رشد آموزش ریاضی ۵۸
سال پانزدهم / ۱۵۰ تومان
ISSN 1606-9188

گرچه از هر ماتمی خیزد غمی
فرق دارد ماتمی با ماتمی

زین سبب در مرگ مردان بزرگ
گفت باید حسرتا بر عالمی

استاد حسین غیور نامی آشنا برای ریاضی‌خوانده‌های قدیم و جدید ایران است. ایشان یکی از تواناترین و پرکارترین معلمان هندسه در ۵۰ سال اخیر بودند. همدان موطن وی، مصداق خوبی برای «همه‌دانی» ایشان در هندسهٔ مدرسه‌ای بود.

استاد غیور سال‌ها مسئولیت بخش هندسهٔ مجلهٔ «رشد آموزش ریاضی» را تقبّل کرده بودند و امید است که به‌زودی مجموعهٔ آثار ایشان در هندسه به‌صورت کتاب در اختیار علاقه‌مندان قرار گیرد. با این حال، ریاضی تنها یک وجه از توانایی‌های استاد بود. شاید برای بسیاری از شاگردان و علاقمندان ایشان، وجه دیگر توانایی‌های او ناشناخته مانده باشد. استاد غیور، شاعری زبردست و نکته‌سنج بودند. تا به‌حال سه دیوان شعر استاد چاپ شده است، امّا تواضع ایشان آنقدر زیاد بود که کمتر فرصت شناخت این وجه را به عموم داد.

استاد غیور در تاریخ ۷۹/۵/۲۶ به دیار باقی شتافت. هیأت تحریریه مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، فقدان این مرد بزرگ را به جامعهٔ علمی و هنری ایران تسلیت می‌گوید.

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد آموزش ریاضی

شمارهٔ مسلسل ۵۸ / سال تحصیلی ۸۰ - ۱۳۷۹ / تیراژ ۷۵۰۰

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی

دفتر انتشارات کمک آموزشی

نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۶۵۸۵ - ۱۵۸۷۵
تلفن امور مشترکین: ۸۸۳۹۱۸۶
تلفن دفتر مجله: ۹- ۸۸۳۱۱۶۱ (داخلی ۳۰۱)
چاپ: شرکت افست (سهامی عام)

■ مجله رشد آموزش ریاضی، نوشته‌ها و گزارش تحقیقات پژوهشگران و متخصصان تعلیم و تربیت، به ویژه معلمان مقاطع مختلف را در صورتی که در نشریات عمومی درج نشده و مرتبط با موضوع مجله باشد، می‌پذیرد. لازم است در مطالب ارسالی، موارد زیر رعایت شود:

■ مطالب یک خط در میان و در یک روی کاغذ نوشته و در صورت امکان تایپ شود.

■ شکل قرار گرفتن جدولها، نمودارها و تصاویر، پیوست و در حاشیهٔ مطلب نیز مشخص شود.

■ نثر مقاله روان و از نظر دستور زبان فارسی درست باشد و در انتخاب واژه‌های علمی و فنی دقت شود.

■ اصل مقاله‌های ترجمه شده به پیوست، ارسال شود.

■ در متنهای ارسالی تا حد امکان از معادلهای فارسی واژه‌ها و اصطلاحات استفاده شود.

■ زیرنویسها و منابع کامل و شامل نام اثر، نام نویسنده، نام مترجم، محل نشر، ناشر، سال انتشار و شمارهٔ صفحهٔ مورد استفاده باشد.

همچنین:

■ مجله در پذیرش، رد، ویرایش یا تلخیص مقاله‌های رسیده مجاز است.

■ مطالب مندرج در مجله، الزاماً مبیّن نظر دفتر انتشارات کمک آموزشی نیست و مسؤولیت پاسخگویی به پرسشهای خوانندگان، با خود نویسنده یا مترجم است.

■ مقاله‌های دریافتی در صورت پذیرش یا رد، بازگشت داده نمی‌شود.

فهرست:

یادداشت سردبیر

در شمارهٔ گذشته، به نقش ارزشیابی در یادگیری اشاره شد. اخیراً، مسئولان محترم وزارت آموزش و پرورش بروز تحولّ در زمینه های روش های ارزشیابی و تدریس را نوید می دهند و پیشنهادهائی را نیز عرضه کرده اند. با توجه به این که راجع به جزئیات این تحول هنوز بحث مبسوطی نشده است، آغاز سخن را به این موضوع اختصاص می دهیم:

تحولّ در روشها نیازمند تحولّ در بینش ها و نگرش ها و تحولّ در تعریفی است که از انسان تحصیل کرده و آرمانی داریم. با یک نگاه ایستا به انسان، نمی توان او را «خلاّق» و «نقّاد» تربیت کرد. یادگیری انسان بر اساس تعامل او با خودش، با محیطش و با انسانهای دیگر غنا پیدا می کند. روشهای تدریس و ارزشیابی باید زمینه ساز ایجاد چنین تعاملهائی باشد. دیدگاه تحولّی پیاژه نسبت به یادگیری، تأثیرات قابل توجّهی در روشهای تدریس داشته است. طبق نظر پیاژه، بر هم زدن تعادل موجود ذهنی در دانش آموز؛ ایجاد یک تضادّ مفهومی و خلق یک تعادل جدید، باعث تحولّ ذهنی یادگیرنده می شود. از طرف دیگر، ویگوتسکی تأکید عمده ای بر ایجاد تعامل بین فرد و محیطش دارد. «نظریهٔ تعامل اجتماعی» ویگوتسکی، زمینه ساز بروز تعامل بین افراد در محیط های یادگیری متفاوت است. این تعاملها از طریق فعالیت های گروهی امکان پذیر است و محصول این تعامل، گسترش «دامنهٔ تقریبی رشد و توسعهٔ انسان» است. چنین انسانی در یک حرکت دائمی رشد و توسعه می یابد. این توجه به توسعهٔ انسانی، در تمام آموزه های دینی و اجتماعی ما وجود دارد. مولایمان علی(ع) توصیه می کنند که هر روزتان بهتر از روز قبل باشد و سفارش اکید داشته اند که «فرزند زمان خویش» باشیم. برای تربیت چنین انسانی، نیازمند یک خانه تکانی اساسی در بینش ها، نگرش ها و روش های موجود نسبت به تربیت انسان هستیم. معلّم منفعل نمی تواند مجری روشهای فعال باشد، هم چنان که برای معلّم فعّال و خلاّق، امکان ندارد که استفاده کنندهٔ بی چون و چرای توصیه های آموزشی غیرمعلم ساخته باشد. در یک منظومه، تمام عناصر باید در حال حرکت باشند وگرنه سکون یک عنصر، به ایستائی سایر عناصر می انجامد.

در یک نظام آموزشی پویا، روشهای تدریس و ارزشیابی قابل تفکیک از یکدیگر نیستند و نباید باشند. ارزشیابی در خدمت تدریس است و هردو در خدمت یادگیری انسان. «خوبی» و «بدی» روش ها اعتباری هستند و بستگی به نتیجه ای دارد که از آنها حاصل می شود. اگر روش های تدریس و ارزشیابی در جهت تربیت انسان تحصیل کرده و آرمانی باشند «خوب» و در غیر این صورت «بد» هستند. انسان آرمانی اسلام انسانی متفکّر، خلاّق، نقّاد، متعهّد، مسئولیت پذیر، آزاده، خودباور، شجاع و با فضیلت است. تربیت انسانی با این ویژگی ها، مسئولیت خطیری است که بر دوش آموزش و پرورش سنگینی می کند. موضوعات درسی و روش های ارزشیابی باید در خدمت ساختن این انسان آرمانی و با این ویژگی های کیفی باشند. امّا چگونه این امر محقّق می شود؟

طرح تحولّی اخیر وزارت محترم آموزش و پرورش، «طرح پرسشهای فراگیر» است. مسئولان محترم هنوز تعریف روشنی از این طرح ارایه نداده اند. این طرح می تواند دو تعبیر تقریباً متضاد داشته باشد. تعبیر سنّتی و منفعلانهٔ این طرح این است که بدون ایجاد تعامل با دانش آموزان، و با استناد به شیوه های محرّک ـ پاسخی روان شناسی رفتاری، آنقدر از دانش آموز «بپرسیم» و یادگیری او را «تحریک» کنیم، تا او بالاخره «پاسخ»های درست را به ما بدهد و با استمرار «محرّک»ها، اجازهٔ «فراموش» شدن «پاسخ»ها را به دانش آموزان ندهیم.

البتّه به نظر می رسد که نظر مسئوولان و پیشنهاددهندگان محترم، این روش ایستا و منفعلانه نیست. زیرا این روش ها، در کلاسهای «کنکور»، «مدارس ویژه»، «امتحانهای متعدد» و «آزمونهای گوناگون» به اوج بلوغ خود رسیده اند! و جز اضمحلال انگیزه، علاقه و تفکر و خلاقیت دانش آموز، چندان نتیجه ای به بار نیاورده اند؛ اگرچه در کوتاه مدّت، دانش آموزان به نتایج مقطعی، کم اهمیّت و ناپایدار از نظر ارتقای یادگیری رسیده اند. با این حال، این روش اجازه و فرصت تعامل را به یادگیرنده نمی دهد. معلّم «پرسش» می کند و دانش آموز «منفعلانه» پاسخ می دهد و اگر خطا کرد، مجدداً همان مسیر قبلی «تکرار» می شود. این «تمرین»ها آنقدر ادامه می یابند تا نتیجهٔ از پیش تعیین شده توسط معلّم و برنامه، حاصل شود. روان شناسی رفتاری، یادگیری را «تغییر رفتار» می داند و به همین دلیل، برای تدریس و یادگیری؛ «هدف های رفتاری» یا «هدفهای جزئی» تعیین می کند و هدف ارزشیابی را سنجش میزان «تغییر» در «رفتار» موجود و در جهت رسیدن به «رفتار» پیش بینی شده می دانند. این نگرش محدود به یادگیری، در زمان خویش از اعتبار جهانی برخوردار بود زیرا با ابداع تکنیک ها و روش های ویژه توانست به حداقل هائی دست یابد. برای مثال، اسکینر رفتارشناس معروف آمریکائی، با ابداع روش های ویژه، توانست معضل بی سوادی سربازان آمریکائی بعد از جنگ جهانی دوم را تا حد زیادی برطرف کند. در واقع، مهد ظهور و بروز روشهای رفتاری، ارتش آمریکا و هدف آن، آموزش نظامیان آن کشور بود. در این نوع آموزش، هدف باسواد کردن سربازان به معنای محدود آن و آموزش «بی چون و چرا» بود و تربیت انسان آرمانی با ویژگی های گفته شده در بالا، اصولاً موردنظر نبود. «سرباز خوب» سربازی بود که منفعلانه و بدون تأمّل، مطیع اوامر فرمانده اش باشد. در نتیجه، اسکینر نشان داد که چگونه با تعیین دقیق رفتار موردنظر و از طریق آن روشهای ابداعی، می توان در کوتاه مدت به نتایج محدود رسید.

هنوز هم گاهی این شیوه، در موارد خاص و برای هدفهای مشخّص و به خصوص برای ایجاد مهارتها در زمینه های مختلف مورد استفاده قرار گرفته و مفید است. برای مثال، کارگری که در بخش خاصّی از تولید، مسئوولیت انجام یک کار یا بروز یک «رفتار» تعیین شده را دارد، سرعت و کارآئی و دقّتش در گرو انجام منظّم و منفعلانهٔ همان کار و بدون چون و چراست. در غیر این صورت، خط تولید از حرکت باز می ایستد یا حداقل کند می شود. امّا ...

آموزش و پرورش قرن بیست و یکم، رسالت تربیت انسان صاحب فکر و پر از «چون و چرا» را دارد؛ انسانی که توانائی بحث، نقد، خلق، تصمیم گیری، پردازش اطلاعات، انتخاب و مسئوولیت پذیری را داشته باشد. به همین دلیل، این روشهای سنتی توانائی تربیت چنین انسانی را ندارند.

در نتیجه، تعبیر دوم محتمل تر است و اگر چنین باشد، طلیعه ای است که آن را به فال نیک می گیریم. در این تعبیر، «پرسش فراگیر» به معنای ایجاد روحیهٔ پرسش گری و جستجوگری در دانش آموزان است. «پرسش» وجود انسان را «فراگرفته» است، در نتیجه با ایجاد فرصت های مناسب برای طرح مستمر آن پرسش ها در کلاس درس، دانش آموز و معلم؛ و دانش آموزان با یکدیگر، در حال تعامل دائم خواهند بود. این تعاملها به ارتقای کیفی یادگیری دانش آموزان کمک می کند زیرا یادگیرندگان را وادار به تفکّر، تدبّر، تمرکز و سپس پاسخگوئی می کند. در چنین تعاملی، دانش آموزان یاد می گیرند که پاسخ های مستدل به پرسشهای طرح شده بدهند و توانائی دفاع از استدلال خود را داشته باشند. هم چنین، یاد می گیرند که چگونه پذیرای پاسخ مستدل تر باشند. یادگیرندگان با تنوّع فکرها و اندیشه ها آشنا می شوند و یاد می گیرند که می توان پاسخ های متنوّعی برای سؤالهای یکسان داشت. کوتاه سخن، تدریس و ارزشیابی پویا و تعاملی، امکان افزایش مهارتهای زندگی را از طریق کلاس درس فراهم می کند. در چنین شرایطی، هر حرکت و سخن و نوشتهٔ دانش آموز فرصت مناسبی است برای معلم تا شناخت عمیق تر و وسیع تری نسبت به یادگیرنده و چگونگی یادگیری او پیدا کند و این شناختها، باعث تسهیل «توسعهٔ دامنهٔ رشد تقریبی» دانش آموز می شود.

در شمارهٔ گذشته، هم چنین از ضرورت ارزشیابی مشترک و بیرونی در مواقع خاص صحبت شد. برای مثال، گاهی یک برنامهٔ درسی جدید با روش و محتوائی کاملاً متفاوت با وضع موجود، تهیّه می شود. طبیعی است که ارزشیابی چنین برنامه ای با ارزشیابی های سنّتی متفاوت است. به همین دلیل، معلمان نیازمند داشتن الگوهای قابل استفاده برای ارزشیابی چنین برنامه ای هستند. در نتیجه، در چنین شرایطی، برگزاری آزمون متمرکز و از نوع غیرکلاسیک آن و به طور موردی جهت ارایهٔ الگوی مناسب و تضمین حداقل موفقیت برای همهٔ دانش آموزان توصیه می شود. لازم به توضیح است که نتایج چنین آزمونهائی تنها بخش کوچکی از ارزشیابی مجموعی دانش آموزان را تشکیل می دهند.

با چنین نگرش تحوّلی به ارزشیابی ریاضی، می توانیم امیدوار باشیم که کیفیت یادگیری ریاضی به گونه ای ارتقا یابد تا شایستگی تحقّق یکی از شعارهای سال جهانی ریاضیات ۲۰۰۰ که «ریاضیات کلید راه توسعه» است را ایجاد نماید.

ریاضیات و عقل سلیم[1]

نویسنده: جفری هاوسون
مترجم: زهرا گویا، دانشگاه شهید بهشتی

عقل سلیم مفهومی گنگ، وابسته به فرهنگ، و با این حال، بسیار باارزش است. عقل سلیم به ما ابزاری می‌دهد تا با آن، با یک استدلال منطقی یک سویه و ناقص، دربارهٔ ریاضی صحبت کنیم. به طور معمول، گفتن به کسی که «از عقل سلیم خود استفاده کن»، درخواستی برای نتیجه‌گیری و طراحی یک عمل بر مبنای دانش موضعی/ بومی، تجربهٔ گذشته و استدلال ساده است. عقل سلیم به وسیلهٔ راهی که وابسته به مشاهدات، میثاق‌ها و حقایق پذیرفته شده، و نظام‌های عملکرد «فطری» تصوّر، معنا و ادراک است، تشخیص داده می‌شود. شکی نیست که عقل سلیم ابزاری قوی برای بقا در زندگی اجتماعی ارائه می‌کند.

توضیح: این سخنرانی توسط «جفری هاوسون» در هشتمین کنگرهٔ بین‌المللی آموزش ریاضی ICME8 که از ۱۴ تا ۲۱ جولای ۱۹۹۶ در شهر «سویل» اسپانیا برگزار گردید، ارایه شد.

اجازه بدهید ابتدا توضیح بدهم چه چیزی باعث ترغیب و تحریک علاقهٔ من به این عنوان شده است و هم چنین، بر این نکته تأکید کنم که در این جا، من بیش‌تر به ارایهٔ نظرات شخصی خویش خواهم پرداخت تا یک بررسی همه جانبه از نوشته‌های اخیر؛ مانند «گزارش اجتماعی» که در برلین به همین مناسبت برگزار شد (کِتیل و همکاران[2]، ۱۹۹۶) یا فصلی در کتابی که توسط اعضای پروژهٔ «مؤلفه‌های پایه‌ای آموزش ریاضی برای معلمان»[3] (هویلز، کیل پاتریک و اِسکووزموز)[4] تألیف شد.

حدود سه سال پیش، من درگیر دو کار شدم: یکی مربوط به «سومین مطالعهٔ بین‌المللی ریاضیات و علوم» (TIMSS) بود و شامل مطالعهٔ کتاب‌های درسی پایهٔ هشتم متعلّق به هشت کشور مختلف می‌شد (هاوسون، ۱۹۹۵)؛ و دیگری، بخشی از بررسی گروه «BACOMET» راجع به «معنا»[5] درون آموزش ریاضی بود. یک جنبهٔ مهّم کار اخیر، بررسی راه‌هایی بود که ما به دانش‌آموزان کمک می‌کنیم تا نه تنها برای مفهوم‌ها «معنا» بسازند، بلکه آن «معنا» را برای مطالعهٔ خود از ریاضی نیز ارائه کنند.

به جز یک استثنا، مؤلفان تمامی کتاب‌های درسی مورد بررسی من، از طریق استفاده از مثال‌های دنیای واقعی و به کارگیری آشکار و صریح موضوع [درسی]، در جست‌وجوی تأمین «معنا»یی برای استفاده در هر دو نوع آن بودند. علاوه بر این، به نظر می‌رسید که ریاضیات به عنوان یک شکل تخصصی شدهٔ «عقل سلیم» در نظر گرفته می‌شود و رویکردهای گوناگون بر اصولی بنا نهاده شده‌اند تا نشان دهند کاری که همهٔ ما در ریاضیات مدرسه‌ای انجام می‌دهیم، تلاش برای کُدگذاری عقل سلیم و توسعهٔ نمادهایی است که توسط عموم پذیرفته شده است. تنها استثنا، کتابی بود که هنوز نشان دهندهٔ تأثیر رویکرد فرانسوی دههٔ ۱۹۶۰ میلادی به تدریس ریاضی بود. این کتاب تأکید قابل توجّهی بر ساختارهای جبری داشت که به صورت راهی «نیمه صوری» معرفی شده بود؛ اگرچه در حال حاضر، به وسیلهٔ ارجاع به تعدادی از مثال‌های «انگیزه‌بخش» دنیای واقعی، قصد جرح و تعدیل آن تأکید را دارد (حال آن که کتاب درسی مذکور در فرآیند جایگزینی بود.) حتی اخیراً هم، مواد آموزشی

گوناگونی دیده ام که تأکید کم تری بر «دنیای واقعی» و تأکید بیش تری بر «فعالیت های» ریاضی داشتند و بعضی از آن ها کاملاً مجرّد بودند. با وجود این، به نظر می رسد که حتی این کتاب های درسی فرض کرده اند که استفاده از عقل سلیم ممکن است به نتیجهٔ مطلوب ریاضی منجر شود و به دلیل فقدان تأکید بر تعریف ها، حقایق یا مهارت هایی که باید یاد گرفته شوند؛ هدف تدریس، توسعهٔ نوعی عقل سلیم ریاضیِ مخصوص بود تا بعداً قابل به کارگیری در هر مسألهٔ ریاضی باشد.

تأکید بر این نکته را مهم می دانم که نمی خواهم تمامی چنین رویکردهایی را به خصوص در سال های اولیهٔ آموزش، تخطئه کنم. با این حال، مطالعهٔ کتاب های درسی ریاضی پایهٔ هشتم نسبت به عدم تشخیص تنش هایی که به طور طبیعی از نارسایی ها و خطرهای احتمالی چنین رویکردهایی ایجاد می شود، به من هشدار داد.

در نتیجه، هدف من این است که به بعضی از تعامل های بین ریاضی و عقل سلیم نگاه کنم، به این دلیل که ما راجع به یک مرز مشترک صحبت نمی کنیم ـ این دو منفصل از هم نیستند. دلالت ها را برای راه هایی که از آن طریق، هم راجع به ریاضی فکر می کنیم و هم آن را تدریس می کنیم؛ باید در نظر بگیریم؛ همان دلالت هایی که باعث می شوند تا ایده های خاص، باورها و تمرین های عملی تدریس را دوباره نگری کنیم.

ابتدا اجازه بدهید با تعریف لغت نامه ای «عقل سلیم» شروع کنیم:

عقل سلیم: درک متوسط؛ احساس خوب یا هوش و فراست عملی؛ نظر یک جمع؛ ادراک و احساس پذیرفته شدهٔ همگانی نوع بشر [خرد جمعی] (فرهنگ لغت قرن بیستم چمبرز).

پس بلافاصله درمی یابیم که «عقل سلیم» با یک عبارت علمی فاصلهٔ زیادی دارد: عقل سلیم مفهومی گنگ، وابسته به فرهنگ، و با این حال بسیار باارزش است. عقل سلیم به ما ابزاری می دهد تا با آن، با یک استدلال منطقی یک سویه و ناقص، دربارهٔ ریاضی صحبت کنیم. به طور معمول، گفتن به کسی که «از عقل سلیم خود استفاده کن»، درخواستی برای نتیجه گیری و طراحی یک عمل بر مبنای دانش موضعی/بومی، تجربهٔ گذشته و استدلال ساده است. عقل سلیم به وسیلهٔ راهی که وابسته به مشاهدات، میثاق ها و حقایق پذیرفته شده و نظام های عملکرد «فطری» تصورّ، معنا و ادراک است؛ تشخیص داده می شود. شکی نیست که عقل سلیم ابزاری قوی برای بقا در زندگی اجتماعی ارائه می کند. نمی توان انکار کرد که «عقل سلیم» چیزی است که آموزشگران باید تلاش کنند تا آن را در دانش آموزان توسعه دهند و به طور معکوس، چیزی است که ما باید در تدریس خود آن را ترسیم کنیم.

امّا عقل سلیم فقط به یادگیری ریاضی کمک نمی کند، بلکه پایه ای است که ریاضی را برافراشته است. «فرودنتال» در «سخنرانی های چین»[6] (۱۹۹۱) خود، سؤال می کند که: «آیا عقل سلیم وافرترین و قابل اتکاترین منبع یقین بسیار کهن درون ریاضی نیست؟» او در ادامه توضیح می دهد که چگونه عدد و هندسهٔ مقدماتی (برای مثال، ایده های تشابه) ریشه در عقل سلیم دارند.

برای من، این نکته به اندازهٔ کاربرد عقل سلیم برای تدریس ریاضی چشمگیر است. بسیاری از شما، حداقل با عنوان کتاب «موریس کلاین» به اسم «ریاضی: از دست دادن قطعیّت»[7] آشنا هستید و دلالت های کارگودل را می شناسید. من مطمئن هستم که راجع به این موضوع در سایر سخنرانی های این کنگره صحبت خواهد شد. با این حال، چنان یافته هایی به از دست دادن ایمان، تغییر تمرین های عملی، یا افزایش اختلالات عصبی در بین هیئت های علمی ریاضی دانشگاهی منجر نشده است. تشعشع و برجستگی کارگودل بدون شک مورد تصدیق است، امّا اساساً ریاضی دان ها نه تنها در نظام های اصل موضوعی خود، بلکه در شبکه ای از مدل های منطقی پناه می جویند. برای نمونه، سازگاری هندسهٔ هذلولوی را بر مبنای اعداد طبیعی قرار می دهند و این ها همان طور که فرودنتال یادآور می شود، ریشهٔ محکمی در عقل سلیم دارند و این عقل سلیم همان اساس غایی برای اعتماد ریاضی دان در آن چه که او انجام می دهد است. من در ادامهٔ سخنرانی خود به موضوع هایی مانند این و از جمله سؤال هایی دربارهٔ جایزالخطا بودن، بازمی گردم.

اساساً ریاضی‌دان‌ها نه تنها در نظام‌های اصل موضوعی خود، بلکه در شبکه‌ای از مدل‌های منطقی پناه می‌جویند. برای نمونه، سازگاری هندسهٔ هذلولوی را بر مبنای اعداد طبیعی قرار می‌دهند و این‌ها همان طور که فرودنتال یادآور می‌شود، ریشهٔ محکمی در عقل سلیم دارند و این عقل سلیم همان اساس غایی برای اعتماد ریاضی دان در آن‌چه که او انجام می‌دهد است.

طی مطالعهٔ کتاب های درسی پایهٔ هشتم، متوجه شدم که چگونه در بسیاری کشورها، این کتاب ها یک «خط خطا» را به عنوان

اثبات هایی بر مبنای عقل سلیم نشان می دهند؛ چرا که در این پایه، در بسیاری از کشورها برای نخستین بار ضرب اعداد صحیح منفی را معرفی می کنند. در این جا، شاید برای اولین بار در سطح مدرسه، پیوند بین عقل سلیم و ریاضی از هم گسسته می شود. اعداد منفی برای دانش آموزان بالاتر از پایهٔ هشتم نیز مشکلاتی آفریده است. برای مثال، در اواخر سال های ۱۷۰۰ میلادی و اوایل سال های ۱۸۰۰ [اواخر قرن هجدهم و اوایل قرن نوزدهم] بسیاری از مردم انگلستان، هنوز به چنان اعدادی با بدگمانی و شبههٔ قابل ملاحظه ای نگاه می کردند.

هم چنین، در سال ۱۷۹۶ میلادی، «فرند»[8] ریاضی دان اهل کمبریج، یک کتاب درسی جبر تألیف کرد که در آن، از به کارگیری اعداد منفی اجتناب ورزید. او استدلال می کرد که: «ضرب یک عدد منفی در یک عدد منفی و تولید یک عدد مثبت»، بیش ترین حامیان خود را بین کسانی می یابد که «دوست دارند چیزها را بر اساس توکّل و اعتماد بپذیرند و از سختی تفکّر جدی نفرت دارند.» برای این که «وقتی شخصی نتواند اصول علوم را بدون ارجاع به استعاره توضیح دهد، احتمالاً او هیچ گاه به طور دقیق راجع به موضوع فکر نکرده است[9].»

دامادِ فرند به نام «دمورگان»، ریاضی دان شناخته شده تری بود که در کتاب خود به نام «اندر باب مطالعه و مشکلات ریاضی» (۱۸۳۱) چنین نوشت:

«عبارت موهومی $\sqrt{-a}$ و عبارت منفی $-b$ ... **تا جایی که معانی واقعی آن ها منظور نظر است**، هر دو به یک اندازه، موهوم هستند[10]؛ (تأکید در اصل است)

اعتراض فرند به اعداد منفی اساساً بر مبنای عقل سلیم بود. او نمی دانست که «چگونه حاصل ضرب دو تا از این اشیای مرموز می توانست چیزی را نتیجه بدهد که او با آن ها آشنا بود ـ آن چه که بخشی از عقل سلیم بود؟» مثال های بسیار دیگری نشان می دهند که وقتی پیوند بین ریاضی و عقل سلیم گسسته می شود، چه اتفاقی می افتد. وقتی «گوس» یافته های خود در مورد هندسهٔ هذلولوی را چنان که نوشته است، از ترس فریادهای دلخراش «بوئوتیان ها»[11] (قبیله ای یونانی که به طور سنّتی بذله گوهای کودن در نظر گرفته می شدند) مخفی کرد، مطمئناً منظورش این بود که امکان دارد، بسیاری از ریاضی دان های همکارش، آن یافته ها را به عنوان توهین آشکار به عقل سلیم خود رد کنند؛ فرضی که می گفت اگر یک خط و یک نقطه خارج آن در صفحه وجود داشته باشد، ممکن است از آن نقطه، بیش از یک خط موازی با خط مفروض رسم کرد.

«دوبویز ـ رایموند»[12] به نظریهٔ مجموعه های کانتور اعتراض کرد، زیرا «به نظر می رسید که با عقل سلیم مغایرت دارد» (۱۸۸۲، که در کلاین؛ ۱۹۷۲، صفحهٔ ۹۹۸ نقل قول شده است). به وضوح نظریهٔ مجموعه های نامتناهی با عقل سلیم تناقض دارد (تأکید در اصل است). اجازه بدهید یک مثال ساده انتخاب کنم. فرض کنید فوتبالیست ها در میدان بازی هستند. بعضی از آن ها لباس های قرمز و بعضی دیگر لباس های نیلی رنگ بر تن دارند. اگر از آن ها بخواهم طوری به خط بایستند که بین هر دو نفرِ دارای لباس نیلی، یک نفر با

ریاضیات نباید با عقل سلیم اشتباه گرفته شده یا همان فرض شود. اگر عقل سلیم بخواهد به ریاضی خالص تبدیل شود، باید نظام وار شده و سازمان دهی شود و اگر لازم باشد، صوری گردد. استدلال ها باید بر اساس چیزی بیش از منطق ابتدایی و استدلال استنتاجی بنا شوند که عقل سلیم را پشتیبانی کنند.

لباس قرمز قرار بگیرد، و سپس یادداشت کنم که خط با افرادی که لباس قرمز بر تن دارند شروع و خاتمه می یابد، عقل سلیم به من می گوید که تعداد قرمزپوش ها یکی بیش تر از نیلی پوش ها است. اما بر روی محور اعداد، در فاصلهٔ بستهٔ ۰ و ۱، چه اتفاقی می افتد؟ فاصله با یک عدد گویا شروع شده و خاتمه می یابد. بین هر دو عدد گویا یک عدد گنگ و بین هر دو عدد گنگ یک عدد گویا قرار دارد. امّا در این فاصله، تعداد اعداد گویا بیش تر از اعداد گنگ نیست: در واقع، تعداد اعداد گویا در مقایسه با اعداد گنگ ناچیز است. بر سر عقل سلیم چه آمده است؟ مثال های مشابه دیگری خارج از نظریهٔ مجموعه ها وجود دارد، اما در این جا فرصت ارائهٔ آن ها نیست.

ریاضیات نباید با عقل سلیم اشتباه گرفته شده یا همان فرض شود. اگر عقل سلیم بخواهد به ریاضی خالص تبدیل شود، باید نظام وار شده و سازمان دهی شود و اگر لازم باشد، صوری گردد. استدلال ها باید بر اساس چیزی بیش از منطق ابتدایی و استدلال استنتاجی بنا شوند که عقل سلیم را پشتیبانی کنند. این اظهارات به نظر واضح، می توانند مشکلاتی برای مؤلف کتاب درسی یا برنامه ریز درسی بیافرینند. اجازه بدهید، براساس یکی از تمرین های موجود در مجموعهٔ کتاب هایی که مطالعه کرده ام، مثال ساده ای بزنم. به دانش آموزان عکس هایی ارائه شده بود و از آن ها خواسته شده بود که بر مبنای نقشه های عرضه شده، عکس های کلیسا را شناسایی کنند یا با استفاده از نقشهٔ یک شهر، بگویند که هرکدام از عکس ها از چه نقطه ای گرفته شده بودند. من چنین فعالیت هایی را به عنوان ابزار

مفیدی برای توسعهٔ «آگاهی فضایی» می دانم (این حرف چه معنایی می دهد!) که ریاضی دان ها آرزو دارند به آن ها دست یابند. با وجود این، کتاب درسی در این بخش ها هیچ «ملاک راهنمایی کننده ای» ارائه نمی داد؛ یعنی هیچ تعریف ریاضی، نتیجه یا رویّه ای که دانش آموزان ممکن باشد آن ها را تشخیص دهند، یاد بگیرند یا دنبال کنند، یا ممکن باشد به آن ها کمک کند تا آن چه را یاد گرفته بودند برجسته کنند و به شکل مفیدی درآورند، در اختیارشان قرار نمی داد.

فرصت هایی برای دانش آموزان ایجاد شده بود تا آن ها از «عقل سلیم» خود استفاده کنند؛ احتمالاً به این دلیل که «عقل سلیم» را بیش تر توسعه دهند. امید می رفت که با این فعالیت ها، دانش آموزان بتوانند خصیصه های ویژه و مطلوب را توسعه دهند ـ اگرچه منطق و نظامی که ورای این فعالیت ها بود، هرگز به بحث گذاشته نشد یا مورد ارزیابی قرار نگرفت. آیا این بهترین چیزی است که ما به عنوان آموزشگر ریاضی می توانیم عرضه کنیم؟ با کمال تعجّب، کتاب های درسی دههٔ ۱۹۶۰ میلادی، زبان نظام واری را درون خود داشتند که ممکن است قابل به کارگیری در این مسأله باشد. با نگاه به نقشهٔ شهر، می توانیم مجموعهٔ تمام نقاطی را در نظر بگیریم که از آن ها، منارهٔ مخروطی کلیسای «سن پیتر» ممکن است در سمت چپ کلیسای «سن جان» ظاهر شود. ملاحظات اشتراک مجموعه های گوناگونی مانند این، می تواند ما را به جواب مطلوب راهبری کند.

در طول سال های دههٔ ۱۹۶۰، چنین سؤال های زمینه مداری حتی در صورت وجود، به ندرت مطرح می شدند. در دههٔ ۱۹۹۰، این خطر وجود دارد که زمینه و وابستگی به عقل سلیم، ریاضیات را

«ریاضیات و عقل سلیم» به وجود آمده اند.

الف ـ بر اساس عقل سلیم یعنی آن چه بر اساس «ادراک و احساس پذیرفته شدهٔ همگانی نوع بشر» (خرد جمعی) بنا شده است ـ ریاضی بیش از عقل سلیم است. در واقع، عقل سلیم می تواند به عنوان یک نیروی بازدارنده در یادگیری، ادراک کامل و توسعهٔ ریاضی باشد.

ب ـ در تدریس ریاضی، ما پیوسته به توسعهٔ «عقل سلیم» دانش آموزان خود نیاز داریم (یعنی، همان طور که در مثال هشیاری فضایی دیدیم، باید دانش آموز را تا سطح «درک متوسط» بالا بیاوریم) تا بتوانیم باعث پیشرفت او در ریاضی باشیم. عقل سلیم ممکن است یک بخش مشروع آموزش ریاضی باشد، اگرچه به ندرت به عنوان «ریاضیات» به حساب می آید. علاوه بر این، کودکان از طبقات اجتماعی مختلف، انواع مختلفی از «عقل سلیم» را با خود [به کلاس درس] می آورند؛ زیرا عقل سلیم در همه جا ثابت و یکسان نیست. در واقع، عقل سلیم در بعضی منابع به عنوان «دانش بومی/ موضعی» معرفی شده است. هم چنین، بحث های مربوط به «ریاضیات بومی[۱۳]» اگر روی مبحث عقل سلیمی که ویژهٔ یک جامعهٔ خاص است بیش تر متمرکز شود، ممکن است محبوبیت بیش تری پیدا کند.

ما نیاز فراوانی به تشخیص «دانش بومی/ موضعی»، ساختن بر مبنای آن و آگاهی از این نکته داریم که چنین دانشی هرگز ایستا نیست. با تغییر قالب و زمینهٔ اجتماعی، مطمئناً یک مدخل ریاضی حذف می شود و یک مدخل جدید ریاضی به وجود می آید. نویسندگان کتاب های درسی تا حدی این مهم را تشخیص می دهند. برای مثال، اغلب کتاب های درسی که من مطالعه کردم، از این حقیقت استفاده کرده بودند که امروزه، از طریق پیش بینی هوا در تلویزیون، بیش تر کودکان کشورهای غیر استوایی با اعداد منفی آشنا شده اند. در نتیجه، اعداد منفی جزئی از «دانش بومی» هستند؛ اگرچه انجام عملیات با آن ها چنین شأنی را ندارد.

عقل سلیم ممکن است یک بخش مشروع آموزش ریاضی باشد، اگرچه به ندرت به عنوان «ریاضیات» به حساب می آید. علاوه بر این، کودکان از طبقات اجتماعی مختلف، انواع مختلفی از «عقل سلیم» را با خود [به کلاس درس] می آورند؛ زیرا عقل سلیم در همه جا ثابت و یکسان نیست. در واقع، عقل سلیم در بعضی منابع به عنوان «دانش بومی/ موضعی» معرفی شده است.

یکی از جالب ترین گزارش های ملی که پس از انجام «دومین مطالعهٔ بین المللی ریاضی[۱۴]» تهیه شد، توضیح داده است که چگونه در یک کشور توسعه یافته، معلمان برای پیش بینی این که دانش آموزان آن ها به کدام سؤال ها با موفقیت پاسخ خواهند داد، مشکلات زیادی داشتند. تقریباً در تمام موارد، معلمان انتظار شکست دانش آموزان خود را در پاسخ به بعضی سؤالها داشتند، فقط به این دلیل که هنوز آن موضوع را تدریس نکرده بودند. امّا در حقیقت، دانش آموزان سؤال هایی را می توانستند پاسخ دهند که

از میدان بیرون کند. تعادل زیبایی وجود دارد که باید به آن توجه داشت: ما باید بر اساس عقل سلیم [ریاضی را] بسازیم، امّا در عین حال، نیازمند آن هستیم که نشان دهیم برخلاف عقل سلیم، ریاضیات به ساختار، سازمان دهی و در میان گذاشتن دانش، تجربه ها و تکنیک ها متکی است.

در ادامه، به بررسی مسأله های مشخصی می پردازم که از پیوند

[موضوع های آن ها] به «دانش بومی» تبدیل شده بود.

مثالی از کشور دیگری می زنم: وقتی که در سال ۱۹۸۸، «برنامهٔ درسی ملّی انگلیس[15]» به وجود آمد، چنین تصور شده بود که اگر نماد علمی تنها توسط حدود نیمی از دانش آموزان تا ۱۶ سالگی آموخته شود، کفایت می کند. در حالی که «دومین مطالعهٔ بین المللی ریاضی» نشان داده بود که در سال ۱۹۸۱، تقریباً ۴۰ درصد دانش آموزان ۱۳ سالهٔ انگلیسی به سؤالی که مربوط به نماد علمی بود، پاسخ صحیح داده بودند. آیا آن ها نماد علمی را در درس های ریاضی یا علوم یاد گرفته بودند؟ یا آن که به سادگی، از طریق بازی و کار با ماشین حساب یا کامپیوتر آموخته بودند؟ من نمی دانم ـ امّا برای آن ها، نماد علمی «دانش بومی» شده بود.

من منتظر هستم نتایج «سومین مطالعهٔ بین المللی ریاضیات و علوم[16]» منتشر شود تا ببینم در کشورهایی که احتمالات تدریس نشده است، یا در کشورهایی که وقت زیادی را صرف نمایش گرافیکی داده ها کرده اند، عملکرد دانش آموزان ۱۳ سالهٔ آن کشورها در مورد آن سؤال ها چگونه است. تصوّر من این است که جنبه های ابتدایی این مباحث، در بین نوجوانان به سرعت به «دانش بومی» تبدیل می شود.

همهٔ ما می دانیم این نادرست است که معلمان فرض کنند «آن چه تدریس شده، یاد گرفته شده است.» اما به همان اندازه نیز خطرناک است اگر تصوّر کنند «آن چه تدریس نشده، دانسته نشده است». این نکته تحت تأثیر پیشینه های اجتماعی دانش آموز است که به طور خود به خودی، «دانش بومی» همراه با دانش آموز را تعریف می کند.

پ ـ ریاضی دان ها به عنوان «یک جامعه»، نوعی «عقل سلیم» خاص خود را دارند. هدف عمدهٔ آموزش ریاضی، توسعهٔ این نوع عقل سلیم در دانش آموزان است تا به آن چه که آن ها به عنوان رفتار طبیعی ریاضی در نظر می گیرند، بیفزایند و دانش و روش های تفکری را که اغلب به «عقل سلیم [ریاضی]» نسبت داده می شود، توسعه دهند. برای مثال، «آیا واضح است که ...»، چنین معنی می دهد که «با توجه به دانش من از ریاضی، این یک عقل سلیم [ریاضی] است که ...»

اینک شاید لازم باشد به تفاوت های بین «عقل سلیم ریاضی دان ها» و دو عبارت مفید اما بَد تعریفِ «شهود» و «بصیرت» توجه کنیم. به خاطر می آورم که بیست سال است از بحث راجع به معانی «شهود» و «بصیرت» آشفته شده ام ـ هنوز معانی پیوست آن ها تا حد وسیعی ویژه هستند. با این حال، معتقدم که «شهود» مانند «عقل سلیم» است، زیرا هر دو بر مبنای دانش بومی (اگرچه اغلب بسیار حرفه ای) و تجربه بنا شده اند. اما نمی بینم که نتایج شهود حتی از یک منطق ساده که توسط «عقل سلیم» مورد استفاده قرار گرفته، ناشی شده باشد. از طرف دیگر، در ادراک ساختار مسأله یا موضوع های ریاضی درگیر، «بصیرت» بسیار فراتر از «عقل سلیم» عمل می کند.

ت ـ اگر یونانی ها (در مورد اعداد گنگ) و ریاضی دان هایی مانند: فرند، «لازار کارنوت[17]» (اعداد منفی) و «دوبویز رایموند» (نظریهٔ مجموعه ها)، در پذیرش ایده های جدیدی که با دیدگاه های «عقل سلیم» آن ها در تضاد بود مشکل داشتند، نباید از این که دانش آموزانمان هم [با آن ایده ها] مشکل دارند، متعجب شویم.

اغلب کتاب های درسی که من مطالعه کردم، از این حقیقت استفاده کرده بودند که امروزه، پیش بینی هوا در تلویزیون، بیش تر کودکان کشورهای غیر استوایی را با اعداد منفی آشنا کرده است. در نتیجه، اعداد منفی جزئی از «دانش بومی» هستند؛ اگرچه انجام عملیات با آن ها چنین شأنی را ندارد.

تمام این نکات نیازمند مطالعاتی با جزئیات بسیار بیش تر است. به طور خاص، به نظر می رسد که پیوندهای نزدیکی بین «ریاضی» و «عقل سلیم» به معنایی که «اسکووز موز[18]» به پیروی از «بوردیو[19]»، به عنوان «کُره های تمرین عَملی[20]» مختلف توضیح داده است وجود داشته باشد؛ چه منظور از این کره های عملی، تمرین های عملی حسابی کودکان خیابانی برزیلی و چه فعالیت های حرفه ای ریاضی دان های محقق باشد.

البته هدف از توسعهٔ یک عقل سلیم خاص با جهت گیری ریاضی درون یک کرهٔ خاص تمرین عملی (همانند آن چه که در مثال آگاهی فضایی ارائه شد)، به عنوان مثال در نوشته های «گرینو[21]» (۱۹۹۱) در مورد «درک عدد[22]»، نوشته های «آیزنبرگ[23]» (۱۹۹۲) دربارهٔ درک تابع و نوشته های «آرکاوی[24]» (۱۹۹۴) دربارهٔ درک نماد دیده می شود. با این حال، به بیان اهداف خاص، یعنی «توسعهٔ درک های مطلوب» در قالب عبارت های ساده شده و دانش محوری که به طور مطلوب در برنامهٔ درسی ملی ریاضی قرار گیرند، به ندرت توجه نشان می دهیم.

همهٔ ما که در این جا حضور داریم، بدون شک می توانیم تجربه های شخصی ای را به یاد آوریم که در آن ها، با مشکلاتی که در بخش های (پ) و (ت) مطرح شد، مواجه شده ایم. قطعاً، این مشکلات در مورد یک دانشجوی دانشگاه که توسط گروه «BACOMET» در ویدئو

مشاهده شد، وجود داشت. وقتی از او خواسته شد که در درسی مربوط به فضاهای خطی، ثابت کند که تنها یک بردار صفر می تواند وجود داشته باشد؛ عکس العمل او این بود که این «عقل سلیم» است. معلوم شد که استنتاج او بر مبنای مطالعهٔ یک بازنمایی خاص هندسی از یک فضای برداری بود و آن دانشجو دلیلی برای به کارگیری استدلالی به غیر از آن چه که وابسته به عقل سلیم است، نمی دید. هم چنین، به نظر می رسید که مشکل این دانشجو با درخواست این که او باید چیزی را «اثبات» کند، تشدید می شد: «آیا مفهوم اثبات، هیچ جایگاهی درون «عقل سلیم» دارد؟» یا «این مفهوم، به محکمی درون ریاضی جای گرفته است؟»

مسألهٔ اخیر، در رابطه با کتاب های درسی پایهٔ هشتم که من مطالعه کردم و در مورد دو کشوری که سعی در معرفی نماد اثبات صوری هندسی در سطح پایهٔ هشتم را داشتند، دیده می شد. اگرچه هر دو کتاب درسی چندین جلوهٔ خوب داشتند؛ با این حال به نظر می رسید که یک پرش مشخص و به طور وسیع بدون توضیح و بدون انگیزه، از رویکرد «عقل سلیم» و سپس نمادهای صوری بیش تر، در قسمت های اثبات وجود داشت که این ها توصیف گر آن کتاب ها بودند.

در همان زمان، فیلم ویدئویی دیگری، مسألهٔ مشابهی را نشان داد که متکی بر یک بازنمایی محدود بود؛ اما این بار در یک مدرسهٔ ابتدایی ظاهر شده بود. این مسأله مربوط به تابع ها بود که در قالب پیتزای همه جا حاضر! بحث شده بود: «آیا $\frac{4}{4}$ مساوی $\frac{5}{5}$ است؟» کودکی پاسخ خواسته شده را داد، اما کودک دیگری واقعاً از عقل سلیم خود استفاده کرد و به درستی دلیل آورد.که پیتزایی که به چهار قسمت مساوی تقسیم شود، مانند پیتزایی نیست که به پنج قسمت مساوی تقسیم شده باشد. پیتزای تقسیم شده بر چهار، برای پنج کودکی که دوست دارند آن را بین خود تقسیم کنند، بی فایده است! البته چنان استدلال واژگونه ای باید تصحیح گردد! اما حرف کودک صحیح بود. این یک رابطهٔ عجیب تساوی است که بسیاری از موقعیت های متفاوت زندگی واقعی یا عقل سلیم را مساوی می انگارد. کسی که می خواهد بسته ای را پُست کند، به سختی متقاعد می شود که ۱۰۰ قطعه بند هر یک به طول یک سانتی متر، مساوی یک قطعه نخ به طول یک متر است. رابطه های تساوی مجرد ریاضی همیشه به عبارت های ملموس زندگی واقعی ترجمه نمی شوند.

همهٔ ما می‌دانیم این نادرست است که معلمان فرض کنند «آن‌چه تدریس شده، یاد گرفته شده است.» اما به همان اندازه نیز خطرناک است اگر تصوّر کنند «آن‌چه تدریس نشده، دانسته نشده است». این نکته تحت تأثیر پیشینه‌های اجتماعی دانش‌آموز است که به طور خود به خودی، «دانش بومی» همراه با دانش‌آموز را تعریف می‌کند.

راه ساده ای برای تدریس کسرها وجود ندارد، اما آن راهی که به شدت متکی به پیتزا است[۲۵]، حداقل باعث شده بود که یک دختر دانش آموز باور کند موقعی که معلمان ریاضی می خواهند تصمیم بگیرند که «عقل سلیم» دربرگیرندهٔ چه چیزی است، می توانند بسیار انتخابی عمل کنند. من این جا نیامده ام تا راه حلی برای این مسألهٔ مشکل پیشنهاد کنم؛ اما تا وجود این مشکل را تشخیص ندهیم، بعید است که پیشرفت چشمگیری به سمت حل آن داشته باشیم.

در ریاضی، زمانی پیش می آید که موانع عقل سلیم باید تقاضاهایی برای ساختار را نتیجه دهد؛ چه این [تقاضا] همراه با معرفی انواع تازهٔ اعداد و عملیات با آن ها باشد، چه فی نفسه ساختارهای جبری و توپولوژیکی باشد. از بعضی جهات، این کار [تقاضا] موازی توسعه های مبانی ریاضی، از «فرگه» که تلاش داشت ریاضیات را بر مبنای یک منطق «عقل سلیم» بسازد، تا «هیلبرت» و توسعهٔ نظام های صوری بود. در نتیجه، مثلاً هیلبرت در سال ۱۹۱۹ میلادی بیان کرد که مفاهیم ریاضی «به طور نظام واری، بنا به دلایلی که هم داخلی و هم خارجی» بودند، ساخته شده اند (نقل قول در «رو»[۲۶]، ۱۹۹۴). عقل سلیم انگیزهٔ «بیرونی» ایجاد می کند، اما ما باید به ریاضی بنا به دلایل داخلی نگاه کنیم. این کار هرگز ساده نخواهد بود که از دیدگاهی مبتنی بر عقل سلیم، به دیدگاهی که ساختار درونی و تقاضاهای ریاضی را در نظر می گیرد، تغییر موضع دهیم. البته تلاش برای برآورده کردن نیاز به این انتقال، تقریباً به طور ثابت به سردرگمی و ابهام در ذهن دانش آموزان و معلمان منجر می شود.

من احساس کردم که هیچ یک از کتاب های درسی مورد مطالعه ام، یک مقدمهٔ قانع کننده برای معرفی ضرب اعداد صحیح ارایه نکرده اند. همان طور که تاکنون یادآور شده ام، یکی [از کتاب ها] به این موضوع از دیدگاه «داخلی» ساختار جبری نزدیک شده بود؛ اما از طریقی که نه در یک دانش آموز پایهٔ هشتم درک و احساسی ایجاد می کند، نه در یک ریاضی دان احساس مناسبی به وجود می آورد.

کتاب های درسی دیگر سعی داشتند که نتیجه را از طریق

رویکردهای گوناگون «قانع کننده» نمایند. برای مثال، با توسّل به قدرت و نفوذ ماشین حساب یا به وسیلهٔ یک حکایت ناملموس که قوانین فیزیکی را نادیده می گیرد؛ چندین رویکرد دیگر که اساساً مبحث ریاضی را با ضرب دو نمایش متفاوت از اعداد صحیح ممزوج می کند معرفی می شوند؛ یا با فرض این که نتیجه به دلیل به کارگیری عقل سلیم و در رابطه با توسعهٔ الگوهای عددی به دست می آید (برای جزئیات بیش تر، به هاوسون ـ زیر چاپ ـ نگاه کنید).

مقایسهٔ این رویکردها با دو رویکرد از دههٔ ۱۹۳۰ میلادی جالب خواهد بود. رویکرد اول، که توسط «دابلیو. اچ. آدِن[۲۷]» شاعر مطرح شده بود، جهت حفظ کردن یک قاعده بود:

منفی در منفی می شه مثبت
دلیلش می مونه واسهٔ بعد

ما نیازی به بحث راجع به دلیل این کار نداریم و روشن است که رویکرد او حداقل از صداقت برخوردار بود و برای به یاد آوردن نیز ساده بود. رویکرد دوم، که مثال جدی تری است، توصیه ای بود که توسط معلمی به نام «سی. وی. دورل»[۲۸] در کتاب تدریس جبر

عقل سلیم فقط به یادگیری ریاضی کمک نمی‌کند، بلکه پایه‌ای است که ریاضی را برافراشته است.

مقدماتی او که در سال ۱۹۳۱ چاپ شد، ارائه شده بود. اما ترسناک تر از همه این بود که من در هیچ یک از کتاب های درسی مدرن، نتوانستم درک ریاضی و پداگوژیکی نشان داده شده توسط «دورل» را پیدا کنم. به نظر می رسد این یک انتقاد جدی به آموزش ریاضی و آموزشگران ریاضی است که ظاهراً طی ۶۰ سال گذشته، در تفکر خود نسبت به چگونگی تدریس یک موضوع کلیدی مانند ضرب اعداد منفی که در برنامهٔ درسی هر کشوری یافت می شود، هیچ پیشرفتی نداشته ایم.

ما پیش از این، با مسائلی مواجه شده ایم که علت پیدایش آن ها، عدم تمایز صریح بین دنیا و تصوّر عقل سلیم ما در آن دنیا، و مدل مجرد آن دنیا که در ریاضی آن را ایجاد می کنیم، بوده است. «ریکوردو»[۲۹] در کتاب گذرگاه دانش[۳۰] (۱۵۵۱) خود، با این مسأله چنین برخورد کرده است:

«از نظر هندسه دان ها، نقطه یک شکل کوچک و نامحسوس است که هیچ قسمتی ندارد؛ یعنی می توان گفت که نه طول دارد و نه عرض. اما دقّت این تعریف فقط مناسب اندیشیدن نظری است، نه کارهای عملی (در نظر داشته باشید که قصد من به کارگیری تمام این اصول در عمل است). من فکر می کنم مناسب تر باشد که یک نقطه یا خراش را اثر کوچک یک قلم، مداد یا وسیلهٔ دیگری بدانیم که بعد از اولین تماس؛ نه حرکت کرده است، نه کشیده شده است. ...»

به همین ترتیب، وقتی که ریکوردو یک خط را تعریف می کرد، علاقه مند بود بداند که چگونه هندسه دان ها «در نظریه های خود (که تنها کاری ذهنی است) دقیقاً این تعریف ها را درک می کنند». شک دارم که ریکوردو نیز مانند ما، از تمایزی که خودش بین ماهیت مجرد نظام هندسه دان ها و دنیای واقعی صنعتگران به عنوان یک مدل قائل بود خرسند باشد. با این حال، این تمایز نشان دهندهٔ توجهی بود که با آن، به وظیفهٔ خود نزدیک شد.

در انتهای دیگر طیفی که ریکوردو در آن قرار دارد، نمونه ای است که اخیراً دیده ام. در این نمونه کوشیده بودند که از طریق قالب مدار کردن، به اعداد گنگ عینیت ببخشند؛ اما بین ریاضی مجرد و دنیای واقعی سردرگم شده بودند. در این نمونه آزمونی وجود داشت که در آن توضیح داده شده بود: ساعتی دارای عقربهٔ دقیقه شماری به طول $\sqrt{5}$ سانتی متر و عقربهٔ ساعت شماری به طول ۲ سانتی متر است. سپس از دانش آموزان خواسته شده بود بگویند که فاصلهٔ بین نوک دو عقربه در ساعت های ۱۲، ۶ و ۹ عددی گنگ است یا عددی گویا؟

این سؤال نشان دهندهٔ میزان یک قوهٔ ابتکار عجیب و غریب است و البته نتیجهٔ آن، گنگ تر از اعداد مورد سؤال است. اعداد گنگ برای اندازه گیری در دنیای واقعی نیستند. در واقع، مشکل است تصوّر کنیم که یک اندازهٔ گنگ به معنای فیزیکی آن، چه می تواند باشد. باید پرسید در یک اندازه گیری؛ چه درجه ای از دقّت منطقی است؟ عقربه های دقیقه شمار و ساعت شمار کدام ساعت در یک صفحه حرکت می کنند؟ این نمونه سپس، به ما تلاش بیراهه ای را برای همراه کردن معنی با مفهوم مجرد نشان می دهد که از تقاضای ریاضی برای معنی نتیجه نشده است، بلکه بر اساس باوری شکل گرفته که معتقد است معنا و انگیزه باید از طریق «دنیای واقعی(!)» به عنوان زمینه و قالب استفاده کند. هم چنین، ما نه تنها اکراه داریم که به سمت آن چه که ریکوردو نظام هندسه دان ها می نامد حرکت کنیم که در آن، قطر مربعی به ضلع یک واحد، برابر $\sqrt{2}$ است، بلکه دچار نوعی سردرگمی مطلق بین دنیای واقعی و اندازه گیری درون آن و هندسهٔ صوری می شویم. اجازه بدهید مثال دیگری بزنم. در انگلستان مرسوم است که به وسیلهٔ قرار دادن مسائل هندسی در اندازه های

«دنیای واقعی»، به ریاضی «انگیزه» و «حقیقت» بیفزایند. در نتیجه، سؤالی مانند «آیا مثلثی با اضلاع ۱۲، ۱۲ و ۱۷ قائم الزاویه است؟» با سؤالی مانند: «آیا مثلثی با اضلاع ۱۲ سانتی متر، ۱۲ سانتی متر و ۱۷ سانتی متر قائم الزاویه است؟» جایگزین می شود. با این حال، تفاوت عظیمی بین این دو سؤال هست. جواب سؤال اول، یک «خیر» صریح است، اما سؤال دوم بسیار سخت تر است. در دنیای واقعی، منظور ما از «طول ۱۲ سانتی متری» یا «زاویهٔ قائمه» چیست؟ این بار، پاسخ روشن، «کم تر یا بیش تر» است، اما محاسبهٔ احتمال آن ساده نیست و بستگی به این دارد که در این مسیر، چه مفروضاتی داشته ایم؟

چنین سردرگمی هایی تنها منحصر به کتاب های درسی مدرسه ای نیست. برای مثال، من در بعضی نوشته ها دربارهٔ «جایز الخطا» بودن ریاضی نیز با این سردرگمی ها مواجه شده ام. بسیاری از شما با مسألهٔ جمع دو عدد A و B که مثلاً هر یک ۶۰ یا همین حدود رقم دارند و تنها با رقم های ۱ و ۷ ساخته شده باشند، آشنا هستید. نویسندهٔ این مسأله می پرسد:

«ما هیچ جواب قطعی که به وسیلهٔ آن بتوانیم این جمع را کنترل یا تصدیق کنیم، در اختیار نداریم ... پس چه چیزی باقی می ماند تا با آن، قطعیتی را که ریاضی طالب آن است، نشان دهیم؟» (لرمن[۳۱] (۱۹۹۴، ص ۲۰۳). به نظر من، در این جا هم دوباره مسائل و مشکلاتی که توسط انجام ریاضی در دنیای واقعی ایجاد می شوند، با مشکلاتی که ذاتی خود ریاضی هستند، اشتباه شده است. اگر A+B به طور یکتا تعریف نشوند، پس همهٔ ما می توانیم به خانه هایمان برگردیم و تدریس ریاضی را رها کنیم! ممکن است محدودیت های فیزیکی مانع این شوند که من دو عدد را به طور صحیح با هم جمع کنم، و ممکن است باعث شک من دربارهٔ روایی اثباتی گردد که منجر به انجام صحیح آن محاسبه می شود (اگرچه برای من مشکل است که تصور کنم چگونه چنان اثباتی ممکن است مطرح شود). ولی به هرحال، من مطمئن هستم که A+B زوج است و AB فرد است و نتایج مشابه دیگری هم به دست می آید. به نظر می رسد که تعطیل کردن «قطعیت» به دلیل محدودیت های انسانی خودمان، تنها یک قدم با آن چه که «لوئیس کارول»[۳۲] می گوید فاصله داشته باشد:

ملکهٔ سفید سؤال کرد: «یک به اضافهٔ یک به اضافهٔ یک به اضافهٔ یک به اضافهٔ یک به اضافهٔ یک به اضافهٔ یک به اضافهٔ یک به اضافهٔ یک به اضافهٔ یک چه می‌شود؟»

آلیس جواب داد: «من نمی‌دانم، حساب از دستم در رفت.»

ملکهٔ قرمز میان حرف دوید و گفت: «او جمع کردن بلد نیست.»

آلیس از توی آینه، ۱۸۷۱ [۳۳]

به هر حال، این بحث به نوعی مرا از موضوع اصلی دور کرد. پس اجازه بدهید با جمع بندی بعضی از نکاتی که می خواستم مطرح کنم، صحبت خود را پایان دهم:

اول، تدریس ریاضی ما مانند خودِ ریاضی، باید بر اساس عقل سلیم بنا شود.

اگرچه همان طور که شاهد بودیم، عقل سلیم اندیشه ای مبهم و غیرساختاری است، ما باید مطمئن شویم که دانش آموزان ریاضی را نه فقط به عنوان توسیع عقل سلیم، بلکه به عنوان یک دیسیپلین ساختاری و سازمان دهی شده که بر اساس نتایج و تکنیک های مشارکتی و پذیرفته شده ساخته شده است، می بینند.

دوم، دیر یا زود نتایج و تکنیک های «در میان گذاشته شدهٔ» ریاضی بر عقل سلیم برتری می یابند. لازم است نسبت به این موضوع آگاه باشیم و اطمینان یابیم که دانش آموزان به طور شایسته برای این انتقال آمادگی پیدا کرده اند و مراقب باشیم که این انتقال [و جابه جایی] صادقانه حاصل شود؛ نه آن که با گفتن نیمی از حقیقت، به بیراهه کشانده شود.

سوم، عقل سلیم ریشه در تجارب روزانه دارد. وقتی که از عقل سلیم در تدریس خود استفاده می کنیم، باید بدانیم که تفاوت چشمگیری بین این دنیا و دنیایی که ریاضی دان ها خلق کرده اند، وجود دارد. توجه کافی لازم است تا اطمینان یابیم که دانش آموزان توسط [این تفاوت]، سردرگم نمی شوند.

منبع:

Howson, G. (1998). ***Mathematics and common sence***. In C, Alsin et al. (Eds.) 8th International Congress on Mathematics Education selected Lectures. PP. 257-269 Published by S. A. E.M 'THALES',.

زیرنویس‌ها:

1. Mathematics and common sense
2. Keitel et al
3. Basic Components of Mathematics Education for Teachers Project
4. Hoyles, kilpatrick and skovsmose
5. Meaning
6. China Lectures
7. Mathematics: The loss of certainty
8. Frend

۹ ـ فرند از شغل معلّمی در کمبریج بر کنار شد؛ البته نه به خاطر این که اعداد منفی را باور نداشت، بلکه به خاطر باورهای مذهبی غیر ارتدوکس (غیر بنیادگرای) خود: او به عنوان یک موحّد، به تثلیث مقدّس اعتقاد نداشت. بعدها زمانی که او درملاءعام جنگ بر علیه فرانسه را محکوم کرد، از دانشگاه اخراج شد. کمبریج آمادگی تساهل

و تسامح نسبت به تفکرات غیربنیادگرای ریاضی را داشت، اما اختلاف عقیده در مسائل مذهبی یا سیاسی را تحمل نمی کرد (پانویس در اصل مقاله است).

۱۰ـ در اوایل قرن نوزدهم، بسیاری از مؤلفان انگلیسی به اعداد منفی عنوان «اعداد موهومی» می دادند. این روزها، اعداد منفی جزئی از «دانش بومی» شده اند، در نتیجه می توان وزن بیش تری به ادعای «پُل لانگوین» (Paul Langevin) داد که: «ملموس و مجسم همان تجریدی است که به وسیلهٔ استفاده و به کارگیری، با آن آشنایی پیدا کرده ایم.»

11. Boeotians
12. Du Bois - Reymond
13. Ethnomathematics
14. Second International Mathematics Study (SIMS)
15. English National Curriculum
16. Third International Mathematics and seience study (TIMSS)
17. Lazare Carnot
18. Skovsmose
19. Boudieu
20. Spheres of Practice
21. Greeno
22. Number sence
23. Eisenberg
24. Arcavi

۲۵ـ در کتاب های درسی دوره های ابتدایی و راهنمایی در ایران، به جای پیتزا بیشتر از تمثیل دایره یا کیک برای تدریس کسر استفاده می شود.

26. Rowe
27. W.H. Auden
28. C. V. Durel

دورل بر تاریخ به عنوان یک شاهد قوی برای نشان دادن سختی های مفاهیم مورد بحث تأکید کرد و یکی از دلایلی که موجب شده است تا در سال های اخیر، معرفی اعداد منفی به تعویق بیفتد، ضرورت ایجاد آمادگی بیش تر برای درک سختی ها و نظریه های متضمن آن است. او خود قویاً اعتقاد داشت که «این یک خطای غیر قابل بخشش است که به دانش آموزان طوری تدریس کنیم که مجبور باشند از نمادها بدون همراهی با معانی، استفاده کنند». به دلیل این اعتقاد، دورل علاقه داشت، بین یک عدد منفی علامت دار و یک عمل گر تفریق در عددهای بدون علامت تفاوت قایل شود (تنها یکی از کتاب های درسی چنین روشی را انتخاب کرده بود). رویکردی که دورل برای معرفی اعداد جهت دار و جمع و تفریق آن ها پیشنهاد کرد، همان رویکردی است که امروزه محبوب ترین است: درجهٔ حرارت، به دست آوردن، از دست دادن، و غیره.

در این جا، او علاقه مند بود بر این حقیقت تأکید کند که قوانین علامت ها، تعریف هایی هستند که برای برقراری تناظر بین فرآیندهای مشابه در دستگاه های مختلف اعداد طراحی شده اند. سؤال اثبات در این جا مطرح نمی شود؛ اگرچه در ارتباط با پیامدهای این قوانین مطرح می شود، اما چنین کاری برای متخصصان است».

در مورد ضرب کردن، دورل پیشنهاد کرد که ضرب را با توجه به تکرار جمع شروع کنیم؛ مانند: ۳×(۵-). «این ثابت نمی کند که ۱۵- =۳×(۵-)، بلکه صرفاً موضوع را خیلی دست و پا شکسته می کند و نشان می دهد که چه نوع تعریفی بیش از سایر تعریف ها مفید است.» توجیهات بعدی، برای رسیدن به یک تعریف، از طریق مثال های زمینه مدار، به جستجو می پردازد. در ادامه، می خواهیم اعداد منفی را در فرمول های فیزیکی جایگزین کنیم که متضمن حاصل ضرب هستند. دورل پیشنهاد کرد که سؤال های ساده ای مانند بالا رفتن درجهٔ حرارت در یک آبگرمکن که با نرخ ثابت ایجاد می شود. او سپس توصیه کرد که از دانش آموزان بخواهیم، وقتی که هیچ یک، یکی یا دو متغیر مقدارهای منفی دارند، این فرمول ها را تفسیر کنند و سپس توصیهٔ او عملی شد.

29. Recordo
30. Pathway of Knowledge
31. Lerman
32. Lewis Carroll

نویسندهٔ معروف کتاب «آلیس در سرزمین عجایب» که یک دبیر ریاضی بود.

۳۳ـ کنایهٔ لوئیس کارُل به طور طبیعی حاوی یک نکتهٔ مهم است. یکی از همکاران می گفت که ممکن است، در این جا کارُل تحت تأثیر افکار «پی آنو» بوده است، اما چون پی آنو اصول موضوع خود را تا سال ۱۸۹۲ منتشر نکرد، این حدس محتمل نیست. آیا ممکن است در این بخش که نقل قول بالا از آن گرفته شده است، کارل روش ساده انگارانه ای که توسط آن و پس از برقراری طرح «پرداخت بر اثر نتیجه» در سال ۱۸۶۲، مؤثر بودن معلم و میزان موفقیت دانش آموز اندازه گیری می شد را به مسخره گرفته باشد؟ اگر چنین باشد، انسان فقط باید در شگفت باشد که کارُل در مورد توسعه های آموزشی در انگلستان از ۱۹۸۸ به بعد، چه ممکن بود بگوید!

مراجع:

Arcavi, A., 1994, Symbol sense: Informal Sense-making in Formal Mathematics, **For the Learning of Mathematics, 14** (3), 24 - 35

De Morgan, A., 1831, **On the Study and Difficulties of Mathematics,** London

Durell, C. V., 1931, **The Teaching of ElementaryAlgebra**

Bell,Eisenberg, T., 1992, On the development of asense for functions, in Harel, G. and Dublinsky, E, (eds), **The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy,** MAA Notes, Vol 25, Mathematical Association of America, 153-174

Freudenthal, H., 1991, **Revisting Mathematics Education (The China Lectures),** Kluwer

Greeno, J.G., 1991, Number sense as Situated Knowing in a Conceptual Domain, **JRME, 22,** 170-218

Howson, A.G., 1982, **A History of Mathematics Education in England,** Cambridge University Press

Howson, A.G., 1995, **Mathematics Textbooks: a comparative study of Grade 8 texts,** Pacific Educational Press

Howson, A.G., to appear, Meaning' and School Mathematics" in Hoyles, C., Kilpartrick, J. and Skovmose, O.

Keitel, C, et al, (eds), 1996, **Mathematics (Education) and Common Sense,** Free University, Berlin

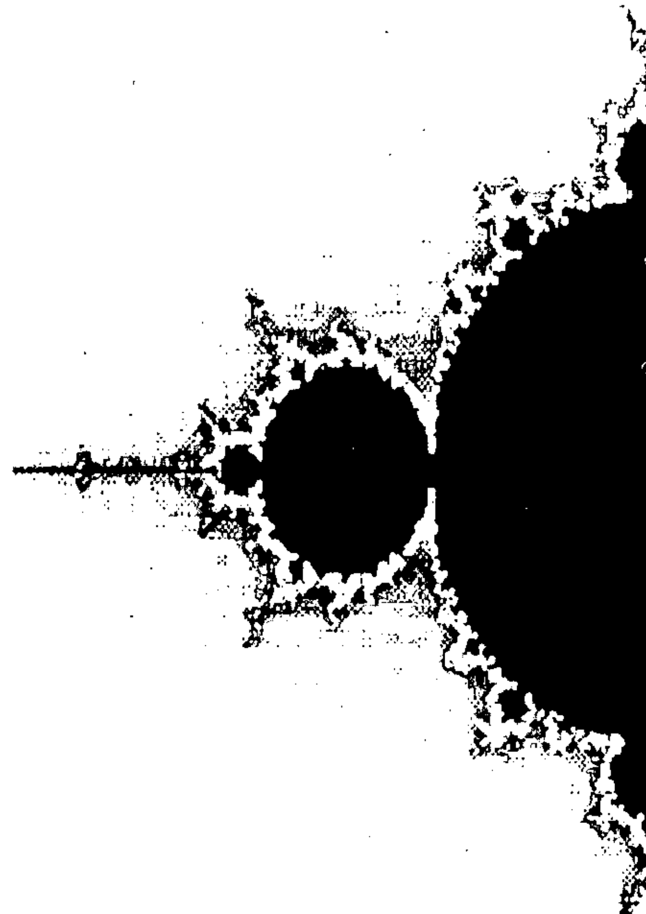
Kline, M., 1972, **Mathematical Thought from Ancient to Modern Times,** Oxford University Press

Kline, M., 1980, **Mathematic: the loss of Certainty,** Oxford University Press

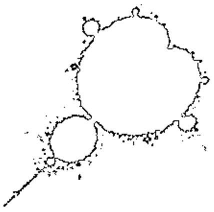
Rowe, D.E., 1994, The Philosophical Views of Klein and Hilbert", in Chikara, S. et al (eds), **The Intersection of History and Mathematics,** Birkhäuser, 187-202

Lerman, S., (de), 1994, **Cultural Perspectives on the Mathematics Classroom,** Kluwer

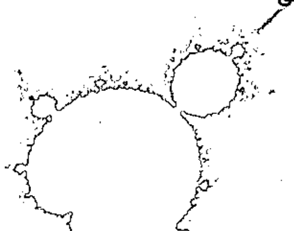
■



مجموعهٔ مندلبرات



مجتبی عمّاری الهیاری
عضو هیأت علمی دفتر گسترش آموزش عالی



مجموعهٔ مندلبرات:

«مندلبرات»[1] در سال ۱۹۸۰ تصمیم گرفت رفتار تابع $f(x) = x^2 + c$ را تحت تکرار[2]، وقتی که ثابت c تغییر می کند و x و c هر دو مختلط هستند، بررسی کند. نتیجهٔ بررسی های انجام شده توسط وی، به زیرمجموعه های زیبا و پیچیده ای از صفحه منجر شد که قبل از وی «بروکس»[3] و «ماتلسکی»[4] در سال ۱۹۷۹ توسط کامپیوتر به دست آورده بودند. در این جا ما آن را **مجموعهٔ مندلبرات** می نامیم و توسط یک برنامهٔ کامپیوتری که به زبان «بیسیک» نوشته شده است، چگونگی تولید آن را ارائه می دهیم.

مختصری دربارهٔ «اعداد مختلط»[5]

اعداد مختلط، اعدادی به صورت $a + bi$ هستند که در آن، a و b اعدادی حقیقی و $i^2 = -1$ است. این اعداد در دههٔ ۱۵۰۰ برای نوشتن جواب های معادلات معرفی شدند. برای مثال، معادلهٔ $x^2 + 1 = 0$ دارای هیچ جواب حقیقی نیست؛ بدین دلیل که مربع هر عدد حقیقی نامنفی است. بنابراین، به طرز هوشمندانه ای با معرفی عدد i به عنوان جواب این معادله، مشکل را برطرف می کنیم و عدد i را گاهی اوقات «موهومی»[6] می نامیم. جمع و تفریق و ضرب اعداد مختلط به طور طبیعی از روش های معمول حساب ناشی می شوند. مثلاً:

$$(3+4i)+(5-2i) = (3+5)+(4-2)i = 8+2i$$
$$(3+4i)-(5-2i) = (3-5)+(4-(-2))i = -2+6i$$
$$\begin{aligned}(3+4i)(5-2i) &= 3.5+3(-2)i+4i.5+4i(-2i)\\ &= 15-6i+20i-8i^2 = 15+(20-6)i-8(-1)\\ &= (15+8)+14i = 23+14i\end{aligned}$$

با کمی دقت متوجّه می شویم که هر عدد حقیقی را نیز می توان به عنوان یک عدد مختلط درنظر گرفت؛ به این صورت که بخش موهومی آن را صفر فرض می کنیم. تقسیم یک عدد مختلط بر یک عدد حقیقی کار بسیار ساده ای است. مثلاً:

$$(3+4i)/2 = 3/2+4/2i = 3/2+2i$$

اما تقسیم یک عدد مختلط بر یک عدد مختلط غیرحقیقی به کمی محاسبه نیاز دارد. برای این منظور، «مزدوج»[7] یک عدد مختلط $a + bi$ را به صورت $\overline{a+bi}$ نمایش می دهیم و برابر $a - bi$ تعریف می کنیم. علت این تعریف از این جا ناشی می شود:

(به عنوان تمرین، درستی این فرمول را بررسی کنید.) $(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$ که عددی است حقیقی (بخش

موهومی آن صفر است). اکنون معکوس عدد مختلط $a+bi$ را به صورت زیر محاسبه می کنیم:

$$\frac{۱}{a+bi}=\frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{a-bi}{a^{۲}+b^{۲}}$$

می بینید که دوباره به تقسیم یک عدد مختلط بر یک عدد حقیقی رسیدیم که به سادگی نتیجهٔ زیر را به دست می آوریم:

$$\frac{۱}{a+bi}=\frac{a}{a^{۲}+b^{۲}}-\frac{b}{a^{۲}+b^{۲}}i$$

حالا اگر دو عدد مختلط غیرحقیقی برهم تقسیم شوند، با توجه به محاسبات فوق خواهیم داشت:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^{۲}+d^{۲}}$$
$$=\frac{ac+bd}{c^{۲}+d^{۲}}+\frac{bc-ad}{c^{۲}+d^{۲}}i$$

برای مثال:

$$\frac{۳+۴i}{۵-۲i}=\frac{(۳+۴i)(۵+۲i)}{(۵-۲i)(۵+۲i)}=\frac{۱۵+۶i+۲۰i+۸i^{۲}}{۲۵+۴}$$
$$=\frac{۷+۲۶i}{۲۹}=\frac{۷}{۲۹}+\frac{۲۶}{۲۹}i$$

که عددی مختلط است و بخش حقیقی آن $\frac{۷}{۲۹}$ و بخش موهومی اش $\frac{۲۶}{۲۹}$ است.

اعداد مختلط به طور طبیعی به عنوان جواب های معادلات ظاهر می شوند. برای مثال جواب های درجهٔ دوم $ax^{۲}+bx+c=۰$ زمانی که $b^{۲}-۴ac<۰$ است، به صورت مختلط خواهند بود.

بنابر قضیهٔ اساسی جبر: «هرچند جمله ای به صورت $x^{n}+a_{n-۱}x^{n-۱}+\cdots+a_{۱}x+a_{۰}$ با ضرایب حقیقی یا مختلط را می توان به صورت زیر تجزیه کرد:

$$x^{n}+a_{n-۱}x^{n-۱}+\cdots+a_{۱}x+a_{۰}=(x-w_{۱})(x-w_{۲})\cdots(x-w_{n})$$

که در آن، w_i ها به ازای $۱\le i\le n$ همگی مختلط هستند.» (توجه کنید، اعداد حقیقی، اعداد مختلطی هستند که بخش موهومی آن ها صفر است. بنابراین ممکن است، تعدادی از w_i ها حقیقی نیز باشند.)

با بیانی دیگر، قضیهٔ اساسی جبر اذعان می دارد که هرچند جمله ای از درجهٔ n اگر مساوی صفر قرار داده شود (معادلهٔ درجهٔ n)، حتماً دارای n جواب مختلط خواهد بود (که برخی از آن ها ممکن است، حقیقی باشند).

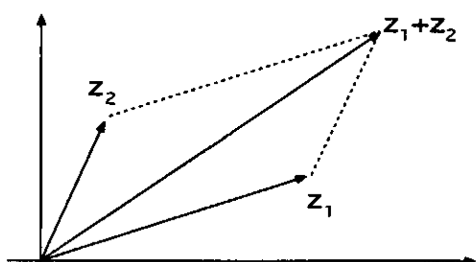
مثلاً، معادلهٔ $x^{۴}+۴x^{۲}+۴=۰$ دارای هیچ جواب حقیقی نیست. این معادله را می توان به صورت زیر تجزیه کرد:

$$x^{۴}+۴x^{۲}+۴=(x^{۲}+۲)^{۲}=(x-i\sqrt{۲})^{۲}(x+i\sqrt{۲})^{۲}=۰$$

بنابراین، معادلهٔ فوق دارای جواب های $i\sqrt{۲}$ و $-i\sqrt{۲}$ و هر دو از درجهٔ تکرار ۲ است.

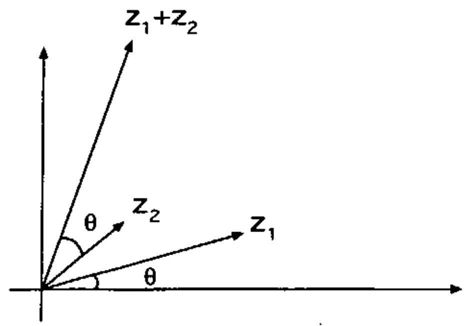
قضیهٔ اساسی جبر در سال ۱۷۹۹ توسط ریاضی دان بزرگ آلمانی «کارل فریدریش گاوس»[۸] به اثبات رسید. اثباتی که گاوس از این قضیه ارائه داد، کمک زیادی به تعبیر هندسی اعداد مختلط کرد. ایده ای که این ریاضی دان کبیر در این قضیه به نمایش گذاشت، در همان زمان توسط ریاضی دانان دیگری چون «جین روبرت آرگاند»[۹] و «گاسپاروسل»[۱۰] در همان سال و «جان والیس»[۱۱] صد سال زودتر نیز ارائه گردیده بود.

این ایده عبارت است از: درنظر گرفتن عدد مختلط $a+bi$، به عنوان نقطهٔ (a, b) در صفحهٔ «دکارتی». نکتهٔ جالب تر و زیبای این تناظر، تعبیرهای هندسی جمع و ضرب اعداد مختلط است. جمع دو عدد مختلط در صفحه با ترسیم برداری از $(۰,۰)$ به نقطهٔ متناظر با جمع دو عدد به دست می آید که همان قطر متوازی الاضلاعی است که توسط دو عدد ساخته می شود:



(شکل ۱ ـ نمایش جمع دو عدد مختلط در صفحه)

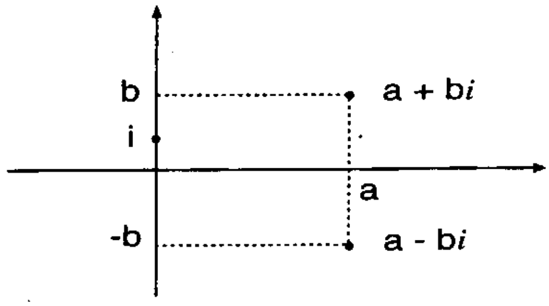
ضرب دو عدد مختلط نیز متناظر با نقطه ای در صفحه است که فاصله اش تا $(۰,۰)$ برابر حاصل ضرب فاصله های دو عدد تا $(۰,۰)$ و زاویهٔ آن با جهت مثبت محور xها، در خلاف جهت عقربه های ساعت، برابر مجموع زاویه های دو عدد می باشد (این موضوع را می توانید به عنوان تمرین اثبات کنید).



(شکل ۲ ـ نمایش حاصل ضرب دو عدد مختلط در صفحه)

وقتی چنین تناظری بین نقاط واقع در صفحه و اعداد مختلط برقرار می‌شود، صفحه را «صفحهٔ مختلط»[۱۲] می‌نامیم.

به عنوان یک مثال، جای مزدوج اعداد مختلط را روی صفحهٔ مختلط در شکل ۳ مشاهده می‌کنید:



(شکل ۳)

تبیین مجموعهٔ مندلبرات

بحث را با یک پرسش آغاز می‌کنیم. به ازای هر عدد مختلط C، رفتار حدّی دنبالهٔ زیر چگونه است؟

$$z_0 = 0\ ,\quad z_{n+1} = z_n^2 + c\ .$$

(حرف z اغلب برای نمایش یک عدد مختلط به کار می‌رود. بنابراین، در این جا $z = x + yi$ است که در آن x و y اعدادی حقیقی هستند).

اگر قرار دهیم: $f_c(z) = z^2 + c$ و ترکیب n بار تابع f_c را با خودش با f_c^n نمایش دهیم، یعنی:

$$f_c^n(z) = f_c\big(f_c(\cdots(f_c(z))\cdots)\big)$$

دنبالهٔ فوق به صورت زیر درمی‌آید:

$$f_c(0) = 0^2 + c = c$$
$$f_c^2(0) = f_c(f_c(0)) = f_c(c) = c^2 + c$$
$$f_c^3(0) = f_c(f_c(f_c(0))) = f_c(c^2 + c) = (c^2 + c)^2 + c$$
$$\vdots$$
$$f_c^n(0) = z_n$$
$$\vdots$$

در نتیجه می‌توانیم پرسش اصلی این بخش را به صورت زیر بنویسیم:

به ازای هر عدد مختلط C، آیا دنبالهٔ:

الف) $f_c(0)\ ,\ f_c^2(0)\ ,\ f_c^3(0)\ ,\ f_c^4(0)\ ,\ \ldots$

سرانجام به بی‌نهایت می‌رود (به اعداد خیلی بزرگ میل می‌کند) یا به آرامی روی مقدار کوچکی باقی می‌ماند؟

اندازهٔ عدد مختلط $a + bi$ را قدرمطلق آن می‌نامیم که برابر است با فاصلهٔ نقطه (a, b) تا $(0, 0)$ در صفحهٔ مختلط.

بنابراین: $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$

می‌توان ثابت کرد که در دنبالهٔ الف $(\{f_c^n(0)\})$، به محض این که قدرمطلق هر یک از اعداد از ۲ تجاوز کند، دنبالهٔ خیلی سریع به بی‌نهایت میل می‌کند.

تعریف: مجموعهٔ مندلبرات M عبارت است از مجموعهٔ همهٔ اعداد مختلط C به طوری که برای آن‌ها $\{f_c^n(0)\}$ به بی‌نهایت نرود (به عبارت دیگر $\{f_c^n(0)\}$ کراندار باشد).

بنابراین عدد مختلط C در M واقع است، هرگاه دنبالهٔ:

$$c\ ,\ c^2 + c, (c^2 + c)^2 + c\ , ((c^2 + c)^2 + c)^2 + c\ , \ldots$$

کراندار باقی بماند.

تمرین: اگر C در M باشد. آن‌گاه هر عدد در دنبالهٔ $\{f_c^n(0)\}$ دارای قدرمطلق کوچک‌تر یا مساوی ۲ خواهد بود.

برای مثال، فرض کنید: $c = 0$. درنتیجه: $f_0(0) = 0^2 + 0 = 0$ و از این رو: به ازای هر n $f_0^n(0) = 0$ و بنابراین $0 \in M$.

به ازای $c = 1$، دنبالهٔ $\{f_1^n(0)\}$ عبارت خواهد بود از:

$$1, 1^2 + 1 = 2, 2^2 + 1 = 5\ ,\ 5^2 + 1 = 26, \ldots$$

که واضح است سریعاً به سمت اعداد خیلی بزرگ میل می‌کند، درنتیجه: $1 \notin M$.

دو مثال دیگر را نیز مورد بررسی قرار می‌دهیم:

$$c = -1$$
$$-1, (-1)^2 + (-1) = 0\ ,\ 0^2 + (-1) = -1\ ,\ (-1)^2 + (-1) = 0, \ldots$$

بنابراین جملات دنبالهٔ $\{f_{-1}^n(0)\}$ دائماً بین ۰ و ۱- درحال تناوب است و درنتیجه: $-1 \notin M$.

$$c = \frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{4}, \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} = \frac{5}{16}, \left(\frac{5}{16}\right)^2 + \frac{1}{4} = \frac{89}{256}, \ldots$$

به نظر می‌رسد که جملات این دنباله کم‌تر از $\frac{1}{2}$ باقی می‌مانند و با توجه به این که اگر z عددی حقیقی و مثبت باشد که $z < \frac{1}{2}$، آن‌گاه: $z^2 + \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ و در نتیجه: $\frac{1}{4} \in M$.

به عنوان تمرین می‌توانید نشان دهید که ۲- و i نیز در M واقع هستند.

با توجه به مثال‌های فوق نتیجه می‌شود که مجموعهٔ مندلبرات زیرمجموعه‌ای واقعی از صفحهٔ مختلط است. از دیدگاه تئوری، مجموعهٔ مندلبرات را این گونه می‌توان ترسیم کرد که هر نقطه واقع در آن را با رنگ سیاه، مشخص می‌کنیم و بقیه را دست نخورده باقی می‌گذاریم.

ولی درعمل، بی‌نهایت نقطه مثل C موجود است که باید بررسی شود، که آیا در M هست یا نه؟

این بررسی برای برخی از نقاط که برای آن‌ها $|f_c^n(0)|$ به نظر نمی‌رسد که بزرگ شود بسیار دشوار می‌شود؛ اگرچه هیچ دلیل محکمی نیز برای این موضوع که سرانجام بزرگ می‌شوند یا نه، در دست نداریم. شاید به همین دلیل باشد که مجموعهٔ مندلبرات را به صورت زیر نیز توصیف کرده‌اند:

«پیچیده‌ترین شیئ ریاضی که تاکنون دیده شده است.»

مجموعهٔ مندلبرات در سال ۱۹۲۰ توسط ریاضی‌دانان فرانسوی «پیرفاتو»[13] و «گاستون ژولیا»[14] نیز بررسی شد، ولی این مندلبرات (محقق کامپیوتر در آی بی ام) بود که در دههٔ ۱۹۸۰، پدیدهٔ فراکتال در طبیعت را بررسی کرد و تصمیم گرفت یک ترسیم کامپیوتری از M ارائه دهد. نتیجه‌ای که او به دست آورد، اعجاب‌انگیز بود. وی با کمک کامپیوترهای مجهّز آی بی ام در آن زمان، به مجموعه‌ای دست یافت، که یک فراکتال قابل توجّه با کپی‌های کوچکی از کل مجموعه بود که توسط بزرگنمایی‌های مجموعه دیده می‌شوند.

بخش مناسبی از صفحهٔ مختلط را به یک شبکه از مربع‌های کوچک تقسیم و آن را با شبکه‌ای از «نقاط نورانی»[15] روی صفحهٔ نمایش کامپیوتر خود متناظر می‌کنیم. هرگاه دنبالهٔ $\{f_c^n(0)\}$، متناظر با C‌ای باشد که این C در گوشهٔ سمت چپ پایینی **نقطهٔ نورانی** واقع است و قدرمطلق آن قبل از نوشتن تعدادی از تکرارها از ۲ تجاوز کند، یک نقطهٔ نورانی را رنگ نشده رها می‌کنیم. این موضوع عدم تعلق C به M را تضمین می‌کند.

هرگاه دنبالهٔ $\{f_c^n(0)\}$، قبل از مبادرت به نوشتن چند تکرار، از ۲ بزرگ‌تر نشد، کامپیوتر حدس می‌زند که این C احتمالاً متعلق به M است و در نتیجه، **نقطهٔ نورانی** مربوط را با رنگ سیاه، رنگ‌آمیزی می‌کند. برنامه‌نویس از قبل پیش‌بینی می‌کند که کامپیوتر، قبل از اعلام تعلق C به M، چندبار تکرار را انجام دهد. (البته تکرار تا جایی انجام می‌شود که قدرمطلق اعداد به دست آمده در دنباله، هیچ‌گاه از ۲ بیش‌تر نشود.)

اگر حداکثر تعداد تکرارها را خیلی کوچک بگیریم (مثلاً ۲۰)، آن‌گاه خیلی از **نقاط نورانی** را اشتباهی رنگ‌آمیزی می‌کنیم؛ زیرا بسیاری از اعداد C موجودند که به ازای آن‌ها دنبالهٔ $\{f_c^n(0)\}$ حداقل برای ۲۰ جملهٔ اول کوچک باقی می‌ماند، ولی بعد بزرگ می‌شود.

از طرف دیگر، اگر حداکثر تعداد تکرارها را خیلی بزرگ بگیریم (مثلاً ۵ هزار)، آن‌گاه وقت بسیار زیادی از کامپیوتر را روی نقاطی که به M تعلق دارند، تلف می‌کنیم؛ زیرا فقط برای یک مجموعهٔ خیلی تُنُک (پراکنده) ازنقاط نزدیک به مرز M است که به تکرارهایی با بیش از ۵ هزار در دنبالهٔ $\{f_c^n(0)\}$ نیاز داریم.

این موضوع دانسته شده است که M در مربع $-2 < x < 0/5$ و $-1/25 < y < 1/25$ قرار می‌گیرد. فرض کنید بخواهیم این مربع را به یک شبکهٔ 200×200 تقسیم کنیم. طول ضلع هر یک از مربع‌ها در این شبکه برابر $\frac{2/5}{200} = 0/0125$ خواهد بود. در این صورت ما باید ۴۰۰۰۰ مقدار $c = a + bi$ را مورد بررسی قرار دهیم، که در آن‌ها:

$$a = -2, -2+0/0125, -2+0/025, \dots, -2+199\times 0/0125 = 0/4875$$

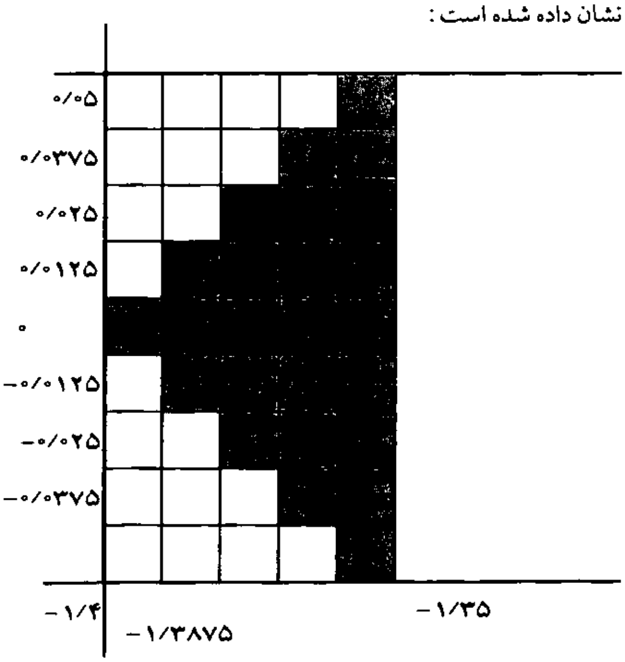
و

$$b = -1/25, -1/25+0/0125, -1/25+0/025, \dots, -1/25+199\times 0/0125 = 1/2375$$

برای هر یک از این ۴۰۰۰۰ مقدار برای C محاسبهٔ دنبالهٔ $\{f^n(0)\}$، متوقف خواهد شد، هرگاه قدرمطلق هر یک از اعداد دنباله از ۲ بیش‌تر شود و یا هرگاه، به حداکثر تکرار از قبل تعیین شده (مثلاً ۱۳۰) برسیم.

(هرگاه به بیش‌ترین تعداد تکرار، یعنی ۱۳۰ برسیم، نقطهٔ نورانی مربوطه را رنگ‌آمیزی می‌کنیم.)

در امتداد مرز مجموعهٔ مندلبرات زائده‌های کوچکی موجودند که شکل هرکدام از آن‌ها بسیار شبیه به کل مجموعه مندلبرات است. بسیاری از این زائده‌ها (جوانه‌ها) خیلی کوچک‌تر از $0/0125 \times 0/0125$ هستند. این موضوع را نمی‌توان توسط کامپیوتر دید یا نمایش داد؛ مگر این‌که نقطهٔ گوشه‌ای یکی از مربع‌های شبکه به طور اتفاقی داخل یکی از این زائده‌های کوچک واقع شود. آن‌گاه در این حالت، کل مربع از آن زائده بزرگ‌تر دیده می‌شود. در شکل ۴ بخشی از شبکه‌ای که در فوق توصیف کردیم، نشان داده شده است:



(شکل ۴)

مثلاً در ستون دوم، سه نقطهٔ نورانی وسطی رنگ آمیزی شده اند، زیــرا بــه ازای $c = -۱/۳۸۷۵$ و $c = -۱/۳۸۷۵ \pm ۰/۰۱۲۵i$ ، دنبالهٔ $\{f_c^n(۰)\}$ پس از ۱۳۰ بار تکرار هم چنان کوچک باقی می ماند. در صورتی که اگر $c = -۱/۳۸۷۵ \pm ۰/۰۲۵i$ یا $c = -۱/۳۸۷۵ \pm ۰/۰۳۷۵i$ یا $c = -۱/۳۸۷۵ \pm ۰/۰۵i$ ، آن گاه دنبالهٔ $\{f_c^n(۰)\}$ قبل از ۱۳۰ بار تکرار بزرگ می شود.

برنامهٔ کامپیوتری زیر به شما اجازه می دهد تا M را نمایش دهید و حتی بخش هایی از آن را بزرگ کنید:

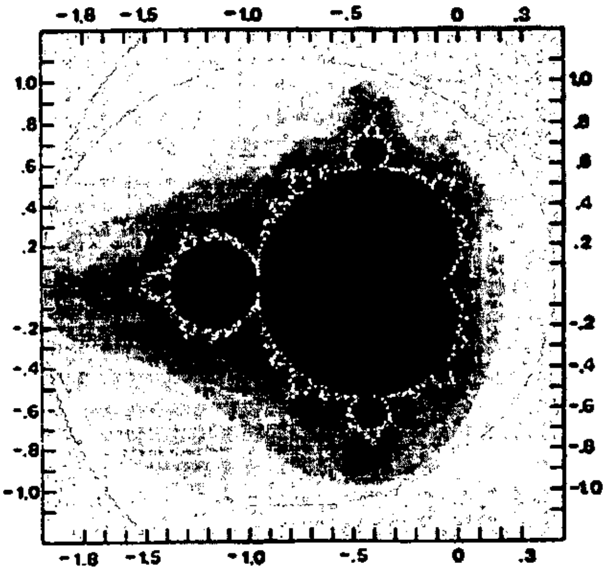
```
DEFDBL C,D,X,Y: DEFINT H, I , J, M, N,V
INPUT "Enter number of Pixels horiz, vert"; H,V
INPUT "Enter GAp... Same for horiz and vert"; DEL
INPUT "Enter Coordinates of Low Point" ; CR, CINIT
INPUT "Maximum number of Itrations"; MAX
SCREEN 1 : CLS: KEYOFF
WINDOW (0,0)-(319,199)
FOR i=1 To H
    CI= CINIT
     FOR J=1    To   V
         Num = 1   : x=0  : y=0
WHILE   x * x +y * y < = 4  AND   NUM<MAX
         x1 = x * x - y *y + CR
          y = 2 * x * y * +CI
          x = x1
          NUM=NUM+1
     WEND
     IF NUM > = MAX  THEN   PSET  (I ,J)
     CI=CI+DEL
   NEXT  J
   CR = CR+DEL
NEXT  I
END
```

خط اول برنامه به این موضوع اشاره دارد که هر متغیری با حروف C، D، x یا y شروع شود، با دقت مضاعف و هر متغیری که با حروف H، I، J، M، N یا V شروع شود، به عنوان یک متغیر صحیح درنظر گرفته می شود. اندازهٔ جهش ها روی هر دو جهت x و y یکی فرض می شود، زیرا در غیر این صورت شکل رسم شده از حالت طبیعی می افتد. در مثالی که پیش تر از آن بحث کردیم، کاربر برنامه می تواند ۲۰۰ و ۲۰۰ را بـرای H و V و ۰/۰۱۲۵ را برای اندازهٔ «جهش»[16]، اعداد ۲- و ۱/۲۵- را برای مختصات نقطهٔ پایینی و سرانجام، ۱۳۰ را برای حداکثر تکرار، وارد کند.

عدد مختلط C که تعلق یا عدم تعلق آن به M در این برنامه مورد بررسی قرار می گیرد، به این صورت شناخته می شود که بخش حقیقی آن را با CR و بخش موهومی آن را با CI نمایش می دهیم، یعنی: $C = CR + CI\,i$. هربار که مقدار J تغییر می کند، به CI به اندازهٔ DEL (اندازهٔ جهش که توسط کاربر مشخص می شود) اضافه می شود. و هربار که مقدار I تغییر می یابد، به CR نیز به اندازهٔ DEL اضافه می شود. از آن جا که هر تغییر I سبب می شود مقادیر J از ابتدا شروع شوند، لذا باید CI هم از ابتدا شروع شود؛ بنابراین عبارت CI = CINIT را در برنامه ملاحظه می کنید (مقدار اولیهٔ CINIT در طول برنامه هیچ تغییری نمی کند). پس برای هر تغییری در I و J، CR و CI در $C = CR + CI\,i$ صدق می کنند و کامپیوتر سعی می کند تا در مورد تعلق یا عدم تعلق C به M تصمیم بگیرد. بدین منظور، با فرض کردن $z = x + y\,i$ و شروع از مقدار صفر و تکرار فرآیند جای گذاری z با $z^2 + C$ ، محاسبات زیر را انجام می دهد:

$$z^2 + C = (x + yi)^2 + (CR + CI\,i)$$
$$= (x^2 - y^2 + CR) + (2xy - CI)\,i$$

به همین دلیل، در عبارات بین WHILE و WEND پرانتزهای فوق محاسبه شده اند. این عبارات آن قدر تکرار می شود تا شرایط WHILE برآورده شود. شرط $x^2 + y^2 \le 4$ برآورده کنندهٔ $|z| \le 2$ و دیگر شرط، تضمین کنندهٔ این است که تعداد تکرارها از حداکثر از پیش تعیین شده، بیش تر نشود. اگر حداقل با یک دستگاه کامپیوتر ۳۸۶ و یک مانیتور حداقل VGA کار می کنید، تصویری مشابه با شکل ۵ خواهید دید.



(شکل ۵)

اگر بخواهیم کل مجموعهٔ مندلبرات را رسم کنیم، با استفاده از خاصیت متقارن بودن آن نسبت به محور افقی، کافی است فقط این مجموعه را در نیم صفحه بالایی رسم کنیم و بنابراین، نقطهٔ نورانی

متناظر با اعداد مختلط $c = a + bi$ و $\bar{c} = a - bi$ دقیقاً به یک صورت رنگ می‌شوند و اگر در برنامه کامپیوتری یکی از این‌ها محاسبه شود، محاسبهٔ دیگری لزومی ندارد. نکتهٔ دیگر در مورد شکل ۵ خرطوم (نوک سمت چپ) مجموعهٔ مندلبرات است. این خرطوم کاملاً همبند است. به عبارت دیگر، اشتراک M با محور x ها دقیقاً برابر تمام اعداد بین ۲- و ۰/۲۵ است.

برای مشاهدهٔ دقیق‌تر ساختمان مجموعهٔ مندلبرات می‌توان با نسبت دادن رنگ به نقاط خارج آن توسط کامپیوتر کمک گرفت. انتخاب رنگ می‌تواند توسط تعداد تکرارها در $\{f_c^n(0)\}$ قبل از بیش‌تر شدن از ۲ صورت گیرد. در شکل ۶، نقاط خاکستری رنگ نقاطی خارج از M هستند که تعداد ۳۰ تکرار یا بیش‌تر برای آن‌ها لازم است تا از ۲ بیش‌تر شوند. در حالی که نقاط سفید رنگی که بقیهٔ ناحیه بیرونی را پر کرده‌اند، متناظر با مقادیری از C هستند که در کم‌تر از ۳۰ تکرار بزرگ می‌شوند.

انتقال تدریجی رنگ‌هایی که نمایش داده می‌شوند، به توان گرافیکی کامپیوتر مورد استفادهٔ ما بستگی دارد و تصاویر زمانی تماشایی‌تر به نظر می‌رسند که از رنگ‌های درخشان و روشن‌تری استفاده شود؛ همانند تصاویر ارائه شده در شکل ۷.

انتخاب تعدادتکرارهایی که باعث تغییررنگ می‌شوند، می‌تواند توسط کاربر برنامه تعیین شود. بدین منظور، برنامه ارائه شده در فوق می‌تواند به صورت زیر اصلاح گردد و در نتیجه برنامه دارای قابلیت انعطاف بیش‌تری برای کاربر خواهد بود. چهارمین INPUT به صورت زیر تغییر می‌کند:

```
INPUT "Three iteration thresholds"; N1, N2, N3
```

کلمهٔ MAX در عبارت WHILE با N3 تعویض شده و عبارت PSET که در اواخر برنامه آمده است، با عبارات زیر تعویض گردد:

```
IF NUM > = N3 THEN
PSET (I,J),3
ELSEIF NUM > = N2 THEN
PSET (I,J),2
ELSEIF NUM > = N1 THEN
PSET (I , J),1
ELSE
PSET(I , J),0
END IF
```

دستور IF فوق در بسته‌های نرم‌افزاری «توربوبیسیک» و «کوئیک بیسیک»[17] قابل اجراست. پس از اجرای برنامه با اصلاح فوق، شما سؤالی به صورت زیر روی صفحهٔ نمایش کامپیوتر خود می‌بینید:

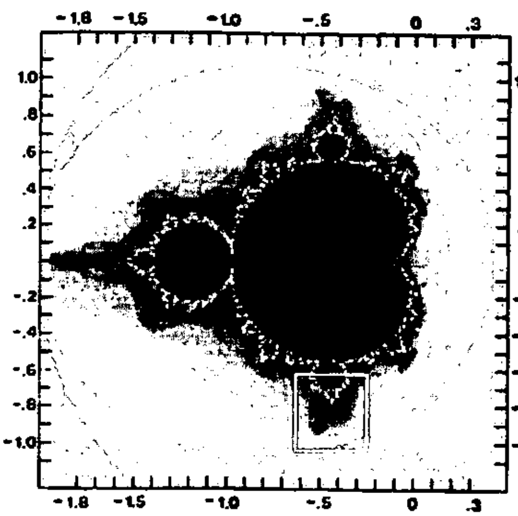
```
Three iteration thresholds?
```

مثلاً می‌توان اعداد ۱۳۰ و ۳۰ و ۱۳ را تایپ کرد.

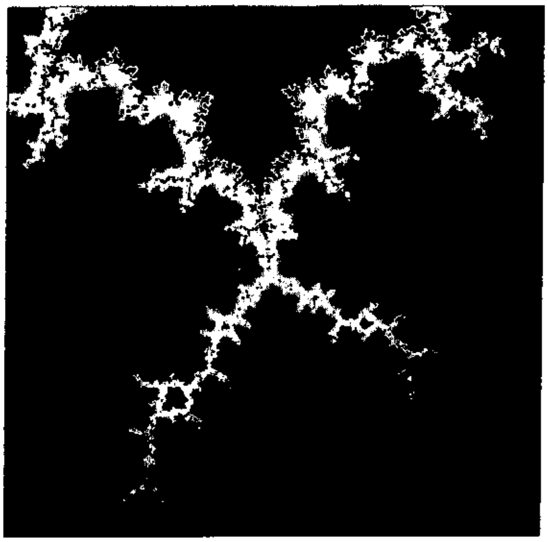
راه دیگر مشاهدهٔ مجموعهٔ مندلبرات با جزئیات بیش‌تر این است که پارامترهای شروع مجدّد برنامه را طوری انتخاب کنیم که بخش کوچک‌تری از کل M را با تفصیل بیش‌تری نمایش دهد. مثلاً فرض کنید بخواهیم، جعبهٔ مشخص شده در شکل ۴ را از نزدیک مورد مشاهده قرار دهیم. این ناحیه شامل اعداد $c = a + bi$ است، که در آن:

$$-۰/۲ \le a \le -۰/۰۵$$
$$۰/۸۳ \le b \le ۱/۰۵$$

هرگاه بخواهیم این ناحیه را روی یک صفحهٔ نمایش با ۲۰۰۰ نقطهٔ نورانی عمودی نمایش دهیم، اندازهٔ جهش‌ها کوچک‌تر خواهد شد، زیرا: $۰/۰۰۱۱ = \frac{۱/۰۵ - ۰/۸۳}{۲۰۰}$ که بیش از ده برابر از اندازهٔ جهش قبلی (۰/۰۱۲۵) کوچک‌تر است. بنابراین یک مربع ۰/۰۱۲۵ × ۰/۰۱۲۵ که قبلاً با یک رنگ پر می‌شد، با اندازهٔ جهش



(شکل ۷)



(شکل ۷)

فعلی به ۱۰۰ مربع کوچک تر تقسیم می شود که هرکدام از این چند مربع به روشی مشابه قبل به طور جداگانه رنگ آمیزی می شـونـد . همان طور که در شکل ۵ دیده می شود ، ناحیهٔ مشخص شده مربـع نیست و از آن جا که باید اندازهٔ جهش در هر دو جهت افقی و عمودی یکسان گرفته شود ، نتیجه می شود که تعداد نقاط نورانی افقی عبارت است از :

$$\frac{-۰/۰۵-(-۰/۲)}{۰/۰۰۱۱}=۱۳۶$$

بنابراین کاربر باید مقادیر زیر را وارد کامپیوتر کند :

H=۱۳۶ , V=۲۰۰ و اندازه جهش = ۰/۰۰۱۱

مختصات نقطـهٔ پایینی نیز عبارت اسـت از : ۰/۲ - و ۰/۸۳ . با داده های فوق برنامه را اجرا می کنیم و رنگ ها را نیز با آستانه های تعویض ۲۰ ، ۵۰ ، ۱۵۰ تغییر می دهیم . دلیل بزرگی این آستانه ها نسبت به قبل این است که کمی به مرز M نزدیک هستیم و درنتیجه ، به الزام بیشتر و دقیق تری نیاز داریم تا تشخیص دهیم ناحیـه ای را باید رنگ آمیزی کنیم یا خیر . خروجـی بـرنـامـه بـا اصـلاحـات فوق الذکر ، در شکل ۷ ارائه شده است .

همان طور که ملاحظه می کنید ، زائـدهٔ کوچکی در شکـل ۶ ، به یک زائده بزرگی در شکـل ۷ تبدیل شده است که خودش شامل تعداد زیادی از زائده های کوچک است . این بزرگ نمایی را با یک محاسبهٔ جدید می توان روی شکل ۷ مجدداً به کار برد .

در سال ۱۹۸۲ ، «آدریـن دودی»[18] از پلی تکنیـک «اکـول»[19] در پاریس و «جان هوبـارد»[20] از دانشگاه «کرنل» ثابت کـردنـد کـه مجموعهٔ «مندلبرات یک «مجموعهٔ «همبند»[21] است! . همبند بودن این مجموعه به این معنی است که آن را نمی توان به دو بخش کامـلاً جدا از هم تقسیم کرد .

زیرنویس ها:

1. B. Mandelbrot
(ریاضی دان امریکایی لهستانی الاصل که به پدرهندسه فراکتالی مشهور است .)
2. Itration
3. Brooks
4. Matelski
5. Complex Numbers
6. Imajinary
7. Conjugate
8. C.F. Gauss (ریاضی دان بزرگ آلمانی که به سلطان ریاضی دانان مشهور است .)
9. Jean- Robert Argand
10. Gaspar Wessel
11. Jone Wallise
12. Complex Plane
13. Pierre Fatou
14. Gaston Julia
15. Pixel
16. Gap
17. QBasie
18. Adrian Douaddy ("Douaddy & Hubbard "Etude dynamique despolynomen complexes, I,II") publ. Math. Orsay, 1984,1985.
19. Ecole
20. John Hubbard
21. Connected Set

مرجع:

1. Douaddy and Hubbard "Etude dynamique despolynomes Complexes, I,II" Publ. Math. Orsay, 1984,1985

استفاده از روبریک‌ها[1] (رهنمودهای صحیح) در دروس ریاضی دبیرستانی

نویسندگان: دنیس ـ آر ـ تامپسون و شارون ـ ال ـ سِنک
مترجم: سپیده چمن‌آرا، مدرس ریاضی

پیشنهادات مطرح شده در «برنامهٔ درسی و استانداردهای ارزیابی برای ریاضیات مدرسه‌ای» (۱۹۸۹ NCTM) و «استانداردهای ارزشیابی برای ریاضیات مدرسه‌ای» (۱۹۹۵ NCTM) معلّم‌ها را به بیشتر گنجاندن تکالیفی در برنامهٔ درسی و تمرینهای ارزشیابی تشویق می‌کند که دانش‌آموزان را وادار به ساختن پاسخها بکند. این روال برخلاف گذشته است که از تکالیفی استفاده می‌شد که پاسخ را نیز در برداشتند، مانند تمرینهای درست ـ غلط یا چند گزینه‌ای. پاسخهایی که توسط دانش‌آموزان ساخته می‌شوند، آنها را قادر می‌سازد که عمق درکشان از مفاهیم ریاضی را نشان دهند و به معلّم‌ها نسبت به دانسته‌های دانش‌آموزان از مفاهیم، شناخت بیشتری می‌دهد. لیکن معلّم‌ها مایل‌اند بدانند زمانی که دانش‌آموزان وادار به نوشتن دربارهٔ ریاضیات می‌شوند یا باید راه حلهایشان را توضیح دهند، چگونه به این پاسخ‌ها نمره بدهند. بنابراین، معلّم‌ها بیشتر باید به موضوعهای وابسته به روبریک‌ها علاقه‌مند شوند. **روبریک** مجموعه‌ای از رهنمودها برای ارزیابی پاسخ‌های دانش‌آموزان به یک یا چند تکلیف است. ***روبریک فراگیر*** طرح جامعی است که سطوح مختلف عملکرد و عواملی که معلّم‌ها هنگام تعیین سطوح عملکرد باید در نظر بگیرند را نشان می‌دهد؛ و ***روبریک تکلیف خاص***، روبریک فراگیر را برای یک تکلیف خاص تفسیر می‌کند و جنبه‌های خاص ریاضی آن تکلیف را که هرسطح از عملکرد را مشخص می‌سازد، تعیین می‌کند. (NCTM ۱۹۹۵؛ انجمن ریاضی کالیفرنیا ۱۹۹۳).

تکالیف باز پاسخ، پاسخ ـ آزاد، پورفولیو[2] مجموعه کارها، یادداشتهای روزانه، تکالیف عملی و پروژه‌ها، همگی را می‌توان به وسیلهٔ روبریکها مورد قضاوت قرار داد. از آنجا که این تکالیف یا دارای چند پاسخ هستند و یا برای به دست آوردن یک پاسخ چندین راه حل دارند، روبریک‌ها برای ارزشیابی آنها مناسبند. ولی اغلب نگرانی‌هایی دربارهٔ روبریکها پیش می‌آید، مثل این که چگونه روبریکهای منصفانه‌ای بسازیم، چگونه آنها را همیشه مورد استفاده قرار دهیم، و چطور این روبریک‌ها سطوح مختلف پیشرفتِ دانش‌آموزان را تمیز می‌دهند. این مقاله به استفاده از روبریکها به عنوان کاربردی برای دروس ریاضی دبیرستانی می‌پردازد.

روبریک‌ها در مقابل بارم‌بندی

دبیران ریاضی مدت طولانی است که از شیوهٔ بارم‌بندی برای نمره دادن به مسأله‌هایی که دانش‌آموزان به وسیلهٔ آنها کارشان را نشان می‌دهند، استفاده می‌کنند. روبریک، با طرح بارم‌بندی تفاوت دارد. بالاخص، بارم‌بندی برپایهٔ تخصیص مورد به موردِ نمره بنا شده به طوری که تخصیص بارم به یک مورد تأثیری روی روش بارم دادن به مورد متفاوت دیگر ندارد. بنابراین، اگر چند تکلیف ۴ نمره‌ای داشته باشیم، گرفتن نمرهٔ ۲ از یک تکلیف احتمالاً دربارهٔ سطح عملکرد نسبت به نمرهٔ ۲ برای تکلیف متفاوت دیگر معنی متفاوتی دارد.

روبریک، با طرح بارم‌بندی تفاوت دارد. بالاخص، بارم‌بندی برپایهٔ تخصیص مورد به موردِ نمره بنا شده به‌طوری که تخصیص بارم به یک مورد، تأثیری روی روش بارم دادن به مورد متفاوت دیگر را ندارد.

در مقابل، یک روبریک همیشه حاوی پایه‌ای مفهومی برای تخصیص نمره به همهٔ تکالیف است. بنابراین، اگر از یک روبریک فراگیر برای چند تکلیف استفاده کنیم، نمرهٔ دو از چهار نمرهٔ یک تکلیف به معنی همان میزان عملکرد نمرهٔ دو از چهار نمرهٔ تکلیف دیگر است. از آنجا که در روبریک فراگیر؛ مقوله‌ها تعریف شده هستند، روبریک‌ها را می‌توان همیشه از تکلیفی به تکلیف دیگر به کار برد. به علاوه؛ اگر همهٔ اشخاص علاقه‌مند، سطوح عملکرد بیان شده توسط روبریک‌ها را بفهمند، آن‌گاه در گفتگو با دانش‌آموزان، والدین، و دیگر معلّم‌ها راحت‌تر

می توان دربارهٔ نمرهٔ بسیاری از تکلیف ها توضیح داد. به بیان دیگر؛ سطح بالا، متوسط، یا پایینِ عملکرد، معانی مشابهی در تکلیف های مختلف دارد. همچنین، از آنجا که سطوح عملکرد بین تکالیف با یکدیگر سازگار هستند، معلّم می تواند نمره های تکلیف ها را با یکدیگر درهم آمیزد تا نمرهٔ کلی آن ارزشیابی را به دست آورد.

انواع روبریک‌ها

در حال حاضر، انواع مختلفی از روبریک ها به کار می رود. یک ***روبریکِ نمره گذار ـ تحلیلی***، در حالت کلی به یک پاسخ از جوانب و ابعاد مختلف نمره می دهد. به عنوان مثال، ممکن است به یک پاسخ برمبنای دانشِ ریاضی دانش آموز، دانشِ وی از راه حل ها، و سطح ارتباط او نمره داد، [۱] و [۲]، یا برای مبنای استفاده از شکلها و مثالها، دقت در توضیح مطالب و برقرار کردن ارتباط ها به وی نمره داد [۱۱]. ممکن است به یک پاسخ براساس سطح فرهنگ فهم دانش آموز از مسأله، سطح طرح ریزی راه حل مسأله، و سطح به دست آمدنِ پاسخ نهایی، نمره تخصیص داد [۴]. تعدادی از ارزشیابی ها که برمبنای تعیین سطح هستند، به ویژه ارزشیابی های کنتاکی، اُرِگُن و وِرمُنت[۳]، از روبریک های نمره گذار ـ تحلیلی استفاده می کنند (که در [۸] و [۹] و [۱۱] دربارهٔ آن صحبت شده است.)

تفاوت ***روبریک نمره گذار ـ کلی*** با روبریک نمره گذار ـ تحلیلی در این است که این روبریک، پاسخ دانش آموز را برمبنای کلیت آن مورد بررسی قرار داده و برمبنای همهٔ پاسخ، نمره ای به آن می دهد. روبریک های نمره گذار ـ کلی اغلب از معیار ۰ تا ۴ یا ۰ تا ۶ استفاده می کنند ([۴]؛ [۶]؛ [۸]؛ [۱۳]). سنک در سال ۱۹۸۵ ([۱۲]) برای ارزیابی توانایی دانش آموزان در نوشتن اثبات های هندسی از روبریک نمره گذار ـ کلّیِ ۰ تا ۴ استفاده کرد. طرح تحقیقاتی ریاضیات مدرسه ای دانشگاه شیکاگو (UCSMP)[۴] روبریک های نمره گذار ـ کلی را برای بررسی پاسخ های دانش آموزان به پرسش های پایان ـ باز دربارهٔ مطالبی از هندسه تا پیش حسابان (precalculus) مورد استفاده قرار داد ([۱۴] و [۱۵]).

برای ما، روبریک های نمره گذار ـ کلی، آسان تر و قابل فهم تر از روبریک های نمره گذار ـ تحلیلی هستند، زیرا تنها لازم است پاسخ هر دانش آموز را فقط یکبار مطالعه کنیم. به علاوه، این روبریک عمدتاً بر ریاضیاتی که در مسأله هست تمرکز می کند و روشهای حل مسأله، محاسبات، و ارتباطها را به عنوان اجزای اصلی یک پاسخ موفق درنظر می گیرد. قضاوت دربارهٔ کلیت یک پاسخ خیلی سریعتر از داوری پاسخ برمبنای چند مقیاس است. به علاوه، نمرهٔ به دست آمده دقیقاً با معنی است.

اساس روبریک فراگیر برای ما، همان چیزی است که توسط مالون و دیگران در سال ۱۹۸۰ ([۷]) توصیف شده است و در **مثال ۱** تنظیم شده است.

پاسخ های موفق

۴ پاسخ کامل و درست است.

۳ پاسخ تقریباً کامل و درست است، ولی چند اشتباه کوچک احتمالاً در نمادگذاری یا محاسبه ها دارد.

پاسخ های ناموفق

۲ پاسخ درمسیر صحیحی است و دارای محتوایی نسبی است، مثل زنجیره ای از استدلالها. امّا یا دانش آموز در نیمهٔ راه توقف کرده است، یا کل جواب دارای اشتباهات مفهومی است.

۱ بعضی از کارها درست است، امّا دانش آموز زود به بن بست رسیده است. در کار وی توالی استدلال به چشم نمی خورد

۰ همهٔ کارها غلط و بیهوده است. هیچ ریاضی درستی در راه حل مورد استفاده قرار نگرفته است.

مثال ۱

مثالی از یک روبریک فراگیر برای نمره گذاری کلی

یک روبریک همیشه حاوی پایه‌ای مفهومی برای تخصیص نمره به همهٔ تکالیف است.

این روبریک فراگیر شامل مبنایی کلی برای اطمینان از به کارگیری انتظارات یکسان برای سطوح عملکرد در طیف وسیعی از موارد است. البتّه، روبریک فراگیر برای نمره دادن به مواردِ تنها کافی نیست زیرا نمره دهنده نیازمند اطلاعات دقیق برای تکلیف داده شده دربارهٔ مفاهیم ریاضی بکار رفته برای هر سطح عملکرد می باشد. از این رو روبریک های تکلیف ـ خاص مورد نیاز هستند.

تهیهٔ یک روبریک برای یک تکلیف

تکلیف **مثال ۲** را که درک دانش آموزان از تابع های درجهٔ دوّم را ارزشیابی می کند درنظر بگیرید. برای تهیهٔ روبریک تکلیف ـ خاص، با درنظر گرفتن راه حل های

ممکن شروع می کنیم. پیش بینی می کنیم که بعضی دانش آموزان مسأله را با نمادها حل می کنند، یعنی قرار می دهند $h=0$ و معادلهٔ حاصل را یا به روش مربع کامل کردن یا با استفاده از فرمول درجهٔ دوم، حل می کنند. همچنین انتظار داریم که بعضی دانش آموزان، به ویژه آنهایی که ماشین حسابهای گرافیکی دارند، با رسم نمودار $y = -16x^2 + 50x + 5$ و استفاده از کلیدهای TRACE یا [SOLVE] روی ماشین حساب، مسأله را حل کنند و جایی که $y = 0$ که متناظر با $h=0$ در مسألهٔ اولیه است را به دست آورند. بالاخره، تصور می کنیم که بعضی از آنها ممکن است جدولهایی از تصاویر بسازند یا از روشهای عددی برای حل مسأله استفاده کنند.

پس از فهرست کردن رویکردهای ممکن به راه حل، هم خطاهای بزرگ و هم خطاهای کوچکی را که فکر

عملیات خود را نشان دهید! اگر از ماشین حساب استفاده می‌کنید عملکرد خود را شرح دهید.

وقتی یک توپ بیس بال از ارتفاع ۵ فوتی با سرعت اولیهٔ ۵۰ فوت بر ثانیه به صورت مستقیم به بالا پرتاب می شود، ارتفاع h برحسب فوت بعد از زمان t ثانیه، با معادلهٔ

$$h = -16t^2 + 50t + 5$$

مشخص می شود. فرض کنید هیچکس این توپ را نگیرد، بعد از چندثانیه این توپ به زمین برخورد می کند؟

مثال ۲

موردی که تابعهای درجهٔ دوم را ارزشیابی می کند.

می کنیم ممکن است دانش آموزان هنگام استفاده از هر یک از روشها انجام دهند درنظر می گیریم. با درنظر داشتن خطاهای مشخص، به سرعت و اجمالاً نگاهی به نمونه ای از پاسخ های دانش آموزان برای این تکلیف می اندازیم تا نمونه ای از پاسخ های درست با هر یک از روش های حل فوق و نمونه ای از پاسخ های نادرست ـ هم با اشتباه های بزرگ و هم با خطاهای کوچک را انتخاب کنیم. همچنین، اجمالاً پاسخ ها را جستجو می کنیم تا ببینیم آیا اشتباه دیگری در راه حل ها هست که ازنظر ما دور مانده باشد یا خیر؟ چه اشتباه هایی که فقط یک نفر مرتکب شده است، چه اشتباه هایی که در پاسخ چند نفر تکرار شده است.

با ترکیب تحلیلهای نظری خود دربارهٔ خطاهای پیش بینی شده و نتایج حاصل از مرور اجمالی ورقه های

پاسخ های موفق

۴ جوابِ درست با دلایل موجّه. اگر دانش آموز از فرمول درجهٔ دو استفاده می کند، باید نشان دهد که

$$0 = -16t^2 + 50t + 5$$

۳ اشتباهاتی کوچک وجود دارد که سبب به دست آمدن جوابی غلط یا حتی درست می شود یا یک خطای ریاضی در به کارگیری درستِ فرمول درجهٔ دوّم رُخ داده است.

پاسخ های ناموفق

۲ دانش آموز فرمول درجهٔ دوم «تقریباً درستی» به کار برده است، مثلاً به جای $-b$ از b استفاده کرده و سپس به راه حل ادامه داده تا جوابی مربوط به آن اشتباه به دست آورده است.

یا

دانش آموز کسرِ موجود در فرمول درجهٔ دوّم را با تقسیم تنها یک عبارت از صورت آن بر $2a$ ساده کرده است. این نوع خطا یک خطای مفهومی است.

دانش آموز جوابی نوشته و نشان داده که از نمودار استفاده کرده، امّا این که دانش آموز چگونه جواب را از روی نمودار به دست آورده است مشخص نیست.

۱ دانش آموز معادله را مساوی ۰ قرار داده ولی هیچ کار دیگری نکرده است.

یا

دانش آموز جواب درست داده ولی هیچ عملیاتی برای به دست آوردن جواب نوشته نشده است.

یا

دانش آموز نموداری از یک تابع درجهٔ دو رسم کرده، ولی هیچ عملیات درست دیگری انجام نداده.

۰ دانش آموز هیچ عملیات ریاضی معنی داری ننوشته است.

مثال ۳

روبریک خاص برای نمره دادن به مورد مثال ۲

دانش آموزان، روبریک مثال ۳ را به دست می آوریم. ممکن است بعضی افراد به عدم وجود جزئیات در به دست آمدن نمره ای خاص در این ملاک توجه کنند. روبریک

برای ما، روبریک های نمره گذار- کلی آسان تر و قابل فهم تر از روبریک های نمره گذار- تحلیلی هستند. زیرا تنها لازم است پاسخ هر دانش آموز را فقط یکبار مطالعه کنیم.

تکلیف ـ خاص ، به تنهایی استفاده نمی شود ، بلکه در تلفیق با ورقه های نمونه ای که کمیّت کار برای هر سطح نمره را نشان می دهند مورد استفاده قرار می گیرد .

نمره های ۳و۴ ، هر یک برای پاسخهای موفق درنظر گرفته شده اند . یک نمرهٔ ۴ ، پاسخ کاملی را نشان می دهد که می توان آن را به عنوان پاسخ نمونه استفاده کرد . یک اشتباه جزئی که البتّه ذاتاً اشتباهی مفهومی نیست ، ممکن است در محاسبات یا در نمادگذاری ها رخ دهد ؛ می توان چنین خطاهایی را به عنوان «لغزش قلم» رده بندی کرد .

نمره های ۰ ، ۱ ، یا ۲ برای پاسخهای ناموفق درنظر گرفته می شوند . نمرهٔ ۲ نشان دهندهٔ پاسخی است که یک اشتباه مفهومی بزرگ دارد یا پاسخی نیمه کاره است . پاسخ ، پیشرفت های قابل توجهی را نشان می دهد ؛ هر چند که ناتمام بوده یا جداً ناقص است . اگرچه نمرهٔ ۱ نشان دهندهٔ سطح خیلی پایینی از عملکرد است ، لیکن با حداقل یک گام مفید درست و صحیح ، ورودی معقول به مسأله را نتیجه می دهد ؛ البتّه از این پاسخ نمی توان برای استفادهٔ از این گام برای پیشرفت بیشتر استفاده کرد .

استفاده از روبریک برای پاسخهای دانش آموزان

زمانی که نمونه پاسخ های دانش آموزان را برای تعیین الگوهای خطاهائی که ممکن است رُخ دهند ، بررسی می کردیم ، مجموعه ای از **برگه های پشتیبان**[۵] را برای هر سطح نمره انتخاب کردیم . این برگه ها حاوی پاسخ های نمونه ای در هر سطح نمره هستند و به عنوان معیارهایی استفاده می شوند که در برابر آنها ، دربارهٔ سایر پاسخ ها نسبت به روبریک قضاوت می شود . **مثالهای ۴ تا ۸** ، برگه های پشتیبان در هر سطح نمره را نشان می دهند .

هر پاسخ در **مثال ۴** را می توان به صورت پاسخ نمونه به کار بست . پاسخ **مثال ۴ ـ الف** از فرمول درجه دو استفاده می کند . توجه کنید که این پاسخ نشان می دهد که جواب منفی به دلیل ماهیت مسأله قابل قبول نیست . پاسخ **مثال ۴ ـ ب** روشی ترسیمی را مورد استفاده قرار می دهد و نوشته ها نشان می دهد که از یک ماشین حساب ترسیمی استفاده شده است . این پاسخ ، محل تلاقی با محور X-ها را با جواب مسأله مرتبط می کند و از این رو تصویری روشن از نحوهٔ استفاده از نمودار برای حل مسأله می دهد . همچنین ، این پاسخ شامل استفاده از مقیاس در ترسیم تابع است .

$$0=-16t^2+50t+5$$

$$t=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$t=\frac{-50\pm\sqrt{50^2-4(-16)(5)}}{2(-16)}$$

$$t=\frac{-50\pm\sqrt{2500+320}}{-32}$$

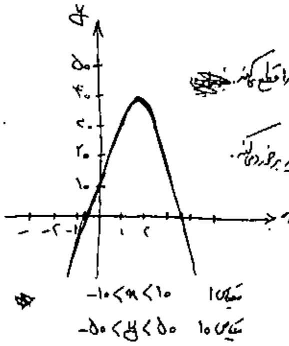
$$t=\frac{-50\pm\sqrt{2820}}{-32}$$

$$t=\frac{-50+\sqrt{2820}}{-32}\approx -0{,}097 \rightarrow$$ زمان نمی تواند منفی باشد

$$t=\frac{-50-\sqrt{2820}}{-32}\approx 3{,}22$$

حدود ۳٫۲۲ ثانیه توپ به زمین برخورد می کند .

(الف)



(ب)

مثال ۴

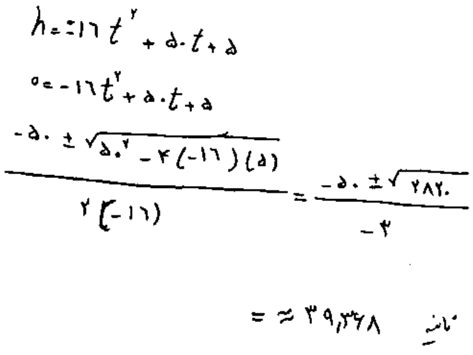
پاسخی به مورد مثال ۲ که نمرهٔ ۴ گرفته است.

پاسخهای **مثال ۵** خطاهای کوچک را نشان می دهند .

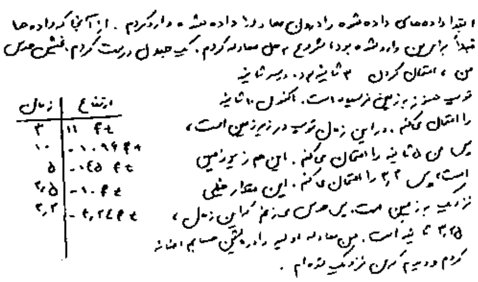
پاسخ **مثال ۵ ـ الف** از فرمول درجهٔ ۲ استفاده می کند و تا یکی مانده به آخرین مرحلهٔ آن درست است . درآنجا دانش آموز حاصلضرب (۱۶−) ۲ را به جای ۳۲− ، مقدار ۳− نوشته است ؛ این خطا یک خطای محاسباتی محسوب می شود نه یک خطای مفهومی . دانش آموز جواب منفی را که در این مسأله بی معنی است حذف کرده است . پاسخ **مثال ۵ ـ ب** از فهم و درک کاملی نسبت به استفاده از جدول

اگر همهٔ اشخاص علاقه مند، سطوح عملکرد بیان شده توسط روبریک ها را بفهمند، آن گاه در گفتگو با دانش آموزان، والدین، و دیگر معلّم ها راحت تر می توانند دربارهٔ نمرهٔ بسیاری از تکلیف ها توضیح داد.

مقادیر و روش تکرار برای حل مسأله خبر می دهد. البتّه ظاهراً دانش آموز زمانی که تقریب نزدیکی به دست آورده است، مسأله را حل شده فرض کرده است. برای کسب



(الف)



(ب)

مثال ۵

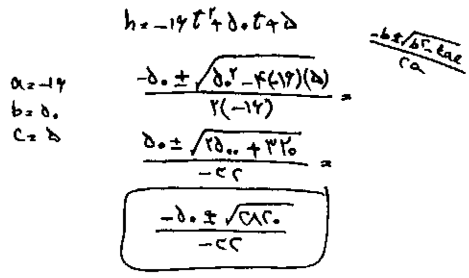
پاسخی به مورد شکل ۲ که نمرهٔ ۳ گرفته است.

نمرهٔ ۴، دانش آموز باید حداقل یک تکرار دیگر انجام می داد.

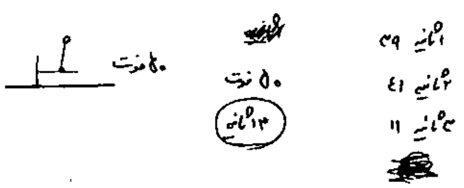
دو پاسخ نشان داده شده در مثال ۶، اشتباهات بزرگ دارند. در مثال ۶ـ الف دانش آموز از فرمول درجهٔ دو به درستی استفاده کرده است ولی محاسبات را تکمیل نکرده است؛ این مثال پاسخی نیمه کاره را نشان می دهد. این پاسخ، جواب را به نحوی شایسته نمایش نمی دهد و مقدار منفی را نیز حذف نمی کند. شاید بعضی از معلمان دلیل بیاورند که این پاسخ باید نمرهٔ ۳ بگیرد زیرا دانش آموز تنها در استفاده از یک ماشین حساب برای ساده کردن

هنگام استفاده از روبریک ها، نکته هایی دربارهٔ قابل اعتماد بودن را نیز باید در نظر گرفت.

جواب، ناموفق بوده است. البتّه، زمانی که دربارهٔ موفق بودن یا ناموفق بودن این پاسخ تأمل می کنیم، تصمیم می گیریم که آن را ناموفق بدانیم چراکه پاسخ شامل جواب نهایی مسأله در شرایط واقعی نیست. پاسخ مثال ۶ـ ب از روش جدول عددی استفاده می کند. به جای ادامهٔ تکرار مراحل برای دست یابی به جواب، دانش آموز حدس بی تفکّری دربارهٔ نتیجه زده است و زمانی را که توپ در ارتفاع ۱۱ فوت بوده است به عنوان جواب پذیرفته است. ما این پاسخ ناموفق را دارای یک اشتباه مفهومی بزرگ می دانیم چرا که به وضوح، پاسخ نشان می دهد که دانش آموز این موضوع را که باید h برابر ۰ باشد تا جواب به دست بیاید نفهمیده است. بنابراین دانش آموز پیشرفت



(الف)



(ب)

مثال ۶

پاسخی به مورد مثال ۳ که نمرهٔ ۲ گرفته است.

قابل توجهی کرده و نمرهٔ ۲ به پاسخ او تعلّق می گیرد.

پاسخ مثال ۷ نمرهٔ ۱ گرفته است. اگرچه پاسخ نشان می دهد که دانش آموز فهمیده که برای جواب باید معادلهٔ درجهٔ دوّمِ h=۰ را حل کند، ولی هیچ مرحلهٔ دیگری در پاسخ، درست نیست.

$$0 = -16t^2 + 50t + 5$$
$$-5 = -16t^2 + 50t$$
$$\sqrt{-5} = -16t + 50t$$
$$\sqrt{-5} = 34t$$
$$i\sqrt{5} = 34t$$
$$\boxed{\frac{i\sqrt{5}}{34} = t}$$

مثال ۷

پاسخی به مورد مثال ۳ که نمرهٔ ۱ گرفته است.

پاسخ مثال ۸ نمرهٔ ۰ گرفته است. گرچه در این پاسخ، روش تکرار پیشنهاد شده است، لیکن هیچ مرحله‌ای از جواب درست نیست. دانش‌آموز از این حقیقت که زمانی که توپ به زمین برخورد می‌کند، ارتفاع مساوی ۰ است

$$h = -16t^2 + 50t + 5$$
$$110 = -16t^2 + 50t + 5$$
$$105 = -16t^2 + 50t$$
$$2/1 = -16t^2 + t$$
$$-0/13125 = t^2 + t$$
$$-0/13125 = t.t + t$$
$$= 2t + t$$
$$\frac{-0/13125}{2} = t + t$$
$$-0/065625 = 2t$$
$$-0/0328125 = t$$

$$55 \times 2 = 110$$
$$105 \div 50 = 2/1$$
$$-16(\ )^2 + 50(\ ) + 5 =$$
$$3/342148489$$

جواب ۳ ثانیه بود

$$110 = -16(3)^2 + 50(3) + 5 = 107$$

من ابتدا ۵۰ را با ماشین حساب کردم و
معادله را به صورت خط جلو بردم، بعد با ۲۵ ۰ بعد
با ۱۵، بعد ۱۰ بعد ۸ بعد ۵ بعد ۳ بعد ۲ و ۲ خیلی پایین بود
پس ۳ را وارد ماشین کردم و ۱۰۷ را بدست آوردم که نزدیک ۱۱۰ است.

مثال ۸

پاسخی به مورد مثال ۲ که نمرهٔ ۰ گرفته است.

استفاده نکرده است. در این پاسخ، برای یافتن بیشترین ارتفاع توپ و پیدا کردن زمانی که می‌گذرد تا از آن ارتفاع، توپ به زمین برخورد کند یا برای پیدا کردن ارتفاعی خیالی برای توپ، تلاش شده است.

پیامدهای کار با روبریک‌ها

استفاده از روبریکها همواره تعدادی پیامد دارد.

حالتهای مرزی

با وجود این که تعداد زیادی از پاسخها به طور مرتب و منظم در یکی از سطوح تعیین شده توسط روبریک قرار می‌گیرند، بعضی حالتها همیشه حالت مرزی هستند. چگونه می‌توان تصمیم گرفت که به پاسخی نمرهٔ ۳ داد یا ۴، ۲ داد یا ۳، ۱ داد یا ۲؟

برای حالتهای مرزیِ انتخاب بین ۳ و ۴، که هر دو پاسخ های موفق فرض می‌شوند به سطح فصاحت پاسخ نگاه می‌کنیم و توجه می‌کنیم که آیا پاسخ مذکور را می‌توان به عنوان یک جوابِ نمونه قابل تقلید توسط سایر دانش‌آموزان درنظر گرفت یا خیر؟

بدون درنظر گرفتن مجازاتی برای خطاهای نگارشی یا اشتباهات دستور زبانی یا نقطه گذاری، ما از جواب نمونه برای توصیف جنبه های ریاضی جواب استفاده می‌کنیم؛ مگر این که این اشتباهات روی فصاحت پاسخ تأثیر بگذارند. هر دو پاسخ مثال ۹، جوابهایی را نشان می‌دهند که با یک ماشین حساب ترسیمی به دست آمده‌اند. پاسخ مثال ۹ـ الف یک اشتباه کوچک در نمادگذاری دارد و به جای t، h نوشته شده است. با وجود این که این یک اشتباه بزرگ نیست، نمی‌توانیم این پاسخ را یک جواب نمونه تلقی کنیم. بنابراین به آن نمرهٔ ۳ می‌دهیم.

برای تصمیم های مرزی بین نمره های ۲ و ۳، به دو سؤال باید پاسخ دهیم: (۱) خطا مفهومی است یا محاسباتی؟ (۲) باید پاسخ را موفق بدانیم یا ناموفق؟ بالاخص پاسخ به یک یا هر دوی این پرسش ها به تصمیم گیری در مورد نمرهٔ این پاسخ کمک می‌کند. پاسخ مثال ۹ـ ب را نگاه کنید. بعضی معلّمها ممکن است تصمیم بگیرند که به این پاسخ نمرهٔ ۳ بدهند چرا که پاسخ نهایی آن درست است و به استراتژی استفاده شده مربوط می‌شود. دیگران ممکن است دلیل بیاورند که باید به آن نمرهٔ ۲ داد چرا که در پاسخ دقیقاً نشان داده نمی‌شود که استراتژی حل مسأله چگونه بکار گرفته شده و دانش‌آموز مشخصاً نشان نداده که کدام قسمت از معادلهٔ داده شده باید با ۵- برابر

باوجود این که تعداد زیادی از پاسخها به‌طور مرتب و منظم دریکی از سطوح تعیین شده توسط روبریک قرار می‌گیرند بعضی حالتها همیشه حالت مرزی هستند.

$h = ۳٫۲۲۲$

من معادله را به ماشین حساب خود دادم. آن به من یک سهمی رو به پایین داد. جواب را با استفاده از کلید root روی ماشین حسابم پیدا کردم.

(الف)

زمانی که یک توپ بیس بال از ارتفاع ۵ فوتی با سرعت اولیهٔ ۵۰ فوت بر ثانیه به بالا پرتاب می شود، ارتفاع آن، h، بعد از زمان t ثانیه با معادلهٔ

$$h = -۱۶t^۲ + ۵۰t + ۵$$

داده می شود. فرض کنید هیچ کس توپ را نگیرد، بعد از چند ثانیه توپ به زمین برخورد خواهد کرد؟

با دیدن و بررسی توسط ماشین حساب، دیدم که چه موقع معادله h برابر ۵- می شود ۳٫۲۱ ثانیه

(ب)

مثال ۹

پاسخهای مرزی به مورد مثال ۳

باشد. در حقیقت، زمانی که توپ به زمین برخورد می کند مقدار عبارت $-۱۶t^۲ + ۵۰t$ فقط برابر با ۵- است. به دلیل این ابهامات، ما پاسخ را ناموفق می دانیم و به آن نمرهٔ ۲ می دهیم؛ هرچند که ممکن است دانش آموز مسأله را فهمیده باشد. ما نمی خواستیم که بیش از این راجع به پاسخ بحث کنیم. در یک کلاس درس، پاسخهایی مانند این، فرصتی بسیار خوب برای آشکار شدن اهمیت شفافیت زبان در شرح روش حل مسأله است.

گاهی دانش آموز جواب های کامل درستی در ذهن دارد، امّا پاسخ وی دارای اطلاعات نامربوط و اضافی است. در این زمان از خود می پرسیم که آیا اطلاعات اضافی نشان دهندهٔ خطایی مفهومی است؟ اگر چنین باشد، به این جواب می توان حداکثر نمرهٔ ۲ داد. در غیراین صورت، باید به آن حداقل نمرهٔ ۳ داده شود.

بعضی مردم فکر می کنند که استفاده از روبریک ها وقت گیرتر از بارم بندی است. تجربهٔ ما نشان می دهد که این کار وقت زیادی نمی گیرد.

تصمیم گیری بین نمرهٔ ۱ و ۲ با تصمیم دربارهٔ این که آیا پیشرفت واقعی انجام شده است یا نه، همراه است. همان طور که گفته شد، هر یک از پاسخهای مثال ۶ زنجیری از دلایل را نشان می دهند. هرچند که پاسخ مثال ۶ـ الف تنها در فرمول درجهٔ دو جاگذاری کرده است یا پاسخ مثال ۶ـ ب تنها یک جفت عدد را نشان می دهد، هر یک نمرهٔ ۱ می گیرند.

عملیات خود را توضیح دهید! اگر از ماشین حساب استفاده می کنید، آنچه انجام می دهید را شرح دهید.

در یک رستوران، دو سالاد و سه همبرگر، ۸٫۸۵ دلار قیمت دارد. بهای یک سالاد و ۴ همبرگر، ۹٫۳ دلار است. بهای یک سالاد چقدر است؟

روبریک

۴ مستقل از روشی خاص، جواب درست به دست می آید. دلیل کافی یا شرح کاملی از عملیات باید نوشته شود.

۳ روش یا کلیت پاسخ، به امکان پذیر بودن جوابی درست اشاره می کند. راه حل به کار رفته مناسب است، و توضیح کافی داده شده است. جواب دارای یک اشتباه محاسباتی کوچک است ولی فاقد خطای مفهومی است.

۲ کلیت پاسخ درست است و حداقل یک گام درست و مفید دیگر باید برداشته شود، ولی جواب دارای حداقل یک خطای مفهومی است.

یا

جواب و کلیت آن درست است، ولی دانش آموز طریقهٔ به دست آمدن جواب را از این کلیت نشان نداده است.

۱ جواب درست است ولی شرحی از عملیات نوشته نشده است.

یا

حداقل یک گام درست به سوی جواب برداشته شده است.

۰ هیچ کار ریاضی معنی داری نشان داده نشده است.

مثال ۱۰

مورد دستگاههای خطی و روبریک مربوط به آن

پاسخ‌هایی که در روبریک درنظر گرفته نشده‌اند

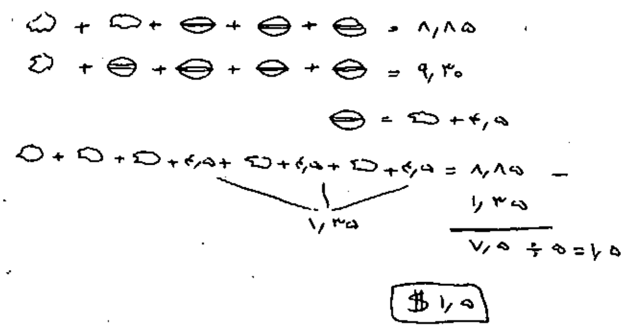
گاهی پیش می‌آید که دانش‌آموزان از روش‌های نامتعارفی برای حل مسأله استفاده می‌کنند که معلّم پیش‌بینی آن را نکرده است. مثال ۱۰ موردی را نشان می‌دهد که انتظار داریم اکثر دانش‌آموزان با نوشتن دستگاهی از معادله‌های خطی و حل دستگاه با استفاده از ترکیبهای خطی، جاگذاری، ماتریسها، یا نمودارها، به جواب آن دست پیدا کنند. مثال ۱۱ شامل دو پاسخ پیش‌بینی نشده به تکلیف مثال ۱۰ است. در جواب مثال ۱۱ـ الف، دانش‌آموز به جای استفاده از حروف برای متغیرها، به تعداد سالادها و همبرگرها شکل کشیده است. با کم کردن دو معادلهٔ بالایی از یکدیگر، دانش‌آموز به یک نمایش تصویری از $b = s + ۴۵$ رسیده است آن را به طرز صحیحی در معادلهٔ تصویری اوّل جاگذاری کرده است. هر یک از چهار خط اوّل پاسخ مانند آخرین خط آن، کاملاً درست هستند. تنها اشکال این است که نشان نمی‌دهد ۱٫۳۵ از هر دو طرف معادله کم شده است و ۷٫۵ $ بهای پنج سالاد است. به دلیل همین اشتباه‌های جزئی، به آن باید نمرهٔ ۳ بدهیم.

جواب مثال ۱۱ـ ب نیز از روشی نامعمول استفاده می‌کند یعنی با استفاده از قیمت میانگینِ هر مورد، بهای آنها را محاسبه می‌کند. اگر با چند محاسبهٔ دیگر این رویکرد ادامه می‌یافت، این روش می‌توانست به جوابی درست منتهی شود. بهرحال، دانش‌آموز بعد از اولین محاسبه، فقط یک حدس زده بود و نشان داده بود که این جواب «به قدر کافی نزدیک» است. این پاسخ نمرهٔ ۲ می‌گیرد، که نشان‌دهندهٔ این است که یا یک خطای مفهومی بزرگ رُخ داده یا تنها نیمی از جواب به دست آمده است.

چالش‌های ویژه در رابطه با تکنولوژی

زمانی که دانش‌آموزان از ماشین حساب‌های گرافیکی یا دیگر تکنولوژی‌های پیشرفته استفاده می‌کنند، در تفسیر و بررسی پاسخ‌های آنها نکاتی به چشم می‌خورد که در موارد دیگر دیده نمی‌شود. موردی که در مثال ۱۲ دربارهٔ ویژگی‌های لگاریتم است و دو پاسخ مثال ۱۳ را در نظر بگیرید. پاسخ مثال ۱۳ـ الف که نمرهٔ ۲ گرفته است، نشان می‌دهد که دانش‌آموز، نیاز به یک مثال نقض و نحوهٔ بررسی مثال نقض را فهمیده است. البتّه، دانش‌آموز هیچ نشانه‌ای از درک این مطلب که ماشین حساب گرافیکی این عبارت را برای هر مقدار x که در ماشین حساب ذخیره شده باشد (در این حالت، $x=۱۰$) را محاسبه می‌کند نشان نداده است. توجه کنید که این نوع خطا دربارهٔ یک ماشین حساب علمی رُخ نمی‌دهد چرا که وارد کردن حرف x در یک عبارت غیرممکن است.

پاسخ مثال ۱۳ـ ب، که نمره ۱ گرفته است، مشکل بالقوهٔ دیگری را در استفادهٔ دانش‌آموزان از تکنولوژی نشان می‌دهد: چند صفحه کاغذ آزمایش برای دست‌یابی به یک پاسخ موفق، یا پاسخ نمونه لازم است؟ در این مثال، پاسخ نشان می‌دهد که نمودار دو معادله رسم شده است؛ در حالی که در این مسأله، تنها یک معادله داده شده است. دربارهٔ میزان درک دانش‌آموز چه برداشتی خواهیم کرد؟



(الف)

قیمت سالاد ۱٫۷۷
۱٫۸۰

سالاد حدود ۱٫۷۷ دلار است ← ۱٫۲۰ دلار

من گفتم که برای ۲ سالاد + ۳ همبرگر، به طور متوسط هر جزء ۱٫۷۷ دلار است و برای دیگری این قیمت ۱٫۸۴ دلار است.

پس همبرگر گران‌تر است. بنابراین حدس زدم که هر سالاد حدود ۱٫۷۱ دلار است + هر همبرگر حدود ۱٫۹۰ تا ۲٫۰ دلار است.

بعد من این عددها را با هم جمع زدم و درست درآمد.

(ب)

مثال ۱۱

پاسخهایی که از راه حلهای نا متعارف برای مورد مثال ۱۰ استفاده کرده اند.

این پاسخ نشان می دهد زمانی که تکنولوژی یک بخش منظم ارزشیابی است، باید به دانش آموزان دربارهٔ سطح توصیفات یا توضیحات لازم در پاسخ ها دستورالعمل های خاصی داده شود.

عملیات خود را توضیح دهید! اگر از ماشین حساب استفاده می کنید، آنچه انجام می دهید را شرح دهید.

الف) آیا به ازای هر $x > 0$ ، $\log(x+3) = \log x . \log 3$ ؟

بله ☐ خیر ☐

ب) فرض کنید شخصی پاسخ قسمت (الف) را نمی داند. توضیح دهید چگونه این شخص را متقاعد می کنید که پاسخ شما به قسمت (الف) درست است.

روبریک

۴ : پاسخ درست به همراه توضیحات خوب، دانش آموز نمودارهایی را نشان می دهد یا مشخص می کند که $y = \log(x+3)$ و $y = \log x . \log 3$ ترسیم شده اند. دانش آموز یک یا چند مثال نقض می نویسد.

۳ : دانش آموز نشان می دهد که با جاگذاری مقادیری، نشان داده است که دو طرف معادله با یکدیگر مساوی نبوده اند، امّا در نشان دادن نتایج جاگذاری شده ناموفق است.

یا

دانش آموز نشان می دهد که «دو» معادله باید ترسیم شوند، ولی در نشان دادن منظور خود ناموفق است. او باید نشان دهد که دو نمودار با یکدیگر متفاوت هستند.

۲ : دانش آموز استفاده از یک مثال نقض را شروع کرده ولی در نشان دادن نحوهٔ نتیجه گیری از آن ناموفق است.

یا

دانش آموز مقادیر $\log(x+3)$ و $\log x . \log 3$ را محاسبه کرده است و به آن مقادیری داده است، ولی مقادیر α را نشان نداده است.

یا

دانش آموز مثال نقض زده است ولی دارای خطای مفهومی بزرگی در محاسبات است.

۱ : دانش آموز مشخص کرده که نتایج یکی نیستند و شروع درستی در توضیح مطلب داشته است.

یا

دانش آموز می داند که مثال نقض لازم است و مقادیری جایگزین کرده است ولی دانشی از logها ندارد.

یا

دانش آموز به قضیهٔ درستی ارجاع درستی داده است. او تشخیص داده که باید دو معادله رسم شود ولی هیچ ایده ای از این که باید با نتایج چه کار کرد ندارد یا نتیجه را تفسیر نادرست کرده است.

۰ : فاقد عملیات ریاضی درست.

مثال ۱۲

مورد مربوط به ویژگی های لگاریتم و روبریک وابسته به آن

نکته هایی دربارهٔ قابلیت اعتماد

هنگام استفاده از روبریک ها، باید نکته هایی دربارهٔ قابل اعتماد بودن را نیز در نظر گرفت. دیدیم که ارزیابی کننده های مختلف، زمانی که از چندین رویّه استفاده شده است، می توانند در مورد پاسخ ها و تکلیف ها هماهنگ عمل کنند. نخست، باید از ورقه های پشتیبان برای مقایسه و اطمینان از این که همهٔ ورقه ها از یک دیدگاه نمره داده شده اند استفاده کرد؛ وجود ورقه های پشتیبان به ویژه زمانی که معلّم چند بخش از یک درس مشخص را تدریس می کند یا با تعداد زیادی دانش آموز مواجه است، بسیار مهم است. زمانی که معلّم ها دسته جمعی در یک مدرسه یا یک منطقه درس می دهند، استفاده از ورقه های پشتیبان تضمین می کند که همهٔ نمره دهندگان و تصحیح کنندگان، روبریک را فهمیده اند و آن را به یک طریق به کار می برند. زمانی که ورقه های پشتیبان قبل از نمره دادن مورد بحث قرار بگیرند، می توان پیش از استفاده از روبریک، آن را اصلاح کرد.

دوّم، بررسی یک سؤال در تمام ورقه ها به طور هم زمان، به مصحح کمک می کند تا از یک استاندارد برای همهٔ ورقه ها استفاده کند و ابهام های احتمالی در روبریک های خاص را از بین ببرد. زمانی که ورقه ها از چند کلاس مختلف با چند معلّم تصحیح می شوند، پاسخ های دانش آموزان بدون دانستن کلاس و معلّم آنها نمره داده می شود. این روش هر گونه تعصب غیرهوشیارانه را که هنگام کار کردن با روبریک برای پاسخ های خاص پیش می آید از بین می برد. اجتناب از چنین تعصبی به ویژه هنگام برخورد با حالت های مرزی خیلی مهم است تا از ارفاق به دانش آموزانی که به طور معمول خوب عمل می کنند و ارفاق نکردن به دانش آموزانی که نوعاً با درک مفاهیم مشکل دارند، جلوگیری شود.

سایر نکته های مربوط به کلاس درس

بعضی اوقات، معلّم های کلاسها باید یک مقیاس نمره ای به روبریک پیوست کنند. در روبریک ۰ تا ۴، نمرهٔ ۳ به معنی درست بودن ۷۵ درصد نیست، نمرهٔ ۲ معنی ۵۰ درصد درست را نمی دهد و نمرهٔ ۱ به معنی درستی ۲۵ درصد نیست. لازم است که نکات مربوط به این که چه درصدی از ارزشیابی ها توسط روبریک ها نمره گذاری

الف) آیا به ازای هر $x > 0$ ، $\log(x+۳) = \log x . \log ۳$ ؟

بله ☐ خیر ☐

ب) فرض کنید شخصی پاسخ قسمت (الف) را نمی داند. توضیح دهید که چگونه این شخص را متقاعد می کنید که پاسخ شما به قسمت (الف) درست است.

تابع ماشین حساب :

$\log(x+۳) = ۱/۱۱۳۹۴۳۳۳۹۲$

و

$\log(x) . \log ۳ = ۰/۴۷۷۱۲۱۲۵۴۷$ ،

که با یکدیگر مساوی نیستند.

(الف)

الف) آیا به ازای هر $x > 0$ ، $\log(x+۳) = \log x . \log ۳$ ؟

بله ☐ خیر ☐

ب) فرض کنید شخصی پاسخ قسمت (الف) را نمی داند. توضیح دهید که چگونه این شخص را متقاعد می کنید که پاسخ شما به قسمت (الف) درست است.

هر دو معادله را به وسیله ماشین حساب رسم می کنیم و

می بینیم آیا خطوط یکسان هستند یا نه؟

(ب)

مثال ۱۳

پاسخ هایی که نشان دهندهٔ چالش به وجود آمده در رابطه با تکنولوژی برای مثال ۱۲ هستند.

شده، چگونه امتیازها جمع زده شده اند، و چگونه این نمره های کل به نمره های حرفی یا عددی تبدیل می شوند را برای دوستان معلّم و مسئولان توضیح داد.

بعضی مردم فکر می کنند که استفاده از روبریک ها وقت گیرتر از بارم بندی است. تجربهٔ ما نشان می دهد که این کار وقت زیادی نمی گیرد. برای تهیهٔ یک روبریک زمان لازم است، ولی نمره دادن واقعی بیشتر از روش بارم بندی وقت نمی گیرد. هرچه زمان بگذرد و معلّم ها با طرز استفاده از روبریک فراگیر آشناتر شوند، این اعمال سریع تر انجام می شود. بالاخره، زمانی که معلّم های کلاس به طور هماهنگ از روبریک ها استفاده کنند، دانش آموزان باید روبریک پایه ای را بفهمند و استانداردهایی که به وسیلهٔ آنها مورد قضاوت قرار می گیرند را بشناسند. پاسخ هایی که در این مقاله آورده شده، از یک مطالعهٔ تحقیقاتی آورده شده که در آن، دانش آموزان هیچ شناخت قبلی نسبت به روبریک ها نداشتند. البتّه معلّم ها را به استفاده از روبریک ها در کلاس درس خود تشویق می کنیم تا هم روبریک ها را برای دانش آموزان شرح دهند و هم پاسخ های نمونه را به آنها نشان دهند.

جمع بندی

دیدیم که استفاده از روبریک ها در نمره دادن پاسخ های دانش آموزان بسیار ثمربخش است چرا که برای توصیف سطوح عملکرد مشابه در گسترهٔ وسیعی از تکالیف، میانگینی مفهومی را در نظر می گیرد. امیدواریم که ایده ها و نکته های مطرح شده در این مقاله برای معلمانی که استفاده از روبریک ها را در کلاس ریاضی خود آغاز می کنند، مفید باشد.

منبع اصلی:

Thompson, D. R. and Senk, S. L. (1998). ***The Mathematics Teacher,*** vol. 91, No. 9, (786-793) NCTM.

زیرنویس:

1. rubrics
2. Porfolio
3. Vermont
4. University of chicago School Mathematics Project

مراجع:

[1] Cai, Jinfa, Mary S. Jakabcsin, and Suzanne Lane. "Assessing Studenst's Mathematical Communication." School Science and Mathematics 96 (May 1996): 238-46.

[2] Cai, Jinfa, Suzanne Lane, and Mary S. Jakabcsin. "The Role of Open-Ended Tasks and Holistic Scoring Rubrics; Assessing Student's Mathematical Reasoning and Communication." In Communication in Mathematics: K-12 and Beyond, 1996 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), edited by Portia C. Elliott and Margaret J. Kenney, 137-45. Reston, Va.: NCTM, 1996.

[3] California Mathematics Council. Constructive Assessment in Mathem-atics: *How to Get It Going in Your District*. San Diego, Calif.: California Mathematics Council, 1993.

[4] Charles, Randall, Frank Lester, and Phares O'Daffer. *How to Evaluate Progress in Problem-Solving*. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 1987.

[5] Hancock, C. Lynn. "Enhancing Mathematics Learning with Open-Ended Questions." Mathematics Teacher 88 (September 1995): 496-99.

[6] Kenney, Patricia Ann, and Edward A. Silver. "Student Self- Assessment in Mathematics." *In Assessment in the Mathematics Classroom*, 1993 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), edited by Norman L. Webb and Arthur f. Coxford, 229-38. Reston, Va.: NCTM, 1993.

[7] Malone, John A., Graham A. Dougles, Barry V. Kissane, and Roland S. Mortlock. "Measuring Problem-Solving Ability." *In Problem Solving in School Mathematics*, 1980. Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), edited by Stephen Krulik and Robert E. Reyes, 204-15. Reston, Va.: NCTM, 1980.

[8] Marzano, Robert J., Debra Pickering, and Jay McTighe. *Assessing Student Outcomes: Performance Assessment Using the Dimensions of Learning* Model. Alexandria, Va.: Association for Supervision and Curriculum Develop-ment, 1993.

[9] National Council of Supervisors of Mathematics. *Great Tasks and More! A Sourcebook of Camera-Ready Resources on Mathematics Assessment. Golden*, Colo.: National Council of Supervisors of Mathematics, 1996.

[10] National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston, Va.: NCTM, 1989.

______. *Assessment Standards for School Mathematics*. Reston, Va.: NCTM, 1995.

[11] Petit, Marge, and Judith S. Zawojewski. "Teachers and Students Learning Together about Assessing Problem Solving." *Mathematics Teacher* 90 (September 1997): 472-77.

[12] Senk, Sharon L. "How Well Do Students Write Geometry Proofs?" *Mathematics Teacher* 78 (September 1985): 448-56.

[13] Stenmark, Jean Kerr. *Assessment Alternatives in mathematics: An overview of Assessment Techniques That Promote Learning*. Berkeley, Calif.: EQUALS, University of California, 1989.

[14] Thompson, Denisse R. "Learning and Teaching Indirect Proof." *Mathematics Teacher* 89 (September 1996): 474-82.

[15] Thompson, Denisse R., and Sharon L. Senk. "Assessing Reasoning and Proof in High School." *In Assessment in the Mathematics Classroom*, 1993 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), edited by Norman L. Webb and Arthur F. Coxford, 167-76. Reston, Va.: NCTM, 1993.

■

تعداد کارگران سازندهٔ هرم را بشمارید!

نویسنده : یان استوارت
مترجم : مهناز پاک خصال، دبیر ریاضی منطقهٔ ۴ تهران

هرم های باستانی مصر از جمله اسرارآمیزترین مسائل باستان شناسانه به شمار می روند. بزرگ ترین هرم در «جیزه»[۱] قرار دارد که در زمان فرعون بزرگ «خوفو»[۲]، یعنی ۲۵۰۰ سال پیش از میلاد ساخته شده و هنوز به صورت دست نخورده باقی مانده است. ارتفاع اولیهٔ آن حدود ۱۴۷ متر (۴۸۲ فوت) و وزن آن نیز بیش از ۷ میلیارد کیلوگرم (۷٫۷ میلیون تن) بوده است. این هرم از بلوک های بزرگ سنگی ساخته شده است که پس از استخراج، به شکل های منظم تراشیده شده و سپس به محل هرم حمل شده و با دقت وسواس گونه ای روی یک دیگر قرار داده شده است.

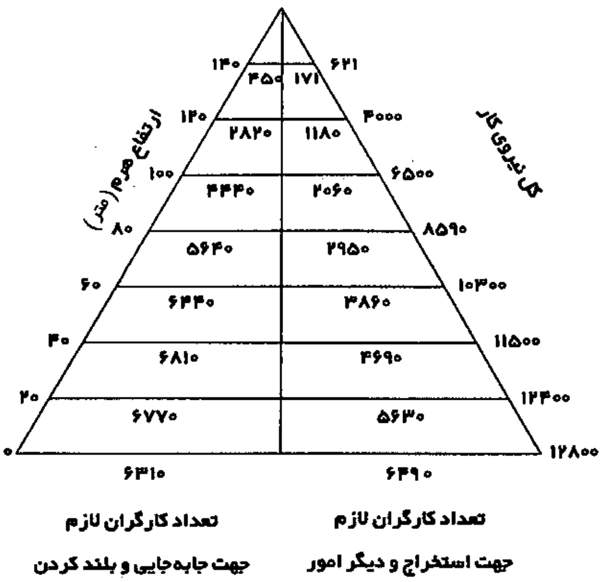
سؤالاتی از این قبیل که مصریان چگونه چنین سازه های بزرگی را ساخته اند؟ و چرا آن ها را ساخته اند؟ سؤالاتی هستند که مورخین و باستان شناسان نیز خود با قطعیت از پاسخ آن ها آگاه نیستند. می دانیم که تعداد زیادی از این هرم ها آرامگاه فراعنه بوده اند و در مورد ساخت آن ها نیز تئوری های متعددی وجود دارد. اکنون مورخان می توانند با تقریب قابل قبولی نیروی به کار رفته جهت ساخت این هرم ها را محاسبه کنند و برای این موضوع، باید از مطالعات ریاضی «استوارت کرکلند ویر»[۳] ممنون بود. او عضو گروه مطالعاتی «موزهٔ تاریخ طبیعی دنور» آمریکا بود و نتایج مطالعات خود را در مجلهٔ باستان شناسی «کمبریج» (آوریل ۱۹۹۶) منتشر ساخت.

«هرودت»، مورخ یونانی گفته است که برای ساخت هرم بزرگ ۱۰۰ هزار نفر به کار گرفته شده اند. البته هرودت مرجع قابل اطمینانی برای مطالعات مصر باستان نیست و احتمال می رود که در مورد این عدد اغراق شده باشد. در این صورت، تعداد واقعی چند نفر بوده است؟ شاید تعجب کنید، اگر بشنوید که طبق محاسبات «ویر» حدود ۱۰ هزار نفر در این کار شرکت داشته اند. شاید سؤال شود که او چگونه توانسته است، بدون اطلاع از نحوهٔ ساخت هرم مذکور به این عدد دست یابد. او از ریاضیات کمک گرفته است. کل نیروی کار لازم برای ساخت چنین هرمی را برآورد کرده است و با در نظر گرفتن چند فرض در مورد برنامه ریزی ساخت، توانسته است که به این عدد برسد.

البته ویر محاسبات خود را برای هرم خوفو انجام داده است، ولی از این روش برای دیگر هرم ها نیز می توان استفاده کرد. قدم

اول این مطالعه برآورد انرژی لازم برای ساخت هر هرم است. در این جا منظور از انرژی، مقدار انرژی است که برای حمل بلوک های سنگی تا چنین ارتفاعی لازم است. او این انرژی پتانسیل را بر تعداد روزهای صرف شده جهت ساخت هرم تقسیم کرده است. نتیجهٔ این محاسبه بیانگر مقدار نیروی کار لازم در هر روز برای بلند کردن بلوک های سنگی است. تنها منبع تأمین نیروی کار نیز نیروی بازوی افراد بوده است. با تقسیم مقدار نیروی کار لازم بر انرژی مفید هر کارگر، می توان تعداد کارگران لازم برای بلند کردن سنگ ها را به دست آورد.

یکی از مواردِ نامشخص، مدت اجرای عملیات ساخت هرم است. البته می دانیم که خوفو ۲۳ سال بر تخت سلطنت تکیه زده است. به احتمال زیاد، ساخت هرم او نمی توانسته پیش از سلطنتش آغاز شده باشد، ولی می توانسته کمی پیش از مرگ یا مدتی قبل از آن به پایان رسیده باشد. ویر فرض کرده است که مدت ساخت این هرم ۲۳ سال، یعنی مساوی دوران سلطنت این فرعون بوده باشد. اگر در تمام ایام سال نیز افراد کار کرده باشند، این رقم معادل ۸۴۰۰ روز می شود؛ هر چند ایام واقعی شاید نصف این رقم بوده باشد. از این رو فقط می توان به تخمین نیروی کار دست یافت.



شکل ۱

نیروی کار لازم برای ساخت هرم

ابتدا ارتفاع هرم خوفو ۱۴۶/۷ متر و طول یک ضلع مربع قاعدهٔ آن ۲۳۰/۴ متر بوده است. حجم هرم به صورت $S^2 \times \frac{h}{3}$ بیان می شود که (h) ارتفاع و (s) طول ضلع قاعده است که با جای گذاری، این حجم حدود ۲/۶ میلیون متر مکعب می شود. حال اگر چگالی سنگ های آهکی (d) نیز حدود ۲۷۰۰ کیلوگرم بر متر مکعب باشد، جرم این هرم رقمی حدود ۷ میلیارد کیلوگرم می شود و انرژی پتانسیل مستتر در هرم برابر $h^2 \times d \times s^2 \times \frac{g}{12}$ است که در آن، g شتاب جاذبهٔ زمین ($9/8\,m/s^2$) است. با قرار دادن اعداد مربوط به هرم بزرگ، میزان انرژی بالغ بر ۲/۵۲ تریلیون ژول خواهد شد.

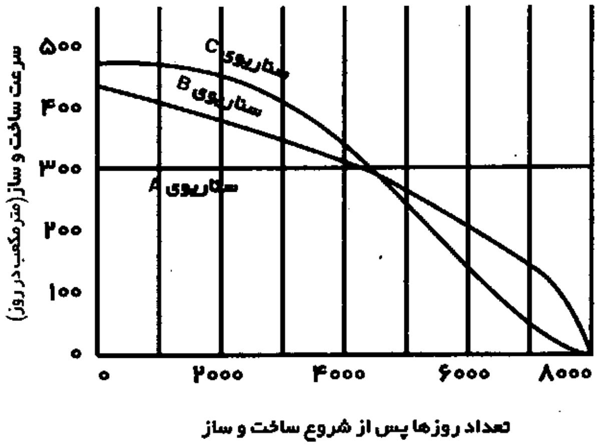
از طرفی می دانیم که میزان کار مفید هر فرد، روزانه حدود ۲۴۰ هزار ژول است که با فرض بازده صد در صد، به حدود ۱۲۵۰ نفر برای بلند کردن سنگ ها طی ۸۴۰۰ روز نیاز است. می توان گفت که این رقم بسیار پایین است. برای تصحیح آن، ویر یک افزایش ۵۰ درصدی را در نظر گرفته و این تعداد را در ۱/۵ ضرب کرده است تا فرض صد در صدی بازده استفاده از انرژی را اصلاح کرده باشد. البته او به نیروی کار لازم برای بلند کردن سنگ ها از کف معدن تا سطح هرم که ۱۹ متر بوده نیز توجه کرده است.

باید توجه داشت که هرم ها تپه ای از سنگ های روی هم ریخته نیستند؛ یعنی برای ساخت آن ها به نیروی کار مهندسی نیز نیاز است تا بتوان این سنگ ها را به شکل مورد نظر تبدیل کرد. ولی با وجود این، می توان گفت که قسمت اعظم نیروی کار صرف بلند کردن بلوک های سنگی شده است و می توان از نیروهای جزئی صرف نظر کرد. هر هرم از پایین به بالا، در ردیف های مختلف ساخته می شود و مطمئناً تا ردیف های زیرین ساخته نشود، نمی توان سنگ های ردیف های بالا را قرار داد. هیچ کس نمی داند که چگونه بلوک ها را به ردیف های بالایی انتقال داده اند. گروهی از متخصصان معتقدند که از شیب استفاده شده است. گروه دیگری بر این عقیده اند که کارگران از ترکیبی هوشمندانه از اهرم ها استفاده می کرده اند.

مسلم است که برای انتقال بلوک ها از معدن به سایت ساختمانی، کارگران از چرخ های چوبی استفاده کرده اند و آثار به جای مانده از مصریان قدیم، بیانگر همین موضوع است. معدن خوفو حدود چند صد متر از پایهٔ هرم فاصله داشته است. جهت محاسبهٔ نفرات لازم برای کشیدن سنگ ها از معدن تا سایت، ویر اصطکاک بین سنگ ها و چوب های غلتان زیر آن ها را تخمین زده و سپس نیروی لازم برای غلبه بر این اصطکاک را محاسبه کرده است. البته به نیروهای دیگری برای استخراج سنگ ها، تراشیدن سنگ ها در اندازه های مورد نظر و نصب آن ها روی هرم نیز نیاز است. پس از بررسی، ویر فرض کرد که برای انجام این کارها نیز به ازای هر متر مکعب سنگ به ۱۴ نفر برای هر روز نیاز است.

با این محاسبات می توان متوسط تعداد کارگران را یافت[3]. در این جا یک سؤال دیگر آن است که آیا تعداد کارگران از ابتدا تا انتها ثابت بوده است، یا هنگام نیاز از کارگران زیادی استفاده می شده است و هنگام عدم نیاز، تعدادی از آن ها را مرخص می کرده اند؟ در این باره اطلاعاتی در دسترس نیست، ولی چند سناریو را می توان در نظر گرفت.

با تقسیم حجم این هرم بر زمان می توان دریافت که به طور متوسط باید روزانه ۳۱۰ متر مکعب سنگ را در جای معین شده قرار داد. با پیشرفت کار ساخت هرم، سنگ ها باید به ارتفاع بیش تری انتقال یابند و از این رو به نیروی کار بیش تری نیاز است. باید توجه داشت که با پیشرفت کار، فضای موجود برای کار، یعنی سطحی که در قسمت پایان نیافتهٔ هرم وجود دارد، کاهش خواهد یافت. با دقت در این عوامل می توان دریافت که سرعت ساخت، یعنی ۳۱۰ متر مکعب در هر روز، یک نواخت نخواهد بود؛ یعنی زمانی که ارتفاع هرم کم است، سرعت از این رقم بیش تر و با افزایش ارتفاع از این رقم کم تر است.



شکل ۲

سه سناریوی ممکن برای ساخت هرم بزرگ در ۸۴۰۰ روز

ویر سه سناریو برای ساخت در نظر گرفت (منحنی شکل ۲). در سناریوی A، کارگران از روز اول تا روز ۸۱۱۰، بلوک ها را با سرعت ثابت ۳۱۵ متر مکعب در روز نصب می کنند و از این روز به بعد، نرخ ساخت و ساخت به شدت افت می کند. در سناریوی B، سرعت ساخت در ابتدا ۴۶۲ متر مکعب در روز فرض شده است که تا ۸ هزار روز بعد، به صورت یک نواخت کاهش می یابد، ولی از این روز به بعد، کاهش شدیدی در سرعت ساخت ایجاد می شود. در سناریوی C، سرعت ساخت ابتدا حدود ۵۰۰ متر مکعب در روز است، ولی پس از ۲ هزار روز، این سرعت به شدت کاهش می یابد و پس از روز ۷۰۰۰، سرعت به سمت صفر میل می کند. هر سه سناریو عملیات را در ۸۴۰۰ روز به اتمام می رسانند و طی زمان های متفاوت، به تعداد متفاوتی از افراد نیازمندند.

در شکل ۲، بر اساس سناریو B، تعداد کارگر لازم در هر مرحله از ساخت مشخص شده است. در شروع، نیمی از کارگران مشغول کشیدن و بلند کردن بلوک ها هستند و بقیه به حفاری، نصب قطعات و دیگر امور مشغولند. در انتهای عملیات ساخت، حدود $\frac{3}{4}$ کارگران برای حرکت دادن بلوک ها به کار گرفته می شوند. در این شکل می توان دید که در هیچ مرحله ای، تعداد کارگران از ۱۲۸۰۰ نفر بیش تر نیست و این رقم حدود یک درصد جمعیت آن زمان مصر است. البته سناریوهای A و C نیز به چنین نتایجی خواهند رسید.

شاید ساده ترین سناریو آن باشد که نیروی کار یکسانی را برای تمام مراحل، به جز مراحل پایانی، در نظر گرفت که در مرحلهٔ پایانی، فضای کافی برای تحرک بیش از چند کارگر وجود ندارد. در این سناریو نیز با ۱۰۶۰۰ نفر می توان هرم خوفو را ساخت. پس برای هرم های کوچک تر افرادی کم تر از این نیز نیاز خواهد بود. یعنی این که بر خلاف اندازهٔ بسیار بزرگ این حجم ها، نیروی کار کافی برای ساخت آن ها در مصر وجود داشته است.

منبع:

Ian Stewart, *Counting the Pyramid Builders*, Scientific American Sep. 1998

زیرنویس ها:

1. Giza
2. Khufu
3. Stuart Kirkland Wier

■

روایت معلمان

امیرحسین اصغری،
یکی از معلمین یکی از مدارس ایران

به دلیل اهمیّت نقش معلّم، برنامه های آموزش معلّمان از اهمیّت ویژه‌ای برخوردار است. مجله درنظر دارد که این مهم را به عنوان یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به همین منظور، ستونی در مجله با عنوان روایت های معلمان ریاضی باز شده است تا ازطریق آن، بتوانیم رابطهٔ نزدیکتری با معلمان ریاضی برقرار کنیم. این روایت ها برای محققان و معلمان محقق فرصت ارزنده‌ای به وجود می آورد تا به تبیین نظریه های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلّم می جوشد، بپردازند. آنگاه نظریه ها به عمل دَر می آیند و مجدداً عمل به نظریه کشانده می شود و این فرآیند همچنان ادامه پیدا می کند.

از همکاران گرامی انتظار می رود که روایتهای خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که دراختیار عموم قرار گیرد، زیرا که زکات علم نشر آن است. معلمان عزیز باید به اهمیّت تجربه‌ای خود واقف شوند و با پویایی به غنی تر کردن آنها بپردازند.

وقتی در شمارهٔ ۴۷ همین مجله برای اولین بار ، اولین تجربهٔ آموزشی ام را برای این ستون نوشتم ، هیچگاه فکر نمی کردم که این اولین ها در طول سالهای آینده همچنان ادامه پیدا کند . در طول این سالها برای اولین بار در دانشگاه ، در دورهٔ پیش دانشگاهی ، در سالهای اول ، دوم و سوم دبیرستان آموزش درسهای مختلف را تجربه کردم .

در تمام این اولینها ، قبل از هر جلسهٔ کلاس و در هر موضوع درسی همیشه پاسخ دو سؤال مرتبط برایم اهمیت داشت :

چگونه می توان در دانش آموزان انگیزه یادگیری ایجاد کرد؟

چگونه می توان کلاس را فعال کرد؟

از آنجایی که برای من ایجاد انگیزهٔ درونی اهمیت داشت ، هیچگاه دانش آموزان را با نمره یا کنکور (انگیزه های خارجی) تهییج نکردم ، بلکه همیشه با طرح فعالیتی ، آنها را به یکباره در رودخانه ای از افکار و اندیشه های همکلاسیهایشان می انداختم .

تمام این سالها ، با این ایده های مشترک طی شد ، تا اینکه امسال برای اولین بار معلم کلاس دوم راهنمایی شدم ، کلاسی که دغدغه های حاکم بر کلاسهای دیگر را کمتر داشت (دانش آموزان و البته والدین آنها ، نه نگران امتحانات خارجی ای مثل امتحان ورود به مدرسه یا کنکور بودند ، نه تازه وارد به یک دورهٔ تحصیلی) کلاسی با بچه هایی که شور و نشاط و بازیگوشی آنها همچنان بر هر چیز دیگری می چربید و هنوز برق چشمانشان را می شد دید .

اکنون تابستان است ، زمانی که از خود می پرسم به آنها چه آموختی (علاوه بر محتوی کتاب ــ چه این حداقل کاری بود که می توانستی بکنی) :

آموختم که به عنوان یک فرد در یک گروه مستقل بیاندیشند ، با دیگران مشارکت و همفکری کنند و با نظر و اندیشهٔ آنها به مدارا برخورد کنند .

ولی چگونه؟

برای شروع هر قسمت درس فعالیتی طرح می شد که خود به خود ، بیشترین حضور فکری و فیزیکی دانش آموزان و همفکری و همکاری با دیگران را طلب کند . هر فعالیتی جنبه های متفاوتی را چه از لحاظ محتوی ، چه به لحاظ تواناییهای مورد نیاز در بر می گیرد ، و این وظیفهٔ ماست که آنرا به گونه ای هدایت کنیم که در جهت خواستهٔ ما قرار گیرد :

تساوی مثلثهای قائم الزاویه

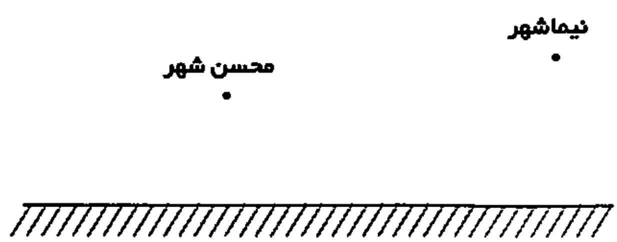
دانش آموزان را به دو دسته تقسیم کنید، از هریک از دانش آموزان یک دسته بخواهید که پنهان از چشم دانش آموزان دستهٔ دیگر مثلث قائم الزاویه ای رسم کند، سپس مشخصات شکل خود را برای یکی از دانش آموزان دستهٔ دیگر (که می تواند دانش آموز هم میزی اش باشد) چنان توضیح دهد که او بتواند مثلث قائم الزاویه ای «مساوی» با آن بکشد. نحوهٔ بررسی مساوی بودن دو شکل از روی هم قرار دادن آنها شروع می شود و تا یافتن دلایل مختلف تساوی دو مثلث قائم الزاویه ادامه پیدا می کند.

مختصات

نحوهٔ انجام این فعالیت مانند فعالیت قبل است. از دانش آموزان یک دسته بخواهید که با استفاده از خطوط (راست) شکلی رسم کنند (این شکل می تواند شکل شما هم باشد البته اگر بتوان آنرا با خطوط راست کشید) سپس شکل خود را برای دانش آموز هم میزی اش چنان توضیح دهد که او بتواند شکلی «شبیه» آنرا بکشد.

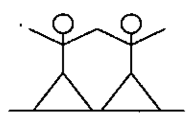
در هنگام انجام این فعالیتها، همیشه در انتظار روشهای عجیب و خلاقانهٔ دانش آموزان باشید. در یکی از فعالیتهایی که برای مبحث تقارن طرح شده بود، بچه ها را به حیاط مدرسه بردم و با گچ دو نقطه از حیاط را به صورت زیر علامتگذاری کردیم:

از دانش آموزان خواسته شد که از محسن شهر حرکت کنند و پس

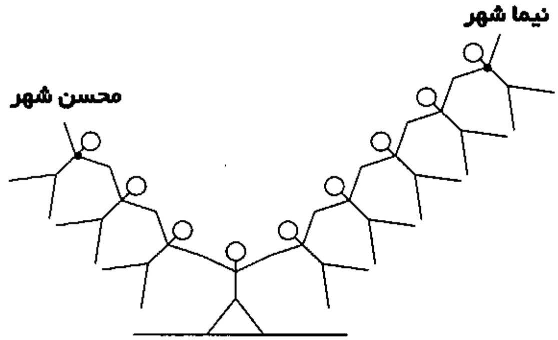


دیوار مدرسه (قلعهٔ سام)

از رسیدن به قلعهٔ سام (دیوار مدرسه) به طرف نیما شهر حرکت کنند (محسن، نیما و سام، اسم سه تا از بچه های کلاس بود) ضمناً کوتاهترین مسیر ممکن برای انجام این سفر را پیدا کنند. در حین بازی و فهمیدن مسأله و آشنا شدن با مشکلاتِ رویاروی، ناگهان، بچه ها دستانشان را به یکدیگر گرفتند و از محسن شهر تا قلعه، و از



قلعه تا نیماشهر زنجیری ساختند.



و با تغییر جای دانش آموز کنار قلعه، سعی در یافتن کوتاهترین زنجیر (کوتاهترین مسیر) کردند. این تجربه آنقدر گویا هست که شایستهٔ این باشد که زیر آن نوشته شود:

○○○○○○○○○○○○○○○○○○

(بدون شرح!)

○○○○○○○○○○○○○○○○○○

پیوست

وقتی همکاران و دوستان من این مقاله را خواندند، بعضی ها می گفتند، دو فعالیت مربوط به مثلث قائم الزاویه و مختصات را با شرح و تفصیل بیشتری بیاورم؛ و بعضی دیگر می گفتند آنها را حذف کنم و فعالیت مربوط به تقارن را توضیح بیشتری بدهم. هر دو پیشنهاد در یک نکته مشترک بود، و آن نیاز به شرح و تفصیل بیشتر می باشد. در نهایت تصمیم گرفتم متن را همانگونه که برای اولین بار نوشته شد باقی بگذارم، به چند دلیل:

اول اینکه نشان دهم برای اکثر مطالبی که باید آموزش داد می توان فعالیت مناسبی یافت.

دوم اینکه به مجله پیشنهاد کنم بخشی را به فعالیتهای کلاس درس اختصاص دهد تا در آنجا فارغ از معرفی همیشگی فلسفهٔ فعالیتها، فقط در مورد خود فعالیتها نوشته شود.

به مناسبت درگذشت پروفسور فیشباین
مؤسس
گروه بین المللی روان شناسی آموزش ریاضی
The International Group for The Psychology of Mathematics Education (PME)

گردآورنده : زهرا گویا ، دانشگاه شهید بهشتی ، عضو PME

ما نیازمند احساس عظمت و شأن و زیبائی ریاضی به عنوان یک موفقیّت اساسی نوع بشر هستیم ـ نه فقط توانائی ریاضی برای کارهای عملی ـ بلکه تصورّ یک کلّ سازمان یافته ، تصورّ تلاش های بیکران بی تزویر و اصیلی که توسط ذهن بشر در طی هزاران سال انجام شده است تا به خلق این ساختار پویا ، منسجم و هماهنگ منتهی شود .

پروفسور افرایم فیشباین (۱۹۹۳)

پروفسور افرایم فیشبایـن در ۲۲ جولای ۱۹۹۸ ، تنها چند روز پس از بیست و دومین کنفرانس بین المللی روان شنـاسـی آمـوزش ریاضی PME22 که در آفریقای جنوبی برگزار شد و ایشان حضـور داشتند ، دار فانی را وداع گفت . او که مؤسس گروه بین الـمـلـلـی روان شناسـی آمـوزش ریـاضـی (PME) بـود ، در سـال ۱۹۲۰ در بخارست پایتخت رومانی به دنیا آمد .

به گفتهٔ همسرش هنریتا فیشباین ، افرایم در سـن ۱۳ سالگی بـه کمک یکی از معلمان خود یک مجله منتشر کرد و در آن ، به نوشتـن داستان وقایع آن روز رومانـی پـرداخـت . از کـودکـی ، عـلاقـه و کنجکاوی زیادی نسبت به هر چیزی که در اطرافـش اتّفاق می افتـاد نشان می داد و همین علاقه او را به سمت روان شناسی ، ریاضـی و علوم به معنای وسیع آن ، هدایت کرد . زمانی که دانش آموز دبیرستان بود ، مجذوب ریاضی شد و دانش آموز بسیار خـوبـی در ریـاضـی گشت ، امّا توانائی او در روان شناسی استثنائی بود .

در سن ۱۷ سالگی ، به دلیل علاقه به فلسفه به مطالعهٔ آثار کانت ، شوپنهاور ، دکارت ، برگسون و دیگران پرداخت . او همیشه زمـان ویژه ای را به فکر کردن و بازتاب بر آن چه که مطـالـعـه کـرده بـود اختصاص می داد . علاقهٔ او به مطالعه جهت روشنگری ذهنش تا آخر عمر با او بود . او فیزیک ، زیست شناسی ، نجوم ، شیمی و ریاضی را مطالعه کرد و در مورد تدریس و یادگیری این موضوع ها تحقیـق کرد . امّا همیشه ، علاقـهٔ اصلی و غالب او ؛ درک فرایندهای تفـکّر انسانی و احساس انسانی بود .

او عاشق موسیقی کلاسیک ، ادبیات ، شعر و طبیعت بود . با این

E PME

حال، هیچ گاه نسبت به حوادث سیاسی دوران خود بی اعتنا نبود. به خصوص، مبارزات او بر علیه فاشیسم و نازیسم در بخارست به یاد ماندنی است.

با شروع جنگ جهانی دوم، او از تحصیل بازماند و به اردوگاه کار اجباری جهت ساختن ریل قطار فرستاده شد. بلافاصله بعد از پایان جنگ، او از صبح تا آخر شب به مطالعه و یادگیری پرداخت. بینائی او در زمان جنگ به شدّت آسیب دید تا حدّی که فقط می توانست با گوش دادن یاد بگیرد، در حالی که یکی از دوستان یا همکارانش متن را به صدای بلند برایش می خواند. با این حال، او امتحانهای درسی سختی را پشت سر گذاشت. او در سال ۱۹۴۶ فوق لیسانس روان شناسی خود را دریافت کرد و پس از گذراندن شش ماه دورهٔ فشرده و امتحان پس از آن، موفق به دریافت گواهی نامه برای تدریس ریاضی در دبیرستان شد.

در سال ۱۹۴۷ به شهر کوچک ترانسیلوانا رفت تا سرپرستی یک پرورشگاه را که دارای ۱۰۰ کودک بازمانده از اردوگاههای مرگ بود به عهده بگیرد. این کار، یک چالش بزرگ برای او بود که این کودکان را غذا دهد، لباس بپوشاند و به آنها زیستن یک زندگی طبیعی را یاد دهد. در همان زمان، نمایشنامه ای با عنوان «شهر خورشید» نوشت و به مسائل سیاسی واقعی که مردم در دورهٔ بعد از جنگ در رومانی با آن مواجه بودند پرداخت.

در سال ۱۹۴۸، او به بخارست بازگشت و علاوه بر تدریس در دبیرستان، زندگی دانشگاهی خود را به عنوان مدرس روان شناسی در دانشکدهٔ روان شناسی دانشگاه بخارست آغاز کرد و به مدت پنج سال، به تدریس ریاضی، روان شناسی و فلسفه در دبیرستان و روان شناسی رشد و شناختی در دانشگاه پرداخت.

به زودی، افرایم درگیر تحقیقات شد تا برای مسایل پیچیده ای که در دبیرستان با آنها مواجه بود جواب بیابد. پس از مدّتی، او شروع به انتشار کتابها و مقاله های متعددی در رابطه با جنبه های روان شناسانهٔ یادگیری و ادراک کرد.

در سال ۱۹۶۳، فیشباین از دانشگاه بخارست به دریافت درجهٔ Ph.D (دکترای تخصّصی) در روان شناسی نائل شد. او از سال ۱۹۵۹ تا ۱۹۷۵، رئیس گروه روان شناسی تربیتی مؤسسهٔ روان شناسی آکادمی رومانی بود.

در سال ۱۹۷۶، فیشباین گروه بین المللی روان شناسی آموزش ریاضی (PME) را تأسیس کرد و اولین رئیس این گروه شد و پس از آن، همیشه عضو افتخاری این گروه باقی ماند. افراد بسیاری برای تشکیل چنین گروهی تلاش کردند اما فداکاری، علاقه و دانش وسیع افرایم فیشباین، این رؤیا را به حقیقت رساند.

می توان با اطمینان گفت که نقش فیشباین و کارهای او در آفرینش نظریهٔ شهود (به خصوص نقش تفکّر شهودی در تفسیر بعضی از مفاهیم اساسی ریاضی مانند مفهوم بینهایت و فرایندهای تصادفی)، نظریهٔ مدلهای ذهنی (به خصوص مدلهای ضمنی) و نظریهٔ مفاهیم شکلی (هستی های ذهنی که هم زمان، دارای ویژگی های مفهومی و شکلی هستند)، بسیار برجسته و چشمگیر است.

فیشباین فردی با اطلاعات وسیع و بصیرت عمیق و دارای کنجکاوی روشنفکرانه و علاقه مندی به مسائل مرتبط با آموزش و تحقیق بود که به یک تعهّد انسانی به پیشرفت و تعالی انسان داشت. ایدهٔ بنیادین زندگی او نصیحت پدر بزرگش بود که «ظرفیت خلق و در میان گذاشتن آن با دیگران، منبع اساسی لذّت است.»

آنچه در زیر می آید، نام تعدادی از کتابهای معروف اوست:

انسان ـ ارباب عادتهای خود (۱۹۵۵)، چگونه دنیا را می شناسیم (۱۹۵۸)، مفاهیم شکلی (۱۹۶۳) [این کتاب پایان نامهٔ دکترای او بود]، مفهوم و تصور در تفکّر ریاضی (۱۹۶۵)، هنر تفکّر (۱۹۶۸) مخاطرات و احتمالات در تفکّر کودکان (۱۹۷۴)، منبع شهودی تفکّر احتمالی در کودکان (۱۹۷۵)، شهود در علوم و ریاضی (۱۹۸۷)، شهود؛ طرحواره و مدلها در استدلال ریاضی و علوم (از طرف انتشاراتی لارنس ارل بام زیر چاپ است)

متنی که در زیر می آید، سخنرانی پروفسور فیشباین در افتتاحیهٔ بیستمین کنفرانس بین المللی آموزش ریاضی (PME20) است که در جولای ۱۹۹۶ در والنسیای اسپانیا برگزار شد و در خبرنامهٔ ماه مه ۱۹۹۹ (PME) که ویژهٔ بزرگداشت اوست، چاپ شده است:

قبل از هرچیز، اجازه بدهید صمیمانه از اعضای کمیتهٔ بین المللی

PME

به خاطر دعوت از من برای ارائهٔ سخنرانی در مراسم سالگرد بیستمین «کنفرانس بین المللی روان شناسی آموزش ریاضی» تشکّر کنم. در واقع، این دعوت باعث خشنودی و افتخار من است.

باید اعتراف کنم که تحت تأثیر قرار گرفته ام. همهٔ ما، از آن زمان تا الان ۲۰ سال پیرتر شده ایم. در کارلز روهه در سال ۱۹۷۶، همگی به این نتیجه رسیدیم که جنبه های روان شناسانهٔ آموزش ریاضی نیازمند توجّه فعّالِ نه تنها چند نفر روشنفکر، بلکه یک اجتماع علمی سازمان یافته است. کودکانی که آن زمان تازه زاده شده بودند، در حال حاضر، دانش آموزان، دانشجویان، معلمان و پژوهشگران بزرگسال هستند. ایده هائی که تنها جوانه های محجوب، مفروضات مبهم یا هنوز زاده نشده بودند، حالا تبدیل به مفاهیم علمی، جهت های پژوهشی، استراتژی های آموزشی و اصول شده اند. ایده های ما با ما رشد کرده اند، غنی تر شده اند، و حوزه های نظری را احاطه کرده اند. واضح است که برای این تأثّر و احساس عمیق دلیل دارم!

آنهائی که در سال ۱۹۷۶ دانشجویان جوان من بودند، الآن استادان دانشگاه، معلمان دبیرستان و پژوهشگران با تجربه هستند. من به دلیلی ساده، اغلب به گذشتهٔ خود نمی نگرم. در نتیجه، فرض می کنم که آن چه یاد گرفته ام و انجام داده ام، آن چه خوب و باارزش بوده است، با حالِ من عجین شده و الهام بخش آیندهٔ من است. با این حال، من عمیقاً تحت تأثیر قرار گرفته ام زیرا احساس می کنم که بخشی از این موجود زنده هستم که حالا PME نامیده می شود، اعضائی که در تمام دنیا و تمام کشورها پخش شده اند. بسیاری از شما دوستان و همکاران من هستید. بسیاری از شما، یادآور تلاشها و جدیت های علمی روشنفکران گذشته و حال ما هستید.

PME از زمان به وجود آمدنش در سال ۱۹۷۶ تا به حال، راه دراز و مولّدی را پیموده است. از نظر کمّی، همه چیز واضح است. در اولین گردهمائی در اوترِخت [آلمان]، ما حدود ۱۰۰ نفر بودیم. حالا PME حدود ۶۰۰ عضو دارد. امّا بسیار مهم‌تر از این، کیفیت کار ماست که به طور چشمگیری پیشرفت کرده است. حوزه های مورد علاقه بسیار غنی تر شده اند. قبلاً، ریاضی ابتدائی تفوّق داشت. در سالهای گذشته، ریاضیات پیشرفته خیلی بیشتر از گذشته بر پژوهشگران نفوذ داشته است. حوزه های جدید تحقیقی مورد توجّه قرار گرفتند و مفاهیم بومی جدیدی اختراع گشتند. جبر، هندسه، نظریهٔ اعداد، مفاهیم حسابان (بینهایت، حد، مشتق و انتگرال) تابع ها، ترکیبیات و احتمالات، نظریهٔ اثبات و غیره و غیره حالا کانون توجّه ما هستند.

مسائل روان شناسانهٔ خاصّی ایجاد شدند. اجازه دهید به بعضی از آنها اشاره کنم: نقش نمادها و نقش استعاره ها در استدلال ریاضی؛ زبان و ریاضی که شامل، مسائل روان شناسانهٔ ترجمهٔ عبارتها از زبان زندگی روزانه به زبان نمادین ریاضی است (با صرف و نحو و معانی شناسی ویژهٔ خود)؛ رابطهٔ ویژهٔ بین مفهوم و شکل در استدلال هندسی؛ نقش تصوّر کردن؛ پویائی شهود و استدلال صوری در استدلال مولّد ریاضی با نقش ویژهٔ مدلها (مدلهای تصویری، مجرّد و نموداری)؛ تمثیل و پیش الگوها[1]؛ مدلهای صریح و ضمنی؛ روابط بین فرآیندها و اشیای ذهنی در استدلال ریاضی؛ درک ریاضی؛ معنای درک در ریاضی؛ روابط بین طرحواره ها، شهودها، الگوریتم ها و مفهوم ها در استدلال ریاضی؛ و غیره و غیره.

در اینجا، ما مسائل روان شناسانهٔ غنی ای داریم که روان شناسی شناختی و حتّی برگردان مدرن آن یعنی علوم شناختی نیز هرگز آنها را در نظر نگرفته بود امّا الهام بخش دیدگاه های جدید تحقیقی بوده اند. تمام این جوش و خروش های روشنفکرانه باعث تولید ابزار جدید، قوی و مفهومی برای توصیف، تجزیه و تحلیل و پیش بینی شده اند. اجازه دهید به بعضی از آنها اشاره کنم: ایدهٔ میدان مفهومی، (مجموعهٔ بزرگی از موقعیّت ها که نیازمند گروه مشترکی از مفهوم ها، رویّه ها و بازنمائی های نمادین است)؛ قضیه در عمل ـ که از نظر رفتاری، ظرفیّت حل یک مسأله با توجه به یک قضیّهٔ مشخص است که فرد از آن آگاه نیست؛ تصوّر مفهومی و تعریف مفهومی ـ (تصوّر مفهومی یک بازنمائی ذهنی از یک هستی مشخص ریاضی شامل تفسیرهای ذهنی است)؛ مفهوم های شکلی ـ شکلهای هندسی که مجرّد هستند، ایده آل ها، بازنمائی های شکلی که کاملاً توسط موانع صوری کنترل شده اند؛ فرایندی که به وسیلهٔ آن، تفسیر پویای یک ایدهٔ ریاضی را (به عنوان مثال «تابع») به سمت نوعی از عینیّت ـ انجماد عینی ـ راهبری می کند؛ از این راه، فرد به چیزی دست می یابد که دیوید تال به آن «فرهوم»[2] می گوید ـ برای نمونه، مفهوم حدّ در حقیقت یک فرهوم است. به عنوان مثال، ماهیت مفهوم حد با ماهیت مفاهیم صندلی یا خانه یکسان نیست. اگر کسی فرآیند میل کردن را در نظر نگیرد، مفهوم حد معنائی ندارد. «حد» هم زمان هم یک فرآیند و هم یک شیئی است. وجود چنین هستی های پیچیده و ظاهراً متناقض، ممکن است پژواک مهمّی در تحقیقات شناختی و تأثیر

PME

مهمّی بر فرآیند تدریس ریاضی داشته باشند. من تنها به چند مفهوم جدید و ابزار نظری که از تلاشهای علمی ما ناشی شده است اشاره کردم.

اجازه دهید به یک نکتهٔ مشخص ویژه اشاره کنم؛ این نکته به خصوص قابل توجّه همکاران جوان ما است. در صحبت از مفاهیم جدید، من به زدن برچسب جدید به پدیده های آشنای فعلی ارجاع ندادم. وقتی پیاژه راجع به سطح ها، طرحواره ها، هضم [شبیه سازی] و جذب [جایگزینی]، ابقا، تعادل و غیره صحبت کرد. او از این عبارتها در قالب یک رویکرد کاملاً جدید استفاده کرد. نتیجهٔ این رویکرد جدید، کشف بازنمائی های جدید، تفسیرهای جدید و حتی پدیده های جدید شد. به کشف پیاژه باید اسم جدیدی داده می شد تا بتوان برای آن مفهوم سازی کرد، با آن ارتباط برقرار نمود و از آن در استدلال علمی استفاده کرد. بعضی از محقّقان جوان ـ و نه خیلی جوان ـ فرض می کنند که با به کار بردن یک برچسب جدید برای یک پدیدهٔ مشهور، خدمات علمی توفیق می یابند. من دوست ندارم در شرایط حاضر، به مثال های منفی نگاه کنم، اگرچه به راحتی می توانم این کار را بکنم. مفهوم ها و عبارتهائی که در بالا به آنها اشاره کردم ـ و قطعاً خیلی بیش از این ها وجود دارند ـ بیانگر نیاز واقعی برای مفهوم سازی تفسیرها و یافته های جدید هستند.

این حقیقت که فعالیت های تحقیقی ما در بیست سال گذشته، نه تنها توانسته است به یافته های خاص محدود برسد، بلکه به ارائهٔ دیدگاه های جدید، راههای جدید استدلال، مدل های تفسیری جدید نیز رسیده است که اثباتی مسلّم است بر این که **روان شناسی آموزش ریاضی** تبدیل به یک حوزهٔ تحقیقی بکر و اصیل علمی شده است.

من می دانم که یافته ها و دیدگاه های نظری ما که بر اساس پدیدهٔ واقعی است، ممکن است به طور مفیدی، الهام بخش خود روان شناسی شناختی نیز باشد. این باعث تأسف است که روان شناسان شناختی، عموماً تمایل دارند که اهداف تحقیقی خود را از قلمرو تجربهٔ روزانهٔ خود انتخاب کنند. به این دلیل، روان شناسی شناختی به طور نسبی ایستا شده است و به صورت یک بدنهٔ بستهٔ دانشی در آمده است که قادر به الهام گرفتن از کاربردهای مفید و بکر در حوزه های عملی گوناگون و برای نمونه، آموزش ریاضی نیست. من کاملاً باور دارم که روان شناسی شناختی از نظر مفهومی، توانائی به دست آوردن نتیجه های زیادی را دارد، و به عنوان یک دامنهٔ کاربردی، از مسائل تحقیقی ما، یافته های ما و دیدگاههای تفسیری ما می تواند بهره مند شود. مفاهیمی مانند حوزهٔ مفهومی[3]، تصوّر مفهومی[4] و تعریف مفهومی[5]، شهود اولّیه و ثانویه، مدلهای ضمنی، فرهوم ها و غیره، به حوزهٔ ریاضی محدود نشده اند. اگر آنها به حوزه های دیگر پیوند زده شوند، ممکن است بسیار مربوط شوند. بالاخره می خواهم به تأثیر بسیار مثبتی که فعالیت های گروه ما بر سایر تلاشهای مرتبط گذاشته است اشاره کنم. من فرض می کنم که ایجاد گروه ما و موفقیت آن، الهام بخش گروه های دیگری که به آموزش ریاضی مرتبط هستند شده است که از آن جمله، می توان به **نظریهٔ آموزش ریاضی، فلسفهٔ آموزش ریاضی و گروه مطالعاتی بین المللی برای تحقیق در یادگیری آمار و احتمال** اشاره کرد. قطعاً همپوشی علاقه ها و جهت گیری های نظری بین تمام این گروهها وجود دارد. امّا از نظر من، این همپوشی به خودی خود بسیار مثبت است و باید تشویق شود.

اجازه بدهید به خاطر آن چه که تا به حال با اشتیاق، فداکاری و از خودگذشتگی و مشارکت مستمر فعّال و شایستهٔ صدها همکار بسیار با کفایت در تمام این حوزه ها به دست آورده ایم، به خودمان تبریک بگوئیم. بیائید امیدوار باشیم که طی ۲۰ سال آینده، گروه ما و گروههای دیگری که برای توسعه و پیشرفت آموزش ریاضی تلاش می کنند، به روند خود به سمت دست آوردهای علمی و بسیار موفق ادامه دهند. تا آن زمان، ما خوشحال خواهیم بود که هر سال، یکدیگر را در یک نقطهٔ زیبا و متفاوت [در دنیا] ملاقات کنیم و پیام حسن نیّت، همکاری، عشق برای ریاضی و استدلال، عشق برای دانش آموزان و دانشجویان خود که با سختی ها و جذبه های یادگیری ریاضی دست و پنجه نرم می کنند را به هم برسانیم.

زیرنویس ها:

1. Prototypes
2. Procept (Process + Concept)

هم چنین، به مقالهٔ «تکنولوژی اطلاعات و آموزش ریاضی: اشتیاق ها، امکان ها و واقعیت ها»، در مجلهٔ رشد ریاضی شمارهٔ ۴۷ مراجعه کنید.

در آن مقاله، به تفصیل راجع به فرهوم که ترکیبی از فرآیند و مفهوم است، توضیح داده شده است.

3. Conceptual Domain
4. Conceptual Image
5. Conceptual Definition

۲ = ۱

نویسنده: جیمز تانتون[1]

مترجم: امیر پاشا شیرازی‌نیا

«گایا دوبالدو دل مونته»[2] (۱۶۰۷_۱۵۴۵) که مدت ۲۰ سال دوست و حامی گالیله بود، می پنداشت که شاهد بـه وجـود آمـدن چیزی از هیچ بوده است. او از طریق ریاضی ثابت کرد که ۱=۰ و به همین دلیل فکر می کرد که به مقام خداوندی رسیده!! من جرئت ندارم که تا این اندازه بی پروا باشم. ولی می خواهم به جای آن پیشنهـاد کنم: ۲=۱.

استدلال های گیج کننده ای برای اثبات این موضوع وجود دارد. چنین بحث هایی برای ده ها سال و حتی قرن هـا ردّ و بدل می شـد. استدلال های جمع آوری شده، سندهای گیج کننده ای هستنـد کـه خواننده را به سمت این عقیدهٔ بی معنی سوق می دهد که ۲=۱.

من در این جـا ۱۲ استدلال آورده ام که نشان می دهـد: ۲=۱. اشتباه هر اثبات کجاست؟

۱- اثبات به وسیلهٔ جبر

فرض کنیـد $x=1$. در نتیـجـه: $x^2 - x = x^2 - 1$؛ یعنـی: $x(x-1) = (x-1)(x+1)$.

$(x-1)$ را از طرفین حذف می کنیم: $x = x+1$

بنابراین: ۲=۱.

۲- اثبات از طریق نظریهٔ اعداد مختلط

$$
\begin{aligned}
1 &= \frac{i^2+3}{2} \\
&= \frac{i.i+3}{2} \\
&= \frac{\sqrt{-1}\,.\,\sqrt{-1}+3}{2} \\
&= \frac{\sqrt{(-1)(-1)}+3}{2} \\
&= \frac{\sqrt{1}+3}{2} = 2
\end{aligned}
$$

بنابراین: ۲=۱.

۳- اثبات به وسیلهٔ لگاریتم

داریم: ۲ ≤ ۱، بنابراین:

$$1.\mathrm{Log}_{10}(\frac{1}{2}) \le 2.\mathrm{Log}_{10}(\frac{1}{2})$$
$$\mathrm{Log}_{10}(\frac{1}{2}) \le \mathrm{Log}_{10}(\frac{1}{4})$$
$$\frac{1}{2} \le \frac{1}{4}$$
$$2 \ge 4$$

طرفین نامساوی را بـر ۲ تقسیم می کنیم، در نتیجـه: ۲ ≥ ۱ . بنابراین ۲=۱ .

۴ـ اثبات از طریق انتگرال

رابطهٔ انتگرال جزء به جزء چنین است:

$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx$$

از این فرمول برای محاسبهٔ $\int \frac{1}{x}dx$ استفاده می کنیم.

قرار می دهیم: $u = \frac{1}{x}, v' = 1$، در نتیجه: $u' = -\frac{1}{x^2}$ و $v=x$

بنابراین:

$$\int \frac{1}{x}\, dx = (\frac{1}{x}).x - \int (-\frac{1}{x^2})xdx$$
$$\int \frac{1}{x}\, dx = 1 + \int \frac{1}{x}\, dx$$

از طرفین تساوی، $\int \frac{1}{x}dx$ را کم می کنیم. در نتیجـه: ۱=۰ و بالاخره: ۲=۱ .

۵ـ اثبات به وسیلهٔ قاعدهٔ شرکت پذیری (گایا دو بالدو دل مونته)

قاعدهٔ شرکت پذیری در جبر به ما اجازه می دهد تا در جمع کردن، پرانتزها را برداریم. برای مثال اگـر ...و c و b و a اعدادی باشند، آن گاه:

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$
$$(a+b)+(c+d)=a+((b+c)+d)$$
$$a+(b+(c+(d+(e+f))))=((a+(b+c))+(d+e))+f$$

حال از این خاصیت استفاده می کنیم:

$$\begin{aligned} 0 &= (1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots \\ &= 1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\cdots \\ &= 1+0+0+0+\cdots \end{aligned}$$

به طرفین تساوی عدد ۱ را اضافه می کنیم، در نتیجه: ۲=۱ .

۶ـ اثبات به وسیلهٔ آنالیز

می دانیم:

$$\mathrm{Ln}(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots$$

این تساوی برای $-1 \le x \le 1$ تعریف شده است. اینک اگر به x مقدار «۱» بدهیم:

$$\mathrm{Ln}\,2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \cdots$$

طرفین تساوی را در ۲ ضرب می کنیم:

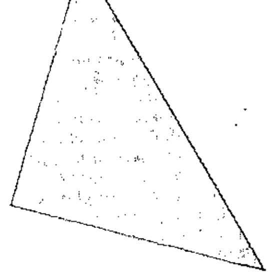
$$\begin{aligned} 2\mathrm{Ln}\,2 &= 2 - 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + \frac{2}{7} - \frac{1}{4} + \frac{2}{9} - \frac{1}{5} + \cdots \\ &= (2-1) - \frac{1}{2} + (\frac{2}{3} - \frac{1}{3}) - \frac{1}{4} + (\frac{2}{5} - \frac{1}{5}) - \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots \\ &= \mathrm{Ln}\,2 \end{aligned}$$

پس، $2\mathrm{Ln}2=\mathrm{Ln}2$؛ در نتیجه: ۲=۱ .

۷ـ اثبات به وسیلهٔ آزمایش (پارادوکس ارسطو)[3]

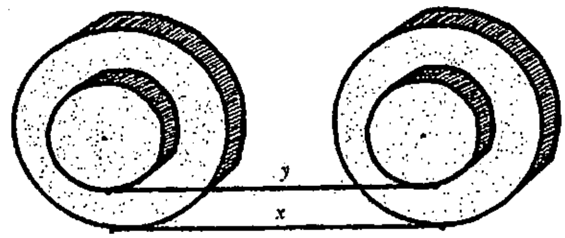
فرض کنید چرخی به شعـاع $r = \frac{1}{2\pi}$ متصل به چرخی دیگر بـه شعاع $R = \frac{1}{\pi}$ است. این چرخ ها دور محـوری (همان طور کـه در شکل «۱» نشان داده شده است) می چرخند.

یک چرخش کامل این دستگاه را در نظر بگیرید. هـر دو چـرخ جابه جایی یک سانی دارند، بنابراین: x=y . اما x برابر با محیط چرخ



بزرگ است: $x = 2\pi R = 2$ و y برابر با محیط چرخ کوچک است: $y = 2\pi r = 1$.

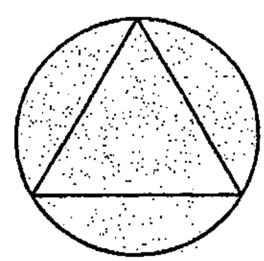
در نتیجه: $2=1$.



شکل - ۱

۸ـ اثبات به وسیلهٔ نظریه احتمال (پارادوکس برتراند)[۲]

دایره ای به شعاع R در نظر بگیرید. داخل دایره، مثلث متساوی الاضلاعی رسم کنید. در اینصورت طول ضلع مثلث $\sqrt{3}R$ است.



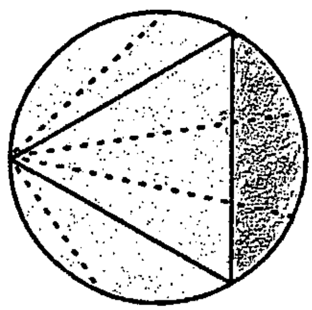
شکل - ۲

حال این سؤال را از خودمان می پرسیم:

«وتری از دایره را به طور تصادفی انتخاب کنید. احتمال (P) این که طول وتر بیش تر از $\sqrt{3}R$ (ضلع مثلث) باشد، چقدر است؟»

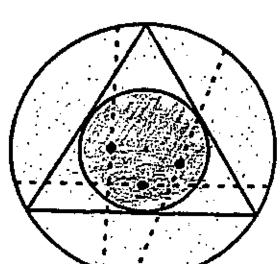
ما از دو راه به این سؤال پاسخ می دهیم:

۱ـ با چرخاندن دستگاه مختصات، نقطه ای از وتر را در منتهی الیه چپ دایره قرار می دهیم و مثلث متساوی الاضلاع را نیز رسم می کنیم. واضح است که اگر نقطهٔ دیگر وتر میان $\frac{1}{3}$ محیط دایره (بخش هاشور زده) قرار گیرد آنگاه طول وتر بلندتر از طول ضلع مثلث است. بنابراین: $P=\frac{1}{3}$.



شکل - ۳

۲ـ به طریق دیگر، اگر نقطهٔ میانی وتر بر جایی در ناحیهٔ سایه زده (شکل ۴) قرار گیرد، طول آن بلندتر از طول ضلع مثلث می شود. بنابراین P برابر است با احتمال این که نقطهٔ میانی در این ناحیه قرار گیرد. یک محاسبهٔ ساده نشان می دهد که مساحت این ناحیه $\frac{1}{4}$ مساحت دایرهٔ کامل است. در این صورت: $P=\frac{1}{4}$.



شکل - ۴

بنابراین: $\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$ یا ۴=۳. از طرفین دو واحد کم می کنیم، در نتیجه: ۲=۱.

۹ـ اثبات به وسیلهٔ استقرا

در این جا قوی ترین حالت را اثبات می کنیم که بر اساس آن، تمام اعداد صحیح با هم برابرند، و البته: ۲=۱.

برای عدد طبیعی n، فرض می کنیم P(n) این عبارت باشد: «برای هر مجموعه شامل n تا عدد طبیعی، همه اعداد با هم برابرند.»

توجه: P(1) درست است، برای هر مجموعه شامل یک عدد صحیح، تمام اعداد آن با هم برابرند.

فرض: P(n) درست باشد، عبارت P(n+1) را در نظر بگیرید. فرض کنید S مجموعه ای شامل n+1 عدد صحیح باشد. عددی از مجموعه انتخاب کنید و آن را از این مجموعه بردارید. آن چه باقی می ماند، مجموعه ای شامل n عضو است که همهٔ آن ها با هم برابرند. این نشان می دهد که همهٔ ۱ + n عدد باید با هم برابر باشند؛ پس P(n+1) نیز درست است.

اصل استقرا نتیجه می دهد که P(n) همیشه درست است.

۱۰ـ اثبات به وسیلهٔ تکرار (پارادوکس باناخ ـ تارسکی[5])

مجموعهٔ اعداد طبیعی را در نظر بگیرید:

$\{1, 2, 3, 4, \cdots\}$

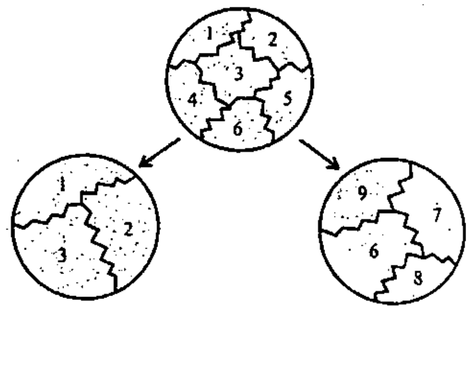
این مجموعه می تواند به دو مجموعهٔ دیگر افراز شود که هر کدام از نظر تعداد اعضا با مجموعهٔ اصلی برابرند:

$\{2, 4, 6, \cdots\} \quad , \quad \{1, 3, 5, \cdots\}$

دو تا از یکی انتخاب شده اند، پس: ۲=۱

در سال ۱۹۲۰ «باناخ» و «تارسکی» این نتیجه را اثبات کردند: «یک توپ فوتبال را به ۹ قسمت تقسیم می کنیم. سپس ۵ قسمت را می چرخانیم و آن ها را به هم مرتبط می کنیم. بعد بقیهٔ قسمت ها (۴ بخش) را به هم ارتباط می دهیم تا دو توپ کامل که هر کدام حجم برابری با اولی دارند به وجود آید.

دوباره دو تا از یکی، پس: ۲=۱.



شکل ـ۵

۱۱ـ اثبات به وسیلهٔ اندیشهٔ محض

یک گزارهٔ منطقی (ترکیب شرطی) به این صورت را به خاطر بیاورید:

اگر A آن گاه B

این گزاره درست است اگر A نادرست باشد. (برای مثال، فرض کنید من به شما بگویم: «اگر «سالی»[6] به سینما برود.» «پیتر»[7] نیز خواهد رفت.» شما برای این که درستی یا نادرستی خبر من را تأیید کنید، به سینما می روید. ولی فقط پیتر را در آن جا می بینید. آیا من به شما دروغ گفته ام؟ نه. من فقط گفتم اگر سالی برود چه اتفاقی می افتد. حضور سالی نادرست می شود، اما کل گزاره من درست است)

«اگر کل جملهٔ داخل این گیومه درست باشد آنگاه ۲=۱»

این گزاره نمی تواند نادرست باشد، چون استدلال بالا ما را به سمتی سوق داد که باور کنیم این نیز می تواند درست باشد. این عبارت درست است. چون فرض آن درست است، حکم آن نتیجه می شود. بنابراین می توانیم نتیجه بگیریم که ۲=۱.

۱۲ـ اثبات به وسیلهٔ تجارب زندگی

من اخیراً در یک حراجی به تابلوی «دو تا به قیمت یکی» برخوردم. من فقط یکی از آن کالاها را می خواستم، بنابراین از فروشندهٔ مغازه پرسیدم: «قیمت فقط یکی از این کالاها چقدر است؟»

فروشنده جواب داد: «همان قیمت دو تا از آنها.»

گفتم: «پس یکی همان دو تاست.»

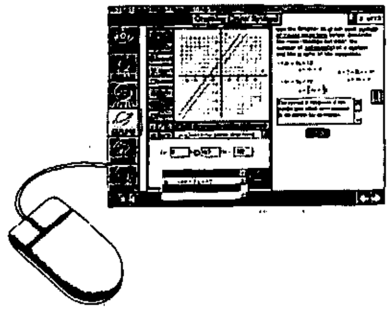
فروشنده: با اطمینان پاسخ داد: «بله؛ حتماً هست!!»

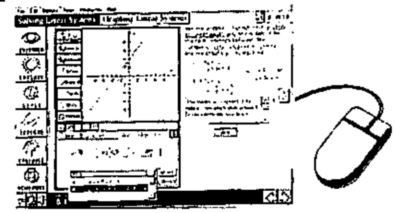
منبع:

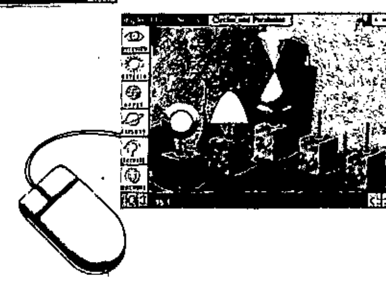
Math Horizon, Feb. 1999

زیرنویس ها:

1. James Tanton
2. Guidobaldo del Monte
3. Aristotle's paradox
4. Bertrand's paradox
5. Banach- Tarski paradox
6. Sally
7. Peter







تکنولوژی دیداری در آموزش و یادگیری ریاضی[1]

مواد آموزشی چندرسانه‌ای تعاملی و بر پایهٔ کامپیوتر که به فراگیرنده امکان کنترل و بازخورد هم‌زمان ارائه می‌کنند، می‌توانند یادگیری فعال ریاضی را تسهیل کنند.

نویسنده: ادوارد ام. لَندزمَن[2]
مترجم: شهرناز بخشعلی زاده،
گروه ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی

طی تقریباً ۳۰ سال تدریس ریاضی در «دانشگاه کالیفرنیا» واقع در «سانتاکروز» کالیفرنیا، وضعیت‌های صنعتی بسیاری را تجربه کردم که برخی از آن‌ها کارآمد بود و برخی کارآمد نبود. من درس‌های متفاوتی را در تمام زمینه‌های برنامهٔ درسی ریاضی تدریس کرده‌ام: از دروس پایه چون حسابان مقدماتی و حسابان تا درس‌های تخصصی دوره‌های کارشناسی ارشد و دکترا؛ به‌خصوص معادلات دیفرانسیل. از بسیاری جهات، تجربیاتی مطلوب و سودمند بودند. وجوه مختلفی از آموزش ریاضی وجود داشتند که به آن‌ها دست نیافته بودم و برای من ایجاد سؤال می‌کردند. به‌خصوص، زمانی که دروس پایه آموزش داده می‌شوند، چگونه می‌توان به آن جنبه‌ها با روش‌های مؤثرتری دست یافت.

در دروس پایه و بنیادی ریاضی، دانش‌آموزان در سطوح مهارتی مختلفی قرار داشتند و اغلب به توجهات فردی مختلفی نیاز داشتند. این دانش‌آموزان باید در یادگیری‌شان فعالیتِ خیلی بیش‌تری می‌کردند، چرا که بسیاری از آنان، بر اساس تجربیات اولیهٔ خود، در زمینهٔ یادگیری بدفهمی‌های بسیاری داشتند. از همه مهم‌تر، این دانش‌آموزان روش‌های یادگیری متفاوتی داشتند و آموزش، فقط از طریق سخن‌رانی، جوابگو نبود.

برخی از تحقیقات نشان داده است که در یک کلاس بزرگ ریاضی با روش سخن‌رانی، فقط حدود ۲۰ درصد از دانش‌آموزان به طور واقعی از کلاس بهره می‌برند که اغلب بهترین دانش‌آموزان هستند. ۸۰ درصد بقیهٔ دانش‌آموزان، اغلب چون تُندنویسانی عمل می‌کنند که دیوانه‌وار و بدون اندیشه، یادداشت برمی‌دارند. تعداد کمی فرصت سؤال کردن یا ارتباط مستقیم با مدرس را دارند. اغلب، حتی اگر فرصت سؤال کردن نیز پیدا شود، از سؤال کردن خجالت می‌کشند و یا شرم دارند.

اخیراً، در حین تدریس معلوم شده است که دانش‌آموزان کاربرد ریاضیات را در زندگی و تجربیات روزمرهٔ خود جست و جو می‌کنند. برخی تا زمانی که ارتباط مستقیم موضوع درسی را با زندگی روزمره و اعمالی که مشغول انجام آن‌ها هستند، ندیده باشند، نیاز کمی به یادگیری آن موضوع حس می‌کنند. برخی تا آن جا پیش می‌روند که فریاد برمی‌آورند: «اگر ریاضی عملکردی سودمند فراهم نکند، نمی‌توانیم ریاضی یاد بگیریم!»

مسیر طی شده توسط یک مدرس

من متوجه شدم که بر بسیاری از این گونه چالش‌ها می‌توان به کمک تکنولوژی غلبه کرد و با تعجب و کاملاً تصادفی، به سمت استفاده از تکنولوژی کشیده شدم. اواخر دههٔ ۱۹۶۰، زمانی که در یک کلاس بزرگ حسابان تدریس می‌کردم، فیلم‌برداری یکی از جلسات سخن‌رانی را با کمک گروه سمعی ـ بصری دانشگاه تدارک

دیدم. وقتی چند روز بعد فیلم را دیدم، تدریس خود را به گونه ای مشاهده کردم که هرگز تصوّر نمی کردم.

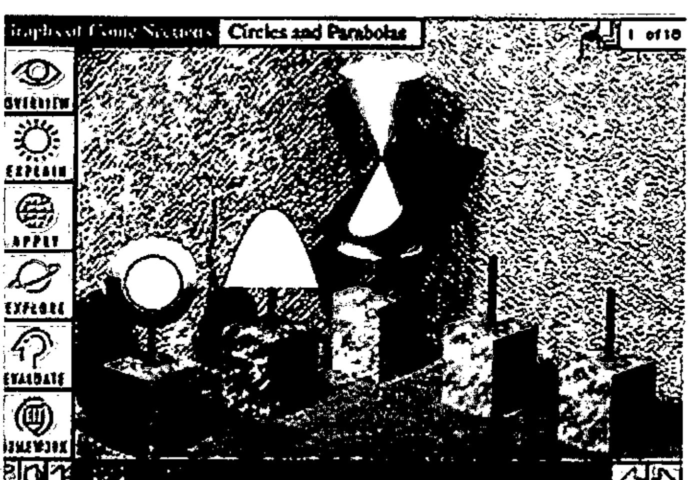
در یک کلاس بزرگ ریاضی با روش سخنرانی، فقط ۲۰ درصد از دانش آموزان به طور واقعی از کلاس بهره می گیرند که اغلب بهترین دانش آموزان هستند و ۸۰ درصد بقیهٔ دانش آموزان تندنویسانی هستند که دیوانه وار و بدون اندیشه یادداشت برمی دارند.

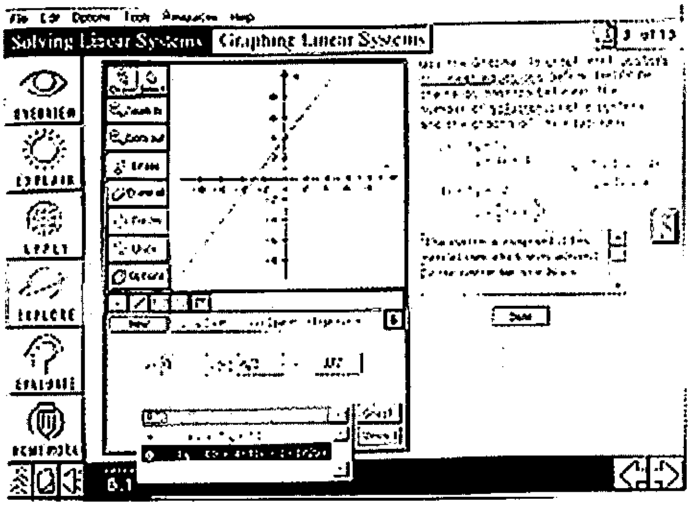
جنبه های مختلفی وجود داشت که موجب آن شد تا من تمام فرآیند انتقال مطلب را زیر سؤال قرار دهم. من خودم را در تدریس بسیار فعال و درگیر دیدم و سعی داشتم اطمینان حاصل کنم که دانش آموزانم آن چه را که من درس می دهم، به خوبی درک می کنند. در همان زمان، دانش آموزان را بی جنبش و بی بهره دیدم. برخی از آن ها یادداشت برمی داشتند، برخی با دقّت گوش می دادند، برخی سر خود را تکان می دادند و برخی اصلاً توجه نداشتند. به دلایل زیادی، نمی دانستم که آیا یادگیری واقعاً به وقوع پیوسته است یا خیر؟ بنابراین، به صورت کاملاً تصادفی، دیدن فیلم اثری عمیق بر من داشت که طرز فکرم را نسبت به آموزش و یادگیری در سی سال آینده تغییر داد.

من شروع به تجربه از طریق ویدئو کردم و بیش از ۱۰۰ حلقه فیلم سیاه و سفید، هر کدام بین ۱۵ تا ۲۰ دقیقه که عنوانی از حسابان را دربرداشت، تهیه کردم. آن ها ابداً فعال نبودند و به جز رسم خطوط، از نمودارها استفادهٔ دیگری نمی شد که از رسیدن به یک محیط فعال و آرمانی یادگیری با تکنولوژی درجهٔ اول، فاصلهٔ بسیاری داشت. تدارک این نوارهای فیلم به تهیهٔ نوارهای دیگری برای تدریس حسابان مقدماتی، استفاده از رنگ، نمودارها و حتی نقاشی متحرک منجر شد. فعالیت های بعدی، پروژهٔ دیسک های لیزری برای یادگیری ریاضیات و نوار ویدیویی تعاملی برای تدریس جبر مقدماتی بود. همان طور که تکنولوژی پیشرفت بیش تری پیدا کرد، من نیز یاد گرفتم که چگونه از آن برای افزایش جدّیت در یاددهی و یادگیری استفاده کنم.

شش سال پیش در یک شرکت نوپا به نام «سیستم های آکادمیک»[۳]، با تیمی از ریاضی دانان، طراحان آموزشی و مهندسان جهت تولید مواد آموزشی چندرسانه ای برای آموزش و یادگیری ریاضیات به کمک کامپیوتر، شروع به کار کردم. در حال حاضر تکنولوژی در مرحله ای قرار دارد که می توان به تمام ویژگی های اساسی که به دانش آموزان اجازه می دهد تا فراگیران فعالی باشند، دست یافت. آن ها می توانند در فرآیند یادگیری خود از انواع کاربردهای رسانه ها و ارائه های پیشرفتهٔ گرافیکی، صفحات یادگیری ترتیبی که کنترل آن به دست یادگیرنده است، ارائه های چندگانه و بازخورد هم زمان بهره مند شوند. اکنون این دسته از مواد آموزشی یادگیری، موقعیت مهمی در کالج ها و دانشگاه ها برای کمک به دانش آموزان در امر یادگیری ریاضیات پیدا کرده اند.

در ادامه مثال هایی از چگونگی استفاده از تکنولوژی برای بالا بردن یافته های دانش آموزان در ریاضی آورده شده است. این مثال ها از سری «ریاضیات تعاملی سیستم های آکادمیک»[۴] اخذ شده که شامل جبر در سطوح مختلفِ مقدماتی، پایه، متوسط و کالج است. تاکنون حدود ۳۰۰ ساعت مواد آموزشی برای دروس ریاضی تهیه شده است.





آموزش ریاضی با استفاده از کامپیوتر

تمام درس ها به صورت پیمانه ای هستند. بدین ترتیب، مدرّس می تواند پیمانه های مختلف مورد نیاز را برای تدریس هر درس ریاضی کنار هم قرار دهد. هر درس مبتنی بر یک ساختار پایهٔ نظام دار است که مواردی بدین شرح را شامل می شود: مرور کلی یا OVERVIEW، توضیح یا EXPLAIN، کاربرد یا APPLY، تحقیق یا EXPLORE، ارزش یابی یا EVALUATE و تکلیف یا HOMEWORK.

در پیمانهٔ OVERVIEW، سازمان دهنده ای به دانش آموزان معرفی می شود که آن چه را دانش آموزان قبلاً یاد گرفته اند و نیز نیازهای آن ها را برای درس بعدی مرور می کند. برای بررسی سطح برخورداری از پیش نیازها و پیش دانسته های مورد نیاز، از پیش آزمون ها هم می توان استفاده کرد. اگر دانش آموزان همهٔ پیش نیازها را بدانند، مدرّس می تواند آنان را از صرف وقت روی آن درس معاف کند و دانش آموزان فراگیری درس بعدی را شروع کنند. اغلب مدرسان از این پیش آزمون ها به عنوان تست های تمرین استفاده می کنند تا آمادگی دانش آموزان را برای آزمون های پایان درس بررسی کنند.

در پیمانهٔ EXPLAIN، ریاضیاتی که دانش آموز باید یاد بگیرد، ارائه می شود. از بسیاری جهات، این پیمانه الگویی از چگونگی تدریس مواد درسی در کلاس های سنتی ـ که من یا دیگر مدرسان احتمالاً تدریس می کنیم ـ و طرز استفاده از رسانه ها برای ارائهٔ نمودارهای رنگی، نقاشی متحرک، صدا، تصویر و بسیاری از کاربردهای آن ها در زندگی روزمره را توضیح می دهد. تکنولوژی، یادگیرنده را در فضای بسیار فعالی قرار می دهد و این امکان را فراهم می سازد که او به طور مستمر به سؤالات پاسخ دهد، بازخورد هم زمان دریافت کند، از دست ورزی های موجود در کامپیوتر استفاده نماید و به طور فعال در آزمودن آن چه فرا گرفته، درگیر شود.

در پیمانهٔ APPLY، به دانش آموز اجازه داده می شود که تمرینات مختلف بیش تری را انجام دهد و از طریق تکالیف شب موجود و در دسترس در کامپیوتر، بازخورد هم زمان دریافت کند. به این ترتیب، دانش آموزان آماده می شوند تا تکالیف شب خود را در خانه یا بدون کامپیوتر انجام دهند. به علاوه، قسمت صفحهٔ کاربرد هر مسأله به صفحهٔ متناظر در پیمانهٔ EXPLAIN مرتبط است تا اگر دانش آموز به توضیحات بیش تری دربارهٔ مفهوم خاصی نیاز داشت، بتواند در همان زمان به پیمانهٔ EXPLAIN رجوع کند و دانشی را که نیاز دارد، به دست آورد و سپس به مسألهٔ خود در پیمانهٔ APPLY برگردد.

در پیمانهٔ EXPLORE، دانش آموزان می توانند دانش خود را از طریق انجام تحقیقاتی که ممکن است مستلزم استفاده از «رسّام»[5] (ابزار رسم نمودار) و «ویراستار عبارت»[6] (وسیله ای برای ورود عبارات ریاضی به کامپیوتر) باشد، و نیز تحقیقات خارج از کلاس که مستلزم جمع آوری اطلاعات از کتابخانه یا مکان های دیگر است، افزایش دهند. هم چنین، مدرس می تواند از پیمانهٔ EXPLORE برای درگیر کردن دانش آموزان در کارهای گروهی استفاده کند. همانند پیمانهٔ APPLY، اگر دانش آموزی به توضیحات بیش تری دربارهٔ تئوری مفاهیم نیاز داشته باشد و از پیمانهٔ تحقیق خارج شود، بازگشت به این پیمانه امکان پذیر است.

پیمانهٔ EVALUATE حاوی آزمون های پایان هر درس است. دانش آموزان می توانند هر آزمون را تا سه مرتبه، بسته به نظر مدرّس، امتحان دهند. پس از انجام آزمون، دانش آموز می تواند سؤالات را مرور کند و پاسخ های خود را با پاسخ های کامپیوتر مقایسه کند تا از چگونگی تکمیل آزمون اطلاع یابد.

دانش‌آموزان نمی‌توانند قبل از آن که تکلیف شب آن‌ها در بخش «دفترچه یادداشت شخصی»[7] شان تعیین شود، از سیستم خارج شوند. در این دفترچه‌های کار، موضوعات درسی هریک از پیمانه‌های ذکر شده، مرور می‌شود و مثال‌های کامل و تمرین‌هایی برای تکلیف شب دانش‌آموزان گردآوری شده است. علاوه بر آن، دفترچه‌های مذکور شامل آزمون‌هایی برای تمرین، به همراه پاسخ آن‌هاست.

تدریس برای سطوح مهارتی گوناگون

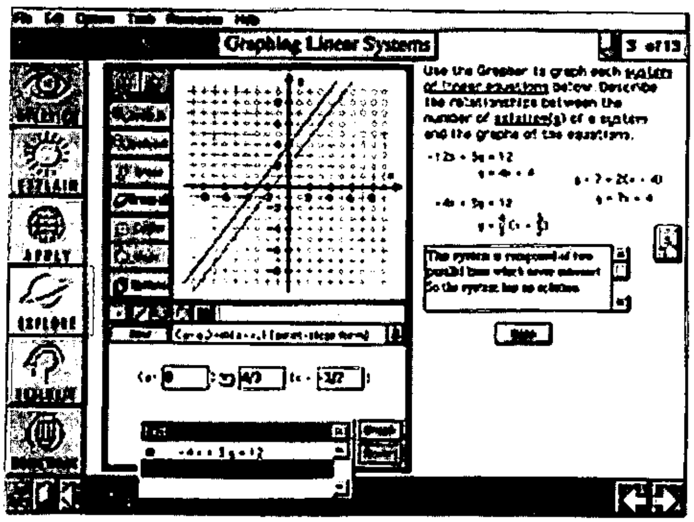
بسیاری از دانشجویان در سطح کالج، قبل از این که بتوانند به سطوح بالاتر ریاضی ارتقا پیدا کنند، به گذراندن دورهٔ جبر مقدماتی نیاز دارند. مدرسان ملزم به صرف ساعات بسیاری برای برآوردن نیازهای گوناگون دانش‌آموزان در سطوح مختلف درک ریاضی، هستند. این دانش‌آموزان با پیشینه‌های مختلف به کلاس می‌آیند و به دلایل بی‌شماری ممکن است در تجربیات پیشین خود در زمینهٔ ریاضی دچار تشویش و نگرانی شده باشند و در نتیجه، مباحث پایه و اساسی ریاضی را فرا نگرفته باشند. این دسته از دانش‌آموزان از برنامه‌های چندرسانه‌ای بهره خواهند برد. زیرا این برنامه‌ها توانایی ارائهٔ مفاهیم را به روش‌های گوناگون و با توجه به روش‌های متفاوت یادگیری فردی، دارند.

«ریاضیات تعاملی»[8] چهار شخصیت اصلی را معرفی می‌کند: جیمز، ماریا، ویل و لیسا که هریک روش یادگیری خاص خود را دارند و به آن‌ها امکان می‌دهد، ریاضیات را تا بالاترین سطح فرا گیرند. جیمز می‌خواهد بداند چگونه یک مسأله حل می‌شود. او ریاضیات را با روشی یاد می‌گیرد که او را در رسیدن به حل مسأله هدایت می‌کند. ماریا فردی «دیداری» است. او برای درک بهتر مسأله، به دیدن تصویر یا نموداری در مورد آن نیاز دارد. ویل معمولاً علاقه‌مند است تا روش‌های دیگر حل مسأله را ببیند. ولیسا چگونگی عملکرد یک تکنیک و یا رویهٔ عملکرد را مورد سؤال قرار می‌دهد. او اغلب به دنبال جنبه‌های تئوری است.

در جبر مقدماتی، این چهار شخصیت در پیمانه‌های یادگیری در «نوار کمک»[9] به شکل یک تلفن قرمز که در دسترس دانش‌آموزان است، دیده می‌شوند. با انتخاب «نوار کمک»، دانش‌آموز می‌تواند از هریک از این شخصیت‌ها کمک بگیرد. برخی از دانش‌آموزان ممکن است همهٔ این شخصیت‌ها را انتخاب کنند، در حالی که برخی فقط شخصیتی را که روش یادگیری او برایشان مؤثرتر است، انتخاب می‌کنند.

این دانش‌آموزان با پیشینه‌های مختلف ریاضی می‌آیند و به دلایل بی‌شماری ممکن است در تجربیات آموزشی پیشین خود از ریاضی دچار تشویش و نگرانی شده باشند. و در نتیجه، مباحث پایه و اساسی ریاضیات را فرا نگرفته باشند.

در هندسهٔ توصیفی که عموماً در جبر مقدماتی مطرح می‌شود، اغلب دانش‌آموزان بین تصوّر محیط و مساحت دچار سردرگمی می‌شوند. در این جا، از تکنولوژی می‌توان به بهترین صورت استفاده کرد تا به دانش‌آموزان کمک شود، این دو مفهوم را از هم تشخیص



دهند. یک صفحه از پیمانهٔ EXPLAIN در مورد درس جبر مقدماتی، در رابطه با محیط و مساحت، می‌تواند این تفاوت را کاملاً توضیح دهد. هنگام آموزش محیط، دانش‌آموز می‌تواند ببیند که محیط «فاصلهٔ دور لبهٔ یک شکل را» اندازه می‌گیرد. تعدادی «کفش» که در امتداد لبهٔ شکل قدم برمی‌دارند، این نکته را به نمایش می‌گذارند و سپس در صفحهٔ دیگری، لبه‌های شکل در امتداد یک خط راست به دنبال هم قرار می‌گیرند که تصور محیط را تثبیت می‌کند.

پس از یادگیری محیط و مساحت در پیمانهٔ EXPLAIN، دانش‌آموز با صفحه‌ای با عنوان «درک خود را بیازمایید» روبه‌رو می‌شود که در آن، دست‌ورزی‌های قابل دسترس در داخل کادرهایی قرار دارند. در این جا، دانش‌آموز محیط و مساحت دو شکل داده شده را مقایسه می‌کند. او با حرکت دادن نمادهای مربوط در کادرهای موجود، این کار را انجام می‌دهد. در همان لحظه، دانش‌آموز نسبت به پاسخ خود، بازخورد لازم را دریافت خواهد داشت. اگر او به برخی از پرسش‌ها پاسخ درست داده باشد، جواب‌های درست با کادر صورتی مشخص می‌شود و سپس به او فرصت دیگری داده می‌شود تا پاسخ‌های اشتباه خود را تصحیح کند. به علاوه، یک مرور سریع درس در رابطه با پاسخ‌های نادرست ارائه می‌شود و دانش‌آموز می‌تواند، از طریق «نوار کمک»، به اطلاعات بیش‌تری دست یابد.

یادگیری فعال از طریق ابزارهای در دسترس و موجود در کامپیوتر و مکاشفهٔ فردی

مثالی برای استفاده از ابزارهای موجود در کامپیوتر و مکاشفهٔ فردی به شکل بسیار فعال، در جبر مقدماتی به چشم می‌خورد. در این جا دانش‌آموز فرا می‌گیرد که چگونه یک دستگاه متشکل از دو معادلهٔ خطی با دو مجهول را حل کند. پیمانهٔ EXPLORE برای دانش‌آموزان این امکان را فراهم می‌سازد، تا از یک رسّام با امکانات بسیار استفاده کنند.

با استفاده از رسّام، دانش‌آموز می‌تواند بفهمد که یک دستگاه با دو معادلهٔ خطی می‌تواند یکی از سه حالت ممکن را داشته باشد: دستگاه‌هایی با فقط یک جواب واحد، دستگاه‌هایی که جواب ندارند و دستگاه‌هایی که بی‌نهایت پاسخ دارند. سپس در ژورنال روی کامپیوتر، دانش‌آموزان می‌توانند در رابطه با یافته‌های خود مطالبی بنویسند. برخی از مدرسان، ژورنال دانش‌آموزان را هر هفته تصحیح می‌کنند.

مثالی دیگر از موضوعی در جبر، توانایی چندرسانه‌ای‌ها را در فراهم ساختن امکان تصوّر مفهوم سه بعدی‌ها برای دانش‌آموزان نشان می‌دهد که هر کس، مقاطع مخروطی (بیضی، هذلولی، سهمی) را تدریس کرده باشد، می‌تواند ارزش آن را درک کند. مقاطع مخروطی با بُرِشْ‌هایی از مخروط‌های دوتایی با سطوح مختلف تولید می‌شوند. بسته به برش‌ها، مقطع ممکن است دایره، سهمی، بیضی یا هذلولی باشد. به عنوان یک معلم در کلاس، پس از تلاش‌های بی‌شمار با استفاده از رسم شکل روی تختهٔ سیاه و سعی در نمایش و ارائهٔ این مفهوم، اغلب کم‌تر موفق هستم و آن موفقیت هم در رابطه با دانش‌آموزانی است که مهارت خوبی برای تصور اشیای سه بعدی روی تختهٔ دوبعدی دارند. حتی یک بار، مدلی را به کلاس بردم و از آن برای کمک به فرآیند تصور، استفاده کردم. ولی امروزه، با رسّام‌های کامپیوتری پیشرفتهٔ موجود، ارائه‌های بسیار زیباتری در دسترس است که به کمک آن‌ها و بدون درنظر گرفتن مهارت تصوّر دیداری دانش‌آموزان، هر دانش‌آموز می‌تواند چگونگی تولید مقاطع مخروطی را ببیند.

مطالعات انجام شده توسط برخی از مدرسان نشان می‌دهد، دانش‌آموزانی که با مواد آموزشی چندرسانه‌ای کار کرده‌اند، عملکردهای بهتری در درس‌های بعدی از خود ارائه می‌دهند. دلایلی وجود دارد که نشان می‌دهد، دانش‌آموزان با استفاده از چندرسانه‌ای‌ها نه تنها ریاضی یاد می‌گیرند، بلکه می‌آموزند چگونه از طریق محیط یادگیری فعال و دیداری، ریاضی را به کار برند.

در قرن آینده، می‌توان امید داشت که چندرسانه‌ای‌ها حتی نقش عمده‌تری در کمک به مدرسان برای آموزش ریاضی و نیز در کمک به دانش‌آموزان برای یادگیری ریاضی در داخل و خارج از کلاس درس ایفا کنند.

زیرنویس‌ها:

1. Visual technology in the teaching and learning of mathematics, syllabus, volume 12, number 9, edward m. landsman.
2. Edward M. Landsman

ادوارد ام. لندزمن، نایب رییس آموزش ریاضی و استاد ریاضی در Residence at academic system corporation، در «مانتین وی یو»، کالیفرنیا می‌باشد.
www. academic. com

3. Academic Systems
4. Academic systems' interactive mathematics series
5. Grapher
6. Expression editor
7. Personal academic notebooks
8. Interactive mathematics
9. Help Line

■

ریاضیات و هنر

نویسنده: نیلوفر زیّانی
دانشجوی ریاضی کاربردی دانشگاه شهید بهشتی

این مقاله بر اساس تحقیقی است که خانم نیلوفر زیّانی، دانشجوی سال آخر رشتهٔ ریاضی کاربردی دانشگاه شهید بهشتی به عنوان پروژهٔ کارشناسی با راهنمائی خانم دکتر زهرا گویا انجام داده اند. علّت انتخاب این موضوع، توجّه به شعار همگانی کردن ـریاضی یکی از شعارهای محوری سال جهانی ریاضیات: ۲۰۰۰ بوده است. خانم زیانّی این مقاله را در «چهارمین گردهمائی شکوفه‌های ریاضی» که ۱۳۷۹،۲،۲ در دانشگاه شهید بهشتی برگزار شد، ارایه نمودند. با توجّه به درخواست‌های متعددی که برای دریافت مقاله شد، هیأت تحریریهٔ مجلهٔ رشد ریاضی مناسب دید که این مقاله در مجله چاپ شود. لازم به توضیح است که به خصوص، بعضی از بخش‌های مربوط به دنبالهٔ فیبوناچی و هندسهٔ فرکتالی و نسبت طلائی در کتابهای درسی هندسه ۱، هندسه ۲ و ریاضیات پایه علوم انسانی وجود دارد.

ریاضیات و جهان هنر:

در یکی از اشعار پارسی داریم: هنر برتر از گوهر آمد پدید و به راستی که ارزش و مقام هنر هر جامعه، ارزش و مقام خود آن جامعه است.

امروز تاریخ نگاران و جامعه شناسان به هنگام مطالعهٔ تاریخ پیشینیان، یکی از مطالب بسیار مهمی را که مورد مطالعه قرار می دهند، هنر و سیر تکامل آن در جامعهٔ بشری است. مثلاً هنر نقاشی، معماری، موسیقی، خطاطی و غیره هر کدام خود تاریخ گویای هر جامعه است که اطلاعات فراوانی دربارهٔ جوامع مختلف به ما ارائه می دهد. مهم تر از همه این است که بتوان هنر و ارزیابی آن را به طریق علمی بررسی نمود. خوشبختانه به کمک ریاضیات، این بررسی انجام گرفته است.

اصولاً باید به این حقیقت اعتراف کرد که نمی توان اثری هنری یافت که از قانون مندی و قواعدی خاص تبعیت نکند. ولی این بدان معنی نیست که خود هنرمند، الزاماً از این قانونمندیها و قاعده های معیّن آگاه است. بلکه در بیشتر مواقع، این نیروی تخیّل هنرمند است که وی را به سوی یک نظام معقول و منطقی و ریاضی وار هدایت می کند. به همین دلیل، در کار اکثر هنرمندان معروف به خصوص

در کارهای تصویری، شاهد یک آرایش دلپذیر هنری هستیم کـه بـا قواعد ریاضی مطابقت دارند.

کاربرد ریاضی در هنر موسیقی

در موسیقی نیز این وابستگی به ریاضی، به وضوح دیده می شود.

برای مثال، دو نفر از دانشمندان روسیه به نامهای تی ـ کارلی نا و دتلوس که دو ریاضیدان و فیزیکدان هستند، راجع بـه تـکـرار در موسیقی جهت ساختن ملودیها، تحلیل آماری ریاضی داده اند و در همین زمینه، پیش درآمدهای بـاخ و سـمـفـونـی هـای هـایـدن و چایکوفسکی مورد مطالعه قرار گرفته اند.

حال سؤال این است که این تعمیم ریاضی به جهان موسیقی چه مزیتی دارد؟ مزیت آن به طور خلاصه در این است کـه اولاً می توان دانش موسیقی قدیمی را بر اساس موازین دقیق مرتب کرد و با استفاده از تحلیل ریاضی موسیقی، علم و دانش کافی را برای ترکیب موسیقی به دست آورد.

هم چنین، می توانیم بر اساس موازیـن ریـاضـی و عـلـمـی، ارزیابی های موسیقی شناسان را مورد امتحان قرار بدهیم. شاید بتوان کار آهنگ سازان را مدل بندی کرد و بر دشواری های ترکیب موسیقی فائق آمد. مهم تر آن که می توان با استفاده از دستگاهی که بر اسـاس ضوابط کامپیوتری و ریاضی کار می کند و در حـافـظـهٔ آن نت های موسیقی به صورت اعداد در مبنـای ۲ ضبط می شوند، نت ها را بـه زبان ماشین درآورد و هر نوع اطلاعات لازم راجع به طول و ارتفـاع نت را در آن درج کرد. در این دستگاه، عناصر متفاوت موسیقی بـه شکل یک توالی منطقی به وجود می آینـد. در یـونـان قـدیـم نـیـز موسیقی شناسان و ریاضی دان هائی نظیر فیثاغـورس، افـلاطـون و بطلمیوس در جستجوی رابطه ای بین ابعاد موسیقی و اوضاع و احوال آسمان و خواص روح بودند.

فیثاغورسیان که در رأس آنها فیثاغورس، ریاضیدان مشهور یونان قدیم قرار دارد، به عدد به چشم خدایی می نگریستند و معتقد بودند که همه چیز از مادی و معنوی را می توان با کمک عدد تفسیر و تبیین کرد. آنها معتقد بودند که نه تنها طول، وزن و زمان را می توان با عدد بیان کرد، بلکه حتی وجدانیات هم قابل تفسیر به وسیلهٔ عدد هستند. به همین مناسبت، عدد برای آنها جنبهٔ سحرآمیز داشت و به آن همچون خدای خود احترام می گذاشتند.

در فلسفهٔ یونان قدیم، اعداد حکمفرمایی می کردند و عدد، اصل هر حقیقتی به شمار می رفت.

به عبارت دیگر، در کنه هر شیی عددی نهفته است که قدرت آن در گردش ستارگان نمودار است و در وجود انسان و عملیات حاکم بر او و به خصوص در ملایمت فواصل موسیقـی، دخـالـت دارد. موسیقی حقیقی آن است که از حرکات و اوضاع ستارگان نتیجه شود و فهم آن میسر نیست مگر با مطالـعـهٔ روابط صداهای آن با اوضـاع آسمان و این روابط را با نسبت های عددی نشان می دادند. با این که وسیله ای برای سنجش تواتر صداها و یافتن رابطهٔ آنها نداشتند، با اندازه گیری طول سیم، رابطهٔ بین صدا را می یافتند و فواصل موسیقی را با نسبت های طولی مربوط به صداهای آن معرفی می کردند، بدون آن که مبدأ پیمایش صداهای هارمونیک را درک نمایند، چون هـنـوز قوانین ارتعاش تارها کشف نشده بود.

بنابراین، آگاهی انسان از رابـطـهٔ بین ریاضی و هنر خـصـوصـاً موسیقی، تاریخی قدیمی دارد.

کشف دیگر فیثاغورس در این زمینه نیز بسیار معروف است. او دریافت که دو سیم که از یک جنس بوده و تحت اثر یک کشش باشند و نسبت طول آنها به صورت دو عدد کوچک مثلاً $\frac{۲}{۳}$ باشد، صدای مطلوبی ایجاد می کنند. فیثاغورس آن چنان تحت تأثیر این شـهـود عددی قرار گرفت که مکتب و فلسفـهٔ خود را بر اساس اعتقادش به نیروها و قدرت های افسانه ای اعداد پایه گذاری کرد.

کاربرد ریاضیات در هنر نقاشی

در هنر نقاشی، قسمتی به نام هنر ترکیب بندی یک تابلوی نقاشی وجود دارد که برخی آن را علم ریاضی و آگاهی های ظریف پنهان در ذهن هنرمند می دانند که در موقع خلق اثر هنری، به معرض نمایش درمی آید. هنرمند باید اثر هنری خود را بر طبق موازین و اصول دقیق ترکیب بندی استوار کند. به خصوص، اگر هنرمند بخواهد مطابـق ایده های تجسمی، از مرز ابعاد کوچک در زمینه نقاشی معمولی فراتر برود و آثار بزرگ را با ابعاد وسیع و عظیم به وجود آورد، آنگاه رعایت قوانین هندسی و ریاضی الزامی می گردد.

نقاشی تنها یک سطح صاف نیست، بلکه فضایـی اسـت کـه در آفرینش آن هندسه نقش اولیه را بازی می کند و سایه روشنها و رنگها و شکلها، هر کدام با قوانینی در خدمت ترکیب بندی و ساختمان تابلو می باشند. طراحان بزرگ هنری هم همواره از آرایش عـنـاصـر بـه صورت هندسی در آثار هنری خود استفاده کرده اند.

برای روشن تر شدن مطلب، تجزیه و تحلیل هندسی چند تابلو را بررسی می کنیم:

تابلوی اول: اثر برجستهٔ لئوناردو داوینچی به نام شام آخر که در آن، همین مسایل لحاظ شده است.

تابلوی دوم، تجلی حضرت مسیح(ع) اثر رافائـل اسـت که در *آخر مقاله آمده است*.

در آفرینش یک اثر هنری باید به نسبت های موجود بین عناصـر بصری توجه ویژه داشت. مثـلاً چه مقدار حجم در برابر چه مقـدار فضا، چه اندازه نور در کنار چه اندازه تاریکی و چه مقدار بافت زبر و خشن در برابر بافت نرم و لطیف قرار گرفته است.

استفاده از نسبت های ریـاضـی در ارایـهٔ تناسبات زیبا در یـک

کمپوزیسیون، همواره مورد توجه هنرمندان مختلف در سراسر تاریخ بوده است. یکی از این نسبت های ریاضی، **قانون تقسیمات یا نسبت های طلایی** است.

قانون تقسیمات یا نسبت های طلایی در قرن سوم قبل از میلاد توسط اقلیدس، فیلسوف و ریاضیدان برجستهٔ یونانی کشف شد. این قانون توسط هنرمندان یونانی و سپس هنرمندان دورهٔ رنسانس در قرن پانزدهم و شانزدهم ایتالیا مورد استفاده قرار گرفت و بعد از آن نیز، در آکادمی ها و مراکز آموزش هنر به عنوان قانونی رسمی در مورد ایجاد تناسبات زیبا پذیرفته شد.

از نخستین روزهای فلسفهٔ یونان، انسانها کوشیده اند که در هنر، یک قانون هندسی پیدا کنند. زیرا اگر هنر که آن را با زیبائی یکی می دانند، همان هم آهنگی باشد و هم آهنگی هم از رعایت تناسبات حاصل شود، منطقی به نظر می رسد که فرض کنیم این نسبت ها ثابت هستند.

نسبت هندسی معروف به تقسیم طلائی، قرنها به عنوان چنین کلیدی برای اسرار هنر در نظر گرفته شده است و کاربرد آن نه تنها در هنر، بلکه در طبیعت نیز چنان عمومیت دارد که گاهی حرمت مذهبی نسبت به آن معمول داشته اند.

فرمول ***تقسیم طلائی*** عبارتست از تقسیم یک خط محدود به دو قسمت غیرمساوی به طوری که نسبت طول بخش بلندتر آن به طول بخش کوتاهتر، مانند نسبت طول تمام پاره خط به طول بخش بلندتر باشد.

بخشهایی که از این تقسیم حاصل می شوند به طور تقریبی به نسبت ۸ به ۵، ۱۳ به ۸ و ۲۱ به ۱۳ و غیره است که همهٔ این نسبتها حدوداً برابر ۱/۶ هستند و به آن، ***عدد طلایی*** گفته می شود.

چگونگی به دست آوردن عدد طلایی

دنبالهٔ فیبوناچی را در نظر بگیرید:

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots, a_n, \ldots$

$n \geq 3 \qquad a_n=a_{n-2}+a_{n-1}$

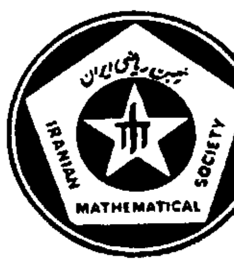
در ضمن جالب است بدانید در صورتی که بلاهای طبیعی نادیده گرفته شوند، زاد و ولد خرگوش ها نیز بر طبق همین دنباله صورت می گیرد! حال اگر در دنبالهٔ فیبوناچی، هر عدد را به عدد ماقبلش تقسیم کنیم، داریم:

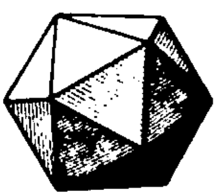
$$\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{8}{5},\ldots,\frac{a_n+1}{an},\ldots$$

عدد طلایی $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{a_n}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

عدد طلایی که مقدار تقریبی آن ۱/۶ می شود، و تقسیمات مربوط به آن، بارها در طول تاریخ و تمدن بشر در ابعاد بسیار گسترده مورد استفاده قرار گرفته اند. چنان که حتی نقاشها، تابلوهایشان را در بوم هایی می کشند که این نسبت در ابعاد آن به کار رفته باشد.

در کُپی تابلوی شام آخر اثر سالوادر دالی، بخشی از یک لوستر که از سقف آویزان است آمده که بخشی از یک ۲۰ وجهی منتظم است که این نسبت در آن به کار رفته است. این عدد، در رسم آرم انجمن ریاضی ایران نیز به کار رفته است. این آرم یک پنج ضلعی منتظم است که در آن نسبت قطر به ضلع تقریباً ۱/۶ است. هم چنین، در رسم آرم انجمن ریاضی امریکا که یک بیست وجهی منتظم است، از این نسبت استفاده شده است.





عدد طلایی حتی در پدیده های طبیعی نیز کاربرد دارد. چنان که رد پای آن را می توان در نسبت های به کار رفته در برگ چنار و دانه های لوبیا نیز ملاحظه نمود.

همان طور که قبلاً اشاره شد، یکی از کاربردهای دنبالهٔ فیبوناچی، مسأله ای مربوط به زاد و ولد خرگوشها است:

فرض کنید در ماه فروردین، یک جفت خرگوش نوزاد نر و مادّه در محوطه ای محصور قرار داده شوند و هر جفت خرگوش نر و مادّه، ماهی یک بار تولیدمثل کنند. تولیدمثل هر جفت خرگوش نوزاد در ماه دومِ بعد از تولد است. با این فرض که هر ماه، یک جفت خرگوش نر و ماده تولید شوند، می خواهیم تعیین کنیم که عدهٔ خرگوش ها در پایان اسفند همان سال، به چندجفت می رسد.

جدول صفحه بعد، راه سادهٔ حل مسأله را نشان می دهد.

معنای اعداد رومی داخل جدول از این قرار است:

I: جفت خرگوش هائی که دراول ماه مفروض قدرت تولیدمثل دارند.

II: جفت خرگوش هائی که در آن ماه، هنوز قدرت تولیدمثل ندارند.

III: جفت خرگوش هائی که در طی ماه به دنیا می آیند.

IV: عدهٔ جفت خرگوش ها در آخر هر ماه.

چنان که دیده می شود، در هر ستون از مرتبهٔ سوم به بعد، هر

ماه	I	II	III	IV
فروردین	۰	۱	۰	۱
اردیبهشت	۱	۰	۱	۲
خرداد	۱	۱	۱	۳
تیر	۲	۱	۲	۵
مرداد	۳	۲	۳	۸
شهریور	۵	۳	۵	۱۳
مهر	۸	۵	۸	۲۱
آبان	۱۳	۸	۱۳	۳۴
آذر	۲۱	۱۳	۲۱	۵۵
دی	۳۴	۲۱	۳۴	۸۹
بهمن	۵۵	۳۴	۵۵	۱۴۴
اسفند	۸۹	۵۵	۸۹	۲۳۳

جمله، حاصل جمع دو جملهٔ ماقبل است. تاریخچهٔ کشف تدریجی خواص رشتهٔ فیبوناچی و تعمیم های آن طولانی و خارج از موضوع است. فقط به ذکر این مطلب اکتفا می کنیم که گویا کپلر (۱۵۷۱ تا ۱۶۳۰) منجم معروف آلمانی، اولین کسی بود که دریافت نسبت $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ وقتی n به سمت بینهایت میل کند، برابر با $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ است.

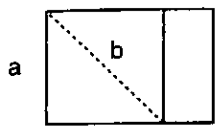
عدد φ ریشهٔ مثبت معادلهٔ $x^2 - x - 1 = 0$ است که ریشهٔ دیگرش $\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\varphi} = \varphi$ می باشد.

عدد φ و رشتهٔ فیبوناچی در مسائل گوناگون و متنوع پدید می آیند.

لئوناردو داوینچی (۱۴۵۲تا۱۵۱۹) نقاش، حجار و دانشمند معروف ایتالیایی، این تقسیم را برش زرین (طلایی) نامید. به همین مناسبت، عدد φ را **عدد طلایی** می نامند.

با استفاده از عدد طلایی و تقسیمات مربوط به آن، مستطیل های زیبایی به نام مستطیل های طلایی رسم می شوند:

در شکلِ مربع، اندازهٔ a و b برابر است و نسبت آنها $\frac{a}{b} = \frac{1}{1} = 1$ است.



فضای یک مربع نیز به علت چهار ضلع مساوی دارای جلوه و مفهوم ایستایی است.

با رسم مستطیلی که عرض آن a یا همان ضلع مربع و طول آن b که برابر قطر مربع است، مستطیلی به دست می آید که دارای تناسب خاصی است و «مستطیل طلایی» یا «مستطیل دینامیک» نامیده می شود.

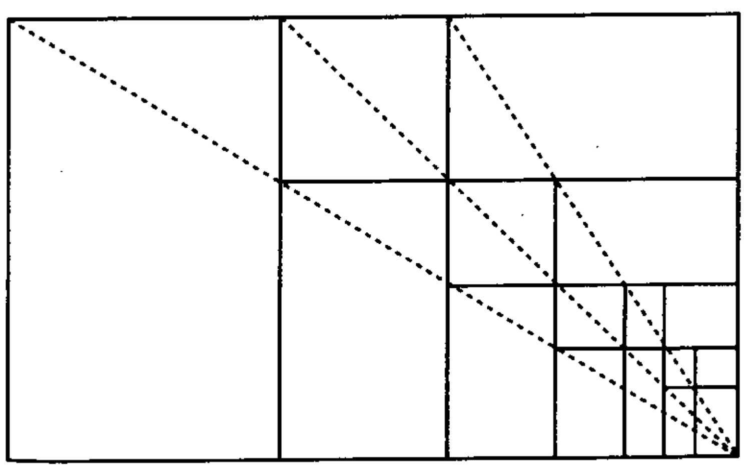
چنین مستطیل هایی در مقایسه با مستطیل هایی که بدون قانون و ضابطهٔ خاصی رسم شده اند، به چشم بسیار زیباتر می آیند.

این موضوع را امتحان کنید!

علاوه بر این، در صورتی که یک مربع را بر روی ضلع کوچک یک مستطیل طلائی رسم کنید، قسمت باقی مانده یک مستطیل طلائی خواهد بود.

مجدداً بر روی ضلع کوچک همان مستطیل باقیمانده یک مربع رسم می کنیم، باز هم قسمت باقیمانده، مستطیل طلائی است. به همین ترتیب، می توان ادامه داد و مستطیل های طلائی به دست آورد.

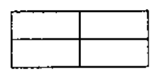
در نتیجهٔ رسم این مستطیل ها، یک منحنی ایجاد می شود که به صورت هندسی رشد تصاعدی را نشان می دهد و «مارپیچ لگاریتمی» خوانده می شود.



به طور کلّی، در هنرهای بصری نسبت های ریاضی در ایجاد تناسبات همان قدر زیبا و دارای ارزش است که نسبت های موجود در ساختمان اندامهای طبیعت. اگرچه وجود نسبت های ریاضی و نسبت های طبیعی امکانات زیادی را برای ایجاد تناسبات زیبا فراهم می کند، اما حس هم نقش مهمی دارد. یک تناسب، زمانی صحیح به نظر می رسد که عناصر مختلف نه کم باشند نه زیاد. تناسب صحیح در موقعیتهای مختلف تغییر می کند، زیرا تناسب اساساً عنصری متحرک و فعال است نه ساکن و ایستا. برای آفریدن کیفیت های حسی و عاطفی گوناگون در یک اثر هنری، وجود تناسبات و تعادل های مختلف از ضروریات است.

تعادل قرینه و غیرقرینه

در تعادل قرینه، هر یک از اضلاع مستطیل را نصف کرده و نقاط تقسیم را به هم وصل می کنیم. در نتیجه فضای داخل مستطیل به ۴ قسمت کاملاً مساوی تقسیم می شود.



در تعادل غیرقرینه، هر یک از اضلاع مستطیل را به دو قسمت غیرمساوی تقریباً به نسبت $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ تقسیم و سپس نقاط را به هم وصل می کنیم. در نتیجه، فضای داخل مستطیل به ۴ قسمت غیرمساوی که از لحاظ بصری دارای تحرّک، تنوّع و زیبائی بیشتری است تقسیم می شود. طرز تقسیم برای تعادل غیرقرینه بر مبنای قانون تناسبات طلائی است که قبلاً به آن اشاره شد.

ریاضیات و هنر و معماری اسلامی

هرکس با هنر و معماری اسلامی تا حدی آشنا باشد، درمی یابد که ریاضیات در اشکال هنری نقشی داشته است، نقشی که در جهان اسلام بسیار گسترده تر و جنبهٔ مرکزیت آن از هر سنت زندهٔ دیگر بیشتر است. نه تنها شعر و موسیقی اقوام مسلمان همچون اشکال دیگر این هنرها از اصول دقیق ریاضی پیروی می کند، بلکه هنرهای تجسمی، از نقش روی قالی گرفته تا آرایش های مساجد، رابطه ای با هندسه و اعداد دارند که محسوس تر از رابطه ای است که در هنر مقدّس سنت های دیگر مشاهده می شود. بعضی منکر آن شده اند که در اسلام، هنر قابل ذکری تکامل یافته باشد و اغلب غربیان معاصر، تصور می کنند که الگوهای هندسی و هماهنگی های عددی، ظاهراً ارتباطی با هنر مقدس ندارند. در واقع، این داوری نتیجهٔ فراموش کردن کامل آموزهٔ فیثاغورسی دربارهٔ ریاضیات است!

استفاده از ریاضی در هنر و معماری اسلامی، تنها نتیجهٔ تمایل دوری از شمایل سازی و تجسم و توجه به ذهن و مجردات نیست، بلکه وسیله ای است که با آن، رب النوعها بر زمینهٔ مادی منعکس می شوند و این قابلیت را در آن پدید می آورند که همچون نردبانی برای صعود به حقایق روحانی به کار روند که عینی ترین همهٔ حقایقند. حقایقی که حقایق مادی در مقایسه با آنها چیزی جز ذهنیات به شمار نمی آید. استفاده از ریاضیات در هنر اسلامی راهی است که به وسیلهٔ آن، هرچه مادی است از برکت منعکس کردن جهان رب النوعی قدسیت پیدا می کند و نیز وسیله ای است که با آن، آدمی از ساخت اساسی جهان مادی که او را احاطه می کند آگاه می شود و شایستگی آن را پیدا می کند که به راز آفرینش خدا راه یابد. ریاضی در اسلام توانسته است به دریافت هماهنگی و توازن و آگاهی از فوران کثرت از وحدت و بازگشت هر کثرت به وحدت کمک کند و به صورتی مستقیم تر در هنر و معماری اسلامی متجلی می شود.

در هیچ جای دیگر، خصوصیت قدسی ریاضی در نگرش اسلامی بهتر از هنر آشکار نمی شود که در آن، به کمک هندسه و حساب، ماده شرَف پیدا می کند و محیط مقدّسی ایجاد می شود که در آن، مستقیماً حضور همه جائی واحد در کثیر انعکاس می یابد.

نقش مایه ها: انبوه بی شمار گره ها یعنی نقوش هندسی متنوعی که در آثار هنرهایی مانند ***کاشی کاری، خاتم کاری و آینه کاری*** خودنمایی می کند و نیز در بسیاری از کشورهای اسلامی الهام بخش تزئین بناهای مهم و متبرّک قرار گرفته اند، عموماً از ترکیب تعدادی شکل بنیادی یا نقش مایه تشکیل می شوند. هر یک از این ها در طی قرنها ممارست و خلاقیت استادان این فن، تناسبات معینی پیدا کرده اند که فقط با رعایت قواعد ثابت ترسیمی، قابل تکرار هستند. این دقت از آن رو الزامی است که در گسترش و ترکیب نقش مایه ها، کوچکترین خطای ترسیمی به زودی ابعادی قابل ملاحظه به خود می گیرد و آرایش کلّی طرح را یک سره به هم می ریزد. مثلاً در مورد یک شش ضلعی منتظم، اگر نقاط تشکیل دهندهٔ آن به دقت بر دایره واقع نشده باشند، تکرار و گسترش شکل عملاً غیرممکن می شود و زمینهٔ منظمی به دست نمی دهد.

مهم‌ترین قواعد هندسی مورد استعمال در رسم نقش‌مایه‌ها عبارتند از

رسم عمود از یک نقطه بر خط ـ رسم خطوط موازی

تقسیم پاره خط به n قسمت مساوی ـ تقسیم زاویه به n قسمت مساوی

انتقال ـ دوران ـ گسترش از راه قرینه

هندسه

حال لازم است اندکی دربارهٔ **هندسه** که نقش اساسی در هنر اسلامی دارد توضیح داده شود:

واژهٔ هندسه عربی است. واژهٔ فرانسوی ژئومتری (Geometric) و انگلیسی جئومتری (Geometry) از واژهٔ لاتین جئومتریا

(Geometria) مشتق شده اند که خود از واژهٔ یونانی گئومتریا گرفته شده است و کلمه ای است مرکب از دو واژهٔ گئو یعنی زمین و متریا یعنی اندازه گیری .

پس هندسه در قدیم، علم اندازه گرفتن زمین بوده است .

آثار و نشانه هایی که از این علم به دست آمده، قدمت پنج هزار سالهٔ آن را نشان می دهد . عده ای بر این عقیده اند که منشأ پیدایش هندسه در مصر و علت آن طغیانهای منظم رود نیل بوده است، زیرا این رود هر ساله طغیان می کرده و باعث از بین رفتن حدود کشتزارها و مزارع می شده و مردم را بر آن می داشته که این حدود را دوباره اندازه گیری و تعیین محل کنند . ولی به درستی معلوم نیست که از بین مصریان، چینیان، هندیان و ایرانیان، کدام ابداع کنندهٔ هندسه بوده اند . شاید هر کدام به تنهایی قسمتی از این علم را مورد مطالعه قرار داده اند . اما اکنون هندسه علمی است که از شکل ها و زاویه ها و اندازه های آنها و خواص هر یک و روابط آنها با یکدیگر گفتگو می کند که بدون آن، پیدایش بناهای عظیمی چون اهرام مصر که بیش از پنج هزار سال قدمت دارند و تنها آسیب اندکی دیده اند، ممکن نبوده است .

فرمول معجزه گر برای باستان شناسی

به راستی اگر ۲۰۰ سال پیش می خواستند تشخیص بدهند که یک تابلوی نقاشی زیبا که بر روی دیوار حک شده، چند سال از عمرش گذشته، چه کار می کردند؟

مثلاً برای دانستن قدمت سنگها و ستونهای برافراشتهٔ آکرپولیس در یونان چه می کردیم؟

یا اگر می خواستیم قدمت الواح بابلی را که در موزه های معروف جهان است بدانیم چه روشی را به کار می بردیم؟ اکنون یک فرمول جادوئی چنین مشکلی را حل کرده و تاریخ میلیونها سال پیش را در اختیار ما قرار داده است! تجربه نشان داده است که مواد رادیواکتیو به میزان متناسب با مقدار مادهٔ موجود تلاشی می یابد . بنابراین، اگر $N(t)$ تعداد اتم های مادهٔ موجود در زمان t باشد، $N(t) = -KN(t)$ که در آن ثابت مثبت K، *ثابت تلاشی* نامیده می شود و علامت منفی به علت این است که $N(t)>0$ و کاهش می یابد و بنابراین، مشتقی منفی خواهد داشت.

اگر $N_0 = N(0)$، تعداد آغازین اتم های ماده در زمان $t = 0$ بوده باشد، جواب اولیه توسط فرمول زیر معلوم می گردد .

$$N(t) = N_0 e^{-kt}$$

اگر مقادیر K و $N(t)$ و N_0 را بدانیم، از معادلهٔ $N(t) = N_0 e^{-kt}$ می توانیم زمانی را که طول کشیده تا مادهٔ رادیواکتیو از مقدار اولیه اش یعنی N_0 به مقدار فعلی $N(t)$ برسد، به دست آوریم .

از معادلهٔ $N(t) = N_0 e^{-kt}$ داریم :

$$e^{-kt} = N(t)/N_0$$

از این معادله لگاریتم می گیریم :

$$t = -\frac{1}{k}\operatorname{Ln}\frac{N(t)}{N_0} = \frac{1}{k}\operatorname{Ln}\frac{N_0}{N(t)}$$

این معادلهٔ اصلی برای تعیین قدمت بر اساس خاصیت رادیواکتیو است که بر این اساس، می توان سن آثار باستانی صخره ها و فسیل ها و تصویرهای قدیمی را پیدا کرد .

باید توجه داشت که $N(t)$ را می توان از مقدار فعلی ماده به دست آورد . برای به دست آوردن ثابت تلاشی K، نیمه عمر مادهٔ رادیواکتیو را به کار می بریم . یعنی زمانی که لازم است تا نیمی از یک مادهٔ رادیواکتیو متلاشی شود و این نیمه عمر، به راحتی در آزمایشگاه قابل تعیین است .

برای مثال، وقتی کسی از میان یک عمارت باستانی می گذرد که در آن جا ظروف سفالینی با نقش های عجیب و غریب وجود دارد، آن بیننده بلافاصله از خود می پرسد راستی این ظروف متعلق به چند هزار سال پیش است؟ تنها کاری که می توان در اینجا انجام داد، روی آوردن به این معادلات معجزه گر است!

ریاضیات و گلها

همه چیز در جهان پیرو نظم خاصی است و در اکثر پدیده های جهان، ریاضیات خودنمائی می کند و ریاضیات چیزی جز نظم نیست . حتی شکل گل زیبای یاس و منحنی نمایش آن نیز معادلهٔ جالبی دارد که به صورت زیر است :

$$r = 5 + 2\cos\varphi + 3\cos^{71}\varphi$$

یا برگ گزنه منحنی نمایشی به صورت زیر دارد :

$$r = 5 + 2\cos\varphi + 3\cos^{71}\varphi - \sin^{2}18\varphi\cos^{4}\frac{\varphi}{2}$$

البته نمی توان فکر کرد ریاضیدانی در اثر بیکاری دست به چنین محاسباتی زده باشد! چراکه اگر فکر خود را بر این اساس پایه گذاری کنیم، هیچ گونه کشفیات علمی به وقوع نخواهد پیوست .

اکثر اکتشاف های مختلف علمی در همهٔ زمینه ها، به خاطر علاقهٔ انسان های پژوهشگر و دوستدار علم در زمان های مختلف بوده است . چون این افراد به دنبال کشف روشهای حقیقی برای تفسیر و توضیح پدیده های طبیعی بوده اند، به کشف چنین مطالبی رسیده اند .

هندسهٔ فرکتالی

هر پدیده ای را در جهان طبیعت می توان با زبان ریاضیات تفسیر کرد . در این مورد، باید از قسمتی از علم ریاضی که شاخه ای نسبتاً جدید است و به نام هندسهٔ فرکتالی نامیده می شود کمک گرفت . واژهٔ فرکتال برای اولین بار در سال ۱۹۷۵ توسط مندلبرات وارد دنیای

ریاضیات شد. تاکنون تعریف عامی برای فرکتال ها بیان نشده، اما به طور کلی فرکتال شیئی است که سه خاصیت زیر را داشته باشد:

۱ ـ دارای خاصیت خود متشابهی باشد.

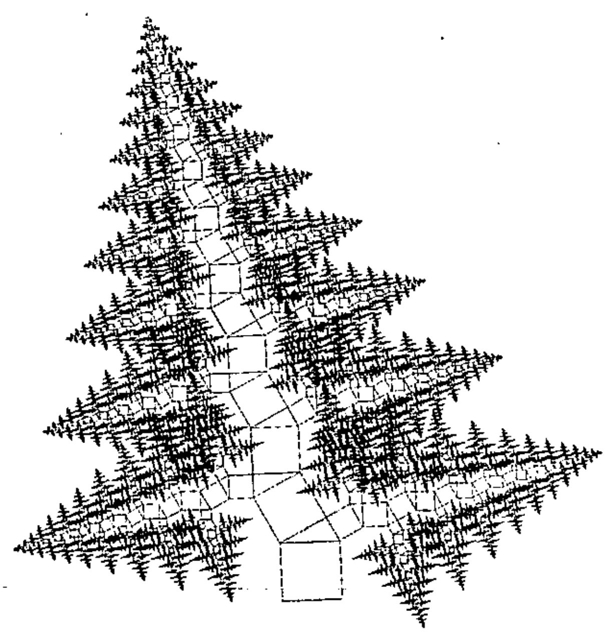
۲ ـ در مقیاس میکروسکپی بسیار پیچیده باشد.

۳ ـ بُعدش عدد صحیح نباشد.

حال به توضیح مختصری دربارهٔ هر یک از این خواص می پردازیم:

شیئی را دارای خاصیت خودمتشابهی اکید می گوئیم هرگاه قسمت هایی از آن با یک مقیاس معلوم، یک نمونه از کل شیئ باشد. ساده ترین مثال از یک شیئ خود متشابه در طبیعت، گل کلم است که هر قطعهٔ کوچک گل کلم مشابه قطعهٔ بزرگی از آن است.

همین طور درخت کاج یک شیئ خود متشابه است، چراکه هر یک از شاخه های آن خیلی شبیه یک درخت کاج است ولی در مقیاسی بسیار کوچکتر. هم چنین در مورد برگ سرخس نیز چنین خاصیتی وجود دارد.



رشته کوهها، پشته های ابر، مسیر رودخانه ها و خطوط ساحلی نیز همگی مثال هایی از یک ساختمان خود متشابه و در مقیاس میکروسکپی بسیار پیچیده هستند.

همهٔ این اشیاء، دارای بُعدی هستند که این بُعد با استفاده از دانش هندسهٔ اقلیدسی قابل محاسبه نمی باشد. مثلاً با کمک هندسهٔ اقلیدسی می دانیم که بُعد خط برابر یک، بُعد صفحه برابر دو و بعد فضا برابر سه است. اما در مورد اشیای فرکتالی، موضوع فراتر از اینهاست. فرکتال ها بُعد صحیح ندارند. بُعد فرکتالی همیشه بزرگتر از بُعد توپولوژیکی است. راههای مختلفی برای به دست آوردن بُعد فرکتالی وجود دارد که ساده ترین آن روش زیر است:

N: تعداد قطعات

r: مقیاس

$$D=\frac{\mathrm{Log}(N)}{\mathrm{Log}(\frac{1}{r})}$$

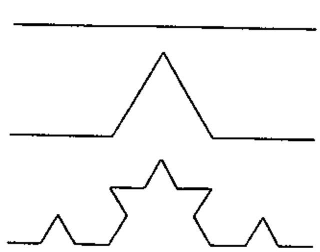
D: بُعد فرکتالی

مثلاً خم وان کخ که امروزه به عنوان دقیق ترین مدل ریاضی خطوط ساحلی مشهور است، به روش زیر تعریف می شود:

گام صفر: رسم پاره خطی به طول L

گام اول: تقسیم پاره خط به سه قسمت مساوی و حذف یک سوم میانی و رسم یک مثلث متساوی الاضلاع روی آن.

گام دوم: تکرار گام اول روی هر یک از قسمت های پدید آمده



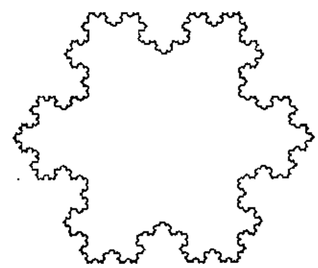
بُعد فرکتالی عبارتست از:

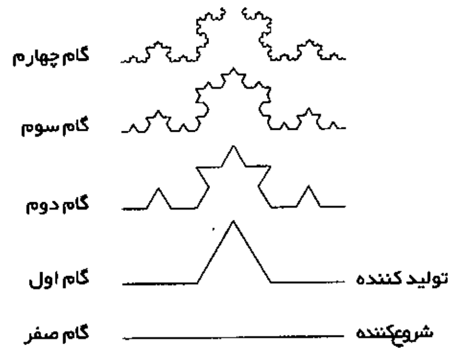
$$D=\frac{\mathrm{Log}\,۱۶}{\mathrm{Log}\,۹}=\frac{۲\,\mathrm{Log}\,۴}{۲\,\mathrm{Log}\,۳}=۱/۲۶$$

همان طور که ملاحظه می شود، این بُعد عدد صحیح نیست و نشان دهندهٔ این است که خم کخ پیچیده تر از خط و ساده تر از صفحه

است .

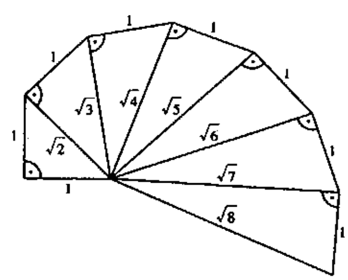
اگر این الگوریتم را روی اضلاع یک مثلث متساوی الاضلاع بینهایت بار تکرار کنید، فرکتالی به نام برفدانهٔ کخ ساخته می شود که بسیار شبیه دانهٔ برف واقعی است .





نمونـهٔ دیگری از فرکتال ها موسوم به درخت های فیثـاغـورس هستند .

شکل زیر، معروف به مارپیچ مربع ریشه است .



با الهام از این ساختار، می توان درخت های جالبی با استفاده از الگوریتم زیر ساخت :

۱ ــ مربعی رسم کنید .

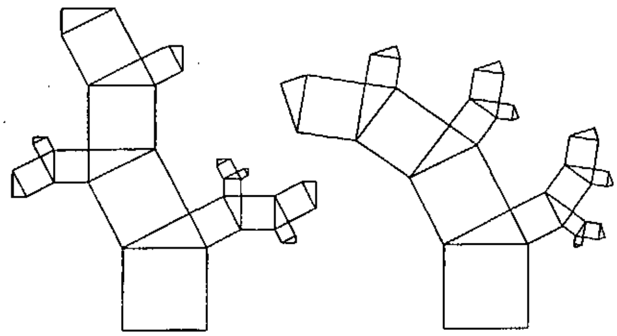
۲ ــ یک مثلث قائم الزاویـهٔ متساوی الساقین را از طرف وتـرش روی یک ضلع مربع قرار دهید .

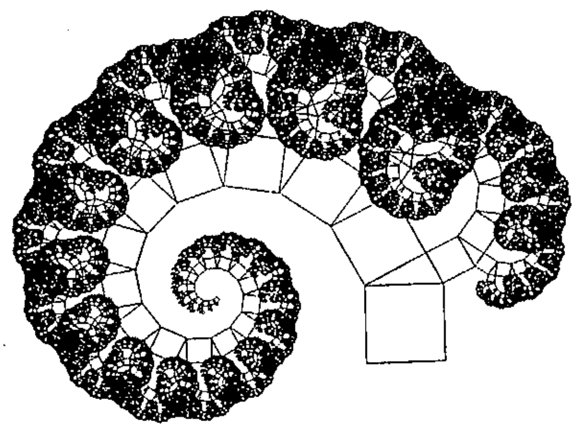
۳ ــ روی دو ضلع آزاد مثلث مربع بسازید (دو مربع) .

۴ ــ روی مربعهای اخیر، مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین قرار دهید .

۵ ــ روی هر ضلع آزاد این مثلثها مربعی بسازید (۴ مربع) .

تکرار ۴ و ۵ به دفعات زیاد، شکلهای جالبی تولید می کند .



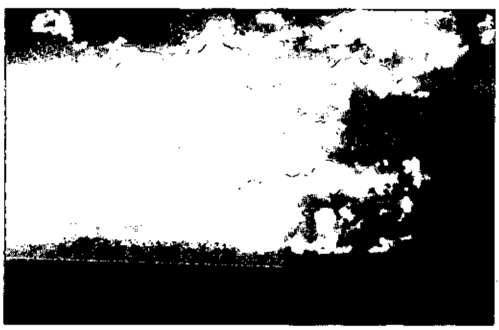


یکی از مثال های زیبا از این نمونه فرکتال ها در طبیعت، دم اسب آبی(Hippopotamus) است که شباهت بسیار زیادی به درخت های فیثاغورس دارد. نمونه های بسیار زیادی از این فرکتال ها در جهـان واقعی دیده می شود. تقریباً تمام پدیده های طبیعی که هندسهٔ اقلیدسی از تفسیر آن ها عاجز مانده است را با زبان هنـدسـهٔ فرکتالی می توان توجیه کرد. مثلاً شکل صفحهٔ بعد، نمای واقعی از یک یخچال طبیعی در کوه کلیمانجارو همراه با پشته های ابر در آسمان است کـه تـمـام خواص یک ساختمان فرکتال را داراست .

به کمک الگوریتم های نه چندان پیچیده، می توان تصاویری از فرکتال ها را به وجود آورد که تشخیص آن ها از منظرهٔ واقعی بسیار سخت و حتی غیرممکن است.

به عنوان نمونه، آیا باور می کنید که تصاویر زیر به وسیلهٔ همین الگوریتم ها، توسط کامپیوتر تولید شده و واقعی نیستند؟

همهٔ این ها، نشانگر ارتباط تنگاتنگ ریاضیات با پدیده های هنری و طبیعی است.



آنالیز هندسی تابلوی شام آخر اثر لئوناردو داوینچی

- مربع مرکزی در میان دو مربع بزرگتر واقع شده است و به حالت سطح کاملاً در روبه‌روی ناظر قرار دارد.
- موقعیت هندسی آن را تقسیماتی که قطرهای مربع به وجود آورده است مشخص می‌کند.
- دو مربع جدید که یکی در میان دیگری قرار گرفته، هم در بالای پنجره‌ها و هم در پایین و کنارهٔ میز دور تا دور چهرهٔ حضرت مسیح(ع) را احاطه کرده‌اند.
- خطوط مایلِ انتهای چهار سطح سمت راست و چهار سطح سمت چپ که به حالت قرینه روبروی هم قرار گرفته‌اند، در نقطهٔ مرکزی برخورد می‌کنند.
- محل برخوردهای خطوط به مهم‌ترین نقطهٔ تابلو، در محل قرار گرفتن چهرهٔ مرکزی ختم می‌شود.
- سطح کلی تابلو نیز دارای تقسیمات متقارن است. در حالی‌که در جزئیات هیکل‌ها، شکل‌های نامتقارن روابط هماهنگی به وجود آورده‌اند.
- در ساختمان کلّی که بر اساس مربع‌های تو در تو بنا شده است، حرکتی ریتمیک از بیرون به داخل ایجاد کرده است تا بر اهمیت موضوع مرکزی تأکید کند.

منابع:

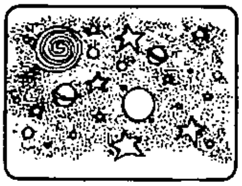
صداشناسی موسیقی، نوشته امین شهمیری
الموسیقی کبیر، ابونصر فارابی
تاریخ جامع موسیقی (جلد دوم)، ترجمه بهزادباشی
چهره‌های موسیقی ایران، شاپور بهروزی
ریاضیات از نوع سوم (نگرشی جدید به کاربرد ریاضیات دربارهٔ جهان و انسان)، حسین فقهی
علم در اسلام، احمد آرام
مبانی هنرهای تجسمی، غلامحسین نامی
طرح و اجرای نقش در کاشیکاری ایران دورهٔ اسلامی، محمود ماهر النقش
اصول و مبانی هنرهای تجسمی، دکتر محمدحسین حلیمی
گامهای گمشده، مرتضی حنانه
زیبائی شناسی در هنر و طبیعت، علینقی وزیری
هنرهای ایرانی و آثار برجستهٔ آن، آذرنوش آذرتاش
هنر اسلامی، پرفسور ارنست کونل. ترجمه مهندس هوشنگ طاهری
صنایع اسلامی س. م ـ دیماند، ترجمه عبدالله فریاد
شناخت موسیقی هیو ـ ام ـ میلر، ترجمه پرویز مدیری
تئوری مقدماتی اعداد، دکتر غلامحسین مصاحب

Chaos and Fractals
The Science of fractal Images
Fractal for the classroom

تناقض های ریاضیات و علوم
(سرگرمی برای اندیشه ورزی)

اثر دکتر مارتین گاردنر
ترجمهٔ حسن نصیرنیا، کارشناس مسئول گروه ترجمهٔ دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی

نردبانِ «اَلِف»ها



هتل بی نهایت تنها یکی از پارادوکس های متعدد دربارهٔ اعداد متناهی است. بی نهایت ها بسیارند! تعداد اعداد شمارشی فقط پایین ترین(کم ترین) بی نهایت در یک سلسله مراتب پایان ناپذیر است. دومین عدد نامتناهی، عدد نقطه ها در کلّ جهان هستی است و سومین عدد نامتناهی بزرگ تر از آن است!

ریاضی دان آلمانی، «جورج کانتور» که این نردبان بی نهایت ها را کشف کرد، نام اعداد عجیب تازهٔ خود را اعداد الف ـ صفر، الف ـ یک، الف ـ دو و ... گذاشت.

عدد اصلی هر مجموعه، عددِ عضوهای آن مجموعه است. برای مثال، عدد اصلی مجموعه ای شامل حروف واژهٔ "Cat"، ۳ است. هر مجموعهٔ متناهی یک عدد اصلی متناهی دارد. جورج کانتور کشف کرد که برخی مجموعه های نامتناهی از سایر مجموعه های نامتناهی «بزرگ تر»ند. او نخستین حرفش الفبای عبری، یعنی الف ($\aleph_0$) را برای نشان دادن عدد اصلی مجموعهٔ نامتناهی به کار برد. ارقام کنار پایین(اندیس زیر) الف، مشخص کنندهٔ هر «بی نهایت» است.

عدد اصلی مجموعهٔ اعداد شمارشی کانتور، $\aleph_0$ (الف ـ صفر) نامیده می شد. مجموعهٔ اعداد زوج و مجموعهٔ اعداد صحیح فرد، همه دارای عدد اصلی $\aleph_0$ بودند. از این رو، $\aleph_0$. پارادوکس هتل بی نهایت نشان داد که به یک مفهوم می توانیم داشته باشیم: $\aleph_0 - \aleph_0 = \aleph_0$! چه اعداد محشری!

مجموعهٔ اعداد حقیقی، یک مجموعهٔ نامتناهی بزرگ تر تشکیل می دهد که به اعتقاد کانتور دارای عدد اصلی $\aleph_1$ (الف ـ یک)، یعنی نخستین عدد اصلی «ترا متناهی»[1] بزرگ تر از $\aleph_0$ است. «اثبات قطری»[2] معروف او ثابت کرد که مجموعهٔ اعداد حقیقی را نمی توان در تناظر یک به یک با مجموعهٔ اعداد صحیح قرار داد. او هم چنین ثابت کرد، مجموعهٔ اعداد حقیقی با عددِ نقطه های روی یک پاره خط، روی یک خط نامتناهی، روی یک مربع، روی یک سطح نامتناهی، در یک مکعب، در یک فضای نامتناهی و جز آن ها، برای «اَبَر مکعب ها»[3] و فضاهای بالاتر متناظر است.

کانتور ثابت کرد، وقتی ۲ به توان الف می رسد، یک الفِ مرتبهٔ بالاتر به وجود می آید که امکان ندارد در تناظر یک به یک با الفِ نما قرار گیرد. به این ترتیب، نردبان«الف»ها همواره به سمت بالا ادامه می یابد.

عدد اصلی مجموعهٔ اعداد حقیقی به منزلهٔ C یا «توان پیوستار»[4] شناخته می شود. با این که کانتور بسیار کوشید، ولی نتوانست ثابت کند که C همانند الف ـ یک است. چندین دهه بعد، بر اثر کارِ «کورت گودل»[5] و «پُل کوهِن»[6] ثابت شد که نمی توان با استفاده از اصولِ موضوعِ نظریهٔ مجموعه های استاندارد، دربارهٔ پاسخ این پرسش رأی داد یا به نتیجهٔ خاصی رسید. در نتیجه، اکنون نظریهٔ مجموعه ها به دو شاخهٔ کانتوری و ناکانتوری تقسیم می شود. مجموعهٔ نظریه های کانتوری فرض می کند که $\aleph_1 = C$ و نظریه های مجموعه های ناکانتوری وجود تعداد نامتناهی از اعداد ترا متناهی را میان $\aleph_0$ و C مفروض می دارد.

هم گام با شناخته شدن «حدسیهٔ[7] کانتور»، راه حلی برای «فرض پیوستار» معروف ارائه گردید؛ به این صورت که معلوم شد، نمی توان برای این فرض حُکمی داد. این وضع شبیه همان وضعی است که پس از این که کاشف به عمل آمد، اصل موضوع توازی اقلیدس اثبات شدنی نیست، پدید آمد. امکان جایگزینی این اصل موضوع با سایر اصل ها فراهم آمد و در نتیجه، هندسه به هندسهٔ اقلیدسی و نااقلیدسی تقسیم شد.

منبع:

Gardner, Martin. ***aha! Gotcha, Paradoxes to Puzzle and delight,*** W. H. Freeman and Company, New York, 1982.

زیرنویس ها:

1. transfinite
2. diagonal proof
3. hypercubes
4. power of the continuum
5. Kurt Gödel
6. Paul Cohen
7. Conjecture

پاسخ به نامه ها

سرکار خانم ارداغیان و سرکار خانم برزگر

زنجان، مرکز تربیت معلم الزهرا

با تشکر از اظهار لطف شما نسبت به مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، اگر در دفتر کمک آموزشی شماره های پاییز ۷۷، زمستان ۷۷، بهار ۷۸ و تابستان ۷۸ موجود بود، برایتان ارسال خواهد شد. زنجان، مرکز تربیت معلم الزهرا

جناب آقای اکبری

۱ـ برگه اشتراک در صفحهٔ ۶۲ مجله هست. آن را تکمیل نموده و به آدرس دفتر مجله ارسال نمائید تا ترتیب اشتراک شما داده شود.

۲ـ پیشنهاد می کنیم مسایل پژوهشی جایزه دار خود را برای مجلهٔ برهان، ماهنامهٔ ریاضیات یا راه المپیاد ارسال نمائید.

سرکار خانم سوده کهرام

دانش آموز سال دوم ریاضی دبیرستان توحید ـ منطقهٔ ۶ تهران از شما برای توجّه ای که نسبت به مجله نشان داده اید، سپاسگزاریم. با ما در تماس باشید.

جناب آقای حسن نیشابوری

با تشکر از اظهار لطف شما نسبت به مجله، اگر اطلاعاتی راجع به کتاب «تاریخ نظریهٔ اعداد اثر اِل ـ ا ـ دیکس دریافت کردیم شما را مطلّع خواهیم کرد.

سرکار خانم صدیقه ابراهیمی

دبیر محترم ریاضی ناحیهٔ ۲ شیراز

مطالب شما را دریافت کردیم. از توجّه شما به مجله سپاسگزاریم.

جناب آقای سهراب خلیفه،

مدرسهٔ سروش تهران

ضمن تشکر از مطلب ارسالی شما در مورد جذر اعداد، نظر یکی از اعضای محترم هیأت تحریریه را در مورد آن به آگاهی می رسانیم.

همکار گرامی جناب آقای جاوید مهر

مطالب ارسالی شما دریافت شد. از اظهار لطف جنابعالی نسبت به مجله سپاسگزاریم.

استاد محترم جناب آقای علی اکبر بناگر

مطالب ارسالی شما رسید. از بذل توجّه جنابعالی نسبت به مجله کمال تشکر را داریم.

دانش آموز گرامی آقای سجاد نبی زاده

در زمینهٔ فرکتال ها کتابی به زبان فارسی وجود ندارد ولی مقاله هایی نوشته شده است. در گزارش اولین کنفرانس آموزش ریاضی ایران که در شهریور ۷۵ در اصفهان برگزار شد مقاله ای در این زمینه وجود دارد. مقاله دیگری که بیشتر جنبه ریاضی فرکتال ها را بررسی می کند، در مجله ریاضی دانشگاه صنعتی شریف وجود دارد. برای تهیه یک کپی از نرم افزار DERIVE می توانید به دانشکدهٔ ریاضی دانشگاه شیراز مراجعه کنید.

همچنین پاسخ نامهٔ نامبردگان زیر به وسیلهٔ پست ارسال شده است.

❖عزیز دزگاهی ❖ محمد رضا هاشمی موسوی ❖ امیر جعفر قلی ❖اشرف قندهاری ❖ علی اکبر جاوید مهر ❖ علی فرزام

هیأت تحریریهٔ مجلهٔ رشد آموزش ریاضی از تمام خوانندگانی که با مجله مکاتبه می نمایند مجدداً سپاسگزاری می کنند.

خوانندهٔ گرامی ستون روایت معلمان

در روایت معلمان چاپ شده در مجلهٔ رشد آموزش ریاضی شمارهٔ ۵۷، نام مرضیهٔ خاری به عنوان یکی دیگر از نویسندگان از قلم افتاده بود که بدینوسیله از ایشان پوزش می طلبیم.

سردبیر

همایش بین المللی بزرگداشت
غیاث الدین جمشید کاشانی

خوانندگان گرامی،

طبق درخواست کتبی دبیرخانهٔ همایش بین المللی غیاث الدین جمشید کاشانی که از تاریخ ۱۹ تا ۲۱ آبان ۱۳۷۹ در کاشان برگزار می‌شود، دومین فراخوان این همایش جهت اطلاع مشتاقان، در مجله چاپ می‌شود.

هم‌چنین، چاپ مجدد بخشی از مصاحبهٔ مطبوعاتی آقای دکتر مجتبی شریعتی نیاسر رئیس دانشگاه کاشان و دبیر همایش که در خبرنامهٔ شمارهٔ سوم این همایش چاپ شده است، جهت آشنائی بیشتر با غیاث الدین جمشید کاشانی در اختیار خوانندگان محترم قرار می‌گیرد.

غیاث الدین جمشید کاشانی یک ریاضیدان و منجّم تاریخ ایران در قرن هشتم و نهم بود. ویژگی‌های غیاث الدین جمشید کاشانی را در چند محور بیان می‌کنیم که در واقع اهمیّت این شخصیّت نامی تاریخ را روشن می‌کند. به عبارتی، علت اینکه دانشگاه کاشان به این صرافت افتاده است را بهتر بازگو می‌کنیم.

۱- غیاث الدین جمشید کاشانی تألیفات متعددی داشته که مهمترین آن کتاب مفتاح الحساب، رساله محیطیه و زیج خاقانی می‌باشد.

۲- رساله‌های متعددی در باب هیأت و نجوم از ایشان به جای مانده است.

۳- وی سه مرتبه کسوف را پیش بینی کرده است که هر سه پیش بینی ایشان در تاریخ ثبت رخ داده است و این نشان دهنده نبوغ وی می‌باشد.

۴- عدد π را تا ۱۶ رقم اعشار کشف کرده که در تاریخ ثبت شده و تا ۱۵۰ سال بعد از ایشان تقریب مطلوبتر و بهتری ارائه نشد.

۵- محاسبه سینوس یک درجه که این محاسبه تا ۱۱۰ سال بعد از ایشان تقریب بهتر و محاسبه دقیق‌تر ارائه نشد.

۶- اولین کامپیوتر جهان به نام ایشان ثبت شد که تحت عنوان الکاشی می‌باشد که در کتاب معروف تئوری اعداد نوشته یان استیوارت ذکر شده است.

۸- وی صاحب تفسیری از قرآن مجید است که به نام تفسیر جم معروف می‌باشد.

۹- آخرین و مهمترین ویژگی ایشان جوان بودن ایشان می‌باشد. غیاث الدین جمشید کاشانی ۴۲ سال عمر کرده است. می‌گویند ایشان را به علت حسادتهایی که نسبت به او داشتند با مرگ مشکوک از بین بردند. این خود نشان می‌دهد که با این چنین ویژگی‌هایی در سنین جوانی بیشترین نبوغ را از خودش توانسته نشان بدهد.

بسمه تعالی

دومین فراخوان

همایش بین المللی بزرگداشت
غیاث الدین جمشید کاشانی و اولین
سمینار ریاضیات محاسباتی و نجوم
دانشگاه کاشان
۲۱-۱۹ آبان ۱۳۷۹

مسئول دبیرخانه همایش: دکتر سید علیرضا اشرفی

آدرس: کاشان، بلوار قطب راوندی-دانشگاه کاشان- کدپستی ۵۱۱۶۷-۸۷۳۱۷

تلفن: ۵۵۲۹۳۵-۰۳۶۱

نمابر: ۵۵۲۹۳۰ -۰۳۶۱

پیام نگار (پست الکترونیک): Ashrafi@vax.ipm.ac.ir

صفحه وب: www.kashanu.ac.ir

همایش بین المللی بزرگداشت
غیاث الدین جمشید کاشانی
و اولین سمینار ریاضیات محاسباتی و نجوم
دانشگاه کاشان
۲۱-۱۹ آبان ۱۳۷۹

پیرو انتشار اولین فراخوان همایش بین المللی غیاث الدین جمشید کاشانی، بدینوسیله دومین فراخوان با اطلاعات تکمیلی تقدیم میگردد.

همایش بین المللی غیاث الدین جمشید کاشانی که در محل دانشگاه کاشان- تالار آزادی برگزار خواهد شد، بر آن است تا تصویر جامعی از این ریاضیدان بزرگ دوران با شکوه تمدن اسلامی تبیین نماید. همچنین آخرین یافته های ریاضیات محاسباتی و نجوم با حضور اندیشمندان داخل و خارج کشورمورد بررسی قرار خواهد گرفت.

بدینوسیله مجددا از کلیه ریاضی دانان، فیزیک دانان، مورخین، پژوهشگران و دانشجویان دعوت می شود تا چکیده مقالات خود را در زمینه های موضوعی همایش به دبیرخانه همایش ارسال دارند.

تاریخهای مهم

آخرین مهلت ارسال چکیده مقالات ۷۹/۵/۱۵ .
آخرین مهلت ارسال مقالات کامل ۷۹/۶/۱۵ .
آخرین مهلت ارسال فرم ثبت نام در کنفرانس ۷۹/۶/۳۱

زمینه های موضوعی همایش

- نقش غیاث الدین جمشید کاشانی در تاریخ ریاضیات دوره اسلامی
- شرایط اجتماعی، سیاسی، فرهنگی، و اقتصادی ایران در عصر غیاث الدین جمشید کاشانی
- آثار غیاث الدین جمشید کاشانی
- تحقیقات غیاث الدین جمشید کاشانی در ریاضیات و نجوم
- ابعاد شخصیت غیاث الدین جمشید کاشانی

زمینه های موضوعی سمینار ریاضیات محاسباتی و نجوم

- جبر محاسباتی شامل: نظریه محاسباتی اعداد، نظریه محاسباتی گروهها، حلقه های متناهی، میدان های متناهی و نظریه مجموعه های مرتب جزئی
- آنالیز عددی شامل: حل عددی معادلات دیفرانسیل و انتگرال و روش های عددی حل معادلات
- ریاضیات مهندسی شامل: کلیه پژوهش های کاربردی ریاضیات درعلوم مهندسی
- نجوم شامل: نجوم دوره اسلامی و نجوم محاسباتی جدید

برنامه های جانبی همایش

- نمایشگاه دستاوردهای هنر و صنعت کاشان
- نمایشگاه دستاوردهای پژوهشی دانشجویان
- نمایشگاه کتاب
- بازدید از اماکن تاریخی
- نمایش فیلم و تئاتر
- اهداء جوائز به مقالات برتر همایش

همایش بین المللی بزرگداشت
غیاث الدین جمشید کاشانی

ستاد برگزاری همایش

- دکترمصطفی معین(وزیرعلوم، تحقیقات و فناوری و رئیس ستاد)
- دکترمجتبی شریعتی نیاسر (رئیس دانشگاه کاشان و دبیرهمایش)
- دکترسیدعلی رضا اشرفی (مسئول دبیرخانه همایش)
- مهندس جواد نوحی (مدیردفترریاست ودفتر روابط عمومی)
- دکتررضا جهانی نژاد (مسئول کمیته علمی)
- محسن خسروی (مسئول کمیته فرهنگی وتبلیغات)
- حسین گلشن (مسئول کمیته پشتیبانی وتدارکات)
- رضا عابدینی (مسئول کمیته جذب وهدایت منابع مالی)

کمیته علمی

دکتررضا فرشادنیا، دکترروزبه ترابی، دکترخیرا.. پوربرات، دکترحسن دقیق، دکترسیدعلی رضا اشرفی، دکتررضا جهانی نژاد، دکتر مصطفی زاهدی فر(دانشگاه کاشان)

دکتررضا منصوری، دکترآرش رستگار، دکترنظام الدین مهدوی امیری، دکترمحمد مهدوی هزاوه ای (دانشگاه صنعتی شریف)

دکترایرج ملک پور، دکترمحمد رضا درفشه (دانشگاه تهران)

دکترجمشید قنبری (دانشگاه فردوسی مشهد)

دکتر یوسف ثبوتی (مرکزتحصیلات تکمیلی زنجان)

دکترمحمد قاسم وحیدی اصل (دانشگاه شهید بهشتی)

دکتر اسماعیل بابلیان، دکترعلیرضا جمالی، دکترحسین ذاکری (دانشگاه تربیت معلم تهران)

دکتر سید محمد حسینی (دانشگاه تربیت مدرس)

دکتر محمد خاتون آبادی، دکتر احمد کیاست پور (دانشگاه اصفهان)

دکتر امید علی کرم زاده (دانشگاه شهید چمران اهواز)

مهندس محمد باقری (بنیاد دائره المعارف اسلامی)

دکتر سعید آقایی هاشمی (دانشگاه امام حسین ونماینده انجمن ریاضی)

استاد ابوالقاسم قربانی (تاریخ نگار ریاضیات)

مدعوین خارجی همایش

- دکتر ایوونه دولد سمپلونیوس (تاریخ ریاضیات- آلمان)
- پروفسور جان هوخندایک (تاریخ ریاضیات اسلامی - هلند)
- پروفسور پیر جولیو کورسینی (ابر ساختارها - ایتالیا)
- دکتر زائو یانوکینگ (نظریه گروهها - چین)
- دکتر توماس بروثر (نظریه محاسباتی گروهها - آلمان)
- دکتر بنو وان والن (تاریخ ریاضیات - آمریکا)
- پرفسور دو لانگ وان (نظریه محاسبات - ویتنام)

مدعوین داخلی همایش

- دکتر محمد رضا رجب زاده مقدم (استاد دانشگاه فردوسی مشهد)
- مهندس محمد باقری (مورخ - بنیاد دائره المعارف اسلامی)
- دکتر امید علی کرم زاده (استاد دانشگاه شهید چمران اهواز)
- دکتر حسن دقیق (استادیار دانشگاه کاشان)
- دکتر مسعود طوسی (استادیار دانشگاه شهید بهشتی)
- دکتر مجتبی منیری (استادیار دانشگاه تربیت مدرس)

هزینه های شرکت در همایش

حق ثبت نام اعضای انجمن ریاضی و فیزیک	۴۰۰۰۰ ریال
حق ثبت نام سایرین	۶۰۰۰۰ ریال
حق ثبت نام دانشجویان	۲۰۰۰۰ ریال
غذای کامل برای هر نفر	۹۰۰۰۰ ریال
هزینه نهار تنها (۳ روز)	۴۰۰۰۰ ریال
هزینه اقامت در خوابگاه (هر شب)	۱۰۰۰۰ ریال
هزینه رزرو هتل(هر شب)	۲۵۰۰۰ ریال
بهای مجموعه مقالات همایش	۲۰۰۰۰ ریال

جهت ثبت نام لازم است هزینه های شرکت در همایش در مهلت مقرر به حساب جاری شماره ۴۹۷۸۹ بانک تجارت شعبه دانشگاه کاشان کد ۱۶۰۹۰ واریز و اصل یا کپی خوانای فیش بانکی همراه فرم تکمیل شده ثبت نام به آدرس دبیر خانه همایش ارسال و یا فاکس شود.

فرم ثبت نام همایش بین المللی بزرگداشت غیاث الدین جمشید کاشانی

۱۹ تا ۲۱ آبان ۱۳۷۹

۱- نام:

۲- نام خانوادگی:

۳- زن ☐ مرد ☐

۴- آخرین مدرک تحصیلی (با ذکر شاخه تخصصی) :

۵- عضو هیأت علمی ☐ دانشجوی دکتری ☐ دانشجوی کارشناسی ارشد ☐

۶- نشانی محل کار:

۷- تلفن: ۸ - دورنگار :

۹- پیام نگار (پست الکترونیکی):

۱۰- عضو انجمن ریاضی ایران هستم ☐ نیستم ☐

۱۱- مایل به ارائه سخنرانی هستم ☐ نیستم ☐

۱۲- زبان ارائه مقاله : انگلیسی ☐ فارسی ☐

۱۳- عنوان مقاله:

۱۴ - اسامی سایر مولفان مقاله:

۱۵ - هزینه های پرداختی : حق ثبت نام☐ هزینه غذای کامل☐ هزینه نهار تنها ☐ هزینه اقامت ☐ بهای (مجموعه مقالات) کنفرانس ☐

جمع مبلغ پرداختی: شماره فیش بانکی:

۱۶ - گواهی اشتغال به تحصیل ضمیمه است ☐ (فقط برای دانشجویان)

۱۷ - امضاء و تاریخ:

بسم الله الرحمن الرحیم

Roshd
Mathematics Education Journal

No. 58 - 2000

Ministry of Education
Organization of Research & Educational Planning

Teaching-Aids Publications Office

CONTENTS:

Managing Editor: Alireza Hajianzadeh
Editor: Zahra Gooya
Executive Director: Soheila Gholamazad
Graphic Designer: Fariborz Siamaknejad

P.O.Bax : Tehran 15875 - 6588

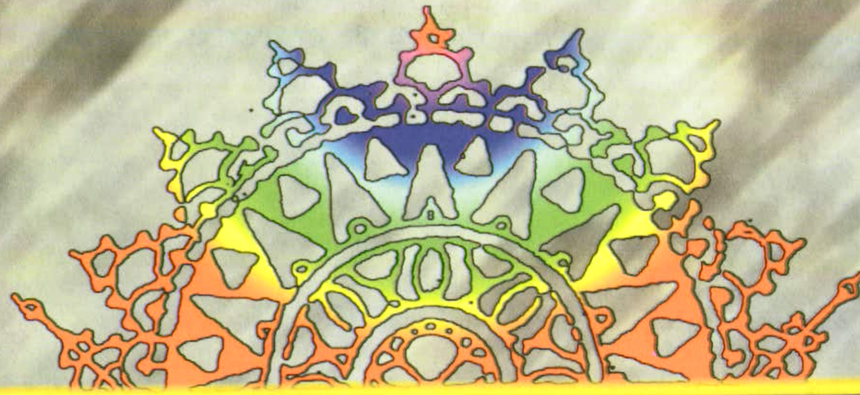
فراخوان

از خوانندگان مجله دعوت می شود تا
به مناسبت
سال جهانی ریاضی سال 2000 میلادی
و همسو با شعار همگانی کردن ریاضی، دیدگاههای خود را دربارهٔ ریاضی به شکلهای گوناگون از جمله مقاله، نوشته های کوتاه، شعر، طنز، کاریکاتور و نقاشی به دفتر مجله ارسال دارند.

مجموعهٔ دریافتی پس از داوری با نام صاحب اثر در سال جهانی ریاضی چاپ خواهد شد و به آثار برگزیده جوایزی داده خواهد شد.

از همه خوانندگان استدعا داریم ما را در تهیهٔ این مجموعهٔ ماندگار، یاری کنند.

سال ریاضیات ۱۳۷۹



مربوط به مقاله ریاضیات و هنر