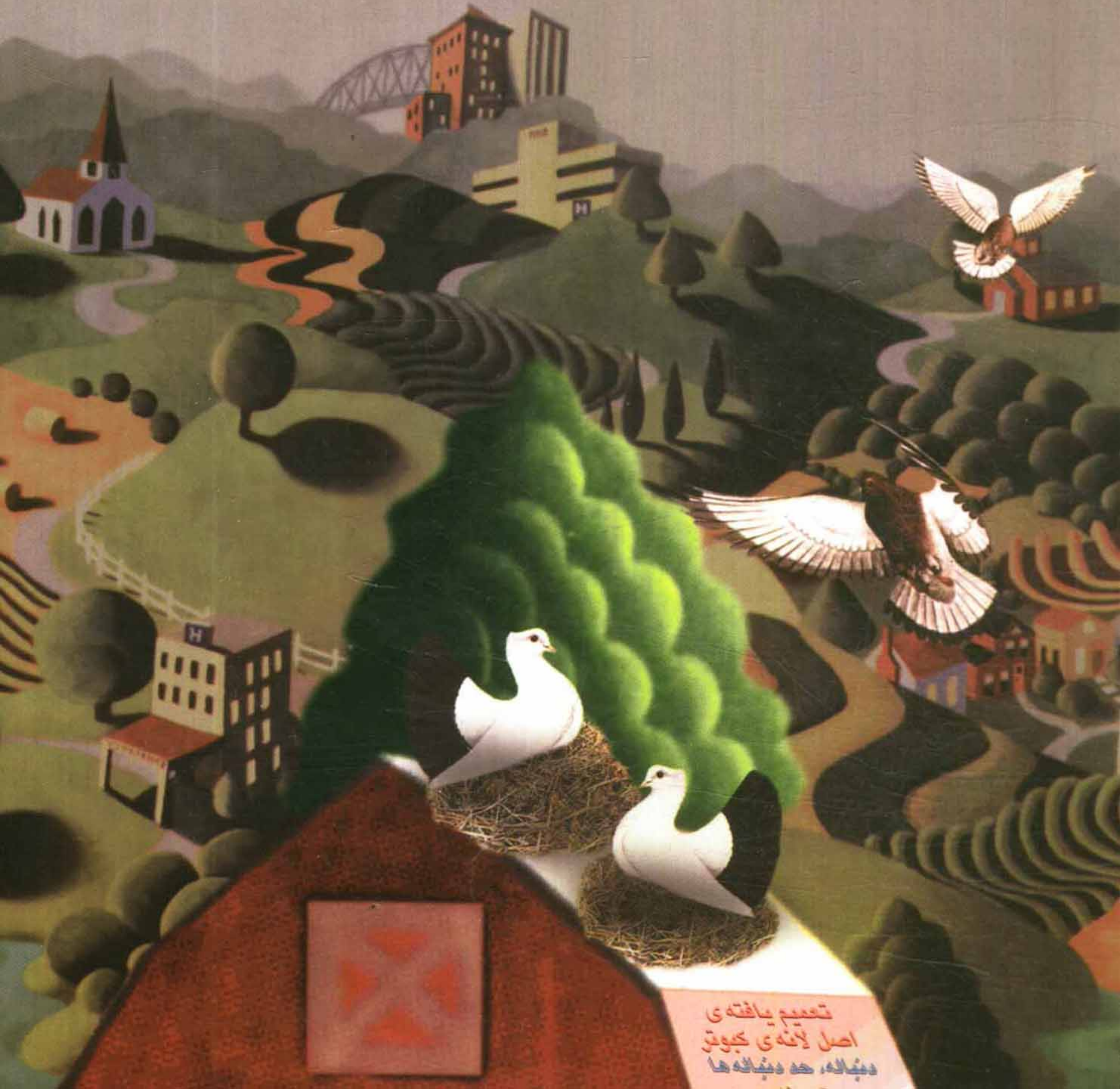
رشد برهان ۴۱

برای دانش‌آموزان دوره‌ی متوسطه

سال دوازدهم، شماره‌ی سوم
۱۳۸۲، بها: ۲۰۰۰ ریال
www.roshdmag.org
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی



تعمیم یافته‌ی اصل لانه‌ی کبوتر
دنباله، حد دنباله‌ها

طرح از نوشین شرف الدین

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد برهان

❖ سال سیزدهم، شماره سوم ❖ ۱۳۸۲

❖ بها: ۲۰۰۰ ریال ❖ شمارگان: ۱۵۰۰۰ نسخه

❖ برای دانش آموزان دوره متوسطه

www.roshdmag.org

سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی

دفتر انتشارات کمک آموزشی

❖ مدیر مسؤول: علیرضا حاجیان زاده

❖ سردبیر: حمیدرضا امیری

❖ مدیر داخلی: میرشهرام صدر

❖ طراح گرافیک: شاهرخ خره غانی

❖ اعضای هیأت تحریریه:

حمیدرضا امیری

محمد هاشم رستمی

احمد قندهاری

میرشهرام صدر

هوشنگ شرقی

سید محمدرضا هاشمی موسوی

غلامرضا یاسی پور

❖ و با تشکر از همکاری ارزندهٔ

آقای پرویز شهریاری

چاپ و صحافی:

شرکت افست (سهامی عام)

رشد برهان، تمامی دبیران محترم و دانش آموزان عزیز را در زمینه های زیر دعوت به همکاری می کند:

✍ نگارش مقاله های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب های ریاضی متوسطه و پیش دانشگاهی) ✍ طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن ها (برای دانش آموزان)

✍ طرح مسائل مسابقه ای به همراه حل آن ها (برای دانش آموزان) ✍ طرح معماهای ریاضی ✍ نگارش یا ترجمهٔ مقاله های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

رشد برهان، هر سه ماه یک شماره منتشر می شود.

✍ مجلّه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافه مقاله ها آزاد است. ✍ مقاله های وارده، باید خوانا و حتی الامکان کوتاه باشد.

✍ مقاله های رسیده مسترد نمی شود. ✍ استفاده از مطالب مجلّه در کتاب ها یا مجله های دیگر با ذکر دقیق ماخذ بلامانع است.

نشانی دفتر مجلّه: صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵

تلفن دفتر مجله: ۹ـ۸۸۳۱۱۶۱۲ داخلی ۳۷۰

تلفن امور مشترکین: ۷۳۳۶۶۵۶ ـ ۷۳۳۵۱۱۰

یادداشت سردبیر

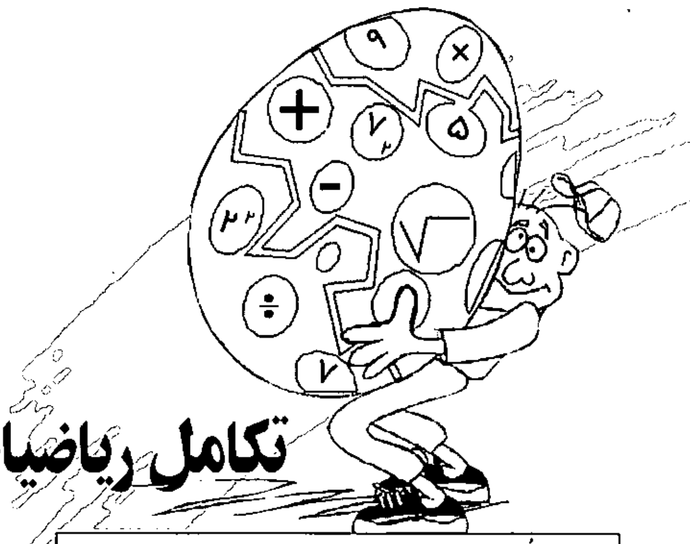
ریاضیات را برای چه می‌آموزید؟ انگیزهٔ شما از مطالعهٔ درس‌های ریاضی چیست؟ به کدام مبحث از مباحث ریاضی بیش‌تر علاقه دارید و چرا؟ آیا همهٔ مباحث ریاضیات را می‌شناسید؟ مطالعهٔ ریاضیات و یادگیری درس‌های آن برای شما چه فایده‌ای داشته است؟ اگر درس ریاضی را با درس‌های دیگر مقایسه کنیم، چه ویژگی‌هایی در این درس بارزند که آن را از علوم دیگر مجزا می‌کنند؟

چرا ریاضیات را «ملکهٔ علوم» نامیده‌اند؟ آیا تفکر ریاضی و مطالعهٔ عمیق درس‌های ریاضی، تأثیری در زندگی روزمرهٔ شما داشته یا می‌تواند داشته باشد؟ چه عواملی در پیشرفت شما در ریاضیات مؤثرند؟ آیا تاکنون به کسی ریاضیات درس داده‌اید و اگر شما یک معلم ریاضی باشید، با دانش‌آموزان خود چگونه ارتباط برقرار می‌کنید تا آن‌ها بهتر و راحت‌تر درس را یاد بگیرند؟ اصلاً آیا دوست دارید، معلم ریاضی باشید؟ چرا؟ کدام یک از عوامل، کتاب درسی، کتاب‌های کمک‌درسی و کمک‌آموزشی، معلم، فضای آموزشی و ابزارهای آموزشی تأثیر بیش‌تری در آموزش ریاضیات دارند؟ چرا؟ کتاب درسی تا چه حد برای شما خودآموز بوده و در یادگیری ریاضیات کمکتان کرده است؟ مجلهٔ ریاضی رشد برهان چه‌طور؟ آیا تا به حال مطلبی یا مقاله‌ای راجع به ریاضیات نوشته‌اید؟ آیا با تاریخ ریاضیات و فلسفهٔ آن آشنا هستید و به آن علاقه دارید؟ به نظر شما اگر دو عامل «درونی» و «بیرونی»، یعنی عامل ذاتی و عامل محیطی را، عامل‌های اصلی در پیشرفت ریاضیات جهان بدانیم، کدام عامل مؤثرتر بوده است؛ زیبایی‌ها و خودجوشی‌های ریاضیات، یا نیازهای بشر به ریاضیات؟ زندگی بدون ریاضیات را چگونه تعبیر می‌کنید؟ آیا این تفکر یا طرز فکر را که «حرف زیادی‌زدن ممنوع»، به عنوان یک تفکر منطقی و ریاضی قبول دارید؟ آیا تاکنون به آزمایشگاه ریاضیات فکر کرده‌اید؟ اگر بخواهم به این سؤالات و جواب آن‌ها بپردازیم، حرف آخر هم باید باشد که نیست.

به هر حال شما متوجه شدید که قصد جوابگویی به این سؤالات را ندارم. درواقع سؤالاتی که مطرح کرده‌ام، هریک برای خود جوابی مفصل و شاید در بعضی موارد، در حد واندازه‌های یک یا چند مقاله دارند، ولی از شما دانش‌آموزان عزیز و فهیم خواهش می‌کنم، برای ما نامه بنویسید و به یک یا چند سؤال از سؤالات یاد شده پاسخ دهید و نظرات خودتان را برای ما بفرستید. جواب شما که ان‌شاءالله در همین مجله به چاپ می‌رسد، برای دوستانتان در اقصی نقاط کشور اسلامی‌مان مفید باشد و برای ما و مسؤولان آموزش ریاضیات کشور راهگشا باشد.

از تاریخ بیاموزیم

تکامل ریاضیات کاربردی و سنت نظری



پرویز شهریاری

در شمارهٔ قبل تکامل ریاضیات کاربردی و عنصر استدلال که باعث سنت ساختمان نظری ریاضیات شد، صحبت کردیم، اینک ادامه مطلب را در پی می‌آوریم.

ریاضیات کاربردی در سطح نخستین خود (میان دوره و غیره) به طور کامل، در گونه‌های مختلف مسأله‌ها، سمت‌گیری کاربردی دارد که در درون خود، گونه‌های متفاوت را از هم جدا کرده است و به صورتی پنهانی، بر راه‌حل‌های کلی گونه‌های مختلف مسأله‌ها اشاره می‌کند. ولی در حالتی که سنت نظری وجود دارد، وقتی که ارزش و اهمیت روش استدلالی، به عنوان یک هدف مستقل، شناخته شده است، وقتی که ریاضیدان ایرانی، ارثیهٔ فرهنگی باستان را حفظ کردند و آن را به مراتب پیش بردند، دیگر جدایی قطعی گونه‌های مختلف مسأله‌ها مشاهده می‌شود و روش‌های کلی حل، به صورت عددی، پدید می‌آید. این روش‌ها به صورت دنباله‌ای از روندهای محاسبه‌ای ارائه می‌شوند که به کمک آن‌ها، راه‌حل کلی هر مسأله‌ای از یک گونهٔ خاص، قابل تشخیص است.

از جمله محمدموسی خوارزمی، یکی از متخصصین ریاضیدانانی که هم به ریاضیات کاربردی «میان‌دورود» و هم به ریاضیات نظری «یونان» توجه داشته است، «جبر و مقابله» خود را به صورت زیر تنظیم می‌کند: آغاز کتاب به شرح الگوریتم‌های حل معادلهٔ درجه دوم، در شکل‌های مختلف خود، اختصاص دارد (شش فصل اول). الگوریتم‌ها روی مثال‌های عددی داده شده‌اند که ریاضیات کاربردی سده‌های میانه را، بر ریاضیات کاربردی در سطح نخستین خود، نزدیک می‌کند.

به همین ترتیب، یکی از نخستین ریاضیدانان اروپایی غربی، «لئوناردو پیزایی»، در کتاب حساب خود، نه تنها توجه خواننده را به جنبه‌های کاربردی مسأله‌ها جلب می‌کند، بلکه به صورتی روشن، روش حل آن‌ها را هم ارائه می‌دهد. شیوهٔ «دستوری» و نسخه مانند الگوریتم‌ها، ریاضیات سده‌های میانه را به ریاضیات کاربردی دوران قبل از یونان پیوند می‌دهد. با وجود این، سنت نظری تأثیر خود را گذاشت و «نسخه‌نویسی» را به الگوریتم، که موقعیتی برون عملی است، رسانده است (این الگوریتم‌ها سمت‌گیری محاسبه‌ای جبری دارند). سنت نظری، تمایل به بیرون رفتن از محدودهٔ کاربرد را افزایش می‌دهد و ریاضیات کاربردی را در بستر سنتز نظریه و عمل به حرکت در می‌آورد.

روش و راه الگوریتمی پیشرفت، از ویژگی‌های آشکار ریاضیات کاربردی است و سنت نظری، تنها موجب افزایش گرایش به سمت الگوریتمی کردن می‌شود. از جمله، ریاضیات کاربردی چین که کم‌وبیش مستقل از تأثیر مرکزهای یونانی پیش‌رفت، تا سدهٔ چهاردهم، به سمت‌گیری در جهت ریاضیات محاسبه‌ای جبری رسید. همین وضع دربارهٔ ریاضیات قرن هفدهم وجود دارد که جهت‌گیری مسأله‌های کاربردی در آن‌جا، همراه با روش‌های کلی حل است. برای نمونه در رسالهٔ «لیلا واتی» (مربوط به سدهٔ دوازدهم که در سدهٔ سیزدهم بازنویسی شده است)، این مسأله آمده است: «اگر ۱۶ غلام ۳۲ واحد پول ارزش داشته باشند، ۲۰ غلام چند می‌ارزند؟» راه‌حل کلی این مسأله که در جهت کاربردی تنظیم شده است، به این ترتیب اعلام می‌شود که، ارزش وجودهای زنده، به نسبت افزایش تعداد آن‌ها، زیاد می‌شود.

در عین حال که گونه‌های مسأله، سمت‌گیری کاربردی خود را حفظ می‌کنند، همراه با نیازهایی که در عمل پدید می‌آیند، خصلت محاسبه‌ای و اندازه‌پذیری به خود می‌گیرند. ریاضیات سده‌های میانه، در پایه‌های اساسی خود، عکس‌العملی در برابر این نیازهاست؛ نیازهایی که بسیار نیرومندند و نمی‌توانند با ریاضیات نظری، چندان برآورده شوند. ضرورت ایجاب می‌کند که به این ریاضیات نظری، مسأله‌هایی اضافه شود تا بتوانند نیازهای محاسبه‌ای را در تجارت، اخذ مالیات، اقتصاد نظامی و غیر آن حل کنند.

مسأله‌های مربوط به تقسیم ارث، در کشورهای مسلمان‌نشین نقشی اساسی داشته‌اند و یکی از موارد درسی در مکتب‌ها بوده‌اند. از سوی دیگر، پیشرفت روابط بازرگانی، مسأله‌های پیچیده‌ای را مطرح کرد و این در حالی است که اختر شناسی عملی که اُ. نیگه‌باور آن را انگیزهٔ اصلی پیشرفت ریاضیات می‌داند، از دورهٔ باستان آغاز شده بود. ب. آ. بستازستین، به ویژه روی دریانوردی و نیازهای ناشی از آن تکیه می‌کند. مسأله‌های مربوط به محاسبهٔ زاویه‌ها (که برای تیراندازی به

هدف لازم بود)، اندازه‌گیری فاصله تا جای غیرقابل دسترس، تعیین جهت قبله، همهٔ این مسأله‌ها، پاسخگوی نیازهای مشخص زندگی عملی بودند؛ نیازهایی که عنصرهای ساختاری ریاضیات کاربردی سده‌های میانه را تشکیل می‌دادند. هریک از گونه‌های متفاوت مسأله‌ها، دورو بر این عنصرها پدید می‌آمدند. ریاضیات سده‌های میانه شامل آگاهی‌های تنظیم شده‌ای بیرون از جنبهٔ نظری است که با رشتهٔ پایداری، به نیازهای عملی بسته شده‌اند.

تمامیت کاربردی مسأله‌ها، ارتباط تنگاتنگی با الگوریتم‌ها دارد. خوارزمی این گونه مسأله‌ها را بعد از شرح الگوریتم‌ها می‌آورد و آن‌ها را در بخش‌های مربوط به وصیت‌ها یا تعیین سهم ارث و یا تعیین تکلیف در حالتی که یک یا چند تن از وارثان وصیت کننده از دنیا بروند، متمرکز می‌کند. بین معادله‌هایی که در جهت کاربردی تنظیم شده‌اند و الگوریتم‌ها که با دستگاه نیرومند روش‌های محاسبه‌ای مشخص شده‌اند[1]، هیچ شکافی وجود ندارد: الگوریتم‌ها ادامهٔ مستقیم گونه‌های مختلف مسأله‌های عملی هستند و از آن‌جا برآمده‌اند. ریاضیات کاربردی، به عنوان مجموعهٔ واحدی که گونه‌های مختلف مسأله‌های ناشی از زندگی عملی را در خود جمع کرده است، تحت تأثیر سنت‌های نظری، به سمت الگوریتمی شدن و جدا شدن عنصرهای محاسبه‌ای از تودهٔ مسأله‌های عملی، گرایش پیدا می‌کند.

اگر از طرف ریاضیات کاربردی در شرایط وجود سنت‌های نظری، تلاشی برای نظری کردن موضوع‌ها دیده می‌شود، از طرف سنت‌های نظری، گرایش عکس وجود دارد: دمساز شدن با موقعیت موجود کارها و با ریاضیات کاربردی که به هیچ‌وجه از جریان اصلی تکامل دانش ریاضی عقب نمانده است. در «طبقه» مربوط به آگاهی‌های نظری، آنچه که از ریاضیات یونانی به ارث رسیده است و همچنین بررسی‌های تازه‌ای که خصلت نظری دارند، حفظ می‌شود.

حفظ سنت‌های نظری در کشورهایی مثل ایران، به صورت ترجمهٔ آثار اقلیدس، آپولونیوس، ارشمیدس، بطلمیوس و دیگر مؤلفان قدیمی، به زبان عربی (و اغلب از زبان‌های پهلوی و سریانی) انجام گرفت. همین آثار با آغاز سدهٔ یازدهم، به لاتینی ترجمه و در اروپا منتشر شد. بازگشت به دانش باستان در سده‌های دوازده و سیزده میلادی، دوره‌ای را در تفکر علمی اروپا تشکیل می‌دهد. ورود متن‌های «عربی» به آموزش غرب، تاریخ دانش و فلسفهٔ سده‌های میانه را به دو دورهٔ متفاوت تقسیم می‌کند: دورهٔ اول، تفکر انسان اروپایی، تنها به قطعه‌های ناچیزی از آگاهی‌های مربوط به مکتب‌های رومی محدود می‌شد.

در دورهٔ دوم، دانش باستان، در حجم کامل خود، به غرب بازگشت. تجدید حیات دانش باستان که با ملاحظه‌ها و اضافه‌های کشورهای شرق همراه بود، رنسانس عملی دوران سده‌های میانه به شمار می‌رود [رنان Renan] ولی در این دوره آگاهی بسیار کند منتشر می‌شد. برای مثال، خبر مرگ فردریک بارباروس، از روم تا کانتربوری هفت هفته در راه بود، ولی خبرهای مهم ممکن بود این فاصله را در چهار هفته طی کنند. به علاوه، رابطهٔ پستی منظمی برقرار نبود. به سختی می‌توان تصور کرد که «جریان آگاهی‌های تازه که از لوله رو و سیسیل و سایر نقطه‌هایی که با دانش باستان و دانش «عربی» آشنا بودند، به مرکزهای فرهنگی اروپای غربی سده‌های میانه، چقدر دیر می‌رسید.»[2]

بررسی مستقل در این دوره، عبارت است از: اثبات دوبارهٔ بسیاری از قضیه‌ها (با شیوهٔ دیگری که ساده‌تر بود و بر اساس ویژگی‌هایی به دست می‌آمد که اقلیدس، ارشمیدس و دیگر ریاضیدانان یونانی هم از آن‌ها اطلاع داشتند)؛ اثبات قضیه‌های تازه، به ویژه قضیه‌هایی که برای ساختن الگوریتم و ساده کردن محاسبه‌ها لازم بود (مثل قضیهٔ سکینوس‌ها در مثلثات روی صفحه و کره) با تلاش برای نفوذ در زمینهٔ پایه‌های دانش ریاضی و اثبات، به صورت قضیه‌ها و اثبات آن‌ها وارد ریاضیات می‌شود. با وجود این، بر خلاف ریاضیات نظری، در این‌جا نظری شدن، زیر فشار نظام درونی ریاضیات انجام نمی‌گیرد، بلکه به ریاضیات کاربردی توجه دارد و زیر تأثیر آن است. در این‌جا اثبات و استدلال تنها حلقهٔ نخستین از زنجیره‌ای است که دانش ریاضی را تکان می‌دهد.

خط‌های کلی بستگی بین تمایل به اثبات با جهت‌گیری کاربردی دانش ریاضی را می‌توان در این‌جا دید که اثبات تا جایی پیش می‌رود که به محاسبه و روش‌های الگوریتمی حل مسأله‌های نمونه برسد. در ضمن رشد مسأله‌هایی که جهت‌گیری کاربردی دارند و همچنین مجموعهٔ الگوریتم‌ها، نسبت به رشد استدلالی که در درجهٔ اول در رابطه با موقعیت محاسبه‌ای آن‌ها به‌وجود می‌آید، آهنگ تندتری دارد؛ از جمله، قضیه‌های مربوط به مثلثات روی صفحه و کره (که به وسیلهٔ بوزجانی، بیرونی و دیگران آورده شدند)، به روشنی در جهت ساده‌تر کردن محاسبه‌های اخترشناسی و در رابطه با تشکیل جدول‌های مثلثاتی، اثبات می‌شوند. کار واقعی نظری در دورهٔ ریاضیات کاربردی، در دقیق‌تر کردن پایه‌های ریاضیات نظری دورهٔ قبل، متمرکز شده است. حجم دانش نظری کندتر از حجم ریاضیات کاربردی و الگوریتمی افزایش می‌یابد و این نشانهٔ نامتعادل بودن نظریه و عمل در سنتز ریاضیات سده‌های میانه است. این عدم تعادل، ریشه‌های بسیار عمیقی دارد که یک رشته از علت‌هایی را روشن می‌کند که موجب ترمز دانش نظری شدند؛ از جمله، وقتی ریاضیدانان ایرانی، فضا را سه‌بعدی می‌دانستند، و پاره‌خط راست را نمایندهٔ طول و مربع آن را نمایندهٔ سطح می‌دانستند، عبور به معادله‌های درجهٔ چهارم و بالاتر ممکن نبود.

ولی قضیه، به عنوان مجموعه‌ای از روندهای الگوریتمی در نظر گرفته می‌شود. اغلب، قضیه، به طور غیر مستقیم با الگوریتم برخورد می‌کند: هدف اثبات‌ها، به طور عمده، عبارت است از جهت دادن به مبانی قابل اثبات الگوریتم‌ها. برای نمونه **ابوریحان بیرونی**، ساختارهای نظری را در «قانون مسعودی» وارد می‌کند. ولی هدف این ساختمان‌های نظری، انجام عمل‌هایی از محاسبه است که درستی آن‌ها را تأیید می‌کند. بیرونی می‌نویسد که دانش مربوط به وتر کمان‌های دایره، یعنی اثبات‌های هندسی که به دایره مربوط می‌شوند، «کاربرد عملی دارد و ضمن محاسبهٔ عددها تعیین می‌شود». نظر ره‌گیومونتان[3] (سدهٔ پانزدهم) هم در کتاب او با عنوان «پنج کتاب دربارهٔ مثلث‌هایی از هر نوع» همین گونه است. نیازهای عملی بر کشش‌های نظری اثر می‌گذارد و موجب تبدیل دانش ریاضی به دنباله‌ای از حلقه‌های یک زنجیر می‌شود که در یک سر آن آگاهی‌های قابل اثبات و در سر دیگر آن، گونه‌های متفاوت مسأله‌های کاربردی قرار دارند. در بنیانگذاری استدلالی الگوریتم‌ها، هر قضیه، برای چند الگوریتم مورد استفاده قرار می‌گیرد و از نظر ساختمان الگوریتمی دانش ریاضی، ساختارهای نظری به وسیلهٔ الگوریتم تقسیم می‌شوند. الگوریتم‌ها هم برای انجام محاسبه لازمند و سرانجام، تنظیم نظری با وضع ریاضیات کاربردی ویران می‌شود. با همهٔ این‌ها، این جهت‌گیری کاربردی که به کمک نظریه «اصلاح می‌شود»، خود خصلتی منظم و آراسته دارد. دو تمایل مختلف برای سامان دادن به دانش ریاضی، یعنی تمایل به دانش‌های کاربردی و تمایل به روش‌های نظری، در روش الگوریتمی به هم می‌پیوندند که در واقع، برآیند موقعیت کاربردی و سنت نظری است. ریاضیات سده‌های میانه بیش از هر چیز ریاضیات محاسبه‌ای است. مجموعه‌ای از الگوریتم‌های محاسبه‌ای، برای حل مسأله‌های حساب، جبر و هندسه که در ابتدا ساده و سپس بغرنج می‌شوند، انگیزهٔ دستاوردهای نظری و به وجود آمدن مفهوم‌های تازه ریاضی می‌شوند. الگوریتم‌ها در آغاز نارسا و جدا از هم بودند و سپس در یک نظام علمی به هم پیوستند: زنجیرهٔ حرکت، ریاضیات نظری و ریاضیات کاربردی را به هم پیوند می‌دهد. این پیوند هم از بیرون است و هم از درون. نه تنها از جنبهٔ جهت‌گیری کاربردی گونه‌های متفاوت مسأله که با الگوریتم‌ها متناقض نیستند. بلکه از جنبهٔ سنت نظری که سازواره در شیوهٔ الگوریتمی دانش ریاضی، جمع شده است.

موقعیت خاص الگوریتم در ریاضیات کاربردی، معرف اشتراک ساختارهای فعالیت عملی و فعالیت فکری است. الگوریتم این امکان را پیدا کرد که نظریه و عمل را به هم پیوند دهد: از یک طرف عمل‌های متفرقی را که جنبهٔ تکراری داشتند و از نظر ماهیت دارای خصلت یکسانی بودند، به صورت عمل واحدی درآورد، و از طرف دیگر، به دانش نظری که جنبهٔ انتزاعی داشت، نزدیک بود. ویژگی شکل بیان عمل و نظریه به صورتی واحد، در روش الگوریتمی خط روشنی است که مرزها را، چه در تحقق روندهای عملی و چه در فرایند تفکر، معین می‌کند.

الگوریتم می‌تواند به عنوان برآیند سمت‌گیری کاربردی و سنت نظری دانش ریاضی پدید آید. همان‌طور که ریاضیات کاربردی پیش از یونان، زمینه را برای ریاضیات نظری یونان باستان فراهم کرد، تا ریاضیات کاربردی سده‌های میانه هم که برآیند ریاضیات کاربردی و نظری پیش از خود بود، راه بعدی تکامل و ساختار نظری ریاضیات در دورهٔ جدید را هموار کرد. نیازهای تازه، در گونه‌های مختلف ریاضیات کاربردی، به طور اساسی وجود داشت و پیش از دوران جدید در حلقهٔ الگوریتمی زنجیرهٔ محرک دانش ریاضی، مستحکم شده بود. **نیوتن** و **لایپ نیتس** این الگوریتم‌ها را به مفهوم‌هایی از بستگی‌های نظری ریاضی تبدیل کردند و به پدید آمدن ساختمان نظری ریاضیات منجر شد که این بستگی‌ها را به هم پیوند می‌داد.

به این ترتیب، تمامیت دانش ریاضی، به وسیلهٔ زنجیرهٔ محرک دگرگونی‌های آن تأمین شد؛ چرا که در آن اثبات و استدلال، به تدریج رسمیت عملی پیدا کرده بود. ولی این تمامیت به هیچ وجه به معنای تمامیت در روش‌های آموزشی آن نیست با وجود پیوستگی در دگرگونی‌ها، دانش ریاضی می‌تواند در طرح مسأله‌ها، در روش عمل آن‌ها و حتی در نمادهای خود، رنگارنگ و چندسو باشد.

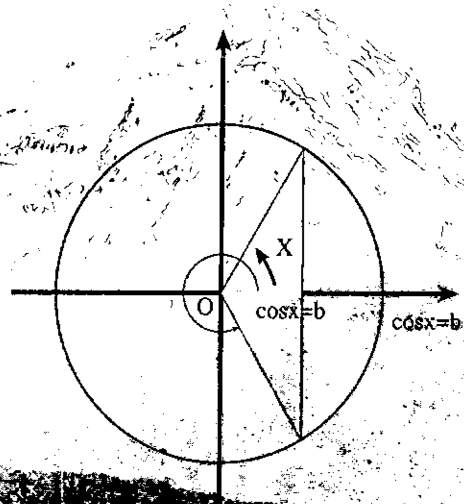
علت اصلی تصوری که دربارهٔ گسیختگی دانش ریاضی پیش می‌آید، در این است که در زنجیرهٔ حرکت و تغییر آن، اثبات‌ها (که به تمامیت نظری مربوطند)، نمی‌توانند از الگوریتم جلوتر بروند و در حالت جبری، به خود همین الگوریتم‌ها می‌رسند. از طرف دیگر، گونه‌های متفاوت مسأله‌ها نمی‌توانند خود را به سطح ساختمان‌های نظری بکشانند. الگوریتم، سنت نظری و سمت‌گیری کاربردی را در یک جا جمع می‌کنند و آن‌ها را به هم می‌پیوندند. ولی در هر حال، گونه‌های متفاوت مسأله‌ها یا قضیه‌ها، رابطه‌ای غیر مستقیم دارند، نوعی سازوکار کمکی لازم است تا تمامیت دانش را در سطح روش‌های آموزشی تحکیم کند. این سازوکار عبارت است از **سازوکار اجتماعی پخش و انتقال آگاهی‌ها، در جریان آموزش**. این سازوکار که اجتماعی است و حلقه‌های به ظاهر جدا از هم زنجیرهٔ تحول دانش را به هم پیوند می‌دهد، جهت‌گیری کاربردی و سنت نظری را متحد می‌کند و از نظر روش‌شناسی، تمامیت واقعی دانش را تأمین می‌کند.

زیرنویس

۱. چنین است که جبر به عنوان شاخهٔ مستقیمی از ریاضیات، شکل می‌گیرد.

2. C.N.Haskins

3. Regiomontanus



محمدهاشم رستمی

برای دانش آموزان سال دوم متوسطه

حلّ معادله های مثلثاتی

حل معادلهٔ سادهٔ مثلثاتی $\operatorname{Sin}X = a, (-1 \le a \le +1)$ را قبلاً دیدیم. اینک به حل معادلهٔ سادهٔ مثلثاتی $\operatorname{Cos}X = b, (-1 \le b \le 1)$ می‌پردازیم.

حل معادلهٔ $\operatorname{Cos}X = b, (-1 \le b \le +1)$

فرض می‌کنیم $b = \operatorname{Cos}\alpha$ باشد. در این صورت خواهیم داشت:

$$\operatorname{Cos}X = \operatorname{Cos}\alpha \Rightarrow X = 2k\pi \pm \alpha$$

$$\operatorname{Cos}X = 0 \Rightarrow X = k\pi + \frac{\pi}{2}$$ حالت خاص

زیرا داریم:

$$\operatorname{Cos}X = 0 = \operatorname{Cos}\frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} X = 2k\pi + \frac{\pi}{2} = \pi\text{ مضرب زوج } + \frac{\pi}{2} \\ X = 2k\pi - \frac{\pi}{2} = 2k\pi - \pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \\ X = (2k-1)\pi + \frac{\pi}{2} = \pi\text{ مضرب زوج } + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

درنتیجه داریم:

$$X = k\pi + \frac{\pi}{2} = \pi \text{ مضربی از } + \frac{\pi}{2}$$

مثال ۱. معادلهٔ $2\operatorname{Cos}x - \sqrt{3} = 0$ را حل کنید.

حل. داریم:

$$2\operatorname{Cos}x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow 2\operatorname{Cos}x = \sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{Cos}x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \operatorname{Cos}\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$ جواب‌های عمومی معادله

مثال ۲. جواب‌های عمومی معادلهٔ $2\operatorname{Cos}x + 1 = 0$ و سپس جواب‌های خصوصی موجود در بازهٔ $(0, 2\pi)$ را تعیین کنید.

حل. داریم:

$$2\operatorname{Cos}x + 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{Cos}x = -\frac{1}{2} = -\operatorname{Cos}\frac{\pi}{3} = \operatorname{Cos}(\pi - \frac{\pi}{3})$$

جواب‌های عمومی معادله $= \cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

برای تعیین جواب‌های خصوصی واقع در بازهٔ $(0, 2\pi)$ به‌جای k عددهای مناسب قرار می‌دهیم. این عددها با توجه به جواب کلی معادله و بازهٔ داده شده، انتخاب می‌شوند.

k	x	
-1	$-\frac{8\pi}{3} < 0,$	$-\frac{4\pi}{3} < 0$
0	$+\frac{2\pi}{3}$ ج	$-\frac{2\pi}{3} < 0$
1	$\frac{8\pi}{3} > 0,$	$\frac{4\pi}{3}$ ج
2	$\frac{14\pi}{3} > 2\pi,$	$\frac{10\pi}{3} > 2\pi$

مثال ۳. معادلهٔ $2\cos(2x - \frac{\pi}{6}) - \sqrt{2} = 0$ را حل کنید.

حل. داریم:

$$2\cos(2x - \frac{\pi}{6}) - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow 2\cos(2x - \frac{\pi}{6}) = \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\cos(2x - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{5\pi}{12} \\ 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{12} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = k\pi + \frac{5\pi}{24} \\ x = k\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$ جواب‌های عمومی معادله

مثال ۴. $\cos(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}) + \sin(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{3}) = 0$ را حل کنید و جواب‌های محصور بین ۰ و 2π را به‌دست آورید.

حل. این معادله را می‌توان به صورت $\sin X = \sin\alpha$ یا $\cos X = \cos\alpha$ تبدیل کرد. ما آن را به صورت $\cos X = \cos\alpha$ درمی‌آوریم. همان‌طور که قبلاً گفته شد، X و α هر دو می‌توانند عبارت‌هایی شامل x (حرف مجهول) باشند.

$$\cos(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}) + \sin(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{3}) = 0 \Rightarrow$$

$$\cos(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}) = -\sin(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{3}) = \sin(-\frac{x}{4} + \frac{\pi}{3}) \Rightarrow$$

$$\cos(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (-\frac{x}{4} + \frac{\pi}{3})\right] = \cos(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{4} - \frac{\pi}{3}) \Rightarrow$$

$$\cos(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{6}) \Rightarrow \frac{x}{3} + \frac{\pi}{4} = 2k\pi \pm (\frac{x}{4} + \frac{\pi}{6})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{x}{4} + \frac{\pi}{6} \\ \frac{x}{3} + \frac{\pi}{4} = 2k\pi - \frac{x}{4} - \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \\ \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 2k\pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

جواب‌های عمومی $$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{12} = 2k\pi - \frac{\pi}{12} \\ \frac{7x}{12} = 2k\pi - \frac{5\pi}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 24k\pi - \pi \\ x = \frac{24k\pi}{7} - \frac{5\pi}{7} \end{cases}$$

k	x	
0	$-\pi < 0,$	$\frac{-5\pi}{7} < 0$
1	$23\pi > 2\pi,$	$\frac{19\pi}{7} > 2\pi$

همان‌طور که دیده می‌شود، این معادله در بازهٔ $(0, 2\pi)$ دارای جواب نیست.

مثال ۵. معادلهٔ $2\cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}) = m + 3$ داده شده است.

الف) حدود m را چنان بیابید که این معادله دارای جواب باشد.

ب) حدود m را چنان تعیین کنید که $0 < x < \pi$ باشد.

پ) مقدار m را چنان بیابید که یکی از جواب‌های معادله، $x = \frac{\pi}{6}$ باشد.

ت) مقدار m را طوری تعیین کنید که $2\cos\frac{x}{2} = \sqrt{3}$ باشد.

ث) به ازای $m = -3$، معادله را حل کنید.

حل. الف) داریم:

$$\text{Cos}(\frac{x}{۲}-\frac{\pi}{۳})=\frac{m+۳}{۲}\Rightarrow -۱\le\frac{m+۳}{۲}\le+۱\Rightarrow$$

$$-۲\le m+۳\le+۲\Rightarrow -۲-۳\le m+۳-۳\le+۲-۳$$

$$\Rightarrow -۵\le m\le -۱$$

ب) معادله را به صورت $\text{Cos}(\frac{x}{۲}-\frac{\pi}{۳})=\frac{m+۳}{۲}$ در نظر می‌گیریم. با استفاده از شرط داده شده، داریم:

$$۰<x<\pi\Rightarrow ۰<\frac{x}{۲}<\frac{\pi}{۲}\Rightarrow ۰-\frac{\pi}{۳}<\frac{x}{۲}-\frac{\pi}{۳}<\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{۳}<\frac{x}{۲}-\frac{\pi}{۳}<\frac{\pi}{۶}\Rightarrow\frac{۱}{۲}<\text{Cos}(\frac{x}{۲}-\frac{\pi}{۳})<\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{۲}<\frac{m+۳}{۲}<\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow ۱<m+۳<\sqrt{۳}\Rightarrow -۲<m<\sqrt{۳}-۳$$

پ) شرط لازم و کافی برای آن که $x=\frac{\pi}{۶}$ یک ریشهٔ معادلهٔ $۲\text{Cos}(\frac{x}{۲}-\frac{\pi}{۳})=m+۳$ باشد، آن است که در این معادله صدق کند، یعنی داشته باشیم:

$$۲\text{Cos}(\frac{\pi/۶}{۲}-\frac{\pi}{۳})=m+۳\Rightarrow ۲\text{Cos}(-\frac{\pi}{۶})=m+۳$$

$$۲\text{Cos}\frac{\pi}{۶}=m+۳\Rightarrow ۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=m+۳\Rightarrow m=-۳+\sqrt{۳}$$

ت) ریشه‌های معادلهٔ $۲\text{Cos}\frac{x}{۲}=\sqrt{۳}$ باید در معادلهٔ $۲\text{Cos}(\frac{x}{۲}-\frac{\pi}{۳})=m+۳$ صدق کنند. بنابراین نخست باید جواب‌های معادلهٔ $۲\text{Cos}\frac{x}{۲}=\sqrt{۳}$ را به‌دست آوریم. سپس آن‌ها را در معادلهٔ $۲\text{Cos}(\frac{x}{۲}-\frac{\pi}{۳})=m+۳$ قرار دهیم.

$$۲\text{Cos}\frac{x}{۲}=\sqrt{۳}\Rightarrow\text{Cos}\frac{x}{۲}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\text{Cos}\frac{\pi}{۶}\Rightarrow\frac{x}{۲}=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۶}\Rightarrow$$

دو جواب خصوصی $k=۰\Rightarrow x=\frac{\pi}{۳},\ x=-\frac{\pi}{۳}$ و

جواب‌های عمومی $x=۴k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$

$$x=\frac{\pi}{۳}\xrightarrow{\text{در معادلهٔ دومی}}۲\text{Cos}(\frac{\pi/۳}{۲}-\frac{\pi}{۳})=m+۳\Rightarrow$$

$$۲\text{Cos}(\frac{\pi}{۶}-\frac{\pi}{۳})=m+۳\Rightarrow ۲\text{Cos}(-\frac{\pi}{۶})=m+۳\Rightarrow$$

$$۲\text{Cos}\frac{\pi}{۶}=m+۳\Rightarrow ۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=m+۳\Rightarrow m=-۳+\sqrt{۳}$$

ث)

$$m=-۳\Rightarrow ۲\text{Cos}(\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۳})=۰\Rightarrow$$

$$\text{Cos}(\frac{x}{۲}-\frac{\pi}{۳})=۰\Rightarrow\frac{x}{۲}-\frac{\pi}{۳}=k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow$$

$$\frac{x}{۲}=k\pi+\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۳}\Rightarrow\frac{x}{۲}=k\pi+\frac{۵\pi}{۶}\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۳}$$

مثال ۶. جواب‌های کلی معادلهٔ $۲\text{Cos}۴\pi x-\sqrt{۲+\sqrt{۲}}=۰$ را به‌دست آورید و جواب‌های موجود در بازهٔ $(۰,۱)$ را مشخص سازید.

حل. داریم:

$$۲\text{Cos}۴\pi x-\sqrt{۲+\sqrt{۲}}=۰\Rightarrow ۲\text{Cos}۴\pi x=\sqrt{۲+\sqrt{۲}}\Rightarrow$$

$$\text{Cos}۴\pi x=\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}=\text{Cos}\frac{\pi}{۸}\Rightarrow ۴\pi x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۸}\Rightarrow$$

$$x=\frac{۲k\pi}{۴\pi}\pm\frac{\pi/۸}{۴\pi},\quad x=\frac{k}{۲}\pm\frac{۱}{۳۲}$$

$$x=\frac{k}{۲}+\frac{۱}{۳۲},\quad x=\frac{k}{۲}-\frac{۱}{۳۲}$$ جواب‌های کلی معادله

برای تعیین جواب‌های موجود در بازهٔ $(۰,۱)$، به جای k عددهای صحیح مناسب قرار می‌دهیم.

k	x	
-۱	$-\frac{۱۵}{۳۲}<۰$ ج،	$-\frac{۱۷}{۳۲}<۰$
۰	$\frac{۱}{۳۲}$ ج	$-\frac{۱}{۳۲}<۰$ ج
۱	$\frac{۱۷}{۳۲}$	$\frac{۱۵}{۳۲}$ ج
۲	$\frac{۳۳}{۳۲}>۱$	$\frac{۳۱}{۳۲}$
۳	$\frac{۴۹}{۳۲}>۱$	$\frac{۴۷}{۳۲}>۱$

همان‌طور که دیده می‌شود، جواب‌های خصوصی مورد

نظر مسأله $\frac{1}{32}$ ، $\frac{15}{32}$ ، $\frac{17}{32}$ و $\frac{31}{32}$ هستند.

مثال ۷. معادلهٔ $2\cos(\pi x+\frac{\pi}{4})-2m+3=0$ داده شده است.

الف) حدود m را چنان بیابید که این معادله جواب داشته باشد.

ب) حدود m را چنان تعیین کنید که $0<x<\frac{1}{2}$ باشد.

پ) به ازای $m=1$ معادله را حل کنید.

حل. داریم:

الف)

$$2\cos(\pi x+\frac{\pi}{4})-2m+3=0\Rightarrow$$

$$\cos(\pi x+\frac{\pi}{4})=\frac{2m-3}{2}\Rightarrow -1\le\frac{2m-3}{2}\le 1\Rightarrow$$

$$-2\le 2m-3\le +2\Rightarrow -2+3\le 2m\le +2+3\Rightarrow$$

$$1\le 2m\le 5\Rightarrow \frac{1}{2}\le m\le\frac{5}{2}$$

ب)

$$0<x<\frac{1}{2}\Rightarrow 0<\pi x<\frac{\pi}{2}\Rightarrow$$

$$\frac{\pi}{4}<\pi x+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\Rightarrow\frac{\pi}{4}<\pi x+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}\Rightarrow$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos(\pi x+\frac{\pi}{4})<+\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{2m+3}{2}<+\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow -\sqrt{2}<2m+3<\sqrt{2}\Rightarrow$$

$$-3-\sqrt{2}<2m<-3+\sqrt{2}\Rightarrow\frac{-3-\sqrt{2}}{2}<m<\frac{-3+\sqrt{2}}{2}$$

پ) به ازای $m=1$ داریم:

$$2\cos(\pi x+\frac{\pi}{4})-2+3=0\Rightarrow 2\cos(\pi x+\frac{\pi}{4})+1=0\Rightarrow$$

$$2\cos(\pi x+\frac{\pi}{4})=-1\Rightarrow\cos(\pi x+\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{2}$$

$$=-\cos\frac{\pi}{3}=\cos(\pi-\frac{\pi}{3})=\cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow\cos(\pi x+\frac{\pi}{4})=\cos\frac{2\pi}{3}\Rightarrow\pi x+\frac{\pi}{4}=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x+\frac{1}{4}=2k\pm\frac{2}{3}\Rightarrow x=2k-\frac{1}{4}\pm\frac{2}{3}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}x=2k-\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\Rightarrow x=2k+\frac{5}{12}\\ x=2k-\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\Rightarrow x=2k-\frac{11}{12}\end{cases}$$ جواب‌های کلی معادله

مثال ۸. معادلهٔ $\cos(x-\frac{\pi}{6})-\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})=0$ را حل کنید.

حل. این معادله را می‌توان به صورت $\sin X=\sin\alpha$ یا $\cos X=\cos\alpha$ درآورد و سپس حل کرد. برای این کار از رابطه‌های بین نسبت‌های مثلثاتی دو زاویهٔ متمم $(\frac{\pi}{2}-\alpha,\alpha)$ و یا شبه‌متمم $(\frac{\pi}{2}+\alpha,\alpha)$ استفاده می‌کنیم. زیرا داریم:

$$\sin\alpha=\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)\quad\text{و}$$

$$\cos\alpha=\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)$$

در این جا، معادله را به صورت $\cos X=\cos\alpha$ درمی‌آوریم و حل می‌کنیم. داریم:

$$\cos(x-\frac{\pi}{6})-\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})=0\Rightarrow\cos(x-\frac{\pi}{6})=\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})$$

$$\Rightarrow\cos(x-\frac{\pi}{6})=\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4})\Rightarrow$$

$$\cos(x-\frac{\pi}{6})=\cos(-\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\Rightarrow$$

$$x-\frac{\pi}{6}=2k\pi\pm(-\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\Rightarrow$$

$$\begin{cases}x=2k\pi-\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\\ x=2k\pi+\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{3x}{2}=2k\pi+\frac{5\pi}{12}\\ \frac{x}{2}=2k\pi-\frac{\pi}{12}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{4k\pi}{3}+\frac{5\pi}{18}\\ x=4k\pi-\frac{\pi}{6}\end{cases}$$ جواب‌های عمومی معادله

حد، پیوستگی و مشتق پذیری به کمک نمودارها

در این مقاله سعی شده است، دربارهٔ تابعی مانند f، موارد حد، پیوستگی، مشتق پذیری، اکسترمم نسبی، اکسترمم مطلق، یکنوایی و اکیداً یکنوایی را به صورت شهودی بیان کنیم.

● احمد قندهاری

حدتابع در یک نقطه

الف) نقطهٔ توخالی را در نمودار تابع f، نقطهٔ حد گوییم.

ب) اگر در سمت چپ این نقطهٔ توخالی، نمودار تابع f وجود داشته باشد، آن نقطه را حد چپ تابع f گوییم.

ج) چنانچه در سمت راست نقطهٔ توخالی، نمودار تابع f وجود داشته باشد، آن نقطه را حد راست تابع f گوییم.

د) اگر در دو نقطهٔ توخالی، نمودار تابع f وجود داشته باشد، آن نقطه را حد تابع گوییم. به نمودارهای شمارهٔ ۱ زیر توجه کنید:

نتایج شکل

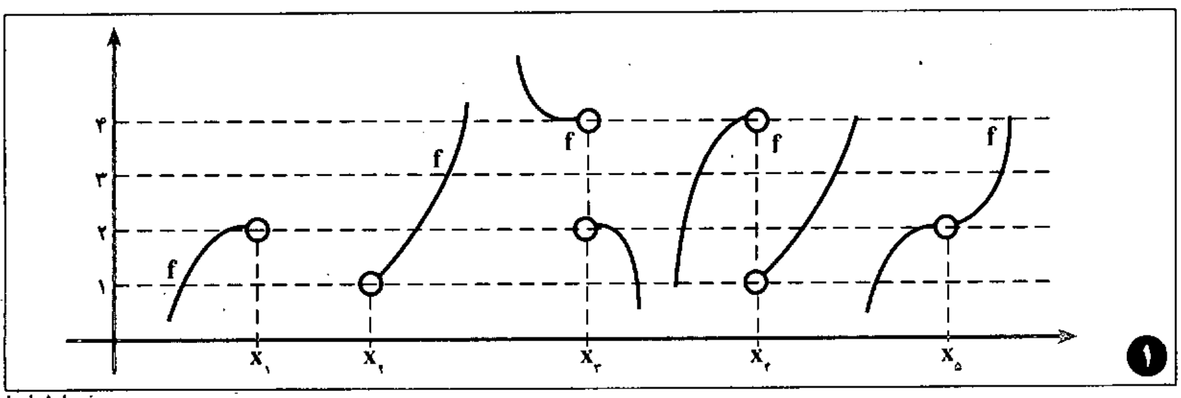
۱. تابع f در x_1 فقط حد چپ دارد که مقدار آن در این نقطه عدد ۲ است.

۲. تابع f در x_2 فقط حد راست دارد که فقط آن در این نقطه ۱ است.

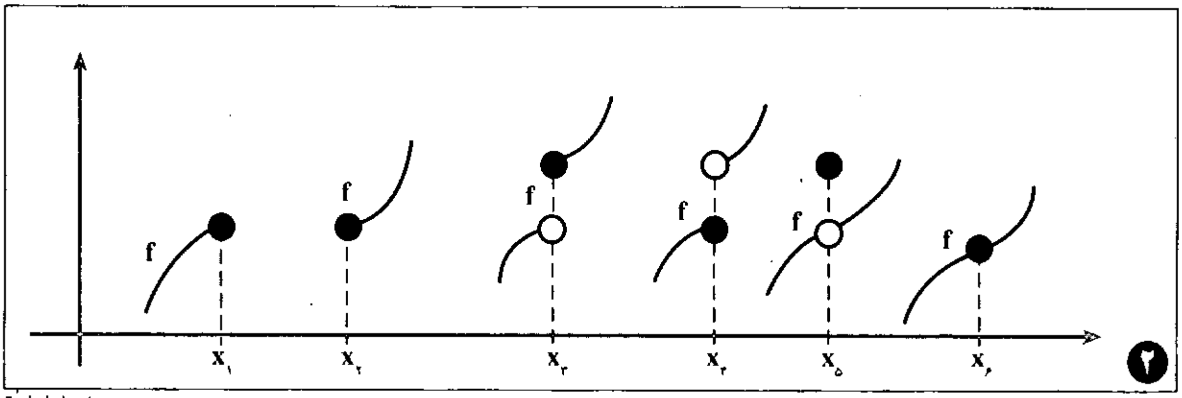
۳. تابع f در x_3، حد راست ۲ و حد چپ ۳ دارد. چون حد راست تابع در x_3 با حد چپ تابع در این نقطه برابر نیست، پس باز هم تابع در این نقطه حد ندارد.

۴. تابع f در x_4، حد راست ۱ و حد چپ ۳ دارد. ولی چون حد راست تابع برابر با حد چپ آن در x_4 نیست، بازهم تابع در x_4 حد ندارد.

۵. تابع f در x_5، حد راست و حد چپ دارد که هر دو برابر ۲ هستند. می گوییم تابع در x_5 حد دارد.



نمودار شماره ۱



نمودار شمارهٔ ۲

پیوستگی تابع در یک نقطه

الف) نقطهٔ توپر (سیاه) شکل را مقدار تابع گوییم.

ب) اگر مقدار تابع فقط روی حد چپ قرار گیرد، می‌گوییم تابع در آن نقطه فقط پیوستگی چپ دارد.

ج) اگر مقدار تابع فقط روی حد راست، قرار گیرد، می‌گوییم تابع در آن نقطه فقط پیوستگی راست دارد.

د) اگر مقدار تابع روی حد تابع قرار گیرد، می‌گوییم تابع در آن نقطه پیوسته است.

هـ) اگر مقدار تابع روی نقطهٔ حد تابع قرار نگیرد، می‌گوییم تابع در آن نقطه حد دارد، ولی هیچ نوع پیوستگی ندارد.

به نمودارهای شمارهٔ ۲ توجه کنید:

نتایج شکل

۱. تابع f در x_1، حد راست ندارد و مقدار تابع روی حد چپ قرار گرفته است، می‌گوییم تابع در این نقطه فقط پیوستگی چپ دارد.

۲. تابع f در x_2، حد چپ ندارد و مقدار تابع روی حد راست قرار گرفته است. می‌گوییم تابع در این نقطه فقط پیوستگی راست دارد.

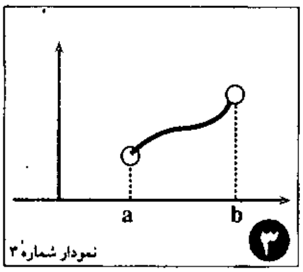
۳. تابع f در x_3، حد راست و حد چپ نابرابر دارد، ولی مقدار تابع روی حد راست قرار گرفته است. می‌گوییم تابع در x_3، حد چپ دارد، ولی فقط پیوستگی راست دارد.

۴. تابع f در x_4، حد راست و حد چپ نابرابر دارد، ولی مقدار تابع روی حد چپ قرار گرفته است. می‌گوییم تابع در x_3، حد راست دارد، ولی فقط پیوستگی چپ دارد.

۵. تابع f در x_5، حد دارد، ولی مقدار تابع روی حد قرار ندارد. می‌گوییم تابع f در x_5 حد دارد، ولی هیچ نوع پیوستگی ندارد.

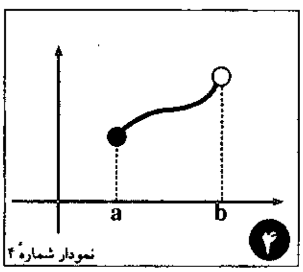
۶. تابع f در x_6، حد دارد و مقدار تابع روی حد تابع قرار گرفته است. می‌گوییم تابع در x_6 پیوسته است.

پیوستگی در یک بازه



نمودار شمارهٔ ۳

۱. تابع f را در بازهٔ $(a,b)\subset D_f$ وقتی پیوسته گوییم که f در هر x_0، $a<x_0<b$ پیوسته باشد. (نمودار شمارهٔ ۳)

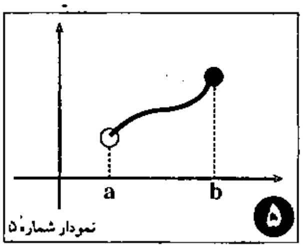


نمودار شمارهٔ ۴

۲. تابع f را در بازهٔ $[a,b)$ وقتی پیوسته گوییم که:

الف) f در هر x_0، $a<x_0<b$ پیوسته باشد.

ب) f در a پیوستگی راست داشته باشد. (نمودار شمارهٔ ۴)



نمودار شمارهٔ ۵

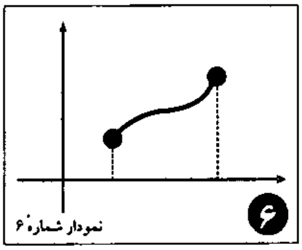
۳. تابع f را در بازهٔ $(a,b]$ وقتی پیوسته گوییم که:

الف) f در هر x_0، $a<x_0<b$ پیوسته باشد.

ب) f در b پیوستگی چپ باشد. (نمودار شمارهٔ ۵)

۴. تابع f در بازهٔ $[a,b]$ وقتی پیوسته گوییم که:

الف) f در هر x_0 ، $a < x_0 < b$ پیوسته باشد.



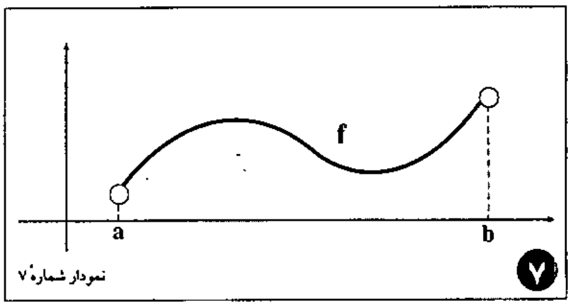
نمودار شمارهٔ ۶

ب) f در a پیوستگی راست و در b پیوستگی چپ داشته باشد. (نمودار شمارهٔ ۶)

مشتق‌پذیری تابع در یک نقطه

قرارداد: نمودار تابع پیوستهٔ f را در بازهٔ $(a,b) \subset D_f$ وقتی هموار گوییم که در هر نقطهٔ x_0 ، $a < x_0 < b$ بتوان فقط یک خط مماس بر منحنی f رسم کرد که موازی محور yها نباشد.

شکل تابع f (نمودار شمارهٔ ۷)، نمونهٔ یک تابع هموار در بازهٔ (a,b) است.



نمودار شمارهٔ ۷

۱. تابع f را در نقطهٔ پیوستهٔ x_0 وقتی مشتق‌پذیر گوییم که فقط و فقط یک خط مماس بر منحنی تابع f در نقطهٔ x_0 وجود داشته باشد، به طوری که آن خط، موازی محور yها نباشد.

با توجه به تعریف (۱)، تابع های f، g، h، (نمودارهای شمارهٔ ۸) در x_0 مشتق‌پذیرند.

۲. اگر تابع f در بازهٔ $[a,b] \subset D_f$ پیوسته و در بازهٔ (a,b) هموار باشد، آن‌گاه تابع f در بازهٔ (a,b) مشتق‌پذیر است.

سؤال: یک تابع مانند f در چه نقاطی مشتق‌پذیر نیست؟

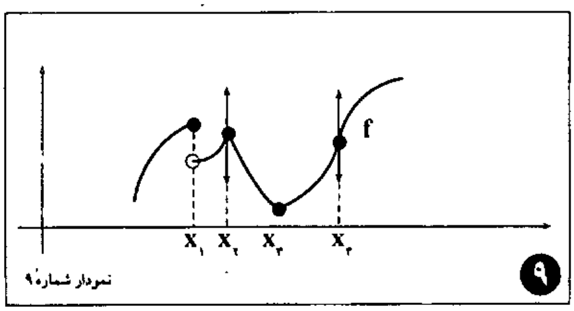
جواب:

الف) در نقاطی که تابع در آن‌ها ناپیوسته باشد.

ب) در نقاطی که دو خط مماس بر منحنی f وجود داشته باشد.

ج) در نقاطی که خط مماس بر منحنی f موازی محور yها باشد.

به نمودار شمارهٔ ۹ توجه کنید:

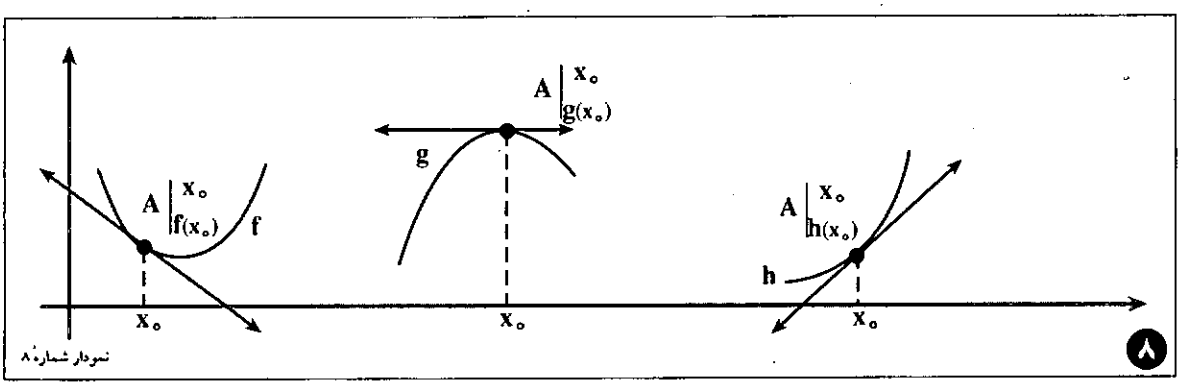


نمودار شمارهٔ ۹

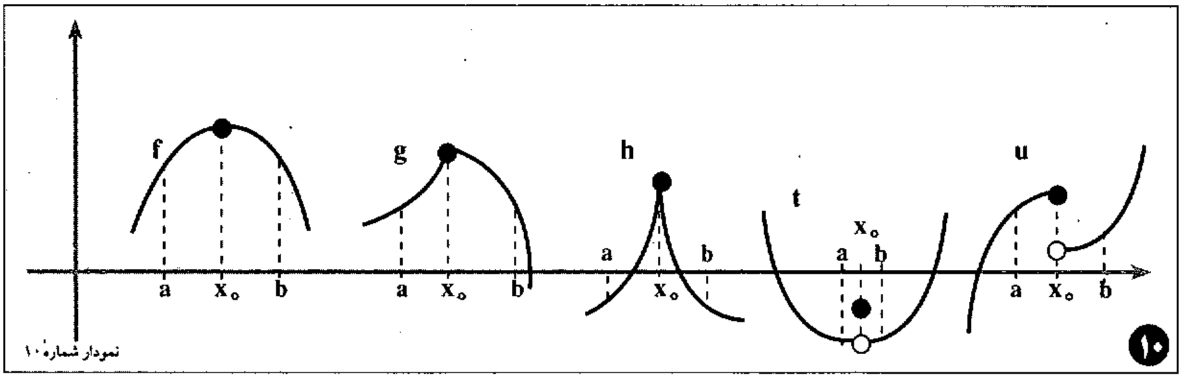
۱. تابع f در x_1 مشتق‌پذیر نیست؛ زیرا تابع f در x_1 ناپیوسته است.

۲. تابع f در x_3 مشتق‌پذیر نیست. زیرا منحنی تابع f در نقطه‌ای به طول x_3 ، زاویه‌دار است. در نتیجه در این نقطه دو خط مماس بر منحنی f وجود دارد.

۳. تابع f در x_2 و x_4 مشتق‌پذیر نیست. زیرا خط های مماس بر منحنی تابع f در نقاطی به طول‌های x_2 و x_4 ، موازی محور yها هستند.



نمودار شمارهٔ ۸



اکسترمم نسبی

۱. نقطه‌ای به طول $x_0 \in D_f$ را طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f گوییم؛ در صورتی که:

اولاً: در همسایگی x_0، نمودار تابع f وجود داشته باشد.

ثانیاً: عرض نقطهٔ x_0، از عرض‌های نقاط همسایگی بیش‌تر و یا مساوی آن‌ها باشد.

فرض می‌کنیم بازهٔ (a,b) یک همسایگی x_0 باشد $(a < x_0 < b)$. به نمودار شمارهٔ ۱۰ تابع‌های f، g، h، t و u توجه کنید.

نقطه‌ای به طول x_0، در تابع‌های f، g، h، t، u طول ماکزیمم نسبی است.

۲. نقطه‌ای به طول $x_0 \in D_f$ را طول نقطهٔ مینیمم نسبی تابع f گوییم؛ در صورتی که:

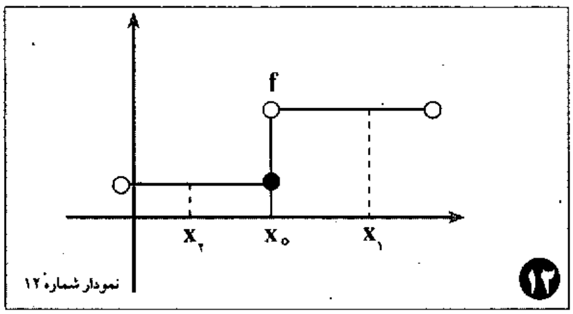
اولاً: در همسایگی x_0 نمودار تابع f وجود داشته باشد.

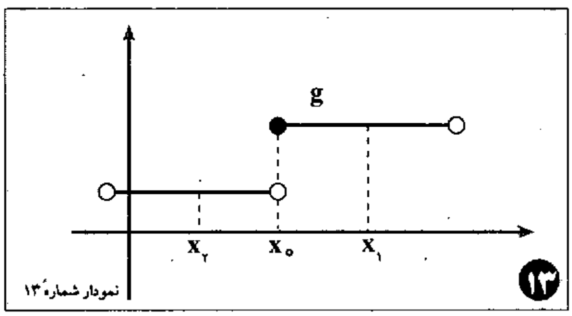
ثانیاً: عرض نقطهٔ (a,b) از عرض‌های نقاط همسایگی کم‌تر و یا مساوی آن‌ها باشد.

فرض می‌کنیم بازهٔ (a,b) یک همسایگی x_0 باشد $(a < x_0 < b)$. به نمودارهای شماره ۱۱ توجه کنید:

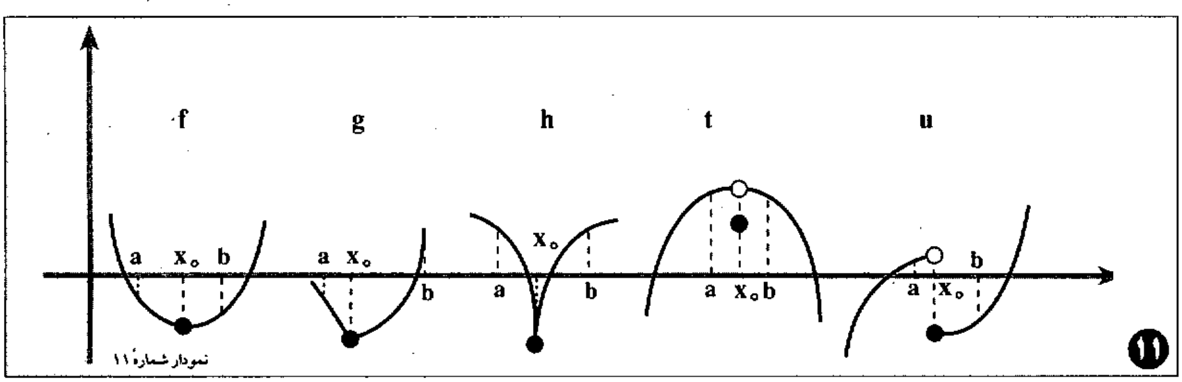
نقطه‌ای به طول x_0، در تابع‌های f، g، h، t و u طول مینیمم نسبی است.

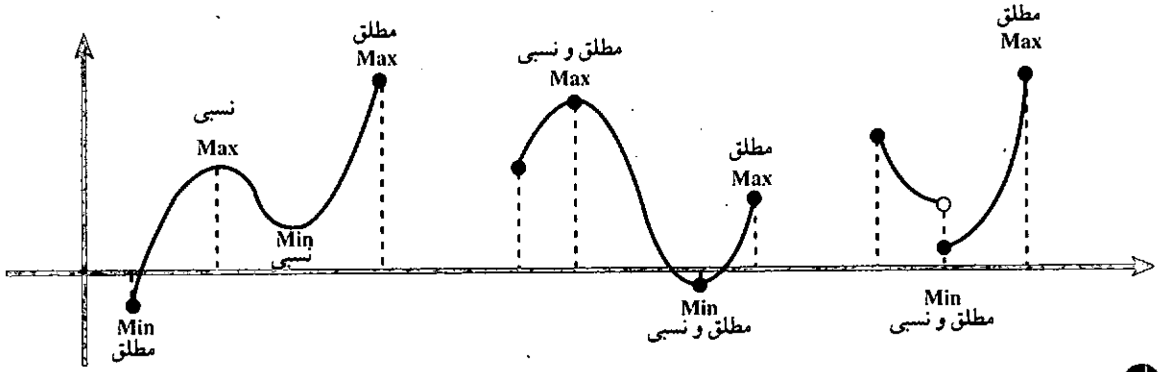
سؤال. دو تابع f و g با نمودارهای ۱۲ و ۱۳ مفروضند:





نقاطی به طول‌های x_0، x_1 و x_2 در تابع‌های f و g دقیقاً طول‌های چه نقاطی هستند؟





۱۴ نمودار شمارهٔ ۱۴

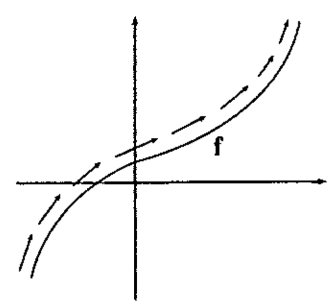
ماکزیمم و مینیمم مطلق

بالاترین نقطهٔ نمودار تابع را ماکزیمم مطلق و پائین‌ترین نقطهٔ نمودار تابع را مینیمم مطلق گوییم (نمودار شمارهٔ ۱۴).

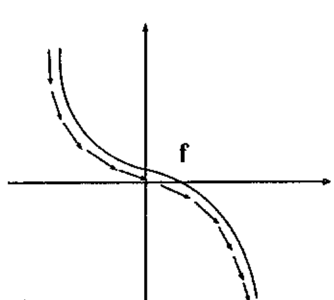
تذکر: اگر ماکزیمم مطلق همسایگی داشته باشد، ماکزیمم نسبی هم خواهد بود، و اگر مینیمم مطلق همسایگی داشته باشد، مینیمم نسبی هم خواهد بود.

تابع اکیداً یکنوا

۱. نمودار تابع پیوستهٔ f را وقتی صعودی اکید گوییم که اگر از سمت چپ شکل روی نمودار حرکت کنیم، همواره به طرف بالا برویم (نمودار شمارهٔ ۱۵).



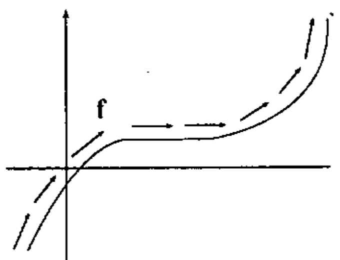
۱۵ f صعودی اکید است. نمودار شمارهٔ ۱۵



۱۶ f نزولی اکید است. نمودار شمارهٔ ۱۶

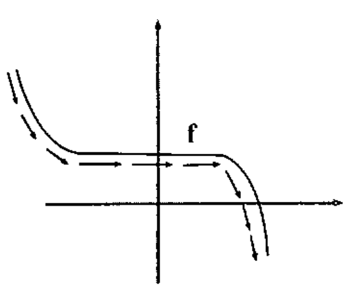
۲. نمودار تابع پیوستهٔ f را وقتی نزولی اکید گوییم که اگر از سمت چپ شکل روی نمودار حرکت کنیم، همواره به طرف پائین بیاییم (نمودار شمارهٔ ۱۶).

۳. نمودار تابع پیوستهٔ f را وقتی صعودی گوییم که اگر از سمت چپ شکل روی نمودار حرکت کنیم، به طرف بالا برویم و در قسمتی از نمودار، حرکت افقی باشد (نمودار شمارهٔ ۱۷).



۱۷ f صعودی است. نمودار شمارهٔ ۱۷

۴. نمودار تابع پیوستهٔ f را وقتی نزولی گوییم که اگر از سمت چپ شکل روی نمودار حرکت کنیم، به طرف پائین بیاییم و در قسمتی از نمودار، حرکت افقی باشد (نمودار شمارهٔ ۱۸).



۱۸ f نزولی اکید است. نمودار شمارهٔ ۱۸

در حاشیه گراف‌های ساده

ماتریس وقوع گراف ساده

احسان یارمحمدی

آرتور کیلی[1] ریاضیدان انگلیسی تباری که در شانزدهم اوت سال ۱۸۲۱ میلادی در ریچموند[2] ناحیهٔ سوری[3] جزیرهٔ بریتانیا به دنیا آمد، اولین کسی بود که ماتریس را در ریاضیات مطرح کرد. ۱۰ سال بعد از این که **گوستاو کیرشهف** (۱۸۸۷ ـ ۱۸۴۲) در تعمیم قوانین اهم برای جریان الکتریکی، در کاربردهایی که شامل شبکه‌های الکتریکی بودند، نوع خاصی از گراف‌های همبند و بدون دور را مطرح ساخت، آرتور کیلی توانست، هنگام شمارش ایزومرهای متمایز هیدروکربن‌های اشباع شده‌ای به نام آلکان با فرمول عمومی «C_nH_{2n+2}» ($n \in \mathbb{N}$) نام درخت را برای این گراف‌های همبند و بدون دور، اختیار کند. بنابراین می‌توان از او به عنوان یکی از کسانی نام برد که با مطرح کردن ماتریس و نهادن نام درخت بر یک گراف خاص، در پیشبرد نظریهٔ گراف نقشی را ایفا کرده‌اند.

کیلی در حالی که فعالیت علمی خویش را تا یک هفته قبل از مرگش ادامه می‌داد، در روز بیست و ششم ژانویهٔ سال ۱۸۹۵ میلادی، بعد از تحمل یک بیماری دردناک و بلند مدت، وفات یافت.

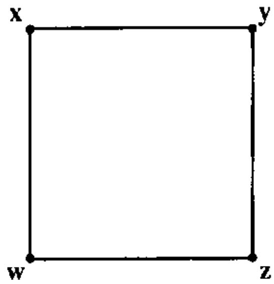
به هر گراف سادهٔ $G=(V,E)$ از مرتبهٔ p و اندازهٔ q که دارای یک مدل ریاضی با عنوان نمودار گراف G است، می‌توان یک ماتریس از مرتبهٔ $p\times q$ نسبت داد که به ماتریس «وقوع گراف G» شهرت دارد و آن را با $M(G)$ نمایش می‌دهیم. بدین ترتیب که در مقابل p سطر این ماتریس، رأس‌های $V_1, V_2, \dots, V_p$ را از مجموعهٔ رأس‌های $V=\{V_1, V_2, \dots V_p\}$ گراف G و در مقابل q ستون این ماتریس، یال‌های $E_1, E_2, \dots, E_q$ را از مجموعهٔ یال‌های $E=\{E_1, E_2, \dots E_q\}$ گراف G می‌نویسیم.

در این صورت ماتریس وقوع گراف سادهٔ G، شامل درایه‌های صفر و یک است. بدین ترتیب که اگر رأس V_i، ابتدا یا انتهای یالی از گراف G باشد، درایهٔ ماتریس $M(G)$ یک و در غیر این صورت صفر است.

مثال ۱. در گراف سادهٔ $G=(V,E)$ داریم: $V=\{x,y,z\}$, $E=\{xy,yz,zx\}$. بنابراین ماتریس وقوع

این گراف به صورت $M(G)=\begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} xy & yz & zx \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$ است.

مثال ۲ . نمودار گراف سادهٔ $G=(V,E)$ شکل زیر است.



بنابراین ماتریس وقوع این گراف ساده به این صورت است.

$$M(G)=\begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \\ w \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} xy & yz & zw & wx \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

ویژگی‌های ماتریس وقوع گراف سادهٔ $G=(V,E)$

۱ . ممکن است تعداد سطرهای ماتریس وقوع گراف، با تعداد ستون‌های آن برابر باشد (مثال ۱)؛ یعنی ماتریس وقوع گراف، مربعی باشد، یا تعداد سطرهای ماتریس وقوع گراف، با تعداد ستون‌های آن برابر نباشد؛ یعنی ماتریس وقوع گراف، مربعی نباشد.

۲ . چون گراف ساده موضوع مورد بحث ساده است، بنابراین درایه‌های ماتریس وقوع این گراف همواره صفر و یک هستند.

اکنون که با ماتریس وقوع گراف سادهٔ G و ویژگی‌های آن آشنا شدیم، در مورد این گراف و ماتریس وقوع مربوط به آن چند قضیه را مطرح می‌کنیم.

قضیهٔ ۱

گراف سادهٔ $G=(V,E)$ دارای ماتریس وقوع $M(G)$ است؛ به طوری که مجموع درایه‌های سطر iام ماتریس $M(G)$ برابر با درجهٔ رأس V_i است.

برهان

هر عدد یک که در سطر iام وجود دارد، نشان می‌دهد که از رأس V_i یک یال عبور کرده است. بنابراین تعداد یک‌های سطر iام، برابر تعداد یال‌هایی است که از رأس V_i عبور کرده‌اند. درنتیجه، مجموع این یک‌ها، درجهٔ رأس V_i را نشان می‌دهد.

قضیهٔ ۲

گراف سادهٔ $G=(V,E)$ از مرتبهٔ p، دارای ماتریس وقوع $M(G)$ است؛ به طوری که مجموع تمام درایه‌های سطرهای ماتریس $M(G)$، برابر $\sum_{i=1}^{p}\deg(V_i)$ است.

برهان

مجموع درایه‌های سطر iام ماتریس $M(G)$، برابر با درجهٔ رأس V_i است. بنابراین مجموع تمام درایه‌های سطرهای ماتریس $M(G)$، برابر با $\sum_{i=1}^{p}\deg(V_i)$ است.

مثال ۱ . ماتریس وقوع گراف سادهٔ $G=(V,E)$، عبارت است از:

$$M(G)=\begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \\ w \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} xy & yz & yw & zw & xw \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

بنابراین در گراف سادهٔ G، $\deg(x)=\deg(z)=2$ و $\deg(y)=\deg(w)=3$ است.

مثال ۲ . ماتریس وقوع گراف سادهٔ $G=(V,E)$، به صورت زیر است.

$$M(G)=\begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} xy & yz & zx \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

بنابراین در گراف سادهٔ G داریم:

$$\sum_{i=1}^{p} \deg(V_i) = ۱+۱+۱+۱+۱+۱ = ۶$$

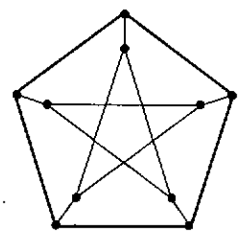
قضیهٔ ۳

ماتریس وقوع گراف سادهٔ همبند و بدون دور $G=(V,E)$، مربعی نیست.

برهان

از آن‌جا که گراف G همبند بدون دور است، نتیجه می‌گیریم که درخت است. بنابراین، در این درخت که از مرتبهٔ p و اندازهٔ q است، همواره داریم: $p = q+1$. بنابراین، ماتریس M(G) که از مرتبهٔ $p \times q$ است، مربعی نیست.

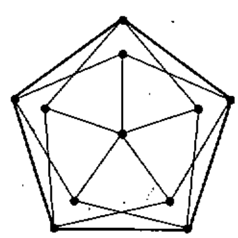
آزمون۱. شکل زیر نمودار گراف «پترسن» است. تعداد درایه‌های یک ماتریس وقوع این گراف کدام است؟



الف) ۱۵۰ ب) ۱۲۰ ج) ۳۰ د) ۶۰

جواب: گزینهٔ (ج) صحیح است. چون گراف «پترسن» از مرتبهٔ ۱۰ و اندازهٔ ۱۵ است، بنابراین طبق قضیهٔ ۲، تعداد یک‌های ماتریس وقوع آن برابر $2q = ۳۰$ می‌شود.

آزمون۲. شکل زیر نمودار گراف «گروتز» است. تعداد درایه‌های صفر ماتریس وقوع این گراف کدام است؟



الف) ۲۲۰ ب) ۴۰ ج) ۱۸۰ د) ۸۰

جواب: گزینهٔ (ج) صحیح است. چون گراف «گروتز» از مرتبهٔ ۱۱ و اندازهٔ ۲۰ است. پس بنا بر قضیهٔ ۲، تعداد یک‌های ماتریس وقوع آن برابر $2q = ۴۰$ و تعداد درایه‌های صفر ماتریس وقوع آن برابر $p \times q - 2q = ۱۸۰$ است.

زیرنویس

1. Arthur Cayley
2. Richmond
3. Surrey

منابع

۱. ریاضیات گسستهٔ دورهٔ پیش‌دانشگاهی. دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی.
۲. نظریهٔ گراف. حسین ابراهیم‌زاده قُلزم. انتشارات مدرسه.
3. M. Behzad, G. chartrand, and L. Lesniak Foster, Graphs and Digraphs wadsworth International Group.
۴. آشنایی با ریاضیات گسستهٔ دورهٔ پیش‌دانشگاهی. سیدحسین سیدموسوی و جواد ترکمن. انتشارات مبتکران.

میلادی. او پسر جورج دیوید برکاف است که خود یکی از چهره‌های شاخص ریاضیات امریکا بود. گرت برکاف بیش از ۲۰۰ مقاله در رشته‌های گوناگون ریاضی مانند: نظریه شبکه‌ها، جبر جامع، توپولوژی، معادلات دیفرانسیل، آنالیز عددی، تاریخ ریاضیات و کاربردهای گوناگون ریاضی، به خصوص در مهندسی هسته‌ای، به چاپ رساند. وی یا به تنهایی و یا با همکاری دیگران، ده عنوان کتاب نوشته است. پنجاه دانشجو نیز رسالهٔ دکترای خود را به راهنمایی او گذرانده‌اند.

○ حمیدرضا امیری

دترمینان

کاربرد قضایا و نکته های دترمینان در حل مسأله ها

برای دانش آموزان دورهٔ پیش دانشگاهی رشتهٔ ریاضی

در شمارهٔ قبل قضیه ها و ویژگی های مربوط به دترمینان را بیان کردیم، حال با استفاده از قضیه ها و ویژگی های ذکر شده می خواهیم به طرح و حل مسائل متنوعی در این زمینه بپردازیم. مسائل مربوط به ویژگی های دترمینان بسیار جالب، سرگرم کننده و تفکر برانگیزند و می توان آن ها را به سه نوع تقسیم کرد. این ویژگی ها در قالب مسائل حل شده در این مقاله می آیند.

مسائل نوع اوّل: مسائلی که در آن ها باید ثابت کنیم مقدار یک دترمینان صفر است. در این نوع مسأله ها تلاش می کنیم که دو سطر یا دو ستون مضربی از یکدیگر شوند یا یک سطر یا یک ستون آن ماتریس صفر شود.

مسألهٔ ۱. ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix} a & b+c & ۳ \\ b & a+c & ۳ \\ c & a+b & ۳ \end{vmatrix} = ۰$$

حل. (متذکّر می شوم که سطر i ام را با R_i و ستون j ام را با C_j نمایش می دهیم.)

$$\begin{vmatrix} a & b+c & ۳ \\ b & a+c & ۳ \\ c & a+b & ۳ \end{vmatrix} \overset{R_۱+R_۲}{=} \begin{vmatrix} a & a+b+c & ۳ \\ b & a+b+c & ۳ \\ c & a+b+c & ۳ \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} a & ۱ & ۳ \\ b & ۱ & ۳ \\ c & ۱ & ۳ \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c) \times ۰ = ۰$$

مسألهٔ ۲. ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix} 5 & \log x & \log(yz) \\ 5 & \log y & \log(xz) \\ 5 & \log z & \log(xy) \end{vmatrix} = 0$$

حل: از رابطهٔ $\log a + \log b = \log(ab)$ کمک می‌گیریم و ستون دوم را به ستون سوم اضافه می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} 5 & \log x & \log(yz) \\ 5 & \log y & \log(xz) \\ 5 & \log z & \log(xy) \end{vmatrix} \overset{C_3+C_2}{=} \begin{vmatrix} 5 & \log x & \log(xyz) \\ 5 & \log y & \log(xyz) \\ 5 & \log z & \log(xyz) \end{vmatrix}$$

$$= \log(xyz) \begin{vmatrix} 5 & \log x & 1 \\ 5 & \log y & 1 \\ 5 & \log z & 1 \end{vmatrix} = \log(xyz) \times 0 = 0$$

مسألهٔ ۳. ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix} a & ay+az & x-t \\ a & ax+az & y-t \\ a & ax+ay & z-t \end{vmatrix} = 0$$

حل.

$$\begin{vmatrix} a & ay+az & x-t \\ a & ax+az & y-t \\ a & ax+ay & z-t \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & y+z & x-t \\ a & x+z & y-t \\ a & x+y & z-t \end{vmatrix}$$

$$\overset{C_2+C_3}{=} a \begin{vmatrix} a & x+y+z-t & x-t \\ a & x+y+z-t & y-t \\ a & x+y+z-t & z-t \end{vmatrix} = a(x+y+z-t) \begin{vmatrix} a & 1 & x-t \\ a & 1 & y-t \\ a & 1 & z-t \end{vmatrix}$$

(ستون اول، a برابر ستون دوم است.)

$$= a(x+y+z-t) \times 0 = 0$$

مسألهٔ ۴. ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

حل. (ستون‌های دوم، سوم و چهارم را به ستون اول اضافه می‌کنیم.)

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

مسألهٔ ۵. ثابت کنید:

$$|A| = \begin{vmatrix} \sin x & \sin y & \sin z \\ \cos x & \cos y & \cos z \\ \sin(x+t) & \sin(y+t) & \sin(z+t) \end{vmatrix} = 0$$

حل.

$$|A| = \begin{vmatrix} \sin x & \sin y & \sin z \\ \cos x & \cos y & \cos z \\ \sin x\cos t+\sin t\cos x & \sin y\cos t+\cos y\sin t & \sin z\cos t+\cos z\sin t \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sin x & \sin y & \sin z \\ \cos x & \cos y & \cos z \\ \sin x\cos t & \sin y\cos t & \sin z\cos t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sin x & \sin y & \sin z \\ \cos x & \cos y & \cos z \\ \sin t\cos x & \cos y\sin t & \cos z\sin t \end{vmatrix}$$

$$= \cos t \begin{vmatrix} \sin x & \sin y & \sin z \\ \cos x & \cos y & \cos z \\ \sin x & \sin y & \sin z \end{vmatrix} + \sin t \begin{vmatrix} \sin x & \sin y & \sin z \\ \cos x & \cos y & \cos z \\ \cos x & \cos y & \cos z \end{vmatrix}$$

$$= \cos t \times 0 + \sin t \times 0 = 0 + 0 = 0$$

مسألهٔ ۶. ثابت کنید:

حل.

$$|A| = \begin{vmatrix} x & x' & ax+bx' \\ y & y' & ay+by' \\ z & z' & az+az' \end{vmatrix} = 0$$

$$|A| = \frac{1}{a \times b} \begin{vmatrix} ax & bx' & ax+bx' \\ ay & by' & ay+by' \\ az & bz' & az+bz' \end{vmatrix}$$

$$\overset{C_3+C_1}{=} \frac{1}{ab}\begin{vmatrix} ax+bx' & bx' & ax+bx' \\ ay+by' & by' & ay+by' \\ az+bz' & bz' & az+bz' \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{ab} \times 0 = 0$$

مسائل نوع دوم: مسائلی که در آن‌ها باید ثابت کنیم مقدار یک دترمینان برابر با عددی ناصفر یا عبارتی جبری است. در این نوع مسأله‌ها باید سعی کنیم با استفاده از ویژگی‌های دترمینان، ماتریس را مثلثی کنیم و حاصل ضرب درایه‌های روی قطر اصلی که همان دترمینان ماتریس است، جواب مسأله خواهد بود.

مسألهٔ ۷. ثابت کنید:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 9$$

حل. قرینهٔ ستون چهارم را به ستون‌های اول، دوم و سوم اضافه می‌کنیم.

$$\Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \overset{R_1+R_4}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\overset{R_2+R_4}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \end{vmatrix} \overset{R_3+R_4}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 9 \times 1 \times 1 \times 1 = 9$$

مسألهٔ ۸. ثابت کنید:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc$$

حل. (-1) برابر ستون اول را به بقیهٔ ستون‌ها اضافه می‌کنیم:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 1 \times a \times b \times c = abc$$

مسألهٔ ۹. ثابت کنید:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+a^2 & -a & 0 \\ a & 1+a^2 & a \\ 0 & a & 1+a^2 \end{vmatrix} = (1+a^2)^3$$

حل.

$$|A| \overset{R_1+R_3}{=} \begin{vmatrix} 1+a^2 & -a & 0 \\ a & 1+a^2 & a \\ 1+a^2 & 0 & 1+a^2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{-C_3+C_1}{=} \begin{vmatrix} 1+a^2 & -a & 0 \\ 0 & 1+a^2 & a \\ 0 & 0 & 1+a^2 \end{vmatrix} = (1+a^2)^3$$

مسألهٔ ۱۰. ثابت کنید:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x^2-1 & 2y^2-1 & 2z^2-1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2(y-x)(x-z)(z-y)$$

حل.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x^2 & 2y^2 & 2z^2 \\ x & y & z \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ x & y & z \end{vmatrix}}_{0} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times (-1) \times \begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2 \times (-1) \times (-1) \times \underbrace{\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$= 2(x-y)(x-z)(y-z)$$

مسأله ۱۱. اگر $x+y+z=0$ ، ثابت کنید:

$$|A|=\begin{vmatrix} a+x & y & z \\ x & a+y & z \\ x & y & a+z \end{vmatrix}=a^3$$

حل. یک برابر ستون دوم و سوم را به ستون اوّل اضافه می‌کنیم و قرار می‌دهیم $x+y+z=0$

$$|A|=\begin{vmatrix} a+x+y+z & y & z \\ a+x+y+z & a+y & z \\ a+x+y+z & y & a+z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & y & z \\ a & a+y & z \\ a & y & a+z \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{-R_1+R_2 \\ -R_1+R_3}}{=}\begin{vmatrix} a & y & z \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}=a^3$$

مسأله ۱۲. ثابت کنید:

$$|A|=\begin{vmatrix} a+1 & b & b \\ a & b+1 & a \\ 1 & 1 & a+b \end{vmatrix}=4ab$$

حل.

$$|A|\overset{-C_1+C_2}{=}\begin{vmatrix} a+1 & b-a-1 & b \\ a & b+1-a & a \\ 1 & 0 & a+b \end{vmatrix}=(a+b)\begin{vmatrix} a+1 & b-a-1 & \frac{b}{a+b} \\ a & b+1-a & \frac{a}{a+b} \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{-C_3+C_1}{=}(a+b)\begin{vmatrix} \frac{a^2+ab+a}{a+b} & b-a-1 & \frac{b}{a+b} \\ \frac{a^2+ab-a}{a+b} & b+1-a & \frac{a}{a+b} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a^2+ab+a & b-a-1 & \frac{b}{a+b} \\ a^2+ab-a & b+1-a & \frac{a}{a+b} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{-R_1+R_2}{=}\begin{vmatrix} a^2+ab+a & b-a-1 & \frac{b}{a+b} \\ -2a & 2 & \frac{a-b}{a+b} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{ac_2+c_1}{=}\begin{vmatrix} 2ab & b-a-1 & \frac{b}{a+b} \\ 0 & 2 & \frac{a-b}{a+b} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=4ab$$

مسائل نوع سوم. مسائلی که در آن‌ها تساوی بین دو دترمینان مطرح است و برای حلّ این نوع مسائل باید (مانند اثبات اتّحادها) از یک طرف شروع کنیم و با استفاده از ویژگی‌های ذکر شده، به طرف دیگر برسیم.

مسأله ۱۳. ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3-1 & y^3-1 & z^3-1 \end{vmatrix}=\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}}_{k}\times(xyz-1)=k(xyz-1)$$

حل.

$$\text{دترمینان سمت چپ}=\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

در ستون‌های ۱، ۲ و ۳ به ترتیب از x، y و z فاکتور می‌گیریم.

$$xyz\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$=(xyz)\times k-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

$$=(xyz)k-k=k(xyz-1)$$

مسألهٔ ۱۴ . ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & 0 & 0 \\ c & 0 & a & 0 \\ d & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^4 & a^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & 1 & 0 & 1 \\ c^2 & 0 & 1 & 0 \\ d^2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

در سطرهای اول تا چهارم، به ترتیب a ، b ، c و d ضرب و کلِّ دترمینان بر abcd تقسیم شده است.

$$\text{دترمینان سمت چپ} = \frac{1}{abcd}\begin{vmatrix} a^2 & ab & ac & ad \\ b^2 & ab & 0 & 0 \\ c^2 & 0 & ac & 0 \\ d^2 & 0 & 0 & ad \end{vmatrix}$$

از ستون‌های دوم، سوم و چهارم، به ترتیب از b ، c و d فاکتور گرفته‌ایم.

$$= \frac{bcd}{abcd}\begin{vmatrix} a^2 & a & a & a \\ b^2 & a & 0 & 0 \\ c^2 & 0 & a & 0 \\ d^2 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

(سطر اول و ستون اول هر کدام در a ضرب شده‌اند.)

$$= \frac{1}{a\times a\times a}\begin{vmatrix} a^4 & a^2 & a^2 & a^2 \\ ab^2 & a & 0 & 0 \\ ac^2 & 0 & a & 0 \\ ad^2 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

(در سطرهای دوم، سوم و چهارم، از a فاکتور گرفته‌ایم.)

$$= \frac{a^3}{a^3}\begin{vmatrix} a^4 & a^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & 1 & 0 & 0 \\ c^2 & 0 & 1 & 0 \\ d^2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

مسألهٔ ۱۵ . ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}$$

حل . از سمت چپ تساوی شروع و در ستون‌های ۲ ، ۳ و ۴ ، به ترتیب، yz ، xz و xy را ضرب می‌کنیم (لذا باید بر $x^2y^2z^2$ تقسیم شود.) سپس از xyz در سطر اول و از x ، y و z به ترتیب در سطرهای دوم، سوم و چهارم فاکتور می‌گیریم.

$$\text{دترمینان سمت چپ} = \frac{1}{x^2y^2z^2}\begin{vmatrix} 0 & xyz & xyz & xyz \\ x & 0 & xz^2 & xy^2 \\ y & yz^2 & 0 & x^2y \\ z & y^2z & x^2z & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{xyz\times xyz}{x^2y^2z^2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}$$

مسألهٔ ۱۶ . فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{bmatrix}$ ، در این صورت، با استفاده از ماتریس (AA^t) ثابت کنید:

$$|B| = \begin{vmatrix} y^2+z^2 & xy & xz \\ xy & z^2+x^2 & yz \\ xz & yz & x^2+y^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$$

حل .

$$AA^t = \begin{bmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} y^2+z^2 & xy & xz \\ xy & z^2+x^2 & yz \\ xz & yz & x^2+y^2 \end{bmatrix} = B$$

از طرفی: $|AA^t| = |A|\,|A^t| = |A|\,|A| = |A|^2$

$$\Rightarrow |AA^t| = |B| \Rightarrow |A|^2 = |B|$$

$$\begin{vmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} 0 & z \\ z & 0 \\ y & x \end{matrix} \Rightarrow |A| = (xyz+xyz)-(0+0+0) = 2xyz$$

$$\Rightarrow |B| = (2xyz)^2 = 4x^2y^2z^2$$

مسألهٔ ۱۷ . اگر A ماتریسی 3×2 و B ماتریسی 2×3 و $A\times B=C$ باشد، که C ماتریسی 3×3 خواهد شد، ثابت کنید $|C|=0$.

حل . فرض کنیم $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \end{bmatrix}$

و می‌دانیم که :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \end{bmatrix}=C_{3\times 3}$$

حال اگر یک ستون صفر به ماتریس A و یک سطر صفر به ماتریس B اضافه کنیم تا به ترتیب، ماتریس‌های A_1 و B_1 به دست آیند، واضح است که $A_1\times B_1=C$ خواهد بود.

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ e & f & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=C$$

$$A_1\times B_1=C\Rightarrow |A_1\times B_1|=|C|\Rightarrow |A_1|\times|B_1|=|C|$$
$$\Rightarrow 0\times 0=|C|\Rightarrow |C|=0$$

تذکر بسیار مهم : مسألهٔ قبل در حالت کلّی نیز برقرار است، یعنی می‌توان گفت : «اگر A ماتریسی $m\times n$ و B ماتریسی $n\times m$ و $m>n$ و فرض کنیم $A\times B=C$ باشد؛ در این صورت $|C|=0$» (اثبات، شبیه به اثبات مسألهٔ قبل و به عهدهٔ شماست.)

نتیجه . اگر A ماتریسی $m\times n$ باشد و $m>n$ ، در این صورت، همواره A^t ماتریسی $n\times m$ است و داریم : $|AA^t|=0$.

نکات مهم و کاربردهای دترمینان در محاسبهٔ مساحت و حجم

از اثبات رابطه‌ها و فرمول‌ها، به دلیل خارج بودن از بحث اصلی و نیاز به مفاهیم دیگر در هندسهٔ تحلیلی، خودداری می‌کنیم و فقط به معرّفی آن‌ها می‌پردازیم.

نکتهٔ ۱ . اگر $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ و $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$ سه بردار در فضای سه بعدی (IR^3) باشند، در این صورت :

الف) حاصل ضرب خارجی $\vec{a}\times\vec{b}$ به صورت زیر به دست می‌آید :

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ i & j & k \end{vmatrix}$$

ب) مساحت متوازی‌الاضلاع پدید آمده از دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و مساحت مثلث پدید آمده از آن‌ها از فرمول‌های زیر حاصل می‌شود :

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ i & j & k \end{vmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} \text{مساحت متوازی‌الاضلاع} = |\vec{a}\times\vec{b}| \\ \text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}| \end{cases}$$

(منظور از $|\vec{a}\times\vec{b}|$ اندازهٔ بردار $(\vec{a}\times\vec{b})$ است.)

ج) حجم متوازی‌السطوح پدید آمده از سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید :

$$k=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} \text{حجم} = V=|k| \ (\text{قدر مطلق } k) \\ \text{ضرب مختلط} = a.(b\times c)=k \end{cases}$$

(اگر $k=0$ در این صورت، سه بردار حجمی تشکیل نمی‌دهند و باید در یک صفحه قرار داشته باشند.)

نکتهٔ ۲: اگر $A\begin{vmatrix}a_1\\a_2\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}b_1\\b_2\end{vmatrix}$ و $C\begin{vmatrix}c_1\\c_2\end{vmatrix}$ سه نقطه در IR^2 باشند، در این صورت، مساحت مثلث پدید آمده از این سه نقطه برابر است با:

$$k=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & 1\\ b_1 & b_2 & 1\\ c_1 & c_2 & 1\end{vmatrix} \Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}|k| \quad (\text{قدر مطلق } k)$$

حالت خاص: اگر O مبدأ مختصات باشد، در این صورت $k=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & 1\\ b_1 & b_2 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}$ خواهد بود و $S_{OAB}=\frac{1}{2}|k|$ و مساحت متوازی‌اضلاع پدید آمده از $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر با $|k|$ است.

نکتهٔ ۳: اگر $P_1\begin{vmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{vmatrix}$ و $P_2\begin{vmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{vmatrix}$ و $P_3\begin{vmatrix}x_3\\y_3\\z_3\end{vmatrix}$ سه نقطه در IR^3 باشند، در این صورت معادلهٔ صفحه‌ای که از این سه نقطه عبور می‌کند از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0$$

نکتهٔ ۴: اگر نقطهٔ $A\begin{vmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{vmatrix}$ متعلّق به خط L_1 با بردار هادی $\vec{u_1}=(p_1,q_1,r_1)$ و نقطهٔ $B\begin{vmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{vmatrix}$ متعلّق به خط L_2 با بردار هادی $\vec{u_2}=(p_2,q_2,r_2)$ باشد، در این صورت:

الف) شرط لازم و کافی برای متقاطع بودن دو خط L_1 و L_2 آن است که موازی نباشند و در یک صفحه قرار بگیرند؛ یعنی:

$$L_1 \text{ و } L_2 \text{ متقاطع‌اند} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{p_1}{p_2}\neq\frac{q_1}{q_2} \text{ یا } \frac{q_1}{q_2}\neq\frac{r_1}{r_2}\\ \begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ p_1 & q_1 & r_1\\ p_2 & q_2 & r_2\end{vmatrix}=0\end{cases}$$

(سه بردار $\vec{AB}$ و $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ در یک صفحه باشند.)

ب) شرط لازم و کافی برای آن که دو خط L_1 و L_2 متنافر باشند آن است که موازی نباشند و در یک صفحه قرار نگیرند؛ یعنی:

$$L_1 \text{ و } L_2 \text{ متنافرند} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{p_1}{p_2}\neq\frac{q_1}{q_2} \text{ یا } \frac{q_1}{q_2}\neq\frac{r_1}{r_2}\\ \begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ p_1 & q_1 & r_1\\ p_2 & q_2 & r_2\end{vmatrix}\neq 0\end{cases}$$

ج) دو خط L_1 و L_2 بر هم عمودند، اگر و فقط اگر $p_1p_2+q_1q_2+r_1r_2=0$ باشد. در این صورت داریم:

$$L_1 \text{ و } L_2 \text{ متقاطع و عمود بر یکدیگرند} \Leftrightarrow \begin{cases}p_1p_2+q_1q_2+r_1r_2=0\\ \begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ p_1 & q_1 & r_1\\ p_2 & q_2 & r_2\end{vmatrix}=0\end{cases}$$

$$L_1 \text{ و } L_2 \text{ متنافر و عمود بر یکدیگرند} \Leftrightarrow \begin{cases}p_1p_2+q_1q_2+r_1r_2=0\\ \begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ p_1 & q_1 & r_1\\ p_2 & q_2 & r_2\end{vmatrix}\neq 0\end{cases}$$

ریشه های معادلهٔ درجه دوم

غلامرضا یاسی پور

تقریباً در سال ۵۰۰ پیش از میلاد، یک کشاورز یونانی تصمیم گرفت، با ۶۰ «دراخما»[1] قطعه زمینی مربع شکل خریداری کند و دور آن را حصار بکشد. او باید بابت هر مترمربع از زمین، یک دراخما و برای حصارکشی دور آن نیز یک دراخمای دیگر می‌پرداخت. او حساب کرد، اگر ضلع زمین مربع شکل او N متر باشد، مساحت آن N^2 (مترمربع) و محیط آن $4N$ (متر) خواهد بود. پس هزینهٔ زمین و نصب حصار، مجموعاً $N^2 + 4N$ دراخما خواهد شد. بنابراین، بزرگ‌ترین قطعه زمینی که او می‌توانست با ۶۰ دراخما خریداری کند، برابر بود با:

$$N^2 + 4N = 60$$

کشاورز برای حل معادله، به $N^2 + 4N$ توجه کرد که می‌تواند به صورت $(N+2)^2$، یعنی $(N+2)^2 = N^2 + 4N + 4$ نوشته شود.[2]

پس می‌توان نوشت:

$$(N+2)^2 = N^2 + 4N + 4 = 64$$

بنابراین پاسخ‌های کشاورز $N + 2 = 8$ و $N = 6$ خواهند بود.

اما آن موقع $N + 2 = -8$ برای او قابل فهم نبود.

پس از گذشت سال‌ها، ریاضیدانان متوجه شدند، معادلهٔ $aN^2 + bN + c = 0$ وقتی جواب دارد که $b^2 - 4ac \geq 0$ باشد که جواب‌های آن با فرمول‌های زیر به دست می‌آیند:

$$N_1 = \frac{1}{2a}(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})$$

$$N_2 = \frac{1}{2a}(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})$$

و اگر $b^2 - 4ac = 0$ باشد، دو پاسخ معادله یکسان خواهند بود.[3]

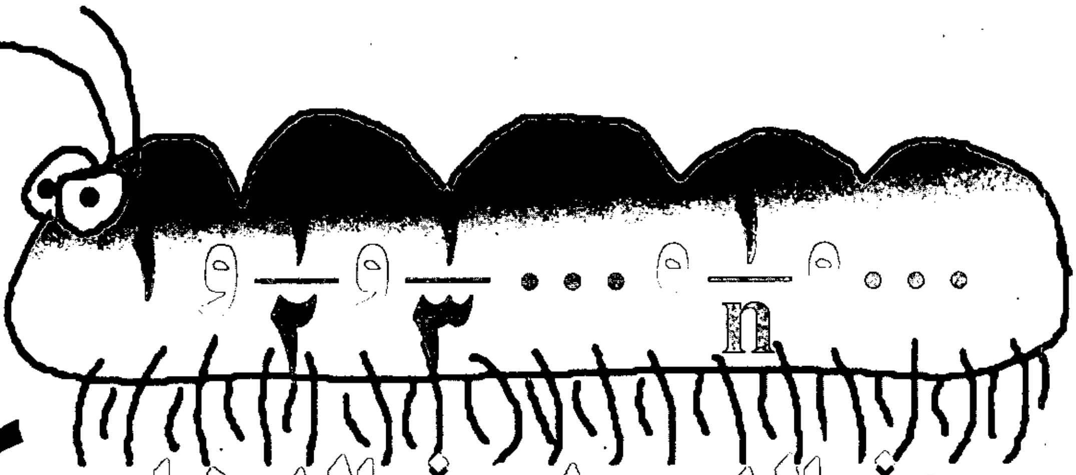
N_1 و N_2 ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم نامیده می‌شوند. شما می‌توانید برای به دست آوردن فرمول‌های N_1 و N_2، معادله را بر a تقسیم و سپس برای به‌دست آوردن ریشه‌های معادله از روش کشاورز یونانی استفاده کنید.

زیرنویس

۱. واحد پول یونان.

۲. او برای این کار، از پسر بچه‌ای ۶ ساله و کارشناسان تبلیغاتی آگهی‌های شهری کمک گرفت.

۳. در معادلهٔ $ax^2 + bx + c = 0$، $\Delta = b^2 - 4ac$ را «دلتای معادله» یا «مبین معادله» می‌نامیم. در صورتی که $b^2 - 4ac < 0$ (زیر رادیکال با فرجهٔ زوج نمی‌تواند عدد منفی قرار گیرد)، می‌گوییم، معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.



دنباله، حد دنباله‌ها

سید محمدرضا هاشمی موسوی

دنباله[1]

«دنباله» یکی از اساسی‌ترین مفهوم‌ها در ریاضیات است؛ زیرا مهم‌ترین مفهوم‌های ریاضیات عالی، بر پایهٔ آن ساخته شده‌اند. یکی از آن مفهوم‌ها که خود پایه و اساس آنالیز ریاضی را می‌سازد، مفهوم حد است. در این‌جا، مفهوم و تعریف دنباله و حد یک دنباله را یادآور می‌شویم. به مجموعهٔ زیر از عددهای گویا توجه کنید:

$$s=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\right\}=\left\{\frac{1}{n}: n\in\mathbb{N}\right\}$$

این مجموعه را می‌توان برد تابعی با دامنهٔ عددهای طبیعی در نظر گرفت که به ازای هر عدد طبیعی n، عدد گویای $\frac{1}{n}$ به دست می‌آید. مجموعهٔ S را می‌توان به صورت جدول زیر نشان داد:

n	۱	۲	۳	۴	۵	$\cdots$
$\frac{1}{n}$	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\cdots$

در این مثال، واضح است که به هر عدد طبیعی، یک عدد حقیقی نسبت داده‌ایم. در حقیقت تابعی را تعریف کرده‌ایم که دامنهٔ آن عددهای طبیعی و برد آن زیرمجموعهٔ عددهای حقیقی است که دنباله نامیده می‌شود.

تعریف. هر تابع a را که دامنهٔ آن مجموعهٔ عددهای طبیعی و برد آن زیرمجموعه‌ای از عددهای حقیقی باشد $(a:\mathbb{N}\to\mathbb{R})$، یک دنبالهٔ نامتناهی از عددهای حقیقی می‌نامند. به طور معمول، $a(n)$ را با a_n نمایش می‌دهند و آن را جملهٔ عمومی می‌نامند و دنباله را با جملهٔ عمومی آن و به صورت $\{a_n\}$ و یا مقادیر آن نشان می‌دهند:

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

قرارداد: به طور کلی جملهٔ عمومی دنباله را با a_n و خود دنباله را با نماد $\{a_n\}$ نشان می‌دهیم و همیشه n عددی طبیعی است $(n\in\mathbb{N})$.

معرفی دنباله به عنوان یک تابع

هر دنبالهٔ عددی را می‌توان یک تابعِ متغیر طبیعی دانست. مجموعهٔ عددهای طبیعی این ویژگی را دارند که برای هر دو عدد طبیعی دلخواه a و b، می‌توان ترتیبی در نظر گرفت؛ یعنی همیشه یکی از این دو حکم می‌تواند درست باشد: $a\le b$ یا $a\ge b$.

در واقع، همین ویژگی مجموعهٔ $\mathbb{N}$ است که به ما امکان می‌دهد، جمله‌هایی را که در یک دنباله به نحوی دلخواه مرتب شده‌اند، «**شماره‌گذاری**» کنیم.

به این ترتیب، می‌توانیم تابعِ روی مجموعهٔ $\mathbb{N}$ را تعریف کنیم:

$$\mathbb{N}\xrightarrow[(n)]{f} A \qquad (1)$$

که این تعریف دنبالهٔ عضوهای A در رابطه با مجموعهٔ

$\mathbb{N}$ است. واضح است که مجموعهٔ A می‌تواند شامل هر گونه عضوی باشد. ولی باید هر عضو دنبالهٔ A متناظر با عدد معین n از مجموعهٔ $\mathbb{N}$ باشد و برعکس، برای هر $n \in \mathbb{N}$، باید عضوی مانند: $a \in A$ مشخص شود. در ضمن، این توضیح نیز لازم است که امکان دارد، بستگی بین عضوهای مجموعهٔ $\mathbb{N}$ با مجموعهٔ A یک به یک نباشد؛ هر عضو A ممکن است با چند عضو $\mathbb{N}$ متناظر باشد.

هر مقدار تابع (۱) و یا به بیان دیگر، هر عضو دنباله را به طور معمول با حرف کوچک لاتینی همراه با عددی طبیعی در زیر و سمت راست آن به نام **اندیس** نشان می‌دهند که معرف عضوی از $\mathbb{N}$ است:

$$a_1 = f(1)\ ,\ a_2 = f(2)\ ,\ \cdots\ ,\ a_n = f(n)\ ,\ \cdots$$

و یا با توجه به قرارداد، می‌توان نوشت:

$$\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots \qquad (2)$$

یادآور می‌شویم که لزومی ندارد، همهٔ جمله‌های دنبالهٔ (۲) با هم متفاوت باشند. در ضمن، اگر تعداد جمله‌های دنباله نامحدود باشند، شمارا بودن آن‌ها ضروری است؛ یعنی باید بتوان هر جملهٔ دنباله را به یک عدد طبیعی بستگی داد.

مثال. دنبالهٔ عددهای مثبت بخش‌پذیر بر ۱۱، چنین است:

(دنبالهٔ نامتناهی) $11\ ,\ 22\ ,\ 33\ ,\ 44\ ,\ \ldots$

جملهٔ عمومی این دنباله، به صورت $11n$ است. زیرا اگر مقدار n را به ترتیب برابر ۱ و ۲ و ... بگیریم، جمله‌های پشت سر هم دنباله به دست خواهند آمد. به طور مثال، جملهٔ بیستم این دنباله چنین است:

$n = 20:\ 11n = 11 \times 20 = 220$ (جملهٔ بیستم دنباله)

مسأله. اگر بدانیم، جملهٔ عمومی یک دنباله $a_n = \frac{2n}{n+1}$ است، پنج جملهٔ اول این دنباله را بنویسید و سپس تعیین کنید که عدد $\frac{99}{50}$، چندمین جملهٔ دنباله است.

حل: ابتدا عددهای ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ را به n نسبت می‌دهیم:

$$a_1 = \frac{2(1)}{1+1} = 1\ ,\ a_2 = \frac{2(2)}{2+1} = \frac{4}{3}\ ;\ a_3 = \frac{2(3)}{3+1} = \frac{3}{2}$$

$$a_4 = \frac{2(4)}{4+1} = \frac{8}{5}\ ,\ a_5 = \frac{2(5)}{5+1} = \frac{5}{3}$$

بنابراین، پنج جملهٔ اول این دنباله چنین است:

$$1\ ,\ \frac{4}{3}\ ,\ \frac{3}{2}\ ,\ \frac{8}{5}\ ,\ \frac{5}{3}$$

عدد $\frac{99}{50}$ یا $\frac{2(99)}{100}$، جملهٔ نود و نهم دنباله است؛ زیرا:

$$n = 99:\ a_{99} = \frac{2(99)}{99+1} = \frac{2(99)}{100} = \frac{99}{50}$$

مسأله. اگر $a_n = \frac{n^2+n}{2}$ جملهٔ عمومی یک دنباله باشد، عدد ۵۵ چندمین جملهٔ آن است؟

حل:

$$a_n = \frac{n^2+n}{2} = 55 \Rightarrow n^2 + n = 110$$

$$\Rightarrow n^2 + n - 110 = 0 \Rightarrow (n-10)(n+11) = 0\ ,\ n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow n = 10 \Rightarrow a_{10} = 55$$ (جملهٔ دهم دنباله)

مسأله. نخستین جملهٔ دنباله با جملهٔ عمومی $a_n = \frac{n}{2n-1}$ که کوچک‌تر از $\frac{3}{4}$ باشد را بیابید.

حل:

$$a_n = \frac{n}{2n-1} < \frac{3}{4} \Rightarrow 4n < 3(2n-1)$$

$$\Rightarrow 4n < 6n - 3 \Rightarrow 2n > 3 \Rightarrow n > \frac{3}{2} \Rightarrow n > 1/5\ ,$$

$n \in \mathbb{N} \Rightarrow n = 2$ (دومین جمله)

دومین جملهٔ دنباله، دارای شرایط موردنظر است؛ زیرا:

$$a_2 = \frac{2}{4-1} = \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$$

نکته. با دانستن چند جملهٔ نخست یک دنبالهٔ نامتناهی، همیشه تعیین جملهٔ عمومی آن امکانپذیر نیست؛ زیرا به طور مثال جملهٔ عمومی دنبالهٔ نامتناهی:

$$\frac{1}{2}\ ,\ \frac{4}{9}\ ,\ \frac{3}{8}\ ,\ \cdots$$

یا:

$$\frac{2}{4}\ ,\ \frac{4}{9}\ ,\ \frac{6}{16}\ ,\ \cdots$$

را می‌توان: $a_n = \frac{۲n}{(n+۱)^۲}$

یا $a_n = \frac{۲n}{(n+۱)^۲} + (n-۱)(n-۲)(n-۳)$ ، و یا در حالت کلی، به صورت زیر درنظر گرفت:

$$n \in \mathbb{N}\ ,\ f(n) \neq ۰:\ a_n = \frac{۲n}{(n+۱)^۲} + \frac{(n-۱)(n-۲)(n-۳)}{f(n)}$$

با شرط $f(n) \neq ۰$ $(n \in N)$ ، عبارت $f(n)$ را می‌توان به دلخواه اختیار کرد.

حدِ دنبالهٔ عددی

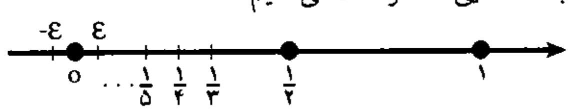
تصور شهودی دربارهٔ حد، به نحوی تصویر نوعی حرکت را در ذهن ما ایجاد می‌کند؛ چنان که هرگاه در مجموعهٔ مرتب $\mathbb{N}$ پیش رویم، به رفتار جمله‌های دنبالهٔ $\{a_n\}$ پی خواهیم برد. رفتار جمله‌ها گاهی چنین است که هر چه شمارهٔ آن‌ها زیاد شود، به طور پیوسته به عددی مانند a نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند. با شرایطی که بیان خواهد شد، عدد a می‌تواند به عنوان حد دنبالهٔ مفروض $\{a_n\}$ محسوب شود.

در این‌جا پرسشی مطرح می‌شود: نزدیکی جمله‌های دنباله به عدد a چگونه خواهد بود و به چه صورتی می‌توان به این نزدیکی پی برد.

به طور مثال، دنباله‌ای را که از معکوس عددهای طبیعی به وجود می‌آید، با جملهٔ عمومی $a_n = \frac{۱}{n}$ در نظر می‌گیریم:

$$۱\ ,\ \frac{۱}{۲}\ ,\ \frac{۱}{۳}\ ,\ \dots\ ,\ \frac{۱}{n}\ ,\ \dots$$

در این‌جا اگر به طور مرتب n را بزرگ و بزرگ‌تر اختیار کنیم، واضح است که جمله‌های دنباله به مراتب کوچک و کوچک‌تر خواهند شد. یعنی اختلاف هر دو عدد متوالی دنباله به طور پیوسته، همیشه از صفر کم‌تر است. بدیهی است که از جملهٔ دهم به بعد، هریک از جمله‌های دنباله از ۰/۱ کوچک‌ترند. جمله‌های دنبالهٔ $a_n = \frac{۱}{n}$ را روی یک محور، با نقطه‌هایی متناظر نشان می‌دهیم:



ε (اپسیلن) را یک عدد دلخواه مثبت در نظر می‌گیریم. روی این محور فاصله‌ای متقارن به مرکز o و طول ε ، یعنی فاصلهٔ $(-\varepsilon, \varepsilon)$ را انتخاب می‌کنیم. واضح است که اگر $\varepsilon = ۱/۲$ ، آن‌گاه همهٔ جمله‌های دنبالهٔ مورد نظر درون این فاصله واقع می‌شوند. ولی اگر $\varepsilon = ۰/۱$ ، آن‌گاه فاصلهٔ $(-۰/۱\ ,\ ۰/۱)$ بعضی جمله‌های نخستینِ دنباله، یعنی $\frac{۱}{۱۰}\ ,\ \dots\ ,\ \frac{۱}{۳}\ ,\ \frac{۱}{۲}\ ,\ ۱$ ، را شامل نمی‌شود. حال اگر ε را بسیار کوچک‌تر و برابر ۰/۰۰۱ در نظر بگیریم، فاصلهٔ $(-۰/۰۰۱\ ,\ ۰/۰۰۱)$ جمله‌های دنباله مورد بحث را شامل نمی‌شود. ولی همهٔ جمله‌های بعد از جملهٔ هزارم، یعنی $\frac{۱}{۱۰۰۱}\ ,\ \frac{۱}{۱۰۰۲}\ ,\ \dots\ ,\ \frac{۱}{n}\ ,\ \dots$ را شامل می‌شود.

به این ترتیب ε هر چه باشد، همیشه می‌توانیم عدد طبیعی M را چنان انتخاب کنیم که همهٔ جمله‌های دنباله که برای آن‌ها $n \geq M$ است، درون فاصلهٔ $(-\varepsilon, \varepsilon)$ واقع باشند و تنها تعدادی محدود از جمله‌ها، یعنی $a_1, a_2, \dots, a_{M-1}$ در بیرون این فاصله قرار گیرند.

در این‌جا به دو نکتهٔ مهم اشاره می‌کنیم:

۱. فاصلهٔ انتخابی دلخواه است.

۲. با درنظر گرفتن طول فاصلهٔ انتخابی، یعنی با معلوم بودن ε ، عدد M را می‌توان چنان انتخاب کرد که همهٔ جمله‌های دنباله که شماره‌ای بزرگ‌تر از M دارند، در درون فاصلهٔ $(-\varepsilon, \varepsilon)$ واقع باشند.

در این‌جا، با توجه به مطالب گفته شده، می‌توانیم تعریف «حد دنباله» را ارائه دهیم: عدد a را حد دنبالهٔ $\{a_n\}$ می‌نامیم، اگر برای هر عدد دلخواه مثبت ε $(\varepsilon > ۰)$ بتوان عددی مانند M پیدا کرد، به طوری که به ازای همهٔ مقدارهای $n \geq M$ ، داشته باشیم:

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

وقتی دنباله‌ای حدی برابر a داشته باشد، یا به بیان دیگر جمله‌های آن به سمت a میل کنند، با نماد ریاضی چنین نشان می‌دهند:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\ a_n = a$$

مثال. حد دنبالهٔ[1] $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ را بیابید.

حل: جملهٔ عمومی دنباله چنین است: $a_n=\frac{1}{n}$

بنابراین باید حاصل $\lim_{n\to\infty} a_n$، یا به تعبیر ساده‌تر $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n})$ را به دست آوریم. می‌بینیم که هر چه n بزرگ‌تر می‌شود، حاصل $\frac{1}{n}$ هم به صفر نزدیک‌تر می‌شود. به همین خاطر، می‌توان حدس زد که حد این دنباله باید برابر صفر شود. ولی این حدس باید به اثبات برسد. برای این منظور باید ثابت کنیم که به ازای هر $\varepsilon>0$، می‌توان عددی مانند M (وابسته به ε) را چنان تعیین کرد که به ازای هر $n\ge M$، داشته باشیم:

$$\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n}<\varepsilon$$

که از این رابطه، نتیجه می‌گیریم: $n>\frac{1}{\varepsilon}$.

بنابراین، با انتخاب $M=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$ (در این برابری منظور از $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$، بخش صحیح عدد $\frac{1}{\varepsilon}$ است؛ برای مثال: $\varepsilon=\frac{1}{2/5}:\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]=[2/5]=2$) برای هر $\varepsilon>0$، همیشه می‌توان مطمئن بود که برای $n\ge M=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$، نابرابری $\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$ برقرار است. یعنی می‌توانیم شماره‌ای از جمله‌های دنباله را تعیین کنیم (M)؛ به طوری که جمله‌هایی با شماره‌های بزرگ‌تر از آن، هریک در درون فاصلهٔ $(-\varepsilon,\varepsilon)$ واقع باشند. بنابراین به یقین می‌توان نوشت:

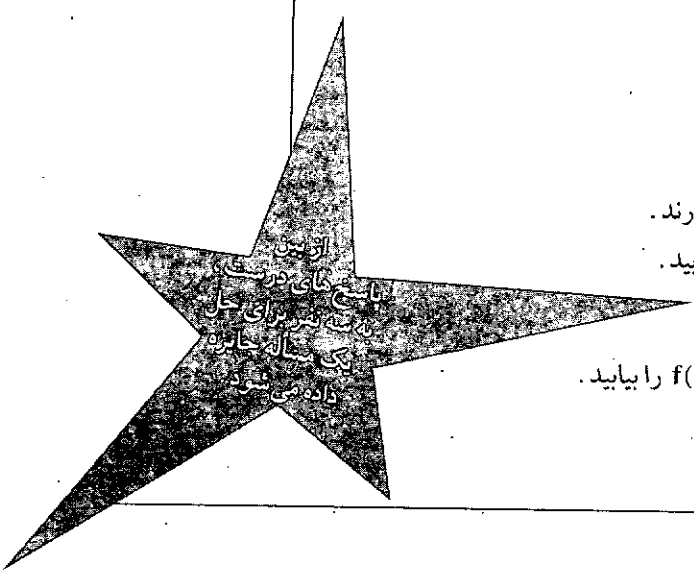
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

زیرنویس

1. sequence

○ احمد قندهاری

مسائل مسابقه‌ای



۱. اگر $\frac{x}{x^2+x+1}=\frac{1}{4}$، آن‌گاه حاصل $k=(\frac{x^4}{x^8+x^4+1})^2$ را بیابید.

۲. دو تصاعد عددی به صورت‌های زیر داریم:

$$4,\frac{47}{3},\ldots \qquad 2,14,\ldots$$

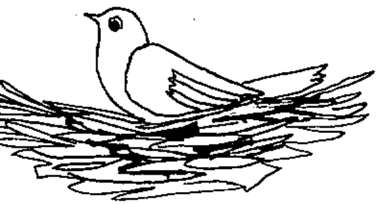
الف. نشان دهید، این دو تصاعد جملات مشترک دارند.

ب. مجموع شش جملهٔ مشترک این دو تصاعد را بیابید.

۳. اگر $x>1$ و $f(x+\frac{1}{x})=x^8-\frac{1}{x^8}$، آن‌گاه $f(\sqrt{5})$ را بیابید.

هوشنگ شرقی

تعمیم یافتهٔ اصل لانه کبوتر



بسیاری از دانش‌آموزان دبیرستانی، با اصل لانه کبوتر و کاربردهای آن آشنایی دارند:

اگر m کبوتر وارد n لانه شوند و m>n، آن گاه حداقل در یکی از لانه‌ها، دو کبوتر یا بیش‌تر وارد می‌شوند.

اما بدیهی است که اگر تعداد کبوترها از چند برابر تعداد لانه‌ها بیش‌تر باشد، مسلماً نتیجه‌ای بیش از این که «حداقل دو کبوتر وارد یک لانه می‌شوند»، می‌تواند به دست آید.

به عنوان مثال فرض کنید، ۱۰ کبوتر وارد ۴ لانه می‌شوند. به طور شهودی روشن است که در بدترین حالت، اگر کبوترها نخواهند وارد یک لانه شوند (یعنی تا حد امکان در لانه‌ها پخش شوند)، وقتی ۸ کبوتر وارد لانه‌ها می‌شوند، در هر لانه دو کبوتر بنابراین، کبوترهای نهم و دهم می‌توانند، وارد لانه‌هایی شوند که در آن‌ها قبلاً دو کبوتر وجود داشته‌اند. یعنی حداقل در یکی از لانه‌ها سه کبوتر (یا بیش‌تر) وجود خواهد داشت. این همان تعمیم یافتهٔ اصل لانه کبوتر است.

مثال۱. ۵۰ عدد طبیعی به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید، حداقل هشت تا از این عددها در تقسیم بر هفت، باقیمانده‌های یکسانی دارند.

برهان. باقیمانده‌های عددهای طبیعی در تقسیم بر هفت، یکی از هفت عدد متعلق به مجموعهٔ $A = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ است. بنابراین وقتی پنجاه عدد می‌نویسیم، در بدترین وضعیت، یعنی در صورتی که این عددها باقیمانده‌های متفاوتی داشته باشند، باید در تقسیم بر هفت، هفت تا از آن‌ها باقیماندهٔ ۰، هفت تای دیگر باقیماندهٔ ۱ و... و هفت تای دیگر باقیماندهٔ ۶ داشته باشند. به این ترتیب از ۴۹ عدد، هر هفت عدد یک نوع باقیمانده خواهد داشت.

بنابراین عدد پنجاهم به ناچار باید باقیمانده‌ای مشابه یکی از هفت عدد قبلی داشته باشد. در نتیجه، حداقل هشت عدد، هم باقیمانده خواهیم داشت.

برای آن که دستوری کلی برای حل این گونه مسائل داشته باشیم، فرض می‌کنیم، m کبوتر داریم و n لانه. بدیهی است که طبق الگوریتم تقسیم، از تقسیم m بر n خواهیم داشت:

$$m = nk + r \qquad 0 \le r < n$$

حال به روشی مشابه می‌توان گفت، اگر $1 \le r < n$، حداقل $k+1$ کبوتر وارد یک لانه خواهند شد. اما روشن است که $k = \frac{m-r}{n}$ و چون به ازای هر $1 \le r < n$ داریم:

$$\left[\frac{m-r}{n}\right] = \left[\frac{m-1}{n}\right]$$ ([ ] علامت جزء صحیح عدد است)

(چرا؟) بنابراین نتیجهٔ کلی زیر را استنتاج می‌کنیم:

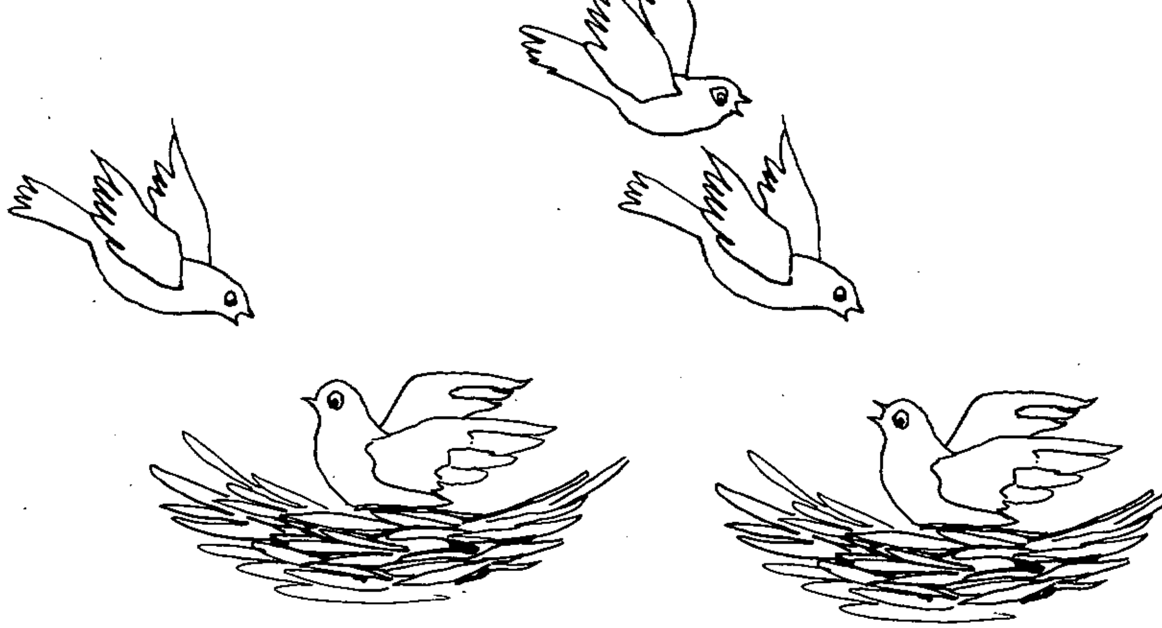
هر گاه m کبوتر وارد n لانه شوند و m>n، آن گاه حداقل $\left[\frac{m-1}{n}\right]+1$ کبوتر وارد یک لانه می‌شوند.

به عنوان مثال، هر گاه ۲۰ کبوتر وارد شش لانه شوند، آن گاه حداقل $\left[\frac{20-1}{6}\right]+1 = 4$ کبوتر وارد یک لانه می‌شوند.

حال به این مثال‌ها توجه کنید:

مثال۲. نشان دهید، در مدرسه‌ای با ۱۲۰۰ دانش‌آموز حداقل ۴ دانش‌آموز پیدا می‌شوند که در یک روز سال به دنیا آمده باشند.

حل. از اصل لانه کبوتر تعمیم یافته در حالت $m = 1200$ و $n = 365$ استفاده می‌کنیم:



$$\left[\frac{۱۲۰۰-۱}{۳۶۵}\right]+۱=۳+۱=۴$$

بنابراین، حداقل چهار دانش‌آموز پیدا می‌شوند که در یک روز سال به دنیا آمده باشند.

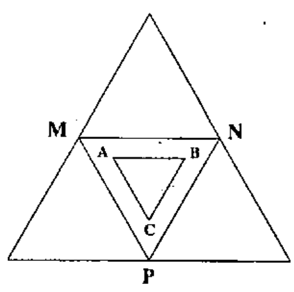
مثال۳. از کیسه‌ای شامل تعداد زیادی مهره به رنگ‌های سفید، سیاه، قرمز و آبی حداقل چند مهره خارج کنیم تا مطمئن شویم ۵ مهرهٔ همرنگ داریم؟

حل. در این جا $n=۴$ (تعداد لانه کبوترها که همان انواع رنگ‌ها است) و m مجهول است. ولی طبق فرض مسأله می‌توان نوشت:

$$۱+\left[\frac{m-۱}{۴}\right]=۵ \Rightarrow ۴\leq\frac{m-۱}{۴}<۵\Rightarrow ۱۶\leq m-۱<۲۰$$
$$\Rightarrow ۱۷\leq m<۲۱$$

یعنی باید حداقل ۱۷ مهره از کیسه خارج کنیم. اگر ۲۱ مهره یا بیش‌تر خارج کنیم، می‌توانیم بگوییم حداقل شش مهرهٔ همرنگ داریم (چرا؟)

مثال۴. در یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع واحد، ۱۰ نقطه به طور تصادفی اختیار می‌کنیم. ثابت کنید، سه تا از این نقاط رئوس مثلثی با محیط کم‌تر از ۱/۵ واحد هستند.



حل. مطابق شکل مثلث را با وصل کردن وسط‌های اضلاع آن به یکدیگر، به چهار مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $\frac{۱}{۲}$ تفکیک می‌کنیم. اکنون ۱۰ نقطه درون مثلث اصلی در نظر گرفته‌ایم. طبق تعمیم یافتهٔ اصل لانه کبوتر، حداقل سه نقطه درون یکی از مثلث‌های کوچک قرار می‌گیرد: $\left(\left[\frac{۱۰-۱}{۴}\right]+۱=۳\right)$؛ مانند نقاط A، B و C در شکل. و چون فاصلهٔ هر دو نقطه از این نقاط، از طول ضلع مثلث MNP کوچک‌تر است، می‌توان نوشت:

$$AB+AC+BC<\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}=۱/۵$$

تمرین

برای فعالیت بیش‌تر در این زمینه، تمرین‌های زیر را حل کنید:

۱. S یک مجموعهٔ ۷۰ عضوی از اعداد طبیعی است. ثابت کنید، اگر اعضای S را بر ۲۰ تقسیم کنیم، حداقل ۴ عضو دارای یک باقیمانده‌اند.

۲. در یک دایره که مساحت آن برابر واحد است، ۱۳۸۱ نقطه به دلخواه در نظر گرفته‌ایم. ثابت کنید، دست‌کم یک مثلث پیدا می‌شود که رئوس آن سه نقطه از این نقاط و مساحت آن کم‌تر از ۰/۰۰۱۵ باشد.

۳. برای آن که در یک کلاس، دست کم سه دانش‌آموز در یکی از ماه‌های سال به دنیا آمده باشند، این کلاس حداقل باید چند دانش‌آموز داشته باشد؟

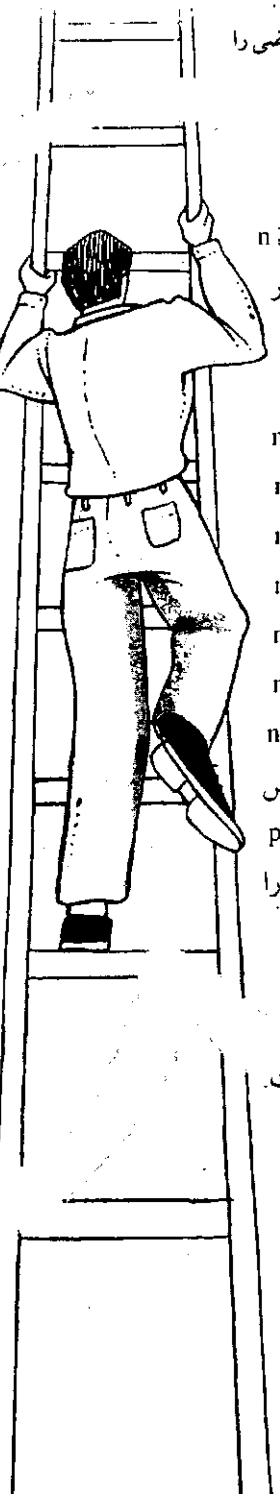
۴. از یک کیسه که در آن مهره‌هایی به ۵ رنگ متفاوت وجود دارند، دست کم چند مهره خارج کنیم تا مطمئن شویم که حداقل ۵ مهرهٔ همرنگ داریم؟

۵. در مربعی به ضلع واحد، ۲۸ نقطه را به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید چهار تا از این نقاط، رئوس یک چهار ضلعی با محیط کم‌تر از $\frac{۴}{۳}$ هستند.

استقرای ریاضی

میرشهرام صدر

برای دانش‌آموزان سال سوم ریاضی



در شمارهٔ قبل با استدلال استقرایی و محدودیت‌های آن آشنا شدید، همچنین اصل استقرای ریاضی را بیان کردیم و کاربرد این اصل را در حل مسأله‌ها ملاحظه کردید، اینک در ادامه مطلب داریم:

تعمیم معادل اصل استقرای ریاضی (استقرای تعمیم‌یافته)

تاکنون با حکم‌هایی مواجه شده‌ایم که درستی آن‌ها به‌ازای عددهای طبیعی $n \geq ۱$ برقرار بودند. اما ممکن است با حکم‌هایی روبه‌رو شویم که از مرحله‌ای به بعد، در اعداد طبیعی درست باشند، مانند حکم $۲^n > ۵n + ۶$ که به ازای عددهای طبیعی $n \geq ۵$ برقرار است؛ زیرا:

n = ۱: ۲ > ۱۱ نادرست

n = ۲: ۴ > ۱۶ نادرست

n = ۳: ۸ > ۲۱ نادرست

n = ۴: ۱۶ > ۲۶ نادرست

n = ۵: ۳۲ > ۳۱ درست

n = ۶: ۶۴ > ۳۶ درست

n = ۷: ۱۲۸ > ۴۱ درست

چنین حکم‌هایی را با استفاده از **استقرای ریاضی تعمیم‌یافته** اثبات می‌کنند. فرض کنیم $p(n)$ حکمی دربارهٔ عدد صحیح n باشد، اگر به‌ازای یک $m \in Z$، $p(m)$ درست باشد و حکم برای هر $n \geq m$ برقرار باشد، آن‌گاه طی مراحل زیر حکم را ثابت می‌کنیم:

مرحلهٔ اول: عدد صحیح m مناسب را به‌دست می‌آوریم.

مرحلهٔ دوم: درستی حکم را به ازای $n = m$ نشان می‌دهیم.

مرحلهٔ سوم: فرض استقرا: فرض می‌کنیم که حکم به‌ازای $n = k \geq m$ درست باشد.

مرحلهٔ چهارم: حکم استقرا: ثابت می‌کنیم که حکم برای $n = k + ۱$ درست است.

مرحلهٔ پنجم: در این صورت، حکم برای هر عدد طبیعی $n \geq m$ درست است.

مثال. با استفاده از اصل استقرای تعمیم‌یافته، برای هریک از حکم‌های زیر، ابتدا عدد طبیعی مناسب m را بیابید، سپس حکم را برای هر عدد طبیعی $n \geq m$

ثابت کنید:

الف) $n^{3} < 3^{n}$

ب) $n! > 3^{n}$

ج) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\dots+\frac{1}{2^{n}-1} < \frac{n}{2}$

د) $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$

حل. **الف)** ابتدا با اندکی جست‌وجو، m مناسب را می‌یابیم:

$n=1:\ 1<3$
$n=2:\ 8<9$
$n=3:\ 27<27$
$n=4:\ 64<81$
$n=5:\ 125<243$

ملاحظه می‌کنیم که $m=4$.

فرض استقرا $n=k\geq 4:\ k^{3}<3^{k}$

حکم استقرا $n=(k+1):\ (k+1)^{3}<3^{k+1}$

دو طرف فرض استقرا را در ۳ ضرب می‌کنیم:

$3k^{3}<3^{k+1}$

با مقایسه رابطهٔ اخیر و حکم استقرا ملاحظه می‌کنیم که برای اثبات حکم استقرا باید درستی نابرابری $(k+1)^{3}<3k^{3}$ را نشان دهیم:

$k^{3}+3k^{2}+3k+1<3k^{3}$

برای اثبات این نابرابری، با فرض $k\geq 4$، درستی دو نابرابری $k^{3}+1<k^{3}+k^{3}$ و $3k^{2}+3k<k^{3}$ را ثابت می‌کنیم:

1) $k^{3}+1<k^{3}+k^{3} \Leftrightarrow k^{3}>1$ (برای $k\geq 4$ درست است)

2) $3k^{2}+3k<k^{3} \Rightarrow k^{3}-3k^{2}-3k>0;$
$k(k^{2}-3k-3)>0$ (I)

با فرض $k\geq 4$ و تشکیل جدول تعیین علامت برای عبارت $P=k^{2}-3k-3$، درستی رابطهٔ (I) برقرار است. پس حکم برای هر عدد طبیعی $n\geq 4$ برقرار است.

ب)

$n=1:\ 1>3$	$n=5:\ 120>243$
$n=2:\ 2>9$	$n=6:\ 720>729$
$n=3:\ 6>27$	$n=7:\ 5040>2187$
$n=4:\ 24>81$	$n=8:\ 40320>6561$

ملاحظه می‌کنیم که $m=7$.

فرض استقرا $n=k\geq 7:\ k!>3^{k}$

حکم استقرا $n=(k+1):\ (k+1)!>3^{k+1}$

دو طرف فرض استقرا را در ۳ ضرب می‌کنیم:

$3k!>3^{k+1}$

برای اثبات حکم استقرا، باید نابرابری $(k+1)!>3k!$ را برای $k\geq 7$ ثابت کنیم:

$(k+1)!>3k! \Rightarrow (k+1)k!>3k! \Rightarrow k>2$

نابرابری آخر برای هر $k\geq 7$ برقرار است، پس حکم استقرا برای هر عدد طبیعی $n\geq 7$ درست است.

ج)

$n=1:\ 1<\frac{1}{2}$

$n=2:\ 1+\frac{1}{3}<\frac{2}{2};\ \frac{4}{3}<1$

$n=3:\ 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}<\frac{3}{2};\ \frac{31}{21}<\frac{3}{2}$

$n=4:\ 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{15}<\frac{4}{2};\ \frac{162}{105}<2$

ملاحظه می‌کنیم که $m=3$.

فرض استقرا $n=k\geq 3:\ 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\dots+\frac{1}{2^{k}-1}<\frac{k}{2}$

حکم استقرا $n=k+1$:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\dots+\frac{1}{2^k-1}+\frac{1}{2^{k+1}-1}<\frac{k+1}{2}=\frac{k}{2}+\frac{1}{2}$$

به دو طرف فرض استقرا، $\frac{1}{2}$ را اضافه می‌کنیم:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\dots+\frac{1}{2^k-1}+\frac{1}{2}<\frac{k}{2}+\frac{1}{2}=\frac{k+1}{2}$$

برای اثبات حکم استقرا، باید درستی نابرابری زیر را نشان دهیم:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\dots+\frac{1}{2^k-1}+\frac{1}{2^{k+1}-1}<1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\dots+\frac{1}{2^k-1}+\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^{k+1}-1}<\frac{1}{2}\Rightarrow 2^{k+1}-1>2\Rightarrow 2^{k+1}>3$$

نابرابری آخر، برای هر $k \geq 3$ برقرار است؛ بنابراین حکم استقرا برای هر عدد طبیعی $n \geq 3$ برقرار است.

د)

$$n=1:\ \frac{1}{\sqrt{1}}>\sqrt{1}$$

$$n=2:\ \frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}$$

$$n=3:\ \frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}>\sqrt{3}$$

ملاحظه می‌کنیم که $m=2$.

فرض استقرا $n=k\geq 2$: $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k}$

حکم استقرا $n=k+1$:

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$$

به دو طرف فرض استقرا $\frac{1}{\sqrt{k+1}}$ را اضافه می‌کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

برای اثبات حکم استقرا، باید نشان دهیم:

$$\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}\Rightarrow \frac{\sqrt{k^2+k}+1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$$

$$\Rightarrow \sqrt{k^2+k}+1>k+1$$

$$\Rightarrow \sqrt{k^2+k}>k\Rightarrow k>0$$

نابرابری آخر، برای هر $k \geq 2$ برقرار است. بنابراین حکم استقرا برای هر عدد طبیعی $n \geq 2$ برقرار است.

به مثال‌هایی که تاکنون حل شد، دقت کنید. در همگی آن‌ها برای اثبات درستی حکم به ازای $n=k+1$، نیاز به یک فرض داشتیم؛ یعنی فرض می‌کردیم که حکم به ازای $n=k$ برقرار است. اما در بعضی از مسائل استقرا، برای اثبات درستی حکم به ازای عدد طبیعی n، به دو یا چند فرض نیاز داریم. برای مثال، در بعضی از حکم‌ها لازم است که فرض کنیم، حکم برای عددهای طبیعی $(n-1)$ و $(n-2)$ برقرار است. سپس با استفاده از این دو فرض می‌توانیم حکم استقرا را ثابت کنیم. در این گونه مسائل باید از **اصل استقرای قوی ریاضی** استفاده کنیم.

اصل استقرای قوی ریاضی

هر زیرمجموعه S از $\mathbb{N}$ که دارای دو خاصیت زیر باشد، با مجموعهٔ $\mathbb{N}$ برابر است:

۱. $1\in S$.

۲. اگر اعداد کوچک‌تر از n در S باشند، آن‌گاه $n\in S$.

معادل اصل استقرای قوی ریاضی

فرض کنیم $P(n)$ حکمی دربارهٔ عدد طبیعی n باشد. برای اثبات درستی این حکم به کمک معادل اصل استقرای قوی ریاضی، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

مرحلهٔ اول: حکم باید به ازای $n=1$ درست باشد.

مرحلهٔ دوم: فرض‌های استقرا: فرض می‌کنیم که حکم به‌ازای عددهای طبیعی کم‌تر از $n\in\mathbb{N}$ درست باشد؛ یعنی فرض می‌کنیم که حکم به ازای عددهای طبیعی $1,2,3,\dots,n-3,n-2,n-1$ برقرار باشد.

مرحلهٔ سوم: حکم استقرا: ثابت می‌کنیم که حکم برای عدد طبیعی n درست است.

مرحلهٔ چهارم: در این صورت حکم برای هر عدد طبیعی n درست است.

مثال: دنبالهٔ اعداد فیبوناتچی.

دنبالهٔ اعداد فیبوناتچی را با $\{u_n\}$ نمایش می دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$u_1 = u_2 = 1 , \quad u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \quad (n \geq 3)$$

با توجه به تعریف بالا، دنبالهٔ عددهای فیبوناتچی به صورت زیر است:

$$1,1,2,3,5,8,13,21,\ldots$$

ثابت کنید در دنبالهٔ اعداد فیبوناتچی، جملهٔ عمومی آن از دستور زیر به دست می‌آید:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

حل. به رابطهٔ $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ دقت کنید. ملاحظه می کنیم که جمله nام دنبالهٔ فیبوناتچی بر اساس جمله های $(n-1)$ام و $(n-2)$ام به دست می‌آید. یعنی برای اثبات درستی حکم به ازای $n \in \mathbb{N}$، باید درستی حکم را برای عددهای طبیعی $(n-1)$ و $(n-2)$ فرض کنیم. به همین منظور از معادل اصل استقرای قوی ریاضی استفاده می کنیم:

$$n = 1 \Rightarrow u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 1 \qquad \text{درست است}$$

فرض‌های استقرا: فرض کنیم که حکم برای عددهای طبیعی کم‌تر از n برقرار باشد. یعنی جمله‌های u_1 ، u_2 ، u_3 ، … ، u_{n-2} ، u_{n-1} برطبق دستور داده شده باشند. اکنون ثابت می کنیم که جمله nام دنبالهٔ فیبوناتچی از این دستور به دست می‌آید:

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} =$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right] + \left[\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \quad (1)$$

می دانیم که:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad (2)$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad (3)$$

با قرار دادن (۲) و (۳) در (۱) داریم:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

در نتیجه حکم برای هر عدد طبیعی n برقرار است.

مثال. دنبالهٔ $\{a_n\}$ با تعریف زیر را درنظر بگیرید:

$$a_0 = 2 , a_1 = 3 , \quad a_n = a_1 a_{n-1} - a_0 a_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

جملهٔ عمومی این دنباله را بر حسب n بنویسید.

حل. ابتدا جملهٔ عمومی این دنباله را با استدلال استقرایی حدس می زنیم. سپس به کمک معادل اصل استقرای قوی ریاضی آن را ثابت می کنیم؛ زیرا همان‌طور که ملاحظه می کنید، جملهٔ $(n+1)$ام این دنباله با استفاده از دو جمله قبل از آن، یعنی جمله‌های nام و $(n-1)$ام به دست می‌آید.

بنابه فرض مثال داریم:

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$$

چند جملهٔ نخست دنباله را پیدا می کنیم:

$$n = 0: \ a_0 = 2 = 2^0 + 1$$
$$n = 1: \ a_1 = 3 = 2^1 + 1$$
$$n = 2: \ a_2 = 3a_1 - 2a_0 = 9 - 4 = 5 = 2^2 + 1$$
$$n = 3: \ a_3 = 3a_2 - 2a_1 = 15 - 6 = 9 = 2^3 + 1$$
$$n = 4: \ a_4 = 3a_3 - 2a_2 = 27 - 10 = 17 = 2^4 + 1$$
$$n = 5: \ a_5 = 3a_4 - 2a_3 = 51 - 18 = 33 = 2^5 + 1$$
$$n = 6: \ a_6 = 3a_5 - 2a_4 = 99 - 34 = 65 = 2^6 + 1$$

در نتیجه می‌توان حدس زد که جملهٔ عمومی این دنباله

به صورت $a_n = 2^n + 1$ است. اکنون حدس خود را به کمک اصل استقرای قوی ریاضی ثابت می‌کنیم.

فرض کنیم که حکم برای عددهای طبیعی $2 \le k < n$ برقرار باشد. ثابت می‌کنیم که جملهٔ nام این دنباله از دستور $a_n = 2^n + 1$ به دست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
an &= 3a_{n-1} - 2a_{n-2} = 3(2^{n-1}+1) - 2(2^{n-2}+1) \\
&= 3 \times 2^{n-1} + 3 - 2 \times 2^{n-2} - 2 \\
&= (3 \times 2 - 2)2^{n-2} + 1 = 4 \times 2^{n-2} + 1 \\
&= 2^2 \times 2^{n-2} + 1 = 2^n + 1
\end{aligned}
$$

بنابراین، حکم برای هر عدد طبیعی $n \ge 2$ برقرار است.

مثال. دنبالهٔ عددی $\{a_n\}$ با این شرط‌ها تعریف شده است:

$$a_0 = a \;,\; a_1 = b \;,\; a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2})$$

ثابت کنید که جملهٔ عمومی این دنباله از دستور زیر به‌دست می‌آید:

$$a_n = \frac{a+2b}{3} + (-1)^{n-1} \times \frac{b-a}{3 \times 2^{n-1}}$$

حل. فرض کنیم که حکم برای عددهای صحیح $0 \le k < n$ برقرار باشد؛ یعنی:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{a+2b}{3} + (-1)^{0-1} \times \frac{b-a}{3 \times 2^{0-1}} = \frac{a+2b}{3} - \frac{2b-2a}{3} = a \\
a_1 &= \frac{a+2b}{3} + (-1)^{1-1} \times \frac{b-a}{3 \times 2^{1-1}} = \frac{a+2b}{3} + \frac{b-a}{3} = b \\
a_2 &= \frac{a+2b}{3} + (-1)^{2-1} \times \frac{b-a}{3 \times 2^{2-1}} = \frac{a+2b}{3} - \frac{b-a}{6} = \frac{a+b}{2} \\
&\vdots \\
a_{n-2} &= \frac{a+2b}{3} + (-1)^{n-3} \times \frac{b-a}{3 \times 2^{n-3}} \\
a_{n-1} &= \frac{a+2b}{3} + (-1)^{n-2} \times \frac{b-a}{3 \times 2^{n-2}}
\end{aligned}
$$

اکنون ثابت می‌کنیم که جملهٔ nام این دنباله از همین دستور محاسبه می‌شود:

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{a+2b}{3} + (-1)^{n-2} \times \frac{b-a}{3 \times 2^{n-2}} + \\
&\quad \frac{a+2b}{3} + (-1)^{n-3} \times \frac{b-a}{3 \times 2^{n-3}}\Big) \\
&= \frac{a+2b}{3} + \frac{1}{2}\left[(-1)^{n-3} \times \frac{b-a}{3 \times 2^{n-2}}(-1+2)\right] \\
&= \frac{a+2b}{3} + \frac{1}{2}\left[(-1)^{n-1} \times (-1)^{-2} \times \frac{b-a}{3 \times 2^{n-2}}\right] \\
&= \frac{a+2b}{3} + (-1)^{n-1} \times \frac{b-a}{3 \times 2^{n-1}}
\end{aligned}
$$

پس حکم برای هر عدد صحیح نامنفی برقرار است.

تذکر ۱. در مثال قبل، از تعمیم معادل اصل استقرای قوی ریاضی (استقرای قوی تعمیم یافته) استفاده کردیم که به شرح زیر است.

فرض کنیم $p(n)$ حکمی دربارهٔ عدد صحیح n باشد. اگر به ازای یک $m \in Z$ ، $P(m)$ درست باشد و حکم برای هر $n \ge m$ برقرار باشد، آن‌گاه طی مراحل زیر حکم را ثابت می‌کنیم:

مرحلهٔ اول: عدد صحیح m مناسب را پیدا می‌کنیم.

مرحلهٔ دوم: درستی حکم را به ازای $n=m$ بررسی می‌کنیم.

مرحلهٔ سوم: فرض‌های استقرا: فرض می‌کنیم که حکم برای عددهای صحیح $m \le k < n$ برقرار باشد.

مرحلهٔ چهارم: حکم استقرا: ثابت می‌کنیم که حکم برای عدد صحیح n درست است.

مرحلهٔ پنجم: در این صورت حکم برای هر عدد صحیح $n \ge m$ برقرار است.

تذکر ۲. برای اثبات تمام مسائلی که با استفاده از **معادل اصل استقرای ریاضی** ثابت می‌شوند، می‌توان از **معادل اصل استقرای قوی ریاضی** استفاده کرد. به این ترتیب که بعد از بررسی درستی حکم به ازای $n=1$، نوبت به نوشتن فرض‌های

استقرا می‌رسد که در این مرحله، فرض می‌کنیم، حکم برای عددهای طبیعی کم‌تر از n برقرار باشد. در مرحله‌ای که می‌خواهیم درستی حکم را به ازای عدد طبیعی n بررسی کنیم، فقط از یکی از فرض‌های استقرا (درستی حکم به ازای عدد طبیعی $(n-1)$) استفاده می‌کنیم.

مسأله. ثابت کنید هر عدد طبیعی $n > ۱$ را می‌توان به حاصل ضربی از عددهای اول تجزیه کرد.

حل. اثبات به کمک اصل استقرای قوی ریاضی تعمیم یافته.

مرحلهٔ اول. فرض کنیم $n = ۲$. می‌دانیم عدد ۲ را می‌توان به حاصل ضرب عددهای اول تجزیه کرد.

مرحلهٔ دوم. فرض کنیم که حکم برای عددهای طبیعی کمتر از n برقرار باشد، یعنی حکم برای عددهای ۲، ۳، ۴، ...، $(n-۱)$ برقرار است.

مرحلهٔ سوم: ثابت می‌کنیم که حکم برای عدد طبیعی n نیز برقرار است.

اگر n عددی اول باشد که حکم درست است، فرض کنیم که n اول نباشد، لذا n مرکب است. پس می‌توان آن را به صورت حاصل ضرب دو عدد طبیعی به صورت $n = m \times k$ نوشت، واضح است که m و k هر دو کمتر از n هستند، پس بنابه فرض استقرا m و k را می‌توان به صورت حاصل ضرب عددهای اول نوشت. در نتیجه $n = m \times k$ را می‌توان به صورت حاصل ضرب عددهای اول نوشت.

مرحلهٔ چهارم. پس حکم برای هر عدد طبیعی $n > ۱$ برقرار است.

تمرین: درستی این اتحادها را ثابت کنید.

۱.

$$۱^۲ - ۲^۲ + ۳^۲ - ۴^۲ + \ldots + (-۱)^{n-۱} \times n^۲ = (-۱)^{n-۱} \frac{n(n+۱)}{۲}$$

۲.

$$۱\times۲\times۳ + ۲\times۳\times۴ + \ldots + n(n+۱)(n+۲) = \frac{۱}{۴} n(n+۱)(n+۲)(n+۳)$$

۳.

$$\frac{۱}{۱\times۳\times۵} + \frac{۱}{۳\times۵\times۷} + \ldots + \frac{۱}{(۲n-۱)(۲n+۱)(۲n+۳)} = \frac{n(n+۲)}{۳(۲n+۱)(۲n+۳)}$$

۴.

$$(۱-\frac{۱}{۴})(۱-\frac{۱}{۹})\ldots(۱-\frac{۱}{(n+۱)^۲}) = \frac{n+۲}{۲(n+۱)}$$

۵.

$$(۱-\frac{۱}{۲})(۱-\frac{۱}{۳})\ldots(۱-\frac{۱}{n+۱}) = \frac{۱}{n+۱}$$

۶. مطلوب است محاسبهٔ حد زیر:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{۱}{۱\times۵} + \frac{۱}{۵\times۹} + \ldots + \frac{۱}{(۴n-۳)(۴n+۱)}\right)$$

۷. دنبالهٔ $\{u_n\}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u_۱ = ۲, \quad u_{n+۱} = \frac{n+۲}{۲} u_n$$

جملهٔ عمومی این دنباله را بر حسب n به دست آورید.

فهرست منابع

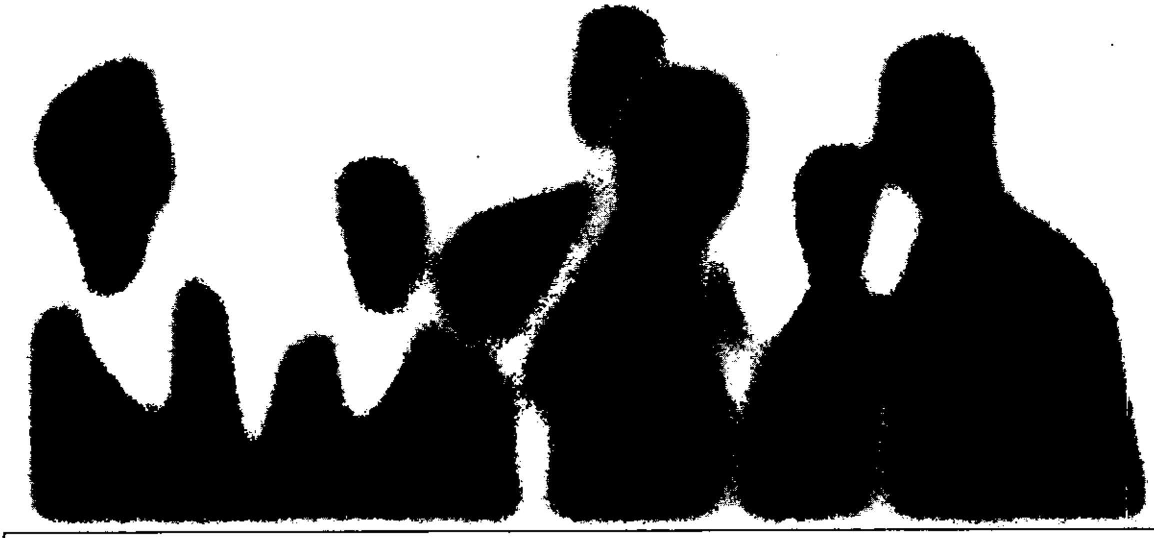
۱. جبر و احتمال (کتاب درسی)
۲. ریاضیات گسسته (کتاب درسی)
۳. جبر و احتمال / حمیدرضا امیری و میرشهرام صدر / انتشارات مدرسه
۴. استقرای ریاضی / پرویز شهریاری / انتشارات مدرسه

[illegible] ۷ سالگی در شهر آکسفورد انگلستان درگذشت. عبدالسلام در سال ۱۳۵۸ شمسی (۱۹۸۰ م) همراه با دو فیزیکدان دیگر به نام‌های واینبرگ و گلاشو، به کسب جایزهٔ نوبل دست یافت. این جایزه به خاطر ارائهٔ «نظریه نیروهای بنیادی» به این دانشمندان اعطا شد که یکی از نقاط عطف در پیشرفت علم فیزیک نظری قرن بیستم است.

یکی از کارهای بزرگ این سه نفر، یافتن معادلاتی است که بین نیروی مغناطیس یا نیروی هسته‌ای ضعیف، ارتباطی (یا تقارنی) ضعیف را نشان می‌دهند.

درباره اتحاد و معادله ۲

پرویز شهریاری



تاریخچه نمادهای ریاضی و اتحادها

در شمارهٔ ۳۸ مجلهٔ برهان، مقاله‌ای دربارهٔ اتحادها و معادله‌ها داشتیم و در آن به معرفی این دو و تفاوت‌هایشان پرداختیم. اینک ادامهٔ مطلب را در پی می‌آوریم.

پیش از آن‌که جبرِ علامتی به‌وجود آید و نمادهایی برای «+»، «−»، «=»، مجهول (x یا y) و غیره پیدا شود، اغلب مسأله‌های جبر را به یاری هندسه حل می‌کردند.

نمادهای «+» و «−» از پایان سدهٔ پانزدهم میلادی فقط در آلمان به‌کار می‌رفتند، ولی **میخائیل شتیفل** (۱۵۶۷−۱۴۸۷) کشیش و ریاضیدان آلمانی، به آن‌ها رسمیت داد. در آلمان روی بشکه‌های خالی علامت «−» و روی بشکه‌ها علامت «+» می‌گذاشتند و شتیفل و دیگران از همین نمادها برای جمع و تفریق استفاده می‌کردند. شتیفل برای ضرب و تقسیم از حرف‌های لاتینی «m» و «d» (که حرف‌های اول واژه‌های «multipicather» به معنی ضرب و «divisio» به معنی تقسیم بود) استفاده می‌کرد.

رنه دکارت (۱۶۵۰−۱۵۹۶)، فیلسوف، نویسنده و ریاضیدان فرانسوی، برای نشان برابری از علامت ویژه‌ای شبیه « $\propto$ » استفاده می‌کرد؛ گرچه علامت امروزی برای برابری حتی پیش از تولد دکارت پیدا شده بود. کسی که علامت امروزی برابری را قرار گذاشت، **روبرت رکورد** (۱۵۵۸−۱۵۱۰) پزشک و ریاضیدان لندنی بود. خودکورد در این باره می‌نویسد: «هیچ چیز، مانند دو پاره خط راست موازی (=)، نمی‌تواند مفهوم برابری را برساند.»

فرانسوادیت (۱۶۰۳−۱۵۴۰) حقوقدان و ریاضیدان فرانسوی، برای نخستین بار از یک حرف لاتینی برای نشان دادن مجهول استفاده کرد. او از حرف «N» برای مجهول استفاده می‌کرد.

البته در سرزمین میان دورود (بین‌النهرین)، عیلام، مصر و چین نمادهایی وجود داشت که بیش‌تر آن‌ها فراموش شد و به نسل‌های بعدی نرسید. به ویژه درمیان دورود، نه تنها نشان‌هایی برای عددها و صفر داشتند، بلکه عددها را به صورت موضعی می‌نوشتند؛ یعنی هر رقم در مکان خود

معنای خاصی داشت. ولی از همهٔ این‌ها، تنها تقسیم محیط دایره به ۳۶۰ درجه و بعد دقیقه و ثانیه باقی ماند. مردم سرزمین بابل فکر می‌کردند، در حرکت ظاهری خورشید، به دور زمین، خورشید هر روز به تقریب به اندازهٔ ۱۸۰ برابر قطر خود حرکت می‌کند و بنابراین دایره‌ای که در شبانه‌روز می‌پیماید، ۳۶۰ برابر قطر خورشید است. به همین مناسبت، محیط دایره را به ۳۶۰ بخش تقسیم کردند و هر بخش را یک درجه نامیدند که امروز هم به کار می‌رود. مبنای عددشماری بابلی‌ها ۶۰ بود و بنابراین عددهای کم‌تر از واحد را هم به شصت تقسیم می‌کردند و هر بخش را دقیقه می‌نامیدند. مردم سرزمین «میان‌دورود» نشان‌های دیگری (البته با خط میخی) هم داشتند که به دلیل فراموش شدن، از آن‌ها می‌گذریم.

نخستین بار رنه‌دکارت در سال ۱۶۳۷ از حرف‌های x، y و z برای نشان دادن مجهول یا کمیت متغیر، استفاده کرد. مجهول را محمد فرزند موسی، مشهور به خوارزمی «شیء» می‌نامید. شتیفل در سدهٔ شانزدهم از حرف R برای مجهول استفاده می‌کرد که حرف اول از واژهٔ آلمانی «Res» به معنای «چیز» یا «شیء» است؛ یعنی از همان واژهٔ خوارزمی سود برده است.

از علامت a^n، برای نشان دادن توان‌های مختلف عدد (وقتی n، عددی طبیعی باشد)، نخستین بار در سال ۱۶۳۷ به وسیلهٔ دکارت استفاده شد. علامت ریشگی را **آلبرت ژیرار** (۱۶۳۲-۱۵۹۵) در سال ۱۶۲۹ و علامت‌های cos,sin (سینوس و کسینوس) را لئوناردو اولر (۱۷۸۳-۱۷۰۷) در سال ۱۷۴۸ و علامت tan (تانژانت) را هم او در سال ۱۷۵۳، قرار گذاشتند. یادآوری می‌کنیم واژهٔ سینوس به معنای «گریبان» و درست ترجمهٔ واژهٔ عربی «جیب» به زبان فرانسوی است که از روی نوشته‌های محمد خوارزمی برداشته شده است. به احتمال زیاد، خوارزمی از واژهٔ «چیپ» زبان پهلوی استفاده می‌کرده و نسخه‌نویسان کتاب او که پهلوی نمی‌دانستند و معنایی برای «چیپ» در زبان عربی پیدا نمی‌کردند، آن را به «جیب» به معنی «گریبان» تغییر دادند که هیچ ربطی به مفهوم «سینوس» ندارد.

منظور از بیان مطالب فوق این بود که نشان داده شود، نمادهای ریاضی که امروز معمول هستند، در زمانی نه چندان دور مقرر شدند و به زحمت از عمر قدیمی‌ترین آن‌ها، ۵۰۰ سال می‌گذرد و برای نمونه، میخائیل شتیفل که سهم بزرگی در معرفی نمادهای ریاضی دارد، برای نشان دادن معادلهٔ:

$$116+\sqrt{41372}-18x-\sqrt{648x^2}=0$$

این طور می‌نوشت:

۱۱۶ + VZ۴۱۳۷۲ − ۱۸R − VZ۶۴۸acq a ntaseo

شتیفل ریشگی را با «V» (حرف اول واژهٔ Vadim به معنی ریشه) نشان می‌داد و از نظر او «VZ» یعنی ریشهٔ دوم. این معادله از کتاب «حساب کامل» شتیفل برداشته شده است.

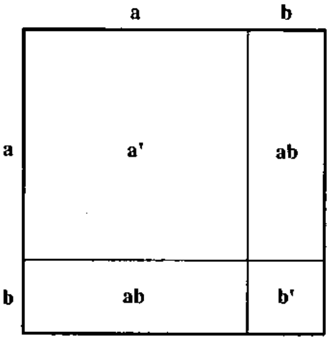
به نمادهای دیگر نمی‌پردازیم. همین قدر کافی است تا بیندیشیم، یونانی‌ها و یا ریاضیدانان ایرانی که از نمادها و جبر علامتی آگاه نبودند، چرا برای اثبات از هندسه کمک می‌گرفتند و یا به شرح و توضیح رو می‌آوردند.

اکنون ببینیم چگونه با اتحادها از دید هندسی برخورد می‌کردند. در سدهٔ سوم پیش از میلاد، **اقلیدس** کتاب خود را به نام «مقدمات» نوشت که شامل ۱۳ بخش بود. بخش دوم این کتاب مربوط به اتحادهای جبری است که البته، با استدلال‌ها و تعبیرهای هندسی نوشته شده است. برای نمونه، او در مسألهٔ دهم از بخش دوم کتاب خود، درستی اتحاد

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

را ثابت کرده است. از زبان خود اقلیدس بخوانیم:

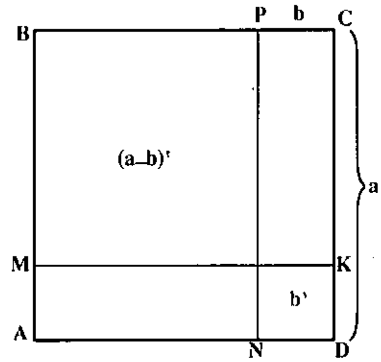
«اگر پاره‌خط راستی را به دو بخش تقسیم کنیم، آن وقت مربعی که روی تمامی این پاره‌خط راست ساخته می‌شود، برابر است با مجموع مربع‌هایی که هرکدام از بخش‌ها ساخته شده است و دو برابر مستطیلی که روی بخش‌ها ساخته می‌شود.»



شکل ۱

در شکل ۱ به روشنی دیده می‌شود که مساحت مربعی به ضلع a+b، برابر است با مجموع چهار مساحت: مساحت مربع به ضلع α، مساحت مربع به ضلع b و مساحت‌های دو مستطیل برابر با بعدهای a و b.

همچنین، با توجه به شکل ۲، می‌توان اتحاد $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ را ثابت کرد؛ به شکل توجه کنید:



شکل۲

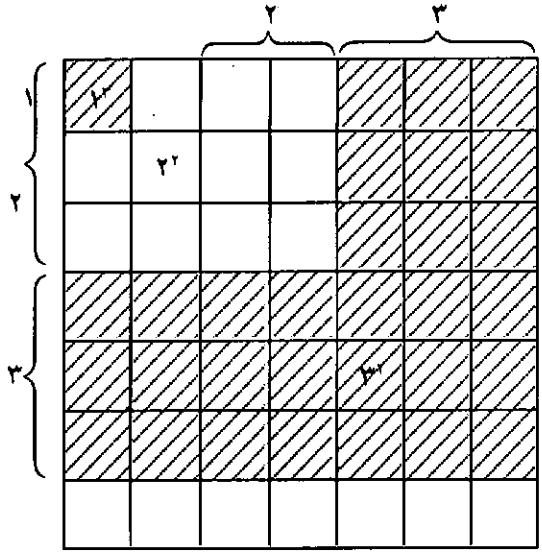
در این شکل، اگر a^2 (مساحت مربع بزرگ به ضلع a) را با b^2 (مساحت مربع کوچک به ضلع b) جمع کنیم و مساحت دو مستطیل AMKD و NPCD را از آن برداریم، مساحت مربع به ضلع $(a-b)$ به دست می‌آید.

دیوفانت که در سدهٔ سوم پیش از میلاد در اسکندریه می‌زیست، کتابی به نام «حساب» دارد. او در این کتاب، اتحادهای

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

را از دیدگاه حساب بررسی می‌کند و آن‌ها را «قانون‌های اصلی حساب» می‌نامد.

ریاضیدانان ایرانی هم اتحادهای جبری را می‌شناختند و از آن‌ها استفاده می‌کردند؛ و البته در بیش‌تر حالت‌ها، آن‌ها را با شکل‌های هندسی نشان می‌دادند. برای نمونه، اتحاد عددی $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1+2+\cdots+n)^2$ را روی یک شکل هندسی نشان می‌دادند (شکل ۳):



شکل۳

به شکل توجه کنید: بخشی از یک مربع که طول ضلع آن برابر n+...+۳+۲+۱ است، به مربع‌های کوچک‌تر به ضلع واحد تقسیم شده است. مساحت تمامی مربع بزرگ، برابر است با:

$$(1+2+3+\cdots+n)^2 \qquad (1)$$

همین مربع را به بخش‌های جداگانه‌ای تقسیم کرده‌ایم و آن‌ها را یک در میان هاشور زده‌ایم. مربع هاشور خوردهٔ سمت چپ، مساحتی برابر ۱ (یا 1^3) دارد. بخش‌های بعدی که یکی سفید و دیگری هاشور خورده است، شامل ۸ مربع (2^3)، ۲۷ مربع (3^3) و غیره است. پس مساحت تمامی مربع چنین می‌شود:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 \qquad (2)$$

عبارت‌های عددی (۱) و (۲) معرف یک مقدار از مساحت مربع بزرگ هستند و بنابراین:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1+2+\cdots+n)^2$$

بنابر قضیه‌ای که معروف به «قضیهٔ فیثاغورس» است، اگر دو ضلع پهلوی زاویهٔ قائمه را با b،a و وتر را با c نشان دهیم، این رابطه بین آن‌ها برقرار است:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

پیدا کردن عددهایی درست (و به احتمالی گویا) که در این دستور صدق کند، از همان دوران کهن مورد توجه

ریاضیدانان بوده است. از جمله مردم مصر، عیلام و بابل کهن، برای رسم دو خط عمود بر هم بر روی زمین (که برای کارهای کشاورزی لازم بود)، از طنابی استفاده می‌کردند که به ۳، ۴ و ۵ بخش تقسیم شده بود؛ دو بخش به طول‌های ۳ و ۴ برهم عمود بودند.

اتحادی وجود دارد که به یاری آن می‌توان مثلث‌های فیثاغورسی را (یعنی مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که طول ضلع‌های آن‌ها، عددهایی طبیعی هستند) پیدا کرد. این اتحاد که در دوران یونان باستان نیز شناخته شده بود، چنین است:

$$(m^2-n^2)^2+(2mn)^2=(m^2+n^2)^2$$

(آزمایش کنید تا از درستی این اتحاد، مطمئن شوید.)

بنابراین، اگر $n>m$ $(m>n)$ را دو عدد طبیعی دلخواه در نظر بگیریم، آن‌وقت یک مثلث فیثاغورثی با ضلع‌های a، b و c به دست می‌آید:

$$a=m^2-n^2,\quad b=2mn,\quad c=m^2+n^2$$

چند نمونه از این مثلث‌ها را در ادامه می‌آوریم:

۱. برای $m=2$ و $n=1$ به دست می‌آید:

$c=5$ و $b=4$ و $a=3$

۲. برای $m=3$ و $n=2$ به دست می‌آید:

$c=13$ و $b=12$ و $a=5$

۳. برای $m=4$ و $n=1$ به دست می‌آید:

$c=17$ و $b=8$ و $a=15$

۴. برای $m=4$ و $n=3$ به دست می‌آید:

$c=25$ و $b=24$ و $a=7$

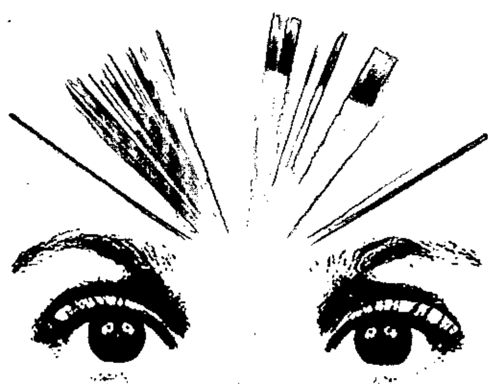
۵. برای $m=10$ و $n=1$ به دست می‌آید:

$c=101$ و $b=20$ و $a=99$

۶. برای $m=10$ و $n=7$ به‌دست می‌آید:

$c=149$ و $b=140$ و $a=51$

ادامه دارد...



تفریح اندیشه

مجموع دو ریشه از سه ریشهٔ معادلهٔ زیر، صفر است:

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

معادله‌ای بیابید که c را به طور صریح بر حسب a و b نمایش دهد.

ادب ریاضی

فرگه، منطقدان آلمانی به پیروی از طرز تفکر کانت، در کتاب «مبانی حساب» خود می‌نویسد: حقایق هندسی بر هر چه برای ما از جنبهٔ فضایی قابل درک باشد، حکومت می‌کنند؛ خواه مستدرکات ما واقعی باشند و خواه محصول تخیلمان.

پرت و پلاهایی که به هنگام هذیان می‌شنویم، قوی‌ترین مخترعات افسانه و شعر، جایی که جانوران سخن می‌گویند و ستارگان خاموش می‌مانند، جایی که آدمیان سنگ می‌شوند و درختان آدمی می‌گردند، جایی که غرق شدگان در آب، زلف خود را می‌گیرند و خود را از آب بیرون می‌کشند، همه، تا وقتی که قابل درک باشند، تابع اصول هندسی هستند.

ریاضیات
و نقش آن در زندگی روزمره

سهیل برادران

هنگامی که شاگرد مدرسه بودم، بارها این سؤال را از خودم و معلمانم می‌پرسیدم که فلان فرمول ریاضی و فلان رابطه در کجا کاربرد دارد؟ به چه دردی می‌خورد؟ اصلاً دانستن این قوانین چه فایده‌ای می‌تواند داشته باشد؟

جوابی که در آن زمان می‌گرفتم، به من آموخت که برای این سؤال نباید پاسخ روشنی را انتظار داشته باشم و فایدهٔ دانستن فلان فرمول، قبولی در امتحان، ورود به دانشگاه و مواردی از این گونه است.

البته در آن دوران، من تصوری از این که ریاضیات چه تأثیری در صنعت، علوم، یا نحوهٔ تفکرم می‌تواند داشته باشد، نداشتم و حتی زمانی که می‌شنیدم، برای به‌دست آوردن شغل مناسب، جایگاه اجتماعی و غیره باید این مطالب را یاد بگیرم و نمرهٔ خوبی بیاورم، باز رضایت خاطری برای من حاصل نمی‌شد و همواره این سؤال در ذهنم نقش می‌بست که مگر امکان دارد، تنها دلیل وجود یک علم و پیدایش آن، به‌دست آوردن شغل مناسب، قبولی در دانشگاه و مواردی از این نوع باشد.

در این مقاله، مطالبی را در پاسخ به سؤال‌های زیر بیان می‌کنیم: ریاضیات چه فایده‌ای دارد؟ ندانستن آن ممکن است چه زیانی به‌بار آورد؟ اصلاً یک علم از کجا به‌وجود می‌آید؟

* * *

هنگامی که به بررسی تاریخیِ علوم می‌پردازیم، متوجه می‌شویم که طبیعت و نیازهای زندگی، عوامل و منابع اصلی پیدایش و رشد علوم در طول تاریخ هستند. ریاضیات در ابتدا تحت‌تأثیر نیازهای عملی زندگی انسان پا به عرصهٔ وجود نهاد. سپس به رشد و پیشرفت، و انتزاعی‌شدن هرچه بیش‌تر خود ادامه داد. به همین جهت است که **الکساندروف** می‌گوید:

منبع زنده بودن ریاضیات این است که مفاهیم و نتایج آن، با همهٔ انتزاعی‌بودنشان، ناشی از واقعیت هستند و در سایر علوم، صنعت، و همهٔ زمینه‌های مربوط به زندگی بشری، کاربرد فراوانی پیدا می‌کنند. این مهم‌ترین مطلب برای درک ریاضیات است.

همچنین **اودموس رودسی**، دانشمند یونانی سدهٔ چهارم قبل از میلاد نوشته است:

هندسه به‌وسیلهٔ مصری‌ها کشف شد و ضمن اندازه‌گیری زمین به‌وجود آمد. این اندازه‌گیری برای جلوگیری از طغیان رودخانهٔ نیل که دائماً مرزها را می‌شست، لازم بود. هیچ‌چیز تعجب‌آوری در این مطلب نیست که هندسه نیز مانند سایر علوم، از احتیاجات بشری به‌وجود آمده باشد. هر دانشی که به‌وجود می‌آید، از حالت ناقص به طرف کامل می‌رود. آغاز این دانش از طریق درک احساسی به‌وجود می‌آید و به‌تدریج به موضوع مورد بررسی ما تبدیل می‌شود. در آخر کار، به مطالبی که می‌تواند در ذهن مجسم شود، مبدل می‌گردد.

* * *

ریاضیات که به مفهوم عام خود تاریخی برابر تاریخ بشری دارد، تحت تأثیر دو نیروی بیرونی و درونی به پیشرفت خود ادامه داده است. نیروی بیرونی مربوط به طبیعت، نیازهای زندگی و اجتماعی، و مقتضیات و احوال یک دوره است که با گذشت زمان و تغییر نوع زندگی انسان، تغییر می‌کند.

نیروی درونی ریاضیات که می‌توانیم آن را پیشرفت در خود بنامیم، جنبه‌هایی از ریاضیات است که بدون مشاهدهٔ مستقیم طبیعت و به صورتی کاملاً انتزاعی رشد می‌کند. به‌عنوان مثال پس از درک اعداد طبیعی، ریاضیات موجبات به‌وجود آمدن کسرهای ده‌دهی، اعداد صحیح، اعداد گنگ و غیره را مهیا می‌کند و به پیشرفت درونی خود ادامه می‌دهد.

❊❊❊

به سؤال‌های دیگر بپردازیم. ریاضیات چه فایده‌ای دارد؟ و ندانستن آن چه زیانی ممکن است بارآورد؟

درواقع این دو سؤال ارتباطی ظریف و تنگاتنگ با هم دارند. ما هنگامی می‌توانیم به زیان‌های ناشی از نبود یک علم پی ببریم که ارزش‌ها و فایده‌های آن را به خوبی درک کرده باشیم.

از مهم‌ترین خصوصیات ریاضیات، کاربرد فوق‌العاده زیاد آن در زندگی و صنعت است. ما همواره در زندگی خود بدون این‌که متوجه باشیم، از مفاهیم ریاضی استفاده می‌کنیم. امروزه حساب، اساسی‌ترین کاربرد را در زندگی ما دارد. پرداخت کرایه، خرید وسایل، نگهداشتن حساب روزها، همه و همه به علمی با نام حساب و دانستن چگونگی شمارش اشیا احتیاج دارند. جالب‌تر این‌که، تمامی این نتایج ساده، در زمان باستان، از ارزشمندترین پیشرفت‌های بشری به‌شمار می‌آمدند.

بدون اطلاع از مفاهیم و قوانین ریاضیات، رشد صنعت معاصر و به‌طور کل وجود آن غیرممکن است. با بررسی علوم (مکانیک، نجوم، فیزیک و تا حدی شیمی)، متوجه می‌شویم که معمولاً قوانین آن‌ها به‌وسیلهٔ فرمول ریاضی بیان می‌شوند و تئوری‌های آن‌ها با استفاده از ریاضیات پیشرفت می‌کنند.

همان‌طور که گفتیم، ریاضیات تحت‌تأثیر دو نیروی بیرونی و درونی پیشرفت می‌کند. نیروی بیرونی به عمل توجه دارد و نیروی درونی به نظریه. در طول تاریخ گاهی عمل از نظریه جلو افتاده است و گاهی نظریه از عمل. اما این‌دو برای مدت زیادی نمی‌توانند از هم فاصله بگیرند. به‌عنوان مثال، نظریهٔ اعداد پس از سال‌ها مبنای ساخت ماشین‌حساب و سپس کامپیوتر شد و یا نظریهٔ اعداد مختلط که به سختی پذیرفته شد، برای توضیح بسیاری از موضوع‌های فیزیکی و صنعتی کاربرد فراوانی پیدا کرده است.

در مثالی دیگر، جملاتی از مقالهٔ «اندیشه‌هایی دربارهٔ دانش و صنعت و هنر آینده و کاربرد ریاضیات در آن‌ها» که از بیانات دکتر **محسن هشترودی** است و در مجلهٔ «آشتی با ریاضیات» به چاپ رسیده است را بیان می‌کنیم:

... مهندس برق... به کلی با مهندسی سی‌چهل سال قبل فرق کرده است. فرض بفرمایید در سی سال قبل اگر شهری وسعت پیدا می‌کرد، کمپانی برق و یا شهرداری نمی‌توانست تعهد کند که برق شهر را به‌طور کامل تأمین کند؛ مگر این‌که گسترش شهر به‌طور متقارن صورت گیرد. یعنی این‌که از شمال و جنوب و شرق و غرب، کیفیت توسعه‌یافتن شهر برحسب نقشهٔ معینی باشد که تقارن شهر را به‌هم نزند. زیرا در شبکهٔ برق، وقتی سیم‌ها با هم تقاطع پیدا می‌کنند، نقاطی پیدا می‌شود که پتانسیل آن‌ها صفر می‌گردد و دیگر نمی‌توان از آن‌جا برق گرفت. معمولاً در این مواقع ترانسفورماتور به‌کار می‌برند. در خیلی از منازل و کارخانه‌ها ترانسفورماتور وجود دارد و یخچال و وسایل الکتریکی در تمام روز ممکن است لازم باشد با ترانسفورماتور کار کنند، زیرا پتانسیل پائین می‌افتد. شک نیست که معمولاً نصب ترانسفورماتورها خرج زیادی دارد و پیش‌بینی آن نیز خیلی مشکل است. ولی امروز طرح ریاضی، به کلی مسأله را حل کرده است. در تئوری گراف‌ها که مدل ریاضی این شبکه‌بندی است و در شبکه‌بندی به اصطلاح «CLANNER»، دیگر به‌وجود ترانسفورماتور احتیاجی نیست. اگر شبکه‌بندی CLANNER نشد، می‌دانند که ترانسفورماتور لازم است...

❊❊❊

ریاضیات علاوه بر این تأثیرات مستقیم و مهم، فایده‌های جنبی دیگری نیز دارد که می‌تواند برای عوام و در هنگام مطالعهٔ صحیح و اصولی ریاضیات، میسر واقع شود. ما به بیان آن‌ها نیز می‌پردازیم.

از جمله این فایده‌ها که نقشی اساسی در رسیدن به حقیقت دارد، عادت‌دادن ما به نپذیرفتن امور فاقد دلیل و برهان است. این مورد را **خیام** در رسالهٔ «شرح ما اشکل من مصادرات و اقلیدس» به زیبایی بیان می‌کند:

«... و فایدت علوم ریاضی این است که موجب ورزیدگی ذهن و تندکردن خاطر شود و نیز نفس را عادت دهد، از قبول اموری که مقرون به دلیل و برهان نباشد، اجتناب کند...»

و یا هنگامی که **ویلیام هرمان** دربارهٔ محدودبودن خواص و

این که برای باز شناختن حقیقت نمی‌توانیم به چشمانمان اطمینان داشته باشیم، به انیشتین تذکر می‌دهد، این پاسخ را دریافت می‌کند که:

«البته! ولی ریاضیات عالی را هم داریم. مگر نه؟ ریاضیات مرا از قید چشمانم آزاد می‌سازد. زبان ریاضیات حتی از زبان موسیقی هم فطری‌تر و جهانی‌تر است. هر فرمول ریاضی، همچون بلوری شفاف است و به‌هیچ‌یک از حس‌های ما نیز وابسته نیست.»

در نمونه‌ای دیگر که به بررسی تاریخی موضوع می‌پردازد، می‌بینیم که تغییرناپذیری اندیشه و ارزش‌های نادرست مردم یک دوره (که به صورت غیر استدلالی بوده است)، چه زیان‌هایی به‌بار آورده است و با این که آن تفکر در زمان خودش کاملاً صحیح قلمداد می‌شده، برای ما چه‌قدر تعجب‌برانگیز و یا حتی احمقانه است. به‌عنوان مثال، فرهنگ غرب تا مدت‌ها بر این نکته تأکید می‌کرد که زمین مرکز عالم است، مسطح است و حرکت نمی‌کند. دانشمندان برای اثبات نادرستی این ادعا تحت تعقیب قرار می‌گرفتند و یا حتی اعدام می‌شدند. در این بررسی می‌بینیم که دستگاه تفتیش عقاید، برونو را به جرم مخالفت با دستگاه رسمی بطلمیوسی می‌سوزاند، گالیله را خانه‌نشین می‌کند و کپلر را به کفر متهم می‌گرداند.

* * *

تأثیر دیگری که ریاضیات در چگونگی تفکر و بینش ما می‌گذارد، شهامت است.

زمانی که به بررسی و برخورد با مسائل و یا مشکلاتی می‌پردازیم که برای پاسخگویی به آن‌ها در آن واحد چند راه‌حل یا عقیده در ذهن ما نقش می‌بندد، باید بیاموزیم که قدر این تکثر را بدانیم و در هر زمان که فکر می‌کنیم آن راه‌حل و عقیده صحیح است، به بیان آن بپردازیم (شهامت بیان عقیده). همچنین ترس و احتیاط ناشی از تصور احتمال نادرست‌بودن آن اندیشه را کنار بگذاریم و آن را با شهامت بیان کنیم. سپس به بررسی درستی و نادرستی آن بپردازیم (شهامت دفاع از عقیده). زیرا در غیر این صورت، توصیهٔ فوق ارزشی ندارد. می‌توان گفت، اصلی‌ترین سود این کار آن است که به ما چیزهای بیش‌تری علاوه بر یک راه‌حل یاد می‌دهد و حتی امکان دارد به ما روش کشف را بیاموزد.

پس از بررسی صحت یا عدم صحت یک نظر (دفاع از عقیده)، در صورت اشتباه‌بودن، باید شهامت پذیرفتن آن اشتباه را داشته باشیم؛ زیرا اصلی‌ترین رکن رسیدن به حقیقت، جدل‌نکردن با امور صحیح و آشکار است.

* * *

علاوه بر مطالب گفته شده، هنگامی که به حل مسائل ریاضی می‌پردازیم، به صورتی ناخودآگاه روش‌هایی را می‌آموزیم که می‌توانیم از آن‌ها به‌عنوان اصلی‌ترین موارد لازم برای تبحر در یک حرفه نام ببریم.

اولین مورد که انضباط است، می‌تواند به‌عنوان فرایندی ذهنی ـ عملی و به معنای قرار گرفتن، انجام‌دادن و یا به‌کاربردن هر چیز در سر جای مقدرشده برای آن و یا در جایی که باعث جلوگیری از آشفتگی و عدم‌تمرکز شود باشد. این مورد در حل مسائل ریاضی به روشنی دیده می‌شود. یعنی در هنگامی که به حل مسائل می‌پردازیم، اگر انضباط را رعایت نکنیم، ممکن است مرتکب اشتباه شویم و یا این که حل آن مسأله برای ما طاقت‌فرسا شود.

باید توجه داشته باشیم که تنها رعایت انضباط در هنگام تمرین یک عمل کافی نیست، بلکه باید آن را در سراسر زندگی‌مان، مانند تمامی موارد دیگری که یک علم در نحوهٔ تفکر به ما می‌آموزد، رعایت کنیم و نیز باید خود را چنان آهسته‌آهسته به آن عادت دهیم که اگر وقفه‌ای در انجامش به‌وجود آید، احساس کنیم چیزی را از دست داده‌ایم.

تمرکز و بردباری دو مورد دیگری هستند که ما هنگام حل مسأله با آن‌ها مواجه می‌شویم. این دو برخلاف عامل اول (انضباط)، فرایندی ذهنی در حل مسائلند و آموختن آن‌ها علاوه بر تمرین، به داشتن عشق و علاقه، و امید به مبحث مورد نظر احتیاج دارد.

* * *

نکتهٔ آخر و بسیار حائز اهمیت این که ما می‌توانیم بادقت و توجه خود، تمامی موارد گفته شده در بخش اخیر (تأثیرات و فایده‌های جنبی ریاضیات) را از علوم دیگر نیز بیاموزیم. منتها ریاضیات به مدد ساختار خوب خود، بهتر می‌تواند این نکات را آموزش دهد.

منابع

۱. سرگذشت ریاضیات/ پرویز شهریاری.

۲. ریاضیات (محتوا، روش واهمیت آن)/ گروهی از ریاضیدانان شوروی/ ترجمهٔ پرویز شهریاری.

۳. مجلهٔ آشتی با ریاضیات شماره ۳/ به سردبیری پرویز شهریاری.

۴. شاعر و اینشتن/ ویلیام هرمان/ ترجمهٔ دکتر ناصر موفقیان.

۵. ریاضیدانان نامی/ اریک تمپل‌بل/ ترجمهٔ حسن صفاری.

چند مسألهٔ جالب دربارهٔ اعداد اول

هانیه شکوه

واژهٔ «اول»، ترجمهٔ کلمهٔ «Prime» است. این کلمه در دو معنای «ساده‌بودن» و «بنیادی‌بودن» به کار برده شده است.

تعریف: عدد طبیعی $p > 1$ را اول گویند، هرگاه تنها مقسوم‌علیه‌های مثبت آن ۱ و p باشند. هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک را که اول نباشد، «مرکب» گوییم.

مثال. اعداد ۲ و ۳ و ۵ و ۷ و ۱۱ و ۱۳ و ۲۹ اول و ۱۸ و ۱۵ و ۵۱ مرکبند.

تذکر: با توجه به تعریف یاد شده معلوم است که عدد ۱ نه اول است و نه مرکب.

با توجه به تعریف عدد اول، اگر p عددی اول باشد، به طوری که $p = ab$ $(a < b)$، از آن جایی که a و b مقسوم‌علیه‌های عدد p هستند و p اول است، لذا: $a = 1$ و $b = p$ (با فرض $a < b$). بنابراین، هر عدد اول به جز تجزیهٔ بدیهی $p \times 1$ تجزیهٔ دیگری ندارد.

مثال. اگر m و n دو عدد طبیعی باشند، به طوری که $9m^2 - 4n^2 = 5$، مطلوبست تعیین m و n.

حل. با استفاده از اتحاد مزدوج طرف چپ تساوی فوق را تجزیه می‌کنیم:

$$(3m + 2n)(3m - 2n) = 5$$

چون ۵ یک عدد اول است، پس تنها تجزیهٔ آن به صورت

$a \times b = ۵$ است که در آن: $a = ۵$ و $b = ۱$. پس، از تساوی $۵\times ۱ = (۳n - ۲n)(۳m + ۲n)$ داریم: $۳n + ۲n = ۵$ و $۳m - ۲n = ۱$ (به‌وضوح مشخص است که $۳m - ۲n < ۳m + ۲n$). حال m و n را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} ۳m + ۲n = ۵ \\ ۳m - ۲n = ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} m = ۱ \\ n = ۱ \end{matrix}$$

اکنون این سؤال مطرح می‌شود که آیا بزرگ‌ترین عدد اول وجود دارد؟ پاسخ این سؤال را **اقلیدس** ۲۰۰۰ سال پیش به‌صورت زیر داده است:

قضیهٔ اقلیدس: مجموعهٔ اعداد اول نامتناهی است. به‌عبارت دیگر، بی‌نهایت عدد اول وجود دارد.

با این که بی‌نهایت عدد اول وجود دارد، توزیع اعداد اول در مجموعهٔ اعداد طبیعی پر رمز و راز است. این اعداد، برخلاف تعریف ساده‌شان، در میان اعداد طبیعی رشد می‌کنند و هیچ کس نمی‌تواند پیش‌بینی کند که عدد اول بعدی در کجا سبز خواهد شد. درعین حال، واقعیت شگفت‌انگیز دیگری هم دربارهٔ این اعداد وجود دارد: این است که به‌جز کوچک‌ترین دو عدد اول یعنی ۲ و ۳، هیچ دو عدد اول دیگری متوالی نیستند و تنها عدد ۲، عدد اول زوج است. بنابراین، همهٔ اعداد اول به‌غیر از ۲ فردند و اختلاف دو عدد اول متوالی حداقل برابر ۲ است. اگر اختلاف دو عدد اول برابر ۲ باشد، آن دو عدد اول را «دوقلو» می‌گوییم.

مثال. «۱۱ و ۱۳» و «۱۷ و ۱۹» نمونه‌هایی از اعداد اول دوقلو هستند.

نکته: هر عدد اول به یکی از صورت‌های ۲ یا $۴k + ۱$ یا $۴k + ۳$ $(K \in N)$ است. زیرا تنها عدد اول زوج، عدد ۲ است و سایر اعداد اول فردند و اعداد فرد نیز به یکی از صورت‌های $۴k + ۱$ یا $۴k + ۳$ هستند.

به‌عنوان مثال، عدد اول ۱۷ به‌صورت $۴\times۴+۱$ $(k = ۴)$ یا عدد اول ۲۳ به‌صورت $۴\times۵+۳$ $(k = ۵)$ نوشته می‌شود.

توجه کنید که عکس مطلب فوق درست نیست. یعنی نمی‌توان گفت که هر عدد به‌صورت $۴k + ۱$ یا $۴k + ۳$ اول است. مثلاً به‌ازای $k = ۵$، $۴k + ۱$ مساوی ۲۱ است و ۲۱ اول نیست. درواقع $۴k + ۱$ و $۴k + ۳$ به‌ازای بعضی مقادیر طبیعی k اعداد اول را تولید می‌کنند. با توجه به نامتناهی بودن مجموعهٔ اعداد اول می‌توان نتیجه گرفت که بی‌نهایت عدد اول از نوع $۴k + ۱$ یا $۴k + ۳$ وجود دارد.

دیریکله[1] (۱۸۵۹ـ۱۸۰۵م) ثابت کرد، اگر a و b نسبت‌به‌هم اول باشند، $a + kb$ بی‌نهایت عدد اول تولید می‌کند. البته این نکته بدین معنی نیست که $a + kb$ فقط اعداد اول تولید می‌کند.

اعداد مرسن[2] (۱۶۴۸ـ۱۵۸۸م): اعداد به‌صورت $M_n = ۲^n - ۱$ را به‌افتخار کشیش فرانسوی، **مارین مرسن**، اعداد مرسن نامیده‌اند. ولی مرسن در زمینهٔ اول‌بودن این نوع اعداد اظهارنظر نادرستی ارائه کرد. در سال ۱۶۴۴، مرسن اظهار داشت که $M_n = ۲^n - ۱$، به‌ازای اعداد اول $n = ۲,۳,۵,۷,۱۳,۱۷,۱۹,۳۱,۶۷,۱۲۷,۲۵۷$ عددی اول است و به‌ازای سایر عددهای طبیعی کوچک‌تر از ۲۵۷ عددی مرکب است.

به اعدادی به شکل $۲^n - ۱$ که در آن n اول است، اعداد اول مرسن می‌گویند.

مرسن چند اشتباه داشت. اولاً او به خطا تصور کرد $M_{۶۷} = ۲^{۶۷} - ۱$ و $M_{۲۵۷} = ۲^{۲۵۷} - ۱$ اول هستند. ثانیاً $M_{۶۱}, M_{۸۹}, M_{۱۰۷}$ را در زمرهٔ اعداد اول در نظر نگرفته بود. بعدها در سال ۱۹۵۲، اعداد اول مرسن بزرگ‌تری نیز به‌دست آمدند که عبارتند از:

$M_{۵۲۱}, M_{۶۰۷}, M_{۱۲۷۹}, M_{۲۲۰۳}, M_{۲۲۸۱}$. همچنین، در سال ۲۰۰۱ بزرگ‌ترین عدد اول مرسن به‌صورت $M_{۱۳۴۶۶۹۱۷}$ به‌دست آمده است.[3]

حال در مسألهٔ زیر می‌بینیم که شرط لازم برای اول‌بودن $۲^n - ۱$ چیست.

مسأله. اگر $۲^n - ۱$ اول باشد، نشان دهید n اول است.

اثبات. (برهان خلف) فرض می‌کنیم n اول نباشد، بنابراین می‌توان آن را به‌صورت $n = pq$ در نظر گرفت که در آن $۱ < p,q < n$. حال داریم:

$$۲^n - ۱ = ۲^{pq} - ۱ = (۲^p)^q - ۱ = (۲^p - ۱)((۲^p)^{q-۱} + \ldots + ۱)$$

به وضوح روشن است که هریک از عوامل فوق از ۱ بزرگ‌ترند؛ یعنی $۲^n - ۱$ تجزیهٔ غیربدیهی دارد که این خلاف

اعداد اول بین ۱ و ۱۰۰۰ در جدول زیر آمده‌اند:

	۲	۳	۵	۷	۱۱	۱۳	۱۷	۱۹	۲۳
۲۹	۳۱	۳۷	۴۱	۴۳	۴۷	۵۳	۵۹	۶۱	۶۷
۷۱	۷۳	۷۹	۸۳	۸۹	۹۷	۱۰۱	۱۰۳	۱۰۷	۱۰۹
۱۱۳	۱۲۷	۱۳۱	۱۳۷	۱۳۹	۱۴۹	۱۵۱	۱۵۷	۱۶۳	۱۶۷
۱۷۳	۱۷۹	۱۸۱	۱۹۱	۱۹۳	۱۹۷	۱۹۹	۲۱۱	۲۲۳	۲۲۷
۲۲۹	۲۳۳	۲۳۹	۲۴۱	۲۵۱	۲۵۷	۲۶۳	۲۶۹	۲۷۱	۲۷۷
۲۸۱	۲۸۳	۲۹۳	۳۰۷	۳۱۱	۳۱۳	۳۱۷	۳۳۱	۳۳۷	۳۴۷
۳۴۹	۳۵۳	۳۵۹	۳۶۷	۳۷۳	۳۷۹	۳۸۳	۳۸۹	۳۹۷	۴۰۱
۴۰۹	۴۱۹	۴۲۱	۴۳۱	۴۳۳	۴۳۹	۴۴۳	۴۴۹	۴۵۷	۴۶۱
۴۶۳	۴۶۷	۴۷۹	۴۸۷	۴۹۱	۴۹۹	۵۰۳	۵۰۹	۵۲۱	۵۲۳
۵۴۱	۵۴۷	۵۵۷	۵۶۳	۵۶۹	۵۷۱	۵۷۷	۵۸۷	۵۹۳	۵۹۹
۶۰۱	۶۰۷	۶۱۳	۶۱۷	۶۱۹	۶۳۱	۶۴۱	۶۴۳	۶۴۷	۶۵۳
۶۵۹	۶۶۱	۶۷۳	۶۷۷	۶۸۳	۶۹۱	۷۰۱	۷۰۹	۷۱۹	۷۲۷
۷۳۳	۷۳۹	۷۴۳	۷۵۱	۷۵۷	۷۶۱	۷۶۹	۷۷۳	۷۸۷	۷۹۷
۸۰۹	۸۱۱	۸۲۱	۸۲۳	۸۲۷	۸۲۹	۸۳۹	۸۵۳	۸۵۷	۸۵۹
۸۶۳	۸۷۷	۸۸۱	۸۸۳	۸۸۷	۹۰۷	۹۱۱	۹۱۹	۹۲۹	۹۳۷
۹۴۱	۹۴۷	۹۵۳	۹۶۷	۹۷۱	۹۷۷	۹۸۳	۹۹۱	۹۹۷	(۱۰۰۹)

اول بودن 2^n-1 است.

البته عکس مسألهٔ فوق درست نیست. به‌عنوان مثال، $2^{11}-1=2047$ که بر ۲۳ بخش‌پذیر است، اول نیست.

عدد فرما:[4] (۱۶۶۵_۱۶۰۱م) هر عدد فرما، عددی است به صورت $F_n=2^{2^n}+1\ (n\geq 0)$. اگر F_n اول باشد، آن را عدد اول فرما می‌گویند.

مسأله. اگر 2^m+1 اول باشد، نشان دهید: $m=2^n$.

اثبات. (برهان خلف) فرض کنید m توانی از ۲ نیست؛ یعنی: $m\neq 2^n$. لذا m مقسوم‌علیه فردی مانند $2k+1$ دارد که از یک بزرگ‌تر است. بنابراین:

$$M=(2k+1)L;\ (k,L\in\mathbb{N})$$

حال داریم:

$$2^m+1=2^{(2k+1)L}+1=(2^L)^{(2k+1)}+1$$

$$=(2^L+1)((2^L)^{(2k+1-1)}-2^{L(2k-1)}+\dots+1)$$

یعنی 2^{m+1} تجزیهٔ غیربدیهی دارد، پس اول نیست که این خلاف فرض است. پس نتیجه می‌گیریم که شرط لازم برای اول بودن 2^m+1، این است که $m=2^n$ باشد.

فرما مشاهده کرد که:

$F_0=2^{2^0}+1=3$، $F_1=2^{2^1}+1=5$، $F_2=2^{2^2}+1=17$، $F_3=2^{2^3}+1=257$ و $F_4=2^{2^4}+1=65537$ اولند و به خطا تصور کرد که همهٔ F_n ها اولند.

در سال ۱۷۳۲، اولر نشان داد که F_5 بر ۶۴۱ بخش‌پذیر است.

$$F_5=2^{2^5}+1=2^{32}+1=4294967297$$

بنابراین خط بطلانی بر ادعای فرما کشید. البته ممکن است برای ما چنین عددی بزرگ جلوه نکند، ولی در زمان فرما به علت محدودیت ابزار محاسبه‌های بزرگ، تشخیص اول بودن این عدد کاری بسیار دشوار بود.

اکنون ثابت شده است که به‌ازای همهٔ اعداد طبیعی $5\leq n\leq 21$، F_n مرکب است.

ریاضیدانان اعداد اول را مانند بلوک‌های ساختمانی می‌دانند که همهٔ اعداد از آن‌ها ساخته شده‌اند. به همین دلیل، سالیان درازی است که ریاضیدانان را شیفتهٔ خود ساخته و فکر آن‌ها را مشغول کرده‌اند.

زیرنویس

1. Dirichlet
2. Mersenne
3. http://www-gap.dcs.St-And.ac.uk/~History/MistTopics/Prime-numbers.html
4. Fermat

منابع

1. Burton, David M. Elementary Number Theory
۲. نظریهٔ اعداد. سیدحسین سید موسوی و شمس‌الدین انوار.

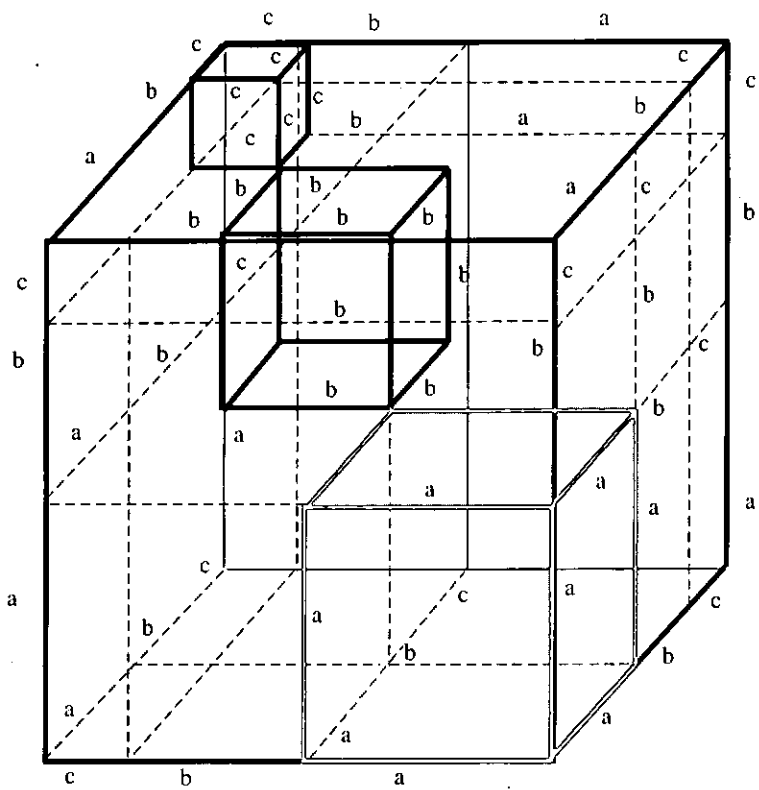
اثبات اتحادها به کمک هندسه

اثبات مکعب مجموع سه جمله ای

برای دانش آموزان سال اول متوسطه

احمد قندهاری

در شمارهٔ قبل، اثبات هندسی چند اتحاد را ملاحظه کردید. اینک در ادامه، اثبات هندسی وجبری اتحاد مکعب مجموع سه جمله‌ای را می‌آوریم.



در این شکل مکعبی به اضلاع «a+b+c» رسم شده است.

اگر روی ۱۲ یال مکعب c,b,a را جدا کنیم و آن‌ها را به نقاط مقابل وصل کنیم، در ضمن اگر از نقاط برخورد خطوطی که به‌هم وصل می‌شوند، خطوطی موازی یال‌ها رسم کنیم، جمعاً ۲۷ مکعب و مکعب‌مستطیل خواهیم داشت.

از این ۲۷ مکعب و مکعب‌مستطیل:

۱. سه مکعب به‌حجم‌های a^3, b^3, c^3 داریم.

۲. سه مکعب مستطیل به حجم a^2b،

سه مکعب مستطیل به حجم ab^2،

سه مکعب مستطیل به حجم a^2c،

سه مکعب مستطیل به حجم ac^2،

سه مکعب مستطیل به حجم b^2c و

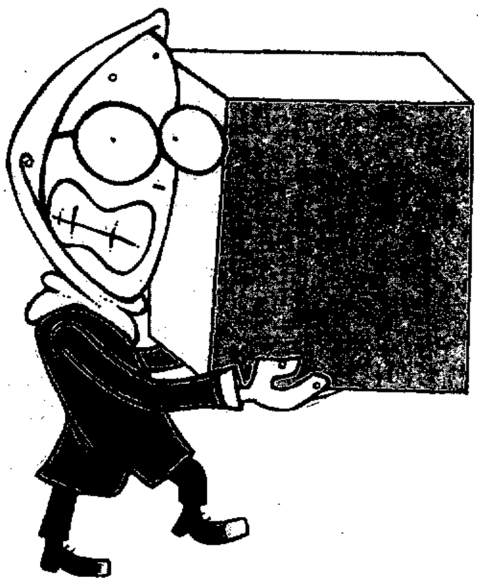
سه مکعب مستطیل به حجم bc^2.

۳. شش مکعب مستطیل به حجم abc داریم. پس:

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc$$

$$\Rightarrow (a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(a+b) + 3ac(a+c) + 3bc(b+c) + 6abc$$

توجه: اگر بخواهید کاملاً متوجه مسأله بشوید، باید مکعب اولیه را بسازید و روی هر یال به اندازهٔ c,b,a جدا کنید و چنان‌که گفتیم، عمل کنید. من هم این شکل را ساختم و



حجم‌ها را با دقت بسیار و صرف وقت زیاد در شکل ملاحظه کردم تا به نتیجهٔ فوق رسیدم.

نتایج مرحله به مرحلهٔ شکل چنین است.

الف) ۹ مکعب و مکعب مستطیل در قسمت پائینی جسم، با حجم‌های زیر ملاحظه می‌شوند.

$a^3+a^2b+a^2c$

a^2b+ab^2+abc

$a^2c+abc+ac^2$

ب) ۹ مکعب و مکعب مستطیل در قسمت میانی جسم، با حجم‌های زیر ملاحظه می‌شوند.

a^2b+ab^2+abc

$ab^2+b^3+b^2c$

$abc+b^2c+bc^2$

ج) ۹ مکعب و مکعب مستطیل در قسمت بالایی جسم، با حجم‌های زیر دیده می‌شوند.

$a^2c+abc+ac^2$

$abc+b^2c+bc^2$

$a^2c+bc^2+c^3$

مجموع آن‌ها این است:

$$a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2+3a^2c+3ac^2$$
$$+3b^2c+3bc^2+6abc=(a+b+c)^3$$

در نتیجه داریم:

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3ab(a+b)$$
$$+3ac(a+c)+3bc(b+c)+6abc$$

توجه: قطرهای مکعب‌هایی به حجم a^3, b^3, c^3 درامتداد قطر مکعب اصلی هستند.

اثبات جبری اتحاد مکعب مجموع سه‌جمله‌ای

فرض می‌کنیم $x=(a+b)$ باشد. داریم:

$$(a+b+c)^3=(x+c)^3$$
$$=x^3+c^3+3x^2c+3c^2x$$
$$=(a+b)^3+c^3+3(a+b)^2c+3c^2(a+b)$$
$$=a^3+b^3+3a^2b+3ab^2+c^3$$
$$+3c(a^2+b^2+2ab)+3ac^2+3bc^2$$
$$=a^3+b^3+3a^2b+3ab^2+c^3+3a^2c$$
$$+3b^2c+6abc+3ac^2+3bc^2$$
$$=a^3+b^3+c^3+3ab(a+b)+3ac(a+c)$$
$$+3bc(b+c)+6abc \Rightarrow$$
$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3ab(a+b)$$
$$+3ac(a+c)+3bc(b+c)+6abc$$

حل مسأله های مسابقه ای
برهان ۴۰

مسأله ۱

اگر $x-\frac{1}{x}=2$ و $k=x^8-408x$ ، آن گاه مقدار k را بیابید.

حل:

دو طرف را در $x\neq 0$ ضرب می کنیم $x-\frac{1}{x}=2$

$$x^2-1=2x \Rightarrow x^2=2x+1$$

$$x^4=(x^2)^2=(2x+1)^2=4x^2+4x+1=4(2x+1)+4x+1$$

دو طرف را به توان ۲ می رسانیم $\Rightarrow x^4=12x+5$

$$x^8=144x^2+120x+25=144(2x+1)+120x+25$$

$$x^8=288x+144+120x+25$$

$$\Rightarrow x^8=408x+169$$

$$k=x^8-408x$$

$$\Rightarrow k=408x+169-408x=169 \Rightarrow \boxed{k=169}$$

مسأله ۲

اگر $f(x+\frac{1}{x})=x^{12}+\frac{1}{x^{12}}$ ، آن گاه $f(\sqrt{3})$ را بیابید.

حل:

$$f(x+\frac{1}{x})=(x^6+\frac{1}{x^6})^2-2$$

$$\Rightarrow f(x+\frac{1}{x})=\left((x^3+\frac{1}{x^3})^2-2\right)^2-2$$

در نتیجه اگر به جای $x^3+\frac{1}{x^3}$ مساوی آن، یعنی $(x+\frac{1}{x})^3-3(x+\frac{1}{x})$ را قرار می دهیم. پس:

$$f(x+\frac{1}{x})=\left(\left((x+\frac{1}{x})^3-3(x+\frac{1}{x})\right)^2-2\right)^2-2$$

حال در این رابطه به جای $x+\frac{1}{x}$ ، $\sqrt{3}$ را قرار می دهیم.

در نتیجه:

$$f(\sqrt{3})=\left(\left((\sqrt{3})^3-3(\sqrt{3})\right)^2-2\right)^2-2$$

$$\Rightarrow f(\sqrt{3})=\left(\underbrace{\left(3\sqrt{3}-3\sqrt{3}\right)^2}_{0}-2\right)^2-2$$

$$f(\sqrt{3})=(-2)^2-2=4-2=2$$

مسأله ۳

ثابت کنید:

$$\lfloor 3x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{3} \right\rfloor$$

حل:

$x = n + p \ , \ n \in z \ , \ 0 \le p < 1$

اگر به جای x، $n + p$ را در مسأله قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\lfloor 3n + 3p \rfloor = \lfloor n + p \rfloor + \left\lfloor n + p + \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor n + p + \frac{2}{3} \right\rfloor$$

$$\Rightarrow 3n + \lfloor 3p \rfloor = n + \lfloor p \rfloor + n + \left\lfloor p + \frac{1}{3} \right\rfloor + n + \left\lfloor p + \frac{2}{3} \right\rfloor$$

پس از ساده کردن خواهیم داشت:

$$\lfloor 3p \rfloor = \lfloor p \rfloor + \left\lfloor p + \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor p + \frac{2}{3} \right\rfloor$$

$$0 \le p < 1 \ \Rightarrow \lfloor p \rfloor = 0 \ \Rightarrow$$

حال باید ثابت کنیم:

$$\boxed{\lfloor 3p \rfloor = \left\lfloor p + \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor p + \frac{2}{3} \right\rfloor} \qquad (1)$$

الف) $0 \le p < \frac{1}{3} \ \Rightarrow \begin{cases} \lfloor 3p \rfloor = 0 \\ \left\lfloor p + \frac{1}{3} \right\rfloor = 0 \\ \left\lfloor p + \frac{2}{3} \right\rfloor = 0 \end{cases} \Rightarrow$ تساوی (۱) برقرار است

ب) $\frac{1}{3} \le p < \frac{2}{3} \ \Rightarrow \begin{cases} \lfloor 3p \rfloor = 1 \\ \left\lfloor p + \frac{1}{3} \right\rfloor = 0 \\ \left\lfloor p + \frac{2}{3} \right\rfloor = 1 \end{cases} \Rightarrow$ تساوی (۱) برقرار است

ج) $\frac{2}{3} \le p < 1 \ \Rightarrow \begin{cases} \lfloor 3p \rfloor = 2 \\ \left\lfloor p + \frac{1}{3} \right\rfloor = 1 \\ \left\lfloor p + \frac{2}{3} \right\rfloor = 1 \end{cases} \Rightarrow$ تساوی (۱) برقرار است

بنابراین همواره داریم:

$$\lfloor 3x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{3} \right\rfloor$$

پاسخ تفریح اندیشه

صفحه ۴۱

جواب: $c = ab$.

حل: اگر مجموع دو ریشه، صفر باشد، ریشه‌ها قرینهٔ یکدیگرند. ریشه‌های معادله را s، s- و t فرض می‌کنیم. در این صورت:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x - s)(x + s)(x - t)$$
$$= x^3 - tx^2 - s^2x + s^2t$$

بنابراین داریم $a = -t$ و $b = -s^2$ و $c = s^2t$،

پس:

$$c = s^2t = (-b)(-a) = ab$$

اشاره

در شمارهٔ قبل برای اولین بار یک جدول ریاضی را چاپ کردیم، در این شماره پاسخ تشریحی سؤالات جدول را می‌آوریم. همچنین از همهٔ علاقه‌مندان درخواست می‌کنیم که جدول‌های ریاضی ابتکاری خود را برای ما بفرستند تا از بین آنها بهترین‌ها را چاپ کنیم.

پاسخ جدول

کامران مرادی

افقی

۱.

$f(۳)=۳+\frac{۱}{۳}=\frac{۱۰}{۳}$

$f(f(۳))=f(\frac{۱۰}{۳})=\frac{۱۰}{۳}+\frac{۳}{۱۰}=\frac{۱۰۹}{۳۰}$

$۳۰f(f(۳))+۵۰=۱۵۹$

•••••••

$p(n,۲)=\frac{n!}{(n-۲)!}=\frac{n(n-۱)(n-۲)!}{(n-۲)!}=n(n-۱)$

$\binom{n}{۲}=\frac{n!}{(n-۲)!۲!}=\frac{n(n-۱)}{۲}$

$n(n-۱)-\frac{n(n-۱)}{۲}=\frac{n(n-۱)}{۲}=۳۶$

$n(n-۱)=۷۲,\ ۹\times۸=۷۲$

$\Rightarrow n=۹;\ \binom{۹}{۶}=\frac{۹!}{۳!\times۶!}=۸۴$

•••••••

جواب‌های صحیح و نامنفی $x+y+z\leq۱۴$ برابر است با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی $x+y+z+t=۱۴$ و تعداد جواب‌های معادلهٔ اخیر برابر است با:

$\binom{n+k-۱}{k-۱}=\binom{۱۴+۴-۱}{۴-۱}=\binom{۱۷}{۳}=۶۸۰$

۲.

$۲k-۱+۲k+۱+۲k+۳=۶k+۳=۶۹\ \Rightarrow k=۱۱$

$۲۱,۲۳,۲۵\Rightarrow ۲۱۲۳۲۵$

•••••••

طبق قاعدهٔ پاسکال داریم: $\binom{n+۱}{r}=\binom{n}{r-۱}+\binom{n}{r}$

درنتیجه:

$\binom{۱۲}{۹}+\binom{۱۲}{۱۰}=\binom{۱۳}{۱۰}$

$\binom{۱۳}{۱۰}+\binom{۱۳}{۱۱}=\binom{۱۴}{۱۱}$

$\binom{۱۴}{۱۱}+\binom{۱۴}{۱۲}=\binom{۱۵}{۱۲}$

$\binom{۱۵}{۱۲}=۴۵۵$

۳.

اگر p عدد اول باشد و $(a,p)=۱$، آن‌گاه داریم $a^p\overset{p}{\equiv}a$، پس $۸۳۵^{۱۳۸۰}\overset{۱۳۸۰}{\equiv}۸۳۵$.

•••••••

$f(x)=x^۵\Rightarrow f'(x)=۵x^۴\Rightarrow f'(۱)=۵$

$۳۷f(f'(۱)-۳)=۳۷f(۵-۳)=۳۷f(۲)$

$=۳۷\times۲^۵=۳۷\times۳۲=۱۱۸۴$

۴.

$\binom{۱۵}{۳}=\frac{۱۵!}{۹!\times۶!}=۴۵۵$

•••••••

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱	۱	۵	۹		۸	۴		۶	۸	۰
۲	۲	۱	۲	۳	۲	۵		۴	۵	۵
۳	۸	۳	۵			۱	۱	۸	۴	
۴			۴	۵	۵		۲			۱
۵	۲	۱	۶	۰	۰		۱	۲	۴	۰
۶	۵	۷		۲	۵	۰		۱	۴	۲
۷	۶	۲			۰		۱	۸		۴
۸		۸	۱	۶		۵	۱		۲	
۹	۶	۰	۴	۸	۰		۵	۰	۴	۳
۱۰	۶		۴	۰	۹	۶		۲	۱	۶

۵.

به $\binom{5}{3}$ طریق، سه کتاب از ۵ کتاب سال اول را می‌توان انتخاب کرد. تعداد روش‌های انتخاب ۴ کتاب از ۶ کتاب هم برابر است با $\binom{6}{4}$. اکنون ۳ کتاب از سال اول و ۴ کتاب از سال دوم داریم که آن‌ها را به $4! \times 3!$ طریق می‌تواند در کنار هم چید. بنابراین:

$$\binom{5}{3}\binom{6}{4} \times 3! \times 4! = 21600$$

●●●●●●●

$432 = 3^3 \times 2^4$

مجموع مقسوم‌علیه‌های عدد n، از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$$

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdots \frac{p_s^{\alpha_s+1} - 1}{p_s - 1}$$

$$\sigma(432) = \frac{3^4 - 1}{3 - 1} \cdot \frac{2^5 - 1}{2 - 1} = 1240$$

۶.

$$x^2 - 12x + 35 = 0 \quad (x-5)(x-7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5; \ x_1 = 5 \\ x = 7; \ x_2 = 7 \end{cases}$$

$10x_1 + x_2 = 57$

●●●●●●●

$$S + 2_s = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 150\pi \Rightarrow h = \frac{75 - r^2}{r}$$

$$V = \pi r^2 h \qquad V = \pi r^2 \left(\frac{75 - r^2}{r}\right) = 75\pi r - \pi r^3$$

$$V' = 75\pi - 3\pi r^2 = 0 \Rightarrow r = 5,$$

$$h = 10 \qquad V = \pi r^2 h = 250\pi \Rightarrow 250$$

●●●●●●●

$(1100011)_2 = 109; \ 109 = (143)_8; \ a = 143 \Rightarrow a - 1 = 142$

۷.

$$\begin{cases} 5x + y = 32 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

$6x = 36$

$\Rightarrow x = 6, \ y = 2 \Rightarrow 10x + y = 62$

●●●●●●●

طبق قاعده، زاویهٔ خارجی هر زاویه برابر با مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور است.

$E_1 = 32 + 14 \Rightarrow E_1 = 46$

چون زاویهٔ مرکزی برابر کمان روبه‌رو است، پس داریم:

$CE = 46$

$$\frac{CE - BD}{2} = \hat{A} \Rightarrow \frac{46 - BD}{2} = 14 \Rightarrow BD = 18$$

۸.

$a = bq + r$

$a + 100 = (b+1)q + r + 2 \Rightarrow a + 100 = bq + q + r + 2$

$bq + r + 100 = bq + q + r + 2$

$100 = q + 2 \Rightarrow q = 98 \Rightarrow 98 \times 8 + 32 = 816$

●●●●●●●

برای این‌که عدد $1377 \times a$ مربع کامل باشد، باید $a = 17$ باشد. چون: $1377 = 3^4 \times 17$. پس داریم: $3a = 51$.

۹.

تعداد حالات ممکن برابر است با تعداد تبدیلات ۳ شیء از ۹ شیء. یعنی:

$$p(9,3) = \frac{a!}{3!} = 60480$$

●●●●●●●

عددی که بر همهٔ اعداد یک رقمی بخش‌پذیر است، برابر است با:

$A=[1,2,3,4,5,6,7,8,9]$

ک.م.م $A=2^3\times 3^2\times 5\times 7=2520$

$2a+3=2\times 2520+3=5043$

۱۰.

تعداد روابط بازتابی روی یک مجموعهٔ n عضوی از رابطهٔ 2^{n^2-n} به‌دست می‌آید. پس:

$2^{16-4}=2^{12}=4096$

تعداد روابط پاد متقارن روی یک مجموعهٔ n عضوی، از رابطهٔ $2^n\times 3^{\frac{n^2-n}{2}}$ به‌دست می‌آید. پس:

$2^n\times 3^{\frac{n^2-n}{2}}=2^3\times 3^{\frac{9-3}{2}}=2^3\times 3^3=216$

عمودی

۱.

$$\int\frac{x+1}{x+4}dr \qquad u=x+4\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\ x+1=u-3\end{cases}$$

$$\Rightarrow\int\frac{u-3}{u}du=\int(1-\frac{3}{u})du=u-3Lnu=x+4-3Ln(x+4)$$

$$\Rightarrow f(x)=x+4$$
$$g(x)=3Ln(x+4)$$

$8f(12)=16\times 8=128$

•••••••

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی، از فرمول 2^n به دست می‌آید:

$2^n=256$

•••••••

در یک درخت از مرتبهٔ n، تعداد مسیرها برابر است با تعداد انتخاب‌های ۲ رأس از میان n رأس. پس تعداد مسیرها برابر است با:

$\binom{12}{2}=66$

۲.

$$\begin{vmatrix}10&3&12\\1&2&3\\0&1&3\end{vmatrix}=33 \qquad \begin{vmatrix}15&0&10\\3&4&1\\0&4&5\end{vmatrix}=350$$

$350+33+130=513$

•••••••

دخترها را یک نفر حساب می‌کنیم. در این صورت، !۶ حالت داریم. همچنین خود دخترها هم در !۴ حالت می‌توانند کنار هم باشند. پس در حالت کلی داریم:

$6!\times 4!=17280$

۳.

$f(1)=5\rightarrow f(f(1))=f(5)=25\times 36+25=925;$

$100\times 925+46=92546$

چون از هر دستهٔ ارقام باید یک رقم انتخاب کرد، پس $\binom{3}{1}$ حالت برای ارقام آبی و $\binom{2}{1}$ حالت برای ارقام قرمز و $\binom{4}{1}$ حالت برای ارقام سبز وجود دارد و !۳ حالت هم برای جابه‌جا شدن در کنار هم وجود دارد. پس:

$\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{4}{1}3!=144$

۴.

اعداد فرد $A=\{1,3,5\}$؛ اعداد زوج $B=\{2,4,6\}$

$3!\times 3!\times 2=72; \qquad 7\times 72-2=502$

اندازهٔ زاویهٔ ظلی برابر نصف کمان روبه‌رو است. پس:

$AB=56\times 2=112$

چون خط BE قطر دایره است، پس اندازهٔ کمان BAE برابر با 180° است. پس:

$180-112=68\Rightarrow a=68\Rightarrow 10a=680$

۵.

$$\begin{matrix}-2\times\\3\times\end{matrix}\begin{cases}2x+3y=22\\3x+2y=28\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-4x-6y=-44\\9x+6y=84\end{cases}$$

$5x=40\Rightarrow x=8\Rightarrow y=2\Rightarrow 10x+y=82$

•••••••

مجموع اعداد ۱ تا ۱۰۰، یک تصاعد عددی با قدر نسبت ۱ است:

$1+2+3+\cdots+100$

$$a=1,\ d=1,\ L=100;\ S_n=\frac{100(1+100)}{2}=5050$$

•••••••

$2^7\overset{100}{\equiv}28 \qquad 2^2\times2^7\overset{100}{\equiv}12 \qquad (2^9)^2\overset{100}{\equiv}(12)^2$

$2^2\times2^{18}\overset{100}{\equiv}44\times2^2 \qquad 2^{20}\overset{100}{\equiv}76 \qquad 2^{20}+33\overset{100}{\equiv}09$

۶.

یک تصاعد عددی با قدر نسبت ۸ است.

$1,8,16,24$

$$a=1,\ n=11,\ d=8\Rightarrow S_n=\frac{11[2+10\times8]}{2}=451$$

۷.

تعداد دورها به طول r در یک گراف کامل k_p، از رابطهٔ $\binom{p}{r}$ به دست می‌آید.

$$\binom{p}{r}=\binom{10}{3}=120=a\Rightarrow a+1=121$$

•••••••

اگر چهارضلعی ABCD قابل محاط در دایره باشد، باید مجموع زاویه‌های روبه‌رو برابر ۱۸۰° باشد. یا به عبارت دیگر مکمل یکدیگر باشند، پس داریم:

$A+C=180\Rightarrow \hat{C}=115$

۸.

تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت و صحیح عدد n که تجزیهٔ استاندارد آن $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ است، به صورت زیر است:

$$\sigma(n_1)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_s+1)$$

$$\sigma(2^8\times3^5\times5^3\times7^2)=(8+1)(5+1)(3+1)(2+1)=9\times6\times4\times3=648$$

•••••••

$$a=\binom{8}{3}=56;\ 4\times56-6=218$$

•••••••

$3^5\overset{100}{\equiv}43\ ; \qquad 3^{10}\overset{100}{\equiv}49\ ; \qquad 3^{20}\overset{100}{\equiv}01$

$3^{20}+1\overset{100}{\equiv}02$

۹.

$$a=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4\times3\times r^3}{3}=4r^3=4\times6\times6\times6=864$$

$864-10=854$

•••••••

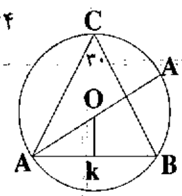
$AB=2\hat{c}=60$

چون AA' قطر دایره است؛ پس ABA' برابر است با ۱۸۰°. پس:

$180-60=120$

چون A_1 روبه‌روی کمان $A'B$ است و زاویهٔ محاطی نصف کمان روبه‌رو است، پس اندازهٔ زاویهٔ A_1 برابر با ۶۰° است.

$a=60\Rightarrow a-16=44$



•••••••

$$y=\sqrt{x^3-3x^2}=|x|\sqrt{x-3}\Rightarrow\begin{cases}y=x\sqrt{x-3} & x\ge0\\ y=-x\sqrt{x-3} & x<0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}f'_+(0)=\sqrt{3}\\ f'_-(0)=-\sqrt{3}\end{cases}$$

$$\tan\theta=\left|\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\times\sqrt{3}}\right|\Rightarrow\tan\theta=\sqrt{3}\Rightarrow\theta=60$$

$\Rightarrow a=60\Rightarrow 4a+1=241$

۱۰.

$49^2\overset{100}{\equiv}01\ \Rightarrow\ 49^{578}\overset{100}{\equiv}01 \qquad 49^{578}+4\overset{100}{\equiv}05$

•••••••

$$2^{\frac{n^2+n}{2}}\Rightarrow2^{\frac{16+4}{2}}=2^{10}=1024$$

•••••••

تعداد جواب‌های صحیح و نسبت معادلهٔ $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ برابر با $\binom{n-1}{k-1}$ است. پس داریم:

$$\binom{10-1}{3-1}=\binom{9}{2}=36$$

اعداد فیبوناتچی

Febonacci Numbers

Nccolai N. Vorobiev

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

اشاره

در شمارهٔ قبل به معرفی اعداد فیبوناتچی پرداختیم، در ادامهٔ مطلب رابطه‌های بین اعداد فیبوناتچی را بررسی می‌کنیم:

۵. بسیاری از رابطه‌های بین اعداد فیبوناتچی را می‌توان به راحتی و با استفاده از طرحی موسوم به «روش استقرایی کامل»[1] به اثبات رساند.

طرح صوری[2] مزبور که گاهی به آن «روش استقرای ریاضی»[3] نیز گفته می‌شود، دراساس به صورت زیر است:

برای اثبات این موضوع که گزارهٔ معینی شامل اعداد طبیعی، به ازای هر عدد، درست است، کافی است که:

الف) تحقیق کنیم، گزارهٔ مزبور اگر ۱ = n درست است؛

ب) ثابت کنیم، هرگاه آن گزاره به ازای عدد طبیعی دلخواه n درست باشد، آن‌گاه به ازای ۱ + n نیز چنین است.

بنابراین، هر اثبات استقرایی[4] گزاره‌ای که طبق فرض به ازای هر عدد طبیعی، درست است، باید در دو مرحله انجام گیرد:

ابتدا باید درستی گزارهٔ مورد اثبات را به ازای ۱ = n محقق کنیم. این بخش از اثبات را که معمولاً بسیار آسان است، گاهی «پایهٔ استقرا»[5] می‌نامیم.

در بخش دوم اثبات که اصولاً پیچیده‌تر است، فرض می‌کنیم گزاره به ازای عدد دلخواه معین، اما ثابت n ی درست است. سپس از این فرض[6] که اغلب به «فرض استقرایی»[7] موسوم است، برای اثبات این مطلب استفاده می‌کنیم که گزارهٔ مورد بحث، به ازای عدد صحیح[8] بعدی ۱ + n نیز صادق است.

بخش دوم اثبات استقرایی را «مرحلهٔ استقرایی»[9] یا «انتقال استقرایی»[10] می‌نامند.

توضیح مفصل روش استقرای ریاضی و تعداد بسیاری از مثال‌های توضیح دهندهٔ کاربردهای صورت‌های گوناگون این اصل[11] را می‌توان درکتاب زیر:

«The method of Mathematical Induction»

اثر "I.S.Sominskii" یافت.

به این ترتیب، به خصوص صورتی از استقرای ریاضی که ما به‌طور مکرر در زیر از آن استفاده کرده‌ایم، درصفحهٔ ۱۳ کتاب «Sominskii» آورده و بعداً در صفحات ۲۱ و ۲۲ در مثال ۷ و در مسألهٔ ۱۲ توضیح داده شده است (این کتاب توسط پرویز شهریاری به فارسی ترجمه شده است).

این صورت خاص استقرای ریاضی با تحقیق مستقیم، به ازای ۱ = n و ۲ = n آغاز می‌شود و با مرحله استقرایی از n و ۱ + n به ۲ + n ادامه می‌یابد.

گاهی می‌توانیم استقراهای ریاضی را گسترش دهیم و آن‌ها را به‌طور مختصر انتقال‌هایی «از جمیع اعداد صحیح و مثبت کم‌تراز n، به n» بنامیم.

باید توجه داشته باشیم که در چنین حالاتی به انجام اثبات خاص باید استقرا نیازی نیست، زیرا، دراین حالات به بیان صوری، اثبات به ازای ۱ = n توسط انتقال از «جمیع» اعداد صحیح و مثبت کم‌تراز ۱ که واضحاً موجود نیستند - به ۱

انجام گرفته است.

در این مرحله، تغییر روش استقرای ریاضی را با اثبات این موضوع توضیح می‌دهیم که هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت حاصل ضرب عامل‌های اول[12] نوشت.

برای آغاز کار فرض می‌کنیم، هر عدد صحیح و مثبت کوچک‌تر از عدد طبیعی معین n را می‌توانی به صورت حاصل ضربی از اعداد اول بیان کرد.

اگر n اول باشد، دراین صورت $n = n$ نمایش مطلوب را به دست می‌دهد. اگر n اول نباشد، آن‌گاه بنا به تعریف اعداد اول می‌توانیم، آن‌را به صورت حاصل ضرب دست کم دو عامل بیان کنیم؛ یعنی $n = n_1 n_2$ که در آن $n_1 \neq 1$ و $n_2 \neq 1$

از آن‌جا که $n_1 < n$ و $n_2 < n$، فرض استقرایی ایجاب می‌کند که بتوان، n_1، n_2 را به صورت حاصل ضرب‌های عوامل اول نوشت. در نتیجه، n را می‌توان به صورت حاصل ضرب عوامل اول نوشت.

سرانجام صورت‌های پیچیده‌تر استدلال‌های استقرایی[13] را در اثبات قضیهٔ ارائه شده مقاله‌های آینده، بررسی خواهیم کرد.

۶. ساده ترین توضیح مفهوم استقرا در ارتباط با کاربردهایی که با اعداد فیبوناتچی سروکار دارند، توطی تعریف خود این اعداد به‌دست می‌آید. این تعریف، همان‌گونه که درمقدمه اشاره کردیم، با مشخص کردن دو عدد اول فیبوناتچی، $u_1 = 1$ و $u_2 = 1$ و انتقال استقرایی از u_n و u_{n+1} به u_{n+2}، داده شده با رابطهٔ استقرایی $u_n + u_{n+1} = u_{n+2}$ بنا شده است.

در حالت خاص، از این تعریف به طور اتوماتیک مشخص می شود که هر گاه دنبالهٔ عددی معینی دارای دو جملهٔ اولیهٔ برابر ۱ باشد، و هر جملهٔ بعدی آن با جمع دو جملهٔ ما قبل آن به دست می‌آید، آن دنباله، دنبالهٔ اعداد فیبوناتچی است.

مثالی که هم اکنون مورد بحث قرارمی‌دهیم، به «مسألهٔ خرگوش»[14] معروف است. این مثال را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

خرگوشی دریکی از دو جهت کوچه‌ای می‌دود که به چندین حجره تقسیم شده است. وی از هر حجره یا به حجرهٔ بعدی یا به حجرهٔ بعد از حجرهٔ بعدی می‌پرد. خرگوش مزبور روی دقیقا $n-1$ حجره، به چند روش متفاوت می‌پرد؟ به خصوص، خرگوش از حجره اول به حجره n ام به چند طریق می‌تواند برود؟

در این مسأله دو گروه از پرسش‌ها را با این شرط یکسان در نظر می‌گیریم که حجره‌هایی که خرگوش به آن‌ها می‌پرد، یکسان باشند.

فرض می‌کنیم، تعداد مورد جست‌وجو x_n باشد. واضح است که $x_1 = 1$؛ زیرا تنها به یک روش می‌توان از حجرهٔ اول آغاز، وبه همان محل ختم کرد؛ یعنی، اصلاً هیچ پرش صورت نگرفته است.

گذشته از این، $x_2 = 1$؛ زیرا برای رفتن از حجرهٔ اول به دوم دقیقاً یک روش موجود است. این روش، پرسش به حجرهٔ مجاور است.

اکنون فرض می‌کنیم، خرگوش مورد بحث می‌خواهد به حجرهٔ $(n+2)$ ام برسد. تعداد روش‌هایی که با آن‌ها می تواند به این هدف برسد، به صورت نمادی، x_{n+2} است. اما باید ملاحظه کنیم که این x_{n+2} روش متفاوت، به دو رده[15] تقسیم می‌شوند؛ زیرا تفاوت بین آن‌ها از همان آغاز رخ می‌دهد:

خرگوش از حجرهٔ اول می‌تواند یا به حجرهٔ دوم برود، یا از روی این حجره بپرد و درحجرهٔ سوم به زمین بنشیند. از حجرهٔ دوم می‌تواند به x_{n+1} روش به حجرهٔ $(n+2)$ ام برسد، و از حجرهٔ سوم به x_n روش به حجرهٔ $(n+2)$ ام می‌رسد.

به این ترتیب، مشخص کردیم که دنبالهٔ:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

و رابطهٔ بازگشتی:

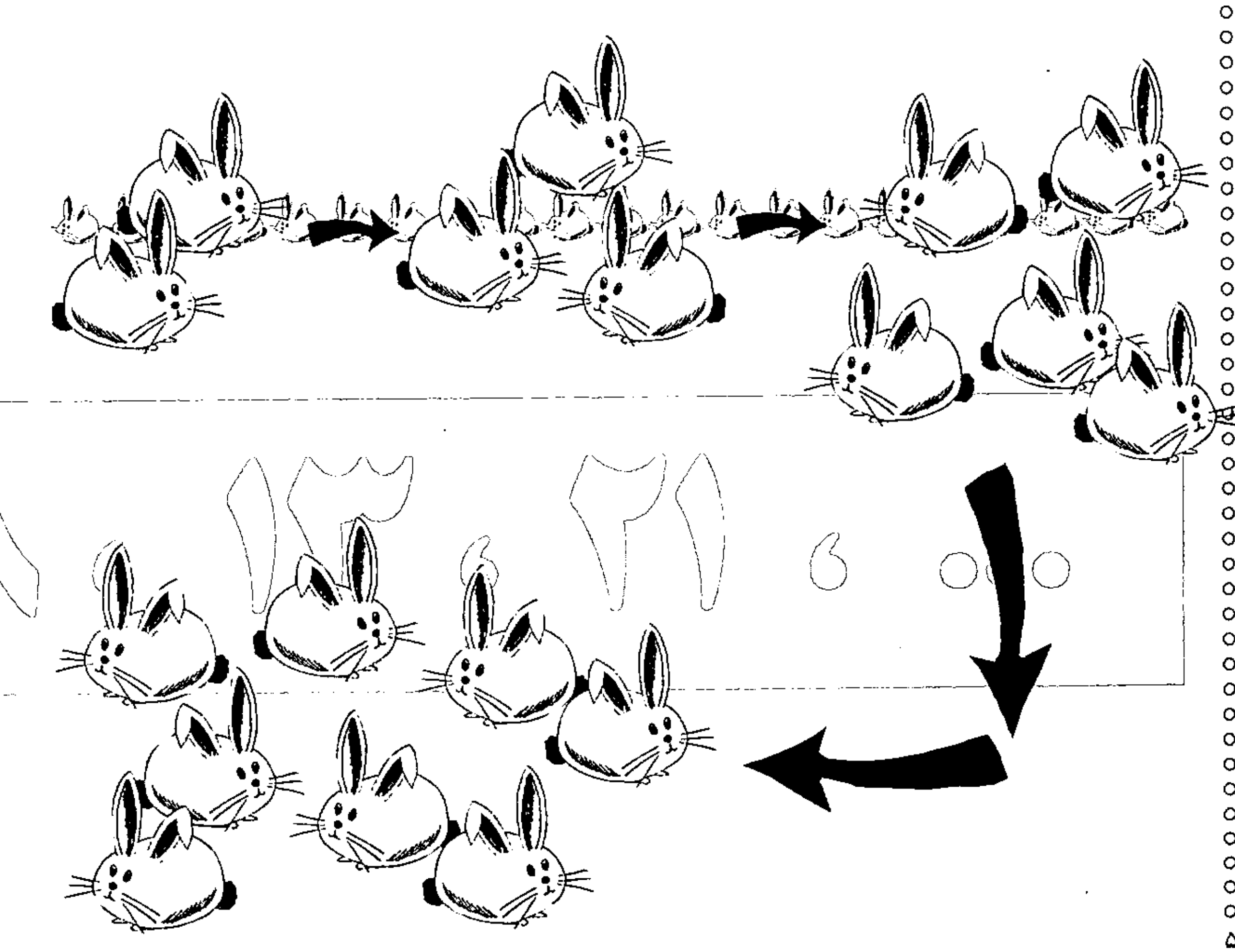
$$x_n + x_{n+1} = x_{n+2}$$

صادق است، و بنابراین باید بر دنبالهٔ اعداد فیبوناتچی منطبق شود؛ یعنی:

$$x_n = u_n$$

۷. اکنون با استفاده از استقرا، به اثبات فرمول مهم زیر می‌پردازیم:

$$u_{n+m} = u_{n-1}u_m + u_n u_{m+1} \qquad (۸-۱)$$



اثبات با استقرای بر m انجام می‌گیرد. به ازای $m = 1$،
فرمول (۱-۸) به صورت:

$$u_{n+1} = u_{n-1}u_1 + u_n u_2$$

در می‌آید که آشکارا درست است.

فرمول (۱-۸)، به ازای $m = 2$ نیز درست است؛ زیرا:

$$u_{n+2} = u_{n-1}u_2 + u_n u_3 = u_{n-1} + 2u_n = u_{n-1} = u_n + u_n + u_{n+1}u_n$$

به این ترتیب، مرحلهٔ پایهٔ استقرا به اثبات می‌رسد. مرحله استقرایی را نیز می‌توان به روش زیر اثبات کرد:

فرض می‌کنیم، فرض (۱-۸) به ازای $m = k$ و $m = k+1$ درست است و نشان می‌دهیم، به ازای $m = k+2$ نیز چنین است. بنابراین، فرض می‌کنیم:

$$u_{n+k} = u_{n-1}u_k + u_n u_{k+1}$$

$$u_{n+k+1} = u_{n-1}u_{k+1} + u_n u_{k+2}$$

با جمع جمله‌به‌جمله دو معادله اخیر داریم:

$$u_{n+k+2} = u_{n-1}u_{k+2} + u_n u_{k+3}$$

و این دقیقاً همان نتیجه مطلوب است.

فرمول (۱-۸) را می‌توان به سادگی برحسب مسألهٔ خرگوش، تعبیر و حتی اثبات کرد.

به طور مشخص، همهٔ روش‌هایی که خرگوش می‌تواند از حجرهٔ اول به حجرهٔ $(n+m)$ ام برود، برابر $u_n + m$ است. در میان این روش‌ها، روش‌هایی را داریم که در آن‌ها، خرگوشی حجرهٔ nام را از دست می‌دهد، و نیز روش‌هایی را که در آن‌ها به این حجره می‌رسد.

در این صورت، خرگوشی در رابطه با هر روش در ردهٔ اول، باید ابتدا به حجرهٔ $(n-1)$ ام برسد که به $u_n - 1$ روش متفاوت این کار را می‌کند و سپس پرسشی به حجرهٔ $(n+1)$ ام انجام می‌دهد.

سرانجام، باید به $(n-m)-(n+1) = m-1$ حجرهٔ باقیمانده برود که این کار به u_m ممکن می‌شود. بنابراین، ردهٔ اول شامل $u_{n-1}u_m$ روش است.

به روش مشابه، خرگوش به ازای هر گروه از پرش‌هایی که به ردهٔ دوم تعلق دارند، ابتدا به حجرهٔ n ام می‌رسد که ـ u_n روش ممکن برای انجام این کار موجود است ـ و سپس دقیقاً به u_{m+1} روش به حجرهٔ $(n+m)$ ام حرکت می‌کند.

بنابراین، ردهٔ دوم شامل $u_n u_{m+1}$ روش پرسش است، و به این ترتیب، فرمول (۱-۸) به اثبات می‌رسد.

۸. با قرار دادن $m = n$ در فرمول (۱-۸) به دست می‌آوریم:

$$u_{2n} = u_{n-1}u_n + u_n u_{n+1}$$

یا

$$u_{2n} = u_n(u_{n-1} + u_{n+1}) \qquad (۱-۹)$$

۱ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۵

از معادلهٔ (۱-۹) آشکار است که u_{2n} بر u_n بخش‌پذیر است. درفصل بعد، گزارهٔ عمومی‌تری را اثبات خواهیم کرد. فرمول (۱-۹) از آن‌جا که:

$$u_n = u_{n+1} - u_{n-1}$$

می‌تواند به صورت:

$$u_{2n} = (u_{n+1} - u_{n-1})(u_{n+1} - u_{n-1})$$

یا:

$$u_{2n} = u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2$$

نوشته شود؛ یعنی، تفاضل مربع‌های دو عدد فیبوناتچی‌ای که اندیس‌های آن‌ها به اندازهٔ دو واحد اختلاف دارند، باز هم عددی فیبوناتچی است (که علاوه بر این، اندیسی زوج دارد).

به طور مشابه، با قرار دادن $m = 2n$ در معادلهٔ (۱-۸)، می‌توان نشان داد که:

$$u_{3n} = u_{n+1}^3 + u_n^3 - u_{n-1}^3$$

۹. در مطلب بعد، می‌خواهیم از فرمول:

$$u_n^2 = u_{n-1}u_{n+1} + (-1)^{n+1} \qquad (۱-۱۰)$$

استفاده کنیم. فرمول مورد بحث را با استفاده از استقرای بر n به اثبات می‌رسانیم. فرمول (۱-۱۰) به ازای $n = 2$ به صورت:

$$u_2^2 = u_1u_3 - 1$$

درمی‌آید.

اکنون فرض می‌کنیم، فرمول (۱-۱۰) به ازای اندیس معین n ی درست باشد. با افزودن $u_n = u_{n+1}$ به دو طرف این رابطه، به دست می‌آوریم:

$$u_n^2 + u_nu_{n+1} = u_{n-1}u_{n+1} + (-1)^{n+1}$$

یا

$$u_n(u_n + u_{n+2}) = u_{n+1}(u_{n-1} + u_n) + (-1)^{n+1}$$

یا:

$$u_n + u_{n+2} = u_{n+1}^2u_{n+1} + (-1)^{n+1}$$

یا:

$$u_{n+1}^2 + u_nu_{n+2} + (-1)^{n+1}$$

به این ترتیب، مرحلهٔ استقرایی مسأله محقق می‌شود ودر نتیجه، فرمول (۱-۱۰) به ازای هر n به اثبات می‌رسد.

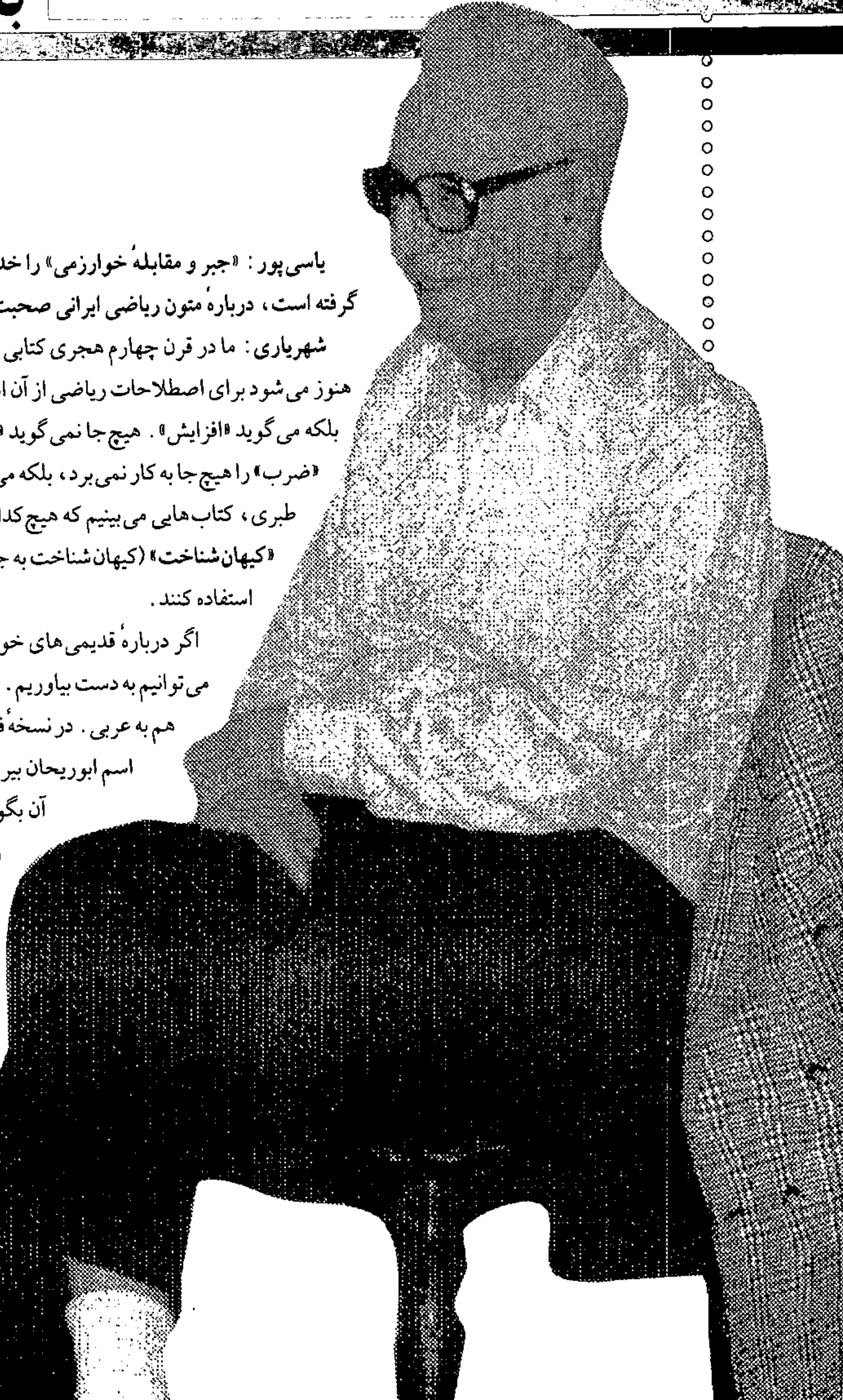
منبع

Popuar Leatures on Malhematics Series, vof.3. Mosecow:Nauka.1974.

زیر نویس

1.Method of compleate induction
2.formal scheme
3.Method of mathematical induction
4.indutive proof
5.basis of induction
6.assumptcon
7.inductive assumption
8.integer
9.inductive step
10.inductive transition
11.principle
12.prime numbers
13.inductive reasonings
14.Bunny problem
15.class

گفتگوی خودمانی با استاد شهریاری



یاسی‌پور: «جبر و مقابلهٔ خوارزمی» را خدیوجم ترجمه کرده است که از شما کمک گرفته است، دربارهٔ متون ریاضی ایرانی صحبت بفرمایید.

شهریاری: ما در قرن چهارم هجری کتابی داریم به اسم «**شمارنامه**» از **ایوب طبری**. هنوز می‌شود برای اصطلاحات ریاضی از آن استفاده کرد. او هیچ‌جا نمی‌گوید «جمع»، بلکه می‌گوید «افزایش». هیچ‌جا نمی‌گوید «تفریق»، بلکه می‌گوید «کاهش»، و کلمهٔ «ضرب» را هیچ‌جا به کار نمی‌برد، بلکه می‌گوید «زدن». حالا هزار سال بعد از ایوب طبری، کتاب‌هایی می‌بینیم که هیچ‌کدام نتوانسته‌اند لااقل از «**شمارنامه**» یا کتاب «**کیهان‌شناخت**» (کیهان‌شناخت به جای نجوم و اخترشناسی به کار برده می‌شد) استفاده کنند.

اگر دربارهٔ قدیمی‌های خودمان مقداری کاوش کنیم، خیلی چیزها می‌توانیم به دست بیاوریم. «**التفهیم**» را **ابوریحان** هم به فارسی نوشته، هم به عربی. در نسخهٔ فارسی آن اصطلاحات بسیاری وجود دارد. اسم ابوریحان بیرونی چه‌قدر عجیب است. یک نکته دربارهٔ آن بگوییم. ابوریحان به دختری علاقه‌مند بود ریحانه نام که با شاه خوارزم ازدواج می‌کند. موقعی که شاه خوارزم می‌میرد، او بعد از آن ریحانه را می‌گیرد. ولی از همان ابتدا اسم خودش را گذاشته بود ابوریحانه؛ یعنی پدر ریحانه. کتاب «**التفهیم**» را هم به خاطر او، با میل او و به نام او نوشته است؛ به نام ریحانه.

یاسی‌پور: دربارهٔ بی‌خبر بودن معلمان ما از آثار فرهنگی گذشته‌مان، من هم با نظر شما

در خرداد ۱۳۸۲ در دو جمعه متوالی، نشستی با استاد ارجمند جناب آقای پرویز شهریاری داشتیم. افراد حاضر در جلسه به غیر از خود استاد، عبارت بودند از: آقایان رستمی، قندهاری، یاسی‌پور، هاشمی موسوی، شرقی، امیری وصدر، و همه از اعضای هیأت تحریریه برهان، گفت‌وگوها مفصل بود و خودمانی، از میان آن همه یک بخش را در شماره قبل و این مختصر را در این شماره از مجله برای شما خوانندگان گلچین کرده‌ایم. باشد که از تجربیات استاد بهره کافی را ببریم.

موافقم. بنده کتاب «مفتاح‌الحساب» غیاث‌الدین جمشید کاشانی را دارم که به زبان عربی و چاپ دانشگاه حلب سوریه است. کشوری که خیلی هم ثروت و امکانات ندارد. از نظر وضع مالی هم، از ما وضع خراب‌تری دارند. عنوان این کتاب و کتاب‌هایی که آن‌جا چاپ کرده و تعدادشان زیاد است، این است: «تُراثُنا». یعنی ارث و میراث ما. در واقع کتاب «مفتاح‌الحساب» کاشانی را جزو میراث عرب در نظر گرفته‌اند و بالای آن کتاب این عنوان است: تراثُنا. و کتابی که یوش کوویچ نوشته است که مفصلاً اشاره فرمودید. او تحقیقات بسیار زیادی در این زمینه کرده است. در عین حال در مدت عمر خودش حدود چهل و چند دکتر ریاضی در تاریخ علم و به‌خصوص تاریخ علم مشرق‌زمین تربیت کرده است. آن‌وقت ما با آن‌ها برخورد نداریم.

یک نمونهٔ دیگر کتاب «خلاصة‌الحساب» شیخ بهایی است. البته دکتر مصاحب در یکی از مقالاتش می‌گوید: این کتاب مطالب چندان مهمی ندارد. نباید هم داشته باشد، برای آن که رسم این بود که کتاب‌ها را خلاصه کنند، مثل «تنقیح‌المنطق»، یا «تهذیب‌المنطق»، و «خلاصة‌الحساب» که شیخ بهایی نوشته است. این کتاب را در زمان قاجاریه، فرهادمیرزا که یکی از شاهزادگان قاجار است، به زبان فارسی ترجمه کرده است. در حالی که ما نه ترجمهٔ فارسی آن را داریم و نه متن عربی‌اش را. الان متن عربی آن در حوزه‌ها تدریس می‌شود. این کتاب جمع و تفریق بسیار نازلی دارد. «ضرب» به سبک بسیار قدیمی است، ولی هنوز به عنوان کتاب درسی ریاضیات، برای بعضی از طلبه‌ها که علاقه‌مندند، تدریس و مطرح می‌شود. ما هنوز حتی راجع به متن فرهادمیرزا نیز اشرافی نداریم و به آن توجه نکرده‌ایم. قرار بود من به اتفاق استاد شهریاری روی همین کتاب جمشید کاشانی و مفتاح‌الحساب و رسالهٔ محیطیه کار کنیم. مقداری هم کار کردیم و قرار بود دانشگاه امیرکبیر آن را چاپ کند که به دلایلی نشد. سرانجام هم خود استاد، یک جلد آن را چاپ کردند. عنوانش را هم بفرمایید.

شهریاری: «جمشید کاشانی، ریاضیدان ایرانی.»

یاسی‌پور: ولی روی آن دو کتاب دیگر کار نکردیم، برای این که دنبالشان نیامدند. به هر حال راجع به دو کتاب «رسالهٔ محیطیه» و «مفتاح‌الحساب» که قرار بود روی آن‌ها کار کنیم، یک کارتن یادداشت و مطلب دارم. «خلاصة‌الحساب» نیز همچنان مانده است. برای این که انسان وقتی کار را رها کرد، دو مرتبه سراغش رفتن خیلی مشکل است. نکتهٔ دیگر این است که آن کتاب‌ها اصطلاحات عربی دارند که باید به فارسی امروزی دربیایند و این هم خیلی کار مشکلی است. دوباره باید آن‌ها را تنظیم کنید که بسیار وقت‌گیر است.

شهریاری: همان‌طور که فرمودید، آن‌ها مفتاح‌الحساب را ارث و میراث خودشان می‌دانند. علتش این است که جمشید کاشانی را می‌گویند «الکاشی». الکاشی را هم به کاشان نسبت نمی‌دهند. فامیلش الکاشی بوده، آن وقت می‌شود ریاضیدان عرب. آن دیگری هم الخیام است. سه یا چهار سال پیش در پاریس بزرگداشتی برای خیام گرفتند. من تمام مقالاتشان را خواندم. حتی یک نفر نگفت که او ایرانی است و به کرات گفته شد که او ریاضیدان عرب است. رشدی راشد که مورخ علم در

از چپ به راست به ترتیب: آقایان: یاسی پور، شهریاری، امیری، [illegible]، قندهاری و هاشمی موسوی

دانشگاه پاریس است، فقط در زمینهٔ «خیام، ریاضیدان عرب» سخنرانی کرد؛ با وجودی که خیام نیشابوری، اسمش همراهش هست.

من خیال می‌کنم تا حدی گناه از ما ایرانی‌هاست. ما باید آن‌ها را بیش‌تر بشناسیم و به دنیا بفهمانیم که آن‌ها ایرانی بوده‌اند. حتی ابن خلدون وقتی که نمونه‌هایی را پیدا کرده است از کسانی که عرب بودند و نامی داشتند، مشخص کرده است که این‌ها هم باز رگ و ریشهٔ ایرانی دارند. به همان مناسبت یک جا می‌گوید: «علم هرجا هست، متعلق به ایرانی‌هاست. اگر نزد کس دیگری هم پیدا بشود، باز ریشه‌اش، اصلش، به ایرانی‌ها برمی‌گردد»؛ با وجود این که خودش اهل شمال آفریقاست. خیلی آدم باانصافی بوده است.

یاسی‌پور: بله، چون ابن خلدون متفکر بود و مقدمهٔ او در فلسفهٔ تاریخ، خیلی معروف است و امروز هم از جمله منابعی است که به آن استناد می‌کنند.

شهریاری: فضل نیریزی آدم بزرگی است که تاکنون سی‌وسه کتابش را شناخته‌اند. فرنگی‌ها به او می‌گویند «آناریوس». من نمی‌دانم این اسم را از کجا آورده‌اند؛ آناریوس، ریاضیدان عرب. این اسم نه با فضل می‌خواند، نه با نیریزی.

یاسی‌پور: در شرح حالتان از مدرسه‌های معروف کرمان در آن زمان نام بردید؛ «کاویانی» و «ایران‌شهر» و این که مدرسهٔ ایران‌شهر از سوم دبستان کلاس داشت تا سوم دبیرستان. مدیر مدرسه شخصی به نام برزو آمیغی بود. او قبل از این که معلم‌ها به مدرسه بیایند، یک ساعت و نیم قبل از این که مدرسه شروع شود، به مدرسه می‌آمد.

شهریاری: بله، او ساعت شش مدرسه بود و ساعت هشت کلاس‌ها شروع می‌شد.

یاسی‌پور: به کار بچه‌ها رسیدگی می‌کرد؛ به مشق‌ها، مسائل و سؤالاتشان. ولی شما در خاطراتتان خاطره‌ای از برزو آمیغی نقل نکرده‌اید. آیا از این شخص خاطره‌ای ندارید که بدانیم در نظر خود شما یا در نظر بچه‌ها، کارش خوب بوده است یا بد؟

شهریاری: یکی دو مورد را عرض می‌کنم. یکی همین که او هر روز شش صبح مدرسه بود. از کلاس سوم متوسطه که نهم بود، شروع می‌کرد. اول مشق آن‌ها را تصحیح می‌کرد. بعد می‌آمد کلاس هشتم و همین طور تا می‌رسید به کلاس سوم. پیش سومی‌ها نزدیک‌های زنگ می‌آمد که آن‌ها آمده باشند؛

چون بچه‌تر بودند.

این آدم تمام زنگ‌های تفریح هم در حیاط بود و بین بچه‌ها. سوتش هم دستش بود. تا یک کسی خطایی می‌کرد، یک سوت می‌زد. ظهرها هیچ جا نمی‌رفت. در مدرسه بود و عصرها بعد از این که مدرسه تعطیل می‌شد، به یک زمین فوتبال می‌رفت.

آدم عجیبی بود. تمام وجودش در مدرسه بود. مثلاً کلاس سوم متوسطه امتحان نهایی داشت، و او می‌آمد. می‌توانست اصلاً نیاید، اما می‌آمد و سر می‌زد.

مدرسه حیاطی داشت که در آن ده بیست درخت انار بود. هیچ‌کس حق نداشت به انارها دست بزند تا موقعی که برسند. آن‌وقت مستخدم مدرسه را می‌فرستاد همه را می‌چید و آن‌ها را در سه دسته می‌چید: انارهای خوب، انارهای متوسط و انارهای بد. آن وقت شاگردها باید صف می‌کشیدند و او به هر شاگرد از هر دسته یکی می‌داد. بعضی‌ها که البته آن موقع کم بودند، انارها را دور می‌ریختند. ولی برای ما، یعنی اکثر بچه‌ها، خیلی باارزش بود، سه تا انار داشتیم و می‌خوردیم.

به هرحال این برزو آمیغی که به او میرزابرزو می‌گفتند، تا آخرین روز زندگی‌اش در همان مدرسهٔ ایرانشهر بود. به نظر من اگر کسی بخواهد یک فرهنگی درست و حسابی را بشناسد، باید شرح‌حال زندگی برزو آمیغی را بخواند.

یاسی‌پور: شما خسته شده‌اید، ولی دو مطلب دیگر مانده است. قطعه‌ای به یادم افتاد از بوستان سعدی که می‌خواهم با خواندن آن، سؤال بعدی را مطرح کنم. سعدی می‌گوید:

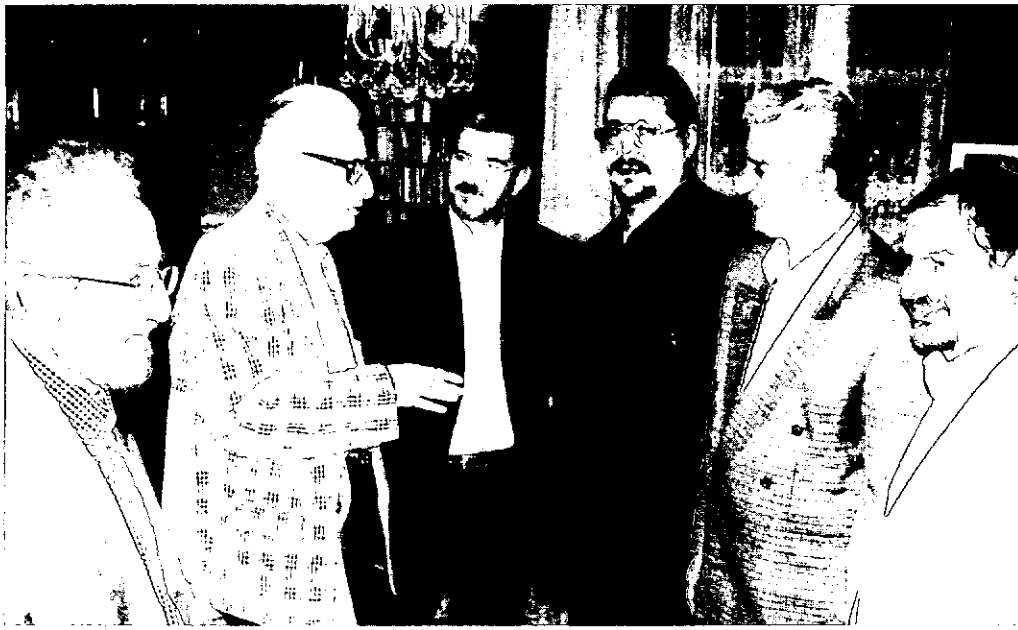
ز عهد پدر یاد دارم همی
که باران رحمت بر او هر دمی
که در خردی‌ام لوح و دفتر خرید
ز بهرم یکی خاتم زر خرید
به در کرد ناگه یکی مشتری
به خرمایی از دستم انگشتری
چو نشناسد انگشتری طفل خرد
به خرمایی از وی توانند برد
بعد می‌گوید:
تو هم قیمت عمر نشناختی
که در عیش شیرینش انداختی

در شرح حالتان، شما اشاره کرده‌اید که فوت پدرتان در چهل و شش سالگی اتفاق افتاد. نوشته‌اید پدر می‌خواست صحبتی با شما بکند، ولی مادر شما را فرستاد به دنبال خرید نان و وقتی برگشتید، دیدید که پدر فوت شده است. فکر می‌کنید پدرتان چه می‌خواست بگوید؟

شهریاری: مثل این که کسی نخی دور انگشتش بسته باشد تا مطلبی را فراموش نکند، بعد خودش فوت کند. شما حالا بخواهید کشف کنید که این نخ را برای چه بسته. قطعاً حدس می‌شود زد، ولی فقط حدس است. من پسر بزرگ خانواده بودم و آن موقع که پدرم فوت کرد، ۱۲ سال داشتم. برادر بعد از من ۶ سالش بود و برادر کوچک‌ترم ۴ سال داشت. طبعاً می‌خواست دربارهٔ زندگی چیزی بگوید. اولاً عرض کنم، پدر من زحمتکش، ولی فوق‌العاده فقیر بود. وقتی مرد، تمام هستی او که داخل کیسهٔ کوچکی بود، به اصطلاح کیف پولش ـ آن موقع ما سکه‌ای داشتیم که به آن می‌گفتیم دوپولی و ده‌تای آن می‌شد یک شاهی ـ فقط یک دانه دوپولی بود. خاطرم هست موقعی که در کرمان بودیم، پدرم کشاورز بود و ما می‌گفتیم صحرا می‌رود. هفته‌ای یک روز می‌آمد خانه. شب و روزی که او خانه بود، ما می‌گفتیم روز جشنمان است. یک روز با صاحب مزرعه دعوایش شد و بی‌کار شد و مدتی بعد در کارخانهٔ خورشید مشغول کار شد. تازه کارخانهٔ خورشید را در کرمان باز کرده بودند. کارخانهٔ ریسندگی بود. از محیط باز دشت و صحرا رفت به سالنی که در آن ریسندگی بکند. یک سال و نیم آن‌جا بود که بیمار شد داروی عوضی به او تجویز شد، که مرد.

من تصور می‌کنم می‌خواست زندگی بقیهٔ بچه‌ها و مادرم را به من بسپرد. تصور من این است. من از مدرسه آمده بودم. پدرم خوابیده بود. به محض این که آمدم، گفت که بیا بابا کارت دارم، با تو صحبتی دارم. مادرم گفت اجازه بده برود دو تا نان بگیرد و بیاید. نانوایی خیلی شلوغ بود و معطل شدم. وقتی آمدم فوت کرده بود. من تصور می‌کنم که می‌خواست بچه‌های دیگر و مادرم را (خواهری هم داشتم) به من بسپرد. حالا من چه کار می‌توانستم بکنم، خودش داستانی بود. تصور من این است، منتها از زبان خودش نشنیدم. هم من پدرم را دوست داشتم و هم او مرا دوست داشت. همیشه با هم رفیق بودیم.

مطلبی یادم آمد، وقتی که او در کرمان بود، یک الاغ



داشت. روزهای جمعه یا تعطیل (چون فصل به فصل کار می‌کرد، یک موقع شب‌ها بود، یک موقع روزها بود) وقتی که بیدار بود، با الاغش کار می‌کرد. یک روز پیرمردی به نام بهشتی، پهلوی خانه او خرابه‌ای بود، آمد و به پدرم گفت، این خشت و آجرها را از این جا ببر فلان‌جا. من هم با او رفته بودم. سه چهار بار که بردیم، یکدفعه آدم دیگری پیدا شد و گفت: این‌ها را کجا می‌برید؟ پدرم گفت: آقای بهشتی گفته. او گفت: غلط کرده و یکی زد توی گوش پدرم. من آن‌جا برانگیخته شدم و خواستم با او دست به یقه شوم که پدرم دستم را گرفت و گفت: آرام باش، می‌رویم پهلوی بهشتی. آن بهشتی هم آدم ارقه‌ای بود. فحش داد و بد و بیراه گفت. بعد به پدرم گفت: برو بعداً بیا. پدرم دیگر نیامد.

یاسی‌پور: استاد شهریاری شما در شرح حالتان مطرح کرده‌اید که ظاهراً یک سال هم در شیراز بوده‌اید. من عنوان این بخش را گذاشته‌ام «معلمی در شیراز»:

شیراز و آب رکنی و آن باد خوش نسیم
عیبش نکن که خال رخ هفت کشور است

این نظر حافظ است، تا شما نظرتان چه باشد.

شهریاری: من همان موقع آب رکن‌آباد را دیدم که واقعاً قابل توجه نبود، لابد زمان حافظ خوب بوده است، نمی‌دانم. شاید. ولی به طور کلی من شیراز را خیلی دوست دارم. شیراز آن موقع جمعیت خیلی کمی داشت و شهر هم کوچک بود. اولاً معلمان آن‌جا همگی پیاده تردد می‌کردند. من که رفتم آن‌جا گفتم: چرا دوچرخه سوار نمی‌شوید؟ گفتند: مگر می‌شود معلم دوچرخه سوار شود؟ من از فردایش دوچرخه‌سوار شدم. شاگردها و معلمان تعجب کردند، ولی آن‌ها هم یواش‌یواش شروع کردند به دوچرخه سوار شدن. هر وقت که با دوچرخه می‌آمدم و می‌رفتم، شاگردها، یکی دوتا، یا چندتا، می‌آمدند جلوی من که آقا چیزی می‌خواهید ما برایتان تهیه کنیم؟ می‌گفتم: نه.

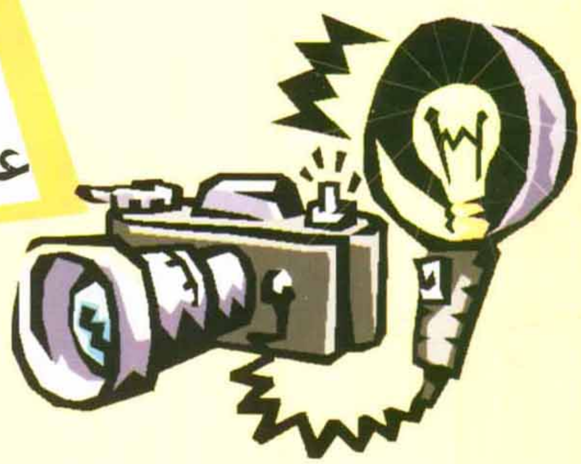
یکی از خصوصیات شیرازی‌ها این بود که به فراوانی، آب نارنج می‌خوردند. برای هر بیماری، می‌گفتند خوب است. من عادت کرده بودم، همیشه آب نارنج در خانه داشتم. با آب مخلوط می‌کردم، به جای آب می‌خوردم.

مردمی بسیار مهربان بودند. من هر وقت می‌رفتم نان بگیرم، با وجود این که جمعیت زیادی آن‌جا بود، مرا می‌شناختند (چون شهر کوچک بود) و همه عقب می‌رفتند و می‌گفتند: بفرمایید. من هر چه می‌گفتم: نه خودتان نان بگیرید تا نوبت من بشود، می‌گفتند: نمی‌شود. خیلی مهربانی می‌کردند.

یاسی‌پور: استاد پرویز شهریاری از این که وقت خود را به بنده و اعضای هیأت تحریریه برهان دادید، بسیار سپاسگزاریم و برای شما آرزوی سلامتی و موفقیت را داریم.

دومین دوره جشنواره عکس مهر

دفتر انتشارات کمک آموزشی برگزار می کند



به یاری آفریننده نقش ها، مجلات رشد وابسته به دفتر انتشارات کمک آموزشی، دومین دوره «جشنواره عکس مهر» را برگزار می کنند.
عکاسان بزرگسال و دانش آموز هر کدام می توانند در دو گرایش:
۱. آموزش و پرورش از نگاه دوربین.
۲. آزاد.
در این جشنواره شرکت کنند.

موضوعات گرایش آموزش و پرورش از نگاه دوربین

۱. بازی دانش آموزان (ابتدایی، راهنمایی و متوسطه)
۲. کلاس شلوغ و شیطنت دانش آموزان
۳. لحظه تعطیلی کلاس و مدرسه
۴. امتحان
۵. درس، کار و فعالیت های فوق برنامه
۶. درس پرسیدن و درس جواب دادن
۷. بهداشت در مدارس
۸. دانش آموز و معلم در اردو و سفرها و گردش های علمی
۹. کارهای نو و ابتکاری در تدریس و اداره کلاس و...
۱۰. فضاهای خاص و جالب (مدرسه، کلاس و...)
۱۱. شادی و لحظه ها و فضاهای شاد در مدارس و در میان دانش آموزان
۱۲. امید به آینده و تلاش برای ساختن فردایی بهتر

مقررات

۱. مهلت ارسال آثار تا ۱۳۸۳/۳/۳۱.
۲. هر نفر می تواند حداکثر با هفت قطعه عکس در هر گرایش شرکت کند. (شرکت یک عکاس در دو گرایش آزاد است).
۳. ابعاد عکس ها حداقل ۱۸ × ۱۳ و حداکثر ۳۰ × ۲۰ باشد.
۴. عکاسانی که سن آنها تا ۱۸ سال است، می توانند در گروه دانش آموزی و عکاسانی که سن آنها بیشتر از ۱۸ سال است در گروه بزرگسال شرکت کنند.
۵. عکس های ارسالی نباید قبلاً در نشریه و یا کتابی به چاپ رسیده باشد.
۶. در صورت لزوم، عکاس باید آمادگی ارائه نگاتیو عکس ها را داشته باشد.
۷. شرکت کنندگان باید برگه ای شامل گرایش، شماره، تاریخ و مکان عکاسی و نام عکاس پشت هریک از عکس ها بچسبانند.
۸. اگر برای عکس عنوان انتخاب کرده اید، آن را نیز در برگه مذکور (بند ۷) بنویسید.
۹. در برگه ای جداگانه مشخصات کامل خود را با شماره تلفن تماس و نشانی کامل پستی یادداشت و همراه عکس ها به نشانی دبیرخانه جشنواره بفرستید.
۱۰. دفتر انتشارات کمک آموزشی اجازه دارد عکس های دریافتی را به صورت مجموعه عکس و یا به صورت های دیگر از قبیل چاپ در نشریات یا کتاب ها و... لزوماً با ذکر نام عکاس منتشر کند.

عکس هایی که به نمایشگاه راه پیدا می کنند بازگردانده نخواهد شد و بقیه عکس ها حداکثر تا پایان آبان ۱۳۸۳ به نشانی داده شده، فرستاده خواهد شد.
نشانی دبیرخانه جشنواره عکس مهر: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۳۳۳۱ **تلفن: ۸۳۰۵۲۷۹**

جوایز

۱. جایزه نفر اول هر گرایش (علاوه بر دیپلم افتخار)، سفر سوریه و زیارت مرقد مطهر حضرت زینب (س) است.
۲. به کسانی که رتبه دوم و سوم هر گرایش را به دست آورند، علاوه بر اهدای لوح تقدیر به ترتیب به هر کدام سه و دو سکه بهار آزادی اهدا خواهد شد.
۳. در هر گرایش بنا به نظر گروه داوری حداکثر از سه نفر تقدیر می شود که هریک از آنان علاوه بر لوح تقدیر، یک نیم سکه بهار آزادی دریافت خواهند کرد.
۴. به همه کسانی که عکسشان به نمایشگاه راه پیدا کند؛ لوح یادبود، پنج حلقه فیلم عکاسی و برخی از تولیدات دفتر انتشارات کمک آموزشی اهدا می شود.
۵. نمایشگاه آثار برگزیده و مراسم اهدای جوایز نفرات برتر، شهریور ۱۳۸۳ در تهران برگزار خواهد شد که زمان دقیق آن به اطلاع شرکت کنندگان و علاقه مندان خواهد رسید.