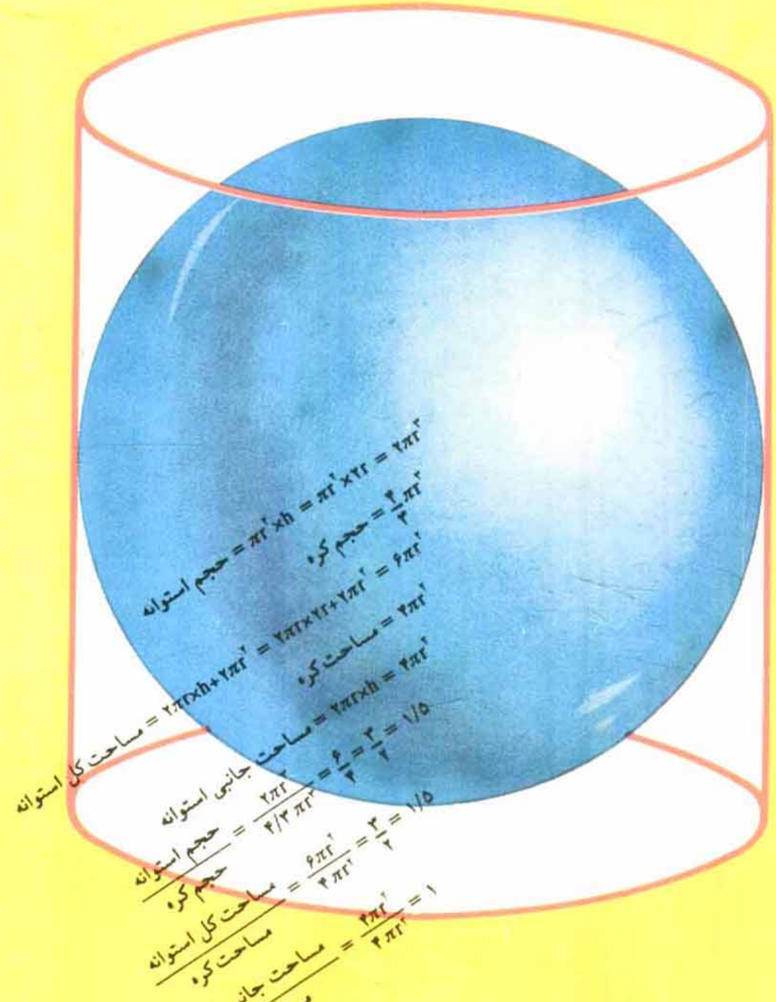
مجله ریاضی

برهان

برای دانش آموزان دبیرستان

۶

سال دوم، بهار ۱۳۷۲، شمارهٔ دوم، بهاء ۵۰۰ ریال



بسم الله الرحمن الرحیم

• صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه
• مدیر مسئول: محمود ابراهیمی • سردبیر: حمیدرضا امیری

طرح روی جلد نمایانگر استوانه معروف به استوانه ارشمیدس است (شعاع کره = شعاع استوانه) این طرح از طرف آقای حسین سبزرو دانش‌آموز سال چهارم پیشنهاد گردیده است.

برهان هر ۳ ماه یک شماره منتشر می‌شود.

برهان تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

۱- نگارش مقالات کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتب ریاضی دبیرستان)

۲- طرح مسائل کلیدی (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن

۳- طرح مسائل مسابقه‌ای (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن

۴- طرح معماهای ریاضی

۵- نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

• هیئت تحریریه درحکّ واصلاح وحذف و اضافهٔ مقالات آزاد است.
• مقالات وارده باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.
• مقالات رسیده مسترد نمی‌شود.

مطالب این شماره

□ نشانی: تهران، خیابان ایرانشهرشمالی، کوچه بهرام چوبینی، پلاک ۱۷ تلفن: ۸۸۲۶۰۰۷ ، ۸۸۲۵۹۶۴ ، ۸۸۲۳۱۴۹ ، فاکس ۸۸۲۰۵۹۹

حرف اول

انسان موجودی هدف‌دار است و آن هدف، تعالی و تکامل بی‌پایان انسان و بازگشت به خدا و بروز خصلتهای نیک و انرژیها و استعدادهای نهانی انسان و به‌کار افتادن این همه در راه نیکی و نیکسازی خود و جهان و انسانهاست. از جانبی دیگر، فراموش کردن هدف و جهت در زیر فشار گرفتاریهای مادی امری واضح و طبیعی است از طرفی امکان مرور کردن همهٔ تعهدهایی که در این راه آدمی به عهده گرفته در هر روز تقریباً ناممکن و محال است. به‌علاوه، زمان کافی برای بررسی تمام خواسته‌ها و ایده‌آلهای این مکتب ـ مکتب زندگی‌ساز و سعادت‌بخش اسلام ـ در شبانه روز هیچ‌گاه وجود ندارد و چنین فرصتی هرگز به‌دست نمی‌آید. نماز چکیده و خلاصهٔ اصول این مکتب را در خود دارد و باگفتنی‌ها و حرکتهای حساب شده و منظمی که درآن هست نمودار اسلام است.

نماز یک زنگ بیداری و یک هشدار در ساعات مختلف شبانه‌روز است. به انسان برنامه می‌دهد و از او تعهد می‌خواهد، به روز و شبش معنا می‌دهد و از گذشت لحظه‌ها حساب می‌کشد. در آن هنگام که انسان مشغول و بی‌خبر از طی زمان و انقضای عمر است او را می‌خواند و به او می‌فهماند که روزی گذشت و روزی دیگر آغاز شد. باید فعالیت کنی. مسئولیت بزرگتری برعهده بگیری وکار مهمتری انجام دهی. به دلیل آنکه بخشی‌از عمر، از فرصت عمل، به سرآمد پس باید بیشتر تلاش کرد و پیشتر رفت زیرا هدف بزرگ است، مگر تا فرصت ازکف نرفته به آن دست یافت.

آری نماز بهار دلهاست و بهارجان است و همانگونه که بهار زمین را زنده می‌کند نماز جان را. همواره جان در تلاطم و پرواز به سوی هدف است و روحیهٔ «طلب»، «امید»، «آرامش» و «اطمینان» که بالهای نیرومند این پروازند، نتیجهٔ یاد خدا و نماز می‌باشد. عزیزان مطلب راجع به فلسفهٔ نماز بسیار وسیع و فواید آن به بی‌نهایت میل می‌کند و همچون دایره‌ای می‌ماند که در مرکز آن قرار داشته‌باشیم و بخواهیم از هرطرف به محیط آن برسیم.

حرف راکوتاه می‌کنم و به‌ذکر چند نکته راجع به مطالب مجله می‌پردازم:

۱ ـ اگر از معلمین خود خاطرات یا خاطره‌ای دارید برای ما ذکر کرده و به‌همراه نام معلم و اینکه آیا درقید حیات می‌باشند یا خیر بفرستید.

۲ ـ اگر به‌نکات تستی جالب و یا تستهایِ خوب برخورد کردید و یا خودتان طرح کرده‌اید برای ما بفرستید.

در ضمن چون تاریخ چاپ این شماره مجلّه احتمالاً مصادف با هفتهٔ معلم می‌باشد این ایام را به‌تمامی معلمین خوب و دلسوز میهن اسلامیمان تبریک عرض می‌نماییم و توفیق روز افزون برای همگی شما عزیزان خواستاریم.

سردبیر

شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۶)

• پرویز شهریاری

دراین‌جا و به‌مناسبت نامه‌ای که یک خوانندهٔ دانش آموز فرستاده است؛ ناچاریم دربارهٔ آنچه تا این‌جا گفته‌ایم، اندکی توضیح بدهیم. این دانش‌آموز، در نامهٔ مفصل خود، ازجمله می‌پرسد: «اگر قرار باشد، ضمن مطالعهٔ درسهای ریاضی، یا ضمن گوش دادن درس معلم و یا بعد از آن که مسأله‌ای را حل یا قضیّه‌ای را ثابت کردیم، همچنان در «شک» باقی بمانیم و فرض را بر این بگیریم که ممکن است همه اینها نادرست باشند، آیا اعتماد خود را نسبت به ریاضیات (و به‌طورکلی دانش) از دست نمی‌دهیم و دچار نوعی سرگردانی فکری نمی‌شویم؟» من، برای دوری از درازی مطلب و روشنتر شدن آن، پرسش این دوست دانش‌آموز را بازسازی کرده‌ام و، با نقل به‌معنی، در این‌جا آورده‌ام.

اول، جمله‌ای پرمضمون را، از عین‌القضات همدانی، به‌نقل از یکی از نامه‌های او، می‌آوریم:

«... چندین هزار جنازه که به گورستان برند، یکی از اینان به شک نرسیده بود؛ و از چندین هزار به شک رسیده، یکی را گرفتاری طلب نبود؛ و چندین هزار را دردِ طلب بگیرد و یکی به‌راه راست نیافتد...»

و این بویژه هشداری است برای همهٔ آنها که می‌خواهند، در کار علمی خود «به‌راه راست بیفتند». «شک» آغاز کار است، نه پایان آن. «شک» هدف نیست، بلکه وسیله‌ای است برای نزدیکتر شدن به «حقیقت»، و اگر درست و بجا و اندیشیده نباشد، به‌قول دوست دانش‌آموز ما، موجب «بی‌اعتمادی» و درنتیجه «سرگردانی فکری» می‌شود.

معمولاً، وقتی کسی می‌خواهد، نظر خود را به‌طرف بقبولاند و استدلال و داوری خود را قاطع و بدون بحث نشان دهد، از ضرب‌المثل «مثل دو دوتا، چهارتاست» استفاده می‌کند. دراین ضرب‌المثل، قضاوتی نهفته است که، بنابرآن، هر حکم ریاضی، ثابت، بی‌تغییر و غیرقابلِ اعتراض است. ولی باید بگوییم که این ضرب‌المثل، در ریاضیات، کمتراز هرجای دیگری صدق‌می‌کند. دراین مورد، می‌توان مثالهای بسیار و ساده و عامیانه‌ای آورد. می‌گوییم $۲ \times \frac{۱}{۲} = ۱$. ولی اگر شما، یکی از کفشهای خود را از وسط و در جهت درازی آن بُرید و به دو نیمهٔ برابر تقسیم کنید، این دو نیمهٔ کفش، با یک کفش کامل، برابر نیست؛ یعنی نمی‌توانند کار یک کفش را انجام دهند. اگر قطعهٔ الماسی را نصف کنید، ارزش این نیمه روی‌هم، برابر با ارزش قطعهٔ اصلی نیست... می‌گوییم $۱۰ + ۱۰ = ۲۰$، ولی اگر ۱۰ لیتر آب را با ۱۰ لیتر الکل، مخلوط کنیم، روی هم ۱۹ لیتر «آب و الکل» به‌دست می‌آید (تداخل مولکولهای آب و الکل، حجم مجموع را اندکی کاهش می‌دهد). همین مثالهای ساده به ما نشان می‌دهد: ریاضیات، ابزاری برای دفع دشواریهای زندگی (و از آن‌جمله صنعت و دانشهای دیگر) است، ریاضیات، چیزی مجرد و جدا از زندگی نیست که تنها زائیدهٔ ذهن آدمی باشد. بنابراین، در هر مورد خاصی که مورد استفاده قرار می‌گیرد، باید با تجربه و واقعیت تطبیق کند... و اگر درجایی، در ریاضیات به پاسخی نادرست رسیدیم، باید ریاضیات را عوض کرد نه زندگی را.

ریاضیات از مشاهده و تجربه (هم تجربهٔ بیرونی و هم تجربهٔ درونی و ذهنی) بیرون آمده است و، بتدریج، همچون درختی که

به‌طرف بالا و به دوروبر خود قد می‌کشد و می‌گسترد، بااستفاده از قراردادها، قضیه‌ها و استنتاجها، رشد کرده و تکامل یافته است. ولی تکامل ریاضیات، درمقایسه با رشد درخت، دو خصلت اساسی دارد:

اول این‌که، این تکامل، به پایان خود نرسیده و هرگز هم، به نقطهٔ پایان خود نمی‌رسد. ریاضیات، زنده و پویاست و نمی‌تواند در «قالبی محدود» محبوس بماند. «نفی» گذشتهٔ ریاضیات، به‌معنای نفی بی‌دقتیهای آن است و نه نفی کامل گذشته. با تکامل ریاضیات و با دقیقتر شدن آن، به قانونها و «آلگوریتمهای» عامتری می‌رسیم که شُمول بیشتری دارند و کارآمدتر از قانونها و آلگوریتمهای قبلی‌اند.

برای این‌که به شُمول دستورهای ریاضی پی‌ببریم که چگونه، یک رابطهٔ ریاضی یا یک بررسی خالص ریاضی، می‌تواند پدیده‌ها و روندهای مختلفی را شرح دهد و در زمینه‌های گوناگونی از دانشهای طبیعی کاربرد پیدا کند، مثال ساده‌ای را از کتاب «محتوی، روش و اهمیت ریاضیات» می‌آوریم که، گرچه به ریاضیات مقدماتی و دبیرستانی مربوط می‌شود، می‌تواند معرف توانائیهای ریاضیات در توضیح قانونهای موجود در طبیعت باشد:

«... در سدهٔ شانزدهم، بررسی حرکت، در مرکز توجه دانشهای طبیعی قرارداشت. نیازهای زندگی و پیشرفت دانشهای طبیعی، این دانشها را در آستانهٔ بررسی گونه‌های مختلف تغییر، و بررسی بستگی بین کمیتهای متغیر قرار داد. مفهومهای متغیر و تابع، به‌عنوان بازتابی از ویژگیهای عمومی کمیتهای متغیر و رابطهٔ بین آنها، در ریاضیات به‌وجود آمد. و این، به‌معنای پیشرفت ریاضیات و به‌معنای انتقال به دوره‌ای تازه، یعنی دورهٔ کمیتهای متغیر بود. قانون حرکت جسم، روی مسیر مفروض، و مثلاً روی خط راست، از روی مسافتی که در طول زمان می‌پیماید، معین می‌شود. مثلاً گالیله (۱۵۶۴ - ۱۶۴۲)، قانون سقوط جسم را کشف و ثابت کرد، مسافتی که جسم در حال سقوط می‌پیماید، با مجذور زمان متناسب است. این قانون، با دستور زیرنشان داده می‌شود:

$$S = \frac{1}{2} gt^2 \qquad (1)$$

که در آن، مقدار g به‌تقریب برابر ۹/۸۱ (متر بر مجذور ثانیه) است... مفهوم ریاضی متغیر و تابع، چیزی جز تعمیم انتزاعی مقدارهای متغیر مشخص (مثل زمان، مسافت، سرعت، زاویهٔ دوران و غیره) و رابطه‌های مشخص بین آنها (مثل رابطه‌ای که بین مسافت پیموده شده با زمان وجود دارد) نیست. همان‌طورکه «عدد حقیقی» شکل انتزاعی اندازهٔ کمیت است، همان‌طور هم، «متغیر» شکل انتزاعی کمیتی است که تغییر می‌کند. کمیتی که می‌تواند مقدارهای مختلفی را بپذیرد. کمیت متغیر ریاضی، عبارت است از «چیزی»، یا بهتر بگوییم «چیز دلخواهی»، که می‌تواند مقدارهای عددی مختلف را قبول کند. بنابراین، متغیر ریاضی، یک مفهوم عام است و زیر عنوان آن، می‌توان هم‌زمان، هم مسافت و هم هر کمیت دیگری را فهمید. به‌همین ترتیب، تابع، عبارت است از شکل انتزاعی بستگی یک کمیت با کمیت دیگر. وقتی می‌گوییم «y تابعی است از x»، در ریاضیات تنها به این معنی است که، برای هر مقدار x، مقدار متناظر معینی برای y وجود دارد... مثلاً، بنابر قانون سقوط جسم، مسافتی که جسم درحال سقوط، در زمان معینی طی می‌کند، به‌کمک دستور (۱) به‌دست می‌آید: مسافت، تابعی از زمان. انرژی یک جسم متحرک، برحسب جرم و سرعت آن، با دستور زیر بیان می‌شود:

$$E = \frac{1}{2} mv^2 \qquad (2)$$

برای یک جسم مفروض، انرژی آن (E)، تابعی است از سرعت آن (v)... مقدار حرارتی که، ضمن عبور جریان برق، در واحد زمان ایجاد می‌شود، با دستور

$$Q = \frac{1}{2} RI^2 \qquad (3)$$

به‌دست می‌آید؛ که در آن، I نمایندهٔ شدت جریان و R نمایندهٔ مقاومت سیمی است که جریان برق از آن می‌گذرد. برای مقاومت مفروض، هر شدت جریان I، متناظر است با

مقدار معینی از حرارت Q که در واحد زمان به‌دست می‌آید: Q تابعی است از I. مساحت S از مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یکی از زاویه‌های حادهٔ آن برابر α و ضلع مجاور به این زاویه و زاویهٔ قائمهٔ مثلث برابر x باشد، با دستور

$$S = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\alpha \cdot x^2 \qquad (4)$$

بیان می‌شود. اگر زاویهٔ α معلوم باشد، مساحت مثلث تابعی است از ضلع x آن. همهٔ دستورهای از (۱) تا (۴) را می‌توان به‌صورت یک رابطهٔ عام نوشت:

$$y = \frac{1}{2} ax^2 \qquad (5)$$

که به‌معنای انتقال از کمیتهای متغیر مشخص t و s، v و E، I و Q، X و S، به متغیرهای کلی و عام x و y است: انتقال از رابطه‌های مشخص (۱)، (۲)، (۳)، (۴)، به‌صورت کلی آنها، یعنی رابطهٔ (۵). اگر مکانیک و الکتریسیته، با دستورهای مشخص (۱)، (۲)، (۳) سروکار دارند (که به کمیتهای مشخصی مربوط می‌شوند)، دانش ریاضی با دستور کلی و عام (۵) (که به هیچ کمیت مشخصی مربوط نیست) سروکار دارد...»

دوم این‌که، نتیجه‌گیریهای ریاضی، ریشه در تجربهٔ آدمی دارند و، سرآخر هم، باید با تجربهٔ آدمی سازگار درآیند. به‌همین مناسبت است که انتزاعیترین و مجردترین نظریه‌های ریاضی، سرانجام کاربرد عملی پیدا می‌کنند. شناسایی و رده‌بندی چندوجهیهای منتظم و نیمه‌منتظم، متقارن و نیمه‌متقارن، مورد استفادهٔ دانش بلورشناسی قرار می‌گیرد و گونه‌های مختلف بلورها، به‌کمک نظریهٔ ریاضی چندوجهیها شناخته می‌شود. هندسهٔ نااقلیدسی راه محاسبهٔ دقیقتر را، برای پرواز سفینه‌های فضایی باز می‌کند؛ فضای بی‌نهایت‌بُعدی، کاربرد خود را درنظریهٔ کوانتومها به‌دست می‌آورد؛ از عددهای موهومی، برای مسأله‌های حقیقی استفاده می‌شود و غیره و غیره. پیش آمده است که یک نظریهٔ ریاضی، سالها و حتی سده‌های متوالی، بی‌مصرف مانده است، ولی پیشرفت صنعت و پیچیده‌تر شدن زندگی، موجب شده است تا این «نظریهٔ فراموش شده» به میدان آید وکاربرد خود را پیدا کند. کوتاه شده‌ای از یک بخش کتاب «مهمترینها در ریاضیات» نوشتهٔ «فلدبلوم» را، که بسیار خواندنی است، در این‌جا می‌آوریم:

«... نزدیک به صد سال پیش از آپولونیوس و در سال ۳۵۰ پیش از میلاد، مقطعهای مخروطی به‌وسیلهٔ **مناخوسموس** کشف شد، ولی... به‌فراموشی سپرده شد. **آپولونیوس** این آثار را زنده کرد و کارهای **مناخوسموس** را ادامه داد، آثار **آپولونیوس** را کسی نمی‌خواند... و تنها عدهٔ کمی از دانشمندان از وجود این آثار آگاه بودند... در سدهٔ شانزدهم، با پیشرفت اخترشناسی و مکانیک، این نظریهٔ فراموش شده دوباره زنده شد... به‌نحوی که بسیاری از دانشها بدون وجود این نظریه، نمی‌توانستند پیشرفت کنند ... و **یوهان‌کپلر** و **ایساک‌نیوتون**، برای روشن کردن ویژگیهای مدارهای سیاره‌ها، به‌آموزش **آپولونیوس** دربارهٔ مقطعهای مخروطی روآوردند... اندکی بعد، در سدهٔ هفدهم، **پیرفرما** و **رنه‌دکارت**، براساس مقطعهای مخروطی، نظریهٔ تازه‌ای به‌نام «هندسهٔ تحلیلی» را در ریاضیات به‌وجود آوردند... نظریهٔ مقطعهای مخروطی قریب دوهزار سال در بوتهٔ فراموشی بود و... ناگهان، این دانش فراموش شده زنده شد و، به‌کمک آن، شاخه‌های تازه‌ای در دانش انسانی پدید آمد...

سیمون دنی پواسون، ریاضی‌دان فرانسوی، در سال ۱۸۲۴، در نظریهٔ ریاضی مغناطیس، معادله‌های مربوط به‌وضع عقربه‌های قطب‌نما در کشتی را پیدا کرد. قبل از پواسون، کسی، تأثیر برهم‌زنندهٔ فلزی که درچوب‌بست کشتی و دیگر تجهیزات آن به‌کار رفته است، به حساب نمی‌آورد؛ ولی پواسون برای نخستین‌بار، این شرایط را هم، در معادله‌های خود، درنظر گرفت... این‌کار خالص نظری، در نظر کشتی‌سازان و دریانوردان به‌عنوان کاری غیرلازم ولی فایده جلوه کرد و... به‌این ترتیب، این کشف، به‌عنوان کاری ذهنی، که فایدهٔ عملی ندارد، کنار گذاشته شد. ولی دریانوردان، خیلی زود به دشواریهایی برخوردند که، برای

رفع آنها، ناچار شدند به معادله‌های پواسون رو آورند. در سال ۱۸۶۲، در طول یک ماه، تمام کشتیهایی که از انگلیس حرکت کرده بودند، غرق شدند، در ساحل ایرلند، دو کشتی بزرگ مسافربری، یکی پس از دیگری غرق شد. رهبری نیروی دریایی انگلیس دچار وحشت و پریشانی شد... گروه‌های صلاحیت‌دار، برای بررسی علت نابودی کشتیها تشکیل شد. معلوم شد، علت اصلی، مربوط به نارسایی و اشتباه قطب‌نماهاست... درآن زمان، کشتیها را از چوب می‌ساختند و فلز کمی در آنها به‌کار می‌رفت. اثر این مقدار فلز در قطب‌نما ناچیز بود و می‌شد از آن صرف‌نظر کرد. ولی بتدریج، فلز کشتیها را زیاد و زیادتر می‌کردند. در میانه‌های سالهای چهل سدهٔ نوزدهم، به‌طور گسترده‌ای، کشتی‌سازی فلزی پیشرفت کرد و دیگر، صرف‌نظر کردن از آنها در مورد قطب‌نماهای جهت‌یاب، درست نبود. ولی کشتیها هنوز با همان مدیریت کهنه اداره می‌شد... این‌جا بود که معادله‌های پواسون می‌توانست مورد استفاده قرارگیرد. این معادله‌ها به‌اندازه‌ای لازم بود که، بدون آنها، کشتی‌رانی جدید معنایی نداشت ... ریاضی‌دانها، با تغییرهایی که در این معادله‌ها دادند، آنها را ساده‌تر کردند و، به‌کمک آنها، راه عملی را، برای مدیریت جدید کشتیها، در تعیین انحراف قطب‌نما پیدا کردند... مدیریتی که در زمان ما هم از آن استفاده می‌کنند...

در میانه‌های سدهٔ نوزدهم، کتاب ژرژبول ریاضی‌دان ایرلندی، دربارهٔ منطق ریاضی، منتشر شد. در آن زمان، دربارهٔ این اثر می‌گفتند: «این، نوعی بازی با علامتها و دشمن هرگونه تفکر است»، «این تألیف، هیچ‌گونه ارزش عملی ندارد». و، بنابراین، نوشتهٔ بول، در آن موقع، مورد تأیید کسی قرار نگرفت. ولی سالها بعد، این اثری که «دشمن هرگونه تفکر بود» و «هیچ‌گونه ارزش عملی نداشت»، در کار ساختمان ماشینهای محاسبه و کامپیوترها، کاربرد پیدا کرد...

در واقع، حتی یک نظریهٔ ریاضی نمی‌توان پیدا کرد که، وقتی در مسیر طبیعی پیشرفت دانش قرار می‌گیرد، موضعی در مقابل واقعیتها داشته باشد... ریاضیات، سالها از صنعت جلوتر است و بشر می‌تواند، به کمک ریاضیات، مسأله‌های بسیار پیچیده‌ای از صنعت را حل کند... در سال ۱۸۵۷، برای نخستین‌بار، بین اروپا و امریکا، از زیر دریا سیم‌کشی کردند. وقتی کار به‌پایان خود نزدیک می‌شد، کابل در جایی در عمق دریا آسیب دید. همهٔ تلاشها برای ترمیم خرابی، با ناکامی روبه‌رو شد. کابل کار نمی‌کرد. نشانه‌های مؤرس را نمی‌پذیرفت... به‌نظر می‌رسید، زحمت فوق‌العادهٔ مهندسان و متخصصان و کارگران، از بین رفته‌است... از همهٔ امکانهایی که در آن زمان، یعنی نیمهٔ سدهٔ نوزدهم، وجود داشت، استفاده کردند، ولی نتوانستند کابل را به‌کار بیندازند... برای حل مشکل، به **ویلیام توموسون**، ریاضی‌دان و فیزیک‌دان انگلیسی مراجعه کردند. توموسون همهٔ نظریه‌های ریاضی سودمند را به‌یادآورد و روی یکی از نظریه‌ها، که به‌وسیلهٔ **فوریه** ریاضی‌دان فرانسوی، شصت‌سال قبل، دربارهٔ نظریهٔ ریاضی هدایت گرما تنظیم شده بود، توقف کرد. توموسون، درضمن، متوجه یکی از کارهای **ژژگرین**، ریاضی‌دان انگلیسی شد که ۳۵ سال پیش‌از آن انجام داده بود و سرانجام، **ویلیام توموسون** در سال ۱۸۵۸ موفق شد، به کمک معادله‌های فوریه وگرین مسأله را حل کند... کابل به‌راه افتاد و نشانه‌های مؤرس، روشن و با صدای کافی، منتقل شد...»

اگر «شک» نبود، ریاضیات، در همان مرحله‌های نخستین خود منجمد می‌شد. و البته، نه‌تنها ریاضیات، که معرفت و فرهنگ آدمی رشد نمی‌کرد و در همان شرایط ابتدایی خود باقی می‌ماند.

اگر به‌نظریهٔ ارسطو، دربارهٔ سقوط آزاد جسم شک نمی‌کردند و کسانی پیدا نمی‌شدند که جرأت کنند و بگویند «ممکن است، معلم اول و استاد بزرگ، اشتباه کرده باشد»، قانونهای سقوط آزاد جسم کشف نمی‌شد. جریان این است که ارسطو، با تکیه بر «عقل سلیم» و «معرفت شهودی» می‌گفت، اگر دو جسم را از یک بلندی رها کنیم، آن که سنگینتر است، زودتر به زمین می‌رسد. آزمایش نشان می‌داد که گلولهٔ فلزی و گلولهٔ چوبی، ضمن سقوط آزاد، در یک زمان به‌زمین می‌رسند. ولی هواداران ارسطو، با مشاهده و تجربه اعتقاد نداشتند و حتی تا سدهٔ هفدهم و زمان گالیله حاضر نبودند تن به آزمایش بدهند

و همچنان بر نظریهٔ ارسطو پای می‌فشردند. گالیله در نوشتهٔ خود به‌نام «گفت و شنود»، به کسی که هوادار نظریهٔ ارسطو است، می‌گوید: «... اگر این باور شما درست باشد، باید بتوانید آن را آزمایش کنید، یعنی اگر دو وزنهٔ هم‌جنس را، یکی به‌وزن صد پوند و دیگری به وزن یک پوند، در یک لحظه، از نقطه‌ای به ارتفاع ۱۰۰ اَرَش رها کنید، وقتی وزنهٔ سنگینتر به زمین می‌رسد، باید وزنهٔ یک پوندی، تنها یک اَرَش را پیموده باشد»، زیرا بنا به‌نظریهٔ ارسطو، سرعت سقوط آزاد جسم، باید به نسبت وزن آنها باشد. گالیله حتی بارها، آزمایش خود را در برابر دیگران انجام داد و برای این‌منظور از برج «پیزا» بالا رفت و وزنه‌هایی با وزنه‌های مختلف از بالای برج رها کرد، ولی جزم‌اندیشان هوادار ارسطو، با تکیه بر «استدلال عقلی» و نفی آزمایش، حقیقت را نمی‌پذیرفتند.

از زمانی‌که در سده‌های میانه، «علم ارسطویی» را به‌عنوان «کلام آخر» قبول کرده‌بودند، کسی حاضر نبود در مورد آموزشهای ارسطو، ولو این‌که نادرستی آنها روشن باشد، «شک» کند و به‌قول ابن‌خلدون، مورخ و منتقد بزرگ:

«... استنباطی که بعضی عقاید انحرافی نسبت به‌علم داشتند، آن را از صفحهٔ اذهان خارج ساخت و، به‌جای آن، اعتقاد به موهومات نشست...»

ولی گالیه، همچون دکارت، ریاضی‌دان فرانسوی، به مشاهده و تجربه اعتقاد داشت، چرا که به‌قول دکارت:

«... به‌نظرم می‌رسید که می‌توانستم، در استدلالهای کسانی که با عمل سروکار دارند، با حقیقت بیشتری روبه‌رو شوم، زیرا اگر اینها دچار اشتباه شوند، خیلی زودتر از دانشمندانی که، در اطاقهای دربسته، به استدلال مشغول‌اند، کیفر اشتباه خود را می‌بینند...»

و گالیله، ضمن به‌سخره گرفتن مخالفان مشاهده و آزمایش می‌گوید:

«... بعضی از فیلسوفانی که مقدمات فیزیک را درس می‌دهند، مبنی کار خود رابرآنچه قبلاً گفته شده است... می‌گذارند و نظر خود را، نه از آنچه کاملاً شناخته شده است، بلکه خیلی ساده، از ناشناخته‌ها و ناشنیده‌ها نتیجه می‌گیرند... (به‌این‌ترتیب) ما از چنان روشی استفاده می‌کنیم که، هر اثبات لازم را، از چیزی که اثبات شده است، نتیجه بگیرد. ولی من، اگر ممکن باشد هرگز پایهٔ استدلال خود را، بر چیزی که خود نیاز به اثبات دارد، نمی‌گذارم، اگرچه آن را حقیقت بپنداریم...»

حتی در تاریخ ریاضیات هم، می‌توان به‌نمونه‌های گمراه کننده‌ای از «استدلال» برخورد کرد که به‌خاطر طولانی نشدن مطلب، آن را به شمارهٔ بعدی برهان وامی‌گذاریم.

تابعد

ادب ریاضی

ریاضیات چیست؟

ترجمه: حسن صفاری

برای ما امکان ندارد که علامت ∞ را در دستگاه اعداد حقیقی جای دهیم و درعین‌حال قواعد اساسی حساب را نیز محفوظ بداریم. لیکن باید دانست که مفهوم بی‌نهایت تمام ریاضیات را احاطه کرده است، زیرا معمولاً موجودات ریاضی را به‌عنوان موجودات فردی و متمایز مورد مطالعه قرار نمی‌دهند، بلکه آنها را همچون اعضای طبقات و مجموعه‌هایی درنظر می‌گیرند که شامل بی‌نهایت شیء از همین نوع می‌باشند، همچون مجموعهٔ تمام اعداد صحیح یا مجموعهٔ اعداد حقیقی، یا تمام مثلثهایی که در صفحه قرار دارند.

دیفرانسیل و انتگرال

(قسمت اول)

(مورداستفاده دانش‌آموزان سال چهارم)

از : احمد قندهاری

۱ـ دیفرانسیل[1]

اگر تابع f بـه معادلهٔ $y=f(x)$ در فـاصلهٔ $(a\,,\,b)$ مشتق‌پذیر باشد و $x\in(a,b)$. چنانچه به x نموی مـانند Δx نسبت دهیم بـه طوری که $x+\Delta x\in(a,b)$ خواهیم داشت:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

و

$$\begin{cases}\text{حد}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)\\ \Delta x\to ۰\end{cases}$$

مثال. تابع به معادلهٔ $y=f(x)=x^۲+x$ را درنظر می‌گیریم :

اگر بـه x نموی مانند (۰/۱) نسبت دهیم ، مقادیـر $f'(x)$ و $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ را درنقطه‌ای به طول (۳) بیابید.

$$f'(x)=۲x+۱ \implies f'(۳)=۷$$

$$\Delta y=f(۳+\Delta x)-f(۳)$$

$$=(۳+۰/۱)^۲+(۳+۰/۱)-(۹+۳)=۰/۷۱$$

$$\begin{cases}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{۰/۷۱}{۰/۱}=۷/۱\\ f'(۳)=۷\end{cases} \implies f'(x)\neq\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

1_ Differential

به طوری که ملاحظه می‌شود $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ و $f'(x)$ اختلاف کمی باهم دارند.

چنانچه $\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x)\right|$ را برابر α فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x)=\alpha \implies$$

$$\Delta y-f'(x)\cdot\Delta x=\alpha\Delta x(\Delta x\neq ۰)$$

$$\implies \Delta y=f'(x)\cdot\Delta x+\alpha\Delta x$$

چون α و Δx بی‌نهایت کوچك‌اند[2] وحاصل‌ضرب آنها کوچکتر از هریك‌ازآنها خواهد شد، پس می‌توان‌نوشت:

$$\Delta y\simeq f'(x)\cdot\Delta x$$

تعریف دیفرانسیل تابع

بنابه تعریف ، مقدار $f'(x)\cdot\Delta x$ را دیفرانسیل تـابع گویند و آن‌را بانماد dy نشان می‌دهند.

۲ـ بی‌نهایت کوچکها، اگر $x_۰$ یك‌عددحقیقی باشد چنانچه $\lim\limits_{x\to x_۰} f(x)=۰$ آنگاه تابع به معادلهٔ $f(x)$ را یك‌بی‌نهایت کوچك می‌گوییم. بی‌نهایت کوچك را یك مقدار متغیردارای‌حدصفر تعریف می‌کنیم.

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x$$
$$\Longrightarrow \Delta y \simeq dy$$
$$\Delta y \simeq f'(x) \cdot \Delta x$$

توجه کنید که: Δy نمو تابع است و dy دیفرانسیل تابع است.

در مثال قبل $\Delta y = ۰/۷۱$ و

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x$$
$$dy = (۲x + ۱) \cdot \Delta x \Longrightarrow dy = (۷)(۰/۱) = ۰/۷$$

به طوری که ملاحظه می‌کنید dy و Δy اختلاف کمی باهم دارند، دراین مثال اختلاف آنها $(۰/۰۱)$ است.

نتیجه. می‌توان گفت اگر در یك تابع به معادلهٔ

$$y = f(x)$$

متغیر x به اندازهٔ (Δx) تغییر کند، مقدار تابع تقریباً به اندازهٔ $f'(x) \cdot \Delta x$ تغییر می‌کند.

مثال. در تابع به معادلهٔ $y = f(x) = x^۳ + ۲x$ ، در نقطهٔ $x = ۲$ ؛ چنانچه Δx به اندازهٔ $(۰/۰۱)$ تغییر کند، Δy و dy را محاسبه کنید.

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f(۲ + ۰/۰۱) - f(۲)$$
$$= (۲/۰۱)^۳ + ۲(۲/۰۱) - (۸ + ۴) \Longrightarrow$$
$$\Delta y = ۰/۱۲۰۶$$
$$dy = f'(x) \cdot \Delta x = (۳x^۲ + ۲) \cdot \Delta x$$
$$= (۱۴)(۰/۰۱) = ۰/۱۴$$

دراین‌مثال، اختلاف Δyوdy، مقدارناچیز$(۰/۰۰۰۶)$ نسبت به ۲ است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\boxed{\Delta y \simeq dy}$$

مثال. اگر ازطرفین تابع $y = f(x) = x$، دیفرانسیل بگیریم، خواهیم داشت:

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x = ۱ \times \Delta x = \Delta x$$

ازطرفی $dy = dx$ پس: ازمقایسهٔ دو نتیجه خواهیم داشت:

$$\Delta x = dx$$

بنابراین می‌توان گفت اگر x متغیر مستقل باشد:

$$\Delta x = dx$$

پس: فرمول دیفرانسیل چنین خواهد بود:

$$\boxed{dy = f'(x) \cdot dx}$$

و

$$\boxed{\Delta y \simeq f'(x) \cdot dx}$$

مسأله: در کره‌ای به شعاع $۵۰cm$ ، دراثر گرما، شعاع کره به اندازه $۰/۰۱$ زیاد شده‌است. به‌کمك دیفرانسیل تغییر سطح کره و تغییر حجم کره را بیابید.

الف) محاسبهٔ تغییر سطح کره:

$$S_{\text{کره}} = ۴\pi R^۲ \Longrightarrow S' = ۸\pi R$$
$$\Delta S \simeq dS = S' \times dR$$
$$= ۸\pi R \times dR = ۸\pi(۵۰) \times \frac{۱}{۱۰۰} = ۴\pi$$

ب) محاسبهٔ تغییر حجم کره:

$$V_{\text{کره}} = \frac{۴}{۳}\pi R^۳ \Longrightarrow V' = ۴\pi R^۲$$
$$\Delta V \simeq dV = S' \times dR = ۴\pi R^۲ dR$$
$$= ۴\pi(۲۵۰۰) \times \frac{۱}{۱۰۰} = ۱۰۰\pi$$

مسأله: مکعبی به یال $۱۰cm$ را حرارت داده‌ایم، در نتیجه $۳۰cc$ تغییر حجم داده است. تغییر طول یال را به‌کمك دیفرانسیل بیابید.

$x =$ طول یال مکعب

$$V = x^۳ \Longrightarrow V' = ۳x^۲$$
$$dV = V' \cdot dx \Longrightarrow dV = ۳x^۲ dx \Longrightarrow$$
$$۳۰ = ۳(۱۰۰) \cdot dx \Longrightarrow dx = \frac{۱}{۱۰} cm$$

اگر $y=f(x)$ معادلهٔ تابع باشد:

چنانچه متغیر (x) باشد، تابع $f(x)$ است.

چنانچه متغیر $(x+\Delta x)$ باشد، تابع $f(x+\Delta x)$ است.

$$\Longrightarrow \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

داشتیم:

$$\Delta y \simeq f'(x).\Delta x$$

$$f(x+\Delta x) - f(x) \simeq f'(x).\Delta x$$

$$\Longrightarrow \boxed{f(x+\Delta x) \simeq f(x) + f'(x).\Delta x}$$

این رابطه مقدار تقریبی وضع جدید تابع پس از اینکه x به اندازهٔ Δx تغییر کرده است را نشان می‌دهد.

مسأله: مقدار تقریبی $\sqrt[۵]{۳۳}$ را بیابید.

فرض می‌کنیم $f(x)=\sqrt[۵]{x}$، آنگاه:

$$f'(x) = \frac{۱}{۵\sqrt[۵]{x^۴}}$$

حال اگر $x=۳۲=۲^۵$ و $\Delta x = ۱$ درنظر بگیریم:

$$f(x+\Delta x) \simeq f(x) + f'(x).\Delta x$$

$$\sqrt[۵]{x+\Delta x} \simeq \sqrt[۵]{x} + \frac{۱}{۵\sqrt[۵]{x^۴}} \cdot \Delta x$$

$$\sqrt[۵]{۳۲+۱} \simeq \sqrt[۵]{۲^۵} + \frac{۱}{۵\sqrt[۵]{۲^{۲۰}}} \times ۱$$

$$= ۲ + \frac{۱}{۸۰} = ۲/۰۱۲۵$$

مقدار واقعی $\sqrt[۵]{۳۳}$ تا چهار رقم بعد از ممیز برابر است با:
۲/۰۱۲۴

مسأله: مقدار تقریبی $tg۷۴°$ را بیابید.

فرض می‌کنیم $f(x)=tg x$، آنگاه:

$$f'(x) = ۱ + tg^۲ x$$

حال اگر $x = ۷۵° = \frac{۵\pi}{۱۲}$

$$\Delta x = -۱° = -\frac{\pi}{۱۸۰} \text{ رادیان}$$

می‌توان نوشت:

$$f(x+\Delta x) \simeq f(x) + f'(x).\Delta x$$

$$tg(x+\Delta x) \simeq tg x + (۱+tg^۲ x).\Delta x$$

$$tg(۷۵° - ۱°) \simeq tg\frac{۵\pi}{۱۲} + (۱ + tg^۲\frac{۵\pi}{۱۲}) \times (-\frac{\pi}{۱۸۰})$$

$$tg۷۴° \simeq ۲ + \sqrt{۳} + (۱ + (۲+\sqrt{۳})^۲)(-\frac{\pi}{۱۸۰})$$

$$tg۷۴° \simeq ۲ + \sqrt{۳} - (۸ + ۴\sqrt{۳})(\frac{\pi}{۱۸۰}) = ۳/۴۷۱$$

مقدار واقعی $tg۷۴°$ تا چهار رقم بعد از ممیز برابر است با:
۳/۴۸۷۴

مسأله: مقدار تقریبی $Arctg۱/۰۲$ را بیابید.

فرض می‌کنیم: $f(x)=Arctg x$، آنگاه:

$$f'(x) = \frac{۱}{۱+x^۲}$$

حال اگر: $x=۱$ و $\Delta x = \frac{۲}{۱۰۰}$، داریم:

$$f(x+\Delta x) \simeq f(x) + f'(x).\Delta x$$

$$Arctg(x+\Delta x) \simeq Arctg x + \frac{۱}{۱+x^۲} \times \Delta x$$

$$Arctg(۱+\frac{۲}{۱۰۰}) \simeq Arctg۱ + \frac{۱}{۱+۱}(\frac{۲}{۱۰۰})$$

$$Arctg۱/۰۲ \simeq \frac{\pi}{۴} + \frac{۱}{۱۰۰}$$

مسأله: مقدار تقریبی $\sqrt[n]{a^n+b}$ را بیابید، $n>1$ و $n\in N$، $a>0$ فرض می‌کنیم: $f(x)=\sqrt[n]{x}$، آنگاه:

$$f'(x)=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

اگر $x=a^n$ و $\Delta x=b$ باشد، خواهیم داشت:

$$f(x+\Delta x)\simeq f(x)+f'(x)\cdot\Delta x$$

$$\sqrt[n]{x+\Delta x}\simeq\sqrt[n]{x}+\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}\cdot\Delta x$$

$$\sqrt[n]{a^n+b}\simeq\sqrt[n]{a^n}+\frac{1}{n\sqrt[n]{a^{n(n-1)}}}\,b$$

$$\sqrt[n]{a^n+b}\simeq a+\frac{b}{na^{n-1}}$$

دستورهای دیفرانسیل توابع:

$$dy=y'\cdot dx$$

$$du=u'\cdot dx$$

$$dv=v'\cdot dx$$

مثال. دیفرانسیل توابع زیر را بیابید:

۱) $y=\mathrm{Arctg}\,x\sqrt{1-x^2}$

$$dy=y'\cdot dx=\frac{(x\sqrt{1-x^2})'}{1+(x\sqrt{1-x^2})^2}dx$$

$$=\frac{\sqrt{1-x^2}+\frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1+x^2(1-x^2)}dx$$

$$dy=\frac{\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1+x^2(1-x^2)}dx$$

$$=\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}(1+x^2-x^4)}dx$$

---

۲) $y=\mathrm{Arc}\cos(tg^4x)$

$$dy=y'.dx=\frac{-(tg^4x)'}{\sqrt{1-tg^8x}}dx$$

$$=-\frac{4tg^3x(1+tg^2x)dx}{\sqrt{1-tg^8x}}$$

تمرینها: دیفرانسیل هریك از توابع زیررا بیابید:

۱) $y=\sqrt{1-x^2}\sin x\sqrt{4-x^2}$

۲) $y=\sqrt[3]{(\mathrm{Arctg}\sqrt[3]{x^3})^2}$

۳) $y=\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}tg\frac{1}{x}$

۴) $y=tgx\,\mathrm{Arctg}\sqrt[3]{x^2}$

۵) $y=(\mathrm{Arc}\,tgx^2)^2\cos x\sqrt{4-x^2}$

تمرینها: ۱) به‌کمك دیفرانسیل تغییر تابع به معادلهٔ:

$$f(x)=\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$$

را در $x=2$ وقتی $\Delta x=0/1$ بیابید.

۲) مقدار تقریبی $\sqrt[7]{129}$، $\sin 27^\circ$، $cotg 33^\circ$، $\mathrm{Arctg}\,1/02$ را بیابید.

۲ـ انتگرال[1] و تابع اولیه

انتگرال گرفتن به دو معنی است.

معنی اول: پیداکردن تابعی است که مشتق آن در دست است.

1– Integration

معنی دوم : محاسبهٔ سطح محصور بین منحنیها و محاسبهٔ حجم اجسام وطول قوسها و...

حال به معنی اول برمی‌گردیم.

فرض کنیم، $F(x)$ تابعی درفاصلهٔ (I) تعریف شده و مشتق‌پذیر باشد، ومشتق آن‌را $f(x)$ فرض می‌کنیم. به طوری که:

$$\forall x\in I \ : \ F'(x)=f(x)$$

دراین‌صورت بنا به تعریف، $F(x)$ را یکی‌از توابع‌اولیهٔ تابع $f(x)$ می‌گوییم.

مثال : اگر $f(x)=2x$ ، آنگاه $F(x)=x^2$ و

$$F_1(x)=x^2+1$$

$$F_2(x)=x^2-5$$

$$F_3(x)=x^2+\sqrt{2}$$

بنابراین جواب کلی تابع اولیه تابع $y=f(x)$ به صورت $F(x)+c$ است.

فرض‌کنید: $dy=f(x)dx$ ، اگر تابعی مانند: $F(x)$ داشته باشیم، به طوری که $dF(x)=f(x)\cdot dx$ ، در این صورت $F(x)$ را یک انتگرال $f(x)$ نسبت به x می‌نامیم.

ضمناً می‌توان نوشت:

$$d(F(x)+c)=dF(x)+dc=dF(x)+0$$

پس: $F(x)+c$ ، نیز انتگرال $f(x)\cdot dx$ است.

نماد $\int$ را نماد انتگرال گوییم، بنابراین:

$$\int f(x)dx=F(x)+c$$

« $f(x)dx$ را معادلهٔ دیفرانسیلی گویند.»

خلاصه: اگر $F(x)+c$ تابعی باشد در فاصلهٔ (I) معین و مشتق‌پذیر و دیفرانسیل آن $f(x)dx$ باشد، داریم:

$$\int f(x)dx=F(x)+c$$

حال تابع

$$F(x)+c=\frac{x^{m+1}}{m+1}+c$$

$m\neq -1$ و $m\in R$ را درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم:

$$dF(x)=f(x)dx$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$dF(x)=f(x)dx=x^m dx$$

$$\Longrightarrow \int f(x)dx=F(x)+c \Longrightarrow$$

فرمول انتگرال $\boxed{\int x^m dx=\frac{x^{m+1}}{m+1}+c \quad m\in R \ , \ m\neq -1}$

مثال :

۱) $\int x^4 dx=\frac{x^5}{5}+c$

۲) $\int x^{-4} dx=\frac{x^{-3}}{-3}+c$

۳) $\int x^{\frac{1}{2}} dx=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c$

۴) $\int x^{-\frac{5}{7}} dx=\frac{x^{\frac{2}{7}}}{\frac{2}{7}}+c$

مثال :

۵) $\int 2x^7dx = 2\int x^7dx = 2\times\frac{x^8}{8}+c$

$$=\frac{x^8}{4}+c$$

۶) $\int 2\sqrt[5]{x^2}dx = 2\int x^{\frac{2}{5}}dx = 2\times\frac{x^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}}+c$

$$=\frac{10}{7}x^{\frac{7}{5}}+c=\frac{10}{7}x\sqrt[5]{x^2}+c$$

۷) $\int\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[5]{x}} = 2\sqrt{2}\int x^{-\frac{1}{5}}dx$

$$=2\sqrt{2}\times\frac{x^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}}+c$$

$$=\frac{5\sqrt{2}}{2}x^{\frac{4}{5}}+c=\frac{5\sqrt{2}}{2}\sqrt[5]{x^4}+c$$

۸) $\int(2x^3+5x^2+6x+2)dx=$

$$2\int x^3dx+5\int x^2dx+6\int xdx+2\int dx$$

$$=2\times\frac{x^4}{4}+5\times\frac{x^3}{3}+6\times\frac{x^2}{2}+2x+c$$

$$=\frac{1}{2}x^4+\frac{5}{3}x^3+3x^2+2x+c$$

تابع $F(x)+c=\frac{u^{m+1}}{m+1}+c$ را درنظر می گیریم.

$m\neq-1$ و $m\in R$ فرض می کنیم:

$$dF(x)+c=f(x)dx$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$dF(x)=f(x)dx=\frac{(m+1)u'u^m}{m+1}dx$$

$$\Longrightarrow dF(x)=f(x)dx=u^mdu \Longrightarrow$$

$$\boxed{\int u^mdu=\frac{u^{m+1}}{m+1}+c \qquad m\in R,\ m\neq-1}$$

فرمول کلی انتگرال

مثال :

۱) $\int u^4du=\frac{u^5}{5}+c$

۲) $\int u^{10}du=\frac{u^{11}}{11}+c$

۳) $\int u^{-8}du=\frac{u^{-7}}{-7}+c$

۴) $\int u\sqrt{u}du=\int u^{\frac{3}{2}}du=\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+c$

$$=\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}+c$$

۵) $\int\frac{4du}{\sqrt[5]{u}}=4\int u^{-\frac{1}{5}}du=4\times\frac{u^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}}+c$

$$=5u^{\frac{4}{5}}+c$$

۶) $\int\frac{u^2-5u}{u^6}du=\int\frac{u^2}{u^6}du-5\int\frac{u}{u^6}du$

$$=\int u^{-4}du-5\int u^{-5}du$$

$$=\frac{u^{-3}}{-3}-5\frac{u^{-4}}{-4}+c=\frac{-1}{3u^3}+\frac{5}{4u^4}+c$$

انواع انتگرال‌گیری:

نوع اول:

از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$\int (ax+b)^m dx = \frac{(ax+b)^{m+1}}{a^{m+1}}+c$$

$m\in R\ ,\ m\neq -1$

مثال:

$$1)\quad \int (1-x)^{10}dx=\frac{(1-x)^{11}}{-1(11)}+c$$

مثال:

$$2)\quad \int \sqrt[5]{(1-2x)^2}\,dx=\int (1-2x)^{\frac{2}{5}}dx$$

$$=\frac{(1-2x)^{\frac{9}{5}}}{-2\times\frac{9}{5}}+c$$

تمرینها:

$$\int (2x-3)^{100}dx=?\qquad \int\frac{dx}{\sqrt[11]{4x-3}}=?$$

$$\int\frac{2\sqrt{2}}{(x-3)^{10}}dx=?$$

نوع دوم:

انتگرالهایی است شامل دو عامل به نامهای عامل اصلی و عامل مشتق.

عامل اصلی: ازهردرجه وهرجا باشد (منظور ازهرجا باشد این است که درصورت کسر یا در مخرج کسر یا داخل رادیکال باشد).

عامل مشتق: مشتق عامل اصلی است و درصورت کسر است (البته اگر مسأله کسری باشد).

حل: عامل اصلی را u فرض کرده از این فرض دیفرانسیل می‌گیریم و در مسأله قرار می‌دهیم.

توجه: این نوع حل را روش تغییر متغیر گویند.

مسأله:

$$I=\int\frac{(3x^2-2)dx}{(x^3-2x)^{10}}$$

$$\begin{cases} x^3-2x = \text{عامل اصلی} \\ 3x^2-2 = \text{عامل مشتق} \end{cases}$$

در مسأله قرار می‌دهیم:

$$u=x^3-2x \implies du=(3x^2-2)dx$$

$$I=\int\frac{du}{u^{10}}=u^{-10}du=\frac{u^{-9}}{-9}+c$$

$$=\frac{-1}{9u^9}+c=\frac{-1}{9(x^3-2x)^9}+c$$

تمرین: مطلوب است محاسبهٔ انتگرالهای زیر:

$$1)\ \int\frac{(x^3-1)dx}{(x^4-4x)^7}\qquad 2)\ \int\frac{(8x-8)dx}{\sqrt[5]{x^2-2x}}$$

$$3)\ \int x^{n-1}\sqrt[11]{x^n+4}\,dx$$

$$4)\ \int(\sqrt{x}-\sqrt{3})^{100}\frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

نوع سوم:

انتگرالهایی است شامل دوعامل به نامهای عامل اصلی و عامل اضافی.

عامل اصلی به صورت $(ax+b)$ است.

عامل اضافی ازهردرجه ولی در صورت کسر است (البته اگرمسأله کسری باشد).

حل: عامل‌اصلی را u فرض می‌کنیم، از این فرض هم، دیفرانسیل می‌گیریم وهم عامل‌اضافی را حساب می‌کنیم و در مسأله قرار می‌دهیم.

مسأله:

$$I=\int\frac{x^2dx}{(x-2)^{10}}$$

$$\begin{cases} x-2 & \text{:عامل اصلی} \\ x^2 & \text{:عامل اضافی} \end{cases}$$

$$u=x-2 \begin{cases} \nearrow du=dx \\ \searrow x=u+2 \end{cases} \Longrightarrow x^2=u^2+4u+4$$

در مسأله قرار می‌دهیم:

$$I=\int\frac{(u^2+4u+4)du}{u^{10}}$$

$$=\int u^{-8}du+4\int u^{-9}du+4\int u^{-10}du$$

$$=\frac{u^{-7}}{-7}+4\times\frac{u^{-8}}{-8}+4\times\frac{u^{-9}}{-9}+c$$

$$=\frac{-1}{7u^7}-\frac{1}{2u^8}-\frac{4}{9u^9}+c$$

$$=\frac{-1}{7(x-2)^7}-\frac{1}{2(x-2)^8}-\frac{4}{9(x-2)^9}+c$$

تمرین: مطلوب‌است محاسبهٔ انتگرالهای زیر:

$$\int\frac{x^3dx}{(x+1)^{20}} \qquad \int(x-2)^{1000}(x^2+4)\,dx$$

$$\int\frac{(x^2+1)dx}{\sqrt[5]{x-1}} \qquad \int\frac{(x^2-1)dx}{(x-2)^6}$$

نوع چهارم:

انتگرالهایی‌است ترکیبی از نوع‌دوم و سوم، یعنی‌مسألهٔ انتگرال شامل سه‌عامل است به‌نامهای: اصلی، مشتق و اضافی

عامل‌اصلی از هردرجه وهر جا باشد.

عامل مشتق درصورت است.

عامل‌اضافی از هردرجه‌ولی در صورت کسر است.

حل: مانند انتگرال نوع سوم حل می‌کنیم.

مسأله:

$$I=\int\frac{4x^{11}dx}{(x^4-2)^{12}}=\int\frac{x^8(4x^3)dx}{(x^4-2)^{12}}$$

$$\begin{cases} x^4-2 & \text{:عامل اصلی} \\ 4x^3 & \text{:عامل مشتق} \\ x^8 & \text{:عامل اضافی} \end{cases}$$

$$u=x^4-2 \Longrightarrow \begin{cases} \nearrow dx=4x^3dx \\ \searrow x^4=u+2 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$x^8=u^2+4u+4$$

$$I=\int\frac{(u^2+4u+4)du}{u^{12}}$$

$$=\int u^{-10}du+4\int u^{-11}du+4\int u^{-11}du$$

$$=\frac{u^{-9}}{-9}+4\times\frac{u^{-10}}{-10}+4\times\frac{u^{-11}}{-11}+c$$

$$=\frac{-1}{9u^9}-\frac{2}{5u^{10}}-\frac{4}{11u^{11}}+c$$

$$=\frac{-1}{9(x^4-2)^9}-\frac{2}{5(x^4-2)^{10}}-\frac{4}{11(x^4-2)^{11}}+c$$

تمرین: مطلوب است محاسبهٔ انتگرالهای زیر:

$$\int \frac{x^{19}dx}{\sqrt[11]{x^5-1}} \qquad \int \frac{2x^7dx}{(x^2-1)^{14}}$$

نوع پنجم:

محاسبهٔ $n\in R\ ,\ n\neq -1$

$$I=\int \frac{(ax+b)^n}{(a'x+b')^{n+2}}dx$$

$$u=\frac{ax+b}{a'x+b'} \Longrightarrow du=\frac{ab'-a'b}{(a'x+b')^2}dx$$

در عبارت زیر قرار می‌دهیم:

$$I=\frac{1}{ab'-a'b}\int \left(\frac{ax+b}{a'x+b'}\right)^n \times \frac{ab'-a'b}{(a'x+b')^2}dx$$

$$I=\frac{1}{ab'-a'b}\int u^n du=\frac{1}{ab'-a'b}\times\frac{u^{n+1}}{n+1}+c$$

$$=\frac{1}{(ab'-a'b)(n+1)}\left(\frac{ax+b}{a'x+b'}\right)^{n+1}+c$$

$$\Longrightarrow \int \frac{(ax+b)^n}{(a'x+b')^{n+2}}dx=\frac{1}{(n+1)(ab'-a'b)}\left(\frac{ax+b}{a'x+b'}\right)^{n+1}+c$$

دانش‌آموزان گرامی در سال چهارم باید انتگرال فوق را با اثبات حل کنند ولی در تستها می‌توانند از این فرمول استفاده کنند.

مثال:

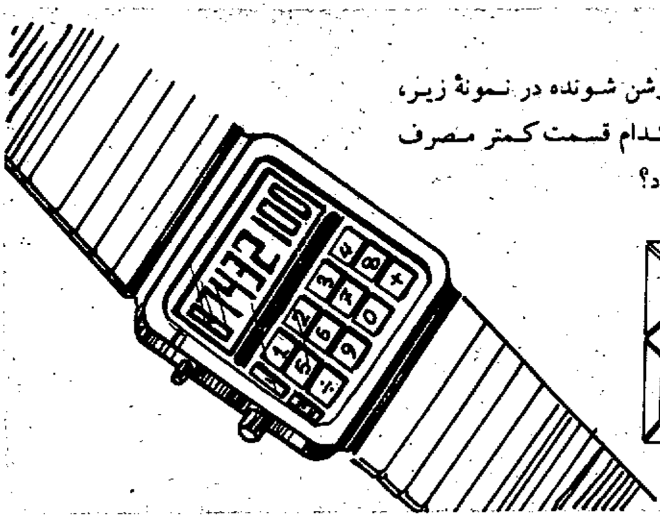
$$\int\frac{(2x-1)^{10}}{(2x+1)^{12}}dx=\frac{1}{(2+2)(11)}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{11}+c$$

$$=\frac{1}{44}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{11}+c$$

تمرین: مطلوب است محاسبهٔ انتگرالهای زیر با اثبات کامل:

$$\int \sqrt[5]{\frac{x+2}{x-2}}\times\frac{dx}{(x+2)^2} \qquad \int\frac{dx}{(x+1)^2}\sqrt[7]{\frac{x-1}{x+1}}$$

ساعتهای رقمی، ارقام را، با قسمتهای روشن شونده در نمونهٔ زیر، نشان می‌دهند. در مورد ارقام ۰ تا ۹ کدام قسمت کمتر مصرف می‌شود؟ کدام قسمت بیشتر به کار می‌رود؟



جواب در صفحهٔ ۹٦

آموزش ترجمهٔ متون ریاضی (۲)

Methods of Algebra
J. E. Hebborn - C. Plumpton
ترجمه: حمیدرضا امیری

1 Algebraic functions

۱ ـ توابع جبری[۱]

1.1 Functions, composite functions and inverse functions

۱.۱ ـ توابع، توابع مرکب و توابع معکوس

A *function* is a mapping which associates with each element of one set A a unique element of another set B. The set A is called the *domain* of the function and the set B is called the *codomain* of the function. Not every element of the codomain need have a corresponding element in the domain, but every element of the domain must correspond to some element in the codomain.

The actual elements of the set B which are images of the elements of the domain are called the *range* (or range set) of the function.

We will only be concerned with functions which map a real variable x to a real variable y:

$$f: x \mapsto y = f(x).$$

تابع نگاشتی است که هر عضوِ مجموعه‌ای مانند A را به عضوِ منحصر به فردی از مجموعهٔ دیگری چون B مربوط می‌سازد. مجموعهٔ A را دامنهٔ تابع و مجموعهٔ B را هم دامنهٔ تابع می‌نامیم. هر عضوِ هم دامنه، نیازی به یک عضوِ متناظر در دامنه ندارد، امّا هر عضو دامنه باید با عضوی در هم‌دامنه متناظر باشد. [اعضایی از مجموعهٔ B که تصاویر اعضای دامنه باشند؛ بُرد (مجموعهٔ بُرد) تابع نامیده می‌شوند.]

(۱) تابع ((y = f(x)) را یک تابع جبری می‌نامند، هرگاه x و y در رابطه‌ای به صورت ۰ =F(x , y) صدق کنند که F(x , y) یک چند جمله‌ای برحسب x و y است.

در این جا تنها توابعی را در نظر می‌گیریم که متغیر حقیقی x را به متغیر حقیقی y تصویر کنند، یعنی: $f: x \to y = f(x)$

We usually refer to x as the *independent variable* and to y as the *dependent variable*.

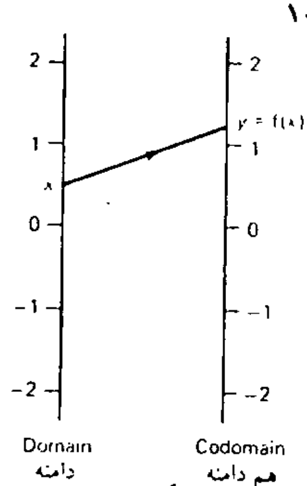
There are two important ways of representing a function f from **R** to **R** diagrammatically.

(i) The domain and codomain are represented by two parallel number lines with an arrow from x to its image $y = f(x)$ (see Fig. 1.1).

معمولاً x را متغیر آزاد و y را متغیر وابسته می‌نامیم.

به‌طریق نموداری دو روش مهّم برای نمایش تابع f از IR به IR وجود دارد.

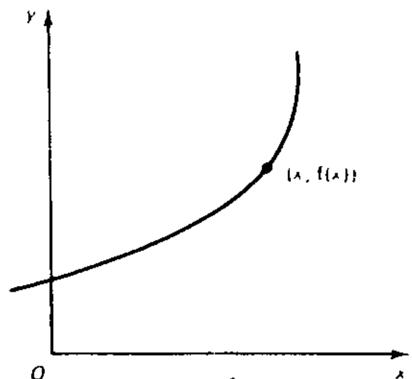
روش اول: دامنه و هم دامنه به صورت دومحور موازی اعداد حقیقی همراه با پیکانی از x به تصویرش، y=f(x) نمایش داده می‌شود. شکل ۱۰۱



شکل ۱۰۱

(ii) Each element x of the domain and its image $f(x)$ form an ordered pair $[x, f(x)]$. This ordered pair can be represented by the coordinates (x, y) of a point in a cartesian plane. The set of all such points is called the *graph* of the function, and the relation $y = f(x)$ is called the equation of the graph or curve (see Fig. 1.2).

روش دوّم: هرعضوِ x از دامنه و تصویر آن عضو؛ یعنی f(x)، زوج مـرتبِ [x,f(x)] را تشکـیل مـی‌دهند. ایـن زوج مـرتب می‌تواند توسط مختصات (x,y) به‌صورت یک نقطه در صفحهٔ مختصات دکارتی نمایش داده شود. مـجموعهٔ چـنین نقـاطی نمودار تابع نامیده می‌شود و رابطهٔ y=f(x) به معادلهٔ نمودار یا منحنی آن موسوم است (شکل ۱.۲).



شکل ۱.۲

A function f is said to be an *even* function if

$$f(x) = f(-x) \text{ for all values of } x.$$

A function f is said to be an *odd* function if

$$f(-x) = -f(x) \text{ for all values of } x.$$

تابعِ f را تابع زوج می‌نامیم هرگاه:

$$f(x) = f(-x) \quad (\text{به ازای جمیع مقادیر } x^{1})$$

تابعِ f را تابع فرد می‌نامیم هرگاه:

$$f(-x) = -f(x) \quad (\text{به ازای جمیع مقادیر } x)$$

Example 1

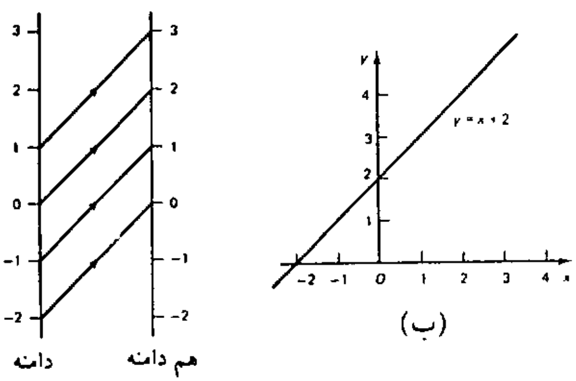
(a) The mapping $x \to x^{1/2}$ does not define a function, since, for a given real number, there is not a unique element of the image set corresponding to it. (For each real value of x there are two elements of the image set corresponding to it, $+\sqrt{x}$ and $-\sqrt{x}$.)

(b) The mapping $x \to x + 2$ is a function. The domain is the set $\mathbf{R}$ of real numbers, or some subset of $\mathbf{R}$. The codomain is also the set of real numbers. It may be represented as in Fig. 1.3(a) or Fig. 1.3(b).

مثال ۱ :

(الف) نگاشت $x \to x^{1/2}$ تابعی را تعریف نمی‌کند. زیرا، به ازایِ عدد حقیقی مفروضی، مشاهده می‌شود که عضو منحصر به فردی متناظر با آن از مجموعهٔ تصویر (برد تابع) وجود ندارد. (متناظر با هر مقدار حقیقی مانند x دو عضو $+\sqrt{x}$ و $-\sqrt{x}$، از مجموعهٔ تصویر وجود دارد.)

(ب) نگاشت $x \to x+2$ یک تابع است. دامنهٔ این تابع IR، مجموعهٔ اعداد حقیقی یا زیرمجموعه‌ای از IR است. هم دامنهٔ آن نیز مجموعهٔ اعداد حقیقی می‌باشد. این تابع می‌تواند بـه صورت اشکالِ (الف) ۱.۳ و (ب) ۱.۳ نمایش داده شود.



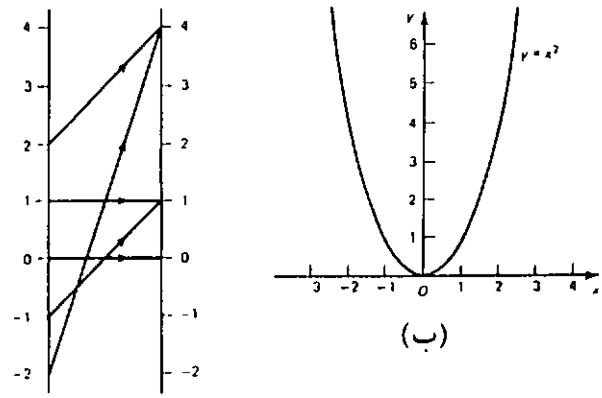
(الف) (ب)

شکل ۱.۳

(c) The mapping $x \to x^2$ is a function. The domain is $\mathbf{R}$ and the codomain is $\mathbf{R}$. The range is the set $\{x: x \in \mathbf{R}, x \geq 0\}$. It may be represented as in Fig. 1.4(a) or Fig. 1.4(b).

(ج) نگاشت $x \to x^{2}$ یک تابع است. دامنهٔ آن IR و هم دامنهٔ آن نیز IR می‌باشد. برد این تابع مجموعهٔ $\{x : x \in IR \ , \ x \geq 0\}$ است. این تابع را می‌توان توسط اشکال (الف) ۱.۴ یا (ب) ۱.۴ نمایش داد.

(۱) به شرطی که $-x$ در دامنه تابع باشد.



شکل ۱.۴

Example 2 Determine whether the functions f, g, h, where (a) $f(x) = 3x^2$, (b) $g(x) = x - 2x^3$, (c) $h(x) = (x - 2)/(x + 2)$, are odd, even or neither.

(a) $f(-x) = 3(-x)^2 = 3x^2 = f(x) \Rightarrow$ f is even.
(b) $g(-x) = (-x) - 2(-x)^3 = -x + 2x^3 = -[x - 2x^3] = -g(x) \Rightarrow$ g is odd.
(c) $h(-x) = (-x - 2)/(-x + 2)$ and this is neither $h(x)$ nor $-h(x)$. Hence, $h(x)$ is neither odd nor even.

مثال ۲

مشخص کنید کدام یک از توابع f ، g ، h ، که به‌صورت زیر تعریف شده‌اند، زوج یا فرد یا نه زوج و نه فرد هستند.

(الف) $f(x) = 3x^2$

(ب) $g(x) = x - 2x^3$

(ج) $h(x) = \dfrac{(x-2)}{(x+2)}$

(الف) $f(-x) = 3(-x)^2 = 3x^2 = f(x) \Rightarrow$ f زوج است

(ب) $g(-x) = (-x) - 2(-x)^3 = -x + 2x^3 =$

$-[x - 2x^3] = -g(x) \Rightarrow$ g فرد است

(ج) $h(-x) = \dfrac{(-x-2)}{(-x+2)}$

و این ضابطه نه مساوی با $h(x)$ است و نه مساوی با $-h(x)$. بنابراین $h(x)$ نه زوج است و نه فرد.

Composition of functions

It is possible, under certain circumstances, to combine functions. This is best illustrated by a simple example. Suppose

$$f: x \mapsto x^2$$

and

$$g: x \mapsto x + 1.$$

Then the composite function, written gf (note the order), means 'square x and then add 1' — i.e. f first, followed by g:

$$gf: x \mapsto x^2 + 1.$$

This is not the same as fg, which means 'add 1 to x and then square':

$$fg: x \mapsto (x + 1)^2.$$

In order for it to be possible to form a composite function gf, the image set of the function f must be the domain of the function g or a subset of this domain.

ترکیب توابع

ترکیب توابع؛ تحت شرایطی معین، امکان‌پذیر است. این موضوع را می‌توان با مثالی ساده به بهترین وضعی توضیح داد. فرض کنیم $f: x \rightarrow x^2$ و $g: x \rightarrow x+1$.

در این صورت ترکیب این دو تابع که به صورت gf (به ترتیب نوشتن توجه داشته باشید) نوشته‌می‌شود به معنی این است که:

«ابتدا x به توان دو رسیده و سپس با ۱ جمع می‌شود» - یعنی اول f و به دنبال آن g: «ابتدا تابع f روی x اثر کرده و سپس g روی حاصل آن تأثیر می‌کند»

$gf: x \rightarrow x^2+1$

ترکیب این دو تابع به‌صورت fg که «x و ۱ با هم جمع شده و سپس به توان دو می‌رسند» با gf یکی نیست.

$fg: x \rightarrow (x+1)^2$

بعلاوه برای امکان ترکیب تابع به شکل gf می‌بایست، مجموعهٔ تصویرِ تابع f دامنه یا زیر مجموعه‌ای از دامنهٔ تابعِ g باشد.

Example 3 If $f: x \mapsto x^2 + 5$, $g: x \mapsto x + 2$, then
(a) $gf: x \mapsto (x^2 + 5) + 2 = x^2 + 7$,
(b) $fg: x \mapsto (x + 2)^2 + 5 = x^2 + 4x + 4 + 5 = x^2 + 4x + 9$,
(c) $ff: x \mapsto (x^2 + 5)^2 + 5 = x^4 + 10x^2 + 25 + 5$
$= x^4 + 10x^2 + 30$,
(d) $gg: x \mapsto (x + 2) + 2 = x + 4$.

Note that

$$[f(x)]^2 = (x^2 + 5)^2 \equiv x^4 + 10x^2 + 25$$

and this is not the result of applying the mapping ff to x.

مثال ۳

اگر $f : x \to x^۲+۵$ و $g : x \to x+۲$، آنگاه خواهیم داشت:

(الف) $gf: x \to (x^۲+۵) +۲ \equiv x^۲+۷$

(ب) $fg : x \to (x+۲)^۲+۵ \equiv x^۲+۴x+۴+۵ = x^۲+۴x+۹$

(پ) $ff:x \to (x^۲+۵)^۲+۵ \equiv x^۴+۱۰x^۲+۲۵+۵ = x^۴+۱۰x^۲+۳۰$

(ت) $gg: x \to (x+۲) +۲ \equiv x+۴$

توجه کنید که: $[f(x)]^۲ = (x^۲+۵)^۲ \equiv x^۴+۱۰x^۲+۲۵$ و این با نتیجهٔ به کارگیری نگاشت ff روی x یکسان نمی‌باشد.

Identities and equations

The reader will note that in the above example we have used the symbol $\equiv$, which is to be read as 'is identical with'. We use this symbol when we have an algebraic relation which is true for all values of the variable x. For example,

$$(x + 2)^2 \equiv x^2 + 4x + 4.$$

Such an algebraic relation is called an *identity*.

On the other hand, the expression

$$(x + 2)^2 = 9x - 2$$

is only true when $x = 2$ or $x = 3$. An algebraic relation which is only true for a particular set of values of x is called an *equation*.

اتحادها و معادلات

خواننده توجه دارد که درمثال بالا، ما از نماد $\equiv$ استفاده کردیم و آن به صورتِ «متحدّ است با» خوانده می‌شود. ما از این نماد زمانی استفاده می‌کنیم که رابطه‌ای جبری داشته باشیم و آن رابطه به ازای جمیع مقادیر برای متغیر x برقرار باشد. برای مثال:

$$(x+۲)^۲ \equiv x^۲+۴x+۴$$

چنین رابطهٔ جبری را یک اتحاد می‌نامیم.

ازطرف دیگر، عبارت $(x+۲)^۲ = ۹x-۲$ فقط زمانی درست است که $x=۲$ یا $x=۳$. یک رابطهٔ جبری را که فقط به ازای مجموعه‌ای خاص از مقادیر x درست است معادله می‌نامیم.

ترجمه برخی اصطلاحات و لغات

Function	تابع
Mapping	نگاشت
Cartesian Plane	صفحهٔ مختصات دکارتی
Equation	معادله
Curve	منحنی
Determine	مشخص کردن
Even	زوج
Odd	فرد
Suppose	فرض کردن
Composition	ترکیب
Composite	مرکب
Certain	معین
Circumstances	شرایط
Illustrated	تصور
Isidentical with	متحد است با
Identity	اتحاد
Expression	عبارت
Associate	مربوط ساختن
Element	عنصر ـ عضو
Unique	منحصربفرد
Domain	دامنه
Codomain	هم‌دامنه
Corresponding	متناظر
Image	تصویر
Real Variable	متغیر حقیقی
Independent Variable	متغیر مستقل
Dependent Variable	متغیر وابسته
Diagrammatically	به‌صورت نموداری
Parallel	موازی
Ordered Pair	زوج مرتب
Represent	نمایش دادن
Coordinates	مختصات

برهان خلف

در خلاف آمدِ عادت بطلب کام، که من
کسب جمعیّت از آن زلف پریشان کردم
«حافظ»

غلامرضا یاسی‌پور

روش اثبات غیرمستقیم[1] که آن را برهان خُلف[2] نیز می‌نامند برای جمیع کسانی که هندسهٔ مقدماتی[3] خوانده‌اند آشناست. اقلیدس در استخراج قضایایش[4]، غالباً کار را با فرض[5] مقابل[6] چیزی که می‌خواهد آن را ثابت کند، آغاز می‌کند؛ در این صورت اگر فرض[7] مزبور به کاذبی[8] منجر شود، باید دروغ[9] باشد، و بنابراین نقیض[10] آن، یعنی قضیهٔ مورد اثبات باید راست[11] باشد.

اثبات غیرمستقیم، درستی[12] استدلالی[13] مفروض را، با فرض نقیض نتیجه‌اش[14]، به عنوان مقدمه‌ای[15] اضافی، و بعد استخراج کاذبی آشکار از مجموعهٔ فزودهٔ[16] مقدمات مزبور، بنا می‌کند. به این ترتیب، اثبات غیرمستقیم درستی استدلال

$A \Rightarrow (B \wedge C)$
$(B \vee C) \Rightarrow E$
$D \vee A$
$\therefore E$

را می‌توان به‌طریق زیر انجام داد:

1 . $A \Rightarrow (B \wedge C)$		
2 . $(B \vee D) \Rightarrow E$		
3 . $D \vee A$	$/ \therefore E$	
4 . $\sim E$	I.P. (Indirect Proof)	
5 . $\sim (B \vee D)$	2, 4, M.T.	
6 . $\sim B \wedge \sim D$	5, DeM.	
7 . $\sim D \wedge \sim B$	6, Com	
8 . $\sim D$	7, Simp.	
9 . A	3, 8, D.S.	
10. $B \wedge C$	1, 9, M.P.	
11. B	10, Simp.	
12. $\sim B$	6, Simp.	
13. $B \wedge \sim B$	11, 12, Conj.	

در این جا سطر ۱۳ کاذبی آشکار است. بنابراین برهان[17] کامل است، زیرا درستی استدلال اصلی از قاعدهٔ اثبات غیرمستقیم نتیجه می‌شود.

آسان است که نشان دهیم که از یک کاذب هر نتیجه‌ای را به درستی می‌توان استنتاج کرد. به‌عبارت دیگر، هر استدلال به‌صورت

p
$\sim p$
$\therefore q$

بی‌توجه به این‌که چه گزاره‌هایی به‌جای متغیرهای p و q قرارداده می‌شود، درست است. به این ترتیب، از سطرهای ۱۱، ۱۲ ی اثبات قبل، می‌توان نتیجهٔ E را تنها با دو سطر دیگر استنتاج کرد، و ادامهٔ کار به‌ترتیب زیر است:

14. $B \vee E$	11 , Add.
15. E	12,14, D.S.

درنتیجه امکان دارد که اثبات غیرمستقیم درستی یک استدلال

معلوم را نه به‌عنوان استنتاج درستی آن از این حقیقت که کاذبی به‌دست آورده‌ایم، بلکه بیشتر به‌عنوان استنتاج نتیجهٔ استدلال از خود کاذب، درنظر بگیریم. به‌این ترتیب به‌جای درنظر گرفتن برهان خلف به‌عنوان رسیدن به کاذب، می‌توانیم رسیدن از کاذب به نتیجهٔ استدلال اصلی را درنظر بگیریم. اگر ترکیب عطفی[18] مقدمات یک استدلال را به‌صورت P و نتیجهٔ آن را به‌صورت C علامتی کنیم، دراین صورت اثبات غیرمستقیم درستی

$$\begin{array}{l} P \\ \therefore C \end{array}$$

با استفاده از اثبات صوری[19] درستی استدلال

$$\begin{array}{l} P \\ \sim C \\ \therefore C \end{array}$$

به‌دست می‌آید. اما بین دو استدلال

$$\begin{array}{l} P \\ \therefore C \end{array} \quad \text{و} \quad \begin{array}{l} P \\ \sim C \\ \therefore C \end{array}$$

چه رابطه‌ای موجود است که اثبات درستی اولی برای انجام درستی دومی کفایت می‌کند؟ اثبات صوری درستی دومی اثبات شرطی[20] درستی استدلال سوم

$$\begin{array}{l} P \\ \therefore \sim C \Rightarrow C \end{array}$$

را بنا می‌کند. اما نتیجهٔ استدلال سوم منطقاً معادل[21] نتیجهٔ استدلال اوّل است. بنابه‌تعریف استلزام مادی[22]، $\sim C \Rightarrow C$ منطقاً معادل $\sim \sim C \vee C$ که بنا به‌اصل نقیض دوگانه[23] منطقاً معادل $C \vee C$ است، می‌باشد. $C \vee C$ و C نیز بنا به اصل صادق[24] منطقاً معادلند. از آن‌جا که استدلالهای اول و سوم مقدمات یکسان و نتایج منطقاً معادل دارند، هر اثبات درستی اولی اثبات درستی دیگری نیز هست. اثبات درستی استدلال دوم، هم اثبات شرطی سومی، هم اثبات غیرمستقیم اولی است. به‌این ترتیب ملاحظه می‌کنیم که بین روشهای اثبات غیرمستقیم و شرطی، یعنی بین قانون اثبات شرطی و قانون اثبات غیرمستقیم رابطهٔ نزدیکی وجود دارد.

اضافه کردن قانون اثبات غیرمستقیم به تقویت دستگاه اثباتمان کمک می‌کند. درستی هر استدلالی که نتیجه‌اش صادق است را می‌توان با استفاده از روش جدولهای ارزش[25] و بی‌توجه به این‌که مقدماتش چیست، نشان داد. اما اگر نتیجهٔ صادق استدلالی گزاره‌ای شرطی نباشد، و مقدماتش با یکدیگر موافق و با آن نتیجه کاملاً بی‌ارتباط باشند، در این صورت درستی آن استدلال را نمی‌توان با روش قیاس[26] بدون استفاده از قانون اثبات غیرمستقیم اثبات کرد. بنابراین هرچند که درستی استدلال

$$\begin{array}{l} A \\ \therefore B \vee (B \Rightarrow C) \end{array}$$

را با کمک قوانین مشروح در قسمتهای قبل نمی‌توان ثابت کرد، می‌توان درستی آن را با استفاده از قانون اثبات غیرمستقیم به‌سادگی معلوم کرد. یکی از اثباتهای درستی این استدلال عبارت‌است از:

1. $A \,/\therefore B \vee (B \Rightarrow C)$	
2. $\sim [\, B \vee (B \Rightarrow C) \,]$	I.P.
3. $\sim [\, B \vee (\sim B \vee C) \,]$	2, Impl.
4. $\sim [\, (B \vee \sim B) \vee C \,]$	3, Assoc.
5. $\sim (B \vee \sim B) \wedge \sim C$	4, DeM.
6. $\sim (B \vee \sim B)$	5, Simp.
7. $\sim B \wedge \sim \sim B$	6, DeM.

به این ترتیب نوزده قانون استنتاجمان[27] همراه با قوانین اثبات شرطی و غیرمستقیم روش استنتاجی به‌دست‌مان می‌دهند که کامل است، و هر استدلالی راکه درستیش را بتوان با استفاده از جدولهای ارزش ثابت کرد، می‌توان بااستفاده از روش استنتاجی که در قسمتهای پیشین (به‌شماره‌های ۳، ۴، ۵ برهان رجوع کنید) شرح داده شده اثبات‌کرد. امااین موضوع دراین‌جا اثبات نخواهد شد.

اثبات صادقها

روشهای اثبات شرطی و غیرمستقیم نه‌تنها می‌توانند در

اثبات درستی استدلالها به کار روند، بلکه در اثبات این‌که گزاره‌ها و صورتهای گزاره‌ای معینی صادق‌اند نیز به کار می‌روند. به یک معنی، هر گزارهٔ شرطی متناظر با استدلالی است که تنها مقدمه‌اش مقدم[28] آن گزارهٔ شرطی، و نتیجه‌اش تالی[29] آن می‌باشد، و این گزارهٔ شرطی صادق است اگر و فقط اگر آن استدلال درست باشد. درنتیجه با استنتاج تالی یک گزارهٔ شرطی از مقدمش، با استفاده از یک رشته استدلالات درست مقدماتی، ثابت می‌شود که آن گزارهٔ شرطی صادق است. به این ترتیب، با استفاده از همان دنبالهٔ سطرهایی که درستی استدلال

$A \wedge B$

$\therefore A$

را ثابت می‌کند، ثابت می‌شود که گزارهٔ $(A \wedge B) \Rightarrow A$ صادق است. قبلاً نیز به این مطلب اشاره شده که روش شرطی را می‌توان کراراً در یک اثبات به کار برد. بنابراین صادق بودن گزارهٔ شرطی

$$(Q \Rightarrow R) \Rightarrow [\,(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R)\,]$$

را می‌توان با استفاده از

1. $Q \Rightarrow R \qquad / \therefore (P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ (C.P.)
2. $P \Rightarrow Q \qquad / \therefore P \Rightarrow R$
3. $P \Rightarrow R$ 1,2, H.S.

ثابت کرد. این روش اثبات در مورد بعضی از گزاره‌های شرطی مرکب آسانتر و ساده‌تر از رسم جدولهای ارزش است.

صادقهای بسیاری وجود دارند که به‌صورت شرطی نیستند، و روش قبل را در مورد آنها نمی‌توان به کار برد. اما راستی هر صادق را با استفاده از روش غیرمستقیم می‌توان ثابت کرد، و در این مورد همان‌طور که درمورد استدلالها عمل شد، روش غیرمستقیم اثبات درستی با اضافه کردن نقیض نتیجهٔ استدلال به‌مقدمات آن و سپس با استنتاج کاذبی از دنبالهٔ استدلالات درست مقدماتی، انجام می‌گیرد، و همین‌ترتیب در مورد گزاره‌ها عمل می‌شود، یعنی روش غیرمستقیم اثبات صادق بودن آنها، با درنظرگرفتن نقیضشان به‌عنوان مقدمه و سپس با استنتاج کاذب واضحی از دنبالهٔ استدلالات درست مقدماتی انجام می‌پذیرد. به‌این ترتیب، صادق بودن گزارهٔ $B \vee \sim B$ با استفاده از اعمال زیر اثبات می‌شود:

1. $\sim (B \vee \sim B) \quad / \therefore B \vee \sim B$ (I.P.)
2. $\sim B \wedge \sim \sim B$ 1,DeM.

گفتن این که یک گزاره صادق است اظهار این است که راستیش غیرشرطی است، بنابراین می‌توان راستی آن را بدون توسل به گزاره‌های دیگر اثبات کرد. طریق دیگر اظهار همین مطلب، که شاید خیلی گمراه‌کننده نباشد، بیان درستی «استدلالی» است که گزارهٔ مورد بحث را به‌عنوان «نتیجه» دارد، اما مقدمه ندارد. به‌این ترتیب اگر این «نتیجه» صادق باشد در این‌صورت روش استنتاج، با استفاده از قانون اثبات شرطی یا قانون اثبات غیرمستقیم، مجازمان می‌کند که ثابت کنیم که «استدلال» مذکور علی‌رغم این‌که مقدمه ندارد درست است. راستی هر صادق را می‌توان با استفاده از روش قیاس اثبات کرد، اما در این‌جا به‌آن نمی‌پردازیم.

یادداشتها

1. Indirect Proof
2. Reductio ad Absurdum

بوعلی سینا این کلمه را به فتح اول، یعنی خَلْف، می‌داند و آنرا به‌معنی پشت‌می‌گیرد.

3. Elementary Geometry
4. Theorems
5. Assuming
6. Opposite
7. Assumption
8. Contradiction
9. False
10. Negation
11. True
12. Validity
13. Argument
14. Conclusion
15. Premiss
16. Augmented Set
17. Demonstration
18. Conjunction
19. Formal Proof
20. Conditional Proof
21. Equivalent
22. Material Implication
23. Double Negation
24. Tautology
25. Truth Tables
26. Method of Deduction
27. Rule of Inference
28. Antecedent
29. consequent

مراجع: Irving M. Copi, Symbolic Logic

تاریخچه مجلات ریاضی ایران (۵)

دراین شماره نیز به‌بررسی مجلهٔ آشتی با ریاضیات می‌پردازیم:

ـ دکارت[۱]. موجودات زنده و انسان را، به استثنای جان و روان او، مثل یک ماشین می‌دانست. یک روز، وقتی که به ملکهٔ مسیحی سوئد درس می‌داد، ملکه از او پرسید:
«ولی چگونه ماشین می‌تواند خودش را تولید کند؟» همین پرسش، امروز هم، ریاضیدانهایی را که مرزهای ممکنهٔ ماشین را بررسی می‌کنند برآشفته کرده است.

ریاضیات در زیست‌شناسی[۲]

مطمئناً امکان دارد که روزی من (نوعی) مغلوب کامپیوتر شطرنج‌باز بشوم ولی مطمئناً زمان زیادی لازم دارد ... برنامه‌های کنونی در سطح پایین بازی می‌کنند و علت آن این است که در طراحی آنها فقط متخصصین شرکت کامپیوتر شرکت دارند و از شطرنج‌بازها کمک گرفته نشده است.
«بابی فیشر[۳] در مقالهٔ شطرنج و کامپیوتر[۴]»

در سال گذشته (۱۹۷۳ میلادی) به‌وسیلهٔ کامپیوتر، محاسباتی بر مبنای اعداد نجومی، وکسوف خورشید و محاسبهٔ تقویمها که در کارهای ابوریحان مندرج است، در آمریکا صورت گرفت و شتاب زمین را از روی اعدادی که او داده بود اندازه گرفتند.

از حاصل کارهای علمی و نجومی در این باب همین‌قدر آشکار شد که آنچه این مرد با چشم سِر دید و در گوشهٔ ده از راه تفکر و تعمق به آن دست‌یافت، از میزان حقیقی سیر و شتاب این کرهٔ خاکی زیاد دور نبود.

آدمی به این دقت اگر وسایل امروزی را دراختیار داشت در دل کهکشانها فرو می‌رفت و بر ماه و بر مشتری خیمه می‌افکند[۵]...

از ویژگیهای روش ابوریحان بیرونی که او را از دیگر علمای اسلامی ممتاز می‌کند، استقلال فکری اوست. او در پژوهشهای علمی خود، درنظام ارسطویی هنگامی که با موانعی مواجه می‌شود، و درمی‌یابد که قیاسات منطقی از حل بسیاری از مسائل و معضلات عالم هستی عاجز و ناتوان است، اصول ارسطویی را به یک سو می‌نهد و راهی دیگر مبتنی بر تجربه و مشاهده و براهین هندسی برمی‌گزیند[۶].

بیرونی تقلید را در مسائل علمی ابداً جایز نمی‌داند و از این‌که ابن‌سینا باوجود نبوغ ذاتی و هوش سرشاری که دارد، یکسره و دربست در اختیار ارسطو قرارگرفته است و کلمات او را به‌عنوان وحی منزل تلقی می‌کند، سخت ناراحت است. وی ارسطو را دانایی می‌داند که افکار و اندیشه‌های بشری را از جولان باز داشته، دهنه می‌زند و کنترل می‌کند، آنچه هست تثبیت می‌کند و برای وضع موجود حصار و قلعهٔ استوار می‌سازد و این همان قلعه‌ای است که ابن‌سینا خواسته یا ناخواسته در آن واقع می‌شود و عنکبوت‌آسا به دور خود می‌تند. لاجرم حقایق را آن‌طور که هست درنمی‌یابد.

در مواردی بر روش فکری و منطق ارسطو طعن می‌زند و آن را برای رسیدن به حقیقت کافی نمی‌داند.[۷]

بنابراین اگر نظر برتراندراسل را بپذیریم که گفت: علم از آن روز پیشرفت کرد که جهان افکار ارسطو را کنار گذاشت، باید بیرونی را از بزرگترین منتقدان ارسطویی بدانیم که با انتقادهای

خود از فلسفهٔ ارسطویی افقهای تازه‌ای به‌روی محققان بعد از خود گشود.

«پژوهشهای نجومی ابوریحان بیرونی[8]»

- ریاضیات گاهی چنان ناگهانی و بدون انتظار و بادقت (محاسبه هرگز دروغ نمی‌گوید) وارد میدان می‌شود که به‌هیچ‌وجه دست‌کمی از شکلهای شاعرانه ندارد.

یک مسألهٔ قدیمی را درنظر می‌گیریم. دوظرف یکی با گنجایش ۷ لیتر و دیگری باگنجایش ۱۱ لیتر و یک بشکهٔ بزرگ ر از آب داریم، با استفاده از همین دو ظرف، می‌خواهیم دقیقاً ۲ لیتر آب برداریم.

البته این مسأله را با روشهای معمولی جبر می‌توان حل کرد. لی ما، راه به‌کلی متفاوت دیگری را عرضه می‌کنیم. ما این سأله را به‌کمک توپ بیلیاردی که بین کناره‌های میز لوزی شکلی حرکت می‌کند، حل می‌کنیم! آیا این غیرمنتظره نیست؟

«توپ بیلیارد و ریاضیات[9]»

* * *

در مجله به داستانهای علمی تخیلی نیز برمی‌خوریم. استانهایی چنین در خارج‌از سرزمین ما معروفتراند و حتی از وی بعضی از آنها مثل اودیسهٔ فضایی[10] (در ایران با نام زکیهان) فیلم هم ساخته‌اند.

یکی‌از داستانهای آمده در آن، داستان پرفسوری که نزدیک د پشت و رو شود، اثر؛ مارتین‌گاردنر[11] است. این داستان برای موزش بعضی از مطالب مربوط به‌توپولوژی به‌رشتهٔ تحریر کشیده شده است.

درمقالهٔ نگاهی به‌مسائل و مشکلات کتابهای ریاضی ایران و معرفی و د چندکتاب[12] نویسندهٔ مقاله یکی از مشکلات کتابهای درسی انشگاه را وجود کلمات واصطلاحات نامأنوس در آنهامی‌داند در این مورد مثال زیر رااز کتاب «هندسه‌های گوناگون» نوشتهٔ کتر اسدالله آل‌بویه[13] که در سال ۱۳۴۱ منتشر شده‌است ی آورد:

«اگر سروکار ما با یک انبوه درگرفته‌ها و داوریها باشد که برخی را ورجاوندگرفته بر پایه نهاده باشیم و برخی دیگر را از آنها به‌خود برآورده باشیم گوییم یک «ساختمان هندسی» داریم.»

به‌زعم نویسندهٔ مقاله، مشکل کتاب «مقدمه بر آنالیزنوین» دکتر وازگن آوانسیان[14] عدم توجه نویسندهٔ آن به امکانات و شرایط محیط، نیز مختصر و ثقیل بودن کتاب و ناآگاهی دانشجویان و تااندازه‌ای مدرسان آن است.

مشکل بعضی از کتابها زودآمدن و مشکل بعضی دیگر دیر آمدنشان است.

نویسنده، کتاب ورودی به منطق ریاضی[15] را آموزنده‌تر از منطق کتاب آنالیز ریاضی مصاحب می‌داند و دلایلی نیز در این مورد اقامه می‌کند.

در مقالهٔ فصلی از کتاب «ریاضیات جدید[16]»، نویسنده به بیان قضیهٔ ناتمامیت[17] گودل پرداخته صورت آن را چنین می‌آورد:

سازگاری یک دستگاه ریاضی را در داخل خود آن دستگاه نمی‌توان ثابت کرد.

یکی از مقاله‌های خواندنی و مفید مجله مقالهٔ قواعد نقطه‌گذاری در زبان فارسی و زبان ریاضی[18] است. در این مقاله علائم نقطه‌گذاری، بخصوص در ریاضیات، معرفی شده است.

مقالهٔ بوریس آبراموویچ روزنفلد[19] به‌معرفی روزنفلد یکی از پژوهشگرانی که به بررسی کارهای ریاضیدانهای دورهٔ درخشندگی علم در کشورهای اسلامی پرداخته، می‌پردازد، و در این مورد می‌نویسد:

مورخ مشهور شوروی در ریاضیات، بوریس آبراموویچ روزنفلد در ۳۰ اوت ۱۹۷۷ شصت‌ساله می‌شود. در پتروگراد به‌دنیا آمد. پدرش مهندس اقتصاددان و مادرش جراح بود. در

۱۹۳۹ از دانشگاه مسکو، دانشکدهٔ مکانیک ـ ریاضی فارغ‌التحصیل شد. در سال ۱۹۴۲ درجهٔ فوق لیسانس در علوم فیزیک، ریاضی از مؤسسهٔ ریاضیات دانشگاه مسکو را دریافت کرد. در ۱۹۴۷ از رسالهٔ دکترای خود دفاع کرد.

در باکو بود که پژوهشهایش در تاریخ را آغاز کرد و به بررسی کارهای ریاضی خواجه‌نصیرطوسی پرداخت. رساله‌های ریاضی عمرخیام و جمشیدکاشانی[۲۰] را با همکاری یوشکوویچ منتشر کرد. باز هم با همکاری یوشکوویچ کتاب «ریاضیات قرون وسطی متعلق به مشرق‌زمین» را در ۱۹۶۰ به زبان آلمانی در برلین انتشار داد. کتابهای قانون مسعودی و التفهیم‌لاوایل صناعت التنجیم بیرونی را با همکاری دیگران به‌روسی ترجمه کرد. این دانشمند در ۱۹۷۱ به عضویت وابستهٔ آکادمی بین‌المللی تاریخ علوم برگزیده شد.

یادداشتها

۱. ریاضی‌دان و فیلسوف فرانسوی، واضع هندسهٔ تحلیلی

۲. آشتی با ریاضیات، سال دوم شمارهٔ ۲ صفحهٔ ۱، پرویز شهریاری

۳. شطرنج‌باز حیجالی آمریکایی

۴. همان مرجع، سال دوم شمارهٔ ۲، صفحهٔ ۲۵

۵. پروفسور فضل‌الله رضا: «نکاتی چند دربارهٔ مقام علمی ابوریحان بیرونی» **یادنامهٔ بیرونی**، جلد اول صفحهٔ ۲۴۶ ـ ۲۴۷

۶. به این بیت زیبا از دیوان شمس توجه کنید:

عقل گوید شش جهت حد است و بیرون راه نیست
عشق گوید راه هست و رفته‌ام من بارها

۷. سیدجعفر شهیدی: «بیرونی قلعهٔ فولادین منطق ارسطو را در هم می‌ریزد» **یادنامهٔ بیرونی**، جلد اول، صفحهٔ ۲۳۷

۸. همان مرجع، سال دوم شمارهٔ ۲ صفحهٔ ۶۸، جعفر آقایانی چاوشی

۹. همان مرجع، سال دوم شمارهٔ ۳ صفحهٔ ۸۷، نام نویسندهٔ مقاله مشخص نیست. برای حل مسأله به خود مقاله رجوع کنید.

۱۰. 2001 :A Space Odyssey

۱۱. نویسندهٔ معماها و بازیهای ریاضی و داستانهای تخیلی که از او آثار زیادی به زبان فارسی ترجمه شده است.

۱۲. سال دوم شمارهٔ ۳ صفحهٔ ۱، هوشنگ شکرانیان

۱۳. استاد ریاضی دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران

۱۴. استاد ریاضی دانشکدهٔ علوم دانشگاه ملی، استاد دانشگاه استراسبورگ فرانسه

۱۵. ترجمهٔ پرویز شهریاری

۱۶. همان مرجع، سال چهارم شمارهٔ ۴ صفحهٔ ۳۰، ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی

۱۷. Incompleteness

۱۸. همان مرجع، سال دوم شمارهٔ ۴ صفحهٔ ۷۹، نویسنده علی‌اکبر عالم‌زاده

۱۹. همان مرجع، سال دوم شمارهٔ ۵ صفحهٔ ۷۶، ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی

Boris Abramovich Rosenfeld, by: A. T. Grigoryan and A. P. Yushevich. Historia Mathematica, vol. 4, November 1977.

۲۰. غیاث‌الدین جمشید کاشانی صاحب دو رسالهٔ معروف **مفتاح‌الحساب** و **رسالهٔ محیطیه**

ادب و ریاضی

... ابن هیثم مدّعی بود که می‌تواند با تعبیهٔ ساختمانی برروی رود نیل جریان آب آن رود را تنظیم کند و خلیفه که تحت تأثیر این ادعا قرار گرفته بود از او که هم در آن زمان ریاضی‌دانی نام‌آور بود دعوت کرد که به مصر برود.

به گفتهٔ قفطی، ابن‌هیثم مدتی بعد در رأس هیأتی از مهندسان به مرز جنوبی مصر، که گمان می‌کرد آب نیل در آن‌جا از سرزمینهای مرتفع به مصر وارد می‌شود، سفر کرد. اما پیش از آن‌که به مقصد برسد، کم‌کم اعتقادش به نقشه‌هایی که در دست داشت سست شد، زیرا با مشاهدهٔ ساختمانهای کهنی که بر ساحل نیل می‌دید و در طرح و اجرا هیچ نقصی نداشت، دریافت که اگر نقشهٔ او عملی بود، حتماً سازندگان این ساختمانهای شگفت‌آور بدان کار اقدام می‌کردند.

زندگینامهٔ علمی دانشمندان اسلامی
احمد آرام و ...

توابع پوشا و بررسی خاصیت پوشایی در انواع توابع

حمید رضا امیری

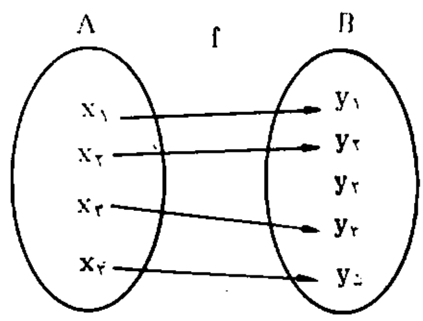
در مقاله‌ای تحت عنوان «تابع و بررسی خاصیت یک به یکی در انواع توابع» (برهان ۲ صفحهٔ ۲۲) با مفهوم تابع و خاصیت یک‌به‌یکی توابع آشنا شدیم. در این مقاله می‌خواهم توابع پوشا یا پوششی را مورد بحث و بررسی قرار دهم. ابتدا به تعریف چنین توابعی می‌پردازم:

هرگاه $f: A \to B$ تابعی مفروض باشد این تابع را پوششی یا پوشا می‌نامیم در صورتی که برد آن تمامی مجموعهٔ دوم یعنی B را بپوشاند یا به عبارت دیگر:

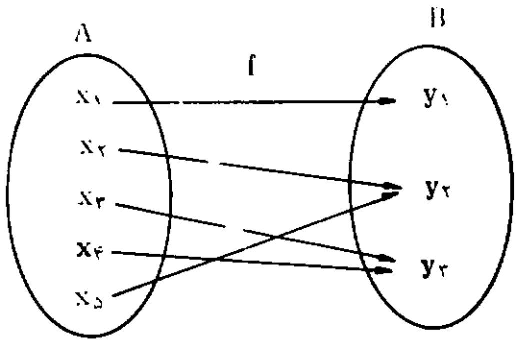
$R_f = B \iff$ تابع $f: A \to B$ پوشا است

در تعریف تابع دیدیم که در حالت کلی $R_f \subseteq B$، بنابراین در توابع پوشا که $R_f = B$، هیچ عضوی از مجموعهٔ دوم نمی‌توان یافت که توسط عضوی از دامنه پوشیده نشده باشد.

برای درک بهتر مطلب به بررسی وضعیت چند تابع به صورت نمودار پیکانی می‌پردازیم، دقت کنید:



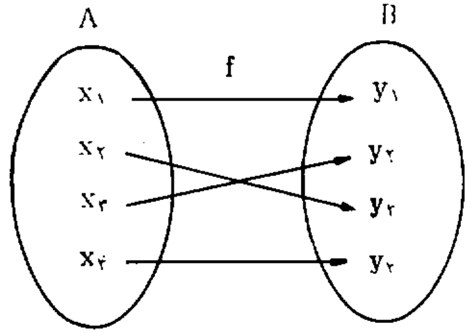
I) این تابع پوشا نیست زیرا $y_3 \in B$ و y_3 توسط هیچ یک از اعضای A پوشیده نشده است ولی تابع یک به یک است.



II) این تابع پوشا است زیرا:

$$R_f = \{y_1, y_2, y_3\} = B$$

و همان‌طور که مشاهده می‌کنید تابع در عین حال که پوششی است یک به یک نمی‌باشد.



III) این تابع هم یک‌به‌یک است و هم پوششی.

حال می‌خواهیم این مفهوم را به زبان ریاضی بیان کنیم. به عبارت زیر توجه کنید:

تابع $f: A \to B$ پوشا است $\Longleftrightarrow$

$$\forall y \in B\ \exists x \in D_f\ ,\ f(x)=y$$

(به ازای هرعضو از مجموعهٔ دوم مانند y ، باید عضوی از دامنه، چون x وجود داشته باشد به قسمی که این x توسط تابع f (تأثیر تابع f) برابر با y باشد.)

بنابراین بررسی این که آیا تابع پوششی است یا خیر، با توجه به تعریف توابع پوشا، مستلزم این است که برد تابع را تعیین کرده و بررسی کنیم آیا با مجموعه دوم برابر است یا خیر؟

این مسأله گاهی با مشکلاتی مواجه می‌شود (مسألهٔ تعیین برد تابع) و برای رفع این مشکل به طریق زیر عمل می‌کنیم:

(اگر بتوانیم به‌ازای yای دلخواه ازمجموعهٔ دوم همواره xای از دامنهٔ تابع بیابیم که $f(x)=y$ مشکل برطرف می‌شود.)

قدم اول: yای دلخواه از مجموعهٔ دوم انتخاب کرده و مساوی باضابطهٔ تابع قرار می‌دهیم.

قدم دوم: پس از مساوی قراردادن y باضابطهٔ تابع:

$(y=f(x))$

$\underline{x}$ را برحسب $\underline{y}$ به دست می‌آوریم $(x=f(y))$. این عمل امکان‌پذیر است که سعی می‌شود درحالتهای مختلف به چگونگی آن پرداخته شود.

قدم سوم: پس از مشخص کردن ضابطهٔ $\underline{x}$ برحسب y ، به بحث روی وجود x به ازای yهای واقع در مجموعهٔ دوم می‌پردازیم که نیاز است دوشرط زیر بررسی شوند:

شرط اول ـ به ازای هر y در مجموعهٔ دوم ، x همواره تعریف‌شده باشد.

شرط دوم ـ $\underline{x}$ در دامنهٔ تعریف تابع باشد.

تذکر ۱ : نقض هریک از دوشرط بالا، پوشایی تابع را نقض می‌کند.

تذکر ۲ : اگر f^{-1} را وارون f فرض کنیم . هرعضوی را که f از دامنه به برد انتقال دهد f^{-1} آن عضو را مجدداً از برد به دامنه منتقل می‌کند درحقیقت همواره داریم: برد f = دامنهٔ f^{-1} $(R_f = D_{f^{-1}})$ و $x=f(y)$ همان ضابطهٔ f^{-1} است که از روی ضابطهٔ تابع $(y=f(x))$ حاصل می‌شود و اگر به خاطر داشته باشید گفتیم که مسألهٔ اصلی در بررسی خاصیت پوشایی توابع تعیین برد آنها می‌باشد.

حال به بررسی چند مثال می‌پردازیم:

مثال ۱ ـ خاصیت پوشایی را برای تابع با ضابطهٔ

$$f: N \to IR$$
$$f(x) = 2x-3$$

بررسی کنید.

فرض کنیم $y\in IR, y = 2x-3 \Longrightarrow \boxed{x = \frac{y+3}{2}}$

همان‌طور که مشاهده می‌شود به‌ازای هر y در IR همواره $\underline{x}$ تعریف شده است و عددی است حقیقی اما لزوماً ممکن است در D_f یعنی N نباشد مثلاً اگر قرار دهیم $y=2$ در این صورت $x=\frac{5}{2}$ که $\frac{5}{2} \notin N$ لذا تابع پوشا نیست.

مثال ۲ ـ خاصیت پوشایی‌را برای تابع با ضابطهٔ:

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \frac{3x-4}{2}$$

بررسی کنید.

فرض کنیم $y \in \mathbb{R}$, $y = \frac{3x-4}{2} \Longrightarrow$

$$2y = 3x - 4 \Longrightarrow \boxed{x = \frac{2y+4}{3}}$$

واضح است که برای هر $y \in \mathbb{R}$ همواره x تعریف شده و عددی است حقیقی اما ممکن است در D_f یعنی $\mathbb{R}^+$ نباشد مثلاً اگر $\underline{y = -2}$ را از $\mathbb{R}$ انتخاب کنیم در این صورت

$$x = \frac{-2}{3}$$

که $-\frac{2}{3} \notin \mathbb{R}^+$ لذا تابع پوششی نیست.

مثال ۳ - تابع با ضابطهٔ $f : \mathbb{R} - \{-2\} \to \mathbb{R}$ مفروض

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$$

است، آیا این تابع پوشا است؟

فرض کنیم $y \in \mathbb{R}$, $y = \frac{2x-1}{x+2} \Longrightarrow$

$$yx + 2y = 2x - 1$$

$$\Longrightarrow yx - 2x = 1 - 2y \Longrightarrow$$

$$x(y-2) = 1 - 2y \Longrightarrow \boxed{x = \frac{1-2y}{y-2}}$$

با توجه به ضابطهٔ اخیر (x برحسب y) واضح است که برای $\underline{y = 2}$، x تعریف نشده و عددی حقیقی حاصل نمی‌شود پس تابع f پوشا نیست (عدد ۲ در $\mathbb{R}$ توسط هیچ عضوی از دامنه پوشیده نمی‌شود)

تذکر: اگر مجموعهٔ دوم یا هم‌دامنهٔ تابع f را از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R} - \{2\}$ تبدیل کنیم تابع پوشا خواهد شد زیرا دیگر $y = 2$ در مجموعهٔ دوم وجود ندارد تا انتخاب شود و xای به‌ازای آن تعریف نشود.

مثال ۴ - در تابع با ضابطهٔ $f : \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\} \to \mathbb{R}$ ،

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

مجموعهٔ دوم را طوری تغییر دهید که تابع پوشا باشد.

اگر $y \in \mathbb{R}$, $y = \frac{ax+b}{cx+d} \longrightarrow$

$$cxy + dy = ax + b \Longrightarrow cxy - ax = b - dy$$

$$\Longrightarrow x = \frac{b-dy}{cy-a}$$

تنها عضوی از $\mathbb{R}$ که به ازای آن xای از دامنهٔ تابع تعریف نمی‌شود ریشهٔ مخرج یعنی $y = \frac{a}{c}$ است

پس اگر مجموعهٔ دوم را به $\mathbb{R} - \left\{\frac{a}{c}\right\}$ تغییر دهیم تابع پوششی خواهد شد.

طرح یک تست: تابع $f : \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\} \to \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ با کدام ضابطه می‌تواند پوشا باشد؟

۱) $f(x) = \frac{x+2}{2x-3}$

۲) $f(x) = \frac{4x-2}{2x-3}$

۳) $f(x) = \frac{2x+1}{4x-6}$

۴) $f(x) = \frac{1-2x}{4x-6}$

با توجه به مثال قبل واضح است که گزینهٔ (۴) جواب مورد نظر است.

مثال ۵ - تابع باضابطهٔ $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ مفروض است.

$$f(x)=x^2$$

آیا این تابع پوشا است؟

اگر $y\in\mathbb{R}^+ \;,\; y=x^2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{y}$

می‌بینیم که برای هر $y\in\mathbb{R}^+$، همواره x تعریف شده و در دامنهٔ f موجود است درحقیقت برای هر $y\in\mathbb{R}^+$، دو عدد حقیقی از دامنه وجود دارد که برروی y تصویر می‌شوند (هر عضو $\mathbb{R}^+$ توسط دو عضو دامنه پوشیده می‌شود). لذا تابع پوشا می‌باشد.

تذکر: اگر تابع تعریف شده در مثال ۵ را به صورت $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تعریف کنیم، دراین‌صورت پوششی نمی‌باشد

$$f(x)=x^2$$

(اعداد منفی پوشیده نمی‌شوند).

تذکر: چون همواره‌حاصل یک‌رادیکال با فرجهٔ زوج، مثبت می‌باشد پس توابع‌به صورت $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ که n

$$f(x)=\sqrt[n]{g(x)}$$

زوج است هیچگاه نمی‌توانند پوشا باشند. ($\mathbb{R}^-$ پوشیده نمی‌شود.)

مثال ۶ - آیا تابع با ضابطهٔ:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^-$$
$$f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$$

پوشا می‌باشد (چون‌درمعادلهٔ $x^2+x+1=0$، دلتاهمواره منفی و ضریب x^2 عددی است مثبت لذا همواره

$$x^2+x+1>0$$

پس دامنهٔ f، $\mathbb{R}$ می‌باشد).

اگر $y\in\mathbb{R}^+ \;,\; y=\sqrt{x^2+x+1}$

$$\Rightarrow y^2=x^2+x+1$$
$$\Rightarrow x^2+x+1-y^2=0$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1\\ b=1\\ c=(1-y^2)\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \Delta=1-4(1-y^2)$$

$$\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4(1-y^2)}}{2}$$

$$\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{4y^2-3}}{2}$$

$$\Rightarrow x=\frac{-1+\sqrt{4y^2-3}}{2}$$ یا

$$x=\frac{-1-\sqrt{4y^2-3}}{2}$$

باتوجه به ضابطه‌های به دست آمده برای x برحسب y واضح است که اگر $-\frac{\sqrt{3}}{2}<y<\frac{\sqrt{3}}{2}$ در این صورت زیر رادیکال منفی و x تعریف نشده خواهد بود، بنابراین تابع پوشا نمی‌باشد.

y	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{2}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$4y^2-3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

تذکر: در مثال (۶) اگردر $x^2+x+1-y^2$ ضریب x را بزرگتر یا مساوی با ۲ انتخاب کنیم دراین‌صورت $\Delta\geqslant 0$ بوده وهمواره برای‌هر y در $\mathbb{R}^+$، xای حقیقی‌دردامنه‌وجود دارد و تابع‌پوششی خواهد شد.

مثلاً در $f(x)=\sqrt{x^2+3x+1}$ داریم:

$$y=\sqrt{x^2+3x+1} \Rightarrow y^2=x^2+3x+1$$

$$\Rightarrow x^2+3x+1-y^2=0$$

$$\Delta = 9 - 4(1 - y^2) \implies \Delta = 4y^2 + 5 \geqslant 0$$

$$\implies x = \frac{-1 \pm \sqrt{4y^2+5}}{2} \in IR$$

$$(\forall y \in IR^+)$$

مثال ۷ - اولاً نشان‌دهید که توابع:

$f : IR \to IR \ , \ f : IR \to IR$
$f(x) = \cos x \qquad f(x) = \sin x$

غیر پوشا و توابع

$f : IR \to IR \ , \ f : IR \to IR$
$f(x) = \cot g x \qquad f(x) = tg x$

پوشا می‌باشند.

ثانیاً دوتابع اول با چه قیدی پوششی خواهند بود؟

اولاً چون حدود تغییرات $\sin x$ و $\cos x$ اعداد حقیقی بین ۱ و ۱ — وخود ۱ و ۱ — است، یعنی:

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \quad , \quad -1 \leqslant \sin x \leqslant 1$$

واضح است که yهای خارج از این محدوده توسط این توابع پوشیده نمی‌شوند ولی چون

$$-\infty < \cot g x < +\infty \quad , \quad -\infty < tg x < +\infty$$

این دوتابع پوشا هستند. یعنی، اگر مثلاً:

$$y \in IR \ , \ y = tg x \implies x = \text{arc}tg y$$

و برای‌هر y، xای در IR موجود است که $f(x) = y$. ثانیاً واضح است که اگر دوتابع اول را به صورت زیر تعریف کنیم پوششی خواهند بود:

$f : IR \to [-1 \ , 1] \quad , \quad f : IR \to [-1 , 1]$
$f(x) = \sin x \qquad f(x) = \cos x$

مثال ۸ - پوشایی تابع با ضابطهٔ:

$f : IR \to IR^+$
$f(x) = \sqrt{x-2}$

را بررسی کنید.

اگر $y \in IR^+ \ , \ y = \sqrt{x-2} \implies$

$$y^2 = x - 2 \implies \boxed{x = y^2 + 2}$$

دامنهٔ تابع فوق عبارت است از:

$$D_f = \{ x \in IR \mid x \geqslant 2 \}$$

وهمان طور که مشاهده می‌کنید برای هر $y \in IR^+$، همواره x تعریف‌شده وچون $y^2 + 2 \geqslant 2$ پس‌در دامنهٔ تعریف f نیز واقع است بنابراین تابع پوشا می‌باشد.

تذکر: در توابع ثابت به شکل $f(x) = c$ که $c \in IR$ هرگاه مجموعهٔ دوم را به صورت $\{c\}$ معرفی کنیم تابع پوشا و درغیر این‌صورت تابع پوشا نخواهد بود.

بررسی خاصیت پوشایی در توابع از IR^2 به IR^2

کلیات بررسی خاصیت پوشایی در توابع از IR^2 به IR^2 هیچ گونه فرقی با توابع از IR به IR نداشته وفقط جزئیات آن کمی اختلاف دارد. به این‌شکل که اولاً عضوی که از مجموعهٔ دوم به صورت دلخواه درنظر می‌گیریم چون از IR^2 انتخاب می‌شود باید یك زوج مرتب مثلاً به شکل $(x_1 \ , \ y_1)$ باشد. ثانیاً وقتی این عضو را مساوی باضابطهٔ تابع که آن‌هم به‌صورت زوج مرتب‌خواهد بود، قرار می‌دهیم به یك دستگاه معادلات برخورد می‌کنیم که باید از این‌دستگاه x را برحسب x_1 و y را برحسب y_1 به دست آورده وهردوشرط ذکرشده در ابتدای مقاله را برای هردوضابطه بررسی کنیم.

مثال ۹ - تابع با ضابطهٔ

$f : IR^2 \to IR^2$
$f(x \ , \ y) = (2x - 1 \ , \ 3y + 2)$

مفروض است. خاصیت پوشایی را دراین تابع بررسی کنید.

فرض کنیم $(x_1\,,\,y_1)\in \mathbb{R}^2$.

$$(x_1\,,\,y_1)=(2x-1\,,\,3y+2)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1=2x-1 \\ y_1=3y+2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} x=\dfrac{x_1+1}{2} \\ y=\dfrac{y_1-2}{3} \end{matrix}$$

و مشاهده می‌کنید که به ازای هر $x_1\in\mathbb{R}$ همواره xای در $\mathbb{R}$ و برای هر $y_1\in\mathbb{R}^2$ ؛ yای در $\mathbb{R}$ یافت می‌شود ودر کل برای هر $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$ همواره می‌توان (x,y)ای در $\mathbb{R}^2$ یافت که، $f(x,y)=(x_1,y_1)$ زیرا :

$$f(x,y)=f\left(\frac{x_1+1}{2},\frac{y_1-2}{3}\right)$$

$$=\left(2\left(\frac{x_1+1}{2}\right)-1,\,3\left(\frac{y_1-2}{3}\right)+2\right)=(x_1,y_1)$$

بنابراین تابع پوشا می‌باشد.

تذکر: بررسی اینکه پس ازیافتن x و y برحسب x_1 و y_1 آیا $f(x,y)=(x_1,y_1)$ ضروری نیست.

مثال ۱۰ - خاصیت پوشایی‌را برای‌تابع با ضابطهٔ

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$$
$$f(x\,,\,y)=(2x+y\,,\,x-3y)$$

بررسی کنید.

فرض کنیم $(x_1\,,\,y_1)\in\mathbb{R}^2$ ،

$$(x_1\,,\,y_1)=(2x+y\,,\,x-3y)\Longrightarrow$$

$$3\begin{cases} x_1=2x+y & (1) \\ y_1=x-3y & (2) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x_1=6x+\cancel{3y} \\ y_1=x-\cancel{3y} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow 7x=3x_1+y_1$$

$$\Longrightarrow \boxed{x=\frac{3x_1+y_1}{7}}$$

$$\overset{(2)}{\Longrightarrow} y_1=\frac{3x_1+y_1}{7}-3y \Longrightarrow$$

$$3y=\frac{3x_1+y_1-7y_1}{7} \Longrightarrow 3y=\frac{3x_1-6y_1}{7}$$

$$\Longrightarrow \boxed{y=\frac{x_1-2y_1}{7}}$$

وچون برای هر x_1 و y_1 همواره x و y تعریف شده و زوج مرتب (x,y) در D_f قرار دارد بنابراین تابع پوشا می‌باشد.

مثال ۱۱ - خاصیت پوشایی‌را برای تابع با ضابطهٔ

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$$
$$f(x,y)=\left(\frac{x-1}{2x+1},\,y+5\right)$$

بررسی کنید.

فرض کنیم $(x_1\,,\,y_1)\in\mathbb{R}^2$:

$$(x_1,y_1)=\left(\frac{x-1}{2x+1},\,y+5\right)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{2x+1}=x_1 \\ y+5=y_1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-x_1-1}{2x_1-1} \\ y=y_1-5 \end{cases}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود برای هر $y_1\in\mathbb{R}$ همواره $y\in\mathbb{R}$ تعریف می‌شود. اما برای $x_1=\frac{1}{2}$، x تعریف نشده‌و بنابراین با انتخاب هرزوج مرتب به شکل $(\frac{1}{2},y_1)$ نمی‌توان زوج مرتبی از $\mathbb{R}^2$ مانند $(x\,,\,y)$ یافت که

$$f(x\,,\,y)=\left(\frac{1}{2}\,,\,y_1\right)$$

پس تابع پوشا نیست. برای این که این تابع پوشا باشد باید کلیهٔ زوج مرتبهایی که مؤلفهٔ اول آنها $\frac{1}{2}$ است ازمجموعهٔدوم خارج

شوند پس تابع به شکل زیر می بایست تعریف شود:

$$f : \mathbb{R}^2 \to (\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}) \times \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = (\frac{x-1}{2x+1}, y+5)$$

مثال ۱۲- آیا تابع با ضابطهٔ

$$f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$f(x,y) = (2x-1, 3y+2)$$

پوششی است؟

فرض کنیم $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$

$$(x_1, y_1) = (2x-1, 3y+2)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 2x-1 = x_1 \\ 3y+2 = y_1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{x_1+1}{2} \\ y = \frac{y_1-2}{3} \end{cases}$$

واضح است که برای هر x_1، y_1 همواره x و y تعریف شده اما ممکن است در دامنهٔ تعریف تابع یعنی $\mathbb{Z}^2$ نباشند مثلاً اگر قرار دهیم $x_1 = 2$ و $y_1 = 1$ داریم $x = \frac{3}{2}$ و $y = \frac{-1}{3}$ که زوج مرتب $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{3})$ در $\mathbb{Z}^2$ نیست. پس تابع پوشا نمی باشد.

مثال ۱۳- آیا تابع با ضابطهٔ

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$f(x,y) = (2x-y, 4x-2y)$$

پوششی است؟

فرض کنیم $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$:

$$(x_1, y_1) = (2x-y, 4x-2y)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 2x-y = x_1 \\ 4x-2y = y_1 \end{cases}$$

دستگاه فوق برای x و y برحسب x_1 و y_1 فاقد جواب است. درحقیقت با معلوم بودن x_1 و y_1 دستگاه فوق معادلهٔ دو خط موازی باهم را مشخص می کند که نقطهٔ تقاطع ندارند بنابراین برای هر x_1 و y_1 نمی توان x و y ای یافت که همواره

$$f(x,y) = (x_1, y_1)$$

پس تابع پوشا نیست. مثلاً اگر قرار دهیم $x_1 = y_1 = 1$ در این صورت باید:

$$\begin{cases} 2x-y = 1 \\ 4x-2y = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x-y = 1 \\ 2x-y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

و این ممکن نیست!

مثال ۱۴- خاصیت پوشایی را برای تابع باضابطهٔ

$$f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$$
$$f(m,n) = 2^{m-1}(2n-1)$$

بررسی کنید.

فرض کنیم $K \in \mathbb{N}$ ، $K = 2^{m-1}(2n-1)$

به دنبال زوج مرتبی مانند (m, n) در $\mathbb{N}^2$ هستیم به قسمی که $f(m,n) = K$ اگر قرار دهیم $m = 1$ در این صورت $2^{m-1} = 1$ درنتیجه می بایست $K = 2n-1$ یا $n = \frac{K+1}{2}$

بنابراین به ازای هر K در $\mathbb{N}$ همواره زوج مرتب

$$(1, \frac{K+1}{2})$$

در $\mathbb{N}^2$ وجود دارد به قسمی که:

$$f(1, \frac{K+1}{2}) = 2^{1-1}[2(\frac{K+1}{2}) - 1]$$
$$= 2^0(K+1-1) = K$$

پس تابع پوشا است.

در این قسمت به بررسی خاصیت پوشایی برای توابع

چند ضابطه‌ای می‌پردازیم.

همان طور که می‌دانید توابع چند ضابطه‌ای، توابعی هستند که: مجموعهٔ دوم آنها را به چند زیرمجموعه افراز کرده و روی هر یك از آنها ضابطه‌ای مجزا تعریف کرده‌ایم. بنابراین برای بررسی پوشایی در این تابعها کافی است که به یکی از دو روش زیر عمل کنیم:

I) برد هر ضابطه را جداگانه به دست آورده و اجتماع این بردها را محاسبه کنیم که اگر اجتماع بردها با مجموعهٔ دوم برابر باشد تابع پوشا است و در غیر این صورت تابع پوشا نیست.

II) مطابق معمول عضوی دلخواه از مجموعهٔ دوم مانند y انتخاب کرده و مساوی با هر یك از ضابطه‌ها قرار دهیم که در این حالت باید حداقل توسط یکی از ضابطه‌ها x ای یافت به قسمی که $f(x)=y$.

مثال ۱۵- تابع با ضابطهٔ $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ مفروض است، خاصیت پوشایی را در این تابع

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{-x}{2} & \text{زوج } x \\[2ex] \dfrac{x-1}{2} & \text{فرد } x \end{cases}$$

بررسی کنید.

هرگاه فرض کنیم $f_1(x)=\dfrac{-x}{2}$ (برای xهای زوج) و $f_2(x)=\dfrac{x-1}{2}$ (برای xهای فرد) در این صورت:

$$R_{f_1}=\mathbb{Z}^- \ , \ R_{f_2}=\mathbb{Z}^+\cup\{0\}$$

بنابراین $R_{f_1}\cup R_{f_2}=\mathbb{Z}$ پس تابع پوشا است.

مثال ۱۶- تابع با ضابطهٔ $f: \mathrm{IR} \to \mathrm{IR}$ مفروض است. خاصیت پوشایی را بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1 & x>1 \\ 1 & x=1 \\ 3x-4 & x<1 \end{cases}$$

اگر قرار دهیم:

$$f_3(x)=3x-4 \ , \ f_2(x)=1 \ , \ f_1(x)=2x-1$$

در این صورت:

$$R_{f_1}=\{x\in \mathrm{IR} \mid x>1\} \ , \ R_{f_2}=\{1\}$$

$$R_{f_3}=\{x\in \mathrm{IR} \mid x<-1\}$$

(مجموعهٔ اعداد بین ۱ و ۱- پوشیده نمی‌شود.)

$$R_{f_1}\cup R_{f_2}\cup R_{f_3}\neq \mathrm{IR}$$

بنابراین پس تابع پوشا نیست مثلاً اگر قرار دهیم $\underline{y}=0$، توسط هیچ یك از ضابطه‌ها نمی‌توان $y=0$ را به دست آورد. زیرا اگر $2x-1=0$ نتیجه می‌شود $x=\frac{1}{2}$ و چون ضابطهٔ $(2x-1)$ برای $x>1$ تعریف شده، قابل قبول نیست و نیز اگر $3x-4=0$ نتیجه می‌شود $x=\frac{4}{3}$ که چون ضابطهٔ $(3x-4)$ برای $\underline{x}<1$ تعریف شده، باز هم قابل قبول نمی‌باشد.

درخاتمه متذکر می‌شوم که سعی شده پوشایی توابع در این مقاله به‌صورت مختصر و کلی بیان شود و مثالهای انتخاب شده برای فهم و درك مفهوم پوشایی آورده شده‌اند که امیدوارم مفید واقع شده باشد و توفیق روزافزون شما دانش‌آموزان عزیز را در تمامی مراحل زندگی و تحصیل از خداوند متعال خواستارم.

والسلام

مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان (۴)

از: The Mathematics Teacher May 1992
Thomas W. Shilgalis استاد ریاضیات در دانشگاه ایالتی ایلینوی است. وی در هندسه و کامپیوتر در آموزش ریاضیات تخصص دارد.

ترجمهٔ نغمه شریک‌زاده
ویراستار: غلامرضا یاسی‌پور

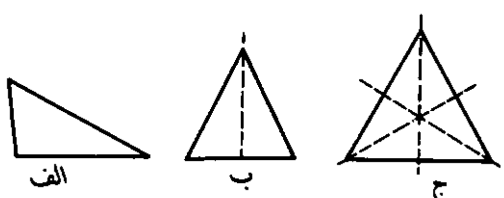
تقارن در چندضلعیهای نامنتظم

هدف از این مقاله بررسی تقارنهای دو طرفه در چند ضلعیهای محدب نامنتظم است. این‌که آنها می‌توانند چند محور تقارن داشته‌باشند، پرسشی است که دریک دوره از «موضوعاتی در هندسه» قابل طرح است و به‌اعتقاد من بحثها و حدسیات پرباری را میان آموزگاران ریاضی دورهٔ دبیرستان موجب می‌شود.

البته بررسی تقارن اشکال مسطح در کلاسهای درسی معمول است و در بسیاری از سطوح اجرا می‌شود. در بررسیهایی از این دست تصور نادیده انگاشتن چندضلعیهای منتظم با همهٔ فراوانیشان در داشتن هر دو گونهٔ محورهای تقارن دوطرفه و دورانی مشکل است، ولی مسائل جالبی نیز در رابطه با تقارنهایی که چندضلعیهای نامنتظم دارند، موجود است. در این صورت اجازه بدهید که توجهمان را به‌همین مسائل معطوف کنیم.

مثلثها

بگذارید ابتدا مثلثها را مورد بررسی قرار دهیم. شکل ۱ مثلثهایی را نشان می‌دهد که صفر (الف)، یک (ب) و سه (ج) محور تقارن دارند. محورهای تقارن مورد بحث خط‌چین شده‌اند. آیا یک مثلث می‌تواند دقیقاً دو محور تقارن داشته باشد؟ تجربه‌ای کوچک با مداد و کاغذ پاسخی منفی را پیشنهاد می‌کند. برای اثبات، ابتدا متوجهیم که یک خط تقارن از یک مثلث باید از یک رأس بگذرد و ضلع مقابل آن‌را نصف کند. یک خط تقارن دو ضلع همنهشت از مثلث را به‌دست می‌دهد، دو ضلعی که یکدیگر را در رأسی که محور تقارن مزبور از آن می‌گذرد، تلاقی می‌کنند. دومین محور تقارن، دو ضلع همنهشت از مثلث راکه یکی از آنها می‌تواند متمایز از دوتای اولی باشد، به‌دست می‌دهد، پس مثلث متساوی‌الاضلاع خواهد شد. بدین‌ترتیب مثلثی که بیش از یک محور تقارن دارد حتماً متساوی‌الاضلاع بوده، سه خط تقارن خواهد داشت.



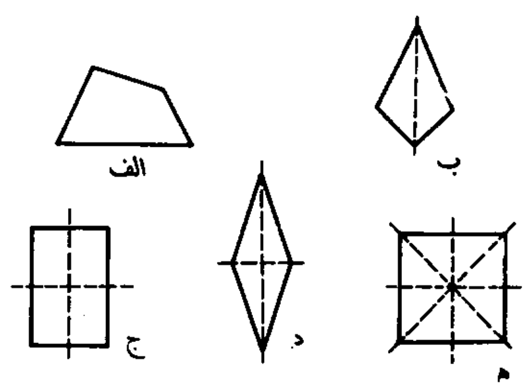
شکل ۱. مثلث‌هایی با صفر (الف)
یک (ب)، سه (ج) محور تقارن

چهار ضلعیها

در مثلثها ویژگیهای «متساوی الاضلاع» بودن و «متساوی الزوایا» بودن، لازمهٔ یکدیگر هستند، ولی برای چند ضلعیهایی با بیش از سه ضلع چنین نیست. در شکل ۲ چهار ضلعیهایی می‌بینیم با صفر (الف)، یک (ب)، دو (ج و د)، چهار (ه) محور تقارن، اما هیچ‌یک از آنها سه محور تقارن ندارند. مستطیل نامربع (ج) متساوی الزوایاست، حال آن‌که متساوی الاضلاع نیست و لوزی نامربع (د) متساوی الاضلاع است، حال آن‌که متساوی الزوایا نیست.

آیا ممکن است که یک چهار ضلعی دقیقاً سه محور تقارن داشته باشد؟ قبل از پاسخ دادن به این سؤال باید دو مطلب دربارهٔ خصوصیات محورهای تقارن چندضلعیها را، مدّنظر داشته باشیم. اگر تعداد اضلاع چند ضلعی فرد باشد، در این‌صورت محور تقارن باید از یک رأس بگذرد و ضلع مقابل آن را در زوایای قائمه نصف کند. محور تقارن در چند ضلعیهایی با تعداد اضلاع زوج یکی از این دو حالت را خواهد داشت. یا از دو رأس مقابل می‌گذرد و یا دو ضلع مقابل را در زوایای قائمه نصف می‌کند. این هر دو، نتایج تعریف محور تقارن ـ خطی که انعکاس در آن، چندضلعی را تغییر ناپذیر باقی می‌گذارد ـ می‌باشند.

بررسی فوق از خصوصیات محور تقارن نشان می‌دهد که یک چهار ضلعی نمی‌تواند دقیقاً سه محور تقارن داشته باشد. اگر در شکل ۲ ج محور تقارن سومی وجود داشته باشد، لاجرم باید از دو رأس مقابل گذر کند که لازمهٔ این، آن است که جفتهایی از اضلاع مجاور چهار ضلعی که یکدیگر را در آن رئوس تلاقی می‌کنند، همنهشت گردند و این، چهار ضلعی را به یک مربع بدل خواهد کرد. خط تقارن سومی در شکل ۲ د، همنهشت شدن زوایای مجاور را ایجاب می‌کند که باز هم چهارضلعی را به یک مربع مبدّل می‌سازد. بنابراین یک چهارضلعی نمی‌تواند دقیقاً سه خط تقارن داشته باشد.



شکل ۲. چهارضلعیهایی با صفر (الف)، یک (ب)، دو (ج و د) و چهار (ه) محور تقارن

به پیش ...

البته ما به‌سوی یافتن قانونی پیش می‌رویم که قادر باشد بیشترین تعداد خطوط تقارنی را که یک n ضلعی نامنتظم می‌تواند داشته باشد، معین کند. ملاحظه کردیم که پاسخها برای زمانی که n برابر ۳ و ۴ بود، به ترتیب ۱ و ۲ است. ممکن است در این مقطع یکی دو حدس به ذهنمان خطور کند، اما در واقع به اطلاعات بیشتری نیازمندیم. پس مقادیر ۵ تا ۱۱ از n را در شکلهای ۹ ـ ۳ درنظر می‌گیریم. هریک از این شکلها یک n ضلعی منتظم (قسمت (ب) از شکل مزبور و یک n ضلعی نامنتظم قسمت (الف) از شکل مزبور) را با بیشترین تعداد محورهای تقارن نشان می‌دهد. درچند ضلعیهای نامنتظم مورد بحث زوایای هم شماره همنهشت هستند و اضلاعی که تعداد علامتهای واقع بر آنها یکی است نیز، همنهشت می‌باشند. محورهای تقارن خط‌چین شده‌اند.

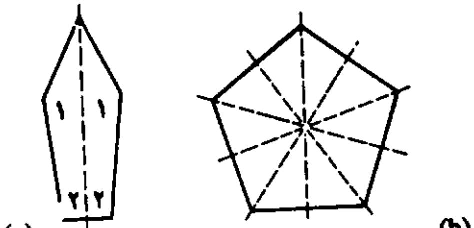
جدول ۱ خلاصه‌ای از نتایجی را که این مثالها حاوی آن هستند، همراه با علامت سؤالهایی که خواننده ممکن است خود، قبل از ادامه دادن بحث، آنها را با اعدادی جایگزین کند، به‌دست می‌دهد.

جدول ۱

$f(n)$	n
بیشترین تعداد محورهای تقارن در n ضلعی نامنتظم	تعداد اضلاع

دلایلی چند

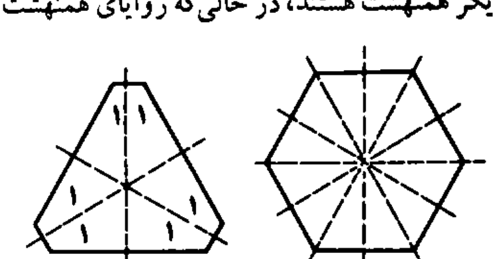
به‌عنوان مثال بگذارید نشان بدهیم که $f(9) = 3$. اینکه حداقل $f(9)$ برابر ۳ است از نه ضلعی نامنتظم شکل ۷ الف روشن است. از آن‌جا که ۹ فرد است، چهارمین محور تقارن باید ازیک رأس، مثلاً B، بگذرد و ضلع مقابل آن را، مثلاً FG، در زوایای قائمه نصف کند. این‌نتیجه HB و BC را همنهشت می‌سازد. بنابراین تمام اضلاع همطول خواهند شد، زیرا در شکل ۷ الف داریم: $AB = CD = DE = FG = GH = IA$



(a) (b)

شکل ۳. $n = ۵$

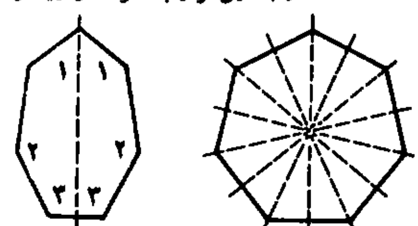
حال آنکه $BC = EF = HI$. درشکل ۷ الف زوایای A، D و G بایکدیگر همنهشت هستند، در حالی‌که زوایای همنهشت B،



(a) (b)

شکل ۴. $n = ۶$

C، E، F، H و I می‌توانند اندازه‌های متفاوت از اندازهٔ A داشته باشند. چهارمین محور تقارن گذرنده از B، زوایای A و C را همنهشت ساخته و به این ترتیب هر n زاویه را همنهشت

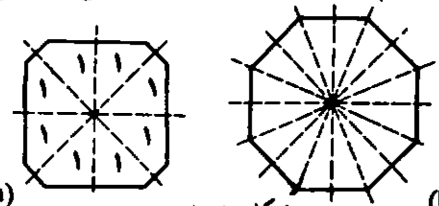


(a) (b)

شکل ۵. $n = ۷$

می‌سازد، بنابراین محور چهارم تقارن نه ضلعی را منتظم خواهد ساخت، پس به‌واقع $f(۹)$ برابر ۳ است.

پانزده ضلعی نامنتظم با ۵ محور تقارن را می‌توان از یک پنج ضلعی منتظم به‌دست آورد، به همان طریقی که شکل ۷ الف

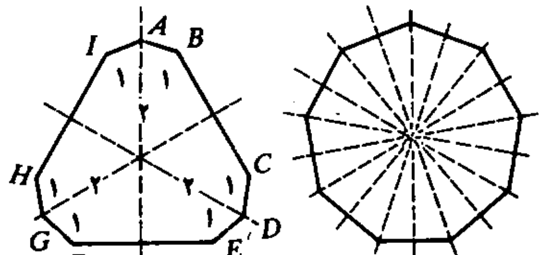


(a) (b)

شکل ۶. $n = ۸$

از مثلثهای متساوی الاضلاعی ساخته شده است که با ثابت نگاه داشتن «بیشتر» هر ضلع، هر رأس مثلث مزبور، «اندکی» به مرکز نزدیک آورده شده است. (گرچه برای تطبیق کردن با رئوس انتقال یافته، شکسته شده‌اند). بحثی مشابه با حالت $n = ۹$، نشان می‌دهد که $f(۱۵) = ۵$.

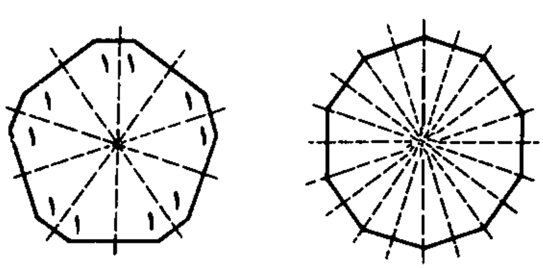
برای نشان دادن این‌که $f(۱۱) = ۱$ فرض می‌کنیم که محور تقارن دومی از رأس دیگری جز A گذشته باشد. رأس I رابرای



(a) (b)

شکل ۷. $n = ۹$

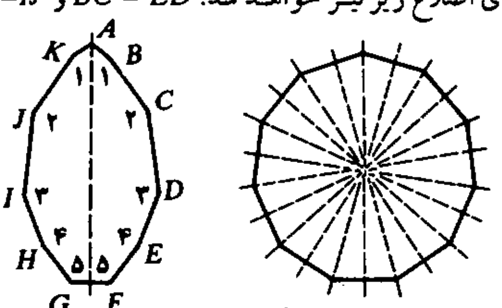
توضیح این موضوع منظور می‌داریم. مباحثی مشابه با این برای انتخابهای دیگر برقرار است. این محور تقارن جدید باید ضلع



(a) (b)

شکل ۸. $n = ۱۰$

CD را در زوایای قائمه نصف کند و وجود آن مستلزم برابری طولهای اضلاع زیر نیز خواهد شد: $BC = ED$ و $HI = IJ$ و



(a) (b)

شکل ۹. $n = ۱۱$

$JK = HG$ و $KA = GF$ و $AB = FE$. تساویهای فوق بر حسب علائم واقع بر آنها به ترتیب به‌صورت زیر معنا شده‌اند:

III = IIII

II = IIIII

I = GF

I = IIIII

II = IIII

و بنابراین همهٔ اضلاع همطول هستند. خط تقارن جدید بر برابری اندازهٔ زوایای زیر نیز دلالت خواهد کرد: (یا ۲ = ۳) C=D، B=E (یا۱=۴)، K=G (یا۱=۵)، A=F (یاA=۵)، (یا ۲=۴) J = H. نگاهی به فهرست فوق نشان می‌دهد که چندضلعی مزبور متساوی الزوایا نیز هست، پس منتظم است بنابراین $f(11) = 1$.

حالت کلی

بازبینی جدول ۱ با درنظر داشتن مباحث مذکور می‌تواند تعمیم زیر را مطرح کند:

$f(n)$ = بزرگترین مقسوم علیه n (بجز خودش)

اثبات اظهار صحیح فوق با استفاده از مسیر استدلالات داده شده دربارهٔ ۱۱ و ۹ = n تا اندازه‌ای مشکل است. اثبات حالت کلی آن فراتر از بُرد این مقاله است، اما درصورت تقاضا از طریق نویسنده قابل دستیابی است. پس اجازه دهید در اینجا چند تکلیف کلاسی را مطرح کنیم، زیرا بحثی از این نوع می‌تواند زمینه‌های مساعدی را برای تحقیقات دانش آموزان دربر داشته باشد.

تکالیف

● برای شروع، آموزگاران می‌توانند اشکال ۹ - ۱ را در ابعاد بزرگ تهیه کرده، در اختیار دانش آموزان قرار دهند، تا دانش آموز بتواند با تاکردن آنها، محورهای تقارنشان را نشان دهد. پرسشهایی دربارهٔ تقارب محورهای تقارن و زوایای بین محورهای تقارن مناسب این مقطع است.

● فعالیت در سطحی بالاتر می‌تواند شامل فراخواندن دانش آموزان به یافتن و ساختن تعدادی چند ضلعی باشد، چند ضلعیهایی که تعداد محورهای تقارنشان را خود بچه‌ها تعیین کنند. برای مثال آیا می‌توان یک شانزده ضلعی با دو محور تقارن ساخت؟ با سه تا چطور؟ و با چهارتا؟ بهترین نتایج حاصل از اعضای گروه یا کلاس را می‌توان در جدولی مثل جدول ۱ ثبت کرد.

● کار را در مورد مقادیر بزرگتر n به مسابقه بکشانید. تکلیف دربارهٔ مقادیر بزرگتر n این است که به کمک نقاله چند ضلعی نامنتظمی با بیست و یک ضلع رسم کنیم که دقیقاً دارای ۷ محور تقارن باشد.

امید می‌رود که تحقیقات در این زمینه، هندسه را برای دانش آموزان، نیز معلمین دلپذیرتر نماید.

مراجع :

Grossman, Israel, and Wilhelm Magnus. *Groups and their Graphs.*
Washington, D. C. Mathematical Association of America , 1965.

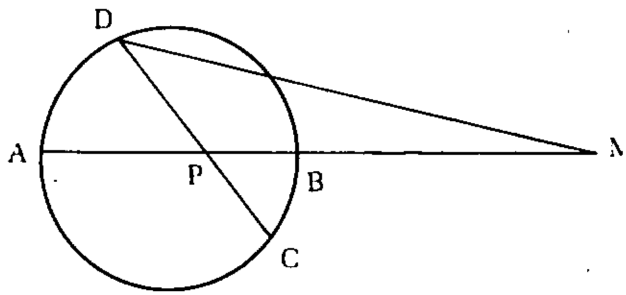
Shilgalis , Thomas W ."A Theorem on Lines of Symmetry . " Mathematics Teacher 65 (January 1972) : 69 - 72

مسائل برای دانش‌آموزان

● طرح از دکتر احمد شرف‌الدین

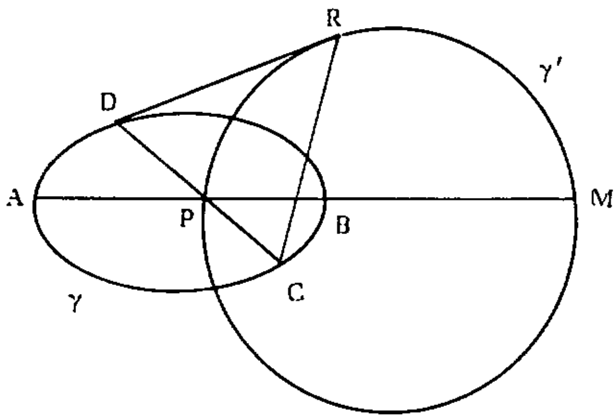
۱. مسألهٔ هندسه (تعمیم قوت نقطه)

در سطرهای زیر قضیهٔ قوت نقطه‌را تعمیم می‌دهیم. برای این منظور ابتدا قضیهٔ قوت نقطه‌را به صورت زیر درمی‌آوریم. درصفحهٔ π ، دایرهٔ γ وقطر AB از آن را درنظر گرفته و نقطهٔ M را برخط AB اختیار می‌کنیم. مزدوج توافقی نقطهٔ M را نسبت به دونقطهٔ A و B نقطهٔ P می‌نامیم. از نقطهٔ P خط قاطع دلخواهی رسم‌کرده ونقاط تلاقی آن رابا دایرهٔ γ با C و D نشان می‌دهیم. هنگامی‌که امتدادخط قاطع تغییر کند حاصل‌ضرب $MC \cdot MD$ ثابت می‌ماند.



تعمیم قضیه قوت نقطه نسبت به دایره

درصفحهٔ π ، دایرهٔ γ وقطر AB از آن را درنظر گرفته ونقطهٔ M را برخط AB اختیار می‌کنیم. مزدوج توافقی نقطهٔ M را نسبت به دونقطهٔ A و B ، نقطهٔ P می‌نامیم. از نقطهٔ P خط قاطع دلخواهی رسم‌کرده ونقاط تلاقی آن‌را با دایرهٔ γ با C و D نشان می‌دهیم. درصفحهٔ π' عمودبرصفحه π ، دایرهٔ γ' را به قطر MP رسم می‌کنیم و نقطهٔ R را برمحیط آن اختیار می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت‌کنیم که هنگامی‌که امتداد خط قاطع مار بـر نقطهٔ P تغییر کند؛ حاصل ضرب $RC \cdot RD$ ثـابت می‌ماند.



برهان : درستی‌حکم برای‌دونقطهٔ M و P از دایرهٔ γ' مسلم است. درستی حکم‌را برای‌هرنقطهٔ R از شکل

$$\gamma' - \{P , M\}$$

ثابت می‌کنیم. برای این منظور،کرهٔ S راکه بردایرهٔ γ ونقطهٔ R می‌گذرد درنظر می‌گیریم. خط RP کرهٔ S را در نقطه‌ای که آن را κ می‌نامیم قطع می‌کند. چون‌خط RP نیمساز زاویه ARB است پس‌نقطهٔ κ محل تلاقی‌کرهٔ S بـا محور دایرهٔ γ

می‌باشد. صفحهٔ κ'' کــه در نقطهٔ κ باکرهٔ S مماس شود موازی صفحهٔ γ است. پس‌صفحهٔ RCD ، صفحهٔ مماس κ'' را در خط $C'D'$ که موازی CD است قطع می‌کند. مقطع صفحهٔ RCD را با کرهٔ S ، دایـرهٔ γ'' می‌نـامیم . چون خط $C'D'$ مماس بردایرهٔ γ'' است و موازی خط CD است نتیجه می‌شود کـه خط RP نیمساز زاویه CRD است.

بنا برقضیهٔ نیمساز می‌توان نوشت:

$$(۱)\quad RC\cdot RD=RP\,.\,R\kappa$$

از ایــن رابطه نتیجه می‌شود که وقتی خط CD حول نقطهٔ P می‌چرخد حاصل‌ضرب $RC\cdot RD$ ثابت‌می‌ماند. به‌آسانی نتیجه می‌شود که :

$$(۲)\quad RC\cdot RD=RA\cdot RB$$

نتیجه: (تعمیم قضیهٔ ارتفاع مثلث قائم‌الزاویه)

اگر در صفحهٔ π ، از نقطهٔ P عمودی بر خط AB رسم کنیم و نقاط تلاقی آن را با دایرهٔ γ ، نقاط E و E' بنامیم ، چنین خواهیم داشت:

$$(۳)\quad \overline{RE}^2=\overline{RE'}^2=RA\,.\,RB$$

رابطهٔ (۳) از رابطهٔ (۲) نتیجه می‌شود.

اگرنقطه R ، روی دایـره γ' حرکت‌کند و به نقطهٔ P بی‌نهایت نزدیک‌شود طولهای‌پاره‌خطهای RE ، RA ، وRB به ترتیب‌به سوی طولهای‌پاره خطهای PE ، PA ، وPB میل خواهندکرد و رابطهٔ (۳) به‌صورت رابطه زیردر می‌آید:

$$(۴)\quad \overline{PE}^2=PA\,.\,PB$$

رابطهٔ (۴) همان‌حکم مربع‌ارتفاع مثلث قائم‌الزاویه است. لذا رابطهٔ (۳) تعمیم قضیهٔ مربع‌ارتفاع مثلث قائم‌الزاویه است.

۲. مسألهٔ مثلثات

ثابت‌کنید اگر A ، B ، و C زاویه‌های یك مثلث باشند رابطهٔ زیر برقرار است:

$$(۱)\quad -\left(tg\frac{B}{2}-tg\frac{C}{2}\right)^2\sin A+\left(tg^2\frac{B}{2}-tg^2\frac{C}{2}\right)\sin B+\left(tg^2\frac{C}{2}-tg^2\frac{B}{2}\right)\sin C=0$$

حل : مقدار عبارت سمت‌چپ تساوی بالا ، هنگامی‌که $B=C$ باشد صفراست. اگر $B\neq C$ باشد درستی رابطهٔ زیر را ثابت می‌کنیم:

$$(۲)\quad -\left(tg\frac{B}{2}-tg\frac{C}{2}\right)\sin A+\left(tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}\right)(\sin B-\sin C)=0$$

چون $B\neq C$ فرض شده‌است پس‌رابطهٔ (۲) بارابطهٔ‌زیرمعادل است :

$$(۳)\quad \frac{tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}}{tg\frac{B}{2}-tg\frac{C}{2}}=\frac{\sin A}{\sin B-\sin C}$$

برای اثبات‌درستی تساوی (۳) به ترتیب چنین می‌نویسیم:

$$\frac{tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}}{tg\frac{B}{2}-tg\frac{C}{2}}=\frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{B-C}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B-C}{2}}=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}}{2\sin\frac{B-C}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{\sin A}{2\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2}}$$

حال کافی است ثابت کنیم که :

$$2\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2}=\sin B-\sin C$$

و این به طریق زیر انجام می‌گیرد:

$$2\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2}=$$

$$2\left(\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)\times$$

$$\left(\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)=$$

$$\left(\sin B\cos^2\frac{C}{2}-\sin^2\frac{B}{2}\sin C-\cos^2\frac{B}{2}\sin C+\right.$$

$$\left.\sin B\sin^2\frac{C}{2}\right)=\sin B-\sin C$$

۴. مسألهٔ جبر

درصفحهٔ مختصات قائم دکارتی xoy ، دو نقطهٔ

$A'(-a\,,0)$ و $A(a\,,0)$

را درنظر می‌گیریم ($a\neq 0$). مطلوب است مکان‌هندسی نقاطی که مختصات آنها در معادلهٔ زیر صدق کنند:

$$(1)\quad \frac{1}{(x-a)^2+y^2}+\frac{1}{(x+a)^2+y^2}=\frac{1}{y^2}$$

از نقطهٔ A' خط d را غیر واقع برخط $A'A$ رسم می‌کنیم و نقاط تلاقی آن را بـا مکان هندسی موردنظر با C و D نشان می‌دهیم. نقطهٔ تلاقی خط d را با خط به معادلهٔ $x=a$ ، نقطهٔ B می‌نامیم. ثابت کنید چهار نقطهٔ A' ، B ، C ، و D تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند .

حل : دو نقطه A و A' متعلق به مکان‌هندسی مطلوب نیستند، زیرا به ازای $x=\pm a$ ، رابطهٔ (۱) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$(2)\quad \frac{1}{4a^2+y^2}=0$$

رابطهٔ (۲) ، به ازای $y=0$ برقرار نیست.

مکان‌هندسی نقاطی که مختصات آنها در معادلهٔ (۱) صدق می‌کنند عبارت‌است از مکان‌هندسی نقاطی که مختصات آنها در معادلهٔ زیر صدق می‌کنند بجز دو نقطهٔ

$A'(-a\,,0)$ و $A(a\,,0)$

$$y^2[(x+a)^2+y^2+(x-a)^2+y^2]=$$
$$[(x-a)^2+y^2][(x+a)^2+y^2]$$

پس از اختصار حاصل می‌شود:

$$y^4-(x-a)^2(x+a)^2=0$$

و یا

$$(3)\quad y^2=\pm(x^2-a^2)$$

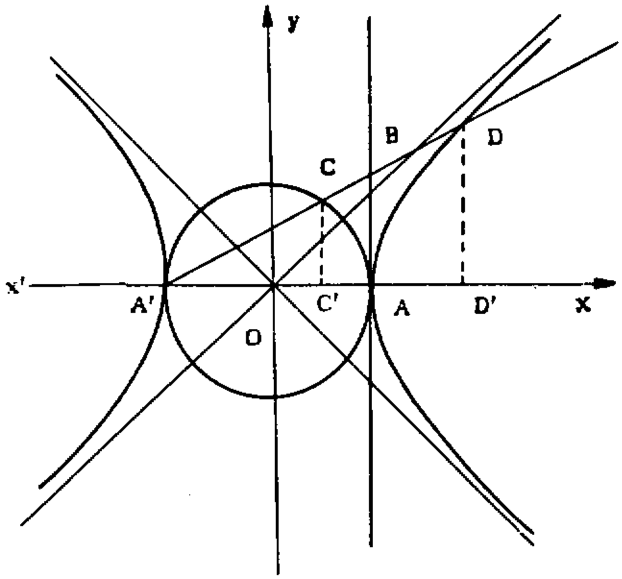
مکان‌هندسی نقاطی که مختصات آنها درمعادله (۳) صدق‌می‌کنند عبارت است از اجتماع دایره C به معادلهٔ

$$y^2=-(x^2-a^2)$$

و هذلولی متساوی الساقین H بـه معادلـه $y^2=x^2-a^2$. پس مکان هندسی نقاطی که مختصات آنها در معادله (۱) صدق می‌کنند عبارت است از شکل

$$T=C\cup H-\{A'\,,\,A\}$$

اکنون ثابت می‌کنیم که چهار نقطهٔ A' ، B ، C ، و D تشکیل تقسیم‌توافقی می‌دهند. تصاویر نقاط C و D را بـرخط $x'x$ به ترتیب با C' و D' نشان می‌دهیم . برای آن‌که ثابت کنیم $(A'BCD)=-1$ کافی است ثابت‌کنیم :



$$(A'AC'D') = -1$$

و برای این منظور کافی است درستی رابطهٔ زیر را ثابت کنیم:

$$(۴)\quad \overline{OA}^2 = \overline{OC'} \cdot \overline{OD'}$$

معادله‌خط $A'D$ باضریب زاویه m به صورت زیر است:

$$y = m(x+a)$$

مختصات نقاط A' ، C ، و D عبارت‌اند از جوابهای دستگاه معادلات زیر :

$$\begin{cases} y^4 = (x^2 - a^2)^2 \\ y = m(x+a) \end{cases}$$

طولهای نقاط A'، C ، و D (و یا طولهای نقاط A'، C'، و D') عبارت‌اند از ریشه‌های معادله زیر

$$(x+a)^2[(m^4-1)x^2+2a(m^2+1)x+a^2(m^4-1)]=0$$

جواب مضاعف $x=-a$ طول نقطهٔ A' است. طولهای نقاط C' و D' جوابهای معادلهٔ زیر هستند

$$(m^4-1)x^2+2a(m^2+1)x+a^2(m^4-1)=0$$

حاصل‌ضرب دوجواب معادلهٔ اخیرالذکر عبارت‌اند از:

$$(۵)\quad x_1x_2 = a^2$$

از رابطهٔ (۵) ، رابطه (۴) حاصل می‌شود.

ادب ریاضی

... یک روز داشتیم با هایزنبرگ قدم می‌زدیم که صحبتهایمان به مفهوم فضا کشیده شد. من که همان روزها تازه کتاب «فضا، زمان، ماده» (ویل) را خوانده بودم بادی به غبغب انداختم و کاملاً تحت تأثیر این کتاب با تبختر گفتم: «فضا میدان عملکردهای خطی است.» هایزنبرگ با خونسردی گفت: «چرند می‌گویی: فضا آبی است و پرندگان در آن پرواز می‌کنند.»

فلیکس بلوخ

مجلهٔ فیزیک ـ بهار ۱۳۷۱

* * *

ـ رمز پیروزی نهایی و مقبولیت عام یک نظریهٔ علمی جدید، معمولاً آن نیست که مخالفان بالاخره متقاعد می‌شوند که دست از لجاجت بردارند و چشم به‌روی واقعیات بگشایند. بلکه این است که مخالفان سرانجام می‌میرند و نسل جدیدی ظهور می‌کند که از ابتدا با آن واقعیت اُخت شده است.

ماکس پلانک

مجلهٔ فیزیک ـ بهار ۱۳۷۱

تابع معکوس تابعهای مثلثاتی (Arcها) (قسمت اول)

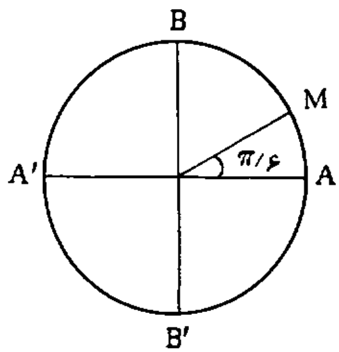
علی حسن‌زاده ماکویی

(مورد استفاده دانش‌آموزان دوم ـ سوم وچهارم)

۱. کمان مثلثاتی : هریك ازکمانهای ،

$$K\in Z\ ,\ \omega=2K\pi+\frac{\pi}{6}$$

درازای مقادیرمختلف (K) اندازهٔ معینی دارند. برای مشخص کردن کمان ω در دایرهٔ مثلثاتی اگرنقطهٔ A انتهای سمت‌راست



قطرافقی دایـره را مبدأ اختیارکنیم ، به آسانی می‌توان نتیجه گرفت کـه انتهای همهٔ کمانهای مذکور نقطهٔ M خواهد بود . موضع‌نقطهٔ M با مسیرحرکت ومقادیرمختلف K هیچ رابطه‌ای ندارد. یعنی اگرمتحرکی بخواهد ازنقطهٔ A شروع‌به‌حرکت کرده، پس از طی‌کمان ω به‌نقطهٔ M برسد ، مسیر حرکت او مثبت یـا منفی (عکس حرکت عقربه‌های ساعت یا موافق آن) باشد. پس از طی K دور دایره بایـد کمان $\frac{\pi}{6}$ را طی کند . همچنین می‌دانیم که نسبتهای مثلثاتی همه کمانهای ω برابر بـا نسبتهای کمان $\frac{\pi}{6}$ است . یعنی اندازه‌آنها هیچ‌رابطه‌ای با عدد K ندارد .

به این ترتیب در تعیین نسبتهای مثلثاتی‌کمانهای ، $K\in Z$ و $\omega=2K\pi+\alpha$ می‌توان کمان α را در نظرگرفت . α بـه کمان اولیهٔ‌کمانهای ω موسوم است. واضح است که اگر φ از نظر اندازه موردبررسی قرارگیرد مجموعهٔ کمانهای ω متشکل از $(K+1)$ کمان‌است. به عکس وقتی صحبت ازکمان‌مثلثاتی ω باکمان اولیهٔ ، $0<|\alpha|<2\pi$ می‌رود، بایدکمانهای :

$$\omega=2K\pi+\alpha\ ,\ (K\in Z)$$

را درنظر گرفت .

۲. کمان اصلی: باتوجه‌به مطالب‌فوق کمانهای بی‌شماری است که در رابطهٔ :

$$\sin(x)=m \quad \text{و} \quad |m|\leqslant 1$$

صدق می‌کند. بنابه‌قرارداد ازبین‌کمانهای مزبور،کمانی مانند α با شرط: $\sin\alpha=m$ و $\frac{-\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$ بـه‌کمان اصلی ، کمانهای x موسوم است.

به همین‌ترتیب اگر β کمان‌اصلی، کمانهای y دررابطهٔ $|n|\leqslant ۱$ و $\cos(y)=n$ و γ کمـان اصلی، کمانهای z در رابطـهٔ $t\in IR$ و $tg(z)=t$ و λ کمان‌اصلی‌کمانهای u در رابطهٔ $q\in R$ و $cotg(u)=q$ و φ کمان اصلی، کمانهای v در رابطهٔ $|s|\geqslant ۱$ و $\sec(v)=s$ (سکانت) و θ کمان‌اصلی، کمانهای w دررابطهٔ $|r|\geqslant ۱$ و $\csc(w)=r$ (کسکانت) فرض شوند، بنابه قرارداد حدودکمانهای اصلی فوق‌الذکر به ترتیب عبارتنداز:

$$s\geqslant ۱ \implies ۰\leqslant\varphi<\frac{\pi}{۲} \text{ و } ۰<\lambda<\pi \text{ و } \frac{-\pi}{۲}<\gamma<\frac{\pi}{۲}$$

$$، ۰\leqslant\beta\leqslant\frac{\pi}{۲}$$

$$r\leqslant -۱ \implies \frac{-\pi}{۲}\leqslant\theta<۰ \text{ و}$$

$$r\geqslant ۱ \implies ۰<\theta\leqslant\frac{\pi}{۲} \text{ و}$$

$$s\leqslant -۱ \implies \frac{\pi}{۲}<\varphi\leqslant\pi$$

درکتابهای درسی ایران کمانهای اصلی، α و β و γ و λ و φ و θ رابه ترتیب:

$$\gamma=\mathrm{Arc}\,tg(t) \text{ و } \beta=\mathrm{Arc}\cos(n) \text{ و}$$

$$\alpha=\mathrm{Arc}\sin(m) \text{ و } \theta=\mathrm{Arc}\csc(r) \text{ و}$$

$$\varphi=\mathrm{Arc}\sec(s) \text{ و } \lambda=\mathrm{Arc}\,cotg(q)$$

و همچنین کمانهای، x و y و z و u و v و w رابه ترتیب با نمادهای:

$$z=\mathrm{arc}\,tg(t) \text{ و } y=\mathrm{arc}\cos(n) \text{ و}$$

$$x=\mathrm{arc}\sin(m) \text{ و } w=\mathrm{arc}\csc(r) \text{ و}$$

$$v=\mathrm{arc}\sec(s) \text{ و } u=\mathrm{arc}\,cotg(q)$$

نشان داده شده‌اند. (Arc به معنی کمان است.)

با توجه‌به مطالب‌فوق به‌آسانی می‌توان نتیجه گرفت:

الف) کمانهای $\mathrm{Arc}\sin(m)$ و $\mathrm{Arc}\,tg(t)$ و $\mathrm{Arc}\csc(r)$ حاده‌هستند. و به‌ازای مقادیر مثبت اعداد، m و t و r کمانهاحادهٔ مثبت، و به ازای مقادیرمنفی اعداد مزبور، کمانها حادهٔ منفی هستند.

ب) کمانهـای $\mathrm{Arc}\cos(n)$ و $\mathrm{Arc}\,cotg(q)$ و $\mathrm{Arc}\sec(s)$ همواره مثبت‌هستند. به‌ازای مقادیرمثبت اعداد، n و q و s کمانهای حادهٔ مثبت، و به ازای مقادیر منفی اعداد مزبور کمانها منفرجهٔ مثبت می‌باشند.

به مثالهای زیر توجه‌کنید:

$$\mathrm{Arc}\sin\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)=\frac{\pi}{۳} \qquad (۱)$$

$$\mathrm{arc}\sin\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)=۲K\pi+\frac{\pi}{۳} \text{ یا } +\frac{۲\pi}{۳}$$

$$\mathrm{Arc}\sin\left(-\frac{۱}{۲}\right)=-\frac{\pi}{۶} \qquad (۲)$$

$$\mathrm{arc}\sin\left(\frac{-۱}{۲}\right)=۲K\pi-\frac{\pi}{۶} \text{ یا } +\frac{۷\pi}{۶}$$

$$\mathrm{Arc}\cos\left(\frac{۱}{۲}\right)=\frac{\pi}{۳} \qquad (۳)$$

$$\mathrm{arc}\cos\left(\frac{۱}{۲}\right)=۲K\pi\pm\frac{\pi}{۳}$$

$$\mathrm{Arc}\cos\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)=\frac{۳\pi}{۴} \qquad (۴)$$

$$\mathrm{arc}\cos\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)=۲K\pi\pm\frac{۳\pi}{۴}$$

$$\mathrm{Arc}\,tg\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)=\frac{\pi}{۶} \qquad (۵)$$

$$\mathrm{arc}\,tg\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)=K\pi+\frac{\pi}{۶}$$

(۶) $\mathrm{Arc}\,tg(-1) = -\frac{\pi}{4}$

$\mathrm{arc}\,tg(-1) = K\pi - \frac{\pi}{4}$

(۷) $\mathrm{Arc}\,cotg(\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{\pi}{3}$

$\mathrm{arc}\,cotg(\frac{\sqrt{3}}{3}) = K\pi + \frac{\pi}{3}$

(۸) $\mathrm{Arc}\,cotg(-1) = \frac{3\pi}{4}$

$\mathrm{arc}\,cotg(-1) = K\pi - \frac{\pi}{4}$

(۹) $\mathrm{Arc}\,\sec(\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}$

$\mathrm{arc}\,\sec(\sqrt{2}) = 2K\pi \pm \frac{\pi}{4}$

(۱۰) $\mathrm{Arc}\,\sec(-\sqrt{2}) = \frac{3\pi}{4}$

$\mathrm{arc}\,\sec(-\sqrt{2}) = 2K\pi \pm \frac{3\pi}{4}$

(۱۱) $\mathrm{Arc}\,\csc(2) = \frac{\pi}{6}$

$\mathrm{arc}\,\csc(2) = 2K\pi + \frac{\pi}{6}$ یا $\frac{5\pi}{6}$

(۱۲) $\mathrm{Arc}\,\csc(-\sqrt{2}) = -\frac{\pi}{4}$

$\mathrm{arc}\,\csc(-\sqrt{2}) = 2K\pi - \frac{\pi}{4}$ یا $+\frac{5\pi}{4}$

(۱۳) $\alpha = \mathrm{Arc}\,tg(\cos(0)) \Longrightarrow$

$\alpha = \mathrm{Arc}\,tg(1) = \frac{\pi}{4}$

(۱۴) $x = \mathrm{arc}\,cotg(\cos(\frac{\pi}{2})) \Longrightarrow$

$x = K\pi + \mathrm{Arc}\,cotg(0) = K\pi + \frac{\pi}{2}$

(۱۵) $\beta = \mathrm{Arc}\,tg(\sin(\frac{3\pi}{2})) \Longrightarrow$

$\beta = \mathrm{Arc}\,tg(-1) = -\frac{\pi}{4}$

(۱۶) $y = \mathrm{arc}\,tg(\sin(0)) \Longrightarrow$

$y = K\pi + \mathrm{Arc}\,tg(0) = K\pi$

(۱۷) $\gamma = \mathrm{Arc}\,\sec(\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{3})}) \Longrightarrow$

$\gamma = \mathrm{Arc}\,\sec(\frac{2\sqrt{3}}{3}) = \frac{\pi}{6}$

(۱۸) $z = \mathrm{arc}\,\sec(\sin(\frac{7\pi}{2})) \Longrightarrow$

$z = 2K\pi + \mathrm{Arc}\,\sec(-1) \Longrightarrow z = 2K\pi + \pi$

(۱۹) $A = \sin \mathrm{Arc}\,cotg(\sin(\frac{3\pi}{2})) \Longrightarrow$

$A = \sin \mathrm{Arc}\,cotg(-1) \Longrightarrow$

$A = \sin(\frac{3\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(۲۰) $B = \cos \mathrm{Arc}\,tg(\cos(2K\pi)) \Longrightarrow$

$B = \cos \mathrm{Arc}\,tg(1) \Longrightarrow$

$B = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

نقدی بر کتاب

مجموعهٔ پرسشها و پـاسخهای تشـریحی ریاضی آزمونهای سراسری سازمان سنجش

● سید حسین سید موسوی

انبوه داوطلبان ورود بـه دانشگاهها و از سوی دیگر اضطراب آنها، گروههای مختلفی را وسوسه کرده که از این خوان گسترده، بهره‌ای ببرند. از جمله، کسانی تستهای کنکور سالهای پیش‌را با جواب در جزواتی تحت‌عناوین ۲۰سال کنکور و نظایر آن با کیفیتی بسیار نازل و با چاپی از نوع پلی کپی در اختیار داوطلبان می گذاشتند که اغلب نه‌تنها پـاسخ سؤالات، بلکه‌خود سؤالات نیز اشتباه بود، که‌جز گمراهی‌خوانندگان‌چیزی نصیب آنها نمی کرد.

ظاهراً مسئولان‌جدید سازمان سنجش‌نیز «به‌انگیزهٔ مقابله با بازار آشفته سوءاستفاده‌ازداوطلبان‌شرکت‌در آزمون‌سراسری و اندیشهٔ یاری‌دادن به داوطلبان به‌ویژه‌داوطلبان‌مناطق محروم*»، از این وسوسه بدور نمانده و سرانجام با عقب‌نشینی از شعار خودکه «تست وسیله سنجش‌است نه‌آموزش» به‌چاپ کتابهای تست با حل‌تشریحی آنها اقدام‌کردند. البته نا گفته‌نماندکه‌اگر قرارباشدکه مجاز باشیم‌چنین‌کتابهایی‌را چاپ‌کنیم هیچ‌مرجعی ذی‌صلاح‌تراز سازمان سنجش‌نیست زیرا اولاً از نظر قانونی تستها متعلق‌به سازمان سنجش‌است، دوم‌اینکه‌خودطراحان‌تستها علی‌القاعده اهداف‌طرح تست‌را می‌دانند و لذا بهتر می‌توانند تستهارا پاسخ‌دهند. بادر نظر گرفتن مطالب‌فوق انتظارمی‌رفت‌که شاهدانتشار مجموعه‌ای‌وزین ودرخورشأن‌سازمان‌سنجش‌باشیم، اما حداقل در مورد مجموعه ریاضیات اینطور نیست و به نظر می‌رسدکه تعجیل درانتشار آن باعث‌بروز مشکلاتی شده‌است که ذیلاً به آن اشاره می‌کنیم.

۱ــ تعدادی از تستهای‌کنکور که غلط طرح‌شده بود، در این‌کتاب بدون اینکه اصل نادرست تست‌آورده شود، اصلاح شده‌آن در متن‌کتاب آورده‌شده است‌که به‌نظر می‌رسد با اصل امانتداری منافات دارد زیرا این‌کتاب به هرحال‌یك سنداست و ممکن‌است باعث گمراهی‌شود. نمونه‌هایی‌از این نوع‌تستها:

الف) تست ۱۲ از آزمون سراسری گروه‌ریاضی و فنی سال ۶۳ ــ ۶۲ است‌که گزینهٔ (۳) را به $2x$ تغییر داده‌اند تا تست فقط یك‌جواب داشته باشد.

ب) تست ۱۰ از آزمون سراسری گروه ریاضی و فنی سال ۶۸ ــ ۶۷ است‌که تابع‌داده‌شده دراصل سؤال به‌صورت

$$f(x)=\begin{cases}-\sqrt{x^{۲}-۱۶} & , \quad |x|\leqslant ۴\\ x-۴ & , \quad |x|>۴\end{cases}$$

بودکه به صورت زیراصلاح شده است.

$$f(x)=\begin{cases}-\sqrt{۱۶-x^{۲}} & , \quad |x|\leqslant ۴\\ x-۴ & , \quad |x|>۴\end{cases}$$

۲) از سوی دیگر به تعداد دیگری از تستهای‌غلط توجه نکرده وبه‌آنها پاسخ داده‌اندکه نمونه‌هایی از آنها عبارتنداز:

الف) تست ۲۵ از آزمون سراسری‌گروه ریاضی وفنی سال ۷۰ ــ ۶۹ (مرحلهٔ اول) دارای سه گزینهٔ صحیح است‌که

* به نقل از مقدمه‌کتاب مزبور

در این کتاب فقط یکی از آنها صحیح فرض‌شده است.

ب) اصل تست ۱۹ از آزمون سراسری کنکور گروه ریاضی و فنی سال ۷۰ – ۶۹ (مرحلهٔ دوم) غلط و مبهم است و پاسخ داده‌شده نیز کاملاً اشتباه است.

پ) تست ۲۲ از آزمون سراسری گروه ریاضی و فنی سال ۷۱ – ۷۰ (مرحلهٔ دوم) اصل تست غلط است و پاسخ داده شده در کتاب نیز اشتباه است.

۳– در برخی تستها استدلال ارائه‌شده سست و یا غلط است که نمونه‌هایی از آن به صورت زیر است:

الف) در پاسخ تست ۳۲ از آزمون سراسری گروه ریاضی و فنی سال ۶۶ – ۶۵ به قضیه‌ای استنادشده که شرایط قضیه در مورد مسألهٔ مورد بحث برقرار نیست. در کتاب مزبور عبارات زیر آورده شده است:

« اگر تابع $f(x)$ در فاصله (a,b) پیوسته باشد و $a<c<b$، می‌توان نوشت:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

پس در این پرسش انتگرال مفروض را چنین می‌نویسیم:

$$\int_0^1 [x]\cos x\,dx + \int_1^{\frac{\pi}{2}} [x]\cos x\,dx »^*$$

در صورتی که تابع $[x]\cos x$ در فاصله $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ ناپیوسته است، زیرا

$$f(x) = [x]\cos x = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leqslant x < 1 \\ \cos x & , \quad 1 < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

و در $x = 0$ داریم:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0 \quad و \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \cos 1$$

* به نقل از ص ۲۷۹ کتاب مزبور

بنابراین قضیهٔ فوق در اینجا به کار نمی‌آید، قضیهٔ زیر در مورد این تست به کار می‌آید.

قضیه: اگر تابع f در فاصلهٔ (a,b) جز در تعدادی نامتناهی نقطه پیوسته باشد و $a<c<b$ در این صورت

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

ب) در پاسخ تست ۱۶ از آزمون سراسری گروه ریاضی و فنی سال ۶۳–۶۲ برای محاسبهٔ مشتق $f(x) = x^2[x]$ روش دومی ارائه‌شده است که اشکال دارد. ما نخست عین پاسخ مورد نظر را می‌آوریم:

روش دوم. با استفاده از محاسبهٔ مشتق، تابع مفروض درحوالی $x = 0$ پیوسته است و به صورت تابع چندضابطه‌ای نوشته شده، داریم:

$$f(x) = \begin{cases} x^2(-1) & , \quad -1 \leqslant x < 0 \\ x^2(0) & , \quad 0 \leqslant x < 1 \end{cases}$$

و مشتق آن چنین است:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & , \quad -1 \leqslant x < 0 \\ 0 & , \quad 0 \leqslant x < 1 \end{cases}$$

و لذا در هر دو صورت $f'(0) = 0$. پس f در نقطهٔ $x = 0$ دارای مشتق برابر صفر است.»*

روش صحیح پاسخ به این تست به صورت زیر است. ابتدا قضیهٔ زیر را یادآوری می‌کنیم.

قضیه: الف) اگر f روی فاصلهٔ $[a, x_0]$ پیوسته و روی فاصله (a, x_0) مشتق پذیر بوده و

$$\lim_{x \to x_0^-} f'(x)$$

وجود داشته باشد، آنگاه

* به نقل از ص ۳۱ کتاب مزبور

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-} f'(x)$$

ب) اگر f روی فاصلهٔ $[x_0 , b)$ پیوسته و در فاصلهٔ (x_0 , b) مشتق‌پذیر بوده و $\lim_{x\to x_0^+} f'(x)$ موجود باشد آنگاه

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+} f'(x)$$

در مورد

$$f(x)=\begin{cases} x^2(-1) , & -1\leqslant x<0 \\ x^2(0) , & 0\leqslant x<1 \end{cases}$$

مشتق تابع f به‌جز در $x=0$ به صورت زیر است:

$$f'(x)=\begin{cases} -2x , & -1\leqslant x<0 \\ 0 , & 0<x<1 \end{cases}$$

چون f روی فاصله $(-1 , 0]$ پیوسته و f' روی $(-1 , 0)$ موجود است و

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-}(-2x)=0$$

بنابراین $f'(0)=0$ و به‌طریق مشابه $f'_+(0)=0$. در نتیجه

$$f'(0)=0$$

تفریح اندیشه ۲

سیاحی درکشوری است که درآن هرکسی یا در دشت یا درکوه زندگی می‌کند. آنها به یک زبان صحبت می‌کنند، اما مقیمان دشت همواره راست می‌گویند، درحالی که کوه‌نشینان همیشه دروغزنند.

سیاح اندکی از زبان اینان را می‌داند. می‌داند که «گرب» و «منل» به معنی آری و نه است اما نمی‌داند که کدام، کدام است.

از هریک از سه تن از اهالی مملکت دو سؤال می‌پرسد:

ـ آیا هردو فرد دیگر دشت نشین‌اند؟

ـ آیا هردو فرد دیگر کوه نشین‌اند؟

همهٔ آنها، جز یکی که به‌سؤال دوم پاسخ «منل» می‌دهد، به هردوسؤال پاسخ «گرب» می‌دهند.

«گرب» به چه معنی است؟

جواب در صفحهٔ ۹۶

تعیین دامنه[1] و برد[2] توابع[3] (قسمت اول)

سید محمدرضا هاشمی موسوی

(مورد استفاده دانش‌آموزان دوم ـ سوم و چهارم)

تعریف : فرض‌کنیم f تابعی‌از A در B باشد. مجموعهٔ مؤلفه‌های اول اعضای f را دامنهٔ تابع f و مجموعهٔ مؤلفه‌های دوم اعضای f را بردتابع f گوییم ، دامنهٔ یك تابع مانند f را به D_f و برد آن‌را به R_f نشان می‌دهیم. درنتیجه خواهیم‌داشت:

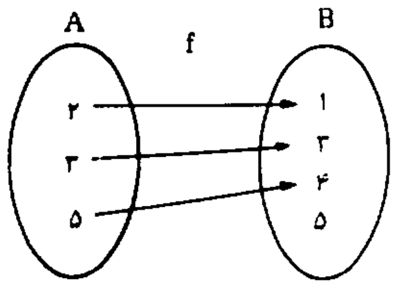
$$D_f \subset A \ ، \ D_f = \{x|(x,y)\in f\}$$

$$R_f \subset B \ ، \ R_f = \{y|(x,y)\in f\}$$

لازم است توضیح دهیم کـه مجموعهٔ B «مجموعهٔ انجام» یـا «هم دامنه[4]» تابع f و مجموعهٔ A «مجموعهٔ آغاز» f نـامیده می‌شوند اگر داشته باشیم :

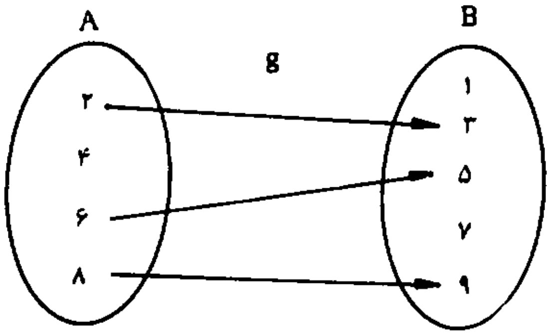
$$D_f \subset A \quad , \quad R_f \subset B$$

مثال ۱ : تابع f روی مجموعهٔ $A=\{۲ \ , \ ۳ \ , \ ۵\}$ در مجموعهٔ $B=\{۱,۳,۴,۵\}$ بانمودار زیـر تعریف شده است، دامنه و برد آن‌را تعیین‌کنید.



حل : دراین‌جا A و B بـه ترتیب دامنه و هم دامنهٔ f می‌باشند، زیرا از هرعضو A یـك پیکان خارج شده‌است، در صورتی‌که به هرعضو B پیکان منتهی‌نشده‌است. بدیهی‌است‌برد تابع f مجموعهٔ دوعضوی {۳,۴} می‌باشد.

مثال ۲ : تابع g از مجموعـهٔ $A=\{۲,۴,۶,۸\}$ در مجموعهٔ $B=\{۱,۳,۵,۷,۹\}$ مطابق نمودار زیر تعریف شده است، دامنه و برد آن را مشخص‌کنید .



حل : همان‌طورکه ازنمودار مشخص است داریم:

$$D_g \subset A \quad , \quad R_g \subset B$$

بنابراین A مجموعهٔ آغاز g و B مجموعهٔ انجام g می‌باشند؛

---

۱) Domain ۲) Range

۳) Function ۴) Co - domain

که با توجه به پیکانهای خارج‌شده از مؤلفه‌های مجموعهٔ A و واردشده به‌مؤلفه‌های مجموعهٔ B دامنه و بردتابع g مجموعه‌های زیر می‌باشند.

$$D_f=\{2,6,8\} \quad , \quad R_f=\{3,5,9\}$$

نکتهٔ۱: برای تعیین دامنه و برد یك تابع ابتدا باید از تابع بودن آن اطمینان حاصل کنیم و سپس دامنه و برد آن را تعیین کنیم. البته باید توجه‌داشت که یك‌رابطه ممکن‌است تابع نباشد و برای آن دامنه و برد مشخص کنیم. مثال زیر گویای این مطلب مهم می‌باشد.

مثال ۳: ابتدا تعیین کنید که آیا رابطهٔ زیر یك تابع است؟ اگر تابع نیست زیر مجموعه‌هایی از آن را با سه زوج مرتب مشخص کنید که تابع باشند و دامنه و برد هر یك را نیز بنویسید.

$$R=\left\{(\sqrt{2}-1,4),\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}+1},5\right),\ (3,6),\ \left(\frac{1}{2-\sqrt{3}},1\right),\ (2+\sqrt{3},1)\right\}$$

حل: با توجه به رابطهٔ R می‌بینیم که مؤلفهٔ اول دو زوج مرتب آن یعنی $(\sqrt{2}-1,4)$ و $\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1},5\right)$ مساوی است زیرا داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}\times\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}=\sqrt{2}-1$$

و در نتیجه این دو زوج را می‌توان چنین نوشت:

$$(\sqrt{2}-1,5)\ ,\ (\sqrt{2}-1,4)$$

و از آن‌جا که می‌دانیم در تابع هیچ دو زوج مرتب متفاوتی دارای مؤلفه‌های اول مساوی نیست، نتیجه می‌شود که R یك تابع نیست.

اینك زیرمجموعه‌ای از R را مشخص می‌کنیم که شرایط تابع را دارا باشد. برای این منظور کافی است یکی از دو زوج مرتبی که دارای مؤلفه‌های اول مساوی بودند را حذف کنیم. زیرا با کمی دقت می‌توان به تساوی زوجهای مرتب $(2+\sqrt{3},1)$ و $\left(\frac{1}{2-\sqrt{3}},1\right)$ پی برد:

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}\times\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}$$

در این‌جا با توجه به مطالب اخیر، نتیجه می‌شود که تنها دو زیر مجموعه از R می‌توان نوشت که شرایط تابع موردنظر را دارا باشند:

$$f_1=\{(\sqrt{2}-1,4)\ ,\ (3,6)\ ,\ (2+\sqrt{3},1)\}$$
$$f_2=\{(\sqrt{2}-1,5)\ ,\ (3,6)\ ,\ (2+\sqrt{3},1)\}$$

دامنه و برد توابع f_1 و f_2:

$$D_{f_1}=\{\sqrt{2}-1\ ,\ 3\ ,\ 2+\sqrt{3}\}\ ,$$
$$R_{f_1}=\{1\ ,\ 4\ ,\ 6\}$$
$$D_{f_2}=\{\sqrt{2}-1\ ,\ 3\ ,\ 2+\sqrt{3}\}\ ,$$
$$R_{f_2}=\{1\ ,\ 5\ ,\ 6\}$$

نکتهٔ ۲: گزاره‌نماها را با تابع اشتباه نکنید. به عنوان مثال گزاره نمای $y=\frac{1}{x^2}$ یك تابع نیست بلکه ضابطهٔ[5] یك تابع است. اگر برای این ضابطه حوزهٔ تعریف (دامنه) و حوزهٔ مقادیر (برد) در نظر گرفته شود، در آن صورت مشخص کنندهٔ یك تابع خواهد شد. در صورتی که R^+ را برای نمایش مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت مخالف صفر به کار بریم با تعریف دامنه و بردی برای آن مانند زیر می‌توان آن را به تابع تبدیل کرد:

---

۵) Rule

$$f : R^+ \to R^+$$

$$f : x \to \frac{1}{x^2}$$

بنابراین نماد f با نماد $y=f(x)$ متفاوت است، به طوری که f خودتابع و $y=f(x)$ قانون یاضابطهٔ تابع می‌باشد.

توجه: دراین مقاله تمام توابع در $R \to R$ تعریف شده‌اند و برای نمایش فاصله‌های باز ازپرانتز استفاده می‌کنیم. مثلاً فاصلهٔ باز $]a,b[$ را با (a,b) نشان می‌دهیم (R مجموعهٔ اعداد حقیقی است).

مثال ۴ : دامنه و برد تابع زیررا تعیین کنید. سپس تابع فوق‌را باچند ضابطه نشان‌دهید.

$$f = \{(1,1),(2,3),(3,5),(4,7),(5,9),(6,11),(7,1),(8,7),(9,8),(10,9),(11,10)\}$$

حل : درصورتی که دامنهٔ تابع را به D_f و بردآن را به R_f ومجموعهٔ اعداد طبیعی‌را به N نمایش‌دهیم داریم:

$$D_f = \{1,2,3,\cdots,11\} = \{x | x \in N \ , \ x \leqslant 11\}$$

$$R_f = \{1 \ , 3 \ , 5 \ , 7 \ , 8 \ , 9 \ , 10 \ , 11\}$$

بنا براین تابع را به شکل‌ضوابط زیر می‌توان نشان داد:

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x \leqslant 6 \ , \ x \in N \\ 1 & x = 7 \\ x-1 & 8 \leqslant x \leqslant 11 \ , \ x \in N \end{cases}$$

مثال ۵ : دامنه وبردتابع چندضابطه‌ای زیر را به دست آورید وتابع رابه شکل مجموعهٔ زوجهای مرتب نشان دهید و نمودار[۶] آن‌را رسم نمایید.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

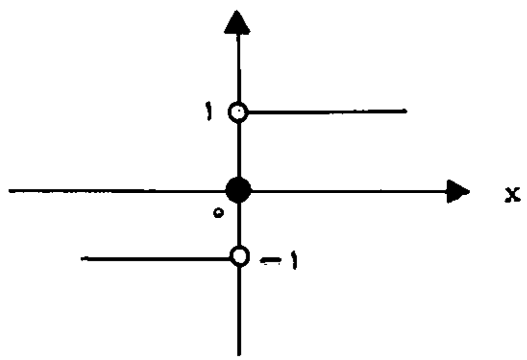
حل : دامنهٔ تابع باتوجه به ضوابط تابع: $D_f = R$. برد تابع مجموعهٔ سه عضوی است:

$$R_f = \{-1 \ , 0 \ , 1\}$$

تابع به شکل مجموعهٔ زوجهای مرتب:

$$f = f_1 \cup f_2 \cup f_3 = \begin{cases} f_1 = \{(x,y) \mid x \in R^+, y = 1\} \\ f_2 = \{(0,0)\} \\ f_3 = \{(x,y) \mid x \in R^-, y = -1\} \end{cases}$$

نمودار تابع :



توجه : این تابع‌را تابع علامت گویند و با نماد sgnx نمایش می‌دهند:

$$f(x) = \mathrm{sgn}x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

در این‌جا برای آن‌که تعیین دامنه و برد توابع آسانتر انجام‌گیرد آنها را به ۱۰ دستهٔ اساسی تقسیم‌کرده و روشهایی برای‌تعیین دامنه وبرد هردسته ، با ذکرچند مثال‌نشان می‌دهیم.

۱- تعیین دامنه و برد توابع چندجمله‌ای[۷]

تابع f را یک‌تابع چندجمله‌ای گوییم هرگاه‌به‌ازاء‌هر x

۶) Graph

۷) Polynomial functions

حقیقی باضابطه‌ای به صورت:

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$$

$$(n\in N\cup\{0\})$$

تعریف شود.

اعداد a_0 ، a_1 ، ... ، a_n را ضرایب چندجمله‌ای وعدد صحیح و نامنفی n را درصورتی که $a_n\neq 0$ باشد درجهٔ آن می‌نامیم. دامنهٔ این توابع اگرذکر نشود R مجموعهٔ اعدادحقیقی منظور می‌شود وسپس برد آنان را باحل کردن x برحسب y و برقراری شرط حقیقی بودن x معین می کنیم. بدیهی است yهایی که بـه ازای آنان مقدار x حقیقی است برد تابع را تشکیل می‌دهند. توجه‌داشته‌باشید که حل کردن x برحسب y درحالت عمومی مخصوصاً وقتی که $n\geqslant 5$ باشد همیشه امکان‌پذیر نیست ونیز به همین علت است که تعیین برد توابع چندجمله‌ای همیشه امکان‌پذیر نمی‌باشد. شکل کلی این توابع به صورت زیر است:

$$f: R\rightarrow B$$

$$x\rightarrow a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$$

مثال ۶ : دامنه و برد تابع با ضابطهٔ زیررا تعیین کنید:

$$y=f(x)=-x^2+1$$

حل : بدیهی است دامنهٔ تابع R مجموعهٔ اعداد حقیقی است:

$$D_f=R$$

همان‌طور که گفته شد بـرای تعیین برد توابع کافی است x را برحسب y حل کنیم و سپس y هایی را معین کنیم که به ازای آنان مقدار x حقیقی است :

$$y=-x^2+1 \implies x^2=1-y$$

$$\implies x=\pm\sqrt{1-y}$$

باتوجه‌به رابطهٔ‌اخیر وحقیقی‌بودن x خواهیم‌داشت:

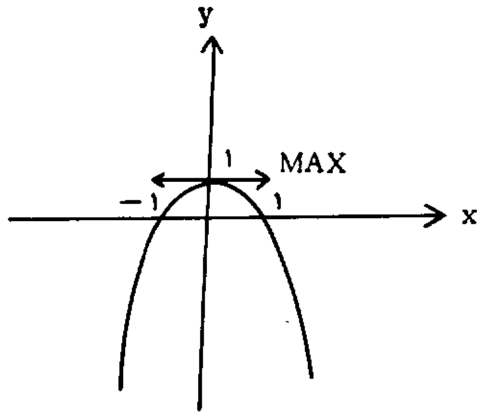
$$1-y\geqslant 0 \implies y\leqslant 1$$

بنا براین بردتابع چنین است:

$$R_f=(-\infty\ ,\ 1]$$

باید توجه داشت که برد توابع‌را از روی جدول تغییرات ویا نمودارآنان نیز می‌توان معین کرد.

به عنوان مثال نمودارتابع $y=-x^2+1$ در زیررسم شده است:



همان‌طور که مشاهده می‌شود از نمودار تابع‌نیز مشخص است که مؤلفهٔ‌دوم زوجهای مرتب مربوط به تابع‌بزرگتراز یك نمی‌توانند باشند. درنتیجه برد تابع‌رااعدادکوچکتر یا مساوی یك تشکیل می‌دهند.

مثال ۷ : دامنه و بردتابع با ضابطهٔ زیررا تعیین کنید:

$$y=f(x)=x^4-2x^2+4$$

حل : دامنهٔ‌تابع R مجموعهٔ اعداد حقیقی است:

$$D_f=R$$

برای‌تعیین بردتابع‌به شکل زیرعمل می‌کنیم:

$$x^4-2x^2+4-y=0$$

$$\implies x^2=1\pm\sqrt{1-(4-y)}$$

$$x=\pm\sqrt{1\pm\sqrt{y-3}}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{1+\sqrt{y-3}} & (1) \\ \qquad \text{یا} & \\ x = \pm\sqrt{1-\sqrt{y-3}} & (2) \end{cases}$$

برای هریک از روابط (۱) و (۲) شرط زیر لازم است:

$$y-3 \geqslant 0 \Longrightarrow y \geqslant 3 \qquad (3)$$

برای رابطهٔ (۲) شرط زیر را نیز داریم:

$$1-\sqrt{y-3} \geqslant 0 \Longrightarrow \sqrt{y-3} \leqslant 1$$

$$\Longrightarrow 0 \leqslant y-3 \leqslant 1 \Longrightarrow 3 \leqslant y \leqslant 4 \qquad (4)$$

بنابراین روابط (۱) و (۲) با توجه به شرایط (۳) و (۴) چنین تعریف می‌شوند:

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{1+\sqrt{y-3}} & y \geqslant 3 \\ \qquad \text{یا} & \\ x = \pm\sqrt{1-\sqrt{y-3}} & 3 \leqslant y \leqslant 4 \end{cases}$$

و در نتیجه برای حقیقی بودن x کافی است داشته باشیم:

$$y \geqslant 3$$

در این جا برد تابع نتیجه می‌شود:

$$R_f = [3 \ , \ +\infty)$$

۴ـ تعیین دامنه و برد توابع کسری[۸] (غیراصم)

توابع کسری که غالباً صورت و مخرج آنها توابعی از چند جمله‌ای است (و یا صورت و مخرج آنان را می‌توان تحویل به توابع چند جمله‌ای کرد) را توابع کسری گویا می‌نامیم. دامنهٔ این توابع R مجموعهٔ اعداد حقیقی به غیر از ریشه‌های مخرج (در صورت وجود) می‌باشد. باید توجه داشت که در حالت عمومی تعیین برد این گونه توابع نیز امکان‌پذیر نیست، مخصوصاً حالتی که درجهٔ چندجمله‌ای صورت یا مخرج و یا هر دو بزرگتر یا مساوی ۵ باشد. صورت کلی ضابطهٔ این نوع توابع به شکل زیر است:

$$y = f(x) = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0} = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

$$D_f = R - \{x \mid Q(x) = 0\}$$

مثال ۸ : دامنه و برد تابع زیر را تعیین کنید:

$$y = f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

حل : برای تعیین دامنهٔ تابع فوق ابتدا ریشه‌های مخرج کسر را به دست می‌آوریم. سپس مجموعهٔ ریشه‌های مخرج را از مجموعهٔ اعداد حقیقی کم می‌کنیم:

$$x^2-1=0 \Longrightarrow x = \pm 1$$

$$\Longrightarrow D_f = R - \{-1 \ , \ 1\}$$

تعیین برد تابع:

$$y(x^2-1) = x^2+1 \Longrightarrow x^2(y-1) = y+1$$

$$\Longrightarrow x^2 = \frac{y+1}{y-1}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{y-1}{y+1}}$$

برای حقیقی بودن x باید داشته باشیم:

$$\frac{y+1}{y-1} \geqslant 0$$

y	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$y+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$y-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{y+1}{y-1} \geqslant 0$		$+$		$-$		$+$	
			جواب		نامعین		

۸) Fractional functions

با توجه به جدول، بردتابع چنین نتیجه می‌شود:

$$R_f = (-\infty\ ,\ -۱] \cup (۱\ ,\ +\infty)$$

مثال ۹ : دامنه و برد تابع زیر را تعیین کنید:

$$y = f(x) = \frac{x^۳ + ۳x^۲ + ۲x}{x(x+۱)(x^۲ - ۴)}$$

حل : تعیین دامنه :

$$x(x+۱)(x^۲-۴) = ۰ \implies \begin{cases} x = ۰ \\ x+۱ = ۰ \implies x = -۱ \\ x^۲ - ۴ = ۰ \implies x = \pm ۲ \end{cases}$$

$$D_f = R - \{-۲, -۱, ۰, ۲\}$$

برای تعیین بردتابع ابتدا با توجه به دامنهٔ آن تابع را تا جای ممکن ساده می‌کنیم:

$$y = \frac{x(x+۱)(x+۲)}{x(x+۱)(x+۲)(x-۲)}$$

با توجه به دامنهٔ تابع داریم:

$$x \neq ۰\ ,\ x \neq -۱\ ,\ x \neq -۲$$

و در نتیجه تابع به شکل زیر ساده می‌شود:

$$y = f(x) = \frac{۱}{x-۲}$$

در اینجا باید عرض هریك از مقادیر فوق را حساب کنیم و در تعیین برد مجموعهٔ فوق‌را از R مجموعهٔ اعداد حقیقی کم کنیم:

$$f(۰) = \frac{-۱}{۲}\ ,\ f(-۱) = \frac{-۱}{۳}\ ,\ f(-۲) = \frac{-۱}{۴}$$

اینك آخرین مرحلهٔ تعیین برد:

$$y = \frac{۱}{x-۲} \implies x - ۲ = \frac{۱}{y} \implies x = \frac{۱}{y} + ۲$$

برای حقیقی بودن x باید داشته‌باشیم: $y \neq ۰$

بنابراین بردتابع چنین‌نتیجه می‌شود:

$$R_f = R - \left\{\frac{-۱}{۲}, \frac{-۱}{۳}, \frac{-۱}{۴}, ۰\right\}$$

* توجه داشته‌باشید که عرض نقاطی به طولهای $x = ۰$، $x = -۱$ و $x = -۲$ از تابع‌فوق مبهم $(\frac{۰}{۰})$ است. در این گونه موارد ابتدا تابع‌را به عاملهای مبهم ساده می‌کنیم وسپس مقادیرهر یك‌را از تابع ساده‌شده محاسبه‌کرده ودر آخرین‌مرحلهٔ تعیین بردتابع مجموعهٔ مقادیرحاصل را از R مجموعهٔ اعداد حقیقی کم می‌کنیم.

۳ـ تعیین دامنه و برد توابع اصم یا گنگ[۹]

توابعی‌را اصم (گنگ) گوییم‌که درضابطهٔ آنها متغیر x (یا عبارتی برحسب متغیر x) در زیر رادیکال باقی‌بماند. به‌بیانی دیگر، توان x (یا عبارت برحسب x) کسری‌باشد. ضابطهٔ این گونه‌توابع درحالت عمومی به شکل زیر است:

$$y = f(x) = \sqrt[n]{p(x)}$$

اگر $p(x)$ چندجمله‌ای باشد، درصورتی‌که n (فرجهٔ رادیکال) فردباشد R (مجموعهٔ اعداد حقیقی) است. واگرفرجهٔ رادیکال عددی زوج‌باشد، دامنه عبارت است از: مجموعهٔ xهایی‌که به ازای آنها زیررادیکال عددی‌نامنفی (مثبت‌یاصفر) باشد.

برای تعیین برد در صورت امکان x را برحسب y حل می‌کنیم وسپس مجموعهٔ yهایی‌که به ازای‌آنها برای x مقدار حقیقی به دست می‌آید برد تابع را تشکیل می‌دهند. بنابراین در حالت عمومی‌برد توابع گنگ (اصم) نیز همیشه امکان‌پذیر نیست.

مثال ۱۰ . دامنه و بردتابع با ضابطهٔ زیررا تعیین‌کنید:

$$y = f(x) = \sqrt{\frac{x^۲ - ۳x}{-x^۲ + ۲x + ۳}}$$

۹) Irrational functions

حل : دامنهٔ تابع چنین است:

$$D_f=\left\{x \mid \frac{x^2-3x}{-x^2+2x+3}\geqslant 0\right\}$$

$$\frac{x^2-3x}{-x^2+2x+3}\geqslant 0 \Longrightarrow$$

$$x^2-3x=0 \Longrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases}$$

$$-x^2+2x+3=0 \Longrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=3 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		0		3		$+\infty$
x^2-3x		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$-x^2+2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{x^2-3x}{-x^2+2x+3}$		$-$		$+$	0	$-$		$-$	

$$\Longrightarrow D_f=(-1\ ,\ 0]$$

تعیین برد تابع : ازضابطهٔ تابع‌نتیجه می‌شود: $y\geqslant 0$.

باتوجه به دامنه، تابع‌را ساده می‌کنیم:

$$y=\sqrt{\frac{x(x-3)}{-(x+1)(x-3)}}$$

$$\frac{x-3\neq 0}{(x\neq 3)}\Longrightarrow y=\sqrt{\frac{x}{-(x+1)}}$$

$$\Longrightarrow y^2=\frac{x}{-(x+1)} \Longrightarrow -xy^2-y^2=x$$

$$x(1+y^2)=-y^2 \Longrightarrow$$

$$x=\frac{-y^2}{1+y^2}\in(-1\ ,\ 0]$$

$$\Longrightarrow -1<\frac{-y^2}{1+y^2}\leqslant 0$$

$$\Longrightarrow -1<\frac{-y^2-1+1}{1+y^2}\leqslant 0$$

$$\Longrightarrow -1<-1+\frac{1}{1+y^2}\leqslant 0$$

$$\Longrightarrow 0<\frac{1}{1+y^2}\leqslant 1$$

$$\Longrightarrow 1+y^2\geqslant 1 \Longrightarrow y^2\geqslant 0 \Longrightarrow y\in R$$

از اشتراک $y\in R$ و $y\geqslant 0$ داریم :

$$R_f=[0\ ,\ +\infty)$$

مثال ۱۱: دامنه و بردتابع با ضابطهٔ زیررا تعیین‌کنید.

$$y=f(x)=\sqrt{x^2-4x+5}$$

حل : دامنهٔ تابع چنین است:

$$D_f=\{x|x^2-4x+5\geqslant 0\}$$

$$x^2-4x+5=(x-2)^2+1>0$$

$$\Longrightarrow D_f=R \qquad \text{(مجموعهٔ اعداد حقیقی)}$$

برای‌تعیین بردتابع درابتدا ازضابطهٔ تابع نتیجه می‌گیریم‌که همواره $y\geqslant 0$ است.

اینك به ترتیب زیرعمل می‌کنیم:

$$y=\sqrt{(x-2)^2+1} \Longrightarrow y^2=(x-2)^2+1$$

$$\Longrightarrow (x-2)^2=y^2-1$$

$$|x-2|=\sqrt{y^2-1} \Longrightarrow y^2-1\geqslant 0$$

$$\Longrightarrow y^2\geqslant 1 \Longrightarrow |y|\geqslant 1 \left(\begin{matrix} y\geqslant 1 \\ \text{یا} \\ y\leqslant -1 \end{matrix}\right)$$

از اشتراک $|y|\geqslant 1$ و $y\geqslant 0$ بردتابع معین می‌شود:

$$R_f=[1\ ,\ +\infty)$$

مثال ۱۲: دامنه وبردتابع باضابطهٔ زیر را تعیین کنید:

$$y=f(x)=\frac{x^4+2}{\sqrt{x^4+1}}$$

حل: با توجه به $x^4+1>0$ داریم:

$$D_f=R \qquad \text{(مجموعهٔ اعداد حقیقی)}$$

برای تعیین‌برد به شکل زیرعمل می‌کنیم:

$$y=\frac{x^4+1+1}{\sqrt{x^4+1}}=\frac{x^4+1}{\sqrt{x^4+1}}+\frac{1}{\sqrt{x^4+1}}$$

$$=\sqrt{x^4+1}+\frac{1}{\sqrt{x^4+1}}$$

می‌دانیم اگر k عددی مثبت باشد همواره داریم:

$$k+\frac{1}{k}\geqslant 2$$

و تساوی وقتی برقرار است که $k=1$ باشد، بنابراین اصل خواهیم داشت:

$$y=\sqrt{x^4+1}+\frac{1}{\sqrt{x^4+1}}\geqslant 2$$

$$\Longrightarrow R_f=[2,+\infty)$$

مثال ۱۳: دامنهٔ تعریف‌تابع باضابطهٔ زیررا تعیین‌کنید.

$$y=f(x)=\frac{\sqrt[8]{2x-2\sqrt{x}}}{\sqrt[6]{4-x^2}}+\frac{\sqrt[4]{1+x^2}}{\sqrt{2x-x^2}}$$

حل: برای‌تعیین دامنه ابتدا هریک از عبارتهای داخل رادیکال‌را تعیین علامت می‌کنیم.

اشتراک مجموعه‌هایی‌از متغیر x که به ازای آنها عبارت داخل‌رادیکالها مثبت یاصفر (درصورتی‌که رادیکالها در مخرج نباشند) است دامنهٔ تعریف‌تابع خواهد بود:

$$\begin{cases} x\geqslant 0 \\ 2x-2\sqrt{x}\geqslant 0 \\ 4-x^2>0 \\ 2x-x^2>0 \end{cases}$$

$$1)\quad 2x-2\sqrt{x}\geqslant 0 \Longrightarrow x\geqslant\sqrt{x}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 0\leqslant x\leqslant 1 \Longrightarrow x\leqslant\sqrt{x} \\ \text{(مخالف } x\geqslant\sqrt{x} \text{ است)} \\ x\geqslant 1 \Longrightarrow x\geqslant\sqrt{x} \end{cases}$$

بنابراین از نامعادلهٔ اخیر نتیجه می‌شود:

$$x\in[1\ ,\ +\infty)$$

$$2)\quad 4-x^2>0 \Longrightarrow x^2<4 \Longrightarrow -2<x<2$$

$$\Longrightarrow x\in(-2\ ,\ 2)$$

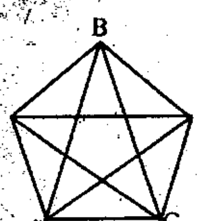
$$3)\quad 2x-x^2>0 \Longrightarrow 0<x<2 \Longrightarrow x\in(0,2)$$

$$D_f=[1,+\infty)\cap(-2,2)\cap(0,2)=[1,2)$$

ادامهٔ مطلب در دو شمارهٔ آیندهٔ مجله ارائه خواهد شد.

سرگرمی ۳

در پنج ضلعی منتظم زیر اندازهٔ $\angle ABC$ را بیابید



جواب در صفحهٔ ۹۶

طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روشهای مقدماتی (۴)

از جلد دوم کتاب مسائل پیکار جوی ریاضی تألیف یاگلوم

الف) جمیع ترتیبات ممکن چهار نقطهٔ واقع در صفحه‌ای را، چنان که فاصلهٔ بین هر دو نقطه از آنها یکی از دو مقدار معلوم a و b باشد، بیابید. جمیع مقادیر نسبت a:b یی را، که به ازای آنها چنین ترتیباتی ممکن است، به‌دست آورید.

ب) جمیع ترتیبات ممکن n نقطهٔ واقع در صفحه‌ای را، چنان که فاصلهٔ بین هر دو نقطه از آنها a یا b باشد، بیابید. به ازای چه مقادیر n ی چنین ترتیباتی موجود است؟

حل الف) فرض می‌کنیم A، B، C، D چهار نقطه باشند. بین این نقاط، کلاً، شش فاصلهٔ ممکن، یعنی AB، AC، AD، BC، BD، CD، موجوداند. هریک از این شش فاصله باید یکی از دو مقدار a و b را داشته باشند، امکانات زیر به‌طور پیشینه «a priori» موجوداند:

(۱) جمیع شش فاصله a باشند.

(۲) پنج فاصله a باشند و یکی b باشد.

(۳) چهار فاصله a باشند و دوتا b باشد.

(۴) سه فاصله a باشند و سه فاصله b باشند.

چهار حالت فوق را به‌طور جداگانه بررسی می‌کنیم:

حالت ۱. این حالت غیرممکن است. زیرا در این صورت نقاط A، B، C رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع می‌شوند، و D، با به یک فاصله بودن از جمیع آنها، باید بر مرکز دایرهٔ محیطی آن واقع باشد. اما دراین صورت AD<AB می‌شود که تناقض است.

حالت ۲. سه نقطه از نقاط مفروض، مثلاً A، B، و C، باید رئوس مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع a باشند. چهارمین نقطه، D، باید به فاصلهٔ a از دو رأس از این رئوس، مثلاً A و C، و به فاصلهٔ b از B باشد.

بنابراین نقاط A، B، C، D رئوس لوزی‌ای، که یکی از اقطار آن، AC، مساوی ضلع آن است (شکل ۱a)، می‌باشند. محاسبهٔ این‌که در این حالت $b = BD = a\sqrt{3}$ است، آسان است.

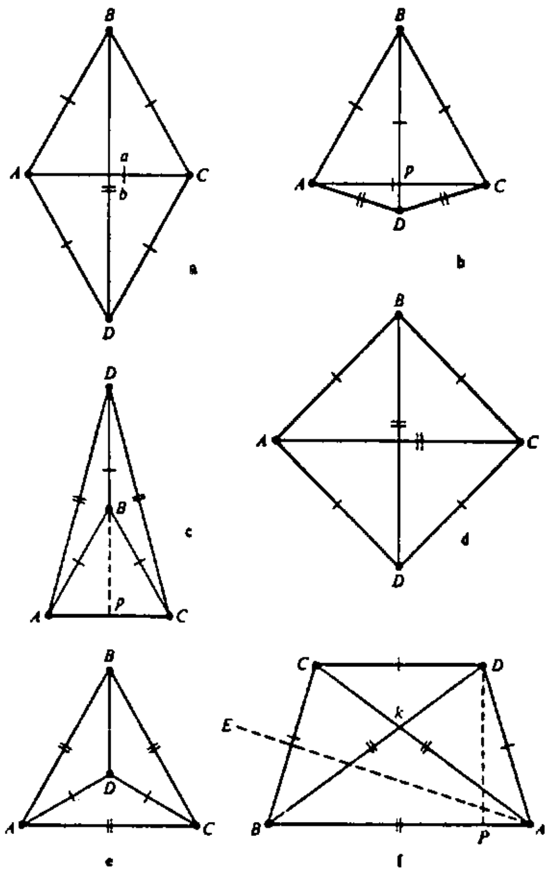
حالت ۳. این حالت شامل دو حالت فرعی است.

(i) فرض می‌کنیم دو قطعه خط به طول b دارای سر مشترکی، مثلاً D، باشند. در این صورت نقاط باقی‌ماندهٔ، A، B، C، مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع a می‌سازند. نقطهٔ D به فاصلهٔ b از دو رأس، مثلاً A و C، و به فاصلهٔ a از رأس سوم B است. از آن جاکه $AD = CD$ است، D بر عمودمنصف AC واقع می‌شود؛ و از آن‌جاکه

$$BD = a = BA = BC$$

است، D بر دایره‌ای به مرکز B، که از A و C می‌گذرد، واقع است. در نتیجه چنان که در شکلهای ۱b و ۱c نموده شده، دو موقعیت ممکن برای D وجود دارد. به این ترتیب:

A، B، C، D بر رئوس یک شبه لوزی* «deltoid» که دو ضلعش a و دو ضلعش b اند، و هریک از اقطارش برابر a می‌باشند، قرار می‌گیرند. از نمودارها به سادگی نتیجه می‌شود که



شکل ۱

در این حالت

$$b^{2} = AP^{2} + PD^{2} = \left(\frac{a}{2}\right)^{2} + \left(a \pm \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^{2} = (2 \pm \sqrt{3})\, a^{2}$$

یعنی،

$$b = a\sqrt{2+\sqrt{3}} \quad \text{یا} \quad b = a\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

(دو علامت زیر رادیکالها متناظر با دو امکان، نشان داده شده با شکلهای ۱b و ۱c، اند.)

(ii) فرض می‌کنیم دو قطعهٔ به‌طولهای b سر مشترک نداشته باشند. در این صورت نماد مزبور را می‌توان چنان انتخاب کرد که $AC = BD = b$، و $AB = AD = BC = CD = a$ باشد. از آن‌جا که $BA = BC$ و $DA = DC$ است، هم B هم D بر عمودمنصف AD واقع است (شکل ۱d). از این گذشته، از آن‌جا که $AD = AD$ است، B و D متساوی‌الفاصله از AC‌اند. به این ترتیب اقطار چهارضلعی ABCD عمودمنصف یکدیگراند، و بنابراین ABCD لوزی است. و از آن‌جا که $AC=BD$ است، لوزی مزبور مربع است، ودرنتیجه $b = a\sqrt{2}$.

حالت ۴. این حالت نیز شامل دو حالت فرعی است.

(i) فرض می‌کنیم که میان چهار نقطهٔ مفروض سه نقطه (مثلاً A، B، C) وجود دارند که رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع را تشکیل می‌دهند. دراین‌صورت D باید متساوی‌الفاصله از این سه نقطه‌باشد، و لذادرمرکز دایرهٔ محیطی آنها قرار بگیرد (شکل ۱c). واضح است که دراین حالت $b = AD = a\sqrt{3}/3$ است.

(ii) فرض می‌کنیم که هیچ سه نقطه‌ای از چهار نقطه‌مان تشکیل رئوس مثلث متساوی الاضلاعی را نمی‌دهند و فرض می‌کنیم که $b > a$ باشد.

در میان سه پاره خط به طول b باید دوپاره خط با یک نقطهٔ انتهایی مشترک باشند، زیرا شش نقطهٔ انتهایی این پاره‌خطها جمیعاً در مجموعهٔ $\{A , B , C , D\}$ واقع‌اند. فرض می‌کنیم A یک چنین نقطهٔ انتهایی‌ای باشد و $AB = AC = b$ باشد. از آن‌جا که فرض کرده‌ایم که مثلث ABC متساوی‌الاضلاع نیست، باید BC را مساوی a داشته باشیم. اکنون توجه می‌کنیم که نقطهٔ D نمی‌تواند از B و C به یک فاصله باشد (یعنی، نمی‌تواند بر عمودمنصف AE ی BC واقع شود): زیرا اگر چنین باشد، آنگاه یا $BD = CD = a$ و مثلث BCD متساوی‌الاضلاع می‌شود یا $BD = CD = b$، که چهار فاصله از شش فاصله‌مان را مساوی b می‌کند.

بنابراین نقطهٔ D بر AE واقع نمی‌شود، و می‌توان با استفاده از تقارن فرض کرد که در همان طرف AE که C است، واقع می‌شود. در این صورت $DB>DC$، وبنابراین باید $DB = b$ ، $DC = a$ را داشته باشیم. اما مجموعاً سه‌پاره‌خط به‌طول a و سه‌پاره‌خط به‌طول b داریم؛ ونتیجه می‌شود که تنها پاره‌خطی که تاکنون مورد بررسی قرار نداده‌ایم، یعنی AD، باید به طول

a باشد. اکنون ملاحظه می‌کنیم که مثلثهای ABC و BAD هم‌نهشت‌اند، بنابراین C و D به یک فاصله از AB اند و CD موازی AB است. به این ترتیب نقاط A ، B ، C ، D ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی می‌سازند که قاعدهٔ کوچکترش مساوی ساقها، و قاعده بزرگترش مساوی اقطارش می‌باشد (شکل ۱f).

فرض می‌کنیم P پای عمود از D به AB باشد. دراین صورت

$$BD^2 = BP^2 + PD^2 \text{ و } AD^2 = AP^2 + PD^2$$

و بنابراین

$$BD^2 - AD^2 = BP^2 - AP^2 = (BP+AP)(BP-AP)$$

اما $BD = b$ ، $AD = a$ ، $BP + AP = BA = b$ و $BP - AP = CD = a$ است. به این ترتیب $b^2 - a^2 = ba$ است. با تقسیم بر a^2 و انتقال به یک طرف، به‌دست می‌آوریم $(b/a)^2 - (b/a) - 1 = 0$، و از آن $b/a = (1 + \sqrt{5})/2$ (زیرا ریشهٔ دیگر معادلهٔ درجه دوم $x^2 - x - 1 = 0$، $(1 - \sqrt{5})/2$ است که منفی است).

به این ترتیب شکلهای ۱a تا ۱f، جمیع ترتیبات ممکن چهار نقطهٔ واقع در صفحه، چنان که فاصلهٔ بین هر دو نقطه‌ای از آنها یکی از مقادیر a و b باشد، را نشان می‌دهند. ملاحظه می‌کنیم که چنین ترکیباتی ممکن‌اند، تنها اگر

$$b = a\sqrt{3} \text{ و } b = a\sqrt{2+\sqrt{3}} \text{ ، } b = a\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$b = a\sqrt{2} \text{ و } b = \frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ ، یا } b = a\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

برقرار باشد، که در آنها b فاصلهٔ کمتر رخ دهنده است، یا اگر هر دو فاصله به یک تعداد (سه) مرتبه رخ دهند، b بزرگتر است. اما، آسان‌تر آن است که نتیجهٔ مورد بحث را چنان بازسازی کنیم که b در هر حالت بزرگترین دو طول باشد. از آن‌جا که

$$1/\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{2+\sqrt{3}} \text{ و } 1/(\sqrt{3}/\sqrt{3}) = \sqrt{3}$$

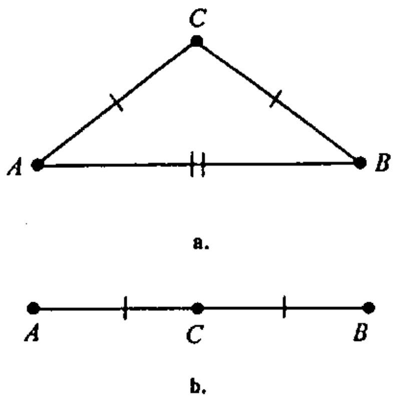
امکانات زیر تنها امکاناتی هستند که می‌مانند:

$$b = a\sqrt{3} \text{، } b = a\sqrt{2+\sqrt{3}} \text{، } b = a\sqrt{2} \text{، } b=a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

حل ب) مقادیر ممکن n را، به ترتیب، مورد بررسی قرار می‌دهیم.

(۱) $n = 2$. در این حالت تنها یک فاصله موجود است؛ یعنی، موقع دو نقطه در صفحه هرچه که باشد، این فاصله تنها یک مقدار a را می‌گیرد.

(۲) $n = 3$. در این حالت سه فاصله موجود است. اگر این فاصله‌ها باید تنها دو مقدار a و b (مثلاً a دوبار و b یک‌بار) را اختیار کنند، نقاط مزبور باید رئوس مثلث متساوی‌الساقینی با قاعدهٔ b و ضلع a باشند (شکل ۲a و ۲b؛ مورد اخیر حالت زوال یافته‌ای را، که در آن مثلث به پاره‌خط تحویل می‌شود، توضیح می‌دهد).



شکل ۲

واضح است که a و b تنها نیاز به صدق کردن در نامساوی

$$a \ge \frac{b}{2}$$

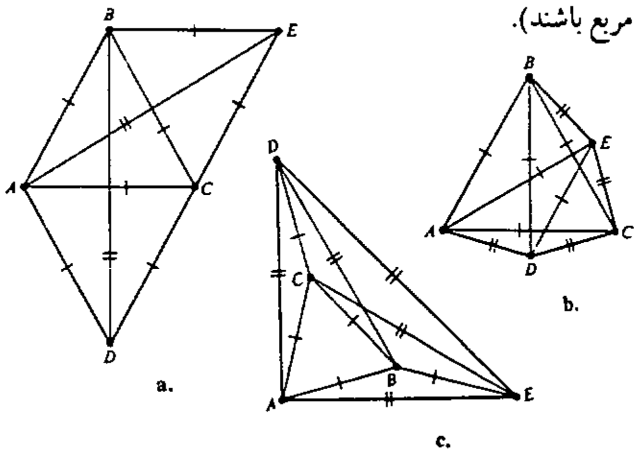
دارند؛ در حالت خاص، داشتن $a = b$ ممکن است.

(۳) $n = 4$. این حالت در قسمت الف انجام گرفت.

(۴) $n = 5$. اگر A ، B ، C ، D هر چهار نقطه از پنج نقطهٔ A ، B ، C ، D ، E باشند، درشرط قسمت الف صدق می‌کنند و بنابراین باید در یکی از شش ترکیب نشان داده شده در شکل ۱ قرار گیرند. مثلاً، فرض می‌کنیم A ، B ، C ، D ، چنان که

در شکل ۱a، مرتب شده باشند. فاصله‌های بین چهار نقطهٔ A ،B ،C ،E باید همان دومقدار a و $b = a\sqrt{3}$ فرض شوند؛ و نتیجه می‌شود که این نقاط باید چون در شکل ۱a یا ۱e قرار گیرند. اما سه نقطه از این چهار، A ، B ، C ، رئوس مثلث متوازی الاضلاعی به ضلع a می‌باشند، و تنها مثلث متساوی الاضلاع شکل ۱c ضلع $b>a$ دارد. بنابراین A ، B ، C ، E باید، چنان که در شکل ۱a، قرارگرفته باشند. از آن‌جا که E بر D منطبق نیست، تنها ترکیب ممکن، آن‌که در شکل ۳a توضیح داده شده‌است. اما در این ترکیب $DE = 2a$ نه طول a نه طول b دارد. بنابراین نشان داده‌ایم که غیرممکن است که چهار نقطه از پنج نقطه‌مان، چنان که در شکل ۱a، مرتب شوند.

به‌همین ترتیب، می‌توانیم نشان‌دهیم که‌نقاط A ، B ، C ، D نمی‌توانند چون در شکل ۱b یا ۱c قرار گیرند، زیرا اگر فرض شود که چنین‌اند، درمورد پنج نقطهٔ A ، B ، C ، D ، E، لزوماً به یکی از ترکیبات ۱b یا ۱c می‌رسیم، و طول DE در هریک از این ترکیبات متفاوت از a یا b است. اگر A ، B ، C ، D، چنان که درشکل ۱e، قرارگیرند، دراین‌صورت A ، B ، C ، E نیز چنین می‌شوند، و این وضع، اگر بخواهیم که D و E متمایز باشند، به‌طور وضوح غیر ممکن است. به‌همین ترتیب، اگر A ، B ، C ، D چنان که در ۱d ، باشند، E باید منطبق بر D باشد (زیرا چهار نقطهٔ A ، B ، C ، E نیز باید در رئوس یک مربع باشند).

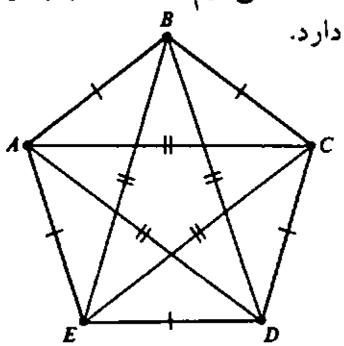


شکل ۳

به این ترتیب تنها حالت باقی مانده، حالتی است که در آن A ، B ، C ، D در رئوس ذوزنقهٔ نموده شده در شکل ۱f اند. در این حالت A ، B ، C ، E باید ذوزنقه‌ای هم نهشت بسازند، و ملاحظهٔ این که پنج نقطهٔ A ، B ، C ، D ، E باید بر رئوس یک پنج ضلعی منتظم قرار گیرندآسان‌است (شکل ۴)**. لذا این ترتیب، تنها ترتیب پنج نقطهٔ مورد بحث است که در شرایط مسأله صدق می‌کند، یعنی، جمیع ۱۰ فاصلهٔ بین ازواج پنج نقطهٔ مزبور بایکی‌از مقادیر a و $b = a(1+\sqrt{5})/2$ مساوی‌اند.

(۵) $n \geq 6$. بنابه نتیجه‌ای که هم اکنون به‌دست آوردیم، هر پنج نقطه از n نقطهٔ مفروض باید در رئوس یک پنج ضلعی منتظم واقع شوند. اما اگر $n \geq 6$ نقطه جمیعاً متمایز باشند، چنین ترتیبی به‌طور وضوح غیر ممکن است. بنابراین مسأله‌مان به ازای $n \geq 6$ جواب ندارد.

به این ترتیب ملاحظه می‌کنیم که مسأله تنها به ازای $n = 2$، ۳، ۴، یا ۵ جواب دارد.


شکل ۴

زیرنویس‌ها:

* توجه‌داشته‌باشید که اگر دایره‌ای برذوزنقهٔ ABCE محیط کنیم (شکل ۱f)، در این‌صورت نقاط A، B، C، D چهاررأس‌پنج ضلعی‌منتظمی محاط دراین دایره می‌شوند. برای‌اثبات‌این‌موضوع، قرارمی‌دهیم $\angle DAB=\angle ADB=\alpha$. در این صورت $\angle CDB=\angle CBD=\angle CDA-\angle BDA=(180^\circ-\alpha)-\alpha$ (توجه کنید که در چهار ضلعی محاطی ABCD مجموع زوایای B و D ، 180° است، و زاویهٔ B بنابه هم‌نهشتی مثلثهای ABC و BAD ، α است) $\angle ABD=180^\circ-2\alpha$، و $\angle BCD=180^\circ-2(180^\circ-2\alpha)=4\alpha-180^\circ$ است، ازآن‌جا که $\angle CBA+\angle BCD=180^\circ$ است، داریم: $5\alpha-180^\circ=180^\circ$ $\alpha=2(180^\circ/5)=72^\circ$. اکنون ازآن‌جا که $\angle ABD=\angle DBC=180^\circ/5$ است، نتیجه می‌شود که CD ، CB ، AD سه ضلع از پنج ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ مورد بحث‌اند.

** شبه لوزی چهارضلعی‌یی با دو زوج ضلع مجاور مساوی است.

جواب نامه‌ها

آقای ارشام برومند سعید (کرمان)

ضمن عرض تشکر از مقالهٔ شماتحت عنوان «مجموعه‌های شگفت» که بدون ذکر مرجع آن، ارائه داده‌اید. در اینجا عین آن را می‌آوریم: مجموعهٔ مرتب $A=\{۱۳۱۳۹ ، ۶۷۲۵ ، ۴۳۳۸ ، ۴۵۱۴ ، ۱۱۳۸ ، ۴۱۷۹ ، ۹۲۱۹\}$ را درنظر می‌گیریم. اگر مجموع توان چهارم‌ارقام هرعدد را به دست آوریم حاصل جمع عدد بعدی است و به همین ترتیب به آخرین عدد مجموعه خواهیم رسید. و اگر این عمل را ادامه دهیم دوباره اولین عدد مجموعهٔ A حاصل می‌شود.

$$۱^۴+۳^۴+۱^۴+۳^۴+۹^۴=۶۷۲۵$$

$$۶^۴+۷^۴+۲^۴+۵^۴=۴۳۳۸$$

$$۴^۴+۳^۴+۳^۴+۸^۴=۴۵۱۴$$

$$۴^۴+۵^۴+۱^۴+۴^۴=۱۱۳۸$$

$$۱^۴+۱^۴+۳^۴+۸^۴=۴۱۷۹$$

$$۴^۴+۱^۴+۷^۴+۹^۴=۹۲۱۹$$

$$۹^۴+۲^۴+۱^۴+۹^۴=۱۳۱۳۹ \text{ و ...}$$

و درمجموعهٔ مرتب زیر نیز خاصیت فوق را با توان پنجم ارقام هرعدد داریم:

$$B=\{۲۴۵۸۴ ، ۳۷۹۷۳ ، ۹۳۱۴۹ ، ۷۴۸۴۶ ، ۵۹۳۹۹ ، ۱۸۰۵۱۵ ، ۳۹۰۲۰ ، ۵۹۳۲۴ ، ۶۳۴۷۳ ، ۲۶۰۹۳ ، ۶۷۱۰۰\}$$

$$۲^۵+۴^۵+۵^۵+۸^۵+۴^۵=۳۷۹۷۳ ، ...$$

آقای حسن بای (مازندران)

باتشکر از مسائل ارسالی شما، درصورت لزوم از آنان استفاده می‌شود.

آقای مهرداد کرباسی (صومعه‌سرا)

ضمن عرض سلام متقابل و تشکر از مقالهٔ شما تحت عنوان «دربارهٔ یک سری نامحدود» به عرض می‌رسانیم که امید است امکان درج آن در شماره‌های آیندهٔ مجله بوجود آید.

آقای طالب حسین کریمی دانش‌آموز سال سوم ریاضی (تهران)

ضمن تشکر از زحمات بی‌دریغ شما برای تهیهٔ و ارسال مقاله‌ای تحت عنوان «بحثی درمورد قضیهٔ فیثاغورث» امید است که امکان درج آن درشماره‌های بعدی مجله بوجود آید.

ضمناً متذکر می‌شویم که مقالهٔ شما از نظر تاریخی و سیرتحولاتی برای دانش‌آموزان علاقه‌مند به ریاضیات بسیار مناسب است.

آقای مهرداد کاظمیان دانش‌آموز سال دوم ریاضی (اصفهان)

ضمن عرض سلام متقابل و تشکر از شما برای ارسال دو مسئله (همراه با حل) به عرض می‌رسانیم که درصورت لزوم از آنان استفاده خواهد شد.

آقای احمد خادمیان دانش‌آموز سال دوم ریاضی (مشهد)

ضمن تشکر از شما برای ارائهٔ حل مسائل مسابقه‌ای و ارسال مسائلی (همراه با حل) به عرض می‌رسانیم که پس‌از بررسی لازم و درصورت تأیید، برای شما به همراه یک نامه جایزه‌ای نیز به عنوان یادبود اهدا خواهد شد. و درصورت لزوم از مسائل ارسالی شما نیز درجای مناسب استفاده خواهد شد.

آقای امید خاتین‌زاده دانش‌آموز سال سوم ریاضی (اهواز)

باتشکر از مسائل ارسالی شما باید عرض کنیم که تمامی مسائل ارسال شده باید با حل ارائه شود و همچنین باید در سطح مطلوب‌تر و مفیدتری طرح شود.

خانم لیلا فرضی دانش‌آموز سال سوم ریاضی (شهرستان اهر)

ضمن عرض سلام متقابل و تشکر از نامهٔ محبت آمیز شما باید به عرض برسانیم که متأسفانه راه‌حل شما درمورد حل تست بخش‌پذیری سال سوم ریاضی مندرج در شمارهٔ ۲ مجله صحیح نیست زیرا عبارت:

$$(x^{۹۹۹}+x^{۸۸۸}+\ldots+x^{۱۱۱}+۱)\ (x-۱)$$

با عبارت $x^{۱۰۰۰}-۱$ متحد نیست و توجه شما را به اتحاد زیر جلب می‌کنیم:

$$x^{۱۰۰۰}-۱=(x-۱)\ (x^{۹۹۹}+x^{۹۹۸}+x^{۹۹۷}+\ldots+x+۱)$$

آقای بهروز بهرامی دانش‌آموز سال دوم ریاضی (شهرستان نقده)

پس‌از عرض سلام متقابل درجواب نامهٔ شما باید بگوییم که هدف مجلهٔ ریاضی برهان پاسخ دادن به سؤالات ریاضی دانش‌آموزان کشور نیست بلکه یک مجلهٔ تعلیمی و کمک آموزشی است و هدف آن بسط و بررسی مطالب و مفاهیم اساسی ریاضی دبیرستانی و طرح و حل مسائل مربوط به آن می‌باشد. و از شما دانش‌آموزان هم برای رسیدن به این هدف مهم یاری می‌جوید.

آقای مهدی صفری دانش‌آموز سال چهارم دبیرستان (تهران)

با تشکر از مسئلهٔ استنتاج شما، امیدواریم در آیندهٔ نزدیک در جای مناسب از آن استفاده شود.

آقای رضابردباری دانش‌آموز سال دوم ریاضی (شیراز)

با تشکر از مسائل ارسالی شما، در آیندهٔ نزدیک از مسائل شما در صورت امکان استفاده خواهد شد. متذکر می‌شویم که مسائل ارسالی تکراری نباشد و بیشتر توسط خودتان طراحی شود و اگر هم از منبعی برداشت می‌کنید نام آن را ذکر کنید.

آقای شانت شهبازیان دانش‌آموز سال اول (تهران)

ضمن تشکراز مقالهٔ شما به عرض می‌رسانیم که از مقالهٔ شما درصورت امکان و درجای مناسب استفاده خواهد شد.

آقای حمید باباوند (تهران)

باعرض سلام متقابل و تشکر از پیشنهادات شما، روش محاسبهٔ n عدد اولیهٔ طبیعی را با روش تعمیم یافتهٔ گوس در اینجا می‌آوریم. برای این منظور ابتدا مجموع n عدد اولیه طبیعی را به S نمایش می‌دهیم و به شکل زیر عمل می‌کنیم:

$$S = ۱ + ۲ + ۳ + \dots + n \qquad (۱)$$

بار دیگر اعداد را از آخر به اول می‌نویسیم:

$$S = n + (n-۱) + (n-۲) + \dots + ۱ \qquad (۲)$$

از جمع روابط (۱) و (۲) داریم:

$$۲S = \underbrace{(n+۱) + (n+۱) + \dots + (n+۱)}_{n \text{ مرتبه}}$$

پس می‌توان نوشت: $۲S = n(n+۱)$

(مجموع n عدد اولیه طبیعی) $S = \dfrac{n(n+۱)}{۲}$

ضمناً مجلهٔ آشنایی با ریاضیات و مجلهٔ برهان و سایر کتب موردنیاز را می‌توانید از شعبه‌های مختلف انتشارات مدرسه در سراسر کشور تهیه فرمایید.

آقای اسماعیل مهدوی دانش‌آموز سال دوم تجربی (آمل)

با تشکر از مسائل ارسالی شما، امید است از آنان در شماره‌های بعدی مجله استفاده شود.

آقای زهیر طیب (تهران)

ضمن تشکر از مسائل ارسالی شما به عرض می‌رسانیم که از مسائل شما در شماره‌های آیندهٔ مجله درجای مناسب استفاده خواهد شد و متذکر می‌شویم که سعی کنید صورت مسائل کوتاه و جواب آنان نیز طولانی نباشد.

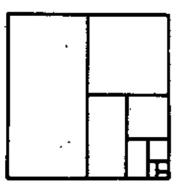
آقای شیرعلی رحمانپور دانش‌آموز سال دوم ریاضی (سیاهکل)

پس از عرض سلام متقابل درجواب نامهٔ شما باید بگوییم که هدف مجلهٔ ریاضی برهان پاسخ گویی به سؤالات ریاضی دانش‌آموزان نیست. زیرا باتوجه به کار پر حجم مجله و سعی برای رسیدن به اهداف موردنظر پاسخ گویی به سؤالات ریاضی دانش‌آموزان درحال حاضر به هیچوجه ممکن نیست. امیدواریم که در آینده با بازکردن بخش پاسخ به سؤالات امکان آن بوجود آید.

تفریح اندیشه ۴

با توجه به شکل زیر حاصل جمع زیر چیست؟

$$\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۱۶} + \dots$$



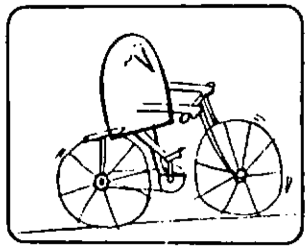
جواب در صفحهٔ ۹۶

تناقضها در ریاضیات و علوم

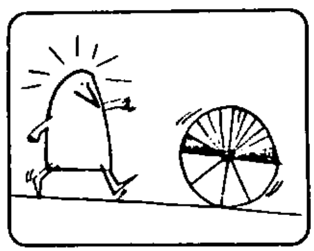
چرخ گیج کننده

نوشتهٔ مارتین گاردنر
ترجمهٔ حسن نصیرنیا

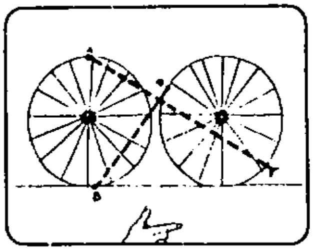
آیا می‌دانستید که قسمتهای بالای چرخهای دوچرخه سریعتر از قسمتهای پایین آنها حرکت می‌کند؟



برای همین است که وقتی دوچرخه‌ای از کنار ما می‌گذرد، میله‌های چرخهای آن در قسمتهای بالا به‌صورت مَحو و درهم دیده می‌شود.



برای پی‌بردن به واقعیت‌امر، به یک چرخ درحالِ حرکت در دو وضعیتِ مختلف نگاه‌می‌کنیم. چنانچه ملاحظه می‌شود، نقطهٔ A واقع در بالا به مراتب تندتر از نقطهٔ B واقع در پایین حرکت کرده است. چون سرعت عبارت است از مسافت طی شده در زمان واحد می‌گوییم: نقطهٔ A بسیار سریعتر از نقطهٔ B حرکت کرده است. این‌طور نیست؟

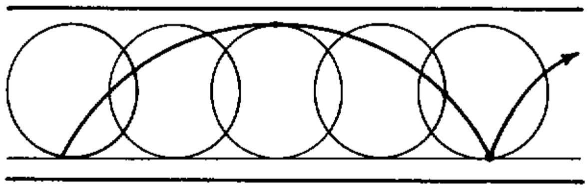


البته به‌هنگام مقایسهٔ سرعتهای قسمتهای بالا و پایین چرخهایِ درحال حرکت، سرعتهای آنها در روی زمین، مورد نظر است. یکی از بهترین راههای توضیح این پارادوکس[1] توجه کردن به منحنیی است که به آن سیکلوئید یا چَرخزاد[2] می‌گویند. منحنی چرخزاد با درنظرگرفتن نقطه‌ای بر روی طوقهٔ یک چرخ در حال چرخیدن در مسیرِ مستقیم پدید می‌آید. وقتی که نقطهٔ مورد نظر با زمین مماس می‌شود، سرعت آن صفر است. همگام با چرخیدن چرخ، سرعت نقطه افزایش می‌یابد، به‌طوری که در هنگام قرارگرفتن در بالای چرخ، سرعتش به حداکثر می‌رسد. سپس از سرعت آن کاسته می‌شود تا آن‌جاکه با مماس شدن دوباره با زمین سرعتش به صفر باز می‌گردد. در مورد چرخهای دارای لبهٔ بیرون آمده (دارایِ فلانژ)، مانند چرخهای قطار، هر نقطهٔ واقع بر روی فلانژ به هنگام قرار گرفتن بر طوقهٔ کوچکِ پایین‌تر از سطحِ خط آهن در واقع به عقب حرکت می‌کند.

۱ـ پارادوکس (Paradox) یا شگفت‌نما، واژه‌ای یونانی به مفهوم «فراتر از اعتقاد» است و منظور از آن احکامی است که با عقل متعارف یا اصول مقدماتی منطق در تضاد باشد. (م.)

۲ـ Cycloid Curve

چرخزاد دارای بسیاری خاصیتهای زیبای ریاضی و مکانیکی است که شرح آن در فصلِ «چرخزاد: عروسِ هندسه» مندرج در ششمین کتابِ نگارنده از مجموعه کتابهای موسوم به «بازیهای ریاضی» (تجدید چاپ شدهٔ مجموعهٔ مقالات مربوط در مجلهٔ سایتیفیک‌امریکن) آمده است. در آن فصل توضیح داده شده است که چگونه می‌توان با غلتاندن قوطیِ قهوه یک منحنی چرخزاد کشید. ساختن این منحنی و به دست آوردن اتحاد آن می‌تواند تحسینِ بیشترِ ما از زیبایی و خاصیتهای نامتعارفِ چرخزاد را برانگیزاند.



مآخذ ترجمه:

Gardner, Martin, aha! Gotcha: Paradoxes to puzzle and delight. W.W. Freeman & company, New York, 1989.

مسائل مسابقه‌ای

حمیدرضا امیری

۱) اولاً ثابت کنید اعداد $(1234321)_n$ و $(44100)_n$ به ازای $n > 4$ مربع کاملند ثانیاً تحقیق کنید به‌ازای $n > 5$ عدد $(12543)_n$ بر اعداد $(111)_n$ و $(113)_n$ قابل قسمت است.

توجه کنید:

$$(abcd)_n = a \times n^3 + b \times n^2 + c \times n + d$$

۲) مجموع دو عدد ۱۴۸ است اگر هرکدام از این دو عدد را مقلوب کنیم (به ترتیب جای ارقام آنها را عوض کنیم) و دوباره با هم جمع کنیم حاصل جمع ۵۵۳ خواهد شد. این دو عدد را تعیین کنید.

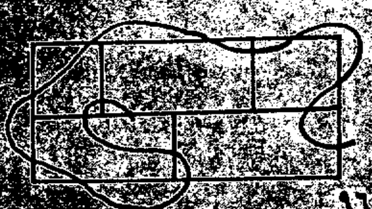
توجه کنید: $421 \xleftrightarrow{\text{مقلوب}} 124$

تفریح اندیشه ۵

عبور از شبکه

یکی از قدیمیترین معماهای توپولوژی، که برای بسیاری از [illegible] دانش‌آموزان آشناست، عبارت است از رسم خط متصلی در [illegible] امتداد شبکهٔ نشان داده شده در شکل ۱ چنان که خط مزبور هر یک از ۱۶ پاره‌خط شبکه را تنها یک‌بار قطع کند. خط خمیده‌ای که در این شکل نشان داده شده معما را حل نمی‌کند زیرا که پاره‌خط را قطع نشده باقی می‌گذارد. هیچ‌گونه راه «کلک آلوده‌ای»، چون عبور خط مذکور از رأس یا در امتداد پاره‌خطها، تا کردن کاغذ، و غیره، مجاز نیست.

اثبات این که معمای مورد بحث نمی‌تواند بر رویه‌ای مسطح [illegible] حل شود مشکل نیست. و اینک دو سؤال: آیا می‌توان آن را بر [illegible] رویهٔ کره حل کرد؟ بر رویهٔ چنبره چطور؟

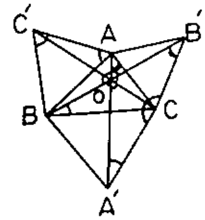


جواب در صفحهٔ ۹۶

حل مسائل مسابقه‌ای برهان ۴

محمد هاشم رستمی

حل ۱- نقطهٔ برخورد AA' و BB' را O می‌نامیم و ثابت می‌کنیم که سه‌نقطهٔ C و O و C' روی یک خط راست واقع‌اند.



دو مثلث ACA' و BCB' با هم برابرند زیرا:

$$AC=CB' \quad , \quad CA'=CB$$

و

$$A\hat{C}A'=B\hat{C}B'=۶۰^\circ+A\hat{C}B$$

از تساوی این دو مثلث نتیجه می‌شود که

$$B\hat{B}C'=C\hat{A}A' \quad \text{و} \quad A\hat{A}'C=B'\hat{B}C$$

در نتیجه چهار ضلعیهای $OBA'C$ و $OAB'C$ محاطی می‌باشند که چون

$$B\hat{A}'C=C\hat{B}'A=۶۰^\circ$$

است، پس:

$$B\hat{O}C=C\hat{O}A=۱۲۰^\circ$$

از آنجا $A\hat{O}B=۱۲۰^\circ$ خواهد بود. اما $B\hat{C}'A=۶۰^\circ$ است پس چهارضلعی $AC'BO$ نیزمحاطی است:

$$(B\hat{C}'A+A\hat{O}B=۶۰^\circ+۱۲۰^\circ=۱۸۰^\circ)$$

لذا $B\hat{O}C'=B\hat{A}C'=۶۰^\circ$ است. در نتیجه:

$$C\hat{O}C'=C\hat{O}B+B\hat{O}C'=۱۲۰^\circ+۶۰^\circ=۱۸۰^\circ$$

یعنی نقاط C و O و C' روی یک خط راست واقع‌اند؛ پس CC' نیز از نقطهٔ O محل تقاطع AA' و BB' می‌گذرد. در نتیجه خطوط AA' و BB' و CC' در نقطهٔ O متقارب‌اند.

نکتهٔ ۱ـ نقطهٔ O محل همرسی خطهای AA' و BB' و CC'، نقطهٔ برخورد کمان درخورهای زاویهٔ ۱۲۰° مقابل به اضلاع مثلث ABC است زیرا:

$$A\hat{O}B=B\hat{O}C=C\hat{O}A=۱۲۰^\circ$$

است که این نقطه‌را نقطهٔ فرما نظیرمثلث ABC، می‌نامند.

نکتهٔ ۲ـ هریک از زوایای ایجاد شده بین دونیم خط متوالی درنقطهٔ O برابر ۶۰° است یعنی:

$$A\hat{O}C'=C'\hat{O}B=B\hat{O}A'$$

$$=A'\hat{O}C=C\hat{O}B'=B'\hat{O}A=۶۰^\circ$$

نکتهٔ ۳ ـ مسئله باروشهای دیگر، ازجمله‌به‌کمک دوران نیز قابل حل است.

حل ۲- ابتدا مسئله‌را درحالت کلی حل می‌کنیم. ازنقطهٔ

$$A(x_۱ , y_۱ , z_۱)$$

عمودهای AM و AM' را به ترتیب برصفحه‌های:

$$P' : a'x+b'y+c'z+d'=۰$$

و

$$P : ax+by+cz+d=۰$$

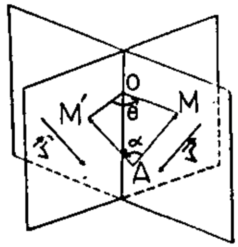
رسم می‌کنیم و فرض می‌کنیم:

$(\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AM'}) = \alpha$

باشد. اگر O نقطهٔ‌برخورد صفحهٔ MAM' با فصل مشترك دو صفحهٔ‌فوق‌باشد، زاویهٔ $M\hat{O}M' = \theta$ زاویهٔ‌مسطحهٔ‌فرجهٔ‌حاصل از این دوصفحه درناحیه‌ای است‌که نقطهٔ A واقع است. بـا توجه به اینکه $\vec{v}(a,b,c)$ بردار نرمال صفحهٔ P و

$$\vec{v'}(a' , b' , c')$$

بردار نرمال‌صفحهٔ P' است، داریم:



$$\overrightarrow{AM} = \overline{AM}\cdot\vec{v} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{AM'} = \overline{AM'}\cdot\vec{v'}$$

حال حاصل‌ضرب داخلی دوبـردار $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AM'}$ را محاسبه می‌کنیم :

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AM'} = (\overline{AM}\cdot\vec{v})\cdot(\overline{AM'}\cdot\vec{v'}) =$$

$$\overline{AM}\cdot\overline{AM'}\cdot(\vec{v}\cdot\vec{v'}) =$$

$$\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \times \frac{a'x_1+b'y_1+c'z_1+d'}{\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}$$

$$\times(aa'+bb'+cc') =$$

$$\frac{P(A)P'(A)(aa'+bb'+cc')}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}$$

$$= |\overrightarrow{AM}|\cdot|\overrightarrow{AM'}|\cos\alpha$$

مقادیر:

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}$$

$$|\overrightarrow{AM'}| \quad \text{و} \quad |\overrightarrow{AM}|$$

همواره مثبت‌اند، پس‌علامت $\cos\alpha$ بستگی به علامت

$$P(A)P(A')(aa'+bb'+cc')$$

دارد که اگراین مقدار را δ بنامیم یعنی

$$\delta = P(A)P'(A)(aa'+bb'+cc')$$

سه‌حالت پیش می‌آید:

۱) $\delta > 0$ ، دراین حالت $\cos\alpha > 0$ ودر نتیجه

$$0^\circ < \alpha < 90^\circ$$

پس $90^\circ < \theta < 180^\circ$ خواهد بود. یعنی‌نقطهٔA داخل فرجه‌ای قرار داردکه زاویهٔ مسطحه‌اش منفرجه است.

۲) $\delta < 0$ ، دراین‌حالت $\cos\alpha < 0$ ، درنتیجه

$$90^\circ < \alpha < 180^\circ$$

پس $0^\circ < \theta < 90^\circ$ خواهد بود. یعنی نقطهٔ A داخل فرجه‌ای واقع است‌که زاویهٔ مسطحه‌اش حاده است.

۳) $\delta = 0$ ، در این‌حالت اگر

$$P(A) \neq 0 \quad \text{و} \quad P'(A) \neq 0$$

باشد، $aa'+bb'+cc' = 0$ ، ولذا دوصفحه بـرهم عمود می‌باشند، و در صورتی‌که $P(A) = 0$ یا $P'(A) = 0$ باشد، به‌ترتیب، نقطهٔA روی‌صفحهٔ P یا روی‌صفحهٔ P' قرار خواهد داشت .

در مورد قسمت اول مسئلهٔ:

$$P : x + 2y - z + 1 = 0$$

و

$$P' : 2x - 3y - 2z + 3 = 0$$

و $A(1, -2, 3)$ ، پس داریم:

$$\delta = P(A)P'(A)(aa'+bb'+cc')$$
$$= (1-4-3+1)(2+6-6+3)\times$$
$$(2-6+2) = +50 > 0 \implies \alpha > 90^\circ \implies$$

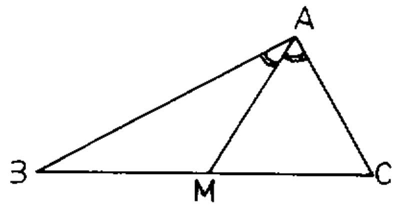
نقطهٔ A داخل‌فرجهٔ منفرجهٔ حاصل از تقاطع دوصفحهٔ P و P' قرار دارد.

مسائل و تست برای حل

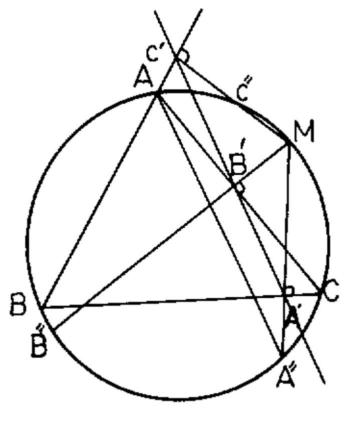
مسائل ریاضیات سال اول

۲ **۱ -** در مثلث ABC ، اگر $AB>AC$ و AM میانهٔ نظیر رأس A باشد ، ثابت کنید :

$$M\hat{A}B < M\hat{A}C$$



۲ **۲ -** اگر نقطه‌های A' و B' و C' به ترتیب تصاویر نقطهٔ M از دایرهٔ محیطی مثلث ABC روی اضلاع BC و AC و AB ، و نقطه‌های A'' و B'' و C'' به ترتیب نقاط برخورد خطوط MA' و MB' و MC' با دایرهٔ محیطی مثلث ABC باشند، ثابت کنید که خطوط AA'' و BB'' و CC'' با خط سمسن نظیر نقطهٔ M موازی‌اند .



۳ - هرگاه گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $p \Leftrightarrow q$ گزاره‌هایی درست و $(p \wedge q)$ گزاره‌نادرست باشد ارزش گزارهٔ

$$(p \Rightarrow r) \Leftrightarrow [q \Leftrightarrow (\sim p \vee s)]$$

را تعیین کنید.

۴ - اگر فرض کنیم

$$A = \{ x \in \mathbb{R} \mid ۲ \leqslant x < +\infty \}$$

و

$$B = \{ x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x \leqslant ۵ \}$$

در این صورت مطلوب است محاسبهٔ مجموعه‌های زیر:

الف) $A - B$

ب) $B - A$

ج) $B' - A$

د) $A' \cap B'$

۵ - دستگاه مقابل را حل کنید: ۲

$$\begin{cases} \dfrac{۴}{۵x-y-۱} + \dfrac{۵}{۳x+۲y-۱۱} = ۲ \\[2mm] \dfrac{۳}{۵x-y-۱} + \dfrac{۴}{۳x+۲y-۱۱} = \dfrac{۳۱}{۲۰} \end{cases}$$

۶ - ۳ اگر a و b و c اعداد حقیقی و مثبت باشند به کمک اتحادها ثابت کنید:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant ۸abc$$

تستهای سال اول

۱ـ فاصلهٔ نقطهٔ A از خط d برابر ۴ است. مجموعهٔ نقاطی مانند M از خط d، که از نقطهٔ A به فاصلهٔ

$$۵ \leqslant AM \leqslant ۶$$

قرار دارند کدام شکل است؟

۱) تمام خط d

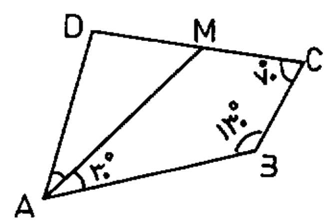
۲) یك پاره خط از خط d

۳) دو پاره خط متساوی از خط d

۴) یك نیم‌خط از خط d

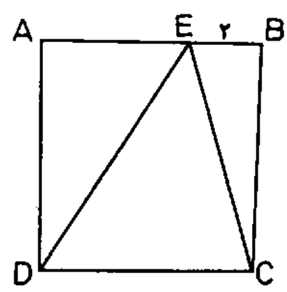
۲ـ در شکل زیر، AM نیمساز زاویهٔ DAB است. اندازهٔ زاویهٔ ADM چقدر است؟

۱) ۶۰° ۲) ۸۰° ۳) ۹۰° ۴) ۱۰۰°



۳ـ مربع $ABCD$ به ضلع ۶ سانتیمتر مفروض است. اگر E نقطه‌ای از ضلع AB و اندازهٔ EB مساوی ۲ سانتیمتر باشد، مساحت مثلث EDC چند سانتیمتر مربع است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۸ ۳) ۲۴ ۴) ۳۰



۴ـ هرگاه گزاره‌های $(p \vee q)$ و $(q \Longleftrightarrow p)$ درست باشند ارزش گزارهٔ $p \Longrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$.

۱) همواره نادرست است

۲) همواره درست است

۳) به ارزش p بستگی دارد

۴) به ارزش q بستگی دارد

۵ـ هرگاه $A-B=A-C$ در این صورت همواره داریم:

۱) $B=C$ ۲) $B=C'$

۳) $B-A=C-A$ ۴) هیچ یك از موارد قبل

۶ـ اگر $b \neq ۰$ و $a>b$، آنگاه کدام یك از روابط زیر همواره برقرار است؟

۱) $a^{۲}>b^{۲}$ ۲) $a^{۳}>a^{۲}b$

۳) $ab^{۲}>b^{۳}$ ۴) $\frac{۱}{a}<\frac{۱}{b}$

۷ـ حاصل کسر $\frac{a^{۶}-b^{۶}}{(a+b)^{۳}(a^{۳}-b^{۳})}$ به ازای

$$\begin{cases} a=۲\sqrt{۲} \\ b=\sqrt{۲} \end{cases}$$

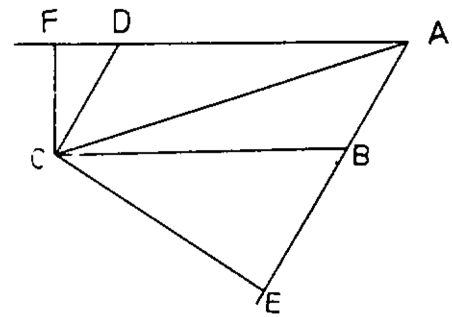
کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$

۳) $\frac{۵}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

مسائل ریاضیات سال دوم ریاضی

۱ - AC قطر بزرگ متوازی‌الاضلاع $ABCD$ است. از رأس C عمودهای AE و AF را بـه ترتیب برامتدادهای



اضلاع AB و AD فرود می‌آوریم. ثابت کنید:

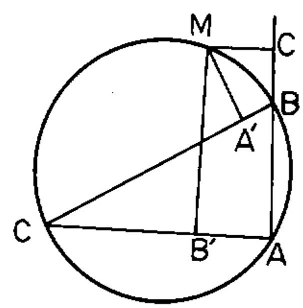
$$AC^2 = AB\cdot AE + AD\cdot AF$$

اگر AC قطر کوچك متوازی‌الاضلاع $ABCD$ باشد، رابطهٔ فوق به چه صورت درمی‌آید؟

فرستنده: امیررضا فرزین از اصفهان

۲ - تصویر نقطهٔ M واقع بر کمان BC از دایرهٔ محیطی مثلث ABC روی خطهای راست BC، AC و AB را بـه ترتیب A' و B' و C' می‌نامیم ثابت کنید:

$$\frac{BC}{MA'} = \frac{AC}{MB'} + \frac{AB}{MC'}$$



۳ - هرگاه R رابطه‌ای دلخواه روی مجموعهٔ A باشد، ثابت کنید $R\cap R^{-1}$ و $R\cup R^{-1}$ رابطه‌هایی متقارن روی A می‌باشند.

۴ - رابطهٔ R به صورت زیر روی اعداد حقیقی تعریف شده است، ثابت کنید شرط لازم و کافی بـرای آنکه رابطهٔ R پادمتقارن باشد آن است که $a\neq b$.

$$\forall x,y\in \mathbb{R}\ ;\ xRy \iff ax+by=c$$

- ثابت کنید که تابع با ضابطهٔ

$$f: N^2 \to N$$

$$f(a,b)=2^{a-1}(2b-1)$$

یك به یك و پوششی است.

۵ - اگر در معادله درجه دوم

$$ax^2+bx+c=0$$

$S_1=x'+x''$ و $S_2=x'^2+x''^2$ و $S_3=x'^3+x''^3$

و ... باشد اگر در معادله $x^2-3x-1=0$ ، $S_{10}=K$ باشد $S_{20}=?$.

۶ - اگر $a^{\log x}$ و $a^{\log y}$ و $a^{\log z}$ تصاعد هندسی بسازد ثابت کنید x و y و z نیز تصاعد هندسی می‌سازند.

۷ - با توجه به تساوی و اتحادهای مثلثاتی زیر $\cos\frac{\pi}{10}$ را محاسبه کنید.

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{10}+\frac{3\pi}{10} \quad \text{و} \quad \sin 2x = 2\sin x\cos x$$

$$\cos 3\frac{\pi}{10} = 4\cos^3\frac{\pi}{10}-3\cos\frac{\pi}{10}$$

$$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y \mp \sin x\sin y$$

۸ - معادلهٔ زیر را حل کنید:

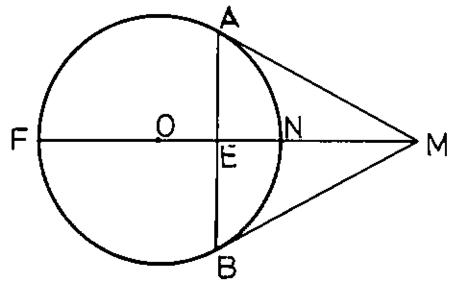
$$\sin 5x+\sin x = 2+\cos^5 2x$$

تستهای سال دوم ریاضی

۱- از نقطهٔ M مماسهای MA و MB را بر دایره‌ای به مرکز O رسم می‌کنیم. اگر MO دایره را در نقاط N و F و وتر AB را در نقطهٔ E قطع کند نسبت $\frac{FM}{EF}$ همواره بـا کدام نسبت برابر است؟

۱) $\frac{NE}{MN}$ ۲) $\frac{MN}{NE}$

۳) $\frac{OE}{OM}$ ۴) $\frac{OM}{OE}$



۲- مساحت قطاع °۳۰ در یك دایره، برابر ۳π است. قطر این دایره کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۸

۳- پنج نقطهٔ A، B، C، D و E غیر واقع در یـك صفحه‌اند. چندصفحه وجود داردکه شامل سه‌نقطه ازنقاط فوق باشد ؟

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

۴- روی مجموعهٔ $A=\{۲,۴,۶\}$ رابطهٔ

$R=\{(۲,۶)\}$

تعریف‌شده است این رابطه:

۱) هم‌ارزی است

۲) ترتیب است

۳) تقارنی و تعدی است

۴) پاد تقارنی و تعدی است

۵- تابع $f: IR^{+۲} \rightarrow IR^{۲}$ با ضابطهٔ

$f(x,y)=(\sqrt{x}\ ,\ \sqrt{y})$

تعریف شده است این تابع :

۱) یك به یك است و پوشا نیست .

۲) یك به یك نیست ولی پوشا است.

۳) دو سویی است.

۴) نه یك به یك ونه پوشا است.

۶- روی مجموعهٔ اعداد طبیعی عمل * به صورت

$x*y=Max\{x,y\}$

تعریف شده است. عضو خنثی دراین مجموعه نسبت به عمل * کدام است ؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ندارد

۷- اگر در یـك تصاعد عددی $S_n=۲n(۳n+۱)$ ، (S_n مجمـوع n جمله اول است) آنگـاه ؟ $=a_n$. (a_n جمله (n)ام یا جمله عمومی است)

۱) $۸n$

۲) $۱۲n-۴$

۳) $۲n+۴$

۴) $۴n+۴$

۸- بیشترین مقدار $(tg_۳^{۲})^{\sin\alpha}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲: $log_۲^{۳}$

۳) $log_۳^{۲}$ ۴: ۶

۹- عبـارت $\frac{\sin x}{۱+\cos nx}$ برابر کدام است؟

(با فرض: $x\neq \frac{۲k\pi+\pi}{n}$)

۱) $cotg\,\frac{nx}{2}$ ۲) $tg\,\frac{nx}{2}$

۳) $\sin\frac{nx}{2}$ ۴) $\cos\frac{nx}{2}$

۱۰- حاصل عبارت

$$\sqrt{\frac{\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}}\;\sqrt[4]{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$$

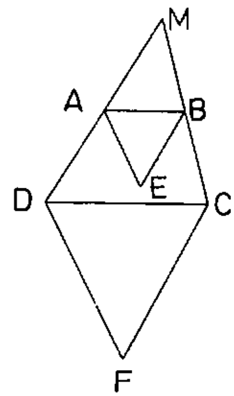
با شرط این‌که انتهای x در ناحیهٔ اول دایره مثلثاتی باشد کدام است ؟

الف) $\frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}$ ب) $\frac{\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}$

ج) $\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$ د) $\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$

مسائل ریاضیات سال سوم ریاضی

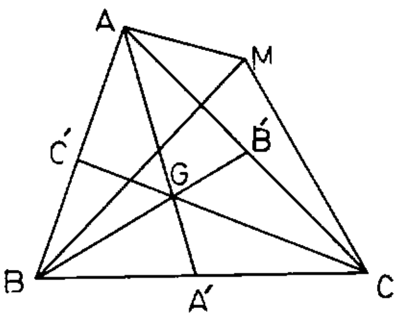
۱- ذوزنقهٔ ABCD را در نظر می‌گیریم . روی قاعده‌های AB و CD از این ذوزنقه مثلثهای متساوی‌الاضلاع ABE و CDF را در یك طرف آنها می‌سازیم . ثابت کنید که



نقاط E و F و M محل تقاطع ساقهای ذوزنقه روی یك خط راست واقع‌اند .

۲- درصورتی که M نقطه‌ای واقع درصفحهٔ مثلث ABC، و G محل برخورد میانه‌های این مثلث باشد، ثابت کنید داریم:

$$MA^2+MB^2+MC^2=$$
$$GA^2+GB^2+GC^2+3MG^2$$



۳- هر گاه V یك فضای برداری حقیقی باشد، ثابت کنید هرمجموعه از بردارهای این فضا که شامل بردارهایی وابسته خطی باشد، خود وابستهٔ خطی است.

۴- ۱۲ نفر که دو نفر آنها باهم برادرهستند به‌تصادف دور یك میز گرد می‌نشینند، مطلوب است:

الف) احتمال آنکه دقیقاً ۴ نفر بین این دو برادر قرار بگیرند .

ب) احتمال این‌که دو برادر درکنار هم باشند.

۵- حروف کلمهٔ Abcli را به تصادف مرتب کرده‌ایم . مطلوب است ، احتمال این‌که حروف با صدا در مکانهای فرد قرار بگیرند.

۶- چند دانش‌آموز واردکلاسی می‌شوند وهمگی باهم دست می‌دهند، اگرتعداد دست‌دادنها ۲۸ باشد معین کنید تعداد دانش‌آموزان را.

۷- تابع $y=\frac{ax+b}{a'x+b'}$، $a'\neq 0$ راطوری‌مشخص کنید تا خطوط $x=-\frac{1}{2}$ و $y=1$ مجانبهای آن باشد و منحنی‌تابع محورyها را درنقطه‌ای به عرض ۱ − قطع‌کند.

پس‌از مشخص‌شدن تابع، نقاطی‌از منحنی‌تابع‌را بیابید که خطوط مماس در آن نقاط برخط $4y+x=0$ عمودباشد.

۸- از مبدأ مختصات قائمی برمنحنی تابع

$$y=\frac{x^2+4\sqrt{2}}{x}$$

رسم‌نمودیم. مطلوب‌است طولهای‌پای‌قائم ومعادله‌خط قائم.

۹- معادلهٔ زیرمفروض‌است:

$$\cos^2 x-(4m+1)\cos x\sin x+m\sin^2 x=0$$

الف) معادله به ازای‌چه مقادیری از m دارای جواب است.

ب) اگر مجموع چهار ریشهٔ معادله‌که بین ۰ و 2π می‌باشند برابر $\frac{9\pi}{2}$ باشد مقدار m را تعیین‌کنید.

تستهای سال سوم ریاضی

۱- ازنقطهٔ P واقع‌دربرون دایرهٔ $C(0,3)$ که به‌فاصلهٔ ۵ از مرکزدایره قرار دارد قاطع PAB را چنان‌رسم می‌کنیم که $PA=AB$ باشد. اندازهٔ وتر AB چقدر است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{2}$

۳) $\sqrt{3}$ ۴) $2\sqrt{3}$

۲- در مثلثی به اضلاع a وb وc واندازهٔ محیط2P رابطهٔ

$$(P-a)(P-c)=P(P-b)$$

برقرار است. در این مثلث‌کدام گزینه درست است؟

۱) $\hat{C}=90^\circ$ ۲) $\hat{B}=90^\circ$

۳) $\hat{A}=90^\circ$ ۴) $\hat{B}>90^\circ$

۳- نقاط A' و B' و C' بـه ترتیب وسطهای اضلاع BC و AC و AB ونقاط A'' و B'' و C'' به ترتیب اوساط اضلاع $B'C'$ و $A'C'$ و $A'B'$ از مثلث $A'B'C'$ می‌باشند. مثلث$A''B''C''$ تبدیل‌یافته مثلث ABC باکدام تبدیل است؟

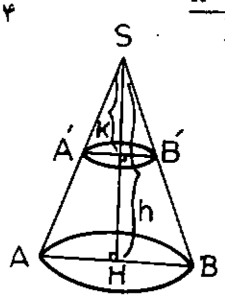
۱) انتقال ۲) تقارن مرکزی

۳) تقارن محوری ۴) تجانس

۴- مخروطی‌به ارتفاع h را باصفحه‌ای موازی‌قاعده و به فاصلهٔ k $(k\leqslant h)$ از رأس مخروط قطع کـرده‌ایم . نسبت حجم مخروط ایجاد شده در بـالا به حجم مخروط اولی کدام است؟

۱) $\frac{k^3}{h^3}$ ۲) $\frac{k^3}{k^3+h^3}$

۳) $\frac{h^3-k^3}{h^3}$ ۴) $\frac{k^3}{h^3-k^3}$



۵- کدام گزینه صحیح **نیست** .

۱) IR روی‌خودش یك‌فضای برداری است.

۲) IR روی Q یك فضای برداری است.

۳) Q روی IR یك‌فضای برداری است.

۴) Q روی Q یك‌فضای برداری است.

۶- برای سکه‌ای احتمال آمدن «رو» $\frac{1}{4}$ است. اگر این سکه ۵ بار پرتاب شود، احتمال اینکه دقیقاً ۳ بار «رو» بیاید چقدر است ؟

۱) $\frac{90}{512}$ ۲) $\frac{180}{1024}$

۳) $\frac{45}{512}$ ۴) $1-\frac{90}{512}$

۷- به چندطریق می‌توان ۲ خودکار و ۸ مدادرا درکنار هم‌چید به شرطی که همواره دقیقاً ۳ مدادبین ۲خودکار باشند.

۱) $3!\times 5!\times 2!$

۲) $\binom{8}{3}\times 3!\times 2!$

۳) $\binom{8}{3}\times 3!\times 5!\times 2!$

۴) $\binom{8}{3}\times 5!\times 3!$

۸- اگردر تابع f داشته‌باشیم $D_f=[-1,1]$، آنگاه $D_{f(2x-3)}$ کدام است؟

۱) $[1\,,\,2]$ ۲) $[0\,,\,1]$

۳) $[-2\,,\,-1]$ ۴) $[-1\,,\,1]$

۹- درتابع $y=x^3-3x$ درنقاط اکسترمم خطوطی موازی محورهای مختصات رسم نمودیم. عدد مساحت مستطیل حاصل کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۰- دستگاه‌زیر به ازای‌چه مقادیری‌از m دارای‌جواب است ؟

$$\begin{cases}\cos x+\cos y=m\\ x+y=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

۱) $\{-\sqrt{2}\,,\,\sqrt{2}\}$

۲) $[-\sqrt{2}\,,\,\sqrt{2}]$

۳) $\left\{\frac{-\sqrt{2}}{2}\,,\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

۴) $\left[\frac{-\sqrt{2}}{2}\,,\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

۱۱- معادلهٔ $\mathrm{Arc}\cos(1-2x^4)=2\,\mathrm{Arc}\sin x^4$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) بی‌شمار

مسائل ریاضیات سال چهارم ریاضی

۱- اگر $|\vec{V_1}|=3\sqrt{3}$ و $|\vec{V_2}|=4$ و $|\vec{V_3}|=5$ و $(\vec{V_1}\,,\,\vec{V_2})=60^\circ$ و $\vec{V_3}$ بردوبردار $\vec{V_1}$ و $\vec{V_2}$ عمودباشد، $\vec{V_1}\,\vec{V_2}\,\vec{V_3}$ را حساب کنید.

۲- نقطه‌ای روی محورyها بیابیدکه از نقطهٔ

$A(2\,,\,3\,,\,-1)$

وازصفحهٔ $P:2\sqrt{2}\,x-z-9=0$ به یك فاصله باشد.

۳- معادلهٔ دایرهٔاصلی سه دایرهٔ C_1وC_2وC_3 را بنویسید در صورتی‌که:

$C_1:(x-1)^2+(y-3)^2=4$

$C_2:x^2+y^2+2x-2y+1=0$

$C_2 : x^2+(y+2)^2=4$

۴- درستی و اعتبار استنتاج زیررا بررسی کنید:

$$(\sim p \wedge r) \Longrightarrow q \quad \wedge$$
$$(r \wedge s) \quad \wedge$$
$$\sim (s \Longrightarrow q)$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad}$$
$$\therefore \sim p \Longrightarrow (r \Longrightarrow \sim s)$$

۵- حلقه‌ای مانند $(R,+,\times)$ مثال بزنید که صفر حلقه و یك حلقه با هم برابر باشند و ثابت کنید هرمیدان یك حوزهٔ صحیح است.

۶- هرگاه K مضرب ۴ باشد رقم یکان عدد زیر را بیابید.

$$A=3^{2n+1}\times 2^{5n+3}+4^{n+1}$$

۷- به روشی غیر از روش کتاب درسی، ثابت کنید هرماتریس متعامد یا به‌صورت ماتریس دوران حول مبدأ مختصات است و یا به صورت ماتریس تقارن نسبت به خط

$$y=x\,tg\,\frac{\theta}{2}$$

۸- در معادله $x^3-5x-2=0$ اگر α و β و γ ریشه‌های معادله باشد مقدار عددی $\alpha^{-2}+\beta^{-2}+\gamma^{-2}$ را بیابید.

۹- مطلوب است محاسبه

$$\int \frac{\sqrt{\sin^3 2x}\,dx}{\sin^5 x} \qquad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

تستهای سال چهارم ریاضی

۱- نقاط $M(5,\frac{\pi}{6})$ و $N(12,\alpha)$ در یك صفحه مختصات قطبی مفروض‌اند. اگر اندازهٔ پاره خط MN برابر ۱۳ باشد، α کدام است؟

۱) $\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{2\pi}{3}, \frac{-\pi}{6}$

۳) $\frac{-\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ ۴) $\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$

۲- اگر $\vec{V_1}(2,-1,3)$ و $\vec{V_2}(-2,3,0)$ باشند، اندازهٔ جبری تصویر $\vec{V_2}-\vec{V_1}$ روی بردار $\vec{V_2}+\vec{V_1}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{41}}{41}$ ۲) $\frac{-\sqrt{41}}{41}$

۳) $\frac{-\sqrt{41}}{41}$ ۴) $\frac{-\sqrt{41}}{14}$

۳- معادلهٔ صفحه‌ای که شامل خط

$$D:\ 2x-1=y+3=-3z$$

بوده و موازی بردار $\vec{v}(1,-1,2)$ باشد، کدام است؟

۱) $10x+8y-9z-29=0$

۲) $10x+8y+9z-29=0$

۳) $10x-8y-9z-29=0$

۴) $10x+8y+9z+29=0$

۴- فاصلهٔ نقطهٔ $A(-2,1,3)$ از محور xها کدام است؟

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۱۰   ۴) $\sqrt{10}$

۵- اگر $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=-\frac{\overline{M'A}}{\overline{M'B}}=K$ ونقطهٔ O وسط پاره‌...

خط MM' باشد نسبت $\frac{\overline{OA}}{\overline{AB}}$ برابر کدام مقدار است؟

۱) $\frac{k^2}{k^2-1}$　　۲) $\frac{k^2}{1-k^2}$

۳) $\frac{k^2}{1+k^2}$　　۴) $\frac{k^2-1}{k^2+1}$

۶- نقطه $M(a+2\ ,\ 2a-1)$ مفروض است. به‌ازای کدام مقدار a، از نقطهٔ M دو مماس به‌طولهای مساوی بر دو دایره

$$C\ :\ 2x^2+2y^2-3x+4y=0$$

و

$$C'\ :\ x^2+y^2+x-y=1$$

می‌توان رسم کرد؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

۷- کدام نقطه کانون بیضی به معادلهٔ

$$4x^2+9y^2+16x-18y-23=0$$

است؟

۱) $(-2+\sqrt{5},-1)$

۲) $(-2+\sqrt{5},1)$

۳) $(2-\sqrt{5},\ 0)$

۴) $(-2-\sqrt{5},\ -1)$

۸- عکس نقیض گزارهٔ

$$\{[(\sim p\wedge q)\Rightarrow r]\vee[(q\wedge s)\Rightarrow \sim r]\}\Rightarrow[(p\wedge q)\Rightarrow p]$$

هم‌ارز با کدام گزاره است؟

۱) $p\wedge\sim p$　　۲) $\sim p\vee\sim p$

۳) $(q\vee r)$　　۴) $p\Rightarrow p$

۹- کدام دستگاه ریاضی، حوزهٔ صحیح نیست؟

۱) $(\mathbb{R},+,\cdot)$　　۲) $(Q,+,\cdot)$

۳) $(Z_8\ ,\ \oplus,\times)$　　۴) $(Z_7,\oplus,\times)$

۱۰- عضو ابتدای کرانهای بالا و عضو انتهای کرانهای پایین مجموعهٔ $A=\{x\in\mathbb{R}\mid -5<x<10\}$ به ترتیب عبارتند از:

۱) -5 و 10　　۲) 11 و -4

۳) 9 و -6　　۴) 10 و -5

۱۱- ماتریس $A=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$ یك مربع به مساحت ۴ سانتیمتر مربع را به:

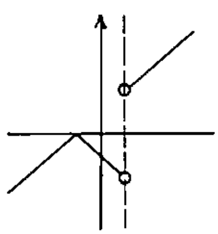
۱) مستطیلی با همان مساحت تبدیل می‌کند

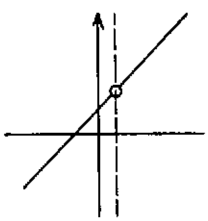
۲) به مربعی قابل انطباق برهمان تبدیل می‌کند

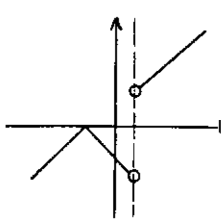
۳) به یك خط تبدیل می‌کند

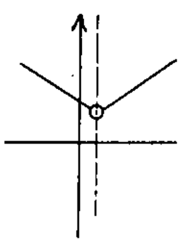
۴) به یك لوزی باهمان مساحت تبدیل می‌کند

۱۲- نمودار تابع $y=\frac{|x^2-1|}{x-1}$ کدام است.

۱)


۲)


۳)


۴)


۱۳- نمودار $\begin{cases}|x+1|\leqslant 1\\ |y+1|\leqslant 1\end{cases}$ کدام است؟

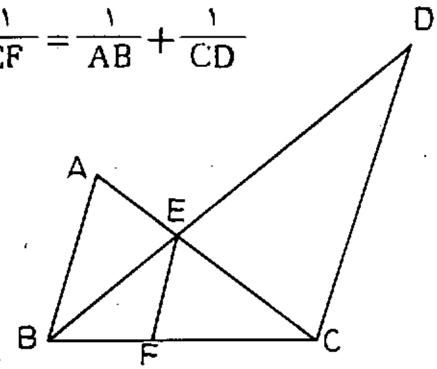
۱) یك مربع است ۲) یك لوزی است

۲) دوخط موازی است ۴) یك مستطیل است

مسائل ریاضیات سال دوم تجربی

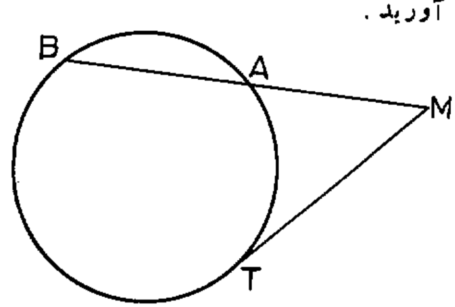
۱- مثلث ABC مفروض است. از رأس B خطی رسم می‌کنیم که ضلع AC را در نقطهٔ E قطع کند. از نقاط C و E خطوطی به موازات ضلع AB رسم می‌کنیم تا به ترتیب خطوط BE و BC را در نقاط D و F قطع کنند ثابت کنید:

$$\frac{1}{EF}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}$$



فرستنده: علی عمیدی، دانش‌آموز، از گرمسار

۲- از نقطهٔ M واقع در خارج دایره‌ای قاطع MAB را چنان نسبت به دایره رسم می‌کنیم که $MA=AB=8$ باشد. اندازهٔ مماس MT را که از نقطهٔ M بر دایره رسم می‌شود به دست آورید.



۳- معادلهٔ زیر مفروض است:

$$25^x=3+m5^x$$

الف) به ازای چه مقادیری از m یك جواب معادله $x=-1$ است.

ب) به ازای چه مقادیری از m معادله جواب حقیقی ندارد.

ج) مجموعهٔ جواب معادله را به ازای $m=2$ به‌دست آورید.

۴- ثابت کنید اگر x و y و z به ترتیب جمله‌های پنجم وهفده‌ام وسی‌وهفتم یك تصاعد حسابی و همچنین یك تصاعد هندسی باشند، داریم:

$$x^{y-z}\cdot y^{z-x}\cdot z^{x-y}=1$$

۵- ریشه‌های معادلهٔ زیر را به دست آورید و آنها را به ساده‌ترین صورت ممکن برحسب نسبتهای مثلثاتی α بنویسید.

$$(tg\alpha)x^2-(tg^2\alpha+3)x+3tg\alpha=0$$

۶- معادلهٔ زیر را حل کنید

با فرض: $((1+\sin x)(\sin x+\cos x)\neq 0$

$$\frac{1-\sin x}{\sin x+\cos x}+\frac{\cos x-\sin x}{1+\sin x}=0$$

تستهای سال دوم تجربی

۱- طول مماس مرسوم از نقطهٔ P بر دایرهٔ $C(O,10)$ کدام است؟ درصورتی‌که وتر واصل بین نقاط تماس برابر ۱۲ باشد.

۱) ۵ ۲) ۷/۵ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲/۵

۲- اضلاع مثلثی $2\sqrt{3}$ و ۴ و ۲ سانتی‌مترند. اندازهٔ روبه‌رو به کوچکترین ضلع کدام است؟

۱) 30° ۲) 45° ۳) 60° ۴) 75°

۳- مساحت شش‌ضلعی منتظم محیط بر دایره‌ای به شعاع R برابر است با :

۱) $2R^2$ ۲) $2\sqrt{3}\,R^2$

۳) $\sqrt{2}R^2$ ۴) $4\sqrt{3}\,R^2$

۴- نامعادلهٔ $\frac{(1-x^3)^5}{\sqrt{x^3}}<0$ با کدام یك از شرایط زیر دارای جواب است؟

۱) $0<x<1$ ۲) $x<-1$

۳) $x>1$ ۴) $-1<x<1$

۵- اگر :

$$8\log_{x^8}^{(c^2-a^2)} \text{ و } 4\log_{x^4}^{b^2} \text{ و } 2\log_{x^2}^{(a^2+c^2)}$$

به‌ترتیب سه جملهٔ متوالی تصاعد حسابی باشند، کدام یك از گزینه‌های زیر صحیح است؟

۱) $a^2+b^2=c^2$ ۲) $a^4+b^4=c^4$

۳) $a^2+c^2=b^2$ ۴) $a^4+c^4=b^4$

۶- اگر معادلهٔ $9ax^2+6bx+c=0$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد، کدام یك از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) a و b و c به تصاعد حسابی (عددی) می‌باشند.

۲) a و b و c تشکیل تصاعد هندسی می‌دهند.

۳) بین a و b و c رابطهٔ $b^2=9ac$ برقرار است.

۴) بین a و b و c رابطهٔ $4b^2=3ac$ برقرار است.

۷- جواب عمومی معادلهٔ

$$\operatorname{Arccos}\left(\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)=\frac{\pi}{2}$$

کدام است ؟

۱) $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ ۲) $x=k\pi-\frac{\pi}{3}$

۳) $x=k\pi+\frac{5\pi}{6}$ ۴) $x=k\pi+\frac{\pi}{3}$

۸- حاصل عبارت زیر معادل کدام گزینه است؟

$$P=\frac{\log(tg88^\circ)\times\log(tg87^\circ)\times\log(tg86^\circ)\times\cdots\times\log(tg3^\circ)\times\log(tg2^\circ)}{\log(\sin88^\circ)\times\log(\sin87^\circ)\times\log(\sin86^\circ)\times\cdots\times\log(\sin3^\circ)\times\log(\sin2^\circ)}$$

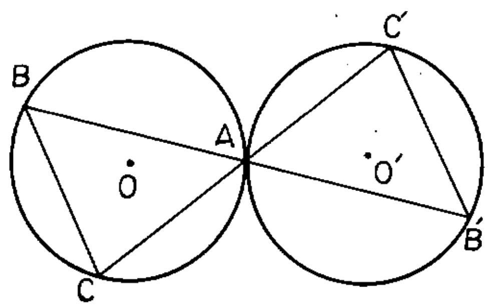
۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\log\frac{\pi}{2}$

۳) $\log(\sin\frac{\pi}{2})$ ۴) $tg\frac{\pi}{2}$

مسائل ریاضیات سال سوم تجربی

۱- دو دایره به مراکز O و O′ و به شعاعهای برابر در نقطهٔ A مماس مفروض می‌باشند. از نقطهٔ A دو خط راست رسم می‌کنیم تا دایرهٔ O را در نقاط B و C و دایرهٔ O′ را در نقاط B′ و C′ قطع کنند ثابت کنید :

الف) $BC=B'C'$ ب) $BC\|B'C'$



۲- بردارهای $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ با محور xها به ترتیب زوایای 52° و 114° می‌سازند. اگر

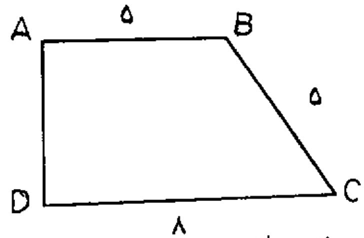
$|\overrightarrow{OA}|=2$ و $|\overrightarrow{OB}|=2$

باشند اندازهٔ زاویه‌ای که برایند این دو بردار با محور $x'ox$ می‌سازند را تعیین کنید.

۳- در ذوزنقهٔ قائم الزاویه ABCD ،

$$\hat{A}=\hat{D}=90^\circ$$

است. اگر $AB=5$ و $CD=8$ و $BC=5$ باشد؛ اولاً- اندازهٔ ساق قائم AD را محاسبه کنید. ثانیاً- حجم مخروط ناقص دوار حاصل از دوران این ذوزنقه حول ساق قائم AD را تعیین کنید.



۴- اگر داشته باشیم:

$$fog(x)=\frac{x^2}{x^2+1} \quad \text{و} \quad f(x)=\frac{1}{x+1}$$

دامنهٔ تابع $gof(x)$ را تعیین کنید.

۵- حدود زیر را حساب کنید (m و n و k عددهای طبیعی دلخواه فرض می‌شوند).

الف) $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^3-3x+2}{(x^5-1)^2}\right)=?$$

ب) $$\lim_{x\to \pm\infty}\left(\frac{x^n+n}{x^{n+1}+x}\right)=?$$

۶- معادلهٔ زیر را درنظر می‌گیریم:

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{5}\right)+\sin\left(x+\frac{3\pi}{5}\right)=\sin x+\sin\left(x+\frac{2\pi}{5}\right)+\sin\left(x+\frac{4\pi}{5}\right)$$

الف) ثابت کنید که تساوی فوق یک اتحاد مثلثاتی است.

ب) از اتحاد فوق، با اختیار کردن $x=0$ ثابت کنید:

$$\cos\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

۷- معادلهٔ زیر را حل کنید وجوابهای بین صفر و 2π را به دست آورید.

$$\sin x+\sin\left(x+\frac{2\pi}{5}\right)+\sin\left(x+\frac{4\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

تستهای سال سوم تجربی

۱- اگر:

$$O(0\,,0) \quad \text{و} \quad B(3\,,0) \quad \text{و} \quad A(0\,,3)$$

رئوس مثلث OAB باشند، اندازهٔ بردار مکان مرکز ثقل مثلث چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $\sqrt{2}$

۲- اگر:

$$|\vec{b}|=3 \quad \text{و} \quad |\vec{a}|=4 \quad \text{و} \quad (\vec{a}\,,\vec{b})=\frac{\pi}{2}$$

باشد، $(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}-3\vec{b})$ کدام است؟

۱) -38 ۲) $+38$

۳) -18 ۴) $+18$

۳- دوازده وجهی منتظم ۳۰ یال دارد. عده رئوس آن کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۳۰ ۴) ۴۰

۴- استوانهٔ دوار و مخروط دواری قاعدهٔ مشترک دارند. درصورتی که حجم استوانه ۳ برابر حجم مخروط باشد، نسبت اندازهٔ ارتفاع استوانه به اندازهٔ ارتفاع مخروط کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۹ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) ۱

۵- دامنهٔ تعریف تابع باضابطهٔ

$$f(x)=\sqrt{\log(\frac{x-1}{x+1})}$$

کدام است ؟

۱) $(-\infty\ ,\ 1)$ ۳) $(-1\ ,\ +\infty)$

۲) $(-\infty,-1)$ ۴) $(1\ ,\ +\infty)$

۶- اگر :

$$f(x)=x^3-1$$

و

$$fog(x)=x^3+\frac{1}{x^3}+3(x+\frac{1}{x})$$

باشد آنگاه $gof(0)$ کدام است؟

۱) $-\sqrt[3]{3}$ ۴) $-7\sqrt[3]{3}$

۲) $-3\sqrt[3]{7}$ ۴) $-\sqrt[3]{7}$

۷- اگر تابع :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{2-x} & x\neq 2\\ c & x=2\end{cases}$$

درنقطهٔ $x=2$ پیوسته باشد c کدام است؟

۱) -2 ۲) -4

۳) 2 ۴) 8

۸- فاصلهٔ نقطهٔ ماکزیمم تابع با ضابطهٔ

$$f(x)=1-x^2$$

ازخط مماس برمنحنی نمایش تابع باضابطهٔ

$$g(x)=x^3-3x^2+3x+1$$

در مرکزتقارن آن برابراست با:

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

مسائل ریاضیات سال چهارم تجربی

تحویلی

۱- فاصلهٔ مرکزتقارن منحنی نمایش تابع باضابطهٔ

$$xy=x+y$$

را از مرکزتقارن بیضی به معادلهٔ

$$3x^2+9y^2-12x-36y+2=0$$

حساب کنید.

۲- توابع :

$$f(x)=1-\frac{1}{x+1} \quad و \quad gof(x)=\frac{1+x}{\sqrt{x+1}}$$

مفروض‌اند. دامنه و برد تابع مرکب $fog(x)$ را تعیین کنید.

تحویلی

۳- ضریب زاویهٔ خط مماس برمنحنی نمایش تابع اولیهٔ تابع بـا ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{x^9}{\sqrt[5]{x^5-1}}$ را در نقطـه‌ای روی محور عرضها بـه دست آورید . سپس با شرط این‌کـه عرض اکسترمم تابع اولیهٔ تابع f برابر $\frac{-1}{9}$ بـاشد ضابطهٔ آن را مشخص کنید.

۴- معادلهٔ زیر مفروض است:

$$\cos x(\sin x-m\cos x)=\frac{1-m}{2}$$

الف) معادله به ازای‌چه مقادیری از m جواب ندارد

ب) مجموعهٔجوابهای معادلهٔ فوق رابه ازای

$$m=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

به دست آورید.

۵- در مثلث ABC دوضلع b و c معلوم ومثلث معادل مثلث متساوی‌الاضلاعی است که به‌ضلع a می‌باشد، مثلث‌را حل کنید.

تستهای سال چهارم تجربی

۱- دامنهٔ تعریف تابع با ضابطهٔ

$$f(x)=\log_2\frac{4-x^2}{2+x}$$

کدام است؟

۱) $(-\infty,-2)\cup(-2,2)$

۲) $(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$

۳) $(-\infty,2)$

۴) $(-2,2)$

۲- اگر:

$$g(x)=\frac{1}{x} \quad \text{و} \quad 2f\left(\frac{1}{x^5}\right)+f(x^5)=\frac{1}{x}$$

آنگاه $fog(-1)$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{-1}{3}$

۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{-2}{3}$

۳- حد:

$$f(x)=\left(\frac{1+x}{2x-1}\right)\left(\frac{6x^5+4x^7-1}{x^2(x^5+x^3+1)}\right)$$

وقتی $x\to\pm\infty$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴- اگر تابع:

$$f(x)=\begin{cases}2x^k+k & x\geqslant 0\\ \frac{1}{x}\left(\frac{\sin^2 2x}{x}\right) & x<0\end{cases}$$

درنقطهٔ صفر پیوسته باشد، مقدار k چیست؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۵- اگرمجموع طولهای نقاط ماکزیمم ومینیمم تابع با ضابطهٔ $y=x^3+mx^2+x$ برابرطول مرکزتقارن تابع با ضابطهٔ $y=\frac{2x-1}{3x+1}$ باشد m برابراست با:

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{2}{3}$

۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۶- اگر در مثلثی رابطهٔ

$$\frac{\cos B-\cos C}{1+\cos A}=\frac{1-\cos A}{\cos B+\cos C}$$

برقرار باشد مثلث کدام است؟

۱) متساوی‌الساقین ۲) قائم‌الزاویهٔ‌متساوی‌الساقین

۳) قائم‌الزاویه ۴) غیر مشخص

۷- به ازای‌چه مقادیری‌از m معادلهٔ زیرجواب ندارد؟

$$m(\sin x+\cos x)+\cos x=\sin x+2$$

۱) $m<1$ ۲) $|m|<2$

۳) $m>-1$ ۴) $-1<m<1$

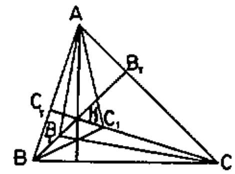
$m(m-1)x=(m-1)(m+1)$

اگر $m=-1 \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0$

حل مسائل سال دوم ریاضی

۱- پای ارتفاعهای رئوس B و C را به ترتیب B_2 و C_2 می‌نامیم.

از تشابه مثلثهای قائم‌الزاویه زیر داریم:



$\Delta AB_1C \sim \Delta AB_2B_1 \Rightarrow$

$AB_1^2 = AB_2 \cdot AC$ (۱)

$\Delta ABB_2 \sim \Delta ACC_2 \Rightarrow$

$AB_2 \cdot AC = AC_2 \cdot AB$ (۲)

$\Delta AC_1B \sim \Delta AC_2C_1 \Rightarrow$

$AC_1^2 = AC_2 \cdot AB$ (۳)

از روابط (۱) و (۲) و (۳) نتیجه می‌گردد:

$AB_1^2 = AC_1^2 \Rightarrow AB_1 = AC_1$

۲- ازنقطهٔ C عمود CH را بر AD فرود آورده، آن را به اندازهٔ خود تا نقطهٔ C' امتداد می‌دهیم. از C' به نقاط A و B و D وصل می‌کنیم. دو مثلث ACD و AC'D با هم برابرند. پس:

$C'D=DC=2DB$ و $C'\hat{D}A=A\hat{D}C=60°$

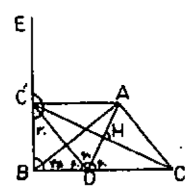
است. یعنی نقطهٔ A روی نیمساز زاویهٔ C'DC واقع است و

$C'\hat{D}B=180°-60-60=60°$

است. مثلث BC'D که متشابه با مثلث قائم‌الزاویه‌ای به وتر ۲ وضلع مجاور به زاویهٔ قائمه ۱ است، قائم‌الزاویه می‌باشد. یعنی $C'\hat{B}D=90°$ است در نتیجه:

$C'\hat{B}A=45°$ و $B\hat{C'}D=30°$

است. پس نقطهٔ A روی نیمساز زاویهٔ C'BD واقع است.



بنابراین نقطهٔ A که از خطهای راست DC' و BC' به یک فاصله می‌باشد روی نیمساز زاویهٔ DC'E واقع است در نتیجه:

$$A\hat{C}B=A\hat{C'}D=\frac{1}{2}(180-30)=75°$$

۳- چون R_1 و R_2 دو رابطهٔ هم‌ارزی روی مجموعهٔ A هستند لذا هردو رابطه دارای ۳ خاصیت بازتابی، تقارنی و تعدی می‌باشند حال این ۳ خاصیت را برای $(R_1 \cap R_2)$ بررسی می‌کنیم.

۱) $\forall x\in A[(x,x)\in R_1 \wedge (x,x)\in R_2] \xRightarrow{\text{تعریف اشتراک}} (x,x)\in (R_1\cap R_2)$

۲) فرض کنیم: $(x,y)\in(R_1\cap R_2)$

$\xRightarrow{\text{تعریف اشتراک}}$ $(x,y)\in R_1 \xRightarrow{R_1 \text{ تقارنی}}$ ، $(x,y)\in R_2 \xRightarrow{R_2 \text{ تقارنی}}$

$\left.\begin{array}{l}(y,x)\in R_1\\ (y,x)\in R_2\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{تعریف اشتراک}} (y,x)\in(R_1\cap R_2)$

۳) فرض کنیم: (x,y) و $(y,z)\in(R_1\cap R_2)$

$\xRightarrow{\text{تعریف اشتراک}}$ (x,y) و $(y,z)\in R_1 \xRightarrow{R_1 \text{ تعدی}}$ ، (x,y) و $(y,z)\in R_2 \xRightarrow{R_2 \text{ تعدی}}$

$\left.\begin{array}{l}(x,z)\in R_1\\ (y,z)\in R_2\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{تعریف اشتراک}} (x,z)\in(R_1\cap R_2)$

درحالت کلی ممکن است $(R_1\cup R_2)$ یک رابطهٔ هم‌ارزی نباشد مثلاً فرض کنیم:

$A=\{2,4,6\}$

دراین صورت:

$R_1=\{(2,2)(4,4)(6,6)(2,4)(4,2)\}$

$R_2=\{(2,2)(4,4)(6,6)(2,6)(6,2)\}$

R_1 و R_2 هردو رابطهٔ هم‌ارزی هستند اما $(R_1\cup R_2)$ رابطهٔ هم‌ارزی نمی‌باشد زیرا مثلاً:

$(2,6)\in R$ و $(4,2)\in R$

ولی $(4,6)\notin R$ یعنی خاصیت تعدی ندارد.

$R=(R_1\cup R_2)=$

$\{(2,2)(4,4)(6,6)(2,4)(4,2)(2,6)(6,2)\}$

۴- تعریف رابطه که روی N می‌باشد به صورت زیر است:

$\forall a,b\in N$ ، $aRb \iff a+b-ab\leqslant 1$

۱) ابتدا باید ثابت کنیم به ازای هر $a\in N$:

$a+a-aa\leqslant 1$ یا $2a-a^2\leqslant 1$

می‌دانیم: $\forall a\in N$ ، $(a-1)^2\geqslant 0$

$\Rightarrow a^2-2a+1\geqslant 0 \Rightarrow 2a-a^2\leqslant 1$

$\Rightarrow aRa$ بازتابی

۲) فرض کنیم: $aRb \Rightarrow a+b-ab\leqslant 1$

$\Rightarrow b+a-ba\leqslant 1 \Rightarrow bRa$ تقارنی

۳) اگر $a=1$ دراین صورت:

$a+c-ac=c+1-c=1\leqslant 1$

اگر $c=1$ نیز مشابه بالا ثابت می‌شود که:

$a+c-ac\leqslant 1$

درحالت $a=c=2$ که $a+c=ac$ و واضح است که

$a+c-ac=0\leqslant 1$

در بقیهٔ حالتهای ممکن و برای هر دو عدد طبیعی مانند a و c داریم:

$a+c<ac \Rightarrow (a+c)-ac<0\leqslant 1$

بنابراین هرگاه aRb و bRc آنگاه aRc یعنی گزارهٔ شرطی زیر چون همواره دارای تالی درست است پس ارزش درست دارد. لذا رابطهٔ خاصیت تعدی نیز دارد و بنابراین یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

$$\forall a,b,c\in N \text{ ، } [aRb\wedge bRc] \Rightarrow \underbrace{aRc}_{T}$$

۵- $f: z\to N$

داریم: $f(x)=\begin{cases}2x & x>0\\ -2x+1 & x\leqslant 0\end{cases}$

اگر $x_1, x_2>0$ و $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow$

$2x_1=2x_2 \Rightarrow x_1=x_2$

اگر $x_1, x_2\leqslant 0$ و $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow$

$-2x_1+1=-2x_2+1 \Rightarrow x_1=x_2$

بنابراین تابع در هر ضابطه یک به یک است از طرفی برد ضابطهٔ بالایی با توجه به این که $x>0$ عبارت است از مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج و برد ضابطهٔ پایینی با توجه به این که $x\leqslant 0$ عبارت است از مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد و چون برد ضابطه‌ها عضو مشترک ندارند لذا تابع درکل یک به یک است.

از طرفی همان‌طورکه در بالا ذکر شد، مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج توسط ضابطهٔ بالایی و مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد توسط ضابطهٔ پایینی پوشیده می‌شود و درکل مجموعهٔ دوم یعنی N پوشیده می‌شود و یا به عبارت دیگر $R_f=N$، پس تابع پوشا است.

-۶

$$x_c=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{2\alpha-4}{2}=\alpha-2$$

$$y_c=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{0+4\alpha-2}{2}=2\alpha-1$$

$$C\left|\begin{array}{l}\alpha-2\\2\alpha-1\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$OC=\sqrt{x_c^2+y_c^2}=\sqrt{2}$$

طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sqrt{(\alpha-2)^2+(2\alpha-1)^2}=\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$(\alpha-2)^2+(2\alpha-1)^2=2$$

$$\alpha^2-4\alpha+4+4\alpha^2-4\alpha+1=2$$

$$5\alpha^2-8\alpha+3=0$$

$$\alpha=\frac{4\pm\sqrt{16-15}}{5}=\frac{4\pm1}{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha=1\ ,\ \frac{3}{5}}$$

-۷ ریشه‌های معادله‌جدید را Z_1 و Z_2 می‌نامیم:

$$Z_1=x'^2+x'' \qquad Z_2=x''^2+x'$$

$$S=Z_1+Z_2=x'^2+x''+x''^2+x'$$

$$=x'^2+x''^2+x'+x''$$

$$S=(x'+x'')^2-2x'x''+x'+x''$$

$$S=(-\frac{b}{a})^2-2\times\frac{c}{a}+(-\frac{b}{a})$$

$$=(3)^2-2(1)+3=10$$

$$P=Z_1\cdot Z_2=(x'^2+x'')(x''^2+x')$$

$$P=(x'x'')^2+\underbrace{x'^3+x''^3}+x'x''$$

$$P=(x'x'')^2+(x'+x'')^3-3x'x''(x'+x'')+x'x''$$

$$P=(1)^2+(3)^3-3(1)(3)+1=20$$

معادلهٔ جدید : $Z^2-SZ+P=0 \Rightarrow$

$$Z^2-10Z+20=0$$

-۸

$$81^{\sin^2x}+81^{\cos^2x}=30 \Rightarrow$$

$$81^{\sin^2x}+81^{1-\sin^2x}=30$$

$$81^{\sin^2x}+\frac{81}{81^{\sin^2x}}=30 \Rightarrow$$

$$(81^{\sin^2x}=A) \Rightarrow A+\frac{81}{A}=30$$

$$A^2-30A+81=0 \Rightarrow$$

$$(A-3)(A-27)=0 \Rightarrow \left|\begin{array}{l}A=3\\A=27\end{array}\right.$$

$$81^{\sin^2x}=3 \Rightarrow 3^{4\sin^2x}=3^1 \Rightarrow$$

$$\sin^2x=\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1-\cos2x}{2}=\frac{1}{4}$$

$$\cos2x=\frac{1}{2} \Rightarrow 2x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}}$$

$$81^{\sin^2x}=27 \Rightarrow 3^{4\sin^2x}=3^3$$

$$\Rightarrow 4\sin^2x=3 \Rightarrow \sin^2x=\frac{3}{4}$$

$$\frac{1-\cos2x}{2}=\frac{3}{4} \Rightarrow \cos2x=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}}$$

-۹ معادلهٔ دوم دستگاه را در $tg\theta$ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{cases}2x=y\,tg\theta+\sin\theta\\2y\,tg\theta=x+\sin\theta\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x=y\,tg\theta+\sin\theta\\x=2y\,tg\theta-\sin\theta\end{cases}$$

معادلهٔ دوم را در ۲− ضرب می‌کنیم:

$$\begin{cases}2x=y\,tg\theta+\sin\theta\\-2x=-4y\,tg\theta+2\sin\theta\end{cases}$$

از جمع دو رابطهٔ دستگاه داریم:

$$-3y\,tg\theta+3\sin\theta=0$$

از رابطهٔ اخیر نتیجه می‌شود:

$$y=\cos\theta \qquad (1)$$

با قراردادن رابطهٔ (۱) در معادلهٔ اول دستگاه داریم:

$$y=\cos\theta:\ 2x=\cos\theta\,tg\theta+\sin\theta \Rightarrow$$

$$2x=2\sin\theta$$

پس خواهیم داشت:

$$x=\sin\theta \qquad (2)$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه خواهد شد:

$$\sin^2x+\cos^2x=1 \quad : \quad x^2+y^2=1$$

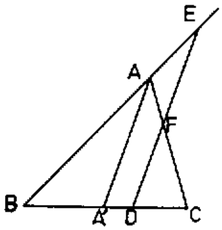
حل تشریحی تستهای دوم ریاضی

۱- گزینهٔ (۲) درست است. زیرا:

$$AA'\|DE \Rightarrow \frac{AE}{AB}=\frac{A'D}{A'B} \qquad (1)$$

$$AA'\|DF \Rightarrow \frac{AF}{AC}=\frac{A'D}{A'C=A'B} \ (2)$$

$$(1)\ ,\ (2) \Rightarrow \frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC} \Rightarrow \frac{AE}{AF}=\frac{AB}{AC}$$



۲- گزینهٔ (۴) درست است ، زیرا اگر BB' نیمساز زاویهٔ B باشد بنا به فرض مسأله

$B'C=6cm$ و $B'A=4cm$

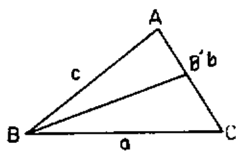
است، در نتیجه :

$$b=AC=4+6=10cm$$

خواهد بود. اما $a+b+c=40cm$ می‌باشد، پس:

$$b+c=40-10=30m$$

است.



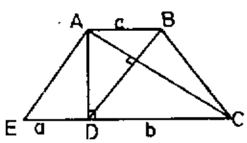
بنا به خاصیت نیمساز می‌توان نوشت:

$$B'C=\frac{b\cdot a}{a+c} \Rightarrow 6=\frac{10\times a}{30}$$

$$\Rightarrow a=18cm$$

۳- گزینهٔ (۳) درست است ، زیرا اگر ABCD ذوزنقه‌ای قائم‌الزاویه باشدکه اقطارش برهم عمود باشند، با فرض $\hat{A}=\hat{D}=90°$ ، از رأس A خطی موازی قطر BD رسم می‌کنیم تا امتداد قاعدهٔ CD را در نقطهٔ E قطع‌کند چهار ضلعی ABDE متوازی الاضلاع است . پس

$$DE=AB=a$$



است و مثلث AEC قائم الزاویهٔ در رأس A و $AD=h$ ارتفاع وارد بروتر این مثلث است. بنابراین داریم:

$$AD^2=DE\cdot DC \Rightarrow \boxed{h^2=a\cdot b}$$

(۲) -۴

$$[A\times(B\cup C)]-(A\times C')$$
$$=A\times[(B\cup C)-C']=A\times[\underbrace{(B\cup C)\cap C}_{\text{جذب}}]$$
$$=A\times C$$

۵- (۳) می‌دانیم کلاسهای هم‌ارزی هر رابطهٔ هم‌ارزی مجموعه‌های جدا ازهم هستند و نمی‌توانند عضو مشترک داشته باشند به عبارت دیگر:

$$\forall a,b\in A \ ،\ a\in[b] \iff [a]=[b]$$

حال با توجه به این که طبق فرض داریم:

$$\forall b\in A\ ;\ b\in[a]$$

درحقیقت تمامی اعضای A با $a\in A$ رابطه‌دارند پس رابطهٔ R فقط دارای یک کلاس هم‌ارزی می‌باشد یعنی باید همهٔ اعضای A با a در رابطه باشند و این ممکن نیست جز آن که :

$$R=A\times A$$

(توجه داریم که R باید هم‌ارزی باشد.)

۶- (۲) روش اول: گزینه‌های ۱ و ۲ و ۳ با توجه به این که $D_f=IR$ نمی‌توانند توابعی یک‌به‌یک را معین کنند لذا:

$$f(x)=x^۲|x|$$

یک‌به‌یک است .

روش دوم: $f(x)=x^۲|x|$ یک‌تابع دوضابطه‌ای است (برحسب این‌که $x\geqslant ۰$ یا $x<۰$) که بررسی خاصیت یک‌به یکی در آن به‌راحتی امکان‌پذیر است (رجوع کنید به برهان ۴، مقالهٔ تابع و بررسی‌خاصیت یک‌به یکی درانواع توابع).

(۳) -۷

ولی $f(۰,۰)=(۰,۰)$ و $f(۱,۱)=(۰,۰)$

$$(۰,۰)\neq(۱,۱)$$

پس تابع یک به یک نیست از طرفی اگر فرض‌کنیم

$$(۰,۱)\in IR^۲$$

دراین صورت $f(x,y)=(۰,۱)$ و یا

$$(x-y\ ,\ ۳x-۳y)=(۰,۱)$$

که معادله جواب‌ندارد پس تابع‌پوشا نیست!

۸- (۳) ریشهٔ معادله را مساوی x قرار می‌دهیم :

$$x=۲-\sqrt{۵}$$

چون می‌خواهیم ضرایب معادله‌حاصل رادیکال نداشته باشد:

$$x-۲=-\sqrt{۵}$$

$(-\sqrt{۵})$ را دریک‌طرف نگه می‌داریم وطرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$x^۲-۴x+۴=۵$$
$$x^۲-۴x-۱=۰$$

۹- (۳) معادلهٔ اول را در (۲) و معادلهٔ دوم را در (−۱) ضرب می‌کنیم. سپس آنها را با هم جمع می‌کنیم:

$$\begin{cases}۴x+۳y+۶z=۳/۵\\ -۳x-۲y-۵z=-۱/۲۵\end{cases}$$
$$x+y+z=۲/۲۵$$

۱۰- با توجه به تساوی زیر:

$$\frac{\sin x}{۱-\cos x}=\frac{۱+\cos x}{\sin x}$$

خواهیم داشت:

$$\left(\frac{\sin x}{۱-\cos x}\right)^{۲n-۱}+۳\left(\frac{۱+\cos x}{\sin x}\right)^{۲n-۱}$$
$$=\left(\frac{۱+\cos x}{\sin x}\right)^{۲n-۱}+۳\left(\frac{۱+\cos x}{\sin x}\right)^{۲n-۱}$$
$$=۴\left(\frac{۱+\cos x}{\sin x}\right)^{۲n-۱}=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲n-۳}$$
$$\left(\frac{۱+\cos x}{\sin x}\right)^{۲n-۱}=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲n-۱}$$
$$\Longrightarrow \frac{۱+\cos x}{\sin x}=\frac{۱}{۲}$$
$$۲+۲\cos x=\sin x \Longrightarrow (۲+۲\cos x)^۲=\sin^۲ x$$
$$۸+۸\cos x+۴\cos^۲ x=۱-\cos^۲ x$$
$$\Longrightarrow ۵\cos^۲ x+۸\cos x+۳=۰$$
$$(۵\cos x+۳)(\cos x+۱)=۰ \Longrightarrow \begin{cases}\cos x=-۱\\ \cos x=\dfrac{-۳}{۵}\end{cases}$$

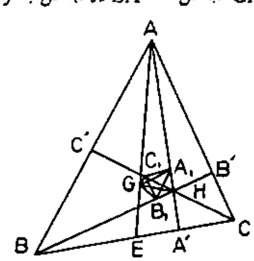
پس گزینهٔ (۱) صحیح است .

حل مسائل ریاضیات سال سوم

۱- اولاً: اگر AE میانهٔ رأس A و نقطهٔ G محل تلاقی میانه‌های مثلث ABC باشد داریم:

$$\frac{\overline{AA_۱}}{\overline{AA'}}=\frac{\overline{AG}}{\overline{AE}}=\frac{۲}{۳}$$

بنابراین خط $GA_۱$ مجانس خط EA' درتجانس به مرکز A و



نسبت تجانس $\frac{۲}{۳}$ است. لذا $GA_۱\parallel EA'$ است. پس:

$$GA_۱\perp AA'$$

یعنی $G\hat{A}_۱H=۹۰^\circ$ می‌باشد. در نتیجه نقطهٔ $A_۱$ بر دایره‌ای به قطر GH واقع‌است. به همین ترتیب ثابت می‌شود که نقاط $B_۱$ و $C_۱$ نیز روی دایره‌ای به قطر GH قرار دارند. پس پنج نقطه $A_۱$، $B_۱$، $C_۱$، G و H روی یک دایره‌اند.

ثانیاً : پنج‌ضلعی $GB_۱HA_۱C_۱$ محاطی‌است. پس:

$$B_۱\hat{A}_۱C_۱=B_۱\hat{H}C_۱=\frac{\widehat{B_۱GC_۱}}{۲}$$

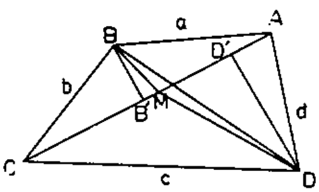
از طرفی $B_۱\hat{H}C_۱=B\hat{A}C$ است. درنتیجه:

$$B_۱\hat{A}_۱C_۱=B\hat{A}C$$

می‌باشد. به همین ترتیب ثابت می‌شود که دیگر زوایای نظیر در دو مثلث $A_۱B_۱C_۱$ و ABC با هم برابرند. پس این دومثلث متشابه‌اند.

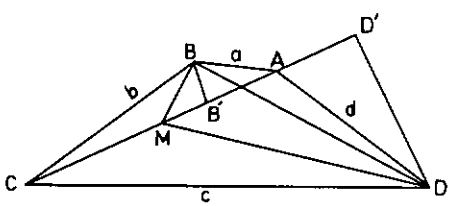
۲- در چهارضلعی $ABCD$ فرض می‌کنیم $AB=a$ و $BC=b$ و $CD=c$ و $DA=d$ باشد. تصاویر نقاط B و D روی قطر AC را B' و D' و وسط قطر AC را نقطهٔ M می‌نامیم. در مثلثهای ABC و ACD رابطه‌های زیر را می‌توان نوشت :

$$\triangle ABC : |a^۲-b^۲|=۲AC\cdot MB' \quad (۱)$$
$$\triangle ACD : |c^۲-d^۲|=۲AC\cdot MD' \quad (۲)$$



حال اگر $a-b$ و $c-d$ متحدالعلامه باشند نقطهٔ M روی پاره خط $B'D'$ قرار می‌گیرد واز جمع کردن رابطه‌های (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$(a^۲+c^۲)-(b^۲+d^۲)=۲AC(MB'+MD')$$
$$=۲AC\cdot B'D'$$



و درصورتی که $a-b$ و $c-d$ مختلف‌العلامه باشند نقطهٔ M در امتداد پاره خط $B'D'$ واقع می‌شود که در این حالت از تفریق رابطه‌های (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$(\sim s \Longrightarrow r)$ هم‌ارزنباشند وبا توجه به این‌که $r\equiv F$ پس $(\sim s \Longrightarrow r)$ بـه انتفای مقدم دارای ارزش درست است بنابراین‌باید $(p \Longleftrightarrow q)$ نادرست‌باشد و چون $p\equiv T$ پس: باید $q\equiv F$.

حال می‌توان بسا توجه به ارزشهای تعیین شده بـرای گزاره‌های r و p و q ارزش گزارهٔ موردنظر را تعیین کرد که ارزش آن همواره درست‌است.

۴- درکتاب ریاضیات جدید سال اول ثابت شدکه

$\varnothing'=M$ و $M'=\varnothing$

حال فرض کنیم $A'\cup B=M$ پس :

$(A'\cup B)'=M'$

بنابراین :

$\underline{A\cap B'=\varnothing}$

اگر فرض کنیم $(A\cap B')=\varnothing$ پس $(A\cap B')'=\varnothing'$ وبنابراین خواهیم داشت :

$\underline{A'\cup B=M}$

۵- کوچکترین مضرب مشترک دو عبارت برابر است با: عوامل مشترک با بزرگترین‌توان ضرب‌در عوامل غیرمشترک

$$A=2^{11}\times 3^{2}(x-y)(x^2+y^2+xy)(x+y)^2$$

$$B=2^{7}\times 3^{3}(x+y)(x^2+y^2-xy)(x-y)^2$$

ک م م B , A $= 2^{11}\times 3^{3}(x-y)^2(x+y)^2$
$(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy)$

ک م م B , A $= 2^{11}\times 3^{3}(x^2-y^2)^2$
$(x^4+y^4+2x^2y^2-x^2y^2)$

ک م م B , A $= 2^{11}\times 3^{3}(x^2-y^2)^2$
$(x^4+y^4+x^2y^2)$

بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عبارت، برابر است با عوامل مشترک باکوچکترین توان،

ب م م B , A $= 2^{7}\times 3^{2}(x-y)(x+y)$

ب م م B , A $= 2^{7}\times 3^{2}(x^2-y^2)$

۶-

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(2)^2}+\sqrt[3]{(\sqrt{2})^2}+\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}\qquad \begin{matrix} a=2\\ b=\sqrt{2}\end{matrix}$$

داریم :

$$a-b=(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{ab})$$

مخرج کسر فوق به صورت

$$(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{ab})$$

است که برای گویاکردن باید صورت و مخرج را در $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$ ضرب کرد ، پس:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(2)^2}+\sqrt[3]{(\sqrt{2})^2}+\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}\times\frac{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{\sqrt{2}}}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{\sqrt{2}}}{2-\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{\sqrt{2}}}{2-\sqrt{2}}\times\frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{(\sqrt[3]{2}-\sqrt[6]{2})(2+\sqrt{2})}{4-2}$$

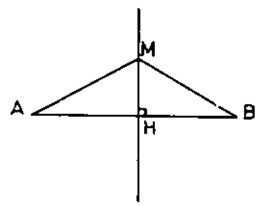
$$=\frac{(\sqrt[3]{2}-\sqrt[6]{2})(2+\sqrt{2})}{2}$$

حل تشریحی تستهای سال اول

۱- گزینهٔ (۱) درست است. زیرا مکان‌هندسی نقاطی‌که از دونقطهٔ A وB به یك فاصله می‌باشند، عمود منصف پاره‌خط AB است. و چون $AB=8cm$ می‌باشد پس کمترین مقدار فاصلهٔ نقاط عمود منصف از نقاط A و B

$$HA=HB=\frac{8}{2}=4$$

می‌باشد بنابراین نقطه‌ای‌روی عمود منصف‌پاره‌خط AB وجود ندارد‌که ازنقاط A وB به‌فاصلهٔ ۳ سانتیمتر واقع باشد.



۲- می‌دانیم‌که مجموع تعداد اضلاع واقطاریك n ضلعی محدب مساوی $\frac{n(n-1)}{2}$ است. پس:

$$\frac{n(n-1)}{2}=36 \Longrightarrow n^2-n-72=0$$

$$\Longrightarrow n=9 \text{ و } n=-8$$

اما مجموع زوایای‌یك n ضلعی محدب‌برابر $(2n-4)$ قائمه است. پس :

قائمه $14=4-9\times 2=$ مجموع زوایای ۹ ضلعی

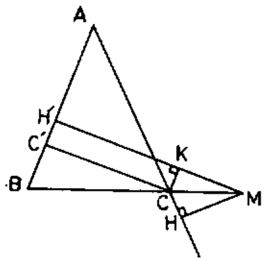
بنابراین‌گزارهٔ (۳) درست است.

۳- گزینهٔ (۴) درست‌است. زیرا اگردر مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB=AC)$ ارتفاع CC' را رسم کنیم و M نقطه‌ای واقع برامتداد قاعدهٔ این مثلث باشد واز این نقطه عمودهای MH و MH' را برساقهای مثلث یا امتداد آنها فرود آوریم واز نقطهٔ C عمود CK را بر MH' رسم‌کنیم، دومثلث قائم‌الـزاویهٔ MCK و MCH با هم برابرند و چهارضلعی $CKH'C'$ مستطیل است. پس :

$CC'=KH'$ و $MH=MK$

است. ازآن‌جا داریم:

$$MH'-MH=MH'-MK=KH'$$
$$=CC'=h_c=h_b$$



۴- (۲)

$$[\overbrace{(q\wedge p)\vee(}^{r}\sim q\vee p)] \overset{\text{شرکت‌پذیری}}{\equiv} [\overbrace{(q\wedge p)\vee}^{r}\sim q]\vee p$$

$$\equiv(p\vee\sim q)\vee p \overset{\text{جابه‌جایی‌وشرکت‌پذیری}}{\equiv} \sim q\vee(p\vee p)$$

$$\equiv \sim q\vee p$$

۵- (۲)

گزاره را می‌توان به صورت زیر نوشت:

(p طبیعی است) $\Longrightarrow$ (اگر p اول‌باشد)

که عکس‌نقیض‌آن‌به صورت زیر نوشته می‌شود:

$\underbrace{(\text{p اول‌نیست})}_{q} \Longrightarrow \underbrace{(\text{اگر p طبیعی‌نباشد})}_{p}$

پس p شرط کافی برای q و نیز می‌توان گفت q شرط لازم برای p است.

۶- (۳)

باتوجه به قضیهٔ‌یکتایی متمم نتیجه می‌گیریم‌که باید B' متمم A باشد یعنی باید $B'=A'$ یا $B=A$.

۷- (۴)

$$\sqrt[21]{\frac{a}{\sqrt[22]{a}}}=\sqrt[21]{\frac{\sqrt[22]{a^{22}}}{\sqrt[22]{a}}}=\sqrt[21]{\sqrt[22]{a^{21}}}=\sqrt[22]{a}$$

۸- (۴)

$$m^2x-m^2=mx-1$$
$$m^2x-mx=m^2-1$$

بایـد $\begin{cases} b=0\\ a\neq 0\end{cases}$ باشد .

$$(a^2+c^2)-(b^2+d^2)=2AC(MD'-MB')$$
$$=2AC\cdot D'B' \Longrightarrow$$
$$(a^2+c^2)-(b^2+d^2)=2AC\cdot B'D'$$

۳ - ترکیبی خطی از این بردارها مساوی با بردار صفر قرار می‌دهیم و ثابت می‌کنیم که ضرایب این ترکیب‌خطی باید همگی‌صفر باشند.

$$a(x^3+x^2+x+1)+b(x^2+x+1)$$
$$+c(x+1)+d5=0x^3+0x^2+0x+0$$
$$\Longrightarrow ax^3+(a+b)x^2+(a+b+c)x$$
$$+(a+b+c+5d)=0x^3+0x^2+0x+0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \boxed{a=0} \\ a+b=0 \Longrightarrow \boxed{b=0} \\ a+b+c=0 \Longrightarrow \boxed{c=0} \\ a+b+c+5d=0 \Longrightarrow \\ 5d=0 \Longrightarrow \boxed{d=0} \end{cases}$$

پس بردارها مستقل خطی‌اند.

۴ - فرض کنیم مثلاً بردار v_i مضرب ناصفری از بردار v_j باشد یعنی $v_i=kv_j$ که $k\neq 0$ دراین صورت:

$$v_i-kv_j=0$$

و یا:

$$0v_1+0v_2+\dots+0v_{i-1}+0v_{i+1}+\dots+$$
$$0v_{j-1}+0v_{j+1}+\dots+0v_n+v_i-kv_j=0$$

وهمان‌طور که مشاهده‌می‌شود، رابطهٔ اخیر یک ترکیب‌خطی از n بردار فوق‌است که مساوی با بردار صفرشده اما حداقل یکی‌از ضرایب آن یعنی $k-$ مخالف صفر است پس بردارها وابستهٔ خطی‌اند.

۵ - باید ثابت کنیم s نسبت به جمع وضرب اسکالر بسته است. (زیرمجموعه‌بودن s نسبت‌به v و ناتهی بودن آن واضح است.)

فرض کنیم: $r_1u\ ,\ r_2u\in s$

$$r_1u+r_2u=\overbrace{(r_1+r_2)}^{r_3}u=r_3u\in s$$

فرض کنیم: $\alpha\in IR\ ,\ ru\in s\Longrightarrow$

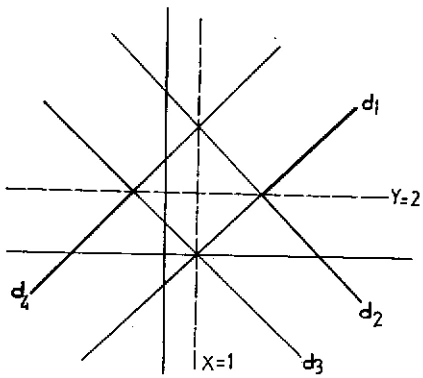
$$\alpha(ru)=\underbrace{(\alpha r)}_{r_1}u=r_1u\in s$$

پس s طبق‌قضیهٔ زیر فضای v است.

۶-

$$\begin{cases} x\geqslant 1 \\ y\geqslant 2 \end{cases} \Longrightarrow x-1-y+2=2$$
$$\Longrightarrow x-y=1 \qquad \text{خط } d_1$$
$$\begin{cases} x\geqslant 1 \\ y\leqslant 2 \end{cases} \Longrightarrow x-1+y-2=2$$
$$\Longrightarrow x+y=5 \qquad \text{خط } d_2$$
$$\begin{cases} x\leqslant 1 \\ y\geqslant 2 \end{cases} \Longrightarrow -x+1-y+2=2$$
$$\Longrightarrow x+y=1 \qquad \text{خط } d_3$$
$$\begin{cases} x\leqslant 1 \\ y\leqslant 2 \end{cases} \Longrightarrow -x+1+y-2=2$$
$$\Longrightarrow y-x=3 \qquad \text{خط } d_4$$

خطوط d_1 و d_2 و d_3 و d_4 رادرسم می‌کنیم. باتوجه‌به‌خطوط $x=1$ و $y=2$ شکل، قسمتهای دلخواه را انتخاب می‌کنیم:



۷ - می‌دانیم:

اگر $x\to 0 \Longrightarrow \sin ax\sim ax$

$$\Longrightarrow \text{حد مسأله} = \lim_{x\to 0}\frac{x+2x+3x+\dots+nx}{2x+4x+6x+2nx}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(1+2+3+\dots+n)}{x(2+4+6+\dots+2n)}$$
$$=\frac{1+2+3+\dots+n}{2+4+6+\dots+2n}=\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n(n+1)}=\frac{1}{2}$$

۸ -

$$S=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos x}$$

با توجه به اتحادهای $\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$ خواهیم داشت:

$$\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}=1$$
$$S=\sqrt{(a^2+b^2)(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2})-2ab(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2})}$$
$$=\sqrt{(a+b)^2\sin^2\frac{x}{2}+(a-b)^2\cos^2\frac{x}{2}}$$
$$=\left|(a+b)\cos\frac{x}{2}\right|\sqrt{1+(\frac{a+b}{a-b})^2 tg^2\frac{x}{2}}$$

با فرض: $tg y=\frac{a+b}{a-b}tg\frac{x}{2}$ داریم:

$$S=\left|(a+b)\cos\frac{x}{2}\right|\sqrt{1+tg^2 y}$$

ودر نتیجه داریم:

$$S=\left|(a+b)\cos\frac{x}{2}\sec y\right|$$

۹ - معادلهٔ:

$$(\sin x+\cos x)\sqrt{2}=tg x+cotg x$$

با توجه به اتحادهای

$$tg x+cotg x=\frac{2}{\sin 2x}$$

و

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$$

تبدیل به معادلهٔ زیر می‌شود:

$$\sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sin 2x}$$

وچون به ازای هرمقدار دلخواه x داریم:

$$\left|\sin(x+\frac{\pi}{4})\right|\leqslant 1 \quad \text{و} \quad \left|\frac{1}{\sin 2x}\right|\geqslant 1$$

معادلهٔ‌فوق تنها وقتی دارای جواب است که یکی از دو حالت زیر را داشته باشیم:

$$\text{(الف)}\begin{cases}\sin(x+\frac{\pi}{4})=1 \\ \sin 2x=1\end{cases}$$

$$\text{(ب)}\begin{cases}\sin(x+\frac{\pi}{4})=-1 \\ \sin 2x=-1\end{cases}$$

حالت الف: از معادلات دستگاه (الف) نتیجه می‌شود

$$\text{(الف)}\begin{cases}x=2m\pi+\frac{\pi}{4} \\ x=n\pi+\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

که جواب مشترک دومعادلهٔ دستگاه (الف) چنین است:

$$\boxed{x=۲k\pi+\frac{\pi}{۴}}$$

حالت ب: از معادلات دستگاه (ب) نتیجه می‌شود:

$$(ب)\quad\begin{cases}x=۲m\pi-\frac{۳\pi}{۴}\\[2mm] x=n\pi-\frac{\pi}{۴}\end{cases}$$

بدیهی است که در این‌حالت دومعادلهٔ دستگاه جواب مشترکی ندارد . بنابراین جواب عمومی معادلهٔ مفروض :

$$x=۲k\pi+\frac{\pi}{۴}$$

می‌باشد.

حل تشریحی تستهای سوم ریاضی

۱ - گزینهٔ (۳) درست است زیرا اگر قطری را که از نقطهٔ مفروض M می‌گذرد رسم کنیم:

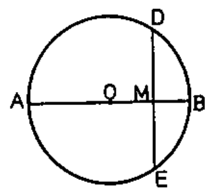
$$MB=۲ \quad و \quad MA=۸$$

خواهد بود. حال وتر DE را که عمود بر قطر AB است رسم می‌کنیم. می‌دانیم که این وتر کوچکترین وتری است که از نقطهٔ M در دایره رسم می‌شود. بنابه خاصیت قوت نقطه نسبت به دایره می‌توان نوشت:

$$\overline{MA}\cdot\overline{MB}=\overline{MD}\cdot\overline{ME}=-MD^{۲}\Longrightarrow$$

$$MA\cdot MB=MD^{۲}\Longrightarrow MD^{۲}=۸\times۲=۱۶$$

$$\Longrightarrow MD=۴\Longrightarrow DE=۸$$



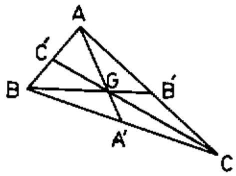
۲ - می‌دانیم که کوچکترین میانهٔ مثلث، میانه‌ای است که نظیر بزرگترین ضلع مثلث باشد. بنابراین باید میانهٔ نظیر ضلعی را که اندازه‌اش برابر ۱۳ است به دست آوریم. یعنی با فرض $a=۱۳$ داریم:

$$m_a=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲(b^{۲}+c^{۲})-a^{۲}}$$

$$=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲(۲۵+۱۴۴)-۱۶۹}$$

$$m_a=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶۹}=\frac{۱۳}{۲}=۶/۵$$

بنابراین گزینهٔ (۲) جواب است.

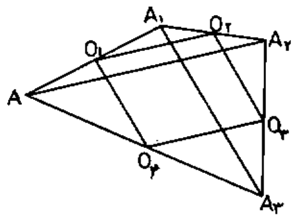


نکته : با توجه به این‌که مثلثی با اضلاع ۵ و ۱۲ و ۱۳ (که یک‌دسته‌عدد فیثاغورثی است) مثلثی قائم‌الزاویه‌است که وتر آن برابر ۱۳ می‌باشد ، پس کوچکترین میانهٔ این مثلث ، میانه وارد بر وتر است که اندازهٔ آن نصف وتر یعنی

$$\frac{۱۳}{۲}=۶/۵$$

می‌باشد. پس گزینهٔ (۲) درست است.

۳ - گزینهٔ (۲) درست‌است زیرا نتیجهٔ ترکیب دوتقارن مرکزی، یک‌انتقال و نتیجه‌ترکیب یک‌انتقال و یک‌تقارن‌مرکزی، یک‌تقارن مرکزی است.



راه دیگر : اگر $O_۱$ و $O_۲$ و $O_۳$ سه مرکز تقارن‌مفروض باشند، فرض می‌کنیم نقطهٔ $A_۱$ قرینهٔ نقطهٔ مفروض A نسبت به نقطهٔ $O_۱$ و نقطهٔ $A_۲$ قرینهٔ‌نقطهٔ $A_۱$ نسبت‌به نقطهٔ $O_۲$ و نقطهٔ $A_۳$ قرینهٔ‌نقطهٔ $A_۲$ نسبت به نقطهٔ $O_۳$ باشد. اگراز $A_۳$ به A وصل کنیم و وسط پاره خط $AA_۳$ را $O_۴$ بنامیم چهار ضلعی

$$O_۱O_۲O_۳O_۴$$

متوازی‌الاضلاع است (متوازی‌الاضلاع وارینیون چهار ضلعی $(AA_۱A_۲A_۳$. پس :

$$O_۴O_۳=O_۱O_۲ \quad و \quad O_۴O_۳\parallel O_۱O_۲$$

است. بنابراین‌نقطهٔ $O_۴$ نقطه ثابتی است و در نتیجه نقطهٔ $A_۳$ قرینهٔ مرکزی‌نقطهٔ A نسبت‌به نقطهٔ ثابت $O_۴$ است. یعنی نتیجه ترکیب سه‌تقارن مرکزی یک‌تقارن مرکزی می‌باشد.

۴ - اگریال چهار وجهی منتظم‌را a فرض‌کنیم مساحت کل‌چهار وجهی منتظم $a^{۲}\sqrt{۳}$ وحجم چهار وجهی منتظم برابر $\frac{a^{۳}\sqrt{۲}}{۱۲}$ است پس :

$$a^{۲}\sqrt{۳}=۹\sqrt{۳}\Longrightarrow a^{۲}=۹\Longrightarrow a=۳$$

اندازهٔ یال چهار وجهی منتظم

$$v=\frac{a^{۳}\sqrt{۲}}{۱۲}\Longrightarrow v=\frac{۲۷\sqrt{۲}}{۱۲}=\frac{۹\sqrt{۲}}{۴}$$

بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

۵ - (۲)

زیرا : بردار صفر فضای $IR^{۳}$ یعنی $(۰,۰,۰)$ در مجموعهٔ $\{(x,y,z)\mid x+y<z\}$ نمی‌باشد لذا این‌مجموعه نمی‌تواند نسبت‌به عمل‌جمع تشکیل گروه بدهد (عضو خنثی را ندارد) پس زیرفضا نیز نمی‌باشد.

۶ - (۱)

زیرا : درفضای برداری IR^{n} هر $n+۱$ بردار وبیشتر وابستهٔ خطی‌اند.

۷ - (۴)

زیرا: شرط‌لازم وکافی برای‌آن‌که بردارهای (a,b) و (c,d) در $IR^{۲}$ مستقل‌خطی باشند‌آن است‌که

$$ad\neq bc \quad یا \quad ad-bc\neq ۰$$

پس دراین تست باید $ab\neq ۳۰$.

۸ - (۳)

این مسأله جزء مسائل ریاضیات جدید سوم ریاضی در برهان ۴ طرح ودرهمین شماره اثبات‌شده (مسأله ۴).

۹ - (۲)

$$a+[\underbrace{(b'+a')\cdot a'}_{جذب}]+a$$

$$=a+(a')+a=۱+a=۱$$

۱۰ - (۱)

$$(۱/۰۰۲)^{۵}=(۱+۰/۰۰۲)^{۵}\qquad\begin{cases}a=۱\\ b=۰/۰۰۲\end{cases}$$

$$\Longrightarrow (a+b)^{۵}=a^{۵}+۵a^{۴}b+۱۰a^{۳}b^{۲}+\cdots$$

$$(۱+۰/۰۰۲)^{۵}=$$

$$۱+۵(۰/۰۰۲)+۱۰(۰/۰۰۲)^{۲}+\cdots$$

$$(۱/۰۰۲)^{۵}=۱+۰/۰۱+۰/۰۰۰۰۴$$

$$(۱/۰۰۲)^{۵}=۱/۰۱۰۰۴$$

پس گزینهٔ (۱) درست است.

۱۱ - (۴)

$$-\sin^{۲}\pi x\geqslant ۰\Longrightarrow \sin\pi x=۰$$

$$\Longrightarrow \pi x=k\pi\Longrightarrow x=k$$

پس داخل‌رادیکال همواره باید‌صفر باشد. بنابراین

$$y=\sin\frac{\pi}{۲}x$$

چون x عددصحیح‌است پس برد تابع $\{-۱,۰,۱\}$ است.

۱۲ - ابتدا طرفین معادله‌را بر ۳ تقسیم می‌کنیم:

$$۶\cos^{۲}x+۶\sin x\cos x-۳=۰\Longrightarrow$$

$$۲\cos^{۲}x+۲\sin x\cos x-۱=۰$$

حل مسائل برهان شمارهٔ ۵

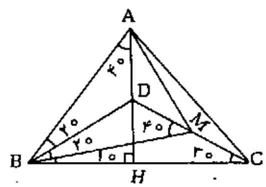
حل مسائل سال اول

۱- در مثلث متساوی‌الساقین ABC زاویهٔ رأس

$B\hat{A}C = 80°$

است، پس $A\hat{B}C = A\hat{C}B = 50°$ می‌باشد، ارتفاع رأس A را رسم می‌کنیم و نقطهٔ تقاطع CM با این ارتفاع را D می‌نامیم. از D به B وصل می‌کنیم مثلث DBC متساوی‌الساقین است. (چرا؟) پس:

$$DB = DC \quad \text{و} \quad D\hat{C}B = 30° \Longrightarrow DBC = 30°$$



از آنجا:

$$D\hat{B}M = D\hat{B}C - M\hat{B}C = 30° - 10° = 20°$$

و

$$A\hat{B}D = A\hat{B}H - D\hat{B}H = 50° - 30° = 20°$$

$$\Longrightarrow D\hat{B}M = D\hat{B}A = 20° \qquad (1)$$

$$\triangle ABH:\ B\hat{A}H = 90° - 50° = 40°$$

و

$$D\hat{M}B = M\hat{B}C + M\hat{C}B = 10° + 30° = 40°$$

$$\Longrightarrow D\hat{M}B = D\hat{A}B = 40° \qquad (2)$$

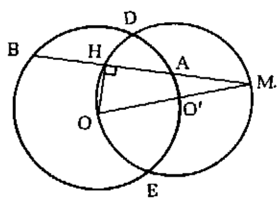
از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که دو مثلث ABD و MBD که در ضلع BD مشترک و زوایای متناظر متساوی دارند، با هم برابرند. پس $AB = BM$، یعنی مثلث ABM متساوی‌الساقین است که چون زاویهٔ رأسش

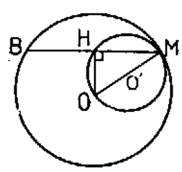
$$A\hat{B}M = 40°$$

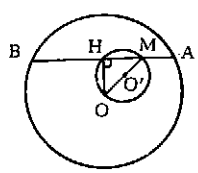
می‌باشد پس:

$$A\hat{M}B = B\hat{A}M = 70°$$

۲- از نقطهٔ O مرکز دایره به نقاط M و H وصل می‌کنیم. می‌دانیم خطی که مرکز یک دایره را به وسط وتری از آن دایره وصل می‌کند، عمود منصف آن وتر است. پس OH عمود منصف







وتر AB است. در نتیجه $OHM = 90°$ می‌باشد. از طرفی پاره‌خط OM ثابت است. پس نقطهٔ H روی دایره‌ای به قطر OM قرار دارد. یعنی مکان‌هندسی نقطهٔ H وسط وترهای رسم شده از نقطهٔ M دایره، یا بخشی از دایرهٔ به قطر OM است.

بحث: ۱) اگر نقطهٔ M خارج دایرهٔ مفروض قرار داشته باشد و نقاط تقاطع دایرهٔ به قطر OM با دایرهٔ مفروض را D و E بنامیم، مکان‌هندسی نقطهٔ H بخشی از دایرهٔ به قطر OM است که داخل دایرهٔ C(O و R) قرار دارد با منظور کردن نقاط D و E که این دو نقطه نقاط تماس مماسهایی هستند که از نقطهٔ M بر دایره رسم می‌شوند. شعاع دایرهٔ مکان هندسی نقطهٔ H در این حالت، از $\frac{R}{2}$ بزرگتر می‌باشد.

۲) اگر نقطهٔ M روی دایرهٔ مفروض واقع باشد تمام نقاط دایرهٔ به قطر OM به مکان‌هندسی نقطهٔ H تعلق دارد. در این حالت دایرهٔ به قطر OM شعاعی برابر $\frac{R}{2}$ دارد و در نقطهٔ M بر دایرهٔ مفروض مماس است.

۳) اگر نقطهٔ M داخل دایرهٔ مفروض قرار داشته باشد مکان هندسی نقطهٔ H تمام دایرهٔ به قطر OM است و در این حالت شعاع دایرهٔ مکان هندسی نقطهٔ H، از $\frac{R}{2}$ کوچکتر است.

۴) اگر نقطهٔ M بر نقطهٔ O مرکز دایره منطبق باشد دایرهٔ مکان‌هندسی نقطهٔ H به یک نقطه که همان نقطهٔ O مرکز دایرهٔ مفروض است تبدیل می‌شود.

۳-

$$(\sim r \wedge p) \equiv T \nearrow \ \sim r \equiv T \rightarrow r \equiv F$$

$$(\sim r \wedge p) \equiv T \searrow \ p \equiv T$$

از طرفی چون طبق فرض گزارهٔ

$$(p \Longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow (r \Longrightarrow \sim s)$$

نادرست است، لذا می‌بایست گزارهٔ $(p \Longleftrightarrow q)$ و گزارهٔ

$$(2\cos^2x-1)+\sin 2x=0 \Longrightarrow$$

$$\cos 2x+\sin 2x=0$$

$$\cos 2x=-\sin 2x=\cos(\frac{\pi}{2}+2x)\Longrightarrow$$

$$2x=2k\pi\pm(\frac{\pi}{2}+2x)$$

$$2x=2k\pi-\frac{\pi}{2}-2x \Longrightarrow 4x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$$

$$\Longrightarrow x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$$

پس گزینهٔ (۲) صحیح است.

۱۳ - بیشترین مقدار عبارت :

$$|6\cos x-3\cos^2x|$$

وقتی است که $x=\pi$ و یا $\cos x=-1$ و در نتیجه خواهیم داشت :

$$|6(-1)-3(-1)^2| = |-9|=9$$

پس گزینهٔ (۳) صحیح است.

۱۴ - کافی است طرفین معادله را بر $\cos^2x$ تقسیم کنیم:

$$\frac{3\sin x\cos x}{\cos^2x}=\frac{1+\sin^2x}{\cos^2x} \quad (\text{داریم: } \cos x\neq 0)$$

$$\Longrightarrow 3tgx=\frac{1}{\cos^2x}+tg^2x=$$

$$1+tg^2x+tg^2x=1+2tg^2x$$

$$\Longrightarrow 2tg^2x-3tgx+1=0$$

$$\Longrightarrow (tgx-1)(2tgx-1)=0$$

$$\Longrightarrow tgx=1 \quad \text{یا} \quad tgx=\frac{1}{2}$$

پس گزینهٔ (۳) صحیح است.

حل مسائل چهارم ریاضی

۱ -

$$\vec{v}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k} \Longrightarrow \vec{v}(2,-2,1)$$

$$\Longrightarrow |\vec{v}|=\sqrt{4+4+1}=3$$

$$\vec{v_1}\parallel\vec{v} \Longrightarrow |\vec{v_1}|=|k|.|\vec{v}|\Longrightarrow$$

$$12=|k|\times 3 \Longrightarrow k=\pm 3 \Longrightarrow \vec{v_1}=3\vec{v},$$

$$\vec{v_1}'=-3\vec{v} \Longrightarrow$$

$$\vec{v_1}(6,-6,3) \text{ و } \vec{v_1}'(-6,+6,-3)$$

۲ -

$$\vec{v_1}=\vec{i}+2\vec{k} \text{ و } \vec{v_2}=3\vec{j}+\vec{k} \text{ و } \vec{v_3}=3\vec{i}+\vec{j}$$

$$\vec{v_1}+\vec{v_3}=(\vec{i}+2\vec{k})+(3\vec{i}+\vec{j})$$

$$=4\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}=\vec{R}$$

$$\Longrightarrow \vec{R}(4,1,2) \text{ و } \vec{v_2}(0,3,1)$$

$$|\vec{v_2}|=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$$

$$\Longrightarrow \vec{R}\cdot\vec{v_2}=0+3+2=5 \Longrightarrow$$

$$Pr_{\vec{v_2}}\vec{R}=\frac{\vec{R}\cdot\vec{v_2}}{|\vec{v_2}|}=\frac{5}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

۳ - بنا به تعریف داریم:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\wedge\vec{c})$$

حال اگر

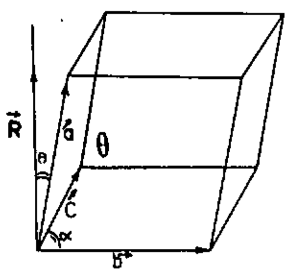
$$\vec{b}\wedge\vec{c}=R \quad \text{و} \quad (\vec{b},\vec{c})=\alpha$$

و $(\vec{a},\vec{R})=\theta$ اختیار شود داریم:

$$|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\,|\sin\alpha|\cdot\cos\theta$$

با توجه به این که $|\sin\alpha|$ و $\cos\theta$ حداکثر برابر ۱ می‌باشند پس :

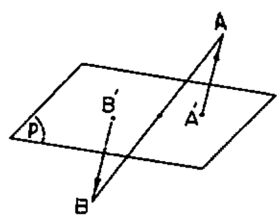
$$|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}|\leqslant|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|$$



۴ - اگر تصاویر نقاط A و B روی صفحهٔ P را به ترتیب A′ و B′ بنامیم در صورتی که $\overline{A'A}$ و $\overline{B'B}$ مختلف‌العلامه باشند نقاط A و B در دوطرف صفحهٔ P واقع‌اند و در این صورت پاره‌خط AB صفحهٔ P را قطع خواهد کرد. اما وقتی نقاط A و B در دوطرف صفحهٔ $P(x,y,z)=0$ واقع‌اند که : $P(A)\cdot P(B)<0$

در این مسأله:

$$P: 2x+y-2z+3=0$$



$$A(1,0,2) \quad \text{و} \quad B(-1,2,2)$$

$$P(A)\cdot P(B)=(2+0-4+3)(-2+2-4+3)$$

$$=(+1)(-1)=-1<0$$

بنابراین پاره‌خط AB صفحهٔ P را قطع می‌کند.

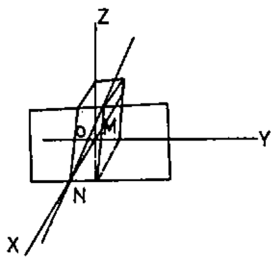
۵ - معادلهٔ صفحه‌ای را که از نقطهٔ M برمحور xها عمود می‌شود می‌نویسیم (صفحهٔ P) ونقطهٔ تقاطع این صفحه با محور xها را به دست می‌آوریم. اگر این نقطه را N بنامیم معادلهٔ خط MN جواب مسأله است.

$$M(2,1,3) \quad , \quad P: x=2 \quad \text{یا} \quad x-2=0$$

$$\begin{cases} x-2=0 \\ z=0 \\ y=0 \end{cases} \Longrightarrow N(2,0,0) \Longrightarrow$$

$$MN/x=2 \quad \text{و} \quad \frac{y-0}{1-0}=\frac{z-0}{3-0}$$

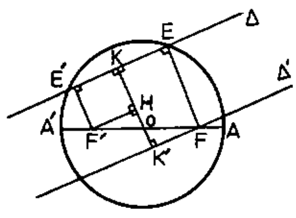
$$\Longrightarrow MN: \begin{cases} x=2 \\ 3y-z=0 \end{cases} \quad \text{معادلهٔ خط MN}$$



۶ - بیضی به کانونهای F و F′ و دایرهٔ اصلی $(o,\dot{a})$ را درنظر می‌گیریم. اگر خط Δ مماس بر بیضی باشد و نقاط برخورد این خط مماس با دایرهٔ اصلی بیضی E و E′ باشد، این دونقطه تصاویر کانونهای F و F′ روی خط Δ می‌باشند. (قضیة: تصاویر کانونهای بیضی روی هرخط مماس بر بیضی روی دایرهٔ اصلی آن بیضی واقع‌اند) . یعنی $FE\perp\Delta$ و $F'E'\perp\Delta$ و داریم :

$$FE\cdot F'E'=b^2 \quad \text{یا} \quad \overline{FE}\cdot\overline{F'E'}=b^2$$

(قضیة: حاصل‌ضرب فاصله‌های دوکانون بیضی از هرخط مماس بربیضی برابر مقدار ثابت b^2 است.)



حال اگر از کانون F خط Δ′ را موازی خط مماس Δ رسم کنیم واز نقطهٔ O مرکز بیضی خطی عمود برخطوط Δ و Δ′

رسم کنیم تا این دو خط را در نقاط K و K' قطع کند، با توجه به این که چهارضلعیهای $FEKK'$ و $F'E'KH$ مستطیل و دو مثلث قائم الزاویهٔ OFK' و $OF'H$ متساوی‌اند (شکل بالا). خواهیم داشت:

$$FE = KK' = OK + OK'$$
$$F'E' = KH = OK - OH = OK - OK'$$
$$FE\ F'E' = (OK+OK')(OK-OK')$$
$$\Rightarrow b^2 = OK^2 - OK'^2$$
$$\Rightarrow \boxed{OK^2 - OK'^2 = b^2}$$

۷-

1) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r \quad \wedge$

2) $(r \wedge u) \Rightarrow t \quad \wedge$

3) $\sim p$

$\therefore \sim u \vee t$

4) $r \Rightarrow (u \Rightarrow t)$ از ۲) و عطف مقدمات

5) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (u \Rightarrow t)$ از ۱) و ۴) و قیاس

6) $\sim p \vee q \equiv p \Rightarrow q$ از ۳) و ادخال فاصل

7) $u \Rightarrow t$ از ۵) و ۶) و انتزاع

8) $\therefore \sim u \vee t$ از ۷) و تبدیل شرطی به فصلی

۸- اگر مقدم گزاره یعنی $\exists x ; [p(x) \wedge q(x)]$ نادرست باشد که گزارهٔ شرطی به انتفای مقدم دارای ارزش درست است و اگر مقدم درست باشد پس x_1 ای متعلق به دامنهٔ متغیر هست که x_1 خاصیت p دارد و x_1 خاصیت q دارد، بنابراین:

$$\exists x_1 ;\ p(x_1) \quad \text{و} \quad \exists x_1 ;\ q(x_1)$$

بنابراین $[\exists x_1\ p(x_1) \wedge \exists x_1\ q(x_1)]$ گزاره‌ای درست است.

۹- می‌بایست ثابت کنیم:

$$\forall a,b \in R ،\ a+b=b+a$$

برای این منظور عبارت $(a+b)(1+1)$ را به دو شکل حساب می‌کنیم:

$$(a+b)(1+1) = a(1+1)+b(1+1) = a+a+b+b \quad (1)$$
$$(a+b)(1+1) = (a+b)1+(a+b)1 = a+b+a+b \quad (2)$$
$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow a+a+b+b = a+b+a+b$$
$$\Rightarrow a+b=b+a$$

۱۰-

$$\forall N>0 \ ;\ \exists M>0$$
$$x>M \Rightarrow x^2+4x>N$$
$$x^2+4x > M \Leftrightarrow x^2+4x+4 > M+4$$
$$\Leftrightarrow (x+2)^2 > M+4$$
$$\Leftrightarrow |x+2| \sqrt{M+4}$$

داریم: $|a|-|b| \leqslant |a \pm b|$

اگر: $|x|-|2| > \sqrt{M+4}$

$$\Rightarrow |x+2| > \sqrt{M+4}$$
$$\Leftrightarrow |x| > \sqrt{M+4}+2$$
$$\Rightarrow M \geqslant \sqrt{M+4}+2$$

۱۱- صورت را به حاصل‌ضرب تبدیل می‌کنیم:

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\sin\sqrt{x}-\sin\sqrt{2}}{x-2}$$
$$= \lim_{x \to 2} \frac{2\cos\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{2}\ \sin\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{2}}{x-2}$$
$$x \to 2 \Rightarrow \sin\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{2} \sim \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{2}$$
$$\Rightarrow \lim_{x \to 2} \frac{2\cos\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{2}\right)}{x-2}$$
$$= \lim_{x \to 2} \frac{\cos\sqrt{2}(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{x-2}$$
$$= \lim_{x \to 2} \cos\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2} \times \frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$$
$$= \lim_{x \to 2} \cos\sqrt{2} \times \frac{x-2}{(x-2)(2\sqrt{2})}$$
$$\Rightarrow \text{حد مسأله} = \frac{\cos\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow$$

تابع فوق در $x_0 = 2$ مشتق‌پذیر است.

حل تشریحی تستهای چهارم ریاضی

۱- گزینهٔ (۴) درست است زیرا

$$\frac{5\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \pi$$

است. یعنی نقاط O،C،A (قطب دستگاه مختصات قطبی) روی یک خط راست واقع‌اند.

۲- گزینهٔ (۱) درست است زیرا:

$$\vec{a} = \vec{i}+2\vec{j}+\vec{k} \ \text{ و } \ \vec{b} = 2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k} \Rightarrow$$
$$\vec{a}(1,2,1) \ \text{ و } \ \vec{b}(2,1,-2) \Rightarrow$$
$$\vec{a} \wedge \vec{b}(-5,4,-3) \Rightarrow$$
$$|\vec{a} \wedge \vec{b}| = \sqrt{25+16+9} = 5\sqrt{2}$$

حال اگر تصاویر بردار $\vec{a} \wedge \vec{b}$ را p و q و r و تصاویر بردار یکه روی بردار $\vec{a} \wedge \vec{b}$ را α و β و γ فرض کنیم داریم:

$$\alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} = \frac{-5}{5\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$
$$\beta = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} = \frac{4}{5\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$$
$$\gamma = \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} = \frac{-3}{5\sqrt{2}} = \frac{-3\sqrt{2}}{10}$$

۳- گزینهٔ (۲) درست است. زیرا اگر

$$\vec{v}(a,b,c) \ \text{ و } \ \vec{u}(x,y,z)$$

باشد، بنابه نامساوی کوشی شوارتز

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leqslant |\vec{u}|\,|\vec{v}|$$

داریم:

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqslant (ax+by+cz)^2$$

در این مسأله اگر

$$\vec{v}(1,3,4) \ \text{ و } \ \vec{u}(x,2y,3z)$$

اختیار شود خواهیم داشت:

$$(1+9+16)(x^2+4y^2+9z^2) \geqslant$$
$$(x+6y+12z)^2 \Rightarrow$$
$$26(x^2+4y^2+9z^2) \geqslant 13^2 \Rightarrow$$
$$x^2+4y^2+9z^2 \geqslant \frac{13}{2}$$

پس کمترین مقدار $x^2+4y^2+9z^2$ برابر $\frac{13}{2}$ می‌باشد.

۴- گزینهٔ (۲) درست است زیرا:

$$D: \frac{x-1}{a+1} = \frac{y}{3b-2} = \frac{z}{2} \Rightarrow$$
$$\vec{v}(p=a+1 \ \text{ و } \ q=3b-2 \ \text{ و } \ r=2)$$

بردار هادی راستای D

$$p: 2x+y-z+4=0 \Longrightarrow$$

$\overrightarrow{v'}(2,1,-1)$ بردار نرمال صفحه

$$D \perp P \Longrightarrow \vec{v} \parallel \overrightarrow{v'} \Longrightarrow$$

$$\frac{a+1}{2}=\frac{3b-2}{1}=\frac{2}{-1} \Longrightarrow$$

$$a=-5 \quad \text{و} \quad 3b=0 \Longrightarrow a+3b=-5$$

۵- گزینهٔ (۴) درست است زیرا اگر ABCD یک تقسیم توافقی باشد دوایر به قطر AB و CD برهم عمودند. بنابراین بنا به خاصیت دو دایرهٔ عمود برهم

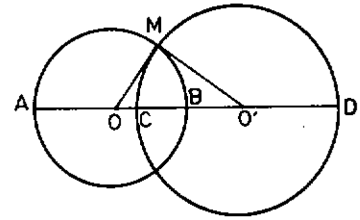
$$(R^2+R'^2=d^2)$$

داریم :

$$\left(\frac{AB}{2}\right)^2+\left(\frac{CD}{2}\right)^2=OO'^2 \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{4}(AB^2+CD^2)=OO'^2$$

$$\Longrightarrow \boxed{AB^2+CD^2=4OO'^2}$$



۶- (۲)
زیرا هیچ عدد گویایی نیست که حاصل‌جمع آن با هرعدد گویای دیگرصفر شود.

۷- (۳)

$$p \Longrightarrow (\sim q \Longrightarrow r) \equiv (p \wedge \sim q) \Longrightarrow r$$

بنابر قانون عطف مقدمات

$$(p \wedge \sim q) \Longrightarrow r \equiv \sim r \Longrightarrow (\sim p \vee q)$$

عکس نقیض

$$\sim r \Longrightarrow (\sim p \vee q) \wedge$$
$$\sim r$$
$$\therefore (\sim p \vee q) \equiv (p \Longrightarrow q)$$

۸- (۴)
زیرا مثلاً درحلقهٔ یکدار وجابجایی $(Z,+,0)$ عدد ۲ مقسوم علیه‌صفرنیست و وارون‌پذیر هم نمی‌باشد $(\frac{1}{2} \notin Z)$.

۹- (۴) زیرا :

$$\frac{1}{6} \in Q \ \text{و}\ 6 \in I \xRightarrow{\text{ایده‌آل}} 6 \times \frac{1}{6}=1 \in I \Longrightarrow I=Q$$

(ثابت می‌شود هر گاه عدد ۱ در ایده‌آل یک حلقه وجود داشته باشد آن ایده‌آل با حلقه برابر می‌شود.)

۱۰- (۱)
زیرا: اولاً هرعدد فرد به هر توانی مثبت فرداست وثانیاً اگر n^6 فردباشد می‌توان نتیجه گرفت که n فرد است چه این که اگر n زوج باشد هر توان مثبت آن نیز باید زوج باشد.

۱۱- (۱)
زیرا: هرگاه a و b دوعدد فرد متوالی باشند داریم:

$$a=2k+1 \quad \text{و} \quad b=2k+3$$

$$\Longrightarrow a+b=4k+4=4(k+1)$$

۱۲- (۳)
توابع قدرمطلق به ازای تعداد ریشه‌های ساده داخل قدر مطلق مشتق‌پذیر نیست.

$$|x|=0 \Longrightarrow x=0$$

$$|x|-1=0 \Longrightarrow |x|=1 \Longrightarrow x=\pm 1$$

$f'(x)=3x^2+1$ پس در سه نقطه

۱۳- (۲)

$$\underset{\text{مماس در A}}{m=3x^2+1} \Longrightarrow \underset{\text{مماس در A'}}{m=\frac{1}{3x^2+1}}$$

$$3x^2+1=\frac{1}{3x^2+1} \Longrightarrow$$

$$(3x^2+1)^2=1 \Longrightarrow 3x^2+1=1$$

$$\Longrightarrow x=0 \Longrightarrow A\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right.$$

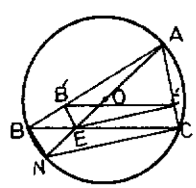
حل مسائل دوم تجربی

۱- از نقطهٔ N به نقاط A و B وصل می‌کنیم، زاویه‌های محاطی روبه‌رو به قطر ABN و ACN قائمه‌اند پس:

$$A\hat{B}N=A\hat{B'}E=90^\circ \Longrightarrow EB' \parallel BN$$

$$\Longrightarrow \frac{AB'}{AB}=\frac{AE}{AN} \qquad (1)$$

$$A\hat{C}N=A\hat{C'}E=90^\circ \Longrightarrow EC' \parallel NC$$



$$\frac{AC'}{AC}=\frac{AE}{A\text{ب}} \qquad (2)$$

$$(1)\ \text{و}\ (2) \Longrightarrow \frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC} \Longrightarrow B'C' \parallel BC$$

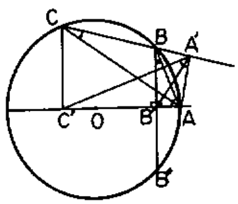
۲- مثلثهای $AA'B'$ و $AA'C'$ متشابه‌اند. زیرا در زاویهٔ $A'\hat{A}B'$ مشترک‌اند و $B'\hat{A'}A=A\hat{C'}A'$ است. چون :

$$AB'BA' \Longrightarrow \text{چهار ضلعی محاطی}$$

$$B'\hat{A'}A=B'\hat{B}A \qquad (1)$$

$$AA'CC' \Longrightarrow \text{چهار ضلعی محاطی}$$

$$A\hat{C'}A'=A\hat{C}A' \qquad (2)$$



از طرفی قطر OA عمود منصف وتر BB'' است پس :

$$\widehat{AB}=\widehat{AB''}$$

در نتیجه :

$$A\hat{C}B=A\hat{B}B' \qquad (3)$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) و (۳) نتیجه می‌شود که:

$$A\hat{C'}A'=A\hat{A'}B'$$

و در نتیجه :

$$\triangle AA'B' \sim \triangle AA'C' \Longrightarrow \frac{AA'}{AB'}=\frac{AC'}{AA'}$$

$$\Longrightarrow AA'^2=AB' \cdot AC'$$

۳- الف)

$$8ax-bx+8ay-by$$
$$=x(8a-b)+y(8a-b)$$
$$=(8a-b)(x+y)$$

ب)

$$a^4+a^2-a^3-a=a^3(a-1)+a(a-1)$$
$$=(a-1)(a^3+a)$$
$$=a(a-1)(a^2+1)$$

ج)

$$4a^4+b^4=4a^4+b^4+4a^2b^2-4a^2b^2$$
$$=(2a^2+b^2)^2-4a^2b^2$$

$$=(2a^2+b^2-2ab)(2a^2+b^2+2ab)$$

د) $a^3+a-10=a^3+a-2-8$

$$=(a^3-8)+(a-2)$$
$$=(a-2)(a^2+2a+4)+(a-2)$$
$$=(a-2)(a^2+2a+5)$$

۴- ابتدا کسرهای معادله‌های اول و دوم دستگاه را معکوس می‌کنیم:

$$\begin{cases}\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{3}{8}\\[2mm] \dfrac{y+z}{yz}=\dfrac{8}{5}\\[2mm] \dfrac{x+z}{xz}=\dfrac{3}{4}\end{cases}\xRightarrow{(xyz\neq 0 \text{ با فرض})}$$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{8}\\[2mm] \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{5}{8}\\[2mm] \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{4}\end{cases}$$

از تفاضل معادله‌های اول و دوم دستگاه داریم:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{4}\\[2mm] \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{4}\end{cases}$$

از جمع معادله‌های اخیر داریم:

$$\frac{2}{z}=1 \Rightarrow \boxed{z=2}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{x}=\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{x=4}$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{y}=\frac{3}{8} \Rightarrow \frac{1}{y}=\frac{3}{8}-\frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{y}=\frac{1}{8} \Rightarrow \boxed{y=8}$$

۵- فرض می‌کنیم ریشه‌های معادلهٔ اول α و β و معادلهٔ دوم α' و β' باشند.

بنا به فرض مسأله داریم:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha'}{\beta'}=k$$

و برای معادلهٔ اول خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=\dfrac{-b}{a}\\[2mm] \alpha\beta=\dfrac{c}{a}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\beta+k\beta=\dfrac{-b}{a}\\[2mm] \beta(k\beta)=\dfrac{c}{a}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}(k+1)\beta=\dfrac{-b}{a}\\[2mm] k\beta^2=\dfrac{c}{a}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\beta^2(k+1)^2=\dfrac{b^2}{a^2}\\[2mm] k\beta^2=\dfrac{c}{a}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{(k+1)^2}{k}=\frac{b^2}{ac} \qquad (1)$$

به همین ترتیب برای معادلهٔ دوم داریم:

$$\frac{(k+1)^2}{k}=\frac{q^2}{pr} \qquad (2)$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{q^2}{pr}=\frac{b^2}{ac}$$

۶- با فرض $\sin x=\dfrac{m^2-1}{m^2+1}$ داریم:

$$\cos^2 x=1-\sin^2 x=1-\left(\frac{m^2-1}{m^2+1}\right)^2$$
$$=1-\frac{(m^2-1)^2}{(m^2+1)^2}=\frac{(m^2+1)^2-(m^2-1)^2}{(m^2+1)^2}$$
$$=\frac{4m^2}{(m^2+1)^2}$$

بنابراین داریم:

$$\cos x=\pm\frac{2m}{m^2+1}$$

$$tg x+cotg x=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}$$
$$=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\frac{1}{\sin x\cos x}$$
$$=\frac{1}{\left(\dfrac{m^2-1}{m^2+1}\right)\left(\pm\dfrac{2m}{m^2+1}\right)}=\frac{\pm(m^2+1)^2}{2m(m^2-1)}$$

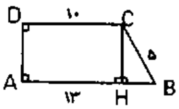
$$m=-2:\ tg x+cotg x=\pm\frac{25}{12}=\pm 2\frac{1}{12}$$

حل تشریحی تستهای دوم تجربی

۱- گزینهٔ (۲) درست است. زیرا اگر از رأس C عمود CH را بر قاعدهٔ AB فرود آوریم، داریم:

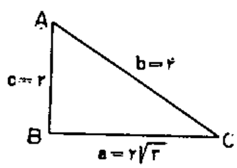
$$BH=AB-CD=13-10=3$$
$$BC=5 \Rightarrow HC^2=BC^2-BH^2=25-9=16$$
$$\Rightarrow HC=AD=4$$ ارتفاع ذوزنقه

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}(13+10)\times 4=46$$



۲- گزینهٔ (۳) درست است زیرا:

$$b^2=a^2+c^2 \Rightarrow 16=12+4 \Rightarrow$$
$$16=16 \Rightarrow \hat{B}=90^\circ \Rightarrow \hat{A}<90^\circ$$

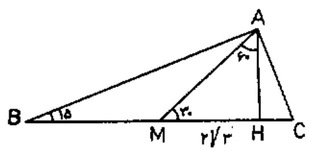


۳- گزینهٔ (۴) درست است زیرا اگر در مثلث قائم‌الزاویه $\hat{B}=15^\circ$ ، $(\hat{A}=90^\circ)ABC$ باشد، $A\hat{M}H=30^\circ$ و از آنجا:

$$MH=\frac{AM\sqrt{3}}{2} \text{ و } AH=\frac{AM}{2}$$

پس:

$$2\sqrt{3}=\frac{AM\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AM=4$$
$$\Rightarrow BC=2AM=8$$



جواب تستهای جبر دوم تجربی

۴- رابطه‌های بین ضرایب و ریشه‌های معادلهٔ:

$$mx^2+x-1=0$$

چنین است:

$$\begin{cases}x'+x''=\dfrac{-1}{m}\\[2mm] x'x''=\dfrac{-1}{m}\end{cases} \Rightarrow$$

$$x'^2x''+x'x''^2=x'x''(x'+x'')$$

$$=(\frac{-1}{m})(\frac{-1}{m})=2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{m^2}=2 \Rightarrow m^2=\frac{1}{2} \Rightarrow m=\pm\frac{1}{2}$$

پس گزینهٔ (۳) صحیح است.

۵ - برای تعیین مجموعهٔ جوابهای نامعادلهٔ:

$$(x^8-1)(x^{16}-1)\leqslant 0$$

می‌نویسیم:

$$(x^8-1)(x^{16}-1)=(x^8-1)(x^8-1)(x^8+1)$$
$$=(x^8-1)^2(x^8+1)\leqslant 0$$

چون عبارات x^8+1 و $(x^8-1)^2$ همواره مثبت می‌باشند پس نامعادله فقط درحالت $x^8-1=0$ جواب دارد:

$$x^8=1 \Rightarrow x=\pm 1$$
$$\{-1 , 1\} = \text{مجموعهٔ جواب}$$

پس گزینهٔ (۱) صحیح است.

۶ - برای تعیین جوابهای مشترک دو نامعادله ؛ کافی است مجموعهٔ جوابهای دستگاه توأم زیر را به دست آوریم:

$$\begin{cases}-x^2+3x<0\\ -3x^2-4x<1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2-3x>0\\ 3x^2+4x+1>0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x(x-3)>0\\ (x+1)(3x+1)>0\end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	$\frac{-1}{3}$	0	3	$+\infty$
x^2-3x	+	+	+	0 − 0	+	
$3x^2+4x+1$	+	0 −		+	+	

مجموعهٔ جوابهای مشترک نامعادلات فوق درفاصلهٔ $]-1 , 3[$ چنین است:

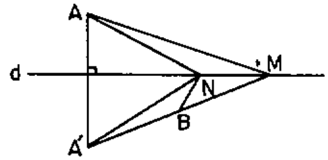
$$\{x|\frac{-1}{3}<x<0\} = \text{مجموعهٔ جوابهای مشترک}$$

$$=]\frac{-1}{3} , 0[$$

پس گزینهٔ (۲) صحیح است.

حل مسائل سوم تجربی

۱ - قرینهٔ یکی از دونقطهٔ A و B ، مثلاً قرینهٔ نقطهٔ A را نسبت به خط d به دست می‌آوریم و 'A می‌نامیم. از 'A به نقطهٔ B وصل می‌کنیم . امتداد A'B خط d را در نقطهٔ M قطع می‌کند. این نقطه جواب مسأله است.



یعنی: $NA-NB=NA'-NB=A'B$ بیشترین مقدار ممکن تفاضل نقاط واقع بر خط d ، از نقاط A و B است. زیرا اگر نقطه‌ای دیگر مانند N روی خط d اختیار کنیم، کافی است ثابت کنیم :

$$NA-NB<MA-MB$$

از A به A و B و 'A وصل می‌کنیم. داریم: $NA=NA'$ اما در مثلث NA'B داریم :

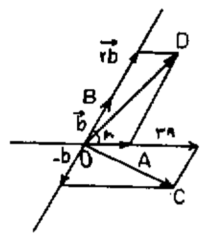
$$NA'-NB<A'B \Rightarrow NA-NB<A'B$$
$$\Rightarrow NA-NB<MA-MB$$

۲ - حل الف)

$$|\vec{a}|=2 \text{ و } |\vec{b}|=3 \text{ و } (\vec{a},\vec{b})=60^\circ$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{2a}|=6 \text{ و } |-\vec{b}|=|\vec{b}|=3$$

$$(\overrightarrow{2a} , -\vec{b})=180-(\vec{a},\vec{b})$$
$$=180^\circ-60^\circ=120^\circ$$



اما می‌دانیم که اگر مجموع دو بردار $\vec{v_1}$ و $\vec{v_2}$ برابر $\vec{R}$ و $(\vec{v_1} , \vec{v_2})=\alpha$ باشد داریم :

$$|\vec{R}|^2=|\vec{v_1}|^2+|\vec{v_2}|^2+2|\vec{v_1}|\cdot|\vec{v_2}|\cos(\vec{v_1},\vec{v_2})$$

یا

$$|\vec{R}|^2=|\vec{v_1}|^2+|\vec{v_2}|^2+2|\vec{v_1}|\cdot|\vec{v_2}|\cos\alpha$$

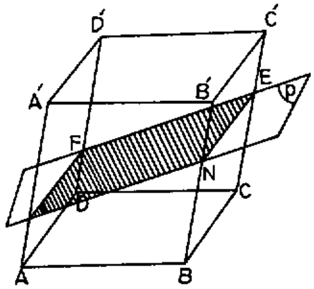
پس :

$$|\overrightarrow{2a}-\vec{b}|^2=|\overrightarrow{2a}|^2+|-\vec{b}|^2+2|\overrightarrow{2a}||-\vec{b}|$$
$$\cos(\overrightarrow{2a} , -\vec{b}) \Rightarrow |\overrightarrow{2a}-\vec{b}|^2$$
$$=(6)^2+(3)^2+2(6)(3)\cos 120^\circ=$$
$$|2a-b|^2=36+9-18=27$$
$$\Rightarrow |\overrightarrow{2a}-\vec{b}|=3\sqrt{3}$$

حل ب) :

$$|\vec{a}|=2 \text{ و } |\overrightarrow{2b}|=6$$
$$(\vec{a} , \overrightarrow{2b}) = (\vec{a} , \vec{b})=60^\circ$$
$$|\vec{a}+\overrightarrow{2b}|^2=(2)^2+(6)^2+2(2)(6)\cos 60^\circ \Rightarrow$$
$$|\vec{a}+\overrightarrow{2b}|^2=4+36+12=52 \Rightarrow$$
$$|\vec{a}+\overrightarrow{2b}|=2\sqrt{13}$$

۳- می‌دانیم که وجوه‌جانبی هرمتوازی‌السطوح صفحات متوازی می‌باشند. ازطرفی فصل مشترک یك صفحه با دوصفحهٔ متوازی دوخط متوازی است. بنابراین اگر نقاط تقاطع صفحهٔ P با وجوه متوازی 'ABB'A و 'CDD'C خطوط MA و EF و با وجوه متوازی 'ADD'A و 'BCC'B خطوط MF و ME باشند، MV||EF و MF||AE است. پس چهارضلعی MAEF متوازی‌الاضلاع است.



۴ - در معادلهٔ:

$$a(\sin x+\cos x)=(\cos x-\sin x)^2$$

برای تعیین a کافی است از رابطهٔ داده شده:

$$tg(x+\frac{\pi}{4})=\cos x-\sin x$$

x را محاسبه کنیم وجایگزین در معادلهٔ داده شده کنیم:

$$tg(x+\frac{\pi}{4})=\cos x-\sin x$$
$$=\sin(\frac{\pi}{2}-x)-\sin x$$
$$=2\sin\frac{\frac{\pi}{2}-x-x}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}-x+x}{2}$$
$$=\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}-x)$$
$$=\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}+x)$$
$$\frac{\sin(x+\frac{\pi}{4})}{\cos(x+\frac{\pi}{4})}-\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}+x)=0$$

یا فرض $\cos(x+\frac{\pi}{4})\neq 0$ خواهیم داشت:

$$\sin(x+\frac{\pi}{4})-\sqrt{2}\cos^2(x+\frac{\pi}{4})=0$$

$$\sin(x+\frac{\pi}{4})-\sqrt{2}\left[1-\sin^2(x+\frac{\pi}{4})\right]=0$$

$$2\sin^2(x+\frac{\pi}{4})+\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})-2=0$$

$$\sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2+16}}{4}=\frac{-\sqrt{2}\pm3\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin(x+\frac{\pi}{4})=-\sqrt{2} \qquad \text{(قبول ناپذیر)}$$

یا:

$$\sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(x+\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{x=2k\pi}$$

اینک با جایگزین کردن $x=2k\pi$ در معادله مقدار a تعیین می‌شود:

$$a(\sin 2k\pi+\cos 2k\pi)=(\cos 2k\pi-\sin 2k\pi)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{a=1}$$

۵- با توجه به شرط $0<x<\frac{\pi}{2}$ و اتحادهای:

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} \quad \text{و} \quad \sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}=1$$

خواهیم داشت:

$$\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}-2\sin\frac{x}{2}$$

$$=\sqrt{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$

$$+\sqrt{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}-2\sin\frac{x}{2}$$

$$=\sqrt{(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2}$$

$$+\sqrt{(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2})^2}-2\sin\frac{x}{2}$$

$$=|\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}|+|\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}|-2\sin\frac{x}{2}$$

با توجه به فرض داریم:

$$0<x<\frac{\pi}{2} \Rightarrow 0<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{4}$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\cos\frac{x}{2}>\sin\frac{x}{2}$$

پس می‌توان نوشت:

$$|\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}|+|\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}|-2\sin\frac{x}{2}$$

$$=\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}$$

$$=2(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2})=2\left[\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2})-\sin\frac{x}{2}\right]$$

$$=4\sin\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}-\frac{x}{2}}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}+\frac{x}{2}}{2}$$

$$=4\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})\cos\frac{\pi}{4}$$

$$=2\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})$$

۶- الف) داریم:

$$x_M=k \quad \text{و} \quad x_B=-2 \quad \text{و} \quad x_A=1$$

برای این که M در وسط پاره خط AB باشد، باید داشته باشیم:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{1+(-2)}{2}=k$$

$$\Rightarrow \boxed{k=-\frac{1}{2}}$$

ب) برای این که رابطهٔ $\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}}=\frac{1}{k}$ برقرار باشد، باید داشته باشیم:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}}=\frac{x_M-x_A}{x_M-x_B}=\frac{1}{k} \Rightarrow \frac{k-1}{k+2}=\frac{1}{k}$$

$$k^2-k=k+2 \Rightarrow k^2-2k-2=0$$

$$\Rightarrow \boxed{k=1\pm\sqrt{3}}$$

ج) با فرض $x_M=k$ و $x_N=2k$ باید داشته باشیم:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}}+\frac{\overline{AN}}{\overline{BN}}=0$$

$$\frac{x_M-x_A}{x_M-x_B}+\frac{x_N-x_A}{x_N-x_B}=0$$

$$\Rightarrow \frac{k-1}{k+2}+\frac{2k-1}{2k-2}=0$$

طرفین معادلهٔ اخیر را در عبارت $(2k-2)(k+2)$ ضرب می‌کنیم:

$$(k-1)(2k-2)+(2k-1)(k+2)=0$$

$$2k^2-2k-2k+2+2k^2+4k-k-2=0$$

$$4k^2-k=0 \Rightarrow k(4k-1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k=0 \\ k=\frac{1}{4} \end{cases}$$

۷- الف) نقاط

$$C(1,1) \quad \text{و} \quad B(-1,0) \quad \text{و} \quad A(0,-1)$$

رئوس یک مثلث متساوی‌الساقین می‌باشند زیرا داریم:

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

$$=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

$$AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}$$

$$=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$$

$$BC=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}$$

$$=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow AC=BC=\sqrt{5}$$

ب) از آن‌جا که ارتفاع و میانه و نیمساز رأس C از مثلث متساوی‌الساقین فوق برهم منطبق می‌باشند، بنابراین کافی است معادلهٔ ارتفاع نظیر رأس C را بنویسیم. چون خط فوق از رأس C گذشته و بر ضلع مقابل یعنی AB عمود است بنابراین می‌توان ضریب زاویهٔ آن را مشخص کرد:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{0-(-1)}{(-1)-0}=\frac{1}{-1}=-1$$

$$m_{AB}=-1 \Rightarrow m'_{AB}=\frac{1}{m_{AB}}=\frac{1}{-1}=-1$$

$$\Rightarrow \boxed{m'_{AB}=-1}$$

بنابراین معادلهٔ خطی که از نقطهٔ C گذشته و بر ضلع AB عمود باشد چنین است:

$$C(1,1) \quad \text{و} \quad m'_{AB}=-1: y-y_C=m'_{AB}(x-x_C)$$

$$\Rightarrow y-1=-1(x-1) \Rightarrow$$

$$y-1=-x+1 \Rightarrow \boxed{y=-x+2}$$

ج) برای محاسبهٔ مساحت مثلث کافی است فاصلهٔ C را از ضلع AB حساب کنیم. برای این منظور به دو روش می‌توان عمل کرد:

روش اول: ابتدا مختصات وسط پاره‌خط AB را پیدا کنیم و سپس فاصلهٔ C را از وسط پاره خط AB با استفاده از محاسبهٔ فاصلهٔ دو نقطه به دست آوریم.

روش دوم: ابتدا معادلهٔ خط AB را نوشته وسپس فاصلهٔ C را از آن خط با استفاده از فرمول مربوطه حساب می‌کنیم، بنا براین داریم:

$$x_H=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{0-1}{2}=\frac{-1}{2}$$

$$y_H=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{-1+0}{2}=\frac{-1}{2}$$

$M\left|\begin{matrix}-\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{matrix}\right.$ مختصات وسط ضلع AB

بنابراین خواهیم داشت:

$$MC=\sqrt{(1+\tfrac{1}{2})^2+(1+\tfrac{1}{2})^2}$$

$$MC=\sqrt{\tfrac{9}{4}+\tfrac{9}{4}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$S=\frac{1}{2}MC\times AB=\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}$ (مساحت مثلث)

$=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$ واحد سطح

$\boxed{S=1\frac{1}{2}}$ واحد سطح (مساحت‌مثلث)

حل تشریحی تستهای سوم تجربی

۱- گزینهٔ (۱) جواب است، زیرا اندازهٔ جبری تصویر مجموع‌هندسی چندبردار برروی یك محور برابراست با جمع جبری تصاویر آن بردارها برآن محور. پس اگر اندازه‌های جبری تصاویر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ را برمحور $x'x$ به ترتیب a' و b' و c' بنامیم داریم:

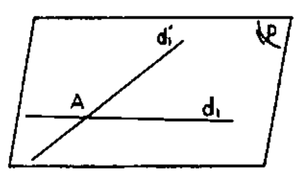
$$|\vec{a}|=8 \implies a'=8\cos60=8\times\frac{1}{2}=4$$

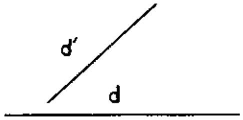
$$|\vec{b}|=4 \implies b'=4\cos(-60)=4\times\frac{1}{2}=2$$

$$|\vec{c}|=6 \implies c'=6\cos120^\circ=6(-\frac{1}{2})=-3$$

$$\implies a'+b'+c'=4+2-3=+3$$

۲- گزینهٔ (۲) درست‌است زیرا اگرنقطه A و دوخط





متنافر d و d' را درنظر بگیریم، ازنقطهٔ A یك‌خط و تنها یك خط به موازات خط d (خط d_1) و یك خط و تنها یك خط به موازات خط d' (خط d'_1) می‌توان رسم کرد و براین دوخط منحصربه فرد d_1 و d'_1 که از نقطهٔ A رسم شده‌اند، تنها یك صفحه مانند P مرور می‌کند.

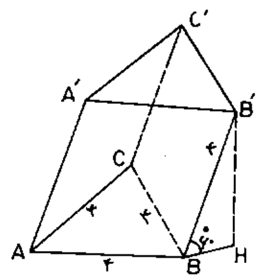
۳- گزینهٔ (۱) درست است زیرا:

$$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{16\sqrt{3}}{4}=4\sqrt{3}$$ قاعده

$$B'H=BB'\times\sin60^\circ=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$$ ارتفاع

ارتفاع × سطح قاعده = V = حجم منشور ⟸

$$\implies V=4\sqrt{3}\times2\sqrt{3}=24cm^3$$



۴- ابتدا تابع f(x) را از فرض

$$f(2x-3)=x-1$$

به دست می‌آوریم:

$$2x-3=t \implies f(t)=\frac{t+3}{2}-1$$

$$=\frac{t+1}{2}=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}$$

t متغیرظاهری است پس داریم:

$$y=f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

اینك فاصلهٔ نقطهٔ $M\left|\begin{matrix}-1\\ 1\end{matrix}\right.$ را از خط

$$\frac{1}{2}x-y+\frac{1}{2}=0$$

محاسبه می‌کنیم:

$$d=\frac{\left|\frac{1}{2}(-1)-1+\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{(\frac{1}{2})^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

پس گزینهٔ (۲) صحیح است.

۵- ابتدا تابع f(x) را از فرض

$$f(\sqrt[3]{x})=\frac{1}{\sqrt[6]{x}}$$

به دست می‌آوریم:

$$\sqrt[3]{x}=t \implies x=t^3$$

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt[6]{t^3}} \implies f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

بنابراین دامنه تابع f(x) چنین است:

$$D_f=R^+=]0\ ,\ +\infty[$$

پس گزینهٔ (۲) صحیح‌است.

حل‌مسائل ریاضیات چهارم تجربی

۱- طول مرکز تقارن منحنی نمایش تابع درجهٔ سوم با ضابطهٔ:

$$y=ax^3+bx^2+cx+d$$

را با x_p نمایش می‌دهیم و داریم:

$$x_p=\frac{-b}{3a}$$

بنابراین‌طول مرکز تقارن منحنی‌نمایش‌تابع با ضابطهٔ

$$y=x^3-6x^2$$

چنین است:

$$x_p=-\frac{-6}{3}=2$$

با قراردادن طول مرکز تقارن درضابطهٔ تابع عرض آن‌محاسبه می‌شود:

$$y_p=2^3-6\times2^2=8-24=-16$$

$\implies p\left|\begin{matrix}2\\ -16\end{matrix}\right.$ (p مرکز تقارن تابع)

اینك ضریب زاویهٔ معادلهٔ‌خط قائم برمنحنی نمایش‌تابع فوق‌را به دست می‌آوریم:

$$y'=3x^2-12x$$

$$m=y'(-1)=3(-1)^2-12(-1)$$

$$=3+12=15$$

$m'=\frac{-1}{15}$ ضریب زاویهٔ خط‌قائم:

$$y(-1)=(-1)^3-6(-1)^2=-7$$

$$y+7=\frac{-1}{15}(x+1) \implies$$

$15y+x+106=0$ (معادله خط قائم)

دراین‌جا فاصلهٔ مرکز تقارن‌را از خط‌قائم محاسبه می‌کنیم:

(فاصله مرکز تقارن از خط قائم)

$$d=\frac{|2+15(-16)+106|}{\sqrt{1+15^2}}=\frac{|2-240+106|}{\sqrt{226}}$$

$$=\frac{132}{\sqrt{226}}=8/78 \Longrightarrow \boxed{d=8/78}$$

۲ - ابتدا مرکز تقارن تابع

$$2xy-2y-x+3=0$$

را به دست می‌آوریم:

$$2xy-2y-x+3=0 \Longrightarrow$$

$$y(2x-2)=x-3$$

$$y=\frac{x-3}{2x-2}$$ (تابع صریح هموگرافیک)

می‌دانیم مرکز تقارن توابع هموگرافیک محل تلاقی مجانبهای آن می‌باشد.

$$y=\frac{ax+b}{cx+d} \Longrightarrow$$ (I مرکز تقارن تابع‌هموگرافیک)

$$I\left|\begin{array}{l}-\frac{d}{c}\\ \frac{a}{c}\end{array}\right.$$

بنابراین مختصات مرکز تقارن تابع هموگرافیک فوق چنین است:

$$I(1,\frac{1}{2})$$

اینک باید مقدار مشتق تابع $f(x)$ را به ازای $x=1$ حساب کنیم:

$$f'(x)=3\times 2(4x^3)(x^4-1)\sin^2(x^4-1)^2$$
$$-3(2x)\cos^2(x^2-1)\times\sin(x^2-1)\sin(x-1)$$
$$+\cos(x-1)\cos^3(x^2-1) \Longrightarrow f'(1)=1$$

۳ - ابتدا طرفین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$m^2(\sin x+\cos x)^2=(1+\frac{1}{2}\sin 2x)^2$$

$$m^2(1+\sin 2x)=1+\frac{1}{4}\sin^2 2x+\sin 2x$$

$$m^2+m^2\sin 2x=1+\frac{1}{4}\sin^2 2x+\sin 2x$$

$$\frac{1}{4}\sin^2 2x+(1-m^2)\sin 2x+1-m^2=0$$

$$\Delta=(1-m^2)^2-(1-m^2)$$
$$=(1-m^2)(-m^2)=m^2(m^2-1)$$

بدیهی‌است اگر $-1<m<1$ آنگاه معادله جواب ندارد.

درحالت $m=\pm 1$ معادله‌به شکل ساده‌شدهٔ زیرتبدیل می‌شود:

$$\frac{1}{4}\sin^2 2x=0 \Longrightarrow \sin 2x=0 \Longrightarrow$$

$$2x=k\pi \longrightarrow \boxed{x=\frac{k\pi}{2}}$$

حل تشریحی تستهای چهارم تجربی

۱ - طول مرکز تقارن تابع باضابطهٔ

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

برابر $x_0=\frac{-b}{3a}$ و مختصات مرکز تقارن تابع باضابطهٔ

$$g(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$$

نقطهٔ $I(\frac{-d}{c},\frac{a}{c})$ است. بنابراین برای تابع

$$f(x)=2x^3-6x$$

می‌توان نوشت:

$$x_p=\frac{-(-6)}{3\times 2}=1 \Longrightarrow$$

$$y_p=2(1)^3-6(1)=2-6=-4 \quad و \quad P\left|\begin{array}{l}1\\ -4\end{array}\right.$$

وبرای تابع $g(x)=\frac{6x-2}{3x-3}$ داریم: $I(1,2)$

زیرا I محل تلاقی مجانبهای قائم و افقی است و در نتیجه خواهیم داشت:

$$PI=\sqrt{(1-1)^2+(2+4)^2}=6 \Longrightarrow PI=6$$

پس گزینهٔ (۴) صحیح است.

۲ - دررابطهٔ $2f(x^3)+3f(-x^3)=x$ ابتدا x را به $-x$ تبدیل می‌کنیم:

$$2f(-x^3)+3f(x^3)=-x$$

بنابراین دستگاه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases}2f(x^3)+3f(-x^3)=x\\ 3f(x^3)+2f(-x^3)=-x\end{cases}$$

ازجمع دو رابطهٔ دستگاه خواهیم داشت:

$$5f(x^3)+5f(-x^3)=0 \Longrightarrow$$

$$f(-x^3)=-f(x^3)$$

$$2f(x^3)-3f(x^3)=x \Longrightarrow -f(x^3)=x$$

$$\Longrightarrow f(x^3)=-x$$

$$x^3=t \Longrightarrow x=\sqrt[3]{t} \quad و \quad f(t)=-\sqrt[3]{t}$$

t متغیرظاهری است ودر نتیجه داریم:

$$f(x)=-\sqrt[3]{x}$$

$$f'(x)=-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Longrightarrow f'(-1)=\frac{-1}{3}$$

پس گزینهٔ (۲) صحیح است.

۳ - چون‌تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x_0=-1$ پیوسته است پس داریم:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^-} f(x)=f(-1)$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to -1^-}(ax+1)=\lim_{x\to -1^+}(x^3)$$

$$\Longrightarrow a(-1)+1=-1$$

$$-a=-2 \Longrightarrow a=2$$

$$f(x)=\begin{cases}x^3 & x\geqslant -1\\ 2x+1 & x<-1\end{cases}$$

$$f(-2)=2(-2)+1=-3 \quad و \quad f'(-2)=2$$

$$f(2)=2^3=8 \quad و \quad f'(2)=3(2)^2=12$$

$$\frac{f'(-2)+f'(2)}{f(-2)+f(2)}=\frac{2+12}{-3+8}=\frac{14}{5}=2/8$$

پس گزینهٔ (۲) صحیح است.

۴ - برای معین بودن تابع باضابطهٔ

$$y=\frac{1}{x-1}+\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2-1}$$

باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}1-x^2\geqslant 0\\ x^2-1\geqslant 0\\ x-1\neq 0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}x^2\leqslant 1\\ x^2\geqslant 1\\ x\neq 1\end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 1\\ x\geqslant 1 \quad یا \quad x\leqslant -1\\ x\neq 1\end{cases} \Longrightarrow D_f=\{-1\}$$

پس گزینهٔ (۲) صحیح است.

۵ - درصورتی که مرکز دایره‌ای (ω) روی‌نیمساز ربع دوم وچهارم قرار داشته باشد خواهیم داشت:

$$x=\alpha \Longrightarrow y=-\alpha \quad و \quad \omega\left|\begin{array}{l}\alpha\\ -\alpha\end{array}\right.$$

(زیرا معادلهٔ نیمساز ربع‌دوم وچهارم چنین‌است: $y=-x$)

بنابراین داریم: $(x-\alpha)^2+(y+\alpha)^2=R^2$

وچون‌از مبدأ مختصات نیزمی‌گذردپس مختصات‌مبدأ $O(0,0)$ در معادلهٔ دایره صدق می‌کند:

$$(0-\alpha)^2+(0+\alpha)^2=R^2 \Longrightarrow R^2=2\alpha^2$$

درنتیجه معادلهٔ دایره‌چنین است:

$$(x-\alpha)^2+(y+\alpha)^2=2\alpha^2$$

پس گزینهٔ (۳) صحیح است.

معرفی کتاب

گنجینه

مجلهٔ علوم پایه، ۱۱، انتشارات فاطمی

گنجینه مجله‌ای است که همانطور که از عنوان آن برمی‌آید مجلهٔ علوم پایه است و باز همانگونه که از آخرین شمارهٔ آن برمی‌آید تاکنون ۱۱ شمارهٔ آن به چاپ رسیده است، و در سرمقالهٔ آن که تحت عنوان سخنی با خواننده آمده، وعده داده شده که شمارهٔ ۱۲ آن نیز به زودی منتشر شود. مقالات این شمارهٔ گنجینه عبارتنداز: برای حل یک مسأله، باید به مسأله‌های کمکی ساده‌تری بیندیشید، پرویز شهریاری، بار در شیمی، ترجمهٔ افسانهٔ صدری، فیزیک در زندگی روزمره، ترجمهٔ اختر رجبی، جدول ۵، طرح از فریدون جهانشاهی، واکسنها و ایمن سازی بدن، ترجمهٔ دکتر رضا فرزان پی. آهان! ، ترجمهٔ مرتضی بهروز، نگاهی دوباره به یک مسأله، ترجمهٔ احمدتوحیدی. ابررساناها، ترجمهٔ دکتر منصور عابدینی. تعریف با استقرا، ترجمهٔ احمد صفاپور. کربن به شکل گرد هم وجود دارد، ترجمهٔ فریدهٔ جلیلوند. پرسش و پاسخ، دکتر منصور عابدینی، دکتر علی سیدی. فریدهٔ شریفی. مسابقه، دختر و مگس، داستانی دربارهٔ فون نویمان، ترجمهٔ احمد صفاپور، فردریک ژولیو ـ کوری، ترجمه و تلخیص پرویز تاریخی، نمایش ساختارهای ایزومر، ترجمهٔ دکتر علی سیدی، تاریخ ریاضیات، ترجمهٔ مهدی مدغم، از میان کتابهای تازه، چند مسأله.

این شمارهٔ مجله ۱۲۰ صفحه دارد و قیمت آن پنجاه تومان است. مطالب مجله برای دانش‌آموزان دبیرستان نوشته شده‌ گو اینکه دیگران نیز از مطالعهٔ آن بهره‌ای درخور خواهند برد.

خواندن گنجینه را به دانش آموزان و دبیران علوم توصیه می‌کنیم و توفیق گردانندگان آن را از خداوند متعال خواهانیم.

مجموعه : مقالات و مسائل ریاضی، شمارهٔ ۱

تنظیم از : غلامرضا یاسی‌پور، انتشارات مدبر

مجموعه، همان طور که از نام آن برمی‌آید مجموعه‌ای از مقالات و مسائل ریاضی است. در این شماره مقالات زیر را می‌خوانیم: نظریهٔ بازیها، ابن‌هیثم ریاضیدان مسلمان، اثبات نامساویها، نیوتون و اندیشهٔ ریاضی زمان ما، توابع و نمودارهای آنها، تکمیل مطالب کتابهای درسی، منطق و زبان، مثلثات، معرفی کتاب من ریاضیدانم (سرگذشت سیبرنتیک) ، نظریهٔ گرافها، مسائل، فرهنگ ریاضیات، هندسهٔ تصویری، هندسهٔ فضایی، مصاحبه با استاد پرویز شهریاری. نویسندگان و مترجمان این شماره عبارت‌اند از: موسی آذرنوش، پرویز شهریاری، محمدهاشم رستمی. احمد قندهاری، حمیدرضا امیری، سیدحسین سیدموسوی، سیدمحمدرضا هاشمی موسوی، نغمهٔ شریک‌زاده، غلامرضا یاسی‌پور.

همان‌گونه که درمقدمهٔ مجموعه آمده قصد از انتشار مجموعه، آشنا کردن خوانندهٔ علاقه‌مند، با وقایع و مطالب کهنه و نوی است که در جهان ریاضیات مطرح می‌شوند و در این سرزمین وسیع دانش بشری اتفاق می‌افتند.

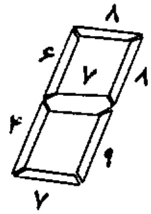
مجموعه به صورت فصلنامه منتشر می‌شود و هرسه‌ماه یک بار یک شمارهٔ آن به دست خوانندگان آن می‌رسد.

ضمن توصیهٔ مطالعهٔ مجموعه به دانش‌آموزان و دبیران ریاضی، توفیق دست‌اندرکاران آن را از خداوند خواستاریم.

جوابهای تفریح اندیشه

جواب ۱

شکل زیر تعداد دفعاتی را که هرقسمت به‌کارمی‌برد مشخص کرده است.



جواب ۲

اهالی مذکور نمی‌توانند هرسه از دشت یا هرسه از کوه باشند، زیرا دراین صورت تمام پاسخها یکسان می‌شود. اما آیا می‌شود که دونفر از کوه و یکی از دشت باشد؟ خیر، زیرا دراین صورت همگی به سؤال دوم پاسخ آری می‌دهند. بنابراین دونفر از دشت و یکی از کوه است. و همه آنها به سؤال اوّل خیر می‌گویند. و در سؤال دوم، دشت‌نشینان نه و کوه‌نشین آری می‌گویند. دراین صورت «گرب» به معنی نه است.

جواب ۳

۳۶، زیرا:

$$\angle ABC = (\frac{۱}{۲})AC$$
$$AC = (\frac{۱}{۵})(۳۶۰) = ۷۲$$

جواب ۴

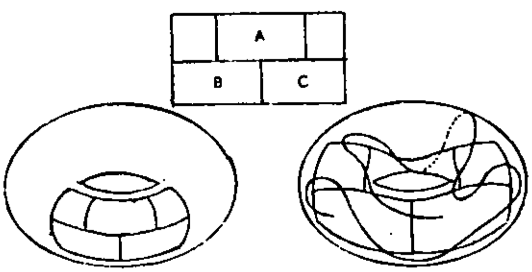
۱. راه حل دیگری غیراز راه حل «هندسی» عبارت است از :

فرض می‌کنیم $S = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۱۶} + ...$؛ دراین صورت

$$\left.\begin{aligned} S - \frac{۱}{۲} &= \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۱۶} + ... \\ \frac{۱}{۲}S &= \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۱۶} + ... \end{aligned}\right\rangle S - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}S\ ,\ S = ۱$$

جواب ۵

خط متصلی که داخل یکی از فضاهای مستطیل شود و از آن خارج گردد باید لزوماً دو پاره خط را قطع کند. از آن جا که هر یک از فضاهای مشخص شده با A، B و C در شکل ۲، با تعداد فردی پاره‌خط احاطه شده است، نتیجه می‌شود که در صورتی که جمیع پاره‌خطهای شبکه قطع شوند، باید یک سر خط داخل هر یک از آنها باشد. اما خط متصل تنها دو سر دارد، بنابراین معما بر رویهٔ مسطح قابل حل نیست. در صورتی‌که شبکهٔ مورد بحث واقع بر کره یا برکنار چنبره (رسم واقع در سمت چپ پایین) باشد، همین استدلال به‌کار می‌رود. اما، شبکه را می‌توان بر چنبره چنان رسم کرد که (رسم واقع در سمت راست پایین) سوراخ چنبره داخل یکی از سه فضای A، B و C باشد. معما، هنگامی‌که این کار صورت پذیرد به سادگی قابل حل است.



In the name of God

Borhān

VOL.2. No.2

Serial numbers; 6

May 1993

Borhān is a mathematics journal published four times a year by Madrasse Publications. Each issue includes articles related to mathematics and its various topics specifically those concerning highschool education in Iran.

All communications should be sent to the editor at the following address:
Madrasse Publication- No. 268, Iranshahr-e -Shomali Ave. Tehran Iran Post code: 15875

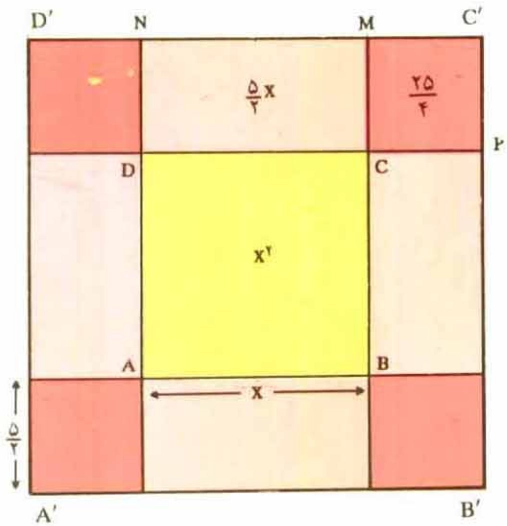
Contents:

راه حل هندسی معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲ + ۱۰x = ۳۹$

کاشف، محمدبن موسی خوارزمی

(بیش از ۱۲۰۰ سال پیش)

محمد فرزند موسی خوارزمی (وفات در سال ۲۳۲ هجری قمری)، ریاضی‌دان مسلمان ایرانی اهل خوارزم، نویسندهٔ نخستین کتاب جبر به نام «الجبر والمقابله». در زمان مأمون خلیفه عباسی می‌زیست و در «بیت‌الحکمه» رفت و آمد داشت. اصطلاح «آلگوریتم» از نام «الخوارزمی» گرفته شده است.



ابتدا مربعی رسم می‌کنیم و طول ضلع آن را x می‌گیریم (مربع ABCD) ، سپس ضلعهای مربع را از هر طرف به اندازهٔ $\frac{۵}{۲}$ ادامه می‌دهیم تا مربع A′B′C′D′ پدید آید. باتوجه به شکل روشن است:

$$S_{A'B'C'D'} = S_{ABCD} + ۴S_{DCMN} + ۴S_{CPC'M'} =$$

$$= x^۲ + ۴ \times \frac{۵}{۲}x + ۴ \times \frac{۲۵}{۴} = x^۲ + ۱۰x + ۲۵$$

بنابر معادلهٔ مفروض داریم: $۳۹ = ۱۰x + x^۲$، پس :

$$S_{A'B'C'D'} = ۳۹ + ۲۵ = ۶۴$$

یعنی طول ضلع مربع A′B′C′D′ برابر ۸ می‌شود و

$$x = ۸ - ۲ \times \frac{۵}{۲} = ۸ - ۵ = ۳$$

جواب مثبت معادلهٔ $۳۹ = ۱۰x + x^۲$ برابر است با $x = ۳$.

خوارزمی، به ریشه یا ریشه‌های منفی معادله، توجهی نداشته است.