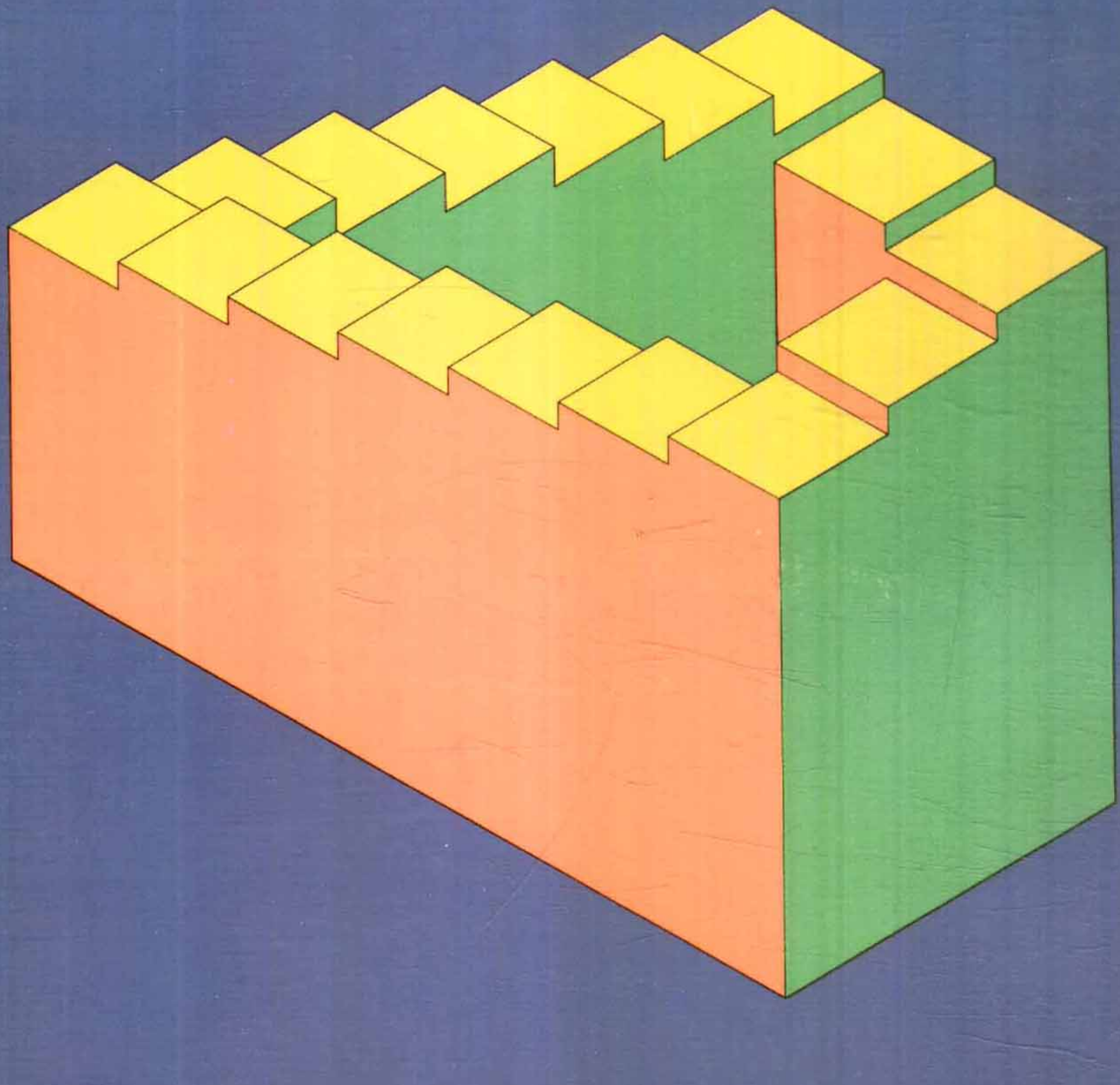
مجله ریاضی

برهان

برای دانش آموزان دبیرستان

۲۳

سال هفتم، شمارهٔ سوم، زمستان ۱۳۷۶، بها ۲۰۰۰ ریال



بسم الله الرحمن الرحیم

انتشارات مدرسه وابسته به وزارت آموزش و پرورش

صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه ❑ مدیر مسئول: محمود ابراهیمی
❑ سردبیر: حمیدرضا امیری ❑ مدیر داخلی: میرشهرام صدر
❑ اعضای هیئت تحریریه: آقایان: ❑ حمیدرضا امیری ❑ محمدهاشم رستمی ❑ احمد قندهاری ❑ میرشهرام صدر
❑ سیدمحمدرضا هاشمی موسوی ❑ غلامرضا یاسی‌پور (با تشکر از همکاری ارزندهٔ آقای پرویز شهریاری)
❑ مدیر فنی: هوشنگ آشتیانی ❑ طراح گرافیک: امیر بابایی ❑ چاپ و صحافی: چاپخانه مدرسه

مطالب این شماره

■ سال هفتم، زمستان ۱۳۷۶، شمارهٔ سوم

برهان تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

● نگارش مقالات کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتب ریاضی دبیرستان) ● طرح مسائل کلیدی (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن ● طرح مسائل مسابقه‌ای (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن ● طرح معماهای ریاضی ● نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

■ هیئت تحریریه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافهٔ مقالات آزاد است.
■ مقالات وارده باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.
■ مقالات مجله با رسم‌الخطِ انتشارات مدرسه به چاپ خواهد رسید.
■ مقالات رسیده مسترد نمی‌شود.

برهان هر ۳ ماه یک شماره منتشر می‌شود.

نشانی: خیابان سپهبد قرنی، خیابان سپند شرقی، پلاک ۳۸
تلفن: ۸۸۴۹۹۰۴، دورنویس (فاکس): ۸۸۲۰۵۹۹، صندوق پستی: ۱۴۱۵۵/۱۹۴۹

کد ۶۱۱/۱

حرف اوّل

زمستان سال ۵۷، روزهای عشق و شور و ایثار بود. روزهای شکوفایی انقلاب در آمیختگی خون و شمشیر.

آن روزها مدارس نیمه تعطیل بود، کوچه‌ها، خیابانها و میادین، مدرسهٔ عشق بود و کلاس درس و امتحان و شهیدان شاگردهای اول این مدارس بودند هم آنان که «شاهد بر باطن و حقیقتِ عالمند و هم آنان که به دیگران حیات می‌بخشند.»

هم آنان که آسایش و آرامش امروز ما را با خونشان تضمین کردند و حقّی بزرگ بر دوش ما دارند، مبادا خونشان را پایمال کنیم، مبادا نتیجهٔ جانبازیها و فداکاریهایشان را به نااهلان بسپاریم، مبادا شانه خالی کنیم!

در وصیّت‌نامهٔ یکی از این شهیدان والامقام به خانواده‌اش می‌خواندم:

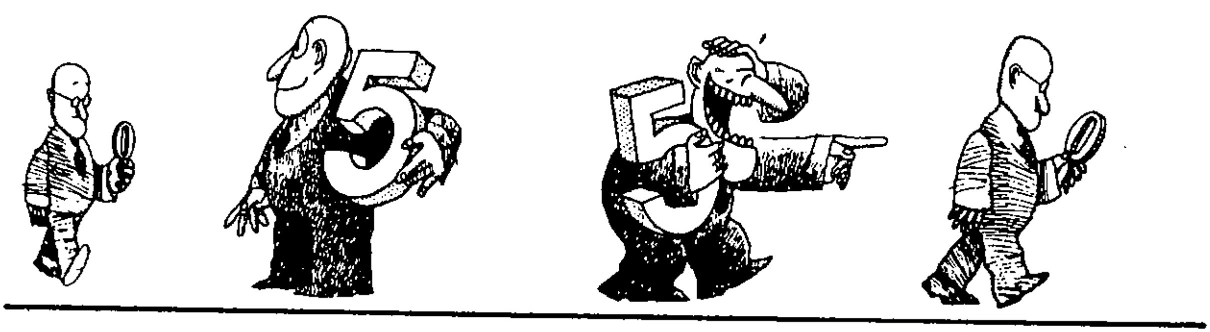
«وصیت می‌کنم به برادرانم که با صبر و استقامت در مسائل و گرفتاریها و با تقوا و اقامهٔ نماز و امر به معروف و نهی از منکر اسلام را و هدفِ انقلاب عزیزمان را زنده نگه دارند. برادرانم، نگاهتان را حفظ کنید و قرآن زیاد بخوانید و روایات اهل بیت را برای هم بازگو کرده به آنها عمل کنید. وصیّت می‌کنم به خواهرانم که حفظ حجاب را مقدم بر هر اموری قرار داده و پاسدار خونِ شهیدان باشید و فرزندانی که بتوانند سربازان امام‌زمان(عج) باشند تربیت کنید...»

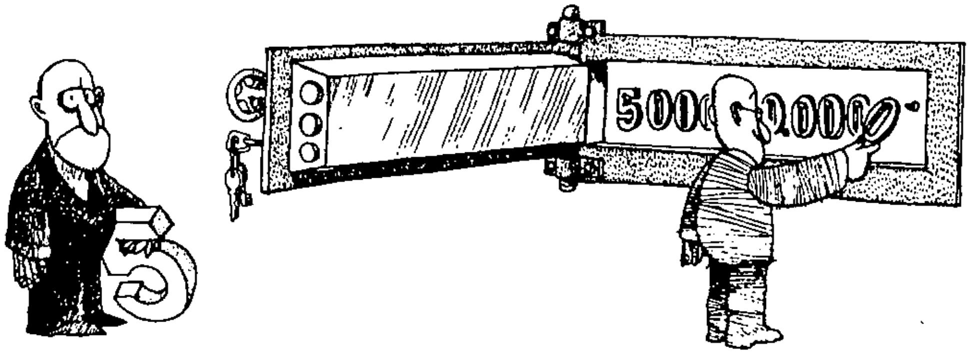
عزیزان دانش‌آموز آیا وصیّت آن شهید بزرگوار و روی سخن او با همهٔ ما نیست؟ آیا برادرم، نگاهت و خواهرم، حجابت را حفظ می‌کنی تا پاسدار خون او باشی؟

به بهار نگاه کن و به طبیعت که چگونه تبلوری از معاد را به تصویر می‌کشد، این معاد طبیعت یادآوری و نوید معاد انسان در آخرت است آنجا که با تمام انبیاء و اولیاء الهی و امامان علیهم السلام و شهیدان روبرو خواهیم شد. پس چنان حرکت کنیم و به وصیّت آنها عمل کنیم که خدای ناکرده سر به زیر و شرمنده در رخسار گلگونشان نگاه نکنیم. ـ ان شاءا... ـ

فرارسیدن بهار و سال نو را به همهٔ شما پاسداران و سنگربانانِ ارزشهای اسلامی تبریک می‌گوییم و از خداوند، موفقیت در تمامی مراحل زندگی، بخصوص تحصیل را برای شما عزیزان آرزومندیم.

و السلام ـ سردبیر





شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۲۳)

• پرویز شهریاری

راهنمایی‌هایی برای حل مسأله‌ها

برای حل یک مسأله ریاضی ــ اگر مضمونی تازه داشته باشد و در ردیف تمرین‌های سادهٔ پایان یک درس نباشد ــ نمی‌توان روش یا روشهای کلی پیدا کرد. در زندگی روزانه و ضمن فعالیت‌های اجتماعی هم، اغلب به «مسأله‌هایی» برمی‌خوریم که برایمان تازگی دارد و برای انتخاب مسیر حرکت آیندهٔ خود، نمی‌توانیم بر «نمونه‌های» آزمایش شده‌ای تکیه کنیم. در این‌گونه موردها، اغلب به یاری دیگران هم نمی‌توانیم متکی باشیم، چرا که «دشواری» مربوط به خود ماست و تنها خودمان هستیم که از زیر و بم آن آگاهیم و دلیل‌های پیدایش آن را می‌شناسیم. بنابراین، چاره‌ای جز این نداریم که با تکیه بر تجربهٔ زندگی، آگاهی‌های علمی، مقایسه و تجزیه و تحلیل راه‌های گوناگون و به کار گرفتن اندیشه، خرد و استعداد خود، راه و روش بهینه را بیابیم. برای حل مسأله‌های ریاضی هم، باید از همین راه رفت و نباید منتظر «دستورها» و «نسخه‌های شفابخش» بود. چنین دستورها و نسخه‌هایی که بتوان به یاری آنها از عهدهٔ حل هر مسأله برآمد وجود ندارند.

با همهٔ اینها، می‌توان از راهنمایی‌هایی سود برد. بویژه برای کسانی که به طور دایم و مستمر با حل مسأله سر و کار دارند (و نه برای کسانی که، به تصادف و گاه‌به‌گاه، می‌خواهند نیروی ذهنی خود را با حل یکی دو مسأله به آزمایش بگذارند)، این راهنمایی‌ها و توصیه‌ها می‌تواند سودمند باشد. ضمن برخورد با یک مسأله، به نکته‌ای توجه داشته باشید : اگر با مسأله‌ای جدی و ناآشنا روبه‌رو هستید، منتظر موفقیت سریع نباشید، از میدان در نروید و خیلی زود ناامید نشوید. گاهی برای رسیدن به راه‌حل درست و منطقی لازم است مدتها روی یک مسأله کار کنید؛ در آغاز، حالتهای خاص و ساده را بررسی کنید، مسأله‌های کم و بیش مشابه را به یاد آورید و راه‌ها و روشهای گوناگون را به کار بگیرید. در این صورت، اگر هم سرانجام نتوانید مسأله را حل کنید، نگران نشوید. همین که مدتها روی یک مسأله اندیشیده‌اید و از جانب‌های مختلف به آن نظر کرده‌اید، می‌تواند در رشد ذهن ریاضی شما تأثیری جدی داشته باشد. **به تأکید، این مطلب را (که می‌تواند قانون اصلی یادگیری باشد) تکرار می‌کنم: اگر روی یک مسألهٔ**

ریاضی، به اندازهٔ کافی کار کنید، حتی اگر موفق به حلّ آن نشوید، برای شما خیلی سودمندتر از آن است که حل ده‌ها مسأله را از روی کتابهای حل مسأله بیابید و یا راه حل آنها را پیش از آن که توان خود را آزموده باشید، از دیگران بپرسید. اندیشهٔ آدمی، ضمن برخورد با دشواریها و چاره‌جویی برای رفع آنها، تکامل می‌یابد و نیرومند می‌شود، نه با شنیدن یا دیدن گفته‌ها و حادثه‌ها، آگاهی‌های روایی و یا مشاهده‌ای سودمندند، ولی مثل ابزار می‌مانند ؛ موضوع اصلی، روش استفاده از این ابزار است، چیزی که بدون آن، هیچ نتیجه عملی حاصل نمی‌شود. برای این که در حل مسأله‌های ریاضی، کارآمد باشید، تا آن‌جا که ممکن است عصاها و دستگیره‌هایی مثل کتابهای حل مسأله و دبیر خصوصی را کنار بگذارید، تلاش کنید روی پای خودتان بایستید و از ذهن و اندیشه و آگاهی‌های خودتان بهره ببرید. وقتی با عصا راه بروید و یا همیشه دستتان به «نرده» راهنما باشد، آن وقت با جدا شدن از عصا و نرده، به زمین می‌خورید. عصا و نرده را برای حالتهای اضطراری و برای زمانی نگه دارید که پیش از آن، از تمامی نیروی اندیشهٔ خود برای پیدا کردن راه «عبور از بن‌بست» را مورد استفاده قرار داده باشید.

داستان کشف بزرگ **پروفسور نیکلای ولادیمیروویچ یفیموف**، ریاضیدان روزگار ما بسیار شنیدنی است. او از سالهای جوانی و وقتی که هنوز در دبیرستان و سپس دانشگاه تحصیل می‌کرد، روی مسأله‌ای کار می‌کرد. مسأله‌ای که توجه او را به خود جلب کرده بود، بسیار جالب و پر کشش بود : آیا می‌توان برای مفهومها و قضیه‌های هندسهٔ نااقلیدسی، و بویژه «هندسهٔ لباچوسکی»، تعبیری روشن در هندسهٔ اقلیدسی پیدا کرد؟ آیا می‌توان سطح‌هایی در هندسهٔ اقلیدسی ساخت که همهٔ ویژگی‌های یک «سطح لباچوسکی» را داشته باشند؟ پیش از او، ریاضیدانانی مثل «بلترام» و «هیلبرت» روی این مسأله کار کرده بودند و به نتیجه‌هایی رسیده بودند. ولی مسأله، به صورت کلی خود، همچنان حل نشده باقی مانده بود. مسألهٔ دشواری بود. ولی دشواری راه، یفیموف را از تلاش باز نداشت. کوششهای نخستین به جایی نرسید، او حتی نتوانست برای حل این مسأله مسیری پیدا کند. پذیرفتن نتیجه‌گیریهای هیلبرت کافی نبود، سایر روشهای شناخته شده هم توانایی لازم را نداشتند. یفیموف ناچار شد، از حملهٔ مستقیم دست بردارد و به محاصرهٔ طولانی، که به حوصلهٔ زیادی نیاز داشت بپردازد.

جستجو و اندیشه، ناامیدی و امید، شکستها و پیروزیهای موضعی، نزدیک به سی سال طول کشید، دانشمند جوان و تازه کار، به استاد عالی مقامی با شهرت جهانی تبدیل شد، ولی آرزوی دوران جوانی، همچنان به قوت خود باقی بود و در برابر مسألهٔ مورد نظرش تسلیم نمی‌شد. یفیموف، بارها و بارها حل مسأله را از سرگرفت و در این راه نتیجه‌های هندسی جالب و با ارزش تازه‌ای هم به‌دست آورد، ولی هدف اصلی، همچنان تسخیرناپذیر می‌نمود.

به تدریج تجربه‌ها روی هم جمع می‌شد، همهٔ راه‌حلهای ممکن مورد بررسی و تجزیه و تحلیل قرار می‌گرفت و درنتیجه اعتماد او به کار بیشتر می‌شد : هدف، در محاصرهٔ کامل قرار گرفته بود و سرانجام در سال ۱۹۶۱ میلادی حملهٔ نهایی آغاز شد.

و این بار، پیروزی کامل به دست آمد. کار سخت و پژوهش دراز مدت، صدها صفحه محاسبه و استدلال پیچیدهٔ ریاضی بی‌ثمر نماند و در بهار سال ۱۹۶۳ میلادی، نتیجهٔ دیر انتظار حاصل شد : او ثابت کرد که بسیاری از سطح‌های منحنی را نمی‌توان از فضای لباچوسکی به فضای اقلیدسی انتقال داد. مسأله‌ای که نزدیک به صد سال پیش به وسیلهٔ بلترام و هیلبرت طرح شده بود، در حالت کلی خود به وسیلهٔ یفیموف حل شد. در ضمن، یفیموف راز سطح‌های با انحنای منفی را هم آشکار کرد. ما در دور و بر خود، در هر گام، با این گونه سطح‌ها روبه‌رو می‌شویم : پرده‌های تاب‌دار، پروانهٔ هلیکوپتر، شکاف توربینها و برخی از قطعه‌های چرخها، دارای سطحی با انحنای منفی هستند. بنابراین، بررسی عمیق این‌گونه سطح‌ها اهمیت نظری ویژه‌ای پیدا می‌کند.

پیش از آن که از برخی روشهای اساسی که می‌توانند برای حل مسأله‌های ریاضی به کار آیند یاد کنم، به موضوعی بسیار جدی اشاره می‌کنم که هم از نظر آموزشی و هم از نظر رفتار اجتماعی اهمیتی جدی دارد و با کمال تأسف، کمتر مورد توجه قرار گرفته است. منظورم فراهم کردن شرایط مناسب، برای **«کار گروهی»** در بین دانش‌آموزان، برای یادگیری ریاضیات (و البته، نه تنها ریاضیات) است. درست برعکس، با انتخاب دانش‌آموزان «ممتاز» در یک کلاس، یا با ثبت نام از روی کارنامهٔ سال قبل (که مثلاً، کسانی ثبت‌نام می‌شوند که معدل نمره‌های آنها، از... بیشتر باشد) و یا گذاشتن نام «تیزهوش» به روی عده‌ای و کشاندن آنها، به «مدرسهٔ تیزهوشان» و یا، بدتر از

همه، به‌وجود آمدن رقابت‌های ناسالم در بین دانش‌آموزان و ترجیح دادن یکی بر دیگری، به خاطر چند صدم معدل بیشتر و... از روشهایی است که هم به دانش‌آموز علاقه‌مند لطمه می‌زند و هم دانش‌آموز «بی‌علاقه» را بی‌علاقه‌تر می‌کند و، در ضمن، زیان بزرگتر آن، پایین آوردن کار گروهی در بین دانش‌آموزان است. دانش‌آموز به خاطر رقابت، از همکاری و همراهی با دیگران دوری می‌گزینند، یاری به دیگران را به زیان خود می‌یابد و ریشهٔ تعاون اجتماعی را می‌خشکاند. آن که از نظر درسی جلوتر است، مغرور می‌شود، خود را تافتهٔ جدا بافته‌ای تصور می‌کند و مستقیم یا غیرمستقیم، به همسالان خود با دیدهٔ حقارت می‌نگرد. و آن که در درس‌ها ضعیف‌تر است، همه‌جا با بن بست مواجه می‌شود و، نه تنها از طرف معلم و پدر و مادر، که از جانب همسالان خود هم، آزار روحی می‌بیند و... سخن کوتاه، هر دو طرف، جدا از اجتماع همسالان خود و جدا از روحیهٔ همکاری و تعاون، زندگی نوجوانی و جوانی خود را تجربه می‌کنند.

اندیشهٔ آدمی و بویژه اندیشهٔ علمی، در برخورد با اندیشه‌های دیگر، شکل می‌گیرد و تکامل می‌یابد. اندیشهٔ فردی، هر قدر خلاّق و مستعد باشد، اگر در انزوا قرار گیرد، به تدریج فرسوده می‌شود و توان خود را از دست می‌دهد. و یکی از راه‌های برخورد اندیشه‌ها، کار گروهی است. خیلی ساده می‌توانید به‌درستی این مطلب پی‌ببرید. یک فیلم خوب انتخاب کنید و با دو نفر از دوستانتان به تماشای آن بروید و با هم قرار بگذارید، بعد از تماشای فیلم، دور هم جمع شوید تا دربارهٔ آن چه احساس کرده‌اید، آن‌چه آموخته‌اید و آن صحنه‌ها یا گفت و شنودهای فیلم که در شما اثر گذاشته است، با هم صحبت کنید... با کمال شگفتی متوجه خواهید شد که به خیلی از نکته‌ها توجه نکرده‌اید، خیلی از صحنه‌ها را، اگر چه دیده‌اید، نتوانسته‌اید درست درک کنید؛ متوجه می‌شوید که احساس کلی شما از فیلم چیزی و احساس دوستان شما چیز دیگری است و اگرچه ممکن است با برخی از دیدگاههای دوستانتان موافق نباشید، ولی تنها بعد از این گفت و شنود است که کمبودهای ذهنی شما دربارهٔ جنبه‌های خوب و بد فیلم برطرف می‌شود. همین آزمایش را می‌توانید دربارهٔ دیدار از یک نمایشگاه نقاشی، شنیدن یک کنسرت موسیقی، خواندن یک رُمان معروف، و حل یک مسألهٔ پرمضمون ریاضی تکرار کنید تا به معنای «تکامل اندیشه» آدمی در برخورد با اندیشه‌های دیگران پی ببرید.

روزگار ما، و به ویژه در میدانهای علمی، کار گروهی را می‌طلبد. ما در هزار سال پیش به سر نمی‌بریم که، وجود تک نابغه‌هایی مثل *ابوریحان بیرونی*، برای تکان دادن دنیای خود و برای تند کردن حرکت دانش مؤثر باشد. در زمان ما، هیچ کار علمی را نمی‌توان بدون همکاری با دیگران و بدون شرکت در یک کار گروهی پیش برد. دوران ما، دوران تک‌روی و سر درگریبان فروبردن نیست. باید در میان جمع بود و راه «در میان جمع بودن» را آموخت، و بهترین زمان، برای آشنا شدن و عادت کردن به کار گروهی، سالهای تحصیل در دبیرستان (و سپس، در دانشگاه) است. ما برای توسعهٔ اقتصادی و برای کم کردن فاصلهٔ خود با جهان پیشرفته، در هر زمینه‌ای (و از جمله در زمینهٔ ریاضیات) به انبوه ویژه‌کاران نیازمندیم، انبوه ویژه‌کارانی که راه همکاری با یکدیگر را بدانند و از تنگ نظری‌ها و حسدها دور باشند. پرورش چند نخبه، آن هم به صورت انفرادی و جدا از هم، مشکلی را حل نمی‌کند.

دربارهٔ «کار گروهی» به دو خاطره اشاره می‌کنم. خاطرهٔ اوّل از «**بوریس گنه‌دنکو**» مربّی معروف است که به شیوهٔ کار در بین دانشجویان و استادان مربوط می‌شود و خاطرهٔ دوم به سالهای تدریس خودم مربوط می‌شود و تا حدی، روشنگر «معجزه» کار گروهی در میان دانش‌آموزان دبیرستانی است.

گنه‌دنکو، در یکی از مقاله‌های خود با عنوان «خلاقیت ریاضی» می‌نویسد:

«... در سالهای پایانی سدهٔ نوزدهم، مکتب ریاضی پترزبورگ، شهرت زیادی به دست آورد و بویژه در دوره‌ای که **پ.ل.چبیشف** دانشمند نامی، در دانشگاه پترزبورگ کار می‌کرد، به اوج شکوفایی خود رسید. خیلی از زمینه‌ها (نظریهٔ عددها، نظریهٔ تابع‌ها، نظریهٔ احتمال و نظریهٔ سازوکارها)، مورد علاقهٔ خودچبیشف بود. او مسأله‌های حل نشده را با کمال میل، با جوانان علاقه‌مند در میان می‌گذاشت. این مسأله‌ها ضمن کار سخت و مستمر او پدید می‌آمدند. تصادفی نیست که‌چبیشف، به‌صورت مرکز جاذبه‌ای برای جوانان با استعداد درآمده بود و پژوهشگران شایسته‌ای از میان شاگردان او به‌وجود آمدند، پژوهشگرانی همچون *لیاپونف*، *مارکُف*، *گراوه* و بسیاری دیگر. در واقع، چبیشف، شرایطی فراهم آورده بود که به پیدایش و شکوفایی استعدادها کمک می‌کرد. او مسأله‌هایی را به شاگردان خود پیشنهاد می‌کرد و آنها را وامی‌داشت که گاهی سالها، روی آنها کار کنند و همین امر تأثیر ژرفی در روند پیشرفت دانش داشت.

روشن است که، در چنین موقعیتی، مسأله‌های تازه، تنها به وسیلهٔ استاد راهنما طرح نمی‌شود. عضوهای جوان این گروه پژوهشگر هم، به آفرینندگی علاقه‌مند می‌شوند و به صورت همکاران استاد درمی‌آیند. ولی این مسأله‌ها در گروه، مورد بحث جمعی قرار می‌گرفت و شکل کامل و سخت، دقیق و لازم خود را پیدا می‌کرد. و طبیعی است که هر قدر نیروی جوان در طرح و بررسی مسأله‌های تازه فعّال‌تر باشد، محیط علمی کامل‌تر و امکان آفرینندگی بیشتر خواهد شد.

من این شانس را داشتم که سالهایی از جوانی‌ام را در مکتب عالی نظریهٔ احتمال، که در سالهای پایانی دههٔ سوم و سالهای آغازین دههٔ چهارم سدهٔ بیستم در دانشگاه مسکو به وجود آمده بود، بگذرانم.

من در دوران شکوفایی این مکتب وارد آن شدم. وقتی که پژوهشگران بزرگی مثل کولسموگورف، خین‌چین، سمیرنوف و سلوتسکی، با همهٔ توان و استعداد خود، در آن کار می‌کردند، در آن زمان، هفته‌ای نبود که نتیجه‌گیریهایا روشهای تازه‌ای برای بررسی و یا طرح مسأله‌های تازه، وارد دانش نشود. و همهٔ اینها به صورت زنده و فعال، در سمینار علمی مربوط به نظریهٔ احتمال، مورد بحث و مذاکرهٔ جمعی قرار می‌گرفت. در این سمینارها، فیزیک‌دانان، زیست‌شناسان و ویژه‌کاران وسیله‌های ارتباطی (و در آن زمان، بیش از همه، ویژه‌کاران رابطهٔ تلفنی)، در کنار ریاضی‌دانان شرکت می‌کردند. در چنین اجتماعی، نظریهٔ احتمال در برابر ریاضی‌دانان جوان و تازه کار، نه تنها به عنوان بخشی از ریاضیات، بلکه بویژه به عنوان ابزاری برای شناخت پدیده‌های دنیای واقعی جلوه می‌کرد.

بحث و مذاکرهٔ سازنده‌ای که دربارهٔ گزارشها و طرحها وجود داشت، راه‌های مختلفی را که برای حل یک مسأله امکان داشت، مشخص و روشن می‌کرد، در فلان پژوهشی که کامل به‌نظر می‌رسد، چه کمبودهایی وجود دارد و چه چشم‌اندازهای تازه‌ای پیدا می‌شود که باید آنها را تکمیل، دقیق و عمیق کرد و راه رشد و تکامل بعدی آنها را به دست آورد.

بحث گروهی دربارهٔ کارهای انفرادی، به طور طبیعی این اعتقاد را استوارتر می‌کرد که دانش، تنها یک کار شخصی و انفرادی یک پژوهشگر نیست، بلکه بیش از هر چیز، یک پدیدهٔ اجتماعی است. به جز این، انتقاد سازندهٔ گروهی و بحث علمی منظم، برای پیشرفت کارهای انفرادی هم بی‌اندازه مهم است. این بحثها و گفت و شنودها، بویژه می‌تواند جنبه‌هایی از کار علمی را که می‌توان با اندکی دقت در بررسی‌های انفرادی پیدا کرد مشخص کند.

در چنین اوضاع و احوالی، به تدریج تمایل به حل مسأله‌های بزرگتر و اساسی‌تر و پیدا کردن روشهایی که برای بررسی آنها لازم است پدیدار می‌شود. همراه با تلاش برای تکمیل آگاهیها، چشم‌اندازی که نسبت به کل اندیشه وجود دارد، گسترده‌تر و آزادتر می‌شود و، همراه با آن، نارسایی‌ها و نقطه ضعف‌های آن، آشکارتر، خود را نشان می‌دهند. پرسش‌هاٰی تازه‌ای پدید می‌آید که پاسخی، برای آنها، وجود ندارد. این پرسش‌ها، ذهن همه را به خود مشغول می‌دارد و ناخودآگاه در هر جا و هر موقعیتی به اندیشهٔ دربارهٔ آن‌ها وا می‌دارد: پشت‌میز، موقع گردش، در اتوبوس، ضمن مطالعهٔ روزنامه و حتی در سالن تئاتر یا کنسرت، اندیشه به‌طور دایم در جستجوست و به دنبال چیزهای تازه‌ای است که او را به سمت پاسخ مورد نظرش راهنمایی کند...».

و اما خاطرهٔ خودم. در سالهای جوانی، وقتی که هنوز دانشجو بودم، کار معلمی را هم چه در کلاسهای شبانه و چه در دبیرستان‌ها ادامه می‌دادم. همیشه و همه جا از خود می‌پرسیدم: چرا بعضی از دانش‌آموزان در درسهای ریاضی، احساس ضعف و عجز می‌کنند! آیا به واقع، درک و اندیشهٔ آن‌ها، توان یادگیری موضوع‌های سادهٔ ریاضی را ندارد؟ چرا ذهن نوجوانانی که این‌طور هوشمندانه در همهٔ عرصه‌های زندگی خلاق و پربار است، وقتی با یک مسألهٔ ریاضی روبه‌رو می‌شود، از کار باز می‌ماند؟ می‌پذیرفتم که برای ریاضیدان شدن و برای آفرینندگی، عشق و استعداد لازم است؛ ولی مگر در کلاسهای دبیرستانی، انتظار خلاقیت و نوآوری در دانش‌آموز دارند؟ در این کلاسها، از دانش‌آموز می‌خواهند چیزهایی را یاد بگیرند که بیش از دو هزار سال پیش برای گذشتگان دور ما روشن بوده است. به نظرم می‌رسید که به طور طبیعی هر آدم متعارفی باید بتواند این موضوع‌های پیش‌پا افتاده را، به ویژه وقتی با منطق و استدلال همراه است، بفهمد... و اغلب برای یافتن پاسخ، به تلاشها و آزمایشهایی دست می‌زدم... اینک شرح یکی از این آزمایشها:

در آن سالها، دبستان را در شش سال و سپس دبیرستان را هم در شش سال می‌گذراندند. شش سال دبیرستان، به دو مرحله تقسیم شده بود: دورهٔ اوّل دبیرستان (سه سال) و دورهٔ دوم دبیرستان (سه سال).

من در سال دوم دورهٔ اوّل دبیرستان، دبیر هندسه بودم. دبیرستان، دارای سه کلاس دوم بود و بنا بر سنتی که رئیس

دبیرستان گذاشته بود، دانش‌آموزان را برحسب بلندی قد آنها در کلاسها جا می‌دادند: آنها که از دیگران بلندتر بودند، در کلاس دوم الف، متوسط‌ها در دوم ب و آنها که از همه کوتاه‌تر بودند در کلاس دوم ج... و من، دبیر هندسه در کلاس دوم الف بودم....

در طول نزدیک به یک ماه، تلاش کردم که دانش‌آموزان را از لحاظ قوت و ضعف آنها در درسهای ریاضی، کم و بیش بشناسم و بعد، یک روز وقتی وارد کلاس شدم، آنها را به گروههای سه نفری تقسیم کردم: در هر گروه، یک دانش‌آموز قوی، یک دانش‌آموز متوسط و یک دانش‌آموز ضعیف، و خیلی جدی اعلام کردم: از این به بعد، من با فرد کاری ندارم و گروهها را به رسمیت می‌شناسم. در امتحان سه ماههٔ اوّل هم، البته هر کسی ورقهٔ خودش را می‌نویسد، ولی من ورقه‌های سه نفر هر گروه را با هم سنجاق می‌کنم و به هریک از سه نفر معدل سه ورقه را به عنوان نمره می‌دهم. مثلاً، اگر در یک گروه، نمره‌های ورقه‌ها، ۱۹ و ۱۱ و ۶ باشد، به هر یک از سه نفر نمرهٔ ۱۲ را وارد لیست نمره‌های دبیرستان می‌کنم... طبیعی بود که با اعتراض دانش‌آموزان، بویژه دانش‌آموزان «درس خوان»، روبه‌رو شوم. ولی من مقاومت کردم... در فاصله‌ای که تا امتحان سه ماههٔ اول مانده بود، کسی حرف مرا چندان جدی نگرفت و پیش‌آمد مهمی رخ نداد. امتحان سه ماههٔ اوّل را به همان ترتیبی که قبلاً اعلام کرده بودم انجام دادم و... اعتراضها و فشارها آغاز شد: دانش‌آموزان، مسئولان دبیرستان، پدر و مادرها و بازرسان آموزش و پرورش، یک صدا و در کنار هم مرا زیر فشار گذاشتند، هیچ کس این شیوه را نمی‌پسندید و همه مرا شماتت می‌کردند. ولی من مقاومت کردم. و امیدم به درهم‌ریختگی و کاغذبازیهای رایج در دستگاه آموزش و پرورش بود که، تا بخواهند دربارهٔ من تصمیم بگیرند، سال تحصیلی به پایان می‌رسد... دانش‌آموزان، که از اعتراض‌های خود نتیجه نگرفته بودند و خود را مواجه با دبیری «بی‌منطق» می‌دیدند، به ناچار تسلیم شدند. نخستین باری که در راهروی دبیرستان، فریاد دانش‌آموزی را شنیدم که به دوست خود التماس می‌کرد: «تو را به خدا بیا این قضیه را یاد بگیر، تو پدر نمرهٔ مرا درآوردی!»، متوجه شدم که به نتیجهٔ دلخواه خود رسیده‌ام. البته، دانش‌آموزان ضعیف هم، به خاطر عاطفه‌ای که نسبت به دوستان هم گروه خود داشتند، به تلاش خود افزودند. صبحها، پیش از آغاز کلاسها، ظهرها و عصرها بعد از پایان کلاسها، گروه‌های سه نفری در گوشه و کنار مدرسه به چشم می‌خوردند که با هم کار می‌کردند. مطلع شدم، بسیاری از گروه‌ها، روزهای تعطیل به خانهٔ یکدیگر می‌روند و روی هندسه کار می‌کنند و... البته، فشار نسبت به من هم از جانب‌های مختلف رو به افزایش بود.

در سه ماههٔ دوم هم با همان شیوه عمل کردم، سطح نمره‌ها، نسبت به سه ماهٔ اوّل بالاتر بود، ولی هنوز به حد مطلوب نرسیده بود. ... برای امتحان آخر سال، نمرهٔ هر کسی را به خودش دادم و... معجزه اتفاق افتاده بود. کمترین نمره هندسه، در این کلاس، ۱۵ بود، هیچ کس در درس هندسه «تجدید» نشده بود. چنین است نتیجهٔ فوق‌العادهٔ کارگروهی! و من گروهی را می‌شناختم که در سالهای بعد هم، کار مشترک خود را ترک نکردند... البته، خود من «مردود» شدم، چرا که سال بعد، ساعت تدریس مرا در آن مدرسه از من گرفتند. به هر حال مسئولان دبیرستان، محیطی آرام لازم داشتند و حادثه‌های پر سر و صدا را نمی‌پسندیدند.

تا بعد...

دنباله[۱]

قسمت اوّل

(برای دانش‌آموزان دورهٔ پیش‌دانشگاهی، ریاضی و تجربی)

● احمد قندهاری

۱ ـــ در یک مسابقه وزنه‌برداری، در حرکت دوضرب، ۸ نفر شرکت داشتند، و نفرات اوّل تا هشتم توانستند به ترتیب وزنه‌های زیر را بلند کنند.

نفرات	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
مقداروزنه برحسب کیلوگرم	۲۱۰	۲۱۵	۲۰۰	۲۲۰	۲۲۵	۲۴۰	۲۳۰	۲۳۷/۵

این جدول، گویای این نتیجه است که مثلاً نفر اول ۲۱۰ کیلوگرم و نفر دوم ۲۱۵ کیلوگرم و نفر سوم ۲۰۰ کیلوگرم ... وزنه را توانستند بلند کنند.

برای پیداکردن نتایج بهتر، جدول بالا را به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب نشان می‌دهیم:

{(۱,۲۱۰),(۲,۲۱۵),(۳,۲۰۰),(۴,۲۲۰),(۵,۲۲۵),
(۶,۲۴۰),(۷,۲۳۰),(۸,۲۳۷/۵)}

حال این پرسش را مطرح می‌کنیم، که آیا مجموعه زوج مرتب بالا، تابعی را بیان می‌کند؟ با کمی دقّت می‌بینیم که این مجموعه زوج مرتب، تابعی را نشان می‌دهد، به طوری که دامنهٔ تابع مجموعه {۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸} و برد تابع مجموعه {۲۱۰,۲۱۵,۲۰۰,۲۲۰,۲۲۵,۲۴۰,۲۳۰,۲۳۷/۵} است.

اینک اعداد ۲۱۰,۲۱۵,۲۰۰,۲۲۰,۲۲۵,۲۴۰,۲۳۰,۲۳۷/۵ را یک دنباله می‌گوییم. این دنباله شامل (۸) عدد است که مربوط به ۸ نفر وزنه بردار است. هریک از وزنه‌برداران به یک عدد از دنبالهٔ بالا مربوط شده‌اند. می‌توان گفت که یک تناظر یک به یک بین وزنه‌بردارها و وزنه‌های برداشته شده توسط آنها وجود دارد. چون تعداد جمله‌های این دنباله ۸ تاست، لذا به آن دنبالهٔ متناهی می‌گوییم. چنانچه تعداد جمله‌های یک دنباله، بی‌شمار باشد، آن را دنباله نامتناهی می‌گوییم. برای شناخت بهتر دنباله‌ها به مطالب زیر توجه کنید:

تعریف ۱: مجموعهٔ $N_K=\{1,2,3,\dots,k\}, k\in N$ را قطعهٔ اعداد طبیعی از ۱ تا k گوییم، مثلاً مجموعهٔ {۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸} را قطعهٔ اعداد طبیعی از ۱ تا ۸ می‌گوییم.

تعریف ۲: برد هر تابع تعریف شده در قطعه‌ای ازاعداد طبیعی یک دنباله متناهی (با پایان) می‌سازد برای درک بیشتر به مثالهای زیر نگاه کنید:

مثال ۱: تابع a با ضابطه $\begin{cases} a(n)=2n \\ N\to R \end{cases}, n<9, n\in N$ را درنظر می‌گیریم. بُرد این تابع مجموعهٔ {۲,۴,۶,...,۱۶} است. اعداد ۱۶ و ۱۴ و ۱۲ و ۱۰ و ۸ و ۶ و ۴ و ۲ را یک دنبالهٔ متناهی می‌گوییم.

مثال ۲: تابع a با ضابطه $\begin{cases} a(n)=5n \\ N\to R \end{cases}, n<8, n\in N$ را

---

۱ ـ sequence

درنظر می‌گیریم. برد این تابع، مجموعهٔ $\{۵,۱۰,۱۵,...,۳۵\}$ است.

اعداد ۳۵ و ۳۰ و ۲۵ و ۲۰ و ۱۵ و ۱۰ و ۵ را یک دنباله متناهی اعداد طبیعی مضرب ۵ کوچکتر از ۴۰ می‌گوییم. حال به صورت کامل دنباله را تعریف می‌کنیم:

تعریف ۳: به مجموعه‌ای از اعداد که چنان مرتب شوند که با مجموعه عددهای طبیعی یا قطعه‌ای از آنها در تناظر یک به یک باشد، یک دنباله گفته می‌شود.

تعریف ۴: یک دنباله تابعی است که دامنه‌اش مجموعهٔ اعداد طبیعی یا قطعه‌ای از آن باشد. به هریک از مقادیر برد این تابع، یک جملهٔ دنباله گفته می‌شود. چنانچه دامنهٔ این تابع، مجموعهٔ اعداد طبیعی باشد. دنبالهٔ حاصل از آن را دنباله نامتناهی می‌گویند.

از این به بعد هرجا کلمهٔ دنباله به‌کار می‌رود، منظور دنباله نامتناهی است. حال به مثالهای زیر دقت کنید.

مثال ۱: تابع $a:N \to R$ با ضابطه $a(n)=\frac{1}{n}$ را درنظر می‌گیریم. $n \in N$ این تابع بنا به تعریف (۴) یک دنباله را بیان می‌کند؛ یعنی مقادیر بُرد این تابع، جمله‌های دنباله را تشکیل می‌دهند. با قرار دادن اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ... و n و ... در معادله تابع $a(n)=\frac{1}{n}$ جمله‌های دنباله به دست می‌آید:

$$a(1)=1\ ,\ a(2)=\frac{1}{2}\ ,\ a(3)=\frac{1}{3}\ ,...,\ a(n)=\frac{1}{n},...$$

بنابراین، اعداد $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...,\frac{1}{n},...$ را یک دنباله می‌گوییم.

توجه داشته باشید که جمله اوّل دنباله را با a_1 و جمله دوم دنباله را با a_2 و جمله سوم دنباله را با a_3... و جمله (n) ام دنباله را با a_n نشان می‌دهیم و خود دنباله را با $\{a_n\}$ نشان می‌دهیم.

مثال ۲: تابع a با ضابطه $\begin{cases} a(n)=\dfrac{n}{n+2} \\ N \longrightarrow R \end{cases}$، $n \in N$ را در نظر می‌گیریم. برد این تابع مجموعهٔ $\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{3}{5},...,\frac{n}{n+2},...\right\}$ است، بنابراین اعداد $\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{3}{5},...,\frac{n}{n+2},...$ را یک دنباله می‌گوییم.

مثال ۳: تابع a با ضابطهٔ $\begin{cases} a(n)=5^{n-1} \\ N \to R \end{cases}$، $n \in N$ را درنظر می‌گیریم. برد این تابع مجموعهٔ $\{1,5,25,...,5^{n-1},...\}$ است، لذا اعداد $1,5,25,...,5^{n-1},...$ را دنباله می‌گوییم.

همان‌طوری‌که در مثال ۲ گفته شد، $a_1=1$ و $a_2=5$ و $a_3=25$ و ... و $a_n=5^{n-1}$ و ... است.

۲ ــ جملهٔ عمومی دنباله: گفتیم که جمله (n)ام دنباله را با a_n نشان می‌دهیم، این جمله را جملهٔ عمومی دنباله می‌نامیم. اگر جمله عمومی یک دنباله معلوم باشد، کلیهٔ جمله‌های دنباله از روی جمله عمومی دنباله، با قرار دادن $n=1,2,3,...$ معلوم می‌شود.

مثال: اگر جمله عمومی دنباله‌ای به صورت $a_n=\frac{n-1}{2n+1}$، $n \in N$ باشد، آنگاه می‌توان نوشت:

$$n=1 \Rightarrow a_1=0$$

$$n=2 \Rightarrow a_2=\frac{1}{5}$$

$$n=3 \Rightarrow a_3=\frac{2}{7}$$

$$n=4 \Rightarrow a_4=\frac{3}{9}$$

$$n=5 \Rightarrow a_5=\frac{4}{11}$$

در نتیجه اعداد $0,\frac{1}{5},\frac{2}{7},\frac{3}{9},\frac{4}{11},...,\frac{n-1}{2n+1},...$ را یک دنباله با جملهٔ عمومی $a_n=\frac{n-1}{2n+1}$ می‌گوییم.

توجه: گاهی، دنباله را با یک رابطه بین جمله (n)ام و جمله (n−1)ام یا با یک رابطه بین جمله (n)ام و جمله‌های پیش از آن تعریف می‌کنند. مثلاً دنباله: $a_1=3$، $a_n=a_{n-1}+3$ که در آن

$$n=1 \Rightarrow a_1=3$$
$$n=2 \Rightarrow a_2=a_1+3=3+3=6$$
$$n=3 \Rightarrow a_3=a_2+3=6+3=9$$
$$n=4 \Rightarrow a_4=a_3+3=9+3=12$$

به همین ترتیب، کلیه جمله‌های دنباله مشخص می‌شود.

رابطهٔ $a_1=3$، $a_n=a_{n-1}+3$ را رابطهٔ **بازگشت** یا رابطه **بازگشتی** می‌گویند.

دنباله: $a_2=a_1=1$, $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$، برای $n \geq 3$ دنباله معروف **فیبوناتچی** است. پس از این در مورد این دنباله، مطالبی خواهیم گفت.

دیدید که اگر جمله عمومی دنباله‌ای معلوم باشد یا رابطه بازگشت در یک دنباله مطرح باشد، جمله‌های دنباله از روی آنها با قراردادن $n=۱,۲,۳,\ldots$ به دست می‌آید. حال پرسش مهم زیر مطرح می‌شود :

پرسش ۱: با داشتن چند جمله اولیه یک دنباله نامتناهی، می‌توانیم جملهٔ عمومی آن را پیدا کنیم؟

پاسخ: پاسخ این پرسش گاهی مثبت و گاهی منفی است. یعنی در دست داشتن چند جمله اول یک دنبالهٔ نامتناهی، برای تعریف دنباله و تعیین جمله عمومی آن کافی نیست، زیرا در چنین مسأله‌ای باید یک دستور استقرایی ساده و سازگار با جمله‌های دنباله یافت و اگر نتوانیم چنین دستوری را بیابیم، یافتن جمله عمومی مقدور نیست. مانند دنباله عددهای اول و دنباله رقمهای اعشاری عدد π که در هر دو، یافتن جمله عمومی مقدور نیست.

حال به مثالهای زیر توجه کنید.

مثال۱: جمله عمومی دنباله $\frac{۱}{۵},\frac{۳}{۱۰},\frac{۵}{۱۵},\frac{۷}{۲۰},\ldots$ را بیابید.

حل: با کمی دقّت متوجه می‌شویم که صورت این کسرها، اعداد طبیعی فرد و مخرج این کسرها مضرب‌های (۵) اعداد طبیعی است، پس ظاهراً جملهٔ عمومی این دنباله به صورت $a_n=\frac{۲n-۱}{۵n}$ می‌تواند باشد.

حال پرسش دیگری را مطرح می‌کنیم :

پرسش۲: آیا جمله عمومی بالا تنها جمله عمومی این دنباله است؟

پاسخ: پاسخ این پرسش منفی است و می‌توان جمله‌های عمومی دیگری یافت که چهار جمله اول آن $\frac{۱}{۵},\frac{۳}{۱۰},\frac{۵}{۱۵},\frac{۷}{۲۰}$ باشد، مثلاً دنباله با جمله عمومی $a_n=\frac{۲n-۱}{۵n}+(n-۱)(n-۲)(n-۳)(n-۴)$، که چهار جمله اوّل دنباله با این جملهٔ عمومی، در واقع همان چهار جمله بالاست، زیرا :

$$n=۱\Rightarrow a_۱=\frac{۱}{۵}$$

$$n=۲\Rightarrow a_۲=\frac{۳}{۱۰}$$

$$n=۳\Rightarrow a_۳=\frac{۵}{۱۵}$$

$$n=۴\Rightarrow a_۴=\frac{۷}{۲۰}$$

ولی جملهٔ پنجم آن $a_۵=\frac{۹}{۲۵}+۲۴$ که با جمله پنجم دنباله با جملهٔ عمومی $a_n=\frac{۲n-۱}{۵n}$ که مساوی $(\frac{۹}{۲۵})$ است، متفاوت است.

بنابراین اگرچند جملهٔ اولیه از یک دنباله معلوم باشد و بتوانیم جملهٔ عمومی آن را پیدا کنیم. نمی‌توان گفت که این تنها جمله عمومی به دست آمده است. دنباله می‌تواند جمله‌های عمومی دیگری هم داشته باشد، ولی در این نوع مسایل، یافتن ساده‌ترین جملهٔ عمومی مورد نظر است.

مثال ۲: چند جملهٔ اولّیه دنباله‌ای به صورت $\frac{۲}{۷},\frac{۵}{۱۱},\frac{۱۰}{۱۵},\frac{۱۷}{۱۹}$ است. ساده‌ترین جمله عمومی این دنباله را بیابید.

حل: اگر با دقت، اعداد صورت کسرها را درنظر بگیریم می‌بینیم که صورت کسرها به شکل (۱+ مربع عدد آن جمله) می‌باشد، ازاینجا نتیجه می‌گیریم که صورت کسر جملهٔ عمومی، می‌تواند به شکل $(n^۲+۱)$ باشد.

دربارهٔ اعداد مخرج : اعداد مخرج یک تصاعد عددی[۱] می‌سازند که جمله اوّل آن ۷ و قدر نسبت آن ۴ است، پس می‌توان نوشت :

$$\begin{cases}t_۱=۷\\ d=۴\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t_n=t_۱+(n-۱)d\\ t_n=۷+۴(n-۱)\end{cases}\Rightarrow t_n=۴n+۳$$

پس مخرج کسر جمله عمومی، به شکل $(۴n+۳)$ می‌تواند باشد. در نتیجه ساده‌ترین جملهٔ عمومی دنباله فوق به شکل $a_n=\frac{n^۲+۱}{۴n+۳}$ است.

مسایل:

مسأله ۱: ده جمله اوّل دنباله فیبوناتچی را بنویسید.

$$a_n=a_{n-۱}+a_{n-۲}\qquad n\geq ۳$$

$$a_۱=a_۲=۱$$

$$n=۳\Rightarrow a_۳=a_۲+a_۱=۱+۱=۲$$

$$n=۴\Rightarrow a_۴=a_۳+a_۲=۲+۱=۳$$

$$n=۵\Rightarrow a_۵=a_۴+a_۳=۳+۲=۵$$

$$n=۶\Rightarrow a_۶=a_۵+a_۴=۵+۳=۸$$

$$n=۷\Rightarrow a_۷=a_۶+a_۵=۸+۵=۱۳$$

۱ ــ در آینده در مورد تصاعدها بحث خواهیم کرد.

$n=8 \Rightarrow a_8 = a_7 + a_6 = 13+8 = 21$

$n=9 \Rightarrow a_9 = a_8 + a_7 = 21+13 = 34$

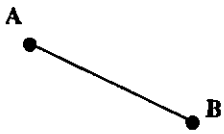
$n=10 \Rightarrow a_{10} = a_9 + a_8 = 34+21 = 55$

نتیجه : $1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,\ldots$

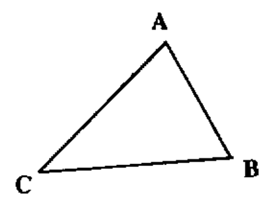
مسأله ۲ : n نقطه متمایز در یک صفحه داریم که هیچ سه نقطه آن بر یک استقامت نیستند. اگر a_n تعداد پاره‌خط‌های متمایزی باشد که این نقاط را به هم وصل می‌کند، پنج جمله اول این دنباله را بنویسید و ساده‌ترین جمله عمومی آن را بیابید.

حل: با یک نقطه پاره خط تشکیل نمی‌شود، پس : $a_1 = 0$

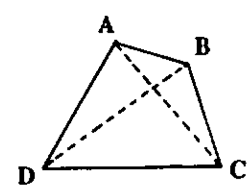
با دو نقطه یک پاره‌خط تشکیل می‌شود، پس : $a_2 = 1$



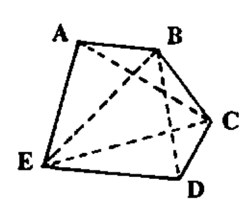
با سه نقطه غیرواقع بر یک استقامت سهٔ پاره‌خط تشکیل می‌شود (مانند مثلث)، پس : $a_3 = 3$



با چهار نقطه که سه به سه غیرواقع بر یک استقامت باشند، شش پاره‌خط تشکیل می‌شود (چهارضلعی با دو قطر)، پس : $a_4 = 6$



با پنج نقطه که سه به سه غیرواقع بر یک استقامت باشند، ۱۰ پاره‌خط تشکیل می‌شود (پنج ضلعی محدّب با قطرهای آن)، پس : $a_5 = 10$



در نتیجه پنج جمله اوّل این دنباله عبارت است از : ۱۰ و ۶ و ۳ و ۱ و ۰.

حال می‌خواهیم جمله عمومی این دنباله را پیدا کنیم.

چون جمله اول دنباله، صفر است، بنابراین در جملهٔ عمومی باید عامل $(n-1)$ داشته باشیم با کمی دقت و بررسی متوجه می‌شویم که جمله عمومی می‌تواند به صورت $\frac{n(n-1)}{2}$ باشد.

در مورد جملهٔ عمومی این دنباله کمی بحث کنیم. اگر n تعداد اضلاع n ضلعی محدب واقع در یک صفحه باشد، می‌توان گفت که در این دنباله، اگر $n=3$ ، آن‌گاه یک مثلث تشکیل می‌شود ؛ اگر $n=4$ آن‌گاه یک چهارضلعی محدّب تشکیل می‌شود و اگر $n=5$ ، آن‌گاه یک پنج ضلعی محدب تشکیل می‌شود و در حالت کلی اگر n نقطه متمایز داشته باشیم که هیچ سه نقطه آن بر یک استقامت نباشند، یک n ضلعی محدّب تشکیل می‌شود، می‌خواهیم مجموع تعداد اضلاع و تعداد قطرهای آن را بیابیم. n ضلعی محدب دارای n ضلع و $\frac{n(n-3)}{2}$ قطر است. پس :

$$\text{مجموع اضلاع و قطرها} = n + \frac{n(n-3)}{2}$$

$$= \frac{2n + n(n-3)}{2} = \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

بنابراین مجموع تعداد کل اضلاع و قطرها در یک n ضلعی محدب $\frac{n(n-1)}{2}$ است که همان جملهٔ عمومی دنباله مورد بحث است.

مسأله ۳: دنباله با جمله عمومی $a_n\, n^2 - n$ مفروض است. عدد (۷۲) و عدد (۱۲۵) نسبت به جمله‌های این دنباله چه وضعی دارند؟

حل: چنین عمل می‌کنیم

$$n^2 - n = 72 \Rightarrow n^2 - n - 72 = 0$$

$$\Rightarrow (n-9)(n+8) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = -8 & \text{غیرقابل قبول} \\ n = 9 \Rightarrow & \end{cases}$$

پس عدد (۷۲) جمله نهم این دنباله است.

$$n^2 - n - 125 = 0 \Rightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4(125)}}{2}$$

$$=\frac{۱\pm\sqrt{۵۰۱}}{۲}=\frac{۱\pm۲۲/۳۸}{۲}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} n=\frac{۱-۲۲/۳۸}{۲}=-۱۰/۶۹ & \text{قابل قبول نیست} \\ n=\frac{۱+۲۲/۳۸}{۲}=۱۱/۶۹ \end{cases}$$

(۱۱/۶۹) بین (۱۱) و (۱۲) است، نتیجه می‌گیریم که عدد (۱۲۵) بین جمله‌های مرتبه یازدهم و دوازدهم است.

مسأله ۴: نخستین جمله دنباله با جمله عمومی $a_n=\frac{۲n}{n^۲+۳}$ که کوچکتر از $(\frac{۱}{۲۰})$ باشد کدام است؟

حل:

$$\frac{۲n}{n^۲+۳}<\frac{۱}{۲۰}\Rightarrow\frac{۱}{۲۰}-\frac{۲n}{n^۲+۳}>۰\Rightarrow\frac{n^۲+۳-۴۰n}{۲۰(n^۲+۳)}>۰$$

$$\Rightarrow n^۲-۴۰n+۳>۰\Rightarrow n^۲-۴۰n+۳=۰\Rightarrow$$

$n=۳۹/۹۲$ یا $n=۰/۰۸$

$\Rightarrow n^۲-۴۰n+۳>۰\Rightarrow n>۳۹/۹۲$ یا $n<۰/۰۸$

چون n عددی طبیعی است، پس $n=۴۰$ در نتیجه، جملهٔ چهلم.

زیرا $\frac{۱}{۲۰}=۰/۰۵$ $\quad$ $a_{۴۰}=\frac{۸۰}{۱۶۰۳}=۰/۰۴۹<\frac{۱}{۲۰}$

تمرین‌ها

۱ ــ پنج جمله اولیه دنباله $a_n=۲-۳a_{n-۱}$ با فرض $a_۱=۲$ را بنویسید.

۲ ــ دنبالهٔ $\left\{\frac{۲n-۱}{n^۲}\right\}$ مفروض است پنج جمله آن را بیابید، نمودار این پنج جمله را در صفحه محورهای مختصات نشان دهید.

۳ ــ در روی محیط دایره‌ای، n نقطه متمایز وجود دارد. دنباله تعداد وترهای متمایز را تشکیل دهید و جمله عمومی آن را بنویسید.

۴ ــ مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع (۱) مفروض است. اگر وسط‌های اضلاع را به هم وصل کنیم، مثلث جدیدی حاصل می‌شود، اگر وسط‌های اضلاع مثلث جدید را به هم وصل کنیم، مثلث سومی حاصل می‌شود و این عمل را بارها تکرار می‌کنیم.

الف : دنباله محیطهای مثلثها را بنویسید.

ب : دنباله ارتفاعهای مثلثها را بنویسید.

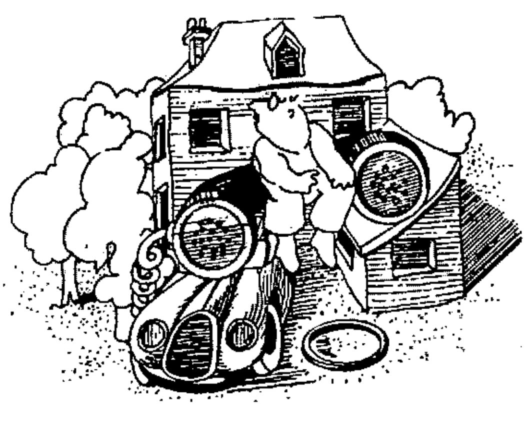
ج : دنباله مساحتهای مثلثها را بنویسید.

د : دنباله مساحتهای دایره‌های محیطی مثلثها را بنویسید.

تفریح اندیشه ۱

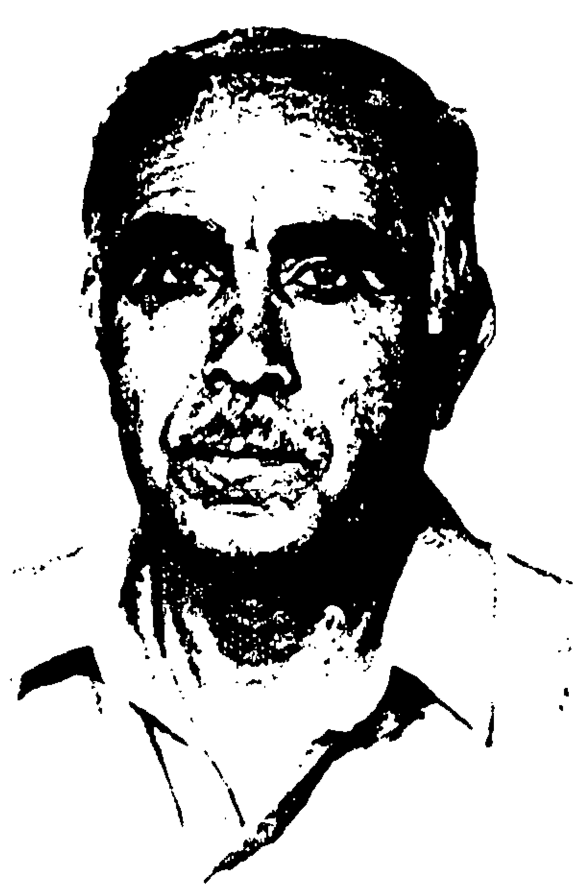
در شهری از هر ۱۰۰ نفر ۸۵ تن ازدواج کرده‌اند، ۷۰ نفر تلفن، ۷۵ نفر اتومبیل و ۸۰ نفر خانه دارند.

تعیین کنید در این شهر از هر صد نفر چند نفر هم ازدواج کرده‌اند و هم صاحب خانه، تلفن و اتومبیل هستند؟



● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمهٔ سیمین‌دخت ترکبور

جواب در صفحهٔ ۸۸



در باغ تجربه‌ها

نشستی با استاد عبدالحسین مصحفی

□ شرح حال، سابقهٔ تدریس و سمتهای رسمی خود را شرح دهید؟

■ در اسفند ۱۳۰۳ در شهر کرمان، در خانه‌ای از محلهٔ مسجد گنج به‌دنیا آمده‌ام. در کودکی خواندن قرآن را آموختم و پس از تحصیلات رسمی (شش سال دورهٔ ابتدایی و سه سال سیکل اول متوسطه) امتحان نهایی سیکل اوّل متوسطه را در ۱۳۲۰ گذراندم و در همان سال در همان مدرسهٔ ملی که از آنجا فارغ‌التحصیل شده بودم به معلمی گمارده شدم. این مدرسهٔ ملّی که دبیرستان شهاب نام داشت، از نخستین مدرسه‌هایی به‌شمار می‌آمد که برای آموزش به روش جدید در کرمان تأسیس شده بود و از یک دبستان شش کلاسی و از یک سیکل اوّل متوسطهٔ سه کلاسی تشکیل می‌شد. چند سالی را به تناوب یا به معلمی در آن مدرسه یا به شغل صحافی و کتابفروشی گذراندم. در سال ۱۳۲۷ امتحان نهایی پنجم متوسطه را به‌صورت داوطلب گذراندم و با وجود تکفل خانواده، داوطلب خدمت نظام وظیفه شدم. شش ماه این خدمت را در دانشکدهٔ افسری تهران و یک سال آن را با درجهٔ ستوان دوم توپخانه به پایان بردم. محل خدمتم بنا بر نمره‌هایی که آورده بودم مشهد افتاد که آن را با خاش معاوضه کردم. ضمن خدمت افسری، درسهای سال ششم ریاضی را نزد خودم آموختم و در ۱۳۳۰ امتحان نهایی دیپلم ریاضی را به‌صورت داوطلب در تهران گذراندم. در همان سال در امتحان ورودی رشتهٔ ریاضی دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران و رشتهٔ دبیری دانشسرای عالی ایران پذیرفته شدم و در سال ۱۳۳۳ گواهینامهٔ لیسانس هر یک از این دو مؤسسهٔ عالی را دریافت داشتم و برای خدمت دبیری یزد را برگزیدم.

هشت سال در دبیرستانهای شهرستان یزد و در دانشسرا و در کلاسهای تربیت معلم آنجا، به تدریس ریاضیات اشتغال داشتم. در سال ۱۳۴۱ به تهران منتقل شدم و سمتهای رسمی که داشته‌ام چنین بوده است:

۱۳۴۱ تا ۱۳۴۴ دبیر دبیرستانهای ناحیهٔ چهار تهران.

۱۳۴۴ تا ۱۳۴۷ کارشناس ریاضی برنامه‌ها در ادارهٔ کل مطالعات و برنامه‌های وزارت آموزش و پرورش

۱۳۴۷ تا ۱۳۵۲ نمایندهٔ وزارت آموزش و پرورش در شرکت چاپ‌وتوزیع کتابهای درسی

۱۳۵۲ تا بهمن ۱۳۵۷ کارشناس مسئول ریاضی در سازمان کتابهای درسی ایران

اسفند ۱۳۵۷ تا آبان ۱۳۵۸ مدیرکل سازمان کتابهای درسی ایران و سرپرست ادارهٔ کل تحقیقات و برنامه‌ریزی درسی.

آبان ۱۳۵۸ بنا به درخواست شخصی بازنشسته شدم.
پس از بازنشستگی به غیر از سه سال که با مرکز نشر دانشگاهی در کار ویراستاری یک دوره کتابهای ریاضی پیش‌دانشگاهی همکاری داشتم، عمدهٔ وقتم را به ترجمه و نگارش نوشتارها یا کتابهایی در زمینهٔ ریاضی و در زمینهٔ کامپیوتر می‌گذرانم.
در ۱۳۳۷ در یزد ازدواج کرده‌ام. همسرم نیز فرهنگی و حاصل ازدواج ما دو فرزند پسر است.
در ۱۳۵۲ با استفاده از بورس واگذاری دولت بلژیک یک دوره بررسی و مطالعه دربارهٔ ریاضی جدید را در آن کشور گذراندم. دوباره در دو دانشگاه فرانسه برای گرفتن دکترای از نوع تروازیم سیکل اقدام کردم. هر دو بار در مصاحبه پذیرفته شدم و ثبت نام هم کردم، اما از آن‌رو که می‌باید سه سال به‌طور مرتب در کلاس حضور می‌داشتم و در نتیجه در انتشار مجلهٔ یکان وقفه ایجاد می‌شد از دنبال کردن کار خودداری کردم.
چند ترم تحصیلی تدریس روشهای آموزش ریاضی و بررسی کتابهای درسی را در دانشگاه ابوریحان و در دانشگاه مامازن به‌عهده داشتم. در آغاز و تأسیس انجمن معلمان ریاضی ایران [در سال ۱۳۴۳] به عضویت هیأت مدیرهٔ موقت و پس از تصویب اساسنامهٔ آن به عضویت هیأت اجرایی انجمن انتخاب شدم که این همکاری تا سال ۱۳۴۸ ادامه داشت.
در چند سال آخر اقامتم در یزد خبرنگار فرهنگی روزنامهٔ کیهان بودم و نوشتارهایی در زمینهٔ فرهنگ یزد و دربارهٔ شخصیتهای فرهنگی آنجا فراهم آوردم و در آن روزنامه به چاپ رساندم.
در سالهای ۱۳۴۱ و ۱۳۴۲ هم که به تهران منتقل شده بودم با نشریه‌ای علمی که باشگاه مهرگان منتشر می‌کرد همکاری داشتم.

□ در مورد تألیفات و ترجمه‌های خود مطالبی را عنوان کنید.

■ ۱) *انتشار مجلهٔ ریاضی یکان*

در سال ۱۳۴۱ امتیاز انتشار مجله‌ای ریاضی را درخواست کردم. به‌دنبال آن در جلسهٔ آبان ۱۳۴۲ کمیسیون مطبوعات وزارت کشور با امتیاز مجلهٔ ریاضی یکان به‌نام من موافقت کرد. نخستین شمارهٔ این مجله در بهمن ۱۳۴۲ منتشر شد؛ که بیش از حد انتظار با استقبال روبه‌رو شد و سه بار تجدید چاپ شد. پس از آن هم این مجله به‌طور مرتب تا ۱۱۸ شمارهٔ ماهانه و هر سال همراه با شماره‌ای ویژهٔ امتحانهای نهایی و کنکور و همراه با شماره‌ای برای دانش‌آموزان سال آخر سیکل اوّل متوسطه انتشار یافت. سرانجام در سال ۱۳۵۶ از ادامهٔ انتشار آن باز ماندم. دربارهٔ این مجله و اثرش در گسترش ریاضیات در ایران و دربارهٔ تحوّلی که در آموزش ریاضی در ایران به‌وجود آورد، صاحبنظران بسیار سخن گفته‌اند و آن را در ترازوی سنجش قرار داده‌اند.
مجلهٔ یکان بدون هیچ وابستگی و بدون دریافت هرگونه کمک مادی منتشر می‌شد و هزینهٔ سنگین آن کلاً از راه تکفروشی و حق اشتراک تأمین می‌شد. دلیل توقف انتشار آن هم تنها آن بود که دیگر توانایی ادامهٔ کار را نداشتم. پس از انقلاب هم به توصیهٔ مؤکد شهیدرجایی و به تشویق بعضی از ریاضی دوستان، تقاضای تجدید امتیاز مجله را کردم که تصویب هم شد، اما باز هم توانایی لازم برای دنبال کردن کار را نداشته‌ام.

۲) *نوشتارها*

هر شماره از مجلهٔ یکان، از دو بخش عمده تشکیل می‌شد. یک بخش مجموعه‌ای از نوشتارها و بخش دیگر مجموعه‌ای از مسأله‌های گوناگون بود. از نوشتارهای هر شماره، دست‌کم دو یا سه عددشان به قلم خودم بود که بیشتر بدون ذکر نام چاپ می‌شد. تعداد این نوشتارها روی‌هم بیش از دویست خواهد بود. به غیر از این نوشتارها، برای چند مجلهٔ علمی و ریاضی نیز نوشتارهایی ترجمه کرده یا نگاشته‌ام که تعداد چاپ شده‌های آنها اکنون به هفتادوشش مقاله رسیده است. این نوشتارها عموماً در زمینهٔ ریاضی و کامپیوتر بوده‌اند. مبادی کامپیوتر را در یک دورهٔ سه ماهه و برنامه‌نویسی به زبان کوبول را نیز در یک دورهٔ سه ماهه در سازمان مدیریت فرا گرفتم و پس از آن از راه مطالعهٔ کتابهایی به زبانهای انگلیسی یا فرانسه، توانسته‌ام به دانستنیهای بیشتری در زمینهٔ دانشهای کامپیوتری دست یابم.

۳) *کتابها*

الف) کتابهایی که ترجمهٔ آنها به صورت مقاله‌های پی‌درپی در مجله‌های یکان به چاپ رسیده است:

راهنمای حل مسأله‌های مقدماتی هندسه ــ بیان جدید ریاضیات مقدماتی ــ نجوم و کیهانشناسی ــ مسأله‌های حل نشدهٔ ریاضی ــ داستانهای تفننی ریاضی ــ هندسهٔ مقدماتی به زبان ریاضی جدید ــ آمار مقدماتی ــ احتمال مقدماتی ــ راهنمای حل مسأله‌های ترسیمی هندسه ــ چگونگی حل سادهٔ مسأله‌های ریاضی ــ نظریهٔ مجموعه‌ها به روش برنامه‌ای ــ استلزام به‌روش برنامه‌ای ــ با ریاضیات آشتی کنید ــ بازآموزی هندسه (که به‌صورت مستقل نیز چاپ شده است).

ب) کتابهایی که به‌صورت مستقل چاپ شده‌اند و بعضی از آنها تا بیش از ده بار تجدید چاپ شده‌اند: راهنمای ریاضیات متوسطه ــ رسم فنی برای سال ششم رشتهٔ ریاضی ــ ریاضیات برای سال اول دانشسرای راهنمایی ــ روش آموزش ریاضی ــ بازآموزی و باز شناخت هندسه (ترجمه) ــ تصاعدها و لگاریتم ــ عبارتهای جبری ــ منطق‌واستدلال ریاضی ــ ورزیدگی در ریاضیات (ترجمه) ــ المپیادهای ریاضی بلژیک (ترجمه) ــ مسایل مسابقه‌های ریاضی امریکا، جلد چهارم (ترجمه) ــ زودآموزی BASIC (ترجمه و تألیف) ــ ریاضیات پیشنیاز کامپیوتر (ترجمه) ــ داستانواره‌های ریاضی (ترجمه آمادهٔ چاپ) ــ زودشناسی دستگاه کامپیوتر ــ رام کردن و پرورش مسأله‌های ریاضی ــ قبله‌شناسی با روش مشاهده و محاسبه (چاپ نشده).

□ استاد اگر خاطراتی از دوران کودکی، نوجوانی، جوانی و دوران تحصیل خود به یاد دارید، بیان بفرمایید.

■ ۱) *خاطراتی از دوران کودکی و نوجوانی*

دوران زندگی هر کس مجموعه‌ای از خاطره‌های تلخ و شیرین است که مگر برای خودش برای دیگران جاذبه‌ای ندارد و بازگو کردن آنها خالی از لطف و بدون فایده است. از تلخترین خاطره‌های من روزی است که به هنگام درس دادن در کلاس، خبر درگذشت پدرم را به من اطلاع دادند. من که فرزند ارشد خانواده بودم، آن موقع فقط هجده سال داشتم از شیرین‌ترین خاطره‌هایم هم روزی است که پس از چندین ماه انتظار، همکارانی که به نیابت من به خواستگاری دختری از یک خانوادهٔ یزدی رفته بودند، اطلاع دادند که جواب موافق دریافت کرده‌اند. یزدیها روی مسأله ازدواج، بویژه اگر طرف غیر یزدی باشد، بسیار سختگیرند.

۲) *خاطره‌هایی از دبستان و دبیرستان*

وقتی سال ششم ابتدایی را می‌گذراندم، در بازدیدی که رئیس فرهنگ استان از کلاس ما داشت، دربارهٔ مخروط و ارتفاع و مولد آن از من پرسشهایی کرد که همه را به خوبی پاسخ گفتم و افزودم که بین ارتفاع و مولّد و شعاع قاعده رابطهٔ فیثاغورس برقرار است. این قضیه را سه کلاس بالاتر می‌آموختند و رئیس فرهنگ از اینکه من آن را می‌دانستم بسیار متعجب شد و مرا خیلی مورد تشویق قرار داد. چند ماه بعد به مناسبت اینکه در امتحان نهایی شاگرد اوّل مدرسه شده بودم، از همان رئیس فرهنگ یک کتاب به‌عنوان جایزه دریافت داشتم.

پس از پایان خدمت نظام وظیفه به تهران آمدم و خود را برای امتحان نهایی سال ششم ریاضی آماده می‌کردم و در ضمن برای تأمین هزینهٔ زندگی در یکی دو آموزشگاه شبانه درس می‌دادم عجیب آنکه در یکی از آنها درسهایی از ششم ریاضی را هم برای تنی چند از دانش‌آموزان دبیرستان بازگو می‌کردم و سؤالهای امتحانی سالهای قبل را برایشان حل می‌کردم. آنها راضی بودند و من هم آمادگی بیشتری برای امتحان به‌دست می‌آوردم، ضمن آنکه بخشی از هزینهٔ زندگی‌ام هم تأمین می‌شد. عجیب آنکه با یکی از این دانش‌آموزان در موقع امتحان هم‌حوزه شدیم. ابتدا او گمان کرد که من به جای کس دیگر امتحان می‌دهم و من برای رفع این سوءظن، ماجرا را برایش شرح دادم. صمیمیتی بین ما برقرار شد و بعدها دانش‌آموزانی از آشنایان و خویشان خود را برای گرفتن درس خصوصی به من معرفی می‌کرد.

۳) *خاطره‌هایی از دانشگاه*

همزمان با آغاز تحصیل من در دانشگاه، خانوادهٔ ما نیز به تهران منتقل شد و من و یک برادر کوچکتر، که در یک کتابفروشی کار می‌کرد، با هم می‌باید از عهدهٔ هزینهٔ خانواده برمی‌آمدیم و کمک هزینهٔ تحصیلی که دانشسرای عالی می‌داد کافی نبود.

□ کدام‌یک از معلمان روی شما تأثیر بیشتری گذاشته است و چرا؟

■ در دورهٔ ابتدایی، معلمان ورزیده و کارآمدی نداشتیم. در آن موقع، برخلاف امروز، مدرسه‌های ملی از نظر آموزشی

چندان مجهز نبودند. در دورهٔ سیکل اوّل متوسطه هم معلمی که تدریس تقریباً همهٔ درسهای ما را به‌عهده داشت، تازه از دانشسرای مقدماتی فارغ‌التحصیل شده و برای تدریس در دبستانها تربیت شده بود. سیکل دوم متوسطه را هم که مدرسه نرفته‌ام. از استادان دانشگاه، پروفسور فاطمی، دکتر هشترودی و دکتر هوشیار، از جمله شخصیتهایی بودند که بیش از دیگران بر روی دانشجویان تأثیر می‌گذاشتند.

□ کدام یک از دبیرستانها محل مناسبتری برای تدریس بوده‌اند و چرا؟

■ یک دبیرستان وقتی برای یک معلم محل مناسبی برای تدریس است که هم مسئولان آنجا و هم دانش‌آموزان آنجا به بنیهٔ علمی و به بی‌غرضی آن معلم اعتقاد و اعتماد داشته باشند. وقتی چنین باشد، دانش‌آموزان شوق به یادگیری از خود بروز می‌دهند و معلم هم تشویق می‌شود که تدریسی خوب ارائه دهد. دبیرستانهای یزد و بویژه دبیرستان ایرانشهر اِنجا برای من چنین وضعی را داشتند. اگر مسئولان یک آموزشگاه اهداف خاصی را دنبال کنند که معلم به آن هدفها آگاه نباشد یا اینکه آن را در شأن مقام خود نبیند، و اگر بین مسئولان و بین معلمان چند دستگی باشد، ارائهٔ صحیح درس، هر چند هم که معلم بی‌غرض و کارآمد باشد، میسر نخواهد بود.

□ از شاگردان بازیگوش خود چه خاطراتی دارید و چگونه آنها را آرام کرده‌اید؟

■ دانش‌آموزی که بازیگوشی می‌کند، اگر از جانبی تحریک نشده باشد، بدان علت است که یا درس معلم برای او جاذبهٔ لازم را ندارد ؛ یا بهرهٔ هوشی بالاتری دارد و درس را زودتر از دیگران فهمیده است، یا کلاً به تحصیل بی‌علاقه است، یا می‌داند که آن درس را نزد معلم خصوصی خود یاد می‌گیرد، و یا علتهای دیگری در کار است. در هر حال باید علت را دانست و مناسب با آن چاره کرد. معطل و بلاتکلیف گذاشتن شاگردان در سرکلاس، آنان را به بازیگوشی وامی‌دارد. معلم اگر پس از درس دادن، بلافاصله از یکی دو دانش‌آموز بخواهد تا همان درس را بازگو کنند، هم به بهتر فهمیدن درس کمک می‌شود و هم دانش‌آموزان را وامی‌دارد که همهٔ توجهشان به درس باشد.

□ از شاگردان باهوش خود چه خاطراتی دارید و آیا بعضی از شاگردان شما به مراتب بالای علمی رسیده‌اند؟

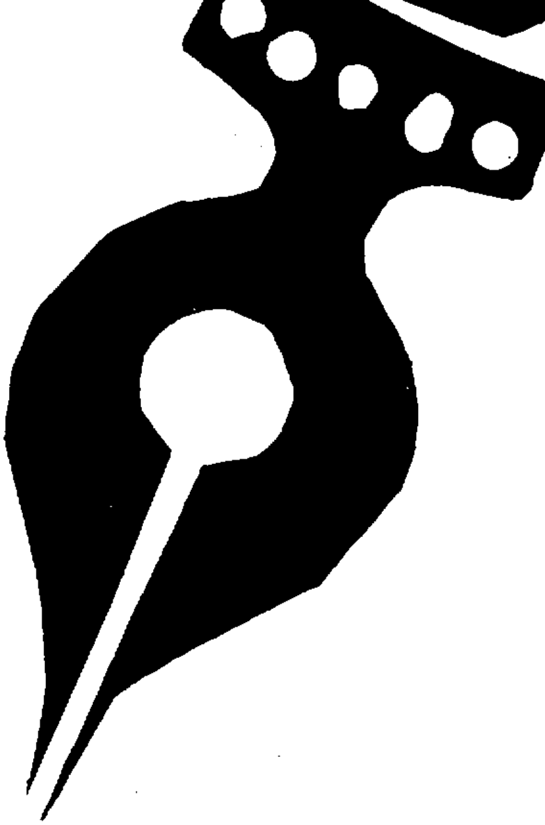
■ اگر خوب فهمیدن درس، خوب مسأله حل کردن و خوب دانستن همهٔ درسها را ملاک باهوشی بدانیم، با شاگردان باهوش به تعداد زیاد روبه‌رو بوده‌ام. مهم آن است که یک چنین شاگردی، به باهوش بودن خود نبالد و به دیگران فخر نفروشد. یک شاگرد که به باهوشی مشهور شود، تصورش این می‌شود که باید هر پرسش یا هر مسأله‌ای را بدون درنگ پاسخ دهد که گاه اشتباههایی فاحش از او سرمی‌زند و او را سرافکنده می‌سازد. علَم کردن یک شاگرد به باهوشی و به بی‌هوشی برای هردوی آنها خطرآفرین است.

هر معلم شاگردانی سراغ دارد که به مقامها و به مرتبه‌های بالای علمی و اجتماعی دست یافته‌اند. این شاگردان در طول تحصیل خود با معلمان زیادی سروکار داشته‌اند و اساس کار تلاشهای خود آنان بوده است و نمی‌شود سهم همهٔ این معلمان را در موفقیتهای آن شاگردان متوجه تنها یکی از آن معلمان کرد. در این باره خود این شاگردان موفق باید اظهار نظر کنند.

چه بسا که یک معلم با یک رفتار و تشویق بجا و مناسب، دانش‌آموزی را به راه موفقیت کشانده است و چه بسا که یک معلم با یک رفتار و با یک گفتهٔ نابجا و نامناسب دانش‌آموزی را از تحصیل یا از درس خاص دلزده کرده است. از شاگردان یک معلم بعضی به مقامهای بالای علمی می‌رسند و بعضی تحصیل را نیمه تمام رها می‌کنند، باید دید که آن معلم در هر یک از این دو مورد تا چه اندازه سهم داشته است.

□ به نظر شما وضع تدریس ریاضیات در قدیم چگونه بوده و در حال حاضر چگونه است؟

■ قدیم را باید به چه دوره‌ای اطلاق کرد؟ اگر سرآغاز برپایی مدرسه‌ها به سبک جدید، یعنی از زمان تأسیس دارالفنون به این سمت را در نظر بگیریم ـــ مگر در دورهٔ ابتدایی ـــ تدریس ریاضیات تاکنون وضعی تقریباً یکسان داشته است. معلم درس می‌دهد، مسأله و مثالهایی را برای نمونه حل می‌کند، و تمرینها و مسأله‌هایی را هم برای تمرین می‌دهد. هدف از تحصیل، قبولی در امتحانها، گرفتن گواهینامه و استفاده از



مزیتهای قانونی آن بوده است. در این میان معلم نقش اساسی را داشته است. گاهی هم معلمانی به مصداق شعر

«حافظ وظیفهٔ تو دعا کردن است و بس
دربند آن مباش که نشنید یا شنید»

بر آن بوده‌اند که هر چه زودتر برنامه را به پایان برسانند. آنها حل تمرینها و مسأله‌ها را هم به‌صورت استنسیل در دسترس شاگردان می‌گذارند و شاگردان را به امید خدا و به سعی و کوشش خودشان واگذار می‌کنند. معلمانی هم بوده و هستند که همهٔ سعی و کوششان در تفهیم درست و دقیق درس و در جهت عمقی یادگرفتن شاگردان است. امروزه هم که روش آزمونهای چند گزینه‌ای معمول شده است، سعی دانش‌آموزان تنها در آن جهت است که در تست زدن مهارت به‌دست آورند. یک معلم هر چند هم عاشق کارش باشد، پیش از آن باید زندگی‌اش تأمین باشد.

□ وضع تألیف کتابهای ریاضی را چگونه می‌دانید؟

■ از زمان رسوخ فرهنگ جدید اروپایی در ایران، کتابهای درسی ریاضی یا ترجمهٔ کامل از کتابهای درسی اروپایی (در سابق عموماً فرانسه) بوده یا تلفیقی از آنچه پیش از این ترجمه شده است. گاه تألیف کتاب درسی آزاد بوده و گاه سازمانی دولتی آن را در انحصار داشته است. در این باره گفتنی بسیار است و نه تنها خود یک مقاله بلکه دنباله‌ای از چند مقاله خواهد شد. گاه یکی دو نفر مؤلف با همکاری مستمر خود یک سری کتاب خوب ارائه داده‌اند که انسجام منطقی مطالب و مفاهیم محفوظ بوده و گاه گروهی از مؤلفان، هرکدام کتابی، و حتی گاهی هرکدام فصلی از یک کتاب را با شتاب‌زدگی فراهم آورده‌اند که نه تنها از انسجام منطقی برخوردار نبوده بلکه آشفتگیهایی را در وضع تدریس و دردسرهایی را هم برای دانش‌آموزان و معلمان در پی داشته است. در جریان وضع کتابهای درسی کنونی نبوده‌ام و آنها را ندیده‌ام.

□ استاد! برای این که شاگردی در ریاضیات موفق باشد، باید چه کارهایی انجام دهد؟

■ ریاضیات کلاً فهمیدنی است. یک شاگرد در فراگیری ریاضیات، آن‌گاه موفق است که مفهومها را به‌خوبی و عمقی بفهمد و حل مسأله‌ها را با فکر و با ابتکار خود از عهده برآید. ریاضیات به آنچه در کتابهای درسی آمده است محدود نمی‌شود. باید فراتر از آن مطالعه کرد. کتابهای جنب درسی، مجله‌ها و مهمتر اینکه کتابهای تازه تألیف به زبانهای دیگر را نیز باید یافت و بررسی کرد.

□ یک کتاب درسی خوب، باید شامل چه ویژگیهایی باشد؟

■ در تألیف کتابهای درسی به چندین نکته باید توجه شود: نخست آنکه هر یک از کتابها با کتابهای پایه‌های قبل و بعد از خود پیوستگی و همخوانی لازم را داشته باشد به گونه‌ای که دورهٔ کامل این کتابها یک دستگاه ریاضی از نظر منطقی منسجم را ارائه کنند. دیگر آنکه باید با شرایط سیاسی و اجتماعی کشور و با سنتهای قومی و ملّی سازگاری داشته باشد. اگر کارکرد یک دوره کتابهای درسی در یک کشور یا در بخشی از یک کشور موفق به‌شمار آمده باشند، نمی‌شود پذیرفت که در کشوری دیگر هم چنین وضع مطلوبی داشته باشند. در یک جا کلاسها با ابزارهای گوناگون آموزشی مجهزند و در جای دیگر حتی تخته سیاه و گچ هم در دسترس نیست. سوم اینکه معلمان باید از قبل با کتابها و با روشهای تدریس آنها آشنایی لازم را به‌دست آورده باشند. مهمتر آنکه متن کتاب باید با استعداد اکثریت متوسط دانش‌آموزان درخور باشد.

□ آیا وجود کتابهای کمک درسی را لازم می‌دانید و اگر لازم‌اند، چه مشخصاتی باید داشته باشند؟

■ ریاضیات، همپای سایر دانشها و فنها در حال پیشرفت است. روزآمد کردن کتابهای درسی، دشواریهایی فنی و آموزشی را در پی دارد. کتابها و مجله‌های کمک درسی می‌توانند کار روزآمد کردن ریاضیات را از عهده برآیند. نکتهٔ دیگر آنکه در تألیف کتابهای درسی استعداد متوسط دانش‌آموزان در نظر گرفته می‌شود. به کمک کتابها و مجله‌های جنبی می‌توان نیازهای علمی دانش‌آموزان با استعدادهای بالاتر از سطح متوسط را برآورده ساخت و برای دانش‌آموزان با استعدادهای پایین‌تر از سطح متوسط می‌توان مطلب را به‌گونهٔ ساده‌تر بازگو و تشریح کرد.

□ یک ریاضیدان، غیر از ریاضیات باید از چه علومی آگاهی داشته باشد؟

■ یک ایرانی که بخواهد ریاضیدان بشود، نه تنها لازم است که در زبان مادری خود فارسی تبحر داشته باشد تا بتواند متنهای ریاضی را به درستی بفهمد، بلکه باید زبان عربی را برای درک و فهم ریاضیات کهن این سرزمین و زبان انگلیسی را برای درک و فهم ریاضیات روز نیز به‌خوبی بداند و افزون بر آن با دانشهای کامپیوتری به اندازهٔ کافی آشنایی داشته باشد. امروزه ریاضیات و کامپیوتر چنان در هم گره خورده‌اند که فراگیری هر یک مستلزم داشتن تبحر در دیگری است.

□ جنابعالی غیر از ریاضی در چه مواردی تبحر دارید؟

■ کاملاً اغراق است که گفته شود در ریاضیات تبحر دارم. سطح اطلاعات ریاضی‌ام مقدماتی و در حد پیش‌دانشگاهی است. شوق و ذوقی به ریاضیات دارم و دوست دارم دانسته‌هایم را در دسترس دیگران بگذارم. فرانسه و انگلیسی را تنها تا حد درک متنهای ریاضی به این زبانها می‌دانم و متنهای کهن ریاضیات به زبان عربی را تا حدّی و با دشواری می‌توانم بفهمم.

□ استاد! در خاتمه چنان‌چه رهنمودی به نظرتان می‌رسد، بفرمایید.

■ الف) دست‌اندرکاران آموزش ریاضی اعم از مسئولان اجرایی، برنامه‌ریزان و نویسندگان کتابهای درسی، و بویژه معلمان، باید این نکتهٔ مهم را در نظر داشته باشند که آموزش ریاضی به انتقال دانستنیها خلاصه نمی‌شود؛ یک جنبهٔ مهم آن پرورش اندیشمندانی با ذهنهای خلاق است. در هر مرحله از آموزش و سنجش باید به این جنبهٔ خلاقیت ذهنها توجه جدی مبذول شود.

ب) در آموزش ریاضی (و در آموزش هر درس دیگر) معلم رکن اساسی است و مهمترین نقش را به‌عهده دارد. اگر زندگی او تأمین نباشد و از این بابت آرامش خاطر نداشته باشد، ایفای نقش خویش را به گونهٔ شایسته و بایسته نمی‌تواند از عهده برآید.

ج) جوانان با استعدادهای درخشان، منحصراً آنها نیستند که در آزمونهای ورودی مدرسه‌های خاص پذیرفته می‌شوند. در گوشه‌وکنار کشور، در آبادیهای دور دست، و حتی در شهرهای بزرگ، جوانانی هستند که با داشتن استعدادهایی عالی، به علت کم بضاعتی خانواده‌هایشان به مدرسه و به محیط آموزش راه ندارند. اینان باید شناسایی بشوند و امکان آموزششان فراهم آید.

د) شعار جهانی «همگانی کردن ریاضیات» آنگاه تحقق می‌یابد که در کنار گسترش و تجهیز مؤسسه‌های آموزشی، از نویسندگان کتابهای ریاضی و از ناشران این گونه کتابها و همچنین از صاحبان نشریه‌ها و مجله‌های ریاضی حمایتهای جدّی لازم به‌عمل آید و موجبات دلگرمی آنان به ادامهٔ کار فراهم شود.

ساقه و برگ

● دکترعین‌الله پاشا
دانشگاه تربیت معلم

نمودارها نقشی اساسی در درک مفاهیم دارند و فهم عمیقتر و روشنتری از شرایط موجود به ما می‌دهند. نمودارها و حالت کلی‌تر آن، یعنی شکلها، درواقع نوعی زبان ابتدایی برای برقراری ارتباط و انتقال مفاهیم بوده‌اند. به همین سبب است که معمولاً آغاز ارائه هر مفهومی با شکل و نمودار آغاز می‌شود و کم‌کم که مفاهیم جایگاه خود را در ذهن باز کردند، مطالعه و تحقیق به‌صورت مجردتر ادامه می‌یابد. در مبحث آمار، برای روشنتر شدن ساختمان داده‌ها و درنهایت تجسم توزیع جامعه از نمودارها استفاده می‌کنیم. هریک از نمودارها ویژگیهایی دارند و حتی برخی برای نوع خاصی از شیرها مناسبترند. در مباحث مقدماتی آمار با نمودارهایی از قبیل چندبر فراوانی، مستطیلی، میله‌ای، و دایره‌ای آشنا شده‌ایم. این نمودارها، در یک نگاه می‌توانند ایده‌های کلّی دربارهٔ جامعه را دراختیار بیننده بگذارند. رسالت بیشتر نمودارهای رایج درهمین‌جا به پایان می‌رسد. اگر بخواهیم اطلاعات بیشتری دربارهٔ جامعه و یا نمونه به‌دست آوریم، لازم است محاسباتی روی داده‌ها و جدول فراوانی انجام دهیم. در این نوع نمودار سعی شده است که با حفظ رسالتهای نمودارهای رایج (مثلاً میله‌ای) بتوان از نمودار استفاده‌های دیگری نیز برد. درواقع، دراین نوع نمودار، داده‌ها کنارگذاشته نمی‌شوند، بلکه به نوعی سامان‌دهی می‌شوند که هم کار نمودارها را انجام می‌دهند و هم برای برخی محاسبات دیگر مورد استفاده قرار می‌گیرند. این نوع نمودارها با عنوان نمودار ساقه‌و برگ در کتابهای درسی توضیح داده شده است که با چند مثال سعی می‌کنیم ایده‌های موجود در آن را روشنتر کنیم.

مثال: یک نمودار ساقه و برگ برای داده‌های زیر رسم کنید:

۱۲، ۱۳، ۱۵، ۱۱، ۱۴، ۱۲، ۲، ۵، ۶، ۸،
۳۷، ۳۵، ۳۲، ۳۱، ۲۶، ۲۶، ۲۵، ۲۲، ۲۱، ۲۰، ۲۰، ۲۱

حل: با افزودن ۰ به سمت چپ عددهای یک رقمی، تمام داده‌ها دورقمی خواهند شد.

برخی از این داده‌ها در فاصلهٔ ۰ تا ۹ و برخی دیگر در فاصله ۱۰ تا ۱۹و تعدادی در فاصلهٔ۲۰ تا ۳۹ و بقیه در فاصله ۳۰ تا ۴۰ قرار دارند. بنابراین ساقه را می‌توان به‌صورت زیر درنظر گرفت:

۰
۱
۲
۳

حال به تشکیل برگها می‌پردازیم؛ روی ساقه در محل ۰ داده‌های یک رقمی قرار می‌گیرند، پس درمحل ۰ روی ساقه برگ زیر را داریم:

۰	۲۵۶۸

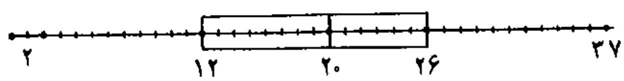
داده‌ها را در برگها از کوچک به بزرگ قرار می‌دهیم. آنچه که در بالا آمده است، نمایش داده‌های ۲، ۵، ۶، و ۸ است. به همین ترتیب می‌توانیم سایر برگها را نیز تشکیل دهیم.
نتیجه نهایی به‌صورت زیر است:

۰	۲۵۶۸
۱	۱۲۲۳۴۵
۲	۰۰۱۱۲۵۶۶
۳	۱۲۵۷

از روی این نمودار معلوم می‌شود که بیشترین داده‌ها در فاصله ۲۰ تا ۲۹ قرار دارند، به همین دلیل است که برگ مربوطه در محل ۲ از همه بلندتر است. درفاصلهٔ ۰ تا ۹ و ۳۰ تا ۳۹ تعداد داده‌ها با هم برابرند. دامنهٔ تغییرات این داده‌ها عبارت است از ۳۵ = ۲ − ۳۷ کوچکترین داده (۲ ۰) وبزرگترین‌داده(۷ ۳) است. میانهٔ این داده‌ها را به راحتی می‌توان حساب کرد، تعداد داده‌ها برابر ۲۲ است، پس میانه برابر میانگین دو داده‌ای است که در وسط قرار گرفته‌اند. یعنی میانه برابر میانگین یازدهمین و دوازدهمین داده است، و از آنجا که داده‌ها به ترتیب روی ساقه و برگها قرار گرفته‌اند، پیدا کردن این دو داده به آسانی انجام می‌شود:

میانه $= \tilde{X} = \frac{20+20}{2} = 20$

میانه داده‌های کمتر از ۲۰ نیز به راحتی از این نمودار برابر K به‌دست می‌آید. میانه داده‌های بیشتر از ۲۰ نیز برابر ۲۶ می‌باشد. با داشتن این اطلاعات می‌توانیم نمودار جعبه‌ای این داده‌ها را نیز رسم کنیم:



از این نمودار معلوم می‌شود که داده‌ها در سمت راستِ میانه به هم نزدیکتر و درسمت چپ میانه ازهم دورترند.
از نمودار ساقه و برگ، دو بریدگی و فاصلهٔ مشخص بین داده‌ها مشاهده می‌شود. یکی از این بریدگیها فاصلهٔ از ۱۵ تا ۲۰ است، دراین فاصله هیچ داده‌ای نیست، بریدگی دیگر فاصله از ۲۶ تا ۳۱ است.

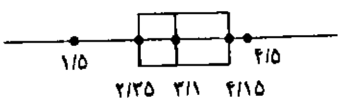
مثال: نمودار ساقه و برگ و همچنین نمودار جعبه‌ای داده‌های زیر را رسم کنید:

۲/۸ و ۲/۵ و ۲/۴ و ۱/۶ و ۱/۷ و ۳/۲ و ۲/۳ و ۱/۵
۲/۶ و ۳/۴ و ۳/۵ و ۳/۸ و ۱/۶ و ۳/۲ و ۳/۱
۴/۴ و ۴/۵ و ۴/۳ و ۲/۶ و ۴/۴ و ۴/۲ و ۴/۱

حل: برای رهایی ازاعشارها، قرارداد می‌کنیم که اعداد را بدون اعشار بنویسیم.
مثلاً به‌جای ۳/۲، می‌نویسیم ۳۲. با این تغییر، ساقه عبارت خواهد بود از ۱ و ۲ و ۳ و ۴. درنتیجه نمودار به‌صورت زیر شکل می‌گیرد:

۱	۵۶۶۷
۲	۳۴۵۶۶۸
۳	۱۲۴۵۸
۴	۱۲۳۴۴۵

این نمودار نشان می‌دهد که داده‌ها تقریباً به‌طور مساوی در فاصله‌های ۱ تا۲، ۲ تا۳، ۳ تا ۴ توزیع شده‌اند. میانهٔ داده‌ها عبارت است از ۳۱. میانهٔ داده‌های کمتر از ۳۱ برابر ۲۳/۵ و میانهٔ داده‌های بالاتراز ۳۱ برابر ۴۱/۵ و یا به معیار اصلی داده‌های اوّلیه، میانهٔ کل برابر ۳/۱ و میانهٔ داده‌های بیش از ۳/۱ برابر ۴/۱۵ ومیانهٔ داده‌های کمتر از ۳/۱ برابر ۲/۳۵ است. نمودار جعبه‌ای به شکل زیر خواهد بود:



بنابراین تراکم داده‌ها در سمت چپ میانه بیشتر است.

یادآوری

همان‌طورکه در مقدمه بیان شد، هر نموداری مناسب نوعی از داده‌هاست، مثلاً اگر متغیر مورد مطالعهٔ شما، رنگ چشم انسان باشد، نمودار میله‌ای، مستطیلی و یا چندبر فراوانی برای آن مناسب نیست و اصلاً کاربرد و تفسیری دراین باره ندارند. نمودار مناسب این‌گونه داده‌ها، نمودار دایره‌ای است. ولی اگر متغیر مورد مطالعه، قد دانش‌آموزان باشد، نمودار مستطیلی و یا چندبر فراوانی نمودار مناسبی است. اگر داده‌ها به گونه‌ای باشند

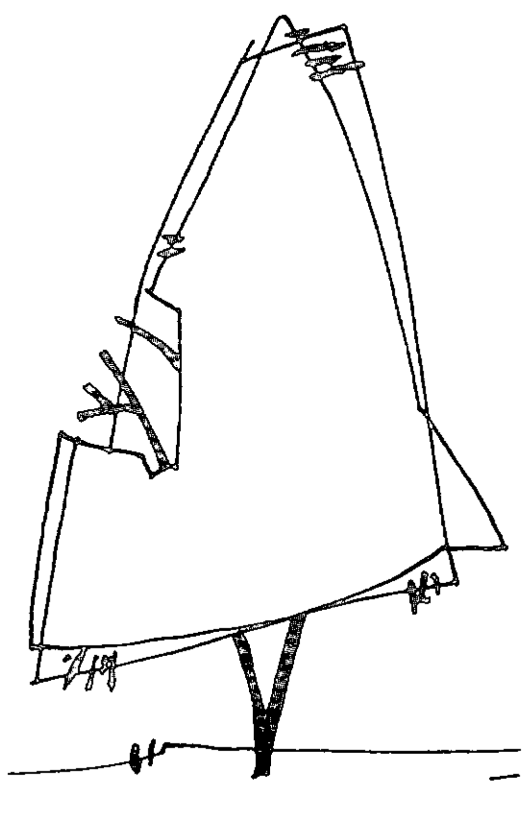
که نتوان یک ساقهٔ مشخص و مناسب برای آن تشخیص داد، نمودار ساقه و برگ مناسب نخواهد بود، مثلاً اگر داده‌ها به صورت زیر باشند :

۱۲، ۱۶/۷۵، ۱۳/۱، ۱۷، ...

در اینجا اگر ساقه را ۱ بگیریم، آن‌گاه برای نمایش ۱۶/۷۵ مشکل داریم، زیرا در برگها ارقام معمولاً از یک نوع خواهند بود. اگر بخواهیم برگ این ساقه را به شکل زیر بنویسیم :

۱ ۲۳۸۶/۷۵۷

نمی‌توان به درستی تشخیص داد که بُرد ممیزها تا کجاست و همچنین این طرز نوشتن باعث می‌شود که این برگ به‌طور کاذب بزرگتر جلوه‌کند و تفسیر غلط از داده‌ها در اختیار ما بگذارد. بنابراین اگر نتوانیم داده‌ها را یک شکل کنیم، مثلاً هم بادو رقم اعشار و ارقام صحیح برابر، (مثلاً ... ، ۱/۴۵، ۱/۶۳، ۱/۷۰) نمودار ساقه و برگ مناسب نخواهد بود.



تفریح اندیشه ۲

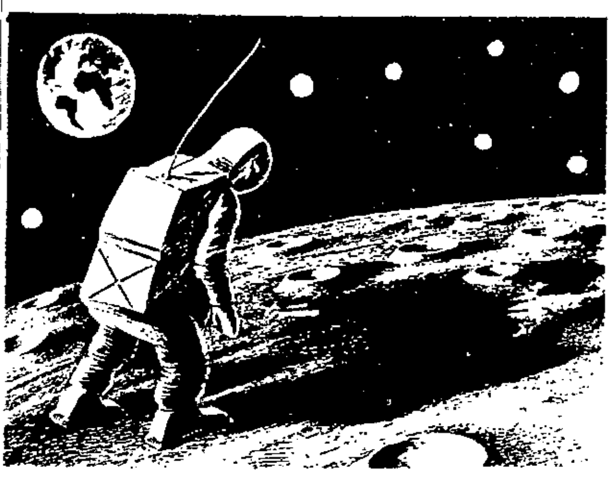
مسافرت به سیّاره‌ای دیگر

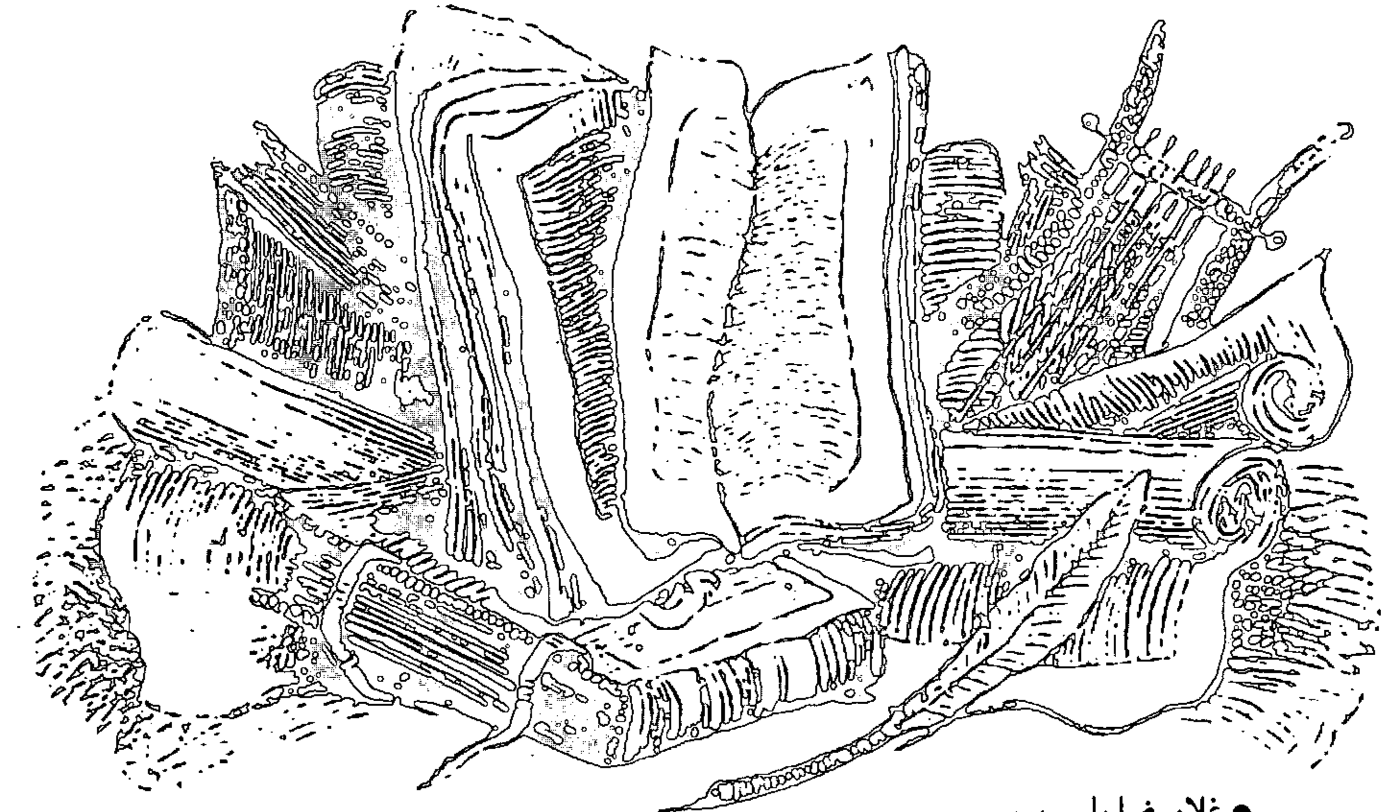
سیارهٔ توپسیس "Topsis" از این لحاظ غیر متعارف است که هر نیمکرهٔ آن مخروط دوّاری به ارتفاع ۳۰۰۰ کیلومتر و شعاع قاعدهٔ ۴۰۰۰ کیلومتر است. دو مخروط یاد شده قاعده به قاعده چنان به هم وصل شده‌اند که استوا دایرهٔ قاعده و فاصلهٔ قائم بین قطبها ۶۰۰۰ کیلومتر است.

از آنجا که روزهای سفر در این سیاره خیلی طولانی نیستند، و شما به عنوان یک آدم زمینی، ممکن است در ابتدا و در حرکت به دور این سیاره، با دشواریهایی روبه‌رو شوید، مسأله‌ای آورده‌ایم که برای مشخص کردن دستگاه جهت‌یابی آنها مفید است.

A و B دو شهرند که بر استوا و به فاصلهٔ ۱۸۰ درجه از یکدیگر قرار گرفته‌اند. کوتاه‌ترین فاصلهٔ بین آنها چیست؟

جواب در صفحهٔ ۸۸





● **غلامرضا یاسی‌پور**

تاریخچهٔ مجلات ریاضی در ایران (۲۲)

شمارهٔ ۲۷ مجلهٔ یکان را ورق می‌زنیم. بهای این شماره با ۵۶ صفحه مطلب، همچنان ۲۰ ریال است. مجله همچنان اعضای هیأت تحریریه و سردبیر ندارد و اغلب کارهای آن از جمله نوشتن غالب مقالات آن را صاحب امتیاز و مدیر مسئول آن انجام می‌دهد. و در آن غیر از مطالب ریاضی از مسایل فیزیک و شیمی نیز می‌توان خبر گرفت.

در سرمقالهٔ مجله، با عنوان **دبیرستانهای خاص** چنین آمده است که:

«عدم توجه دستگاه آموزشی در بهبود وضع دبیرستانهای دولتی و سهل‌انگاری یا عدم توانایی در تکمیل کادر آموزشی آنها بین معلومات محصلین این مدارس و محصلین مدارس ملی (یعنی، غیر انتفاعی فعلی) اختلاف سطحی پدید آورده است. اجرای برنامه‌های خاص در دبیرستانهای ملی (اشاره به مادهٔ واحد، مصوّب هزار و صد و دوازدهمین جلسهٔ شورای عالی فرهنگ، ۴۴/۱۱/۲۴، که طبق آن اجازه می‌دهد برنامهٔ جامع کمیسیون خاص در دبیرستانهایی که آمادگی دارند اجرا شود) این اختلاف سطح را بیشتر خواهد کرد و این خود نسبت به اکثریت محصلین که استطاعت مالی برای تحصیل در مدارس خاص را ندارند ظلمی فاحش خواهد بود.»

مجلهٔ یکان مقالاتی دارد با عنوان «خاطراتی از کنگره‌های بین‌المللی ریاضیدانان» که نویسندهٔ آنها دکتر **محسن هشترودی**[1] است. در این شماره، مرحوم هشترودی یادی از کنگرهٔ مسکو در ۱۹۳۵ کرده است و طی آن می‌نویسد:

«این کنگره آخرین کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان قبل از جنگ جهانی دوم بود[2]. شبی پس از پایان جلسهٔ رشتهٔ هندسهٔ دیفرانسیل و توپولوژی، **کارتان** فقید (**الی کارتان** بزرگ) و اسخوتن «Schowten» (که هم اکنون رئیس مرکز ریاضی **آمستردام** است) و **هرمان وایل** "Hermann Weyl" و دسته‌ای از محققین در حسابهای تانسوری و نظریهٔ التصاقها گفتگو می‌کردند. کوچه‌های مسکو در نزدیکی کرملین همگی تقریباً رو به کرملین ره می‌برند، گویی متمرکزند. وایل فقید این سؤال را عنوان کرد که: «آیا هندسهٔ مقیاسی وجود دارد که ژئودزیکهای آن (اقصرفاصله، در اینجا باید اشاره کرد که در تمام فضاهای مقیاسی ژئودزیکها و خطوط مستقیم بر هم منطبق نیستند، یعنی، بین دو نقطه، یک خط مستقیم و یک منحنی اقصرفاصله وجود دارد که از هم متمایزند) همه متمرکز باشند؟»

آن شب، پس از جدا شدن این عده از هم، اسخوتن شبانه این التصاق را پیدا کرد که هم‌اکنون به نام او در روسیهٔ شوروی

به **التصاق اسخوتن** معروف است. عجیب است که در ممالک غربی، گاهی این التصاق را به نام التصاق مسکو می‌نامند.

نویسندهٔ این سطور قریب ۱۵ سال پیش، خواص محرم این التصاق را تعیین کرد و مقارن همان زمان **آندره لیشنرورویچ**، استاد **کلژدوفرانس** نیز ثابت کرد که بین فضاهای نقطه‌ای (فضاهایی که با نقطه معرفی می‌شوند نه با نقطه و یک امتداد یا با نقطه و یک سطح) تنها فضایی که به سیستمهای غیر هلنوم مکانیک تحلیلی مرتبط است، همین التصاق نیمه متقارن اسخوتن است. این التصاق را نیمه متقارن می‌نامند زیرا به پیچش فضا از روی یک حامل تنها و به کمک تانسور اصلی معین می‌شود (بدیهی است که این فضا فضایی عادی نیست، یعنی، دارای انحناست، پیچش فضا انحنای مربوط به انتقال مبدأ مختصات است.)

نظیر این امر در بسیاری از کنگره‌ها اتفاق افتاده است که مسأله‌ای در جلسه‌ای از رشته‌های کنگره یا حتی در خارج از جلسه مطرح شده و یک شبه توسط یکی از ریاضیدانان مقتدر حل گردیده است.

مجله قسمت ثابتی دارد به نام «از هر جایی یادداشتی» که در آن چنانچه از نامش پیداست به مطالب گوناگون و شنیدنی می‌پردازد. در این شماره، یعنی شمارهٔ ۲۷، در این صفحه و تحت عنوان **زیج چیست؟** از گاهنامهٔ ۱۳۰۹ سید **جلال‌الدین طهرانی**، چنین می‌خوانیم:

«در اصطلاح علمای هیأت و نجوم، **زیج** عبارت است از جدولی که کمیت حرکات سیّارات در آنها ضبط شده بنابر آنکه سیارات به گرد شمس مدارات مستدیرتامّه [۳] بپیمایند. چه بدین فرض، مقدار حرکت هر سیاره را در هر لحظه می‌توان تعیین نمود و برای آنکه مواقع محسوبهٔ سیارات مطابق با مرصود شود [۴]، اصلاحات در جداول قائل شده‌اند و برای آن اصلاحات نیز جداولی وضع نمودند موسوم به تعدیلات (اصلاح حرکت مابین مدار دایره و بیضی) —

خلاصه، زیج کتابی است که حاوی جداول راجع به حرکات سیارات و تعدیلات باشد که بتوان در هر وقت، موقع حقیقی سیاره‌ای را از روی آن جداول تعیین نمود.»

در بخش ثابت سرگرمیهای ریاضی، معمایی داریم با عنوان **اختلاط چای از سام لوید**؛ معماپرداز نابغه، که در آن چنین آمده است:

«یک تاجر چینی دو صندوق مکعب شکل با ابعاد مختلف چای را خریداری کرد. صندوق اوّل محتوی چای سبز و صندوق دوم محتوی چای سیاه بود. بعد از آنکه چایها را مخلوط کرد، توانست بیست و دو بستهٔ مکعب شکل از نوع چای مخلوط فراهم آورد. نسبت اختلاط دو چای را تعیین کنید.»

اشاره‌ها:

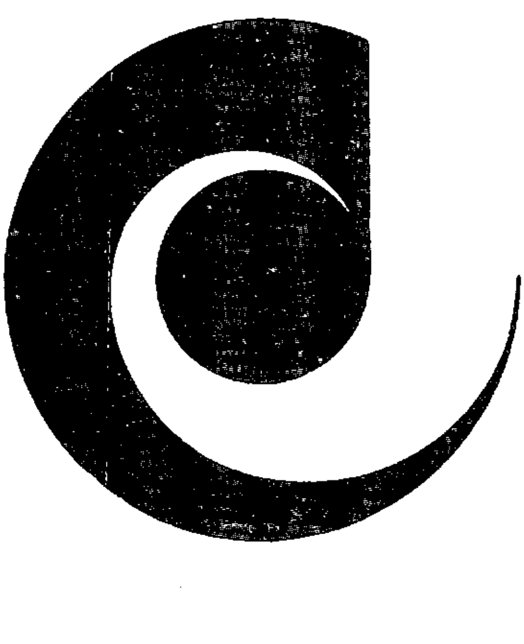
۱. دکتر محسن هشترودی، استاد ارجمند ریاضی دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران بود، اما وقایع زمانه استاد را از کار اصلی‌اش بازداشت و به‌کار مصاحبه بامجله‌های آن زمان وادار کرد و بازده کار استاد را به حداقل رساند.

۲. این موضوع نشان می‌دهد که چگونه اوضاع اجتماعی می‌تواند بر وضعیت علمی اثر گذارد. در این باره به این چند بیت سعدی نیز که از قصیده‌ای است در مدح **صاحب دیوان** توجه کنید:

به هیچ خلق نباید که قصه‌پردازی	مگر به صاحب دیوان عالم عادل
نه زان سبب که مکانی و منصبی دارد	بدین قدر نتوان گفت مرد را فاضل
از آن سبب که دل و دست وی همی باشد	چو ابر بر همه عالم به رحمتی شامل
ز بس که اهل هنر را بزرگ کرد و نواخت	بسی نماند که هر ناقصی شود کامل

۳. یعنی دایرهٔ کامل، نه مسیر متعارفشان که می‌دانیم بیضی است.

۴. یعنی محاسبات با تجربه بخواند.



آموزش ترجمهٔ متون ریاضی (۱۹)

●حمیدرضا امیری

از کتاب:
Multiple choice tests in abvanced mathematics

TEST 3 SECTION I

Time allowed: 1¼ hours

(Twenty Questions) Questions 1–20

1. $\frac{d}{dx}(e^{\cos x}) =$

A $e^{\cos x}$

B $e^{\cos x} \sin x$

C $-e^{\cos x} \sin x$

D $e^{\sin x}$

E $e^{\sin x} \cos x$

تست ۳ بخش ۱

وقت $1\frac{1}{4}$ ساعت

سؤالهای ۱ الی ۲۰ (بیست سؤال)

۱. حاصل $\frac{d}{dx}(e^{\cos x})$ کدام است؟

۱) $e^{\cos x}$ ۲) $e^{\cos x} \sin x$ ۳) $-e^{\cos x} \sin x$

۴) $e^{\sin x}$ ۵) $e^{\sin x} \cos x$

2. The gradient of the straight line with equation $ax + by = c$, where a and b are non zero, is

A a/b

B $-a/b$

C b/a

D $-b/a$

E c

۲. ضریب زاویهٔ خط به معادلهٔ $ax+by=c$ وقتی که a و b ناصفرند، برابر است با،

۱) $\frac{a}{b}$ ۲) $-\frac{a}{b}$ ۳) $\frac{b}{a}$ ۴) $-\frac{b}{a}$ ۵) c

3. $\sum_{r=1}^{n} (2r - 1) =$

A n^2

B $n^2 - 1$

C $n^2 + n - 1$

D $n^2 + 2n$

E $n^2 + n$

۳. حاصل $\sum_{r=1}^{n}(2r-1)$ کدام است؟

۱) n^2 ۲) n^2-1 ۳) n^2+n-1
۴) n^2+2n ۵) n^2+n

4. The number of arrangements which can be made using all the letters of the word RAPIDS, if the vowels are never separated, is

A 30

B 60

C 120

D 240

E 720

۴. تعداد جایگشتهایی که می‌توان با همهٔ حروف کلمهٔ RAPIDS ساخت، به شرط آن که حروف صدادار همواره کنار هم باشند.

۱) ۳۰ ۲) ۶۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۲۴۰ ۵) ۷۲۰

5. $\int \frac{1+3x^2}{x}dx =$

A $\frac{x+x^3}{x}$ + constant

B $-\frac{1}{x^2}+3$ + constant

C $x^3+\ln x$ + constant

D $3+\ln x$ + constant

E $\frac{3}{2}x^2+\ln x$ + constant

۵. حاصل $\int \frac{1+3x^2}{x}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{x+x^3}{x}+c$ ۲) $-\frac{1}{x^2}+3+c$
۳) $x^3+\ln x+c$ ۴) $3+\ln x+c$
۵) $\frac{3}{2}x^2+\ln x+c$

6. The principal value of the argument of the complex number $-1-i\sqrt{3}$ is

A $-\frac{2\pi}{3}$

B $-\frac{5\pi}{6}$

C $\frac{2\pi}{3}$

D $\frac{5\pi}{6}$

E $-\frac{\pi}{3}$

۶. مقدار اصلیِ آرگومان عددِ مختلط $-1-i\sqrt{3}$ عبارت است از:

۱) $-\frac{2\pi}{3}$ ۲) $\frac{-5\pi}{6}$ ۳) $\frac{2\pi}{3}$ ۴) $\frac{5\pi}{6}$ ۵) $-\frac{\pi}{3}$

7. $y=\sin^{-1}(3x)$.

$\frac{dy}{dx}=$

A $-\frac{3\cos(3x)}{\sin^2(3x)}$

B $3\cos^{-1}(3x)$

C $\frac{1}{\sqrt{(1-9x^2)}}$

D $\frac{3}{\sqrt{(1-9x^2)}}$

E $\frac{1}{3\sqrt{(1-9x^2)}}$

۷. اگر $y=\sin^{-1}3x$ (در این صورت حاصلِ $\frac{dy}{dx}$ برابر است با:

۱) $-\frac{3\cos 3x}{\sin^2 3x}$ ۲) $3\cos^{-1}3x$
۳) $\frac{1}{\sqrt{(1-9x^2)}}$ ۴) $\frac{3}{\sqrt{(1-9x^2)}}$
۵) $\frac{1}{3\sqrt{(1-9x^2)}}$

8. $\frac{dy}{dx} + y\cos x = 0$ and $y = 1$ when $x = \pi/2$. Then $y =$

A $e^{(1+\cos x)}$

B $e^{(1-\sin x)}$

C $e^{(-1+\sin x)}$

D $e^{(1-\cos x)}$

E $e^{-\sin x}$

۸. در صورتی که $x = \frac{\pi}{۲}$ آنگاه $\frac{dy}{dx} + y\cos x = ۰$ و $y = ۱$. بنابراین مقدار y برابر است با

۱) $e^{(1+\cos x)}$ ۲) $e^{(1-\sin x)}$ ۳) $e^{(-1+\sin x)}$
۴) $e^{(1-\cos x)}$ ۵) $e^{-\sin x}$

9. $\cos^2\theta + 3\sin^2\theta \equiv$

A $2 + \cos 2\theta$

B $3 - 2\cos 2\theta$

C $2 - \cos 2\theta$

D $2\cos 2\theta - 1$

E none of the above

۹. حاصل (ساده شدهٔ) عبارت $\cos^۲\theta + ۳\sin^۲\theta$ برابر است با :

۱) $۲+\cos ۲\theta$ ۲) $۳-۲\cos ۲\theta$
۳) $۲-\cos ۲\theta$ ۴) $۲\cos ۲\theta - ۱$
۵) هیچ کدام از موارد پیش

10. Which one of the following functions is odd and of period 2?

A $\sin(\pi x/2)$

B $\sin(\pi x)$

C $\cos(\pi x)$

D $x\sin(\pi x)$

E $\sin(\pi x) + \cos(\pi x)$

۱۰. کدام یک از تابعهای زیر، فرد با دورهٔ تناوب ۲ می‌باشند؟

۱) $\sin\frac{\pi x}{۲}$ ۲) $\sin\pi x$ ۳) $\cos\pi x$
۴) $x\sin\pi x$ ۵) $\sin\pi x + \cos\pi x$

11. The arithmetic mean of α and β is 4·5 and their geometric mean is 2. A quadratic equation whose roots are α and β is

A $2x^2 - 9x + 4 = 0$

B $x^2 + 9x + 4 = 0$

C $2x^2 + 9x + 4 = 0$

D $x^2 - 9x + 4 = 0$

E $x^2 + 9x - 4 = 0$

۱۱. میانگین حسابی α و β ، ۴/۵ و میانگین هندسی آنها ۲ است. معادلهٔ درجهٔ دومی که α و β ریشه‌های آن باشند کدام است؟

۱) $۲x^۲ - ۹x + ۴ = ۰$ ۲) $x^۲ + ۹x + ۴ = ۰$
۳) $۲x^۲ + ۹x + ۴ = ۰$ ۴) $x^۲ - ۹x + ۴ = ۰$
۵) $x^۲ + ۹x - ۴ = ۰$

12. Given that the real root of the equation
$$x^3 - 6x^2 + 15x - 13 = 0$$
lies in the interval $[n, n+1]$ where $n \in \mathbb{Z}$, then $n =$

A -2

B -1

C 0

D 1

E 2

۱۲. با فرض آنکه ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $x^۳ - ۶x^۲ + ۱۵x - ۱۳ = ۰$ در بازهٔ $[n, n+۱]$ قرار داشته باشند و $n \in Z$ در این صورت n برابر است با

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۰ ۴) ۱ ۵) ۲

13. The tangent of the acute angle between the lines $3x - y + 4 = 0$ and $x - 2y + 5 = 0$ is

A 1

B $\frac{7}{5}$

C -1

D 5

E -7

۱۳. تانژانت زاویهٔ حادهٔ بین دو خط (به معادله‌های $3x-y+4=0$ و $x-2y+5=0$) برابر است با:

۱) ۱ ۲) $\frac{7}{5}$ ۳) ۱− ۴) ۵ ۵) ۷−

14. $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$

A $-5\pi/6$

B $-\pi/2$

C $-\pi/6$

D $\pi/2$

E $7\pi/6$

۱۴. حاصل $\cos^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{2})-\sin^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{2})$ کدام است؟

۱) $-5\frac{\pi}{6}$ ۲) $-\frac{\pi}{2}$ ۳) $-\frac{\pi}{6}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$ ۵) $\frac{7\pi}{6}$

15. The value(s) of p for which the vectors $(p\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3p\mathbf{k})$ and $(p\mathbf{i} + \mathbf{k})$ are perpendicular is (are)

A 0 only

B 3 only

C 0 and 3

D 1 and 2

E 1 only

۱۵. مقدار (مقادیر) P در صورتی که بردارهای $(pi+2j-3pk)$ و $(pi+k)$ برهم عمود باشند کدام است؟

۱) فقط ۰ ۲) فقط ۳ ۳) ۰ و ۳
۴) ۱ و ۲ ۵) فقط ۱

16. Given that
$\ln x = p$, $\ln y = q$, $\ln z = r$,
where $x, y, z \in \mathbb{R}^+$, then

$\ln\left(\frac{x^a y^b}{z^c}\right) =$

A $\frac{ap + bq}{cr}$

B $p^a + q^b - r^c$

C $\frac{abpq}{cr}$

D $\frac{p^a q^b}{c^r}$

E $ap + bq - cr$

۱۶. با فرض آنکه $\ln x = p$ و $\ln y = q$ و $\ln z = r$ که $x,y,z \in \mathbb{R}^+$، در این صورت مقدار $\ln(\frac{x^a y^b}{z^c})$ برابر است با:

۱) $\frac{ap+bq}{cr}$ ۲) $p^a+q^b-r^c$
۳) $\frac{abpq}{cr}$ ۴) $\frac{p^a q^b}{c^r}$
۵) $ap+bq-cr$

17. Given that
$x^3 - ax^2 + bx - c \equiv (x-1)^2(x+1)$,
then

A $a = 1,\quad b = -1,\quad c = -1$

B $a = -1,\quad b = 1,\quad c = 1$

C $a = 1,\quad b = -1,\quad c = 1$

D $a = 3,\quad b = 3,\quad c = 1$

E none of the above

۱۷. هرگاه داشته باشیم

$$x^{۳} - ax^{۲} + bx - c \equiv (x-۱)^{۲}(x+۱)$$

در این صورت؛

۱) $a=۱ \ , b=-۱ \ , c=-۱$

۲) $a=-۱ \ , b=۱ \ , c=۱$

۳) $a=۱ \ , b=-۱ \ , c=۱$

۴) $a=۳ \ , b=۳ \ , c=۱$

۵) هیچ‌کدام از موارد پیش

18. The point P in the Argand diagram represents the complex number $4 + 3i$. The tangent of the angle made by OP with the imaginary axis is

A $\frac{3}{4}$

B $\frac{4}{3}$

C $\frac{3}{5}$

D $\frac{4}{5}$

E $\frac{5}{4}$

۱۸. نقطه P در نمودار آرگان نمایش دهندهٔ عدد مختلط $۴+۳i$ می‌باشد. تانژانت زاویه‌ای که OP با محور موهومی می‌سازد برابر است با

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$ ۵) $\frac{۵}{۴}$

19. The general solution of the differential equation

$$\frac{dy}{dx} \cdot \cos x = y \sin x$$

is, P being an arbitrary constant.

A $y \cos x = P$

B $y \sec x = P$

C $y \sin x = P$

D $y = P \cos x$

E $y = P\, e^{\sec^2 x}$

۱۹. جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل $\frac{dy}{dx}.\cos x = y \sin x$ برابر است با (p ثابت دلخواهی است)

۱) $y=\cos x = p$ ۲) $y \sec x = p$

۳) $y=\sin x = p$ ۴) $y = p\cos x$

۵) $y = pe^{\sec^{۲} x}$

20. The complete solution set of the inequality

$$x^2 + 4x + 5 > 0,$$

where $x \in \mathbb{R}$, is

A $\mathbb{R}^+$

B $\{x : x > 5\}$

C $\{x : -1 < x < 5\}$

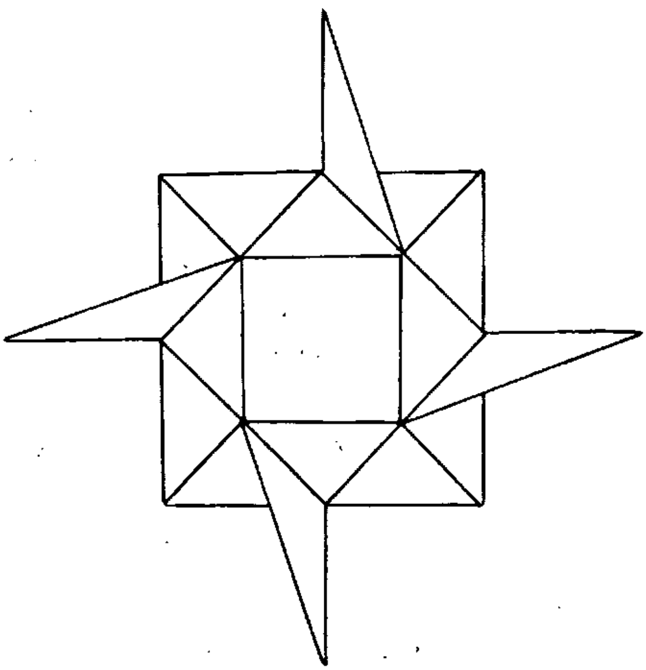
D $\{x : x > 5\} \cup \{x : x < -1\}$

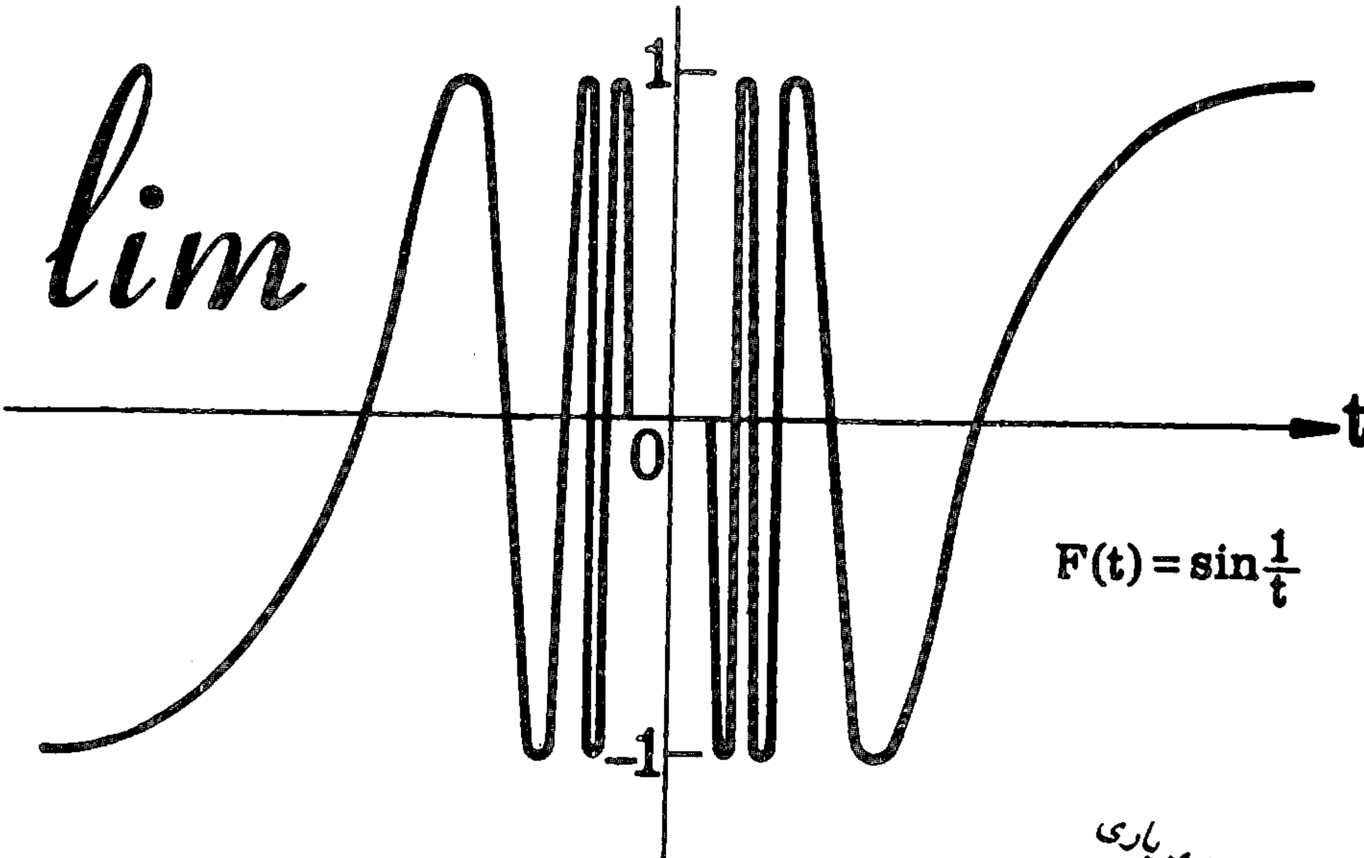
E $\mathbb{R}$

۲۰. اگر $x \in \mathbb{R}$ ، مجموعهٔ کامل پاسخ نابرابری $x^{۲}+۴x+۵>۰$ وقتی $x \in \mathbb{R}$ برابر است با

۱) $\mathbb{R}^+$ ۲) $\{x:x>۵\}$ ۳) $\{x:-۱<x<۵\}$

۴) $\{x:x>۵\}\cup\{x:x<-۱\}$ ۵) $\mathbb{R}$





● پرویز شهریاری

آموزش مفهوم حدّ در دبیرستان

از زمانی که محاسبهٔ محیط و مساحت دایره، جسم دوار مفهوم عددهای گنگ وارد برنامهٔ ریاضی دبیرستان شد، به ناچار به همراه آنها، داوری دربارهٔ بی‌نهایت کوچکها و روندهای بی‌پایانی که تا بی‌نهایت ادامه دارد مطرح شد. در ضمن، در همین دوره روشن شد که درک مفهومهای دقیق دانش و استدلالی کردن آنها، جز بر پایهٔ آنالیز ریاضی ممکن نیست. به‌همین مناسبت، مفهوم حد و روشهای حدی، که تاریخچه‌ای دراز دارد و برای درک دقیق مفهومهای مربوط به آن دشواریهایی پدید می‌آید، خود را وارد کتابهای درسی دبیرستانی کرد.

ولی از دیرباز، به ویژه در رابطه با محاسبهٔ نسبت محیط دایره به قطر آن (یعنی محاسبهٔ عدد π) و محاسبهٔ سطح و حجم جسمهای دوار، از مفهوم حد، بدون این که نامی از آن برده شود و بدون این که قضیه‌های وابسته به آن ثابت شود، استفاده می‌شده است. ارشمیدس که در سدهٔ سوم پیش از میلاد می‌زیست، به‌جای محیط دایره، محیط چندضلعیهای منتظم محاط در دایره و محیط بر دایره را در نظر گرفت و حد π را به‌تقریب برابر با $3\frac{1}{4}$ به دست آورد. جمشید کاشانی هم در کتاب «رسالة‌المحیطیه» همین راه را دنبال می‌کند؛ و 3×2^n ضلعیهای منتظم محاطی و محیطی را در نظر می‌گیرد و می‌گوید n را باید چنان گرفت که اگر شعاع دایره‌ای ۶۰۰۰۰ برابر شعاع کرهٔ زمین باشد، اختلاف بین محیطهای چندضلعیهای محاطی و محیطی، از قطر موی اسب کمتر شود. کاشانی برای این منظور n را برابر ۲۸ می‌گیرد؛ در این صورت تعداد ضلعهای چند ضلعیهای منتظم محاطی و محیطی برابر ۸۰۵۳۰۶۳۶۸ می‌شود و عدد π را تا ۱۷ رقم بعد از ممیز محاسبه می‌کند که تنها رقم هفدهم آن نادرست است.

کاشانی، محیط دایره را برابر با میانگین حسابی محیطهای چندضلعیهای محاطی و محیطی به حساب می‌آورد و، سپس، با تقسیم بر قطر دایره، عدد π را محاسبه می‌کند. روش کاشانی را برای $n=0$، $n=1$ و $n=2$ دنبال کنیم.

برای $n=0$ با مثلثهای متساوی‌الاضلاع درونی و بیرونی سر و کار داریم. اگر شعاع دایره را برابر واحد فرض کنیم، طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در آن برابر $\sqrt{3}$ یا به تقریب

۱/۷۳۲ و ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محیط بر دایره برابر $۲\sqrt{۳}$ و یا به تقریب ۳/۴۶۴ می‌شود. اگر محیط دایره را میانگین حسابی محیطهای دو مثلث بگیریم:

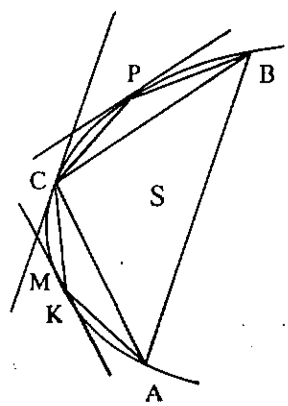
$$\text{محیط دایره} \approx \frac{۳\times ۱/۷۳۲+۳\times ۳/۴۶۴}{۲}=۷/۷۹۴$$

که اگر به قطر دایره، یعنی ۲، تقسیم کنیم، به عدد ۳/۸۹۷ برای عدد π می‌رسیم که از حقیقت دور است.

برای $n=۱$ یعنی ۶ ضلعیهای منتظم محاطی و محیطی، محیط ۶ ضلعی محاطی برابر ۶ و محیط شش ضلعی محیطی برابر ۶/۹۲۸ و محیط دایره به تقریب برابر ۶/۴۶۴ به دست می‌آید که با تقسیم بر ۲ (قطر دایره) مقدار تقریبی π برابر ۳/۲۳۲ می‌شود که گرچه نسبت به مقدار قبلی دقیق‌تر است، هنوز با π فاصله دارد.

برای $n=۲$ یعنی ۱۲ ضلعیهای منتظم محاطی و محیطی، میانگین محیطهای دو چند ضلعی برابر ۶/۳۷۰۴ و برابر π، عدد ۳/۱۸۵۲ به دست می‌آید. می‌بینید هر چه n را بزرگتر کنیم، به مقدار عدد π نزدیکتر می‌شویم.

ارشمیدس از این هم جلوتر می‌رود و مساحت قطعه سهمی را با همین روش حدی محاسبه می‌کند. ارشمیدس، این محاسبه را در رسالهٔ خود به نام «مربع در آوردن سهمی» انجام داده است.



روش ارشمیدس را می‌توان به صورت کوتاه، این‌طور بیان کرد. فرض کنید بخواهیم مساحت قطعه سهمی AMB را پیدا کنیم، یعنی مساحت شکلی که بین منحنی سهمی و وتر ABواقع است (شکل را ببینید).مماسی بر سهمی رسم می‌کنیم که موازی وتر سهمی باشد و، سپس، از نقطه تماس C به A و B وصل می‌کنیم تا مثلث ACB به دست آید. در قطعه سهمی‌های تازهٔ AKC و CPB، همان کاری را دنبال می‌کنیم که در قطعه سهمی AMB انجام دادیم. مجموع مساحتهای مثلثهای ACB، AKC و CPB از مساحت قطعه سهمی کمتر است و چهار قطعه سهمی باقی می‌ماند؛ که باید مساحت آنها به مساحت سه مثلث اضافه شود. در این چهار قطعه سهمی هم، همان عمل قبلی را انجام می‌دهیم و چهار مثلث جدید به دست می‌آوریم. اگر این روند را ادامه دهیم، به تدریج مجموع مساحتهای مثلثهای حاصل، به مساحت قطعه سهمی نزدیک می‌شود و، در حد مساحت قطعه سهمی را به ما می‌دهد. ارشمیدس ثابت می‌کند، مساحت مثلث ACB چهار برابر مجموع مساحتهای دو مثلث AKC و CPB است و محیط دربارهٔ مثلثهای بعدی. به این ترتیب، ارشمیدس، برای مساحت قطعه سهمی به دست می‌آورد.

$$S+\frac{۱}{۴}S+\frac{۱}{۱۶}S+\frac{۱}{۶۴}S+\ \dots\ =\frac{۴}{۳}S$$

که در آن، S مساحت مثلث ACB است.

همهٔ این کارها بسیار جالب است، ولی از دو جهت دارای کمبود هستند: ۱) چه پیش می‌آید که با در نظر گرفتن بی‌نهایت جمله، به نتیجه می‌رسیم؟در اینها کدام خصلت فلسفی و منطقی وجود دارد؟ ۲) در استدلال‌ها دقت منطقی لازم به کار نرفته است و در بخشی از کار به معرفت شهودی متوسل شده‌اند. به زبان روشن‌تر، قانون‌های حاکم بر این‌گونه عمل‌ها تنظیم نشده بود.

برطرف کردن این کمبودها که بیشتر دارای جنبهٔ فلسفی بود، نیاز به دگرگونی در اندیشهٔ اجتماعی و فلسفی در محیطهای روشنفکری داشت و این زمینه را انقلاب کبیر فرانسه فراهم کرد. از یک طرف به دقت در کار اهمیت داده شد، به نحوی که از هیچ مقوله‌ای بدون استدلال و اثبات کامل نگذرند و از طرف دیگر، دیدگاه نسبت به تغییرهای کمیتی و مکانیکی عوض شد و خود انقلاب آموخت که هر تغییر کمیتی، در مرحله‌ای از حرکت خود منجر به تغییر کیفی می‌شود و نتیجه‌ای به بار می‌آورد که شبیه گذشته خود نیست.

□

هنوز بسیاری از پژوهشگران و از جمله بسیاری از نویسندگان تاریخ ریاضیات، بر این عقیده‌اند که اندیشهٔ مربوط به نظریهٔ حد، از آغاز سدهٔ نوزدهم میلادی در کتابهای درسی دبیرستانی وارد شده است. ولی در واقع چنین نیست.

درست است که نماد «Lim» یا «حد» در سال ۱۸۵۳ یعنی در نیمهٔ سدهٔ نوزدهم و به وسیله «ویلیام هامیلتون» ریاضی‌دان و

فیزیکدان ایرلندی وارد در ریاضیات و به تدریج معمول شد، ولی خود مفهوم حد، از خیلی پیش از آن در کتابهای درسی دبیرستانی مورد استفاده قرار می‌گرفت.

در واقع ژان‌دالامبر (Dalember) فیلسوف و ریاضیدان فرانسوی (۱۷۱۷ ـ ۱۷۷۸ میلادی)، نظریهٔ حد را، که خود در تکامل آن نقش داشت، در کتاب فرهنگ بزرگ خود (دربارهٔ دانش و هنر و پیشه)، که در فاصلهٔ سال‌های ۱۷۵۱ تا ۱۷۷۱ میلادی در پاریس چاپ شد، تعریف کرد، تعریف دالامبر از مفهوم حد چنین است :

«هنگامی کمیتی را حد کمیت دیگر می‌گوییم، که کمیت دوم بتواند به کمیت اول چنان نزدیک شود که فاصله‌اش از آن از هر مقدار مفروضی، هر قدر کوچک و ناچیز، کمتر باشد، در ضمن، کمیت نُزدیک شونده به هیچ‌وجه نباید از کمیتی که به آن نزدیک می‌شود تجاوز کند. بنابراین، اختلاف بین این کمیت و کمیت حدی آن، مقداری نامعین است».

و روشن است که این تعریف مربوط به کمیتهای صعودی و یکنواخت است.

نوشته‌های دالامبر، از همان زمان انتشار، در کتاب درسی ریاضیات دبیرستانی نفوذ کرد. یکی از این کتابها، کتاب درسی سیمون لیوویل، برای دبیرستان است.

در تاریخ ریاضیات، نام **سیمون** *لیوویل* (S.L`Huilier ؛ ۱۷۵۰ـ ۱۸۴۰ میلادی) ریاضیدان سویسی، به خاطر نتیجه‌گیری دقیق علمی خود، شهرت دارد، بین کارهای او می‌توان از پایه‌گذاری آنالیز ریاضی براساس مفهوم حد نام برد. نوشتهٔ لیوویل با عنوان «طرح مقدماتی محاسبهٔ عالی» که در سال ۱۷۸۶ در برلن چاپ شد، در مسابقه‌ای که از طرف، فرهنگستان علوم برلن ترتیب داده شده بود، بهترین شناخته شد. در آن زمان، لاگرانژ ریاضیدان فرانسوی (۱۷۳۶ ـ ۱۸۱۳) رئیس فرهنگستان علوم برلن بود. فعالیت علمی لیوویل و هم کتابهای او با سفارش‌های آموزشی همراه است.

در سال ۱۷۷۳، در لهستان «ادارهٔ آموزش» بنیان گذاشته شد. هدف و برنامهٔ این اداره، فعال کردن آموزش در دبیرستانها بود. در این اداره، بخش کتابخانه ایجاد شد که وظیفه‌اش چاپ کتاب‌های درسی به زبان مادری بود. در ضمن، مسابقه‌ای برای تنظیم کتابهای درسی دبیرستانی ترتیب داده شد.... و سیمون لیوویل برندهٔ کتابهای درسی ریاضیات دبیرستانی شد. کتاب او «مقدمات حساب و هندسه برای دبیرستانها»، در ورشو و در سال ۱۷۷۸ چاپ شد خود لیوویل به لهستان دعوت شد و در آن‌جا به‌عنوان کتابدار و مربی پسر شاهزاده چرتوریسکی (عضو کمیسیون آموزش) مشغول به کار شد. خیلی زود، ترجمه لهستانی کتاب لیوویل هم منتشر شد. ترجمهٔ کتاب را *آندره‌ها* ورونسکی یکی از فعالان تهیه اصطلاح‌های ریاضی در زبان لهستان به عهده گرفت. کتاب درسی حساب در سال ۱۷۷۸ چاپ شد. بعد از دو سال، جلدهای اوّل و دوم کتاب درسی هندسه و در سال ۱۷۸۲ کتاب درسی جبر چاپ شد. کتاب حساب ۱۲ بار، هندسه‌ها ۴ بار و جبر ۳ بار تجدید چاپ شدند.

در این‌جا، کتابهای جبر و هندسهٔ لیوویل را از دیدگاه روش استفاده از نظریهٔ حد بررسی می‌کنیم. کتاب هندسهٔ او تفاوت‌هایی جدیّ با دستگاه اقلیدسی دارد. بررسی شکل‌های متشابه قبل از نسبت‌ها و مثلثات قبل از لگاریتم آمده است. در جلد دوم از توان سوم و ریشهٔ سوم عددها صحبت شده است. مؤلف، توجه زیادی به حل مسأله‌های عملی کرده است. در فصل ۱۱ جلد اول مقدمات «زمین‌سنجی» آمده است. در فصل ۱۲، از کاربرد مثلثات در محاسبه‌های مختلف مربوط به زمین گفتگو کرده است.

لیوویل در کتاب خود، هرجا که توانسته است از مفهوم حد استفاده کرده است. از این دیدگاه، فصل ۱۳ بسیار جالب است. عنوان این فصل چنین است : «به مربع در آوردن دایره یا پیدا کردن مساحت دایره». لیوویل در آغاز می‌گوید : هر چه تعداد ضلعهای چند ضلعیهای منتظم بیشتر باشد، به دایره شبیه‌تر می‌شوند و نسبت محیطهای آنها، به نسبت شعاع دایره‌های محاطی یا محیطی نزدیک‌تر می‌شود. این قضیه وقتی درست است که به قول لیوویل، «تعداد ضلعهای چند ضلعیهای منتظم آن‌قدر زیاد باشد که تشخیص آنها از دایره ممکن نباشد، در چنین وضعی، بین شعاعهای دایره‌های محاطی و محیطی، نمی‌توان تفاوتی قائل شد و در واقع، یک شعاع دارند». این استدلال، برخی هندسه‌دانها را قانع کرد که اگر اثبات و استدلالی برای چند ضلعی منتظم درست باشد، برای دایره هم درست است، به شرطی که دایره را همچون چند ضلعی منتظمی در نظر بگیرند که «در آن تعداد ضلعها، از هر عددی بزرگتر باشد» به‌عقیده لیوویل، چنین استدلالهایی نمی‌تواند برای دانش‌آموزان قانع‌کننده باشد : «آنها باید توجه کنند که در این‌جا یک پرسش وجود دارد ؛ زیرا اگر با دقت ارزیابی کنیم، منحنی را نمی‌توان

همچون مجموعه‌ای از تعداد بسیاری پاره‌خط‌های راست بسیار کوچک دانست که با هم زاویه می‌سازند». باید مسأله را دقیق‌تر مطرح کرد و این ممکن نیست، مگر به یاری مفهوم حد. آن چه مربوط به «پرسش»، ضمن عبور از چند ضلعی به دایره می‌شود، ما را وامی‌دارد تا به تصوّر عمیق‌تری که لیوویل دربارهٔ «عبور» داشته است پی‌ببریم. در واقع، در این‌جا با تغییری کیفی سر و کار داریم که بعد از یک جریان مداوم تغییرهای کمّی پدید آمده است. باید توجه داشت که بسیاری از مؤلفان کتابهای درسی هندسه از این مفهوم عمیق لیوویل (یعنی تغییر کیفی، درنتیجه یک رشته تغییرهای کمّی) استفاده نکرده‌اند.

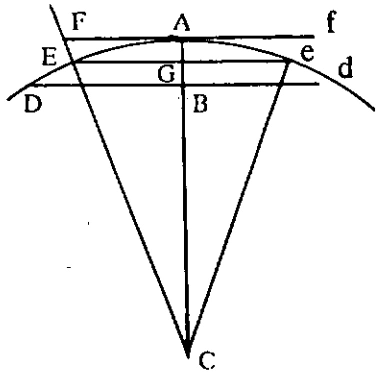
لیوویل، طرح خود را با یک پیش قضیه آغاز می‌کند. «همیشه می‌توان ـ گرچه در ذهن ـ یک کمیت را به چنان بخشهای برابری تقسیم کرد که هرکدام از آنها به تنهایی از هر کمیت شناخته شده‌ای کوچکتر باشد.لیوویل، این کمیت را **کمیت مفروض** می‌نامد. فرض کنید بخواهیم کمیت A را چنان به بخشهای برابر تقسیم کنیم که هر کدام از آنها از کمیت مفروض α کوچکتر باشد، عددی پیدا می‌کنیم که از ضرب آن در α، عددی بزرگتر از A به دست آید. فرض کنید این عدد n باشد، یعنی $n\alpha > A$. اگر دو طرف این برابری را بر n تقسیم کنیم، به‌دست می‌آید: $\frac{A}{n} < \alpha$، همان که می‌خواستیم.

برای مثال فرض کنید کمیتی را به دو بخش برابر تقسیم کنیم، هر بخش را دوباره به دو بخش و غیره؛ و از این راه به بخشی برسیم که از هر مقدار مفروضی که در نظر گرفته‌ایم، کمتر باشد.

مؤلف؛ معلم را راهنمایی می‌کند که توجه دانش‌آموز را به این مقدار مفروض (که آن را کمیت نشان شده می‌نامد) جلب کند. این یادآوری مؤلف برای ما اهمیت دارد، زیرا به درک امروزی ما از مفهوم حد (که نقش مقدار مفروض را به اپسیلون می‌دهیم) بسیار نزدیک است.

سپس مؤلف، این قضیه را تنظیم و اثبات می‌کند: «می‌توان دو چند ضلعی منتظم متشابه، یکی را بر دایره محیط و دیگری را در دایره محاط کرد، به نحوی که اختلاف محیطهای آنها، از هر عددی که از قبل نشان شده است، کمتر باشد. مثلاً می‌توان چند ضلعیهای منتظم مخیطی و محاطی را طوری انتخاب کرد که اختلاف محیطهای آنها، از $\frac{۱}{۱۰}$ محیط هر یک از چندضلعیها کمتر باشد». و آن را به این ترتیب ثابت می‌کند.

فرض کنید شعاع دایره را به ۱۰ بخش برابر تقسیم کنیم و AB یکی از این بخشها باشد. از نقطهٔ B عمودی بر شعاع رسم



C مرکز دایره‌ای است که کمان DAd کمانی از آن است

می‌کنیم تا محیط دایره را در D و d قطع کند. سپس محیطِ دایره را به ۲، ۴، ۸، ۱۶، ... بخش برابر تقسیم می‌کنیم تا جایی که هر بخش از کمان DAd کوچکتر شود. فرض کنید، کمان EAe یکی از این بخشها باشد و فرض کنید کمان $EA = Ae$، پاره‌خط راست Ee را رسم می‌کنیم که البته، بر AC عمود می‌شود. CE و Ce را ادامه می‌دهیم تا مماس بر دایره در نقطهٔ A را در نقطه‌های F و f قطع کند در این صورت Ee و Ff عبارتند از ضلعهای چندضلعیهای منتظم متشابه که اولی در دایره محاط و دومی بر دایره محیط است. محیط این چند ضلعیها را p و P می‌نامیم، در این صورت

$$\frac{p}{P} = \frac{|CG|}{|AC|} \Rightarrow \frac{P-p}{P} = \frac{|AC|-|CG|}{|AC|}$$

و $|AC|-|CG|=|AG|$ ولی

$$|AG|<|AB|=\frac{1}{10}|AC|$$

بنابراین

$$\frac{P-p}{P}<\frac{1}{10} \Rightarrow P-p<\frac{1}{10}P$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود:

$$P-p<\frac{1}{10}p$$

مؤلف در یادداشت خود می‌نویسد: «مثال عددی را به این دلیل آوردم که دانش‌آموزان مطلب را بهتر درک کنند، ولی این مثال نمی‌تواند اثباتی کلی و دقیق به حساب آید، زیرا استدلال نباید به عدد نشان شده (در این مثال، عدد $\frac{۱}{۱۰}$) بستگی داشته باشد». سپس دو نتیجه، از این قضیه به‌دست می‌آورد:

۱. می‌توان دو چند ضلعی منتظم متشابه، یکی محاط دایره و دیگری محیط بر دایره چنان رسم کرد که، اختلاف محیط دایره با محیط هر یک از آنها، از هر عدد نشان شده قبلی کوچکتر

باشد. l را محیط دایره بگیرید و فرض کنید :

$P-p<\frac{1}{10}p \quad , \quad P-l<P-p$

یعنی $P-l<\frac{1}{10}p$. ولی $l>p$، پس $P-l<\frac{1}{10}l$.

۲. فرض کنیم، محیط دایره را به صورت یک پاره‌خط راست نشان داده باشیم. می‌توان در دایره یک چندضلعی منتظم محاط و چند ضلعی متشابه آن را بر دایره محیط کرد، به نحوی که، اختلاف محیط دایره با محیط هر یک از چند ضلعیها، از طول پاره‌خط راستی که به اندازهٔ کافی کوچک باشند، کمتر شود.

α را پاره‌خطی راست با طولی به دلخواه کوچک، می‌گیریم، $|AB|=l$. فرض کنید.

$10\alpha>|AB| \quad , \quad \alpha>\frac{|AB|}{10}=\frac{l}{10}$

دو چند ضلعی منتظم متشابه یکی محاط در دایره و دیگری محیط بر دایره رسم کنیم، به نحوی که داشته باشیم : $P-p<\frac{1}{10}p$ ، آن وقت خواهیم داشت : $P-l<\frac{1}{10}p$ و به‌طور مسلم $P-l<\frac{1}{10}|AB|=\frac{1}{10}l$. ولی $\alpha>\frac{1}{10}l$، بنابراین $P-l<\alpha$.

وقتی تعداد ضلعهای چند ضلعیهای منتظم را ۲ برابر و ۴ برابر کنیم، محیط چند ضلعی محیطی کوچکتر و محیط چندضلعی محاطی بزرگتر می‌شود، ولی محیط دایره مقداری ثابت است. بنابراین اختلاف محیط دایره با محیط هر یک از چند ضلعیها را می‌توان از هر عدد α، که از قبل و به اندازهٔ کافی کوچک انتخاب شده است، کوچکتر گرفت به این ترتیب، محیط دایره، برابر است با حد محیطهای چند ضلعیهای محاطی و محیطی، به شرطی که تعداد ضلعهای آنها، پشت‌سرهم دو برابر شود.»

سپس، مؤلف، قضیهٔ دوم را ثابت می‌کند : «نسبت محیطهای دو دایره، مثل نسبت شعاعهای آنهاست. و از آن دو نتیجه می‌گیرد :

۱. نسبت محیط دایره به شعاع آن، مقدار ثابتی است که به اندازهٔ محیط دایره بستگی ندارد.

۲. نسبت مساحتهای دو مثلث راست گوشه‌ای که ارتفاع آنها برابر شعاع دو دایره و قاعده‌های آنها، پاره‌خطهای راستی با طول محیطهای دو دایره باشد، برابر است با نسبت مجذورهای دو شعاع.

قضیه. مساحت دایره، برابر است با مساحت مثلثی که ارتفاع آن برابر با طول شعاع دایره و قاعدهٔ آن، طولی برابر محیط دایره داشته باشد.

اگر مساحت دایره، برابر مساحت این مثلث نباشد، باید از آن بزرگتر یا از آن کوچکتر شود ؛ یعنی مساحت دایره برابر با مساحت مثلثی می‌شود که ارتفاع آن طولی برابر با شعاع دایره و قاعده‌اش طولی بزرگتر یا کوچکتر از محیط دایره داشته باشد.

فرض کنید طول محیط دایره برابر O و L طول پاره‌خط راستی باشد، بزرگتر یا کوچکتر از محیط دایره، فرض کنید O کوچکتر از L باشد. چندضلعی منتظم محیطی را در نظر می‌گیریم که اختلاف محیط آن با محیط دایره، کوچکتر از اختلاف محیط دایره از L باشد.

$P-O<L-O$

یعنی $L>P$. و این به معنای آن است که مساحت چند ـ ضلعی محیطی کوچکتر از مساحت دایره‌ای است که در آن محاط شده است. و این ممکن نیست.

اگر محیط دایره بزرگتر از طول پاره‌خط راست L باشد، در دایره چندضلعی منتظمی محاط می‌کنیم که اختلاف محیط آن با محیط دایره، کمتر از اختلاف محیط دایره از L باشد. در این صورت $O-p<O-L \Rightarrow p>L$ یعنی مساحت چند ضلعی محاط در دایره بیشتر از مساحت دایره می‌شود ؛ که ممکن نیست.

به این ترتیب، مساحت دایره از مساحت مثلثی که ارتفاع آن برابر شعاع دایره و قاعده‌اش برابر محیط دایره باشد، نه بزرگتر است و نه کوچکتر، یعنی مساحت آن با مساحت دایره برابر است.

در این جا، استدلال لیوویل، اختلاف کمی با استدلال ارشمیدس در کتاب «اندازه‌گیری دایره» و استدلال جمشید کاشانی در «رسالةالمحیطیه» دارد.

لیوویل، حجم استوانه، مخروط و کره را به عنوان حد حجم منشور، هرم و چند وجهی منتظمی که در آنها محاط یا بر آنها محیط شده باشد، به‌دست می‌آورد.

در سال ۱۷۹۸ کتاب «تجربه‌هایی دربارهٔ تکمیل مقدمات هندسه» تألیف *س.ا. گوریه‌وا* منتشر شد. این کتاب هم بر پایه مفهوم حد و روش حدی تنظیم شده بود. اهمیت استدلال‌های *گوریه‌وا* با استدلال‌های *لیوویل*، چندان تفاوتی ندارد، ولی به هر حال با آن متفاوت است.

لیوویل و *گوریه‌وا*، برای حلّ بسیاری از مسأله‌ها، از این

قضیه استفاده می‌کنند که اگر مقدار ثابت A، بین دو مقدار متغیر x و y باشد: $x<A<y$، و اختلاف بین x و y را بتوان از هر مقدار به دلخواه کوچکی که از قبل معین شده است را کمتر کرد، آن‌وقت مقدار ثابت A برابر است با حد مشترک x و y:

حد x = حد y = A

لازم به یادآوری است که هواداران روش حدی، یعنی *لیوویل* و *گوریه‌وا*، به آموزش هندسه با دو دید مختلف می‌نگریستند. *گوریه‌وا*، هندسه را دانشی مستقل از حساب و جبر می‌دانست و به کار بردن حساب و جبر را در آن ضروری نمی‌دید. او می‌نویسد: «... در هندسه مقدماتی، به هیچ‌وجه نباید از ریاضیات محاسبه‌ای استفاده کرد...».

لیوویل، برعکس، هوادار محکم کردن بستگی بین رشته‌های مختلف ریاضیات بود و در هندسه، به فراوانی از حساب و جبر استفاده می‌کرد. جلد اوّل کتاب درسی جبر او شامل ۸ فصل است که در آنها معادله‌های درجه اوّل یک یا چند مجهولی را بررسی کرده است؛ همچنین ریشه گرفتن، کمیتهای اندازه‌ناپذیر، معادله‌های درجه دوم و اندکی مقوله دیوفانتی، در آن مطرح شده است. در ۱۴ فصل جلد دوم، به تصاعدهای عددی، عددهای چندضلعی، ترکیب و تبدیل، بسط دوجمله‌ای با توان طبیعی، تصاعد هندسی و لگاریتم روش ضریب‌های نامعین، کسرهای مسلسل، تشکیل معادله با در دست داشتن ریشه‌های آن در معادله‌های درجه سوم و درجهٔ چهارم آمده است. در این جا هم، *لیوویل* مثل کتاب هندسهٔ خود از روش حدی استفاده می‌کند و ضمن طرح $\frac{1}{0}$ و $\frac{0}{0}$ می‌نویسد: «به نظر من همهٔ دشواری، مربوط به اندیشهٔ تقسیم است». *لیوویل* تعریف حد را، ضمن محاسبهٔ حد کسرها می‌دهد و می‌نویسد: «وقتی اختلاف دو کمیت، معیّن یا مفروض باشد، نسبت آنها برابر واحد نمی‌شود. ولی هر قدر این اختلاف، نسبت به هر یک از دو عدد کمتر باشد و هر قدر خود دو عدد بزرگتر باشند، نسبت آنها به واحد نزدیکتر می‌شود و اختلاف این نسبت با واحد، می‌تواند از هر عدد کوچک دلخواه، کمتر باشد، در این صورت، عدد ۱ حد این نسبت است».

در فصل عددهای چندضلعی، حد نسبت $\frac{3}{n+2}$ را بررسی می‌کند. او این نسبت را به صورت $2-\frac{3}{n+2}$ نشان می‌دهد و، سپس به سمت مقدار حدی می‌رود:

حد $\left(2-\frac{3}{n+2}\right)=2$

او برای محاسبهٔ مجموع همهٔ جمله‌های یک تصاعد هندسی نزولی (که بی‌نهایت جمله دارد)، از همین روش استفاده می‌کند *لیوویل* با در دست داشتن

$$S=\frac{1-a^n}{1-a}$$

می‌نویسد $S=\frac{1}{1-a}-\frac{0^n}{1-a}$ و نشان می‌دهد که، برای $0<a<1$، کسر دوم با بزرگ شدن n، کوچک می‌شود و می‌تواند از هر مقدار کوچک دلخواه از قبل تعیین شده‌ای، کوچکتر باشد. بنابراین $\frac{1}{1-a}$ حد مجموع همهٔ جمله‌های تصاعد هندسی نزولی است.

لیوویل، با استفاده از مجموع جمله‌های تصاعد نزولی، مجموع جمله‌های چند رشته‌ای را محاسبه می‌کند. ازجمله؛

$$S'=1+2x+3x^2+4x^3+\dots+(n-1)x^{n-2}+nx^{n-1}\qquad(1)$$

دو طرف برابری (۱) را در x ضرب می‌کند:

$$S'x=x+2x^2+3x^3+4x^4+\dots+(n-1)x^{n-1}+nx^n\qquad(2)$$

سپس، با کم کردن (۲) از (۱) به‌دست می‌آورد

$$S'(1-x)=\left[1+x+x^2+\dots+x^{n-1}\right]-nx^n$$

$$=\frac{1-x^n}{1-x}-nx^n$$

از آنجا

$$S=\frac{1-x^n}{(1-x)^2}-\frac{2x^n}{1-x}=\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{x^n}{(1-x)^2}-\frac{nx^n}{1-x}$$

اگر $x<1$، آن وقت کسرهای $\frac{x^n}{(1-x)^2}$ و $\frac{nx^n}{1-x}$ با بزرگ شدن n، کوچک می‌شوند، به نحوی که می‌توان n را طوری انتخاب کرد که این دو کسر از هر عدد کوچک از پیش تعیین شده‌ای کوچکتر باشند، بنابراین برای حد مجموع داریم:

$$S'=\frac{1}{(1-x)^2}$$

با استفاده از این نتیجه، و با همان روش می‌توان حد مجموع

$$S''=1+3x+6x^2+10x^3+\dots+\frac{n}{1}\cdot\frac{n+1}{2}x^{n-1}$$

را به دست آورد؛ که برابر است با $\frac{1}{(1-x)^2}$.

در واقع S' و S'' نتیجه‌ای از مشتق S نسبت به x هستند.

در حاشیهٔ تابع

(قسمت پنجم)

●حمیدرضا امیری

تابعهای متناوب

تابع f را متناوب می‌گویند، در صورتی‌که عددی مخالف صفر مانند T وجود داشته باشد به قسمی که اولاً اگر $x \in D_f$ آنگاه $(x+T)$ و $(x-T)$ نیز عضو D_f بوده و ثانیاً $f(x+T)=f(x)$. کوچکترین عدد مثبتی مانند T (در صورت وجود) که در رابطهٔ $f(x+T)=f(x)$ صدق می‌کند، تناوب اصلی تابع f می‌نامند.

مثال ۱ : $\sin x = \sin(x+۲k\pi)$ و $\cos(x+۲k\pi)=\cos x$ پس تابعهای سینوس و کسینوس متناوب بوده که ۲π کوچکترین عدد مثبتی است که در رابطه‌های فوق صدق می‌کند لذا تناوب اصلی این دو تابع ۲π است. (تناوب اصلی $y=\mathrm{tg}x$ و $y=\cot gx$ را بیابید)

مثال ۲ : اگر فرض کنیم $f(x)=x-[x]$ ، در این صورت برای هر عدد صحیح مانند n داریم :

$$f(x+n)=(x+n)-[x+n]=(x+n)-([x]+n)= x-[x]=f(x)$$

تناوب اصلی تابع فوق $T=۱$ است.

در حالت کلی تناوب اصلی تابع با ضابطهٔ $f(x)=nx-[nx]$ برابر است با $\frac{۱}{|n|}$ ثابت کنید f تابعی متناوب است.

مثال ۳: تابع ثابت با ضابطهٔ $f(x)=k$ نیز تابعی متناوب است، زیرا برای هر عدد حقیقی مانند P همواره $f(x+T)=k=f(x)$ ، اما دورهٔ تناوب ندارد، زیرا کوچکترین عدد حقیقی مثبت که در رابطهٔ فوق صدق کند، وجود ندارد.

نکات و یادآوریهای مهم:

۱ ــ تناوب اصلی توابع با ضابطه‌های $f(x)=\sin^{۲n-۱}ax$ و $g(x)=\cos^{۲n-۱}ax$ ، $\frac{۲\pi}{|a|}$ و $h(x)=\mathrm{tg}^n ax$ و $t(x)=\cot g^n ax$ $n\in N$ برابر است با $\frac{\pi}{|a|}$.

اثبات : برای تابع f ثابت می‌کنیم $T=\frac{۲\pi}{|a|}$

می‌دانیم $\sin^{۲n-۱}(ax+۲k\pi)=\sin^{۲n-۱}ax \quad (۱)$

از طرفی $f(x+T_۱)=\sin^{۲n-۱}a(x+T_۱)=$

$\sin^{۲n-۱}(ax+aT_۱) \quad (۲)$

با مقایسهٔ رابطه‌های (۱) و (۲) به این نتیجه می‌رسیم که اگر $aT_۱=۲k\pi$ ، آنگاه $f(x+T_۱)=f(x)$ که اگر $aT_۱=۲k\pi$ خواهیم داشت :

$$aT_۱=۲k\pi \Rightarrow T_۱=\frac{۲k\pi}{a}\xrightarrow{k=۱}T=\frac{۲\pi}{|a|}$$

۲ ـ تناوب اصلی توابع با ضابطه‌های $f(x)=\sin^{۲n} ax$ و $g(x)=\cos^{۲n} ax$ برابر است با $\frac{\pi}{|a|}$ (اثبات به عهدهٔ خودتان)

۳ ـ اگر تابعی از اعمال جبری روی چند تابع متناوب حاصل شده باشد. کوچکترین مضرب مشترک تناوبهای آن تابعها، تناوب اصلی تابع اصلی را تشکیل می‌دهد.

مثال ۴: اگر $f(x)=\sin^{۲}\frac{۴x}{۳}+\cos\frac{۳x}{۲}+tg\frac{۳x}{۲}$ در این صورت دورهٔ تناوب تابع f را بیابید.

$$T_{\sin^{۲}\frac{۴x}{۳}}=\frac{\pi}{\frac{۴}{۳}}=\frac{۳\pi}{۴}$$

$$T_{\cos\frac{۳x}{۲}}=\frac{۲\pi}{\frac{۳}{۲}}=\frac{۴\pi}{۳}$$

و

$$T_{tg\frac{۳x}{۲}}=\frac{\pi}{\frac{۳}{۲}}=\frac{۲\pi}{۳}$$

حال کوچکترین مضرب مشترک $\frac{۳\pi}{۴}$ و $\frac{۴\pi}{۳}$ و $\frac{۲\pi}{۳}$ را به‌دست می‌آوریم که برای این کار کافی است ک‌م‌م صورتها و ب‌م‌م مخرج کسرها را محاسبه کرده و متناظراً کسری تشکیل دهیم،

$$\left.\begin{array}{l} ۲\pi,۳\pi,۴\pi=۱۲\pi : \text{ک م م} \\ ۳,۳,۴=۱ : \text{ب م م}\end{array}\right\}\Rightarrow T=\frac{۱۲\pi}{۱}=۱۲\pi$$

تذکر: اگر به کمک فرمولها و رابطه‌های جبری یا مثلثاتی بتوانیم تابع f را ساده‌تر کرده و دورهٔ تناوب کوچکتری بیابیم، آن دورهٔ تناوب کوچکتر به عنوان دورهٔ تناوب شناخته می‌شود. به‌عنوان مثال تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$ در ظاهر دارای تناوب اصلی ۲π است امّا با تقسیم صورت و مخرج کسر بر cosx (برای $k,x\neq\frac{k\pi}{۲}$ فرد) داریم $f(x)=\frac{tgx+۱}{tgx-۱}$ که تناوب اصلی سادهٔ شدهٔ آن π می‌باشد.

ـ اگر f تابعی متناوب با تناوب اصلی T باشد در این صورت |f| نیز متناوب بوده و معمولاً تناوب اصلی آن یا T و یا $\frac{T}{۲}$ خواهد بود که با امتحان کردن به راحتی می‌توان آن را به‌دست آورد. مثلاً تناوب اصلی $f(x)=\sin^{۲} x+\sin x$، ۲π و تناوب اصلی |f| نیز ۲π است ولی تناوب اصلی $g(x)=tgx+\cot gx$، π می‌باشد، در صورتی که تناوب اصلی |g|، $\frac{\pi}{۲}$ است.

مثال ۵: آیا تابع با ضابطه $f(x)=\cos\pi x+tg۲x$ متناوب است؟

$$T_{\cos\pi x}=\frac{۲\pi}{\pi}=۲\ ,\quad T_{tgx}=\frac{\pi}{۲}$$

برای $\frac{\pi}{۲}$ و ۲، ک‌م‌م نمی‌توان تعریف کرد پس f متناوب نیست.

مثال ۶: آیا تابع با ضابطهٔ $f(x)=\cos\pi x+۳x-[۳x]$ متناوب است؟

$$T'_{\cos\pi x}=\frac{۲\pi}{\pi}=۲\ ,\quad T''_{۳x-[۳x]}=\frac{۱}{۳}$$

ک‌م‌م: $۲,\frac{۱}{۳}\to T=۲$

۴ ـ یکی از کاربردهای مفهوم تناوب در تابعهای متناوب در رسم چنین تابعهایی است یعنی برای رسم یک تابع متناوب کافی است که ابتدا دورهٔ تناوب تابع را مشخص کرده و فقط نمودار تابع را در یک تناوب اصلی رسم کنیم و در فواصل دیگر این دوره نمودار تابع به همان صورت تکرار می‌شود. مثلاً نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \sin x$ در هر ۲π تکرار می‌شود.

۵ ـ اگر T تناوب اصلی تابع f باشد و k عددی حقیقی، در این صورت $\frac{T}{k}$ تناوب اصلی تابع با ضابطهٔ f(kx) می‌باشد.

$$f\left[k(x+\frac{T}{k})\right]=f(kx+T)=f(kx)$$

زیرا T دورهٔ تناوب f است.

$$(f(x+T)=f(x)\xrightarrow{x\to kx}f(kx+T)=f(kx)$$

مثال ۷: ثابت کنید تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}۱ & x\in Q\\ ۰ & x\notin Q\end{cases}$ متناوب است و هر عدد گویای غیرصفر تناوبی برای تابع محسوب می‌شود.

اگر فرض کنیم $T_۱$ عددی گویا باشد در این صورت داریم

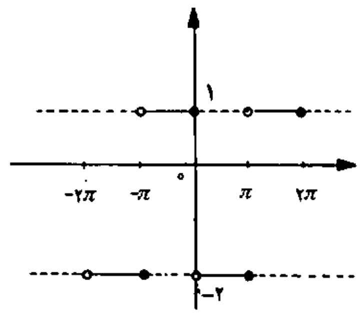
I) $x\in Q\Rightarrow(x+T_۱)\in Q\Rightarrow f(x+T_۱)=۱=f(x)$

II) $x\notin Q\Rightarrow(x+T_۱)\notin Q\Rightarrow f(x+T_۱)=۰=f(x)$

مثال ۸: اگر تابع f با دورهٔ تناوب ۲π در فاصله $[-۲\pi,۰]$ به صورت زیر تعریف شده باشد، نمودار این تابع را رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases}-۲ & -۲\pi<x\le-\pi\\ ۱ & -\pi<x\le ۰\end{cases}$$

برای رسم چنین تابعی ابتدا در فاصلهٔ تعریف شده تابع را رسم کرده و چون تابع متناوب و تناوب اصلی آن 2π است در فاصله‌های به طول 2π همان نمودار را تکرار می‌کنیم.



۶ ـ اگر f تابعی متناوب با تناوب اصلی T_1 و g نیز تابعی متناوب با تناوب اصلی T_2 باشد، در این صورت fog متناوب با تناوب اصلی T_2 و gof نیز متناوب با تناوب اصلی T_1 است.

طبق فرض داریم: $f(x+T_1)=f(x)$ و $g(x+T_2)=g(x)$

$$(fog)(x+T_2)=f(g(x+T_2))=f(g(x))=(fog)(x)$$

$$(gof)(x+T_1)=g(f(x+T_1))=g(f(x))=(gof)(x)$$

تبصرهٔ مهم: اگر f تابعی متناوب با تناوب اساسی T_1 باشد و $g(x)=\cos x$ یا $g(x)=\sec x$ در این صورت تناوب اساسی تابع (gof) ممکن است $\frac{T}{2}$ باشد.

مثال ۹: اگر $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ در این صورت داریم:

$$T_{(\sin x)}=2\pi$$

از طرفی،

$$(gof)(x+\pi)=\cos(\sin(x+\pi))=\cos(-\sin x)=\cos(\sin x)=(gof)(x)\Rightarrow T_{(gof)}=\pi$$

۷ ـ تناوب اساسی ۴ تابع با ضابطه‌های زیر، $\frac{\pi}{2a}$ می‌باشد.

الف) $f(x)=\sin^{2n}ax+\cos^{2n}ax \quad n\in\mathbb{N}\ ,\ n\neq 1$

ب) $f(x)=tg^{2n}ax+\cot g^{2n}ax \quad n\in\mathbb{N}$

ج) $f(x)=|\sin^n ax|+|\cos^n ax| \quad n\in\mathbb{N}\ ,\ n\neq 2$

د) $f(x)=|tg^n ax|+|\cot g^n ax| \quad n\in\mathbb{N}$

اثبات ب) فرض کنیم تناوب اساسی تابع f برابر با T باشد در این صورت داریم:

$$f(x+T)=tg^{2n}a(x+T)+\cot g^{2n}a(x+T)$$
$$=tg^{2n}(ax+aT)+\cot g^{2n}(ax+aT)$$

حال اگر قرار دهیم $aT=\frac{(2k-1)\pi}{2}$ در این صورت $f(x+T)=f(x)$ خواهد شد زیرا:

$$tg^{2n}(ax+\frac{(2k-1)\pi}{2})=\cot g^{2n}ax$$

و

$$\cot g^{2n}(ax+\frac{(2k-1)\pi}{2})=tg^{2n}ax$$

$$\Rightarrow aT=\frac{(2k-1)\pi}{2}\Rightarrow T=\frac{(2k-1)\pi}{2a}\xrightarrow{k=1}T=\frac{\pi}{2a}$$

تمرین

۱ ـ تناوب اصلی هریک از تابعهای زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $f(x)=3x-[3x]$

ب) $f(x)=[2x]-2x$

ج) $f(x)=\sin^3 2x-\cos^4 3x+tg6x$

د) $f(x)=\sin x\cos x$

هـ) $f(x)=\sin x+\cos x$

و) $f(x)=\sin 2x\cos x$

(در قسمت (و) از تبدیل حاصل ضرب به حاصل جمع استفاده کنید)

۲ ـ اگر f تابعی متناوب با تناوب اصلی ۲ باشد و در فاصلهٔ $[-2,2]$ به صورت زیر تعریف شده باشد. این تابع را در فاصلهٔ $[-6,6]$ رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases}-1 & -2\le x<0\\ 1 & 0\le x\le 2\end{cases}$$

تثلیث زاویه

(قسمت اول)

●سیامک جعفری

سه مسألهٔ معروف:

تضعیف مکعب، مسأله ترسیم ضلعی از یک مکعب که حجم آن دو برابر حجم یک مکعب مفروض باشد.

تثلیث زاویه، تقسیم یک زاویه مفروض به سه قسمت مساوی به کمک خط کش و پرگار.

تربیع دایره، ساختن مربعی که دارای مساحتی برابر با مساحت دایره مفروض است. جستجوی دامنه‌دار برای یافتن پاسخهای این سه مسأله، بر هندسه یونانی اثر عمیقی گذاشت و به کشفیات بسیاری از جمله مقاطع مخروطی انجامید و بسیاری از منحنیهای درجهٔ سوم و چهارم و منحنیهای متعالی به تنوع فراوانی دست یافت. نتیجه‌ای که مدتها بعد، از آن بدست آمد، پیدایش بخشهایی از نظریه معادلات دربارهٔ **حوزه‌های گویا، اعداد جبری** و **نظریه گروه‌ها** بود.

غیرممکن بودن این سه مسأله با این محدودیت، به کمک خط کش و پرگار تا قرن نوزدهم یعنی متجاوز از ۲۰۰۰ سال بعد از آن که این مسائل متصور گشته بودند، ثابت نشده بود. انجام ترسیمها با این دو وسیله، یکی از دل‌انگیزترین بازیهای ریاضی است و ترسیمهایی که فقط با این دو می‌توان به دست آورد، گاهی مایهٔ شگفتی است.

شما در مطالبی که طی چند قسمت خواهد آمد، با برخی از این غیرممکن‌ها آشنا می‌شوید و خود نیز می‌توانید طراح یکی از آنها باشید. به عنوان مثال، قبل از مطالعه این مختصر با پشتیبانی اطلاعات هندسه کلاسیک به مسأله زیر هجوم ببرید، یافتن مرکز یک دایرهٔ مفروض فقط به کمک خط راست (خط کش غیرمدرج) غیرممکن است. می‌بینید، این نمونه از مسائل همیشه صورت پیچیده‌ای ندارند.

یکی از این مسائل که ریاضیدانان یونانی را از زمانهای دور به خود مشغول داشت، یافتن روشی بود که در آن با استفاده از خط کش و پرگار بتوان یک زاویه مفروض را به سه بخش تقسیم کرد، نشان خواهیم داد که این امر غیرممکن است.

ریاضیات مانند پهنه‌ای گسترده است. براساس آن می‌توان بناهای نوساخت یا بناهای کهنه را از نو پی‌افکند به همین دلیل قضیه‌ها و مسائل در ریاضی همواره حرفهایی برای گفتن دارند. و این امر به زبان، قدرت استدلال و جسارت یک ریاضیدان بستگی دارد.

هیچ مسأله‌ای در ریاضی به طور کامل حل نشده است: حتی قضیه‌هایی که قطعیت آن برای همه محرز است. خلاقیت یک ریاضیدان به تردید داشتن در برهان این مسائل مربوط می‌شود. مسأله ها همیشه قابل بحث و تعمیم هستند و فرصت مناسبی در اختیار دانش‌پژوهان جاه‌طلب می‌گذارند تا با ارائه راه‌حلها و مسائل جدید، نام خود را جاویدان سازند.

اشکال خیلی پیچیده و ساده‌ای طرح و ترسیم شده و به دفتر

مجله‌های ریاضی می‌رسد ؛ که مدعیان توانسته‌اند زاویه مفروضی را به کمک خط‌کش و پرگار به‌صد بخش مساوی تقسیم کنند. در این میان حتی برخی از اساتید دانشگاه نیز به چشم می‌خورند و بنده نیز یک‌بار در سال اول دانشگاه قربانی این ادعا شدم. در آن زمان فکر می‌کردم، اگر بتوان کمان روبه‌روی زاویه مورد نظر را به کمک خط‌کش و پرگار به صد بخش تقسیم کرد، کار تمام است. کسانی هم بودند که روش مرا می‌پذیرفتند، اما آنها یا فقط توضیحات خودم را گوش می‌دادند و یا تنها به گفتن جملهٔ «خوب‌است» بسنده می‌کردند. اما به‌هنگام گوش دادن به توضیحات نیز فقط به اشاره‌های من به اضلاع و نقاط، نگاه می‌کردند، که مایل بودم هرچه زودتر نتیجه را اعلام کنم.

در این‌جا یادآوری می‌کنیم که غیرممکن در ریاضی با آنچه در میان مردم رایج است، فرق می‌کند. در یک دستگاه ریاضی مشخص، غیرممکن مانند یک تناقض با اصول متعارف یا اصول موضوعه در آن دستگاه ظاهر می‌شود. امر غیرممکن در این دستگاه نسبی نیست. مانند این گزاره که مجموع دو عدد فرد، عددی فرد است وغیرممکن است، جمع آنها زوج باشد. مانند این که بگویید «غیرممکن است حسن بتواند این وزنه را بلند کند» یا «زمانی غیرممکن بود انسان روی کرهٔ ماه راه برود.»

در هرحال، باید این دو امر را که یکی نسبی و دیگری قطعی است ازهم جدا کرد. تعداد غیرممکن‌ها در ریاضیات کمتر از ممکن‌ها نیست. شاید بتوان با مثالهایی مسأله را روشن ساخت.

غیرممکن است جمع دو عدد زوج، فرد باشد.

غیرممکن است دایره، دو مرکز داشته باشد.

غیرممکن است دو خط موازی، یکدیگر را قطع کنند.

غیرممکن است دو عدد، دو تا ب.م.م داشته باشند.

هردستگاه ریاضی، چه جبری و چه هندسی، برمبنای اصولی استوار است ؛ اصولی که مورد پذیرش در علوم است و به آنها اصول متعارف‌می‌گویند. چنین‌است‌که هرچیزی با خودش برابر است. و اصولی که در علم مورد نظر پذیرفته است ؛ مانند مجموع زوایای داخلی مثلث که °۱۸۰ است.

در این دستگاه، «عمل» تعریف می‌شود. ادراک یک دستگاه ریاضی به این *عمل* وابسته است. به‌طور منطقی به کمک اصول و این عمل نتایج نوینی به بارمی‌آید که ساختمان دستگاه ریاضی را بنا می‌کند. هندسهٔ اقلیدسی و غیراقلیدسی، دو نمونه از این دستگاههای ریاضی هستند.

در دستگاه ریاضی مجموعهٔ اعداد طبیعی، اگر سالها جمع کردن میلیونها عدد زوج را تجربه کنید، هرگز جمع دوتای آنها فرد نمی‌شود. امّا اگر دستگاهی بسازید که در آن، هرعدد با تالی بلافصل خود برابر باشد، جمع آنها به ظاهر فرد است (این دستگاه وجود ندارد).

غیرممکن است بتوان با خط‌کش (خط راست) و پرگار، زاویه مفروضی را به سه بخش مساوی تقسیم کرد.

خط‌کش، وسیله‌ای است که تنها برای رسم خط راست، امتداد دادن آن یا اتصال دو نقطه به یکدیگر به‌کار می‌رود.

پرگار، برای رسم دایره یا کمانی از آن است. در این‌جا می‌خواهیم نشان بدهیم که به کمک این دو وسیله به تنهایی نمی‌توان زاویه‌ای را به سه بخش تقسیم کرد.

ابوجعفرخازن، ریاضیدان و منجم ایرانی، بین سالهای ۳۵۰ و ۳۶۰ در نیمهٔ اول قرن چهارم، در کتاب خود با عنوان «اصلاح کتاب مخروطات» دربارهٔ مسأله تثلیث زاویه بحث کرده است.

ابوالجود، ریاضیدان ایرانی در نیمه دوم سدهٔ چهارم در حل مسأله، تحقیقاتی داشته و در رساله‌ای به پرسشهای *ابوریحان بیرونی* پاسخ داده است.

ابوالحسن شمسی هروی، ریاضیدان ایرانی که در حدود سدهٔ چهارم می‌زیسته، در رساله‌ای که دربارهٔ تثلیث زاویه تألیف کرده است، راه حلی برای این مسأله بیان می‌کند.

ابوریحان بیرونی، ریاضیدان و منجم ایرانی (۳۶۲ ــ ۴۴۲) از نوابغ روزگار و نمونه کامل هوشمندی، از جمله مفاخر ایران و دنیای دانش و پژوهش است. وی مسألهٔ تثلیث زاویه را به بیش از دوازده مسأله هندسی دیگر، معادل با آن تبدیل کرده است.

صاغانی، منجم و ریاضیدان ایرانی (... ــ ۳۷۹) دو راه حل برای حل مسأله تثلیث زاویه ارائه کرده است. وی بیش از ریاضیدانان دیگر برروی این مسأله کارکرده است.

ابوالوفا بوزجانی، به مسائل حل‌نشدنی کلاسیک هندسی، مانند تثلیث زاویه پرداخته و با کمک تثلیث زاویه، نه ضلعی منتظم را هم می‌سازد و طرز ساختن تقریبی هفت ضلعی منتظم را هم به دست می‌دهد.

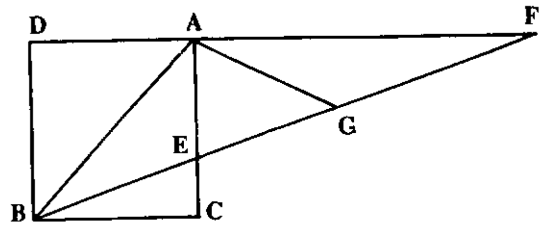
غیاث‌الدین کاشانی، در سدهٔ پانزدهم از تثلیث زاویه، برای تنظیم جدولهای مثلثاتی دقیق که برای محاسبات ریاضی و اخترشناسی لازم بود، استفاده کرد.

مسألهٔ تثلیث زاویه به یقین دربین سه مسأله مشهور، قابل فهم‌تر از همه است. از آنجا که نصف کردن یک زاویه به کمک پرگار، بسیار ساده است، شگفت‌آور خواهد بود که چرا تثلیث

آن، همین‌قدر آسان نیست.

تقسیم پاره‌خط به چندقسمت مساوی با خط کش و پرگار ساده است، و امکان دارد یونانیها نیز به تثلیث زاویه رسیده باشند. شاید نیز در ترسیم نه‌ضلعی منتظم که لزوماً باید یک زاویهٔ ۶۰ درجه را ثلث کرد، به این نتیجه دست یافته باشند.

مسألهٔ میل (Mil)



هر زاویهٔ حاده را می‌توان، زاویه‌ای فرض کرد که قطر مستطیلی مفروض با یکی از اضلاع آن می‌سازد. ما خط BF را طوری رسم کرده‌ایم که $EF = ۲BA$ باشد و G وسط EF است. به سادگی معلوم می‌شود که:

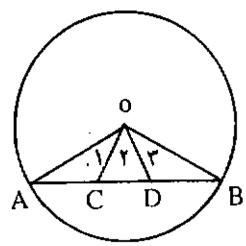
$EG = GF = GA = BA$

$\angle ABG = \angle AGB = \angle GAF + \angle GFA = ۲\angle GFA = ۲\angle GBC$

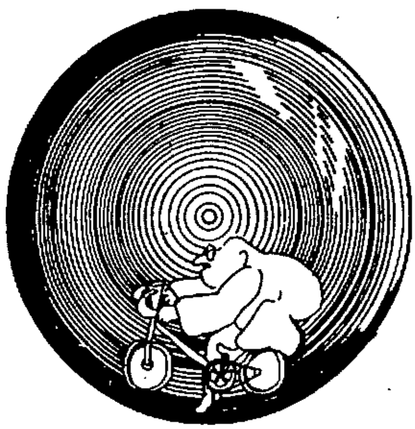
یعنی خط BEF زاویه $\angle ABC$ را ثلث می‌کند.

در شمارهٔ آینده امتناع مسألهٔ تثلیث زاویه به کمک خط کش غیرمدرج و پرگار را بیان خواهیم کرد.

تمرین: در شکل زیر اگر نقاط C و D، وتر AB را بر سه پاره‌خط برابر تقسیم کنند؛ ثابت کنید سه زاویه ۱ و ۲ و ۳ نمی‌توانند باهم برابر باشند.

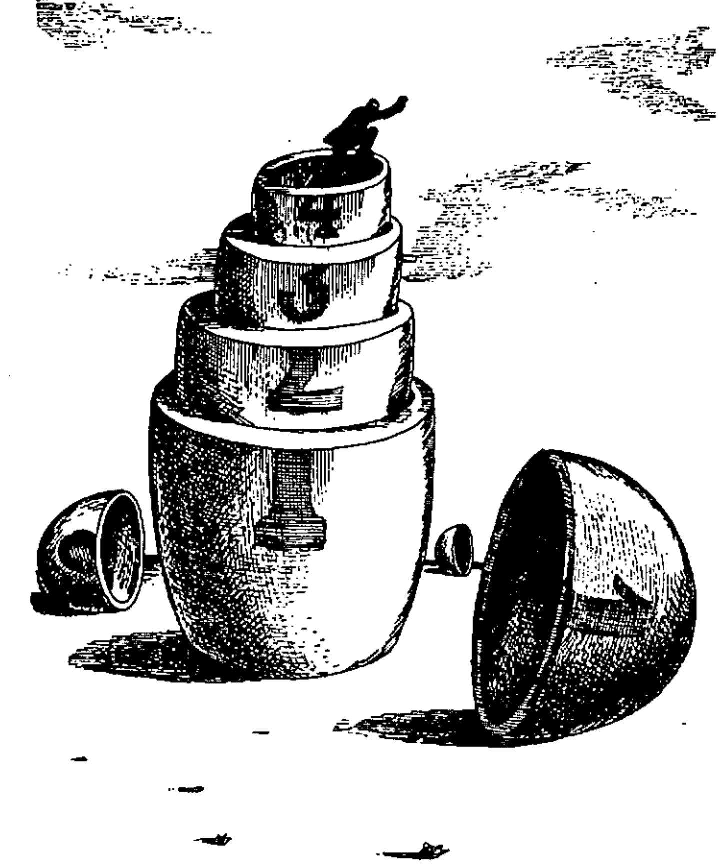


مهرداد در مسابقهٔ دوچرخه‌سواری که دریک زمین مدور برگزار می‌شد، شرکت جست. او بعداز چند ساعت متوجه شد که پنجمین نفر از شرکت کنندگان که در جلوی او حرکت می‌کرد، به $\frac{۵}{۶}$ سایر شرکت‌کنندگان که پشت سر او قرار داشتند ملحق شده‌است، و با پیوستن او، مجموع شرکت کنندگان تکمیل شد. چند نفر در مسابقه شرکت داشته‌اند؟



● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمهٔ سیمین‌دخت ترکبور

جواب در صفحهٔ ۸۸



مجموع K عدد طبیعی متوالی اولیه

● میر شهرام صدر

تحصیل ریاضی با حساب ابتدایی آغاز می‌گردد که در آن با اعداد طبیعی و «چهار عمل اصلی» بر آنها آشنا شده‌اید، این اعداد وسیله‌ای برای شمردن و شماره‌گذاری هستند.

همان‌طور که می‌دانید مجموعه اعداد طبیعی ($\mathbb{N}$)[۱] متشکل از اعداد زوج و فرد است، هر عدد طبیعی مضرب ۲ را زوج و هر عدد طبیعی را که مضرب ۲ نباشد، فرد گوییم.

مجموعه اعداد زوج طبیعی را با حرف E [۲] نمایش می‌دهیم:

$E=\{۲,۴,۶,۸,\ldots\}$

با دقت در جدول:

$(k\in\mathbb{N})$

k	۱	۲	۳	۴ ...	k
۲k	۲×۱=۲	۲×۲=۴	۲×۳=۶	۲×۴=۸	۲k

ملاحظه می‌کنید که مجموعه اعداد زوج طبیعی را می‌توان به صورت $E=\{۲k \mid k\in\mathbb{N}\}$ نشان داد، یا اینکه k امین عدد زوج طبیعی برابر با ۲k $(k\in\mathbb{N})$ است، به عنوان مثال دهمین عدد زوج طبیعی ۲۰=۱۰×۲ یا سی‌امین عدد زوج طبیعی ۶۰=۳۰×۲ می‌باشد.

اگر از هر عدد زوج طبیعی یک واحد کم کنیم، یک عدد فرد طبیعی به دست می‌آید، مجموعه اعداد فرد طبیعی را با حرف O[۳] نمایش می‌دهیم: $O=\{۱,۳,۵,۷,\ldots\}$

با دقت در جدول: $(k\in\mathbb{N})$

۲k	۲	۴	۶
۲k−۱	۲−۱=۱	۴−۱=۳	۶−۱=۵

۸−۱=۷	... ۲k
۷	... ۲k−۱

می‌بینیم که مجموعه اعداد فرد طبیعی را می‌توان به صورت $O=\{۲k-۱ \mid k\in\mathbb{N}\}$ نشان داد، یا اینکه k امین عدد فرد طبیعی برابر با ۲k−۱ $(k\in\mathbb{N})$ می‌باشد، برای مثال هشتمین عدد فرد طبیعی ۱۵=۱−۸×۲ یا سی‌امین عدد فرد طبیعی ۵۹=۱−۳۰×۲ می‌باشد.

هدف از این مقاله این است که مجموع k عدد طبیعی متوالی اولیه را به دست آوریم، برای این منظور k عدد طبیعی متوالی اولیه را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$۱,۲,۳,\ldots,k-۲,k-۱,k$

فرض کنیم مجموع این عددها برابر با S باشند:

$S=۱+۲+۳+\ldots+(k-۲)+(k-۱)+k$

اکنون مجموع S را دوبار می‌نویسیم، با این شرط که در سطر دوم، ردیف جمله‌ها برعکس باشند؛ اگر اعداد دو سطر را

---

۱. Natural numbers ۲. Even ۳. odd

نظیر به نظیر با هم جمع کنیم :

$$\begin{array}{l} S = 1+2+3+\ldots+(k-2)+(k-1)+k \\ +\ \ S = k+(k-1)+(k-2)+\ldots+3+2+1 \\ \hline S+S = (k+1)+(k-1+2)+(k-2+3)+\ldots \\ +(k-2+3)+(k-1+2)+(k+1) \\ 2S = \underbrace{(k+1)+(k+1)+(k+1)+\ldots+(k+1)+ (k+1)+(k+1)}_{\text{k مرتبه}} \end{array}$$

$$2S = k\times(k+1)$$

با تقسیم طرفین برابری بالا بر عدد ۲ داریم :

$$S = \frac{k(k+1)}{2} \qquad (1)$$

روایتی درباره ریاضیدان نامی، کارل فردریک گوس (۱۸۵۵ــ ۱۷۷۷) وقتی دانش‌آموز دبستان بود وجود دارد که راه حل فوق را در پاسخ به معلم ریاضی خود برای مجموع اعداد ۱ تا ۱۰۰ به کار برد. به عنوان مثال ؛ مجموع ۲۰ عدد طبیعی اولیه متوالی به کمک رابطه (۱) برابر است با :

$$S = 1+2+3+\ldots+20 = \frac{20(20+1)}{2} = 210$$

همچنین مجموع ۱۰۰ عدد طبیعی متوالی اولیه برابر است با :

$$S = 1+2+3+\ldots+100 = \frac{100(100+1)}{2} = 5050$$

به همین ترتیب می‌توان مجموع k عدد زوج طبیعی اولیه را محاسبه کرد، برای این منظور k عدد زوج اولیه را به صورت زیر در نظر می‌گیریم :

$$2,4,6,8,\ldots,(2k-4),(2k-2),2k$$

اکنون اگر مجموع عددهای بالا را برابر با S بگیریم و آن را مانند قبل دوبار بنویسیم، سپس اعداد دو سطر را نظیر به نظیر با هم جمع کنیم :

$$\begin{array}{l} S = 2+4+6+\ldots+(2k-4)+(2k-2)+2k \\ S = 2k+(2k-2)+(2k-4)+\ldots+6+4+2 \\ \hline S+S = (2k+2)+(2k-2+4)+(2k-4+6)+\ldots+ \\ (2k-4+6)+(2k-2+4)+(2k+2) \\ 2S = \underbrace{(2k+2)+(2k+2)+(2k+2)+\ldots+(2k+2)+ (2k+2)+(2k+2)}_{\text{k بار}} \end{array}$$

$$2S = k(2k+2) \Rightarrow 2S = 2k(k+1)$$

با تقسیم طرفین برابری بالا بر عدد ۲ داریم :

$$S = k(k+1) \qquad (2)$$

به عنوان مثال مجموع پنج عدد زوج اولیه به کمک رابطه (۲) برابر است با :

$$S = 2+4+6+8+10 = 5(5+1) = 30$$

همچنین مجموع هفتاد عدد زوج اولیه برابر است با :

$$S = 2+4+6+\ldots+140 = 70(70+1) = 4970$$

اگر k عدد فرد طبیعی را به صورت زیر در نظر بگیریم، مشابه با روند قبل می‌توان مجموع k عدد فرد اولیه را به دست آورد :

$$1,3,5,\ldots,(2k-5),(2k-3),2k-1$$

فرض کنیم مجموع این عددها برابر با S باشند، اگر مجموع S را در دو سطر بنویسیم، به طوری که در سطر دوم ترتیب عددها برعکس باشند و اعداد دو سطر را نظیر به نظیر با هم جمع کنیم :

$$\begin{array}{l} S = 1+3+5+\ldots+(2k-5)+(2k-3)+(2k-1) \\ S = (2k-1)+(2k-3)+(2k-5)+\ldots+5+3+1 \\ \hline S+S = (2k-1+1)+(2k-3+3)+(2k-5+5) \\ +\ldots+(5+2k-5)+(3+2k-3)+(1+2k-1) \\ 2S = \underbrace{2k+2k+2k+\ldots+2k+2k+2k}_{\text{k بار}} \end{array}$$

$$2S = k\times 2k \Rightarrow 2S = 2k^2$$

با تقسیم طرفین برابری بالا بر عدد ۲ داریم :

$$S = k^2 \qquad (3)$$

با توجه به رابطهٔ (۳) ملاحظه می‌کنیم که مجموع k عدد فرد متوالی اولیه برابر با k^2 و مربع کامل است. به عنوان مثال به کمک رابطهٔ (۳) مجموع ۱۵ عدد فرد متوالی اولیه برابر است با :

$$S = 1+3+5+\ldots+29 = 15^2 = 225$$

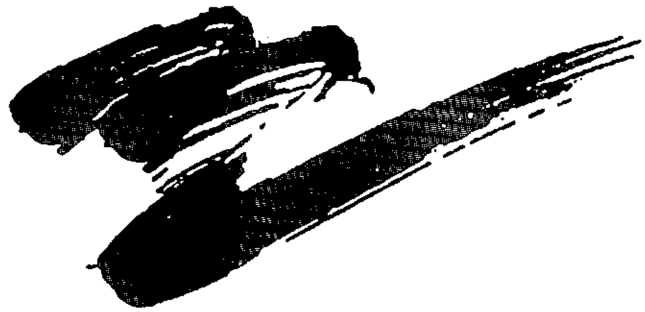
همچنین مجموع ۵۰ عدد فرد اولیه برابر است با :

$$S = 1+3+5+\ldots+99 = 50^2 = 2500$$

منابع:

۱ ــ آنالیز ریاضی ــ دکتر غلامحسین مصاحب
۲ ــ خلاقیت ریاضی. تألیف جورج پولیا. ترجمهٔ پرویز شهریاری

شلوار کوتاه موبیوس



ترجمه: کریم احمدی دلیر

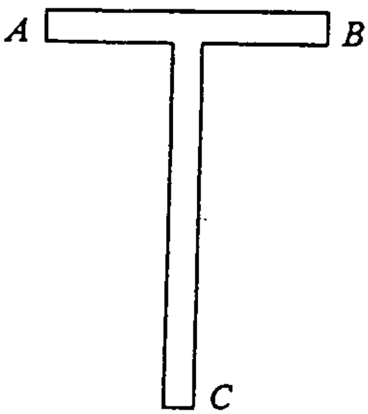
گروه ریاضی دانشگاه تربیت معلم تبریز

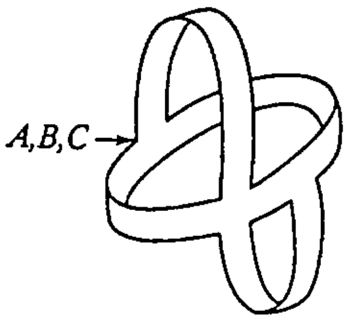
برگردان از مجلهٔ :

"Mathematics Magazine" (vol. 68, No. 2, April 1995)

یکبار به خاطر افراط بیش از حد در «مطالعهٔ بدون تبعیض» مورد-انتقاد قرار گرفتم. در **فرهنگ ریاضیات** اثر آ. بوویه[1] و ام. ژرژ[2] (پاریس، ۱۹۷۹)، در صفحهٔ ۴۷۷ مدخلی تحت عنوان «Slipde Möbius»، که به گورمالین[3] نسبت داده شده است، یافتم. بر طبق Petit Larousse معتبر، لغت فرانسوی «slip» به معنای «شلوار کوتاه» است. این شیء یک رویهٔ یک طرفه است که به نظر می‌رسد در محافل ریاضی آمریکا شناخته شده نباشد.

برای ساختن یک نمونهٔ کاغذی، با یک تکه کاغذ T ـ شکل با دسته‌ای دراز شروع کنید. سر T را جهت ساختن یک حلقه (بدون آن که بپیچانید)، خم کنید و A و B را به هم بچسبانید. C را به طرف بالا از درون حلقه بگذرانید، C را به طرف پایین (بدون آن که بپیچانید) برگردانید و C را به خارج حلقه در AB بچسبانید.





تحقیق کنید که شما یک رویهٔ یک طرفه ساخته‌اید. حال حدس بزنید، که اگر هم حلقه را و هم دستهٔ اولیه را از طول خطوط میانی آنها ببرید، چه اتفاقی می‌افتد. سپس ببینید که آیا می‌توانید چیزی را که حاصل شده دوباره به حالت قبلی برگردانید.

مکاتبهٔ شخصی، مرحوم رالف. پ. باوس، فرزند[4] (۱۹۹۲).

یادداشتها

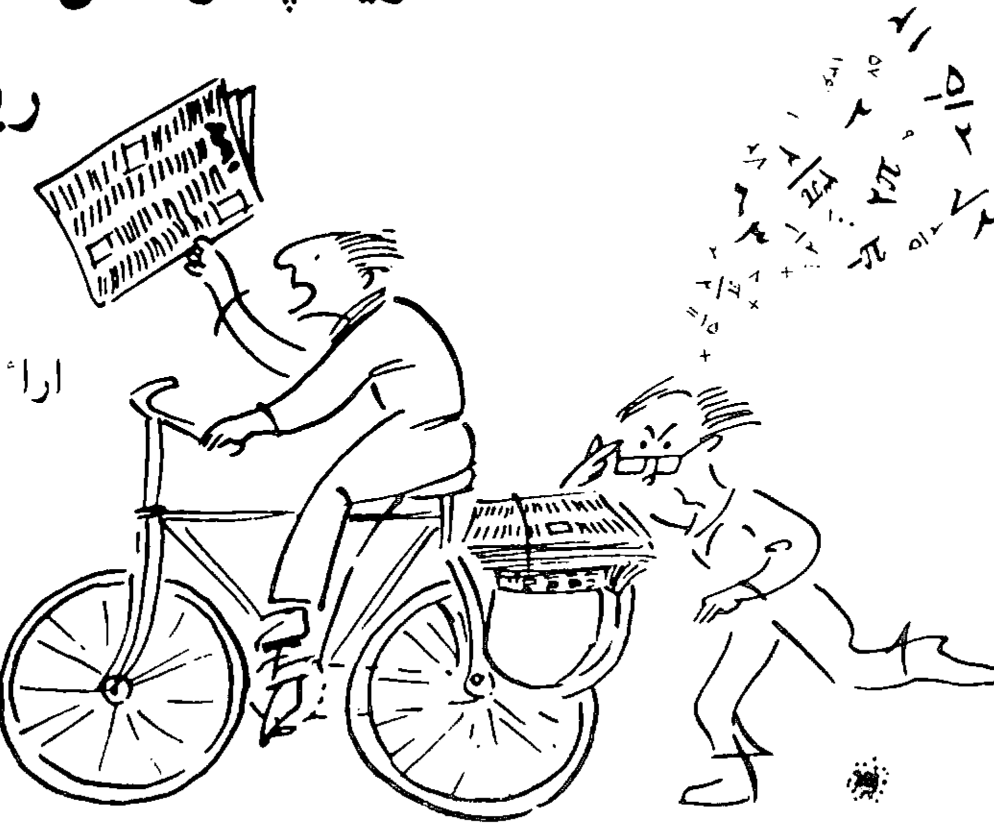
۱ ـ A.Bouvier

۲ ـ M.George

۳ ـ Gourmalin

۴ ـ The late Ralph P.Boas, Jr.

تاریخچه و نقش مجله‌های آموزشی ریاضی در آموزش ریاضیات



ارائه شده در دومین کنفرانس آموزش ریاضی ایران

• حمیدرضا امیری
• میرشهرام صدر

الف ـ مقدمه

۱ ـ تاریخچه مختصری از مجله‌های ریاضی در ایران

بنا به گفتهٔ پژوهشگر تاریخ ریاضیات، آقای پرویز شهریاری، قدیمی‌ترین نشریهٔ ریاضی «حل‌المسائل ریاضی» است که شامل حل مسائل شعب مختلفه علوم ریاضی بوده و با رهنمودهای آقای «ناصر هورفر» انتشار می‌یافته است. ناگفته نماند که ما قدیمی‌تر ازاین مجله را نیافته‌ایم.

جلد اول این مجله در ۱۵ دی‌ماه ۱۳۰۶ شمسی، در مطبعهٔ نهضت شرق تهران به‌چاپ رسیده و در اوّل و پانزدهم هرماه منتشر می‌شد. درضمن، دراین مجله بعضی از مسایل امتحانات نهایی ایران و اروپا و... اتخاذ می‌شد. این مجله به قطع بزرگ و به خط نستعلیق و به خامهٔ زرین خط[1] است. دراین مجله با اسامی افراد معروفی نظیر، تقی هورفر، محمدعلی مجتهدی، غلامحسین مصاحب، محمود مهران و محسن هشترودی روبه‌رو می‌شویم.

دومین نشریه: مجله ریاضیات «عالی و مقدماتی» است که درسال ۱۳۰۹ در تهران به‌چاپ رسیده است. مدیر مسؤول و مؤسس آن دکترمصاحب بود. مجله در اوّل و پانزدهم هرماه با چاپ درمطبعه علمی منتشر می‌شد و وجه اشتراکش سالیانه از ۲۵ تا ۴۰ قران (برای محصّلان ۱۰ قران) بود.

نشریهٔ سوم: «گاهنامه» بوده که تحت نظر و مراقبت آقای «هورفر» در سال ۱۳۱۰ چاپ می‌شده است. گاهنامه یعنی سالنامه و تقویم، اگرچه گاهنامه، نشریهٔ ریاضی نبوده ولی بخشی از آن به معرفی ریاضیدانان ایرانی اختصاص داشت. درپایان گاهنامه، برخی از رساله‌های ریاضی ترجمه می‌شد و برخی از سندهای علمی مربوط به دانشمندان ایرانی درج می‌گردید. یکی از این سندها مربوط به *ابوسهل* بیژن‌بن رستم کوهی، اهل طبرستان بوده که در سدهٔ چهارم قمری می‌زیسته و با همکاری مستقیم *ابوالوفای بوزجانی* به رصد و تنظیم جدولهای اخترشناسی مشغول بوده است. این دانشمند ایرانی وسیله‌ای برای رصد خورشید ساخت که بسیار دقیق بود و دوبار به فاصله هر سه ماه، توسط دانشمندان مورد آزمایش قرار گرفت. ترجمهٔ

دومین تأییدنامه دانشمندان به زبان فارسی، در پشت جلد برهان شماره ۱۲(دبیرستان) آمده است. در ضمن، گاهنامه ظاهراً تنها به مدت سه سال به چاپ رسیده است.

چهارمین نشریه ؛ «سخن ادبی» باهمکاری پرویز شهریاری به طبع می‌رسید و بارها بحثهایی درباره آموزش ریاضی در آن آمده است.

پنجمین نشریه ؛ «سخن علمی» به سردبیری آقای پرویز شهریاری در سال ۱۳۴۲ در تهران به چاپ رسیده است، مطالب و مقالات این مجله به‌طور کلی به علم و مباحث آن می‌پرداخت. ولی چون سردبیر این مجله آقای شهریاری بود، مطالبی درباره ریاضی و آموزش ریاضی درآن نوشته می‌شد.

ششمین نشریه ؛ «مجلهٔ یکان» در بهمن ماه ۱۳۴۲ پا به عرصه مطبوعات ایران گذاشت، عنوان کامل مجله «یکان مجلهٔ ریاضیات» بود و صاحب امتیاز، مدیر و سردبیر مجله آقای عبدالحسین مصحفی بودند. بهای هر شماره ۲۰ ریال و هرماه یک‌بار منتشر می‌شد. دراین مجله با اسامی افراد معروفی نظیر دکتر محسن هشترودی، احمد بیرشک، حسین آزرم، غلامرضا مسجدی، پرویز شهریاری، محمد حسن رزاقی روبه‌رو می‌شویم. در شمارهٔ ۷ این مجله، مصاحبه‌ای با دکتر محسن هشترودی انجام گرفته است که متن کامل این مصاحبه را در برهان ۱۳، استاد یاسی‌پور در مقالهٔ «تاریخچهٔ مجلات ریاضی در ایران» آورده است. درضمن آخرین شماره این مجله (۱۱۸) در سال ۱۳۵۶ به‌چاپ رسید.

هفتمین نشریه ؛ «مجلهٔ آشتی با ریاضیات» در بهار سال ۱۳۵۶ به سردبیری آقای پرویز شهریاری توسط دانشگاه آزاد آن روز پا به عرصهٔ مطبوعات ایران گذاشته است. دو رکن اساسی این مجله، پرداختن به تاریخ ریاضیات و کاربرد ریاضیات است. این مجله در شماره ۲۰ تعطیل شد.

هشتمین نشریه ؛ «مجلهٔ آشنایی با ریاضیات» درسال ۱۳۶۴ به دنبال آشتی با ریاضیات پا به عرصهٔ مطبوعات گذاشت و تقریباً ۸۰ شماره از این دو مجله چاپ گردید، این مجله تا سال ۱۳۷۲ چاپ می‌شد.

نهمین نشریه ؛ «مجله رشد آموزشی ریاضی» است که در سال ۱۳۶۳ اولین شماره آن چاپ شد. این مجله فصلنامه است و بیشتر مخاطبان آن دانشجویان تربیت معلم و معلم‌های ریاضی هستند.

دهمین نشریه ؛ «جنگ ریاضی» است که تاکنون ۱۰ شماره به سردبیری آقای بهزاد منوچهریان به چاپ رسیده است.

یازدهمین نشریه ؛ «مجله ریاضی برهان» در سال ۱۳۷۰ به سردبیری آقای امیری کارخود را آغاز کرد و بیشترین مخاطبان این مجله دانش‌آموزان دوره متوسطه و پیش‌دانشگاهی و معلمهای ریاضی است. در کنار این مجله، در سال ۱۳۷۰، مجلهٔ ریاضی برهان راهنمایی، ابتدا به سردبیری آقای حمیدرضا امیری و سپس به سردبیری آقای خسرو داوودی به طبع رسید. این دو مجله توسط انتشارات مدرسه، وابسته به آموزش و پرورش به‌چاپ می‌رسد.

از نشریه‌های دیگر ریاضی می‌توان از «نشریهٔ ریاضی» «بولتن‌ها و خبرنامه‌های انجمن ریاضی ایران»، مجلهٔ گنجینه (انتشارات فاطمی) و «نشریه‌ها و مجله‌های ریاضی مرکز تحقیقات معلمان» نام برد.

۲ ـ اصولاً ارتباط آموزشی بین یک مجله آموزشی ریاضی با مخاطبان خود یک ارتباط غیرکلامی و اصطلاحاً «مقاله‌ای» است و این یکی از حساسترین جوانب کار است. زیرا مقالات باید به گونه‌ای باشند که مخاطب بدون واسطه بتواند به اهداف آموزشی مقاله رسیده و حداکثر استفاده را ببرد. به اعتقاد ما، مقاله‌ها باید به‌گونه‌ای باشند که ارتباط بین یک مقاله آموزشی و مخاطب آن، ارتباطی مانند معلم و شاگرد در سر کلاس باشد. معلم هنگام تدریس در کلاس، مثالهایی را ارائه می‌کند که آوردن آنها بر روی کاغذ کاری مشکل است، همچنین ممکن است با رفتارش، نوع حرف‌زدنش و مثالهایی که مطرح می‌کند، باعث جذب دانش آموزان شود، اما در یک مقاله، دانش‌آموز حروف و اعداد را می‌بیند.

بنابراین، مقالات باید با زبانی گویا، مطالب را به مخاطب عرضه کرده و ابهامی نداشته باشند، یا اگر دریک مقطع، مبهم باشند، درمقطعی دیگر به گونه‌ای که نوعی آموزش در آن نهفته باشد، جوابگوی آن ابهام باشند. به عنوان مثال اگر در مقاله‌ای عنوان کردیم که تابعی مانند f دارای نقطه ماکزیمم نسبی باشد ؛ درآن نقطه مشتق تابع برابر با صفر است ولی عکس آن برقرار نیست (ایجاد ابهام). باید در قسمت دیگر مقاله این ابهام رفع شود و به مقاله‌های بعدی ارجاع داده نشود و با یک مثال نقض به صورت زیر نشان می‌دهیم که عکس حکم بالا برقرار نیست :

درتابع $f(x) = x^3$ ، $f'(0) = 0$ اما در نقطه $x = 0$ تابع ماکزیمم ندارد.

مقالات باید به زبان مخاطب و درحد واندازه‌های او نوشته

شوند و همواره از نوعی تازگی و تنوع برخوردار باشند. به بیان دیگر و کاملتر ارتباط بین مجله‌های آموزشی ریاضی و مخاطبان آن می‌بایست ارتباط بین معلم و شاگرد باشد.

۳ ـ این که آیا مجله‌های ریاضی واقعاً تا چه‌حد رسالت خود، یعنی نقش معلم‌گونهٔ خود را توانسته‌اند ایفا کنند، سؤالی است که مخاطبان مجله بهتر و دقیقتر می‌توانند به آن پاسخ بدهند و درواقع بهترین الگوها و خط مشی‌ها از همین بازخوردها به دست می‌آیند وهمواره مجله‌های ریاضی و دست‌اندرکاران آنها را مجاب می‌کند که درمعرض نظرخواهی و ارزشیابی قرار بگیرند.

۴ ـ به اعتقاد ما یکی از عاملهای مؤثر در پیشرفت و پیشبرد اهداف آموزشی، رقابت سالم و سازنده است و این امر درمورد مجله‌های ریاضی و چاپ مقالات از طرف مؤلفان و مترجمین نیز صادق است. لذا اگر تعداد مجله‌های ریاضی درمقاطع مختلف بیشتر باشد، این‌رقابت بیشتر خواهد شد و بی‌تردید کیفیت کار بالا خواهد رفت.

ب ـ ویژگیهای آموزشی از طریق مجله‌های آموزشی ریاضی

۱ ـ از ویژگیهای آموزش از طریق مجله‌های آموزشی ریاضی، در دسترس بودن و فاصله کوتاه زمانی در چاپ آنهاست. بنابراین همواره با سرعت می‌توان تازه‌ترین روشهای آموزشی و مطالب ریاضی را به مخاطبان منتقل کرد. و نیز می‌توان مخاطبان را در جریان آخرین دست‌آوردها، کنفرانسها و رویدادهای مهم ریاضی قرار داد.

۲ ـ درحال‌حاضر، معمولاً تیراژ کتابهای ریاضی ۵ الی ۱۰ هزار نسخه است. در صورتی که مجله‌های ریاضی دارای تیراژ بالاتری هستند و در نتیجه طیف وسیعتری از مخاطبان را پوشش می‌دهند.

۳ ـ علاوه بر آن، اگرمسایل مربوط به هنر گرافیک درمجله‌ها رعایت شود، با بهره جستن از این هنر می‌توان تنوّعی جذّاب ایجاد کرد و مطالب ریاضی را از یکنواختی و خشکی کتابهای ریاضی نجات بخشید. درنتیجه، انگیزه و علاقه برای مطالعه مقالات ریاضی فزونی خواهد یافت.

۴ ـ خواننده مجله با پرداخت مبلغی که معمولاً مقدار آن از قیمت یک کتاب ـ حتی با همان تعداد صفحات مجله ـ کمتر است (بدلیل تیراژ بالای مجله) می‌توانند از چندین مقاله در زمینه‌های مختلف و مسایل سرگرم کننده و متنوع برخوردار باشند.

۵ و ۶ ـ از مهمترین ویژگیهای مجله‌های ریاضی، تشویق خوانندگان و به‌کار گرفتن استعدادهاست و می‌تواند حتی با ذکر یک اسم یا چاپ یک مسأله و یا چاپ یک مقاله، محرکی مفید برای معلمان محسوب شود. این امر بارها تجربه شده و در نامه‌هایی که به دفتر مجله ارسال می‌شود، این‌گونه مطالب بسیار به‌چشم می‌خورد.

تاریخچهٔ مختصری از موضوع درسی، می‌تواند پیش از تدریس دردانش‌آموز ایجاد انگیزه کند، به‌عنوان مثال دررابطه با مشتق می‌توان گفت: نیوتن از درون مکانیک و لایپ از درون هندسه به مفهوم مشتق و دیفرانسیل پی بردند. بااین‌که دانش‌آموزان بدانند که شخصیتهای مهمی مانند اولروفرما دربرهان بعضی قضایا از استقرای ناقص استفاده می‌کردند و گاهی اشتباه می‌کردند. همچنین با زبان ساده (زبان بچه‌ها) در مجله بنویسیم‌وچند مطلب ریاضی را درحالت بازی و با روش فعالیت به آنها بیاموزیم.

برای این منظور ابتدا باید مطلب درسی را تا آنجا که ممکن است به صورت شهودی مطرح کنیم، سپس بر اساس فعالیت دانش‌آموز، می‌توان آن را در فرآیند حل مسأله یا اثبات قضیه قرار داد. با این روش کاری می‌کنیم که دانش‌آموز، مراحل مختلف حل مسأله را خودش انجام بدهد. این کار باعث می‌شود که دانش‌آموز تا اندازه‌ای درجریان حل مسأله قرار بگیرد و به‌جای تکرار لفظی قضایا، علم را پیش خود بازآفرینی کند، تا این‌که به نتیجه مطلوب برسد.

۷ ـ گاهی اوقات کتابهای درسی به دلیل محدودیت در تعداد صفحات مطالب را به شکل خیلی فشرده عنوان می‌کنند و درنتیجه کمبودهایی درکتابهای درسی به‌چشم می‌خورد که مجله‌های ریاضی با چاپ مقالاتی مستقل یا دنباله‌دار، می‌توانند مطلب مزبور را پوشش داده و تا حد زیادی این خلأها را پر کنند. بعضی از کاربردهای ریاضی مرتبط با رئوس مطالب درسی، باید در مجله مطرح گردد، تا هم دانش‌آموز با مفهوم و طرح درس آشنا شود و هم بداند که ریاضی به‌چه دردی می‌خورد.

درحقیقت، آموزش ریاضی یعنی شیوه‌ای از کار که نخست مفاهیم را به صورت درست و قانع‌کننده در اختیار دانش‌آموزان

قرار دهد و راهی پیدا کنند که درست بودن و قانع‌کننده بودن این راهها را جبران کند. همچنین مجلهٔ ریاضی باید شامل تاریخ و فلسفه ریاضی و سرگرمیهای ریاضی باشد، تا خلأهای موجود در کتابهای درسی را از این طریق جبران کند.

۸ ـ کار دیگر مجله، آشنایی مخاطبان علاقه‌مند با نظریه‌ها و شاخه‌های جدید ریاضی و آخرین دستاوردهای جهانی است.

۹ ـ تعداد شیوه‌های آموزشی خوب، به تعداد معلمان کارآزموده است و هرکس می‌تواند شیوه‌های آموزشی موفق خود را دراختیار دیگران قرار دهد، برای این منظور، از معلمان موفق می‌خواهیم که یک موضوع درسی را درنظر بگیرند و عملکرد خود را سر کلاس با توضیحات، مثالها، تکالیف و غیره گزارش کنند. این کار در مجله برای معلم می‌تواند انتقال یک تجربه باشد، بنابراین معلمان ریاضی بویژه معلمان جوان می‌توانند با مطالعه این تجربه‌ها، روش آموزشی با شیوه دیگری را پیدا کنند که غیر از آنها ولی سازگار با آنها و بدون این که تناقضی با آنها داشته باشند، به‌کار گیرند و سر کلاس از آنها استفاده کنند.

بیشتر مجله‌های ریاضی مشکلات درسی دانش آموزان را رفع می‌کنند و کمتر التفاتی به معلمان دارند. یکی از هدفهای آموزش ریاضی به‌طور قطع آموزش معلمان است، بنابراین اگر قسمتی از مجله را به معلمان اختصاص دهیم و برای آنها بنویسیم، درنتیجه ازاین طریق به طور غیرمستقیم، دانش‌آموزان را هم آموزش داده‌ایم.

همچنین از طریق مصاحبه با پیشکسوتان آموزش ریاضی کشور، می‌توان تجربه‌های مفید آموزشی را انتقال داد.

۱۰ ـ آگاه کردن مخاطبان از فهرست موضوعی آخرین کنفرانسها و رویدادهای ریاضی در داخل و خارج از کشور.

ج ـ نقش مخاطبان در پیشبرد هدفها و هرچه بهتر شدن مجله‌های آموزش ریاضی

۱ ـ بهترین عامل پیشرفت نظرات مخاطبان و اعمال سلیقه‌ها و پیشنهادات آنهاست، چه اینکه صاحبان اصلی مجله ایشان هستند.

۲ ـ مقالات ارسالی به دفتر مجله می‌تواند در فصول مختلف و مقاطع مختلف و بانظر هیأت تحریریه چاپ شود، که خود به‌عنوان پشتوانه‌ای برای مجله است.

۳ ـ با توجه به همه موارد ذکر شده، لزوم راه‌اندازی مجله‌های جدید و پشتیبانی ازمجله‌های موجود به خوبی احساس می‌شود و این امر مهم، عزمی بلند و راسخ و عشقی وافر به امر آموزش را می‌طلبد.

۱. استاد پیشین انجمن خوشنویسان ایران، مرحوم حسن زرّین خط.

ادب ریاضی

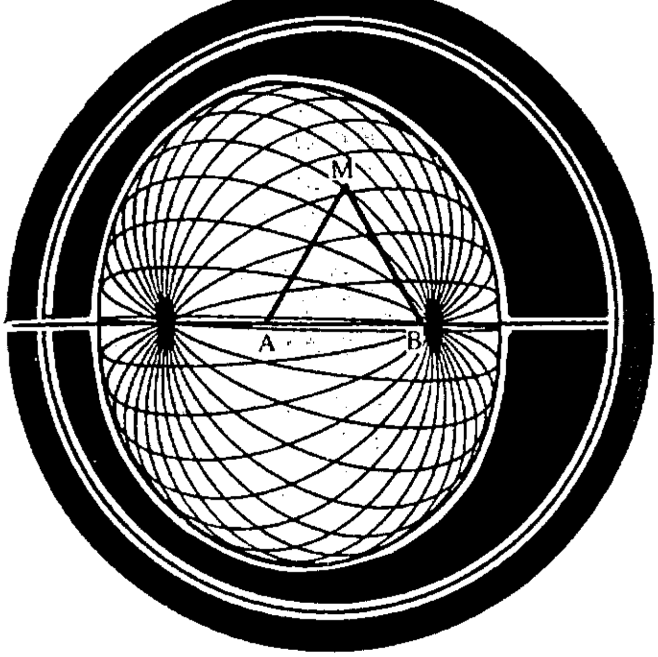
کشور فرانسه هنگام انقلاب در خطر هجوم خارجی بود و مادر وطن با حالی خسته و مجروح فرزندان خود را به کمک می‌طلبید. فریاد برآمد که باید توپ ساخت! باید باروت تهیه کرد! باید شوره از زمین استخراج کرد! و درحالی که **لازار کارنو** مشغول تهیهٔ تشکیلات فتح نظامی بود، **گاسپار مونژ فتح علمی** را تشکیلات می‌داد.

این مرد که فرزند فروشندهٔ دوره‌گردی بود و **هندسهٔ ترسیمی** را اختراع کرد، مانند وطن‌پرست پرشوری فعالیت می‌نمود. وی طبق منویّات کنوانسیون، درصدد تجهیز لشکری مرکب از سیصدهزار نفر برآمد و حال آنکه تمام قورخانه‌ها خالی و انبارها از شوره تهی بود و این ماده را تا آن وقت از هندوستان وارد می‌کردند.

بُرنز لازم برای تهیهٔ توپ را از کجا باید تهیه کرد؟ مونژ فریاد برآورد: «زنگها و ناقوسها را آب کنید! شوره از کجا به‌دست آوریم؟ از زمین بکنید و آن وقت ما در ظرف سه روز تمام توپهای شما را پر خواهیم کرد!»

مونژ روزها اوقات خود را به بازرسی قورخانه‌ها و توپ‌ریزیها صرف می‌کرد و شبها کتاب «فن تهیهٔ توپ» را تألیف می‌کرد.

تاریخ علوم، «پی‌یر روسو»



مکان هندسی

قسمت دوازدهم

(اوّل ، دوم ، سوم ، چهارم دبیرستان)

● محمد هاشم رستمی

مثال ۱۰ ــ هذلولی به معادلهٔ $x^۲ - y^۲ = ۴$ داده شده است. الف ــ این هذلولی را رسم کنید و مختصات مرکز رأسها و کانونهای آن رابیابید. ب ــ مختصات نقطهٔ E مزدوج توافقی نقطهٔ F نسبت به دو رأس A و A' را پیدا کنید و معادلهٔ دایرهٔ به قطر EF را بنویسید. پ ــ نقطه‌ای روی هذلولی بالا بیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و A' برابر $۲\sqrt{۲}-۳$ باشد.

حل ــ الف ــ

$$x^۲ - y^۲ = ۴ \Rightarrow \frac{x^۲}{۴} - \frac{y^۲}{۴} = ۱ \Rightarrow$$

$a^۲ = b^۲ = ۴ \Rightarrow$ ، $O(۰,۰)$ مرکز هذلولی

$$a = b = ۲ \Rightarrow c = a\sqrt{۲} = ۲\sqrt{۲} \text{ ، } A\left|\begin{matrix} ۲ \\ ۰ \end{matrix}\right. \quad A'\left|\begin{matrix} -۲ \\ ۰ \end{matrix}\right.$$

$$F\left|\begin{matrix} ۲\sqrt{۲} \\ ۰ \end{matrix}\right. \quad F'\left|\begin{matrix} -۲\sqrt{۲} \\ ۰ \end{matrix}\right.$$

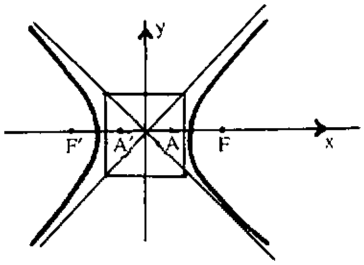
ب ــ بنا به رابطهٔ نیوتن در تقسیم توافقی داریم :

$$\overline{OE}.\overline{OF} = \overline{OA}^۲$$

$$\Rightarrow OE \times c = a \Rightarrow OE = \frac{a^۲}{c} = \frac{۴}{۲\sqrt{۲}} = \sqrt{۲} \Rightarrow$$

$E\left|\begin{matrix} \frac{a\sqrt{۲}}{۲} = \sqrt{۲} \\ ۰ \end{matrix}\right.$ ، وسط پاره‌خط EF ، $O'\left|\begin{matrix} x = \frac{x_E + x_F}{۲} \\ y = ۰ \end{matrix}\right.$

$$= \frac{\sqrt{۲} + ۲\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$$



$$R = O'E = O'F = a\sqrt{۲} - \frac{۳\sqrt{۲}}{۴}a = \frac{a\sqrt{۲}}{۴} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

شعاع دایرهٔ به قطر EF .

$$(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = R^۲ \Rightarrow (x - \frac{۳\sqrt{۲}}{۲})^۲ + y^۲ = \frac{۱}{۲}$$

معادلهٔ دایرهٔ به قطر EF

پ ــ دو نقطهٔ E و F پاره‌خط AA' را به نسبت $۳-۲\sqrt{۲}$ تقسیم می‌کنند. زیرا داریم:

$$\frac{FA}{FA'}=\frac{EA}{EA'}=\frac{c-a}{c+a}=\frac{a\sqrt{۲}-a}{a\sqrt{۲}+a}=\frac{\sqrt{۲}-۱}{\sqrt{۲}+۱}=۳-۲\sqrt{۲}$$

بنابراین مکان هندسی نقطه‌ای از این صفحهٔ مختصات که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و A' برابر $۳-۲\sqrt{۲}$ است، دایرهٔ به قطر EF است. لذا نقطهٔ برخورد این دایره با هذلولی را تعیین می‌کنیم.

$$\begin{cases} x^۲-y^۲=۴ \Rightarrow y^۲=x^۲-۴ \\ (x-\frac{۳\sqrt{۲}}{۲})^۲+y^۲=\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x-\frac{۳\sqrt{۲}}{۲})^۲+x^۲-۴=\frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲x^۲-۳\sqrt{۲}x=۰$$

$$\Rightarrow x=۰ \text{ و } x=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}،\ x=۰ \Rightarrow y^۲=-۴ \ ،$$

$$x=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow y^۲=\frac{۹}{۲}-۴=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow M_۱(\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}،\frac{\sqrt{۲}}{۲}) \text{ و}$$

$M_۲(\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}،-\frac{\sqrt{۲}}{۲})$ نقطه‌های جواب مسأله

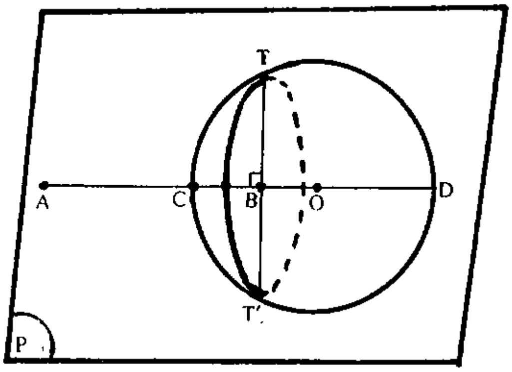
تمرین

۱ ــ پاره‌خط AB به طول ۱۲ سانتیمتر در یک صفحه داده شده است. مکان هندسی نقطه‌ای از این صفحه را بیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B مساوی $\sqrt{۲}$ باشد. شعاع دایرهٔ مکان هندسی و فاصلهٔ مرکز این دایره از نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB را پیدا کنید.

۲ ــ دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۸ سانتیمتر از یکدیگر در صفحهٔ P داده شده‌اند. الف ــ نقطه‌های C و D را روی پاره‌خط AB و در امتداد آن چنان بیابید که این پاره‌خط را به نسبت $\frac{۵}{۳}$ تقسیم کنند. دایرهٔ به قطر CD چگونه دایره‌ای است؟

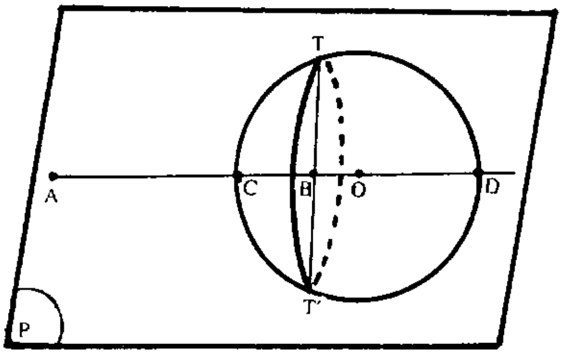
ب ــ نقطه‌ای از صفحهٔ P را تعیین کنید که از آن نقطه پاره‌خط AB به زاویهٔ ۹۰ درجه دیده شود و نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر $\frac{۵}{۳}$ باشد.

۸ ــ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر مقدار ثابت K است، کره‌ای است که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت K تقسیم می‌کند.



اثبات به روش هندسی ــ صفحهٔ دلخواه P را که بر دو نقطهٔ ثابت A و B می‌گذرد در نظر می‌گیریم و در این صفحه روی پاره‌خط AB و در امتداد آن، دو نقطهٔ C و D را چنان اختیار می‌کنیم که پاره‌خط AB را به نسبت K تقسیم کنند. آن‌گاه دایرهٔ به قطر CD را رسم می‌کنیم. می‌دانیم که این دایره مکان هندسی نقطه‌ای از صفحهٔ P است که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر مقدار ثابت K است. حال صفحهٔ P را حول خط AB دوران می‌دهیم. از دوران دایرهٔ به قطر CD واقع در این صفحه که همواره و در هر وضعی از صفحهٔ P، مکان هندسی نقطه‌ای است که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر K است، کره‌ای به قطر CD پدید می‌آید، که این کره مکان هندسی نقطه‌ای از فضا است که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر مقدار ثابت K است.

اثبات به روش تحلیلی ــ دو نقطهٔ ثابت $A(x_۱،y_۱،z_۱)$ و $B(x_۲،y_۲،z_۲)$ را در دستگاه مختصات $O-xyz$ در نظر



می‌گیریم. اگر $M(x,y,z)$ یک نقطه از مکان هندسی موردنظر، یعنی نقطه‌ای باشد که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر K است، داریم :

$$A(x_1,y_1,z_1),\ B(x_2,y_2,z_2),\ M(x,y,z)\Rightarrow$$

$$MA=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2} \quad \text{و}$$

$$MB=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2}$$

$$\frac{MA}{MB}=K\Rightarrow\frac{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}}{\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2}}=K\Rightarrow$$

$$k^2(x-x_2)^2+k^2(y-y_2)^2+k^2(z-z_2)^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2$$

پس از ساده کردن معادلهٔ بالا، معادله‌ای به صورت :

$$x^2+y^2+z^2+\frac{2(x_1-k^2x_2)}{k^2-1}x+\frac{2(y_1-k^2y_2)}{k^2-1}y+\frac{2(z_1-k^2z_2)}{k^2-1}z+\frac{k^2(x_2^2+y_2^2+z_2^2)-(x_1^2+y_1^2+z_1^2)}{k^2-1}=0 \qquad (1)$$

به‌دست می‌آید که معادلهٔ یک کره به مرکز نقطهٔ

$$O_1\left(\frac{k^2x_2-x_1}{k^2-1},\frac{k^2y_2-y_1}{k^2-1},\frac{k^2z_2-z_1}{k^2-1}\right)$$

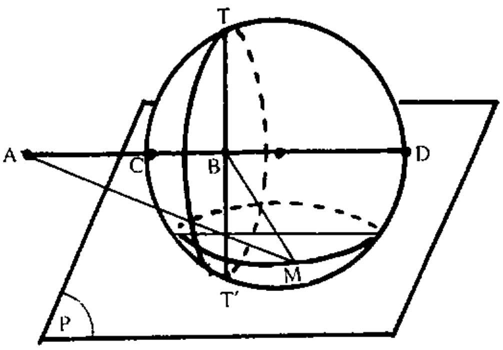
و به شعاع

$$R=\left|\frac{k}{k^2-1}\right|\times\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2+x_2^2+y_2^2+z_2^2-2x_1x_2-2y_1y_2-2z_1z_2}$$

است.

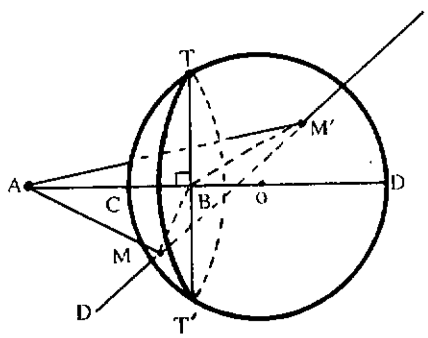
بدیهی است هر نقطه‌ای که مختصاتش در معادلهٔ (۱) صدق کند، نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت $A(x_1,y_1,z_1)$ و $B(x_2,y_2,z_2)$ برابر مقدار ثابت K است. در ضمن به کمک یکی از رابطه‌های مربوط به تقسیم توافقی، به‌عنوان مثال به کمک رابطهٔ نیوتن می‌توان ثابت نمود که قطر این کره، پاره‌خط AB را به نسبت K تقسیم می‌کند. بنابراین مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر مقدار ثابت K باشد، کره‌ای است که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت K تقسیم می‌کند.

مثال ۱ ــ صفحهٔ P و دونقطهٔ A و B غیرواقع بر آن مفروض‌اند. مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه P را بیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر مقدار ثابت K است.



حل ــ می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B مقدار ثابت K باشد، کره‌ای است که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت K تقسیم می‌کند، این کره را رسم می‌کنیم. فصل مشترک این کره با صفحهٔ P جواب مسأله است. در صورتی که کره، صفحه P را قطع کند، جواب مسأله یک دایره است، و اگر کره بر صفحهٔ P مماس باشد، جواب مسأله یک نقطه (نقطهٔ تماس کره و صفحه) است، و اگر کره، صفحهٔ P را قطع نکند مسأله دارای جواب نیست.

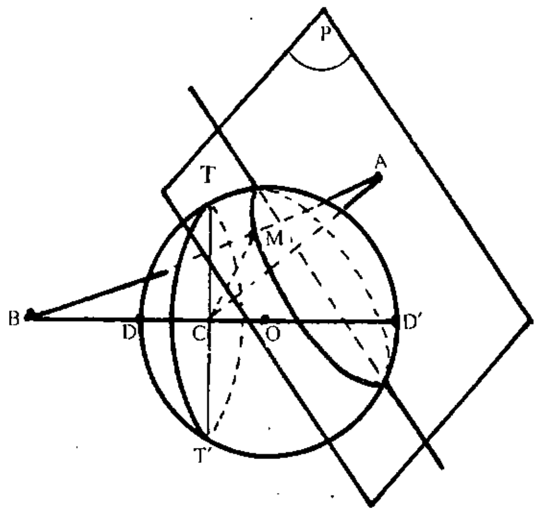
مثال ۲ ــ خط D و دو نقطهٔ A و B غیرواقع در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای روی خط D بیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطه ثابت A و B برابر K است.



حل ــ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که نسبت فاصله‌اش از دو نقطه ثابت A و B برابر K است، یعنی کرهٔ به قطر CD را چنان که C و D پاره‌خط AB را به نسبت K تقسیم کرده‌اند،

رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد این کره با خط D جواب مسأله است. مسأله حداکثر ۲ جواب دارد.

مثال ۳ ــ سه نقطهٔ A، B و C مفروض‌اند. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را بیابید که از دو نقطهٔ A و C به یک فاصله است و نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت B و C برابر مقدار ثابت K است.



حل ــ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از دو نقطهٔ A و C به یک فاصله است صفحه P عمود منصف پاره‌خط AB است که این صفحه را رسم می‌کنیم. از طرفی مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت B و C برابر K می‌باشد، یعنی کرهٔ به قطر DD′ (نقطه‌های D و D′ پاره‌خط BC را به نسبت K تقسیم کرده‌اند) را نیز رسم می‌کنیم. فصل مشترک این کره با صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AC جواب مسأله است.

مثال ۴ ــ دو نقطهٔ $A(-1,2,0)$ و $B(3,-2,1)$ مفروض‌اند. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را بیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر $\sqrt{2}$ است.

حل ــ راه اول: با قرار دادن $(x_1=-1, y_1=2, z_1=0)$ و $(x_2=3, y_2=-2, z_2=1)$ و $k=\sqrt{2}$ در معادلهٔ (۱) (معادلهٔ کرهٔ مکان هندسی نقطه‌ای که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر K است)، معادلهٔ مکان هندسی مورد نظر را به‌دست می‌آوریم. داریم:

$$x^2+y^2+z^2+\frac{2(-1-6)}{2-1}x+\frac{2(2+4)}{2-1}y+\frac{2(0-2)}{2-1}z$$

$$+\ \frac{2(9+4+1)-(1+4+0)}{2-1}=0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2-14x+12y-4z+23=0$$

معادلهٔ مکان هندسی خواسته شده

راه دوم: فرض می‌کنیم $M(x,y,z)$ یک نقطه از مکان هندسی مورد نظر باشد. در این صورت داریم:

$$A(-1,2,0)\ ,\ B(3,-2,1)\ ,\ M(x,y,z)\ ,\ k=\sqrt{2}\Rightarrow$$

$$MA=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2+z^2}\ ,$$

$$MB=\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{MA^2}{MB^2}=k^2\Rightarrow \frac{(x+1)^2+(y-2)^2+z^2}{(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2}=2\Rightarrow$$

$$2(x-3)^2+2(y+2)^2+2(z-1)^2=$$

$$(x+1)^2+(y-2)^2+z^2\Rightarrow$$

$$x^2+y^2+z^2-14x+12y-4z+23=0$$

معادلهٔ مکان هندسی خواسته شده

مثال ۵ ــ الف ــ معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را بیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطه $A(2,0,-1)$ و $B(0,3,1)$ برابر $\sqrt{3}$ باشد. ب ــ ثابت کنید که خط $D: \frac{x+1}{1}=\frac{y-\frac{9}{2}}{-2}=\frac{z-2}{2}$ از مرکز کرهٔ مکان هندسی بالا می‌گذرد. پ ــ نقطه‌هایی از خط D را مشخص سازید که نسبت فاصله‌شان از دو نقطهٔ A و B برابر $\sqrt{3}$ باشد.

حل ــ الف ــ مکان هندسی خواسته شده کره‌ای است که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت k تقسیم می‌کند. معادلهٔ این کره به صورت زیر است:

$$x^2+y^2+z^2+\frac{2(x_1-k^2x_2)}{k^2-1}x+\frac{2(y_1-k^2y_2)}{k^2-1}y+$$

$$\frac{2(z_1-k^2z_2)}{k^2-1}+\frac{k^2(x_2^2+y_2^2+z_2)^2-(x_1^2+y_1^2+z_1)^2}{k^2-1}=0$$

$$A(x_1=2,y_1=0,z_1=-1)\ ,\ B(x_2=0,y_2=3,z_2=1),$$

$$k=\sqrt{3}\Rightarrow$$

$$x^2+y^2+z^2+\frac{2(2-0)}{3-1}x+\frac{2(0-9)}{3-1}y+$$
$$\frac{2(-1-3)}{3-1}z+\frac{3(0+9+1)-(4+0+1)}{3-1}=0$$
$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2+2x-9y-4z+\frac{25}{2}=0$$

معادلهٔ کرهٔ مکان هندسی مورد نظر

ب ــ مرکز کرهٔ بالا نقطهٔ $O_1(-1,\frac{9}{2},2)$ است که مختصاتش در معادلهٔ خط D صدق می‌کند پس خط D از مرکز کره می‌گذرد.

پ ــ نقطهٔ برخورد خط D و کرهٔ مکان هندسی بالا را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2x-9y-4z+\frac{25}{2}=0 \\ \frac{x+1}{1}=\frac{y-\frac{9}{2}}{-2}=\frac{z-2}{2}=t\Rightarrow x=t-1\ , \end{cases}$$

$$y=-2t+\frac{9}{2}\ ,\ z=2t+2$$
$$\Rightarrow (t-1)^2+(-2t+\frac{9}{2})^2+(2t+2)^2+2(t-1)$$
$$-9(-2t+\frac{9}{2})-4(2t+2)+\frac{25}{2}=0$$
$$\Rightarrow 9t^2=\frac{51}{4}\Rightarrow t^2=\frac{51}{36}\Rightarrow t=\pm\frac{\sqrt{51}}{6}\Rightarrow M_1(\frac{\sqrt{51}}{6}-1\ ,$$
$$\frac{-\sqrt{51}}{3}+\frac{9}{2},\frac{\sqrt{51}}{3}+2),$$
$$M_2(\frac{-\sqrt{51}}{6}-1,\frac{\sqrt{51}}{3}+\frac{9}{2},\frac{-\sqrt{51}}{3}+2)$$

مثال ۶ ــ دو نقطهٔ $A(-1,2,+1)$ و $B(3,-1,1)$ در دستگاه مختصات $O-xyz$ داده شده‌اند. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از صفحهٔ xoy را پیدا کنید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر ۲ است.

حل ــ معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر ۲ است، تعیین می‌کنیم و فصل مشترک آن با صفحه xoy به معادلهٔ $z=0$ را به دست می‌آوریم:

$$A(-1,2,1)\ ,B(3,-1,1)\ ,M(x,y,z)\ ,k=2\Rightarrow$$
$$MA=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2}\ ,$$
$$MB=\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2}\ ,$$

$$\frac{MA}{MB}=2\Rightarrow\frac{MA^2}{MB^2}=4\Rightarrow MA^2=4MB^2\Rightarrow$$
$$(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=$$
$$4(x-3)^2+4(y+1)^2+4(z-1)^2\Rightarrow$$
$$3x^2+3y^2+3z^2-26x+12y-6z+38=0$$
$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2-\frac{26}{3}x+4y-2z+\frac{38}{3}=0$$

معادلهٔ کرهٔ مکان هندسی

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-\frac{26}{3}x+4y-2z+\frac{38}{3}=0 \\ z=0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow x^2+y^2-\frac{26}{3}x+4y+\frac{38}{3}=0$$

معادلهٔ مکان هندسی خواسته شده.

تفریح اندیشه ۴

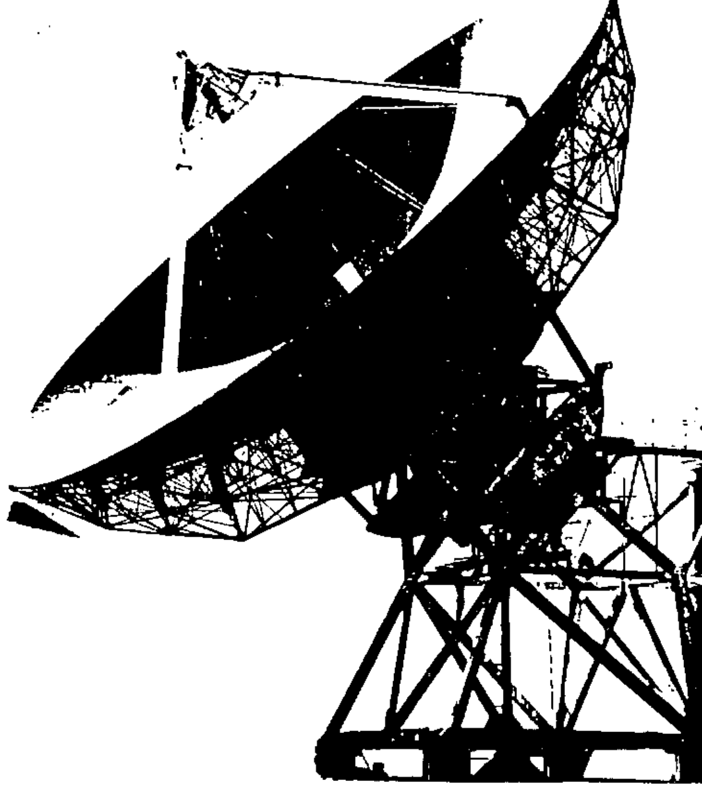
یکی از متصدیان بازی گلف به جای استفاده از تلفن زمین بازی، از زبان اشاره استفاده می‌کرد. مثلاً با یکی از بچه‌ها با تکان دادن پیراهنش حرف می‌زد و در مورد دیگری به جایگاه توپها اشاره می‌کرد.

این وضع در یکی از مسابقات که در آن تلفن نبود به دردش خورد. در این مسابقه مجبور شد از سیستم علامت دادن استفاده کند. او دو پرچم قرمز یک جور، دو پرچم آبی یک جور، و دو پرچم سفید یک جور داشت و آنها را یکی زیر دیگری بدون فاصله بر تیری برافراشت، و به خاطر وضوح کار، هیچ گاه دو پرچم یک رنگ را مجاور هم قرار نداد.

چند علامت متمایز با این سیستم می‌توان فرستاد؟

جواب در صفحهٔ ۸۸

کاربردهای ریاضیات در فیزیک (موج)



سیدعلاء الدین صلاحی

موج یکی از مهمترین مفاهیم بنیادی علم فیزیک است. از روشهای انتقال انرژی از مکانی به مکان دیگر نیز هست. یعنی هنگامی که هدفی را دنبال کنیم بدین‌مضمون که انرژی از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر منتقل گردد بدون آن که ذره‌ای از ماده در بستر مکان جابجا شده باشد یعنی بدون آن که در راستای انتقال انرژی ماده‌ای منتقل یا منتشر شده باشد از این ایده و روش بهره می‌بریم.

موجها اقسام متفاوتی دارند مانند موجهای طولی ـ موجهای عرضی ـ موجهای پیچشی و ... و اینها با توجه به جهتهای ارتعاش و انتشار تعریف می‌گردند. به عنوان مثال در موجهای عرضی راستای انتشار و ارتعاش بر یکدیگر عمود هستند یعنی اگر ذرات محیط نوسان کننده در راستای قائم حرکت کنند آنگاه انتشار موج در جهت افقی صورت می‌پذیرد.

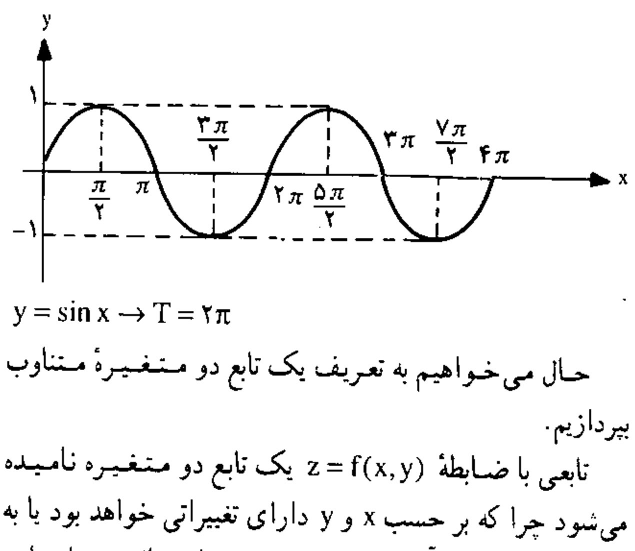
در اینجا می‌خواهیم یک مفهوم و تفسیر و تبیین ریاضی از مفهوم موج مطرح کنیم.

با تعریف تابع متناوب آشنا هستیم. هرگاه تابع f با دامنهٔ تعریف D_f و برد R_f معین و دارای دورهٔ تناوب T باشد باید در دو تعریف زیر صدق کند.

$$\begin{cases} \forall x \in D_f: \quad x + kT \in D_f \ , \ k \in z \\ \forall x \in D_f: \quad f(x) = f(x+kT), k \in z \end{cases}, T > ۰$$

پس حال تابع f با دورهٔ تناوب T تکرار می‌گردد البته باید توجه نمود که مقادیر $f(x)$ تکرار می‌گردند و در هر فاصلهٔ kT از متغیر دقیقاً یک مقدار خواهند داشت مثال روشن این تابع عبارت است از :

$$y = \sin x \rightarrow T = ۲\pi$$



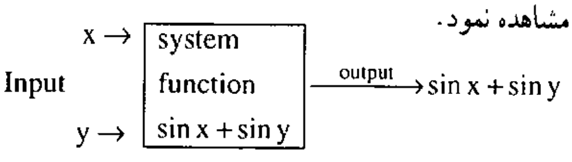
$$y = \sin x \rightarrow T = ۲\pi$$

حال می‌خواهیم به تعریف یک تابع دو متغیرهٔ متناوب بپردازیم.

تابعی با ضابطهٔ $z = f(x,y)$ یک تابع دو متغیره نامیده می‌شود چرا که بر حسب x و y دارای تغییراتی خواهد بود یا به هر جهت متغیرهای آن x و y هستند به عنوان مثال می‌توان تابع

$$\begin{cases} Z: \mathbb{R}^۲ \rightarrow \mathbb{R} \\ Z = f(x,y) = \sin x + \sin y \end{cases}$$

را نام برد و با توجه به شکل مقابل رابطهٔ ورودی خروجی آن را مشاهده نمود.



مثال: $x=\frac{\pi}{6}\ ,\ y=\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow f(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$
$=\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\Rightarrow$
$(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})\longrightarrow\frac{3}{2}$

اینک می‌خواهیم تعریفی برای تابع دو متغیرهٔ متناوب با تدقیق کافی ارایه کنیم.

۱ ــ تابع دو متغیره با ضابطهٔ $z=f(x,y)$ را متناوب نسبت به x می‌گوییم هر گاه در دو تعریف زیر صدق کند.

$$\begin{cases}\forall x\in D_{f_x}: x+kT_x\in D_{f_x}\ ,k\in z\\ \forall x\in D_{f_x}: f(x,y)=f(x+kT_x,y)\end{cases}\ ,T_x>0$$

در اینجا D_{f_x} دامنهٔ تعریف تابع نسبت به متغیر x است و T_x دورهٔ تناوب نسبت به متغیر x است.

۲ ــ تابع دو متغیره با ضابطهٔ $z=f(x,y)$ را متناوب نسبت به y می‌گوییم هرگاه در دو تعریف زیر صدق کند.

$$\begin{cases}\forall y\in D_{f_y}: y+k'T_y\in D_{f_y}\ ,k'\in z\\ \forall y\in D_{f_y}: f(x,y)=f(x,y+k'T_y)\end{cases}\ ,T_y>0$$

در اینجا D_{f_y} دامنهٔ تعریف نسبت به متغیر y است و T_y دورهٔ تناوب نسبت به متغیر y است.

۳ ــ تابع دو متغیره با ضابطهٔ $z=f(x,y)$ را نسبت به هر دو متغیر xو y متناوب گوییم هرگاه در دو شرط زیر صدق کند.

$$\begin{cases}\forall(x,y)\in D_z:\\ \forall(x,y)\in D_z:\end{cases}$$

$$\begin{matrix}(x+kT_x,y+k'T_y)\in D_z\ :(k,k'\in z)\\ f(x,y)=f(x+kT_x,y+k'T_y)\end{matrix}\quad ,(T_x,T_y)>(0,0)$$

در اینجا D_z دامنهٔ تعریف نسبت به هر دو متغیر x و y است یعنی $(T_x,T_y)=T_{xy}=T$ و $D_z=D_f=(D_{f_x},D_{f_y})$ دورهٔ تناوب تابع دو متغیره x و y است.

یعنی در اینجا چون، هم دامنه $\mathbb{R}^2$ است پس هر عضو در دامنهٔ تعریف یک دوتایی (زوج) مرتب است به شکل (x,y) و چون برد $\mathbb{R}$ است پس هر عضو برد به شکل $Z_0\in\mathbb{R}$ است.

نتیجه: بنابراین تا اینجا با یک تابع دو متغیره که نسبت به هر دو متغیر متناوب و دوره‌ای است آشنا شدیم و تعریف آن را بیان کردیم. حال اگر بخواهیم می‌توانیم این مفهوم را باز هم تعمیم داده و به فضای $\mathbb{R}^n$ توسیع دهیم ولی چون در اینجا بحث فیزیکی و طبیعی و محسوس داریم بنابراین تا بستر چهار بعدی فضا ــ زمان می‌توانیم آن را تعمیم دهیم یعنی تابعی چهار متغیره با ضابطهٔ $\Psi=f(x,y,z,t)$ تعریف کنیم و بعد تابع متناوب چهار متغیره را مطابق زیر تعریف کنیم.

$$\begin{cases}\forall(x,y,z,t)\in D_\psi:\\ \forall(x,y,z,t)\in D_\psi:\end{cases}$$

$$(x+k_1T_x,y+k_2T_y,z+k_3T_z,t+k_4T_t)\in D_\psi\ ,k_i\in z$$
$$f(x,y,z,t)=f(x+k_1T_x,y+k_2T_y,z+k_3T_z,t+k_4T_t)$$

به شرط آن که $(T_x,T_y,T_z,T_t)>(0,0,0,0)$.

حال یک تابع چهار متغیره که نسبت به هر چهار متغیر متناوب است در دست داریم. اگر این متغیرها را فضا و زمان در نظر بگیریم می‌توانیم فرم ساده‌تری از این تابع یا نگاشت دهیم.

$$\psi(\vec{r},t)=f(x,y,z,t)$$

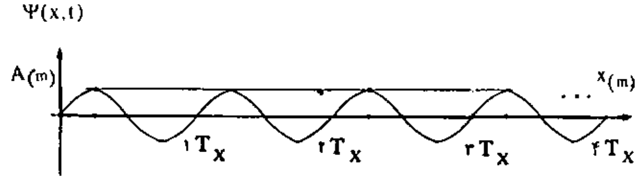
پس تعریف متناوب بودن آن نیز به فرم مقابل تبدیل می‌گردد.

$$\begin{cases}\forall(\vec{r},t)\in D_\psi:\\ \forall(\vec{r},t)\in D_\psi:\end{cases}$$

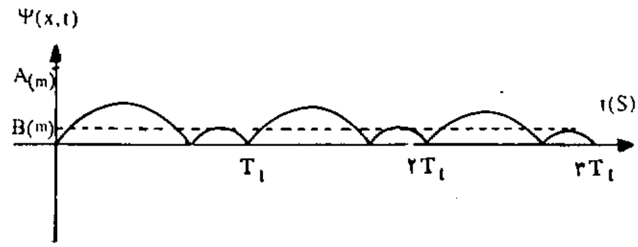
$$\begin{matrix}(\vec{r}+k\vec{r}_0,t+k'T)\in D_\psi\\ f(\vec{r},t)=f(\vec{r}+k\vec{r}_0,t+k'T)\end{matrix}\quad \ni k,k'\in z,(\vec{r}_0,t)>(\vec{0},0)$$

حال به تعریف الگوی ریاضی موج می‌پردازیم. هر تابع چهار متغیره فضا ــ زمان را که نسبت به متغیرهای فضا و زمان متناوب و دوره‌ای و تکراری باشد، موج یا تابع موج می‌نامیم. پس موج یک حرکت است که نسبت به مکان و زمان در ابعاد مختلف مکان تکراری و دوره‌ای است. پس موج یک حرکت است که در زمان تکرار می‌شود و در هر فاصله T ثانیه مجدداً به وضعیت اول برمی‌گردد و نیز در فضا و مکان نیز تکرار می‌شود یعنی در هر فاصله λ متر مجدداً به وضعیت اول برمی‌گردد اگر بخواهیم یک تعبیر محسوس و تجربی داشته باشیم این گونه مطرح می‌شود که اگر به یک حرکت موجی در یک لحظهٔ خاص از زمان توجه کنیم و از تمام محیط ارتعاش عکس‌برداری کنیم آنگاه متوجه می‌شویم که در آن لحظه و نیز هر لحظهٔ دلخواه دیگر حرکت در محیط تکرار شونده بوده است (البته به شرط آن که طول محیط بیش از چند طول موج باشد) یعنی مثلاً شکل

زیرا خواهیم دید.



و اگر یک دوربین فیلم‌برداری را در نقطه‌ای خاص و دلخواه از محیط ارتعاش فیکس و ثابت کنیم و از آن نقطه فیلم‌برداری کنیم باز هم ناظر و شاهد یک حرکت تکراری و دوره‌ای و متناوب خواهیم بود مثلاً مطابق شکل زیر :



دورهٔ تناوب در بعد زمان را زمان تناوب می‌گوییم و دورهٔ تناوب در بعد مکان را طول موج می‌نامیم به‌طوری خود طول موج دارای سه بعد است یعنی (طولی ـ عرضی ـ ارتفاعی)

$$\begin{cases}\vec{\lambda}=(\lambda_x^{(m)},\lambda_y^{(m)},\lambda_z^{(m)}) \\ T_t=T^{(s)}\end{cases} \Rightarrow T=(\vec{\lambda},T_t)$$

واحد پریود زمانی معمولاً ثانیه و واحد پریود مکانی معمولاً متر است.

اینک به عنوان نمونه مثالی را با هم پاسخ می‌گوییم.

مثال : هرگاه ضابطهٔ $f(x,t)=A\sin(2x-3t)$ نشان دهنده یک موج متحرک در امتداد محور xها باشد (SI) مطلوب است.

الف ــ پریود و طول موج

ب ــ شکل موج در مبدأ زمان بر حسب x و در $t=1^s$

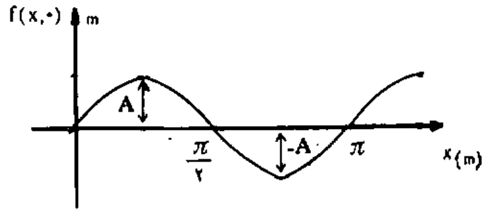
ج ــ شکل موج در مبدأ مکان بر حسب t و در $x=1^m$

حل : می‌دانیم کـه پریود تابع $y=A\sin au$ برابر است با $T_u=\frac{2\pi}{|a|}$ بنابراین دوره زمانی و مکانی موج فوق عبارتند از :

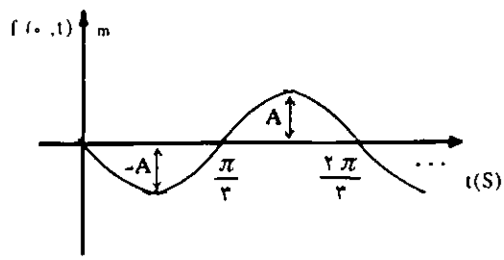
$$f(x,t_0)=A\sin(2x-3t_0)\to T_x=\lambda=\frac{2\pi}{|2|}=\pi^m$$

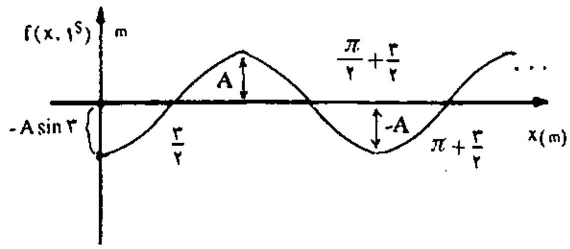
$$f(x_0,t)=A\sin(2x_0-3t)\to T_t=T=\frac{2\pi}{|-3|}=\frac{2}{3}\pi^s$$

مبدأ زمان $t=0\Rightarrow f(x,0^S)=A\sin 2x$

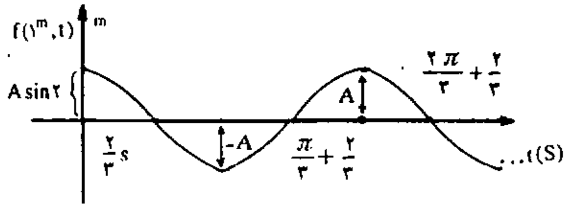


مبدأ مکان $x=0\Rightarrow f(0^m,t)=A\sin(-3t)=-A\sin 3t$





$f(x,1^s)=A\sin(2x-3)$



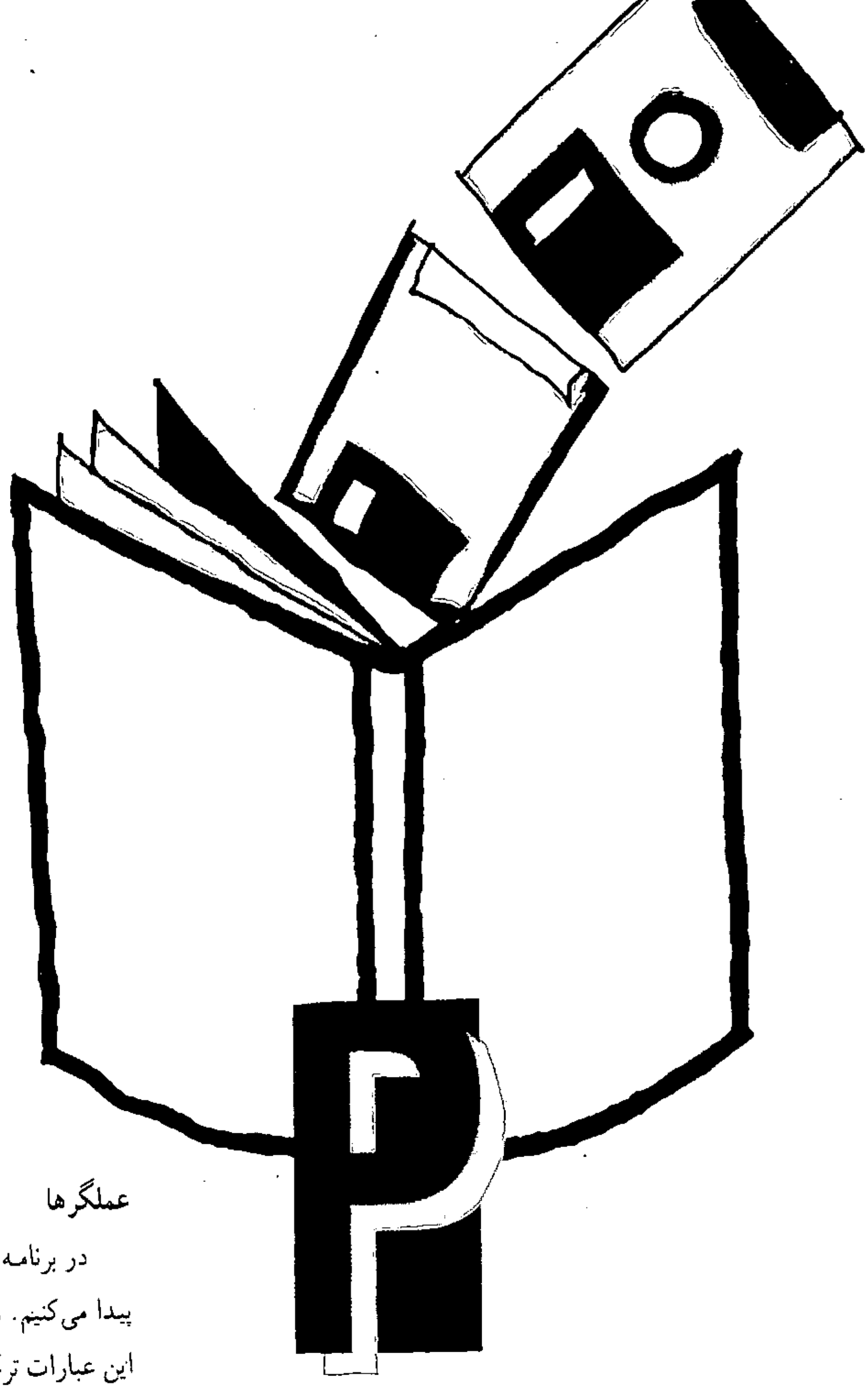
$f(1^m,t)=A\sin(2-3t)$

پس موج فوق نسبت به زمان و مکان در حرکت است و این حرکت دوره‌ای و تکراری است.

آموزش برنامه‌نویسی به زبان پاسکال

(قسمت سوّم)

● محمد رحیم



عملگرها

در برنامه‌نویسی به نوشتن عبارات ریاضی و یا منطقی نیاز پیدا می‌کنیم. این عبارات ممکن است ساده و یا پیچیده باشند. این عبارات ترکیبی از عملگرها[1] و عملوندها[2] هستند. در عبارت a + b به علامت + عملگر و به a و b عملوند می‌گوییم. عملگرها بر روی داده عمل می‌کنند. عملگرها از یک دیدگاه کلی به دو دسته عمده تقسیم‌بندی می‌شوند: الف) عملگرهای دارای یک عملوند (unary) ب) عملگرهای دارای دو عملوند (binary). عملگرهای دارای یک عملوند مانند +، −، Not و @ و عملگرهای دارای دو عملوند مانند +، * و ... هستند. در جدول ۳ توضیحات لازم دربارهٔ عملگرهای دارای یک عملوند آمده است.

از طرف دیگر، عملگرها را نیز می‌توان در دسته‌بندی ۸گانهٔ

نوع حاصل از عمل	نوع عملوند	عمل	عملگر
نوع Integer	نوع Integer	مثبت	+
نوع Real	نوع Real		
نوع Integer	نوع Integer	منفی	–
نوع Real	نوع Real		
نوع Boolean	نوع Boolean	نقیض منطقی	Not
نوع Integer	نوع Integer	نقیض بیتی	
نوع اشاره‌گر	هر نوعی می‌تواند باشد	آدرس	@

جدول ۳ ــ عملگرهای دارای یک عملوند

زیر تقسیم‌بندی کرد :

۱ ــ عملگر تساوی[۳] : جهت جایگزینی یک مقدار در یک متغیر به کار می‌رود، مثلاً a:= –3 و یا a:= b+c یعنی مقادیر –3 و یا b+c در متغیر a نگهداری شوند. عملگر تساوی (=:) روی هر عملوندی به جز عملوندهای از نوع file عمل می‌کند.

۲ ــ عملگرهای محاسباتی[۴] : این عملگرها عبارتند از : + ، – ، * ، / ، div و mod. عملگرهای div و mod فقط بر روی عملوندهای از نوع صحیح (مثلاً Integer) عمل می‌کنند و نتیجهٔ حاصل از عمل نیز از نوع صحیح خواهد بود. سایر عملگرهای محاسباتی می‌توانند هم بر روی عملوند صحیح و هم بر روی عملوند اعشاری عمل کنند و نتیجهٔ حاصل از عمل می‌تواند صحیح و یا اعشاری باشد. div برای تقسیم دو عدد صحیح به کار می‌رود و حاصل تقسیم نیز صحیح است، ولی عملگر / برای تقسیم دو عدد صحیح و یا اعشاری به کار می‌رود و حاصل تقسیم همواره اعشاری است. mod برای محاسبهٔ باقیمانده به کار می‌رود.

۳ ــ عملگرهای سطح بیت[۵] : این عملگرها بر روی عملوندهایی از نوع Integer عمل می‌کنند و عبارتند از : not، and، or، xor، shl و shr. توضیحات بیشتر مربوط به این عملگرها در آینده مورد بحث قرار خواهد گرفت.

۴ ــ عملگرهای نسبی[۶] : این عملگرها برای مقایسهٔ عملوندهایی از نوع Integer، Real، Boolean، char و string (و نیز عملوندهای از نوع ترتیبی) به کار می‌رود. در جدول ۴ این عملگرها به همراه نوع عمل معرفی شده‌اند. این عملگرها معمولاً در دستورات شرطی به کار می‌روند.

عملگر	<	>	=	<=	>=	<>	In
نوع عمل	کوچکتر از	بزرگتر از	مساوی	کوچکتر مساوی	بزرگتر مساوی	نامساوی	تعلق داشتن به

جدول ۴

در مثالهای زیر مقایسه‌های انجام شده را می‌توان در دستورات شرطی به کار برد :

```
x < 5.2              Initial <>'Q'
b*b >= 4*a*c         'A'<'F'
Number = 500         false < true
```

۵ ــ عملگرهای منطقی[۷] : این عملگرها بر روی عملوندهای از نوع Boolean عمل می‌کنند. در جدول ۵ این عملگرها به همراه نوع عمل معرفی شده‌اند.

عملگر	Not	And	Or	Xor
نوع عمل	نقیض منطقی	عطف منطقی	یای منطقی	یای انحصاری منطقی

جدول ۵

عملگرهای منطقی را می‌توان در دستورات شرطی به کار برد.

۶ ــ عملگر آدرس[۸] : برای دسترسی به آدرس یک متغیر از عملگر @ که عملگر آدرس است استفاده می‌کنیم. توضیحات بیشتر مربوط به این عملگر در مبحث اشاره‌گرها خواهد آمد.

۷ ــ عملگرهای مجموعه[۹] : با استفاده از این عملگرها می‌توان جمع، تفاضل و فصل مشترک دو مجموعه را به دست آورد. عملگرهای مجموعه +، – و * هستند. توضیحات بیشتر مربوط به این عملگرها در مبحث مجموعه‌ها خواهد آمد.

۸ ـ عملگر رشته[10] : این عملگر بر روی عملوندهایی از نوع رشته عمل می‌کند و سبب به هم چسباندن دو رشته می‌شود. عملگر رشته + است.

تقدم عملگرها[11]

در یک عبارت شرطی و یا محاسباتی ممکن است از انواع عملگرها استفاده شود و بدین لحاظ تقدم محاسبه اهمیت دارد. در جدول ۶ تقدم عملگرها آمده است.

طبقه‌بندی	تقدم	عملگرها
عملگرهای‌یک‌عملوند	اول (بالاترین)	@,Not
عملگرهای ردهٔ *	دوم	*,/,div,mod,and,shl,shr
عملگرهای ردهٔ +	سوم	+,−,or,xor
عملگرهای نسبی	چهارم(پایین‌ترین)	=,<>,<,>,<=,>=,In

جدول ۶

در جدول ۶ تقدم عملگرها از بالا به پایین است و برای عملگرهای هم مرتبه، تقدم عملگرها برحسب واقع شدن آنها در یک عبارت، از چپ به راست است. توجه به این مطلب مهم است که پرانتز می‌تواند تقدم عملگرها را به هم بزند و لذا در یک عبارت، در صورت وجود پرانتز ابتدا عبارت داخل پرانتز محاسبه می‌شود و اگر در یک عبارت دارای چندین پرانتز غیر متداخل باشیم، پرانتزها از سمت چپ محاسبه می‌شوند و در صورتی که پرانتزهای متداخل داشته باشیم ابتدا داخلیترین پرانتز محاسبه می‌شود.

در مثالهای زیر عملکرد بعضی از عملگرها بررسی شده است.

مثال ۱: در این مثال نتایج حاصل از جمع دو عدد صحیح، دو عدد اعشاری و نیز یک عدد صحیح و یک عدد اعشاری آمده است:

$2+3=5$

$2+3.0=5.0$

$2.0+3=5.0$

$2.0+3.0=5.0$

مثال ۲: در این مثال نتایج حاصل از تقسیم اعشاری (/) آمده است:

$7/2=3.5$

$7.0/2=3.5$

$7/2.0=3.5$

$7.0/2.0=3.5$

$12/3=4.0$

مثال ۳: در این مثال نتایج حاصل از تقسیم صحیح (div) و نیز باقیمانده[12] (mod) آمده است:

7DIV2 = 3	7MOD2 = 1
12DIV3 = 4	12MOD3 = 0
0DIV5 = 0	0MOD5 = 0
4DIV5 = 0	4MOD5 = 4
(−8)DIV3 = −2	(−8)MOD3 = −2

مثال ۴: در این مثال حاصل عبارت 7*10 − 5MOD3*4 + 9 مرحله به مرحله با توجه به تقدم عملگرها که در جدول ۶ آمده به دست می‌آید.

ابتدا اولین عمل ضرب سمت چپ انجام می‌شود و نتیجه چنین است: 70 − 5MOD3*4 + 9

در مرحلهٔ دوم، مشاهده می‌شود که تقدم عملگرهای Mod و * بیشتر از عملگر − است اما چون عملگر Mod نسبت به * جلوتر آمده، بنابراین 5MOD3 پردازش می‌شود و نتیجه چنین است: 70 − 2*4 + 9

در مرحله سوم، چون عملگر * تقدم بیشتری دارد، ابتدا 2*4 محاسبه می‌شود و نتیجه چنین است: 70 − 8 + 9

در مرحله چهارم، مشاهده می‌شود که عملگرهای − و + دارای تقدم مساوی هستند. اما چون پردازش عبارت از سمت چپ انجام می‌شود و عملگر − ابتدا آمده، بنابراین ابتدا 8 − 70 محاسبه می‌شود: 62 + 9

و نتیجهٔ نهایی، عبارت است از: 71

مثال ۵ : برنامهٔ زیر تفاوت عملگرهای / و div را نشان می‌دهد :

```
program Example5;
Var
    A و B: Integer;
    Ratio: Real;
BEGIN
    write ('Enter A و B: ');
    Readln (A و B);
    Ratio: = A div B;
    writeln ('Ratio = ', Ratio);
    Ratio: = A/B;
    writeln ('Ratio = ', Ratio);
END.
```

برنامهٔ فوق ابتدا پیغام می‌دهد که B و A را وارد کنید و سپس کاربر در جواب دستور Readln، مقادیر A و B را وارد می‌کند (مثلاً 3 ،10) و سپس کلید Enter (↲) را می‌زند. ابتدا نتیجهٔ تقسیم صحیح و سپس نتیجهٔ تقسیم اعشاری در خروجی چاپ می‌شود. خروجی برنامه چنین است :

```
Enter A و B:10 3↲
Ratio = 3.000000
Ratio = 3.333333
```

مثال ۶ : برنامهٔ زیر مقادیر B و A را از طریق دستور Readln از ورودی گرفته و اگر A > B باشد، در آن صورت متغیر Test مقدار True را به خود می‌گیرد و اگر A > B نباشد، متغیر Test مقدار False را نگهداری خواهد کرد و در نهایت مقدار موجود در متغیر Test (True یا False) را در خروجی چاپ می‌کند :

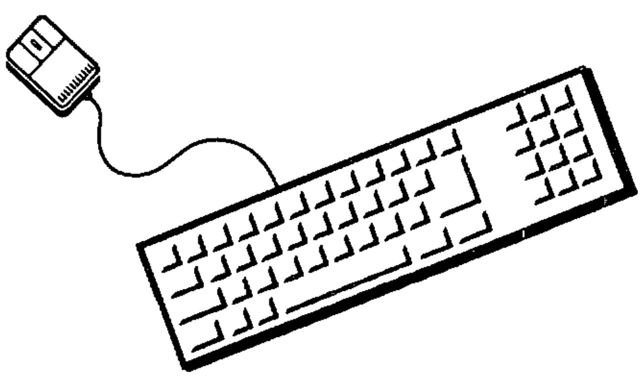
```
program Example6;
Var
    A و B: Integer;
    Test: Boolean;
BEGIN
    write ('Enter A و B: ');
    Readln (A و B);
    Test:= A > B;
    writeln ('Result = ', Test);
END.
```

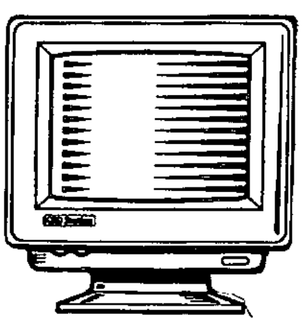
خروجی برنامه بعنوان مثال به صورت زیر است :

```
Enter A و B :  10  3↲
Result = True
```

واژه‌نامهٔ ریاضی و کامپیوتر

۱ـ Operator
۲ـ Operand
۳ـ Assignment
۴ـ Arithmetic
۵ ـ Bitwise
۶ ـ Relational
۷ ـ Logical
۸ ـ Address
۹ ـ Set
۱۰ ـ String
۱۱ ـ Precedence of operators
۱۲ ـ Modulus



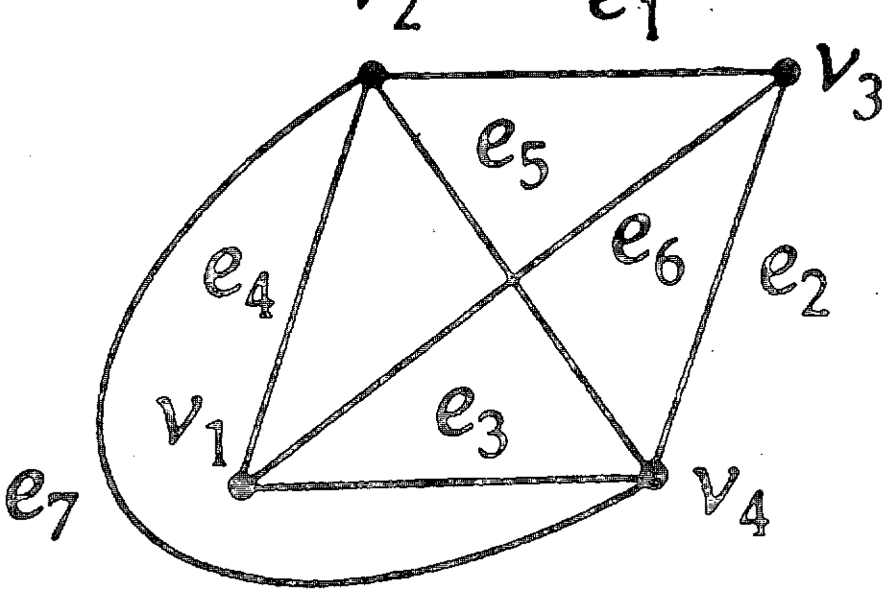


ریاضیات گسسته

قسمت هشتم

RALPH P. GRIMALDI

● ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور



قبل از پیشروی بیشتر، به ذکر قاعدهٔ استنتاجی نسبتاً ساده اما مهم می‌پردازیم.

مثال ۲.۲۲

قاعدهٔ استنتاج زیر از ملاحظهٔ این موضوع حاصل می‌شود که اگر p، q گزاره‌هایی چنان باشند که $p \Leftrightarrow t_0$ و $q \Leftrightarrow t_0$، آن‌گاه $p \wedge q \Leftrightarrow t_0$.

اکنون فرض می‌کنیم گزاره‌های p، q در طرح اثباتی روی دهند. این گزاره‌ها می‌توانند فرضهای داده شده یا نتایج مستخرج از فرضها و / یا از نتایج قبلاً مطرح شده در اثبات باشند. در این صورت دو گزارهٔ p و q را می‌توان، با عنایت به این شرایط، به ترکیب عطفی‌شان، $p \wedge q$، ترکیب کرد و گزارهٔ جدید حاصل را می‌توان در مراحل بعدی ادامهٔ اثبات به‌کار برد.

قاعدهٔ فوق را قاعدهٔ ترکیب عطفی[1] می‌نامیم و آن را به‌صورت جدول شکل زیر چنین می‌نویسیم:

$$\begin{array}{l} p \\ \underline{q} \\ \therefore p \wedge q \end{array}$$

کاربرد این قاعده را در مثال ۲.۲۳ توضیح داده‌ایم.

قاعدهٔ استنتاج بعدی ما گاهی با روش عکس نقیض اثبات به‌کار رفته در انفصال نقیض اشتباه می‌شود، زیرا هر دوی آنها از نقیض گزاره‌ای بهره می‌برند. اما، این دو، دو قاعدهٔ متمایزند.

مثال ۲.۲۳

ابتدا به خاطر می‌آوریم که اگر S یک گزاره و $\overline{S} \Rightarrow F_0$ آنگاه گزارهٔ $\overline{S} \Rightarrow F_0$ همواره راست است. بنابراین $\overline{S}$ دروغ و، در نتیجه S راست است.

از استلزام منطقی $\overline{S} \Rightarrow F_0$ قاعدهٔ استنتاج موسوم به *اثبات با استفاده از کاذب یا تناقض*[2]، یا برهان خلف[3] را به‌دست می‌آوریم. این قاعده به‌صورت جدول شکل چنین نوشته می‌شود:

$$\begin{array}{l} \underline{\overline{S} \Rightarrow F_0} \\ \therefore S \end{array}$$

کاربرد این قاعده را در اثبات زیر به شرح می‌آوریم. اما ابتدا خاطر نشان می‌کنیم که عدد صحیح n زوج[4] نامیده می‌شود اگر عدد صحیح kای چنان موجود باشد که $n = 2k$. عدد صحیح m فرد[5] نامیده می‌شود اگر عدد صحیح kای چنان موجود باشد که $m = 2k + 1$. عدد حقیقی x به گویا[6] موسوم است اگر $x = a/b$، با a و bی صحیح باشد و $b \neq 0$. اگر عدد حقیقی گویا نباشد آن را گنگ[7] می‌نامیم.

اکنون فرض کنید که مایل به اثبات نتیجهٔ زیریم

S : عدد حقیقی $\sqrt{2}$ عددی گنگ است.

به‌جای سعی در اثبات (مستقیم) این گزاره، (به‌طور غیرمستقیم) مبرهن می‌کنیم که چگونه به‌ازای گزارهٔ rی $\overline{S} \Rightarrow (r \wedge \overline{r})$. (از اینجاست که به اثبات با استفاده از کاذب گاهی به‌عنوان *اثبات غیرمستقیم*[8] اشاره می‌شود.)

اکنون فرض می‌کنیم $\sqrt{2}$ گویا باشد (یعنی، فرض می‌کنیم $\overline{S}$ راست است). در این‌صورت $\sqrt{2} = a/b$، که a و bی آن اعدادی صحیح‌اند و $b \neq 0$، باز فرض می‌کنیم a/b به کوچکترین جملات نوشته شده باشد. بنابراین گزارهٔ زیر را داریم:

r : تنها عدد صحیح و مثبتی که هم a هم b را می‌شمارد ۱ است.

به علت اینکه $۲ = (\sqrt{۲})^۲$، نتیجه می‌شود که $۲ = (a/b)^۲$، یا $a^۲ = ۲b^۲$. با $a^۲ = ۲b^۲$ درمی‌یابیم که $a^۲$ زوج است؛ اگر $a^۲$ زوج باشد، نتیجه می‌شود که a نیز زوج است. بنابراین، به‌ازای عدد صحیح cای، $a = ۲c$. اما با $b^۲$ی زوج، b نیز باید زوج باشد. درنتیجه، اعداد صحیح a، b، ۲ را به‌عنوان دومین مقسوم‌علیه مثبت دارند. بنابراین ۱ تنها عدد صحیح و مثبتی که a و b، هر دو، را می‌شمارد، نیست؛ و این گزارهٔ $\bar{r}$ را به‌دست می‌دهد.

اما چه شد که هم به r هم به $\bar{r}$ (و کاذب $r \wedge \bar{r}$، بنا به قاعدهٔ ترکیب عطفی) منتهی شدیم؟ آنچه که موجب رخ دادن این امر شد این بود که هنگامی که نوشتیم «فرض می‌کنیم که $\sqrt{۲}$ گویاست» بر این فرض بودیم که $\bar{S}$ راست است. درنتیجه، فرض مزبور درواقع دروغ است، و بنابراین، نقیض آن، یعنی S، باید راست باشد.

به این ترتیب، به علت $\bar{S} \Rightarrow (r \wedge \bar{r})$، داریم $\bar{S} \Leftrightarrow F.$. به‌عنوان نتیجه، $S \Leftrightarrow t.$، و این بدان معنی است که $\sqrt{۲}$ گنگ است.

در اینجا ارزش دارد که به حالت خاصی از اثبات با استفاده از کاذب، یعنی،

$$\left[\bar{S} \Rightarrow (r \wedge \bar{r})\right] \Rightarrow (S \Leftrightarrow t.)$$

توجه کنیم.

فرض می‌کنیم مایل به اثبات قضیهٔ $p \Rightarrow q$ هستیم، با قرار دادن $p \to q$ به‌جای گزارهٔ S فوق، ملاحظه می‌کنیم که می‌توان $\overline{(p \to q)} \Rightarrow (r \wedge \bar{r})$ را به‌ازای گزارهٔ rی محقق کرد. در این صورت نتیجه می‌شود که $(p \to q) \Leftrightarrow t.$، یا $p \Rightarrow q$.

حالت خاص اثبات با استفاده از کاذب مزبور را، بنا به

$$\overline{(p \to q)} \Leftrightarrow (\overline{\bar{p} \vee q} \Leftrightarrow p \wedge \bar{q})$$

می‌توان به‌صورت

$$\left[(p \wedge \bar{q}) \Rightarrow (r \wedge \bar{r})\right] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$$

نیز بیان کرد.

این حالت در وضعیات بسیاری در سراسر فصول بعدی رخ خواهد داد.

اکنون که پنج قاعدهٔ استنتاج را بررسی کرده‌ایم، آنها را همراه با معرفی چند قاعدهٔ دیگر در جدول ۱۴.۲ به اختصار می‌آوریم.

جدول ۱۴.۲

نام قاعده	استلزام منطقی یا هم‌ارزی منطقی مربوطه	قاعدهٔ استنتاج
قاعدهٔ انفصال (قیاس استثنایی)	$[p \wedge (p \to q)] \Rightarrow q$	۱. $\begin{array}{l} p \\ p \to q \\ \hline \therefore q \end{array}$
قانون قیاس	$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \Rightarrow (p \to r)$	۲. $\begin{array}{l} p \to q \\ q \to r \\ \hline \therefore p \to r \end{array}$
انفصال نقیض	$[(p \to q) \wedge \bar{q}] \Rightarrow \bar{p}$	۳. $\begin{array}{l} p \to q \\ \bar{q} \\ \hline \therefore \bar{p} \end{array}$
قانون ترکیب عطفی		۴. $\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline \therefore p \wedge q \end{array}$
اثبات با استفاده از کاذب (برهان خلف)	$(\bar{S} \Rightarrow F.) \Rightarrow (S \Leftrightarrow t.)$	۵. $\begin{array}{l} \bar{S} \Rightarrow F. \\ \hline \therefore S \end{array}$
حالت خاص اثبات با استفاده از کاذب	$[(p \wedge \bar{q}) \Rightarrow F.] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$	۵′. $\begin{array}{l} (p \wedge \bar{q}) \Rightarrow F. \\ \hline \therefore p \Rightarrow q \end{array}$
قاعدهٔ تسهیل عطفی[۹]	$(p \wedge q) \Rightarrow p$	۶. $\begin{array}{l} p \wedge q \\ \hline \therefore p \end{array}$
قاعدهٔ بسط فصلی[۱۰]	$p \Rightarrow p \vee q$	۷. $\begin{array}{l} p \\ \hline \therefore p \vee q \end{array}$
قاعدهٔ قیاس فصلی[۱۱]	$[(p \vee q) \wedge \bar{p}] \Rightarrow q$	۸. $\begin{array}{l} p \vee q \\ \bar{p} \\ \hline \therefore q \end{array}$
قاعدهٔ اثبات شرطی[۱۲]	$[p \to (q \to r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \to r]$	۹. $\begin{array}{l} p \wedge q \\ p \to (q \to r) \\ \hline \therefore r \end{array}$
قاعدهٔ اثبات با استفاده از حالات	$[(p \to r) \wedge (q \to r)] \Rightarrow [(p \vee q) \to r]$	۱۰. $\begin{array}{l} p \to r \\ q \to r \\ \hline \therefore (p \vee q) \to r \end{array}$
قاعدهٔ برهان ذوالوجهین بانی[۱۳]	$[(p \to q) \wedge (r \to s) \wedge (p \vee r)] \Rightarrow (q \vee s)$	۱۱. $\begin{array}{l} p \to q \\ r \to s \\ p \vee r \\ \hline \therefore q \vee s \end{array}$
قاعدهٔ برهان ذوالوجهین مخرب[۱۴]	$[(p \to q) \wedge (r \to s) \wedge (\bar{q} \vee \bar{s})] \Rightarrow (\bar{p} \vee \bar{r})$	۱۲. $\begin{array}{l} p \to q \\ r \to s \\ \bar{q} \vee \bar{s} \\ \hline \therefore \bar{p} \vee \bar{r} \end{array}$

چهار مثال بعدی مشخص می‌کند که چگونه قواعد فهرست شده در جدول ۱۴.۲ و نتایج دیگری چون قوانین منطق، در تشکیل اثباتها به‌کار می‌روند.

مثال ۲۴.۲

اولین مثالمان درستی استدلال زیر را مبرهن می‌کند

$$\begin{array}{l} p\to r \\ \bar p \to q \\ \underline{q\to s} \\ \therefore \bar r \to s \end{array}$$

دلایل	مراحل
فرض	(۱) $p\to r$
فرض	(۲) $q\to s$
فرض	(۳) $\bar p\to q$
(۳) و $(\bar p \to q)\Leftrightarrow(\bar{\bar p}\vee q)\Leftrightarrow(p\vee q)$،	(۴) $p\vee q$

که در آن هم‌ارزی منطقی دوم از قانون نقیض دوگانه نتیجه شده است.

دلایل	مراحل
(۱)، (۲)، (۴) و قاعدهٔ برهان ذوالوجهین بانی	(۵) $r\vee s$
(۵) و $(r\vee s)\Leftrightarrow(\bar{\bar r}\vee s)\Leftrightarrow(\bar r\to s)$،	(۶) $\therefore \bar r\to s$

که در آن قانون نقیض دوگانه در هم‌ارزی منطقی اول به‌کار رفته است.

مثال بعدی تا اندازه‌ای دشوارتر است.

مثال ۲۵.۲

درستی استدلال زیر را تحقیق کنید.

$$\begin{array}{l} p\to q \\ q\to (r\wedge s) \\ \bar r\vee(\bar t\vee u) \\ \underline{p\wedge t} \\ \therefore u \end{array}$$

دلایل	مراحل
فرض	(۱) $p\to q$
فرض	(۲) $q\to(r\wedge s)$
(۱)، (۲)، و قانون قیاس	(۳) $p\to(r\wedge s)$
فرض	(۴) $p\wedge t$
(۴) و قاعدهٔ تسهیل عطفی	(۵) p
(۵)، (۳)، و قاعدهٔ انفصال	(۶) $r\wedge s$
(۶) و قاعدهٔ تسهیل عطفی	(۷) r
فرض	(۸) $\bar r\vee(\bar t\vee u)$
(۸)، و قانون شرکت‌پذیری ۷، و قوانین دومورگان	(۹) $(\overline{r\wedge t})\vee u$
(۴) و قاعدهٔ تسهیل عطفی	(۱۰) t
(۷)، (۱۰)، و قاعدهٔ ترکیب عطفی	(۱۱) $r\wedge t$
(۹)، (۱۱)، و قاعدهٔ قیاسی فصلی	(۱۲) $\therefore u$

یادداشتها:

۱. Rule of Conjunction
۲. Proof by Contradiction
۳. Reductio ad Absurdum
۴. Even
۵. Odd
۶. Rational
۷. Irrational
۸. Indirect proof
۹. Rule of Conjunctive Simplification
۱۰. Rule of Disjunctive Ampilfication
۱۱. Rule of Disjunctive Syllogism
۱۲. Rule of Conditional Proof
۱۳. Rule of the Constructive Dilemma
۱۴. Rule of the Destructive Dilemma

مسائل مسابقه‌ای

۱ - ۴ نفر اسامی خود را روی ۴ کارت نوشته و در کیسه‌ای می‌گذارند؛ هر یک به تصادف یک کارت از کیسه برمی‌دارند؛ مطلوب است احتمال آنکه هیچ یک از آنها اسم خود را بیرون نیاورند.

۲ - ثابت کنید عمودهایی که از تصویرهای رأسهای یک مثلث بر روی خط راستی، بر ضلعهای روبروی آن رأسها رسم می‌شوند همرسند.

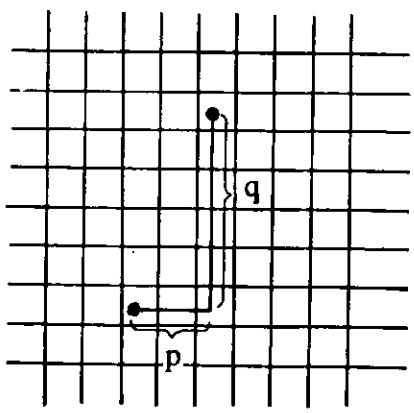
ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور

از: 100 Great Problems of Elementary Mathematics

طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روشهای مقدماتی (۲۰)

حرکت اسب را بر صفحهٔ شطرنج به روش زیر تعدیل کرده‌ایم: اسب در هر حرکت p مربع را به طور افقی و q مربع را به طورقائم، یا q مربع را به‌طور افقی و p مربع را به‌طور قائم می‌پیماید، که در آن p و q اعداد صحیح و مثبت دلخواه مفروض‌اند. صفحهٔ شطرنج مورد بحث نامحدود است.

اگر، بعد از n مرحله، اسب به مکان آغازش باز گردد، آیا درست است که n باید عددی زوج باشد؟



حل:

در حل این مسأله به توصیف دو روش می‌پردازیم.

(الف) روش اوّل از بردارها استفاده می‌کند.

دستگاه مختصات را روی صفحهٔ شطرنج چنان قرار می‌دهیم که مراکز مربعهای واقع بر صفحه دارای مختصات صحیح شوند. مبدأ را به عنوان آغاز حرکت اسب در نظر می‌گیریم. در این صورت اسب، پس از مرحلهٔ اوّل می‌تواند در هر یک از هشت نقطهٔ با بردارهای مکانی زیر برود.

$$\pm\binom{p}{q}, \pm\binom{p}{-q}, \pm\binom{q}{p}, \pm\binom{q}{-p}$$

بنابراین هر نقطهٔ P یی که اسب در آن قرار گیرد دارای چنین بردار مکانی خواهد بود:

$$\binom{x}{y} = a\binom{p}{q} - b\binom{p}{q} + c\binom{p}{-q} - d\binom{p}{-q}$$

$$+ e\binom{q}{p} - f\binom{q}{p} + g\binom{q}{-p} - h\binom{q}{-p} \qquad (1)$$

که در آن a، b، c، d، e، f، g و h اعدادی صحیح و نامنفی چنان‌اند که $S = a+b+c+d+e+f+g+h$ تعداد مراحل گذر از O به P است.

(۱) دستگاه معادلات زیر را می‌دهد :

$$(a-b)p+(c-d)p+(e-f)q+(g-h)q=x$$
$$(a-b)q-(c-d)q+(e-f)p-(g-h)p=y$$

یعنی

$$\begin{cases} a'p+c'p+e'q+g'q=x \\ a'q-c'q+e'p-g'p=y \end{cases} \qquad (۲)$$

که در آن $a'=a-b$، $c'=c-d$، $e'=e-f$، $g'=g-h$ و s'، مجموع a'، c'، e' و g' برابر $s-2(b+d+f+h)$ است. در نتیجه s زوج است اگر و تنها اگر s' زوج باشد.

فرض می‌کنیم اسب پس از طی n مرحله به مبدأ باز گردد. در این حال $x=y=0$ و دستگاه معادله‌های (۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(a'+c')p=-(e'+g')q$$
$$(a'-c')q=-(e'-g')p$$

با ضرب معادلهٔ اول دردوم و حذف $p.q\ (p\neq 0\neq q)$ ملاحظه می‌کنیم که

$$(a')^2-(c')^2=(e')^2-(g')^2$$

یا

$$(a')^2-(c')^2-(e')^2+(g')^2=0 \qquad (۳)$$

تمام اعداد $(a')^2-a'$، $-(c')^2-c'$، $-(e')^2-e'$ و $(g')^2-g'$ زوج‌اند. آنها را، به ترتیب، با $2t$، $2u$، $2v$ و $2w$ نمایش داده (۳) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$a'+2t+c'+2u+e'+2v+g'+2w=0$$

یا

$$(a'+c'+e'+g')+2(t+u+v+w)=0$$

معادلهٔ اخیر نشان می‌دهد که s' زوج است؛ در نتیجه s زوج است، و این نشان می‌دهد که اسب می‌تواند تنها پس از حرکتهایی به تعداد زوج به مبدأ باز گردد.

(ب) راه حل دوم از تابعی استفاده می‌کند که بر مجموعهٔ جفتهای (x,y) ی تعریف شده است که x و y آن صحیح‌اند.

مراکز مربعها در دستگاه مختصاتی که در راه حل پیشین معرفی شد دارای مختصات x، y اند.

بزرگترین مقسوم علیه مشترک p و q را با d نمایش داده، اعداد p/d، q/d را تشکیل می‌دهیم. در این صورت دو امکان وجود دارد:

حالت ۱. p/d و q/d هر دو فردند.

در این حالت طبق قاعدهٔ $f(x,y)=\frac{x}{d}$

تابع f(x,y)ای را برای جمیع جفتهای صحیح (x,y) تعریف می‌کنیم. این تابع دارای این ویژگی است که وقتی اسب یک حرکت از مربع (x,y) به مربع (x',y') انجام می‌دهد، تفاضل $f(x',y')-f(x,y)$ عددی فرد است. (در واقع، x' به صورت $x\pm p$ یا $x\pm q$ است)؛ بنابراین

$$f(x',y')=\frac{x\pm p}{d}=\frac{x}{d}\pm\frac{p}{b}$$

یا

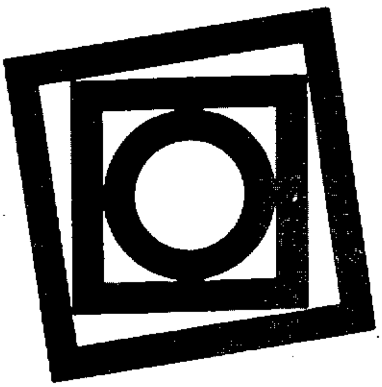
$$f(x',y')=\frac{x\pm q}{d}=\frac{x}{d}\pm\frac{q}{d}$$

یعنی هر دو در منتها الیه چپ ستون قرار می‌گیرند.

حالت ۲. یکی از دو مورد p/d و q/d زوج است. (توجه داشته باشید که هر دو عدد نمی‌توانند زوج باشند زیرا d بزرگترین مقسوم علیه مشترک p و q است.)

در این حالت f را به صورت $f(x,y)=(x+y)d$ تعریف می‌کنیم. باز هم به سادگی اثبات می‌شود که زمانی که اسب یک حرکت از مربع (x,y) به مربع (x',y') انجام دهد تفاضل $f(x',y')-f(x,y)$ عددی فرد است.

اکنون به سراغ اسب‌مان می‌رویم. فرض می‌کنیم، اسب، با آغاز از $(x_0,y_0)=(0,0)$، ابتدا در مربع (x_1,y_1)، سپس در مربع (x_2,y_2) و ... قرار می‌گیرد و پس از n مرحله به $(x_n,y_n)=(0,0)$ باز می‌گردد. مقدار f، پس از هر مرحله، به اندازهٔ عددی فرد تغییر می‌کند. $f(0,0)$ زوج است، بنابراین اگر n فرد باشد، $f(x_n,y_n)$ باید فرد بوده باشد. اما $f(x_n,y_n)=f(0,0)$؛ بنابراین n باید زوج باشد.



آنچه از دوست رسد...

با عرض سلام، خدمت همگی دانش‌آموزان و خوانندگان مجلهٔ ریاضی برهان

نامه‌های پُرمحتوا و محبت‌آمیز شما را دریافت کردیم! از خداوند بزرگ بسیار سپاسگزاریم که توانسته‌ایم، هرچند گامی کوچک، در جهت بالا بردن سطح کیفی درس ریاضی شما برداریم. هیأت تحریریه مجله، پس از مطالعه فرمهای نظرخواهی و نامه‌های ارسالی شما عزیزان و بحث‌وتبادل‌نظر روی موضوعات زیر توافق نظر داشتند :

۱ ــ با توجه به این که نظام تحصیلی دبیرستان به صورت ترمی برگزار می‌شود، لذا تصمیم بر این گرفته شد در هر سال، شماره اوّل و دوم مجله در نیمسال اول و شماره سوم و چهارم آن در نیمسال دوم چاپ شود.

۲ ــ در این شماره مسایل امتحانات نهایی پایان ترم و در شمارهٔ بعدی، تستهای تفکیکی کلیه کتابهای ریاضی را با حل تشریحی می‌آوریم.

در میان نامه‌هایی که برای ما ارسال کرده‌اید، با نامه زیر برخورد کردیم، چون این نامه باعث ایجاد انگیزه برای خدمت بیشتر در ما شد، ضمن تشکر از این دو برادر بزرگوار تصمیم گرفتیم که آن را به دلیل علاقه‌مندی بیشتر شما به ریاضی چاپ کنیم.

ما دو پسرخاله به نامهای حاج سیدعظیم حجتی و سیدغلام عبدی از کسبهٔ بازار بزرگ بروجرد هستیم و به ترتیب ۵۷ و ۵۵ سال سن داریم. هم‌اکنون هردوی ما یک فروشگاه بزرگ داریم. مدتی است که به ریاضیات علاقه‌مند شده‌ایم و آن را مدیون مجله ریاضی برهان هستیم. امیدواریم در راه خود موفق و مؤیدباشید.

در ضمن ایشان، چند مسأله (با حل آنها) برای ما ارسال کرده‌اند که یکی از آنها را می‌بینیم :

مسأله نابرابری زیر را ثابت کنید :

$$x^4+y^4+z^4 \geq x^2y^2+z^2x^2+z^2y^2$$

حل : اگردو طرف نابرابری بالا را در ۲ ضرب کنیم، و همهٔ جمله‌ها را به طرف چپ نابرابری انتقال دهیم، بنابر اثبات بازگشتی، درستی حکم نتیجه می‌شود.

$$(x^2-y^2)^2+(y^2-z^2)^2+(z^2-x^2)^2 \geq 0$$

به دلیل حجم بالای نامه‌های ارسالی شما عزیزان و محدودیت صفحات مجله بر آن شدیم که نامه‌های شما را دسته‌بندی کنیم و پاسخی مشترک برای آنها بیاوریم و اسامی فرستندگان نامه‌ها را در مجله چاپ کنیم.

خوانندگان محترم مجلهٔ ریاضی برهان :

آقایان سجاد رحیمی آذر (تبریز)، پویان فاطمی (لرستان)،

رضا شکری (تهران)، رضا بیات تاجور (ملایر)، بهزاد بهنیا (بجنورد)، علی صادقی روشن (تهران)،مهدی درودیان (تهران)، همکار ارجمند، مهدی قدیری (دبیر ریاضی فولادشهر اصفهان)، هادی شریفیان (گنبدکاووس)، شهرام بزکان (دانشجوی کارشناسی فیزیک دانشگاه تهران)، احمد فضلی (شیراز)، آیت رحیم‌زاده (کرمانشاه)، حسن نیشابوری (مشهد مقدس)، رضا محمدخانی (کامیاران)، مهدی حسنی و داود حبری و خانم لیلا طهماسبی (میانه).

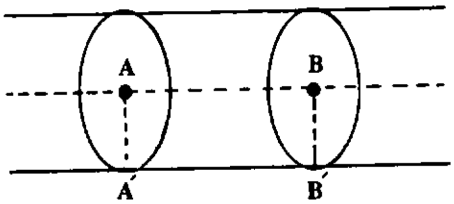
از همگی شما برای ارسال مسائل همراه با حل و مقالهٔ درسی و کمک درسی سپاسگزاریم. از این پس سعی کنید مسائل را خودتان طرح کنید یا دست کم نام منبع مورد استفاده را بنویسید. در صورت امکان از این مسأله‌ها در قسمت مسأله برای حل و مسائل مسابقه‌ای مجله استفاده خواهیم کرد و مقاله های شما را پس از تصویب در هیأت تحریریه چاپ خواهیم کرد.

پاسخ به برخی از اشکالات شما عزیزان در زیر آمده است :

آقایان میثم سرور و کاوه هدایتی از مراکز پیش‌دانشگاهی همدان و رشت :

مجموعه خطهایی که دونقطهٔ A و B از آنها به فاصله L باشند، سطح استوانه‌ای دوّاری است که شعاع قاعدهٔ مقطع قائم آن Lاست ــ مقاله‌های مکان هندسی را مطالعه کنید ــ در مورد این مسأله از A و B عمودهای AA' و BB' را بر صفحه P فرود می‌آوریم، اگر $A'B'$ موازی AB باشد، خط $A'B'$ و همه خطهای موازی آن از صفحه P، پاسخ مسأله هستند. در غیراین صورت مسأله جواب ندارد.

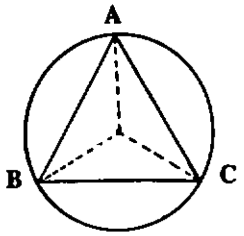
[درضمن راه حلهای پیشنهادی خود را برای ما بفرستید تا اختلاف نظر در مورد این مسأله برطرف شود.]



آقای سیدفرید سیدشیرازی، دانش‌آموز سال سوم رشته ریاضی (تهران) :

از ارسال مسأله هندسه «روش به دست آوردن فرمولی برای مساحت دایره محیطی هر مثلث با داشتن مساحت و دو زاویه از مثلث» همراه با حل سپاسگزاریم در ضمن، راه حل ساده‌تر این مسأله در زیر آمده است.

می‌دانیم مساحت هر مثلث $A\hat{B}C$ به صورت زیر محاسبه می‌گردد.



$$S_{A\hat{B}C}=\frac{1}{2}bc\sin A=2R^2\sin A\sin B\sin C$$

$$\Rightarrow R^2=\frac{S_{A\hat{B}C}}{2\sin A\sin B\sin C}$$

$$\Rightarrow \pi R^2=S_{\text{دایره}}=\frac{\pi S_{A\hat{B}C}}{2\sin A\sin B\sin C}$$

$$=\frac{\pi S_{A\hat{B}C}}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}$$

آقای هادی شریفیان، دانش‌آموز سال دوم رشته ریاضی (گنبدکاووس)

از ارسال ۹ مسأله با حل متشکریم. از آنجا که مسائل ارسالی شما می‌تواند مورد استفاده دانش‌آموزان قرار گیرد، بنابراین یکی از آنها را با حل آورده‌ایم. ما از این پس در بخش پاسخ به نامه‌ها، مسائل و مقاله‌های شما را به طور خلاصه چاپ خواهیم کرد.

معادلهٔ $(\sqrt{4-\sqrt{15}})^x+(\sqrt{4+\sqrt{15}})^x=8$ دارای چند جواب حقیقی است؟

حل : اگر دوطرف معادلهٔ فوق را در $(\sqrt{4+\sqrt{15}})^x$ ضرب کنیم :

$$1+\left[(\sqrt{4+\sqrt{15}})^x\right]^2=8(\sqrt{4+\sqrt{15}})^x$$

اگر در معادله بالا قرار دهیم، $t=(\sqrt{4+\sqrt{15}})^x$ خواهیم داشت :

$$t^2-8t+1=0\Rightarrow t_1=4+\sqrt{15}\ ,\ t_2=4-\sqrt{15}$$

بنابراین :

$$(\sqrt{4+\sqrt{15}})^x=4+\sqrt{15}\Rightarrow x=2$$

$$(\sqrt{4+\sqrt{15}})^x=4-\sqrt{15}\Rightarrow x=-2$$

در نتیجه، معادله فوق دارای دو ریشه حقیقی است و مجموعه جواب آن $\{-2,2\}$ می‌باشد.

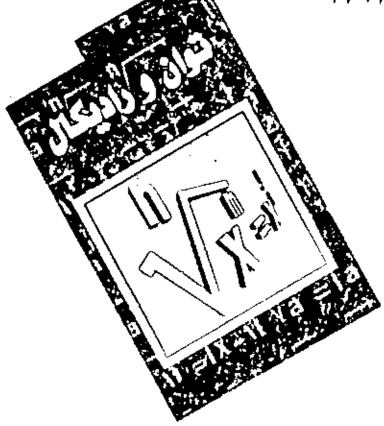
معرفی کتاب

توان و رادیکال

مؤلف: سیدمحمدرضا هاشمی موسوی

ناشر: انتشارات مدرسه

چاپ اوّل: زمستان ۱۳۷۶



یازدهمین کتاب از سری کتابهای کوچک ریاضی که در آن به دو موضوع توان و رادیکال پرداخته شده است. این دو موضوع کاملاً به هم مربوط بوده و همواره دانش‌آموزان از سال اوّل دبیرستان به طور جدّی با آنها سر و کار داشته و در مباحث مختلف ریاضی از این موضوع استفاده می‌شود و مهارت دانش‌آموزان در تجزیه و تحلیل مسائل مربوط به این دو موضوع (توان و رادیکال) توانِ آنها را در مباحث دیگر ریاضی نیز بالا می‌برد. کتاب به صورت خودآموز و بیشتر با تکیه بر حل مسائل متنوع سعی در بالا بردن این مهارت در خواننده داشته و در هر بخش و برای هر فرمول یا رابطه مسائلِ متنوعی حل شده است. کتاب از پرسشهای چهارگزینه‌ای فراوان با حل تشریحی برخوردار است تا دانش‌آموز در این زمینه با نمونهٔ سؤالات کنکورها نیز آشنا شود. مطالعهٔ این کتاب را به همهٔ دانش‌آموزان و دبیران محترم توصیه می‌کنیم.

تابع

تألیف: احمد قندهاری و حمیدرضا امیری

ناشر: انتشارات مدرسه

چاپ اوّل: زمستان ۱۳۷۶

دوازدهمین کتاب از سری کتابهای کوچک ریاضی که در آن به مفهوم تابع که از اساسی‌ترین مفاهیم ریاضی است و دانش‌آموزان از سال اوّل دبیرستان با آن سروکار خواهند داشت پرداخته شده، مؤلفین در این کتاب از دو دیدگاه مفهوم تابع را مورد بررسی قرار داده و تجزیه و تحلیل کرده‌اند، یکی دیدگاه مجموعه‌ای و دیگری دیدگاه جبری. در این کتاب همه چیز راجع به تابع بیان و مورد بررسی قرار گرفته است، از جمله مفهوم، انواع تابعها، خواص تابعها، اعمال جبری روی تابعها، ترکیب تابعها، و ... که در هر مورد به اندازهٔ کافی مثال و مسألهٔ حل شده وجود دارد تا دانش‌آموز بتواند به صورت خودآموز مطلب را درک کند. در انتهای هر بخش تمرینهایی برای

دانش‌آموز قرار گرفته و کتاب از دو مجموعه پرسشهای چهارگزینه‌ای با حلِ تشریحی برخوردار است. در فصل آخر کتاب تابعهای معروف از قبیل تابع هموگرافیک، تابع سینوس، تابع درجه ۲ و... مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته و همهٔ مواردِ بیان شده در بخشهای قبل روی آنها بررسی شده است. مطالعه و استفاده از این کتاب را به همهٔ دانش‌آموزان دبیرستانی و دبیران محترم توصیه می‌کنیم.

ریاضیات پایه ۱

تألیف: سیدمحمدرضا هاشمی موسوی
و میرشهرام صدر
ناشر: علوی
چاپ اوّل: تابستان ۱۳۷۶

از آن جاکه درس ریاضیِ ۱ نظام جدید متوسطه پایه و اساس ریاضیات سالهای بعد به شمار می‌رود و مهارت درباره حل مسائل مبحثهای مختلف این کتاب مانند، تناظر یک به یک بین دو مجموعه، چندجمله‌ایها و اتحادهای جبری و تجزیه عبارتهای جبری نیاز هر دانش‌آموز در سال اوّل و همچنین در سالهای تحصیلی بعد می‌باشد، لذا مؤلفین این کتاب کوشیده‌اند، با طبقه‌بندی و بیان دقیق مفاهیم و مطالب درسی و حل مثالهای متنوع وگوناگون باعث پرورش قوه حل مسأله در خواننده گردند. همچنین در پایان هر فصل تعدادی مسأله تکمیلی با حل آورده شده است و در پایان کتاب دو بخش موجود می‌باشد که بخش اوّل اختصاص به تستهای ریاضی ۱ با حل تشریحی و قسمت دوم اختصاص به مسائل امتحانی با حل تشریحی یافته است. همچنین در پایان کتاب واژه‌نامه جهت آشنایی دانش‌آموزان با واژه‌های لاتین کتاب ریاضی ۱ آمده است. مطالعه این کتاب به همه دانش‌آموزان، داوطلبان کنکور و دبیران محترم توصیه می‌شود.

اعداد صحیح به خاطر موارد استعمال مکررشان در ریاضیات و زندگی روزمره، مهمترین زیرمجموعهٔ اعداد حقیقی، و در نتیجه سزاوار توجه مخصوص‌اند، و دو خاصیت بخشپذیری و استقراء دو ویژگی مهم این اعداد به شمار می‌روند.

در علوم کامپیوتری نیز مانند ریاضیات، دانستن صحت آن‌چه که انجام می‌دهیم حیاتی است. به عنوان مثال، در تحلیل الگوریتمی، به دانستن این که الگوریتم مورد بحث، آن‌چه را که انجام دادنش توسط آن مفروض است، انجام می‌دهد علاقه‌مندیم

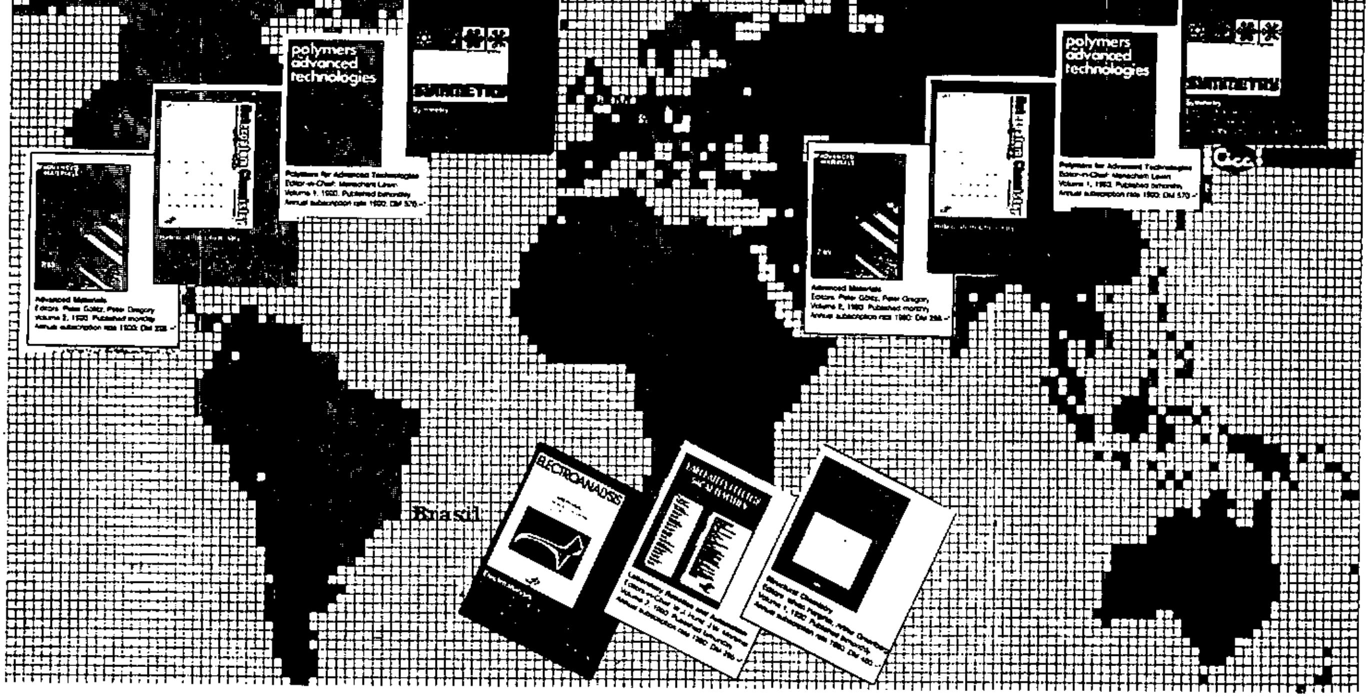
برای به درستی انجام دادن موارد مذکور، اغلب لازم است از صورتهایی که ریاضیات می‌تواند برای تحقیق اینکه گزاره‌هایی که مایلیم در مورد الگوریتمهای مورد بحث تشکیل دهیم صحیح‌اند، به دست دهد، استفاده کنیم.

فرگه، منطق دان آلمانی به پیروی از طرز تفکر کانْت در کتاب مبانی حساب خود می‌نویسد :

حقایق هندسی بر هر چه برای ما از جنبهٔ فضایی قابل درک باشد، حکومت می‌کنند، خواه مستدرکات ما واقعی باشند و خواه محصول تخیل ما.

پرت و پلاهایی که به هنگام هذیان می‌بینیم، قویترین مخترعات افسانه و شعر، جایی که جانوران سخن می‌گویند و ستارگان خاموش می‌مانند، جایی که آدمیان سنگ می‌شوند و درختان آدمی می‌گردند، جایی که آنان که در آب غرق شده‌اند زلف خود را می‌گیرند و خود را از آب بیرون می‌کشند. همه، تا وقتی که قابل درک باشند، تابع اصول هندسی‌اند.

«از: فلسفهٔ ریاضی، ترجمهٔ احمد بیرشک»



مقالات کوتاه از مجله‌های ریاضی معتبر جهان (۲۰)

قضایای سِوا، مِنلائوس، و اصل سطح

(قسمت دوم)

Branko Grünbaum
G.C.Shephard
Mathematics Magazine vol. 68

● ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

۲. هندسهٔ آفین و چندضلعیها

به‌خاطر بیاورید که هندسهٔ آفین با ویژگیهای هندسی‌ای سر و کار دارد که ناوردای آفین "affine invariant" هستند، که بدین‌معنی است که تحت تبدیلهای آفین "affinities" (یعنی، تبدیلهای خطی ناتکین ترکیب شده با انتقالها) ناوردا (یا تغییرناپذیر)اند.

از لحاظ هندسی، می‌توان این تبدیلات را به‌صورت دورانها، تقارنها، انتقالها و برشها، یا هر ترکیبی از اینها درنظر گرفت. نسبتهای طولهای واقع بر خطوط موازی و نسبتهای سطحها تحت تبدیلات آفین محفوظ می‌مانند و درنتیجه به هندسهٔ آفین تعلق دارند، درحالی که طولها، زاویه‌ها و سطحها چنین نیستند. همهٔ نتایج ما به هندسهٔ آفین متعلق‌اند، اما به‌طور وضوح در هندسهٔ اقلیدسی محدودتر نیز درست باقی می‌مانند.

مقصود از چندضلعی "polygon" $P=[V_1, V_2, \cdots, V_n]$ دنباله‌ای دوری از $n \ge 3$ نقطهٔ V_i در صفحهٔ آفین، همراه با n قطعه خط بستهٔ $S_i=[V_i, V_{i+1}]$ است. نقاط V_i *رأسهای* P "Vertices" و قطعات S_i *یالهای* P "edges" اند. از اینجا به بعد، همهٔ اندیسهای i به مدول n تحویل می‌شوند آنچنان که در $1 \le i \le n$ صدق کنند؛ گذشته از این، برای اجتناب از حالات خاص و تباهیدگیها همواره فرض می‌کنیم رأسهای V_i و V_{i+1} متمایزند. چندضلعی به‌صورت جهتدار درنظر گرفته می‌شود و توسط هرجابگشت دوری رأسها تغییر نمی‌کند؛ اما، ترتیب معکوس رأسها چندضلعی جدید P' ی ایجاد می‌کند، که گفته می‌شود از P و با به *مخالف جهت رفتن* به‌دست آمده است.

چندضلعی با n رأس، و بنابراین n یال، را n ضلعی می‌نامیم. توجه داشته باشید که این چندضلعیها بسیار عمومی‌اند؛ چه ممکن است رأسهای غیرمجاور منطبق باشند و یالها متقاطع شوند یا جزئاً یا کلاً روی هم قرار گیرند. قضایای ما در مورد چندضلعیهایی چنین به‌کار می‌روند. گاهی ضروری می‌شود که محدودیتهای بیشتری بر مکان رأسها اعمال شود. این محدودیتها را هنگام ضرورت متذکر خواهیم شد.

بهتر است که مفهوم V_iV_{i+1}، یعنی *ضلع* "side" چندضلعی را نیز معرفی کنیم؛ این مفهوم خطی است. شامل یال $[V_i, V_{i+1}]$. V_iV_j یِ *قطر* "diagonal" چندضلعی خطی است

که توسط دو رأس نامجاور V_i و V_j از P تعریف می‌شود. این خط اگر، و تنها اگر، V_i و V_j نقاطی متمایز باشند، تعریف می‌شود.

برای نقاط از حروف بزرگ V، X، W، ...، با اندیس یا بدون اندیس، و برای بردارهای مکانی آنها، نسبت به مبدأیی به دلخواه انتخاب شده، از حروف کوچک نظیر آنها، یعنی v، x، y، ... استفاده می‌کنیم. بردارهای مکانی را می‌توان به‌گونه‌ای کاملاً دقیق در هندسه آفین به‌کار برد.

فرض می‌کنیم A، B، C، D چهار نقطه و چنان‌اند که AB موازی CD است. (به عبارت دیگر، سوهای بردارهای $b-a$ و $d-c$ منطبق یا مستقیماً مقابل‌اند). فرض می‌کنیم λ عددی حقیقی، تعریف شده با $\lambda(d-c)=(b-a)$، باشد. در این صورت λ ناوردایی آفین است. این عدد، به‌طور ساده، نسبت طول [A,B] به طول [C,D] است، با علامتی بعلاوه یا منها، بسته به اینکه این قطعه خطها، هم‌سو یا متقابل باشند.

این نسبت را با $\lambda=[AB/CD]$ نمایش خواهیم داد. واضح است که روابطی چون

$$\left[\frac{A\quad B}{C\quad D}\right]=-\left[\frac{B\quad A}{C\quad D}\right]=-\left[\frac{A\quad B}{D\quad C}\right]=\left[\frac{B\quad A}{D\quad C}\right]$$

برقرار، و حذف مجاز است، به‌طوری که، فی‌المثل،

$$\left[\frac{A\quad B}{C\quad D}\right]\cdot\left[\frac{C\quad D}{E\quad F}\right]=\left[\frac{A\quad B}{E\quad F}\right]$$

این ویژگیها مستقیماً از تعاریف ذکر شده نتیجه می‌شوند.

درحالت خاص، اگر نقطهٔ W ای به‌گونه‌ای معین، تعریف شده بر V_iV_{i+1}، ضلعی از چندضلعی P، متمایز از V_i و V_{i+1}، هردو، باشد، در این صورت به $[V_iW/WV_{i+1}]$ به‌عنوان *یال‌ـنسبت* "edge - ratio" متناظر با این ضلع اشاره می‌کنیم. به‌گونه‌ای مشابه، اگر W بر قطر V_iV_j واقع شود، آنگاه $[V_iW/WV_j]$ *قطر ــ نسبت* "diagonal - ratio" نامیده می‌شود.

ملاحظاتی مشابه را در مورد سطحها به‌کار می‌بریم. در صفحهٔ اقلیدسی سطح علامتدار a(A,B,C) از مثلث [A,B,C] را مساحت آن (به مفهوم متعارف) درنظر می‌گیریم با علامتی مثبت یا منفی به‌عنوان پیشوند آن. علامت + هنگامی به‌کار می‌رود که مثلث به‌طور مثبت جهتدار باشد، یعنی، رأسهای آن به‌ترتیب پاد ساعتگرد نامگذاری شده باشند، و علامت − زمانی که مثلث به‌طور منفی جهتدار شده باشد؛ یعنی رئوس آن را در سوی ساعتگرد نامیده باشیم. در مورد دو مثلث [A,B,C] و [D,E,F] واقع در صفحه، نسبت سطحهای علامتدارشان، یعنی a(A,B,C)/a(D,E,F)، ناوردایی آفین است که با $\lambda=[A\ B\ C/D\ E\ F]$ نمایش داده می‌شود. λ، برحسب بردارهای مکان، با

$$(a\times b+b\times c+c\times a)=\lambda(d\times e+e\times f+f\times d)$$

تعریف می‌شود، که $\times$ آن یک حاصلضرب برداری را مشخص می‌کند. تمام این بردارهای حاصلضرب، از آنجا که جمیع این نقاط در صفحه قرار دارند، موازی‌اند. به‌گونه‌ای هم‌ارز، λ توسط

$$\det\begin{bmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}=\lambda\ \det\begin{bmatrix}d_1 & e_1 & f_1\\ d_2 & e_2 & f_2\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

تعریف می‌شود، که در آن (a_1,a_2) مختصات نقطهٔ A، یعنی، مؤلفه‌های بردار مکانی a هستند، و غیره

از آنجا که جایگشت دوری رأسها سطح را تغییر نمی‌دهد، اما معکوس کردن ترتیب رئوس، تغییردهندهٔ علامت سطح است، روابطی چون رابطه‌های زیر برقرارند:

$$\left[\frac{A\quad B\quad C}{D\quad E\quad F}\right]=\left[\frac{B\quad C\quad A}{D\quad E\quad F}\right]=\left[\frac{C\quad A\quad B}{D\quad E\quad F}\right]=$$
$$-\left[\frac{B\quad A\quad C}{D\quad E\quad F}\right]=\left[\frac{B\quad C\quad A}{E\quad F\quad D}\right]=\left[\frac{B\quad A\quad C}{E\quad D\quad F}\right]$$

گذشته از این، در اینجا نیز، چون درحالت قطعه خطها، حذف مجاز است، به‌عنوان مثال،

$$\left[\frac{A\quad B\quad C}{D\quad E\quad F}\right]\cdot\left[\frac{D\quad E\quad F}{G\quad H\quad J}\right]=\left[\frac{A\quad B\quad C}{G\quad H\quad J}\right]$$

در این علامت‌نویسی، اصل سطح (۱) را می‌توان به‌صورت اندکی قدرتمندتر

$$\left[\frac{A_1P}{A_2P}\right]=\left[\frac{A_1\ BC}{A_2\ BC}\right]$$

نوشت، که از طولهای علامتدار و سطحهای علامتدار مثلثها بهره‌مند است.

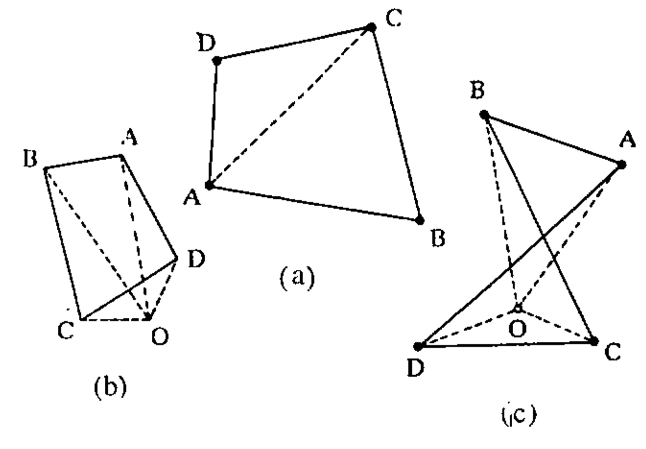
سطح علامتدار "signed area" یک n ضلعی (n > ۳) را

نیـز می‌توان تعـریف کـرد ؛ n ضلعی را به طریقی مـثلث‌بندی می‌کنیم، و مثلثهای به‌دست آمده را *بگونه‌ای منطقی* جهت‌بندی می‌کنیم (شکل ۵ را ملاحظه کنید). این‌کار بدین معنی است که هرگاه دو مثلث مثلث‌بندی در یال [B,C] مشترک باشند، آن‌گاه جـهت‌بندی آنهـا چنان باشـد کـه سوهای مـخـالف بر این یال مشـترک ایجاد کند. در این صورت سطح چندضلعی به‌عنوان مجموع سطحهای علامتدار مثلثهای مؤلفه تعریف می‌شود. البته برای اعتبار این تعریف، لازم است که نشان دهیم سطح علامتدار مورد بحث از مثلث‌بندی به‌کار رفته مستقل است. این عمل، محاسبه‌ای معمولی است، و در اینجا به جزئیات آن نمی‌پردازیم. درواقع، اگر چندضلعی مورد بحث را به‌عنوان خمی جـهـتـدار تعبیر کنیم، سطح علامتدار آن دقیقاً آن چیزی است که با به‌کار بردن انتگرالهای آشنای حسابان در مورد آن، به‌دست می‌آوریم.

در اینجـا از خواننده دعوت می‌کنیم اثباتهـای داده شده در فـوق را، با اسـتـفـاده از سطحـهـای علامـتـدار و علامت‌نویسی جدید، تعدیل کرده اثباتهای عمومی قضایای مورد بحث قرار گرفته را به‌دست دهد. درحالت خاص، اگر به‌جای (۵)

$$\left[\frac{V_iW_i}{W_{i+1}\ V_{i+2}}\right]=\left[\frac{V_iV_{i+1}V_{i+4}}{V_iV_{i+1}V_{i+2}V_{i+4}}\right]\times\left[\frac{V_iV_{i+1}V_{i+2}V_{i+3}}{V_{i+2}V_{i+3}V_{i+1}}\right]\qquad(5a)$$

به‌کار رود، اثباتی از *قضیهٔ هواهن* به‌دست می‌آید که به تحدّب، سـادگی یا جـهـت پنج‌ضلعی $[V_1,V_2,V_3,V_4,V_5]$ وابسـتـه نیست.

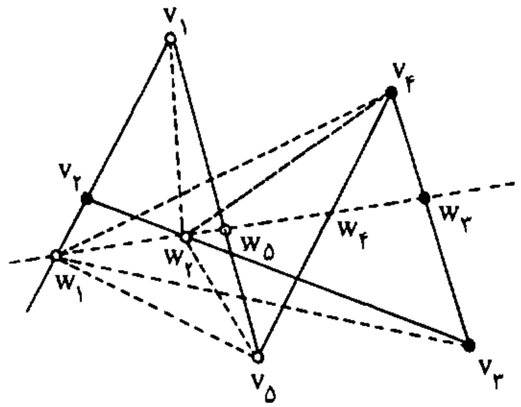


سه مثال از مثلث‌بندی صحیح چهارضلعی [A,B,C,D]. در (a)، چهار زاویه‌ای به دو مـثلث [A,B,C] و [A,C,D] مثلث‌بندی شـده است. در (b) و (c) مثلثها عبارت‌اند از : [O,A,B]، [O,B,C]، [O,C,D]، [O,D,A].

۳. تعمیمهای قضایای *سِوا* و *مِنِلائوس*

در این بخش و بخش بعدی، نقاط W_i، واقع بر اضلاع یا اقطار یک n ضلعی، را به‌عنوان نقاط تقاطع آنها با سایر خطوط تعریف می‌کنیم. در سراسر مطلب، بدون اشاره‌ای دیگر، فرض می‌کنیم این نقاط مـوجـودند (یعنی، خطوط مورد بحث مـوازی نیستند) و از رأسها مـتـمایزند (و بنابراین یال ـ نسبت و قطر ـ نسبت‌های مربوطه خوش‌تعریف‌اند). در این بخش با مسایلی از نوع مـسـأله‌ای کـه بعـد می‌آید سـر و کـار داریم. بر هر ضلع V_iV_{i+1} از n ضلعی، نقطهٔ W_i، به‌گـونه‌ای از لحـاظ هندسی معنی دار، تعریف شده است. تحت چه شرایطی می‌توان اظهاری در مورد مـقـدار حاصلضرب یال ـ نسبتها$[V_iW_i/W_iV_{i+1}]$ مطرح کرد؟ مسایلی مشابه نیزدربارهٔ قطر ـ نسبت‌ها مطرح خواهیم کرد.

اولین دست‌آوردمان از این دست، تعـمیم قـضیهٔ منلائوس به n ضلعیهاست. این نتیجه، تازه نیست ـ بخش ۵ را ملاحظه کنید. حالت $n=5$ را در شکل ۶ نشان داده‌ایم.



قضیهٔ منلائوس در پنج‌ضلعی مقرر می‌کند که

$$\left[\frac{V_1\ W_1}{W_1\ V_2}\right]\left[\frac{V_2\ W_2}{W_2\ V_3}\right]\left[\frac{V_3\ W_3}{W_3\ V_4}\right]\left[\frac{V_4\ W_4}{W_4\ V_5}\right]\left[\frac{V_5\ W_5}{W_5\ V_1}\right]=-1$$

قـضـیهٔ ۱ *(قضـیهٔ منلائوس در n ضلعـیها). فرض می‌کنیم $P=[V_1,\cdots,V_n]$ یک n ضلعی و به‌ازای $i=1,\cdots,n$، قاطعی ضلع V_iV_{i+1} را در W_i قطع کند. در این صورت حاصلضرب یال ـ نسبتهاثابت است، درواقع به‌ازای جمیع n ضلعیهای P،*

$$\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{V_iW_i}{W_iV_{i+1}}\right]=(-1)^n\qquad(6)$$

در حـالتی که n فـرد است، حـاصلضـرب مـورد بحث منفی است، که نشان می‌دهد که تعداد فردی از تقاطعات قاطع مورد

بحث با اضلاع V_iV_{i+1}، از n ضلعی، باید برونی "external" باشد، یعنی بر یال $[V_iV_{i+1}]$ واقع نباشد. این موضوع، درحالت $n=3$، واقعیتی آشناست، و به‌عنوان اکسیوم‌پاش "Pasch's axiom" شناخته می‌شود و اگر n زوج باشد، تعداد زوجی (امکاناً صفر) از تقاطعات قاطع با اضلاع n ضلعی باید برونی باشد.

اثبات. دو نقطهٔ دلخواه از نقاط W_i، مثلاً W_1 و W_2 را انتخاب می‌کنیم (شکل ۶ را ملاحظه کنید). در این صورت اصل سطح در مورد مثلثهای با قاعدهٔ $[W_1, W_2]$ می‌دهد

$$\left[\frac{V_iW_i}{W_iV_{i+1}}\right]=-\left[\frac{V_iW_1W_2}{V_{i+1}W_1W_2}\right]$$

با قرار دادن آن به‌جای هر یک از n عامل سمت چپ (۵)، حاصلضربی از جملاتی به‌دست می‌آوریم که هر یک از آنها خارج قسمت سطوح مثلثهاست، و این حاصلضرب، با انجام عمل حذف، مقدار $(-1)^n$ را می‌دهد که مطلوب است.

تغییر اندکی در این قضیه، آن را به‌جای یالها، در مورد قطرها به‌کار می‌برد. اگر $1<j<n$، و W_i به‌عنوان تقاطع قاطعی با قطر V_iV_{i+j}، به‌ازای $i=1,\dots,n$، تعریف شده باشد، آنگاه

$$\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{V_iW_i}{W_iV_{i+j}}\right]=(-1)^n$$

این رابطه را، علی‌رغم تعمیم ظاهری موجود، می‌توان از قضیهٔ ۱ با نامیدن رأسهای V_1، V_2، V_3، .... به‌صورت V_i، V_{i+j}، V_{i+2j}، .... نتیجه گرفت. این شماره‌بندی تازه (اگر j با n اول نباشد) چندضلعی اصلی را به دو یا بیش از دو چندضلعی تقسیم می‌کند، اما این موضوع تأثیری بر نتیجهٔ مورد بحث یا اثبات آن نمی‌گذارد.

ادامه دارد.

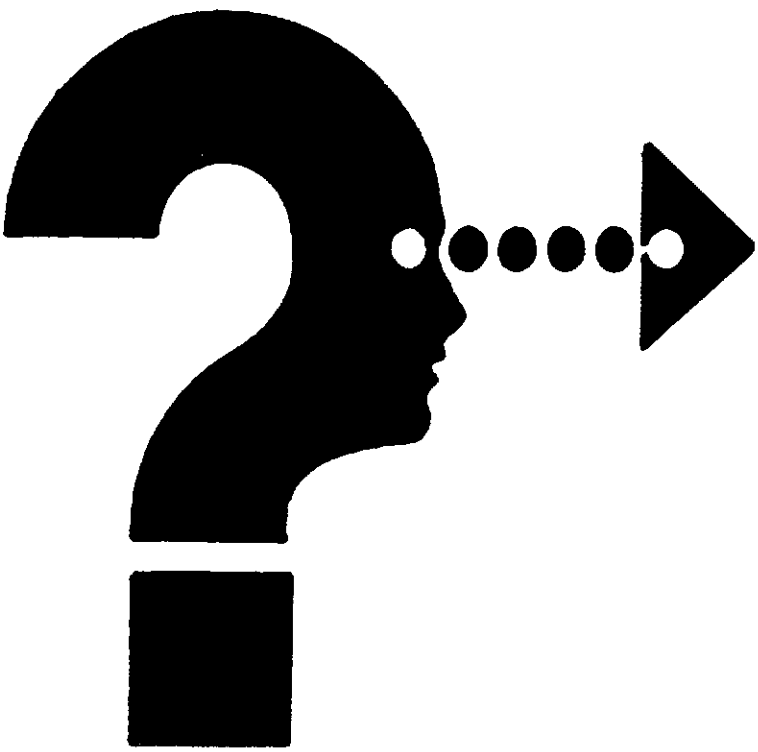
ادب ریاضی

آورده‌اند که وقتی در یکی از شهرهای آلمان حاکمی می‌زیست که از لحاظ درستی ضرب‌المثل بود. دزدان و رهزنان از او ترس بسیار داشتند، و مردان شرافتمند به او صمیمانه احترام می‌گذاشتند. اما روزی اهالی شهر به رازی صاعقه‌آسا پی‌بردندازاین‌قرارکه: حاکم هر شب لباس مبدل می‌پوشید و طپانچه‌ای در جیب می‌گذاشت و آهسته و بی‌سروصدا از خانه خارج می‌شد و مردم را لخت می‌کرد.

داستان ریاضی در اواخر قرن نوزدهم نیز چنین بود. از بیست قرن پیش تا این زمان، مردم در مقابل ریاضیات سر تعظیم فرود می‌آوردند و به آن ایمان فوق‌العاده داشتند. اما ناگهان اصل اقلیدس ضعف گریه‌آوری از خود نشان داد و مفهوم قدیمی اتصال با سروصدای بسیار فرو ریخت و نابود شد، و قلمرو آشنای اعداد معمولی توسط بهمنی از اعداد اصم و اندازه نگرفتنی خرد شد و بنایی که این‌قدر مورد احترام و پرستش بود، ترکها و شکافهای بزرگ برداشت.

و اما، فقط بنای معظم ریاضیات نبود که گرفتار خرابی و ویرانی می‌گردید، تمام قصر بزرگ علوم به این حال دچار بود.

تاریخ علوم. پی‌یر روسو



مسائل برای حل

سؤالات امتحانات هماهنگ استانی و کشوری

سؤالات امتحان هماهنگ درس هندسه (۱) نظام جدید آموزش متوسطه شهر تهران خرداد ماه ۱۳۷۶

۱ ــ نقطهٔ M را روی قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین ABC به رأس A در نظر بگیرید.

الف) مجموع فاصله‌های نقطهٔ M از دو ساق مثلث را به‌دست آورید.

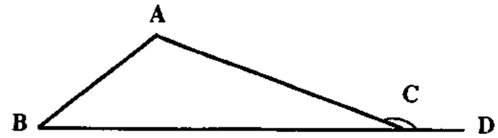
ب) M را روی قاعده جابجا کنید و مجدداً فاصلهٔ M را از دو ساق مثلث به‌دست آورید.

ج) آیا مجموع فاصله‌ها از دو ساق مثلث به مکان نقطهٔ M روی قاعده مثلث بستگی دارد؟

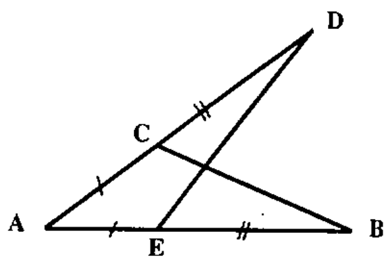
د) اگر M بر روی BC به یکی از رئوس B یا C خیلی نزدیک شود چه اتفاقی می‌افتد؟

۲ ــ نشان دهید که در مثلث ABC، (شکل زیر)

$A\hat{C}D = \hat{A} + \hat{B}$



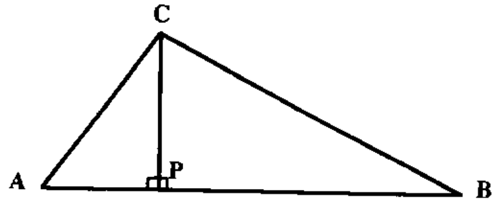
۳ ــ در شکل زیر با فرض $CD = EB$ و $AC = AE$ ثابت کنید $BC = DE$



۴ ــ **قضیه)** اگر در مثلث ABC ، $AB = c$ و $AC = b$ و $BC = a$ و $a^2 = b^2 + c^2$ آنگاه مثلث ABC در رأسA قائمه است.

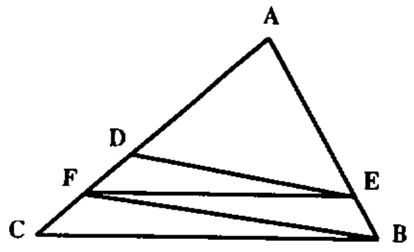
۵ ــ فرض کنید ABC مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که در رأس C قائمه است از C پاره خط CP را بر AB عمود می‌کنیم، ثابت کنید :

الف) $PC^2 = AP.PB$ ب) $AC^2 = AP.AB$



۶ ــ در مثلث ABC ، در شکل زیر DE با FB موازی است و EF با BC با دوبار استفاده از قضیهٔ تالس ثابت کنید :

$$\frac{AD}{DF}=\frac{AF}{FC}$$



۷ ــ طول ضلعهای مثلث ABC به ترتیب ۷ و ۹ و ۱۴ سانتیمتر است و مثلث PQR با مثلث ABC متشابه است. اگر طول بزرگترین ضلع مثلث PQR مساوی ۲۱ سانتیمتر باشد، محیط مثلث PQR را به‌دست آورید.

۸ ــ در دو مثلث متشابه ثابت کنید نسبت میانه‌های نظیر در آنها برابر است با نسبت تشابه دو مثلث.

۹ ــ نسبت اندازهٔ مساحتهای دو مثلث متشابه $\frac{۳۶}{۲۵}$ است. با ذکر دلیل نسبت محیط‌های آنها را به دست آورید.

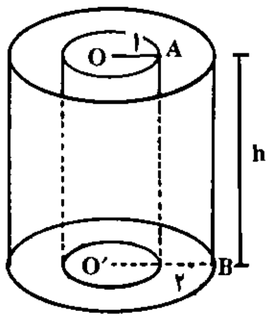
۱۰ ــ اگر طول قطر مکعب را نصف کنیم، طول هر یال آن چه تغییری می‌کند؟

۱۱ ــ در یک منشور قائم که قاعدهٔ آن مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع ۴ سانتیمتر و ارتفاع منشور ۶ سانتیمتر می‌باشد. مساحت جانبی و مساحت کل این منشور را پیدا کنید.

۱۲ ــ دو استوانه قائم که مرکز قاعده‌های آنها یکی است، را در نظر بگیرید با توجه به شکل :

الف) نسبت مساحت کل استوانه بزرگتر به مساحت کل استوانهٔ کوچکتر را بیابید. O'B = ۲ و OA = ۱

ب) حجم فضای بین این دو استوانه را پیدا کنید.



۱۳ ــ مساحت کل یک نیمکره 6π سانتیمتر مربع است شعاع و حجم کره را بیابید.

سؤالات امتحان هماهنگ درس هندسه (۲) نظام جدید آموزش متوسطه شهر تهران ـ خردادماه ۱۳۷۶

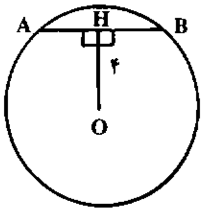
۱ ــ مکان هندسی نقطه‌ای در فضا که از یک پاره‌خط به فاصلهٔ ۳ باشد را به کمک استدلال استقرایی حدس بزنید و بیان کنید.

۲ ــ قضیه) ثابت کنید سه نیمساز داخلی هر مثلث همرسند.

۳ ــ با استفاده از برهان غیرمستقیم ثابت کنید اگر دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر نظیر به نظیر مساوی باشند و ضلع سوم مثلث اول بزرگتر از ضلع سوم مثلث دوم باشد، آنگاه زاویهٔ بین دو ضلع از دو مثلث اول بزرگتر از زاویه بین دو ضلع نظیر از مثلث دوم است.

۴ ــ از مثلث ABC ضلعهای AB = ۳ و AC = ۴ و AH = ۲/۵ (ارتفاع وارد بر ضلع BC) معلوم است. مثلث را رسم کنید.

۵ ــ در دایره C (o و ۵) شکل زیر OH = ۴ است طول وتر AB را بدست آورید.

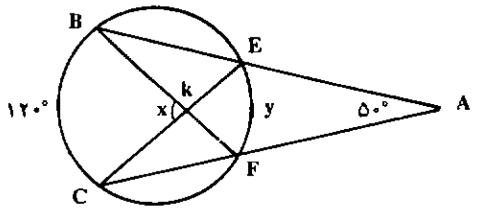


۶ ــ زاویه بین دو مماس رسم شده از نقطهٔ A بر دایره C(O, R) برابر $60°$ است طول پاره خط OA و طول مماسها را بدست آورید.

۷ ــ در شکل زیر x و y را حساب کنید.

$y=\widehat{EF}$

$x=B\hat{K}C$



۸ ــ کدام‌یک از عبارات زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) تجانس یک ایزومتری است.

ب) بازتاب مرکزی شیب را حفظ می‌کند.

ج) دوران طول پاره‌خط را حفظ نمی‌کند.

د) انتقال اندازهٔ مساحت شکل را ثابت نگه می‌دارد.

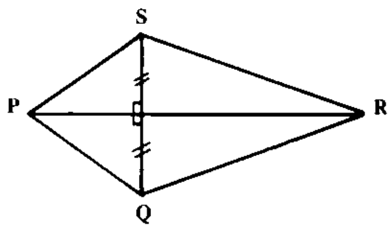
۹ ــ خط به معادلهٔ : $x + ۲y - ۶ = ۰$ مفروض است. معادلهٔ خط تصویر را تحت دوران $R(x,y) = (-y, x)$ بیابید.

۱۰ ــ تبدیل $T(x,y) = (x-۱, y+۲)$ و نقاط $B\begin{vmatrix} ۴ \\ ۱ \end{vmatrix}$ و $C\begin{vmatrix} ۱ \\ ۳ \end{vmatrix}$ مفروضند.

معادلهٔ خط $B'C'$ تصویر BC را بیابید.

نشان دهید $BC = B'C'$ آیا چهارضلعی $BB'C'C$ متوازی‌الاضلاع است؟ چرا؟

۱۱ ــ در شکل زیر PR عمود منصف QS است. به کمک ویژگیهای تبدیلات ثابت کنید : $S\hat{P}R = Q\hat{P}R$



۱۲ ــ قضیه) اگر خطی با دو صفحه متقاطع موازی باشد، با فصل مشترک آن دو صفحه موازی است.

۱۳ ــ اولاً دو خط متنافر را تعریف کنید.

ثانیاً دو خط متنافر d' و d مفروضند، صفحه‌ای مشخص کنید که خط d' را شامل باشد و با خط d موازی باشد.

سؤالات امتحان هماهنگ درس ریاضی (۲) نظام جدید آموزش متوسطه شهر تهران ـ خرداد ماه ۱۳۷۶

۱ ــ نقاط $A(۰,۳)$ و $B(۳,-۱)$ و $C(-۳,-۱)$ سه رأس مثلث ABC هستند. مطلوب است :

الف) مختصات M وسط پاره‌خط BC

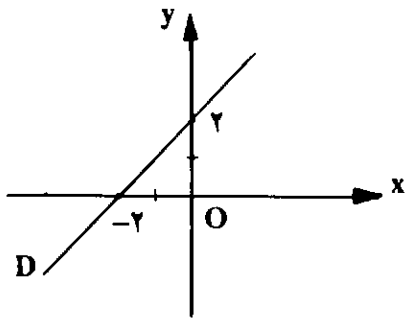
ب) محاسبه طول پاره خط AB

۲ ــ نمودار هر یک از معادلات زیر را در دو دستگاه جدای محورهای مختصات رسم کنید.

الف) $xy + x^۲ = x$　　ب) $y = |۲x|$

۳ ــ الف) در شکل زیر معادله خط D را بنویسید.

ب) فاصلهٔ نقطه $A(۲,۳)$ از خط به معادلهٔ : $۳x - ۴y = ۴$ را بیابید.

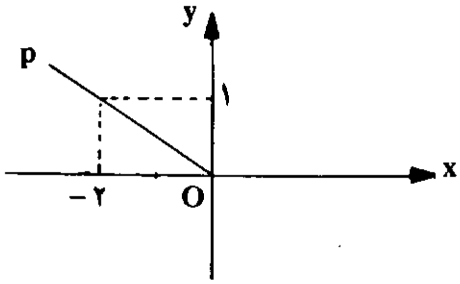


۴ ــ الف) حاصل عبارت زیر را به صورت رادیکال ساده‌شده بنویسید.

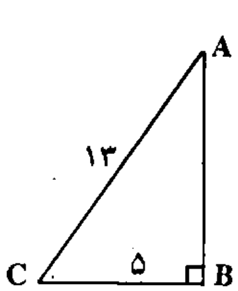
$\sqrt{۵}(۶+\sqrt{۲۰}) - (۱۰ - ۳\sqrt{۵})^۲ =$

ب) مخرج کسر $\dfrac{۳\sqrt{x}-۱}{۱+\sqrt{x}}$ را گویا کنید. $(x \geq ۰)$

۵ ــ در شکل زیر زاویهٔ θ و نقطهٔ P مشخص شده است. مطلوب است : $\sin\theta$ و $\cos\theta$



۶ ــ در مثلث قائم الزاویه شکل زیر نسبت‌های مثلثاتی زاویه A را محاسبه کنید.



۷ ــ درستی تساوی $(۲ + \tan^۲\theta)\cdot\cos^۲\theta = ۲ - \sin^۲\theta$ را بررسی کنید.

۸ ــ الف) نمودار سهمی $y=(x-4)^2$ را رسم کنید.
ب) مختصات رأس سهمی را بیابید.

۹ ــ الف) معادله $\frac{x-1}{4}=\frac{x+3}{2}-\frac{x+5}{3}$ را حل کنید.

ب) نصف عددی را به پنج اضافه می‌کنیم پنج برابر آن عدد به‌دست می‌آید. آن عدد را بیابید. (از روش معادله حل کنید.)

۱۰ ــ الف) مقدار a را چنان بیابید که $x=2$ یک جواب معادله $x^2+ax+2=0$ باشد.

ب) معادلهٔ : $x^2-3x+2=0$ را حل کنید.

۱۱ ــ الف) معادلهٔ $x^2=2x-1$ را از طریق رسم حل کنید.

ب) در معادله $x^2-mx+4=0$ مقدار m را چنان بیابید که معادله ریشه مضاعف داشته باشد.

۱۲ ــ الف) نامعادلهٔ : $2x-3\geq\frac{5}{2}x+1$ را حل کنید.

ب) در مجموعه جواب نامعادله $3x+b<0$ به ازای چه‌مقادیری از b مقدار x منفی می‌شود؟

سؤالات امتحان نهایی درس ریاضی (۵) نظام جدید آموزش متوسطه ـ دی ماه ۱۳۷۵

۱ ــ با استفاده از تعریف فاصله عبارات زیر را ساده کنید.

الف) $]-1,2[\cap[1,4[$

ب) $]-1,2]\cup]2,4]$

۲ ــ دامنه توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $y=\frac{x+1}{\sqrt{2x-6}}$

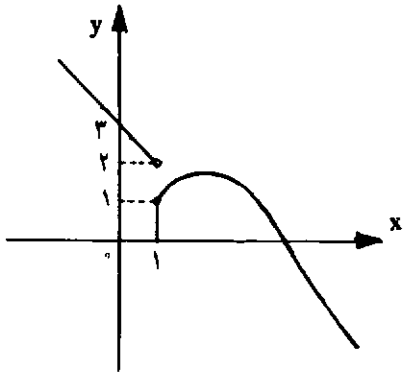
ب) $y=\log(x-4)$

ج) $y=\cot g\,(x-\frac{\pi}{4})$

۳ ــ اگر $f(x)=2x+1$ و $g(x)=3x^2-5$ باشد $(fog)(x)$ را به‌دست آورید.

۴ ــ اگر $f(x)=\sqrt{x+2}$ و $g(x)=\sqrt{3-x}$ باشد مطلوب‌است $(\frac{f}{g})(x)$ و دامنه آن.

۵ ــ از روی نمودار تابع $y=f(x)$ حدهای زیر را به‌دست آورید.



الف) $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$

ج) $\lim\limits_{x\to0}f(x)$

د) $f(1)=$

۶ ــ حدهای زیر را بدست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{3x^2+5x+2}{x^2-1}$

ب) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos^2x}{2\sin x}$

ج) $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{2}^-}\tan^3x$

د) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x+1}{3x+\sqrt{x^2-1}}$

هـ) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4}$

۷ ــ اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4}{2-x} & x\neq2\\ 2a+1 & x=2\end{cases}$ در $x=2$ پیوسته باشد مقدار a را بدست آورید.

۸ ــ اگر $f(x+2)=\frac{3x+5}{4x-6}$ باشد $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ را به‌دست آورید.

۹ ــ پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases}2x+5 & x>0\\ 5 & x=0\\ x^2-3x+5 & x<0\end{cases}$ را در $x=0$ بررسی کنید.

۱۰ ــ مشتق توابع زیر را به دست آورید (ساده کردن لازم نیست)

الف) $y = \dfrac{2x-1}{x^3+2x^2}$

ب) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$

ج) $y = \cos^3 \sqrt{x}$

د) $y = (5x^2-6x)^4$

۱۱ ــ با استفاده از مشتق جدول تغییرات و منحنی نمایش تابع $y = x^3 - 3x$ را رسم کنید.

۱۲ ــ معادله خط مماس بر نمودار تابع $y = x^3 + 3x^2 + 5x + 2$ را در نقطه عطف منحنی بنویسید.

۱۳ ــ آهنگ تغییرات حجم مکعبی به ضلع x سانتیمتر را نسبت به تغییرات x به‌دست آورید، هرگاه x از ۳ به ۵ سانتیمتر تغییر کند. آهنگ لحظه‌ای تغییرات حجم را در $x = 3$ پیدا کنید.

سؤالات امتحان نهایی درس جبر و احتمال نظام جدید آموزش متوسطه ـ دی ماه ۱۳۷۵

۱ ــ برای هر عدد طبیعی n با استفاده از اصل استقراء ثابت کنید.

$$\frac{1}{2\times5}+\frac{1}{5\times8}+\frac{1}{8\times11}+\cdots+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{n}{2(3n+2)}$$

۲ ــ با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید که حاصل‌ضرب دو عدد فرد، همواره یک عدد فرد است.

۳ ــ فرض کنیم $\sqrt{2}$ و $\sqrt{5}$ دو عدد گنگ باشند با استفاده از استدلال برهان خلف ثابت کنید $(\sqrt{5}+\sqrt{2})$ گنگ است.

۴ ــ پنج نقطه داخل مربعی به ضلع ۲ مفروضند. ثابت کنید حداقل فاصلهٔ دو نقطه از این پنج نقطه کمتر از $\sqrt{2}$ است.

۵ ــ به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید.

الف) $(A\cap B\cap C)' = A'\cup B'\cup C'$

ب) $(A\cup B) - C = (A-C)\cup(B-C)$

۶ ــ اولاً حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه را تعریف کنید. ثانیاً با یک مثال نقض نشان دهید که ضرب دکارتی خاصیت جابجایی ندارد.

۷ ــ رابطهٔ R روی $\mathbb{R}\times\mathbb{R}-\{(0,0)\}$ به صورت زیر تعریف شده است:

$(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow ad - bc = 0$

اولاً نشان دهید R یک رابطهٔ هم ارزی است ثانیاً دسته هم‌ارزی $[(2,3)]$ را معین کرده و نمودار مختصاتی آن را رسم کنید.

۸ ــ مطلوب است باقی ماندهٔ 1375^{1375} بر ۷.

۹ ــ یک سکهٔ سالم را ۳ بار می‌اندازیم مطلوب است:

الف) فضای نمونه‌ای این تجربهٔ تصادفی

ب) پیشامد A آن که اقلاً دوبار «رو» بیاید.

ج) پیشامد B آن که فقط دو بار «پشت» بیاید.

د) پیشامد $A'\cap B$ را مشخص کنید.

۱۰ ــ یک سکهٔ سالم را ۱۰ بار می‌اندازیم.

الف) احتمال آن را حساب کنید ۵ بار رو بیاید.

ب) احتمال آن را حساب کنید که ۵ بار رو نیاید.

۱۱ ــ تاسی به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد اول ۳ برابر احتمال وقوع هر عدد غیر اول است. اگر در یک پرتاب این تاس، A پیشامد وقوع عددی کوچکتر از ۴ باشد $P(A)$ را بیابید.

۱۲ ــ دو عدد حقیقی به طور تصادفی در فاصلهٔ $[-2,2]$ انتخاب می‌کنیم احتمال آن که مجموع مربعات آن دو عدد کوچکتر یا مساوی یک باشد را بیابید.

۱۳ ــ فرض کنید A، B، C پیشامدهای دوبه‌دو مستقل بوده ثابت کنید اگر A با $(B\cap C)$ مستقل باشند آنگاه A با $(B\cup C)$ نیز مستقل هستند.

۱۴ ــ ریشه‌های $Z^3 - 1 = 0$ را پیدا کرده و نمایش هندسی آن را رسم کنید $(Z\in\mathbb{C})$

سؤالات امتحان هماهنگ کشوری درس ریاضیات گسسته پیش دانشگاهی ـ خردادماه ۱۳۷۶

۱ ــ گراف $G=(V,E)$ با $V=\{a,b,c,d,e\}$ و $E=\{ab,bc,be,bd,cd\}$ مفروض است:

الف) نمودار G را رسم کنید.

ب) رأسهای گراف G که با رأس C مجاورند مشخص کنید.

ج) یک یال نام ببرید که با حذف آن از G گراف حاصل

درخت باشد.

۲ ــ ثابت کنید تعداد رئوس فرد هر گراف زوج است.

۳ ــ اولاً ماتریس مجاورت گراف ۲- منتظم از مرتبه ۴ را بنویسید. ثانیاً اگر A ماتریس مجاورت گراف ۲- منتظم مرتبه ۴ باشد رابطهٔ بین مجموع درایه‌های قطر اصلی A^2 و اندازهٔ گراف متناظر آن را بنویسید.

۴ ــ اگر a و b دو عدد صحیح مخالف صفر باشند و $a|b$ و $b|a$ ثابت کنید: $a = \pm b$

۵ ــ اگر عدد صحیح n نه بر ۲ و نه بر ۳ بخش‌پذیر باشد آنگاه ثابت کنید: $n = 6q+1$ یا $n = 6q+5$ $(q \in Z)$

۶ ــ اولاً تعریف بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد صحیح را بنویسید.

ثانیاً اگر a و b و m و n اعداد صحیح باشند به طوری که $ma + nb = 1$ ثابت کنید a و b نسبت به هم اولند.

۷ ــ اولاً m بر چه عددی بخش‌پذیر باشد تا معادله $21x + 39y = 2m$ در Z جواب داشته باشد. ثانیاً معادله فوق را به ازاء $m = 21$ در Z حل کنید.

۸ ــ رابطهٔ R در مجموعه $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ تعریف شده است، اگر $M = [m_{ij}]_{n\times n}$ ماتریس متناظر با رابطه R باشد و $M^2 << M$ آنگاه ثابت کنید R خاصیت ترایائی دارد.

۹ ــ اولاً چند عدد n رقمی با ارقام ۱ و۲ و ۳ می‌توان نوشت؟ $(n \geq 3)$

ثانیاً در چند تا از اعداد n رقمی فوق هر یک از ارقام ۱ و ۲ و ۳ حداقل یک بار به کار رفته است؟

۱۰ ــ فرض کنیم شخصی مبلغ a_0 را نزد بانکی سپرده می‌گذارد. اگر در پایان هر سال $\frac{1}{6}$ موجودی او در ابتدای همان سال به سرمایه‌اش اضافه گردد و a_n سرمایه او در پایان سال nام باشد:

اولاً نشان دهید a_n در رابطهٔ بازگشتی $a_{n+1} = \frac{7}{6}a_n$ صدق می‌کند.

ثانیاً اگر $a_0 = 10^6$ آنگاه a_n را بر حسب n به‌دست آورید.

۱۱ ــ اگر P یک تابع احتمال بر مجموعه پیشامدهای فضای نمونه‌ای S باشد اصول موضوعه کولموگوروف (اصول موضوعه احتمال) را برای تابع P بنویسید.

۱۲ ــ فرض کنید A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشد، ثابت کنید:

$$P(A) = P(B).P(A|B) + P(B').P(A|B')$$

(احتمال پیشامدهای B و B' مثبت هستند)

۱۳ ــ خانوادهٔ ۳ فرزندی را به تصادف انتخاب می‌کنیم، متغیر تصادفی را تعداد فرزندان پسر تعریف می‌کنیم.

اولاً مقادیری را که متغیر تصادفی اختیار می‌کند، بنویسید.

ثانیاً اگر احتمال تولد پسر با دختر برابر باشد جدول توزیع احتمال متغیر تصادفی را رسم کنید.

۱۴ ــ جدول توزیع احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر است:

x_i	۱	۲	۳	۴	۵	۶
P_i	$\frac{1}{6}a^2$	$\frac{1}{2}a^2$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}a^2$

اولاً a را پیدا کنید.

ثانیاً به ازای $a = \frac{1}{2}$ نمودار میله‌ای جدول توزیع احتمال را رسم نموده و امید X را محاسبه کنید.

سؤالات امتحانات هماهنگ کشوری درس هندسه تحلیلی و جبر خطی پیش‌دانشگاهی دی‌ماه ۱۳۷۵

۱ ــ برای سه بردار a و b و c اگر $a+b+c=0$ آنگاه نشان دهید: $a \times b = b \times c = c \times a$

۲ ــ نقاط $A(-1,2,0)$ و $B(1,1,2)$ و بردار $\vec{v}(0,1,-1)$ مفروضند، تصویر بردار $\overrightarrow{AB}$ را بر امتداد بردار $\vec{v}$ تعیین کنید.

۳ ــ معادله صفحه گذرا از نقطه تلاقی دو خط $\frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-2}{3}$ و $\begin{cases} x = 3t+4 \\ y = 5t+7 \\ z = 2t+1 \end{cases}$ و عمود بر بردار $\vec{N}(-2,3,4)$ را بنویسید.

۴ ــ معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A(-1,2,3)$ گذشته و موازی فصل مشترک دو صفحه $P: x+y+4z=6$ و $P': x-y+2z=10$ باشد.

۵ ــ در تساوی ماتریسی زیر مقدار x را پیدا کنید:

$$[1 \ \ 2 \ \ x]\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

۶ ــ با استفاده از ویژگیهای دترمینان و بدون بسط تساوی زیر را ثابت کنید :

$$\begin{vmatrix} x+y+۲z & x & y \\ z & ۲x+y+z & y \\ z & x & x+۲y+z \end{vmatrix} = ۲(x+y+z)^۳$$

۷ ــ ثابت کنید اگر $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ یک نگاشت خطی یک به‌یک باشد آنگاه $f^{-۱}$ یک نگاشت خطی است.

۸ ــ ثابت کنید اگر $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ و $g:\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ نگاشتهای خطی باشند آنگاه fog نیز خطی است.

۹ ــ اگر $A=\{v_۱, v_۲, v_۳\}$ پایه‌ای برای $\mathbb{R}^۳$ باشند ثابت کنید هرعضو $\mathbb{R}^۳$ به‌طور منحصر بفرد به‌صورت ترکیب خطی عناصر A نوشته می شود.

۱۰ ــ دستگاه سه معادله سه مجهولی زیر را به روش وارون ماتریس ضرایب حل کنید :

$$\begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ - x_۳ = ۴ \\ ۲x_۱ - x_۲ - x_۳ = -۱ \\ x_۱ + x_۲ - ۲x_۳ = ۱ \end{cases}$$

۱۱ ــ تعریف امتداد ویژه برای نگاشت خطی f را بنویسید آنگاه مقادیر ویژه برای نگاشت f با ماتریس وابسته $A=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ محاسبه کنید، سپس امتداد ویژه برای مقدار ویژه مثبت را به‌دست آورید.

۱۲ ــ در یک به‌یک و پوشا بودن نگاشت خطی f با ماتریس وابسته $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۲ \\ ۰ & -۱ & -۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ تحقیق کرده و بُعد تصویر f را بیابید.

سؤالات امتحانات هماهنگ کشوری درس حساب دیفرانسیل و انتگرال ۱ پیش‌دانشگاهی دی‌ماه ۱۳۷۵

۱ ــ اگر $۱ > a > ۰$ ثابت کنید به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $۰ < a^n \le a$.

۲ ــ ثابت کنید دنباله $\{a_n\}$ که در آن $a_۱ = \sqrt{۳}$ و $a_{n+۱} = \sqrt{۳a_n + ۴}$ کراندار و صعودی است و سپس حد آن‌را به‌دست آورید.

۳ ــ الف : آیا سری $\sum_{k=۱}^{\infty} \log \frac{۳k+۱}{k+۴}$ همگراست؟ چرا؟

ب : ثابت کنید سری $\sum_{k=۱}^{\infty} \frac{۲^{k+۱} - ۳^k}{۵^{k+۲}}$ همگراست و مقدار آن‌را به‌دست آورید.

۴ ــ با استفاده از تعریف حد ثابت کنید :

$\lim_{x \to ۲} (x^۲ + ۵x - ۱۰) = ۴$.

۵ ــ تابع حقیقی $f(x) = \begin{cases} x+۱ & \text{گویا } x \\ x & \text{اصم } x \end{cases}$ مفروض است اگر a عددی گویا باشد، ثابت کنید f در a حد ندارد.

۶ ــ تابع $f(x) = (x-۱)(x-۲)(x-۳) + x^۲$ مفروض است :

الف) نشان دهید که معادله $f(x) = ۰$ در بازهٔ $[۰, ۱]$ دارای ریشه است.

ب) نشان دهید که خط $y = \sqrt{۱۷}$ نمودار تابع f را دربازهٔ $[۲, ۳]$ قطع می‌کند.

۷ ــ مطلوب است معادلات خطوط مجانبهای منحنی $y = \sqrt{x^۲ - ۴x + ۱} - x$.

۸ ــ **قضیه** : هرگاه g در x=a مشتق‌پذیر باشد و $g(a) \neq ۰$ آنگاه $\frac{۱}{g}$ در x=a مشتق‌پذیر است و $(\frac{۱}{g})'(a) = \frac{-g'(a)}{(g(a))^۲}$.

۹ ــ تابع

$$f(x) = \begin{cases} \tan x & ۰ \le x \le \frac{\pi}{۴} \\ a\sin ۲x + b\cos ۲x + c & x > \frac{\pi}{۴} \end{cases}$$

در $x = \frac{\pi}{۴}$ مشتق مرتبه دوم دارد a و b و c را به‌دست آورید.

۱۰ ــ تابع $f(x) = x^۳ + x - ۶$ مفروض است از نقطه‌ای به عرض ۲ واقع بر نمودار تابع معکوس f خطی بر نمودار تابع معکوس مماس رسم می‌کنیم شیب خط را به‌دست آورید.

۱۱ ــ اگر متحرکی روی نمودار $(x > ۰) ۴x^۲ - ۹y^۲ = ۷$ به‌گونه‌ای حرکت کند که آهنگ افزایش مؤلفه x آن ۹ متر بر ثانیه باشد وقتی $y = ۱$ آهنگ تغییرات مؤلفه y آن‌را به‌دست آورید.

۱۲ ــ الف) آیا تابع $f(x) = \sin ۲\pi x + ۳\cos ۵x$ متناوب است؟ چرا؟

ب) معادله مثلثاتی $\sin 2x - \sqrt{3}\cos x = 0$ را حل کنید.

سؤالات امتحان هماهنگ کشوری درس حساب دیفرانسیل و انتگرال ۲ پیش‌دانشگاهی خردادماه ۱۳۷۶

۱ــ با استفاده از قضیه مقدار میانگین نشان دهید اگر $0 < a < b$ آنگاه

$$\frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$$

۲ــ تابع باضابطه زیر را به‌صورت چند ضابطه‌ای نوشته و نقاط بحرانی آن‌را در صورت وجود بیابید.

$$f(x) = |x^2 - 1| + 1$$

۳ــ جدول رفتار و نمودار تابع با ضابطه زیر را در بازه داده شده رسم کنید.

$$y = \frac{1}{\cos x} \qquad [0\,,2\pi]$$

۴ــ حد زیر را به‌دست آورید.

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$$

۵ــ مقدار تقریب اضافی مساحت محصور بین منحنی با ضابطه زیر را با محور xها دربازهٔ [۱و۱-] برای $n = 4$ به‌دست آورید:

$$y = 1 - x^2$$

۶ــ **قضیه)** اگر تابع f دربازه $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه $c \in \mathbb{R}$ موجود است به‌قسمی که $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$

۷ــ انتگرال معین زیر را حساب کنید

$$\int^{1} |1-2x|[2x]dx$$

۸ــ دامنه تعریف و مشتق تابع با ضابطه زیر را به‌دست آورید.

$$f(x) = \ln(1-x^2) + e^{\sqrt{x}}$$

۹ــ معادله لگاریتمی زیر را حل کنید.

$$\log_{3}^{\log_{2}^{x^2-1}} = 1$$

۱۰ــ اگر $\log_2 = 0/301$ باشد $\log_5$ را محاسبه کنید.

۱۱ــ انتگرال‌های نامعین مقابل را به‌دست آورید.

$$A = \int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}} \qquad B = \int\frac{xdx}{\cos^2 x}$$

۱۲ــ طول منحنی تابع با ضابطه زیر را دربازه [۳و۰] به‌دست آورید:

$$f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$$

سؤالات امتحان هماهنگ کشوری درس ریاضی عمومی ۱ پیش‌دانشگاهی دی‌ماه ۱۳۷۵

۱ــ مقدار k را طوری تعیین کنید که سه خط $y = -3x + 1$ و $y = x - 3$ و $kx + (k-1)y = 3$ متقارب باشند.

۲ــ جواب دستگاه خطی

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 14 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

را در صورت وجود به روش حذفی گاوس (گاوس ــ جردن) حل کنید.

۳ــ جمله پنجم بسط دوجمله‌ای $(x + 2x^3)^7$ را حساب کنید.

۴ــ اگر $|2x - 3| \le 7$ باشد حدود x را تعیین کنید.

۵ــ ثابت کنید که دنبالهٔ $u_n = \frac{2n^2 + 7}{n^2 + 3}$ از پایین کراندار است.

۶ــ معادلات زیر را در $\mathbb{R}$ حل کنید:

الف: $(13^x)^{x+3} - \frac{1}{169} = 0$

ب: $\ln(2x-1) + \ln(x-1) = \ln 91 - \ln 13$

۷ــ تابع معکوس تابع $f(x) = \sqrt[3]{x} + 2$ را در صورت وجود به‌دست آورید.

۸ــ منحنی مسطح (C) به معادلهٔ $y = \sqrt{4x^2 + 8x + 5}$ مفروض است مجانب آن‌را به‌دست آورید.

۹ــ مطلوب است محاسبه $\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2 - 5}{1 - x - 2x^2}e^{3x}$

۱۰ــ معادله خط قائم برمنحنی نمایش تابع $y = e^{3x+6}$ در نقطهٔ متناظر با $x = -2$ را به‌دست آورید.

۱۱ــ مشتق توابع زیر را محاسبه کنید.

الف : $x^{2}y^{3} = x^{4} - y^{5} - 3$

ب : $y = Ln(5 - 3x)^{2}$

۱۲ ــ فرض کنیم $y = x^{2}$ باشد Δy و dy را برای وقتی که $x = 2$ و $dx = \Delta x = 0/1$ مقایسه کنید.

۱۳ ــ دیفرانسیل توابع زیر را حساب کنید.

الف : $y = \frac{1}{4}\sin(\frac{4\pi x - 1}{2})$

ب : $y = x\cos^{-1}x$

۱۴ ــ درکشت معیّنی، آهنگ رشد تعداد باکتری متناسب با تعداد باکتری موجود است. اگر تعداد آنها در سه ساعت، سه‌برابر شود و در پایان ۱۲ ساعت تعداد باکتری ۱۰ میلیون باشد، در آغاز چند باکتری داشته‌ایم.

۱۵ ــ مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم مطلق تابع‌را $f(x) = 2x^{3} - 9x^{2} + 12x + 60$ بر بازه $[0,2]$ محاسبه کنید.

۱۶ ــ تابع $y = 3x - x^{3}$ داده شده است.

الف : نقاط بحرانی تابع را بیابید.

ب : بازه‌هایی را که تابع درآنها صعودی یا نزولی هستند، مشخص کنید.

سؤالات امتحانات هماهنگ کشوری درس ریاضی عمومی۲ پیش‌دانشگاهی خرداد ماه ۱۳۷۶

۱ ــ جدول زیر برای ۴۰ داده آماری تشکیل شده است. فراوانی و درصد فراوانی و مرکز هر دسته را به‌دست آورید.

دسته‌ها	فراوانی نسبی
۲۰ ـ ۲۴	۰/۰۵
۲۴ ـ ۲۸	۰/۲
۲۸ ـ ۳۲	۰/۳۵
۳۲ ـ ۳۶	۰/۲۵
۳۶ ـ ۴۰	۰/۱۵

۲ ــ واریانس و انحراف معیار داده‌های ۲۹ و ۲۴ و ۲۷ و ۲۳ و ۲۲ را محاسبه کنید.

۳ ــ فرض کنید احتمال انتقال یک نوع بیماری از فرد ناقل به فرد مستعد برابر ۰/۳ باشد. اگر ۷ نفر مستعد با فرد ناقل ملاقات کنند احتمال آن‌که ۵ نفر به این بیماری مبتلا شوند چقدر است؟

۴ ــ در توزیع زیر امید ریاضی برابر ۵ می‌باشد. مقدار K را به‌دست آورید.

X	۱	۳	۷	K
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

۵ ــ ثابت کنید نقطه عطف منحنی نمایش تابع $y = x^{3} - 3x^{2} + 1$ مرکز تقارن آن است.

۶ ــ منحنی نمایش تابع $y = \frac{2x}{x+1}$ را رسم کنید.

۷ ــ نزدیکترین نقطه روی هذلولی $x^{2} - 2y^{2} = 5$ به نقطهٔ $A(0,2)$ را به‌دست آورید.

۸ ــ مقدار K را طوری تعیین کنید که معادله $2x^{2} + 2y^{2} - 4x - 12y + k = 0$ دایره‌ای به شعاع ۴ را مشخص کند.

۹ ــ یک سهمی به معادله $y^{2} - 6y - 8x - 7 = 0$ مفروض است. مطلوب است تعیین مختصات رأس، کانون و معادله خط هادی آن.

۱۰ ــ معادله یک بیضی را بنویسید که نقاط $F(4,2)$ و $F'(-8,2)$ کانونهای آن و خروج ازمرکز آن $\frac{2}{3}$ باشد.

۱۱ ــ با استفاده از نمودار $f(x) = |2 - x| - 3$ مقدار $\int_{0}^{5} f(x)dx$ را حساب کنید.

۱۲ ــ $\int \frac{x^{5} - 3x^{3} + 2}{x^{3}} dx$ را حساب کنید.

۱۳ ــ ناحیه‌ای محدود به نمودار تابع $y = \sqrt{2x+1}$، محور xها و دوخط $x = 1$ و $x = 4$ می‌باشد این ناحیه را به‌طور کامل حول محور xها دوران می‌دهیم، حجم جسمی را که بدین‌گونه حاصل می‌شود، حساب کنید.

۱۴ ــ تابع اولیه F از تابع f با ضابطهٔ $f(x) = 3x\sqrt{x^{2}+1}$ را که در شرایط اولیه $F(0) = 6$ صدق کند، به‌دست آورید.

حل مسأله‌های برهان شماره ۲۲

حل مسایل ریاضیات ۲

۱ـ
$$۲m^۲x+۶m+۴=۶mx-۴x$$
$$\Rightarrow (۲m^۲-۶m+۴)x=-۶m-۴$$
$$x=\frac{-۲(۳m+۲)}{۲(m^۲-۳m+۲)} \text{ و } m^۲-۳m+۲=۰$$
$$\Rightarrow (m-۱)(m-۲)=۰ \Rightarrow m=۱\ ;\ m=۲$$
بنابراین به‌ازای $m=۱$ و $m=۲$ معادله جواب ندارد.

۲ـ با توجه به معادلهٔ $x^۲-x-m^۲=۰$ می‌توان نوشت:
$$\begin{cases} x_۱+x_۲=۱ \\ x_۱x_۲=-m^۲ \end{cases}$$
$$P=\frac{x_۱^۲+x_۲^۲-x_۱x_۲}{x_۱^۳+x_۲^۳}=\frac{x_۱^۲-x_۱x_۲+x_۲^۲}{(x_۱+x_۲)(x_۱^۲-x_۱x_۲+x_۲^۲)}$$
$$\Rightarrow P=\frac{۱}{x_۱+x_۲}=\frac{۱}{۱}=۱ \Rightarrow P=۱$$

۳ـ عبارتهای $x^۴+۲$ و $(۱-x^۲)^۴$ نامنفی هستند، بنابراین:
$$۷x+۱۴\geq ۰ \Rightarrow x\geq -۲ \text{ و}$$
$$(x^۲-۱)^۴=۰ \Rightarrow x^۲=۱ \Rightarrow x=\pm ۱$$
$\{x \in \mathbb{R} \mid x\geq -۲ \text{ ، } x=\pm ۱\}=$ مجموعه جواب نامعادله

۴ـ $mm'=-۱$ (شرط عمود بودن)
$$m=-\frac{p}{q} \text{ و } m'=-\frac{۱}{p}\ :$$
$$mm'=(-\frac{p}{q})(-\frac{۱}{p})=\frac{۱}{q}=-۱ \Rightarrow q=-۱$$
$$A(۱,-۲)\ :\ p(۱)+(-۱)(-۲)=۱ \Rightarrow p=-۱ \text{ و}$$

۵ـ برای این‌که نقطهٔ P در ناحیهٔ چهارم واقع باشد، باید داشته باشیم:
$$\begin{cases} x_P>۰ \\ y_P<۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۶m-۱۲>۰ \\ ۴m-۱۲<۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m>۲ \\ m<۳ \end{cases} \Rightarrow ۲<m<۳$$

۶ـ اگر θ زاویه‌ای باشد که خط مورد نظر با محور xها می‌سازد:
$$\tan\theta=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-۷+۶}{-۶+۷}=-۱ \Rightarrow \theta=\frac{۳\pi}{۴}$$

۷ـ می‌دانیم:
$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{۳} \text{ و } y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{۳}$$
بنابراین:
$$-۲=\frac{m-۱+۲+۳}{۳} \Rightarrow m+۴=-۶ \Rightarrow m=-۱۰$$
$$۱=\frac{۲-۱+m-n}{۳} \Rightarrow m-n+۱=۳ \Rightarrow n=m-۲$$
$$\Rightarrow n=-۱۲$$

حل مسایل ریاضیات ۴

۱ـ
$$\bar{x}=\frac{۸+۱۲+۱۴+۱۶+۲۲+۲۴}{۶}=\frac{۹۶}{۶}=۱۶$$
$$S^۲=\frac{(۸-۱۶)^۲+(۱۲-۱۶)^۲+(۱۴-۱۶)^۲+(۱۶-۱۶)^۲+(۲۲-۱۶)^۲+(۲۴-۱۶)^۲}{۶}$$
$$S^۲=\frac{۹۲}{۳}$$
$$\Rightarrow \text{(انحراف معیار)}\ S=\sqrt{\frac{۹۲}{۳}}$$

۲ـ
$$P=\frac{\left[\log(\tan ۱^\circ)+\log(\tan ۲^\circ)+\cdots+\log(\tan ۸۹^\circ)\right]+\tan ۴۵^\circ}{(\tan ۱^\circ)(\tan ۲^\circ)\cdots(\tan ۸۹^\circ)}$$
با توجه به برابریهای $\tan ۸۹^\circ=\cot ۱^\circ$ ، $\tan ۸۸^\circ=\cot ۲^\circ$ و...، می‌توان نوشت:
$$P=\frac{\left[\log(\tan ۱^\circ\cdot\tan ۲^\circ\cdots\tan ۸۹^\circ)\right]+\tan ۴۵^\circ}{(\tan ۱^\circ\cot ۱^\circ)(\tan ۲^\circ\cot ۲^\circ)\cdots\tan ۴۵^\circ}$$
با توجه به اتحاد مثلثاتی $\tan x\cot x=۱$ و برابری $\tan ۴۵^\circ=۱$:
$$P=\frac{\log(۱)+۱}{۱}=\frac{۰+۱}{۱} \Rightarrow P=۱$$

۳ـ با استفاده از اتحاد: $\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{۱-\tan x\tan y}$ می‌توان نوشت:
$$۲=\frac{\tan x+\frac{۱}{۳}}{۱-\frac{۱}{۳}\tan x} \Rightarrow ۲-\frac{۲}{۳}\tan x=\tan x+\frac{۱}{۳}$$
$$\Rightarrow \frac{۵}{۳}\tan x=\frac{۵}{۳} \Rightarrow \tan x=۱ \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴}$$

۴ـ می‌دانیم اگر $A+B+C=۰$ ، آن‌گاه:
$$A+B=-C \Rightarrow \tan(A+B)=-\tan C$$

$$\Rightarrow \frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan C$$

$$\Rightarrow \tan A+\tan B+\tan C=\tan A.\tan B.\tan C$$

بنابراین از فرض $\tan 6x=\tan 4x+\tan 2x$ یا $\tan 6x+\tan(-4x)+\tan(-2x)=0$ و با توجه به مجموع زوایا که صفر است:

$$6x-4x-2x=0$$

نتیجه می‌شود:

$$P=\tan 2x\tan 4x\tan 6x=\tan(-2x)\tan(-4x)\tan 6x$$
$$=\tan(-2x)+\tan(-4x)+\tan 6x=0\Rightarrow P=0$$

۵ــ واضح است که $a_1=s_1$ (جملهٔ اول تصاعد عددی)

$s_n=3n^2-4n$ و $n=1:\ s_1=3-4=-1\Rightarrow a_1=-1$

و همچنین $d=\underbrace{s_2-s_1}_{\text{جملهٔ دوم}}-a_1$ (قدر نسبت تصاعد عددی) و یا:

$$d=s_2-2a_1\Rightarrow d=4-2(-1)=6\Rightarrow d=6$$
$$a_n=a_1+(n-1)d\Rightarrow a_{11}=-1+10(6)=59$$

$a_{11}=59$ (جملهٔ یازدهم تصاعد عددی)

۶ــ

$1=\frac{1}{1}=\frac{1}{3^0}=a_1$ و $a_n=\frac{1}{3^{n-1}}$ (جملهٔ‌عمومی تصاعد هندسی)

و $a_2=\frac{1}{3^{2-1}}=\frac{1}{3}$ و (قدر نسبت) $q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{\frac{1}{3}}{1}=\frac{1}{3}$

(حد مجموع) $S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$

۷ــ

$$\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}=\begin{bmatrix}-3\\-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3+2\\-1-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}$$

$$\left|\vec{w}\right|=\left|\vec{u}+\vec{v}\right|=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$$

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{bmatrix}-3 & -1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}=[-6+1]=-5$$

۸ــ یک n ضلعی دارای n رأس می‌باشد و قطر n ضلعی از وصل هر دو رأس غیر مجاور n ضلعی به‌دست می‌آید. بنابراین این مسأله درواقع یک ترکیب ۲ از n است، ولی رابطهٔ $C(n,2)$ رأسهای مجاور هم را نیز شامل می‌شود. پس باید حالتهایی را که رأسهای مجاور انتخاب می‌شوند را از مقدار $C(n,2)$ کم کنیم. واضح است که وقتی دو رأس مجاور انتخاب می‌شوند از وصل آنها به یکدیگر یک ضلع n ضلعی پدید می‌آید: پس، تعداد حالاتی که دو رأس مجاور انتخاب می‌شوند برابر تعداد اضلاع n ضلعی یعنی برابر n است: درنتیجه تعداد قطرهای n ضلعی برابر $C(n,2)-n$ است:

$$C(n,2)-n=\frac{n!}{(n-2)!2!}-n=\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!2!}-n$$
$$=\frac{n(n-1)}{2}-n=\frac{n^2-n-2n}{2}=\frac{n^2-3n}{2}=\frac{n(n-3)}{2}$$

حل مسأله‌های ریاضیات گسسته پیش‌دانشگاهی

۱ــ خیر امکان ندارد، زیرا اگر در کلاس ۲۱ نفری هر دانش‌آموز بخواهد به‌تنهایی با ۷ نفر از همکلاسیهای خود دوست صمیمی باشد درواقع گرافی تولید می‌شود با ۲۱ رأس که از هر رأس آن ۷ یال عبور می‌کند که در این صورت داریم، $\sum_{i=1}^{21}\deg v_i=147$ که ۱۴۷ عددی فرد است و این با قضیه در تناقض است زیرا باید مجموع درجه‌های رأسهای یک گراف عددی زوج باشد.

۲ــ می‌خواهیم ثابت کنیم اگر گرافی دور اویلری داشته باشد هر رأس آن گراف درجهٔ زوج دارد. اگر گراف G یک دور اویلری داشته باشد و V رأس دلخواهی از G باشد، ثابت می‌کنیم درجهٔ V زوج است. از طرفی چون دور اویلری شامل هر یال G است پس شامل همهٔ یالهایی است که از V عبور می‌کنند. و چون باید از هر یال فقط یک بار عبور کنیم پس هر یال که با V برخورد دارد فقط یک‌بار در این دور (دور اویلری) پیموده می‌شود، بنابراین هر بار که به رأس V می‌رسیم از یالی باید بگذریم که قبلاً از آن عبور نکرده باشیم پس هر یال ورودی یک یال خروجی منحصر بفرد برای خودش دارد پس درجهٔ V باید مضربی از ۲ باشد.

عکس نقیض مطلب فوق که معادل با آن است به‌صورت زیر بیان می‌شود:

«اگر درجهٔ بعضی از رأسهای یک گراف فرد باشد آنگاه آن گراف هیچ دور اویلری ندارد» بنابراین در مسألهٔ معروف پل‌های کونیگسبرگ چون در مدل گراف مربوط به آن، رأس از درجهٔ فرد وجود دارد، نمی‌توان در آن دور اویلری یافت!

۳ــ برای مشخص کردن دو رقم سمت راست یک عدد باید هم‌نهشتی آن عدد به سنج ۱۰۰ را بررسی کنیم:

$$A=\sum_{k=1}^{21}k!=1!+2!+3!+4!+\cdots+21!$$

$5!\overset{100}{\equiv}20$ و $6!\overset{100}{\equiv}20$ و $7!\overset{100}{\equiv}40$ و $8!\overset{100}{\equiv}20$

$9!\overset{100}{\equiv}80$ و $10!\overset{100}{\equiv}0$ و $\forall k\geq 10,\ k!\overset{100}{\equiv}0$

$$\Rightarrow A\overset{100}{\equiv}1+2+6+24+20+20+40+20+80\overset{100}{\equiv}13$$

۴ــ برای اینکه ثابت کنیم $A=a^{n+4}-a^n$ بر ۳۰ بخش‌پذیر است کافی است ثابت کنیم بر ۶ و ۵ بخش‌پذیر است. (توجه داریم که حاصل‌ضرب سه عدد صحیح متوالی همواره مضرب ۶ است)

$$A=a^n(a^4-1)=a^{n-1}\times a\times(a-1)(a+1)(a^2+1)$$

چون $(a-1)a(a+1)$ حاصل‌ضرب سه عدد صحیح متوالی است پس مضرب ۶ بوده و لذا A بر ۶ بخش‌پذیر است.

$$6|a(a-1)(a+1)\Rightarrow 6|a^{n-1}\times a\times(a-1)(a+1)(a^2+1)=A$$

برای بخش‌پذیری بر ۵ از قضیهٔ فرما استفاده می‌کنیم (اگر p اول و $p\nmid a$ در این صورت $a^{p-1}\overset{p}{\equiv}1$)

اگر $5|a\Rightarrow 5|a^n\Rightarrow 5|a^n(a^4-1)=A$

اگر $5\nmid a\overset{\text{فرما}}{\Rightarrow}a^4\overset{5}{\equiv}1\Rightarrow 5|(a^4-1)\Rightarrow 5|a^n(a^4-1)=A$

۵ــ هر جملهٔ بسط $(x+y+z+t)^{14}$ به‌صورت $x^ay^bz^ct^d$ می‌باشد که در آن $a+b+c+d=14$ پس تعداد جمله‌های این بسط برابر است با تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادلهٔ $a+b+c+d=14$ یعنی، $\binom{14+4-1}{4-1}=\binom{17}{3}$

۶ــ تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+x_3=11$ با دو شرط $x_1>1$ و $x_2>3$ برابر است با تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادلهٔ $y_1+y_2+x_3=11-2-4$ یعنی $\binom{5+3-1}{3-1}=\binom{7}{2}$. زیرا:

$$x_1>1\Rightarrow x_1\geq 2\Rightarrow x_1-2\geq 0$$

و

$$x_2>3\Rightarrow x_2\geq 4\Rightarrow x_2-4\geq 0$$

اگر فرض کنیم $x_1-2=y_1$ و $x_2-4=y_2$ در این صورت $x_1=y_1+2$ و $x_2=y_2+4$ پس

$$x_1+x_2+x_3=11\Rightarrow(y_1+2)+(y_2+4)+x_3=11$$
$$\Rightarrow y_1+y_2+x_3=11-2-4=5$$

۷ــ معادلهٔ مشخصهٔ رابطهٔ بازگشتی $a_{n+2}-8a_{n+1}+16a_n=0$ عبارت است از $x^2-8x+16=0$ که $r=4$ ریشهٔ مضاعف آن است. بنابراین:

$$a_n=(c+d_n)\times 4^n$$

و

$$\begin{cases}a_0=4c\\ a_1=(c+d)\times 4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4c=0\\ 4\times(c+d)=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=0\\ d=2\end{cases}$$

$$\Rightarrow a_n=(2n)\times 4^n=n(2^{2n+1})$$

۸ــ تعداد اعضای فضای نمونه در قرار دادن n مهره به تصادف داخل N ظرف برابر است با: $n(s)=N\times N\times\cdots\times N=N^n$.

حال برای اینکه k مهره در ظرف u_1 قرار بگیرد باید k مهره را از میان n مهره انتخاب کنیم که این‌کار به $\binom{n}{k}$ طریق امکان‌پذیر است. حال می‌بایست $(n-k)$ مهرهٔ باقی‌مانده را درون $(N-1)$ ظرف باقی مانده قرار دهیم که به $(N-1)^{n-k}$ طریق ممکن است پس احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P=\frac{\binom{n}{k}\times(N-1)^{n-k}}{N^n}$$

۹ــ اگر $f_x(x)=a(\frac{1}{3})^x$ و $x=0,1,2,\cdots$ در این صورت باید $\sum f_x(x)=1$ پس:

$$\sum_{x=0}^{\infty}a(\tfrac{1}{3})^x=1\Rightarrow a\left[1+\tfrac{1}{3}+(\tfrac{1}{9})+\cdots\right]=1$$

$$\Rightarrow a\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=1\Rightarrow a=\frac{2}{3}$$

حل مسائل حساب دیفرانسیل و انتگرال ۲ پیش‌دانشگاهی

۱ــ $f(x)=x^2|x|+1\quad 0\leq x\leq 2$

با توجه به اینکه $x\geq 0$ بنابراین $|x|=x$ درنتیجه

$$f(x)=x^3+1\quad 0\leq x\leq 2$$

$f'(x)=3x^2\geq 0\Rightarrow$ f همواره صعودی است.

بنابراین $f(0)=1$ می‌نیمم مطلق و نسبی و $f(2)=9$ ماکزیمم مطلق و نسبی تابع می‌باشد بعلاوه نقطه $x=0$ نقطه بحرانی تابع است.

۲ــ الف) قضیه مقدار میانگین: اگر تابع حقیقی f بر فاصله $[a,b]$ پیوسته و بر فاصله (a,b) مشتق‌پذیر باشد آنگاه نقطه‌ای مانند $a<c<b$ وجود دارد به طوری که

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ب) در مسأله باید شرط $0<a<b$ را درنظر بگیریم یعنی a و b دو عدد مثبت باشند. تابع $f(x)=\mathrm{Arctg}x$ بر فاصله $[a,b]$ پیوسته و بر فاصله (a,b) مشتق‌پذیر است. بنابر قضیه مقدار میانگین نقطه $a<c<b$ وجود دارد به طوری که $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ داریم:

$$f(x)=\mathrm{Arctg}x\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{1+x^2}\Rightarrow f'(c)=\frac{1}{1+c^2}$$

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Rightarrow\frac{1}{1+c^2}=\frac{\mathrm{Arctg}b-\mathrm{Arctg}a}{b-a}\quad(\mathrm{I})$$

$$0<a<c<b\Rightarrow a^2<c^2<b^2\Rightarrow 1+a^2<1+c^2<1+b^2$$

$$\Rightarrow\frac{1}{1+b^2}<\frac{1}{1+c^2}<\frac{1}{1+a^2}$$

$$(I) \Rightarrow \frac{1}{1+b^2} < \frac{\mathrm{Arctg}b - \mathrm{Arctg}a}{b-a} < \frac{1}{1+a^2}$$

$$\Rightarrow \frac{b-a}{1+b^2} < \mathrm{Arctg}b - \mathrm{Arctg}a < \frac{b-a}{1+a^2}$$

۳ ــ الف ــ رسم نمودار $f(x)=x^2(x+2)^3$

$f(x)=x^2(x+2)^3 \quad D_f=\mathbb{R} \quad R_f=\mathbb{R}$

مجانب افقی ندارد زیرا $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$

مجانب مایل ندارد زیرا $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}x(x+2)^3=\pm\infty$

مجانب قائم ندارد.

جدول تغییرات: $f(x)=x^2(x+2)^3$

$f'(x)=x(x+2)^2(5x+4) \Rightarrow f'(x)=0$

$\Rightarrow x(x+2)^2(5x+4)=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \\ x=-\frac{4}{5} \end{cases}$$

x	$-\infty$		-2		$-\frac{4}{5}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+		+		−		+	
$f(x)$		↗	۰	↗	۱/۱ Max	↘	۰ Min	↗	

x	y
$\pm\infty$	$\pm\infty$
-2	۰
اکسترمم نسبی $-\frac{4}{5}$	۱/۱
۰	۰
−۱/۶	۰/۲
−۰/۳	۰/۴

نقاط عطف

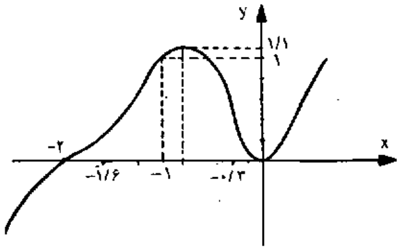
$f'(x)=x(x+2)^2(5x+4)$

$f''(x)=(x+2)(20x^2+32x+8) \Rightarrow f''(x)=0$

$\Rightarrow (x+2)(20x^2+32x+8)=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ 5x^2+8x+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=-0/3 \\ x=-1/6 \end{cases}$$ طول نقاط عطف

x	$-\infty$		-2		−۱/۶		−۰/۳		$+\infty$
$f''(x)$		−		+		−		+	
			۰		۰/۲		۰/۴		



ب ــ رسم نمودار $f(x)=\frac{x^2+x}{x^2+x+3}$

$f(x)=\frac{x^2+x}{x^2+x+3} \quad D_f=\mathbb{R}$

محاسبه برد تابع

$y=\frac{x^2+x}{x^2+x+3} \Rightarrow yx^2+yx+3y=x^2+x$

$\Rightarrow (y-1)x^2+(y-1)x+3y=0$

$\Delta\geq 0 \Rightarrow (y-1)^2-4(y-1)\times 3y\geq 0$

$\Rightarrow -(y-1)(11y+1)\geq 0 \Rightarrow (y-1)(11y+1)\leq 0$

$\Rightarrow -\frac{1}{11}\leq y\leq 1 \Rightarrow R_f=\left[-\frac{1}{11}, 1\right]$

مجانب افقی دارد و

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+x}{x^2+x+3}=1$

$y=1$ مجانب افقی تابع است.

مجانب مایل ندارد زیرا تابع مجانب افقی دارد.

مجانب قائم ندارد زیرا مخرج کسر ریشه ندارد.

جدول تغییرات:

$f(x)=\frac{x^2+x}{x^2+x+3} \Rightarrow f'(x)=\frac{6x+3}{(x^2+x+3)^2}$

$\Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow 6x+3=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	−	−		+	+
$f(x)$	↘	↘	Min	↗	↗

x	y
$\pm\infty$	1
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{11}$
0	0
-1	0

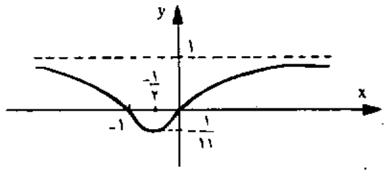
نقاط عطف

$f'(x)=\frac{6x+3}{(x^2+x+3)^2}$

$f''(x)=\frac{-18x^2-18x+12}{(x^2+x+3)^3} \Rightarrow f''(x)=0$

$$\Rightarrow 3x^2+3x-2=0 \Rightarrow \begin{cases} x\simeq 0/5 \\ x=-1/5 \end{cases}$$ طول نقاط عطف

x	$-\infty$		−۱/۵		۰/۵		$+\infty$
$f''(x)$		−		+		−	



۴ ــ برای محاسبه این حدود از فرمول زیر استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$$

الف) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{1+n^2}+\frac{n}{4+n^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k^2+n^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\mathrm{Arctg}x\Big|_0^1$$

$$=\mathrm{Arctg}(1)-\mathrm{Arctg}(0)=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}$$

ب) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{-\frac{1}{n}}+e^{-\frac{2}{n}}+\ldots+e^{-\frac{n}{n}}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}e^{-\frac{k}{n}}$

$$=\int_0^1 e^{-x}dx=\left[-e^{-x}\right]_0^1=-e^{-1}+1=1-\frac{1}{e}=\frac{e-1}{e}$$

۵ ــ

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_{x-2}(2x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{Ln}(2x+1)}{\mathrm{Ln}(x-2)}\overset{Hop}{=}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{2x+1}}{\frac{1}{x-2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2(x-2)}{2x+1}=1$$

ب) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x(1-e^x)}{(1+x)\mathrm{Ln}(1-x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{1-x}\times\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-e^x}{\mathrm{Ln}(1-x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{\mathrm{Ln}(1-x)}\overset{Hop}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-e^x}{\frac{-1}{1-x}}=\lim_{x\to 0}e^x(1-x)=1$$

ج) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\mathrm{Ln}(1-x)}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x-\mathrm{Ln}(1-x)}{x\mathrm{Ln}(1-x)}$

$$\overset{Hop}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\frac{-1}{1-x}}{\mathrm{Ln}(1-x)-\frac{x}{1-x}}=$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2-x}{(1-x)\mathrm{Ln}(1-x)-x}=-\infty$$

۶ ــ روش جزء به جزء برای محاسبه یک انتگرال نامعین به شکل زیر است.

الف) $\int udv=uv-\int vdu$

$\int x\mathrm{Ln}xdx=\frac{1}{2}x^2\mathrm{Ln}x-\int\frac{1}{2}xdx=\frac{1}{2}x^2\mathrm{Ln}x-\frac{1}{4}x^2+c$

$$\begin{cases} u=\mathrm{Ln}x \\ du=\frac{dx}{x} \\ dv=xdx \\ v=\frac{1}{2}x^2 \end{cases}$$

$$\int\frac{e^{3x}dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}=\int\frac{e^xe^{2x}dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}=\int\frac{1-(1-e^{2x})}{\sqrt{1-e^{2x}}}e^xdx$$

$$=\int\frac{e^xdx}{\sqrt{1-e^{2x}}}-\int\sqrt{1-e^{2x}}e^xdx$$

انتگرالهای بالا را جداگانه حساب می‌کنیم

$$\int\frac{e^xdx}{\sqrt{1-e^{2x}}}=\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=$$

$$=\begin{cases} e^x=u \\ du=e^xdx \end{cases}$$

$\mathrm{Arcsin}\,u+c=\mathrm{Arcsin}(e^x)+c$

$I=\int\sqrt{1-e^{2x}}e^xdx \quad \begin{cases} e^x=u \\ du=e^xdx \end{cases}$

$I=\int\sqrt{1-u^2}du \quad \begin{cases} u=\sin\theta \\ du=\cos\theta d\theta \end{cases}$

$$=\int\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta d\theta=\int\cos^2\theta d\theta$$

$$=\int\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta=\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Arcsin}\,u+\frac{1}{2}u\sqrt{1-u^2}$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Arcsin}(e^x)+\frac{1}{2}e^x\sqrt{1-e^{2x}}$$

حال برای محاسبه انتگرال داریم :

$$\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{1-e^{2x}}} = \int \frac{e^{x}dx}{\sqrt{1-e^{2x}}} - \int \sqrt{1-e^{2x}}\,e^{x}dx =$$

$$\text{Arcsin}(e^{x}) - \frac{1}{2}\text{Arcsin}(e^{x}) - \frac{1}{2}e^{x}\sqrt{1-e^{2x}} =$$

$$\frac{1}{2}\text{Arcsin}(e^{x}) - \frac{1}{2}e^{x}\sqrt{1-e^{2x}}$$

ج) $I = \int \frac{dx}{x+\sqrt{x}+1} = \int \frac{2u\,du}{u^2+u+1} =$

$$\begin{cases} u=\sqrt{x} \\ x=u^2 \\ dx = 2u\,du \end{cases}$$

$$I = \int \frac{2u\,du}{(u+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \int \frac{(2v-1)dv}{v^2+\frac{3}{4}}$$

$$\begin{cases} u+\frac{1}{2}=v \\ du=dv \\ 2u=2v-1 \end{cases}$$

$$I = \int \frac{2v\,dv}{v^2+\frac{3}{4}} - \int \frac{dv}{\frac{3}{4}(\frac{4v^2}{3}+1)}$$

$$= \text{Ln}(v^2+\frac{3}{4}) - \frac{4}{3}\int \frac{dv}{(\frac{2v}{\sqrt{3}})^2+1}$$

$$= \text{Ln}(v^2+\frac{3}{4}) - \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}dv}{(\frac{2v}{\sqrt{3}})^2+1}$$

$$= \text{Ln}(v^2+\frac{3}{4}) - \frac{2}{\sqrt{3}}\text{Arctg}(\frac{2v}{\sqrt{3}})+c$$

$$= \text{Ln}(u^2+u+1) - \frac{2}{\sqrt{3}}\text{Arctg}(\frac{2u+1}{\sqrt{3}})+c$$

$$= \text{Ln}(x+\sqrt{x}+1) - \frac{2}{\sqrt{3}}\text{Arctg}(\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{3}})+c$$

۷ ــ برای محاسبه طول منحنی $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=4$ ابتدا این منحنی را به شکل پارامتری تبدیل می‌کنیم اگر قرار دهیم $\begin{cases} x=8\cos^3\theta \\ y=8\sin^3\theta \end{cases}$ با $0\le\theta\le 2\pi$ آنگاه منحنی فوق به شکل پارامتری تبدیل می‌شود.

بنابر فرمول داریم :

$$S=\int_0^{2\pi}\sqrt{(\frac{dx}{d\theta})^2+(\frac{dy}{d\theta})^2}\,d\theta$$

$$\begin{cases} x=8\cos^3\theta \\ y=8\sin^3\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{d\theta}=-24\cos^2\theta\sin\theta \\ \frac{dy}{d\theta}=24\sin^2\theta\cos\theta \end{cases}$$

$$\sqrt{(\frac{dx}{d\theta})^2+(\frac{dy}{d\theta})^2} =$$

$$\sqrt{24^2\cos^4\theta\sin^2\theta+24^2\sin^4\theta\cos^2\theta}$$

$$= \sqrt{24^2\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin^2\theta+\cos^2\theta)} = 24|\sin\theta\cos\theta|$$

برای محاسبه طول منحنی $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=4$ چون منحنی فوق نسبت به محور xها و محور yها و مبدأ مختصات متقارن است بنابراین طول این منحنی را در فاصله $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ حساب می‌کنیم و آن را چهار برابر می‌کنیم یعنی :

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}24\sin\theta\cos\theta\,d\theta = 48\sin^2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 48$$

۸ ــ $\begin{cases} y=\sqrt{4-x^2} \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow 1=\sqrt{4-x^2} \Rightarrow 1=4-x^2$

$$\Rightarrow x^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$$

اگر $y_1=\sqrt{4-x^2}$ و $y_2=1$ آنگاه :

$$V=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\pi(y_1^2-y_2^2)dx$$

$$V=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\pi(3-x^2)dx = \pi(3x-\frac{1}{3}x^3)\Big|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}$$

$$=\pi\left[(3\sqrt{3}-\sqrt{3})-(-3\sqrt{3}+\sqrt{3})\right] = 4\pi\sqrt{3}$$

۹ ــ

$$\begin{cases} y=x-x^2 \\ y=2x-2 \end{cases} \Rightarrow x-x^2=2x-2 \Rightarrow$$

$$x^2+x-2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=1 \end{cases}$$

اگر $y_1=x-x^2$ و $y_2=2x-2$ باشد آنگاه

$$S=\left|\int_{-2}^{1}(y_1-y_2)dx\right| = \left|\int_{-2}^{1}(x-x^2-2x+2)dx\right|$$

$$=\left|\int_{-2}^{1}(-x-x^2+2)dx\right| = \left|\left[-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+2x\right]_{-2}^{1}\right|$$

$$=\left|(-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+2)-(-2+\frac{8}{3}-4)\right|$$

$$=\left|\frac{7}{6}+\frac{10}{3}\right| = \left|\frac{7+20}{6}\right| = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$

حل مسائل حسابان ۲

۱ ــ می‌دانیم اگر تابعی در یک نقطه مشتق‌پذیر باشد در آن نقطه پیوسته نیز می‌باشد. بنابراین در حل این مسأله می‌توان از پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع در نقطه $x=0$ استفاده کرد.

چون f در $x=0$ پیوسته است بنابراین :

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^-}f(x)=f(0)$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=\lim_{x\to0}(\frac{x}{2}+\sqrt{ax+b})=\sqrt{b}$$

$$\Rightarrow a=\sqrt{b} \quad (I)$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}(a\cos x+b\sin x)=a$$

از طرفی f در $x=0$ مشتق‌پذیر است بنابراین داریم : $f'_+(0)=f'_-(0)$

$$f'(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}+\frac{a}{2\sqrt{ax+b}} & x\ge0 \\ -a\sin x+b\cos x & x<0 \end{cases}$$

$$f'_+(0)=\frac{1}{2}+\frac{a}{2\sqrt{0+b}}=\frac{1}{2}+\frac{a}{2\sqrt{b}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{a}{2\sqrt{b}}=b \quad (II)$$

$$f'_-(0)=-a\sin0+b\cos0=b$$

$$\begin{cases} a=\sqrt{b} \\ \frac{1}{2}+\frac{a}{2\sqrt{b}}=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{\sqrt{b}}=1 \\ \frac{1}{2}+\frac{a}{2\sqrt{b}}=b \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=b$$

$$\Rightarrow b=1 \Rightarrow a=\sqrt{b} \Rightarrow a=1$$

۲ ــ می‌دانیم مرکز تقارن هر تابع چندجمله‌ای درجه سوم روی نمودار آن قرار دارد بنابراین $f(-1)=1$ داریم :

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$$

$$f(-1)=1 \Rightarrow -1+a-b+c=1 \Rightarrow a-b+c=2 \quad (I)$$

بعلاوه می‌دانیم طول نقطه مرکز تقارن هر تابع چند جمله‌ای درجه سوم همان طول نقطه عطف تابع است و طول نقطه عطف هر تابع درجه سوم $f(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D$ برابر با $x=\frac{-B}{3A}$ بنابراین :

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$$

$$x=\frac{-B}{3A} \Rightarrow -1=\frac{-a}{3} \Rightarrow a=3$$

چون خط مماس در نقطه $x=0$ بر خط $2y-x=1$ عمود است. در نتیجه ضریب زاویه خط مماس یعنی $m=f'(0)$ و ضریب زاویه خط $2y-x=1$ یعنی $m'=\frac{1}{2}$ در معادله $mm'=-1$ صدق می‌کنند.

داریم :

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c \Rightarrow f'(x)=3x^2+2ax+b$$

$$m=f'(0) \Rightarrow m=b \quad , \quad m'=\frac{1}{2}$$

$$mm'=-1 \Rightarrow \frac{1}{2}b=-1 \Rightarrow b=-2$$

بنابر (I) داریم :

$$a-b+c=2 \Rightarrow 3+2+c=2 \Rightarrow c=-3$$

۳ ــ (الف) برای آن که تابع حقیقی f در نقطه x_0 بر محور xها مماس باشد، باید داشته باشیم $f(x_0)=f'(x_0)=0$ درنتیجه ریشه‌هایی از دستگاه $\begin{cases} f(x)=0 \\ f'(x)=0 \end{cases}$ که در دامنه تابع f قرار دارند نقاطی هستند که نمودار f در آن نقاط بر محور xها مماس است. حال داریم :

$$f(x)=\frac{b\sin x+a}{\sin x+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{(b-a)\cos x}{(\sin x+1)^2}$$

$$\begin{cases} f(x)=0 \\ f'(x)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b\sin x+a=0 \\ (b-a)\cos x=0 \end{cases}$$

$(b-a)\cos x=0 \Rightarrow b-a=0$ یا $\cos x=0$

اگر $b-a=0$ آنگاه $b=a$ در این صورت داریم :

$$f(x)=\frac{b\sin x+a}{\sin x+1} = \frac{b(\sin x+1)}{\sin x+1}=b$$

تابع $f(x)=b$ در حالت $b=0$ بر محور xها منطبق است. و در حالت $b\ne0$ هیچگاه بر محور xها مماس نیست. پس $b-a\ne0$ اگر $\cos x=0$ آنگاه داریم $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ از

$$b\sin x+a=0 \Rightarrow b\sin(k\pi+\frac{\pi}{2})+a=0 \Rightarrow$$

$$b(-1)^k+a=0$$

$\Rightarrow b+a=0$ یا $a-b=0 \overset{a-b\ne0}{\Longrightarrow} b+a=0 \Rightarrow b=-a$

بنابراین برای هر $b\in\mathbb{R}$ ، $b\ne0$ و $a=-b$ داریم :

$$f(x)=\frac{b\sin x+a}{\sin x+1}=\frac{b\sin x-b}{\sin x+1} \Rightarrow f(x)=b\frac{\sin x-1}{\sin x+1}$$

این تابع همواره در نقاط $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ بر محور xها مماس است.

ب) رسم نمودار $f(x)=\frac{-\sin x+1}{\sin x+1}$ در فاصله $0\le x\le 2\pi$

۱) مجانب افقی ندارد زیرا حد تابع f(x) وقتی $x\to\pm\infty$ وجود ندارد.

۲) مجانب مایل ندارد زیرا حد تابع f(x) وقتی $x\to\pm\infty$ وجود ندارد.

۳) مجانب قائم دارد و داریم:

$$\sin x+1=0\Rightarrow \sin x=-1\Rightarrow \left\{x=\frac{3\pi}{2}\right.$$ مجانب قائم.

۴) جدول تغییرات:

$$f(x)=\frac{-\sin x+1}{\sin x+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{-2\cos x}{(\sin x+1)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow \cos x=0\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{2}\\ x=\frac{3\pi}{2}\end{cases}$$ غیرقابل قبول

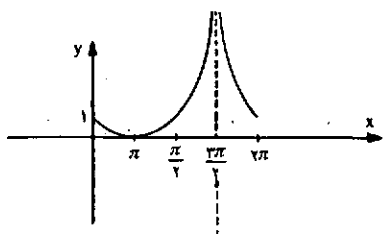
چون $x=\frac{3\pi}{2}$ در دامنه تابع f قرار ندارد در نتیجه مقادیر تابع را در نزدیکی این نقطه به‌دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^+} f(x)=\lim_{\substack{x\to\frac{3\pi}{2}\\ x>\frac{3\pi}{2}}}\frac{-\sin x+1}{\sin x+1}=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^-} f(x)=\lim_{\substack{x\to\frac{3\pi}{2}\\ x<\frac{3\pi}{2}}}\frac{-\sin x+1}{\sin x+1}=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
f'(x)	$-$	$+$	$+$	‖	$-$
f(x)	↘ Min	↗ ۱	↗ $+\infty$	$+\infty$ ↘	۱

x	y
0	۱
$\frac{\pi}{2}$	۰
π	۱
$\frac{3\pi}{2}$	$+\infty$
2π	۱



۴ــ $f(x)=\frac{x^2}{x^2+x+1}$ $\quad D_f=\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{x^2+2x}{(x^2+x+1)^2}\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow x^2+2x=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ x=-2\end{cases}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2+x+1}=1$$

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
f'(x)	$+$	$-$	$+$	
f(x)	۱ ↗	$\frac{4}{3}$ ↘ (Max)	۰ ↗ (Min)	۱

نقاط اکسترمم نسبی عبارتند از: $\text{Min}\begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix}$ و $\text{Max}\begin{vmatrix}-2\\ \frac{4}{3}\end{vmatrix}$ که این نقاط همان ماکزیمم و می‌نیمم مطلق تابع نیز می‌باشند. بعلاوه این نقاط همان نقاط بحرانی تابع نیز می‌باشند.

۵ــ الف) دامنه: $f(x)=\text{Arctg}\left[\text{Ln}(\frac{1-x}{1+x})\right]$

$$\begin{cases}\frac{1-x}{1+x}>0\\ 1+x\neq 0\end{cases}\Rightarrow -1<x<1\Rightarrow D_f=(-1,1)$$

بُرد: چون برای هر $-1<x<1$ همواره

$$-\infty<y=\text{Ln}(\frac{1-x}{1+x})<+\infty$$

بنابراین

$$R_f=(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$$

ب) $f(x)=\text{Arctg}(\text{Ln}(\frac{1-x}{1+x}))$

نقطه تماس $x=0\Rightarrow f(0)=\text{Arctg}(\text{Ln}1)=0\Rightarrow P\begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix}$

$$f'(x)=\frac{\frac{d}{dx}(\text{Ln}(\frac{1-x}{1+x}))}{1+(\text{Ln}(\frac{1-x}{1+x}))^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{\frac{-2}{(1+x)^2}}{(\frac{1-x}{1+x})}}{1+(\text{Ln}(\frac{1-x}{1+x}))^2}$$

$$f'(0)=\frac{\frac{-2}{1}}{1+(\text{Ln}1)^2}=-2$$

و $-2=f'(0)=$ ضریب زاویه خط مماس

ضریب زاویه خط قائم $=\frac{-1}{f'(0)}=\frac{1}{2}$

معادله خط مماس: $y-0=-2(x-0)$

$\Rightarrow y=-2x$

معادله خط قائم: $\Rightarrow y-0=\frac{1}{2}(x-0)$

$\Rightarrow y=\frac{1}{2}x$

۶ــ الف)

$$f(x)=\text{Arccos}(\frac{2-x}{2+x})$$

۱) دامنه:

$$-1\le\frac{2-x}{2+x}\le 1\Rightarrow\begin{cases}\frac{2-x}{2+x}\le 1\\ \frac{2-x}{2+x}\ge -1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{-2x}{2+x}\le 0\\ \frac{4}{2+x}\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{-2x}{2+x}\le 0\\ 2+x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2x\le 0\\ 2+x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x>-2\end{cases}$$

$$\Rightarrow x\ge 0\Rightarrow D_f=[0,+\infty]$$

۲) بُرد تابع عبارت است از $R_f=[0,\pi]$

۳) مجانب افقی دارد:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\text{Arccos}(\frac{2-x}{2+x})=\text{Arccos}(-1)=\pi$$

مجانب افقی $\Rightarrow y=\pi$

۴) مجانب مایل ندارد زیرا مجانب افقی دارد

۵) مجانب قائم ندارد، زیرا: $2+x=0\Rightarrow x=-2$

چون $x=-2$ در دامنه f قرار ندارد، پس مجانب قائم ندارد.

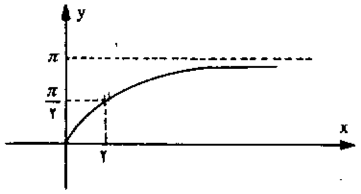
۶) جدول تغییرات:

$$f(x)=\text{Arccos}(\frac{2-x}{2+x})\Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{4}{(2+x)^2}}{\sqrt{1-(\frac{2-x}{2+x})^2}}>0$$

بنابراین تابع f همواره صعودی است. بنابراین نقاط بحرانی ندارد.

x	0			$+\infty$
f'(x)	$+$	$+$	$+$	$+$
f(x)	۰ ↗	↗	↗	↗ π

x	y
۰	۰
۲	$\frac{\pi}{2}$
$+\infty$	π



ب) $f(x)=\text{Ln}(\frac{x+1}{x-1})$

۱) دامنه: $\begin{cases}\frac{x+1}{x-1}>0\\ x-1\neq 0\end{cases}\Rightarrow D_f=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

۲) بُرد $R_f=\mathbb{R}$

۳) مجانب افقی دارد:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\text{Ln}(\frac{x+1}{x-1})=\text{Ln}(1)=0$$

بنابراین $y=0$ مجانب افقی است.

۴) مجانب مایل ندارد.

۵) مجانب قائم دارد: می‌دانیم مجانبهای قائم یک تابع لگاریتمی در صورت وجود می‌توانند در صفرهای لگاریتم و یا در نقاطی که لگاریتم نامتناهی شود رخ می‌دهند. بنابراین مجانبهای قائم این تابع عبارتند از:

$$\frac{x+1}{x-1}=0\Rightarrow x+1=0\Rightarrow x=-1$$

مجانبهای قائم $x=\pm 1\Leftarrow$

$$x-1=0\Rightarrow x=1$$

مقادیر تابع را در نزدیکی مجانبهای قائم به‌دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}\text{Ln}(\frac{x+1}{x-1})=-\infty$$

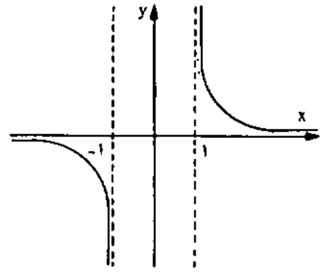
$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\text{Ln}(\frac{x+1}{x-1})=+\infty$$

x	y
$\pm\infty$	۰
-1	$-\infty$
۱	$+\infty$

۶) جدول تغییرات: $f'(x)=\frac{\frac{-2}{(x-1)^2}}{(\frac{x+1}{x-1})}<0$

تابع همواره نزولی است.

x	$-\infty$	-1	۱	$+\infty$
f'(x)	$-$			$-$
f(x)	۰ ↘	$-\infty$	$+\infty$ ↘	۰



۷ـ

$$\operatorname{Arccos} x = \pi - \operatorname{Arcsin}\sqrt{1-x^2} \qquad -1 \le x \le 0$$

$$y = \operatorname{Arccos} x \Rightarrow x = \cos y$$

$$y = \operatorname{Arccos} x\ ,\ -1 \le x \le 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} \le y \le \pi \Rightarrow$$

$$0 \le \pi - y \le \frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 y} = \sin y$$

$$\begin{cases} \sin y = \sqrt{1-x^2} \\ \frac{\pi}{2} \le y \le \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin(\pi - y) = \sqrt{1-x^2} \\ 0 \le \pi - y \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \pi - y = \operatorname{Arcsin}(\sqrt{1-x^2})$$

$$\Rightarrow y = \pi - \operatorname{Arcsin}\sqrt{1-x^2}$$

$$\Rightarrow \cos x = \pi - \operatorname{Arcsin}\sqrt{1-x^2}$$

۸ـ

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{\frac{x+1}{x}}\right)^{\sqrt{x+1}}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to+\infty} \left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{\sqrt{x+1}}{2x}} = e^0 = 1$$

ب) $\lim\limits_{x\to1^+} x^{\frac{1}{x-1}} \quad \begin{cases} \frac{1}{x-1} = u \\ x-1 = \frac{1}{u} \\ x = 1+\frac{1}{u} \\ x \to 1^+ \\ u \to +\infty \end{cases} \quad = \lim\limits_{u\to+\infty} \left(1+\frac{1}{u}\right)^u = e$

۹ـ

الف) $y = (\sin x)^{1+tgx} \Rightarrow Lny = (1+tgx)Ln(\sin x)$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = (1+tg^2x)Ln(\sin x) + (1+tgx)\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = (1+tg^2x)Ln(\sin x) + \cot gx(1+tgx)$$

$$\Rightarrow y' = (\sin x)^{1+tgx} \times$$

$$\left[(1+tg^2x)Ln(\sin x) + \cot gx(1+tgx)\right]$$

ب) $y = \frac{xe^x}{1+xe^x} \Rightarrow y'$

$$= \frac{(e^x + xe^x)(1+xe^x) - (xe^x + e^x)xe^x}{(1+xe^x)^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{e^x + xe^{2x} + xe^x + x^2e^{2x} - x^2e^{2x} - xe^{2x}}{(1+xe^x)^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{e^x + xe^x}{(1+xe^x)^2} \Rightarrow y' = \frac{(x+1)e^x}{(1+xe^x)^2}$$

ج) $y = \int_0^{\sin x} \frac{dt}{1-t^2} \Rightarrow y' = \frac{1}{1-\sin^2 x} \times \cos x \Rightarrow$

$$y' = \frac{\cos x}{\cos^2 x} \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow y' = \sec x$$

د) $y = \int_\lambda^{tgx} \frac{\cos 2t}{1+t^2} dt \Rightarrow y' = \frac{\cos(tgx)}{\cancel{1+tg^2x}} \times \cancel{(1+tg^2x)}$

$$\Rightarrow y' = \cos(tgx)$$

۱۰ـ اولاً :

$$M\begin{vmatrix} x = 1+2\cos\theta \\ y = 2+\sin\theta \end{vmatrix} \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

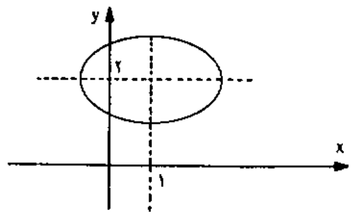
$$\begin{cases} x-1 = 2\cos\theta \\ y-2 = \sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{2} = \cos\theta \\ y-2 = \sin\theta \end{cases} \Rightarrow \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{4} + (y-2)^2 = 1$$

یک بیضی به مرکز $O\begin{vmatrix}1\\2\end{vmatrix}$ می‌باشد

ثانیاً :

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{1} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \quad O\begin{vmatrix}1\\2\end{vmatrix}$$



ثالثاً :

$$\theta = \frac{\pi}{6} \qquad P\begin{vmatrix} x_0 = 1+\cos\frac{\pi}{6} \\ y_0 = 2+\sin\frac{\pi}{6} \end{vmatrix} \Rightarrow P\begin{vmatrix} 1+\sqrt{3} \\ \frac{5}{2} \end{vmatrix}$$ نقطه تماس

می‌دانیم معادله خط مماس بر بیضی $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ در نقطه $\begin{vmatrix}x_0\\y_0\end{vmatrix}$ برابر با :

$$\frac{(x_0-h)(x-h)}{a^2} + \frac{(y_0-k)(y-k)}{b^2} = 1$$

بنابراین معادله خط مماس این بیضی در نقطه $P\begin{vmatrix}1+\sqrt{3}\\ \frac{5}{2}\end{vmatrix}$ به صورت زیر است :

$$\frac{(1+\sqrt{3}-1)(x-1)}{4} + \frac{(\frac{5}{2}-2)(y-2)}{1} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}(x-1)}{4} + \frac{y-2}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}x + 2y = 8 + \sqrt{3}$$

همچنین معادله خط قائم بر بیضی $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ در نقطه $\begin{vmatrix}x_0\\y_0\end{vmatrix}$ به صورت زیر است :

$$\frac{a^2(x-h)}{x_0-h} - \frac{b^2(y-k)}{y_0-k} = c^2$$

حال معادلهٔ خط قائم براین بیضی درنقطه $P\begin{vmatrix}1+\sqrt{3}\\ \frac{5}{2}\end{vmatrix}$ در زیر آمده است :

$$\begin{matrix} a = 2 \\ b = 1 \end{matrix} \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 4 - 1 \Rightarrow c^2 = 3$$

$$\frac{4(x-1)}{1+\sqrt{3}-1} - \frac{1(y-2)}{\frac{5}{2}-2} = 3 \Rightarrow \frac{4(x-1)}{\sqrt{3}} - \frac{2(y-2)}{1} = 3$$

$$\Rightarrow 4x - 2\sqrt{3}y = 4 - \sqrt{3}$$

۱۱ـ الف) $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} [\frac{1}{x}] x^2 dx = ?$

$$\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2} \Rightarrow 2 < \frac{1}{x} < 3 \Rightarrow [\frac{1}{x}] = 2$$

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} [\frac{1}{x}] x^2 dx = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} 2x^2 dx = [\frac{2}{3}x^3]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}(\frac{1}{8} - \frac{1}{27})$$

ب) $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{4+x^2} = \int_{-2}^{2} \frac{dx}{4(1+\frac{x^2}{4})} = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} \frac{\frac{1}{2}dx}{1+(\frac{x}{2})^2} =$

$$\frac{1}{2}\operatorname{Arctg}(\frac{x}{2})\Big|_{-2}^{2} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{Arctg}(1) - \operatorname{Arctg}(-1)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right] = \frac{\pi}{4}$$

ج)

$$\int_{-1}^{5} \frac{|x-3|-4}{2} dx = \int_{-1}^{3} \frac{|x-3|-4}{2} dx + \int_{3}^{5} \frac{|x-3|-4}{2} dx =$$

$$= \int_{-1}^{3} \frac{-x+3-4}{2} dx + \int_{3}^{5} \frac{x-3-4}{2} dx = \int_{-1}^{3} \frac{-x-1}{2} dx +$$

$$\int_{3}^{5} \frac{x-7}{2} dx = \left[-\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x\right]_{-1}^{3} + \left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{2}x\right]_{3}^{5}$$

$$= \left[(-\frac{9}{4} - \frac{3}{2}) - (-\frac{1}{4} + \frac{1}{2})\right] + \left[(\frac{25}{4} - \frac{35}{2}) - (\frac{9}{4} - \frac{21}{2})\right]$$

$$= \frac{-16}{4} - \frac{12}{4} = -4 - 3 = -7$$

حل مسایل ریاضی عمومی ۲ پیش‌دانشگاهی

۱ـ $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ و $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$ ؛ بنابراین $f'(x)$ به ازای همه مقادیر حقیقی x وجود دارد، پس f روی بازه بسته $[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$ پیوسته و بر بازه باز $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ مشتق پذیر است، در ضمن $f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = f(\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{3}{4}$ دراین صورت لااقل یک عدد $c \in (-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ وجود دارد به‌طوری که $f'(c) = 0$.

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow C = 0 \in (-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$$

۲ـ $f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2$

$$f'(x) = 4x^3 + 4x^2 - 8x$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ و $x = -2$ و $x = 1$ نقاط بحرانی f

$$f''(x) = 12x^2 + 8x - 8$$

$f''(0) = -8 < 0 \Rightarrow$ f درنقطه $x = 0$ یک ماکسیمم نسبی دارد

f در نقطه $x=-2$ یک مینیمم نسبی دارد $\Leftarrow f''(-2)=24>0$

f در نقطه $x=1$ یک مینیمم نسبی دارد $\Leftarrow f''(1)=12>0$

$f''(x)=0 \Rightarrow x=\frac{-1-\sqrt{7}}{3}$ و $x=\frac{-1+\sqrt{7}}{3}$

x	$-\infty$	$\frac{-1-\sqrt{7}}{3}$		$\frac{-1+\sqrt{7}}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	+		−		+
	تقعر منحنی رو به بالا		تقعر منحنی رو به پایین		تقعر منحنی رو به بالا

۳ــ الف) $y=\frac{-1+x}{x+2}$

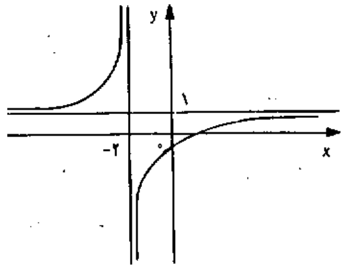
$\begin{cases} y\to\pm\infty \\ x+2\to 0\end{cases} \Rightarrow x=-2$ مجانب قائم

$\begin{cases} x\to\pm\infty \\ y\to 1\end{cases} \Rightarrow y=1$ مجانب افقی

$y'=\frac{3}{(x+2)^2}>0 \Leftarrow$ تابع فوق همواره صعودی است.

$\begin{cases} x=0\Rightarrow y=-\frac{1}{2} \\ y=0\Rightarrow x=1\end{cases}$ «محل برخورد منحنی با محورهای مختصات»

x	$-\infty$	-3	-2	0	1	$+\infty$
y'	+	+	+	+	+	
y	$1\nearrow$	$4 \nearrow +\infty$	$-\infty\nearrow$	$-\frac{1}{2}\nearrow$	$0\nearrow$	1



ب) $y=\frac{x^3-3x-2}{x^3}$

$\begin{cases} y\to\pm\infty \\ x\to 0\end{cases} \Rightarrow x=0$ مجانب قائم

$\begin{cases} x\to\pm\infty \\ y\to 1\end{cases} \Rightarrow y=1$ مجانب افقی

$y'=\frac{6x+6}{x^4}=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0\end{cases}$

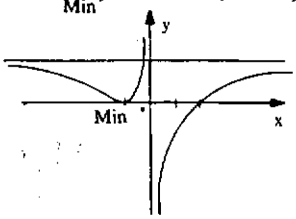
$y=0 \Rightarrow x^3-3x-2=0 \Rightarrow (x^3-x)+(-2x-2)=0$

$\Rightarrow x(x-1)(x+1)-2(x+1)=0$

$\Rightarrow (x+1)(x^2-x-2)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0\end{cases} , \begin{cases} x=2 \\ y=0\end{cases}$

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
y'	−	+	+	+	
y	$1 \searrow$	Min $\nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow$	$0 \nearrow$	1



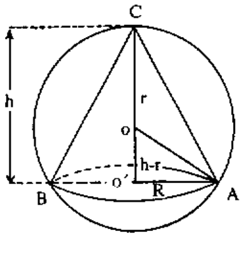
۴ــ می‌دانیم که حجم مخروط به شعاع قاعده R و ارتفاع h برابر $V=\frac{1}{3}\pi R^2 h$ (معادله اولیه) است، از طرفی طبق شکل زیر در مثلث oAo' داریم:

$R^2=r^2-(h-r)^2 \Rightarrow R^2=2rh-h^2$ (معادله ثانویه)

بنابراین:

$V(h)=\frac{1}{3}\pi(2rh-h^2)h=\frac{1}{3}\pi(2rh^2-h^3)$

$V'(h)=\frac{dV}{dh}=\frac{1}{3}\pi(4rh-3h^2)=0 \Rightarrow \begin{cases} h=0 & \text{غیرقابل قبول} \\ h=\frac{4}{3}r & \text{قابل قبول}\end{cases}$

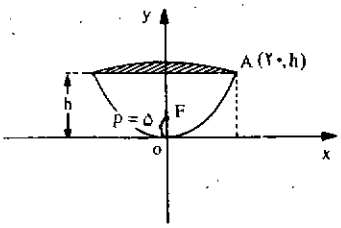


چون $V''(h)=\frac{1}{3}\pi(4r-6h)$ و $V''(\frac{4}{3}r)=-\frac{4}{3}\pi r<0$

در نتیجه $h=\frac{4}{3}r$ ماکسیمم ارتفاع است.

$h=\frac{4}{3}r \Rightarrow R^2=2r\times\frac{4}{3}r-\frac{16}{9}r^2=\frac{8}{9}r^2$

$V=\frac{1}{3}\pi\times\frac{8}{9}r^2\times\frac{4}{3}r=\frac{32}{81}\pi r^3$ مخروط



۵ــ سهمی فوق را طوری روی محورهای مختصات قرار می‌دهیم که رأس آن واقع بر مبداء مختصات و محور تقارن سهمی دقیقاً محور yها و دهانهٔ سهمی به طرف بالا باشد، بنابراین معادله سهمی فوق به صورت $x^2=4py$ است. از طرفی نقطه $A(20,h)$ متعلق به سهمی است و چون $P=5$ داریم:

$x^2=4py \Rightarrow 20^2=4\times5\times h \Rightarrow h=20$

۶ــ اگر مرکز هذلولی را نقطه S درنظر بگیریم، چون S وسط پاره‌خط FF' است:

$S\begin{vmatrix} x_s=\frac{6-4}{2}=1 \\ y_s=\frac{-3-3}{2}=-3\end{vmatrix}$ و $C=SF=\sqrt{(6-1)^2+(-3+3)^2}=5$

ازطرفی می‌دانیم شیب خط مجانب $m=\frac{b}{a}$ بنابراین:

$m=\frac{4}{3}=\frac{b}{a} \Rightarrow a=\frac{4}{3}b$

$\begin{cases} a^2+b^2=c^2 \\ a=\frac{3}{4}b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2=25 \\ a=\frac{3}{4}b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=4\end{cases}$

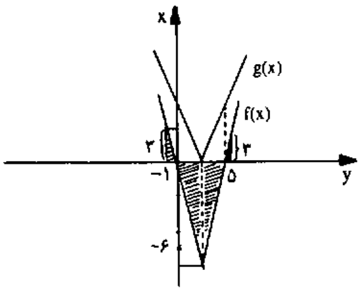
چون محور هذلولی موازی محور طولها است، بنابراین معادله هذلولی به‌صورت $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ است:

پس هذلولی فوق به معادله $\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y+3)^2}{16}=1$ می‌باشد.

۷ــ برای رسم نمودار تابع با ضابطه $f(x)=|6-3x|-6$: ابتدا تابع با ضابطه $g(x)=|6-3x|$ را به روش نقطه‌یابی رسم می‌کنیم، سپس نمودار آن را در امتداد محور yها ۶ واحد به‌طرف پایین می‌آوریم:

$6-3x=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow$

x	0	2	4
y	6	0	6



با توجه به شکل بالا ملاحظه می‌کنیم:

$\int_{-1}^{5}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{2}f(x)dx+\int_{2}^{4}f(x)dx+\int_{4}^{5}f(x)dx$

$\int_{-1}^{0}(|6-3x|-6)dx=\frac{1\times3}{2}=\frac{3}{2}$

$\int_{0}^{2}(|6-3x|-6)dx=\frac{6\times2}{2}=6$

$\int_{4}^{5}(|6-3x|-6)dx=\frac{1\times3}{2}=\frac{3}{2}$

$\int_{2}^{4}(|6-3x|-6)dx=\frac{6\times2}{2}=6$

مقدار انتگرال موردنظر با توجه به این‌که علامت مساحتهای زیر محور طولها: منفی و علامت مساحتهای بالای محور طولها: مثبت است به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$\int_{-1}^{5}(|6-3x|-6)dx=\frac{3}{2}+(-6)+(-6)+\frac{3}{2}=-9$

۸ــ

$V=\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x-\sin x}{(\sin x+\cos x)^5}dx$

$=\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(\cos x-\sin x)(\sin x+\cos x)^{-5}dx$

باتغییر متغیر زیر داریم:

$\begin{cases} u=\sin x+\cos x \\ du=(\cos x-\sin x)dx\end{cases}$

$V=\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}u^{-5}du=(-\frac{\pi}{4}u^{4})\Big|_{0}^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{\pi}{4}(\sin x+\cos x)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{3}}$

$=\frac{\pi(\sqrt{3}-1)}{8}$

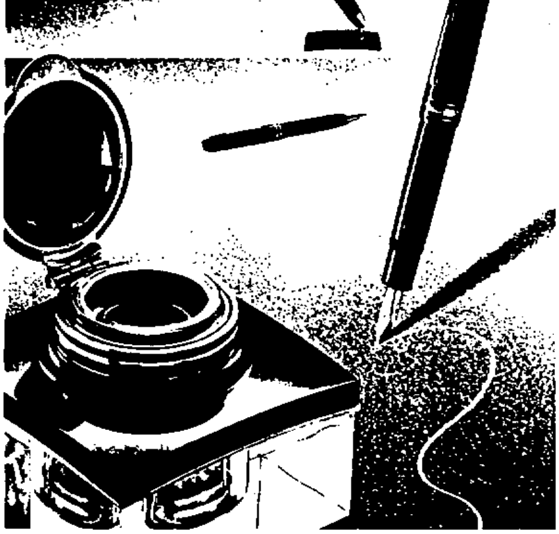
۹ــ $P(x=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

$P=\frac{7}{10}, n=5, k=3 \Rightarrow p(x=3)=\binom{5}{3}\times(\frac{7}{10})^3\times(\frac{3}{10})^2=\frac{7^3\times3^2}{10^4}$

۱۰ــ $E(x)=\sum_{i=1}^{n}p_i x_i$

$E(x)=p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3+p_4x_4$

$\Rightarrow 0\times\frac{1}{21}+1\times\frac{5}{14}+k\times\frac{10}{21}+3\times\frac{5}{42}=\frac{70}{42}\Rightarrow k=2$



جوابهای تفریح اندیشه

پاسخ ۱:

طبق آمار از هر ۱۰۰ نفر:

ازدواج نکرده‌اند	۱۵ = ۸۵ − ۱۰۰
تلفن ندارند	۳۰ = ۷۰ − ۱۰۰
اتومبیل ندارند	۲۵ = ۷۵ − ۱۰۰
خانه ندارند	۲۰ = ۸۰ − ۱۰۰

پس مجموع کسانی که لااقل یکی از امکانات فوق را ندارند، حداکثر برابر است با:

۹۰ = ۲۰ + ۲۵ + ۳۰ + ۱۵

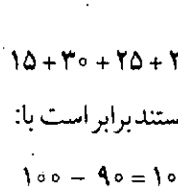
درنتیجه تعداد افرادیَ که دارای همهٔ امکانات بالا هستند برابر است با:

۱۰ = ۹۰ − ۱۰۰ نفر

پاسخ ۲:

اگر یک نیمکره را برداشته، برش مستقیمی از قاعده تا رأس آن انجام دهید، خواهید توانست رویهٔ جانبی مخروط مورد بحث را مسطح قرار دهید. (آیا تاکنون کلاه بوقی درست کرده‌اید؟) شکل مسطح تشکیل شده دایره‌ای است که قطاعی از آن حذف شده است. (شکل زیر را ملاحظه کنید.) شعاع این دایره، طول برش (سهم مخروط) است، ۵۰۰۰ = Δ .

زاویهٔ مرکزی قطاع حذف شده $\frac{L-R}{L}\times$ ۳۶۰ (که در آن R شعاع قاعدهٔ مخروط است)، یا $\frac{۳۶۰}{۵}$ است.



درشکل، A و B دونقطه ازاستوا به فاصلهٔ °۱۸۰ اند و محاسبهٔ فاصلهٔ مستقیم‌الخط بین آنها به اندازهٔ ۹/۵۱۱ کیلومتر مشکل نیست.

این مقدار کوتاه‌ترین فاصلهٔ بین دو شهر A و B است. اگر روی هر یک از دو قطب بروید، فاصلهٔ طی شده ۱۰۰۰۰ کیلومتر، و دور استوا بیش از ۱۲۵۰۰ کیلومتر می‌شود. و زمانی که مسیر مستقیم‌الخط را اختیار کنید چهار راه، در هر نیمکره دو راه دارید.

پاسخ ۳:

چون میدان مسابقه به شکل دایره است، مسابقه‌دهندگانی که در جلوی مهرداد قرار دارند، مانند آنهایی هستند که در پشت سر او واقع شده‌اند، به این معنی که همهٔ مسابقه‌دهندگان به استثنای مهرداد را تشکیل می‌دهند. در نتیجه:

$$\frac{۱}{۵}+\frac{۵}{۶}=\frac{۳۱}{۳۰}$$

پس، تعداد شرکت کنندگان را ۳۰ نفر می‌بیند و با خود او مجموع شرکت کنندگان مسابقه ۳۱ نفر می‌باشند.

پاسخ ۴:

با استفاده از ۱ پرچم ۳ علامت متمایز موجودند.
با استفاده از ۲ پرچم ۶ = ۲ × ۳ علامت متمایز موجودند.
با استفاده از ۳ پرچم ۱۲ = ۲ × ۶ علامت متمایز موجودند.
با استفاده از ۴ پرچم ۲۴ = ۲ × ۱۲ علامت متمایز موجودند.
با استفاده از ۵ پرچم ۴۸ = ۲ × ۲۴ علامت متمایز موجودند.
با استفاده از ۶ پرچم ۹۶ = ۲ × ۴۸ علامت متمایز موجودند.
۱۸۹ علامت متفاوت

اما، از ۴۸ علامت مربوط به ۵ پرچم، ۱۲ = ۱ × ۲ × ۱ × ۲ × ۳ مورد به ۳ پرچم از یک رنگ نیاز دارد، و از ۹۶ علامت مربوط به ۶ پرچم ۶۶ مورد موجودند که نمی‌توانند تنها با ۲ پرچم از هر رنگ انجام شوند. با کم کردن این مقادیر ۱۱۱ علامت متمایز ممکن باقی می‌ماند.

Borhan

In the name of God

Vol. 7 No. 3

Serial numbers: 23 winter 1998

Borhan is a mathematics journal published four times a year by Madrasse Publicatios.
Each issue includes articles related to mathematics and its various topics specifically those concerning high school education in Iran.

All communications should be sent to the editor at the following address:
Madrasse Publication - No. 38. Sepand Street, Sepahbod ghrany Ave, Tehran, Iran, Post code: 14155/1949

Contents:

ابن صلاح همدانی

ابوالفتوح احمدبن محمد بن سَریّ نجم الدین همدانی
ریاضیدان و فیلسوف و طبیب مسلمان ایرانی (؟-۵۴۸ هـ.ق)

اصلاً اهل همدان و از خاندانی بوده که همگی اهل علم و اصالت بوده‌اند. وی در بغداد پرورش یافت و بعداً به دمشق رفت و تاآخر عمر در آن شهر، با عزت و منزلت می‌زیست و به سال ۵۴۸ درگذشت.

ابن صلاح در فلسفه و علوم ریاضی مهارت و تبحّر داشته و طبیبی حاذق بوده است. از عنوانهای تألیفاتش پیداست که بخصوص در ریاضیات صاحب نظر بوده و مسائل دقیق و مشکلی را که در آثار متقدمان خود می‌دیده مورد بحث و انتقاد قرار می‌داده است. متأسفانه تا کنون هیچ یک از تألیفات وی مورد نقّادی علمی واقع نشده است.

* برخی آثار ریاضی موجود وی:

۱. رساله‌ای است مربوط به مسائلی دربارهٔ مقالهٔ هفتم کتاب اصول اقلیدس.

۲. رساله‌ای است در بررسی کتاب «فی حل شکوک کتاب اقلیدس فی‌الاصول و شرح معانیه» تألیف ابن‌هیثم مصری است.

۳. رساله‌ای است در توضیح اشتباه ابن هیثم دربارهٔ شکل اول از مقالهٔ دهم اصول اقلیدس

شکل اول از مقالهٔ دهم کتاب اصول اقلیدس قضیهٔ زیر است:

«دو مقدار نامتساوی $A>B$ را در نظر می‌گیریم. اگر از مقدار A مقداری بزرگتر از نصف آن را کم کنیم و سپس از باقیمانده نیز مقداری بزرگتر از نصفش را کم کنیم و این عمل را ادامه دهیم وقتی خواهد رسید که آخرین باقیمانده کوچکتر از B شود.»

۴. این مقاله دربارهٔ کشف شبهه‌ای است که، دربارهٔ شکل چهاردهم از مقالهٔ دوازدهم کتاب اصول اقلیدس، برای جمعی از کسانی که با ریاضیات سروکار دارند روی داده است.

شکل چهاردهم از مقالهٔ دوازدهم اصول اقلیدس مسألهٔ زیر است:

«دو کرهٔ متحدالمرکز مفروض‌اند. می‌خواهیم در کرهٔ بزرگتر یک چند وجهی محاط کنیم که وجوه آن با کرهٔ کوچکتر تماس نداشته باشد.»

۵. این مقاله در ردّ بر مقدمات مقاله‌ای است که ابوسهل کوهی دربارهٔ عدد پی نوشته و آن را مساوی با $۳\frac{۱}{۷}$ دانسته است.

۶. این کتاب دربارهٔ چگونگی تصویر کردن کره بر صفحه است و از آن یک نسخهٔ خطی در استانبول و یک نسخه در کتابخانهٔ دانشکدهٔ ادبیات تهران با عنوان فی معرفة الاسطرلاب و سه نسخه در کتابخانهٔ مجلس موجود است.

۷. حاشیه بر کتاب ایضاح البرهان علی حساب الخطأین، تألیف جابربن ابراهیم.

۸. یک رساله نیز دربارهٔ دو مسألهٔ هندسی از وی در لیدن موجود است. مسألهٔ اول آن این است: می‌خواهیم مثلثی در یک دایره محاط کنیم که مجموع اضلاعش مساوی با قطر آن دایره باشد. و مسألهٔ دوم آن مربوط است به مساحت کره.