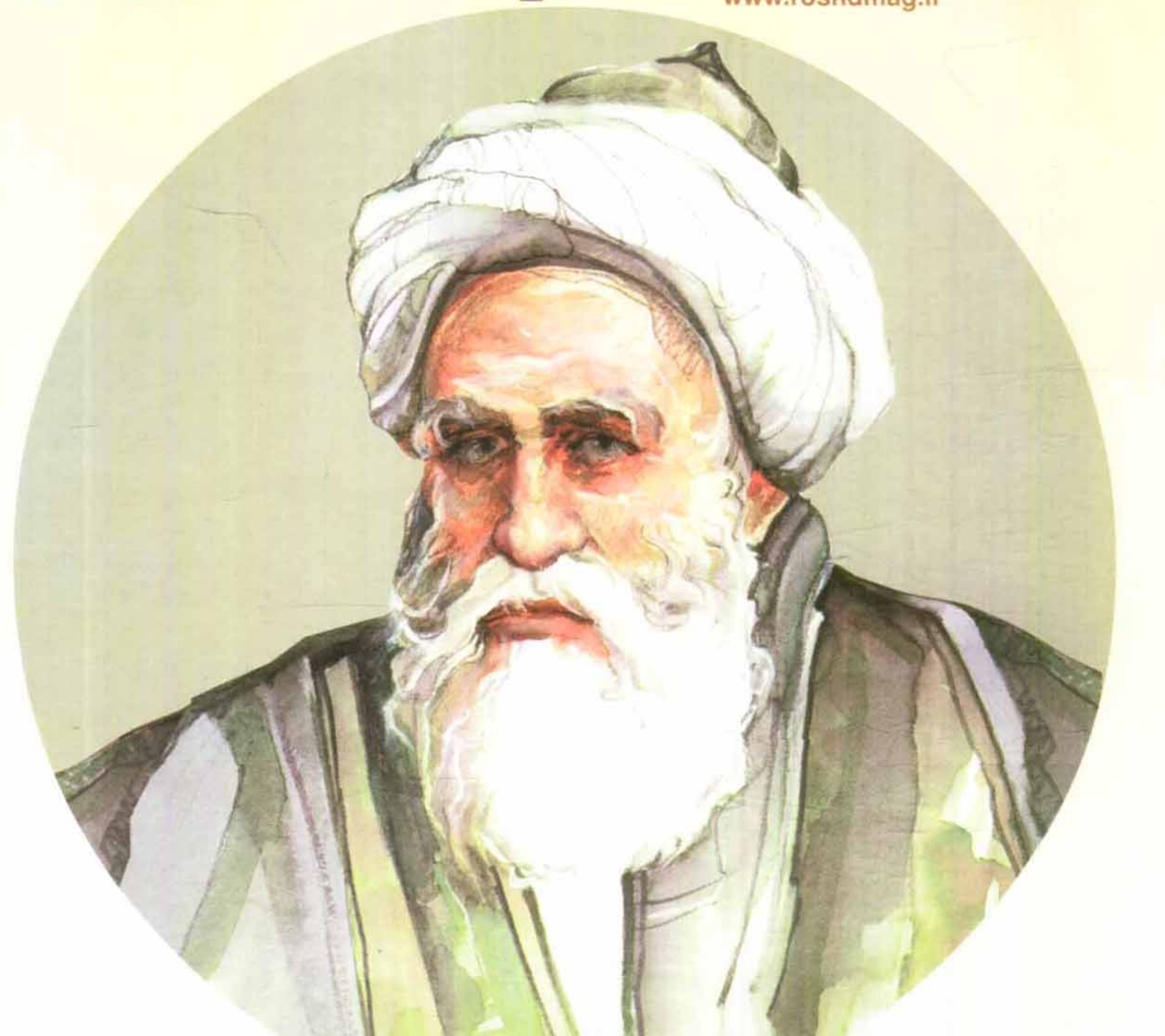
رشد
برهان ۶۶
مجله‌ی ریاضی
دوره‌ی متوسطه
ISSN:1735-4951
وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی
دوره‌ی نوزدهم / تابستان ۱۳۸۹ / شماره‌ی ۴ / ۶۴ صفحه / ۴۵۰۰ ریال
فصلنامه‌ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
www.roshdmag.ir



- ریاضی دانان مسلمان (بوزجانی)
- مختصات قطبی و رسم نمودارها
- تئوری پروانه
- اتحادها و تجزیه
- تاریخچه‌ی مجلات ریاضی ایران

بوزجانی

ابوالوفا محمدبن یحیی بن اسماعیل بوزجانی

ریاضی‌دان و منجم مسلمان ایرانی (۳۸۸-۳۲۸)

بوزجانی یکی از مفاخر علمی ایران و از بزرگ‌ترین ریاضی دانان دوره‌ی اسلامی بوده است. بنا به گفته‌ی **ابن ندیم**، وی در روز چهارشنبه اول ماه رمضان سال ۳۲۸ در شهر بوزجان (تربت جام فعلی) تولد یافت. علم عدد و هندسه را نزد عموی خود، **ابوعمرو مغازلی** و دایی خود، **ابوعبدالله محمدبن عَنبَسه** آموخت. در سال ۳۴۸، یعنی در سن ۲۰ سالگی به عراق مهاجرت کرد و تا آخر عمر در بغداد می‌زیست.

ابن اثیر در «کتاب الکامل فی التاریخ»[1] تاریخ درگذشت بوزجانی را سال ۳۸۷ نوشته و **ابن خلکان** در «وفیات الاعیان» از وی نقل کرده است.

بوزجانی بدون تردید یکی از مشهورترین منجمان و مهندسان زمان خود بوده است و این مطلب از قضاوتی که معاصران وی و مورخان بعدی درباره‌ی او کرده‌اند، کاملاً پیداست. بوزجانی گاهی در کارهای علمی با معاصر خود بیرونی، به وسیله‌ی مکاتبه تشریک مساعی می‌کرده است. بیرونی در کتاب «تحدید نهایات الاماکن» نوشته است که در سال ۳۸۷، هنگامی که او در خوارزم و بوزجانی در بغداد بوده است، کسوفی را با قرارداد قبلی با هم رصد کرده و نتیجه را مقایسه کرده‌اند.

ابوعلی حبوبی که معاصر بوزجانی بود و ظاهراً در حدود خوارزم می‌زیست نیز، با بوزجانی مکاتبه داشت و دستوری برای محاسبه‌ی مساحت مثلث از او خواست و بوزجانی جواب او را در رساله‌ی مختصری داد.

اهمیت آثار ریاضی بوزجانی

الف) مثلثات

اهمیت آثار ریاضی بوزجانی بیشتر به واسطه‌ی سهم به‌سزایی است که وی در پیشرفت علم مثلثات دارد. کتاب اعمال هندسی وی نیز بدیع‌ترین و جالب‌ترین اثری است که در دوره‌ی اسلامی درباره‌ی هندسه‌ی عملی پدید آمده است.

بخش مهمی از کتاب «مجسطی» بوزجانی را می‌توان کتاب جامعی درباره‌ی علم مثلثات دانست که در آن، دستورهای مهم مثلثات، چه در مثلثات مسطح و چه در مثلثات کروی، ثابت شده و در مسائل متعدد و متنوع، مورد استعمال قرار گرفته است. در مثلث مسطح، بوزجانی صحت روابط زیر را ثابت کرده و آن‌ها را به‌کار بسته است:

$$\frac{2R-(180^\circ-\alpha)}{\text{وتر}\,\frac{\alpha}{2}}=\frac{\text{وتر}\,\frac{\alpha}{2}}{R} \qquad (1)$$

در این دستور، R شعاع دایره‌ی محیطی و α برحسب درجه است. این دستور معادل است با دستور کنونی:

$2\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-\cos\alpha$.

$$\frac{\text{وتر}\,\alpha}{\text{وتر}\,\frac{\alpha}{2}}=\frac{\text{وتر}\,(180^\circ-\frac{\alpha}{2})}{R} \qquad (2)$$

این دستور معادل است با دستور کنونی:

$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$.

برای محاسبه‌ی جیب مجموع و تفاضل دو قوس دو استدلال هندسی بیان کرده است که یکی از آن‌ها به‌دستور پیچیده‌ی زیر منجر می‌شود:

$$(a\pm b)=\sqrt{\sin^2 a-\sin^2 a\sin^2 b}\pm\sqrt{\sin^2 b-\sin^2 a\sin^2 b}$$

نتیجه‌ی استدلال دومی نیز دستور زیر است:

$$\sin(a\pm b)=\sin a\cos b\pm\cos a\sin b$$

ب) هندسه

کتاب «اعمال هندسی» بوزجانی مربوط به هندسه‌ی عملی است و بین کتاب‌هایی که مسلمانان در هندسه تألیف کرده‌اند، بی‌نظیر است. در این کتاب سه مطلب مهم زیر به‌خصوص جلب توجه می‌کند:

۱. ترسیمات متفاوت هندسی به وسیله‌ی خط‌کش و فقط یک گشادگی دهانه‌ی پرگار (که از ابتدا تا انتهای ترسیم ثابت نگه داشته می‌شود).

۲. حل کامل و بدیع مسئله‌ی زیر:

تقسیم یک مربع به عده‌ی معلومی مربعات، یا تشکیل یک مربع با عده‌ی معینی از مربعات به وسیله‌ی پهلو به پهلو قرار دادن آن‌ها و بدون استفاده از قضیه‌ی **فیثاغورث**.

۳. ساختن چند وجهی‌های منتظم (و چند چند وجهی نیم‌منتظم) با طریقه‌ای غیر از روش‌های متفاوتی که **اقلیدس** و **پاپوس** به‌کار بسته‌اند.

ج) حساب

کتاب حساب بوزجانی که عنوانش «کتاب فی مایحتاج الیه الکتاب والعمال من علم الحساب» است، از جهت تاریخ علم حساب اهمیت دارد. بوزجانی در سه منزل اول این کتاب، تعاریف و قاعده‌های مربوط به نسبت، ضرب، تقسیم و مساحت را که در زمان او معمول بوده، مدوّن ساخته است و هر جا دیگران درباره‌ی آن‌ها اشتباهی مرتکب شده بوده‌اند، آن‌ها را تصحیح کرده است. چهار منزل دیگر کتاب او مربوط به حساب عملی است. در کتاب‌های «یوشکویچ M» و «فرهنگ زندگی‌نامه‌ی علمی»، درباره‌ی کتاب حساب بوزجانی بحث شده است.

ادامه در صفحه‌ی ۳ جلد

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد برهان متوسطه ۶۶

مجله‌ی ریاضی

دوره‌ی آموزش متوسطه
فصلنامه‌ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

دوره‌ی نوزدهم /شماره‌ی ۴ / تابستان ۱۳۸۹

◆مدیر مسئول: محمد ناصری ◆سردبیر: حمیدرضا امیری
◆مدیر داخلی: میرشهرام صدر ◆طراح گرافیک: شاهرخ خره‌غانی
◆هیئت تحریریه: حمیدرضا امیری، محمد هاشم رستمی، احمد قندهاری، میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی، سید محمدرضا هاشمی موسوی، غلامرضا یاسی‌پور و با تشکر از همکاری ارزنده‌ی استاد پرویز شهریاری ◆ویراستار ادبی: کبری محمودی
◆ پایگاه اینترنتی www.roshd mag.ir
◆ رایانامه: Borhanm@roshdmag.ir
◆پیام‌گیر نشریات رشد: ۸۸۳۰۱۴۸۲-۰۲۱
نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
◆تلفن دفتر مجله: ۸۸۳۰۵۸۶۲-۰۲۱
◆تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶_۷۷۳۳۶۶۵۵-۰۲۱
◆شمارگان: ۸۰۰۰ نسخه
■ چاپ: شرکت افست (سهامی عام)

رشد برهان متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر به همکاری دعوت می کند:

■ نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی دوره‌ی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)
■ طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
■ طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
■ طرح معماهای ریاضی
■ نگارش یا ترجمه‌ی مقاله‌های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه‌ی علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش کامپیوتر و ...)

رشد برهان متوسطه هر سه ماه، یکبار منتشر می‌شود.

مجلّه در حکّ، اصلاح، حذف و اضافه ی مقاله ها آزاد است.

مقاله های وارده ،باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.

مقاله های رسیده مسترد نمی‌شود.

استفاده از مطالب مجلّه در کتاب ها یا مجله های دیگر با ذکر دقیق مأخذ بلامانع است.

حرف اول

ریاضیات کاربردی ـ ریاضیات محض

ریاضیات در دوره‌های متفاوت تاریخی، به‌دلیل ویژگی‌های تمدنی و اجتماعی هر دوره، همواره تحت تأثیر دو عامل قرار داشته و پیشرفت کرده است: یکی عامل درونی که همان زیبایی‌ها و ویژگی‌های خاص و جذاب ریاضیات است و حس کنجکاوی بشر را پاسخ‌گو بوده و هست، و دیگری عامل بیرونی که همان احتیاجات و کاربردهای آن در زندگی روزمره و علوم دیگر است.

در دوره‌ای که هم‌اکنون در آن به سر می‌بریم، گرچه هر دو عامل باعث دگرگونی و پیشرفت در ریاضیات بوده‌اند، اما شاید بتوان گفت کاربرد ریاضیات در علوم و دانش‌های دیگر، هم‌چون فیزیک و مکانیک، شیمی، زیست‌شناسی، اقتصاد و... بیشتر باعث رشد و تنوع در پیدایش شاخه‌های متفاوت ریاضیات شده است که در این فرصت به تعدادی از آن‌ها اشاره می‌کنم.

«کاربردهای ریاضیات، بی‌اندازه زیاد و بسیار گوناگون است. در واقع به کار بردن روش‌های ریاضی مرزی نمی‌شناسد. همه‌ی شکل‌های متنوع حرکت ماده را می‌توان با روش ریاضی بررسی کرد. البته، نقش و اهمیت روش ریاضی در حالت‌های گوناگون، متفاوت است. هیچ طرح معین ریاضی نمی‌تواند از عهده‌ی بیان همه‌ی ویژگی‌های پدیده‌های حقیقی برآید. وقتی می‌خواهیم پدیده‌ای را بررسی کنیم، شکل خاصی از آن را در معرض تحلیل منطقی قرار می‌دهیم. در ضمن تلاش می‌کنیم نقطه‌هایی را بیابیم که در این شکل جدا شده از پدیده‌ی واقعی وجود ندارد و شکل‌های تازه‌ای پیدا کنیم که بیشتر و کامل‌تر، دربرگیرنده‌ی پدیده‌ی ما باشد.»[1]

مکانیک آسمانی، به‌خصوص مطالعه روی حرکت سیاره‌ها و کهکشان‌ها، نمونه‌ی موفقی از کاربرد روش‌های ریاضیات است. هم‌چنین، قانون جاذبه‌ی عمومی مدلی ریاضی است برای بیان یک پدیده‌ی طبیعی که به خوبی آن را تشریح می‌کند و توضیح می‌دهد. کاربردهای ریاضی در فیزیک در حدی پیشرفته و فراگیر است که اگر فقط مفهوم مشتق را از ریاضی حذف کنیم، از ابتدایی‌ترین معادلات در فیزیک و مکانیک که همان معادله‌ی حرکت باشد به بعد، چیزی باقی نمی‌ماند!

از نظریه‌ی احتمال، در بررسی جابه‌جایی تصادفی و میکروسکوپی ذره‌ها، تحت تأثیر مولکول‌های ماده‌ی حلال استفاده می‌شود و چون تعداد ذره‌های در حال انتشار بسیار زیاد است، قوانین توزیع احتمال ما را به سمت کشف یک قانون معین و غیرتصادفی برای مواد قابل انتشار سوق می‌دهد.

هم‌چنین در دانش زیست‌شناسی، روش‌های ریاضی توانسته‌اند در علم ژنتیک نقش مهم و به‌سزایی را ایفا کنند و نیز در علوم اجتماعی و انسانی، نقش آمار ریاضی غیرقابل انکار و چشم‌پوشی است. امروزه، توسط روش‌های آماری بسیاری از پدیده‌های اجتماعی قابل توجیه و تجزیه و تحلیل هستند و برنامه‌ریزی بدون استفاده از علم آمار تقریباً غیرممکن است. خلاصه، دانشی از دانش‌های بشری را نمی‌توان یافت که به نوعی، مستقیم یا غیرمستقیم، از دانش ریاضی بهره نبرد.

سردبیر

پی‌نوشت...

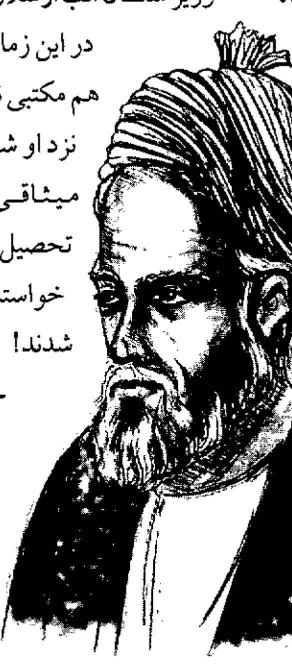
1. بخشی از مقدمه‌ی کتاب: فرهنگ ریاضیات دبیرستانی، اثر استاد پرویز شهریاری، از انتشارات مدرسه.

ریاضی‌دان و شاعر خطه‌ی خراسان

● نوشته‌ی دکتر هاورد ایوز
ترجمه‌ی حسن نصیرنیا

سه یار دبستانی

در نیمه‌ی دوم قرن پنجم هجری قمری، سه جوان ایرانی که هر یک شاگردی ممتاز بود، هم‌زمان در محضر یکی از بزرگ‌ترین فرزانگان خراسان، فقیه بزرگ عصر، امام موفق **نیشابوری**، درس می‌خواندند. این سه جوان، **نظام‌الملک**، **حسن بن صباح** و **عمر خیام**، دوستانی یکدل و یکرنگ بودند. اعتقاد بر این بود که شاگردی که در مکتب امام تحصیل کند، نیک‌بخت و نیک‌فرجام خواهد شد. از همین روی، روزی حسن به دوستان خویش پیشنهاد کرد که هر سه تن پیمان ببندند، اگر هر یک به مقام و منصب والایی رسید، مراتب فضل و برتری را منحصراً از آن خود نداند و دو یار دیگر را نیز به تساوی از آن بهره‌مند کند. با گذشت زمان، معلوم شد که بخت بلند با نظام‌الملک یار بوده است، چرا که او وزیر سلطان **آلب ارسلان** شد.



در این زمان، دو یار دیگر هم مکتبی نظام‌الملک، نزد او شتافتند و بنابر میثاقی که در دوران تحصیل بسته بودند، خواستار سهم خویش شدند!

حسن صباح، تقاضای منصبی دیوانی کرد که بنا به استدعای وزیر، سلطان سلجوقی آن را به او تفویض کرد. اما وی که شخصی خودخواه و ناسپاس بود، بر آن شد که دوست خود نظام‌الملک را از مقام صدارت به زیر کشد و جانشین او شود. ولی سرانجام پس از بر ملا شدن خیانت، مورد غضب واقع و تبعید شد.

اما عمر خیام نه مقامی می‌خواست و نه عنوانی. تنها خواسته‌اش این بود که به او رخصت داده شود تا در پناه و سایه‌ی وزیر بتواند به اشاعه‌ی علم و ریاضیات بپردازد و به پاس این نعمت، برای دوام عمر و سعادت دوست خویش دست به دعا بردارد. وزیر که سخت تحت تأثیر فروتنی و اخلاص هم‌مکتبی سابق خود قرار گرفته بود، برای او مقرری سالانه تخصیص داد.

حسن صباح پس از تحمل دربه‌دری و بدبختی‌های بسیار، رهبر فرقه‌ای متعصب مذهبی شد که در سال ۴۸۳ هجری قمری بر قلعه‌ی الموت، واقع در کوهستان‌های مرتفع جنوب دریای خزر تسلط یافتند.

برخلاف زندگی پرآشوب حسن صباح، زندگی خیام با آرامش و سادگی توأم بود. وی در طول سال‌ها عمر مسالمت‌آمیز خویش، خدمات ارزنده‌ای به ادبیات و فرهنگ علمی آن عصر کرد.

چکیده

مقاله‌ی حاضر، به یکی از دستاوردهای برجسته‌ی ریاضی این اندیشمند پژوهشگر (دستاوردی که در زمره‌ی لحظه‌های مهم در تاریخ ریاضیات[۲] قرار می‌گیرد) اختصاص یافته است. نخست برای روشن‌تر شدن موضوع، اندکی درباره‌ی مقدمات آن سخن می‌گوییم.

کلیدواژه‌ها: خیام، ریشه‌ی معادله، چندجمله‌ای حقیقی، ریشه‌های حقیقی مثبت.

مقدمه

مفهوم معادله و حل آن

منظور از معادله‌ی چندجمله‌ای حقیقی با یک مجهول x هر معادله‌ای به شکل زیر است:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

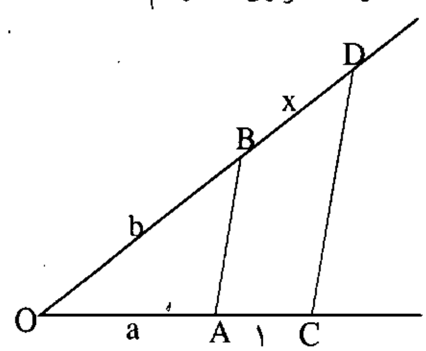
که در آن n یک عدد صحیح مثبت و $a_n, \ldots, a_1, a_0$ اعداد حقیقی با شرط $a_0 \neq 0$ هستند. هر مقدار x که در معادله صدق کند، ریشه‌ی آن معادله خوانده می‌شود. یکی از هدف‌های اصلی دانش جبر در آغاز پیدایش، آن بود که روش‌های کلی برای به‌دست آوردن ریشه‌های این گونه معادلات را بیابد. این کار را حل کردن معادلات می‌نامیدند. چون در آن روزگار تنها اعداد شناخته شده، اعداد مثبت حقیقی بودند، طی صدها سال، حل کردن معادله، به مفهوم یافتن ریشه‌های حقیقی مثبت آن معادله بود؛ در صورتی که ریشه‌ای می‌داشت. معادلات بر حسب این‌که درجه‌ی آن‌ها مساوی ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و... باشد، به ترتیب معادلات خطی، درجه دو، درجه سه، درجه چهار، درجه پنج و... نامیده می‌شوند.

امروزه مشکلی در راه حل معادله‌ی خطی وجود ندارد، زیرا می‌توان آن را از راه هندسی یا جبری به راحتی حل کرد.

معادلات درجه اول و درجه دوم

اگر یک معادله‌ی چند جمله‌ای خطی با یک مجهول x یک ریشه‌ی مثبت داشته باشد، می‌توان این معادله را همواره به شکل ax=b نوشت که در آن a و b هر دو عددهای مثبت‌اند. ریشه‌ی معادله از راه جبری $x = \frac{b}{a}$ و از راه هندسی عبارت است از چهارمین جزء تناسبی که سه پاره‌خط به طول‌های a، b و ۱ سه جز دیگر آن هستند. به این معنی که $\frac{a}{b} = \frac{1}{x}$ و مقدار x را می‌توان از شکل ساده‌ی زیر توسط پرگار یا خط‌کش مشخص کرد.

در این شکل، COD زاویه‌ای دل‌خواه است و OA=a، OB=b و AC=1، و CD موازی AB رسم شده است.



(شکل ۱)

جالب توجه است که مصریان عهد باستان، معادلات خطی را به شیوه‌ای حل می‌کردند که بعدها در اروپا به‌عنوان قاعده‌ی تصحیح و خطا[3] معروف شد. بنا براین شیوه، برای حل معادله‌ی $x + \frac{x}{7} = 24$ باید از قاعده‌ای که در پی می‌آید، استفاده کرد. فرض کنیم، x معادل مقداری دل‌خواه باشد؛ مثلاً x=7 که به ازای آن مقدار $x + \frac{x}{7}$ مساوی ۸ می‌شود نه ۲۴. چون ۸ باید در ۳ ضرب شود تا عدد مطلوب یعنی ۲۴ به‌دست آید، مقدار واقعی x باید از رابطه‌ی ۳(۷)=۲۱ حاصل شود. نکته‌ی شایان تأمل این است که از یک حدس محض، پاسخ صحیح به‌دست آمده است.

هر چند که حالات معادلات درجه دوم مشکل‌تر از مورد معادلات خطی است، ریاضی‌دانان روزگار قدیم، این مورد را نیز، هم از راه هندسه و هم از راه جبر حل می‌کردند. راه‌حل جبری، اعم از این‌که به روش مربع کامل کردن یا به روش جای‌گزینی در فرمول کلی ریشه‌ی معادله‌ی درجه دوم صورت گیرد، باید برای تمام کسانی که مقدمات جبر را در درس‌های دوران مدرسه فراگرفته‌اند، آشنا باشد. بابلی‌ها در تقریباً ۲۰۰۰ سال پیش از میلاد، شیوه‌های مشابهی را برای راه حل جبری هر دو معادله‌ی مذکور می‌شناختند.

معادلات درجه سوم و راه‌حل خیام

مورد معادلات درجه سوم به مراتب دشوارتر از دو مورد یاد شده است. البته بابلی‌ها برخی معادلات درجه سوم خاص را به کمک یک جدول حاوی مقادیر n^3+n^2 نظیر مقادیر n حل می‌کردند و بنا بر آن‌چه در یکی از آثار به جا مانده از **ارشمیدس** آمده است، این ریاضی‌دان یونانی از شرایطی بحث می‌کند که تحت آن، یک معادله‌ی درجه سوم ممکن است ریشه‌ی مثبت و حقیقی داشته باشد.

بحث در این باره، در دوره‌های بعد نیز ادامه یافت تا این‌که در قرن شانزدهم، یک ریاضی‌دان ایتالیایی، سرانجام راه‌حل جبری کلی برای معادلات درجه سوم ارائه داد. با این حال، در حدود پانصد سال پیش از این واقعه، شاعری ریاضی‌دان از اهالی ایران، موسوم به عمر خیام، یک راه‌حل هندسی برای معادلات درجه سوم یافت. این همان لحظه‌ی مهم در تاریخ ریاضیات است که در بالا بدان اشاره شد و حال پس از ذکر

مقدماتی چند درباره‌ی تاریخچه‌ی آن، به بحث در مورد راه‌حل خیام خواهیم پرداخت:

دوران بین نیمه‌ی قرن پنجم تا قرن یازدهم میلادی، به قرون تاریک اروپا مشهور است، زیرا طی این دوره، آموزش و تمدن در اروپای غربی تا سطح بسیار نازلی افول کرد. از سوی دیگر در این دوران، امپراتوری اسلامی به نقطه‌ی اوج ترقی خود رسید. در طول یک دهه پس از هجرت حضرت محمد(ص) از مکه به مدینه در سال ۶۲۳ میلادی، قبایل بادیه‌نشین پراکنده و از هم گسیخته‌ی شبه‌جزیره‌ی عربستان، به برکت شور و شوق ناشی از مذهبی مقتدر، در قالب امت قدرتمندی متحد شدند. پس از گذشت یک قرن از هجرت، حکومت **ستاره و هلال**[1] مسلمانان در قلمروی وسیع از هند تا سرتاسر ایران، بین‌النهرین، آفریقای شمالی و اسپانیا گسترده شد.

یکی از کارهای مهم در حفظ بخش بزرگی از میراث فرهنگ جهانی، تلاش خستگی‌ناپذیر و مجدانه‌ی مسلمانان در بارور کردن دستاوردهای علمی و تحقیقی یونانیان و هندیان بود. در ضمن این فعالیت‌ها، بسیاری از آثار هندی و یونانی در زمینه‌های پزشکی، نجوم و ریاضیات، با جدیت تمام به زبان عربی ترجمه شدند. بدین‌ترتیب، این آثار مدت‌ها از دستبرد حوادث زمانه در امان ماند تا این‌که بعدها دانشمندان اروپایی توانستند آن‌ها را بار دیگر به زبان لاتین و سایر زبان‌های اروپایی برگردانند. اما اگر فعالیت‌های مجدانه‌ی پژوهشگران اندیشمند اسلامی نبود، بسیاری از علوم یونانی و هندی در خلال دوران طولانی قرون تاریک، به گونه‌ای جبران‌ناپذیر از میان می‌رفت. مسلمانان نه تنها پاس‌داران شایان تحسین بسیاری از سرمایه‌های فکری و معنوی قلمداد می‌شوند، بلکه توانستند خود نیز بر غنای آن‌ها بیفزایند. از جمله کارهای بسیار اصیل و ارجمند در این زمینه، ارائه‌ی راه‌حل هندسی معادلات درجه سوم توسط عمر خیام بود.

عمر خیام (که در نیمه‌ی دوم قرن چهارم و نیمه‌ی اول قرن پنجم هجری قمری می‌زیست)، شاعر، منجم و ریاضی‌دان ایرانی بود که در نیشابور زاده و دانش آموخته شد. اما شهرت خیام نزد مردم جهان غرب که به او سخت مهر می‌ورزند، بیشتر ناشی از رباعیات نغز اوست که توسط شاعر دل‌باخته‌ی ایرلندی، **ادوارد فیتز جرالد**، به گونه‌ای استادانه و شیوا به انگلیسی ترجمه شده است. عمر خیام در جهان علم نیز شهرت دارد؛ چه او توانسته است تقویم را به خوبی اصلاح و تقویم جلالی را تدوین کند. برخورد انتقادی او نسبت به اصل توازی اقلیدس نشان می‌دهد که خیام در این باره، مقدم بر **ساکری** است که ایده‌ی او سرانجام به آفرینش هندسه‌ی نااقلیدسی منجر شد. از این‌ها گذشته، خدمت برجسته‌ی او به جهان علم و جبر دنیای اسلام، این بود که برای حل همه‌ی معادلات درجه سوم ـ یافتن ریشه‌های مثبت این معادلات ـ راه‌حل هندسی ارائه داد.

برای نشان دادن شیوه‌ی ابداعی عمر خیام از معادله‌ی درجه سوم خاص، یعنی معادله‌ی $x^3 + b^2x + a^3 = cx^2$ کمک می‌گیریم که در آن a، b، c و x به‌عنوان طول‌های چندپاره خط فرض شده‌اند. خیام این نوع معادله‌ی درجه سوم را با اصطلاحات خاص آن دوره، چنین مطرح می‌کند: «یک مکعب، چند ضلع و چند عدد که مساوی چند مربع هستند.»

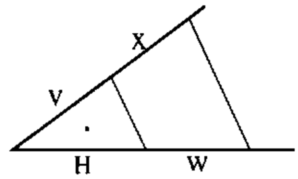
یکی از کارهای مهم در حفظ بخش بزرگی از میراث فرهنگ جهانی، تلاش خستگی‌ناپذیر و مجدانه‌ی مسلمانان در بارور کردن دستاوردهای علمی و تحقیقی یونانیان و هندیان بود

اما مسئله‌ی مذکور از نظر هندسی این‌طور بیان می‌شود: به فرض داشتن یک پاره‌خط واحد و چند پاره‌خط a، b و c، پاره‌خط x را چنان بکشید که رابطه‌ی بالا بین a، b، c و x برقرار باشد.

هدف آن است که تا سر حد امکان، پاره‌خط x تنها با استفاده از خط‌کش و پرگار x رسم شود. یافتن یک راه‌حل صرفاً متکی به استفاده از خط‌کش و پرگار به‌طور کلی ناممکن است؛ چه در قسمتی از کشیدن شکل باید مجاز باشیم از منحصراً یک مقطع مخروطی خاص مفروض استفاده کنیم.

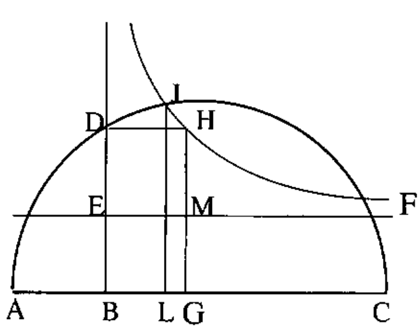
یک راه اساسی ترسیم شکل که چندین‌بار در حل معادله‌ی درجه سوم به کار گرفته شده، منوط به آن است که چهارمین جزء از تناسبی را بیابیم که سه پاره‌خط مفروض، سه جزء معلوم آن باشند. این یک مسئله‌ی قدیمی است که راه‌حل آن بر یونانیان عهد باستان معلوم بوده است.

فرض کنیم u، v و w سه پاره‌خط معین باشند و ما بخواهیم طول پاره‌خط x را طوری تعیین کنیم که $\frac{u}{v} = \frac{w}{x}$ باشد. شکل ۲ که شبیه شکل ۱ است، نشان می‌دهد که چگونه می‌توان با کمک خط‌کش و پرگار، پاره‌خط x موردنظر را رسم کرد.



(شکل ۲)

حال دنباله‌ی راه‌حل هندسی معادله‌ی درجه سوم $x^3 + b^2x + a^3 = cx^2$ عمر خیام را شرح می‌دهیم: نخست با استفاده از راه اساسی ترسیم شکل، پاره‌خط z را چنان می‌یابیم که $\frac{b}{a} = \frac{a}{z}$ باشد. سپس بار دیگر با استفاده از راه اساسی ترسیم شکل، پاره‌خط m را چنان می‌یابیم که $m = \frac{a^3}{b^2}$ باشد. حال در شکل $AB = m = \frac{a^3}{b^2}$ و $BC = c$ را رسم می‌کنیم. آن‌گاه نیم‌دایره‌ای به قطر AC می‌کشیم و از B عمودی بر AC رسم می‌کنیم تا نیم‌دایره را در D قطع کند. سپس روی BD، مقدار $BE = b$ را جدا می‌کنیم و از E خط EF را موازی AC می‌کشیم. باز با توجه به راه اساسی ترسیم شکل، G را روی BC چنان می‌یابیم که $\frac{ED}{BE} = \frac{AB}{BG}$ باشد و مستطیل DBGH را کامل می‌کنیم. در مرحله‌ی بعد، یک هذلولی قائم را از H طوری رسم می‌کنیم که EF و ED خطوط مجانب آن باشند (به این معنی که معادله‌ی هذلولی گذرنده بر نقطه‌ی H نسبت به محورهای EF، به‌عنوان محور طول و ED، به‌عنوان محور y، به شکل $xy = a$ باشد که a عدد ثابت است). این هذلولی، نیم‌دایره را در J قطع می‌کند و خطی که از J موازی DE رسم شود، خط



(شکل ۳)

EF را در K و BC را در L قطع می‌کند. اگر GH با EF در M برخورد کند، خواهیم داشت:

چون J و H روی هذلولی هستند، داریم:

$$(EK)(KJ) = (EM)(MH) \qquad (1)$$

چون $\frac{ED}{BE} = \frac{AB}{BG}$ است، داریم:

$$(BG)(ED) = (BE)(AB) \qquad (2)$$

بنابراین، از دو رابطه‌ی ۱ و ۲ نتیجه می‌شود که:

$$(EK)(KJ) = (EM)(MH) = (BG)(ED) = (BE)(AB) \qquad (3)$$

حل:

$$(BL)(LJ) = (EK)(BE + KJ) = (EK)(BE) + (EK)(KJ) = (EK)(BE) + (AB)(BE)(3) = (BE)(EK + AB) = (BE)(AL) \qquad (4)$$

و از آن‌جا: $(BL)^2(LJ)^2 = (BE)^2(AL)^2$

اما با توجه به هندسه‌ی مقدماتی داریم:

$$(LJ)^2 = (AL)(LC) \qquad (5)$$

بنابراین، از رابطه‌های ۴ و ۵ نتیجه می‌گیریم:

$$(BE)^2(AL) = (BL)^2(LC) \qquad (6)$$

یا $(BE)^2(BL + AB) = (BL)^2(BC - BL)$

با قرار دادن $BE = b$ ، $AB = \frac{a^3}{b^2}$ و $BC = C$ در رابطه‌ی ۶ داریم:

$$b^2(BL + \frac{a^3}{b^2}) = (BL)^2(C - BL) \qquad (7)$$

با بسط آخرین معادله در رابطه‌ی ۷ و مرتب‌کردن جمله‌ها داریم:

$$(BL)^3 + b^2(BL) + a^3 = C(BL)^2 \qquad (8)$$

و از این‌جا $BL = X$ یعنی یک ریشه‌ی معادله‌ی درجه سوم مفروض به دست می‌آید.

باید اذعان کرد که روش خیام ماهرانه و بدیع است و ضرورت ایجاب می‌کند که هر معلم دبیرستان بتواند علاقه‌ی برخی از دانش‌آموزان خود را نسبت به آن برانگیزاند. ترسیم

شهرت خیام نزد مردم جهان غرب که به او سخت مهر می‌ورزند، بیش‌تر ناشی از رباعیات نغز اوست که توسط شاعر دل‌باخته‌ی ایرلندی، ادوارد فیتز جرالد، به گونه‌ای استادانه و شیوا به انگلیسی ترجمه شده است

نقطه به نقطه‌ی هذلولی (با استفاده از ترسیم در حالت کلی شکل) کار آسانی است، زیرا اگر N هر نقطه‌ای روی EF باشد و اگر عمود بر EF از نقطه‌ی N، هذلولی را در p قطع کند، داریم:

$$(EM)(MH) = (EN)(NP)$$

و از آن‌جا $\frac{MH}{NP} = \frac{EN}{EM}$ و NP چهارمین پاره‌خط متناسب با پاره‌خط‌های مفروض EN، EM و MH است.

به این ترتیب، نخست می‌توان تعدادی از نقطه‌های روی هذلولی را مشخص کرد و سپس با ترسیم یک منحنی بر نقاط به‌دست آمده، هذلولی را کامل کرد. ممکن است معادله‌ی درجه سوم $x^3 + 2x + 8 = 5x^2$ را به دانش‌آموزان پیشنهاد کرد. در این‌جا $a = 2$ ، $b = \sqrt{2}$ و $c = 5$ است. سه ریشه‌ی این معادله عبارت‌اند از: ۲، ۴ و ۱ -. دانش‌آموزان باید بتوانند دو ریشه‌ی مثبت معادله را به روش خیام بیابند. شاید آن‌ها بتوانند با مختصر تعمیم این روش، ریشه‌ی منفی را هم به‌دست آورند. حل این مسئله می‌تواند برای یک طرح تحقیقاتی عالی برای دانش‌آموزان سال سوم، سرآغاز خوبی باشد.

عمر خیام در سال ۵۱۵ یا ۵۱۷ هجری قمری در نیشابور درگذشت. یکی از شاگردان وی موسوم به **نظامی سمرقندی**، نقل کرده است که برحسب معمول، او با استادش (خیام) در باغی به گفت‌وگو می‌نشست و خیام در یکی از این جلسات به او گفته بوده است که آرزو دارد مدفنش در نقطه‌ای بنا شود که باد شمال برگ‌های گل سرخ را بر آن بگستراند. چند سال بعد از این گفت‌وگو که خیام جهان را به درود گفته بود، شاگردش به نیشابور می‌رود و پس از یافتن آرامگاه خیام، درمی‌یابد که قبر او درست در مجاورت باغی قرار گرفته و شاخه‌ی درختان میوه از دیوارهای باغ به طرف خارج سرازیر شده و شکوفه‌های گل‌های آن‌ها آن‌قدر بر آرامگاه استاد فرو ریخته‌اند که سنگ مزارش را کاملاً پوشانیده‌اند.

برخورد انتقادی خیام از اصل توازی اقلیدس نشان می‌دهد که او در این باره، مقدم بر ساکری است که ایده‌ی او سرانجام به آفرینش هندسه‌ی نااقلیدسی منجر شد

وقتی **ادوارد فیتز جرالد** ـ شاعر ایرلندی دل‌باخته‌ی رباعیات خیام که خیام شاعر را به اروپا شناساند ـ در سال ۱۸۸۳ درگذشت، در یک کلیسای کوچک انگلیسی در سفولک به خاک سپرده شد. **ویلیام سیمپسون**، هنرمند تصویرگر یکی از نشریات لندن، در سال ۱۸۸۴ به نیشابور رفت و از آرامگاه خیام دیدن کرد. در کنار سنگ مزار او چندین بوته گل سرخ یافت و مقداری از تخم آن‌ها را که بر شاخه مانده بود، چید و آن‌ها را در بازگشت به انگلستان آورد. سیمپسون تخم گل‌ها را به مسئول «باغ‌های گیاه‌شناسی کیو» سپرد و او پس از کاشتن آن‌ها موفق شد، بوته‌های گل سرخ به عمل آورد. در ۷ اکتبر ۱۸۹۳ یکی از این بوته‌های گل، به آرامگاه فیتز جرالد منتقل و در آن‌جا کاشته شد.

پی‌نوشت

۱. این نشان عثمانی‌ها و ترکیه‌ی فعلی است که البته از قرن ۱۶ میلادی پرچم عثمانی‌ها بوده است، نه در قرن‌های اول یا دوم هجری.

۲. ادوارد فیتزجرالد ایرلندی، مترجم رباعیات خیام، در مقدمه‌ای که به زبان انگلیسی بر این کتاب نگاشته است، صحت انتساب این روایت افسانه‌آمیز به خیام را تأیید می‌کند ـ م.

۳. پروفسور هاور ایوز (نگارنده‌ی این مقاله)، استاد برجسته‌ی معاصر و صاحب‌نظر در تاریخ ریاضیات و هندسه، مجموعه سخن‌رانی‌های خویش را در دو کتاب به نام‌های «لحظه‌های مهم در تاریخ ریاضیات قبل از سال ۱۶۵۰» و «لحظه‌های مهم در تاریخ ریاضیات بعد از سال ۱۶۵۰» تنظیم و منتشر کرده است. مقاله‌ی حاضر، از کتاب نخست انتخاب و ترجمه شده است.

۴. «قاعده‌ی تصحیح و خطا» یا rule of false position در واقع روشی است برای تخمین زدن ریشه‌های یک معادله‌ی جبری و تعیین کمیت نزدیک به صحت. (م.)

منبع

Eves, Howard, Great Moments in Mathematics Before 165o, Washington, D.C. The Mathematical Association of America, 1983.

© احمد قندهاری

اتحادها و تجزیه

تعریف اتحاد: هر تساوی بین دو عبارت جبری که به ازای جمیع مقادیر متغیرهای تعریف شده، در دو طرف تساوی همواره برقرار باشد، اتحاد نامیده می‌شود. برای مثال، تساوی $x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$ یک اتحاد است، زیرا به ازای هر مقدار عددی از x و a ، دو طرف تساوی با هم برابرند.

اتحادهای جبری

اتحاد اول (مربع مجموع دو جمله‌ای): $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

اتحاد دوم(مربع تفاضل دو جمله‌ای): $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

نتایج:

الف) $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$

ب) $a^2 + b^2 = (a^2 - b^2) + 2ab$

ج) $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$

د) $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 4ab$

مسئله‌ی ۱. اگر x و y اعداد حقیقی مثبت باشند، حاصل $(2x\sqrt{x} + \sqrt{3}y^2\sqrt{y})^2 - (2x\sqrt{x} - \sqrt{3}y^2\sqrt{y})^2$ را بیابید.

حل: فرض می‌کنیم $a = 2x\sqrt{x}$ و $b = \sqrt{3}y^2\sqrt{y}$ پس مسئله به صورت زیر است:

$$(a+b)^2 - (a-b)^2$$

بنا به نتیجه‌ی (د) داریم: $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$

$$\Rightarrow (2x\sqrt{x} + \sqrt{3}y^2\sqrt{y})^2 - (2x\sqrt{x} - \sqrt{3}y^2\sqrt{y})^2$$
$$= 4(2x\sqrt{x})(\sqrt{3}y^2\sqrt{y}) = 8xy^2\sqrt{3xy}$$

اتحاد سوم (اتحاد مزدوج):

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

مسئله‌ی ۲. عبارت $P = x^4 + 4y^4$ را به حاصل ضرب عوامل تجزیه کنید.

حل:

$$P = x^4 + 4y^4$$

$$P = \underbrace{x^4 + 4y^4 + 4x^2y^2}_{\text{بنابر اتحاد اول}} - 4x^2y^2$$

$$P = (x^2 + 2y^2)^2 - 4x^2y^2 = \underbrace{(x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2}_{\text{بنابر اتحاد مزدوج}}$$
$$\Rightarrow P = (x^2 + 2y^2 - 2xy)(x^2 + 2y^2 + 2xy)$$

اتحاد چهارم (اتحاد جمله مشترک):

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

مسئله‌ی ۳. عبارت $P=(x^2-1)^2-11x^2+35$ را تجزیه کنید.

حل:

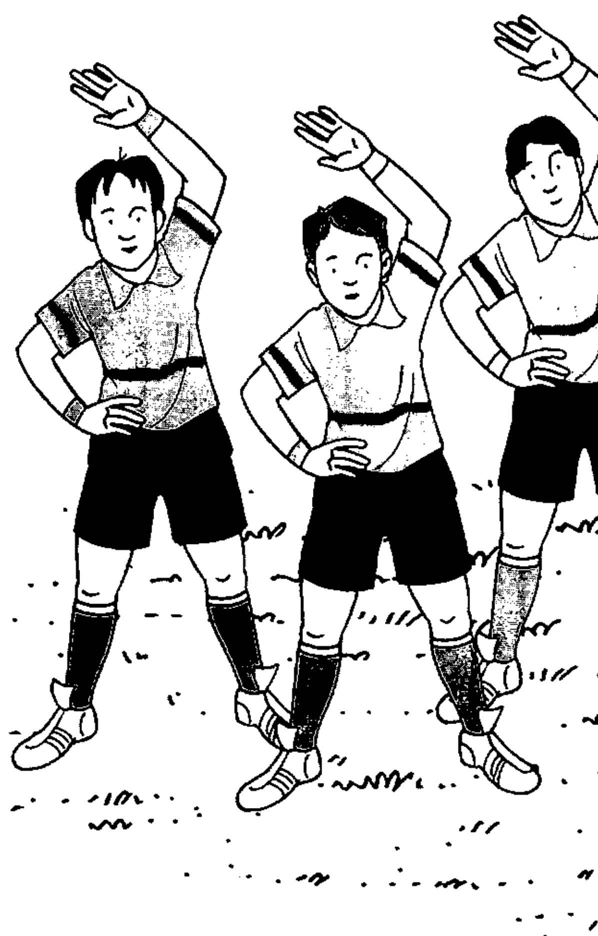
$$P=(x^2-1)^2-11x^2+35$$
$$P=(x^2-1)^2-11(x^2-1+1)+35$$
$$P=(x^2-1)^2-11(x^2-1)-11+35$$
$$P=(x^2-1)^2-11(x^2-1)+24$$

فرض می‌کنیم $a=x^2-1$ $\qquad P=a^2-11a+24$

حال دو عدد می‌یابیم که مجموع آن‌ها ۱۱- و حاصل ضرب آن‌ها ۲۴ باشد.

این دو عدد (۳-) و (۸-) هستند. پس:

$$P=(a-3)(a-8) \qquad a=x^2-1$$
$$P=(x^2-1-3)(x^2-1-8)$$
$$P=(x^2-4)(x^2-9)=(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)$$



اتحاد پنجم (اتحاد مربع مجموع سه جمله):

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$$

اتحاد ششم (اتحاد مکعب مجموع دو جمله):

$$\begin{cases}(a+b)^3=a^3+b^3+3a^2b+3ab^2\\(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)\end{cases}$$

اتحاد هفتم (اتحاد مکعب تفاضل دو جمله):

$$\begin{cases}(a-b)^3=a^3-b^3-3a^2b+3ab^2\\(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)\end{cases}$$

مسئله‌ی ۴. اگر $x=\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}$، آن‌گاه حاصل عبارت $P=x^3-3x$ را بیابید.

حل:

$$x=\underbrace{\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}}_{a}+\underbrace{\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}}_{b}$$
$$x=a+b\Rightarrow x^3=(a+b)^3\Rightarrow$$
$$x^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$$
$$x^3=3+2\sqrt{2}+3-2\sqrt{2}+3\sqrt[3]{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}(x)$$
$$x^3=6+3\sqrt[3]{9-8}(x)\Rightarrow x^3=6+3x\Rightarrow P=x^3-3x=6$$

مسئله‌ی ۵. اگر $x=\sqrt[4]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[4]{\sqrt{5}-2}$، آن‌گاه $P=(x^3+3x)^2$ را بیابید.

حل:

$$x=\underbrace{\sqrt[4]{\sqrt{5}+2}}_{a}-\underbrace{\sqrt[4]{\sqrt{5}-2}}_{b}$$
$$x=a-b\Rightarrow x^3=(a-b)^3\Rightarrow$$
$$x^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$$
$$x^3=(\sqrt[4]{\sqrt{5}+2})^3-(\sqrt[4]{\sqrt{5}-2})^3-3\sqrt[4]{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}(x)$$
$$x^3=\sqrt{\sqrt{5}+2}-\sqrt{\sqrt{5}-2}-3\sqrt[4]{\sqrt{5}-2}\,x$$
$$x^3=\sqrt{\sqrt{5}+2}-\sqrt{\sqrt{5}-2}-3x$$
$$\Rightarrow x^3+3x=\sqrt{\sqrt{5}+2}-\sqrt{\sqrt{5}-2}$$
$$\Rightarrow (x^3+3x)^2=\sqrt{5}+2+\sqrt{5}-2-2\sqrt{5-4}\Rightarrow$$
$$P=(x^3+3x)^2=2\sqrt{5}-2$$

مسئله‌ی ۶. ثابت کنید

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab+ac+bc)$$

حل: عبارت‌های سمت راست را درهم ضرب می‌کنیم.

$$" \quad " = a^3+ab^2+ac^2-a^2b-a^2c-abc$$
$$+a^2b+b^3+bc^2-ab^2-abc-bc^2+a^2c+b^2c+c^3-abc$$
$$-ac^2-bc^2=a^3+b^3+c^3-3abc$$

پس همواره داریم:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab+ac+bc)$$

اگر $a^3+b^3+c^3-3ab=0$ یا $a^3+b^3+c^3=3abc$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ \text{یا} \\ a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0 \Rightarrow a=b=c \end{cases}$$

نتیجه‌ی مهم: (اتحاد اولر یا لاگرانژ)

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ \text{یا} \\ a=b=c \end{cases} \Leftrightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$$

مسئله‌ی ۷. حاصل کسر $\dfrac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}$ را بیابید.

حل: عبارت مخرج را ساده می‌کنیم

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$$
$$=x^2+y^2-2xy+y^2+z^2-2yz-z^2+x^2-2xz$$
$$=2x^2=2y^2+2z^2-2(xy+yz+xz)$$

$$\text{کسر}=\frac{(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)}{2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)}=\frac{x+y+z}{2}$$

مسئله‌ی ۸. حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$P=\sqrt{2(2-\sqrt{2})}.\sqrt[4]{2(3+2\sqrt{2})}$$

حل:

$$P=\sqrt[4]{4(2-\sqrt{2})^2}.\sqrt[4]{2(3+2\sqrt{2})}$$

$$P=\sqrt[4]{4(4+2-4\sqrt{2})}.\sqrt[4]{2(3+2\sqrt{2})}=\sqrt[4]{4(6-4\sqrt{2})^2}.\sqrt[4]{2(3+2\sqrt{2})}$$
$$P=\sqrt[4]{8(3-2\sqrt{2})}.\sqrt[4]{2(3+2\sqrt{2})}=\sqrt[4]{16(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2}}$$
$$\Rightarrow P=\sqrt[4]{16(9-8)}=\sqrt[4]{16(1)}=2$$

مسئله‌ی ۸. اگر $n\in N$ و n عددی فرد باشد و داشته باشیم $a^3+b^3+c^3=a+b+c=0$، آن‌گاه حاصل عبارت $P=a^n+b^n+c^n$ را بیابید.

حل:

$$a+b+c=0 \xrightarrow{\text{بنا بر اتحاد اولر}} a^3+b^3+c^3=3abc \text{ : داریم}$$
$$a^3+b^3+c^3=0 \Rightarrow 3abc=0 \Rightarrow abc=0 \text{ : داریم}$$
$$\Rightarrow a=0 \text{ یا } b=0 \text{ یا } c=0$$

فرض می‌کنیم $c=0$. در نتیجه، از رابطه‌ی $a+b+c=0$ نتیجه می‌شود: $a+b=0$. بنابراین: $a=-b$.

$$P=a^n+b^n+c^n=(-b)^n+b^n+0=-b^n+b^n+0=0$$
$$\Rightarrow P=0$$

مسئله‌ی ۹. حاصل عبارت $P=(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$ را بیابید.

حل:

فرض می‌کنیم: $x=a-b$ و $y=b-c$ و $z=c-a$

$$x+y+z=a-b+b-c+c-a=0$$
$$\Rightarrow x+y+z=0 \text{ بنا بر اتحاد اولر} \Rightarrow x^3+y^3+z^3=3xyz$$
$$\Rightarrow P=(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3-3(a-b)(b-c)(c-a)$$

آزمون

آزمون ۱. اگر $x^2+x+1=0$، آن‌گاه $(x^3+\frac{1}{x^3})$ کدام است؟

الف) ۲ ب) ۲- ج) ۸ د) ۸-

حل: گزینه‌ی الف.

$$x^2+x+1=0 \Rightarrow \text{بر } x\neq 0 \text{ تقسیم می‌کنیم} \Rightarrow x+1+\frac{1}{x}=0 \Rightarrow$$

$x+\frac{1}{x}=-1$ دو طرف را به توان ۳ می‌رسانیم

هر تساوی بین دو عبارت جبری که به ازای جمیع مقادیر متغیرهای تعریف شده، در دو طرف تساوی همواره برقرار باشد، اتحاد نامیده می‌شود

$$\Rightarrow x^3+\frac{1}{x^3}+3(x)(\frac{1}{x})\underbrace{(x+\frac{1}{x})}_{-1}=-1$$

$$\Rightarrow x^3+\frac{1}{x^3}-3=-1 \Rightarrow x^3+\frac{1}{x^3}=2$$

آزمون ۲. اگر $x^2+x+1=0$، آن‌گاه $(x^6+\frac{1}{x^6})$ کدام است؟

الف) ۸ ب) ۹ ج) ۱۶ د) ۱۸

حل: گزینه‌ی د.

دو طرف را $x \neq 0$ تقسیم می‌کنیم $x^2+x-1=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x+1-\frac{1}{x}=0 \Rightarrow$$

دو طرف را به توان ۳ می‌رسانیم $x-\frac{1}{x}=-1$

$$\Rightarrow x^3-\frac{1}{x^3}-3x(\frac{1}{x})\underbrace{(x-\frac{1}{x})}_{-1}=-1$$

دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\Rightarrow x^3-\frac{1}{x^3}+3=-1 \Rightarrow x^3-\frac{1}{x^3}=-4$$

$$\Rightarrow x^6+\frac{1}{x^6}-2=16 \Rightarrow x^6+\frac{1}{x^6}=18$$

آزمون ۳. اگر $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=-\sqrt[3]{z}$، آن‌گاه $(x+y+z)^6$ برابر است با:

الف) $81x^2y^2z^2$ ب) $729xyz$

ج) $729x^2y^2z^2$ د) $-81x^2y^2z^2$

حل: گزینه‌ی ج.

بنا به اتحاد اولر $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}=0 \Rightarrow$

دو طرف را به توان ۶ می‌رسانیم: $x+y+z=3\sqrt[3]{xyz}$

$$(x+y+z)^6=3^6(x^2y^2z^2)=729x^2y^2z^2$$

آزمون ۴. اگر $a^2+b^2-ab-a-b+1=0$، آن‌گاه حاصل عبارت $\frac{a^n+b^n}{a^6+b^6}$ کدام است؟

الف) ۱ ب) ۴ ج) ۱۶ د) ۱۲۸

حل: گزینه‌ی الف.

دو طرف فرض را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$2a^2+2b^2-2ab-2a-2b+2=0$$

$$(a^2+b^2-2ab)+(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)=0$$

$$(a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=b \\ a=b=1 \end{cases} \Rightarrow \frac{a^n+b^n}{a^4+b^4}=\frac{1+1}{1+1}=1$$

آزمون ۵. حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$(\sqrt{2}-1)^n(\sqrt{2}+1)^{n+4}(3-2\sqrt{2})^2 \quad (n \in N)$$

الف) ۴ ب) ۱ ج) $4\sqrt{2}$ د) $16\sqrt{2}$

حل: گزینه‌ی ب.

$$(\sqrt{2}-1)^n(\sqrt{2}+1)^{n+4}(3-2\sqrt{2})^2$$

$$=\underbrace{(\sqrt{2}-1)^n(\sqrt{2}+1)^n}(\sqrt{2}-1)^4(3-2\sqrt{2})^2$$

$$=\left[(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)\right]^n \times \left[(\sqrt{2}+1)^2\right]^2(3-2\sqrt{2})^2$$

$$=(2-1)^n \times (3+2\sqrt{2})^2(3-2\sqrt{2})^2=\left[(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})\right]^2$$

$$=1\times(9-8)^2=1\times1=1$$

آزمون ۶. اگر $a+b=3$، آن‌گاه حاصل عبارت $P=a(a^2+a+1)+b(b^2+b+1)+ab(3a+3b+2)$ کدام است؟

الف) ۱۸ ب) ۲۷ ج) ۳۹ د) ۴۹

حل: گزینه‌ی ج.

$$P=a^3+a^2+a+b^3+b^2+b+3a^2b+3ab^2+2ab$$

$$P=(a^3+b^3+3a^2b+3ab^2)+(a^2+b^2+2ab)+(a+b)$$

$$P=(a^3+b^3)+(a+b)^2+(a+b)=(3)^3+(3)^2+3$$

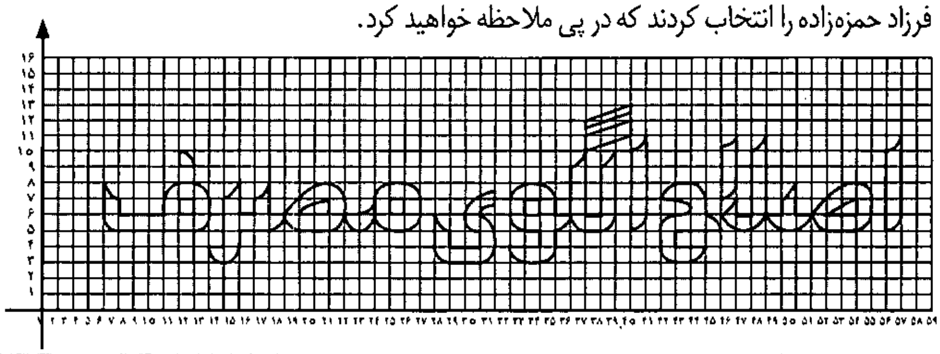
$$=27+9+3=39$$

پاسخ

فرزاد حمزه پور
دبیر ریاضی شهر ستان بانه

مسابقه‌ی طراحی با رابطه‌های ریاضی

اشاره : در برهان شماره‌ی ۶۳ـ پاییز ۸۸، عنوان «اصلاح الگوی مصرف» را به عنوان مسابقه‌ی طراحی با رابطه‌های ریاضی آورده بودیم. هیئت تحریریه مجله از بین پاسخ‌های رسیده، پاسخ آقای فرزاد حمزه‌زاده را انتخاب کردند که در پی ملاحظه خواهید کرد.



برای طراحی این عنوان ابتدا عنوان مورد نظر را به صورت دستی نوشتم، سپس با استفاده از معادلات خط، نامعادلات، سهمی‌های افقی و یک چهارم و نصف دایره، معادلات و نامعادلات مربوطه را به طور کامل نوشتم. ترتیب نوشتن را کاملاً رعایت کرده‌ام تا راحت‌تر بررسی شود.

در ضمن قسمت‌هایی از سهمی افقی را برای راحتی کار در نوشتن معادلات به این صورت آورده‌ام:

۱) رأس سهمی $B\begin{bmatrix}51\\6\end{bmatrix}$ و انتهای سهمی $A\begin{bmatrix}54\\7\end{bmatrix}$

$$(y-6)^2=\frac{4}{3}(x-51)$$

از نوشتن معادلات سهمی صرف‌نظر و فقط به رأس سهمی و انتهای سهمی افقی اشاره کرده‌ام که از کلیت کار نیز نمی‌کاهد.

روابط ریاضی کلمه‌ی اصلاح

۱) $(x-56)^2+(y-11)^2=1 \qquad 56\le x\le 57 \qquad 10\le y\le 11$

۲) $x=57 \qquad 6\le y\le 11$

۳) $(x-56)^2+(y-6)^2=1 \qquad 56\le x\le 57 \qquad 5\le y\le 6$

۴) $x=56 \qquad 5\le y\le 10$

۱) رأس سهمی $S\begin{bmatrix}51\\6\end{bmatrix}$ و انتهای سهمی $A\begin{bmatrix}54\\8\end{bmatrix}$

$$(y-6)^2=\frac{4}{3}(x-51)$$

۲) $(x-54)^2+(y-7)^2=1 \qquad 54\le x\le 55 \qquad 7\le y\le 8$

۳) $x=55 \qquad 6\le y\le 7$

۴) $(x-54)^2+(y-6)^2=1 \qquad 54\le x\le 55 \qquad 5\le y\le 6$

۵) $x=5 \qquad 52\le x\le 54$

۶) $(x-۵۲)^۲+(y-۶)^۲=۱ \quad ۵۱\le x\le ۵۲ \quad ۵\le y\le ۶$

۷) رأس سهمی $S\begin{bmatrix}۵۲\\۶\end{bmatrix}$ و انتهای سهمی $A\begin{bmatrix}۵۴\\۷\end{bmatrix}$

۸) $x=۵۴ \quad ۶\le y\le ۷$

۹) $y=۶ \quad ۵۲\le x\le ۵۴$

۱۰) $y=۶ \quad ۵۰\le x\le ۵۱$

۱۱) $x=۵۰ \quad ۶\le y\le ۸$

۱۲) $(x-۴۹)^۲+(y-۸)^۲=۱ \quad ۴۹\le x\le ۵۰ \quad ۷\le y\le ۸$

۱۳) $x=۴۹ \quad ۶\le y\le ۷$

۱۴) $y=۶ \quad ۴۸\le x\le ۴۹$

۱۵) $(x-۴۹)^۲+(y-۶)^۲=۱ \quad ۴۸\le x\le ۴۹ \quad ۵\le y\le ۶$

۱۶) $y=۵ \quad ۴۹\le x\le ۵۰$

۱۷) $(x-۵۰)^۲+(y-۶)^۲=۱ \quad ۵۰\le x\le ۵۱ \quad ۵\le y\le ۶$

۱) $(x-۴۷)^۲+(y-۱۱)^۲=۱ \quad ۴۷\le x\le ۴۸ \quad ۱۰\le y\le ۱۱$

۲) $x=۴۸ \quad ۶\le y\le ۱۱$

۳) $(x-۴۷)^۲+(y-۶)^۲=۱ \quad ۴۷\le x\le ۴۸ \quad ۵\le y\le ۶$

۴) $y=۵ \quad ۴۶\le x\le ۴۷$

۵) $(x-۴۶)^۲+(y-۶)^۲=۱ \quad ۴۵\le x\le ۴۶ \quad ۵\le y\le ۶$

۶) $(x-۴۵)^۲+(y-۷)^۲=۱ \quad ۴۵\le x\le ۴۶ \quad ۶\le y\le ۷$

۷) $x=۴۶ \quad ۶\le y\le ۷$

۸) $y=۶ \quad ۴۶\le x\le ۴۷$

۹) $x=۴۷ \quad ۶\le y\le ۱۰$

۱۰) $(x-۴۵)^۲+(y-۱۱)^۲=۱ \quad ۴۵\le x\le ۴۶ \quad ۱۰\le y\le ۱۱$

۱۱) $x=۴۶ \quad ۸\le y\le ۱۱$

۱۲) $(x-۴۵)^۲+(y-۸)^۲=۱ \quad ۴۵\le x\le ۴۶ \quad ۷\le y\le ۸$

۱۳) $y=۴۵ \quad ۷\le y\le ۱۰$

۱) $(x-۴۲)^۲+(y-۷)^۲=۱ \quad ۴۱\le x\le ۴۲ \quad ۷\le y\le ۸$

۲) $y=۸ \quad ۴۲\le x\le ۴۳$

۳) $(x-۴۳)^۲+(y-۷)^۲=۱ \quad ۴۳\le x\le ۴۴ \quad ۷\le y\le ۸$

۴) $x=۴۴ \quad ۶\le y\le ۷$

۵) $(x-۴۴)^۲+(y-۵)^۲=۱ \quad ۴۴\le x\le ۴۵ \quad ۵\le y\le ۶$

۶) $y=۵ \quad ۴۲\le x\le ۴۵$

۷) $x=۴۲ \quad ۴\le y\le ۵$

۸) $y=۴ \quad ۴۲\le x\le ۴۴$

۹) $(x-۴۳)^۲+(y-۴)^۲=۱ \quad ۴۳\le x\le ۴۴ \quad ۳\le y\le ۴$

۱۰) $y=۳ \quad ۴۲\le x\le ۴۳$

۱۱) $(x-۴۲)^۲+(y-۴)^۲=۱ \quad ۴۱\le x\le ۴۲ \quad ۳\le y\le ۴$

۱۲) $x=۴۱ \quad ۴\le y\le ۵$

۱۳) $(x-۴۲)^۲+(y-۵)^۲=۱ \quad ۴۱\le x\le ۴۲ \quad ۵\le y\le ۶$

۱۴) $y=۶ \quad ۴۲\le x\le ۴۲\frac{۱}{۲}$

۱۵) $(x-۴۲\frac{۱}{۲})^۲+(y-۶\frac{۱}{۲})^۲=۱ \quad ۴۲\frac{۱}{۲}\le x\le ۴۳ \quad ۶\le y\le ۷$

۱۶) $y=۷ \quad ۴۱\le x\le ۴۲\frac{۱}{۲}$

۱) $(x-۳۹)^۲+(y-۱۱)^۲=۱ \quad ۳۹\le x\le ۴۰ \quad ۱۰\le y\le ۱۱$

۲) $x=۴۰ \quad ۶\le y\le ۱۱$

۳) $(x-۳۹)^۲+(y-۶)^۲=۱ \quad ۳۹\le x\le ۴۰ \quad ۵\le y\le ۶$

۴) $x=۳۹ \quad ۵\le y\le ۱۰$

۱) $(x-۳۷)^۲+(y-۱۰)^۲=۱ \quad ۳۷\le x\le ۳۸ \quad ۹\le y\le ۱۰$

۲) $x=۳۸ \quad ۶\le y\le ۱۰$

۳) $(x-۳۷)^۲+(y-۶)^۲=۱ \quad ۳۷\le x\le ۳۸ \quad ۵\le y\le ۶$

۴) $y=۵ \quad ۳۶\le x\le ۳۷$

۵) $(x-۳۶)^۲+(y-۶)^۲=۱ \quad ۳۵\le x\le ۳۶ \quad ۵\le y\le ۶$

۶) $x=۳۵ \quad ۶\le y\le ۹$

۷) $(x-۳۵)^۲+(y-۱۰)^۲=۱ \quad ۳۵\le x\le ۳۶ \quad ۹\le y\le ۱۰$

۸) $x=۳۶ \quad ۶\le y\le ۱۰$

۹) $y=۶ \quad ۳۶\le x\le ۳۷$

۱۰) $x=۳۷ \quad ۶\le y\le ۹$

۱۱) $x=۳۶ \quad ۱۰\le y\le ۱۱$

۱۲) $A\begin{bmatrix}۳۶\\۱۰\end{bmatrix} \; B\begin{bmatrix}۳۹\\۱۱\end{bmatrix} : \; y-۱۰=\frac{۱۰-۱۱}{۳۶-۳۹}(x-۳۶)$

۱۳) $x=۳۹ \quad ۱۱\le y\le ۱۲$

۱۴) $A\begin{bmatrix}۳۹\\۱۲\end{bmatrix} \; B\begin{bmatrix}۳۶\\۱۱\end{bmatrix} : \; y-۱۲=\frac{۱۲-۱۱}{۳۹-۳۶}(x-۳۹)$

۱۵) $x=۳۶ \quad ۱۱\frac{۱}{۲}\le y\le ۱۲$

16) $A\begin{bmatrix}36\\11\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ $B\begin{bmatrix}39\\12\frac{1}{2}\end{bmatrix}$: $y-12\frac{1}{2}=\dfrac{12\frac{1}{2}-11\frac{1}{2}}{39-36}(x-39)$

17) $x=39 \quad 12\frac{1}{2}\le y\le 13$

18) $A\begin{bmatrix}39\\13\end{bmatrix}$ $B\begin{bmatrix}36\\12\end{bmatrix}$: $y-12=\dfrac{12-13}{36-39}(x-36)$

1) $y=6 \quad 34\le x\le 35$
2) $(x-34)^2+(y-6)^2=1 \quad 34\le x\le 35 \quad 5\le y\le 6$
3) $x=34 \quad 4\le y\le 5$
4) $(x-33)^2+(y-4)^2=1 \quad 33\le x\le 34 \quad 3\le y\le 4$
5) $y=3 \quad 32\le x\le 33$
6) $(x-32)^2+(y-4)^2=1 \quad 31\le x\le 32 \quad 3\le y\le 4$
7) $y=4 \quad 31\le x\le 33$
8) $x=33 \quad 4\le y\le 5$
9) $y=5 \quad 32\le x\le 33$
10) $(x-32)^2+(y-6)^2=1 \quad 31\le x\le 32 \quad 5\le y\le 6$
11) $x=31 \quad 6\le y\le 7$
12) $(x-32)^2+(y-7)^2=1 \quad 31\le x\le 32 \quad 7\le y\le 8$
13) $y=8 \quad 32\le x\le 33$
14) $(x-33)^2+(y-7)^2=1 \quad 33\le x\le 34 \quad 7\le y\le 8$
15) $x=34 \quad 6\le y\le 7$
16) $y=7 \quad 32\le x\le 33$
17) $x=33 \quad 6\le y\le 7$
18) $y=6 \quad 32\le x\le 33$

19) $x=32 \quad 6\le y\le 7$

1) $x=30 \quad 6\frac{1}{2}\le x\le 7\frac{1}{2}$

2) رأس سهمی $S\begin{bmatrix}29\\6\end{bmatrix}$ و $A\begin{bmatrix}30\\6\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ انتهای سهمی

3) $(x-29)^2+(y-5)^2=1 \quad 29\le x\le 30 \quad 5\le y\le 6$
4) $x=30 \quad 4\le y\le 5$
5) $(x-29)^2+(y-4)^2=1 \quad 29\le x\le 30 \quad 3\le y\le 4$
6) $y=3 \quad 27\le x\le 29$
7) $(x-27)^2+(y-4)^2=1 \quad 26\le x\le 27 \quad 3\le y\le 4$
8) $x=26 \quad 4\le y\le 6$
9) $(x-27)^2+(y-6)^2=1 \quad 26\le x\le 27 \quad 5\le y\le 6$
10) $x=27 \quad 4\le y\le 5$
11) $y=4 \quad 27\le x\le 29$
12) $x=29 \quad 4\le y\le 5$
13) $(x-29)^2+(y-6)^2=1 \quad 28\le x\le 29 \quad 5\le y\le 6$

14) رأس سهمی $S\begin{bmatrix}28\\6\end{bmatrix}$ و $A\begin{bmatrix}30\\7\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ انتها

روابط ریاضی کلمه‌ی مصرف

1) $y=8 \quad 23\le x\le 24$
2) $(x-24)^2+(y-7)^2=1 \quad 24\le x\le 25 \quad 7\le y\le 8$
3) $x=25 \quad 6\le y\le 7$
4) $(x-24)^2+(y-6)^2=1 \quad 24\le x\le 25 \quad 5\le y\le 6$
5) $y=5 \quad 23\le x\le 24$
6) $(x-23)^2+(y-6)^2=1 \quad 22\le x\le 23 \quad 5\le y\le 6$
7) $x=22 \quad 6\le y\le 7$
8) $(x-23)^2+(y-7)^2=1 \quad 22\le x\le 23 \quad 7\le y\le 8$
9) $y=7 \quad 23\le x\le 24$
10) $x=24 \quad 6\le y\le 7$
11) $y=6 \quad 23\le x\le 24$
12) $x=23 \quad 6\le y\le 7$
13) $(x-21)^2+(y-7)^2=1 \quad 21\le x\le 22 \quad 6\le y\le 7$
14) $y=6 \quad 20\le x\le 21$
15) $(x-21)^2+(y-6)^2=1 \quad 20\le x\le 22 \quad 5\le y\le 6$

1) رأس سهمی $S\begin{bmatrix}16\\6\end{bmatrix}$ و $A\begin{bmatrix}19\\8\end{bmatrix}$ انتهای سهمی

2) $(x-19)^2+(y-7)^2=1 \quad 19\le x\le 20 \quad 7\le y\le 8$

۳) $x = 20 \qquad 6 \le y \le 7$

۴) $(x-19)^2 + (y-6)^2 = 1 \qquad 19 \le x \le 20 \qquad 5 \le y \le 6$

۵) $y = 5 \qquad 17 \le x \le 19$

۶) $(x-17)^2 + (y-6)^2 = 1 \qquad 16 \le x \le 17 \qquad 5 \le y \le 6$

۷) رأس سهمی $S\begin{bmatrix}17\\6\end{bmatrix}$ و $A\begin{bmatrix}19\\7\end{bmatrix}$ انتهای سهمی

۸) $x = 19 \qquad 6 \le y \le 7$

۹) $y = 6 \qquad 17 \le x \le 19$

۱۰) $y = 6 \qquad 15 \le x \le 16$

۱۱) $(x-15)^2 + (y-6)^2 = 1 \qquad 15 \le x \le 16 \qquad 5 \le y \le 6$

۱۲) $y = 5 \qquad 13 \le x \le 15$

۱۳) $x = 13 \qquad 4 \le y \le 5$

۱۴) $(x-12)^2 + (y-4)^2 = 1 \qquad 11 \le x \le 13 \qquad 3 \le y \le 4$

۱۵) $y = 4 \qquad 11 \le x \le 12$

۱۶) $x = 12 \qquad 4 \le y \le 7$

۱۷) $(x-12)^2 + (y-8)^2 = 1 \qquad 12 \le x \le 13 \qquad 7 \le y \le 8$

۱۸) $x = 13 \qquad 6 \le y \le 8$

۱۹) $y = 6 \qquad 13 \le x \le 14$

۲۰) $x = 14 \qquad 6 \le y \le 7$

۲۱) $(x-14)^2 + (y-8)^2 = 1 \qquad 14 \le x \le 15 \qquad 7 \le y \le 8$

۲۲) $x = 15 \qquad 6 \le y \le 8$

۱) $y = 8 \qquad 9 \le x \le 10$

۲) $(x-10)^2 + (y-7)^2 = 1 \qquad 10 \le x \le 11 \qquad 7 \le y \le 8$

۳) $x = 11 \qquad 6 \le y \le 7$

۴) $(x-10)^2 + (y-6)^2 = 1 \qquad 10 \le x \le 11 \qquad 5 \le y \le 6$

۵) $y = 5 \qquad 5 \le x \le 10$

۶) $(x-5)^2 + (y-6)^2 = 1 \qquad 4 \le x \le 5 \qquad 5 \le y \le 6$

۷) $x = 4 \qquad 6 \le y \le 8$

۸) $(x-5)^2 + (y-8)^2 = 1 \qquad 4 \le x \le 5 \qquad 7 \le y \le 8$

۹) $x = 5 \qquad 6 \le y \le 7$

۱۰) $y = 6 \qquad 5 \le x \le 8$

۱۱) $x = 8 \qquad 6 \le y \le 7$

۱۲) $(x-9)^2 + (y-7)^2 = 1 \qquad 8 \le x \le 9 \qquad 7 \le y \le 8$

۱۳) $y = 7 \qquad 9 \le x \le 10$

۱۴) $x = 10 \qquad 6 \le y \le 7$

۱۵) $y = 6 \qquad 9 \le x \le 10$

۱۶) $x = 9 \qquad 6 \le y \le 7$

۱۷) $x = 9 \qquad 9 \le y \le 10$

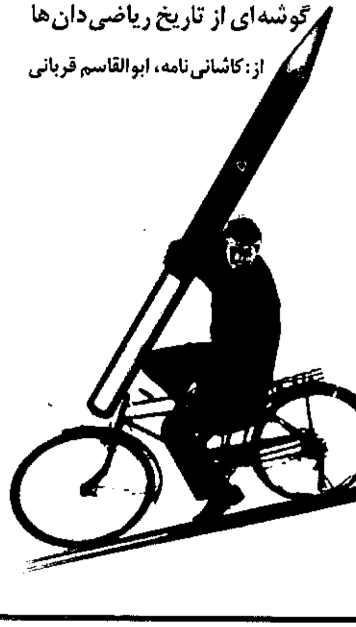
۱۸) $(x-9)^2 + (y-7)^2 = 1 \qquad 9 \le x \le 10 \qquad 9 \le y \le 10$

۱۹) $y = 9 \qquad 9 \le x \le 10$

از نامه‌ی غیاث‌الدین جمشید کاشانی به پدرش

گوشه‌ای از تاریخ ریاضی‌دان‌ها

از: کاشانی‌نامه، ابوالقاسم قربانی



غرض که چون بنده همچنین جایی درآمد و هر کس چشم و گوش برگماشتند که معلوم کنند که این کس در چه نصاب است، هرچند روز بندگی حضرت سلطنت پناهی در حلقه‌ی درس حاضر می‌شود و چون حاضر شد. یکی از امتحان طلبه این است که هر کس به حلقه‌ی درسی درآید غافل است از آن که چه مسئله در میان خواهد بود و اصحاب مدرسه آن را به تجدید مطالعه بلیغ کرده‌اند، چون آغاز بحث می‌شد هربار به عنایة‌الله تعالی و یمن همت آن خداوندی این بنده دخل کاملی کرده چنانکه چند چیز که ایشان را از مطالعه معلوم نشده گفته و اعتراضات وارده بر سخن ایشان کرده و نکته‌های لطیف بیرون آورده که همه حیران مانده‌اند. پیش از آمدن این بنده اشکالی چند ایشان را واقع شده بود و در میان یکدیگر انداخته و هیچکس بیرون آوردن آن نتوانسته است. مثلاً خواسته‌اند که اسطرلابی که یک گز قطر آن باشد بسازند... همه‌ی مستخرجان فرمودند که به اتفاق عمل کنند... و درمانده بودند. ریاضی‌دان را اشارت فرموده بودند که به قوت قوانین هندسی تحقیق و تصحیح آن بکنند. هیچ کس نتوانسته است که تحقیق آن بکند... هرچند عمل می‌کرده‌اند و فکر در آن می‌نموده‌اند راست نمی‌آمده. چون این بنده رسید در روز این مسأله در حضرت سلطنت پناهی پیش آورده‌اند و این بنده در فور و هم در مجلس تصحیح یکی از آن کرده و منشأ غلط ایشان بیان کرده و تطبیق کلام زیج بر این بیان کرد.

● غلامرضا یاسی پور

تاریخچه‌ی مجلات ریاضی ایران

در شماره‌ی ۳۲ مجله‌ی یکان، در مقاله‌ای با عنوان «پژوهشگر امروز، پژوهشگر فردا» چنین می‌خوانیم:

«ما خوش داریم بگوییم که قرن بیستم قرن دانش است. به‌راستی هم، حضور دانش در زندگی ما روزبه‌روز محسوس‌تر می‌شود. دانش به ما امکان می‌دهد تا موادی را که در زندگی‌مان به‌کار می‌آید، به‌وجود آوریم. پدیده‌های شگرفی در جهان پیرامون خود کشف کنیم و برای ساختن ماشین‌ها که کار را بر ما آسان می‌کنند، اصول نوینی بیابیم. با این همه می‌توان گفت که دانش خدمت‌گزار بشر است؟»

البته چنین سخنی درست نیست. دانش، خود آدمی است. کشش و گرایش اوست به رشد و گسترش بی‌پایان، کار جست‌وجوی اوست و کنجکاوی بی‌حد اوست، عطش مبرا از سودجویی اوست برای دانستن و قابلیت شور شگفتی اوست.

اگر به دقت به دانش بنگریم، نه‌تنها قدرت آدمی، بلکه هم‌چنین ضعف او را در آن بازمی‌یابیم و نه‌تنها هوش و زیرکی، بلکه قلب و احساس او را. دانش مانند خود آدمی وابسته‌ی الزامات فخر و شرف است و معتقدات اخلاقی. و شاید هم دچار برخی پنداشت‌ها. و احتمالاً هم همین است که آن را جذّاب و گیرا می‌کند و کسانی که دوستش می‌دارند، می‌گویند که دانش نه یک خدمت‌گزار ماشینی، بلکه چیزی زنده و شگرف است.

اکنون همه دانش را محترم می‌شمارند و خواستار آن‌اند. فیزیک، ریاضیات، زیست‌شناسی، پزشکی و پیشه‌ی مهندسی را هرکس که خواسته باشد، فرامی‌گیرد.

در بخشی از همین شماره، با عنوان: «بی‌آن‌که عصبانی شوید، این مسئله را حل کنید»، چنین آمده است:

«**جک لندن**، نویسنده‌ی معروف آمریکایی، درباره‌ی یکی از مسافرت‌هایش به نواحی قطبی نقل می‌کند که یکدفعه، در خارج از اقامتگاه خبر می‌شود که هم‌سفرش که در اقامتگاه بستری است، در حال نزاع است. جک لندن تصمیم می‌گیرد هرچه زودتر به اقامتگاه برگردد. سورتمه‌ای فراهم می‌کند که پنج سگ آن را می‌کشند. حرکت می‌کند. اولین ۲۴ ساعت را بدون حادثه‌ای می‌گذراند و حساب می‌کند، اگر با همین سرعت پیش برود، در رأس موعدی که پیش‌بینی کرده است، به مقصد می‌رسد. متأسفانه در پایان نخستین ۲۴ ساعت، دو سگ از پنج سگ سورتمه، افسار را پاره و فرار می‌کنند. جک لندن مجبور می‌شود بقیه‌ی راه را با کمک سه سگ بپیماید و درنتیجه ۴۸ ساعت دیرتر از زمانی که پیش‌بینی کرده بود، به مقصد می‌رسد.

جک لندن ضمن این روایت توضیح می‌دهد، اگر دو سگ فراری ۵۰ میل دورتر افسار را پاره می‌کردند، تأخیر وی فقط ۲۴ ساعت می‌شد.

کل مسافتی را که جک لندن پیموده است، حساب کنید.

این شماره بخشی دارد با عنوان: «**از هر جایی یادداشتی**» که در آن این دو خبر بسیار خواندنی هستند:

شهرت جهانی لاپلاس به خاطر فرضیه‌ی وی درباره‌ی پیدایش منظومه‌ی شمسی است که به فرضیه‌ی لاپلاس معروف است. بنا به این فرضیه، خورشید و سیارات از یک سحابی اولیه جدا شده‌اند

خبر اول:

«بعضی تعاریف هندسی» که در «فرهنگ آکادمی فرانسه» چاپ هفتم ۱۸۷۷ بیان شده است: (خواننده به سادگی درمی‌یابد، تعاریف زیر نه تنها دقیق نیست، بلکه صحیح هم نیست و از این لحاظ، فرهنگ آکادمی هیچ قابل توجه نیست).

خط[۱]: خیلی ساده، با ملاحظه‌ی این که نه پهنا دارد و نه عمق.

خط[۲]: خطی که با قلم رسم می‌شود.

سطح: رویه، خارج: قسمت خارجی یک جسم.

رویه: سطح یا گسترش یک جسم صلب که فقط از لحاظ درازا و پهنا سنجیده می‌شود؛ بدون این که عمق یا ضخامت آن مورد نظر باشد.

حجم: فضا، بزرگی یک جسم یا یک تنه یا یک بسته.

زاویه: گشادی دو خط که در یک نقطه متلاقی باشند، میلی که هریک نسبت به دیگری دارد.

میل: بیان ریاضی نسبت انحنا (؟)

انحنا: میل یک خط یا یک سطح نسبت به دیگری.

محدب: وضع متقابل مقعر، سطحی که به‌طور کروی برآمده باشد (چرا به‌طور کروی؟)

برآمدگی: محدب شدن.

مقعر: وضع متقابل محدب، سطحی که به‌طور کروی تو رفته باشد.

متوازی‌الاضلاع: چهار ضلعی که ضلع‌های روبه‌رویش مساوی و موازی باشند (برای تعریف متوازی‌الاضلاع، توازی ضلع‌های روبه‌رو یا تساوی آن‌ها کفایت می‌کند).

نکتهـ در چاپ ششم این فرهنگ، تعریف متوازی‌الاضلاع از این قرار است: شکل مسطحی که ضلع‌های روبه‌رویش موازی باشند(!).

مربع: شکل مسطحی که چهارضلع و چهار زاویه‌ی قائمه دارد (!)

کمان: از لحاظ هندسی، قسمتی از دایره که از نصف آن کمتر باشد (!)

استوانه: شکل دراز و گرد، مخصوصاً با بزرگی برابر (؟!!)

[نقل از کتاب: Curiosités Géom]

خبر دوم:

در مورد «اطلاعاتی مقدماتی از علم تنجیم» است که در آن چنین آمده است:

احوال کواکب: زحل و مریخ نحس‌اند، زحل نحس اکبر و مریخ نحس اصغر. مشتری و زهره سعدند، مشتری سعد اکبر و زهره سعد اصغر. عطارد با سعد سعد باشد و با نحس نحس. نیّرین (خورشید و ماه) از تثلیث و تسدیس سعد باشند، از مقابله و تربیع و مقارنه نحس.

کواکب علویه و شمس مذکرند، زهره و قمر مؤنّث... زحل سرد و خشک، مریخ و شمس گرم و خشک، مشتری و زهره گرم و تر، قمر سرد و تر، عطارد با هر کوکبی طبیعت او گیرد...

مدلولات کواکب: زحل کوکب پیرمردان و دهقانان و گوشه‌نشینان و ارباب خاندان‌های قدیم و مردمان سیاه و صفاران و یهودان و آن‌ها که کارهای سخت کنند. مشتری کوکب قضّات و علما و اشراف و اصحاب مناصب و ارباب نوامیس و ترسایان. مریخ کوکب، امرا و ترکان و اهل سلاح و خداوندان لشکر و سپاه‌سالاران و عیاران و دزدان و بت‌پرستان و اهل شر و فتنه. شمس کوکب پادشاهان و بزرگان و ملوک و خداوند امر و نهی و آتش‌پرستان. زهره‌ی کوکب، زنان و خادمان و ارباب لهو و طرب و اهل عشرت و مسلمانان. عطارد کوکب، دبیران و خواجگان و بزرگان و اهل دیوان و علما و اکابر و حکیمان و شاعران و زیرکان و منجمان. قمر کوکب، رسولان و پیکان و صاحب خبران و مسافران و اطفال و چهارپایان و

دانش مانند خود آدمی وابسته‌ی الزامات فخر و شرف است و معتقدات اخلاقی. و شاید هم دچار برخی پنداشت‌ها. و احتمالاً هم همین است که آن را جذّاب و گیرا می‌کند

سیّاحان. [از کتاب سی فصل خواجه نصیر]

در شماره‌ی ۳۳، در پاسخ معمای شماره‌ی قبل چنین آورده شده است:

از توضیح جک لندن مبنی بر این‌که اگر با پنج سگ ۵۰ میل دیگر می‌پیمود، فقط ۲۴ ساعت تأخیر داشت، نتیجه می‌گیریم که اگر با پنج سگ ۱۰۰ میل دیگر را می‌پیمود، ابداً تأخیر نداشت. بنابراین از محلی که دو سگ فرار کرده‌اند، یعنی از پایان ۲۴ ساعت اولیه، ۱۰۰ میل تا مقصد فاصله داشته است. اگر مدت زمانی که این فاصله را با سه سگ پیموده است، با پنج سگ طی می‌کرد، مسافتی برابر با $\frac{100\times 5}{3}=166\frac{2}{3}$ میل را می‌پیمود و یا این‌که فقط ۱۰۰ میل پیموده بود، در برابر $66\frac{2}{3}$ میل، مدت ۴۸ ساعت از وقت صرفه‌جویی می‌کرد.

بنابراین سرعت اولیه‌ی وی $33\frac{1}{3}$ میل در ۲۴ ساعت بوده و کل مسافتی که پیموده، برابر است با:

$$100+33\frac{1}{3}=133\frac{1}{3}$$

در این شماره و در مقاله‌ای با عنوان «مراحل مهم علم نجوم» در شرح زندگی **لاپلاس**، دانشمند معروف فرانسوی، چنین می‌خوانیم:

نام لاپلاس با بزرگ‌ترین فرضیه‌های مربوط به کیهان‌شناسی همراه است. **پیر سیمون لاپلاس** از خانواده‌ای کشاورز، اما مرفه در کالوادو به دنیا آمد. بعد از این‌که در ادبیات مطالعاتی به عمل آورد، به تحصیل ریاضیات علاقه‌مند شد و به پاریس آمد و از **دالامبر** خواست تا در حل بعضی مسائل مربوط به مکانیک، وی را راهنمایی کند. دالامبر این مسائل را بسیار جالب یافت و از آن به بعد، لاپلاس را تحت حمایت خویش قرار داد و وی را برای تدریس ریاضیات مدرسه‌ی نظامی پیشنهاد کرد. لاپلاس در سال ۱۷۷۲ رساله‌ای را که درباره‌ی حساب فاصله (دیفرانسیل) تألیف کرده بود، برای آکادمی شهر تورن فرستاد. این موضوع موجب شد که یک سال بعد، به عضویت آکادمی علوم برگزیده شود. هم‌چنین به عضویت دفتر طول جغرافیایی، مؤسسه‌ی ناسیونال و آکادمی فرانسه انتخاب شد و بعد از اعاده‌ی سلطنت، مؤسسه‌ی **پردوفرانس** را تأسیس کرد.

شهرت جهانی لاپلاس به خاطر فرضیه‌ی وی درباره‌ی پیدایش منظومه‌ی شمسی است که به **فرضیه‌ی لاپلاس** معروف است. بنا به این فرضیه، خورشید و سیارات از یک سحابی اولیه جدا شده‌اند. فرضیه به نوعی است که عظمت منظومه‌ی شمسی، گذشته، حال و آینده‌ی آن‌را نیز معلوم می‌کند. در این‌جا از این فرضیه صحبت نمی‌کنیم و شرح و تفصیل آن را به فصلی جداگانه موکول می‌کنیم.

لاپلاس که هم دانشمند ریاضی بود و هم نویسنده‌ای ظریف، فرضیه‌ی خود را چنان تنظیم کرده که در عین حال که همه‌ی قوانین جاذبه‌ی جهانی را متضمن است، از لحاظ نگارش هم یک شاهکار به حساب می‌آید. وی در خاتمه‌ی اثر خود این عبارت را به کار برده است که نه تنها هر علاقه‌مند به علم نجوم باید آن را بیاموزد، بلکه باید آن را با آب طلا زینت سردر هر رصدخانه‌ای ساخت:

«علم نجوم، به خاطر شکوه و عظمت موضوع آن و به خاطر فضیلت تئوری‌های مربوط به آن، عالی‌ترین بنای مجلل فکر انسانی و شریف‌ترین معیار هوش وی است.»

لاپلاس کلیه‌ی مسائل پیچیده‌ی مربوط به علم نجوم را بررسی و بسیاری از آن‌ها را حل کرده و نسبت به بقیه هم راه‌حل را هموار ساخته است. وی فرورفتگی قطبین زمین را از روی تأثیری که در حرکات ماه دارند، تعیین کرد. علت جزر و مد را که نیوتن فقط طرحی از آن را ارائه داده بود، به طور کامل توضیح داد و از راه محاسبات مربوط به آن‌ها، جرم ماه را حساب کرد. درباره‌ی اهتزازات زمین نظریه‌ای بیان داشت، اجزای سیاره‌ی اورانوس را که توسط **هرشل** کشف شده بود، اندازه گرفت و درباره‌ی اختلالات حرکت آن، مطالعات دقیقی انجام داد. و بالاخره اغتشاشات حرکات سیاره‌ی مشتری و حلقه‌ی زحل را بررسی کرد. در فیزیک هم مطالعاتی انجام داد؛ جدول‌های مربوط به انکسار جوی را تنظیم کرد و فرمول کامل تعیین ارتفاعات را از روی فشارسنج به دست آورد.

صرف‌نظر از اثر مهم وی «بیان سیستم جهان»، سایر آثار وی که عبارت‌اند از: «رساله‌ای درباره‌ی مکانیک سماوی»، «نظریه‌ی مربوط به حرکت و شکل بیضوی سیارات»، هنوز هم از آثار اساسی و مورد مراجعه‌ی طالبان علم نجوم هستند.

پی‌نوشت

1. Ligne 2. Trait

● عنایت‌اله راستی‌زاده
دبیر ریاضی دبیرستان‌های شیراز

ریشه‌ی خارجی معادله

اشاره

در حل مسائل گوناگون معادلات، از جمله معادلات اصم، معادلات شامل لگاریتم و بعضی نمونه‌های دیگر، دانش‌آموزان پیش از شروع به حل معادله، به یافتن حدود قابل قبول برای متغیر می‌پردازند. در پایان و پس از حل معادله، جواب‌های به‌دست آمده را با دامنه‌ای که در ابتدا یافته‌اند، مقایسه می‌کنند. در این مقاله می‌خواهیم به این سؤال پاسخ دهیم که آیا این کار کافی است؟!

نمونه‌ی ۱: معادله‌ی رادیکالی زیر را حل کنید.

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}=\sqrt{2x}$$

حل: ابتدا دامنه یا مقدارهای قابل قبول برای x را می‌یابیم. داریم:

$$\begin{cases} x+1\geq 0\\ 2x+3\geq 0\\ 2x\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x\geq -1\\ x\geq -\frac{3}{2}\\ x\geq 0\end{cases}\Rightarrow x\geq 0$$

لذا دامنه $x\geq 0$ است.

برای حل معادله، دو طرف برابری را مجذور می‌کنیم:

$$x+1+2x+3+2\sqrt{(x+1)(2x+3)}=2x$$

و به این معادله می‌رسیم:

$$2\sqrt{(x+1)(2x+3)}=-(x+4)$$

دو طرف برابری را دوباره مجذور می‌کنیم:

$$4(x+1)(2x+3)=(x+4)^2$$

بنابراین: $7x^2+12x-4=0$

این معادله‌ی درجه دوم، دو جواب دارد: $x=-2$ و $x=\frac{2}{7}$.

$x=-2$ بیرون از دامنه است. ولی $x=\frac{2}{7}$ در دامنه‌ی تغییر x قرار دارد. ولی آیا جواب معادله است؟ اگر در معادله آزمایش کنیم، داریم: $\frac{3}{\sqrt{7}}+\frac{25}{\sqrt{7}}=\frac{2}{\sqrt{7}}$. پس در معادله صدق نمی‌کند و $x=\frac{2}{7}$ نیز قابل قبول نیست؛ **با وجودی که در دامنه صدق می‌کرد!**

به این ترتیب، در این نمونه دیدیم که هر جوابی که در دامنه‌ی تغییر x قرار داشته باشد، **لزوماً** جواب معادله نیست.

نمونه‌ی ۲. معادله‌ی زیر را حل کنید. آیا معادله جواب حقیقی دارد؟

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+7}=\sqrt{2x-1}$$

حل: ابتدا دامنه را می‌یابیم:

$$\begin{cases} x+3\geq 0\\ 2x+7\geq 0\\ 2x-1\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x\geq -3\\ x\geq -\frac{7}{2}\\ x\geq \frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow x\geq \frac{1}{2}$$

لذا دامنه $\left\{x\in R: x\geq \frac{1}{2}\right\}$ است.

برای حل معادله، دو طرف برابری را مجذور می‌کنیم. به معادله‌ی زیر می‌رسیم:

$$2\sqrt{(x+3)(2x+7)} = -(x+11)$$

دو طرف برابری را دوباره مجذور می‌کنیم:

$$7x^2+30x-37=0$$

معادله‌ی درجه دوم اخیر، دو جواب دارد: $x=1$ و

$$x=\frac{-37}{7}$$

$x=\frac{-37}{7}$ در دامنه‌ی جواب قرار ندارد و قابل قبول نیست. اما $x=1$ با وجودی که در محدوده‌ی دامنه قرار دارد، با آزمایش آن در معادله‌ی داده شده، خواهیم دید که در آن صدق نمی‌کند. اگر $x=1$ را در معادله قرار دهید، برابری نادرست $1=3+2$ حاصل می‌شود. درواقع $x=1$ ریشه‌ی معادله‌ی

$$-\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+7}=\sqrt{2x-1}$$

است.

***

در نمونه‌ی بعدی، به سراغ لگاریتم می‌رویم. در این جا با وضع متفاوتی روبه‌رو خواهیم شد.

«ریشه‌ی از دست رفته!»

نمونه‌ی ۳. معادله را حل کنید:

$$20\log_{4x}\sqrt{x}+7\log_{16x}x^3-3\log_{\frac{x}{2}}x^2=0$$

حل: دامنه‌ی تعریف معادله را پیدا می‌کنیم:

$$x>0,\ x\neq\frac{1}{4},\ x\neq\frac{1}{16},\ x\neq 2$$

حال داریم:

$$10\log_{4x}x+21\log_{16x}x-6\log_{\frac{x}{2}}x=0$$

با توجه به:

$$\log_b a=\frac{1}{\log_a b}$$

داریم:

$$\frac{10}{\log_x 4x}+\frac{21}{\log_x 16x}-\frac{6}{\log_x \frac{x}{2}}=0 \quad (x\neq 1)$$

$$\Rightarrow \frac{10}{1+2\log_x 2}+\frac{21}{1+4\log_x 2}-\frac{6}{1-\log_x 2}=0$$

$t=\log_x 2$ می‌گیریم، به این معادله می‌رسیم:

$$\frac{10}{1+2t}+\frac{21}{1+4t}=\frac{6}{1-t}$$

پس از انجام محاسبات خواهیم داشت:

$26t^2-3t-5=0$ و از آن‌جا: $t=\frac{1}{2}$ و $t_2=-\frac{5}{13}$.

در این صورت:

$$\log_x 2=\frac{1}{2}\Rightarrow \sqrt{x}=2\Rightarrow x=4$$

و هم‌چنین:

$$\log_x 2=-\frac{5}{13}\Rightarrow x=2^{-\frac{13}{5}}=2^{-3}\times 2^{\frac{2}{5}}=\frac{\sqrt[5]{4}}{8}$$

هر دو جواب $x=\frac{\sqrt[5]{4}}{8}$ و $x=4$ در محدوده هستند و در معادله صادق‌اند. اما تنها جواب‌های معادله این‌ها نیستند. $x=1$ هم جواب معادله است. شاید بتوان $x=1$ را ریشه‌ی فراموش‌شده نامید!

در واقع، استفاده‌ی صوری از دستور مربوط به تغییر مبنای لگاریتم $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}, a>0, a\neq 1, b>0, b\neq 1$ به از دست رفتن جواب منجر شده است. چرا که سمت چپ و سمت راست تساوی فوق، می‌تواند دامنه‌های تعریف متفاوتی داشته باشد.

***

اینک به سراغ **مثلثات** می‌رویم. وقتی یک برابری بین زاویه‌ها داشته باشیم و از دو طرف برابری، سینوس یا کسینوس بگیریم، غالباً با وضع مشابهی روبه‌رو می‌شویم. برای نمونه، زوج بودن تابع کسینوس، به معنای آن است که می‌تواند موجب ورود ریشه‌های خارجی شود.

نمونه‌ی ۴. معادله‌ی زیر را حل کنید:

$$\operatorname{Arccos}x-\operatorname{Arccos}\frac{\sqrt{2}}{2}x=\frac{\pi}{4} \qquad (1)$$

حل: این معادله، برای مقدارهایی از x که با شرط $-1\le x\le 1$ (دامنه) سازگار باشند، معنی دارد:

$$\left.\begin{array}{l} -1\le \frac{\sqrt{2}}{2}x\le 1\Rightarrow -\sqrt{2}\le x\le \sqrt{2} \\ -1\le x\le 1 \end{array}\right\}\Rightarrow -1\le x\le 1$$

اکنون از دو طرف معادله کسینوس می‌گیریم:

$$\cos(\operatorname{Arccos}x-\operatorname{Arccos}\frac{\sqrt{2}}{2}x)=\cos\frac{\pi}{4}$$

چون

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

خواهیم داشت:

$$(x)(\frac{\sqrt{2}}{2}x)+\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-\frac{1}{2}x^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}x^2+\sqrt{1-\frac{3}{2}x^2+\frac{x^4}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow 1-\frac{3}{2}x^2+\frac{x^4}{2}=\frac{1}{2}(1+x^4-2x^2)$$

$$\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm 1$$

با وجودی که هر دو مقدار $x=1$ و $x=-1$ در مجموعه‌ی مقدارهای قابل قبول برای x (یعنی در دامنه‌ی معادله) قرار دارند، $x=1$ ریشه‌ی خارجی معادله‌ی ۱ است، زیرا به ازای $x=1$، مقدار سمت چپ معادله‌ی ۱، برابر $-\frac{\pi}{4}$ می‌شود و نه $\frac{\pi}{4}$.

در این مثال هم دیدیم که صدق کردن مقدار به‌دست آمده در دامنه کافی نیست، بلکه باید جواب‌ها را آزمایش کرد.

❁ ❁ ❁

حال به نمونه‌ی جالب توجه زیر می‌پردازیم؛ یک معادله‌ی رادیکالی با ریشه‌های سوم. ظاهراً به توان ۳ رساندن نمی‌تواند ریشه‌ی خارجی پدید آورد. به‌جای هرگونه اضافه‌گویی، به سراغ مسئله می‌رویم:

نمونه‌ی ۵. معادله‌ی زیر را حل کنید:

$$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{3x-2}=\sqrt[3]{x-2} \qquad (2)$$

حل: مجموعه مقدارهای قابل قبول x در این معادله (یعنی دامنه‌ی آن)، عبارت است از تمامی R.

دو طرف معادله‌ی ۲ را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$x+3x-2+3\sqrt[3]{x(3x-2)}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{3x-2})=x-2 \qquad (3)$$

در معادله‌ی ۳، می‌توانیم به جای $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{3x-2}$، مقدارش از معادله‌ی ۱، یعنی $\sqrt[3]{x-2}$ را قرار دهیم.

به دست می‌آید:

$$\sqrt[3]{x(3x-2)(x-2)}=-x$$

دوباره دو طرف را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$x(3x-2)(x-2)=-x^3\Rightarrow x^3+x(3x-2)(x-2)=0$$

$$x(x^2+3x^2-8x+4)=0\Rightarrow x(4x^2-8x+4)=0$$

که از آن‌جا به دست می‌آید:

$$x(x^2-2x+1)=0 \qquad (4)$$

و درنتیجه: $x=0$ و $x=1$.

با آزمایش (امتحان جواب) معلوم می‌شود که $x=1$ (با آن‌که بیرون از دامنه نیست!) یک ریشه‌ی خارجی است و فقط $x=0$ قابل قبول است. در این نمونه هم دیدیم که صرف صدق کردن جواب در دامنه کافی نیست!

کار تمام نشده است! حوصله کنید تا ببینیم اشکال کار در کجاست؟ به توان ۳ رساندن، چه بار اول و چه بار دوم، نمی‌تواند مشکلی به‌وجود آورد. اما در این بین، یک عمل می‌ماند که می‌تواند موجب تردید شود. این عمل به آن‌جا مربوط می‌شود که سمت چپ معادله‌ی ۲ را با سمت راست آن

عوض کردیم؛ یعنی به‌جای $\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{۳x-۲}$، مقدار $\sqrt[۳]{x-۲}$ را گذاشتیم. باید در همین‌جا باشد که ریشه‌ی خارجی فرصتی برای ورود یافته باشد. همه‌ی بحث به همین تبدیل ارتباط دارد.

درواقع اگر برابری
$$a+b=c \qquad (۵)$$
را در نظر بگیریم و دو طرف آن را به توان ۳ برسانیم، به این برابری می‌رسیم:

$$a^۳+b^۳+۳ab(a+b)=c^۳ \Rightarrow a^۳+b^۳+۳abc=c^۳ \qquad (۶)$$

واضح است، تمام عددهای حقیقی که در تساوی ۵ صدق کنند، در تساوی ۶ هم صادق‌اند. اما عکس این حکم درست نیست. برابری ۶ به‌ازای $a=b=-۱$ و $c=۱$ برقرار است، درحالی‌که برابری ۵، یعنی $a+b=c$، به ازای همین مقدارها برقرار نیست.

نمونه‌ی ۶. معادله‌ی زیر را حل کنید. آیا معادله جواب دارد؟

$$۲\mathrm{Arc}\cos x+\mathrm{Arc}\sin(۱-x)=-\frac{\pi}{۲} \qquad (۷)$$

حل: این معادله برای مقدارهایی از x که در شرایط زیر سازگار باشند، معنی دارد:

الف) $-۱\le x\le ۱$

ب) $-۱\le ۱-x\le ۱\Rightarrow ۰\le x\le ۲$

درنتیجه، دامنه‌ی معادله (اشتراک الف و ب) عبارت است از:

$$D=\{x\in R: ۰\le x\le ۱\}$$

حال داریم:

$$۲\mathrm{Arc}\cos x=-\frac{\pi}{۲}-\mathrm{Arc}\sin(۱-x)$$

از دو طرف معادله کسینوس می‌گیریم:

$$\cos(۲\mathrm{Arc}\cos x)=\cos(-\frac{\pi}{۲}-\mathrm{Arc}\sin(x))$$

$$۲\cos^۲(\mathrm{Arc}\cos x)-۱=\cos(\frac{\pi}{۲}+\mathrm{Arc}\sin(۱-x))$$

$$۲x^۲-۱=-\sin(\mathrm{Arc}\sin(۱-x))$$

$$\Rightarrow ۲x^۲-۱=-(۱-x)\Rightarrow ۲x^۲-۱=-۱+x$$

پس داریم:

$$۲x^۲-x=۰$$

و بنابراین جواب‌های معادله عبارت‌اند از:

$$x=۰, x=\frac{۱}{۲}$$

هردو جواب به‌دست آمده در دامنه قرار می‌گیرند، اما هیچ‌کدام در معادله‌ی ۷ صدق نمی‌کند!

کافی است جواب‌ها را در معادله‌ی داده شده آزمایش کنیم:

$$x=۰:\ ۲\mathrm{Arc}\cos ۰+\mathrm{Arc}\sin(۱-۰)=۲(\frac{\pi}{۲})+\frac{\pi}{۲}=\frac{۳\pi}{۲}\ne-\frac{\pi}{۲}$$

$$x=۱:\ ۲\mathrm{Arc}\cos ۱+\mathrm{Arc}\sin ۰=۲(۰)+(۰)=۰\ne-\frac{\pi}{۲}$$

بنابراین، معادله‌ی اخیر در مجموعه‌ی اعداد حقیقی جواب ندارد. به نقش بی‌بدیل آزمایش کردن جواب‌های به‌دست آمده در معادله توجه کنید.

راه دیگری نیز می‌توان ارائه داد. بدون حل معادله‌ی

$$۲\mathrm{Arc}\cos x+\mathrm{Arc}\sin(۱-x)=-\frac{\pi}{۲}$$

می‌توان نشان داد که معادله جواب ندارد. توجه کنید که:

$$۰\le ۲\mathrm{Arc}\cos x\le ۲\pi \text{ و } -\frac{\pi}{۲}\le \mathrm{Arc}\sin(۱-x)\le\frac{\pi}{۲}$$

حاصل جمع دو عبارت $۲\mathrm{Arc}\cos x$ و $\mathrm{Arc}\sin(۱-x)$ در صورتی برابر $-\frac{\pi}{۲}$ خواهد شد که هر دو کمترین مقدار خود را بگیرند. در حالی که هیچ xای را نمی‌توان یافت که هم $۲\mathrm{Arc}\cos x=۰$ شود و هم $\mathrm{Arc}\sin(۱-x)=-\frac{\pi}{۲}$.

❁ ❁ ❁

نمونه‌های بالا کافی است تا قانع شویم که در پایان حل معادله، جواب را آزمایش کنیم. حوزه‌ی تعریف (یا مجموعه‌ی مقدارهای قابل قبول برای مجهول یا به زبان ساده، دامنه) و بیرون نبودن جواب‌ها از دامنه، ما را از آزمایش جواب‌هایی که به دست می‌آوریم، بی‌نیاز نمی‌کند.

تمرین

۱. معادله را حل کنید:

$$\sqrt[۳]{x-۱}+\sqrt[۳]{۳x-۱}=\sqrt[۳]{x+۱}$$

۲. معادله را حل کنید:

$$\mathrm{Arc}\sin x-\mathrm{Arc}\sin\frac{x}{۲}=-\frac{\pi}{۳}$$

۳. آیا این معادله جواب دارد؟

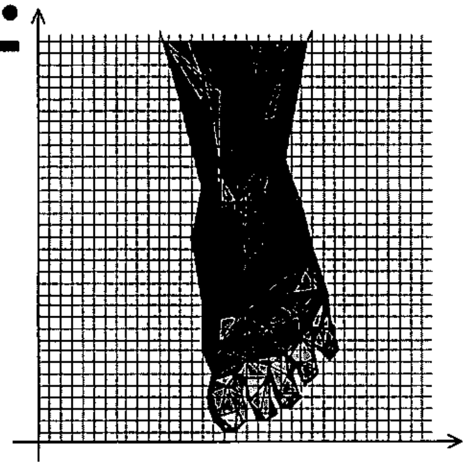
$$\sqrt{|x+۵|}-\sqrt{|x+۲|}=۱$$

۴. این معادله چند ریشه دارد؟

$$۱۰\log_{۴x}x+\log_{\frac{x}{۲}}x-۳\log_{۱۶x}x^۷=۰$$

● محمد هاشم رستمی

۱۱



رویکرد هندسی و جبری ـ مختصاتی در آموزش هندسه

اشاره

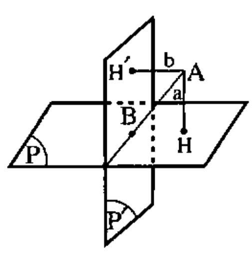
یکی از مهم‌ترین پیوندها و اتصال‌ها در همه‌ی ریاضیات، اتصال و پیوند بین هندسه و جبر است.

از استانداردهای موضوعی NCTM

در این شماره نیز اتصال و پیوند را در فضای سه بعدی بررسی می کنیم.

نکته‌ی مهم: ضمن بررسی رویکرد هندسی، رویکرد جبری ـ مختصاتی در آموزش هندسه، برخی از راهبردهای مهم برای حل مسئله‌های هندسه مانند «تحدید یا کوچک‌تر کردن مسئله، مسئله را حل شده فرض کردن، به کارگیری مسئله‌های خویشاوند برای حل یک مسئله، چگونگی به کارگیری مکان‌های هندسی و استفاده از روش‌های متفاوت حل یک مسئله» را مطرح می کنیم تا دانش آموزان به دیدگاه‌های جدیدی برای حل مسئله‌های هندسه دست یابند. در ضمن لازم است گفته شود، مسئله‌هایی را که با دو رویکرد هندسی و رویکرد جبری ـ مختصاتی حل می کنیم، کلیدی هستند و از کتاب‌های درسی هندسه‌ی (۱) و هندسه‌ی (۲) انتخاب شده‌اند تا دانش‌آموزان بتوانند مسأله‌های دیگر این کتاب‌ها، هم‌چنین مسأله‌های دیگر از کتاب‌های هندسه را با استفاده از این دو رویکرد، به راحتی حل کنند.

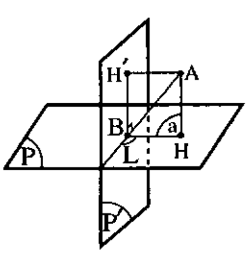
مسئله‌ی ۱۳. اگر دو صفحه‌ی P و ′P برهم عمود باشند و نقطه‌ی A از دو صفحه‌ی P و ′P به‌ترتیب به فاصله‌های a و b باشد، ثابت کنید فاصله‌ی نقطه‌ی A تا فصل مشترک این دو صفحه برابر است با $\sqrt{a^2+b^2}$.



حل:

الف) روش هندسی

فصل مشترک دو صفحه‌ی P و ′P را L، پای عمود وارد از A بر صفحه‌ی P را H و پای عمود وارد از A بر صفحه‌ی ′P را

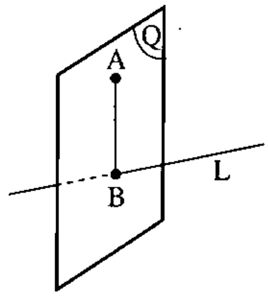


H′ می‌نامیم. بر دو خط متقاطع AH و AH′ یک صفحه می‌گذرد که آن را صفحه‌ی Q می‌نامیم. این صفحه بر خط L، یعنی فصل مشترک دو صفحه‌ی P و P′ عمود است، زیرا L بر AH عمود است. چون خط AH که بر صفحه‌ی P عمود است، بر تمام خط‌های صفحه‌ی P و از جمله بر خط L عمود می‌باشد، هم‌چنین L بر خط AH′ نیز عمود است. زیرا به دلیل این که AH′ بر صفحه‌ی P′ عمود است، بر تمام خط‌های این صفحه و از جمله بر خط L که یک خط از صفحه‌ی P′ می‌باشد نیز عمود است. » در نتیجه، خط L بر صفحه‌ی Q عمود است.

اکنون نقطه‌ی برخورد صفحه‌ی Q با خط L را B می‌نامیم و از B به H و H′ وصل می‌کنیم. چون خط L بر صفحه‌ی Q عمود است، پس بر تمام خط‌های این صفحه و در نتیجه بر AB عمود است. در نتیجه، پاره‌خط AB فاصله‌ی نقطه‌ی A از فصل مشترک دو صفحه‌ی P و P′ است. یعنی پاره‌خطی است که می‌خواهیم ثابت کنیم اندازه‌ی آن $AB=\sqrt{a^2+b^2}$ است.

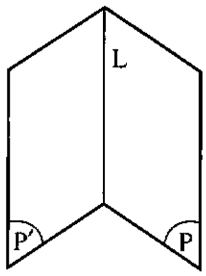
از عمود بودن صفحه‌ی Q بر خط L، فصل مشترک دو صفحه‌ی عمود بر هم P و P′ نتیجه می‌شود که زاویه‌ی $H\hat{B}H'$ زاویه‌ی مسطحه‌ی فرجه‌ی حاصل از دو صفحه‌ی P و P′ است. چون این دو صفحه برهم عمودند، پس $H\hat{B}H'=90^\circ$ است. از طرف دیگر، در چهارضلعی $AH\hat{B}H'$، $\hat{H}=90^\circ$، $\hat{H}'=90^\circ$ و $H\hat{B}H'=90^\circ$ است. پس زاویه‌ی چهارم این چهارضلعی یعنی $H\hat{A}H'=90^\circ$ و چنین معنی می‌دهد که چهارضلعی موردنظر مستطیل است. در این مستطیل، بنا به فرض مسئله، دو ضلع AH=a و AH′ = b هستند. بنابراین، اندازه‌ی قطر آن $AH=\sqrt{a^2+b^2}$ و حکم مسئله درست است.

تعریف فاصله‌ی نقطه از خط. نقطه‌ی A و خط L را که بر A نمی‌گذرد، در نظر می‌گیریم. اگر از A صفحه‌ی Q را که منحصر به فرد است، بر خط L عمود کنیم تا این خط را در نقطه‌ی ثابت B قطع کند، اندازه‌ی پاره‌خط AB را فاصله‌ی نقطه‌ی A از خط L می‌نامند.



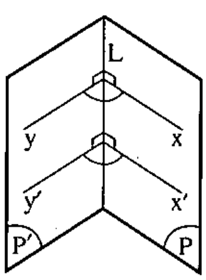
نکته: اگر نقطه‌ی A روی خط L باشد، فاصله‌ی A از L را مساوی صفر تعریف می‌کنیم.

زاویه‌ی مسطحه‌ی یک فرجه. هرگاه دو صفحه‌ی P و P′ در خط L یکدیگر را قطع کنند، چهار فرجه پدید می‌آید که دو به دو متقابل به رأس‌اند. در واقع، هر دو نیم‌صفحه با مرز مشترک L یک فرجه پدید می‌آورند که شکل، یکی از این فرجه‌ها را نشان می‌دهد.



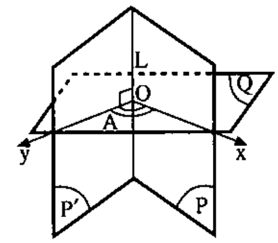
این فرجه را به صورت P − L − P′ نمایش می‌دهند. L را یال فرجه و P و P′ را دو وجه فرجه می‌نامند. به همین دلیل، فرجه را زاویه‌ی دووجهی نیز می‌نامند.

اکنون اگر از نقطه‌ی O واقع بر L دو خط Ox و Oy را به ترتیب در دو صفحه‌ی P و P′ عمود بر L رسم کنیم، یعنی $Ox \subset P$، $Ox \perp L$، $Oy \subset P'$ و $Oy \perp L$، در این صورت زاویه‌ی xoy را زاویه‌ی مسطحه‌ی فرجه‌ی P − L − P′ می‌توانیم از یک نقطه‌ی اختیاری مانند O واقع بر L، صفحه‌ای بر L عمود کنیم تا صفحه‌های P و P′ را به ترتیب در فصل مشترک Ox و Oy قطع کند. زاویه‌ی xoy زاویه‌ی مسطحه‌ی فرجه‌ی P′ − L − P است. بدیهی است که اندازه‌ی این زاویه‌ی مسطحه‌ی فرجه، به جای نقطه‌ی O روی یال L بستگی ندارد. یعنی اگر از نقطه‌ی دیگری مانند O′ واقع بر L، صفحه‌ای بر L عمود کنیم تا در صفحه‌ی P و P′ را در O′x′ و O′y′ قطع کند، زاویه‌ی x′o′y′ نیز زاویه‌ی مسطحه‌ی فرجه‌ی P − L − P′ است. یعنی $x\hat{o}y=x'\hat{o}'y'$ است.

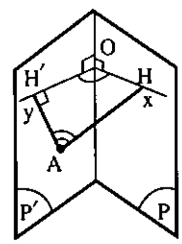


نکته: از تعریف بالا نتیجه می‌شود که اگر فرجه‌ی P − L − P′ و نقطه‌ی A درون این فرجه و غیر واقع بر

دو صفحه‌ی P و ′P داده شده باشد و از این نقطه صفحه‌ای مانند Q بر L رسم کنیم تا یال L را در O و صفحه‌های P و ′P را در Ox و Oy قطع کند، زاویه‌ی $x\hat{O}y$ همان زاویه‌ی مسطحه‌ی فرجه‌ی $P-L-P'$ است.



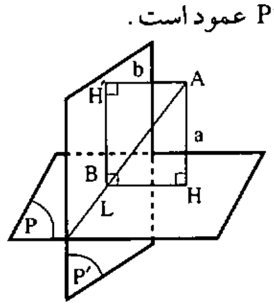
نتیجه: اگر از A عمود AH را بر صفحه‌ی P و عمود ′AH را بر صفحه‌ی ′P فرود آوریم، صفحه‌ی ′HAH همان صفحه‌ای است که از A عمود بر یال L رسم می‌شود و اگر فصل مشترک این صفحه با صفحه‌های P و ′P را به ترتیب Ox و Oy بنامیم، $x\hat{O}y$ زاویه‌ی مسطحه‌ی فرجه‌ی $P-L-P'$ است.



به علاوه، به‌دلیل محاطی بودن چهارضلعی HAH′B، چون $\hat{H}=\hat{H}'=۹۰^\circ$ و در نتیجه $\hat{H}+\hat{H}'=۱۸۰^\circ$ است، پس $H\hat{A}H'+H\hat{O}H'=۱۸۰^\circ$، یعنی دو زاویه‌ی $H\hat{A}H'$ و $H\hat{O}H'$ مکمل یکدیگرند.

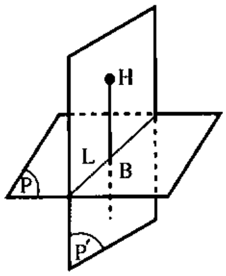
اثبات هندسی با روشی دیگر

فصل مشترک دو صفحه‌ی P و ′P را L می‌نامیم. از نقطه‌ی A صفحه‌ی Q را عمود بر خط L رسم می‌کنیم و محل تلاقی Q با L را B می‌نامیم. طول پاره‌خط AB همان فاصله‌ی نقطه‌ی A از L، فصل مشترک دو صفحه‌ی P و ′P است. خط L در دو صفحه‌ی P و ′P است، پس صفحه‌ی Q هم بر صفحه‌ی P و هم بر صفحه‌ی ′P عمود است.



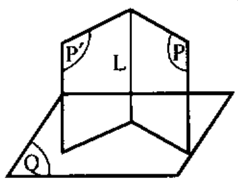
(شکل الف)

از نقطه‌ی A عمود AH را بر صفحه‌ی P و عمود ′AH را بر صفحه‌ی ′P رسم می‌کنیم. می‌دانیم که بنا به فرض AH=a و $AH'=b$ است (شکل الف). AH و ′AH در صفحه‌ی Q قرار دارند، زیرا می‌دانیم اگر دو صفحه‌ی بر هم عمود باشند و از یک نقطه واقع در یک صفحه، عمودی بر صفحه‌ی دیگر رسم کنیم، آن خط به تمامی در آن صفحه قرار می‌گیرد (شکل ب).



(شکل ب)

فصل مشترک دو صفحه‌ی Q و ′P خط H′b است که بر صفحه‌ی P عمود است، زیرا P، ′P و Q سه صفحه‌ی دو به دوی عمود بر هم هستند و می‌دانیم که اگر دو صفحه بر یک صفحه عمود باشند، فصل مشترکشان هم بر آن صفحه عمود است (شکل پ).



(شکل پ)

از عمود بودن H′b بر صفحه‌ی P نتیجه می‌شود که $H'\hat{B}H=۹۰^\circ$ است. چهارضلعی ′AHBH که در صفحه‌ی Q است، سه زاویه‌ی قائمه دارد که عبارت‌اند از $H'\hat{B}H=\hat{H}=\hat{H}'=۹۰^\circ$. پس این چهارضلعی مستطیل است. ضلع‌های مجاور این مستطیل AH=a و $AH'=b$ هستند. پس اندازه‌ی قطر آن $AB=\sqrt{a^۲+b^۲}$ است که همان فاصله‌ی نقطه‌ی A از خط L فصل مشترک دو صفحه‌ی P و ′P است و حکم مسئله درست است.

مثال ۱. دو صفحه‌ی عمود بر هم P و ′P و نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۸ از صفحه‌ی P و به فاصله‌ی ۶ از صفحه‌ی ′P قرار دارد. فاصله‌ی نقطه‌ی A از فصل مشترک این دو صفحه را تعیین کنید.

حل: با توجه به مسئله‌ی حل شده، $a=۸$ و $b=۶$ است. پس فاصله‌ی خواسته شده برابر است با:

$$AB=\sqrt{a^۲+b^۲}=\sqrt{۸^۲+۶^۲}=\sqrt{۶۴+۳۶}=\sqrt{۱۰۰}=۱۰$$

مثال۲. دو صفحه‌ی عمود برهم P و P' داده شده‌اند. نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۲۵ از خط L، فصل مشترک این دو صفحه محسوب می‌شود و به فاصله‌ی ۲۴ از صفحه‌ی P واقع است. فاصله‌ی این نقطه از صفحه‌ی P' را تعیین کنید.

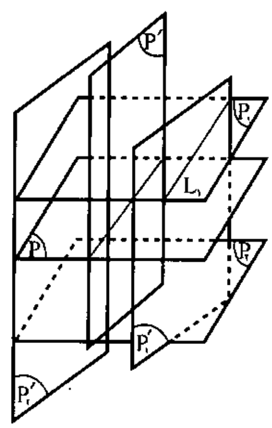
حل: با توجه به مسئله‌ی حل شده (مسئله‌ی۱۳)، $a = ۲۴$ و $\sqrt{a^2+b^2} = ۲۵$ است.

بنابراین داریم:

$$\sqrt{۲۴^2+b^2} = ۲۵ \Rightarrow ۵۷۶+b^2 = ۶۲۵ \Rightarrow b^2 = ۴۹ \Rightarrow b = ۷$$

فاصله‌ی نقطه‌ی A از صفحه‌ی P'

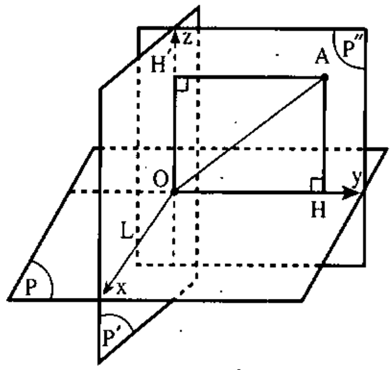
مثال۳. دو صفحه‌ی عمود برهم P و P' با فصل مشترک L داده شده‌اند. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را بیابید که از صفحه‌ی P به فاصله‌ی معلوم a و از صفحه‌ی P' به فاصله‌ی معلوم b باشد.



حل: می‌دانیم، مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از یک صفحه‌ی داده شده مانند P به فاصله‌ی معلوم a قرار دارد، دو صفحه‌ی موازی صفحه‌ی P و به فاصله‌ی a از آن است. که در دو طرف این صفحه قرار دارند. این دو صفحه را P_1 و P_2 می‌نامیم. هم‌چنین، مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از صفحه‌ی داده شده‌ی P' به فاصله‌ی معلوم b واقع است، دو صفحه‌ی موازی صفحه‌ی P' به فاصله‌ی b از آن و در دو طرف آن است. این دو صفحه را P'_1 و P'_2 می‌نامیم. فصل مشترک‌های این چهار صفحه را که دو به دو عمود برهم نیز هستند، L_1، L_2، L_3 و L_4 می‌نامیم. این چهار خط جواب مسئله‌اند که با خط L فصل مشترک دو صفحه‌ی P و P' نیز موازی هستند.

ب) اثبات به روش جبری ـ مختصاتی

دو صفحه‌ی عمود بر هم P و P' و نقطه‌ی A به فاصله‌ی a از صفحه‌ی P و به فاصله‌ی b از صفحه‌ی P' داده شده‌اند. می‌خواهیم ثابت کنیم که فاصله‌ی نقطه‌ی A از فصل مشترک دو صفحه‌ی P و P' که آن را L می‌نامیم، مساوی $\sqrt{a^2+b^2}$ است.



برای حل مسئله یا رویکرد جبری ـ مختصاتی، نخست باید یک دستگاه مختصات مناسب در فضا انتخاب کنیم. برای این کار، صفحه‌ی گذرنده بر AH (خطی که از A بر P عمود شده است) و AH' (خطی که از A بر صفحه‌ی P عمود شده است) را P'' می‌نامیم. این صفحه، بر دو صفحه‌ی P و P' عمود است. در واقع P، P' و P'' سه صفحه‌ی دوبه‌دوی عمود برهم عمود هستند. نقطه‌ی برخورد P'' با خط L را O می‌نامیم و خط‌های OH و OH' را رسم می‌کنیم. سه‌خط L، OH و OH' را روی این سه خط درنظر می‌گیریم. برای مثال Ox را رو خط L، Oy را روی خط OH و Oz را روی OH' می‌گیریم. در این صورت، نقطه‌ی A به مختصات $A = (۰, b, a)$ است. با توجه به این‌که پاره‌خط AO همان فاصله‌ی نقطه‌ی A از خط L، فصل مشترک دو صفحه‌ی P و P' است، پس داریم:

$$A = (۰, b, a), O = (۰,۰,۰) \Rightarrow AO = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$= \sqrt{۰+b^2+a^2} \Rightarrow AO = \sqrt{a^2+b^2}$$

پس حکم مسئله درست است.

نکته‌ی۱. اگر در روش اثبات جبری ـ مختصاتی، صفحه‌های P و P' را به ترتیب صفحه‌ی xoy و xoz اختیار کنیم، اما صفحه‌ی yoz را صفحه‌ای غیر از HAH' اختیار کنیم، یعنی صفحه‌ای مانند P'' بگیریم (شکل ۱) نقطه‌ی A به مختصات زیر خواهند بود:

$A = (x, b, a)$

در این صورت، اگر پای عمود رسم شده از A را که روی فصل مشترک دو صفحه‌ی P و P' است XB

بنامیم، نقطه‌ی B به مختصات زیر خواهد بود:

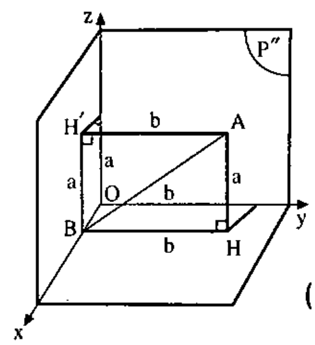
$B=(x,0,0)$

و از آن‌جا، طول پاره‌خط AB برابر است با:

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

$$=\sqrt{(x-x)^2+(b-0)^2+(a-0)^2}$$

$$\Rightarrow AB=\sqrt{0+b^2+a^2}=\sqrt{a^2+b^2}\Rightarrow AB=\sqrt{a^2+b^2}$$



(شکل ۱)

به‌طوری که دیده می‌شود، محاسبه کمی طولانی‌تر و مشکل‌تر می‌شود.

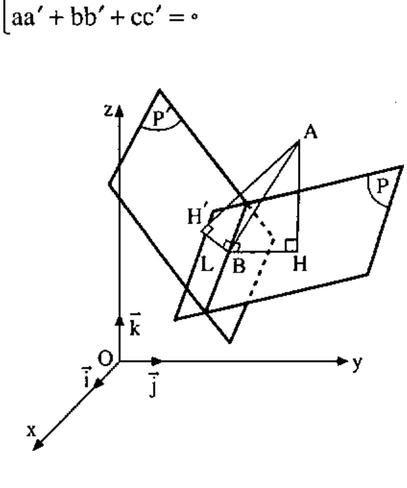
نکته‌ی ۲. اگر دستگاه مختصات قائم را در حالت کلی در نظر بگیریم، یعنی هیچ یک از صفحه‌های مختصات بر صفحه‌های P و P′ منطبق نباشند، محاسبه طولانی‌تر و مشکل‌تر خواهد بود. در این حالت، $A(x_1,y_1,z_1)$ و دو صفحه‌ی P و P′ به معادله‌های:

$P:\ ax+by+cz+d=0\ ,\ \ P':\ a'x+b'y+c'z+d'=0$

با شرط $aa'+bb'+cc'=0$ خواهند بود.

با این فرض خط d فصل مشترک دو صفحه‌ی P و P′ به معادله‌ی زیر خواهد بود:

$$\begin{cases}ax+by+cz+d=0\\ a'x+b'y+c'z+d'=0\\ aa'+bb'+cc'=0\end{cases}$$



در این حالت، فاصله‌ی نقطه‌ی A از صفحه‌ی P

$a=\dfrac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=AH$ و فاصله‌ی نقطه‌ی A از صفحه‌ی P′ $b=\dfrac{a'x_1+b'y_1+c'z_1+d'}{\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}=AH'$ خواهد بود.

از طرف دیگر، مختصات نقطه‌ی B، محل برخورد صفحه‌ی HAH′ (یا همان صفحه‌ی Q که در راه حل هندسی دیدیم) باید محاسبه شود و سپس طول پاره‌خط AB به‌دست آید و ثابت شود که $AB=\sqrt{a^2+b^2}$ است. اما برای نوشتن معادله‌ی صفحه‌ی Q، باید نمودار نرمال این صفحه را به‌دست آوریم. این بردار قائم، از دستور زیر محاسبه‌ی بار $\vec{V}_p\wedge\vec{V}_{p'}$ است. یعنی داریم:

$$\vec{V}_Q=\vec{V}_p\wedge\vec{V}_{p'}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a & b & c\\ a' & b' & c'\end{vmatrix}$$

البته شرط $aa'+bb'+cc'=0$ را نیز همواره باید در نظر داشته باشیم.

به‌طوری که دیده می‌شود، حل مسئله با انتخاب این دستگاه مختصات قائم در فضا، خیلی طولانی‌تر و مشکل‌تر از اولین راه‌حل جبری مختصاتی است که در آن صفحه‌های P و P′ و صفحه‌ی Q (صفحه‌ای که از A بر دو صفحه‌ی P و P′ عمود می‌شود) را به عنوان صفحه‌های مختصات اختیار کرده بودیم.

به‌طوری که دیده می‌شود، انتخاب دستگاه مختصات در راه‌حل جبری ـ مختصاتی، از اهمیت فراوانی برخوردار است.

برای هر یک از روش‌های ذکر شده‌ی جبری ـ مختصاتی، مثال‌هایی می‌توان مطرح کرد. ما برای آخرین حالت، یعنی حالتی که دستگاه مختصات را در حالت کلی گرفته‌ایم، مثالی ذکر می‌کنیم.

مثال: دو صفحه‌ی

$P':\ x-2y+4=0\ ,\ \ P:\ 2x+y-2z-2=0$

داده شده‌اند، اگر نقطه‌ی $A=(2,-1,4)$ و فاصله‌ی نقطه‌ی A از صفحه‌ی P را با a و فاصله‌ی نقطه‌ی A از صفحه‌ی P′ را با b نمایش دهیم، ثابت کنید. فاصله‌ی نقطه‌ی A از

خط L، یعنی فصل مشترک دو صفحه‌ی P و ′P برابر $\sqrt{a^۲+b^۲}$ است.

حل: شرط عمود بودن دو صفحه برقرار است، زیرا داریم:

$$\vec{V}_P=(۲,۱,-۲)\ ,\ \vec{V}_{P'}=(۱,-۲,۰)\Rightarrow \vec{V}_P.\vec{V}_{P'}$$
$$=(۲)(۱)+(۱)(-۲)(-۲)(۰)=۲-۲=۰$$
$$\Rightarrow \vec{V}_P\perp\vec{V}_{P'}\Rightarrow P\perp P'$$

اکنون معادله‌ی فصل مشترک دو صفحه‌ی P و ′P را به‌دست می‌آوریم. داریم:

$$\begin{matrix}P:\\P':\end{matrix}\begin{cases}۲x+y-۲z-۲=۰\\x-۲y+۴=۰\end{cases}\Rightarrow L:\ \frac{x}{۴}=\frac{y-۲}{۲}=\frac{z}{۵}$$

برای به‌دست آوردن فاصله‌ی نقطه‌ی A از خط L، از دستور $AB=\frac{|\vec{AM}\wedge\vec{L}|}{\vec{L}_۱}$ استفاده می‌کنیم که در آن بردار $\vec{L}$ بردار هادی خط L و M نقطه‌ای دل‌خواه متعلق به L است. داریم:

$$M=(۰,۲,۰)\in L\ ,\ A=(۲,-۱,۴)$$

$$\Rightarrow \vec{AM}=(۲,-۳,۴)\ ,\ \vec{L}=(۴,۲,۵)$$

$$\Rightarrow \vec{AM}\wedge\vec{L}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\۲&۳&۴\\۴&۲&۵\end{vmatrix}=-۲۳\vec{i}-۶\vec{j}+۱۶\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{AM}\wedge\vec{L}=(-۲۳,-۶,۱۶)$$

$$\Rightarrow \vec{AM}\wedge\vec{L}=\sqrt{(-۲۳)^۲+(-۶)^۲+(۱۶)^۲}=\sqrt{۸۲۱}\ ,$$

$$\left|\vec{L}\right|=\sqrt{۱۶+۴+۲۵}=\sqrt{۴۵}\Rightarrow AB=\frac{\sqrt{۸۲۱}}{\sqrt{۴۵}}=\sqrt{\frac{۸۲۱}{۴۵}}$$

اکنون فاصله‌های نقطه‌ی A از صفحه‌های P و ′P را به‌دست می‌آوریم:

$$AH=a=\frac{|۴-۱-۸-۲|}{\sqrt{۴+۱+۴}}=\frac{۷}{۳}\ ,\ AH'=b=\frac{|۲+۲+۴|}{\sqrt{۱+۴}}=\frac{۸}{\sqrt{۵}}$$

$$\sqrt{a^۲+b^۲}=\sqrt{\frac{۴۹}{۹}+\frac{۶۴}{۵}}=\sqrt{\frac{۸۲۱}{۴۵}}=AB$$

پس حکم درست است.

تفریح اندیشه

۱. در استخری یک قایق لاستیکی باد شده انداخته‌ایم. کدام عمل سطح آب را بالاتر می‌آورد: انداختن سکه‌ای درون قایق، یا انداختن سکه‌ای در آب؟

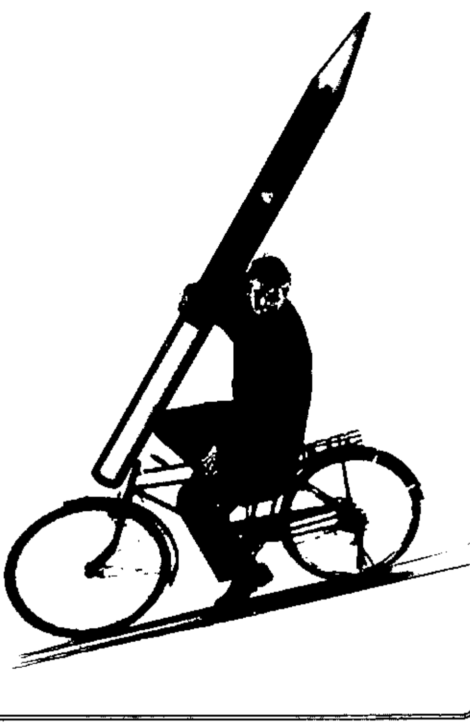
۲. اسماعیل قصّاب، رئیس کمیته‌ی مغازه‌داران خیابان، که شامل بقال، نانوا، و سیگار فروش نیز هست، می‌باشد. تمام آن‌ها دور میزی نشسته‌اند.

- اسماعیل سمت چپ اسمال نشسته است.

- اصغر سمت چپ بقال نشسته است.

- اصلان که مقابل اسمال است نانوا نیست.

- اصغر چه دکانی دارد؟



جواب۱: انداختن سکه در قایق، زیرا سکه در آب به اندازه‌ی حجمش آب را تغییر می‌دهد، در حالی که در قایق به اندازه‌ی آب هم وزنش آن را جابه‌جا می‌کند، و از آن‌جا که سکه‌ی فلزی از آب سنگین‌تر است، سکه بیش‌تر از آب هم حجمش وزن دارد.

جواب۲: با تخصیص اسماعیل در صندلی ته میز، چهار شخص مذکور می‌توانند تنها به این طریق بنشینند:

اصغر- اسمال - اصلان - اسماعیل

در نتیجه، اسمال بقال است، و اصلان سیگار فروش، و اصغر نانوا.

● هوشنگ شرقی

المپیاد ریاضی در کشور انگلستان سال ۱۹۹۹

درباره‌ی المپیادهای ریاضی انگلستان، پیش از این توضیحاتی داده‌ایم و مسائلی از آن‌ها را در شماره‌های ۵۲ و ۶۰ آورده‌ایم. در شماره‌ی ۵۲، مسائل المپیاد ریاضی سال ۲۰۰۰ و در شماره‌ی ۶۰ منتخبی از مسائل سال‌های ۲۰۰۱ و ۲۰۰۲ را آوردیم. هم‌چنین، توضیحاتی نیز در مورد چگونگی برگزاری المپیاد ریاضی این کشور دادیم. یادآور می شوم، مسائل المپیادهای ریاضی این کشور، به همراه مطالبی درباره‌ی نحوه‌ی برگزاری این مسابقات، در کتابی به قلم تونی گاردینر، سرپرست کمیته‌ی المپیاد ریاضی این کشور، گردآوری و توسط نگارنده ترجمه شده است که انتشارات مدرسه آن را منتشر کرده است.[1] در این شماره، مسائل سال ۱۹۹۹ (منتخبی از مسائل دورهای اول و دوم) را همراه با راه‌حل آن‌ها می‌آوریم.

مسائل

۱. من چهار فرزند دارم. سن هر یک از آن‌ها به واحد سال، عددی طبیعی، بین یا مساوی ۲ و ۱۶ است و عدد سن همه‌ی آن‌ها متمایز است. یک سال قبل، مربع سن بزرگ‌ترین بچه، مساوی مجموع مربع‌های سن سه تای دیگر بود و یک سال بعد، مجموع مربع‌های سن بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین بچه‌ها، مساوی مجموع مربع‌های سن دو بچه‌ی دیگر خواهد شد. آیا با این اطلاعات، می‌توان سن بچه‌ها را به صورت یکتا مشخص کرد و همه‌ی حالت‌های ممکن برای سن آن‌ها را به دست اورد.

۲. دایره‌ای به قطر AB مفروض است و X نقطه‌ی ثابتی روی AB و بین A و B است. نقطه‌ی متغیر p (متمایز از A و B) روی نیم‌دایره‌ی به قطر AB قرار دارد. ثابت کنید به ازای هر نقطه‌ی p، نسبت $\frac{\tan\ A\hat{P}X}{\tan\ P\hat{A}X}$ همواره مقدار ثابتی دارد.

۳. مقداری ثابت و طبیعی برای C بیابید که معادله‌ی زیر دقیقاً سه جواب در مجموعه‌ی اعداد طبیعی به صورت (x,y) داشته باشد:

$$xy^2 - y^2 - x + y = c$$

۴. برای هر عدد طبیعی n فرض کنید، S_n مجموعه‌ای شامل نخستین n عدد طبیعی باشد:

$$S_n = \{1,2,3,4,\dots,n-1,n\}$$

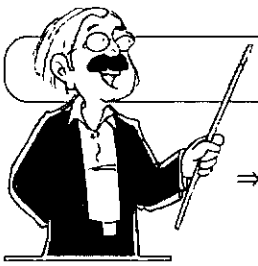
به ازای چه مقدار n می‌توان S_n را به‌صورت اجتماع دو زیرمجموعه‌ی جدا از هم و ناتهی نشان داد، به‌طوری که مجموع اعضای زیرمجموعه‌ی یکسان باشد؟

۵. عددهای حقیقی و نامنفی p، q و r صادق در رابطه‌ی $p+q+r=1$ مفروض‌اند. ثابت کنید:

$$7(pq+qr+rp)\le 2+9pqr$$

۶. همه‌ی عددهای طبیعی به فرجه‌ی $3n^2+n+1$ را در نظر بگیرید.
کوچک‌ترین مقدار برای مجموع ارقام (در مبنای ۱۰) این گونه عددها چیست؟

حل مسائل



۱. اگر سن بچه‌ها را به ترتیب از بزرگ به کوچک، a، b، c و d در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$16\ge a>b>c>d\ge 2$$

$$\begin{cases}(a-1)^2=(b-1)^2+(c-1)^2+(d-1)^2\\(a+1)^2+(d+1)^2=(b+1)^2+(c+1)^2\end{cases}$$

و با تفریق رابطه‌ی پایین از بالا نتیجه می‌شود:

$$4a+d^2+2d+1=4b+4c-d^2+2d-1$$

$$\Rightarrow 2d^2+2=4(b+c-a)\Rightarrow d^2+1=2(b+c-a)$$

بنابراین، d^2+1 زوج و در نتیجه d^2 فرد و لذا d هم فرد است. هم‌چنین، نتیجه می‌شود $b+c-a=\frac{d^2+1}{2}$ و چون $a>b$ پس $c>b+c-a$. در نتیجه: $c>\frac{d^2+1}{2}$ و چون d فرد است، پس حداقل مقدار d مساوی ۳ است. از آن‌جا $c>\frac{9+1}{2}=5$، یعنی حداقل مقدار c نیز مساوی ۶ است.

حال اگر $d=5$ باشد، $c>\frac{25+1}{2}=13$ و لذا $\mathrm{Min}\,c=14$ و برای a و b نیز عددی به غیر از $b=15$ و $a=16$ باقی نمی‌ماند. پس در این حالت، جواب منحصر به فرد $(a,b,c,d)=(16,15,14,5)$ به‌دست می‌آید که در معادلات بالا سوق نمی‌کنند.

پس، تنها جواب قابل قبول برای d، $d=3$ است و از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases}(a-1)^2=(b-1)^2+(c-1)^2+4\\(a+1)^2+16=(b+1)^2+(c+1)^2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(a-1)^2-(b-1)^2=(c-1)^2+4\\(a+1)^2-(b+1)^2=(c+1)^2-16\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}[(a-1)-(b-1)]\,[(a-1)+(b-1)]=(c-1)^2+4\\[(a-1)-(b+1)]\,[(a+1)+(b+1)]=(c+1)^2-16\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(a-1)(a+b-2)=(c-1)^2+4\\(a-1)(a+b+2)=(c+1)^2-16\end{cases}$$

و با فرض $a-b=x$ و $a+b=y$ نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases}x(y+2)=(c+1)^2-16\\x(y-2)=(c-1)^2+4\end{cases}$$

و با توجه به فرض $6\le c\le 14$ کافی است مقادیر متفاوتی به c بدهیم و از آن‌جا x، y، a و b را بیابیم؛ مثلاً به ازای $c=6$ نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases}x(y+2)=22\\x(y-2)=29\end{cases}$$

و از تقسیم دو رابطه‌ی بالا نتیجه می‌شود:

$$\frac{y+2}{y-2}=\frac{33}{29}\Rightarrow 33y-66=29y+58\Rightarrow y=31,x=1$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+b=31\\a-b=1\end{cases}\Rightarrow a=16,b=15$$

و جواب $(a,b,c,d)=(16,15,6,3)$ به‌دست می‌آید که قابل قبول است.

به ازای $c=7$ نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} x(y+2)=48 \\ x(y-2)=40 \end{cases} \Rightarrow \frac{y+2}{y-1}=\frac{6}{5} \Rightarrow y=22, x=2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=22 \\ a-b=2 \end{cases} \Rightarrow a=12, b=10$$

و جواب $(a,b,c,d)=(12,10,7,3)$ به‌دست می‌آید که آن هم قابل قبول است.

به ازای $c=8$ نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} x(y+2)=65 \\ x(y-2)=53 \end{cases} \Rightarrow \frac{y+2}{y-2}=\frac{65}{53} \Rightarrow y=\frac{59}{3}$$

که غیرقابل قبول است، زیرا باید $y \in \mathbb{N}$ به ازای $c=9$ خواهیم داشت:

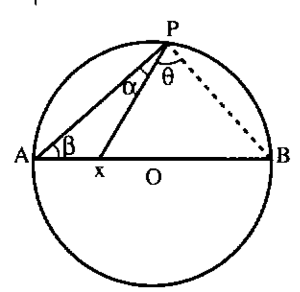
$$\begin{cases} x(y+2)=84 \\ x(y-2)=68 \end{cases} \Rightarrow \frac{y+2}{y-2}=\frac{21}{17} \Rightarrow y=19, \quad x=4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=19 \\ a-b=4 \end{cases} \Rightarrow a=\frac{23}{2}, \quad b=\frac{15}{2}$$

که غیرقابل قبول است، زیرا باید $b \in \mathbb{N}$ و a به همین ترتیب، به ازای هیچ مقدار دیگر از c، جواب قابل قبولی به‌دست نمی‌آید و جواب‌ها با یکی از شرایط اصلی مسئله، یعنی طبیعی بودن b, c, d, x, y و a و نیز شرط $a > b > c > d$ تناقض دارد.

پس مسئله تنها دو دسته جواب دارد و بچه‌ها به ترتیب ۱۶ و ۱۵ و ۶ و ۳ سال، یا ۱۲ و ۱۰ و ۷ و ۳ سال دارند.

۲. مطابق شکل $A\hat{P}X=\alpha$ و $P\hat{A}X=\beta$ نام‌گذاری شده‌اند.



مطابق قضیه‌ی سینوس‌ها، در مثلث APX داریم:

$$\frac{AX}{PX}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \qquad (1)$$

هم‌چنین، واضح است که $\hat{\alpha}+\hat{\beta}=90^\circ$ و در نتیجه:

$$\theta=90-\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\sin\theta$$

و به کمک قضیه‌ی سینوس‌ها در مثلث PXB داریم:

$$\frac{BX}{PX}=\frac{\sin\theta}{\sin B}=\frac{\cos\alpha}{\sin(90-\beta)}=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \qquad (2)$$

و از تقسیم رابطه‌ی ۱ بر رابطه‌ی ۲ خواهیم داشت:

$$\frac{\frac{AX}{PX}}{\frac{BX}{PX}}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}}{\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}} \Rightarrow \frac{tg\alpha}{tg\beta}=\frac{AX}{BX}= \text{مقدار ثابت}$$

۳. با فرض $x=t+1$ رابطه به صورت زیر ساده‌تر می‌شود:

$$(t+1)y^2-y^2-(t+1)+y=c$$

$$\Rightarrow ty^2-t-1+y=c \Rightarrow t(y-1)(y+1)+(y-1)=c$$

$$\Rightarrow (y-1)(ty+t+1)=c$$

حال با فرض $c=1$ نتیجه می‌شود ($y-1$ و t هر دو نامنفی‌اند):

$$\begin{cases} y-1=1 \\ ty+t+1=1 \end{cases} \Rightarrow y=2, t=0 \Rightarrow x=1$$

به این ترتیب، تنها یک جواب برای (x,y) به‌دست می‌آید.

با فرض $c=2$، تنها یک جواب قابل قبول $(x,y)=(1,3)$ به‌دست می‌آید.

پس باید c را طوری اختیار کنیم که سه جواب متمایز برای $y-1$ و $ty+t+1$ به‌دست آید و از آن‌جا سه جواب متمایز برای (x,y) پیدا شود. یعنی باید c را طوری انتخاب کرد که حداقل به سه صورت به حاصل‌ضرب دو عامل قابل تبدیل باشد. به ازای $c=4$ داریم:

$$\begin{cases} y-1=1 \\ ty+t+1=4 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} y-1=2 \\ ty+t+1=2 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} y-1=4 \\ ty+t+1=1 \end{cases}$$

که از اولی جواب $(x,y)=(2,2)$ و از سوی جواب $(x,y)=(1,5)$ به‌دست می‌آید، ولی از دومی جواب قابل قبولی به دست نمی‌آید: $(t=\frac{1}{4})$. به ازای $c=6$ داریم:

$$(1)\begin{cases} y-1=6 \\ ty+t+1=1 \end{cases} \text{ یا } (2)\begin{cases} y-1=3 \\ ty+t+1=2 \end{cases}$$

$$\text{ یا } (3)\begin{cases} y-1=2 \\ ty+t+1=3 \end{cases} \text{ یا } (4)\begin{cases} y-1=2 \\ ty+t+1=6 \end{cases}$$

که از جواب $(x,y)=(1,7)$ به‌دست آمده است و از بقیه جواب قابل قبولی به‌دست نمی‌آید. به ازای $c=8$ داریم:

$$(1)\begin{cases} y-1=8 \\ ty+t+1=1 \end{cases} \text{ یا } (2)\begin{cases} y-1=4 \\ ty+t+1=2 \end{cases}$$

$$\text{ یا } (3)\begin{cases} y-1=2 \\ ty+t+1=4 \end{cases} \text{ یا } (4)\begin{cases} y-1=1 \\ ty+t+1=1 \end{cases}$$

. که باز هم فقط از دستگاه جواب قابل قبول $(x,y)=(1,9)$ پیدا می‌شود. به ازای $c=9$ نیز تنها یک جواب به‌دست می‌آید. ولی به ازای $c=10$ داریم:

$$(1)\begin{cases}y-1=1\\ ty+t+1=10\end{cases} \text{ یا } (2)\begin{cases}y-1=2\\ ty+t+1=5\end{cases}$$

$$\text{ یا } (3)\begin{cases}y-1=5\\ ty+t+1=2\end{cases} \text{ یا } (4)\begin{cases}y-1=10\\ ty+t+1=1\end{cases}$$

از دستگاه، جواب قابل قبول $(x,y)=(4,2)$، از دستگاه ۲ جواب قابل قبول $(x,y)=(2,3)$ و از دستگاه جواب قابل قبول $(x,y)=(1,11)$ به‌دست می‌آید. ولی از دستگاه ۳ جواب قابل قبولی به‌دست نمی‌آید $(t=\frac{1}{7})$. به این ترتیب نتیجه می‌شود که $c=10$.

۴. بدیهی است، مجموع اعضای S_n مساوی $\frac{n(n+1)}{2}$ است. پس اگر $S_n=A\cup B$، با توجه به شرط مسئله، مجموعه اعضای هر دو مجموعه‌ی A و B باید مساوی $\frac{n(n+1)}{4}$ باشند. پس باید یکی از دو عدد n و $n+1$ مضرب ۴ باشند. یعنی $n=4k$ یا $n=4k-1$ (n و $n+1$ هر دو نمی‌توانند زوج باشند). نشان می‌دهیم به ازای هر دوی این حالت‌ها، همواره می‌توان S_n را به‌صورت اجتماع دو مجموعه‌ی مناسب A و B نوشت. اگر $n=4k$ باشد، در این صورت مجموع اعضای A باید مساوی $\frac{4k(4k+1)}{4}=4k^2+k$ باشد و $S_n=\{1,2,3,\dots,4K\}$. حال با توجه به اتحاد $1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$ (که به سادگی به کمک قضیه‌ی استقرای ریاضی ثابت می‌شود)، داریم:

$$1+3+5+\dots+(4k-1)=(2k^2)=4k^2$$

یعنی مجموع همه‌ی افراد فرد عضو S_n مساوی $4k^2$ است. حال اگر k خود زوج باشد، مجموع اعضای مجموعه‌ی $A=\{1,3,5,\dots,4k^{-1},k\}$ مساوی $4k^2+k$ است و در نتیجه با فرض $B=S_n-A$، مجموعه اعضای B هم مساوی $4k^2+k$ می‌شود (چرا؟) و A و B زیر مجموعه‌های مطلوب هستند. اما اگر k فرد باشد، یعنی جزو عددهای ۱، ۳، ۵، ...، $4k-1$ باشد، چه باید کرد؟ در این حالت نیز جای نگرانی وجود ندارد و کافی است عدد $k+1$ را که زوج است، وارد A و ۱ را از آن خارج کنیم. یعنی:

$$A=\{3,5,7,\dots,k,\dots,4k-1,k+1\}$$

حال مجموع اعضای A، $4k^2+k$ است (چرا؟) و در نتیجه $B=S_n-A$ و A و B به‌دست می‌آیند. در حالت دیگر که $n=4k-1$ باشد، به طریق مشابه، مسئله حل می‌شود. در این حالت، مجموع تمام اعضای $S_n=\{1,2,3,\dots,4k-1\}$ برابر است با: $\frac{n(n+1)}{2}=2k(4k-1)$ و بنابراین، مجموع اعضای A و B باید مساوی $k(4k-1)$ و یا $4k^2-k$ باشد و می‌توان نوشت: $4k^2-k=(2k-1)^2+3k-1$ و با توجه به تساوی $1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$، داریم:

$$1+3+5+\dots+(4k-3)=(2k-1)^2$$

حال اگر $3k-1$ زوج باشد (یعنی k فرد باشد)، کافی است تمام عددهای فرد S_m به غیر از $4k-1$ را به همراه عدد $3k-1$ در یک مجموعه قرار دهیم:

$$A=\{1,3,5,\dots,4k-3,3k-1\}$$

اکنون روشن است که مجموع اعضای A مساوی $4k^2-k$ است. در نتیجه با فرض $B=S_n-A$، A و B دو زیرمجموعه‌ی مطلوب هستند. اگر هم $3k-1$ فرد باشد (k زوج باشد)، در این صورت کافی است عدد ۱ را از A خارج و عدد زوج $3k$ را جای‌گزین آن کنیم:

در این صورت، با فرض $B=S_n-A$، A و B زیرمجموعه‌های مطلوب هستند (چرا؟)

بنابراین، پاسخ مسئله این است که به ازای $n=4k$ و $n=4k-1$ مسئله همواره جواب دارد. لازم به ذکر است، جواب‌هایی که به این روش پیشنهادی ما به‌دست می‌آیند، تنها جواب‌های ممکن نیستند و ممکن است A و B مناسب، به صورت‌های دیگری هم به‌دست بیایند. برای مثال، برای $S_8=\{1,2,3,\dots,8\}$ مطابق روش‌ها،

$$A=\{1,3,5,7,2\} \qquad B=\{4,6,8\}$$

ولی جواب دیگری نیز به‌صورت زیر وجود دارد:

$$A=\{8,7,3\} \qquad B=\{1,2,4,5,6\}$$

آیا جواب دیگری می‌توانید بنویسید؟

۵. به کمک روش بازگشتی می‌نویسیم:

$$7(pq+pr+qr-pqr)\le 2+2pqr$$

هم‌چنین داریم:

$$(1-p)(1-q)(1-r)=1-(\underbrace{p+q+r}_{1})+(pq+pr+qr)-pqr$$

$$=pq+pr+qr-pqr$$

بنابراین، نامساوی حکم به صورت زیر تغییر می‌یابد:

$$7(1-p)(1-q)(1-r)\le 2+2pqr$$

و با توجه به تساوی $p+q+r=1$:

حال با فرض $p+q=x$ ، $p+r=y$ و $q+r=z$ خواهیم داشت: $x+y+z=2(p+q+r)=2$ و نیز:

$$\begin{cases}p+q=x\\p+r=y\\q+r=z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}q-r=x-y\\q+r=z\end{cases}\Rightarrow q=\frac{x+z-y}{2}$$

$$\Rightarrow q=\frac{2-y-y}{2}=(1-y)$$

و به همین ترتیب:

$$p=1-z,\ \ r=1-x$$

و از آن‌جا، نابرابری حکم به صورت زیر تغییر می‌یابد:

$$x,y,z\ge 0,\ \ x+y+z=2\Rightarrow$$

$$7xyz\ge 2+2(1-x)(1-y)(1-z)$$

و با ضرب و ساده کردن دو طرف خواهیم داشت:

$$7xyz\le 2+2(1-(\underbrace{x+y+z}_{2})+(xy+xz+yz)-xyz)$$

$$\Rightarrow 7xyz\le 2(xy+xz+yz)-2xyz$$

$$\Rightarrow 9xyz\le 2(xy+xz+yz)$$

$$\overset{x+y+z=2}{\Rightarrow} 9xyz\le (x+y+z)(xy+xz+yz)$$

$$\Rightarrow 9xyz\le x^2y+x^2z+xyz+xy^2+xyz+y^2z+xyz+xz^2+yz^2$$

$$\Rightarrow x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2\ge 6xyz$$

و با تقسیم طرفین بر xyz نتیجه می‌شود:

$$(\frac{x}{y}+\frac{y}{x})+(\frac{y}{z}+\frac{z}{y})+(\frac{x}{z}+\frac{z}{x})\ge 6$$

و با توجه به نابرابری‌های درست $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge 2$ ، $\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\ge 2$ و $\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\ge 2$ ، درستی نابرابری بالا واضح است.

۶. با فرض $f(n)=3n^2+n+1$ ، خواهیم داشت:

$$f(1)=5,\ f(2)=15,\dots,f(8)=201$$

بنابراین، مجموع ارقام $f(8)$ مساوی ۳ است و به نظر می‌رسد که این کمترین مجموع ارقام برای $f(n)$ ها باشد. اما درستی این موضوع را اثبات هم می‌کنیم. اگر مجموع ارقام $f(n)$ بخواهد از این کمتر باشد، باید مساوی ۱ یا ۲ شود. مجموع ارقام $f(n)$ نمی‌تواند مساوی ۱ باشد، زیرا در این صورت باید $f(n)=10^k$ باشد و این نامکمن است، زیرا $f(n)$ همواره عددی فرد است (چرا؟). اما مجموع ارقام $f(n)$ مساوی ۲ هم نمی‌تواند باشد، زیرا با توجه به فرد بودن $f(n)$، رقم سمت راست آن نمی‌تواند صفر باشد. پس در صورتی می‌تواند مجموع ارقام آن مساوی ۲ شود که دو رقم ۱ در دو طرف آن و بقیه‌ی رقم‌های بین این دو رقم، مساوی صفر باشد؛

یعنی: $f(n)=1000\dots1=10^k+1$

و از آن‌جا نتیجه می‌شود $3n^2+n=10^k$ و در نتیجه:

$$n(3n+1)=2^k.5^k$$

اگر n زوج باشد، $3n+1$ فرد است و در نتیجه $n=2^k.5^\alpha$ و $3n+1=5^{k-\alpha}$ و $0\le\alpha\le k$. ولی با این فرض نتیجه می‌شود.

$$3\times2.5^\alpha+1=5^{k-\alpha}$$

و عبارت سمت راست تساوی بر ۵ بخش‌پذیر است، اما عبارت سمت چپ، در تقسیم بر ۵ باقی‌مانده‌ی ۱ دارد. بنابراین $\alpha=0$ و در نتیجه:

$$3\times2^k+1=5^k,\ \ n=2^k,\ \ 3n+1=5^k$$

اما به سادگی و مثلاً به کمک قضیه‌ی استقرای ریاضی می‌توان ثابت کرد که همواره $3\times2^k+1<5^k$ و در نتیجه تساوی بالا هرگز برقرار نمی‌شود. اما اگر n فرد باشد، $3n+1$ زوج است و در نتیجه، به طریق مشابه داریم:

$$3n+1=2^k,\ \ n=5^k\Rightarrow 2^k=3\times5^k+1$$

و این تساوی نیز هرگز برقرار نمی‌شود (چرا؟)

بنابراین، به ازای هیچ مقدار n ، $3n^2+n$ مساوی توانی از ۱۰ نمی‌شود و لذا مجموع ارقام $f(n)$ ها هرگز مساوی ۲ نخواهد شد. سپس کمترین مقدار مجموع ارقام $f(n)$ ها مساوی ۳ است.

پی‌نوشت

۱. گاردینر. راهنمای المپیاد ریاضی. ترجمه‌ی هوشنگ شرقی. انتشارات مدرسه. چاپ دوم. ۱۳۸۴.

غلامرضا یاسی‌پور

بی‌نهایت

بزرگی بی‌نهایت چه قدر است؟ پاسخ کوتاه به این پرسش این است که ∞ (نماد بی‌نهایت) بسیار بزرگ است. خط مستقیمی را با اعداد بزرگ‌تر و بزرگ‌تر واقع بر امتداد آن، در حالی که تا «بی‌نهایت» امتداد یافته است تصور کنید. در این مورد، به ازای هر عدد بسیار بزرگی که در نظر گرفته شود، مثلاً، $۱۰^{۱۰۰۰}$، همواره عددی بزرگ‌تر از آن، چون $۱۰^{۱۰۰۰} + ۱$ موجود است.

در مفهوم سنتی، بی‌نهایت عددی است که تا ابد ادامه دارد. ریاضیات، بی‌نهایت را همه‌جا به‌کار می‌برد، اما باید توجه داشت که آن را مانند عددی معمولی در نظر نگیریم، چرا که عددی معمولی نیست.

شمارش

ژرژ کانتور[1] ریاضی‌دان آلمانی، مفهوم کاملاً متفاوتی از بی‌نهایت به دستمان داده است. در این فرایند، وی دست تنها نظریه‌ای آفرید که بیش‌تر ریاضیات مدرن را به جلو رانده است. مفهومی که نظریه‌ی کانتور وابسته به آن است، با مفهوم ابتدایی شمارش سروکار دارد؛ یعنی ساده‌تر از آن‌چه که در زندگی روزمرّه‌مان به‌کار می‌بریم.

کشاورزی را در نظر می‌گیریم که در مورد شمارش با اعداد چیزی نمی‌داند. پس چگونه خواهد دانست چند گوسفند دارد؟ خیلی ساده، هنگامی که صبح گوسفندان را به‌چرا می‌برد، می‌تواند عصر با جفت کردن هر گوسفند با سنگی از توده‌ای که از صبح در مدخل طویله موجود است، بگوید آیا همه‌ی گوسفندان برگشته‌اند یا خیر. چه اگر گوسفندی گم شده باشد، سنگی باقی می‌ماند. به این ترتیب، کشاورزمان، حتی بدون استفاده از اعداد، ریاضی‌ورز بوده است. چرا که وی مفهوم تناظر یک‌به‌یک[2] را بین گوسفندان و سنگ‌ها به‌کار برده است. این مفهوم، ابتدایی است، اما پیامدهای شگفت‌انگیزی دارد.

نظریه‌ی کانتور با مجموعه‌ها[3] سروکار دارد (مجموعه، به‌طور ساده، کلکسیونی از اشیاست). برای مثال:

N = {۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ...}

به معنی مجموعه‌ی اعداد تمام (مثبت) است. هنگامی که مجموعه‌ای داشته باشیم، می‌توانیم درباره‌ی زیرمجموعه‌هایی[4] که داخل مجموعه‌ی بزرگ‌ترند، صحبت کنیم. واضح‌ترین زیرمجموعه‌هایی که با مثال Nمان مرتبط‌اند، زیرمجموعه‌های

O = {۱, ۳, ۵, ۷, ...} و E = {۲, ۴, ۶, ۸, ...}

هستند که به‌ترتیب، مجموعه‌های اعداد فرد[5] و اعداد زوج[6] را تشکیل می‌دهند. در این‌جا، اگر این پرسش را مطرح کنیم که «آیا تعداد اعداد فرد با تعداد اعداد زوج برابر است؟» پاسخمان چیست؟ گرچه این کار را نمی‌توان با شمردن اعضایی که در هر مجموعه موجود است، و مقایسه‌ی جواب‌ها انجام داد، پاسخ به‌طور مطمئن «آری» است. اما این اطمینان بر چه مبنایی است؟ شاید بر چیزی شبیه این: «نیمی از اعداد تمام فرد و نیمی زوج هستند.» کانتور با این پاسخ موافق است، اما استدلال متفاوتی به‌دست می‌دهد. وی چنین می‌گوید: هربار که عددی فرد داریم، عدد زوجی در کنارش، به عنوان «جفت»[7] خواهیم داشت. این ایده که هر دو مجموعه‌ی O و E دارای اعضایی با تعداد یکسان‌اند، بر مبنای جفت کردن هر عدد فرد با یک عدد زوج قرار دارد:

O:	۱	۳	۵	۷	۹	۱۱	۱۳	۱۵	۱۷	۱۹	۲۱...
	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
E:	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰	۲۲...

اما در صورتی که این پرسش دیگر را مطرح کنیم که «آیا تعداد اعداد تمام، برابر تعداد اعداد زوج است؟» پاسخ ممکن

است خیر باشد، و استدلال این که مجموعه‌ی N، به خودی خود، دوبرابر مجموعه‌ی اعداد زوج عدد دارد.

مفهوم «بیشتر»، زمانی که با مجموعه‌هایی با تعداد اعضای نامعین سروکار داریم، مفهومی مبهم است. اما این کار را می‌توانیم با مفهوم تناظر یک به یک بهتر انجام دهیم. تعجب‌آور است که بین N و مجموعه‌ی اعداد زوج (E)، نیز تناظری یک به یک موجود است:

$$\begin{array}{lccccccccccc} O: & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & ۸ & ۹ & ۱۰ & ۱۱\ldots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ E: & ۲ & ۴ & ۶ & ۸ & ۱۰ & ۱۲ & ۱۴ & ۱۶ & ۱۸ & ۲۰ & ۲۲\ldots \end{array}$$

به این ترتیب، به این نتیجه‌ی مبهوت کننده می‌رسیم که به «همان تعداد» اعداد تمام، عدد زوج داریم! نتیجه‌ای که با «مفهوم متعارف» اعلام شده توسط یونانیان باستان، در تناقض است؛ چه آغاز کتاب مقدمات[8] **اقلیدس اسکندرانی**[9] بر این است که «کل بزرگ‌تر از جزء است».

اصلیت

تعداد اعضای یک مجموعه، به «اصلیت» یا عدد اصلی آن موسوم است. در حالت مربوط به گوسفندان، عدد اصلی ثبت شده به حساب کشاورز ۴۲ است. اصلیت مجموعه‌ی $\{a, b, c, d, e\}$ برابر ۵ است که آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

$\mathrm{card}\{a, b, c, d, e\} = ۵$

به این ترتیب، اصلیت، قدر یا «اندازه‌ی» یک مجموعه است. کانتور در مورد اعداد تمام N، و هر مجموعه‌ی در تناظر یک به یک با N، از نماد – [11] استفاده کرد. بنابراین، به زبان ریاضی می‌توان نوشت

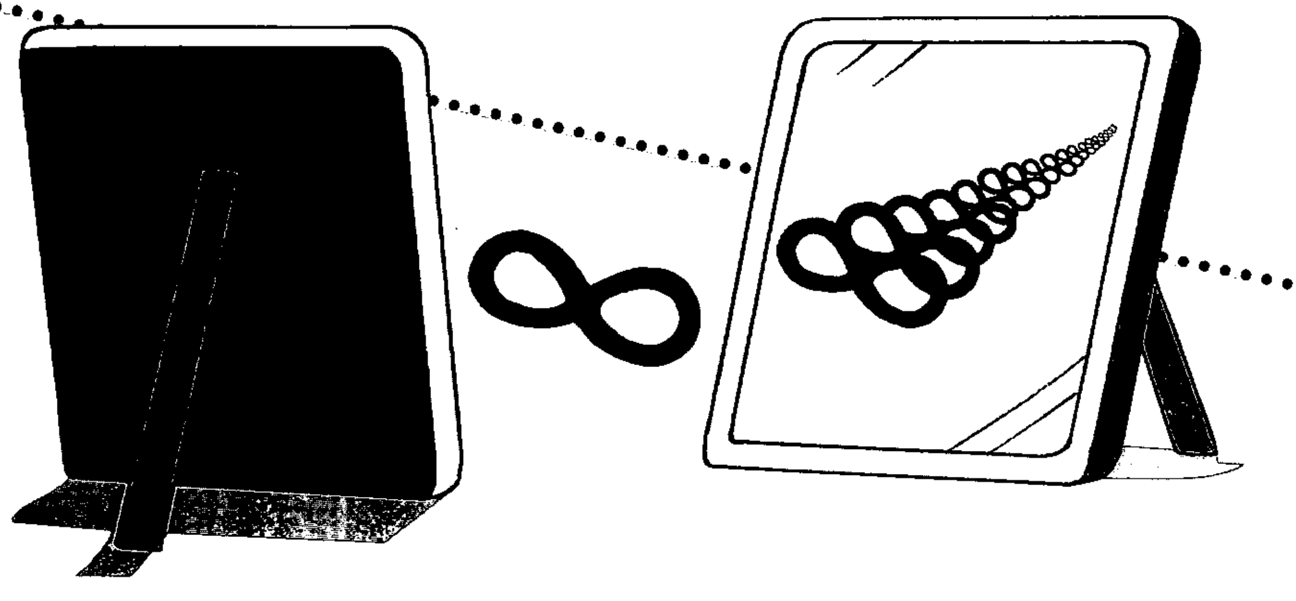
$\mathrm{card}(N)=\mathrm{card}(O)=\mathrm{card}(E)=\aleph_0$

هر مجموعه که بتواند در تناظر یک‌به یک با N قرار گیرد، مجموعه‌ی «بی‌نهایت شمارا» یا «نامتناهی شمارا»[12] نامیده می‌شود. بی‌نهایت ـ شمارا بودن یک مجموعه به این معنی است که می‌توانیم اعضای آن مجموعه را در یک فهرست قراردهیم. برای مثال، فهرست اعداد فرد، به‌طور ساده عبارت است از: ۱, ۳, ۵, ۷, ۹، ... و می‌دانیم کدام عضو اول، کدام دوم، و غیره است.

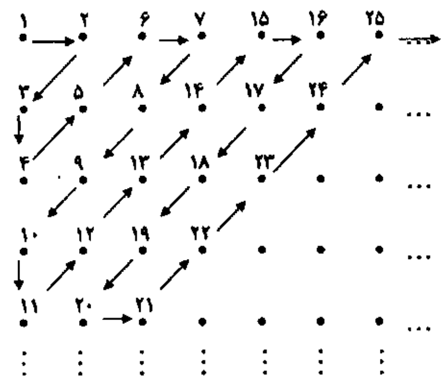
آیا کسرها بی‌نهایت - شمارا هستند؟

مجموعه‌ی کسرها یا Q، به این معنی‌که می‌توان N را به عنوان زیر مجموعه‌ای از Q در نظر گرفت، بزرگ‌تر از N است. اما آیا می‌توان جمیع اعضای Q را در یک فهرست نوشت؟ یعنی آیا می‌توانیم فهرستی ارائه کنیم که هر کسر (از جمله کسرهای منفی) جایی در آن داشته باشد؟ به‌نظر می‌رسد این ایده که مجموعه‌ای به این بزرگی را می‌توان در تناظری یک به یک با N قرار داد، غیرممکن باشد. با این همه، این کار را می‌توان انجام داد.

$$\begin{array}{cccccccc} ۱ & -۱ & ۲ & -۲ & ۳ & -۳ & ۴ & \ldots \\ \frac{۱}{۲} & \frac{-۱}{۲} & \frac{۳}{۲} & \frac{-۳}{۲} & \frac{۵}{۲} & \frac{-۵}{۲} & \frac{۷}{۲} & \ldots \\ \frac{۱}{۳} & \frac{-۱}{۳} & \frac{۲}{۳} & \frac{-۲}{۳} & \frac{۴}{۳} & \frac{-۴}{۳} & \frac{۵}{۳} & \ldots \\ \frac{۱}{۴} & \frac{-۱}{۴} & \frac{۳}{۴} & \frac{-۳}{۴} & \frac{۵}{۴} & \frac{-۵}{۴} & \frac{۷}{۴} & \ldots \\ \frac{۱}{۵} & \frac{-۱}{۵} & \frac{۲}{۵} & \frac{-۲}{۵} & \frac{۳}{۵} & \frac{-۳}{۵} & \frac{۴}{۵} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$



طریق آغاز این کار، مجسّم کردن عبارات دو بعدی است. برای شروع، ردیفی از جمیع اعداد تمام، متناوباً مثبت و منفی، می‌نویسیم. سپس در زیر آن، جمیع کسرهایی را می‌نویسیم که مخرجشان ۲ است، اما آن‌هایی را که در سطر بالا ظاهر شده‌اند (مانند ۲ = ۶/۳) می‌اندازیم. آن‌گاه زیر این سطر، کسرهایی را می‌نویسیم که مخرج ۳ دارند، و بار دیگر، آن‌هایی را که قبلاً ثبت کرده‌ایم، حذف می‌کنیم. کار را به این طریق ادامه می‌دهیم، اما در مورد آن، گرچه هیچ‌گاه پایان نمی‌پذیرد، دقیقاً می‌دانیم که در نمودارمان، هر کسر در کدام مکان ظاهر می‌شود. برای مثال، ۲۰۹/۶۷ در ردیف ۶۷ام، در حدود ۲۰۰ مکان در سمت راست ۱/۶۷ قرار دارد.



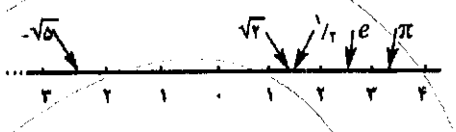
با نمایش جمیع کسرها در این طریق، دست کم بالقوه می‌توانیم فهرستی یک‌بعدی بنا کنیم. در صورتی که از سطر بالایی شروع و در هر مرحله به راست حرکت کنیم، هرگز به سطر دوم نمی‌رسیم. اما با انتخاب یک مسیر پرپیچ و خم زیگزاگی، می‌توان به موفقیت رسید. با شروع از ۱، فهرست خطی معهود، به صورت زیر آغاز می‌شود:

$$1, -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, 2, -2$$

کـــــه از پیکان‌ها پیروی می‌کند. هر کسر، مثبت یا منفی، در جایی از این فهرست خطی واقع است و برعکس، موقعیتش «جفتش» را در فهرست دو بعدی کسرها به دست می‌دهد. بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که مجموعه‌ی کسرهای Q بی‌نهایت شماراست و نوشت: $card(Q)=\aleph_0$.

فهرست کردن اعداد حقیقی

در حالی که مجموعه‌ی کسرها جوابگوی اعضای بسیاری بر محور عددی حقیقی است، بعضی اعداد حقیقی از قبیل $\sqrt{2}$ و e، π نیز موجودند که کسر نیستند. این اعداد، اعداد گنگ هستند و «رخنه‌ها را پر می‌کنند» تا محور عدد حقیقی R را به دست دهند.



به مجموعه‌ی R، با رخنه‌های پر شده، به‌عنوان «پیوستار»[13] رجوع می‌شود. اما چگونه می‌توانیم فهرستی از اعداد حقیقی تشکیل دهیم؟ کانتور، در حرکتی مملو از زیرکی محض، نشان داد که حتی کوشش در قرار دادن اعداد حقیقی بین ۰ و ۱ در یک فهرست، محکوم به شکست است. این پاسخ، بدون شک به صورت شوکی به اشخاصی وارد شد که به فهرست‌سازی معتاد بودند، چرا که در واقع از این به حیرت می‌افتادند که چگونه نمی‌توان مجموعه‌ای از اعداد را یکی پس از دیگری نوشت.

فرض می‌کنیم که به حرف کانتور اعتقاد نداشته باشید. می‌دانید که هر عدد بین ۰ و ۱ را می‌توان به صورت یک دهدهی گسترش یابنده، مثلاً:

$$1/\pi = ۰/۳۱۸۳۰۹۸۸۶۱۸۳۷۹۰۶۷۱۵۳...$$

و

$$1/2 = ۰/۵۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰...$$

بیان کرد، پس باید به کانتور بگویید: «بفرمایید، این فهرست من از جمیع اعداد بین ۰ و ۱ است»؛ فهرستی که آن را r_1، r_2، r_3، r_4 ... می‌نامیم. چه، در صورتی که نتوانید چنین کنید، حق با کانتور است.

تصور کنید کانتور به فهرستتان نگاه می‌کند و اعداد واقع در قطر مشخص شده را با حرف سیاه علامت می‌زند:

$r_1 : 0/\underline{a_1}\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5 \ldots$

$r_2 : 0/\, b_1\, \underline{b_2}\, b_3\, b_4\, b_5 \ldots$

$r_3 : 0/\, c_1\, c_2\, \underline{c_3}\, c_4\, c_5 \ldots$

$r_4 : 0/\, d_1\, d_2\, d_3\, \underline{d_4}\, d_5 \ldots$

اما عدد $x = x_1x_2x_3x_4x_5\ldots$ که در آن x_1 متفاوت از a_1، x_2 متفاوت از b_2، x_3 متفاوت از c_3، و به همین گونه در امتداد قطر است کجاست؟ عدد ایکس وی از هر عدد واقع در فهرستتان در یک مکان دهدهی تفاوت دارد و لذا نمی‌تواند در این فهرست باشد. پس حق با کانتور است.

در واقع، هیچ فهرستی در مورد مجموعه‌ی اعداد حقیقی R ممکن نیست و بنابراین R مجموعه‌ی نامتناهی «بزرگ‌تر»ی از مجموعه‌ی نامتناهی کسرهای Q است. یعنی مجموعه‌ای با مرتبه‌ی نامتناهی بالاتر.

بیش‌تر بدانید (چند تاریخچه)

۳۵۰ قبل از میلاد: ارسطو نامتناهی بالفعل را رد می‌کند.

۱۶۳۹ میلادی: ژیرار دزارگ "Girard Desargues" مفهوم نامتناهی را در هندسه معرفی می‌کند.

۱۶۵۵ میلادی: جان والیس "John Wallis" اولین کسی است که نماد «گره‌ی عشق» "love knot" یعنی ∞ را در مورد نامتناهی به کار می‌برد.

۱۸۷۴ میلادی: کانتور با مشخص کردن مرتبه‌های متفاوت نامتناهی، مفهوم نامتناهی را به دقت بررسی می‌کند.

دهه‌ی ۱۹۶۰ میلادی: آبراهام رابینسون "Abraham Robinson" حساب غیراستانداردی مبتنی بر مفهوم بی‌نهایت کوچک "infinitesimal" بنا می‌کند.

پی‌نوشت

1. Georg Cantor
2. one to one correspondence
3. sets
4. subsets
5. odd numbers
6. even numbers
7. mate
8. Elements
9. Euclid of Alexandria
10. cardinality

۱۱. ($\aleph$ یا «الف» از الفبای عبری است؛ نماد $\aleph_0$ به صورت «الف صفر» "aleph nought" خوانده می‌شود).

12. countably infinite
13. continuum

رشد و زوال

● میرشهرام صدر

اشاره

کمیت‌هایی که مقدار آن‌ها با گذشت زمان افزایش یا کاهش می‌یابند، از قوانینی پیروی می‌کنند که به قوانین رشد و زوال موسوم هستند.

هرگاه کمیت b نسبت به زمان t، رو به رشد یا زوال برود. یعنی افزایش یا کاهش پیدا کند، معمولاً مدل تغییرات آن از معادله‌ی زیر به دست می‌آید:

$b = a^t$

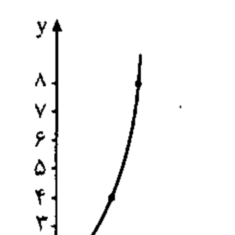
الف) اگر $a > ۱$ باشد، b رشد می‌یابد.

ب) اگر $۱ > a > ۰$ باشد، b به زوال میل می‌کند.

نمودار رشد نمایی

برای مثال، نمودار تابع با ضابطه‌ی $b = ۲^t$ را با استفاده از نقطه‌یابی رسم می‌کنیم:

t	۰	۱	۲	۳	۴
b	۱	۲	۴	۸	۱۶



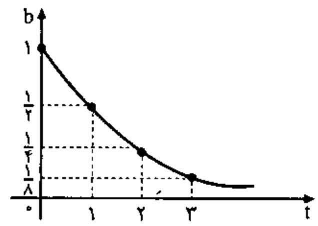
در این نمودار مشاهده می‌کنید که هرچه زمان به جلو می‌رود، b سریع‌تر و سریع‌تر رشد می‌کند. این ویژگی یک تابع نمایی است. این نمودار نشان می‌دهد که حتی اگر یک تابع نمایی در ابتدا آهسته آهسته رشد کند، با گذشت زمان، این رشد سریع و سریع‌تر خواهد شد.

تذکر: روابطی از نوع رابطه‌ی $b = a^t$ که در آن‌ها $a > ۱$؛ شکلی مشابه با این نمودار دارند.

نمودار زوال نمایی

برای مثال؛ نمودار تابع $b = (\frac{۱}{۲})^t$ را با استفاده از نقطه‌یابی رسم می‌کنیم.

t	۰	۱	۲	۳
b	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۸}$



در نمودار بالا مشاهده می‌کنید که هرچه زمان به جلو می‌رود، b سریع‌تر و سریع‌تر به سمت صفر یا زوال یا نابودی میل می‌کند. این به دلیل آن است که پایه $(\frac{۱}{۲})$ کوچک‌تر از واحد است، می‌دانیم که عدد کوچک‌تر از واحد، وقتی به توان اعداد طبیعی می‌رسد، مرتب کوچک می‌شود.

تذکر: روابطی از نوع $b = a^t$ که در آن‌ها a کوچک‌تر از ۱ و بزرگ‌تر از ۰ است $(۱ > a > ۰)$ شکلی مشابه با این نمودار دارند.

مثال ۱. یک صفحه کاغذ سفید بردارید و آن را تا بزنید کاغذ تاخورده را تای جدیدی بزنید و این تا زدن‌ها را تا جایی که

می‌توانید ادامه دهید.
چگونگی افزایش تعداد ناحیه‌هایی که بر اثر تا زدن‌های متوالی ایجاد می‌شوند و چگونگی تغییر مساحت‌های آن‌ها را بررسی کنید.

حل: بعد از اولین تا زدن $(n = ۱)$، دو ناحیه به وجود می‌آید که مساحت هر یک نصف مساحت اولیه است. در دومین تا زدن $(n = ۲)$ چهار ناحیه ایجاد می‌شود که مساحت هر کدام از آن‌ها نصف مساحت قبلی، یعنی $\frac{۱}{۴}$ مساحت اولیه است. در سومین تا زدن $(n = ۳)$، هشت ناحیه ایجاد می‌شود که مساحت هر کدام از آن‌ها، نصف مساحت قبلی، یعنی $\frac{۱}{۸}$ مساحت اولیه است و همین‌طور... مطالب بالا را در جدول زیر خلاصه می‌کنیم:

تعداد تازدن‌ها	تعداد ناحیه‌ها	چگونگی تغییر مساحت ناحیه‌ها
۰	$۱ = ۲^{۰}$	$۱ = (\frac{۱}{۲})^{۰}$
۱	$۲ = ۲^{۱}$	$۲ = (\frac{۱}{۲})^{۱}$
۲	$۴ = ۲^{۲}$	$۴ = (\frac{۱}{۲})^{۲}$
۳	$۸ = ۲^{۳}$	$۸ = (\frac{۱}{۲})^{۳}$
⋮	⋮	⋮
n	۲^{n}	۲^{n}

همان‌طور که در جدول می‌بینید هم‌چنان که تعداد ناحیه‌ها بر اثر تا کردن‌های متوالی بیش‌تر و بیش‌تر می‌شود، مساحت ناحیه‌ها کم‌تر و کم‌تر می‌شود! در واقع تعداد ناحیه‌ها به‌طور نمایی رشد می‌کند و مساحت ناحیه‌ها به‌طور نمایی روبه زوال می‌رود.

تذکر: با بررسی دقیق‌تر جدول بالا، مشاهده می‌کنیم که فاکتور زوال $a = \frac{۱}{۲}$ است که از یک کوچک‌تر است، در حالی که فاکتور رشد $a = ۲$ است که از یک بزرگ‌تر است.

رشد نمایی

هرگاه $A_{۰}$، برای مثال، هزینه‌ی اولیه یا سرمایه‌ی اولیه یا جمعیت کشور در سال معینی باشد، r آهنگ رشد سالانه‌ی هزینه یا سرمایه یا جمعیت کشور، t تعداد سال‌ها و A_t هزینه‌ی انباشته شده یا سرمایه‌ی انباشته شده و یا جمعیت ایجاد شده بعد از t سال باشد، این مجموع انباشته یا ایجاد شده را با استفاده از فرمول روبه‌رو حساب می‌کنیم: $A_t = A_{۰}(۱+r)^t$

این فرمول (با مقایسه‌ی $b = a^t$)، یک تابع نمایی رشد است که در آن تابع A_t به جای b و $(۱+r)$ به جای a آمده است.

تذکر: $(۱+r)$ فاکتور رشد در یک واحد زمانی و $(۱+r)^t$ فاکتور رشد در دوره‌ی زمانی t است.

مثال۲. جمعیت یک شهر ۳/۲ میلیون نفر است. اگر نرخ رشد جمعیت این شهر ۱/۲ درصد در سال باشد، بعد از ۱۰ سال جمعیت آن چند نفر می‌شود؟

حل:

$$A_{۰} = ۳/۲ \ , \ r = ۱/۲\% = ۰/۰۱۲ \ , \ t = ۱۰ \ , \ A_{۱۰} = ?$$

$$A_t = A_{۰}(۱+r)^t \Rightarrow A_{۱۰} = ۳/۲(۱+۰/۰۱۲)^{۱۰}$$

$$\Rightarrow A_{۱۰} = ۳/۲(۱/۰۱۲)^{۱۰}$$

$$\Rightarrow A_{۰} = ۳/۶ \text{ میلیون نفر}$$

مثال۳. فرض کنید که هزینه‌ی تحصیلات عمومی از سال ۱۳۷۰ خورشیدی با آهنگ سالانه‌ی ۱۰ درصد رو به افزایش بوده است. اگر در سال ۱۳۷۰ که میلاد به کلاس اول رفت، هزینه‌ی تحصیل او ۱۸۰۰۰ تومان بوده باشد، این هزینه در سال ۱۳۸۸ (پس از ۱۸ سال)، چه‌قدر شده است؟

حل:

$$r = ۱۰\% = \frac{۱۰}{۱۰۰} = ۰/۱ \ , \ A_{۰} = ۱۸۰۰۰ \ , \ t = ۱۸ \ , \ A_{۱۸} = ?$$

$$A_t = A_{۰}(۱+r)^t \Rightarrow A_{۱۸} = ۱۸۰۰۰(۱+۰/۱)^{۱۸}$$

$$\Rightarrow A_{۱۸} = ۱۸۰۰۰(۱/۱)^{۱۸}$$

$$\Rightarrow A_{۱۸} = ۱۰۰۰۷۸ \text{ تومان}$$

می‌توانیم به جای آهنگ رشد سالانه، آهنگ رشد ماهانه و حتی آهنگ رشد روزانه را به‌دست آوریم که به واقعیت نزدیک‌تر است. به‌طور کلی، اگر سال را به n قسمت مساوی تقسیم کنیم، یعنی $\frac{1}{n}$، آن‌گاه فرمول زیر را خواهیم داشت:

$$A_t = A_0(1+\frac{r}{n})^{nt}$$

مثال ۴. جمعیت کره‌ی زمین در ۳۵ سال بعد با توجه به جمعیت اولیه‌ی ۵/۲ میلیارد نفری در سال ۱۹۹۰ و قرار دادن زمان بر حسب ماه، چند نفر خواهد شد، در صورتی که بدانیم آهنگ رشد جمعیت ۲ درصد در ماه است؟

$$A_0 = ۵/۲\ ,\ t = ۳۵\ ,\ A_{۳۵} = ?\ ,\ n = ۱۲\ ,\ r = ۰/۰۲$$

$$A_t = A_0(1+\frac{r}{n})^{nt} \Rightarrow A_{۳۵} = ۵/۲(1+\frac{۰/۰۲}{۱۲})^{۱۲\times۳۵}$$

$$\Rightarrow A_{۳۵} = ۵/۲\ (۱/۰۰۱)^{۴۲۰}$$

$$\Rightarrow A_{۳۵} = ۱۰/۴۶۵$$ میلیارد نفر

مثال ۵. شخصی مبلغ ۱۰۰۰۰ تومان با نرخ سود علی‌الحساب ۴ درصد به حساب سپرده گذاشته است. چه مبلغی (اصل و فرع) پس از ۱۰ سال دریافت می‌کند اگر سود در پایان هر سه ماه پرداخت شود؟

حل:

$$A_0 = ۱۰۰۰۰\ ,\ r = ۰/۰۴\ ,\ t = ۱۰\ ,\ n = ۴\ ,\ A_{۱۰} = ?$$

$$A_t = A_0(1+\frac{r}{n})^{nt} \Rightarrow A_{۱۰} = ۱۰۰۰۰(1+\frac{۰/۰۴}{۴})^{۴\times۱۰}$$

$$\Rightarrow A_{۱۰} = ۱۰۰۰۰(۱/۰۱)^{۴۰}$$

$$\Rightarrow A_{۱۰} = ۱۴۸۸۸/۶۳$$ تومان

تمرین ۱. جمعیت شهری در دو سال آینده با توجه به جمعیت اولیه‌ی ۱۰۰۰۰۰ نفری آن، و قرار دادن زمان بر حسب روز چند نفر خواهد شد، در صورتی که بدانیم آهنگ رشد جمعیت ۰/۱ درصد در روز است؟

جواب: ۱۰۰۱۴۴ نفر

تمرین ۲. اگر با نرخ ۱۲ درصد، آخر هر ماه سود علی‌الحساب بر سرمایه اضافه شود، پس از پنج سال سرمایه‌ی فعلی در چه عددی ضرب می‌شود؟

جواب: سرمایه‌ی فعلی باید در $(۱/۰۱)^{۶۰}$ ضرب شود.

زوال نمایی

در شیمی، به مدت زمانی که طول می‌کشد تا مقداری از یک ماده‌ی رادیواکتیو به نصف برسد، نیمه عمر گفته می‌شود. برای مثال نیمه عمر نوعی ایزوتوپ در حدود پنج دقیقه است. پس از گذشت نیم ساعت، چه کسری از ماده‌ی اولیه باقی مانده است؟

حل: ۳۰ دقیقه شامل ۶ دوره‌ی زمانی ۵ دقیقه‌ای است.

$$۱ \xrightarrow{۵'} \frac{۱}{۲} \xrightarrow{۵'} \frac{۱}{۴} \xrightarrow{۵'} \frac{۱}{۸} \xrightarrow{۵'} \frac{۱}{۱۶} \xrightarrow{۵'} \frac{۱}{۳۲} \xrightarrow{۵'} \frac{۱}{۶۴}$$

بنابراین، پس از نیم ساعت، $\frac{۱}{۶۴}$ از ماده‌ی اولیه باقی مانده است.

مثال ۶. نیمه عمر ماده‌ی رادیواکتیوی ۶ ساعت است. اگر ۱۹۲ گرم از این ماده موجود باشد، بعد از گذشت یک شبانه‌روز (۲۴ ساعت) چه مقدار از این ماده باقی خواهد ماند؟

$$۱۹۲gr \xrightarrow{۶\text{ ساعت}} ۹۶gr \xrightarrow{۶\text{ ساعت}} ۴۸gr \xrightarrow{۶\text{ ساعت}} ۲۴gr \xrightarrow{۶\text{ ساعت}} ۱۲gr$$

بنابراین، پس از یک شبانه‌روز، ۱۲ گرم از ماده‌ی اولیه باقی مانده است.

معادله‌ی کلی زوال نمایی به‌صورت $A = A_0(1-r)^t$ است که در آن A بیانگر مقدار نهایی، A_0 بیانگر مقدار اولیه، r بیانگر میزان نزول (زوال) بر حسب اعشار و t بیانگر زمان است.

مثال ۷: نیمه عمر ماده‌ی رادیواکتیوی ۴ ساعت است. اگر ۱۱۵۲ گرم از این ماده موجود باشد، بعد از گذشت یک شبانه‌روز، چند گرم از ماده‌ی اولیه تجزیه نشده باقی مانده است؟

حل:

T= یک دوره‌ی زمانی ثابت $\times t \Rightarrow ۲۴ = ۴\times t \Rightarrow t = ۶$

$A = A_0(1-r)^t\ ;\ A_0 = ۱۱۲۵\ ,\ r = \frac{۱}{۲}$ نیمه عمر

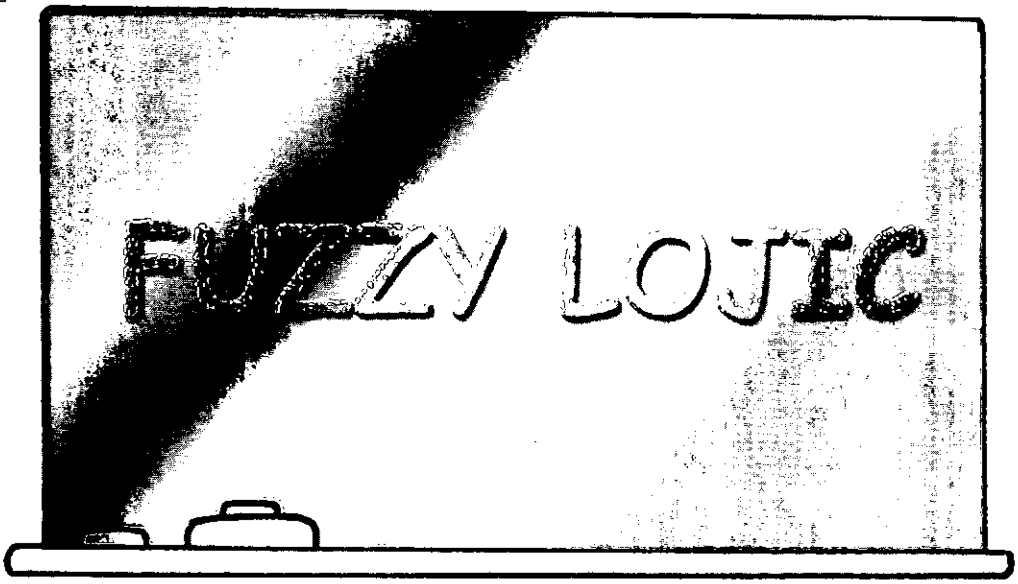
$A = ۱۱۵۲(1-\frac{۱}{۲})^{۶} = ۱۱۵۲\times\frac{۱}{۶۴} = ۱۸$ گرم

بعد از گذشت یک شبانه‌روز، ۱۸ گرم از ماده‌ی رادیواکتیو باقی خواهد ماند.

❐

● دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی
عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی

۸



نظریه‌ی مجموعه‌های فازی

اشاره

در بخش‌های قبل، خوانندگان محترم با مفاهیم اولیه در مجموعه‌های فازی آشنا شدند. هدف از ارائه‌ی این مجموعه از مقالات، معرفی تاریخچه، اصول تعاریف پایه‌ای در تئوری مجموعه‌های فازی برای آشنایی دانش‌آموزان و معلمان گرامی بود. هر یک از خوانندگان عزیز می‌توانند با مطالعه‌ی مراجعی که در پایان بخش معرفی شده بودند، اطلاعات کامل‌تری را در خصوص مطالب مطرح شده از مجموعه‌های فازی دریافت کنند. هم‌چنین، با استفاده از شبکه‌ی اینترنت و جست‌وجو در سایت‌های مربوط به معرفی مفاهیم فازی، می‌توان تاریخچه و کاربردهای مجموعه‌ها و منطق فازی را در علوم گوناگون ملاحظه کرد. در حال حاضر، مجلات علمی متعدی در جهان وجود دارند که مقالات علمی مربوط به شاخه‌های گوناگون علم فازی را چاپ می‌کنند و آخرین تحقیقات و دستاوردهای دانشمندان و محققان را در خصوص پیشرفت‌های این شاخه‌ی علمی جدید به چاپ می‌رسانند. از جمله مجلات معتبر خارجی که می‌توان در زمینه ی مجموعه‌ها و سیستم‌های فازی معرفی کرد، ژورنال Fuzzy Sets and System است. در کشور ما نیز مجله‌ی سیستم‌های فازی ایران، با عنوان «Iranian Journal of fuzzy System» زیر نظر انجمن سیستم‌های فازی ایران به چاپ می‌رسد که از جمله مجلات داخلی معتبر در خصوص معرفی مقالات فازی است. سالانه در ایران و سایر کشورهای جهان، همایش‌هایی با عنوان سیستم‌های فازی برگزار می‌شود که محققان علم فازی در شاخه‌های کاری خود، با حضور در این کنفرانس‌های بین‌المللی، کارهای تحقیقاتی خود را معرفی می‌کنند. به امید آن که این چند قسمت از معرفی مجموعه‌های فازی توانسته باشد مورد استفاده ی خوانندگان محترم قرار گیرد و انگیزه‌ای برای مطالعه‌ی بیشتر را برای علاقه‌مندان فراهم کرده‌باشد، در این قسمت که آخرین مقاله در خصوص آشنایی با مجموعه‌های فازی است، به مفاهیم منطق فازی اشاره‌ی مختصری می‌کنیم.

مقدمه

منطق فازی توسعه‌ای از منطق دودویی (منطق بولی) است. در منطق کلاسیک، تنها دو ارزش مورد نظر هستند. در این منطق، ارزش هر گزاره، یا درست یا نادرست است، در حالی که در منطق فازی، هر گزاره ارزش‌های متعددی دارد. به همین دلیل، به آن منطق چند ارزشی هم می‌گویند. در منطق کلاسیک، ارزش درستی یا نادرستی هر گزاره، به ترتیب با T و F نمایش داده می‌شود. به عبارت دیگر، در منطق قطعی،

مقدار درستی هر گزاره با ۰ یا ۱ بیان می‌شود. ولی در منطق فازی، مقدار درستی یک گزاره در بازه‌ی [۱ و ۰] است و به عبارت دیگر، متغیرهای منطق فازی درجه‌ای از صحت بین ۰ و ۱ دارند و تنها به دو مقدار ۰ و ۱ منحصر نیستند. این امر باعث می‌شود که بتوانیم، به جای یک استدلال قطعی، یک استدلال تقریبی را مطرح کنیم. منطق فازی به عنوان نتیجه‌ای از مجموعه‌های فازی، توسط پروفسور لطفی‌زاده مطرح شد و تاکنون کاربردهای بسیار زیادی را در رشته‌های گوناگون علمی ایجاد کرده است.

گاهی در محاوره‌های روزمره، از الفاظی استفاده می‌کنیم که برای توصیف یک تغییر به‌کار می‌رود. مثلاً: دمای هوای امروز بالاست، سرعت وسیله‌ی نقلیه کند است و معلم درس ریاضی جوان است. به این نوع جملات، گزاره‌های فازی[1] می‌گوییم. همان‌طور که ملاحظه می‌کنیم، نمی‌توان به این جملات، به یقین یکی از ارزش‌های درستی یا نادرستی را نسبت داد. صورت کلی هر گزاره‌ی فازی ساده عبارت است از: x ، A

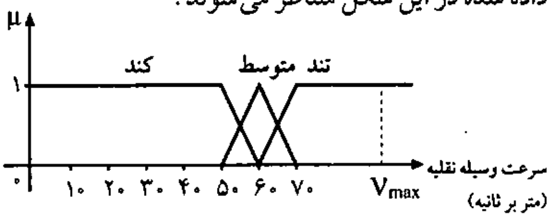
در این حالت، x یک متغیر زبانی[2] و A مقدار زبانی برای متغیر x است. در واقع A مجموعه‌ای فازی است که در دامنه‌ی تعریف x معرفی می‌شود.

در مثال دمای هوای امروز بالاست، «دمای هوای امروز»، متغیر این گزاره‌ی فازی و «بالا» مقدار این متغیر است. این متغیر می‌تواند مقادیری نظیر $20^\circ C$ یا $15^\circ C$ را اختیار کند. وقتی یک متغیر، اعداد را به عنوان مقدار می‌پذیرد؛ آن‌را متغیر عددی می‌گوییم و براساس قوانین ریاضی آن‌را بررسی می‌کنیم. ولی وقتی یک متغیر الفاظ یا واژه‌ها را به عنوان مقدار می‌گیرد، به آن یک متغیر زبانی یا بیانی می‌گوییم. هر متغیر زبانی با چهار پارامتر به صورت کلی (X, T, U, M) معرفی می‌شود. این پارامترها عبارت‌اند از:

x نام متغیر زبانی است. T مجموعه مقادیر زبانی است که x اختیار می‌کند. U دامنه‌ی تعریف قطعی است که در آن متغیر زبانی x مقادیر عددی خود را اختیار می‌کند. M قاعده‌ای است که هر مقدار زبانی در مجموعه‌ی T را به یک مجموعه‌ی فازی در U نظیر می‌کند.

برای مثال، سرعت یک وسیله‌ی نقلیه، متغیری نظیر x است که مقادیری در بازه‌ی [v_{max} و ۰] را اختیار می‌کند. حال سه مجموعه‌ی فازی کند، متوسط و تند را درنظر می‌گیریم که در این محدوده باشند. اگر x یک متغیر زبانی باشد، x یکی از واژه‌های کند، متوسط یا تند را به عنوان مقدار می‌پذیرد. مثلاً می‌گوییم x تند است. در این حالت، نام متغیر زبانی x همان سرعت وسیله‌ی نقلیه است و [v_{max} و ۰]=U. (v_{max} حداکثر سرعت این وسیله است).

هم‌چنین {تند و متوسط و کند} = T. در شکل ۱، مقادیر کند، متوسط و تند توسط قاعده‌ی M به توابع عضویت نمایش داده شده در این شکل متناظر می‌شوند.



شکل ۱

ملاحظه می‌کنیم، واژه‌ی فازی متوسط، با تابع عضویت زیر معرفی شده است که بیانگر یک عدد فازی مثلثی است.

$$\mu_{\text{متوسط}}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-50}{10} & 50\le x\le 60\\[2mm] \dfrac{70-x}{10} & 60\le x\le 70\\[2mm] 0 & 70<x\le v_{max}\ ,\ 0\le x<50\end{cases}$$

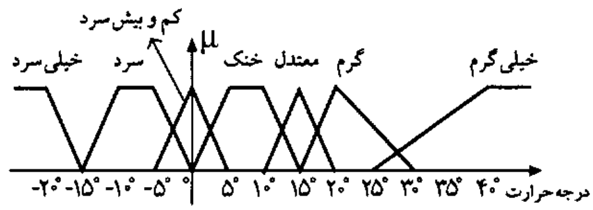
هم‌چنین، تابع عضویت متناظر واژه‌ی فازی کند به صورت زیر درنظر گرفته شده است:

$$\mu_{\text{کند}}(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<50\\[2mm] \dfrac{60-x}{10} & 50\le x\le 60\\[2mm] 0 & 60<x\le v_{max}\end{cases}$$

متغیرهای زبانی در علوم نقش و اهمیت زیادی دارند، چرا که این متغیرها برای اندازه‌گیری بسیاری از مفاهیم که با ابهام توأم هستند، به کار می‌روند. اجزای هر متغیر زبانی، ترکیبی از یک اصطلاح پایه[3]، شامل یک مجموعه‌ی فازی نظیر تند، یک مکمل‌کننده چون «نه»، یک رابط نظیر «یا» یا «و» و در نهایت قیود[4] نظیر «کمی»، «خیلی»، «کم وبیش» و امثال آن است. برای مثال، نمونه‌هایی از متغیرهای زبانی در مورد درجه حرارت هوا عبارت‌اند از: خیلی سرد، سرد، تقریباً سرد، کم

و بیش سرد، نسبتاً گرم، کمی گرم، گرم، بسیار گرم، به شدت گرم، داغ، خیلی داغ، نه خیلی گرم.

شکل۲، نمونه‌ای از این متغیرهای زبانی را نمایش می‌دهد که توسط قاعده‌ی M به یک مجموعه‌ی فازی نسبت داده شده‌اند.



شکل ۲

ملاحظه می‌کنیم که در این حالت، برای معرفی متغیرها از اعداد فازی مثلثی و ذوزنقه‌ای استفاده شده است. مثلاً تابع عضویت متغیر زبانی «خنک» به صورت زیر تعریف شده است:

$$\mu_{\text{خنک}}(x) = \begin{cases} \frac{x}{5} & 0 < x < 5^\circ \\ 1 & 5^\circ \le x \le 10^\circ \\ \frac{15 - x}{5} & 10^\circ < x \le 15^\circ \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که این یک عدد فازی ذوزنقه‌ای است.

هر گزاره‌ی فازی مرکب، ترکیبی از یک گزاره‌ی فازی ساده با رابط‌های گزاره‌ای «و»، «یا» و «نه» است که به ترتیب بیانگر اعمال اشتراک، اجتماع و مکمل (متمم) فازی هستند. سه گزاره‌ی فازی زیر را که در آن‌ها، A، B و C مجموعه‌هایی فازی هستند، درنظر می‌گیریم:

x، A است، x، B است، x، C است.

در این صورت، گزاره‌های مرکب زیر را به عنوان نمونه می‌توان از روی آن‌ها ساخت:

x، A یا B است. x، نه A یا نه B است.

(x، A و C است) یا x، B است.

هر گزاره‌ی فازی مرکب می‌تواند به صورت شرطی اگر p آن‌گاه q نیز بیان شود که در آن p و q گزاره‌های فازی مفروض هستند. مثلاً اگر سرعت اتومبیل بالا باشد، آن‌گاه مقاومت بالاست. اگر دمای هوا سرد باشد، آن‌گاه طول میله کم می‌شود. اگر دما خیلی بالاست، آن‌گاه پنکه را سریع کن.

در حال حاضر منطق فازی، در طراحی و برنامه‌ریزی سیستم‌های تهویه‌ی مطبوع، ترمز ضد قفل ABS، مونوریل، دوربین عکاسی، ماشین لباس‌شویی، ماکروویو، چراغ‌های راهنمایی هوشمند کنترل ترافیک، آسانسور، شبکه‌های عصبی[5]، هوش مصنوعی[6]، رباتیک، الگوریتم‌های ژنتیک، کنترل سرعت قطار، بالگردهای نظامی و . . . کاربرد دارد.

برای مثال، سیستم ترمز خودکار ABS، بر سیستم ترمز وسیله‌ی نقلیه نظارت دارد چه‌طوری که قبل از قفل شدن چرخ‌ها در سرعت‌های بالا، به رهاکردن ترمز چرخ‌ها می‌کند. یک کامپیوتر این وظیفه را برعهده دارد که بهترین زمان انجام این کار را مشخص کند. در این حالت، دو عامل مورد توجه است: یکی توجه به سرعت وسیله‌ی نقلیه، زمانی که ترمزها استفاده می‌شوند و دیگری توجه به این عامل که چه‌قدر ترمزها سریع فشار داده می‌شوند. به‌ویژه، زمانی این سیستم باید عمل کند که راننده با سرعت رانندگی می‌کند و به سرعت ترمزها را می‌فشارد. در این لحظه، سیستم ترمز ABS باید آن‌قدر هشیار باشد که اجازه ندهد چرخ‌ها قفل شوند.

هم‌چنین، پلوپزی که براساس منطق فازی کار می‌کند، دارای تراشه‌ای رایانه‌ای است که توانایی کنترل زمان پخت و دما را دارد. در این حالت، اطمینان خواهیم داشت که برنج به‌طور مناسب پخته می‌شود. عملکرد این منطق براساس هر گزاره‌ی فازی، به صورت شرطی اگر آن‌گاه است. مثلاً اگر برنج خیلی داغ شود و افزایش حرارت نسبتاً به سرعت ادامه یابد، آن‌گاه المنت حرارتی خاموش شود. حتی مغز انسان نیز دارای عملکردی براساس منطق فازی است و بر همین اساس، در مبحث شبکه‌های عصبی، از این منطق استفاده می‌شود. علاقه‌مندان می‌توانند برای کسب اطلاعات بیشتر، به مراجع زیر مراجعه کنند.

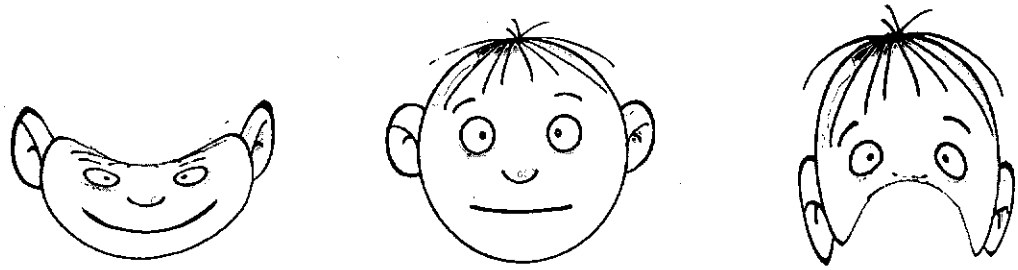
۱. لی‌وانگ. سیستم‌های فازی و کنترل فازی. ترجمه‌ی محمد تشنه‌لب و دیگران. دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی. ۱۳۷۸.

۲. منهاج، محمدباقر. محاسبات فازی. انتشارات دانش‌نگار. ۱۳۸۶.

پی‌نوشت

1. Fuzzy Proposition 2. Linguistic variable
3. Primary term 4. Hedges
5. Artificial inteligent 6. Neural networks

● صدیقه بابایی
کارشناس ارشد ریاضی محض



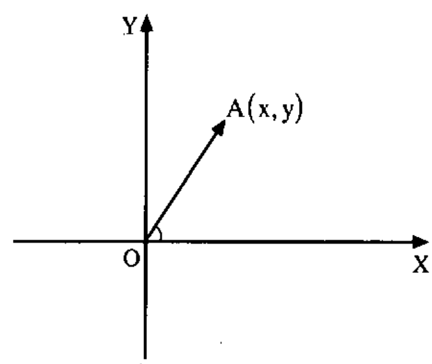
سرآغاز

در این مقاله، علاوه بر معرفی مختصاتی جدید با عنوان «مختصات زاویه‌ای برای نقاط دکارتی» که به صورت زوج مرتب نمایش داده می‌شوند، در ابتدا برای هر زوج مرتب، برحسب طول بردار تولید شده و زاویه‌ای که با جهت مثبت محور طول‌ها می‌سازد، مختصات زاویه‌ای معرفی شده است. سپس ارتباط بین مختصات قطبی و دکارتی آمده است. در ادامه، از ویژگی‌های اساسی مختصات قطبی، به خصوص داشتن نمایش‌های متفاوت برای یک نقطه، سخن به میان آمده است.

مختصات قطبی و رسم نمودارها

مختصات زاویه‌ای یا قطبی

هر نقطه در فضای دکارتی را با دو مؤلفه‌ی x به عنوان طول و y به عنوان عرض معرفی می‌کنیم. هر زوج مرتب (x,y) در دستگاه مختصات دکارتی، برداری با ابتدای O (مبدأ دستگاه دکارتی) تولید می‌کند.

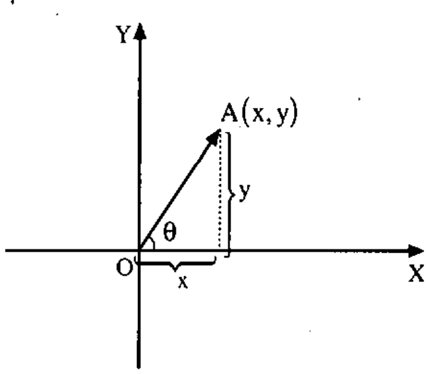


بردار $\vec{OA}$ → زوج مرتب (x,y)

اگر زاویه‌ای را که بردار $\vec{OA}$ با جهت مثبت محور طول‌ها و درخلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌سازد θ در نظر بگیریم، می‌توان نوشت:

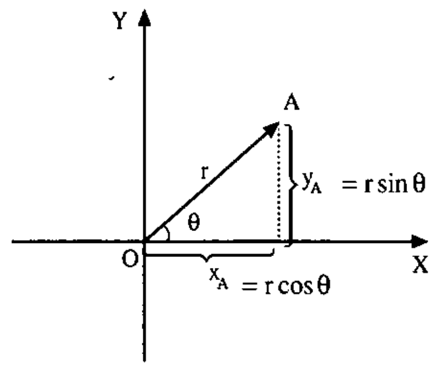
$$x = \left|\vec{OA}\right| \cos\theta$$

$$y = \left|\vec{OA}\right| \sin\theta$$



که در آن $\left|\vec{OA}\right|$ اندازه‌ی بردار $\vec{OA}$ است. با فرض $r = \left|\vec{OA}\right|$ داریم: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$. به راحتی می‌توان نشان داد که $\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \mathrm{Arc}\tan\dfrac{y}{x} \end{cases}$. بنابراین می‌توان به زوج مرتب (x,y) زوج

مرتب جدید (r,θ) را نسبت داد که در آن r طول برداری است که زوج مرتب با ابتدای مبدأ مختصات ایجاد کرده و θ زاویه‌ای است که این بردار با جهت مثبت محور طول‌ها و خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌سازد.



$$\begin{cases} (x,y) \xrightarrow[\theta=\operatorname{Arctan}\frac{y}{x}]{r=\sqrt{x^2+y^2}} (r,\theta) \\ \\ (r,\theta)\xrightarrow[y=r\sin\theta]{x=r\cos\theta}(x,y)\end{cases}$$

تعریف: برای هر زوج مرتب (x,y) در دستگاه دکارتی با فرض $\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2}\\ \theta=\operatorname{Arctan}\frac{y}{x}\end{cases}$ زوج مرتب (r,θ) را «مختصات زاویه‌ای» یا قطبی زوج مرتب (x,y) می‌نامیم.

از آن‌چه بیان شد نتیجه می‌گیریم، هر مختصات دکارتی یک مختصات قطبی دارد و برعکس، مختصات قطبی هر نقطه نیز یک مختصات دکارتی دارد.

مثال ۱. فرم قطبی زوج مرتب $(3,-3)$ را بنویسید.

حل:

$$\begin{aligned} r&=\sqrt{3^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}\\ \theta&=\operatorname{Arctan}\frac{-3}{3}=2\pi-\frac{\pi}{4}\end{aligned} \Rightarrow \left(3\sqrt{2},2\pi-\frac{\pi}{4}\right)$$

بنابراین، فرم قطبی $(3,-3)$ با $\left(3\sqrt{2},2\pi-\frac{\pi}{4}\right)$ برابر است.[1]

مثال ۲. فرم دکارتی $\left(\sqrt{2},\frac{4\pi}{3}\right)$ را محاسبه کنید.

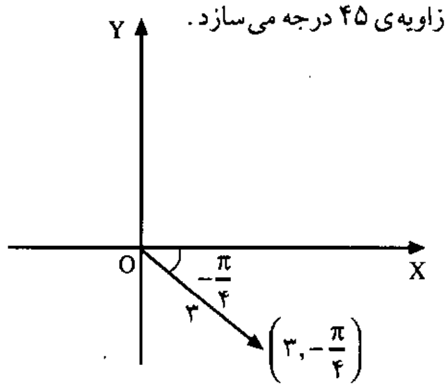
حل:

$$\begin{aligned} x&=\sqrt{2}\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{-\sqrt{2}}{2}\\ y&=\sqrt{2}\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{-\sqrt{6}}{2}\end{aligned} \Rightarrow \left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{-\sqrt{6}}{2}\right)$$

همان‌طور که قبلاً ذکر شد، θ زاویه‌ای است که در جهت مثبت محور طول‌ها و خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت در نظر گرفته می‌شود. θ می‌تواند منفی هم باشد. علامت منفی θ نشان دهنده‌ی آن است که زاویه‌ی در نظر گرفته شده، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت تولید شده است. برای مثال،

هر مختصات دکارتی یک مختصات قطبی دارد و برعکس، مختصات قطبی هر نقطه نیز یک مختصات دکارتی دارد

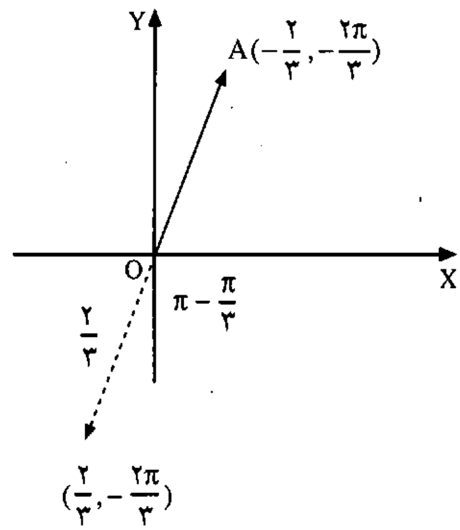
نقطه‌ی قطبی $\left(3,-\frac{\pi}{4}\right)$ نشان می‌دهد که نقطه‌ای در ربع چهارم دستگاه دکارتی، برداری به طول ۳ تولید می‌کند که با محور طول‌ها زاویه‌ی ۴۵ درجه می‌سازد.



از آن‌جا که $r=\sqrt{x^2+y^2}$ مشخص کننده‌ی طول بردار است، همواره مقداری مثبت است. اما می‌تواند علامت منفی نیز داشته باشد. $-r$ نشان دهنده‌ی برداری است با طول r ولی خلاف جهت بردار اصلی. در حقیقت، نقطه‌ی $(-r,\theta)$ را به این صورت ترسیم می‌کنیم. ابتدا نقطه‌ی (r,θ) را مشخص و سپس برداری هم‌اندازه و قرینه‌ی بردار (r,θ) رسم می‌کنیم تا نقطه‌ی $(-r,\theta)$ ایجاد شود. برای مثال، نقطه‌ی $\left(-2,\frac{\pi}{5}\right)$ را در نظر بگیرید. ابتدا $\left(2,\frac{\pi}{5}\right)$ را در دستگاه رسم می‌کنیم و سپس قرینه‌ی بردار تولید شده را رسم می‌کنیم.

مثال ۳. الف) نقطه‌ی $(-\frac{۳}{۲},-\frac{۲\pi}{۳})$ را دستگاه دکارتی نشان دهید.

حل:



ب) فرم دکارتی نقطه را بنویسید.

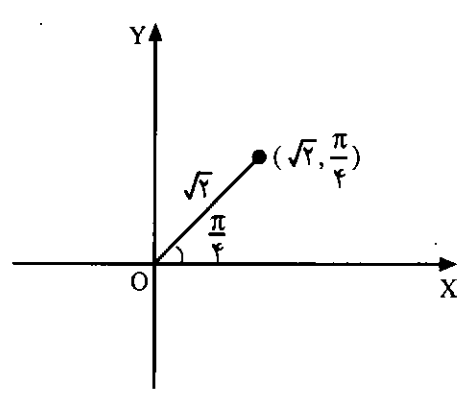
حل:

$$x = r\cos\theta = (-\frac{۳}{۲})\cos(-(\pi-\frac{\pi}{۳})) = \frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$$

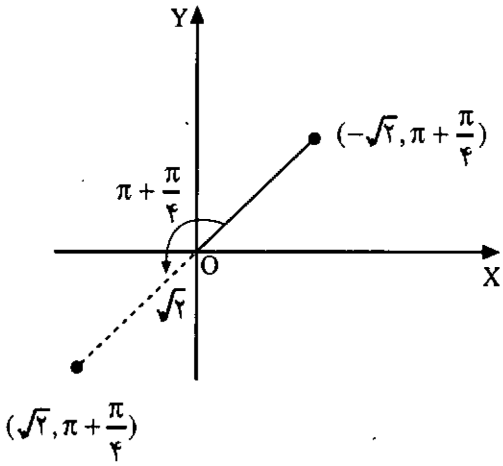
$$y = r\sin\theta = (-\frac{۳}{۲})\sin(-(\pi-\frac{\pi}{۳})) = \frac{۳}{۴}$$

صورت‌های مختلف فرم قطبی یک نقطه

نقاط در دستگاه مختصات دکارتی نمایش منحصر به فرد (x,y) را دارند. مؤلفه‌ی اول مقدار طول و مؤلفه‌ی دوم مقدار عرض نقاط را مشخص می‌کند. با تغییر مقدار یا علامت x,y نقطه‌ی جدیدی تولید می‌شود که با نقطه‌ی اولیه تفاوت دارد. اما به دلیل آن‌که r,θ می‌توانند علامت منفی داشته باشند و این علامت منفی جایگاه نقاط را تغییر می‌دهد، برای فرم قطبی نقاط، نمایش منحصر به فرد نداریم. برای مثال، نقطه‌ی $(\sqrt{۲},\frac{\pi}{۴})$ را در نظر بگیرید:



حال نقطه‌ی $(-\sqrt{۲},\pi+\frac{\pi}{۴})$ را در دستگاه دکارتی رسم کنید.



به روشنی آشکار است، نقطه‌ی $(-\sqrt{۲},\pi+\frac{\pi}{۴})$ همان جایگاه $(\sqrt{۲},\frac{\pi}{۴})$ را در دستگاه دارد. اما هر کدام به صورتی کاملاً متفاوت نمایش داده می‌شود. اگر نقاط $(\sqrt{۲},۲\pi+\frac{\pi}{۴})$، $(-\sqrt{۲},-\frac{۳\pi}{۴})$ و $(\sqrt{۲},-\frac{۷\pi}{۴})$ را نیز ترسیم کنید، همگی جایگاه $(\sqrt{۲},\frac{\pi}{۴})$ را خواهند داشت.

یک نقطه و پنج حالت متفاوت نمایش، ویژگی جالب فرم قطبی یک نقطه است. شما می‌توانید باز هم برای $(\sqrt{۲},\frac{\pi}{۴})$ فرم قطبی با r,θ های دیگری ارائه دهید. به طور کلی، برای نقطه‌ی $p(r,\theta)$ نمایش‌های کلی $p(r,۲k\pi+\theta)$، $p(r,-۲k\pi-\theta)$، $p(-r,-(۲k+۱)\pi+\theta)$ و $p(-r,(۲k+۱)\pi+\theta)$ وجود دارد.

مثال ۴. نمودار قطبی $r^۲\cos ۲\theta = ۱$ را رسم کنید.

حل: چون طرف اول عبارت مثبت است، باید $\cos ۲\theta \geq ۰$. بنابراین $۲\theta \in \left[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}\right]$ و لذا $\theta \in \left[-\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۴}\right]$. هم‌چنین $r^۲ = \frac{۱}{\cos ۲\theta}$ و این کسر برای تعریف شدن باید مخرجی مخالف صفر داشته باشد. در یک دوره‌ی تناوب، ریشه‌های مخرج $\theta = \frac{\pi}{۴},\frac{۳\pi}{۴},\frac{۵\pi}{۴},\frac{۷\pi}{۴}$ هستند. از توضیحات بالا نتیجه می‌شود که $\theta \in (-\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۴})$.

تقارن نسبت به محور طول‌ها :

$(r,\theta)\to(r,-\theta)$

$$r^2=\frac{1}{\cos 2(-\theta)}=\frac{1}{\cos 2\theta}$$ معادله تغییر نکرده است

نمودار نسبت به محور طول‌ها متقارن است، بنابراین $\theta\in[0,\pi]$.

تقارن نسبت به محور عرض‌ها :

$(r,\theta)\to(-r,-\theta)$

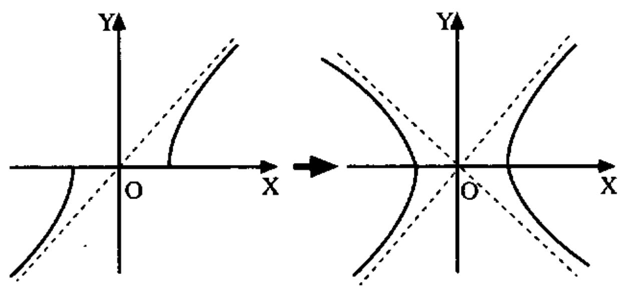
$$(-r^2)=\frac{1}{\cos 2(-\theta)}\Rightarrow r^2=\frac{1}{\cos 2\theta}$$ معادله تغییر نکرده است

نمودار نسبت به محور عرض‌ها متقارن است و این موجب می‌شود که $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

با اشتراک گرفتن بین شرایط موجود، برای θ خواهیم داشت $\theta\in[0,\frac{\pi}{4})$. از طرف دیگر، به راحتی می‌توان نشان داد

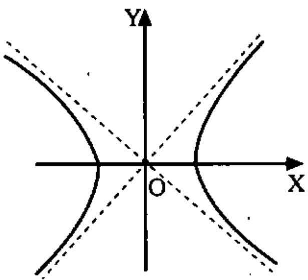
$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}^-}\frac{1}{\cos 2\theta}=+\infty\ .$$

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
r	±1	±1.1	$+\infty$



● آیا همیشه استفاده از مختصات قطبی ترسیم را آسان می‌کند؟

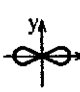
باید دقت کرد، هر چند استفاده از مختصات قطبی یک نمودار برای ترسیم روابط ضمنی مزایای زیادی دارد، اما در برخی موارد استفاده از فرم دکارتی برای ترسیم، مراحل کار را کمتر و ترسیم را راحت‌تر خواهد کرد. برای نمونه، می‌توان به مثال بالا اشاره کرد. با تبدیل فرم قطبی نمودار بالا به فرم دکارتی درمی‌یابیم که فرم قطبی بالا هذلولی $x^2-y^2=1$ با دو مجانب $y=\pm x$ است که ترسیم آن با استفاده از مباحث هندسه‌ی تحلیلی بسیار آسان‌تر است.



باید دقت کرد، هر چند استفاده از مختصات قطبی یک نمودار برای ترسیم روابط ضمنی مزایای زیادی دارد، اما در برخی موارد استفاده از فرم دکارتی برای ترسیم، مراحل کار را کمتر و ترسیم را راحت‌تر خواهد کرد

تمرین

۱ . نمودار $\sqrt{(x^2+y^2)^3}-6xy=0$ را رسم کنید (راهنمایی : ).

۲ . نمودار رابطه‌ی ضمنی $x^2+y^2=\frac{4x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ را رسم کنید (راهنمایی : ).

پی‌نوشت...

۱ . $\pi-\frac{\pi}{4}$ نیز می‌تواند جواب θ باشد، اما از آن‌جا که زوج مرتب ما در ربع چهارم دایره‌ی مثلثاتی قرار دارد، جواب درست $2\pi-\frac{\pi}{4}$ است.

منابع...

۱ . لویی لیت هولد. حساب دیفرانسیل و انتگرال با هندسه‌ی تحلیلی. ترجمه علی‌اکبر عالم‌زاده.

۲ . جرج توماس و راس ال فینی. حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه‌ی تحلیلی. ترجمه‌ی علی‌اکبر عالم‌زاده و داریوش بهمردی.

احمد قندهاری

بخش‌پذیری

اشاره

در این مقاله به تعریف بخش‌پذیری چند جمله‌ای P(x) بر (x-a) خواهیم پرداخت، سپس مسائل و آزمون‌های متفاوتی را در این زمینه طرح و حل می‌کنیم.

۱. عبارت P(x) را بر (x-a) وقتی بخش‌پذیر گویند که باقی‌مانده‌ی تقسیم P(x) بر (x-a) صفر باشد. اگر خارج قسمت تقسیم Q(x) باشد، می‌توان نوشت $P(x)=(x-a)Q(x)$

مثلاً عبارت $P(x)=x^3-5x^2+5x-1$ بر $(x-1)$ بخش‌پذیر است. زیرا می‌توان نوشت:

$$x^3-5x^2+5x-1=(x-1)(x^2-4x+1)$$

$$P(x)=(x-1).Q(x)$$

۲. اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم عبارت P(x) بر (x-a)، R و خارج قسمت آن Q(x) باشد، می‌توان نوشت

$$P(x)=(x-a).Q(x)+R$$

اگر در این رابطه به‌جای x، عدد a را قرار دهیم، خواهیم داشت: $P(a)=R$.

نتیجه: اگر عبارت P(x) بر (x-a) بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه $P(a)=0$.

مثال: نشان دهید عبارت $P(x)=x^7-4x^2+3$ بر $(x-1)$ بخش‌پذیر است.

$$P(1)=1-4+3=0 \Rightarrow P(1)=0$$

در نتیجه P(x) بر (x-1) بخش‌پذیر است.

مسئله‌ی ۱. اگر عبارت $P(x)=x^3+4x^2-5x+m$ بر $(x+1)$ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه باقی‌مانده‌ی تقسیم P(x) بر $(x-2)$ را بیابید.

حل: چون P(x) بر $(x+1)$ بخش‌پذیر است، پس باید $P(-1)=0$.

$$P(-1)=-1+4+5+m=0 \Rightarrow m=-8$$

حال، باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)=x^3+4x^2-5x-8$ بر $(x-2)$ را تعیین می‌کنیم.

$$R=P(2)=8+16-10-8 \Rightarrow R=6$$

۳. اگر عبارت P(x) بر (x-a) و (x-b) و (x-c) و... بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه باید $P(a)=0$ ، $P(b)=0$ ، $P(c)=0$ و...

مسئله‌ی ۲. m و n را چنان بیابید تا عبارت $P(x)=mx^3+nx^2-4x+12$ بر $(4-x^2)$ بخش‌پذیر باشد.

حل: روش اول:

$$x^2-4=(x-2)(x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P(2)=0 \\ P(-2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8m+4n-8+12=0 \\ -8m+4n+8+12=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8m+4n=-4 \\ -8m+4n=-20 \end{cases} \Rightarrow$$

$$8n=-24 \Rightarrow n=-3 \quad , \quad 8m+4n=-4$$

$$\Rightarrow 8m-12=-4 \Rightarrow 8m=8 \Rightarrow m=1$$

روش دوم: $x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4$ ، در عبارت P(x) به جای هر (x^2) ، عدد ۴ را قرار می‌دهیم. سپس باقی‌مانده را

متحد با صفر قرار می‌دهیم.

$$P(x) = mx(x^2) + n(x^2) - 4x + 12$$

$$R = mx(4) + n(4) - 4x + 12$$

$$R = (4m - 4)x + (4n + 12) \equiv 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4m - 4 = 0 \\ 4n + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = -3 \end{cases}$$

تذکر مهم: در بعضی از مسائل، روش اول مقدور نیست. باید از روش دوم استفاده کرد.

مسئله‌ی۳. a و b را چنان بیابید تا عبارت $P(x) = x^9 + ax^4 + bx^3 - 8$ بر $(x^2 + 1)$ بخش‌پذیر باشد.

حل:

$P(x) = x(x^2)^4 + a(x^2)^2 + bx(x^2) - 8$ و $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$

$$R = x(-1)^4 + a(-1)^2 + bx(-1) - 8 = x + a - bx - 8$$

$$R = (1 - b)x + (a - 8) \equiv 0 \Rightarrow \begin{cases} 1 - b = 0 \Rightarrow b = 1 \\ a - 8 = 0 \Rightarrow a = 8 \end{cases}$$

توجه: ممکن است برای بعضی‌ها این سؤال پیش آید که آیا x^2 می‌تواند مساوی (-1) باشد؟ در جواب باید گفت، در ریاضی معادله‌ی $x^2 = -1$ دو ریشه‌ی متمایز دارد که در حوزه‌ی اعداد حقیقی نیست. پس تساوی $x^2 = -1$ اشکالی ندارد.

مسئله‌ی۴. اگر عبارت $P(x) = x^4 + mx^3 + nx^2 + (k - 5)$ بر $x(x - 1)(x + 1)$ بخش‌پذیر باشد، m و n و k را بیابید.

حل: روش اول:

$$x(x - 1)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 1,\ x = -1$$

$$\begin{cases} P(0) = 0 \\ P(1) = 0 \\ P(-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 + 0 + 0 + k - 5 = 0 \\ 1 + m + n + k - 5 = 0 \\ 1 - m + n + k - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow k = 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m + n = -1 \\ -m + n = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} n = -1 \\ m = 0 \end{matrix}$$

روش دوم:

$$x(x - 1)(x + 1) = x(x^2 - 1) = x^3 - x = 0 \Rightarrow x^3 = x$$

در عبارت $P(x)$ به جای هر x^3، x قرار می‌دهیم. سپس باقی‌مانده را متحد با صفر قرار می‌دهیم.

$$P(x) = x(x^3) + m(x^3) + nx^2 + k - 5$$

$$R = x(x) + m(x) + nx^2 + k - 5 = x^2 + mx + nx^2 + k - 5$$

$$R = (n + 1)x^2 + (m)x + (k - 5) \equiv 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n + 1 = 0 \\ m = 0 \\ k - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = -1 \\ m = 0 \\ k = 5 \end{cases}$$

مسئله‌ی۵. اگر عبارت $P(x) = x^{35} + 4x^{16} + ax^2 + bx + c$ بر $(x^3 + 1)$ بخش‌پذیر باشد، a، b و c را بیابید.

حل: در عبارت $P(x)$، به جای هر x^3، (-1) را قرار

می‌دهیم:

$$x^{۳}+۱=۰ \Rightarrow x^{۳}=-۱$$

$$P(x)=x^{۲}(x^{۳})^{۱۱}+۴x(x^{۳})^{۵}+ax^{۲}+bx+c$$

$$R=x^{۲}(-۱)^{۱۱}+۴x(-۱)^{۵}+ax^{۲}+bx+c$$

$$=-x^{۲}-۴x+ax^{۲}+bx+c$$

$$R=(a-۱)x^{۲}+(b-۴)x+c\equiv ۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a-۱=۰ & a=۱\\ b-۴=۰\Rightarrow & b=۴\\ c=۰ & c=۰\end{cases}$$

مسئله‌ی ۶. چند جمله‌ای درجه سومی بنویسید که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر $(x-۱)$ و $(x-۲)$ و $(x-۳)$ عدد ۴۸ باشد و این چندجمله‌ای بر $(x+۱)$ بخش‌پذیر باشد.

حل: چندجمله‌ای درجه سوم را به صورت $P(x)=m(x-۱)(x-۲)(x-۳)+۴۸$ می‌نویسیم.

$x+۱=۰\Rightarrow x=-۱$ باید $P(-۱)=۰$

$$p(-۱)=m(-۲)(-۳)(-۴)+۴۸=۰$$
$$\Rightarrow -۲۴m+۴۸=۰\Rightarrow m=۲$$
$$\Rightarrow p(x)=۲(x-۱)(x-۲)(x-۳)+۴۸$$

۴. اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد A بر عدد t مساوی $R_۱$ و باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد B بر عدد t مساوی $R_۲$ باشد، آن‌گاه:

الف) باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد (A+B) بر عدد t برابر است با باقی‌مانده‌ی تقسیم $(R_۱+R_۲)$ بر (t).

ب) باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $(A\times B)$ بر عدد t برابر است با باقی‌مانده‌ی تقسیم $(R_۱.R_۲)$ بر (t).

مسئله‌ی ۷. اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد A بر ۸ مساوی ۷ و باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد B بر ۸ مساوی ۶ باشد، آن‌گاه باقی‌مانده‌ی تقسیم (A.B) بر ۸ را بیابید.

حل: این مسئله را بدون در نظر گرفتن قسمت «ب» از شماره‌ی ۴ درس حل می‌کنیم.

$$\begin{cases}A=۸m+۷\\ B=۸k+۶\end{cases}\Rightarrow A\times B=(۸m+۷)(۸k+۶)$$

$$=۸(۸km+۶m+۷k)+۴۲$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، باقی‌مانده‌ی تقسیم (A.B) بر عدد ۸، باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد ۴۲ بر (۸) است که مساوی با ۲ است. پس: $R=۲$.

آزمون

آزمون ۱. اگر $f(۲)=f(-۲)=۸$، آن‌گاه کدام یک از عبارت‌های زیر بر $(۴-x^{۲})$ بخش‌پذیر است؟

۱) $f(x)$ ۲) $f(x)+۸$ ۳) $f(x)-۸$ ۴) $f(x)-۴$

حل: گزینه‌ی ۳. گزینه‌ای درست است که به ازای $x=۲$ و $x=-۲$ حاصل آن صفر شود.

آزمون ۲. اگر P(x) بر $(x-۲\sqrt{۲})$ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x^{۴}-۲x^{۲}+۲x)$ بر $(x-\sqrt{۲})$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۲-

حل: گزینه‌ی ۱.

$x=\sqrt{۲}$ و $P((\sqrt{۲})^{۴}-۲(۲)+۲\sqrt{۲})=P(۴-۴+۲\sqrt{۲})=P(۲\sqrt{۲})=۰$.

آزمون ۳. اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم $ax^{۵}+bx^{۴}+cx+۷$ بر $(x-۱)$، ۷ باشد، آن‌گاه باقی‌مانده‌ی تقسیم $ax^{۲}+bx+c$ بر $(x-\frac{c}{a})$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۲- ۴) ۰

حل: گزینه‌ی ۴.

$P(x)=ax^{۵}+bx^{۴}+cx+۷$ و $P(۱)=۷\Rightarrow a+b+c+۷=۷\Rightarrow a+b+c=۰$

$$ax^{۲}+bx+c=۰\xrightarrow{a+b+c=۰}\begin{cases}x'=۱\\ x''=\frac{c}{a}\end{cases}$$

پس عبارت $ax^{۲}+bx+c$ بر $(x-\frac{c}{a})$ بخش‌پذیر است.

آزمون ۴. اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $(x-۱)$ ، ۷ و بر $(x-۲)$ ، ۵ باشد، آن‌گاه باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $x^۲-۳x+۲$ کدام است؟

۱) $-۲x+۹$ ۲) $۲x-۹$ ۳) $-۲x-۹$ ۴) $۲x+۹$

حل: گزینه‌ی ۱ .

$(x-۱)(x-۲)=x^۲-۳x+۲\,;\quad a=۱$ و $R_۱=۷\,;\ b=۲$ و $R_۲=۵$

$mx+n$ باقی‌مانده باشد $\Rightarrow \begin{cases} m(a)+n=R_۱ \\ m(b)+n=R_۲ \end{cases}$

$$\Rightarrow {}^{-۱\times}\begin{cases} m+n=۷ \\ ۲m+n=۵ \end{cases} \Rightarrow m=-۲\ ,\ n=۹$$

$$\Rightarrow mx+n=-۲x+۹$$

آزمون ۵. اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)=x^۳-۶x^۲+۱۲x-۲$ بر $(x-a)$ ، ۷۰ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $(x-\frac{a}{۲})$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۳   ۳) ۵   ۴) ۷

حل: گزینه‌ی ۴ .

$$p(a)=۷۰ \Rightarrow a^۳-۶a^۲+۱۲a-۲=۷۰$$
$$\Rightarrow a^۳-۶a^۲+۱۲a-۸=۶۴$$
$$\Rightarrow (a-۲)^۳=۶۴ \Rightarrow a-۲=۴ \Rightarrow a=۶$$
$$\Rightarrow x-\frac{a}{۲}=x-۳ \Rightarrow P(۳)=۲۷-۵۴+۳۶-۲=۷$$

آزمون ۶. اگر $۲f(x)+f(-x)=x^۳-۳x$ ، آن‌گاه باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $(x-۳)$ کدام است؟

۱) ۱۸   ۲) -۱۸ ۳) -۵ ۴) -۶

حل: گزینه‌ی ۲ .

$$x \xrightarrow[\text{تبدیل}]{} -x \Rightarrow {}_{-۲\times}\begin{cases} ۲f(-x)+f(x)=-x^۳+۳x \\ ۲f(x)+f(-x)=x^۳-۳x \end{cases}$$

$$\Rightarrow -۳f(x)=-۳x^۳+۹x \Rightarrow f(x)=x^۳-۳x\ ,$$
$$f(۳)=۲۷-۹=۱۸$$

آزمون ۷. اگر $f(\frac{۱}{x-۱})=\frac{۴x-۳}{x-۱}$ ، آن‌گاه باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $(x-\sqrt{۲})$ کدام است؟

۱) $(۲+\sqrt{۲})$ ۲) $(۳+\sqrt{۲})$ ۳) $(۴+\sqrt{۲})$ ۴) $(۵+\sqrt{۲})$

حل: گزینه‌ی ۳ .

$$f(\frac{۱}{x-۱})=\frac{۴(x-۱)+۱}{x-۱}=۴+\frac{۱}{x-۱}\ ،\ \frac{۱}{x-۱} \xrightarrow[\text{تبدیل}]{} x$$

$$f(x)=۴+x \Rightarrow f(\sqrt{۲})=۴+\sqrt{۲}$$

آزمون ۸. باقی‌مانده‌ی تقسیم $x^۷$ بر $(x^۲-x+۱)$ کدام است؟

۱) x ۲) $۲x$ ۳) $-۲x$ ۴) $۳x$

حل: گزینه‌ی ۱ .

$$P(x) = x^{7} = x(x^{6}) = x(x^{6} - 1 + 1) = x(x^{6} - 1) + x = x(x^{3} - 1)(x^{3} + 1) + x$$

$$P(x) = x\underbrace{(x^{3} - 1)(x + 1)(x^{2} - x + 1)}_{\text{بر } (x^2-x+1) \text{ بخش‌پذیر است}} + x \Rightarrow R = x$$

آزمون ۹. باقی‌مانده‌ی تقسیم $x^{111} + x^{21} - 2$ بر $(x^{2} - x)$ کدام است؟

۱) 0 ۲) -2 ۳) $2x - 2$ ۴) $2x + 2$

حل: گزینه‌ی ۳ .

$$x^{2} - x = 0 \Rightarrow x^{2} = x \ , \ P(x) = x^{111} + x^{21} - 2$$

در عبارت $P(x)$ به جای هر x^{2} ، x قرار دهیم، به‌این ترتیب، هر x^{n} ، $n \in N$ و $n > 1$ در نهایت به x تبدیل می‌شود. درباره‌ی x^{9} این عمل را انجام می‌دهیم.

$$x^{9} = x(x^{2})^{4} \to x(x)^{4} = x(x^{2})^{2} \to x(x)^{2} = x(x^{2})$$

$$\to x(x) = x^{2} \to x$$

پس درباره‌ی $P(x)$ ، $x^{111} \to x$ و $x^{21} \to x$ بنابراین: $R = 2x - 2$.

آزمون ۱۰. اگر $f(x + 4) = x^{2} - 4x$ ، آن‌گاه باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $(x - 1)$ کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۱

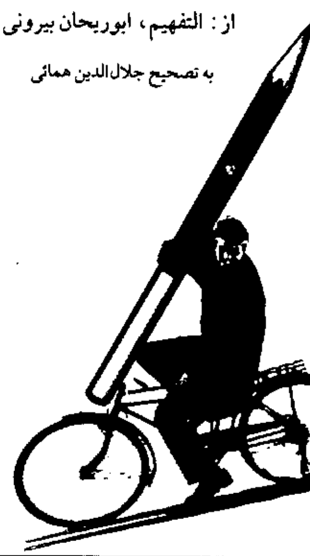
حل: گزینه‌ی ۴ ، باید $f(1)$ را پیدا کرد، بنابراین با فرض $x = -3$ ، مقدار $f(x + 4)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(-3 + 4) = 9 + 12 \Rightarrow f(1) = 21$$

تفریح اندیشه

از: التفهیم، ابوریحان بیرونی،

به تصحیح جلال‌الدین همائی

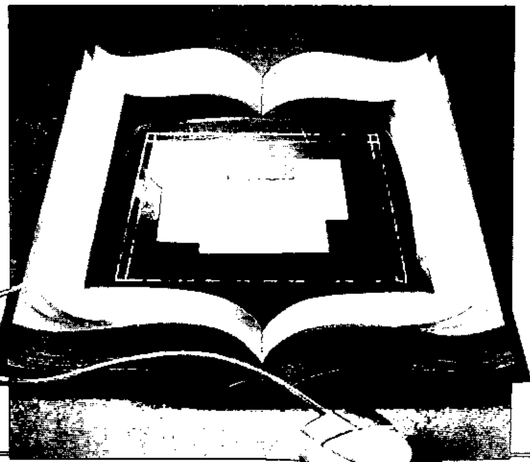


یکی چیست؟

آن است که یگانگی بر او افتد و بدو نام زده شود. و از تمامی وی آن است که کمی و بیشی نپذیرد و ز حال خویش به ضرب و قسمت نگردد و اندر قوت همه عددهاست و همه خاصیت‌های ایشان. و حال یکی اندر آن چیزها که شمرده شود بدو، هر چند یگانگی او نه به حقیقت باشد، و لکن از جهت نهادن مردمان یک دیگر [نیز همچنان است]. و این یکی ایستاده است میان آن عددها که از مانندهٔ‌ی او گرد آید به جمله شدن و میان آن پاره‌ها که از او کمترند. و این ایستادن او میان ایشان از بهر آن پاره‌ها که از او کمترند. و این ایستادن او میان ایشان از بهر آن است که او چون میانه‌ی معتدل راست است. اگر او را به مثل خویش زنی یا بر مثل خویش قسمت کنی هم یکی باشد. و دیگر عددها که از او بیشترند هر گه که یکی ایشان را ضرب کنی بیفزاید. و قسمت کنی بکاهند. و اما اجزاها که از او کمترند هر گاه که ضرب کنی بکاهند و که قسمت کنی بیفزایند. و یکی به میان ایشان بر حال خویش است.

● احسان یارمحمدی

معرفی سایت‌های ریاضی جهان



عنوان سایت: .... **algebrahelp.com**

نشانی سایت: .... http://www.algebrahelp.com

در صفحه‌ی اصلی این سایت، کاربر می‌تواند مسائل جبری را به نرم‌افزار **Algebra solved** ارائه دهد و پاسخ را به صورت گام به گام دریافت کند. سایت **algebrahelp.com** دارای چهار بخش با زیر عنوان‌های متنوع و مطالب جالب پیرامون موضوعات جبر به این شرح است:

۱. دروس (Lessons)

- مفهوم‌های جبر پایه (Basic Algebra Concepts)
- مختصرسازی (Simplifying)
- جانشینی و ارزیابی (Substitution and Evaluating)
- عامل‌یابی (Factoring)
- نماهای منفی (Negative Exponents)
- معادلات ـ پیشرفته (Equations - Advanced)
- شرح‌ها و مسائل ساده (Descriptions and Sample Problems)
- ضمیمه به همراه شرح‌ها (Index with Description)

۲. محاسبه‌گرها (Calculators)

- معادلات (Equations)
- عبارات (Exressions)
- توابع (Functions)
- اعداد (Numbers)
- کسرها (Fractions)
- دیگر (Other)

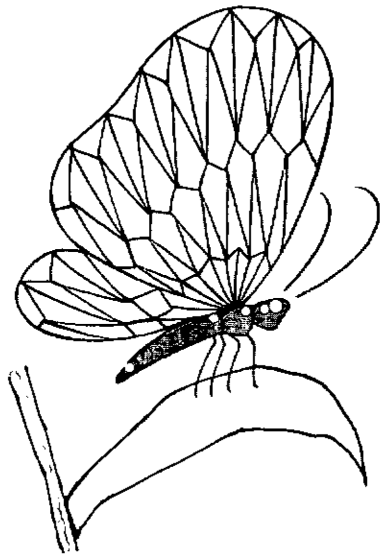
۳. کاربرگ‌ها (Worksheets)

- مبانی‌ها (Basics)
- مختصرسازی (Simplifying)
- ضرب (Multiplication)
- نماها (Exponents)
- مختصرسازی پیشرفته (Advanced Simplifying)
- نماهای منفی (Negative Exponents)
- معادلات پیشرفته (Advanced Equations)
- رسم (Graphing)
- ضمیمه به همراه شرح‌ها (Index with Descriptions)

هر چیز دیگر (Every Things Else)

- منابع ریاضی (Math Resources)
- آگاهی دهندگان (Advertisers)

○ گردآورنده: روزبه یوسف‌نژاد



تئوری پروانه

اشاره

در این مقاله‌ی کوتاه کوشیده‌ایم شما را با نظریه‌ای به نام «نظریه‌ی پروانه» آشنا کنیم. سال‌ها پیش مبحث جدیدی به نام «تئوری پروانه[۱]» بیان شد که در علم ریاضیات جایگاه ویژه‌ای داشت. در اثبات این قضیه‌ی مهم، از مباحث چهارضلعی محاطی و هم‌نهشتی‌های مثلث‌ها و تشابه استفاده شده است که برای فهم مطلب، دانستن آن‌ها لازم است.

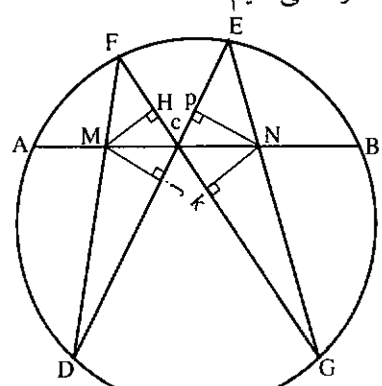
صورت قضیه

دایره‌ای فرضی به شعاعی خاص داریم و وتری از آن به نام AB را رسم می‌کنیم. وسط وتر را با نقطه‌ی C نشان می‌دهیم. حال دو وتر دل‌خواه ED و FG را رسم می‌کنیم، به‌طوری که محل برخورد آن‌ها در C باشد. دو سر نقاط D ، F ، G و E را به هم متصل می‌کنیم. حالا ما دو مثلث به نام‌های FDC و EGC داریم که دو ضلع FD و EG، وتر AB را به ترتیب در M و N قطع می‌کنند. حال طبق قضیه‌ی پروانه داریم:

قضیه‌ی پروانه ← NC=MC

اثبات قضیه‌ی پروانه

ابتدا برای اثبات، خطوط عمود MH، MJ، NP و NK را رسم می‌کنیم. بعد از آن، خطوط CB=CA را a، و خط MC را b و خط NC را d می‌نامیم.



مثلث‌های شکل متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها را می‌نویسیم:

	Propations (نسبت‌ها)	Triangles (مثلث‌ها)
(۱)	$\frac{CM}{CN}=\frac{MH}{NK}$	CMH و CNK
(۲)	$\frac{CM}{CN}=\frac{MJ}{NP}$	CMJ و CNP
(۳)	$\frac{MH}{NP}=\frac{FM}{EN}$	FMH و ENP
(۴)	$\frac{MJ}{NK}=\frac{MD}{NG}$	DMJ و GKN

$$(1)\times(2)\Rightarrow\frac{CM^2}{CN^2}=\frac{MH}{NK}\times\frac{MJ}{NP}=\frac{FM}{EN}\times\frac{MD}{NG}=\frac{FM.MD}{EN.NG}$$

$$=\text{قوت نقطه در دایره}=\frac{AM\times MB}{BN.NA}$$

$$\Rightarrow\frac{b^2}{a^2}=\frac{(a-b)(a+b)}{(a-d)(a+d)}=\frac{a^2-b^2}{a^2-d^2}$$

$$\Rightarrow b^2=d^2 \qquad b,d>0 \qquad \Rightarrow b=d \ \text{حکم اثبات شد}$$

● فرهاد جعفری یقین

دانش‌آموز پیش‌دانشگاهی شهرستان مهاباد

اتحادی دیگر

$$(1+2+3+...+n+n+1)^2-(1+2+3+...+n)^2=(n+1)^3$$

اثبات: با فرض این‌که $a=1+2+3+...+n$ ، $b=n+1$ و جایگزینی آن‌ها در سمت راست اتحاد بالا، خواهیم داشت:

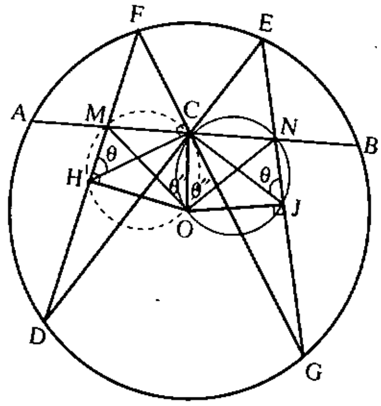
$$A=(a+b)^2-a^2=a^2+2ab+b^2-a^2=b^2+2ab$$
$$=(n+1)^2+2(1+2+3+...+n)\ (n+1)\qquad(1)$$

از طرف دیگر می‌دانیم: $1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

با جای‌گزینی رابطه‌ی اخیر در ۱ خواهیم داشت:

$$A=(n+1)^2+2\times\frac{n(n+1)}{2}\ (n+1)$$
$$=(n+1)^2+n(n+1)^2=(n+1)^2\ (n+1)=(n+1)^3$$

مسابقه: با توجه به این‌که روش‌های دیگری برای اثبات قضیه‌ی پروانه وجود دارند و با توجه به شکل زیر، این قضیه را اثبات کنید:



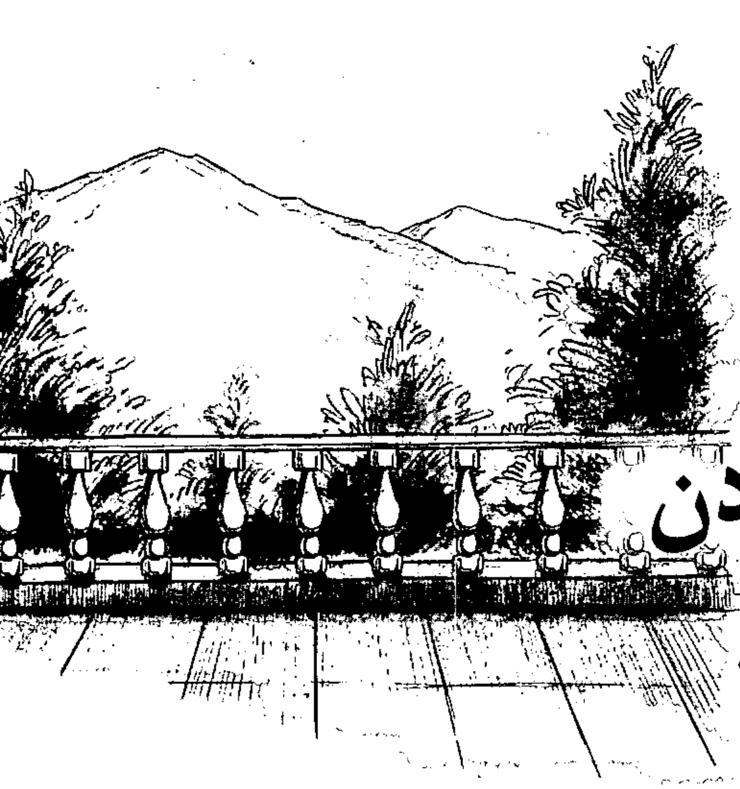
پی‌نوشت

1. Butterfly theorem

منابع

1. agutie. Home stead.com
2. www.Cut-the knot.org

○ غلامرضا یاسی‌پور



مسائل تناوبی بودن

اشاره

در شماره‌ی قبل درباره‌ی مسائل تناوبی بودن توضیحاتی داده شد و تعدادی مسأله بررسی و حل شد، در ادامه‌ی آن بقیه‌ی مسائل تناوبی بودن را بررسی می‌کنیم.

۶. جمیع $\alpha \in R$ ها را با این ویژگی بیابید که دنباله‌ی صادق در بازگشتی

$$x_{n+1} + x_{n-1} = \alpha x_n, n \in N$$

دوره‌ای باشد.

۷. فرض می‌کنیم $f: R \to R$ تابعی دوره‌ای و چنان باشد که مجموعه‌ی $\{f(n) | n \in N\}$ دارای بی‌نهایت عضو باشد. ثابت کنید دوره‌ی تناوب f گنگ است.

۸. فرض می‌کنیم b_n آخرین رقم عدد زیر باشد:

$$1^1 + 2^2 + 3^3 + ... + n^n$$

ثابت کنید دنباله‌ی $\{b_n\}_n$ متناوبی با دوره‌ی تناوب ۱۰۰ است.

۹. فرض می‌کنیم a ، b اعدادی صحیح و مثبت و a فرد باشد. دنباله‌ی $\{u_n\}_n$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: به ازای $n \in N$ ، $u_0 = b$

$$u_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2} u_n & \text{اگر } u_n \text{ زوج باشد} \\ u_n + a & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

الف) نشان دهید به ازای $n \in N$ ی، $u_n \leq a$.

ب) نشان دهید دنباله‌ی $\{u_n\}_n$، از یک مرحله به بعد، متناوب است.

۱۰. اعداد صحیح و مثبت a_1 ، a_2 ، a_3 و...، که هیچ‌یک متجاوز از ۱۹۸۸ نیستند، دنباله‌ای را تشکیل می‌دهد که در این شرط صدق می‌کند: اگر m و n اعدادی صحیح و مثبت باشند، در این صورت $a_m + a_n$ بر a_{m+n} بخش‌پذیر است. ثابت کنید این دنباله، از یک مرحله به بعد، تناوبی است.

۱۱. فرض می‌کنیم $f: R \to R$ تابعی یکنواخت است که در مورد آن $a, b, c, d \in R$ با $a \neq 0$ ، $c \neq 0$ چنان موجودند که به ازای جمیع مقادیر x برابری‌های زیر برقرارند:

$$\int_x^{x+\sqrt{3}} f(t)dt = ax + b \quad \text{و} \quad \int_x^{x+\sqrt{2}} f(t)dt = cx + d$$

ثابت کنید f تابعی خطی است، یعنی به ازای m و $n \in R$: $f(x) = mx + n$

۶. اگر $\alpha = 2$، آن‌گاه دنباله‌ی $x_n = n$ در رابطه‌ی بازگشتی مفروض صادق است و به‌طور واضح دوره‌ای نیست. بنابراین، فرض می‌کنیم $\alpha \neq 2$. در این حال، معادله‌ی $x^2 - \alpha x + 1 = 0$ دو جواب متمایز r، r^{-1} دارد و جمله‌ی عمومی دنباله را می‌توان در شکل نهایی، به‌صورت $x_n = Ar^n + Br^{-n}$ نوشت که در آن A و B توسط دو جمله‌ی اول دنباله مشخص شده‌اند.

اگر دنباله دوره‌ای باشد، آن‌گاه r باید دارای قدرمطلقی برابر یک باشد، زیرا در غیر این صورت، قدرمطلق جمله‌ی عمومی به بی‌نهایت میل می‌کند.

به این ترتیب: $x_n = Ar^n + Br^{-n}$

دنباله‌ی $\overline{x_n}$ نیز باید دوره‌ای باشد که با استفاده از جمع، مستلزم این است که $(A + \bar{B})r^n + (\bar{A} + B)r^{-n}$ دوره‌ای باشد. در نتیجه، دنباله‌ی $\mathrm{Re}((A + \bar{B})r^n)$ دوره‌ای است (در این‌جا $\mathrm{Re}\ z$ جزو حقیقی z را نمایش می‌دهد).

با نوشتن $r = \cos \pi t + i \sin \pi t$ نتیجه می‌گیریم که $\mathrm{Re}(A + \bar{B})\cos n\pi t$ دوره‌ای است که مستلزم این است که t گویا باشد. در واقع، اگر t گویا نباشد، آن‌گاه عددهای به‌صورت $2m\pi + n\pi t, m, n \in Z \quad , \quad n > 0$ در R چگال خواهند بود. بنابراین: $\cos n\pi t$، $n > 0$، در $[0,1]$ چگال است و نمی‌تواند دوره‌ای باشد. نتیجه می‌شود که α باید به‌صورت $2\cos \pi t$، با t ی گویا باشد.

(برنامه‌ی تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۹۹۶)

۷. فرض می‌کنیم T دوره‌ی تناوب f باشد. با استفاده از طریق تناقض، فرض می‌کنیم $T = p/q$، که در آن p و q اعدادی صحیح و مثبت و نسبت به هم اول‌اند. در این صورت، $qT = p$ نیز دوره‌ی تناوب f است. فرض می‌کنیم $n = kp + r$ که در آن k و r اعدادی صحیح‌اند و

$0 < r < p - 1$

در این صورت: $f(n) = f(kp + r) = f(r)$

بنابراین، به ازای جمیع اعداد صحیح و مثبت n،

$f(n) \in \{f(1), f(2), \ldots, f(p-1)\}$

در تناقض با این واقعیت که $\{f(n) | n \in N\}$ دارای بی‌نهایت عنصر است و به این ترتیب، اثبات کامل می‌شود.

Revista Matematică din Timisoara (Timisoara Mathematics Review), 1981; proposed by D. Andrica

۸. آخرین رقم عدد صحیح و مثبت n را $l(n)$ نمایش می‌دهیم. دنباله‌ی $\{l(n)\}_n$ دوره‌ای و با دوره‌ی تناوب ۱۰ است. نیز، به ازای ثابت $a \in N$، دنباله‌ی $\{l(a^n)\}_n$ دوره‌ای و دوره‌ی تناوب آن برابر ۱ است، اگر a به ۰، ۱، ۵، یا ۶ ختم شود، و برابر ۲ است، اگر α به ۴ یا ۲ ختم شود، و برابر ۴ است اگر به ۲، ۳، ۷، یا ۸ مختوم باشد.

از آن‌جا که کوچک‌ترین مضرب مشترک ۱۰ و ۴ برابر ۲۰ است، اگر فرض کنیم:

$m = (n+1)^{n+1} + (n+2)^{n+2} + \ldots + (n+20)^{n+20}$

در این صورت $l(m)$ به n وابسته نیست. بنابراین، آخرین رقم $20^{20} + \ldots + 3^3 + 2^2 + 1^1$ را محاسبه می‌کنیم. آخرین رقم این عدد، به علت دوره‌ای بودن دنباله‌های به‌صورت $\{l(a^n)\}_n$، آخرین رقم

$1 + 2^2 + 3^3 + 4^2 + 5 + 6 + 7^3 + 8^4 + 9^1$
$+ 1 + 2^4 + 3^1 + 4^2 + 5 + 6 + 7^1 + 8^2 + 9^1$

است. محاسبه‌ای آسان نشان می‌دهد که آخرین رقم مورد بحث ۴ است. در نتیجه، آخرین رقم مجموع به صورت

$(n+1)^{n+1} + (n+2)^{n+2} + \ldots + (n+100)^{n+100}$

برابر

$l(4 \times 5) = l(20) = 0$

است. در نتیجه، b_n دوره‌ای، با دوره‌ی تناوب ۱۰۰ است.

(آزمون انتخابی **IMO** رومانی، ۱۹۸۰)

۹. الف) فرض می‌کنیم $u_n > 0$. اگر u_n زوج باشد، آن‌گاه $u_{n+1} = u_n / 2 < u_n$

و اگر u_n فرد باشد، داریم $u_{n+2} = (u_n + a)/2 < u_n$

در نتیجه، به ازای هر جمله‌ی بزرگ‌تر از a، جمله‌ی تالی کوچک‌تری موجود است. این جملات، یک زیر دنباله‌ی نزولی را تشکیل می‌دهند که باید سرانجام مختوم شود و این وضع تنها اگر $u_n \leq a$ باشد، اتفاق می‌افتد.

ب) نشان می‌دهیم که بی‌نهایت جمله‌ی دنباله‌ی مورد بحث، کوچک‌تر از $2a$ هستند. فرض می‌کنیم چنین نباشد

و u_m بزرگ‌ترین جمله با این ویژگی باشد. اگر u_m زوج باشد، آن‌گاه

$$u_{m+1} = u_m / 2 < 2a$$

اگر u_m فرد باشد، آن‌گاه $u_{m+1} = u_m + a$ زوج است.

در نتیجه: $u_{m+2} = (u_m + a)/2 < 3a/2 < 2a$

که باز هم غیرممکن است.

این موضوع نشان می‌دهد که بی‌نهایت جمله‌ی کمتر از 2a موجودند. کاربرد اصل دیریکله یا لانه‌ی کبوتر، با بی‌نهایت کبوتر، نشان می‌دهد که جمله‌ی u_n ای تکرار می‌شود که به دنباله‌ی دوره‌ای می‌انجامد.

(المپیاد ریاضی فرانسه، ۱۹۹۶)

۱۰. از آن‌جا که دنباله کران‌دار است، بعضی جمله‌ها باید بی‌نهایت مرتبه تکرار شوند. فرض می‌کنیم k بزرگ‌ترین عددی باشد که بی‌نهایت مرتبه در دنباله رخ می‌دهد و N عددی طبیعی، چنان که به ازای $i \ge N$ ، $a_i \le k$ ، $m \ge N$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $a_m = k$. ثابت می‌کنیم m دوره‌ی تناوبی از دنباله است. یعنی، به ازای هر $i \ge N$ ، $a_{i+m} = a_i$.

ابتدا فرض می‌کنیم به ازای iای، $a_{i+m} = k$. از آن‌جا که $a_i + a_m$ بر $a_{i+m} = k$ بخش‌پذیر است، داریم:

$$a_i = k = a_{i+m}$$

در غیر این صورت، اگر $a_{i+m} < k$ ، $j \ge N$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $a_{i+j+m} = k$

$a_{i+j} + a_m < 2k$ حاصل می‌شود. از آن‌جا که $a_{i+m} + a_j$ بر $a_{i+j+m} = k$ بخش‌پذیر است، نتیجه می‌شود: $a_{i+m} + a_j = k$

و بنابراین $a_j < k$. از آن‌جا که $a_{i+j+m} = k$ ، استدلال فوق مستلزم

$$a_{i+j+m} = a_{i+j} = k$$

است. بنابراین، k ، $a_i + a_j$ را می‌شمارد. نتیجه می‌گیریم:

$$a_i + a_j = k$$

زیرا $a_i \le k$ و $a_j < k$. در نتیجه:

$$a_{i+m} = k - a_j = a_i$$

(المپیاد ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۸)

۱۱. تابع زیر را در نظر می‌گیریم

$$F = R \to R,\ F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

در این صورت F، به ازای هر $x \in R$ ، در $F(x+\sqrt{3}) - F(x) = ax + b$ و $F(x+\sqrt{2}) - F(x) = cx + d$ صدق می‌کند. می‌توان دو تابع چند جمله‌ای f_1 و f_2 ی درجه دو چنان یافت که به ازای هر $x \in R$ ، $f_1(x+\sqrt{3}) - f_1(x) = ax + b$ و ،

$$f_2(x+\sqrt{2}) - f_2(x) = cx + d$$

از این برابری‌ها می‌توان استخراج کرد که توابع $i = 1,2$ و $g_i = F - f_i$ دوره‌ای هستند و دوره‌های تناوب آن‌ها به ترتیب چنین است: $\sqrt{3}$ و $\sqrt{2}$

نتیجه می‌شود که به ازای هر x ،

$$f_1(x) - f_2(x) + g_1(x) - g_2(x) = 0$$

اما از آن‌جا که g_1 و g_2 پیوسته و دوره‌ای‌اند، کران‌دارند. در نتیجه، $f_1 - f_2$ باید ثابت باشند.

نتیجه می‌گیریم که به ازای $c \in \mathbb{R}$ ،

$$g_1(x) = g_2(x) + c$$

در نتیجه، g_1 علاوه بر دوره‌ی تناوب $\sqrt{3}$ ، دارای دوره‌ی تناوب $\sqrt{2}$ نیز هست. در این صورت، نتیجه می‌گیریم که جمیع اعداد به صورت $r\sqrt{3} + s\sqrt{2}$ ، با $r,s \in Z$ ، دوره‌های تناوب g_1 اند، و از آن‌جا که مجموعه‌ی اعداد به این صورت، در R چگال است، g_1 بر مجموعه‌ی چگالی ثابت است. g_1 ، با استفاده از پیوستگی، بر R ثابت است. همین استدلال نشان می‌دهد که g_2 ثابت است.

دریافتیم که به ازای هر $m,n,p \in R$ ی داریم:

$$F(x) = mx^2 + nx + p$$

نتایج استاندارد مربوط به انتگرال‌ها مستلزم این است که تابع F در هر نقطه از x که در آن f پیوسته است، مشتق‌پذیر باشد. در این نقاط: $F'(x) = 2mx + n = f(x)$

از آن‌جا که f یکنواخت است، مجموعه‌ی چنین نقطه‌هایی در R چگال است. بنابراین، بر تابع خطی‌ای واقع بر زیرمجموعه‌ی چگالی از R منطبق است. استدلال فشرده‌ای با استفاده از یکنوایی f نشان می‌دهد که f در هرجا بر این تابع خطی منطبق است و مسئله حل می‌شود.

(المپیاد ریاضی رومانی، ۱۹۹۹، طرح از M.Piticari)

● سیدمحمدرضا هاشمی موسوی
hashemi-moosavi@yahoo.com

۱۰

هم‌نهشتی و کاربردهای آن

(حل معادله‌های هم‌نهشتی و معادله‌های سیاله به کمک جدول H.M)

اشاره

در قسمت‌های قبل، به بسیاری از کاربردهای هم‌نهشتی اشاره شد. در این شماره قصد بر این است که روش حل معادله‌های هم‌نهشتی و معادله‌های سیاله را توسط جدول H.M نشان دهیم و کاربرد این جدول را در پیدا کردن وارون ضربی یک عدد در هم‌نهشتی ارائه دهیم. در انتهای این قسمت نیز تمرین‌هایی نظیر مسئله‌های حل شده در متن طرح شده است که می‌توانید با دیدن مثال‌ها، آن‌ها را حل کنید. کاربردهای هم‌نهشتی در جبر، آنالیز، نظریه‌ی اعداد و دیگر شاخه‌های ریاضیات بر هیچ کس پوشیده نیست و این موضوع مقالات فراوانی را طلب می‌کند. این مقاله به معرفی روش جدید جدول H.M اختصاص دارد.

حل معادله‌ی هم‌نهشتی[1] توسط جدول (H.M)[2]

قرارداد: در معادله‌ی هم‌نهشتی

$$ax \overset{n}{\equiv} c \tag{1}$$

عدد n را سنج یا پیمانه یا هنگ (mod)، x را مجهول، a را ضریب مجهول و c را عدد ثابت هم‌نهشتی می‌نامیم.

می‌دانیم، با فرض $(a,n)=1$ و با توجه به معکوس ضربی a یعنی a^{-1} (وارون ضربی a در هم‌نهشتی) داریم:

$$a^{-1}.a \overset{n}{\equiv} 1$$

معادله‌ی ۱ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$x \overset{n}{\equiv} a^{-1}.c$$

$$x = kn + a^{-1}.c \quad (k \in Z)$$

بنابراین، برای حل معادله‌ی ۱، کافی است معکوس a را محاسبه کنیم. می‌دانیم، معکوس a (وارون ضربی a) از معادله‌ی هم‌نهشتی زیر محاسبه می‌شود:

$$x_1 = a^{-1};\ ax_1 \overset{n}{\equiv} 1 \tag{2}$$

در معادله‌ی ۲، اگر $a > n$ و r_1 باقی‌مانده‌ی حاصل تقسیم a:n باشد، می‌توان نوشت:

$$r_1x_1 \overset{n}{\equiv} 1 \tag{3}$$

معادله‌ی هم‌نهشتی ۳ را می‌توان به صورت معادله‌ی سیاله‌ی زیر نوشت:

$$r_1x_1 - nx_2 = 1\ ;$$
$$nx_2 - r_1x_1 = -1\ ;$$

$$nx_2 \overset{r_1}{\equiv} -1 \tag{4}$$

با توجه به $n > r_1$ و با فرض این‌که r_2 باقی‌مانده‌ی حاصل تقسیم $n:r_1$ باشد، می‌توان نوشت:

$$r_2x_2 \overset{r_1}{\equiv} -1 \tag{5}$$

مطابق مرحله‌ی پیش، معادله‌ی هم‌نهشتی ۵ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$r_1x_3 \overset{r_2}{\equiv} 1 \tag{6}$$

به همین ترتیب، اگر این عمل را ادامه دهیم، ضریب مجهول، برابر یک خواهد شد و با بازگشت به مرحله‌های پیش، به روش بازگشتی می‌توان x را حساب کرد (توجه: تمام

عملیات را توسط یک جدول چهار سطری انجام می‌دهیم).

مثال ۱. معادله‌ی هم‌نهشتی زیر را حل کنید:

$$۱۹۹۹x \overset{۱۳۷۸}{\equiv} ۱۳۵۷$$

حل: با فرض $a=۱۹۹۹$ ، $n=۱۳۷۸$ ، $c=۱۳۵۷$ و با توجه به $(۱۹۹۹,۱۳۷۸)=۱$ ، جواب معادله چنین است:

$$x=۱۳۷۸k+۱۳۵۷a^{-۱}(k\in Z)$$

بنابراین، برای حل معادله کافی است معکوس (وارون ضربی) عدد ۱۹۹۹ را از معادله‌ی زیر حساب کنیم:

$$۱۹۹۹x_۱ \overset{۱۳۷۸}{\equiv} ۱ \ (x_۱=a^{-۱})$$

باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد ۱۹۹۹ بر ۱۳۷۸ برابر ۶۲۱ است. بنابراین، با توجه به هم‌نهشتی:

$$۱۹۹۹ \overset{۱۳۷۸}{\equiv} ۶۲۱$$

معادله‌ی مورد نظر را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$۶۲۱x_۱ \overset{۱۳۷۸}{\equiv} ۱ \qquad (۱)$$

معادله‌ی ۱ را با وارد کردن مجهول جدید $x_۲$ ، می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$۱۳۷۸x_۲ \overset{۶۲۱}{\equiv} -۱$$

باقی‌مانده‌ی تقسیم ۱۳۷۸ بر ۶۲۱ برابر ۱۳۶ است. بنابراین، با توجه به هم‌نهشتی:

$$۱۳۷۸ \overset{۶۲۱}{\equiv} ۱۳۶$$

معادله‌ی ۲ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$۱۳۶x_۲ \overset{۶۲۱}{\equiv} -۱ \qquad (۲)$$

به همین ترتیب می‌توان نوشت:

$$۶۲۱x_۳ \overset{۱۳۶}{\equiv} ۱ ;$$

$$(۶۲۱ \overset{۱۳۶}{\equiv} ۷۷) \quad ۷۷x_۳ \overset{۱۳۶}{\equiv} ۱ \qquad (۳)$$

$$۱۳۶x_۴ \overset{۷۷}{\equiv} -۱ ;$$

$$(۱۳۶ \overset{۷۷}{\equiv} ۵۹) \quad ۵۹x_۴ \overset{۷۷}{\equiv} -۱ \qquad (۴)$$

$$۷۷x_۵ \overset{۵۹}{\equiv} ۱ ;$$

$$(۷۷ \overset{۵۹}{\equiv} ۱۸) \quad ۱۸x_۵ \overset{۵۹}{\equiv} ۱ \qquad (۵)$$

$$۵۹x_۶ \overset{۱۸}{\equiv} -۱ ;$$

$$(۵۹ \overset{۱۸}{\equiv} ۵) \quad ۵۹x_۶ \overset{۱۸}{\equiv} -۱ \qquad (۶)$$

$$۱۸x_۷ \overset{۵}{\equiv} ۱ ;$$

$$(۱۸ \overset{۵}{\equiv} ۳) \quad ۳x_۷ \overset{۵}{\equiv} ۱ \qquad (۷)$$

$$۵x_۸ \overset{۳}{\equiv} -۱ ;$$

$$(۵ \overset{۳}{\equiv} ۲) \quad ۲x_۸ \overset{۳}{\equiv} -۱ \qquad (۸)$$

$$۳x_۹ \overset{۲}{\equiv} ۱ ;$$

$$(۳ \overset{۲}{\equiv} ۱) \quad x_۹ \overset{۲}{\equiv} ۱ \qquad (۹)$$

بنابراین: $x_۹=۱$

با برگشت به مرحله‌های پیش، مقدار x را به روش بازگشتی محاسبه می‌کنیم:

از معادله‌ی ۸ : $x_۸=\frac{۳x_۹-۱}{۲}=\frac{۳(۱)-۱}{۲}=۱$

از معادله‌ی ۷ : $x_۷=\frac{۵x_۸+۱}{۳}=\frac{۵(۱)+۱}{۳}=۲$

از معادله‌ی ۶ : $x_۶=\frac{۱۸x_۷-۱}{۵}=\frac{۱۸(۲)-۱}{۵}=۷$

از معادله‌ی ۵ : $x_۵=\frac{۵۹x_۶+۱}{۱۸}=\frac{۵۹(۷)+۱}{۱۸}=۲۳$

از معادله‌ی ۴ : $x_۴=\frac{۷۷x_۵-۱}{۵۹}=\frac{۷۷(۲۳)-۱}{۵۹}=۳۰$

از معادله‌ی ۳ : $x_۳=\frac{۱۳۶x_۴+۱}{۷۷}=\frac{۱۳۶(۳۰)+۱}{۷۷}=۵۳$

از معادله‌ی ۲ : $x_۲=\frac{۶۲۱x_۳-۱}{۱۳۶}=\frac{۶۲۱(۵۳)-۱}{۱۳۶}=۲۴۲$

از معادله‌ی ۱ : $x_۱=\frac{۱۳۷۸x_۲+۱}{۶۲۱}=\frac{۱۳۷۸(۲۴۲)+۱}{۶۲۱}=۵۳۷$

پس، با توجه به $x_۱=a^{-۱}=۵۳۷$ ، جواب‌های معادله چنین است:

$$k\in Z: \ x=۱۳۷۸k+۱۳۵۷(۵۳۷)=۱۳۷۸k+۷۲۸۴۰۹$$

با توجه به هم‌نهشتی $۷۲۸۴۰۹ \overset{۱۳۷۸}{\equiv} ۱۱۲۵$ ، جواب اصلی معادله $\boxed{x=۱۱۲۵}$ و جواب عمومی معادله به ازای مقادیر صحیح k چنین است: $x=۱۳۷۸k+۱۱۲۵$

اکنون تمام عملیات فوق را توسط جدول H.M انجام می‌دهیم.

جدول (H.M)، چهار سطر دارد که پس از چهار مرحله کامل می‌شوند:

$$۱۹۹۹x \overset{۱۳۷۸}{\equiv} ۱۳۵۷$$

$\times n_i$	۱۳۷۸	۶۲۱	۱۳۶	۷۷	۵۹	۱۸	۵	۳	۲	۱
$+c_i$	۱	−۱	۱	−۱	۱	−۱	۱	−۱	۱	
$\div a_i$	۶۲۱	۱۳۶	۷۷	۵۹	۱۸	۵	۳	۲	۱	
x_i	۵۳۷	۲۴۲	۵۳	۳۰	۲۳	۷	۲	۱	۱	

در این مثال، چون $a = ۱۹۹۹ > n = ۱۳۷۸$، پس باید باقی‌مانده‌ی تقسیم a:n را حساب کنیم و در دومین خانه‌ی سطر اول (از سمت چپ) کنار n (پیمانه) بنویسیم.

پیش از تشریح جدول، این نکته را یادآور می‌شویم که برای حل هر معادله‌ی هم‌نهشتی، ابتدا لازم است شرط $(a,n)=۱$ را بررسی کنیم. در معادله‌ی هم‌نهشتی $ax \overset{n}{\equiv} c$، اگر $(a,n)=d$، در این صورت معادله وقتی جواب دارد که c بر d بخش‌پذیر باشد $(d|c)$.

بنابراین، برای بررسی شرط $(a,n)=۱$، ابتدا همیشه تقسیم‌های متوالی را به صورت زیر انجام می‌دهیم و باقی‌مانده‌های حاصل را به ترتیب در سطر اول جدول می‌نویسیم. در صورتی که سطر اول جدول به عدد یک ختم شود، نشان‌دهنده‌ی این است که شرط $(a,n)=۱$ برقرار است. و در صورتی که به عدد صفر ختم شود و عدد پیش از صفر عددی بزرگ‌تر از یک باشد، آن عدد بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک a و n است.

مرحله‌ی ۱. تقسیم‌های متوالی را به صورت زیر انجام می‌دهیم و باقی‌مانده‌های حاصل را در سطر اول جدول درج می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} ۱۹۹۹ & ۱۳۷۸ \\ \hline ۱۳۷۸ & ۱ \\ \hline ۶۲۱ & \end{array} \quad \text{و} \quad \begin{array}{r|l} ۱۳۷۸ & ۶۲۱ \\ \hline ۱۲۴۲ & ۲ \\ \hline ۱۳۶ & \end{array} \quad \text{و}$$

$$\begin{array}{r|l} ۶۲۱ & ۱۳۶ \\ \hline ۵۴۴ & ۴ \\ \hline ۷۷ & \end{array} \quad \text{و}\ldots\text{و} \quad \begin{array}{r|l} ۳ & ۲ \\ \hline ۲ & ۱ \\ \hline ۱ & \end{array}$$

مرحله‌ی ۲. عدد ثابت هم‌نهشتی‌ها را که به‌طور متناوب ۱ و ۱- است، در سطر دوم جدول (سطر c_i) از سمت چپ به راست می‌نویسیم.

مرحله‌ی ۳. از اولین باقی‌مانده (۶۲۱) تا آخرین باقی‌مانده (۱) را بار دیگر در سطر سوم (سطر a_i) نظیر سطر اول (n_i) می‌نویسیم.

مرحله‌ی ۴. آخرین خانه‌ی سطر چهارم در سمت راست جدول (سطر x_i) را همیشه برابر عدد ثابت (۱+ یا ۱-) آن ستون، واقع در سطر دوم در نظر می‌گیریم. این توضیح لازم است که در سطر اول با شرط $(a,n)=۱$، عدد ۱ ظاهر می‌شود و در نتیجه عمل تقسیم به پایان می‌رسد.

برای تکمیل سطر چهارم (سطر x_i) از سمت راست به شکل M متوالی (مطابق شکل و در جهت پیکان‌ها) به این ترتیب عمل می‌کنیم (عمل مربوط به هر سطر، ابتدای هر سطر نوشته شده است):

$$\frac{(۱)۳-۱}{۲}=۱\ ,\ \frac{۱(۵)+۱}{۳}=۲\ ,\ \frac{۲(۱۸)-۱}{۵}=۷\ ,$$

$$\frac{۷(۵۹)+۱}{۱۸}=۲۳\ ,\ \ldots,*$$

آخرین عدد از سمت راست در سطر چهارم (۵۳۷) را در عدد ثابت هم‌نهشتی ضرب می‌کنیم:

$$*\frac{۲۴۲(۱۳۷۸)+۱}{۶۲۱}=۵۳۷,\ \ ۵۳۷(۱۳۵۷)=۷۲۸۷۰۹\overset{۱۳۷۸}{\equiv}۱۱۲۵$$

به بیان دیگر، باقی‌مانده‌ی حاصل از تقسیم عدد (۱۳۵۷) ۵۳۷ یا ۷۲۸۷۰۹ بر ۱۳۷۸، جواب معادله‌ی هم‌نهشتی است:

$x=۱۱۲۵$ (جواب اصلی معادله)

بدیهی است که جواب عمومی معادله به ازای مقادیر صحیح دل‌خواه k چنین است:

$x=۱۳۷۸k+۱۱۲۵$ (جواب عمومی معادله)

مثال ۲. معادله‌ی هم‌نهشتی زیر را حل کنید.

$$۲۶x\overset{۱۹}{\equiv}۱۷$$

حل: چون $a=۲۶>n=۱۹$، ابتدا باقی‌مانده‌ی حاصل از تقسیم ۲۶÷۱۹ را در سمت راست سنج ۱۹ می‌نویسیم. سپس تقسیم‌های متوالی را انجام می‌دهیم و باقی‌مانده‌های حاصل را در سطر اول جدول درج می‌کنیم:

$$(-۸)\times۱۷=-۱۳۶\overset{۱۹}{\equiv}۱۶$$

$\times n_i$	۱۹	۷	۵	۲	۱
$+c_i$	۱	۱-	۱	۱-	
$\div a_i$	۷	۵	۲	۱	
x_i	۸-	۳-	۲-	۱-	

با توجه به هم‌نهشتی بالا، جواب اصلی معادله چنین است:

$$\boxed{x=۱۶}$$

مثال ۳. وارون عدد ۱۹۹۹ به پیمانه‌ی ۱۹۸۰ را بیابید.

حل: بیان ریاضی مسئله، معادله‌ی هم‌نهشتی زیر است:

$$۱۹۹۹x\overset{۱۹۸۰}{\equiv}۱$$

چون $a=۱۹۹۹>n=۱۹۸۰$، باقی‌مانده‌ی تقسیم ۱۹۸۰÷۱۹۹۹ را در سمت راست پیمانه (۱۹۸۰) می‌نویسیم. سپس تقسیم‌های متوالی را انجام می‌دهیم.

توجه: چون همیشه جواب مثبت معادله موردنظر است، بنابراین کافی است عددسنج (۱۹۸۰) را به عدد (۵۲۱-) بیفزاییم تا جواب اصلی معادله به دست آید:

$\times n_i$	۱۹۸۰	۱۹	۴	۳	۱
$+c_i$	۱	۱-	۱	۱-	
$\div a_i$	۱۹	۴	۳	۱	
x_i	۵۲۱-	۵-	۱-	۱-	

(جواب) $x = ۱۹۸۰ - ۵۲۱ = ۱۴۵۹$.

پس معکوس ضربی عدد ۱۹۹۹ به پیمانه‌ی ۱۹۸۰، عدد ۱۴۵۹ است.

مثال ۴. آیا معادله‌ی هم‌نهشتی زیر دارای جواب است؟ در صورت وجود آن را بیابید.

$۱۳۱۳x \overset{۱۰۲۷}{\equiv} -۲۶$

حل: ابتدا حاصل (۱۳۱۳,۱۰۲۷) را به دست می‌آوریم:

$\times n_i$	۱۰۲۷	۲۸۶	۱۶۹	۱۱۷	۵۲	۱۳	۰
$+c_i$	۱	۱-	۱	۱-	۱	۱-	

با تقسیم‌های متوالی و ثبت باقی‌مانده‌های حاصل، بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد ۱۳۱۳ و ۱۰۲۷ به دست می‌آید. چون سطر اول جدول به صفر ختم شده است، عدد پیش از آن (۱۳)، بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد موردنظر است:

$(۱۳۱۳,۱۰۲۷) = ۱۳$

بنابراین، شرط وجود جواب برای معادله این است که عدد ثابت معادله (۲۶-) بر ۱۳ بخش‌پذیر باشد. چون $(-۲)۱۳ = -۲۶$، پس معادله دارای جواب است و برای تعیین آن، معادله را به عدد ۱۳ ساده می‌کنیم:

$۱۰۱x \overset{۷۹}{\equiv} -۲$

اکنون چون $(۱۰۱,۷۹) = ۱$، معادله را به کمک جدول H.M حل می‌کنیم: $(۱۰۱ \overset{۷۹}{\equiv} ۲۲)$

$\times n_i$	۷۹	۲۲	۱۳	۹	۴	۱
$+c_i$	۱	۱-	۱	۱-	۱	
$\div a_i$	۲۲	۱۳	۹	۴	۱	
x_i	۱۸	۵	۳	۲	۱	

با توجه به جدول، یک جواب اصلی معادله (از بی‌شمار جواب) چنین است:

$x = ۷۹ + ۱۸(-۲) = ۷۹ - ۳۶ = ۴۳;\ \boxed{x = ۴۳}$

مثال ۵. معادله‌ی هم‌نهشتی زیر را حل کنید:

$۴۴۱x \overset{۲۷۳}{\equiv} ۲۱$

حل: با تقسیم‌های متوالی و درج باقی‌مانده‌های حاصل، ابتدا (۴۴۱,۲۷۳) را تعیین می‌کنیم:

$\times n_i$	۲۷۳	۱۶۸	۱۰۵	۶۳	۴۲	۲۱	۰
$+c_i$	۱	۱-	۱	۱-	۱	۱-	

معادله را به ۲۱ ساده می‌کنیم:

$۲۱x \overset{۱۳}{\equiv} ۱$

در این‌جا، معادله را به کمک جدول H.M حل می‌کنیم.

$\times n_i$	۱۳	۸	۵	۳	۲	۱
$+c_i$	۱	۱-	۱	۱-	۱	
$\div a_i$	۸	۵	۳	۲	۱	
x_i	۵	۳	۲	۱	۱	

با توجه به جدول، یک $(۸ \overset{۱۳}{\equiv} ۲۱)$ جواب اصلی معادله (از بی‌شمار جواب) چنین است: $\boxed{x = ۵}$

مثال ۶. معادله‌ی هم‌نهشتی زیر را از نظر داشتن یا عدم جواب بررسی کنید.

$۲۶۸۰x \overset{۳۹۵۳}{\equiv} ۱۷۶$

حل: ابتدا با تقسیم‌های متوالی و درج باقی‌مانده‌ها، بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد ۳۹۵۳ و ۲۶۸۰ را به دست می‌آوریم.

$\times n_i$	۳۹۵۳	۲۶۸۰	۱۲۷۳	۱۳۴	۶۷	۰
$+c_i$	۱	۱-	۱	۱-	۱	

با توجه به جدول داریم: $۶۷ = (۲۶۸۰,۳۹۵۳)$.

چون عدد ثابت معادله (۱۷۶) بر ۶۷ بخش‌پذیر نیست، معادله جواب ندارد.

مثال ۷. معادله‌ی هم‌نهشتی زیر را حل کنید.

$۱۳۷۸x \overset{۷۷}{\equiv} ۷$

حل: با تشکیل جدول H.M معادله را حل می‌کنیم:

$(۱۳۷۸ \overset{۷۷}{\equiv} ۶۹)$

$\times n_i$	۷۷	۶۹	۸	۵	۳	۲	۱
$+c_i$	۱	۱-	۱	۱-	۱	۱-	
$\div a_i$	۶۹	۸	۵	۳	۲	۱	
x_i	۲۹-	۲۶-	۳-	۲-	۱-	۱-	

یکی از جواب‌های معادله از بی‌شمار جواب چنین است:

$x_1 = (-29)(7) = -203$

چون جواب مثبت معادله در نظر است، بنابراین، ضریب مثبتی از سنج را به این جواب می‌افزاییم:

$x = 3(77) - 203 = 231 - 203 = 28$; $\boxed{x = 28 \text{ (جواب اصلی)}}$

مثال ۸. معکوس (وارون ضربی) عدد ۳۴ به پیمانه‌ی ۴۱ را بیابید.

حل: این مسئله با هم‌نهشتی زیر معادل است:

$34x \overset{41}{\equiv} 1$

با تشکیل جدول H.M معادله را حل می‌کنیم: با توجه به جدول، جواب $x_1 = -6$ به دست می‌آید که برای یافتن جواب مثبت، کافی است عددسنج را به آن بیفزاییم:

$\times n_i$	41	34	7	6	1
$+c_i$	1	-1	1	-1	
$\div a_i$	34	7	6	1	
x_i	-6	-5	-1	-1	

$x = 41 - 6 = 35$; $\boxed{x = 35}$

بنابراین، معکوس عدد ۳۴ به پیمانه‌ی ۴۱، عدد ۳۵ است.

تمرین. معادله‌های هم‌نهشتی زیر را حل کنید.

1) $79x \overset{9}{\equiv} 1$

2) $1378x \overset{1357}{\equiv} -9$

3) $1999x \overset{2999}{\equiv} 2000$

حل معادله‌های سیاله خطی چند مجهولی به کمک جدول H.M

$ax + by + cz + \dots = d$

معادله‌ی سیاله‌ی دو مجهولی به صورت عمومی زیر را در نظر می‌گیریم:

$(a,b) = 1$; $ax + by = c$ (۱)

معادله‌ی ۱ را به صورت معادله‌ی هم‌نهشتی زیر می‌نویسیم:

$(x, y \in Z)$; $ax \overset{b}{\equiv} c$ (۲)

اینک معادله‌ی ۲ را از طریق جدول H.M حل و از آن‌جا مقدار x را تعیین می‌کنیم. سپس از رابطه‌ی $y = \frac{c - ax}{b}$، مقدار y را نیز به دست می‌آوریم.

مثال ۱. معادله‌ی سیال زیر را حل کنید.

$25x - 17y = 3$ (۱)

حل: ابتدا معادله را به صورت معادله‌ی هم‌نهشتی زیر می‌نویسیم:

$25x \overset{17}{\equiv} 3$ (۲)

حال در این‌جا، معادله‌ی هم‌نهشتی ۲ را توسط جدول H.M حل می‌کنیم:

$\times n_i$	17	8	1
$+c_i$	1	-1	
$\div a_i$	8	1	
x_i	-2	-1	

$x_1 = 3(-2) = -6$

$x = 17 - 6 = 11$

$x = 11$; $y = 16$

توجه: با در دست داشتن یک جواب اختصاصی معادله‌ی ۱، می‌توانیم جواب عمومی معادله را بنویسیم. زیرا اگر $\alpha, \beta \in Z$ یک جواب اختصاصی معادله باشد، در این صورت:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a\alpha + b\beta = c \end{cases};$$

با فرض $(a,b) = 1$، از تفاضل دو معادله‌ی دستگاه خواهیم داشت:

$$y = \beta - \frac{a}{b}(x - \alpha)$$

برای این‌که $y \in Z$، لازم است داشته باشیم:

$\frac{x - \alpha}{b} = t \in Z$; $x = \alpha + bt$

بنابراین، با فرض $t \in Z$، جواب‌های معادله‌ی ۱ از معادله‌های زیر به دست می‌آید:

$x = \alpha + bt$, $y = \beta - at$ (۳)

بنابر معادله‌های ۳، جواب عمومی معادله‌ی $25x - 17y = 3$، چنین است:

$x = 11 + (-17)t = 11 - 17t$, $y = 16 - 25t$ $(t \in Z)$

مثال ۲. معادله‌ی سیاله‌ی زیر را حل کنید:

$1340x - 3953y = 469$

حل: ابتدا معادله را به صورت معادله‌ی هم‌نهشتی زیر می‌نویسیم:

$1340x \overset{3953}{\equiv} 469$ (۱)

حال باید حاصل (۳۹۵۳ و ۱۳۴۰) را به دست آوریم :

$\times n_i$	۳۹۵۳	۱۳۴۰	۱۲۷۳	۶۷	۰
$+c_i$	۱	−۱	۱	−۱	

چون سطر اول به صفر ختم شده است، نتیجه می‌شود که عددهای ۱۳۴۰ و ۳۹۵۳ دارای عامل مشترک ۶۷ هستند :

$(۱۳۴۰,۳۹۵۳) = ۶۷$

از طرف دیگر، چون $۷ = ۶۷ \div ۴۶۹$ ، بنابراین معادله‌ی ۱ را می‌توان به ۶۷ ساده کرد :

$$۲۰x \overset{۵۹}{\equiv} ۷ \qquad (۲)$$

در این جا، برای حل معادله‌ی ۲ ، جدول H.M را تشکیل می‌دهیم :

$\times n_i$	۵۹	۲۰	۱۹	۱
$+c_i$	۱	−۱	۱	
$\div a_i$	۲۰	۱۹	۱	
x_i	۳	۱	۱	

با توجه به جدول می‌توان نوشت :

$x = ۳ \times ۷ = ۲۱$

با داشتن مقدار x، می‌توان مقدار y را محاسبه کرد :

$$y = \frac{۲۰x - ۷}{۵۹} = \frac{۲۰(۲۱) - ۷}{۵۹} = \frac{۴۱۳}{۵۹} = ۷$$

بنابراین، جواب عمومی معادله چنین است :

$x = ۲۱ - ۵۹t \ , \ y = ۷ - ۲۰t$

مثال: جواب‌های صحیح و مثبت معادله‌ی سیاله‌ی زیر را به دست آورید :

$$۷x + ۱۱y + ۲۶z = ۱۳۰ \qquad (۱)$$

حل: بزرگ‌ترین ضریب مجهول‌ها، ضریب z است.

بنابراین باید داشته باشیم :

$۷ + ۱۱ + ۲۶z \le ۱۳۰ \ ; \ z \le ۴$

پس می‌توان نوشت :

$$z_1 = ۱ : \ ۷x_1 + ۱۱y_1 = ۱۰۴ \ ; \ ۷x_1 \overset{۱۱}{\equiv} ۱۰۴ \qquad (۲)$$

با تشکیل جدول H.M، خواهیم داشت :

$x_1 = (-۳)(۱۰۴) = -۳۱۲$

$\times n_i$	۱۱	۷	۴	۳	۱
$+c_i$	۱	−۱	۱	−۱	
$\div a_i$	۷	۴	۳	۱	
x_i	−۳	−۲	−۱	−۱	

با توجه به هم‌نهشتی زیر :

$-۳۱۲ \overset{۱۱}{\equiv} ۷$

مقادیر x_1 و y_1 چنین است :

$x_1 = ۷$ و $y_1 = ۵$

به همین ترتیب :

$$z_2 = ۲ : \ ۷x_2 + ۱۱y_2 = ۷۸ \ ; \ ۷x_2 \overset{۱۱}{\equiv} ۷۸ \qquad (۳)$$

در این معادله‌ی هم‌نهشتی، ضریب مجهول x_2 برابر ۷ و پیمانه‌ی هم‌نهشتی برابر ۱۱ مطابق با هم‌نهشتی ۲ است. بنابراین، جواب معادله‌ی ۳ با توجه به جدول H.M اخیر چنین است :

$x_2 = (-۳)(۷۸) = -۲۳۴ \overset{۱۱}{\equiv} ۸ \ , \ y_2 = ۲$

معادله‌ی ۱ به ازای $z_3 = ۳$ و $z_4 = ۴$ ، جواب صحیح ندارد. پس معادله دارای دو دسته جواب اختصاصی (۷,۵,۱) و (۸,۲,۲) است که می‌توان با استفاده از این جواب‌های اختصاصی، جواب‌های عمومی معادله را نیز به دست آورد.

تمرین

۱ . با فرض $d = (۳۹۹,۵۸۹)$ ، عددهای صحیح r و s را چنان بیابید که معادله‌ی زیر برقرار باشد :

$۳۹۹r + ۵۸۹s = d$

۲ . معادله‌های سیاله‌ی زیر را حل کنید.

الف) $۷x + ۵y = ۱۹$

ب) $۱۰x + ۸۶y = ۵۰۰$

ج) $۴x + ۳y - ۵z = ۲$

پی‌نوشت

1. Congruence (سازگاری، موافقت و تطبیق یک شیئ با شیء دیگر)

۲ . این نام‌گذاری به دو منظور است: یکی مخفف (Hashemi Moosavi)، نام مبتکر آن و دیگر روش عمل جدول به صورت H.M .

آثار موجود ریاضی بوزجانی

● **کتاب مایحتاج الیه الکتاب و العمال من علم الحساب (کتاب المنازل السبع)**

این کتاب دارای هفت منزل و هر منزل آن دارای هفت باب است. ترجمه‌ی فارسی عنوان‌های منازل آن از این قرار است: منزل اول در نسبت، منزل دوم در ضرب و تقسیم، منزل سوم در مساحت، منزل چهارم در اعمال خراج، منزل پنجم در تصریف (صرّافی) و مقاسمات (تقسیم به نسبت)، منزل ششم در انواع گوناگون حساب که مورد احتیاج دوایر دولتی است، و منزل هفتم در معاملات تجّار.

بوزجانی این کتاب را به نام **عضدالدوله‌ی دیلمی** تألیف کرده است. چند نسخه‌ی خطی از این کتاب در لیدن، قاهره، رامپور و اسکوریال موجود است.

● **کتاب اعمال هندسی**

نسخه‌ی خطی ناقصی از ترجمه‌ی فارسی اعمال هندسی بوزجانی که مترجم آن معلوم نیست، متعلق به کتاب‌خانه‌ی مرکزی دانشگاه تهران (به شماره‌ی ۲۸۷۶) است که چنین شروع می‌شود: «الحمدلله الموفق علی السداد فی الاقوال و الرشاد فی الاعمال و الصلوة علی نبیه المفضال محمد و آله و خیر آل. این کتاب استاد ابوالوفا محمدبن محمد البوزجانی است و آن‌چه صناع و محترفه به آن محتاج باشند، از اعمال هندسه و این کتاب را کتاب نجارت[1] خوانند و آغازش مترجم از زبان تازی این است. امتثال نمودم فرمان **ملک منصور بهاء الدوله** اطال الله بقاءه در اثبات معانی به حضرت عالی او مذاکرت آن می‌رفت از اعمال هندسی که صناع استعمال بسیار کنند، مجرد گردانیده از علّت و برهان هر عملی تا اهل صناعت آن را به آسانی فهم توانند کرد و طریق استعمال هر بابی بر ایشان آسان باشد و این کتاب بر سیزده باب نهاده‌ام.»

● **رسالة فی ترکیب عدد الوفق فی المربعات**

این رساله مربوط به ترکیب مربعات وفقی است و یک نسخه‌ی خطی آن در ایاصوفیا (به شماره‌ی ۴۸۴۳/۳) موجود است.

● **جواب ابی الوفا محمدبن محمد البوزجانی عمّا سأله الفقیه ابوعلی الحسن بن حارث الحبوبی عن ایجاد مساحة المثلث بدلالة الاضلاع بدون معرفة الارتفاع**

ابوعلی حبوبی از بوزجانی خواسته بود که دستوری برای محاسبه‌ی مساحت مثلث بدون به کار بردن ارتفاع آن تعیین کند. بوزجانی این رساله‌ی مختصر را در جواب او نوشته است.

دستوری که بوزجانی برای محاسبه‌ی مساحت مثلث داده، این است:

$$\sqrt{\left[\left(\frac{c+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2\right]\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{c-b}{2}\right)^2\right]}$$

در این دستور a، b و c اندازه‌های اضلاع مثلث است. البته در رساله‌ی مذکور دستور بدون به‌کار بردن رمزها و اصطلاحات کنونی و فقط به وسیله‌ی عبارات عربی بیان شده است. مؤلف بعد از اثبات دستور فوق دو دستور دیگر نیز برای تعیین مساحت مثلث بر حسب اضلاع آن می‌دهد که البته با دستور فوق معادل هستند.

● **المدخل الی صناعة الارثماطیقی**

نسخه‌ی خطی این رساله در رامپور موجود است.

● **رسالة فی النسبة و التعریفات**

نسخه‌ی خطی این رساله در کتاب‌خانه‌ی مجلس (به شماره‌ی ۹۶۰۲) و نیز در جزو یک جُنگ در کتاب‌خانه‌ی شخصی آقای **حسن نراقی** در تهران موجود است.

● **رسالة فی جمع اضلاع المربعات و المکعبات**

این رساله را بوزجانی در پاسخ **ابوبشر (یا یحیی) بن سهل منجم تکریتی** نوشته است و نسخه‌ی آن در کتاب‌خانه‌ی آستان رضوی (به شماره‌ی ۵۵۲۱) موجود است.

● **کتاب المجسطی**

بوزجانی خود در مقدمه‌ی مجسطی آن را چنین تعریف کرده است:

«هرچند این موضوع را عده‌ای از دانشمندان متقدم، مانند **ابرخس و ابلونیوس و بطلمیوس** و غیره پیش از این مورد توجه قرار داده‌اند، در این کتاب ما روشی اتخاذ کرده‌ایم که هیچ یک از آنان نکرده‌اند. ما راه وصول به این معلومات را ساده‌تر و کوتاه‌تر کردیم و از روش‌های متداولی که برای متعلمان دشوار بود، مانند شکل قطاع و نسبت مؤلفه، اجتناب ورزیدیم و چنان کردیم که از نزدیک‌ترین و ساده‌ترین راه بتوان این معانی را، که پیش از این وصول به آن‌ها بسیار دشوار بود، به‌دست آورد. علاوه بر این، به روش‌هایی که قدما برای رسیدن به هر یک از این معلومات ایراد کرده بودند، اکتفا نکردیم، بلکه راه‌هایی تازه و برهان‌هایی جدید آوردیم. و هم‌چنین معانی دیگری که در علم هیئت مورد احتیاج شدید است و قدما آن‌ها را ذکر نکرده بودند، به آن‌ها افزودیم. و نیز استدلال‌های هندسی را از اعمال حسابی جدا ساختیم تا اگر مهندسان و محاسبانی باشند که هر یک به فن دیگری آشنایی نداشته باشد، بتوانند به تنهایی کتاب را مورد استفاده قرار دهند و کسی که در هر دو فن دست دارد، از هر دو بهره‌مند گردد.»

پی‌نوشت

۱. این کلمه را نویسندگان فهرست‌ها «تجارت» خوانده‌اند که به هیچ روی در این مقام مناسبت ندارد و معنی نمی‌دهد. به گمان من این کلمه بدون تردید «نجارت» است. نجارت (به کسر نون و فتح را) به معنی درودگری و نجاری است. به قول مرحوم دکتر معین (در تعلیقات چهار مقاله، ص ۲۵۷) در ادبیات عربی و فارسی گاه «مهندس» به نجار ماهر اطلاق شده و «نجّار» به مهندس عالی مقام. ابن العبری، «ابولونیوس» و «اقلیدس» را ـ که هر دو مهندس بودند ـ به لقب نجّار خوانده است و خاقانی به عکس پدر خود ـ علی نجار ـ را مهندس نامیده... ادوارد براون در ترجمه‌ی انگلیسی چهارمقاله، صفحه‌ی ۶۲، نجّار را در این موضع geometrician (هندسه‌دان ـ مهندس) ترجمه کرده است. به همین روش، کتاب اعمال هندسی بوزجانی «کتاب نجارت» خوانده شده است؛ یعنی «کتاب مهندسی».


مرا به جشن بزرگ ظهورت دعوت کن
ای خجسته ترین صبح انتظار!
یا اباصالح المهدی