمتر و ارتفاع ۲۰ سانتیمتر مفروض است. اگر ارتفاع استوانه با سرعت $\frac{2}{5}$ سانتیمتر در ثانیه افزایش و حجم استوانه با سرعت 120π سانتیمتر مکعب در ثانیه کاهش یابد، شعاع قاعده با چه سرعتی تغییر می‌کند.

❖ هندسه تحلیلی پیش دانشگاهی

۱. بردار $a=(4,3,2)$ را به دو مؤلفه در راستاهای دو بردار $b=(-2,1,2)$ و $c=(5,0,-2)$ تجزیه کرده‌ایم. این دو مؤلفه را مشخص کنید.

۲. بردارهای $a=(3,-4,2)$ و $b=(-2,2,5)$ داده شده‌اند.

الف. حاصلضرب درونی این دو بردار را تعیین کنید.

ب. زاویهٔ بین این دو بردار را به دست آورید.

پ. اندازهٔ جبری تصویر بردار $a-b$ روی بردار $a+b$ را بیابید.

ت. $|a\times b|$ را تعیین کنید.

۳. معادله‌های پارامتری خطی را بنویسید که از نقطهٔ برخورد دو خط $D_1:\frac{x-2}{2}=y-1=\frac{z+3}{-3}$ و $D_2:\begin{cases}x=3t\\ y=t\\ z=-2t\end{cases}$ موازی بردار $v=2i+3j-k$ رسم می‌شود.

۴. معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که از نقطهٔ برخورد صفحهٔ $P: 2x-y-z+2=0$ با محور zها به موازات دو بردار $v_1=3i+j-2k$ و $v_2=-i+2j+k$ رسم می‌شود.

۵. خط $D:\begin{cases}2x+y+3z=0\\ x-y=3\end{cases}$ و نقطهٔ $M=(1,2,0)$ داده شده‌اند.

الف. معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که از نقطهٔ M بر خط D عمود رسم می‌شود. (این صفحه را P می‌نامیم.)

ب. مختصات H نقطهٔ برخورد صفحهٔ P با خط D را تعیین کنید.

پ. طول پاره خط MH را به دست آورید.

با استفاده از مسألهٔ بالا یک روش کلی برای تعیین فاصلهٔ یک نقطه از یک خط در فضا بیان کنید.

❖ جبر خطی پیش دانشگاهی

۱. اگر $A=\begin{bmatrix}0&0&2\\0&-1&0\\3&5&4\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1&0&0\\4&-1&0\\2&3&2\end{bmatrix}$ ثابت کنید $|A^TB^2|=24$.

۲. بدون بسط و با استفاده از ویژگیهای دترمینان ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\1&c&c^2\end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a)$$

۳. اگر $A^3-3A^2+4A-I=0$ در این صورت ثابت کنید

A وارون‌پذیر است و وارون آن را (بر حسب A) بیابید.

۴. ثابت کنید مجموعهٔ $K=\{(x,y,z)|2x+z=0\}$ یک زیر فضای برداری $\mathbb{R}^3$ است.

۵. معادلهٔ دوران یافتهٔ دایره به معادلهٔ $(x+1)^2+(y-2)^2=4$ را حول مبدأ و به اندازهٔ $\frac{\pi}{4}$ بیابید.

۶. اگر f نگاشتی خطی و داشته باشیم $f(1,2)=(1,1,2)$ و $f(0,1)=(0,1,-1)$ در این صورت حاصل $f(2,4)$ را بیابید.

۷. آیا نگاشت خطی $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ با ضابطهٔ $f(x,y,z)=(x,2y,y+z)$ پوشا است؟ چرا؟

۸. نگاشت خطی ص $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ با ضابطهٔ $f(x,y,z)=(x-y,2y+z)$ مفروض است، هستهٔ f و بُعد آن را تعیین کنید.

۹. نگاشت خطی $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ با ضابطهٔ $f(x,y)=(5x-2y,4x-y)$ مفروض است. مقادیر ویژهٔ این نگاشت و بردارهای متناظر با آنها را بیابید.

❖ ریاضی عمومی ۱ (تجربی) پیش دانشگاهی

۱. فرض کنید برای طول قدّ ۲۰ دانش آموز دبیرستانی، داده‌های زیر به‌دست آمده باشد:

۱۵۵، ۱۶۸، ۱۵۴/۵، ۱۷۲/۵، ۱۶۲/۵، ۱۵۱، ۱۴۸/۵
۱۶۶، ۱۶۷، ۱۵۸/۵، ۱۵۸، ۱۷۰، ۱۶۷، ۱۵۶/۵
۱۵۲، ۱۷۱، ۱۶۹، ۱۶۳/۵، ۱۴۷/۵، ۱۷۰

الف. جدول فراوانی داده‌های بالا را تشکیل دهید.

ب. میانگین، انحراف معیار، و ضریب تغییرات داده‌های بالا را به‌دست آورید.

ج. چند بر فراوانی و نمودار دایره‌ای را برای نمونهٔ بالا، رسم کنید.

۲. کیسه‌ای محتوی ۷ مهرهٔ قرمز و ۵ مهرهٔ سبز است. از این کیسه به تصادف ۱ مهره، خارج می‌کنیم. سپس دوباره بدون جایگذاری مهرهٔ اوّل، مهرهٔ دیگری به تصادف، از کیسه خارج می‌کنیم، مطلوب است محاسبهٔ احتمال آن که هر دو مهره، قرمز باشند.

۳. احتمال درمان یک بیماری، با دارویی خاص برابر ۰/۷ است. مطلوب است محاسبهٔ احتمال آن که از ۸ نفر بیماری که این دارو را استفاده می‌کنند، ۶ نفر درمان شوند.

۴. با استفاده از اصل استقرای ریاضی؛ برای هر عدد طبیعی n، ثابت کنید:

$$3^1+3^2+3^3+...+3^n=\frac{3}{2}(3^n-1)$$

۵. اگر مجموع ضرایب بسط دو جمله‌ای $(\sqrt[7]{x^6}+\frac{1}{\sqrt[7]{x^5}})^n$ ۹۹۲ واحد کمتر از مجموع ضریبهای بسط $(\sqrt[9]{x}+\sqrt[7]{x})^{2n}$ باشد، مقدار n را بیابید.

۶. مقدار m را چنان تعیین کنید، که دو خط به معادله‌های $y-2x=6$ و $y=mx+4$ روی نیمساز ربع دوم و چهارم یکدیگر را قطع کنند.

۷. نمودار سهمی $y=x^2-2x-2$ را رسم کنید و با استفاده از آن، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=|x^2-2x-2|$ را رسم کنید.

۸. معادله‌های زیر را در $\mathbb{R}$ حل کنید.

الف) $(125^x)^{x+2}-\frac{1}{25}=0$

ب) $\log(2x+5)+\log x=\log 6-\log 2$

۹. بررسی کنید که، آیا دنبالهٔ $\{u_n\}$ با جملهٔ عمومی $u_n=\frac{3n^3+9n^2+9n}{(n+1)^3}$ صعودی است یا نزولی؟ سپس بررسی کنید که، دنبالهٔ $\{u_n\}$ از بالا کراندار است یا از پایین کراندار؟

۱۰. برای جلوگیری از آلودگی هوا به‌طور معمول، به بنزین موادی اضافه می‌کنند تا رفع آلودگی کند و این مواد، با قانون $p(t)=p_0(0/8)^t$ رو به زوال می‌رود، در چه زمانی مادهٔ افزوده شده به سوخت به ربع مقدار اوّلیهٔ خود می‌رسد.

۱۱. همهٔ مجانبهای منحنی، به معادلهٔ $y=\frac{x^4+2x^3-1}{2x^3-3x^2+x}$ را به‌دست آورید.

❖ ریاضی پایهٔ پیش دانشگاهی

۱. آیا حاصل جمع دو عدد گنگ، عددی گنگ است؟

حاصلضرب دو عدد گنگ چه‌طور؟

۲. با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید، مجموع دو عدد گویا، همواره یک عدد گویا است؟

۳. با استفاده از اصل استقرای ریاضی برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید :

الف) $\frac{1}{1\times 4}+\frac{1}{4\times 7}+\frac{1}{7\times 10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$

ب) $1+4+7+\ldots+(3n-2)=\frac{n(3n-1)}{2}$

۴ـ توپی را از ارتفاع ۱۶ متری رها می‌کنیم. اگر این توپ، پس از هربار برخورد با زمین، $\frac{1}{2}$ بار قبلی به بالا بیاید :

الف . دنبالهٔ حاصل از پایین آمدن توپ را بنویسید.

ب . این توپ در مجموع چند متر به پایین آمده است.

۵ـ اگر مجموع یازده جملهٔ نخست یک دنبالهٔ حسابی ۱۱۰ و مجموع هفت جملهٔ ابتدایی آن ۱۴ باشد، قدر نسبت این دنباله کدام است؟

۶ـ در یک دنبالهٔ هندسی که چهار جمله دارد، مجموع دو جملهٔ اوّل ۱۹ و مجموع دو جملهٔ آخر ۷۶ است. قدر نسبت این دنباله را بیابید.

۷ـ جملهٔ هشتم دنبالهٔ فیبوناتچی، جملهٔ چندم دنبالهٔ مثلثی است؟

۸ـ مجموعهٔ جوابهای معادلهٔ $\log_4(x^2-3x-1)=\frac{1}{4}\log^{2}_{\sqrt[4]{2}}$ را به‌دست آورید.

۹ـ با استفاده از قضیه‌های لگاریتم، عبارت $\log(\frac{a+2b}{a^2b^3})$ را به ساده‌ترین صورت، تبدیل کنید.

۱۰ـ یک شرکت تولیدی، پس از تحقیق و بررسی دربارهٔ یک کالای جدید در هفته، x واحد از این کالا را تولید می‌کند و به فروش می‌رساند. معادله‌های هزینه و تقاضای هفتگی به صورت زیر داده شده است :

معادلهٔ هزینه : $c(x)=72000+60x$

معادلهٔ تقاضا : $x=6000-30p$

الف . معادلهٔ درآمد این شرکت را به‌دست آورید.

ب . بیشترین درآمد این شرکت در هفته، چقدر است.

ج . چند واحد کالا در هفته، تولید کند تا بیشترین سود را داشته باشد.

۱۱ـ از ۱۵ لامپ که ۵ عدد آنها معیوب است، ۳ لامپ به تصادف انتخاب می‌کنیم، احتمال آن که هیچ کدام از لامپها معیوب نباشند، چقدر است؟

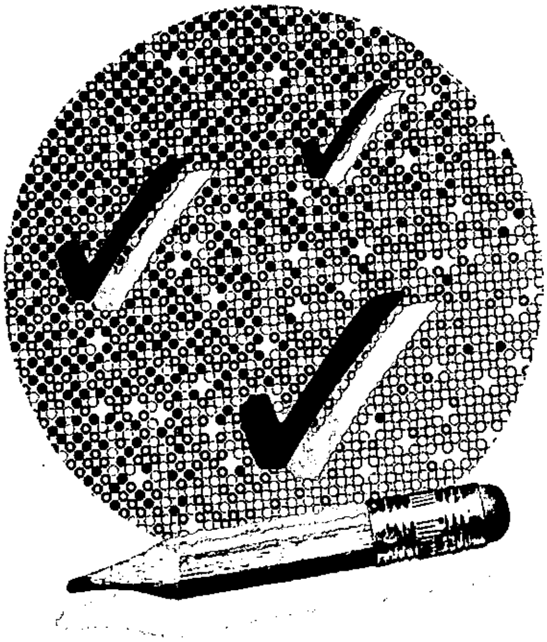
۱۲ـ سه افسر و پنج سرباز در یک ردیف کنار هم می‌نشینند. احتمال آن که افسرها کنار هم باشند، چقدر است؟

داوید هیلبرت، به اتفاق تمام مورّخان معاصر، بزرگترین ریاضیدان نیمهٔ اوّل قرن بیستم و در عِداد بزرگترین ریاضیدانان تمام تاریخ بشر محسوب می‌شود. ابداعات این ریاضیدان نامی در تمام شعبه‌های ریاضی، اعمّ از جبر، هندسه، آنالیز، توپولوژی، حساب و غیره، آن‌قدر اساسی و مهم است که شاید تا صدها سال دیگر نیز ریاضیدانان، از گنجینه‌های آن بهره‌برداری کنند.

متأسفانه این دانشمند نامی که یهودی هَم نبود، در ۸۱ سالگی به واسطهٔ زجر و شکنجهٔ عُمّال هیتلر، در یکی از اردوگاه‌های اسیران جنگی درگذشت ؛ چرا که وی نیز قطعنامهٔ متعصّبان آلمانی را که اظهار می‌داشت «دانشی غیر از دانش آلمانی وجود ندارد» مانند اینشتاین و پلانک امضا نکرده بود.

تاریخ علوم ـ پی‌یر روسو ـ حسن صفّاری

حلّ مسائل برهان ۳۹



⊙ ریاضیات ۱

۱. $A=\{۲,۴,۶,۸\}\ ,\ B=\{۳,۴,۶,۸\}\ ,$

$M=\{۱,۲,۳,...,۹\}$

$A\cap B=\{۲,۴,۶,۸\}\cap\{۳,۴,۶,۸\}=\{۴,۶,۸\}$

$A\cup B=\{۲,۴,۶,۸\}\cup\{۳,۴,۶,۸\}=\{۲,۳,۴,۶,۸\}$

$A-B=\{۲,\cancel{۴},\cancel{۶},\cancel{۸}\}-\{۳,\cancel{۴},\cancel{۶},\cancel{۸}\}=\{۲\}$

$B'=\{۱,۲,۵,۷,۹\}$

$A\cap B'=\{۲,۴,۶,۸\}\cap\{۱,۲,۵,۷,۹\}=\{۲\}$

بنابراین: $A-B=A\cap B'=\{۲\}$

۲.

$۵^{x+۲}=۲۰\times ۵^x+۵\times ۵^۲\times ۵^۳\times ۵^۴\times ۵^۵$;

$۵^۲\times ۵^x=۲۰\times ۵^x+۵^{۱۵}$

$۲۵\times ۵^x-۲۰\times ۵^x=۵^{۱۵}$;

$(۲۵-۲۰)۵^x=۵^{۱۵}$;

$۵\times ۵^x=۵^{۱۵}$; $۵^{x+۱}=۵^{۱۵}$;

$x+۱=۱۵$; $x=۱۴$

۳. $\frac{۱+۱}{۳+۴}=\frac{۲}{۷}$, $\frac{۱+۲}{۳+۷}=\frac{۳}{۱۰}$,

$\frac{۱+۳}{۳+۱۰}=\frac{۴}{۱۳}$, $\frac{۱+۴}{۳+۱۳}=\frac{۵}{۱۶}$

۴.

$A-B+C=x^۲-x+۳-(x+۲)+۳(x-۱)^۲$

$=x^۲-x+۳-x-۲+۳(x-۱)^۲$

$=x^۲-۲x+۱+۳(x-۱)^۲$

$=(x-۱)^۲+۳(x-۱)^۲=۴(x-۱)^۲=(۲x-۲)^۲$

۵. روش اوّل (با استفاده از عمل تقسیم):

$$\begin{array}{l|l} ۲x^۳+۸x^۲+۶x-۴ & -x+۲ \\ \hline -(۲x^۳-۴x^۲) & -۲x^۲-۱۲x-۳۰ \\ \quad ۱۲x^۲+۶x-۴ & \\ \quad -(۱۲x^۲-۲۴x) & \\ \qquad ۳۰x-۴ & \\ \qquad -(۳۰x-۶۰) & \\ \qquad\quad ۵۶ & \end{array}$$

(باقیمانده)

روش دوم (بدون استفاده از تقسیم). در این روش، کافی است حاصل عبارت مقسوم را به‌ازای ریشهٔ مقسوم‌علیه به دست آوریم:

باقیماندهٔ تقسیم: $۲-x=۰$; $x=۲$

$=۸(۲)^۲-۴+۲(۲)^۳+۶(۲)=۵۶$ (باقیمانده)

۶.

۱) $p=(x+۱)(x^۲+۱)(x^۴+۱)(x^۸+۱)$;

$(x-۱)p=(x^۲-۱)(x^۲+۱)(x^۴+۱)(x^۸+۱)$;

$(x-۱)p=(x^۴-۱)(x^۴+۱)(x^۸+۱)$;

$(x-۱)p=(x^۸-۱)(x^۸+۱)=x^{۱۶}-۱$

$p=\frac{x^{۱۶}-۱}{x-۱}$

۲) $q=(x+y+z)\left[(x+y)^۲+z^۲-z(x+y)\right]$

$=\left[(x+y)+z\right]\left[(x+y)^۲-(x+y)z+z^۲\right]$

$=(x+y)^۳+z^۳$; $q=(x+y)^۳+z^۳$

۷. ۱) $a^۳b^۲(a^۲+b)+a^۴b^۴+a^۲b^۵$

$=a^۳b^۲(a^۲+b)+a^۲b^۴(a^۲+b)$

$=a^۲b^۲(a^۲+b)(a+b^۲)$

۲) $x^۵-x^۴+x^۳-x^۲-x+۱$

$=x^۴(x-۱)+x^۲(x-۱)-(x-۱)$

$=(x-۱)(x^۴+x^۲-۱)$

۸. ابتدا دو عبارت را تجزیه می‌کنیم:

$a^۴+a^۳+a^۲b+ab$

$=a^۳(a+۱)+ab(a+۱)$

$=a(a+۱)(a^۲+b)$

$a^۳+۳a^۲+۲a=a(a^۲+۳a+۲)$

$=a\left[a^۲+۲a+a+۲\right]$

$=a\left[a(a+۲)+(a+۲)\right]$

$=a(a+۲)(a+۱)$

ب.م.م $=a(a+۱)=a^۲+a$

$\text{ک.م.م} = a(a+1)(a+2)(a^2+b)$

۹. 1) $p=(a^3+b^3)(a^2+b^2)$

$=(a+b)(a^2-ab+b^2)\left[(a+b)^2-2ab\right]$

$=(a+b)\left[(a+b)^2-3ab\right]\left[(a+b)^2-2ab\right]$

$a+b=1\ ,\ ab=-1:$

$p=(1)\left[(1)^2-3(-1)\right]\left[(1)^2-2(-1)\right]$

$=4\times3=12$

$q=(a-b)^4=\left[(a-b)^2\right]^2$

$=(a^2-2ab+b^2)^2=\left[(a+b)^2-4ab\right]^2$

$a+b=1\ ,\ ab=-1:$

$q=\left[(1)^2-4(-1)\right]^2=5^2=25$

۱۰.

1) $A=\dfrac{-x^2+2x-1}{1-x^2}=\dfrac{-(x^2-2x+1)}{-(x^2-1)}$

$=\dfrac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}$

$x\neq\pm1:\ A=\dfrac{x-1}{x+1}$

2) $B=\dfrac{(x^3-1)^2(x+1)^2x^4}{(x^4-x^2)^2}$

$=\dfrac{\left[(x-1)(x^2+x+1)\right]^2(x+1)^2x^4}{\left[x^2(x-1)(x+1)\right]^2}$

$=\dfrac{(x-1)^2(x^2+x+1)^2(x+1)^2x^4}{x^4(x-1)^2(x+1)^2}$

$x\notin\{-1,0,1\}:\ B=(x^2+x+1)^2$

ریاضیات ۳

۱. $\dfrac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}>2$; $\dfrac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-2>0$;

$\dfrac{2\sqrt{x}-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}>0$; $\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}>0$;

$\sqrt{x}-1>0$; $\sqrt{x}>1$; $\boxed{x>1}$

مجموعه‌جواب $=\{x\in\mathbb{R}|x>1\}$

۲. $p=(m^2-1)x^2-2mx-1$,

$\begin{cases}\Delta\le0\\ m^2-1<0\end{cases}\Rightarrow p<0$

$\Delta=4m^2+4(m^2-1)=4m^2+4m^2-4$

$=8m^2-4\le0$; $2m^2-1\le0$

$\begin{cases}2m^2-1\le0\\ m^2-1<0\end{cases}$; $\begin{cases}m^2\le\frac{1}{2}\\ m^2<1\end{cases}$;

$\begin{cases}-\frac{\sqrt2}{2}\le m\le\frac{\sqrt2}{2}\\ -1<m<1\end{cases}$; $\boxed{-\frac{\sqrt2}{2}\le m\le\frac{\sqrt2}{2}}$

۳. 1) $\dfrac{x^3-x^2-x}{x^2-1}+\dfrac{2x}{x+1}=\dfrac{x}{x-1}$;

$\dfrac{x^3-x^2-x}{x^2-1}+\dfrac{2x}{x+1}-\dfrac{x}{x-1}=0$;

$\dfrac{x^3-x^2-x+2x(x-1)-x(x+1)}{x^2-1}=0$;

$\dfrac{x^3-x^2-x+2x^2-2x-x^2-x}{x^2-1}=0$;

$\dfrac{x^3-4x}{x^2-1}=0$; $x^3-4x=0$; $x(x^2-4)=0$;

$\boxed{x=0}$; $x^2-4=0$; $x^2=4$; $\boxed{x=\pm2}$

مجموعه جوابهای معادله $=\{-2,0,2\}$

2) $\sqrt{4x+8}-\sqrt{6x-3}=1$;

$\sqrt{4x+8}=1+\sqrt{6x-3}$

با فرض $6x-3>0$ یا $x>\frac{1}{2}$ ؛ دو طرف معادله را به توان ۲ می‌رسانیم :

$4x+8=1+6x-3+2\sqrt{6x-3}$;

$10-2x=2\sqrt{6x-3}$; $5-x=\sqrt{6x-3}$

با فرض $5-x>0$ یا $x<5$ ؛ دوطرف معادله را به توان ۲ می‌رسانیم :

$\frac{1}{2}<x<5$: $(5-x)^2=6x-3$;

$25-10x+x^2=6x-3$;

$x^2-16x+28=0$;

$(x-2)(x-14)=0$; $\boxed{x=2}$; $x=14$

با توجه به شرط $\frac{1}{2}<x<5$ ؛ فقط جواب $x=2$ مورد قبول است و $x=14$ ، ریشهٔ خارجی معادله است و مورد قبول نمی‌باشد.

۴. 1) $\sqrt[3]{\sqrt2-1}\times\sqrt[6]{3+2\sqrt2}$

$=\sqrt[6]{(\sqrt2-1)^2}\times\sqrt[6]{3+2\sqrt2}$

$=\sqrt[6]{3-2\sqrt2}\times\sqrt[6]{3+2\sqrt2}$

$=\sqrt[6]{(3-2\sqrt2)(3+2\sqrt2)}$

$=\sqrt[6]{9-8}=\sqrt[6]{1}=1$ (گویا)

2) $(8-2\sqrt{15})(\sqrt5-\sqrt3)^{1304}$

$\times(\sqrt5+\sqrt3)^{1306}$

$=(8-2\sqrt{15})(\sqrt5+\sqrt3)^2$

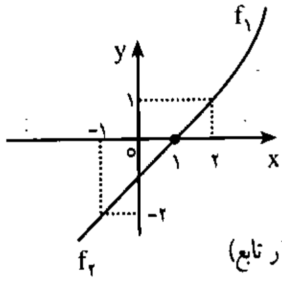
$\left[(\sqrt5-\sqrt3)(\sqrt5+\sqrt3)\right]^{1304}$

$=(8-2\sqrt{15})(8+2\sqrt{15})(2)^{1304}$

$=(4)(2^{1304})=2^{1306}$ (گویا)

۵. $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+1 & x\ge1\\ x-1 & x<1\end{cases}$;

$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & x\ge1\\ x-1 & x<1\end{cases}$



(نمودار تابع)

$x\ge1$: $f_1(x)=(x-1)^2$ (نیم‌سهمی)

x	1	2	3	4
y	0	1	4	9

$x<1$: $f_2(x)=x-1$ (نیم‌خط)

x	0	-1	-2
y	-1	-2	-3

.۶ $f(x)=\sqrt{x^2-9}+\sqrt{18-2x^2}$

$$\begin{cases}x^2-9\ge 0\\ 18-2x^2\ge 0\end{cases} \;;\; \begin{cases}x^2\ge 9\\ x^2\le 9\end{cases}$$

$\Rightarrow x^2=9 \;;\; x=\pm 3$

$D_f=\{-3,3\}$

.۷ $f(x)=\begin{cases}ax^2+b & x\ge 1\\ ax+b+2 & x<1\end{cases}$

$f(-1)=a(-1)+b+2$

$=-a+b+2=2 \;;\; a=b \quad (1)$

$f(1)=a(1)^2+b=-1 \;;\; a+b=-1 \quad (2)$

با توجه به رابطه‌های (۱) و (۲) :

$a+a=-1 \;;\; 2a=-1 \;;\; \boxed{a=b=-\frac{1}{2}}$

پس: $f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2} & x\ge 1\\ -\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} & x<1\end{cases}$

$f(2)=-\frac{1}{2}(2)^2-\frac{1}{2}=-2-\frac{1}{2}=-\frac{5}{2}$

$f[f(2)]=f(-\frac{5}{2})=-\frac{1}{2}(-\frac{5}{2})+\frac{3}{2}$

$=\frac{5}{4}+\frac{3}{2}=\frac{11}{4}$

.۸ $y=f(x)=x^3-4$,

$f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^3-4$

$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$

$=(x+\Delta x)^3-4-(x^3-4)$

$=(x+\Delta x)^3-x^3=[(x+\Delta x)-x]$

$\left[(x+\Delta x)^2+x(x+\Delta x)+x^2\right]$

بنابراین :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x\left[3x^2+3x.\Delta x+(\Delta x)^2\right]}{\Delta x}$$

$=3x^2+3x.\Delta x+(\Delta x)^2$

با صرف‌نظر از Δx ، خواهیم داشت :

$\frac{\Delta y}{\Delta x}\approx 3x^2>0$

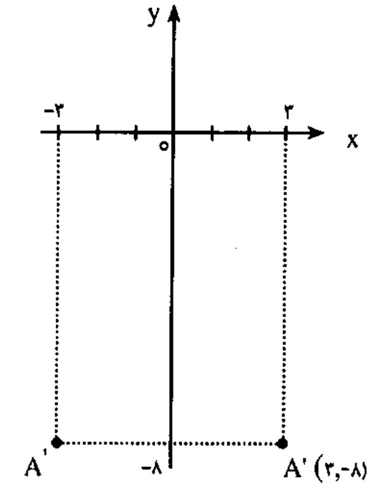
چون به ازای هر x حقیقی، همیشه $\frac{\Delta y}{\Delta x}>0$ ؛

در نتیجه، تابع صعودی است.

.۹ $A(p+2\,,\,4q)\;,\;A'(3,-8)$

$p+2=-3 \;;\; \boxed{p=-5}$

$4q=-8 \;;\; \boxed{q=-2}$



.۱۰ فقط نمودار (۳)، نمودار تابع پوشاست ؛ زیرا به ازای هر $y\in\mathbb{R}$ ، لااقل یک $x\in\mathbb{R}$ وجود دارد. همچنین اگر خطی موازی با محور xها را در امتداد منحنی، به‌طور فرضی حرکت دهیم، درهرحال، منحنی را لااقل در یک نقطه قطع خواهد کرد.

نمودار (۱) در نقطهٔ (a,b) منفصل است و برد آن $R_{f_1}=\mathbb{R}-\{b\}$ است.

نمودار (۲) نیز منفصل است و برد آن $R_{f_2}=\mathbb{R}-\{0\}$ است.

در نمودار (۳)، به ازای هر $y>k$ ، هیچ x نظیری موجود نیست.

پس، چون برد تابع f_3 برابر $\mathbb{R}$ (مجموعهٔ عددهای حقیقی) است ؛ تابع f_3 در $\mathbb{R}$ پوشاست.

.۱۱

$\log 2x+\log(2x+1)=\log\sqrt[3]{2}+\frac{2}{3}\log 2$

$\log 2x(2x+1)=\log\sqrt[3]{2}+\log\sqrt[3]{4}$

$=\log\sqrt[3]{2\times 4}=\log\sqrt[3]{8}$

$\log(4x^2+2x)=\log 2$;

$4x^2+2x=2 \;;\; 2x^2+x-1=0$;

$\Delta=1+8=9 \;,\; x_{1,2}=\frac{-1\pm 3}{4}$;

$x_1=\frac{-4}{4}=-1 \;;\; x_2=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

چون $2x>0$ یا $x>0$ ؛ بنابراین فقط جواب $x=\frac{1}{2}$ ، مورد قبول است.

.۱۲

$\log\frac{x+2}{3}>-1 \;;\; \log\frac{x+2}{3}>\log\frac{1}{10}$;

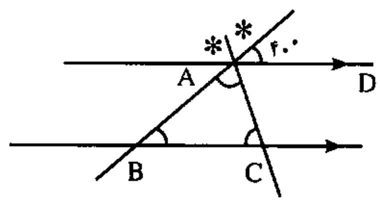
$\frac{x+2}{3}>\frac{1}{10} \;;\; x>\frac{3}{10}-2$;

مجموعه جواب $=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x>-1/7\}$

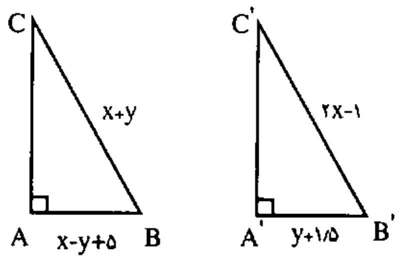
$\boxed{x>-1/7}$

هندسه ۱

۱. با توجه به این که AC نیمساز زاویهٔ BAD و $AD\parallel BC$ است، زاویه‌های مثلث ABC برابرند با : $\hat{A}=70^\circ \;,\; \hat{B}=40^\circ \;,\; \hat{C}=70^\circ$



۲. دو مثلث قائم‌الزاویه، به دلیل برابری وتر و یک ضلع همنهشت می‌باشند ؛ یعنی :



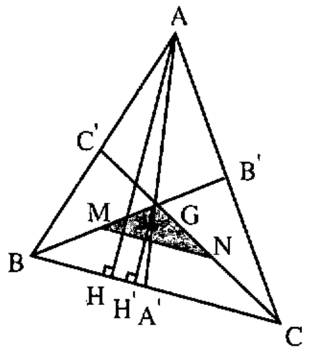
$\hat{A}=\hat{A'}=90^\circ$ ، $BC=B'C'$ ، $AB=A'B'$

در نتیجه داریم:

$$\begin{cases}x+y=2x-1\\ x-y+5=y+1/5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-x+y=-1\\ x-2y=-3/5\end{cases}$$

$$\Rightarrow x=5/5C \ , \ y=4/5$$

۳. مساحت مثلث GBC یک سوم مساحت مثلث ABC است؛ زیرا این دو مثلث در قاعدهٔ BC مشترکند و نسبت ارتفاعهای نظیر این ضلع مشترک در دو مثلث $GH':AH=1:3$ است (در مثلث قائم $AA'H$ ، $GH' \parallel AH$ است. بنابراین $GH':AH=GA':AA'=\frac{1}{3}$). از طرفی، مساحت مثلث GMN یک چهارم مساحت مثلث GBC است؛ زیرا این دو مثلث متشابهند و نسبت تشابه آنها $\frac{1}{2}$ است.



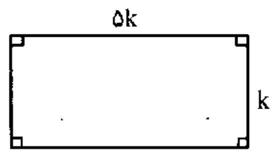
بنابراین مساحت مثلث GMN برابر $\frac{1}{12}$ مساحت مثلث ABC است؛ زیرا:

$$S_{GBC}=\frac{1}{3}S_{ABC} \quad (1) \ ,$$

$$S_{GMN}=\frac{1}{4}S_{GBC} \quad (2)$$

$$(1),(2)\Rightarrow S_{GMN}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}S_{ABC}=\frac{1}{12}S_{ABC}$$

۴. عرض مستطیل را k فرض می‌کنیم، طول آن 5k و از آن جا اندازهٔ قطرش برابر است با:



$$d=\sqrt{k^2+25k^2}=\sqrt{26}k \ , \ d=2\sqrt{13}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{13}=\sqrt{26}k$$

$$2=\sqrt{2}k\Rightarrow k=\sqrt{2}\Rightarrow$$

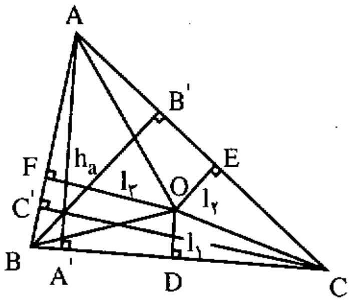
$5\sqrt{2}=$ طول و $\sqrt{2}=$ عرض

$\Rightarrow$ مساحت مستطیل = طول × عرض

$$=\sqrt{2}.5\sqrt{2}=10$$

S مربع = S مستطیل $\Rightarrow S=10\Rightarrow$ ضلع مربع $=\sqrt{10}$

۵. از O به A، B و C وصل می‌کنیم و ارتفاعهای AA' ، BB' و CC' را رسم می‌نماییم. برای دو مثلث OBC و ABC که در قاعدهٔ BC مشترکند، داریم:



$$\frac{S_{OBC}}{S_{ABC}}=\frac{OD}{AA'}=\frac{l_1}{h_a} \quad (1)$$

به همین ترتیب، برای مثلثهای OAC و OAB داریم:

$$\frac{S_{OAC}}{S_{ABC}}=\frac{l_2}{h_b} \quad (2)$$

$$\frac{S_{OAB}}{S_{ABC}}=\frac{l_3}{h_b} \quad (3)$$

از جمع کردن رابطه‌های (۱)، (۲) و (۳) داریم:

$$\frac{S_{OBC}+S_{OAC}+S_{OAB}}{S_{ABC}}=\frac{l_1}{h_a}+\frac{l_2}{h_b}+\frac{l_3}{h_c}$$

$$\Rightarrow\frac{S_{ABC}}{S_{ABC}}=1=\frac{l_1}{h_a}+\frac{l_2}{h_b}+\frac{l_3}{h_c}$$

$$\Rightarrow\frac{l_1}{h_a}+\frac{l_2}{h_b}+\frac{l_3}{h_c}=1$$

۶. از تشابه دو مثلث ADE و ABC داریم:

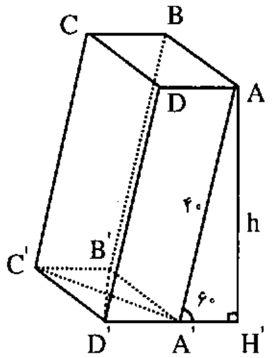
$$\frac{4}{8}=\frac{x+2}{3x-1}=\frac{y}{y+6}\Rightarrow x=5 \ , \ y=6$$

۷. با توجه به تناظر ضلعهای دو مثلث متشابه ABC و $A'B'C'$ می‌توان نوشت:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=k\Rightarrow\frac{a+b}{a'+b'}=\frac{a}{a'}=k\Rightarrow$$

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{S}{S'}=(\frac{3}{4})^2=\frac{9}{16}$$

۸. ارتفاع متوازی السطوح برابر است با:



$$h=40\sin 60=40\times\frac{\sqrt{3}}{2}=20\sqrt{3} \ ,$$

قاعدهٔ متوازی‌السطوح $S=\frac{1}{2}\times 24\times 10=120 cm^2$

از آن‌جا:

حجم متوازی‌السطوح = سطح قاعده × ارتفاع

$$=120\times 20\sqrt{3}=2400\sqrt{3}cm^3$$

● ریاضیات ۵

۱. داریم: $A\cup B\cup C=R-\{-3\}$

$(A\cup C)\cup B=B=]-3,5[$

۲. نقطه‌های برخورد دو منحنی $M(0,1)$ و $N(-1,2)$ است؛ زیرا

$$x=0\rightarrow g(0)=2(0)^2+(0)+1=1$$

$$x=-1\rightarrow g(-1)=2(-1)^2+(-1)+1=2$$

از آن‌جا داریم:

$$1=\frac{a(0)+b}{0+2}\Rightarrow b=2$$

$$2=\frac{a(-1)+b}{-1+2}\Rightarrow -a+b=2\Rightarrow a=0$$

۳. الف. با توجه به تعریف لگاریتم داریم:

$$\begin{cases}۹-x^۲>۰\\ x-۲>۰\\ x-۲\neq ۱\end{cases}\Rightarrow ۲<x<۳$$

ب. داریم:

$$\begin{cases}x-۲\geq ۰\\ ۳-x\geq ۰\end{cases}\Rightarrow ۲\leq x\leq ۳$$

۴. الف. بنا به تعریف داریم:

$$D_{(gof)(x)}=\{x|x\in D_f, f(x)\in D_g\}$$

از آن‌جا:

$$f(x)=\frac{x+۱}{x-۱}\Rightarrow D_f:R-\{۱\}, g(x)=\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow D_g:x\geq ۰$$

$$\Rightarrow D_{(gof)(x)}=\{x|x\in R-\{۱\}, \frac{x+۱}{x-۱}\geq ۰\}$$

$$\Rightarrow D_{(fog)(x)}=\{x|x\in R, x\leq -۱, x>۱\}$$

ب.

$$(gof)(x)=g(f(x))=\sqrt{\frac{x+۱}{x-۲}}$$

پ.

$$g(۴)=\sqrt{۴}=۲, (fog)(۴)=f(۲)=\frac{۲+۱}{۲-۱}=۳$$

۵. داریم:

$$f(\frac{x+۱}{x-۲})=\sqrt{\frac{۳}{x-۲}},$$

$$\frac{x+۱}{x-۲}=t\Rightarrow tx-۲t=x+۱$$

$$\Rightarrow x(t-۱)=۲t+۱\Rightarrow x=\frac{۲t+۱}{t-۱}$$

$$\Rightarrow f(t)=\sqrt{\frac{۳}{\frac{۲t+۱}{t-۱}-۲}}$$

$$\Rightarrow f(t)=\sqrt{t-۱}\Rightarrow f(x)=\sqrt{x-۱}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۵}f(x)=\lim_{x\to ۵}\sqrt{x-۱}=۲$$

۶. الف.

$$\lim_{x\to -۲}\frac{x^۳+۵x^۲+۸x+۴}{x^۴+۴x^۳+۳x^۲-۴x-۴}=\frac{۰}{۰}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -۲}\frac{x^۳+۵x^۲+۸x+۴}{x^۴+۴x^۳+۳x^۲-۴x-۴}=$$

$$\lim_{x\to -۲}\frac{(x+۲)(x^۲+۳x+۲)}{(x+۲)(x^۳+۲x^۲-x-۲)}=$$

$$\lim_{x\to -۲}\frac{x^۲+۳x+۲}{x^۳+۲x^۲-x-۲}=\frac{۰}{۰}=$$

$$\lim_{x\to -۲}\frac{(x+۲)(x+۱)}{(x+۲)(x^۲-۱)}=\lim_{x\to -۲}\frac{x+۱}{x^۲-۱}=\frac{-۱}{۳}$$

ب.

$$\lim_{x\to \frac{۲\pi^-}{۳}}\frac{\sin(۲x-\frac{\pi}{۳})}{۱+\cos(۲x-\frac{\pi}{۳})}=\frac{۰}{۰}=$$

$$\lim_{x\to \frac{۲\pi^-}{۳}}\frac{۲\sin(x-\frac{\pi}{۶})\cos(x-\frac{\pi}{۶})}{۲\cos^۲(x-\frac{\pi}{۶})}=$$

$$\lim_{x\to \frac{۲\pi^-}{۳}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{۶})}{\cos(x-\frac{\pi}{۶})}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x+۷}-۳}{۲x-۴}=\frac{۰}{۰}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x+۷}-۳}{۲x-۴}=$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x+۷-۹}{۲(x-۲)(\sqrt{x+۷}+۳)}=$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{۱}{۲(\sqrt{x+۷}+۳)}=\frac{۱}{۱۲}$$

۷. می‌دانیم شرط پیوستگی تابع در نقطهٔ $x=۳$ آن است که:

$$\lim_{x\to ۳^+}f(x)=\lim_{x\to ۳^-}f(x)=f(۳)$$

بنابراین داریم:

$$\begin{cases}a(۳)^۲+b=۴\\ ۲(۳)+a=۴\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۹a+b=۴\\ a=-۲\end{cases}\Rightarrow b=۲۲$$

۸. با استفاده از دستورهای محاسبهٔ مشتق داریم:

الف) $f'(x)=۳(۲x+۱)(x^۲+x)^۲(\sqrt{x}+۱)^۲$

$+۲(\frac{۱}{۲\sqrt{x}})(\sqrt{x}+۱)(x^۲+x)^۳$

ب) $f'(x)=۲\cos(۲x+\frac{\pi}{۶})\cos x^۲$

$+۲x(-\sin x^۲).\sin(۲x+\frac{\pi}{۶})$

۹. داریم:

$y=x^۳+۳x^۲\Rightarrow y'=۳x^۲+۶x$,

$y'=۰\Rightarrow ۳x^۲+۶x=۰$

$\Rightarrow x=۰, x=-۲$

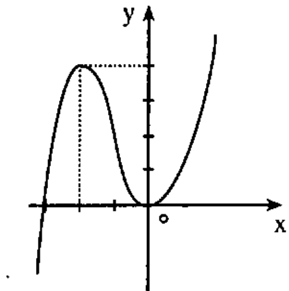
$x=۰\Rightarrow y=۰, x=-۲\Rightarrow y=۴$

$y=۰\Rightarrow x^۲(x+۳)=۰\Rightarrow x=۰, x=-۳$

$x\to\pm\infty\Rightarrow y\to\pm\infty$

x	y
$y'=۰\begin{cases}۰\\ -۲\end{cases}$	۰ ۴
۰,-۳	۰
$\pm\infty$	$\pm\infty$

x	$-\infty$		-۳		-۲		۰		$+\infty$
y'		+			۰	−	۰	+	
y	$-\infty$	↗	۰	↗	۴	↘	۰	↗	$+\infty$
					Max		Min		



۱۰. با توجه به ابعاد داده شده داریم:

حجم ، $V(x)=x(x+۱)(x-۱)=x^۳-x$

سطح کل ، $S(x)=۲x(x+۱)+$

$۲(x+x+۱)(x-۱)=۶x^۲-۲$

$V(۲)=۸-۲=۶$,

$V(۲/۵)=۱۵/۶۲۵-۲/۵=۱۳/۱۲۵$

آهنگ تغییرات نسبی حجم $=\frac{V(۲/۵)-V(۲)}{۲/۵-۲}$

$=\frac{۱۳/۱۲۵-۶}{۰/۵}=۱۴/۲۵$

$S(۲)=۲۴-۲=۲۲$,

$S(۲/۵)=۳۷/۵-۲=۳۵/۵$

آهنگ تغییرات نسبی سطح کل $=\frac{S(۲/۵)-S(۲)}{۲/۵-۲}$

$=\frac{۳۵/۵-۲۲}{۰/۵}=۲۷$

$V'(x)=3x^2-1 \Rightarrow V'(4)=47$

آهنگ تغییرات آنی حجم در $x=4$.

$S'(x)=12x \Rightarrow S'(4)=48$

آهنگ تغییرات آنی سطح کل در $x=4$.

حسابان ۱

۱.

$y^2-2xy+(2x^2-2)=0$

$y=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$

$=x\pm\sqrt{x^2-2x^2+2}=x\pm\sqrt{2-x^2}$

$y_1=x+\sqrt{2-x^2}$

$y_2=x-\sqrt{2-x^2}$

$2-x^2\ge 0\Rightarrow x^2\le 2\Rightarrow -\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}\Rightarrow$

$D_{y_1}=D_y=\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$

محاسبهٔ برد تابع y_1 :

$y_1-x=\sqrt{2-x^2}\Rightarrow y_1-x\ge 0\Rightarrow y_1\ge x$

طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم $y_1^2+x^2-2xy_1=$

$2-x^2\Rightarrow 2x^2-2y_1x+y^2-2=0$

$\Delta'=b'^2-ac\ge 0\Rightarrow y_1^2-2y^2+4\ge 0$

$\Rightarrow y_1^2\le 4\Rightarrow -2\le y_1<2$

برد تابع y_1 :

$$\begin{cases} y_1\ge x \\ -\sqrt{2}<x\le\sqrt{2} \Rightarrow -\sqrt{2}\le y_1\le 2 \\ -2\le y_1\le 2 \end{cases}$$

محاسبهٔ برد تابع y_2 :

$y_2=x-\sqrt{2-x^2}$

$y_2-x=-\sqrt{2-x^2}\Rightarrow y_1-x\le 0\Rightarrow y_1\le x$

برد تابع y_2 :

$$\begin{cases} y_2\le x \\ -\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}\Rightarrow -2\le y_2\le\sqrt{2} \\ -2\le y_2\le 2 \end{cases}$$

۲.

$f(g(a))=g(f(a))$

$(-2a+1)^2-3(-2a+1)+1$

$=-2(a^2-3a+1)+1$

$4a^2-4a+1+\cancel{6a}-2=-2a^2+\cancel{6a}-1$

$6a^2-4a=0\Rightarrow a=0\ ,\ \frac{2}{3}$

۳.

$f(x)=x^2\cos^2\alpha-x+\sin^2\alpha$

$f(x)=0\Rightarrow x^2\cos^2\alpha-x+\sin^2\alpha=0$

مجموع ضرایب صفراست $\Rightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=\frac{c}{a}=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\tan^2\alpha \end{cases}$

۴.

$f(\frac{3}{2})=1\ ,\quad f(-1)=-4$

باقیماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $2x^2-x-3$ را $mx+n$ می‌گیریم، پس می‌توان نوشت :

$2x^2-x-3=(x+1)(2x-3)$

$f(x)=(x+1)(2x-3)Q(x)+mx+n$

$x=\frac{3}{2}\Rightarrow f(\frac{3}{2})=0+m(\frac{3}{2})+n=1$

$x=-1\Rightarrow f(-1)=0-m+n=-4$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{3m}{2}+n=1 \\ -m+n=-4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{3}{2}m+n=1 \\ m-n=4\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{5}{2}m=5\Rightarrow \boxed{m=2}\quad \boxed{n=-2}$$

$\Rightarrow$ باقیماندهٔ تقسیم $2x-2$

۵.

$f(x)=\sqrt[3]{x}+1 \qquad D_f=\mathbb{R}$

تابع f یک‌به‌یک است ؛ زیرا :

$f(x_1)=f(x_2)$

$\Rightarrow\sqrt[3]{x_1}+1=\sqrt[3]{x_2}+1$

$\Rightarrow\sqrt[3]{x_1}=\sqrt[3]{x_2}\Rightarrow x_1=x_2$

جای x و y را عوض می‌کنیم :

$y=\sqrt[3]{x}+1\Rightarrow\sqrt[3]{x}=y-1\Rightarrow x=(y-1)^3$

$\Rightarrow f^{-1}(x)=y=(x-1)^3$

$f^{-1}(f(x))=f^{-1}(\sqrt[3]{x}+1)=(\sqrt[3]{x}+1-1)^3$

$=(\sqrt[3]{x})^3=x$

$f(f^{-1}(x))=f((x-1)^3)=\sqrt[3]{(x-1)^3}+1$

$=x-1+1=x$

$\Rightarrow f^{-1}(f(x))=f(f^{-1}(x))$

۶.

$$\frac{\overbrace{\sin 13x+\sin x}+\sin 7x}{\underbrace{\cos 13x+\cos x}+\cos 7x}$$

$$=\frac{2\sin\frac{13x+x}{2}\cos\frac{13x-x}{2}+\sin 7x}{2\cos\frac{13x+x}{2}\cos\frac{13x-x}{2}+\cos 7x}$$

$$=\frac{2\sin 7x\cos 6x+\sin 7x}{2\cos 7x\cos 6x+\cos 7x}$$

$$=\frac{\sin 7x\cancel{(2\cos 6x+1)}}{\cos 7x\cancel{(2\cos 6x+1)}}=\frac{\sin 7x}{\cos 7x}=\tan 7x$$

۷.

الف) توجه: $x\to\frac{\pi}{2}\Rightarrow\sin x\to 1^-$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos x}{1-\sin x}=\frac{1+0}{1-1^-}=\frac{1}{0^+}\to+\infty$$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-4x}+x-1)=+\infty-\infty$

$$=\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-4x}+(x-1))$$

$$\times\frac{\sqrt{x^2-4x}-(x-1)}{\sqrt{x^2-4x}-(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4x-(x-1)^2}{\sqrt{x^2-4x}-(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4x-x^2+2x-1}{\sqrt{x^2(1-\frac{4}{x})}-x+1}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x-1}{-x\sqrt{1-\frac{4}{x}}-x+1}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}(-2-\frac{1}{x})}{-\cancel{x}(\sqrt{1-\frac{4}{x}}+1+\frac{-1}{x})}$$

$$=\frac{-2-0}{-(\sqrt{1-0}+1-0)}=\frac{-2}{-2}=1$$

۸.

$$f(x)=\sin 2x$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin 2x-\sin 2x_0}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{2\cos(x+x_0).\sin(x-x_0)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}2\cos(x+x_0)\times\frac{\sin(x-x_0)}{x-x_0}$$

$$=2\cos(x_0+x_0)=2\cos 2x_0$$

۹.

$$y=ax^2+bx+c\Big|_{3}^{0}\ y_{min}=-1\ ,\ y=2x-6$$

در معادلهٔ تابع

$$\Big|_{3}^{0}\Rightarrow 3=0+0+c\Rightarrow c=3$$

$$y_{min}=\frac{4ac-b^2}{4a}=-1\Rightarrow\frac{12a-b^2}{4a}=-1$$

$$\Rightarrow 12a-b^2=-4a$$

$$\Rightarrow b^2=16a\Rightarrow a=\frac{b^2}{16}\qquad(1)$$

$$\begin{cases}y=ax^2+bx+3\\ y=2x-6\end{cases}\Rightarrow ax^2+bx+3=2x-6$$

$$\Rightarrow ax^2+(b-2)x+9=0$$

چون خط و منحنی بر هم مماسند ؛ پس $\Delta=0$

$$\Delta=(b-2)^2-36a=0\Rightarrow(b-2)^2=36a$$

$$\Rightarrow(b-2)^2=36(\frac{b^2}{16})\Rightarrow b-2=\pm\frac{6}{4}b$$

$$b-2=\pm\frac{3}{2}b\Rightarrow b\mp\frac{3}{2}b=2$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2b-3b=4\Rightarrow b=-4\\ 2b+3b=4\Rightarrow b=\frac{4}{5}\end{cases}$$

چون در مسأله گفته شد $b<0$، پس $b=-4$ درست است ؛ درنتیجه $a=1$.

$$\Rightarrow a=1, b=-4,$$

$c=3\Rightarrow y=x^2-4x+3$ معادلهٔ تابع

۱۰.

$$y_1=\frac{2x+1}{2x-1}$$

مجانب قائم: $y_1\to\pm\infty\Rightarrow 2x-1=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$

مجانب افقی: $x\to\pm\infty\Rightarrow y=1$

$$y'=\frac{-4}{(2x-1)^2}<0$$

$$x=0\Rightarrow y=-1\ ,\ y=0\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

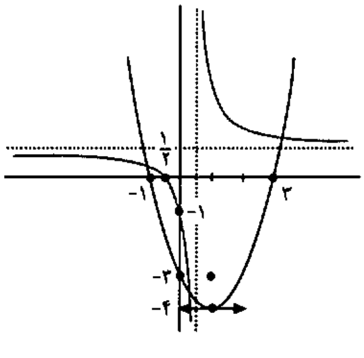
x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y_1'		$-$		$-$		$-$	‖	$-$	
y_1	1	↘	0	↘	-1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1

$$y_2=x^2-2x-3$$

$$y_2'=2x-2=0\Rightarrow x=1$$

$$x=0\Rightarrow y=-3$$

$$y=0\Rightarrow x^2-2x-3=0\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\ x=3\end{cases}$$



x	$-\infty$		-1		0		1		3		$+\infty$
y_2'		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
y_2	$+\infty$	↘	0	↘	-3	↘	-4	↗	0	↗	$+\infty$

◎ حساب دیفرانسیل و انتگرال ۱

۱. فرض می‌کنیم x عدد حقیقی دلخواهی باشد.

داریم: $x+(-x)=0$ و $(-x)+(-(-x))=0$ (۱)

به کمک تعویض‌پذیری جمع می‌توان نوشت:

$(-(-x))+(-x)=0$ (۲)

از مقایسهٔ دو رابطهٔ (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:

$$x+(-x)=(-(-x))+(-x)$$

که بنا به قاعدهٔ حذف (یا اسقاط) نتیجه می‌شود $x=-(-x)$.

۲. ابتدا فرض می‌کنیم دنباله، همگرا به l باشد، می‌دانیم:

$$a_{n+1}=\sqrt{3+2a_n}$$

$$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}a_n=l$$

$$\Rightarrow l=\sqrt{3+2l}\Rightarrow l^2=3+2l\Rightarrow l^2-2l-3=0$$

$$\Rightarrow(l+1)(l-3)=0\Rightarrow$$

$$\begin{cases}l=-1 & \text{غیرقابل قبول}\quad(\forall n\in N: a_n>0)\\ l=3 & \text{قابل قبول}\end{cases}$$

حال ثابت می‌کنیم برای هر $n\in N$، $a_n<3$ ؛ یعنی عدد ۳ کران بالای دنباله است.

داریم $a_1=\sqrt{3}<3$ و $a_k<3$، باید ثابت کنیم $a_{k+1}<3$.

$$a_{k+1}=\sqrt{3+2a_k}<\sqrt{3+2(3)}=3\Rightarrow a_{k+1}<3$$

درنتیجه، این دنباله از بالا کراندار است یا کران بالا دارد.

اینک ثابت می‌کنیم، این دنباله صعودی است. برای این کار باید ثابت کنیم $\forall n\in N$:

$$a_{n+1}\geq a_n\Rightarrow\sqrt{3+2a_n}>a_n$$

$$\Rightarrow 3+2a_n>a_n^2\Rightarrow a_n^2-2a_n-3<0$$

$$\Rightarrow(a_n+1)(a_n-3)<0$$

a_n+1 که مثبت است، پس باید $a_n-3<0$ یا $a_n<3$ که قبلاً داشتیم، بنابراین این دنباله صعودی است.

حال می‌گوییم دنبالهٔ صعودی که کران بالا داشته باشد، همگراست. پس دنباله همگراست. به عبارت دیگر، می‌توان گفت، چون برای هر $n\in N$، $a_n>0$ و برای هر $n\in N$، $a_n<3$ ؛ پس این دنباله کراندار است. در ضمن، دنباله یک نواهم هست بنابر قضیهٔ : (هر دنباله، یک نوای کراندار همگراست) پس دنباله همگرا خواهد بود.

۳.

$$\left|\frac{n-1}{2n+3}-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{440}$$

$$\Rightarrow\left|\frac{2n-2-2n-3}{2(2n+3)}\right|<\frac{1}{440}$$

$$\Rightarrow\left|\frac{-5}{2(2n+3)}\right|<\frac{1}{400}\Rightarrow\frac{5}{2(2n+3)}<\frac{1}{440}$$

$$\Rightarrow\frac{5}{2n+3}<\frac{1}{220}$$

$$\Rightarrow \frac{۲n+۳}{۵} > ۲۲۰ \Rightarrow ۲n+۳ > ۱۱۰۰$$

$$\Rightarrow ۲n > ۱۰۹۷ \Rightarrow n > ۵۴۸/۵ \Rightarrow n = ۵۴۹$$

از مرتبهٔ ۵۴۹ به بعد، مسأله برقرار است.

۴.

$$\sum_{k=۱}^{\infty}\left(\frac{۲}{k}-\frac{۱}{k+۱}\right)=\sum_{k=۱}^{\infty}\left(\frac{۱}{k}+\left(\frac{۱}{k}-\frac{۱}{k+۱}\right)\right)$$

$$=\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۱}{k}+\sum_{k=۱}^{\infty}\left(\frac{۱}{k}-\frac{۱}{k+۱}\right)$$

$\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۱}{k}$: واگرا است (سری همساز است)

$\sum_{k=۱}^{\infty}\left(\frac{۱}{k}-\frac{۱}{k+۱}\right)$ با فرض: $f(k)=\frac{۱}{k}$

$$S_n=\sum_{k=۱}^{n}\big(f(k)-f(k+۱)\big)=f(۱)-f(n+۱)$$

$$=۱-\frac{۱}{n+۱}=S_n$$

$$\Rightarrow \sum_{k=۱}^{\infty}\left(\frac{۱}{k}-\frac{۱}{k+۱}\right)=\lim_{n\to\infty}S_n$$

$=\lim_{n\to\infty}\left(۱-\frac{۱}{n+۱}\right)=۱ \Rightarrow$ سری همگرا است

حال می‌گوییم مجموع یک سری واگرا و یک سری همگرا، سری واگرا است.

۵.

$$\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۲^{k-۳}}{۲^{۳k-۲}}=\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{\frac{۲^{k}}{۸}}{\frac{۲^{۳k}}{۴}}=\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۲^{k}}{۲(۲^{۳k})}$$

$$=\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۲^{k}}{۲(۸^{k})}=\frac{۱}{۲}\sum_{k=۱}^{\infty}\left(\frac{۲}{۸}\right)^{k}=\frac{۱}{۲}\sum_{k=۱}^{\infty}\left(\frac{۱}{۴}\right)^{k}$$

سری: $\sum_{k=۱}^{\infty}\left(\frac{۱}{۴}\right)^{k}$ یک سری هندسی است که جملهٔ اوّل آن $\frac{۱}{۴}$ و $r=\frac{۱}{۴}$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}\sum_{k=۱}^{\infty}\left(\frac{۱}{۴}\right)^{k}=\frac{۱}{۲}\times\frac{a_۱}{۱-r}=\frac{۱}{۲}\times\frac{\frac{۱}{۴}}{۱-\frac{۱}{۴}}$$

$$=\frac{۱}{۲}\times\frac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۳}{۴}}=\frac{۱}{۶}$$

۶. ثابت کنید تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sin\frac{۱}{x-۴}$ در $x=۴$ حد ندارد. دو دنبالهٔ $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ را به فرم زیر در نظر می‌گیریم که حدّ هر دو ۴ باشد.

$$\{a_n\}=\left\{\frac{۱}{۲n\pi}+۴\right\}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}a_n=۴\ ,$$

$$\forall n\in N: a_n\neq ۴$$

$$\Rightarrow \{f(a_n)\}=\left\{\sin\frac{۱}{\frac{۱}{۲n\pi}+۴-۴}\right\}=\{\sin ۲n\pi\}$$

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\lim_{n\to\infty}\sin ۲n\pi=۰=L_۱$$

$$\{b_n\}=\left\{\frac{۱}{۲n\pi+\frac{\pi}{۴}}+۴\right\}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}b_n=۴\ ,$$

$$\forall n\in N: b_n\neq ۴$$

$$\Rightarrow \{f(b_n)\}=\left\{\sin\frac{۱}{\frac{۱}{۲n\pi+\frac{\pi}{۴}}+۴-۴}\right\}$$

$$=\left\{\sin\left(۲n\pi+\frac{\pi}{۴}\right)\right\}=\left\{\sin\frac{\pi}{۴}\right\}$$

$$\lim_{n\to\infty}f(b_n)=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}=L_۲$$

$L_۱\neq L_۲ \Rightarrow$ پس تابع فوق در $x=۴$ حد ندارد.

۷.

حدّ راست $\lim_{x\to\frac{\pi}{۳}^{+}}f(x)=۲\left\lfloor ۲\sin\frac{\pi}{۳}\right\rfloor+a=۲\lfloor\sqrt{۳}\rfloor+a$

$$=۲+a$$

حدّ چپ $\lim_{x\to\frac{\pi}{۳}^{-}}f(x)=b\lfloor ۰^{-}\rfloor=-b$

$$f\left(\frac{\pi}{۳}\right)=\left\lfloor ۳\cos\frac{\pi}{۳}-\sqrt{۳}\right\rfloor+۲$$

مقدار تابع $=\left\lfloor\frac{۳}{۲}-\sqrt{۳}\right\rfloor+۲=-۱+۲=۱$

چون تابع در $x=\frac{\pi}{۳}$ پیوسته است، پس باید حدّ راست مساوی حدّ چپ و مساوی مقدار تابع باشد.

$$\Rightarrow ۲+a=۱\Rightarrow \boxed{a=۱}$$

$$-b=۱\Rightarrow \boxed{b=-۱}$$

۸.

$$f(x)=\begin{cases}ax^{۴}-۴x & x>۱\\ bx^{۲}-۱ & x\leq ۱\end{cases}$$

اولاً: باید مشتق راست و مشتق چپ تابع در $x=۱$ برابر باشند.

$$\lim_{x\to ۱^{+}}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^{+}}\frac{ax^{۴}-۴x-a+۴}{x-۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱^{+}}\frac{a(x^{۴}-۱)-۴(x-۱)}{x-۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱^{+}}\frac{a(x-۱)(x+۱)(x^{۲}+۱)-۴(x-۱)}{x-۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱^{+}}\frac{\cancel{(x-۱)}(a(x+۱)(x^{۲}+۱)-۴)}{\cancel{x-۱}}$$

$$=۴a-۴=f'_{+}(۱)$$

$$\lim_{x\to ۱^{-}}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^{-}}\frac{bx^{۲}-۱-b+۱}{x-۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱^{-}}\frac{b(x^{۲}-۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^{-}}\frac{b\cancel{(x-۱)}(x+۱)}{\cancel{x-۱}}$$

$$=۲b=f'_{-}(۱)$$

$$\Rightarrow ۴a-۴=۲b\Rightarrow ۲a-۲=b \qquad (۱)$$

ثانیاً: تابع در $x=۱$ باید حد داشته باشد (و پیوسته باشد).

$$\lim_{x\to ۱^{+}}f(x)=a-۴\ ,\ \lim_{x\to ۱^{-}}f(x)=b-۱$$

$$\Rightarrow a-۴=b-۱\Rightarrow a-۳=b \qquad (۲)$$

با مقایسهٔ (۲) و (۱) $\Leftarrow$

$$۲a-۲=a-۳\Rightarrow \boxed{a=-۱}\ ,\ \boxed{b=-۴}$$

۹. داریم:

$$(f^{-1})'(f(x))=\frac{۱}{f'(x)}$$

$A\left|\begin{matrix}x\\ f(x)\end{matrix}\right.$ روی منحنی تابع f و $A'\left|\begin{matrix}f(x)\\ ۲\end{matrix}\right.$ روی منحنی تابع f^{-1}

$$x^{۳}+x=۲\Rightarrow x^{۳}+x-۱-۱=۰$$

$$\Rightarrow x^{۳}-۱+x-۱=۰$$

$$\Rightarrow (x-۱)(x^{۲}+x+۱)+(x-۱)=۰$$

$\Rightarrow (x-1)(\underbrace{x^2+x+2}_{\Delta<0})=0 \Rightarrow \boxed{x=1}$

$f'(x)=3x^2+1 \Rightarrow f'(1)=4$

$(f^{-1})'(2)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{4}$

.۱۰

ارتفاع × سطح قاعده = حجم استوانه

$V=\pi R^2.h$

$V'_t=2\pi R R'_t.h+\pi R^2.h'_t$

$-120\pi=2\pi(10)R'_t(20)+\pi(100).\frac{2}{5}$

$-120\pi=400\pi R'_t+40\pi$

$\Rightarrow 400\pi R'_t=-160\pi$

$\Rightarrow R'_t=\frac{-160\pi}{400\pi}=-\frac{2}{5}$

$\frac{2}{5}$ متردرثانیه کاهش می‌یابد.

هندسهٔ تحلیلی پیش‌دانشگاهی

۱. مؤلفه‌های بردار a در دو راستای b و c را بترتیب a_1 و a_2 می‌نامیم. در این‌صورت داریم:

$a=a_1+a_2$

با توجه به این که بردار a با دو بردار b و c موازی نیست (چرا؟)، دو عدد جبری α و β را باید چنان تعیین کنیم که $a_1=\alpha b$ و $a_2=\beta c$ یا $a=\alpha b+\beta c$ باشد. در این‌صورت باید داشته باشیم:

$(4,3,2)=\alpha(-2,1,2)+\beta(5,0,-2)$

$\Rightarrow (4,3,2)=(-2\alpha+5\beta,\alpha,2\alpha-2\beta)$

$$\Rightarrow\begin{cases}-2\alpha+5\beta=4\\ \alpha=3\\ 2\alpha-2\beta=2\end{cases}\Rightarrow \alpha=3,\beta=2$$

$\Rightarrow a_1=3(-2,1,2)\Rightarrow a_1=(-6,3,6)$

$a_2=2(5,0,-2)\Rightarrow a_2=(10,0,-4)$

سؤال. آیا همواره می‌توان یک بردار در فضا را به دو مؤلفه در دو راستای داده شده تجزیه کرد؟ به سه مؤلفه در سه راستای داده شده چه‌طور؟

۲. با توجه به $a=(3,-4,2)$ و $b=(-2,2,5)$ داریم:

الف. $a.b=(3)(-2)+(-4)(2)+(2)(5)$

$\Rightarrow a.b=-6-8+10=-4$

ب. $\cos(a,b)=\frac{a.b}{|a|.|b|}$

$=\frac{-4}{\sqrt{9+16+4}.\sqrt{4+4+25}}$

$\Rightarrow \cos(a,b)=\frac{-4}{\sqrt{29}.\sqrt{33}}\Rightarrow (a,b)$

$=\text{Arccos}\left(\frac{-4}{\sqrt{957}}\right)$

پ. نخست بردارهای $a-b$ و $a+b$ را مشخص می‌کنیم.

$a-b=(3,-4,2)-(-2,2,5)$

$=(3+2,-4-2,2-5)$

$\Rightarrow a-b=(5,-6,-3)$

$a+b=(3,-4,2)+(-2,2,5)$

$=(3-2,-4+2,2+5)$

$\Rightarrow a+b=(-1,-2,7)$

حال داریم:

$\Pr\frac{a-b}{a+b}=\frac{(a-b).(a+b)}{|a+b|}$

$=\frac{-5+12-21}{\sqrt{1+4+49}}=\frac{-14}{\sqrt{54}}$

$\Rightarrow \Pr\frac{a-b}{a+b}=\frac{-14}{3\sqrt{6}}=\frac{-14\sqrt{6}}{18}=\frac{-7\sqrt{6}}{9}$

ت. نخست تصویرهای بردار $a\times b$ را به‌دست می‌آوریم:

$a=(3,-4,2)$

$b=(-2,2,5)$

$a\times b=(-20-4,-4-15,15+4)$

$=(-24,-19,+19)$

از آن‌جا:

$|a\times b|=\sqrt{576+361+361}=\sqrt{1298}$

۳. با قرار دادن معادله‌های پارامتری خط D_2 در معادله‌های متقارن خط D_1، مختصات نقطهٔ برخورد دو خط D_1 و D_2 را به‌دست می‌آوریم (در صورت متقاطع بودنِ دو خط، دستگاه دو معادلهٔ یک مجهولی حاصل می‌شود).

$D_1:\frac{x-2}{2}=y-1=\frac{z+3}{-3}$

$D_2:x=3t\ ,\ y=t\ ,\ z=-2t$

$\Rightarrow\frac{3t-2}{2}=t-1=\frac{-2t+3}{-3}$

$$\Rightarrow\begin{cases}3t-2=2t-2\Rightarrow t=0\\ -3t+3=-2t+3\Rightarrow t=0\end{cases}\Rightarrow$$

نقطهٔ برخورد دو خط D_1 و D_2، $t=0\Rightarrow O=(0,0,0)$

با معلوم بودن بردار هادی خط که موازی بردار $V=2i+3j-k$ است، معادلهٔ خط را می‌توان نوشت:

$V_D=(3,1,-2)$

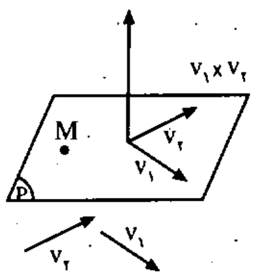
$\Rightarrow\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$

$\Rightarrow\frac{x-0}{2}=\frac{y-0}{3}=\frac{z-0}{-1}\Rightarrow\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{-1}$

۴. $P:2x-y-z+2=0\Rightarrow M(0,0,2)$

نقطهٔ برخورد صفحهٔ P با محور zها

از طرفی بردار نرمال صفحهٔ خواسته شده با حاصلضرب برونی دو بردار V_1 و V_2 موازی است. بنابراین:



$V_1=(3,1,-2)$

$V_2=(-1,2,1)$

$\Rightarrow V_1\times V_2=(1+4,2-3,6+1)$

$=(5,-1,7)$

$\Rightarrow V_{P'}=(5,-1,7)$,

$$a(x-x_\circ)+b(y-y_\circ)+c(z-z_\circ)=۰$$

$$\Rightarrow ۵(x-۰)-۱(y-۰)+۷(z-۲)=۰$$

$$\Rightarrow ۵x-y+۷z-۱۴=۰$$

معادلهٔ صفحهٔ خواسته شده

۵. معادله‌های متقارن خط D را به‌دست می‌آوریم:

$$D:\begin{cases} ۲x+y+۳z=۰ \\ x-y=۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۳x+۳z=۳ \Rightarrow x+z=۱$$

$$\Rightarrow x=y+۳\ ,\ x=-(z-۱)$$

$$\Rightarrow D: x=y+۳=\frac{z-۱}{-۱}$$

از آن‌جا:

الف.

$$M=(۱,۲,۰)\ ,\ V_P=V_D=(۱,۱,-۱)$$

$$\Rightarrow a(x-x_\circ)+b(y-y_\circ)+c(z-z_\circ)=۰$$

$$\Rightarrow ۱(x-۱)+۱(y-۲)-۱(z-۰)=۰$$

$$\Rightarrow x+y-z-۳=۰$$ معادلهٔ صفحهٔ P

ب.

$$\begin{cases} x+y-z-۳=۰ \\ x=y+۳=\frac{z-۱}{-۱}=t \Rightarrow \end{cases}$$

$$x=t\ ,\ y=t-۳\ ,\ z=-t+۱$$

$$\Rightarrow t+t-۳+t-۱-۳=۰ \Rightarrow t=\frac{۷}{۳}$$

$$\Rightarrow H=(\frac{۷}{۳},\frac{-۲}{۳},\frac{-۴}{۳})$$

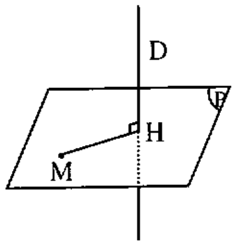
پ.

$$M=(۱,۲,۰)\ ,\ H=(\frac{۷}{۳},\frac{-۲}{۳},\frac{-۴}{۳})$$

$$\Rightarrow MH=\sqrt{(۱-\frac{۷}{۳})^۲+(۲+\frac{۲}{۳})^۲+(۰+\frac{۴}{۳})^۲}$$

$$=\sqrt{\frac{۱۶}{۹}+\frac{۶۴}{۹}+\frac{۱۶}{۹}}=\frac{\sqrt{۹۶}}{۳}=\frac{۴\sqrt{۶}}{۳}$$

به‌طور کلی، یک روش برای محاسبهٔ فاصلهٔ یک نقطه از یک خط، معادلهٔ صفحه‌ای را که از آن نقطه بر آن خط رسم می‌شود، می‌نویسیم و نقطهٔ برخورد آن با خط را تعیین می‌کنیم. آن‌گاه طول پاره‌خط وصل شده بین این نقطه و نقطهٔ داده شده را که همان فاصلهٔ نقطه از خط است، محاسبه می‌کنیم.



جبر خطی پیش‌دانشگاهی

۱.

$$A^T=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۳ \\ ۰ & -۱ & ۵ \\ ۲ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$B^۲=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۴ & -۱ & ۰ \\ ۲ & ۳ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۴ & -۱ & ۰ \\ ۲ & ۳ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱۸ & ۳ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^TB^۲=\begin{bmatrix} ۵۴ & ۹ & ۱۲ \\ ۹۰ & ۱۴ & ۲۰ \\ ۷۴ & ۱۲ & ۱۶ \end{bmatrix} \Rightarrow |A^TB^۲|$$

$$=|A^T|\times|B^۲|=|A|\times|B|^۲$$

$$|A|=۳\times\begin{vmatrix} ۰ & -۱ \\ ۲ & ۰ \end{vmatrix}=۶$$ (برحسب سطر اوّل)

$$|B|=۲\times -۱\times ۱=-۲$$

(حاصلضرب درآیه‌های قطر اصلی)

$$\Rightarrow |B|^۲=۴ \Rightarrow |A^TB^۲|=۶\times۴=۲۴$$

۲. ابتدا قرینهٔ سطر اوّل را به دو سطر دیگر اضافه می‌کنیم، که در این‌صورت داریم:

$$\begin{vmatrix} ۱ & a & a^۲ \\ ۰ & b-a & b^۲-a^۲ \\ ۰ & c-a & c^۲-a^۲ \end{vmatrix}=$$

$$(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} ۱ & a & a^۲ \\ ۰ & ۱ & b+a \\ ۰ & ۱ & c-a \end{vmatrix}$$

حال قرینهٔ سطر دوم را به سطر سوّم اضافه می‌کنیم:

$$(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} ۱ & a & a^۲ \\ ۰ & ۱ & b+a \\ ۰ & ۰ & c-b \end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)\times(c-b)\times۱\times۱$$

$$=-(a-b)\times-(b-c)(c-a)$$

$$=(a-b)(b-c)(c-a)$$

۳. طبق فرض داریم:

$$A^۳-۳a^۲+۴A-I=\bar{۰}$$

که در این‌صورت خواهیم داشت:

$$A(A^۲-۳A+۴I)=I$$

$$\Rightarrow (A^۲-۳A+۴I)=A^{-۱}$$

(از این قضیه استفاده شده است که وارون A منحصر به فرد بوده و اگر AB=I در این‌صورت باید $B=A^{-۱}$ باشد.)

۴. روش اول: برای اثبات زیر فضا بودن، طبق قضیه باید ثابت کنید که مجموعهٔ K نسبت به دو عمل جمع و ضرب اسکالر در بسته است:

$$\text{I)}\ (x_۱,y_۱,z_۱)\ ,\ (x_۲,y_۲,z_۲)\in K$$

$$\Rightarrow ۲x_۱+z_۱=۰\ ,\ ۲x_۲+z_۲=۰$$

$$(x_۱,y_۱,z_۱)+(x_۲,y_۲,z_۲)$$

$$=(x_۱+x_۲,y_۱+y_۲,z_۱+z_۲)\in K$$

زیرا: $۲(x_۱+x_۲)+(z_۱+z_۲)$

$$=\underbrace{(۲x_۱+z_۱)}_{۰}+\underbrace{(۲x_۲+z_۲)}_{۰}=۰+۰=۰$$

$$\text{II)}\ r\in\mathbb{R}\ ,\ (x,y,z)\in K \Rightarrow ۲x+z=۰$$

$$r(x,y,z)=(rx,ry,rz)\in K$$

زیرا: $۲(rx)+(rz)=r(\underbrace{۲x+z}_{۰})=r۰=۰$

پس K زیر فضای برداریِ $\mathbb{R}^۳$ است.

روش دوم: واضح است که $K\subseteq\mathbb{R}^۳$ پس K یک زیرفضای $\mathbb{R}^۳$ و چون $(۰,۰,۰)\in K$، پس K زیرفضای برداری $\mathbb{R}^۳$ است.

(البته توجه دارید که زیر مجموعه‌هایی از $\mathbb{R}^۳$ با شامل بودنِ صفر، می‌توانند زیر فضای برداریِ $\mathbb{R}^۳$ باشند که به شکل خط یا صفحه مطرح شده باشند.)

۵. می‌دانیم دوران یافتهٔ دایره تحت هر زاویه‌ای، یک دایره است و طول شعاع آن در تبدیل دورانی تغییر نمی‌کند، پس کافی است مرکز دایره را تحت تأثیر تبدیل دورانی تبدیل کرده و با در دست داشتن مرکز جدید، معادلهٔ دایره را بنویسیم :

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۲}}{۲} & -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ \frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۳\frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ \frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{bmatrix}$$

معادلهٔ تبدیل‌یافته :

$$(x+۳\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲+(y-\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲=۴$$

۶. چون بردارهای $(۱,۲)$ و $(۰,۱)$ در $\mathbb{R}^۲$ مستقل خطی‌اند، پس یک پایه تشکیل می‌دهند و می‌توانیم بردار $(۲,۶)$ را برحسب ترکیب خطی این دو بردار بنویسیم :

$$(۲,۶)=x(۱,۲)+y(۰,۱)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=۲ \\ ۲x+y=۶ \end{cases} \Rightarrow y=۲$$

$$\Rightarrow f(۲,۶)=f[۲(۱,۲)+۲(۰,۱)]$$

$$=۲f(۱,۲)+۲f(۰,۱)$$

$$=۲(۱,۱,۲)+۲(۰,۱,-۱)=(۲,۴,۲)$$

$$\Rightarrow f(۲,۶)=(۲,۴,۲)$$

۷. می‌دانیم برای نگاشتهای از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^n$ شرط پوشایی و یک به یکی معادل یکدیگرند، پس یک به یک بودن نگاشت مفروض را بررسی می‌کنیم که برای این‌منظور، هستهٔ نگاشت f را مشخص می‌کنیم.

$$K_f=\{(x,y,z)|f(x,y,z)=(۰,۰,۰)\}$$

$$=\{(x,y,z)|(x,۲y,y+z)=(۰,۰,۰)\}$$

$$\Rightarrow K_f=\{(x,y,z)|x=y=z=۰\}=\{(۰,۰,۰)\}$$

بنابراین f یک به یک و درنتیجه، پوشاست.

۸. طبق فرض $f(x,y,z)=(x-y,۲y+z)$ پس با توجه به تعریف هسته داریم :

$$K_f=\{(x,y,z)|f(x,y,z)=(۰,۰)\}$$

$$=\{(x,y,z)|(x-y,۲y+z)=(۰,۰)\}$$

$$=\{(x,y,z)|x-y=۰,۲y+z=۰\}$$

$x-y=۰$ و $۲y+z=۰$ در $\mathbb{R}^۳$ صفحه‌هایی را مشخص می‌کنند که از مبدأ عبور کرده و K_f فصل مشترک این دو صفحه است که یک خط بوده و بُعد آن یک است.

$$\left.\begin{aligned} x-y=۰ &\Rightarrow x=y \\ ۲y+z=۰ &\Rightarrow y=\frac{z}{-۲} \end{aligned}\right\} \Rightarrow x=y=\frac{z}{-۲}$$

(معادلهٔ هستهٔ f)

۹. با توجه به فرض یعنی :

داریم : $f(x,y)=(۵x-۲y,۴x-y)$

ماتریس نگاشت $A=\begin{bmatrix} ۵ & -۲ \\ ۴ & -۱ \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \lambda^۲-(۵+(-۱))\lambda+\underbrace{(-۵+۸)}_{|A|}=۰$$

(معادلهٔ مشخصه)

$$\lambda^۲-۴\lambda+۳=۰ \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_۱=۱ \\ \lambda_۲=۳ \end{matrix}$$

معادلهٔ راستاهای ویژه

$$(۵-\lambda)x+(-۲)y=۰$$

$$\lambda_۱=۱ \Rightarrow (۵-۱)x-۲y=۰ \Rightarrow ۲y=۴x$$

$$\Rightarrow y=۲x \to \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

$$\lambda_۲=۳ \Rightarrow (۵-۳)x-۲y=۰ \Rightarrow y=x \to \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

⊚ ریاضی عمومی ۱ (تجربی) پیش دانشگاهی

۱. الف ـ

$$۲۵=۱۴۷/۵-۱۷۲/۵= \text{دامنهٔ تغییرات}$$

$$\text{طول دسته‌ها} = \frac{\text{دامنهٔ تغییرات}}{\text{تعداد دسته‌ها}} = \frac{۲۵}{۵}=۵$$

	f_i	x_i	$f_i x_i$	$f_i(x_i-\overline{X})^۲$
۱۴۷/۵−۱۵۲/۵	۴	۱۵۰	۶۰۰	۵۲۹
۱۵۲/۵−۱۵۷/۵	۳	۱۵۵	۴۶۵	۱۲۶/۷۵
۱۵۷/۵−۱۶۲/۵	۲	۱۶۰	۳۲۰	۴/۵
۱۶۲/۵−۱۶۷/۵	۵	۱۶۵	۸۲۵	۶۱/۲۵
۱۶۷/۵−۱۷۲/۵	۶	۱۷۰	۱۰۲۰	۴۳۳/۵
	$n=۲۰$		۳۲۳۰	۱۱۵۵

ب ـ

$$\overline{X}=\frac{\sum f_i x_i}{n}=\frac{۳۲۳۰}{۲۰}=۱۶۱/۵$$

$$\sigma^۲=\frac{\sum f_i(x_i-\overline{X})^۲}{n}=\frac{۱۱۵۵}{۲۰}=۵۷/۷۵$$

واریانس

انحراف معیار $\sigma=\sqrt{۵۷/۷۵}\cong۴/۶$

$$CV=\frac{\sigma}{\overline{X}}=\frac{۴/۶}{۱۶۱/۵}\cong۰/۰۵$$

ج ـ

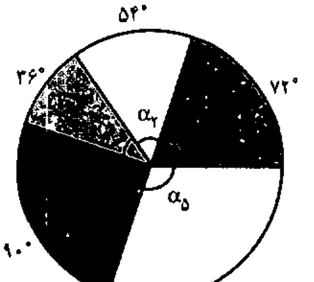
$$\alpha_۱=\frac{f_۱}{n}\times۳۶۰^\circ=\frac{۴}{۲۰}\times۳۶۰^\circ=۷۲^\circ$$

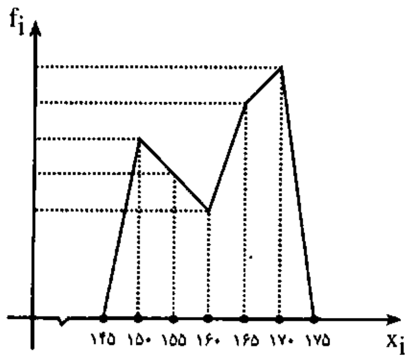
$$\alpha_۲=\frac{f_۲}{n}\times۳۶۰^\circ=\frac{۳}{۲۰}\times۳۶۰^\circ=۵۴^\circ$$

$$\alpha_۳=\frac{f_۳}{n}\times۳۶۰^\circ=\frac{۲}{۲۰}\times۳۶۰^\circ=۳۶^\circ$$

$$\alpha_۴=\frac{f_۴}{n}\times۳۶۰^\circ=\frac{۵}{۲۰}\times۳۶۰^\circ=۹۰^\circ$$

$$\alpha_۵=\frac{f_۵}{n}\times۳۶۰^\circ=\frac{۶}{۲۰}\times۳۶۰^\circ=۱۰۸^\circ$$





در چند بر فراوانی دو دسته با فراوانیهای صفر به ابتدا و انتهای دسته‌ها اضافه می‌کنیم، همان‌طور که در شکل بالا می‌بینید، نشانه‌های این دو دسته ۱۴۵ و ۱۷۵ هستند.

۲. پیشامد قرمز بودن مهرهٔ اوّل = A

پیشامد قرمز بودن مهرهٔ دوم = B

$$p(A\cap B)=p(A)\times p(B|A)$$

$$=\frac{۷}{۱۲}\times\frac{۶}{۱۱}=\frac{۷}{۲۲}$$

۳.

$$P=(x=k)=\binom{n}{k}\times P^k\times(1-P)^{n-k}$$

$$P(x=۶)=\binom{۸}{۶}\times(۰/۷)^۶\times(۰/۳)^۲=۰/۰۶۲$$

۴. $n=۱:۳^۱=\frac{۳}{۲}(۳^۱-۱)\Rightarrow ۳=۳$

(فرض استقرا) $n=k$:

$$۳^۱+۳^۲+۳^۳+...+۳^k=\frac{۳}{۲}(۳^K-۱)$$

(حکم استقرا) $n=k+۱$:

$$۳^۱+۳^۲+۳^۳+...+۳^k=\frac{۳}{۲}+۳^{k+۱}$$

$$=\frac{۳}{۲}(۳^{k+۱}-۱)$$

به دو طرف فرض، استقرای $۳^{k+۱}$ را می‌افزاییم:

$$۳^۱+۳^۲+۳^۳+...+۳^k+۳^{k+۱}$$

$$=\frac{۳}{۲}(۳^k-۱)+۳^{k+۱}$$

$$=\frac{۳}{۲}\left[(۳^k-۱)+۲\times۳^{k+۱}\right]=\frac{۳}{۲}(۳^{k+۱}-۱)$$

پس حکم استقرا برای هر $n\in\mathbb{N}$ برقرار است.

۵. برای محاسبهٔ مجموع ضرایب بسط دوجمله‌ای $(a+b)^n$ کافی است به‌جای a و b عدد ۱ را قراردهیم.

$$(\sqrt[۷]{۱^۶}+\frac{۱}{\sqrt[۷]{۱^۵}})^n+۹۹۲=(\sqrt[۹]{۱}+\sqrt[۷]{۱})^{۲n}$$

$$۲^n+۹۹۲=۲^{۲n}\Rightarrow(۲^n)^۲-۲^n-۹۹۲=۰$$

$$۲^n=A\Rightarrow A^۲-A-۹۹۲=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A=۳۲\\A=-۳۱\end{cases}\text{غ ق ق}$$

$$۲^n=۳۲;۲^n=۲^۵\Rightarrow n=۵$$

۶.

$$\begin{cases}y=mx+۴\\y=۲x+۶\\y=-x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=۲x+۶\\y=-x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-۲\\y=۲\end{cases}$$

بنابراین مختصات نقطهٔ تقاطع یعنی $a(-۲,۲)$ باید در معادلهٔ $y=mx+۴$ صدق کند:

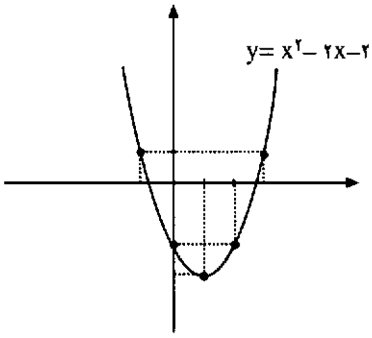
$$A(-۲,۲)\ ,\ y=mx+۴\Rightarrow ۲=m(-۲)+۴$$

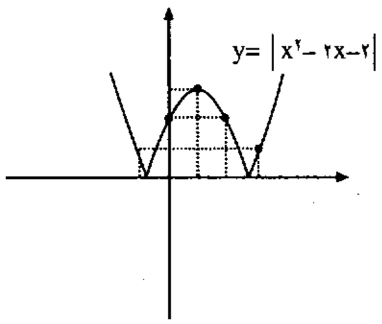
$$\Rightarrow m=۱$$

۷. طول رأس سهمی را از رابطهٔ $x=\frac{-b}{۲a}$ به‌دست می‌آوریم، سپس به کمک نقطه‌یابی نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{-۲}{۲}=۱$$

x	−۱	۰	۱	۲	۳
y	۱	−۲	−۳	−۲	۱





برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y=|f(x)|$ کافی است قسمتهایی از نمودار تابع $y=|f(x)|$ که زیر محور xها قرار دارد، نسبت به محور xها قرینه کنیم.

۸. الف-

$$(۱۲۵^x)^{x+۲}-\frac{۱}{۲۵}=۰\Rightarrow\left[(۵^۳)^x\right]^{x+۲}=۵^{-۲}$$

$$\Rightarrow ۵^{۳x^۲+۶x}=۵^{-۲}$$

$$\Rightarrow ۳x^۲+۶x+۲=۰\Rightarrow x=-۱$$

ب-

$$\log(۲x+۵)+\log x=\log۶-\log۲$$

$$\log(۲x+۵)\times x=\log\frac{۶}{۲}\Rightarrow ۲x^۲+۵x=۳$$

$$\Rightarrow ۲x^۲+۵x-۳=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{۱}{۲}\\x=-۳\ \text{غ ق ق}\end{cases}$$

۹.

$$u_n=\frac{۳n^۳+۹n^۲+۹n}{(n+۱)^۳}$$

$$=\frac{۳n^۳+۹n^۲+۹n+۳-۳}{(n+۱)^۳}$$

$$=\frac{۳(n^۳+۳n^۲+۳n+۱)-۳}{(n+۱)^۳}$$

$$=\frac{۳(n+۱)^۳}{(n+۱)^۳}-\frac{۳}{(n+۱)^۳}$$

$$\Rightarrow u_n=۳-\frac{۳}{(n+۱)^۳}$$

برای تشخیص صعودی یا نزولی بودن دنباله کافی است دو جملهٔ u_n و $u_{n+۱}$ را با یکدیگر مقایسه کنیم:

$$۳-\frac{۳}{(n+۱)^۳}<۳-\frac{۳}{(n+۲)^۳}$$

$$\Leftrightarrow-\frac{۳}{(n+۱)^۳}<-\frac{۳}{(n+۲)^۳}$$

$$\Leftrightarrow\frac{۱}{(n+۱)^۳}>\frac{۱}{(n+۲)^۳}$$

$$\Leftrightarrow(n+۱)^۳<(n+۲)^۳$$

درنتیجه برای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم: $u_n<u_{n+۱}$

بنابراین دنبالهٔ $\{u_n\}$ صعودی است.

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim\frac{۳n^۳+۹n^۲+۹n}{(n+۱)^۳}=۳$$

چون حد دنباله عدد ۳ است، بنابراین دنباله از بالا کراندار است، از طرفی با توجه به جملات دنباله:

$u_n:\frac{21}{8}$ و $\frac{78}{27}$ و $\frac{189}{64}$ و ... و ۳

ملاحظه می‌کنیم که دنباله از پایین کراندار است.

۱۰.

$$p(t)=\frac{1}{4}p_0 \Rightarrow \frac{1}{4}p_0=p_0(0/8)^t$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}=(0/8)^t \Rightarrow t=\log_{0/8}^{\frac{1}{4}}$$

۱۱.

مجانب قائم:

$$\begin{cases} y\to\pm\infty \\ 2x^3-3x^2+x=0 \Rightarrow x(2x^2-3x+1)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$$ معادله‌های مجانبهای قائم

$$\begin{array}{l|l} x^4+2x^3-1 & 2x^3-3x^2+x \\ \hline -x^4+\frac{3}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2 & \frac{1}{2}x+\frac{7}{4} \\ \hline \frac{7}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-1 & \\ -\frac{7}{2}x^3+\frac{21}{4}x^2-\frac{7}{4}x & \\ \hline \frac{19}{4}x^2-\frac{7}{4}x-1 & \end{array}$$

معادلهٔ مجانب مایل $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{4}$.

● ریاضی پایهٔ پیش‌دانشگاهی

۱. خیر، زیرا: $x=\sqrt{2}\ ,\ y=-\sqrt{2}$

$x+y=\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0\in Q$

خیر، زیرا: $x=\sqrt{5}\ ,\ y=\sqrt{5}$

$x\times y=\sqrt{5}\times\sqrt{5}=5\in Q$

۲. $x=\frac{m_1}{n_1}\ ,\ y=\frac{m_2}{n_2}$

$$x+y=\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_1n_2+m_2n_1}{n_1n_2}$$

$$=\frac{m_3}{n_3}\in Q$$

۳. الف- $n=1:\ \frac{1}{1\times4}=\frac{1}{3\times(1)+1}$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

فرض استقرا $n=k:\ \frac{1}{1\times4}+\frac{1}{4\times7}+\frac{1}{7\times10}+\dots+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{k}{3k+1}$

حکم استقرا $n=k+1:\ \frac{1}{1\times4}+\frac{1}{4\times7}+\frac{1}{7\times10}+\dots+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}=\frac{k+1}{3k+4}$

به دو طرف فرض استقرا، عبارت $\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}$ را اضافه می‌کنیم:

$$\frac{1}{1\times4}+\frac{1}{4\times7}+\frac{1}{7\times10}+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}$$

$$=\frac{k}{3k+1}+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}$$

$$=\frac{k(3k+4)+1}{(3k+1)(3k+4)}$$

$$=\frac{3k^2+4k+1}{(3k+1)(3k+4)}$$

$$=\frac{(3k+1)(k+1)}{(3k+1)(3k+4)}$$

$$=\frac{k+1}{3k+4}$$

ب- $n=1:\ 1=\frac{1\times(3\times(1)-1)}{2}\Rightarrow 1=1$

فرض استقرا $n=k: 1+4+7+\dots+(3k-2)=\frac{k(3k-1)}{2}$

حکم استقرا $n=k+1: 1+4+7+\dots+(3k-2)+(3k+1)=\frac{(k+1)(3k+2)}{2}$

به دو طرف فرض استقرا، عبارت $(3k+1)$ را اضافه می‌کنیم:

$$1+4+7+\dots+(3k-2)+(3k+1)$$

$$=\frac{k(3k-1)}{2}+3k+1$$

$$=\frac{3k^2-k+6k+2}{2}=\frac{3k^2+5k+2}{2}$$

$$=\frac{(k+1)(3k+2)}{2}$$

۴. الف- $16,8,4,2,1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\dots$

ب- $S=16+8+4+2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots$

$$S=16+\frac{1}{2}\underbrace{(16+8+4+2+1+\frac{1}{2}+\dots)}_{S}$$

$$S=16+\frac{1}{2}S\Rightarrow\frac{1}{2}S=16\Rightarrow S=32$$

۵.

$$\begin{cases} S_{11}=110 \\ S_7=14 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \frac{11}{2}(2a+10d)=110 \\ \frac{7}{2}(2a+6d)=14 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} a+5d=10 \\ a+3d=2 \end{cases}\Rightarrow d=4$$

۶. $a_1=a\ ,\ a_2=aq\Rightarrow$

$a_1+a_2=a+aq=19$

$a_3=aq^2\ ,\ a_4=aq^3\Rightarrow a_3+a_4$

$=aq^2+aq^3=76$

$$\Rightarrow\frac{aq^2(1+q)}{a(1+q)}=\frac{76}{19}=4\ ,\ q^2=4\Rightarrow q=\pm2$$

۷. جملهٔ عمومی دنبالهٔ مثلثی برابر با $\frac{n(n+1)}{2}$ است؛ بنابراین داریم:

$$\frac{n(n+1)}{2}=F_8=21\Rightarrow n^2+n-42=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases} n=6\in N \\ n=-7\notin N \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

۸.

$$\log_3(x^2-3x-1)=\log_{\sqrt[3]{2}}^{2^{\frac{1}{3}}}=\log_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{2}}=1$$

$$\log_3(x^2-3x-1)=\log_3^3$$

$$\Rightarrow x^2-3x-1=3$$

$$\Rightarrow x^2-3x-4=0\Rightarrow\begin{cases} x=-1 \\ x=4 \end{cases}$$

۹.

$$\log\left(\frac{a+2b}{a^2b^3}\right)=\log(a+2b)-\log a^2b^3$$

$$=\log(a+2b)-(\log a^2+\log b^3)$$

$$=\log(a+2b)-2\log a-3\log b$$

۱۰. الف ـ

$x=6000-30P \Rightarrow P=200-\frac{1}{30}x$

معادلهٔ درآمد: $R(x)=x\times P \Rightarrow R(x)$

$=x(200-\frac{1}{30}x)=200x-\frac{1}{30}x^2$

ب ـ $R(x)=200x-\frac{1}{30}x^2$

$\Rightarrow$ ماکزیمم $x=\frac{-b}{2a}=\frac{-200}{-\frac{2}{30}}=3000$

$R(3000)=200(3000)-\frac{1}{30}(3000)^2$

$=3\times 10^5$

ج ـ سود = درآمد − هزینه

$\Rightarrow P(x)=R(x)-C(x)$

$\Rightarrow P(x)=-\frac{x^2}{30}+140x-72000$

ماکزیمم $x=\frac{-b}{2a}=\frac{-140}{-\frac{2}{3}}=2100$

۱۱. $n(S)=\binom{15}{3}=455$;

$n(A)=\overset{\text{سالم}}{\binom{10}{3}}\times\overset{\text{معیوب}}{\binom{5}{0}}=120$

$P(A)=\frac{120}{455}$

۱۲. سه افسر و پنج سرباز می‌توانند به ۸ حالت کنار یکدیگر در یک ردیف بنشینند:

$n(S)=8!$

سه افسر در کنار یکدیگر به !۳ حالت می‌توانند قرار گیرند؛ بنابراین اگر این سه افسر را در یک بسته قرار دهیم؛ خواهیم داشت:

$n(A)=3!\times 6!$

و سرباز ۵ و سرباز ۴ و سرباز ۳ و سرباز ۲ و سرباز ۱ و سه افسر

بنابراین:

$P(A)=\frac{3!\times 6!}{8!}=\frac{3}{28}$

جوابهای تفریح اندیشه

پاسخ ۱:

اگر او آخرین ۵ ریال را در مغازهٔ پنجم خرج نمی‌کرد، برایش ۵ ریال بیشتر از هنگام خروجش از این مغازه باقی می‌ماند، و این، نصف آن مبلغی است که او به هنگام ورود به مغازهٔ پنجم داشته است. پس اگر از آخرین مغازه شروع کنیم که پس از آن دیگر مهرداد هیچ پولی نداشته است، خواهیم داشت:

$2(0+5)=10$

مبلغی که مهرداد هنگام ورود به مغازهٔ پنجم داشته است.

$2(10+5)=30$

مبلغی که مهرداد هنگام ورود به مغازهٔ چهارم داشته است.

$2(30+5)=70$

مبلغی که مهرداد هنگام ورود به مغازهٔ سوم داشته است.

$2(70+5)=150$

مبلغی که مهرداد هنگام ورود به مغازهٔ دوم داشته است.

$2(150+5)=310$

مبلغی که مهرداد هنگام ورود به مغازهٔ اوّل داشته است.

پس پولی که مهرداد قبل از خرید داشته، ۳۱۰ ریال بوده است.

پاسخ ۲:

با هر E که در گوشه‌های شکل (منتهی‌الیه سمت چپ، سمت راست، پایین و بالای شکل) قرار دارد، یک بار کلمهٔ ECU را می‌توان خواند. پس: $4 \times 1 = 4$ و با هر E که در کنار شکل واقع است، دوبار کلمهٔ ECU خوانده می‌شود. پس: $4 \times 2 = 8$ بار. لذا در مجموع به ۱۲ صورت می‌توان کلمهٔ ECU را از روی شکل داده شده خواند. زیرا:

$4+8=12$

پاسخ ۳:

$2+2-(2+2)=0$

$(2\div 2)\times(2\div 2)=1$

$(2\div 2)+(2\div 2)=2$

$(2+2+2)\div 2=3$

$(2+2+2)-2=4$

$(2+2)+(2\div 2)=5$

$(2\times 2\times 2)-2=6$

$(2\times 2\times 2)+2=10$

$(2+2+2)\times 2=12$

پاسخ ٤:

نخست تعداد زاویه‌های قائمهٔ تشکیل شده در ۱۲ ساعت اوّل را حساب می‌کنیم. اوّلین انطباق دو عقربه بعد از شروع حرکت، بین ساعت ۱ و ۲ می‌باشد. دومین انطباق بین ساعت ۲ و ۳، و آخرین انطباق دو عقربه در ساعت ۱۲ است.

بنابراین در ۱۲ ساعت اوّل، ۱۱ بار دو عقربه بر هم منطبق می‌شوند و در فاصلهٔ هر دو انطباق متوالی، عقربه‌ها دو بار با هم زاویهٔ قائمه می‌سازند. پس تعداد زاویه‌های قائمه‌ای که دو عقربه در ۱۲ ساعت می‌سازند $11 \times 2 = 22$ می‌باشد. در نتیجه در مدت ۲۴ ساعت تعداد زاویه‌های قائمه $22 \times 2 = 44$ خواهد بود.

معرفی کتابهای ریاضی انتشارات مدرسه

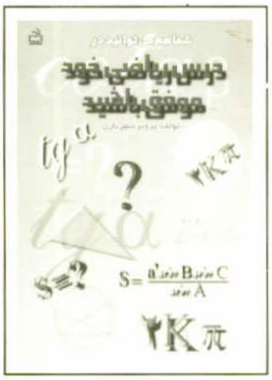
جدید

اصول فراگیری و آموزش ریاضیات دبیرستانی و پیش دانشگاهی

مؤلّف: دکتر محمّد جهانشاهی / ناشر: انتشارات مدرسه

این کتاب، سعی بر این دارد که تا حدّ امکان، دبیران و دانشجویان و دانش آموزان ریاضی را با مفاهیم اساسی و روشهای اثبات احکام و حـلّ مسائل ریاضی آشنا کند و قدرت تجزیه و تحلیل در قضایا و مسائـل ریاضی را تقویت کند.

مطالعهٔ این کتاب را به همهٔ معلّمان و دانشجویان رشتهٔ ریاضی دانشگاه های تربیت معلم توصیه می کنیم.



جدید

شما هم می توانید در درس ریاضی خود موفق باشید

مؤلّف: پرویز شهریاری / ناشر: انتشارات مدرسه

این کتاب که در آستانهٔ سال ۲۰۰۰ میلادی، سال جهانی ریاضیات منتشر می شود و مؤلّف آن را به کمیتهٔ برگزاری سال جهانی ریاضیات در ایران تقدیم کرده است، شامل اساسیترین موضوعـهـای مربوط به ریاضیات است. در این کتاب، از روش حلّ مسأله های ریاضی گرفته تا تاریخ ریاضیات و رابطهٔ ریاضیات با هنر و زندگی، در همهٔ زمینه ها بحث شده است و می تواند وسیله ای برای موفّقیت دانش آموزان ریاضی و در ضمن، راهنمایی برای دبیران ریاضی باشد.

جدید

داستانواره های ریاضی

مترجم: عبدالحسین مصحفی / ناشر: انتشارات مدرسه

معمّاهایی به صورت داستانهای بسیار جالب و جـذّاب، و در قالب نثری بسیار روان و شیریـن برای دانش آموزان بیان شده، که از منطق ریاضی برخوردار هستند. هر داستانواره از دو بخش تشکیل می شود؛ در بخش نخست، یک مسأله معـمّاگونهٔ ریاضی به صورت یک داستان بیان می شـود و در بخش دوم که با نشانهٔ *** از بخش نخست جدا می شود، راه حلّ سادهٔ آن مسأله، به زبان ساده بازگو می شود. همان گونه که مؤلّفان کتاب در پیشگفتار یادآوری کرده اند، خواننده پس از خواندن بخش نخست هر داستانواره، بهتر است کتاب را ببندد و برای یافتن راه حل، اندیشهٔ خود را به کار اندازد. پیشگفتار و گفتار پایانی کتاب نیز هرکدام مسأله های جالبی را دربردارد.

توجه: از سری کتابهای کوچک ریاضی، کتابهای زیر در دست چاپ است:

۱ـ نابرابریها و نامعادله ها / میرشهرام صدر ۲ـ تقارن در جبر و روش ضرایب نامعین / پرویز شهریاری
۳ـ استقرای ریاضی / پرویز شهریاری ۴ـ آمار و مدل سازی / دکتر عین ا... پاشا
۵ـ ورودی به نظریه اعداد / حمیدرضا امیری

ابوعلی حبوبی

ابوعلی حسن بن حارث حبوبی خوارزمی

فقیه و دانشمند مسلمان ایرانی که به ریاضیات نیز می پرداخت (نیمهٔ دوم سدهٔ چهارم).

قاضی و فقیه و از دانشمندان نیمهٔ دوم قرن چهارم و معاصر با ابونصر عراقی و بوزجانی و بیرونی بوده و با آنان دربارهٔ مطالب علمی مکاتبه می کرده و در ریاضیات دست داشته است.

ابونصر عراق در رسالهٔ *معرفة القسی الفلکیة* از وی یاد کرده و بیرونی در کتاب *استخراج الاوتار*، حلّ دو مسألهٔ هندسی را از وی آورده است؛ و کاشانی نیز در کتاب *مفتاح الحساب*، روشی را که وی برای حل مسائل «حساب فرایض» به کار می برده در ضمن سه مثال، آورده است.

ابوعلی حبوبی از بوزجانی، دستوری برای محاسبهٔ مثلث بر حسب اضلاع آن، خواسته بوده و بوزجانی جواب او را طی رسالهٔ مختصری داده است. این دستور با رمزها و اصطلاحات کنونی چنین نوشته می شود: به فرض آن که طولهای اضلاع مثلث a ، b و c باشد، مساحت مثلث مساوی است با:

$$\sqrt{\left[\left(\frac{c+b}{۲}\right)^{۲}-\left(\frac{a}{۲}\right)^{۲}\right]\left[\left(\frac{c-b}{۲}\right)-\left(\frac{a}{۲}\right)^{۲}\right]}$$

متن عربی این جواب و شرح آن، در مجلهٔ *تاریخ علوم* به چاپ رسیده است.

اثر ریاضی موجود وی

کتاب *الاستقصاء و التجنیس فی علم الحساب*

در این کتاب، کاربرد حساب خطأین و جبر در حلّ مسائل مربوط به وصایا، مورد بحث قرار گرفته است. از این کتاب، چند نسخه در مشهد و اروپا موجود است.

تبصره. مؤلف جلد سوّم فهرست کتابخانهٔ آستان قدس رضوی نوشته است که ابوعلی حسن بن حارث خوارزمی حبوبی کتاب *استقصاء* را در زمان آتسز خوارزمشاه تصنیف کرده و این اشتباه است و بروکلمان هم همین اشتباه را تکرار کرده است. آتسز خوارزمشاه در ۵۲۱ تا ۵۵۱ یعنی در نیمهٔ دوم قرن ششم هجری بوده و حال آن که ابوعلی حبوبی در حدود دویست سال پیش از آن تاریخ با بیرونی و بوزجانی مکاتبه می کرده است.

از طرف دیگر، مؤلف جلد هشتم فهرست کتابخانهٔ آستان قدس رضوی نسبت «حبوبی» را به زعم خود، غلط انگاشته و نسبت او را «خیوقی» پنداشته و این نیز اشتباه است.

باید متذکر شوم که «سوتر» نیز از تاریخ زندگی ابوعلی حبوبی اطلاع نداشته و چون یک نسخه از کتاب *استقصاء* که در آکسفورد موجود است تاریخ کتابتش در سال ۶۳۹ هجری بوده، سوتر نوشته است که ابوعلی حبوبی پیش از تاریخ ۶۳۹ می زیسته (که البته درست است).

* برگرفته از کتاب زندگینامهٔ ریاضیدانان دورهٔ اسلامی - ابوالقاسم قربانی - مرکز نشر دانشگاهی