رشد آموزش ریاضی ۷۷

سال هفدهم - ۲۰۰ تومان
ISSN 1606-9188
دفتر انتشارات کمک آموزشی

تجربه

مدرسه ای است که بر در و دیوار آن پوسترهایی نصب شده که بر روی آن ها، درس هایی که گذشتگان آموخته اند نوشته شده است تا آیندگان که از آنجا عبور می کنند دوباره اشتباهات را تکرار نکنند.

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد آموزش ریاضی ۶۶

سال هفدهم / سال ۱۳۸۰ / تیراژ ۹۰۰۰

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی

دفتر انتشارات کمک آموزشی

فهرست:

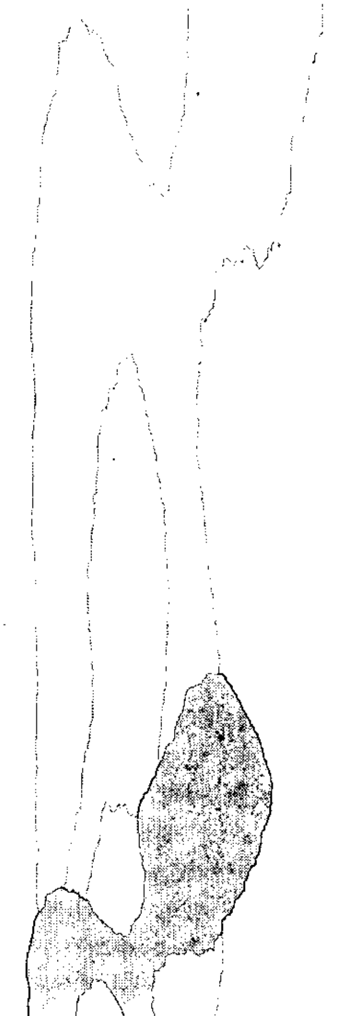
نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۶۵۸۵ - ۱۵۸۷۵
تلفن امور مشترکین: ۸۸۳۹۱۸۶
تلفن دفتر مجله: ۹- ۸۸۳۱۱۶۱ (داخلی ۳۷۱)
چاپ: شرکت افست (سهامی عام)

- مجله رشد آموزش ریاضی، نوشته‌ها و گزارش تحقیقات پژوهشگران و متخصصان تعلیم و تربیت، به ویژه معلمان مقاطع مختلف را در صورتی که در نشریات عمومی درج نشده و مرتبط با موضوع مجله باشد، می‌پذیرد. لازم است در مطالب ارسالی، موارد زیر رعایت شود:
- مطالب یک خط در میان و در یک روی کاغذ نوشته و در صورت امکان تایپ شود.
- شکل قرار گرفتن جدولها، نمودارها و تصاویر، پیوست و در حاشیهٔ مطلب نیز مشخص شود.
- نثر مقاله روان و از نظر دستور زبان فارسی درست باشد و در انتخاب واژه‌های علمی و فنی دقت شود.
- اصل مقاله‌های ترجمه شده به پیوست، ارسال شود.
- در متنهای ارسالی تا حد امکان از معادلهای فارسی واژه‌ها و اصطلاحات استفاده شود.
- زیرنویسها و منابع کامل و شامل نام اثر، نام نویسنده، نام مترجم، محل نشر، ناشر، سال انتشار و شمارهٔ صفحهٔ مورد استفاده باشد.

همچنین:

- مجله در پذیرش، رد، ویرایش یا تلخیص مقاله‌های رسیده مجاز است.
- مطالب مندرج در مجله، الزاما مبیّن نظر دفتر انتشارات کمک آموزشی نیست و مسؤولیت پاسخگویی به پرسشهای خوانندگان، با خود نویسنده یا مترجم است.
- مقاله‌های دریافتی در صورت پذیرش یا رد، بازگشت داده نمی‌شود.

یادداشت سردبیر



در ماه‌های اخیر، راجع به اصلاحات در آموزش و پرورش؛ سخن فراوان گفته شده است. اظهارات متنوّع و نظریه‌پردازی‌های گوناگون در خصوص چگونگی ایجاد تحوّل، و اصلاح نابسامانی‌های آموزشی، گاهی نشان از افراط و تفریط دارند. برای مثال، بینش فکری متمرکز در متن آموزش و پرورش، ساری و جاری است و اغلب؛ ایجاد تحوّل و اصلاحات در زمینه‌های مختلف آموزشی را از طریق بخشنامه‌های متمرکز، توصیه می‌شود. با این حال، بسیاری از صاحبان همین بینش، بستر و مسیر اصلاحات را درآموزش و پرورش؛ خروج از تمرکز می‌دانند و بر ضرورت غیرمتمرکز شدن بخش‌های اصلی نظام آموزشی، تأکید می‌کنند. در حالی که در عصر حاضر؛ بحث بر سر این نیست که اگر یک روش آموزشی یا محتوای یک کتاب درسی یا فلان برنامه، یا درجهٔ تمرکز نظام آموزشی با چند دستورالعمل و بخش نامه تغییر کند، اصلاجات در آموزش و پرورش به وقوع می‌پیوندد. چیزی که زیر بنای یک حرکت اصلاحی در آموزش و پرورش است، تغییر در جهان بینی و فلسفهٔ آموزشی حاکم و نوع نگاه به انسان است.

جامعهٔ ما از نظر زیربنایی؛ نسبت به گذشته تغییرات فاحشی کرده است. نباید تصوّر شود که به علّت فاصله‌ای که تا به حال با دنیای توسعه یافته داشته‌ایم، مجاز به رعایت این فاصله تا همیشه هستیم! چرا که به خاطر سرعت ارتباطات و تحولاتی که بر اثر پیشرفت تکنولوژی در دنیا ایجاد شده است؛ این فاصله‌ها به لحاظ ذهنی، رفته رفته پر شده‌اند. منتها به لحاظ اجرایی و برنامه‌ریزی، این گُسست به شدّت وجود دارد. در نتیجه، آموزش و پرورش میزبان انسان‌هایی است که به لحاظ ذهنی، متحوّل شده‌اند و توقّع عضویت در عصر اطلاعاتی را دارند؛ امّا به لحاظ برنامه‌ریزی و اجرایی، هنوز در قرن تمام شده به سر می‌برند. به نظر می‌رسد که این دوگانگی، منشأ بسیاری از معضلات آموزش و پرورش و از موانع اصلی اصلاحات در آن، باشد.

دانش‌آموزانی که به لحاظ ذهنی، متحوّل شده‌اند؛ نیازمند برنامهٔ درسی‌ای هستند که توانایی انتخاب گری، تصمیم گیری و مسئولیت پذیری را در ساخت و سازهای علمی و حل

مسایل واقعی و پیچیده، در آن‌ها ایجاد کند و روش‌های ارزشیابی‌ای را می‌طلبند، که راهنمای عمل آن‌ها باشد و با ارزشیابی متوازن توانایی‌های آن‌ها؛ ادامهٔ تلاش آموزشی را تسهیل کند. همین دانش‌آموز؛ به محتوا و ساختار برنامهٔ درسی که با نگاه به آینده، سازمان‌دهی شده است؛ نیازمند است. برنامه و محتوایی که توان استدلال کردن، مدل‌سازی و خلق و حل مسایل پیچیده و واقعی را در او ایجاد کند. دانش‌آموز متعلّق به عصر اطلاعاتی، می‌داند که اطلاعات، سرمایهٔ جدید و موادّ خام جدید است و ارتباطات، ابزار جدید تولید است. در نتیجه، این دانش‌آموز متوقّع برنامه‌ای است، که او را با مهارت‌های ارتباطی پایه‌ای آشنا کند و توانایی‌های گفته شده را در او ایجاد نماید. با این حال، برنامه‌های درسی و آموزشی موجود، اکثراً بر اساس هر مناسبت شروع قرن خاتمه یافته، هنوز ذهن دانش‌آموزان را لوح سفیدی می‌بیند که اگر روی آن خوب نوشته شود، خوب نقش می‌بندد، پس باید مراقب بود که دانش‌آموز، تنها با محتوای به دقت انتخاب شده توسط دیگران، روبه‌رو شود. با چنین نگاهی به انسان؛ دانش‌آموز و معلّم نیازمند برنامه‌های درسی و روش‌های ارزشیابی دقیق، کمّی، عینی و قابل مشاهده و قابل اندازه‌گیری هستند تا از حصول به هدف از قبل طرّاحی شده، همگی اطمینان حاصل کنند.

این باور آموزشی، با خواسته‌های انسان متحول شدهٔ عصر حاضر، سازگاری ندارد. ذهن با نصیحت و توصیه پرورش پیدا نمی‌کند. ذهن در جریان عمل و در جریان تفکّر و درونی‌سازی است که پرورش می‌یابد و رشد می‌کند.

انسان پیچیدهٔ حاضر، به دنبال یافتن پاسخ برای چراهای بی‌شمار خود است. این انسان، بیش از آن که دنبال «آب» باشد، «تشنگی» را می‌جوید و آموزش سنّتی، رسالت خود را در خوراندن قطره‌ای آب به او و سیرابی ناشی از همان یک قطره، می‌داند. به همین دلیل، تعارض پیش می‌آید و دانش‌آموزان و معلمان شریف و سخت‌کوش و توانای ما، احساس خستگی می‌کنند. همین احساس خستگی و ناکارآمدی؛ ضرورت انجام اصلاحات را در آموزش و پرورش، بیش از هر زمان دیگری ایجاب می‌کند.

شاید بتوان با تعیین «حدود انتظارات از شهروند ایرانی» و «ویژگی‌های فارغ‌التحصیلان آموزش و پرورش» و مقایسهٔ آن با وضع موجود، اولین قدم را برای انجام اصلاحات در آموزش و پرورش برداشت. این مقایسه، اندازهٔ فاصله موجود بین آن‌چه که هست و آن‌چه که باید باشد را می‌نمایاند.

برای مثال، مسئولان دلسوز آموزش و پرورش، هرچند وقت یک‌بار، از ایجاد روحیهٔ پژوهشی در دانش‌آموزان مدرسه‌ای صحبت می‌کنند. در واقع، ویژگی‌های قرن بیست و یکم، ایجاد چنین روحیه‌ای را در شهروندان ضروری می‌داند. امّا به دلیل نگاه سنّتی به آموزش و پرورش، اغلب انتظار می‌رود که با تعریف درسی با عنوان مشابه «روش تحقیق»، این توانایی در دانش‌آموزان ایجاد شود. در حالی که پژوهش، یک بینش و یک نگرش است. نمی‌توان در آموزش مدرسه‌ای، «پژوهش» را تنها به عنوان یک درس ارایه داد و چند تا سؤال هم به عنوان ارزشیابی، مطرح کرد تا مطمئن شویم آیا دانش‌آموزان «پژوهش» را یاد گرفته‌اند یا خیر. ایجاد روحیهٔ پژوهشگری با نظام ارزش‌یابی دقیق، کمّی و عینی سنّتی، در تضاد است و دانش‌آموز به طور طبیعی، آن روحیه را چه در برنامهٔ درسی و چه اجرای سنّتی آن، کسب نمی‌کند. برای ایجاد چنین روحیه‌ای که لازمهٔ زیستن در قرن جدید است، لازم است فضاهای آموزشی؛ منعطف، خلاق و نوآور شوند و واضح است که انعطاف و خلاقیّت و نوآوری را نمی‌توان با روش‌های ارزشیابی سنّتی «اندازه» گرفت و در مورد آن‌ها، قضاوت معتبری کرد.

به طور اجمال، منشأ تحولات و اصلاحات در آموزش و پرورش، ایجاد تحول در نوع نگاه به انسان و سپس دوباره‌نگری در اهداف کلان آموزشی، تعیین حدود انتظارات از شهروند ایرانی و دوباره‌نگری در برنامه‌های درسی، آموزش معلمان و روش‌های ارزشیابی است.

■

غلبه بر موانع دموکراتیزه کردن آموزش ریاضی

نویسنده: آلن بی‌شاپ ـ دانشگاه موناش (استرالیا)
مترجم: سهیلا غلام‌آزاد

مقدمه

اولین کنگرهٔ بین‌المللی آموزش ریاضی در قرن بیست و یکم (ICME)[1] ، زمان خوبی است برای آن‌که نگاهی بیندازیم به این که چگونه آموزش ریاضی به جامعه و جهان خدمت می‌کند. جامعهٔ مدرن از شهروندان خود، دانش ریاضی بسیار بیشتری را نسبت به گذشته طلب می‌کند و از این رو چالش اساسی برای آموزشگران ریاضی چگونگی تدارک آموزش ریاضی مناسب و کافی برای بیشترین شمار شهروندان است. توسعه و پیشرفت کامپیوتر ضمن آن‌که ما را با بزرگترین دشواری‌هایمان رودررو می‌کند، بعضی از مهیج‌ترین امکانات آموزشی را نیز به ما عرضه می‌کند. آن‌ها نه تنها طرز تفکر ما را در مورد تدریس ریاضیات تغییر می‌دهند، بلکه خودِ طبیعت فعالیت ریاضی را نیز تغییر می‌دهند. جوامع نیز چند فرهنگی‌تر می‌شوند و چون طبیعت ریاضیات در حال بازپرسی مجدد است، آموزشگران ریاضی در مورد اهدافی که برای آموزش ریاضی باید صورت‌بندی شوند به شکل فزاینده‌ای به چالش افتاده‌اند.

به این دلایل و دلایل دیگر تصمیم گرفته‌ام که روی مقولهٔ دموکراتیزه کردن متمرکز شوم، زیرا به نظر می‌رسد کانون بسیاری از مسایل امروزی ما در این رشته باشد. در اینجا می‌خواهم امر تحقیق را نیز در نظر بگیرم زیرا روند تحقیقات، اغلب شاخص‌های خوبی هستند برای آنچه که بهترین متفکران ما معتقدند راه‌های بسیار سختی هستند که باید در آینده جستجو شوند. من همیشه معتقد بوده‌ام که تحقیق در آموزش ریاضی اساس رشتهٔ ما است و حمایت عقلانی عمده‌ای را برای ما در مقابل تقاضای کوته‌نظران و عوام از سیاست گذاران جاری آموزشی ما ایجاد می‌کند.

مثلاً در حال حاضر در کشور من مانند برخی کشورهای دیگر، عقلیون اقتصادی، قدرت سیاسی را در دست دارند و تقاضای آن‌ها برای عرضهٔ مؤثر حوزه محدودی از قابلیت‌های ویژهٔ ریاضی با وسایل محدود و ترجیحاً ارزان قیمت است. تردیدی ندارم که اهداف به دست آمده از طریق این نوع رویکرد به هیچ وجه توجهی به دموکراتیزه کردن آموزش ریاضی، که آرزوی بسیاری از ما است، ندارد.

با وجود این و خوشبختانه اهداف، تحولات و امکانات دیگری برای تجربه کردن وجود دارند، و روند تحقیقات می‌تواند مشخص کند که بعضی از آن‌ها چه هستند. به ویژه می‌خواهم تحقیقی را در نظر بگیرم که موانع مفهومی واقع بر سر راه دموکراتیزه کردن را از طریق کشف دیگر ساختارها و مفاهیم مورد توجه قرار می‌دهد.

دموکراتیزه کردن آموزش ریاضی

من معتقدم مقولهٔ دموکراتیزه کردن آموزش ریاضی به سه دلیل عمده، اهمیت دارد. اول این که این مقوله جنبه‌ای از آموزش است که همیشه موجود است ولی ندرتاً به طور صریح در نظر گرفته می‌شود. برای من کل فرآیند آموزش دموکراتیزه است و من هدف عمدهٔ آموزش جهانی را یک دانش دموکراتیزه بودن و در دسترس گذاشتن آن برای بیشترین تعداد ممکن یادگیرنده‌ها می‌بینم. این مطلب به طور مقتضی، موضوع بسیاری از انتشارات مهم یونسکو بوده است. مثلاً در ICME سال ۱۹۸۴ یک گروه کاری مهم مربوط می‌شد به موضوع «ریاضیات برای همه» و یک نشریهٔ سودمند یونسکو از آن گروه حاصل شد. (دامرو[۲] و همکارانش، ۱۹۸۴). پس از آن در ICME، ۱۹۸۸ یک روز کامل به موضوع «ریاضیات، آموزش و جامعه» اختصاص داده شد. حاصل این کار در نشریهٔ مهم دیگر یونسکو (کی تل[۳] و همکارانش، ۱۹۸۹) از منظر دموکراتیزه کردن عرضه شد. نشریهٔ دیگر یونسکو (بیشاپ[۴] و همکارانش، ۱۹۹۳) که مربوط به تأثیرات مهم بر یادگیری ریاضی کودکان بود در این زمینه ادامه یافت. آخرین برونداد یونسکو، کتاب عالی کلمنتز[۵] و اِلرتون[۶] (۱۹۹۶) است که تجزیه و تحلیلی بر روند تحقیق از دیدگاه منطقهٔ آسیای مرکزی دارد. اگرچه شاید این حقیقت به طور صریح بیان نمی‌شود، ولی مؤلفین تردیدی برای خواننده‌ها نمی‌گذارند که در هدف دموکراتیزه کردن آموزش ریاضی سهیم هستند.

دوم این که به نظر می‌رسد ریاضیات موضوع درسی سلیسی برای پیشرفت نخبگان باشد. این قضیه را می‌توانیم در روشی که ریاضیات به کار گرفته شده است، و هنوز هم به کار گرفته می‌شود، تا دانش‌آموزان را برای تحصیل در مقاطع بالاتر و سپس برای موفقیت‌های معتبرتر در جامعه انتخاب کنند، ببینیم. همچنین می‌بینیم که اکثر بزرگسالان معتقدند در ریاضیات موفق نبوده‌اند، و از این رو هرکسی را که بتواند در آن موفق باشد به طور قابل توجهی تحسین می‌کنند! این موضوعی است که طی سال‌ها با نخبه‌پروری رشد کرده و اگر آموزشگران ریاضی می‌خواهند به اهداف دموکراتیزه کردن خود برسند، بایستی حتی بیشتر کار کنند تا بر اندیشهٔ نخبه‌پروری فایق آیند.

و سوم این که آیندهٔ جهان به کیفیت آموزشی که به همهٔ فرزندانمان می‌دهیم، بستگی دارد. در واقع آن‌ها آیندهٔ جهان هستند، و مبارزه علیه جهل یکی از بزرگ‌ترین چالش‌های زمان ما است. در رشتهٔ ما وظیفه، دموکراتیزه کردن دانش ریاضی است بدون آن که اکثریت عظیم جوانان ما قدرت انتخاب خود را از دست بدهند و بی‌خاصیت شوند. متأسفانه ریاضیات موضوعی است که هنوز هم اکثر مردم معتقدند در آن ناموفق هستند و علاقهٔ کمی به آن دارند.

موانع و دورنمای آموزش ریاضی

آموزش به دانش گذشته برمی‌گردد، از منظر زمان حال، ولی با دورنمایی از آینده. بدون دانش زمان گذشته چیزی برای آموزش نسل جدید وجود ندارد ـ صرفاً سهیم شدن در جهالت وجود دارد. بدون دورنمایی از آینده هدفی وجود نخواهد داشت که آموزش یادگیرنده‌های حاضر به سمت آن هدایت شود ـ فقط تعلیم وجود دارد. آموزش واقعی به هر دوی اینها نیاز دارد.

مسلماً آموزش ریاضی بر دانش گذشته تکیه دارد. ریاضیات تاریخی طولانی دارد و برنامهٔ درسی ریاضی با این تاریخ عجین شده است. برخی از منتقدان آگاه، در مورد این که برنامهٔ درسی زیاده از حد قدیمی است و این می‌تواند به عنوان مانعی در برابر روند دموکراتیزه شدن باشد، بحث

دارند. آن‌ها نه تنها چگونگی تغییر ریاضیات را طی قرن‌ها نشان نمی‌دهند، بلکه چگونگی تغییر جوامع را نیز نشان نمی‌دهند.

برنامهٔ درسی ریاضی ما تا چه حد دورنمایی از آینده را عرضه می‌کند؟ به عقیدهٔ من آن‌ها مقدار بسیار کمی از دورنمای آینده را به دانش‌آموزان عرضه می‌کنند. شاید اگر کامپیوترها و ماشین‌حساب‌ها به مقدار زیاد مورد استفاده قرار بگیرند آنگاه بتوانیم تصویری از تکنولوژی برتری که در آینده عرضه می‌شود، داشته باشیم. اما بسیاری از برنامه‌های پیشنهادی ICT صرفاً دوباره‌سازی آن چیزی است که در روزگاران پیش از تکنولوژی انجام شده است. تعدادی برنامه‌های جدید و مهیج بر اساس واقعیت مجازی موجود می‌باشند، ولی تعداد آن‌ها بسیار کم و پراکنده‌اند و به ندرت در کلاس درس معمولی ریاضی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

آنچه که بیشتر اهمیت دارد این است که حتی اگر این برنامه‌های مهیج جدید وجود داشته باشند، اغلب از برنامه‌های ریاضی نمونه‌ای که توسط سیاستگذاران و بروکرات‌ها ترویج می‌شوند، مستثنی می‌گردند. همان‌طور که در بالا اشاره کردم، بسیاری از سیاستگذاران آموزشی ما امروزه فقط دورنمای اقتصاد فرضاً «شکوفا» را به مردم عرضه می‌کنند و لذا خواستار آن هستند که آموزش ریاضی، رقابت ریاضی مناسبی را برای شغلی که یک فرد جوان در آینده انجام خواهد داد، تضمین کند.

به هر حال، معتقدم دورنمایی مورد نیاز است که به معنای واقعی دموکراتیزه باشد ـ صاحب اختیار، **آگاهی دهنده، عمل ـ محور، مبتنی بر نیازهای منطقه‌ای ولی آگاه از مسایل جهانی، بازتابی، نقاد، خلاق و مسئول.**

پرسش‌های ما در اینجا عبارت است از این که: یک چنین آموزش ریاضی دموکراتیزه‌ای باید چگونه باشد، و چگونه می‌توان به آن رسید؟ در ادامهٔ صحبت برای پاسخگویی به این پرسش‌ها، به ایده‌های پیشرفتهٔ گوناگون در زمینهٔ تحقیق آموزش ریاضی می‌پردازیم (به عنوان منابع از کتاب کِلمنتز و اِلرتون، ۱۹۹۶، به همراه کتاب راهنمای بین‌المللی آموزش ریاضی[7]، بیشاپ، ۱۹۹۶، استفاده کرده‌ام).

مثلث آموزش ریاضی ـ برنامهٔ درسی

به نظر من تحقیق در رشتهٔ ما، آموزش ریاضی، از سه ساختار پدید آمده که هر یک از آن‌ها با متغیرهای اجتماعی، سیاسی و فرهنگی خود احاطه شده‌اند. سه ساختاری که کانون اصلی تحقیقات ما را تشکیل می‌دهند، عبارتند از:

■ برنامهٔ درسی ریاضی ـ شامل جنبه‌های محتوا، توالی اندیشه‌ها، ارتباط با عناوین، موضوعات و متون دیگر به دو گونهٔ حقیقی و مجازی...

■ یادگیری ریاضی ـ شامل ویژگی‌های یادگیرنده‌ها، انواع یادگیری، طرز تلقی‌ها، باورها، انگیزه‌ها، احساسات، روش‌های به خاطر آوردن، تجسّم، بازنمایی، ...

■ تدریس ریاضی ـ شامل تعامل‌ها، توضیح دادن، روشن کردن، اتصال با معلومات دیگر، الهام گرفتن، راهبری، ارتباط برقرار کردن، ...

اگر ما ابتدا ساختار برنامهٔ درسی ریاضی را در نظر بگیریم برخی از خط سیرهای دموکراتیزه کردن که در تحقیق می‌توانیم ببینیم، چه خواهند بود؟

خط سیر اصلی که می‌توانیم ببینیم آن است که علایق تحقیق بر موانع مفهومی محتوا با منظور کردن مضمون به جای آن، غلبه خواهد کرد. در حالی که مطالعات با

خاطر جمعی برای آزمودن مقولات محتوایی ادامه دارد، علاقهٔ رو به رشدی به مضمونی که در آن تمرین عملی ریاضی جای گرفته، وجود دارد. به راستی مسألهٔ «**تمرین عملی ریاضی**» توجه بسیاری را جلب می کند. بیشتر این کار بر اساس چالش ناشی از مطالعهٔ فعالیت های ریاضی است که در خارج از مدرسه رخ می دهند (مثل، ابرو[9]، ۱۹۹۳، نونز[10]، ۱۹۹۳) جایی که در آن ویژگی های تمرین عملی به طور قابل ملاحظه ای با فعالیت های مدرسه تفاوت دارند. این پدیده در زمینهٔ آموزش بزرگسالان و آموزش فنی ـ حرفه ای به خوبی شناخته شده است.

نخستین چیزی که از این مطالعات طلب می شود چگونگی تعیین برنامهٔ درسی است در حالی که روشن است ایده های سادهٔ «انتقال دانش» بی ربط هستند، و این که چگونه دانش یک زمینه به دانش در زمینهٔ دیگر ارتباط دارد. بحث من این است که معلومات ریاضی بومی و تمرینات عملی باید به شکل گیری برنامهٔ درسی ریاضی مدرسهٔ آن منطقه کمک کند، زیرا اغلب تفاوت های زیادی بین موقعیت ها، معلومات، زبان ها و تمرینات عملی در قسمت های مختلف بسیاری کشورها وجود دارد. من همیشه از این که افراد، شباهت های زیادی بین برنامهٔ درسی ریاضی کشورهای مختلف پیدا می کنند یا دقیقاً برنامه ها را یکسان می بینند متعجب بوده ام. در مورد موضوعات درسی دیگر چنین نیست، حتی علوم هم کار **بومی کردن** برنامهٔ درسی خود را آغاز کرده است.

همچنین علایق فزایندهٔ تحقیق در **سواد عددی**[11] وجود دارد که نشان دهندهٔ ناموفق بودن تدریس ریاضی، و همچنین تمایل به داشتن برنامهٔ درسی ریاضی مرتبط تر و زمینه مدار[12] در مدارس است. جالب است که تا آموزشگران به سواد عددی بذل توجه می کنند، بر عکس ریاضیات، بلافاصله دیدگاهی محلی یا ملی مورد توجه قرار می گیرد، با انتظاری کم در خصوص آن که هر اجتماعی باید برنامهٔ درسی سواد عددی یکسانی داشته باشد.

البته بحث هایی بر علیه داشتن فقط یک برنامهٔ درسی سواد عددی وجود دارد، که اغلب بر حسب محدودسازی فرصت های دانش آموزان بهتر که قادر به مطالعهٔ ریاضی سطوح بالاتر هستند بیان می شود. این مورد یادآور بحث نخبه پروری است. بحث دیگر آن است که اغلب برنامه های درسی سواد عددی فقط بر مهارت های حسابی، به هزینهٔ جنبه های وسیع سواد عددی، تمرکز دارد. سواد عددی نباید فقط در مورد اعداد باشد، بلکه می تواند بازتاب تأکیدات فرهنگی بومی در فعالیت های جهانیِ شمارش، تعیین محل کردن، اندازه گیری، طراحی، بازی و توضیح دادن باشد (بیشاپ، ۱۹۸۸).

توسعهٔ سواد عددی یا، همان طور که آمبرسو[13] (۱۹۸۵) ترجیح می داد آن را بخواند، سواد ریاضی[14] به وضوح هدفی دموکراتیزه است که باید توسط همه حمایت شود.

یادگیری، و یادگیرنده های ریاضیات

یکی از مطلوب ترین ساختارهای آموزش ریاضی که مورد استفادهٔ همه است، یکی از ضد دموکراتیک ترین[15] آن ها نیز می باشد. این ساختار تصور «توانایی ریاضیات»[16] است که توسط معلم ها، یادگیرنده ها، و توسط والدین و کارفرمایان به کار می رود. چندین سال پیش به کارگیری این ساختار در تحقیق مرسوم بود، در حالی که اکنون دیگر مورد علاقهٔ محققین نیست. زیرا با توصیف یادگیرنده ها چنان عجین شده بود که گویی هیچ ارتباطی با متغیرهای دیگر نداشته است. توانایی ریاضیات هنوز هم نوعی علامت مشخصه است که یادگیرنده ها تقریباً همه جا با خود دارند. معلمان برای توانایی خودشان در انتخاب «خوب ها» از «بدها» ارزش قایلند. یک بار که یادگیرنده ها به این ترتیب برچسب گذاری شوند، درمی یابند که به قصد گروه بندی میان کلاس ها و اغلب گروه بندی درون کلاس ها، دسته بندی شده اند. شما اگر دانش آموزی «خوب»، «توانا» و یا «قوی» باشید، به دروس مشکل تر راهنمایی می شوید و احتمالاً برای رفتن به دانشگاه و تحصیل بیشتر ریاضیات، تشویق خواهید شد. اگر شما دانش آموزی «کم استعداد» یا «ضعیف» باشید از انجام هر ریاضی غیرضروری منع می شوید و احتمالاً همین که بتوانید، آن را حذف خواهید کرد. مگر ساختار «توانایی ریاضیات» چه عیبی دارد، و در حال حاضر محققین از چه چیزی استفاده می کنند و چه چیزی را جستجو می کنند؟ مسأله آن است که هیچ توجهی به زمینه ای که در آن یادگیرنده یاد می گیرد وجود ندارد. سطح

خاصی از توانایی فرض می‌شود و توجهی ندارند که برنامه درسی چیست، معلم کیست یا چه روشی را به کار می‌برد، دانش‌آموز چه سن و سال و معلوماتی دارد و سطح انگیزه و وضعیت اقتصادی و وضعیت سلامتی یا فکری و غیرهٔ او چیست؟

در عین حال تحقیق، اهمیت نظریهٔ «شناخت موقعیت‌مدار»[17] را نشان داده است که در آن این حقیقت توصیف می‌شود که وقتی چیزی را یاد می‌گیرید آن را در موقعیت معینی یاد می‌گیرید. شما الزاماً قادر به انتقال آن یادگیری به هر موقعیت دیگری نخواهید بود. این تحقیق آنچه را که عقل سلیم به ما می‌گوید به ما نشان می‌دهد، که در یک موقعیت شما می‌توانید باهوش جلوه کنید و در موقعیتی دیگر کودن. با تغییر موقعیت، یادگیرنده در سطح توانایی متفاوت قرار می‌گیرد. بنابر آموزش ریاضی می‌دانیم که اگر برنامهٔ درسی، معلم یا روش تغییر کند، آنگاه حالت دیگری پیش می‌آید و یادگیرنده می‌تواند در سطح بسیار بالاتری از توانایی ظاهر شود. به عنوان مثال اگر برنامهٔ درسی بر مسایل و مقولات مورد علاقهٔ یادگیرنده تأکید کند، سطح عملکرد تغییر می‌کند. اگر معلم روش هایی را به کار گیرد که شامل فعالیت‌های خلّاق و تجسمی باشد آنگاه دانش‌آموزان دیگر نیز شروع به درخشش می‌کنند، نه فقط «ستارگان» همیشگی. اگر معلم از رویکرد عادی عملی در جبر تغییر جهت دهد به نوعی که بیشتر جستجوگرانه باشد، آنگاه دیگر دانش‌آموزان نیز کم‌کم شروع به همکاری می‌کنند.

بدین ترتیب آنچه که این روزها محققین بیشتر به آن گرایش دارند نظریهٔ «توانایی‌های ریاضی» یا، چنان‌که هاوارد گاردنر[18] (۱۹۹۳) آن را می‌نامد، «هوش چندگانه»[19] است. اینها عباراتی هستند برای توصیف راه‌های مختلفی که یادگیرنده‌ها برای نزدیک شدن و حل مشکلات جدید یادگیری استفاده می‌کنند. این نوع تحقیق معلم‌ها را به جستجوی «توانگری» در دانش‌آموزانشان ترغیب می‌کند، نه این‌که به صورت کوته‌نظرانه آنها را به «خوب» یا «ضعیف» دسته بندی کرده، و نه این‌که به آنها طوری آموزش دهند که اطمینان یابند موافق یا مخالف انتظاراتشان رفتار می‌کنند. جستجوی توانگری در دانش‌آموزانشان، معلم‌ها را قادر می‌سازد تا روش‌های تدریس دیگر را برای یافتن ایده‌های برنامه‌ای که آن گوناگونی غنی را توسعه و ارتقا خواهند داد، به کار برند. تنوّع در دانش‌آموزان چیزی است که باید از آن استقبال شده و پرورش یابد نه آن‌که نادیده گرفته شده یا مغلوب شود. تدریس دموکراتیک تفاوت و تنوع را می‌شناسد و از آن تجلیل می‌کند.

رویکرد تحقیقی دیگر که یک اثر دموکراتیک خواهد داشت آن است که «یادگیرنده‌ها» بیش از «یادگیری» در نظر گرفته شوند. این در زمانی بود که یادگیری زمینهٔ اصلی مطالعه بود و محققین خطاهای یادگیری، مراحل یادگیری، یادگیری موفق و ناموفق، و انواع مختلف یادگیری را مطالعه می‌کردند. مسأله آن است که معلم‌ها با یادگیرنده‌ها سر و کار دارند نه با یادگیری.

یادگیرنده‌ها افرادی منحصربه‌فردند که در بافت اجتماعی خاص خودشان زیست می‌کنند. همچنان که تحقیق روی یادگیری موقعیت‌مدار[20] توسعه یافت و همین‌که جنبه‌های اجتماعی بیشتری در یادگیری متمایز شده، وضعیت اجتماعی یادگیرنده‌ها جهت جستجو برای تشریح عملکرد موفق و ناموفق مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد (به عنوان مثال به بروو[21] و همکاران، ۱۹۹۸، مراجعه کنید). عدم موفقیت یادگیرنده‌های دو زبانه در کلاس درس یک زبانه، یا عدم موفقیت فرزندان کشاورزان که در برنامهٔ درسی ریاضی کاملاً شهری تحصیل می‌کنند، یا عدم موفقیت یادگیرنده‌های معلول، همگی کمک می‌کنند تا دلایل دیگر عدم موفقیت در کنار خصوصیات خود یادگیرنده‌ها روشن شود.

کلاس درس «عرصه‌ای» اجتماعی نیز هست، جایی که بسیاری از نقش‌ها در آن بازی می‌شوند، و جایی که در آن «از ما بهتران» می‌توانند مستقیماً بر کیفیت یادگیری تأثیر بگذارند. یادگیری ریاضی باید نظیر یک فعالیت چالشی که در زمینه‌های دوست‌داشتنی انجام می‌گیرد، لذت‌بخش باشد. اگر لازم باشد، یادگیرنده‌ها باید بتوانند با یکدیگر همکاری کنند و از نقطه نظرات یکدیگر چیزی یاد بگیرند. تفاوت‌ها را باید نمایاند و به‌طور سازنده با یکدیگر مقایسه کرد، نه آن‌که ببینیم چه کسی «درست» می‌گوید بلکه همهٔ یادگیرنده‌ها را قادر به یادگیریِ نظرات مختلف کرده و

بیاموزند چرا برخی نظرات مناسب‌تر از بقیه هستند.

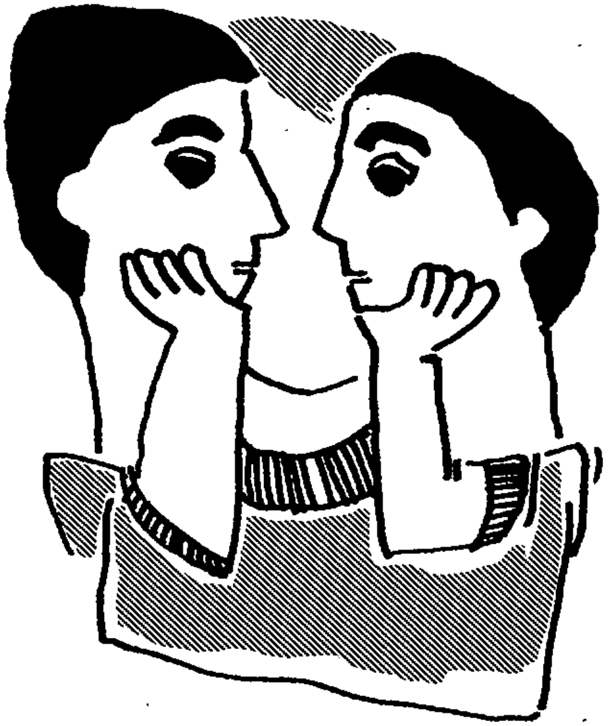
هزارهٔ جدید، هزارهٔ وابستگی به‌یکدیگر خواهد بود، و جوانان نیازمند یادگیری مهارت‌های همکاری و کار معقول با یکدیگر هستند. کلاس درسی که در آن نیمکت‌ها به‌ردیف قرار دارند، جایی که در آن هیچکس مجاز به حرف زدن نیست و همه باید در سکوت به‌درس خواندن بپردازند، یا بدتر آن‌که فقط به معلم گوش فرادهند، می‌باید امری مربوط به گذشته باشد. این حرف‌ها دیگر جایی در آموزش ریاضی دموکراتیک ندارند. تنها کاری که آن‌ها می‌کنند تقویت موهومات موجود و موانع یادگیری موفق است.

تدریس و معلم‌های ریاضی

در دو بخش قبل ناظر نظریات متعددی در ارتباط با تدریس ریاضی به‌راه‌های دموکراتیک‌تر بودیم. ایده‌های مربوط به تمرینات عملی ریاضی مختلف می‌تواند معلم‌ها را از فعالیت‌های ریاضی معتبر و مرتبط که ممکن است دانش‌آموزان در خارج از مدرسه در آن‌ها شرکت جویند، آگاه کند و معلم باید تلاش کند تا دربارهٔ این گونه فعالیت‌ها بیشتر بداند.

آگاهی از دیگر تمرینات عملی ریاضی معلم‌ها را قادر می‌سازد مسایل و تکالیفی را در کلاس خلق کنند که به‌دانش‌آموزان فرصت می‌دهد دانشی را که از هر جای دیگر کسب کرده‌اند نشان‌دهند. این امر دانش‌آموزان را ترغیب می‌کند تا به‌آنچه از قبل می دانستند صورت واقع بخشند و ایده‌ها و مهارت‌های ریاضی را تمرین کنند و درکل این امر عزّت‌نفس آن‌ها را بالا می‌برد و آن‌ها را هرچه بیشتر تشویق می‌کند.

به‌ویژه، در کشورهایی که مبتنی بر سنت غرب نیستند، معلم‌ها می‌توانند در تدریس خود با دیگر سنت‌های موجود ریاضی وابسته به‌خود دانش‌آموزان ارتباط خوبی برقرار کنند. خوشبختانه همین‌که برنامه‌های درسی به‌این نیاز روزافزون که منظور داشتن ارزش‌ها و ایده‌های فرهنگ ملی خود دانش‌آموزان است جوابگو شده، معلم‌ها فرصت بیشتری برای تزریق دیدگاه‌های مرتبط‌تر به‌تدریسشان خواهند داشت. این فقط می‌تواند به‌نفع یادگیرنده‌هایی باشد که درحال حاضر تلاش می‌کنند تا در ریاضیاتِ «بیگانه‌ای» که



اغلب محصول فرهنگی تحمیل شده توسط یک قدرت مستعمراتی است، تسلط یابند. در برنامهٔ درسی سواد عددی یا سواد ریاضی، فرصت تدریس‌های متفاوت زیادی فراهم است به شرط آن‌که معلم‌ها تعلیم‌دیده و مهارت لازم برای به‌کارگیری سودمندانهٔ آن‌ها را داشته باشند.

توسعهٔ هوش چندگانه و انواع مختلف توانایی‌های ریاضی در دانش‌آموزان با ایدهٔ «تدریس منعطف»[22] برابری کرده است. این ایده عمدتاً از کار در آموزش از راه دور و با درک آن‌که داشتن فقط آموزش مکاتبه‌ای در آموزش از راه دور کافی نیست، مشتق شده است. حال با ظهور شبکهٔ جهانی[23]، ترکیب همه نوع منابع یادگیری در آموزش از راه دور امکان‌پذیر شده است. عبارت «یادگیری منعطف»[24] این نوع سیستم راتوصیف می‌کند و با این‌که دوست ندارم رویکرد تدریس را با استفاده از واژهٔ «یادگیری» توصیف کنم، با این ایده که یادگیرنده‌ها با این وسیله بهتر می‌توانند تحت کنترل یادگیری خودشان باشند، موافقم. این ایده از نظرات کسانی که به‌بزرگسالان تدریس می‌کنند نیز ناشی شده است، آنجا که بحثی قوی در خصوص کنترل بیشتر یادگیرنده‌ها بر یادگیری خودشان وجود دارد.

حال این ایده به‌اندازهٔ مضمون درسی مدرسه مهم دانسته می‌شود و این امر توسط در دسترس قرار گرفتن بیشتر تکنولوژی اطلاعات در مدارس امکان‌پذیر شده است.

به این ترتیب معلم مجبور می شود به منابع یادگیری و ایجاد فرصت هایی برای یادگیرنده ها بیشتر فکر کند، و از این رو محدودهٔ روش ها و رویکردهای در دسترس معلم وسعت پیدا می کند. در واقع شاید بزرگ ترین پیشرفت در جهت دموکراتیزه کردن تدریس ریاضی حرکتی از در نظر گرفتن «روش ها و فرآیندهای تدریس» به ایده های مربوط به «منابع و رویکردهای یادگیری» باشد. این امر توسعهٔ نقش معلم را به طرز مشهودی تغییر می دهد، و اگر در سطح وسیعی پذیرفته شود مطمئناً اثر دموکراتیک قوی ای برآموزش ریاضی خواهد داشت.

به طور خلاصه، از دیدگاه یک معلم وسایل دموکراتیزه کردن آموزش ریاضی از میان سایر چیزها عبارت است از:

- درک تصویر غنی تری از یادگیرنده های ریاضی
- درنظر نگرفتن فرضیات غیرمجاز دربارهٔ سطوح توانایی به صورت غیرواقعی
- آگاهی از موقعیت اجتماعی یادگیرنده و چگونگی تأثیرگذاری آن بر کیفیت یادگیریشان
- فراهم ساختن زمینه های یادگیری مشارکتی
- شناسایی حدود یادگیری موقعیت مدار
- درنظر داشتن منابع و رویکردهای یادگیری
- دادن اختیار بیشتر به یادگیرنده ها جهت نظارت بر یادگیری خودشان

شاید به نظر بیاید که من دارم معلم ها را برای همهٔ خطاها و برای همهٔ آموزش های غیردموکراتیکی که در کلاس های درس ریاضی انجام می گیرد، سرزنش می کنم. مسلماً قصد من این نیست و می دانم که اگر قرار باشد این ایده های دموکراتیک توسعه یابد لازم است نقش های دیگری نیز به خوبی ایفا شوند. معلم ها خودمختار نیستند و بنابراین مهم است که آن عده از ما که در مقام تأثیرگذاری بر قیود ضد دموکراتیکی که در حال حاضر تدریس ریاضی را احاطه کرده اند، هستیم، سهم خود را در این مسئولیت بپذیریم.

ارزش ها در آموزش ریاضی

و سرانجام آن که، در قلب هر بحثی در خصوص دموکراسی در آموزش ریاضی، مقولهٔ «ارزش ها» قرار دارد. این مورد در حال حاضر مشکل ساز است، زیرا نه تنها از چرایی یا چیستیِ آنچه به نام تدریس ارزش ها در کلاس های ریاضی جریان دارد چیزی نمی دانیم، بلکه درخصوص آن که چگونه چنین تدریسِ ارزش هایی توسط معلم ها قابل کنترل است نیز چیزی نمی دانیم. علاوه بر آن، بسیاری از معلم های ریاضی حتی توجه ندارند که وقتی ریاضی درس می دهند، در حال تدریس ارزش ها هستند. اگر بخواهیم به سمت آموزش ریاضی دموکراتیک تر پیش برویم، شاید معلوم شود که تغییر بینش یکی از بزرگ ترین موانعی است که باید بر آن غلبه کرد.

بنابراین چندین پرسش مهم وجود دارند که شایستهٔ مطرح شدن در اینجا هستند: وضعیت موجود تدریس ارزش ها در کلاس های ریاضی چیست؟ معلم های ریاضی فکر می کنند که در حال تدریس چه ارزش هایی هستند؟ چه ارزش هایی توسط دانش آموزان آموخته می شوند؟ آیا معلم ها می توانند کنترل کافی بر تدریس ارزش ها داشته باشند تا ارزش های دیگری را علاوه بر آنچه که به طور مستمر آموزش می دهند، بیاموزند؟ متأسفانه در خصوص هریک از این پرسش ها، تحقیق بسیار کمی صورت گرفته است که این امر شکاف عظیمی در درک ما از چگونگی تأثیر بر وضعیت جاری ایجاد می کند. خوشبختانه ما توانستیم این تحقیق را از طریق پروژهٔ تحقیقاتی که توسط شورای تحقیقات استرالیا (بیشاپ و همکاران، ۱۹۹۹) سرمایه گذاری شده بود آغاز کنیم و این تحقیق درحال حاضر با تشریک مساعی همکارانمان در تایوان (وُو و لین[۲۵]، ۱۹۹۹) درحال انجام است.

ارزش ها در آموزش ریاضی کیفیت های عمیقاً تأثیرگذاری هستند که آموزش، آن ها را از طریق موضوع درس ریاضی مدرسه ای پرورش می دهد. چنین به نظر می رسد که ارزش ها مدت زمان طولانی تری در حافظهٔ مردم می مانند تا دانش مفهومی و رویه ای که اگر مرتب از آن ها استفاده نشود کم کم محو می شوند. تحقیق نشان می دهد که جنبه های منفی این ارزش ها منجر به بیزاری از ریاضیات خواهد شد همان طور که در بزرگسالان و در نتیجه در تأثیرگذاری منفی والدین دیده می شود (کاکروفت[۲۶]، ۱۹۸۲)

به ندرت دیده می شود که تعلیم ارزش های بدیهی در کلاس های درس ریاضی انجام شود، یک دلیل آن وجود این باور همگانی است که ریاضیات یک موضوع درسی مستقل از ارزش[27] هاست. در واقع بسیاری از والدین و سیاستمداران شاید از ابتدا به تعلیم ارزش های بدیهی در ریاضیات علاقه مند باشند. آنچه که والدین و دیگران بایستی دلواپس آن باشند، آن تعلیم و یادگیری ارزش هاست که در کلاس های درس ریاضی انجام می شود، و چون اغلب آن ها چنان که به نظر می آید به طور ضمنی انجام می گیرد، درحال حاضر فقط درک محدودی از چیستی ارزش هایی که منتقل می شوند و هم چنین چگونگی تأثیرگذاری آن هایی که منتقل می شوند وجود دارد. براساس دیدگاه های منفی که اغلب توسط بزرگسالان دربارهٔ تجربه های بد یادگیری ریاضی شان بیان شده است، می توان مشاهده کرد که ارزش های منتقل شده به آن ها لزوماً مطلوب ترین نبوده اند، ولی به طرز مؤثری انتقال یافته اند!

پس ارزش ها در کلاس های ریاضی چطور منتقل می شوند؟ به طور مثال، آیا کتاب های درسی فعالیت ها یا تمرین های صریحی با تأکید بر ارزش ها دارند؟ سیبه[28] (۱۹۹۹) برخی از کتاب های درسی سنگاپور و ایالت ویکتوریای استرالیا را تجزیه و تحلیل کرده و نتیجه گرفته که یقیناً کتاب های درسی ارزش های متفاوتی را به تصویر می کشند و از این رو منبع مهمی در توسعه و یادگیری ارزش ها برای دانش آموزان هستند.

از لحاظ یک تحقیق کلی، کتاب راهنمای بین المللی آموزش ریاضی (بیشاپ و همکاران، ۱۹۹۶) روشنگر است. این کتاب هیچ فصل ویژه ای در مورد ارزش ها ندارد، هرچند که در فصل های متعددی از این کتاب به جنبه های ارزشی آموزش ریاضی اشاره شده و براهمیت آن ها تأکید کرده است. به طور مثال براون[29] (۱۹۹۶) در مورد کار **شبکهٔ ریاضیات انسانی**[30] بحث می کند و یکی از اهداف آن را چنین بیان می کند: «درکی از داوری ارزشی در رشد هر یک از شاخه های علمیِ مورد اشاره واقع شده است. هرگز منطق به تنهایی نمی تواندِ در موردِ آن که چه چیزی مورد بررسی قرار گیرد، چگونه مورد بررسی قرار گیرد، و چرا مورد بررسی قرار گیرد، دلیل موجه اقامه کند.» (صفحهٔ ۱۳۰۲) ارنست[31] (۱۹۹۶) نیز در فصل خودش «عمومی کردن؛ موهومات، وسایل ارتباط جمعی و مدرنیسم»[32] به طور ضمنی در مورد ارزش ها بحث می کند.

شاید فصل اسکاوزموز[33] (۱۹۹۶) تنها فصلی باشد که بیشترین اشاره را به طور صریح به ارزش ها و آموزش دموکراتیک دارد، وقتی که می گوید «آموزش ریاضیِ انتقادی، به پیشرفت شهروندانی که قادر به شرکت در بحث ها هستند و قادر به تصمیم گیری برای خودشان هستند، مربوط می شود. بنابراین ما مجبوریم این حقیقت را درنظر بگیریم که دانش آموزان نیز خواستارند و باید فرصتی به آن ها داده شود تا آنچه را که در کلاس درس اتفاق می افتد «ارزیابی»[34] کنند. این امر تأکیدها را به علایق دانش آموزان برمی گرداند.» (صفحهٔ ۱۲۶۷)

این نظریه منعکس کنندهٔ این ایده است که برای توسعهٔ آموزش ارزش ها یک ضرورت وجود دارد و آن اطمینان حاصل کردن از آن که کلاس درس ریاضی محل انتخاب ها و انتخاب کردن ها برای دانش آموزان است. معلم ها می توانند، و به نظر من باید به دانش آموزان فعالیت هایی را عرضه کنند که آن ها را تشویق به انتخاب کند؛ به طور مثال، در مورد برگزیدن مسایلی برای حل کردن؛ دربارهٔ رویکردهای به کار گرفته شده در حل مسایل؛ دربارهٔ معیار داوری ارزش راه حل ها؛ و دربارهٔ مناسبت بیشتر مدل های ریاضی که

تدریس می شوند.

عرضهٔ فعالیت‌هایی که لازمهٔ انجام آن‌ها انتخاب کردن باشد، باید جزء طبیعی فهرست کاری معلم قرار گیرد: برای مثال؛ تکلیفی مثل «سه اثبات مختلف قضیهٔ فیثاغورس را توضیح داده و با یکدیگر مقایسه کنید.» دانش‌آموزان را ناگزیر درگیر بحث ارزش‌های مربوط به اثبات خواهد کرد. حتی عمل سادهٔ ارایهٔ راه‌حل‌های مختلف حل مسأله که توسط دانش‌آموزان باید مقایسه و مقابله شوند، ایده‌های انتخاب معیارها و ارزش‌ها را برمی‌انگیزد. آنچه که تمرکز اسکاوزموز برعلایق دانش‌آموزان انجام می‌دهد آن است که به ما یادآور می‌شود بیش از آن که تدریس ریاضی را فقط ریاضی درس دادن به دانش‌آموزان در نظر بگیریم، باید توجه کنیم که ما در حال تعلیم دانش‌آموزانمان از طریق ریاضیات نیز هستیم. آن‌ها از طریق چگونگی تدریسی که به آن‌ها عرضه می‌شود در حال یادگیری ارزش‌ها هستند.

البته مقبولیت این ایده‌ها در نهایت به ظرفیت معلم‌ها در به کار گرفتن این مقوله بستگی دارد. برای مثال، وقتی انتخاب‌های ممکن به دانش‌آموزان عرضه می‌شود و آن‌ها انتخاب می‌کنند، چگونه معلم‌ها پاسخ می‌دهند؟ آیا واقعاً معلم‌ها می‌دانند که چه ارزش‌هایی را از راهی که به دانش‌آموزان پاسخ می‌دهند به طور ضمنی به آن‌ها می‌آموزند؟ شاید فقط وقتی که معلم‌ها به دانش‌آموزان انتخاب‌های بیشتری می‌دهند، خودشان نیز با پاسخ‌هایی که برایشان تازه است روبه‌رو خواهند شد و بدین ترتیب این امر به آن‌ها تکلیف می‌کند که از ارزش‌های خودشان بیشتر آگاه باشند.

این حوزه ازجمله حوزه‌هایی است که فقط برای تحقیق بنیادی نیست بلکه بیشتر برای دوره‌های تربیت‌معلم و آموزش ضمن‌خدمت بنیادی می‌باشد و لازم است به طور کامل توسط معلم‌ها و محققان بررسی شود. نتایج چنین تحقیقاتی تأثیر زیادی در بسط درک ما از این که چرا معلم‌های ریاضی به این طریق درس می‌دهند و این که چگونه شهروندان آینده‌مان را ریاضی‌وار پرورش دهیم و این که اهداف مطلوب و شدنی برای آموزش ریاضی در جوامع دموکراتیک که ما قصد داریم در هزارهٔ جدید به سمت آن‌ها پیش برویم چه می‌باشند، خواهد داشت.

نتیجه گیری

من معتقدم که دموکراتیزه کردن آموزش ریاضی هدف اصلی آموزشگران ریاضی در هزارهٔ جدید است. امیدوارم توانسته باشم به قدر کافی حدود عقاید را شرح دهم تا شما نیز به این هدف معتقد شوید.

همچنین امیدوارم توانسته باشم شما را در سه چیز متقاعد کنم:

- ■ این که من تنها کسی نیستم که معتقد است دموکراتیزه شدن هدف اصلی است.
- ■ این که روند تحقیقات نیز به این جهت حرکت می‌کند.
- ■ این که همهٔ ما نقش مهمی در کمک به فرآیند دموکراتیزه شدن داریم.

ما نسبت به نسل‌های آینده مسئولیتی داریم، کسانی که این دنیای پیچیده و به‌هم ریخته را به ارث خواهند برد، تا برجهل، ترس و ناکامی که در حال حاضر در آموزش ریاضی جلوه‌گر است با تلاش برای دموکراتیک کردن عقاید و اعمالمان غلبه کنند.

مرجع اصلی

Alan J.Bishop, **Overcoming obstacles to the democratisation of mathematics education**, Faculty of Education, Monash University, Australia.

زیرنویس ها

1. International Congress on Mathematical Education
(این مقاله در نهمین کنگرهٔ بین‌المللی آموزش ریاضی در ژاپن توسط نویسنده ارایه شده است)
2. Damerow
3. Keitel
4. Bishop
5. Clements
6. Ellerton
7. International Handbook of Mathematics Education
8. mathematical practice
9. Abreu
10. Nunes'
11. numeracy
12. context - related
13. D'Ambrosio
14. matheracy
15. anti - democratic
16. mathematical ability
17. situated cognition
18. Howard Gardner
19. multiple intelligences
20. situated learning
21. Brew
22. flexible teaching
23. world - wide - web
24. flexible learning
25. Wu & Lin
26. Cockcroft
27. value -free
28. Seah
29. Brown
30. Humanistic Mathematics Network
31. Ernest
32. Popularization: myths, mass-media and modernism
33. Skovsmose's
34. evaluate

مراجع

Abreu G. de (1993) The relationship between home and school mathematics in a farming community in rural Brazil. Unpublished PhD thesis, University of Cambridge, Cambridge, UK.

Bishop, A.J. (1988) *Mathematical enculturation: a cultural perspective on mathematics education.* Dordrecht, Holland: Kluwer

Bishop, A.J., Hart, K., Lerman, S. & Nunes, T. (1993) *Significant influences on children's learning of mathematics.* Paris: UNESCO

Bishop, A.J., Clements, M.A.,Keitel, C., Kilpatrick, J. & Laborde, C. (eds) (1996) *International handbook of mathematics education.* Dordrecht, Holland: Kluwer

Bishop, A., Fitz Simons, G., Seah, W.T., & Clarkson, P. (1999). Values in mathematics education: Making values teaching explicit in the mathematics classroom. *Proceedings of the AARE-NZARE Conference, [Online].* Australian Association for Research in Education Inc. Available: [http://www.swin. edu. au/aare/99 pap/bis 99188. htm]
[2000, April 4].

Brew, C., Pearn, C., Leder, G. & Bishop, A.J. (1998) Big fish resizing themselves in the school pond: why do girls under-rate their ability? In C. Keitel (ed) *Social justice and mathematics education.* (pp. 69-82) Berlin: Freie Universitat Berlin

Brown, S .I. (1996): Towards humanistic mathematics education. - In A.J. Bishop; K. Clements; C.Keitel; J.Kilpatrick;C.Laborde. (1996): *International handbook of mathematics education.* Dordrecht: Kluwer, p. 1289-1321

Clements, M.A. & Ellerton, N.F. (1996) *Mahtematics education research: past, present an future.* Bangkok, UNESCO

Cockcroft, W.H. (1982)*Report of the Committee of Inquiry into the teaching of mathematics in schools.* London: HMSO

D'Ambrosio, U. (1985): Mathematics education in a cultural setting. *International journal of mathematicaleducation in science and technology.* 16(4), 469-477

Damerow, P., Dunkley, M.E., Nebres, B .F. & Werry, B (eds) (1984) *Mathematics for all.* Paris: UNESCO

Ernest, P. (1996): Popularization: myths, massmedia and modernism. – In A.J.Bishop; K. Clements; C. Keitel; J.kilpatrick; C.Laborde. (1996): *International handbook of mathematics education.* Dordrecht: Kluwer, p. 785-817

Gardner, H. (1993) *Multiple intelligences: the theory in practice.* New York: Basic books.

Keitel, C., Damerow, P., Bishop, A.J. & Gerdes, P. (eds) (1989) *Mathematics, education, and society.* Paris: UNESCO

Nunes, T. (1993) The socio-cultural context of mathematical thinking: research findings and educational implications. In A.J Bishop, K.Hart, S.Lerman, & T. Nunes (eds) *Significant influences on children's learning of* mathematics (pp.27-42) Paris: UNESCO

Seah, W.T. (1999) The portrayal and relative emphasis of mathematical and mathematics educational values in Victoria and Singapore lower secondary mathematics textbooks: a preliminary study. Unpublished M.Ed. thesis. Monash University, Melbourne, Australia.

Skovsmose, O.(1996): Critical mathematics education. -In A.J.Bishop; K. Clements; C.Keitel; J. Kilpatrick; C.Laborde. (1996): *International-handbook of mathematics education.* Dordrecht: Kluwer, p. 1257-1288

■

چگونه می توان یك معلم ریاضی برجسته شد؟

علیرضا مدقالچی ، دانشگاه تربیت‌معلم ـ گروه‌ریاضی

چندی پیش مقاله‌ای* تحت عنوان «چگونه می توان یک معلم ریاضی برجسته شد» که در یکی از مجلات ریاضی خارجی به چاپ رسیده بود، نظر اینجانب را جلب کرد. نویسندهٔ مقاله ضمن مرور تاریخی و بررسی رفتار شناسی آموزشی یکی از ریاضیدانان نام آشنا ـ دمورگان ـ ویژگی های معلمان برجستهٔ ریاضی را برشمرده بود. این مقاله حاوی نکات ارزندهٔ تاریخی و آموزشی است که رعایت آن‌ها، می تواند به ارتقای کیفی معلم کمک کند. مقالهٔ حاضر بر پایهٔ محتوای آن مقاله تدوین شده است و در واقع، برداشتی اقتباس گونه از آن مقاله است. هم‌چنین به انضمام دو مقدمه است که هر دو، مبتنی بر تجربیات نگارنده است.

۱) چند سال پیش در مراسم بزرگ‌داشت روز معلم، یکی از سخنرانان که خود معلّمی توانگر است به تشریح حادثهٔ ملاقات ابن عربی با ابن رشد پرداخت: «ابن عربی یکی از عرفای به‌نام اسلامی است که در سال ۵۶۰ در مرسیه، جنوب اسپانیا به دنیا آمد که در جهان اسلام او را با القاب شیخ اکبر و محیی الدین می شناسند و ابن رشد بزرگترین شارح ارسطو بود. ابن عربی در بیست سالگی با هوش فراوان و بصیرت سرشار، به مسافرت در شهرهای مختلف اندلس پرداخت. او در یکی از این سفرها، با ابن رشد ملاقات کرد. ملاقات این دو اهمیّت زیادی داشت، زیرا هریک از اینها نمایندهٔ یک بینش متفاوت بودند. ابن رشد پیرو دستور عقل استدلالی بود و مؤثرترین متفکر اسلامی در مغرب زمین شد و ابن عربی چهره‌ای نافذ در تصوف در جهان اسلام». ارایهٔ بحث دربارهٔ ملاقات این دو از بحث ما خارج است، اما هدف از اشاره به این مقوله، تأکید بر موضوع زیر است: ابن عربی می گوید «دیگر فرصتی برای دیدار ابن رشد دست نداد تا این که مرگ او در سال ۵۹۵ هجری در مراکش اتفاق افتاد. جسد او را به قرطبه آوردند. تابوت او را بر یک طرف حیوانی بارکش گذاشته بودند و تألیفاتش را برای حفظ تعادل بار برطرف دیگر. آن گاه ابوالحکم عمروبن سراج نساخ روبه من کرد و گفت: می بینی که بر مرکب استاد ابن رشد چه چیز را برای تعادل گذاشته‌اند، یک طرف استاد است و طرف دیگر کتابهایی که وی تألیف کرده است[۱].» این یعنی یک استاد، یک معلم برجسته که تمام عمر خود را صرف یادگیری و آموزش و تألیف و هدایت دیگران کرده است.

۲) چندی پیش یک مؤسسهٔ علمی و پژوهشی که به جمع آوری شرح حال علمی و فعالیت‌های آموزشی و پژوهشی دانشمندان و استادان پرداخته بود، از نگارنده درخواست کرد تا شرح زندگی علمی خود را به آن‌ها بدهم. اجابت این درخواست برای اینجانب سخت سنگین بود، زیرا اعتقادم بر این است که معلم باید به مرحله ای برسد که مطالعهٔ شرح حال علمی او، اثربخش و ثمربخش باشد. به هرحال اصرار و ابرام آن مؤسسه، بر انکار من فایق آمد و اینجانب را برآن داشت تا برگذشتهٔ خود نظاره کرده و تجربه و توشهٔ اندک خود را در منظر دید علاقه‌مندان و عاشقان دانش ریاضی قرار دهم. با مرور دقیق حوادث گذشته، نقش ارزندهٔ معلمان خود را بسیار مؤثر یافتم. به ویژه آن‌هایی که صمیمانه می کوشند و با علاقهٔ وافر به دانش و حرفهٔ خود، بذر راه و روش درست اندیشیدن، استقلال در تفکر، خوداتکایی، اعتمادبه‌نفس، آزاداندیشی و عشق به حرفهٔ خودداشتن را در ضمیر ناخودآگاه دانش‌آموزان خود می پاشند تا بروید و بار دهد. در این مرور، دریافتم که

گاهی نقش یک معلم اول ابتدایی از نقش یک معلم و یک استاد در سایر مراحل آموزشی مؤثرتر است. می گویند معلمی شغل انبیا است؛

«انبیاء حرف حکیمانه زدند
از پس نظم جهان چانه زدند»

پس معلم واقعی رفتار حکیمانه دارد و متعلمین خود را برای یک جهان منظم آماده می کند.

همهٔ ما حداقل چند نفر از معلمان خود را به خاطر می آوریم که زندگی علمی مان تحت تأثیر آنان شکل گرفته است ولی معلمان برجسته ای وجود دارند که مکتب فکری آن ها بر گروه عظیمی از متعلمین اثرگذار بوده که با عشق و علاقه، موضوع های علمی را آموزش داده و این آموزش در زندگی متعلمین، تأثیری دائمی گذاشته است، حتی اگر این آموزش دیدگان؛ ریاضیدان و یا ریاضی کار نشده اند و حرفه های دیگری را تجربه می کنند.

اکثر ما با نام اگوستس دمورگان[1] آشنایی داریم و قوانین او را درنظریهٔ مجموعه ها به کار برده ایم. نام او در نظریهٔ مجموعه ها آشنا است؛ او را به عنوان ریاضیدان و منطق دانی می شناسیم که به اصلاح منطق قدیم برآمد و طرح جدیدی برای منطق نسبت ها ارایه نمود[۲] و این رهیافت، به منطق نمادی منجر شد. دمورگان به جبر نیز علاقه مند بود. کوشش او برای نمایش هندسی اعداد مختلط به کشف اعداد کواترنیون توسط ویلیام روان هامیلتون[2] منجر شد. در اوایل قرن نوزدهم، آنالیز ریاضی هم یکی دیگر از مشغله های فکری او بود که در آن زمان، این موضوع در انگلستان کاملاً ناشناخته مانده بود. او کارهای باارزشی در مورد همگرایی سری ها تولید کرد و مقالات تحقیقی زیادی در مورد تاریخ ریاضیات منتشر ساخت.

در ۱۸۶۰ میلادی و در پایان دورهٔ زندگی علمی خود، دمورگان یکی از ریاضیدان های مؤثر و قابل احترام در انگلستان بود که چندسالی بعد از هامیلتون و بول[3] زندگی کرد و از نظر مرتبت اجتماعی، بالاتر از کیلی[4] و سیلوستر[5] قرار داشت. ولی دمورگان چگونه به این شهرت و اعتبار رسید؟ چرا او این چنین قابل احترام بود؟ او در پایان دورهٔ زندگی علمی خود، پروفسور ریاضیات در کالج دانشگاهی لندن بود. این کالج در ۱۸۲۶ میلادی بنیانگذاری شد و اولین کالج دانشگاهی بود که بعداز اکسفورد و کمبریج تشکیل گردید. درآنجا او به تنهایی درس های مختلفی را به مدت سی سال تدریس می کرد و تأثیر سازنده ای بر روی تعدادی از ریاضیدان ها، دانشمندان و سایر روشنفکران معروف گذاشت. متأسفانه، مطالبی که وابسته به تجربه ها و حرفهٔ معلمی او باشد، کمتر چاپ شده اند. او کتاب های درسی متنوعی را نوشت که بسیار موفقیت آمیز بودند، ولی این کتاب ها بیانگر تمام روش های آموزشی او در کلاس درس نیست. اطلاعات منتشر نشدهٔ عظیمی در مورد شیوه های آموزشی دمورگان وجود دارد که در دایرة المعارف بریتانیکا به آن ها اشاره شده است. او موضوع های درسی را به عنوان طرح درس و جزوه های درسی در حوزه های مختلف علوم ریاضی تهیه کرد و از آن ها، به عنوان مکمل موضوع های درسی خود، استفاده کرد. این یادداشت ها در ۳۲۰ کتابچه در کتابخانهٔ دانشگاه لندن نگهداری می شوند که به خط دمورگان نوشته شده و مباحث درسی او را تشکیل می دادند. محتوای این جزوه ها، دید کاملی از ریاضیات آن زمان را در یکی از پیشرفته ترین مؤسسات آموزشی ارایه می دهد.

هدف این مقاله بررسی موضوع های درسی دمورگان و روش ها و شیوه های آموزشی او است. با مقایسهٔ این شیوه با روش های ریاضیدانان معاصر او، درمی یابیم که چگونه با اعمال روش های مشابه، می توان یک معلم برجستهٔ ریاضی شد.

دورهٔ زندگی حرفه ای دمورگان

دمورگان در ۱۸۰۶ میلادی در هندوستان چشم به جهان گشود و آموزش کلاسیک خود را در جنوب غربی انگلستان به اتمام رسانید. او در ۱۶ سالگی وارد کالج ترینیتی کمبریج شد که تحت آموزش های ریاضیدانان بزرگی چون جورج پیکاک[6] و چارلز بابیج[7]، پدر علم کامپیوتر، قرار گرفت. این سه تن، انجمنی کوتاه مدت ولی مؤثر در ۱۸۱۲ تشکیل دادند که روش های جبری لاگرانژ را جایگزین سیستم فلاکسیون نیوتن کنند.

سال های زندگی دمورگان در کمبریج مصادف

با پایه گذاری دانشگاه لندن بود. لندن در آن زمان تنها پایتخت اروپایی بود که فاقد چنین مؤسسه‌ای بود. در واقع، تا آن دوره اکسفورد و کمبریج تنها مکان‌هایی بودند که در انگلستان در سطح دانشگاه کار می‌کردند. درهای این دو دانشگاه فقط برای اعضای کلیسای انگلستان[8] باز بود و سایر مذاهب اعم از کاتولیک‌ها و غیره حق ورود نداشتند و نیز طبقهٔ متوسط به دلیل مسایل مالی قادر به ورود به این دو دانشگاه نبودند. بنیانگذاری دانشگاه لندن در ۱۹۲۶ راه حلّی رادیکال برای این مسأله بود. این دانشگاه دارای رفتار سکولار و برنامهٔ آموزشی پیشرفته بود. دمورگان بعد از اتمام کالج در فوریه ۱۸۲۸ میلادی به عنوان استاد ریاضی این دانشگاه جدید انتخاب شد، ولی همه چیز به سادگی پیش نرفت.

دروس آموزشی

در دوران استادی دمورگان، دروس ریاضی او اصلی‌ترین مؤلفهٔ برنامه آموزشی کالج لندن بود. این دروس به انضمام موضوعاتی نظیر فلسفهٔ طبیعی (فیزیک) برنامهٔ دروس دوسالهٔ کالج را تشکیل می‌داد. در آن زمان آموزش مدرسه اجباری نبود، ولی سنّ ترک مدرسه اجباری و در حدود چهارده بود. از این رو دانشجویان نسبت به امروز جوان‌تر بودند. معمولاً، آن‌ها بین ۱۵ تا ۱۸ سالگی کالج را برای شرکت در دوره‌های حرفه‌ای جهت استخدام ترک می‌کردند. در مورد دانشجویان استثنایی، دروس پیشرفته‌تری در اکسفورد (اگر به طور کلّی مستعد بودند) یا در کمبریج (اگر از نظر ریاضی مستعد بودند) تشکیل می‌شد. در ریاضیات، دانشجویان به دو کلاس اول و دوم تقسیم می‌شدند و هر کلاس قسمتهای پایین و بالا داشت. دروس سال اول مورد نیاز حرفه‌های مختلف مانند مهندسی بود، درحالی که هدف کلاس‌های پیشرفته، تربیت افراد مستعدی بود که توانایی یادگیری موضوعات پیشرفته را داشتند. جدول زیر نشان می‌دهد که تقسیم‌بندی این دروس چگونه بوده است.

کلاس مقدّماتی، قسمت اوّل

I) حساب و نظریهٔ حسابی تناسب
II) اقلیدوس، کتاب‌های ۱ تا ۴
III) کتاب ششم اقلیدوس
IV) اولین کتاب هندسهٔ اقلیدوسی (صلب)
V) جبر، نامعادلات درجهٔ اول

کلاس مقدماتی، قسمت دوّم

I) اقلیدوس، کتاب‌های ۵ و ۶
II) اولین کتاب هندسهٔ اقلیدوسی (صلب)
III) بررسی اصول و اعمال حساب
IV) جبر (شامل لگاریتم)
V) مثلثات مسطح (اندازه گیری)

کلاس پیشرفته، قسمت اوّل

I) مثلثات کروی
II) مقاطع مخروطی
III) کاربرد جبر در هندسه
IV) قسمت‌های پیشرفتهٔ جبر
V) حسابان

کلاس پیشرفته، قسمت دوّم

توسیع مباحث قسمت اوّل

در این زمان دمورگان اظهار می‌دارد که این برنامه بیانگر رسیدن کامل به هدف نیست. به طوری که او در درس خود در سال ۱۸۲۸ میلادی بیان می‌دارد، من خود را محدود به محتوای برنامهٔ کلاسی نخواهم کرد. برای او کیفیت بیش از کمیّت اهمیت داشت. برای رسیدن به این هدف، او دو روش آموزشی اساسی را برجسته کرد که بدین وسیله دانشجویان او توانستند دانش ریاضی خود را به دست آورند: روش اول، پشتکار جدی در مطالعات شخصی و روش دوم، ماندن مداوم در پشت نیمکت کلاس درس و یاد گرفتن آنچه که از زبان معلم می‌شنیدند، بود. کلاس درس به تنهایی نمی‌تواند دانشجویان را به سطح مطلوب برساند. به علاوه مطالعهٔ یادداشت‌های کلاسی دانشجویان علی‌رغم اهمیت داشتن، نمی‌تواند جایگزین مطالعه کامل باشد. می‌توان گفت که اطلاعاتی که از یک درس کلاسی به دست می‌آید، به اندازهٔ معلوماتی است که از خواندن سریع یک کتاب به دست می‌آید. در واقع، از دیدگاه دمورگان،

نقش کلاس بیشتر ارایهٔ روش‌ها و راهنمایی برای مطالعات دانشجویان است.

او برای وسعت بخشیدن به این راهنمایی‌ها، جزوه‌های زیادی را در تمام زمینه‌های دروس خود آماده می‌کرد و این دست‌نوشته‌ها را برای استفادهٔ محصلین در کتابخانه قرار می‌داد. این جزوات نه تنها شامل مباحث درسی بلکه شامل مباحث دیگری نیز بود که محصلین لازم بود تا آن‌ها را فراگیرند.

تعداد این دست‌نوشته‌ها که بین سال‌های ۱۸۴۳ و ۱۸۶۶ نوشته شده است بیش از سی صدتا است که اکنون موجودند.

کلاس مقدماتی (قسمت اوّل)

از مجموع ۳۷۸ دست‌نوشته، فقط ده جزوه حاوی مباحث قسمت اوّل مقدماتی است. بسیاری از وقت کلاس‌ها، صرف ارایهٔ مسأله به دانشجویان و حل آن‌ها می‌شد و کتاب‌های «اصول حساب ـ ۱۸۳۰»[۹] و «اصول جبر ـ ۱۸۳۵»[۱۰] و «اصول اقلیدوس»[۱۱] مباحث این دوره را تشکیل می‌داد. دست‌نوشته‌ها نه تنها ارایهٔ موضوع‌های کتاب‌ها بود، بلکه آن‌ها را با عمق بیشتری ارایه می‌داد. یکی از جزوه‌های جذاب او که قبل از شروع هندسه انجام می‌شد، گفتاری تحت عنوان «مفاهیم مقدم بر هندسه» بود که به‌منظور آشنا ساختن دانشجویان با مباحث فلسفی و معرفت‌شناسی موضوع ارایه می‌شد. به‌ویژه، این کار نشان می‌دهد که تا چه اندازه، دمورگان، به ایجاد زمینه‌های دقیق مفاهیم و فرآیندهای منطقی، برای فهم مباحث هندسی معتقد بود و آن‌ها را ضروری می‌دانست.

دمورگان از عدم تماس دیسیپلین‌های ریاضی و منطق شکوه می‌کرد و معتقد بود که هندسه‌دان‌ها، به ندرت منطقیون صوری بوده‌اند. به گفتهٔ او، «یکی از ابهامات دانشجویان دربرهان‌های هندسی تمایز بین یک قضیه و عکس آن است.»

قدم بعدی او در آموزش هندسه، معرفی مفهوم یک برهان بود. او می‌نویسد: «یک گزاره» را می‌توان به دو طریق ثابت کرد: مستقیماً یا با اثبات این که آن راست است، و غیرمستقیم، با اثبات این که نقیض آن نادرست است.

با توجه به این که از دیدگاه او، روش دوّم برای مبتدیان بسیار مشکل بود، درنتیجه، مهارت‌های لازم قبل از آموزش هندسه به دانشجویان داده می‌شد.

کلاس مقدماتی (قسمت دوّم)

برای ورود به این دوره، آشنایی با برهان استنتاجی اقلیدوس تا کتاب چهارم ضروری بود. ولی کتاب پنجم، با معرفی ایده‌های پیچیدهٔ نسبت و تناسب، اغلب با مشکلاتی همراه بوده است. او می‌گوید: «برای دانشجویان خواندن کتاب پنجم بدون فهم آن عادت شده است». به این منظور، او نمادهای حسابی تناسب را با نمادهای سنتی جایگزین کرد. دمورگان، به رسم پرسپکتیو در هندسهٔ فضایی اعتقاد نداشت.

کلاس پیشرفته (قسمت اوّل)

این دوره با مثلثات کروی شروع می‌شد. در این درس دست‌نوشته‌های او به همراه یک کتاب تدریس می‌شد. این یادداشت‌ها شامل توضیحات بیشتری از مثلثات کروی و اثبات فرمول‌ها و محاسبهٔ مساحت‌ها، دوایر محیطی و محاطی بود. مقاطع مخروطی بخش بعدی این دروس بود که شامل بیست دست‌نوشته بود. ابتدا مقاطع مخروطی کاملاً به روش هندسی تعریف شده بودند، او سپس مباحث مربوط به هندسهٔ تصویری را معرفی می‌کرد. ادعای دمورگان این بود که «روش‌های تصویری، خواص کلی‌تر و پیچیده‌تری از مقاطع مخروطی را آسان‌تر از روش‌های معمولی بیان می‌کند.» به محض این که دانشجویان او به مهارت کافی در هندسهٔ تصویری می‌رسیدند، او هندسهٔ جبری را برای اثبات‌ها به کار می‌برد. با توجه به این که معادلات خط و دایره در مقاطع قبلی تعریف شده بودند، او در این درس معادلات درجهٔ دوم، $ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0$ را به کار می‌برد و منحنی‌های حاصل را به دست می‌آورد. در این مرحله، دانشجویان به روش‌های پیشرفته در جبر دست می‌یافتند و با فرمول‌های کاردان و فراری برای حل معادلهٔ درجهٔ سوم و با روش هورنر یعنی تقریب ریشه‌ها بدون حل معادله آشنا می‌شدند. او انگیزهٔ خود و نتایجی که دانشجویان او در مورد معادلهٔ $x^3 - 2x = 5$ به دست آوردند را چنین بیان

می‌کند: «در سال ۱۸۳۱ میلادی کارهای فوریه در مورد حل معادلات با ۳۳ رقم اعشار با صرف کار زیاد به‌دست آمد. با این تفکر که فرصت خوبی برای بیان تفوق روش هورنر به‌دست آمده است [این روش در فرانسه و انگلستان ناشناخته بود]، من در یکی از کلاس‌های خود در ۱۸۴۱ میلادی این مسأله را به‌عنوان تمرین دراختیار دانشجویان قرار دادم. جواب‌های ارایه شده با ۵۰ رقم اعشار محاسبه شده بودند.» با توجه به این شیوه‌ها، طرح جدید روش‌های آموزشی دمورگان را درمی‌یابیم که از جمله، کوشش برای آشنائی دانشجویان با پیشرفت‌های جدید دانش ریاضی بود. مثلاً جزوهٔ ۲۵، درحالی که در مورد حل معادلات است ولی امروزه بخشی از آنالیز مختلط به‌حساب می‌آید.

در دوره‌های پیشرفته با بسیاری از مفاهیم آنالیز مخصوصاً سری‌های نامتناهی آشنا می‌شدند، ولی این امر درست بعداز زمینه‌سازی دقیق در اعمال جبری و تحلیلی و مفهوم و اهمیت حد انجام می‌شد. آموزش اولیهٔ او در انتگرال بیش از محاسبهٔ سطوح زیرمنحنی پیش نمی‌رفت، ولی شواهدی وجود دارد که او در این درس، مقدمات معادلات دیفرانسیل را هم شروع می‌کرد.

کلاس پیشرفته (قسمت دوّم)

شرکت در دروس دمورگان، دانشجویان را قادر می‌ساخت تا امتحانات کارشناسی دانشگاه لندن را بگذرانند و به دورهٔ فلسفهٔ طبیعی در کالج برسند. به آن‌هایی که از استعداد فوق‌العاده برخوردار بودند و آرزوی ورود به دوره کارشناسی ارشد را داشتند توصیه می‌شد که عالی‌ترین درس ریاضی کالج را بگذرانند: این درس متقاضیان فراوان داشت و بیشترین وقت و توجه دمورگان را به خود اختصاص می‌داد.

برای این درس دمورگان ۱۳۸ کتابچه تهیه کرده بود که بیشتر مباحث آن حسابان بود. مباحث دیگر عبارت بود از هندسهٔ سه‌بعدی و نظریهٔ احتمال، که وقت کمی نسبت به حسابان صرف تدریس این مباحث می‌شد. علاوه‌بر مباحث نظری در این درس، دمورگان مباحث کاربردی را هم در آن منظور کرده بود. در این دوره، وقت زیادی صرف مباحث کاربرد ریاضیات می‌شد. یکی از مباحث، نظریهٔ احتمال بود که در کلاس مقدماتی، دانشجویان آن را به طور نظری آموخته بودند و حالا باید کاربرد آن را تجربه می‌کردند که بیشترین مبحث در این مورد، نظریهٔ خطا بود. آموزش او مبتنی بر کارهای گاوس بود که چند دهه قبل به‌دست آمده بود. بازهم می‌بینیم که او دانشجویان خود را با کارهای جدید حوزه‌هایی از تحقیقات ریاضی آشنا می‌کرد.

در آموزش مباحثی چون دینامیک که توسط استادان فیزیک هم تدریس می‌شد، رفتار او کاملاً ریاضی بود. او پیش‌زمینه‌های بسیاری از حوزه‌های دانش ریاضی معاصر را ارایه می‌داد و حتی تا جایی پیشروی می‌کرد که دانشجویان را با جنبه‌هایی از تحقیقات جدید آشنا می‌ساخت.

چشم انداز نهایی

کاوش در دست‌نوشته‌های باقی‌مانده از دمورگان به‌عنوان سرفصل دروس آموزشی دمورگان شگفتی انسان را برمی‌انگیزاند. نه‌تنها تنوع در مباحث، بلکه وسعت و عمق آن‌ها نیز شگفت‌آور است. جزوه‌های دمورگان، اطلاعات مفیدی در مورد سبک آموزش او ارایه می‌دهند، به طوری که این آگاهی را نمی‌توان از سرفصل دروس و یا اوراق امتحانی به دست آورد. با این وجود، نمی‌توان از روی این جزوه‌ها، دقیقاً دریافت که رفتار آموزشی او چگونه بوده است. ولی منابع دیگر برای شناخت آموزه‌ها و دیسیپلین‌های آموزشی وجود دارند که آموزنده هستند و از آن جمله، می‌توان به مکتوباتی که دانشجویان در ستایش از دمورگان و نحوهٔ تدریس و معلّمی او نوشته‌اند، اشاره کرد.

نتیجهٔ نهایی

نه‌تنها از وضعیت دانشجویان می‌توان به توانایی و ظرفیت یک معلم پی برد، بلکه تأثیر و نقش این توانایی‌ها در سال‌های بعد هم نمایان می‌شود. بعداز نیم‌قرن از تدریس او، توماس هادگین[12] شخصیت و روش‌های آموزشی او را به‌عنوان یک معلم کامل ترسیم نموده است. حتی خصوصیات رفتاری و اخلاقی دمورگان و شخصیّت و دیسیپلین عالی او را مورد ستایش قرار داده است. جی‌وانز[13] در دایرة‌المعارف بریتانیکا، به‌تأثیر شگرف دمورگان

در توسعهٔ علمی پرداخته و تأثیر شیوه‌های آموزشی او را در توسعهٔ علمی دانشجویانش، مورد ارزیابی قرار داده است. از دیدگاه جی‌وانز، پیشرفت‌های فرانسیس گاتکری[14] بنیانگذار مسأله چهاررنگ، ای. جی. روت[15] یکی از موفق‌ترین ریاضیدانان و استادان کمبریج و اسحق تادهانتر[16] به‌عنوان یک محقق تاریخ ریاضیات و نویسنده موفق کتاب‌های مختلف درسی، مدیون شیوه‌های آموزشی، رفتار و سبک نگارش دمورگان بوده است.

این اثرگذاری، یادآور نقش اساسی وایرشتراس ریاضیدان نامی بردانشجویان اوست که در نیمهٔ دوم قرن نوزدهم در دانشگاه برلین در درس او، حاضر می شدند. اگرچه وایرشتراس دانشجویان ریاضی زبده‌تر از دمورگان داشت (از جمله می‌توان به اوتوپلدر[17]، ادلف هورویتز[18]، فیلکس کلاین[19]، هرمان مینکوفسکی[20]، گوستا متیاگ لفلر[21]، هرمان شوارتز[22] و ای. اچ. مور[23]) اشاره کرد، با این حال، اشاره به ریاضیدانانی که «آموزندهٔ ممتاز در کلاس درس خود هستند»، در مورد هر دو صدق می‌کند.

از طرف دیگر، نمی‌توان مقایسه‌ای بین روش‌های آموزشی دمورگان و وایرشتراس، باکوشی انجام داد. کوشی به‌عنوان استاد پلی‌تکنیک در ۱۸۱۶ در پاریس، ریاضیات دوره‌های مهندسی را تدریس می‌کرد. او تا روشن کردن کامل موضوع، درس را ادامه می‌داد. با این حال، برخلاف دمورگان معمولاً ده دقیقه بعد از حضور دانشجویان در کلاس درس حاضر می‌شد. در حالی که دمورگان نسبت به حضور به موقع در سر کلاس درس حساس بود.

بنابراین، از مقایسهٔ شیوه‌ها و رفتارهای آموزشی دمورگان با هم عصران خود می‌توان صفات بارز یک معلّم بزرگ را نتیجه گرفت:

۱) قبل از هرچیز، یک معلم باید توانایی ارایهٔ درس خود را به وسیلهٔ مجموعه‌ای از طرح‌های درسی واضح و منظم داشته باشد به طوری که این طرح‌ها، درس را به صورت قابل فهم درآورند. دمورگان به قدر کافی مجهز به این شیوه بود درحالی که کوشی و حتی وایرشتراس چنین نبودند.

۲) او باید نظم در کلاس را طوری ایجاد کند تا توجه دانشجویان بر موضوع درسی متمرکز شود.

۳) معلم باید توانایی ایجاد انگیزه در دانشجویان را داشته باشد و عاشق موضوع درسی باشد. دمورگان با تمرکز بر فهم عمیق پایه‌های اساسی به جای پرداختن به تکنیک‌ها و محاسبات، به خوبی قادر به ایجاد این انگیزه بود. بدون شک، وایرشتراس، کلاین و دیگران نیز در ایجاد انگیزه موفق بودند ولی مخاطبان اینها اکثراً دانشجویان دوره‌های عالی بودند که انگیزه و علاقه آن‌ها بسیار قوی بود. موفقیت دمورگان در تشویق بسیاری از دانشجویان معمولی دورهٔ لیسانس و ارایهٔ زیبایی‌ها و جاذبیت‌های ریاضی به آن‌ها بود. مسلماً کوشی، وایرشتراس، کلاین، ماکسول و سیلوستر، همگی ریاضیدانان‌های بزرگی بودند. بعضی از این‌ها وایرشتراس و کلاین، معلمان برجسته‌ای نیز بودند امّا گرچه شاید نتوان دمورگان را یک ریاضیدان در سطح آن‌ها نامید، با این حال، او نقش برجسته‌ای در گسترش منطق صوری و معرفی آن در جریان اصلی دانش ریاضی داشته است و سهم او در گسترش جبر و حسابان، ارزنده است. دمورگان به سبب کارها و روش‌های آموزشی در کلاس درس، استحقاق رتبهٔ اول را دارد و صاحب تمام صفات و کمالات یک مربی مؤثر است. به‌راستی می‌توان او را یک معلم بزرگ نامید.

زیرنویس‌ها

1. Augustus De Morgan
2. William Rowan Hamilton
3. Boole.
4. Cayley
5. Sylvester
6. George Peacock
7. Charles Babbage
8. Church of England
9. Elements of Arithmetic
10. Elements of Algebra
11. Euclids Elements
12. Thomas Hodgin
13. Jevons
14. Francis Guthrie
15. A.G.Roth
16. A.Tad Hanter
17. Otto Hölder
18. Adolf Harwitz
19. Felix Klein
20. Hermann Minkowski
21. Gösta Mittag - Leffler
22. Hermann Schwarz
23. E. H. Moor

سایر منابع

۱) نصر، سیدحسین، سه‌حکیم مسلمان، ترجمه احمد آرام، چاپ سوم، شرکت سهامی کتابهای جیبی ۱۳۵۴.

۲) مصاحب، غلامحسین، آنالیز ریاضی (قسمت دوم)، چاپ سوم، شرکت سهامی کتابهای جیبی ۱۳۵۲.

* نام و نشانی این مقاله چنین است.

Adrian Rico, What makes a great mathematics teacher? The case of Augustus De Morgan, American Math. Monthly, June-July (1999)

مراجع

[1] E I. Barrington, Life of Walter Bagehot, Longman & Co., London. 1914.

[2] H.H. Bellot, University College London 1826-1926, University of London Press, London, 1929.

[3] J.B. Benson. "Some Recollections of University College in the Sixties", MS (1921), University College Archives, Materials for the history of UCL, Mem. 1B/3.

[4] K-R. Biermann, "Karl Weierstrass", In Dictionary of Scientific Biography," C.C. Gillispie, ed., 16 vols., New York: Scribner's 1970-80, 14:219-24.

[5] A. De Morgan, A Budget of Paradoxes, Longmans, Green, and Co., London 1872.

[6] A. De Morgan, "An Introductory Lecture delivered at the Opening of the Mathematical Classes in the University of London, Novr. 5th, 1828" ,University College Archives, MS. ADD.3.

[7] A. De Morgan, On indirect demonstration, Phil. Mag. (4) 3 (1852) 435-138.

[8] A. De Morgan, On mathematical instruction, Quart. J. Education 1 (1831) 264 -79.

[9] A. De Morgan, On the method of teaching geometry, part 2, Quart. J. Education 6 (1833) 237-51.

[10] A. De Morgan, The Connexion of Number and Magnitude, Taylor & Walton, London, 1836.

[11] A. De Morgan, The Differential and Integral Calculus, Baldwin and Cradock, London, 1842.

[12] A. De Morgan, The Elements of Arithmetic,5th ed., Taylor, Walton & Maberly, London, 1853.

[13] A. De Morgan, Thoughts suggested by the establishment of the University of London: An introductory lecture, delivered at the opening of the Faaculty of Arts, in University College, Oct. 16, 1837, Taylor & Walton, London, 1837.

[14] A. De Morgan, Trigonometry and Double Algebra, Taylor, Walton, & Maberly, London, 1849.

[15]. S.E. De Morgan, Memoir of Augustus De Morgan, Longmans, Green, & Co., London, 1882.

[16] J. M. Dubbey, The introduction of the differential notation to Great Britain, Ann. of Sci. 19 (1963) 37-48.

[17] P.C. Enros, The Analytical Society (1812-1813): Precursor of the Renewal of Cambridge Mathematics, Historia Math. 10 (1983) 24-47.

[18] J-B. J. Fourier, Analyse des équations détemin´ees, Firmin Didot Fre`res, Paris 1831.

[19] I. Grattan-Guinness, Convolutions in Frénch Mathematics, 1800-1840 ,3 vols. Birkhäuser Verlag, Basel, 1990.

[20] I. Grattan-Guinness, The development of the foundations of mathematical analysis from Euler to Riemann, MIT Press, Cambridge, Mass., 1970.

[21] N. Guicciardini, The Development of Newtonian Calculus in Britain 1700-1800, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[22] F.J.C. Hearnshaw, The Centenary History of King's College London 1828-1928, G.G. Harrap & Co., London, 1929.

[23] H.A. Jevons ed., Letters and Journal of W. Stanley Jevons, Macmillan & Co., London, 1886.

[24] W. S. Jevons, De Morgan, Encyclopedia Brittanica, 11th ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1910, 8.8-10.

[25] K.H. Parshall and D.E. Rowe, The Emergence of the American Mathematical Research Community 1876-1900: J.J. Sylvester, Felix Klein, and E.H. Moore, American Mathematical Society, Providence, and London Mathematical Society, London, 1994.

[26] H. M. Pycior, Augustus De Morgan's Algebraic Work: The Three Stages, Isis 74 (1983) 211-226.

[27] H. M. Pycior, George Peacock and the British origins of symbolic algebra, Historia Math. 8 (1981) 23-45.

[28] A.C. Ranyard, Obituary notice of Augustus De Morgan, Monthly Notices of the Roy Astron. Soc. 32 (1871-27) 112-118.

[29] A. Rice, Augustus De Morgan: historian of science, Hist. of Sci. 34 (1996) 201-240.

[30] A. Rice, Inspiration or Desperation? Augustus De Morgan's appointment to the Chair of Mathematics at London University in 1828, British. J. Hist. Sci. 30 (1997) 257-274.

[31] J.L. Richards, Augustus De Morgan, The history of mathematics, and the foundations of algebra, Isis 78 (1987) 7-30.

[32] H.E. Roscoe, The Life and Experiences of Sir Henry Enfield Roscoe, Macmillan & Co., London, -1906.

[33] Second Statement by the Council of the Univeersity of London, Explanatory of the Plan of Instruction, Richard Taylor, London, 1828.

[34] G.C. Smith, The Boole-De Morgan Correspondence 1842-1864, Clarendon Press, Oxford, 1982.

[35] I. Todhunter, Algebra for the use of colleges and schools, Macmillan & Co., Cambridge, 1858.

[36] I. Tolstoy, James Clerk Maxwell: A Biography, Canongate, Edinburgh, 1981.

[37] University College London Archives: London Mathematical Society Papers, Letter From Augustus De Morgan to Thomas Archer Hirst, 29 June 1865.

[38] University College London Archives, MS. ADD.5, "Lectures on Algebraic Geometry and the Calculus delivered in University College, London, by Prof. A. De Morgan. Session, 1846-1847".

[39] University College, London-Session 1839-40. Faculty of Arts and Laws, Richard and John E. Taylor, London, 1839.

[40] The University College London Calendar for the Session 1853-4, Walton & Maberly, London, 1853.

[41] University College, London. Calendar. Session 1866-67, Walton & Maberly, London, 1866.

[42] University of London Library Special Collections, (hereafterULL), MS. 775/17, "Euclid. Book V".

[43] ULL, MS.775/55, "On the roots of Algebraic Expressions"

[44] ULL, MS.775/186, "Calculus of Variations II".

[45] ULL, MS.775/197, "Rules of Differentiation".

[46] ULL, MS.775/202, "On some points of Geometrical Demonstration".

[47] ULL, MS.775/203, "On the Two Forms of the Universal Affirmative Proposition".

[48] ULL, MS.775/244, "Elimination & C".

[49] ULL, MS.775/261, "Elements of projection and projective properties".

[50] ULL, MS.775/271, "Distinction of Arithmetic and Algebra".

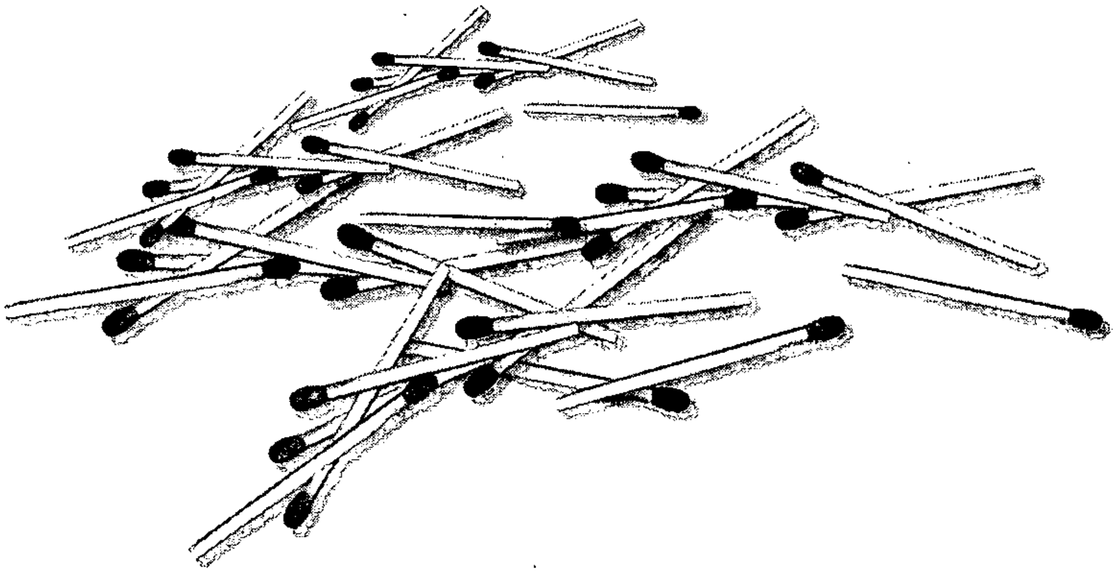
[51] ULL, MS.775/284, "On Limits".

[52] ULL, MS.775/297, "Examples on Velocity and Acceleration".

[53 C.A. Valson, La vie et les travaux du baron Cauchy, 2 vols., Gauthier-Villars, Paris, 1868.

نظریه بازی‌ها

قسمت اول: بازی با چوب کبریت‌ها



اسماعیل بابلیان، عضو هیأت علمی دانشگاه تربیت معلم
حمید حسن‌زاده، دانشجوی دکترای پیوسته دانشگاه تربیت معلم

مقدمه

یکی از چالش‌های بزرگ در آموزش هر موضوعی، ایجاد انگیزه در یادگیرنده برای توجه به آن موضوع است. به‌ویژه، آموزش ریاضی بیش از موضوع‌های دیگر به انگیزهٔ یادگیرنده نیاز دارد. از مقوله‌هایی که توسط آن می‌توان به آموزش ریاضی پرداخت و در عین حال یادگیرنده با انگیزهٔ لازم در یادگیری شرکت می‌کند، مقولهٔ بازی‌هایی است که به نوعی با ریاضیات عجین شده‌اند.

بازی‌ها در نظریه بازی‌ها به سه دسته تقسیم می‌شوند:

بازی‌های یک‌نفره، مانند نوشتن عدد ۱۰۰ با شش تا ۹، $(۱۰۰=۹\times۹+۹+\frac{۹}{۹}+۹)$.

بازی‌های دو نفره، مثل بازی شطرنج، دوزبازی، مار و پله و...

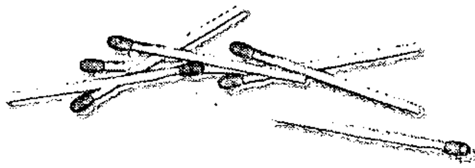
بازی‌های چندنفره.

توضیح: در بازی‌های چندنفره، هر نفر ممکن است یک گروه از افراد باشد، ولی بازی توسط یک نفر از گروه انجام می‌شود.

در این نوشتار به چند بازی دو نفره با چوب کبریت می‌پردازیم. ضمناً، شرایطی که بر بازی‌های دونفره حاکم است و این که آیا یک بازی دو نفره قابل بررسی هست یا نیست را شرح خواهیم داد. هدف اصلی در هر بازی، آن است که الگوریتم یا روشی برای هر مرحله از بازی ارائه کنیم که اگر بازیکنی آن روش را پیاده کند، صرفنظر از نوع بازی حریف، حتماً برنده شود. البته، با اجرای این روش، و برحسب پارامترها و قواعد بازی، ممکن است بازیکنی که

بازی را شروع می‌کند همیشه برنده باشد یا بازیکن دوم همیشه بازی را ببرد. این الگوریتم یا روش را، در صورت وجود، اصطلاحاً **استراتژی بُرد** یا **راهبرد پیروزی** می‌نامیم.

در بازی‌هایی که معرفی می‌کنیم کسی که بازی را شروع می‌کند نفر اول و بازیکن دیگر را نفر دوم می‌نامیم.



بازی اوّل

تعداد n چوب کبریت موجود است. هر بازیکن، در نوبت خود، مجاز است **دو یا سه** چوب کبریت بردارد و کنار بگذارد. بازیکنی بازنده است که نتواند به بازی ادامه دهد (یعنی، در نوبت او چوب کبریتی باقی نمانده باشد یا یک چوب کبریت باقی مانده باشد.) تعیین کنید به ازای چه nهایی نفر اول و به ازای چه nهایی نفر دوم استراتژی برد دارد.

حل: ابتدا برای nهای کوچک بازی را انجام می‌دهیم تا بتوانیم جواب کلی را به‌دست آوریم. جدول زیر نحوهٔ بازی نفر اول را برای چند n مشخص می‌کند. در این جدول تعداد چوب کبریت‌هایی که نفر اول از n چوب کبریت برمی‌دارد = f

$$r = n-f$$

برنده	r	f	n
نفر اول	۰	۲	۲
نفر اول	۰ یا ۱	۳ یا ۲	۳
نفر اول	۱	۳	۴

«جدول ـ ۱»

این جدول نشان می‌دهد که هر بازیکنی که با ۲، ۳ یا ۴ چوب کبریت بازی را شروع کند برنده است (البته اگر مطابق این جدول بازی کند). حال بازی را برای ۶ و $n=5$ ادامه می‌دهیم و بنابر نتیجه‌ای که از جدول بالا گرفتیم برنده را تعیین می‌کنیم:

برنده	r	f	n
نفر دوم	۲ یا ۳	۳ یا ۲	۵
نفر دوم	۲ یا ۳	۳ یا ۲	۶

«جدول ـ ۲»

بر طبق این جدول بازیکنی که با ۵ یا ۶ چوب کبریت بازی را شروع کند **بازنده** است، البته در صورتی که مطابق جدول بالا بازی کند. اگر ۹ یا ۸ یا $n=7$، برنده نفر اول خواهد بود، به شرط آن که مطابق جدول زیر بازی کند.

برنده	r	f	n
نفر اول	۵	۲	۷
نفر اول	۵ یا ۶	۳ یا ۲	۸
نفر اول	۶	۳	۹

«جدول ـ ۳»

به نظر شما نتیجه کلی چیست؟ در چه حالت‌هایی نفر اول و در چه حالت‌هایی نفر دوم راهبرد پیروزی دارد؟

بررسی‌های بالا این **حدس** را نتیجه می‌دهد که اگر $5k+1$ یا $n=5k$ نفر دوم استراتژی برد دارد، به عبارت دیگر، بازیکنی که با $5k$ یا $5k+1$ چوب کبریت، بازی را شروع می‌کند **بازنده** است.

اثبات: حدس خود را به استقرا روی k ثابت می‌کنیم. وقتی $k=1$ جدول شماره ۲ نشان می‌دهد که نفر دوم استراتژی برد دارد. حال فرض کنید به‌ازای $n=5k+1$ یا $n=5k$ نفر دوم راهبرد پیروزی داشته باشد و نفر اول با $5(k+1)+1$ یا $5(k+1)$ چوب کبریت بازی را شروع کند. طبق شرایط بازی نفر اول ۲ (یا ۳) چوب کبریت برمی‌دارد. نفر دوم ۳ (یا ۲) چوب کبریت برخواهد داشت. در این صورت تعداد چوب کبریت‌های باقیمانده $5k+1$ یا $5k$ خواهد شد که بنابر فرض استقرا نفر دوم می‌تواند چنان بازی کند که برنده شود. ضمناً، استراتژی برد برای نفر دوم چنین است:

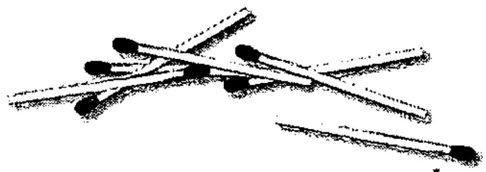
اگر نفر اول ۲ چوب کبریت بردارد نفر دوم ۳ چوب کبریت برخواهد داشت و اگر نفر اول ۳ چوب کبریت بردارد نفر دوم ۲ چوب کبریت برخواهد داشت. درنهایت، پس از آخرین بازی نفر دوم، تعداد چوب کبریت‌های باقیمانده ۰ یا ۱ خواهد بود که مؤید برنده بودن نفر دوم است.

اینک به سادگی می‌توان نشان داد که اگر $n=5k+4$ یا $n=5k+3$ یا $n=5k+2$ در این صورت نفر اول استراتژی بردارد. جدول زیر، و آنچه در بالا ثابت شد، نشان می‌دهد که در این حالات نفر اول استراتژی بردارد.

n	f	r
$5k+2$	۲	$5k$
$5k+3$	۳	$5k$
$5k+4$	۳	$5k+1$

«جدول-۴»

چون نفر دوم با $5k$ یا $5k+1$ چوب کبریت بازی را شروع می‌کند پس بازنده خواهد بود و نفر اول استراتژی بردارد. به این ترتیب بررسی این بازی به اتمام می‌رسد.



بازی دوم

تعداد n چوب کبریت موجود است. هر بازیکن در نوبت خود مجاز است به اندازهٔ توانی از ۲ چوب کبریت بردارد، یعنی، ۱، ۲، ۴، ... یا 2^k چوب کبریت. کدام بازیکن، و به ازای کدام مقادیر n، استراتژی بردارد؟

جدول زیر بررسی این بازی را برای چند مقدار n نشان می‌دهد.

n	f_n	r_n	برنده
۱	۱	۰	نفر اول
۲	۲	۰	نفر اول
۳	۱ یا ۲	۲ یا ۱	نفر دوم
۴	۴	۰	نفر اول
۵	۲	۳	نفر اول
۶	۱، ۲ یا ۴	۵ یا ۴ یا ۲	نفر دوم

«جدول-۵»

دو ردیف اول جدول نشان می‌دهند که بازیکنی که بازی را با ۱ یا ۲ چوب کبریت شروع کند برنده است. لذا، وقتی $n=3$، نفر اول هر طور بازی کند نفر دوم استراتژی بردارد. لذا، بازیکنی که با ۳ چوب کبریت شروع می‌کند بازنده است. بر این اساس وقتی $n=5$ پس از بازی نفر اول، نفر دوم باید بازی را با ۳ چوب کبریت آغاز کند و بازنده باشد! به‌عبارت دیگر نفر اول بازی را ببرد. نتیجهٔ بازی برای ۵ و ۴ و $n=2$ نشان می‌دهد که اگر نفر اول با ۶ چوب کبریت شروع کند نفر دوم استراتژی بردارد.

لذا، حدس این است که اگر $n=3k$ نفر دوم استراتژی بردارد والاّ نفر اول.

اثبات حدس: از استقرای قوی استفاده می‌کنیم. اگر $k=1$ طبق جدول بالا نفر دوم استراتژی بردارد. حال فرض کنید به‌ازای هر $m \le k$ اگر نفر اول با $n=3m$ چوب کبریت بازی را شروع کند بازنده باشد. حکم را برای $n=3(k+1)$ ثابت می‌کنیم. نفر اول 2^s چوب کبریت برمی‌دارد $(s \ge 0)$. چون 2^s بر ۳ بخشپذیر نیست پس باقیمانده آن بر ۳ یکی از اعداد ۱ یا ۲ می‌باشد. یعنی،

$$2^s=3l+r \quad \text{و} \quad r=1 \text{ یا } 2 \quad (l\ge 0)$$

نفر دوم (r - ۳) چوب کبریت برمی‌دارد. درنتیجه وقتی نوبت نفر اول می‌رسد تعداد چوب کبریت‌ها برابر است با

$$n-(3l+r)-(3-r)=n-3(l+1)$$
$$=3(k+1)-3(l+1)$$
$$=3(k-l)$$

چون $k-l \leq k$، بنا بر فرض استقرا نفر دوم استراتژی برد دارد.

نتیجه: بازیکنی که با $3k$ چوب کبریت شروع می‌کند بازنده است.

اینک به سادگی می‌توان ثابت کرد که اگر $n=3k+2$ یا $n=3k+1$ نفر اول استراتژی برد دارد. جدول زیر، و آنچه در بالا ثابت شد، نشان می‌دهد که در این حالات نفر اول راهبرد پیروزی دارد.

برنده	r_n	f_n	n
اول	$3k$	۱	$3k+1$
اول	$3k$	۲	$3k+2$

« جدول - ۶ »

با توضیحاتی که دربارهٔ دو بازی با چوب کبریت‌ها دادیم قادریم شرایط حاکم بر بازی‌های دو نفره را بیان کنیم.

شرط اول: عواملی مثل شانس یا سرعت عمل در بازی دخالت ندارد.

شرط دوم: نوبت بازی برای هر بازیکن به تناوب عوض می‌شود.

شرط سوم: در مرحله‌ای از بازی برای حداقل یک بازیکن بیش از یک انتخاب (بازی) امکان دارد.

شرط چهارم: هر دو بازیکن در تفکر، انتخاب بهترین راهبرد و... از قدرت یکسان برخوردارند.

شرط پنجم: شرط ویژه‌ای برای برنده شدن وجود داشته باشد و این شرط به گونه‌ای باشد که بازی حداکثر یک برنده داشته باشد.

شرط ششم: بازی تمام‌شدنی باشد.

اینک به کمک دو بازی انجام‌شده، دربارهٔ شرایط بازی دو نفره توضیحاتی ارائه می‌کنیم.

شرط اول

در بازی‌های دو نفره، اگر مسابقه در کار نباشد و نوبت هر بازیکن نیز بدون هیچ تعبیر و تفسیری مشخص باشد، شرط اول برقرار است. با این توضیحات، مثلاً، بازی تخته‌نرد دارای این شرط نیست چون ریختن تاس‌ها هم با شانس همراه است و هم بعضاً با تقلب! در دو بازی فوق‌الذکر شرط اول برقرار است.

شرط دوم

این شرط بدیهی است. وقتی بازی یک نفر تمام می‌شود نفر دیگری بازی می‌کند.

شرط سوم

در بازی شماره ۱، اگر تعداد چوب کبریت‌ها کمتر از ۳ باشد تنها برای نفر اول و آن هم حداکثر یک امکان بازی وجود دارد. اما اگر $n \geq 3$ آنگاه برای نفر اول حداقل دو امکان بازی وجود دارد. پس بازی اول وقتی دارای شرط سوم است که $n \geq 3$. برای بازی دوم باید $n \geq 3$ و $n \neq 2^k$ (چرا؟)

شرط چهارم

ما در بازی‌های فوق‌الذکر از این مطلب استفاده کردیم. آنجایی که نتیجه گرفتیم اگر نفر اول به‌ازای مقداری از n استراتژی برد داشته باشد و اگر این وضعیت برای نفر دوم ایجاد شود، نفر دوم استراتژی برد خواهد داشت به این معنی است که نفر دوم هم از استراتژی برد برای این وضعیت اطلاع دارد. به‌عنوان مثال در بازی اول اگر $n=6$ و نفر اول دو چوب کبریت بردارد ۴ چوب کبریت خواهد ماند. اگر نفر دوم نیز دو چوب کبریت بردارد قطعاً بازنده است ولی می‌دانیم که چون هر بازیکنی که با ۴ چوب کبریت بازی

کند استراتژی بردداردپس نفر دوم حتماً برنده می‌شود (یعنی حتماً سه چوب کبریت برمی‌دارد.)

شرط پنجم

بازی‌های فوق‌الذکر دارای این شرط بودند زیرا شرط مشخصی برنده را تعیین می‌کند. امّا شرط «شخصی بازنده است که نتواند حرکتی انجام دهد» همیشه نتیجه نمی‌دهد که بازی برنده دارد. مثلاً، در بازی شطرنج تساوی نیز وجود دارد. امّا، در دو بازی فوق‌الذکر چون در هر نوبت تعدادی چوب‌کبریت برداشته می‌شود به حالتی خواهیم رسید که یک بازیکن نمی‌تواند بازی کند، یعنی بازی بازنده (برنده) دارد.

شرط ششم

با توضیحات اخیر دو بازی بالا دارای این شرط هستند. اما، بازی‌های دو نفره‌ای هم وجود دارندکه دارای این شرط نیستند. به بازی زیر توجه کنید.

بازی سوّم

نفر اول یک عدد اول می‌نویسد. نفر دوم عددی مرکب و بزرگتر از عدد اولی که نفر اول نوشته، می‌نویسد. بعد نفر اول عدد اولی بزرگتر از عدد مرکبی که نفر دوم نوشته می‌نویسد و...

بدیهی است که چون تعداد اعداد اول نامتناهی است و به‌ازای هر عدد اول عدد مرکب بزرگ‌تر از آن وجود دارد، این بازی تمام‌شدنی نیست.

در صورتی که یک بازی دارای شرایط شش‌گانهٔ فوق‌الذکر باشد آن بازی را **قابل بررسی** نامیم. به این معنا که می‌توان در مورد وجود استراتژی برد، به ازای مقادیر مختلف پارامترهای آن، بررسی کرد، ولی این بدان معنا نیست که بازی حتماً دارای استراتژی برد (برای یک بازیکن) است. این مطلب را در قسمت دوم این مقاله بیشتر شرح خواهیم داد.

در خاتمه چند بازی، که مشابه دو بازی این مقاله هستند، به عنوان تمرین عنوان می‌کنیم.

حل این تمرین‌ها، در صورتی که مورد درخواست خوانندگان محترم مجله باشد در شماره‌های بعدی خواهد آمد.

تمرین

(در تمرین‌های زیر فرض کنید p و q دو عدد اول **متمایز و فرد** هستند.)

n چوب کبریت داریم و در هر مرحله هر بازیکن به یکی از طرق زیر بازی می‌کند، بازیکنی **بازنده** است که نتواند بازی کند.

اولاً در چه صورت (به‌ازای چه nهایی) بازی دو نفره است؟ و ثانیاً کدام بازیکن و برای چه nهایی استراتژی برد وجود دارد؟

الف) هر بازیکن، در نوبت خود، p یا q چوب‌کبریت برمی‌دارد.

ب) هر بازیکن، در نوبت خود، p^k، $k=0,1,\cdots$، چوب‌کبریت برمی‌دارد.

ج) هر بازیکن، در نوبت خود، 2^k یا p^m، $m,k=0,1,\cdots$، چوب کبریت برمی‌دارد.

د) هر بازیکن، در نوبت خود، p^k یا q^m، $m,k=0,1,\cdots$، چوب کبریت برمی‌دارد.

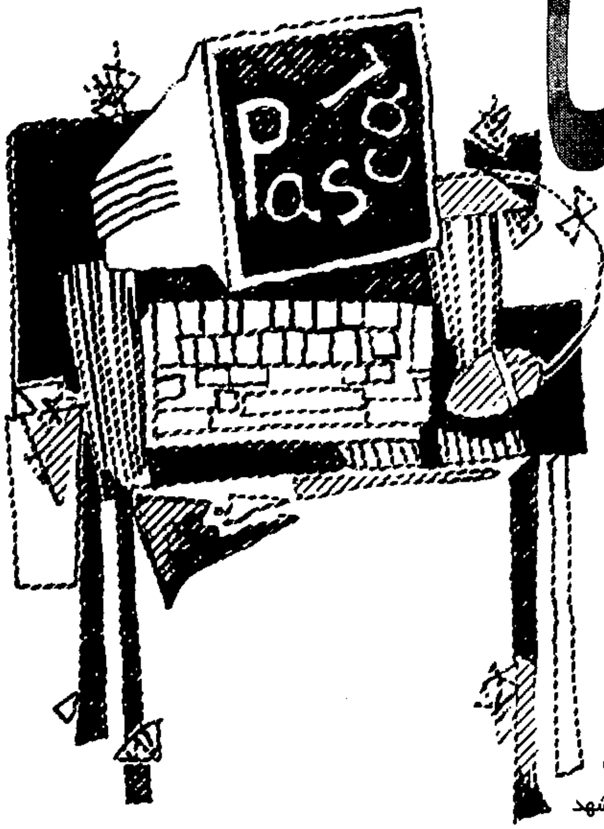
هـ) هر بازیکن، در نوبت خود، ۱، ۲، ...، k چوب‌کبریت برمی‌دارد ($2\le k\in N$).

مراجع

[۱] المپیادهای ریاضی شوروی سابق

[2] Mckinsy, Introduction to Theroy of Games.

تولید اعداد تصادفی نما



ترجمه: عباس قیصری غلامی
دانشجوی گروه ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد

مسأله

با استفاده از روش همنهشتی خطی، مجموعه‌ای یکنواخت از اعداد تصادفی‌نما[1] تولید کنید.

گسترش الگوریتم

در دانش کامپیوتر همواره مولدهای اعداد تصادفی، در کنار دیگر چیزها، برای آزمایش و تحلیل الگوریتم‌ها به کار می‌روند. یک دنباله اعداد تصادفی باید رفتار زیر را نشان دهد:

۱ـ دنباله باید چنان باشد که فکر کنیم هر عدد به‌طور شانسی اتفاق افتاده است.

۲ـ هر عدد باید احتمال مشخصی برای قرار گرفتن در یک بازهٔ مفروض داشته باشد.

راهی که معمولاً در علم محاسبات برای تولید اعداد تصادفی بکار می‌رود این است که فرآیندهای تصادفی به‌وسیلهٔ تولید یک دنبالهٔ عددی، که رفتار تصادفی از خود نشان می‌دهد، شبیه‌سازی می‌شوند. این دنباله‌ها از قبل قابل پیشگویی هستند و به همین دلیل معمولاً با نام دنباله‌های تصادفی‌نما به آنها اشاره می‌شود. روش‌های بسیاری برای تولید اعداد تصادفی‌نما وجود دارد. شاید پرکاربردترین این الگوریتم‌ها، روش همنهشتی خطی[2] باشد. هنگامی که این روش به‌طور مناسبی پارامترگذاری شود، دنبالهٔ تصادفی‌نمایی تولید خواهد کرد که برای مقاصد عملی،[3] معیارهای آماری موردنیاز متغیرهای تصادفی دارای توزیع یکنواخت را فراهم می‌کند. در یک توزیع یکنواخت همهٔ اعداد ممکن، احتمال وقوع برابر دارند.

پیاده‌سازی روش همنهشتی خطی بسیار راحت است. عناصر بعدی دنبالهٔ همنهشتی خطی $\{x\}$ با استفاده از عبارت زیر تولید می‌شوند:

$$x_{n+1} \equiv (ax_n + b) \bmod m \quad ; n \geq 0 \text{ به ازای}$$

که پارامترهای a، b، m و x_0 می‌بایست از قبل به‌دقت بر اساس برخی ضوابط انتخاب شوند. پارامترهای a، b و

m به‌ترتیب ضریب، نمو و پایه نام دارند. کنوت[۱]، پایهٔ نظری بسیار خوبی برای انتخاب این پارامترها فراهم نموده است. این نتایج را می‌توان به شکل زیر جمع بندی کرد:

همهٔ پارامترها باید اعداد صحیح بزرگتر یا مساوی صفر باشند و m باید بزرگتر از x_0، a و b باشد.

پارامتر x_0: پارامتر x_0 می‌تواند به‌طور دلخواه از بازهٔ $0 \le x_0 < m$ انتخاب شود.

پارامتر m: مقدار m می‌باید بزرگتر یا مساوی طول دنبالهٔ تصادفی موردنظر باشد. همچنین بایستی امکان محاسبهٔ $(ax + b)\,\mathbf{mod}\,m$ بدون گرد کردن وجود داشته باشد.

پارامتر a: انتخاب a به انتخاب m بستگی دارد. اگر m توانی از ۲ باشد، آنگاه a باید شرط زیر را فراهم کند:

$$a \bmod 8 = 5$$

اگر m توانی از ۱۰ باشد، آنگاه a می‌باید چنان انتخاب شود که:

$$a \bmod 200 = 21$$

خواست‌های بیشتر در مورد a این است که باید بزرگتر از $\sqrt{m}$ و کوچکتر از $m - \sqrt{m}$ باشد، $(a-1)$ مضرب هر مقسوم‌علیه اول m باشد و اگر m مضرب ۴ است، آنگاه $(a-1)$ نیز باید مضربی از ۴ باشد. این شرایط و این که b باید نسبت به m اول باشد، تضمین می‌کند که دنباله دارای دورهٔ تناوب m است.

پارامتر b: ثابت b باید فرد باشد و مضرب ۵ نباشد.

هنگامی که a، b و m مطابق شرایطی که در بالا خلاصه شد، انتخاب شوند، قبل از آن که دنباله شروع به تکرار کند، دنباله‌ای از m عدد تصادفی‌نما در بازهٔ ۰ تا $(m-1)$ تولید می‌شود. یک پیاده‌سازی پاسکال روش همنهشتی خطی، برای $m = 4096$، در زیر آمده است.

پیاده‌سازی به زبان پاسکال

```
procedure random (var x: integer);
var
      a{multiplier},
      b{increment},
      m{modulus}: integer;

begin{generates pseudo-random numbers x by the
linear congruential method}
      m:=4096;
      {assert: 0=<x=<m-1}
      b:=853;
      a:=109;
      x:=(a*x+b) mod m
      {assert: 0=<x=<m-1}
end
```

نکاتی در مورد طراحی الگوریتم

۱ـ روش همنهشتی خطی یک روش ساده، کارا و عملی برای تولید اعداد تصادفی‌نماست.

۲ـ یک توزیع یکنواخت اعداد تصادفی را می‌توان به‌عنوان پایه‌ای برای تولید سایر توزیع‌ها، نظیر توزیع‌های نرمال و نمایی، بکار برد.

۳ـ پایهٔ نظری برای انتخاب پارامترها، یک تحلیل پیشرفتهٔ سطح بالا را می‌طلبد.

کاربردها

تحلیل الگوریتم‌ها، مسایل شبیه‌سازی و بازی‌ها.

مسایل

۱ـ نشان دهید که پس از تولید m عدد تصادفی الگوریتم تکرار می‌شود. مقدار میانگین و واریانس را برای مجموعهٔ m عدد تصادفی‌نما، محاسبه کنید.

۲ـ با انباشتن اعداد تصادفی در بلوک‌های ۶۴تایی در بازهٔ [۰,۴۰۹۵] (برای مثال اولین بلوک عبارت است از [۰,۶۳] ، یکنواختی توزیع تولید شده به‌وسیلهٔ روش همنهشتی خطی برای $m = ۴۰۹۶$ را بررسی کنید. بافتنگار[۳] حاصل را رسم کنید.

۳ـ با استفاده از فرمول زیر، اعداد تصادفی یکنواخت توزیع شده $\{r\}$ را می‌توان برای تولید یک مجموعهٔ تصادفی $\{x\}$ که دارای توزیع نمایی باشد، به‌کار برد:

$$x_i = -\frac{۱}{\lambda} \log_e (۱ - r_i)$$

که λ پارامتر توزیع نمایی است. این الگوریتم را پیاده‌سازی کنید.

۴ـ می‌توان روش قطبی را برای تولید اعداد تصادفی نرمال توزیع شده در بازه [۰,۱] به‌کار برد. بدین ترتیب که ابتدا دو عدد تصادفی یکسان $r_۱$ و $r_۲$ درنظر می‌گیریم. سپس اگر عبارت زیر برای d، بزرگتر یا مساوی ۱ باشد، دو عدد تصادفی با توزیع نرمال $n_۱$ و $n_۲$ می‌توانند محاسبه شوند. بدین ترتیب که:

$$d = (۲r_i - ۱)^۲ + (۲r_۲ - ۱)^۲$$

$$n_۱ = (۲r_۱ - ۱)\sqrt{\frac{-۲\log_e(d)}{d}}$$

$$n_۲ = (۲r_۲ - ۱)\sqrt{\frac{-۲\log_e(d)}{d}}$$

این عبارات را برای تولید اعداد تصادفی دارای توزیع نرمال به‌کار ببرید.

۵ـ در بعضی کاربردها، یک مولد اعداد تصادفی «بهتر» از روش سادهٔ همنهشتی خطی موردنیاز است. برای این منظور، باید دو مجموعهٔ مستقل اعداد تصادفی $\{r_i\}$ و $\{s_i\}$ با استفاده از دو مجموعهٔ مقادیر a، b و مقدار m یکسان، تولید شوند. سپس یک ناحیهٔ ذخیره‌سازی کمکی ۱۰۰ عنصری $\{t_i\}$ با ۱۰۰ مقدار نخست دنبالهٔ تصادفی $\{r_i\}$ پر می‌شود. با انجام این مرحلهٔ مقداردهی اولیه، می‌توانیم به‌ترتیب جفت اعداد تصادفی r_i و s_i را تولید کنیم. برای تولید iامین عدد تصادفی «بهتر»، s_i و پیمانه m را برای محاسبهٔ اندیس j در جدول [۱..۱۰۰]t به‌کار می‌بریم. برای مثال می‌توان فرض کرد:

$$j = \lfloor ۱۰۰ s_i / m \rfloor$$

حال iامین عدد تصادفی «بهتر» در موقعیت t[j] یافت می‌شود. پس از آن‌که t[j] مورد مراجعه قرار گرفت، با مقدار r_i فعلی جایگزین می‌شود. این مولد اعداد تصادفی «بهتر» را پیاده‌سازی کنید.

زیرنویس‌ها

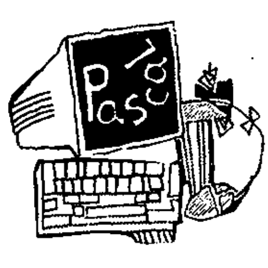
1. Pseudo-Random Numbers
2. Linear Congruential Method
3. Histogram

مرجع اصلی

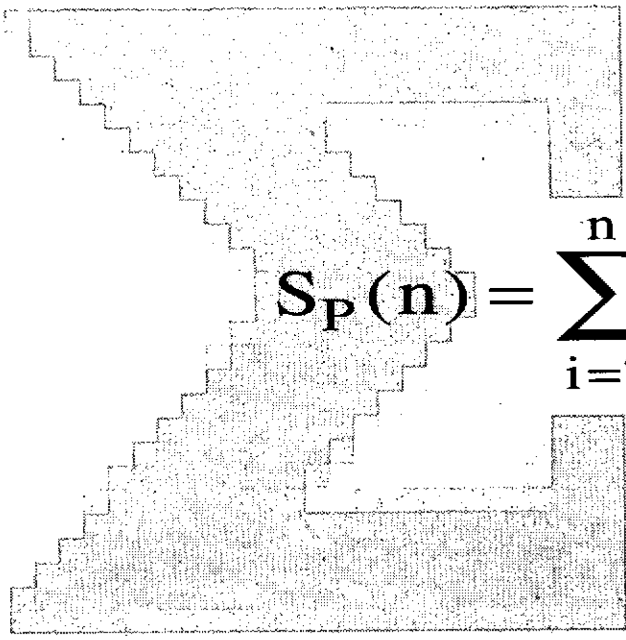
R. G. Dromey, How to solve it by computer.

مراجع

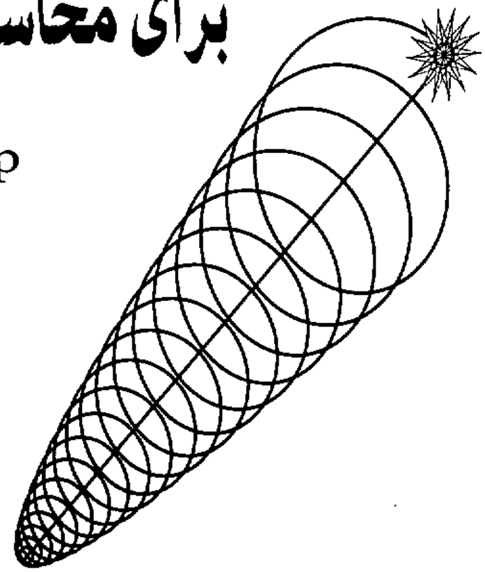
[1] Knuth, The Art of Computer Programming, Vol. 2, pp. 9-157.



روش تفاضل های بخش شده برای محاسبه:



$$S_P(n) = \sum_{i=1}^{n} i^p$$



حسین نامی ساعی، دبیر ریاضی (تهران)

در شمارهٔ ۶۳ سال هفدهم مجلهٔ رشد آموزش ریاضی در مقاله‌ای تحت عنوان «روش ترکیباتی برای حاصل جمع توان‌های اعداد طبیعی» روش ترکیباتی برای محاسبه $S_p(n)$ مورد بحث و بررسی قرار گرفته بود. در این مقاله سعی شده است از روش تفاضل های بخش شده برای یافتن فرمولی جهت محاسبه

$$S_p(n) = \sum_{i=1}^{n} i^p, p = 1, 2, \ldots$$

استفاده شود.

امّا قبل از این که به چگونگی محاسبهٔ $S_p(n)$ با روش تفاضل های بخش شده بپردازیم، ابتدا لازم است شرح مختصری در خصوص تفاضل های بخش شده (اعم از متناهی و غیرمتناهی) ارایه کنیم.

روش تفاضل های بخش شدهٔ متناهی، که معمولاً در درون‌یابی و یافتن ضابطهٔ چندجمله‌ای درون‌یاب مورد استفاده قرار می‌گیرد، یکی از انواع روش هایی است که از نظر زمان و توان محاسبه باصرفه است. اگرچه این روش برای اجرای درون‌یابی، محاسبه های بیشتری روی داده‌ها انجام می‌دهد. ولی در عوض دارای این حسن است که بدون این که به آغاز مسأله برگردیم می‌توانیم چند مقدار درونی را با به‌کارگیری تفاضل های بخش شده هم‌زمان به دست آوریم.

برای درون‌یابی فرمول های زیادی هست که مشهورترین آن‌ها فرمول تفاضل های بخش شدهٔ نیوتن یا فرمول نیوتن - گریگوری[1] است. این فرمول بر اساس چند جمله‌ای درون‌یاب زیر است:

$$p_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$
$$+ c_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

با استفاده از شرایط زیر می‌توان ضرایب c_i را پیدا کرد.

$$p_n(x_i) = y_i \quad , \quad (i = 0, \ldots, n)$$

این معادله‌ها دستگاهی می‌سازند به شکل

$$\begin{aligned} & c_0 = y_0 \\ & c_0 + c_1(x_1 - x_0) = y_1 \\ & c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2 \\ & \vdots \\ & c_0 + \cdots + c_n(x_n - x_0)(x_n - x_1)\cdots(x_n - x_{n-1}) = y_n \end{aligned}$$

خوشبختانه این دستگاه خطی و مثلثی است. مقادیر c_i را بدون هیچ اشکالی می‌توان پیدا کرد. اگر مقادیر داده‌ها فواصل مساوی داشته باشند راه ساده‌تر برای پیدا کردن آن‌ها استفاده از تفاضل های متناهی پیشرو است. در صورتی که فواصل نقاط مساوی باشد، داریم

$$x_{i+1} - x_i = h$$

بنابراین به طور کلی $x_i=x_0+ih$ به ازای $i=0$ و 1، ...، n. هرگاه از این معادله استفاده کنیم، معادله‌های مورد حل عبارتند از

$$\begin{aligned} y_0 &= c_0 \\ y_1 &= c_0 + c_1 h \\ y_2 &= c_0 + c_1(2h) + 2h^2 c_2 \\ &\vdots \\ y_i &= c_0 + c_1 ih + c_2 ih[(i-1)h] + \cdots + c_i (i!)h^i \end{aligned}$$

اگر ضرایب را [از این معادله‌ها] به دست آوریم خواهیم داشت:

$$c_0 = y_0$$

$$c_1 = \frac{y_1 - c_0}{h} = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{h}$$

در این عبارت Δy_0 اولین تفاضل پیشرو نامیده می‌شود. با ادامهٔ این روند داریم

$$c_2 = \frac{1}{2h^2}\left[y_2 - c_0 - 2hc_1\right] = \frac{1}{2h^2}\left[(y_2 - y_1) - (y_1 - y_0)\right] = \frac{1}{2h^2}\left[\Delta(\Delta y_0)\right] = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}$$

در این عبارت $\Delta^2 y_0$ دومین تفاضل پیشرو نامیده می‌شود زیرا تفاضلِ تفاضل‌هاست. به طور کلی ضرایب c_i چندجمله‌ای را می‌توان به صورت زیر پیدا کرد

$$c_i = \frac{\Delta^i y_0}{(i!)h^i}$$

تفاضل‌های مرتبهٔ بالاتر تابع $y=F(x)$ روی بازهٔ $x_0 \le x \le x_n$ به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\Delta^i y_i = \Delta^{i-1} y_{i+1} - \Delta^{i-1} y_i \quad (i = 0,\cdots,n)$$

معمولاً همان‌طوری که در جدول زیر آمده، تفاضل‌های هر مرتبه بر اساس تفاضل‌های مرتبهٔ قبل از آن محاسبه می‌شود. برای نشان دادن چگونگی استفاده از روش درون‌یابی

x_i	y_i	$\Delta^1 y_i = y_{i+1} - y_i$	$\Delta^2 y_i = \Delta^1 y_{i+1} - \Delta^1 y_i$	$\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i$	$\Delta^4 y_i = \Delta^3 y_{i+1} - \Delta^3 y_i$	$\Delta^5 y_i = \Delta^4 y_{i+1} - \Delta^4 y_i$
x_0	y_0					
x_1	y_1	$\Delta^1 y_0$				
x_2	y_2	$\Delta^1 y_1$	$\Delta^2 y_0$			
x_3	y_3	$\Delta^1 y_2$	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_0$		
x_4	y_4	$\Delta^1 y_3$	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_0$	
x_5	y_5	$\Delta^1 y_4$	$\Delta^2 y_3$	$\Delta^3 y_2$	$\Delta^4 y_1$	$\Delta^5 y_0 \cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	y_n	$\Delta^1 y_{n-1}$	$\Delta^2 y_{n-2}$	$\Delta^3 y_{n-3}$	$\Delta^4 y_{n-4}$	$\Delta^5 y_{n-5} \cdots$

تفاضل پیشرو نیوتن به مثال زیر توجه کنید.

جدول اطلاعات زیر داده‌های مربوط به تابع $y=\sin x$ است.

با استفاده از تفاضل‌های بخش شده مقدار $y(x)$ را در نقطهٔ $x=۴۱^\circ$ محاسبه کنید.

x_i	y_i
۵°	۰/۰۸۷۱۵
۱۰°	۰/۱۷۳۶۴
۱۵°	۰/۲۵۸۸۱۹
۲۰°	۰/۳۴۲۰۲۰
۲۵°	۰/۴۲۲۶۱۸
۳۰°	۰/۵

x_i	y_i	$\Delta^۱ y_i$	$\Delta^۲ y_i$	$\Delta^۳ y_i$	$\Delta^۴ y_i$	$\Delta^۵ y_i$
۵°	۰/۰۸۷۱۵					
$x_\circ \to ۱۰^\circ$	$\boxed{۰/۱۷۳۶۴}$	۰/۰۸۶۴۹۸				
۱۵°	۰/۲۵۸۸۱۹	$\boxed{۰/۰۸۵۱۷۱}$	−۰/۰۰۱۳۲۷			
۲۰°	۰/۳۴۲۰۲۰	۰/۰۸۳۲۰۱	$\boxed{-۰/۰۰۱۹۷}$	−۰/۰۰۰۶۴۳		
۲۵°	۰/۴۲۲۶۱۸	۰/۰۸۰۵۹۸	−۰/۰۰۲۶۰۳	$\boxed{-۰/۰۰۰۶۳۳}$	۰/۰۰۰۰۱	
۳۰°	۰/۵	۰/۰۷۷۳۸۲	−۰/۰۰۳۲۱۶	−۰/۰۰۰۶۱۳	$\boxed{۰/۰۰۰۰۲}$	۰/۰۰۰۰۱

بر حسب مقدار x و درجهٔ چند جمله‌ای درون‌یاب می‌توان $x_\circ$ را انتخاب کرد. به فرض این‌که مقدار $x_\circ = ۱۰^\circ$ انتخاب شود، تفاضل‌های لازم روی قطر پایین $x_\circ$ قرار دارند. تعداد تفاضل‌های مرتبهٔ بالاتر مورد استفاده را می‌توان به اندازهٔ دلخواه انتخاب کرد. به طور کلی اگر از تفاضل‌های بیشتری استفاده کنیم دقت جواب افزایش می‌یابد. در این مثال $h = ۵^\circ$ است. با استفاده از تفاضل‌های مرتبهٔ اول و دوم و سوم داریم

$$y_x = y_\circ + \frac{\Delta y_\circ}{h}(x-x_\circ) + \frac{\Delta^۲ y_\circ}{۲h^۲}(x-x_\circ)(x-x_۱)$$

$$+\frac{\Delta^۳ y_\circ}{۶h^۳}(x-x_\circ)(x-x_۱)(x-x_۲)+\cdots$$

$$y_{۴۱} = ۰/۱۷۳۶۴۸ + \frac{۰/۰۸۵۱۷۱}{۵}(۴۱-۱۰)$$

$$+\frac{(-۰/۰۰۱۹۷)(۴۱-۱۰)(۴۱-۱۵)}{۲\times(۵)^۲}$$

$$+\frac{(-۰/۰۰۰۶۳۳)(۴۱-۱۰)(۴۱-۱۵)(۴۱-۲۰)}{۶\times(۵)^۳} \simeq ۰/۶۵۵۶۶۶$$

روشن است که این جواب به جواب واقعی $\sin ۴۱^\circ = ۰/۶۵۶۰۵$ بسیارنزدیک است.

برای ساده‌تر شدن انجام محاسبات در صورتی که بخواهیم مقادیر c_i را مستقیماً از روی جدول به دست آوریم و نیز اگر در صورتی که مقادیر x فواصل مساوی نداشته باشند آنگاه؛ محاسبات تفاضل‌های بخش شده به طوری که در جدول صفحهٔ بعد نشان داده شده صورت می‌گیرد در جدول صفحهٔ بعد مقادیر c_i عبارت است از

x_i	y_i	$R^1_i=\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}$	$R^2_i=\frac{R^1_{i+1}-R^1_i}{x_{i+2}-x_i}$	$R^3_i=\frac{R^2_{i+1}-R^2_i}{x_{i+3}-x_i}$
x_0	y_0			
x_1	y_1	$R^1_0=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$		
x_2	y_2	$R^1_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$	$R^2_0=\frac{R^1_1-R^1_0}{x_2-x_0}$	
x_3	y_3	$R^1_2=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}$	$R^2_1=\frac{R^1_2-R^1_1}{x_3-x_1}$	$R^3_0=\frac{R^2_1-R^2_0}{x_3-x_0}$
x_4	y_4	$R^1_3=\frac{y_4-y_3}{x_4-x_3}$	$R^2_2=\frac{R^1_3-R^1_2}{x_4-x_2}$	$R^3_1=\frac{R^2_2-R^2_1}{x_4-x_1}$
x_5	y_5	....	....	....

$$c_0 = y_0$$

$$c_1 = R^1_0 = \frac{y-y_0}{x_1-x_0}$$

$$c_2 = R^2_0 = \frac{R^1_1-R^1_0}{x_2-x_0}$$

$$c_3 = R^3_0 = \frac{R^2_1-R^2_0}{x_3-x_0}$$

$$c_n = R^n_0 = \frac{R_1^{(n-1)}-R_0^{(n-1)}}{x_n-x_0}$$

به طور کلی ضرایب R^j_i به صورت زیر محاسبه می‌شود: (در این فرمول j مرتبهٔ تفاضلات بخش شده را نشان می‌دهد، که برای یک چند جمله‌ای از درجهٔ n $(j=1,2,3,\dots,n)$ است و همواره در یک چند جمله‌ای از درجهٔ n تفاضلات مرتبهٔ nام ثابت و تفاضلات مرتبهٔ $(n+1)$ام صفر است.)

$$R^j_i = \frac{R^{j-1}_{i+1}-R^{j-1}_i}{x_{i+j}-x_i}$$

با قرار دادن ضرایب c_0 و c_1 و c_2 و... در فرمول تفاضل های بخش شده نیوتن ـ گریگوری فرمولی به شکل زیر خواهیم داشت

$$\begin{aligned}P_n(x) &= y_0 + R^1_0(x-x_0) + R^2_0(x-x_0)(x-x_1)\\ &+R^3_0(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)+\cdots\\ &+R^n_0(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})\end{aligned}$$

برای نمایش چگونگی استفاده از فرمول اخیر مثال عددی زیر را بررسی می‌کنیم.

جدول اطلاعات (صفحه بعد) مربوط به داده‌های تابع $y=\tan(x)$ است مقدار y را در نقطه $x = 32^\circ$ به‌دست آورید:

x_i	y_i
۱۰°	۰/۱۷۶۳۲
۲۰°	۰/۳۶۳۹۷
۳۰°	۰/۵۷۷۳۵۰
۴۰°	۰/۸۹۳۹۰۹۹
۵۰°	۱/۱۹۱۷۵۳
۶۰°	۱/۷۳۲۰۵۰

با تشکیل جدول تفاضل‌های بخش شده مقادیر y_0 و R_0^1 و R_0^2 و... R_0^j را مستقیماً در روی جدول به طریق زیر

x_i	y_i	R_i^1	R_i^2	R_i^3	R_i^4
x_0 ۱۰°	$\boxed{۰/۱۷۶۳۲}$				
۲۰°	۰/۳۶۳۹۷	$\boxed{۰/۰۱۸۷۶}$			
۳۰°	۰/۵۷۷۳۵۰	۰/۰۲۱۳۴	$\boxed{۰/۰۰۰۱۲۹}$		
۴۰°	۰/۸۳۹۰۹۹	۰/۰۲۶۱۷	۰/۰۰۰۲۴۱	$\boxed{۰/۰۰۰۰۰۳۷}$	
۵۰°	۱/۱۹۱۷۵۳	۰/۰۳۵۲۷	۰/۰۰۰۴۵۵	۰/۰۰۰۰۰۷۱	$\boxed{۰/۰۰۰۰۰۰۰۸۵}$
۶۰°	۱/۷۳۲۰۵۰	۰/۰۵۴۰۳	۰/۰۰۰۹۳۸		
۷۰°	۲/۷۴۷۴۷۷	...			
۸۰°	۵/۶۷۱۲۸۱	...			

محاسبه می‌کنیم و به دست می‌آوریم:

با استفاده از تفاضل‌های مرتبه اول و دوم و سوم و با قرار دادن مقادیر محاسبه شده در فرمول خواهیم داشت:

$$y(۳۲)=۰/۱۷۶۳۲۶+۰/۰۱۸۷۶(۳۲-۱۰)+۰/۰۰۰۱۲۹(۳۲-۱۰)(۳۲-۲۰)+۰/۰۰۰۰۰۳۷(۳۲-۱۰)(۳۲-۲۰)(۳۲-۳۰)$$

$$\Rightarrow y(۳۲)\simeq ۰/۶۲۵۰۵۶۵$$

که این مقدار با جواب واقعی $\tan(۳۲^\circ)$ که برابر است با ۰٫۶۲۴۸۶۹ بسیار نزدیک است.

محاسبهٔ $S_p(n)$:

پس از توضیحات داده شده در خصوص آشنایی با تفاضل‌های بخش شده و حصول آخرین فرمول، به اصل موضوع مورد بحث بازمی‌گردیم، یعنی محاسبهٔ $S_p(n)=\sum_{i=1}^{n} i^p$ (که p عددی طبیعی است)، با استفاده از تفاضل‌های بخش شدهٔ متناهی.

برای نیل به این منظور با در نظر داشتن این نکات که

۱ـ هر چند جمله‌ای از درجهٔ n دارای n مرتبه تفاضلات بخش شده است،

۲ـ تفاضلات مرتبه nام، یک چند جمله‌ای درجهٔ n، ثابت و تفاضلات مرتبهٔ (n+۱)ام به بعد آن صفر است،

۳ـ $S_p(n)$، یک چند جمله‌ای از درجهٔ (p+۱) است، لذا کافی است در ستون دوم جدول از $s_p(0)$ تا $S_p(p+1)$ محاسبه شود (نه تا $S_p(n)$ که مورد سؤال است). جدولی از تفاضل‌های بخش شده را به صورتی که نمایش داده شده تشکیل می‌دهیم.

طور کلی برای محاسبهٔ هر R_i^j در جدول مزبور خواهیم داشت: (j مرتبهٔ تفاضلات بخش شده را نشان می‌دهد هر $S_p(n)$ دارای $j=p+1$ مرتبهٔ تفاضلات بخش شده است که تفاضلات مرتبهٔ (p+۱)ام ثابت و تفاضلات مرتبه (p+۲)ام آن صفر است.)

$$R_i^j = \frac{R_{i+1}^{(j-1)} - R_i^{(j-1)}}{x_{i+j} - x_i}$$

با قرار دادن ضرایب $S_p(0)$، R_0^1، R_0^2، ... و R_0^j در فرمول برای محاسبهٔ $S_p(n)$ به طوری که

$$S_p(n)=S_p(i)=y_i$$

$x_i=i$	$S_p(i)=y_i$	$R_i^1=\frac{S(i+1)-S_i}{x(i+1)-x_i}$	$R_i^2=\frac{R^1(i+1)-R_i^1}{x_i+2-x_i}$	$R_i^3=\frac{R_{i+1}^2-R_i^2}{x_i+3-x_i}$
۰	$S_p(0)$			
۱	$S_p(1)$	$R_0^1=\frac{S_p(1)-S_p(0)}{1-0}$		
۲	$S_p(2)$	$R_1^1=\frac{S_p(2)-S_p(1)}{2-1}$	$R_0^2=\frac{R_1^1-R_0^1}{2-0}$	
۳	$S_p(3)$	$R_2^1=\frac{S_p(3)-S_p(2)}{3-2}$	$R_1^2=\frac{R_2^1-R_1^1}{3-1}$	$R_0^3=\frac{R_1^2-R_0^2}{3-0}$
۴	$S_p(4)$	.	...	
۵	$S_p(5)$	.	...	
.	.	.		
.	.	.		
.	.	.		
p+۱	$S_p(p+1)$	$R_{p+1-1}^1=\frac{S_p^{(p+1)}-S_p^{(p+1-1)}}{(p+1)-(p+1-1)}$	...	

خواهیم داشت

$$S_p(n)=S_p(0)+R^1_0 n+R^2_0 n(n-1)+R^3_0 n(n-1)(n-2)$$
$$+\cdots+R^j_0 n(n-1)(n-2)\cdots(n-(j-1)) \qquad (I)$$

(این فرمول را فرمول (I) نامگذاری می کنیم.)

در جدول و فرمول فوق، منظور از $S_p(i)$؛ مجموعی به صورت زیر است

$$S_p(i)=\sum_{j=0}^{i} j^p = 0^p+1^p+2^p+3^p+\cdots+i^p$$

از این رو؛

$$S_p(0)=0^p=0$$
$$S_p(1)=0^p+1^p$$
$$S_p(2)=0^p+1^p+2^p$$
$$S_p(n)=0^p+1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p$$

برای مثال؛ $S_2(5)$ عبارت است از:

$$S_2(5)=\sum_{i=0}^{5} i^2 = 0^2+1^2+2^2+3^2+4^2+5^2$$

با استفاده از فرمول (I) و تشکیل جدول تفاضل های بخش شده می توان $S_p(n)$ را برای هر p مورد نظر محاسبه کرد.

برای نمایش چگونگی استفاده از فرمول (I) جهت محاسبهٔ $S_p(n)$، ذیلاً به محاسبهٔ $S_1(n)$، $S_2(n)$، $S_3(n)$، $S_4(n)$ و $S_5(n)$ و $S_6(n)$ می پردازیم.

مسأله۱. مطلوب است محاسبهٔ $S_1(n)$ به طوری که

$$s_1(n)=\sum_{i=1}^{n} i^1$$

حل: برای این منظور ابتدا مقادیر مورد نیاز $S_1(1)$ و $S_1(2)$ را به دست می آوریم

$$S_1(1)=\sum_{i=1}^{1} i^1 = 1^1 = 1,\quad S_1(2)=\sum_{i=1}^{2} i = 1^1+2^1=3$$

آنگاه جدولی متشکل از داده های x_i و $y_i=S_1(n)$ را به صورت زیر تشکیل می دهیم و تفاضل های بخش شده و ضرایب y، R^1_0 و R^2_0 را مطابق آنچه توضیح داده شده محاسبه می کنیم.

$x_i=i$	$y_i=S_1(i)$
۰	۰
۱	۱
۲	۳

$x_i=i$	$y_i=S_1(i)$	R^1_i	R^2_i
۰	$\boxed{0}$		
۱	۱	$\boxed{1}$	
۲	۳	۲	$\boxed{\frac{1}{2}}$

با قرار دادن مقادیر به دست آمده از ضرایب در فرمول (I)، خواهیم داشت

$$S_1(n)=0+1n+\frac{1}{2}n(n-1)$$

که پس از ساده کردن و جمع جملات متشابه خواهیم داشت

$$S_1(n)=\frac{1}{2}n(n+1)$$

مسأله۲. محاسبهٔ $S_2(n)$ به طوری که

$$S_2(n)=\sum_{i=1}^{n} i^2$$

حل: مطابق آنچه در حل مسألهٔ ۱ توضیح داده شد، جدولی از داده‌های x_i و $S_2(i)$ پس از محاسبهٔ مقادیر مورد نیاز از $S_2(1)$ تا $S_2(3)$ را به صورتی که در زیر نشان داده شده تشکیل داده و مقادیر مورد نظر ضرایب را به شکل زیر به دست می‌آوریم.

با قرار دادن مقادیر به دست آمده از ضرایب در فرمول (I)خواهیم داشت

$$S_2(n)=0+1n+\frac{3}{2}n(n-1)+\frac{1}{3}n(n-1)(n-2)$$

که پس از ساده کردن و جمع و تفریق جملات متشابه خواهیم داشت

$$S_2(n)=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$$

مسأله ۳. محاسبهٔ $S_3(n)$ بطوری که

$$S_3(n)=\sum_{i=1}^{n} i^3 .$$

حل: مطابق آنچه توضیح داده شد پس از محاسبهٔ مقادیر

$x_i=i$	$y_i=s_2(i)$
۰	۰
۱	۱
۲	۵
۳	۱۴

$x_i=1$	$y_i=s_2(i)$	R_i^1	R_i^2	R_i^3
۰	$\boxed{0}$			
۱	۱	$\boxed{1}$		
۲	۵	۴	$\boxed{\frac{3}{2}}$	
۳	۱۴	۹	$\frac{5}{2}$	$\boxed{\frac{2}{6}=\frac{1}{3}}$

$x_i=i$	$y_i=S_3(i)$
۰	۰
۱	۱
۲	۹
۳	۳۶
۴	۱۰۰

$x_i=1$	$y_i=S_3(i)$	R_i^1	R_i^2	R_i^3	R_i^4
۰	$\boxed{0}$				
۱	۱	$\boxed{1}$			
۲	۹	۸	$\boxed{\frac{7}{2}}$		
۳	۳۶	۲۷	$\frac{19}{2}$	$\boxed{\frac{12}{6}=2}$	
۴	۱۰۰	۶۴	$\frac{37}{2}$	$\frac{18}{6}$	$\boxed{\frac{6}{24}=\frac{1}{4}}$

مورد نیاز $S_3(1)$ تا $S_3(4)$ جدولی از داده‌ها به صورت بالا تشکیل داده و ضرایب مورد نظر را محاسبه می‌کنیم.

با قرار دادن ضرایب محاسبه شده در فرمول (I) خواهیم داشت:

$$S_3(n)=0+n+\frac{7}{2}n(n-1)+2n(n-1)(n-2)+\frac{1}{4}n(n-1)(n-2)(n-3)$$

که پس از ساده کردن و جمع و تفریق جملات متشابه خواهیم داشت:

$$S_3(n)=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{n^2}{4}$$

مسأله ۴. محاسبهٔ $S_4(n)$ به طوری که

$$S_4(n)=\sum_{i=1}^{n} i^4$$

حل: جدولی از داده‌های x_i و $S_4(i)$ پس از محاسبهٔ مقادیر مورد نیاز $S_4(1)$ تا $S_4(5)$ همانند آنچه که در مسایل قبل توضیح داده شد به صورتی که در صفحهٔ بعد می‌بینید تشکیل داده و مقادیر ضرایب مورد نظر را محاسبه می‌کنیم.

که با قرار دادن ضرایب محاسبه شده در فرمول (I) خواهیم داشت:

$$S_4(n)=0+n+\frac{15}{2}n(n-1)+\frac{50}{6}n(n-1)(n-2)+\frac{60}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)+\frac{24}{120}n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$$

$x_i = i$	$S_۴(i)$
۰	۰
۱	۱
۲	۱۷
۳	۹۸
۴	۳۵۴
۵	۹۷۹

$x_i = i$	$S_۴(i)$	$R_i^۱$	$R_i^۲$	$R_i^۳$	$R_i^۴$	$R_i^۵$
۰	$\boxed{۰}$					
۱	۱	$\boxed{۱}$				
۲	۱۷	۱۶	$\boxed{\frac{۱۵}{۲}}$			
۳	۹۸	۸۱	$\frac{۶۵}{۲}$	$\boxed{\frac{۵۰}{۶}}$		
۴	۳۵۴	۲۵۶	$\frac{۱۷۵}{۲}$	$\frac{۱۱۰}{۶}$	$\boxed{\frac{۶۰}{۲۴}}$	
۸	۹۷۹	۶۲۵	$\frac{۳۶۹}{۲}$	$\frac{۱۹۴}{۶}$	$\frac{۸۴}{۲۴}$	$\boxed{\frac{۲۴}{۱۲۰}}$

که پس از ساده کردن و جمع و تفریق جملات متشابه خواهیم داشت

$$S_۴(n) = \frac{۱}{۵}n^۵ + \frac{n^۴}{۲} + \frac{n^۳}{۳} - \frac{n}{۳۰}$$

به همین ترتیب برای محاسبهٔ $S_۵(n)$ و $S_۶(n)$ عمل می‌کنیم، در نتیجه خواهیم داشت

$$S_۵(n) = \frac{۱}{۶}n^۶ + \frac{۱}{۲}n^۵ + \frac{۱۰}{۲۴}n^۴ - \frac{۱}{۱۲}n^۲$$

,

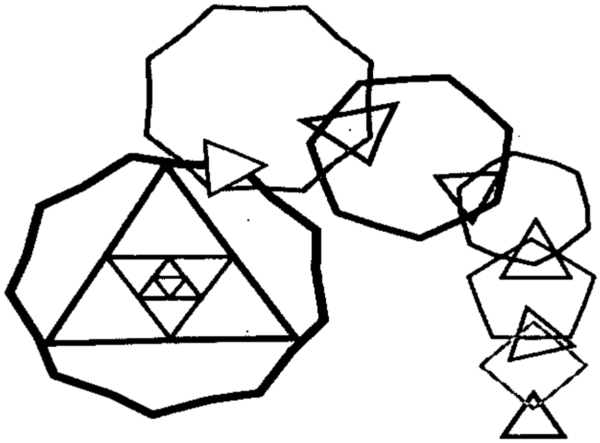
$$S_۶(n) = \frac{۱}{۷}n^۷ + \frac{۱}{۲}n^۶ + \frac{۱}{۲}n^۵ - \frac{۱}{۶}n^۳ + \frac{۱}{۴۲}n$$

■ نکتهٔ قابل توجه این‌که بدون استفاده از تشکیل جدول تفاضل‌های بخش شده نیز می‌توان مقادیر ضرایب R_i^j را با به کار بردن فرمول زیر محاسبه کرد.

$$R_i^j = \Big[(-۱)^{j+j}\binom{j}{j}S_p(j) + (-۱)^{j+(j-۱)}\binom{j}{j-۱}S_p(j-۱) + (-۱)^{j+(j-۲)}\binom{j}{j-۲}S_p(j-۲) + \cdots + (-۱)^{j+(j-j)}\binom{j}{j-j} S_p(j-j)\Big] \div j!$$

نکاتی که در فرمول فوق باید به آن توجه داشت این است که:

اولاً، هر R_i^j دارای $(j+۱)$ جمله است که از $S_p(j)$ شروع



و به $S_p(j-j)$ ختم می‌شود. (با سیری نزولی با فواصل مساوی ۱).

ثانیاً؛ منظور از $S_p(j)$ و $\binom{j}{l}$، به ترتیب

$$S_p(j)=\sum_{i=0}^{j} i^p = 0^p+1^p+2^p+\dots+j^p$$

,

$$\binom{j}{l}=\frac{j!}{l!(j-l)!}$$

است.

ثالثاً؛ ضرایب جملات هر R_0^j با استفاده از مثلث خیام-پاسکال نیز قابل دست‌یابی است.

رابعاً؛ ضرایب از مثبت شروع شده و به صورت یک در میان مثبت و منفی ادامه می‌یابد:

خامساً؛ محاسبهٔ R_0^j ها تا R_0^{p+1} انجام می‌شود.

برای آشنایی با چگونگی روش محاسبهٔ ضرایب با استفاده از فرمول مزبور، ضرایب $S_2(n)$ برای نمونه در زیر محاسبه شده است:

می‌دانیم

$$S_2(n)=S_2(0)+R_0^1 n+R_0^2 n(n-1)+R_0^3 n(n-1)(n-2)$$

با استفاده از فرمول ضرایب $R_0^1, R_0^2, R_0^3, R_0^4$ را در ستون روبرو محاسبه کرده‌ایم:

$$R_0^1=\left[(-1)^{1+1}\binom{1}{1}S_2(1)+(-1)^{1+0}\binom{1}{0}S_2(0)\right]\div 1!=$$

$$\left[\left(1\times\frac{1!}{1!0!}\times 1\right)+\left(-1\times\frac{1!}{0!1!}\times 0\right)\right]\div 1!=\frac{1}{1!}=1$$

$$R_0^2=\left[(-1)^{2+2}\binom{2}{2}S_2(2)+(-1)^{2+1}\binom{2}{1}S_2(1)+\right.$$

$$\left.(-1)^{2+0}\binom{2}{0}S_2(0)\right]\div 2!$$

$$=\frac{3}{2!}=\frac{3}{2}$$

$$R_0^3=\left[(-1)^{3+3}\binom{3}{3}S_2(3)+(-1)^{3+2}\binom{3}{2}S_2(2)+\right.$$

$$\left.(-1)^{3+1}\binom{3}{1}S_2(1)+(-1)^{3+0}\binom{3}{0}S_2(0)\right]\div 3!$$

$$=\frac{2}{3!}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$$R_0^4=0$$

با قرار دادن ضرایب محاسبه شده در فرمول $S_2(n)$ خواهیم داشت:

$$S_2(n)=0+1n+\frac{3}{2}n(n-1)+\frac{1}{3}n(n-1)(n-2)$$

که پس از ساده کردن و جمع و تفریق جملات متشابه خواهیم داشت:

$$S_2(n)=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$$

زیرنویس‌ها

۱ ـ فرمول نیوتن ـ گریگوری از کتاب ذیل آورده شده است؛

Applied Numerical Methods for the Microcomputer, Terry E. Shoup.

ترجمهٔ: پرزاد طرفه نژاد

روایت معلمان

مژگان صدقی، دبیر دبیرستان‌های شهرستان جاجرم

به‌دلیل اهمیّت نقش معلّم، برنامه‌های آموزش معلّمان از اهمیّت ویژه‌ای برخوردار است. مجله رشد آموزش ریاضی در نظر دارد که این مهم را یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به‌همین منظور، ستونی در مجله باعنوان روایت‌های معلمان ریاضی باز شده است تا از طریق آن، بتوانیم رابطهٔ نزدیکتری بامعلمان ریاضی برقرار کنیم. این روایت‌ها برای محققان و معلمان محقق، فرصت ارزنده‌ای به‌وجود می‌آورد تا به‌تبیین نظریه‌های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلّم می‌جوشد، بپردازند. آنگاه نظریه‌ها به‌عمل دَر می‌آیند و مجدداً عمل به‌نظریه کشانده می‌شود و این فرآیند همچنان ادامه پیدا می‌کند.

از همکاران گرامی انتظار می‌رود که روایتهای خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قرار گیرد، زیرا که زکات علم، نشر آن است. معلمان عزیز باید به‌اهمیّت تجربه‌های خود واقف شوند و باپویایی، به‌غنی‌تر کردن آنها بپردازند.

سال‌های اول و دوم دبیرستان از لحاظ تدریس و آموزش از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند. به اعتقاد من، اساس ذهنی ریاضی دانش‌آموزان در این سال‌ها شکل می‌گیرد و بعضی به ریاضیات علاقه‌مند می‌شوند و بعضی از آن گریزان. به‌همین دلیل، معتقد هستم که دبیران ریاضی، نقش مهمی در ایجاد علاقه و انگیزه در دانش‌آموزان ایفا می‌کنند و با طرح سؤالات متنوع و جالب و بیان بحث‌های زیبای ریاضی در کلاس، می‌توانند دانش‌آموزان را بیش از پیش به ریاضی علاقه‌مند کنند.

■ همهٔ اعداد مساویند!

اکثر دانش‌آموزانی که تجربهٔ تدریس به آن‌ها را در این پایه‌ها دارم، در تفاوت تعریف و قرارداد با قضیه مشکل دارند و بعضی تعریف‌ها برایشان غیرقابل فهم و غیرقابل باور است. مثلاً تعریف می‌کنیم

$$a^{\circ} = ۱$$

در یکی از کلاس‌هایم، یکی از دانش‌آموزان این طور مطرح کرد: «من می‌توانم ثابت کنم همهٔ اعداد مساویند.» و وقتی از او خواستم دلیل ادّعایش را بیان کند، گفت: «داریم

$$۱^{\circ} = ۲^{\circ} = ۳^{\circ} = ۴^{\circ} = \cdots = n^{\circ} = \cdots$$

پس

$$۱ = ۲ = ۳ = ۴ = \cdots = n = \cdots$$

می‌دانم ادعایم درست نیست اما نمی‌دانم اشکال از کجاست؟!...»

این مورد، می‌تواند موضوع بحث‌های جالبی در یک کلاس درس ریاضی باشد و دانش‌آموزان می‌توانند با ورود به این بحث‌ها، با بسیاری از مباحث ریاضی آشنا شوند و حل مسأله را فراگیرند. هم‌چنین، دبیران با ذکر تفاوت‌های قضیه و قرارداد می‌توانند دانش‌آموزان را در این امر یاری کنند. دانستن این موضوع که حدس و گمان‌هایی که صحت و سقم آن‌ها معلوم نبوده به یک حدسیّه تبدیل شده است، می‌تواند در آن‌ها ایجاد شوق و علاقه کند تا آن‌ها نیز حدس و گمان‌های خود را آزمایش کنند.

■ امان از سؤالات؟!

به نظر من، یکی از مشکلات مدارس این است که در پایهٔ اول دبیرستان که به نظر می‌رسید یکی از مهم‌ترین پایه‌های تحصیلی است، گاهی با کم‌توجّهی به نیازهای دانش‌آموزان، از دبیران کمتر علاقه‌مند، یا کمتر توانا، برای تدریس استفاده می‌شود. این کار باعث می‌شود تا نهال ریاضی در همان آغاز کار خشکانده شود و یکی از علل افت تحصیلی دانش‌آموزان سال اول می‌تواند به این امر مربوط باشد. گاهی دیده می‌شود که دانش‌آموزان، عطای ریاضی را به لقایش می‌بخشند و به‌طور کلی آن را کنار می‌گذارند یا دانش‌آموزان علاقه‌مند، با پایه‌ای ضعیف به‌دنبال آن می‌روند. این شرایط می‌تواند مصداق خشت اول چون نهد معمار کج... باشد و باید برای آن، چاره‌ای اندیشید. هم‌چنین، باید به دانش‌آموزان فرصت داد سؤال‌هایشان را مطرح کنند تا اگر ابهاماتی که در ذهن آن‌ها ایجاد می‌شود، از بین برود. لحن پاسخ به سؤال‌های دانش‌آموزان نباید به گونه‌ای باشد که انگیزهٔ سؤال کردن را از آن‌ها بگیرد. (مثلاً با بی‌تفاوتی یا بی‌حوصلگی). برای این نکته، به ذکر یک مثال می‌پردازم تا نشان دهم که چگونه می‌توان به سؤال‌های دانش‌آموزان معنی بخشید.

در یکی از کلاس‌ها، پس از حل مسأله‌ای، به معادلهٔ $x^{۲} = -۱$ رسیدیم. اکثر دانش‌آموزان جواب دادند که معادله ریشه ندارد و مسأله جواب ندارد. در این میان یکی از دانش‌آموزان با حالتی عجیب پرسید: چطور جواب ندارد؟ $\sqrt{-۱}$ جواب آن است؟! همهٔ دانش‌آموزان به او خندیدند و گفتند: «اعداد منفی که جذر ندارند.»

من گفتم: «بچه‌ها حق با دوست شماست. $\sqrt{-1}$ جواب معادله است ولی این جواب حقیقی نیست و بدین علت مورد قبول نیست. معادلهٔ $x^2 = -1$ در مجموعهٔ اعداد حقیقی جواب ندارد ولی یک ریاضیدان به نام اویلر، جواب این معادله را i نامید و اعداد مختلط را اختراع کرد.» مخصوصاً از واژهٔ «اختراع» استفاده کردم تا توجّه دانش‌آموزان را به این جنبه از ریاضی، جلب کنم. با این حال، توضیح بیشتر را جایز نشمردم چون دانش‌آموزان سال اول دبیرستان بودند و اعداد مختلط، موضوع درسی آن‌ها نبود. امّا با همین توضیح مختصر، دیگر از حالت تمسخر در نگاه دانش‌آموزان خبری نبود و این‌بار، جور دیگری به درست خود نگاه کردند. شاید با خود می‌گفتند: کاشکی من این جواب را می‌گفتم!...

البته می‌شد از کنار این مسأله بی‌تفاوت گذشت و ذهن دانش‌آموزان را درگیر اعداد مختلط نکرد، اما به نظر من، آن چیزی که مهمّ است این است که دانش‌آموزان باید خود را باور کنند و از طرح هیچ سؤالی در کلاس نهراسند تا از این راه، قدمی در راه پیشرفت در ریاضی بردارند. متأسفانه بعضی همکاران، چنان جوی ایجاد می‌کنند که دانش‌آموزان، هرگز جرأت سؤال کردن در کلاس را ندارند. آنها در تصوّر خود، با اتّخاذ چنین روشی، خود را از دست سؤالات دانش‌آموزان در امان نگه می‌دارند، امّا!...

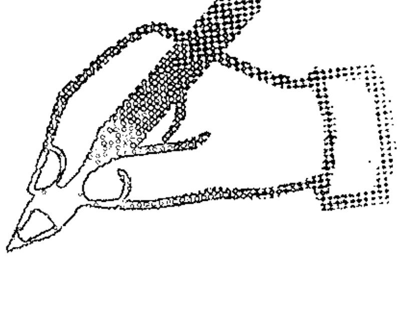
■ هدایت تحصیلی یا رقابت تحصیلی!

یکی دیگر از مشکلات آموزشی که در سال دوم تحصیلی با آن مواجه شده‌ام، هدایت دانش‌آموزان به یکی از رشته‌های ریاضی‌فیزیک، علوم تجربی، علوم انسانی و غیره است. به طور مشخّص، دانش‌آموزانی که بدون علاقه به رشتهٔ مورد نظر هدایت تحصیلی می‌شوند، بیشتر مدنظر من هستند. البتّه، نقش اولیا در این راستا بسیار مهم است که بعضی اولیا، فقط از روی رقابت با اقوام و خویشاوندان، دانش‌آموزان را مجبور به انتخاب رشته‌ای می‌کنند که اصلاً علاقه‌ای به آن ندارند. در این میان، دانش‌آموزان ریاضی که علاقه‌ای به ریاضی ندارند، بیشتر صدمه می‌بینند؛ زیرا اکثر آن‌ها یا مجبور به تغییر رشته می‌شوند و یا آن که از همکلاسی‌های خود، فاصلهٔ بسیاری می‌گیرند. این موضوع، موجب افت تحصیلی آن‌ها می‌شود.

■ این کتاب‌های کمک درسی هم شده‌اند معضلی!

انتشار کتاب‌های گوناگون کمک‌درسی در رابطه با هر کتاب درسی، مشکل دیگری است که ما دبیران با آن مواجه هستیم. دانش‌آموزان بدون فکر کردن روی مسأله، با دسترسی داشتن به این کتاب‌ها، گاهی فقط با کپی کردن جواب‌های مسأله، از خود رفع تکلیف می‌کنند. حال اگر از همین دانش‌آموز بخواهیم مسأله را حل کند یا راه‌حل خود را توضیح دهد، گاهی نه‌تنها مطالبی را که نوشته است نمی‌تواند بفهمد، حتّی خط خود را نیز نمی‌تواند بخواند؟!... حتّی بسیار پیش می‌آید که در این کتاب‌ها، اشتباه چاپی وجود دارد و یا جواب بعضی مسایل اشتباه است. آن‌وقت، قانع کردن دانش‌آموزان که این کتاب اشتباه چاپی دارد و یا مسأله را درست حل نکرده است هم یک معضل دیگر است!...

بر ماست که به دانش‌آموزان، راه درست استفاده کردن از این کتاب‌ها را آموزش دهیم.



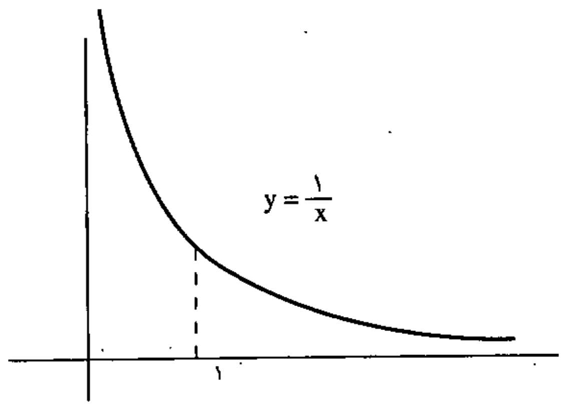
سطح نامتناهی، حجم متناهی

سطح متناهی، حجم نامتناهی

نوشته: محمدرضا نوری

نکتهٔ جالب توجه و شناخته شده‌ای دربارهٔ نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ وجود دارد:

گزاره ۱ ([۱]): سطح زیر نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x}$، روی بازهٔ $[1,+\infty)$ نامتناهی و حجم حاصل از دوران این نمودار حول محور xها، متناهی است.



(شکل ۱)

برهان:

$$S=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx \quad \text{(سطح زیر نمودار)}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\int_1^{t}\frac{1}{x}\,dx=\lim_{t\to+\infty}[\operatorname{Ln}x]_1^{t}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}(\operatorname{Ln}t-\operatorname{Ln}1)=+\infty$$

$$V=\pi\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx=\lim_{t\to+\infty}\pi\left[-\frac{1}{x}\right]_1^{t} \quad \text{(حجم حاصل از دوران)}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\pi\left(-\frac{1}{t}+1\right)=\pi.$$

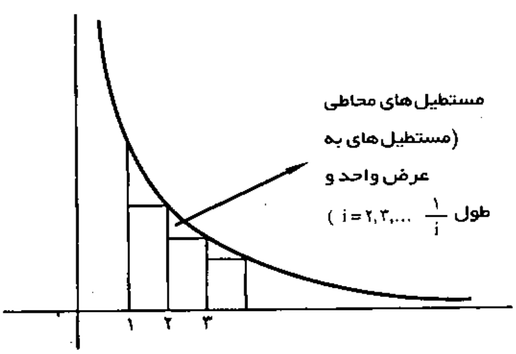
البته به شیوهٔ دیگری نیز می‌توان این حقیقت را دریافت([۲]):

اگر بازهٔ $[1,+\infty)$ را به تکه‌هایی به طول واحد تقسیم کنیم و مستطیل‌های محاطی مربوطه را درنظر بگیریم(شکل ۲) خواهیم دید که:

سطح زیر نمودار > مجموع مساحت‌های مستطیل‌های محاطی

$$=1\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{3}+\cdots+1\times\frac{1}{n}+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$



(شکل ۲)

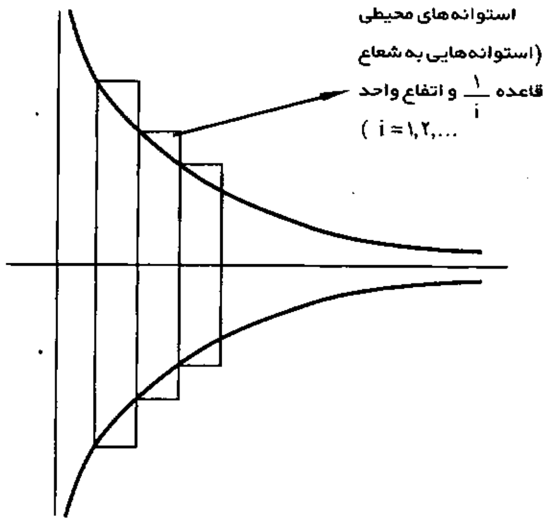
از آنجایی که سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ یک سری واگراست[1] (یا به عبارتی $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})=+\infty$) نتیجه می‌شود مساحت زیر نمودار، نامتناهی است.

همچنین اگر شکل حاصل از دوران را رسم کنیم و این بار استوانه‌های محیطی را درنظر بگیریم (شکل ۳) خواهیم دید که:

مجموع حجم‌های استوانه‌های محیطی > حجم حاصل از دوران (حول محور xها)

$$=\pi.\frac{1}{1^2}+\pi\frac{1}{2^2}+\cdots+\pi\frac{1}{n^2}+\cdots$$

از آنجایی که $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ یک سری همگراست[2] نتیجه می‌شود حجم حاصل از دوران متناهی است.



(شکل ۳)

از آنالیز مقدماتی می‌دانیم:

لم ۲: سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ برای $0<\alpha\le 1$ واگرا و برای $\alpha>1$ همگرا است ([۳]، ص۷۸) با به‌کارگیری این نکته، حکم کلی بعد را به‌دست می‌آوریم:

گزارهٔ ۳: هرگاه $\frac{1}{2}<\alpha\le 1$ باشد، آنگاه اگر نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}$ را روی بازهٔ $[1,+\infty)$ درنظر بگیریم سطح زیر نمودار نامتناهی و حجم حاصل از دوران (حول محور xها) متناهی است.

برهان: به گونه‌ای مشابه با به‌کارگیری ایدهٔ مستطیل‌های محاطی و استوانه‌های محیطی داریم:

مجموع مساحت‌های مستطیل‌های محاطی < مساحت زیر نمودار

$$=1\times\frac{1}{2^{\alpha}}+1\times\frac{1}{3^{\alpha}}+\cdots$$
$$=\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+\cdots+\frac{1}{n^{\alpha}}+\cdots$$

چون $\alpha\le 1$، بنابر لم ۲ سری بالا همگرا و در نتیجه مساحت زیر نمودار نامتناهی است.
همچنین

مجموع حجم‌های استوانه‌های محیطی > حجم حاصل از دوران نمودار

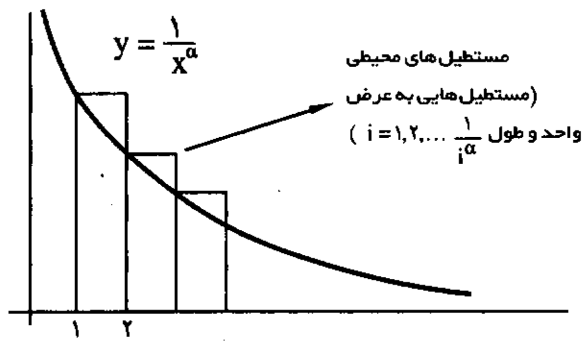
$$=\pi(\frac{1}{1^{\alpha}})^2+\pi(\frac{1}{2^{\alpha}})^2+\cdots+\pi(\frac{1}{n^{\alpha}})^2+\cdots$$
$$=\pi(\frac{1}{1^{2\alpha}}+\frac{1}{2^{2\alpha}}+\cdots+\frac{1}{n^{2\alpha}}+\cdots)$$

چون $2\alpha>1$، بنابر لم ۲ سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2\alpha}}$ همگرا و در نتیجه حجم حاصل از دوران متناهی است.

نتیجه: تابعی پیوسته، تعریف شده روی یک بازهٔ نامتناهی وجود دارد به طوری که سطح زیر نمودار آن بی‌نهایت و حجم حاصل از دوران آن (حول محور xها) متناهی باشد.
در گزارهٔ صفحهٔ بعد نشان می‌دهیم که تابع‌های

پیوسته‌ای تعریف شده روی یک بازهٔ نامتناهی می‌توان یافت به طوری که هم سطح زیر نمودار متناهی باشد و هم حجم حاصل از دوران.

گزارهٔ ۴: $\alpha > 1$ یک عدد حقیقی می‌باشد، اگر نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}$ را روی بازهٔ $[1,+\infty)$ درنظر بگیریم، آنگاه سطح زیر نمودار و حجم حاصل از دوران نمودار (حول محور xها) هر دو متناهی هستند.



(شکل ۴)

برهان: به گونه‌ای مشابه، این بار با به کارگیری مفهوم مستطیل های محیطی (شکل ۴) و استوانه های محیطی خواهیم دید که:

مجموع مساحت های مستطیل های محیطی > مساحت زیر نمودار

$$=1\times\frac{1}{1^{\alpha}}+1\times\frac{1}{2^{\alpha}}+\cdots+1\times\frac{1}{n^{\alpha}}+\cdots$$

چون $\alpha > 1$، بنابر لم ۲، $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ همگرا و در نتیجه مساحت زیر نمودار متناهی است.

همچنین

مجموع حجم‌های استوانه های محیطی > حجم حاصل از دوران

$$=\pi\frac{1}{1^{2\alpha}}+\pi\frac{1}{2^{2\alpha}}+\cdots+\pi\frac{1}{n^{2\alpha}}+\cdots$$
$$=\pi\left(\frac{1}{1^{2\alpha}}+\frac{1}{2^{2\alpha}}+\cdots+\frac{1}{n^{2\alpha}}+\cdots\right)$$

چون $\alpha > 1$، در نتیجه $2\alpha > 1$ و بنابر لم ۲ سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2\alpha}}$ همگرا و بنابراین حجم حاصل از دوران نیز متناهی می‌باشد.

نتیجه: تابعی پیوسته تعریف شده روی یک بازهٔ نامتناهی وجود دارد به طوری که سطح زیر نمودار آن و حجم حاصل از دوران آن (حول محور xها)، هر دو متناهی باشند.

اکنون به طرح پرسش زیر می‌پردازیم:

آیا می‌توان تابعی پیوسته، تعریف شده روی یک بازهٔ نامتناهی یافت به طوری که سطح زیر نمودار آن متناهی و حجم حاصل از دوران آن نامتناهی باشد؟

خواهیم دید که چنین تابعی وجود دارد ولی پیش از آن که به ساختن آن بپردازیم، نشان می‌دهیم که می‌توان تابعی پیوسته، تعریف شده روی یک بازهٔ متناهی یافت به طوری که سطح زیر نمودار آن متناهی و حجم حاصل از دوران آن نامتناهی باشد، آنگاه با استفاده از وجود چنین تابعی، به ساخت تابع موردنظر خواهیم پرداخت.

گزارهٔ ۵: هر گاه $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ و تابع $f(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}$ را روی بازهٔ $[0, 1]$ درنظر بگیریم، آنگاه سطح زیر نمودار تابع متناهی و حجم حاصل از دوران آن (حول محور xها) نامتناهی است.[3]

برهان: داریم

$$\text{سطح زیر نمودار} = \underset{\varepsilon\to 0^{+}}{\text{حد}}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{x^{\alpha}}\,dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_{\varepsilon}^{1} \right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right)$$

چون $1-\alpha>0$ بنابراین $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^{1-\alpha}=0$ در نتیجه

$$\text{سطح زیر نمودار} = \frac{1}{1-\alpha}$$

که مقداری متناهی است و همچنین

$$\text{حجم حاصل از دوران} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \pi\int_{\varepsilon}^{1} \left(\frac{1}{x^{\alpha}}\right)^{2} dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\pi\left[\frac{x^{-2\alpha+1}}{-2\alpha+1} \right]_{\varepsilon}^{1} \right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \pi \left(\frac{1}{1-2\alpha} - \frac{\varepsilon^{1-2\alpha}}{1-2\alpha} \right)$$

بنابر فرض $1-2\alpha<0$، پس

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^{1-2\alpha} = +\infty$$

در نتیجه

$$\text{حجم حاصل از دوران} = +\infty$$

اکنون تابع $f:(0,+\infty)\to \mathbb{R}$ را با ضابطهٔ زیر درنظر می‌گیریم:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^{\alpha}} & 0<x\le 1 \\ \dfrac{1}{x^{\beta}} & x\ge 1 \end{cases}$$

که در آن $\frac{1}{2}<\alpha<1$ و $\beta>1$ دو عدد حقیقی مفروض می‌باشند.

f تابعی پیوسته است و بنابر گزاره‌های ۴ و ۵ سطح زیر نمودار آن متناهی و حجم حاصل از دوران نمودار، نامتناهی می‌باشد.

به این ترتیب نتیجهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم:

نتیجه: تابعی پیوسته تعریف شده روی یک بازهٔ نامتناهی می‌توان یافت بطوریکه سطح زیر نمودار آن متناهی و حجم حاصل از دوران نمودار (حول محور xها) نامتناهی باشد.

زیرنویس‌ها

۱ و ۲ـ اثبات همگرایی و واگرایی این سری‌ها مقدماتی است به‌عنوان نمونه ر. ک [۲].

۳ـ این گزاره الهام گرفته شده از تمرینی از [۴] است:

«هرگاه فضای $X=(0,1]$ مجهز به اندازهٔ لبگ باشد نشان دهید تابع $f(x)=x^{-2/3}$ متعلق به $L^1(x,\mu)$ می‌باشد اما متعلق به $L^2(x,\mu)$ نمی‌باشد.» ([۴]، ص۱۲۹)

مراجع

[۱] «یک پارادوکس دربارهٔ انتگرالهای ناسره»، ترجمهٔ سیدمحمدعلی بصام تبار، مجلهٔ رشد آموزش ریاضی شمارهٔ ۱۸.

[۲] «محاسبهٔ سری $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$»، نوشتهٔ: نیکولاشی، ترجمهٔ مرتضی صفرعلی، مجلهٔ رشد آموزش ریاضی.

[۳] «اصول آنالیز ریاضی» تألیف: والتر رودین، ترجمهٔ: دکتر علی‌اکبر عالم‌زاده، انتشارات علمی و فنی، ۱۳۷۰، شمارهٔ ۲۷.

[4] ADAMS, M & GUILLEMIN, V., Measure Theory and Probability, Wadsworth & Brooks, Monterey, California, 1986.

اثبات های ریاضی و زیبایی

نویسنده : پروفسور یان استوارت ،
(دانشگاه واریک)
مترجمان : مهناز پاک خصال،
(دبیر ریاضی منطقه ۴ تهران)
عبدالله مصطفایی

غالباً گفته شده که برای یک رمان فقط هفت روش شناخته شده وجود دارد، که همه را یونانیان قدیم می‌دانسته‌اند. به نظر می‌رسد که در مورد نوشتن اثبات های ریاضی حتی روش های کمتری وجود دارد و یونانیان باستان فقط یکی از این‌ها را می‌شناخته‌اند که آن همانا یک اثبات کوتاه، جذاب و شیرین و اجباراً هوشمندانه بوده است، نظیر آنچه که باعث شهرت اقلیدس گردید. هیچکس هرگز نمی‌پرسد که چرا چنین اثبات هایی، لازم هستند.

شما با حکم ریاضی جالبی شروع می‌کنید و با بینش دقیق و عالی درستی آن را در چند خط ریاضی ثابت می‌کنید و مشهور می‌شوید. همهٔ افراد مجدداً به ظرافت و زیبایی دنیای ریاضی معترف می‌شوند. اکنون همه به درستی درک می‌کنند که چرا اثبات شما صحیح است و همه خوشحال هستند.

پل اردیش ریاضیدانی برجسته ولی کمی عجیب و غریب بود که بیش از همهٔ افراد روی کرهٔ زمین با مردم مراوده می‌کرد، او نیز به همین صورت فکر می‌کرد. او معتقد بود که خداوند متعال دارای کتابی است که تمام بهترین اثبات ها را در خود جای داده است. زمانی که اردیش تحت تأثیر اثباتی قرار می‌گرفت، اظهار می‌داشت که این اثبات از همان «کتاب» است. از دید او وظیفهٔ یک ریاضیدان آن است که دزدکی نیم‌نگاهی به این کتاب افکنده و زیبایی خلقت خداوند را به اطلاع دیگر مخلوقات او برساند.

اما امروزه به نظر می‌رسد که این راهبرد ساده و ظریف فقط یکی از راههای خلاصهٔ ممکن برای اثبات های ریاضی باشد. بهتر است به اثبات هایی توجه کنید که طی یکی دو سال گذشته عنوان های درشتی را به خود اختصاص داده‌اند. می‌توان دید که برخلاف راه حل های کوتاه و ناچاراً داستان گونهٔ یونانی، اثبات های جدید، حجیم می‌باشند و صدها یا حتی هزاران صفحه را به خود اختصاص داده‌اند. چه اتفاقی برای زیبایی خلقت خداوند رخ داده است؟ آیا واقعاً این اثبات های طولانی لازم است؟ و آیا این طولانی شدن اثبات ها تنها به خاطر این است که ریاضیدان ها بسیار بی درایت هستند که نتوانسته‌اند اثبات کوتاه و هوشمندانهٔ آن‌ها را که در آن «کتاب» نوشته شده پیدا کنند؟

البته در اینجا باید به یک موضوع نیز اذعان نمود که هر حکم کوتاه، ساده و صحیحی دارای اثبات کوتاه و ساده‌ای نیست. در حقیقت برای معتقد بودن به عکس این موضوع دلیل خوبی وجود دارد.

ریاضیدان اتریشی، آقای گودل (Kurt Gödel) اثبات

کرد که احکام کوتاه گاهی نیازمند اثبات‌های طولانی می‌باشند. البته او دقیقاً نمی‌دانست که این احکام کدام بودند و هیچ کس دیگر هم نمی‌داند.

اکثر اثبات‌های شاخص طی چند سال گذشته طولانی و پیچیده بوده‌اند. مثلاً آخرین قضیهٔ فرما را در نظر بگیرید. در سال ۱۹۹۶ آقای اندرو وایلز که انگلیسی الاصل بوده و در دانشگاه پرینستون ایالت نیوجرسی کار می‌کند، توانست آن را اثبات کند. برای حل این قضیه، وایلز ناچار بود که از ماشین‌های حجیم ریاضی استفاده نماید تا این سؤال را به قضیه‌های کوچک‌تر خرد کند و این مانند این بود که یک چکش برقی جسمی را تا حد یک پشه خرد کند. اما گذشته از کسل‌کنندگی و غیرضروری به‌نظر رسیدن باید گفت که اثبات قدرتمند و زیبایی بود. هرچند شاید گفته شود که اثبات به کوتاهی اثبات‌های آن «کتاب» نبوده است بلکه به اندازهٔ کتاب «جنگ و صلح» بوده است.

در اینجا داستان قضیهٔ فرما را یک‌بار دیگر بازگو می‌کنیم. پی‌یر دو فرما یک وکیل فرانسوی بود ولی توانمندی‌های ریاضی او به حدی بود که تمام مغز ما به اندازهٔ انگشت کوچک او نیز نمی‌شود. او در ۱۶۳۷ حاشیه‌ای بر کتاب Arithmatica دیوفانتوس نوشت. نوشتهٔ او مربوط به قضیهٔ فیثاغورث بود یعنی $a^2 + b^2 = c^2$. اعداد a و b و c زیادی هستند که در این رابطه صدق می‌کنند. در حقیقت هر ترکیبی از این سه عدد می‌تواند اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه باشد که در آن c طول وتر است.

فرما سعی کرد که در مورد توان‌های ۳ و ۴ نیز یک چنین رابطه‌ای بنویسد ولی نتوانست مثال‌هایی بیابد. به عبارت دیگر او نتوانست معادله‌ای به شکل $a^n + b^n = c^n$ بیابد که در آن a و b و c عدد صحیح بوده و n نیز عدد صحیح بزرگتر از ۲ باشد. آیا این بدان معنی بود که یک چنین معادله‌ای امکان وجود نداشت؟ فرما در حاشیهٔ کتاب خود نوشت که به اثباتی دست یافته است که نشان می‌دهد که قضیهٔ فیثاغورث فقط برای توان ۲ کاربرد دارد ولی در ضمن او اضافه کرد به دلیل کمی جا در حاشیهٔ این کتاب امکان نوشتن نحوهٔ اثبات وجود ندارد.

استراتژی مخفی

یک چنین اثباتی حتی اگر در حاشیهٔ کتاب نیز جا نگیرد ولی مطمئناً آن‌قدر مختصر و ظریف است که بتوان آن را در کتاب زیبای خداوند یافت. آیا این طور نیست؟ هنوز پس از سه قرن و نیم گروه گروه ریاضیدان بر این موضوع تحقیق نموده‌اند تا شاید راه‌حلی برای آن بیابند. در اواخر دههٔ ۱۹۸۰ بود که یک ریاضیدان انگلیسی الاصل به نام اندرو وایلز از دانشگاه پرینستون ایالت نیوجرسی حمله‌ای وسیع به این مسأله را آغاز کرد. او تنها در اتاقک زیر شیروانی منزل خود بر روی این مسأله کار می‌کرد و قضیه را فقط به یک سری از همکاران رازدار خود گفته بود.

استراتژی او نیز همانند پیشینیان خود از این قرار بود که ابتدا فرض می‌کنند که این معادله با a و b و c و n وجود دارد و سپس به صورت جبری عدد گذاری می‌کنند تا به یک مورد خلاف برخورد کنند. او نقطهٔ شروع خود را از نظریهٔ گرهارد فری (Frey) از دانشگاه Essen آلمان الهام گرفت.

آقای گرهارد بیان داشته بود که شما می‌توانید از ریشه‌های سوم معادله «ناممکن» فرما نوعی معادله درجه سوم بسازید که آنها را به عنوان منحنی بیضوی (Elliptic curve) می‌شناسند.

این موضوع ایدهٔ جالبی بود چون بیش از صد سال بود که ریاضیدانان با این منحنی‌ها سروکار داشتند و راههای زیادی برای بازی با آنها بلد بودند. به علاوه ریاضیدانان فهمیدند که این منحنی بیضوی (ساخته شده از ریشه‌های معادلهٔ فرما) خواصی دارد که در تناقض با حدس حاکم بر رفتار این منحنی‌هاست. این حدس چیزی نبود جز حدس تانی یاما ـ شیمورا ـ ویل (Taniyama-Shimura-Weil Conjecture). همان‌طوری که گفته شد ریشه‌های معادلهٔ فرما در تقابل با این حدس بود و این بدان معنی بود که اگر اثبات شود حدس صحیح بوده است، یعنی ریشه‌ها نمی‌توانستند وجود داشته باشند. آقای وایلز به مدت هفت سال از همهٔ هنر تئوری اعداد استفاده کرد تا بتواند این حدس را اثبات کند. در نهایت با یک استراتژی مناسب او توانست به گشایشی عظیم دست یابد. هرچند او تنها کار می‌کرد ولی همهٔ موارد را خودش

کشف نکرد بدین معنی که ارتباط نزدیکی با تمام پیشرفت‌های جدید در زمینهٔ منحنی‌های بیضوی داشت و به دلیل برخورداری از دانش بالا در زمینهٔ تئوری اعداد توانست تکنیکی مستمر و جدید را پایه گذاری کند که بدون این تکنیک احتمالاً هیچ گاه موفق نمی‌شد. البته مطلب فوق از سهم عظیم او در این موضوع چیزی نمی‌کاهد و این او بود که موضوع را به سمت یک افق جدید به پیش برد.

در حال حاضر متن کامل اثبات آقای وایلز منتشر شده است که بیش از ۱۰۰ صفحه می‌باشد و مطمئناً در حاشیهٔ کتاب جا نمی‌شده است ولی آیا یک چنین تلاشی، ارزشمند است؟ در جواب باید گفت مسلماً، چون مکانیزمی که برای شکستن آخرین قضیهٔ فرما به کار گرفته شد، بسیار غنی و زیبا بود. این گونه ایده‌ها می‌تواند تمامی زمینه‌های تئوری اعداد را متحول سازد. این داستان قدری طولانی شد و شاید فقط متخصصین این رشته بتوانند جزئیات آن را درک کنند. البته باید گفت که شکایت در این باره نمی‌تواند از شکایت دربارهٔ اجبار به خواندن کتابهای تولستوی به زبان روسی بیشتر باشد.

بعد از اثبات‌های کوتاه و اثبات‌های طولانی، یک راه حل سومی نیز وجود دارد که طی سی سال گذشته رواج یافته است و آن چیزی نیست جز اثبات به کمک کامپیوتر که تقریباً همه آن را شنیده‌اید. اینجا مانند یک اغذیه فروشی است که به میلیاردها شهروند غذا می‌فروشد. هرچند این یک کار به حساب می‌آید ولی زیبایی ندارد. در این زمینه اغلب ایده‌های جالبی وجود دارد ولی وظیفهٔ آنها تغییر صورت مسأله به یک محاسبهٔ حجیم ولی معمولی است. در این مرحله محاسبات به یک کامپیوتر سپرده شده و زمانی که او گفت «بله»، اثبات کامل شده است.

ذکر نمونه

نمونه‌ای از این نوع اثبات‌ها در سال گذشته رخ داد. قضیه از این قرار بود که در سال ۱۶۱۱ آقای یوهانس کپلر به این فکر افتاد که به چه طریق می‌توان یک سری کُره را در کنار یکدیگر قرار داد. او نتیجه گرفت که راه بهینه برای بسته‌بندی تعدادی کُره در یک منطقهٔ مشخص همان راهی است که میوه فروشان برای ذخیره سازی پرتقال از آن بهره می‌جویند. آنها یک لایه در زیر پرتقالها قرار داده و یک لایه در بالای آنها قرار می‌دهندو لایه‌های دیگر را نیز به همین صورت برای دیگر پرتقالها اجرا می‌نمایند تا یک شبکه شبیه لانه زنبوری ایجاد شود. این الگوی شبکه‌ای در بسیاری از کریستالها وجود دارد و فیزیکدانان به آن شبکهٔ وجوه مرکزدار Face - centered cubic می‌گویند.

اغلب گفته می‌شود که بیان کپلر واضح و روشن است ولی هیچ کس به نکات ظریف این راه‌حل فکر نمی‌کند. برای مثال حتی آرایش بهینه برای یک صفحه از فضا نیز مشخص نیست. میوه‌فروشان کار انبار کردن را از یک سطح صاف آغاز می‌کنند ولی شما در اینجا نمی‌توانید از این مرحله آغاز کنید. حتی صورت دو بعدی این مسأله یعنی این که ثابت شود شبکهٔ لانه زنبوری بهترین راه برای بسته‌بندی یک سری دایره‌های مساوی در یک صفحه است نیز تا سال ۱۹۴۷ به اثبات نرسیده بود و در این سال بود که یک ریاضیدان مجارستانی بنام Laszlo Fjes To'th آن را اثبات کرد. حدود ۱۰ سال پیش Wu-yi Hsiang از دانشگاه کالیفرنیا در برکلی یک اثبات ۲۰۰ صفحه‌ای را برای حالت سه بعدی این مسأله ارایه کرد ولی به دلیل وقفه‌هایی که در این اثبات وجود داشت، مورد قبول ریاضیدانان واقع نشد. تنها در سال پیش بود که آقای توماس هیلز (Hales) از دانشگاه میشیگان به کمک کامپیوتر اثباتی را ارایه کرد که حاوی صدها صفحه مطلب ریاضی و مقدار حجیمی محاسبات جانبی کامپیوتر بود. این اثبات در صفحهٔ شخصی او در اینترنت قابل دسترسی است و در نظر دارد که جهت انتشار آن را به یک مجلهٔ ریاضی بسپارد.

دیدگاه آقای توماس هیلز این بود که لیستی از تمام راههای ممکن برای تجمع کوچک کره‌ها را تهیه کرده و سپس اثبات کند که هریک از آنها که به صورت شبکهٔ وجوه مرکزدار Face-centered cubic نیست می‌تواند با کمی آرایش بندی مجدد، تحت فشار قرار گیرد. نتیجهٔ این صحبت آن است که تنها آرایش بدون فشردگی (روش بهینه برای پر کردن فضا)

همانی است که قبلاً حدس زده‌اید. این اثبات نشان داد که برای اثبات دو بعدی انجام گرفته توسط To'th حدود ۵۰ امکان وجود دارد. برای اثبات سه بعدی، آقای هیلز باید هزاران امکان را بررسی می‌کرد و کامپیوتر باید حجم عظیمی از نامساوی‌ها را حل می‌کرد که برای این کار به حافظه‌ای بالغ بر ۳ گیگابایت نیاز داشت.

یکی دیگر از قدیمی‌ترین اثبات‌هایی که از کامپیوتر برای حل آن استفاده شده، اثبات قضیهٔ معروف «چهاررنگ» است. تقریباً یک و نیم قرن پیش یک ریاضیدان انگلیسی بنام فرانسیس گاتری (Guthrie) از خود پرسید که به چه صورت می‌توان یک نقشهٔ جغرافیایی دو بعدی با هرگونه آرایش کشورها را رنگ‌آمیزی کرد؟ او پاسخ داد که برای این کار فقط به چهاررنگ نیاز داشت تا رنگ هیچ دو کشور همسایه یکسان نباشد. این موضوع به نظر ساده می‌رسد ولی اثبات آن مشکل است. دست آخر در سال ۱۹۷۶ بود که دو ریاضیدان امریکایی به نام‌های اَپل و هاکِن (Apple & Haken) به این اثبات دست یافتند. آنها توانستند به کمک محاسبات دستی و روش‌های آزمون و خطا به لیست حدود ۲۰۰۰ نقشه از وضعیت مختلف کشورها دست یابند. سپس آنها کامپیوتر را به خدمت گرفتند تا اثبات نمایند که این لیست «اجتناب ناپذیر» است یعنی هر وضعیت ممکنی که برای کشورها در نظر گرفته شود شبیه یکی از این ۲۰۰۰ نقشه خواهد بود که در این لیست ذکر شده است. در مرحلهٔ بعدی آنها نشان دادند که هر کدام از این نقشه‌ها «قابل ساده شدن» هستند یعنی قسمتی از نقشه را می‌توان به حدی تقلیل داد که ناپدید شود. در نهایت این تقلیل‌ها باید به جایی برسد که نقشهٔ نهایی را بتوان با چهاررنگ، رنگ‌آمیزی کرد و از این موضوع نتیجه شد که نقشهٔ اصلی را نیز با همین چهاررنگ می‌توان رنگ‌آمیزی کرد.

حال ساده‌ترین نقشه‌ای را که با پنج رنگ (حداقل خلاف) یا بیشتر رنگ‌آمیزی می‌شوند را در نظر بگیرید. شبیه تمام نقشه‌ها، این نقشه نیز باید یکی از آن ۲۰۰۰ نقشه قابل ساده شدن باشد. این نقشه را ساده کنید. به نقشه‌ای خواهید رسید که از حداقل خلاف، ساده‌تر است و بنابر برهان خلف، فقط به چهاررنگ نیاز است. یعنی حداقل چهاررنگ نیاز است.

عملاً این فرآیند به تکنیک‌هایی بیش از ساده کردن نقشه نیاز دارد ولی ایدهٔ اصلی همین است. با یک سری محاسبات عظیم کامپیوتری باید عملیات تقلیل وضعیت نقشه‌ها انجام می‌گرفت که بهترین کامپیوترهای آن زمان نیز عملیات را در ۲۰۰۰ ساعت انجام دادند ولی امروزه احتمالاً این عملیات در یک ساعت قابل انجام است. ولی در همان زمان نیز این دو ریاضیدان جواب خود را گرفتند.

اثبات‌های کامپیوتری ذهنیت‌هایی را نیز ایجاد نمودند، از قبیل عدم وجود هرگونه ذکاوت، خلاقیت، تکنیک و فلسفه در این گونه راه‌حل‌ها. بعضی از فیلسوفان از این اثبات‌ها بدین گونه برداشت کردند که انسان با حواس معمولی خود قادر به حل این مسایل نیست. گروهی دیگر نتیجه می‌گیرند که کامپیوتر کارهای حجیم ولی معمولی را بسیار خوب انجام می‌دهد ولی انسان این گونه اعمال را بسیار بد انجام می‌دهد. یعنی اگر برای انجام محاسبات حجیم بین انسان و کامپیوتر مسابقه‌ای انجام گیرد یقیناً جواب کامپیوتر دقیق‌تر خواهد بود.

عموماً اجزای محاسبات کامپیوتری، پیش پا افتاده و خسته‌کننده هستند و فقط زمانی‌که در کنار یکدیگر قرار گیرند، ارزشمند می‌شوند. اگر بخواهیم مثالی عالمانه برای این گونه محاسبات ارایه کنیم باید بگوییم که اثبات غنی و هوشمندانهٔ قضیهٔ فرما همانند کتاب «جنگ و صلح» تولستوی پر از نکات ظریف است و اثبات‌های کامپیوتری شبیه یک دفترچه تلفن است که فقط یک سری اطلاعات ارایه می‌کند و هیچ کس وقت خود را صرف خواندن آن نمی‌کند. از این رو به نظر می‌رسد که اثبات‌های کامپیوتری را فقط باید کنترل کرد و فقط همین.

البته باید گفت که این اثبات‌ها نیز خالی از ظرافت و باریک‌بینی نیستند. چون بالاخره شما باید از زیرکی خود استفاده کنید تا بتوانید نحوهٔ غلبه بر مسأله را برای کامپیوتر تشریح کنید. به علاوه زمانی که فهمیدید که حدس صحیح است، می‌توانید راه هوشمندانه‌تری برای اثبات آن ارایه

کنید. این مطلب شاید عجیب به نظر برسد ولی اثبات چیزی که می‌دانید صحیح است مطمئناً راحت‌تر خواهد بود. در دنیای ریاضیات شما گاهی می‌شنوید که کسی (از روی شوخی) شایع می‌کند که یک مسألهٔ مهم را حل کرده است به این امید که یک چنین شایعه‌ای راه را برای حل کردن فرد دیگری هموارتر کند و بدین طریق او را به حل نهایی مسأله امیدوارتر کند. آیا به نظر شما راههای ساده نیز برای اثبات قضایای کپلر و فرما و بقیهٔ موارد وجود دارد؟ به نظر من واقعاً اگر وجود داشته باشند، عجیب خواهد بود. شاید اساساً در آن «کتاب» هیچ گونه اثباتی برای این مسایل ارایه نشده باشد. باید گفت که دلیلی وجود ندارد که هر قضیه‌ای که ساده بیان می‌شود، ساده نیز اثبات شود. همه می‌دانید که چه مسایل و کارهای عظیم و اعجاب‌آوری وجود دارند که به راحتی دربارهٔ آنها صحبت می‌شود مثل «پیاده شدن بر کرهٔ ماه» یا «درمان سرطان». چرا باید ریاضیات از این مسأله مستثنی باشد؟

معمولاً متخصصین، احساس شدیدی نسبت به اثبات‌های موجود دارند از قبیل این که مثلاً این اثبات بهترین روشی است که ساده‌تر از این نیز امکان ندارد یا روش‌هایی که دیگران در این مورد تصور می‌کنند، کارآیی ندارد. هرچند اغلب نیز این مطالب صحیح است ولی گاهی اوقات عدالت آنها تحت الشعاع مسایل دیگر قرار می‌گیرد. برای تشریح این مسأله، کوهی را در نظر بگیرید. روش معمولی جهت صعود از آن، مسیر زیگزاگ است ولی اگر کوه مرتفع بوده و دره‌ها و یخچال‌های وسیع داشته باشد، این مسیر مشخص دیگر یک مسیر آسان و سهل الوصول نخواهد بود. به علاوه گاهی شرایط به صورتی است که مسیرهای جایگزین نیز به سادگی غیر قابل صعود می‌شوند. در اینجا این احتمال نیز وجود دارد که با اختراع هلی کوپتر شما بتوانید به سادگی به نوک قله دست یابید. در اینجاست که باید گفت متخصصین می‌توانند دره‌ها و یخبندان‌های روی کوه را ببینند ولی ممکن است ایدهٔ طراحی یک هلی‌کوپتر به ذهن آنها خطور نکند. معمولاً در ریاضیات نیز گه گاهی یک چنین دستگاهی اختراع شده و دیدگاه‌های بقیهٔ ریاضیدانان را رد می‌کند.

از سوی دیگر آقای گودل را به خاطر بیاورید که گفته بود: اثبات بعضی از مسایل ساده، بسیار طولانی خواهد بود. در تأیید این مطلب می‌توان به قضیهٔ چهاررنگ و نیز آخرین قضیهٔ فرما اشاره داشت. برای قضیهٔ چهاررنگ باید گفت که می‌توان روی یک تکه کاغذ نیز نشان داد که برای دیدگاه «تهیهٔ لیست شکل‌های اجتناب‌ناپذیر و ساده کردن شکل‌ها» هیچ راه حل کوتاه‌تری وجود ندارد. ولی این همانند بررسی همان دره‌ها و یخبندان‌ها می‌باشد و ربطی به اختراع هلی کوپتر ندارد.

حال به یادداشت آقای فرما باز گردید. اگر این راه‌حل قطور برای آخرین قضیهٔ ایشان بهترین اثبات است پس چرا او یک چنین نوشته‌ای را در حاشیهٔ آن کتاب نوشت؟ مطمئناً او نمی‌توانسته یک اثبات ۲۰۰ صفحه‌ای در ذهن داشته باشد و بنویسد که حاشیهٔ کتاب برای این اثبات کم است.

نویسنده در این باره عقیدهٔ دیگری دارد. آقای گادفری هاردی (Hardy) یک ریاضیدان برجسته در دانشگاه کمبریج بود. هرچند او کافر نبود ولی متدین معمولی نیز نبود. او از کشتی سواری متنفر بود ولی هرگاه سوار کشتی می‌شد یک تلگرام می‌فرستاد و می‌گفت: همین الآن قضیهٔ ریمان را حل کردم ولی در حال حاضر امکان بیان جزئیات وجود ندارد. قابل ذکر است که قضیهٔ ریمان، آنالیز اعداد مختلط را به اعداد اول ربط می‌دهد و هنوز نیز یکی از مسایل حل نشدهٔ ریاضیات است. آقای هاردی متقاعد شده بود که کشتی او غرق نمی‌شود چون اگر این اتفاق می‌افتاد او توانسته بود چیزی را بیان کند که همانند قضیهٔ فرما اثبات آن پس از مرگ او رخ داد.

شاید فرما نیز همین هدف را داشته یا می‌خواسته که مشهور شود ولی هدف او هرچه بود، احتمالاً طی این سال‌ها به آن دست یافت. نظر شما چیست؟

مرجع اصلی

Ian Stewart, **Proof and Beauty**, New Scientist, 26 June 1999.

«بد درس دادن» درسی در

نویسنده: نیل دیوید سن
دانشگاه مریلند

توضیح:

سال ها پیش

در سال ۱۳۵۷، در شمارهٔ نهم از بولتن انجمن ریاضی ایران، مقاله‌ای چاپ شد تحت عنوان «درسی در بد درس دادن». با توجه به این که این بولتن، به ویژه در آن سال‌ها، به دست افراد معدودی رسیده است، رشد آموزش ریاضی با کسب اجازه از انجمن ریاضی ایران، به دلیل نکات جالبی که در این مقاله وجود دارد، اقدام به چاپ مجدد آن می‌کند. آنچه در زیر می‌آید، عیناً همان متنِ چاپ شده در شمارهٔ ۹ بولتن است و برای حفظ اثر، هیچ‌گونه ویرایشی نشده است.

بد درس دادن ممکن است راهنمای خوب درس دادن شود. از سال ۱۹۷۱، تدریس بد درس دادن به گروه‌های دانشجویان فوق‌لیسانس و آسیستان‌ها و همچنین دبیران آیندهٔ مدارس متوسطه در دانشگاه مریلند انجام شده است. درس نمونه‌ای در این زمینه شامل است از ناظر، مدرس که رلِ «ضد مدل» را دارد و بالاخره حضارِ که مدرسین مبتدی هستند. ناظر به حضار می گوید که الآن آنها شاهد تدریسی خواهند بود که یک مدرس مقتدر ریاضی ارایه می‌دهد. بعد مدرس ضدمدل به کلاس وارد شده و شروع به تدریس می‌کند، و همه چیز را تقریباً اشتباه انجام می‌دهد.

معمولاً چند لحظه‌ای طول می‌کشد که حضار پی ببرند که این درس به عنوان کمدی از اشتباهات در درس دادن تنظیم شدهٔ است. عکس‌العمل‌های حضار از باور نکردن و شرم و خجلت به تفریح و نشاط تبدیل می‌گردد.

بعد از درس، جلسه انتقادی را ناظر رهبری می‌کند. اعضای کلاس روش‌های بدی را که مدرس نشان داده است مشخص می‌کنند، و ناظر آن‌ها را روی تخته سیاه می‌نویسد. درس بد درس دادن موفق به حساب می‌آید اگر حضار حداقل سی نمونه از بد درس دادن را در آن تشخیص دهند.

این درس ده تا پانزده دقیقه طول می‌کشد، و جلسهٔ انتقاد ممکن است از بیست تا سی دقیقه به‌طول انجامد. ناظر ممکن است روش‌های بد تدریس را به دسته‌هایی تقسیم کند تا به تشخیص اشتباهات کمک نماید.

ضدمدل باید معلمی انعطاف‌پذیر و متکی به‌خود بوده و استعداد رل بازیگری را داشته باشد. افرادی که قابلیت کمتری دارند به‌زودی تهدید گردیده و جلوی حضار «احمقی» از آب درمی‌آیند. درس بد درس دادن باید به‌خوبی تنظیم شود که انواع مختلف روش‌های بددرس دادن را که امکان دارد در کلاس‌های ریاضی روزمره مشاهده شوند، نشان دهد. موضوع درس را مدرس طوری انتخاب می‌کند که مورد علاقهٔ معلمین در حضار باشد. مطالبی که از درس‌های قبل از حساب انتگرال و دیفرانسیل انتخاب می‌شوند اغلب مناسبت دارند.

درس بد درس دادن فواید متعددی دارد. این یک راه زنده و فکاهی جهت انتقال اطلاعات راجع به اشتباهات در تدریس است. معلمین آینده متوجه می‌شوند که مواظب چنین اشتباهاتی در تدریس خود باشند. به علت سرشت غیرعادی که دارد، این درس به‌زودی گروه جدیدی از معلمین آینده را در اوایل دورهٔ تربیت خود آسوده خاطر می‌سازد و مخصوصاً اگر معلم خودشان رل این مدل را بازی کند، آن‌ها احساس راحتی بیشتری خواهند داشت. اشتباهات زیر را باید مدرس در درس بد درس دادن مورد توجه قرار دهد.

شروع ناهنجار

با عجله دیر به کلاس می‌آید.

عذر مسخره‌آمیزی برای دیر آمدن می‌آورد.

می‌پرسد «امروز ما باید چه کار بکنیم»؟

برای پیدا کردن مطلب مناسب کتاب را ورق می‌زند.

گچ ندارد و در حالی که به فراش‌ها ناسزا می‌گوید برای به‌دست آوردن آن بیرون می‌رود.

آماده نکردن درس و نداشتن نوت

تعریف‌ها و قضیه‌ها را غلط بیان می‌کند.

مثال‌ها را قبلاً تنظیم نکرده است.

سعی می‌کند در کلاس مثال‌هایی بزند، که خیلی پیچیده، مشکل، ساده، یا نامناسب برای مطلب مورد بحث از آب درمی‌آیند.

خط مشی استدلال را از دست می‌دهد و مرتب به کتاب رجوع می‌کند.

مسایل را بدون توجه تکلیف می‌دهد (برای مثال، مسایل فرد از ۱ تا ۲۰۰ را حل کنید).

سبک بی‌اثر عرضه

با آرامی دیوانه‌کننده‌ای ادامه می‌دهد.

به طرز یکنواخت، خسته‌کننده، کتابی و یا غیرمنطقی صحبت می‌کند.

با عجله از مطالب می‌گذرد، و به سرعت صحبت می‌کند.

از آنچه می‌گوید به اندازهٔ کافی روی تخته نمی‌نویسد.

بخود زحمت نمی‌دهد که تعاریف را بنویسد.

اصطلاحاتی را بدون تعریف کردن آن‌ها به کار می‌برد.

با تکان دادن دست شکل‌ها را نشان می‌دهد.

مقدمه، خلاصه یا روابط بین عقاید را عرضه نمی‌کند.

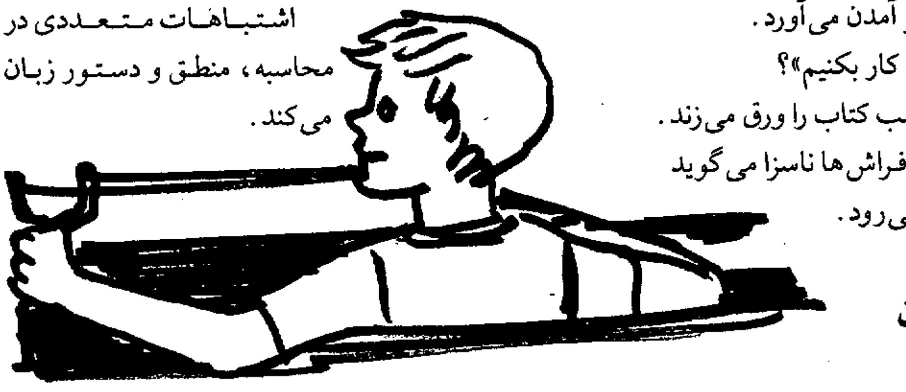
سعی نمی‌کند به دانشجویان انگیزه‌ای برای مطالعهٔ مطلب بدهد.

فرض می‌کند که دانشجویان قبلاً مطالب اساسی را می‌دانند و وقتی که نمی‌دانند آن‌ها را مسخره می‌کند.

به حاشیه می‌رود که شامل مطالب خیلی پیشرفته است.

کتاب را به سادگی برای دانشجویان می‌خواند.

اشتباهات متعددی در محاسبه، منطق و دستور زبان می‌کند.



نداشتن تماس با دانشجویان

با کلاس تماس نگاهی برقرار نمی کند، با تخته، دیوارها، کف اطاق یا سقف صحبت می کند.

توجه همه را از دست می دهد و با وجود این ادامه می دهد.

تفسیرهای ناروایی راجع به سطح پایین مطالب درس ابراز می دارد.

به دانشجویان اهانت می کند، و به آن ها می گوید که احمق و درس نخوان هستند.

دایم می گوید «ساده» یا «واضح» است.

هیجانی از خود نشان نمی دهد.

دایم به وقت نگاه می کند.

رفتار چندش آوری از خود نشان می دهد.

نام دانشجویان را نمی داند.

هیچ گونه تشویقی برای هیچ فردی ندارد.

برخورد بد با سؤالات

اجازه سؤال کردن نمی دهد یا دانشجویی را که سؤالی می کند شرمسار می سازد.

به سؤالات به خوبی جواب نمی دهد.

به دانشجویان می گوید که جواب سؤالات خود را در کتاب پیدا کنید.

سؤال دانشجو را نمی فهمد و به سؤالی که مطرح نشده است جواب می دهد.

وقت کلاس را زیاد صرف جواب دادن سؤالاتی می کند که مورد علاقهٔ عمومی نیستند.

تقریباً هیچ سؤالی از دانشجویان نمی کند.

سؤالاتی را که مبهم، گیج کننده، غیرممکن و یا بی اندازه ساده هستند می پرسد.

از اولین فرد می خواهد که دست بلند کند، بدون آن که به دیگران وقت فکر کردن دهد.

با عصبانیت از جواب های دانشجویان به سؤالات مدرس انتقاد می کند.

استفادهٔ بد از تخته سیاه

شکل های شلوغ و غیرمشخص می کشد.

شکل ها را غیرواضح یا نادرست حروف گذاری می کند.

مختصات را برعکس می کشد.

شکل ها را خیلی بالا یا پایین و یا طوری رسم می کند که قسمت های حساس آنها از تخته سیاه بیرون می افتند.

فقره ها را با یکدیگر مخلوط می کند.

حل مسایل متمایز را روی تخته مخلوط می کند.

برای فقره های مهم جای کافی نمی گذارد.

غیرخوانا می نویسد (خیلی کوچک، خیلی بزرگ یا اُریب).

جلوی دید دانشجویان را با ایستادن جلوی تخته می گیرد.

چند خط را از میان می اندازد یا چندین خط را با هم ترکیب می کند.

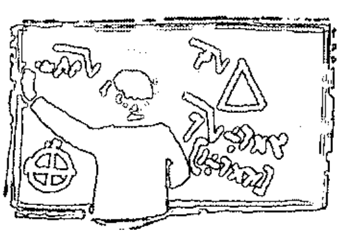
دایم عبارتی را با پاک کردن یا اضافه کردن عوض می کند، به عوض این که آن را روی خط دیگری بنویسد.

به زودی تخته را پاک می کند و بدین وسیله از فهمیدن و سؤال کردن جلوگیری می کند.

نقل از

The Mathematics Teacher, Sept. 1977

ترجمه: جواد همدانی زاده، دانشگاه صنعتی شریف



معرفی کتاب

کتاب اثبات

مؤلفان: مارتین ایگنر، گونتر تسیگلر
مترجم: سیامک کاظمی
ناشر: واحد انتشارات پژوهشگاه دانش‌های بنیادی
چاپ اول: ۱۳۷۹
تیراژ: ۲۰۰۰ نسخه
هشت، ۲۷۴ ص ـ : مصور (رنگی)، جدول

پال اردیش (۱۹۸۷-۱۹۱۳) می‌گفت برای هر مسأله ریاضی یک راه‌حل زیبا و کامل یا مثال نقضی وجود دارد و این مجموعه در یک «کتاب» نزد خداوند محفوظ نگه داشته می‌شود. براین اساس وی در صورت رویارویی با اثباتی زیبا می‌گفت این اثبات مستقیماً از «کتاب» آمده است!

«کتاب اثبات» نوشته مارتین ایگنر و گونتر تسیگلر با عنوان زبان انگلیسی ***Proofs from THE BOOK*** و ترجمه سیامک کاظمی منتشر شده است. نام ***THE BOOK*** اشاره به «کتاب» اردیش دارد. نویسندگان این کتاب اثبات‌هایی در زمینه‌های نظریه اعداد، هندسه، آنالیز، ترکیبیات، و نظریه گراف در ۳۰ فصل کتاب گردآوری نموده‌اند که هر فصل به یکی از موضوعات در زمینه‌های فوق پرداخته است. ازنظر نویسندگان هریک از مسائل و قضیه‌های مطروحه از اهمیتی ویژه در ریاضیات برخوردار هستند و اثبات‌های ارائه شده استحقاق درج در «کتاب» را دارند.

چاپ «کتاب اثبات» از سوی پژوهشگاه دانش‌های بنیادی (مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات و با حمایت ستاد ملی سال جهانی ریاضیات صورت گرفته است. در میان کتاب‌های موجود در بازار نشر، کمبود کتاب‌هایی مانند «کتاب اثبات» احساس می‌شود. این کتاب برای هرکس که علاقه‌ای به ریاضیات، و معلومات متوسطی در آن داشته باشد، جالب و خواندنی است.

جوهر، روش و کارآیی ریاضیات

تألیف: گروه مؤلفین انستیتوی ریاضی استکلو وای شوروی
مترجم: پرویز شهریاری
ویرایش: دکتر شهریار شهریاری
ناشر: شرکت انتشارات فنی ایران؛
نوبت چاپ: اول ۱۳۷۹
تیراژ: ۳۰۰۰ نسخه

«ریاضیات، در دوران باستان در بستگی با نیازهای زندگی پدید آمد، و به تدریج به دستگاهی از دانش‌های گوناگون تبدیل شد. ریاضیات نیز، همچون سایر دانش‌ها بازتابی از قانون‌های طبیعت است و به عنوان سلاح نیرومندی برای شناخت طبیعت و پیروزی بر آن به کار می‌رود. ولی از آن‌جا که ریاضیات بیش از اندازه انتزاعی و ذهنی است، رشته‌های جدید آن برای کسانی که ریاضی کار نیستند تا اندازهٔ زیادی قابل دسترسی نیست. همین ویژگی انتزاعی بودن ریاضیات، از روزگاران باستان، پندارهای ذهن گرایانه دربارهٔ بی‌ارتباطی آن با طبیعت به وجود آورد.

هدف نویسندگان کتاب حاضر این بوده است که گروه گسترده‌ای از روشنفکران را با جوهر و روش بخش‌های ریاضیات و پایه‌های عملی و شیوهٔ پیشرفت آن آشنا سازند» (از پیش گفتار کتاب)

فصل اول کتاب، با نگاهی کلی به ریاضیات شروع می‌شود. این فصل به طور بسیار جالبی به شرح نحوهٔ گذر از مفاهیم شهودی و ملموس و عینی به مفاهیم مجرد و با استفاده از دو دانش پایه‌ای و باستانی یعنی حساب و هندسه پرداخته است:

«در تحلیل آخر، سرچشمه زنده بودن ریاضیات در این جا است که مفهوم‌ها و نتیجه‌های آن، با همه انتزاعی بودنشان، به طوری که خواهیم دید، ناشی از واقعیت است و کاربرد فراوانی در سایر دانش‌ها، در صنعت و در همه زمینه‌های مربوطه به زندگی بشری پیدا می‌کند و این مهم‌ترین مطلب برای درک ریاضیات است» (ص۷) این جمله را با دیدگاه آن دسته از ریاضی‌دان‌هایی مقایسه کنید که معتقد بودند که «ریاضیات کاربردی یعنی ریاضیات بد» و «تنها ریاضیات مفید، ریاضیات مقدماتی است»

با توسعهٔ ریاضیات و ورود آن به عرصهٔ کاربردهای عظیم در دنیای امروز مانند ریاضیات بسیار پیشرفته و غنی و مجرد در ریاضیات مالی یا فیلتر کالمن، واقع بینی و درک درست نویسندگان این کتاب بیشتر مشخص می‌شود، که معتقدند، «گسترش استثنایی و بی اندازهٔ کاربرد ریاضیات هم یکی دیگر از ویژگی‌های آن است.»

در این کتاب، دربارهٔ روش استدلال استقرایی و تفاوت آن با استدلال استنتاجی بحث می‌شود. این فصل در ادامه، به پیدایش جبر و کارهای ریاضی‌دانان ایرانی، هندسهٔ تحلیلی و کارهای دکارت، پیدایش حساب دیفرانسیل و انتگرال، و ورود به ریاضیات امروزی، کارهای بزرگانی مانند برنولی، اویلر، لاگرانژ، هانری پوانکاره و لیاپونوف می‌پردازد. محتوای این فصل، برای تدریس درس تاریخ ریاضی در دورهٔ کارشناسی ریاضی

بسیار مفید و جالب است، نکتهٔ جالب توجه این که معمولاً کتاب‌های تاریخ ریاضی به ریاضیاتی می‌پردازند که با ریاضیات امروزی رابطه‌ای ندارند، در جایی که این فصل، با جذابیت خاصّی به ریاضیات معاصر پرداخته است. هم‌چنین، این فصل برای تدریس درس «آموزش ریاضی» مفید است و می‌توان با نگاهی تاریخی همانند نویسندگان آن، به آموزش ریاضی پرداخت. نویسندگان کتاب مراحل پیشرفت ریاضیات را با مرحله‌های آموزش ریاضی تطبیق کرده‌اند و مدعی هستند که:

«چهار دوره پیشرفت ریاضیات که در پیش یادآور شدیم، با مراحل آموزش ریاضی تطبیق می‌کند، به این ترتیب که جوهر اساسی هریک از این دوره‌ها را می‌توان با سطح آموزش ریاضی در مرحله‌های مختلف تحصیلی، مقابله کرد.

همهٔ ما نتیجه‌های اساسی حساب و هندسه را که در نخستین دورهٔ پیشرفت ریاضیات به‌دست آمده است می‌دانیم، این نتیجه‌ها موضوع آموزش مقدماتی را تشکیل می‌دهد. برای نمونه، برای تعیین مقدار مصالحی که برای انجام کاری، و مثلاً فرش اتاق لازم است، از این نخستین نتیجه‌های ریاضی استفاده می‌کنیم.

مهم‌ترین موفقیت دورهٔ دوم (دورهٔ ریاضیات مقدماتی)، موضوع آموزش دورهٔ دبیرستانی را تشکیل می‌دهد.

نتیجهٔ اساسی دورهٔ اساسی (اصل‌های آنالیز، نظریهٔ معادله‌های دیفرانسیل، جبر عالی و غیره) موضوع اساسی آموزش ریاضی هر مهندسی است. ...» (صفحهٔ ۶۷ کتاب اول)

به طور کلی، این کتاب علاوه بر جذابیت وعمومیتی که برای اکثر ریاضی‌خوان‌ها و ریاضی‌دان‌ها دارد، به‌عنوان یک کتاب درسی دانشگاهی نیز در موارد زیر، مفید است:

۱) تدریس درس آموزش ریاضی.

۲) تدریس یک درس تاریخ ریاضی معاصر؛ خصوصاً این که معمولاً، کتاب‌های تاریخ ریاضی به ریاضیاتی می‌پردازد که با ریاضیات امروزی کمتر رابطه دارد.

۳) برای مدرسین دروس مختلف ریاضیات پیشرفته که از مباحث جذاب و جالب آن (جلدهای دوم و سوم) برای ایجاد انگیزه و ورود به مطلب درسی، استفاده کنند.

۴) در فصل اول که دربارهٔ کلیات ریاضی صحبت می‌کند، به‌طور بسیار جالبی نحوهٔ گذر از مفاهیم شهودی و ملموس عینی به مفاهیم مجرد را شرح داده است. این فرآیند، می‌تواند برای هر معلم ریاضی و در هر سطحی، به‌خصوص از نظر سیر تحول یادگیری ریاضی انگیزه‌بخش باشد.

۵) این فصل، هر کدام از شاخه‌های ریاضیات فعال را از زبان غول‌ها و بزرگان این رشته مطرح کرده است.

۶) مطرح کردن نظریهٔ احتمال از زبان کلموگرف یا مطرح کردن معادلات دیفرانسیل پاره‌ای از زبان سوبولف، آنالیز تابعی از زبان گلفوند، حساب و روش‌ها از زبان کریلوف، و غیره به‌این مجموعه جذابیت خاصی می‌بخشد و این بخش‌ها را برای دانشجویان رشتهٔ ریاضی در مقاطع مختلف انگیزه‌بخش کرده است. این بخش به‌خصوص، برای ورود به این مباحث و برای متخصصین این رشته‌ها ابزاری قوی است تا به فلسفه و گوشه‌های تاریخی این شاخه‌های ریاضی بپردازند.

۷) یکی از خصوصیات خوب و به‌یاد ماندنی استاد پرویز شهریاری انتخاب کتاب‌هایی بی‌نظیر و جالب و قابل استفادهٔ عموم برای ترجمه از جمله «من یک ریاضیدانم» نوشتهٔ نوبرت وینر، «خلاقیت ریاضی» نوشتهٔ جورج پولیا و این کتاب است. کتاب از نثر زیبا و سلیسی برخوردار است و شعر زیبا و پر مغز سعدی نیز در ابتدای این کتاب، به آن جذابیت بیشتری داده است.

علم چندان که بیشتر خوانی
چون عمل در تو نیست نادانی
نه محقّق بود نه دانشمند
چارپایی بَرو کتابی چند
آن تهی مغز را چه علم و خبر
که برو هیزمست یا دفتر

سعدی

همایش جایگاه ریاضیات

بزرگداشت استاد ابوالقاسم قربانی

برگزار شد

اسماعیل بابلیان
دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر دانشگاه تربیت معلم

همایش جایگاه ریاضیات «**بزرگداشت استاد ابوالقاسم قربانی**» با حضور جمعی از دبیران، ریاضیدانان، محققان و مسؤولان رده بالای کشور در روزهای ۴ و ۵ دی‌ماه، از سوی مؤسسهٔ توسعهٔ دانش و پژوهش ایران، انجمن ریاضی ایران، وزارت آموزش و پرورش و دانشگاه‌های تهران و الزهراء، در تالار علامه امینی دانشگاه تهران برگزار شد. در این همایش ۱۵ نفر از ریاضیدانان و محققان با ارایهٔ مقاله پیرامون زندگی استاد ابوالقاسم قربانی، آثار استاد در کتاب‌های درسی و تاریخ ریاضی در ایران و اسلام سخنرانی کردند.

مراسم افتتاحیه در تالار علامه امینی دانشگاه تهران برگزار شد. در این مراسم دکتر حسن حبیبی، رییس بنیاد ایران‌شناسی (معاون اول اسبق رییس جمهور) اظهار داشت: جوانان ما در جستجوی هویتی پرمایه و استوار هستند. هم می‌خواهند در زمان خود، جامعه‌ای فرهیخته و دانشمند و دانش‌دوست داشته باشند و هم در جستجوی اطلاعاتی از گذشتهٔ پرافتخار خود هستند. استقبال از دایرة‌المعارف‌ها و زندگی‌نامه‌ها و شرح حال بزرگان معاصر و گذشته، گزارشگر چنین توجهی است. وی دربارهٔ شخصیت استاد «قربانی» گفت: آنچه باید دربارهٔ این استاد گفت این است که بی‌شک دو سه نسل خود را وام‌دار تعلیمات مستقیم یا غیرمستقیم ایشان از طریق کتاب‌های

درسی ریاضی می‌دانند و علاوه بر آن، جامعهٔ علمی نیز از آثار متعدد ایشان، به‌خصوص در زمینهٔ تاریخ علم بهرهٔ فراوان برده است. دکتر حبیبی افزود: شایسته است شخصیت مورد نظر از وجوه و جهات گوناگون علمی، اخلاقی و رفتاری شناسانده شود تا مطالبی از این دست، خود به صورت منبعی برای تاریخ علم و ادب کشور درآید و هرچه بیشتر و بهتر آثار و مفاخر علمی، فرهنگی، ادبی و اجتماعی ما را به جامعه و تاریخ بشناساند. وی کارها و فعالیت‌های علمی استاد قربانی را شامل «کتاب‌های درسی»، «زندگی‌نامه‌ها» و «تحقیق در آثار و احوال برخی از ریاضیدان‌های بزرگ» ذکر کرد. او گفت: استاد قربانی، بیش از ۶۰ کتاب درسی ریاضی را به تنهایی یا با همکاری دیگران تألیف و ترجمه کرد. این شخصیت بزرگ، کتاب پرمایه و ارزشمندی با نام «زندگی‌نامهٔ ریاضیدانان دورهٔ اسلامی از سده سوم تا سده یازدهم هجری» دارد که حاوی زندگی‌نامهٔ ۱۶۷ ریاضیدان است که پس از چاپ کتاب، زندگی‌نامهٔ سه ریاضیدان دیگر را هم بر آن گروه افزودند.

آقای مرتضی حاجی، وزیر آموزش و پرورش، نیز در این مراسم سخنرانی کرد. آقای حاجی از برخوردار نبودن آموزش ریاضیات در کشور از گسترش کمی و ژرفای کیفی، اظهار تأسف کرد. او گفت: شواهد عینی و تجربیات علمی موجود نشان می‌دهند که متأسفانه ریاضیات، علیرغم تلاش‌های بسیاری که توسط استادان و ریاضیدانان صورت گرفته، به علت وجود برخی موانع ساختاری و کمبود شدید معلمان متخصص، از گسترش کمی و ژرفای کیفی مطلوب برخوردار نیست.

وی افزود: برخلاف اهداف اصلی آموزش ریاضیات که باید دانش‌آموزان را قادر سازد در شرایط معمول زندگی مسایل و مشکلات خود را با درست اندیشیدن و روح جستجوگری و تحقیق حل کنند، فارغ‌التحصیلان مدارس پیش‌نیازهای لازم را برای کاربرد ریاضیات در زندگی نمی‌آموزند.

وزیر آموزش و پرورش خاطرنشان کرد: این مشکل سبب شده که در زندگی اغلب دانش‌آموختگان مدارس، شیوهٔ تفکر منطقی برای عبور از بحران‌ها و تنگناها مهجور بماند.

حاجی، ریاضیات را از اصیل‌ترین دستاوردهای بشری و سمبل زیبایی و هنرهای ذهنی دانست که به واسطهٔ آموزش ریاضی، روش‌های تفکر، نظام‌یافته و منطقی می‌شود و فرد را قادر می‌سازد به‌جای انباشت ذهن از محفوظات و راه‌های تکراری به ریشه‌های تاریخی و ارتباط منطقی بین پدیده‌ها بپردازد.

وی گفت: ریاضیات در پرورش و افزایش توانایی استدلال، قدرت تجزیه و تحلیل، استنباط تعمیم و مسأله‌گشایی، نقشی تعیین کننده و محوری دارد.

وزیر آموزش و پرورش افزود: امروزه، ریاضیات زبان اصلی سایر علوم است و زمینه‌های بیشماری از کارها، تحقیقات و اقدامات وجود دارد که به روش‌های ریاضی وابسته هستند.

حاجی، در این مراسم، از مرحوم «ابوالقاسم قربانی» ریاضیدان بزرگ کشور به عنوان ستارهٔ درخشان در عرصهٔ آموزش و پرورش کشور یاد کرد.

وی گفت: فقدان این معلم و استاد سخت‌کوش که زحمات و تلاش ایشان تأثیر مهمی در ارتقای سطح آموزش ریاضی دانش‌آموختگان مدارس کشور داشته و برای این منظور، ده‌ها کتاب و مقالهٔ تخصصی ریاضی تألیف کرده، محسوس است.

مرحوم استاد قربانی از سال ۱۳۳۱ تا ۱۳۴۵ به همراه استاد «حسن صفاری» تألیف کتب درسی ریاضی دورهٔ دبیرستان را برعهده داشت.

«ریاضیدانان ایرانی از خوارزمی تا ابن سینا»، «کاشانی‌نامه»، «بیرونی‌نامه»، «تحریر استخراج الاوتار»، «فارسی‌نامه»، «زندگی‌نامه ریاضیدانان دورهٔ اسلامی از سده سوم تا سده یازدهم هجری»، «بوزجانی‌نامه» و «تحقیقی دربارهٔ آثار ریاضی ابوریحان بیرونی» از جمله تألیفات و پژوهش‌های علمی استاد ابوالقاسم قربانی است.

استاد قربانی، پس از عمری تلاش و مجاهدهٔ علمی، چهارم آذرماه ۱۳۸۰ دار فانی را وداع گفت و با آثار فراوانی، نام پرآوازه‌ای از خود به‌یادگار گذاشت. روحش شاد و یادش گرامی باد.

* * *

اولین اطلاعیه انجمن معلمان ریاضی تهران

در آخرین روزهای سال ۱۳۸۰، اطلاعیه‌ای از سوی **انجمن معلمان ریاضی تهران** به دستمان رسید که متن آن را جهت اطلاع خوانندگان، چاپ می‌کنیم:

بنام خدا

اطـــلاعیـــه

ستایش خداوند را که توفیق حاصل شد تا با همکاری ادارهٔ کل آموزش و پرورش شهر تهران و وزارت آموزش و پرورش، انجمن معلمان ریاضی تهران تأسیس و به تصویب نهایی رسید.

انجمن معلمان ریاضی تهران با اهداف خدمت به جامعهٔ علمی و آموزشی و ارتقای کیفیت آموزش ریاضی و حرفه‌ای تخصصی معلمین ریاضی آموزش و پرورش و آگاهی از چرخه‌ی عظیم پیشرفت علم و آموزش ریاضی در جهان و تأثیرگذاری بر چگونگی برنامه ریزی آموزش ریاضی از تابستان ۱۳۷۷ در سومین کنفرانس آموزش ریاضی کشور در کرمان تشکیل گردید.

سال‌ها بود که نیاز به یک تشکّل علمی ـ آموزشی برای معلمان ریاضی شهر تهران احساس می‌شد. هرچند که معلمان ریاضی در بسیاری از استان‌ها گوی سبقت را از معلمان ریاضی تهران ربودند، و بعضی از استان‌ها سال‌هاست که فعالیت مناسبی دارند ولی با خواست خداوند در تابستان ۱۳۷۷ این خواستهٔ همکاران در کنفرانس کرمان به بار نشست و انجمن از شهریورماه همان سال فعالیت خود را با تشکیل جلسات شروع نمود سپس با تهیه اساسنامه و اعلام موجودیت به استحضار اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران رسید و سپس با همکاری ادارهٔ کل استان و معاونت نیروی انسانی وزارتخانه مراحل قانونی طی شد و مجوز رسمی تشکیل انجمن در تاریخ ۱۳۸۰/۶/۷ صادر گردید و در سه ماه گذشته ثبت انجمن و تهیهٔ مکان و باز کردن شمارهٔ حساب و گرفتن صندوق پستی و نظایر آن انجام گرفته است. لذا اکنون انجمن آمادهٔ عضوگیری و توسعهٔ فعالیت خود، توسط همکاران محترم می‌باشد. انتظار می‌رود با بذل توجه همه‌ی معمان ریاضی اعم از مقاطع مختلف آموزشی و مسؤلان دلسوز بتوانیم در حرفهٔ تخصصی خود و بهبود وضع آموزشی ریاضی کشورمان یکدیگر را یاری دهیم.

انجمن علمی ـ آموزش معلمان ریاضی تهران

آدرس پستی: تهران ـ صندوق پستی شمارهٔ ۷۵۹۸-۱۴۱۵۵.
نشانی: خیابان انقلاب، چهارراه ولی عصر، نبش صبای شمالی (برادران مظفر)، پلاک ۲

انتشار نخستین خبرنامهٔ اتحادیهٔ انجمن‌های علمی و آموزشی معلمان ریاضی تهران

نخستین خبرنامهٔ اتحادیهٔ انجمن‌های علمی و آموزشی معلمان ریاضی تهران، زمستان سال ۸۰ منتشر شد. این خبرنامه در پایان هرفصل منتشر می‌شود. صاحب امتیاز آن، **اتحادیهٔ انجمن‌های علمی و آموزشی معلمان ریاضی ایران** بوده و مدیرمسئول آن، **دبیر اتحادیه** و سردبیر آن **علیرضا عین‌اللهی** می‌باشد. در اولین شمارهٔ این خبرنامه، عناوین زیر به چشم می‌خورد:

- کلام نخست
- گزارش
- اخبار اتحادیه
- اینترنت
- معرفی انجمن‌های بین‌المللی
- کتب و نشریات
- گزارش فعالیت‌های انجمن معلمان ریاضی استان‌ها

برگزاری همایش آموزش ریاضی و تجلیل از استاد پرویز شهریاری

همایش آموزش ریاضی و تجلیل از استاد پرویز شهریاری، در اردیبهشت ماه سال ۸۱ در شهر کرمان، زادگاه این استاد، برگزار شد. این همایش توسط انجمن

ریاضی ایران و با همکاری سازمان آموزش و پرورش استان کرمان در دانشگاه شهید باهنر کرمان برنامه ریزی و برگزار شد. عناوین برخی از سخنرانی هایی که در این همایش ارایه شد، عبارت بودند از:

- تقارن در جبر و نقش تقارن،
دکتر جواد بهبودیان.
- مراحل کشف تا هدایت و جایگاه ریاضیات،
دکتر یوسف بهرامپور.
- آموزش‌های مجازی و تألیف ریاضی،
دکتر یحیی تابش.
- اشاره‌ای به مسألهٔ کلاه و حل آن،
دکتر غلامرضا خسروشاهی.
- جبر و مقابلهٔ خیام و حل معادلات به روش هندسی،
دکتر محمدرضا درفشه.
- اثبات های فراموش نشدنی،
دکتر امیدعلی شهنی کرم‌زاده.
- «صنعت کنکور» در ایران: موانع و اضطراب‌ها،
دکتر زهرا گویا.
- بحثی در مورد کیفیت در مؤسسات آموزش عالی،
دکتر ماشاءالله ماشین چی.
- بازی‌های منصفانه و نقش آن در آموزش ریاضی،
دکتر سیدعبادالله محمودیان.

در شماره های آیندهٔ رشد ریاضی، گزیدهٔ برخی از این مقاله ها را منتشر خواهیم کرد.

* * *

با ناراحتی و اندوه فراوان، مطلع شدیم که متأسفانه یکی از همکاران عزیزمان در کرمانشاه را در سانحهٔ هوایی بیست و سوم بهمن ماه در خرم‌آباد، از دست داده‌ایم. فقدان خانم فرحناز یوسفی را به خانوادهٔ محترم آن مرحومه و کلیهٔ همکاران وی به ویژه دبیران کرمانشاه، تسلیت می گوییم.

تصحیح و تشکر

در صفحهٔ چهارم جلد رشد آموزش ریاضی ۶۵، تعداد مارپیچ ها در جهت عقربه های ساعت، ۳۴ تا است که اشتباهاً ۲۴ تا قید شده است. ضمناً تعداد مارپیچ ها در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت، ۲۲ مارپیچ است. از همکارمان آقای حسین نامی ساعی در تصحیح و تکمیل این مطلب بسیار متشکریم.

پاسخ به نامه‌ها

آقایان محمدجواد جوامع و محمدعلی ابراهیمی از مشهد: از همکاریتان با مجله بسیار سپاسگزاریم. نمایه‌ای که از مجلات رشد آموزش ریاضی (از شمارهٔ ۱ تا ۵۷) تهیه کرده‌اید نیز به دستمان رسید. دستتان درد نکند. لازم به یادآوری است که دفتر انتشارات کمک‌آموزشی نیز مدتی است اقدام به تهیهٔ نمایه و چکیدهٔ مقالات از کلیهٔ مجلات رشد که توسط این دفتر به چاپ می‌رسد، نموده است که به‌زودی در اختیار علاقه‌مندان قرار خواهد گرفت.

آقای مجتبیٰ ترابی (تهران): از مطلب جالبی که برای این مجله ارسال کرده اید متشکریم. متأسفانه حجم محاسبات بسیار زیاد و از حوصلهٔ خوانندگان خارج است. منتظر مطالب بعدی شما هستیم.

آقای کورش جهانگیری (شیراز): فعالیت جالب طرح‌شده توسط شما، به دستمان رسید. بسیار متشکریم. لازم به تذکر است که انعکاس چنین فعالیت‌هایی بدون ذکر مقدمه و جمع‌بندی، نمی‌تواند هدف‌مند و مثمرثمر باشد.

آقای حسین علیزاده (مرند): مطلب شما تحت عنوان «تابع نمایی ماتریسی» به دستمان رسید. متأسفانه، مطلب دارای اشکالاتی جزئی است. در هر حال خوشحال خواهیم شد که مقالات خود را که در مورد بررسی کتب درسی است برای ما ارسال کنید.

آقای رضا پاک‌یاری (اراک): از همکاری شما با مجله بسیار متشکریم.

خانم اشرف محمدقربانیان (دبیر منطقهٔ ۱۳ تهران): مطلب شما به دستمان رسید، بسیار متشکریم.

خانم رجاء قوچانی (دبیر منطقهٔ ۱۷ تهران): از مطالبی که برای ما ارسال کرده‌اید، بسیار متشکریم.

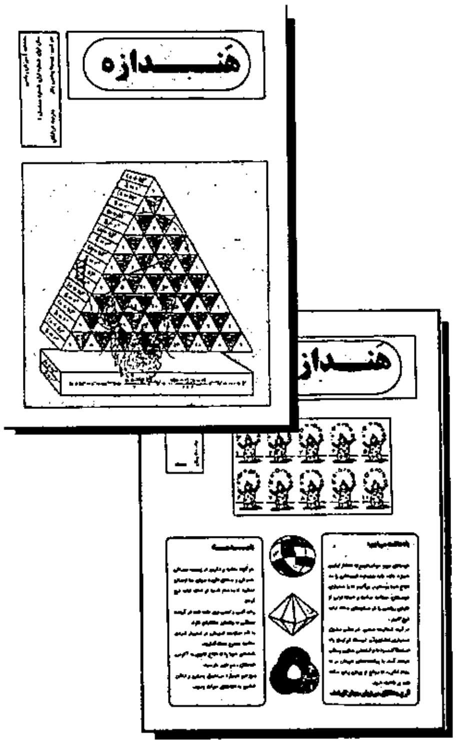
خانم عزیزه رحمانی (دبیر منطقهٔ ۳ تهران) : از همکاری شما با مجله بسیار سپاسگزاریم.

دانش‌آموز عزیز، آقای ادیب بهجو (ایلام) : نامهٔ شما رسید. مطلب ارسالی شما را جهت بررسی به کارشناسان مربوط می‌دهیم. امیدواریم در فعالیت‌های علمی خود موفق باشید.

آقای جواد کمیجانی، دانش‌آموز عزیز از شهرستان قم : مطالب شما به دستمان رسید. در ارتباط با اولین مطلب، فرمول مساحت درست و قابل استفاده است. در رابطه با مطلب دوم ($\lim_{x \to 0} x^x = 1$) به نظر می‌رسد که اشکال کار در به توان $\frac{1}{x}$ رساندن باشد، زیرا $\frac{1}{x}$ در حال تغییر است و نمی‌توان آن را داخلِ حدّ برد.

خانم سارا عسگری، دانش‌آموز عزیز از تُربت جام : مطلب شما تحت عنوان «طرحی در مورد شکل چهارجمله‌ای $(a+b+c+d)^n$» به دستمان رسید، متشکریم. پیشنهاد می‌کنیم مطلب خود را برای مجلات دانش‌آموزی که اختصاص به مطالبی مشابه با نوشته های جالب شما دارند، ارسال کنید. در شمارهٔ ۶۵ رشد ریاضی، یکی از این نشریات (ماهنامهٔ ریاضیات) را معرفی کرده‌ایم. امیدواریم در فعالیت‌های علمی خود موفق باشید.

دانش‌آموزان عزیز مقطع راهنمایی و دبستان، خانم‌ها چیستا و موژان پناهی‌وقار (همدان) : نشریات جالب شما تحت‌عنوان هنداره که در مدارس خود اقدام به چاپ آن‌ها کرده‌اید، به دستمان رسید. دستتان درد نکند. امیدواریم در فعالیت‌های خود موفق باشید.



نامه‌های افراد زیر نیز به دست ما رسید، از ارتباط و همکاری آن‌ها با مجله متشکریم.

آقایان :

- **هادی آفرینش از بُناب.**
- **مجید هاشمی از شهرکرد.**
- **محمود ابراهیمی از بندر گناوه.**

بسم الله الرحمن الرحیم

Roshd

Mathematics Education Journal

Vol. 17 - No. 66 - 2002

Ministry of Education
Organization of Research & Educational Planning

Teaching-Aids Publications Office

CONTENTS:

P.O.Bax : Tehran 15875 - 6585

معلّمی معشوق من است

پرویز شهریاری

عددهای رنگی

اثر جاسپر جونز (۵۹-۱۹۵۸)

برگرفته از کتاب **Mathematics, The Science of Patterns** نوشته ***Keith Devlin***