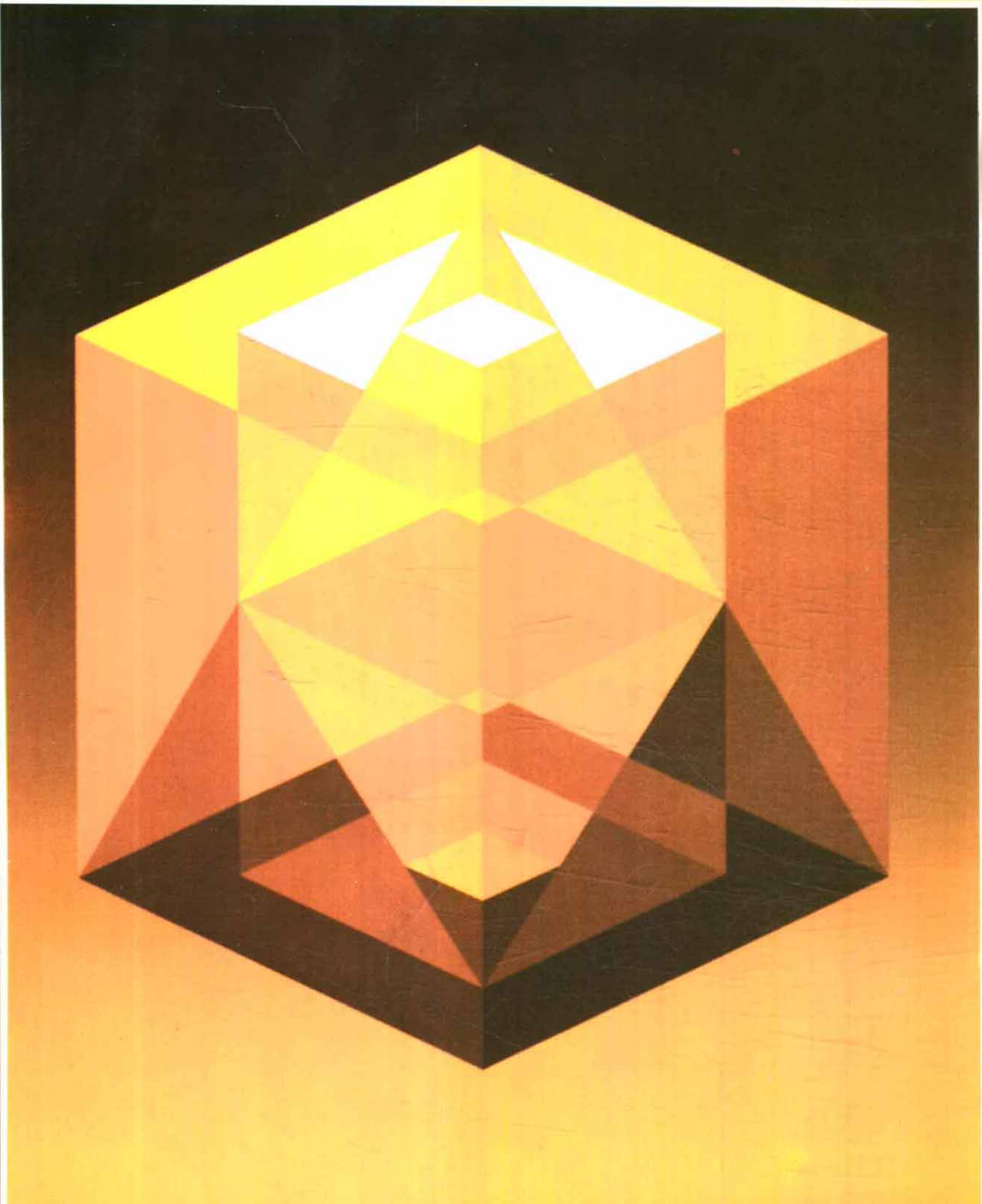
مجلهٔ ریاضی

برهان

برای دانش آموزان دبیرستان

۱۶

سال پنجم، زمستان ۱۳۷۴ شمارهٔ دوم، بها ۲۰۰۰ ریال



بسم الله الرحمن الرحیم

انتشارات مدرسه وابسته به وزارت آموزش و پرورش

مطالب این شماره

برهان تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

۱ـ نگارش مقالات کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتب ریاضی راهنمایی) ۲ـ طرح مسائل کلیدی (برای دانش‌آموزان) به‌همراه‌حل آن ۳ـ طرح مسائل‌مسابقه‌ای (برای‌دانش‌آموزان) به‌همراه حل آن. ۴ـ طرح‌معماهای‌ریاضی ۵ـ نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

- **هیئت تحریریه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافهٔ مقالات آزاد است.**
- **مقالات وارده باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.**
- **مقالات مجله با رسم‌الخطِ انتشارات مدرسه به چاپ خواهد رسید.**
- **مقالات رسیده مسترد نمی‌شود.**

برهان هر ۳ ماه یک شماره منتشر می‌شود.

نشانی: تهران، خیابان سپهبد قرنی، پل کریمخان زند، کوچه شهید محمود حقیقت طلب، پلاک ۳۶
تلفن: ۴ـ۸۸۹۷۷۷۳، ۸۹۳۸۰۹، ۸۸۰۲۳۳۶، ۸۸۰۲۳۴۷ فاکس: ۸۸۲۰۵۹۹
صندوق پستی: ۱۴۱۵۵/۱۹۴۹

حرف اوّل

از خدا جوییم توفیق ادب
بی‌ادب محروم‌ماند از لطف‌ربّ
بی‌ادب تنها نه خود را داشت بد
بلکه آتش بر همه آفاق زد

بار دیگر توفیق رفیق راه شد و حضرت حق (جلّ جلاله) ما را به ضیافتی دلنشین دعوت فرمودند، ضیافتی در دولت‌سرای دوست که حضرتش خود میزبان و میهماندار است. امیدواریم طاعات و عبادات شما عزیزان مورد قبول درگاه حق قرار گرفته باشد و در ماههای بعد نیز با بهره‌گیری از برکات ماه مبارک رمضان با عقیده‌ای صحیح و اخلاقی الهی و عملهای صالح زندگی کنید.

یکی از مهمترین نتایجی که از ماه مبارک به دست می‌آید تسلط بر نفس است که اگر بتوانیم نفس را مهار کنیم، به لطف پروردگار کم کم معنای واقعی انسانیت و نزدیک شدن به حریم پروردگار را در خواهیم یافت.

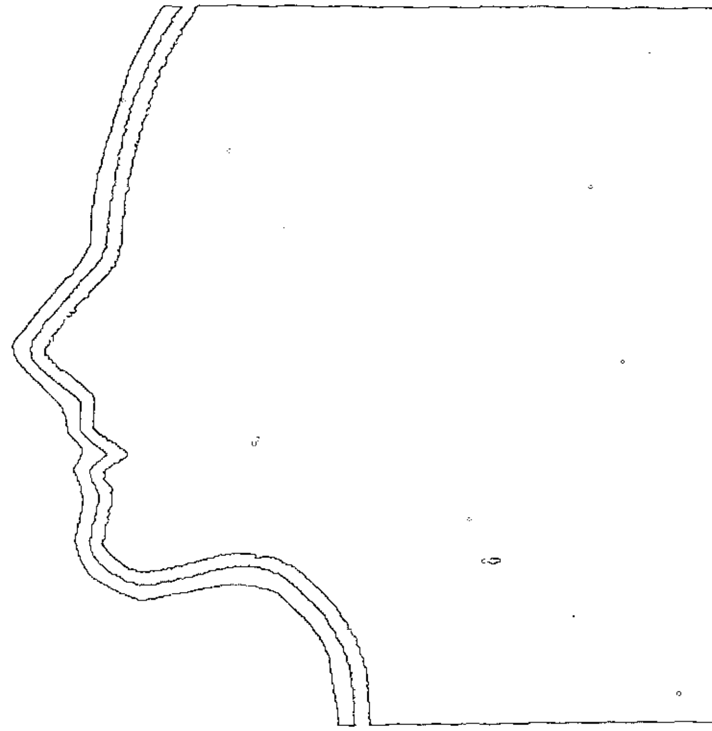
امیدواریم با پشتوانه‌های معنویی که از ماه مبارک رمضان به دست آورده‌اید سال ۷۵ را به خوبی آغاز کنید و سازنده‌تر از پیش حرکت کنید؛ پس در آستانهٔ ورود به سال جدید، از همین حالا سال نو را به همهٔ شما دانش‌آموزان و خوانندگان محترم مجله تبریک و تهنیت عرض می‌کنیم.

در شمارهٔ آیندهٔ مجله، یعنی شمارهٔ ۱۷ تغییراتی در قسمتِ «مسائل برای حل» صورت گرفته است که توصیه می‌کنیم حرف اول را در شمارهٔ آینده حتماً مطالعه نمایید.

سعی کنید ارتباط و مکاتبه را با مجلهٔ خودتان حفظ کرده تا از نظرات، پیشنهادات و انتقادات شما بهره‌مند گردیم.

والسلام ـ سردبیر

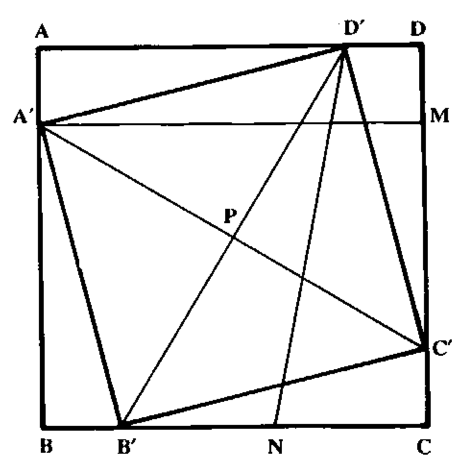
شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۱۶)



○ پرویز شهریاری

در شمارهٔ سوم سال اول برهان (تابستان ۱۳۷۱)، در صفحهٔ ۱۰، ضمن آوردن مسأله‌ای از هندسه، دیدیم که چگونه ممکن است، شکل ما را فریب دهد. درواقع، شکل هندسی، می‌تواند از دو طریق در برابر ما دام بگسترد: ۱) در موردی که شکل را اشتباه و بی‌دقت رسم کنیم، و ۲) وقتی که شکل را تنها در حالتی خاص درنظر بگیریم و یا حالت خاصی از آن را از یاد ببریم. در اینجا دو نمونهٔ جالب دیگر می‌آوریم.

مثال ۱۲. مستطیل $A'B'C'D'$ را در مربع ABCD محاط کرده‌ایم، به نحوی که هر رأس آن روی یکی از ضلعهای مربع ABCD باشد. ثابت کنید، $A'B'C'D'$ هم، یک مربع است.



* شکل ۱

درواقع، اگر ثابت کنیم، قطرهای مستطیل محاطی (که در نقطهٔ P به هم رسیده‌اند) برهم عمودند، آن وقت مربع بودن این مستطیل روشن می‌شود.

عمودهای $A'M$ و $D'N$ را، به ترتیب، بر ضلعهای CD و BC فرود می‌آوریم. دو مثلث قائم الزاویهٔ $A'C'M$ و $D'B'N$ با هم برابرند، زیرا وترهای این دو مثلث، قطرهای مستطیل محاطی‌اند و در مستطیل، دو قطر طولهایی برابر دارند؛ ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمهٔ $A'M$ و $D'N$ نیز با هم برابرند (هرکدام برابر ضلع مربع ABCD هستند). از برابری این دو مثلث، نتیجه می‌شود:

$$A'\hat{C}'M = D'\hat{B}'N$$

از اینجا، بلافاصله نتیجه می‌شود:

$$A'\hat{C}'C + D'\hat{B}'N = ۱۸۰^\circ$$

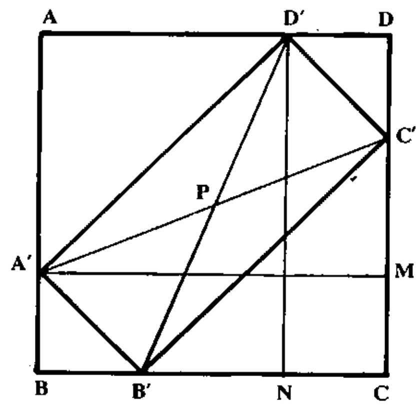
یعنی $B'CC'P$، یک چهار ضلعی محاطی است و باید داشته باشیم:

$$C'\hat{P}B + B'\hat{C}C' = ۱۸۰^\circ$$

ولی $B'\hat{C}C'$ زاویه‌ای قائمه است، پس زاویهٔ $C'PB'$ هم قائمه می‌شود؛ یعنی قطرهای مستطیل $A'B'C'D'$ در نقطهٔ P برهم عمودند. قضیه ثابت و مسأله حل شد.

دوباره در استدلال دقت کنید. هیچ اشتباهی در استدلالها نیست؛ اشتباه در اینجاست که شکل را در یکی از حالتهای ممکن رسم کرده‌ایم. به شکل ۲ توجه کنید: مستطیل

محاطی را طوری رسم کرده‌ایم که ضلعهای آن موازی با قطرهای مربع ABCD باشد. چه تفاوتی با شکل ۱ دارد؟ در اینجا هم، مثلثهای قائم‌الزاویهٔ $A'MC'$ و $D'B'M$ با هم برابرند و درنتیجه، دو زاویهٔ $D'B'C$ و $A'C'C$ با هم برابرند؛ ولی اینها دو زاویهٔ روبه‌رو در چهارضلعی $PB'CC'$ هستند و از برابری آنها، نمی‌توان محاطی بودن چهار ضلعی $PB'CC'$ را نتیجه گرفت. مطلب روشن است: اگر مستطیل محاط در مربع، ضلعهای موازی با قطرهای مربع نداشته باشد، خود یک مربع است، ولی اگر ضلعهای مستطیل محاطی موازی قطرهای مربع باشند (به شرطی که رأسهای مستطیل در وسط ضلعهای مربع قرار نگیرند)، مستطیلی با طول و عرض نابرابر است.



* شکل ۲

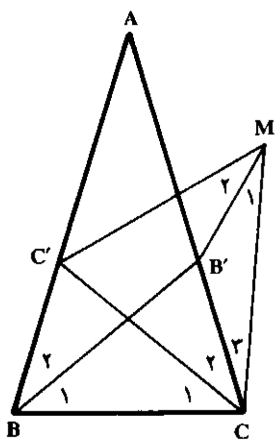
اکنون به یک مسألهٔ کم و بیش تاریخی می‌پردازیم. نیمسازها، در ردیف ارتفاعها و میانه‌ها، از عنصرهای اصلی یک مثلث‌اند. با وجود این، مسأله‌هایی که در رابطه با نیمسازها طرح می‌شوند، دشوارتر از مسأله‌های مربوط به عنصرهای دیگر، از آب درمی‌آیند. به طور مثال با در دست داشتن سه ارتفاع یا سه میانهٔ یک مثلث، می‌توان بسادگی مثلث را رسم کرد، در حالی که رسم مثلث، با معلوم بودن طول سه نیمساز آن، با دشواری مواجه می‌شود. اگر فرصتی دست داد، دربارهٔ این دشواری و علت آن، صحبت خواهیم کرد. در اینجا، به مسألهٔ مشهور دیگری از نیمسازها می‌پردازیم. می‌دانیم، در مثلث متساوی‌الساقین، نیمسازهای وارد به دو ساق، باهم برابرند، ولی آیا عکس این قضیه هم درست است؟ یعنی، اگر در مثلثی، دو نیمساز داخلی باهم برابر باشند، آیا مثلث متساوی‌الساقین است؟ به زبان دیگر، آیا می‌توان گفت: شرط لازم و کافی، برای متساوی‌الساقین بودن مثلث، این است که دو نیمساز داخلی آن برابر باشند؟

این مسأله، از همان دوران شکوفایی ریاضیات در یونان باستان مطرح شده بود، ولی روش هندسی حل آن به‌دست نمی‌آمد. بظاهر، نخستین کسی که این مسأله را حل کرد، ژاکوب شتینر (Shteiner) ریاضیدان‌سویسی (۱۷۹۶ ــ ۱۸۶۳ میلادی) بود که بیشتر در زمینهٔ هندسه کار می‌کرد و در سال ۱۸۴۰ میلادی توانست راه حلی کم و بیش پیچیده و طولانی برای این مسأله پیدا کند. چهل سال بعد، در سال ۱۸۸۰ میلادی، یک مهندس فرانسوی به نام دسکوب، روش دیگری که خیلی ساده‌تر و براساس برهان خُلف بود، برای حل مسأله پیدا کرد. این روش را، که بسیار جالب است، در اینجا می‌آوریم.

BB' و CC' نیمسازهای داخلی زاویه‌های B و C از مثلث ABC هستند و می‌دانیم:

$|BB'| = |CC'|$

باید ثابت کنیم، مثلث ABC متساوی‌الساقین است.



* شکل ۳

از C' و B'، خطهای راستی، به ترتیب، موازی با (BB') و (BC') رسم می‌کنیم تا در نقطهٔ M به هم برسند. چهار ضلعی $BB'MC'$ متوازی‌الاضلاع است و، بنابراین

$\hat{M}_2 = \hat{B}_2 = \frac{1}{2}\hat{B}$

اکنون فرض می‌کنیم، مثلث ABC، متساوی‌الساقین نباشد و داشته باشیم $\hat{B} > \hat{C}$.

مثلث $MC'C$ متساوی‌الساقین است، زیرا

$$|MC'|=|BB'|=|CC'|$$

از اینجا نتیجه می‌شود:

$$\hat{M}_1+\hat{M}_2=\hat{C}_2+\hat{C}_3$$

ولی $\hat{M}_2=\frac{1}{2}\hat{B}$ و $\hat{C}_2=\frac{1}{2}\hat{C}$، پس

$$\hat{M}_1+\frac{1}{2}\hat{B}=\hat{C}_3+\frac{1}{2}\hat{C}$$

چون فرض کردیم $\hat{B}>\hat{C}$، پس باید داشته باشیم:

$$\hat{M}_1<\hat{C}_3 \Rightarrow |B'C|<|B'M|$$

و چون $|B'M|=|BC'|$ (ضلعهای روبه‌رو در متوازی‌الاضلاع $BB'MC'$)، پس

$$|B'C|<|BC'|$$

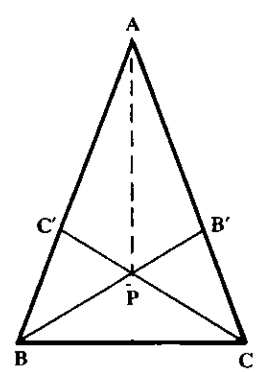
در دو مثلث BCC' و BCB' داریم

$$|BC|=|BC|, |BB'|=|CC'|,$$
$$|B'C|<|BC'|$$

بنابراین $\hat{B}_1<\hat{C}_1$ یا، اگر دو طرف نابرابری را دو برابر کنیم: $\hat{B}<\hat{C}$.

به این ترتیب، با فرض $\hat{B}>\hat{C}$، به نتیجهٔ $\hat{B}<\hat{C}$ رسیدیم. با روشی مشابه، می‌توان ثابت کرد که با فرض $\hat{B}<\hat{C}$ به نتیجهٔ $\hat{B}>\hat{C}$ می‌رسیم، یعنی در هر دو حالت $\hat{B}>\hat{C}$ و $\hat{B}<\hat{C}$ مواجه با تناقض می‌شویم. تنها یک راه می‌ماند: $\hat{B}=\hat{C}$؛ یعنی مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

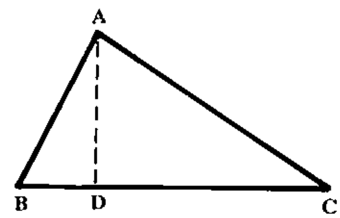
برای این مسأله، راه حل سادهٔ دیگری وجود دارد که، درضمن، موجب اثبات قضیهٔ کلی‌تری می‌شود.

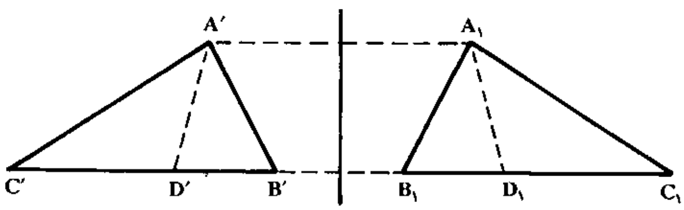


* شکل ۴

اگر نقطهٔ برخورد نیمسازهای BB' و CC' را P بنامیم، روشن است که AP نیمساز زاویهٔ A می شود (سه نیمساز داخلی هر مثلث، از یک نقطه می‌گذرند): اگر بتوانیم برابری دو مثلث ABB' و $AC'C$ را ثابت کنیم، متساوی‌الساقین بودن مثلث ABC ثابت می‌شود. این دو مثلث، در زاویهٔ A و نیمساز همین زاویه مشترک‌اند و، درضمن، قاعده‌هایی برابر دارند. بنابراین، برای حل مسأله، باید این قضیه را ثابت کنیم:

اگر در دو مثلث، یک ضلع، زاویهٔ روبه‌روی آن ضلع و نیمساز داخلی همین زاویه، برابر باشند، آن وقت، این دو مثلث برابرند.

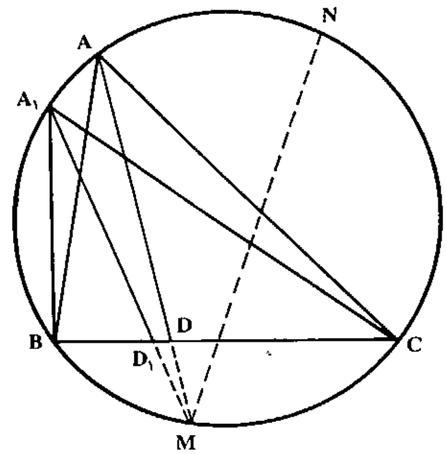




* شکل ۵

دو مثلث را هم‌جهت در نظر می‌گیریم. این فرض، لطمه‌ای به کلی بودن قضیه نمی‌زند. درواقع، اگر دو مثلث ABC و $A'B'C'$ هم‌جهت نباشند (شکل ۵)، می‌توان به‌جای مثلث $A'B'C'$، مثلث $A_1B_1C_1$ را، که قرینهٔ محوری مثلث $A'B'C'$ نسبت به محور عمود بر $B'C'$ است، انتخاب کرد.

دایرهٔ محیطی مثلث ABC را رسم می‌کنیم. اگر مثلث $A_1B_1C_1$ را طوری روی مثلث ABC قرار دهیم که B_1 بر B و C_1 بر C قرار گیرند و A_1 در همان نیم‌صفحهٔ شامل A باشد، آن وقت، اگر A_1 بر A قرار گیرد، قضیه ثابت شده است. فرض می‌کنیم، A_1 بر A واقع نشود و در نقطه‌ای روی کمان BA باشد (چون دو زاویهٔ A و A_1 برابرند، نقطهٔ A_1 روی کمان دایره واقع می‌شود؛ درضمن، اگر A_1 را روی کمان AN هم بگیریم، روش استدلال تغییر نمی‌کند).



* شکل ۶

شرطها را مرور کنیم: در دو مثلث ABC و A_1BC، قاعدهٔ BC مشترک، دو زاویهٔ A و A_1 و، همچنین، طولهای دو نیمساز AD و A_1D_1 برابرند.

امتدادهای AD و A_1D_1 از نقطهٔ M، وسط کمان BC می‌گذرند. می‌دانیم وتر کوچکتر، متعلق به کمان کوچکتر است، یعنی

$$|A_1D_1|+|D_1M|<|AD|+|DM|$$

چون، نیمسازهای AD و A_1D_1، طولهایی برابر دارند، پس باید داشته باشیم:

$$|D_1M|<|DM|$$

و این ممکن نیست، زیرا قطر NM بر وتر BC عمود است و وضع دو مایل MD و MD_1 طوری است که باید داشته باشیم: $|D_1M|>|DM|$. وجود این تناقض به معنای آن است که A_1 بر A قرار می‌گیرد و دو مثلث ABC و $A_1B_1C_1$ قابل انطباق بر یکدیگرند.

در اینجا به دو نتیجهٔ اصلی توجه کنیم:

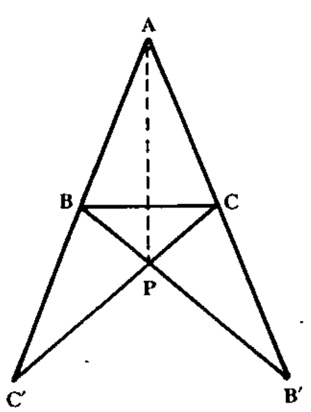
۱) معیار تازه‌ای، برای برابری دو مثلث به‌دست آوردیم:
شرط لازم و کافی، برای برابری دو مثلث این است که، در یک ضلع، زاویهٔ روبه‌رو به آن ضلع و نیمساز داخلی همان زاویه برابر باشند.

۲) در اثبات قضیه، از نیمساز بودن پاره‌خطهای راست BB' و CC' استفاده نکردیم، بنابراین، مسألهٔ اصلی را می‌توان به این صورت تعمیم داد: **اگر در مثلث ABC، پاره‌خطهای راست BB' و CC' روی نیمساز داخلی زاویهٔ A از مثلث ABC یکدیگر را قطع کرده باشند، آن وقت، برابر طولهای پاره خطهای راست BB' و CC'، به معنای متساوی‌الساقین بودن مثلث ABC است.**

اکنون ممکن است این پرسش پیش آید که آیا برابر بودن طول نیمسازهای خارجی دو زاویهٔ B و C، این بار هم به معنای متساوی‌الساقین بودن مثلث ABC است؟ بظاهر، باید، پاسخ مثبت باشد. به شکل ۷ توجه کنید؛ دو مثلث ABB' و ACC' با هم برابرند، زیرا در زاویهٔ A و نیمساز AP از همین زاویه مشترک‌اند (می‌دانیم، نیمساز داخلی زاویهٔ A، از نقطهٔ برخورد نیمسازهای خارجی دو زاویهٔ B و C می‌گذرد) و ضلع روبه‌روی به زاویهٔ A در دو مثلث (یعنی BB' و CC') طولهایی برابر دارند، بنابراین، بنابر معیار تازه‌ای که در مورد برابری دو مثلث پیدا کردیم، این دو مثلث برابر می‌شوند و داریم:

$$|AB|=|AC|$$

یعنی مثلث ABC متساوی‌الساقین است.



* شکل ۷

به این استدلال که روی شکل ۷ (یعنی مُدلی که برای مسأله ساخته‌ایم) انجام دادیم، هیچ ایرادی نمی‌توان گرفت. با وجود این، به کمک مثلثات و اندکی محاسبه، می‌توان ثابت کرد (صفحهٔ ۲۵۵ از کتاب «مسابقه‌ها، کنکورها و المپیادهای ریاضی» را ببینید) که، **اگر دو نیمساز خارجی دو زاویهٔ مثلث، طولهایی برابر داشته باشند، ممکن است مثلث متساوی‌الساقین نباشد.** مثلاً اگر مثلثی با این زاویه‌ها رسم کنیم:

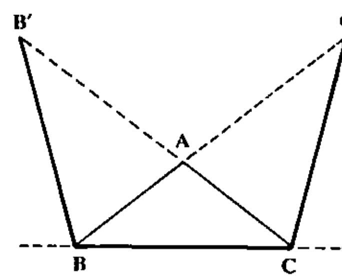
$$\hat{A}=۳۶^\circ, \hat{B}=۱۳۲^\circ, \hat{C}=۱۲^\circ$$

آن وقت، نیمسازهای خارجی دو زاویهٔ B و C، طولهایی برابر پیدا می‌کنند، در حالی که مثلث ABC متساوی‌الساقین نیست (چنین مثلثهایی را، شبه متساوی‌الساقین می‌نامند).

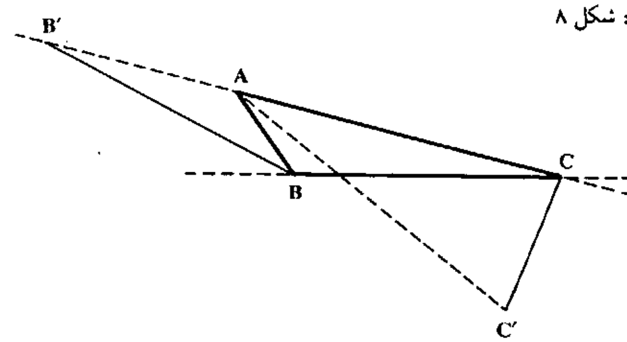
اشکال در کجاست؟ چه اشتباهی رخ داده است؟

درواقع، در رسم شکل (یعنی در ساختن مُدل) تنها به یکی از حالتهای ممکن توجه کرده‌ایم.

به شکلهای ۸ و ۹ توجه کنید.



* شکل ۸



* شکل ۹

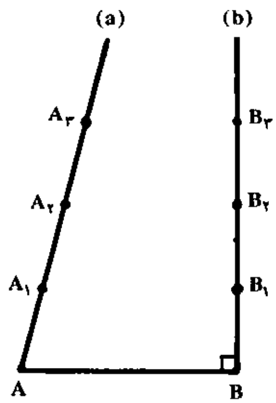
در شکل ۸، هردو نیمساز خارجی زاویه‌های B و C، در نیم‌صفحهٔ شامل نقطهٔ A، امتداد ضلعها را قطع کرده‌اند و در شکل ۹، یکی از نیمسازهای خارجی (نیمساز خارجی زاویهٔ B) در نیم‌صفحهٔ شامل نقطهٔ A، نیمساز دیگر (نیمساز خارجی زاویهٔ C) در نیم‌صفحه‌ای که شامل A نیست، امتداد ضلعها را قطع کرده‌اند. بنابراین، مُدل ما برای حل مسأله، ناقص بود، چون تنها یکی از سه حالت ممکن را در نظر گرفته‌ایم. مسأله وقتی به‌طور کامل حل می‌شود که دو حالت مربوط به شکلهای ۸ و ۹ را هم در نظر بگیریم.

درواقع، در دو حالت شکل ۷ و شکل ۸، با مثلث متساوی‌الساقین و در حالت شکل ۹ با مثلث شبه‌متساوی‌الساقین سر و کار داریم (در مثلث شبه‌متساوی‌الساقین، زاویهٔ A کوچکتر از زاویهٔ ۶۰ درجه است).

مثال بعدی، هم استدلال و هم مُدل شکل، ما را فریب می‌دهد. این مسأله و استدلال سفسطه‌آمیز آن، متعلق به پروکلوس (۴۱۰ ـ ۴۸۵ میلادی)، فیلسوف ذهن‌گرا و نوافلاطونی یونان باستان است.

به شکل ۱۰ توجه کنید: خط راست (a) با پاره‌خط راست AB زاویه‌ای حاده ساخته است و خط راست B بر پاره خط راست AB عمود است. نقطه‌های A_1 و B_1 را طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم:

$$|AA_1| = |BB_1| = \frac{1}{2}|AB|$$

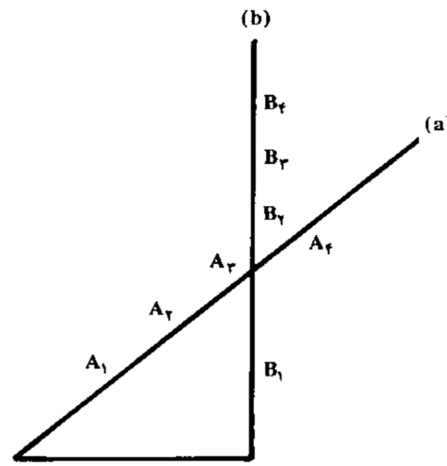


* شکل ۱۰

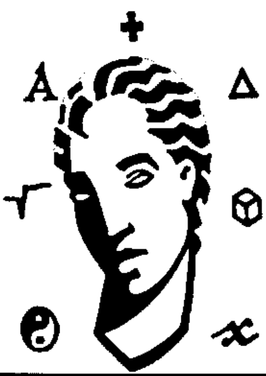
پاره‌خطهای راست AA_1 و BB_1 نمی‌توانند یکدیگر را قطع کنند، زیرا، اگر این دو پاره‌خط راست، یکدیگر را در نقطه‌ای مثل M قطع کنند، آن وقت در مثلث MAB، طول ضلع AB از مجموع دو ضلع دیگر، کوچکتر می‌شود. به همین ترتیب، پاره‌خطهای راست $|A_1A_2| = |B_1B_2| = \frac{1}{2}|A_1B_1|$ نمی‌توانند نقطهٔ برخوردی مثل N داشته باشند، زیرا طول ضلع A_1B_1 در مثلث NA_1B_1 نمی‌تواند از مجموع دو ضلع دیگر کوچکتر باشد. اگر این استدلال را، ادامه دهیم، به این نتیجه می‌رسیم که، خطهای راست (a) و (b)، هرگز یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

اشتباه در کجاست؟ نخست این که، شکل ۱۰، یعنی مُدل خود را، طوری رسم کرده‌ایم که نمی‌تواند اشتباه را روشن کند. دوم این که، از این استدلال تنها می‌توان نتیجه گرفت که، پاره‌خطهای مایل و عمود هم‌شماره (AA_1 و BB_1 یا A_1A_2 و B_1B_2 و غیره) یکدیگر را قطع نمی‌کنند و به قول خود

پروکلوس، از این راه نمی‌توان برخورد دو خط راست (a) و (b) را ثابت کرد، ولی به این معنا نیست که (a) و (b) نقطهٔ برخورد ندارند. مثلاً از کجا معلوم است که A_kA_{k+1} و B_nB_{n+1} $(k \neq n)$ یکدیگر را قطع نکنند (شکل ۱۱). به این ترتیب، چیزی را ثابت کرده‌ایم و چیز دیگری را نتیجه گرفته‌ایم.



* شکل ۱۱



تفریح اندیشه ۱

برای یک مهماندار هواپیما لازم است که لباسش را هر روز تغییر دهد. چنانچه او به‌ازای هر شلوار سه بلوز و به‌ازای هر بلوز دو روسری داشته باشد، در طی سه سال به چند بلوز احتیاج دارد تا بتواند هر روز از یک لباس متفاوت با روزهای دیگر استفاده کند؟

جواب در صفحهٔ ۸۸

ادب ریاضی

منطق قوانینی را به‌دست می‌دهد که انسان را از اشتباه و لغزش و خطای در معقولات بازمی‌دارد، قوانینی که به‌وسیلهٔ آنها، در معقولات، آنچه را که ممکن است خطا کننده‌ای در آنها خطا کند می‌آزمایند. زیرا در مورد برخی از معقولات هرگز امکان ندارد که اشتباهی پیش آید، و آن همان معقولاتی است که آدمی گویی بنابر فطرت می‌تواند آنها را بشناسد، و دربارهٔ آنها یقین حاصل کند، مانند اینکه کُلّ بزرگتر از جزء است، یا عدد سه فرد است. اما امور دیگری نیز هست که ممکن است در آنها خطایی پیش‌آید و آدمی را در رسیدن به حقیقت به اشتباه بی‌افکند، این‌گونه امور باید با فکر و اندیشه و از طریق قیاس و استدلال فهمیده شود. در این دسته از امور است ــ نه در آن دستهٔ اول ــ که هرکس خواستار دست یافتن به حقیقت یقینی امور مطلوب باشد، به قوانین منطق نیازمند می‌شود.

احصاء العلوم فارابی

ترجمهٔ خدیوجم

موضوعهای منطق آن چیزهاست که قوانین منطق برای آنهاست، و این موضوعها عبارت‌اند از: مَعقُولات، از جهت دلالت الفاظ بر آنها، و اَلفاظ، از لحاظ دلالتشان بر معقولات.

احصاء العلوم فارابی

ترجمهٔ خدیوجم

فضای برداری

(قسمت دوم)

حمیدرضا امیری

ترکیب خطی

استقلال خطی و وابستهٔ خطی

(برای دانش‌آموزان سال سوم ریاضی و پیش‌دانشگاهی نظام جدید)

در شمارهٔ قبل راجع به دستگاهی ریاضی به نام فضای‌برداری صحبت کرده و چهارچوب اصلی این ساختمان ریاضی را بنا کرده و در مورد زیر فضاهای یک فضای برداری نیز مطالبی عنوان کردیم.

حال می‌خواهیم به داخل این ساختمان قدم نهاده و اجزای تشکیل دهندهٔ این ساختمان که همان بردارهای فضای برداری می‌باشند را، مورد بررسی قرار داده و خواص بردارهای یک فضای برداری را مطالعه و تجزیه و تحلیل کنیم.

تذکر: از این به بعد به اعضای هر فضای برداری، بردار می‌گوییم، مثلاً در فضای برداری $\mathbb{R}^2$ ، هر زوج مرتب یک بردار است و یا در فضای برداری ماتریسهای 2×2 هر ماتریس 2×2 یک بردار است.

هرگاه در فضای برداری V ، چند بردار را در نظر گرفته، و در هر کدام اسکالری (عددی) ضرب کرده و با هم جمع کنیم اصطلاحاً یک **ترکیب خطی** از آن بردارها بوجود می‌آید که حاصل این جمع نیز برداری است از فضای V ، بنابراین: اگر V_1 و V_2 و ... و V_n ، بردارهایی از فضای برداری V باشند و α_1 و α_2 و ... و α_n اعداد حقیقی از میدان اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) ، باشند در این صورت بردار $(\alpha_1V_1+\alpha_2V_2+...+\alpha_nV_n)\in V$ را ترکیب خطی از n بردار فوق می‌نامند.

مثال: اگر $(1,2)$ و $(\frac{1}{2},5)$ و $(\sqrt{2},-1)$ بردارهایی از فضای برداری $\mathbb{R}^2$ باشند در این صورت ۲ ترکیب خطی از این بردارها به قرار زیر است:

$$-1(1,2)+4(\frac{1}{2},5)+\sqrt{8}(\sqrt{2},-1)$$

$$2(1,2)+\sqrt{2}(\sqrt{2},-1)+\frac{1}{5}(\frac{1}{2},5)$$

قرارداد: اگر در یک ترکیب خطی همهٔ ضرایب (اسکالرها) با هم صفر نباشند و لااقل یکی از آنها مخالف صفر باشد به آن ترکیب خطی یک ترکیب خطی ناصفر می‌گویند واضح است که از چند بردار یک فضای برداری بی‌نهایت ترکیب خطی می‌توان تشکیل داد!

حال این سؤال را مطرح می‌کنیم که آیا چند بردار، در یک فضای برداری، همیشه می‌توانند به کمک یکدیگر و با ایجاد یک بستگی تنگاتنگ، بردار صفر آن فضا را بوجود آورده و به عبارت دیگر آیا همواره یک ترکیب خطی ناصفر از چند بردار یک فضا می‌توان یافت که مساوی، با بردار صفر آن فضا شود؟ مثلاً در فضای برداری $\mathbb{R}^2$ بردارهای $(1,2)$ و $(-3,2)$ مفروض‌اند می‌خواهیم به سؤال قبل دقیق‌تر پاسخ دهیم یعنی

می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا می‌توان ترکیبی خطی و ناصفر از این دو بردار یافت، که مساوی با بردار صفر $\mathbb{R}^2$ که همان $(0,0)$ است، باشد یا خیر؟ برای این منظور ضرایبی دلخواه مانند x و y در نظر گرفته و یک ترکیب خطی دلخواه با آنها تشکیل داده و مساوی با $(0,0)$ قرار می‌دهیم و از آنجا ضرایب x و y را به دست می‌آوریم:

$$x(1,2)+y(2,-3)=(0,0)\Rightarrow(x,2x)+(2y,-3y)=(0,0)$$

$$\Rightarrow\ {}^{-2}\begin{cases}x+2y=0\\2x-3y=0\end{cases}\Rightarrow -7y=0\Rightarrow y=0\Rightarrow x=0$$

یعنی تساوی اول در صورتی برقرار است که $x=y=0$

یعنی دو بردار $(1,2)$ و $(2,-3)$ نتوانستند به کمک هم بردار صفر را تولید کنند و مشاهده می‌شود ایجاد بردار صفر به این دو بردار بستگی نداشته و مستقیماً به ضرایب وابسته است. به عبارت دیگر این ضرایب ترکیب خطی هستند که بردار صفر را تولید کردند، نه خود بردارها، به چنین بردارهایی، بردارهای مستقل خطی می‌گویند و در حالت کلی: بردارهای V_1 و V_2 و ... و V_n از فضای برداری V، **مستقل خطی‌اند**، هرگاه هر ترکیب خطی از این n بردار، که مساوی با بردار صفر شود، صفر بودن همهٔ ضرایب آن ترکیب خطی را نتیجه دهد و یا به بیان ریاضی:

$$\forall \alpha_1V_1+\alpha_2V_2+\ldots+\alpha_nV_n=\overline{0}\Rightarrow\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$$

مسألهٔ ۱: آیا بردارهای $(1,2,3)$ و $(0,1,-1)$ و $(-1,0,2)$ در فضای برداری $\mathbb{R}^3$ مستقل خطی‌اند؟

حل: یک ترکیب دلخواه از بردارهای فوق، مساوی با بردار صفر فضای $\mathbb{R}^3$ یعنی $(0,0,0)$ قرار داده و اثبات می‌کنیم ضرایب آن ترکیب خطی **فقط** باید صفر باشند.

$$x(1,2,3)+y(0,1,-1)+z(-1,0,2)=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow(x,2x,3x)+(0,y,-y)+(-z,0,2z)=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-z=0\Rightarrow x=z\\2x+y=0\\3x-y+2z=0\end{cases}$$

$$\overset{x=z}{\Rightarrow}3x-y+2x=0\Rightarrow\begin{cases}5x-y=0\\2x+y=0\end{cases}\Rightarrow 7x=0\Rightarrow\boxed{x=0}$$

$$x=0\Rightarrow\boxed{z=0}\Rightarrow\boxed{y=0}$$

پس طبق تعریف بردارهای فوق مستقل خطی‌اند.

حال این سؤال پیش می‌آید که آیا می‌توان توسط چند بردار در یک فضای برداری بردار صفر را تولید کرد، به شرط آن که خود بردارها نیز در ایجاد بردار صفر نقش داشته باشند. (همهٔ ضرایب ترکیب خطی با هم صفر نباشند) مثلاً بردارهای $(1,-2)$ و $(-2,4)$ را در نظر می‌گیریم در این صورت اگر قرار دهیم:

$x(1,-2)+y(-2,4)=(0,0)$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases}x-2y=0\\-2x+4y=0\end{cases}$$

در دستگاه فوق اگر معادلهٔ اول را در عدد -2 ضرب کنیم دقیقاً معادلهٔ پایین حاصل می‌شود پس با یک معادله و دو مجهول روبرو هستیم که چنین معادله‌ای دارای بی‌نهایت جواب غیرصفر است، ازجمله اگر قرار دهیم $x=2$ خواهیم داشت، $y=1$ پس:

$$2(1,-2)+1(-2,4)=(0,0)$$

به چنین بردارهایی که قادر به تولید بردار صفر فضا هستند بردارهای وابستهٔ خطی می‌گویند و در حالت کلی:

هرگاه بردارهای V_1 و V_2 و ... و V_n از فضای برداری V مستقل خطی نباشند، وابستهٔ خطی هستند و یا به عبارت دیگر، هرگاه لااقل یک ترکیب خطی از این بردارها، مساوی با بردار صفر وجود داشته باشند به شرطی که در بین ضرایب آن ترکیب خطی، لااقل یک ضریب مخالف صفر موجود باشد.

مسألهٔ ۲: در فضای برداری چند جمله‌ایهای از درجه ۳ و کوچکتر از ۳ یعنی،

$$V=\left\{ax^3+bx^2+cx+d\ \middle|\ a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}$$

ثابت کنید بردارهای (x^3+x^2-2x+1)، (x^2+x-2)، $(2x+1)$ و 5، مستقل خطی‌اند.

فرض کنیم: $\alpha_1(x^3+x^2-2x+1)+\alpha_2(x^2+x-2)$

$$+\alpha_3(2x+1)+5\alpha_4\equiv\underbrace{0x^3+0x^2+0x+0}_{\overline{0}}$$

$$\Rightarrow\alpha_1x^3+(\alpha_1+\alpha_2)x^2+(-2\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3)x$$

$$+(\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3+5\alpha_4)\equiv\overline{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 + 5\alpha_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$$

(با حل دستگاه مشاهده می‌شود که همگی ضرایب باید مساوی با صفر باشند پس بردارها طبق تعریف مستقل خطی‌اند)

تذکر مهم: اگر در یک دستگاه معادلات تعداد مجهولات از تعداد معادلات دستگاه بیشتر باشد همواره دستگاه دارای بی‌نهایت جواب غیرصفر است، به مثال زیر و نحوهٔ حل دستگاه و پیدا کردن جوابهای غیرصفر دقت کنید:

مثال: مطلوب تعیین دو جواب غیرصفر برای دستگاه

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

حل: یکی از مجهولات را برابر با پارامتر t در نظر می‌گیریم و دو مجهول دیگر را برحسب آن یعنی t محاسبه می‌کنیم.

$$y = t \Rightarrow \begin{cases} x - z = -t \\ 2x + 2z = t \end{cases}^{\times 2} \Rightarrow 4x = -t \Rightarrow \boxed{x = \frac{-t}{4}}$$

$$\Rightarrow -\frac{t}{4} - z = -t \Rightarrow \frac{-t}{4} + t = z \Rightarrow \boxed{z = \frac{3t}{4}}$$

و $\boxed{y = t}$. حال اگر به t مقادیر حقیقی غیرصفر نسبت دهیم جوابهای غیرصفر برای دستگاه حاصل می‌شود،

$$t = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{4} \\ y = 1 \\ z = \frac{3}{4} \end{cases} \quad , \quad t = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \\ z = 3 \end{cases}$$

مسألهٔ ۳: در فضای برداری $\mathbb{R}^n$ اگر تعداد بردارهای موجود در یک مجموعه، $(n+1)$ بردار یا بیشتر باشد، همهٔ آنها وابستهٔ خطی‌اند. (در $\mathbb{R}^n$ اگر تعداد بردارها از بُعد فضا یعنی n بیشتر باشد، وابسته خطی خواهند بود.)

حل: با توجه به تذکر و مثال قبل واضح است که اگر مثلاً $(n+1)$ بردار در فضای برداری $\mathbb{R}^n$ داشته باشیم و بخواهیم یک ترکیب خطی از این بردارها، مساوی با بردار صفر در $\mathbb{R}^n$ یعنی $(\overbrace{0,0,\dots,0}^{n\ \text{تا}})$ قرار دهیم به یک دستگاه با n معادله، (تعداد صفرهای بردار صفر) و $(n+1)$ مجهول (تعداد ضرایب ترکیب خطی) خواهیم رسید که چنین دستگاهی همواره بی‌نهایت جواب غیرصفر داشته و لذا بردارها وابستهٔ خطی‌اند.

نتیجه: هر سه بردار در فضای $\mathbb{R}^2$ و یا هر چهار بردار در فضای برداری $\mathbb{R}^3$ وابستهٔ خطی‌اند.

مسألهٔ ۴: ثابت کنید، هر بردار ناصفر در فضای برداری V به تنهایی مستقل خطی است.

حل: فرض کنیم $u \in V$ و $u \neq \vec{0}$ حال نشان می‌دهیم u مستقل خطی است:

فرض کنیم $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha u = \vec{0} \overset{\text{طبق قضیه}}{\Rightarrow} \alpha = 0 \vee u = \vec{0} \overset{u \neq \vec{0}}{\Rightarrow} \alpha = 0$

پس u طبق تعریف مستقل خطی است.

مسألهٔ ۵: ثابت کنید بردار صفر در هر فضای برداری، به تنهایی وابستهٔ خطی است.

حل: کافی است ترکیبی خطی از بردار صفر با ضریبی ناصفر و مساوی با بردار صفر نشان دهیم که با توجه به قضایای کتاب، بدیهی است زیرا:

$$\forall \alpha \neq 0 \ , \ \alpha.\vec{0} = \vec{0}$$

مسألهٔ ۶: نشان دهید اگر برداری مضرب ناصفری از یک بردار دیگر باشد، آن دو بردار وابستهٔ خطی‌اند.

حل: فرض کنیم $u = \alpha V$ و $\alpha \neq 0$، در این صورت داریم:

$$u = \alpha V \Rightarrow u - \alpha V = \vec{0} \ , \ -\alpha \neq 0$$

چون یک ترکیب خطی ناصفر از دو بردار u و V، مساوی با بردار صفر به دست آمد طبق تعریف این دو بردار وابستهٔ خطی‌اند.

مسألهٔ ۷: ثابت کنید، اگر در بین یک مجموعه از برداری هر فضای برداری، چند بردار وابسته خطی وجود داشته باشد، تمامی بردارهای آن مجموعه وابسته خطی خواهند بود.

حل: فرض کنیم V_1 و V_2 و ... و V_n، n بردار از فضای برداری V باشند و فرض کنیم بردارهای V_1 و V_2 و ... و V_p که $(p<n)$، p بردار از این n بردار بوده و وابستهٔ خطی باشند ثابت می‌کنیم تمام n بردار وابستهٔ خطی‌اند.

V_1 تا $V_p \Rightarrow \exists \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots + \alpha_p V_p = \vec{0}$ (۱)

وابستهٔ خطی‌اند. $\exists \alpha_i \neq 0 \quad 1 \le i \le p$ و

حال رابطهٔ (۱) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(1) \Rightarrow \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots + \alpha_p V_p + 0.V_{p+1} + \dots + 0.V_n = \bar{0}$$

$$(2) \quad \text{و} \quad \exists \alpha_i \neq 0$$

رابطهٔ (۲) که همان (۱) است (زیرا فقط $(n-p)$ تا صفر به آن اضافه شده) نشانگر این مطلب است که ترکیبی خطی از n بردار V_1 تا V_n مساوی با بردار صفر شده و اطمینان داریم حداقل یکی از ضرایب این ترکیب خطی (از α_1 تا α_p) مخالف صفر است، پس طبق تعریف، n بردار V_1 تا V_n وابستهٔ خطی‌اند.

نتیجه ۱: اگر در بین مجموعه‌ای از برداری یک فضای برداری دو بردار مضرب ناصفری از هم باشند، تمام بردارهای آن مجموعه وابستهٔ خطی‌اند، زیرا: طبق مسألهٔ ۶ دو بردار که مضرب ناصفر هم باشند وابسته بوده و طبق مسألهٔ ۷، وابستگی خطی از جزء به کل سرایت کرده و تمامی بردارها وابستهٔ خطی خواهند شد.

نتیجه ۲: چون ثابت کردیم بردار صفر در هر فضای برداری وابستهٔ خطی است لذا طبق مسألهٔ ۷، «هر مجموعه از بردارهای یک فضا که شامل بردار صفر باشد، وابستگی خطی خواهند داشت».

نتیجهٔ ۳: هر زیر مجموعه از یک مجموعه بردارهای مستقل خطی در یک فضای برداری، مستقل خطی است. به عبارت دیگر اگر مجموعه بردارهای $\{V_n, \dots, V_2, V_1\}$، در فضای برداری V مستقل خطی باشند در این صورت هر زیرمجموعهٔ دلخواه از این بردارها مانند $\{V_1, V_2, \dots, V_p\}$ نیز مستقل خطی خواهند بود.

اثبات: فرض کنیم چنین نباشد (فرض خلف) پس بردارهای $V_p, \dots, V_2, V_1$ می‌بایست وابستهٔ خطی باشند و چون جزئی از بردارهای V_1 تا V_n هستند لذا طبق مسألهٔ ۷ باید تمام n بردار V_1 تا V_n نیز وابسته باشند که خلاف فرض است، پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

مسألهٔ ۸: در فضای برداری $\mathbb{R}^2$، ثابت کنید: «شرط لازم و کافی برای آن که بردارهای (a,b) و (c,d) مستقل خطی باشند آن است که $ad - bc \neq 0$»

حل: ابتدا یک ترکیب خطی دلخواه از این دو بردار تشکیل داده و مساوی با بردار صفر در $\mathbb{R}^2$ یعنی $(0,0)$ قرار می‌دهیم که در این صورت خواهیم داشت:

$$x(a,b) + y(c,d) = (0,0)$$

$$\underset{-c}{\overset{d}{\Rightarrow}} \begin{cases} ax + cy = 0 \\ bx + dy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} adx + cdy = 0 \\ -bcx - cdy = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (ad - bc)x = 0 \quad *$$

برای اثبات برقراری شرط لازم و کافی روی رابطهٔ * بحث می‌کنیم:

I) اگر بردارهای (a,b) و (c,d) مستقل خطی باشند، پس طبق تعریف هر ترکیب خطی از آنها که مساوی با بردار صفر باشد، باید صفر بودن ضرایب یعنی x و y را نتیجه دهد. پس باید $x = 0$ و این در صورتی امکان‌پذیر است (با توجه به رابطهٔ *) که $ad - bc \neq 0$.

II) اگر $ad - bc \neq 0$ واضح است که رابطهٔ * نتیجه می‌دهد $x = 0$ که اگر در معادلات دستگاه قرار دهیم، $y = 0$ نیز نتیجه می‌شود لذا، طبق تعریف بردارها مستقل خطی خواهند بود.

مسألهٔ ۹: اگر بردارهای u_1 و u_2 و u_3 در فضای برداری V مستقل خطی باشند، نشان دهید بردارهای $(u_1 - 2u_2 + u_3)$ و $(2u_1 + u_2 - u_3)$ و $(-u_1 + u_2 - 2u_3)$ نیز مستقل خطی‌اند.

اثبات: یک ترکیب خطی دلخواه از بردارهای داده شده تشکیل می‌دهیم و ثابت می‌کنیم همهٔ ضرایب آن ترکیب خطی صفر هستند.

$$x(u_1 - 2u_2 + u_3) + y(2u_1 + u_2 - u_3) + z(-u_1 + u_2 - 2u_3) = \bar{0}$$

$$\Rightarrow (x + 2y - z)u_1 + (-2x + y + z)u_2 + (x - y - 2z)u_3 = \bar{0}$$

به یک ترکیب خطی از سه بردار u_1 و u_2 و u_3 رسیدیم که مساوی با بردار صفر شده و چون این سه بردار طبق فرض مستقل خطی‌اند پس باید ضرایب این ترکیب خطی همگی صفر

باشند، یعنی:

$$\begin{matrix}①\\②\\③\end{matrix}\begin{cases}x+2y-z=0\\ -2x+y+z=0\\ x-y-2z=0\end{cases}\quad \left.\begin{matrix}-2x+y+z=0\\ x-y-2z=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow \boxed{-x-z=0}$$

$$③ \text{ و } ① \Rightarrow \boxed{3x-5z=0} \Rightarrow \begin{cases}-x-z=0 \quad (\times 3)\\ 3x-5z=0\end{cases} \Rightarrow 8z=0$$

$$\Rightarrow \boxed{z=0} \Rightarrow \boxed{x=0} \Rightarrow \boxed{y=0}$$

مسألهٔ ۱۰: مجموعهٔ چند جمله‌ایهای از درجه ۲ و کمتر از ۲ با ضرایب حقیقی را در نظر می‌گیریم یعنی: $V=\{ax^2+bx+c \mid a,b,c\in\mathbb{R}\}$ ، می‌دانیم V یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ است (به عنوان تمرین ثابت کنید، جمع را جمع چند جمله‌ایها و ضرب اسکالر را ضرب عدد در چند جمله‌ای در نظر بگیرید) نشان دهید بردارهای x^2+x+5 و $2x+1$ و 7 در این فضای برداری مستقل خطی‌اند.

اثبات: از بردارهای فوق ترکیبی خطی تشکیل داده و مساوی با بردار صفر فضای V قرار می‌دهیم و در نهایت ثابت می‌کنیم ضرایب همگی صفر هستند.

$$a(x^2+x+5)+b(2x+1)+7c\equiv 0x^2+0x+0$$
$$\Rightarrow ax^2+(a+2b)x+(5a+b+7c)\equiv 0x^2+0x+0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\boxed{a=0}\\ a+2b=0\Rightarrow 2b=0\Rightarrow \boxed{b=0}\\ 5a+b+7c=0\Rightarrow 7c=0\Rightarrow \boxed{c=0}\end{cases}$$

مسألهٔ ۱۱: نشان دهید بردارهای مجموعهٔ $\{\sin x,\cos x,\cos(x+\frac{\pi}{4})\}$ مستقل خطی‌اند.

اثبات: می‌دانیم،

$$\cos(x+\frac{\pi}{4})=\cos x\cos\frac{\pi}{4}-\sin x\sin\frac{\pi}{4}$$
$$\Rightarrow \cos(x+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)$$
$$\Rightarrow \sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})=\cos x-\sin x$$
$$\Rightarrow \sin x-\cos x+\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})=0$$

پس ترکیبی خطی از این سه بردار مساوی با بردار صفر به دست آمد که ضرایب آن ناصفر می‌باشند. بنابراین طبق تعریف این بردارها وابستهٔ خطی‌اند.

مسألهٔ ۱۲: اگر $b\neq 0$ ، a را چنان تعیین کنید که دو بردار $(3a,-2b)$ و $(a^2,3b)$ مستقل خطی باشند.

اثبات: با توجه به مسألهٔ ۸، شرط این که دو بردار مستقل خطی باشند آن است که

$$9ab-2a^2b\neq 0\Rightarrow ab(9-2a)\neq 0\overset{b\neq 0}{\Longrightarrow} a\neq 0, a\neq \frac{9}{2}$$

مسألهٔ ۱۳: اگر H و K دو زیرمجموعه از فضای برداری V بوده و اعضای هر دو مجموعه، بردارهایی مستقل خطی باشند، ثابت کنید بردارهای مجموعهٔ $(H\cap K)$ نیز مستقل خطی‌اند. (به شرط آن که $H\cap K\neq\phi$)

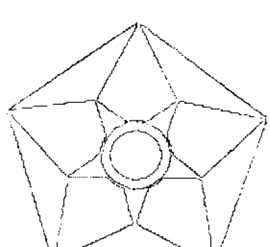
اثبات: می‌دانیم (طبق تعریف اشتراک) $H\cap K\subseteq H$ و طبق نتیجهٔ ۳ از مسألهٔ ۷، هر زیرمجموعه از یک مجموعهٔ مستقل خطی، باید مستقل خطی باشد، پس اعضای $(H\cap K)$ مستقل خطی هستند.

مسألهٔ ۱۴: اگر A_1 و A_2 و A_3 ماتریسهایی $m\times n$ و B یک ماتریس $n\times k$ باشد و ماتریسهای A_1B و A_2B و A_3B در فضای ماتریسهای $m\times k$ مستقل خطی باشند، ثابت کنید ماتریسهای A_1 و A_2 و A_3 در فضای ماتریسهای $m\times n$ مستقل خطی‌اند.

اثبات: ترکیبی خطی از سه ماتریس A_1 و A_2 و A_3 مساوی با بردار صفر (ماتریس صفر) قرار داده و ثابت می‌کنیم ضرایب باید همگی صفر باشند.

$$xA_1+yA_2+zA_3=\bar{0} \qquad (1)$$
$$\Rightarrow (xA_1)B+(yA_2)B+(zA_3)B=\bar{0}B$$
$$\Rightarrow x(A_1B)+y(A_2B)+z(A_3B)=\bar{0}$$

تساوی اخیر یک ترکیب خطی از سه بردار A_1B و A_2B و A_3B است که طبق فرض مستقل خطی‌اند پس طبق تعریف باید، $x=y=z=0$ که با توجه به رابطهٔ (۱) نتیجه می‌شود سه بردار A_1 و A_2 و A_3 نیز مستقل خطی‌اند.



تاریخچهٔ مجلات ریاضی ایران (۱۵)

در شمارهٔ ۱۰ یکان در مقالهٔ **فصلی از تاریخ علوم ریاضی** ترجمهٔ **باقر امامی** چنین آمده است که:

آپولونیوس برای کسب دانش ریاضی از بازماندگان مکتب اقلیدس، به مصر سفر کرده و قسمت بزرگ دوران حیاتش را در آن دیار گذرانده است. اگر راجع به زندگی خصوصی او اطلاعات کمی در دست است، خوشبختانه دربارهٔ نتایج فعالیت علمی او آگاهی کافی داریم.

شاهکارش همان کتاب مقاطع مخروطی است که در آنجا خواص این منحنیها را چنان بر اساس محکمی پایه گذاشته است که امروزه هم مطالعهٔ خواص این مقاطع بر همان اساس است اگر وضع دانش را در زمانی که این کتاب سرشار از کشفهای شخصی مؤلف قدم به عرصهٔ وجود گذاشته است در نظر بگیریم، واقعاً مبهوت و حیرت‌زده می‌شویم.

کتاب مقاطع مخروطی شامل هشت قسمت است. متن یونانی چهار قسمت اول و ترجمهٔ عربی سه قسمت بعدی به ما رسیده و اثری از قسمت آخر تا به حال به دست نیامده است. گرچه در قرن هفدهم **هالی** ستاره‌شناس معروف کوشیده است که از قسمتهای مختلف پراکنده در کتابهای متفرقه این قسمت اخیر را به هر صورت جمع‌آوری کند.

در **یکان** مسایل مسابقه‌ای نیز مطرح می‌شود. یکی از این مسایل با حل آن که در شمارهٔ ۱۰ آمده به صورت زیر است:

مطلوب است تعیین رابطه‌ای مستقل از α بین x و y به‌فرض

$$\begin{cases} x=\sin\alpha+\dfrac{1}{\sin^2\alpha} \\ y=\cos\alpha+\dfrac{1}{\cos^2\alpha} \end{cases}$$

حل: از رابطه‌های داده شده به دست می آید که:

$$\begin{cases} \sin^3\alpha = x\sin^2\alpha-1 \\ \cos^3\alpha = y\cos^2\alpha-1 \end{cases}$$

طرفین هر رابطه را به توان ۲ می‌رسانیم

$$\begin{cases} \sin^6\alpha = x^2\cos^4\alpha-2x\sin^2\alpha+1 \\ \cos^6\alpha = y^2\sin^4\alpha-2y\cos^2\alpha+1 \end{cases}$$

اگر در رابطهٔ دوم $\cos\alpha$ را بر حسب $\sin\alpha$ نوشته و طرفین رابطهٔ حاصل را عضو به عضو با طرفین رابطهٔ اول جمع کنیم رابطهٔ زیر به‌دست خواهد آمد

$$(x^2+y^2-3)\sin^4\alpha-(2y^2-2y+2x-3)$$
$$\sin^2\alpha+(y-1)^2=0$$

از این معادلهٔ دو مجذوری مقدار $\sin\alpha$ بر حسب x و y پیدا می‌شود و چون در رابطهٔ اول مفروض قرار داده شود رابطه‌ای مستقل از α بین x و y پیدا خواهد شد.

در همین شماره در مقالهٔ **عدد طلایی نمایندهٔ قدرت**

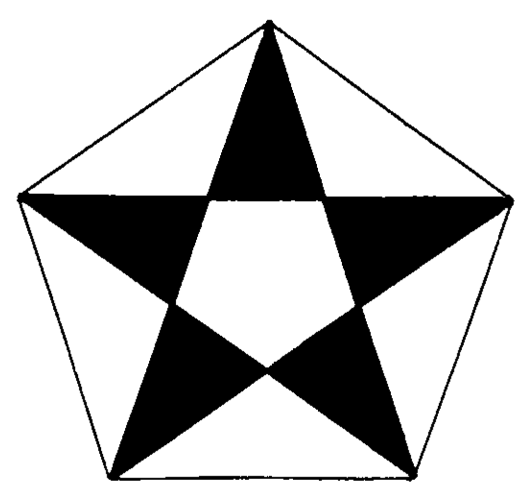
الهی از سیدمحمد کاظم نائینی چنین آمده است:

بر اثر تجارب و بررسیها و اندازه‌گیریهای دقیق و به کار بردن نسبتهایی نظیر $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۲}{۵}$ و $\frac{۱۷}{۱۰}$ و غیره و تحقیق در اشیاء قشنگ و زیبا و بالاخره در محاسبات مربوط به ۵ ضلعیهای منتظم و ده ضلعیها و... عدد $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ کشف شد که دارای خواص جالب و زیبایی است. این عدد با چند رقم اعشار برابر است با ۱/۶۱۷۰۳۳۹۸۸۷۵.

خاصیتهای بی‌شمار و زیبایی که در اثر به کار بردن این عدد و این نسبت در اشیاء به دست آمد حس اعجاب و تحسین همگان را به حدی برانگیخت که آن را **عدد طلایی** نامیدند و افلاطون آن را نمایندهٔ **قدرت و مظهر الهی** نامید.

چنانکه می‌دانیم نسبت طول مخمس افلاطونی به واحد برابر عدد طلایی است.

آرم ستارهٔ ۵ پری که در نزد فیثاغورثیان مورد ستایش بود از به هم پیوستن اقطار مخمس به وجود می‌آمد و انتخاب آن به علت ارزش و احترامی بود که فیثاغورثیان برای عدد طلایی قائل بودند و آن را مورد پرستش و احترام و تکریم قرار می‌دادند.



افلاطون عدد طلایی را از تقسیم یک پاره خط به نسبت ذات وسط و طرف به دست آورد و در ساختن ۵ ضلعیها و ۱۲ وجهی منتظم به کار برد و این تقسیم و برش را **تقسیم طلایی** نامید. بعدها **لوکاپاچیولی** Lucapacioli (۱۵۰۹) آن را تقسیم الهی و مقدس نامید.

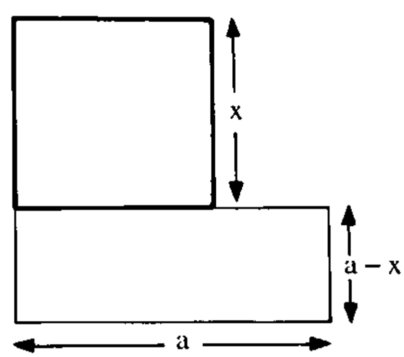
مسألهٔ تقسیم پاره خط به نسبت ذات وسط و طرف یا تقسیم طلایی را اقلیدس در کتاب تحریرات خود به صورت زیر بیان کرده است:

می‌خواهیم پاره خط مستقیمی را به دو قسمت چنان تقسیم کنیم که مستطیلی که با تمام خط و یکی از قسمتهای جدا شده ساخته می‌شود معادل با مربعی باشد که بر قسمت باقیماندهٔ خط بنا می‌شود.

بیان مسأله به صورت جبر و به زبان امروزی چنین است:

اگر طول خط را a و دو قسمت آن را x و $a-x$ بنامیم، رابطهٔ زیر را خواهیم داشت:

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{a-x}$$



سلسلهٔ اعداد ... و $u_۱, u_۲, u_۳, \ldots, u_n$ که در آن $u_۱=۱$ و $u_۲=۱$ و هر یک از جملات آن به استثناء دو جمله اول برابر مجموع دو عدد ماقبل است یعنی رشته اعداد:

۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ...

به رشتهٔ **فیبوناچی معروف** است . چون دارای خواص جالب و زیبایی است به رشتهٔ **زیباییهای طبیعت** لقب یافته است.

جمله n ام رشتهٔ فیبوناچی یعنی

$$u_n=u_{n-۱}+u_{n-۲}$$

از عبارت $\frac{۱}{\sqrt{۵}}(\alpha^n-\beta^u)$ حساب می‌شود:

$\left[u_n=\frac{۱}{\sqrt{۵}}(\alpha^n-\beta^u)\right]$ که در آن α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-x-۱=۰$ است.

$$\alpha=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲},\ \beta=\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$$

حد رادیکال زیرین

$$\sqrt{۱+\sqrt{۱+\sqrt{۱+\sqrt{۱+\sqrt{۱+\dots}}}}}$$

برابر عدد طلایی $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ است، زیرا که اگر آن را مساوی x بگیریم و طرفین را به قوهٔ ۲ برسانیم. خواهیم داشت:

$$x^{۲}=۱+\sqrt{\sqrt{۱+\sqrt{۱+\sqrt{۱+\sqrt{۱+\dots}}}}}$$

که جملهٔ دوم آن همان x است و در نتیجه داریم:

$$x^{۲}=۱\times x$$

و ریشهٔ مثبت این معادله چنین است:

$$x=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$$

کسر مسلسل

$$x=۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱+\dots}}}$$

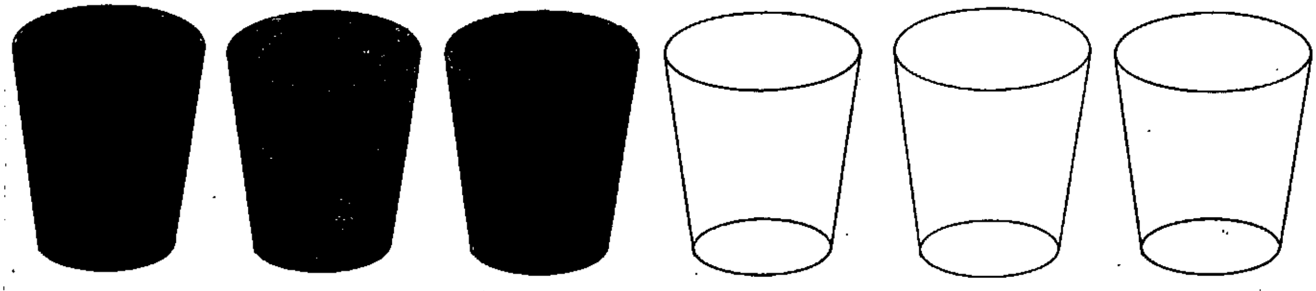
نیز مقداری برابر عدد طلایی دارد پس می‌توان نوشت:

$\frac{۱}{x}=x-۱$ یا $x^{۲}-x-۱=۰$ که ریشهٔ مثبت آن $x=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ است.

تفریح اندیشه ۲

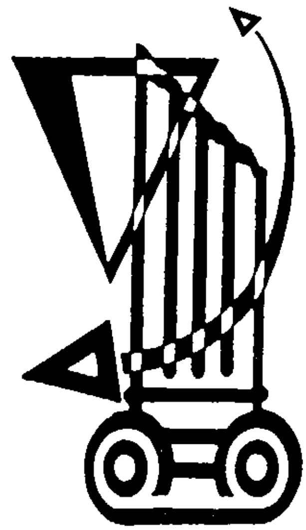
شش لیوان در قفسه‌ای به صف شده‌اند: سه لیوان پر از آب و سه لیوان خالی‌اند (تصویر را ملاحظه کنید). چگونه می‌توان با دست زدن تنها به یک لیوان، آنها را چنان مرتب کرد که لیوانهای آب و لیوانهای خالی یکی در میان باشند؟

جواب در صفحهٔ ۸۸



حدّ

(قسمت اول)



◁ احمد قندهاری

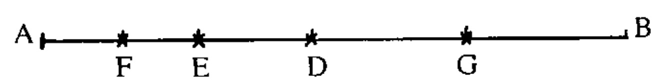
(با توجه به محدوده کتاب حسابان (۱) نظام جدید)

حدّ، یکی از مفاهیم بنیادی ریاضی است. به همین علّت باید بهای بیشتری به آن داد تا زیربنای درستی از مفاهیم ریاضی حاصل شود.

وقتی از حدّ صحبت می‌کنیم، منظورمان بررسیِ رفتار یک تابع است وقتی متغیر آن به عدد مشخّصی بسیار نزدیک شود ولی هیچوقت به آن نرسد.

در این فصل مفهوم حدّ را ابتدا به‌صورت شهودی بررسی و بیان می‌کنیم، سپس حدّ تابع تعریف می‌شود. آنگاه با روش شهودی همراه با استدلال، مثالهایی مطرح می‌شود.

مثال (۱): پاره خط AB به طول $l_۰ = ۱$ را درنظر می‌گیریم.



اگر نقطه C وسط پاره‌خط AB باشد، طول پاره‌خط AC: $l_۱ = \frac{۱}{۲}$

چنانچه نقطه D وسط پاره‌خط AC باشد،طول پاره خط AD: $l_۲ = \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۲^۲}$

اگر نقطه E وسط پاره‌خط AD باشد، طول پاره‌خط AE: $l_۳ = \frac{۱}{۸} = \frac{۱}{۲^۳}$

چنانچه نقطه F وسط پاره‌خط AE باشد،طول پاره خط AF: $l_۴ = \frac{۱}{۱۶} = \frac{۱}{۲^۴}$.

چنانچه این عمل را به همین شیوه تکرار کنیم، پاره‌خطهایی به طولهای $l_۵ = \frac{۱}{۲^۵} = \frac{۱}{۳۲}$ و $l_۶ = \frac{۱}{۲^۶} = \frac{۱}{۶۴}$ و ... و $l_n = \frac{۱}{۲^n}$ خواهیم داشت.

اگر این عمل چندین دفعه تکرار شود (n دفعه)، ملاحظه خواهیم کرد که هرچه‌قدر مقدار n بزرگتر شود طول l_n به عدد صفر نزدیک می‌شود. یا به‌عبارت دیگر:

اگر تعداد دفعات را زیادتر کنیم طول l_n به صفر نزدیکتر می‌شود چنانچه بخواهیم طول l_n به اندازه دلخواه به صفر نزدیک شود باید n را به اندازه مورد نیاز بزرگ کنیم. ممکن است بپرسید چگونه n مورد نیاز را اختیار می‌کنیم؟

برای پاسخ این سؤال به پرسش زیر دقّت بفرمایید.

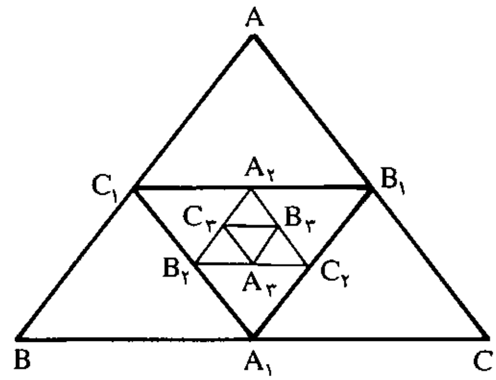
آیا می‌توان l_n را تا اندازه‌ای به صفر نزدیک کرد که l_n از $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ کوچکتر شود.

جواب مثبت است چرا که: $l_n = \frac{۱}{۲^n}$ و می‌دانیم $۲^{۱۰} = ۱۰۲۴$ و می‌نویسیم

$$l_n < \frac{۱}{۱۰۰۰} \Rightarrow \frac{۱}{۲^n} < \frac{۱}{۱۰۰۰} \Rightarrow ۲^n > ۱۰۰۰ \Rightarrow n \geq ۱۰$$

بنابراین اگر بخواهیم l_n را تا اندازه‌ای به صفر نزدیک کنیم که مقدار آن از $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ کمتر شود باید n را مساوی ۱۰ یا بزرگتر از ۱۰ اختیار کنیم.

مثال (۲): مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را به ضلع $a_۰ = ۱$ در نظر می‌گیریم.



اگر وسط اضلاع این مثلث را به هم وصل کنیم، مثلث متساوی‌الاضلاع $A_1B_1C_1$ به دست می‌آید که طول ضلع آن:
$a_1 = \frac{1}{2}$

چنانچه وسط اضلاع مثلث $A_1B_1C_1$ را به هم وصل کنیم، مثلث متساوی‌الاضلاع $A_2B_2C_2$ به‌دست می‌آید که طول ضلع آن: $a_2 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$

اگر وسط اضلاع مثلث $A_2B_2C_2$ را به هم وصل کنیم، مثلث متساوی‌الاضلاع $A_3B_3C_3$ به‌دست می‌آید که طول ضلع آن: $a_3 = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$

چنانچه این عمل را به همین شیوه تکرار کنیم، مثلثهای متساوی‌الاضلاع متعددی پدید می‌آید مانند $A_4B_4C_4$ و $A_5B_5C_5$ و ... $A_nB_nC_n$ که طول اضلاع آنها به ترتیب $a_4 = \frac{1}{16} = \frac{1}{2^4}$ و $a_5 = \frac{1}{32} = \frac{1}{2^5}$ و ... $a_n = \frac{1}{2^n}$ است.

در این مثال می‌خواهیم اندازه محیط و اندازه مساحت مثلث $A_nB_nC_n$ را بررسی کنیم و ببینیم به چه عددی نزدیک می‌شود.

اگر محیط مثلثها را با $2P_0$, $2P_1$, $2P_2$, ... $2P_n$ و مساحت مثلثها را با S_0 , S_1 , S_2, ... S_n نشان دهیم. و با این اطلاع که مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر $(\frac{a^2\sqrt{3}}{4})$ است می‌توان نوشت:

الف: در مورد محیط مثلثها:

اگر $a_0 = 1 \Rightarrow 2p_0 = 3a_0 = 3(1) = 3$

اگر $a_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow 2p_1 = 3a_1 = 3(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$

اگر $a_2 = \frac{1}{2^2} \Rightarrow 2p_2 = 3a_2 = 3(\frac{1}{2^2}) = \frac{3}{2^2}$

اگر $a_3 = \frac{1}{2^3} \Rightarrow 2p_3 = 3a_3 = 3(\frac{1}{2^3}) = \frac{3}{2^3}$

....

....

اگر $a_n = \frac{1}{2^n} \Rightarrow 2p_n = 3a_n = 3(\frac{1}{2^n}) = \frac{3}{2^n}$

اگر n را به اندازه کافی بزرگ اختیار کنیم ملاحظه می‌کنیم که $\frac{3}{2^n}$ یا $2p_n$ به صفر نزدیک می‌شود.

چنانچه بخواهیم ($2p_n$) به صفر نزدیک شود باید n را به اندازه کافی بزرگ اختیار کنیم. یعنی برای nهای به اندازهٔ کافی بزرگ، $2p_n$ به اندازهٔ دلخواه به صفر نزدیک می‌شود.

اینک این پرسش مطرح می‌شود که چگونه می‌توان یک n به اندازه کافی بزرگ اختیار کرد. برای پاسخ به این پرسش به سؤال زیر توجه کنید.

سؤال: آیا می‌توان ($2p_n$) را تا اندازه‌ای به صفر نزدیک کرد که $2p_n$ کوچکتر از $\frac{1}{1000}$ شود.

جواب مثبت است. می‌نویسیم:

$$2p_n < \frac{1}{1000} \Rightarrow \frac{3}{2^n} < \frac{1}{1000} \Rightarrow \frac{2^n}{3} > 1000 \Rightarrow 2^n > 3000$$

می‌دانیم $4096 = 2^{12}$، پس اگر n را مساوی ۱۲ یا بزرگتر از ۱۲ اختیار کنیم $3000 < 2^{12}$ یا $2^n > 3000$ یا $2P_n < \frac{1}{1000}$.

ب: در مورد مساحتها: داشتیم مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a، $(\frac{a^2\sqrt{3}}{4})$ است.

اگر $a_0 = 1 \Rightarrow S_0 = \frac{(1)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

اگر $a_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow S_1 = \frac{(\frac{1}{2})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{4}$

اگر $a_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow S_2 = \frac{(\frac{1}{4})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}(\frac{1}{4^2})$

اگر $a_3 = \frac{1}{8} \Rightarrow S_3 = \frac{(\frac{1}{8})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}(\frac{1}{4^3})$

....

....

اگر $a_n = \frac{1}{2^n} \Rightarrow S_n = \frac{(\frac{1}{2^n})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}(\frac{1}{4^n})$

اگر بخواهیم، S_n به صفرنزدیک شود، باید n را به اندازه کافی بزرگ اختیار کنیم. پس برای nهای به اندازه کافی بزرگ، S_n به اندازه دلخواه به صفر نزدیک می‌شود.

سؤال: آیا می‌توان (n) را طوری انتخاب کرد که S_n از $\frac{1}{10000}$ کوچکتر شود؟

جواب مثبت است. می‌نویسیم:

$$S_n < \frac{1}{10000} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4}(\frac{1}{4^n}) < \frac{1}{10000} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4^{n+1}} < \frac{1}{10000}$$

$$\Rightarrow \frac{4^{n+1}}{\sqrt{3}} > 10000 \Rightarrow 4^{n+1} > 10000\sqrt{3}$$

اگر $\sqrt{3}$ را ۱/۷۳ فرض کنیم باید $4^{n+1} > 17300$

می‌دانیم $4^8 = 65536$

پس اگر n را مساوی ۷ یا بزرگتر از ۷ اختیار کنیم آنگاه S_n کوچکتر از $\frac{1}{10000}$ خواهد شد.

مثال (۳): فرض کنیم دایره C_0 به شعاع $R_0 = 1$ مفروض باشد اگر دایره C_1 در نقطه A مماس بر دایره C_0 به شعاع $R_1 = \frac{1}{2}$ و دایره C_2 در نقطه A مماس بر C_0 به شعاع $R_2 = \frac{1}{4}$ و دایره C_3 در نقطه A مماس بر دایره C_0 به شعاع $R_3 = \frac{1}{8}$ باشد. و به همین روش دایره‌های دیگری مماس بر دایره C_0 در نقطه A و به شعاع نصف شعاع دایره قبلی رسم کنیم و شعاع دایره (n) امی را $R_n = \frac{1}{2^n}$ بنامیم، چنانچه محیط دایره‌ها را با $P_{C_0}, P_{C_1}, P_{C_2}, \dots, P_{C_n}$ و مساحتهای دایره‌ها را با $S_{C_0}, S_{C_1}, S_{C_2}, \dots, S_{C_n}$ نشان دهیم خواهیم داشت:

الف: در مورد محیط‌ها:

اگر $R_0 = 1 \Rightarrow P_{C_0} = 2\pi R_0 = 2\pi$

اگر $R_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow P_{C_1} = 2\pi R_1 = 2\pi(\frac{1}{2})$

اگر $R_2 = \frac{1}{2^2} \Rightarrow P_{C_2} = 2\pi R_2 = 2\pi(\frac{1}{2^2})$

اگر $R_3 = \frac{1}{2^3} \Rightarrow P_{C_3} = 2\pi R_3 = 2\pi(\frac{1}{2^3})$

....

....

اگر $R_n = \frac{1}{2^n} \Rightarrow P_{C_n} = 2\pi R_n = 2\pi(\frac{1}{2^n})$

حال اگر n را به اندازه کافی بزرگ اختیار کنیم P_{C_n} یعنی محیط دایره (n) امی خیلی به صفر نزدیک می‌شود.

می‌توان $P_{C_n} = 2\pi(\frac{1}{2^n})$ را به اندازه دلخواه به صفر نزدیک کرد به‌شرطی که n را به اندازه کافی بزرگ اختیار کنیم.

سؤال: آیا می‌توان n را طوری اختیار کرد که P_{C_n} از $\frac{1}{5000}$ کوچکتر شود؟

جواب مثبت است. می‌نویسیم:

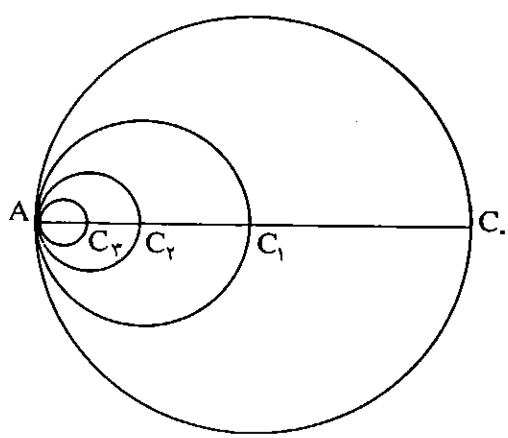
$$P_{C_n} < \frac{1}{5000} \Rightarrow 2\pi(\frac{1}{2^n}) < \frac{1}{5000} \Rightarrow \frac{2^n}{2\pi} > 5000$$

$$\Rightarrow 2^n > 10000\pi \qquad \pi = 3.14$$

داریم:

$$\Rightarrow 2^n > 31400 \qquad 2^{15} = 32768$$

پس اگر n را مساوی ۱۵ یا بزرگتر از ۱۵ اختیار کنیم، آنگاه P_{C_n} از $\frac{1}{5000}$ کوچکتر خواهد شد.



ب: در مورد مساحتها:

اگر $R_0 = 1 \Rightarrow S_{C_0} = \pi R_0^2 = \pi$

اگر $R_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{C_1} = \pi R_1^2 = \pi(\frac{1}{2})^2 = \pi(\frac{1}{4})$

اگر $R_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{C_2} = \pi R_2^2 = \pi(\frac{1}{4})^2 = \pi(\frac{1}{4^2})$

اگر $R_3 = \frac{1}{8} \Rightarrow S_{C_3} = \pi R_3^2 = \pi(\frac{1}{8})^2 = \pi(\frac{1}{4^3})$

....

....

اگر $R_n = \frac{1}{2^n} \Rightarrow S_{c_n} = \pi R_n^2 = \pi(\frac{1}{2^n})^2 = \pi(\frac{1}{4^n})$

حال اگر n را به اندازه کافی بزرگ اختیار کنیم، S_{c_n} به اندازهٔ دلخواه به صفر نزدیک می‌شود، به عبارت دیگر: می‌توان S_{c_n} را به اندازهٔ دلخواه به صفر نزدیک کرد به شرطی که n را به اندازه کافی بزرگ اختیار کرده باشیم.

سؤال: آیا می‌توان n را طوری اختیار کرد تا S_{c_n} از $\frac{1}{2000}$ کوچکتر شود؟

جواب مثبت است، می‌نویسیم:

$$S_{cn} < \frac{1}{2000} \Rightarrow \pi(\frac{1}{4^n}) < \frac{1}{2000} \Rightarrow \frac{4^n}{\pi} > 2000$$

$\Rightarrow 4^n > 2000\pi$ داریم: $\pi = 3/14$

$\Rightarrow 4^n > 6280$ داریم: $4^7 = 16384$

پس اگر n را مساوی ۷ یا بزرگتر از ۷ اختیار کنیم، آنگاه (4^n) از (۶۲۸۰) بزرگتر می‌شود در نتیجه S_{cn} از $\frac{1}{2000}$ کوچکتر خواهد شد.

◄ حدّ راست:

مثال(۴): تابع به معادله $f(x) = 3x - 1$ را با شرط $x > 2$ در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم رفتار این تابع را وقتی x از طرف اعداد بزرگتر از (۲) به عدد (۲) نزدیک و نزدیکتر می‌شود بررسی کنیم.

به عبارت دیگر، x را از طرف اعداد بزرگتر از ۲ به عدد ۲ نزدیک و نزدیکتر می‌کنیم. می‌خواهیم بدانیم که مقدار f(x) به چه عددی نزدیک و نزدیکتر می‌شود به این منظور جدول زیر را تنظیم کرده‌ایم:

x	۲/۱	۲/۰۱	۲/۰۰۱	۲/۰۰۰۱
f(x)	۵/۳	۵/۰۳	۵/۰۰۳	۵/۰۰۰۳

این جدول نشان می دهد، وقتی x (از طرف اعداد بزرگتر از (۲)) به عدد (۲) نزدیک و نزدیکتر می‌شود، مقدار f(x) به عدد (۵) نزدیک و نزدیکتر می‌شود. چنانچه نتایج این جدول را از دیدی دیگر بررسی کنیم می‌توانیم بگوییم:

مقدار f(x) به عدد ۵ نزدیک و نزدیکتر می‌شود اگر x را (از طرف اعداد بزرگتر از ۲) به عدد۲ نزدیک و نزدیکتر کنیم.

سؤال: می‌خواهیم مقدار f(x) را به عدد ۵ آن قدر نزدیک کنیم که $|f(x)-5|$ کوچکتر از $\frac{1}{100}$ باشد، در این صورت x را چقدر باید به عدد (۲) نزدیک کنیم.

جواب: می‌نویسیم:

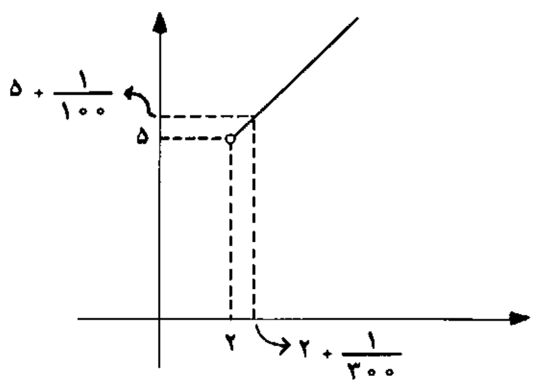
$$|f(x)-5| < \frac{1}{100} \Rightarrow |3x-1-5| < \frac{1}{100} \Rightarrow |3x-6| < \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow |3(x-2)| < \frac{1}{100} \Rightarrow 3|x-2| < \frac{1}{100} \Rightarrow |x-2| < \frac{1}{300}$$

چون $x > 2 \Rightarrow |x-2| = x-2 \Rightarrow x-2 < \frac{1}{300}$

پس x را باید به اندازه‌ای به ۲ نزدیک کنیم که $(x-2)$ از $\frac{1}{300}$ کوچکتر شود.

بنابراین اگر $(x-2)$ کوچکتر از $\frac{1}{300}$ باشد، آنگاه $|f(x)-5|$ کوچکتر از $\frac{1}{100}$ خواهد شد.



نتیجه: در این مثال می‌گوییم حدّ راست تابع وقتی x با مقادیر بزرگتر از (۲) به عدد (۲) میل می‌کند برابر عدد (۵) است و می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \text{حد } f(x) = 5 \\ x \to 2^+ \end{cases}$$

مثال(۵): تابع f به معادله

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 1 \\ x & x < 1 \end{cases}$$

را در نظر می‌گیریم.

مقادیر f(x) را به ازای $x > 1$ و در نزدیکی عدد (۱) محاسبه می‌کنیم و نتیجه را در جدول زیر می‌نویسیم.

x	۱/۱	۱/۰۱	۱/۰۰۱	۱/۰۰۰۱
f(x)	۲/۱	۲/۰۱	۲/۰۰۱	۲/۰۰۰۱

به طوری که در این جدول مشاهده می‌شود، وقتی x (با مقادیر بزرگتر از (۱)) به عدد (۱) نزدیک و نزدیکتر می‌شود، مقدار $f(x)$ به عدد (۲) نزدیک و نزدیکتر می‌شود.

حال نتایج این جدول را از دیدگاه دیگری بررسی می‌کنیم. ابتدا مقادیر $f(x)$ را در نظر می‌گیریم.

مقدار $f(x)$ به عدد (۲) نزدیک و نزدیکتر می‌شود اگر x را (با مقادیر بزرگتر از (۱)) به عدد (۱) نزدیک و نزدیکتر کنیم. یعنی $f(x)$ را می‌توان به هر اندازه دلخواه به عدد ۲ نزدیک و نزدیکتر کنیم، به شرطی که x را (از مقادیر بزرگتر از ۱) به عدد ۱ نزدیک و نزدیکتر کنیم.

سؤال: می‌خواهیم، $f(x)$ را به عدد ۲ آنقدر نزدیک کنیم که $|f(x)-2|$ کوچکتر از $\frac{1}{1000}$ شود. در این صورت x را (از مقادیر بزرگتر از (۱)) به عدد (۱) چقدر نزدیک کنیم.

جواب: می‌نویسیم:

$$|f(x)-2|<\frac{1}{1000} \Rightarrow |x+1-2|<\frac{1}{1000} \Rightarrow |x-1|<\frac{1}{1000}$$

چون $x>1 \Rightarrow |x-1|=x-1 \Rightarrow x-1>\frac{1}{1000}$

پس معلوم شده است اگر x را از طرف اعداد بزرگتر از (۱) به عدد (۱) آنقدر نزدیک کنیم تا $(x-1)$ کوچکتر از $\frac{1}{1000}$ باشد. آنگاه $|f(x)-2|$ کوچکتر از $\frac{1}{1000}$ خواهد شد.

توجه: اعداد مثبت فوق‌العاده کوچک را با ε یا δ نشان می‌دهیم. حال سؤال قبلی را به صورت کلی‌تر مطرح می‌کنیم.

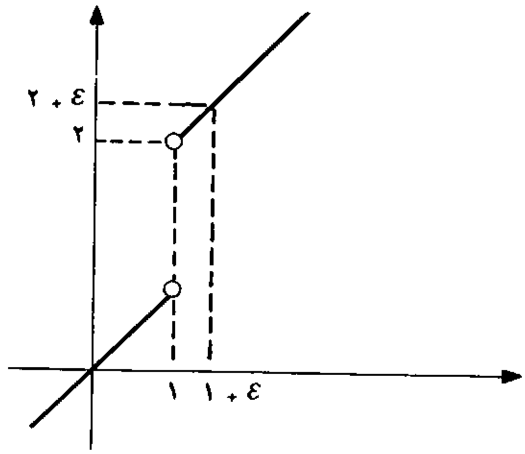
سؤال: می‌خواهیم $f(x)$ را به عدد (۲) آن قدر نزدیک کنیم که $|f(x)-2|$ از (ε) کوچکتر باشد. در این صورت x را (از مقادیر بزرگتر از (۱)) به عدد (۱) چقدر باید نزدیک کنیم؟

جواب: می‌نویسیم:

$$|f(x)-2|<\varepsilon \Rightarrow |x+1-2|<\varepsilon \Rightarrow |x-1|<\varepsilon$$

چون $x>1 \Rightarrow |x-1|=x-1 \Rightarrow x-1<\varepsilon$

بنابراین معلوم شده است که اگر x را (از مقادیر بزرگتر از (۱)) به عدد (۱) آنقدر نزدیک کنیم تا $(x-1)$ کوچکتر از (ε) باشد، آنگاه $|f(x)-2|$ از (ε) کوچکتر خواهد شد.



نتیجه: در این مثال می‌گوییم حدّ راست تابع وقتی x از مقادیر بزرگتر از (۱) به عدد (۱) میل می‌کند برابر ۲ است و می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \text{حد}\ f(x)=2 \\ x\to 1^+ \end{cases}$$

◄ نتیجه شهودی حدّ راست تابع:

فرض می‌کنیم تابع f با ضابطه $f(x)$ در بازه (x_0, b) تعریف شده باشد. عدد (L) را حدّ راست تابع f در نقطه x_0 نامیم اگر بتوان $f(x)$ را به هر اندازه دلخواه به L نزدیک کرد به شرطی که عدد مثبت $(x-x_0)$ را به قدر کافی به صفر نزدیک کنیم.

در این صورت می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \text{حد}\ f(x)=L \\ x\to x_0^+ \end{cases}$$

مثال (۶): تابع f به معادله $f(x)=\sqrt{x-2}$ را در نظر می‌گیریم.

مقادیر $f(x)$ را به ازای $x>2$ و در نزدیکی عدد (۲) محاسبه می‌کنیم و نتایج را در جدول زیر می‌نویسیم.

x	۲/۱	۲/۰۱	۲/۰۰۱	۲/۰۰۰۱
f(x)	۰/۳۱	۰/۱	۰/۰۳	۰/۰۱

به طوری که در این جدول مشاهده می‌شود وقتی x (از مقادیر بزرگتر از عدد (۲)) به عدد (۲) نزدیک و نزدیکتر

می‌شود، مقدار $f(x)$ به عدد صفر نزدیک و نزدیکتر می‌شود.

حال این جدول را از دیدی دیگر بررسی می‌کنیم، ابتدا مقادیر $f(x)$ را در نظر می‌گیریم.

مقدار $f(x)$ به عدد صفر نزدیک و نزدیکتر می‌شود اگر x را (از مقادیر بزرگتر از عدد (۲)) به عدد (۲) نزدیک و نزدیکتر کنیم.

به عبارت دیگر، مقدار $f(x)$ را می‌توان به هر اندازه دلخواه به عدد صفر نزدیک کرد به شرطی که x را به اندازه کافی (از مقادیر بزرگتر از عدد (۲)) به عدد (۲) نزدیک کنیم.

سؤال : می‌خواهیم مقدار $f(x)$ را آنقدر به عدد صفر نزدیک کنیم که $f(x)$ از $\frac{۱}{۱۰۰}$ کمتر باشد. در این صورت x را (از مقادیر بزرگتر از (۲)) به عدد (۲) چقدر باید نزدیک کنیم؟

جواب: می نویسیم:

$$f(x)<\frac{۱}{۱۰۰} \Rightarrow \sqrt{x-۲}<\frac{۱}{۱۰۰} \Rightarrow x-۲<\frac{۱}{۱۰۰۰۰}$$

پس باید x را (از مقادیر بزرگتر از (۲)) به عدد (۲)، آنقدر نزدیک کنیم تا $(x-۲)$ کوچکتر از $\frac{۱}{۱۰۰۰۰}$ باشد.

حال همین سؤال را کلی تر مطرح می‌کنیم.

سؤال: می‌خواهیم، $f(x)$ را به عدد صفر آنقدر نزدیک کنیم تا $f(x)$ از (ε) کوچکتر باشد، در این صورت x را (از مقادیر بزرگتر از (۲)) به عدد (۲) چقدر باید نزدیک کرد؟

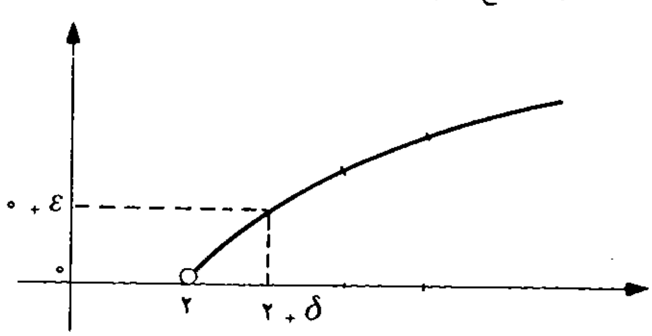
جواب: می‌نویسیم:

$$f(x)<\varepsilon \Rightarrow \sqrt{x-۲}<\varepsilon \Rightarrow x-۲<\varepsilon^۲$$

پس باید x را (از مقادیر بزرگتر از (۲)) به عدد (۲)، آن قدر نزدیک کنیم تا $(x-۲)$ کوچکتر از $(\varepsilon^۲)$ باشد. اگر $\delta=\varepsilon^۲$ یا $\delta\le\varepsilon^۲$، می‌توان نوشت:

$$۰<x-۲<\delta\le\varepsilon^۲ \Rightarrow f(x)<\varepsilon$$

نمودار تابع f چنین است.



▶ تعریف ریاضی حدّ راست تابع:

فرض می‌کنیم تابع f با ضابطه $f(x)$ در بازه $(x_۰,b)$ تعریف شده باشد عدد L را حدّ راست تابع f در نقطه $x_۰$ گوییم و می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \text{حد}\ f(x)=L \\ x\to x_۰^+ \end{cases}$$

اگر برای هر $\varepsilon>۰$ عدد مثبتی مانند δ (وابسته به ε) وجود داشته باشد به طوری که:

$$۰<x-x_۰<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

مثال (۷): تابع f به معادله $f(x)=-۵x+۱$ مفروض است. با استفاده از تعریف ریاضی حدّ راست تابع ثابت کنید:

$$\begin{cases} \text{حد}\ f(x)=-۴ \\ x\to ۱^+ \end{cases}$$

حل: باید ثابت کنیم برای هر $\varepsilon>۰$، عدد مثبتی مانند δ (وابسته به ε) وجود دارد به طوری که:

$$۰<x-۱<\delta \Rightarrow |f(x)+۴|<\varepsilon$$

$$|f(x)+۴|<\varepsilon \Rightarrow |-۵x+۱+۴|<\varepsilon \Rightarrow |-۵x+۱|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow |-۵(x-۱)|<\varepsilon \Rightarrow ۵|x-۱|<\varepsilon \Rightarrow |x-۱|<\frac{\varepsilon}{۵}$$

چون $x\to ۱^+ \Rightarrow |x-۱|=x-۱$

$$\Rightarrow ۰<x-۱<\frac{\varepsilon}{۵} \Rightarrow \delta\le\frac{\varepsilon}{۵}$$

فایده حل ریاضی مسأله آن است که جواب مسأله کلیّت دارد.

مثلاً اگر $\varepsilon=\frac{۱}{۱۰۰}$، آنگاه $\delta\le\frac{۱}{۵۰۰}$

و اگر $\varepsilon=\frac{۱}{۲۰۰}$، آنگاه $\delta\le\frac{۱}{۱۰۰۰}$

و اگر $\varepsilon=\frac{۱}{۳۰۰}$، آنگاه $\delta\le\frac{۱}{۱۵۰۰}$

پس برای هر $\varepsilon>۰$ یک $\delta>۰$ به وجود می‌آید.

تمرین: مسایل زیر را هم به طریقه شهودی (تشکیل جدول x و $f(x)$) و هم با تعریف ریاضی حدّ راست تابع، بررسی و حل کنید.

$$\begin{cases} \text{حد}\ (f(x)=۲x-۳)=۱ \\ x\to ۲^+ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{حد } (f(x)=\sqrt{x-1})=0 \\ x\to 1^+ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{حد } (f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x-1|})=2 \\ x\to 1^+ \end{cases}$$

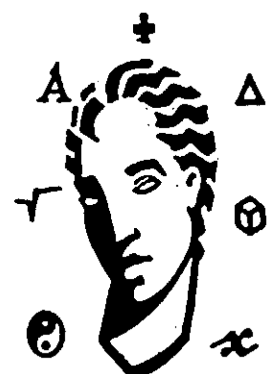
تمرین: به طریقه شهودی (تشکیل جدول x و f(x)) حدّ راست توابع به معادلات زیر را بیابید.

$$\begin{cases} \text{حد } (f(x)=x+[x]) \\ x\to 1^+ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{حد } (f(x)=[x]+[-x]) \\ x\to 4^+ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{حد } (f(x)=x-[x]) \\ x\to 3^+ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{حد } (f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}) \\ x\to 1^+ \end{cases}$$



تفریح اندیشه ۳

در پایان اجّرای یک برنامهٔ موسیقی مسئول رختکن در مکان حضور نداشت. بجای او یک راهنما البسهٔ حاضران را به آنان تحویل می‌داد. چنانچه چهار نفر در آن جمع از کت استفاده کرده باشند، به چند طریق ممکن است راهنما کتهای آنان را اشتباه تحویل دهد، به‌طوری که هیچ‌کس کت خودش را دریافت نکند؟

جواب در صفحهٔ ۸۸

ادب ریاضی

سخنانی است که ما را در مورد مطلوبی که در جستجوی شناختن آن هستیم به علم یقینی می‌رساند، خواه انسان برهان را میان خود و نفس خود برای استنباط آن مطلوب به‌کار گیرد، یا در مورد شخص دیگر از آن استفاده کند. یا آنکه دیگری به‌وسیلهٔ آن، در اثبات مطلوبی، انسان را مخاطب قرار دهد. برهان در همهٔ این حالها به نتیجهٔ علم یقینی می‌رسد.

احصاء العلوم فارابی

طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روشهای مقدماتی (۱۴)

مسألهٔ هفت هفت بِرویک

از: ۱۰۰ مسألهٔ مهم ریاضیات مقدماتی

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

در تقسیم زیر، که در آن مقسوم بر مقسوم‌علیه بدون باقیمانده قابل‌بخش است:

```
**۷*******:****۷* = **۷**
******
*****۷*
*******
 *۷****
 *۷****
 *******
 ****۷**
  ******
  ******
```

اعدادی که به جای ستاره‌ها (*) قرارداشته‌اند تصادفاً پاک شده‌اند. اعداد مزبور کدام‌اند؟

این مسألهٔ جالب از بِرویک "E. H. Berwick"، ریاضیدان انگلیسی، است، که آن را در ۱۹۰۶ در نشریهٔ ادواری The School World انتشار داد.

حل. به هر یک از رقمهای گمشده حرفی جداگانه تخصیص می‌دهیم. به این ترتیب، مثال مورد بحث به صورت زیر درمی‌آید:

AB ۷ CDELQW3 : αβγδ ۷ ε = Kλ ۷ μν

```
ab∆cde
FGHIK۷L        سطر سوم
fghikΞl        سطر چهارم
 M۷NOPQ        سطر پنجم
 m۷nopq        ← ۷.b
 RSTU∑۷W       سطر هفتم
 rstu۷vw
  XYZxyz       سطر نهم
  XYZxyz
```

I. رقم اول (α) مقسوم‌علیه b باید ۱ باشد، زیرا ۷b همان‌گونه که سطر ششم مثال نشان می‌دهد، دارای شش رقم است، در حالی‌که که اگر α برابر ۲ باشد، ۷b دارای هفت رقم می‌شود.

از آنجا که باقیمانده‌های واقع درسطرهای سوم و هفتم دارای شش رقم‌اند، F باید برابر ۱ و R باید برابر ۱ باشد، که به عنوان نتایج آنها f، r نیز (مطابق طرح مسأله) باید برابر ۱ باشند.

از آنجا که b نمی‌تواند از ۱۹۹۹۷۹ تجاوز کند، بیشترین مقدار μ برابر ۹ است، بنابراین حاصل‌ضرب واقع در سطر هشتم نمی‌تواند از ۱۷۹۹۸۱۱ متجاوز باشد، و s < ۸. و ازآنجا که S می‌تواند تنها ۹ یا ۰ باشد، و از آنجا که در سطر نهم زیر s باقیمانده‌ای موجود نیست، تنها حالت دوم امکان‌پذیر است. در نتیجه S = ۰ و (از آنجا که R = ۱) S نیز برابر ۰ است. از

$R = ۱$ و $S = ۰$ این نیز نتیجه می‌شود که $M = m + ۱$. به این ترتیب $m \leq ۸$، و $۷b$، حاصل‌ضرب سطر ششم، نمی‌تواند بیشتر از nopq ۸۷ باشد.

II. در نتیجه، تنها مقادیر ممکن دومین رقم مقسوم‌علیه، β، عبارت‌اند از ۰، ۱، ۲. (۷.۱۳۰۰۰۰ هم‌اکنون بیشتر از ۹۰۰۰۰۰ است.) $\beta = ۰$ به این علت حذف می‌شود که ۱۰۹۹۷۹ حتی زمانی که در نه ضرب شود، عددی هفت‌رقمی، که به عنوان مثال، مطلوب سطر هشتم است، به دست نمی‌دهد.

در این صورت، حالت $\beta = ۱$ را در نظر می‌گیریم. این مقدار، γ را تنها برابر ۰ یا ۱ می‌خواهد. (اگر $\gamma \geq ۲$، در تعیین رقم دوم سطر ۶، شخص باید به $۷\beta = ۷.۱ = ۷$ مقداری ≤ ۱، حاصل از حاصل‌ضرب $۷.\gamma$، را بیفزاید، در حالی که رقم دوم باید ۷ باشد.)

اما، $\gamma = ۰$، به عنوان نتیجه‌ای از هفت رقم سطر ۸ ناممکن است، زیرا حتی ۹.۱۱۰۹۷۹ نیز حاصل‌ضربی هفت رقمی به‌دست نمی‌دهد.

در حالت $\gamma = ۱$، باید همان‌طور که نگاهی به سطر ۸ نشان می‌دهد، شرایط زیر در نظر گرفته شود: δ، ε، و μ باید طوری انتخاب شوند که $\mu.۱۱۱\delta۷\varepsilon$ به عددی هفت رقمی، که رقم سوم آن از آخر ۷ باشد، منجر شود. تنها امید رسیدن به این توسط مضرب $\mu = ۹$ مطرح می‌شود (زیرا حتی ۸.۱۱۱۹۷۹ تنها شش رقم دارد). اما سومین رقم از آخر $۹.۱۱۱\delta۷\varepsilon$، همان‌گونه که به آسانی با آزمایش ملاحظه می‌شود، می‌تواند تنها اگر $\delta = ۰$ یا $\delta = ۹$ برابر هفت باشد. در حالت اول، سطر ۸، حتی زمانی که ۱۱۱۰۷۹ در ۹ ضرب شود، دارای هفت رقم نمی‌شود، و در حالت دوم سطر ۶ $۷.۱۱۱۹۷* = ۷۸۳***$ است، که ناممکن است. به این ترتیب، حالت $\gamma = ۱$ نیز کنار گذاشته می‌شود.

بنابراین، تنها مقدار مناسب برای رقم دوم مقسوم‌علیه $\beta = ۲$ است، که از آن نتیجه می‌شود که $m = ۸$ و $M = ۹$.

III. سومین رقم مقسوم علیه، γ، می‌تواند تنها ۴ یا ۵ باشد، زیرا ۷.۱۲۶۰۰۰ بزرگتر و ۷.۱۲۴۰۰۰ کوچکتر از سطر ششم است. گذشته از این، از آنجا که ۹.۱۲۴۰۰۰ بزرگتر و ۷.۱۲۶۰۰۰ کوچکتر از سطر هشتم (۱۰tu۷vw) است، μ باید برابر ۸ باشد.

از آنجا که $۸.۱۲۴۹۷۹ = ۹۹۹۸۳۲ < ۱۰۰۰۰۰۰$

این فرض که $\gamma = ۴$، از برقرار کردن شرط سطر ۸ بازمی‌ماند، و بنابراین γ باید برابر ۵ باشد.

IV. از آنجا که رقم سوم از آخر $۸.۱۲۵\delta۷\varepsilon$ باید ۷ باشد، با آزمایش کردن درمی‌یابیم که δ برابر ۴ یا ۹ است. $\delta = ۹$ به این علت حذف می‌شود که حتی $۷.۱۲۵۹۷۰ = ۸۸۱۷۹۰$ بزرگتر از سطر ششم درمی‌آید، بنابراین تنها $\delta = ۴$ مناسب است. به این ترتیب، ε می‌تواند به عنوان یکی از اعداد ۰ یا ۴ در نظر گرفته شود. اما، هر یک از این دو که انتخاب شود، برای سومین رقم سطر ششم از $۷.۱۲۵۴۷\varepsilon = ۸۷۸***$، $n = ۸$ را پیدا می‌کنیم. به همین ترتیب، برای سطر هشتم، $۸.۱۲۵۴۷\varepsilon = ۱۰۰۳۷**$

و در نتیجه $t = ۰$ و $u = ۳$ را به دست می‌آوریم.

از آنجا که $\lambda b = \lambda.۱۲۵۴۷\varepsilon$ به سطر چهارم هفت رقمی منجر می‌شود و تنها $۸b$ و $۹b$ هفت رقم دارند، λ برابر ۸ یا ۹ است.

V. از $t = ۰$ و $x \geq ۱$ (همراه با $R = r = ۱$، $S = s = ۰$) نتیجه می‌شود که $T \geq ۱$، و از $n = ۸$، $N \leq ۹$، نتیجه می‌گیریم که $T \leq ۱$، بنابراین $T = ۱$. لذا N برابر ۹ است و $x = ۱$. از آنجا که $x = ۱$ و

(سطر ۹) $۲۰b > ۲۰۰۰۰۰$

نتیجه می‌شود که $v = ۱$، نیز $y = ۲$، $z = ۵$، $x = ۴$، $y = ۷$، و $z = \varepsilon$. مسأله با نتایج به دست آمده در این مرحله به صورت زیر درمی‌آید:

```
ABVCDELQW۰ε : ۱۲۵۴۷ε = Kλ۷۸۱
a b Δ c d e
-----------------
۱ G H I K V L
۱ g h i k Ξ l
-----------------
    ۹ ۷ ۹ O P Q
    ۸ ۷ ۸ ۰ p q
    -----------------
    ۱ ۰ ۱ U ∑ V W
    ۱ ۰ ۰ ۳ ۷ v w
    -----------------
          ۱ ۲ ۵ ۴ ۷ ε
          ۱ ۲ ۵ ۴ ۷ ε
```

VI. در این حالت ε یکی از پنج عدد

۰,۱,۲,۳,۴

است. این پنج حالت متناظر با رشته‌های اعداد زیر هستند.

vw = ۶۰,۶۸,۷۶,۸۴,۹۲

opq = ۲۹۰,۲۹۷,۳۰۴,۳۱۱,۳۱۸

و بسته به این که λ برابر ۸ یا ۹ باشد،

Ξl = ۶۰,۶۸,۷۶,۸۴,۹۲

یا

Ξl = ۳۰,۳۹,۴۸,۵۷,۶۶

این وضعیت ده امکان متفاوت رامطرح می‌کند. در صورتی که هر یک از آنها را بـا سه جمع متوالی به سمت بالا، با شروع از سطرهای ۹ و ۸ به سطر ۷، سپس از سطرهای ۷ و ۶ به سطر ۵، و سرانجام از سطرهای ۵ و ۴ به سطر ۳، امتحان کنیم، درمی‌یابیم که تنها زمانی که ۳ = ۴ و ۸ = λ ، رقم ۷ لازم را برای رقم ماقبل آخر سطر ۳ به دست می‌آوریم. در این حالت

VW = ۸۴، UεΣ VW = ۶۳۳۱، opq = ۳۱۱، OPQ = ۹۴۴۰

ghik Ξl = ۰۰۳۷۸۴ ، GHIKVL = ۱۰۱۷۷۷۸

و این صورت زیر را به مسأله می‌دهد:

ABVCDE ۸۴۱۳ : ۱۲۵۴۷۳ = KV۸۸۱

a bΔcde

۱۱۰۱۷۷B

۱۰۰۳۷۸۴

۹۷۹۹۴۴

۸۷۸۳۱۱

۱۰۱۶۳۳۱

۱۰۰۳۷۸۴

۱۲۵۴۷۳

۱۲۵۴۷۳

VII. سرانجام، از آنجا که از جمیع مضربهای b تنها ۶۲۷۳۶۵ = 5b چون با ۱۱۰۱۷۷، باقیماندهٔ تقسیم سطر سوم، جمع شود عددی، شامل ۷ای در رقم سوم آن، به دست می‌دهد، K = ۵ ، و همزمان

abΔcde = ۶۲۷۳۶۵

و

ABVCDE = ۷۳۷۵۴۲

را به دست می‌آوریم، که جمیع ارقام گمشده از مسألهٔ مورد بحث را به دست می‌دهد.

ادب ریاضی

ذکر فیثاغورس صوری

هنوز در صِغَر سن بود که اهل صور را به سبب استیلای اعداد صورت جَلا روی نمود و پدر فیثاغورس او را به ساموس و از ساموس به اَنطاکیه برد و حاکم انطاکیه فیثاغورس را فرزند خوانده به معلم سپرد و فیثاغورس به تحصیل علم لغت و موسیقی سعی فرموده در آن فن مهارت کامل حاصل نمود چنانچه گویند اکثر سازها مُختَرِع اوست، و فیثاغورس در سن شباب به تعلیم هندسه و نجوم پرداخت، آنگاه به مصر شتافته مطالعهٔ علم حکْمی را پیش نهاد همت ساخت و از آنجا به شهر ساموس بازگشته به درس حکمت و تألیف مسایل آن فن اوقات شریف مصروف داشت و دویست و هشتاد رساله در علوم مختلفه تصنیف نمود و خلق بسیار از طالبان فضل و کمال به ملازمت آن حکیم عدیم‌المثال می‌رفتند و در مقام استفاده بوده از افادهٔ طبع وَقّادش بهره می‌گرفتند و بعضی از ملوک اطراف به زیارت آن قُدوهٔ اشراف می‌شتافتند و از نصایح سودمندش و مواعظ دل‌بندش بهره و حظّی تمام می‌یافتند و فیثاغورس همواره فِرَقِ اَنام را به تحصیل معرفت طبایع اشیا و دست بازداشتن از اِرتکاب مآثم و خطایا ترغیب نمودی و بر مواظبت جهاد و اکثار صیام و مداومت قرائت کتب امر فرمودی و او به بقای نفس بعد از مفارقت بدن و ادراک لذت و الم و ثواب و عقاب اعتراف داشت و عَلَی‌الدّوام همت بر سیاحت و احراز فضایل و اکتساب کمالات می‌گماشت.

تاریخ حبیب السّیر اثر خواند میر

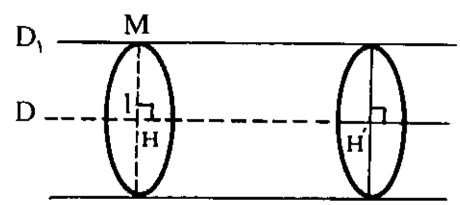
● محمد هاشم رستمی

(قسمت هفتم)

مکان هندسی

(اوّل ، دوم ، سوم، چهارم دبیرستان)

۸ ــ مکان هندسی نقـاطی از فضا کـه از خط ثابت D به فاصله ثابت l باشد، رویهٔ یک استوانهٔ دوّاری است که خط D محور آن و مقطع قائمش (فصل مشترک رویهٔ استوانه‌ای دوار با صفحه‌ای عمودبر محور آن سطح) دایره‌ای به شعاع l است.



اثبـات به روش هندسی: خط D را در صـفـحـه‌ای مانندP درنظر می‌گـیریم. خط D_1 را به موازات خط D و به فـاصلهٔ l از آن رسم می‌کنیم. مـی‌دانیم کـه این خط یکی از دو خط مکان هندسی نقطه‌ای است که از خط D به فاصلهٔ ثابت l قــرار دارد. از دَوَران خط D_1 حـــول خط D، یک رویهٔ استـوانه‌ای دوّار به وجود می‌آیـد که خط D محـور آن و مقطع قائمش (یعنی فصل مشتـرک سطح استوانه‌ای دوّار با صفحه‌ای عمود بر محور آن سطح) دایره‌ای به شعاع l است. بنابراین، هر نقطه واقع بر سطح استوانه‌ای دوّار از خط D به فاصلهٔ l واقع است، و هر نقطه‌ای کـه به فاصله l از خط D باشد، روی این سطح استوانه‌ای دوّار قرار دارد.

اثبـــــات بـه روش تـحـلـیـلـی: خط $D: \frac{x-x_1}{p}=\frac{y-y_1}{q}=\frac{z-z_1}{r}$ را در دستگاه مـخـتـصـات $o-xyz$ درنظر می‌گیریم. فـرض می‌کنیم $M(x,y,z)$ یکی از نقاط مکان هندسی فوق باشد یعنی نقطه‌ای از فضا که فاصله‌اش از خط D برابر مـقـدار ثابت lاست. در این صـورت اگـر A نقطه ای اختیاری از خط D باشد،داریم:

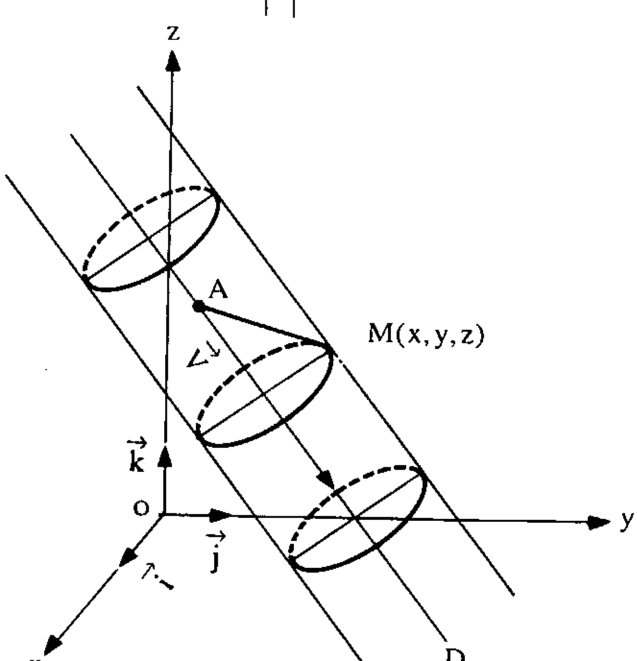
$$\text{فاصلهٔ نقطه‌از خط در فضا}: d=\frac{\left|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{V}\right|}{\left|\vec{V}\right|}$$

$A(x_1,y_1,z_1), M(x,y,z) \Rightarrow \overrightarrow{AM}(x-x_1, y-y_1, z-z_1)$،

$\vec{V}(p,q,r) \Rightarrow \overrightarrow{AM}\wedge\vec{V}(r(y-y_1)-q(z-z_1), p(z-z_1)$

$r(x-x_1)$

$q(x-x_1)-p(y-y_1)$، $\left|\vec{V}\right|=\sqrt{p^2+q^2+r^2}, d=l$،



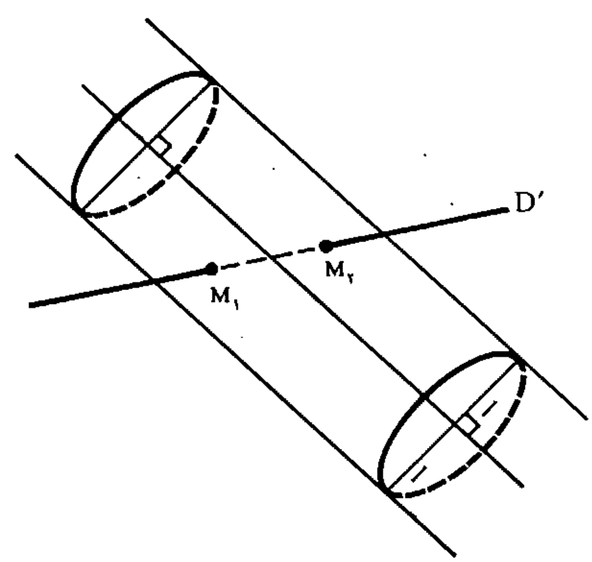
$$\Rightarrow l = \frac{\sqrt{[r(y-y_1)-q(z-z_1)]^2+[p(z-z_1)-r(x-x_1)]^2+[q(x-x_1)-p(y-y_1)]^2}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{[r(y-y_1)-q(z-z_1)]^2+[p(z-z_1)-r(x-x_1)]^2+[q(x-x_1)-p(y-y_1)]^2-l^2(p^2+q^2+r^2)=0} \qquad (1)$$

معادلهٔ (۱)، معادلهٔ یک رویهٔ استوانه‌ای دوار است که خط D محور آن و شعاع مقطع قائمش برابر l است. واضح است هر نقطه‌ای که مختصاتش در معادلهٔ (۱) صدق کند، متعلق به این رویه و فاصله اش از خط D برابر l است.

مثال ۱ ــ دو خط متنافر D و D' مفروضند. نقطه‌ای از خط D' را تعیین کنید که از خط D به فاصلهٔ معلوم l باشد.

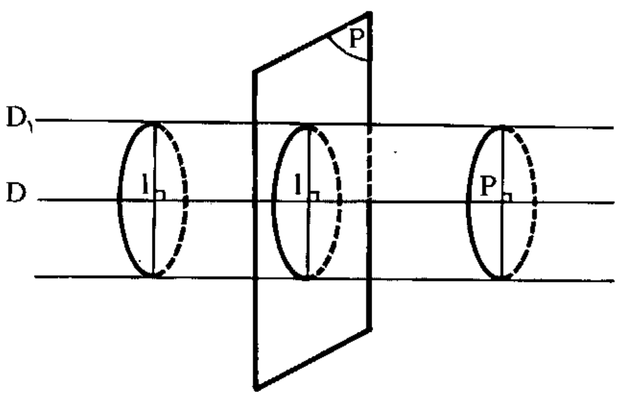
حل ــ می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از خط D به فاصلهٔ معلوم l واقع است سطح استوانه‌ای دواری است که شعاع مقطع قائمش l است. این رویه را رسم می‌کنیم. نقطه تقاطع این رویه باخط D' جواب مسأله است و به تعداد نقاط برخورد، مسأله جواب دارد.



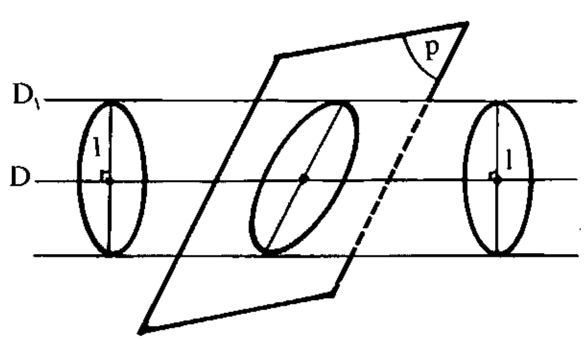
مثال ۲ ــ صفحهٔ P و خط D غیرواقع در این صفحه مفروضند. مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه P را تعیین کنید که از خط D به فاصلهٔ معلوم l باشد.

حل ــ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را که از خط D به فاصلهٔ معین l واقع است، یعنی سطح استوانه‌ای دواری را که خط D محور آن و شعاع مقطع قائمش دایره‌ای به شعاع l است، رسم می‌کنیم. فصل مشترک این سطح دوار با صفحه P جواب مسأله است. این جواب (در صورت وجود) بنابر وضع نسبی خط D و صفحهٔ P حالتهای مختلفی دارد که عبارتند از:

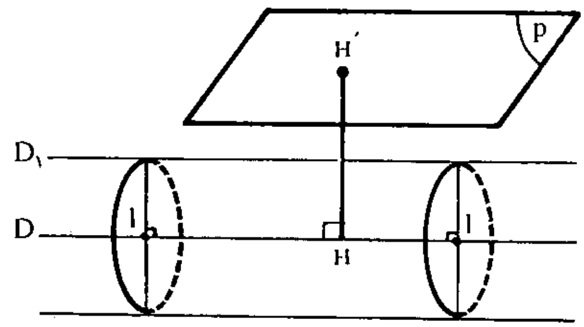
الف) اگر صفحه P بر خط D عمود باشد، جواب دایره‌ای به شعاع l است.



ب) اگر صفحهٔ P نسبت به خط D مایل باشد، جواب یک بیضی است.

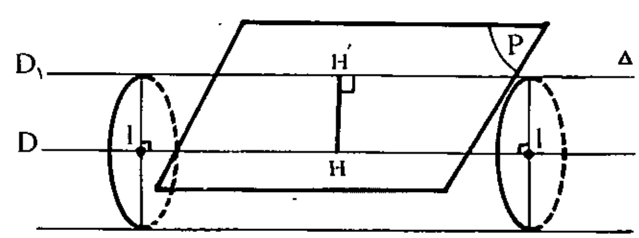


ج) اگر صفحهٔ P موازی خط D باشد، حالتهای زیر را خواهیم داشت:

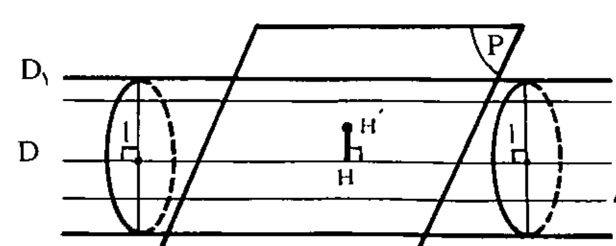


۱) اگر صفحهٔ P رویهٔ استوانه‌ای دوار را قطع نکند، مسأله جواب ندارد و این در صورتی است که فاصلهٔ خط D از صفحهٔ P بیشتر از l باشد.

۲) اگر صفحهٔ P بر رویهٔ استوانه‌ای دوّار در طول یک خط راست مماس باشد، جواب مسأله همان خط تماس می‌باشد و این در صورتی است که فاصلهٔ خط D از صفحهٔ P برابر l باشد.

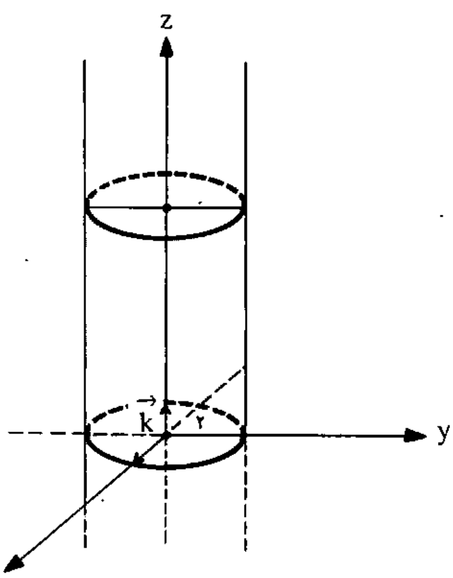


۳) اگر صفحه P سطح استوانه‌ای دوار را قطع کند، جواب دو خط راست موازی خط D می‌باشند، و این در صورتی است که فاصلهٔ خط D از صفحه P کوچکتر از l و بزرگتر از صفر باشد.



تبصره ــ اگر صفحهٔ P بر خط D بگذرد همان‌طوری که پیش از این دیدیم مکان هندسی جواب مسأله دو خط راست موازی خط D، در طرفین آن و به فاصلهٔ l از آن می‌باشد، که در حالت فضایی این دو خط فصل مشترک سطح استوانه‌ای دوّار با صفحه P است که چون در این حالت فاصلهٔ خط D از صفحهٔ P صفر است، خطوط جواب مسأله به فاصله l از خط D واقعند.

مثال ۱ ــ معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را تعیین کنید که از محور zها در دستگاه مختصات $o-xyz$ به فاصلهٔ ۲ قرار داشته باشد.



حل ــ در دستگاه مختصات دکارتی در فضا معادلهٔ محور zها به صورت: $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ است.

برای تعیین معادلهٔ مکان هندسی فوق، فرض می‌کنیم $M(x,y,z)$ یک نقطه از مکان باشد. با توجه به اینکه بردارهادی محور zها $\vec{k}(0,0,1)$ است، اگر نقطهٔ دلخواه $A(0,0,1)$ را روی محور zها اختیار کنیم، خواهیم داشت:

$$M\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \quad A\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{AM}\begin{vmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{vmatrix} ,$$

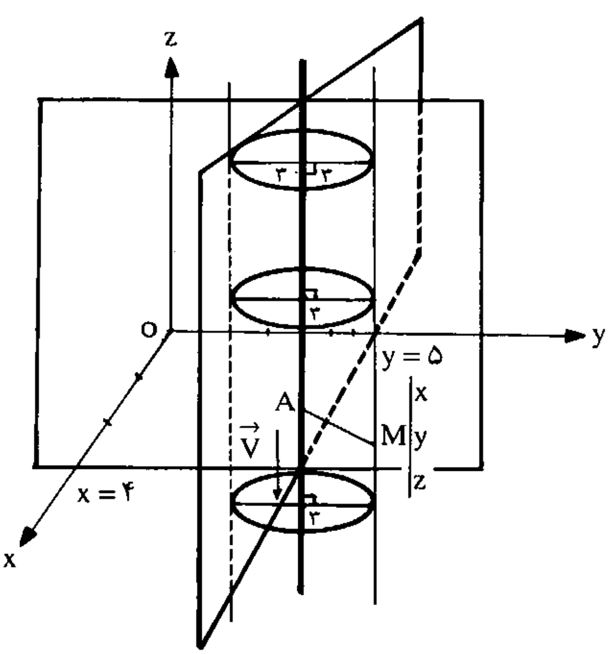
$$\vec{V}\begin{vmatrix}0\\0\\1\end{vmatrix} \Rightarrow \vec{AM}\wedge\vec{V}\begin{vmatrix}y\\-x\\0\end{vmatrix}$$

$$d=\frac{\left|\vec{AM}\wedge\vec{V}\right|}{\left|\vec{V}\right|}\Rightarrow$$

$$2=\frac{\sqrt{(y)^2+(-x)^2+0}}{\sqrt{0+0+1}}\Rightarrow 2=\frac{\sqrt{y^2+x^2}}{1}\Rightarrow x^2+y^2=4$$

معادلهٔ بالا معادلهٔ یک سطح استوانه‌ای دوّار است که محور آن محور zها و شعاع مقطع قائمش برابر ۲ است. فصل مشترک این سطح استوانه‌ای دوّار با صفحهٔ xoy از دستگاه مختصات $o-xyz$ دایرهٔ (c) به معادلهٔ $(c):\begin{cases}x^2+y^2=4\\z=0\end{cases}$ است.

مثال ۲ ـ معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را تعیین کنید که از خط $D:\begin{cases}x=4\\y=5\end{cases}$ به فاصلهٔ ۳ واقع است.



حل ـ فرض می‌کنیم $M(x,y,z)$ نقطه‌ای از مکان هندسی فوق باشد. بردارهادی خط D به تصاویر $(0,0,1)$ است. بنابراین با اختیار نمودن نقطهٔ $A(4,5,2)$ از خط D خواهیم داشت:

$$\vec{AM}\begin{vmatrix}x-4\\y-5\\z-2\end{vmatrix}\quad \vec{V}\begin{vmatrix}0\\0\\1\end{vmatrix}\Rightarrow \vec{AM}\wedge\vec{V}\begin{vmatrix}y-5\\-x+4\\0\end{vmatrix}$$

$$d=\frac{\left|\vec{AM}\wedge\vec{V}\right|}{\left|\vec{V}\right|}\Rightarrow$$

$$3=\frac{\sqrt{(y-5)^2+(-x+4)^2+0}}{\sqrt{0+0+1}}$$

$$\Rightarrow (y-5)^2+(x-4)^2=9$$

این معادله رویهٔ استوانه‌ای دواری را مشخص می‌کند که مقطع قائم آن با صفحهٔ xoy، دایرهٔ به معادلهٔ $(c):\begin{cases}(y-5)^2+(x-4)^2=9\\z=0\end{cases}$ است.

مثال ۳ ـ نقطه‌ای روی خط $D:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=z$ بیابید که از خط $D':\begin{cases}x-2y+z-1=0\\2x+y-z+3=0\end{cases}$ به فاصلهٔ $15\sqrt{\frac{5}{14}}$ باشد.

حل ـ معادلهٔ رویهٔ استوانه‌ای دوّاری را که خط D محور آن و شعاع مقطع قائمش $15\sqrt{\frac{5}{14}}$ است می‌نویسیم و نقطهٔ تقاطع این رویه با خط D' را به دست می‌آوریم. اگر $M(x,y,z)$ نقطه‌ای از این مکان باشد با توجه به این که بردار هادی خط D به تصاویر $\vec{V}(2,3,1)$ است با انتخاب نقطه دلخواه $A(1,0,0)$ از خط D داریم:

$$M\begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix}\quad A\begin{vmatrix}1\\0\\0\end{vmatrix}\Rightarrow$$

$$\vec{AM}\begin{vmatrix}x-1\\y\\z\end{vmatrix}\quad,\quad \vec{V}\begin{vmatrix}2\\3\\1\end{vmatrix}\Rightarrow$$

$$\vec{AM}\wedge\vec{V}\left|\begin{array}{l} y-۳z\\ ۲z-x+۱\\ ۳x-۲y-۳\end{array}\right.$$

$$d=\frac{\left|\vec{AM}\wedge\vec{V}\right|}{\left|\vec{V}\right|}\Rightarrow ۱۵\sqrt{\frac{۵}{۱۴}}=$$

$$\frac{\sqrt{(y-۳z)^{۲}+(۲z-x+۱)^{۲}+(۳x-۲y-۳)^{۲}}}{\sqrt{۴+۹+۱}}$$

$$\Rightarrow (y-۳z)^{۲}+(۲z-x+۱)^{۲}+$$

$$(۳x-۲y-۳)^{۲}=۱۱۲۵$$ معادلهٔ رویهٔ استوانه‌ای دوّار

$$\left\{\begin{array}{l} x-۲y+z-۱=۰\\ ۲x+y-z+۳=۰\end{array}\right.\Rightarrow\ z=۵x+۵\ ,\ y=۳x+۲$$
$$(y-۳z)^{۲}+(۲z-x+۱)^{۲}+(۳x-۲y-۳)^{۲}=۱۱۲۵$$

$$\Rightarrow(-۱۲x+۱۳)^{۲}+(۹x+۱۱)^{۲}+(-۳x-۷)^{۲}=۱۱۲۵$$

$$\Rightarrow ۲۳۴x^{۲}+۵۵۲x+۳۳۹=۱۱۲۵\Rightarrow$$

$$۲۳۴x^{۲}+۵۵۲x-۷۸۶=۰\Rightarrow ۷۸x^{۲}+۱۸۴x-۲۶۲=۰$$

$$\Rightarrow x=۱\ ,\ x=\frac{-۲۶۲}{۷۸}=\frac{-۱۳۱}{۳۹}$$

$$\Rightarrow M_{۱}(x=۱\ ,y=۵\ ,z=۱۰)$$

$$M_{۲}(x=\frac{-۱۳۱}{۳۹}\ ,y=\frac{-۱۰۵}{۱۳}\ ,z=\frac{-۴۶۰}{۳۹})$$

نقاط $M_{۱}$ و $M_{۲}$ جواب مسأله‌اند. بنابراین دو نقطه روی خط D' وجود دارد که از خط D به فاصلهٔ $۱۵\sqrt{\frac{۵}{۱۴}}$ است. باید توجه داشت که ممکن است مسأله یک جواب داشته باشد. و یا دارای جواب نباشد بنابرآن که معادلهٔ درجهٔ دوم به دست آمده برحسب x به ترتیب، ریشهٔ مضاعف داشته باشد و یا ریشه نداشته باشد.

تمرین

۱ ــ خط D و دو نقطهٔ A و B مفروضند. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را بیابید که از خط D به فاصلهٔ معلوم l و از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد. در صورتی که:

الف) دو نقطهٔ A و B روی خط D باشند.

ب) نقطهٔ A روی خط D و نقطهٔ B خارج خط D باشد.

ج) دو نقطهٔ A و B روی خط D قرار نداشته باشند.

۲ ــ دو خط متوازی D و D' به فاصلهٔ h از یکدیگر مفروضند. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را بیابید که از خط D به فاصلهٔ l و از خط D' به فاصلهٔ l' باشد. (بحث کنید).

۳ ــ خطوط متوازی $D_{۱}$ و $D_{۲}$ مفروضند. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را تعیین کنید که از دو خط $D_{۱}$ و $D_{۲}$ متساوی‌الفاصله، و از خط $D_{۱}$ به فاصلهٔ معین l قرار داشته باشد.

۴ ــ دو خط متوازی $D_{۱}$ و $D_{۲}$ مفروضند. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را تعیین کنید که به یک فاصله از این دو خط و به فاصلهٔ $l_{۱}$ از خط $D_{۱}$ و به فاصلهٔ $l_{۲}$ از خط $D_{۲}$ واقع باشد. (حالت $l_{۱}=l_{۲}$ را نیز بررسی کنید).

۵ ــ دو خط متقاطع $D_{۱}$ و $D_{۲}$ و خط $D_{۳}$ غیر واقع در صفحهٔ آنها مفروض است. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را تعیین کنید که از دو خط $D_{۱}$ و $D_{۲}$ متساوی‌الفاصله و از خط $D_{۳}$ به فاصلهٔ معلوم l باشد.

۶ ــ سه خط متوازی و متمایز $D_{۱}$ و $D_{۲}$ و $D_{۳}$ مفروضند. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را تعیین کنید که از دو خط $D_{۲}$ و $D_{۳}$ به یک فاصله، و از خط $D_{۱}$ به فاصلهٔ معلوم l قرار داشته باشد.

۷ ــ خط $D:\frac{x-۲}{۳}=\frac{y}{۴}=\frac{z+۱}{-۱}$ و دو نقطهٔ $A(۱,+۳,۳)$ و $B(-۲,-۱,+۴)$ مفروضند. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را تعیین کنید که از خط D به فاصله $\sqrt{۲۶}$ و از دو نقطهٔ A و B متساوی‌الفاصله باشد.

۸ ــ دو خط $D_{۱}:\left\{\begin{array}{l}x+۲y=۱\\ z-x=۴\end{array}\right.$ و $D_{۲}:\left\{\begin{array}{l}x=t\\ y=۳t-۲\\ z=۲\end{array}\right.$ و خط $D_{۳}:\ \frac{x}{۲}=\frac{y+۱}{-۱}=\frac{z}{۴}$ مفروضند. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را تعیین کنید که از دو خط $D_{۱}$ و $D_{۲}$ متساوی

الفاصله و از خط D_3 به فاصله ثابت $2\sqrt{21}$ واقع باشد.

۹ ــ خطهای متوازی $D_1:\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$ و $D_2:\begin{cases}x=+1\\y=-4\end{cases}$ و خط $D_3:\begin{cases}x=5\\y=2\end{cases}$ مفروضند. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را بیابید که از دو خط D_1 و D_2 متساوی‌الفاصله و از خط D_3 به فاصله ۴ واقع باشد.

۱۰ ــ معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را تعیین کنید که از خط $D: 2x-1=y-3=3z-6$ به فاصله ۳، و از صفحهٔ $P: 2x-y-2z=0$ به فاصله ۲ است.

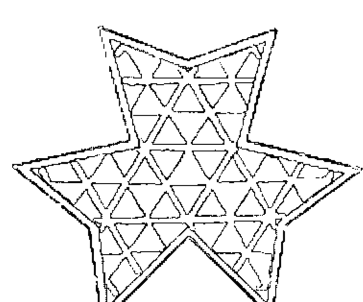
۱۱ــ صفحه $P: 3x+4y-1=0$ وخط $D:\begin{cases}x+y=3\\z-y=4\end{cases}$ مفروضند. معادلهٔ مکان هندسی نقاطی از صفحهٔ P را تعیین کنید که از خط D به فاصلهٔ معین $2\sqrt{3}$ باشد.

۱۲ ــ اولاً ــ معادلهٔ خطی را بنویسید که از مرکز کرهٔ به معادلهٔ $x^2+y^2+z^2-2x+4y-4=0$ می‌گذرد، با محور x ها زاویهٔ $\frac{\pi}{3}$، با محور عرضها زاویهٔ $\operatorname{Arccos}\frac{\sqrt{2}}{4}$ می‌سازد و زاویه‌اش با محور z ها منفرجه است.

ثانیاً ــ معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از سطح کرهٔ فوق را تعیین کنید که از خط D به فاصلهٔ ۲ قرار دارد.

۱۳ ــ دو خط $D:\begin{cases}x=2a-1\\y=3-a\\z=a+2\end{cases}$ و $D':\begin{cases}x=2y-3\\z+x=2\end{cases}$ مفروضند مختصات نقاطی از خط D را بیابید که از خط D' به فاصلهٔ ۵ واقعند.

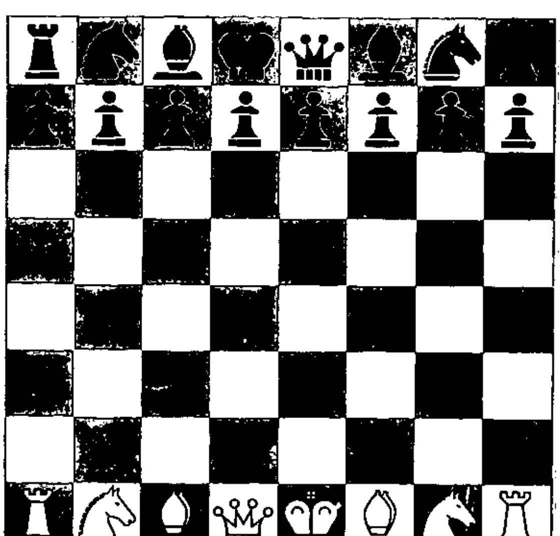
۱۴ ــ دو خط متقاطع $D: x=y=z-1$ و $D': \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=z-2$ مفروض‌اند. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را تعیین کنید که از این دو خط به فاصلهٔ معین ۲ واقع است.



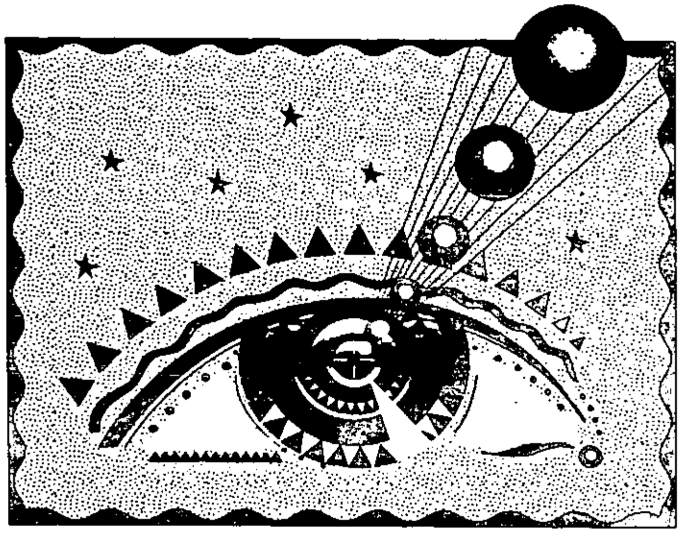
تفریح اندیشه ۴

یک رخ شطرنج روی صفحه شطرنج که از ۶۴ خانه تشکیل شده است می‌خواهد از آخرین خانهٔ سمت چپ بالا، به اولین خانه سمت راست پایین بیاید. در خانه‌های عمودی، این مهره فقط می‌تواند از بالا به پایین، و در خانه‌های افقی، به راست یا چپ حرکت کند، اما نمی‌تواند از خانه‌ای که تازه گذشته، دوباره بگذرد.

چند راه ممکن برای حرکت رخ وجود دارد؟



جواب در صفحهٔ ۸۸



دانش آموزان دبیرستان نظام قدیم و جدید

آموزش ترجمه متون ریاضی (۱۲)

● حمید رضاامیری

TEST 5

Time allowed: $1\frac{1}{4}$ hours

SECTION I

(Twenty questions) Questions 1–20

1. The period of the function f, where

$$f : x \mapsto 2\sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{2}\right),\ x \in \mathbb{R},$$

is

A π **B** $\pi/3$ **C** 3π **D** 6π **E** $11\pi/2$

2. The unit vector in the direction of $(\mathbf{a} - \mathbf{b})$, where
$\mathbf{a} = (3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$, $\mathbf{b} = (2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k})$,
is

A $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ **B** $\frac{1}{\sqrt{65}}(5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k})$

C $\frac{1}{3}(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$ **D** $\frac{1}{9}(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$

E $\frac{1}{3}(-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$

تست ۵

وقت ۱ $\frac{۱}{۴}$ ساعت

بخش ۱

سؤالهای ۱ الی ۲۰ (بیست سؤال)

۱ ــ دورهٔ تناوب تابع f (باضابطهٔ) $f:x \mapsto ۲\sin(\frac{x}{۳}-\frac{\pi}{۲})$ ، $x \in \mathbb{R}$ عبارت است از

۱) π ۲) $\frac{\pi}{۳}$ ۳) ۳π ۴) ۶π ۵) $۱۱\frac{\pi}{۲}$

۲ ــ بردار واحد در امتداد بردار $(\mathbf{a}-\mathbf{b})$ ، که $\mathbf{a}=(۳\mathbf{i}-۵\mathbf{j}-۲\mathbf{k})$ و $\mathbf{b}=(۲\mathbf{i}-۳\mathbf{j}-۴\mathbf{k})$ ، عبارت است از

۱) $\mathbf{i}-۲\mathbf{j}+۲\mathbf{k}$

۲) $\frac{۱}{\sqrt{۶۵}}(۵\mathbf{i}-۲\mathbf{j}-۶\mathbf{k})$

۳) $\frac{۱}{۳}(\mathbf{i}-۲\mathbf{j}+۲\mathbf{k})$

۴) $\frac{۱}{۹}(\mathbf{i}-۲\mathbf{j}+۲\mathbf{k})$

۵) $\frac{۱}{۳}(-\mathbf{i}+۲\mathbf{j}-۲\mathbf{k})$

3. Given that $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, then $\frac{dy}{dx} =$

A $\tan(t/2)$ B $\cot(t/2)$ C $-\cot(t/2)$

D $\frac{1-\sin t}{1-\cos t}$ E $-\tan(t/2)$

۳) فرض کنید $x = t - \sin t$ و $y = 1 - \cos t$ در این صورت $\frac{dy}{dx}$ برابر است با

۱) $tg(\frac{t}{2})$ ۲) $\cot g(\frac{t}{2})$ ۳) $-\cot g(\frac{t}{2})$

۴) $\frac{1-\sin t}{1-\cos t}$ ۵) $-tg(\frac{t}{2})$

4. The complete set of the real values of k for which the equation
$$x^2 + kx + 2k = 0$$
has real distinct roots is

A $\{k : k > 8\}$

B $\{k : k < 0\}$

C $\{k : 0 \leqslant k \leqslant 8\}$

D $\{k : k \leqslant 0\} \cup \{k : k \geqslant 8\}$

E $\{k : k < 0\} \cup \{k : k > 8\}$

۴) مجموعهٔ تمام مقادیر حقیقیِ k که (به‌ازای آنها) معادلهٔ $x^2 - kx + 2k = 0$ دارای ۲ ریشهٔ حقیقیِ متمایز باشد، عبارت است از

۱) $\{k : k > 8\}$

۲) $\{k : k < 0\}$

۳) $\{k : 0 \leq k \leq 8\}$

۴) $\{k : k \leq 0\} \cup \{k : k \geq 8\}$

۵) $\{k : k < 0\} \cup \{k : k > 8\}$

5. $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{(1-x)^2}\,dx =$

A $\frac{4}{3}$ B $-\frac{4}{3}$ C 1 D $\ln 3$ E $-\ln 3$

۵ ـ (حاصل انتگرال کدام است؟) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-x)^2}dx =$

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $-\frac{4}{3}$ ۳) ۱ ۴) $Ln3$

۵) $-Ln3$

6. The gradient of that diameter of the circle
$$x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$$
which is perpendicular to the line joining the centre of the circle to the origin is

A $-\frac{4}{3}$ B $-\frac{3}{4}$ C $\frac{4}{3}$

D $-\frac{5}{4}$ E $\frac{3}{4}$

۶ ـ ضریب زاویهٔ قطرِ دایرهٔ $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$ که بر خط و اصل بینِ مرکز دایره و مبدأ مختصات، عمود است، عبارت است از

۱) $-\frac{4}{3}$ ۲) $-\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $-\frac{5}{4}$ ۵) $\frac{3}{4}$

7. Given that
$$f : x \mapsto 2x,$$
$$g : x \mapsto 3x - 4,$$
for $x \in \mathbb{R}$, then
$f^{-1}g^{-1} : x \mapsto$

A $\frac{1}{2x(3x-4)}$ B $\frac{x+4}{6}$ C $\frac{x+8}{6}$

D $\frac{1}{6x-8}$ E $\frac{3x-4}{2}$

۷ ـ فرض کنید برای هر $x \in \mathbb{R}$، $f : x \mapsto 2x$ و $g : x \mapsto 3x - 4$، در این صورت $f^{-1}g^{-1} : x \mapsto$ ؟ (منظور از $f^{-1}g^{-1}$ همان $f^{-1}og^{-1}$ است)

۱) $\frac{1}{2x(3x-4)}$ ۲) $\frac{x+4}{6}$

۳) $\frac{x+8}{6}$ ۴) $\frac{1}{6x-8}$

۵) $\frac{3x-4}{2}$

۸ ـ مساحت ناحیهٔ سایه‌زده، در واحد مربع، عبارت است از

۱) ۱ ۲) Ln۲

۳) −Ln۲ ۴) $\frac{۱}{۲}$Ln۲

۵) $-\frac{۱}{۲}$Ln۲

۹ـ فرض کنید برای x ∈IR و y ∈IR، $e^{y}\frac{dy}{dx}=e^{-x}$ و اگر x = ۰ در این صورت y = ۰، در صورتی که x = −۱ (مقدار y کدام است؟)

۱) y = ۱

۲) y = −Ln(e − ۲)

۳) y = −۱

۴) y = ۱ + Ln۲

۵) y را نمی‌توان یافت.

۱۰ ـ فرض کنید $\frac{1+i}{x}=\frac{i}{y+i}$ که x, y ∈IR، در این صورت

۱) x = ۰, y = ۱

۲) x = ۰, y = −۱

۳) x = ۲, y = ۱

۴) x = −۲, y = ۱

۵) اطلاعات برای محاسبهٔ x و y کافی نیست.

۱۱ ـ تعداد راههایی که می‌توان n کتاب را از بین (m + n) کتاب متمایز، انتخاب کرد، عبارت است از

۱) $\frac{(m+n)!}{n!}$

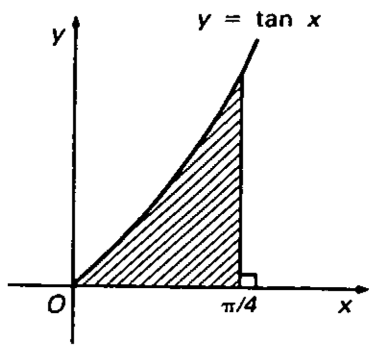
۲) (m + n)! − m!

۳) (m + n)! − n!

۴) $\frac{(m+n)!}{m!}$

۵) $\frac{(m+n)!}{m!n!}$

8.



The area, in square units, of the shaded region is

A 1 **B** ln 2 **C** − ln 2

D $\frac{1}{2}$ ln 2 **E** − $\frac{1}{2}$ ln 2

9. Given that $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$,

$$e^{y}\frac{dy}{dx} = e^{-x}$$

and $y = 0$ when $x = 0$, then, when $x = -1$,

A $y = 1$ **B** $y = -\ln(e-2)$

C $y = -1$ **D** $y = 1 + \ln 2$

E y cannot be found

10. Given that

$$\frac{1+i}{x} = \frac{i}{y+i},$$

where $x, y \in \mathbb{R}$, then

A $x = 0, \quad y = 1$ **B** $x = 0, \quad y = -1$

C $x = 2, \quad y = 1$ **D** $x = -2, \quad y = 1$

E there is insufficient information for x and y to be found.

11. The number of ways in which n books can be chosen from $(m + n)$ different books is

A $\frac{(m+n)!}{n!}$ **B** $(m+n)! - m!$

C $(m+n)! - n!$ **D** $\frac{(m+n)!}{m!}$

E $\frac{(m+n)!}{m!n!}$

12. The coefficient of x^2 in the binomial expansion of $(1-x)^5$ is

A -15 **B** -10 **C** $+10$

D $+15$ **E** $+20$

۱۲ ـ ضریبِ $x^{۲}$ در بسط بینمِ $(۱-x)^{۵}$ عبارت است از

۱) -۱۵ ۲) -۱۰

۳) ۱۰ ۴) ۱۵ ۵) ۲۰

13. $\sum_{r=1}^{\infty} e^{-r}$

A $=\frac{1}{e-1}$ **B** $=\frac{e}{e-1}$ **C** $=\frac{1}{e+1}$

D $=\frac{e}{e+1}$ **E** does not converge

۱۳ ـ مقدار $\sum_{r=۱}^{\infty} e^{-r}$ (برابر است با)

۱) $\frac{۱}{e-۱}$ ۲) $\frac{e}{e-۱}$

۳) $\frac{۱}{e+۱}$ ۴) $\frac{e}{e+۱}$

۵) همگرا نیست.

14. The roots of the equation $2x^2+7x+3=0$ are α and β. An equation whose roots are $2\alpha+\beta$ and $\alpha+2\beta$ is

A $2y^2+21y+52=0$ **B** $2y^2-21y+52=0$

C $2y^2-21y-52=0$ **D** $2y^2+21y-52=0$

E $2y^2+21y-48=0$

۱۴ـ α و β ریشه‌های معادلهٔ $۲x^{۲}+۷x+۳=۰$ می‌باشند. معادله‌ای که ریشه‌های آن $۲\alpha+\beta$ و $\alpha+۲\beta$ باشند، عبارت است از

۱) $۲y^{۲}+۲۱y+۵۲=۰$ ۲) $۲y^{۲}-۲۱y+۵۲=۰$

۳) $۲y^{۲}-۲۱y-۵۲=۰$ ۴) $۲y^{۲}+۲۱y-۵۲=۰$

۵) $۲y^{۲}+۲۱y-۴۸=۰$

15. The complete set of values of x for which $|x-2|<|2x|$, where $x \in \mathbb{R}$, is

A $\{x : x > -2\}$

B $\{x : \frac{2}{3} < x < 2\}$

C $\{x : x < -2\} \cup \{x : \frac{2}{3} < x < 2\}$

D $\{x : x < -2\} \cup \{x : x > \frac{2}{3}\}$

E $\{x : x < -\frac{2}{3}\} \cup \{x : x > 2\}$

۱۵ ـ مجموعهٔ تمام مقادیری چون $x \in \mathbb{R}$ برای (برقراریِ نامساوی) $|x-۲|<|۲x|$ عبارت است از

۱) $\{x : x > -۲\}$

۲) $\left\{x : \frac{۲}{۳} < x < ۲\right\}$

۳) $\{x : x < -۲\} \cup \left\{x : \frac{۲}{۳} < x < ۲\right\}$

۴) $\{x : x < -۲\} \cup \left\{x : x > \frac{۲}{۳}\right\}$

۵) $\left\{x : x < -\frac{۲}{۳}\right\} \cup \{x : x > ۲\}$

16. The general solution of the differential equation

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2(y+1)}{x}$$

is, N being a constant,

A $y=x^2+N$

B $y=Nx^2-1$

C $y=N(x^2-1)$

D $y=x^2+Nx$

E $y=Nx^2-2x$

۱۶ ـ جوابِ عمومیِ معادلهٔ دیفرانسیلِ $\frac{dy}{dx}=\frac{۲(y+۱)}{x}$، (با شرط این که N مقدار ثابتی باشد، عبارت است از

۱) $y=x^{۲}+N$ ۲) $y=Nx^{۲}-۱$

۳) $y=N(x^{۲}-۱)$ ۴) $y=x^{۲}+Nx$

۵) $y=Nx^{۲}-۲x$

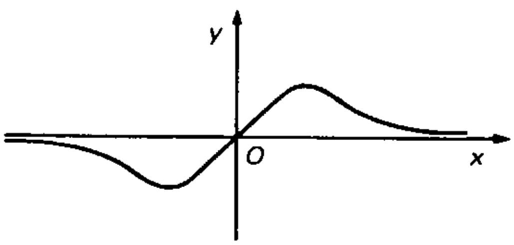
17. Given that $x = \cos^2 t$, $y = \tan t$, then, when $t = \pi/4$,

$\frac{dy}{dx} =$

A 2 **B** -2 **C** 4

D -4 **E** $-\frac{1}{2}$

18.



The equation of the curve shown could be

A $y = \tan^{-1}x$ **B** $y = x\,e^{-x}$

C $y = \frac{x}{1+x^2}$ **D** $y = \frac{x^2}{1+x^4}$

E $y = \frac{\sin x}{x}$

19. The number of solutions, which lie in the range $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, of the equation

$$2\sin^2 x + 7\sin x + 6 = 0,$$

where $x \in \mathbb{R}$, is

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 4

E none of the above

20. $(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}).(\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}) =$

A $2\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + \mathbf{k}$ **B** 9

C -9 **D** $9\mathbf{i}$

E $-9\mathbf{i}$

۱۷ ـ فرض کنید $x = \cos^{۲} t$ و $y = tg\ t$، در این صورت، هرگاه $t = \frac{\pi}{۴}$ (مقدار) $\frac{dy}{dx}$ برابر است با

۱) ۲ ۲) −۲

۳) ۴ ۴) −۴

۵) $-\frac{۱}{۲}$

۱۸ ـ معادلهٔ منحنی نمایش داده شده (رو برو) کدام می‌تواند باشد؟

۱) $y = tg^{-۱}x$

۲) $y = xe^{-x}$

۳) $y = \frac{x}{۱+x^{۲}}$

۴) $y = \frac{x^{۲}}{۱+x^{۴}}$

۵) $y = \frac{\sin x}{x}$

۱۹ ـ تعداد جوابهای واقع در فاصلهٔ $۰ \le x \le ۲\pi$ و $x \in \mathbb{R}$، برای معادلهٔ $۲\sin^{۲} x + ۷\sin x + ۶ = ۰$، عبارت است از

۱) ۰ ۲) ۱

۳) ۲ ۴) ۴

۵) هیچ‌یک از موارد فوق (قبل)

۲۰ـ(مقدار)$(۲i + ۳j + k).(i - ۴j + k)$ برابر است با

۱) $۲i - ۱۲j + k$

۲) ۹

۳) −۹

۴) ۹i

۵) −۹i

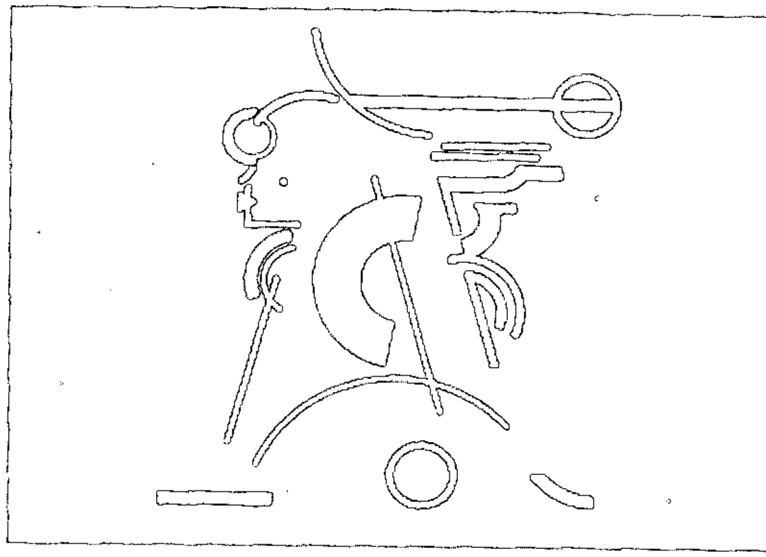
ریاضیات گسسته

(قسمت دوّم)

(سوّم ریاضی و پیش‌دانشگاهی)

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

**Discrete and Combinatorial Mathematic.
An Applied Introduction. Ralph P. Grimaldi**



ترکیبات: قضیّهٔ دو جمله‌ای

دستهٔ کارتی شامل ۵۲ کارت از چهار رنگ زیر تشکیل شده‌است:

قرمز، سیاه، آبی، و سبز. هر رنگ دارای ۱۳ کارت (از یک تا سیزده) است: ۱، ۲، ۳، ...، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳.

اگر خواسته باشیم از این دسته کارت به‌طور متوالی و بدون بازگرداندن، سه کارت بیرون بکشیم، در این صورت بنا به قاعدهٔ حاصل‌ضرب:

$$۵۲ \times ۵۱ \times ۵۰ = \frac{۵۲!}{۴۹!} = P(۵۲ \text{ و } ۳)$$

امکان موجودند، که مثلاً یکی از آنها ۱، سبز یکی ۹، قرمز یکی سیاه است. به‌جای این کار، اگر به‌طور ساده از دستهٔ کارت مزبور یکباره سه کارت چنان انتخاب کنیم که دیگر ترتیب انتخاب کارتها مهم نباشد، در این صورت جمیع شش جایگشت زیر دقیقاً متناظر بایک انتخاب (بدون ترتیب) می‌شوند.

سیاه - ۱، سبز - ۹، قرمز و ۹، قرمز - سیاه - ۱، آبی و سیاه - ۹، قرمز - ۱، آبی ۹، قرمز - ۱، آبی - سیاه و ۱، آبی - ۹، قرمز - سیاه و ۱، آبی - سیاه - ۹، قرمز

در نتیجه، هرانتخاب، باترکیب، ازاین کارتها بی‌هیچ ارجاعی به‌ترتیب، متناظر با !۳ جایگشت سه کارت است. این مطلب در شکل تساوی به‌صورت زیر بیان می‌شود:

(تعداد انتخابهای سه اندازه‌ای از دسته‌ای ۵۲ تایی) × (!۳)
= (تعداد جایگشتهای ۵۲ کارت‌که یکباره سه کارت از آنها انتخاب شود)

$$= P(۵۲ . ۳) = \frac{۵۲!}{۴۹!}$$

درنتیجه، از یک دستهٔ کارت ۵۲ تایی، می‌توان به ۲۲،۱۰۰ = (!۴۹ !۳) / !۵۲ طریق، سه کارت، بدون بازگرداندن، بیرون کشید.

درنتیجه، دانشجوی مورد بحث می‌تواند، بنابه قاعدهٔ حاصل‌ضرب، امتحان خود را به

$$\binom{۵}{۳}\binom{۵}{۴} = ۱۰ \times ۵ = ۵۰$$

طریق به‌اتمام رساند. □

مثال ۱ . ۲۰

a) معلم ورزش دبیرستانی باید از کلاسهای پایینتر و بالاتر نه نفر برای تیم والیبال انتخاب کند. اگر ۲۸ نفر دانش‌آموز کلاس پایینتر و ۲۵ نفر دانش‌آموز کلاس بالاتر موجود باشند، می‌تواند انتخاب خود را به

$$\binom{۵۳}{۹} = ۴,۴۳۱,۶۱۳,۵۵۰$$

طریق انجام دهد.

b) اگر دو شاگرد کلاس پایینتر و یک شاگرد کلاس بالاتر بهترین بازیکن‌اند و ضرورت دارد که در تیم باشند، در این صورت باقی‌ماندهٔ تیم می‌توانند به

$$\binom{۵۰}{۶} = ۱۵,۸۹۰,۷۰۰$$

طریق انتخاب شوند.

c) برای تورنمنت خاصی تیم مدرسه باید متشکل از چهار شاگرد پایینتر و پنج شاگرد بالاتر باشد. معلم موردبحث می‌تواند چهار شاگرد پایینتر را به $\binom{۲۸}{۴}$ طریق انتخاب کند. به‌ازای هریک از این انتخابها $\binom{۲۵}{۵}$ طریق اختیار پنج شاگرد بالاتر را دارد. در نتیجه، بنا به قاعدهٔ حاصل‌ضرب می‌تواند تیمش را به

$\binom{25}{5}\binom{28}{4} = 1,087,836,750$ طریق برای تور خاص انتخاب کند. □

بعضی از مسائل را، بسته به این‌که شخص چگونه به تحلیل وضعیت می‌پردازد، می‌توان از نقطهٔ نظر ترتیب یا ترکیب مورد بررسی قرار داد. مثال زیر به توضیح این موضوع می‌پردازد.

مثال ۱ . ۲۱. معلم ورزش مثال ۱ . ۲۰ باید چهار تیم نه نفره از میان ۳۶ دانش‌آموز سال اول تشکیل دهد. به چند طریق می‌تواند این چهار تیم را انتخاب کند. تیمها را A ، B ، C ، و D می‌نامیم.

a) برای تشکیل تیم A ، می‌تواند نه دانش‌آموز را از میان ۳۶ دانش‌آموزی که نام‌نویسی کرده‌اند به $\binom{36}{9}$ طریق انتخاب کند. برای تیم B فرآیند انتخاب $\binom{27}{9}$ امکان به‌دست می‌دهد. این کار برای انتخاب تیمهای C و D ، به‌ترتیب، $\binom{18}{9}$ و $\binom{9}{9}$ طریق امکان به‌جامی‌گذارد. بنابراین، بنا به قاعدهٔ حاصل‌ضرب، چهار تیم مذکور می‌توانند به

$$\binom{36}{9}\binom{27}{9}\binom{18}{9}\binom{9}{9} = \left(\frac{36!}{27!9!}\right)\left(\frac{27!}{18!9!}\right)\left(\frac{18!}{9!9!}\right)\left(\frac{9!}{9!0!}\right) = \frac{36!}{9!9!9!9!} = 2.145 \times 10^{19}$$

طریق انتخاب شوند.

b) برای راه حل دیگر، ۳۶ دانش‌آموز مزبور را به طریق زیر در یک خط قرار می‌دهیم.

دانش‌آموز اول	دانش‌آموز دوم	دانش‌آموز سوم	......	دانش‌آموز سی و پنجم	دانش‌آموز سی‌وششم

به‌سبب انتخاب چهار تیم، باید نه نفر A ، نه‌نفر B ، نه نفر C و نه نفر D را در ۳۶ مکان مزبور توزیع کنیم. تعداد طرقی که این کار را طبق آنها می‌توان انجام داد تعداد ترتیبات ۳۶ حرف در بردارندهٔ نه عضو هریک از A ، B ، C ، و D است. این مسأله، مسألهٔ آشنای ترتیبهای اشیای نامتمایز است، و جواب آن عبارت از:

$$\frac{36!}{9!9!9!9!}$$ □

دو مثال بعدیمان اشاره براین دارند که چگونه بعضی از مسائل، برای حلشان، به‌هر دو مفهوم ترتیب و ترکیب نیاز دارند.

مثال ۱ . ۲۲. تعداد ترتیبات حروف TALLAHASSEE عبارت است.

$$\frac{11!}{3!2!2!2!1!1!} = 831,600$$

چند ترتیب از آنها بدون A های مجاوراند؟

هنگامی که A ها را کنار بگذاریم، برای ترتیب حروف باقی‌مانده:

$$\frac{8!}{2!2!2!1!1!} = 5040$$

طریق موجودند. یکی از این ۵۰۴۰ طریق را درشکل زیر نشان داده‌ایم، که نوک پیکانهای آن دلالت برنه‌مکان ممکن برای سه A ی موردبحث دارند.

$$\uparrow E \uparrow E \uparrow S \uparrow T \uparrow L \uparrow L \uparrow S \uparrow H \uparrow$$

سه مکان از این مکانها را می‌توان به $\binom{9}{3} = 84$ طریق انتخاب کرد؛ و به‌علت این‌که این کار به‌ازای جمیع ۵۰۳۹ ترتیب دیگر E ، E ، S ، T ، L ، L ، S ، H نیز ممکن است، بنابه قاعدهٔ حاصل‌ضرب $5040 \times 84 = 423,360$ ترتیب حروف بدون A های متوالی درTALLAHASSEE موجودند □ .

مثال ۱ . ۲۳. در مطالعهٔ نظریهٔ کدگذاری جبری «algebraic coding Theory» و نظریهٔ زبانهای کامپیوتری «Theory of computer languages» ترتیبات خاصی، موسوم به رشته‌ها «*strings*» ، تشکیل شده از الفبا «alphabet» ای تعیین شده از نمادها، را مورد بررسی قرار می‌دهیم. اگر الفبای تعیین شده مزبور، فی‌المثل، شامل نمادهای ۰ ، ۱ ، و ۲ باشد، در این‌صورت ۰۱ ، و ۲۰ پنج رشته از نه رشتهٔ به طول «*length*» دواند. ۰۰۰ و ۱۱۰ درمیان ۲۷ رشتهٔ به‌طول سه‌اند.

درحالت عمومی، اگر n عدد صحیح و مثبت دلخواهی باشد، آنگاه بنا به قاعدهٔ حاصل‌ضرب در مورد الفبای ۰ ، ۱ ، و ۲ ، 3^n رشته به‌طول n موجودند. اگر $x = x_1x_2x_3 \dots x_n$ یکی از این رشته‌ها باشد، وزن «*weight*» x ، نمایش داده شده با wt(x) ، را با $wt\ (u) = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$ تعریف می‌کنیم. به‌عنوان مثال، حالت $n = 2$ ، $wt\ (12) = 3$ و $wt\ (22) = 4$ ؛ و در حالت $n = 3$ ، $wt\ (101) = 2$ ، $wt\ (210) = 3$ ، و $wt\ (222) = 6$.

می‌خواهیم مشخص کنیم که در میان 3^{10} رشتهٔ به‌طول ۱۰ چند رشته وزن زوج دارند. رشته‌ای چنین زمانی که تعداد ۱ های واقع در

آن زوج باشد دارای وزن زوج است.

شش حالت متفاوت برای بررسی موجودند. اگر رشتهٔ x شامل ۱ نباشد، در این صورت هریک از ۱۰ مکان واقع در x را می‌توان با ۰ یا ۲ پرکرد، و بنابه قاعدهٔ حاصل‌ضرب 2^{10} رشته از چنین رشته‌هایی وجود دارند. زمانی که رشتهٔ مورد بحث شامل دو ۱ باشد، مکانهای این دو ۱ را می‌توان به $\binom{10}{2}$ طریق اختیار کرد. هنگامی که این دو مکان مشخص شوند، برای قراردادن ۰ یا ۲ درهشت مکان دیگر $\binom{8}{2}$ طریق موجود می‌شوند. درنتیجه $2^8\binom{10}{2}$ رشته به‌وزن زوج وجود دارند که شامل دو ۱ اند. تعداد رشته‌های چهار حالت دیگر را در جدول ۱ . ۲ داده‌ایم.

■ جدول ۱ . ۲

تعداد رشته‌ها	تعداد ۱ها	تعداد رشته‌ها	تعداد ۱ها
$\binom{10}{8}2^2$	8	$\binom{10}{4}2^6$	4
$\binom{10}{10}$	10	$\binom{10}{6}2^4$	6

در نتیجه، بنا به قاعدهٔ جمع، تعداد رشته‌های به‌طول ۱۰ ی که دارای وزن زوجند عبارت است از:

$$2^{10}+\binom{10}{2}2^8+\binom{10}{4}2^6+\binom{10}{6}2^4+\binom{10}{8}2^2+\binom{10}{10}$$
$$=\sum_{n=0}^{5}\binom{10}{2n}2^{10-2n} \qquad \square$$

این بخش را باسه مطلب که بامفهوم ترکیبات در ارتباطند خاتمه می‌دهیم.

ابتدا توجه می‌کنیم که به‌ازای اعداد صحیح n ، r ، با $n \geq r$ ، $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$. این رابطه را می‌توان به‌طریق جبری ازفرمول $\binom{n}{r}$ محقق کرد، اما ترجیح می‌دهیم ملاحظه کنیم زمانی که با انتخاب با اندازهٔ r ی از کلکسیونی از n شیء متمایز سروکار داریم، فرایند انتخاب $n-r$ شیء به‌جا می‌گذارد. درنتیجه، $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$ وجود تناظری را بین انتخابهای بااندازهٔ r (شیء انتخاب شده) و انتخابهای بااندازهٔ $n-r$ (شیء به‌جا مانده) اظهار می‌کند. مثالی از این تناظر را در جدول ۱ . ۳ نشان داده‌ایم که در آن $n = 5$ ، $r = 2$ ، و اشیای متمایز عبارتند از ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، و ۵.

این نوع تناظر درفصل ۵ به‌گونه‌ای صوریتر تعریف شده در سایر حالات شمارش به کار خواهد رفت.

■ جدول ۱ . ۳

	انتخابهای اندازهٔ $n - r = 3$ (اشیای کنار گذاشته شده)	انتخابهای اندازهٔ $r = 2$ (اشیای انتخاب شده)
1.	3, 4, 5	1, 2
2.	2, 4, 5	1, 3
3.	2, 3, 5	1, 4
4.	2, 3, 4	1, 5
5.	1, 4, 5	2, 3
6.	1, 3, 5	2, 4
7.	1, 3, 4	2, 5
8.	1, 2, 5	3, 4
9.	1, 2, 4	3, 5
10.	1, 2, 3	4, 5

مطلب دوم قضیّه‌ای است از تجربهٔ گذشته‌مان در جبر.

قضیّهٔ ۱ . ۱ . (قضیّه دو جمله‌ای) اگر x و y متغیر و n عددی صحیح و مثبت باشد در این صورت:

$$(x+y)^n=\binom{n}{0}x^0y^n+\binom{n}{1}x^1y^{n-1}+\binom{n}{2}x^2y^{n-2}$$
$$+\dots+\binom{n}{n-1}x^{n-1}y^1+\binom{n}{n}x^ny^0=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k}$$

پیش از بررسی اثبات عمومی قضیّه، به‌امتحان حالتی خاص می‌پردازیم. اگر $n = 4$ ، ضریب x^2y^2 در حاصل‌ضرب

$(x + y)$	$(x + y)$	$(x + y)$	$(x + y)$
عامل اول	عامل دوم	عامل سوم	عامل چهارم

برابر باتعداد طرحی است که در آنها می‌توانیم دو x را (با به جاگذاشتن y) از چهار x ی، که در هر عامل یکی از آنها موجود است، انتخاب کنیم. (گرچه x ها در ظاهر یکسان‌اند، آنها را به‌عنوان x واقع در عامل اوّل، x واقع در عامل دوم، ... ، و x واقع در عامل چهارم متمایز می‌کنیم.) به‌عنوان مثال، در میان امکانات موجود، می‌توانیم (۱) x را از دو عامل اول و y را از دو عامل دوم؛ یا (۲) x را از عوامل اوّل و سوم و y را از عوامل دوم و چهارم اختیار کنیم. جدول ۱ . ۴ شش انتخاب ممکن را اختصار کرده‌است.

■ جدول ۱ . ۴

	عاملهای انتخاب شده برای y		عاملهای انتخاب شده برای x
(1)	3, 4	(1)	1, 2
(2)	2, 4	(2)	1, 3
(3)	2, 3	(3)	1, 4
(4)	1, 4	(4)	2, 3
(5)	1, 3	(5)	2, 4
(6)	1, 2	(6)	3, 4

در نتیجه ضریب x^2y^2 در $(x+y)^4$ برابر $6 = \binom{4}{2}$ ، تعداد طرق انتخاب دوشیء متمایز از مجموعه‌ای از چهار شیء متمایز است.

اکنون به اثبات حالت عمومی روی می‌آوریم.

اثبات. در حاصل‌ضرب

$$\underset{\text{عامل چهارم}}{(x+y)}\ \underset{\text{عامل سوم}}{(x+y)}\ \underset{\text{عامل دوم}}{(x+y)}\ \underset{\text{عامل اول}}{(x+y)}$$

ضریب x^ky^{n-k}، که در آن $0 \le k \le n$ ، تعداد طرق متفاوتی است که در آنها می‌توان k ، x (و نتیجتاً $(n-k)$ ، y) از n عامل موجود را انتخاب کرد. (به‌عنوان مثال یک راه، انتخاب x از k عامل اوّل و y از $n-k$ عامل دوم است.) تعداد کل انتخابهایی به اندازهٔ k یی چنین، از کلکسیونی با اندازهٔ n ، عبارت است از : $C(n, k) = \binom{n}{k}$ و قضیّهٔ دو جمله‌ای از آن به دست می‌آید. □

از مطلب فوق متوجه می‌شویم که

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} x^k y^{n-k}$$

به‌علت این قضیّه، اغلب به $\binom{n}{k}$ نیز به‌عنوان ضریب دو جمله‌ای «*binomial coefficient*» اشاره شد.

مثال ۱ . ۲۴

a) از قضیّهٔ دو جمله‌ای نتیجه می‌شود که ضریب x^5y^2 در $(x+y)^7$ عبارت است از:

$$\binom{7}{5} = \binom{7}{2} = 21$$

b) ضریب a^5b^2 در $(2a - 3b)^7$ عبارت است از:

$$\binom{7}{5} (2)^5 (-3)^2$$

این مقدار را از قضیّهٔ دوجمله‌ای با قراردادن $x = 2a$ و $y = 3b$ به دست می‌آوریم. □

نتیجه ۱ . ۱

به‌ازای هر عدد صحیح $n > 0$ ،

a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$

b) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$

اثبات :

قسمت (a) از قضیّهٔ دو جمله‌ای، چون قرار دهیم $x = y = 1$، به دست می‌آید. زمانی که $x = -1$ و $y = 1$ ، قسمت (b) نتیجه می‌شود. □

سومین و آخرین مطلبمان تعمیم قضیّهٔ دوجمله‌ای و به قضیّهٔ چند جمله‌ای «*multinomial theorem*» موسوم است.

قضیّهٔ ۱ . ۲

به‌ازای اعداد صحیح و مثبت n ، t ، ضریب $x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \dots x_t^{n_t}$

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_t)^n$$

عبارت است از:

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3! \dots n_t!}$$

که هر n_i ی آن، به‌ازای هر $1 \le i \le t$، عددی‌صحیح‌با $0 \le n_i \le n$ است، و

$$n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_t = n$$

اثبات :

چون دراثبات قضیّهٔ‌دوجمله‌ای، ضریب $x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \dots x_t^{n_t}$ تعداد طرقی است که طبق آنها می‌توان x_1 را از n_1 عامل از n عامل، x_2 را از n_2 عامل از $n - n_1$ عامل باقی‌مانده، x_3 را از n_3 عامل از $n - n_1 - n_2$ عامل اکنون باقی‌مانده، ... ، و x_t را از n_t عامل از آخرین $n_t = n - n_1 - n_2 - n_3 - \dots - n_{t-1}$ عامل باقی‌مانده، انتخاب کرد. این کار را می‌توان، چون در قسمت (a) ی مثال ۱.۲۱ ، به

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\dots\binom{n-n_1-n_2-\dots-n_{t-1}}{n_t}$$

طریق انجام‌داد. تفصیلات نشان دادن این راکه مقدارفوق برابراست با:

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3! \dots n_t!}$$

که به‌صورت:

$$\binom{n}{n_1, n_2, n_3, \dots, n_t}$$

نیز نوشته می‌شود و به ضریب چند جمله‌ای multinomial coefficient موسوم است؛ به‌عهدهٔ خوانند وامی‌گذاریم. □

(سوّم ریاضی نظام جدید و قدیم)

کُدگذاری اطلاعات
و نمایش اعداد صحیح و اعشاری در کامپیوتر(۵)

❑ حسین ابراهیم‌زادهٔ قُلزم

۱ ــ کُدگذاری اطلاعات:

انسانها در طول تاریخ برای بیان مقصود خود تلاش کرده‌اند اطلاعات مورد استفادهٔ خود را به صورت ترکیبی از نماد[1]هایی که قابل فهم باشد نمایش دهند. در زبان فارسی علایمی که برای ارقام و اعداد بکار می‌روند به همراه حروف الفبا از این گونه نمادها هستند.

پیدایش خط و استفاده از اعداد در میان ملل و اقوام مختلف و پذیرش نمادهای متعدد برای شکلهای هندسی، به‌کارگیری ترکیبی از خط[2] و نقطه[3] برای علایم مورس و مجموعه‌ای از علایم قرار دادی برای نُتهای موسیقی را می‌توان نمونه‌هایی از کدگذاری اطلاعات در میان این ملل دانست. پیش از آغاز بحث، لازم است تعریفی از داده و اطلاعات ارائه شود.

در کامپیوتر به اطلاعات خام که هیچ عملی روی آن انجام نشده باشد داده[4] و به دادهٔ پردازش شده به‌منظور رسیدن به یک هدف معین، **اطلاعات**[5] می‌گویند.

داده‌های ورودی و اطلاعات خروجی در کامپیوتر از ارقام لاتین ۰ تا ۹، حروف A تا Z یا a–z و نمادهای عملیاتی +، -، *، /، **، ^ و غیره و علایم ویژه مانند: !، $، #، و غیره (و یا معادل آنها در هریک از زبانهای رایج دنیا از جمله زبان فارسی) تشکیل شده است که به هریک از این علایم، **یک کاراکتر**[6] می‌گویند.

برای نمایش هریک از این کاراکترها در کامپیوتر، لازم است مدارهای الکترونیکی ساخته شود تا کاراکترهایی مانند ۲۶ حالت حرف الفبای انگلیسی، ۳۲ حرف الفبای فارسی، ۱۰ حالت ارقام ۰ تا ۹ فارسی یا لاتین و غیره نشان داده شود.

برای نمایش ارقام ۰ تا ۹ چنانچه بخواهیم از سیستم دهدهی استفاده کنیم باید ۱۰ حالت مختلف داشته باشیم و برای هر حالت به یک مدار[7] الکترونیکی نیاز است. اما این کار با اشکال مواجه خواهد شد و مدار ساخته شده نیز از سرعت کافی برخوردار نخواهد بود. از این رو در کامپیوتر از سیستم عددی

دودویی یا باینری استفاده می‌شود که دارای کمترین حالت ممکن است. این سیستم دارای دو حالت ۰ و ۱ است. طبق قرار داد اگر از مدار الکترونیکی جریان[۸] عبور کند به آن ارزش ۱ و در غیر این‌صورت به آن ارزش ۰ می‌دهند. دلایل استفاده از سیستم دودویی غیر از سادگی عملیات ریاضی در این مبنا آسانی نمایش کاراکترها توسط مدارهای الکترونیکی است. این سیستم دارای معایبی نیز هست، از آن جمله برای نوشتن اعداد بزرگ در این مبنا، تعداد رقم‌های زیادی مورد نیاز است.

کاراکترها در حافظهٔ[۹] کامپیوتر به‌صورت مجموعه‌ای از ۰ و ۱ ذخیره می‌شوند. به یک رقم در مبنای ۲ که از ۰ یا ۱ تشکیل می‌شود یک **بیت** (BIT) می‌گویند که مخفف Binary digit است. بیت کوچکترین واحد حافظه در کامپیوتر است.

در کامپیوترهای متداول امروزی، هر کاراکتر از هشت بیت تشکیل شده است، از این رو به هر هشت بیت یک **بایت** گفته می‌شود به چهار بیت در اصطلاح کامپیوتری **نیبل** Nibble می‌گویند و هر Nibble معرف یک رقم در مبنای ۱۶ است.

سیستم‌های متداول کدگذاری اطلاعات در کامپیوتر عبارتند از: **الف** ـ سیستم BCD **ب** ـ سیستم اَسکی ASCII **ج** ـ سیستم EBCDIC .

الف ـ سیستم کدگذاری BCD. BCD که مخفف Binary Coded Decimal است به معنی **معادل دودویی یکی عدد دهدهی** است. همان‌گونه که از نام این سیستم پیداست از آن فقط برای نمایش و کدگذاری اعداد استفاده می‌شود. از این سیستم نمی‌توان برای نمایش کاراکترهای حرفی و علایم ویژه و عملیاتی استفاده کرد. در سیستم BCD هر رقم مبنای ۱۰ به کمک چهار رقم مبنای ۲ نمایش داده می‌شود. سیستم ۶ بیتی BCD نیز وجود دارد.

از آنجا که اعداد مبنای ۱۰ دارای سه حالت منفی، مثبت و بدون علامت است از این رو برای این منظور از یک جدول علامت قرار دادی BCD به شرح زیر استفاده می‌شود.

کد BCD	علامت عدد
۱۱۰۱	−
۱۱۰۰	+
۱۱۱۱	بدون علامت

در سیستم کدگذاری BCD ، کد علامت[۱۰] عدد با چهار بیت نمایش داده می‌شود و در سمت راست عدد قرار می‌گیرد.

مثال: عدد ۱۲۷ را به روش BCD نمایش دهید.

حل:

۰۰۰۱	۰۰۱۰	۰۱۱۱	۱۱۱۱
۱	۲	۷	علامت

در نتیجه معادل دودویی عدد ۱۲۷ با کد BCD به‌صورت ۰۰۰۱۰۰۱۰۰۱۱۱۱۱۱۱۱ می‌شود.

مثال: عدد ۱۲۷+ را به روش BCD نمایش دهید.

حل:

۰۰۰۱	۰۰۱۰	۰۱۱۱	۱۱۰۰
۱	۲	۷	+

مثال: عدد ۱۲۷− را به روش BCD نمایش دهید.

حل:

۰۰۰۱	۰۰۱۰	۰۱۱۱	۱۱۰۱
۱	۲	۷	−

ب ـ سیستم کدگذاری اَسکی ASCII : ASCII مخفف American Standard Code for Information Interchange به معنی **کد استاندارد آمریکا برای تبدیل اطلاعات** است. این سیستم کُدگذاری در حال حاضر بیشتر از سایر سیستم‌های کدگذاری مورد استفاده قرار می‌گیرد. در اکثر کامپیوترهای شخصی نوع IBM و سازگار[۱۱] با آن از سیستم کدگذاری اَسکی برای نمایش اطلاعات استفاده می‌شود. هر کاراکتر حرفی یا عددی و کاراکتر ویژه و

کاراکتر کنترلی با ۸ بیت نمایش داده می‌شود. درواقع در این سیستم، هر بایت از هشت بیت تشکیل شده است. سیستم هفت بیتی اَسکی هم وجود دارد که چندان متداول نیست. از سیستم کدگذاری ASCII برای نمایش همه‌گونه اطلاعات و داده‌ها از قبیل عددی ــ حرفی، حرفی ــ عددی و تصاویر استفاده می‌شود. با ۸ بیت، ۲۵۶ = ۲^۸ ترکیب گوناگون ایجاد می‌شود از این رو کد اسکی کاراکترها شامل ۲۵۶ کاراکتر از ۰ تا ۲۵۵ است.

در سیستم اسکی ۸ بیتی به چهار بیت سمت چپ، بیتِ Zone یا ناحیه و به چهار بیت سمت راست، بیتِ Digit یا رقم می‌گویند. کوچکترین واحد آدرس پذیر در کامپیوتر بایت است. برای سادگی انجام عملیات برروی کاراکترها، حافظهٔ بعضی از کامپیوترها طوری ساخته شده‌اند که می‌توان بایتها را به صورت انفرادی آدرس دهی کرد.

حدود ۸۰ درصد کشورها به‌طور کامل و ۱۰۰٪ در کامپیوترهای خود از کُد استاندارد ASCII استفاده می‌کنند و ۲۰ درصد کشورها نظیر ژاپن، کشورهای خاورمیانه، چین و کشورهای دارای زبان روسی فقط از ۶۰٪ کُد استاندارد ASCII استفاده می‌کنند چون الفبای این کشورها حاوی علایم زیادی است که در محدودهٔ کُد ASCII جای نمی‌گیرد.

نمی‌توان مفهوم نمایش کاراکترها توسط اعداد راجدید دانست. در حقیقت، کد ASCII دنبالهٔ مستقیم کُد مورس است که در سالهای ۱۸۰۰ توسط اپراتورهای تلگراف به کاربرده می‌شد. در کُد مورس، حروف و علایم دستوری توسط ترکیبات گوناگونی از ضربه‌های روی کلید تلگراف بیان می‌شود. پالسهای کوتاه و بلند که به صورت علامتهای خط و نقطه‌ها نوشته می‌شود مشابه حالتهای خاموش ۰ و روشن ۱ در حساب دودویی است. کُدهای مورس حداکثر از شش خط تیره یا نقطه برای نمایش یک کاراکتر استفاده می‌کند در حالی که کد ASCII فقط هشت بیت را به‌کار می‌برد چون کد ASCII نسبت به کُد مورس شامل علایم بیشتری است. ASCII بین حروف بزرگ و کوچک تمایز قایل است. اگر چه کُدهای مورس و ASCII از الگوهای دودویی یکسانی استفاده نمی‌کنند، با این وجود تشابهات آنها قابل توجه است.

در ASCII مقادیر ۱ تا ۲۶ بیانگر کاراکترهای کنترلی هستند. ۲۶ کاراکتر کنترلی منطبق با ۲۶ حرف الفبا زبان انگلیسی است.

یکی دیگر از ویژگی‌های کد استاندارد ASCII این است که مقادیر دهدهی ۴۸ تا ۵۷ اسکی بیانگر ارقام ۰ تا ۹ هستند. این مطلب یک تناقض به نظر می‌رسد. آیا عدد صفر به صورت هشت بیتی ۰۰۰۰۰۰۰۰ ذخیره می‌شود یا به‌صورت ۰۰۱۱۰۰۰۰ که معادل دودویی عدد دهدهی ۴۸ است؟ پاسخ برای هر دو حالت مثبت است. عدد صفر هم به‌صورت دودویی ۰۰۰۰۰۰۰۰ و هم به‌صورت ۰۰۱۱۰۰۰۰ ذخیره می‌شود! علت آن، این است که کامپیوترها میان اعدادی که در عملیات ریاضی به‌کار می‌روند و اعدادی که در چاپ یا در یک آدرس به‌صورت خیابان چهارم پلاک ۲۰ به‌کار می‌رود، تفاوت قایل هستند. عددی مانند ۲۰ بستگی به این که در عملیات ریاضی به کار رود یا در یک جمله یا یک آدرس چاپ شود، متفاوت ذخیره[12] می‌شود. عدد ۲۰ در عملیات ریاضی به‌صورت علامت و قدر مطلق عدد[13] یا روش مکمل[14] ۱ یا مکمل[15] ۲ ذخیره می‌شود که کمی بعد توضیح داده می شود در حالی که همین عدد در چاپ یا در آدرسی به‌صورت پلاک ۲۰ به صورت اسکی برای کاراکتر صفر و دو به طور مستقل و از سمت چپ به راست ذخیره می‌شود.

به مجموعه کاراکترهای ASCII که در زیر ارائه شده است توجه کنید.

ASCII value	Character	Control character	ASCII value	Character	ASCII value	Character	ASCII value	Character
000	(null)	NUL	032	(space)	064	@	096	
001	☺	SOH	033	!	065	A	097	a
002	☻	STX	034	"	066	B	098	b
003	♥	ETX	035	#	067	C	099	c
004	♦	EOT	036	$	068	D	100	d
005	♣	ENQ	037	%	069	E	101	e
006	♠	ACK	038	&	070	F	102	f
007	(beep)	BEL	039	'	071	G	103	g
008	◘	BS	040	(	072	H	104	h
009	(tab)	HT	041	)	073	I	105	i
010	(line feed)	LF	042	*	074	J	106	j
011	(home)	VT	043	+	075	K	107	k
012	(form feed)	FF	044	,	076	L	108	l
013	(carriage return)	CR	045	-	077	M	109	m
014	♫	SO	046	.	078	N	110	n
015	☼	SI	047	/	079	O	111	o
016	►	DLE	048	0	080	P	112	p
017	◄	DC1	049	1	081	Q	113	q
018	↕	DC2	050	2	082	R	114	r

ASCII value	Character	Control character	ASCII value	Character	ASCII value	Character	ASCII value	Character
019	‼	DC3	051	3	083	S	115	s
020	¶	DC4	052	4	084	T	116	t
021	§	NAK	053	5	085	U	117	u
022	▬	SYN	054	6	086	V	118	v
023	⊥	ETB	055	7	087	W	119	w
024	↑	CAN	056	8	088	X	120	x
025	↓	EM	057	9	089	Y	121	y
026	→	SUB	058	:	090	Z	122	z
027	←	ESC	059	;	091	[	123	{
028	(cursor right)	FS	060	<	092	\	124	¦
029	(cursor left)	GS	061	=	093	]	125	}
030	(cursor up)	RS	062	>	094	^	126	~
031	(cursor down)	US	063	?	095	_	127	⌂

ASCII value	Character	ASCII value	Character	ASCII value	Character	ASCII value	Character
128	Ç	160	á	192	└	224	α
129	ü	161	í	193	┴	225	β
130	é	162	ó	194	┬	226	Γ
131	â	163	ú	195	├	227	π
132	ä	164	ñ	196	─	228	Σ
133	à	165	Ñ	197	┼	229	σ
134	å	166	ª	198	╞	230	μ
135	ç	167	º	199	╟	231	τ
136	ê	168	¿	200	╚	232	Φ
137	ë	169	⌐	201	╔	233	θ
138	è	170	¬	202	╩	234	Ω
139	ï	171	½	203	╦	235	δ
140	î	172	¼	204	╠	236	∞
141	ì	173	¡	205	═	237	ø
142	Ä	174	«	206	╬	238	∈
143	Å	175	»	207	╧	239	∩
144	É	176	░	208	╨	240	≡
145	æ	177	▒	209	╤	241	±
146	Æ	178	▓	210	╥	242	≥
147	ô	179	│	211	╙	243	≤
148	ö	180	┤	212	╘	244	⌠
149	ò	181	╡	213	╒	245	⌡
150	û	182	╢	214	╓	246	÷
151	ù	183	╖	215	╫	247	≈
152	ÿ	184	╕	216	╪	248	°
153	Ö	185	╣	217	┘	249	∙
154	Ü	186	║	218	┌	250	·
155	¢	187	╗	219	█	251	√
156	£	188	╝	220	▄	252	ⁿ
157	¥	189	╜	221	▌	253	²
158	Pt	190	╛	222	▐	254	■
159	ƒ	191	┐	223	▀	255	(blank FF)

خوانندگان عزیز توجه داشته باشند وقتی شما عددی مانند ۲۰ را چه در محاسبات ریاضی و چه برای چاپ باشد به کمک صفحه کلید روی مانیتور تایپ می‌کنید به ترتیب کُد اسکی ۲ و ۰ در حافظه ذخیره می‌شود اما برای عملیات ریاضی عدد ۲۰ طبق مراحلی که در زبان برنامه‌نویسی پیش‌بینی شده است به صورت علامت و قدرمطلق عدد در عملیات شرکت می‌کند. لازم به توضیح است که چون نوشتن کُد دودویی کلمه‌ای مانند HOSSEIN به‌صورت استاندارد ASCII به فضای زیادتر از آنچه که در اختیار ماست احتیاج دارد از این رو ما نیز مانند اکثر کامپیوترهای شخصی معادل مبنای ۱۶ کد ASCII را می‌نویسیم.

مثال: کلمهٔ ALI را به‌صورت کُد دودویی و شانزده‌تایی ASCII نمایش دهید.

حل: با مراجعه به جدول کد اسکی کاراکترها معلوم می‌شود که کد اسکی حرف A برابر ۶۵ و کد اسکی حرف L برابر ۷۶ و کد اسکی حرف I برابر ۷۳ در مبنای ۱۰ است. از این رو نمایش ALI به‌صورت دودویی و شانزده تایی به صورت زیر است:

به صورت دودویی:

A		L		I	
0100	0001	0100	1100	0100	1001

۱ بایت

به‌صورت شانزده‌تایی:

A		L		I	
4	1	4	c	4	9

۱ بایت

مثال: TAX به چه صورت با کد اسکی شانزده تایی در حافظه کامپیوتر ذخیره می‌شود؟

حل:

T	A	X
54	41	58

مثال: TEHRAN به چه صورت با کد اسکی شانزده‌تایی در حافظه کامپیوتر ذخیره می‌شود؟

حل:

T	E	H	R	A	N
54	45	48	52	41	4E

مثال: NO.20 به چه صورت با کد اسکی شانزده‌تایی در حافظهٔ کامپیوتر ذخیره می‌شود؟

حل:

N	O	.	2	0
4E	4F	2D	32	30

مثال: HOSSEIN را با کد اسکی شانزده‌تایی در حافظهٔ کامپیوتر نمایش دهید.

حل:

H	O	S	S	E	I	N
48	4F	53	53	45	49	4E

مثال: عدد ۱۲۷ را با سیستم کدگذاری ASCII نمایش دهید.

حل:

۱	۲	۷
31	32	37

مثال: عدد ۱۲۷+ را با سیستم کدگذاری ASCII نمایش دهید.

حل:

+	۱	۲	۷
2B	31	32	37

مثال: عدد ۱۲۷− را با سیستم کدگذاری ASCII نمایش دهید.

−	۱	۲	۷
2D	31	32	37

در عملیات ریاضی کلیهٔ اعداد مثبت و بدون علامت و اعداد منفی به روش مقدار و علامت عدد قابل نمایش است که عدد بدون علامت، مثبت در نظر گرفته می‌شود. در کامپیوترهای سازگار با IBM و خود IBM اعداد منفی با روش مکمل ۲ و در کامپیوترهای CDC و هیولت پاکارد اعداد منفی با روش مکمل ۱ نمایش داده می‌شود. این مطلب را بعد از سیستم کدگذاری EBCDIC به‌طور مفصل مطرح خواهیم کرد.

ج ــ سیستم کُدگذاری اِبسدیک EBCDIC:

EBCDIC که مخفف Extended BCD Interchange Code است به معنی **کُد تبدیل توسعه یافتهٔ BCD** می‌باشد. همانگونه که از نام EBCDIC پیداست این سیستم کُدگذاری، توسعه یافتهٔ سیستم کُدگذاری BCD است چون برخلاف سیستم BCD ، اعداد صحیح، اعشاری، کاراکترهای حرفی و کاراکترهای ویژه با سیستم کُدگذاری EBCDIC قابل نمایش است. از کدگذاری EBCDIC در کامپیوترهای بزرگ IBM یا Main Frame نظیر IBM ۳۶۰، IBM ۳۷۰، IBM ۴۳۴۱ و غیره استفاده می‌شود.

در این سیستم هر کاراکتر با هشت بیت نمایش داده می‌شود که از دو قسمت ۴ بیتی تشکیل شده است و مانند سیستم کدگذاری اسکی به چهار بیت سمت چپ، بیت Zone یا ناحیه و به چهار بیت سمت راست، بیت Digit یا رقم می‌گویند.

در روش نمایش، اعداد به صورت غیر فشرده یا unpacked ، برای علامت اعداد از همان جدول قراردادی علامت عدد سیستم کدگذاری BCD استفاده می‌شود.

به مجموعه کاراکترهای EBCDIC که در زیر ارائه شده است توجه کنید:

EBCDIC Character Set

Ordinal Value				Ordinal Value				Ordinal Value				Ordinal Value			
Dec	Oct	Hex	Character	Dec	Oct	Hex	Character	Dec	Oct	Hex	Character	Dec	Oct	Hex	Character
0	000	00	NUL	64	100	40	space	128	200	80		192	300	C0	{
1	001	01	SOH	65	101	41	RSP	129	201	81	a	193	301	C1	A
2	002	02	STX	66	102	42		130	202	82	b	194	302	C2	B
3	003	03	ETX	67	103	43		131	203	83	c	195	303	C3	C
4	004	04	SEL	68	104	44		132	204	84	d	196	304	C4	D
5	005	05	HT	69	105	45		133	205	85	e	197	305	C5	E
6	006	06	RNL	70	106	46		134	206	86	f	198	306	C6	F
7	007	07	DEL	71	107	47		135	207	87	g	199	307	C7	G
8	010	08	GE	72	110	48		136	210	88	h	200	310	C8	H
9	011	09	SPS	73	111	49		137	211	89	i	201	311	C9	I
10	012	0A	RPT	74	112	4A	¢	138	212	8A		202	312	CA	SHY
11	013	0B	VT	75	113	4B	.	139	213	8B		203	313	CB	
12	014	0C	FF	76	114	4C	<	140	214	8C		204	314	CC	
13	015	0D	CR	77	115	4D	(	141	215	8D		205	315	CD	
14	016	0E	SO	78	116	4E	+	142	216	8E		206	316	CE	
15	017	0F	SI	79	117	4F	|	143	217	8F		207	317	CF	
16	020	10	DLE	80	120	50	&	144	220	90		208	320	D0	}
17	021	11	DC1	81	121	51		145	221	91	j	209	321	D1	J
18	022	12	DC2	82	122	52		146	222	92	k	210	322	D2	K

Dec	Oct	Hex	Character	Dec	Oct	Hex	Character	Dec	Oct	Hex	Character	Dec	Oct	Hex	Character
19	023	13	DC3	83	123	53		147	223	93	l	211	323	D3	L
20	024	14	RES/ENP	84	124	54		148	224	94	m	212	324	D4	M
21	025	15	NL	85	125	55		149	225	95	n	213	325	D5	N
22	026	16	BS	86	126	56		150	226	96	o	214	326	D6	O
23	027	17	POC	87	127	57		151	227	97	p	215	327	D7	P
24	030	18	CAN	88	130	58		152	230	98	q	216	330	D8	Q
25	031	19	EM	89	131	59		153	231	99	r	217	331	D9	R
26	032	1A	UBS	90	132	5A	!	154	232	9A		218	332	DA	
27	033	1B	CU1	91	133	5B	$	155	233	9B		219	333	DB	
28	034	1C	IFS	92	134	5C	*	156	234	9C		220	334	DC	
29	035	1D	IGS	93	135	5D	)	157	235	9D		221	335	DD	
30	036	1E	IRS	94	136	5E	;	158	236	9E		222	336	DE	
31	037	1F	ITB/IUS	95	137	5F	¬	159	327	9F		223	337	DF	
32	040	20	DS	96	140	60	-	160	240	A0		224	340	E0	\
33	041	21	SOS	97	141	61	/	161	241	A1	~	225	341	E1	NSP
34	042	22	FS	98	142	62		162	242	A2	s	226	342	E2	S
35	043	23	WUS	99	143	63		163	243	A3	t	227	343	E3	T
36	044	24	BYP/INP	100	144	64		164	244	A4	u	228	344	E4	U
37	045	25	LF	101	145	65		165	245	A5	v	229	345	E5	V
38	046	26	ETB	102	146	66		166	246	A6	w	230	346	E6	W
39	047	27	EXC	103	147	67		167	247	A7	x	231	347	E7	X
40	050	28	SA	104	150	68		168	250	A8	y	232	350	E8	Y
41	051	29	SFE	105	151	69		169	251	A9	z	233	351	E9	Z
42	052	2A	SM/SW	106	152	6A	¦	170	252	AA		234	352	EA	
43	053	2B	CSP	107	153	6B	,	171	253	AB		235	353	EB	
44	054	2C	MFA	108	154	6C	%	172	254	AC		236	354	EC	
45	055	2D	ENQ	109	155	6D	_	173	255	AD		237	355	ED	
46	056	2E	ACK	110	156	6E	>	174	256	AE		238	356	EE	
47	057	2F	BEL	111	157	6F	?	175	257	AF		239	357	EF	
48	060	30		112	160	70		176	260	B0		240	360	F0	0
49	061	31		113	161	71		177	261	B1		241	361	F1	1
50	062	32	SYN	114	162	72		178	262	B2		242	362	F2	2
51	063	33	IR	115	163	73		179	263	B3		243	363	F3	3
52	064	34	PP	116	164	74		180	264	B4		244	364	F4	4
53	065	35	TRN	117	165	75		181	265	B5		245	365	F5	5
54	066	36	NBS	118	166	76		182	266	B6		246	366	F6	6
55	067	37	EOT	119	167	77		183	267	B7		247	367	F7	7
56	070	38	SBS	120	170	78		184	270	B8		248	370	F8	8
57	071	39	IT	121	171	79	`	185	271	B9		249	371	F9	9
58	072	3A	RFF	122	172	7A	:	186	272	BA		250	372	FA	
59	073	3B	CU3	123	173	7B	#	187	273	BB		251	373	FB	
60	074	3C	DC4	124	174	7C	@	188	274	BC		252	374	FC	
61	075	3D	NAK	125	175	7D	'	189	275	BD		253	375	FD	
62	076	3E		126	176	7E	=	190	276	BE		254	376	FE	
63	077	3F	SUB	127	177	7F	"	191	277	BF		255	377	FF	EO

Note: Blank characters indicate codes not assigned in the IBM standard. These often correspond to additional characters, e.g., superscripts, on various devices.

مثال: کلمهٔ ALI را به‌صورت کد دودویی و شانزده‌تاییEBCDIC نمایش دهید.

حل: با مراجعه به جدول کد EBCDIC کاراکترها معلوم می شود که کد EBCDIC حرف A برابر ۱۹۳ و کد EBCDIC حرف L برابر ۲۱۱ و کد EBCDIC حرف I برابر ۲۰۱ در مبنای ۱۰ است. از این رو نمایش ALI به‌صورت دودویی و شانزده‌تایی به‌صورت زیر است:

به صورت دودویی:

A		L		I	
۱۱۰۰	۰۰۰۱	۱۱۰۱	۰۰۱۱	۱۱۰۰	۱۰۰۱

به صورت شانزده‌تایی:

A		L		I	
C	1	D	3	C	9

مثال: TAX به چه صورت با کد EBCDIC شانزده‌تایی در حافظه کامپیوتر ذخیره می‌شود؟

حل:

T	A	X
E3	C1	E7

مثال: TEHRAN به چه صورت با کد EBCDIC شانزده‌تایی در حافظهٔ کامپیوتر ذخیره می‌شود؟

حل:

T	E	H	R	A	N
E3	C5	C8	D9	C1	D5

مثال: NO.20 به چه صورت با کد EBCDIC شانزده‌تایی در حافظهٔ کامپیوتر ذخیره می‌شود؟

حل:

N	O	0	2	O
D5	D6	4B	F2	F0

مثال: HOSSEIN را با کد EBCDIC شانزده‌تایی در حافظهٔ کامپیوتر نمایش دهید.

حل:

H	O	S	S	E	I	N
C8	D6	E2	E2	C5	C9	D5

مثال: رقم ۸ را با سیستم کدگذاری EBCDIC به‌صورت دودویی در حافظهٔ کامپیوتر نمایش دهید.

حل: با روش unpacked، چون ۸ بدون علامت است از این رو طبق جدول

Zone	Digit
۱۱۱۱	۱۰۰۰

قرار داد علامت BCD، علامت آن کُد ۱۱۱۱ دارد.

مثال: عدد ۱۲۷ را با کدگذاری EBCDIC با روش unpacked در حافظه نمایش دهید.

حل: بنا به قرار داد، علامت یک عدد در قسمت Zone یا ناحیهٔ سمت راست‌ترین رقم آن عدد قرار می‌گیرد. به‌صورت:

Zone Digit Zone Digit.....Sign Digit

در نتیجه:

۱		۲		Zone	۷
۱۱۱۱	۰۰۰۱	۱۱۱۱	۰۰۱۰	۱۱۱۱	۰۱۱۱

که به صورت شانزده‌تایی چنین است:

۱	۲	۷
F1	F2	F7

مثال: عدد ۱۲۷+ را با سیستم کدگذاری EBCDIC با روش unpacked در حافظه نمایش دهید.

حل:

۱		۲		+	۷
۱۱۱۱	۰۰۰۱	۱۱۱۱	۰۰۱۰	۱۱۰۰	۰۱۱۱

که به صورت شانزده‌تایی چنین است:

۱		۲		+	۷
F	1	F	2	C	7

درواقع علامت عدد مثبت در این روش C است.

مثال: عدد ۱۲۷− را با سیستم کدگذاری EBCDIC با روش unpacked در حافظه نمایش دهید.

حل:

که به‌صورت شانزده‌تایی چنین است:

۱		۲		−	۷
۱۱۱۱	۰۰۰۱	۱۱۱۱	۰۰۱۰	۱۱۰۱	۰۱۱۱

درواقع علامت عدد منفی در این روش D است.

۱		۲		−	۷
F	1	F	2	D	7

به روش unpacked در زبان اسمبلی IBM، Zoned decimal نیز می‌گویند. در روش فشرده یا packed در کدگذاری EBCDIC، علامت عدد در سمت راست آن قرار می‌گیرد

+۱۲۷ → ۱۲۷+

۲ ــ نمایش اعداد صحیح و اعشاری در کامپیوتر:

برای نمایش اعداد صحیح در حافظهٔ کامپیوتر از سه روش به شرح زیر استفاده می‌شود:

الف. روش قدرمطلق عدد و علامت

ب. روش مکمل ۱

ج. روش مکمل ۲

الف. روش قدر مطلق عدد و علامت. تمام اعداد صحیح مثبت و بدون علامت تنها با این روش نمایش داده

می‌شوند. اما اعداد صحیح منفی علاوه بر روش قدر مطلق عدد و علامت، با دو روش مکمل ۱ و مکمل ۲ نیز نمایش داده می‌شوند. از آنجا که در کامپیوتر شخصی یا Pc ها برای عدد صحیح ۲ بایت اختصاص می‌یابد. سمت چپ‌ترین بیت از ۲ بایت به علامت عدد اختصاصی داده می شود. برای اعداد صحیح مثبت و اعداد صحیح بدون علامت[16]، در بیت علامت صفر ذخیره می‌شود و برای اعداد صحیح منفی در بیت علامت یک ذخیره می‌شود و در بقیهٔ بیت‌ها از چپ به راست قدر مطلق عدد به صورت دودویی ذخیره می‌شود.

مثال: عدد ۷ را در یک کامپیوتر با طول کلمهٔ ۱۶ بیت نمایش دهید.

حل:

۱۵	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱

بیت علامت

مثال : عدد ۷− را در یک کامپیوتر با طول کلمهٔ ۱۶ بیت نمایش دهید.

حل:

۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱

مثال: عدد ۷+ را در یک کامپیوتر با طول کلمهٔ ۱۶ بیت نمایش دهید.

حل:

۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱

برای ادامهٔ بحث راجع به چگونگی ذخیره سازی اعداد صحیح منفی با روش مکمل ۱ و روش مکمل ۲ لازم می‌بینیم قدری دربارهٔ مکمل‌گیری برای یک عدد در یک مبنای دلخواه صحبت کنم.

* واژه نامهٔ ریاضی و کامپیوتر:

1 - Symbol
2 - Dash
3 _ Dot
4 _ Data
5 _ Information
6 - Character
7 - Circuit
8 - Wrrent
9 - Memory
10 - Sign
11 - Compatible
12 - Store
13 - Magnitude
14 - One's Complement
15 - Two's Complement
16 - Unsigned Integer

مسائل مسابقه‌ای

۱ـ اگر درختهای باغی را ۹تا ۹تا یا ۱۲تا ۱۲تا یا ۲۱تا ۲۱تا یا ۲۲تا ۲۲تا یا ۳۹تا ۳۹تا بشمریم هر دفعه ۶ واحد کسر داریم تا تعداد درستی به دست‌آوریم، در باغ حداقل چند درخت وجود دارد؟

۲ـ ثابت کنید اگر A عددی ۲n رقمی با ارقام مساوی یک و B عددی n رقمی با ارقام مساوی ۴ باشند در این‌صورت $N = A + B + 1$ مربع کامل است.

۳ـ ثابت‌کنید: اگر $\frac{a}{a'}<\frac{b}{b'}<\frac{c}{c'}$ آنگاه $\frac{a}{a'}<\frac{a+b+c}{a'+b'+c'}<\frac{c}{c'}$

توان (نما)

(قسمت اول)

(سال اول نظام جدید و قدیم)

● سید محمدرضا هاشمی موسوی

برای آسانترشدن محاسبه، عبارتی مانند: $۲×۲×۲×۲×۲$ را به صورت $۲^{۵}$ می‌نویسیم. و آن را می‌خوانیم «۲ به توان ۵».

به این ترتیب داریم: $۴×۴×۴=۴^{۳}$ و $۳×۳×۳×۳=۳^{۴}$

در عددی مانند $۳^{۴}$، عدد ۳ را پایه و عدد ۴ را توان یا نمای آن عدد می‌نامیم همین‌طور $\left(\frac{۲}{۵}\right)^{۳}$ به معنی «$\frac{۲}{۵}×\frac{۲}{۵}×\frac{۲}{۵}$» است و در عدد $\left(\frac{۲}{۵}\right)^{۳}$، $\frac{۲}{۵}$ پایه و ۳ توان آن عدد است.

عدد $(۳/۴)^{۲}$ نیز که خوانده می‌شود «۳/۴ به توان ۲»، به معنی $(۳/۴)×(۳/۴)$ است. بنابراین اگر a عدد حقیقی و n عدد طبیعی فرض شوند، بنا به تعریف داریم:

$$\underbrace{a×a×a×...×a}_{(\text{n عامل})}=a^{n} \quad (۱) \quad (\text{تعریف})$$

در تعریف (۱) عدد حقیقی a را پایه و عدد طبیعی n را توان (نما) می‌نامیم.

لازم به یادآوری است که توان دوم یک عدد را مجذور آن عدد و توان سوم یک عدد رامکعب آن عدد می‌نامیم.

مثال ۱: اعداد $۲^{۷}$، $۱^{۵}$، $\left(\frac{۴}{۵}\right)^{۳}$، $(۲/۳)^{۲}$ و $۵^{۴}$ را بخوانید. و مفهوم آنها را بنویسید.

حل:

$۲^{۷}=۲×۲×۲×۲×۲×۲×۲$: «۲ به توان ۷»

$۱^{۵}=۱×۱×۱×۱×۱$: «۱ به توان ۵»

$\left(\frac{۴}{۵}\right)^{۳}=\frac{۴}{۵}×\frac{۴}{۵}×\frac{۴}{۵}$: «$\frac{۴}{۵}$ به توان ۳»

$(۲/۳)^{۲}=۲/۳×۲/۳$: «۲/۳ به توان ۲»

$۵^{۴}=۵×۵×۵×۵$: «۵ به توان ۴»

مثال ۲: حاصل هر یک از عبارتهای زیر را حساب کنید.

$۱)\ ۲^{۴}+۵^{۲}$ $۲)\ ۳^{۳}-۴^{۲}$

$۳)\ ۲^{۳}×۳^{۲}$ $۴)\ ۱۰^{۳}÷۵^{۲}$

حل:

$۱)\ ۲^{۴}=۲×۲×۲×۲=۴×۴=۱۶,\ ۵^{۲}=۵×۵=۲۵$

$۲^{۴}+۵^{۲}=۱۶+۲۵=۴۱$

$۲)\ ۳^{۳}=۳×۳×۳=۹×۳=۲۷,\ ۴^{۲}=۴×۴=۱۶$

$۳^{۳}-۴^{۲}=۲۷-۱۶=۱۱$

$۳)\ ۲^{۳}=۲×۲×۲=۴×۲=۸,\ ۳^{۲}=۳×۳=۹$

$۲^{۳}×۳^{۲}=۸×۹=۷۲$

$۴)\ ۱۰^{۳}=۱۰×۱۰×۱۰=۱۰۰×۱۰=۱۰۰۰,\ ۵^{۲}=۵×۵=۲۵$

$۱۰^{۳}÷۵^{۲}=۱۰۰۰÷۲۵=۴۰$

با توجه به تساویهای زیر:

$۲^{۵}=۲×۲×۲×۲×۲,$

$۲^{۴}=۲×۲×۲×۲$ و

$۲^{۳}=۲×۲×۲,\quad ۲^{۲}=۲×۲$

می‌نویسیم $۲=۲^{۱}$، همین‌طور $۳=۳^{۱}$ و $۴=۴^{۱}$.

پس ۲ به توان ۱ مساوی ۲ و به طور کلی هر عدد حقیقی مانند: a به توان ۱ برابر a است. و یا به بیان ریاضی:

$$a^{۱}=a \quad (۲) \quad (\text{تعریف})$$

این تذکر لازم است که هر عدد حقیقی که دارای توان نباشد، توان آن را یک منظور می‌کنیم.

تمرین: حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید.

$۱)\ ۳^{۲}+۴^{۲}$ $۲)\ ۳^{۳}+۴^{۳}+۵^{۳}$

$۳)\ ۲^{۶}-۶^{۲}+۴^{۲}$ $۴)\ ۵^{۴}-۳^{۵}$

$۵)\ ۲^{۵}×\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳}$ $۶)\ \left(۱۰^{۴}÷۵^{۳}\right)÷۲^{۴}$

● ضرب عددهای تواندار با پایه‌های مساوی

می‌دانیم:

$$2^3 \times 2^4 = (2\times 2\times 2)\times(2\times 2\times 2\times 2)$$
$$= 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2 = 2^7$$

پس می‌توان نوشت:

$$2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$$

همین‌طور :

$$5^4 \times 5^5 = 5^{4+5} = 5^9$$
$$3^2 \times 3^3 = 3^{2+3} = 3^5$$
$$(3/4)^3 \times (3/4)^4 = (3/4)^{3+4} = (3/4)^7$$
$$7 \times 7^2 \times 7^3 \times 7^4 \times 7^5 = 7^{1+2+3+4+5} = 7^{15}$$

مثال ۳: عبارتهای زیر را به صورت یک عدد تواندار بنویسید.

۱) $2^5 \times 2^4 \times 2^3 \times 2^2 \times 2$

۲) $5^3 \times 5^4 \times 5^5$

۳) $(1/2)^2 \times (1/2)^3$

۴) $\left(\frac{2}{5}\right)^3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^4 \times \left(\frac{2}{5}\right)^7 \times \left(\frac{2}{5}\right)^{20}$

۵) $(0/2)^2 \times (0/2)^3 \times (0/2)^5 \times (0/2)^4$

۶) $10 \times 100 \times 1000 \times 10000 \times 100000 \times 1000000$

حل :

۱) $2^5 \times 2^4 \times 2^3 \times 2^2 \times 2 = 2^{5+4+3+2+1} = 2^{15}$

۲) $5^3 \times 5^4 \times 5^5 = 5^{3+4+5} = 5^{12}$

۳) $(1/2)^2 \times (1/2)^3 = (1/2)^{2+3} = (1/2)^5$

۴) $\left(\frac{2}{5}\right)^3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^4 \times \left(\frac{2}{5}\right)^7 \times \left(\frac{2}{5}\right)^{20} =$
$\left(\frac{2}{5}\right)^{3+4+7+20} = \left(\frac{2}{5}\right)^{34}$

۵) $(0/2)^2 \times (0/2)^3 \times (0/2)^5 \times (0/2)^4 =$
$(0/2)^{2+3+5+4} = (0/2)^{14}$

۶) $10 \times 100 \times 1000 \times 10000 \times 100000 \times 1000000$
$= 10 \times 10^2 \times 10^3 \times 10^4 \times 10^5 \times 10^6 =$
$10^{1+2+3+4+5+6} = 10^{21}$

با توجه به مثالهای اخیر دستور زیر را می‌توان بیان کرد:

۱) در ضرب عددهای تواندار اگر پایه‌ها مساوی باشند، کافی‌است یک پایه را نوشته، نماها را با هم جمع کنیم.

به طور کلی اگر a یک عدد حقیقی و m و n عددهای طبیعی باشند، بیان ریاضی دستور (۱) چنین است:

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \qquad (1)$$

مثال ۴: با فرض این که a یک عدد حقیقی است. حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به شکل یک عدد تواندار بنویسید.

۱) $a \times a^2 \times a^3 \times a^4$

۲) $a^{20} \times a^{14}$

۳) $a^{34} \times a^{34}$

۴) $a^{100} \times a^{20} \times a^{10} \times a^3 \times a$

۵) $a^{1000} \times a^{300} \times a^{70} \times a^4$

حل :

۱) $a \times a^2 \times a^3 \times a^4 = a^{1+2+3+4} = a^{10}$

۲) $a^{20} \times a^{14} = a^{20+14} = a^{34}$

۳) $a^{34} \times a^{34} = a^{68}$

۴) $a^{100} \times a^{20} \times a^{10} \times a^3 \times a = a^{100+20+10+3+1} = a^{134}$

۵) $a^{1000} \times a^{300} \times a^{70} \times a^4 = a^{1000+300+70+4} = a^{1374}$

تمرین: با فرض این که a یک عدد حقیقی است و m و n اعداد طبیعی باشند حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به شکل یک عدد تواندار بنویسید.

۱) $a^{3m+n} \times a^{2m+n} \times a^n \times a^m \times a^{3n}$

۲) $a^{m^2+n^2} \times a^{2mn}$

۳) $a^{2m^2} \times a^{2n^2} \times a^{4mn}$

۴) $a^1 \times a^2 \times a^3 \times a^4 \times a^{11n-10}$

۵) $a^{n^3} \times a^{3n^2} \times a^{3n} \times a^1$

۶) $a \times a^2 \times a^3 \times \ldots \times a^n$

(راهنمایی: $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$)

● ضرب عددهای تواندار با نماهای مساوی

می‌دانیم:

$$2^3 \times 3^3 = (2\times 2\times 2)\times(3\times 3\times 3)$$

$= (2\times 3)\times(2\times 3)\times(2\times 3) = (2\times 3)^3 = 6^3$

پس می‌توان نوشت:

$2^3\times 3^3 = (2\times 3)^3 = 6^3$

همین طور می‌توان نوشت:

$1^5\times 2^5\times 3^5 = (1\times 2\times 3)^5 = 6^5$

$3^4\times 3^4 = (3\times 3)^4 = 9^4$

$2^{30}\times 3^{30} = (2\times 3)^{30} = 6^{30}$

با توجه به مثالهای اخیر، دستور زیر را می‌توان بیان کرد:

۲) در ضرب عددهای توان‌دار، اگر نماها مساوی باشند، کافی است نمای یکی از عددها را برای حاصلضرب پایه‌ها قرار دهیم.

به طور کلی اگر n عدد طبیعی، و a و b عددهای حقیقی باشند، بیان ریاضی دستور (۲) چنین است:

$$a^n\times b^n = (a\times b)^n \qquad (2)$$

مثال ۵: با فرض این که a و b عددهای حقیقی و m و n عددهای طبیعی باشند، حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به شکل یک عدد توان‌دار بنویسید.

۱) $a^5\times b^6\times a^4\times b^3$

۲) $a^m\times a^n\times b^{n+m}$

۳) $a^m\times b^n\times a^n\times b^m$

۴) $a^m\times a^m\times a^n\times a^n\times b^{2n}\times b^{2m}$

۵) $a^{40}\times b^{20}\times a^{20}\times b^{25}\times b^{15}$

۶) $a^{70}\times b^4\times a^4\times b^{70}$

حل:

۱) $a^5\times b^6\times a^4\times b^3 = (a^5\times a^4)\times(b^6\times b^3)$
$= (a^{5+4})\times(b^{6+3})$
$= a^9\times b^9 = (a\times b)^9$

۲) $a^m\times a^n\times b^{n+m} = (a^m\times a^n)\times b^{m+n}$
$= a^{m+n}\times b^{m+n} = (a\times b)^{m+n}$

۳) $a^m\times b^n\times a^n\times b^m = (a^m\times a^n)\times(b^n\times b^m)$
$= a^{m+n}\times b^{n+m}$
$= (a^{m+n})\times(b^{m+n}) = (a\times b)^{m+n}$

۴) $a^m\times a^m\times a^n\times a^n\times b^{2n}\times b^{2m}$
$= (a^m\times a^m\times a^n\times a^n)\times(b^{2n}\times b^{2m})$
$= (a^{m+m+n+n})\times(b^{2n+2m})$
$= a^{2m+2n}\times b^{2m+2n} = (a\times b)^{2m+2n}$

۵) $a^{40}\times b^{20}\times a^{20}\times b^{25}\times b^{15}$
$= (a^{40}\times a^{20})\times(b^{20}\times b^{25}\times b^{15})$
$= (a^{40+20})\times(b^{20+25+15})$
$= a^{60}\times b^{60} = (a\times b)^{60}$

۶) $a^{70}\times b^4\times a^4\times b^{70} = (a^{70}\times a^4)\times(b^{70}\times b^4)$
$= (a^{70+4})\times(b^{70+4})$
$= a^{74}\times b^{74} = (a\times b)^{74}$

تمرین: با فرض این که a و b عددهای حقیقی و m و n عددهای طبیعی باشند، حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به شکل یک عدد توان‌دار بنویسید.

۱) $a^{30}\times b^4\times a^2\times b^{31}\times b\times a^4$

۲) $a^{m+n}\times b^m\times b^n\times a^{m+n}\times b^{m+n}$

۳) $a^m\times a^n\times b^m\times b^n\times(a\times b)^{m+n}$

۴) $a\times b\times a^2\times b^2\times a^3\times b^3\times a^4\times b^4$

● تقسیم عددهای توان‌دار با پایه‌های مساوی

به تقسیم زیر توجه کنید:

$$2^6\div 2^4 = \frac{2^6}{2^4} =$$

$$\frac{\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{2}\times 2\times 2}{\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{2}} = 2^2 = 4$$

این تقسیم را می‌توان به طور مختصر چنین انجام داد:

$$2^6\div 2^4 = 2^{6-4} = 2^2 = 4$$

همچنین:

$$5^5\div 5^2 = \frac{\cancel{5}\times\cancel{5}\times 5\times 5\times 5}{\cancel{5}\times\cancel{5}} = 5^3$$

و به طور مختصر می‌توان نوشت:

$$5^5\div 5^2 = 5^{5-2} = 5^3$$

مثال ۶: حاصل تقسیمهای زیر را پیدا کنید.

۱) $5^{20}\div 5^{18}$ ۲) $2^{12}\div 2^7$

۳) $7^{45}\div 7^{44}$ ۴) $3^{134}\div 3^{132}$

حل :

۱) $5^{20} \div 5^{18} = 5^{20-18} = 5^{2} = 25$

۲) $2^{12} \div 2^{7} = 2^{12-7} = 2^{5} = 32$

۳) $7^{45} \div 7^{44} = 7^{45-44} = 7^{1} = 7$

۴) $3^{134} \div 3^{132} = 3^{134-132} = 3^{2} = 9$

با توجه به مثالهای اخیر دستور زیر را می‌توان بیان کرد:

۳) برای تقسیم دو عدد توانی با پایه‌های مساوی، کافی است یک پایه را بنویسیم و نمای مقسوم‌علیه را از نمای مقسوم کم کنیم.

به طور کلی اگر a یک عدد حقیقی مخالف صفر و m و n عددهای طبیعی باشند، بیان ریاضی دستور (۳) چنین است:

$$a^{m} \div a^{n} = a^{m-n} \qquad (3)$$

مثال ۷: با فرض این که a و b عددهای حقیقی مخالف صفر باشند. حاصل هر عبارت را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

۱) $a^{5} \div a^{3}$

۲) $\dfrac{a^{7} \times b^{5}}{b^{2} \times a^{4}}$

۳) $\dfrac{a^{37} \times b^{40} \times a^{4} \times b^{5} \times a^{3} \times a \times b^{34}}{a^{3} \times b^{30} \times b^{15} \times a^{5} \times a^{3}}$

۴) $\dfrac{a^{132} \div a^{72}}{a^{37} \div a^{17}}$

۵) $\dfrac{a^{76} + a^{78}}{a^{4} + a^{2}}$

۶) $\dfrac{a \times a^{2} \times a^{3} \times b \times b^{2} \times b^{3}}{(a \times b)^{4}}$

حل:

۱) $a^{5} \div a^{3} = a^{5-3} = a^{2}$

۲) $\dfrac{a^{7} \times b^{5}}{b^{2} \times a^{4}} = \dfrac{a^{7}}{a^{4}} \times \dfrac{b^{5}}{b^{2}} = a^{7-4} \times b^{5-2} = a^{3} \times b^{3}$
$= (a \times b)^{3}$

۳) $\dfrac{a^{37} \times b^{40} \times a^{4} \times b^{5} \times a^{3} \times a \times b^{34}}{a^{3} \times b^{30} \times b^{15} \times a^{5} \times a^{3}}$

$= \dfrac{(a^{37} \times a^{4} \times a^{3} \times a) \times (b^{40} \times b^{5} \times b^{34})}{(a^{3} \times a^{5} \times a^{3}) \times (b^{30} \times b^{15})}$

$= \dfrac{a^{37+4+3+1} \times b^{40+5+34}}{a^{3+5+3} \times b^{30+15}}$

$= \dfrac{a^{45} \times b^{79}}{a^{11} \times b^{45}} = \dfrac{a^{45}}{a^{11}} \times \dfrac{b^{79}}{b^{45}} = a^{45-11} \times b^{79-45}$

$= a^{34} \times b^{34} = (a \times b)^{34}$

۴) $\dfrac{a^{132} \div a^{72}}{a^{37} \div a^{17}} = \dfrac{a^{132-72}}{a^{37-17}} = \dfrac{a^{60}}{a^{20}} = a^{60-20} = a^{40}$

۵) $\dfrac{a^{76} + a^{78}}{a^{4} + a^{2}} = \dfrac{a^{76}(1+a^{2})}{a^{2}(a^{2}+1)} =$

$\dfrac{a^{76}}{a^{2}} \times \dfrac{a^{2}+1}{a^{2}+1} = a^{76-2} \times 1 = a^{74}$

۶) $\dfrac{a \times a^{2} \times a^{3} \times b \times b^{2} \times b^{3}}{(a \times b)^{4}} =$

$\dfrac{a^{1+2+3} \times b^{1+2+3}}{(a \times b)^{4}} = \dfrac{a^{6} \times b^{6}}{(a \times b)^{4}} =$

$\dfrac{(a \times b)^{6}}{(a \times b)^{4}} = (a \times b)^{6-4} = (a \times b)^{2}$

تمرین: با فرض این که a و b عددهای حقیقی مخالف صفر باشند. حاصل هر عبارت را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

۱) $\dfrac{(a^{7} \div a^{5}) \times (b^{5} \div b^{3})}{(b^{36} \div b^{32}) \times (a^{12} \div a^{8})} \times \dfrac{a^{10} \div a^{2}}{b^{3} \div b} \times \dfrac{b^{20} \div b^{12}}{a^{6} \div a^{4}}$

۲) $\dfrac{a^{123} \div a^{23}}{b^{154} \div b^{104}} \times \dfrac{b^{120} \div b^{70}}{a^{7} \div a^{4}}$

۳) $\dfrac{a^{82} + a^{78}}{a^{8} + a^{4}} \times \dfrac{b^{78} + b^{82}}{b^{8} + b^{4}}$

۴) $\dfrac{a^{1378} \div a^{2}}{a^{50} \div a^{48}}$

● تقسیم عددهای توان‌دار با نماهای مساوی

به تقسیم زیر توجه کنید:

$6^{4} \div 2^{4} = \dfrac{6^{4}}{2^{4}} = \dfrac{6 \times 6 \times 6 \times 6}{2 \times 2 \times 2 \times 2} =$

$$=\frac{\cancel{۲}\times ۳\times \cancel{۲}\times ۳\times \cancel{۲}\times ۳\times \cancel{۲}\times ۳}{\cancel{۲}\times \cancel{۲}\times \cancel{۲}\times \cancel{۲}} = ۳\times ۳\times ۳\times ۳ = ۳^۴$$

این تقسیم را می‌توان به طور مختصر چنین انجام داد:

$$۶^۴ \div ۲^۴ = \frac{۶^۴}{۲^۴} = \left(\frac{۶}{۲}\right)^۴ = ۳^۴$$

همچنین:

$$۹^۶ \div ۳^۶ = \frac{۹^۶}{۳^۶} = \left(\frac{۹}{۳}\right)^۶ = ۳^۶$$

$$۱۵^۷ \div ۵^۷ = \frac{۱۵^۷}{۵^۷} = \left(\frac{۱۵}{۵}\right)^۷ = ۳^۷$$

$$۳۲^۵ \div ۸^۵ = \frac{۳۲^۵}{۸^۵} = \left(\frac{۳۲}{۸}\right)^۵ = ۴^۵$$

با توجه به مثالهای اخیر دستور زیر را می‌توان بیان کرد:

۴) برای تقسیم دو عدد توانی که دارای نمای مساویند، کافی است نمای یکی از دو عدد را برای حاصل تقسیم پایه‌ها قرار دهیم.

به طور کلی اگر n عدد طبیعی و a یک عدد حقیقی و b عدد حقیقی مخالف صفر باشند، بیان ریاضی دستور (۴) چنین است:

$$a^n \div b^n = \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \qquad (۴)$$

مثال ۸: با فرض این که a و b عددهای حقیقی مخالف صفر باشند، حاصل هر عبارت را به صورت عددی تواندار بنویسید.

۱) $a^۷ \div (a^۲ \times b^۵)$

۲) $\frac{a^۷ \div a^۴}{b^۵ \div b^۲}$

۳) $\frac{a^۴ \times b^۴ \times a^۳ \times b}{b^۷ \times a^۲ \times b^۲ \times a}$

۴) $\frac{a^۵ \times a^۲}{b^{۱۲} \div b^۵}$

حل:

۱) $a^۷ \div (a^۲ \times b^۵) = \frac{a^۷}{a^۲ \times b^۵} = \frac{\cancel{a^۲} \times a^۵}{\cancel{a^۲} \times b^۵} = \frac{a^۵}{b^۵} = \left(\frac{a}{b}\right)^۵$

۲) $\frac{a^۷ \div a^۴}{b^۵ \div b^۲} = \frac{a^{۷-۴}}{b^{۵-۲}} = \frac{a^۳}{b^۳} = \left(\frac{a}{b}\right)^۳$

۳) $\frac{a^۴ \times b^۴ \times a^۳ \times b}{b^۷ \times a^۲ \times b^۲ \times a} = \frac{a^۴ \times a^۳ \times (b^۴ \times b)}{b^۷ \times b^۲ \times (a^۲ \times a)}$

$$= \frac{\cancel{a^۳} \times a^۴ \times \cancel{b^۵}}{\cancel{b^۵} \times b^۲ \times b^۲ \times \cancel{a^۳}} = \frac{a^۴}{b^۴} = \left(\frac{a}{b}\right)^۴$$

۴) $\frac{a^۵ \times a^۲}{b^{۱۲} \div b^۵} = \frac{a^{۵+۲}}{b^{۱۲-۵}} = \frac{a^۷}{b^۷} = \left(\frac{a}{b}\right)^۷$

تمرین: با فرض این که a و b عددهای حقیقی مخالف صفر و m و n عددهای طبیعی باشند، حاصل هر یک از عبارتهای زیر را حساب کنید.

۱) $\frac{a^۵ \times b^۳ \times a^۲ \times b^۴}{b^۵ \times a^۳ \times b^۲ \times a^۴}$

۲) $\frac{a^m \times b^n \times b^m \times a^n}{b^m \times a^n \times a^m \times b^n}$

۳) $\frac{a^m \times a^m}{b^m \times b^m}$

۴) $\frac{a \times a^۲ \times a^۳ \times a^۴ \times a^۵}{b \times b^۲ \times b^۳ \times b^۴ \times b^۵}$

۵) $\frac{a^m \times a^n}{b^n \times b^m}$

۶) $\frac{a \times a^۲ \times \ldots \times a^n}{b \times b^۲ \times \ldots \times b^n}$

● توان صفر

به مثال زیر توجه کنید:

$$۸ \div ۸ = ۱ \qquad (۱)$$

از طرفی دیگر با توجه به دستور تقسیم توانی با پایه‌های مساوی می‌توان نوشت:

$$۸ \div ۸ = ۲^۳ \div ۲^۳ = ۲^{۳-۳} = ۲^۰ \qquad (۲)$$

بنابراین از تساویهای (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$۱ = ۲^۰$$

همچنین :

$$۵^۰ = ۱ \,,\ \left(\frac{۲}{۳}\right)^۰ = ۱ \,,\ (۳/۴)^۰ = ۱ \,,$$

$$(-۱۰۰۰)^۰ = ۱ \,,\ (۰/۰۰۰۱)^۰ = ۱$$

و به طور کلی هر عدد حقیقی مخالف صفر مانند: a به توان صفر، برابر ۱ است. و یا به بیان ریاضی:

$$a^۰ = ۱ \quad (a \neq ۰) \qquad \text{(تعریف)}$$

لازم به ذکر است که صفر به توان صفر (0^0) بی‌معنی است. (در آینده در مبحث حد نشان داده می‌شود که 0^0 یکی از صورتهای مبهم است.)

● توان رساندن یک عدد توان‌دار

به مثالهای زیر توجه کنید:

$$\left(3^4\right)^3=\left(3^4\right)\times\left(3^4\right)\times\left(3^4\right)=3^{4+4+4}=3^{12}=3^{(4\times3)}$$

$$\left(2^5\right)^4=\left(2^5\right)\times\left(2^5\right)\times\left(2^5\right)\times\left(2^5\right)=$$
$$2^{5+5+5+5}=2^{20}=2^{(5\times4)}$$

$$\left(5^3\right)^2=\left(5^3\right)\times\left(5^3\right)=5^{3+3}=5^6=5^{(3\times2)}$$

$$\left(7^5\right)^3=\left(7^5\right)\times\left(7^5\right)\times\left(7^5\right)=7^{5+5+5}=7^{15}=7^{(5\times3)}$$

با توجه به مثالهای اخیر، دستور زیر را می‌توان بیان کرد:

۵) برای به توان رساندن یک عدد توان‌دار کافی است پایه را بنویسیم و توانها را در هم ضرب کنیم. به طور کلی اگر a یک عدد حقیقی و m و n عددهای صحیح باشند، بیان ریاضی دستور (۵) چنین است:

$$\left(a^m\right)^n=a^{m\times n} \qquad (5)$$

توجه داشته باشیم که $\left(a^m\right)^n$ با a^{m^n} فرق دارد. برای مثال $2^6=(2^2)^3$ و $2^8=2^{2^3}$.

همچنین به مثال زیر توجه کنید:

$$(2^3\times3^2)^3=(2^3\times3^2)\times(2^3\times3^2)\times(2^3\times3^2)$$
$$=(2^3\times2^3\times2^3)\times(3^2\times3^2\times3^2)$$
$$=2^{3+3+3}\times3^{2+2+2}=2^9\times3^6$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$(2^3\times3^2)^3=2^9\times3^6$$

بنابراین در حالت کلی اگر a و b عددهای حقیقی و m ،k و n عددهای صحیح باشند، داریم:

$$(a^k\times b^m)^n=a^{k\times n}\times b^{m\times n}$$

مثال ۹: با فرض این که a و b عددهای حقیقی باشند، حاصل هر عبارت را به صورت عددی توان‌دار بنویسید.

۱) $(a^3)^4\times(b^4)^3$

۲) $(a^2)^3\times(a^3)^4\times(b^3)^2\times(b^4)^3$

حل: با استفاده از دستور (۵) داریم:

۱) $(a^3)^4\times(b^4)^3=a^{3\times4}\times b^{4\times3}$
$=a^{12}\times b^{12}=(a\times b)^{12}$

۲) $(a^2)^3\times(a^3)^4\times(b^3)^2\times(b^4)^3$
$=a^{2\times3}\times a^{3\times4}\times b^{3\times2}\times b^{4\times3}=a^6\times a^{12}\times b^6\times b^{12}$
$=a^{6+12}\times b^{6+12}=a^{18}\times b^{18}=(a\times b)^{18}$

● توان منفی

به مثال زیر توجه کنید:

$$2^5\div2^7=2^{5-7}=2^{-2} \qquad (1)$$

عدد 2^{-2} طبق تعریفی که برای توانهای طبیعی کردیم، معنی ندارد. از طرف دیگر می‌دانیم که:

$$2^5\div2^7=\frac{2^5}{2^7}=\frac{\cancel{2^5}}{\cancel{2^5}\times2^2}=\frac{1}{2^2} \qquad (2)$$

بنابراین از تساویهای (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$2^{-2}=\frac{1}{2^2}$$

همچنین:

$$3^{-5}=\frac{1}{3^5}\ ,\ \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}=\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^4}=\left(\frac{3}{2}\right)^4\ ,$$

$$(2/5)^{-7}=\frac{1}{(2/5)^7}\ ,\ (2^{-5})^4=2^{-20}=\frac{1}{2^{20}}\ ,$$

$$\left((5^{-2})^{-3}\right)^{-5}=\left(5^6\right)^{-5}=5^{-30}=\frac{1}{5^{30}}$$

به طور کلی برای هر عدد حقیقی مخالف صفر مانند: a و هر عدد طبیعی n، بنا به تعریف:

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$$

توجه داشته باشید که ax^{-n} با $(ax)^{-n}$ فرق دارد.

مثال ۱۰: عبارتهای زیر را ساده کنید. و هر یک را با توان مثبت نشان دهید.

۱) $\frac{5^{-3}}{5^{-2}}$

۲) $\frac{5^{-15}\times5^4}{5^{-3}\times5^{-4}}$

۳) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2$

۴) $\left((3^{-2})^3\right)^3\times(3^5)^{-2}$

حل:

۱) $\frac{5^{-3}}{5^{-2}}=5^{-3-(-2)}=5^{-3+2}=5^{-1}=\frac{1}{5}$

۲) $\frac{5^{-15}\times5^{4}}{5^{-3}\times5^{-4}}=\frac{5^{-15+4}}{5^{-3+(-4)}}$

$=\frac{5^{-11}}{5^{-7}}=5^{-11-(-7)}=5^{-11+7}=5^{-4}=\frac{1}{5^4}=(\frac{1}{5})^4$

۳) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{2}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-3+2}$

$=\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}=\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}$

۴) $\left((3^{-2})^3\right)^3\times(3^5)^{-2}$

$=\left(3^{-6}\right)^3\times3^{-10}=3^{-18}\times3^{-10}$

$=3^{-18-10}=3^{-28}=\frac{1}{3^{28}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{28}$

مثال ۱۱: اگر a و x اعداد حقیقی مخالف صفر و m و n عددهای صحیح باشند. حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

۱) $(a^{-m})^n\times(a^{-n})^{-m}$

۲) $x^n\div x^{n+1}$

۳) $2\times a^{-5}\times(2\times a)^5\times(2\times a)^{-3}$

۴) $\frac{x^{-3}\times x^{-2}\times x^{-4}\times x^{5}}{x^{5}\div(x^{-3})^{-3}}$

۵) $\frac{a^{m+n}\div a^{m-n}}{a^{2n-1}}$

۶) $\frac{a^{2}\times a^{-3}}{a^{4}\times a^{-5}}$

۷) $\frac{x^{-6}\times(x^{-2})^{-2}}{x^{7}\times x^{-5}}$

۸) $\frac{x^{-5}\div x^{-3}}{x^{5}\div x^{-7}}$

حل:

۱) $(a^{-m})^n\times(a^{-n})^{-m}=a^{(-m)\times n}\times a^{(-n)\times(-m)}=$

$a^{-mn}\times a^{nm}=a^{-mn+mn}=a^0=1$

۲) $x^n\div x^{n+1}=x^{n-(n+1)}=x^{n-n-1}=x^{-1}=\frac{1}{x}$

۳) $2\times a^{-5}\times(2\times a)^5\times(2\times a)^{-3}=$

$2\times a^{-5}\times2^5\times a^5\times2^{-3}\times a^{-3}$

$=(2\times2^5\times2^{-3})\times(a^{-5}\times a^5\times a^{-3})$

$=(2^{1+5-3})\times(a^{-5+5-3})=2^3\times a^{-3}=\frac{2^3}{a^3}=(\frac{2}{a})^3$

۴) $\frac{x^{-3}\times x^{-2}\times x^{-4}\times x^{5}}{x^{5}\div(x^{-3})^{-3}}=\frac{x^{-3-2-4+5}}{x^5\div x^9}=\frac{x^{-4}}{x^{5-9}}=$

$\frac{x^{-4}}{x^{-4}}=x^{-4+4}=x^0=1$

۵) $\frac{a^{m+n}\div a^{m-n}}{a^{2n-1}}=\frac{a^{m+n-(m-n)}}{a^{2n-1}}=$

$\frac{a^{m+n-m+n}}{a^{2n-1}}=\frac{a^{2n}}{a^{2n-1}}=a^{2n-(2n-1)}=a^{2n-2n+1}=a^1=a$

۶) $\frac{a^{2}\times a^{-3}}{a^{4}\times a^{-5}}=\frac{a^{2-3}}{a^{4-5}}=\frac{a^{-1}}{a^{-1}}=a^{-1-(-1)}=a^{-1+1}=a^0=1$

۷) $\frac{x^{-6}\times(x^{-2})^{-2}}{x^{7}\times x^{-5}}=\frac{x^{-6}\times x^{4}}{x^{7}\times x^{-5}}=$

$\frac{x^{-6+4}}{x^{7-5}}=\frac{x^{-2}}{x^{2}}=x^{-2-2}=x^{-4}=\frac{1}{x^4}=\left(\frac{1}{x}\right)^4$

۸) $\frac{x^{-5}\div x^{-3}}{x^{5}\div x^{-7}}=\frac{x^{-5-(-3)}}{x^{5-(-7)}}=\frac{x^{-5+3}}{x^{5+7}}=$

$\frac{x^{-2}}{x^{12}}=x^{-2-12}=x^{-14}=\frac{1}{x^{14}}=(\frac{1}{x})^{14}$

تمرین: اگر a و b و c اعداد حقیقی مخالف صفر و m و n اعداد صحیح باشند. حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

۱) $\frac{(a^{-m})^{-m}\times(a^{-n})^{-n}\times(a^{m})^{2n}}{(b^{-m})^{-m}\times(b^{-n})^{-n}\times(b^{2n})^{m}}$

(جواب: $(\frac{a}{b})^{(m+n)^2}$)

۲) $\left(\frac{2^3\times3^3\times a^{-5}\times b^{-4}\times c^{-3}}{2a^{-3}\times4b^{-2}\times9c^{-1}\times3}\right)^{-3}$

(جواب: $(abc)^6$)

Mathematics:
The New Golden Age
Keith Devlin
ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

مسألهٔ دهم هیلبرت

مقالات کوتاه از مجله‌های ریاضی معتبر جهان (۱۴)

یک مجمع تاریخی

در اوت ۱۹۰۰ بهترین ریاضیدانهای جهان برای دومین کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان[۲] در پاریس گرد آمدند (واقعه‌ای، که جز در دوران جنگ، به برقرار شدن در هر چهار سال یکبار در یکی از حوزه‌های دارای صلاحیت دنیا ادامه داده است). دیوید هیلبرت[۳]، استاد ۳۸ سالهٔ دانشگاه گوتینگن[۴] از میان این ریاضیدانها بود. قرار بر این بود که هیلبرت، به عنوان یکی از سردمداران ریاضی آن زمان یکی از نطقهای مهم همایش[۵] مزبور را انجام دهد. روزی که برای این کار در نظر گرفته بودند هشتم اوت بود.

از آنجا که همایش مورد بحث در اولین سال قرن بیستم انجام می‌گرفت (در واقع، برای نیل به این منظور یک سال جلوتر آورده شده بود)، هیلبرت در سخنرانی‌اش نه به بررسی بعضی از کارهای متأخر (که قالب معمول صحبتهایی چنین بود)، بلکه به اشاره به کارهای آینده پرداخت.

وی چنین فریاد زد: «این ندای دایمی را در درون خود می‌شنویم که: این همان مسأله است. علتش را جستجو کن. می‌توانی آن را با برهان بیابی، زیرا در ریاضیات **لاادری**[۶] وجود ندارد.»

و برای تأیید این ندا به همایش مزبور نه یکی بلکه فهرستی از بیست و سه مسألهٔ مهم حل نشده[۷] ارائه داد. مسایلی که راه حل هر یک از آنها، در صورت یا ، شدن، پیشرفت مهمی را در دانش ریاضی رقم خواهد زد.

غالب مسایل مزبور با اسامی خاصی، چون **مسألهٔ پیوستار**[۸] (اولین مسأله در فهرست هیلبرت) یا **مسألهٔ ریمان**[۹] معروف بودند (یا شدند)، اما یکی از آنها بخصوص با مکانش در این فهرست معروفیت عام یافت: مسألهٔ دهم، منشاء *مسألهٔ* دهم هیلبرت کتاب درسی جبری، به نام *حساب*[۱۰]، نوشته شده در حدود ۲۵۰ ب. م. توسط دیوفانت اسکندرانی[۱۱] است.

امروزه ریاضیدانها مطابق با انواع مسایل بررسی شده در این رساله، از نام *معادلهٔ دیوفانتی*[۱۲] برای اشاره به هر معادلهٔ در یک یا بیش‌تر از یک متغیر، با ضرایب صحیحی استفاده می‌کنند، که جواب مورد جستجوی آن کلاً شامل *اعداد صحیح*[۱۳] باشد. شرط اخیر است که ریاضیات معادلات دیوفانتی را اصلاً از جواب معادلات برحسب اعداد حقیقی[۱۴] (یا امکاناً اعداد مختلط[۱۵]) متفاوت می‌کند. (در واقع فهرست اصطلاحات مربوطه در ابتدا اندکی گیج کننده است. کاربرد صفتی کلمهٔ «دیوفانتی» آنقدرها که به نوع جواب مورد جستجو اشاره دارد به خود معادله ندارد. به این ترتیب به معادلهٔ

$$3x^2 - 5y^3 + 2xy = 0$$

در صورتی که جوابهای حقیقی ـ مقدار[۱۶] مورد جستجو باشند به عنوان «معادله» و اگر جوابهای صحیح مورد نظر باشند به صورت «معادلهٔ دیوفانتی» اشاره می‌کنیم.)

حل معادلات دیوفانتی کاملاً متفاوت از حل همان معادلات

برحسب اعداد حقیقی است. به عنوان نمونه، اگر معادلهٔ

(۱) $x^2 + y^2 = 2$

را در نظر بگیریم، و آن را به عنوان معادله‌ای منظم برای اعداد حقیقی به شمار آوریم، در این صورت بی‌نهایت جواب داریم. با معلوم بودن هر عدد حقیقی r بین $-\sqrt{2}$ و $+\sqrt{2}$

اگر فرض کنیم $S = +\sqrt{2 - r^2}$

در این صورت $x = r$، $y = s$ جوابی را به دست می‌دهد.

اما، چون آن را به عنوان معادله‌ای دیوفانتی در نظر آوریم، تنها چهار جواب موجود می‌شوند:

$x = +1,\ y = +1;\ x = +1,\ y = -1$

$x = -1,\ y = +1;\ x = -1,\ y = -1$

اگر معادلهٔ مورد بحث را اندکی تغییر دهیم، مثلاً به

(۲) $x^2 + y^2 = 3$

در این صورت باز هم بی‌نهایت جواب حقیقی موجودند اما به هیچ وجه جواب صحیح نداریم.

معادلهٔ (۲) را نمی‌توان حل کرد. بنابراین تفاوت بین (۱) و (۲) چیست؟

به صورت عمومی‌تر، آیا راهی برای گفتن این که هر معادله دیوفانتی مفروضی را می‌توان حل کرد یا خیر وجود دارد؟ به‌عبارت دیگر، امکان نوشتن برنامه‌ای کامپیوتری که، با معلوم بودن معادله‌ای دیوفانتی، بگوید که جوابی موجود است یا خیر، هست؟

در اصل این همان سؤالی است که هیلبرت به عنوان مسألهٔ دهم فهرست مسایلش مطرح کرد. جواب آن در ۱۹۷۰ توسط یوری ماتیا سویچ[17] ریاضیدان ۲۲ سالهٔ روسی تنها بعد از کارهای بسیاری که در مورد مسأله با کشیده شدن به دههٔ ۱۹۳۰ و استفاده از نتایج واقع در منطق ریاضی[18]، نظریهٔ محاسبات[19]، جبر انجام گرفتند، به دست آمد.

معادلات دیوفانتی و الگوریتم اقلیدسی

ساده‌ترین نوع معادلهٔ دیوفانتی معادله‌ای خطی[20]، با یک مجهول[21] است. در واقع تنها خبری که از زندگی دیوفانت داریم خود به صورت چنین معادله‌ای است. مسأله‌ای قرن چهارمی بر این است که دوران کودکی وی یک ششم حیاتش طول کشیده، ریشش پس از یک دوازدهم آن روییده، و بعد یک هفتم آن ازدواج کرده است؛ پسرش ۵ سال بعد متولد شده و نصف عمر پدر زندگی کرده و چهار سال پیش از وی مرده است. اگر سنی را که در آن دیوفانت مرده با x نمایش بدهیم، اطلاعات فوق معادلهٔ

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x$$

را که جواب $x = 84$ را داراست به دست می‌دهد. (دقیق‌تر باشیم این معادله دیوفانتی نیست زیرا ضرایب آن اعداد صحیح نیستند، اما با ضرب طرفین آن در کوچکترین مضرب مشترک تمام مخرجهای واقع در ضرایب آن، معادله‌ای با ضرایب صحیح به دست می‌آوریم.)

چه دیوفانت ۸۴ سال زندگی کرده باشد چه نه، این واقعیت پابرجاست که حل معادلهٔ دیوفانتی خطی یک مجهولی موضوعی ساده است. معادلهٔ

$ax = b$

دارای جواب صحیح است اگر، و تنها اگر a، b را (به طور کامل) بشمارد، که در این حال جواب مزبور عدد صحیح b/a است.

این شرط به قدری ساده است که نوشتن برنامه‌ای کامپیوتری که جواب داشتن یا نداشتن معادله‌ای چنین را بلافاصله بگوید آسان است.

اما در مورد معادلهٔ دیوفانتی خطی دو مجهولی چه می‌توان گفت؟ باز هم راهی ساده برای پیدا کردن وجود یا عدم وجود جواب در دست است. برای ملاحظهٔ این که معادلهٔ

$ax + by = c$

جوابی صحیح دارد یا نه، ابتدا بزرگترین عامل مشترک a و b، مثلاً d، را محاسبه می‌کنیم. اگر d، c را بشمارد، جواب داریم، اگر d، c را نشمارد جوابی موجود نیست.

به عنوان مثال، آیا معادلهٔ

$6x + 25y = 12$

دارای جواب است؟ خوب، بزرگترین عامل مشترک ۶ و ۱۵ عدد ۳ است، و ۳، ۱۲ را می‌شمارد، بنابراین جوابی موجود است. (فی‌المثل، $x = 7$، $y = -2$ مسألهٔ مورد بحث را حل می‌کند.)

توجه داشته باشید که، در یک معادلهٔ دیوفانتی مفروض، مشخص کردن این که جوابی برای آن وجود دارد یا نه به هیچ وجه مساوی یافتن جوابی نیست. چه ممکن است بتوان وجود یک جواب را به آسانی بسیار مشخص کرد، و با این همه پیدا کردن جواب عملاً بسیار مشکل باشد. (گرچه، برعکس، اگر چگونگی یافتن جوابی را بدانیم آنگاه بلافاصله می‌دانیم که جوابی موجود است! اگر بتوانیم چیزی را به دست آوریم، آن چیز باید موجود باشد، در حالی که اشیا می‌توانند بدون به دست آمدن وجود داشته باشند.)

در مورد معادلات دیوفانتی خطی دو مجهولی نه تنها راه ساده‌ای برای مشخص کردن وجود یا عدم وجود جواب موجود است، بلکه فرایندی مکانیکی[22] برای یافتن جواب، البته در صورت وجود، نیز در دست است. جزییات کامل را می‌توان در اغلب کتابهای درسی مربوط به نظریهٔ اعداد یافت[23]. کلید راه حل مورد بحث الگوریتم اقلیدسی[24] برای تعیین بزرگترین عامل مشترک، موصوف در زیر است.

با معلوم بودن دو عدد x و y، فرض می‌کنیم $x \bmod y$ باقیماندهٔ تقسیم x بر y را نمایش دهد. برای محاسبهٔ بزرگترین عامل مشترک دو عدد مفروض a و b، با a ی بزرگ‌تر از b، به طریق زیر عمل می‌کنیم.

فرض می‌کنیم $a \bmod b = r_1$، در این صورت فرض می‌کنیم $b \bmod r_1 = r_2$، سپس فرض می‌کنیم $r_1 \bmod r_2 = r_3$. به این طریق ادامه می‌دهیم تا باقیماندهٔ صفر به دست آید: $r_{n-1} \bmod r_n = 0$ در این صورت r_n بزرگترین عامل مشترک a و b است.

به عنوان مثال، برای به دست آوردن بزرگترین عامل مشترک ۱۳۳ و ۵۶، به طریق زیر عمل می‌کنیم

$$133 \bmod 56 = 21$$

$$56 \bmod 21 = 14$$

$$21 \bmod 14 = 7$$

$$14 \bmod 7 = 0$$

بنابراین بزرگترین عامل مشترک ۱۳۳ و ۵۶ عدد ۷، آخرین باقیماندهٔ ناصفر مورد بحث، است. (در این مرحله ممکن است خودتان مایل باشید که تحقیق کنید که اعداد ۸۱ و ۲۵ دارای بزرگترین عامل مشترک ۱اند.)

فرایندی که هم اکنون مطرح کردیم در کتاب VII *مقدمات اقلیدس*[25] نوشته شده در حدود ۳۰۰ ـ ۳۵۰ ق. م. آمده است و نشان می‌دهد چرا امروزه به عنوان الگوریتم اقلیدسی معروف است.

اما «الگوریتم» دقیقاً چیست؟ این پرسش تا آنجا که به مسألهٔ دهم هیلبرت مربوط می‌شود اساسی است. پیش از سعی در پاسخ گفتن به آن، نگاه مختصری به مطالب دیگری که در مورد حل معادلات دیوفانتی زمانی که هیلبرت نطق خود را انجام داد شناخته بودند می‌اندازیم.

در واقع مطالب بسیار کمی شناخته شده بودند (و هنوز هم چنین است). به معادلات خطی با بیش از دو متغیر می‌توان با توسیعی از روش الگوریتم اقلیدسی در مورد رهیافت دو متغیری، مذکور در فوق، پرداخت.

در مورد معادلات درجه دوم با یک یا دو مجهولی، از قبیل

$$x^2 - 3x + 4 = 0$$

یا

$$3x^2 - 5xy + y^2 = 7$$

نظریهٔ موثری، مطرح شده توسط گاوس[26]، روشی برای تعیین این که معادلهٔ مفروضی دارای جواب هست یا خیر به دست می‌دهد. (این روش همان نظریهٔ معروف تقابل درجه دوم[27] است).

اما به استثنای حالتهای خاص اتفاقی که در آنها می‌توان از روشهای هوشمندانه استفاده کرد، این موضوع کم و بیش همهٔ آن چیزی است که شناخته شده بود. («حالت خاص» مخصوصاً مهم در ارتباط با معادلات دیوفانتی

$$x^n + y^n = z^n$$

است، که n آن حداقل ۲ باشد. وجود جوابهای این معادلات، به ازای n بزرگتر از ۲، مسألهٔ مشهور آخرین قضیهٔ فرماست[28].)

و اکنون، در مورد مفهوم «الگوریتم» چه می‌توان گفت.

▶ یادداشتها

۱. Hilbert's Tenth Problem

۲. Second International Congress of

Mathematicions

۳. David Hilbert (1862 _ 1943)

ریاضیدان آلمانی و یکی از مؤسسان ریاضیات قرن بیستم و به وجود آورندهٔ مکتب صورت گرایی ریاضیات است.

۴. University of Göttingen

۵. Meeting

۶. لاادری به معنی نمی‌دانم است، در متن اصلی «Ignorabimus» آمده که به معنای «نخواهیم دانست» است.

۷. Unsolved Problems

۸. Continuum Problem . همان طور که می‌دانیم، چنین نیست که جمیع مجموعه‌های نامتناهی دارای یک اندازه باشند ــ سلسلهٔ مراتب (نامتناهی) کاملی از نامتناهیها موجود است. بنابراین، همان گونه که فهرستی نامتناهی از اعداد متناهی ۱، ۲، ۳، ... موجود است، فهرستی نامتناهی از اعداد نامتناهی

$N_0 , N_1 , N_2 , N_3 , \ldots$

هر یک «بزرگتر» از قبلی وجود دارد.

جمع و ضرب الفهای کانتور (اگرچه در نظر اول اندکی شگفت‌آور) بخصوص ساده‌اند. در هر حالت نتیجهٔ کار درست عدد بزرگتر از دو عدد نامتناهی مورد بحث است.

بنابراین به طور مثال

$N_0 + N_1 = N_1$

$N_1 \times N_3 = N_3$

(تمثیل هتل هیلبرت متناظر با این واقعیت است که $N_0 + 1 = N_0$، برای کم آمدن اتاق باید N_1 مهمان وارد شود.)

بسیاری از مجموعه‌های نامتناهی رخ دهنده در ریاضیات دارای اندازهٔ N_0 اند. به عنوان نمونه، مجموعهٔ اعداد درست مثبت، مجموعهٔ جمیع اعداد درست (یعنی، مثبت و منفی)، مجموعهٔ جمیع اعداد گویا، و مجموعهٔ جمیع اعداد اول همه دارای اندازهٔ N_0 هستند. اما، همان گونه که کانتور نشان داد، مجموعهٔ جمیع اعداد حقیقی به‌طور قطع اعضایی بیشتر از اعضای N_0 دارد. که بلافاصله این سؤال را مطرح می‌کند، اندازهٔ این مجموعه چیست؟ از آنجا که این اندازه N_0 نیست، باید یکی از

$N_1 , N_2 , N_3 , \ldots$

باشد، اما کدام یک؟

خود کانتور، علی‌رغم کوشش بسیار، نتوانست به این مسألهٔ ظاهراً ساده پاسخ دهد. تعدادی از ریاضیدانهای عالی مقام دیگر نیز چنین بودند.

در واقع، *مسألهٔ پیوستار کانتور*، نامی که سؤال مزبور به آن معروف شد، در مقابل این همه کوشش مقاومت کرده نام داده شده به مسأله از اینجا ناشی شده است که از اندازهٔ *پیوستار* حقیقی پرسش به عمل می‌آورد ــ کلمهٔ اخیر نیز برای توصیف مجموعهٔ اعداد حقیقی زمانی که به عنوان نقاطی که *خط حقیقی* را می‌سازند به کار رفته است.

۹. Riemann Problem. درسال ۱۷۴۰ اویلر تابع معروف به *تابع زتا* «Zeta function» را معرفی کرد که به ازای اعداد حقیقی S بزرگتر از ۱ توسط مجموع نامتناهی

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \ldots$$

تعریف شده است.

به ازای S کوچکتر از یا مساوی با ۱، مجموع نامتناهی مورد بحث پاسخی نامتناهی دارد، بنابراین $\zeta(s)$ به ازای چنین S تعریف نشده است. اما به ازای هر S بزرگتر از ۱ مجموع نامتناهی مزبور مقداری متناهی و معین دارد. اویلر ثابت کرد که مقدار $\zeta(s)$ به ازای هر چنین S ی مساوی حاصل ضرب نامتناهی

$$\frac{1}{1-(1/2)^s} \times \frac{1}{1-(1/3)^s} \times \frac{1}{1-(1/5)^s} \times \frac{1}{1-(1/7)^s} \times \frac{1}{1-(1/11)^s} \times \ldots$$

است، که در آن حاصل ضرب (نامتناهی) مورد بحث روی جمیع اعداد به صورت

$$\frac{1}{1-(1/p)^s}$$

است که p ی آن عددی اول است.

۱۰. Arithmetica

۱۱. Diophantus of Alexandria

Arithmetica نوشته شده در حدود قرن سوم ب. م. اثر

اصلی دیوفانت و یکی از اولین کتابهای نوشته شده در مورد جبر است. قسمت اعظم این رساله با جوابهای گویای معادلات با دو یا بیشتر از دو متغیر دارای ضرایب صحیح سر و کار دارد. امروزه ریاضیدانها، هنگام کار با چنین مسایلی معمولاً خود را محدود به یافتن جوابهای صحیح می‌کنند. این کار اغلب به همان کار قبلی منجر می‌شود. به عنوان مثال، جواب گویای

$$x=\frac{۱}{۴}\ ,\ y=\frac{۱}{۱۰}\ ,\ z=-\frac{۱}{۵}$$

معادلهٔ خطی سه متغیره‌ای چون

$$۲x+۳y+۴z=۰$$

می‌تواند با ضرب طرفین معادله در کوچکترین مضرب مشترک ۴، ۱۰ و ۵، یعنی ۲۰، به جواب صحیح

$$x=۵\ ,\ y=۲\ ,\ z=-۴$$

تبدیل شود.

می‌توان از فرایندی مشابه، در بسیاری از حالات دیگر، برای تبدیل یک جواب گویا به جوابی شامل اعداد صحیح، استفاده کرد.

۱۲. Diophantine equation

۱۳. Integers

۱۴. Real numbers

۱۵. Complex numbers

۱۶. Real _ number solutions

۱۷. yuri Matyasevich

۱۸. Mathematical logic

۱۹. Computation Theory

۲۰. Linear equation

۲۱. Unknowen

۲۲. Mechanical Procedure

۲۳. به عنوان مثال در کتاب زیر:

Elementary Number Theory, by David Burtor (Allyn and Bacon , 1980)

۲۴. Euclidean algorithm

۲۵. Euclid's **Elements**

۲۶. G. F. Gauss ریاضیدان آلمانی (۱۸۵۵ ـ ۱۷۷۷) به وجود آورندهٔ آثار بدیع بسیار در قسمتهای گوناگون ریاضیات.

۲۷. در ۱۷۹۶ گاوس قضیه‌ای عمیق از نظریهٔ اعداد موسوم به قانون تقابل درجه دوم «Quadratic Reciprocity Law» را اثبات کرد، که در مورد حل معادلاتی چون

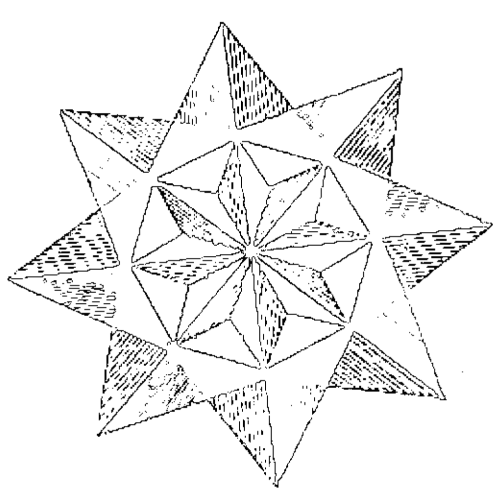
$$x^{۲} \bmod ۷ = ۳$$

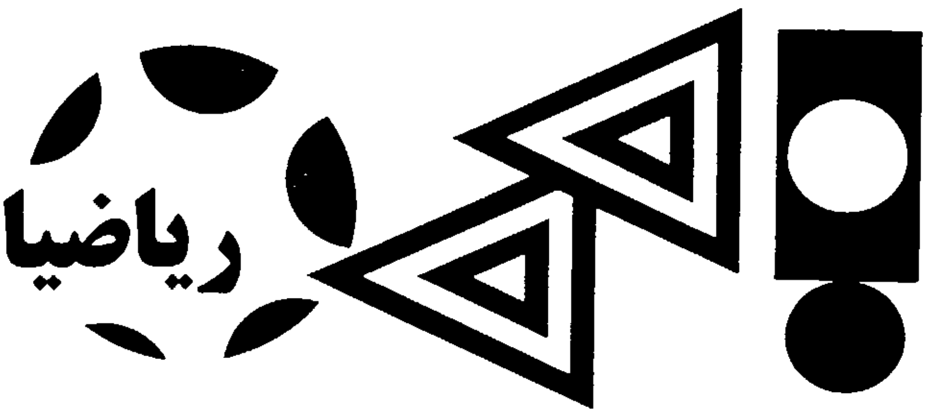
است، که به صورت

$$x^{۲} \bmod p = q$$

اند، که p و q ی آنها اعدادی اول‌اند.

۲۸. Fermat's last theorem. پی یردوفرما « Pierre de Fermat»(۱۶۶۵ ـ ۱۶۰۱) ریاضیدان معروف فرانسوی، دارای آثاری مهم در وضع هندسهٔ تحلیلی، حساب احتمالات و نظریهٔ اعداد. صورت آخرین قضیهٔ فرما چنین است: معادلهٔ $x^n+y^n=z^n$ جز در حالت $n=۲$ و x یا y مساوی ۰ دارای جواب صحیح نیست. ریاضیدانهای بسیاری‌از جمله اویلر «Eulen»، کومر «Kummer» و ددکیند «Dede Kind» در حل آن مساعی بسیار به کار بردند. طی بیش از سه قرنی که از طرح این مسأله، که خود فرما طبق نوشته‌ای که در حاشیهٔ کتاب حساب دیوفانت خود آورده مدعی اثبات آن شده است، می‌گذرد، جز به‌ازای حالات خاصی از n، مسأله همچنان حل نشده باقی مانده بود، تا این که در ۲۳ ژوئن ۱۹۹۳ (۲ تیر ۱۳۷۲) ریاضیدانی ۴۰ ساله، انگلیسی و استاد دانشگاه پرینستون امریکا به نام اندرو وایلز «Andrew Wiles» مدعی اثباتی‌از حدس تانیاما شد. با توجه به کارهای ریاضیدانان قبلی اثبات این حدس، درستی قضیهٔ فرما را ثابت می‌کند.





ریاضیات کاربردی

● پرویز شهریاری

وقتی می‌شنویم یا می‌خوانیم، محمد خوارزمی دانش جبر را به‌وجود آورد، خیام آن را ادامه داد و جمشید کاشانی توانست، با ظرافت و زیبایی یک معادلهٔ درجه سوم را برای محاسبهٔ دقیق سینوس یک درجه حل کند؛ و یا ابوالوفای بوزجانی و ابوریحان بیرونی پایه‌های مثلثات را ریختند و بیشتر دستورهای آن را ــ چه در مثلث روی صفحه و چه در مثلث روی کره ــ به‌دست آوردند و آنها را ثابت کردند و، سرانجام، نصیرالدین توسی، کتاب مستقلی دربارهٔ مثلثات تألیف کرد، ممکن است با سهل‌اندیشی تصور کنیم، این دانشمندان بزرگ، زندگی بی‌دغدغه ای داشته‌اند و از آن جا که «غم نان» آنها را آشفته خاطر نمی‌کرد، در ساعتهای فراغت خود، به «بازی» با عدد و شکل می‌پرداخته اند، تا هم وقت خود را پر کنند و هم ذهن جست‌وجوگر خود را، با کشف رازهای عدد و شگفتیهای شکل، راضی نگه دارند ...

و وقتی در سالهای دبیرستانی، ساعتها روی یک مسألهٔ هندسه کار می‌کنیم و یا، ضمن جست‌وجوی راه حل مسأله‌های جبری یا اثبات درستی اتحادهای مثلثاتی، ساعتها و روزهای خود را می‌گذرانیم، ممکن است این پرسش از ذهن ما بگذرد که «این‌ها، کدام دشواری زندگی را حل می‌کنند؟» و «این همه فرمولها و شکلهای انتزاعی، کدام یک از دردهای بی‌شمار انسان امروزی را درمان می‌کنند؟» ...

وقتی در نیمهٔ سدهٔ نوزدهم میلادی، ژرژبول ریاضی‌دان ایرلندی (وپدر نویسندهٔ کتاب «خرمگس»)، نخستین کتاب «منطق ریاضی» را، همراه با نمادها و نشانه‌های تازه ای، منتشر کرد، حتی مورد اعتراض بسیاری از ریاضی‌دانان قرار گرفت که «این، یک نوع بازی با علامت‌هاست و هیچ‌گونه کاربردی ندارد»، درضمن «انسان را از اندیشیدن بازمی‌دارد، تنها به رابطه‌ها و دستورها توجه دارد و دشمن تفکر است»... ولی بعد، وقتی ماشین محاسبه و کامپیوتر به میدان آمد، معلوم شد که، بدون منطق ریاضی، حتی یک گام هم نمی‌توان برداشت.

وقتی کپلر (۱۵۷۱ ــ ۱۶۳۰ میلادی) برای بررسی حرکت سیاره‌ها و نیوتون (۱۶۴۳ ــ ۱۷۲۷ میلادی) برای طرح مکانیک آسمانی خود، متوجه اهمیت جدی ویژگیهای مقطع‌های مخروطی (دایره، بیضی، هذلولی و سهمی) شدند، نوشته‌های مناخوسموس (۳۵۰ سال پیش از میلاد) و آپولونیوس (۲۵۰ سال پیش از میلاد) را، دربارهٔ مقطع های مخروطی (که نزدیک به دو هزار سال در فراموشی به سر می‌بردند)، از قفسه‌ها بیرون کشیدند، گرد خاک بیست سده را از آنها زدودند و بحث‌ها و بررسی‌های مربوط به اخترشناسی و مکانیک آسمانی خود را، براساس قضیه‌ها و مسأله‌های این نوشته‌ها، مستدل ساختند.

❑

ریاضیات، همیشه و در تمامی طول تاریخ تکامل خود، با زندگی و عمل بستگی داشته است. با وجود این، در تاریخ ریاضیات می‌توان دوره‌هایی را تشخیص داد که، در آنها، اهمیت درجه اول به ریاضیات کاربردی داده شده است؛ دوره‌هایی هم وجود دارد که، در آنها ریاضیات با سمت‌گیری نظری پیش رفته است.

درواقع، مسیر تاریخ ریاضیات، به تناوب، از دورهٔ ریاضیات کاربردی به ریاضیات نظری و برعکس، عبور کرده است. دو دورهٔ اصلی از سمت‌گیری کاربردی ریاضیات را در گذشته می‌شناسیم. دورهٔ اول که از هزاره‌های پیش از میلاد و درواقع، از زمان پیدایش انسان آغاز می‌شود و تا سده‌های ششم و هفتم پیش از میلاد ادامه دارد، دوران شکل‌گیری مفهومهای اصلی ریاضیات (یعنی عدد و شکل) در بستگی تنگاتنگ با نیازهای زندگی است. نخستین جهش در پیشرفت ریاضیات، در پیدایش خط به‌وجود آمد. خط به انسان امکان داد تا نیّت خود را به‌صورت ساده، ثبت کند و با نشانه‌ها و نمادها، اندیشهٔ خود را برای

دیگران و هم برای آیندگان باقی بگذارد.

شمارشفاهی، و دشوارتر از آن شمار کتبی، به کندی پیش رفت، چرا که زندگی انسانهای نخستین، به کندی تغییر می کرد و، برای تغییری کوچک، نیاز به گذشت سده‌های بسیار بود. ولی به هرحال، تکامل و پیشرفت در ذات طبیعت و پدیده‌های طبیعی است و روشن است که شامل انسان هم می‌شود. از قانونمندیهای دیگر تکامل و بویژه تکامل دانش و تفکر انسانی، این است که هر چه جلوتر می رود، سرعت بیشتری به خود می گیرد، یعنی تکامل، حرکتی شتابدار است. به‌عنوان نمونه پیشرفت انسان در سدهٔ بیستم، چه در سطح و چه در عمق، بسیار گسترده‌تر از پیشرفت آدمی در دو هزار سال پیش از آن است.

در دورهٔ نخست مسیر تکاملی ریاضیات با سمت گیری کاربردی (که در ضمن، نخستین دورهٔ تکامل ریاضیات، به مفهوم عام آن است)، در آغاز، ریاضیات از سایر آگاهی‌های انسان جدا نبود و حتی در مرحله‌های پیشرفته‌تر، کاتبان و دبیران (که اغلب از کاهنان بودند)، همه‌کاره بوده‌اند: پیش آمدهای تاریخی و سیاسی را ثبت می کردند، برای بیماران دارو و دعا تهیه می‌کردند، به کمک سیاره‌ها و ستاره‌ها، آینده را «پیش گویی» می‌کردند و، در ضمن، حساب‌های لازم را (مثل تعیین روزهای جمع‌آوری مالیات، میزان غله‌ای که در انبارها ذخیره شده بود و...) نگه می‌داشتند. بتدریج، با بغرنجتر شدن زندگی، محاسبان و ریاضی‌دانان، از کاتبان جدا شدند و صنف خاصی را تشکیل دادند، حتی برای آماده کردن نسل بعدی و انتقال دانش خود به دیگران، کلاسهای آموزشی را اداره می‌کردند. و این، در واقع نقطهٔ آغاز ریاضیات نظری، به مفهوم ساده و اولیهٔ خود بود. گرچه در این کلاسها، به طور کامل و بدون استثنا، از مسأله‌هایی استفاده می‌شد که، به روشنی جنبهٔ کاربردی داشتند، ولی خود مسأله‌ها، کم و بیش فرضی و ساختهٔ ذهن معلمان بود. دیگر منتظر نمی ماندند تا ساختن یک انبار یا تقسیم غذا بین جنگجویان یا تقسیم زمینی که مرزهای آن، به خاطر ریزش باران و یا طغیان آب، شسته شده بود، مطرح شود تا «صاحبان دانش زمان» تلاش خود را برای حل آنها آغاز کنند، بلکه از قبل، مسأله‌ها را آماده می‌کردند و راه حل آنها را به شاگردان خود می‌آموختند. حتی بتدریج، مسأله‌هایی مطرح و حل می‌شد که، به ظاهر، اندکی دور از کاربرد عملی بود. از این جمله، می‌توان از مسأله های عکس نام برد. اگر پیش از آن، با در دست داشتن بُعدهای یک ساختمان، سطح بنا و گنجایش ساختمان را محاسبه می‌کردند، اکنون با فرض معلوم بودن سطح یا حجم و برخی بُعدها، راه یافتن اندازهٔ بُعد مجهول را جست‌وجو می کردند. و این، در واقع، سر برآوردن جوانه‌های نازک ریاضیات نظری بود.

در این دوره، اثبات و استدلال منطقی کمتر آموزش داده می‌شد. حتی در موردهایی هم، که به احتمالی، معلم در ذهن خود با نوعی استدلال آشنا بود، آن را به شاگردان خود منتقل نمی‌کرد و شاگرد باید تنها یاد می‌گرفت که چگونه جواب مسأله را به دست آورد و هیچ‌گونه چون و چرا نداشته باشد.

طبیعی است، قانونهای موجود، که به صورت «دستور» و «فرمان»، از نسلی به نسل دیگر منتقل می‌شد، نمی‌توانست دقیق و بی‌عیب باشد. برای محاسبهٔ مساحت زمینی که به شکل چهار ضلعی بود، نصف مجموع دو ضلع روبه‌رو را در نصف مجموع دو ضلع روبه‌روی دیگر ضرب می کردند (که تنها برای مستطیل درست است) و برای محاسبهٔ مساحت مثلث متساوی‌الساقین، نصف حاصل‌ضرب قاعده در ساق را به دست می‌آوردند و این، گرچه برای محاسبه‌های عملی آن روزگار مشکلی به وجود نمی‌آورد، درست و دقیق نبود. اعتبار هر آموزشی به اعتبار «معلم» و اعتبار هر نوشته‌ای به اعتبار نویسندهٔ آن مربوط بود. ولی زندگی راه خود را می‌رفت و روز به روز بغرنجتر می‌شد و، در نتیجه، محاسبه‌ها و «استدلال» های قبلی، برای حل دشواری‌های تازه کافی نبود. بتدریج اعتبار «صاحبان اعتبار» فرو ریخت و توجه به ریشه‌های استدلالی و منطقی ریاضی روز افزون شد، جوانه‌های ریاضیات نظری که در سایه قرار داشت، شکوفا شد و بتدریج، ریاضیات کاربردی را در سایهٔ خود قرار داد. انگیزه درونی ریاضیات (یعنی منطق و استدلال)، به عنوان عامل تعیین کنندهٔ مسیر ریاضیات به کار افتاد و انگیزهٔ بیرونی (یعنی مشاهده و تجربه) به صورت عاملی درجه دوم در آمد.

❑

دورهٔ دوم تکامل ریاضیات با سمت‌گیری کاربردی را (که در ضمن، دورهٔ سوم تکامل ریاضیات بود) باید از سدهٔ هشتم تا سدهٔ شانزدهم میلادی دانست، دوره‌ای که گرانیگاه آن در ایران بود.

زندگی مسأله‌های تازه ای را پیش آورد که باید به یاری ریاضیات حل می‌شد و ریاضیات نظری دوره پیش (ریاضیات یونانی) از عهدهٔ حل آنها بر نمی‌آمد. این مسأله‌ها، به طور عمده، مربوط می‌شد ند به اخترشناسی، مکانیک (ساختن ساعت‌های مکانیکی، اسطرلاب و سایر ابزارهای لازم برای رصد، ظریف‌تر و دقیق تر کردن وسیله‌های فلزی و سفالی، ...) و مسأله‌های ناشی از اعتقادهای دینی (پیدا کردن جهت قبله، حل مسأله‌های مربوط به تقسیم ارث و عمل کردن به وصیت-

نامه‌ها، که گاه بسیار پیچیده بود)، گسترش ارتباط‌های بازرگانی، ساختن قصرها و پرستش گاه‌ها، ایجاد کاریزها و آبراه‌ها و غیره.

و ریاضیات، بااستفاده از همه دست‌آوردهای دوره‌های قبل (وبه ویژه ریاضیات یونان و هند)، با سمت‌گیری کاربردی (که در سطحی بسیار بالاتر از ریاضیات کاربردی دورهٔ قبل از یونان بود)، به تکامل خود ادامه داد و، همان طور که پیش از این گفتیم، اگر از استثناها بگذریم، همهٔ ریاضی دانان این دوره، از پسران موسی شاکر تا جمشید کاشانی، ایرانی بوده‌اند.

وقتی می‌گوییم، ریاضیات این دوره با سمت‌گیری کاربردی به پیش رفته است، به این معنا نیست که در زمینهٔ ریاضیات نظری، کاری انجام نشده است، بلکه تنها به این معناست که عامل اصلی پیشرفت ریاضیات، انگیزه بیرونی آن (یعنی زندگی، عمل و نیازهای ناشی از آنها) بوده است.

ریاضی‌دانان ایرانی این دوره، با اطلاع از کارهای یونانیان و هندیان و با استفاده از ذخیره فرهنگی غنی قوم‌های ساکن ایران، تلاش کردند کمبودها و شکاف‌های نظری ریاضیات یونانی را برطرف کنند. آنها بارها و بارها، «مقدمات» اقلیدس را به بحث انتقادی کشاندند، روش‌های بطلمیوسی را که در «المجسطی» آمده بود، تصحیح کردند و تکامل دادند، پایه‌های جبر و مثلثات و، به طور کلی، ریاضیات محاسبه‌ای را ریختند، با بررسی دقیق بحث مربوط به نسبت‌ها، مفهوم عدد حقیقی را به عنوان یک کمیت پیوسته وارد در ریاضیات کردند، پایه‌های اصلی هندسهٔ نااقلیدسی را بنا نهادند، روش‌های ارشمیدس را در زمینهٔ «انتگرال‌گیری» تکامل بخشیدند و غیره و غیره. ولی در همهٔ این زمینه‌ها، توجه اصلی ریاضی‌دانان ایرانی، به نیازهای زندگی و دانشهای دیگر بوده است. خوارزمی جبر را به دلیل دشواریهایی که در فقه اسلامی برای تقسیم ارث وجود داشت پدید آورد. نیم نخست کتاب «جبر و مقابلهٔ» خوارزمی، بحثی نظری دربارهٔ راه حل معادله‌های درجه اول و درجه دوم ــ هم با محاسبه و هم به کمک استدلال های هندسی ــ است. البته خوارزمی از نمادهای جبری استفاده نمی‌کند و مسأله‌ها را به صورت توصیفی حل می‌کند، ولی دقت در روش‌های حل او، ما را به دستوری می رساند که امروز، برای حل معادلهٔ درجه دوم، به‌کار می‌بریم. خوارزمی، و ریاضی‌دانان ایرانی بعد از او، عدد منفی را ــ جز در برخی موردهای استثنایی ــ به کار نمی‌بردند، به معادله‌های بالاتر از درجه سوم توجهی نداشتند (خیام، در کتاب جبر خود، برخی از گونه‌های معادلهٔ درجه سوم را به کمک مقطع های مخروطی حل کرده‌است) و تنها به یکی از ریشه های معادله، اکتفا می‌کردند و، همه اینها، به دلیل توجه اصلی آنها به عمل و نیازهای زندگی بوده است.

به‌طور مثال، ریاضی‌دانان ایرانی (به پیروی از ریاضی‌دانان یونانی)، اگر طول پاره‌خط راست را برابر a می‌گرفتند، a^2 را مربع a (یعنی مساحت مربعی به ضلع برابر a) و a^3 را مکعب a (یعنی حجم مکعبی به ضلع برابر a) می‌گفتند، اصطلاحهایی که هنوز هم معمولند. در واقع، توان دوم را به معنای مساحت و توان سوم را به معنای حجم می‌گرفتند و چون در زندگی عملی، با جسم چهار یا پنج بُعدی سر و کار نداریم، بحث دربارهٔ معادله‌های بالاتر از درجه سوم را ــ جز در موردهای نادر مثل معادله‌های سیال کرجی ــ بی معنی می دانستند.

فارابی در کتاب بزرگ موسیقی خود، برای نخستین بار در جهان، نظریهٔ علمی موسیقی را مطرح می‌کند و جنبه‌های مختلف آن را مورد بحث قرار می‌دهد (در تقسیم‌بندی فارابی از دانش‌ها، موسیقی بخشی از ریاضیات به شمار می‌آید). پیش از فارابی، اگر از موسیقی عملی عیلام و بابل و مصر و هند بگذریم، تنها در یونان بحث‌هایی در زمینهٔ موسیقی در جریان بود که بیشتر جنبهٔ متافیزیکی داشت و آمیخته به وهم و تخیل بود. فارابی مبانی فیزیکی و ریاضی موسیقی را بررسی و نخستین کتاب علمی موسیقی را ارائه داده است.

ابوالوفا و بیرونی، بیش از دیگران، دستورهای مثلثاتی را کشف و ثابت کردند و این، به دلیل دشواری‌هایی بود که در اخترشناسی و محاسبه‌های مربوط به آن، پیش می‌آمد. بطلمیوس، بیشتر استدلال ها و محاسبه‌های خود را بر اساس هندسه و قضیه‌ها و مسأله‌های آن انجام می‌داد و این، کار را بسیار دشوار می‌کرد. ابوالوفای بوزجانی و ابوریحان بیرونی، برای رفع این دشواری‌ها بود که مثلثات را شکوفا کردند و پیش بردند و، سرانجام، نصیرالدین توسی با تألیف «کشف‌القناع، خود، استقلال مثلثات را از هندسه اعلام کرد. جمشید کاشانی، برای همین محاسبه‌های اختر شناسی (او پایه‌گذار رصد خانهٔ الغ‌بیگ در سمرقند بود) و به این دلیل که راه‌های قبلی (مانند راه ابوالوفا)، اندکی طولانی و تا اندازه‌ای غیر دقیق بود، روش جبری حل معادلهٔ درجه سوم:

$$4x^3 - 3x = a$$

را برای پیدا کردن مقدار دقیق سینوس یک درجه (از روی سینوس سه درجه) به دست آورد. ریاضی‌دانان ایرانی، اندازهٔ سینوس زاویه های ۱۵، ۱۸، ۳۰، ۴۵، ۶۰، ۷۲، ۷۵ درجه (و در نتیجه، کسینوس آنها) را می‌شناختند و مقدار سینوس سه درجه را با بسط $\sin(18^\circ - 15^\circ)$ به‌دست می‌آوردند.

ابوالوفا دو کتاب جالب دارد، یکی به نام «هندسه برای مهندسان و صنعتکاران» و دومی به نام «حساب برای محاسبان» [ریاضی دانان ایرانی، جبر را بخشی از حساب می‌دانستند]. خود نام این دو کتاب، معرف آن است که سمت گیری ابوالوفا در کارهای ریاضی خود، ریاضیات کاربردی بوده است.

باید به این نکته اشاره کنیم که، اغلب مورخان دانش، حتی باانصاف‌ترین آنها، نتوانسته‌اند مقام ریاضیات ایرانی را، در مجموعهٔ تاریخ ریاضیات، به درستی و روشنی ارزیابی کنند. اغلب آنها، ریاضی‌دانان ایرانی را، تا حد مترجمان سادهٔ نوشته‌های یونانی پایین آورده اند که، این ترجمه‌ها هم، به موقع خود، به صاحبان اصلی، یعنی اروپاییان برگشت داده شده است. به این ترتیب، مورخان ریاضی، آغاز ریاضیات را در اروپا (یونان) می‌دانند که بعد از سقوط مکتب اسکندریه در سده‌های سوم و چهارم میلادی، دوران فترتی به وجود می‌آید که تا سدهٔ پانزدهم میلادی ادامه دارد و، سپس، با دسترسی اروپاییان به نوشته های یونانی (از راه ترجمهٔ عربی آنها) دوباره دنبال کار را می‌گیرند و آن را به امروز می‌رسانند. نتیجهٔ این نوع برخورد این است که همهٔ ملت‌های جهان، به جز ساکنان اروپا، در تمامی طول تاریخ در خواب غفلت بوده‌اند و هرچه امروز دارند، نتیجهٔ تلاش فکری و عملی مردم اروپاست. و این درحالی است که، ریاضی دانان ایرانی، از سدهٔ هشتم تا سدهٔ شانزدهم میلادی، پرچم دار ریاضیات جهان بوده‌اند، به نحوی که این دوره، یک دورهٔ کامل از تاریخ تکامل ریاضیات را تشکیل می‌دهد.

❑

نشانه‌های جدی در دست است که ریاضیات، برای بار سوم و در زمان ما، در جهتی پیش می‌رود که سمت‌گیری کاربردی دارد. انسان امروزی با مسأله‌های بسیار پیچیده‌ای روبه‌روست که اگر بخواهد زندگی خود و نسلهای آینده را نجات دهد، باید آنها را حل کند. محیط زیست با سرعتی باور نکردنی رو به تخریب است، منابع زیرزمینی، جنگل‌ها و زمینهای کشاورزی تهی و لخت می‌شود، شکاف بین کشورهای فقیر و کشورهای غنی از یک طرف، و فاصلهٔ بین عامهٔ مردم و گروه خاص غارتگر هر کشور از طرف دیگر، روز به روز عمیق‌تر می‌شود، حتی کمبود آب (که در همین گذشتهٔ نزدیک، گمان می‌رفت تمام نشدنی و لایزال باشد) در بیشتر نقطه‌های جهان احساس می شود، به نحوی که برخی کارشناسان پیش بینی می کنند، جنگ به خاطر آب، در آینده‌ای نزدیک، جایگزین جنگ به خاطر نفت و انرژی شود.

مسأله از این هم بغرنجتر است. انسان زمان ما، بدون برنامه‌ریزی، نمی تواند به زندگی خود ادامه دهد. به اصطلاح «بازار آزاد» و تولید بدون برنامه، به جز آن که میزان مصرف را به صورتی غیر ضروری، آن هم در کشورهای خاص و بین قشرهای خاص، بالا می‌برد و موجب فقر کشورها و قشرهای دیگر می‌شود، از آن جا که از یک برنامهٔ حساب‌شده و انسانی پیروی نمی‌کند، هم به نیروی کار صدمه می‌زند و هم عدم هماهنگی در توزیع پیش می‌آورد. برای رفع این دشواریها، انسان امروزی ناچار است، در هر مورد سمت‌گیری روند کار و پیش بینی فرایند آیندهٔ تولید را روشن کند و بداند، چه چیزی را و چگونه باید تولید و یا مصرف کند که هم عادلانه و انسانی باشد و هم از تخریب محیط و منابع و نابودی نسلهای آینده جلوگیری کند. و همهٔ اینها، جز با تجزیه و تحلیل کمیتی پدیده‌ها و روندها ممکن نیست.

تولید و توزیع، به همان صورت ناسالم امروزی خود، باز هم نیازمند به ریاضیات است. برای خود کار کردن تولید، باید روند کار را، از نظر ریاضی و منطقی، تحلیل کرد و این به معنای آن است که ریاضیات، نه تنها از دیدگاه کمیتی که، بتدریج، از دیدگاه کیفی هم باید وارد عمل شود. امروز دیگر نمی‌توان با دستورهای کلی و بی معنی، مثل «باید ترتیبی داد تا کارها درست شود»، دشواریها را حل کرد. حتی حل مسأله‌های ساده‌ای مثل تخلیه و بارگیری کشتی‌ها، تنظیم شبکه‌های برق و تلفن، یک‌طرفه یا دو طرفه کردن خیابانها ، تعیین محلهای توقف ماشینهای آتش‌نشانی و ....، بدون استفاده از ریاضیات و تنها با متوسل شدن به تجربه ممکن نیست. نظریهٔ «اطمینان بخشی» که در دهه‌های اخیر به وجود آمده است و بتدریج به صورت هسته مرکزی اندیشه ها در زندگی فراصنعتی امروز درمی‌آید، بر اساس یک نظریهٔ ریاضی است. باید از روند تولید اطمینان داشت، باید کارآیی محصول قابل قبول باشد، باید محصول تولید شده، قابل ترمیم و تعمیر باشد و ، اینها، تنها با تکیه بر نظریهٔ اطمینان بخشی که خود شاخه‌های گوناگونی دارد، ممکن می‌شود. این تکه از نوشتهٔ بوریس گنه دنکو، که خود در پیدایش و تنظیم نظریهٔ اطمینان بخشی سهم جدی داشته است، می‌تواند برایتان سودمند باشد:

«سدهٔ بیستم، این قانون‌مندی را تأیید کرد که ریاضیات، با پیدا کردن کاربردهای خود در اقتصاد و صنعت و در پدیده‌هایی از طبیعت که پیش از آن مورد مطالعهٔ کمیتی قرار نگرفته بودند، انگیزه‌ای برای تکامل بعدی خود به دست آورد. در نتیجه، این امکان پیدا شد که جهان ما، عمیقتر، کاملتر و دقیقتر مورد بررسی قرار گیرد و، در عین حال، خود ریاضیات توانست دنیای بی کرانی از مسأله‌های تازه را رودر روی خود

ببیند ... جهت تازهٔ بررسیهای کاربردی را، با عنوان نظریهٔ «اطمینان‌بخشی» می شناسند. این نظریه، به دلیل رشد بی سابقهٔ نقش صنعت و دستگاه‌های فنی در همهٔ جنبه‌های فعالیت‌های جامعه به وجود آمده است. سلامتی و حتی امکان وجود تودهٔ عظیمی از مردم، به طور مستقیم با دستگاه‌های صنعتی بستگی دارد... من در ساختمان مبانی نظریهٔ اطمینان بخشی و حل یک رشته مسأله‌های مربوط به آن ... شرکت‌داشته‌ام. درضمن، تصور دربارهٔ نقش ریاضیات و، به طورکلی، روشهای کمیتی، در مسأله‌هایی که در برابر نظریهٔ اطمینان بخشی وجود داشت، بتدریج شکل گرفت و معلوم شد، هم آزمایش و مشاهده و هم دستورهای دقیق نظری و ، سرانجام، استنتاج، اهمیتی جدی دارند ... نظریه اطمینان بخشی شاخه‌ای از دانش است که جنبهٔ کاربردی دارد و دشواریهای مهندسان، اقتصاددانان و سازمان‌دهندگان تولید را حل می کند و گرچه هیچ کدام از این دشواری‌ها خصلت ریاضی ندارند، امّا ریاضیات نقش عظیمی در حل آنها به عهده گرفته است. جهتهای اصلی این گونه بررسی‌ها را، که به ثمر رساندن آنها، بدون استفاده وسیع از ریاضیات ممکن نیست، نام می‌بریم: ۱) محاسبهٔ اطمینان بخشی دستگاه به کمک اطمینان بخشی مفروض عنصرهای آن؛ ۲) ساختن مُدل‌های ریاضی، برای مسأله‌های گوناگون نظریهٔ اطمینان بخشی؛ ۳) تنظیم نظریهٔ مربوط به آزمایش محصول، برای به دست آوردن میزان اطمینان بخشی آن؛ ۴) طرح و حل مسأله بهینه‌سازی؛ ۵) برنامه ریزی روی نظریهٔ اطمینان بخشی، برای حل مسأله‌های آن به کمک کامپیوتر؛ ۶) بیرون آوردن مفهوم اصلی و خصلتهای عددی نظریهٔ اطمینان بخشی و برآورد آنها از نتیجه آزمایشها ... می‌خواهم تأکید کنم که نظریهٔ اطمینان بخشی، نظامی پیچیده است و همهٔ بخشهای تشکیل دهندهٔ آن دارای اهمیتند: کار ریاضی دان، مهندس، فیزیک دان، صنعت کار و اقتصاددان ...

مُدل ریاضی، ابزاری است که به کمک آن می‌توان یک مسأله عملی و کاربردی را، به مسأله‌ای ریاضی تبدیل کرد. نظریهٔ امروزی اطمینان بخشی، به وسیلهٔ مُدل‌های ریاضی سودمندی غنی شده است و این امکان به وجود آمده است که مسألهٔ تبدیل آن را به مسأله‌های دقیقاً فرمولی مطرح کنیم، مسأله‌هایی که با روشهای ریاضی قابل بررسی باشند... روشهای ریاضی بررسی، امکانهای عظیمی برای بالا بردن آگاهیهای ما فراهم می‌کند؛ به ویژه اگر نظریه را، ضمن مقایسهٔ کارهای نظریه‌پردازان و نتیجه‌گیریهای آزمایشگران، اصلاح و دقیقتر کنیم، یعنی وقتی که ریاضی‌دان، به ماهیت فیزیکی مسأله توجه کند و، ضمن عمل، اندیشه‌های نظری را کنار نگذارد. زندگی و عمل، که در گذشته مسأله‌های تاریخی و مهم تازه‌ای را در برابر ریاضیات گذاشته است، در زمان ما هم، همین نقش را به عهده دارد و در آینده هم به عهده خواهد داشت. بررسیهای نظری، در ضمن، مسیر راه آزمایشگران را روشن می کند و به آنها امکان می‌دهد، پژوهشهای تجربی خود را در مسیری انجام دهند که از قبل، هدف آن را می شناسند ... باید به طور عاجل به مسأله‌ای بپردازیم که تا کنون روی آن کار نشده است: تأثیر دستگاه فنی، بر سلامتی کسی که روی آن کار می‌کند. جای سخت و خشن رانندهٔ تراکتور و کمباین و تکانهای بیش از حد بار، بر اندامهای راننده اثر می‌گذارد. کار با کامپیوترهای شخصی به وسیلهٔ دانش‌آموزان و دانشجویان، بر چشم آنها، تأثیر منفی می‌گذارد و ...»

به این ترتیب به نظر می‌رسد که دوران سوم تکامل ریاضیات با سمت‌گیری کاربردی، که در سطحی بسیار بالاتر از دورهٔ دوم آن (دورهٔ ریاضیات ایرانی) قرار دارد، ضمن استفاده از همهٔ دست‌آوردهای نظری گذشته، تلاش می‌کند با پر کردن شکافها و برطرف کردن کمبودها، راهنمای انسان در دورهٔ پیچیدهٔ فراصنعتی امروز باشد.

در این جا سعی بر این بود تا جنبه‌هایی از ریاضیات کاربردی امروز مطرح شود که کمتر مشهور است، والاّ، می‌توان به تقریب از همهٔ دانش‌ها نام برد که، ضمن تکامل خود در روزگار ما، هر روز و هر ساعت به ریاضیدان نیاز پیدا می‌کنند. دانش‌هایی همچون فیزیک، اخترشناسی، شیمی، زیست‌شناسی، ژن‌شناسی، روان‌شناسی، اقتصاد، جامعه شناسی و حتی تاریخ را نمی‌توان بدون بهره‌گیری جدی از روشهای ریاضی به جلو برد و با موفقیت تکامل داد.

ریاضیات دانشی پویاست و این پویایی، در واقع، بازتابی از پویایی انسان و جامعه‌های انسانی است.

البته انگیزهٔ پیشرفت ریاضیات، تنها مشاهده، تجربه و نیازهای انسانی نیست، بلکه منطق درونی ریاضیات هم، انگیزه‌ای برای پیشرفت آن است. ولی حتی بخش‌هایی از ریاضیات، که به صورت انتزاعی و بدون انگیزهٔ کاربردی به وجود می‌آید، بتدریج (و گاهی هم، بلافاصله) کاربرد خود را پیدا می‌کند. وقتی رنه توم، ریاضیدان معاصر فرانسوی، نظریهٔ «ویژگی‌های نگاشتهای قابل دیفرانسیل‌گیری»را، که به «نظریهٔ فاجعه‌ها» مشهور شده است، آورد، کسی گمان نمی‌کرد به این سرعت مورد توجه قرار گیرد و در صنعت و هنر زمان ما نفوذ کند، به نحوی که به طور مثال بسیاری از طرحهای معماری مُدرن براساس این نظریه شکل بگیرد.

در طول مسیر تکاملی ریاضیات، گاه انگیزهٔ بیرونی (مشاهده،

تجربه، نیازهای زندگی و صنعت و دانش‌های دیگر) و گاه انگیزهٔ درونی (استدلال و منطق درونی ریاضیات) تسلط داشته است و ، ریاضیات، تکامل خود را، طبق «قانون نفی در نفی» گذرانده است، به این معنی که به تناوب از دورهٔ با سمت‌گیری کاربردی به دورهٔ با سمت‌گیری نظری و سپس از دورهٔ با سمت‌گیری نظری به دورهٔ با سمت‌گیری کاربردی رفته است. تاکنون، ریاضیات، چهار مرحله از تکامل خود را پشت سر گذاشته و، در زمان ما، مرحلهٔ پنجم تکامل خود را آغاز کرده است:

۱) دورهٔ تکامل (با سمت گیری کاربردی) که با آغاز شکوفایی دانش یونان به پایان می‌رسد؛

۲) دورهٔ دوم (با سمت‌گیری نظری) که از سده‌های ششم و هفتم پیش از میلاد در یونان آغاز می‌شود و در سده‌های سوم و چهارم میلادی در اسکندریه پایان می‌یابد؛

۳) دورهٔ سوم (با سمت‌گیری کاربردی) که از سدهٔ هشتم میلادی آغاز می‌شود و در سدهٔ شانزدهم میلادی خاتمه می‌یابد. مرکز ثقل فعالیت‌های ریاضی در این دوره، در ایران بوده است؛

۴) دورهٔ چهارم (با سمت‌گیری نظری) که از سدهٔ شانزدهم میلادی، و به طور عمده در اروپای غربی، آغاز می شود و در سدهٔ بیستم پایان می‌یابد؛

۵) و سرانجام دورهٔ پنجم (با سمت گیری کاربردی) که هم اکنون دهه‌های آغازین خود را می‌گذراند. مطلب را با تکهٔ زیبایی از نوشته بوریس گنه دنکو، که بیشتر جنبهٔ آموزشی دارد، به پایان می‌بریم:

«... شک نیست که مقدمات آنالیز ریاضی و هندسهٔ تحلیلی، که در برنامه‌های ریاضی دبیرستانی وجود دارد، مبنای اصلی ریاضیات جدید و کاربردهای آن را تشکیل می‌دهد. تسلط بر این ابزارهای مقدماتی لازم است، ولی کافی نیست. اگر سخن معروف تسیولکوسکی (نخستین کسی که شیفتهٔ کیهان‌نوردی بود) را اندکی تغییر دهیم، می‌توان گفت که، ریاضیات سنتی دبیرستانی و مقدمه‌های آنالیز ریاضی، گهوارهٔ دانش امروزی است، ولی تا کی می‌توان زیست شناسان، پزشکان، مهندسان و اقتصاددانان آینده را در گهواره نگه داشت؟

برنامهٔ آموزشی دبیرستانها و مدرسه‌های عالی، در زمانی تنظیم شده است که بشر معتقد به وجود قانونهای جزمی در طبیعت بودند. زندگی، این طرز فکر نسبت به قانون‌های طبیعت را به کنار زده است و تلقی آماری، به طور جدی، جای خود را در دانش امروزی و فعالیت‌های علمی باز کرده است. ولی اینها، جایی در آموزش ریاضی امروزی ندارند و یا به تقریب ندارند. طرز تفکر آماری، چنان در همهٔ زمینه‌های عملی و علمی نفوذ کرده است که دیگر نمی‌توان از بازسازی کامل برنامه‌های مدرسه‌های عالی و حتی سالهای ششم و هفتم تحصیل، سرباز زد.

جنبه دیگر آموزش ریاضی، مربوط به ریاضیات محاسبه‌ای است که ، به صورت گسترده‌ای، چهرهٔ آن عوض شده است و امکان برنامه‌ریزی جریان های پیچیده‌ای را در کامپیوترها به وجود آورده است. باید برنامه‌ریزی برای کامپیوتر و دادن نتیجه‌ها به صورت عدد، جدول و منحنی، به صورت عادت درآید. باید تجزیه و تحلیل منطقی جریان‌ها و تشکیل طرحها و شماهای صوری و منطقی، جزو کارهای همیشگی و عادی بشود...

دانش ریاضی در حال اعتلا و پیشرفت است. این، یکی از ویژگیهای دوران ماست که در آینده هم نمی‌توان از آن چشم پوشید. پیشرفت آیندهٔ بشر، قبل از هر چیز، به این بستگی دارد که پژوهشگران و کارکنان کار آزموده، تا چه اندازه بتوانند «با سبک و شیوهٔ ریاضی بیندیشند» و با چه سرعتی بتوانند آموزش ریاضی را، با توجه به نیازهای روز و آیندهٔ نزدیک، تجدید سازمان دهند.

پیشرفت دانش انسانی، مرزی نمی‌شناسد؛ امکانهای ریاضیات هم، برای تجزیه و تحلیل پدیده‌های طبیعی، روندهای صنعتی، اقتصاد و زندگی اجتماعی، مرزی ندارد. تنها باید بتوان از این امکانها استفاده کرد».

❏

◇ اشاره‌هایی دربارهٔ برخی مفهوم‌ها

۱. انگیزه‌های تکامل ریاضیات

ریاضیات، در مسیر پیشرفت تکاملی خود، هم زیر تأثیر انگیزه بیرونی بوده است و هم زیر فشار انگیزهٔ درونی. انگیزهٔ بیرونی، یعنی نیازهای زندگی و نیازهای دانشهای طبیعی به ریاضیات؛ و انگیزه درونی، یعنی استدلال و منطق درونی ریاضیات که بر پایهٔ روش قیاسی شکل گرفته است.

از یک طرف، با بغرنجتر شدن زندگی اجتماعی و اقتصادی و در عین حال، با نیاز روزافزونی که دانشهای طبیعی، به‌ویژه اخترشناسی، فیزیک، موسیقی، اقتصاد، زیست‌شناسی،... برای دقیقتر شدن و «به‌ریاضی درآمدن» دارند، برای ریاضیات مسأله‌های تازه‌ای مطرح می‌شود و شاخه های تازه‌ای پدید می‌آید و، از طرف دیگر، منطق درونی

ریاضیات، موجب استوارتر شدن مبانی پیشین و درک دقیقتر و قابل انعطافتر مفهومهای ریاضی می‌شود.

این دو انگیزه، بیرونی و درونی، هر دو همیشه در کار پیشبرد ریاضیات بوده‌اند، ولی گاه این و گاه آن پیشی گرفته و نیرومندتر عمل کرده است. با وجود این، هیچ کدام از این دو انگیزه نمی‌تواند برای مدتی بسیار طولانی، یکه‌تاز باشد و تاریخ ریاضیات نشان می‌دهد که دیر یا زود، به هم می‌رسند و «انتزاع» به یاری «عمل» می‌آید و «عمل»، «انتزاعهای تازه‌ای» را مطرح می‌کند.

اغلب این پرسش پیش می‌آید که آیا نظامهای سیاسی و اجتماعی، در شیوهٔ تکامل ریاضیات نقش داشته‌اند یا نه! در پاسخ به این پرسش باید گفت: ریاضیات به نظام اجتماعی و یا سیاسی خاصی خدمت نمی‌کند و توان خود را در اختیار هر کسی که استعداد یاری گرفتن از آن را داشته باشد، قرار می‌دهد. تأثیر نظامهای اجتماعی بر پیشرفت ریاضیات (و به‌طور کلی دانش) غیرمستقیم است و در سه جنبهٔ آن محدود می‌شود: سرعت پیشرفت ریاضیات، نحوهٔ آموزش ریاضیات و سرانجام، بهره‌گیری از استنتاج‌های فلسفی چه در زمینهٔ مفهومهای ریاضی و چه در زمینهٔ روشهای آن.

به‌طور مثال، در سده‌های میانه، که نظام فئودالی ــ کلیسایی بر اروپای غربی تسلط داشت، به‌دلیل اولویت دادن به مسأله‌های ذهنی و کلامی، تمامی دانش دچار رکود شد، به‌نحوی که در تمامی این دوره نه‌تنها دانش، حرکت به جلو نداشت، که با سرعتی منفی حرکت می‌کرد و بسیاری از دستاوردهای گذشته فراموش شد و از دستاوردهای عظیم ملتهای شرق (و از جمله ایران) بهره‌ای نبرد. درضمن، وقتی که سرانجام اقلیدس و بطلمیوس و ارسطو را، به عنوان سه استاد بزرگ به رسمیت شناختند، از یک طرف هیچ کس حق نداشت دربارهٔ آنها بحث کند و یا نوشته‌هایشان را مورد انتقاد قرار دهد و از طرف دیگر، کار به اصطلاح آموزش نباید جنبهٔ استدلالی می‌داشت، به‌نحوی که نخستین ترجمه‌های کتاب اقلیدس به لاتینی، تنها شامل صورت قضیه‌ها بود و نه روش اثبات آنها!

مثال دیگری را دربارهٔ تأثیر نظام اجتماعی، بر روش آموزش می‌آوریم. در عیلام و بابل و مصر باستان، حاکمیت، با نظام برده‌داری دولتی ــ دینی بود، به این معنا که همهٔ مردم برده‌های درباریان و کاهنان به حساب می‌آمدند. در نظام خشن و بی‌رحم برده‌داری دولتی، کسی حق چون و چرا نداشت، فرمان از بالا (درباریان یا کاهنان) برای همه مطاع بود، سرپیچی از فرمان موجب از دست دادن زندگی (حتی زندگی تمامی خانواده) می‌شد. این وضع، اثر خود را در آموزش ریاضی هم گذاشته بود. در لوحها و نوشته‌های ریاضی که از این دوران مانده است، کمتر استدلال دیده می‌شود. نویسندهٔ متن ریاضی، تنها «فرمان» می‌دهد که اول چنین کن، بعد چنان کن ... اغلب راه‌حلها با واژه «باید» آغاز می‌شود، بدون این که دلیلی بر آن آمده باشد.

نظام اجتماعی یونان باستان هم نظام برده‌داری بود، ولی برده‌داری شخصی. جامعه از دو طبقه تشکیل می‌شد: «آزادها» و «برده‌ها». برده‌ها از حقوق اجتماعی برخوردار نبودند، ولی در بین «آزادها» نوعی دموکراسی («دموکراسی اشرافی» ــ صاحب بردهٔ بیشتر، آزادی بیشتری داشت)، حاکم بود. همین دموکراسی نیم‌بند و محدود (محدود، هم از نظر مفهوم دموکراسی و هم از نظر طبقه‌های جامعه)، توانست موجب شکوفایی دانش و هنر و سرعت گرفتن پیشرفت آنها شود و چون دانش، و از جمله ریاضیات، برای «آزادها» بود، به‌طور طبیعی و تحت تأثیر همین دموکراسی، استدلال و بحث منطقی نیرو گرفت و تلاش می‌شد، برای هر ادعایی، استدلالی پیدا شود.

بحث دربارهٔ فلسفهٔ ریاضیات و هم نتیجه‌گیریهای فلسفی از مفهومها و روشهای ریاضی، بحثی به نسبت طولانی است و جای جداگانه‌ای می‌خواهد.

۲. قانونمند بودن تکامل ریاضیات

انسان در مسیر حرکت تاریخی خود، گاه به‌صورتی آرام و پیوسته و گاه به‌صورت جهشی و انقلابی، در جهتهای گوناگون پیش رفته است. برخی از این جهتها، و به‌طور عمده مسیر تکاملی روابط اقتصادی و تولیدی، از دیدگاه‌های مختلف مورد بررسی پژوهشگران قرار گرفته است، به نحوی که امروز مسیر تکاملی روابط مادی و اقتصادی بشر ــ چه در درون یک جامعه و چه در کل سیاره زمین ــ کم و بیش برای همگان روشن است. ولی دریغ که هنوز، مسیر تکاملی تفکر انسانی و شاخه های درونی آن، مثل دانش، مورد بررسی علمی دقیق قرار نگرفته، قانونمندیهای آن و بستگیهای متقابل آن با سایر جنبه‌های مادی و معنوی زندگی انسان، روشن نشده است ...

در حالت خاص، در زمینه تاریخ دانش و زندگی‌نامهٔ دانشمندان، تلاشهای بسیاری و اغلب صادقانه، شده است، ولی هنوز به یک دیدگاهی علمی و قانع کننده، که همه جنبه‌های آن را به صورت علمی و منطقی مورد تجزیه و تحلیل قرار داده باشد، برخورد نمی کنیم. مقدمات و مدارک کار به‌طور کامل آماده است و نیروی ذهنی خلاقی را می‌طلبد

که براساس مدارک موجود، چنین دیدگاهی را ارائه دهد.

در سالهای پنجاه سدهٔ بیستم، کولموگوروف، ریاضیدان نامدار شوروی، مقاله‌ای در زمینهٔ «تاریخ ریاضیات» نوشت و برای کشف قانونهای حاکم بر مسیر تکاملی ریاضیات، کشف مرحله‌های مختلف تکامل ریاضیات را ضروری دانست. کولموگوروف، چهار مرحلهٔ اساسی را درنظر گرفته است:

۱. مرحلهٔ شکل‌گیری مفهومهای اصلی ریاضیات، یا مرحلهٔ پیش آگاهی. این مرحله با آغاز ریاضیات یونانی، پایان می‌یابد.

۲. مرحله ریاضیات مقدماتی یا ریاضیات با کمیتهای ثابت، و به‌طور عمده این مرحله را ریاضیدانان ساکن یونان و سپس اسکندریه گذرانده‌اند.

۳. ریاضیات با کمیتهای متغیر که به تقریب از دوران نیوتون و لایب‌نیتس آغاز و در سدهٔ نوزدهم ختم می‌شود.

۴. ریاضیات امروزی که در زمان ما هم ادامه دارد.

همان‌طور که می‌بینیم، کولموگوروف (با این که به بستگی کامل ریاضیات و عمل اعتقاد داشت) تقسیم‌بندی خود را براساس پیشرفت ریاضیات نظری انجام می‌دهد و به زبان دیگر، تنها به انگیزه درونی ریاضیات توجه دارد.

اعتبار بیش از اندازهٔ کولموگوروف، موجب شد که بعد از انتشار این مقاله، بیشتر کسانی که در زمینه تاریخ ریاضیات کار کرده‌اند، با پذیرفتن این مرحله‌های چهارگانه، به‌طور عمده روی خط ریاضیات نظری پیش رفتند. اما، این شیوه برخورد با مسیر تکاملی ریاضیات، ضمن این که توانسته است بسیاری از جنبه‌های تاریخ گذشته را روشن کند و به دلیل وجود یک معیار، بسیاری از دشواریها را برطرف کرده است، نمی‌تواند به بسیاری از پرسشها پاسخ بدهد. اشکال این معیار چیست؟

اول، این روش برخورد با تاریخ تکامل ریاضیات، نیمی از ریاضیات، یعنی ریاضیات کاربردی را فراموش می کند و یکپارچگی ریاضیات را به هم می‌زند. کارآیی ریاضیات و یکی از دلیلهای عمدهٔ پیشرفت آن، وحدت نظریه و عمل در آن است. درست است که گاه این و گاه آن، در اولویت قرار می‌گیرد و جهت بررسیهای ریاضی را به سمت نظریه یا عمل می‌کشاند، ولی اولاً این جدایی نمی تواند برای دوره‌ای طولانی پایدار بماند و در ثانی نه درحالت سمت‌گیریهای نظری، ریاضیات کاربردی به کلی خاموش است و نه در حالت سمت‌گیری کاربردی، ریاضیات نظری در جای خود درجامی‌زند. ریاضیات را چه از نظر تاریخی، چه از نظر فلسفی و چه از نظر آموزشی، باید در یکپارچگی آن و در همراهی یا تقابل نظریه و عمل شناخت. بدون توجه به این وحدت، همیشه جنبه‌هایی از ریاضیات ناشناخته می‌ماند و در ابهام قرار می‌گیرد.

دوم، نتیجهٔ نهایی این شیوهٔ برخورد با تاریخ ریاضیات، منجربه این می‌شود که تنها ملتهای ساکن اروپا و به‌ویژه، اروپای غربی و جنوبی، همهٔ کارها را انجام داده‌اند: ریاضیات، بعد از یک دورهٔ طولانی آغاز تمدن بشری، سرانجام از یونان آغاز به شکفتن کرد، سپس دانشمندان یونانی، در اسکندریه دنبال کار را گرفتند تا در سده سوم و چهارم میلادی که مکتب اسکندریه رو به زوال رفت. از این‌جا یک دورهٔ طولانی سکوت در سراسر جهان برقرار می‌شود و اروپا هم (که مشعل‌دار دانش است) در سده‌های میانه فرو می‌رود و گرفتار دستگاه‌های تفتیش عقاید می‌شود؛ تا این که نوزایی و رونسانس، دوباره در اروپا آغاز می‌شود و وظیفه تکامل ریاضیات را تا به امروز بر دوش خود می‌گیرد. در این میان، از خوشبختی مردم اروپا کسانی در شرق (و بویژه در ایران) بودند، که لابد برای سرگرمی و گذران ساعتهای فراغت خود، ریاضیات اروپایی، یعنی ریاضیات یونان را از طریق ترجمهٔ آنها به زبان عربی حفظ کردند و بموقع خود، آن را در اختیار «اربابان» دانش، یعنی اروپاییان، گذاشتند تا آنها ناچار نباشند همه چیز را از نو آغاز کنند.

سوم، آیا به‌واقع پیشرفت «ریاضیات مقدماتی» در یونان و اسکندریه به‌طور کامل انجام شد؟ اساسی‌ترین بخش «ریاضیات مقدماتی» یا «ریاضیات با کمیتهای ثابت»، بخش «محاسبه‌ای» ریاضیات، یعنی حساب، جبر و مثلثات است که ریاضیدانان یونانی، یا به‌طور کلی به آنها نپرداختند و یا حد ناچیزی از آنها را مورد مطالعه قرار دادند. حتی عددنویسی موضعی که امروز به‌کار می بریم و، کشف آن موجب جهشی در پیشرفت ریاضیات بود، به هیچ‌وجه در یونان پدید نیامد، درحالی‌که سده‌ها پیش از ریاضیدانان یونانی، مردم ساکن «میان دورود» از عددنویسی موضعی استفاده می‌کردند و حتی برای مرتبه‌های خالی، علامت صفر را به‌کار می برند. درحالی که هندسه در یونان، به مرز بالایی از شکوفایی رسید، جبر یا مثلثات، حتی به‌وجود نیامد. این ریاضیدانان اروپایی بعد از رونسانس، از کدام منبع اروپایی استفاده کردند که یکباره کار پیشرفت جبر و مثلثات را، از نقطه‌های پایانی آغاز کردند؟ کدام سرچشمهٔ یونانی روش عددنویسی موضعی را به آنها آموخت؟

چهارم، آیا این شیوه بحث دربارهٔ مسیر تکاملی‌تاریخ ریاضیات، با همهٔ قانونهای تکامل، که در اساس بر وجود تضاد درونی پدیده و «نفی در نفی» قرار دارد، تکیه می‌کند؟ کدام تضاد درونی، موجب تکامل ریاضیات شده است؟ در هر مرحله، کدام قانون یا روش ریاضی مربوط به مرحلهٔ قبل، «نفی» شده است؟ ... اگر می‌پذیریم که زندگی و عمل، یکی از نیرومندترین انگیزه‌های پیشرفت دانش، و از جمله ریاضیات، است، در این تقسیم‌بندی، چگونه می‌توان نقش این عامل اصلی را پیدا کرد؟...

این‌گونه پرسشها را که بیشتر جنبهٔ منطقی و فلسفی دارد، تا هر جا بخواهید، می‌توان ادامه داد. ولی، اگر به‌گونه‌ای که در این نوشته آوردیم، با تاریخ ریاضیات برخورد کنیم، همهٔ این دشواریها برطرف می‌شود: ریاضیات، به تناوب، از دوره‌های کاربردی و نظری عبور کرده است و ما هم‌اکنون در دورهٔ پنجم تکامل ریاضیات ــ که سمت‌گیری کاربردی دارد ــ به سر می‌بریم. دوره‌های دوم و چهارم تکامل ریاضیات (یونان باستان و اروپای غربی بعد از رونسانس) دوره‌هایی با سمت‌گیری نظری و دوره‌های اول و سوم مسیر پیشرفت ریاضیات (دوره پیش از یونان و دورهٔ بلافاصله بعد از یونان) دوره هایی با سمت‌گیری کاربردی بوده است و به ویژه، دورهٔ سوم را در تاریخ تکامل ریاضیات، می‌توان به حق، ریاضیات ایرانی دانست، چرا که بیشتر پژوهشهای ریاضی در ایران و به‌وسیلهٔ دانشمندان ایرانی انجام گرفته است. ریاضیات، دانشی پویاست و، این پویایی، به‌خاطر بستگی آن با عمل و زندگی و دانشهای دیگر است. حرکت تکاملی دانش ریاضی مثل هر حرکت تکاملی‌دیگری، صعودی است، ولی روی یک خط راست پیش نمی رود، حرکت تکاملی ریاضیات، حرکتی مارپیچی است. در دوره سوم تکامل ریاضیات (یعنی ریاضیات ایرانی)، مثل دورهٔ اول (پیش از ریاضیات یونانی)، سمت‌گیری کاربردی دارد، ولی در سطحی بسیار بالاتر از آن قرار می‌گیرد، چرا که در این دوره، از همهٔ دستاوردهای دو دورهٔ گذشته استفاده می‌شود، شکافها و رخنه‌های موجود در ریاضیات قبلی از بین می‌رود و شاخه‌های تازه‌ای از ریاضیات (که بیشتر به‌کار عمل، مثل تقسیم ارث یا محاسبه‌های مربوط به اخترشناسی می‌خورد) پدید می‌آید.

در پایان، این نکته را که از مقالهٔ آقایان «روزنفلد» و «کوبسف» برداشته‌ایم و می‌تواند به‌عنوان جمع‌بندی کوتاهی از کارهای ریاضیدانان ایرانی درنظر گرفته شود، بخوانید:

«ریاضیدانان شرق میانه و نزدیک، در زمینه محاسبه های ریاضی، موفقیت‌های زیادی به‌دست آوردند: محاسبهٔ جدولهای مثلثاتی، حل مثلث (چه در روی صفحه و چه در روی کره)، محاسبهٔ ریشه معادله‌های جبری، محاسبهٔ دقیق عدد «پی» (که هم با کسرهای شصت شصتی و هم با کسرهای دهدهی نوشته می‌شد). عملهای مربوط به محاسبه، نظریهٔ نسبتها را شکل داد و با به‌کار بردن عدد دربارهٔ کمیتهای پیوسته، مفهوم آن را گسترش داد.

نوشته‌های بکر ریاضیدانان شرق و میانه و نزدیک و یا ترجمه هایی که از ریاضیات یونانی به زبان عربی انجام دادند، تأثیر فوق العاده‌ای در پیشرفت دانش و فرهنگ کشورهای اروپایی از سدهٔ دوازدهم به بعد داشته است.

در سدهٔ دوازدهم، رساله‌های حساب و جبر خوارزمی، به لاتینی ترجمه شد. در جریان مبارزهٔ هواخواهان عددنویسی موضعی با نمایندگان تفکر کهنه، سرانجام عددنویسی موضعی و رقمهای هندی در اروپای غربی پذیرفته شد و به غلط نام «رقم‌های عربی» به خود گرفت. شکل لاتینی شدهٔ نام «الخوارزمی» (Algorithmus) در آغاز به نوع محاسبه با دستگاه عددنویسی موضعی دهدهی گفته شد و، سپس (از زمان‌لایب نیتس)، به هر جریان منظم محاسبه‌ای، «اَلگوریتم» گفتند. نام کتاب خوارزمی، ابتدا «الجبر و المقابله» و سپس تنها «الجبر» و به شکل Algebre، روی «دانش جبر» گذاشته شد. به تقریب در همین زمان، نوشته‌های فارابی، ابوکامل و ابن سینا نیز ترجمه شد. در سده دوازدهم، نوشته‌های اقلیدس، بطلمیوس، ارشمیدس، آپولونیوس و دیگر دانشمندان یونان باستان، از عربی به لاتینی برگردانده شد. در این زمان، در اسپانیا، ایتالیا و جنوب فرانسه، گروه‌های زیادی به ترجمهٔ اثرهای عربی مشغول بودند.

نخستین ریاضی‌دان بزرگ اروپای غربی، فیبوناچی (۱۱۷۰ ــ ۱۲۵۰ میلادی) در تونس تحصیل کرده بود. «کتاب حساب» فیبوناچی، زیر تأثیر جدی «ابوکامل» نوشته شد و مسأله‌های زیادی در حساب و جبر را از او تقلید کرد. ریاضی‌دان دیگر اروپای سده‌های میانه، رژیومونتان (۱۴۳۶ ــ ۱۴۷۶ میلادی) نویسندهٔ «پنج کتاب دربارهٔ همهٔ گونه‌های مثلثات» است که، به صورت گسترده‌ای، از نوشته‌های «بتانی» و «توسی» استفاده کرده است.

در سدهٔ پانزدهم میلادی، وقتی قسطنطنیه به وسیلهٔ ترکها اشغال شد، تماس فرهنگی بین شرق و اروپا رو به گسترش نهاد. در این زمان دیگر، جدولهای اخترشناسی گورکانی و دیگر آثار دانشمندان ساکن سمرقند، که به زبان‌های یونانی جدید، لاتینی و آلمانی ترجمه شده بود، در اروپا به دست می‌آمد. ضمن این ترجمه‌ها، باید از نوشته‌های مربوط

به جبر هم نام برد که، در آن‌ها، اصطلاحهای جمشید کاشانی، برای نخستین بار در اروپا معمول شد. در همین زمان، بحثی که توسی دربارهٔ اقلیدس کرده بود، شناخته شد و اروپایی‌ها، با دیدگاه‌های خیام و توسی دربارهٔ «نسبتها» و «خطهای راست موازی» آشنا شدند. محتمل است که اروپاییها، اندیشهٔ «بی‌نهایت کوچکها» را از بحثی که توسی دربارهٔ ارشمیدس کرده است، گرفته باشند. اندیشه‌های خیام و توسی و تعمیم مفهوم عدد و گسترش آن تا عدد پیوسته، به اندیشه‌های دکارت (۱۵۹۴ـ ۱۶۵۰ میلادی) خیلی نزدیک است، که پاره خط راست هندسی را، به‌عنوان عددها شرح داده است، مطالعه می‌کند. دربارهٔ آشنائی دکارت با نوشته‌های توسی اطلاعی نداریم، ولی جان والیس (۱۶۱۶ ـ ۱۶۶۳ میلادی) با این نوشته‌ها آشنا بود و در یکی از کارهای خود ــ که به نظریه خطهای راست موازی و نظریه تشکیل نسبتها اختصاص دارد ــ همان بحث و بررسی توسی را تکرار کرده است. «ساکری» با نظریه‌خط‌های راست موازی خیام و توسی به وسیلهٔ والیس آشنا شد. و ما می‌دانیم، این دو نظریه، منجر به دو کشف بزرگ در تاریخ ریاضیات شد: «هندسه نا اقلیدسی» و «کمیتهای متغیر ...».

تفریح اندیشه ۵

۹ دانش‌آموز به صورت دایره ایستاده‌اند. برای تعیین برندهٔ بازی، آنها به ترتیب از ۱ تا ۵ در جهت عقربهٔ ساعت می‌شمارند و پنجمین نفر از دایره خارج می‌شود. بازی را به همین ترتیب تا آخر ادامه می‌دهند. یعنی ۵ تا ۵ می‌شمارند و هر بار پنجمین نفر از دور بازی کنار می‌رود. آخرین نفر باقی مانده برنده محسوب می‌شود.

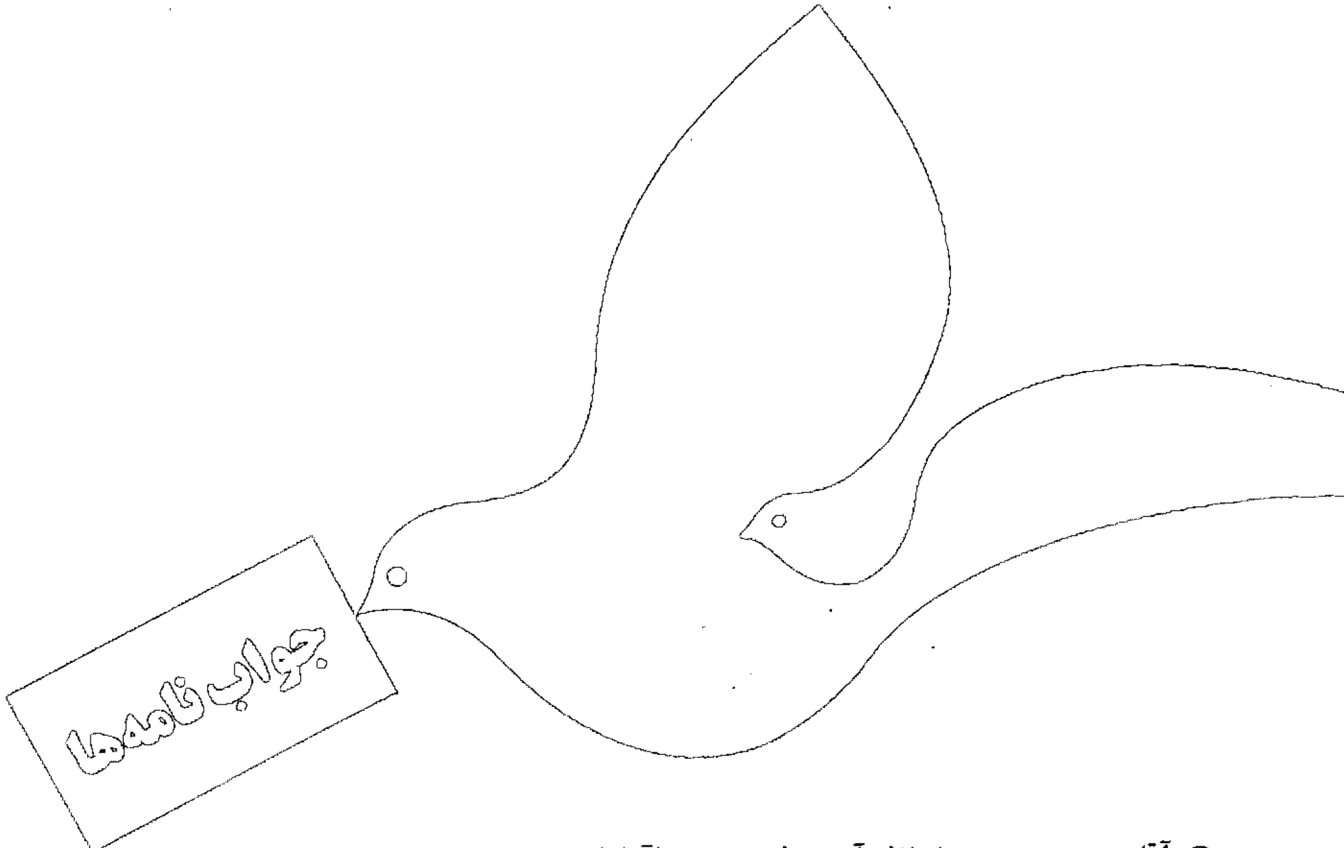
مهرداد کسی است که شمردن را انجام می‌دهد و می‌خواهد این کار را از کسی شروع کند که خودش برنده شود. اگر این ۹ نفر را A ،B ،C ،D ،E ،F ،G ،H ،I (در جهت عقربه‌های ساعت) بنامیم، مهرداد شمارش را از کدام یک باید شروع کند؟

از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمهٔ سیمین‌دخت ترکپور

جواب در صفحهٔ ۸۸

ادب ریاضی

در حدود ۳۵۰ سال روی اثبات قضیهٔ آخر فرما (معادلهٔ $x^n + y^n = z^n$ برای $n \geq ۳$ دارای جواب صحیح و غیربدیهی نمی‌باشد.) تلاش شده و این قضیه که به خودیِ خود اهمیت چندانی ندارد توانسته بزرگانِ ریاضی را مشغول کند، امّا اکنون که پس از ۳۵۰ سال این قضیه به اثبات رسیده است، باعث ترقی و پیشرفت بسیاری از نظریه‌ها و اثبات چندین قضیه و حدسِ حل نشده و پیوند بعضی از شاخه‌های علم ریاضی به یکدیگر شده است.



○ **آقای مهدی محمدی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (آمل)**

از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. امید است برای شماره‌های آینده از آنها استفاده کنیم. یادآور می‌شویم که سعی کنید مسائل ارسالی تکراری نباشند.

○ **خانم زهرا ریاحی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (مرند)**

از نامه ارسالی شما که حاوی چند مسألهٔ حل شده نیز می‌باشد متشکریم. به عرض می‌رسانیم که اِن شاء ا... برای شماره‌های آینده از آنان استفاده خواهیم کرد. سعی کنید مسائل حل شده خود را در سطح مطلوب‌تری ارائه دهید تا مورد استفاده دانش‌آموزان دبیرستان قرار گیرد.

○ **آقای عموزاد مهدیرجی محمد مهدی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (بهشهر)**

از نامه محبت آمیز شما متشکریم. امیدواریم با یاری و نصرت الهی و نظرات سودمند و الطاف دانش‌آموزان و اساتید و دبیران گرامی بتوانیم در جهتی که رضای خدا و بندگان خدا در آن است ثابت قدم باشیم. مؤید و پیروز باشید.

○ **آقای امین هدایی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (تبریز)**

ضمن تشکر و قدردانی از نامه ارسالی شما که حاوی مقاله‌ای تحت عنوان «تخمین ریشهٔ سوم یک عدد» می‌باشد به عرض می‌رسانیم که فرمولها و رابطه‌های تقریبی بسیاری برای ریشهٔ nام یک عدد وجود دارد که در این جا به دو مورد از آنان اشاره می‌کنیم. ۱) با استفاده از دیفرانسیل داریم:

$$\sqrt[n]{a^n+b} \simeq a+\frac{b}{na^{n-1}}$$

مثال:

$$\left(\sqrt[5]{۳۴}=\sqrt[5]{۳۲+۲}=\sqrt[5]{۲^5+۲}\simeq ۲+\frac{۲}{۵\times ۲^۴}\right)$$

۲) همچنین در برهان **۵** صفحهٔ ۶۰ مربوط به مقالهٔ بسط دو جمله‌ای ثابت شد:

$$\sqrt[n]{a}=۱+\left(\frac{a-۱}{na}\right)+\frac{n+۱}{۲!}\left(\frac{a-۱}{na}\right)^۲+\frac{(n+۱)(۲n+۱)}{۳!}\left(\frac{a-۱}{na}\right)^۳+\dots$$

مثال:

$$\left(\sqrt[3]{۵}=۱+\left(\frac{۴}{۱۵}\right)+\frac{۴}{۲!}\left(\frac{۴}{۱۵}\right)^۲+\frac{۴\times ۷}{۳!}\left(\frac{۴}{۱۵}\right)^۳+\dots\sim ۱/۷۰۹۹\dots\right)$$

موفق و پیروز باشید.

آقای عباس نیرومندی؛ دیپلمهٔ ریاضی (مرودشت)

ضمن تشکر از نامهٔ ارسالی شما به عرض می‌رسانیم در کتب مختلف می‌توانید دو موردی را که به آن اشاره کرده‌اید ببینید. مثلاً می‌توانید در کتاب اندیشهٔ ریاضی (ترجمهٔ پرویز شهریاری) و برخی از کتابهای تئوری اعداد مشاهده کنید. در جواب سؤال دیگر شما باید بگوییم که مطلبی از نظر ریاضی ارزشمند است که اولاً تازه و نو باشد، ثانیاً آن مطلب انگیزه و یا پایه‌ای برای یک تئوری جدید به‌شمار آید و بتوان روی آن یک ساختار نوین ریاضی بنا کرد.

در هر حال در این جا مطلب شما را عیناً درج می‌کنیم:

اگر $z = n(2n+1)$ باشد، آنگاه:

$$z^2+(z+1)^2+(z+2)^2+...+(z+n)^2=(z+n+1)^2+(z+n+2)^2+...+(z+2n)^2$$

$$n=1, z=3: 3^2+4^2=5^2 \quad , \quad n=2, z=10: 10^2+11^2+12^2=13^2+14^2, ...$$

○ آقای اکبر ترابی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (زنجان)

ضمن تشکر از نامهٔ ارسالی شما که حاوی مقاله‌ای تحت عنوان «گنگ بودن $\sqrt[n]{a}$ با شرط این که a توان nام نباشد» می‌باشد به عرض می‌رسانیم که این مطلب را می‌توانید در اکثر کتابهای تئوری اعداد و مجلات ریاضی مانند مجلهٔ رشد آموزش ریاضی مشاهده کنید. در انتظار مقالات بعدی شما هستیم. موفق و پیروز باشید.

○ آقای رضا تقی‌لو؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (زنجان)

از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. امید است از آنان در شماره‌های بعدی استفاده کنیم.

○ آقای رضا محمدپور؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (اهواز)

از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما تشکر و قدردانی می‌کنیم. امید است برای شماره‌های آینده مجله از آنان استفاده کنیم. موفقیت روز افزون شما را از خداوند منان مسئلت داریم.

○ خانم سارا قَرجه؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (تهران)

از مطلب ارسالی شما متشکریم. برای اطلاع خوانندگان مطالب شما را دراین جا می‌آوریم:

اگر بدانیم:

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

، مقدار $1^2+3^2+...+(2n+1)^2$ را به‌دست آورید.

داریم:

$$1^2=1^2$$
$$3^2=(1+2)^2=1^2+2\times2+2^2$$
$$5^2=(1+4)^2=1^2+2\times4+4^2$$
$$\vdots \dots\dots\dots\dots$$
$$(1+2n)^2=1^2+2\times2n+(2n)^2$$

$$\therefore \underbrace{1^2+3^2+5^2+...+(2n+1)^2}_{A} \text{ جمع}$$

$$=\underbrace{(1+1+...+1)}_{(n+1)\ \text{مرتبه}}+4\underbrace{(1+2+...+n)}_{\frac{2n(n+1)}{2}}+\underbrace{2^2+4^2+...+(2n)^2}_{B}$$

$$\Rightarrow A=(n+1)+2n(n+1)+B$$

$$\Rightarrow A-B=n+1+2n(n+1) \qquad (1)$$

از طرفی می‌دانیم:

$$A+B=1^2+2^2+3^2+...+(2n+1)^2$$

$$=\frac{(2n+1)(n+1)(4n+3)}{3} \qquad (2)$$

از جمع روابط (۱) و (۲) واختصار لازم خواهیم داشت:

$$1^2+3^2+5^2+...+(2n+1)^2$$
$$=\frac{n}{3}(4n^2+11)+4n^2+1$$

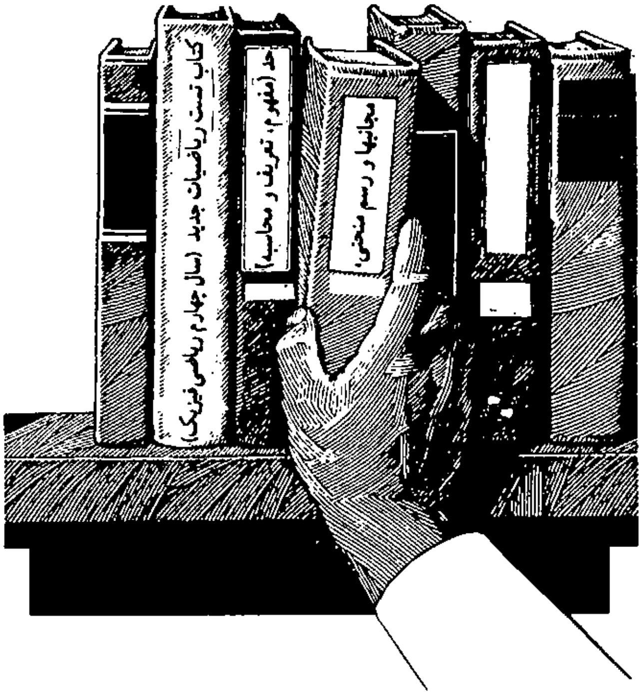
مثال:

$$n=3:$$
$$1^2+3^2+5^2+7^2$$
$$=\frac{3}{3}\left[4(3)^2+11\right]+4(3)^2+1=84$$

○ آقای مسعود فلاّح؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (اصفهان)

از مسایل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. برای شماره‌های آیندهٔ مجله از آنها استفاده خواهیم کرد.

معرفی کتاب



مجانبها و رسم منحنی،
تألیف: احمد قندهاری
انتشارات مدرسه،
چاپ اول، پاییز ۷۴

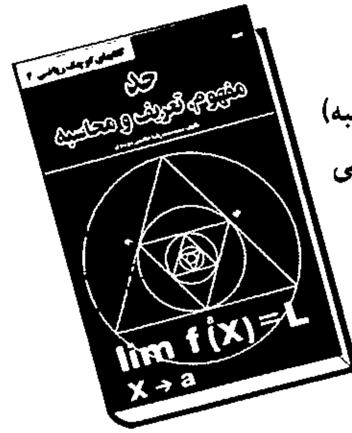
کتاب مجانبها و رسم منحنی، سومین کتاب از سری کتابهای کوچک ریاضی است که با هدف کمک به درک مفاهیم درسی و برطرف کردن کمبودها و خلأهای کتابهای درسی به چاپ می‌رسد.

این کتاب شامل ۲ بخش است. بخش اول اختصاص به مجانبها داشته و از ابتدا مفهوم مجانب و نحوهٔ محاسبه و کاربرد مجانبها را در رسم منحنی بیان می‌کند که در هر مورد با ذکر مثالهای متنوع و حل شده، خواننده به راحتی می‌تواند توانایی درک مطلب را در خود افزایش دهد.

در بخش دوم (رسم منحنی‌ها) روی انواع مختلف منحنی‌ها در حالتهای متفاوت و رسم آنها به طور جداگانه بحث شده و در این بخش با نوعی طبقه‌بندی خاص از تعیین جهت تغییرات گرفته تا رسم منحنی‌های بسیار پیچیده و مشکل، دانش‌آموز می‌تواند تمام حالتهای مورد نیاز را مطالعه و بهره لازم را ببرد.

در انتهای هر مبحث تمرینهایی مربوط به آن گنجانده شده که جواب آخر هر تمرین در جلوی آن آورده شده و نیز در انتهای کتاب تستهایی به تفکیک موضوع طرح و به صورت تشریحی حل شده‌اند.

مطالعهٔ این کتاب را به دانش‌آموزان سالهای سوم و چهارم دبیرستان و دبیران محترم توصیه می‌کنیم.



حد (مفهوم، تعریف و محاسبه)
تألیف: سیدمحمدرضا هاشمی موسوی
انتشارات مدرسه،
چاپ اول، پاییز ۱۳۷۴

این کتاب که چهارمین کتاب از سری کتابهای کوچک ریاضی می‌باشد حاوی مفهوم، تعریف و محاسبهٔ حدود توابع و عبارتها با بیانی ساده است که پس از درس، با توجه به مفاهیم و مثالهای متن درس تمریناتی دوره‌ای جهت احاطه و تسلط کامل روی مطالب فراگرفته شده طرح شده است. همچنین برای دانش‌آموزان علاقه‌مند و دانشجویان و دبیران گرامی قسمتهایی مانند:

طریقهٔ استفاده از شعاع همسایگی در مسایل حد (تعریف حد)،

بیان هم ارزیهای مهم و محاسبهٔ حدود عبارتها و توابع نمایی، لگاریتمی و معکوس مثلثاتی (آرکها)،

روشهای رفع ابهام از صورتهای مبهم (0^0 , ∞^0 , 1^∞)،

آورده شده است تا حتی‌الامکان مشکلات دانش پژوهان عزیز را برطرف سازد.

در آخر تستهای کنکورهای سراسری مربوط به حد رشته‌های تجربی و ریاضی و فنی و همچنین تستهایی جهت پوشش دادن به مطلب (۱۵۱ تست حد) همراه با پاسخ تشریحی آورده شده است تا معلومات کافی و مهارت در تست‌زدن را برای داوطلبان شرکت در آزمونهای سراسری فراهم کند.
مطالعه و استفاده از این کتاب را از آن جهت که حد یکی از مهمترین مفاهیمی است که در درس ریاضیات بنیادی معرفی می‌شود و پایه و اساس مفاهیمی نظیر مشتق و دیفرانسیل و انتگرال بر آن استوار است، به همهٔ دانش‌آموزان عزیز دبیرستانی رشتهٔ ریاضی و تجربی و دبیران ریاضی محترم و دانشجویان گرامی توصیه می‌کنیم.

کتاب تست ریاضیات جدید
(سال چهارم ریاضی‌فیزیک)
مؤلفین: یدا ... ایلخانی‌پور و حمیدرضا امیری
نشر دانا،
چاپ اول، پاییز ۷۴

کتابی است که آموزش بخشی از ریاضیات دبیرستانی را به روش تست بیان می‌کند. روشی که مؤلفین در این کتاب، مورد نظر داشته‌اند (آموزش از طریق تست) برای اولین‌بار است که مطرح شده و در این روش کلیهٔ مفاهیم کتاب ریاضیات جدید سال چهارم (چهار بخش منطق ریاضی، حلقه و میدان، تئوری اعداد و ماتریس) طبق سر فصل دروس و پابه‌پای مطالب کتاب به صورت سؤالات چهار جوابی درآمده است.

از خصوصیات این روش و این کتاب می‌توان به چند مورد زیر اشاره کرد:

۱ ــ با مطالعهٔ هر فصل یک بار به طور کامل مطالب آن فصل دوره شده و حتی ریزترین نکات موجود از لابلای مطالب درسی معین و مشخص است.

۲ ــ در جوابهای تشریحی تستها که به صورت جداگانه مطرح شده تمامی گزینه‌ها تک‌تک مورد بررسی و تجزیه و تحلیل قرار گرفته‌اند و بخصوص این که فقط گزینهٔ درست و یا دلیل درستی آن بیان نشده بلکه، سه گزینهٔ دیگر و دلیل نادرستی آنها نیز مورد نظر بوده و روی آنها بحث شده است، در ضمن هر کجا که لازم بوده قضیه‌ها و تعاریف عنوان شده و نتیجه‌های آنها به صورت نکات تستی مطرح شده است.

۳ ــ مباحث کتاب مانند کتاب درسی فصل‌بندی شده تا مبحث به مبحث که پیش می‌روید خود را نیز بیازمایید.

۴ ــ در پایان کتاب دو سری سؤالات کنکور سراسری (۷۳ و ۷۴) مرحلهٔ اول به همراه کلید جوابهای آنها و یک آزمون از کل کتاب آورده شده است.

مطالعهٔ این کتاب رابه کلیهٔ داوطلبان کنکورتوصیه می‌کنیم.

مسابقه‌ای برهان ۱۴

حل مسائل

توجه: در اثبات این مسأله از فرمولی معروف به فرمول پاسکال که به صورت $\binom{k+1}{r}=\binom{k}{r}+\binom{k}{r-1}$ می‌باشد استفاده شده است.

$$p(n):(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^{n-r}b^r$$

$$p(1):(a+b)=\binom{1}{0}a+\binom{1}{1}b=a+b\Rightarrow p(1)\equiv T$$

فرض استقراء $\quad p(k)\equiv T\Rightarrow (a+b)^k=\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}a^{k-r}b^r$

حکم استقراء $\quad p(k+1):(a+b)^{k+1}=\sum_{r=0}^{k+1}\binom{k+1}{r}a^{k+1-r}b^r$

$$(a+b)^{k+1}=(a+b)(a+b)^k=(a+b)\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}a^{k-r}b^r$$

$$=(a+b)\left[\binom{k}{0}a^k+\binom{k}{1}a^{k-1}b+\binom{k}{2}a^{k-2}b^2+\dots+\binom{k}{k}b^k\right]$$

$$=\left[\binom{k}{0}a^{k+1}+\binom{k}{1}a^kb+\binom{k}{2}a^{k-1}b^2+\dots+\binom{k}{k}ab^k\right]+$$

$$\left[\binom{k}{0}a^kb+\binom{k}{1}a^{k-1}b^2+\binom{k}{2}a^{k-2}b^3+\dots+\binom{k}{k}b^{k+1}\right]$$

$$=\binom{k}{0}a^{k+1}+\left[\binom{k}{0}+\binom{k}{1}\right]a^kb+\left[\binom{k}{1}+\binom{k}{2}\right]a^{k-1}b^2+$$

$$\left[\binom{k}{2}+\binom{k}{3}\right]a^{k-2}b^3+\dots+\left[\binom{k}{k-1}+\binom{k}{k}\right]ab^k+\binom{k}{k}b^{k+1}\quad *$$

حال با توجه به اینکه $1=\binom{k+1}{0}=\binom{k}{0}$ و $1=\binom{k+1}{k+1}=\binom{k}{k}$ تساوی * را به صورت زیر می توان نوشت:

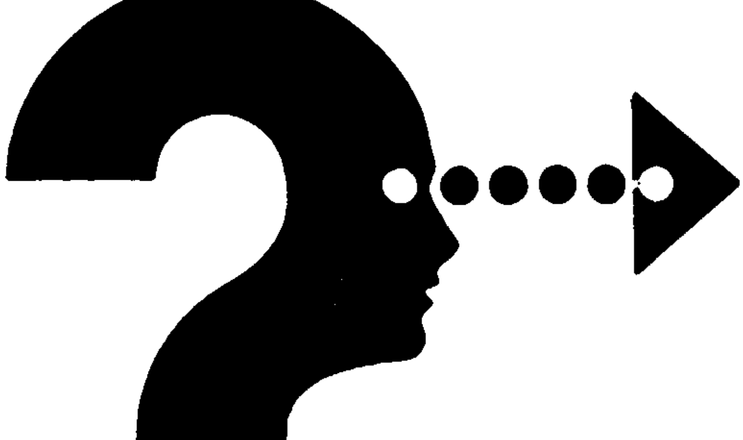
$$(a+b)^{k+1}=\binom{k+1}{0}a^{k+1}+\binom{k+1}{1}a^kb+$$

$$\binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2+\dots+\binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

$$\Rightarrow (a+b)^{k+1}=\sum_{r=0}^{k+1}\binom{k+1}{r}a^{k+1-r}b^r$$

اسامی عزیزانی که مسألهٔ مسابقه‌ای فوق را صحیح حل کرده بودند، به قرار زیر است:

۱ ــ شهرام جلالی، دانشجوی فیزیک (تهران) ۲ ــ ایرج لاریجانی (رامسر) ۳ ــ آتنا کیهانی دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (قائم‌شهر) ۴ ــ محمدرضا رضوانی، چهارم ریاضی (محلات) ۵ ــ سیداحمدرضا سجادی، دوم دبیرستان (تهران) ۶ ــ سعید بخشی، سوم ریاضی (تهران) ۷ ــ فرهاد جلالی، سوم ریاضی نظام جدید (مشهد) ۸ ــ بهزاد بیگلر بگیان، دوم ریاضی (تهران) ۹ ــ رضا رهنورد، چهارم ریاضی (مرند) ۱۰ ــ رضا سالم، سوم ریاضی (تهران) ۱۱ ــ میترا عطائیان، سوم ریاضی (مشهد) ۱۲ ــ مجید عسکریفرد، سوم ریاضی (محلات) ۱۳ ــ محمد پیشنماز، سوم ریاضی (تهران) ۱۴ ــ شبگیر حسنی (تهران) ۱۵ ــ مهدی امینیان، سوم ریاضی (مشهد) ۱۶ ــ علی نصیری امینی، چهارم ریاضی (تهران).

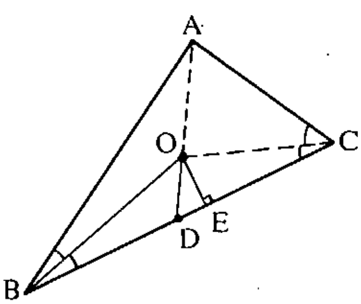


مسائل برای حل

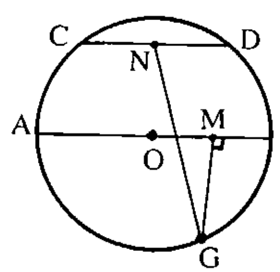
- هندسه: محمدهاشم رستمی
- ریاضیات جدید: حمیدرضا امیری
- جبر و مثلثات: احمد قندهاری ـ محمدرضا هاشمی
- کامپیوتر: حسین ابراهیم‌زاده قلزم

مسائل ریاضیات سال اوّل

۱ ـ در مثلث ABC نقطهٔ O محل تلاقی نیمسازهای زوایای داخلی مثلث است. اگر D نقطه برخورد AO با ضلع BC و OE عمود بر BC باشد، ثابت کنید که $B\hat{O}D = C\hat{O}E$ است.



۲ ـ در دایرهٔ O به قطر AB وتر CD را موازی با AB و مساوی با شعاع دایره رسم می‌کنیم و از نقطهٔ M وسط OB عمودی بر قطر AB اخراج می‌نماییم تا دایره را در نقطهٔ G قطع کند ثابت کنید اگر نقطهٔ G را به نقطهٔ N وسط CD وصل کنیم قطر AB پاره‌خط GN را نصف می‌کند.



۳ ـ اگر گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $\sim p \Rightarrow q$ هر دو ارزش درست داشته باشند در این صورت ارزش گزارهٔ $\sim q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ را تعیین کنید.

۴ ـ هرگاه $A \subseteq B$ و داشته باشیم $[(A \cap B') \cup (A' \cap B)] = A$، ثابت کنید $A = B$.

۵ ـ اگر $[(A \cap B') \cup (A' \cap B)] = \phi$، ثابت کنید، $A = B$.

۶ ـ اگر $x + \frac{1}{x} = t$، آنگاه حاصل $\frac{x^6 + 1}{x^3}$ را بیابید.

۷ ـ حاصل عبارت

$$(\sqrt[4]{2} - 1)^6 (\sqrt[4]{2} + 1)^6 (3 + 2\sqrt{2})^3$$

را بیابید.

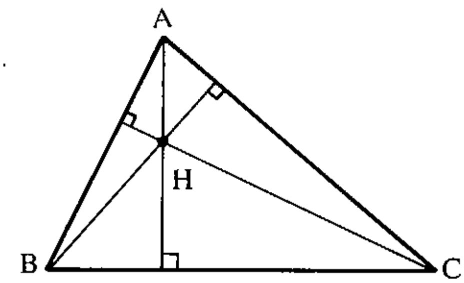
۸ ـ اگر $a, b \geq 0$ و داشته باشیم $ab - 5b - 4a + 20 = 0$، آنگاه کمترین مقدار $(a+b)$ را بیابید.

مسائل ریاضیات سال دوم ریاضی

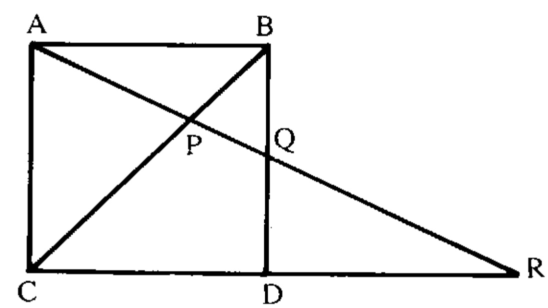
۱ ـ اگر H نقطهٔ تقاطع ارتفاعات مثلث ABC و S مساحت این مثلث باشد، ثابت کنید:

$$BC.AH + AC.BH + AB.CH = 4S$$

فرستنده: آقای امیرحسین بسطامی دانش‌آموز سال چهارم ریاضی از تهران.



۲ ــ مربع ABCD مفروض است. از رأس A خطی دلخواه رسم می‌کنیم تا قطر BD و ضلع BC را به ترتیب در نقطه‌های P و Q و امتداد ضلع DC را در نقطهٔ R قطع کند، ثابت کنید پاره‌خط AP واسطهٔ هندسی بین دو پاره‌خط PR و PQ است.



۳ ــ ثابت کنید، برای هر سه مجموعهٔ دلخواه مانند A و B و C داریم:

الف) $A\times(B\Delta C)=(A\times B)\Delta(A\times C)$

ب) $(A\Delta B)\times C=(A\times C)\Delta(B\times C)$

فرستنده: آقای مسعود فزون‌بال، (تهران)

۴ ــ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x\geq -1\\ -x^2+1 & x\leq 1\end{cases}$ مفروض است ثابت کنید این تابع پوششی است اما یک‌به‌یک نیست.

۵ ــ اگر

$$(x+y-3)^2+(y+z-5)^4+(z+x-4)^6=0$$

آنگاه عبارت $(3y+4x+5z)$ برابر چند است؟

۶ ــ اگر زاویه بین دو خط به معادلات $y=mx+1\ ,\ y=2x+m$، برابر $(\frac{\pi}{4})$ باشد، طول نقطه تقاطع این دو خط را بیابید.

۷ ــ اندازه‌های زوایای داخلی یک n ضلعی محدب تصاعد، عددی می‌سازند اگر کوچکترین زاویه (100°) و بزرگترین زاویه (140°) باشد، (n) چند است.

۸ ــ اگر $a\sin^2 x-b\cos^2 x=a-b$ باشد، ثابت کنید:

$$\frac{\sin^8 x}{a^3}+\frac{\cos^8 x}{b^3}=\frac{1}{(a+b)^3}$$

فرستنده: خانم آیدا بهارستانی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (رشت)

۹ ــ معادلات زیر را حل کنید:

الف) $(\cos x)^{\sin^2 x-\frac{3}{2}\sin x+\frac{1}{2}}=1$

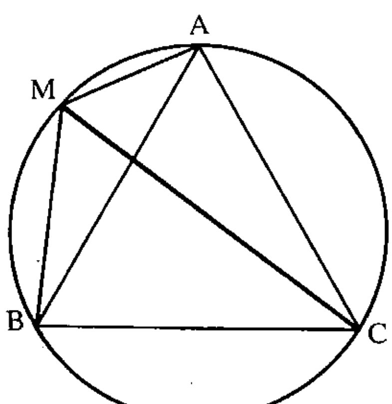
ب) $3\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-5x+9}=\pi$

فرستنده: آقای ابوالفضل کریمایی (ملارد شهریار)

■ مسائل ریاضیات و کامپیوتر سال سوّم ریاضی

۱ ــ نقطهٔ M روی دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC واقع است. ثابت کنید $MA^4+MB^4+MC^4$ مقداری است ثابت که به جای نقطهٔ M روی دایره بستگی ندارد.

فرستنده: آقای امیرحسین بسطامی



۲ ــ ثابت کنید در هر مثلث رابطهٔ زیر برقرار است (P نصف محیط مثلث و r_a و r_b و r_c شعاع دایره‌های محاطی خارجی مثلث‌اند).

$r_ar_b+r_ar_c+r_br_c=P^2$ راهنمایی: $r_a=\frac{S}{p-a}$ ، $r_b=\frac{S}{p-b}$ ، $r_c=\frac{S}{p-c}$

۳ ــ در مثلث ABC، $b+c=2a$ ثابت کنید:

الف) $h_a=3r$ ب) $r_a=h_a$

راهنمایی: $r=\frac{S}{p}$ ، $r_a=\frac{S}{p-a}$

۴ ــ ثابت کنید اعضای مجموعهٔ $\{\sin 2x, tgx, x^2\}$ وابستهٔ خطی‌اند.

۵ ــ در جبر بول عمل * را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$a*b=(a+b).(a'+b')$$

ثابت کنید:

الف) $a*a=0$

ب) $a*1=a'$

ج) $a*a'=1$

د) $a*0=a$

هـ) $a.(b*c)=(a.b)*(a.c)$

۶ ــ به چند طریق می‌توان اعداد ۴ رقمی ساخت به شرطی که مجموع ۲ رقم اول و چهارم ۱۰ باشد و مجموع دو رقم وسط ۴ شود.

فرستنده: آقای شهریار خان‌محمدی از (شهرضا)

۷ ــ در بسط $(x-1)^6$، مجموع ضرایب توانهای زوج (x) چقدر از مجموع ضرایب توانهای فرد x بیشتر است.

۸ ــ اگر

$$f(x+y, x-y)=2\sin x\sin y$$

، آنگاه $f(x,y)$ را بیابید. سپس $f(\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$ را حساب کنید.

۹ ــ اگر منحنی تابع به معادله $y=x^3+mx^2-4$ در نقطه ماکزیمم بر محور x ها مماس باشد، مقدار عددی m را بیابید.

۱۰ ــ معادلات زیر را حل کنید.

۱) $7\cos^2 x+5\sin^2 x=2\sin^2 x+\sin x\cos x+\frac{9}{2}$

۲) $3\sin 2x-3\sqrt{3}\cos 2x=6$

۳) $3tg(x-\frac{\pi}{12})+\cot g(\frac{\pi}{12}-x)=2$

۱۱ ــ دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x-y=\frac{\pi}{3} \\ \frac{\cos x}{\cos y}=2-\sqrt{3} \end{cases}$$

۱۲ ــ ثابت کنید در هر مثلث رابطهٔ زیر برقرار است:

$$a\sin(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2})=(b-c)\cos\frac{\hat{A}}{2}$$

۱۳ ــ برنامه‌ای به زبان BASIC بنویسید تا ابتدا عدد N را از Keyboard دریافت کند آنگاه دوجمله‌ای $(x+y+z)^N$ را بسط دهد.

■ مسائل ریاضیات سال چهارم ریاضی

۱ ــ بردارهای $\vec{a}(-1,2,3)$ و $\vec{b}(3,0,-2)$ مفروضند. تصاویر برداری که در امتداد بردار $(2\vec{a}-3\vec{b})\wedge(\vec{a}+2\vec{b})$ را پیدا کنید.

۲ ــ مختصات قرینهٔ نقطهٔ $M(4,1,6)$ نسبت به خط D به معادلهٔ $\begin{cases} x-y-4z+12=0 \\ 2x+y-2z+3=0 \end{cases}$ را پیدا کنید.

۳ ــ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را بیابید که از خط $D:\begin{cases} x=t-1 \\ y=2t+3 \\ z=-t-2 \end{cases}$ به فاصله ثابت ۴ واقع است. (سطح استوانی).

۴ ــ عمل * را در جبر گزاره‌ها به صورت $p*q\equiv(p\vee q)\wedge(\sim p\vee\sim q)$ تعریف می‌کنیم در این صورت ثابت کنید:

الف) $p*\sim p\equiv T$ ، $p*p\equiv F$ ، $p*F\equiv P$

ب) $p\wedge(q*r)\equiv(p\wedge q)*(p\wedge r)$

۵ ــ اگر $b\overset{m}{\equiv}a$ و $a\overset{n}{\equiv}c$ ثابت کنید $b\overset{(m,n)}{\equiv}c$

فرستنده: آقای حمیدرضا داودیان، سال چهارم ریاضی از (شوشتر)

۶ ــ بدون بسط و با استفاده از ویژگیهای دترمینان ثابت کنید

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ b & 0 & 0 & a \\ 0 & b & a & 0 \end{vmatrix}=(a^2-b^2)^2$$

فرستنده: ابوالفضل کریمایی‌از (ملارد شهریار)

۷ ــ دامنه و برد تابع f به معادله

$$f(x)=\sqrt{x^2-4x+4+[x]+[-x]}+\sqrt{-\sin^2 \pi x}$$

را بیابید.

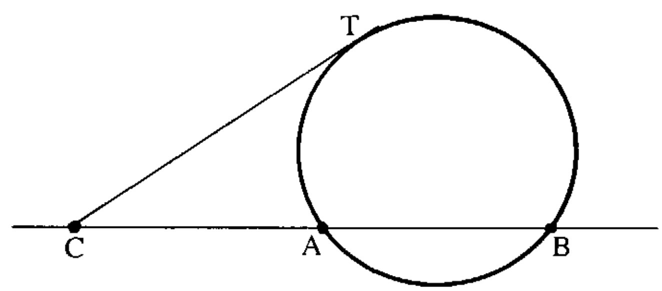
۸ ـ منحنی به معادله $x^4+y^2=a^2x^2, a>0$ را رسم کنید.

۹ ـ مطلوبست محاسبه

$$\cos x>0\ ,\ \ I=\int\frac{dx}{\cos x\sqrt{\cos 2x}}$$

■ مسائل ریاضیات سال دوم تجربی

۱ ـ سه نقطهٔ A و B و C روی یک خط راست واقع‌اند. بر دو نقطهٔ A و B دایره‌ای دلخواه می‌گذرانیم و از نقطهٔ C خط CT را بر این دایره مماس می‌کنیم. مکان هندسی نقطهٔ T را وقتی دایره تغییر کند، بیابید.



۲ ـ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC$(\hat{A}=90^\circ)$ ارتفاع AH وارد بر وتر را رسم می‌کنیم اگر $AH=m\sqrt{2}$ و $BH=m-1$ و $CH=2m+3$ باشد، اندازهٔ اضلاع مثلث و مساحت مثلث را حساب کنید.

۳ ـ عبارت زیر را تجزیه کنید:

$$2x^3-3x^2y-8x-4y+y^3$$

فرستنده: آقای مهدی نامور؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (بجنورد)

۴ ـ نشان دهید معادلهٔ زیر به ازای تمام مقادیر حقیقی غیرصفر m$(m\neq 0)$ دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد.

$$\frac{mx-1}{2x-3}=mx-2$$

فرستنده: آقای حمیدرضا محمدی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (اراک)

۵ ـ در یک بازی در دور اول یک تومان، دور دوم ۲ تومان، دور سوم ۴ تومان و... پاداش داده‌اند. معلوم شد که مبلغ کل پاداش ۶۵۵۳۵ تومان بوده است. چند دور بازی شده است؟

فرستنده: خانم مینا رحیمی؛ دانشجوی رشته ریاضی (تهران)

۶ ـ ثابت کنید عبارت زیر مربع کامل است:

$$A=\log^2 5+\log^2 8+2\log 5\log 8-4\log 4$$

فرستنده: آقای مهدی نامور (بجنورد)

۷ ـ اگر $\log_a^x=\frac{1}{2}$ و $\log_b^x=\frac{1}{3}$ و $\log_c^x=\frac{1}{4}$ باشد؛ مطلوب است محاسبهٔ $\log_x abcx=\frac{1}{4}$ (a و b و c و x عددهای حقیقی مثبت مخالف یک می‌باشند.).

فرستنده: آقای حمیدرضا محمدی (اراک)

۸ ـ مقدار عبارت زیر را حساب کنید:

$$A=\frac{1+\sqrt{3}\,tg10^\circ}{\sqrt{3}-tg10^\circ}$$

فرستنده: آقای رضا عاقلی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (سیاهکل)

۹ ـ معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$2^{\sin^2 x}+2^{\frac{1}{1+tg^2 x}}=3$$

فرستنده: آقای افشین ملاسعیدی دهاقانی؛ دانش‌آموز رشته تجربی (دهاقان)

۱۰ ـ معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$tgx=\frac{\sin 80^\circ}{1+\cos 40^\circ}\times\frac{\cos 40^\circ}{1+\cos 80^\circ}$$

فرستنده: آقای حمیدرضا محمدی، دانش‌آموز رشته ریاضی (اراک)

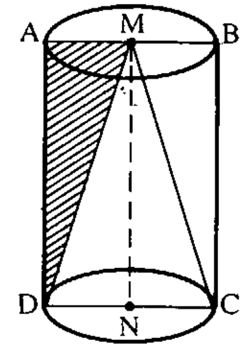
■ مسائل ریاضیات سال سوم تجربی

۱ ـ اندازهٔ بردار مکان مرکز ثقل مثلث ABC را تعیین کنید، در صورتی که نقطهٔ A به طول ۱− روی محور طولها و نقطهٔ B، نقطهٔ می‌نیمم تابع $y=x^2+1$ و نقطهٔ C به عرض ۲ روی نیمساز ربع اول و سوم باشند.

۲ ـ به کمک ضرب داخلی بردارها ثابت کنید که سه

ارتفاع هر مثلث از یک نقطه می‌گذرند.

۳ ـ مستطیل ABCD به طول ۸ و عرض ۴ سانتی‌متر مفروض است. اوساط اضلاع AB و CD را M و N می‌نامیم. از M به D و N و C وصل می‌کنیم. حجم حاصل از دوران سطح AMD حول خط MN را پیدا کنید و این حجم را با حجم حاصل از دوران مثلث MND حول خط MN مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



۴ ـ دامنه و برد تابع با ضابطهٔ زیر را تعیین کنید.

$f(x)=\sqrt{3x^2-3}+\sqrt{4-4x^2}$

۵ ـ زاویهٔ بین خط Δ به معادلهٔ $y=\frac{3}{2}$ و منحنی به معادلهٔ $y=\sin x+2$ را در یکی از نقاط تلاقیشان تعیین کنید.

۶ ـ نزدیکترین نقاط منحنی $x^2-y^2=2$ به نقطهٔ $A(3,0)$ را بیابید.

۷ ـ حدهای زیر را حساب کنید.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x^3}{4x^2+6x}-\frac{3x^2}{3x+2}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{Arctg}x}{5x}\right)$

۸ ـ مقدار k را چنان تعیین کنید که تابع با ضابطهٔ:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\geq 1 \\ \dfrac{k-kx}{\sin(x-1)} & x<1 \end{cases}$$

در نقطه‌ای به طول $x_0=1$، پیوسته باشد.

۹ ـ اگر A و B و C زوایای مثلثی باشند؛ درستی تساویهای زیر را تحقیق کنید:

1) $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

2) $\sin A+\sin B-\sin C=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

۱۰ ـ معادلات زیر را حل کنید.

1) $4\sin(x+\frac{\pi}{6})\sin(x-\frac{\pi}{6})=1$

2) $\cos 5x\cos 3x-\sin x\sin 3x=1$

۱۱ ـ عبارات زیر را محاسبه کنید.

$P=\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 60^\circ\cos 80^\circ$

$S=\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 60^\circ\sin 80^\circ$

■ مسائل ریاضیات سال چهارم تجربی

۱ ـ مقدار k را چنان بیابید که دو خط $7x-4y=55$ و $y=kx+10$ روی نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم متقاطع باشند.

۲ ـ در رابطهٔ $(y-2x)^2=2y-x+1$، مشتق y را برحسب x به دست آورید.

۳ ـ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که از نقطهٔ $M(1,2)$ گذشته و بر محورهای مختصات مماس باشد.

۴ ـ تابع اولیهٔ تابع با ضابطهٔ $y=\frac{7}{x^4}+2x\sqrt{3x^2+4}$ را به دست آورید.

۵ ـ حجم حادث از دوران سطح محصور بین منحنی تابع با ضابطهٔ:

$y=\sqrt{3\cos^2 x-3\cos x}$

و محور xها و دو خط $x=\frac{\pi}{2}$ و $x=\pi$ را حول محور xها به دست آورید.

۶ ـ معادلات زیر را حل کنید.

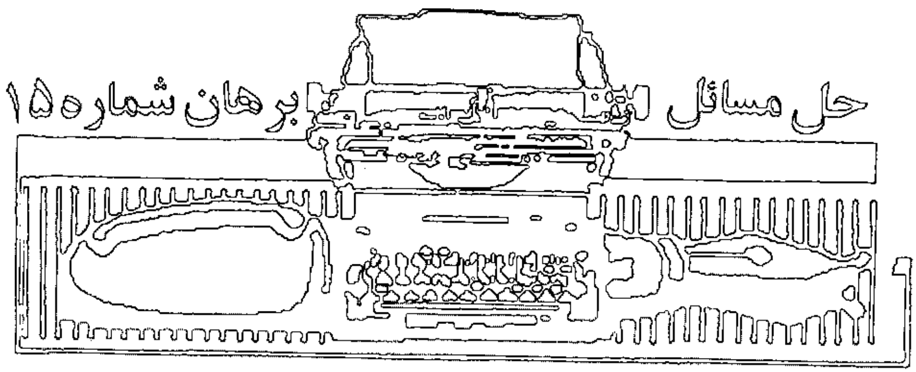
1) $\cot g(x-\frac{\pi}{4})-tg(\frac{\pi}{4}-x)=2$

2) $\sqrt{6}(\sin x+\cos x)+\sqrt{3}\sin 2x=3\sqrt{3}$

۷ ـ در مثلث ABC داریم:

$a^2b+a^2c+b^3+c^3$

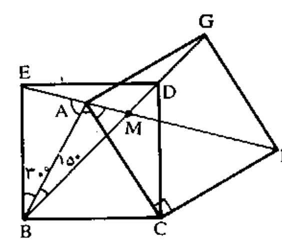
اندازهٔ زاویهٔ A را تعیین کنید و اگر $b=2$ و $C=1$ باشد، R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث را حساب کنید.



حل مسائل ریاضیات سال اول

۱ ــ از E به A و از A به F وصل می‌کنیم و ثابت می‌کنیم که $E\hat{A}F=۱۸۰^\circ$ است. داریم:

$$E\hat{A}F=E\hat{A}B+B\hat{A}C+C\hat{A}F$$



امّا، $B\hat{A}C=۶۰^\circ$ است و $E\hat{A}B=۷۵^\circ$ و $C\hat{A}F=۴۵^\circ$ است، زیرا مثلث ABC متساوی‌الاضلاع، مثلث EBA متساوی‌الساقین با زاویهٔ رأس $E\hat{B}A=۳۰^\circ$ و مثلث ACF قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است درنتیجه:

$$E\hat{A}F=۷۵+۶۰+۴۵=۱۸۰^\circ$$

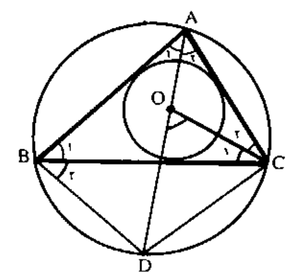
بنابراین سه نقطهٔ E و A و F روی یک خط راست واقع‌اند.

برای اینکه ثابت کنیم سه نقطهٔ B و D و G بر یک استقامت‌اند از نقاط D و G به نقطهٔ B وصل می‌کنیم. زاویه $A\hat{B}D=۱۵^\circ$ است، زیرا

$$A\hat{B}D=D\hat{B}E-A\hat{B}E=۴۵-۳۰=۱۵$$

همچنین زاویهٔ $G\hat{B}A=۱۵^\circ$ می‌باشد، زیرا زاویهٔ رأس مثلث متساوی الساقین BAG $(AB=AC=AG)$ برابر ۱۵۰° است. بنابراین خطوط BD و BG که با AB زاویهٔ ۱۵° ساخته‌اند، بر هم منطبق‌اند، یعنی سه نقطه B و D و G روی یک خط راست واقع‌اند. در ضمن دو خط EAF و BDG یکدیگررا به‌زاویهٔ ۶۰°قطع می‌کنند یعنی اگر نقطهٔ برخوردآنها را M بنامیم، $B\hat{M}E=۶۰^\circ$، زیرا در مثلث ABM، $A\hat{B}M=۱۵$ و $B\hat{A}M=۱۰۵$، پس $B\hat{M}E=۱۸۰-۱۲۰=۶۰^\circ$ می‌باشد.

۲ ــ حل الف) نقطهٔ O محل برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث ABC است لـذا، $\hat{A}_۱=\hat{A}_۲=\frac{\hat{A}}{۲}$ و $\hat{B}_۱=\hat{B}_۲=\frac{\hat{B}}{۲}$ و $\hat{C}_۱=\hat{C}_۲=\frac{\hat{C}}{۲}$ است. خط AO نیمساز زاویهٔ داخلی A، کمان BC را نصف می‌کند، یعنی $\widehat{DB}=\widehat{DC}$ پس



$$DB=DC \qquad (۱)$$

خواهد بود. از طرفی مثلث ODC متساوی‌الساقین است زیرا:

$$D\hat{C}O=D\hat{C}B+B\hat{C}D=\frac{\hat{A}}{۲}+\frac{\hat{C}}{۲}+\frac{\hat{A}+\hat{C}}{۲}$$

$$C\hat{O}D=\hat{A}_۲+\hat{C}_۲=\frac{A}{۲}+\frac{C}{۲}=$$

$$\frac{\hat{A}+\hat{C}}{۲}=D\hat{C}O\Rightarrow DO=DC \qquad (۲)$$

از مقایسهٔ روابط (۱) و (۲) داریم:

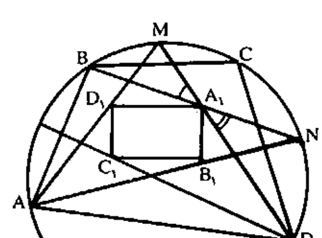
$$DB=DC=DO$$

حل ب) فرض می‌کنیم $\widehat{AD}=۲\alpha$ و $\widehat{AB}=۲\beta$، $\widehat{BC}=۲\gamma$ و $\widehat{CD}=۲\delta$ باشند.

وسط کمانهای BC و CD را به ترتیب M و N می‌نامیم دراین صورت نقاط $D_۱$ و $B_۱$ به ترتیب روی پاره‌خطهای راست AM و AN، و $A_۱$ در نقطهٔ برخورد پاره‌خطهای BN و DM واقع می‌شوند.

با توجه به قسمت الف داریم:

$$MD_۱=MB=MC=MA_۱$$



بنابراین مثلث $D_۱MA_۱$ متساوی الساقین است و

$$D_۱\hat{A}_۱M=\frac{۱}{۲}(۱۸۰-A\hat{M}D)=۹۰-\frac{\alpha}{۲}$$

است. به همین ترتیب حاصل می‌شود: $D\hat{A}_۱N=B\hat{A}_۱M=\frac{\gamma+\delta}{۲}$. از آنجا که، $B_۱\hat{A}_۱N=۹۰^\circ-\frac{\beta}{۲}$ است، بنابراین

$$D_۱\hat{A}_۱B_۱=۱۸۰-D_۱\hat{A}_۱M-(B_۱\hat{A}_۱N-D\hat{A}_۱N)=$$

$$۱۸۰-(۹۰-\frac{\alpha}{۲})-(۹۰-\frac{\beta}{۲})+\frac{\gamma+\delta}{۲}$$

$$=\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{۲}=۹۰^\circ$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود که سه زاویهٔ دیگر چهار ضلعی $A_۱B_۱C_۱D_۱$ هم قائمه و درنتیجه این چهار ضلعی مستطیل است.

۳ ــ طبق فرض داریم $\begin{cases} p\vee q\equiv p\vee r \\ p\wedge q\equiv p\wedge r \end{cases}$ حال ثابت می‌کنیم $q\equiv r$:

(از قانونهای

$$p\wedge(p\vee q)\equiv p\vee(p\wedge q)\equiv p$$

که به قوانین جذب معروف هستند استفاده می‌کنیم)

$$q\overset{\text{جذب}}{\equiv} q\vee(p\wedge q)\equiv q\vee(p\wedge r)\equiv$$

$$(p\vee q)\wedge(q\vee r)\equiv(p\vee r)\wedge(q\vee r)\equiv$$

$$(p\wedge q)\vee r\equiv(p\wedge r)\vee r\overset{\text{جذب}}{\equiv} r$$

۴ ــ طبق فرض داریم $(A-B)=(A\cap B)$ ثابت می‌کنیم $A\subseteq B$.

$$(A\cap B')=(A\cap B)$$

$$\Rightarrow B\cup(A\cap B')=\underbrace{B\cup(A\cap B)}_{B}$$

$$\Rightarrow(B\cup A)\cap(B\cup B')=B$$

$$\Rightarrow(A\cup B)\cap M=B$$

$$\Rightarrow(A\cup B)=B\Rightarrow A\subseteq B$$

۵ ــ فرض می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۲x-۳}=A\ ,$$

$$\frac{۱}{y-۲}=B \quad \frac{۲}{z-۱}=C$$

$$\Rightarrow\begin{cases} ۲A+B=۷ \\ ۲B+C=۱۰ \\ ۲C+A=۱۰ \end{cases}$$

$$-۲\begin{cases} ۲B+C=۱۰ \\ ۲C+A=۱۰ \end{cases}\Rightarrow A-۴B=-۱۰$$

$$-۲\begin{cases} A-۴B=-۱۰ \\ ۲A+B=۷ \end{cases}\Rightarrow ۹B=۲۷\Rightarrow \boxed{B=۳}$$

$2A+B=7 \Rightarrow 2A+3=7 \Rightarrow \boxed{A=2}$

$2B+C=10 \Rightarrow 6+C=10 \Rightarrow \boxed{C=4}$

$\frac{1}{2x-3}=A \Rightarrow \frac{1}{2x-3}=2 \Rightarrow$

$4x-6=1 \Rightarrow \boxed{x=\frac{7}{4}}$

$\frac{1}{y-2}=B \Rightarrow \frac{1}{y-2}=3 \Rightarrow$

$3y-6=1 \Rightarrow \boxed{y=\frac{7}{3}}$

$\frac{2}{z-1}=C \Rightarrow \frac{2}{z-1}=4 \Rightarrow$

$4z-4=2 \Rightarrow \boxed{z=\frac{3}{2}}$

۶ـ

$$\begin{cases} x^2(y+z)=16 \\ y^2(z+x)=16 \\ z^2(x+y)=16 \end{cases}$$

$\Rightarrow x^2(y+z)=y^2(z+x)$

$x^2y+x^2z=y^2z+xy^2$

$x^2y-xy^2+x^2z-y^2z=0$

$xy(x-y)+z(x^2-y^2)=0$

$xy(x-y)+z(x-y)(x+y)=0$

$(x-y)\underbrace{(xy+xz+yz)}_{\text{مثبت}}=0 \Rightarrow x=y$

به همین طریق از مساوی قرار دادن دو معادله دوم و سوم نتیجه می‌شود $y=z$ و از مساوی قرار دادن دو معادله اول و سوم نتیجه می‌شود $z=x$ پس در این دستگاه x ، y ، z مساویند. بنابراین

$x^2(y+z)=16$

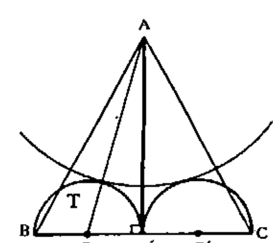
$x^2(x+x)=16 \Rightarrow 2x^3=16$

$\Rightarrow x^3=8 \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x=2 \\ y=2 \\ z=2 \end{matrix}}$

□ حل مسائل ریاضیات سال دوم ریاضی

۱ـ وسط پاره‌خط BA' را نقطهٔ O و شعاع دایرهٔ مورد نظر را R و نقطهٔ تماس دایرهٔ خواسته شده با نیمدایره به قطر BA' را T می‌نامیم. اگر $BC=a$ اختیار شود، داریم: $OT=\frac{a}{4}$ و از آنجا، $AO=AT+OT=R+\frac{a}{4}$ از طرفی در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOA' می‌توان نوشت:

$$AO=\sqrt{AA'^2+OA'^2}=\sqrt{(\frac{a\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{a}{4})^2}=\frac{a\sqrt{13}}{4}$$

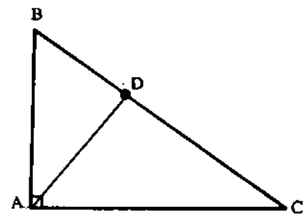


پس:

$$R+\frac{a}{4}=\frac{a\sqrt{13}}{4} \Rightarrow R=\frac{a}{4}(\sqrt{13}-1)$$

۲ـ (حل از خانم شبنم افسری از تهران). نقطهٔ O که به یک فاصله از دو ضلع زاویهٔ قائمه واقع است. محل برخورد نیمساز زاویهٔ داخلی A از مثلث ABC با ضلع BC است. پس داریم:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{DC}=\frac{30}{40}=\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{c}{b}=\frac{3}{4} \Rightarrow c=\frac{3}{4}b$$



از طرفی: $a^2=b^2+c^2$ و

$a=BC=30+40=70$

درنتیجه:

$$4900=b^2+(\frac{3}{4}b)^2=\frac{25}{16}b^2 \Rightarrow b=56 \Rightarrow c=42$$

۳ـ با توجه به رابطهٔ $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$ و فرمول $(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$ ، داریم:

$n[(A\times B)-(B\times A)]$

$=n(A\times B)-n[(A\times B)\cap(B\times A)]$

$=n(A\times B)-n[(A\cap B)\times(B\cap A)]$

$=n(A\times B)-n[(A\cap B)\times(A\cap B)]$

$=n(A)\times n(B)-n(A\cap B)\times n(A\cap B)$

$=n(A)\times n(B)-[n(A\cap B)]^2$

۴ـ برای این که بررسی کنیم یک رابطه، تابع است یا خیر، می‌بایست از ضابطهٔ داده شده y را برحسب x به دست آورده و بررسی کنیم که آیا برای هر x فقط یک y موجود است یا بیشتر:

$$x^2-y^2=1 \Rightarrow y^2=x^2-1 \Rightarrow y=\pm\sqrt{x^2-1}$$

بنابراین، رابطهٔ فوق تابع نمی‌باشد، زیرا برای هر x که بتوانیم در ضابطه قرار دهیم دو مقدار برای y حاصل می‌شود مثلاً اگر قرار دهیم $x=2$ ، خواهیم داشت $y=\pm\sqrt{3}$. (از یک عضو دامنه دو فلش خارج می‌شود یکی به $\sqrt{3}$ و دیگری به $-\sqrt{3}$)

۵ـ فرض کنیم f یک تابع بوده و g رابطه‌ای دلخواه باشد، ثابت می‌کنیم $(f\cap g)$ یک تابع است برای این منظور دو حالت در نظر می‌گیریم.

I) اگر $f\cap g=\phi$ در این صورت واضح است که رابطهٔ ϕ به انتفای مقدم تابع است!

II) اگر $f\cap g\neq\phi$ در این صورت داریم:

$$[(x,y)\wedge(x,y_1)]\in(f\cap g) \xRightarrow{\text{تعریف اشتراک}}$$

$$[(x,y)\wedge(x,y_1)]\in f \xRightarrow{f\ \text{تابع است}} y=y_1$$

پس $(f\cap g)$ نیز تابع است.

۶ـ

$4y^2-4(3x+1)y+(5x^2+54x-139)=0$

$\Delta'=4(3x+1)^2-4(5x^2+54x-139)=0$

$\Delta'=16x^2-192x+560=0$

$$x=\frac{96\pm\sqrt{9216-8960}}{16}=\frac{96\pm16}{16} \begin{cases} \frac{112}{16}=7 \\ \frac{80}{16}=5 \end{cases}$$

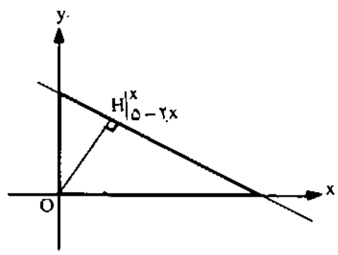
x	$-\infty$		5		7		$+\infty$
Δ'		$+$	0	$-$	0	$+$	

پس اگر $x>7$ یا $x<5$ باشد معادله اصلی دو ریشه حقیقی متمایز دارد.

۷ـ

$2x+y-5=0$

$$OH=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|-5|}{\sqrt{4+1}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$



از طرفی:

$OH=\sqrt{x_H^2+y_H^2}=\sqrt{x^2+(5-2x)^2}$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+(5-2x)^2}=\sqrt{5} \Rightarrow 5x^2-20x+20=0$

$\Rightarrow x^2-4x+4=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow H\Big|^{2}_{1}$

۸ـ داریم:

$\sin x+\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow (\sin x+\cos x)^2=(\frac{\sqrt{3}}{2})^2$

$\Rightarrow \sin^2x+\cos^2x+2\sin x\cos x=\frac{3}{4}$

$\Rightarrow 1+2\sin x\cos x=\frac{3}{4}$

$\Rightarrow 2\sin x\cos x=-\frac{1}{4} \Rightarrow \sin x\cos x=\frac{-1}{8}$

$\Rightarrow (\sin x\cos x)^2=(-\frac{1}{8})^2$

$\Rightarrow \sin^2x\cos^2x=\frac{1}{64}$ (۱)

از طرفی می‌دانیم:

$(\sin^2x+\cos^2x)^2=1$

$\Rightarrow \sin^4x+\cos^4x+2\sin^2x\cos^2x=1$

$\Rightarrow \sin^4x+\cos^4x=1-2\sin^2x\cos^2x$

و با استفاده از رابطهٔ (۱) خواهیم داشت:

$$\sin^4x+\cos^4x=1-2(\frac{1}{64}) \Rightarrow \sin^4x+\cos^4x=\frac{31}{32}$$

۹ـ داریم:

$$\frac{1}{\sin x\cos x(\sin x+\cos x)}=\frac{a}{\sin x}+\frac{b}{\cos x}+\frac{c}{\sin x+\cos x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin x\cos x(\sin x+\cos x)} = \frac{a\cos x(\sin x+\cos x)+b\sin x(\sin x+\cos x)+c\sin x\cos x}{\sin x\cos x(\sin x+\cos x)}$$

بنابراین باید داشته باشیم:

$$\Rightarrow a\cos x(\sin x+\cos x)+ b\sin x(\sin x+\cos x)+c\sin x\cos x\equiv 1$$
$$\Rightarrow a\cos x\sin x + a\cos^2 x + b\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\sin x\cos x \equiv 1$$
$$\Rightarrow (a+b+c)\sin x\cos x + a\cos^2 x + b(1-\cos^2 x)\equiv 1$$
$$\Rightarrow (a+b+c)\sin x\cos x+(a-b)\cos^2 x + b\equiv 1$$

از اتحاد اخیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} a+b+c=0 \Rightarrow c=-(a+b)=-2 \\ a-b=0 \Rightarrow a=b=1 \\ b=1 \end{cases}$$

$\boxed{a=b=1}$ ، $\boxed{c=-2}$

۱۰ ــ داریم:

$$(a^2-b^2)c^2 - b^2(a^2-c^2) = c^4 - b^4$$
$$\Rightarrow a^2c^2 - b^2c^2 - b^2a^2 + b^2c^2 = c^4 - b^4$$
$$\Rightarrow a^2c^2 - b^2a^2 = (c^2-b^2)(c^2+b^2)$$
$$\Rightarrow (c^2-b^2)a^2 - (c^2-b^2)(c^2+b^2) = 0$$
$$\Rightarrow (c^2-b^2)(a^2-c^2-b^2)=0$$

$\Rightarrow c^2-b^2=0$ یا

$a^2-c^2-b^2=0 \Rightarrow c=b$ یا

$a^2=b^2+c^2$

با توجه به تساوی $a^2=b^2+c^2$ نتیجه می‌شود که $\hat{A}=90^\circ$

۱۱ ــ داریم:

$$\sin(\pi\log x)+\cos(\pi\log x)=1$$
$$\Rightarrow \sqrt{2}\sin(\pi\log x+\frac{\pi}{4})=1 \Rightarrow \sin(\pi\log x+\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{4}$$
$$\Rightarrow \pi\log x = 2k\pi \Rightarrow \log x = 2k \Rightarrow \boxed{x_1=10^{2k}}$$

یا $\pi\log x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{4} \Rightarrow \pi\log x = 2k\pi+\frac{\pi}{2}$

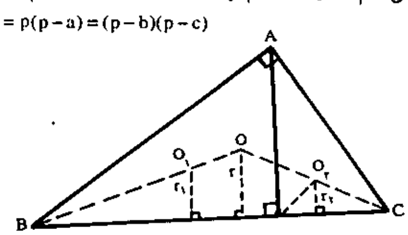
$$\Rightarrow \log x = 2k+\frac{1}{2} \Rightarrow x=10^{2k+\frac{1}{2}}=10^{2k}\times 10^{\frac{1}{2}}=10^{2k}\sqrt{10}$$
$$\Rightarrow \boxed{x_2=10^{2k}\sqrt{10}}$$

□ حل مسائل ریاضیات سال سوم ریاضی

۱ ــ (حل از آقای امیرحسین بسطامی از تهران).

می‌دانیم که در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=90^\circ)$، داریم:

$S=p(p-a)=(p-b)(p-c)$



محیط مثلثهای AHB و AHC را به ترتیب p_1 و p_2 و مساحت این دو مثلث را S_1 و S_2 می‌نامیم. خواهیم داشت:

$$r=\frac{S}{p}=\frac{p(p-a)}{p}=p-a=\frac{b+c-a}{2}$$
$$r_1=\frac{S_1}{p_1}=\frac{p_1(p_1-c)}{p_1}=p_1-c=\frac{AH+BH-C}{2}$$
$$r_2=\frac{S_2}{p_2}=\frac{p_2(p_2-b)}{p_2}=p_2-b=\frac{AH+CH-b}{2}$$

از آنجا:

$$r_1^2+r_2^2=\frac{1}{4}[(AH+BH-C)^2+(AH+CH-B)^2]$$

پس از ساده کردن با توجه به رابطه‌های طولی در مثلث قائم الزاویه، داریم:

$$r_1^2+r_2^2=\frac{(b+c-a)^2}{4}=$$
$$\left(\frac{b+c-a}{2}\right)^2=r^2 \Rightarrow \boxed{r_1^2+r_2^2=r^2}$$

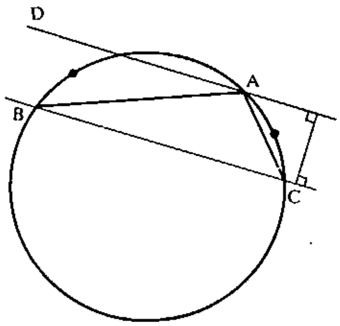
۲ ــ می‌دانیم که در مثلث ABC وقتی $\hat{A}=120^\circ$ باشد، داریم $a^2=b^2+c^2+bc$ با توجه به این نکته خواهیم داشت:

$$r_a-r=\frac{S}{p-a}-\frac{S}{p}=\frac{S(p-p+a)}{p(p-a)}=\frac{aS}{p(p-a)}$$
$$=\frac{aS(p-b)(p-c)}{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{aS(\frac{a+c-b}{2})(\frac{a+b-c}{2})}{S^2}$$
$$=\frac{a(a^2+b^2-c^2+2bc)}{4S}$$
$$=\frac{a(b^2+c^2+bc-b^2-c^2+2bc)}{4S}$$
$$=\frac{3abc}{4S}=3R \Rightarrow \boxed{r_a-r=3R}$$

حل ب ــ

$$d_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{pbc(p-a)}$$
$$\Rightarrow d_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{bc(\frac{a+b+c}{2})(\frac{b+c-a}{2})}$$
$$\Rightarrow d_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{bc(\frac{b^2+c^2+2bc-a^2}{4})}a^2 = b^2+c^2+bc$$
$$\Rightarrow d_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{bc\times\frac{bc}{4}}=\frac{2}{b+c}\times\frac{bc}{2}=\frac{bc}{b+c}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{d_a}=\frac{b+c}{bc}=\frac{1}{c}+\frac{1}{b} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{d_a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$$

حل ب ــ با معلوم بودن a و S، اندازهٔ ارتفاع AH مشخص است، $AH=\frac{2S}{a}$. پس برای رسم مثلث ابتدا پاره‌خط BC به طول a را رسم می‌کنیم. سپس کمان درخور زاویهٔ 120° مقابل به BC را رسم می‌نماییم. آنگاه خطی موازی BC و به فاصلهٔ $AH=\frac{2S}{a}$ از آن (در طرف کمان درخور) رسم می‌کنیم. نقطهٔ تقاطع این خط با کمان درخور زاویهٔ A رأس A از مثلث ABC است. از A به B و C وصل می‌کنیم: به تعداد نقاط برخورد خط D و کمان درخور، مسألهٔ جواب دارد.



۳ ــ برای اثبات وابستهٔ خطی بودن بردارهای داده شده کافی است ترکیبی خطی از آنها مساوی با بردار صفر، بیابیم به طوری که در آن ترکیب خطی حداقل یک ضریب مخالف صفر موجود باشد.

$$x(v_1-v_3)+y(2v_1+v_2-2v_3)+z(-v_1-v_2+v_3)=0$$
$$\Rightarrow (x+2y-z)v_1+(y-z)v_2+(-x-2y+z)v_3=0$$

چون v_1 و v_2 و v_3 طبق فرض بردارهای مستقل خطی هستند پس باید ضرایب این ترکیب خطی، همگی صفر باشند، یعنی:

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix}\begin{cases} x+2y-z=0 \\ y-z=0 \\ -x-2y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-z=0 \\ y-z=0 \end{cases}$$

(معادلات (۱) و (۳) در حقیقت ۱ معادله هستند)

لذا به یک دستگاه معادلات با دو معادله و سه مجهول رسیده‌ایم و می‌دانیم چنین دستگاهی دارای بی‌نهایت جواب ناصفر است.

۴ ــ در پرتاب سه مکعب فضای نمونه دارای (۶×۶×۶) عضو است و برای محاسبهٔ احتمال این که حداقل ۲ عدد از اعداد ظاهر شده یکی باشند می‌توانیم متمم این پیشامد را محاسبه کنیم یعنی احتمال آن که هیچ دو عددی مثل هم نباشند (سه عدد متمایز ظاهر شده باشد) که در حقیقت به قسمت ثانیاً اول پاسخ می‌دهیم.

برای محاسبهٔ تعداد سه تایی‌هایی که از هم متمایز هستند برای مکان اول ۶ انتخاب،برای مکان دوم ۵ انتخاب و برای مکان سوم چهار راه انتخاب داریم که درکل $n(A')=6\times5\times4$

پس:

$$p(A')=\frac{n(A')}{n(S)}=\frac{6\times5\times4}{6\times6\times6}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$$

احتمال این که حداقل ۲ عدد مثل هم باشند =

$$p(A)=1-P(A')=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$$

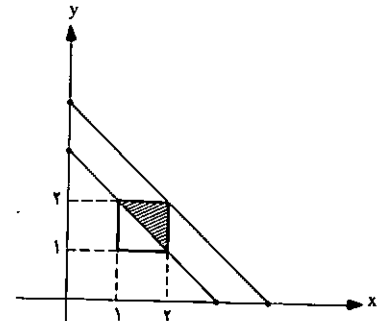
۵ ــ

فضای نمونه $=S=\{(x,y)|\ 1<x<2\ ,\ 1<y<2\}$

پیشامد مطلوب $=A=\{(x,y)|\ 3<x+y<4\}$

سطح مربع فضای نمونه و قسمت هاشور خورده همان پیشامد مطلوب است پس

$$p(A)=\frac{a_A}{a_S}=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}$$



۶ ـ طرفین معادله را در $2\sin\frac{\pi}{7}$ ضرب می‌کنیم:

$$2\sin\frac{\pi}{7}\cos x = 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} +$$
$$2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$$
$$\Rightarrow 2\sin\frac{\pi}{7}\cos x = \sin\frac{7\pi}{7} - \sin\frac{5\pi}{7} + \sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} +$$
$$\sin\frac{5\pi}{7} - \sin\frac{3\pi}{7}$$
$$\Rightarrow 2\sin\frac{\pi}{7}\cos x = -\sin\frac{\pi}{7} \Rightarrow 2\cos x = -1$$
$$\Rightarrow \cos x = \frac{-1}{2}$$
$$\Rightarrow \cos x = \cos(\frac{2\pi}{3}) \Rightarrow \boxed{x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}}$$

۷ ـ داریم:

$$b\cos^2\frac{\hat{C}}{2} + c\cos\frac{\hat{B}}{2} = p \Rightarrow 2b\cos^2\frac{\hat{C}}{2} + 2c\cos^2\frac{\hat{B}}{2} = 2p$$
$$\Rightarrow b(1+\cos\hat{C}) + c(1+\cos\hat{B}) = 2p$$
$$\Rightarrow b + b\cos\hat{C} + c + c\cos\hat{B} = 2p$$
$$\Rightarrow b + c + \underbrace{b\cos\hat{C} + c\cos\hat{B}}_{a} = 2p$$
$$\Rightarrow a + b + c = 2p$$

۸ ـ داریم:

$$\cos 3x + 2\cos 2x + 7\cos x = 10$$
$$\Rightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x + 4\cos^2 x - 2 + 7\cos x = 10$$
$$\Rightarrow 4\cos^3 x + 4\cos^2 x + 4\cos x = 12$$
$$\Rightarrow \cos^3 x + \cos^2 x + \cos x - 3 = 0$$
$$\Rightarrow \cos^3 x - 1 + \cos^2 x - 1 + \cos x - 1 = 0$$
$$\Rightarrow (\cos x - 1)(\cos^2 x + \cos x + 1 + \cos x + 1 + 1) = 0$$
$$\Rightarrow \cos x - 1 = 0$$

یا

$$\cos^2 x + 2\cos x + 3 = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \cos(0)$$
$$\Rightarrow x = 2k\pi$$

معادلهٔ $\cos^2 x + 2\cos x + 3 = 0$ ریشهٔ حقیقی ندارد

زیرا: $\Delta' = 1 - 3 = -2 < 0$

پس تنها جواب معادله چنین است: $\boxed{x = 2k\pi}$

۹ ـ اگر عبارت

$$8x^6 + 12x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx - 1$$

مربع کامل باشد با توجه به جمله $8x^6$ و عدد ثابت (-1)، عبارت مورد نظر باید به صورت $(2x^2 + mx - 1)^3$ باشد.

حال عبارت $(2x^2 + mx - 1)^3$ را حساب کرده متحد با عبارت اصلی قرار می‌دهیم.

$$(2x^2 + mx - 1)^3 = 8x^6 + 12mx^5 + (6m^2 - 12)x^4$$
$$+(m^3 - 12m)x^3 + (6 - 3m^2)x^2 + 3mx - 1$$
$$\Rightarrow 8x^6 + 12x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 +$$
$$dx - 1 \equiv 8x^6 + 12mx^5 + (6m^2 - 12)x^4 +$$
$$(m^3 - 12m)x^3 + (6 - 3m^2)x^2 + 3mx - 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12m = 12 \Rightarrow \boxed{m = 1} \\ a = 6m^2 - 12 \Rightarrow a = 6 - 12 \Rightarrow \boxed{a = -6} \\ b = m^3 - 12m \Rightarrow b = 1 - 12 \Rightarrow \boxed{b = -11} \\ c = 6 - 3m^2 \Rightarrow c = 6 - 3 \Rightarrow \boxed{c = 3} \\ d = 3m \Rightarrow \boxed{d = 3} \end{cases}$$

۱۰ ـ

$$\text{حد}_{x\to\infty}\left[\frac{5x^2 - 7}{x^2 + 1}\right] = \text{حد}_{x\to\infty}\left[\frac{5x^2 + 5 - 12}{x^2 + 1}\right] =$$
$$\text{حد}_{x\to\infty}\left[\frac{5(x^2 + 1)}{x^2 + 1} - \frac{12}{x^2 + 1}\right] = \text{حد}_{x\to\infty}\left[5 - \frac{12}{x^2 + 1}\right] =$$
$$\text{حد}_{x\to\infty}\left(5 + \left[\frac{-12}{x^2 + 1}\right]\right) = \text{حد}\ \left(5 + [0^-]\right) =$$
$$5 - 1 = 4$$

۱۱ـ برنامه عدد N را می‌خواند و فاکتوریل اعداد از یک تا خود N را چاپ می‌کند.

```
CLS
INPUT "ENTER NUMBER FOR N"; N
LET PROD = 1
FOR I = 1 TO N
  LET PROD = PROD * I
  PRINT I; "!="; PROD
NEXT
END
```

اجرای برنامه:

```
ENTER NUMBER FOR N? 9
 1  != 1
 2  != 2
 3  != 6
 4  != 24
 5  != 120
 6  != 720
 7  != 5040
 8  != 40320
 9  != 362880
```

۱۲ـ

```
CLS
INPUT"ENTER NUMBERS FOR M & N";M,N
LET M1 = M
LET N1 = N
WHILE N > 0
  LET R = M - N * INT(M / N)
  LET M = N
  LET N = R
WEND
PRINT M=";M1;"N=";N1;"L.C.M=";M1*N1/M
END
```

اجرای برنامه:

```
ENTER NUMBERS FOR M & N? 6,15
  M= 6   N= 15   L.C.M= 30
```

❑ حل مسائل ریاضیات سال چهارم ریاضی

۱ ـ فرض می‌کنیم $\bar{v}(x,y,z)$ باشد. با توجه به اینکه $\bar{u}_1(2,1,-3)$ و $\bar{u}_2(-1,2,1)$ و $|\bar{v}| = 5\sqrt{3}$ و زاویهٔ بردار $\bar{v}$ با محور y ها منفرجه است، داریم:

$$\bar{v}\perp\bar{u}_1 \Rightarrow 2x + y - 3z = 0 \qquad (1)$$
$$\bar{v}\perp\bar{u}_2 \Rightarrow -x + 2y + z = 0 \qquad (2)$$
$$|\bar{v}| = 5\sqrt{3} \Rightarrow 5\sqrt{3} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 75 \qquad (3)$$

از روابط (۱) و (۲) و (۳) نتیجه می‌شود:

$$\bar{v}(x = -7\ ,\ y = -1\ ,\ z = -5)$$

۲ ـ مختصات نقطهٔ A' وسط ضلع BC را به دست آورده معادلهٔ میانهٔ AA' را می‌نویسیم.

$A(3,0,0)$ و $B(0,4,0)$ و $C(0,0,2) \Rightarrow$

وسط ضلع BC $A'(0,2,1) \Rightarrow AA': \frac{x-0}{3-0} = \frac{y-2}{0-2} = \frac{z-1}{0-1}$

$$\Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{-1}$$

حال معادلهٔ دسته صفحه گذرنده بر AA' را نوشته، از بین صفحات این دسته، صفحه‌ای را انتخاب می‌کنیم که با صفحهٔ $P: x + 2y - 2z = 5$ زاویهٔ $\text{Arccos}\frac{2}{3}$ می‌سازد.

$$\frac{x}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow p_1: 2x + 3y - 6 = 0$$

و

$$p_2: y - 2z = 0$$

چون هیچیک از دو صفحه P_1 و P_2 جواب مسأله نیستند، پس معادلهٔ دسته صفحه گذرنده بر AA' را به صورت $P_1 + \lambda P_2 = 0$ می‌توان نوشت.

$$P_1 + \lambda P_2 = 0 \Rightarrow y - 2z + \lambda(2x + 3y - 6) = 0 \Rightarrow$$

معادلهٔ دسته صفحهٔ گذرنده بر AA'

$$2\lambda x + (1 + 3\lambda)y - 2z - 6\lambda = 0$$

دسته صفحه $\bar{v}(2\lambda, 1 + 3\lambda, -2)\ ,\ \bar{v}_p(1,2,-2)$

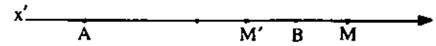
کسینوس زاویهٔ بین دو صفحه:

$$\cos\alpha = \pm\frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$$
$$\text{Arccos}\frac{2}{3} = \alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow$$
$$\frac{2}{3} = \pm\frac{2\lambda + 2 + 6\lambda + 4}{\sqrt{4\lambda^2 + (1 + 3\lambda)^2 + 4}\times\sqrt{4 + 4 + 1}}$$
$$\Rightarrow \frac{2}{3} = \pm\frac{8\lambda + 6}{3\sqrt{13\lambda^2 + 6\lambda + 5}}$$
$$\Rightarrow 13\lambda^2 + 6\lambda + 5 = 16\lambda^2 + 9 + 24\lambda$$
$$\Rightarrow 3\lambda^2 + 18\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 12}}{3} = \frac{-9 \pm \sqrt{69}}{3}$$
$$\lambda = -3 + \frac{\sqrt{69}}{3} \Rightarrow$$
$$Q_1: 2(-3 + \frac{\sqrt{69}}{3})x + (-8 + \sqrt{69})y - 2z + 18 - 2\sqrt{69} = 0$$
$$\lambda = -3 - \frac{\sqrt{69}}{3} \Rightarrow$$
$$Q_2: 2(-3 - \frac{\sqrt{69}}{3})x + (-8 - \sqrt{69})y - 2z + 18 + 2\sqrt{69} = 0$$

صفحات جواب مسأله.

۳ ـ چون $(MM'AB)$ تقسیم توافقی با نسبت توافقی ۲ است پس داریم:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -\frac{\overline{M'A}}{\overline{M'B}} = 2 = \frac{2}{1}$$



از طرفی می‌دانیم کـــه اگـــر $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=\frac{p}{q}$ باشـــد، $x_M=\frac{px_B-qx_A}{p-q}$ (کتاب جبر پایه سال سوم تألیف محمدهاشم رستمی). پس داریم:

$$x_M=\frac{2x_B-x_A}{2-1}=2x_B-x_A=-2-2=-4$$

همچنین داریم:

$$y_M=2y_B-y_A=2+1=3$$

$$z_M=2z_B-z_A=8-0=8$$

$$\Rightarrow M(-4,3,8)$$

و برای تعیین مختصات نقطهٔ M' می‌توان نوشت:

$$-\frac{\overline{M'A}}{\overline{M'B}}=2\Rightarrow\frac{\overline{M'A}}{\overline{M'B}}=\frac{-2}{1}\Rightarrow$$

$$x_{M'}=\frac{-2x_B-x_A}{-2-1}=\frac{2x_B+x_A}{3}$$

$$\Rightarrow x_{M'}=\frac{-2+2}{3}=0$$

و

$$y_{M'}=\frac{2y_B+y_A}{3}=\frac{2+(-1)}{3}=\frac{1}{3}$$

$$z_{M'}=\frac{2z_B+z_A}{3}=\frac{8+0}{3}=\frac{8}{3}\Rightarrow M'(0,\frac{1}{3},\frac{8}{3})$$

برای نوشـتن مـعـادلهٔ کرهٔ بـه قطر MM' کـافی است مختصات مرکز و شعاع کره را حساب کنیم.

مرکز کره $O'(x=-2,y=\frac{5}{3},z=\frac{16}{3})$ وسط MM'

$$O'M=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}=$$

$$\sqrt{(-2+4)^2+(\frac{5}{3}-3)^2+(\frac{16}{3}-8)^2}=\frac{2\sqrt{29}}{3}$$

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2$$

$$\Rightarrow\boxed{(x+2)^2+(y-\frac{5}{3})^2+(z-\frac{16}{3})^2=\frac{116}{9}}$$

معادلهٔ کرهٔ به قطر MM'

۴ ـ برای پیدا کردن معادلهٔ کانونیک تصویر قائم خط D روی صفحهٔ P، معادلهٔ دسته صفحهٔ گذرنده برخط D را می‌نویسیم و از بین صفحات دسته صفحه، صفحه‌ای را انتخاب می‌کنیم که بر صفحهٔ P عمود باشد. اگر این صفحه را P' بنامیم، فصل مشترک دو صفحه P و P' (خط D') جواب مسأله است.

$$D:(x=t,y=t,z=2t-1)\Rightarrow x=y=\frac{z+1}{2}$$

معادله کانونیک خط D

$$P_1:x-y=0,\ P_2:2x-z-1=0$$

معادله‌های دو صفحهٔ حصور خط D،

چون هیچیک از دو صفحهٔ P_1 و P_2 بر صفحهٔ P عمود نیستند ($aa'+bb'+cc'\neq 0$ است)، پس معادلهٔ دستهٔ صفحه را به صورت $P_2+\lambda P_1=0$ می‌توان نوشت، داریم:

$$2x-z-1+\lambda(x-y)=0\Rightarrow\boxed{(2+\lambda)x-\lambda y-z-1=0}$$

معادلهٔ دسته صفحه

$\vec{v}(2+\lambda,-\lambda,-1)$ دسته صفحه، $\vec{v}_p(2,-1,1)$ دسته صفحه، $\vec{v}\perp\vec{v}_p\Rightarrow$

$$4+2\lambda+\lambda-1=0\Rightarrow\lambda=-1\Rightarrow\boxed{x+y-z-1=0}$$

معادلهٔ صفحهٔ P'

$$\begin{cases}x+y-z-1+0\\2x-y+z-2=0\end{cases}\Rightarrow\boxed{D':\begin{cases}x=1\\y=z\end{cases}}$$

معادلهٔ کانونیک تصویر خط D روی صفحهٔ P

راه دیگر ـ می‌توان مختصات تصویر قائم دو نقطهٔ A و B از خط D، روی صفحهٔ P را به دست آورد. اگر این دو نقطه را A' و B' بنامیم، معادلهٔ خط AA' جواب مسأله است.

۵ ـ

$1)\ (p\vee\sim q)\Rightarrow\sim r$	
$2)\ q\Rightarrow s$	
$3)\ p\vee\sim s$	
$4)\ (q\Rightarrow p)\Rightarrow\sim r$	از (۱) و تبدیل فصلی به شرطی
$5)\ (s\Rightarrow p)$	از (۳) تبدیل فصلی به شرطی
$6)\ (q\Rightarrow p)$	از (۲) و (۵) و قیاس
$7)\ \sim r$	از (۴) و (۶) و انتزاع
$8)\ \sim r\vee\sim u$	از (۷) و ادخال فاصل
$9)\ \therefore u\Rightarrow\sim r$	از ۸ و تبدیل فصلی به شرطی

۶ ـ اولاً: فرض کنیم F یک میدان باشد پس یک حلقهٔ جابجایی است و طبق قضیهٔ کتاب برای آن که حلقهٔ جابجایی مقسوم‌علیه صفر نداشته باشد کافی است قانون حذف در آن برقرار باشد لذا:

اگر $a\neq 0$ و $a\times b=a\times c\overset{a^{-1}\in F}{\Rightarrow}a^{-1}\times(a\times b)=a^{-1}\times(a\times c)$

میدان F

$$\Rightarrow\underbrace{\left(a^{-1}\times a\right)}_{1}\times b=\underbrace{\left(a^{-1}\times a\right)}_{1}\times c\Rightarrow b=c$$

ثانیاً: طبق فرض داریم $x^{-1}+y=-1$، $x+y^{-1}=1$ ثابت می‌کنیم $x+y=0$

$$(1)\qquad \text{طبق فرض}\rightarrow(x+y^{-1})=1\Rightarrow x^{-1}y\underbrace{(x+y^{-1})}_{1}=x^{-1}y$$

$$(2)\qquad \text{از طرفی}\rightarrow x^{-1}y(x+y^{-1})=(y+x^{-1})$$

$$(1)\text{ و }(2)\Rightarrow x^{-1}y=\underbrace{(y+x^{-1})}_{-1}\Rightarrow x^{-1}y=-1$$

$$\Rightarrow(-x^{-1})y=1\Rightarrow y=(-x^{-1})^{-1}\Rightarrow y=-x\Rightarrow x+y=0$$

۷ ـ می‌خواهیم به استقراء ثابت کنیم برای هر $n\in\mathbb{N}$، 8^n-1 مضرب ۷ است.

$$p(1):8^1-1=7=7\times 1\rightarrow p(1)\equiv T$$

فرض استقراء $\qquad p(k)\equiv T\Rightarrow 8^k-1=7q$

حکم استقراء $\qquad p(k+1):\Rightarrow 8^{k+1}-1=7q'$

طرفین فرض را در ۸ ضرب می‌کنیم

$$\rightarrow 8^{k+1}-8=56q\Rightarrow 8^{k+1}-1-7=56q$$

$$\Rightarrow 8^{k+1}-1=56q+7\Rightarrow 8^{k+1}-1=7\underbrace{(8q+1)}_{q'}$$

$$\Rightarrow 8^{k+1}-1=7q'$$

۸ ـ

$$I=\int\frac{dx}{(x\,\mathrm{tg}x+1)^2}=\int\frac{dx}{(\frac{x}{\mathrm{cotg}x}+1)^2}=\int\frac{dx}{(\frac{x+\mathrm{cotg}x}{\mathrm{cotg}x})^2}$$

$$=\int\frac{\mathrm{cotg}^2x\,dx}{(x+\mathrm{cotg}x)^2}$$

$$u=x+\mathrm{cotg}x\Rightarrow du=1-1-\mathrm{cotg}^2x\,dx$$

$$\Rightarrow du=-\mathrm{cotg}^2x\,dx$$

$$I=\int\frac{-du}{u^2}=-\int u^{-2}du=-\frac{u^{-1}}{-1}+c=\frac{1}{u}+c=$$

$$\frac{1}{x+\mathrm{cotg}x}+c$$

۹ ـ

$$I=\int\frac{\sqrt{2}dx}{\cos x\sqrt{\sin 2x}}\qquad \cos x>0$$

در مخرج کسر، عبارت را در $\cos x$ ضرب و تقسیم می‌کنیم

$$I=\int\frac{\sqrt{2}dx}{\cos x\sqrt{2\sin x\cos x}}$$

$$I=\int\frac{\cancel{\sqrt{2}}dx}{\cos x\times\frac{\cos x}{\cos x}\cancel{\sqrt{2}}\sqrt{\sin x\cos x}}$$

$$=\int\frac{dx}{\cos^2x\sqrt{\frac{\sin x\cos x}{\cos^2x}}}=\int\frac{dx}{\cos^2x\sqrt{\mathrm{tg}x}}$$

$$I=\int\frac{(1+\mathrm{tg}^2x)dx}{\sqrt{\mathrm{tg}x}}$$

$$u=\mathrm{tg}x\Rightarrow du=(1+\mathrm{tg}^2x)dx$$

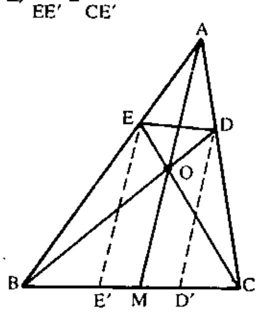
$$I=\int\frac{du}{\sqrt{u}}=\int u^{-\frac{1}{2}}du=\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c=2\sqrt{u}+c=2\sqrt{\mathrm{tg}x}+c$$

❑ حل مسائل ریاضیات سال دوم تجربی

۱ ـ از نقاط D و E خطهایی به موازات میانهٔ AM رسم می‌کنیم تا ضلع BC را به ترتیب در نقطه‌های D' و E' قطع کنند. داریم:

$$AM\parallel EE'\Rightarrow\frac{AM}{EE'}=\frac{BM}{BE'}\qquad(1)$$

$$OM\parallel EE'\Rightarrow\frac{OM}{EE'}=\frac{CM}{CE'}\qquad(2)$$



از تقسیم رابطه‌های (۱) و (۲) با توجه به اینکه $BM=CM$ و $AM=2OM$ است داریم:

$$\frac{AM}{OM}=\frac{CE'}{BE'}=2$$

پس $CE'=\frac{1}{3}BC$ است و به همین ترتیب ثابت می‌شود که $CD'=D'E'=\frac{1}{3}BC$

پس $D'M=E'M=\frac{1}{2}BC-\frac{1}{3}BC=\frac{1}{6}BC$ می‌باشد.

حال می‌توان نوشت:

$$\frac{AE}{AB}=\frac{E'M}{MB}=\frac{\frac{1}{6}BC}{\frac{1}{2}BC}=\frac{1}{3}$$

و

$$\frac{AD}{AC}=\frac{D'M}{MC}=\frac{1}{3}\Rightarrow$$

$$\frac{AE}{AB}=\frac{AD}{AC}=\frac{1}{3}\Rightarrow DE\parallel BC$$

$$\frac{DE}{BC}=\frac{AE}{AB}=\frac{1}{3}$$ و

۲ ـ اندازهٔ ضلع لوزی را a و اندازهٔ اقطار آن را d و d′ فرض می‌کنیم. چون چهارضلع لوزی متساوی و دو قطر آن عمودمنصف یکدیگرند، پس داریم:

اندازهٔ ضلع لوزی $4a=20 \Rightarrow a=5$

$$d+d'=14 \Rightarrow \frac{d}{2}+\frac{d'}{2}=7$$

$$OAB: \frac{d^2}{4}+\frac{d'^2}{4}=a^2 \Rightarrow \left(\frac{d}{2}+\frac{d'}{2}\right)^2-2\times\frac{d}{2}\frac{d'}{2}=a^2$$

$$\Rightarrow 49-\frac{1}{2}dd'=25$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}dd'=24 \Rightarrow \boxed{\text{لوزی} \quad s=24cm^2}$$

(حل از آقای علی لاری دانش‌آموز دبیرستان کمال تهران)

۳ ـ روابط بین ریشه‌ها و ضرایب معادلهٔ $x^2+3x-3=0$ چنین است:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=s=-3\\ \alpha\beta=p=-3\end{cases}$$

پس داریم:

$$A=\frac{\alpha^2+\beta^2}{(\alpha+\beta)(\alpha^4+6\alpha^3+9\alpha^2+1)}$$

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=s^2-2p$$

$$=(-3)^2-2(-3)=9+6=15$$

$$\alpha^4+6\alpha^3+9\alpha^2+1=\alpha^2(\alpha^2+6\alpha+9)+1$$

$$=\alpha^2(\alpha+3)^2+1$$

$$=[\alpha(\alpha+3)]^2+1=(\alpha^2+3\alpha)^2+1$$

چون α یک ریشه معادله است پس در معادله صدق می‌کند:

$$x=\alpha: \alpha^2+3\alpha-3=0 \Rightarrow \alpha^2+3\alpha=3$$

بنابراین داریم:

$$A=\frac{15}{(-3)(3^2+1)}=\frac{15}{-30}=\frac{-1}{2} \Rightarrow \boxed{A=-\frac{1}{2}}$$

۴ ـ از فرض: $a^2+b^2+8=4a+4b$ نتیجه می‌شود:

$$a^2+b^2+4+4-4a-4b=0$$

$$\Rightarrow (a^2-4a+4)+(b^2-4b+4)=0$$

$$\Rightarrow (a-2)^2+(b-2)^2=0 \Rightarrow (a-2)^2=0\ ,\ (b-2)^2=0$$

$$\Rightarrow a=2\ ,$$

$$b=2 \Rightarrow p=\frac{a^2+b^2}{a+b}=\frac{2^2+2^2}{2+2}=\frac{4+4}{4}=\frac{8}{4}=2$$

$$\Rightarrow \boxed{p=2}$$

۵ ـ داریم:

$$\begin{cases}x'=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\\ x''=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\end{cases} \Rightarrow s=x'+x''$$

$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow s=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$$

$$=\frac{3+2+2\sqrt{6}+3+2-2\sqrt{6}}{3-2}=\frac{10}{1}=10$$

$$p=x'x''=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=1 \Rightarrow p=1$$

پس معادلهٔ مطلوب چنین است:

$$x^2-sx+p=0 \Rightarrow x^2-10x+1=0$$

۶ ـ از فرض $\frac{s_m}{s_n}=\frac{m^2}{n^2}$، داریم:

$$\frac{\frac{m}{2}(a_1+a_m)}{\frac{n}{2}(a_1+a_n)}=\frac{m^2}{n^2} \Rightarrow \frac{2a_1+(m-1)d}{2a_1+(n-1)d}=\frac{m}{n}$$

$$\Rightarrow (2a_1-d)(m-n)=0 \Rightarrow a_1=\frac{d}{2} \quad \text{یا} \quad m=n$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{a_m}{a_n}=\frac{a_1+(m-1)d}{a_1+(n-1)d}=\frac{\frac{d}{2}+(m-1)d}{\frac{d}{2}+(n-1)d}=\frac{d(m-\frac{1}{2})}{d(n-\frac{1}{2})}$$

$$=\frac{2m-1}{2n-1}$$

۷ ـ داریم:

$$\left(\log_{13}^{19}\right)^{-1}+\left(\log_{28}^{19}\right)^{-1}=\log_{19}^{13}+\log_{19}^{28}$$

$$=\log_{19}^{13\times 28}=\log_{19}^{364}$$

از طرفی می‌دانیم:

$$\log_{19}^{361}=\log_{19}^{19^2}=2\log_{19}^{19}=2\times 1=2$$

پس خواهیم داشت:

$$\log_{19}^{364}>\log_{19}^{361}=2$$

و در نتیجه داریم:

$$\left(\log_{13}^{19}\right)^{-1}+\left(\log_{28}^{19}\right)^{-1}>2$$

۸ ـ داریم:

$$\log_a^{27}=b \Rightarrow 3\log_a^3=b \Rightarrow \log_a^3=\frac{b}{3} \Rightarrow \log_3^a=\frac{3}{b}$$

$$\log_{\sqrt{3}}^{\sqrt[3]{a}}=\frac{2}{6}\log_3^a=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{b}\right)=\frac{1}{b} \Rightarrow \boxed{\log_{\sqrt{3}}^{\sqrt[3]{a}}=\frac{1}{b}}$$

۹ ـ داریم:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\pi \Rightarrow (\hat{B}+\hat{C})=\pi-\hat{A} \Rightarrow \cos(\hat{B}+\hat{C})$$

$$=\cos(\pi-\hat{A})$$

$$\cos(\hat{B}+\hat{C})=-\cos\hat{A}$$

با استفاده از فرض داریم:

$$\cos(\hat{B}+\hat{C})=-\cos\hat{B}\cos\hat{C}$$

$$\Rightarrow \cos\hat{B}\cos\hat{C}-\sin\hat{B}\sin\hat{C}=-\cos\hat{B}\cos\hat{C}$$

$$\Rightarrow 2\cos\hat{B}\cos\hat{C}=\sin\hat{B}\sin\hat{C}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos\hat{B}\cos\hat{C}}{\sin\hat{B}\sin\hat{C}}=\frac{1}{2} \Rightarrow \cot g\hat{B}\cot g\hat{C}=\frac{1}{2}$$

۱۰ ـ داریم:

$$A=\frac{\cot g^2x}{1+\cot g^2x}+\frac{tg^2x}{1+tg^2x}=\frac{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}{\frac{1}{\sin^2 x}}+\frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$=\frac{\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^2 x}+\frac{\sin^2 x\cos^2 x}{\cos^2 x} \xlongequal{(x\neq\frac{k\pi}{2})}$$

$$\cos^2 x+\sin^2 x=1$$

۱۱ ـ داریم:

$$8\cos x\cos 2x\cos 4x=1$$

با فرض $x\neq k\pi$ طرفین معادله را در $\sin x$ ضرب می‌کنیم:

$$8\sin x\cos x\cos 2x\cos 4x=\sin x$$

$$\Rightarrow 4(2\sin x\cos x)\cos 2x\cos 4x=\sin x$$

$$\Rightarrow 4\sin 2x\cos 2x\cos 4x=\sin x$$

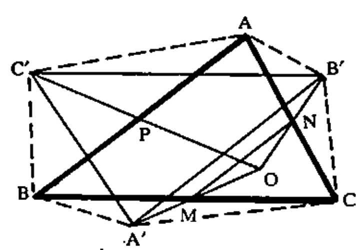
$$\Rightarrow 2(2\sin 2x\cos 2x)\cos 4x=\sin x$$

$$\Rightarrow 2\sin 4x\cos 4x=\sin x \Rightarrow \sin 8x=\sin x$$

$$\Rightarrow \begin{cases}8x=2k\pi+x \Rightarrow x=\dfrac{2k\pi}{7}\\ 8x=2k\pi+\pi-x \Rightarrow x=\dfrac{2k\pi+\pi}{9}\end{cases}$$

حل مسائل ریاضیات سال سوم تجربی

۱ ـ چون نقاط M و N وسط اضلاع AC و BC از مثلث ABC می‌باشند، پس MN∥AB و $MN=\frac{AB}{2}$ است. از طرفی این دو نقطه وسط پاره‌خطهای OB′ و OA′ می‌باشند پس در مثلث OA′B′، MN∥A′B′ و $MN=\frac{A'B'}{2}$ است. لذا A′B′∥AB و A′B′ = AB می‌باشد. به همین ترتیب ثابت می‌شود که اضلاع A′C′ و B′C′ از مثلث A′B′C′ با اضلاع نظیرخود AC و BC از مثلث ABC موازی و مساوی‌اند.



چهارضلعی‌های ABA′B′ و BCB′C′ و ACA′C′ متوازی‌الاضلاع‌اند، زیرا هر کدام دو ضلع روبروی مساوی و موازی دارند. اقطار این متوازی‌الاضلاعها خطوط AA′ و BB′ و CC′ هستند که یکدیگر را نصف می‌کنند. یعنی اگر Q نقطهٔ برخورد AA′ و BB′ باشد. این نقطه در وسط AA′ و BB′ واقع است و چون AA′ و CC′ نیز یکدیگر را نصف می‌کنند پس CC′ نیز از نقطهٔ Q وسط AA′ می‌گذرد بنابراین سه خط AA′ و BB′ و CC′ در نقطه Q متقارنند و این نقطه وسط سه پاره‌خط AA′ و BB′ و CC′ است.

۲ ـ داریم:

$$|\vec{a}|=5k+1\ ,\ |\vec{b}|=3k-2\ ,\ (\vec{a}\ ,\ \vec{b})=\frac{2\pi}{3}$$ و

$$(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})=35 \Rightarrow |\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=35 \Rightarrow$$

$$(5k+1)^2-(3k-2)^2=35 \Rightarrow 16k^2+22k-38=0$$

$$\Rightarrow \boxed{k=1}\ ,\ k=\frac{-38}{16}=\frac{-19}{8}$$

فقط جواب k=1 قابل قبول است. چون همواره $(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$ است، $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ تأثیری در مسأله ندارد.

۳ ـ

$$\lim_{x\to 5^+}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}+\sqrt{x-5}}{\sqrt{x^2-25}}\right)=\lim_{x\to 5^+}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{\sqrt{x^2-25}}\right)+$$

$$\lim_{x\to 5^+}\left(\frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{x^2-25}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 5^+}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{\sqrt{x^2-25}}\times\frac{\sqrt{x}+\sqrt{5}}{\sqrt{x}+\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{x^2-25}}{\sqrt{x^2-25}}\right)+$$

$$\lim_{x\to 5^+}\left(\frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{x-5}\times\sqrt{x+5}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 5^+}\left(\frac{(x-5)\sqrt{x^2-25}}{(x-5)(x+5)(\sqrt{x}+\sqrt{5})}\right)+$$

$$\lim_{x\to 5^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x+5}}\right)=0+\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

۴ ـ داریم:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+1}}{x^3+1} & x\neq -1\\ \dfrac{1}{3} & x=-1\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x+1|}{x^3+1} & x\neq -1\\ \dfrac{1}{3} & x=-1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to -1^+}f(x)=\lim_{x\to -1^+}\left(\frac{|x+1|}{x^3+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to -1^+}\left(\frac{x+1}{(x+1)(x^2-x+1)}\right)=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to -1^-}f(x)=\lim_{x\to -1^-}\left(\frac{|x+1|}{x^3+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to -1^-}\left(\frac{-(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}\right)=-\frac{1}{3}$$

و همچنین داریم:

$$f(-1)=\frac{1}{3}$$

بنابراین تابع f در نقطه‌ای به طول $x=-1$، پیوستگی راست دارد؛ زیرا:

$$\lim_{x\to -1^+}f(x)=f(-1)=\frac{1}{3}$$

۵ ـ داریم:

$$y=\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\Rightarrow y^2=1+\frac{1}{x^2}\Rightarrow 2y'y=\frac{-2x}{x^4}$$

$$\Rightarrow y'y=\frac{-1}{x^3}\Rightarrow y''y+y'^2=\frac{3x^2}{x^6}\Rightarrow yy''+y'^2=\frac{3}{x^4}$$

$$\Rightarrow yy''+y'^2=3(\frac{1}{x^2})^2\Rightarrow yy''+y'^2=3(y^2-1)^2$$

۶ ـ داریم:

$$y=a\sin mx$$

$$\Rightarrow y'=am\cos mx=am\sin(mx+\frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow y''=am^2\cos(mx+\frac{\pi}{2})=am^2\sin(mx+\frac{2\pi}{2})$$

$$\Rightarrow y'''=am^3\cos(mx+\pi)=am^3\sin(mx+\frac{3\pi}{2})$$

$$\Rightarrow y^{(4)}=am^4\cos(mx+\frac{3\pi}{2})=am^4\sin(mx+\frac{4\pi}{2})$$

به همین ترتیب مشتق n ام $y=a\sin mx$ جنین خواهد شد:

$$y^{(n)}=am^n\sin(mx+\frac{n\pi}{2})$$

۷ ـ داریم:

$$m=-\frac{1}{2}\ ,\ \alpha=45^\circ\Rightarrow \mathrm{tg}\,\alpha=\pm\frac{m-m'}{1+mm'}$$

$$\Rightarrow \mathrm{tg}\,45^\circ=\pm\frac{-\frac{1}{2}-m'}{1-\frac{1}{2}m'}\Rightarrow 1=\pm\frac{-\frac{1}{2}-m'}{1-\frac{1}{2}m'}$$

$$\Rightarrow 1-\frac{1}{2}m'=\pm(-\frac{1}{2}-m')\Rightarrow m'=\frac{1}{3}$$

یا $m'=-3$ (ضریب زاویه خطوط مماس)

بنابراین اگر x_0 طول نقطهٔ تماس فرض شود، خواهیم داشت:

$$y'=2x+3\ ,\ m'=\frac{1}{3}=2x_0+3$$

$$\Rightarrow 2x_0+3=\frac{1}{3}\Rightarrow x_0=\frac{-4}{3}\ ,\ y_0=\frac{-20}{9}$$

$$m=-3=2x_0+3\Rightarrow 2x_0+3=-3\Rightarrow x_0=-3\ ,\ y_0=0$$

پس نقـاط مطلوب (مـختـصـات نقـاط تمـاس) چنین می‌باشند:

$$A\left|\begin{matrix}-\frac{4}{3}\\ -\frac{20}{9}\end{matrix}\right.\quad ,\quad B\left|\begin{matrix}-3\\ 0\end{matrix}\right.$$

(مسأله دارای دو جواب است)

۸ ـ معادلهٔ خط مـجانب افـقی منحنی تابع با ضـابطهٔ $y=\frac{-4x+1}{2x+4}$ چنین است:

$$y=\frac{-4}{2}=-2\Rightarrow \boxed{\text{معادله خط مجانب افقی}\quad y+2=0}$$

مرکـز تقـارن تابع با ضـابطهٔ $y=x^3-3x^2+1$ چنین است:

$$y'=3x^2-6x\Rightarrow y''=6x-6\Rightarrow y''=0\Rightarrow 6x-6=0$$

$$\Rightarrow x=1\ ,\ y=-1\Rightarrow \boxed{\text{مرکز تقارن: } I(1,-1)}$$

$$\Rightarrow d=\frac{|-1+2|}{\sqrt{0+1}}=1\Rightarrow \boxed{d=1}$$

(d فاصله مرکز تقارن از مجانب افقی است)

۹ ـ داریم:

$$A=\cos\alpha(2\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha+1)$$

$$=\cos\alpha(2(1-\cos^2\alpha)-2\cos^2\alpha+1)$$

$$=\cos\alpha(2-2\cos^2\alpha-2\cos^2\alpha+1)$$

$$=\cos\alpha(3-4\cos^2\alpha)=3\cos\alpha-4\cos^3\alpha$$

$$=-(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha)$$

$$=-\cos 3\alpha\Rightarrow A=-\cos 3\alpha=\cos(\pi-3\alpha)$$

می‌دانیم:

$$-1\le\cos(\pi-3\alpha)\le 1\Rightarrow \boxed{-1\le A\le 1}$$

۱۰ ـ داریم:

$$\cos\frac{13\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{9}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{14\pi}{9}+\cos\frac{12\pi}{9}\right)\cos\frac{7\pi}{9}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{14\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{3}\cos\frac{7\pi}{9}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\cos\frac{21\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9})-\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{7\pi}{9}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\cos\frac{7\pi}{3}+\frac{1}{2}\cos\frac{7\pi}{9}-\frac{1}{2}\cos\frac{7\pi}{9}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\cos\frac{7\pi}{3}=\frac{1}{4}\cos(2\pi+\frac{\pi}{3})=\frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

۱۱ ـ داریم:

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sin x\right)=\cot g\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\cos x\right)$$

$$\Rightarrow \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sin x\right)=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\cos x\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sin x=k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\cos x$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2\sqrt{2}}(\sin x+\cos x)=k\pi+\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})\right)=k\pi+\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=k\pi+\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2k+1$$

$$(-1\le 2k+1\le 1\ \ k\in z\Rightarrow k=\{-1,0\})$$

بنابراین داریم:

$$k=0:\sin(x+\frac{\pi}{4})=1\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{4}$$

$$k=-1:\sin(x+\frac{\pi}{4})=-1\Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{4})=\sin\frac{3\pi}{2}\Rightarrow$$

$$x=2k+\frac{5\pi}{4}\ ,\ x=2k\pi-\frac{3\pi}{4}$$

❑ حل مسائل ریاضیات سال چهارم تجربی

۱ ـ معادلهٔ خطی که رئوس $A(4,3)$ و $O(0,0)$ را شامل است، چنین است:

$$m_{OA}=\frac{3-0}{4-0}=\frac{3}{4}\ ,\ y-y_0=m(x-x_0)$$

$$\Rightarrow y-0=\frac{3}{4}(x-0)\Rightarrow y=\frac{3}{4}x\Rightarrow 3x-4y+0$$

فاصلهٔ نقطهٔ $B(3,-4)$ از خط فوق ارتفاع مثلث است:

$$BH=\frac{|3(3)-4(-4)|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|9+16|}{\sqrt{25}}=\frac{25}{5}=5\Rightarrow \boxed{BH=5}$$

۲ ـ داریم:

$$f(x)=m\,\mathrm{tg}^n ax\Rightarrow f'(x)=nma(1+\mathrm{tg}^2 ax)\mathrm{tg}^{n-1}ax$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$f(x)=3\,\mathrm{tg}^7 5x\Rightarrow f'(x)=7\times 3\times 5(1+\mathrm{tg}^2 5x)\mathrm{tg}^6 5x$$

$$\Rightarrow f'(-\frac{\pi}{4})=105(1+\mathrm{tg}^2(-\frac{5\pi}{4}))\mathrm{tg}^6(-\frac{5\pi}{4})$$

با توجه به تساوی

$$\mathrm{tg}(-\frac{5\pi}{4})=-\mathrm{tg}(\pi+\frac{\pi}{4})=-\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}=-1$$

داریم:

$$f'(-\frac{\pi}{4})=105(1+(-1)^2)(-1)^6=105\times 2=210$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(-\frac{\pi}{4})=210}$$

۳ ـ داریم:

$$y=3\cos x+2\sin x$$

محل تلاقی منحنی با محور y ها:

$$x=0\Rightarrow y=3(1)+2(0)=3\ ,\ A(0,3)$$

$$y'=-3\sin x+2\cos x\Rightarrow m=-3\sin(0)+2\cos(0)=2$$

$$y-y_A=m(x-x_A)\Rightarrow$$

$$y-3=2(x-0)\Rightarrow \boxed{\begin{matrix}y=2x+3\\ \text{(معادله خط مماس)}\end{matrix}}$$

۴ ـ داریم:

$$y=x^2+px+q\ \ ,\ \ y=-3x-2$$

خط و منحنی روی محور y ها بر هم مماس می‌باشند، از

آنجا که نقطهٔ تماس متعلق به هر دو نمودار می‌باشد: مختصات آن در هر دو معادله صدق می‌کند:

$$x=0 \Rightarrow y+3(0)=-2 \Rightarrow y=-2$$

نقطهٔ تماس: $A(0,-2)$

$$x=0 \Rightarrow y=(0)^3+p(0)+q=-2 \Rightarrow \boxed{q=-2}$$

$$y=-3x-2 \Rightarrow m=-3$$ (ضریب زاویه خط مماس)

$$y'=3x^2+p \Rightarrow m=3(0)^2+p=-3 \Rightarrow \boxed{p=-3}$$

۵ ــ داریم:

$$x^2+y^2+2x=0 \Rightarrow (x^2+2x+1)+y^2=1$$

$$\Rightarrow (x+1)^2+y^2=1 \Rightarrow C'(-1,0)\ ,\ R=1\ ,\ C(-4,4)$$

$$\Rightarrow C'C=d=\sqrt{(-4+1)^2+(4-0)^2}=\sqrt{25}=5$$

$$\Rightarrow \boxed{d=5}$$

$$d=R+R' \Rightarrow 5=1+R' \Rightarrow \boxed{R'=4}$$

معادلهٔ دایرهٔ مطلوب: $(x+4)^2+(y-4)^2=16$

۶ ــ اگر خط $y=mx+1$ بر منحنی تابع به معادلهٔ $y=\frac{1-x}{-x-1}$ مماس باشد، باید معادلهٔ زیر دارای ریشهٔ مضاعف باشد:

$$\begin{cases} y=\frac{1-x}{-x-1} \\ y=mx+1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1-x}{-x-1}=mx+1 \Rightarrow mx^2+mx+2=0$$

از طرفی شرط داشتن ریشهٔ مضاعف برای معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$، چنین است:

$$(a\neq 0)\quad \Delta=0$$

بنابراین داریم:

$$(m\neq 0)\ ,\ \Delta=m^2-8m=0 \Rightarrow m\neq 0\ ,\ m(m-8)=0$$

$$\Rightarrow \boxed{m=8}$$

۷ ــ الف) داریم:

$$4\sin^2 x+2\sin 2x+12\cos^2 x=10$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 x+2\sin x\cos x+6\cos^2 x=5$$

اگر طرفین معادله را بر $\cos^2 x$ تقسیم کنیم و از اتحاد $\frac{1}{\cos^2 x}=1+tg^2 x$ نیز استفاده کنیم داریم:

$$2tg^2x+2tgx+6=5(1+tg^2x)$$

$$\Rightarrow 3tg^2x-2tgx-1$$

$$=0 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} tgx=1 \Rightarrow tgx=tg\frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{x=k\pi+\frac{\pi}{4}} \\ \text{یا} \\ tgx=-\frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{x=k\pi-Arctg\frac{1}{3}} \end{array} \right.$$

ب) داریم:

$$\cos x\sin 2x=\sin x \Rightarrow \cos x(2\sin x\cos x)=\sin x$$

$$2\sin x\cos^2 x-\sin x=0 \Rightarrow \sin x(2\cos^2 x-1)=0$$

$$\Rightarrow \sin x\cos 2x=0$$

$$\Rightarrow \sin x=0 \quad \text{یا} \quad \cos 2x=0$$

$$\sin x=0 \Rightarrow \boxed{x=k\pi}\ ,\ \cos 2x=0 \Rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}}$$

۸ ــ با توجه به رابطهٔ سینوسها:

$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}=2R$$

(R شعاع دایرهٔ محیطی است.)

داریم:

$$a=2R\sin\hat{A}\ ,\ b=2R\sin\hat{B}\ ,\ \cos\frac{\hat{C}}{2}=\frac{a+b}{4R}$$

$$\Rightarrow a+b=4R\cos\frac{\hat{C}}{2}$$

$$\Rightarrow 2R\sin\hat{A}+2R\sin\hat{B}=4R\cos\frac{\hat{C}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin\hat{A}+\sin\hat{B}=2\cos\frac{\hat{C}}{2}$$

$$\Rightarrow 2\sin\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}=2\cos\frac{\hat{C}}{2}$$

از طرفی داریم:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\pi \Rightarrow \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\hat{C}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\hat{C}}{2}\right) \Rightarrow \sin\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}=\cos\frac{\hat{C}}{2}$$

پس خواهیم داشت:

$$\sin\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}=\cos\frac{\hat{C}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{\hat{C}}{2}\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}=\cos\frac{\hat{C}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{\hat{C}}{2}\left(\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}-1\right)=0 \Rightarrow \cos\frac{\hat{C}}{2}=0$$

یا

$$\cos\left(\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}\right)=1$$

می‌دانیم $\hat{C}<180^\circ$ است، بنابراین از رابطهٔ داده شده نتیجه می‌شود مثلث متساوی‌الساقین است:

$$\boxed{\hat{A}=\hat{B}}$$

جواب ۱: چنانچه او ۱۲ بلوز داشته باشد که معنای آن داشتن ۴ شلوار بعلاوهٔ ۲۴ روسری نیز هست، به اندازهٔ پوشیدن ۱۱۵۲ دست لباس مختلف خواهد داشت. سه سال تنها ۱۰۹۶ روز دارد.

منبع: Murphey, Brain، مجلهٔ بازیها، ژوئن ۱۹۸۶

جواب ۲: آب لیوان دوم را در پنجمی بریزید.

جواب ۳: به ۹ طریق ممکن است.

جواب ۴: هر راه را می‌توان به وسیله علامت گذاشتن در خانه‌هایی که رخ روی خطها (مسیرافقی)، می‌پیماید، مشخص کرد، امّا: رخ هفت خط (مسیر افقی) را می‌پیماید، روی هر خط، ۸ خط برای انتخاب حرکت به طرف پایین وجود دارد. بنابراین ۷ بار انتخاب بین ۸ امکان وجود دارد. در نتیجه تعداد راههای ممکن برابر است با ۷ بار حاصل ضرب ۸ در خودش، یعنی:

۸ × ۸ × ۸ × ۸ × ۸ × ۸ × ۸ = ۲۰۹۷۱۵۲

جواب ۵: فرض کنیم مهرداد که با حرف A نشان داده شده است شمارش را از خودش شروع کند. اعدادی که زیر هر حرف نوشته شده است نشان می‌دهد که شخص مربوط به آن حرف در کدام دور شمردن، از بازی بیرون رفته است، مثلاً E در دور اول و A در دور دوم و G در دور سوم و ... از بازی خارج می‌شوند:

A	B	C	D	E	F	G	H	I
۲	۸	۵	۴	۱	۶	۳	۹	۷

با این طریق شمردن، نفری که با حرف H نشان داده شده است برنده می‌شود، پس برای اینکه مهرداد برنده شود باید شمارش را از دو نفر بعدی یعنی از C شروع کند.

Borhan

Vol. 5 No. 2

Serial numbers: 16 Winter 1996

In the name of God

Borhan is a mathematics journal published four times a year by Madrasse Publications. Each issue includes articles related to mathematics and its various topics specifically those concerning highschool education in Iran.

All communications should be sent to the editor at the following address:

Madrasse Publication - No. 36. Haghighat talab Street, Sepahbod gharany Ave, Tehran, Iran

Post code: 14155/1949

Contents:

کمال‌الدین فارسی

ریاضیدان و فیزیکدان ایرانی (در حدود ۶۶۵ـ۷۱۸)

از علمای بزرگ ریاضی و فیزیک ایران و دنیای اسلام در نیمهٔ دوم سدهٔ هفتم و اوایل سدهٔ هشتم در فارس به دنیا آمد.

مهمترین اثر ریاضی شناخته شدهٔ کمال‌الدین فارسی رسالهٔ تذکرةالاحباب فی‌بیان‌التحاب است که هدف آن اثبات درستی دستوری است که ثابت‌بن قره در سدهٔ سوم برای یافتن دسته‌ای از عددهای متحاب بیان کرده است.[۱]

کمال‌الدین فارسی حالت کلی قضیه یعنی حالتی را که در آن p مساوی با یکی از شمارنده‌های a باشد نیز در نظر گرفته و در این حالت نیز دستور محاسبهٔ اجزای حاصل‌ضرب ap را بیان و ثابت کرده است.

کمال‌الدین فارسی نخستین کسی بوده که دستور محاسبهٔ اجزای حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی را در حالت کلی بیان و ثابت کرده است (شکل هجدهم از رسالهٔ او) دستور این است:
قضیه: اگر a و b دو عدد طبیعی و نسبت به هم اول باشند و مجموع اجزای هر عدد مثلاً عدد a را $s(a)$ بنامیم، آنگاه

$$s(ab) = s(a) \times b + s(b) \times a + s(a) \times s(b)$$

دکارت در حدود بیش از سه سده بعد از درگذشت کمال‌الدین فارسی همین دستور را در اروپا به دست آورد. با این تفاوت که کمال‌الدین فارسی باز در این مورد حالتی را که در آن دو عدد a و b نسبت به هم اول نباشند نیز در نظر گرفته و قاعدهٔ خود را تعمیم داده است.
علاوه بر این فارسی پس از اثبات صحت دستور ثابت‌بن قره آن را به کار بسته و دو عدد متحاب ۱۷۲۹۶ و ۱۸۴۱۶ را به دست آورده است. در اروپا متحاب بودن این دو عدد را نخستین بار فرما ریاضیدان فرانسوی در سال ۱۶۳۶ میلادی یعنی ۳۱۸ سال بعد از فوت کمال‌الدین فارسی به دست آورد.

---

۱. دو عدد طبیعی را در صورتی متحاب می‌نامند که مجموع اجزای هریک از آنها مساوی با دیگری باشد مانند دو عدد ۲۲۰ و ۲۴۸، مقصود از اجزای هر عدد طبیعی غیر اول شمارنده‌هایی از آن عدد هستند که از خود عدد کوچکتر باشند. در بعضی از کتابهای فارسی اصطلاح اعداد متحاب را به صورت «اعدادمتحابه» نوشته‌اند. امّا ابوریحان بیرونی در کتاب التفهیم این اصطلاح را به صورت «عددهای‌متحاب» به کار برده و تای تأنیث به آخر متحاب اضافه نکرده است.