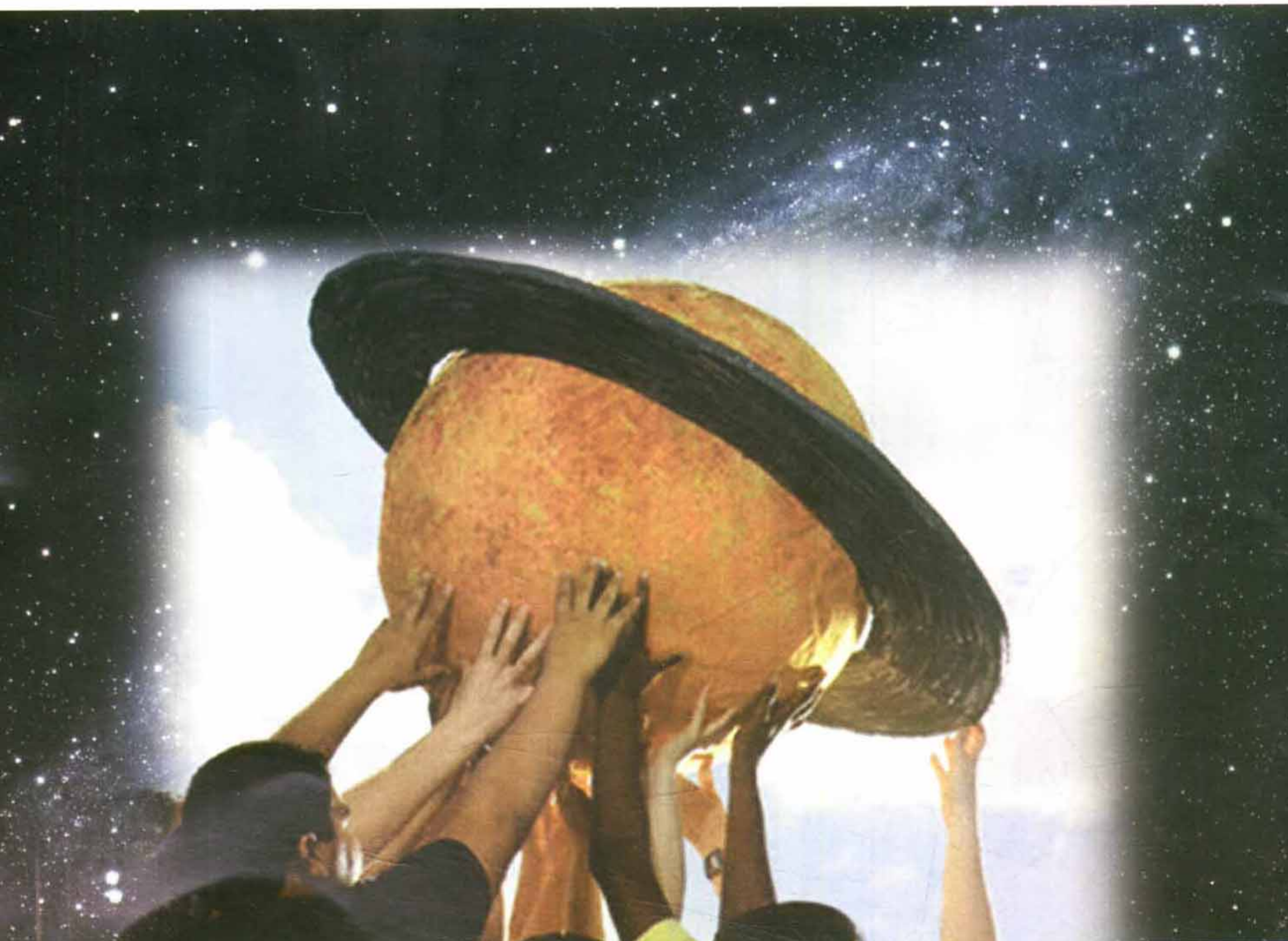
رشد
برهان ۶۳
مجله‌ی ریاضی
دوره‌ی متوسطه
ISSN:1735-4951
دوره‌ی نوزدهم ـ مهر ۱۳۸۸ ـ شماره‌ی ۱ ـ بها ۴۵۰۰ ریال
فصلنامه‌ی آموزشی، تحلیلی، اطلاع رسانی
www.roshdmag.ir
وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

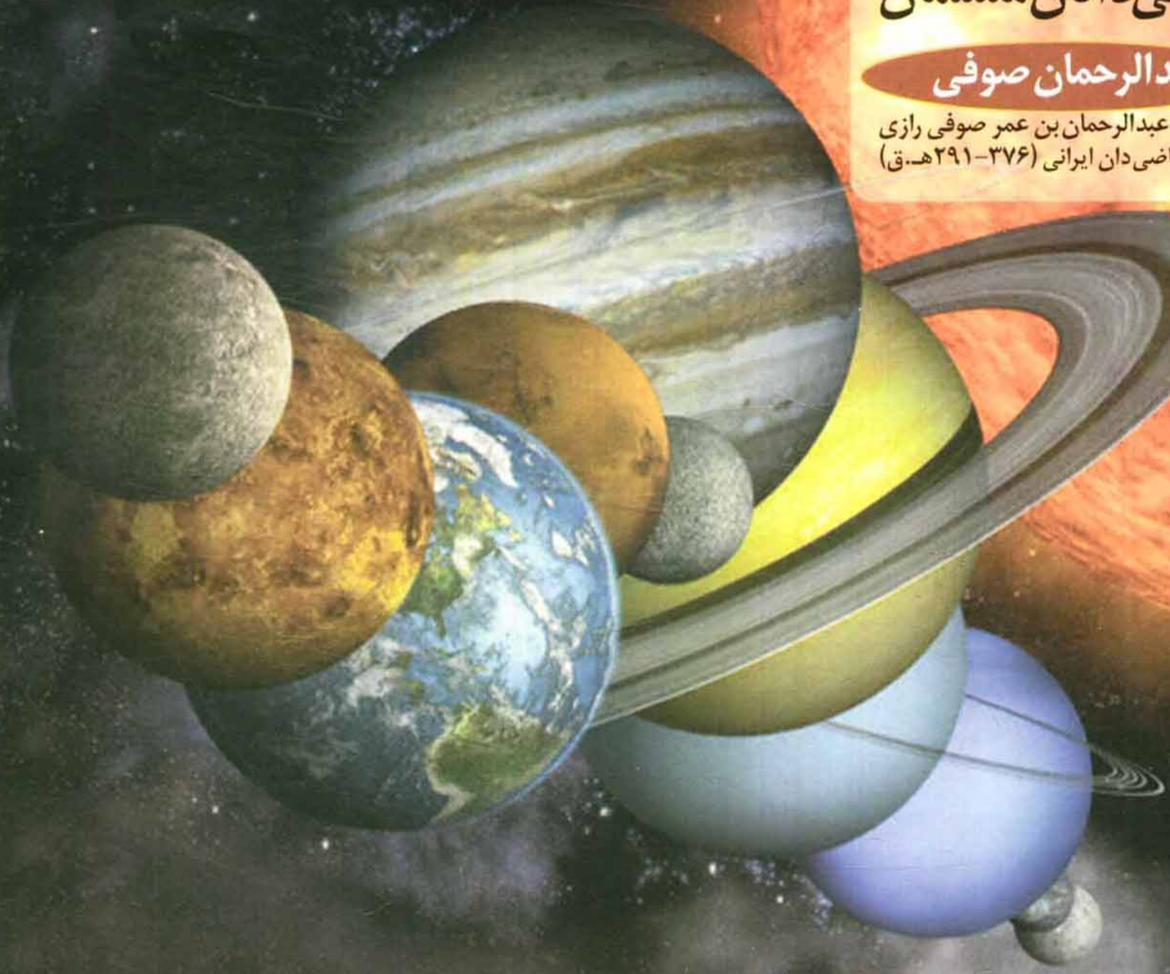


- چند حکم ریاضی ساده با نتیجه‌های بسیار جالب
- تعداد افزارهای یک مجموعه‌ی n عضوی
- مسئله‌ی چالش‌برانگیز از احتمال
- طراحی با رابطه‌های ریاضی
- انتگرال گیری جدولی

ریاضی‌دانان مسلمان

عبدالرحمان صوفی

ابوالحسین عبدالرحمان بن عمر صوفی رازی
منجم و ریاضی‌دان ایرانی (۳۷۶-۲۹۱هـ.ق)



صوفی فاضلی جلیل و منجمی عالی‌مقام و اصلاً از فسای فارس بود. در چهاردهم محرم سال ۲۹۱هـ.ق در شهرری چشم به جهان گشود و در سیزدهم محرم سال ۳۷۶ به رحمت ایزدی پیوست. بنا به گفته‌ی خود او در سال ۳۳۷ در اصفهان در صحبت **ابن عمید** (ابوالفضل محمدبن حسین) وزیر معروف آل‌بویه به‌سر می‌برد و در سال ۳۴۹ در دربار **عضدالدوله‌ی دیلمی** در اصفهان می‌زیست. و می‌دانیم که در سال ۳۵۹ در شیراز به رصد می‌پرداخت. وی منجم دربار عضدالدوله بود و اثر بسیار نفیس و معروف خود **صورالکواکب** را به نام این پادشاه نوشت و عضدالدوله به شاگردی وی در شناختن صور کواکب افتخار می‌کرد. **ابوریحان بیرونی** درباره‌ی کارهای نجومی عبدالرحمان صوفی نوشته است که مأخذ صوفی، اندازه‌گیری و تفرس بوده و او عمر خود را در فن معرفت صورکواکب صرف کرده تا آن‌جا که به همه‌ی زوایا و دقایق آن پی برده است.

اثر ریاضی وی:

اشکال متساوی‌الاضلاع: متن این رساله به عربی است و نسخه‌ی خطی آن به شماره‌ی ۵۵۳۵ در کتاب‌خانه‌ی آستان رضوی محفوظ است. این رساله را عبدالرحمان صوفی به‌دستور عضدالدوله‌ی دیلمی نوشته و موضوع آن ترسیم چندضلعی‌های منتظم به ضلع معین با یک فتحه‌ی پرگار است و چنین شروع می‌شود: «امرتی الامیر الاجل عضدالدوله مولانا اطال الله بقاه و ادام سلطانه، ان ابیّن له هل یمکن عمل اشکال علی خط واحد مستقیم مفروض مثل المربع و المخمس المتساوی الاضلاع و غیر ذلک بفتحه واحده».

خاطرنشان می‌کنم، این دومین اثر هندسی است که ریاضی‌دانان ایرانی درباره‌ی ترسیم اشکال هندسی با یک فتحه‌ی پرگار نوشته‌اند. رساله‌ی دیگر عبارت است از کتاب «فی مایحتاج الیه الصانع من اعمال الهندسه» تالیف **ابوالوفای بوزجانی**. جالب توجه است که صوفی (متوفی به سال ۳۷۶) و بوزجانی (درگذشته در سال ۳۸۸) معاصر یکدیگر بوده‌اند.

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد برهان متوسطه ۶۳
مجله‌ی ریاضی
ISSN: 1735 - 4951
دوره‌ی آموزش متوسطه
فصلنامه‌ی آموزشی، تحلیلی واطلاع رس
دوره‌ی نوزدهم ـ شماره‌ی ۱ـ پاییز ۱۳۸۸
شمارگان: ۱۳۰۰۰ نسخه

●مدیر مسئول: محمد ناصری ●سردبیر: حمیدرضا امیری
●مدیر داخلی: میرشهرام صدر ●طراح گرافیک: شاهرخ خرمغانی
●هیئت تحریریه: حمیدرضا امیری، محمد هاشم رستمی، احمد قندهاری، میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی، سید محمدرضا هاشمی موسوی، غلامرضا یاسی‌پور وبا تشکر از همکاری ارزنده‌ی استاد پرویز شهریاری ●ویراستار ادبی: کبری محمودی

● Email: Borhanm@roshdmag.ir
●پیام‌گیر نشریات رشد: ۰۲۱-۸۸۳۰۱۴۸۲
نشانی دفتر مجلّه: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
●تلفن دفتر مجله: ۰۲۱-۸۸۳۰۵۸۶۲
●تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ـ ۰۲۱-۷۷۳۳۵۱۱۰

● چاپ و صحافی: شرکت افست (سهامی عام)

فهرست

رشد برهان متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر به همکاری دعوت می‌کند:

- نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی دوره‌ی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمه‌ی مقاله‌های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه‌ی علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش کامپیوتر و ...)

رشد برهان متوسطه هر سه ماه، یکبار منتشر می‌شود.

مجلّه در حکّ، اصلاح، حذف و اضافه‌ی مقاله‌ها آزاد است.

مقاله‌های وارده ،باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.

مقاله‌های رسیده مسترد نمی‌شود.

استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر با ذکر دقیق مأخذ بلامانع است.

حرف اول

برای خدمت به جامعه آماده شوید

با شروع سال تحصیلی، همه‌ی فعالیت‌های آموزشی و پرورشی شما دانش‌آموزان و آینده‌سازان ایران اسلامی از سر گرفته می‌شود، اما تا چه حد با این فعالیت‌ها و وظایف آشنا هستید و خود را برای انجام آن‌ها آماده کرده‌اید؟ دوران دبیرستان یکی از اصلی‌ترین و مهم‌ترین عوامل شکل دهنده و تأثیر گذار بر شخصیت هر فرد به شمار می‌رود. شما باید در این چند سال برای خدمت به جامعه آماده شوید و راه آینده‌ی خود را به خوبی شناسایی کنید. لذا می‌باید غیر از موضوعات آموزشی و پرورشی که از اهم مسائل هستند، به مسائل روز و موجود در جامعه‌ای که به زودی با آن‌ها مواجه خواهید شد نیز آشنا باشید.

بر لزوم توجه دانش‌آموزان به مسائل سیاسی و اجتماعی بارها مقام معظم رهبری، حضرت آیت‌الله خامنه‌ای، و اولیای مسائل آموزشی و تربیتی، تأکید کرده‌اند. این سخن به این معنی است که دانش‌آموزان ما در کنار فعالیت‌های علمی خود، فعالیت‌های اجتماعی را نیز در نظر داشته باشند و آن‌ها را جزو ضرورت‌های زندگی و شکل‌دهنده‌ی شخصیت‌های فردی قلمداد کنند.

رشد یک بُعدی و دانش اندوزی بدون تهذیب نفس، هر چند انسان را به مدارج علمی قابل توجهی می‌رساند، اما براینِد آن، چیزی جز افسارگسیختگی و نارسایی‌های فردی و اجتماعی نخواهد بود. دانش‌آموزان ما از دیرباز آموخته‌اند که تنها، گنجینه‌ی متحرک علوم بشری نباشند، بلکه هم‌سوی با جامعه، به‌عنوان فردی مفید از آن جامعه، برای سایر نیازهای فطری خویش پاسخی شایسته داشته باشند. به همین دلیل، بسیاری از دانش‌آموزان کوشا و ساعی در عرصه‌ی علوم، در سایر مباحث اجتماعی و سیاسی هم فعال هستند. شرکتِ دانش‌آموزان در مجامعی چون بسیج دانش‌آموزی، انجمن‌های اسلامی، برنامه‌ها و فعالیت‌های اجتماعی و گروهی، مبیّن این نکته است که ما دانش‌آموزان اندیشمند و متفکر فراوان داریم و این امر ریشه در تاریخ کشور ما دارد.

حضور فراگیر و گسترده‌ی دانش‌آموزان در مبارزات انقلابی مردم در سال ۵۷ و حماسه‌آفرینی آن‌ها در روز ۱۳ آبان همان سال، نقش تعیین کننده‌ای در سقوط رژیم پهلوی داشت و این روند را می‌توان در سال‌های دفاع مقدس به خاطر آورد و از دانش‌آموزانی چون شهید فهمیده یاد کرد که مراتب والایی از حضور دانش‌آموزان را در دفاع مقدس به نمایش گذاشت. او تا جایی پیش رفت که رهبر کبیر انقلاب اسلامی حضرت امام‌خمینی از او به‌عنوان (رهبر ما) یاد کردند. امروز بسیاری از همان دانش‌آموزان، در عرصه‌ی علم و دانش از متخصصان و دانشمندان این جامعه هستند و آن‌هایی که به شهادت رسیده‌اند، با شهادت خویش امنیت و آرامش را برای علم‌آموزی و پیشرفت به طرف ارزش‌های انسانی و اسلامی سایرین هموار کردند و خود در بهشت زیبای خداوند، هم‌نشین پاکان و دوستان خدا شدند.

سردبیر

● پرویز شهریاری

ریاضیات در ایران ۵

محمد فرزند موسی مشهور به خوارزمی (سده‌ی سوم)

خوارزمی و کتاب جبر و مقابله

«جبر و مقابله»ی خوارزمی مهم‌ترین کتابی است که محمد فرزند موسی خوارزمی در زمینه‌ی جبر نوشته و آن را ادامه‌ی حساب نامیده است. واژه‌ی جبر که خوارزمی برای نامیدن این دانش برگزیده، معرف روشنی است که او در کتاب خود، آن را به کار برده است. خوارزمی جبر را به معنای جبران کردن (که جبر خاطر مسکین بلا بگرداند: سعدی) می‌دانست که به زبان امروزی به معنای جابه‌جایی عددی منفی از یک طرف معادله به طرف دیگر و تبدیل آن به عددی مثبت است. کنار واژه‌ی «جبر»، به واژه‌ی «مقابله» برمی‌خوریم که نشان‌دهنده‌ی عمل دیگری در حل معادله است: مقابل هم قرار دادن جمله‌ی برابر در دو سوی معادله.

بهاءالدین عاملی معروف به شیخ بهایی، ریاضی‌دان آغاز سده‌ی یازدهم هجری قمری (سده‌ی شانزدهم میلادی)، دو واژه‌ی جبر و مقابله را این طور تعریف کرده است: «می‌توان بخشی از معادله را که شامل مقدار منفی است، حذف کرد و به سمت دیگر و به همان اندازه اضافه کرد. این عمل جبر نامیده می‌شود. جمله‌های متشابه برابر را می‌توان از دو سمت معادله کنار گذاشت. این عمل را هم مقابله گویند».

به کمک آموزه‌های امروزی، این دو عمل را می‌توان به روشنی در نمونه‌ای شرح داد. این معادله را در نظر می‌گیریم:

$۵x - ۱۳ = ۴x - ۹$

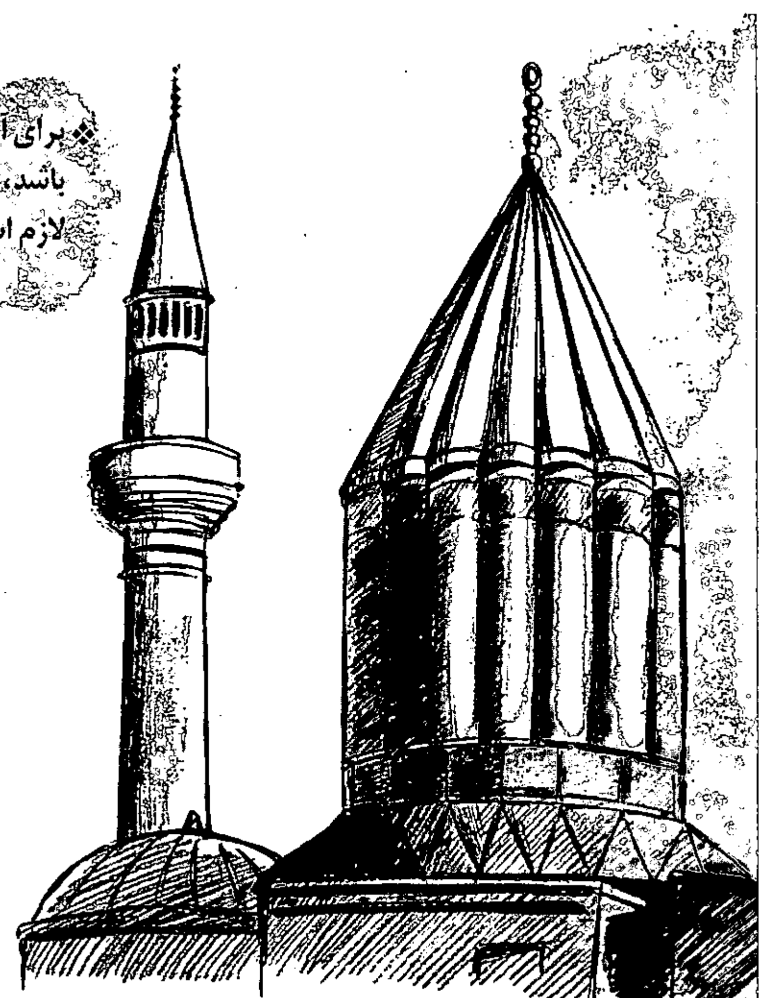
اگر به دو سمت، برابری ۱۳ و ۹ را بیفزاییم، عمل جبر را انجام داده‌ایم.

$۵x + ۹ = ۴x + ۱۳$

اگر از دو سمت برابری، ۴x و ۹ را کم کنیم، عمل مقابله را انجام داده‌ایم. در نتیجه داریم: $x = ۴$

به این ترتیب، عمل‌های جبر و مقابله

> ❖ برای آن که درک از طبیعت درست و عاقلانه باشد، شناسایی ریاضیات و دانش‌های طبیعی لازم است.
>
> «فردریک انگلس»



به زبان امروزی عبارت‌اند از: انتقال جمله‌ای از یک سمت معادله به سمت دیگر و سپس جمع جبری جمله‌های متشابه.

در برگردان واژه‌ی جبر به زبان‌های انگلیسی، فرانسه، آلمانی و روسی، حرف اضافه‌ی «ال» را هم گذاشته‌اند و «الجبر» را به کار می‌برند.

در کتاب جبر و مقابله‌ی خوارزمی، راه‌حل معادله‌های درجه اول و درجه دوم شرح داده شده است. کتاب خوارزمی در اساس به روش حل معادله‌های درجه اول و درجه دوم مربوط می‌شود. به این ترتیب، خوارزمی مسیر اصلی این دانش جدید را مشخص می‌کرد و می‌دانیم، مضمون اصلی جبر، دست کم تا سده‌ی نوزدهم میلادی عبارت است از همین حل معادله‌ها. آقای خان مهندس در کتاب «اصول علم جبر و مقابله» که در سال ۳۰۵ هجری قمری چاپ شده است، می‌نویسد:

> تعمیم و تشکیل این عمل (یعنی علم حساب) با این همه شرف و تغییر، موقوف است به علم جبر و مقابله و استخراج مجهولات از روی حل معادلات به طریقی که معین و مقرر است.

ارزش عملی کار خوارزمی در این است که کتاب او تنها رساله‌ای درباره‌ی حل مسئله‌ها نیست (آن‌طور که در آثار یا نوشته‌های هندی دیده می‌شود)، بلکه خوارزمی به جز حل معادله‌ها، کاربرد آن‌ها را طرح می‌کند و بسیاری از قانون‌ها را با روش هندسی هم روشن می‌سازد.

درست است که خوارزمی برای حل معادله‌ی درجه دوم، به ظاهر راه‌حل کلی نمی‌دهد، ولی ضمن آوردن مثال‌های عددی در برخی حالت‌ها، همان دستوری را دنبال می‌کند که امروز برای حل معادله‌ی درجه‌ی دوم می‌شناسیم.

> ❖ شراره یک لحظه می‌درخشد، ولی نور واقعی هرگز خاموش نمی‌شود.
> «گوته»

مسئله‌ی ۱۳۸ باب هفتم کتاب جبر و مقابله‌ی خوارزمی

یک درهم را بر چند مرد بخش کردم، به هر یک چیزی رسید. سپس یک مرد به گرد آنان افزودم و بار دیگر یک درهم را میان آنان بخش کردم. سهم هر یک در بار دوم به اندازه‌ی یک ششم درهم، از مقدار بخش اول کم‌تر شد. در این جا خوارزمی می‌خواهد تعداد مردان را در بار اول پیدا کند. راه‌حل او را می‌آوریم:

اگر تعداد مردان نوبت اول را که عبارت است از شیء (x) در نقصانی که میان آنان است $(\frac{1}{6})$ ضرب کنی و آن‌گاه حاصل ضرب را در تعداد مردان نوبت‌های اول و دوم ضرب کنی $\left[\frac{1}{6}x(x+1)\right]$، مال بخش شده [یعنی یک درهم] به دست می‌آید: $\left[\frac{1}{6}x(x+1)=1\right]$. پس از آن، تعداد مردان نوبت اول را که عبارت است از شیء (x)، در یک ششم، که میان آنان اختلاف بود، ضرب کنی، می‌شود یک ششم جذر $(\frac{1}{6}x)$. سپس آن را در تعداد مردان نوبت دوم، یعنی شیء به اضافه‌ی یک، ضرب می‌کنی. این نتیجه به دست می‌آید: یک ششم مال به اضافه‌ی یک ششم جذر که تقسیم بر یک درهم برابر است با یک درهم $\left[\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}x=1\right]$. مالی را که در اختیار داری کامل می‌کنی، یعنی آن را در ۶ ضرب می‌کنی، می‌شود مال به اضافه‌ی جذر $[x^2+x]$. پس یک درهم را در شش ضرب می‌کنی، می‌شود شش درهم. حاصل آن یک مال و یک جذر است که برابر است با شش درهم $[x^2+x=6]$. آن‌گاه تعداد جذر را پس از نصف کردن در مانند خودش ضرب کن و آن را بر شش بیفزا $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2+6\right]$. جذر حاصل جمع را بگیر و نصف تعداد جذری را که در مانند خودش ضرب کرده بودی و عبارت است از نصف $\frac{1}{2}$، از آن کم کن $\left[-\frac{1}{2}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+6}\right]$. مانده عبارت است از تعداد مردان نوبت اول که در این مسئله دو مرد است.

خوارزمی شش نوع معادله را بررسی می‌کند و برای هر کدام راه‌حل خاصی می‌دهد. این شش نوع معادله به زبان نمادهای امروزی چنین هستند:

۱) $x^2=2x$

۲) $x^2=36$

۳) $5x=10$

۴) $x^2+7x=128$

۵) $5x^2+21=10x$

۶) $12x+288=x^2$

معادله‌ی سوم معادله‌ای درجه اول است، ولی خوارزمی در بخش‌بندی خود بر این اساس عمل می‌کند که در معادله‌ی درجه دوم، سه جمله وجود دارد: جمله‌ی درجه دوم، جمله‌ی درجه اول و مقدار ثابت. در ترکیب معادله ممکن است تنها دو جمله از این سه جمله دخالت داشته باشند (حالت‌های ۱، ۲ و ۳) و یا هر سه جمله (حالت‌های ۴، ۵ و ۶). در ضمن، وقتی هر سه جمله از معادله‌ی درجه دوم وجود دارد، ممکن است جمله‌های درجه اول و درجه دوم در یک طرف و مقدار ثابت در طرف دیگر باشد (حالت ۴). یا جمله‌ی درجه دوم و مقدار ثابت در یک طرف و جمله‌ی درجه اول در طرف دیگر باشد (حالت ۵). سرانجام جمله‌ی درجه اول و مقدار ثابت در یک طرف و جمله‌ی درجه دوم در طرف دیگر (حالت ۶).

همان‌طور که ضمن راه‌حل مسئله‌ی نمونه دیدیم، خوارزمی برای حل معادله، نه از دستور و نماد، بلکه از بیان استفاده می‌کند و در ضمن در حالت‌هایی که دو ریشه‌ی معادله مثبت باشند، هر دو ریشه را به دست می‌آورد و از این بابت بر جبر دیوفانتی برتری دارد.

خوارزمی برای حل معادله‌ها از

روش‌های هندسی هم استفاده می‌کند. برای نمونه در باب دوم (باب جذر، مال و عدد)، نیز عنوان استدلال در یک مال و ده جذر با سی‌ونه درهم را برابر می‌گیرد.»

خوارزمی درباره‌ی حساب «کتاب حساب الهند» را هم مطالعه کرده بود. این کتاب در پیشرفت بعدی ریاضیات در اروپایی غربی، نقش بی‌اندازه‌ای داشته است، زیرا اروپاییان به‌وسیله‌ی آن با روش هندی عددنویسی آشنا شدند. سپس دستگاه رقم‌های هندی، پایه‌ی کاربردی پیدا کرد. اروپاییان این شکل عددنویسی و شکل موضعی را در واقع از عددنویسی هندی گرفتند و آن را «عددنویسی عربی» نامیدند (حتی امروز هم بعضی از کتاب‌ها این اصطلاح نادرست را به‌کار می‌برند).

نام خوارزمی در آغاز با برگردان کتاب حساب الهند به اروپا رفت و به‌صورت لاتین شده‌ی آن «الگورتیموس» درآمد. به‌تدریج در تمامی اروپای غربی، نخست عنوان آلگورتیموس و بعدها الگوریتم، روش عددنویس هندی، یعنی همین عددنویسی امروزی ما، رواج یافت. ولی به مرور، این عنوان، یعنی الگوریتم، به هر دستگاه با دنباله‌ای از محاسبه داده شد؛ هم‌چون الگوریتم روش ضرب عددهای چندرقمی که ضرب عدد چند رقمی را به‌صورت ستونی توضیح می‌دهد، الگوریتم اقلیدس برای پیدا کردن بزرگ‌ترین بخش‌یاب عددها، الگوریتم حل معادله‌ی درجه‌ی دوم، و غیر آن.

به این نکته توجه داشته باشیم که واژه‌ی لگاریتم هیچ ربطی با واژه‌ی الگوریتم و در نتیجه با نام خوارزمی ندارد.

به جز این، نامی که خوارزمی بر این کتاب جبر گذاشت، امروز در همه‌ی زبان‌های جهان باقی مانده است: در زبان فرانسوی ALgeber، در زبان انگلیسی ALgebra و در زبان روسی الگبر.

❖❖❖

از کتاب‌های خوارزمی تنها کتاب جبر و مقابله‌ی او با همت زنده‌یاد **حسین خدیوجم** به فارسی ترجمه شده است. اگر **ارشمیدس** و چند تن دیگر را کنار بگذاریم، می‌توان ادعا کرد که ریاضیات یونانی در دوران شکوفایی خود نتوانست در جهت پیدایش «جبر» یا حتی کمتر از آن «حساب» گامی جدی، بردارد. بیشتر ریاضی‌دانان در زمینه‌ی هندسه تلاش می‌کردند و در این راه توانستند تا درون هندسه‌ی عالی نفوذ کنند، ولی با آن‌که صدها سال پیش از ریاضی‌دان یونانی، دانشمندان سرزمین‌های میان دو رود (بین‌النهرین) به مرحله‌های بالایی از ریاضیات محاسبه‌ای رسیده بودند، یونانی‌ها حتی توانستند از عهده‌ی نوشتن عددهای بزرگ و دشوارتر از آن، عمل روی این عددها، به سادگی برآیند.

در واقع در یونان، عددها را به یاری حرف‌های الفبا (و با بیست و هفت نشانه) می‌نوشتند و هنوز عددنویسی آن‌ها شکل موضعی نداشت، عددنویسی موضعی همراه با قبول نمادی برای صفر در میان دو رود وجود داشت و بعدها در سده‌های نخست میلادی دوباره در هند پیدا شد.

در میان دو رود (ماوراءالنهر)، به‌صورت مقدماتی‌ترین عیلامی‌ها از شکل موضعی بودن عدد استفاده می‌کردند و در بیشتر حالت‌ها از مبنای ۶۰ استفاده می‌کردند. تقسیم محیط دایره به ۳۶۰ درجه و سپس بخش‌های شصت شصتی آن و نیز تقسیم‌بندی زمان براساس ساعت، دقیقه، ثانیه و عمده‌ی کارهای قوم‌های ساکن میان دو رود براساس قبول عددنویسی شصت شصتی بود.

> ❖ **تنها کافی نیست اندیشه‌ای خوب داشته باشیم، اصل مطلب این است که آن را خوب به کار ببریم.**
> «رنه دکارت»

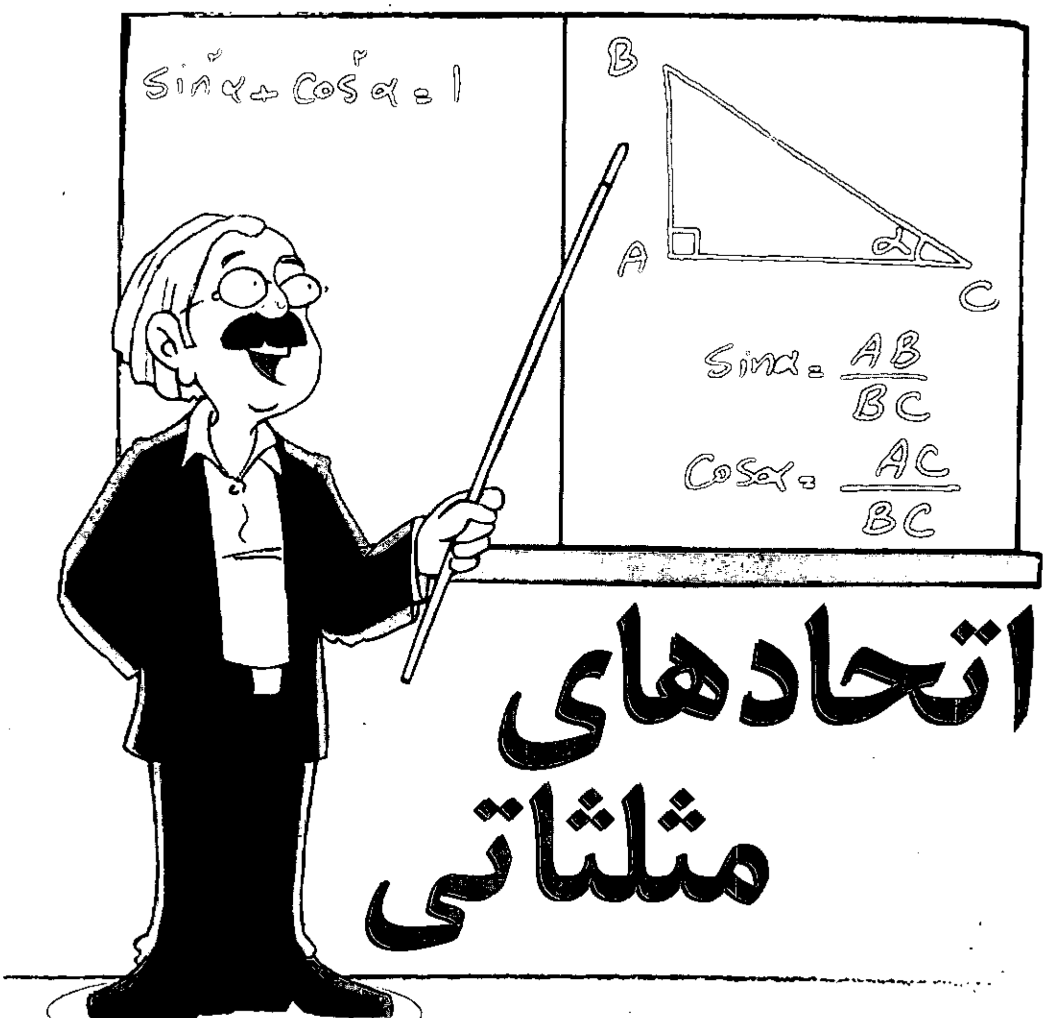
تفاوتی را که دانشمندان بابلی و یونانی در نوع برخورد با ریاضیات داشتند، باید در نیازهای اجتماعی ـ اقتصاد این دو سرزمین و در نوع تفاوت‌های سیاسی ـ اجتماعی آن‌ها جست‌وجو کرد. در هر دو سرزمین، نظام برده‌داری حاکم بود. برده‌داری دولتی در بابل و برده‌داری شخصی در یونان.

نظام دموکراسی یونان تا حدی شامل آزادها یعنی صاحبان برده می‌شد. آزادها هرگونه کار عملی را شایسته‌ی خود نمی‌دانستند و آن‌ها را به عهده‌ی برده‌ها می‌گذاشتند. همین امر در شیوه‌ی تفکر علمی آزادها اثر گذاشت. آن‌ها هر دانشی را که کاربرد عملی داشت، دانشی پست به حساب می‌آوردند و تحقیر می‌کردند و چون تصور آن‌ها بر این بود که هندسه کاربردی عملی ندارد، آن را عزیز می‌شمردند و تمام همت خود را در کشف رازهای آن مصروف می‌داشتند. چنین بود که حساب و به‌طور طبیعی جبر که در واقع از راه تکامل حساب می‌توان به آن رسید، به خاطر جنبه‌های عملی و کاربردی آن مورد عنایت آزادها نبود. آزادها کارهای مهم‌تری داشتند: کشف رازهای طبیعت و ساختمان جهان.

به همین مناسبت، هر دانشمند یونانی فیلسوف بود و برای گره‌گشایی رازهای پنهانی جهان کوشید. کارهای پست و عملی را برده‌ها انجام می‌دادند. این کارها در اعتبار آزادها نبود. اگر کسانی هم‌چون اوپانیتوس در زمینه‌های مهندسی می‌اندیشیدند، نه در همان زمان و نه پس از خودشان مورد توجه نبودند و اندیشه‌هایشان دنبال نمی‌شد. اوپانیتوس توانسته بود با مهارت نخستین، آب‌گیری را در یکی از کوه‌های ساموس سوراخ کند و در دل کوه مسیری را به طول یک کیلومتر برای عبور آب به‌وجود آورد.

البته نباید دانشمندان بزرگی هم‌چون ارشمیدس را که در همه‌ی زمینه‌های عملی از حساب تا مکانیک کار می‌کرد، یا **ارسطو** را که تلاشی موفق در جمع‌آوری همه‌ی دانش‌های منطقی و غیرمنطقی زمان خود کرد، از جمله‌ی استثناها به شمار آورد؛ به‌ویژه که کار پرارزش آن‌ها اثر چندانی بر روند کلی حرکت دانش زمان آن‌ها نداشت. ■

● احمد قندهاری



اتحادهای مثلثاتی

تعریف: هر تساوی مثلثاتی، بین یک یا چند نسبت مثلثاتی که به ازای جمیع مقادیر متغیر یا متغیرهای تعریف‌شده در آن، همواره برقرار باشد، یک اتحاد مثلثاتی نامیده می‌شود. برای مثال، تساوی $\sin^4 x + \cos^4 x + \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1 \quad (I)$ یک اتحاد مثلثاتی است. اگر به جای x، هر زاویه‌ای را قرار دهیم، تساوی فوق برقرار است.

اثبات یک اتحاد مثلثاتی معمولاً به سه روش صورت می‌گیرد:

روش اول: یک طرف اتحاد مثلثاتی را که عبارت مفصل‌تری است، با استفاده از فرمول‌های مثلثاتی و رابطه‌های دیگر مثلثاتی، آن‌قدر ساده‌تر می‌کنیم و تغییر می‌دهیم تا به طرف دیگر برسیم.

مثال ۱. درستی اتحاد $\frac{\tan A - \tan B}{\cot B - \cot A} = \frac{\tan A}{\cot B}$ را ثابت کنید.

حل: عبارت سمت چپ این اتحاد را ساده می‌کنیم تا به عبارت سمت راست برسیم.

$$\text{عبارت سمت چپ} = \frac{\tan A - \tan B}{\cot B - \cot A} = \frac{\tan A - \tan B}{\frac{1}{\tan B} - \frac{1}{\tan A}} = \frac{\tan A - \tan B}{\frac{\tan A - \tan B}{\tan A . \tan B}}$$

$$\text{عبارت سمت چپ} = \tan A . \tan B = \tan A \times \frac{1}{\cot B}$$

$$= \frac{\tan A}{\cot B}$$ برابر عبارت سمت راست

▲▼▲

روش دوم: فرض می‌کنیم تساوی اتحاد درست باشد. دو طرف تساوی را به کمک فرمول‌ها و روابط مثلثاتی به صورت ساده‌تر می‌نویسیم تا به دو عبارت برابر برسیم.

مثال ۲. درستی اتحاد $\frac{\sin^3 a+\cos^3 a}{\sin a+\cos a}=\frac{2-\sin 2a}{2}$ را ثابت کنید.

حل: فرض می‌کنیم تساوی این اتحاد درست باشد. برای حل به روش دوم، طرفین وسطین می‌کنیم:

$$\Rightarrow 2(\sin^3 a+\cos^3 a)=(\sin a+\cos a)(2-\sin 2a)$$

عبارت سمت چپ را با استفاده از اتحاد زیر بسط می‌دهیم:

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2+y^2-xy)$$

$$\Rightarrow 2(\sin a+\cos a)(\underbrace{\sin^2 a+\cos^2 a}_{1}-\sin a\cos a)$$

$$=(\sin a+\cos a)(2-\sin 2a)$$

$$\Rightarrow 2(\sin a+\cos a)(1-\frac{1}{2}\sin 2a)=(\sin a+\cos a)(2-\sin 2a)$$

$$\Rightarrow (\sin a+\cos a)(2-\sin 2a)=(\sin a+\cos a)(2-\sin 2a)$$

▲▼▲

روش سوم: با نوشتن روابطی و با استفاده از فرمول‌ها و روابط مثلثاتی، صورت اصلی اتحاد را می‌سازیم (این روش در واقع برگشت‌پذیری روش دوم است).

مثال ۳. درستی اتحاد $\frac{\sin x}{1-\cos x}+\frac{1+\cos x}{\sin x}=\frac{2\sin x}{1-\cos x}$ را ثابت کنید.

حل: به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$2\sin x=2\sin x$$

دو طرف تساوی را بر $(1-\cos x)\neq 0$ تقسیم می‌کنیم:

$$\Rightarrow \frac{2\sin x}{1-\cos x}=\frac{2\sin x}{1-\cos x}$$

عبارت سمت چپ را در $\frac{\sin x}{\sin x}$ ضرب می‌کنیم:

$$\Rightarrow \frac{2\sin^2 x}{\sin x(1-\cos x)}=\frac{2\sin x}{1-\cos x}$$

تفکیک می‌کنیم:

$$\Rightarrow \frac{\sin^2 x+\sin^2 x}{\sin x(1-\cos x)}=\frac{2\sin x}{1-\cos x}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2 x+(1-\cos^2 x)}{\sin x(1-\cos x)}=\frac{2\sin x}{1-\cos x}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2 x}{\sin x(1-\cos x)}+\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\sin x(1-\cos x)}=\frac{2\sin x}{1-\cos x}$$

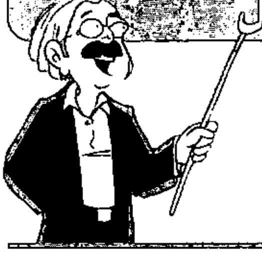
$$\begin{cases}\sin x\neq 0\\(1-\cos x)\neq 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{1-\cos x}+\frac{1+\cos x}{\sin x}=\frac{2\sin x}{1-\cos x}$$

▲▼▲

توجه: این روش معمول نیست، ولی در اتحادهای مثلثاتی مسائلی داریم که با این روش، راحت‌تر حل می‌شوند.

مسائل



۱. صحت اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$(1-\cos^2\alpha)(1+\tan^2\alpha)=\tan^2\alpha$$

حل: به روش اول حل می‌کنیم:

$$\text{عبارت سمت چپ}=(1-\cos^2\alpha)(1+\tan^2\alpha)=(\sin^2\alpha)(1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha})$$

$$\text{عبارت سمت چپ}=(\sin^2\alpha)(\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha})=\sin^2\alpha(\frac{1}{\cos^2\alpha})$$

$$=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\tan^2\alpha$$

▲▼▲

۲. صحت اتحاد $(\cot\alpha-1)^2+(\cot\alpha+1)^2=\frac{2}{\sin^2\alpha}$ را ثابت کنید.

حل: به روش اول حل می‌کنیم:

$$\text{عبارت سمت چپ}=\cot^2\alpha+1-2\cot\alpha+\cot^2\alpha+1+2\cot\alpha$$

$$\text{عبارت سمت چپ}=2\cot^2\alpha+2=2(\cot^2\alpha+1)=2(\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+1)$$

$$=2(\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha})$$

$$\text{عبارت سمت چپ}=2(\frac{1}{\sin^2\alpha})=\frac{2}{\sin^2\alpha}$$

▲▼▲

۳. صحت اتحاد $\dfrac{1-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha.\cos\alpha}=\tan\alpha-\cot\alpha$ را ثابت کنید.

حل: به روش اول حل می‌کنیم:

$$\text{عبارت سمت چپ}=\frac{\overbrace{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}^{1}-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha.\cos\alpha}=\frac{\sin^2-\cos^2\alpha}{\sin\alpha.\cos\alpha}$$

کسر را تفکیک می‌کنیم:

$$\text{عبارت سمت چپ}=\frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha.\cos\alpha}-\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha.\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$=\tan\alpha-\cot\alpha$$

▲▼▲

۴. درستی اتحاد $\dfrac{1-\tan^2(45^\circ-\alpha)}{1+\tan(45^\circ-\alpha)}=\sin 2\alpha$ را ثابت کنید.

حل: $x=45^\circ-\alpha$ فرض می‌شود.

$$\text{عبارت سمت چپ}=\frac{1-\tan^2x}{1+\tan^2x}=\frac{1-\dfrac{\sin^2x}{\cos^2x}}{1+\dfrac{\sin^2x}{\cos^2x}}=\frac{\dfrac{\cos^2x-\sin^2x}{\cos^2x}}{\dfrac{\cos^2x+\sin^2x}{\cos^2x}}$$

$$=\frac{\dfrac{\cos 2x}{\cos^2x}}{\dfrac{1}{\cos^2x}}$$

$$\text{عبارت سمت چپ}=\cos 2x=\cos(90^\circ-2\alpha)=\cos(\frac{\pi}{2}-2\alpha)$$

$$=\sin 2\alpha$$

▲▼▲

۵. درستی اتحاد $\sin 15^\circ+\tan 30^\circ\cos 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ را ثابت کنید.

حل:

$$\text{عبارت سمت چپ}=\sin 15^\circ+\frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}.\cos 15^\circ$$

$$\text{عبارت سمت چپ}=\frac{\sin 15^\circ\cos 30^\circ+\cos 15^\circ\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}$$

$$=\frac{\sin(15^\circ+30^\circ)}{\cos 30^\circ}=\frac{\sin 45^\circ}{\cos 30^\circ}$$

$$\text{عبارت سمت چپ}=\frac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

▲▼▲

۶. صحت اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\cos(\alpha+\beta).\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$$

حل:

$$\text{عبارت سمت چپ}=\underbrace{(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)}_{\text{اتحاد مزدوج}}$$

$$\text{عبارت سمت چپ}=\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha.\sin^2\beta$$

$$=\cos^2\alpha(1-\sin^2\beta)-(1-\cos^2\alpha)\sin^2\beta$$

$$=\cos^2\alpha-\cos^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\beta+\cos^2\alpha.\sin^2\beta$$

$$=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$$

▲▼▲

۷. صحت اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\sin 200^\circ.\sin 310^\circ+\cos 340^\circ.\cos 50^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

حل:

$$\sin 200^\circ=\sin(180^\circ+20^\circ)=\sin(\pi+20^\circ)=-\sin 20^\circ$$

$$\sin 310^\circ=\sin(360^\circ-50^\circ)=\sin(2\pi-50^\circ)=-\sin 50^\circ$$

$$\cos 340^\circ=\cos(360^\circ-20^\circ)=\cos(2\pi-20^\circ)=\cos 20^\circ$$

$$\text{عبارت سمت چپ}=(-\sin 20^\circ)(-\sin 50^\circ)+\cos 20^\circ\cos 50^\circ$$

$$=\cos 20^\circ\cos 50^\circ+\sin 20^\circ\sin 50^\circ$$

$$=\cos(50^\circ-20^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

▲▼▲

۸. صحت اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\cos\alpha+\cos(120^\circ+\alpha)+\cos(240^\circ+\alpha)=0$$

حل:

$$\text{عبارت سمت چپ}=\cos\alpha+\cos(180^\circ-60^\circ+\alpha)+\cos(180^\circ+60^\circ+\alpha)$$

$$\text{عبارت سمت چپ}=\cos\alpha+\cos(\pi+(\alpha-60^\circ))+\cos(\pi+(\alpha+60^\circ))$$

$$\text{عبارت سمت چپ}=\cos\alpha-\cos(\alpha-60^\circ)-\cos(\alpha+60^\circ)$$

$$\text{عبارت سمت چپ}=\cos\alpha-(\cos\alpha\cos 60^\circ+\sin\alpha\sin 60^\circ)-(\cos\alpha\cos 60^\circ-\sin\alpha\sin 60^\circ)$$

$$\text{عبارت سمت چپ}=\cos\alpha-\cos\alpha\cos 60^\circ-\sin\alpha\sin 60^\circ-\cos\alpha\cos 60^\circ+\sin\alpha\sin 60^\circ$$

$$\text{عبارت سمت چپ}=\cos\alpha-2\cos\alpha.\cos 60^\circ=\cos\alpha-2\cos\alpha(\frac{1}{2})$$

$$=\cos\alpha-\cos\alpha=0$$

▲▼▲

۹. صحت اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$$

حل: داریم: $a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2$

$$\text{عبارت سمت چپ} = \sin^4\alpha+\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha$$

$$\text{عبارت سمت چپ} = (1)^2-2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha=1-2(\sin\alpha.\cos\alpha)^2$$

$$=1-2(\frac{1}{2}\sin 2\alpha)^2$$

$$\text{عبارت سمت چپ} = 1-2(\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha)=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$$

به خاطر بسپارید: $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$

▲▼▲

۱۰. صحت اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$$

حل:

توجه داریم:

$$\begin{cases} a^6+b^6=(a^2+b^2)(a^4+b^4-a^2b^2) \\ a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2 \end{cases}$$

و $\Rightarrow a^6+b^6=(a^2+b^2)\left[(a^2+b^2)^2-3a^2b^2\right]$

$$\text{عبارت سمت چپ} = \sin^6\alpha+\cos^6\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)\times\left[(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right]$$

$$=1\left[1-3(\sin\alpha\cos\alpha)^2\right]=1-3(\frac{1}{2}\sin 2\alpha)^2=1-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$$

به خاطر بسپارید: $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$

▲▼▲

۱۱. درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\frac{\sin\theta}{\frac{1}{\sin\theta}-1}+\frac{\sin\theta}{\frac{1}{\sin\theta}+1}=2\tan^2\theta$$

حل:

$$\text{عبارت سمت چپ} = \frac{\sin\theta}{\frac{1-\sin\theta}{\sin\theta}}+\frac{\sin\theta}{\frac{1+\sin\theta}{\sin\theta}}=\frac{\sin^2\theta}{1-\sin\theta}+\frac{\sin^2\theta}{1+\sin\theta}$$

$$=\frac{\sin^2\theta(1+\sin\theta)+\sin^2\theta(1-\sin\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}$$

$$=\frac{\sin^2\theta+\sin^3\theta+\sin^2\theta-\sin^3\theta}{1-\sin^2\theta}$$

$$=\frac{2\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}=\frac{2\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=2\tan^2\theta$$

▲▼▲

۱۲. درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\frac{1}{\cos^4\alpha}-1-\tan^4\alpha=2\tan^2\alpha$$

حل:

$$\text{عبارت سمت چپ} = (\frac{1}{\cos^2\alpha})^2-1-\tan^4\alpha=(1+\tan^2\alpha)^2-1-\tan^4\alpha$$

$$\text{عبارت سمت چپ} = 1+\tan^4\alpha+2\tan^2\alpha-1-\tan^4\alpha=2\tan^2\alpha$$

▲▼▲

۱۳. درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\frac{1}{\cos^4\alpha+\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\sin^2\alpha+\tan^2\alpha}=\cos^2\alpha$$

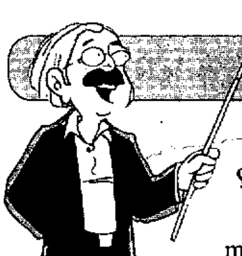
حل:

$$\text{عبارت سمت چپ} = \frac{1}{\cos^2\alpha(\underbrace{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}_{1})+\sin^2\alpha+\tan^2\alpha}$$

$$=\frac{1}{\underbrace{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}_{1}+\tan^2\alpha}$$

$$=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{1}{\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\cos^2\alpha$$

سؤالات چهارگزینه‌ای



۱. اگر $\pi > x > 0$ باشد، آن‌گاه به ازای چه مقادیری از m، معادله‌ی $2\tan\frac{x}{2}=4-m^2$ جواب دارد؟

۱) $m>2$ یا $m<-2$ ۲) $-2<m<2$ ۳) $-4<m<4$ ۴) $m>4$ یا $m<-4$

۲. حاصل $\frac{1+\tan 15^\circ}{1-\tan 15^\circ}+\frac{1-\tan 15^\circ}{1+\tan 15^\circ}$ برابر است با:

۱) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ۲) $\frac{3\sqrt{3}}{3}$ ۳) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ۴) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

۳. حاصل $\tan ۲۱^\circ+\tan ۳۹^\circ+\sqrt{۳}\tan ۲۰^\circ\tan ۶۰^\circ$ برابر است با:

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) -۱

۴. حاصل $\frac{\sqrt{۳}}{\sin ۸۰^\circ}-\frac{۱}{\sin ۱۰^\circ}$ برابر است با:

۱) ۴ ۲) -۴ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۵. حاصل $\cos^۲ ۷۰^\circ-\cos^۲ ۲۰^\circ$ برابر است با:

۱) $\sin ۴۰^\circ$ ۲) $-\sin ۵۰^\circ$ ۳) $-\sin ۸۰^\circ$ ۴) $-\sin ۷۰^\circ$

۶. حاصل $\sin^۴ \frac{\pi}{۱۲}+\cos^۴ \frac{\pi}{۱۲}$ برابر است با:

۱) $\frac{۷}{۸}$ ۲) $-\frac{۷}{۸}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

۷. حاصل $\sin^۶ \frac{\pi}{۱۲}+\cos^۶ \frac{\pi}{۱۲}$ برابر است با:

۱) $\frac{۱۱}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱۲}{۱۶}$ ۳) $\frac{۱۳}{۱۶}$ ۴) $\frac{۱۴}{۱۶}$

۸. اگر $\pi > x > \frac{\pi}{۲}$ باشد، آن‌گاه حاصل $\sqrt{\frac{۱-\cos ۲x}{۱+\cos ۲x}}$ برابر است با:

۱) $\tan x$ ۲) $\cot x$ ۳) $-\tan x$ ۴) $-\cot x$

۹. حاصل عبارت $\sin ۱۵^\circ+\frac{\sqrt{۳}}{۳}\cos ۱۵^\circ$ برابر است با:

۱) $\sqrt{۶}$ ۲) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۶}}{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۶}}{۴}$

۱۰. حاصل کسر $\frac{۸\cos\frac{x}{۲}.\cos\frac{x}{۴}\cos x}{\sin ۲x}$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{۱}{\sin\frac{x}{۲}}$ ۲) $\frac{۱}{\cos\frac{x}{۲}}$ ۳) $\frac{۱}{\sin\frac{x}{۴}}$ ۴) $\frac{۱}{\cos\frac{x}{۴}}$

۱۱. حاصل $\cos^۲(x-\frac{\pi}{۴})-\cos^۲(x+\frac{\pi}{۴})$ برابر است با:

۱) $\cos ۲x$ ۲) $\sin ۲x$ ۳) $-\sin ۲x$ ۴) $-\cos ۲x$

۱۲. حاصل $\cos\frac{\pi}{۵}.\cos\frac{۳\pi}{۵}$ برابر است با:

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۱۳. اگر $\cot\alpha$ و $\cot\beta$ ریشه‌های معادله‌ی $x^۲-۲x-۲=۰$ باشند، آن‌گاه $\tan(\alpha+\beta)$ برابر است با:

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۴. حاصل کسر $\frac{۲\sin\alpha-\sin ۲\alpha}{۲\sin\alpha+\sin ۲\alpha}$ برابر است با: $(\alpha \neq k\pi)$

۱) $\sin^۲\frac{\alpha}{۲}$ ۲) $\cos^۲\frac{\alpha}{۲}$ ۳) $\tan^۲\frac{\alpha}{۲}$ ۴) $\cot^۲\frac{\alpha}{۲}$

۱۵. حاصل $\cos^۲ ۷۰^\circ-\cos^۲ ۲۰^\circ$ برابر است با:

۱) $\cos ۴۰^\circ$ ۲) $-\cos ۴۰^\circ$ ۳) $-\cos ۷۰^\circ$ ۴) $-\sin ۷۰^\circ$

حل سؤالات چهارگزینه‌ای

۱. گزینه‌ی ۲:

$$۰<x<\pi \Rightarrow ۰<\frac{x}{۲}<\frac{\pi}{۲} \Rightarrow \tan\frac{x}{۲}>۰$$

$$\tan\frac{x}{۲}=\frac{۴-m^۲}{۲} \Rightarrow \frac{۴-m^۲}{۲}>۰ \Rightarrow ۴-m^۲>۰ \Rightarrow m^۲<۴$$

$$\Rightarrow -۲<m<۲$$

۲. گزینه‌ی ۳:

$$A=\frac{۱-\tan ۱۵^\circ}{۱+\tan ۱۵^\circ}+\frac{۱+\tan ۱۵^\circ}{۱-\tan ۱۵^\circ}$$

$$=\frac{\tan ۴۵^\circ-\tan ۱۵^\circ}{۱+\tan ۴۵^\circ\tan ۱۵^\circ}+\frac{\tan ۴۵^\circ+\tan ۱۵^\circ}{۱-\tan ۴۵^\circ\tan ۱۵^\circ}$$

$$=\tan(۴۵^\circ-۱۵^\circ)+\tan(۴۵^\circ+۱۵^\circ)=\tan ۳۰^\circ+\tan ۶۰^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{۳}}{۳}+\sqrt{۳}=\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$$

۳. گزینه‌ی ۱ : $21^\circ + 39^\circ = 60^\circ \Rightarrow \tan 60^\circ = \tan(21^\circ + 39^\circ)$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{\tan 21^\circ + \tan 39^\circ}{1 - \tan 21^\circ \tan 39^\circ}$$

$$\Rightarrow \tan 21^\circ + \tan 39^\circ = \sqrt{3} - \sqrt{3}\tan 21^\circ \tan 39^\circ$$

$$\Rightarrow \tan 21^\circ + \tan 39^\circ + \sqrt{3}\tan 21^\circ \tan 39^\circ = \sqrt{3}$$

۴. گزینه‌ی ۱ : $\sin 80^\circ = \sin(90^\circ - 10^\circ) = \sin(\frac{\pi}{2} - 10^\circ) = \cos 10^\circ$

$$\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = \frac{\cos 10^\circ - \sqrt{3}\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ}$$

$$= \frac{\cos 10^\circ - \tan 60^\circ \sin 10^\circ}{\frac{1}{2}\sin 20^\circ}$$

$$= \frac{\cos 10^\circ - \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}\sin 10^\circ}{\frac{1}{2}\sin 20^\circ}$$

$$= \frac{\frac{\cos 60^\circ \cos 10^\circ - \sin 10^\circ \sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}}{\frac{1}{2}\sin 20^\circ} = \frac{\frac{\cos(60^\circ + 10^\circ)}{\cos 60^\circ}}{\frac{1}{2}\sin 20^\circ}$$

$$= \frac{\cos 70^\circ}{\frac{1}{2}\sin 20^\circ \cdot \cos 60^\circ} = \frac{\cos(90^\circ - 20^\circ)}{\frac{1}{2}\sin 20^\circ (\frac{1}{2})} = \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - 20^\circ)}{\frac{1}{4}\sin 20^\circ}$$

$$= \frac{\sin 20^\circ}{\frac{1}{4}\sin 20^\circ} = 4$$

۵. گزینه‌ی ۲ :

$$\cos^2 70^\circ - \cos^2 20^\circ = \cos^2(\frac{\pi}{2} - 20^\circ) - \cos^2 20^\circ$$

$$= \sin^2 20^\circ - \cos^2 20^\circ$$

$$= -(\cos^2 20^\circ - \sin^2 20^\circ) = -(\cos 40^\circ)$$

$$= -\cos(\frac{\pi}{2} - 50^\circ) = -\sin 50^\circ$$

۶. گزینه‌ی ۱ : در مسئله‌ی ۹ درس همین مقاله داشتیم:

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$$

$$\Rightarrow \sin^4 \frac{\pi}{12} + \cos^4 \frac{\pi}{12} = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 \frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^2 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

۷. گزینه‌ی ۳ : در مسئله‌ی ۱۰ درس همین مقاله داشتیم:

$$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$$

$$\Rightarrow \sin^6 \frac{\pi}{12} + \cos^6 \frac{\pi}{12} = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 \frac{\pi}{6} = 1 - \frac{3}{4}(\frac{1}{2})^2$$

$$= 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$$

۸. گزینه‌ی ۳ : $\sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}} = \sqrt{\frac{2\sin^2 x}{2\cos^2 x}} = \sqrt{\tan^2 x} = |\tan x|$

$$\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \tan x < 0 \Rightarrow |\tan x| = -\tan x$$

۹. گزینه‌ی ۳ : $\sin 15^\circ + \frac{\sqrt{3}}{3}\cos 15^\circ = \sin 15^\circ + \tan 30^\circ . \cos 15^\circ$

$$= \sin 15^\circ + \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} . \cos 15^\circ$$

$$= \frac{\sin 15^\circ \cos 30^\circ + \cos 15^\circ \sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\sin(30^\circ + 15^\circ)}{\cos 30^\circ} = \frac{\sin 45^\circ}{\cos 30^\circ}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

۱۰. گزینه‌ی ۳ : $\frac{8\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}.\cos x}{2(\sin x)\cos x} = \frac{8\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos x}{2(2(\sin\frac{x}{2})\cos\frac{x}{2})\cos x}$

$$= \frac{8\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos x}{8\sin\frac{x}{4}.\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2}.\cos x} = \frac{1}{\sin\frac{x}{4}}$$

۱۱. گزینه‌ی ۲ ؛ داریم: $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ ، پس:

$$\cos^2(x - \frac{\pi}{4}) - \cos^2(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1 + \cos(2x - \frac{\pi}{2})}{2} - \frac{1 + \cos(2x + \frac{\pi}{2})}{2}$$

$$= \frac{1 + \cos(\frac{\pi}{2} - 2x)}{2} - \frac{1 + \cos(\frac{\pi}{2} + 2x)}{2}$$

$$= \frac{1 + \sin 2x}{2} - \frac{1 - \sin 2x}{2} = \frac{1 + \sin 2x - 1 + \sin 2x}{2}$$

$$= \frac{2\sin 2x}{2} = \sin 2x$$

۱۲. گزینه‌ی ۲ :

$$\cos\frac{\pi}{5}.\cos\frac{3\pi}{5} = \cos\frac{\pi}{5}\cos(\pi - \frac{2\pi}{5}) = -\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}$$

$$-\cos\frac{\pi}{5}.\cos\frac{2\pi}{5} \times \frac{4\sin\frac{\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{-2(2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}).\cos\frac{2\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}}$$

$$= \frac{-2(\sin\frac{2\pi}{5}.\cos\frac{2\pi}{5})}{4\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{-\sin\frac{4\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{-\sin(\pi - \frac{\pi}{5})}{4\sin\frac{\pi}{5}}$$

$$= \frac{-\sin\frac{\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{-1}{4}$$

۱۳. گزینه‌ی ۲ : $\cot\alpha.\cot\beta = \frac{c}{a} = -2$ و $\cot\alpha + \cot\beta = -\frac{b}{a} = 2$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan a + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{1}{\cot\alpha} + \frac{1}{\cot\beta}}{1 - \frac{1}{\cot\alpha.\cot\beta}} = \frac{\frac{\cot\alpha + \cot\beta}{\cot\alpha.\cot\beta}}{1 - \frac{1}{\cot\alpha.\cot\beta}}$$

$$= \frac{\frac{2}{-2}}{1 - \frac{1}{-2}} = \frac{-1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{-1}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}$$

۱۴. گزینه‌ی ۳ :

$$\frac{2\sin\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2\sin\alpha(1 - \cos\alpha)}{2\sin\alpha(1 + \cos\alpha)} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$$

$$= \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \tan^2\frac{\alpha}{2}$$

۱۵. گزینه‌ی ۲ : $\cos^2 70^\circ - \cos^2 20^\circ = \cos^2(\frac{\pi}{2} - 20^\circ) - \cos^2 20^\circ$

$$= \sin^2 20^\circ - \cos^2 20^\circ = -(\cos^2 20^\circ - \sin^2 20^\circ) = -\cos 40^\circ$$

■

● نوشته‌ی تونی کریلی[1]
●ترجمه‌ی غلامرضا یاسی‌پور

۲

دستگاه‌های شمار

اشاره:
دستگاه شمار، روشی برای سر و کار داشتن با مفهوم «چندتا»ست. در دوره‌های متفاوت، فرهنگ‌های متفاوت، در این باره روش‌های گوناگونی پذیرفته‌اند که از شمارش اولیه‌ی «یک، دو، سه، خیلی» تا نمادنویسی بس پیچیده‌ی دهدهیِ مکانی، که امروزه به کارش می‌بریم، تنوع داشته‌اند.

اقوام «سومری»[2] و «بابلی»[3]، که حدود ۴۰۰۰ سال پیش در سوریه، اردن و عراق کنونی ساکن بودند، در کارهای عملی روزانه‌ی خود، از دستگاهی مکان‌ـارزشی استفاده می‌کردند. این دستگاه را به این علت مکان‌ـ ارزشی می‌نامیم که در آن می‌توان «عدد» را با استفاده از موقعیت یک نماد بیان کرد. آن‌ها ۶۰ را به‌عنوان واحد مبنا به کار می‌بردند؛ یعنی آن‌چه که امروزه دستگاه در مبنای ۶۰ می‌نامیم. عددی که هنوز آثاری از آن در زندگی ما موجود است: ۶۰ ثانیه در دقیقه، و ۶۰ دقیقه در ساعت. حتی زمانی که به اندازه‌گیری زوایا می‌پردازیم، هنوز زاویه‌ی کامل را، علی‌رغم کوشش‌های سیستم متریک که آن را ۴۰۰ گراد می‌نامد، (و بنابراین هر زاویه‌ی قائمه برابر ۱۰۰ گراد است) ۳۶۰ درجه در نظر می‌گیریم.

درحالی که نیاکان باستانی‌مان، در مرحله‌ی اول اعداد را برای انجام دادن کارهای عملی می‌خواستند. اسنادی در دست است که فرهنگ‌های اولیه‌ی مزبور، توسط خود ریاضیات نیز وسوسه می‌شدند، و با رخصت یافتن از کارهای عملی، به کندوکاو در آن‌ها می‌پرداختند. این کندوکاوها، به پیدایش آن‌چه می‌توان «جبر»ش نامید و نیز «خواص اشکال هندسی» انجامید.

دستگاه مصری، از قرن سیزدهم قبل از میلاد، از مبنای ۱۰ با دستگاهی از علائم «هیروگلیفی»[4] استفاده می‌کرد. مصری‌ها به‌ویژه دستگاهی را توسعه دادند که به کسرها می‌پرداخت. اما نمادنویسی دهدهی مکان‌ـ ارزشی

امروزه‌ی ما از بابلی‌ها به دستمان رسیده، و بعدها توسط هندوها پالوده شده است. سودمندی دستگاه مورد بحث، در این است که می‌تواند برای بیان اعداد بسیار کوچک و بسیار بزرگ به‌کار رود. و محاسبات‌مان با استفاده از ارقام هندی-عربی ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، می‌تواند با «سهولت نسبی» انجام گیرد. برای ملاحظه‌ی این مطلب، به «دستگاه رومی»[5] نگاهی می‌افکنیم. این دستگاه گرچه نیازهای آن‌ها را برآورده می‌کرد، اما تنها متخصصان دستگاه بودند که از عهده‌ی انجام محاسبه با آن بر می‌آمدند.

دستگاه رومی

نمادهای مبنایی به‌کار رفته در دستگاه رومی‌ها، «ده‌ها» (I, X, C و M) نیمه‌های آن‌ها (V, L و D) بودند. این نمادها برای ساختن بقیه‌ی اعداد با هم ترکیب می‌شوند. این‌گونه مطرح شده که کاربرد I، II، III و IIII از ظاهر انگشتانمان استخراج شده‌اند، V را از شکل دست حاصل می‌کنیم، و با واژگون کردن آن، و به‌هم وصل کردن آن دو به هم برای ساختن X، دو دست یا ده انگشت را به دست می‌آوریم. C از «centum» و M از «mille»، کلمات لاتینی، به‌ترتیب، صد و هزار، آمده است. رومی‌ها S را نیز برای «نیمه» به‌کار می‌بردند، و دستگاه کسرهایی بر مبنای ۱۲ داشتند.

دستگاه رومی از روش «پیش و بعد» در تهیه‌ی نمادهای مورد نیاز استفاده می‌کرد، اما به‌نظر می‌رسد که این کار به‌طور یک‌سان پذیرفته نشده بود. رومی‌های باستان، تنها مدت‌ها بعد از آن‌که نوشتن IIII با IV مطرح شد، ترجیح دادند که چنین بنویسند. به نظر می‌رسد که ترکیب IX نیز به‌کار رفته باشد، اما یک رومی، در صورتی که «SIX» نوشته می‌شد از آن معنی $8\frac{1}{2}$ را درمی‌یافت! در این‌جا اعداد مبنایی دستگاه رومی را همراه با اضافاتی از دوران وسطی آورده‌ایم:

دستگاه عددی رومی‌ها و ملحقات قرون وسطی امپراطوری

نیمه S	
یک I	
پنج V	پنج هزار $\overline{V}$
ده X	ده هزار $\overline{X}$
پنجاه L	پنجاه هزار $\overline{L}$
صد C	صد هزار $\overline{C}$
پانصد D	پانصد هزار $\overline{D}$
هزار M	یک میلیون $\overline{M}$

به‌کار بردن اعداد رومی آسان نیست. به‌عنوان نمونه، مفهوم MMMCDXLIIII تنها زمانی روشن می‌شود که به‌طور ذهنی، پرانتزهای لازم را درباره‌ی آن به‌کار بریم، در این صورت (MMM)(CD)(XL)(IIII) به‌صورت ۳۰۰۰+۴۰۰+۴۰+۴ خوانده می‌شود. اکنون سعی در جمع زیر به‌عمل می‌آوریم MMMCDXLIIII + CCCXCIIII. رومی ماهر در این هنر، از راه‌های میان‌بر و کلک استفاده می‌کند، اما برای ما یافتن پاسخ صحیح، بی‌آن‌که ابتدا آن را در دستگاه دهدهی محاسبه، و سپس نتیجه را به نماد رومی تبدیل کنیم، مشکل است:

جمع

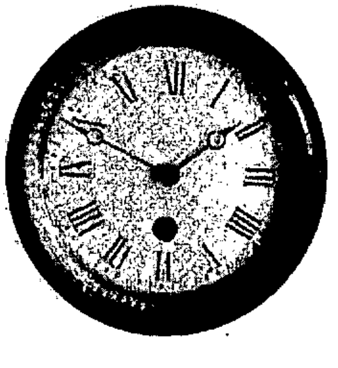
MMMCDXLIIII	→	۳۴۴۴
CCCXCIIII	→	+ ۳۹۴
MMMDCCCXXXVIII	→	=۳۸۳۸

ضرب دو عدد در دستگاه مبنایی، بسی مشکل‌تر است، و امکان دارد، حتی برای رومی‌ها نیز غیرممکن باشد! برای ضرب ۳۹۴×۳۴۴۴ به ملحقات قرون وسطی نیاز داریم.

ضرب

MMMCDXLIIII	→	۳۴۴۴
CCCXCIIII	→	× ۳۹۴
$\overline{MCCCLV}$MCMXXXVI	→	=۱,۳۵۶,۹۳۶

رومی‌ها، نماد خاصی برای صفر نداشتند. اگر از یک شهروند گیاه‌خوار رومی می‌پرسیدند امروز چند بطری آب مصرف کرده است، ممکن بود بنویسد III. اما در صورتی که می‌پرسیدند چند جوجه خورده است، نمی‌توانست بنویسد: ۰. آثاری از دستگاه رومی در صفحات مقدمه‌ی بعضی کتاب‌ها (گرچه نه در این یکی) موجود است، نیز بر سنگ‌های پایه‌ی ساختمان‌ها. پاره‌ای ساختارها، از قبیل MCM برای ۱۹۰۰، هرگز توسط رومی‌ها به‌کار نرفته‌اند، اما به دلیل پیروی از مد، در دوران جدید معرفی شده‌اند. رومی‌ها این عدد را به صورت



ساعت منسوب به لویی چهاردهم (XIIII)

MDCCCC می‌نوشتند. **لویی چهاردهم**، پادشاه فرانسه که امروزه به‌صورت لویی XIV شناخته می‌شود، ترجیح می‌داد که به‌صورت لویی XIIII شناخته شود. او فرمان داد ساعتش، ساعت ۴ را به‌صورت IIII نمایش دهد.

اعداد تمام دهدهی

ما به طور طبیعی «عددها» را با اعداد دهدهی می‌شناسیم. دستگاه دهدهی، با استفاده از شماره‌های ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹، بر مبنای ده بنا شده است. این دستگاه عملاً مبتنی بر «ده‌ها» و «یک‌ها»ست، اما یک‌ها می‌توانند جذب «مبنای ۱۰» شوند. زیرا، زمانی که عدد ۳۹۴ را می‌نویسیم می‌توانیم مفهوم دهدهی آن را با گفتن این موضوع توضیح دهیم که این عدد، از ۳ صد، ۹ ده و ۴ واحد تشکیل شده است و می‌توانیم بنویسیم:

$$۳۹۴=۳\times۱۰۰+۹\times۱۰+۴\times۱$$

این مطلب را می‌توان با استفاده از «توان‌ها»[6] (نیز موسوم به «نماها»[7] یا «شاخص‌ها»[8]ی ۱۰ نیز نوشت،

$$۳۹۴=۳\times۱۰^{۲}+۹\times۱۰^{۱}+۴\times۱۰^{۰}$$

که در آن $۱۰=۱۰^{۱}$ و $۱۰\times۱۰=۱۰^{۲}$ و برحسب قرار داد: $۱=۱۰^{۰}$. به این ترتیب در این توصیف مبنای «دهدهی»[9] را برای دستگاه عددی روزمره‌مان، واضح‌تر ملاحظه می‌کنیم؛ دستگاهی که جمع و ضرب را به مقدار زیادی شفاف‌تر می‌کند.

ممیز یا نقطه‌ی دهدهی

تا این جا به نمایش دادن اعدادِ تمام توجه کرده‌ایم. ولی آیا دستگاه دهدهی می‌تواند از عهده‌ی اجزای یک عدد، مثلاً $\frac{۵۷۲}{۱۰۰۰}$ نیز برآید؟ این عبارت، بدین معنی است که:

$$\frac{۵۷۲}{۱۰۰۰}=\frac{۵}{۱۰}+\frac{۷}{۱۰۰}+\frac{۲}{۱۰۰۰}$$

در این مورد می‌توان «معکوس‌ها»[10]ی ۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰ را به‌عنوان توان‌های «منفی»[11] ۱۰ در نظر گرفت. بنابراین:

$$\frac{۵۷۲}{۱۰۰۰}=۵\times۱۰^{-۱}+۷\times۱۰^{-۲}+۲\times۱۰^{-۳}$$

و این عبارت را می‌توان به‌صورت ۵۷۲. نوشت که در آن، نقطه‌ی دهدهی آغاز توان‌های منفی ۱۰ را مشخص می‌کند. در صورتی که این عبارت را به عبارت دهدهی ۳۹۴ بیفزاییم، بسط دهدهی عدد $۳۹۴\frac{۵۷۲}{۱۰۰۰}$ را به‌دست می‌آوریم که به‌طور ساده ۳۹۴.۵۷۲ است.

نمادنویسی دهدهی، در مورد اعداد بزرگ، می‌تواند بسیار طولانی شود، بنابراین، در این حالت به «نمادنویسی علمی»[12] برمی‌گردیم. به‌عنوان نمونه، ۱٬۳۵۶٬۹۳۶٬۸۹۲ را می‌توان به‌صورت ۱.۳۵۶۹۳۶۸۹۲×۱۰^{۹} نوشت که اغلب در ماشین‌حساب‌های رایانه‌ای به‌صورت «۱.۳۵۶۹۳۶۸۹۲ × ۱۰E۹» درمی‌آید. در این جا، توان ۹ یک واحد کم‌تر از ارقام موجود در عدد است و حرف E به جای «نما»[13] قرار گرفته است. گاهی امکان دارد مایل به استفاده از اعدادی حتی بزرگ‌تر باشیم. به‌عنوان نمونه، در مورد تعداد اتم‌های هیدروژن در جهان شناخته‌شده صحبت می‌کنیم. این تعداد در حدود ۱.۷×۱۰^{۷۷} برآورد شده است. عدد ۱.۷×۱۰^{-۷۷} با توان منفی، عددی بسیار کوچک است، و سر و کار داشتن با آن با استفاده از نمادنویسی علمی آسان است. اندیشیدن در مورد این اعداد، با نمادهای رومی ناممکن است.

صفرها و یک‌ها

درحالی که مبنای ۱۰ جریانی متعارف در زندگی هر روزه است، بعضی کاربردها به مبناهای دیگر نیاز دارند. «دستگاه دودویی»[14] که از مبنای ۲ استفاده می‌کند. اساس کار رایانه‌های مدرن است. زیبایی دستگاه دودویی در این است که در آن هر عدد را می‌توان تنها با استفاده از دو نماد ۰ و ۱ بیان کرد. گرچه تعادل در این اقتصاد از این جا به‌وجود می‌آید که عبارات عددی در این دستگاه، می‌توانند بسیار طولانی باشند.

اما چگونه می‌توان ۳۹۴ را در نمادنویسی دودویی بیان کرد؟ در این مورد با توان‌های ۲ سر و کار داریم، و پس از مقداری کار، می‌توانیم عبارت کامل را به‌صورت زیر به‌دست دهیم:

$$۳۹۴=۱\times۲۵۶+۱\times۱۲۸+۰\times۶۴+۰\times۳۲+۰\times۱۶+۱\times۸+۰\times۴+۱\times۲+۰\times۱$$

به این ترتیب، ۳۹۴، با در نظر گرفتن صفرها و یک‌ها، عبارت است از ۱۱۰۰۰۱۰۱۰.

از آن جا که عبارات دودویی می‌توانند بسیار طولانی باشند، اغلب از، سایر مبناها در محاسبه استفاده می‌شود. این مبناها عبارت‌اند از «دستگاه هشت‌گانی»[15] (مبنای ۸) و «دستگاه

شانزده‌گانی»[16] (مبنای ۱۶). در دستگاه هشت‌گانی تنها به نمادهای ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، احتیاج داریم، درحالی که شانزده‌گانی از ۱۶ نماد استفاده می‌کند. در این مبنا، مرسوم آن است که از

۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹, A, B, C, D, E, F

استفاده به عمل آید. در این مورد چون ۱۰ متناظر با حرف A است، عدد ۳۹۴ در دستگاه شانزده‌گانی به صورت ۱۸A نمایش داده می‌شود. به همین ترتیب، برای ذهن آسان‌تر است که ABC را به‌جای ۲۷۴۸ در دستگاه دهدهی به‌کار برد!

دهدهی	توان‌های ۲
۱	$۲^{۰}$
۲	$۲^{۱}$
۴	$۲^{۲}$
۸	$۲^{۳}$
۱۶	$۲^{۴}$
۳۲	$۲^{۵}$
۶۴	$۲^{۶}$
۱۲۸	$۲^{۷}$
۲۵۶	$۲^{۸}$
۵۱۲	$۲^{۹}$
۱۰۲۴	$۲^{۱۰}$

پی‌نوشت..................

1. Tony Crilly
2. Sumerians
3. Babylonians
4. hieroglyphic signs
5. Roman System
6. powers
7. exponentials
8. indices
9. decimal
10. reciprocals
11. negative
12. scientific notation
13. exponential
14. binary system
15. octal system
16. hexadecimal system

بیش‌تر بدانید

۳۰۰۰۰ قبل از میلاد: مردم عهد حجر در اروپا، برای ثبت اعداد روی استخوان علامت می‌زدند.

۲۰۰۰ قبل از میلاد: بابلی‌ها برای نشان دادن اعداد از نمادها استفاده می‌کردند.

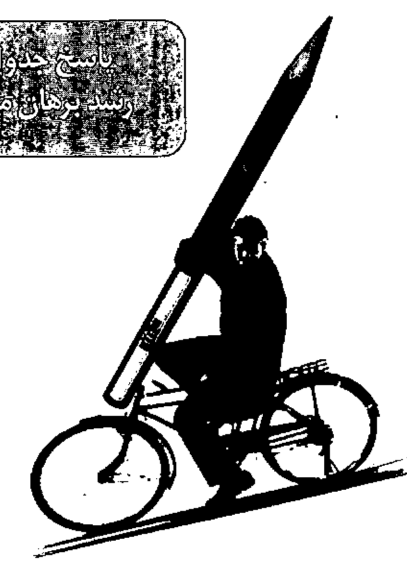
۶۰۰ میلادی: صورت ابتدایی عددنویسی دهدهی مدرن، در هند به کار رفته است.

۱۲۰۰ میلادی: دستگاه هندی ـ عربی عددنویسی ۱، ...، ۹ و صفر، گسترش یافت.

۱۶۰۰ میلادی: نمادهای دستگاه دهدهی، صورت‌های مدرن شناخته شده‌ای را اختیار کردند.

پاسخ جدول ریاضی رشد برهان متوسطه ۶۲

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۱	ح	س	ا	ب	■	م	ر	ب	ع
۲	ر	ا	س	■	ف	■	ا	ع	م
۳	ک	ل	■	ت	ن	د	■	د	و
۴	ت	■	ک	ب	ی	س	ه	■	د
۵	■	ا	س	د	■	ت	ک	ل	■
۶	ب	■	ر	ی	ش	گ	ی	■	د
۷	ی	ک	■	ل	ص	ا	■	ب	ر
۸	س	ا	ل	■	ت	■	د	ر	ج
۹	ت	و	ا	ن	■	ب	ن	ج	ه



● هوشنگ شرقی

مسئله چنین است: دو عدد طبیعی را به ترتیب و به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که این دو عدد نسبت به هم اول باشند، چه‌قدر است؟

اگر قبل از مطالعه‌ی مقاله‌ی حاضر، کمی به این مسئله فکر کرده باشید، حتماً متوجه پیچیدگی بسیار آن شده‌اید. پاسخ به این مسئله، به طرح و پاسخ به ده‌ها مسئله‌ی دیگر منجر می‌شود. در این مقاله می‌خواهیم همه‌ی این پرسش‌ها را مطرح کنیم و به آن‌ها نیز پاسخ دهیم.

مسئله‌ای چالش برانگیز از احتمال!

قدم اول: آشنایی با مسئله

برای آن‌که با موضوع آشنا شویم، ابتدا مسئله را در حالت‌های ساده‌تر بررسی و حل می‌کنیم.

مسئله‌ی ۱. دو عدد طبیعی یک رقمی را به ترتیب و به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال اول بودن این دو عدد نسبت به هم را به دست آورید.

حل: بدیهی است، چون ۹ عدد یک رقمی داریم، فضای نمونه‌ی این پیشامد شامل ۸۱ زوج مرتب از عددهای طبیعی یک رقمی است. یعنی: $n(s)=۹\times۹=۸۱$ و پیشامد مطلوب، یعنی جفت عددهایی که نسبت به هم اول‌اند نیز به سادگی قابل شمارش است. عدد ۱ نسبت به همه‌ی عددها اول است. عدد ۲ نسبت به ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ اول است و عدد ۳ نسبت به ۱، ۲، ۴، ۵، ۷ و ۸ اول است. به همین ترتیب، می‌توانیم تمام این‌گونه زوج‌ها را بشماریم و در نتیجه:

$$n(A)=۵۶ \quad \text{و} \quad P(A)=\frac{۵۶}{۸۱}$$

مسئله‌ی ۲. دو عدد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۲۰ را به ترتیب و به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که این دو عدد نسبت به هم اول باشند، چه‌قدر است؟

حل: شبیه مسئله‌ی ۱، $n(S)=۲۰^۲=۴۰۰$. ولی برای محاسبه‌ی $n(A)$ چه باید کرد؟ آیا می‌توان مانند همان مسئله

عمل کرد؟ شاید آری، ولی مسلماً کار خیلی طولانی‌تری در پیش داریم. آیا با اتکا به آنالیز ترکیبی، روش کوتاه‌تری وجود ندارد؟

پاسخ مثبت است. در واقع بهتر است از متمم این مجموعه استفاده کنیم؛ یعنی زوج‌های مرتب نامطلوب را بیابیم و از تعداد کل آن‌ها (یعنی ۴۰۰) کم کنیم.

زوج‌های نامطلوب آن‌هایی هستند که نسبت به هم اول نیستند. یعنی هر دو بر یک عدد اول بخش‌پذیرند. عددهای ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷ و ۱۹ عددهای اول کمتر یا مساوی ۲۰ هستند. بنابراین، دو عددی نسبت به هم اول نیستند که یا هر دو بر ۲، یا هر دو بر ۳ و... و یا هر دو بر ۱۹ بخش‌پذیر باشند. اگر مجموعه زوج‌های مرتبی را که هر دو بر ۲ بخش‌پذیرند، A_1 و مجموع زوج‌های مرتبی را که هر دو بر ۳ بخش‌پذیرند، A_2 و... و مجموعه زوج‌های مرتبی را که هر دو بر ۱۹ بخش‌پذیرند، A_8 بنامیم، آن‌چه می‌خواهیم، $n(A_1\bigcup A_2\bigcup...\bigcup A_8)$ است.

برای محاسبه‌ی این مقدار، به دو موضوع توجه می‌کنیم: ابتدا «اصل شمول ـ عدم شمول» که برای آگاهی از آن می‌توانید به انواع کتاب‌های ریاضیات گسسته رجوع کنید، دیگر آن‌که تعداد عددهای طبیعی کوچک‌تر یا مساوی عدد طبیعی a که بر k بخش‌پذیرند، برابر است با $\left[\frac{a}{k}\right]$ (جزء صحیح عدد $\frac{a}{k}$). بنابراین تعداد زوج‌های مرتب از عددهای صحیح کوچک‌تر یا مساوی a که هر دو بر k بخش‌پذیر باشند، مساوی $\left[\frac{a}{k}\right]^2$ است. با توجه به این دو موضوع خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&n(A_1\cup A_2\cup...\cup A_k)=n(A_1)+n(A_2)+...+n(A_8)\\
&-n(A_1\cap A_2)-n(A_1\cap A_3)-...-n(A_7\cap A_8)\\
&+n(A_1\cap A_2\cap A_3)+...+n(A_6\cap A_7\cap A_8)-...\\
&-n(A_1\cap A_2\cap A_3\cap...A_8)=\left[\frac{20}{2}\right]^2+\left[\frac{20}{3}\right]^2+...+\left[\frac{20}{19}\right]^2\\
&-\left[\frac{20}{2\times 3}\right]^2-\left[\frac{20}{2\times 5}\right]^2-\left[\frac{20}{2\times 7}\right]^2-...-\left[\frac{20}{17\times 19}\right]^2\\
&+\left[\frac{20}{2\times 3\times 5}\right]^2+...
\end{aligned}$$

روشن است، بسیاری از این جملات مساوی صفر هستند و در نتیجه محاسبه‌ی این مجموعه بسیار آسان می‌شود:

$$n(A_1\cup A_2\cup...\cup A_8)=100+36+16+4+1+1+1+1$$
$$-9-4-1-1=145$$

و بنابراین تعداد زوج‌های مرتبی که نسبت به هم اول هستند، می‌شود:

$$400-145=255$$

و در نتیجه:

$$P(A)=\frac{255}{400}=\frac{51}{80}$$

آیا می‌توانید این کار را ادامه دهید؟ فکر می‌کنید این احتمال به چه عددی نزدیک می‌شود؟ به عنوان تمرین، این کار را با عددهای بزرگ‌تر انجام دهید و نتیجه‌ها را با هم مقایسه کنید.

قدم دوم: فرم‌بندی مسئله در حالت کلی

مسئله‌ی کلی را به این صورت فرم‌بندی و مدل‌سازی می‌کنیم:

دو عدد طبیعی a و b را به ترتیب و به تصادف، از میان اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی N انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که این دو عدد نسبت به هم اول باشند، چه‌قدر است و آیا وقتی N به بی‌نهایت میل می‌کند ($N\to+\infty$)، این احتمال به حد معین میل می‌کند یا خیر؟

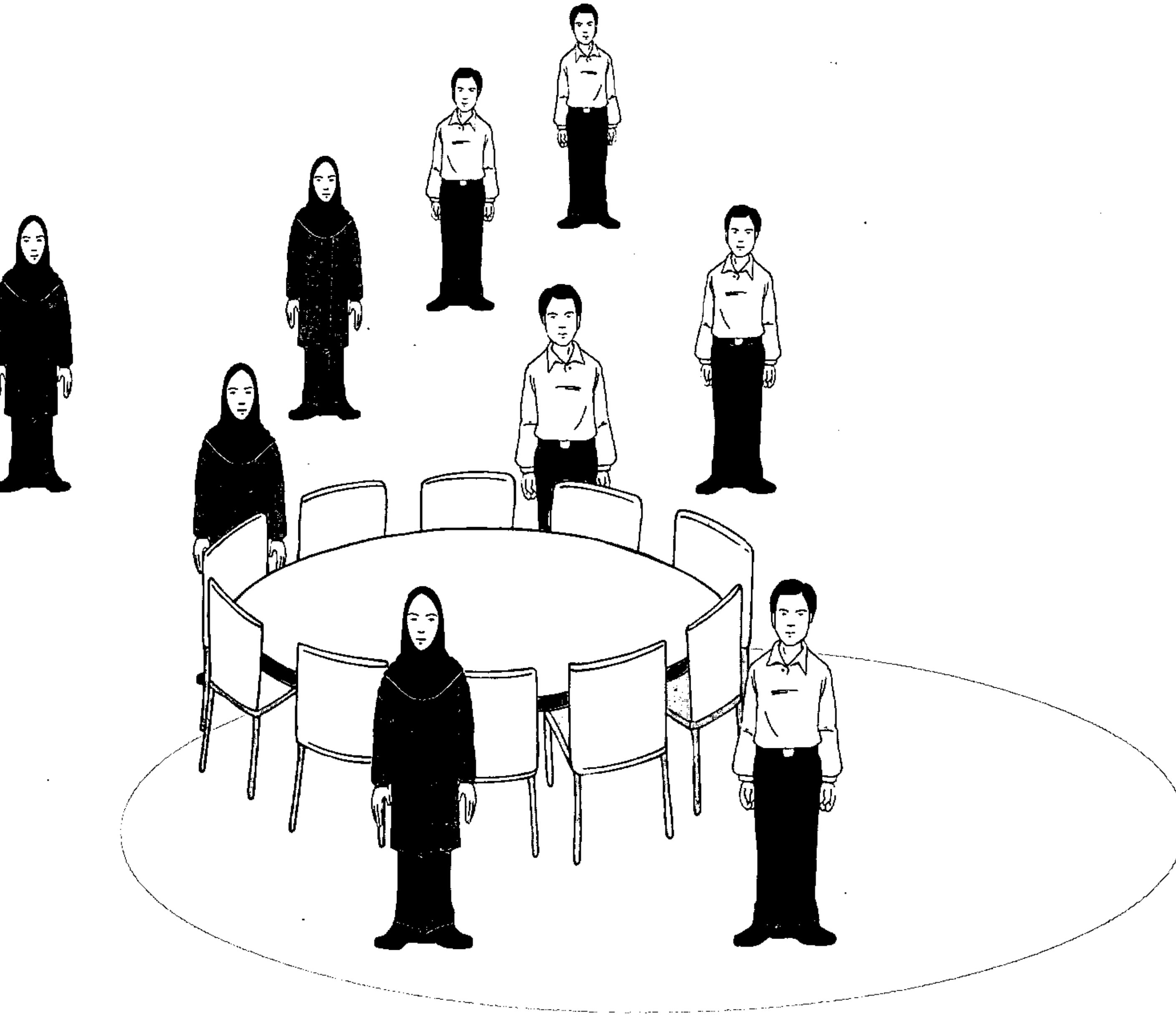
روشی که در این‌جا به کار می‌بریم، شبیه روشی است که در حالت‌های خاص به آن عمل کرده‌ایم. اگر فرض کنیم عددهای اول کوچک‌تر یا مساوی N، P_1 و P_2 و ... و P_n هستند، تعداد زوج‌های مرتب که هر دو بر P_1 یا P_2 یا ... یا P_n بخش‌پذیرند، به کمک اصل شمول ـ عدم شمول برابر است با:

$$\begin{aligned}
&n(A_1\cup A_2\cup...A_n)=n(A_1)+n(A_2)+...+n(A_n)\\
&-n(A_1\cap A_2)-n(A_1\cap A_3)-...-n(A_{n-1}\cap A_n)\\
&+n(A_1\cap A_2\cap A_3)+...+(-1)^{n-1}n(A_1\cap A_2\cap...\cap A_n)\\
&=\left[\frac{N}{P_1}\right]^2+\left[\frac{N}{P_2}\right]^2+\left[\frac{N}{P_3}\right]^2+...+\left[\frac{N}{P_n}\right]^2-\left[\frac{N}{P_1P_2}\right]^2\\
&-\left[\frac{N}{P_1P_3}\right]^2...-\left[\frac{N}{P_{n-1}P_n}\right]^2+...+(-1)^{n-1}\left[\frac{N}{P_1P_2...P_n}\right]^2
\end{aligned}$$

و از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}
&n(A)=N^2-\left[\frac{N}{P_1}\right]^2-\left[\frac{N}{P_2}\right]^2-...-\left[\frac{N}{P_n}\right]^2+\left[\frac{N}{P_1P_2}\right]^2\\
&+\left[\frac{N}{P_1P_3}\right]^2+...+\left[\frac{N}{P_{n-1}P_n}\right]^2-...+(-1)^n\left[\frac{N}{P_1P_2...P_n}\right]^2
\end{aligned}$$

حال باید حد $\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{n(A)}{N^2}$ را وقتی $N\to\infty$ بررسی کنیم. مشکل اصلی برای بررسی این حد، وجود عبارت‌های



شامل جزء صحیح است. اما این مشکل با توجه به این که $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{[x]}{x}=1$ ، قابل حل است، زیرا: $[x]=x-\{x\}$ (که $\{x\}$ جزء اعشاری x است) و در نتیجه:

$$\frac{[x]}{x}=\frac{x-\{x\}}{x}=1-\frac{\{x\}}{x}$$

بدیهی است: $0\le\{x\}<1$ و در نتیجه: $0\le\frac{\{x\}}{x}<\frac{1}{x}$ و

چون: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ ، با توجه به قضیه‌ی فشردگی داریم:

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\{x\}}{x}=0$ و لذا:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{[x]}{x}=1$$

بنابراین [x] و x وقتی x به $+\infty$ میل می‌کند، هم‌ارزند. پس:

$$\lim_{N\to\infty}P(A)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^2}(N^2-\frac{N^2}{P_1^2}-\frac{N^2}{P_2^2}-\ldots-\frac{N^2}{P_n^2}+\frac{N^2}{P_1^2P_2^2}+\ldots+(-1)^n\frac{N^2}{P_1^2P_2^2\ldots P_n^2})=$$

$$\lim_{N\to\infty}(1-\frac{1}{P_1^2}-\frac{1}{P_2^2}-\ldots-\frac{1}{P_n^2}+\frac{1}{P_1^2P_2^2}+\frac{1}{P_1^2P_3^2}+\ldots-\frac{1}{P_1^2P_2^2P_3^2}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{P_1^2P_2^2\ldots P_n^2})$$

حال با توجه به «قضیه‌ی وی‌یت» که به صورت زیر است:

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)=x^n-(a_1+a_2+\ldots+a_n)x^{n-1}+(a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_{n-1}a_n)x^{n-2}-\ldots+(-1)^n a_1a_2\ldots a_n$$

می‌توان با فرض $x=1$ و $a_i=\frac{1}{P_i^2}$ ، عبارت اخیر را به حاصل ضرب تجزیه کرد:

$$P(A)=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{P_1^2})(1-\frac{1}{P_2^2})\ldots(1-\frac{1}{P_n^2})$$

$$=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\ldots(1-\frac{1}{P_n^2}) \qquad (1)$$

و اکنون باید این حد را به‌دست آوریم. بدیهی است، تمام پرانتزها کوچک‌تر از ۱ هستند و لذا حاصل ضرب آن‌ها نیز

کوچک‌تر از ۱ است و نشان می‌دهیم که حد آن، مقداری مثبت متعلق به بازه‌ی (۰،۱) است. با مراجعه به حساب دیفرانسیل و انتگرال و بحث سری‌های هندسی، یادآور می‌شویم که سری زیر:

$$\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1} = a+aq+aq^2+\dots,\quad |q|<1$$

موسوم به سری هندسی (تصاعد هندسی با قدر نسبت بین ۱ و ۱-)، هم‌گرا به $\frac{a}{1-q}$ است. یعنی وقتی تعداد جملات به بی‌نهایت می‌گراید، این مجموع به $\frac{a}{1-q}$ به دل‌خواه نزدیک می‌شود. بنابراین، با فرض $1>x>0$ می‌توان نوشت:

$$1+x+x^2+\dots=\frac{1}{1-x}$$

و با توجه به این دستور، می‌توان هر یک از پرانتزهای عبارت (۱) را معادل‌سازی کرد:

$$1-\frac{1}{2^2}=\frac{1}{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\dots}$$

$$1-\frac{1}{3^2}=\frac{1}{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^6}+\dots}$$

$$1-\frac{1}{5^2}=\frac{1}{1+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{5^6}+\dots}$$

و از آن‌جا خواهیم داشت:

$$P(A)=\frac{1}{(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\dots)(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^6}+\dots)(1+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^4}+\dots)\dots}$$

و به کمک قانون توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع، واضح است که حاصل ضرب پرانتزهای مخرج این کسر، شامل معکوس مربع‌های تمام عددهای طبیعی است. یعنی داریم:

$$P(A)=\frac{1}{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\dots}$$

بنابراین مقدار احتمال فوق نسبت مستقیمی با حد سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{K^2}$ دارد. یعنی اگر این سری هم‌گرا به L باشد، احتمال فوق برابر با $\frac{1}{L}$ است. به سادگی می‌توان نشان داد که این سری هم‌گراست. از حساب دیفرانسیل می‌دانیم که سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{K^P}$ به‌ازای $P\le 1$ واگرا و به ازای $P>1$ هم‌گرا است. علاوه بر آن، به کمک قضیه‌ی استقرای ریاضی می‌توان ثابت کرد:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}\le 2-\frac{1}{n}$$

و چون: $\lim_{n\to\infty} 2-\frac{1}{n}=2$، پس مجموع سمت چپ همواره از ۲ کوچک‌تر است و در نتیجه سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{K^2}$ هم‌گراست. برای محاسبه‌ی احتمال فوق، باید مقدار دقیق این سری را به‌دست آوریم.

قدم سوم (قدم نهایی): محاسبه‌ی سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{K^2}$ و تعیین مقدار احتمال

برای محاسبه‌ی سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{K^2}$ یادآوری و اثبات چند لم اساسی لازم است:

لم ۱. یادآوری بسط دو جمله‌ای نیوتون. برای هر دو جمله‌ای a+b و عدد طبیعی n، می‌توان نوشت:

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\dots+\binom{n}{n}b^n$$

در این دستور، $\binom{n}{r}$ انتخاب r شیء از n شیء است که گاهی با نماد C (n,r) نمایش داده می‌شود. برای اثبات این دستور، روش‌های گوناگونی وجود دارند که به عنوان تمرین می‌توانید آن را به کمک قضیه‌ی استقرای ریاضی اثبات کنید. به این منظور و برای گذر استقرایی، باید از دستورهای $\binom{k}{0}=\binom{k+1}{0}=1$ و رابطه‌ی مهم $\binom{k+1}{r}=\binom{k}{r}+\binom{k}{r-1}$ (موسوم به اتحاد پاسکال) استفاده کنید.

لم ۲. قضیه‌ی دموآور:

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

در این دستور، θ زاویه‌ی دل‌خواه و i عدد موهومی با رابطه‌ی $i^2=-1$ است. اگر با مجموعه عددهای موهومی و اعداد مختلط آشنایی داشته باشید، درک این موضوع برایتان آسان است. ولی اگر با این موضوع آشنایی نداشته باشید، فهمیدن این‌که چگونه

ممکن است $i^2=-1$ شود، قدری بحث‌برانگیز است. ولی در اثبات این قضیه به کمک قضیه‌ی استقرای ریاضی، چندان مشکلی نخواهید داشت و زیاد خود را درگیر آن نکنید!

$$n=1:\ (\cos\theta+i\sin\theta)^1=\cos\theta+i\sin\theta$$

$$n=k:\ (\cos\theta+i\sin\theta)^k=\cos k\theta+i\sin k\theta$$

$$n=k+1:\ (\cos\theta+i\sin\theta)^{k+1}=\cos(k+1)\theta+i\sin(k+1)\theta$$

برای اثبات حکم استقرا از روی فرض، به سادگی می‌نویسیم:

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^{k+1}=(\cos\theta+i\sin\theta)^k(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$=(\cos k\theta+i\sin k\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$=\left[\cos k\theta.\cos\theta+i^2\sin k\theta.\sin\theta\right]+i[\sin k\theta\cos\theta+\sin\theta\cos k\theta]$$

$$=[\cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta.\sin\theta]+i[\sin k\theta\cos\theta+\sin\theta.\cos k\theta]$$

$$=\cos(k+1)\theta+i\sin(k+1)\theta$$

(از دستورهای مثلثاتی $\sin(\alpha+\beta)$ و $\cos(\alpha+\beta)$ و تساوی $i^2=-1$ استفاده کردیم.)

لم ۳. نشان می‌دهیم برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$\sin(n\theta)=\binom{n}{1}\sin\theta\cos^{n-1}\theta-\binom{n}{3}\sin^3\theta\cos^{n-3}\theta$$

$$+\binom{n}{5}\sin^5\theta\cos^{n-5}\theta-\ldots$$

برای اثبات از لم‌های ۱ و ۲ کمک می‌گیریم. سمت چپ تساوی لم ۲ را به کمک بسط دو جمله‌ای نیوتون بسط می‌دهیم (به تساوی $i^2=-1$ نیز توجه می‌کنیم). نتیجه می‌شود:

$$\binom{n}{0}\cos^n\theta+\binom{n}{1}\cos^{n-1}\theta\sin\theta.i+\binom{n}{2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta.i^2$$

$$+\binom{n}{3}\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta.i^3+\binom{n}{4}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta.i^4+\ldots$$

$$=\left[\binom{n}{0}\cos^n\theta-\binom{n}{2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta+\binom{n}{4}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta-\ldots\right]$$

$$+i\left[\binom{n}{1}\cos^{n-1}\theta\sin\theta-\binom{n}{3}\cos^{n-3}\theta.\sin^3\theta\right.$$

$$\left.+\binom{n}{5}\cos^{n-5}\theta\sin^5\theta-\ldots\right]$$

و از مقایسه‌ی این عبارت با عبارت سمت راست لم ۲، نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases}\sin n\theta=\binom{n}{1}\cos^{n-1}\theta.\sin\theta-\binom{n}{3}\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta\\ \qquad+\binom{n}{5}\cos^{n-5}\theta\sin^5\theta-\ldots\\ \cos n\theta=\binom{n}{0}\cos^n\theta-\binom{n}{2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta\\ \qquad+\binom{n}{4}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta-\ldots\end{cases}$$

تمرین: به کمک دستورهای فوق ثابت کنید:

الف) $\sin 5x=16\sin^5x-20\sin^3x+5\sin x$

ب) $\cos 5x=16\cos^5x-20\cos^3x+5\cos x$

ج) $\cos 7x=64\cos^7x-112\cos^5x+56\cos^3x-7\cos x$

لم ۴. ثابت می‌کنیم برای هر عدد طبیعی n:

$$\cot g^2\frac{\pi}{2n+1}+\cot g^2\frac{2\pi}{2n+1}+\cot g^2\frac{3\pi}{2n+1}+\ldots$$

$$+\cot g^2\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{n(2n-1)}{3}$$

اثبات: ابتدا معادله‌ای می‌نویسیم که ریشه‌های آن $\cot g^2\frac{\pi}{2n+1}$، $\cot g^2\frac{2\pi}{2n+1}$ و ... و $\cot g^2\frac{n\pi}{2n+1}$ باشند. به این منظور از دستور لم ۳ کمک می‌گیریم:

$$\sin n\theta=\binom{n}{1}\sin\theta\cos^{n-1}\theta-\binom{n}{3}\sin^3\theta\cos^{n-3}\theta+\ldots$$

$$=\sin^n\theta\left[\binom{n}{1}\cot g^{n-1}\theta-\binom{n}{3}\cot g^{n-3}\theta+\binom{n}{5}\cot g^{n-5}\theta-\ldots\right]$$

حال با جای‌گزینی $2n+1$ به جای n، و دادن $\theta=\frac{\pi}{2n+1}$ بدیهی است که $\sin(2n+1)\theta=0$. و به همین ترتیب، اگر $\theta=\frac{2\pi}{2n+1}$ و یا ... و یا $\theta=\frac{n\pi}{2n+1}$ باشد، باز هم عبارت سمت چپ تساوی بالا مساوی صفر می‌شود و $\sin\theta\neq 0$. در نتیجه باید عبارت درون کروشه‌ی بالا صفر باشد. پس معادله‌ی

$$\binom{2n+1}{1}\cot g^{2n}\theta-\binom{2n+1}{3}\cot g^{2n-2}\theta$$

$$+\binom{2n+1}{5}\cot g^{2n-4}\theta-\ldots=0$$

دارای ریشه‌های $\theta_1=\frac{\pi}{2n+1}$، $\theta_2=\frac{2\pi}{2n+1}$ و ... و $\theta_n=\frac{n\pi}{2n+1}$ و در نتیجه معادله‌ی:

$$\binom{2n+1}{1}x^{n}-\binom{2n+1}{3}x^{n-1}+\binom{2n+1}{5}x^{n-2}-\ldots=0$$

دارای ریشه‌های $\cot g^2\frac{\pi}{2n+1}$ ، $\cot g^2\frac{2\pi}{2n+1}$ ، ... و $\cot g^2\frac{n\pi}{2n+1}$ است.

خال به کمک قضیه‌ی وی‌یت، مجموع ریشه‌های این معادله برابر است با:

$$\cot g^2\frac{\pi}{2n+1}+\cot g^2\frac{2\pi}{2n+1}+\ldots+\cot g^2\frac{n\pi}{2n+1}$$

$$=-\frac{b}{a}=\frac{\binom{2n+1}{3}}{\binom{2n+1}{1}}=\frac{n(2n-1)}{3}$$

نتیجه: با توجه به این که داریم: $1+\cot g^2\theta=\frac{1}{\sin^2\theta}$ ، نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}+\frac{1}{\sin^2\frac{2\pi}{2n+1}}+\ldots+\frac{1}{\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}}$$

$$=\frac{n(2n-1)}{3}+n=\frac{2}{3}n(n+1)$$

لم ۵. به ازای هر زاویه‌ی حاده‌ی α ، داریم:

$$\sin\alpha<\alpha<\operatorname{tg}\alpha$$

اثبات این لم را می‌توانید در بخش حد از کتاب حسابان سال سوم رشته‌ی ریاضی ـ فیزیک و یا هر کتاب جامع حساب دیفرانسیل و انتگرال ملاحظه کنید.

نتیجه: به ازای هر زاویه‌ی حاده‌ی α داریم:

$$\cot g^2\alpha<\frac{1}{\alpha^2}<\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

اکنون با توجه به این نتیجه و با جای گزینی مقادیر $\frac{\pi}{2n+1}$ ، $\frac{2\pi}{2n+1}$ و... و $\frac{n\pi}{2n+1}$ در این نابرابری‌ها و جمع کردن طرفین نابرابری‌ها خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l}\cot g^2\frac{\pi}{2n+1}<\frac{(2n+1)^2}{\pi^2}<\frac{1}{\sin^2(\frac{\pi}{2n+1})}\\ \cot g^2\frac{2\pi}{2n+1}<\frac{(2n+1)^2}{4\pi^2}<\frac{1}{\sin^2(\frac{2\pi}{2n+1})}\\ \vdots\\ \cot g^2\frac{n\pi}{2n+1}<\frac{(2n+1)^2}{n^2\pi^2}<\frac{1}{\sin^2(\frac{n\pi}{2n+1})}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\cot g^2\frac{\pi}{2n+1}+\cot g^2\frac{2\pi}{2n+1}+\ldots+\cot g^2\frac{n\pi}{2n+1}$$

$$<\frac{(2n+1)^2}{\pi^2}+\frac{(2n+1)^2}{4\pi^2}+\ldots+\frac{(2n+1)^2}{n^2\pi^2}$$

$$<\frac{1}{\sin^2(\frac{\pi}{2n+1})}+\frac{1}{\sin^2(\frac{2\pi}{2n+1})}+\ldots+\frac{1}{\sin^2(\frac{n\pi}{2n+1})}$$

حال با استفاده از لم ۴ و نتیجه‌ی آن می‌توان عبارت‌های دو طرف نابرابری‌های فوق را با معادل‌های آن‌ها جای گزین کرد:

$$\frac{n(2n-1)}{3}<\frac{(2n+1)^2}{\pi^2}+\frac{(2n+1)^2}{4\pi^2}+\ldots+\frac{(2n+1)^2}{n^2\pi^2}$$

$$<\frac{2}{3}n(n+1)\Rightarrow\frac{\pi^2.n(2n-1)}{3(2n+1)^2}<\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}$$

$$<\frac{2n(n+1)\pi^2}{3(2n+1)^2}$$

حال به سادگی می‌توان حد عبارت‌های دو طرف نابرابری را محاسبه کرد و نتیجه می‌شود:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi^2n(2n-1)}{3(2n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2\pi^2}{3(4n^2)}=\frac{\pi^2}{6}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n(n+1)\pi^2}{3(2n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2\pi^2}{3(4n^2)}=\frac{\pi^2}{6}$$

و با توجه به قضیه‌ی فشردگی (در مبحث حدّ کتاب‌های حسابان و حساب دیفرانسیل و انتگرال به تفصیل در مورد آن بحث شده است) نتیجه می‌شود:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

یعنی سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ هم‌گرا به $\frac{\pi^2}{6}$ است و به این ترتیب کار به پایان می‌رسد.

اکنون دیگر می‌توانیم احتمال فوق را به سادگی به دست آوریم. دیدیم، احتمال آن که دو عدد طبیعی که به ترتیب و به تصادف انتخاب شده‌اند، نسبت به هم اول باشند، عکس مقدار سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ است. بنابراین:

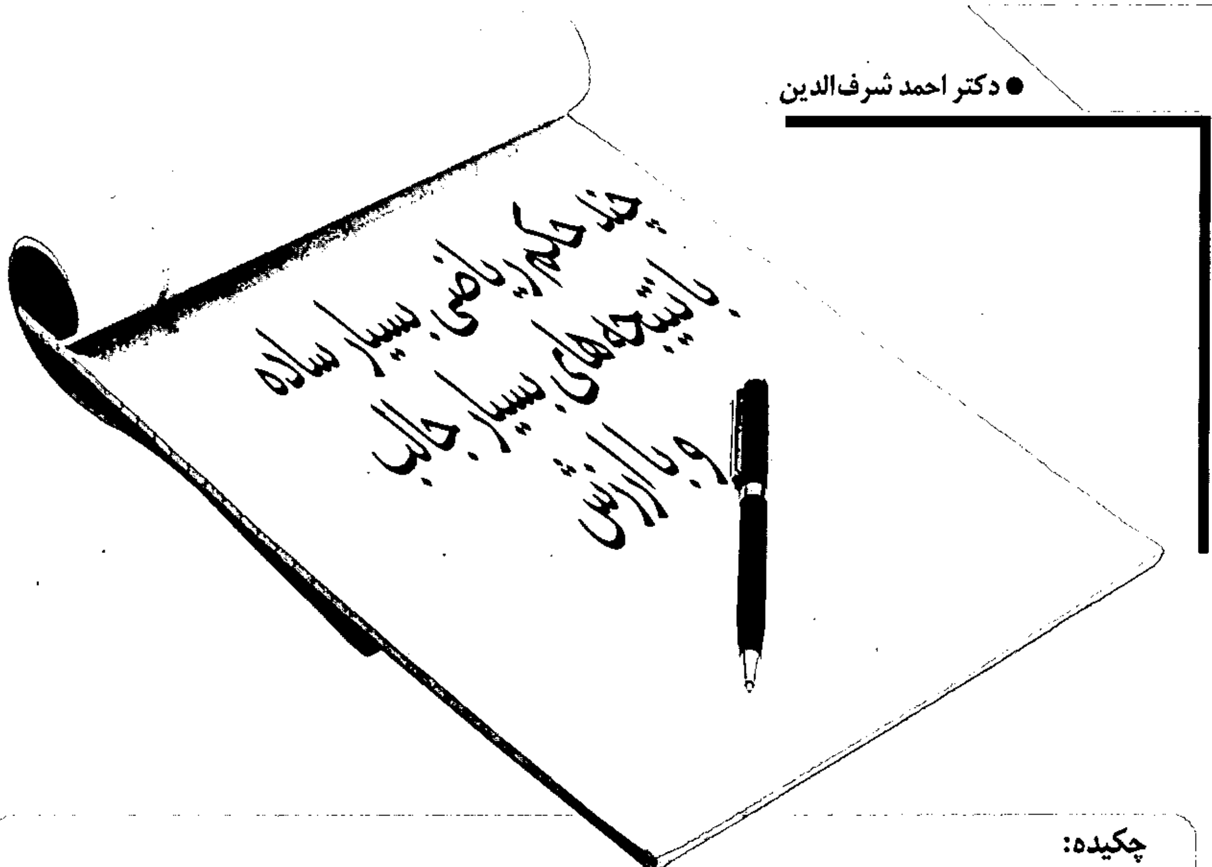
$$P(A)=\frac{6}{\pi^2}$$

■

منبع

مسائل پیکارجوی ریاضی با راه‌حل‌های مقدماتی (جلد اول و دوم)، نوشته یاگلوم، ترجمه‌ی غلامرضا یاسی‌پور.

● دکتر احمد شرف‌الدین



چکیده:

در مقاله‌ی حاضر به کمک مثال‌هایی، چند حکم ریاضی را شرح می‌دهیم که بسیار آسان‌اند، ولی نتیجه‌های مهمی از آن‌ها حاصل شده است:

۱. در چند دهه‌ی اخیر، در بعضی رسانه‌های ایران چنین اظهار شده است: تنها ساختمانی از کره‌ی زمین که از کره‌ی ماه قابل مشاهده است، دیوار چین است. این نظر نادرست است. در این باره توضیح می‌دهیم.

۲. آیا شکلی هامنی (مسطح) وجود دارد که محیط آن بی‌نهایت بزرگ باشد و مساحت آن بی‌نهایت کوچک؟ به این سؤال جواب مثبت می‌دهیم.

۳. آیا شکلی هندسی وجود دارد که حجم آن متناهی، ولی سطح آن نامتناهی باشد؟ به این سؤال نیز جواب مثبت می‌دهیم.

۴. در مثلث متساوی‌الساقین، اگر زاویه‌ی رأس، به ۱۸۰ درجه بسیار نزدیک باشد، نسبت طول هر ساق به طول میانه‌ی مربوط به قاعده، بسیار بزرگ است.

۵. از یک تابع از جبر «بول» یاد می‌کنیم که بسیار ساده است، ولی در دستگاه‌های رایانه‌ای، کاربرد بسیار مهمی دارد.

۶. یک حکم بسیار ساده از هندسه یاد می‌کنیم که با به‌کارگیری آن ثابت شده است، هم‌زمان نسبی است و این نتیجه فوق‌العاده ارزشمند است.

۱. دیوار بزرگ چین

در «دایرة‌المعارف فارسی» درباره‌ی دیوار چین چنین آمده است: «دیوار بزرگ چین، دیوار دفاعی مستحکم معروفی به ارتفاع ۶ متر تا ۱۵ متر است و به ضخامت ۴/۵ تا ۷/۵ متر که به طول در حدود ۲۰۰۰ کیلومتر، بین مغولستان و چین به معنی اخص ممتد است و در فواصل معین برج‌ها دارد. در [نیمه‌ی دوم] قرن سوم پیش از میلاد، در عهد امپراطوری **شی هوانگ تی** از سلسله‌ی چین، توسط ۳۰۰,۰۰۰ تن (اغلب از مجرمان) ساخته شد و در سال ۲۰۴ پیش از میلاد به اتمام رسید. طول آن با تمام انشعابات و پیچ‌وخم‌ها، ۳,۲۰۰ کیلومتر است...»

در دایرة‌المعارف بین‌المللی وبستر (WEBSTER)، چاپ پنجم سال ۱۹۹۹، میانگین ارتفاع دیوار ۷/۶ متر و پهنای آن حدود ۳/۶ متر یاد شده است.

❁❁❁

هرم بزرگ مصر

هرم بزرگ مصر قاعده‌ای مربع شکل دارد که طول ضلع آن ۲۲۷ متر است. ارتفاع هرم ۱۳۸ متر و طول

هر یالش ۲۱۷ متر است.

* * *

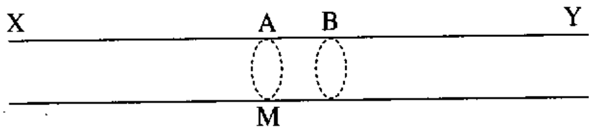
ساختمانی مرتفع در نیویورک

در سال‌های ۳۱-۱۹۳۰ در نیویورک، ساختمانی بزرگ به نام امپایر استیت (EMPIRE STATE) و به ارتفاع ۳۸۱متر ساخته شد که هنوز پابرجاست.

* * *

مشاهده‌ی طناب از فاصله‌ی دور

طناب XY را که کاملاً کشیده شده است، از فاصله‌ی دور نگاه می‌کنیم (شکل ۱). قطعه‌ی AB از این طناب را که طول آن برابر قطر مقطع است، درنظر می‌گیریم.



شکل ۱

$\overline{AM} = \overline{AB}$. این طناب را به تدریج به فاصله ی دور می‌بریم. تا موقعی که قطعه‌ی AB از طناب دیده می‌شود، کل طناب هم دیده می‌شود. در فاصله‌ای که قطعه‌ی AB دیگر دیده نشود، طناب هم دیده نمی‌شود. یعنی امکان دیده شدن طناب، به طول آن بستگی ندارد، بلکه به قطعه‌ای از طناب بستگی دارد که طول آن برابر ارتفاع مقطع باشد.

اکنون با بهره‌گیری از آن‌چه گفتیم، توضیح می‌دهیم نظر کسانی که می‌گویند «تنها ساختمانی از زمین که از کره‌ی ماه قابل رؤیت است، دیوار چین است»، کاملاً نادرست است.

قطعه‌ای از دیوار چین را درنظر می‌گیریم که بزرگ‌ترین ارتفاع آن ۱۵متر و طول آن نیز همین اندازه باشد. (در دایرةالمعارف فارسی بزرگ‌ترین ارتفاع دیوار چین ۱۵ متر نوشته شده است). ابعاد چنین قطعه‌ای از دیوار چین، از ابعاد هرم بزرگ مصر کوچک‌تر است بنابراین اگر این قطعه از دیوار چین از ماه دیده شود، به طریق اولی، هرم بزرگ مصر هم از کره ماه دیده خواهد شد. یعنی این نظر نادرست است که دیوار چین تنها ساختمانی از زمین است که از کره ماه دیده می‌شود.

تبصره: می‌توان استدلال‌های دقیق دیگری برای رد نظر دیده شدن دیوار چین از کره‌ی ماه ارائه کرد. یا حتی می‌توان به عکس‌هایی که در کره‌ی ماه از زمین گرفته شده‌اند، استناد کرد. ولی به‌نظر نگارنده‌ی این مقاله، استدلال فوق مبتنی بر ساده‌ترین اطلاعات هندسی است.

* * *

۲. آیا یک شکل هامنی(مسطح) وجود دارد که محیطش بی‌نهایت بزرگ باشد و مساحتش مقداری محدود؟

آری. به دو مثال زیر توجه فرمایید:

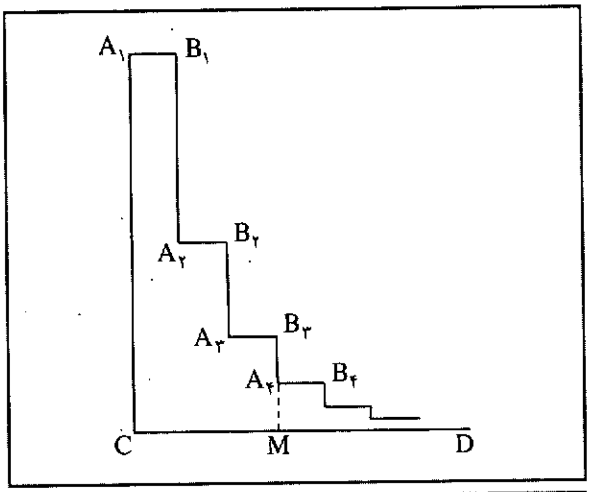
الف) مستطیلی را در نظر می‌گیریم با طول و عرض a و b. اندازه‌ی محیط این مستطیل برابر $2(a+b)$ است و اندازه‌ی سطح آن ab. اگر b را مساوی $\frac{1}{a}$ اختیار کنیم، مساحت مستطیل مورد نظر برابر ۱ می‌شود (عدد ۱، واحد طول است و نیز واحد اندازه‌ی سطح). اگر a را به سوی صفر میل دهیم، مقدار $\frac{1}{a}$ به سوی بی‌نهایت میل می‌کند. در این صورت محیط مستطیل مورد نظر به‌سوی بی‌نهایت میل می‌کند و مساحت آن همواره مساوی با ۱ خواهد بود.

می‌توان طول و عرض مستطیل را طوری درنظر گرفت که محیط مستطیل به سوی بی‌نهایت میل کند و مساحت آن به سوی صفر. در مستطیلی به طول و عرض a و b، چنین اختیار می‌کنیم: $b = \frac{1}{\sqrt{a}}$.

اگر مقدار a به‌سوی صفر میل کند، محیط آن به‌سوی بی‌نهایت و مساحت آن به سوی صفر میل می‌کند.

* * *

ب) شکل هامنی $A_1B_1A_2B_2A_3B_3MCA_1$ را در نظر می‌گیریم. در این شکلِ پلکانی، خط B_3M موازی A_1C است.



شکل ۲

فرض می‌کنیم:

$$(1)\quad \overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2} = \overline{A_3B_3} = \cdots = \overline{A_mB_m} = \cdots$$

$$(2)\quad \begin{cases} \overline{A_1C} = a,\ \ \overline{B_1A_2} = \frac{1}{2}a,\ \ \overline{A_2B_3} = \frac{1}{4}a, \\ \overline{B_3A_4} = \frac{1}{8}a,\ \cdots \end{cases}$$

یعنی ارتفاع هر پله نصف ارتفاع پله‌ی پیشین است. به‌عبارت دیگر، ارتفاع‌های پله‌ها یک تصاعد هندسی تشکیل می‌دهند که جمله‌ی اول آن طول $\overline{A_1C}$ و قدر مطلق آن $\frac{1}{2}$ است.

مساحت شکل $A_1B_1A_2B_2A_3B_3MCA_1$ چنین است:

$$S = a(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4})$$

مساحت این شکل پلکانی وقتی تعداد پله‌ها به سوی بی‌نهایت میل کند، چنین است:

$$a \times \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n})$$

حد عبارت داخل کمانک‌ها، وقتی n به‌سوی بی‌نهایت میل کند برابر $2a$ است. پس مساحت شکل پلکانی مورد نظر، وقتی تعداد پله‌ها به سوی بی‌نهایت میل کند، برابر $2a$ می‌شود. پس اندازه‌ی محیط شکل پلکانی مورد نظر وقتی تعداد پله‌ها به سوی بی‌نهایت میل کند، به بی‌نهایت میل می‌کند و مساحت آن به سوی عدد ۲، یعنی محیط شکل، بی‌نهایت بزرگ است و مساحت آن محدود.

***

۳. آیا شکل هندسی وجود دارد که حجم آن متناهی ولی سطح کل آن نامتناهی باشد؟

آری. به دو مثال زیر توجه کنید:

الف) مکعب مستطیلی با ابعاد a، $\frac{1}{a}$ و ۱ در نظر می‌گیریم. حجم این مکعب مستطیل برابر ۱ است. وجهی از این مکعب مستطیل با ابعاد ۱ و $\frac{1}{a}$ را در نظر می‌گیریم. مساحت این وجه، برابر $\frac{1}{a}$ است. اگر a به‌سوی صفر میل کند، آن‌گاه مساحت وجه یاد شده به سوی بی‌نهایت میل می‌کند. پس اگر مقدار a به سوی صفر میل کند، حجم مکعب‌مستطیل مقدار متناهی باقی می‌ماند، ولی سطح کل آن به سوی بی‌نهایت میل می‌کند.

***

ب) منشوری قائم در نظر می‌گیریم که قاعده‌ی آن شکل پلکانی یاد شده در مسئله‌ی پیشین باشد و طول ارتفاع آن برابر یک. حد حجم این منشور هنگامی که تعداد پله‌ها به سوی بی‌نهایت میل کند، برابر ۲ است، ولی سطح کل این منشور به‌سوی بی‌نهایت میل می‌کند..

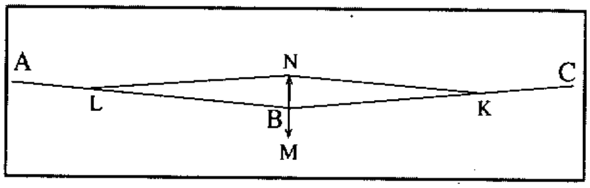
***

۴. در مثلث متساوی‌الساقین، اگر زاویه‌ی رأس به ۱۸۰ درجه بسیار نزدیک باشد، نسبت طول هر ساق به طول میانه‌ی مربوط به قاعده‌ها بسیار بزرگ است.

این حکم هندسی فوق‌العاده ساده است، به‌طوری که در کتاب‌های هندسه آن را یاد نمی‌کنند. این حکم هندسی با وجود سادگی، کاربردهای بسیار مهم دارد. به مثال زیر توجه کنید:

در سیستم حمل و نقل به‌وسیله‌ی تله‌کابین، کابل تله‌کابین نباید خیلی کشیده باشد. اگر کابل خیلی کشیده باشد، هنگامی که تله‌کابین به وسط دو پایه می‌رسد، کابل گسیخته می‌شود.

کابلی را در نظر می‌گیریم که دو انتهای آن در دو نقطه‌ی A و C ثابت شده‌اند (شکل ۳).



شکل۳

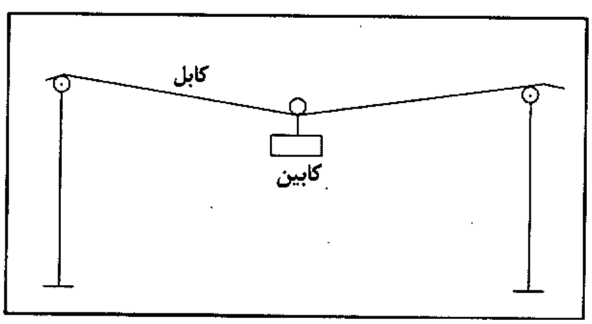
وزنه‌ای در نقطه‌ی B که وسط کابل است، به آن آویزان می‌کنیم. این وزنه، کابل را به‌صورت خط شکسته ABC درمی‌آورد. اگر کابل از ابتدا خیلی کشیده باشد، زاویه‌ی ABC خیلی به ۱۸۰ درجه نزدیک می‌شود.

نیرویی را که وزنه، در نقطه‌ی B به کابل وارد می‌کند، با بردار $\overrightarrow{BM}$ نشان می‌دهیم. بردار $\overrightarrow{BN}$ را مساوی $-\overrightarrow{BM}$ در نظر می‌گیریم و متوازی‌الاضلاع BLNK را می‌سازیم. نیروی BN به دو نیروی BA و BC تجزیه می‌شود:

$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$$

چون زاویه‌ی $\angle ABC$ خیلی به ۱۸۰ درجه نزدیک است، اندازه‌ی هریک از دو نیروی BA و BC خیلی بیشتر از اندازه‌ی نیروی BN است. همین موضوع سبب گسیخته شدن کابل می‌شود.

در شکل ۴ شمای یک تله‌کابین رسم شده است. اگر امتداد



شکل۴ شمای یک تله‌کابین

کابل در دو طرف غلتک نزدیک به ۱۸۰ درجه باشد، کشش کابل در دو طرف غلتک کابین مقدار بزرگی خواهد شد و به بریده‌شدن کابل می‌انجامد.

***

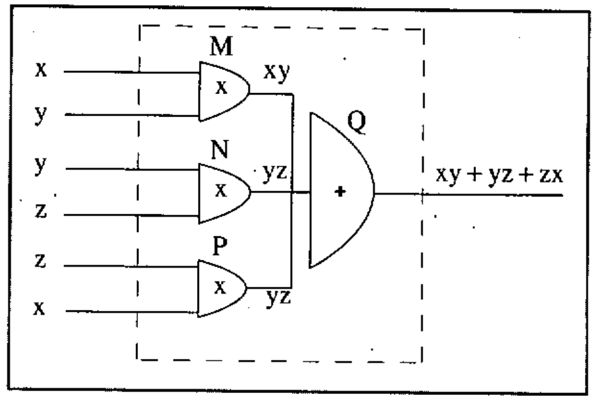
۵. تابع اکثریت و مدار آن

در جبر بول، تابع سه متغیری $f(x,y,z) = xy + yz + zx$ را تابع اکثریت می‌نامند. دلیل این نام‌گذاری آن است که اگر اکثریت متغیرها، یعنی دو متغیر یا سه متغیر از این تابع، مقداری بگیرند، تابع همان مقدار را می‌گیرد. بیان ریاضی این خاصیت چنین است:

$$f(x,a,a) = f(a,y,a) = f(a,a,z) = f(a,a,a) = a$$

تابع اکثریت با وجود آن‌که بسیار ساده و آسان است، در دستگاه‌های رایانه‌ای نقش مهمی ایفا می‌کند.

مدار الکتریکی مربوط به تابع اکثریت، «مدار اکثریت» نامیده می‌شود. شکل ۵ مدار اکثریت را نشان می‌دهد. در این شکل، دریچه‌های M، N و P، دریچه‌های «و» هستند که به‌طور موازی قرار گرفته‌اند. خروجی‌های این سه دریچه، به دریچه‌ی Q که دریچه‌ی «یا» محسوب می‌شود، متصل‌اند. مدار حاصل از دریچه‌های «و» و دریچه‌ی «یا» را مدار اکثریت می‌نامند.



شکل ۵ مدار اکثریت

فرض کنیم بخواهیم مسئله‌ای را با رایانه حل کنیم و از درستی جواب کاملاً مطمئن باشیم. به این منظور سه رایانه و یک مدار اکثریت را به‌کار می‌گیریم. برنامه را به‌طور هم‌زمان به سه رایانه‌ی A، B و C می‌دهیم. (این سه رایانه ممکن است حتی در سه شهر بسیار دور از یکدیگر باشند. در این محور با استفاده از آنتن‌ها، ولتاژهای لازم را انتقال می‌دهیم.

ولتاژهای خروجی سه رایانه‌ی یاد شده را به ترتیب x، y و z می‌نامیم (این ولتاژها جواب مسئله‌ی موردنظراند). اگر هر سه رایانه مسئله را درست حل کنند، آن‌گاه چنین داریم: $x=y=z$.

خروجی دو رایانه‌ی A و B که x و yاند، به دریچه‌ی M واردمی‌شوند و خروجی دریچه‌ی M حاصل‌ضرب xy را به‌دست می‌دهد.

خروجی دو رایانه‌ی B و C که y و zاند، به دریچه‌ی N وارد می‌شوند و خروجی دریچه‌ی N، حاصل‌ضرب yz را به‌دست می‌دهد.

خروجی دو رایانه‌ی C و A که z و xاند، به دریچه‌ی P وارد می‌شوند و خروجی دریچه‌ی P، حاصل‌ضرب zx را به‌دست می‌دهد.

ولتاژهای xy، yz و zx به دریچه‌ی Q وارد می‌شوند و خروجی Q، ولتاژ $xy + yz + zx$ را به‌دست می‌دهد. ولتاژ اخیر، جواب اکثریت سه رایانه است. پس اگر فقط یک رایانه از این سه رایانه، جواب درست به‌دست ندهد، جوابی که در خروجی مدار اکثریت به‌دست می‌آید، جواب درست است. با به‌کارگیری دستگاه اکثریت، اطمینان بیشتری از درستی جواب داریم.

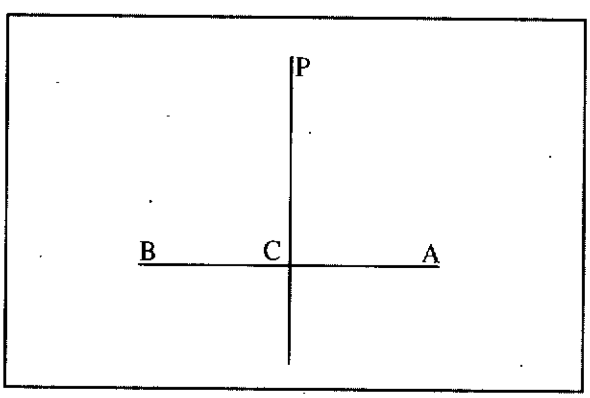
***

۶. نسبی بودن هم‌زمانی

دو نقطه‌ی A و B و صفحه‌ی عمود منصف پاره‌خط AB را در نظر می‌گیریم. این صفحه را با P نشان می‌دهیم.

قضیه: هر نقطه‌ی واقع بر صفحه‌ی عمود منصف پاره‌خط AB، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است و برعکس، هر نقطه که از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله باشد، روی عمود منصف پاره‌خط AB قرار دارد.

بخشی از فضا را که در یک طرف صفحه‌ی P واقع است و شامل نقطه‌ی A می‌شود، بخش ۱ و بخشی از فضا را که در یک طرف صفحه‌ی P واقع است و شامل نقطه B می‌شود، بخش ۲ می‌نامیم.



شکل ۶

برای هر نقطه‌ی M، از بخش ۱ داریم: $\overline{MA} < \overline{MB}$ و برای هر نقطه‌ی N از بخش ۲ داریم: $\overline{NA} < \overline{NB}$.

برای آن‌که واقعه‌ای دیده شود، لازم است که از آن نقطه، نور به چشم برسد. چنین به‌نظر می‌آید که اگر برای ناظری، دو امر هم‌زمان باشند، این دو امر برای همه‌ی ناظرانی که آن‌ها را ملاحظه می‌کنند، هم‌زمان هستند. در سطرهای آینده نشان می‌دهیم که این تصور صحیح نیست و نتیجه می‌گیریم که هم‌زمانی نسبی است.

هم‌چنین به‌نظر می‌آید که اگر ناظری امر A را مقدم بر امر B مشاهده کند، همه‌ی ناظرانی که این دو امر ملاحظه می‌کنند، امر A را مقدم بر امر B مشاهده می‌کنند. در ادامه نشان می‌دهیم که این تصور هم صحیح نیست و نتیجه می‌گیریم که تقدم و تأخر نسبی است.

در دو نقطه‌ی A و B، دو منبع نور الکتریکی در نظر می‌گیریم. کلید مدار الکتریکی را در نقطه‌ی C قرار می‌دهیم. با این کلید می‌توان دو لامپ الکتریکی A و B را روشن و خاموش کرد. اگر کلید را وصل کنیم، برای ناظری که روی صفحه‌ی P است، دو چراغ در یک لحظه روشن می‌شوند؛ زیرا مدت رسیدن الکتریسیته از A و B به C برابر است. اگر D نقطه‌ای از صفحه‌ی P باشد، مدتی که نور دو مسافت AD و BD را می‌پیماید، برابر است. اگر کلید را قطع کنیم، برای ناظری که روی عمود منصف است، دو چراغ A و B در یک لحظه خاموش می‌شوند.

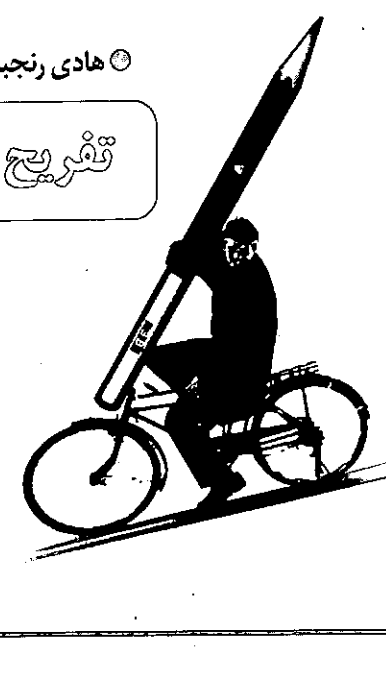
در همین آزمایش، اگر ناظری در نقطه‌ی M از بخش (۱) قرار داشته باشد، روشن شدن چراغ A را مقدم بر روشن شدن چراغ B می‌بیند. زیرا نور، مسافت AM را در مدتی کوتاه‌تر از مسافت BM می‌پیماید. اگر ناظری در نقطه‌ی N از بخش (۲) قرار داشته باشد، روشن شدن چراغ B را مقدم بر روشن شدن چراغ A می‌بیند؛ زیرا: $\overline{NB} < \overline{NA}$.

نتیجه‌گیری نسبیت هم‌زمانی و نسبیت تقدم و تأخر، از خاصیت‌های بسیار ساده‌ی عمود منصف و از شاهکارهای بسیار مهم تفکر علمی است.

سرعت نور ۳۰۰/۰۰۰ کیلومتر بر ثانیه است. لذا آن‌چه یاد شد در ابعاد کیهانی به‌کار می‌آید، نه در ابعاد کوچک. برای توضیح، دو نقطه‌ی A و B را به فاصله‌ی ۱۰۰ کیلومتر از هم در نظر می‌گیریم. نقطه‌ی وسط پاره‌خط AB را M می‌نامیم. فرض کنیم دو پدیده‌ی A و B طوری باشند که برای ناظری که در نقطه‌ی M است، به‌طور هم‌زمان دیده شوند. اگر نقطه‌ی P از نقطه‌ی A و B به ترتیب به فاصله‌ی ۱۳۰ و ۱۴۰ کیلومتر باشد، آن‌گاه ناظری که در نقطه‌ی P قرار دارد، دو پدیده‌ی A و B را هم‌زمان می‌بیند؛ به‌دلیل اختلاف زمانی فوق‌العاده اندک دو پدیده‌ی A و B برای ناظر.

هادی رنجبران

تفریح اندیشه



با قرار دادن علایم و عملیات مناسب ریاضی بین عددها، کاری کنید که تساوی‌های زیر برقرار باشند.

۱ ۱ ۱=۶

۲ ۲ ۲=۶

۳ ۳ ۳=۶

۴ ۴ ۴=۶

۵ ۵ ۵=۶

۶ ۶ ۶=۶

۷ ۷ ۷=۶

۸ ۸ ۸=۶

۹ ۹ ۹=۶

برای نمونه: $\sqrt{۴} + \sqrt{۴} + \sqrt{۴} = ۶$

◎ عنایت‌الله راستی‌زاده

اشاره:

در این یادداشت قصد نداریم آن‌چه را که به عنوان مقدمه در کتاب درسی آمار و مدل‌سازی آمده است، تکرار کنیم و از توضیحات اولیه و تعریف مقدماتی می‌گذریم. تنها و به‌عنوان تأکید، به تعریف زیر توجه کنید:

تعریف: بیان مسئله به زبان ریاضی را «مدل‌سازی ریاضی» می‌گوییم. هرچه مفاهیم ریاضی به‌کار برده شده ساده‌تر و نتیجه‌ی کار به پدیده‌ی مورد نظر نزدیک‌تر باشد، مدل‌سازی با ارزش‌تر است.

تناسب مدل با مسئله اهمیت بسزایی دارد. گاهی قرار است درباره‌ی وزن هم‌کلاسی‌هایتان مدل‌سازی کنید. در آن‌صورت، چشم‌پوشی از چند گرم کمتر و بیشتر شایسته است. اما اگر بخواهید در آزمایشگاه شیمی چند ماده را با هم ترکیب کنید چه‌طور؟ این‌جاست که واحدهای اندازه‌گیری و میزان خطا اهمیت خواهند یافت. در تعریف کتاب درسی، برای خطای اندازه‌گیری می‌خوانیم:

این «خطا لزوماً از واحد اندازه‌گیری کمتر است».

در این مقاله می‌کوشیم، با ذکر چند مثال به اهمیت انتخاب واحد مناسب برای خطای اندازه‌گیری بپردازیم.

مدل‌سازی و خطای اندازه‌گیری

قابل استفاده‌ی دانش‌آموزان سال‌های دوم و سوم متوسطه

مثال ۱. فرض کنید مدت زمانی که یک دونده، فاصله‌ی ۱۰۰ متر را دویده است، برابر ۹ ثانیه اندازه‌گیری شده باشد. می‌دانیم، مدت‌زمان مذکور ممکن است دقیقاً ۹ ثانیه نباشد، به‌خصوص اگر وسیله‌ی اندازه‌گیری دقت کافی نداشته باشد. پس مرتکب خطایی شده‌ایم که

اندازه‌ی آن از یک ثانیه کمتر است؛ ولی واقعاً چه‌قدر کمتر؟ نمی‌دانیم!

مدل روبه‌رو پیشنهاد می‌شود: $T = 9 + E$

توجه کنید، مدت‌زمانی را که دونده بر حسب ثانیه دویده است با T نمایش داده‌ایم. قدر مطلق E خطای اندازه‌گیری از یک ثانیه کمتر است. E ممکن است مثبت یا منفی باشد.

مثال ۲. قد فردی حدود ۱۷۲ سانتی‌متر گزارش شده است. چه مدلی می‌توان برای اندازه‌گیری آن به‌کار گرفت؟

فرض کنیم P قد این فرد باشد، در این صورت:

$P = 172 + E$

پس در این‌جا واحد اندازه‌گیری را سانتی‌متر در نظر گرفته‌ایم و قدر مطلق E از یک سانتی‌متر کمتر است.

تغییر واحد اندازه‌گیری و تغییر مدل

گاهی ممکن است در اثنای تهیه‌ی گزارش بخواهیم واحد اندازه‌گیری را دقیق‌تر کنیم. می‌خواهیم ببینیم در این فرایند، مدل دستخوش چه تغییری می‌شود. اگر در مدل اولیه خطا را با E نشان داده باشیم، آیا در مدل جدید که با تغییر واحد اندازه‌گیری همراه است، E تغییر می‌کند؟

مثال ۳. طولی را برحسب سانتی‌متر اندازه‌گیری کرده‌ایم و مدل آن را به‌صورت $L = 3 + E$ نوشته‌ایم که در آن، قدر مطلق E از یک سانتی‌متر کمتر است. اگر طول را بر حسب میلی‌متر بخواهیم گزارش کنیم، آیا مدل $L = 30 + E$ برای آن مناسب است؟

مسلماً خیر، چرا که در این‌جا E خطای اندازه‌گیری، از واحد اندازه‌گیری (میلی‌متر) کمتر نیست! یک مدل مناسب آن است که بنویسیم: $L = 30 + \frac{E}{100}$ که چون قدر مطلق E از یک سانتی‌متر کمتر فرض شده است، قدر مطلق $\frac{E}{100}$ به‌طور قطع از یک میلی‌متر کمتر است! می‌توان $\frac{E}{100}$ را برابر E_1 فرض کرد و نوشت $L = 30 + E_1$

محاسبه‌ی روی مدل و چگونگی خطا در پدیده‌ی نهایی

با مثالی، این عنوان را توضیح می‌دهیم. فرض کنیم بخواهیم مدلی مناسب برای سطح یک دایره بنویسیم. در محاسبه‌ی سطح دایره، از شعاع دایره استفاده می‌شود. خطای مربوط به سطح، از خطای مربوط به محاسبه‌ی شعاع ناشی می‌شود. مدل اولیه برای شعاع دایره تنظیم می‌شود، اما در نهایت به مدلی برای سطح دایره می‌رسیم. مسلماً در این میان، محاسبات روی اندازه‌های گرفته شده از قبیل جمع، ضرب و توان، روی خطای اندازه‌گیری نیز صورت می‌گیرد. به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۴. فرض کنید شعاع دایره‌ای به‌صورت $R = 3 + E$ مدل‌سازی شده است. می‌خواهیم مدلی برای مساحت این دایره بنویسیم. اگر S مساحت دایره باشد، داریم:

$$S = \pi R^2 \Rightarrow S = \pi(3 + E)^2 \Rightarrow S = \pi(9 + E^2 + 6E)$$

چون قدر مطلق E از واحد اندازه‌گیری کمتر است، هرچه به توان بزرگ‌تری برسد، میزان آن کمتر خواهد شد؛ به‌طوری که می‌توان از آن صرف نظر کرد. پس داریم: $S \approx 9\pi + 6\pi E$

اگر $6\pi E$ را برابر E_1 فرض کنیم، مدل مساحت دایره عبارت خواهد بود از: $S = 9\pi + E_1$.

صبر کنید! کار تمام نشده است! مطمئنید در انتخاب E و E_1 خطایی مرتکب نشده‌اید؟ سعی می‌کنیم این قسمت را کمی بیشتر تجزیه و تحلیل کنیم. **حوصله‌اش را دارید؟!**

فرض کردیم $R = 3 + E\text{cm}$ که در آن قدرمطلق E از سانتی‌متر کمتر است. برای سادگی فرض کنید $\pi = 3$ و $E = \frac{1}{3}\text{cm}$ باشد. آن‌گاه: $E_1 = 6\pi E = 6 \times 3 \times \frac{1}{3}$، یعنی: $E_1 = 6$ و $s \approx 27 + E_1$. متوجه اشتباه شدید؟ E_1 از واحد اندازه‌گیری بزرگ‌تر شده است! چه باید کرد؟

پیشنهاد می‌کنم برای جلوگیری از این اتفاق، دقت اندازه‌گیری طول شعاع را بیشتر کنیم و با اندازه‌گیری دقیق‌تر، E را چنان کوچک کنیم که با انجام عملیات و محاسبات ریاضی بعدی، خطای E_1 هم‌چنان از واحد اندازه‌گیری سطح کوچک‌تر بماند!

آیا انتخاب مدل $R = 3 + \frac{E}{10}$ برای شعاع مناسب‌تر نیست؟ متأسفانه در مثال‌های کتاب درسی، به این موضوع توجه کافی صورت نگرفته است و مؤلفان محترم کتاب درسی، تنها به اشاره‌ای کلی و مختصر بسنده کرده‌اند. برای نمونه، به مثالی

انتشار خطا در محاسبات مربوط به سطح، حجم و... پدید می‌آید و توصیه می‌شود، از همان ابتدا با بالا بردن دقت، انتشار خطا را تا حد امکان کاهش دهیم

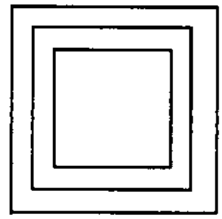
در صفحه‌ی ۱۲ کتابی درسی آمار و مدل‌سازی (چاپ هفتم، ۱۳۸۵)، اشاره می‌کنیم.

مثال۵. ضلع مربعی به‌صورت $۷ + E$ مدل‌سازی شده است. Sمساحت مربع است:

$$S = (۷+E)^۲ = ۴۹ + ۱۴E + E^۲$$

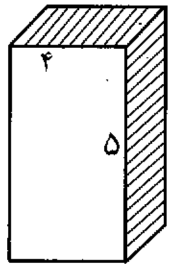
$$S \approx ۴۹ + ۱۴E = ۴۹ + E_۱$$

با صرف‌نظر از جمله‌ی $E^۲$ داریم:



کتاب درسی اشاره نکرده است که امکان دارد $E_۱$ از واحد سطح بزرگ‌تر شود. چون خطای سطح، ۱۴ برابر $(E_۱ = ۱۴E)$ از خطای ضلع بزرگ‌تر است!

این پدیده را «**انتشار خطا**» می‌گوییم. انتشار خطا در محاسبات مربوط به سطح، حجم و... پدید می‌آید و توصیه می‌شود، از همان ابتدا با بالا بردن دقت، انتشار خطا را تا حد امکان کاهش دهیم. به مثال دیگری از انتشار خطا در محاسبه‌ی حجم توجه کنید:



ارتفاع $= ۵ + E_۱ + L_۱$

طول $= ۴ + E_۲ = L_۲$

عرض $= ۲ + E_۳ = L_۳$

اگر حجم مکعب برابر V باشد، در این صورت مدل حجم به‌صورت زیر است:

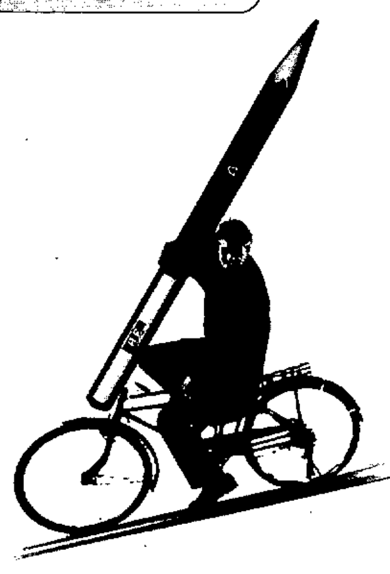
$$V = L_۱L_۲L_۳ = (۵+E_۱)(۴+E_۲)(۲+E_۳)$$

$$V = ۴۰ + ۸E_۱ + ۱۰E_۲ + ۲۰E_۳$$

در این مدل، $E_۱$ها از واحد کوچک‌ترند. پس حاصل ضرب آن‌ها خیلی کوچک خواهد بود و قابل چشم‌پوشی است. این‌جا نیز پدیده‌ی انتشار خطا اجتناب‌ناپذیر است!

حتی اگر $E_۱$ و $E_۲$ و $E_۳$ برابر $\frac{۱}{۱۰}$ سانتی‌متر باشند (طول‌ها بر حسب سانتی‌متر باشند)، $۸E_۱ + ۱۰E_۲ + ۲۰E_۳$ برابر $۳۸ \times \frac{۱}{۱۰}$، یعنی ۳/۸ سانتی‌متر خواهد شد.

عمل غلط، اما جواب صحیح



۱. به این دو کسر نگاه کنید:

$$\frac{۲۶}{۶۵} \text{ و } \frac{۱۶}{۶۴}$$

اگر ۶ها را از صورت و مخرج کسرها حذف کنیم (که عملی است غیرمجاز)، دو کسر به این ترتیب به دست می‌آیند:

$$\frac{۲}{۵} \text{ و } \frac{۱}{۴}$$

به ظاهر، این دو کسر نباید با دو کسر بالا مساوی باشند، ولی اگر آن دو کسر را ساده کنید، خواهید دید:

$$\frac{۲۶}{۶۵} = \frac{۲}{۵} \text{ و } \frac{۱۶}{۶۴} = \frac{۱}{۴} \ (!!)$$

❊ ❊ ❊

۲. به این کسر نگاه کنید:

$$\frac{(۱+x)^۲}{۱-x^۲}$$

اگر قوای ۲ را از صورت و مخرج حذف کنیم (عمل غیرمجاز)، کسر به $\frac{۱+x}{۱-x}$ تبدیل می‌شود که برابر کسر اول است.

آیا شما هم می‌توانید چنین کسرهایی بنویسید؟

● عماد سهائی

دانشجوی رشته‌ی دبیری ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز

تعداد افرازهای یک مجموعه n عضوی

اشاره:

مقاله‌ی پیش‌رو، درباره‌ی راه‌های به‌دست آوردن تعداد کل افرازهای یک مجموعه‌ی nعضوی است. در پایان مقاله، راه نسبتاً ساده‌ای را به شما پیشنهاد می‌کنیم که سرعت محاسباتی آن از بقیه‌ی راه‌هایی که در این مقاله می‌آوریم، بیشتر است. هدف از این پیشنهاد، ارائه‌ی راهی ساده و سریع در محاسبات علم مجموعه‌ها و در باب افرازهاست. این مطلب قابل ذکر است که در این مقاله، از کلاس‌های هم‌ارزی و ارتباط آن با افرازها، مطلبی اثباتی و گفتنی موجود نیست.

افراز یک مجموعه

هرگاه A مجموعه‌ای ناتهی باشد و بتوانیم تعدادی متناهی از زیر مجموعه‌های متمایز A مانند A_1 ، A_2 و... و A_n بیابیم، به قسمی که اولاً: هر یک از زیر مجموعه‌ها ناتهی باشند، ثانیاً: هیچ دوتایی از آن‌ها با هم اشتراکی نداشته باشند (دوبه‌دو از هم جدا باشند) و ثالثاً: اجتماع این زیر مجموعه‌ها با خود مجموعه‌ی A برابر شود، در این صورت گوییم: مجموعه‌های A_1 ، A_2 و... و A_n مجموعه‌های افرازکننده‌ی مجموعه‌ی A هستند و مجموعه‌ی $E = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ یک افراز nعضوی از مجموعه‌ی A است.

باید توجه داشته باشیم، در حالتی که $n = 1$ ، یعنی E یک افراز تک‌عضوی از مجموعه‌ی Aباشد، داریم: $E = \{A\}$. حال اگر بخواهیم تعریف افراز مجموعه را توسط نمادهای ریاضی یا به‌زبان ریاضی بیان کنیم، گوییم:

مجموعه‌ی $E = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ یک افراز n عضوی برای مجموعه‌ی ناتهیِ Aاست، هرگاه:

۱) $\forall_i : 1 \le i \le n \ , \ A_i \ne \varnothing$

۲) $\forall_{i,j} : 1 \le i,j \le n \ , \ i \ne j \ , \ A_i \cap A_j = \varnothing$

۳) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$

برای درک بهتر مفهوم افراز یک مجموعه، چند مثال می‌آوریم:

مثال۱. تمام افرازهای مجموعه‌ی $A = \{a\}$ را می‌نویسیم:

$A: \boxed{a}$ $\quad E = \{\{a\}\}$: **تنها یک افراز تک‌عضوی داریم**

مثال۲. همه‌ی افرازهای مجموعه‌ی $A = \{a, b\}$ را می‌نویسیم:

$A \boxed{a \mid b}$; $E = \{\{a\}, \{b\}\}$: **افراز دوعضوی**

$A \boxed{a \quad b}$; $E = \{\{a, b\}\}$: **افراز تک‌عضوی**

مثال۳. تمام افرازهای مجموعه‌ی $A=\{a,b,c\}$ را می‌نویسیم:

افراز سه‌عضوی: $E=\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$; A | a | b | c |

افراز دوعضوی:

$E=\{\{a\},\{b,c\}\}$; A | a | b c |

$E=\{\{b\},\{a,c\}\}$; A | b | a c |

$E=\{\{c\},\{a,b\}\}$; A | c | a b |

افراز تک‌عضوی: $E=\{\{a,b,c\}\}$; A | a b c |

مثال۴. همه‌ی افرازهای مجموعه‌ی $A=\{a,b,c,d\}$ را می‌نویسیم:

افراز چهارعضوی: $E=\{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}\}$: A

افراز سه‌عضوی که تعداد آن شش تا است و به سه‌تای آن‌ها اشاره می‌کنیم.

$E=\{\{a\},\{b\},\{c,d\}\}$; A

$E=\{\{c\},\{d\},\{a,b\}\}$; A

$E=\{\{a\},\{c\},\{b,d\}\}$; A

افراز دوعضوی که تعداد آن هفت عدد است، به چهار مورد آن‌ها اشاره می‌کنیم.

$E=\{\{a\},\{b,c,d\}\}$; A

$E=\{\{b\},\{a,c,d\}\}$; A

$E=\{\{a,b\},\{c,d\}\}$; A

$E=\{\{a,c\},\{b,d\}\}$; A

افراز تک‌عضوی: $E=\{\{a,b,c,d\}\}$: A

در مثال‌های بالا، به مفهوم افراز یک مجموعه دست یافتیم و با چگونگی افراز شدن یک مجموعه به کلاس‌های هم‌ارزی آشنا شدیم. حال اگر مثال‌ها را ادامه دهیم و بتوانیم مجموعه‌های پنج عضوی و شش‌عضوی را نیز افراز کنیم، به جدولی مانند جدول ۱ دست خواهیم یافت.

جدول۱. تعداد افرازهای یک مجموعه‌ی n عضوی ($n \le ۶$)

تعداد اعضای مجموعه‌ی nعضوی / افراز mعضوی	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۲	۰	۱	۳	۷	۱۵	۳۱
۳	۰	۰	۱	۶	۲۵	۹۰
۴	۰	۰	۰	۱	۱۰	۶۵
۵	۰	۰	۰	۰	۱	۱۵
۶	۰	۰	۰	۰	۰	۱
مجموع کل افرازهای مجموعه‌ی nعضوی	۱	۲	۵	۱۵	۵۲	۲۰۳

در این جا مشکل این است که هرچه تعداد اعضای مجموعه‌ی افراز شده بیشتر شود، به‌دست آوردن تعداد کل افرازهای آن سخت‌تر می‌شود. از این‌رو در اکثر منابع، از رابطه‌ی زیر تعداد افرازهای m عضوی از یک مجموعه‌ی nعضوی را به‌دست می‌آورند:

$$\frac{1}{m!}\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\binom{m}{m-k}(m-k)^n \quad m,n\in \mathbb{N}, m\le n$$

اثبات این رابطه از راه استقرا روی nاست که از حوصله‌ی این بحث خارج است. حال با استفاده از رابطه‌ی بالا، جدول افرازی را بزرگ‌تر می‌کنیم:

جدول۲. تعداد افرازهای یک مجموعه‌ی n عضوی($n \le ۹$)

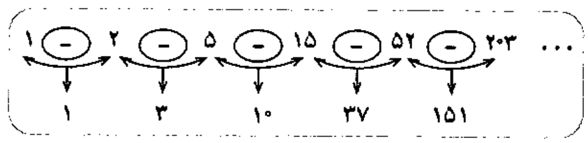
تعداد اعضای مجموعه‌ی nعضوی / افراز mعضوی	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۲	۰	۱	۳	۷	۱۵	۳۱	۶۳	۱۲۷	۲۵۵
۳	۰	۰	۱	۶	۲۵	۹۰	۱۰۳	۹۶۶	۳۰۲۵
۴	۰	۰	۰	۱	۱۰	۶۵	۳۵۰	۱۷۰۱	۷۷۷۰
۵	۰	۰	۰	۰	۱	۱۵	۱۴۰	۱۰۵۰	۶۹۵۱
۶	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۲۱	۲۶۶	۲۶۴۶
۷	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۲۸	۴۶۲
۶	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۳۶
۶	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱
مجموع کل افرازهای مجموعه‌ی nعضوی	۱	۲	۵	۱۵	۵۲	۲۰۳	۸۷۷	۴۱۴۰	۲۱۱۴۷

هنگامی که جدول ۲ را رسم می‌کنیم، به دنباله‌ای از مجموع کل افرازهای مجموعه‌ی nعضوی برمی‌خوریم که برای به‌دست آوردن جملات آتی آن، به محاسبات طولانی نیاز داریم. این دنباله به شکل زیر است:

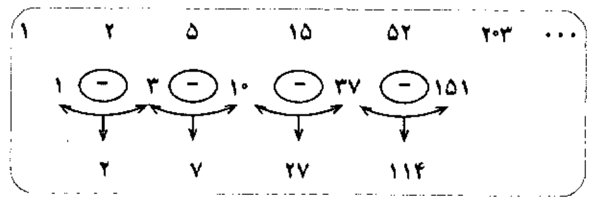
۱-۲-۵-۱۵-۵۲-۲۰۳-۸۷۷-۴۱۴۰-...

حال به راه‌حلی برای کم کردن این محاسبات توجه کنید:

اگر دنباله‌ی مجموع کل افرازهای مجموعه‌ی nعضوی را که از حالا آن را دنباله‌ی افراز nعضوی می‌نامیم، بنویسیم و از هر دو جمله‌ی متوالی آن تفاضل بگیریم و زیر آن‌ها بنویسیم، دنباله‌ی جدیدی به صورت زیر به‌دست می‌آید:



اگر این عملیات را روی دنباله‌ی جدید انجام بدهیم، بار دیگر دنباله‌ی جدیدتری ایجاد کرده‌ایم:



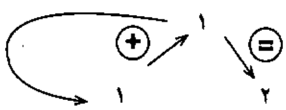
و چندبار این عمل را انجام می‌دهیم تا به یک عدد برسیم که دیگر قادر به تفریق کردن آن نباشیم:

۱ ۲ ۵ ۱۵ ۵۲ ۲۰۳ ...
۱ ۳ ۱۰ ۳۷ ۱۵۱
۲ ۷ ۲۷ ۱۱۴
۵ ۲۰ ۸۷
۱۵ ۶۷
۵۲

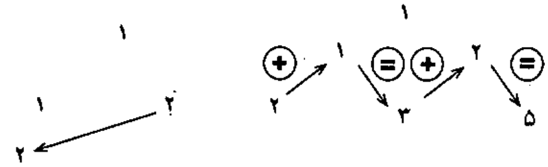
در این‌جا متوجه می‌شویم، ضلع مشخص شده از مثلث بالا، عیناً همان مجموع افرازهاست که دوباره تکرار شده است. اگر مثلث را کمی بچرخانیم، به راز آن پی خواهیم برد:

۱
۱ ۲
۲ ۳ ۵
۵ ۷ ۱۰ ۱۵
۱۵ ۲۰ ۲۷ ۳۷ ۵۲
۵۲ ۶۷ ۸۷ ۱۱۴ ۱۵۱ ۲۰۳
...

حال می‌توان به شیوه‌ی عملکرد این مثلث دست یافت: «یک» به سطر دوم مثلث و ابتدای سطر آمده است. سپس با «یک» در بالای سر خود جمع شده و حاصل در آخر همان سطر نوشته شده است:



سپس «دو» به سطر پایین و سمت چپ سطر منتقل شده است، با عدد بالای سرش که «یک» باشد جمع شده و حاصل، یعنی «سه»، در وسط سطر نوشته شده است. سپس «سه» با «دو» در بالای سر خود جمع شده است و حاصل که «پنج» باشد، در انتهای سطر قرار گرفته است:



اگر همین روند را دنبال کنیم، به غیر از این که مثلث بالا را شکل داده‌ایم، به سادگی به جملات آتی دنباله‌ی افراز nعضوی دست می‌یابیم. رابطه‌ای که بر این مثلث حکم‌فرماست،

این گونه است :

آخرین عدد به دست آمده در سطر nام از مثلث برابر با تعداد کل افرازهای یک مجموعه‌ی nعضوی است. برای مثال، تعداد کل افرازهای یک مجموعه‌ی ۱۰عضوی را به وسیله‌ی مثلث گفته شده، چنین محاسبه می‌کنیم :

۱

۱ ۲

۲ ۳ ۵

۵ ۷ ۱۰ ۱۵

۱۵ ۲۰ ۲۷ ۳۷ ۵۲

۵۲ ۶۷ ۸۷ ۱۱۴ ۱۵۱ ۲۰۳

۲۰۳ ۲۵۵ ۳۲۲ ۴۰۹ ۵۲۳ ۶۷۴ ۸۷۷

۸۷۷ ۱۰۸۰ ۱۳۳۵ ۱۶۵۷ ۲۰۶۶ ۲۵۸۹ ۳۲۶۳ ۴۱۴۰

۴۱۴۰ ۵۰۱۷ ۶۰۹۷ ۷۴۳۲ ۹۰۸۹ ۱۱۱۵۵ ۱۳۷۴۴ ۱۷۰۰۷ ۲۱۱۴۷

۲۱۱۴۷ ۲۵۲۸۷ ۳۰۳۰۴ ۳۶۴۰۱ ۴۳۸۳۳ ۵۲۹۲۲ ۶۴۰۷۷ ۷۷۸۲۱ ۹۴۸۲۸ ۱۱۵۹۷۵

مشاهده شد که در این مثلث، با محاسباتی خیلی کمتر از راه‌های قبلی، توانستیم تعداد کل افرازهای مجموعه‌ای ۱۰عضوی را به دست آوریم.

در انتهای مقاله خود را موظف می‌دانم، از تمام کسانی که مرا در راه تدوین این طرح یاری کردند (که مادر و پدرم در ابتدای این فهرست بلند قرار دارند)، تشکر و سپاس به‌عمل آورم. ضمناً از تمامی صاحب‌نظران و خوانندگان تقاضا دارم، پیشنهادهای تکمیلی و اصلاحی و انتقادهای خود را به دفتر مجله ارسال کنند.

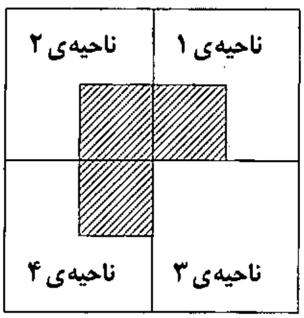
منابع

۱. امیری، حمیدرضا و ایلخانی‌پور، یدالله. مبانی ریاضیات. انتشارات مدرسه. ۱۳۷۴.

۲. گریمالدی، رالف. ریاضیات گسسته و ترکیباتی (ج۴). ترجمه‌ی محمدعلی رضوانی و بیژن شمس. انتشارات فاطمی. تهران. ۱۳۷۶.

تفریح اندیشه

● هادی رنجبران



چهار ناحیه‌ی بالا را در نظر بگیرید، سعی کنید با رسم پاره‌خط‌هایی :

ناحیه‌ی ۱ را به دو قسمت برابر؛

ناحیه‌ی ۲ را به سه قسمت برابر؛

ناحیه‌ی ۳ را به چهار قسمت برابر؛

ناحیه‌ی ۴ را به هفت قسمت برابر تقسیم کنید.

● محمدهاشم رستمی

۲

رویکرد هندسی، رویکرد جبری- مختصاتی در آموزش هندسه

اشاره: یکی از مهم‌ترین پیوندها و اتصال‌ها در همه‌ی ریاضیات، اتصال و پیوند بین هندسه و جبر است. (از استانداردهای موضوعی NCTM)

در این شماره نیز این اتصال و پیوند را در فضای سه‌بعدی بررسی می‌کنیم.

نکته‌ی مهم: ضمن بررسی رویکرد هندسی، رویکرد جبری- مختصاتی در آموزش هندسه برخی از راهبردهای مهم برای حل مسأله‌های هندسه را مطرح می‌کنیم، درضمن لازم است گفته شود مسأله‌هایی را که با این دو رویکرد حل می‌کنیم، مسأله‌هایی از کتاب درسی هندسه‌ی ۱ و هندسه‌ی ۲ هستند، تا دانش‌آموزان بتوانند، مسائل دیگر این کتاب‌ها را با این دو رویکرد حل کنند.

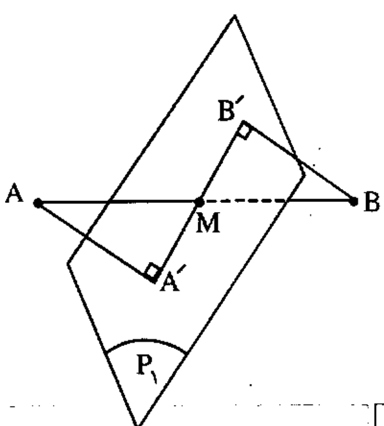
مثال ۱۰. آیا برای دو نقطه‌ی متمایز A و B و خط L، صفحه‌ای وجود دارد که بر L بگذرد و A و B از آن به یک فاصله باشند؟ در حالت‌های گوناگون چند جواب وجود دارد؟

مسئله را با روش هندسی و جبری- مختصاتی حل می‌کنیم.

روش هندسی

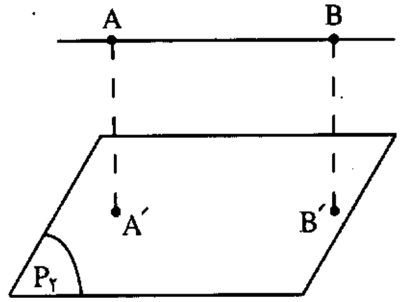
در مثال ۵ دیدیم، دو مجموعه صفحه وجود دارند که دو نقطه‌ی A و B از آن‌ها به یک فاصله‌اند:

دسته‌ی اول، مجموعه‌ی تمام صفحه‌هایی است که از نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB می‌گذرند. صفحه‌ی P_1 در شکل «الف» یکی از این صفحه‌ها را نشان می‌دهد.



شکل الف

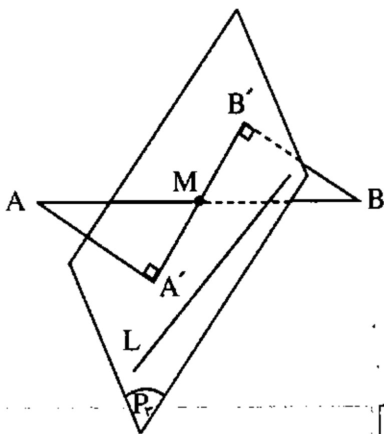
دسته‌ی دوم، مجموعه‌ی تمام صفحه‌هایی است که با خط AB (راستای AB) موازی است. صفحه‌ی P_2 در شکل «ب» یکی از این صفحه‌ها را نشان می‌دهد.



شکل پ

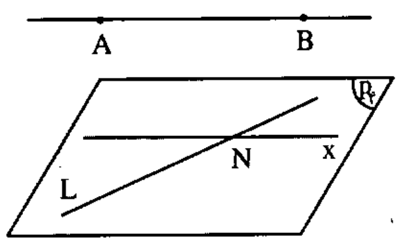
با توجه به این مطلب، در حالت کلی دو صفحه جواب مسئله هستند:

یکی صفحه‌ای که بر خط L و نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB می‌گذرد. این صفحه را P_3 می‌نامیم. شکل پ آن را نشان می‌دهد.



شکل پ

صفحه‌ی دیگر بر خط L می‌گذرد و با خط AB موازی است. برای رسم این صفحه از یک نقطه‌ی دل‌خواه مانند N واقع بر خط L، خط Nx را موازی AB رسم می‌کنیم. صفحه‌ی P_4 که بر دو خط متقاطع L و Nx می‌گذرد، جواب دیگر مسئله است (شکل ت).

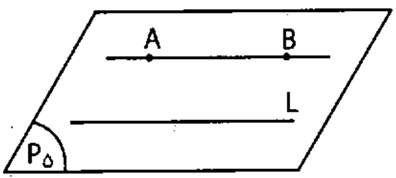


شکل ت

بحث: با توجه به وضع خط AB و خط L و نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB این حالت‌ها را خواهیم داشت:

۱. اگر خط AB موازی خط L نباشد و نقطه‌ی M نیز روی خط L قرار نداشته باشد، مسئله دو جواب دارد که همان جواب‌های مشخص شده در شکل‌هایی (پ) و (ت) هستند.

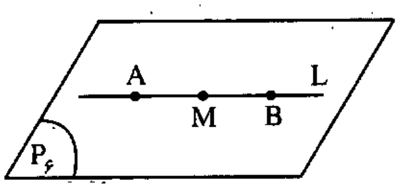
۲. اگر خط AB موازی با خط L و متمایز از آن باشد (یعنی منطبق بر L نباشد)، مسئله بی‌شمار جواب دارد که صفحه‌های گذرنده بر L (دسته صفحه‌ی گذرنده بر خط L) هستند. یکی از این صفحه‌ها، صفحه‌ای است که بر خط L و خط AB می‌گذرد. زیرا صفحه‌ای که بر خط L و نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB می‌گذرد، شامل خط AB نیز می‌شود. در شکل، خط AB بر صفحه‌ی P_5 واقع است، چون بنا به قضیه‌ای داریم: «اگر خطی موازی یک صفحه و از جمله روی آن صفحه باشد و از یک نقطه روی صفحه، خطی موازی آن رسم کنیم، آن خط به تمامی در آن صفحه قرار می‌گیرد.»



شکل ث

در این حالت، فاصله‌ی دو نقطه‌ی A و B از صفحه‌ی گذرنده بر L و AB، مساوی صفر است. در مورد بقیه‌ی صفحه‌ها این فاصله‌های مساوی صفر نیستند. بنابراین، در این حالت مسئله بی‌شمار جواب دارد.

۳. اگر خط AB روی خط L باشد، مسئله بی‌شمار جواب دارد. در واقع در این حالت تمام صفحه‌های گذرنده بر L (یا AB) جواب مسئله هستند. صفحه‌ی P_6 در شکل «ج» یکی از این بی‌شمار صفحه را نشان می‌دهد. در این حالت، فاصله‌ی دو نقطه‌ی A و B از هر یک از صفحه‌های گذرنده بر L، مساوی صفر است.

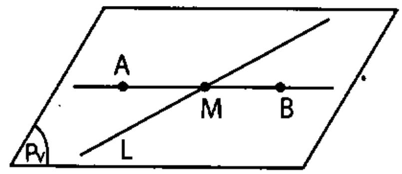


شکل ج

۴. اگر AB موازی L نباشد، اما نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB روی خط L باشد، یعنی در واقع خط AB و خط L، در نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB متقاطع باشند، هر صفحه‌ای که بر خط L بگذرد، جواب مسئله است. یکی از این صفحه‌ها،

صفحه‌ای است که بر دو خط متقاطع L و AB می‌گذرد.

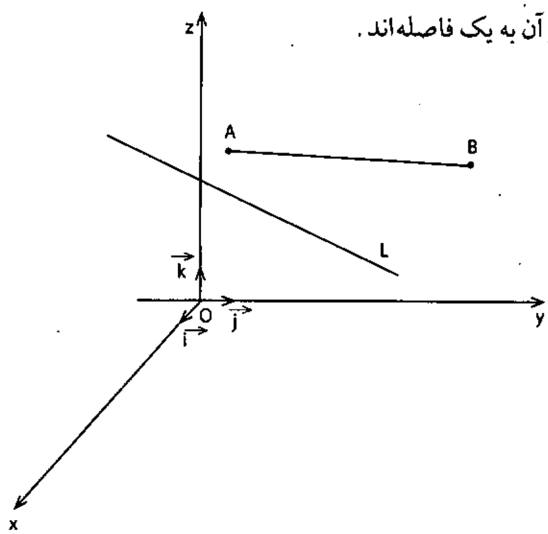
پس در این حالت، مسئله بی‌شمار جواب دارد. صفحه‌ی $P_۷$ در شکل «ج» یکی از صفحه‌های جواب مسئله است.



شکل ج

روش جبری ـ مختصاتی

دستگاه محورهای مختصات قائم o-xyz را در نظر می‌گیریم. در این دستگاه مختصات فرض می‌کنیم ($A=(x_۱,y_۱,z_۱)$ و $B=(x_۲,y_۲,z_۲)$ و خط به معادله‌ی $L: \frac{x-x_۰}{p}=\frac{y-y_۰}{q}=\frac{z-z_۰}{r}$ باشد. می‌خواهیم معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسیم که بر خط L می‌گذرد و دو نقطه‌ی A و B از آن به یک فاصله‌اند.



می‌دانیم که در حالت کلی، دو صفحه جواب مسئله هستند:

الف) صفحه‌ای که بر خط L و نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB می‌گذرد؛ با توجه به این که:

$$M=\left(\frac{x_۱-x_۲}{۲},\frac{y_۱-y_۲}{۲},\frac{z_۱-z_۲}{۲}\right)$$

برای نوشتن معادله‌ی این صفحه می‌توان از روش‌های متفاوتی استفاده کرد. یکی از آن‌ها، تعیین دو نقطه‌ی دل‌خواه C و D از خط L و سپس نوشتن معادله‌ی صفحه‌ی گذرنده بر سه نقطه‌ی M، C و D است. روش دیگر هم این است که معادله‌ی دسته صفحه‌ی گذرنده بر خط L را بنویسیم و از بین صفحه‌های این دسته صفحه، صفحه‌ای را مشخص کنیم که بر نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB می‌گذرد.

ب) صفحه‌ای که بر خط L می‌گذرد با خط AB موازی است.

برای نوشتن معادله‌ی این صفحه نیز روش‌های متفاوتی وجود دارند؛ از جمله: بردار قائم صفحه را که با بردار $\vec{L_D}\wedge\vec{AB}$ هم‌راستا است، تعیین و نقطه‌ای دل‌خواه روی خط L اختیار می‌کنیم. حال با داشتن یک نقطه از صفحه و بردار قائم آن معادله‌ی صفحه را می‌نویسیم.

در ادامه، برای روشن‌تر شدن این روش حل (روش جبری ـ مختصاتی) چند مثال می‌آوریم.

مثال ۱. دو نقطه‌ی $A=(۲,-۱,۳)$ و $B=(-۲,۳,۱)$ و خط $L: \frac{x+۱}{۳}=\frac{y-۲}{۲}=\frac{z}{-۱}$ داده شده‌اند. معادله‌ی صفحه‌ی را بنویسید که بر خط L می‌گذرد و دو نقطه‌ی A و B از آن به یک فاصله‌اند.

حل: الف) نوشتن معادله‌ی صفحه‌ای که بر خط L و نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB می‌گذرد.

روش اول: دو نقطه دل‌خواه C و D از خط L را مشخص می‌کنیم. داریم:

$C=(-۱,۲,۰)$ و $D=(۲,۴,-۱)$

اکنون مختصات نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB را به‌دست می‌آوریم. داریم:

$$M\left|\begin{array}{l} x=\frac{x_۱+x_۲}{۲}=\frac{۲+(-۲)}{۲}=۰ \\ y=\frac{y_۱+y_۲}{۲}=\frac{-۱+۳}{۲}=۱\Rightarrow M=(۰,۱,۲) \\ z=\frac{z_۱+z_۲}{۲}=\frac{۳+۱}{۲}=۲ \end{array}\right.$$

حال معادله‌ی صفحه‌ی P گذرنده بر سه نقطه‌ی C، D و M را می‌نویسیم. برای نوشتن معادله‌ی این صفحه نیز به روش‌های متفاوتی عمل کنیم؛ از جمله:

$$\vec{CD}=(۲+۱,۴-۲,-۱-۰)=(۳,۲,-۱)$$

$$\vec{CM}=(۰+۱,۱-۲,۲-۰)=(۱,-۱,۲)$$

$$\vec{CD}\wedge\vec{CM}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ ۳ & ۲ & -۱\\ ۱ & -۱ & ۲\end{vmatrix}=۳\vec{i}-۷\vec{j}-۵\vec{k}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{N_p} = (۲,-۷,-۵)$

$a(x-x_۱)+b(y-y_۱)+c(z-z_۱)=۰$
$\Rightarrow ۳(x+۱)-۷(y-۲)-۵(z-۰)=۰$
$\Rightarrow ۳x-۷y-۵z+۱۷=۰$

معادله‌ی صفحه‌ی خواسته شده

نکته: در این حالت به سادگی می‌توان نشان داد که AB موازی L نیست، زیرا پارامترهای هادی $\overrightarrow{AB}$ و خط Lمتناسب نیستند. هم‌چنین نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB روی خط L نیست، زیرا مختصات M در معادله‌ی L صدق نمی‌کند.

روش دوم

۱. مختصات نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB را تعیین می‌کنیم. داریم:

$$M=(\frac{x_۱+x_۲}{۲}=۰, y=\frac{y_۱+y_۲}{۲}=۱, z=\frac{z_۱+z_۲}{۲}=۲)$$
$$\Rightarrow M=(۰,۱,۲)$$

۲. معادله‌ی دسته صفحه‌ی گذرنده بر خط $\frac{x+۱}{۳}=\frac{y-۱}{۲}=\frac{z}{-۱}$ را می‌نویسیم.

داریم:

$$P_۱: \frac{x+۱}{۳}=\frac{y-۲}{۲} \Rightarrow ۲x+۲=۳y-۶$$
$$\Rightarrow P_۱: ۲x-۳y+۸=۰$$

$$P_۲: \frac{x+۱}{۳}=\frac{z}{-۱} \Rightarrow ۳z=-x-۱$$
$$\Rightarrow P_۲: x+۳z+۱=۰$$
$$P_۱+\lambda P_۲=۰ \Rightarrow ۲x-۳y+۸+\lambda(x+۳z+۱)=۰$$
$$\Rightarrow ۲x-۳y+۸+\lambda x+۳\lambda z+\lambda=۰$$
$$\Rightarrow (۲+\lambda)x-۳y+۳\lambda z+\lambda+۸=۰$$

معادله‌ی دسته‌ی صفحه‌ی گذرنده بر L

۳. صفحه‌ای از این دسته صفحه را مشخص می‌کنیم که از نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB می‌گذرد. به این منظور، مختصات نقطه‌ی M باید در معادله‌ی دسته صفحه صدق کند.

داریم:

$$M=(۰,۱,۲) \xrightarrow{\text{در معادله‌ی دسته صفحه}} (۲+\lambda)(۰)-۳(۱)$$
$$+۳\lambda(۲)+\lambda+۸=۰$$

$$\Rightarrow -۳+۶\lambda+\lambda+۸=۰ \Rightarrow ۷\lambda+۵=۰ \Rightarrow \lambda=\frac{-۵}{۷}$$

$$\Rightarrow (۲-\frac{۵}{۷})x-۳y+۳(-\frac{۵}{۷})z+(-\frac{۵}{۷})+۸=۰$$

$$\frac{۹}{۷}x-۳y-\frac{۱۵}{۷}z+\frac{۵۱}{۷}=۰ \Rightarrow ۹x-۲۱y-۱۵z+۵۱=۰$$

$$\Rightarrow ۳x-۷y-۵z+۱۷=۰$$

معادله‌ی صفحه‌ی جواب مسئله که همان معادله‌ی صفحه‌ی به‌دست آمده در روش اول است.

روش سوم

می‌دانیم معادله‌ی صفحه‌ای که بر سه نقطه‌ی $(x_۱,y_۱,z_۱)$ و $(x_۲,y_۲,z_۲)$ و $(x_۳,y_۳,z_۳)$ می‌گذرد، به‌صورت زیر است:

$$\begin{vmatrix} x-x_۱ & y-y_۱ & z-z_۱ \\ x_۲-x_۱ & y_۲-y_۱ & z_۲-z_۱ \\ x_۳-x_۲ & y_۳-y_۱ & z_۳-z_۲ \end{vmatrix}=۰$$

با توجه به این مطلب و این‌که نقطه‌ی $M=(۰,۱,۲)$ وسط پاره‌خط AB یک نقطه از این صفحه و $C=(-۱,۲,۰)$ و $D=(۲,۴,-۱)$ دو نقطه‌ی دیگر از خط L و متعلق به این صفحه هستند، خواهیم داشت:

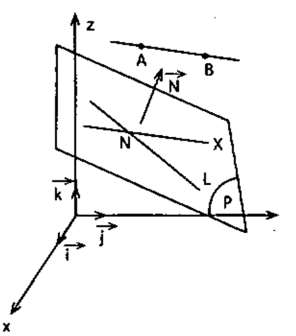
$$\begin{vmatrix} x-۰ & y-۱ & z-۲ \\ -۱ & ۱ & -۲ \\ ۲ & ۳ & -۳ \end{vmatrix}=۰$$

$$\Rightarrow ۳(x-۰)+(-۷)(y-۱)+(-۵)(z-۲)=۰$$
$$\Rightarrow ۳x-۷y-۵z+۱۷=۰$$

معادله‌ی صفحه‌ی خواسته شده

ب) نوشتن معادله‌ی صفحه‌ای که بر خط L می‌گذرد و با خط AB موازی است.

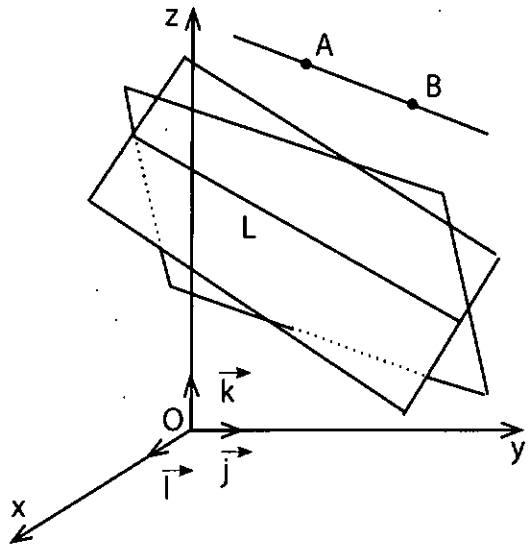
این صفحه را P می‌نامیم. معادله‌ی آن را به روش‌های متفاوتی می‌توان به‌دست آورد:



روش اول:

بردار قائم صفحه‌ای که بر خط L می‌گذرد و با خط AB موازی است، حاصل ضرب برونی این

دو بردار یعنی $\vec{V}_P = \vec{V}_L \times \vec{V}_{AB}$ است. این بردار را مشخص می‌کنیم. داریم:



$$A = (۳,-۱,۳), B = (-۲,۳,۱)$$
$$\Rightarrow \vec{AB} = (-۲-۲, ۳+۱, ۱-۳)$$
$$\Rightarrow \vec{AB} = (-۴,۴,-۲), L: \frac{x+۱}{۳} = \frac{y-۲}{۲} = \frac{z}{-۱}$$
$$\Rightarrow \vec{V}_L = (۳,۲,-۱)$$
$$\Rightarrow \vec{V}_L \times \vec{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -۴ & ۴ & -۲ \\ ۳ & ۲ & -۱ \end{vmatrix}$$
$$= (۰)\vec{i} + (-۱۰)\vec{j} + (-۲۰)\vec{k}$$
$$\Rightarrow \vec{N}_P = (۰,-۱۰,-۲۰) \text{ یا } \vec{N}_P = (۰,۱,۲)$$

اکنون یک نقطه از خط L را نیز مشخص می‌کنیم. داریم:
$$E = (-۱,۲,۰) \in L$$

حال معادله‌ی خط گذرنده از نقطه‌ی E و عمود بر بردار $\vec{N}$ را می‌نویسیم. داریم:
$$a(x-x_۱) + b(y-y_۱) + c(z-z_۱) = ۰$$
$$\Rightarrow ۰(x+۱) + ۱(y-۲) + ۲(z-۰) = ۰$$
$$\Rightarrow P: y + ۲z - ۲ = ۰$$ معادله‌ی صفحه‌ی جواب مسئله

روش دوم:

معادله‌ی دسته صفحه‌ی گذرنده L را می‌نویسیم و از بین صفحه‌های این دسته صفحه، صفحه‌ای را مشخص می‌کنیم که با خط AB موازی است. معادله‌ی دسته صفحه‌ی گذرنده بر L را قبلاً نوشتیم. داریم:
$$(۲+\lambda)x - ۳y + ۳\lambda z + \lambda + ۸ = ۰$$
از طرف دیگر داشتیم:
$$\vec{AB} = (-۴,۴,-۲) \text{ یا } \vec{AB} = (-۲,۲,-۱)$$
از آن‌جا:
$$\vec{V}_{\text{دسته صفحه}} = (۲+\lambda, -۳, ۳\lambda), V_{\vec{AB}} = (-۴,۴,-۲)$$
$$\vec{V}_{\text{دسته صفحه}} \perp V_{\vec{AB}} \Rightarrow V_{\text{دسته صفحه}} \times V_{\vec{AB}} = ۰$$

$$(۲+\lambda)(-۲) + (-۳)(۲) + (۳\lambda)(-۱) = ۰$$
$$\Rightarrow -۴ - ۲\lambda - ۶ - ۳\lambda = ۰$$
$$\Rightarrow -۵\lambda - ۱۰ = ۰ \Rightarrow \lambda = -۲$$
$$\lambda = -۲ \xrightarrow{\text{در معادله دسته صفحه}} (-۳+۲)x - ۳y + ۳(-۲)z - ۲ + ۸ = ۰$$
$$\Rightarrow -۳y - ۶z + ۶ = ۰ \Rightarrow y + ۲z - ۲ = ۰$$

معادله‌ی صفحه‌ی گذرنده بر L و موازی AB؛ یعنی جواب دیگر مسئله، که در روش اول نیز همین جواب به‌دست آمد.

مثال ۲. دو نقطه‌ی $A = (۱,۰,۲)$ و $B = (-۳,-۴,۰)$ و خط $L: \frac{x}{۲} = \frac{y-۱}{۲} = \frac{z}{۱}$ داده شده‌اند. معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسید که بر خط L می‌گذرد و دو نقطه‌ی A و B از آن به یک فاصله‌اند.

حل: بردار هادی راستای AB و بردار هادی خط L را به‌دست می‌آوریم تا وضع آن‌ها را نسبت به هم مشخص کنیم. داریم:
$$A(۱,۰,۲), B = (-۳,-۴,۰) \Rightarrow \vec{AB} = (-۳-۱, -۴-۰, ۰-۲)$$
$$\Rightarrow \vec{AB} = (-۴,-۴,-۲), L: \frac{x}{۲} = \frac{y-۱}{۲} = \frac{z}{۱}$$
$$\Rightarrow \vec{V}_L = (۲,۲,۱), \frac{p}{p'}: \frac{-۴}{۲} = -۲,$$
$$\frac{q}{q'} = \frac{-۴}{۲} = -۲, \frac{r}{r'} = \frac{-۲}{۲} = -۲$$

$$\Rightarrow \frac{p}{p'}=\frac{q}{q'}=\frac{r}{r'}=-2 \Rightarrow \overrightarrow{AB}\parallel L$$

$$A=(1,0,2)\longrightarrow \frac{1}{2}\neq\frac{0-1}{2}\neq A\notin L$$

پس خط AB موازی با L و متمایز از آن است. بنابر آن چه در رویکرد هندسی بحث شد، در این حالت مسئله بی‌شمار جواب دارد. مجموعه این جواب‌ها، دسته صفحه‌ای است که بر خط L می‌گذرد. معادله‌ی این دسته صفحه را می‌نویسیم. داریم:

$$L:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1}\Rightarrow P_1:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{2}$$

$$\Rightarrow x=y-1\Rightarrow P_1:x-y+1=0$$

$$P_2:\frac{x}{2}=\frac{z}{1}\Rightarrow x=2z\Rightarrow P_2:x-2z=0$$

$$P_1+\lambda P_2=0\Rightarrow x-y+1+\lambda(x-2z)=0$$

معادله‌ی دسته صفحه‌ی گذرنده بر L و جواب مسئله

$$\Rightarrow(1+\lambda)x-y-2\lambda z+1=0$$

نکته: یکی از این صفحه‌ها بر L و AB می‌گذرد. فاصله‌های دو نقطه‌ی A و B از این صفحه مساوی صفر است، چون این دو نقطه روی صفحه قرار دارند. در مورد بقیه‌ی صفحه‌های جواب مسئله، فاصله‌های مساوی A و B از هر یک از صفحه‌ها مخالف صفر است. به ازای مقادیر گوناگون λ می‌توان معادله‌ی این صفحه‌ها را مشخص کرد. لازم به ذکر است، دو صفحه از صفحه‌های جواب مسئله، همان صفحه‌های $P_1:x-y+1=0$ و $P_2:x-2z=0$ هستند که به ازای $\lambda=0$ و $\lambda\to\infty$ به‌دست می‌آیند.

نکته: معادله‌ی دسته صفحه‌ی گذرنده بر L را به‌صورت $\alpha P_1+\beta P_2=0$ که α و β عددهای حقیقی‌اند نیز می‌توان نشان داد؛ یعنی به‌صورت:

$\alpha(x-y+1)+\beta(x-2z)=0$

در این حالت به ازای $\alpha=0$، $P_2:x-2z=0$، و به ازای $\beta=0$، صفحه‌ی $P_1:x-y+1=0$ به‌دست می‌آید و به ازای بقیه‌ی مقدارهایی که به α و β نسبت می‌دهیم، صفحه‌های دیگر جواب مسئله حاصل می‌شود. صفحه‌ی گذرنده بر L و AB را نیز می‌توان مشخص کرد که یکی از جواب‌های مسئله است.

مثال ۳. خط $L:\frac{x-1}{4}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{3}$ و دو نقطه‌ی $A=(2,-1,4)$ و $B=(0,1,-2)$ داده شده‌اند. معادله‌ی صفحه‌ای را مشخص کنید که بر خط L می‌گذرد و دو نقطه‌ی A و B از آن به یک فاصله‌اند.

حل: وضع خط ABو خط L و هم‌چنین وضع نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB را نسبت به خط Lمشخص می‌کنیم. داریم:

$$A=(2,-1,4),B=(0,1,-2)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(-2,2,-6)$$

$$\overrightarrow{V}_L=(4,2,3),\frac{-2}{4}\neq\frac{2}{2}\neq\frac{-6}{3}\Rightarrow$$ AB موازی L نیست

$$M=(1,0,1)\xrightarrow{\text{در معادله‌ی L}}\frac{1-1}{3}=\frac{0}{2}=\frac{1-1}{3}\Rightarrow 0=0=0$$

پس نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB روی خط L قرار دارد. بنابراین مسئله بی‌شمار جواب دارد و این بی‌شمار جواب دسته صفحه‌ای است که بر خط L می‌گذرد (یکی از صفحه‌های این دسته صفحه، صفحه‌ی گذرنده بر دو خط متقاطع L و AB است). معادله‌ی این دسته صفحه را می‌نویسیم.

$$L:\frac{x-1}{4}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{3}$$

$$\Rightarrow P_1:\frac{x-1}{4}=\frac{y}{2}\ \text{یا}\ \frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}$$

$$\Rightarrow x-1=2y\Rightarrow P_1:x-2y-1=0$$

$$P_2:\frac{y}{2}=\frac{z-1}{3}\Rightarrow P_2:3y-2z+2=0$$

$$\Rightarrow\alpha(x-2y-1)+\beta(3y-2z+2)=0$$

معادله‌ی دسته صفحه‌ی جواب مسئله (دسته صفحه‌ی گذرنده بر L).

نکته: دو صفحه‌ی P_1 و P_2، دو صفحه‌ی جواب مسئله‌اند که به ازای $\beta=0$ و $\alpha=0$ به‌دست می‌آیند. برای تعیین معادله‌ی صفحه‌ی گذرنده بر L و AB در این حالت، کافی است مختصات یک نقطه‌ی دل‌خواه AB (غیر از نقطه‌ی M) را در معادله‌ی دسته صفحه قرار دهیم.

به ازای مقادیر دیگری که به‌جای عددهای حقیقی α و β قرار می‌دهیم، معادله‌ی صفحه‌های دیگر جواب مسئله به‌دست می‌آید. ■

● شهین بهنیا

دبیر ریاضی دبیرستان‌های چهاردانگه

انتگرال‌گیری جدولی

اشاره

در این مقاله به انتگرال‌گیری به روش جدولی پرداخته و سعی بر این است که در جدول‌ها، با استفاده از مشتق‌هایی که قبلاً آموخته‌ایم و نیز انتگرال‌های ساده به جواب برسیم. این روش برای به‌جواب رسیدن در انتگرال‌هایی مناسب است که به‌صورت حاصل‌ضربی از دو عامل نوشته می‌شوند. بدین‌ترتیب، هنر خوب یاد گرفتن و خوب یاد دادن را می‌آموزیم و نشان می‌دهیم که ریاضی نیز علمی زیبا و فهمیدنی است؛ البته اگر با بردباری، پشتکار و امید به یادگیری آن بپردازیم و همواره در پی آموختن مطالب جدید باشیم.

انتگرال جدولی راهی برای پیدا کردن سریع جواب انتگرال‌هاست. هم‌چنین سرچشمه‌ای برای استخراج قاعده‌های مهم آنالیز و تابع اولیه است. این انتگرال‌گیری بر «جمع انتگرال‌های متوالی» استوار است و با استفاده از آن می‌توان حاصل $\int F(t)G(t)dt$ را به‌دست آورد. این روش ما را از انجام اعمال جبری خسته‌کننده برای به‌دست آوردن حاصل این انتگرال‌ها بی‌نیاز می‌سازد.

ستون اول	ستون دوم
$+F$	G
$-F^{(1)}$	$G^{(-1)}$
$+F^{(2)}$	$G^{(-2)}$
$-F^{(3)}$	$G^{(-3)}$
$\vdots$	$\vdots$
$(-1)^n F^{(n)}$	$G^{(-n)}$
$(-1)^{n+1} F^{(n+1)}\dots$	$G^{(-n-1)}$

همان‌گونه که این طرح در جدول دیده می‌شود، در ستون اول، $F(t)$ و مشتق‌های متوالی آن با افزودن جمع و منهای متناوب در کنار آن نوشته می‌شود. پس $F^{(1)}$ مشتق اول تابع و $F^{(2)}$ مشتق دوم تابع و $F^{(3)}$ مشتق سوم تابع و ... و $F^{(n)}$ مشتق nام تابع را در ستون اول نشان می‌دهد.

در ستون دوم جدول، $G(t)$ و انتگرال‌های متوالی آن دیده می‌شود. $G^{(-1)}$ انتگرال اول تابع و $G^{(-2)}$ انتگرال دوم و به همین صورت تا $G^{(-n)}$ که انتگرال nام $G(t)$ است. در این انتگرال‌گیری متوالی، عددهای ثابت را به حساب نمی‌آوریم و آن‌ها را در حاصل نهایی به صورت عدد C ثبت می‌کنیم. در نهایت جواب انتگرال با جمع حاصل‌ضرب‌هایی که در جدول به‌صورت خطوط مایل نشان داده شده‌اند، به‌دست می‌آید.

پس به‌صورت نمادین می‌توان نوشت:

$$\int F(t)G(t)dt = FG^{(-1)} - F^{(1)}G^{(-2)} + F^{(2)}G^{(-3)} + \dots$$
$$+(-1)^n F^{(n)}G^{(-n-1)} + (-1)^{n+1}\int F^{(n+1)}(t)G^{(-n-1)}(t)dt$$
$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k F^k G^{(-k-1)} + (-1)^{n+1}\int F^{(n+1)}(t)G^{(-n-1)}(t)dt$$

مثال ۱. حاصل $\int x^2 \sin x dx$ را به‌دست آورید.

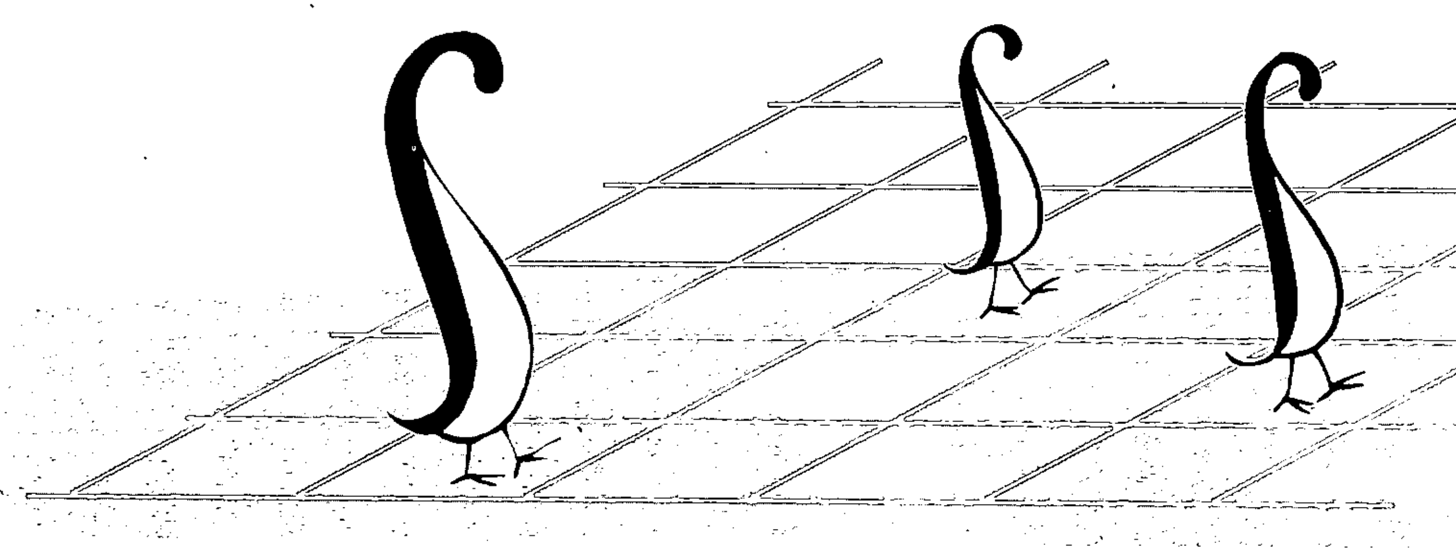
حل: در نظر می‌گیریم:

$F(x) = x^2$

$G(x) = \sin x$

و می‌دانیم که:

$\int \sin x dx = -\cos x + c$ و $\int \cos x dx = \sin x + c$



ستون دوم	ستون اول
$G(x)=\sin x$	$+F(x)=x^{2}$
$G^{(-1)}=-\cos x$	$-F^{(1)}=2x$
$G^{(-2)}=-\sin sx$	$+F^{(2)}=2$
$G^{(-3)}=\cos x$	$-F^{(3)}=0$

انتگرال‌های متوالی sinx — مشتق‌های متوالی x^{2} تا صفر

وقتی در ستون اول به صفر می‌رسیم، کار انتگرال‌گیری به پایان رسیده است، پس داریم:

$$\int x^{2}\sin x dx = F(x)G^{(-1)} - F^{(1)}G^{(-2)} + F^{(2)}G^{(-3)}$$

$$= -x^{2}\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + c$$

با توجه به این‌که:

$$G^{(-1)} = \int G(x)dx = \int \sin x dx = -\cos x + c$$

ولی همان‌طور که گفتیم، ثابت انتگرال (C) را در هریک از مراحل انتگرال‌گیری نادیده می‌گیریم. پس $G^{(-1)}=\cos x$ را در جدول می‌نویسیم و به همین ترتیب برای $G^{(-2)}$ و $G^{(-3)}$ عمل می‌کنیم که در جدول نوشته‌ایم. البته این مقدار ثابت در حاصل نهایی انتگرال نوشته شده است.

مثال۲. حاصل $\int \frac{3x-2}{\sqrt{x}}dx$ را به‌دست آورید.

حل: در نظر می‌گیریم:

$$F(x) = 3x-2$$
$$G(x) = (\sqrt{x})^{-1}$$

و می‌دانیم که:

$$\int x^{n} = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

ستون دوم	ستون اول
$G(x)=(\sqrt{x})^{-1}=x^{\frac{-1}{2}}$	$+F(x)=(3x-2)$
$G^{(-1)}=\dfrac{x^{\frac{-1}{2}+1}}{\frac{1}{2}}=2x^{\frac{1}{2}}$	$-F^{(1)}=3$
$G^{(-2)}=2\dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}$	$+F^{(2)}=0$

انتگرال‌های متوالی $\sqrt{x}$ — مشتق‌های متوالی $3x-2$ تا صفر

پس داریم:

$$\int \frac{3x-2}{\sqrt{x}}dx = (3x-2)(2x^{\frac{1}{2}}) - 3(\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}})$$

$$= (3x-2)(2\sqrt{x}) - 4x\sqrt{x}$$
$$= \sqrt{x}(2x-4) + C$$

مثال۲. حاصل $\int x^{2}e^{x}dx$ را به‌دست آورید.

حل: می‌دانیم‌که: $\int e^{x}dx = e^{x}+C$

در نظر می‌گیریم:

$$F(x) = x^{2}$$
$$G(x) = e^{x}$$

ستون دوم	ستون اول
e^{x}	$+\ x^{2}$
e^{x}	$-\ 2x$
e^{x}	$+\ 2$
e^{x}	$-\ 0$

انتگرال‌های متوالی e^{x} — مشتق‌های متوالی x^{2} تا صفر

پس داریم :

$$\int x^2e^x dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$
$$= e^x(x^2-2x+2)+C$$

مثال۴. حاصل $\int e^x \sin x dx$ را محاسبه کنید.

حل: در نظر می‌گیریم :

$F(x) = \sin x$

$G(x) = e^x$

ستون اول	ستون دوم
$+ \ \sin x$	e^x
$- \ \cos x$	e^x
$+ \ (-\sin x)$	e^x
	e^x

$e^x \sin x$ خود عبارت انتگرال است.

توجه کنید، در این مثال با رسیدن به عبارت انتگرال اصلی، دیگر عمل انتگرال گیری را ادامه نمی‌دهیم و برای نوشتن حاصل داریم :

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx$$
$$\left(\int e^x \sin x dx + \int e^x \sin x dx\right) = e^x \sin x - e^x \cos x$$
$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x(\sin x - \cos x) + C$$

مثال۵. حاصل $\int \frac{12t^2+36}{\sqrt[5]{3t+2}}dt$ را محاسبه کنید.

حل: داریم :

$F(t) = 12t^2 + 36$

$G(x) = (3t+2)^{\frac{-1}{5}}$

مشتق‌های متوالی $12t^2+36$ تا صفر — ستون اول	ستون دوم — انتگرال‌های متوالی $(3t+2)^{\frac{-1}{5}}$
$+12t^2+36$	$(3t+2)^{\frac{-1}{5}}$
$-24t$	$\frac{5}{12}(3t+2)^{\frac{4}{5}}$
$+24$	$\frac{25}{324}(3t+2)^{\frac{9}{5}}$
0	$\frac{125}{13608}(3t+2)^{\frac{14}{5}}$

پس داریم :

$$\int \frac{12t^2+36}{\sqrt[5]{3t+2}}dt = (5t^2+15)(3t+2)^{\frac{4}{5}}$$
$$-\frac{50t}{27}(3t+2)^{\frac{9}{5}} + \frac{125}{567}(3t+2)^{\frac{14}{5}} + C$$

تمرین انتگرال‌های زیر را با همین روش محاسبه کنید.

۱) $\int (5x^2+2)\cos x dx$

۲) $\int e^x(-x^3+2x-1)dx$

۳) $\int \frac{5x^2+6x}{2\sqrt{x}}dx$

۴) $\int \sin x(\frac{x^3-1}{2})dx$

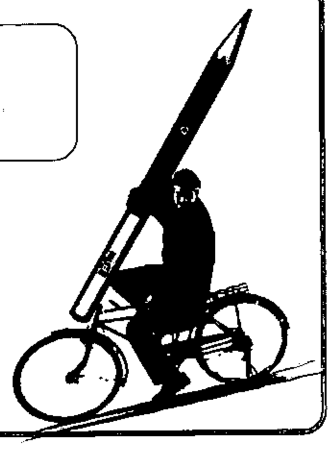
منابع ....

1. www.matharticles.com

۲. توماس، جورج ب. حساب دیفرانسیل و انتگرال (ج ۱).

لطیفه

روزی عده‌ای از مهندسان می‌خواستند ارتفاع میله‌ی پرچم را اندازه‌گیری کنند و چون فقط متر داشتند و نمی‌توانستند آن را جایی بند کنند، مانده بودند که چه کنند. در همین حال ریاضی‌دانی از آن‌جا عبور می‌کرد از او کمک خواستند و گفت این که خیلی آسان است و میله‌ی پرچم را از جای درآورد و روی زمین گذاشت و طول آن را با متر اندازه گرفت، بعد از رفتن او یکی از مهندسان گفت، این ریاضی‌دان‌ها چه‌قدر بامزه هستند، ما می‌خواستیم ارتفاع میله را حساب کنیم، او طول آن را به ما گفت.



دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی
عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحدتهران

۵

نظریه‌ی مجموعه‌های فازی

۱ ۵

مقدمه

مسائلی که انسان در واقعیت با آن‌ها سروکار دارد، معمولاً دارای ابهام و نوعی عدم قطعیت هستند که به پیچیدگی در آن‌ها می‌انجامد. برای آن که بتوان موضوعی را به‌طور کامل تحلیل کرد، باید اطلاعات کافی و دقیق از آن داشت. ولی انسان در مواجهه با مسائل پیچیده در دنیای واقعی، چون اطلاعات دقیقی از آن‌ها ندارد، به شکل تقریبی ماهیت آن‌ها را تحلیل می‌کند. در این خصوص، پروفسور لطفی‌زاده، بنیان‌گذار منطق و مجموعه‌های فازی بیان کرده است: «هر چه میزان آگاهی از یک سیستم افزایش یابد، پیچیدگی آن سیستم کاهش پیدا می‌کند و درک و تحلیل از آن افزایش می‌یابد. وقتی پیچیدگی سیستم کاهش یابد، دقت روش مدل‌سازی افزایش می‌یابد و ابزار مفیدی برای تحلیل سیستم فراهم می‌شود.»

برای سیستم‌هایی که پیچیدگی کمی دارند، چون میزان عدم قطعیت در آن‌ها کم است، می‌توان با استفاده از روابط ریاضی، رفتار آن‌ها را به شکل دقیق مدل‌سازی و تحلیل کرد. ولی اگر سیستم قدری پیچیده شود، عدم قطعیت افزایش می‌یابد. در این حالت نمی‌توان تحلیل دقیقی از آن به عمل آورد. به منظور تحلیل مناسبی از این نوع سیستم‌ها، از رویکرد استدلال تقریبی فازی استفاده می‌شود. به همین لحاظ، به آن‌ها سیستم‌های «فازی» می‌گویند.

ورودی سیستم‌های فازی، اطلاعاتی فازی یا غیردقیق هستند، یا آن که بررسی سیستم براساس استدلال تقریبی و به شکل فازی و غیردقیق صورت می‌گیرد. نظریه‌ی فازی که به بررسی مفاهیم غیردقیق می‌پردازد، دارای چهار بخش متفاوت است که عبارت‌اند از: ریاضی فازی، منطق و سیستم‌های فازی، تصمیم‌گیری فازی و هوش مصنوعی. ریاضی فازی به بررسی مجموعه‌های فازی و اعمال روی آن‌ها می‌پردازد و همان‌گونه که در قسمت‌های قبل اشاره شد، عضویت یک عنصر در یک مجموعه‌ی فازی، با عددی موسوم به درجه‌ی عضویت بیان می‌شود که مقداری بین صفر و یک است. منطق فازی توسعه یافته‌ی منطق کلاسیک است که در آن به جای منطق دو ارزشی، از منطق چند ارزشی استفاده می‌شود. در تصمیم‌گیری فازی پارامترها، تابع هدف و قیود مسئله به شکل فازی هستند.

از جمله کاربردهای مهم نظریه‌ی فازی، در هوش مصنوعی و طراحی و ساخت ربات‌های هوشمند است که می‌توان با پردازش فازی، امکان انجام رفتارهایی شبیه انسان را در آن‌ها طراحی کرد.

در قسمت‌های قبل، مفاهیمی چون مجموعه‌ی فازی محدب، عدد فازی و اعمال روی مجموعه‌های فازی معرفی شدند. در این قسمت، ابتدا چند مفهوم در مجموعه‌های فازی را مطرح می‌کنیم:

تعریف: منظور از «ارتفاع یک مجموعه‌ی فازی»، بزرگ‌ترین مقدار درجه‌ی عضویت در آن مجموعه است. ارتفاع مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ را با $h(\tilde{A})$ نمایش می‌دهیم. به این ترتیب:

$$h(\tilde{A}) = \max_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x)$$

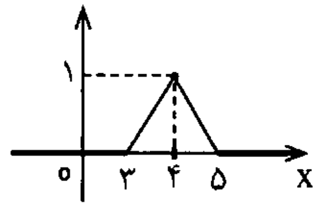
در صورتی که ارتفاع یک مجموعه‌ی فازی ۱ باشد، آن مجموعه‌ی فازی را نرمال و در غیر این صورت غیرنرمال می‌گویند. بنابراین اگر $\tilde{A}$ یک مجموعه‌ی فازی نرمال باشد، آن‌گاه:

$$\exists x \in X,\ \mu_{\tilde{A}}(x) = 1$$

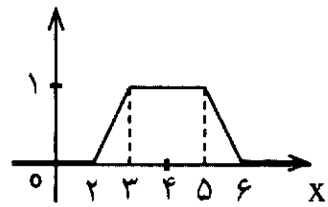
زیر مجموعه‌ای از مجموعه‌ی مرجع X که مقدار درجه‌ی عضویت اعضای این مجموعه ۱ باشد، «هسته‌ی مجموعه‌ی فازی» $\tilde{A}$ نام دارد. هسته‌ی $\tilde{A}$ را با $Core(\tilde{A})$ نمایش می‌دهند. لذا:

$$Core(\tilde{A}) = \left\{x \in X \;\middle|\; \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\right\}$$

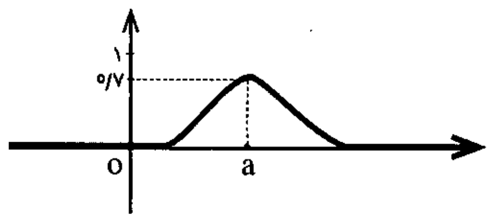
شکل‌های زیر، توابع عضویت نمونه‌ای از یک مجموعه‌ی فازی نرمال و غیرنرمال را نمایش می‌دهند. در هر یک از آن‌ها هسته و ارتفاع مشخص شده‌اند.



مجموعه‌ی فازی نرمال با $h(\tilde{A}) = 1$ و $Core(\tilde{A}) = \{4\}$



مجموعه‌ی فازی نرمال با $h(\tilde{A}) = 1$ و $Core(\tilde{A}) = [3,5]$



مجموعه‌ی فازی غیرنرمال با $h(\tilde{A}) = 0/7$ و $Core(\tilde{A}) = \phi$

هم‌چنین، اگر:

$\tilde{A} = \{(2,0/3),(3,0/6),(4,1),(5,1),(7,0/8),(9,0/4)\}$، آن‌گاه: $h(\tilde{A}) = 1$ و $Core(\tilde{A}) = \{4,5\}$. بنابراین، $\tilde{A}$ مجموعه‌ی فازی نرمالی را نمایش می‌دهد.

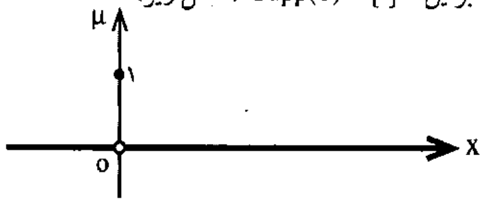
مفهوم دیگری که در مجموعه‌های فازی مطرح می‌شود، «مجموعه‌ی فازی سینگلتون» است که به مجموعه‌ی فازی با تکیه‌گاه یک عضوی اطلاق می‌شود. بنابراین، $\tilde{A}$ یک مجموعه‌ی فازی سینگلتون نام دارد، هرگاه:

$$Supp(\tilde{A}) = \{a\}$$

برای مثال، منظور از صفر سینگلتون، مجموعه‌ای فازی با این تابع عضویت است:

$$\mu_{\tilde{o}}(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

بنابراین: $Supp(\tilde{o}) = \{0\}$ (شکل زیر).



در قسمت قبل، تعریفی از اعداد فازی مطرح شد که زیمرمن[1] ارائه داده است. پس از آن، تعریف عدد فازی، به صورت زیر کامل شد:

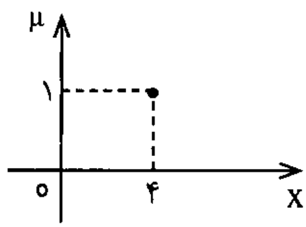
تعریف: مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ را عدد فازی گوییم هرگاه:

الف) $\tilde{A}$ مجموعه‌ی فازی نرمال باشد؛

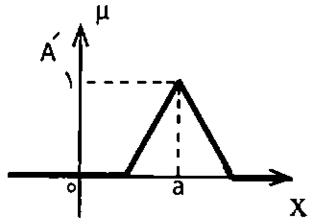
ب) مجموعه‌ی α- برش $\tilde{A}$، یعنی A_α برای هر $0 < \alpha \le 1$، بازه‌ای بسته باشد؛

ج) تکیه‌گاه $\tilde{A}$ مجموعه‌ای کران‌دار باشد.

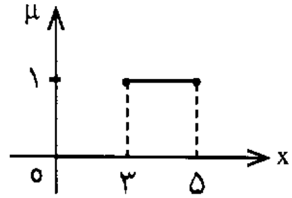
بنابر تعریف بالا، چون α- برش یک عدد فازی برای هر $0 < \alpha \le 1$، مجموعه‌ای بسته، و هر مجموعه‌ی بسته، مجموعه‌ای محدب است، بنابراین هر عدد فازی یک مجموعه‌ی فازی محدب است. ولی عکس این حالت برقرار نیست. یعنی می‌توان مجموعه‌ی فازی محدبی را مثال زد که یک α- برش آن باز یا نیم‌باز باشد. شکل‌های زیر، نمونه‌هایی از تابع عضویت یک عدد فازی را بیان می‌کنند. توجه می‌کنیم که اعداد حقیقی و بازه‌های حقیقی، حالات خاصی از اعداد فازی هستند.



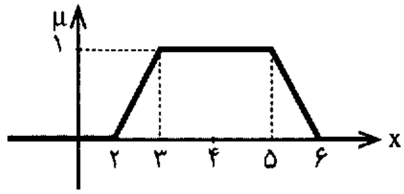
۱ یک عدد حقیقی قطعی (عدد ۴)



۲ یک عدد حقیقی فازی (تقریباً ۴)

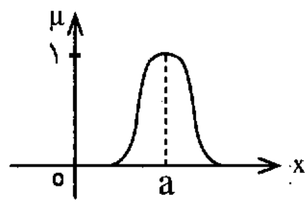


۳ یک بازه‌ی بسته‌ی حقیقی قطعی (بازه‌ی $[۳,۵]$)

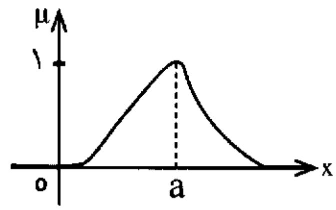


۴ یک بازه‌ی حقیقی فازی (تقریباً بین ۳ و ۵)

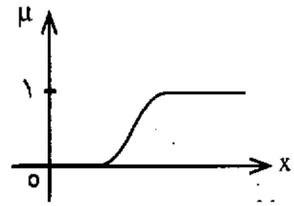
تابع عضویت هر عدد فازی، لزوماً همانند شکل‌های بالا متقارن نیست. به نمونه‌های زیر از اعداد فازی توجه کنید:



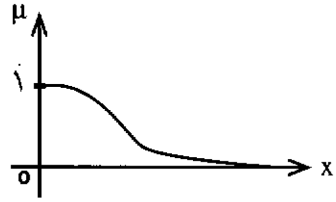
۱ یک عدد فازی زنگی شکل متقارن



۲ یک عدد فازی زنگی شکل غیرمتقارن



۳ اعداد بزرگ



۴ اعداد کوچک

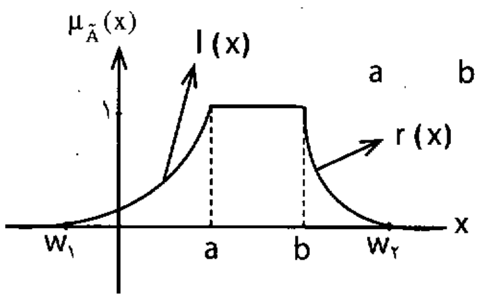
مشاهده می‌کنیم، تابع عضویت هر عدد فازی می‌تواند صعودی یا نزولی باشد. با توجه به تعریف عدد فازی، می‌توان قضیه‌ی زیر را بیان کرد:

قضیه: اگر $\tilde{A}$ یک مجموعه‌ی فازی روی $\mathbb{R}$ باشد، آن‌گاه $\tilde{A}$ یک عدد فازی است اگر و تنها اگر بازه‌ی بسته‌ی غیرتهی نظیر $[a,b]$ وجود داشته باشد که:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} ۱ & a \le x \le b \\ l(x) & x < a \\ r(x) & x > b \end{cases}$$

که در آن l تابعی از $(-\infty,a)$ به $[۰,۱]$، صعودی و از راست پیوسته است و به ازای $x \in (-\infty, w_۱]$ ، $w_۱ \le a$ ، $l(x) = ۰$ ، r تابعی از $(b,+\infty)$ به $[۰,۱]$، نزولی و از چپ پیوسته است و به ازای $x \in [w_۲,+\infty)$ ، $b \le w_۲$ داریم: $r(x) = ۰$.

در شکل زیر، توابع l و r در قضیه به نمایش گذاشته شده‌اند:



نمونه‌ای از یک عدد فازی با هسته‌ی $[a,b]$

چون مجموعه‌های فازی با α- برش‌های خود مشخص می‌شوند، می‌توان با انجام محاسبات روی α- برش‌ها، اعمال ریاضی روی اعداد فازی را برحسب اعمال ریاضی روی α- برش‌های آن‌ها معرفی کرد. در این‌جا اعمال اصلی در بازه‌ها را معرفی می‌کنیم. خواص و جزئیات اعمال بازه‌ای در

مبحثی با عنوان «حساب بازه‌ای» بررسی می‌شود. در ادامه، اعمال جمع، تفریق، ضرب و تقسیم دو بازه‌ی حقیقی، هم‌چنین قرینه و وارون بازه‌ی فازی معرفی می‌شوند:

$$[a,b]+[c,d]=[a+c,b+d]$$
$$-[a,b]=[-b,-a]$$
$$[a,b]-[c,d]=[a,b]+(-[c,d])=[a-d,b-c]$$

با فرض آن‌که: $0\notin[a,b]$

$$[a,b]^{-1}=\left[\frac{1}{b},\frac{1}{a}\right]$$
$$[a,b]\times[c,d]=[\min\{ac,ad,bc,bd\},\max\{ac,ad,bc,bd\}]$$

با فرض $0\notin[c,d]$

$$[a,b]/[c,d]=[a,b]\times[c,d]^{-1}=[a,b]\times\left[\frac{1}{d},\frac{1}{c}\right]$$
$$=\left[\min\left\{\frac{a}{d},\frac{a}{c},\frac{b}{d},\frac{b}{c}\right\},\max\left\{\frac{a}{d},\frac{a}{c},\frac{b}{d},\frac{b}{c}\right\}\right]$$

مثال:

$$[2,6]+[1,4]=[3,10] \qquad -[-7,2]=[-2,7]$$
$$[2,6]-[1,4]=[-2,5] \qquad [2,6]^{-1}=\left[\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right]$$
$$[-2,2]\times[-3,-0.5]=[-6,6]$$
$$[-1,3]/[2,5]=\left[\frac{-1}{2},\frac{3}{2}\right]$$

حال فرض کنید، می‌خواهیم تابع عضویت مجموع و تفاضل دو عدد فازی مثلثی شکل $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ را با توابع عضویت زیر را به دست آوریم:

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}0 & x\le -1\ ,\ x>3\\ \frac{x+1}{2} & -1\le x\le 1\\ \frac{3-x}{2} & 1<x\le 3\end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x)=\begin{cases}0 & x\le 1\ ,\ x>5\\ \frac{x-1}{2} & 1\le x\le 3\\ \frac{5-x}{2} & 3<x\le 5\end{cases}$$

در این حالت، مجموعه‌های α- برش عبارت‌اند از:

$$A_\alpha=[2\alpha-1,3-2\alpha]\ ,\ 0\le\alpha\le 1$$
$$B_\alpha=[2\alpha+1,5-2\alpha]\ ,\ 0<\alpha\le 1$$

با توجه به جمع و تفریق بازه‌های فازی خواهیم داشت:

$$(A+B)_\alpha=[2\alpha-1,3-2\alpha]+[2\alpha+1,5-2\alpha]$$
$$=[4\alpha,8-4\alpha]\ ,\ 0<\alpha\le 1$$

$$(A-B)_\alpha=[2\alpha-1,3-2\alpha]-[2\alpha+1,5-2\alpha]$$
$$=[4\alpha-6,2-4\alpha]\ ,\ 0<\alpha\le 1$$

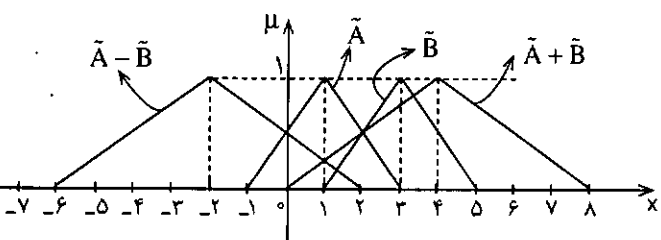
حال از روی مجموعه‌های α- برش فوق توابع عضویت $\tilde{A}+\tilde{B}$ و $\tilde{A}-\tilde{B}$ را به دست می‌آوریم. فرض کنیم: $x\in(A+B)_\alpha$ لذا $4\alpha\le x\le 8-4\alpha$ و از آن‌جا $\alpha\le\frac{x}{4}$ به ازای $0<x\le 4$ و $\alpha\le\frac{8-x}{4}$ به ازای $4<x\le 8$. بنابراین:

$$\mu_{\tilde{A}+\tilde{B}}(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\ ,\ x>8\\ \frac{x}{4} & 0<x\le 4\\ \frac{8-x}{4} & 4<x\le 8\end{cases}$$

به طور مشابه:

$$\mu_{\tilde{A}-\tilde{B}}(x)=\begin{cases}0 & x\le -6\ ,\ x>2\\ \frac{x+6}{4} & -6<x\le -2\\ \frac{2-x}{4} & -2<x\le 2\end{cases}$$

شکل زیر، توابع عضویت $\tilde{A}$، $\tilde{B}$، $\tilde{A}+\tilde{B}$ و $\tilde{A}-\tilde{B}$ را نمایش می‌دهد.



حال سؤالات زیر را مطرح می‌کنیم:

○ آیا حاصل تقریباً ۳+ تقریباً ۱ برابر با تقریباً ۴ می‌شود؟

○ آیا رابطه‌ی تقریباً ۳= تقریباً ۱ + (تقریباً ۱ـ تقریباً ۳) صحیح است؟

دو تابع عضویت مثال بالا، توصیفی از اعداد فازی تقریباً ۱ و تقریباً ۳ را نمایش می‌دهند. با توجه به تابع عضویت $\tilde{A}+\tilde{B}$، پاسخ سؤال اول مثبت است. مجموعه‌ی α- برش $(A+B)_\alpha$ به ازای چند α خاص در زیر آمده است:

$$(A+B)_\alpha=\begin{cases}[1.2,6.8] & \alpha=0.3\\ [2.8,5.2] & \alpha=0.7\\ 4 & \alpha=1\end{cases}$$

ولی پاسخ سؤال دوم منفی است. رابطه‌ی فوق صحیح نیست. علت اصلی برقرار نبودن این رابطه از تعریف تفریق دو بازه‌ی حقیقی ناشی می‌شود. در مثال فوق، مجموعه‌ی α - برش عدد فازی «تقریباً ۱ـ تقریباً ۳» عبارت است از قرینه‌ی مجموعه‌ی α - برش عدد فازی «تقریباً ۳ـ تقریباً ۱»؛ یعنی قرینه‌ی بازه‌ی $[4\alpha-6, 2-4\alpha]$.

بنابراین: $1 \ge \alpha > 0$ و $(\text{تقریباً ۱ـتقریباً ۳})_\alpha = [4\alpha-2, 6-4\alpha]$

حال این بازه با بازه‌ی $(\text{تقریباً ۱})_\alpha = [2\alpha-1, 3-2\alpha]$ جمع می‌شود. بنابراین:

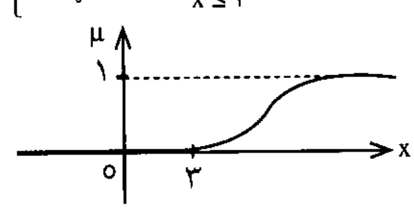
$1 \ge \alpha > 0$ و $(\text{تقریباً ۱ـتقریباً ۳})_\alpha + (\text{تقریباً ۱})_\alpha = [6\alpha-3, 9-6\alpha]$

مجموعه‌ی α - برش حاصل با مجموعه‌ی α - برش عدد فازی تقریباً ۳، یعنی B_α متفاوت است.

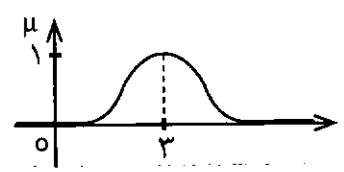
در انتها چگونگی حل تمرین‌هایی را که در مقاله‌ی قبل مطرح شدند، شرح می‌دهیم.

در سؤال اول، تابع عضویت قسمت الف می‌تواند به صورت $\mu_{\tilde{A}}(x) = e^{-(x-3)^2}$ معرفی شود. قسمت ب معرف یک عدد فازی ذوزنقه‌ای یا یک بازه‌ی فازی با هسته‌ی $[1,3]$ است که می‌توانید آن را در رابطه‌ی کلی ارائه شده برای تابع عضویت این نوع از اعداد فازی جای‌گذاری کنید. تابع عضویت برای قسمت ج سؤال را می‌توان به شکل زیر در نظر گرفت:

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+(\dfrac{1}{x-3})^2} & x > 3 \\ 0 & x \le 3 \end{cases}$$



۱ نمودار تابع عضویت $\tilde{C}$



۲ نمودار تابع عضویت $\tilde{A}$

به منظور بررسی محدب بودن $\tilde{A}$ در سؤال ۲، به این صورت عمل می‌کنم (در صورت سؤال، توان ۲ در مخرج کسر تایپ نشده است که در این حل اصلاح گردیده است):

$$\mu_{\tilde{A}}(x) \ge \alpha \Rightarrow \frac{1}{1+(\frac{1}{x-10})^2} \ge \alpha \Rightarrow 1+(\frac{1}{x+10})^2 \le \frac{1}{\alpha}$$

$$\Rightarrow (\frac{1}{x-10})^2 \le \frac{1-\alpha}{\alpha} \Rightarrow (x-10)^2 \ge \frac{\alpha}{1-\alpha} \Rightarrow |x-10| \ge \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

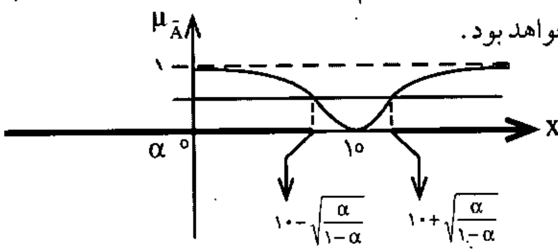
$$\text{یا}\ x-10 \le -\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \Rightarrow x \ge 10+\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \Rightarrow x-10 \ge \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\Rightarrow x-10 \ge \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\ \text{یا}\ x \le 10-\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \Rightarrow x \le 10-\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

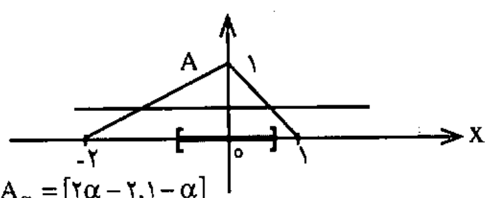
$$\text{یا}\ x \ge 10+\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\Rightarrow A_\alpha = (-\infty, 10-\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}] \cup [10+\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}, +\infty)$$

نمودار زیر توصیفی از تابع عضویت $\tilde{A}$ و α - برش آن است. ملاحظه می‌کنیم، A_α محدب نیست، لذا $\tilde{A}$ محدب نخواهد بود.



این عدد فازی می‌تواند بیانگر مفهوم فازی خیلی دور از ۱۰ باشد. مجموعه‌ی α - برش قسمت دوم $B_\alpha = \left[10-\sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\ ,\ 10+\sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right]$ است که مجموعه‌ای محدب است. بنابراین $\tilde{B}$ محدب است. سؤال سوم مشابه سؤال حل شده در مقاله‌ی قبل حل می‌شود. در مورد سؤال چهارم، به شکل زیر توجه کنید که $\mu_{\tilde{A}}$ را نمایش می‌دهد. ملاحظه می‌کنیم که $\tilde{A}$ یک عدد فازی نه مثبت و نه منفی است. این عدد فازی توصیفی از تقریباً ۱ را ارائه می‌دهد.



پاورقی

1. Zimmermann

منابع

۱. شوندی، حسن. نظریه‌ی مجموعه‌های فازی و کاربرد آن در مهندسی صنایع و مدیریت. انتشارات گسترش علوم پایه. چاپ اول. ۱۳۸۵.

۲. منهاج، محمدباقر. محاسبات فازی. انتشارات دانش نگار. چاپ اول. ۱۳۸۶.

3. Fuzzy Sets and Fuzzy Logic, theory and applications, G. J. Klir and B. Yuan, Prentice Hall of India, 1995.

قضیه‌ی تقسیم

حمیدرضا امیری

۳

اشاره:
در این قسمت و با بیان خواص رابطه‌ی بخش‌پذیری (عادکردن) روی Z در دو قسمت قبل، به بررسی قضیه‌ی تقسیم و نتایجِ حاصل از آن می‌پردازیم:

قضیه‌ی تقسیم: به ازای هر عدد صحیح مانند a و هر عدد طبیعی مانند b، همواره دو عدد صحیح و منحصر به فرد مانند r و q یافت می‌شوند، به قسمی که $a = bq + r$ و $0 \le r < b$.

اثبات قضیه‌ی تقسیم را با روشی بیان می‌کنیم که تا حدی با روش اثبات در کتاب درسی متفاوت است:

برهان: دنباله‌ی اعداد صحیح زیر را در نظر بگیرید:

$$\ldots, -3b, -2b, -b, 0, b, 2b, 3b, \ldots$$

واضح است که هر عدد صحیح مانند a، همواره بین دو عضو متوالی از این دنباله قرار خواهد گرفت! یعنی عددی صحیح مانند q یافت می‌شود، به قسمی که $qb \le a < (q+1)b$. با اضافه کردن $-qb$ به طرفین نابرابری خواهیم داشت: $0 \le a - qb < b$ که اگر فرض کنیم $\underbrace{r = a - bq}_{a = bq + r}$، در این صورت داریم: $a = bq + r$. بنابراین قسمت اولِ قضیه‌ی یعنی وجود r و q در Z که در رابطه‌های $a = bq + r$ و $0 \le r < b$ صدق کنند، به اثبات رسید. اثبات یکتایی r و q همان اثبات کتاب درسی است!

توجه: از این به بعد در مسائل، a را مقسوم، b را مقسوم‌علیه، q را خارج قسمت و r را باقی‌مانده می‌نامیم.

بیان و اثبات چند قضیه‌ی مقدماتی (لِم)

لِم ۱: اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم علیه را در عددی ضرب کنیم، باقی‌مانده‌ی تقسیم در آن عدد ضرب می‌شود و خارج قسمت تغییر نمی‌کند.

برهان: فرض کنیم $a = bq + r$ تقسیم عدد صحیح و دل‌خواه a بر عدد طبیعی b باشد و q خارج قسمت و r باقی‌مانده. در این صورت داریم:

$$a = bq + r$$
$$\Rightarrow ka = k(bq) + kr$$
$$\Rightarrow ka = (kb)q + kr$$

واضح است که q خارج قسمت تقسیم ka بر kb است و kr باقی‌مانده.

$$(0 \le r < b \Rightarrow 0 \le kr < kb)$$

تذکر: لم ۱ در حالتی که مقسوم و مقسوم‌علیه بر k بخش‌پذیر باشند و نیز برای تقسیم آن‌ها بر k، برقرار است (به عنوان تمرین ثابت کنید.)

لِم ۲: اگر در یک تقسیم k برابر مقسوم علیه را به مقسوم اضافه کنیم و مقسوم‌علیه را تغییر ندهیم، در این صورت خارج قسمت با عدد k جمع می‌شود و باقی‌مانده تغییر نمی‌کند.

برهان: فرض کنیم $a = bq + r$. در این صورت:

$$a = bq + r \Rightarrow a + kb = bq + kb + r$$

$$\Rightarrow (a + kb) = b\underbrace{(q + k)}_{q'} + r$$

لِم ۳: برای به دست آوردن خارجِ قسمتِ تقسیم یک عدد بر حاصل‌ضربِ چند عدد، کافی است آن عدد را بر یکی از عامل‌های ضرب، تقسیم کنیم. خارج قسمتِ حاصل را هم بر یکی دیگر از عوامل تقسیم کنیم و این عمل را ادامه دهیم تا آخرین عاملِ ضرب که آخرین خارج قسمت همان خارج قسمت مطلوب است.

فرض کنیم می‌خواهیم خارج قسمت ۴۵۰ را بر ۵×۳×۷ بیابیم.

$$۴۵۰=۵\times۹۰,\ \ ۹۰=۳\times۳۰,\ \ ۳۰=۷\times۴+۲\Rightarrow q=۴$$

$$۴۵۰=(۷\times۳\times۵)\times۴+۳۰\Rightarrow q'=۴$$

(مشاهده می‌کنید که $q=q'=۴$)

برهان: لِم ۳ را در حالت تقسیمِ عدد a بر bc بررسی می‌کنیم. برای حالتی که a بر حاصل‌ضرب n عدد تقسیم شود نیز به طریق مشابه می‌توان عمل کرد:

(۱) ابتدا a را بر b تقسیم می‌کنیم: $a=bq+r,\ ۰\le r<b$

(۲) سپس q را بر c تقسیم می‌کنیم: $q=cq_۱+r_۱,\ ۰\le r_۱<c$

اگر q را از رابطه‌ی ۲ در رابطه‌ی ۱ قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$a=b(cq_۱+r_۱)+r\Rightarrow a=bcq_۱+(br_۱+r)$$

حال کافی است ثابت کنیم: $br_۱+r_۲<bc$. در این صورت حکم به دست می‌آید و $q_۱$ یعنی آخرین خارج قسمت، همان خارج قسمت مطلوب است.

$$r<b\Rightarrow r\le b-۱$$

$$r_۱<c\Rightarrow r_۱\le c-۱\Rightarrow br_۱\le bc-b$$

$$\xrightarrow{\text{جمع طرفین نامساوی}} r+br_۱\le(b-۱)+(bc-b)\Rightarrow br_۱+r\le bc-۱$$

$$\Rightarrow br_۱+r<bc$$

یک مطلب جالب!

در هر تقسیم، تعداد ارقام خارج قسمت برابر است با حداقل تعداد صفرهایی که باید در جلوی مقسوم‌علیه قرار دهیم تا عدد حاصل از مقسوم بزرگ‌تر شود.

مثال: در تقسیم ۷۶ بر ۶، خارج قسمت دو رقمی است، زیرا اگر حداقل دو صفر جلوی ۶ قرار دهیم، در این صورت حاصل یعنی ۶۰۰ از ۷۶ بزرگ‌تر می‌شود. در صورتی که خارج قسمت تقسیم ۷۶ بر ۸، یک رقمی است. زیرا با قراردادن تنها یک صفر جلوی ۸، عدد حاصل از ۷۶ بزرگ‌تر می‌شود.

لِم ۴: بزرگ‌ترین عددی که می‌توان به مقسوم اضافه کرد تا خارج قسمت تغییر نکند (با ثابت ماندن مقسوم علیه) برابر است با $(b-r-۱)$.

برهان: اگر به طرفین رابطه‌ی $a=bq+r$ عدد n را اضافه کنیم، خواهیم داشت $a+n=bq+n+r$. حال اگر $(a+n)$ را مقسوم و b را همان مقسوم‌علیه و q را خارج قسمت فرض کنیم و $r'=(n+r)$ باقی مانده باشد، باید $n+۱<b$ یا $n<b-۱$ باشد که حداقل مقدار برای آن $n=b-r-۱$ است.

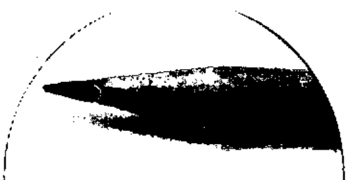
لِم ۵: در تقسیم $a=bq+r$ حداکثر $\left[\frac{r}{q}\right]$ واحد می‌توان به مقسوم‌علیه اضافه کرد تا مقسوم و خارج قسمت تغییر نکنند.

برهان:

$$a=bq+r\Rightarrow a=(b+x)q+r'$$

$$\Rightarrow bq+r=(b+x)q+r'\Rightarrow r'=r-xq,\ \ r'\ge۰$$

$$\Rightarrow r-xq\ge۰\Rightarrow xq\le r\Rightarrow x\le\frac{r}{q}\Rightarrow x_{max}=\left[\frac{r}{q}\right]$$



مسائل حل شده

مسئله‌ی ۱: در یک تقسیم، اگر ۴۱ واحد به مقسوم اضافه کنیم و مقسوم‌علیه را تغییر ندهیم، ۵ واحد به خارج قسمت اضافه و از باقی‌مانده ۴ واحد کم می‌شود. مقسوم‌علیه را بیابید.

حل: فرض $a=bq+r$

$$a+۴۱=b(q+۵)+r-۴\Rightarrow a+۴۱=\underbrace{bq+r}_{a}+۵b-۴$$

$$\Rightarrow ۵b=۴۵\Rightarrow \underline{b=۹}$$

مسئله‌ی ۲: چه تعداد عدد طبیعی مانند a یافت می‌شود که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر ۱۹۸، از سه برابر مربع خارج قسمت ۴ واحد کمتر باشد (بزرگ‌ترین آن‌ها کدام است)؟

حل: طبق قضیه‌ی تقسیم، اگر q را خارج قسمت و r را باقی‌مانده فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$a=198q+r\ ,\ r<198\ ,\ r=3q^2-4$$

$$\Rightarrow 3q^2-4<198 \Rightarrow 3q^2<202 \Rightarrow q^2<\frac{202}{3}$$

$$\Rightarrow q^2\le\left[\frac{202}{3}\right]=67 \Rightarrow q\le\left[\sqrt{67}\right]\Rightarrow q\le 8$$

$$\text{اگر}\begin{cases} q=0\Rightarrow r=-4 \\ q=1\Rightarrow r=-1 \end{cases} \Rightarrow q\neq 0,1,\ 2\le q\le 8$$

بنابراین برای q، هفت مقدار وجود دارد که به ازای $q=8$ بزرگ‌ترین مقدار برای a به دست می‌آید.

$$q=8\Rightarrow r=3\times 8^2-4=188\ ,\ a=198\times 8+188=1772$$

مسئله‌ی ۳: در یک تقسیم، مقسوم علیه ۸ و باقی‌مانده ۵ است. اگر ۳۲ واحد به مقسوم اضافه کنیم و مقسوم علیه را تغییر ندهیم، خارج قسمت چه تغییری می‌کند و باقی‌مانده چه عددی است؟

حل: طبق لم ۲، چون چهار برابر مقسوم‌علیه با مقسوم جمع شده است، خارج قسمت با عدد ۴ جمع می‌شود و خارج قسمت جدید به دست می‌آید. باقی‌مانده تغییر نمی‌کند و همان عدد ۵ است.

مسئله‌ی ۴: در یک تقسیم، مقسوم ۱۲ برابر باقی‌مانده است و باقی‌مانده ۲ واحد از حداکثر مقدار خود کمتر است. اجزای این تقسیم را به دست آورید.

حل: طبق فرض مسئله، اگر $a=bq+r$، در این صورت $a=12r$ و $r=b-1-2$.

$$a=bq+r\Rightarrow 12r=bq+r\Rightarrow 12(b-3)=bq+b-3$$

$$\Rightarrow 12b-36=bq+b-3\Rightarrow 11b-bq=33$$

$$\Rightarrow b(11-q)=3\times 11\Rightarrow\begin{cases} b=11\Rightarrow r=b-3=11-3=8 \\ 11-q=3\Rightarrow q=8 \end{cases}$$

$$a=12r\Rightarrow a=12\times 8=96$$

(توجه دارید که اگر $11-q=11$، در این صورت $q=0$ که نتیجه می‌دهد $a=0$. در این صورت عددی طبیعی به دست نمی‌آید.)

مسئله‌ی ۵: اگر باقی‌مانده‌های تقسیم a و b بر ۲۵ به ترتیب ۱۹ و ۱۷ باشند، باقی‌مانده‌ی تقسیم $(3a-5b)$ را بر ۲۵ بیابید.

حل: طبق فرض مسئله داریم:

$$\begin{cases} a=25q_1+19 \\ b=25q_2+17 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 3a=3\times 25q_1+57 \\ 5b=5\times 25q_2+85 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3a-5b=25\underbrace{(3q_1-5q_2)}_{q\in Z}+57-85=25q-28$$

$$\Rightarrow (3a-5b)=25q-28=25q-50+22=25\overbrace{(q-2)}^{q'\in Z}+22$$

$$\Rightarrow (3a-5b)=25q'+22\Rightarrow \text{باقیمانده}=r=22$$

(توجه دارید که باقی‌مانده‌ی هر تقسیمی، همواره عددی نامنفی است.)

مسئله‌ی ۶: اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم‌علیه هر دو بر عدد صحیح k بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید همواره باقی‌مانده‌ی تقسیم نیز بر k بخش‌پذیر خواهد بود.

حل: روش اول:

$$a=bq+r\ ,\ k|a,\ k|b\Rightarrow a=kq_1\ ,\ b=kq_2$$

$$\Rightarrow kq_1=(kq_2)q+r\Rightarrow r=k\underbrace{(q_1-q_2q)}_{q'}\Rightarrow k|r$$

روش دوم:

$$\left.\begin{array}{l} k|a \\ k|b\rightarrow k|bq \end{array}\right\}\Rightarrow k|a-bq\Rightarrow a|r$$

مسئله‌ی ۷: باقی‌مانده‌های تقسیم عدد a بر دو عدد ۷ و ۸ به ترتیب ۵ و ۶ هستند، باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۵۶ را بیابید.

حل: طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} a=7q_1+5 \\ b=8q_2+6 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 8a=56q_1+40 \\ 7b=56q_2+42 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (8a-7b)=56\underbrace{(q_1-q_2)}_{q\in Z}+(40-42)$$

$$\Rightarrow a=56q-2\Rightarrow r=54$$

(برای یافتن $r=54$ مانند مسئله‌ی ۵ عمل کنید.)

مسئله‌ی ۸: باقی‌مانده‌های تقسیم عدد a بر دو عدد ۵ و ۷، به ترتیب ۳ و ۵ هستند، باقی‌مانده‌ی تقسیم a را بر ۳۵ بیابید.

حل: طبق فرض داریم:

$$\begin{array}{l} 14 \\ 15 \end{array}\begin{cases} a=5q_1+3 \\ q=7q_2+5 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 14a=14\times 5q_1+42 \\ 15a=15\times 7q_2+75 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (15a-14a)=35(3q_2-2q_1)+33\Rightarrow r=33$$

(توجه دارید که برای ضرب در هر تساوی اعدادی متوالی لازم داریم که یکی عامل ۷ و دیگری عامل ۵ داشته باشد که ۱۴ و ۱۵ واجد این شرایط هستند.)

مسئله‌ی ۹: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد طبیعی a بر ۲۹ برابر با ۱۲

و $21 | a+17$ است. در این صورت کمترین مقدار را برای a بیابید.

حل: طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} a = 29q + 12 \\ a + 17 = 21q' \end{cases} \Rightarrow 29q + 12 = 21q' - 17$$

$$\Rightarrow 21q' = 29q + 12 + 17 = 29q + 29 = 29(\overbrace{q+1}^{q_1 \in Z})$$

$$\Rightarrow 21q' = 29q_1 \Rightarrow \frac{21}{29} = \frac{q_1}{q'} \overset{a_{min}}{\Rightarrow} q_1 = 21,\ q' = 29$$

از طرف دیگر:

$$a + 17 = 21q' \Rightarrow a = 21q' - 17 = 21 \times 29 - 17 = 592$$

مسئله‌ی ۱۰: اگر a عددی صحیح و فرد باشد، به طوری که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر ۲۵، عدد ۱۷ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $\frac{a+3}{2}$ بر ۲۵ را بیابید.

حل: طبق فرض داریم: $a = 25q + 17$. و چون a فرد است. پس باید q عددی زوج باشد (چرا؟) بنابراین داریم:

$$q = 2k \Rightarrow a = 25 \times 2k + 17 \Rightarrow a + 3 = 25 \times 2k + 17 + 3$$

$$\Rightarrow \frac{a+3}{2} = 25k + \frac{20}{2} \Rightarrow \frac{a+3}{2} = 25k + 10 \Rightarrow r = 10$$

مسئله‌ی ۱۱: در یک تقسیم، مقسوم ۵۲۵ و باقی‌مانده ۲۵ است. اگر مقسوم‌علیه، مجذور دو برابر خارج قسمت باشد، خارج قسمت را بیابید.

حل: طبق فرض داریم:

$$525 = bq + 25,\ b = (2q)^2 = 4q^2$$

$$\Rightarrow 525 = 4q^2 \times q + 25 \Rightarrow 4q^3 = 500 \Rightarrow q^3 = 125 \Rightarrow q = 5$$

مسئله‌ی ۱۲: اگر a و b اعداد طبیعی و $1 \neq b$ باشد و باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر b را r بنامیم، باقی‌مانده‌ی تقسیم $-a$ بر $-b$ را بیابید.

حل: طبق فرض مسئله و قضیه‌ی تقسیم داریم:

$$a = bq + r,\ 0 \le r < b \Rightarrow b - r > 0$$

$$-a = -bq - r \Rightarrow -a = -bq - r + \underbrace{b - b}$$

$$\Rightarrow -a = -b(q+1) + b - r$$

اگر فرض کنیم: $r' = b - r$، دیدیم که $b - r > 0$. واضح است که $b - r < |b|$. بنابراین باقی‌مانده‌ی تقسیم $-a$ بر $-b$ عدد $(b-r)$ است.

مسئله‌ی ۱۳: اگر در یک تقسیم، خارج قسمت را از مقسوم و مقسوم‌علیه کم کنیم، خارج قسمت تغییر نمی‌کند و ۲۰ واحد به باقی‌مانده اضافه می‌شود. خارج قسمت را بیابید.

حل: طبق فرض مسئله داریم:

$$a = bq + r,\ a - q = (b-q)q + r + 20$$

$$\Rightarrow a - q = bq - q^2 + r + 20$$

$$\overset{a=bq+r}{\Rightarrow} \cancel{bq} + \cancel{r} - q = \cancel{bq} - q^2 + \cancel{r} + 20$$

$$\Rightarrow -q^2 + q + 20 = 0 \Rightarrow (q-5)(q+4) = 0$$

$$\Rightarrow q = 5 \text{ یا } q = -4$$

مسئله‌ی ۱۴: چند عدد طبیعی بین ۷۰۰ و ۱۱۰۰ وجود دارد که اگر آن‌ها را بر ۱۴۳ تقسیم کنیم، باقی‌مانده‌ی تقسیم و خارج قسمت آن، مساوی باشند؟

حل: اگر عدد مورد نظر را a فرض کنیم، داریم: $700 < a < 1100$ و $a = 143q + r$ و $r = q$. بنابراین می‌توان نوشت:

$$700 < 143q + q < 1100 \Rightarrow 700 < 144q < 1100$$

$$\Rightarrow 4/86 < q < 7/63$$

$$\overset{q \in Z}{\Rightarrow} 5 \le q \le 7 \Rightarrow q = 5 \text{ یا } q = 6 \text{ یا } q = 7$$

بنابراین سه عدد طبیعی وجود دارد.

مسئله‌ی ۱۵: مجموعه ارقام کوچک‌ترین عدد طبیعی را بیابید که مضرب ۱۳ و مربع آن نیز بر ۳۱۵ بخش‌پذیر باشد.

حل: طبق فرض مسئله داریم:

$$n = 13k,\ 315 | n^2,\ 315 = 3^2 \times 5 \times 7$$

$$315 | n^2 \Rightarrow \frac{n^2}{315} \in Z \Rightarrow \frac{n^2}{3^2 \times 5 \times 7} \in Z \Rightarrow \frac{169k^2}{3^2 \times 5 \times 7} \in Z$$

$$\xRightarrow{\text{۱۶۹ فقط عامل ۱۳ دارد}} k_{min} = 3 \times 5 \times 7 = 105$$

$$\Rightarrow n_{min} = 13 \times 105 = 1365$$

$$15 = 1 + 3 + 6 + 5 = \text{مجموع ارقام}$$

مسئله‌ی ۱۶: مجموع سه عدد ۷۱ است. اگر اولی را بر دومی تقسیم کنیم، خارج قسمت ۲ و باقی‌مانده ۱ می‌شود و اگر سومی را بر دومی تقسیم کنیم، خارج قسمت ۳ و باقی‌مانده ۴ می‌شود. این سه عدد را بیابید.

حل: اگر عدد اول را a، دومی را b و سومی را c فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a + b + c = 71 \\ a = 2b + 1 \\ c = 3b + 4 \end{cases} \Rightarrow (2b+1) + b + (3b+4) = 71$$

$$\Rightarrow 6b = 66 \Rightarrow b = 11 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \times 11 + 1 = 23 \\ c = 3 \times 11 + 4 = 37 \end{cases}$$

● میرشهرام صدر

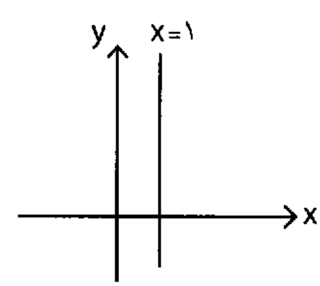
اشاره:

در این مقاله می‌کوشیم، با استفاده از دانسته‌ها و توانایی‌های شما درباره‌ی حل معادله‌ها و نامعادله‌های یک یا دو متغیره، نوعی سرگرمی آموزشی ارائه کنیم که با انجام آن، مهارتتان در رسم نمودار این‌گونه رابطه‌ها تقویت شود. در کلاس‌های درس، معمولاً معادله‌ها یا نامعادله‌ها را می‌دهند و از شما می‌خواهند نمودار آن‌ها را رسم کنید. ما در این‌جا علاوه بر این کار، قصد داریم به صورت عکس هم عمل کنیم؛ یعنی نمودار را به شما می‌دهیم و می‌خواهیم که معادله یا نامعادله‌ی مربوط به آن را بنویسید.

به این منظور، با استفاده از رابطه‌های (معادله‌ها و نامعادله‌ها) ریاضی حرف‌های یک کلمه را طراحی می‌کنیم. برای نمونه، شما می‌توانید نام خود را روی یک کاغذ شطرنجی به شکل دل‌خواه طراحی کنید؛ سپس برای هر قطعه از حروف کلمه‌ی نام خود، رابطه‌های ریاضی را بنویسید. وقتی تمام رابطه‌های ریاضی را برای حرف‌های نامتان نوشتید، آن‌گاه دستگاهی از معادله‌ها و نامعادله‌ها را خواهید داشت که با رسم آن‌ها، طراحی نامتان را خواهید دید.

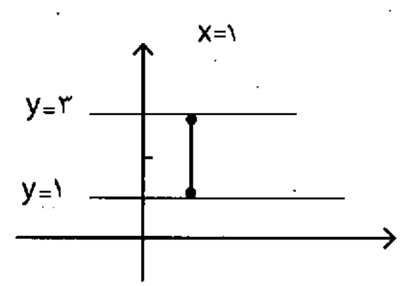
طراحی با رابطه‌های ریاضی

تا کنون در دوره‌ی متوسطه با رسم معادله‌ها و نامعادله‌های جبری آشنا شده‌اید. برای نمونه می‌دانید که نمودار معادله‌ی $x = 1$، خطی موازی محور yهاست (نمودار ۱).



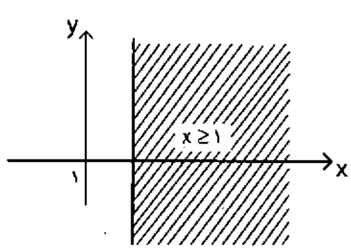
نمودار ۱

چنان‌که نمودار معادله‌ی $x = 1$ را با شرط $1 \leq y \leq 3$ رسم کنیم، یک پاره‌خط موازی محور yها به‌دست می‌آید (نمودار ۲).

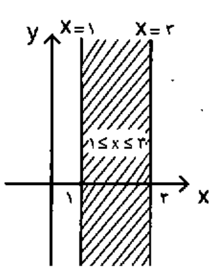


نمودار ۲

در زیر، مجموعه جواب نامعادله‌های $x \geq 1$ و $1 \leq x \leq 3$ را رسم کرده‌ایم:

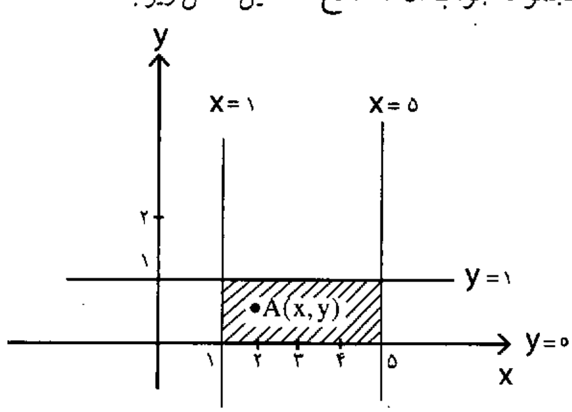


نمودار ۳



نمودار ۴

با اطلاعات به‌دست آمده، نامعادله‌هایی را بنویسید که مجموعه جواب آن‌ها سطح مستطیل شکل زیر باشد.



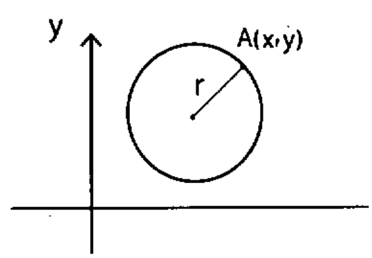
نمودار ۵

اگر $A(x,y)$ نقطه‌ای از سطح مستطیل شکل باشد، ملاحظه می‌کنید که طول این نقطه، یعنی x همواره بین دو عدد ۱ و ۵ قرار دارد؛ بنابراین: $1 \le x \le 5$. از طرف دیگر، عرض این نقطه یعنی y بین دو خط به معادله‌های $y = 0$ و $y = 1$ قرار دارد؛ پس: $0 \le y \le 1$ در نتیجه، نمودار دستگاه نامعادله‌های

$$\begin{cases} 1 \le x \le 5 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

این سطح مستطیل شکل را مشخص می‌کند.

معادله‌ی $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$، مجموعه نقاط روی یک دایره به مرکز $S(\alpha, \beta)$ و شعاع r را مشخص می‌کند. زیرا فاصله‌ی نقطه‌ی S مرکز دایره تا نقطه‌ی دل‌خواه $A(x,y)$ روی دایره، همواره برابر با r است (نمودار ۶).



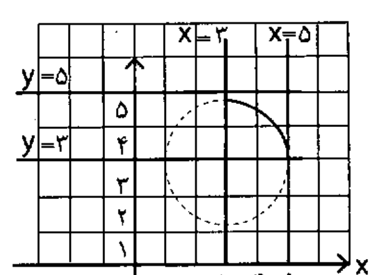
نمودار ۶

نامعادله‌های زیر به ترتیب مجموعه نقاط درون و برون دایره به مرکز $S(\alpha,\beta)$ و شعاع r را مشخص می‌کنند.

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 < r^2$$

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 > r^2$$

با توجه به مطالب گفته شده، سعی کنید رابطه‌ای بنویسید که مجموعه جواب آن، نقاط روی ربع دایره به صورت زیر باشد.



نمودار ۷

با توجه به نمودار، ملاحظه می‌کنیم که این ربع دایره، قسمتی از دایره‌ی به مرکز $S(3,3)$ و شعاع $r = 2$ است. بنابراین، معادله‌ی این دایره به صورت زیر است:

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 4$$

اما این ربع دایره بین دو خط به معادله‌های $y = 3$ و $y = 5$ قرار دارد. بنابراین دستگاه زیر می‌تواند بیان‌کننده‌ی این نمودار باشد.

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-3)^2 = 4 \\ 3 \le y \le 5 \end{cases}$$

از طرف دیگر ملاحظه می‌کنیم که این ربع دایره بین دو خط $x = 3$ و $x = 5$ نیز قرار دارد. بنابراین نمودار دستگاه زیر مشخص‌کننده‌ی این ربع دایره است:

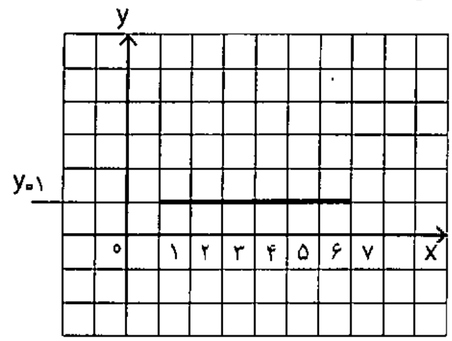
$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-3)^2 = 4 \\ 3 \le y \le 5 \\ 3 \le x \le 5 \end{cases}$$

(برای مطالعه‌ی بیشتر درباره‌ی رسم نامعادله‌ها می‌توانید به مجله‌ی ریاضی رشد برهان متوسطه، شماره‌ی ۶۱، بهار ۱۳۸۸ مراجعه کنید.)

طرح ۱. نمودار رابطه‌های زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

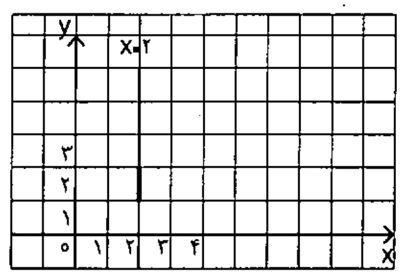
$$\begin{cases} y = 1 \quad ; 1 \le x \le 7 & (1) \\ x = 2 \quad ; 1 \le y \le 2 & (2) \\ y = x - 3; \ 4/5 \le x \le 5 & (3) \\ 2y + x = 9; \ 5 \le x \le 7 & (4) \end{cases}$$

رابطه‌ی «۱» پاره‌خطی موازی محور xها است. برای رسم نمودار آن، ابتدا خط به معادله‌ی ۱ = y را رسم می‌کنیم. سپس قطعه‌ای از آن را که مختص x بین ۱ و ۷ است، جدا می‌کنیم. (نمودار ۸) .



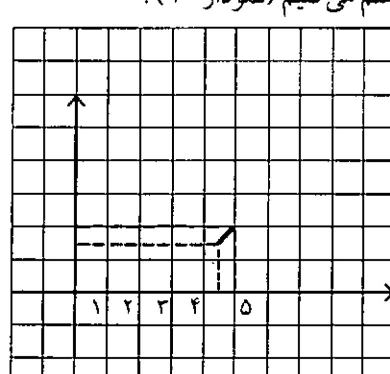
نمودار ۸

رابطه‌ی «۲» پاره‌خطی موازی محور yها است که طول آن برابر یک واحد است (نمودار ۹) .



نمودار ۹

رابطه‌ی «۳» قسمتی از خط به معادله‌ی ۳ − y = x است که مختص x آن‌ها بین ۴/۵ و ۵ است. برای رسم این پاره‌خط در معادله‌ی ۳ − y = x یک‌بار ۴/۵ = x را قرار می‌دهیم و مقدار y را می‌یابیم. بار دیگر ۵ = x را قرار می‌دهیم و y را پیدا می‌کنیم. سپس به کمک دو نقطه‌ی ابتدا و انتهای پاره‌خط، نمودار آن را رسم می‌کنیم (نمودار ۱۰) .



$y = x - ۳;$

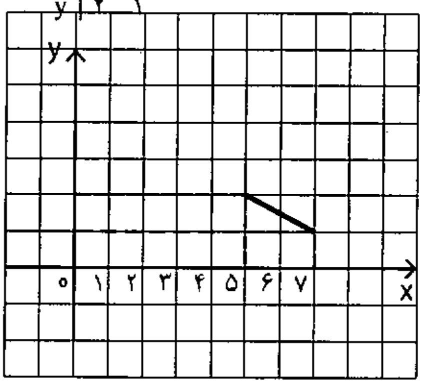
x	۴/۵	۵
y	۱/۵	۲

نمودار ۱۰

رابطه‌ی «۴» قسمتی از خط به معادله‌ی ۹ = ۲y + x است که مختص x آن‌ها بین ۵ و ۷ است (نمودار ۱۱) .

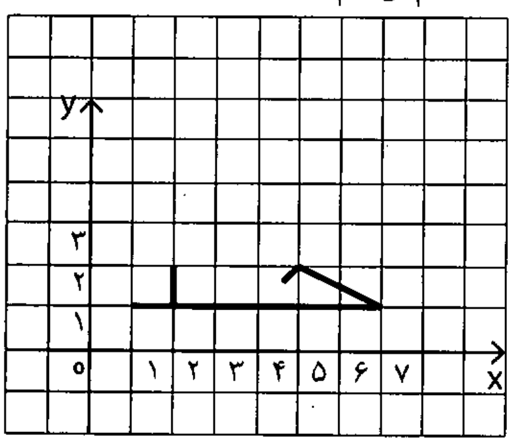
$۲y + x = ۹;$

x	۵	۷
y	۲	۱



نمودار ۱۱

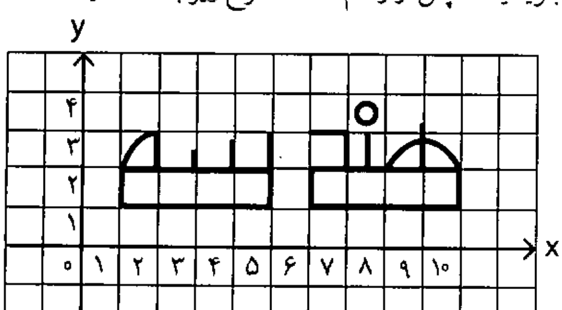
اکنون نمودارهای ۸، ۹، ۱۰ و ۱۱ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



نمودار ۱۲

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، با رسم نمودار رابطه‌ها، کلمه‌ی «حد» را طراحی کرده‌ایم (مفهوم حد در کتاب‌های ریاضی سال سوم متوسطه آمده است) .

طرح ۲. روی کاغذ شطرنجی، کلمه‌ی هندسه را به این صورت طراحی کرده‌ایم (نمودار ۱۳) . رابطه‌هایی جبری بنویسید که پس از رسم آن‌ها، طرح زیر به‌دست آید.



نمودار ۱۳

در این طراحی دو سطح مستطیل شکل وجود دارد: یکی زیر «هند» که رابطه‌ی آن مطابق نمودار ۵ به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases} ۶\le x\le ۱۰\\ ۱\le y\le ۲\end{cases} \qquad (۱)$$

و دیگری سطح مستطیل شکل زیر «سه» که به‌طور مشابه به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases} ۱\le x\le ۵\\ ۱\le y\le ۲\end{cases} \qquad (۲)$$

رابطه‌های ۱ و ۲ را به‌طور خلاصه می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} ۱\le x\le ۵\\ ۱\le y\le ۲\end{cases} \text{ یا } ۶\le x\le ۱۰ \qquad (۳)$$

حرف «هـ» در این طرح از یک نیم‌دایره و یک پاره‌خط تشکیل شده است. نیم‌دایره، قسمتی از یک دایره به مرکز S(۹,۲) و شعاع یک است که بین دو خط افقی y=۲ و y=۳ قرار دارد. بنابراین مشابه نمودار ۷ خواهیم داشت.

$$\begin{cases} (x-۹)^۲+(y-۲)^۲=۱\\ ۲\le y\le ۳\end{cases} \qquad (۴)$$

پاره‌خطی که در حرف «هـ» وجود دارد، موازی محور yها است که رابطه‌ی آن به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases} x=۹\\ ۲\le y\le ۳\frac{۱}{۳}\end{cases} \qquad (۵)$$

نقطه‌ی حرف «ن» دایره‌ای به مرکز $S'(۷/۵,۳/۵)$ و شعاع $\frac{۱}{۴}$ است که رابطه‌ی آن به این صورت زیر است:

$$(x-۷/۵)^۲+(y-۳/۵)^۲=\frac{۱}{۱۶} \qquad (۶)$$

پاره‌خط‌هایی که مشخص‌کننده‌ی دو حرف «ن» و «د» هستند، معادله‌هایشان به این صورت‌اند:

$$\begin{cases} x=۷/۵;\ ۲\le y\le ۳\\ x=۷\quad;\ ۲\le y\le ۳\\ y=۳\quad;\ ۶\le x\le ۷\end{cases} \qquad (۷)$$

هم‌چنین پاره‌خط‌هایی که نمایش حرف «س» را طراحی می‌کنند، موازی محور yها و معادله‌هایشان چنین‌اند:

$$\begin{cases} x=۵\quad;\ ۲\le y\le ۳\\ x=۴\quad;\ ۲\le y\le ۲\frac{۳}{۴}\\ x=۳\quad;\ ۲\le y\le ۲\frac{۱}{۲}\end{cases} \qquad (۸)$$

و اما آخرین دستگاهی که مشخص‌کننده‌ی حرف «ـه» آخر در کلمه‌ی هندسه است، از یک ربع دایره و پاره‌خط تشکیل شده است. ربع دایره، قسمتی از دایره به مرکز S(۲ و ۲) و شعاع یک است که بین دو خط افقی y = ۲ و y = ۳ و هم‌چنین بین دو خط عمودی x = ۱ و x = ۲ قرار دارد. پاره‌خط به‌کار رفته در حرف «ـه»، موازی محور y است و بین دو خط y=۲ و y=۳ قرار دارد. بنابراین:

$$\begin{cases} (x-۲)^۲+(y-۲)^۲=۱\\ ۱\le x\le ۲\\ ۲\le y\le ۳\end{cases} \qquad (۹)$$

$$x=۲\ ;\ ۲\le y\le ۳ \qquad (۱۰)$$

اکنون اگر معادله‌ها و نامعادله‌های نوشته شده از رابطه‌های ۳ تا ۱۰ را در یک دستگاه بنویسیم، نمودار این دستگاه، واژه‌ی هندسه را طراحی می‌کند.

از آن‌جا که رهبر معظم انقلاب اسلامی امسال را با عنوان **«اصلاح الگوی مصرف»** *نام‌گذاری کرده است، با رابطه‌های ریاضی، عبارت «اصلاح الگوی مصرف» را با قلم (فونت) دل‌خواه طراحی کنید و معادله‌ها و نامعادله‌های مربوط به آن را بنویسید و برای ما بفرستید. هیئت تحریریه‌ی مجله‌ی رشد برهان متوسطه، پس از بررسی آثار رسیده، بهترین‌ها را در مجله به چاپ می‌رساند و برای طراحان آن‌ها جوایز ویژه‌ای ارسال خواهد کرد.*

بعد از طراحی این عبارت و نوشتن رابطه‌های ریاضی مربوط به آن، متوجه خواهید شد که طراحی این عبارت به صرف وقت و نوشتن رابطه‌های ریاضی آن به ظرافت و دقت خاصی نیاز دارد. پس متناظر با آن هم‌اکنون فکر کنید و با مدتی صرف وقت، طوری برنامه‌های زندگی و درسی خود را تدوین کنید که این امر در زندگی روزمره‌ی شما محقق شوند.

● سید محمدرضا هاشمی موسوی
hashemi- moosavi@ yahoo.com

۷

هم‌نهشتی و کاربردهای آن

اشاره:

در قسمت قبل به بسیاری از کاربردهای هم‌نهشتی اشاره شد. در این شماره قصد داریم برخی از کاربردهای هم‌نهشتی را در حل مسئله‌های گوناگون و مطرح در المپیادهای ریاضی مورد کنکاش قرار دهیم تا قوت مطلب از این جنبه نیز نشان داده شود. بنابراین، ابتدا به حل تعدادی از مسئله‌های المپیادهای کشورهای متفاوت که در رابطه با موضوع هستند، می‌پردازیم و سپس تمرین‌هایی نظیر مسئله‌های حل شده ارائه می‌دهیم که با توجه به مثال‌ها می‌توانید آن‌ها را حل کنید.

حل مسئله‌هایی از المپیادهای کشورهای گوناگون به کمک هم‌نهشتی

مسئله‌ی ۱. اگر A مجموع ارقام عدد $N=۴۴۴۴^{۴۴۴۴}$ و B مجموع ارقام A باشد، مجموع ارقام B را تعیین کنید (هفدهمین IMO، ۱۹۷۵).

حل: ابتدا نشان می‌دهیم که مجموع ارقام B بسیار کوچک است:

$$N=۴۴۴۴^{۴۴۴۴}<۱۰۰۰۰^{۵۰۰۰}=۱۰^{۲۰۰۰۰}$$

N کوچک‌تر از یک عدد ۲۰۰۰۰ رقمی است. اگر همه‌ی ارقام را ۹ در نظر بگیریم:

$$A<۹\times ۲۰۰۰۰=۱۸۰۰۰۰$$

عددی کوچک‌تر از ۱۸۰۰۰۰ که دارای بزرگ‌ترین مجموع ارقام باشد، عدد ۱۷۹۹۹۹ است. پس:

$$B\leq ۴۴=۱+۷+۹+۹+۹+۹$$

در بین اعداد کوچک‌تر از ۴۴ عدد ۳۹ از نظر مجموع ارقام (۱۲=۹+۳) بزرگ‌ترین عدد است، بنابراین جواب مسئله عددی نا بیشتر از ۱۲ خواهد بود. از طرفی می‌دانیم هر عددی با مجموع ارقامش به پیمانه‌ی ۹ هم‌نهشت است. بنابراین، عددی که مورد نظر است با N به پیمانه‌ی ۹ هم‌نهشت خواهد بود. از طرف دیگر:

$$N=۴۴۴۴^{۴۴۴۴}\overset{۹}{\equiv}۷^{۴۴۴۴}\overset{۹}{\equiv}(۷^{۳})^{۱۴۸۱}\times ۷\overset{۹}{\equiv}۱\times ۷=۷$$

پس با توجه به $۷^{۳}\overset{۹}{\equiv}۱$ می‌توان نوشت:

$$N\overset{۹}{\equiv}۷$$

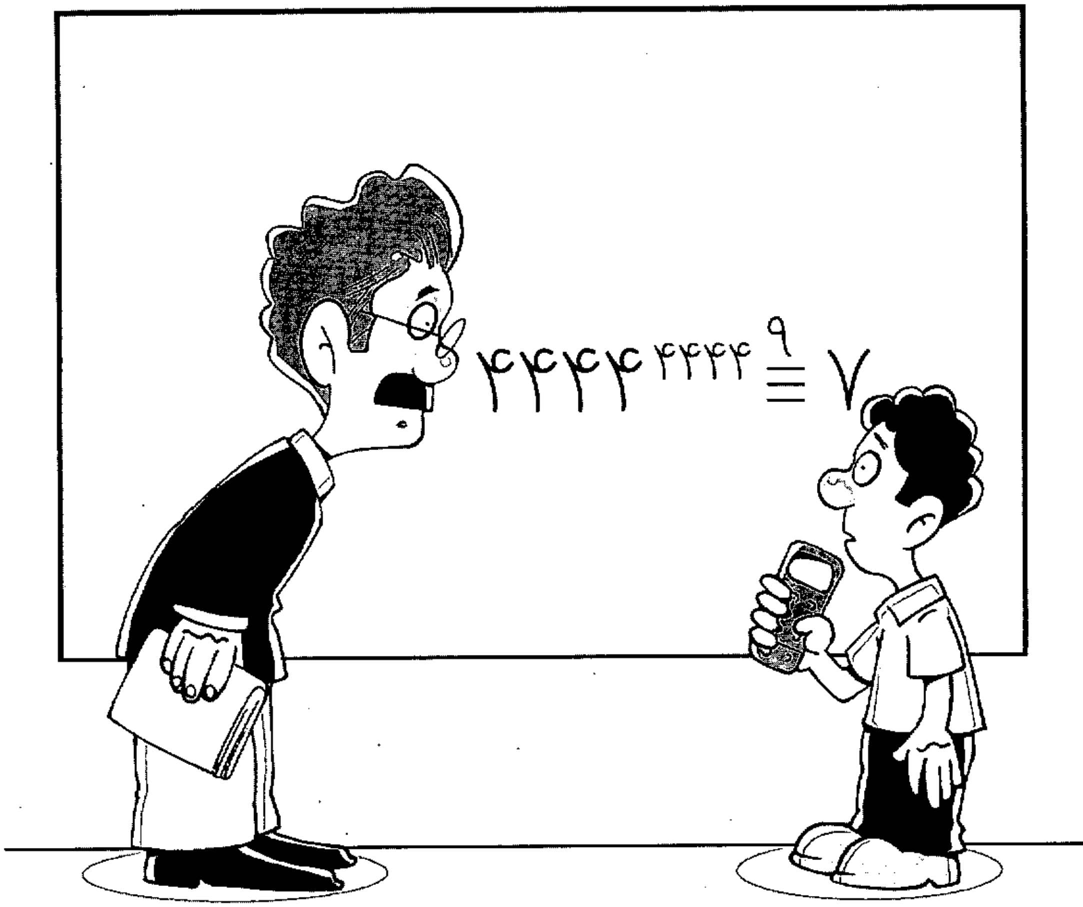
بنابراین، جواب مسئله عدد ۷ خواهد بود، زیرا تنها عددی است که کوچک‌تر از ۱۲ و با ۷ به پیمانه‌ی ۹ هم‌نهشت است. در واقع از ابتدا می‌توانستیم بنویسیم:

$$N=۴۴۴۴^{۴۴۴۴}\overset{۹}{\equiv}A\overset{۹}{\equiv}B\leq ۱۲$$

و از هم‌نهشتی $N\overset{۹}{\equiv}۷$ و نامعادله‌ی $B\leq ۱۲$، به جواب بدیهی $B=۷$ برسیم.

زیرا از این نکته استفاده کردیم که: «هر عددی با مجموع ارقامش به پیمانه‌ی ۹ هم‌نهشت است.»

مسئله‌ی ۲: رقم پنجم از سمت راست عدد $M=۵^{۵^{۵^{۵}}}$ را تعیین کنید (بخارست، ۱۹۸۶).



حل: این مسئله معادل هم‌نهشتی زیر است:

$$M = 5^{5^{55}} \overset{10^5}{\equiv} r$$

ممکن است از معادله‌ی هم‌نهشتی بالا، تعیین r مشکل باشد. به همین خاطر، ابتدا باقی مانده‌ی M را به پیمانه‌ی 2^5 تعیین می‌کنیم. به این منظور از قضیه‌ی اویلر (اگر a و n نسبت به هم اول باشند، آن‌گاه: $a^{\varphi(n)} \overset{n}{\equiv} 1$) استفاده می‌کنیم:

$$5^{\varphi(2^5)} \overset{2^5}{\equiv} 1$$

در واقع، $\varphi(2^5) = 2^4$ برابر با تعداد اعداد فرد کوچک‌تر از 2^5 است. در این‌جا باید نمای 5^{55} را به پیمانه‌ی $16 = 2^4$ ساده کرد. اما هم‌نهشتی‌های زیر بدیهی هستند:

$$5 \overset{4}{\equiv} 1 \;;\; 5^5 \overset{4}{\equiv} 1 \;,\; 5^{55} \overset{8}{\equiv} 5 \;,\; 5^{55} \overset{16}{\equiv} 5$$

پس می‌توان نوشت:

$$M = 5^5 + 2^5 k \quad (k \in Z)$$

چون طرف چپ برابری (M) بر 5^5 بخش‌پذیر است، واضح است که K نیز بر 5^5 بخش‌پذیر است. به این ترتیب برای یک t خواهیم داشت: $M = 5^5 + 10^5 t$

بنابراین، باقی‌مانده‌ی M به پیمانه‌ی 10^5 برابر $5^5 = 3125$ است و رقم پنجم از سمت راست M، صفر است.

مسئله‌ی ۳: ثابت کنید که معادله‌ی $y^2 = x^5 - 4$ جواب صحیحی ندارد (بالکان، ۱۹۹۸).

حل: معادله را به پیمانه‌ی ۱۱ در نظر می‌گیریم و با توجه به قضیه‌ی فرما (اگر a و p نسبت به هم اول باشند، آن‌گاه: $a^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1$) و هم‌نهشتی‌های زیر:

$$(x^5)^2 = x^{10} \overset{11}{\equiv} 0 \text{ یا } 1 \;;\; x^5 \overset{11}{\equiv} -1 \text{ یا } 0 \text{ یا } 1$$

به این نتیجه می‌رسیم که سمت راست معادله‌ی مورد نظر به پیمانه‌ی ۱۱ یکی از عددهای ۶ یا ۷ یا ۸ است، در صورتی که مربع باقی‌مانده‌ها (y^2) به پیمانه‌ی ۱۱ یکی از عددهای ۰، ۱، ۳، ۴، ۵ یا ۹ خواهد بود. به این ترتیب، برای معادله‌ی مورد نظر هیچ جواب صحیحی وجود نخواهد داشت. در واقع هرگز دو طرف معادله به پیمانه‌ی ۱۱، هم باقی‌مانده نخواهد شد:

$$x^5 - 4 \overset{11}{\not\equiv} y^2$$

تمرین۱. تمام زوج‌های صحیح مثبت (x,y) را بیابید که در معادله‌ی زیر صدق می‌کنند:

$$x^2 = y!+2001$$

راهنمایی: برای y بزرگ‌تر از ۵، همواره !y بر ۹ بخش‌پذیر است و طرف دوم معادله $(y!+2001)$ به پیمانه‌ی ۹ باقی‌مانده‌ی ۳ را می‌دهد که بدیهی است از نوع باقی‌مانده‌ی درجه‌ی دوم نیست. $(x = 45\ ,\ y = 4)$.

تمرین۲. ثابت کنید که دستگاه معادله‌های زیر هیچ جواب صحیح غیربدیهی ندارد.

$$\begin{cases} x^2+6y^2=z^2 \\ 6x^2+y^2=t^2 \end{cases}$$

راهنمایی: فرض می‌کنیم که دستگاه جوابی غیرصفر داشته باشد. با تقسیم کردن بر مقسوم‌علیه مشترک x، y، z و t می‌توانیم فرض کنیم که این چهار عدد هیچ مقسوم‌علیه مشترکی ندارند. از جمع دو معادله و کار به پیمانه‌ی ۷ به نتیجه برسید.

مسئله‌ی۴: ثابت کنید که عدد $N=19^{19}$ را نمی‌توان به‌صورت مجموعی از یک مکعب کامل و توان چهارم کامل نوشت (بخارست، ۱۹۸۶).

حل: در واقع مسئله معادل این است که ثابت کنیم معادله‌ی زیر در مجموعه‌ی اعداد صحیح جواب ندارد:

$$x^3+y^4=19^{19} \qquad (1)$$

با توجه به قضیه‌ی فرما و برابری $12=4\times3$، معادله‌ی (۱) را به پیمانه‌ی ۱۳ درنظر می‌گیریم. چون: $(x^3)^4 \overset{13}{\equiv}$ ۰ یا ۱، در نتیجه: $x^3 \overset{13}{\equiv}$ ۸- یا ۱- یا ۰ یا ۱ یا ۸.

از طرف دیگر داریم: $y^4 \overset{13}{\equiv}$ ۰ یا ۱ یا ۳ یا ۹ (یعنی به پیمانه‌ی ۱۳، یک مکعب، باقی‌مانده‌های ۰، ۱، ۵، ۸ و ۱۲ و یک توان چهارم باقی‌مانده‌های ۰، ۱، ۳ و ۹ را خواهند داشت). به این ترتیب، مجموع یک مکعب و یک توان چهارم به پیمانه‌ی ۱۳ هم‌نهشت با ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱ و ۱۲ خواهد بود و عدد ۷ در این فهرست ظاهر نمی‌شود. هم‌چنین داریم:

$$19^{19} \overset{13}{\equiv} 19^{12}\times 19^{7} \overset{13}{\equiv} 1\times 6^{7} \overset{13}{\equiv} 6^{7} \overset{13}{\equiv} 7$$

و چون: $19^{19}\overset{13}{\equiv}7$ و $r\neq 7$ ، $x^3+y^4\overset{13}{\equiv} r$ ، در این‌جا اثبات کامل می‌شود.

تمرین۳. تحقیق کنید که آیا می‌توان عدد $N=19^{19}$ را به‌صورت مجموعی از یک مکعب کامل، توان چهارم کامل و توان پنجم کامل نوشت؟

راهنمایی: واضح است که در واقع باید معادله‌ی $x^3+y^4+z^5=19^{19}$ را در Z از نظر داشتن یا نداشتن جواب بررسی کنیم. با توجه به برابری $60=3\times4\times5$ ، کافی است معادله را به پیمانه‌ی ۶۱ درنظر بگیریم و مانند مسئله‌ی ۴ عمل کنیم (در میدان Z_{61} با مرتبه‌ی ۶۰).

مسئله‌ی۵: اگر p عددی اول و n و w اعدادی صحیح باشند، به‌طوری که داشته باشیم: $2^p+3^p=w^n$ ، ثابت کنید: $n=1$ (ایرلند، ۱۹۹۶).

حل: در حالت $p=2$ داریم: $w^n=2^2+3^2=14$ و برابری $n=1$ بدیهی است. اگر $p>2$ ، آن‌گاه p عددی فرد است؛ بنابراین:

$$2^p+3^p=(2+3)(2^{p-1}-2^{p-1}\times3+\dots+3^{p-1})\ ;$$

$$5|(2^p+3^p)$$

پس در این حالت $5|w$ و اگر $n>1$ ، آن‌گاه: $25|w^n$ ، بنابراین:

$$5\,\big|\,(2^{p-1}-2^{p-1}\times3+\dots+3^{p-1})=\frac{2^p+3^p}{2+3}=\lambda$$

چون به ازای هر k داریم: $3^k\overset{5}{\equiv}(-2)^k$ ، پس می‌توان نوشت:

$$(-1)^k2^{p-k-1}3^k\overset{5}{\equiv}2^{p-1}$$

با توجه به هم‌نهشتی بالا می‌توان نوشت:

$$\lambda=\frac{2^p+3^p}{2+3}=2^{p-1}-2^{p-1}\times3+\dots+(-1)^k2^{p-k-1}3^k+\dots+3^{p-1}\overset{5}{\equiv}(2^{p-1})p$$

بنابراین، λ با $(2^{p-1})p$ به پیمانه‌ی ۵ هم‌نهشت است، ولی $5|p(2^{p-1})$ و این وقتی ممکن است که: $p=5$. اما برای $p=5$ داریم: $2^5+3^5=275$ و در این حالت نیز $n=1$.

تمرین ۴. مسئله‌ی ۵ را برای برابری‌های زیر تحقیق کنید:

الف) $2^p+1=w^n$ ب) $3^p+4^p=w^n$

ج) $3^p+4^p+5^p=w^n$ د) $5^p+6^p=w^n$

راهنمایی: تحقیق عدم درستی حکم برای (الف)، (ب) و (ج) واضح است؛ به برابری‌های عددی $2^3+1=9=3^2$ ، $3^2+4^2=25=5^2$ و $6^3=216=5^3+4^3+3^3$ توجه کنید. پس کافی است فقط برابری (د) را به طریق حل مسئله‌ی ۵ بررسی کنید.

مسئله‌ی ۶: تمام مقادیر ممکن برای مجموع ارقام یک مربع کامل را مشخص کنید (آمریکا، ۱۹۹۵).

حل: می‌دانیم که «مجموع ارقام یک عدد به پیمانه‌ی ۹ با آن عدد هم‌نهشت است».

بنابراین، یک مربع کامل باید به پیمانه‌ی ۹ با ۰، ۱، ۴ یا ۷ هم‌نهشت باشد. نشان می‌دهیم: هر عددی مثل N را که یک باقی‌مانده‌ی درجه‌ی دوم به پیمانه‌ی ۹ باشد، می‌توان به عنوان مجموع ارقام یک مربع کامل محسوب کرد. حالت‌های $n=1$ و $n=4$ بدیهی هستند. بنابراین فرض می‌شود $n>4$ و با این فرض، اگر $n=9m$ ، آن‌گاه n مجموع ارقام $(10^m-1)^2=10^{2m}-2\times10^m+1$ است که عددی به صورت $9\ldots960\ldots04$ خواهد بود. هم‌چنین اگر $n=9m+4$ ، آن‌گاه n مجموع ارقام $(10^m-3)^2=10^{2m}-6\times10^m+9$ است که عددی به صورت $9\ldots940\ldots09$ خواهد بود. و سرانجام اگر $n=9m-2$ ، آن‌گاه n مجموع ارقام زیر است:

$$(10^m-5)^2=10^{2m}-10^{m+1}+25$$

که عددی به صورت $9\ldots900\ldots025$ خواهد بود.

مسئله‌ی ۷: دنباله‌ی $\{a_n\}_{n\geq 0}$ به این صورت تعریف می‌شود: a_0 یک عدد گویای مثبت کوچک‌تر از $\sqrt{1998}$ است و اگر به ازای اعداد صحیح نسبت به هم اول p_n و q_n ، $a_n=\frac{p_n}{q_n}$ باشد، آن‌گاه: $a_{n+1}=\frac{p_n^2+5}{p_nq_n}$. ثابت کنید که برای هر n داریم: $a_n<\sqrt{1998}$ (IMO، ۱۹۹۸).

حل: کافی است نشان دهیم که اگر: $\frac{p}{q}<\sqrt{1998}$ ، آن‌گاه: $\frac{p}{q}+\frac{5}{pq}<\sqrt{1998}$.

از فرض $\frac{p}{q}<\sqrt{1998}$ ، نتیجه می‌شود ($p,q>0$):

$$\frac{p^2}{q^2}<1998\ ;\ p^2<1998q^2\ ;\ 1998q^2-p^2>0$$

در نظر می‌گیریم: $n=1998q^2-p^2$ و نشان می‌دهیم که: $n\notin\{1,2,\cdots,10\}$ ، به طوری که اگر $n>0$ ، آن‌گاه: $n\geq 11$. با توجه به برابری $1998=2\times27\times37$:

$$n\overset{9}{\equiv}-p^2\overset{9}{\equiv}0,-1,-4,-7$$

بنابراین: $n\neq 1,3,4,6,7,10$. اکنون کافی است $n=2,5,8$ را منفی کنیم که به پیمانه‌ی ۳۷ این کار را انجام می‌دهیم (قضیه فرما: $((a,p)=1\ ;\ a^{p-1}\overset{p}{\equiv}1)$):

$$n=2\ ,\ p=37\ :\ 1\overset{37}{\equiv}p^{36}\overset{37}{\equiv}(p^2)^{18}\overset{37}{\equiv}(-2)^{18}\overset{37}{\equiv}6^2\overset{37}{\equiv}-1$$
(تناقض)

$$n=5\ ,\ p=37\ :\ 1\overset{37}{\equiv}p^{36}\overset{37}{\equiv}(p^2)^{18}\overset{37}{\equiv}(-5)^{18}\overset{37}{\equiv}11^3\overset{37}{\equiv}-1$$
(تناقض)

$$n=8\ ,\ p=37\ :\ 1\overset{37}{\equiv}p^{36}\overset{37}{\equiv}(p^2)^{18}\overset{37}{\equiv}(-8)^{18}\overset{37}{\equiv}(-10)^9\overset{37}{\equiv}-1$$
(تناقض)

بنابراین در این جا ثابت می‌شود: $n\geq 11$ ، به‌طوری که برای $p>5$:

$$p^2(1998q^2)\geq p^2(p^2+11)=p^4+11p^2=p^4+10p^2+p^2>p^4+10p^2+25$$

پس می‌توان نوشت:

$$1998p^2q^2>(p^2+5^2)^2$$

و یا:

$$\sqrt{1998}>\frac{p}{q}+\frac{5}{pq}$$

برای $p\leq 5$ داریم: $\frac{p}{q}+\frac{5}{pq}\leq\frac{10}{q}<\sqrt{1998}$ و به این ترتیب برقراری حکم واضح است. لازم به ذکر است که $n=11$ ، کوچک‌ترین مقداری است که نمی‌تواند توسط هم‌نهشتی به پیمانه‌ی ۱۹۹۸ منفی شود؛ چون: $1998\,|\,(787)^2+11$. از طرف دیگر، با بسط کسر مسلسل $\sqrt{1998}$ ، می‌توان نشان داد که کوچک‌ترین مقدار دست یافتنی $n=26$ است که به ازای $p=134$ و $q=3$ واقع می‌شود.

مسئله‌ی ۸: ثابت کنید که اعداد صحیح x و y وجود ندارند که برای آن‌ها برابری:

$$x^2+3xy-2y^2=112$$

برقرار باشد (پوتنام، ۱۹۵۴).

حل: ابتدا معادله را به یک معادله‌ی ساده از نوع پل ($x^2 - Ry^2 = 1$) تبدیل می‌کنیم:

$$4(x^2 + 3xy - 2y^2) = 4(112)$$
$$(4x^2 + 12xy + 9y^2) - 17y^2 = 448$$
$$(2x + 3y)^2 - 17y^2 = 448$$

اکنون معادله را به پیمانه‌ی ۱۷ ساده می‌کنیم. باقی‌مانده‌های درجه‌ی دوم به پیمانه‌ی ۱۷ برابر ۰، ۱، ۴، ۹، ۱۶، ۸، ۲، ۱۵ و ۱۳ هستند، در حالی که داریم:

$$448 \overset{17}{\equiv} 6$$

چون عدد ۴۴۸ نمی‌تواند اختلاف یک مربع و مضربی از ۱۷ باشد، معادله هیچ جواب صحیحی ندارد.

مسئله‌ی ۹: اگر n عددی صحیح بزرگ‌تر از ۱ باشد، احکام زیر را ثابت کنید:

الف) $k = 1! + 2! + \cdots + n!$ یک توان کامل است، اگر و تنها اگر: $n = 3$.

ب) $S = (1!)^3 + (2!)^3 + \cdots + (n!)^3$ یک توان کامل است، اگر و تنها اگر: $n = 3$.

حل: بدیهی است که به ازای $n = 3$ داریم: $S = (1!)^3 + (2!)^3 + (3!)^3 = 15^2$ و $k = 1! + 2! + 3! = 3^2$.

اکنون باید نشان دهیم که این تنها امکان است. به این منظور فرض می‌کنیم که n دیگری وجود دارد که برای $m > 1$: $k = 1! + 2! + \cdots + n! = t^m$.

از طریق آزمایش می‌توان نشان داد که n باید بزرگ‌تر یا برابر با ۹ باشد. برای $n \geq 5$، عدد k به ۳ ختم می‌شود و به این ترتیب m نمی‌تواند برابر با ۲ باشد (می‌دانیم که مربع‌ها تنها می‌توانند به ۰، ۱، ۴، ۵، ۶ یا ۹ ختم شوند) و این مطلب یعنی: $n \geq 3$.

هم‌چنین، برای $n \geq 9$ عبارت k بر ۳ بخش‌پذیر است و در نتیجه: $3|t$ و یا $27|t^m$. بنابراین، باید $27|k$. ولی چون $n!$ به ازای $n \geq 9$ بر ۲۷ بخش‌پذیر است:

$$n \geq 9:\ k = 1! + 2! + \cdots + n! \overset{27}{\equiv} 1! + 2! + \cdots + 8! \overset{27}{\equiv} 9$$

این تناقض ثابت می‌کند که $n = 3$ تنها جواب مسئله است.

به همین ترتیب، عبارت $S = (1!)^3 + (2!)^3 + \cdots + (n!)^3$ یک توان کامل برای $n = 2, 4, 5, 6$ نیست. برای $n \geq 7$، چون: $49|n!$، پس:

$$S = (1!)^3 + (2!)^3 + \cdots + (n!)^3 \overset{49}{\equiv} (1!)^3 + (2!)^3 + \cdots + (6!)^3 \overset{49}{\equiv} 7$$

چون ۷ باقی‌مانده‌ی یک توان کامل نیست، بنابراین $n = 3$، تنها جواب مسئله است.

تمرین ۵. تحقیق کنید که عبارت $T = (1!)^2 + (2!)^2 + \cdots + (n!)^2$ به ازای چه مقادیری از n مربع کامل است.

تمرین ۶. تحقیق کنید که آیا به ازای $n > 1$، عبارت زیر می‌تواند توان کامل شود:

$$M = (1!)^5 + (2!)^5 + \cdots + (n!)^5$$

مسئله‌ی ۱۰: می‌دانیم:

$$34! = 295232799cd96041408476186096435ab000000$$

رقم‌های a، b، c و d را تعیین کنید (انگلستان، ۲۰۰۱ و ۲۰۰۲).

حل: می‌دانیم اگر n عدد طبیعی و $n \leq 1$ عددی اول باشد، تعداد عامل‌های p در $n!$ از دستور $t_p = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \cdots$ تعیین می‌شود. چون تعداد صفرهای $n!$ بستگی به تعداد ۵های موجود در آن دارد، پس تعداد صفرهای سمت راست $n!$ برابر با $t_5 = \left[\frac{34}{5}\right] + \left[\frac{34}{25}\right] + \cdots = 7$ است و در نتیجه: $b = 0$.

از طرف دیگر، اگر صفرهای سمت راست $34!$ را حذف کنیم، عدد حاصل یعنی $\frac{34!}{10^7}$ بر ۸ بخش‌پذیر است (زیرا: $2^{32}|34!$ و $t_2 = \left[\frac{34}{2}\right] + \left[\frac{34}{4}\right] + \cdots = 32$). بنابراین عدد سه‌رقمی سمت راست آن، یعنی $\overline{35a}$، باید بر ۸ بخش‌پذیر و زوج باشد. پس a می‌تواند یکی از اعداد زوج بین صفر و ۱۰ باشد که با امتحان این چهار عدد، فقط عدد ۳۵۲ بر ۸ بخش‌پذیر است و در نتیجه: $a = 2$.

برای یافتن c و d توجه می‌کنیم که $34!$ باید بر ۹ و ۱۱ بخش‌پذیر باشد. از بخش‌پذیری آن بر ۹ نتیجه می‌شود که مجموع ارقام آن بر ۹ بخش‌پذیر است و با یک محاسبه‌ی ساده به دست می‌آید: $c + d = 9k - 6$،

چون: $141 + c + d \overset{9}{\equiv} 6 + c + d \overset{9}{\equiv} 0$، $0 \leq c + d \leq 18$، پس: $k = 1$ یا ۲. بنابراین: $c + d = 3$ یا ۱۲ $(*)$

$(c, d) = (0,3)$ یا $(1,2)$ یا $(2,1)$ یا $(3,0)$ یا $(3,9)$ یا $(4,8)$
یا $(5,7)$ یا $(6,6)$
(حالت‌های ممکن: $c + d = 3$ یا ۱۲)

(۳و۹) یا (۴و۸) یا (۵و۷) هم‌چنین، می‌دانیم عددی بر ۱۱ بخش‌پذیر است که داشته باشیم:

$$\overline{a_k a_{k-1}\cdots a_1 a_0} \overset{11}{\equiv} a_0 - a_1 + \cdots + a_{k-1} - a_k \quad (\text{زوج } k)$$

$$\overline{a_k a_{k-1}\cdots a_1 a_0} \overset{11}{\equiv} a_0 - a_1 + \cdots - a_{k-1} + a_k \quad (\text{فرد } k)$$

بنابراین، چون عدد !۳۴ دارای ۳۹ رقم است ($k=39$)،

پس:

$$34! \overset{11}{\equiv} 0 - 0 + d - c + \cdots + 2 = 19 + d - c$$

$$\overset{11}{\equiv} d - c - 3 \overset{11}{\equiv} 0 \;;$$

$$d - c \overset{11}{\equiv} 3 \;;\; d - c = 11s + 3 \,,$$

$$0 \le d - c \le 8 \;;\; d - c = 3$$

تنها جوابی که در این شرایط صدق می‌کند، $d = 3$ و $c = 0$ است.

تمرین۷. می‌دانیم:

$$34! = 2a52327aadea6b414b847618 6\,ba6435cb \times 10^6$$

رقم‌های a، b، c، d، e را تعیین کنید.

راهنمایی: با توجه به ارقام حاصل !۳۴، بدیهی است که عدد تکراری a فقط ۰ یا ۹ می‌تواند باشد؛ زیرا بقیه‌ی عددها در طرف دوم دیده می‌شوند و حداقل دو بار هم تکرار شده‌اند. a غیر از ۹ نمی‌تواند باشد، زیرا نشان می‌دهیم که !۳۴ به هفت صفر ختم می‌شود و در واقع عدد b نیز صفر است. می‌دانیم که صفرهای !n، در واقع از ضرب عامل‌های ۵ و ۲ حاصل می‌شوند. بدیهی است که تعداد صفرهای !۳۴ همان تعداد ۵های موجود در !۳۴ است:

$$t_5 = \left[\frac{34}{5}\right] + \left[\frac{34}{25}\right] = 6 + 1 = 7$$

بنابراین هفت رقم سمت راست !۳۴ صفر است. برای تعیین c از خاصیت بخش‌پذیری بر ۸ و برای تعیین d و e از خاصیت بخش‌پذیری بر ۹ و ۱۱ (مطابق مسئله‌ی ۱۰) استفاده می‌کنیم.

تمرین

۱. اگر $N = 4444$، A مجموع ارقام عدد N^{N^N}، B مجموع ارقام A و C مجموع ارقام B باشد، مجموع ارقام C را بیابید.

۲. رقم پنجم از سمت راست عدد $M = 5^{5^{555}} + 25! + 99999^{55555} - 1$ را تعیین کنید.

۳. تحقیق کنید که آیا معادله‌ی $2y^2 = x^5 - 128$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح دارای جواب است؟

۴. تمام زوج‌های صحیح مثبت (x,y) را بیابید که در معادله‌ی زوبه‌رو صدق کنند: $2025x^2 - 2001 = (4y)!$

۵. تحقیق کنید که آیا دستگاه زیر جواب صحیح غیربدیهی دارد؟

$$\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 2z^2 \\ 24x^2 + y^2 = 4t^2 \end{cases}$$

۶. تحقیق کنید که آیا عدد $N = 19^{19}$ می‌تواند به صورت مجموعی از یک مربع کامل و یک مکعب کامل نوشته شود؟

۷. اگر p عددی اول و w و n اعدادی صحیح باشند، به‌طوری که داشته باشیم: $6^p + 7^p = w^n$

تحقیق کنید که n برابر با چه عددهایی می‌تواند باشد.

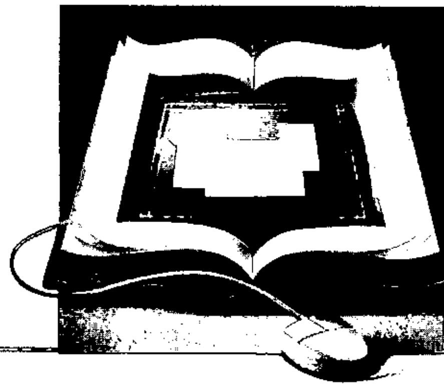
۸. تمام مقادیر ممکن برای مجموع ارقام یک مکعب کامل را مشخص کنید.

۹. ثابت کنید که اعداد صحیح x و y وجود ندارند که برای آن‌ها برابری زیر برقرار باشد: $2x^2 + 3xy - y^2 = 56$

۱۰. به ازای چه مقادیری از n، عبارت N یک توان کامل است؟ $N = (1!)^4 + (2!)^4 + \cdots + (n!)^4$

● احسان یارمحمدی

معرفی سایت‌های ریاضی جهان



عنوان سایت: .... **Analyze Math**

نشانی سایت: .... **http://www.analyzemath.com**

موضوع و محتوای اصلی این سایت شامل خودآموزها، مسائل و برگه‌های کاری رایگان پیرامون ریاضی، حساب دیفرانسیل و انتگرال، مثلثات و موضوعات هندسه است. در سمت چپ صفحه‌ی اصلی سایت موضوع‌های زیر را می‌توان مشاهده کرد:

● خودآموزهای حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی
(Precalculus Tutorials)

● توابع ترسیمی
(Graphing Functions)

● خودآموزهای حساب دیفرانسیل و مسائل
(Calculus Tutorials and Problems)

● پرسش‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال و پاسخ‌ها
(Calculus Questions with Answers)

● خودآموزهای مثلثات و مسائل برای آزمون‌های شخصی
(Trigonometry Tutorials and Problems for Self Tests)

● خودآموزهای هندسه و مسائل
(Geometry Tutorials and Problems)

● مسائل ریاضی
(Math Problem)

● حل معادلات و نامعادلات
(Solving Equations and Inequations)

● نمودارهای توابع، معادلات و جبر
(Graphs of Functions, Equations and Algebra)

● ماشین حساب‌ها و حل کننده‌های ریاضی آنلاین
(Online Math Calculator and Solvers)

● ماشین حساب‌ها و حل کننده‌های هندسه‌ی آنلاین
(Online Geometry Calculator and Solvrs)

● خودآموزهای آمار مقدماتی و احتمال
(Elementary Statistics and Probability Tutorials)

● نرم‌افزار ریاضی
(Math Software)

● کاربردهای ریاضیات در فیزیک و مهندسی
(Applications of Mathematics in Physics and Engineering)

● برگه‌های کاری رایگان حساب دیفرانسیل و انتگرال، آماده برای دانلود کردن
(Free Calculus Worksheet to Download)

● برگه‌های کاری رایگان ریاضی، برای دانلود کردن
(Free Math Worksheet to Download)

● برگه‌های کاری رایگان هندسه، برای دانلود کردن
(Free Geometry Worksheet to Download)

● کاغذ رسم رایگان
(Free Graph Paper)

در صفحه‌ی اصلی سایت متنی وجود دارد که دربرگیرنده‌ی پیوندهای گوناگونی است و کاربر با کلیک روی آن‌ها، می‌تواند به مطالب قابل توجهی دست‌رسی پیدا کند. عنوان‌های اصلی این قسمت عبارت‌اند از:

● ریاضی و حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی
(MATH AND PRECALCULUS)

● ریاضی کاربردی
(APPLIED MATH)

● حساب دیفرانسیل و انتگرال [حسابان]
(CALCULUS)

● هندسه
(GEOMETRY)

● مثلثات
(TRIGONOMETRY)

● آمار
(STATISTICS)

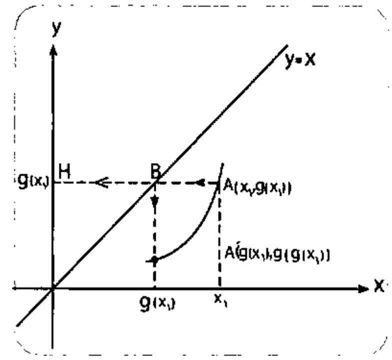
● احمد قندهاری

رسم نمودار fog از روی نمودارهای f و g

برای دانش‌آموزان سال سوم رشته‌ی ریاضی

اشاره: در این مقاله می‌خواهیم از روی نمودارهای f و g، نمودار $f(g(x))$ و از روی نمودار f، نمودار $f(f(x))$ را رسم کنیم.

۱. نمودار تابع g در شکل زیر مفروض است. می‌خواهیم نقطه‌ای روی نمودار g بیابیم که طول آن $g(x_1)$ باشد $(x_1 \in Dg)$.



برای این کار خط y=x را نیز در شکل رسم کرده‌ایم.

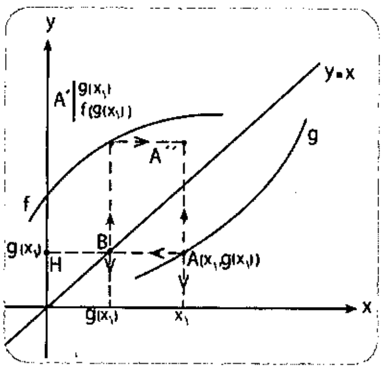
نقطه‌ای به طول x_1 روی محور xها انتخاب می‌کنیم و آن را به کمک رابط تا نمودار g امتداد می‌دهیم. نقطه‌ی A به مختصات $(x_1, g(x_1))$ است.

اگر از نقطه‌ی A رابطی موازی محور xها رسم کنیم تا خط y=x را در نقطه‌ی B و محور yها را در نقطه‌ی H قطع کند، خواهیم داشت: $y_H = g(x_1)$ و $x_B = y_B = g(x_1)$.

از نقطه‌ی B رابطی بر محور xها عمود می‌کنیم تا نمودار g را در نقطه‌ی A' قطع کند. نقطه‌ی A' روی نمودار g قرار دارد و طول آن $g(x_1)$ است. پس داریم: $A'(g(x_1), g(g(x_1)))$.

۲. نمودارهای دو تابع g و f در شکل رسم شده‌اند. می‌خواهیم نقطه‌ای روی نمودار f بیابیم که طول آن $g(x_1)$ باشد $(x_1 \in Dg)$.

در این‌جا هم از خط y=x کمک می‌گیریم.



فرض می‌کنیم $A(x_1, g(x_1))$ روی نمودار g باشد. از A رابطی عمود بر محور yها رسم می‌کنیم تا خط y=x را در B و محور yها را در H قطع کند. خواهیم داشت: $y_H = g(x_1)$ و $x_B = y_B = g(x_1)$.

از نقطه‌ی B رابطی عمود بر محور xها رسم می‌کنیم تا محور xها را در نقطه‌ای به طول $g(x_1)$، و نمودار f را در نقطه‌ی A' قطع کند. پس داریم:

دفتر انتشارات کمک آموزشی

با مجله‌های رشد آشنا شوید

مجله‌های رشد توسط دفتر انتشارات کمک‌آموزشی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وابسته به وزارت آموزش و پرورش تهیه و منتشر می‌شوند:

مجله‌های دانش‌آموزی
(به صورت ماهنامه و ۸ شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شوند):
• رشد کودک (برای دانش‌آموزان آمادگی و پایه‌ی اول دوره‌ی دبستان)
• رشد نوآموز (برای دانش‌آموزان پایه‌های دوم و سوم دوره‌ی دبستان)
• رشد دانش‌آموز (برای دانش‌آموزان پایه‌های چهارم و پنجم دوره‌ی دبستان)
• رشد نوجوان (برای دانش‌آموزان دوره‌ی راهنمایی تحصیلی)
• رشد جوان (برای دانش‌آموزان دوره‌ی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)

مجله‌های عمومی
(به صورت ماهنامه و ۸ شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شوند):
• رشد آموزش ابتدایی • رشد آموزش راهنمایی تحصیلی • رشد تکنولوژی آموزشی • رشد مدرسه فردا • رشد مدیریت مدرسه • رشد معلم

مجله‌های تخصصی
(به صورت فصلنامه و ۴ شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شوند):
• رشد برهان راهنمایی (مجله ریاضی برای دانش‌آموزان دوره‌ی راهنمایی تحصیلی) • رشد برهان متوسطه (مجله ریاضی برای دانش‌آموزان دوره‌ی متوسطه) • رشد آموزش قرآن • رشد آموزش معارف اسلامی • رشد آموزش زبان و ادب فارسی • رشد آموزش هنر • رشد مشاور مدرسه • رشد آموزش تربیت‌بدنی • رشد آموزش علوم اجتماعی • رشد آموزش تاریخ • رشد آموزش جغرافیا • رشد آموزش زبان • رشد آموزش ریاضی • رشد آموزش فیزیک • رشد آموزش شیمی • رشد آموزش زیست‌شناسی • رشد آموزش زمین‌شناسی • رشد آموزش فنی و حرفه‌ای • رشد آموزش پیش‌دبستانی

مجله‌های رشد عمومی و تخصصی برای آموزگاران، معلمان، مدیران و کارکنان اجرایی مدارس، دانشجویان مراکز تربیت‌معلم و رشته‌های دبیری دانشگاه‌ها و کارشناسان تعلیم و تربیت تهیه و منتشر می‌شوند.

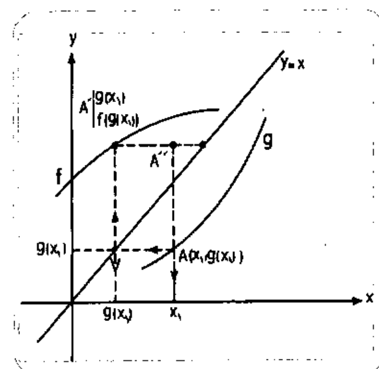
• نشانی: تهران، خیابان ایرانشهر شمالی، ساختمان شماره‌ی ۴ آموزش و پرورش، پلاک ۲۶۶، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی.

. $x_{A'} = g(x_1)$

درنتیجه $A'(g(x_1), f(g(x_1)))$ است.

۳. می‌خواهیم نقطه‌ی A'' را در صفحه‌ی محورهای مختصاتی که نمودارهای دو تابع f و g رسم شده‌اند، طوری بیابیم که $A''(x_1, f(g(x_1)))$ باشد.

مانند دو قسمت قبل، خط y=x را رسم می‌کنیم.



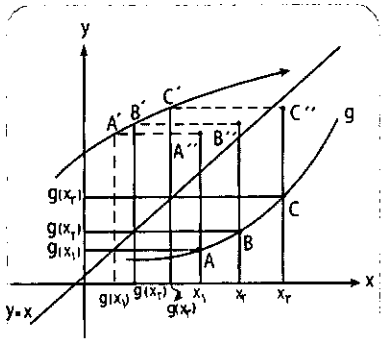
نقطه‌ی $A(x_1, g(x_1))$ را روی نمودار g در نظر می‌گیریم. با توجه به توضیحات مورد ۲، به نقطه‌ی

$A'\left|\begin{matrix}g(x_1)\\ f(g(x_1))\end{matrix}\right.$ می‌رسیم.

حال اگر از نقطه‌ی A' روی نمودار f خطی موازی محور xها رسم کنیم تا رابط رسم شده از نقطه‌ی A (موازی محور yها) را در نقطه‌ی A'' قطع کند، آن‌گاه $A''\left|\begin{matrix}x_1\\ f(g(x_1))\end{matrix}\right.$ خواهد شد. بنابراین A'' نقطه‌ای از تابع $f(g(x))$ است. با تکرار این عمل، نقاط متعدد A'' که روی تابع fog قرار دارند، مشخص می‌شوند.

در شکل زیر، سه نقطه از تابع fog را با در دست داشتن نمودارهای دو تابع f و g به‌دست می‌آوریم $(x_1, x_2, x_3 \in Dg)$.

نقاط A''، B'' و C''، سه نقطه از تابع fog هستند.



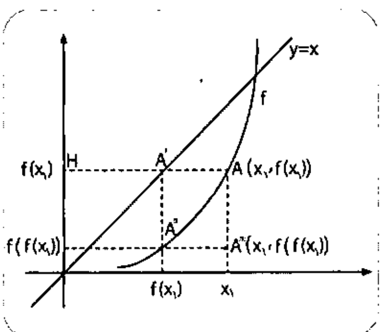
$A''\left|\begin{matrix}x_1\\ f(g(x_1))\end{matrix}\right.$ $B''\left|\begin{matrix}x_2\\ f(g(x_2))\end{matrix}\right.$ $C''\left|\begin{matrix}x_3\\ f(g(x_3))\end{matrix}\right.$

۴. می‌خواهیم از روی نمودار تابع f، نمودار تابع fof را رسم کنیم.

فرض می‌کنیم در صفحه‌ی محورهای مختصات، نمودار تابع f رسم شده است. خط y=x را هم در شکل رسم می‌کنیم. نقطه‌ای به طول x_1 روی نمودار تابع f در نظر می‌گیریم، مانند $A(x_1, f(x_1))$. از نقطه‌ی A رابطی موازی محور xها بر محور yها عمود می‌کنیم. این رابط، خط y=x را در نقطه‌ی $A'(f(x_1), f(x_1))$ و محور yها را در H قطع می‌کند که $y_H = f(x_1)$.

از نقطه‌ی A' به محور xها عمود می‌کنیم. طول پای عمود $f(x_1)$ است. این رابط نمودار تابع f را در نقطه‌ی A'' قطع می‌کند که $A''(f(x_1), f(f(x_1)))$ است.

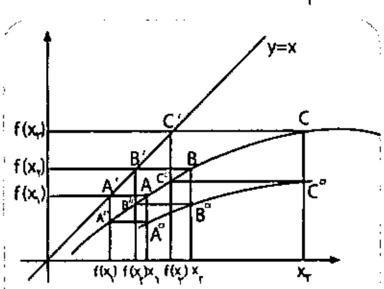
چنان‌چه از A'' رابطی موازی محور xها رسم کنیم تا رابط عمود بر محور xها به طول x_1 را در نقطه‌ی A''' قطع کند، آن‌گاه $A'''(x_1, f(f(x_1)))$ خواهد شد؛ مانند شکل زیر:



$A(x_1, f(x_1))$؛ $A'(f(x_1), f(x_1))$

$A''(f(x_1), f(f(x_1)))$؛ $A'''(x_1, f(f(x_1)))$

برای تمرین، در شکل زیر سه نقطه‌ی A'''، B''' و C''' را از تابع fof مشخص می‌کنیم.



$A'''(x_1, f(f(x_1)))$

$B'''(x_2, f(f(x_2)))$

$C'''(x_3, f(f(x_3)))$

برگ اشتراک مجله‌های رشد

شرایط:
۱. پرداخت مبلغ ۵۰/۰۰۰ ریال به ازای هر عنوان مجله‌ی درخواستی، به صورت علی‌الحساب به حساب شماره‌ی ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت شعبه‌ی سه‌راه آزمایش (سرخه‌حصار) کد ۳۹۵ در وجه شرکت افست.
۲. ارسال اصل فیش بانکی به همراه برگ تکمیل شده‌ی اشتراک با پست سفارشی. (کپی فیش را نزد خود نگه دارید.)

• نام مجله‌های درخواستی:
• نام و نام خانوادگی:
• تاریخ تولد:
• میزان تحصیلات:
• تلفن:
• نشانی کامل پستی:
استان: شهرستان:
خیابان:
پلاک: کدپستی:
• در صورتی که قبلاً مشترک مجله بوده‌اید، شماره‌ی اشتراک خود را بنویسید:
امضا:

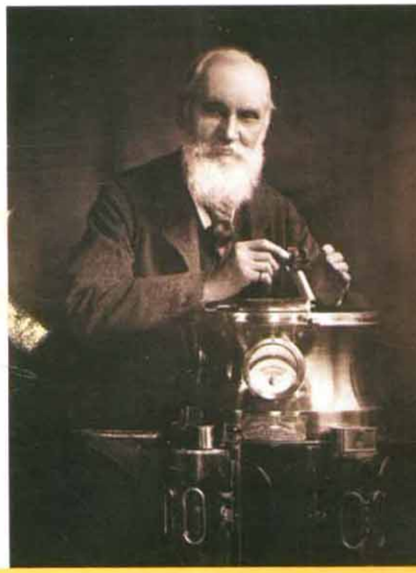
● صندوق پستی مرکز بررسی آثار: ۱۵۸۷۵/۶۵۶۷
● صندوق پستی امور مشترکین: ۱۶۵۹۵/۱۱۱
● نشانی اینترنتی: www.roshdmag.ir
● پست الکترونیک: Email:info@roshdmag.ir
● امور مشترکین: ۰۲۱-۷۷۳۳۶۶۵۶-۷۷۳۳۵۱۱۰
● پیام‌گیر مجله‌های رشد: ۰۲۱-۸۸۳۰۱۴۸۲

یادآوری:
• هزینه‌ی برگشت مجله در صورت خوانا و کامل نبودن نشانی و عدم حضور گیرنده، بر عهده‌ی مشترک است.

زبان حال ریاضی دانان

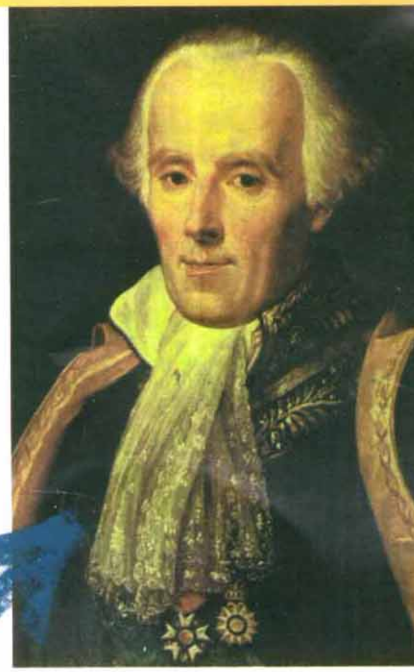
ریاضی دان کسی است که در نظرش $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{۲}$ به روشنی دو دو تا برابر با چهار تا باشد.

لرد کلوین



برداشت‌های ما از نقطه‌ی ریاضی، مثالی است از تجربه و دقتی که ریاضی‌دانان دائماً سعی دارند بدان واصل شوند و این مثال از آن لحاظ اهمیت دارد که ثابت می کند هر بار که آدمی به تجربه و دقت لازم می‌رسد باز هم تلاش می کند که به درجه‌ی بالاتری از تجربه و دقت دست یابد تا بهتر قادر به درک واقعیت گردد.

ای.تی.بل



حساب احتمالات در واقع چیزی جز عقل سلیم نیست که به محاسبه درآمده است. این حساب چیزی را که صاحبان فکر بدون آن که متوجه باشند به غریزه در می یابند و با دقت و صحت بیان می دارد. این علم که با ملاحظات مربوط به بازی های شانسی و تصادفی به وجود آمد، امروزه آن چنان اهمیتی یافته است که از مهم ترین مسائل معرفت آدمی به شمار می آید.

پی یر سیمون لاپلاس

پراکندگی موضوعی تست‌های ریاضی آزمون سراسری

سال‌های ۱۳۸۰ تا ۱۳۸۷ (رشته‌ی ریاضی)

تهیه و تنظیم: محمدعلی تقی‌پور، گروه ریاضی ناحیه‌ی ۲ بندرعباس

ردیف	کتاب	موضوع	۸۷	۸۶	۸۵	۸۴	۸۳	۸۲	۸۱	۸۰
۱	ریاضی ۱ ریاضی ۲ حسابان و حساب دیفرانسیل و انتگرال	معادله، نامعادله و بخش‌پذیری	۲	۲	–	–	۱	۲	–	۱
۲		تابع	۱	۱	۱	۱	۲	۳	۳	۲
۳		نمودار تابع	–	۱	۲	۱	۳	۱	۲	۱
۴		مثلثات	۲	۲	۲	۱	۲	۲	۲	۲
۵		حد و پیوستگی	۳	۴	۲	۵	۳	۳	۳	۵
۶		مشتق و کاربردها	۸	۵	۹	۷	۸	۷	۸	۸
۷		دیفرانسیل و انتگرال	۲	۴	۳	۳	۲	۳	۴	۳
۸		مجانب	۱	۱	۱	–	۱	۲	–	۱
۹		تصاعد	۱	۱	۱	۲	۱	–	۱	–
۱۰		لگاریتم	۱	۱	۱	۱	–	۱	۱	–
۱۱		دستگاه اعداد، دنباله و سری	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۳
۱۲	آمار	آمار و مدل‌سازی	۲	۲	۲	–	–	–	۱	–
۱۳	هندسه‌ی ۱	هندسه	۴	۴	۳	۴	۴	۴	۴	–
۱۴	هندسه‌ی ۲	استدلال	۱	–	۲	۲	۲	۲	۲	۴
۱۵		دایره	۱	۲	۱	۱	۱	۱	۱	–
۱۶		تبدیل‌ها	۱	۱	۱	۱	۱	–	–	۲
۱۷		هندسه فضایی	۱	۱	۱	۲	۱	۱	۱	۱
۱۸	هندسه‌ی تحلیلی و جبر خطی	بردارها	۱	۱	۲	۲	۲	۱	۲	۱
۱۹		معادلات خط و صفحه	۲	۲	۲	۱	۱	۲	۱	۲
۲۰		مقاطع مخروطی	۲	۱	۲	۲	۳	۱	۱	–
۲۱		ماتریس و دترمینان	۲	۲	۲	۲	۲	۱	۱	۴
۲۲		دستگاه معادلات خطی	۱	۳	–	۱	–	۴	۲	۱
۲۳	جبر و احتمال	استدلال ریاضی	–	۱	–	–	۱	۱	۲	۱
۲۴		مجموعه، رابطه و حاصل ضرب دکارتی	۳	۲	۳	۳	۳	۲	۲	۲
۲۵		احتمال	۳	۲	۳	۳	۳	۱	۲	۳
۲۶	ریاضیات گسسته	گراف	۱	۲	۱	۲	۱	۲	۱	۲
۲۷		نظریه اعداد	۳	۱	۳	۳	۳	۳	۴	۳
۲۸		آنالیز ترکیبی و ترکیبیات	۲	۱	۱	–	–	۱	–	۱
۲۹		احتمال	۲	۳	۲	۳	۲	۲	۲	۲

منبع: گروه درس ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی وزارت آموزش و پرورش، math-dept.talif.sch.ir