رشد برهان

۶۹

مجله‌ی ریاضی

دوره ی آموزش متوسطه

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک‌آموزشی

دوره‌ی بیستم/ بهار ۱۳۹۰/ شماره‌ی ۳/ ٦٤ صفحه/ ۵۰۰۰ ریال
فصلنامه‌ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
www.roshdmag.ir

سال نو مبارک

ISSN: 1735-4951

ریاضی‌دانان مسلمان

شیخ بهایی

محمدبن حسین بهاءالدین عاملی متخلص به بهایی و معروف به شیخ بهایی دانشمند معروف و ریاضیدان (۹۵۳-۱۰۳۱)

دانشمند به‌نام عهد شاه‌عباس اول. در سال ۹۵۳ در بعلبک تولد یافت و در سال ۱۰۳۱ در اصفهان درگذشت و آرامگاه او بنا به وصیت خودش در مجموعه‌ی حرم رضوی (بست شیخ بهایی) قرار دارد. اصل وی از جبل عامل بود. به ایران سفر کرد و در دربار شاه‌عباس قدر و منزلت بسیار یافت. تألیفاتی به فارسی و عربی پرداخته که مجموع آن‌ها به ۸۸ کتاب و رساله بالغ می‌شود. شهرت فوق‌العادهٔ از در ریاضیات به دلیل تألیف کتاب خلاصه‌الحساب است.

همچنین به پاس خدمات وی به علم نجوم، یونسکو سال ۲۰۰۹ میلادی را به نام او سال «نجوم و شیخ بهایی» نامگذاری کرد.

تألیف ریاضی و شیخ بهایی

خلاصة‌الحساب

کتابی است درسی در ریاضیات مقدماتی که تقریباً همهٔ آن از نوشته‌های دیگران اقتباس و تألیف شده است. این کتاب در حدود دویست سال در ایران و ترکیه و هندوستان از شهرت فوق‌العاده‌ای برخوردار بوده و بارها به طبع رسیده است. اخیراً هم در سال ۱۹۷۶ میلادی کتابی با عنوان ریاضیات بهاءالدین العاملی توسط جلال شوقی در حلب به چاپ رسیده است.

قضاوت شادروان دکتر مصاحب را دربارهٔ خلاصة‌الحساب در کتاب «مصاحب: تئوری اعداد»، جلد دوم صفحهٔ ۱۷۱۹ خواهید یافت.

بر خلاصة‌الحساب شرح‌های متعدد به زبان‌های فارسی و عربی نوشته‌اند. از آن جمله یک شرح فارسی ممزوج با متن عربی است که توسط شخصی موسوم به مولوی روشنعلی جونفوری انجام گرفته و در سال ۱۲۲۷ هـ.ق مطابق با ۱۸۱۲ میلادی در کلکته به چاپ رسیده است. و نیز از جملهٔ شرح‌ها و ترجمه‌های فارسی آن کتاب کنزالحساب تألیف فرهاد میرزا معتمدالدوله (۱۲۳۳- ۱۳۰۵ هـ.ق) از مشاهیر و رجال و شاهزادگان عصر ناصری است که در سال ۱۲۸۷ هـ.ق در تهران به طبع رسیده است. ازجمله شرح‌های عربی معروف آن شرح ممزوجی است که فاضل جواد که شاگرد شیخ بهایی بوده نوشته و به «شرح جواد» معروف است و در سال ۱۲۷۳ هـ.ق در تهران چاپ شده است.

شهرت شیخ بهایی بین مورخان ریاضی از آن جهت است که متن عربی و ترجمهٔ آلمانی کتاب خلاصه‌الحساب در سال ۱۸۴۳ میلادی توسط نسلمان در برلین و ترجمهٔ فرانسوی آن توسط اریستیدمار در سال ۱۸۴۶ م در فرانسه منتشر شد. و در آن موقع که هنوز دانشمندان مغرب‌زمین از آثار مهم ریاضی دورهٔ اسلامی چندان اطلاعی نداشتند با این کتاب آشنا شدند و نام بهاءالدین عاملی در کتاب‌های تاریخ ریاضیات وارد شد.

وی چند کتاب و رساله دربارهٔ هیأت و نجوم و اسطرلاب دارد که از آن جمله است تشریح‌الافلاک که خلاصه‌ای است در علم هیأت و بر آن شرح‌ها و حاشیه‌های متعدد نوشته‌اند.

گفتنی است که شیخ بهایی آثار برجسته‌ای در ادبیات به نثر و نظم پدید آورده است. در زیر نمونه‌ای از اشعار او آورده شده است:

همه روز روزه رفتن، همه شب نماز کردن — همه ساله حج نمودن، سفر حجاز کردن
ز مدینه تا به مکه، به برهنه پای رفتن — دو لب از برای لبیک، به وظیفه باز کردن
به معابد و مساجد، همه اعتکاف جستن — ز مناهی وملاهی، همه احتراز کردن
شب جمعه‌ها نخفتن، به خدای راز گفتن — ز وجود بی‌نیازش، طلب نیاز کردن
به خدا قسم که آن را، ثمر آن‌قدر نباشد — که به روی ناامیدی در بسته باز کردن

بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت آموزش‌وپرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

رشد برهان ۶۹

مجله‌ی ریاضی
دوره‌ی آموزش متوسطه

فصلنامه‌ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
دوره‌ی بیستم/ شماره‌ی ۳/ بهار ۱۳۹۰

● **وبگاه:** www.roshdmag.ir

● **رایانامه:** Borhanm@roshdmag.ir

● **پیام‌گیر نشریات رشد:** ۸۸۳۰۱۴۸۲ ـ ۰۲۱

نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵

● **تلفن دفتر مجله:** ۸۸۳۰۵۸۶۲ ـ ۰۲۱

● **تلفن امور مشترکین:** ۷۷۳۳۶۶۵۶ ـ ۷۷۳۳۶۶۵۵ ـ ۰۲۱

● **شمارگان:** ۱۲۰۰۰ نسخه

● **چاپ:** شرکت افست (سهامی عام)

رشد برهان متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر به همکاری دعوت می‌کند:

● نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی دوره‌ی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)

● طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)

● طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)

● طرح معماهای ریاضی

● نگارش یا ترجمه‌ی مقاله‌های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه‌ی علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش رایانه و...)

عکس روی جلد: غلامرضا بهرامی

توقع ما از شما

حرف اول

آیا تا به حال مقاله یا نوشته‌ای که برای چاپ در مجله مناسب باشد، نوشته‌اید؟ اصلاً به فکر نوشتن مقاله و ارسال آن برای چاپ در مجله افتاده‌اید؟ فکر می‌کنید یک مقاله‌ی خوب و یا مسئله‌ای مناسب برای چاپ چه ویژگی‌هایی باید داشته باشد؟ چه زمانی را باید صرف کرد تا نوشته، قابل چاپ باشد؟ در این مجال می‌خواهم راجع به این موضوعات با هم چند دقیقه‌ای را سپری کنیم. اول این‌که بنده به عنوان سردبیر و همه‌ی دست‌اندرکاران و اعضای هیئت تحریریه مجله توقع داریم که شما به عنوان مخاطبین اصلیِ مجله دست به قلم برده و بنویسید و باور کنید هیچ موضوعی به اندازه این ما را خوشحال نمی‌کند که مشاهده کنیم مقاله‌ای را دانش‌آموزی نوشته و برای ما ارسال کرده است و ما حداکثر توانِ خود را به‌کار می‌بریم تا اگر احیاناً اشکالاتی در مقاله هست، برطرف کرده و مقاله به نام همان شخص به چاپ برسانیم ـ البته این امر بارها در مجله اتفاق افتاده است ـ اما متأسفانه این توقع ما از طرف شما برآورده نشده و ما همچنان چشم براه مقالات و نوشته‌های شما هستیم. دوم این‌که توقع ما از شما در حد شما بوده و فقط همین که وقت بگذارید و دست به قلم برده و نوشته‌ای را تهیه کرده و برای ما ارسال کنید، برای ما بسیار مهم بوده و ما را خوشحال خواهید کرد.

ولی در هر صورت برای نوشتن یک مقاله باید به نکات زیر توجه کنید و بعداً خواهید دید، آن‌طور هم که تصور می‌کردید کار بسیار سختی نیست.

۱. اولین شرط نوشتن، مطالعه و تحقیق است و این‌که باید راجع به موضوعی که در نظر دارید، حداقل یکی دو کتاب مطالعه کرده باشید و به آن موضوع باید احاطه داشته باشید.

۲. مقاله شما باید شامل مقدمه، متن اصلی و نتیجه‌گیری باشد ـ که البته گاهی اوقات متن اصلی و نتیجه‌گیری با هم ارائه می‌شوند ـ در مقدمه معمولاً اهداف مقاله و مخاطبین آن و این‌که موضوع ارائه شده در چه زمینه‌ای و مربوط به چه مبحث یا کتاب درسی است قید می‌شود مگر این‌که نام مقاله و عنوان آن گویای این مطالب باشد.

۳. شما باید در مقاله‌ی خود از اصطلاحات و واژه‌هایی استفاده کنید که مخاطبین شما با آن‌ها آشنا هستند و اگر مقاله یک موضوع درسی را شامل می‌شود حتی‌الامکان از نمادها و رسم‌الخط کتاب درسی استفاده شود.

٤. می‌توانید برای نگارش مقاله از دبیران محترم خود کمک گرفته و از ایشان بخواهید منابع خوب برای مطالعه به شما معرفی کنند.

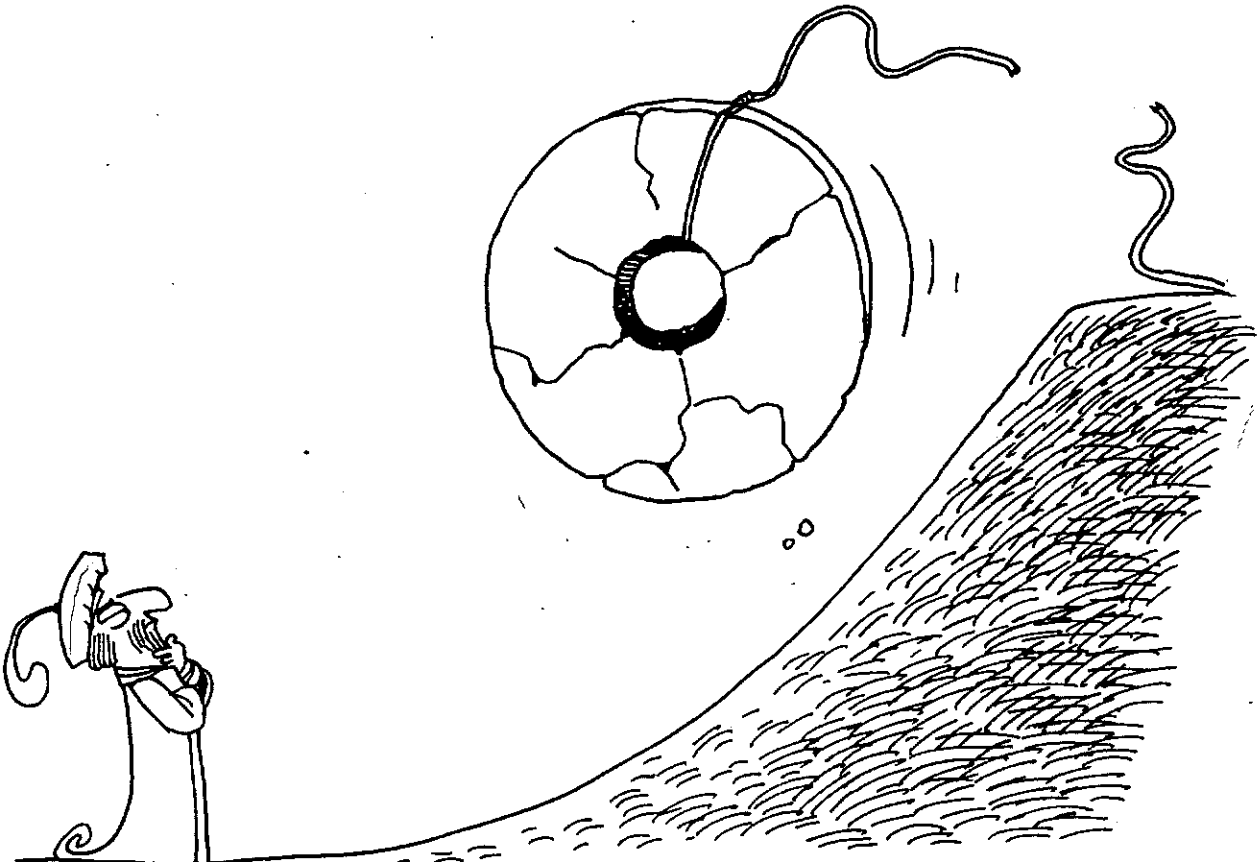
شاید یکی از بهترین ساده‌ترین مقالاتی که می‌توانید برای ما ارسال کنید، خاطرات شما از کلاس‌های درس ریاضی و معلمین محترم ریاضی است. این خاطرات می‌تواند بسیار آموزنده و در عین حال سرگرم‌کننده باشد.

همین‌طور، بعضی وقت‌ها به یک مسئله جالب برمی‌خورید که راه‌حل بسیار جالبی برای آن می‌یابید، می‌توانید آن مسئله را همراه با راه‌حل آن برای ما ارسال کنید.

به هر صورت شروع کردن به نگارش، مهم‌ترین قسمت کار است و شما اگر علاقه دارید نوشته خودتان با نام خودتان در مجله چاپ شود شروع کنید!

به امید این‌که مقاله‌های شما و دبیران محترم شما همه‌ی صفحات مجله را شامل شود. و با آرزوی موفقیت و شادکامی در سال جدید برای همه‌ی شما عزیزان، ان‌شاءا... در پناه خداوند متعال و مورد تأییدات حضرت ولی‌عصر(ع) باشید.

سردبیر



نظریه‌ی هفت فاجعه ۲

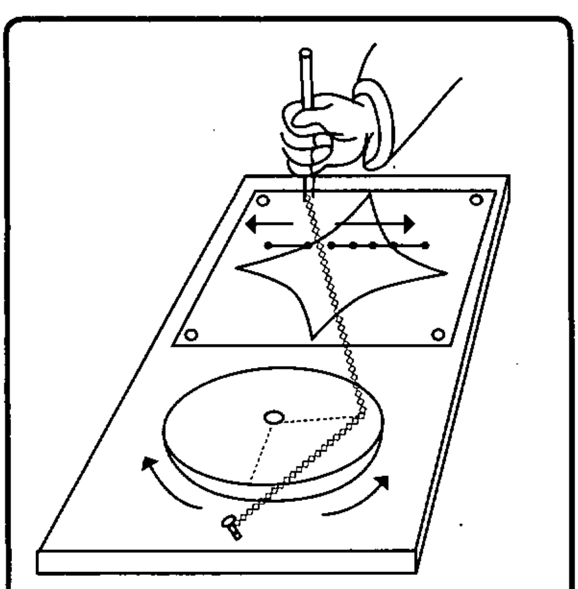
پرویز شهریاری

به کریستوفر زیمان توجه کنیم

آزمایشی را که می‌خواهیم مطرح کنیم به کریستوفر زیمان، شاگرد پروفسور توم، تعلق دارد. ماشین زیمان برای نظریه‌ی فاجعه‌ها، همان نقش کتری را برای روشن کردن روندهای ترمودینامیکی برعهده دارد.

این ماشین، ساختمان ساده‌ای دارد. صفحه‌ای قرص‌مانند را در نظر بگیرید با میله‌ای که در کنار قرص بر آن عمود باشد. محور قرص در مرکز میز قرار دارد. از میله، دو فنر به موازات سطح میز گذشته است. انتهای دیگر فنر اول را به میخی که روی میز کوبیده‌ایم، محکم می‌کنیم. انتهای آزاد فنر دوم را به چیزی شبیه مداد می‌بندیم که می‌تواند با دست روی میز حرکت داده شود.

میله‌ی مداد مانند را، که نوک آن روی میز قرار دارد، کمی حرکت می‌دهیم، قرص به اندازه‌ی زاویه‌ی کوچکی می‌چرخد و در حالت تازه‌ی خود به حالت تعادل قرار می‌گیرد. تا این‌جا همه‌چیز بر مدار طبیعی خود جریان دارد. اگر متغیر درونی را زاویه‌ی دوران قرص و مختصات نوک مداد را متغیرهای بیرونی بگیریم، هر تغییر کوچک متغیرهای بیرونی به تغییر کوچکی در متغیر درونی می‌انجامد.



ماشین زیمان

نوک مداد را دوباره کمی حرکت می‌دهیم، قرص هم دوباره به‌اندازه‌ی زاویه‌ی کوچکی می‌چرخد. همه‌چیز مثل سابق است. مداد باز هم به حرکت خود ادامه می‌دهد... و یکباره قرص از

جا کنده می‌شود و با سرعت، نزدیک به ۱۸۰ درجه می‌چرخد! تغییر کوچکی در متغیرهای بیرونی، به تغییر تند و جهشی در متغیر درونی می‌انجامد!

ایـن را هم می‌توان فاجعه نامید. نظریه‌ی فاجعه در این مورد چه می‌گوید؟ برای مثال، این پدیده‌ی شـگفت را چگونه روشن می‌کند: مداد را روی یک منحنی حرکت می‌دهیم تا به نقطه‌ی جهشـی برای قرص برسـیم، این نقطه را روی سـطح میز علامت می‌گذاریم. حالا مداد را روی همان منحنی و در جهت عکس حرکت می‌دهیم، با کمال شگفتی متوجه می‌شـویم که لحظه‌ی جهش برای قرص، نه در همان نقطه‌ی قبلی، بلکه خیلی بعدتر پیش می‌آید!

به‌طور کلی، همه‌ی مسـئله‌های مربوط به نظریـه‌ی فاجعه‌ها را می‌توان به این صورت تنظیم و روشـن کرد: طبیعت جهش‌ها چگونه اسـت که ضمن گـذار از یک حالت تعادلی بـه حالت دیگر، جنبه‌ی تدریجی تغییر را از دست می‌دهند؟

با گالیله مشورت کنیم

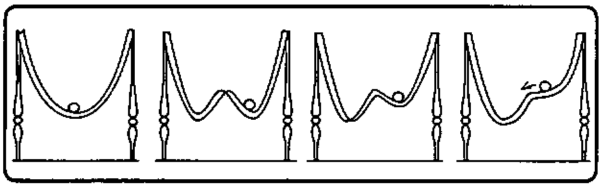
وسـیله‌ی آزمایش تازه را از گالیله‌ئو گالیله اقتباس می‌کنیم. این دانشمند، بسیاری از قانون‌های مکانیک را با غلتاندن یک گلوله روی مسـیر ناودان‌مانندی پیدا کرد که شکلی نیم‌دایره داشت و تحدب آن به سمت پایین بود.

اگر گلوله را به حال خود بگذاریم، چه پیش می‌آید؟ به این‌طرف و آن‌طرف می‌غلتد و سـرآخر، در پایین‌ترین نقطه‌ی مسـیر متوقف می‌شود. اگر مسیر را نمایش تغییرات یک تابع بگیریم، این پایین‌ترین نقطـه، همان نقطه‌ی مینیمم منحنی اسـت. یـادآوری می‌کنیم که اگر ممـاس بر منحنی تابع را، در نقطه‌ی مینیمم آن رسـم کنیم، یک خط راست افقی به دست می‌آید.

مسیر ناودانی را خم می‌کنیم تا در پایین آن، تپه‌ای که دو گودال در دو طرف خود دارد، به‌وجود آید. حالا، اگر گلوله را به حال خود بگذاریم، چـه پیش می‌آید؟ گلوله در یکی از دو گودال ـ یکی از دو نقطه‌ی مینیممی که مماس بر منحنی مسیر در آن‌جا افقی است ـ تعادل پایدار پیدا می‌کند و متوقف می‌شود.

توجـه به این نکته جالب اسـت کـه روی این منحنـی، نقطه‌ی دیگری هم وجود دارد که در آن‌جا، مماس بر منحنی به‌صورت افقی درمی‌آید. این نقطه، همان رأس تپه، یعنی نقطه‌ی ماکزیمم است. بنابر نشـانه‌ی رسـمی، یعنی افقی بودن مماس، این نقطه با نقطه‌ی تعادل خویشی دارد. جالب‌تر این است که این نقطه هم درواقع، یک نقطه‌ی تعادل است، منتهی تعادلی ناپایدار. وقتی که گلوله به رأس تپه رسید، بعد از یک توقف کوتاه، به طرف یکی از دو گودال فرو می‌غلتد.

تـه گودال، برعکـس رأس تپه، نقطه‌ی تعادل پایدار اسـت. اگر گلوله را از جایی که آرمیده است اندکی تکان دهیم، کمی به این‌طرف و آن‌طرف می‌غلتد و دوباره در نقطه‌ی مینیمم آرام می‌گیرد.

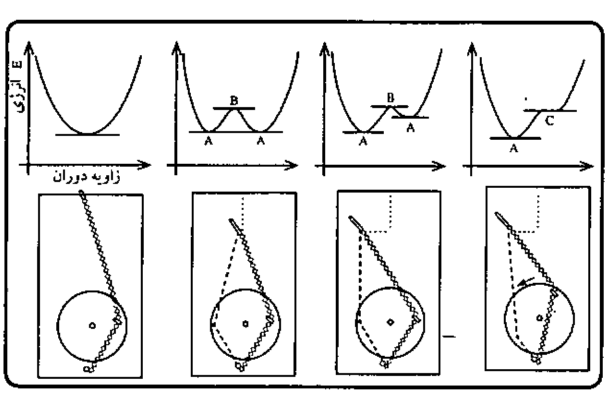


حالا ناودان را کمی دستکاری می‌کنیم و شکل آن را اندکی تغییر می‌دهیم. تـه یکی از گودال‌ها (همان که گلوله‌ی ما در آن‌جا آرمیده اسـت) را بالا می‌آوریم تا جایی کـه با رأس تپه در یک ارتفاع قرار گیرد. در این صورت، در یک ناودان خم‌شده، گلوله‌ای قرار می‌دهیم. اگر گلولـه را به حال خود بگذاریم،در ته یکـی از گودال‌ها ـ آن‌جا که مماس بر مسـیر خطی افقی اسـت ـ یعنی در نقطه‌ی مینیمم نسبی می‌ایسـتد. ولی در نقطه‌ی عطف، جایی کـه باز هم مماس بر منحنی افقی است، گلوله به حالت تعادل درنمی‌آید و به طرف پایین می‌غلتد تا وقتی که به نزدیک‌ترین نقطه‌ی مینیمم نسبی برسد.

منحنی ما پیچیده‌تر می‌شـود. روی ایـن منحنی، نقطه‌ای وجود دارد که مماس در آن افقی اسـت، ولی ایـن نقطه نه نقطه‌ی ماکزیمم است و نه نقطه‌ی مینیمم، بلکه نقطه‌ی عطف است. در چنین نقطه‌ای، گلولـه‌ی مـا تعادل خود را به دسـت نمی‌آورد؛ از جـای خود کنده می‌شود و به طرف گودال دیگر می‌غلتد.

به فنر خود برگردیم

تـه، پایین‌ترین نقطه، مینیمـم... همه‌ی این‌هـا در بخش قبل به ارتفاع گلوله مربوط می‌شـد. ولی ارتفاع گلولـه، یعنی میزان انرژی پتانسـیلی. خوب اسـت یادآوری کنیم که همین گلوله‌ای که در قعر



گودال افتاده اسـت، ماشین زیمان، بسـته به محل قرار گرفتن مداد، می‌تواند در یک تا دو حالت به تعادل پایدار برسـد (برای حالتی که دو تعادل پایدار داریم، روی تصویر ماشین، یکی از حالت‌ها را رسم

کرده‌ایـم و حالـت دیگر را با خط‌چین نشـان داده‌ایم). روی منحنی انرژی پتانسیلی فنرهای کشیده شده، زاویه‌های متناظر دوران قرص را با حرف A نشـان داده‌ایم. اگـر دو زاویه برای تعادل پایدار وجود داشـته باشد، بین آن‌ها، زاویه‌ی تعادل ناپایدار وجود دارد(B). ممکن است موقعیتی از مداد وجود داشته باشد که بـه‌ازای آن، نقطه‌ی عطفی بـا مماس افقی، روی منحنـی پیدا شـود (C). در همین موارد اسـت که قرص به حالت جهشی می‌رسد.

به نمونه‌ای از یک قانون مهم فیزیکی تبدیل می‌شود. حالت تعادل پایدار یک دسـتگاه فیزیکی، مشـخص‌کننده‌ی این وضع است که انرژی دستگاه در این حالت، مینیمم است.

با آگاهی از این موقعیت نظری، دوباره به قرص و فنرهای خود برمی‌گردیـم. مـداد را از محور قرص و در جهـت مخالف میخ دور می‌کنیم و فعلاً آن را در همان‌جا محکم می‌کنیم.

حالا قـرص را می‌چرخانیم و زاویه‌ی دوران را از طرف میخ به حسـاب می‌آوریم. بـه ازای هر زاویه‌ی دوران، انرژی پتانسـیل فنر کشیده شده را معین می‌کنیم.

اگر منحنـی نمایش تغییرات انرژی را نسـبت به زاویه‌ی دوران رسـم کنیم، شبیه همان نیم‌دایره‌ای که تحدبی به طرف پایین دارد، به دست می‌آید.

قعر منحنی رسـم شـده، معرف مینیمم انرژی پتانسیل است. اگر قـرص را به اندازه‌ی همین زاویه دوران دهیم، به حالت تعادل پایدار می‌رسد.

با جابه‌جا کردن محل مداد، می‌توان حالتی را پیدا کرد که در آن، منحنی انرژی پتانسـیل تغییر شـکل دهد و در پایین آن تپه‌ای ظاهر شـود که در هر طرف آن یک گودال باشـد. در ایـن صورت، برای قرص، دو حالت تعادل پایدار وجود دارد.

سـرانجام می‌توان اسـتحاله‌ای را انجام داد که با آن از آزمایش آخر با ناودان گالیله آشنا هستیم. جای مداد را آن‌قدر تغییر می‌دهیم تا قعر یکی از گودال‌ها با رأس تپه در یک سطح قرار گیرد...

... خطر! قرص با حرکتی تند و ناگهانی، خود را به حالت تعادل پایدار تازه‌ای می‌رساند.

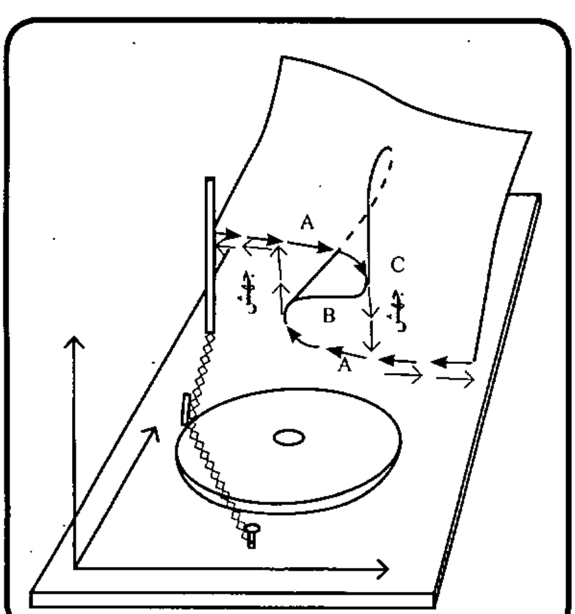
و این چیزی اسـت که باید همیشه به خاطر داشت: حالت تعادل پایدار و ناپایدار قرص و همچنین، موقعیت‌هایی که قرص با رسـیدن به آن‌ها به حرکتی تند و ناگهانی می‌افتد، همه یک نشـانه دارند؛ اگر ایـن نقطه‌هـا را روی منحنـی متناظر انرژی آن در نظـر بگیریم، در همه‌ی این موارد، مماس بر منحنی، خطی افقی است.

بسته به شـکل منحنی‌ها (به منحنی انرژی دقیق‌تر توجه کنید!)، تعداد این گونه نقطه‌ها ممکن اسـت یک، دو یا سـه باشد. زاویه‌های دوران متناظر این نقطه‌ها را در قرص، زاویه‌های بحرانی گویند.

دوباره مقداری رسم می‌کنیم

حالا دیگر می‌توانیم کمی به ریاضیات بپردازیم.

روی سـطح میز، دو محور مختصات را رسم می‌کنیم تا روی آن موضع نوک مداد را نشـان دهیم. محور سـوم را عمود بر سـطح میز می‌گیریم. چند سطر بعد، هدف این کار را خواهیم فهمید.



مداد را در جایی محکم می‌کنیم و زاویه‌های بحرانی دوران قرص را اگر برای هر وضع مداد، روی محوری که از نوک آن گذشته و بر صفحه‌ی میز عمود است، مقادیر زاویه‌های بحرانی را جدا کنیم (همان مقادیری که در شکل قبل با حرف‌های A، B و C مشخص شده بودند)، سطح عجیب و غریبی به دست می‌آید. مقطع این سطح، که روی شکل با علامت پیکان نشان داده شده است، به روشنی نشان می‌دهد که وقتی به لبه‌ی چین‌ها در سطح برسیم، حالت جهش ناگهانی پیش می‌آید

در این وضع معین می‌کنیم. می‌دانیم که بسته به جای مداد، تعداد این زاویه‌ها ممکن است یک، دو یا سه باشد. همه‌ی این مقادیر را، هر چند تا که باشد، روی محور عمودی در دستگاه سه بعدی خود، که از نوک مداد گذشته باشد، جدا می‌کنیم.

مداد را در جاهای تازه‌ای قرار می‌دهیم و این روند را پشت سرهم تکرار می‌کنیم و همه‌ی نقطه‌های جدید را در دستگاه مختصات خود قرار می‌دهیم. سرانجام، این نقطه‌ها به هم متصل می‌شوند و سطحی را تشکیل می‌دهند.

به شکل نگاه کنید. آیا عجیب و غریب نیست؟ چنین سطحی را سطح چین‌دار می‌گویند.

به کمک این تصویر، می‌توان به سادگی همه‌ی آن‌چه را که مربوط به قرص ـ ضمن جابه‌جا شدن مداد ـ بود و از جمله جهش‌های ناگهانی آن را پیش خود تصور کرد. این جهش‌ها وقتی پیش می‌آید که به لبه‌های سطح چین‌دار برسیم.

این مطلب را هم می‌توان فهمید که چرا وقتی مداد را در یک مسیر ولی در دو جهت مختلف جابه‌جا می‌کنیم، حالت جهشی در نقطه‌ی یگانه‌ای از این مسیر پیش نمی‌آید. به‌خصوص، این پیشامد را با علامت پیکان روی شکل مشخص کرده‌ایم.

هفت فاجعه

شانس آوردیم. در شرح آزمایش با قرص، تنها سه متغیر شرکت داشت: دو متغیر بیرونی (مختصات نوک مداد) و یک متغیر درونی (زاویه‌ی دوران قرص).

به همین دلیل بود که برای شرح پیشامدها به کمک شکل، یک دستگاه سه بعدی مختصات برای ما کفایت می‌کرد. روی همین دستگاه بود که ما توانستیم سطح پر راز و رمز خود را بسازیم.

البته وقتی که متغیرهای درونی چهار تا باشد، با حالت بسیار جالب‌تری روبه‌رو هستیم. مگر نه این است که جهان ما چهار بعدی است (سه بعد فضایی به اضافه‌ی زمان). پروفسور رنه توم ثابت کرده است که در چنین مواردی، بدون ارتباط با تعداد متغیرهای بیرونی، تنها هفت نوع جهش (و یا به بیان خود پروفسور، هفت «فاجعه‌ی مقدماتی») می‌تواند وجود داشته باشد.

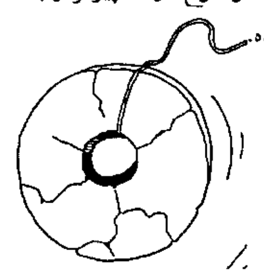
هفت سطحی که به کمک آن‌ها می‌توان این «فاجعه‌ها» را به صورت عینی شرح داد، نام‌های ظریف و شاعرانه‌ای دارند: سطح پرچین، سطح شکن‌دار، سطح پرستویی، سطح دنباله‌دار، سطح پروانه‌ای، سطح بیضوی و سطح هذلولوی و سهموی.

اگر تعداد متغیرهای درونی پنج باشد، یازده فاجعه می‌تواند وجود داشته باشد و اگر شش متغیر درونی یا بیشتر داشته باشیم، تعداد فاجعه‌ها بی‌نهایت می‌شود.

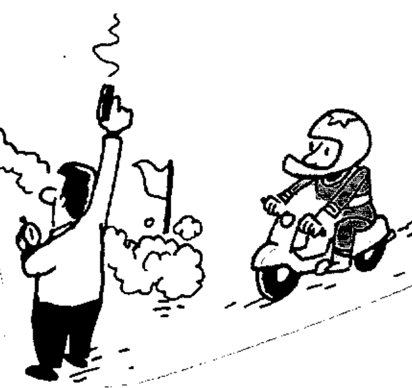
هم گردباد، هم موج و هم تقسیم یاخته‌ها

به کمک نظریه‌ی فاجعه‌ها، می‌توان به خوبی از عهده‌ی توضیح پدیده‌های فیزیکی مربوط به گذارهای مرحله‌ای و جهشی (گذار از حالت جامد به مایع، از مایع به گاز و غیره) برآمد. مکانیک مایعات و پدیده‌های طوفانی آن را هم، می‌توان مثالی برای فاجعه دانست. موج‌های پرتلاطمی هم که نیروی خود را در صخره‌ها گم می‌کنند، مثالی از همین نوع است. زیست‌شناسی هم، که سرچشمه‌ی الهام نیرومندی برای پروفسور توم است، نمایشگر مواردی از پدیده‌های فاجعه‌ای است. از این قبیل است تقسیم یاخته‌ها، تحریک عصبی، توزیع شکل و غیره.

ذکر همین چند نمونه نشان می‌دهد که دامنه‌ی کاربرد نظریه‌ی فاجعه‌ها، تا چه اندازه گسترده است. در ضمن این موضوع را نباید از یاد برد که در طبیعت کمتر به صورت خالص خود، با فاجعه‌های مقدماتی برخورد می‌کنیم، همان‌طور که خط راست واقعی هم، تنها در هندسه وجود دارد. این نظریه، مدل‌هایی را ارائه می‌دهد که در تقریب اول، می‌توانند معرف پدیده‌های موردنظر باشند، درست به همان ترتیب که دایره می‌تواند مدل خوبی برای خورشید ـ آن‌طور که ما می‌بینیم ـ باشد؛ ولی روشن است که خورشید واقعی با تصوری که ما در ظاهر از آن داریم، متفاوت است. مدلی برای ساده‌تر کردن کار است و کاربرد آن در محدوده‌ای است که به هدف آن، لطمه‌ای وارد نیاورد. مثلاً، برای این که وکیلی به فکر نجات موکل خود باشد ـ که به مفهوم عام خود، یک مورد فاجعه‌ای است ـ بعضی ملاحظه‌های کوچک روانی، خیلی بیشتر نتیجه‌بخش است تا استفاده از عامل‌های فوق العاده زیاد موضوع در کامپیوتر و به‌دست آوردن ترسیم پرپیچ و خم گیج‌کننده.



مسیر، دور و هم‌بندی در گراف‌ها

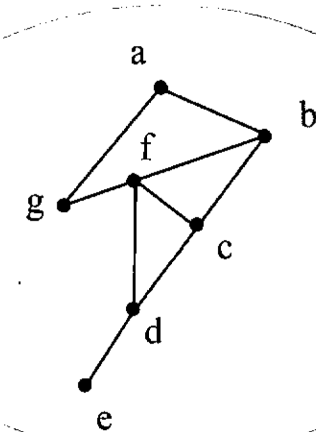


در ادامه‌ی مقاله‌ی گراف‌های کامل در شماره‌ی ۶۸ برهان، در این مقاله با تعریف مسیر و دور در یک گراف و تعریف گراف مکمل، سعی در تکمیل این بحث داریم.

حمیدرضا امیری

تعریف مسیر: در یک گراف از مرتبه‌ی p، مسیری به طول m از رأس a به b دنباله‌ای است شامل (m+1) رأس دوبه‌دو متمایز که با a شروع و به b ختم شود.

مثال: در گراف زیر، مسیرهایی با طول‌های متفاوت مشخص شده‌اند:



مسیر به طول ۱ ab

مسیر به طول ۲ abc

مسیر به طول ۴ از a به e abcde

نکته: تعداد مسیرهای با طول‌های متفاوت از رأس a به b در گراف کاملِ k_p از دستورهای زیر قابل محاسبه است:

$$\text{تعداد مسیرهای از رأس a به b در } k_p = \sum_{k=0}^{p-2}(p-2)_k, \quad \left((n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}\right)$$

$$\text{تعداد مسیرهای از رأس a به b در } k_p = \left[(p-2)!\times e\right]$$

تذکر: اگر تعداد مسیرهای بین a و b (از a به b و از b به a) در گراف k_p را بخواهیم، کافی است تعداد مسیرهای از a به b را دوبرابر کنیم و اگر همه‌ی مسیرهای بین رأسهای متمایز در گراف k_p را بخواهیم، کافی است آن را در $\binom{p}{2}$ ضرب کنیم (هر دو نقطه از p تعداد مسیرهایی را بین یکدیگر تعریف می‌کنند).

$$\text{تعداد کل مسیرها بین رؤوس متمایز در } k_p = 2\times\binom{p}{2}\times\left[(p-2)!\times e\right]$$

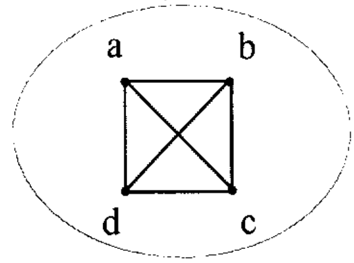
در رابطه‌ی اخیر e عدد اویلر است که تقریباً برابر با ۲/۷۲ در نظر گرفته می‌شود و علامت [ ] نشان‌دهنده‌ی جزء صحیح است.

تذکر: مسیر از رأس a به رأس a را مسیر به طول صفر تعریف می‌کنیم.

تعریف دور: یک دور به طول m روی رأسی چون a در گراف G از مرتبه‌ی p دنباله‌ای است شامل m رأس دوبه‌دو متمایز که با a شروع و به a ختم شود.

تذکر: دورهایی که رأس‌های به‌کار رفته و یال‌های طی‌شده روی آن‌ها با هم برابر باشد، یک دور به‌حساب می‌آیند.

مثال: در گراف زیر (k_4) هریک از ۶ دور abc و acb و bca و bac و cab و cba یک دور به‌حساب می‌آیند، و دورهای abcda و abdca دو دور متفاوت با طول‌های ۴ هستند.



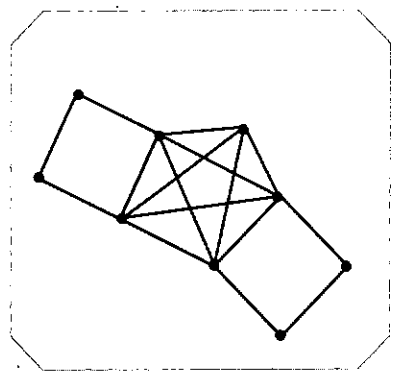
(k_4)

نکته: تعداد دورهای به طول k در گراف کامل k_p از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\text{تعداد دورهای به طول } k \text{ در } k_p = \frac{1}{2}\binom{p}{k}\times(k-1)!$$

مثال: در گراف ساده‌ی G چند دور به طول ۴ وجود دارد؟

حل: هر ۴ ضلعی بدون قطر فقط یک دور به طول ۴ دارد. بنابراین می‌توان گفت:



۱+ تعداد دورهای به طول ۴ در k_5 +۱= تعداد دورهای به طول ۴ در G

$=1+15+1=17$

($\frac{1}{2}\binom{5}{4}\times 3!=\frac{1}{2}\times5\times6=15$ = دورهای به طول ۴ در k_5)

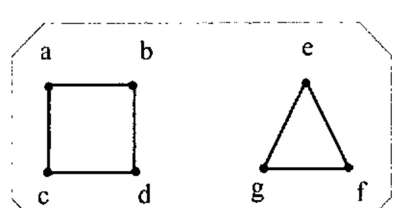
تذکر: تعداد کل دورهای موجود در گراف k_p (از دور به طول ۳ تا دور به طول p) از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\text{تعداد کل دورها در } k_p = \sum_{k=3}^{p}\frac{1}{2}\binom{p}{k}(k-1)!$$

نکته: رابطه‌ی وجود مسیر بین رؤوس یک گراف، یک رابطه‌ی هم‌ارزی است (خواص انعکاسی، تقارنی و تعدی را دارد) و اگر G یک گراف k بخشی باشد، دارای k کلاس هم‌ارزی است.

مثال: گراف دوبخشی G به‌صورت زیر دارای دو کلاس هم‌ارزی $[a]=\{a,b,c,d\}$ و $[e]=\{e,g,f\}$ است.

(بین a و b مسیری وجود داشته باشد $\Leftrightarrow$ aRb)

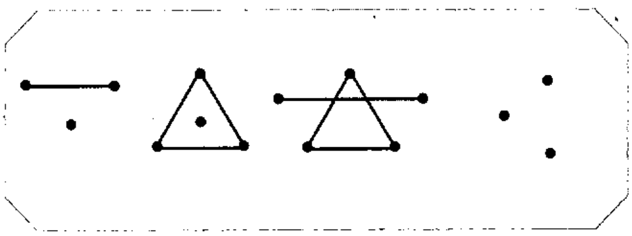


تعریف گراف همبند: گراف G از مرتبه‌ی p را همبند می‌نامیم، هرگاه بین هر دو رأس متمایز در G حداقل ۱ مسیر وجود داشته باشد.

تذکر: گراف k_1 که فقط از یک رأسِ ایزوله تشکیل یافته، گرافی همبند است.

تذکر: هر گراف از مرتبه‌ی $p \geq 2$ که رأس ایزوله داشته باشد، همبند نیست.

مثال: گراف‌های زیر همگی ناهمبندند:



تذکر: هر گراف کامل همبند است.

نکته: اگر در گراف G از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q داشته باشیم $q < p-1$، در این صورت G همبند نیست. به عبارت دیگر، اگر گراف G همبند باشد، همواره $q \geq p-1$ است.

نکته: اگر در گراف G از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی p داشته باشیم $q \geq \binom{p-1}{2}+1$، در این صورت G همبند است.

نکته: در هر گراف از مرتبه‌ی p که رأس ماکزیمم (رأسی از درجه‌ی p-1) داشته باشیم، آن گراف همبند است.

پرسش: کدام یک از دنباله‌های زیر مربوط به یک گراف همبند است؟

۱) ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۲ و ۲ و ۳

۲) ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۳ و ۳

۳) ۱ و ۲ و ۳ و ۳

۴) ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۲ و ۲ و ۴

حل: گزینه‌ی ۲، زیرا در گزینه‌ی ۱ داریم p=۸ و q=۶ و چون q<p -۱ پس گراف متناظر با آن همبند نیست. هم‌چنین در گزینه‌ی ۴ داریم p=۹ و q=۷ و q<p -۱ و گراف متناظر با آن همبند نیست. گزینه‌ی ۳ نیز مُعرِف دنباله‌ای گرافیکال نیست.

پرسش: گراف G از مرتبه‌ی ۸ ناهمبند است. این گراف حداکثر چند یال دارد؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۹ ۳) ۲۱ ۴) ۲۲

حل: گزینه‌ی ۳ صحیح است، زیرا کافی است یک رأس را ایزوله

کنیم و با هفت رأس باقی‌مانده گراف k_7 بسازیم.

$$q_{k_7}=\frac{7\times 6}{2}=21$$

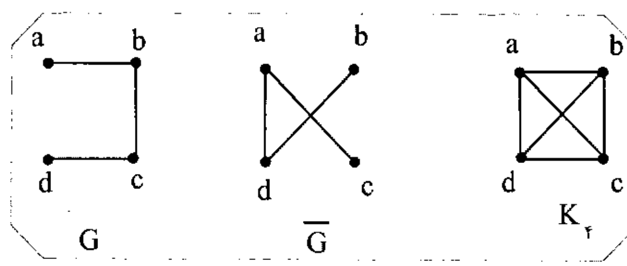
پرسش: گراف G از مرتبه‌ی ۹ مفروض است. این گراف حداقل چند یال باید داشته باشد تا مطمئن باشیم همبند است؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۶ ۳) ۲۸ ۴) ۲۹

حل: گزینه‌ی ۴ صحیح است، زیرا:

$$q\ge\binom{p-1}{2}+1\Rightarrow q\ge\binom{8}{2}+1=29$$ ← شرط همبندی

مکمّل یک گراف: مکمّل گراف G از مرتبه‌ی p گرافی است چون $\overline{G}$ از مرتبه‌ی p به طوری که این دو گراف روی هم، گراف کامل از مرتبه‌ی p را تشکیل می‌دهند. به مثال زیر توجه کنید:



تذکر: همواره مجموع یال‌های یک گراف و مکمّل آن گراف برابر است با تعداد یال‌های گراف کاملِ هم‌مرتبه با آن گراف؛ یعنی:

$$q(G)+q(\overline{G})=\frac{p(p-1)}{2}$$

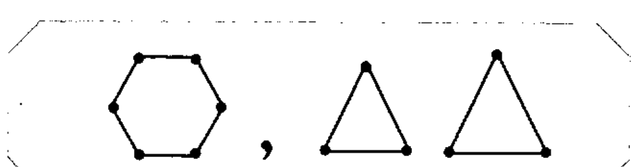
تذکر: اگر G گرافی از مرتبه‌ی p باشد و a رأسی در این گراف و ā رأسِ متناظر با آن در گراف $\overline{G}$ باشد، همواره داریم:

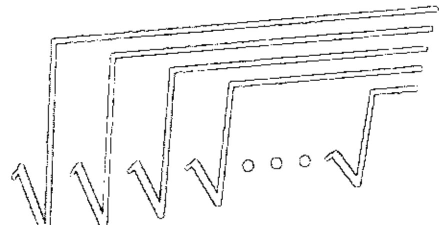
$$\deg a+\deg \bar{a}=p-1$$

تذکر: اگر G گرافی r_1ـ منتظم از مرتبه‌ی p باشد، مکمل G نیز گرافی r_2ـ منتظم است و همواره $r_1+r_2=p-1$ است.

مثال: چند گرافِ ۳ـ منتظم از مرتبه‌ی ۶ وجود دارد؟

حل: مکمل گرافِ ۳ـ منتظم از مرتبه‌ی ۶ گرافی است ۲ـ منتظم از مرتبه‌ی ۶ و چون تعداد گراف‌های ۲ـ منتظم از مرتبه‌ی ۶ همواره برابر است با ۲، یعنی دو گراف زیر را داریم، پس تعداد گراف‌های ۳ـ منتظم از مرتبه‌ی ۶ نیز ۲ است.





چند رادیکال مسلسل

فرستنده: عباس روح‌الامینی از سیرجان

اینجانب «عباس روح‌الامینی» تاکنون چند مقاله به دفتر مجله ارسال نموده‌ام و هنوز جوابی دریافت نکرده‌ام، چرا مجلات ایران به نامه‌های ارسالی بی‌توجهی می‌نمایند؟

سیرجان هیچ امکانات علمی و آموزشی ندارد، برای همین من به عضویت خانه ریاضیات کرمان درآمده‌ام و هر هفته به کرمان مسافرت می‌کنم تا از امکانات و کلاس‌های آن بهره‌مند شوم.

آرم سفر به کرمان، هر انتهای هفته
چون خانه ریاضی از یاد من نرفته
عشق ریاضی مرا درمی‌کشد ز سیرجان
هر هفته آرد مرا در شهر خوب کرمان
در خانه ریاضی باشد کتاب وافر
عازم به کرمان شدم، گردیده‌ام مسافر

من ترجمه کردن به زبان انگلیسی را خیلی خوب بلد نیستم ولی سردبیر مجله ریاضی اسپکتروم[1] خودش نامه‌های من را ویرایش کرده، چاپ می‌کند و مجلات را هم مجانی برایم می‌فرستد، ولی مجلات ایران جواب نامه‌هایم را هم، نمی‌دهند؟!!

... بگذریم. در مجله ریاضی (Volume 43 Number 1) در صفحه ۳۳ شخصی به‌نام «یاسار اَتس»[2] دانشجوی رشته‌ی فیزیک در دانشگاه ماری‌کوری پاریس است، دَه تا رادیکال مسلسل برای آن مجله ارسال نموده که من آن‌ها را جهت آشنایی دانش‌آموزان ارسال می‌نمایم.

بنده آن‌ها را اثبات کرده‌ام. امیدوارم دانش‌آموزان بتوانند، این رادیکال‌های مسلسل را اثبات کنند.

بقیه در صفحه‌ی ۲۱

تاریخچه‌ی مجلات ریاضی ایران ۴

غلامرضا یاسی‌پور

در پی بررسی «تاریخچه‌ی مجلات ریاضی ایران» به شماره‌های ۴۰، ۴۱ و ۴۲ مجله‌ی یکان می‌رسیم و به مسئله‌های جالبی برمی‌خوریم که در پاییز و زمستان سال ۱۳۴۶ به چاپ رسیده‌اند.
در شماره‌ی مسلسل ۴۰ با این مسئله‌ی جالب مواجه می‌شویم:

حل یک مسئله از مسائل شیخ بهائی

در یکان شماره‌ی یکم به نقل از خلاصة الحساب شیخ بهائی با عنوان مسائل لاینحل هفت مسئله درج شده بود. آقای علی رضائی، دبیر دانشمند ریاضیات (فعلاً بازنشسته) حل یکی از این مسائل را مرقوم داشته‌اند که در زیر چاپ می‌شود:

مطلوبست حل هر یک از دو معادله‌ی زیر:

$$x^{۲}-۱۰=\sqrt{b} \quad \text{و} \quad x^{۲}+۱۰=\sqrt{a}$$

معادلات را در حالت کلی زیر حل می‌کنیم:

$$(۱)\ \ x^{۲}+\alpha=\sqrt{a}$$

$$(۱)\ \ x^{۲}-\alpha=\sqrt{b}$$

معادله‌ی (۱) را چنین می‌نویسیم:

$$x^{۲}-\alpha=\sqrt{a}-۲\alpha$$

تساوی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\sqrt{a}-۲\alpha=(\sqrt[۴]{a}-\alpha)^{۲}$$

که از آن نتیجه خواهد شد:

$$\sqrt{a}=(\frac{\alpha+۲}{۲})^{۲}$$

و از معادله‌ی (۲) نیز حاصل می‌شود:

$$\sqrt{b}=(\frac{۲-\alpha}{۲})^{۲}$$

چون این مقادیر را در معادلات (۱) و (۲) قرار دهیم نتیجه خواهد شد:

$$x^{۲}=\frac{\alpha^{۲}+۴}{۴}$$

و در ازای مقادیر مختلف α می‌توان مقادیر نظیر a و b و x را تعیین کرد. مثلاً:

$$\alpha=۰\ ;\ \sqrt{a}=۱\ ،\ \sqrt{b}=۱\ ،\ x^{۲}=۱$$

$$\alpha=۱\ ;\ \sqrt{a}=\frac{۹}{۴}\ ،\ \sqrt{b}=\frac{۱}{۴}\ \text{و}\ x^{۲}=\frac{۵}{۴}$$

و در حالت خاص $\alpha=۱۰$ داریم:

$$\sqrt{a}=۳۶\ \text{و}\ \sqrt{b}=۱۶\ \text{و}\ x^{۲}=۲۶$$

در این شماره در مقاله‌ای با عنوان کارمند بازنشسته‌ی راه‌آهن به این داستان برخورد می‌کنیم که:

ترن‌هایی که از کنار یکدیگر می‌گذرند

چند روزی از ملاقات دکتر و جانسن گذشته بود که تلفن منزل جانسن زنگ زد. از آن طرف، دکتر از مکانیسین تقاضا کرد که اگر ممکن است در بعدازظهر آن روز وی را در مطبش ملاقات کند. جانسن که بازنشسته بود و همیشه وقت داشت، دعوت دکتر را پذیرفت و عصر به دیدار وی رفت. در آن‌جا دکتر گفت با معمای تازه‌ای مواجه شده است و آن‌را برای جانسن چنین شرح داد:

ـ با یکی از بیمارانم راجع به آن‌چه برای تو پیش آمده بود، صحبت کردم و او در مقابل، مسئله‌ای مربوط به خودش را برای من بیان کرد: این شخص برای رفتن سر کارش از راهی باید بگذرد که یک رشته‌ی تنهای راه‌آهن را قطع می‌کند. این یک رشته‌ی راه‌آهن اغلب برای عبور ترن‌های تجاری استفاده می‌شود که هم از نظر طول و هم از این نظر که آهسته از شهرها می‌گذرد معروف است. بسیار رخ داده که شخص مزبور مجبور شده است پشت راه‌بند، خودرو خود را متوقف کند و پشت فرمان انتظار بکشد تا زمانی که ترن تجاری با دنباله‌ی دور و درازش آهسته بگذرد و راه برای خودرو وی باز شود. او به من گفت که ترجیح می‌دهد به جای یک رشته، دو رشته راه‌آهن وجود داشته باشد، زیرا گاهی پیش آمده که دو ترن در جهت‌های مخالف از آن راه می‌گذرند و این باعث می‌شود که زمان توقف اجباری وی دو برابر گردد.

آیا به عقیده‌ی شما این شخص درست پیش‌بینی می‌کند؟ یعنی اگر دو رشته راه‌آهن وجود داشته باشد، زمان توقف وی در حالت اخیر کمتر می‌شود؟

مکانیسین بازنشسته اظهار داشت:

ـ کاملاً صحیح است. اگر تعداد کل ترن‌هایی که از دو رشته راه‌آهن

استفاده می‌کنند با تعداد ترن‌هایی که روی یک رشته حرکت می‌کنند برابر باشد، در تقاطع آن‌ها زمان انتظار به حد وسط تقلیل خواهد یافت. اگر دو ترن با هم از آن‌جا بگذرند زمان توقف اجباری در راه بسته برای آن دو درست برابر است با زمان توقف برای یک ترن تنها.

دکتر پاسخ داد:

ـ این موضوع درست، اما برای وقتی که محل عبور ترن‌ها از یکدیگر درست محل تقاطع جاده با راه‌آهن باشد. در حالت‌هایی غیر از این، وضع فرق می‌کند. یک حالت هم که ممکن است پیش بیاید حالتی است که لوکوموتیو یکی از ترن‌ها هنگامی به معبر برسد که درست واگن انتهایی ترن دیگر در حال گذشتن باشد. راجع به این حالت چه می‌گویید؟

مکانیسین پاسخ داد:

ـ بین این حالت و حالتی که دو ترن در آن محل هرگز به هم نرسند هیچ فرقی نیست.

دکتر اظهار داشت:

ـ در این مورد شما اشتباه می‌کنید. اجازه بدهید با محاسبات مقدماتی دلیل اشتباه شما را برایتان توضیح دهم. فرض می‌کنیم به‌طور متوسط در هر جهت یک ترن از راه‌آهن بگذرد و زمان عبور هر ترن از معبر محل تقاطع ۶ دقیقه باشد. با این پیش‌فرض‌ها زمان توقف پشت راه‌بند را حساب می‌کنیم؛ احتمال این‌که اتومبیل موقعی به محل تقاطع برسد که ترن از آن می‌گذرد یعنی راه بسته باشد برابر با یک برده است.

احتمال این‌که درست هنگامی برسد که ترن به معبر می‌رسد برابر است با احتمال آن‌که درست موقعی که ترن آنجا را ترک می‌کند.

روی هم رفته، وی باید سه دقیقه انتظار بکشد تا ترن بگذرد. بنابراین، زمان متوسط توقف ۰/۳ دقیقه خواهد شد.

اکنون حالت فوق‌العاده‌ای را در نظر بگیریم که ترن‌ها در محل تقاطع به وضعی از یکدیگر بگذرند که لوکوموتیو یکی در مقابل واگن انتهایی دیگری واقع شده باشد. خیلی ساده است که اگر تعداد ترن‌ها را نصف بگیریم و در عوض، طول هر ترن را دو برابر در نظر بگیریم. در نتیجه فرقی حاصل نخواهد شد. احتمال مربوط به این‌که با راه بسته روبه‌رو شوید همان احتمال قبلی خواهد بود. اما اگر پشت راه‌بند توقف کرده باشید زمان انتظار شما دو برابر خواهد شد.

بنابراین، چنین دو ترنی برای اتومبیل سواری که مجبور به توقف شده وضعی دو مرتبه بدتر ایجاد می‌کند:

مکانیسین در حالی که به موضوع فکر می‌کرد، گفت:

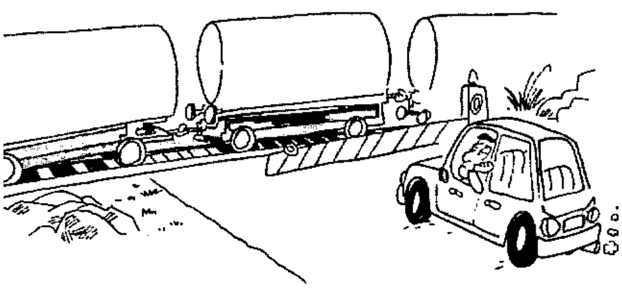
ـ واضح است که اگر بین عبور دو ترن از محل تقاطع چند دقیقه‌ای فاصله باشد، راننده‌ی خودرو می‌تواند از این مدت زمان استفاده کند و قبل از عبور ترن دیگر از راه‌آهن بگذرد و این حالت بر حالتی که دو ترن پشت سرهم از معبر بگذرند و جاده را در تمام طول مدت بسته نگاه دارند، برتری دارد.

دکتر گفت:

ـ خوشحالم که موضوع را متوجه شدید. فعلاً به این نتیجه رسیده‌ایم که در حالت کلی که ترن‌ها از یکدیگر می‌گذرند، زمان توقف نصف می‌شود و در حالت خاصی که در عبور از گذرگاه لوکوموتیو یکی مقابل واگن انتهایی دیگری واقع می‌شود، زمان توقف دو برابر خواهد شد.

مکانیسین اظهار داشت: حالتی را بررسی می‌کنید که ترن‌ها وقتی در محل تقاطع از یکدیگر می‌گذرند، لوکوموتیو یکی در نیمه‌ی طول دیگری واقع شده باشد؛ و دکتر چنین پاسخ داد:

ـ خیلی ساده است. چنین حالتی معادل است با وقتی که تعداد ترن‌ها نصف باشد، اما طول هر یک از آن‌ها یک برابر و نیم بزرگ‌تر



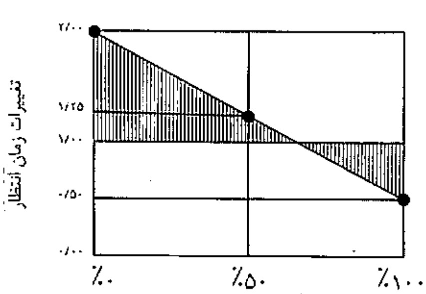
باشد. در چنین وضعی احتمال مربوط به این‌که وقتی به محل تقاطع برسیم که راه بسته باشد در $\frac{۱/۵}{۲}$ ضرب می‌شود و حد متوسط زمان انتظار برای باز شدن راه در ۱/۵ ضرب می‌شود. روی‌هم، اضافه شدن زمان متوسط انتظار برابر می‌شود با:

$$\frac{۱/۵}{۲}\times ۱/۵ = ۱/۱۲۵$$

بنابراین زمان انتظار برای گذشتن نیم طول ترن‌ها، ۱۲/۵ درصد افزایش خواهد داشت:

مکانیسین گفت که برای یک چنین وضعی، محاسبه ناجور است و دکتر چنین توضیح داد:

ـ پاسخ آن هم قابل تأمل است. فعلاً نمودار سه حالت گفته شده را رسم می‌کنیم:



ملاحظه می‌شود که سطح کل متناظر با افزایش زمان متوسط به‌طور قابل ملاحظه‌ای از سطح متناظر با کاهش زمان متوسط بیش‌تر

است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که به‌طور متوسط، روبه‌رو شدن دو ترن در گذرگاه‌های مختلف باعث می‌شود که به مدتی بیش‌تر از وقتی که همان تعداد ترن بر یک رشته راه‌آهن می‌گذرند جاده بسته باشد.

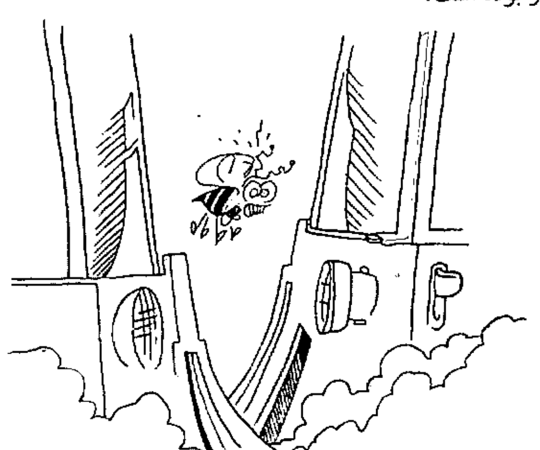
در شماره‌ی ۴۱ باز هم تحت عنوان کارمند بازنشسته راه‌آهن به مسئله‌ی زنبور و راه‌حل آن می‌رسیم:

مسئله‌ی زنبور

مکانیسین پس از کمی مکث از دکتر خواهش کرد که معمای دیگری مطرح کند. دکتر گفت که یک معما را مطرح خواهد ساخت، اما بسیار ساده است و آن‌را چنین شرح داد:

دو ترن در یک لحظه از دو ایستگاه A و B به فاصله‌ی ۱۶۰ کیلومتر به طول یکدیگر حرکت می‌کنند. سرعت هر یک از آن‌ها ۸۰ کیلومتر در ساعت است. در همان لحظه‌ی حرکت ترن‌ها، زنبوری از A با سرعت ۱۰۰ کیلومتر در ساعت به طرف B پرواز می‌کند. این زنبور در لحظه‌ای که ترنی را که از B می‌آید ملاقات می‌کند جهت حرکت خود را تغییر می‌دهد و به طرف ترن اول برمی‌گردد. بعد از ملاقات با این ترن باز جهت حرکت خود را تغییر می‌دهد و به طرف ترن دوم پرواز می‌کند و این عمل را به همین ترتیب و با همان سرعت ثابت اولیه ادامه می‌دهد تا لحظه‌ای که دو ترن را با هم ملاقات کند. در این لحظه از ترس سقوط می‌کند و می‌میرد.

معلوم کنید که این زنبور در مجموع چند کیلومتر مسافت در حال پرواز بوده است؟



جانسن اظهار داشت:

ـ خیلی ساده است. دو ترن با سرعت ۸۰ کیلومتر در ساعت به طرف یکدیگر حرکت می‌کنند. فاصله‌ی دو ایستگاه ۱۶۰ کیلومتر است. بنابراین آن‌ها درست در وسط راه در نقطه‌ای که از دو ایستگاه به یک فاصله است، یکدیگر را ملاقات می‌کنند. از ابتدای شروع حرکت ترن‌ها تا زمان ملاقات آن‌ها روی هم یک ساعت طول می‌کشد، بنابراین زنبور مدت یک ساعت در پرواز بوده است و چون سرعت پرواز آن هم ۱۰۰ کیلومتر در ساعت است پس کل مسافتی که زنبور در حال پرواز بوده ۱۰۰ کیلومتر است. آیا درست است؟

دکتر پاسخ مکانیسین را تأیید کرد و گفت:

ـ کاملاً درست است. اما روشی که به کار بردید و جواب مسئله را به این سادگی به دست آوردید، نشان می‌دهد که شما ریاضی‌دان نیستید. یک ریاضی‌دان برای حل این مسئله از سری‌ها استفاده می‌کند، وی یک سری در نظر می‌گیرد که هر جمله‌ی آن یکی از فاصله‌های پیموده شده توسط زنبور است. اما این راه خیلی ساده هم نیست، زیرا تعیین فرمولی که هر یک از فاصله‌ها را بیان کند کار مشکلی است.

تعریف می‌کنند که وقتی این مسئله را برای جان ون‌نیومن ریاضی‌دان بزرگ معاصر مطرح کرده‌اند و از وی خواستند که ظرف چندین ثانیه جواب درست آن‌را پیدا کند، وی این کار را کرد. وقتی از او سؤال شد مسئله را از چه راهی حل کرده است، پاسخ داد که مجموع یک سری نامحدود را حساب کرده است. راجع به نیومن، حکایت می‌کنند که بعضی محاسبات پیچیده‌ی ریاضی را در ذهن خود با همان سرعت ماشین‌های محاسبه‌ی الکترونیکی انجام می‌داده است.

در این شماره با عنوان مسئله‌ی مسابقه، مسئله‌ی زیر از حساب استدلالی آورده شده است:

با جایزه‌ی دو هزار ریال

از طرف: محمود کاشانی مؤلف جزوه‌های «مسائلی نمونه از حساب استدلالی»

مسئله: دو عدد صحیح a و b را چنین تعیین کنید که عبارت (a^2+b^2+1) بر $(a+b)$ و عبارت (a^2+b^2-1) بر $(a-b)$ قابل قسمت باشد.

شرایط تعلق جایزه:

۱. مسئله باید با توجه به تعریف عدد صحیح در نظریه‌ی اعداد (عددهای صحیح مثبت، منفی یا صفر) حل شود.

۲. مسئله باید صددرصد کامل حل شود به‌طوری که شرح هیچ نکته‌ی مبهم یا حالت خاص از قلم نیفتاده باشد.

۳. پاسخ‌ها حداکثر تا روز آخر ماه دی به اداره‌ی مجله‌ی یکان رسیده باشد.

۴. پاسخ‌ها با خط خوانا نوشته شده باشد و روی ورقه‌ی مربوط، نام و نشانی کامل و مخصوصاً دبیرستان و پایه‌ی تحصیلی حل کننده ذکر شده باشد.

تذکر ـ مسئله‌ی فوق حالت خاصی از مسئله‌ی زیر است. می‌توانید آن‌را به صورت کلی حل کنید: به ازای چه مقادیر صحیح (مثبت، منفی یا صفر) از اعداد a و b عبارت

$(a^2+b^2+2nab+1)$ بر $(a+b)$ و عبارت

$(a^2+b^2+2nab-1)$ بر $(a-b)$ بخش‌پذیر است.

در شماره‌ی ۴۲، مجله به مقاله‌های جالب زیر می‌پردازد:

خواص مثلث شبه قائمه

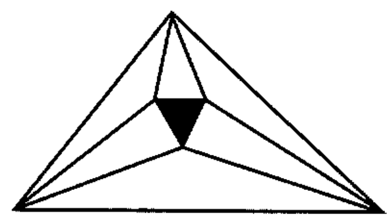
Pseudo rectangle triangle

تهیه از: جعفر آقایانی چاوشی

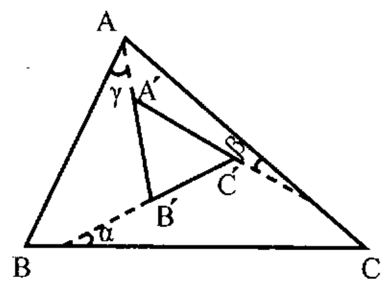
مثلثی که تفاضل دو زاویه‌ی آن یک قائمه باشد، مثلث شبه‌قائمه نامیده می‌شود. اگر مثلث ABC در رأس A شبه‌قائمه باشد، یعنی داشته باشیم: $\hat{B}-\hat{C}=۹۰$، دارای خواص زیر است.

۱. ارتفاع AH واسطه‌ی هندسی است بین BH و CH.

۲. نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه‌ی A با یکدیگر برابرند.



شکل ۱



شکل ۲

۳. ارتفاع AH بر دایره‌ی محیطی مثلث مماس است.

۴. قرینه‌ی رأس A نسبت به ضلع BC بر نقطه‌ی تلاقی ارتفاعات واقع است.

۵. بین اندازه‌های ضلع‌ها و شعاع دایره‌ی محیطی روابط زیر برقرار است:

$b^۲-c^۲=۲aR$ و $b^۲+c^۲=۴R^۲$

۶. اگر ضلع BC از حیث اندازه و وضع ثابت بماند و رأس A در صفحه‌ی مثلث تغییر مکان دهد تا همواره مثلث شبه‌قائمه باقی بماند، مکان A و همچنین مکان نقطه‌ی تلاقی ارتفاعات، یک هذلولی متساوی‌القطرین خواهد بود.

قضیه‌ای درباره‌ی مثلث مورلی

از ماهنامه‌ی ریاضیات آمریکا

ترجمه: غلامحسین بهفرو

اگر هر یک از زاویه‌های مثلث غیر مشخص ABC را به سه قسمت متساوی تقسیم کنیم، از برخورد دوبه‌دو خطوط حاصل مثلثی به دست می‌آید که متساوی‌الاضلاع است (مجموعه‌ی علمی یکان سال). این مثلث به نام مثلث مورلی معروف است (شکل ۱).

مثلث ABC و یک مثلث دلخواه A′B′C′ واقع در داخل آن‌را در نظر می‌گیریم. اگر α، β، γ زاویه‌های بین اضلاع متناظر از این دو مثلث باشند (شکل ۲) روابط زیر برقرار خواهد بود:

$$A'=A+\beta-\gamma \text{ و } B'=B+\gamma-\alpha \text{ و } C'=C+\alpha-\beta$$

حال قضیه‌ی زیر را مطرح می‌کنیم:

قضیه ـ شرط لازم و کافی برای آن‌که اضلاع مثلث مورلی مربوط به مثلث ABC با اضلاع مثلث مورلی مربوط به مثلث A′B′C′ نظیر به نظیر با هم موازی باشند، آن است که داشته باشیم:

$$\frac{B-C}{۳}=\alpha+\frac{B'-C'}{۳}$$

که با در نظر گرفتن جهت زاویه‌ها نتیجه خواهد شد:

$$\alpha+\beta+\gamma=۰$$

به آسانی ثابت می‌شود که شرط فوق، وقتی که A′B′C′ یکی از هشت مثلث زیر باشد، برقرار خواهد بود:

۱. مثلث میانه‌ای مثلث ABC؛

۲. مثلث ارتفاعیه‌ی مثلث ABC؛

۳. مثلثی که از وصل کردن مراکز دایره‌های محاطی خارجی به دست می‌آید؛

۴. مثلثی که از وصل کردن نقاط تماس اضلاع مثلث ABC با دایره‌ی محاطی داخلی به دست می‌آید؛

۵ و ۶ و ۷. مثلث‌هایی که از وصل کردن نقاط تماس اضلاع مثلث ABC با دوایر خارجی آن به دست می‌آید.

۸. مثلثی که از خطوط مماس بر دایره‌ی محیطی مثلث ABC در رأس‌های آن به دست می‌آید.

کارمند بازنشسته‌ی راه‌آهن

کبوتران نامه‌بر

در ملاقات دیگری که بین جانسن مکانیسین بازنشسته‌ی راه‌آهن و دکتر پزشک ناحیه روی‌داد، جانسن داستانی از یک مأموریت جالب که در زمان اشتغال به کار برای وی اتفاق افتاده بود برای دکتر شرح داد. او گفت: روزی از طرف هیأت نقل و انتقالات به وی مأموریت دادند تا به هنگام کار در یکی از ترن‌های عادی دو کبوتر نامه‌بر را با خود ببرد و آن‌ها را دقیقاً در فاصله‌ی ۸۰ کیلومتری یکدیگر و درست به فاصله‌ی یک ساعت از هم رها کند.

خوشبختانه قسمتی از مسیری که راه‌آهن از آن می‌گذشت کاملاً هموار بود. طول این خط آهن مستقیم ۱۶۰ کیلومتری به نحوی بود که ترن‌ها این فاصله را درست در مدت ۲ ساعت می‌پیمودند. در این

فاصله ایستگاه‌هایی وجود داشت و در آن‌ها ترن‌ها به نسبت تعداد مسافرانی که پیاده یا سوار می‌شدند توقف داشتند، اما با کم و زیاد کردن سرعت، این زمان‌های توقف جبران می‌شد و در نتیجه، فاصله‌ی ۱۶۰ کیلومتری درست در ۲ ساعت طی می‌شد.

اما از این که ما فاصله‌ی ۱۶۰ کیلومتری را در مدت ۲ ساعت طی می‌کردیم و سرعت متوسط ما ۸۰ کیلومتر در ساعت بود، نمی‌توان اطمینان داشت که یک فاصله‌ی زمانی یک ساعتی وجود داشته که در آن مسافت ۸۰ کیلومتر پیموده شده باشد.

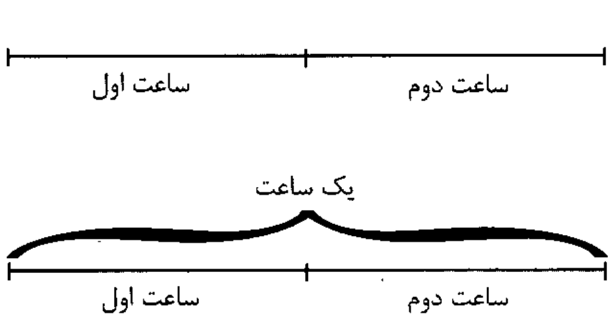
دکتر اظهار داشت: «این چنین نیست. بدون در نظر گرفتن تغییرات سرعت در فاصله‌ی ۲ ساعت به سادگی می‌توان ثابت کرد که در هر حال فاصله‌ای یک ساعتی وجود داشته است که طی آن مسافت ۸۰ کیلومتر پیموده می‌شده است. راه ساده‌ی اثبات این مطلب از این قرار است:

فاصله‌ی دو ساعتی را به دو فاصله‌ی یک ساعتی تقسیم می‌کنیم. فرض می‌کنیم که نه در یک ساعت اول و نه در یک ساعت دوم دقیقاً مسافت ۸۰ کیلومتر را نپیموده باشید، وگرنه مسئله خیلی ساده خواهد بود. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که در یک ساعت اول سرعت متوسط شما کمتر از ۸۰ کیلومتر در ساعت و در دومین ساعت بیش‌تر از این مقدار بوده است. ملاحظه خواهید کرد که اگر به ترتیب عکس فرض کنیم، اثبات فرق نخواهد کرد.

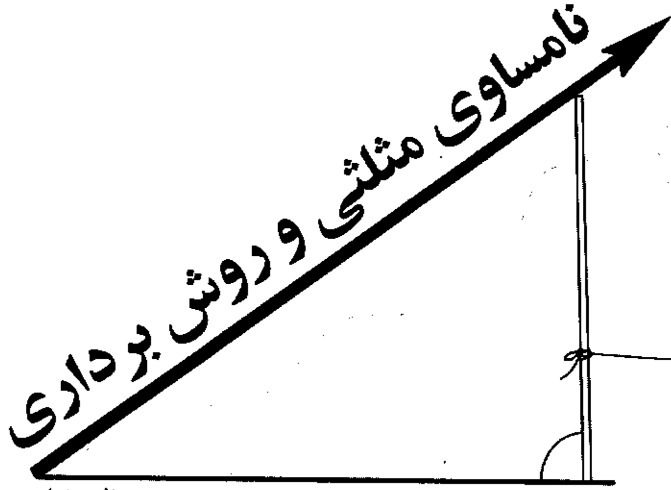
یک فاصله‌ی یک ساعتی مجزا در نظر می‌گیریم و آن را به تدریج در طول مسیر (شکل در پایین است) جا می‌دهیم به‌طوری که ابتدا یک ساعت اول و بعد به تدریج یک ساعت دوم را دربرگرفته باشد. در این یک ساعت مجزا که آن را در طول مسیر پخش کردیم سرعت متوسط همان سرعت مطلوب است. از آن‌جا که این فاصله یک ساعت اول را دربر دارد، در ابتدای آن سرعت متوسط کم‌تر از ۸۰ کیلومتر در ساعت می‌باشد و چون یک ساعت دوم را هم دربرمی‌گیرد، در پایان، سرعت متوسط آن بیش‌تر از ۸۰ کیلومتر خواهد بود.

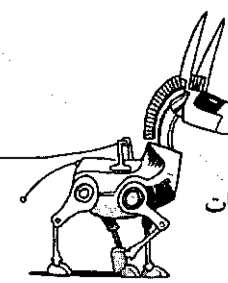
ملاحظه می‌کنیم که در طول یک ساعت سرعت متوسط بین دو مقدار محصور می‌ماند، یکی کم‌تر از ۸۰ کیلومتر در ساعت و دیگری بیش‌تر از آن. بنابراین، بخشی از مسیر وجود دارد که ضمن آن در این فاصله‌ی یک ساعتی سرعت متوسط دقیقاً برابر با ۸۰ کیلومتر در ساعت است و به این صورت حکم ثابت می‌شود.»

مکانیسین بازنشسته حق را به جانب دکتر داد و چنین اظهار داشت: «آنچه گفتید به جای خود درست است، اما این موضوعی نبود که به کار هیئت نقل و انتقالات بیاید. برای این‌که هیچ‌گاه من نمی‌توانستم شروع این فاصله را تعیین کنم و در نتیجه نمی‌توانستم ساعت رها شدن کبوتران را معلوم کنم. فعلاً هم چنانچه مایل باشید مسئله‌ی کوچکی که سراغ دارم مطرح کنم، شاید برای شما جالب باشد.» قرار شد که این مسئله در جلسه‌ی بعد مطرح شود.



نامساوی مثلثی و روش برداری



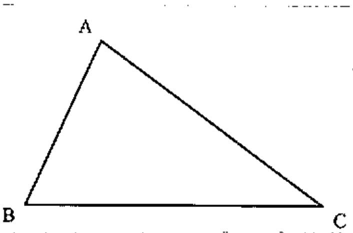


مؤلفان: میلاد محبی و سینا عبدالهی‌نژاد
دانش‌آموزان دوره‌ی پیش‌دانشگاهی

اشاره

در این مقاله قصد داریم شما را با روشی جالب برای اثبات نامساوی مثلثی آشنا کنیم. در این‌جا ابتدا نامساوی مثلثی را مطرح و سپس روش برداری را ارائه می‌کنیم. روش برداری از جمله روش‌های کاربردی در حل مسائل ریاضی است و از آن در همه‌ی شاخه‌های ریاضی استفاده می‌کنند. این روش بیش‌تر برای تعیین ماکزیمم و مینیمم و حل معادلات و اثبات نابرابری‌ها استفاده می‌شود.

قضیه‌ی نابرابری مثلثی: در هر مثلث، مجموع اندازه‌های هر دو ضلع از اندازه‌ی ضلع سوم بزرگ‌تر است. یعنی اگر A، B، C سه نقطه‌ی متمایز ناهمخط باشند، آن‌گاه: $AC+AB>BC$.



حالا می‌خواهیم قضیه را اثبات کنیم، ولی ابتدا چند خاصیت از بردارها را بیان می‌کنیم:

بردارهای $\vec{a}(x_1,y_1)$ و $\vec{b}(x_2,y_2)$ را در نظر بگیرید. خواهیم داشت:

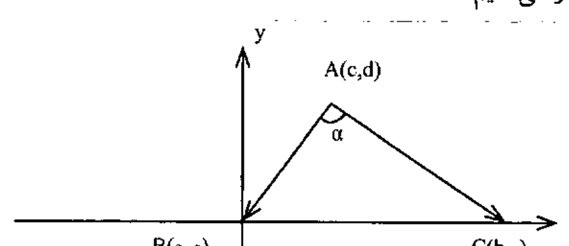
۱) $|\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$ $\qquad |\vec{b}|=\sqrt{x_2^2+y_2^2}$

۲) $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\hat{\alpha}$; (α زاویه‌ی بین دو بردار است)

$\vec{a}.\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$

(منظور از $\vec{a}.\vec{b}$، ضرب داخلی دو بردار است.)

حالا ما مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ را به صورت زیر روی محورهای مختصات قرار می‌دهیم.



اکنون خواهیم داشت:

$$\overline{AB}(-c,-d)\ ,\ \overline{AC}((b-c),-d)$$

$$\overline{AB}.\overline{AC}=|\overline{AB}|.|\overline{AC}|.\cos\hat{\alpha}\Rightarrow\cos\hat{\alpha}=\frac{\overline{AB}.\overline{AC}}{|\overline{AB}|.|\overline{AC}|}$$

می‌دانیم که در هر مثلث، کسینوس هیچ زاویه‌ای برابر ۱ و ۱- نیست[1]. پس همواره: $-1<\cos\alpha<1$

$$\cos\alpha=\frac{\overline{AB}.\overline{AC}}{|\overline{AB}|.|\overline{AC}|}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{(-c\times(b-c))+(-d\times(-d))}{\sqrt{c^2+d^2}\times\sqrt{(b-c)^2+d^2}}$$

$$=\frac{c^2-bc+d^2}{\sqrt{(c^2+d^2)((b-c)^2+d^2)}}\Rightarrow\frac{c^2-bc+d^2}{\sqrt{(c^2+d^2)((b-c)^2+d^2)}}>-1$$

$$\Rightarrow c^2-bc+d^2>-\sqrt{(c^2+d^2)((b-c)^2+d^2)}$$

$$\Rightarrow 2(c^2-bc+d^2)>-2\sqrt{(c^2+d^2)((b-c)^2+d^2)}$$

$$\Rightarrow (c^2+d^2)+(c^2+d^2-2bc)+2\sqrt{(c^2+d^2)((b-c)^2+d^2)}>0$$

$$\Rightarrow (c^2+d^2)+(d^2+c^2+b^2-2bc)+2\sqrt{((b-c)^2+d^2)(c^2+d^2)}>b^2$$

$$\Rightarrow (\sqrt{c^2+d^2})^2+(\sqrt{(b-c)^2+d^2})^2+2\sqrt{((b-c)^2+d^2)(c^2+d^2)}>b^2$$

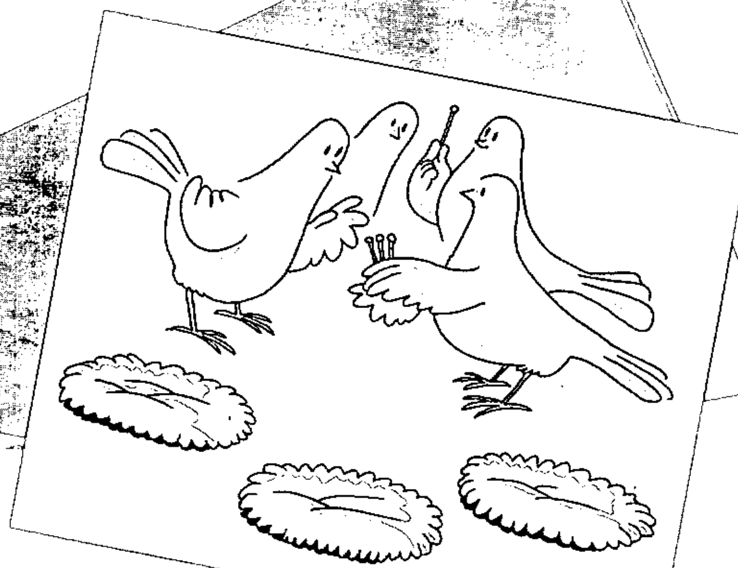
$$(\sqrt{c^2+d^2}+\sqrt{(b-c)^2+d^2})^2>b^2$$

$$\Rightarrow\sqrt{c^2+d^2}+\sqrt{(b-c)^2+d^2}>b\Rightarrow AB+AC>BC$$

برای بقیه‌ی اضلاع یعنی $BC+AB>AC$ و $BC+AC>AB$ نیز به همین صورت حکم اثبات می‌شود.

پی‌نوشت

۱. زیرا در هیچ مثلثی، زاویه‌ای وجود ندارد که اندازه‌ی آن ۰° یا ۱۸۰° باشد.



اصل لانه کبوتری

میرشهرام صدر

اشاره

یوهان پتر گوستاف لوژون دیریکله[1] در ۱۳ فوریه سال ۱۸۰۵ میلادی در شهر دورن[2] آلمان متولد شد و به ترتیب در برلین و برسلاو[3] سمت استادی داشت. او از شاگردان بااستعداد گاوس بود که با مرگ گاوس در سال ۱۸۵۵ به عنوان جانشین وی در دانشگاه گوتینگن[4] منصوب شد که نشانه‌ای از شایستگی‌های اوست. زمانی که او در گوتینگن بود، امید داشت آثار ناتمام گاوس را به پایان برساند، ولی مرگ زود هنگام او در سال ۱۸۵۹ مانع از آن شد.

دلیل شهرت دیریکله در ریاضیات، تحقیقات مهم او در سری‌های فوریه و نظریه‌ی اعداد است. او در سال ۱۸۳۴ اصل «کشوی دیریکله» یا همان اصل «لانه کبوتری» را بیان کرد. این اصلِ بسیار ساده، کاربردهای فراوانی برای حل مسائل مربوط به مجموعه‌های متناهی در نظریه‌ی اعداد، ترکیبات و هندسه دارد. در ادامه، به بیان این اصل می‌پردازیم و کاربرد آن را با ارائه‌ی مسائل گوناگون بررسی می‌کنیم.

اصل لانه کبوتری

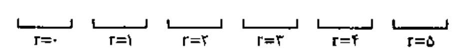
فرض کنید m و n دو عدد طبیعی باشند و داشته باشیم: $m<n$. اگر n شی را در m خانه قرار دهیم (به هر صورت، اعم از این‌که خانه‌ای خالی بماند یا نماند)، آن‌گاه حداقل یکی از این خانه‌ها شامل دو شی یا بیش‌تر خواهد بود.

اکنون اگر n را تعداد کبوترها و m را تعداد لانه‌ها تصور کنیم، اصل لانه کبوتری را خواهیم داشت.

با استفاده از این اصل ساده و بدیهی، می‌توان در مواقع حساس، مسائل مهم و مشکل را حل کرد. در واقع، بدون استفاده از این اصل، اثبات چنین مسائلی، کاری بسیار دشوار خواهد بود.

مثال ۱: A یک زیرمجموعه‌ی ۷ عضوی از اعداد طبیعی است. اگر اعضای A را بر ۶ تقسیم کنیم، ثابت کنید که حداقل دو عضو از این مجموعه، دارای باقی‌مانده‌ی یکسان‌اند.

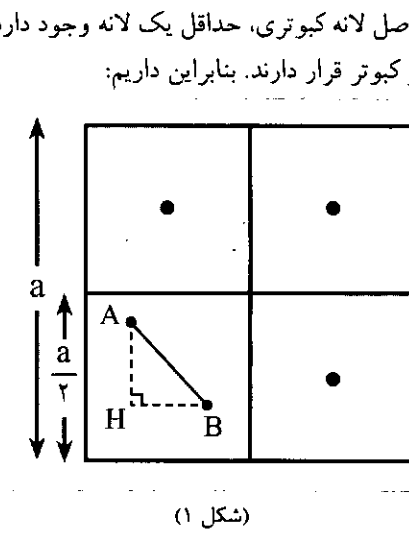
حل: اگر هر یک از اعضای مجموعه‌ی A را بر ۶ تقسیم کنیم، آن‌گاه باقی‌مانده‌ی تقسیم، یکی از عددهای مجموعه‌ی $\{0,1,2,3,4,5\}$ است. حال اگر ۶ لانه به صورت زیر درنظر بگیریم:



و اعضای مجموعه‌ی A را به عنوان ۷ کبوتر تصور کنیم، اگر کبوترها داخل لانه‌ها قرار گیرند، آن‌گاه حداقل یک لانه وجود دارد که در آن دو یا بیش‌تر کبوتر است، یعنی حداقل دو عدد یافت می‌شوند که پس از تقسیم بر ۶، هم باقی‌مانده هستند.

مثال ۲: ۵ نقطه داخل مربعی به ضلع a مفروض‌اند. ثابت کنید که حداقل فاصله‌ی دو نقطه از این ۵ نقطه، کم‌تر از $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ است.

حل: ابتدا مربع را به چهار مربع برابر تقسیم می‌کنیم (شکل ۱)، سپس هر یک از آن‌ها را به عنوان یک لانه تصور می‌کنیم. اکنون اگر ۵ نقطه را ۵ کبوتر در نظر بگیریم که می‌خواهند لانه‌ها را اشغال کنند، آن‌گاه طبق اصل لانه کبوتری، حداقل یک لانه وجود دارد که در آن، دو یا بیش‌تر کبوتر قرار دارند. بنابراین داریم:



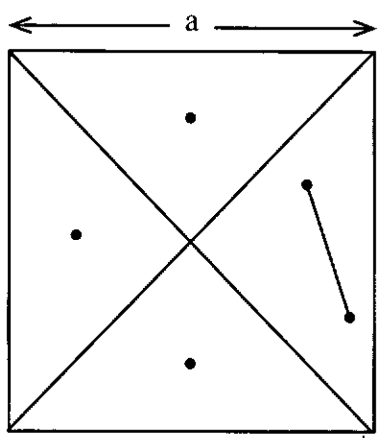
(شکل ۱)

$$\begin{cases} AH < \frac{a}{2} \Rightarrow AH^2 < \frac{a^2}{4} \\ BH < \frac{a}{2} \Rightarrow BH^2 < \frac{a^2}{4} \end{cases} \Rightarrow AH^2 + BH^2 < \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}$$

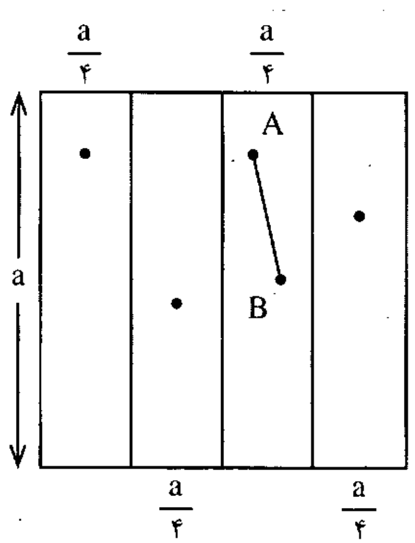
در مثلث ΔABH طبق قضیه‌ی فیثاغورس، داریم $AB^2 = AH^2 + BH^2$؛ بنابراین:

$$AH^2 + BH^2 < \frac{2a^2}{4} \Rightarrow AB^2 < \frac{a^2}{2} \Rightarrow AB < \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

اکنون این سؤال پیش می‌آید که چرا مربع به ضلع a را به این صورت تقسیم‌بندی کردیم، و چرا این مربع را به صورت شکل‌های زیر تقسیم‌بندی نکردیم؟



(الف)



(ب)

پاسخ آن است که در حل یک مسئله، انتخاب روش‌های مجاز و منطقی با توجه به اصول و فرض‌های مسئله با ما است و هر راهی که به نظرمان می‌رسد، می‌توانیم انتخاب کنیم، اما با تقسیم‌بندی مانند شکل الف به حکم مسئله نمی‌رسیم. بدیهی است که با استفاده

از اصل لانه کبوتری، می‌توانیم نتیجه بگیریم که حداقل ۲ نقطه یا بیش‌تر داخل یکی از مثلث‌های قائم‌الزاویه شکل الف قرار خواهند داشت ولی در این صورت فاصله‌ی حداقل ۲ نقطه کمتر از عدد a می‌شود.

چون در مثلث قائم‌الزاویه فاصله‌ی بین هر دو نقطه از وتر کوچکتر است، پس $AB<a$. یعنی حداقل ۲ نقطه یا بیش‌تر وجود دارند که فاصله‌ی آن‌ها کمتر از a است و این نتیجه نیز صحیح است ولی معادل با حکم مثال ۲ نیست.

در تقسیم‌بندی شکل ب به این نتیجه می‌رسیم که حداقل ۲ نقطه یا بیش‌تر یافت می‌شوند که فاصله‌ی آن‌ها کمتر از قطر مستطیل است، یعنی $AB<\frac{\sqrt{15}}{4}a$ و این نیز نتیجه‌ای صحیح است ولی معادل با حکم مثال ۲ نیست.

اگر سؤال این باشد که از کجا فهمیدیم باید مربع را به صورت شکل ۱ تقسیم‌بندی کنیم تا به حکم مسئله برسیم، در جواب می‌توان گفت که این بستگی به تجربه، خلاقیت و ابتکار فراوان در زمینه‌ی حل مسائل اصل لانه کبوتری دارد.

پرسش ۱: اگر ۵ نقطه را داخل مربعی به ضلع ۱۰ در نظر بگیریم، آن‌گاه حداقل دو نقطه وجود دارد که فاصله‌ی آن‌ها کم‌تر از یکی از عددهای زیر است؛ آن عدد کدام است؟

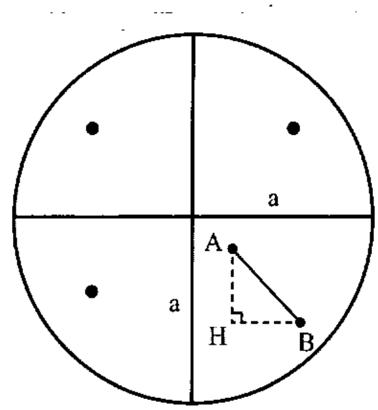
۱) $5\sqrt{2}$ ۲) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

۳) $10\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{5}$

حل: گزینه‌ی ۱ صحیح است، زیرا طبق مسئله‌ی قبل، با فرض $a=10$ داریم:

$$AB<\frac{\sqrt{2}}{2}a,\ a=10\Rightarrow AB<5\sqrt{2}$$

مثال ۳: ۵ نقطه را داخل دایره‌ای به شعاع a در نظر می‌گیریم. ثابت کنید که حداقل فاصله‌ی دو نقطه، کم‌تر از $a\sqrt{2}$ است.



حل: ابتدا دو قطر عمود برهم رسم می‌کنیم و دایره را به چهار قسمت برابر تقسیم می‌کنیم، سپس هر یک از این قسمت‌ها را به عنوان یک لانه تصور می‌کنیم. اکنون اگر ۵ نقطه را ۵ کبوتر در نظر بگیریم که می‌خواهند لانه‌ها را اشغال کنند، آن‌گاه طبق اصل لانه کبوتری، حداقل یک لانه وجود دارد که در آن دو یا بیش‌تر کبوتر قرار دارند. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} AH<a\Rightarrow AH^2<a^2 \\ BH<a\Rightarrow BH^2<a^2 \end{cases}\Rightarrow AH^2+BH^2<2a^2$$

$$\Rightarrow AB^2<2a^2 \quad \Rightarrow AB<a\sqrt{2}$$

پرسش ۲: ۵ نقطه را داخل دایره‌ای به قطر ۸ درنظر می‌گیریم، حداقل دو نقطه وجود دارد که فاصله‌ی آن‌ها کم‌تر از یکی از عددهای زیر است، آن عدد کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{2}$

۳) $4\sqrt{2}$ ۴) $8\sqrt{2}$

حل: گزینه‌ی ۳ صحیح است، زیرا شعاع دایره ۴ است و طبق مسئله‌ی قبل داریم:

$AB<a\sqrt{2}$ و $a=4\Rightarrow AB<4\sqrt{2}$

مثال ۴: داخل جعبه‌ای، ۷ مهره به رنگ‌های سبز، سفید و آبی وجود دارد. این مهره‌ها را در دو جعبه قرار می‌دهیم. ثابت کنید که یکی از این دو جعبه، حداقل دارای دو مهره‌ی هم‌رنگ است.

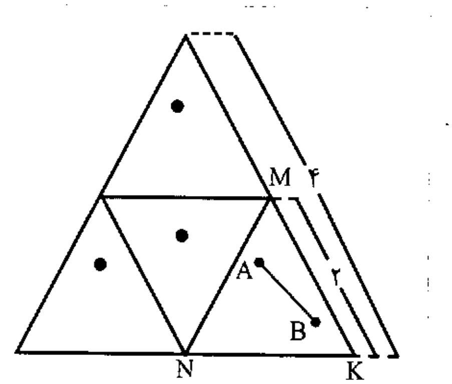
حل: طبق جدول ذیل، می‌توان مهره‌ها را داخل دو جعبه قرار داد. در صورتی که از مرحله‌ی اول تا مرحله‌ی سوم از اصل لانه کبوتری برای جعبه‌ی دوم استفاده کنیم و از مرحله‌ی چهارم تا مرحله‌ی آخر از اصل لانه کبوتری برای جعبه‌ی اول استفاده کنیم، حکم مسئله برقرار است.

در هر مرحله، سه رنگ را به عنوان ۳ لانه و تعداد مهره‌ها را به عنوان کبوترها در نظر می‌گیریم. برای مرحله‌ی اول، ۳ لانه و ۶ کبوتر در جعبه‌ی دوم داریم. اکنون اگر کبوترها داخل لانه‌ها قرار گیرند، حداقل یک لانه وجود دارد که در آن، بیش از یک کبوتر است؛ یعنی در جعبه‌ی دوم، حداقل دو مهره‌ی هم‌رنگ وجود دارد.

مرحله	جعبه‌ی اول	جعبه‌ی دوم
۱	۱	۶
۲	۲	۵
۳	۳	۴
۴	۴	۳
۵	۵	۲
۶	۶	۱

مثـال ۵: ۵ نقطه داخل مثلث متســاوی‌الاضلاع به ضلع ۴ در نظر بگیرید. ثابت کنید حداقل فاصله‌ی دو نقطه، کم‌تر از ۲ است.

حل: ابتدا مثلث را مانند شـکل زیر به چهار قسـمت برابر تقسیم می‌کنیم. سپس هر قسمت را به عنوان یک لانه در نظر می‌گیریم. اگر ۵ نقطه را به عنوان ۵ کبوتر تصور کنیم که لانه‌ها را اشـغال می‌کنند، آن‌گاه طبق اصل لانه کبوتری، حداقل یک لانه وجود دارد که در آن، دو یـا بیش‌تر کبوتر قرار دارد. فرض کنیـم دو نقطه‌ی B و A داخل مثلث ΔMNK قرار داشـته باشـد. چون در مثلث متساوی‌الاضلاع، فاصلـه‌ی بین هـر دو نقطه کم‌تر از طول ضلع این مثلث اسـت، پس $AB<2$.



مثال ۶: اگر در یک مهمانی n نفر حضور داشته باشند، ثابت کنید حداقل دو نفر وجود دارند که تعداد دوسـتان آن‌ها باهم برابر اسـت (اگر A با B دوست باشد، B هم با A دوست است).

حل: کسـی که کم‌ترین دوست را دارد، تعداد دوستانش برابر صفر است و کسی که بیش‌ترین دوست را دارد، تعداد دوستانش برابر $n-2$ اسـت (زیرا او به‌جز خودش و کسـی که دوست ندارد، با بقیه دوست اسـت)؛ بنابراین، تعداد دوستان یک شـخص، می‌تواند یکی از اعداد $0, 1, 2, ..., n-2$ باشد. اگر لانه‌ها را به‌صورت زیر در نظر بگیریم:
(F: به‌منظور تعداد دوست است.)

F=۰   F=۱   F=۲   ...   F=n-۲

ملاحظـه می‌کنیم که $n-1$ لانـه و n کبوتر داریم. پس طبق اصل لانه‌ی کبوتری، حداقل یک لانه وجود دارد که با دو یا بیش‌تر کبوتر اشـغال می‌شود، یعنی دو نفر وجود دارند که تعداد دوستان آن‌ها باهم برابر است.

مثـال ۷: ثابت کنید که هر مجموعه‌ی nعضـوی از اعداد طبیعی مانند A، حداقل دارای یک زیرمجموعه است که حاصل جمع اعضای آن بر n بخش‌پذیر است.

اثبات با برهان خلف: اگر $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$، در این صورت فرض می‌کنیم هیچ‌یـک از 2^n زیرمجموعه‌ی A دارای خاصیت فوق نباشـند، یعنی حاصل جمع اعضایشان بر n بخش‌پذیر نباشد، به‌ویژه هر یک از مجموعه‌های:

$$A_1 = \{a_1\}, A_2 = \{a_1, a_2\}, A_3 = \{a_1, a_2, a_3\}, ..., A_n = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$$

نیز مجموع اعضایشـان مضرب n نیست. پس اعداد زیر هیچ‌یک بر n بخش‌پذیر نیستند:

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, ..., S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

از طرفی می‌دانیم که باقی‌مانده‌ی تقسـیم این n عدد طبیعی بر n یکی از اعداد ۱ تا $n-1$ اسـت (صفر جزء باقی‌مانده‌ها نیست، زیرا بر n بخش‌پذیر نیست). لذا چون n عدد موجود است و $n-1$ باقی‌مانده داریم (از ۱ تا $n-1$) طبق اصل لانه‌ی کبوتری، لااقل ۲ عدد از این n عدد باقی‌مانده‌ی تقسیمشان بر n باهم برابر می‌شود. فرض می‌کنیم S_i و S_j در تقسیم بر n هم باقی‌مانده باشند که $j>i$ پس:

$$S_j - S_i = kn, \quad S_j - S_i = a_{i+1} + ... + a_j$$

و واضح اسـت که $a_{i+1}, ..., a_j$ اعضای A هسـتند و اگر قرار دهیم $B = \{a_{i+1}, ..., a_j\}$ همـواره $B \subset A$ و دیدیم که مجموع اعضای B مضرب n اسـت و این با فرض خلف تناقـض دارد. پس حکم ثابت می‌شود.

پرسش ۳: ۵ نقطه‌ی متمایز از محیط دایره‌ی مثلثاتی مفروض‌اند. در این صورت کدام درست است؟

۱) حداقل دو نقطه، دارای نسبت‌های مثلثاتی برابر هستند.

ب) حداقل دو نقطه، تانژانت‌های برابر دارند.

۳) حداقل دو نقطه، سینوس‌های برابر دارند.

۴) حداقل دو نقطه، نسبت‌های مثلثاتی هم‌علامت دارند.

حل: گزینه‌ی ۴ صحیح اسـت، زیرا اگر هر ربع دایره‌ی مثلثاتی را یـک لانه در نظر بگیریم و هریک از آن ۵ نقطه را کبوتر فرض کنیم، چون تعداد کبوترها از لانه‌ها بیش‌تر است، طبق اصل لانه‌ی کبوتری، حداقل ۲ نقطه از این ۵ نقطه در یک ربع دایره واقع می‌شوند. بنابراین، نسبت‌های مثلثاتی آن‌ها هم‌علامت خواهد بود.

مثال: نشان دهید که هر زیرمجموعه‌ی شش‌عضوی از مجموعه‌ی $S = \{1, 2, 3, ..., 9\}$ حداقـل دو عضو دارد کـه مجموع آن‌ها برابر ۱۰ است.

حل: هر لانه را برای دو عددی از مجموعه‌ی S در نظر می‌گیریم که مجموعشان برابر با ۱۰ است. بنابراین داریم:

۱,۹   ۲,۸   ۳,۷   ۴,۶   ۵

ملاحظـه می‌کنیم کـه تعداد لانه‌ها ۵ تاسـت. هـرگاه ۶ عضو زیرمجموعه‌ای از S را به‌عنوان ۶ کبوتر در نظر بگیریم و قرار باشد که کبوترها لانه‌ها را اشـغال کنند، آن‌گاه طبق اصل لانه‌ی کبوتری، لانه‌ای باید باشـد که در آن حداقل دو کبوتر قرار گیرد، پس در آن

لانه دو عدد وجود دارد که مجموعشان برابر با ۱۰ است.

تعمیم‌یافته‌ی اصل لانه‌ی کبوتری

تا این‌جا معمولاً با مسائلی روبه‌رو شدیم که در آن‌ها تعداد کبوترها یکی بیش‌تر از تعداد لانه‌ها بود، یعنی k لانه و k+۱ کبوتر داشتیم که طبق اصل لانه‌ی کبوتری حداقل در یکی از لانه‌ها دو کبوتر یا بیش‌تر قرار دارد.

اما بدیهی است که اگر تعداد کبوترها از چند برابر تعداد لانه‌ها بیش‌تر باشد، آن‌گاه نتیجه بیش از این است که «حداقل دو کبوتر یا بیش‌تر در یکی از لانه‌ها وجود دارد». برای مثال، فرض کنید ۳ لانه و ۱۰ کبوتر داریم. اگر قرار باشد کبوترها لانه‌ها را اشغال کنند، درحالتی‌که کبوترها در تمام لانه‌ها پخش باشند، به‌طور شهودی ملاحظه می‌کنیم که وقتی ۹ کبوتر لانه‌ها را اشغال کرده باشند، در هر لانه ۳ کبوتر قرار دارد. چنان‌چه کبوتر دهم در هر لانه قرار بگیرد، حداقل در یکی از لانه‌ها ۴ کبوتر یا بیش‌تر قرار خواهند داشت و این تعمیم‌یافته‌ی اصل لانه‌ی کبوتری است.

×××　　××××　　×××

می‌توان تعمیم‌یافته‌ی اصل لانه‌ی کبوتری را به این صورت بیان کرد:

هرگاه m کبوتر وارد n لانه شوند (m>n)، آن‌گاه حداقل $\left[\frac{m-۱}{n}\right]+۱$ کبوتر وارد یک لانه می‌شوند.

مثال ۹: در کلاسی ۲۵ نفر دانش‌آموز حضور دارند. ثابت کنید که حداقل ۳ نفر آن‌ها در یک ماه از سال به‌دنیا آمده‌اند.

حل: ۱۲ ماه سال را به‌عنوان n=۱۲ لانه و m=۲۵ را تعداد کبوترها در نظر می‌گیریم. در این صورت داریم:

$$\left[\frac{m-۱}{n}\right]+۱=\left[\frac{۲۵-۱}{۱۲}\right]+۱=۳$$

بنابراین حداقل ۳ نفر آن‌ها در یک ماه از سال به‌دنیا آمده‌اند.

مثال ۱۰: ۲۶ نفر از دانش‌آموزان یک مدرسه با ۷ خودرو به سمت منزلشان حرکت می‌کنند. ثابت کنید که در هر خودرو حداقل ۴ نفر دانش‌آموز قرار دارند.

حل: ۷ خودرو را به‌عنوان n=۷ لانه و m=۲۶ نفر را به‌عنوان کبوترها در نظر می‌گیریم، در این صورت داریم:

$$\left[\frac{m-۱}{n}\right]+۱=\left[\frac{۲۶-۱}{۷}\right]+۱=۴$$

بنابراین، حداقل ۴ دانش‌آموز در یک خودرو قرار دارند.

مثال ۱۱: در کشوی کمد لباس‌ها چند جفت جوراب قرمز، آبی و سفید وجود دارد. چند لنگه جوراب (بدون آن‌که به رنگ آن‌ها نگاه کنیم) باید از کشو بیرون بیاوریم تا مطمئن شویم که حداقل ۳ جفت جوراب یک‌رنگ برداشته‌ایم؟

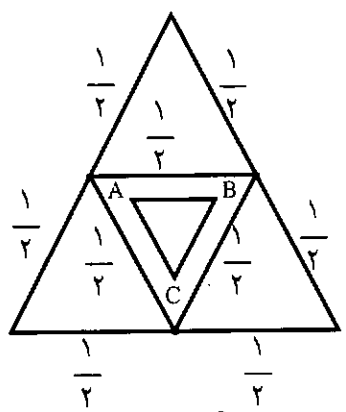
حل: هر رنگ را به‌عنوان یک لانه در نظر می‌گیریم، در این صورت n=۳. از طرفی می‌خواهیم حداقل در یک لانه ۳ جفت جوراب هم‌رنگ یا ۶ لنگه جوراب هم‌رنگ داشته باشیم. بنابراین داریم:

$$\left[\frac{m-۱}{n}\right]+۱=۶ \text{ و } n=۳\Rightarrow\left[\frac{m-۱}{۳}\right]=۵$$

$$\Rightarrow ۵\le\frac{m-۱}{۳}<۶\Rightarrow ۱۵\le m-۱<۱۸\Rightarrow ۱۶\le m<۱۹$$

درنتیجه، حداقل باید ۱۶ لنگه جوراب از کشو برداریم.

مثال ۱۲: در یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع واحد، ۱۰ نقطه به‌طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید سه تا از این نقاط، رؤوس مثلثی با محیط کم‌تر از ۱/۵ واحد هستند.



حل: مطابق شکل، مثلث را به چهار لانه تفکیک می‌کنیم. چنان‌چه ۱۰ نقطه، لانه‌ها را اشغال کنند، آن‌گاه در یک لانه حداقل $\left[\frac{۱۰-۱}{۴}\right]+۱=۳$ نقطه وجود دارد. چنان‌چه این سه نقطه را به‌هم وصل کنیم، مثلث ABC به‌وجود می‌آید که طول هریک از اضلاع آن کوچک‌تر از $\frac{۱}{۲}$ است. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} AB<\frac{۱}{۲} \\ AC<\frac{۱}{۲}\Rightarrow AB+AC+BC<\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲} \\ \quad\Rightarrow P=AB+AC+BC<۱/۵ \\ BC<\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

مثال ۱۳: هرگاه S یک زیرمجموعه‌ی ۷۰ عضوی از اعداد طبیعی باشد، چنان‌چه اعضای S را بر ۲۰ تقسیم کنیم، ثابت کنید حداقل ۴ عضو دارای باقی‌مانده‌ی یکسان هستند.

حل: در صورتی که هر عدد طبیعی را بر ۲۰ تقسیم کنیم، باقی‌مانده‌ی تقسیم آن عدد بر ۲۰ یکی از عددهای زیر خواهند بود.

۱۹ و ... و ۲ و ۱ و ۰ خواهد بود.

چنان‌چه این باقی‌مانده‌ها را، که تعدادشـــان n=۲۰ است، به‌عنوان لانه‌ها و m=۷۰ را تعداد کبوترها در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\left[\frac{m-۱}{n}\right]+۱=\left[\frac{۷۰-۱}{۲۰}\right]+۱=۴$$

درنتیجه، حداقل ۴ عدد در تقسـیم بر ۲۰، باقی‌مانده‌های یکسان دارند.

مثـال ۱۴: هفده نفر بـا نام‌های حمزه، محمود، حسـن و رضا و نام‌های خانوادگی مشیری، احمدی، بصیری و ابوالحسنی در جلسـه‌ای حاضر شـدند. نشـان دهید که حداقل ۲ نفر وجود دارند که نام و نام خانوادگی آن‌ها باهم یکسان است.

راه‌حـل اول: چنان‌چه ۱۷ نفـر را به‌عنوان ۱۷ کبوتر و ۴ خانه با نام‌های زیر را به‌عنوان ۴ لانه در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

حمزه	محمود	حسن	رضا
××××	×××××	××××	××××

$$m=۱۷ \text{ و } n=۴ \Rightarrow \left[\frac{m-۱}{n}\right]+۱=\left[\frac{۱۷-۱}{۴}\right]+۱=۵$$

در نتیجه حداقل ۵ نفر وجود دارند که نام‌های آن‌ها یکسان است. اکنـون چنان‌چه ۴ خانه با عنوان‌های زیـر را به‌عنوان ۴ لانه در نظر بگیریم و قرار باشد حداقل ۵ نفر بالا آن‌ها را اشغال کنند، آن‌گاه طبق اصل لانه‌ی کبوتری داریم:

مشیری	احمدی	بصیری	ابوالحسنی
×	×	××	×

در نتیجـه حداقل ۲ نفر یافت می‌شـوند که یک خانه را پر کنند، یعنی حداقل دو نفر که نام‌های یکسـان دارند، نام خانوادگی آن‌ها نیز یکسان خواهد شد.

راه‌حـل دوم: می‌توان از ابتـدا، ۱۶ لانه با عنوان‌های زیر در نظر گرفت، چنان‌چه ۱۷ نفر به عنوان ۱۷ کبوتر، بخواهند آن‌ها را اشـغال کننـد، آن‌گاه حداقل یک لانه وجـود دارد که در آن حداقل ۲ کبوتر قرار خواهد داشت.

حمزه ابوالحسنی	حمزه بصیری	حمزه احمدی	حمزه مشیری
×	×	×	×
محمود ابوالحسنی	**محمود بصیری**	**محمود احمدی**	**محمود مشیری**
×	×	×	×
حسن ابوالحسنی	**حسن بصیری**	**حسن احمدی**	**حسن مشیری**
×	×	××	×
رضا ابوالحسنی	**رضا بصیری**	**رضا احمدی**	**رضا مشیری**
×	×	×	×

پی‌نوشت

1. Peter Gustav Lejenue Dirichleh
2. Düren
3. Breslau
4. Gottingen

ادامه‌ی مطلب صفحه‌ی ۹

چند رادیکال مسلسل

$$۲+\sqrt{۲}=\sqrt{۲+۲\sqrt{۲^{۲}+۲^{\frac{۳}{۲}}\sqrt{۲^{۳}+۲^{۲}\sqrt{۲^{۴}+۲^{\frac{۵}{۲}}\sqrt{۲^{۵}+\cdots}}}}},$$

$$\frac{\sqrt{۳}}{۲}(۳+\sqrt{۱۳})=\sqrt{۳+۳\sqrt{۳^{۲}+۳^{\frac{۳}{۲}}\sqrt{۳^{۳}+۳^{۲}\sqrt{۳^{۴}+۳^{\frac{۵}{۲}}\sqrt{۳^{۵}+\cdots}}}}},$$

$$\frac{\sqrt{۲}}{۸}(۱+\sqrt{۱۷})=\sqrt{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۱}{۲^{۲}}+\frac{۱}{۲^{\frac{۳}{۲}}}\sqrt{\frac{۱}{۲^{۳}}+\frac{۱}{۲^{۲}}\sqrt{\frac{۱}{۲^{۴}}+\frac{۱}{۲^{\frac{۵}{۲}}}\sqrt{\frac{۱}{۲^{۵}}+\cdots}}}}},$$

$$\frac{۵}{۴}=\sqrt{۱+\frac{۱}{۲}\sqrt{۱+\frac{۱}{۴}\sqrt{۱+\frac{۱}{۸}\sqrt{۱+\frac{۱}{۱۶}\sqrt{۱+\cdots}}}}},$$

$$\frac{۵}{۲\sqrt{۲}}=\sqrt{۲+\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+\frac{۱}{۲^{\frac{۳}{۲}}}\sqrt{۸+\frac{۱}{۴}\sqrt{۱۶+\frac{۱}{۲^{\frac{۵}{۲}}}\sqrt{۳۲+\cdots}}}}},$$

$$\frac{۳۳}{۲۵۶}=\frac{۱}{۴}\sqrt{\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۱۶}\sqrt{\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۶۴}\sqrt{\frac{۱}{۶۴}+\frac{۱}{۲۵۶}\sqrt{\frac{۱}{۲۵۶}+\cdots}}}},$$

$$۳=\sqrt{۴+\sqrt{۴^{۲}+\sqrt{۴^{۳}+\sqrt{۴^{۴}+\sqrt{۴^{۵}+\cdots}}}}},$$

$$۲۴=۲\sqrt{۱۶+۲^{۲}\sqrt{۱۶^{۲}+۲^{۳}\sqrt{۱۶^{۳}+۲^{۴}\sqrt{۱۶^{۴}+\cdots}}}},$$

$$۲۸۸=۴\sqrt{۶۴+۴^{۲}\sqrt{۶۴^{۲}+۴^{۳}\sqrt{۶۴^{۳}+۴^{۴}\sqrt{۶۴^{۴}+\cdots}}}},$$

$$۴۲۲۴=۸\sqrt{۲۵۶+۸^{۲}\sqrt{۲۵۶^{۲}+۸^{۳}\sqrt{۲۵۶^{۳}+۸^{۴}\sqrt{۲۵۶^{۴}+\cdots}}}}.$$

پی‌نوشت

1. Math. Spectrum
2. Yasar Atas

المپیادهای ریاضی لنینگراد ۲

هوشنگ شرقی

مسائل

۱. آیا پنج عدد طبیعی مختلف وجود دارد به گونه‌ای که حاصل‌ضرب دو عدد بزرگ‌تر با مجموع هر پنج عدد برابر باشد؟

۲. عددی چهار رقمی را از وسط به دو عدد دو رقمی تفکیک کرده‌ایم. معلوم شد عدد چهار رقمی بر مجموع دو عدد دو رقمی بخش‌پذیر است. آیا ممکن است مجموع این اعداد برابر ۹۴ باشد؟

۳. نقطه‌ی M وسط ضلع BC چهارضلعی کوژ ABCD قرار دارد و می‌دانیم مقدار زاویه‌ی $A\hat{M}D$ ۱۲۰ درجه است. ثابت کنید:

$$AB+\frac{1}{2}BC+CD\geq DA$$

۴. نقطه‌های D, E, F را روی ضلع‌های AC و AB و BC از مثلث متساوی الساقین ABC $(AB=BC)$ طوری در نظر گرفته‌ایم که طول پاره‌خط‌های راست DE و DF و دو زاویه‌ی $B\hat{A}C$ و $F\hat{D}E$ برابر باشند. ثابت کنید:

$$AE+FC=AC$$

۵. نقطه‌های D و E و F را روی ضلع‌های AC و AB و BC از مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB=BC)$ طوری در نظر گرفته‌ایم که داشته باشیم:

$DE=DF$ و $AE+FC=AC$

ثابت کنید دو زاویه‌ی BAC و FDE برابرند.

اشاره

در برهان شماره‌ی ۶۷ درباره‌ی تاریخچه‌ی المپیاد ریاضی لنینگراد و مسائل آن نوشتیم. در این‌جا سؤالات دیگری از این المپیادها را همراه با راه‌حل آن‌ها ارائه می‌دهیم. این مسائل از المپیاد سال ۱۹۹۳ انتخاب شده‌اند.

۶. ثابت کنید تابع تعریف شده‌ی $f(x)$ در بازه‌ی $(+\infty$ و $0]$ وجود دارد به نحوی که داشته باشیم:

$$f(f(....f(x)...))=\frac{x}{x+1}$$

(از نماد f، ۲۳۹ بار استفاده شده است).

۷. ثابت کنید تابع معین $f(x)$ در بازه‌ی $(+\infty$ و $0]$ وجود دارد به‌گونه‌ای که داریم:

$$f(f(....f(x)...))=1+x+2\sqrt{x}$$

(از نماد f، ۴۵ بار استفاده شده است).

پاسخ‌ها

۱. عددهای مزبور را به ترتیب از بزرگ به کوچک، x_1 و x_2 و x_3 و x_4 و x_5 فرض می‌کنیم و با توجه به فرض مسئله داریم: $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5$ بنابراین:

$$x_1 \ge x_2+1\ ,\ x_2 \ge x_3+1\ ,\ x_3 \ge x_4+1\ ,\ x_4 \ge x_5+1$$

حال اگر داشته باشیم: $x_1x_2 = x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$ نتیجه می‌شود:

$$x_1x_2 = x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$$
$$\Rightarrow x_1x_2 - x_1 - x_2 + 1 = 1+x_3+x_4+x_5$$
$$\Rightarrow (x_1-1)(x_2-1) = 1+x_3+x_4+x_5$$
$$(x_1-1)(x_2-1) \ge x_2x_3$$

و چون $x_1 \ge x_2+1$ و $x_2 \ge x_3+1$ پس:

$$(x_1-1)(x_2-1) \ge x_2x_3$$

در نتیجه داریم:

$$1+x_3+x_4+x_5 \ge x_2x_3$$
$$\Rightarrow 1+x_4+x_5 \ge x_3(x_2-1),\ x_2 \ge x_3+1$$
$$\Rightarrow x_3(x_2-1) \ge x_3^2 \Rightarrow 1+x_4+x_5 \ge x_3^2 \ge (x_4+1)(x_5+2)$$
$$\Rightarrow 1+x_4+x_5 \ge x_4x_5+2x_4+x_5+2$$
$$\Rightarrow x_4x_5+x_4+1 \le 0$$

که این نتیجه غیرممکن است.

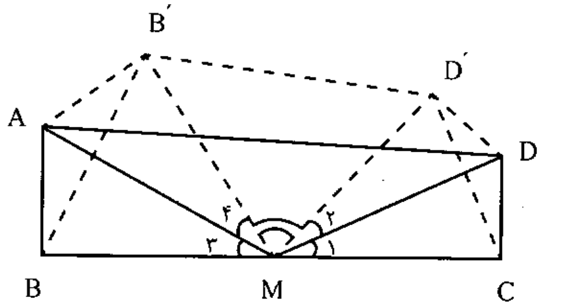
۲. مطابق فرض مسئله داریم: $\overline{ab}+\overline{cd} \mid \overline{abcd}$

و با فرض $\overline{ab}=x$ و $\overline{cd}=y$ خواهیم داشت:

$$\overline{abcd} = d+10c+100b+1000a = (d+10c)+100(b+10a)$$
$$=\overline{cd}+100\,\overline{ab} = y+100x \Rightarrow x+y \mid y+100x$$
$$\Rightarrow (x+y) \mid (x+y)+99x \Rightarrow x+y \mid 99x$$

و با فرض $x+y=94$ نتیجه می‌شود: $94 \mid 99x$ و چون $(94,99)=1$ پس $94 \mid x$ و در نتیجه $x=94$ و $y=0$؛ که این نیز غیرممکن است.

۳. مطابق شکل، داریم. $A\hat{M}D=120^\circ$ بازتاب (قرینه‌ی) C نسبت به MD (C') و قرینه‌ی B نسبت به AM (B') را رسم و C' و B' را به A و D و M وصل می‌کنیم.



بدیهی است که مثلث‌های MCD و $MC'D$ با یکدیگر و مثلث‌های MAB و MAB' نیز با یکدیگر هم‌نهشت‌اند و در نتیجه:

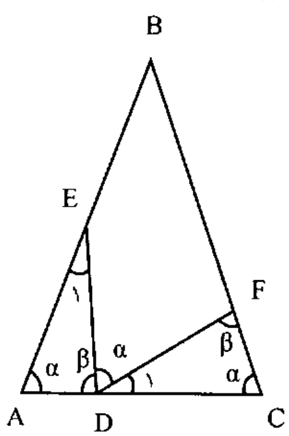
$$MC = MD' = MB = MB' = \frac{1}{2}BC,\ \hat{M}_1=\hat{M}_2,\ \hat{M}_3=\hat{M}_4$$
$$\Rightarrow \hat{M}_1+\hat{M}_2=\hat{M}_3+\hat{M}_4=60^\circ,\ B'\hat{M}C'=60^\circ$$

بنابراین مثلث $B'MD'$ متساوی الاضلاع است و $B'D'=MB'=\frac{BC}{2}$. هم‌چنین مطابق اصل حمار می‌توان نوشت:

$$DD'+D'B'+AB' \ge AD \Rightarrow DC+\frac{BC}{2}+AB \ge AD$$

۴. مطابق شکل، چون AB=AC و $B\hat{A}C=F\hat{D}E$، پس می‌توان فرض کرد که:

$$B\hat{A}C = B\hat{C}A = F\hat{D}E = \alpha$$



بنابراین:

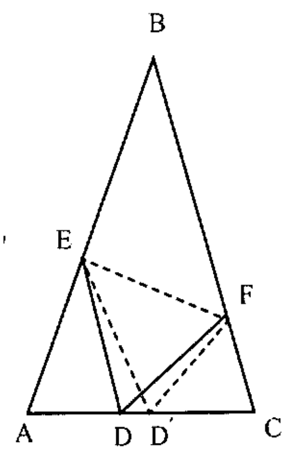
$$F\hat{D}A = A\hat{C}F + D\hat{F}C$$
$$\Rightarrow \alpha + E\hat{D}A = \alpha + D\hat{F}C \Rightarrow E\hat{D}A = D\hat{F}C = \beta$$

و در نتیجه دو مثلث DFC و AED دو زاویه‌ی برابر دارند

و لذا زاویه‌ی سوم آن‌ها نیز برابر است، یعنی: $\hat{D}_1 = \hat{E}_1$ و چون $DF = DE$، پس دو مثلث DFC و ADE و به حالت دو زاویه و ضلع بین هم‌نهشت‌اند و از آن‌جا:

$$DC = AE, FC = AD$$
$$AD + DC = AE + FC \Rightarrow AC = AE + FC$$

۵. این مسئله در واقع عکس مسئله‌ی ۴ است، یعنی در همان شکل و این بار با فرض AE+FC=AC می‌خواهیم ثابت کنیم: $B\hat{A}C = F\hat{D}E$. برای این منظور، نقطه‌ی D' را روی AC طوری در نظر می‌گیریم که $D'C = AE$ و با توجه به فرض $AE + FC = AC = AD' + D'C$ نتیجه می‌شود که $AD' = FC$ و چون $\hat{A} = \hat{C}$، پس مثلث‌های $D'FC$ و $D'AE$ به حالت دو ضلع و زاویه‌ی بین هم‌نهشت‌اند.



پس $D'F = D'E$، یعنی D' از E و F به یک فاصله است و بنابراین روی عمودمنصف EF است. پس D' نقطه‌ی برخورد عمود منصف EF و ضلع AC است و از آن‌جا که طبق فرض DE=DF پس با استدلالی مشابه، D نیز همین نقطه است، یعنی D و D' بر هم منطبق‌اند و AD=FC و DC=AE.

مثلث‌های ADE و CFD هم‌نهشت‌اند و $A\hat{D}E = D\hat{F}C$ و $D\hat{E}A = F\hat{D}C$، بنابراین:

$$F\hat{D}E = 180^\circ - (F\hat{D}C + A\hat{D}E)$$
$$= 180^\circ - (D\hat{E}A + D\hat{F}C) = 180^\circ - (D\hat{E}A + E\hat{D}A) = B\hat{A}C$$

۶. با فرض $f(x) = \frac{ax}{a+x}$ نتیجه می‌شود:

$$f(f(x)) = \frac{a\frac{ax}{a+x}}{a+\frac{ax}{a+x}} = \frac{a^2x}{a^2+2ax} = \frac{ax}{a+2x}$$

$$f(f(f(x))) = f\left(\frac{ax}{a+2x}\right) = \frac{a\frac{ax}{a+2x}}{a+\frac{ax}{a+2x}} = \frac{a^2x}{a^2+3ax}$$

$$\Rightarrow \quad f(f(f(x))) = \frac{ax}{a+3x}$$

و به صورت استقرایی می‌توان حدس زد:

$$\underbrace{f(f(f(\dots(f(x))\dots)}_{n} = \frac{ax}{a+nx}$$

(درستی این حدس را به کمک قضیه‌ی استقرای ریاضی اثبات کنید.)

حال اگر داشته باشیم $f(f(\dots f(x)\dots) = \frac{x}{x+1}$ نتیجه می‌شود:

$$\frac{ax}{a+nx} = \frac{x}{x+1} \quad \Rightarrow \quad ax^2 + ax = ax + nx^2$$

$$\Rightarrow ax^2 = nx^2 \quad \Rightarrow \quad a = n$$

یعنی کافی است که $a = n = 239$ فرض شود، یعنی: $f(x) = \frac{239x}{239+x}$ و با این فرض خواهیم داشت:

$$\underbrace{f(f(\dots f(x)\dots)}_{239} = \frac{x}{x+1}$$

۷. این مسئله مشابه مسئله‌ی قبلی است که برای دانش‌آموزان پایه‌ای دیگر طرح شده بود. راه‌حل آن نیز مشابه مسئله‌ی قبلی است و به‌عنوان تمرین به دانش‌آموزان واگذار می‌شود. برای راهنمایی می‌گوییم که $f(x) = (\sqrt{x} + \frac{1}{a})^2$ فرض شود.

ادب ریاضی

نباید تصور کرد که یگانه عمل ریاضیات که آن را «خادم علوم» نامیده‌اند خدمت به علوم دیگر و تلاش در پیشرفت آن‌هاست؛ بر این دانش نام «ملکه‌ی علوم» نیز اطلاق شده است. اگر در مواردی این ملکه از خواهران ثروتمندتر خود تقاضای کمک می‌کند و انتظار خدماتی دارد، در عوض صاحب کبریا و مناعت عظیمی است و هرگز از هیچ‌کس کمک بی‌اجر و زحمت بی‌مزد نمی‌خواهد و در انتظار لطف و احسان دیگران نیست و آن‌چه را که دریافت می‌کند به‌طور افزون‌تر خواهد پرداخت.

اریک تمپل‌بل

اشاره

در قسمت قبل با مقدمه‌ای از رمزنگاری‌های متعارف در قرون گذشته به‌صورت توصیفی آشنا شدید. در این قسمت و قسمت‌های بعدی با اصول رمزنگاری و رمزگشایی‌های «تک‌الفبایی حاصل از الفبای متعارف مستقیم»، «رمزهای تک‌الفبایی مبتنی بر تبدیل‌های خطی» و «سیستم‌های چندحرفی» و... آشنا خواهید شد. در این قسمت به رمزهای تک‌الفبایی حاصل از الفبای متعارف مستقیم (رمز جای‌گذاری) می‌پردازیم. در آخر نیز برای آزمودن یافته‌ها، چند تمرین خواهیم آورد.

هم‌نهشتی و کاربردهای آن
رمزنگاری و رمزگشایی (۱۲)

سید محمدرضا هاشمی موسوی
hashemi_moosavi@yahoo.com

کلیدواژه‌ها: پیام رمز، رمز جای‌گذاری، دنباله‌ی صریح، دنباله‌ی رمزی، رمزهای تک‌الفبایی، الفبای جای‌گذاری، عدد کلیدی، کلید رمز، فراوانی حروف.

رمزهای تک‌الفبایی حاصل از الفبای متعارف مستقیم (رمز جای‌گذاری)

رمز سزاری

یکی از قدیمی‌ترین سیستم‌های رمزنگاری که می‌شناسیم، سیستمی است که ژول سزار به کار برده و به همین مناسبت به

رمزنگاری ســزاری موســوم است. در این روش رمزنگاری به جای هر حرف از پیام، حرف سوم بعد از آن از حروف الفبای معمولی قرار داده می‌شد. البته سزار الفبای رومی را به‌کار می‌برد، ولی ما شیوه‌ی او را با الفبای امروزی (انگلیسی) شرح خواهیم داد.

فرض کنید بخواهیم پیام زیر را به رمز درآوریم:

«I CAME I SAW I CONQUERED»

ابتدا زیر هر حرف از پیام، حرفی را می‌نویسیم که در حرف‌های الفبا به‌ترتیب معمول، سه حرف پس از آن قرار گرفته است، یعنی به جای I حرف L قرار می‌گیرد، به جای C حرف F، به جای A حرف D و غیره. نتیجه‌ی کار چنین است:

متن اصلی :	I	C	A	M	E	I	S	A	W	I	C	O	N	Q	U	E	R	E	D
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
پیام رمزی :	L	F	D	P	H	L	V	D	Z	L	F	R	Q	T	X	H	U	H	G

بنابراین، پیام رمزی چنین است:

«L FDPH L VDZ L FRQTXHUHG»

نتیجه کاملاً نامفهوم به‌نظر می‌رســد. برای فردی که آن را بررســی می‌کند و از چگونگی تهیه‌ی آن اطلاعی ندارد، ممکن اســت تلاش برای کشــف آن کاملاً بی‌ثمر باشــد. از طرف دیگر برای کســی که رمز را می‌داند، معنای پیام به ســرعت معلوم می‌شود. فقط کافی است به جای هر حرف از پیام رمزی، حرفی را که در حرف‌های الفبا به‌ترتیب معمولی ســه حرف پیش از آن قرار گرفته اســت جایگزین کنیم تا مطلب اصلی فاش شود.

این مثالی از نوعی رمز به نام «رمز جای‌گذاری» اســت که در آن به جای هر حرف از پیام اصلی حرف دیگری گذاشــته می‌شــود. راهی مناســب برای نمایش دادن به این جای‌گذاری اســتفاده از «الفبای جای‌گذاری» است که نشان می‌دهد چه حرفی به جای چه حرف دیگر قرار می‌گیرد. روش ســاختن الفبای جای‌گذاری در رمز ســزاری، عبارت از نوشــتن دنباله‌ی الفبای معمولی در یک سطر و سپس بازنویسی آن در سطر دوم، منتها با شروع از D به جای A است. وقتی که در سطر دوم به حرف آخر الفبا رسیدیم، بعد از حرف Z به‌ترتیب حرف‌های A، B و C را می‌نویسیم، درواقع دنباله‌ی الفبا را به‌صورت چرخه‌ای در نظر می‌گیریم که به‌طور متوالی تکرار می‌شود:

۱) دنباله‌ی صریح :	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	R	....	X	Y	Z
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
۲) دنباله‌ی رمزی :	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	....	A	B	C

سطر اول را دنباله‌ی صریح و سطر دوم را دنباله‌ی رمزی می‌خوانیم. به این ترتیب، عمل به رمز درآوردن را می‌توانیم به این صورت انجام دهیم که به جای هر حرف از پیام صریح، حرف زیرین آن در الفبای جای‌گذاری را قرار دهیم. برای رمزگشایی می‌توانیم به جای هر حرف از پیام رمزی، حرف بالایی آن در الفبای جای‌گذاری را بگذاریم (به بیان ریاضی می‌گوییم عمل از رمز درآوردن معکوس عمل به رمز درآوردن اســت). فرایند رمزنگاری در رمز ســزاری را می‌توان به‌صورت عددی نیز انجام داد. فرض کنید به هر حرف، عددی اختصاص دهیم که مکان آن را در دنباله‌ی معمولی الفبا (شکل صریح) نشان دهد. در این صورت تناظر زیر را خواهیم داشت:

دنباله‌ی صریح :	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	....	X	Y	Z
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
دنباله‌ی رمزی :	۱	۲	۳	٤	٥	٦	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	....	۲٤	۲٥	۲٦

حال برای به رمز درآوردن پیام مورد نظر، به طریق زیر، مرحله به مرحله، عمل می‌کنیم:

۱) به جای هر حرف، عدد متناظر با آن را قرار می‌دهیم.

۲) به هریک از این اعداد ۳ واحد اضافه می‌کنیم.

۳) به جای اعداد حاصل، حروف متناظرشان را می‌گذاریم.

(مرحله‌ی ۱):	I	C	A	M	E	I	S	A	W	I	C	O	N	Q	U	E	R	E	D
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
	۹	۳	۱	۱۳	۵	۹	۱۹	۱	۲۳	۹	۳	۱۵	۱۴	۱۷	۲۱	۵	۱۸	۵	۴
(مرحله‌ی ۲):	۱۲	۶	۴	۱۶	۸	۱۲	۲۲	۴	۲۶	۱۲	۶	۱۸	۱۷	۲۰	۲۴	۸	۲۱	۸	۷
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
(مرحله‌ی ۳):	L	F	D	P	H	L	V	D	Z	L	F	R	Q	T	X	H	U	H	G

همان‌طور که انتظار داشتیم، نتیجه همان پیام رمزی است که از پیش به‌دست آمده بود.

تمرین. پیام زیر را که با رمز سزاری به رمز درآمده است، از رمز درآورید.

۱. FRZDUGV GLH PDQB WLPHV EHIRUH WKHLU GHDWKV

الفبای متعارف مستقیم

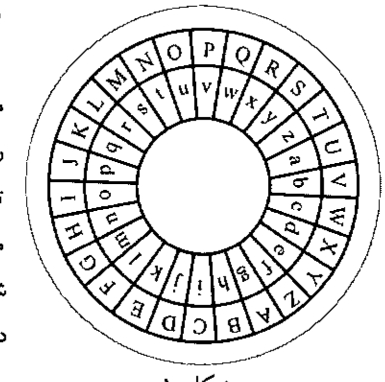
نمی‌دانیم چرا سـزار عدد ۳ را به‌عنوان میزان انتقال دنباله‌ی رمزی نسـبت به دنباله‌ی صریح انتخاب کرد. او می‌توانست هر عددی را برای این منظور به‌کار ببرد، فقط کافی بود که از پیش با طرف مکاتبه‌ی خود درباره‌ی چگونگی به رمز درآوردن، قراری گذاشـته باشـد. درواقع، به فرض یک قرارداد مناسـب، میزان انتقال می‌تواند در هر پیام با پیام دیگر فرق داشـته باشـد. برای مثال، می‌توان قرار گذاشت که طبق طرحی، به هر پیام یک عدد نسـبت داده شـود و باقی‌مانده‌ی این عدد به یک عدد ثابت مانند ۲۶ (تعداد حروف الفبای لاتین)، میزان انتقال یعنی مقدار تغییر مکان گرفته شـود. برای مثال، چنین عددی ممکن اسـت به یکی از این ویژگی‌ها مختص شـود: به تعداد کلمات هر پیام، شماره‌ی پیام و تاریخ ماهی که پیام فرستاده می‌شود، عددی که از یک فرایند به‌دست می‌آید که اصلاً ربطی به آن مکاتبه ندارد.

در هر صورت با داشـتن این عدد، الفبای جایگزین می‌تواند سـاخته شـود و هم در به رمز درآوردن و هم در از رمز درآوردن به کار رود. یک الفبای جای‌گذاری که در آن هم دنباله‌ی صریح و هم دنباله‌ی رمزی از الفبای معمولی گرفته شـده باشـد (به این ترتیب که دنباله‌ی رمزی پس از مقدار مشخصی تغییر مکان به دست آمده باشد). «الفبای متعارف مستقیم» خوانده می‌شود.

در فراینـد عـددی معادل می‌توان گفت: C=P+K؛ که در آن K، مقدار تغییر مکان، عددی اسـت که باید به P، معادل عددی هر حرف زبان صریح، اضافه شـود تا C، جانشـین رمزی آن، به‌دسـت آید. اگر مقدار تغییر مکان K باشـد، آن‌گاه حرف A از دنباله‌ی صریح مقابل حرفی از دنباله‌ی رمزی واقع است که متناظر با (K+۱) است.

با ابزاری سـاده به سـرعت می‌توان الفبای متعارف مسـتقیم را تشـکیل داد. این ابزار از دو دایره‌ی هم‌مرکز ساخته می‌شود که در پیرامون هریک از آن‌ها، حرف‌های الفبا به‌ترتیب نوشته شده‌اند (مطابق شکل ۱).

حلقه‌ی بیرونی دنباله‌ی صریح و حلقه‌ی درونی که قابل چرخیدن است، دنباله‌ی رمزی است. اگر مقابـل A از حلقه‌ی بیرونی، حرف متناظر (K+۱) از حلقه‌ی درونی را قرار دهیم، الفبای جای‌گذاری را که میزان انتقال آن K باشـد، خواهیم داشـت (شکل (۱) برای حالت K=۶ رسم شده است). جالب توجه اسـت که سـال‌ها پیش، ارتش آمریکا ابزار مشـابهی را به‌کار می‌برد. الفبایی که این ابزار تولید می‌کرد، با الفبای متعارف مستقیم این تفاوت را داشت که دنباله‌ی رمزی در آن به‌ترتیب وارونه نوشته شـده بود. چنیـن دنباله‌ای «دنباله‌ی متعارف وارونه» و الفبایی که ایـن دنباله با قرار گرفتن در مقابل دنباله‌ی صریح معمولی تولید می‌کند «الفبای متعارف وارونه» نامیده می‌شود.



شکل ۱

اگر از دایره برای سـاختن الفبای متعارف مسـتقیم اسـتفاده کنیم، آن‌گاه انتخـاب هریک از ۲۶

الفبای متعارف مستقیم با قرار دادن دایره‌ی درونی در وضع مناسب امکان‌پذیر می‌شود. چنین امکانی را «ویژنر»[1] رمزنگار فرانسوی به طریقی دیگر فراهم آورد. او در یک مربع حرف‌های الفبا را نوشت، به این طریق که در بالاترین سطر، دنباله‌ی معمولی الفبا را نوشت و در هر سطر متعاقب آن، دنباله‌ای را نوشت که از انتقال دنباله‌ی قبلی به اندازه‌ی یک حرف به سمت چپ به دست می‌آمد. با قرار دادن الفبای معمولی به‌عنوان دنباله‌ی صریح در بالای مربع، هر الفبای متعارف مستقیم از ترکیب دنباله‌ی صریح با یک سطر مناسب در مربع، قابل حصول بود. هریک از این الفباها به‌راحتی با اولین حرف دنباله‌ی رمزی آن معین می‌شد (شکل ۲).

صریح

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A
C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B
D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C
E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D
F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E
G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F
H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G
I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H
J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I
K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y

رمزی

توجه: این مربع اساس سیستم‌هایی است که هریک از آن‌ها را بیان خواهیم کرد.

درباره‌ی قراری که برای تعیین میزان انتقال گذاشته می‌شود، نکته‌ای را باید متذکر شویم. واضح است که اگر طبق قرار ما عدد تعیین‌کننده‌ی کلید رمز پیام بتواند مضربی از ۲۶ باشد، مرتکب اشتباه شده‌ایم، زیرا چنین عددی در تقسیم بر ۲۶ باقی‌مانده‌ای برابر صفر خواهد داشت و درنتیجه پیام باید به زبان معمولی نوشته شود. بنابراین، قرار ما باید به گونه‌ای باشد که طبق آن نتوان عدد ۲۶ (یا هر مضربی از آن) را به‌عنوان میزان انتقال به‌کار برد؛ اگر از فرایندی که قرار است طبق آن میزان انتقال معلوم شود چنین عددی به‌دست آید، باید در این قرار مشخص شده باشد که چه عددی جانشین آن شود.

هر سیستم رمزنگاری دو اصل اساسی دارد: سیستم کلی و کلید ویژه.

«فرایند کلی مورد استفاده و جزئیات نحوه‌ی استفاده از آن فرایند کلی را سیستم کلی و مشخص‌کننده‌ی جزئیات نحوه‌ی استفاده از این فرایند را کلید ویژه می‌نامند.» برای مثال در رمزنگاری سزاری از یک الفبای متعارف مستقیم با کلید ویژه‌ی ۳ استفاده می‌شود. از آن‌جا که در این سیستم تنها یک الفبای جای‌گذاری به‌کار می‌رود، نتیجه را «رمز تک‌الفبایی» می‌نامند.

تمرین

۱) یک الفبای متعارف مستقیم با میزان انتقال ۷ بسازید و پیام زیر را به رمز درآورید:

THE FAULT DEAR BRUTUS IS NOT IN OUR STARS BUT IN OURSELVES.

۲) پیام رمزی زیر را با دانستن آن که الفبای متعارف مستقیم آن با میزان انتقال ۱۱ است، از رمز درآورید.

ESPCP TD L ETOP TY ESP LQQLTCD ZQ XPY HSTNS ELVPY LE ESP QWZZO WPLOD ZY EZ QZCEFYP.

پاسخ‌ها

۱) AOL MHBSA KLHY IYBABZ PZ UVA PU VBY ZAHYZ IBA PU VBYZLSCLZ.

۲) THERE IS A TIDE IN THE AFFAIRS OF MEN WHICH TAKEN AT THE FLOOD LEADS ON THE FORTUNE.

پی‌نوشت

۱. Vigenére

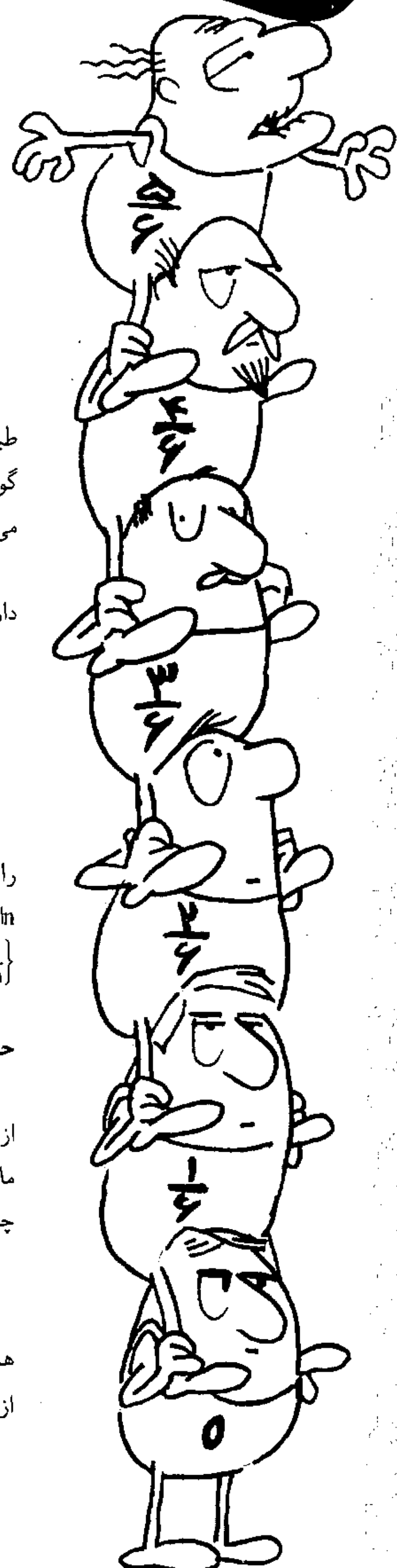
این چند سطر مربوط به انتهای مقاله‌ی قسمت (۱۱) در مجله‌ی رشد برهان شماره‌ی ۶۸ است که به علل اشکالات چاپی، حذف شده بود:

«فارغ‌التحصیلان ریاضیات پیشرفته در ارتش‌ها و دستگاه‌های اطلاعاتی؛ کارطراحی سیستم‌های رمزی، و شکستن رمزهای حریف به‌کارگیری انواع دستگاه‌های رمزنگار رایانه‌ای، و طراحی سیستم‌های کدینگ مشغول‌اند.

امروزه رمزهای دستی و قراردادی، جای خود را به سیستم‌های پیچیده‌ی دیجیتالی و نوآوری‌هایی در زمینه‌های رمزهای مخابراتی و ارتباطی داده‌اند.»

دنباله

احمد قندهاری



یک دنباله، تابعی است که دامنه‌ی آن مجموعه‌ی اعداد طبیعی باشد و به هریک از مقادیر برد آن، یک جمله‌ی دنباله گویند. در واقع، مقادیر برد چنین تابعی، جمله‌های دنباله را تولید می‌کند.

برای مثال، تابع $\underset{N\to\mathbb{R}}{f(x)}=\frac{n}{n+۱}$ یک دنباله است. در این دنباله داریم:

$$f(۱)=\frac{۱}{۲},\ f(۲)=\frac{۲}{۳},\ f(۳)=\frac{۳}{۴},\ \dots,\ f(n)=\frac{n}{n+۱},\ \dots$$

پس جمله‌های این دنباله عبارت است از:

$$\frac{۱}{۲},\frac{۲}{۳},\frac{۳}{۴},\dots,\frac{n}{n+۱},\dots$$

جمله‌ی اول دنباله را با $a_۱$ و جمله‌ی دوم را با $a_۲$ و جمله‌ی سوم را با $a_۳$ و ... و جمله‌ی nام دنباله‌دار را با a_n نشان می‌دهیم. به جمله‌ی nام، جمله‌ی عمومی دنباله هم می‌گوییم. و خود دنباله‌ها را با $\{a_n\}$ یا $\left\{a_n=\frac{n}{n+۱}\right\}$ یا $\left\{\frac{n}{n+۱}\right\}$ نشان می‌دهیم.

حدّ دنباله و دنباله‌ی همگرا

می‌گوییم دنباله‌ی $\{a_n\}$ دارای حدّ L است $(L\in\mathbb{R})$ هرگاه به ازای هر $\varepsilon\rangle ۰$ عدد طبیعی M وجود داشته باشد، به طوری‌که از مرتبه‌ی مانند $n\geq M$ داشته باشیم $|a_n-L|\langle\varepsilon$. این گفته را با نمادهای ریاضی چنین نشان می‌دهیم.

$$\forall\varepsilon\rangle ۰\ \exists M\in N: n\geq M\Rightarrow |a_n-L|\langle\varepsilon$$

در این صورت می‌گوییم دنباله همگراست یا دنباله به عدد L همگراست و می‌نویسیم $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L$ برای یافتن عدد طبیعی M، باید از نامساوی $|a_n-L|\langle\varepsilon$ شروع کرد تا به نامساوی $n\geq M$ رسید. عمل

رسیدن از $|a_n-L|<\varepsilon$ به $n \ge M$ یک جست‌وجو و بررسی است و پس از یافتن M باید بتوان از $n \ge M$ به نامساوی $|a_n-L|<\varepsilon$ رسید. در واقع، روابط حل باید برگشت‌پذیر باشد.

مسئله‌ی ۱: با استفاده از تعریف حدّ دنباله ثابت کنید که حدّ دنباله‌ی $\left\{\frac{n+2}{n}\right\}$ عدد ۱ است.

یعنی: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{n}=1$

حل: برای این کار باید ثابت کنیم:

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists M\in N: n\ge M \Rightarrow \left|\frac{n+2}{n}-1\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{n+2}{n}-1\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{n+2-n}{n}\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{2}{n}\right|<\varepsilon\Rightarrow \frac{2}{n}<\varepsilon \Rightarrow \frac{n}{2}>\frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow n>\frac{2}{\varepsilon}$$

چون (ε) عدد مثبتی است پس $\frac{2}{\varepsilon}$ هم مثبت است، ولی ممکن است $\frac{2}{\varepsilon}$ عدد طبیعی نباشد، در حالی‌که $\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$ حتماً عدد طبیعی است، اما ممکن است از $\frac{2}{\varepsilon}$ کمتر باشد، لذا $M=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]+1$ را در نظر می‌گیریم.

حال که عدد طبیعی M را پیدا کردیم باید بتوانیم از $n\ge M$ به نامساوی $\left|\frac{n+2}{n}-1\right|<\varepsilon$ برسیم. اگرچه این قسمت از حل ضروری نیست، ولی برای درک بهتر، آن را می‌نویسیم.

$$n\ge M=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]+1 \Rightarrow n\ge\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]+1\Rightarrow n>\frac{2}{\varepsilon}\Rightarrow \frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{n}<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{2}{n}\right|<\varepsilon\Rightarrow\left|\frac{n+2-n}{n}\right|<\varepsilon\Rightarrow\left|\frac{n+2}{n}-1\right|<\varepsilon$$

این اعمال را برگشت‌پذیری می‌گوییم. چنانچه در یافتن M درست عمل کنیم نیازی به حل برگشت‌پذیری وجود ندارد.

قضیه: اگر دنباله‌ی $\{a_n\}$ همگرا باشد، حدّ آن یکتاست.

دنباله‌ی واگرا

اگر دنباله‌ی $\{a_n\}$ به عدد حقیقی L همگرا نباشد، دنباله را واگرا گوییم. مثلاً دنباله‌های $\{(-1)^n\}$ و $\{\sqrt{n}\}$ و $\{n^2\}$ و $\{\sin n\}$ واگرا هستند. اگر بخواهیم ثابت کنیم یک دنباله واگراست، کافی است ثابت کنیم حدّ دنباله نمی‌تواند یک عدد حقیقی مانند L باشد.

مسئله‌ی ۲: ثابت کنید دنباله‌ی $\{\sqrt{n+1}\}$ واگراست.

حل: فرض می‌کنیم این دنباله به عدد حقیقی L همگرا باشد، یعنی $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+1}=L$ آن‌گاه به تناقض می‌رسیم. برای اثبات این حدّ باید بگوییم:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists M\in N: n\ge M\Rightarrow|\sqrt{n+1}-L|<\varepsilon$$

$$|\sqrt{n+1}-L|<\varepsilon\Rightarrow -\varepsilon<\sqrt{n+1}-L<\varepsilon\Rightarrow L-\varepsilon<\sqrt{n+1}<L+\varepsilon$$

$$\sqrt{n+1}<L+\varepsilon\Rightarrow n+1<(L+\varepsilon)^2\Rightarrow n<(L+\varepsilon)^2-1$$

معنای نامساوی $n<(L+\varepsilon)^2-1$ این است که وقتی $n\to\infty$، n از عدد حقیقی $(L+\varepsilon)^2-1$ کوچک‌تر است، یعنی اعداد طبیعی از بالا کران‌دارند که غیر ممکن است. بنابراین، حدّ دنباله‌ی این مسئله نمی‌تواند عدد حقیقی L باشد، پس دنباله واگراست.

اعمال اصلی روی دنباله‌ها

قضیه: اگر در دو دنباله‌ی $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ داشته باشیم $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L_1$ و $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=L_2$، آن‌گاه داریم:

۱) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=L_1\pm L_2$

۲) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n . b_n)=L_1 . L_2$

۳) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{L_1}{L_2} \qquad L_2\neq 0$

دنباله‌ی کران‌دار

۱. دنباله‌ی $\{a_n\}$ را از بالا کران‌دار گوییم هرگاه عدد حقیقی M_2 وجود داشته باشد به طوری‌که برای هر $n\in N$ داشته باشیم:

$a_n\le M_2$

۲. دنباله‌ی $\{a_n\}$ را از پایین کران‌دار گوییم، هرگاه عدد حقیقی M_1 وجود داشته باشد، به طوری‌که برای هر $n\in N$ داشته باشیم:

$a_n\ge M_1$

اگر دنباله‌ای هم کران بالا داشته باشد و هم کران پایین، دنباله را کران‌دار گوییم. برای مثال دنباله‌ی $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ کران‌دار است، زیرا کران بالای آن ۱ و کران پایین آن صفر است. یا مثلاً دنباله‌ی $\{\sin n+\cos n\}$ کران‌دار است، زیرا کران بالای آن $\sqrt{2}$ و کران پایین آن $-\sqrt{2}$ است.

دنباله‌ی صعودی

اگر در دنباله‌ی $\{a_n\}$ برای هر $n\in N$ داشته باشیم $a_{n+1}\ge a_n$، دنباله را صعودی گوییم. برای مثال دنباله‌ی $\{\sqrt{n+2}\}$ صعودی است.

دنباله‌ی نزولی

اگر در دنباله $\{a_n\}$ برای هر $n\in N$ داشته باشیم $a_{n+1}\le a_n$، آن‌گاه دنباله را نزولی گوییم، مانند دنباله‌ی $\{-n+5\}$.

مثال: نشان دهید که دنباله‌ی $\left\{\frac{n}{n+4}\right\}$ صعودی است.

حل: باید ثابت کنیم که برای هر $n\in N$، داریم: $a_{n+1}\ge a_n$

$$a_{n+1}\ge a_n \Rightarrow \frac{n+1}{n+5}\ge\frac{n}{n+4}$$

دو طرف نامساوی را در مقدار مثبت $(n+4)(n+5)$ ضرب می‌کنیم.

$$(n+4)(n+1)\ge n(n+5)\Rightarrow n^2+5n+4>n^2+5\Rightarrow 4>0$$

همواره درست است.

قضیــه: هر دنباله‌ی همگرا کران‌دار اســت، ولی عکس این قضیه همواره درست نیست.

قضیــه: دنباله‌ی $\{f(n)\}$ را در نظر می‌گیریم. اگر تابع با ضابطه‌ی $f(x)$ به ازای $x \geq 1$ مشتق‌پذیر باشد، در این صورت داریم:

الف) اگر $f'(x) \geq 0$، آن‌گاه دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ صعودی است.

ب) اگر $f'(x) \leq 0$، آن‌گاه دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ نزولی است.

مثال: نشان دهید که دنباله‌ی $\left\{\frac{-n+2}{2n+3}\right\}$ نزولی است.

حل:

$$x = n \geq 1,\ f(x) = \frac{-n+2}{2n+3} \Rightarrow f'(x) = \frac{-7}{(2n+3)^2} < 0$$

درنتیجه دنباله نزولی است.

نکات دنباله

۱- اگــر بخواهیم که بدانیــم عدد m چندمین جملــه‌ی دنباله‌ی $\{a_n\}$ اســت، بایــد معادله‌ی $a_n = m$ را با توجــه به این‌که $n \in N$ است، حل کنیم.

۲- اگــر بخواهیم که بدانیــم دنباله‌ی $\{a_n\}$ چند جمله‌ی منفی یا چند جمله‌ی مثبت دارد، باید نامعادله‌های $a_n < 0$ یا $a_n > 0$ را حل کنیــم. با تعیین علامت، محدوده‌ی جواب بــا توجه به این‌که $n \in N$ است، به دست می‌آید.

مثال: دنباله‌ی $\{n^2 - 6n - 187\}$ چند جمله‌ی منفی دارد؟

حل:

$$n^2 - 6n - 187 < 0,\ n^2 - 6n - 187 = 0 \Rightarrow n = 3 \pm \sqrt{9+187}$$

$$n = 3 \pm 14 \Rightarrow \begin{cases} n = -11 \\ n = 17 \end{cases} \xrightarrow{\text{با توجه به تعیین علامت}} -11 < n < 17,\ n \in N$$

$\Rightarrow 1 \leq n \leq 16 \Rightarrow$ این دنباله ۱۶ جمله‌ی منفی دارد.

۳- قضیه‌ی فشار: اگر در سه دنباله‌ی $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ برای nای به بعد داشتــه باشیم $a_n \leq c_n \leq b_n$ و $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$ آن‌گاه $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$.

مسئله‌ی ۳: به کمک قضیه‌ی فشار، حدّ دنباله‌ای $\left\{\frac{2^n}{n!}\right\}$ را وقتی $n \to \infty$ بیابید.

حل:

$$a_n = \frac{2^n}{n!} \quad n \in N,\ a_n > 0$$

$$0 \leq a_n = \frac{2^n}{n!} = \frac{\overbrace{2\times2\times2\times\ldots\times2}^{n}}{1\times2\times3\times\ldots\times n} \leq 2\times1\times1\times\ldots\times\frac{2}{n} = \frac{4}{n}$$

$$0 \leq a_n \leq \frac{4}{n},\ \lim_{n\to\infty}(0) \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

۴ـ اگــر $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ و بــرای هر عدد صحیــح مثبت x تابع f تعریف شده باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = L$.

۵ـ بــه کمک حدّ بعضی از توابع می‌توان حــدّ بعضی از دنباله‌ها را پیدا کرد.

مسئله‌ی ۴: حدّ دنباله‌ی $\left\{\frac{2n^4+n+1}{2n^3+n^4}\right\}$ را وقتی $n \to \infty$ بیابید.

حل: اگــر $x \geq 1$ و $f(x) = \frac{2x^4+x+1}{2x^3+x^4}$ را در نظر بگیریم، وقتی $x \to +\infty$، داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^4+x+1}{2x^3+x^4} \sim \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^4}{x^4} = 2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{2n^4+n+1}{2n^3+n^4} = 2$$

نکته:

$$n \to \infty,\ n \in N: \log n < n < n^p < k^n < n! < n^n,\ P > 0,\ k > 1$$

مثال:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^4}{3^n} = 0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n!} = 0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0$$

آزمون ۱: دنباله‌ی $\left\{\sqrt[3]{2n-n^2}\right\}$ کدام ویژگی را دارد؟

۱) نزولی و همگراست ۲) صعودی و همگراست

۳) صعودی و واگراست ۴) نزولی و واگراست

حل: گزینه‌ی ۴.

زیرا:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{2n-n^2} = -\infty,\ a_1 = 1,\ \forall n \in N,\ a_n \leq 1$$

آزمون ۲: کدام یک از دنباله‌های زیر یکنوا و بی‌کران است؟

۱) $\{\sin n + \cos n\}$ ۲) $\left\{\cos\frac{n\pi}{2}\right\}$

۳) $\left\{\sqrt[5]{n^5+5n}\right\}$ ۴) $\left\{\sqrt[3]{n^3-27n}\right\}$

حــل: گزینه‌ی ۳؛ گزینه‌های ۱ و ۲ کــران دارند. گزینه‌ی ۱ یکنوا نیست.

دنباله یکنوا است.

$$x = n \geq 1,\ f(x) = \sqrt[5]{x^5+5x} \Rightarrow f'(x) = \frac{5x^6+5}{5\sqrt[5]{(x^5+5x)^4}} > 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[5]{n^5+5n}=\infty$$

دنباله بی‌کران است.

آزمون ۳: چندمین دنباله‌ی $\{n^3+n\}$ برابر ۲۲۲ است؟

۱) جمله‌ی نهم ۲) جمله‌ی هشتم

۳) جمله‌ی هفتم ۴) جمله‌ی ششم

حل: گزینه‌ی ۴؛

$$n^3+n=222\Rightarrow n^3+n-222=0\Rightarrow \underbrace{n^3-216}+n-6=0$$

$$(n-6)(n^2+6n+36)+(n-6)=0\Rightarrow (n-6)(\underbrace{n^2+6n+37}_{\Delta<0,\,a>0})=0$$

$$n-6=0\Rightarrow n=6$$

آزمون ۴: دنباله‌ی $\left\{\sqrt{n^2-n}+\sqrt{n^2-1}-2n+\frac{5}{2}\right\}$ همگرا به کدام عدد است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{7}{2}$

حل: گزینه‌ی ۱؛

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-n}+\sqrt{n^2-1}-2n+\frac{5}{2}\right)\sim\lim_{n\to\infty}\left(n-\frac{1}{2}+n-2n+\frac{5}{2}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=2$$

آزمون۵: $t_1=1$ و $t_2=3$ و $t_{n+2}=t_n+t_{n+1}$ مفروض است. $\lim_{n\to\infty}\frac{t_n}{t_{n+1}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{3}+1$ ۲) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

۳) $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ ۴) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

حل: گزینه‌ی ۲؛

$$\lim_{n\to\infty}\frac{t_n}{t_{n+1}}=k\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{t_{n+1}}{t_n}=\frac{1}{k},\ k>0$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{t_{n+2}}{t_{n+1}}=\frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{t_{n+1}+t_n}{t_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{t_n}{t_{n+1}}\right)=1+\lim_{n\to\infty}\frac{t_n}{t_{n+1}}$$

$$=1+k=\frac{1}{k}\Rightarrow k^2+k-1=0\Rightarrow k=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

آزمون ۶: دنباله‌ی $\left\{\cot\left(n\,\mathrm{Sin}\,\frac{\pi}{2n}\right)\right\}$ همگرا به کدام عدد است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) π

حل: گزینه‌ی ۱؛

$$n\to\infty\Rightarrow\mathrm{Sin}\frac{\pi}{2n}\sim\frac{\pi}{2n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\cot\left(n\,\mathrm{Sin}\frac{\pi}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty}\cot\left(n\times\frac{\pi}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty}\cot\frac{\pi}{2}=0$$

آزمون ۷: در دنباله‌ی a_n داریم $a_n=\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots}{4+2+1+\dots}$ ، $\lim_{n\to\infty}a_n$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) ۱ ۴) ۴

حل: گزینه‌ی ۲: صورت و مخرج هردو تصاعد هندسی با قدر نسبت $r=\frac{1}{2}$ هستند.

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{\frac{a_1}{1-r}}{\frac{a_1'}{1-r}}=\frac{\frac{1}{1-\frac{1}{2}}}{\frac{4}{1-\frac{1}{2}}}=\frac{\frac{1}{\frac{1}{2}}}{\frac{4}{\frac{1}{2}}}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

آزمون۸: دنباله‌ی همگرای a_n به صورت $a_n=2\sqrt{3+2\sqrt{3+2\sqrt{3\dots}}}$ است. این دنباله همگرا به کدام عدد است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

حل: گزینه‌ی ۱؛ فرض می‌کنیم $\lim_{n\to\infty}a_n=L$ ، در این صورت می‌توان نوشت

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}2\sqrt{3+a_n}=2\sqrt{3+\lim_{n\to\infty}a_n}$$

$$\Rightarrow L=2\sqrt{3+L}\Rightarrow L^2=4(3+L)\Rightarrow L^2-4L-12=0$$

$$(L-6)(\underbrace{L+2}_{+})=0\Rightarrow L-6=0\Rightarrow L=6$$

آزمون ۹: چند جمله از دنباله‌ی $\left\{\frac{2n-1}{n}\right\}$ در خارج بازه‌ی $(2-\frac{1}{10},2+\frac{1}{10})$ قرار دارد؟

۱) ۵ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۲۰

حل: گزینه‌ی ۳؛

$$\left|\frac{2n-1}{n}-2\right|\geq\frac{1}{10}\Rightarrow\left|\frac{2n-1-2n}{n}\right|\geq\frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow\left|\frac{-1}{n}\right|\geq\frac{1}{10}\Rightarrow\frac{1}{n}\geq\frac{1}{10}\Rightarrow n\leq 10$$

آزمون ۱۰: برای دنباله‌ی $\left\{\frac{2n}{n-1}\right\}$ داریم: برای هر $\varepsilon>0$، وجود دارد $M\in N$ که: $n\geq M\Rightarrow\left|\frac{2n}{n-1}-2\right|<\varepsilon$,$(n>1)$ در این صورت مقدار M کدام است؟

۱) $\left|\frac{2}{\varepsilon}\right|+2$ ۲) $\left|\frac{2}{\varepsilon}\right|+1$

۳) $\left|\frac{2}{\varepsilon}\right|$ ۴) $\frac{2}{\varepsilon}-1$

حل: گزینه‌ی ۱؛

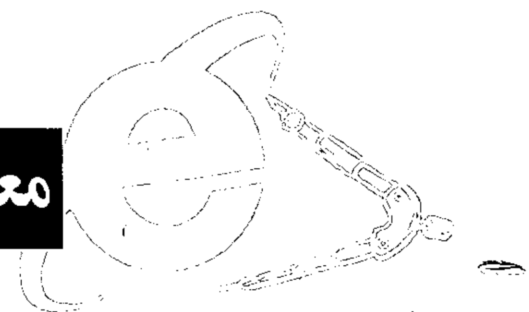
$$\left|\frac{2n}{n-1}-2\right|<\varepsilon\Rightarrow\left|\frac{2n-2n+2}{n-1}\right|<\varepsilon\Rightarrow\left|\frac{2}{n-1}\right|<\varepsilon,\ n>1$$

$$\Rightarrow\frac{2}{n-1}<\varepsilon\Rightarrow\frac{n-1}{2}>\frac{1}{\varepsilon}\Rightarrow n-1>\frac{2}{\varepsilon}\Rightarrow n>\frac{2}{\varepsilon}+1$$

$$\Rightarrow M=\left\lfloor\frac{2}{\varepsilon}\right\rfloor+2$$

معرفی سایت‌های ریاضی جهان

احسان یارمحمدی



نشانی پایگاه اینترنتی: bymath.com

صفحه‌ی اصلی سایت شامل عنوان‌های زیر است. هر یک از این عنوان‌ها دربرگیرنده‌ی زیرعنوان‌هایی است که به تفصیل موضوع‌های ریاضی را شرح داده‌اند.

■ برنامه‌ی دروس (Program of Lessons)

O دروس (Lessons)

■ راهنمای مطالعه (Study Guide)

O حساب (Arithmetic)

O جبر (Algebra)

O هندسه (Geometry)

O مثلثات (Trigonometry)

O توابع و نمودارها (Functions & Graph)

O اصول آنالیز (Principles of Analysis)

O مجموعه‌ها (Sets)

O احتمال (Probability)

O هندسه‌ی تحلیلی (Analytic Geometry)

■ مسائل (Problems)

O دروس (Select Topic)

■ آزمون و امتحانات (Test & Exams)

O دروس (Select Test)

■ پرداخت شهریه (Tuition Payment)

O قواعد (Rules)

O لیست قیمت (Price list)

O ثبت‌نام (Registration)

نشانی پایگاه اینترنتی: ilovemaths.com

سایت I Love Maths برای دانش‌آموزان دوره‌های راهنمایی و متوسطه شامل لطیفه‌ها، معماها و مقالات ریاضی است. صفحه‌ی اصلی این سایت موتور جست‌وجوگری دارد که به کاربر امکان می‌دهد تا بتواند مطلب موردنظر خود را در شبکه‌ی اینترنت یا در این سایت مورد بررسی قرار دهد. در ضمن، صفحه‌ی اصلی این سایت دربرگیرنده‌ی عنوان‌های زیر است که هر یک از آن‌ها حاوی موضوعات متنوعی است.

■ باشگاه ریاضی (Math Clubs)

در این باشگاه ریاضی به زیرعنوان:

(Test your Math Quetient)

برمی‌خوریم که شامل یک پرسش‌نامه‌ی کوچک برای سنجش و آزمایش دانش ریاضی شماست. به یاد داشته باشید که اگر در پاسخ‌گویی به این پرسش‌نامه شکست خوردید، مأیوس و ناامید نشوید.

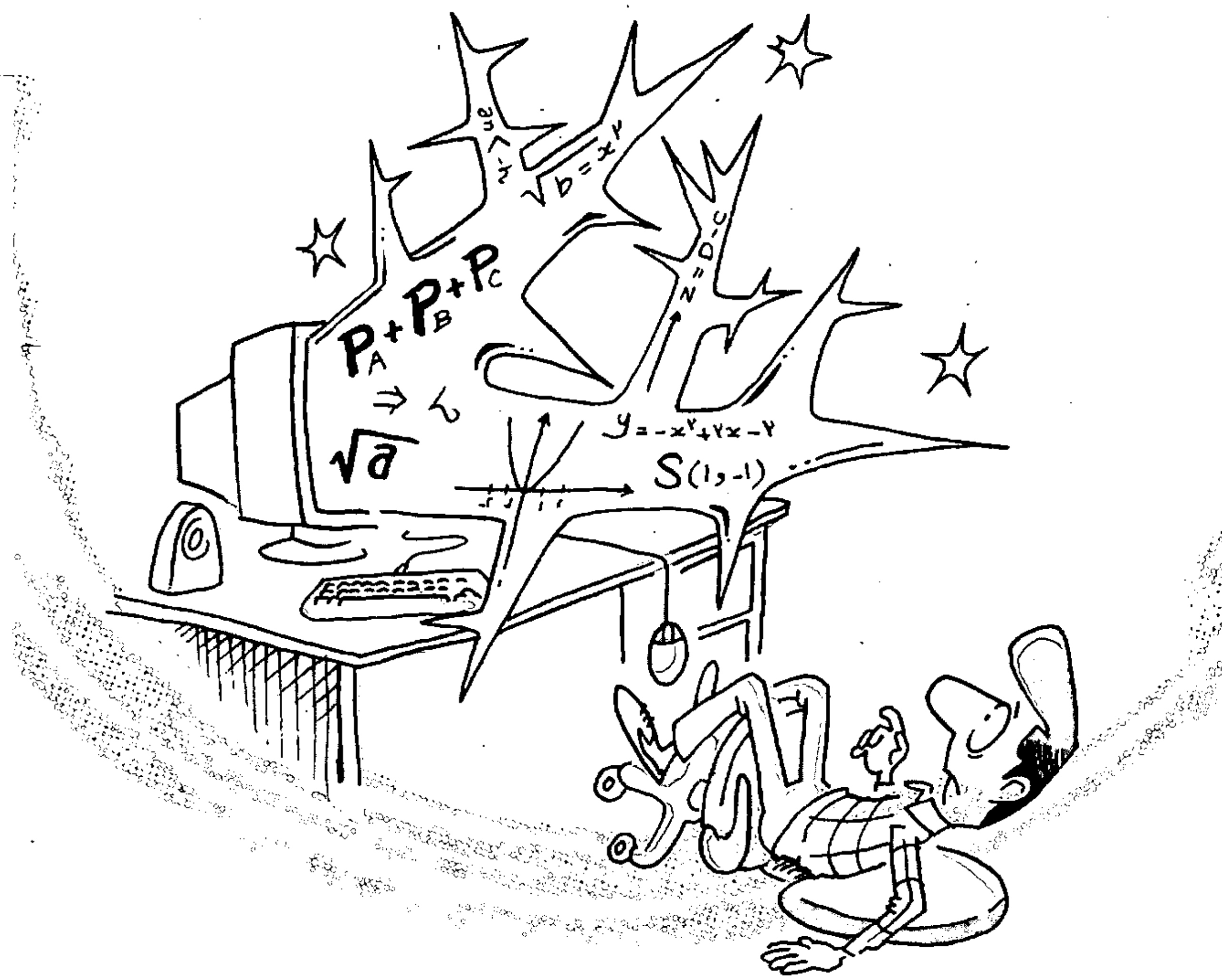
■ کلاس‌ها (Classes)

■ پروفسور تتا (Prof. Theta)

■ تماس با ما (Contact Us)

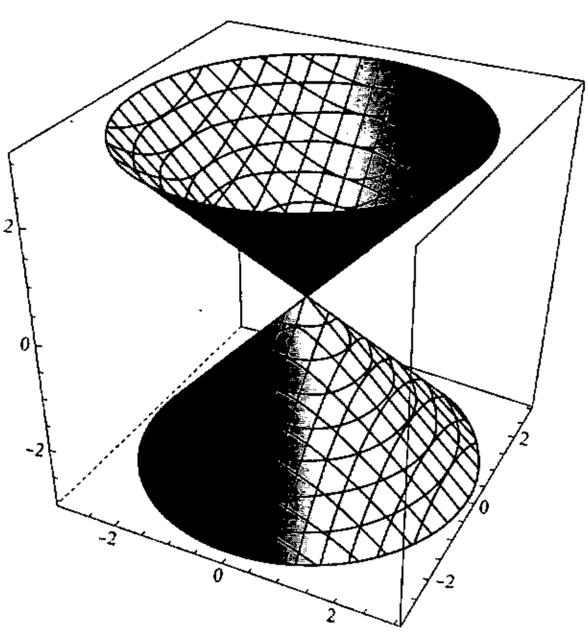
■ کتاب‌های APC (APC Books)

■ کتاب‌های تألیفی ام.ال. آگاروال (Books by M.L. Aggarwal)



آشنایی با بسته‌ی نرم‌افزاری مَتِمَتیکا ۳

Mathematica



مقدمه

یکی از مباحث مهم در درس ریاضیات دوره‌ی دبیرستان، موضوع توابع، اعمال روی توابع و رسم نمودار آن‌هاست. بسته‌ی نرم‌افزاری متمتیکا این قابلیت را دارد که به‌راحتی محاسبات روی توابع را انجام دهد و منحنی یک تابع در یک بازه‌ی مفروض را رسم کند. در این قسمت چگونگی تعریف یک تابع و تعدادی از دستورالعمل‌های رایج برای رسم یک تابع در محیط بسته‌ی نرم‌افزاری متمتیکا با ارائه‌ی مثال‌های مختلف معرفی می‌شوند. باز هم یادآوری می‌کنیم برای اجرای هریک از دستورالعمل‌ها باید دکمه‌های Shift+Enter به‌طور هم‌زمان فشار داده شوند.

معرفی توابع در متمتیکا

فرض کنیم f تابعی برحسب متغیر x باشد. به‌منظور تعریف ضابطه‌ی این تابع در متمتیکا یکی از دو صورت کلی زیر استفاده می‌شود:

f[x_]=….. یا f[x_]:=…..

در طرف دوم تعریفی باید مطرح شود که مطابق آن مقدار تابع f در مقدار مفروض x محاسبه می‌شود. گفتنی است که xیک متغیر ظاهری است و می‌تواند با هر متغیر یا عبارت دیگری جایگزین شود.

مثال ۱: در این مثال دو تابع f و g با ضابطه‌های $f(x)=x^۲$ و $g(x)=۲x^۳$ در محیط متمتیکا تعریف و مقادیر f(۳)، g(-۳) و f(۱)+g(-۲) محاسبه شده‌اند. همچنین تابع f با ضابطه‌ی $f(a)=۳a^۲+۲a-۵$ تعریف و مقدار f(۲)+f(-۲) به‌دست آمده است.

f[x_]:=x^۲

f[۳]

۹

g[x_]:=۲x^۳

g[-۳]

-۵۴

f[۱] + g[-۲]

-۱۵

f[a_]:=۳a^۲+۲a-۵

f[۲] + f[-۲]

-۱۰

مثال ۲: در این مثال ابتدا تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=x^۲+x^۳$ تعریف شده است و به‌دنبال آن f(۲)، f(۲x)، $f(e^x)$ و f(λ) مشخص شده‌اند. توجه کنید که ExP[x] به معنای e^x است.

f[x_]=x^۲+x^۳;

f[۲]

۱۲

f[۲x]

$۴x^۲+۸x^۳$

f[Exp[x]]

$e^{۲x}+e^{۳x}$

f[λ]

$λ^۲+λ^۳$

توابع چندضابطه‌ای نیز در متمتیکا قابل تعریف‌اند. برای این‌کار ضابطه‌ی تابع را به‌همراه شرط مورد نظر به‌صورت زیر منظور می‌کنیم:

f[x_]: = عبارت /; شرط

در این حالت حتماً باید از نماد = : استفاده کرد و پس از معرفی ضابطه‌ی تابع، شرط مورد نظر را بعد از نماد /; قرار دارد.

مثال ۳: در زیر تابع f با ضابطه‌ی

$$f(x)=\begin{cases} x^۲ & x\le ۲ \\ ۸-۲x & x>۲ \end{cases}$$

تعریف شده است:

f[x_]:=x^۲/;x≤۲

f[x_]:=۸-۲x/;x>۲

f[-۴]

۱۶

f[۴]

۰

ملاحظه می‌شود که مقدار f(-۴) از ضابطه‌ی اول و مقدار f(۴) از ضابطه‌ی دوم به‌ترتیب ۱۶ و ۰ به‌دست آمده‌اند.

اعمال روی توابع

اگر f و g دو تابع مفروض باشند، اعمال جمع، تفریق، ضرب و تقسیم این توابع در محیط متمتیکا قابل انجام است. می‌دانیم این اعمال بین f و g به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x),\ x\in D$

$(f\times g)(x)=f(x).g(x),\ x\in D$

$(f/g)(x)=f(x)/g(x),\ x\in D-\{x|g(x)=۰\}$

که در آن‌ها $D=D_f\cap D_g$.

مثال ۴: در زیر چهار عمل اصلی روی توابع f و g با ضابطه‌های $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=x^۲+۲x+۳$ محاسبه شده‌اند:

f[x_]= $\sqrt{x}$;

g[x_]=x^۲+۲x+۳;

h۱[x_]=f[x]+g[x]

$۳+\sqrt{x}+۲x+x^۲$

h۲[x_]=f[x]-g[x]

$-۳+\sqrt{x}-۲x-x^۲$

h۳[x_]=f[x]-g[x]

$\sqrt{x}(۳+۲x+x^۲)$

h۴[x_]=f[x]/g[x]

$$\frac{\sqrt{x}}{۳+۲x+x^۲}$$

مثال ۵: فرض کنیم $f(x)=x^۲-۱$ و $g(x)=۳x^۲+۴x-۷$. در این صورت f+g، f-g، f×g و f/g به‌صورت زیر قابل محاسبه‌اند. در این حالت از دستورهای Factor و Simplify نیز استفاده شده است.

f[x_]:=x^۲-۱

g[x_]:=۳x^۲+۴x-۷

f[x]+g[x]

f[x]-g[x]

Factor[f[x]*g[x]]

Simplify[f[x]/g[x]]

$-۸+۴x+۴x^{۲}$

$۶-۴x-۲x^{۲}$

$(-۱+x)^{۲}(۱+x)(۷+۳x)$

$\frac{۱+x}{۷+۳x}$

هم‌چنین می‌توان ترکیب دو تابع مفروض f و g را نیز در متمتیکا محاسبه کرد. می‌دانیم اگر x عددی در دامنه‌ی g و g(x) مقداری در دامنه‌ی f باشد، آن‌گاه داریم:

$(fog)_{(x)}=f(g(x))$

مثال ۶: در مثال ۴، ترکیب دو تابع f و g به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

h۵[x_]=f[g[x]]

$\sqrt{۳+۲x+x^{۲}}$

h۶[x_]=g[f[x]]

$۳+۲\sqrt{x}+x$

به‌منظور محاسبه‌ی ترکیب دو تابع f و g می‌توان از دستور Com-position به‌صورت زیر استفاده کرد:

I) Composition[f,g]

II) Composition[g,f]

دستور اول همان fog و دستور دوم همان gof را مشخص می‌کند.

مثال ۷: در دستورالعمل‌های زیر دو تابع f و g با ضابطه‌های $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=x^{۲}+۲x+۳$ تعریف شده و سپس fog و gof با به‌کارگیری دستور Composition به‌دست آمده‌اند.

f[x_]= $\sqrt{x}$**;**

g[x_]=x^۲+۲x+۳;

h۱=Composition[f,g];

h۱[x]

$\sqrt{۳+۲x+x^{۲}}$

h۲=Composition[g,f];

h۲[x]

$۳+۲\sqrt{x}+x$

با استفاده از دستور ترکیب توابع می‌توان ترکیب یک تابع با خودش را به هر تعداد بار که مورد نظر باشد محاسبه کرد. برای این کار از دستورالعمل Nest یا Nest List به‌صورت زیر استفاده می‌شود:

Nest [f, عبارت , n]

Nest List [f, عبارت , n]

دستور Nest، n بار متوالی تابع f را تحت ضابطه‌ی مشخص‌شده در عبارت داخل کروشه با خودش ترکیب می‌کند. دستور Nest List همین کار را انجام می‌دهد، ولی تمام محاسبات میانی را از ابتدا تا بار nام فهرست می‌کند.

مثال ۸: در زیر تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=x^{۲}$، ۵ بار با خودش ترکیب شده است.

f[x_]:=x^۲;

Nest[f,x,۵]

$x^{۳۲}$

Nest List[f,x,۵]

$\{x,x^{۲},x^{۴},x^{۸},x^{۱۶},x^{۳۲}\}$

مثال ۹: در زیر تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x+۱}$ تعریف شده و حاصل fofofofof (یعنی ترکیب f با خودش تا ۵ بار) به‌دست آمده است. با مقدار دهی به x می‌توان مقدار این ترکیب را به‌ازای آن مقدار خاص پیدا کرد.

f[x_]= $\sqrt{۱+x}$**;**

Nest[f,x,۵]

$\sqrt{۱+\sqrt{۱+\sqrt{۱+\sqrt{۱+\sqrt{۱+x}}}}}$

رسم نمودار توابع در متمتیکا

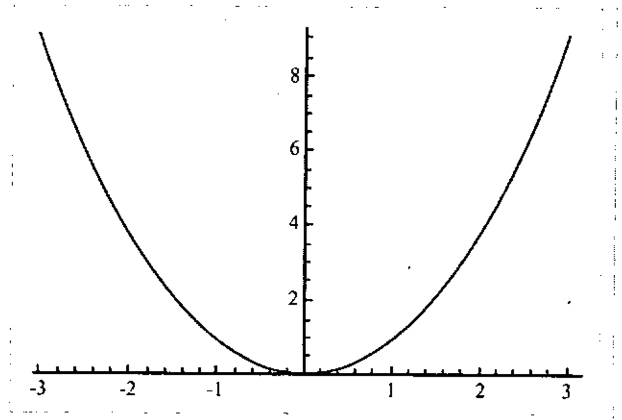
در ادامه، دستورالعمل رسم منحنی یک تابع در محیط متمتیکا معرفی می‌شود. دستور اصلی برای رسم نمودار یک تابع مفروض Plot است که به شکل کلی زیر تعریف می‌شود:

Plot [f[x],{x, x_{min}, x_{max}}]

دستور فوق برای رسم نمودار دو بعدی تابع f در بازه‌ی $x\in[x_{min}, x_{max}]$ به کار می‌رود.

مثال ۱۰: دستور زیر نمودار تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=x^{۲}$ را در $[-۳,۳]$ رسم می‌کند.

Plot [$x^{۲}$,{x, -۳, ۳}]

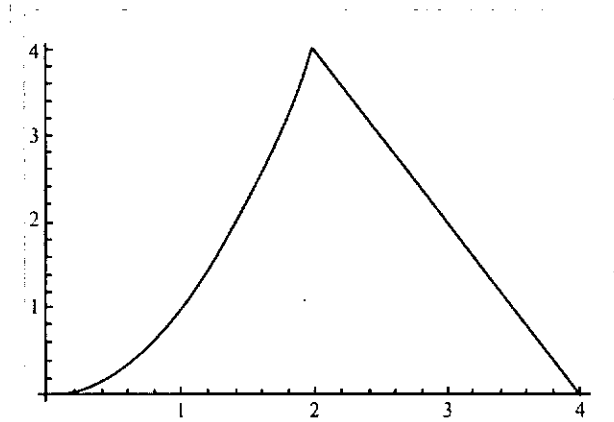


مثال ۱۱: دستور زیر نمودار تابع مثال ۳ را رسم می‌کند:

f[x_]: = $x^{۲}$/ ; x≤۲

f[x_]: = ۸−۲x/ ; x>۲

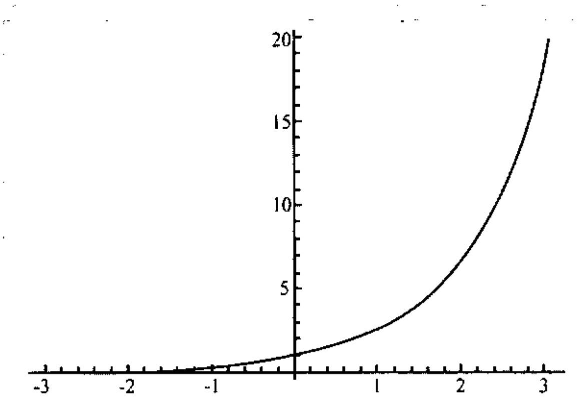
Plot [f[x],{x, ۰, ۴}]



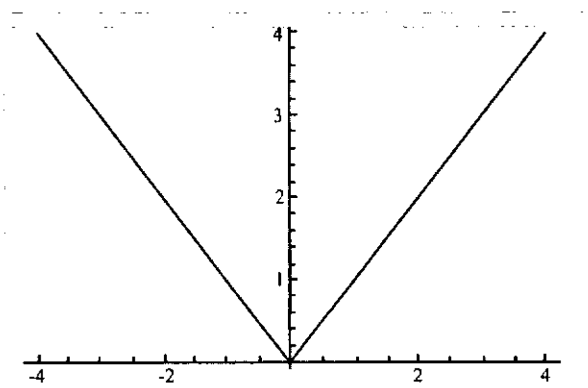
مثال ۱۲: دســتورهای زیر نمودارهای توابع با ضابطه‌های $y=e^{x}$ در بازه‌ی [−۳,۳]، y=|x| در بازه‌ی [−۴,۴] و y=||x|−۱| را در بازه‌ی [−۳,۳] رسم می‌کند. توجه شود که Abs [x] به معنای قدرمطلق x است.

f[x_] = Exp [x];

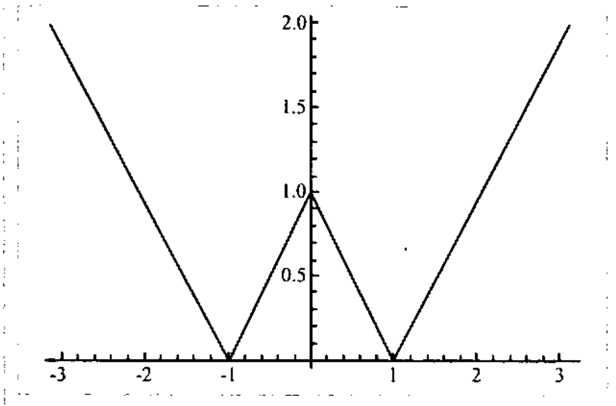
Plot [f[x],{x, −۳, ۳}]



Plot [Abs[x],{x, −۴, ۴}]

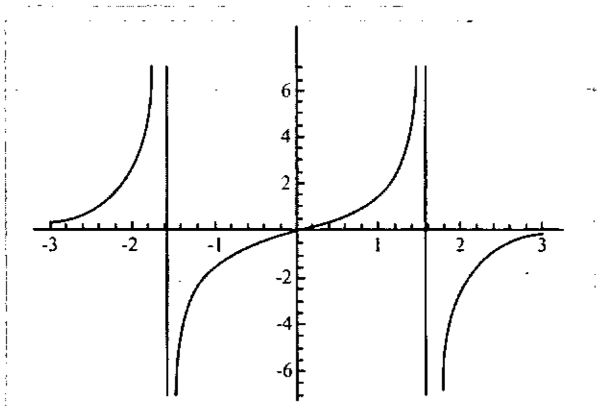


Plot [Abs [Abs[x] −۱],{x, −۳, ۳}]



مثال ۱۳: به منظور رسم نمودار تابع با ضابطه‌ی y=tanx به ازای −۳≤x≤۳ دستور زیر را اجرا می‌کنیم:

Plot [Tan[x],{x, −۳, ۳}]



می‌تــوان نمودار دو تابع را به‌طور هم‌زمان در صفحه‌ی مختصات با رنگ‌های متفاوت رســم کرد. به این منظور از دســتور زیر استفاده می‌کنیم:

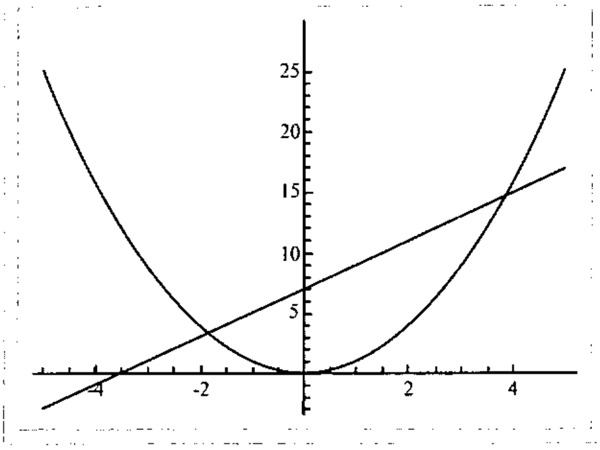
Plot [{f[X], g[x]}, {x, x_{min}, x_{max}}]

این دســتور نمودارهای توابع f و g را در محدوده‌ی x_{min} تا x_{max} در یک صفحه‌ی مختصات رسم می‌کنیم. این دستور قابل تعمیم برای رسم سه یا بیش از سه تابع به صورت کلی زیر است:

Plot [{$f_{۱}$, $f_{۲}$, ...}, {x, x_{min}, x_{max}}]

مثــال ۱۴: به منظور رســم هم‌زمان نمودارهــای دو تابع f و g با ضابطه‌های $f(x)=x^{۲}$ و g(x)=۲x+۷ در [−۵,۵] به صورت زیر عمل می‌کنیم:

Plot [{x^۲, ۲x+۷},{x, −۵, ۵}]



به‌منظور رسم هم‌زمان نمودار چند تابع در یک صفحه‌ی مختصات از دستور Show نیز می‌توان استفاده کرد. در این حالت چون دامنه‌های توابع متفاوت‌اند، با به‌کارگیری یکی از موارد زیر، کاربر می‌تواند تنظیمات موردنظر برای رسم این نمودارها را تغییر دهد. برای تایپ کاراکترهایی چون → می‌توانیم روی گزینه‌ی Insert کلیک و پس از انتخاب special character گزینه‌ی → را در صفحه درج کنیم یا این کاراکتر را از پنجره‌ی Basic Math Input برگزینیم.

۱) PlotRange → Automatic

۲) PlotRange → All

۳) PlotRange → $\{y_{min}, y_{max}\}$

۴) PlotRange → $\{\{x_{mix}, x_{max}\}, \{y_{min}, y_{max}\}\}$

با در نظر گرفتن دستور انتخابی ۱، خود متمتیکا به صورت خودکار تنظیمات مبنایی را برای رســم توابع برمی‌گزیند و آن دسته از نقاطی را کــه مختص عمودی آن‌ها خیلی بزرگ باشــد، در نمودارها حذف می‌کند. دستور ۲ متمتیکا را وادار می‌کند که تمام نقاط نمودارها را در محدوده‌های وارد شده رسم کند. دستور ۳ تنها نقاطی از نمودارها را رســم می‌کند که مختص عمودی آن‌ها در محدوده‌ی بین y_{min} و y_{max} باشد. دستور ۴ نیز تنها نقاطی از نمودارها را رسم می‌کند که مختص افقــی آن‌ها بیــن x_{min} و x_{max} و مختص عمودی آن‌ها بین y_{min} و y_{max} باشــند. به این ترتیب از دســتور Show به شکل کلی زیر برای رسم هم‌زمان چند تابع می‌توان استفاده کرد.

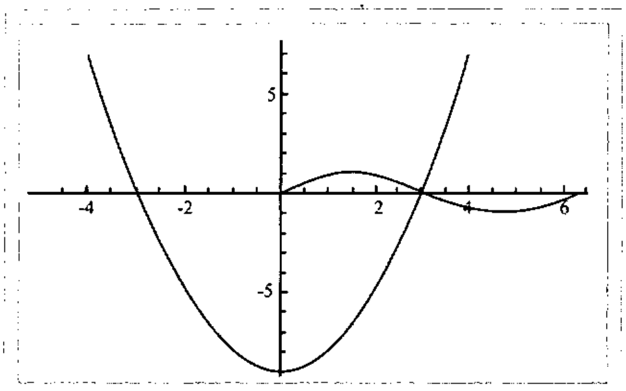
Show [g۱, g۲, ..., PlotRange → ...]

مثال ۱۵: در مثال ذیل، دو تابع با ضابطه‌های $y=x^2-9$ و $y=\sin x$ رسم شــده‌اند. با استفاده از دستور Show به دو صورت زیر آن‌ها را در یک صفحه‌ی مختصات با به‌کارگیری PlotRange رسم می‌کنیم.

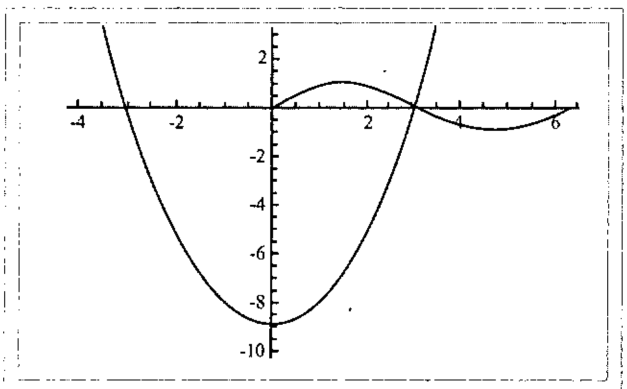
g۱= Plot[x^۲ −۹, {x, −۴, ۴}];

g۲= Plot[sin[x], {x, ۰, ۲π}];

Show [g۱, g۲, PlotRange → All]



Show [g۱, g۲, PlotRange → {−۱۰, ۳}]

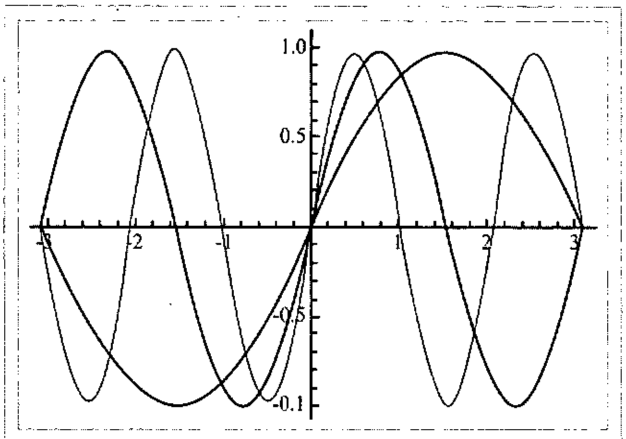


زمانی‌که چند نمودار به‌طور هم‌زمان رســم می‌شوند، متمتیکا این قابلیــت را دارد کــه برای تشــخیص نمودارها آن‌هــا را با رنگ‌ها و اندازه‌های مختلف یا با برچســب‌گذاری و به‌کارگیری خط‌چین‌های گوناگون رسم کند. برای مثال می‌توان با به‌کارگیری دستور PlotStyle نوع ترسیم موردنظر را اعلام کرد. یکی از انواع رایج GrayLevel[x] اســت که در آن x عددی بین صفر و یک اســت. هــر قدر x به یک نزدیک‌تر باشــد شــکل پررنگ‌تر و هر قدر به صفر نزدیک‌تر باشــد کم‌رنگ‌تر رسم می‌شود. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱۶: دستور زیر سه منحنی $y=\sin x$، $y=\sin 2x$ و $y=\sin 3x$ را به ازای $-\pi \le x \le \pi$ با سه سطح رنگ مختلف رسم می‌کند.

Plot [{sin[x], sin [2x], sin [3x]}, {x, −Pi, Pi}]

PlotStyle → {GrayLevel [۰/۲], GrayLevel [۰/۵], GrayLevel [۰/۸]}]

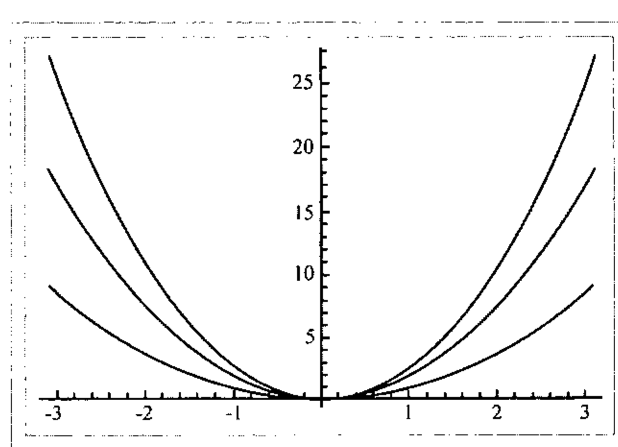


هم‌چنین می‌توان نام رنگ انتخابی برای رسم هر یک از نمودارها را اعلام کرد. به مثال زیر توجه کنید:

مثـال ۱۷: دسـتور زیر منحنـی توابـع $y=x^2$، $y=2x^2$ و $y=3x^2$ را بـه ازای $-3\le x\le 3$، بـه ترتیب با نوع ترسـیم قرمز، سـبز و آبی رسـم می‌کند. شـما در مانیتـور رایانه‌ی خـود می‌توانیـد نمودارها را بـا ایـن رنگ‌ها مشـاهده کنیـد. البتـه رنگ‌های دیگـری چون Pink، Gray، Brown، Yellow و... را نیـز می‌تـوان انتخـاب کرد. دوباره متذکر می‌شـویم که حرف اول نام هر یک از دستورالعمل‌ها و انتخاب‌هـا در متمتیکا باید بزرگ و سـایر حروف باید کوچک تایپ شـوند. البتـه این قانون برای دسـتورالعمل‌های دو کلمـه‌ای نیز باید رعایت شـود. بـرای مثـال در واژه‌ی PlotStyle باید حروف P و S بزرگ و سایر حروف کوچک تایپ شوند. یا برای مثال اگر بخواهیم رنگ یک منحنی قرمز کم‌رنگ باشد باید تایپ کنیم: Light Red

برای انتخاب سـاده‌ی رنگ‌ها در صفحـه‌ی اصلی متمتیکا روی Insert کلیک و گزینه‌ی Color را انتخاب می‌کنیم، سپس در صفحه‌ی رنگ‌ها رنگ موردنظر را برمی‌گزینیم.

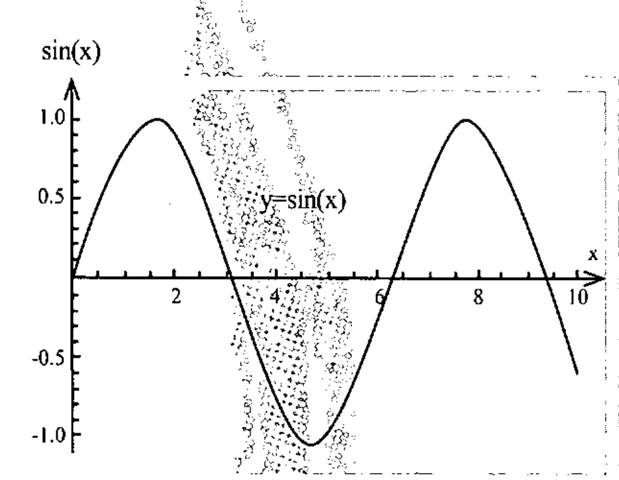
```
Plot [{x², 2x², 3x²}, {x, −3, 3}, PlotStyle → {Red, Green, Blue}]
```



❊ گفتنی اسـت که اگر نوع رنگ‌ها مشخص نشود، خود نرم‌افزار به شـکل خـودکار رنگ‌های مختلفـی را انتخاب می‌کنـد. هم‌چنین می‌توان با برچسـب‌گذاری روی نمودار تابع یا محورهای مختصات، اطلاعات موردنظر را روی شـکل منظور کرد. برای این کار از دستور PlotLabel برای برچسـب‌گذاری نمودار تابـع و AxesLabel برای برچسـب‌گذاری محورهای مختصات اسـتفاده می‌کنیم. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱۸: در دستور زیر منحنی تابع با ضابطه‌ی y=sinx در بازه‌ی [۰, ۱۰] با برچسـب y=sin(x) برای منحنی تابع و برچسب‌های x و sin(x) برای محورهای مختصات رسم شده‌اند.

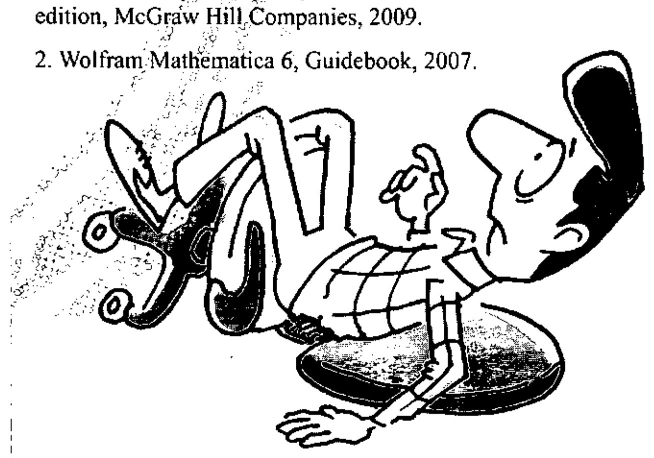
```
Plot [sin[x], {x, 0, 10}, PlotLabel → y= = sin[x], AxesLabel → {x, sin [x]}]
```

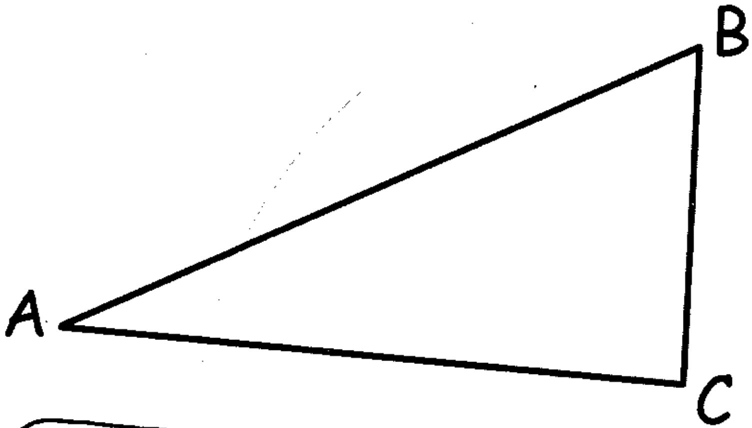


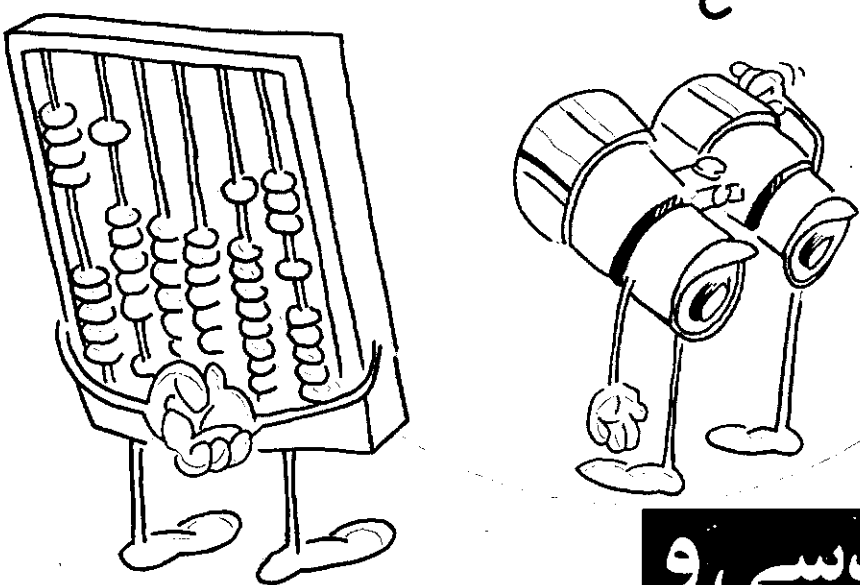
در قسـمت بعد دسـتورالعمل‌های دیگری از بسـته‌ی نرم‌افزاری متمتیکا معرفی خواهند شد.

منابع

1. Mathematica, Eugene Don, Schaum's outline series, second edition, McGraw Hill Companies, 2009.
2. Wolfram Mathematica 6, Guidebook, 2007.







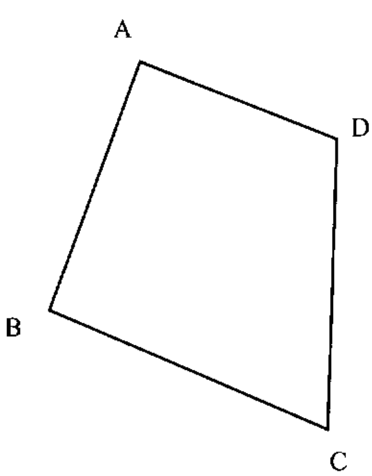
اشاره

به‌منظور استفاده بیشتر دانش‌آموزان از این مقاله، از چند شماره‌ی قبل به حل مسئله‌های هندسه در صفحه (هندسه‌ی مسطحه) پرداختیم. در این شماره ادامه‌ی این مطالب را پی‌می‌گیریم.

رویکرد هندسی و رویکرد جبری در آموزش هندسه ۱۴

محمد هاشم رستمی

مسئله‌ی ۷. چهار نقطه‌ی غیرهمخط A، B، C و D در یک صفحه داده شده‌اند. آیا نقطه‌ای در صفحه‌ی گذرنده بر این چهار نقطه وجود دارد که از این چهار نقطه به یک فاصله باشد؟ در صورتی که چنین نقطه‌ای وجود دارد، شرط وجودش چیست؟

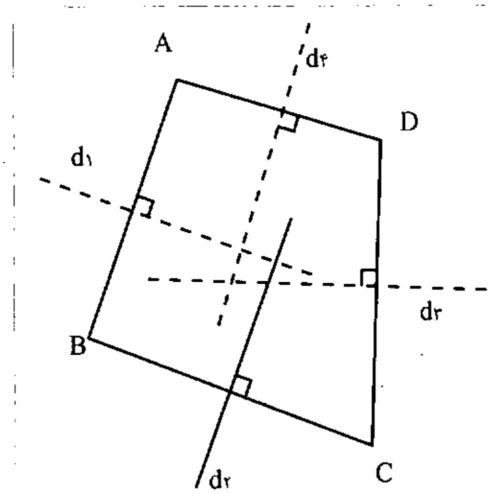


الف) حل به روش هندسی

پاره‌خط‌های AB، BC، CD و DA را رسم می‌کنیم، یعنی در واقع چهار ضلعی ABCD را می‌سازیم. عمود منصف‌های پاره‌خط‌های AB، BC، CD و DA را رسم می‌کنیم و به ترتیب d_1، d_2، d_3 و d_4 می‌نامیم.

در صورتی که این چهارخط همرس باشند، نقطه‌ی همرسی آن‌ها که آن را M می‌نامیم از چهار نقطه‌ی A، B، C و D به یک فاصله است، یعنی داریم:

MA= MB= MC= MD

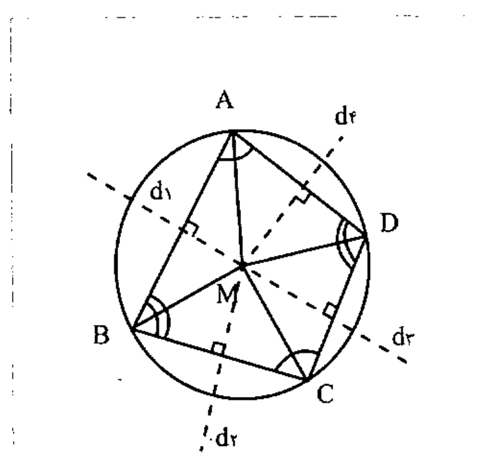


اما در چه صورتی خط‌های d_1، d_2، d_3 و d_4 هم‌رس‌اند؟ در هندسه‌ی ۲، کتاب درسی سال سوم دبیرستان رشته‌ی ریاضی و فیزیک داریم:

قضیه: در هر چهار ضلعی محاطی مجموع هر دو زاویه‌ی روبه‌رو ۱۸۰° است:

$\hat{A}+\hat{C}=\hat{B}+\hat{D}=180^\circ$

نکته: چهار ضلعی را محاطی می‌نامند در صورتی که بر چهار



رأس آن یک دایره بگذرد، یعنی نقطه‌ای مانند M وجود داشته باشد که از چهار رأس آن چهارضلعی به یک فاصله باشد (این نقطه را مرکز دایره‌ی محیطی چهارضلعی می‌نامند و آن را با M، یا O یا هر حرف دیگری نشان می‌دهند).

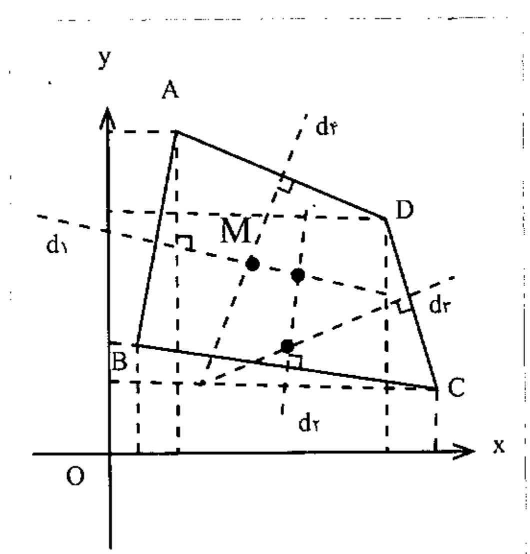
عکس قضیه: هر چهارضلعی که مجموع دو زاویه‌ی روبه‌روی آن ۱۸۰° باشد، محاطی است، یعنی دایره‌ای وجود دارد که از چهار رأس آن می‌گذرد. مرکز این دایره همان نقطه‌ی M، یعنی محل برخورد (نقطه‌ی همرسی) خط‌های d_1، d_2، d_3 و d_4 است.

اثبات این دو قضیه به روش هندسی در کتاب هندسه‌ی ۲ آمده است، بنابراین از اثبات آن صرف‌نظر می‌کنیم. پس می‌توانیم بگوییم شرط لازم و کافی برای آن که چهارضلعی ABCD محاطی باشد، یا به عبارت دیگر نقطه‌ای مانند M وجود داشته باشد که از چهار نقطه‌ی A، B، C و D به یک فاصله باشد (MA= MB= MC= MD) آن است که مجموع هر دو زاویه‌ی روبه‌روی آن ۱۸۰° باشد، یا به بیان دیگر، هر دو زاویه‌ی روبه‌روی آن مکمل یکدیگر باشند.

مربع، مستطیل و ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین از چهارضلعی‌های خاصی هستند که این ویژگی را دارند، یعنی بر چهار رأس آن‌ها یک دایره می‌گذرد. چرا؟ اما متوازی‌الاضلاع و لوزی از چهار ضلعی‌های خاصی هستند که این ویژگی را ندارند، یعنی بر چهار رأس آن‌ها یک دایره نمی‌گذرد. چرا؟

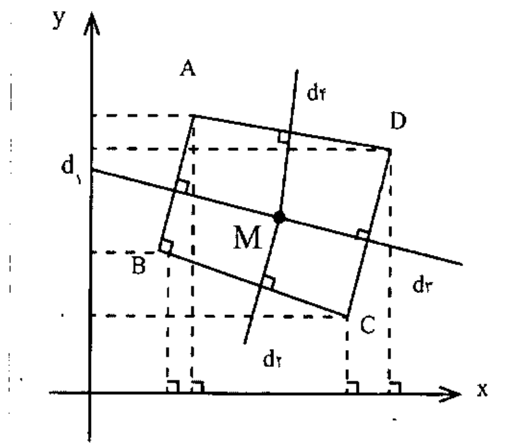
ب) اثبات به روش جبری ـ مختصاتی

دستگاه مختصات قائم xoy را در صفحه‌ی گذرنده بر چهار نقطه‌ی A، B، C و D در نظر می‌گیریم و مختصات این نقطه‌ها در این دستگاه مختصات در حالت کلی را $A=(x_1, y_1)$، $B=(x_2, y_2)$، $C=(x_3, y_3)$ و $D=(x_4, y_4)$ می‌نامیم. پاره‌خط‌های AB، BC، CD و DA را رسم می‌کنیم (در واقع چهارضلعی ABCD



را می‌سازیم) و عمود منصف‌های این پاره‌خط‌ها را به ترتیب d_1، d_2، d_3 و d_4 می‌نامیم. معادله‌ی این عمودمنصف‌ها را می‌نویسیم و همرس

بودن یا نبودن آن‌ها را بررسی می‌کنیم.

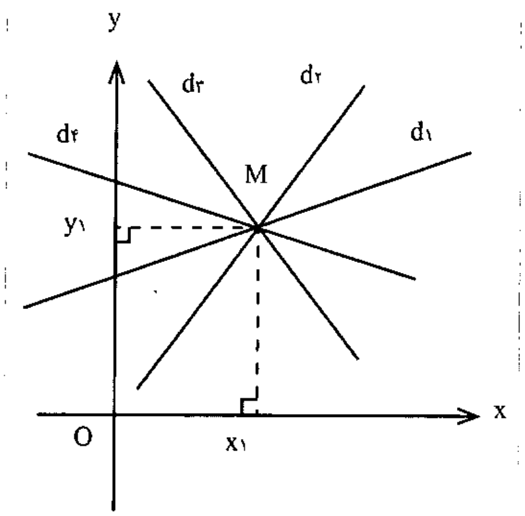


در صورتی کـه این چهار خط همرس باشـند، نقطه‌ای مانند M وجود دارد که از چهار نقطه‌ی A، B، C و D به یک فاصله اسـت، یا به عبارت دیگر، چهارضلعی ABCD محاطی اسـت و در صورتی که چهارخط d_1، d_2، d_3 و d_4 همرس نباشند، نقطه‌ای در صفحه‌ی گذرنده بـر چهـار نقطـه‌ی A، B، C و D وجود ندارد که از ایـن چهار نقطه به یک فاصله باشـد یا به بیانی دیگـر، چهارضلعی ABCD محاطی نیست.

بـرای این‌که همرس بودن یا نبودن خط‌هـای d_1، d_2، d_3 و d_4 را که همان عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های AB، BC، CD و DA هستند بررسی کنیم، نخست معادله‌ی این خط‌ها را می‌نویسیم، سپس مختصات نقطه‌ی برخورد دو خط از این چهار خط را به دست می‌آوریم (با حل یک دسـتگاه دو معادله‌ی دو مجهولـی)؛ آن‌گاه مختصات این نقطه‌ی برخورد را در معادله‌ی دو خط دیگر قرار می‌دهیم. اگر مختصات این نقطه در معادله‌ی دو خط دیگر صدق کند، بدان معناسـت که دو خط دیگر هم از این نقطه می‌گذرنـد، یعنی چهارخط همرس‌اند و نقطه‌ی همرسـی آن‌ها که آن را M می‌نامیم، جواب مسـئله اسـت، یعنی از چهار نقطه‌ی A، B، C و D به یک فاصله اسـت یا به عبارت دیگر، چهارضلعی ABCD است.

در صورتـی که مختصـات این نقطه در معادلـه‌ی دو خط دیگر صـدق نکنـد مسـئله جـواب نـدارد، یعنـی نقطـه‌ای در صفحه‌ی گذرنـده بـر این چهـار نقطـه وجود نـدارد کـه از چهـار نقطه‌ی A، B، C و D بـه یک فاصله باشـد یـا به بیان دیگـر، چهارضلعی ABCD محاطی نیست.

نکته‌ی مهم: برای بررسـی همرس بودن یا نبودن هر چندخط (۳ خط، ۴ خط، ۵ خط، ۶ خط یا بیشتر) می‌توانیم از روش بالا استفاده کنیم، یعنی با داشتن معادله‌ی آن‌ها، مختصات نقطه‌ی برخورد دو خط از ایـن خط‌ها را به دسـت می‌آوریـم و آن‌گاه مختصات این نقطه را در معادلـه‌ی خط‌های دیگر قرار می‌دهیم. اگر مختصات این نقطه در معادله‌ی خط‌های دیگر صدق کند، این خط‌ها همرسـند و اگر صدق نکند، همرس نیستند.



از این ویژگی برای بررسی محاطی بودن یا نبودن یک چند ضلعی می‌توانیم اسـتفاده کنیـم، بدین ترتیب که معادلـه‌ی عمودمنصف‌های ضلع‌های آن را بنویسیم و همرس بودن یا نبودن آن‌ها را بررسی کنیم. اگر این عمودمنصف‌ها همرس باشند، چندضلعی محاطی است و اگر همرس نباشند، چندضلعی محاطی نیست. محاطی‌بودن چندضلعی به معنای آن است که در صفحه‌ی آن چندضلعی، نقطه‌ای وجود دارد که از تمام رأس‌های آن چندضلعی به یک فاصله است و محاطی نبودن چندضلعی به معنای بودن چنین نقطه‌ای است.

مثال ۱: ثابت کنید که در صفحه‌ی هر مستطیل نقطه‌ای وجود دارد کـه از چهار رأس آن به یک فاصله اسـت. به عبارت دیگر، دایره‌ای وجود دارد که بر چهار رأس یک مسـتطیل می‌گذرد یا به بیان دیگر، هر مستطیلی می‌تواند در یک دایره محاط شود.

الف) اثبات به روش هندسی

روش اول ـ مسـئله را حل شـده در نظر می‌گیریم، یعنی فرض می‌کنیم نقطه‌ی M جواب مسئله باشد، یعنی نقطه‌ای باشد که از چهار نقطه‌ی A، B، C و D به یک فاصله است، یعنی داشته باشیم:

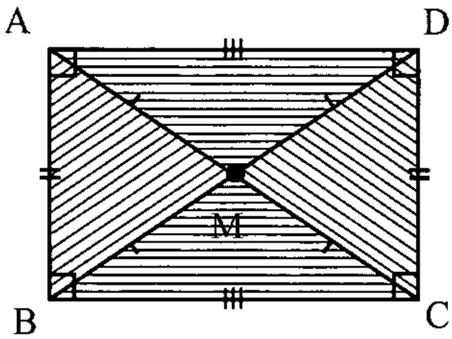
$MA = MB = MC = MD$

با توجه به این‌که AB=CD و BC=AD و $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = ۹۰^\circ$ اسـت، دو مثلث MAB و MCD و هم‌چنین دو مثلث MBC و MAD هم‌نهشت‌اند (به حالت ض‌ض‌ض) زیرا:

$MA = MB = MC = MD$ و $AB = CD \Rightarrow \Delta MAB \cong \Delta MCD$

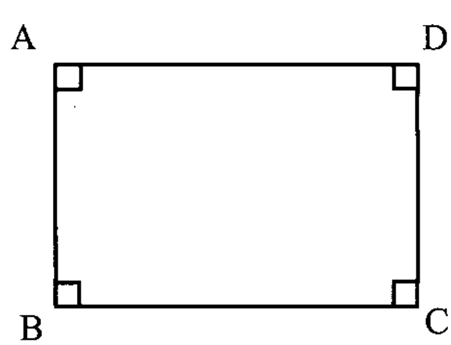
$MA = MB = MC = MD$ و $BC = AD \Rightarrow \Delta MBC \cong \Delta MAD$

از هم‌نهشتی این مثلث‌ها نتیجه می‌شود که $\hat{M}_1 = \hat{M}_3$ و $\hat{M}_2 = \hat{M}_4$، اما $\hat{M}_1 + \hat{M}_2 + \hat{M}_3 + \hat{M}_4 = 360^\circ$ است، پس $2M_1 + 2M_2 = 360^\circ$



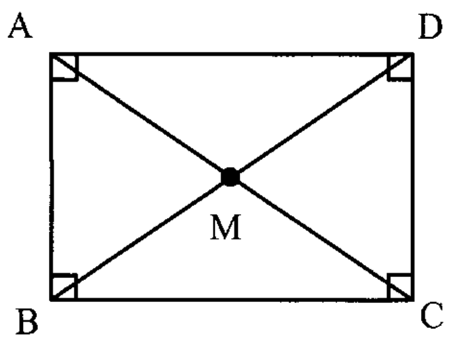
در نتیجه $\hat{M}_1 + \hat{M}_2 = 180^\circ$ و $\hat{M}_1 + \hat{M}_4 = 180^\circ$. پس AMC و BMD خط‌های راست هستند، یعنی AMC و BMD قطرهای مستطیل ABCD هستند. بنابراین نقطه‌ی M وجود دارد و این نقطه محل برخورد قطرهای AC و BC از مستطیل ABCD است.

روش دوم ـ چون در مستطیل ABCD $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$ است، پس $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$ و $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$ است، یعنی هر دو زاویه‌ی روبه‌روی آن مکمل یکدیگرند، بنابراین مستطیل ABCD محاطی است، یعنی بر چهار رأس آن یک دایره می‌گذرد. اگر مرکز این دایره را M بنامیم، M جواب مسئله است، یعنی نقطه‌ای است که از چهار رأس این مستطیل یک فاصله است، یعنی داریم MA= MB= MC= MD (این دایره به قطر AC یا BD است).



روش سوم ـ قطرهای AC و BD از مستطیل ABCD را رسم می‌کنیم و نقطه‌ی برخورد آن‌ها را M می‌نامیم. چون قطرهای مستطیل با هم مساوی‌اند و یکدیگر را نصف می‌کنند، پس داریم:

MA= MB= MC= MD

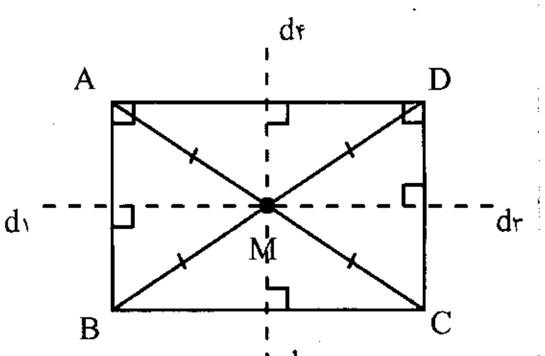


بنابراین، نقطه‌ی M محل برخورد قطرهای مستطیل ABCD جواب مسئله است.

روش چهارم ـ عمودمنصف‌های ضلع‌های مستطیل، یعنی عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های AB، BC، CD و DA را رسم می‌کنیم و به ترتیب d_1، d_2، d_3 و d_4 می‌نامیم. d_1 و d_3 بر هم منطبق‌اند، زیرا در واقع خطی که وسط‌های ضلع‌های AB و CD از این مستطیل را به هم وصل می‌کند بر هر دو ضلع AB و CD عمود است، یعنی هم عمودمنصف AB است و هم عمودمنصف CD؛ چرا؟ هم‌چنین خط‌های d_2 و d_4 نیز برهم منطبق‌اند.

اگر نقطه‌ی برخورد d_1 و d_3 با خط‌های d_2 و d_4 را M بنامیم، این نقطه جواب مسئله است، یعنی داریم:

MA= MB= MC= MD



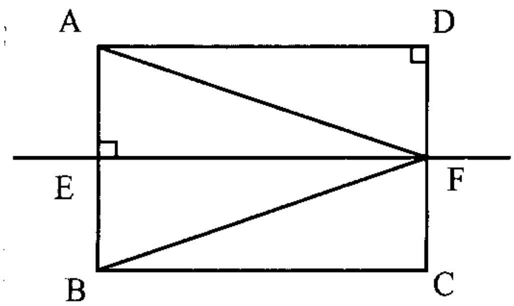
زیرا:

$$M \in d_۱ \Rightarrow MA = MB,\ M \in d_۲ \Rightarrow MC = MD$$
$$M \in d_۳ \Rightarrow MB = MC,\ M \in d_۴ \Rightarrow MA = MD$$
$$\Rightarrow MA = MB = MC = MD$$

نکته: از این‌که M هم روی $d_۱$ و هم روی $d_۲$ است، به‌طور مستقیم می‌توان نتیجه گرفت که MA= MB= MC= MD است، زیرا:

$$M \in d_۱ \Rightarrow MA = MB,\ M \in d_۲ \Rightarrow MC = MD$$
$$\Rightarrow MA = MB = MC = MD$$

پاسخ چرا در حل مسئله: اگر وسط ضلع AB را E و وسط ضلع CD را F بنامیم و از E به F وصل کنیم، خط EF بر دو ضلع AB و CD عمود است، زیرا اگر از F به A و B وصل کنیم دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی ADF و BCF به دلیل برابری ضلع‌های مجاور به زاویه‌های قائمه نشان هم‌نهشت‌اند ($\hat{D} = \hat{C} = ۹۰^\circ$ و FC= FD و AD= BC). بنابراین FA= FB است، یعنی نقطه‌ی F روی عمودمنصف پاره‌خط AB است و چون پای این عمودمنصف نقطه‌ی E است، پس EF هم عمودمنصف پاره‌خط AB و هم عمودمنصف پاره‌خط CD است، یعنی $d_۱$ و $d_۲$ برهم منطبق‌اند. به دلیل مشابه، خط‌های $d_۳$ و $d_۴$ که به ترتیب عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های BC و AD هستند. نیز، برهم منطبق‌اند.



ب) اثبات به روش جبری ـ مختصاتی

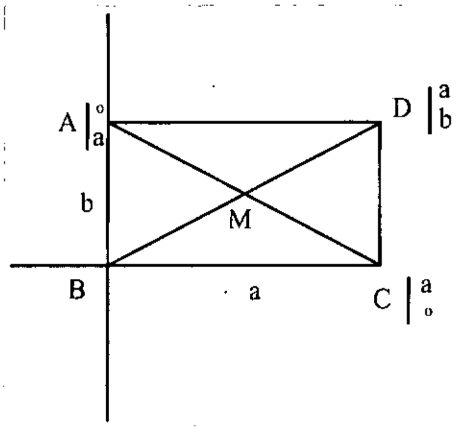
روش اول ـ اندازه‌ی ضلع‌های مستطیل ABCD را a و b در نظر می‌گیریم، یعنی فرض می‌کنیم AB= CD = a و BC = AD= d.

دستگاه مختصات قائم xoy را چنان اختیار می‌کنیم که محور xها روی BC و محور yها روی BA باشد. رأس B را مبدأ مختصات در نظر می‌گیریم، یعنی $B = (۰,۰)$.

در این دستگاه مختصات $A = (۰,b)$، $D = (a,b)$ و $C = (a,۰)$ است. وسط قطر AC که آن را M می‌نامیم، محل برخورد قطرهای آن است و داریم:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_C}{۲} = \dfrac{۰ + a}{۲} = \dfrac{a}{۲} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_C}{۲} = \dfrac{b + ۰}{۲} = \dfrac{b}{۲} \end{cases}$$

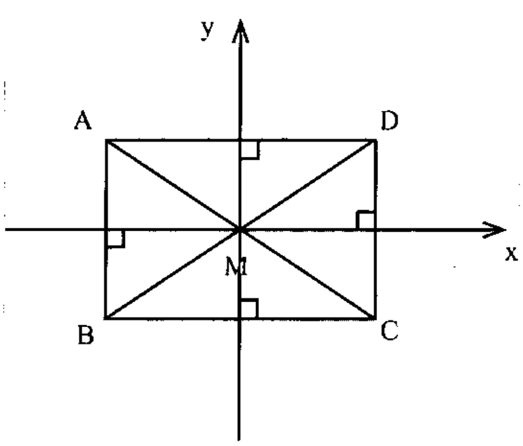
اکنون فاصله‌ی نقطه‌ی M تا چهار رأس مستطیل را به دست می‌آوریم.



$$MA = \sqrt{(۰ - \frac{a}{۲})^۲ + (b - \frac{b}{۲})^۲} = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲}$$
$$MB = \sqrt{(۰ - \frac{a}{۲})^۲ + (۰ - \frac{b}{۲})^۲} = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲}$$
$$MC = \sqrt{(a - \frac{a}{۲})^۲ + (۰ - \frac{b}{۲})^۲} = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲}$$
$$MD = \sqrt{(a - \frac{a}{۲})^۲ + (b - \frac{b}{۲})^۲} = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲}$$
$$\Rightarrow MA = MB = MC = MD = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲}$$

پس نقطه‌ی M جواب مسئله است. این نقطه مرکز تقارن مستطیل نیز هست که همان نقطه‌ی برخورد قطرهای مستطیل است.

روش دوم ـ طول ضلع‌های مستطیل را a و b در نظر می‌گیریم. قطرهای آن را رسم می‌کنیم و نقطه‌ی برخورد آن‌ها را M می‌نامیم.



دستگاه مختصات قائم xMy را چنان اختیار می‌کنیم که M مبدأ مختصات، محور xها موازی راستای AB و محور yها موازی راستای BC باشد. در این دستگاه مختصات رأس‌های مستطیل $A=(\frac{-a}{2},\frac{b}{2})$، $B=(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2})$، $C=(\frac{a}{2},\frac{-b}{2})$ و $D=(\frac{+a}{2},\frac{+b}{2})$ است. فاصله‌ی نقطه‌ی M مبدأ مختصات و محل برخورد قطرهای مستطیل از چهار نقطه‌ی A، B، C و D را به دست می‌آوریم. داریم:

$$MA=\sqrt{(-\frac{a}{2})^2+(\frac{b}{2})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$$

$$MB=\sqrt{(\frac{-a}{2})^2+(\frac{-b}{2})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$$

$$MC=\sqrt{(\frac{a}{2})^2+(\frac{+b}{2})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$$

$$MD=\sqrt{(\frac{+a}{2})^2+(\frac{+b}{2})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\Rightarrow MA=MB=MC=MD=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$$

بنابراین، نقطه‌ی M محل برخورد قطرهای مستطیل و جواب مسئله است، یعنی نقطه‌ای است که از چهار رأس مستطیل به یک فاصله خواهد بود.

نکته‌ی مهم: این سؤال پیش می‌آید که چرا در راه‌حل‌های جبری-مختصاتی ارائه شده، حدس زدیم که نقطه‌ی برخورد قطرهای مستطیل جواب مسئله است و سپس درست بودن این حدس را ثابت کردیم. این حدس زدن می‌تواند از راه‌حل هندسی مسئله نشأت بگیرد، اما بدون حدس زدن، مستقیماً می‌توانیم مختصات نقطه‌ی جواب مسئله را پیدا کنیم و متوجه شویم که این نقطه همان محل برخورد قطرهای مستطیل است. برای مثال در روش آخر راه‌حل جبری ـ مختصاتی که مختصات رأس‌های مستطیل ABCD به صورت $A=(\frac{-a}{2},\frac{b}{2})$، $B=(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2})$، $C=(\frac{a}{2},\frac{-b}{2})$ و $D=(\frac{+a}{2},\frac{+b}{2})$ است، فرض می‌کنیم جواب مسئله نقطه‌ی $M=(\alpha,\beta)$ باشد. یعنی M نقطه‌ای باشد که از چهار رأس مستطیل به یک فاصله است. در این صورت داریم:

$$MA=\sqrt{(-\frac{a}{2}-\alpha)^2+(\frac{b}{2}-\beta)^2}$$

$$MB=\sqrt{(\frac{-a}{2}-\alpha)^2+(\frac{-b}{2}-\beta)^2}$$

$$MC=\sqrt{(\frac{a}{2}-\alpha)^2+(\frac{-b}{2}-\beta)^2}$$

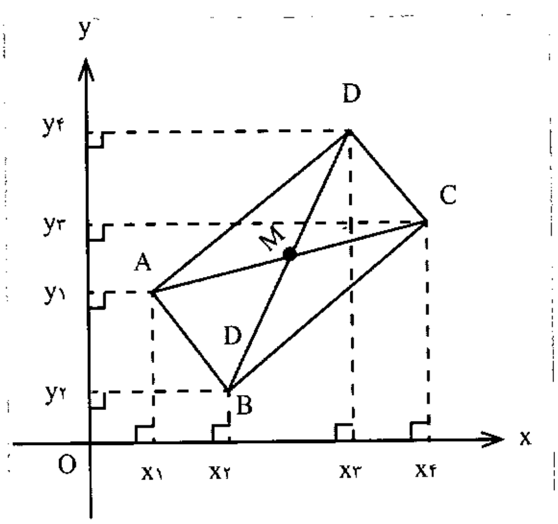
$$MD=\sqrt{(\frac{+a}{2}-\alpha)^2+(\frac{+b}{2}-\beta)^2}$$

$$MA=MB=MC=MD\Rightarrow MA^2=MB^2=MC^2=MD^2$$
$$\Rightarrow(-\frac{a}{2}-\alpha)^2+(\frac{b}{2}-\beta)^2=(\frac{-a}{2}-\alpha)^2+(\frac{-b}{2}-\beta)^2$$
$$\Rightarrow\frac{a^2}{4}+\cancel{\alpha^2}+a\alpha+\frac{b^2}{4}+\cancel{\beta^2}-b\beta$$

$$=\frac{a^2}{4}+\cancel{\alpha^2}+a\alpha+\frac{b^2}{4}+\cancel{\beta^2}+b\beta$$
$$\Rightarrow 2b\beta=0, b\neq 0\Rightarrow\beta=0\quad(1)$$
$$(\frac{a}{2}-\alpha)^2+(\frac{-b}{2}-\beta)^2=(\frac{a}{2}-\alpha)^2+(+\frac{b}{2}-\beta)$$
$$\Rightarrow 2a\alpha=0, a\neq 0$$
$$\Rightarrow\alpha=0\quad(2)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $M(0,0)$. پس جواب مسئله، نقطه‌ی M، محل برخورد قطرهای مستطیل است که در این دستگاه مختصات به عنوان مبدأ مختصات انتخاب شده است.

روش سوم ـ اگر دستگاه مختصات قائم xoy را به صورت دلخواه انتخاب کنیم، مختصات رأس‌های مستطیل $A=(x_1,y_1)$، $B=(x_2,y_2)$، $C=(x_3,y_3)$ و $D=(x_4,y_4)$ خواهد بود. در این صورت نیز می‌توانیم مختصات نقطه‌ی M جواب مسئله را همانند روش ارائه شده در قسمت قبل به دست آوریم، یعنی فرض کنیم $M=(\alpha,\beta)$ جواب این مسئله است و از رابطه‌های MA= MB= MC= MD اندازه‌های α و β را به دست آوریم. نتیجه‌ی کار چنین خواهد بود:



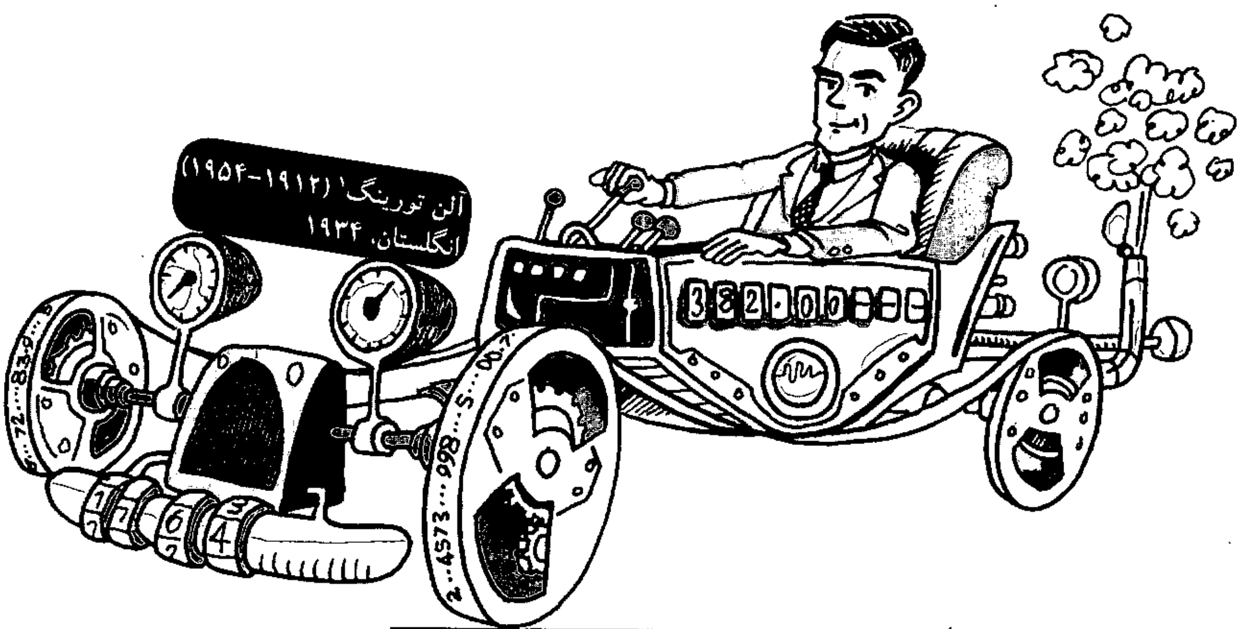
$$M=(\frac{x_1+x_3}{2},\frac{y_1+y_3}{2})\text{ یا }M=(\frac{x_2+x_4}{2},\frac{y_2+y_4}{2})$$

که این نقطه، محل برخورد قطرهای مستطیل است.

نکته: چون نقطه‌ی M وسط قطر AC و وسط قطر BD نیز هست، پس تساوی‌های $\frac{x_1+x_3}{2}=\frac{x_2+x_4}{2}$ و $\frac{y_1+y_3}{2}=\frac{y_2+y_4}{2}$ برقرارند.

توجه: چگونگی تعیین α و β برحسب مختصات رأس‌های مستطیل را برای ما بنویسید و به نشانی مجله ارسال کنید. به بهترین پاسخ‌ها جوایزی اهدا خواهد شد.

ادامه دارد



ماشین‌های تورینگ

دکتر رابرت سالمون[2]
ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

آلن تورینگ، ماشین‌هایی را توصیف کرد که بیان می‌کنند برحسب محاسبه، چه چیز ممکن است و چه چیز ناممکن است.

ماشین‌های تورینگ[3]، رایانه‌ای است که غیر از لوازم اصلی، عاری از ملزومات دیگر است. وسیله‌ای است که به جای فلز و پلاستیک بودن، ایده‌ای مجرد از یک ماشین است. کار این ماشین بررسی نواری با طول نامتناهی است که با 0S و 1S علامت‌گذاری شده است. این نوار، از زیر هدی می‌گذرد که عدد موردنظر را می‌خواند، و آن‌گاه دو کار انجام می‌دهد: یکی روی عدد مورد بحث و دیگری روی نوار:

۱- ۱ را به ۰ یا ۰ را به ۱ تغییر می‌دهد، یا عدد را دست‌نخورده باقی می‌گذارد.

۲- نوار را یک مرحله جلو می‌برد، یک مرحله عقب می‌برد یا دست‌نخورده باقی می‌گذارد.

ماشین تورینگ را می‌توان طوری طراحی کرد که جمع، تفریق یا هر عمل اساسی حساب را انجام دهد. در واقع می‌تواند هر عمل حسابی پیچیده را انجام دهد. با یک مرحله جلوتر رفتن، هر عمل محاسبه می‌تواند با ماشین تورینگ انجام گیرد.

به‌نظر می‌رسد که باید برای هر عمل، ماشین تورینگی جداگانه موجود باشد. اما در اقدامی شگفت‌انگیز، تورینگ نشان داد که برای هر عمل، به ماشینی جداگانه نیاز نداریم. در عوض، یک ماشین تورینگ عمومی موجود است که می‌تواند مانند هر ماشین تورینگ دیگر عمل کند. پس این ماشین عمومی می‌تواند هر عمل محاسبه‌پذیر را به انجام برساند. این مطلب به کمال تورینگی موسوم است.

دستاورد مهم دیگر، مسئله‌ی ایست است. با در دست داشتن یک ماشین تورینگ، همواره نمی‌توان تشخیص داد که توقف می‌کند یا محاسبه را تا ابد ادامه می‌دهد. این موضوع، محاسبه‌ای هم‌ارز قضیه‌ی گودل است (در شماره‌ی آینده مجله، قضیه گودل را ملاحظه خواهید کرد.)

در دوران جنگ جهانی دوم، آلن تورینگ، کارهای پرارزشی در حوزه‌ی رمزگشایی انجام داد.

پی‌نوشت

1. Alan Turing
2. Dr. Robert Solomon
3. Turing Machines

مسائل برای حل

ریاضیات ۱

فرخ فرشیان

۱. حاصل عبارت

$$\frac{3^5+3^7+\cdots+3^{17}+3^{19}}{3^{21}-3^5}$$

را به‌دست آورید.

۲. اگر $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ باشد، ثابت کنید

$$\sqrt[3]{\frac{ab}{c^2}}+\sqrt[3]{\frac{ac}{b^2}}+\sqrt[3]{\frac{bc}{a^2}}=\sqrt[3]{abc}$$

۳. درجه‌ی چندجمله‌ای

$$x(x+x^2)(2x^2+2x^3)(3x^3+3x^4)\cdots(100x^{100}+100x^{101})$$

را به‌دست آورید.

۴. حاصل را به کمک اتحاد به‌دست آورید.

الف) $(\sqrt{7}+\sqrt{2})(9-\sqrt{14})(7\sqrt{7}-2\sqrt{2})$

ب) $\dfrac{x^n(x^{\frac{5n}{2}}-x^{\frac{n}{2}})(x^{4n}+x^{2n}+1)}{(x^{\frac{15n}{2}}+x^{\frac{3n}{2}})}$

۵. عبارات زیر را تجزیه کنید.

الف) $x^{16}-14x^4+49x^2-36$

ب) $(x+a)(x+b)-(y+a)(y+b)$

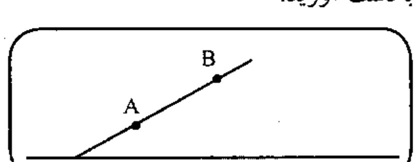
۶. نقاط $B=(0,1)$ و $C=(-1,0)$ رأس‌های مثلث متساوی‌الساقین به رأس A هستند. درصورتی‌که طول ساق مثلث $\sqrt{5}$ باشد، مختصات رأس A را به‌دست آورید. مسئله چند جواب دارد؟

۷. علی ۵۰۰ تومان پس‌انداز دارد و هر روز ۲۰۰ تومان به آن اضافه می‌کند. حسن ۲۰۰۰ تومان پس‌انداز دارد و هر روز ۲۰۰ تومان آن را خرج می‌کند.

الف) اگر x تعداد روزهای گذشته و y پس‌انداز علی باشد، رابطه‌ی بین x و y را به‌دست آورید.

ب) اگر x تعداد روزهای گذشته و z پولی باشد که حسن خرج می‌کند، رابطه‌ی بین x و z را به‌دست آورید.

۸. در یک جاده‌ی شیب‌دار، اگر ۵۰۰ متر حرکت کنیم از A به B می‌رسیم. اگر ارتفاع دو نقطه‌ی A و B از سطح دریا به‌ترتیب ۱۰۰۰ و ۱۳۰۰ متر باشد، شیب این جاده را به‌دست آورید.



سطح دریا

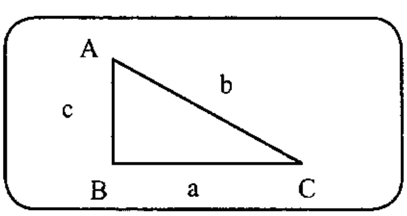
۹. اگر $x-2y=0$ و $x-2y=-15$ معادلات دو ضلع یک مستطیل و $7x+y=15$ معادله‌ی یکی از قطرهای مستطیل باشد، مختصات رأس‌های مستطیل را تعیین کنید.

۱۰. حاصل عبارت

$$\frac{\sin^2 20+\sin^2 70}{\frac{\sin 26}{\cos 64}+\frac{\sin 28}{\cos 62}}+\frac{\sin 30-\tan 45}{\cos^2-\tan 45}$$

را به‌دست آورید.

۱۱. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC و $\tan C=\frac{3}{\sqrt{3}}$ و b=4 است. اندازه‌ی ضلع C را به‌دست آورید.



۱۲. حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

الف) $\left(\frac{x+3}{3x-9}-\frac{x-3}{3x+9}-\frac{12}{x^2-9}\right)\div\left(\frac{2x+3}{x+3}-1\right)$

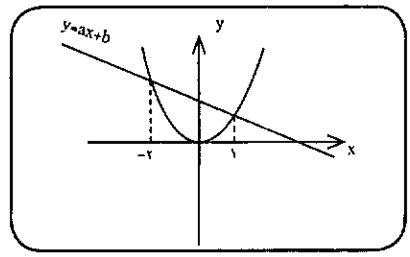
ب) $\frac{1}{1+x^{a-b}+x^{a-c}}+\frac{1}{1+x^{b-c}+x^{b-a}}+\frac{1}{1+x^{c-a}+x^{c-b}}$

۱۳. a و b و c را طوری تعیین کنید که باقی‌مانده‌ی تقسیم x^4+ax^2+bx+c بر عبارت x^3+3x^2-4x+1 برابر $3x^2-4x+1$ باشد.

۱۴. مخرج کسر $\frac{8\sqrt{21}}{2\sqrt{3}+\sqrt{19}+\sqrt{7}}$ را گویا کنید.

۱۵. خط زیر دارای معادله‌ی y=ax+b

است. مقادیر a و b را با توجه به شکل به‌دست آورید.



۱۶. معادلات زیر را حل کنید.

الف) $x^2-(2\sqrt{2}+1)x+4+\sqrt{2}=0$

ب) $x^2+\frac{1}{x^2}-4x-\frac{4}{x}=-6$

۱۷. مجموع ارقام یک عدد دو رقمی ۱۰ است. رقم دهگان آن ۲ واحد کم‌تر از مربع رقم یکان آن است. این عدد را پیدا کنید.

۱۸. مجموعه جواب نامعادله‌ی $\frac{4-x}{8}+a>\frac{x+8}{16}$ به‌صورت $x>-\frac{16}{3}$ است. مقدار a را به‌دست آورید.

ریاضیات ۲

میرشهرام صدر

۱. نشان دهید که اگر زاویه‌های یک مثلث را از کوچک به بزرگ (یا از بزرگ به کوچک) مرتب کنیم و تشکیل یک دنباله‌ی حسابی بدهند، آن‌گاه همواره زاویه‌ی وسطی برابر با 60° خواهد بود.

۲. اگر اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای دنباله‌ی هندسی بسازند، قدر نسبت این دنباله را بیابید.

۳. اگر نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^2-3x+k$ بر محور xها مماس باشد، مقدار k را محاسبه کنید.

۴. تابع با ضابطه‌ی زیر مفروض است، در این صورت مقدار عددی $f(f(f(1)))$ را بیابید.

$$f(x)=\begin{cases}-x^2 & x>0\\ -2x^2 & x\le 0\end{cases}$$

۵. تابع با ضابطه‌ی زیر به نام تابع علامت معروف است. مطلوب است محاسبه‌ی $s(x^2)-s(x)$.

$$s(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

۶. دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی زیر را به‌دست آورید.

$$f(x)=\sqrt{\frac{x+2}{x+1}-\frac{2-x}{1-x}}$$

۷. الف) اگر $a>0$ ثابت کنید $a+\frac{1}{a}\ge 2$.

ب) بیشترین مقدار کسر $A=\frac{x}{1+x^2}$ را برای هر عدد حقیقی $x>0$ پیدا کنید.

۸. حدود m را چنان تعیین کنید که نابرابری زیر همواره برقرار باشد.

$$(m^2+m-2)x^2+2(m-1)x-2<0$$

۹. با استفاده از تعریف لگاریتم، دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases}2^{2x-y}=32\\ 3^{x+2y}=3\end{cases}$$

۱۰. بدون استفاده از ماشین‌حساب، حاصل عبارت زیر را محاسبه کنید.

$$A=\frac{\log_2^{24}}{\log_{96}^{2}}-\frac{\log_2^{192}}{\log_{12}^{2}}$$

۱۱. معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$1+\log_2^{(x-1)}=\log_{(x-1)}^{4}$$

۱۲. بیشترین و کمترین مقدار عددی عبارت زیر را محاسبه کنید.

$$A=\sin^2x-2\sin x+5$$

۱۳. مقدار عددی عبارت زیر را محاسبه کنید.

$$A=\frac{\sin\frac{2\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{4\pi}{3}\cos\frac{4\pi}{3}}{\cos\frac{5\pi}{3}\cos\frac{3\pi}{4}+\sin\frac{5\pi}{4}\sin\frac{7\pi}{4}}$$

۱۴. جواب‌های معادله‌ی زیر را بیابید.

$$\begin{bmatrix}x & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ 2x\end{bmatrix}=0$$

۱۵. اگر $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 7 & 5\end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $(A-2A^{-1})$ را پیدا کنید.

۱۶. با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ چند عدد چهاررقمی می‌توان ساخت؛ به شرطی که تکرار مجاز نباشد و عدد حاصل از ۴۰۰۰ بزرگ‌تر باشد.

۱۷. به چند طریق می‌توان از بین ۱۰ نفر دانش‌آموز که ۳ نفر آن‌ها عضو تیم فوتبال مدرسه هستند، هیأتی سه‌نفری انتخاب کرد، به شرط آن‌که:

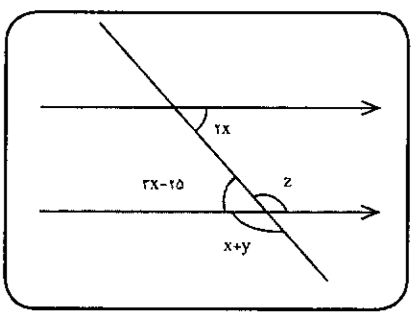
الف) رئیس هیأت عضو تیم فوتبال باشد.

ب) یک نفر آن‌ها عضو تیم فوتبال و ۲ نفر دیگر عضو تیم فوتبال نباشند.

هندسه‌ی ۱

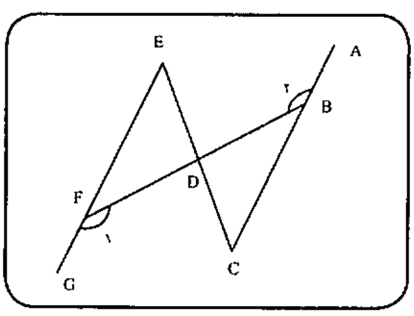
محمدهاشم رستمی

۱. با توجه به شکل، اندازه‌ی x، y و z را تعیین کنید. خط‌های موازی، با پیکان‌های هم‌جهت مشخص شده‌اند.



۲. در شکل روبه‌رو:

الف) اگر $\hat{2}=\hat{1}$ و CE پاره‌خط BF را نصف کرده باشد، ثابت کنید که $\hat{C}=\hat{E}$.



ب) اگر BF و CE یکدیگر را نصف کرده باشند، ثابت کنید:

BC=EF

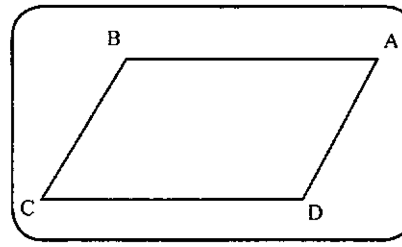
۳. با استفاده از چهار پاره‌خط، خمی

رسم کنید که:

الف) ساده و بسته باشد.

ب) ساده باشد ولی بسته نباشد.

۴. چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است. (اندازه‌ی x و y را درهریک از حالت‌های زیر تعیین کنید:



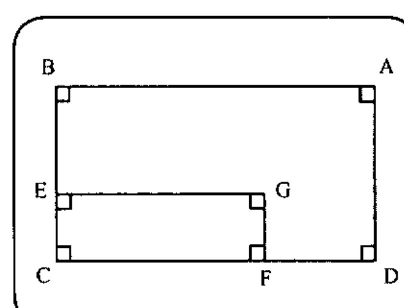
الف) $AD = 5x$ ، $AB = 2x$ ، $CD=y$ و محیط متوازی‌الاضلاع مساوی ۸۴.

ب) $AB = 2x$ ، $BC = 3y+8^\circ$ ، $CD = 7x-25^\circ$ و $AD = 5y-10^\circ$.

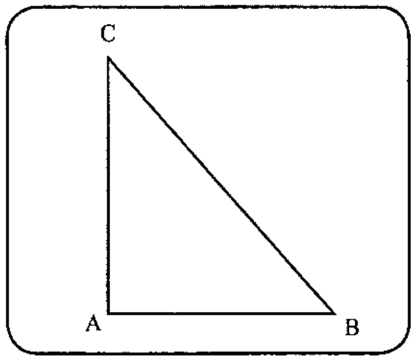
پ) $\hat{A} = 4y-60^\circ$ ، $\hat{C} = 2y$ و $\hat{D} = x$

ت) $\hat{A} = 3x$ ، $\hat{B} = 10x-15^\circ$ و $\hat{C} = y$.

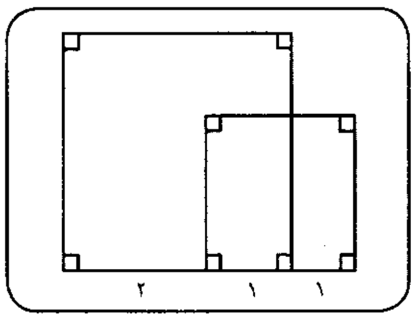
۵. چهارضلعی ABCD مستطیل است. نقطه‌های E و F روی ضلع‌های BC و CD چنان اختیار شده‌اند که $CE = \frac{5}{14}BC$ و $\frac{CF}{CD} = \frac{7}{10}$ است. مستطیل CEGF را می‌سازیم. اگر مساحت مستطیل CEGF مساوی ۷۰ سانتی‌متر مربع باشد، اندازه‌ی مساحت مستطیل ABCD را تعیین کنید.



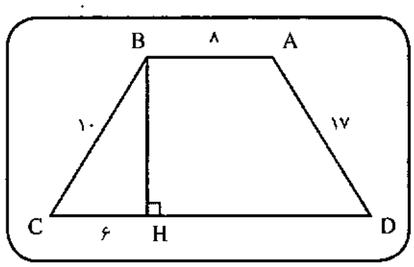
۶. اندازه‌ی مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین $ABC(\hat{A} = 90^\circ, AB = AC)$ ۳۲ سانتی‌متر مربع است. اندازه‌ی وتر و ساق‌های این مثلث را تعیین کنید.



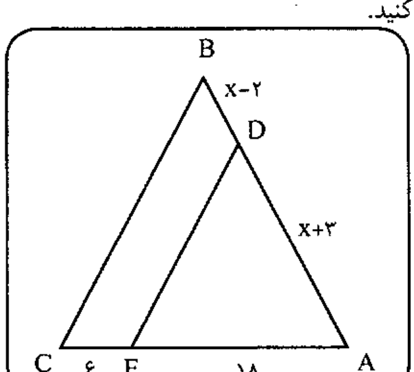
۷. با توجه به شکل، مساحت قسمت مشترک دو مربع را به‌دست آورید.



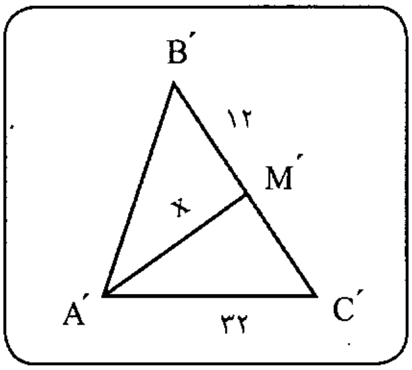
۸. چهارضلعی ABCD ذوزنقه است. با توجه به شکل، اندازه‌ی مساحت این ذوزنقه را تعیین کنید.

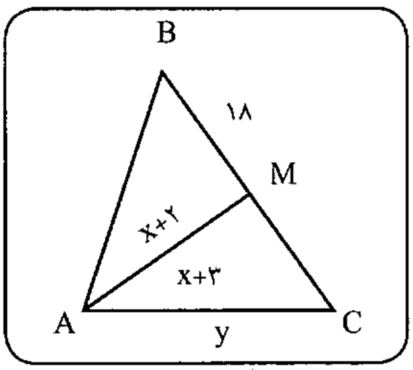


۹. در مثلث ABC، DE موازی BC است. با توجه به شکل، اندازه‌ی x را تعیین کنید.

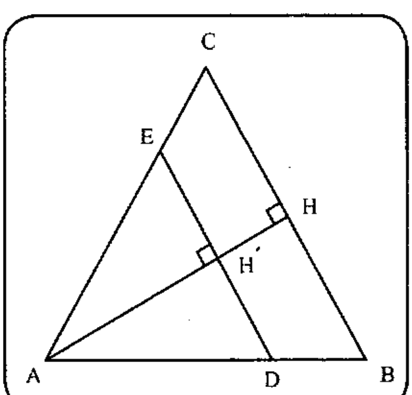


۱۰. دو مثلث ABC و A'B'C' متشابه و AM و A'M' میانه‌های نظیر از این دو مثلث‌اند. اندازه‌ی x و y را به‌دست آورید.

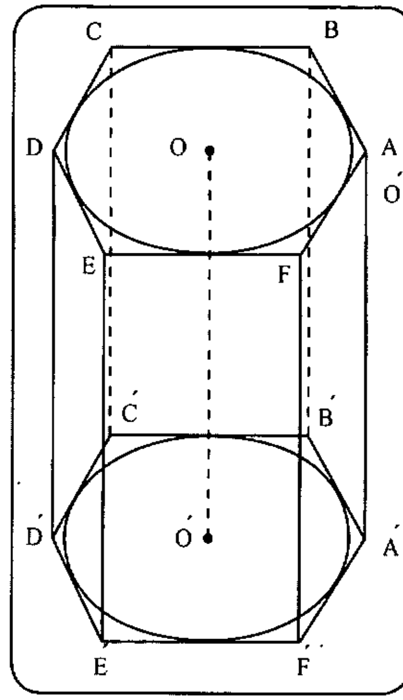




۱۱. در شکل AH ارتفاع نظیر رأس A از مثلث ABC و DE موازی ضلع BC است که ارتفاع AH را در H' قطع کرده است. اگر AH=۴۰ و H'H = ۱۲ باشد، نسبت مساحت‌های دو مثلث ABC و ADE را به‌دست آورید.



۱۲. منشور منتظم شش‌پهلوی ABCDEFF'A'B'C'D'E' به ضلع قاعده‌ی ۱۲ سانتی‌متر و ارتفاع ۳۰ سانتی‌متر داده شده است. استوانه‌ای را که قاعده‌هایش محاط در قاعده‌های این منشور هستند در نظر می‌گیریم.

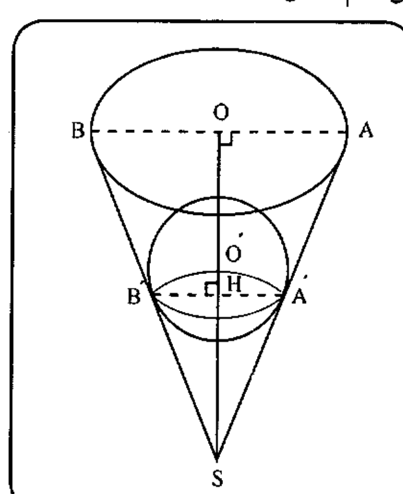


الف) حجم منشور منتظم داده شده را تعیین کنید.

ب) حجم فضای بین منشور منتظم و استوانه را به‌دست آورید.

۱۳. مکعب مستطیلی به قطر $10\sqrt{29}$ سانتی‌متر را در نظر بگیرید که ابعاد آن متناسب با عددهای ۲ و ۳ و ۴ است. حجم این مکعب‌مستطیل را بیابید.

۱۴. مخروطی به شعاع قاعده‌ی ۸ سانتی‌متر و ارتفاع ۲۱ سانتی‌متر داده شده است (شکل). کره‌ای به سطح کل 36π سانتی‌متر مربع را درون این مخروط قرار می‌دهیم. تعیین کنید:



الف) آیا این کره به‌طور کامل درون این مخروط جای می‌گیرد؟ بحث کنید.

ب) در صورتی که کره به طور کامل درون مخروط قرار بگیرد، حجم فضای بین مخروط و کره را تعیین کنید.

حسابان

مجتبی رفیعی

۱. محیط یک دایره به شعاع «۱» را به شش قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و با نقاط به دست آمده یک شش ضلعی منتظم می‌سازیم. سپس وسط‌های این شش ضلعی را به هم وصل می‌کنیم و یک شش ضلعی دیگر می‌سازیم و این کار را تا بی‌نهایت مرحله ادامه می‌دهیم. حد مجموع مساحت‌ها و محیط‌های این شش ضلعی‌ها را بیابید.

۲. معادله‌ی زیر چند جواب حقیقی دارد؟

$$(x+1)^{1383}+(x+1)^{1382}(x-2)$$
$$+(x+1)^{1381}(x-2)^2+\dots$$
$$+(x+1)(x-2)^{1382}+(x-2)^{1383}=0$$

۳. در بسط $(x+2y)^8$ مطلوب است:

الف) تعداد جملات

ب) مجموع ضرایب

پ) جمله‌ی پنجم بسط

۴. به چند صورت می‌توان یک چند جمله‌ای از درجه‌ی پنج ساخت که ضرایب آن با ترتیبی دلخواه، اعداد ۱ و ۲ و ۳ و... و ۶ و بر چند جمله‌ای $1+x+x^2$ بخش‌پذیر باشد.

۵. تعداد ریشه‌های معادله‌ی $\sin x=\frac{2x}{5\pi}$ را به روش هندسی به دست آورید.

۶. اگر دو مجموعه‌ی $A=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ و $B=\{b_1,b_2,\dots,b_n\}$ را داشته باشیم و $f:A\to B$، آن‌گاه:

الف) به‌طور کلی چند تابع f موجود است؟

ب) چند تابع f موجود است که در آن‌ها $f(a_1)=b_1$ باشد؟

پ) چند تابع ثابت موجود است؟

ت) چند تابع موجود است که $f(a_1)\neq b_1$ باشد؟

۷. اگر دو تابع با ضابطه‌های

$$f(x)=\frac{1}{3x+\sqrt{9x^2+1}}$$

و

$$g(x)=\sqrt{ax^2+1}-bx^2$$

برابر باشند، a و b را تعیین کنید.

۸. چند تابع $f:W\to W$ وجود دارد که برای هر x متعلق به اعداد حسابی داشته باشیم:

$$f(f(n))+f(n)=2n+3$$

۹. فرض کنید $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ دارای این خاصیت است که $f(x)-3x$ و $f(x)-x^2$ صعودی هستند. نشان دهید که $f(x)-x^2-x$ نیز صعودی است.

۱۰. نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی 15° را به دست آورید.

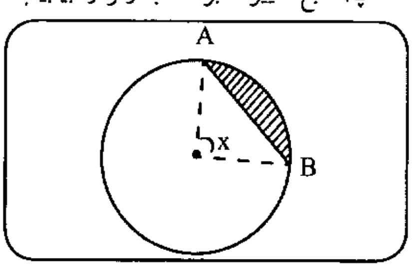
۱۱. معادله‌ی $\frac{\sin 7x-\sin x}{\sin 3x}=2$ را حل کنید.

۱۲. وتر AB مطابق شکل مقابل به سمت مرکز دایره در حال حرکت است.

الف) تابعی بسازید که مساحت قطاع دایره را برحسب زاویه‌ی x نمایش دهد.

ب) تابع تغییرات وتر برحسب x را بسازید.

پ) تابع تغییر x برحسب وتر را بیابید.



۱۳. مجموعه جواب نامعادله‌ی زیر را به صورت یک همسایگی محذوف بنویسید.

$$\frac{x^2-2x}{\sqrt{x^2-x+1}}<0$$

۱۴. a را طوری بیابید که

$$f(x)=\begin{cases} ax[\frac{1}{x}] & x \geq \frac{1}{2} \\ \cos\frac{\pi}{2}x & x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

در $x=\frac{1}{2}$ حد داشته باشد.

۱۵. حاصل حدهای زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x\tan x}$

ب) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\frac{1-2\cos x}{3x-\pi}$

۱۶. تانژانت زاویه‌ی بین دو نیم‌مماس تابع $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{\cos ax}}$ در مبدأ مختصات برابر $\frac{4}{3}$ است. چند مقدار برای a وجود دارد؟

۱۷. برای تصفیه‌ی یک محلول از یک ظرف مخروطی که در رأس آن سوراخ بسیار ریزی تعبیه شده است، استفاده می‌کنیم. با فرض این که ارتفاع مخروط 16cm و شعاع آن 4cm باشد و محلول با سرعت ثابت $2\,\mathrm{cm}^3/s$ از ظرف خارج شود، هنگامی که ارتفاع محلول 8cm است، سرعت کاهش ارتفاع محلول در ظرف چه‌قدراست؟

۱۸. مشتق تابع زیر را بگیرید.

$$\frac{x+8}{16}+a>\frac{4-x}{8}$$

۱۹. تابع $x>-\frac{16}{3}$ را در نظر بگیرید. اگر از هر نقطه روی تابع خطی به مبدأ مختصات وصل کنیم و شیب آن را m بنامیم، تغییرات زاویه‌ی خط با محور xها (α) را نسبت به تغییرات x به دست آورید.

جبر و احتمال

هوشنگ شرقی

۱. با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید:

$$(1+\frac{1}{1})(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})....(1+\frac{1}{n})=n+1$$

۲. به کمک استدلال استنتاجی ثابت کنید که مکعب هر عدد فرد، عددی فرد است.

۳. می‌دانیم $\sqrt{5}$ عددی گنگ است. ثابت کنید $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ نیز عددی گنگ است.

۴. برای هر دو عدد حقیقی x و y ثابت کنید:

$$1+x^2+2y^2 \geq 2y(x+1)$$

۵. در یک فروشگاه لباس، لباس‌های بچه‌گانه، زنانه و مردانه در سه اندازه‌ی کوچک و بزرگ و متوسط فروخته می‌شود. شخصی از این فروشگاه ده دست لباس خرید. ثابت کنید دست کم دو تا از لباس‌های او از یک نوع و یک اندازه بوده‌اند.

۶. با استفاده از جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:

$$(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)\Leftrightarrow C\subset A$$

۷. اگر $A=\{x|x\in\mathbb{Z}\ ,\ |2x-1|\leq 2\}$ و $B=\{x|x\in\mathbb{Z}\ ,\ n\leq\sqrt{x}\}$ مجموعه‌ی $A'-A\times B$ را تشکیل دهید.

۸. رابطه‌ی زیر روی $(\mathbb{R}-\{-1\})^2$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$(x,y)R(z,t)\Leftrightarrow x+t+xt=y+z+yz$$

ثابت کنید R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است و سپس کلاس هم‌ارزی (۲- و ۱) را به‌دست آورید.

۹. تاسی را پرتاب می‌کنیم. اگر زوج بیاید، یک سکه را پرتاب می‌کنیم و اگر فرد بیاید، سکه را دو بار پرتاب می‌کنیم. مطلوب است:

الف) فضای نمونه‌ی این پیشامد.

ب) پیشامد A که در آن سکه دست کم یک بار پشت بیاید.

ج) پیشامد B که در آن تاس مضرب ۳ بیاید.

د) پیشامد $A\cap B'$.

۱۰. در یک کیسه شامل ۵ مهره‌ی قرمز و ۳ مهره‌ی سفید و تعدادی مهره‌ی آبی دو مهره به تصادف خارج می‌کنیم. اگر احتمال هم‌رنگ بودن دو مهره مساوی $\frac{12}{45}$ باشد، تعداد مهره‌های آبی را به‌دست آورید.

۱۱. تاسی به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد اول در پرتاب آن ۳ برابر احتمال وقوع عدد غیر اول است. اگر در یک بار پرتاب این تاس، Aپیشامد وقوع عددی کوچک‌تر از ۴ باشد، P(A) را به‌دست آورید.

۱۲. از بین مستطیل‌هایی که ابعاد آن‌ها کوچک‌تر از ۴ واحد است، یکی را به تصادف انتخاب کرده‌ایم. احتمال انتخاب مستطیل‌هایی با محیط بزرگ‌تر از ۶ را به‌دست آورید.

۱۳. احتمال قبولی نرگس و مردودی مژده در امتحان جبر و احتمال ۰/۳ است، ولی شانس قبولی یکی از آن‌ها در این امتحان ۰/۷ است. احتمال قبولی مژده در این امتحان را به‌دست آورید.

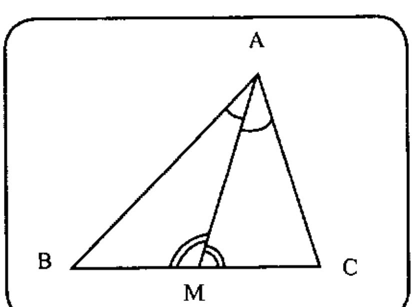
مسائل هندسه‌ی ۲

محمدهاشم رستمی

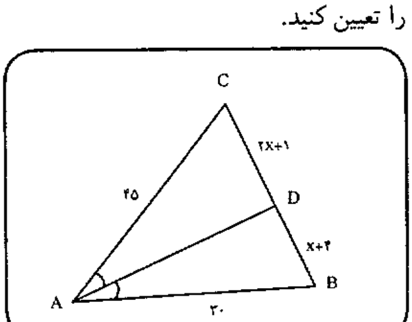
۱. در مثلث ABC میانه‌ی AM را رسم کرده‌ایم. اگر AB>AC باشد، ثابت کنید:

الف) $M\hat{A}B < M\hat{A}C$

ب) $A\hat{M}B < A\hat{M}C$



۲. در شکل، AD نیمساز زاویه‌ی درونی A از مثلث ABC است. اندازه‌ی ضلع BC را تعیین کنید.



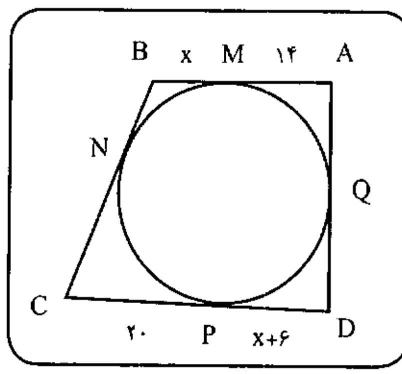
۳. مثلث ABC به ضلع‌های $AB=AC=۱۰$ و $BC=۱۲$ داده شده است. اگر M نقطه‌ای واقع بر قاعده‌ی BC از این مثلث باشد، مجموع فاصله‌ی آن از دو ضلع AB و AC را تعیین کنید.

۴. مکان هندسی مرکز دایره‌هایی به شعاع R' را بیابید که بر دایره‌ی ثابت $C(O,R)$ مماس برون باشند.

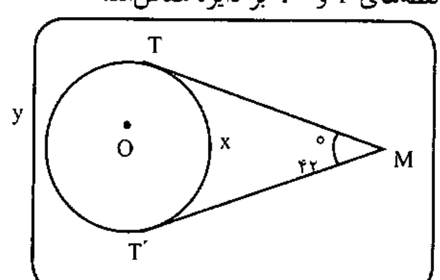
۵. مثلث ABC را با معلوم بودن ضلع $BC=a$، زاویه‌ی $\hat{A}=\alpha$ و ارتفاع $AH=h_a$ رسم کنید.

۶. در دایره‌ی $C(O,۱۰)$، مکان هندسی وسط وترهایی از این دایره را تعیین کنید که طولشان مساوی ۱۶ باشد.

۷. چهارضلعی ABCD در نقطه‌های M، N، P و Q بر دایره‌ای به مرکز O مماس است. اگر محیط این چهارضلعی محیطی ۱۲۰ باشد، اندازه‌ی x را تعیین کنید.



۸. اندازه‌ی x و y را با توجه به شکل داده شده تعیین کنید. MT و MT' در نقطه‌های T و T' بر دایره مماس‌اند.

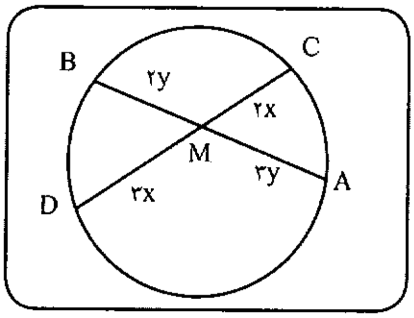


۹. کمان درخور زاویه‌ی $۶۰°$ روبه‌رو به پاره‌خط AB به طول $۴\sqrt{۳}$ را رسم کرده‌ایم.

الف) اندازه‌ی شعاع دایره‌ای را که این کمان درخور بخشی از آن است، بیابید.

ب) فاصله‌ی مرکز این دایره از وتر AB را تعیین کنید.

۱۰. AB و CD دو وتر از دایره‌ی (C) هستند که در نقطه‌ی M یکدیگر را قطع کرده‌اند. با توجه به شکل، اندازه‌ی وترهای AB و CD را به‌دست آورید، در صورتی که $AB=۲CD-۱۰$ باشد.



۱۱. در تبدیل $T(x,y)=(۲x+۵,y-۳)$، نقطه‌ی $M'=(۳,۱)$ تصویر چه نقطه‌ای است؟

۱۲. تحت یک بازتاب محوری، تصویر خط $D: ۳x-۴y-۱=۰$، خط $D': ۴x+۳y+۷=۰$ است. معادله‌ی محور این بازتاب را تعیین کنید.

۱۳. تصاویر نقطه‌های $A=(۲,۰)$، $B=(۰,۴)$ و $C=(۴,۵)$ تحت تبدیل $T(x,y)=(۲x,۲y)$ را به‌ترتیب A'، B' و C' می‌نامیم.

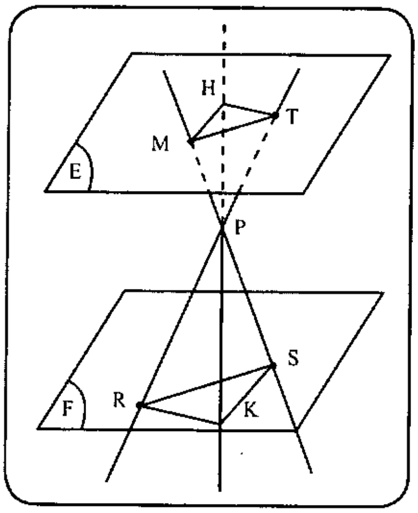
الف) مختصات نقطه‌های A'، B' و C' را به‌دست آورید.

ب) شیب خط‌های AB، BC، CA، $A'B'$، $B'C'$ و $C'A'$ را به‌دست آورید و شیب خط‌های متناظر را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

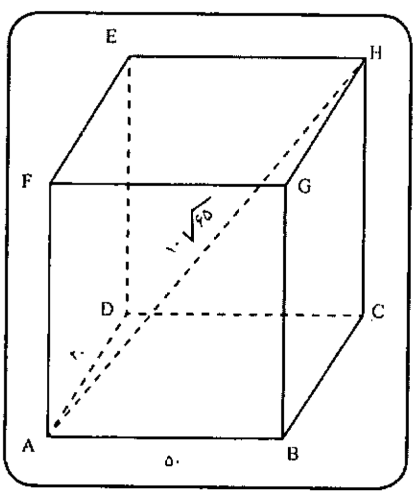
پ) طول ضلع‌های دو مثلث ABC و $A'B'C'$ را محاسبه و ضلع‌های متناظر آن‌ها را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ این تبدیل چیست؟

۱۴. دو خط متمایز d و d' با خط δ از صفحه‌ی P موازی‌اند. صفحه‌ی P' را بر دو خط d و d' می‌گذرانیم. در وضع این صفحه با صفحه‌ی P بحث کنید.

۱۵. دو صفحه‌ی (E) و (F) با هم موازی‌اند. از نقطه‌ی P غیرواقع بر این دو صفحه، سه خط همرس در نقطه‌ی P رسم می‌کنیم تا دو صفحه‌ی (E) و (F) را در نقطه‌های T، M، S، K، P و H قطع کنند. مثلث‌های RKS و MHT را رسم می‌کنیم. آیا این دو مثلث با هم متشابه‌اند؟ دلیل بیاورید.



۱۶. مکعب‌مستطیل ABCDEFGH داده شده است. اگر $AB=۵۰$، $AD=۲۰$ و قطر $AH=۱۰\sqrt{۶۵}$ باشد:



الف) اندازه‌ی ضلع AF از این مکعب‌مستطیل را تعیین کنید.

ب) طول عمود مشترک دو خط متنافر EF و BG را تعیین کنید.

حلّ تشریحی مسائل شماره‌ی قبل

حل مسائل ریاضی سال اوّل

فرخ فرشیان

۱. دو ضلع زاویه‌ی قائمه را a و b می‌گیریم. پس $a^2+b^2=(5\sqrt{2})^2$؛ در نتیجه $a^2+b^2=50$.

چون $b\in N$ و a فرض شده‌اند جواب‌های ممکن این معادله $\begin{cases}a=5\\b=5\end{cases}$، $\begin{cases}a=7\\b=1\end{cases}$، $\begin{cases}a=1\\b=7\end{cases}$ هستند که در حالت $\begin{cases}a=7\\b=1\end{cases}$، $\begin{cases}a=1\\b=7\end{cases}$ محیط مثلث کمتر است.

۲. اگر کسری کوچک‌تر از واحد باشد، وقتی عددی را هم به صورت و هم به مخرج اضافه کنیم کسر بزرگ‌تر می‌شود، یعنی:

$$(\frac{a}{b}<1\Rightarrow\frac{a}{b}<\frac{a+k}{b+k}<\frac{c}{d}<1)$$

اثبات: می‌دانیم اگر $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ باشد خواهیم داشت $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$. بنابراین:

$$\frac{a}{b}<1=\frac{k}{k}\Rightarrow\frac{a}{b}<\frac{a+k}{b+k}<\frac{k}{k}=1$$

$$\Rightarrow\frac{a}{b}<\frac{a+k}{b+k}<1$$

اگر به صورت و مخرج کسر $\frac{1001}{10001}$، ۹ واحد اضافه کنیم برابر $\frac{1010}{10010}$ می‌شود که از مقدار اولیه‌ی کسر بزرگ‌تر است؛ یعنی:

$$\frac{1001}{10001}<\frac{1010}{10010}=\frac{101}{1001}\times\frac{10}{10}$$

پس: $\frac{1001}{10001}<\frac{101}{1001}$

۳. صورت و مخرج هر دو کسر را ۱۰۱ برابر می‌کنیم.

$$\frac{41}{43}\times\frac{101}{101}=\frac{4141}{4343},$$

$$\frac{42}{43}\times\frac{101}{101}=\frac{4242}{4343}$$

بین دو عدد ۴۱۴۱ و ۴۲۴۲ صد عدد صحیح وجود دارد.

$$\frac{4142}{4343},\frac{4143}{4343},\dots,\frac{4240}{4343},\frac{4241}{4343}$$

۴.

$$|\sqrt{3}-\sqrt{5}|=-(\sqrt{3}-\sqrt{5})=-\sqrt{3}+\sqrt{5}$$

$$|\sqrt{5}-2|=\sqrt{5}-2$$

$$|-2\times(3-4)|=|-2\times(-1)|=|2|=2$$

$$|\sqrt{3}-2|=-(\sqrt{3}-2)=-\sqrt{3}+2$$

$$|-\sqrt{3}|=-(-\sqrt{3})=\sqrt{3}$$

$$\frac{\left||\sqrt{3}-\sqrt{5}|-|\sqrt{5}-2|-|-2\times(3-4)|\right|}{\left||\sqrt{3}-2|-|-\sqrt{3}|\right|+2}$$

$$=\frac{|-\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{5}+2-2|}{|-\sqrt{3}+2-\sqrt{3}|+2}$$

$$=\frac{|-\sqrt{3}|}{|2-2\sqrt{3}|+2}=\frac{\sqrt{3}}{-(2-2\sqrt{3})+2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{-2+2\sqrt{3}+2}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$$

۵.

الف) $A=\left\{\frac{2^x+1}{2^x-1}\middle|x\in Z,-3\le x<0\right\}$

مقادیر x را مشخص و در عبارت $\frac{2^x+1}{2^x-1}$ به جای آن می‌گذاریم. اکنون داریم:

$$-3\le x<0,x\in Z$$

$$\Rightarrow x=-3,-2,-1$$

$$x=-3\Rightarrow\frac{2^{-3}+1}{2^{-3}-1}=\frac{\frac{1}{2^3}+1}{\frac{1}{2^3}-1}$$

$$=\frac{\frac{1}{8}+1}{\frac{1}{8}-1}=\frac{\frac{9}{8}}{\frac{-7}{8}}=\frac{-9}{7}$$

$$x=-2\Rightarrow\frac{2^{-2}+1}{2^{-2}-1}=\frac{\frac{1}{2^2}+1}{\frac{1}{2^2}-1}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}+1}{\frac{1}{4}-1}=\frac{\frac{5}{4}}{\frac{-3}{4}}=-\frac{5}{3}$$

$$x=-1\Rightarrow\frac{2^{-1}+1}{2^{-1}-1}=\frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-1}$$

$$=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{-1}{2}}=-3$$

$$A=\left\{\frac{-9}{7},\frac{-5}{3},-3\right\}$$

ب) $B=\left\{2^x-3^y \mid x,y\in Z, xy=4\right\}$

در این‌جا عبارت جبری داده شده شامل دو متغیر x و y است. به دنبال دو عدد صحیح هستیم که حاصل ضرب آن‌ها ۴ شود. بنابراین حالت‌های زیر اتفاق می‌افتد.

$$\begin{cases}x=1\\ y=4\end{cases}\ 2^x-3^y=2-3^4$$

$$=2-81=-79$$

$$\begin{cases}x=4\\ y=1\end{cases}\ 2^x-3^y=2^4-3$$

$$=16-3=13$$

$$\begin{cases}x=-1\\ y=-4\end{cases}\ 2^x-3^y=2^{-1}-3^{-4}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{81}=\frac{729}{162}$$

$$\begin{cases}x=-4\\ y=-1\end{cases}\ 2^x-3^y=2^{-4}-3^{-1}=\frac{1}{2^4}-\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{16}-\frac{1}{3}=\frac{-13}{48}$$

$$\begin{cases}x=2\\ y=2\end{cases}\ 2^x-3^y=2^2-3^2$$

$$=4-9=-5$$

$$\begin{cases}x=-2\\ y=-2\end{cases}\ 2^x-3^y=2^{-2}-3^{-2}$$

$$=\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{9}=\frac{5}{36}$$

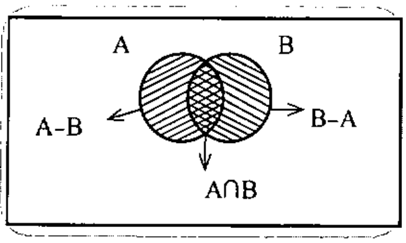
$$B=\left\{-79,13,\frac{729}{162},-\frac{13}{48},-5,\frac{5}{36}\right\}$$

۶. با استفاده از نمودار مجموعه‌ای (ون) داریم:

$$(A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A)$$

در این صورت:

$$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$$



۷. در رابطه‌ی $\{3\}\subset X\subset\{1,2,3\}$.

مجموعه‌ی X باید عضو مجموعه‌ی $\{3\}$ را شامل باشد. همین‌طور X می‌تواند اعضای مجموعه‌ی $\{1,2,3\}$ را اختیار کند، یعنی $X_1=\{3\}$ و $X_2=\{3,1\}$ و $X_3=\{3,2\}$ و $X_4=\{3,2,1\}$. بنابراین، همان‌طور که مشاهده می‌شود، تعداد مجموعه‌هایی مانند X که در رابطه‌ی مذکور صدق می‌کنند برابر تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $\{1,2\}$ خواهد بود که در آن $4=2^2$ است.

۸. با فرض $n^n=a$ داریم:

$$n^{n^{n+1}}=n^{n^n\times n^1}\xrightarrow{n^n=a}n^{a\times n}$$

$$=n^{n\times a}=(n^n)^a=a^n$$

۹.

الف) $\underbrace{11^{13}+11^{13}+\ldots+11^{13}}_{\text{۱۱ تا}}$

$+\underbrace{11^{14}+11^{14}+\ldots+11^{14}}_{\text{۱۲۰ تا}}$

$+\underbrace{11^{15}+11^{15}+\ldots+11^{15}}_{\text{۱۳۲۰ تا}}$

$$=11\times11^{13}+120\times11^{14}+1320\times11^{15}$$

$$=11^{14}+120\times11^{14}+1320\times11^{15}$$

$$=121\times11^{14}+1320\times11^{15}$$

$$=11^2\times11^{14}+11\times120\times11^{15}$$

$$=11^{16}+120\times11^{16}=121\times11^{16}$$

$$=11^2\times11^{16}=11^{18}$$

ب) $\left[\left(\frac{1}{7}\right)^{\left(\frac{1}{7}\right)^{\left(\frac{1}{7}\right)}}\times\left(-\frac{1}{7}\right)^{\left(\frac{1}{7}\right)^{\left(\frac{1}{7}\right)}}\right]^{\left(\frac{1}{7}\right)^{\left(-\frac{1}{7}\right)}}$

$$\left[\left(\frac{-1}{49}\right)^{\left(\frac{1}{7}\right)^{\left(\frac{1}{7}\right)}}\right]^{\left(\frac{1}{7}\right)^{\left(\frac{-1}{7}\right)}}=\left(\frac{-1}{49}\right)^{\left[\left(\frac{1}{7}\right)^{\left(\frac{1}{7}\right)}\times\left(\frac{1}{7}\right)^{\left(\frac{-1}{7}\right)}\right]}$$

$$=\left(\frac{-1}{49}\right)^{\left[\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{7}+\left(\frac{-1}{7}\right)}\right]}=\left(-\frac{1}{49}\right)^{\left(\frac{1}{7}\right)^0}$$

$$=\left(\frac{-1}{49}\right)^1=\frac{-1}{49}$$

۱۰. می‌دانیم که زیر رادیکال باید همواره عددی مثبت باشد.

$$-xy^2\geq0\xrightarrow{y^2\geq0}-x\geq0$$

$\Rightarrow$ x عدد منفی است $\Rightarrow |x|=-x$

$$-x^2y\geq0\xrightarrow{x^2\geq0}-y\geq0$$

$\Rightarrow$ y عدد منفی است $\Rightarrow |y|=-y$

$$-\sqrt{-xy^2}-\sqrt{-yx^2}$$

$$=-\sqrt{-x}\times\sqrt{y^2}-\sqrt{-y}\times\sqrt{x^2}$$

$$=-\sqrt{-x}\times|y|-\sqrt{-y}\times|x|$$

$$=-\sqrt{-x}(-y)-\sqrt{-y}(-x)$$

$$=y\sqrt{-x}+x\sqrt{-y}$$

۱۱.

$$\frac{1}{\sqrt[4]{3^4\times5}+8\sqrt[8]{5^2}+7\sqrt[16]{5^4}-16\sqrt[4]{5}}$$

$$=\frac{1}{3\sqrt[4]{5}+8\sqrt[4]{5}+7\sqrt[4]{5}-16\sqrt[4]{5}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt[4]{5}}=\frac{1}{2\sqrt[4]{5}}\times\frac{\sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[4]{5^3}}=\frac{\sqrt[4]{125}}{10}$$

۱۲.

$$-x\left\{-x[-3x+x^2-2]-5\right\}$$
$$+1-x^4+3x^3+2x^2$$
$$=-x\left\{3x^2-x^3+2x-5\right\}$$
$$+1-x^4+3x^3+2x^2$$
$$=-3x^3+x^4-2x^2+5x+1$$
$$-x^4+3x^3+2x^2=5x+1$$

۱۳.

$$A=4x^2+12-(2x-4)(2x-3)$$
$$=4x^2+12-[(2x)^2+(-4-3)(2x)+(-4)(-3)]$$
$$=4x^2+12-(4x^2-14x+12)$$
$$=4x^2+12-4x^2+14x-12=14x$$

$$B=2\times7(2x-\frac{1}{7})(7x+\frac{1}{2})$$
$$=(14x-1)(14x+1)$$
$$=(14x^2)-(1)^2=196x^2-1$$

$$(B-A^۲)^{۲۰۱۰}=(۱۹۶x^۲-۱-۱۹۶x^۲)^{۲۰۱۰}$$
$$=(-۱)^{۲۰۱۰}=۱$$

.۱۴

الف) $[a\underbrace{(b-۱)(b+۱)}_{b^۲-۱}(b^۲+۱)\times\frac{۱}{a}]^۲$

$$=[(b^۲-۱)(b^۲+۱)]^۲=(b^۴-۱)^۲$$
$$=b^۸-۲b^۴+۱$$

ب) $۱\times(۱۹^۲+۱۹\times۱۸+۱۸^۲)+۱۸^۳$

$$\underbrace{(۱۹-۱۸)}_{۱}(۱۹^۲\times۱۹\times۱۸+۱۸^۲)+۱۸^۳$$

$$\xrightarrow[(۱۹-۱۸)(۱۹^۲+۱۹\times۱۸+۱۸^۲)]{(a-b)(a^۲+ab+b^۲)}$$

$$۱۹^۳-۱۸^۳+۱۸^۳=۱۹^۳$$

.۱۵ $x+\frac{۱}{x}=۳\Rightarrow\frac{x^۲+۱}{x}=۳$

$$\Rightarrow x^۲+۱=۳x \text{ یا } x^۲-۳x=-۱ \quad (۱)$$
$$(\frac{x^۲+۱}{۲x})^۲-۲(x^۲-۳x)$$
$$\xrightarrow{(۱)}(\frac{۳x}{۲x})^۲-۲(-۱)$$
$$=\frac{۹}{۴}+۲=\frac{۱۷}{۴}$$

.۱۶

الف) $x^۲(a^۶-۷۲۹x^۶)$

$$=x^۲(a^۳-۲۷x^۳)(a^۳+۲۷x^۳)$$
$$=x^۲(a-۳x)(a^۲+۳ax+۹x^۲)$$
$$\times(a+۳x)(a^۲-۳ax+۹x^۲$$

ب) $(\underbrace{a+b}_{A})^۲-۲(\underbrace{a+b}_{A})+۱$

$$\xrightarrow{a+b=A}A^۲-۲A+۱=(A-۱)^۲$$
$$\xrightarrow{a+b=A}(a+b-۱)^۲$$

ج) $x^۲+x(۲y-۲)+y^۲-۲y+۱$

$$=x^۲+x(\underbrace{۲y-۲}_{+})+(\underbrace{y-۱}_{\times})^۲$$

در اینجا x یک جملهی مشترک است که باید ضرب دو جملهی غیرمشترک آن $(y-۱)^۲$ و جمع آنها $۲y-۲$ باشد. بنابراین:

$$(x+y-۱)(x+y-۱)=(x+y-۱)^۲$$

د) $۳x^۳-۳x^۲-۴x^۲+۴$

$$=۳x^۲(x-۱)-۴(x^۲-۱)$$
$$=۳x^۲(x-۱)-۴(x-۱)(x+۱)$$
$$=(x-۱)(۳x^۲-۴x-۴)$$
$$=(x-۱)(x-۲)(۳x+۲)$$

باید $۳x^۲-۴x-۴$ را تجزیه کنیم:

$$A=۳x^۲-۴x-۴$$
$$۳A=(۳x)^۲-۴(۳x)-۱۲$$
$$۳A=(۳x-۶)(۳x+۲)$$
$$۳A=۳(x-۲)(۳x+۲)$$
$$A=(x-۲)(۳x+۲)$$

۱۷. اگر فاصلهی دو شهر را x بگیریم، خواهیم داشت:

$$x=۱۰+\frac{۱}{۳}x\Rightarrow x-\frac{۱}{۳}x=۱۰$$
$$\Rightarrow\frac{۲}{۳}x=۱۰\Rightarrow۲x=۳۰\Rightarrow x=۱۵$$

۱۸. هر نقطه مانند A روی محور طولها، عرضش صفر است، یعنی $A(\alpha,۰)$

$$AB=AC\Rightarrow\sqrt{(\alpha-۴)^۲+(۰-۱)^۲}$$
$$=\sqrt{(\alpha-۲)^۲+(۰-۱)^۲}$$
$$\Rightarrow(\alpha-۴)^۲+۱=(\alpha-۲)^۲+۱$$
$$\Rightarrow\alpha^۲-۸\alpha+۱۶=\alpha^۲-۴\alpha+۴$$
$$\Rightarrow-۴\alpha=-۱۲\Rightarrow\alpha=۳$$

بنابراین مختصات A $(۳,۰)$ است.

حل مسائل ریاضی سال دوم

میرشهرام صدر

۱. فرض کنیم b ضلع وسطی و d قدر نسبت این تصاعد باشد، بنابراین داریم:

$$\begin{array}{ccccc} c & , & b & , & a \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ b-d & , & b & , & b+d \end{array}$$

از طرفی طبق رابطهی فیثاغورس داریم:

$$a^۲=b^۲+c^۲$$
$$\Rightarrow(b+d)^۲=b^۲+(b-d)^۲$$
$$\Rightarrow b^۲+۲bd+d^۲$$
$$=b^۲+b^۲-۲bd+d^۲$$
$$\Rightarrow b^۲=۴bd\Rightarrow b=۴d$$

۲. فرض کنیم a و d به ترتیب جملهی اول و قدر نسبت دنبالههای حسابی باشند، در این صورت دنبالههای هندسی بهصورت زیر است:

$$a+۳d,a+۵d,a+۱۱d \quad (۱)$$

در دنبالههای هندسی، مربع جملهی وسط برابر با حاصلضرب دو جملهی دیگر است. در نتیجه داریم:

$$(a+۵d)^۲=(a+۳d)(a+۱۱d)$$
$$\Rightarrow a^۲+۲۵d^۲+۱۰ad$$
$$=a^۲+۱۴ad+۳۳d^۲\Rightarrow۴ad+۸d^۲=۰$$
$$\Rightarrow۴d(a+۲d)=۰\xrightarrow{d\neq۰}a=-۲d$$

با قرار دادن $a=-۲d$ در دنبالهی (۱) ملاحظه میکنیم که:

$$d,۳d,۹d$$

و این یک دنبالهی هندسی با قدر نسبت ۳ است.

۳. چون f=g و دو زوج مرتب $(۱,a+۳b)$ و $(۱,۲a+b)$ مؤلفههای اول برابر دارند، پس مؤلفههای دوم آنها با هم برابرند، یعنی داریم:

$$a+۳b=۲a+b\Rightarrow a=۲b$$

اکنون باید زوجهای باقیمانده از f و g با یکدیگر برابر باشند، پس داریم:

$$(۲,۴b+c)=(a,۳)\Rightarrow\begin{cases}a=۲\\۴b+c=۳\end{cases}$$

بنابراین:

$$a=۲,a=۲b\Rightarrow۲=۲b\Rightarrow b=۱$$
$$۴b+c=۳\Rightarrow۴+c=۳\Rightarrow c=-۱$$

در نتیجه:

$$۵a+۲b+c=۵(۲)+۲(۱)+(-۱)=۱۱$$

.۴

$$x_A=y_B\Rightarrow۲n+۲m=\frac{n}{۳}+۱$$
$$\Rightarrow\frac{۵}{۳}n+۲m=۱\Rightarrow۵n+۶m=۳$$

$y_A = x_B \Rightarrow n-m = ۲n-۱$

$\Rightarrow n+m=۱$

$-۵\times\begin{cases} ۵n+۶m=۳ \\ n+m=۱ \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} ۵n+۶m=۳ \\ \underline{-۵n-۵m=-۵} \end{cases}$

$m=-۲$

$n+(-۲)=۱ \Rightarrow n=۳$

۵. با توجه به تابع f داریم:

$f(۱)=-۳$

$f(f(۱))=f(-۳)=۲$

$f(f(f(۱)))=f(۲)=۵$

۶. حجم مخروط به شعاع قاعده‌ی ۵ و ارتفاع h برابر با $\frac{۱}{۳}$ حجم استوانه به همان شعاع قاعده و ارتفاع است. در صورتی که حجم استوانه را V در نظر بگیریم، حجم هر یک از مخروط‌ها $\frac{۱}{۳}V$ و در نتیجه حجم منبع و حجم استوانه برابر است با:

حجم منبع $V=\frac{۱}{۳}V+V+\frac{۱}{۳}V=\frac{۵}{۳}V$

حجم استوانه $V=\pi r^۲h=۲۵\pi h$

در نتیجه داریم:

حجم منبع $V=\frac{۵}{۳}V=\frac{۵}{۳}\times ۲۵\pi h$

$=\frac{۱۲۵}{۳}\pi h$

۷. برای محاسبه‌ی $f(k-۱)$ کافی است درتابع $f(x)$ به جای xها قرار دهیم $(k-۱)$، در این صورت:

$$f(k-۱)=\begin{cases} ۲(k-۱) & k-۱>۲ \\ ۴ & k-۱=۲ \\ (k-۱)^۲+۱ & k-۱<۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(k-۱)=\begin{cases} ۲k-۲ & k>۳ \\ ۴ & k=۳ \\ k^۲-۲k+۲ & k<۳ \end{cases}$$

۸.

$p=۲x^۲+۳x+۲=۰$

$\Delta=۹-۱۶=-۷<۰$

چون $\Delta<۰$ و $a=۲>۰$، پس سه جمله‌ای $۲x^۲+۳x+۲$ به ازای جمیع مقادیر x مثبت است. بنابراین مخرج کسر همواره مثبت است، پس برای این که کسر مثبت باشد باید صورت کسر همواره مثبت باشد، یعنی باید داشته باشیم:

$ax^۲+۲x+(a-۲)>۰$

برای این منظور باید دستگاه نامعادله‌های $\begin{cases}\Delta<۰ \\ a>۰\end{cases}$ را حل کنیم.

$$\begin{cases}\Delta=(۲)^۲-۴(a)(a-۲)<۰ \\ a>۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-۴a^۲+۸a+۴<۰ \\ a>۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a<۱-\sqrt{۲}, a>۱+\sqrt{۲} \\ a>۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow a>۱+\sqrt{۲}$$

۹. این تابع وقتی با معناست که دو شرط زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases}۱)\, ۱۶-x^۲\geq ۰ \\ ۲)\, -x^۲-x+۳۰>۰\end{cases}$$

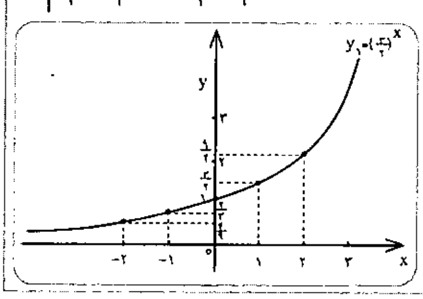
$$\Rightarrow\begin{cases}x^۲\leq ۱۶ \\ x^۲+x-۳۰<۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-۴\leq x\leq ۴\Rightarrow D_۱=[-۴,۴] \\ (x+۶)(x-۵)<۰\Rightarrow D_۲=(-۶,۵)\end{cases}$$

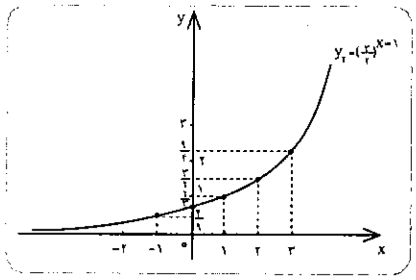
$D=D_۱\cap D_۲=[-۴,۴]\cap(-۶,۵)=[-۴,۴]$

۱۰. ابتدا به کمک نقطه‌یابی نمودار، تابع با ضابطه‌ی $y_۱=(\frac{۳}{۲})^x$ را رسم می‌کنیم، سپس با انتقال، نمودار تابع $f(x)$ را رسم خواهیم کرد.

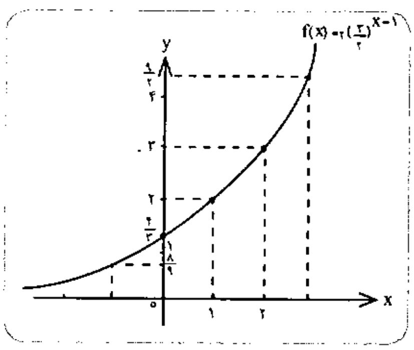
x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	$\frac{۴}{۹}$	$\frac{۲}{۳}$	۱	$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۴}{۹}$



اکنون با انتقال نمودار $y_۱=(\frac{۳}{۲})^x$ به اندازه‌ی یک واحد به سمت راست، نمودار تابع با ضابطه‌ی $y_۲=(\frac{۳}{۲})^{x-۱}$ را خواهیم داشت.



در مرحله‌ی آخر با دو برابر کردن عرض هر نقطه روی نمودار تابع $y_۲=(\frac{۳}{۲})^{x-۱}$، نمودار تابع $f(x)$ را به صورت زیر رسم می‌کنیم.



حل مسائل هندسه‌ی ۱

محمدهاشم موسوی

۱. سه پاره خط a، b و c روی یک خط راست هستند.

۲. یک زاویه را α درجه فرض می‌کنیم. زاویه‌ی دیگر $۳\alpha-۶°$ خواهد بود و چون این دو زاویه متمم یکدیگرند، پس داریم:

$\alpha+(۳\alpha-۶°)=۹۰°\Rightarrow ۴\alpha-۶°=۹۰°$

$\Rightarrow ۴\alpha=۹۶°\Rightarrow \alpha=۲۴°$

$\Rightarrow ۳\alpha-۶°=۷۲°-۶=۶۶°$

پس دو زاویه یکی °۲۴ و دیگری °۶۶ است.

۳. الف) مثلث‌های I و III به حالت «زض‌ز» یعنی برابری دو زاویه‌ی متناظر و تساوی ضلع بین این دو زاویه، هم‌نهشت‌اند

(زاویه‌ی سوم این دو مثلث 70° است).

ب) مثلث‌های II و III به حالت «ض‌زض»، یعنی برابری دو ضلع متناظر هم‌نهشت‌اند.

پ) مثلث‌های II و III به حالت «ض‌زض»، یعنی برابری دو ضلع نظیر و زاویه‌ی بین این دو ضلع هم‌نهشت‌اند.

ت) مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی I و III به دلیل برابری وتر و یک ضلع هم‌نهشت‌اند.

۴. این سه مثلث به حالت «زض‌ز» هم‌نهشتند، زیرا داریم:

$$AB = BC = AC,$$
$$A\hat{B}F = B\hat{C}D = C\hat{A}E,$$
$$B\hat{A}F = C\hat{B}D = A\hat{C}E$$
$$= 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

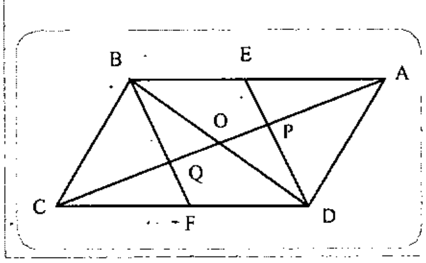
۵. تعداد قطرهای ۱۷ ضلعی محدب را به دست می‌آوریم. داریم:

$$\text{تعداد قطرهای n ضلعی محدب} = \frac{n(n-3)}{2},$$
$$n = 17$$
$$\text{تعداد قطرها} = \frac{17(17-3)}{2} = 119$$

درنتیجه اختلاف تعداد قطرها و تعداد ضلع‌های ۱۷ ضلعی محدب برابر است با:

$$119 - 17 = 102$$

۶. قطر BD از متوازی‌الاضلاع را رسم می‌کنیم و نقطه‌ی برخورد آن با قطر AC را O می‌نامیم. می‌دانیم که قطرهای AC و BD یکدیگر را نصف کرده‌اند، بنابراین با توجه به این که E وسط AB و F وسط CD است، نقطه‌ی P محل برخورد میانه‌های مثلث ABD و نقطه‌ی Q محل برخورد میانه‌های مثلث BCD است. پس در مثلث‌های ABD و BCD داریم:



$$AP = \frac{2}{3}AO = \frac{2}{3}\times\frac{1}{2}AC = \frac{1}{3}AC,$$
$$OP = \frac{1}{C}\times\frac{1}{2}AC = \frac{1}{6}AC$$
$$CQ = \frac{2}{3}CO = \frac{2}{3}\times\frac{1}{2}AC = \frac{1}{3}AC,$$
$$OQ = \frac{1}{3}OC = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}AC = \frac{1}{6}AC$$
$$PQ = OP + OQ = \frac{1}{6}AC + \frac{1}{6}AC$$
$$= \frac{1}{3}AC \Rightarrow AP = PQ = QC = \frac{1}{3}AC$$

پس حکم مسئله ثابت شد.

۷. الف) مساحت مستطیل را S، محیط آن را 2P، قطر آن را d و دو ضلع آن را a و b می‌نامیم. بنابر داده‌های مسئله داریم:

$$\text{(الف)}\begin{cases} 2P = 2(a+b) = 68 \\ \dfrac{b}{a} = \dfrac{8}{9} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b = 34 \\ b = \dfrac{8}{9}a \end{cases} \Rightarrow a + \frac{8}{9}a = 34$$
$$\Rightarrow \frac{17a}{9} = 34 \Rightarrow a = 18$$
$$\Rightarrow b = \frac{8}{9}\times 18 = 16$$

پس طول و عرض یا در واقع دو ضلع مجاور این مستطیل ۱۸ و ۱۶ است.

ب) اگر نقطه‌ی برخورد قطرهای مستطیل را O بنامیم، مثلث‌های AOD و BCO متساوی‌الاضلاع هستند، زیرا مثلث‌های متساوی‌الساقینی هستند که زاویه‌ی رأس آن‌ها 60° است، پس داریم:

$$\begin{cases} d = \sqrt{a^2+b^2} \\ b = \dfrac{d}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 50 = \sqrt{a^2+b^2} \\ b = \dfrac{50}{2} = 25 \end{cases}$$
$$\Rightarrow 50 = \sqrt{a^2+625} \Rightarrow 2500 = a^2 + 625$$
$$\Rightarrow a^2 = 1875 \Rightarrow a = 25\sqrt{3}$$

۸. مساحت متوازی‌الاضلاع را S و ضلع و ارتفاع نظیر آن از این متوازی‌الاضلاع را به ترتیب a و h_a می‌نامیم. داریم:

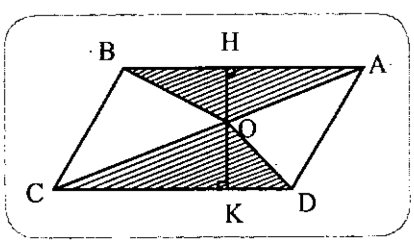
$$S = 576, a = 24, S = a.h_a$$
$$\Rightarrow 576 = 24\times h_a \Rightarrow h_a = 24$$
$$S = 480, \frac{h_a}{a} = \frac{5}{6}, S = a.h_a$$
$$\Rightarrow a = \frac{h_a}{\frac{5}{6}} = \frac{6}{5}h_a$$
$$\Rightarrow 480 = \frac{6}{5}h_a \times h_a$$
$$\Rightarrow 480 = \frac{6}{5}\times h_a^2 \Rightarrow h_a^2 = 400 \Rightarrow h_a = 20$$

ب) $S = 117, a = h_a + 4, S = a.h_a$

$$\Rightarrow 117 = (h_a+4)h_a$$
$$\Rightarrow 117 = h_a^2 + 4h_a$$
$$\Rightarrow h_a^2 + 4h_a - 117 = 0$$
$$\Rightarrow h_a = \frac{-2\pm\sqrt{4+117}}{1}$$
$$= -2\pm 11 \Rightarrow h_a = -13, h_a = 9$$

پس جواب قابل قبول $h_a=9$ است.

۹. از O خطی عمود بر ضلع‌های AB و CD رسم می‌کنیم تا این دو ضلع را به‌ترتیب در H و K قطع کند. OH ارتفاع رأس O از مثلث OAB و OK ارتفاع رأس O از مثلث OCD و HO+OK=HK ارتفاع متوازی‌الاضلاع است. با توجه به این‌که AB=CD است، داریم:



$$S_{OAB} = \frac{1}{2}OH.AB$$
$$S_{OCD} = \frac{1}{2}OK.CD = \frac{1}{2}OK.AB$$
$$\Rightarrow S_{OAB} + S_{OCD} = \frac{1}{2}OH.AB$$
$$+\frac{1}{2}OK.AB - \frac{1}{2}AB(OH+OK)$$
$$\Rightarrow S_{OAB} + S_{OCD} = \frac{1}{2}AB(HK)$$
$$\Rightarrow S_{OAB} + S_{OCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$$

۱۰. داریم:

$$\frac{۳\sqrt{۳}a^{۲}}{۲}=۵۴\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow a^{۲}=۳۶ \Rightarrow a=۶$$

اندازه‌ی ضلع شش‌ضلعی منتظم

سهم شش‌ضلعی منتظم $=\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$

$$=\frac{۶\sqrt{۳}}{۲}=۳\sqrt{۳}$$

۱۱. داریم:

$$AO=\frac{AC}{۲}=\frac{۱۲}{۲}=۶,$$

$$DO=\frac{DB}{۲}=\frac{۱۶}{۲}=۸$$

$$\Rightarrow AD=\sqrt{AO^{۲}+DO^{۲}}$$

$\Rightarrow AD=\sqrt{۶^{۲}+۸^{۲}}=۱۰$ اندازه‌ی ضلع لوزی

از طرفی می‌دانیم که:

مساحت لوزی $=\frac{۱}{۲}AC.BD=AD.CE$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}\times ۱۲\times ۱۶=۱۰\times CE$$

$$\Rightarrow CE=CF=۹/۶$$

$$AC^{۲}=CE^{۲}+AE^{۲}$$

$$\Rightarrow ۱۲^{۲}=۹/۶^{۲}+AE^{۲}$$

$$\Rightarrow AE=۷/۲$$

$$S_{ACE}=\frac{۱}{۲}AE.EC=\frac{۱}{۲}\times ۷/۲\times ۹/۶=۳۴/۵۶$$

$$S_{CEAF}=۲S_{ACE}$$

$$\Rightarrow S_{CEAF}=۲\times ۳۴/۵۶=۶۹/۱۲$$

حل مسائل حسابان

مجتبی رفیعی

۱. دونــده، مرتبـه‌ی اول ۴ متر، مرتبه‌ی دوم ۸ متـر، مرتبه‌ی سـوم ۱۲ متـر و ... را طـی می‌کننـد. مجمـوع جمـلات تصاعد ... ,۴,۸,۱۲ برابر ۴۸۰ است. پس:

$$۴۸۰=\frac{n}{۲}(۲\times ۴+(n-۱)\times ۴)$$

$$=n(۲+۲n)\Rightarrow n^{۲}+n-۲۴۰=۰$$

$$\Rightarrow n=۱۵$$

۲. فـرض کنیـد $q=\frac{b}{a}$ پـس $b=aq$، $c=aq^{۲}$ و $d=aq^{۳}$.

سمت چپ: $(b-c)^{۲}=(aq-aq^{۲})^{۲}$

$$=a^{۲}q(۱-q)^{۲}$$

سمت راست: $ac+bd-۲ad$

$$=a(aq^{۲})+(aq)(aq^{۳})-۲a(aq^{۳})$$

$$=a^{۲}q^{۲}+a^{۲}q^{۴}-۲a^{۲}q^{۳}$$

$$=a^{۲}q(۱+q^{۲}-۲q)$$

$a^{۲}q^{۲}(۱-q)^{۲}=$ سمت چپ

۳. ایـن مسـئله چهـار حالـت دارد که بررسی می‌کنیم:

حالـت اول) تقسـیم x^n-a^n بـر $x-a$:

$$R=f(a)=a^n-a^n=۰$$

درنتیجه x^n-a^n همواره بر $x-a$ بخش‌پذیر است.

$$x^n-a^n=(x-a)(x^{n-۱}+ax^{n-۲}+\cdots+a^{n-۲}x+a^{n-۱})$$

$$\Rightarrow Q(x)=x^{n-۱}+ax^{n-۲}+\cdots+a^{n-۱}$$

حالت دوم) تقسیم x^n+a^n بر $x+a$:

$$P=f(-a)=(-a)^n+a^n=\begin{cases}۰ & n \text{ زوج}\\ -۲a^n & n \text{ فرد}\end{cases}$$

یعنی x^n+a^n وقتـی بر $x+a$ بخش‌پذیر اسـت که n فرد باشد. حال خارج قسمت را در هر حالت تعیین می‌کنیم:

الف) $n=۲k+۱$:

$$x^n+a^n=(x+a)(\underbrace{x^{n-۱}-ax^{n-۲}+\cdots-a^{n-۲}x+a^{n-۱}}_{\text{خارج‌قسمت}})$$

ب) $n=۲k$:

$$x^n+a^n=(x+a)Q(x)+۲a^n$$

$$\Rightarrow Q(x)=\frac{x^n-a^n}{x+a}=\frac{x^{۲k}-a^{۲k}}{x+a}$$

$$=\frac{(x^{۲})^k-(a^{۲})^k}{x+a}$$

$$=\frac{(x^{۲}-a^{۲})(x^{۲k-۲}+a^{۲}x^{۲k-۴}+\cdots+a^{۲k-۲})}{x+a}$$

$$=(x-a)(x^{n-۲}+a^{۲}x^{n-۴}+\cdots+a^{n-۲})$$

حالت سوم) x^n-a^n بر $x+a$:

$$R=f(-a)=(-a)^n-a^n=\begin{cases}۰ & n \text{ زوج}\\ -۲a^n & n \text{ فرد}\end{cases}$$

الف) $n=۲k$:

$$x^n-a^n=(x+a)Q(x)+۰$$

$$\Rightarrow Q(x)=\frac{x^{۲k}-a^{۲k}}{x+a}$$

$$=(x-a)(x^{n-۲}+a^{۲}x^{n-۴}+\cdots+a^{n-۲})$$

(مانند ب در حالت دوم)

ب) $n=۲k+۱$:

$$x^n-a^n=(x+a)Q(x)-۲a^n$$

$$\Rightarrow Q(x)=\frac{x^n+a^n}{x+a}$$

$$=x^{n-۱}-ax^{n-۲}+a^{۲}x^{n-۳}-\cdots+a^{n-۱}$$

حالت چهارم) $x^{۸}-a^{۸}$ بر $x-a$:

$$R=f(a)=a^n+a^n=۲a^n$$

$$x^n+a^n=(x-a)Q(x)+۲a^n$$

$$\Rightarrow Q(x)=\frac{x^n-a^n}{x-a}$$

$$=x^{n-۱}+x^{n-۲}a+\cdots+a^{n-۱}$$

۴. یادآوری: در بسط $(a+b)^n$ اگر n زوج، جمله‌ی $\frac{n}{۲}+۱$ و اگر n فرد باشـد، جملات $\frac{n+۱}{۲}$ و $\frac{n+۱}{۲}+۱$ دارای بیش‌ترین ضریب هستند. پس:

$۳m+۱$ زوج باشد $۳m+۱\Rightarrow \frac{۳m+۱}{۲}+۱=۹$

$$\Rightarrow ۳m+۱=۱۶\Rightarrow m=۵$$

۵.

$$۳(x_۱^{۵}+x_۲^{۵})=۱۱(x_۱^{۳}+x_۲^{۳})$$

$$\Rightarrow ۳(x_۱+x_۲)(x_۱^{۴}-x_۱^{۳}x_۲+x_۱^{۲}x_۲^{۲}-x_۱x_۲^{۳}+x_۲^{۴})$$

$$=۱۱(x_۱+x_۲)(x_۱^{۲}-x_۱x_۲+x_۲^{۲})$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_۱+x_۲=۰\xrightarrow{x_۱^{۲}+x_۲^{۲}=۵}x_۱x_۲=\frac{-۵}{۲}\\ ۳\left((x_۱^{۲}+x_۲^{۲})^{۲}-x_۱^{۲}x_۲^{۲}-x_۱x_۲(x_۱^{۲}+x_۲^{۲})\right)\\ =۱۱(x_۱^{۲}+x_۲^{۲}-x_۱x_۲)\end{cases}$$

$\xrightarrow{x_1+x_2=t} 3(25-t^2-5t)$

$=11(5-t) \Rightarrow 3t^2+4t-20=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=2 \Rightarrow x_1x_2=2 \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=3 \\ x_1+x_2=-3 \end{cases} \\ t=\frac{-10}{3} \Rightarrow x_1x_2=\frac{-10}{3} \ \text{غقق} \end{cases}$$

(زیرا فرض $x_1^2+x_2^2=5$ را نقض می‌کند)

$\begin{cases} x^2-3x+2=0 \\ x^2+3x+2=0 \end{cases}$ دو جواب دیگر.

۶.

$$\frac{\frac{b+c+a}{a(b+c)}}{\frac{b+c-a}{a(b+c)}} \times \frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{(2bc)}$$

$$\times \frac{2bc}{a+b+c} = \frac{b+c+a}{b+c-a} \times \frac{(b+c)^2-a^2}{a+b+c}$$

$$= \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{b+c-a} = b+c+a$$

۷.

$D_{f_1}: x \ge \frac{-1}{5} \Rightarrow (2x+3)+(5x+1)$

$+2\sqrt{(2x+3)(5x+1)} = 12x+13$

$\Rightarrow 2\sqrt{(2x+3)(5x+1)} = 5x+9$

$\Rightarrow D_{f_2}: (x \ge \frac{-1}{5}) \cup (x \le \frac{-3}{2})$

$\Rightarrow D_f$ نهایی $: x \ge \frac{-1}{5}$

$\Rightarrow 4(2x+3)(5x+1) = 25x^2+90x+81$

$\Rightarrow 15x^2-22x-69=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'=3 \\ x''=\frac{-23}{15} \end{cases}$$

۸.

$f(x)=(x^2+3x)(x^2+3x+2)$

$x^2+3x=t \Rightarrow y=t(t+2)$

$\Rightarrow y=t^2+2t=(t+1)^2-1,$

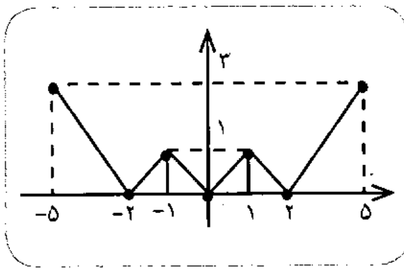
$t \ge \frac{-9}{4}$

$t+1 \ge \frac{-5}{4} \Rightarrow (t+1)^2 \ge 0$

$\Rightarrow (t+1)^2-1 \ge -1$

$\Rightarrow R_f=[-1,+\infty)$

۹.



چون نمودار نسبت به محور عرض‌ها متقارن است، پس تابع زوج است.

ب) بله. برای مثال

۱۰. $\forall x_2$ و $x_1 \in D_{f+g}: x_2 > x_1$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x_2) > f(x_1) \\ g(x_2) > g(x_1) \end{cases}$$

$\Rightarrow f(x_2)+g(x_2) > f(x_1)+g(x_1)$

$\Rightarrow (f+g)(x_2) > (f+g)(x_1)$

درنتیجه f+g اکیداً صعودی است.

ب) بله. برای مثال g(x)=+3x و f(x)=2x، پس: f(x)−g(x)=−x اکیداً نزولی است.

۱۱.

$y=f(x) \Rightarrow x=f^{-1}(y)$

f فرد $\Rightarrow f(-x)=-f(x)$

$\Rightarrow f(-x)=-y \Rightarrow f^{-1}(-y)=-x$

$=-f^{-1}(y) \Rightarrow$ f^{-1} فرد است

۱۲.

$f(x_1)=f(x_2)$

$\Rightarrow x_1+[x_1]=x_2+[x_2]$

$\Rightarrow x_1-x_2=[x_2]-[x_1]$

با فرض $[x_2]-[x_1]=k \in Z$ داریم:

$x_1=x_2+k$

$\Rightarrow x_2+k+[x_2+k]=x_2+[x_2]$

$\Rightarrow x_2+[x_2]+2k=x_2+[x_2]$

$\Rightarrow k=0 \Rightarrow x_1-x_2=0$

$\Rightarrow x_1=x_2 \Rightarrow$ f یک به یک است.

$y=x+[x]$

$\Rightarrow [y]=[x+[x]]=2[x]$

$\Rightarrow [x]=\frac{[y]}{2}$

$\begin{cases} y=x+[x] \\ [y]=2[x] \end{cases} \Rightarrow y-[y]=x-[x]$

$\Rightarrow x-[x]=y-[y]$

$\Rightarrow (x-[x])+[x]=y-[y]+\frac{[y]}{2}$

$\Rightarrow x=y-\frac{[y]}{2} \Rightarrow f^{-1}(x)=x-\frac{[x]}{2}$

۱۳.

$0 \le x \le 10 \Rightarrow 0 \le [x] \le 10$

$\Rightarrow \frac{1}{3} \le \frac{[x]+1}{3} \le \frac{11}{3}$

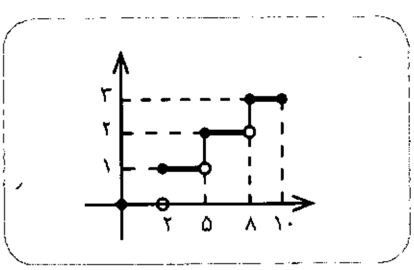
$\Rightarrow \left[\frac{[x]+1}{3}\right] \in \{0,1,2,3\}$

$\left[\frac{[x]+1}{3}\right]=0 \Rightarrow 0 \le x < 2$

$\left[\frac{[x]+1}{3}\right]=1 \Rightarrow 2 \le x < 5$

$\left[\frac{[x]+1}{3}\right]=2 \Rightarrow 5 \le x < 8$

$\left[\frac{[x]+1}{3}\right]=3 \Rightarrow 8 \le x < 10$



۱۴.

$$[\sin^2 x]=\begin{cases} 1 & x=(2k+1)\frac{\pi}{2} \\ 0 & x \ne (2k+1)\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$x=(2k+1)\frac{\pi}{2}\Rightarrow 1+\left[\frac{x}{2}\right]=-1$$

$$\Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right]=-2$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow -2\le \frac{x}{2}<-1\Rightarrow -4\le x<-2\\ \qquad\qquad x=(2k+1)\frac{\pi}{2}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow D=\varnothing$$

$$x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}\Rightarrow 0+\left[\frac{x}{2}\right]=-1$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow -1\le \frac{x}{2}<0\Rightarrow -2\le x<0\\ \qquad\qquad x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow x\in[-2,0)-\left\{\frac{-\pi}{2}\right\}$$

.۱۵

$$2\sin x\cos x-2\cos x-\sqrt{3}\sin x+\sqrt{3}=0$$

$$\Rightarrow 2\cos x(\sin x-1)-\sqrt{3}(\sin x-1)=0$$

$$\Rightarrow (\sin x-1)(2\cos x-\sqrt{3})=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin x=1\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\\ \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{\pi}{6}\end{cases}$$

.۱۶

$$tg(2Arctg\frac{1}{2})=\frac{2(\frac{1}{2})}{(1-\frac{1}{4})}=\frac{4}{3}$$

$$\alpha=2Arctg\frac{1}{2}+Arctg\frac{1}{3}$$

$$tg\alpha=\frac{tg(2Arctg\frac{1}{2})+tg(Arctg\frac{1}{3})}{1-tg(2Arctg\frac{1}{2}).tg(Arctg\frac{1}{3})}$$

$$=\frac{\frac{4}{3}+\frac{1}{3}}{1-(\frac{4}{3})(\frac{1}{3})}=\frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{9}}=3\Rightarrow tg\alpha=3$$

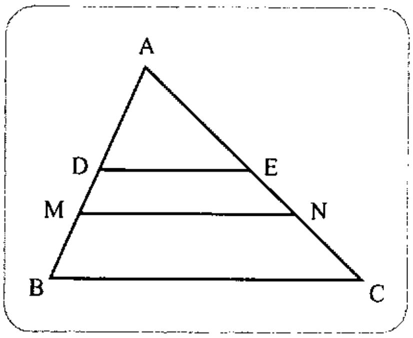
$$\Rightarrow \alpha=Arctg3$$

حل مسائل هندسه‌ی ۲

محمدهاشم رستمی

۱. الف) پاره‌خط‌های AE ،DB ،AD و EC را با دقت به کمک خط‌کش مدرج اندازه می‌گیریم. داریم:

$AD=1/5, DB=1/7,$
$AE=2/1, EC=2/4$



ب) نسبت‌های $\frac{AD}{DB}$ و $\frac{AE}{EC}$ را محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$\frac{AD}{DB}=\frac{1/5}{1/7}\simeq 0/8, \frac{AE}{EC}=\frac{2/1}{2/4}\simeq 0/8$$

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}\simeq 0/8$$

پ) پاره‌خط‌های AN ،MB ،AM و NC را با دقت به کمک خط‌کش اندازه می‌گیریم. داریم:

$AM=2/1, MB=1, AN=3,$
$NC=1/4$

ت) نسبت‌های $\frac{AM}{MB}$ و $\frac{AN}{NC}$ را به دست می‌آوریم. داریم:

$$\frac{AM}{MB}=\frac{2/1}{1}=2/1, \frac{AN}{NC}=\frac{3}{1/4}\simeq 2/1$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$$

ث) از انجام مراحل بالا به این حدس می‌رسیم که اگر در مثلثی یک خط موازی یک ضلع رسم شود، دو ضلع دیگر مثلث را به یک نسبت تقسیم می‌کنند.

۲. الف) درست است.

ب) نادرست است، زیرا BC=۹>AC=۸ نتیجه می‌شود که $\hat{A}>\hat{C}$ است.

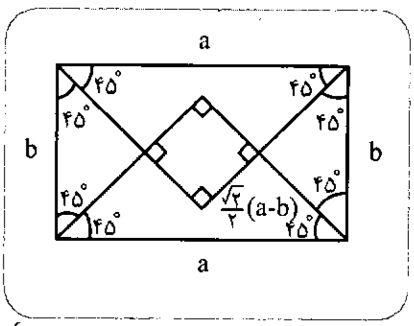
پ) همواره درست نیست، زیرا اگر ضلع‌های مثلث متساوی‌الساقین ABC (AB=AC) را امتداد دهیم، چهار زاویه‌ی حاده و چهار زاویه‌ی منفرجه‌ی مساوی ایجاد می‌شود، اما AB و AC موازی نیستند. در واقع خط BC دو خط AB و AC را قطع کرده است به قسمی که چهار زاویه‌ی حاده‌ی مساوی چهار زاویه‌ی منفرجه‌ی مساوی به وجود می‌آید، اما دو خط AB و AC موازی نیستند.

۳. داریم:

$$\text{محیط مثلث}=x+(x-1)+(2x-3)$$
$$=4x-4$$
$$\Rightarrow 40=4x-4\Rightarrow x=11$$
$$x-1=11-1=10,$$
$$2x-3=22-3=19$$

پس اندازه‌ی ضلع‌های این مثلث ۱۱، ۱۰ و ۱۹ است.

۴. می‌دانیم که اندازه‌ی ضلع مربعی که از برخورد نیمسازهای زاویه‌های درونی مستطیلی به ابعاد a و b (a>b)پدید می‌آید، برابر $\frac{\sqrt{2}}{2}(a-b)$ است. بنابراین داریم:



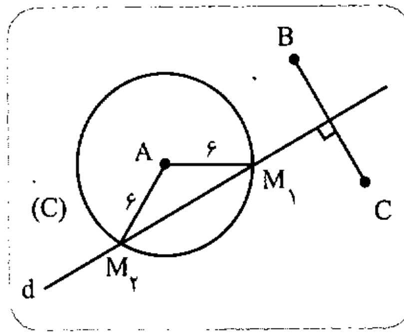
$$\begin{cases}a=2b\\ \frac{\sqrt{2}}{2}(a-b)=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2b\\ a-b=8\sqrt{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow 2b-b=8\sqrt{2}$$

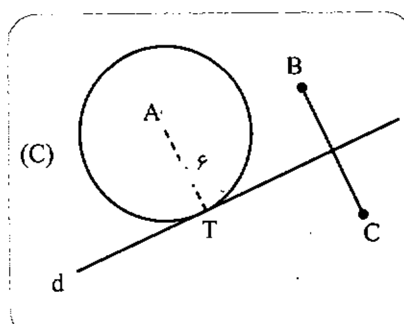
$\Rightarrow b=8\sqrt{2}$ اندازه‌ی عرض مستطیل

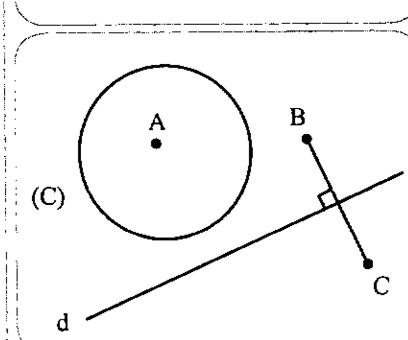
$\Rightarrow a=2b=16\sqrt{2}$ اندازه‌ی طول مستطیل

۵. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که از صفحه‌ی گذرنده بر سه نقطه‌ی A، B و C که از دو نقطه‌ی B و C به یک فاصله باشد، عمود منصف پاره خط BC است. این عمود منصف را رسم می‌کنیم و خط d می‌نامیم. از طرفی مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه‌ی ABC که از نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۶ قرار دارد دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۶ است. این دایره را نیز رسم می‌کنیم و آن را دایره‌ی (C) می‌نامیم.



نقطه‌ی برخورد خط d و دایره‌ی (C) جواب مسئله است و به تعداد نقطه‌های برخورد، مسئله دارای جواب است، به این معنی اگر خط d دایره‌ی (C) را در دو نقطه قطع کند مسئله دو جواب دارد (نقطه‌های M_1 و M_2) و اگر خط d بر دایره‌ی (C) مماس باشد، نقطه‌ی تماس T جواب مسئله خواهد بود و اگر خط d دایره‌ی (C) را قطع نکند مسئله جواب ندارد.

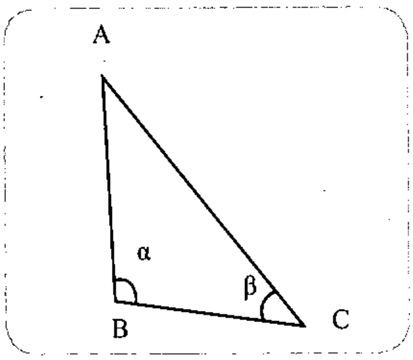




۶. فرض می‌کنیم مسئله حل شده و مثلث ABC جواب آن است، یعنی مثلثی باشد که محیط آن مساوی ۲P، اندازه‌ی زاویه‌های $\hat{B}$ و $\hat{C}$ از آن به ترتیب مساوی α و β باشند ($\hat{B}=\alpha$ و $\hat{C}=B$). ضلع BC از این مثلث را از طرف B به اندازه‌ی BE=AB و از طرف C به اندازه‌ی CF=AC امتداد می‌دهیم و از A به E و F وصل می‌کنیم. اولاً EF=۲P، یعنی برابر محیط مثلث است، زیرا داریم:

EF=EB+BC+CF

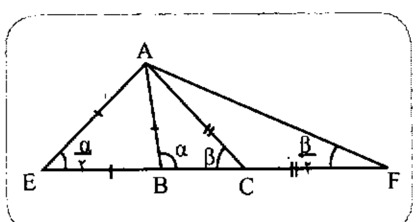
=AB+BC+AC=۲P محیط مثلث



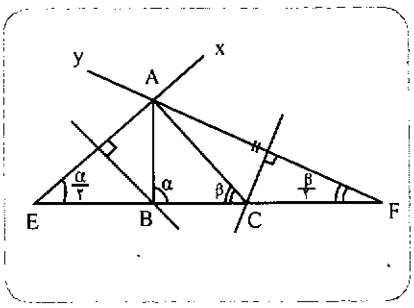
ثانیاً زاویه‌های $A\hat{E}B=\frac{\alpha}{2}$ و $A\hat{F}C=\frac{B}{2}$ است، زیرا مثلث‌های AEB و AFC متساوی‌الساقین‌اند و زاویه‌های $\hat{B}=\alpha$ و $\hat{C}=\beta$ زاویه‌های خارجی نظیر تماس‌های B و C در این دو مثلث‌اند، یعنی

$$\hat{B}=2\hat{E}\Rightarrow\alpha=2\hat{E}\Rightarrow E=\frac{\alpha}{2}$$

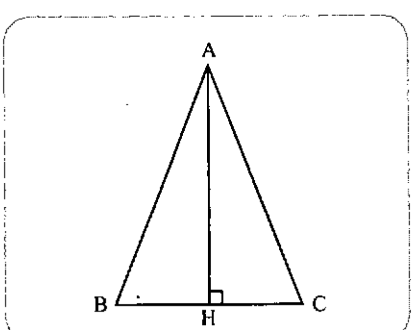
$$\hat{C}=2\hat{F}\Rightarrow\beta=2\hat{F}\Rightarrow F\Rightarrow\frac{\beta}{2}$$



در نتیجه، مثلث AEF به دلیل معلوم بودن ضلع EF=۲P و زاویه‌های $\hat{E}=\frac{\alpha}{2}$ و $\hat{F}=\frac{\beta}{2}$ قابل رسم است. بنابراین برای رسم مثلث ABC، نخست مثلث AEF را با معلوم بودن ER=۲P، $\hat{E}=\frac{\alpha}{2}$ و $\hat{F}=\frac{\beta}{2}$ رسم می‌کنیم (پاره خط EF را به طول ۲P رسم می‌کنیم. از E خطی چنان رسم می‌کنیم که با EF زاویه‌ی $\hat{E}=\frac{\alpha}{2}$ را بسازد (خط Ex) و از F خطی چنان رسم می‌کنیم که با EF زاویه‌ی $\hat{F}=\frac{\beta}{2}$ را بسازد (خط Fy). این دو خط در یک طرف EF واقعند. نقطه‌ی برخورد Ex و Fy رأس A از مثلث ABC است. عمودمنصف ضلع AE را رسم می‌کنیم تا EF را در نقطه‌ی B قطع کند و عمود منصف ضلع AF را نیز رسم می‌کنیم تا EF را در نقطه‌ی C قطع کند از A به B و C وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسئله است.



نکته: چون مثلث‌های AEB و AFC در رأس‌های B و C متساوی‌الساقین‌اند، یعنی AB=BE و AC=CF است، پس عمودمنصف‌های قاعده‌های AE و AF به ترتیب از B و C می‌گذرند، زیرا می‌دانیم که در هر مثلث متساوی‌الساقین عمود منصف قاعده‌ی مثلث از رأس آن مثلث می‌گذرد. در شکل، مثلث ABC در رأس A متساوی‌الساقین است (AB=AC) و عمودمنصف قاعده‌ی BC از رأس A می‌گذرد.



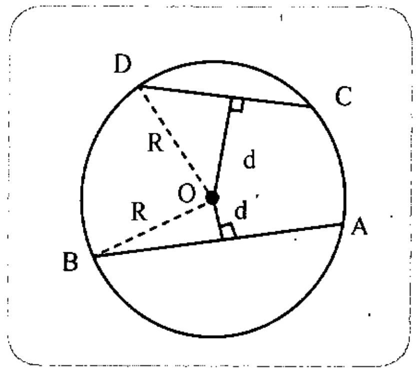
۷. با توجه به این که اندازه‌ی هر زاویه‌ی مرکزی دایره مساوی مقدار کمان روبه‌روی آن و AOB قطر دایره است، یعنی محیط دایره را به دو کمان مساوی ۱۸۰° تقسیم می‌کند، داریم:

$x = \widehat{AD} = ۴۰^\circ$

$\widehat{BD} = z = ۱۸۰^\circ - ۴۰^\circ = ۱۴۰^\circ$

$\Rightarrow y = z = ۱۴۰^\circ$

۸. می‌دانیم که d فاصله‌ی وتری به طول L در دایره‌ای به شعاع R از مرکز آن دایره از دستور $d = \sqrt{R^۲ - \frac{l^۲}{۴}}$ محاسبه می‌شود. با توجه به این مطلب، فاصله‌ی وترهای AB و CD از مرکز دایره را به ترتیب d و d' می‌نامیم. برای محاسبه‌ی d و d' داریم:



$R = ۱۰, AB = ۱۲, AC = ۱۶$

$\Rightarrow d = \sqrt{۱۰^۲ - \frac{۱۲^۲}{۴}} = ۸$

$d' = \sqrt{۱۰^۲ - \frac{۱۶^۲}{۴}} = \sqrt{۳۶} = ۶$

$\Rightarrow d = ۸ > d' = ۶$

بنابراین، وتر CD به مرکز دایره نزدیک‌تر است.

این مسئله مصداقی برای این قضیه است که:

در یک دایره (یا دو دایره‌ی مساوی) از دو وتر، آن که بزرگ‌تر است، به مرکز دایره نزدیک‌تر است.

۹. می‌دانیم که در هر چهارضلعی محیطی مجموع دو ضلع روبه‌رو با هم برابرند، یعنی در چهارضلعی ABCD داریم:

AB+CD=AD+BC و از آن‌جا داریم:

محیط چهارضلعی =۲(AB+CD)

=۲(BT+AT+DM+MC),

AT=AS

⇒ محیط چهارضلعی =۲(BT+AS+DM+MC)

$\Rightarrow ۱۲۰ = ۲(x+۱+x+۱۶+۱۳)$

$\Rightarrow ۶۰ = ۲x+۳۰ \Rightarrow ۲x = ۳۰$

$\Rightarrow x = ۱۵$

نکته. طول مماس‌های رسم شده از هر نقطه واقع در خارج یک دایره به آن دایره با هم برابر است و به همین دلیل AT=AS است. هم‌چنین BT=BN، CN=CM و CM=DS است.

۱۰. الف) چون OM نیمساز زاویه‌ی TMT' است، پس $O\hat{M}T = O\hat{M}T' = \frac{۶۰^\circ}{۲} = ۳۰^\circ$ است. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OMT: $O\hat{T}M = ۹۰^\circ$ و TH ارتفاع وارد بر وتر است، زیرا OM عمودمنصف وتر TT' است. از طرفی می‌دانیم که ضلع مقابل به زاویه‌ی ۳۰° در مثلث قائم‌الزاویه نصف وتر مثلث است، پس داریم:

$OT = \frac{OM}{۲} \Rightarrow ۱۵ = \frac{OM}{۲}$

فاصله‌ی M از مرکز دایره OM =۳۰

$\Rightarrow MT = \sqrt{OM^۲ - OT^۲} = \sqrt{۳۰^۲ - ۱۵^۲}$

$= \sqrt{۶۷۵} = ۱۵\sqrt{۳}$

از طرفی داریم:

$TH.OM = OT.MT = ۲S_{OMT}$

$\Rightarrow TH \times ۳۰ = ۱۵ \times ۱۵\sqrt{۳}$

$\Rightarrow TH = \frac{۱۵\sqrt{۳}}{۲}$

برای محاسبه‌ی MH در مثلث قائم‌الزاویه‌ی MTH، $\hat{H} = ۹۰^\circ$ داریم:

$MH^۲ = MT^۲ - TH^۲$

$= (۱۵\sqrt{۳})^۲ - (\frac{۱۵\sqrt{۳}}{۲})^۲$

$= ۶۷۵ - \frac{۶۷۵}{۴} = \frac{۲۰۲۵}{۴} \Rightarrow MH = \frac{۴۵}{۲}$

ب) در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OMT، TH ارتفاع وارد بر وتر OM است. پس داریم:

$TH^۲ = OH.MH, TH = ۱۵,$

$OH = OM - MH = ۳۰ - MH$

$\Rightarrow ۱۵^۲ = (۳۰ - MH).MH$

$\Rightarrow ۲۲۵ = ۳۰MH - MH^۲$

$\Rightarrow MH^۲ - ۳۰MH + ۲۲۵ = ۰$

$\Rightarrow MH = ۱۵$

$OH = OM - MH = ۳۰ - ۱۵$

$TT' = ۲TH = ۲\times۱۵ = ۳۰$

$MT = \sqrt{MH^۲ + TH^۲} = \sqrt{۱۵^۲ + ۱۵^۲}$

$= ۱۵\sqrt{۲}$

$OT = \sqrt{OM^۲ - MT^۲}$

$= \sqrt{۳۰^۲ - (۱۵\sqrt{۲})^۲} = \sqrt{۴۵۰} = ۱۵\sqrt{۲}$

حل مسائل جبر و احتمال

هوشنگ شرقی

۱.

$n = ۱: \frac{۱}{۱^۳} \leq ۲ - \frac{۱}{۱} \Rightarrow ۱ \leq ۱$

فرض استقرا:

$n = k: \frac{۱}{۱^۳} + \frac{۱}{۲^۳} + \cdots + \frac{۱}{k^۳} \leq ۲ - \frac{۱}{k}$

حکم استقرا:

$n = k+۱: \frac{۱}{۱^۳} + \frac{۱}{۲^۳} + \cdots + \frac{۱}{k^۳}$

$+ \frac{۱}{(k+۱)^۳} \leq ۲ - \frac{۱}{k+۱}$

به طرفین فرض، $\frac{۱}{(k+۱)^۳}$ را اضافه می‌کنیم:

$\frac{۱}{۱^۳} + \frac{۱}{۲^۳} + \cdots + \frac{۱}{k^۳}$

$+ \frac{۱}{(k+۱)^۳} \leq ۲ - \frac{۱}{k} + \frac{۱}{(k+۱)^۳}$

و از مقایسه‌ی نتیجه‌ی اخیر با حکم استقرا، نتیجه می‌گیریم که برای اثبات حکم، کافی است ثابت کنیم:

$$2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}\le 2-\frac{1}{k+1}$$

و به کمک استدلال بازگشتی داریم:

$$\frac{1}{(k+1)^2}\le\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=\frac{k+1-k}{k(k+1)}$$

$$=\frac{1}{k(k+1)}\Rightarrow\frac{1}{(k+1)^2}\le\frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow (k+1)^2\ge k\Rightarrow k^2+2k+1\ge k$$

$$\Rightarrow k^2+k+1\ge 0$$

که درستی نابرابری اخیر به ازای هر عدد طبیعی k واضح است و چون همه‌ی مراحل برگشت پذیرند، پس درستی حکم استقرا اثبات می‌شود.

۲. می‌دانیم هر عدد طبیعی در تقسیم بر ۳ یکی از باقی‌مانده‌های ۰،۱،۲ را دارد، یعنی به یکی از سه فرم 3k، 3k+1 یا 3k+2 است. بنابراین اگر عددی طبیعی بر سه بخش‌پذیر نباشد، به یکی از صورت‌های 3k+1 یا 3k+2 است و در این حالت‌ها داریم:

$$a=3k+1\Rightarrow a^2=9k^2+6k+1$$
$$=3(\underbrace{3k^2+2k}_{k'})+1=3k'+1$$

$$a=3k+2\Rightarrow a^2=9k^2+12k+4$$
$$=3(\underbrace{3k^2+4k+1}_{k''})+1=3k''+1$$

پس در هر دو حالت، باقی‌مانده‌ی a^2 بر ۳ مساوی ۱ است.

۳. فرض می‌کنیم این عدد گنگ نباشد، پس گویاست:

$$\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt[3]{2}}=\frac{a}{b}\,;a,b\in\mathbb{Z},b\neq 0$$

$$\Rightarrow\sqrt{5}-\sqrt[3]{2}=\frac{a^2}{b^2}$$

$$\Rightarrow\sqrt[3]{2}=-\frac{a^2}{b^2}+\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow 2=(\sqrt{5}-\frac{a^2}{b^2})^3$$

$$\Rightarrow 2=5\sqrt{5}-15\frac{a^2}{b^2}+3\sqrt{5}\frac{a^4}{b^4}-\frac{a^6}{b^6}$$

$$\overset{b^6\neq 0}{\Rightarrow} 2b^6=5\sqrt{5}b^6-15a^2b^4+3\sqrt{5}a^4b^2-a^6$$

$$\Rightarrow 2b^6+15a^2b^4+a^6=\sqrt{5}(5a^6+3a^4b^2)$$

$$\Rightarrow\sqrt{5}=\frac{2b^6+15a^2b^4+a^6}{5a^6+3a^4b^2}=\frac{m}{n}$$

و چون $b\in\mathbb{Z}$ و a پس $m,n\in\mathbb{Z}$ لذا $\sqrt{5}$ مساوی عددی گویاست و این خلاف فرض‌ها خواهد بود ($\sqrt{5}$ عددی گنگ است).

۴.

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{a}\ge a^2+b^2$$

$$\Rightarrow\frac{a^4+b^4}{ab}\ge a^2+b^2$$

$$\Rightarrow a^4+b^4\ge a^3b+ab^3$$

$$\Rightarrow a^4-a^3b+b^4-ab^3\ge 0$$

$$\Rightarrow a^3(a-b)-b^3(a-b)\ge 0$$

$$\Rightarrow (a-b)(a^3-b^3)\ge 0$$

$$\Rightarrow (a-b)(a-b)(a^2+ab+b^2)\ge 0$$

$$\Rightarrow (a-b)^2(a^2+ab+b^2)\ge 0$$

و درستی نابرابری فوق واضح است، زیرا $(a-b)^2\ge 0$ و چون a و b مثبت هستند پس $a^2+ab+b^2\ge 0$، همه‌ی مراحل نیز برگشت‌پذیرند.

۵. الف) نادرست است. مثال نقض: $\sqrt[3]{5}$ عددی گنگ و $(\sqrt[3]{5})^3=5$ نیز عددی گویا است.

ب) نادرست است زیرا (مثال نقض) $\sqrt{5}$ عددی گنگ و $(\sqrt{5})^3=5\sqrt{5}$ نیز عددی گنگ است.

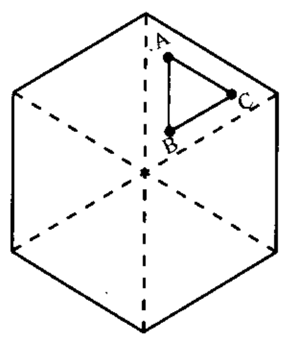
ج) درست است. اثبات:

$$a=\frac{p}{q},p,q\in\mathbb{Z},q\neq 0$$

$$\Rightarrow a^3=\frac{p^3}{q^3}=\frac{p'}{q'},p'=p^3\in\mathbb{Z},$$
$$q'=q^3\in\mathbb{Z},q\neq 0$$

$$\Rightarrow q^3=q'\neq 0\Rightarrow a^3\in Q$$

۶. به صورت زیر، با وصل کردن رئوس شش ضلعی به مرکز آن، شش ضلعی را به شش مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع واحد تقسیم می‌کنیم (توجه کنید که هر زاویه‌ی داخلی شش ضلعی منتظم مساوی ۱۲۰° است و لذا هر یک از زاویه‌های داخلی این مثلث‌ها مساوی ۶۰° و در نتیجه همگی آن‌ها متساوی‌الاضلاع و همنهشت‌اند). حال چون پانزده نقطه درون شش ضلعی در نظر گرفته‌ایم، بنابراین طبق تعمیم یافته‌ی اصل لانه کبوتری، دست‌کم سه نقطه از آن‌ها در یک مثلث قرار می‌گیرند (مانند نقاط A و B و C در شکل). پس مساحت مثلث ABC از مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a از دستور $S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ به دست می‌آید. پس خواهیم داشت:



$$S_{ABC}<\frac{\sqrt{3}}{4}(1)^2=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

۷. برای تشکیل A، ابتدا نامعادله‌ی $x(x-1)\le 2$ را حل می‌کنیم.

$$x^2-x\le 2\Rightarrow x^2-x-2\le 0$$
$$\Rightarrow (x-2)(x+1)\le 0$$
$$\Rightarrow -1\le x\le 2$$
$$\Rightarrow x=-1 \text{ یا } 0 \text{ یا } 1 \text{ یا } 2$$
$$\Rightarrow A=\{-1,0,1,2\}$$

و درباره‌ی B نیز روشن است که عددهای حسابی که فاکتوریل آن‌ها کم‌تر یا مساوی ۳۰ است، ۰،۱،۲،۳،۴ هستند.

$$B=\{0,1,2,3,4\}$$

$$\Rightarrow A-B=\{-1\},B-A=\{3,4\}$$
$$\Rightarrow A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)=\{-1,3,4\}$$

۸.

$$A=\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}\middle| x\in\mathbb{N}\right\}$$
$$B=x_1=\frac{1}{2},x_2=\frac{1}{5}$$
$$\Rightarrow S=x_1+x_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{7}{10}$$
$$p=x_1.x_2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$$
$$\Rightarrow x^2-\frac{7}{10}x+\frac{1}{10}=0$$
$$\Rightarrow 10x^2-7x+1=0$$
$$\Rightarrow B=\{x|10x^2-7x+1=0\}$$

۹. الف)

$$A-(B-C)$$
$$=A-(B\cap C')=A\cap(B\cap C')'$$
$$=A\cap(B'\cup C)=(A\cap B')\cup(A\cap C)$$
$$=(A-B)\cup(A\cap C)$$

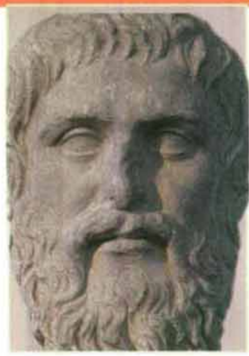
ب)

$$\left.\begin{array}{l}A\subset B\Rightarrow A\cup B=B\\ A'\subset B\Rightarrow A'\cup B=B\end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow (A\cup B)\cup(A'\cup B)=B\cup B$$
$$\Rightarrow (A\cup A')\cup(B\cup B)=B$$
$$\Rightarrow U\cup B=B\Rightarrow B=U$$

ج)

$$A-B=A$$
$$\Rightarrow A\cap B'=A\Rightarrow (A\cap B')'=A'$$
$$\Rightarrow A'\cup B=A'$$
$$\Rightarrow B\cap(A'\cup B)=B\cap A'$$

$$\overset{\text{جذب}}{\Rightarrow} B=B\cap A'$$
$$\Rightarrow B=B-A$$



مطالعه‌ی ریاضیات، دستگاه ذهنی را توسعه می‌دهد و به‌کار می‌اندازد که ارزش آن از هزار چشم بیشتر است. زیرا درک حقیقت فقط از راه ریاضی میسر است. جهان اندیشه، مهمتر از جهان مادی حواس است چرا که این جهان سایه‌ی جهان اولی است. جهان مادی غاری است ناروشن که بر روی دیوارهای آن تنها سایه‌های جهان واقعی خارج را که به نور خورشید روشن شده است، می‌بینیم. خطاهای حواس باید از راه تمرکز فکر اصلاح شوند و این تمرکز از راه مطالعه‌ی ریاضیات بهتر میسر خواهد شد.

افلاطون

من از هیچ دنیای تازه و شگفت‌انگیزی (هندسه‌ی نااقلیدوسی) آفریده‌ام.

یانوش بویویی

به نظر من مصلحت آن است که اگر در کشف هندسه‌ی نااقلیدسی توفیق یافته‌ای در انتشار آن شتاب کنی؛ نخست بدین علت که افکار به آسانی و خیلی زود از یکی به دیگری که ممکن است آن‌ها را منتشر سازد منتقل می‌شوند. ثانیاً بدین‌خاطر که بسیاری از چیزها همان‌گونه که همیشه بوده است دورانی دارند که همزمان در چند جا کشف شده‌اند نظیر گل‌های بنفشه که در بهاران همه‌جا پدید می‌آیند.

فورکش بویویی
(در نامه‌ای به پسرش یانوش)

منبع:
زبان حال ریاضی‌دانان
به روایت دکتر علی‌اکبر عالم‌زاده
مؤسسه نشر علوم نوین ۱۳۷۴