مجله ریاضی

برهان

برای دانش آموزان دبیرستان

۳۰

سال نهم، شماره دوم ، پائیز ۱۳۷۸، بها ۲۰۰۰ ریال

بسم الله الرحمن الرحیم

انتشارات مدرسه وابسته به وزارت آموزش و پرورش

❑ صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه ❑ مدیر مسؤول: محمود ابراهیمی
❑ سردبیر: حمیدرضا امیری ❑ مدیر داخلی: میرشهرام صدر
❑ اعضای هیأت تحریریه: آقایان: ❑ حمیدرضا امیری ❑ محمدهاشم رستمی ❑ احمد قندهاری ❑ میرشهرام صدر
❑ هوشنگ شرقی ❑ سیدمحمدرضا هاشمی موسوی ❑ غلامرضا یاسی پور (با تشکر از همکاری ارزندهٔ آقای پرویز شهریاری)
❑ مدیرفنی: هوشنگ آشتیانی ❑ طراح گرافیک: امیر بابایی ❑ چاپ و صحافی: چاپخانه مدرسه

مطالب این شماره

■ سال نهم، پاییز ۱۳۷۸، شمارهٔ دوم.

برهان تمامی دبیران محترم و دانش آموزان عزیز را در زمینه های زیر دعوت به همکاری می کند:

● نگارش مقاله های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتابهای ریاضی دبیرستان) ● طرح مسائل کلیدی (برای دانش آموزان) به همراه حل آنها ● طرح مسائل مسابقه ای (برای دانش آموزان) به همراه حل آنها ● طرح معماهای ریاضی ● نگارش یا ترجمهٔ مقاله های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

■ هیأت تحریریه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافهٔ مقاله‌ها آزاد است.
■ مقاله‌های وارده باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.
■ مقاله‌های مجله با رسم‌الخط انتشارات مدرسه به چاپ خواهد رسید.
■ مقاله‌های رسیده مسترد نمی‌شود.

برهان هر سه ماه یک شماره منتشر می‌شود.

نشانی: خیابان سپهبد قرنی، خیابان سپند شرقی، پلاک ۳۸
تلفن: ۶-۸۸۹۶۷۶۵، ۷۱_۸۸۰۴۵۶۸، دورنویس (فاکس): ۸۸۲۰۵۹۹، صندوق پستی: ۱۴۱۵۵/۱۹۴۹
تلفن امور مشترکین: ۹-۸۸۰۰۳۲۴

حرف اوّل

ریاضیات علمی است مادر، که تقریباً در همهٔ علوم و حتی علوم اجتماعی و اقتصادی رخنه کرده و کاربرد دارد و به دلیل اشاعه و همه‌گیر شدن ریاضیات در تمام موضوعهای مرتبط با زندگی علمی بشر امروزی و اهمیتی که این علم داراست، سال ۲۰۰۰ میلادی از طرف یونسکو «سال جهانی ریاضیات» نام‌گذاری شده است.

به راستی ریاضیات چه ویژگیهای بارزی دارد و این ویژگیها آیا در ریاضیدان یا حتی در علاقه‌مندان به علم ریاضی تأثیر می‌گذارد؟

شاید یکی از اهداف «عمومی کردن ریاضیات» که ستاد ملّی برگزاری سال جهانی ریاضیات به آن پرداخته، همین تأثیراتی باشد که علم ریاضی بر مخاطبان خود خواهد گذاشت. یکی از ویژگیهای ریاضیات «دقّت» است، کم یا زیاد شدن یک صفر، + یا − در نظر گرفتن یک رقم، پس و پیش کردن یک نماد، اضافه یا حذف کردن یک کلمه و ... هر کدام می‌تواند مسأله‌ای را به جوابی دیگر رساند یا صورتِ مسأله را عوض کند.

آیا این ویژگی بر اشخاصی که با ریاضیات سر و کار دارند، تأثیر می‌گذارد؟ بر شما چطور؟ از ویژگیهای دیگر ریاضیات خلاصه‌گویی و استفاده از مطالب، قضیه‌ها و مسأله‌های اثبات شده به عنوان ابزارهایی برای حل مسأله‌های جدید است و این که همواره به دنبال راه‌های صحیح و کوتاه باشیم. آیا می‌توانیم از این ویژگی در زندگی و در برخورد با مسائل و مشکلات احتمالی که ممکن است برای هر شخصی به وجود آید، استفاده کنیم؟ آیا ویژگیهای دیگری از ریاضیات که بتواند بر مخاطبان اثرگذار باشد، سراغ دارید؟

نظر شما راجع به نظم منطقی که بین اجزا و بخشهای مختلفِ هر شاخه از ریاضیات، مانند هندسه یا آنالیز یا نظریهٔ اعداد وجود دارد و ارتباط آن با نظم و هماهنگی موجود بین اجزای تشکیل دهندهٔ طبیعت و به طور کلّی جهان هستی، چیست؟ نظرها و یافته‌های خود را برای ما ارسال کنید تا از بین آنها، بهترینها را انتخاب و در مجلّهٔ خودتان، چاپ کنیم.

والسلام ـ سردبیر

از تاریخ بیاموزیم (۴)

گامهای نخستین در تکامل شمار
(از بوریس گنه دِنکو)

● پرویز شهریاری

یکی از کهن‌ترین و در ضمن اساسی‌ترین مفهومها در ریاضیات، مفهوم عدد مثبت و درست، یعنی مفهوم عدد طبیعی است و تا زمانی که انسان وجود دارد، از اهمیت این مفهوم چیزی کم نمی‌شود. مفهوم عدد هم، همچون همهٔ مفهومهای دیگر ریاضیات، در جریان برخورد انسان با طبیعت و در جریان کار و فعالیت انسان برای زندگی، قوام گرفته است.

از زمانهای کهن تا سدهٔ نوزدهم میلادی، بسیاری از نویسندگان، اختراع عدد را به یک نابغه و فیلسوف بزرگ یا در جایی بجز قلمرو انسان نسبت می‌دادند. این جملهٔ کرونکر، دانشمند بزرگ جبر مشهور است که : «به جز عددهای طبیعی که ساختهٔ ذهن بشر نیست، بقیهٔ عددها را انسان آفریده است.»

با بخش اخیر نظر کرونکر موافقیم ؛ ولی ناچاریم بخش اوّل سخن او را درست کنیم ؛ چرا که عددهای طبیعی هم، نتیجه‌ای از کار عملی و ذهنی انسان است.

نوشته‌های قدیمی ریاضی، کم و بیش تا سدهٔ هجدهم، اختراع حساب را به «عقل یک فیلسوف قدیمی» یا «فیثاغورس حکیم، نابغهٔ یونان باستان» و غیره نسبت می‌دادند. از جملهٔ ماگنیتسکی، نویسندهٔ نخستین کتابهای درسی در روسیه، در کتاب خود به نام «حساب» از فیثاغورس به عنوان مخترع و پایه‌گذار این دانش نام می‌برد. در افسانه‌های زیبای یونان باستان، اختراع عدد درست به پرومته نسبت داده شده است. در این باره، بویژه در تراژدی «آشیل» به نام «پرومته در زنجیر» سخن رفته است. در مجلس دوم تراژدی، پرومته خطاب به «اوکه آیند» پیر، که با او همدردی می کند، می گوید :

«... از رنجهای آدمیان فانی بشنوید که در آغاز،
گروهی درمانده بودند،
به آنان آموختم که بیندیشند و خرد را به کار گیرند ...

۲۰۰۰، سال جهانی ریاضیات

و سپس کاربرد عددها را که سرآمد دانستنیهاست ...
به آنها نمودم ... .»

همهٔ این افسانه‌ها زیبا و دلنشینند و اگر آن را درست بینداریم، از هرگونه پژوهش و جست‌وجوی علمی دربارهٔ نخستین گامهایی که انسان در راه پیشرفت مفهوم عدد برداشته است، آزاد می‌شویم؛ ولی ما راه دیگری را برمی‌گزینیم؛ راهی که پیمودن آن دشوارتر است؛ اما ما را به حقیقت نزدیک می‌کند. در آغاز، ریشه و بنیان مفهومهای ریاضی را در کارهای روزانهٔ انسان نخستین جست‌وجو می‌کنیم. در این باره، با دشواریهای زیادی رو به رو می‌شویم؛ زیرا از دورانی که مفهوم عدد درست شکل می‌گرفت، هیچ نوشته‌ای به ما نرسیده است؛ آن زمانی هم که دیگر انسان، برای آیندگان نوشته‌هایی باقی گذاشت، از نظر هنر شمردن، به اندازهٔ کافی به کمال رسیده بود.

به این ترتیب، دانش ناچار است برای نتیجه‌گیری، از مدرکهای غیرمستقیم استفاده کند. این مدرکها کدامند؟ پیش از همه باید از نژادشناسی نام برد؛ زیرا با بررسی فرهنگ ملتهایی که در دوران پیش از تاریخ به‌سر می‌برند، می‌توان دربارهٔ دوره‌های تکامل ملتهای دیگر هم داوری کرد. سرچشمهٔ دیگر پژوهش، زبان است که نه تنها وسیلهٔ بستگی انسانها به یکدیگر است؛ بلکه بازمانده‌ای از فعالیتهای معنوی قومهای کهن هم می‌باشد. در زبان و در ویژگیهای دستوری آن، آگاهیهای گرانبهایی نگهداری شده است که تا اندازه‌ای، به روش شمردن مردم آن زمان، و این که چگونه به شمارش امروزی رسیده‌ایم، راهنمایی می‌کند.

جای افسوس است که لشکرکشیها و سیاست به آتش کشیدن، نوشته‌های محلّی و ملّی مردم شمال و جنوب امریکا، افریقا و استرالیا را، کم و بیش به طور کامل، نابود کرد. معلوم شده است که در بسیاری حالتها، تمامی یک قوم را به طور کامل نابود کردند. مهاجمان، که مبلّغان مسیحی سده‌های میانه هم درمیان آنها بودند، اغلب دستورمی‌داند تمامی اثرهای مادی فرهنگ قومها نابود شود. مردم را ناچار می‌کردند از اعتقادهای خود دست بردارند و صفحه‌هایی از نوشته‌های آنها را که به تاریخ نیاکان آنها مربوط می‌شد، از بین می‌بردند. در نتیجه، امروز تنها آگاهی‌هایی ناقص و پراکنده از این دوران بسیار جالب تاریخی در اختیار داریم. با این همه، آگاهیهایی که به وسیلهٔ جهانگردان در جریان سده‌های ۱۸ و ۱۹ جمع‌آوری شده است (و البته، چندان زیاد نیست)، اهمیت زیادی دربارهٔ تاریخ دانش دارد و زمینهٔ اصلی کار را برای ترسیم طرح تاریخی و پیدایش مفهوم عدد درست در اختیار ما می‌گذارد.

روشن شده است که بسیاری از قبیله‌ها، می‌توانستند «حساب» کنند؛ بدون این که نامهای ویژه‌ای برای عددها داشته باشند. بنابر آگاهیهایی که به وسیلهٔ «اِیاسماپار» کاشف معروف قطب (۱۷۹۰ ـ ۱۸۵۵) به ما رسیده است، در آن زمان، اسکیموها، اگر بیش از سه فرزند داشتند، نمی‌توانستند آنها را بشمارند. با وجود این، اگر یکی از فرزندانشان غایب بود، متوجه می‌شدند؛ یعنی بدون این که برای هرکدام از آنها، نشان ویژهٔ جداگانه‌ای داشته باشند، می‌توانستند حساب آنها را نگه دارند.

همین‌طور، آنها سگهای زیادی داشتند؛ البته نمی‌توانستند تعداد آنها را نام ببرند؛ ولی می‌توانستند شرح کاملی دربارهٔ هر یک از آنها بدهند؛ سگی که در زمستان قحطی به‌دنیا آمد، سگ سفید با لکه‌های سیاه و غیره.

از قبیله‌های «آبی‌پون» که بین دو رودخانه «ریوبرمه خور» و «ریوسالادو» زندگی می‌کردند و در نتیجه سیاست مستعمراتی اسپانیا، به کلی نابود شده‌اند، داستانهای زیادی از زبان جهانگردان باقی مانده است. یکی از این جهانگردان می‌نویسد، در زبان این قوم، تنها برای عددهای یک، دو و سه، نامی وجود داشته است، با وجود این، وقتی یک «آبی‌پون» بر زین می‌نشست و سگهای متعدد خود را برای شکار جمع می‌کرد، اگر متوجه غیبت یکی از سگها می‌شد، بی‌درنگ به جست و جوی آن می‌پرداخت.

در این مرحله از تکامل، عدد به خودی خود و به عنوان یک مفهوم مستقل درک نمی‌شود؛ بلکه همراه با سایر ویژگیها است و به کیفیت چیزهایی مربوط می‌شود که مجموعه را تشکیل داده‌اند.

طبیعی است، شمردن چیزها و مقایسهٔ تعداد عضوهای مجموعه‌های مختلف، کار دشواری است. آگاهیهای پراکنده‌ای که در نوشته‌های مؤلّفان تمدنهای نخستین وجود دارد، این ادّعا را ثابت می‌کند که عمل شمارش برای قومهای اوّلیه، مسألهٔ بغرنجی بوده است که هروقت به آن می‌پرداختند، برایشان بی‌اندازه خسته‌کننده و ملال‌آور بود.

سال ٥

«ک. شتای‌نن» جهانگرد و نژادشناس، نمونهٔ جالبی در این باره نقل می‌کند. او حدود سالهای هشتاد سدهٔ نوزدهم، در عمق جنگلهای آمازون، به قبیلهٔ «باکاایر» برخورد که از نظر تکامل، در سطح پایینی بودند. او بارها از بومیان خواسته بود ده دانه را بشمارند. «آنها به کندی، ولی درست، تا شش دانه را می‌شمردند؛ ولی برای شمردن دانه‌های هفتم و هشتم با ناراحتی متوقف می‌شدند، نشاط خود را از دست می‌دادند، هاج و واج به دور و بر خود نگاه می‌کردند، از دردسری که گرفتارشان کرده بود، غرغر می‌کردند و سرانجام هم یا از پاسخ طفره می‌رفتند و یا پا به فرار می‌گذاشتند.»

در یادداشتهای روزانه و نوشته‌های «میکلو خو ـ ماکلای» مشاهده‌های جالبی دربارهٔ شمار، در میان بومیان گینهٔ نو وجود دارد. وقتی بومیها پرسیدند کشتی کی می‌آید، ماکلای نتوانست پاسخی بدهد؛ ولی «فکر کردم موقع آن است، ببینم بومیها چگونه می‌شمارند. چند نوار کاغذ برداشتم، آنها را از طرف عرض بریدم و به تکّه‌های کوچکتری تقسیم کردم. خودم نفهمیدم چند تکّه بریدم. ولی مشتی از آنها را به یکی از بومیها دادم و گفتم هر کاغذ، به معنای ۲ روز است. همهٔ جمعیت بومی را دوره کرد و او به یاری انگشتانش شمردن را آغاز کرد؛ ولی مثل این که ناراحت بود، یا دست‌کم دیگران این‌طور گمان کردند که او نمی‌تواند بشمارد. تکّه کاغذها را از او گرفتند و به دیگری دادند. کسی که کاغذهای بریده را گرفت، با غرور خاصی، جایی نشست، یک نفر را هم به یاری خواست و شمردن را آغاز کرد. اوّلی تکّه‌های کاغذ را روی زانویش می‌چید و برای هرکدام تکرار می‌کرد. «ناره، ناره»، (یعنی یکی)؛ دومی واژهٔ «ناره» را تکرار می‌کرد و همراه با آن، یکی از انگشتان خود را می‌بست؛ اوّل انگشتان یک دست و سپس انگشتان دست دوم را. وقتی به ۱۰ رسید و همهٔ انگشتان دو دست او بسته شد، دو مشت بسته خود را تا زانو پایین آورد و با صدای بلند گفت «دو دست». در همین موقع، نفر سوّم به یاری آمد و یکی از انگشتان خود را خم کرد، سپس برای ده تکّه کاغذ دوم، یک انگشت دیگر و برای دههٔ سوّم، انگشت سوّم خود را هم بست. تعداد بقیهٔ تکّه کاغذها به ده نمی‌رسید و آنها را به کناری گذاشتند. به‌نظر می‌رسید کار شمردن تمام شده است؛ ولی من آرامش آنها را به هم زدم؛ یک تکّه کاغذ برداشتم، دو انگشت خود را نشان دادم و گفتم: «بوم، بوم»، (روز، روز). همهمه‌ای درگرفت؛ ولی مسأله را به این ترتیب حل کردند که تکّه‌های کاغذ را با دقت در برگ درخت نان پیچیدند تا در روستا دوباره آنها را بشمارند.»

می‌بینیم، مهارت در شمردن مربوط به وجود نام ویژه‌ای برای عددها یا وجود نمادهایی برای رقمها نیست.

شکل گرفتن عددها را باید از مرحله‌های بالای تکامل شمار دانست. مدتها پیش از آن که نامهای ویژه‌ای برای عددها پیدا شود، برای بیان تعداد چیزها، نامهایی وجود داشت. معلوم شده است نزد برخی از قبیله‌های افریقایی، برای هر یک از حالتهای ۳ گاو، ۳ درخت، ۳ جنگ و غیره نام ویژه‌ای دارند یا برخی از قبیله‌های غرب کانادا که نامی برای عدد ۳ ندارند، برای ۳ چیز از نامهای گوناگونی استفاده می‌کنند. «تخه» ـ سه چیز، «تخانه» ـ سه برگ، «تخات» ـ سه مرتبه، «تخاتوئن» ـ در سه جا و غیره. بومیان فلوریدا برای ۱۰ تخم‌مرغ می‌گویند «نانکوآ» و برای ۱۰ سبد «نا ـ بانارا»؛ ولی به طور جداگانه برای عدد ۱۰ (که به چیزی مقیّد نباشد) از واژهٔ «نا» استفاده نمی‌کنند و برای عدد ۱۰ هیچ واژه‌ای ندارند.

گمان می‌رود، ویژگیهای شمار که سرانجام منجر به نامگذاریهای خاص شده است، کم و بیش به چیزهایی مربوط می‌شود که به یاری آنها شمار انجام می‌گرفته است. روشن است این چیزها، یعنی وسیله‌های کمکی شمار، از بین چیزهایی انتخاب می‌شد که به انسان نزدیکتر است؛ مثل عضوهای بدن. همین حقیقت را در مطلبی که از «میکلوخو ـ ماکلای» آوردیم، دیدیم. در آن‌جا بومیها از انگشتان دست خود استفاده می‌کردند. و این، منحصر به آنها نیست و در جاهای دیگر هم می‌توان با آن برخورد کرد. نویسنده «ضددوریگند» دراین باره می‌گوید: «مفهومهای عدد و شکل، از جایی جز جهان واقعی، گرفته نشده است. ده انگشت که انسان شمردن، یعنی نخستین عمل حساب را روی آنها یاد گرفت، همه چیز هست جز محصولی که زاییدهٔ اندیشهٔ خالص باشد. برای شمردن، نه تنها باید چیزهایی داشته باشیم که آنها را بشماریم؛ بلکه باید این استعداد را هم داشته باشیم که، ضمن بررسی این چیزها، هر ویژگی دیگری جز شمار را، از آن جدا کنیم و این استعداد هم، در نتیجهٔ تکامل تاریخی طولانی که متکی بر تجربه باشد، به‌دست می‌آید».

۲۰۰۰ ، سال جهانی ریاضیات

برای نمونه یادآور می‌شویم، بین قبیله‌های جزیرهٔ مارولاگ در تنگهٔ تورس، این نامها برای عددهای مضرب ۵ وجود دارد :

۵ ـ «دست»، ۱۰ ـ دست‌دست، ۱۵ ـ پا، ۲۰ ـ پا و دست. درضمن، برای ۵ می گویند «نابی گت» که به معنای «به اندازهٔ انگشتان دست» است ؛ نه نام عدد ۵.

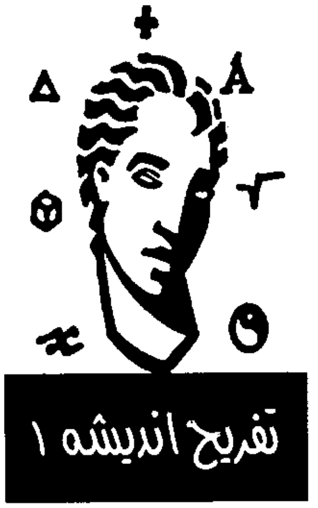
میکلوخو ـ ماکلای، دربارهٔ عدد شماری بومیان گینهٔ نو می نویسد :

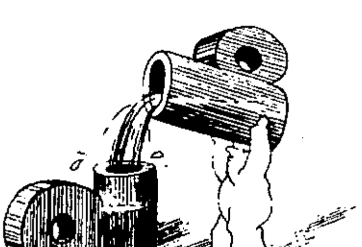
«بومیان، روش جالبی برای شمردن دارند ؛ آنها انگشتان خود را یکی پس از دیگری می‌بندند و صدای معینی را تکرار می کنند. وقتی به پنج می‌رسند، می گویند «دست». بعد، آغاز به بستن انگشتان دست دیگر خود می کنند ... تا به «دو دست» برسند... و برای ۱۵ «یک پا» و برای ۲۰ «دوپا». اگر لازم باشد باز هم بعد از آن را بشمارند، از انگشتان دست و پای دیگری استفادهٔ می کنند.»

شتای‌نن، در کتابی که دربارهٔ قبیله‌های «باکاایر» نوشته است، دربارهٔ استفاده از اندامهای بدن برای شمار می نویسد : «وقتی باکاایرها آغاز به شمردن می کنند، انگشت کوچک دست چپ خود را می گیرند و می گویند «توکاله». بعد انگشت میانهٔ کوچکتر خود را به آن اضافه می کنند و می گویند «آخاگه». سپس انگشت میانهٔ بزرگتر را و می گویند «آخاگه ـ توکاله» بعد با اضافه کردن انگشت نشانه می گویند «آخاگه ـ آخاگه». سرانجام با اضافه کردن انگشت شست می گویند «آخاگه ـ آخاگه ـ توکاله» بعد نوبت به انگشتان دست راست می‌رسد و هربار می گویند «مه‌را» (این). به همین‌ترتیب به انگشتان پای چپ و بعد پای راست خود می‌رسند و هر بار واژهٔ «مه را» را تکرار می کنند. اگر به بیش از آن نیاز به شمردن داشته باشند، موهای خود را می گیرند و به این ور و آن ور می کشند».

توجه به این مطلب جالب است که قبیله‌های باکاایر، برای نامگذاری عددها، تنها از دو واژه استفاده می کنند : «توکاله» و «آخاگه». در بسیاری زبانها نامگذاری نخستین عددها با نامهای اندامهای انسان یا حیوان، بستگی نزدیک دارد و اغلب این نامها هنوز هم وجود دارد. برای نمونه، در زبان چینی، هم به عدد ۲ و هم به گوش‌ها «یو» می گویند. در تبت، واژهٔ «پات شا» هم به معنای ۲ و هم به معنای بال است و بین «گوتن توت‌ها» واژهٔ «تکوآم» هم به معنای ۲ و هم به معنای دست است.

نباید گمان کرد، گواهی نژادشناسی از این گونه، می تواند ما را به واقع، به زمانهای گذشته ببرد ؛ چرا که زندگی مردم امروزی در آگاهیهای ریاضی بومیها بی‌اثر نبوده است.





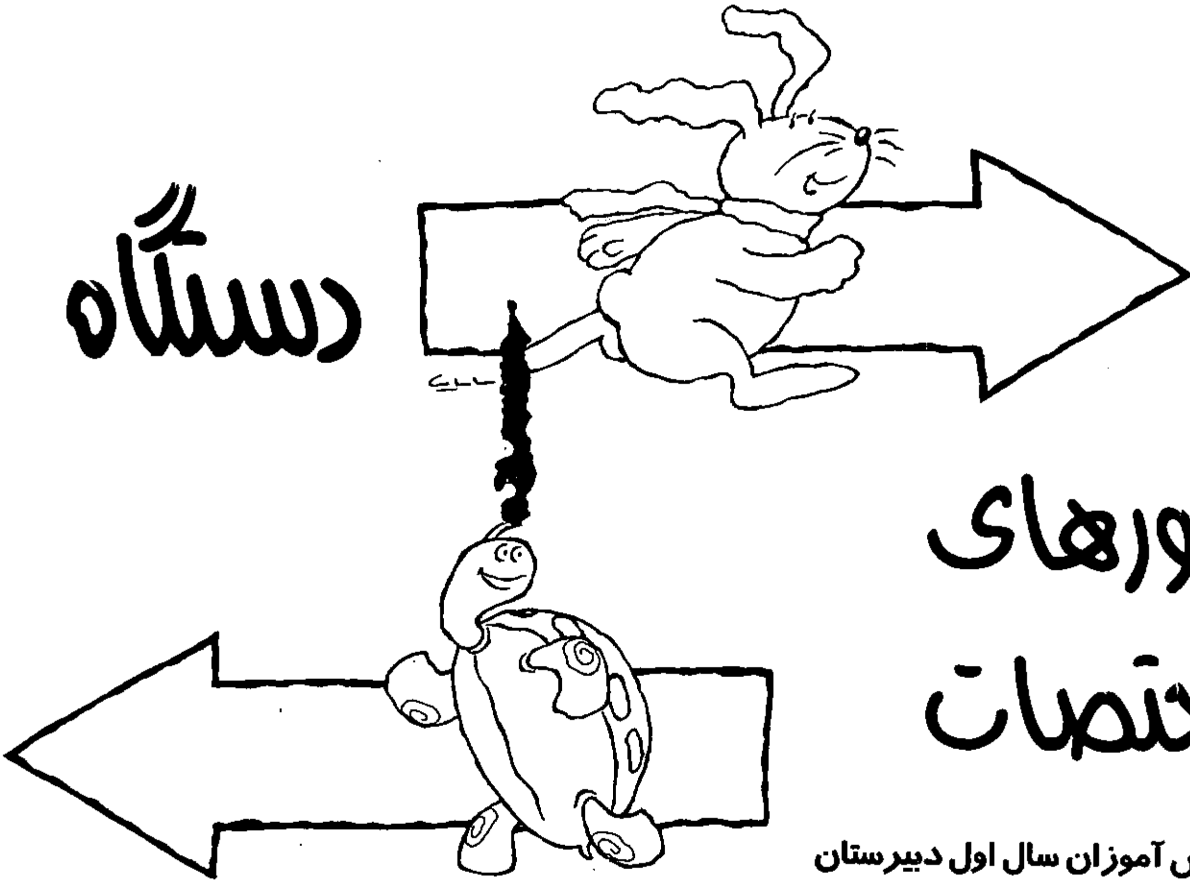
ظرف A یک لیتر آب و ظرف B یک لیتر شیر دارد.

مهرداد ۰/۵ لیتر از آب ظرف A را در ظرف B می‌ریزد و آن را به آرامی هم می‌زند. آن‌گاه $\frac{۱}{۴}$ لیتر از این مخلوط را در ظرف می‌ریزد، به آرامی ظرف A را هم می‌زند و از این مخلوط $\frac{۱}{۴}$ لیتر را در ظرف B خالی می کند. پس از هم زدن محتوی ظرف ، ۰/۵ لیتر از آن را در ظرف A می‌ریزد.

مشخص کنید پس از انجام این اعمال مقدار شیر موجود در ظرف A بیشتر است یا مقدار آب موجود در ظرف B ؟

● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمه سیمین‌دخت ترکپور

جواب در صفحهٔ ۸۸



دستگاه محورهای مختصات

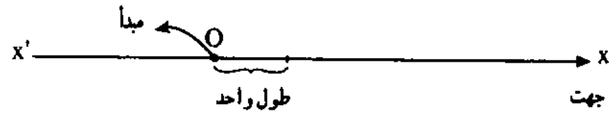
● احمد قندهاری

برای دانش آموزان سال اول دبیرستان

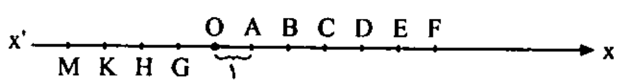
۱ـ۱ تعریف محور

خطّی است جهت‌دار که روی آن نقطه‌ای به‌نام مبدأ و طولی به‌نام واحد اندازه‌گیری درنظر گرفته شده باشد. پس یک محور، سه مشخصه دارد:

۱ـ جهت، ۲ـ نقطه‌ای به‌نام مبدأ، ۳ـ طولی به‌نام واحد.



محور زیر را با نقاط روی آن درنظر می‌گیریم.



با توجه به شکل می‌توان نوشت:

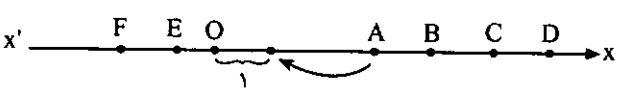
$\overline{OA} = +۱$	$\overline{OF} = +۶$
$\overline{OB} = +۲$	$\overline{OG} = -۱$
$\overline{OC} = +۳$	$\overline{OH} = -۲$
$\overline{OD} = +۴$	$\overline{OK} = -۳$
$\overline{OE} = +۵$	$\overline{OM} = -۴$

بنا به تعریف، $\overline{OA}$ را x_A، $\overline{OB}$ را x_B، $\overline{OC}$ را x_C و... می‌نامیم. پس:

$x_F = +۶$	$x_A = +۱$
$x_G = -۱$	$x_B = +۲$
$x_H = -۲$	$x_C = +۳$
$x_K = -۳$	$x_D = +۴$
$x_M = -۴$	$x_E = +۵$

توجه: محورهای فوق را $x'Ox$ می‌نامیم.

محور زیر را درنظر می‌گیریم.



می‌توان نوشت:

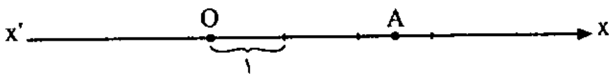
$\overline{OD} = x_D$	$\overline{OA} = x_A$
$\overline{OE} = x_E$	$\overline{OB} = x_B$
$\overline{OF} = x_F$	$\overline{OC} = x_C$

پس هر نقطه که روی محور $x'Ox$ واقع باشد، دارای (x)ای است. این x را در اصطلاح، طول نقطه گوییم.

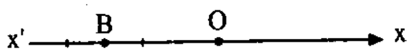
بنابراین، هر نقطه که روی محور $(x'Ox)$ باشد، دارای طول است، که این طول، یک عدد حقیقی است و بعکس، هر عدد حقیقی می‌تواند یک نقطه را روی محور نشان دهد، که طول آن نقطه برابر همان عدد حقیقی است.

مثلاً روی محور

$x_A = +۲/۵$



و اگر عدد $(-\frac{۳}{۲})$ را درنظر بگیریم، می‌توانیم بگوییم که این عدد، نقطه‌ای مانند B را روی

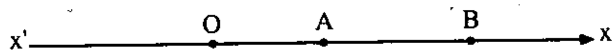


مشخص می‌کند.

۱ـ۲ اندازهٔ جبری پاره‌خط AB

اندازهٔ جبری پاره‌خط AB را با نماد $\overline{AB}$ نشان می‌دهیم و طول پاره‌خط AB را با AB نشان می‌دهیم ؛ یعنی : $|\overline{AB}| = AB$.

فرض می‌کنیم دو نقطهٔ A و B روی محور $(x'Ox)$ شکل زیر داشته باشیم ؛



می‌توانیم بنویسیم :

$\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB}$

$\Rightarrow x_A + \overline{AB} = x_B$

$\Rightarrow \boxed{\overline{AB} = x_B - x_A}$

مثال: اگر $x_A = ۲$ و $x_B = ۵$ باشد، اندازهٔ جبری $\overline{AB}$ را بیابید.

$\overline{AB} = x_B - x_A$

$\overline{AB} = ۵ - ۲$

$\boxed{\overline{AB} = +۳}$

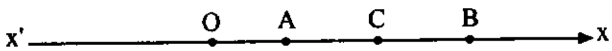
مثال: اگر $\overline{AB} = ۵$ و $x_B = ۷$ ، طول نقطهٔ A را بیابید.

$\overline{AB} = x_B - x_A$

$۵ = ۷ - x_A \Rightarrow +x_A = ۷ - ۵ \Rightarrow \boxed{x_A = ۲}$

۱ـ۳ طول نقطهٔ C وسط AB

فرض می‌کنیم نقطهٔ C وسط AB روی محور $x'Ox$



باشد،داریم : $\overline{AC} = \overline{CB}$.

با توجه به شکل می‌توان نوشت :

$$\begin{cases} \overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC} \\ \overline{OC} = \overline{OB} - \overline{CB} \end{cases}$$

جمع می‌کنیم $\Rightarrow ۲\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{OB}$

$$\Rightarrow \overline{OC} = \frac{\overline{OA} + \overline{OB}}{۲} \Rightarrow \boxed{x_C = \frac{x_A + x_B}{۲}}$$

مثال: اگر $x_A = ۵$ و $x_B = -۷$ ، آن‌گاه طول نقطهٔ C وسط AB چه‌قدر است؟

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{۲} \Rightarrow x_C = \frac{۵ - ۷}{۲} \Rightarrow \boxed{x_C = -۱}$$

مسأله: اگر نقطهٔ C وسط AB باشد و داشته باشیم $x_C = ۴$ و $\overline{AB} = ۱۰$ ، x_A و x_B را بیابید.

حل:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{۲} \Rightarrow ۴ = \frac{x_A + x_B}{۲} \Rightarrow \boxed{x_A + x_B = ۸}$$

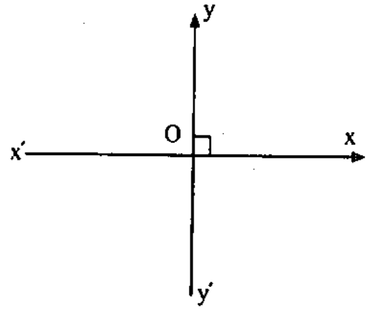
$$\overline{AB} = x_B - x_A \Rightarrow ۱۰ = x_B - x_A \Rightarrow \boxed{x_B - x_A = ۱۰}$$

$$\begin{cases} x_A + x_B = ۸ \\ x_B - x_A = ۱۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}} ۲x_B = ۱۸ \Rightarrow \boxed{x_B = ۹}$$

$$x_A + x_B = ۸ \Rightarrow x_A + ۹ = ۸ \Rightarrow \boxed{x_A = -۱}$$

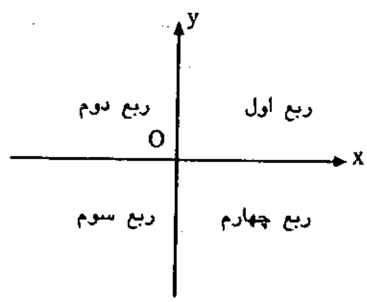
۴ـ۱ صفحهٔ محورهای مختصات

هرگاه دو محور $x'Ox$ و $y'Oy$ در نقطهٔ O بر یکدیگر عمود باشند، آنها را محورهای مختصات یا صفحهٔ محورهای مختصات گوییم. معمولاً محور $x'Ox$ را افقی (موازی سطرهای همین مجلهٔ برهان) رسم می‌کنیم.



محور $x'Ox$ را محور xها یا محور طولها و محور $y'Oy$ را محور yها یا محور عرضها گوییم. این دو محور را به‌صورت (xOy) نشان می‌دهیم.

این دو محور، صفحهٔ کتاب یا دفتر را به چهار ناحیه یا چهار ربع تقسیم می‌کند، که به ربع اوّل، ربع دوم، ربع سوّم و ربع چهارم معروف است.



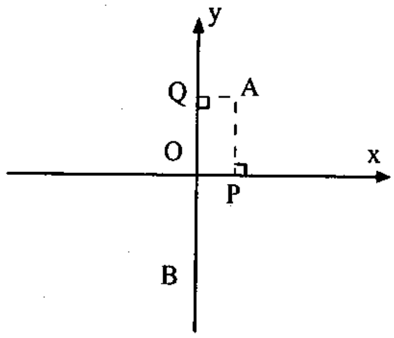
هر نقطه که در صفحهٔ محورهای مختصات واقع باشد، دارای طول و عرض است و بعکس، هر نقطه که دارای طول و عرض باشد، یک نقطه از صفحهٔ محورهای مختصات را مشخص می‌کند.

اگر نقطه‌ای مانند A در صفحهٔ محورها داشته باشیم، چنانچه از نقطهٔ A عمودی بر محور xها رسم کنیم و پای عمود را P بنامیم، داریم:

$\overline{OP} = x_A$ (شکل زیر)

و اگر از نقطهٔ A خطی بر محور yها عمود کنیم و پای عمود را Q بنامیم، داریم:

$\overline{OQ} = y_A$ (شکل زیر)



طول و عرض نقطهٔ A را مختصات نقطهٔ A گوییم. اگر طول A مساوی (۳) و عرض A مساوی (۲) باشد، می‌نویسیم:

$$A = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix} \text{ یا } A(۳,۲) \text{ یا } A\left|\begin{matrix} ۳ \\ ۲ \end{matrix}\right.$$

اگر $A\left|\begin{matrix} ۳ \\ ۲ \end{matrix}\right.$ باشد و بخواهیم جای نقطهٔ A را در صفحهٔ محورهای مختصات مشخص کنیم، باید روی محور xها (۳) واحد مثبت جدا کنیم و روی محور yها (۲) واحد مثبت جدا کنیم. از این نقاط، خطوطی عمود بر محورها رسم کنیم، نقطهٔ برخورد این دو عمود، نقطهٔ A را نشان می‌دهد.

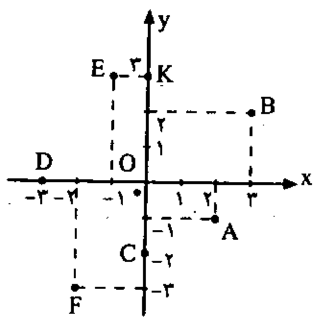
توجه: هر نقطه که روی محور xها باشد، عرض آن صفر است؛ مانند:

$$A\left|\begin{matrix} ۲ \\ ۰ \end{matrix}\right.$$

و هر نقطه که روی محور yها باشد، طول آن صفر است؛ مانند:

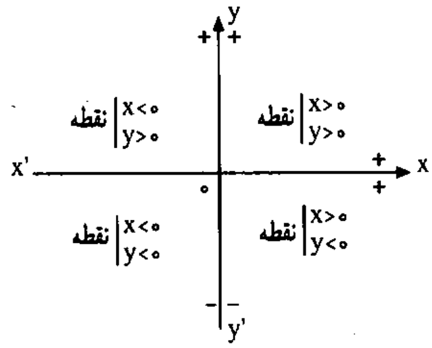
$$B\left|\begin{matrix} ۰ \\ ۳ \end{matrix}\right.$$

مثال: جای نقاط $A\left|\begin{matrix} ۲ \\ -۱ \end{matrix}\right.$، $B\left|\begin{matrix} ۳ \\ ۲ \end{matrix}\right.$، $C\left|\begin{matrix} ۰ \\ -۲ \end{matrix}\right.$، $D\left|\begin{matrix} -۳ \\ ۰ \end{matrix}\right.$، $E\left|\begin{matrix} -۱ \\ ۳ \end{matrix}\right.$، $F\left|\begin{matrix} -۲ \\ -۳ \end{matrix}\right.$ و $K\left|\begin{matrix} ۰ \\ ۳ \end{matrix}\right.$ را در صفحهٔ محورهای مختصات مشخص کنید.

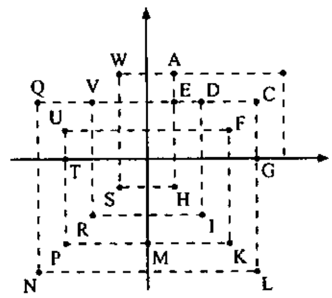


به دستگاه مختصات زیر توجه کنید.

مثبت و منفی بودن مختصات یک نقطه در چهار ربع، مشخص است.



تمرین: مختصات نقاط شکل زیر را بنویسید.



مسأله: نقطهٔ $A\left|\begin{matrix} ۲m-۶ \\ m-۲ \end{matrix}\right.$ مفروض است، m را چنان بیابید تا

۱ـ نقطهٔ A روی محور xها باشد.

۲ـ نقطهٔ A روی محور yها باشد.

۳ـ نقطهٔ A در ربع اوّل باشد.

۴ـ نقطهٔ A در ربع دوم باشد.

۵ـ نقطهٔ A در ربع سوم باشد.

۶ـ نقطهٔ A در ربع چهارم باشد.

حلّ ۱ : $y_A = ۰ \Rightarrow m - ۲ = ۰ \Rightarrow m = ۲$

حلّ ۲ : $x_A = ۰ \Rightarrow ۲m - ۶ = ۰ \Rightarrow m = ۳$

حلّ ۳ : $\begin{cases} x_A > ۰ \\ y_A > ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲m - ۶ > ۰ \\ m - ۲ > ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > ۳ \\ m > ۲ \end{cases} \Rightarrow m > ۳$

حلّ ۴ :

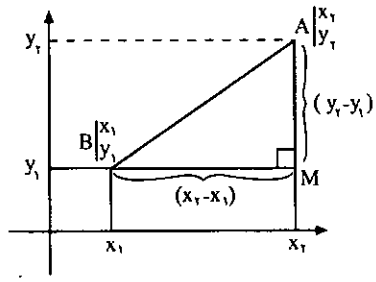
$\begin{cases} x_A < ۰ \\ y_A > ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲m - ۶ < ۰ \\ m - ۲ > ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m < ۳ \\ m > ۲ \end{cases} \Rightarrow ۲ < m < ۳$

حلّ ۵ : $\begin{cases} x_A < ۰ \\ y_A < ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲m - ۶ < ۰ \\ m - ۲ < ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m < ۳ \\ m < ۲ \end{cases} \Rightarrow m < ۲$

حلّ ۶ : $\begin{cases} x_A > ۰ \\ y_A < ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲m - ۶ > ۰ \\ m - ۲ < ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > ۳ \\ m < ۲ \end{cases}$ غیر ممکن

۱ـ۵ طول پاره‌خط AB

شکل زیر را درنظر می‌گیریم.



در مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\Delta}{AMB}$ می‌توان نوشت :

$$AB^۲ = BM^۲ + AM^۲$$

$$AB = \sqrt{BM^۲ + AM^۲}$$

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲}}$$

مثال: اگر $A\left|\begin{matrix} ۵ \\ ۱ \end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix} ۱ \\ -۲ \end{matrix}\right.$ باشند. مطلوب است تعیین طول پاره‌خط AB.

$$A\left|\begin{matrix} ۵ = x_۲ \\ ۱ = y_۲ \end{matrix}\right. \qquad B\left|\begin{matrix} ۱ = x_۱ \\ -۲ = y_۲ \end{matrix}\right.$$

$$AB = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲} = \sqrt{(۵ - ۱)^۲ + (۱ + ۲)^۲}$$

$$= \sqrt{۱۶ + ۹} = \sqrt{۲۵} \Rightarrow AB = ۵$$

مثال: نقطهٔ A به طول (۶) روی محور xها و نقطهٔ B به عرض (۸) روی محور yها واقع است. طول پاره‌خط AB را بیابید.

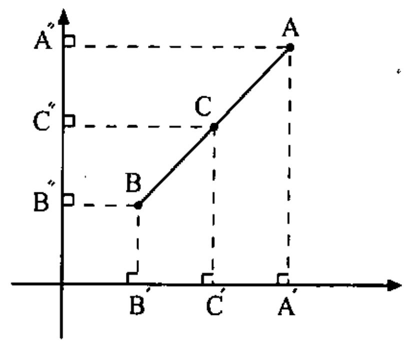
$$A\left|\begin{matrix} ۶ = x_۲ \\ ۰ = y_۲ \end{matrix}\right. \qquad B\left|\begin{matrix} ۰ = x_۱ \\ ۸ = y_۱ \end{matrix}\right.$$

$$AB = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲} = \sqrt{(۶ - ۰)^۲ + (۰ - ۸)^۲}$$

$$= \sqrt{۳۶ + ۶۴} = \sqrt{۱۰۰} = ۱۰$$

۱ـ۶ مختصات نقطهٔ C وسط پاره‌خط AB

شکل زیر را درنظر می‌گیریم و نقطهٔ C وسط AB است.



چون نقطهٔ C وسط پاره‌خط AB است، به‌سادگی ثابت می‌شود که C' وسط $A'B'$ و C'' وسط $A''B''$ است.

$$x_{C'} = \frac{x_{A'} + x_{B'}}{۲} \Rightarrow \boxed{x_C = \frac{x_A + x_B}{۲}}$$

$$y_{C''} = \frac{y_{A''} + y_{B''}}{۲} \Rightarrow \boxed{y_C = \frac{y_A + y_B}{۲}}$$

مثال: اگر $A\left|\begin{matrix}۲\\۵\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}۴\\۳\end{matrix}\right.$ باشد، مختصات نقطهٔ C وسط پاره‌خط AB را بیابید.

$$\left.\begin{matrix} x_C = \frac{x_A + x_B}{۲} = \frac{۲+۴}{۲} = ۳ \\ y_C = \frac{y_A + y_B}{۲} = \frac{۵+۳}{۲} = ۴ \end{matrix}\right\} \Rightarrow C\left|\begin{matrix}۳\\۴\end{matrix}\right.$$

مثال: اگر $M\left|\begin{matrix}۱\\۴\end{matrix}\right.$ نقطهٔ وسط پاره‌خط KF باشد ؛ به‌طوری که $K\left|\begin{matrix}۰\\۳\end{matrix}\right.$، آن‌گاه مختصات نقطهٔ F را بیابید.

$$x_M = \frac{x_K + x_F}{۲} \Rightarrow ۱ = \frac{۰ + x_F}{۲} \Rightarrow x_F = ۲$$

$$y_M = \frac{y_K + y_F}{۲} \Rightarrow ۴ = \frac{۳ + y_F}{۲} \Rightarrow ۳ + y_F = ۸$$

$$\Rightarrow y_F = ۵ \Rightarrow F\left|\begin{matrix}۲\\۵\end{matrix}\right.$$

تمرین: نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}-۲m+۶\\-m+۱\end{matrix}\right.$ در صفحهٔ محورهای مختصات xOy مفروض است. m را چنان بیابید که ۱ـ نقطهٔ A به یک فاصله از دو محور باشد. ۲ـ نقطهٔ A در ربع اوّل باشد. ۳ـ نقطهٔ A در ربع دوم باشد. ۴ـ نقطهٔ A در ربع سوّم باشد. ۵ـ نقطهٔ A در ربع چهارم باشد.

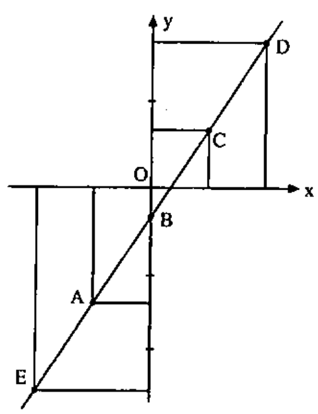
تمرین: نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}m^۲-۵m+۴\\m^۲-۳m+۲\end{matrix}\right.$ در صفحهٔ محورهای مختصات مفروض است. m را چنان بیابید تا ۱ـ نقطهٔ A روی محور xها باشد. ۲ـ نقطهٔ A روی محور yها باشد. ۳ـ نقطهٔ A روی مبدأ مختصات باشد. ۴ـ نقطهٔ A به یک فاصله از دو محور باشد.

۷ـ۱ معادلهٔ خط

هر رابطهٔ درجهٔ اوّل بین x و y مانند : $y = ۲x - ۱$ ، $y = x + ۲$ و $۲x + ۴y = ۸$ را معادلهٔ خط گویند.

ممکن است معادلهٔ خط به‌صورت $y = mx + n$ یا $ax + by + c = ۰$ باشد که m، n، a، b و c اعداد حقیقی‌اند (a، b و c با هم صفر نیستند). حال می‌خواهیم خط $y = ۲x - ۱$ را رسم کنیم. به x چند عدد دلخواه نسبت می‌دهیم و y آنها را پیدا می‌کنیم. زوج مرتبهایی به‌دست می‌آید که هرکدام، مختصات یک نقطهٔ متعلق به خط است. جای این نقاط را در صفحهٔ محورها مشخص می‌کنیم و سپس آنها را به هم وصل می‌کنیم.

x	y	(x,y)
۱-	۳-	(۱-,۳-):A
۰	۱-	(۰,۱-) : B
۱	۱	(۱ ,۱) : C
۲	۳	(۲,۳) : D
۲-	۵-	(۲-,۵-):E

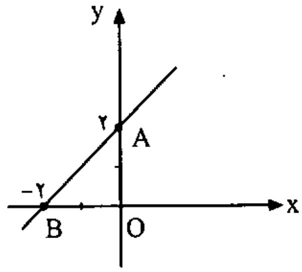


توجه: برای رسم یک خط کافی است دو نقطه از آن را پیدا کنیم سپس جای این دو نقطه را در صفحهٔ محورهای مختصات مشخص کرده، آنها را به هم وصل کنیم و امتداد دهیم.

مثال: خط $y = x + ۲$ را رسم کنید.

$$x = ۰ \Rightarrow y = ۲ \Rightarrow A(۰,۲)$$

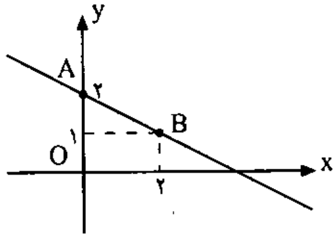
$$x = -۲ \Rightarrow y = ۰ \Rightarrow B(-۲,۰)$$



مثال: خط $۲x + ۴y = ۸$ را رسم کنید.

$$x = ۰ \Rightarrow y = ۲ \Rightarrow A(۰,۲)$$

$$x = ۲ \Rightarrow y = ۱ \Rightarrow B(۲,۱)$$

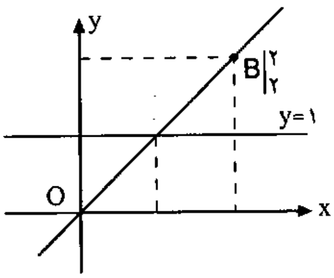


مثال: نمودار به معادلهٔ $xy - y^۲ - x + y = ۰$ را رسم کنید.

$$xy - y^۲ - x + y = ۰$$

$$y(x - y) - (x - y) = ۰$$

$$(x - y)(y - ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ \text{یا} \\ y = ۱ \end{cases} \Rightarrow O\Big|{}^{۰}_{۰} \text{ و } B\Big|{}^{۲}_{۲}$$



۱ـ۸ شیب یک خط

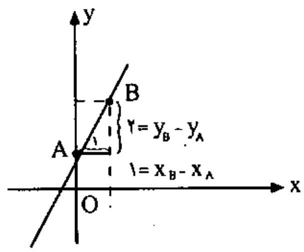
بنا به تعریف : $\dfrac{\text{تفاضل عرضهای دو نقطه از خط}}{\text{تفاضل طولهای همان دو نقطه}}$ را شیب خط گوییم.

مثال: شیب خط $y = ۲x + ۱$ را بیابید.

$$x = ۰ \Rightarrow y = ۱ \Rightarrow A\Big|{}^{۰}_{۱}$$

$$x = ۱ \Rightarrow y = ۳ \Rightarrow B\Big|{}^{۱}_{۳}$$

$$\text{شیب خط} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{۳ - ۱}{۱ - ۰} = \frac{۲}{۱} = ۲$$



تمرین: شیب خطهای زیر را بیابید.

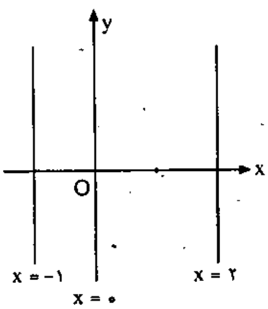
$y = ۴x + ۱$ $\qquad$ $y = -x$

$y = \frac{۱}{۲}x - ۵$

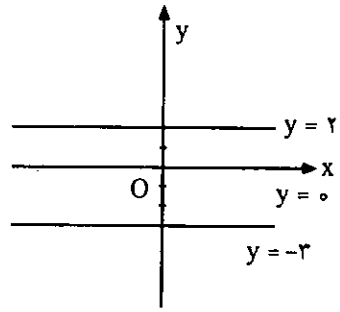
۱ـ۹ انواع خط

خط نوع اول: به‌صورت $x=a$ است ؛ مانند : $x=۲$، $x=۰$ و $x = -۱$. شیب این خطها تعریف نشده است و نمودار آنها راستایی است عمود بر محور xها.

مثال: خطهای $x=۲$، $x=۰$ و $x = -۱$ را رسم کنید.



خط نوع دوم: به‌صورت $y=b$ است؛ مانند: $y=2$، $y=0$ و $y=-3$. شیب این خطها صفر است و نمودار آنها راستایی است موازی محور xها.



مثال: خطهای $y=2$ ، $y=0$ و $y=-3$ را رسم کنید.

خط نوع سوم: به‌صورت $y=mx$ است؛ مانند: $y=2x$، $y=-x$ و $y=\frac{1}{2}x$.

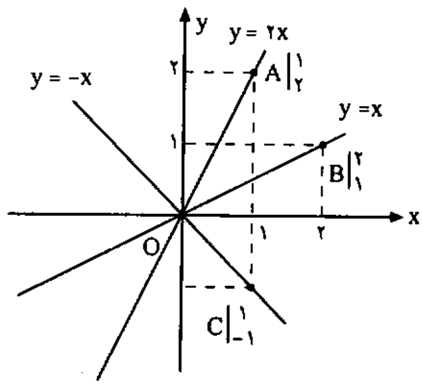
شیب این خطها عدد (m) است. برای رسم این خطها یک نقطه از خط را پیدا می‌کنیم، سپس آن را به مبدأ مختصات وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم.

مثال: خطهای مقابل را رسم کنید.

$$y=2x \qquad A\left|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right.$$

$$y=-x \qquad C\left|\begin{matrix}1\\-1\end{matrix}\right.$$

$$y=\frac{1}{2}x \qquad B\left|\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right.$$



خط نوع چهارم: به‌صورت $y=mx+n$ است؛ مانند: $y=2x+2$ ، $y=-x+3$ و $y=x-1$. شیب این خطها هم عدد (m) است.

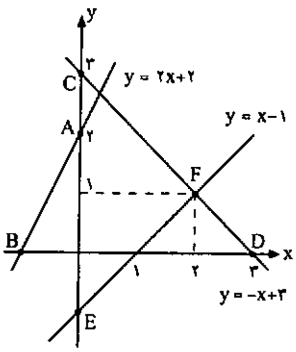
برای رسم آنها باید مختصات دو نقطهٔ آنها را پیدا کرد، سپس آنها را به هم وصل نمود و امتداد داد.

مثال: سه خط فوق را رسم کنید.

$$y=2x+2 \Rightarrow A\left|\begin{matrix}0\\2\end{matrix}\right. ,\ B\left|\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right.$$

$$y=-x+3 \Rightarrow C\left|\begin{matrix}0\\3\end{matrix}\right. ,\ D\left|\begin{matrix}3\\0\end{matrix}\right.$$

$$y=x-1 \Rightarrow E\left|\begin{matrix}0\\-1\end{matrix}\right. ,\ F\left|\begin{matrix}+2\\1\end{matrix}\right.$$



توجه: اگر معادلهٔ خط به‌صورت $ax+by+c=0$، آن‌گاه شیب خط $(-\frac{a}{b})$ است.

۱ـ۱۰ مختصات نقطهٔ تقاطع دو خط

در شکل فوق نقطهٔ $F\left|\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right.$ نقطهٔ تقاطع دو خط $y=-x+3$ و $y=x-1$ است. برای تعیین مختصات نقطهٔ تقاطع دو خط، معادله‌های آنها را مانند دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی حل می‌کنیم.

مثال: می‌خواهیم مختصات نقطهٔ تقاطع دو خط $y=-x+3$ و $y=x-1$ را پیدا کنیم.

$$\begin{cases} y=-x+3 \\ y=x-1 \end{cases} \Rightarrow x-1=-x+3$$

$$\Rightarrow x+x=3+1 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

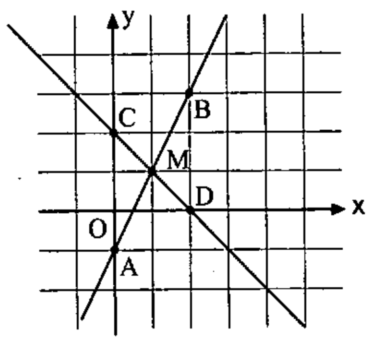
$$y=x-1 \Rightarrow y=2-1 \Rightarrow \boxed{y=1}$$

$\Rightarrow F\left|\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right.$ مختصات نقطه تقاطع دو خط است.

اگر بخواهیم مختصات نقطهٔ تقاطع دو خط را به‌وسیلهٔ رسم پیدا کنیم، باید نمودارهای دو خط را در یک صفحهٔ شطرنجی (اگر دقیقتر بخواهیم باید در یک صفحهٔ میلیمتری) رسم کنیم، سپس مختصات نقطهٔ تقاطع آنها در شکل دیده می‌شود، مانند مثال زیر.

مثال: مختصات نقطهٔ تقاطع دو خط زیر را به کمک شکل بیابید.

$$\begin{cases} y=۲x-۱ \Rightarrow A\left|\begin{matrix}۰\\-۱\end{matrix}\right. ,\quad B\left|\begin{matrix}۲\\۳\end{matrix}\right. \\ y=-x+۲ \Rightarrow C\left|\begin{matrix}۰\\۲\end{matrix}\right. ,\quad D\left|\begin{matrix}۲\\۰\end{matrix}\right. \end{cases}$$

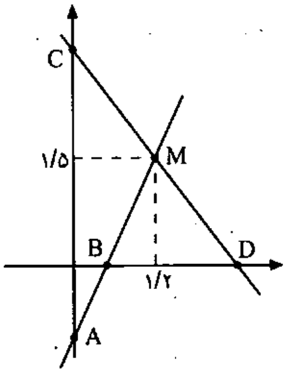


به‌طوری که در نمودار مشخص شده است، نقطهٔ M نقطهٔ تقاطع آنهاست که مختصات آن (۱، ۱) است ؛ پس : $M\left|\begin{matrix}۱\\۱\end{matrix}\right.$.

مثال: مختصات نقطهٔ تقاطع دو خط $y=۲x-۱$ و $y=-۲x+۴$ را به روش ترسیم بیابید.

$$y=۲x-۱ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \Rightarrow y=-۱ \Rightarrow A\left|\begin{matrix}۰\\۱\end{matrix}\right. \\ y=۰ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲} \Rightarrow B\left|\begin{matrix}\frac{۱}{۲}\\۰\end{matrix}\right. \end{cases}$$

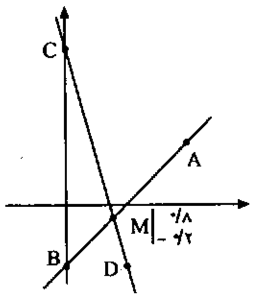
$$y=-۲x+۴ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \Rightarrow y=۴ \Rightarrow C\left|\begin{matrix}۰\\۴\end{matrix}\right. \\ y=۰ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow D\left|\begin{matrix}۲\\۰\end{matrix}\right. \end{cases}$$



مثال: مختصات نقطهٔ تقاطع دو خط به معادله‌های $y=x-۱$ و $y=-۴x+۳$ را بیابید.

$$y=x-۱ \Rightarrow \begin{cases} x=۲ \Rightarrow y=۱ \Rightarrow A\left|\begin{matrix}۲\\۱\end{matrix}\right. \\ x=۰ \Rightarrow y=-۱ \Rightarrow B\left|\begin{matrix}۰\\-۱\end{matrix}\right. \end{cases}$$

$$y=-۴x+۳ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \Rightarrow y=۳ \Rightarrow C\left|\begin{matrix}۰\\۳\end{matrix}\right. \\ x=۱ \Rightarrow y=-۱ \Rightarrow D\left|\begin{matrix}۱\\-۱\end{matrix}\right. \end{cases}$$



مثال: مختصات نقطهٔ تقاطع دو خط به معادله‌های زیر را بیابید.

$$\begin{cases} y=x-۳ \\ y=-۲x \end{cases} \Rightarrow x-۳=-۲x$$

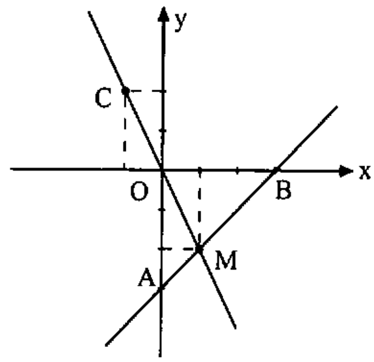
$$\Rightarrow x+۲x=۳ \Rightarrow ۳x=۳ \Rightarrow x=۱ \Rightarrow y=-۲$$

$$\Rightarrow M\left|\begin{matrix}۱\\-۲\end{matrix}\right.$$ نقطهٔ تقاطع

و نمودارهای آنها چنین است :

$$y=x-۳ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \Rightarrow y=-۳ \Rightarrow A(۰,-۳) \\ y=۰ \Rightarrow x=۳ \Rightarrow B(۳,۰) \end{cases}$$

$$y=-۲x \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \Rightarrow y=۰ \Rightarrow O(۰,۰) \\ x=-۱ \Rightarrow y=۲ \Rightarrow C(-۱,۲) \end{cases}$$

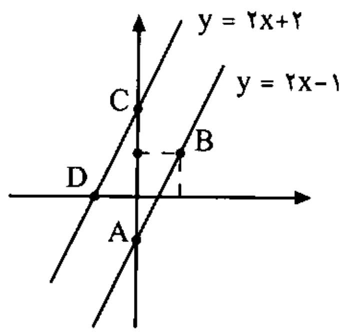


۱۱ـ۱ مطالبی دربارهٔ شیبهای دو خط

۱ـ اگر شیبهای دو خط برابر باشند، آن‌گاه آن دو خط موازیند و نقطهٔ تقاطع ندارند؛ مانند دو خط: $y=۲x-۱$ و $y=۲x+۲$.

$$y=۲x-۱ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \Rightarrow y=-۱ \Rightarrow A(۰,-۱) \\ x=۱ \Rightarrow y=۱ \Rightarrow B(۱,۱) \end{cases}$$

$$y=۲x+۲ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \Rightarrow y=۲ \Rightarrow C(۰,۲) \\ x=-۱ \Rightarrow y=۰ \Rightarrow D(-۱,۰) \end{cases}$$

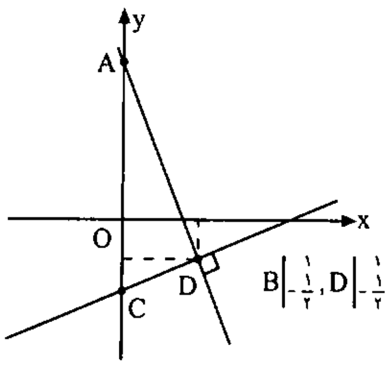


۲ـ اگر شیبهای دو خط، عکس یکدیگر باشند، ولی علامتهای آنها یکی مثبت و دیگری منفی باشند، آن‌گاه دو خط بر هم عمودند و یک نقطهٔ تقاطع دارند (دو خط در نقطهٔ تقاطع بر هم عمودند).

مثال: دو خط به معادله‌های $y=-۲x+\frac{۱}{۲}$ و $y=\frac{۱}{۲}x-۱$ بر هم عمودند، زیرا شیب اولّی -۲ و شیب دومی $(\frac{۱}{۲})$ است.

$$y=-۲x+\frac{۳}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \Rightarrow y=\frac{۳}{۲} \Rightarrow A(۰,\frac{۳}{۲}) \\ x=۱ \Rightarrow y=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow B(۱,-\frac{۱}{۲}) \end{cases}$$

$$y=\frac{۱}{۲}x-۱ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \Rightarrow y=-۱ \Rightarrow C(۰,-۱) \\ x=۱ \Rightarrow y=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow D(۱,-\frac{۱}{۲}) \end{cases}$$



به‌طوری که ملاحظه می‌شود، نقطهٔ D و نقطهٔ B هر دو یکی هستند و مختصات نقطهٔ تقاطع دو خط است.

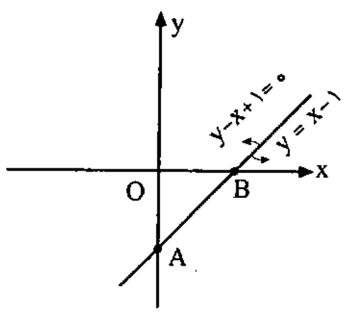
۳ـ اگر شیبهای دو خط مساوی نباشند، دو خط متقاطعند. (چنانچه شیبهای دو خط عکس یکدیگر با علامت مخالف باشند، هم متقاطعند و هم بر هم عمودند.) مانند دو خط به معادله‌های $y=x-۳$ و $y=-۲x$ که متقاطعند.

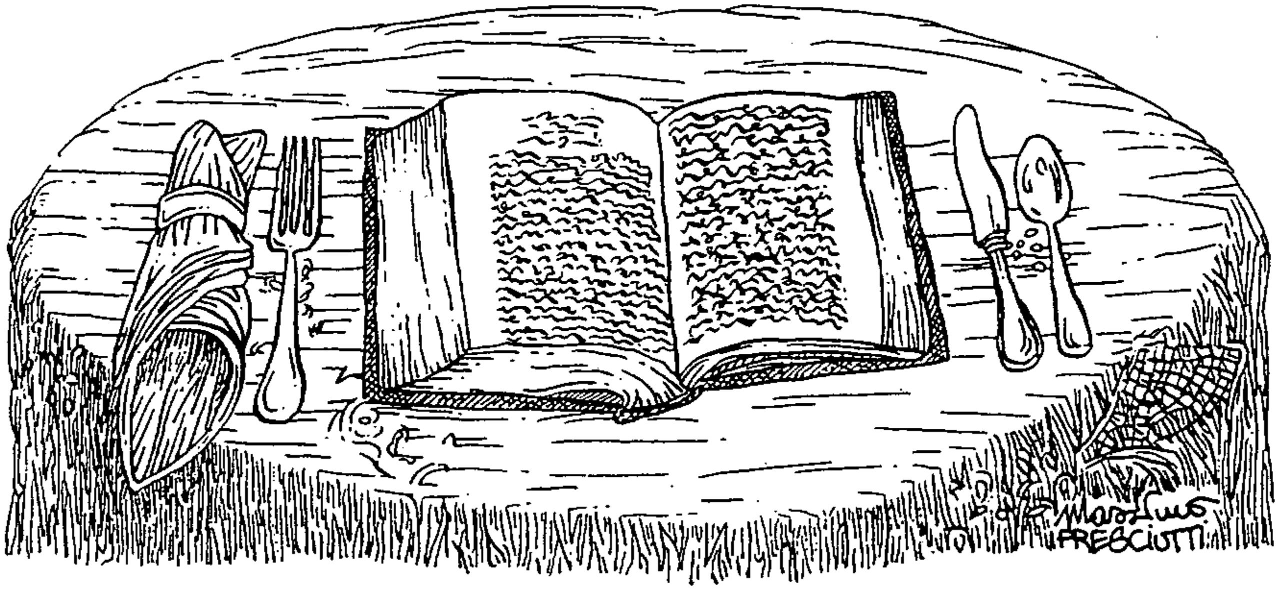
۴ـ اگر هم شیبهای دو خط مساوی و هم عدد ثابت آنها مساوی باشند، آن‌گاه دو خط بر هم منطبقند و بی‌شمار نقطهٔ مشترک دارند؛ مانند:

$$y-x+۱=۰\ ,\ \ y=x-۱$$

$$x=۰ \Rightarrow y=-۱ \Rightarrow A(۰,-۱)$$

$$x=۱ \Rightarrow y=۰ \Rightarrow B(۱,۰)$$





مسألهٔ حلّ مسأله های ریاضی (۵)

● عبدالحسین مصحفی

تمرین آزمونهای با پرسشهای چندگزینه‌ای

به کامیابی در یک آزمون، آن‌گاه می‌توانید امیدوار باشید که برای آن هم مجهز شده و هم خود را ورزیده کرده باشید. آنچه را آموخته‌اید، بویژه با توجه به نکته‌های درآمیخته با آنها را، اگر خوب فهمیده و خوب به خاط سپرده باشید، و مسأله‌هایی هر چه بیشتر را در زمینهٔ آن آموخته‌ها اگر حل کرده باشید، خود را مجهز کرده‌اید. برای آن‌که ورزیده هم باشید، یک روش نتیجه‌بخش آن است که آزمونهایی همسان آن آزمون را که بناست در آن شرکت کنید، تمرین کنید. این تمرین را از هر راه که انجام دهید، آن‌گاه ورزیدگی شما را در پی خواهد داشت که ذهن شما را به کنشها و واکنشهای لازم وادارد. برای این کار، لازم است که هر تمرین در دو مرحلهٔ *خودآزمایی* و خودورزی انجام گیرد. در مرحلهٔ خودآزمایی، به سان آن‌که در جلسهٔ آزمون هستید، عمل می‌کنید و جمع امتیازی را که به‌دست می‌آورید، حساب می‌کنید. در مرحلهٔ خودورزی، با مراجعه به کتابهای درسی و کمک درسی، و به یادداشتهایی که در آن زمینه‌ها داشته‌اید، معلوم می‌کنید آن پرسشهایی را که پاسخ درست نداده‌اید، به چه علت بوده است و چه نکته یا نکته‌هایی را متوجه نبوده‌اید. پس از این مرحله، بار دیگر مرحلهٔ خودآزمایی را تکرار می‌کنید و این بار معلوم می‌کنید چند امتیاز بیشتر از بار قبل به‌دست می‌آورید. فرایند دو مرحله‌ای خودآزمایی و خودورزی را اگر لازم بدانید، تکرار می‌کنید تا این‌که امتیازی را در خودآزمایی به‌دست آورید که خوشایندتان باشد.

خودآزمایی

برای هر مجموعه، پرسشهای ریاضی (یا درسی دیگر) از آزمونهای انجام گرفته که در دسترس دارید، به ترتیب زیر عمل کنید:

۱. جدولی به شکل صفحهٔ بعد را، که آن را *جدول ارزشیابی* می‌نامیم، رسم کنید و آماده داشته باشید:

تعداد پرسشها برابر با ۶۰ فرض شده است.

۲. یک ساعت را روبه‌روی خود بگذارید، فرض کنید در

شمارهٔ پرسش	الف	ب	ج	د	درست	نادرست
	گزینه‌ها				ارزش	
۱						
۲						
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
۵۹						
۶۰						
جمع ارزشها :						

جلسهٔ آزمون هستید، زمانی را که ساعت نشان می‌دهد، در نظر بگیرید و کار را آغاز کنید.

۳. پرسشها را بترتیب و بدقّت از نظر بگذرانید و هر کدام را که می‌بینید جوابش ساده است و آن را می‌دانید، در جدول آماده شده در برابر شمارهٔ آن پرسش و در ستون گزینه‌ها زیر کد آن پرسش (الف، ب، ج یا د) یک نشانه بگذارید. خود را روی هیچ‌یک از پرسشها زیاد معطّل نکنید. به آخرین پرسش که رسیدید، به آغاز آنها برگردید و آنهایی را که پاسخ نداده‌اید، باز هم هر کدامشان را که آسانتر می‌یابید، بار دیگر مرور کنید و گزینهٔ پذیرفتنی آن را که شناختید، در جدول نشانه بگذارید. این فرایند را تکرار کنید و آن‌گاه که لحظهٔ پایان مدت زمان آن آزمون (که اگر ۲ ساعت باشد، لحظهٔ پایان ۲ ساعت) فرا رسید، دست از کار بکشید.

۴. جدول خود را با جدول پاسخنامهٔ آزمون بسنجید و در برابر شمارهٔ هر پرسش، بنابر آن‌که انتخاب شما درست باشد یا نادرست، در ستون ارزش، زیر درست یا نادرست نشانه بگذارید. به آخرین شماره که رسیدید، در هر یک از ستونهای درست و نادرست، تعداد نشانه‌ها را بشمارید و عدد به‌دست آمده را زیر آن ستون یادداشت کنید.

۵. تعداد پاسخهای درست را در ۳ ضرب کنید و از حاصلضرب، تعداد پاسخهای نادرست را کم کنید. عدد به‌دست‌آمده، اگر صفر یا منفی باشد، به معنای آن است که هیچ امتیازی به‌دست نیاورده‌اید، و اگر مثبت باشد، آن را در ۱۰۰، ضرب و بر ۱۸۰ تقسیم کنید. حاصل برابر است با درصد امتیازی که در این خودآزمایی به‌دست آورده‌اید. برای مثال، اگر ۳۶ پرسش را پاسخ درست داده باشید، ۱۴ پرسش را یا پاسخ نادرست داده‌اید یا اصلاً پاسخ نداده‌اید و درصد امتیاز شما می‌شود :

$$\frac{(۳۶\times ۳-۱۴)\times ۱۰۰}{۱۸۰} = ۵۲/۲۲ \rightarrow \%۵۲/۲۲$$

خودورزی

امتیازی را که به‌دست آورده‌اید، خوشایند نمی‌یابید ؛ دلیلی است بر این که به گونهٔ شایسته و بایسته آمادگی نداشته‌اید و برای بهتر آماده شدن، باید تلاش کنید. پرسشهای آزمون آزمایشی، بویژه آنهایی که نمرهٔ مثبت نیاورده‌اند، راهنمای خوبی برای جهت دادن به تلاش شما و ابزار کارامدی برای فراهم کردن آمادگی شما به‌شمار می‌آیند. در هر فرصت مناسب و در هر موقع که خسته نباشید و فکرتان به چیزی دیگر مشغول نباشد، پرسشها را از آغاز و بترتیب، یکی یکی انتخاب کنید. پرسش انتخابی یا سؤالی دربارهٔ یک موضوع از متن یکی از درسهاست یا یک مسألهٔ ساده به نظر می‌رسد و یا می‌توان آن را به صورت یک مسألهٔ ساده بیان کرد. این مسأله هم در زمینهٔ یکی از موضوعهای درسی است ؛ بنابراین، با انتخاب هر پرسش، دست‌کم با یکی از موضوعهای درسی سروکار خواهید داشت. در کتابهای درسی و کمک‌درسی، و در یادداشتهایی که دارید، آن موضوع درسی را بیابید، آن را با دقت مطالعه کنید، تمرینها و مسأله‌های مربوط به آن و حلّ آنها را از نظر بگذرانید و سرانجام معلوم کنید پاسخ پرسش انتخابی چیست یا چگونه به‌دست می‌آید و آن را به‌دست آورید. این کار، گونه‌ای بازآموزی و بازشناخت درسها برای شما خواهد بود و برای آن‌که هم در ذهنتان بماند و هم در هر بار دیگر بتوانید به آن مراجعه کنید، در یک دفترچه پس از نوشتن شمارهٔ پرسش، پاسخ و راه‌حلّ آن را یادداشت کنید. دربارهٔ هر پرسش دیگر هم به همین گونه عمل کنید.

در زمینهٔ آمادگی برای آزمونهای با پرسشهای چند گزینه‌ای، کلاسهای حضوری یا مکاتبه‌ای نیز وجود دارد. استفادهٔ از این کلاسها آن‌گاه اثربخش است که کارشان به آزمونهای آزمایشی و محاسبهٔ امتیازها محدود نباشد ؛ بلکه دربارهٔ موضوع هر پرسش و چگونگی دستیابی به پاسخ درست آن نیز توضیح کافی بدهند. یادداشت کردن این توضیحها و کار دوبارهٔ با آنها در خانه نیز،

گونه‌ای خودورزی است.

در بررسی پرسشهایی که در آزمون آزمایشی از آنها نمرهٔ مثبت نیاورده‌اید، گاه به پرسشهایی برخورد می‌کنید که باز هم گمان می‌کنید بدرستی پاسخ داده‌اید و از این‌که در مراجعهٔ به پاسخنامه پاسخ خود را نادرست می‌یابید، تعجب می‌کنید؛ بویژه که پس از مراجعه به کتاب درسی و مطالعهٔ موضوع آن پرسش، باز هم نمی‌فهمید چرا پاسخ شما نادرست است. در این گونه پرسشها، نکته یا نکته‌هایی در کار است که ممکن است در کتاب درسی در جایی دیگر، و بیشتر در تعریفها، به آن اشاره شده باشد. از این‌رو، در مراجعهٔ به کتابهای درسی در زمینهٔ یک موضوع، به مطالعهٔ قاعده‌ها و فرمولها بسنده نکنید؛ بلکه تعریفها و یادآوریهای مربوط به آن موضوع را نیز با دقت مطالعه و بررسی کنید.

چند مثال

۱ـ برای آن‌که سه جمله‌ای درجهٔ دوم

$(a-1)x^2-2bx-1$

به‌ازای هر مقدار x، برابر با مقداری مثبت باشد، لازم است که:

الف) $b^2+a>1\ ,\ a<1$

ب) $b^2+a>1\ ,\ a>1$

ج) $b^2+a<1\ ,\ a>1$

د) $b^2+a<1\ ,\ a<1$

این پرسش را نخست به صورت یک مسأله بیان می‌کنید: در سه جمله‌ای داده شده، ضریبهای a و b چگونه باشند تا مقدار سه‌جمله‌ای همواره مثبت باشد؟ این را می‌دانید که این موضوع، از آن درسهایی است که سالهای پیش آموخته‌اید. پس به کتابهای درسی آن سالها مراجعه کنید و در فهرست یکی از آنها به‌عنوان «علامت سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم» برمی‌خورید؛ عنوان را در متن کتاب می‌یابید و از نظر می‌گذرانید. می‌بینید برای علامت سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم، سه حالت بیان شده است. این سه حالت را در دفتر یادداشتهای خود می‌نویسید تا به خاطر داشته باشید و در ضمن، درمی‌یابید برای آن‌که سه جمله‌ای همواره مثبت باشد، باید جواب نداشته باشد و ضریب جملهٔ درجهٔ دوم آن مثبت باشد. در سه جمله‌ای داده شده در پرسش، ضریب جملهٔ درجهٔ دوم برابر $a-1$ است، که باید مثبت باشد و مبین معادله هم $\Delta'=b^2+a-1$ است، که باید منفی باشد؛ بنابراین:

$$\begin{cases} a-1>0 \\ b^2+a-1<0 \end{cases} \Rightarrow a>1\ ,\ b^2+a<1$$

و گزینهٔ (ج) پذیرفتنی است.

۲ـ x برابر با چه مقدار باشد تا کسر زیر، برابر با صفر شود:

$$\frac{x^2-3x+2}{x^3-4x^2+6x-3}$$

الف) $x=1$ یا $x=2$ — ب) تنها آن‌گاه که $x=2$

ج) تنها آن‌گاه که $x=1$ — د) $x=-2$ یا $x=-1$

در روبه‌رویی با این پرسش، بر این باور بوده‌اید که یک کسر آن‌گاه برابر با صفر است که صورت آن صفر باشد. پس سه‌جمله‌ای صورت کسر را برابر صفر قرار داده و معادله را حل کرده، جوابهای $x=1$ و $x=2$ را به‌دست آورده‌اید و بر پایهٔ آن، گزینهٔ (الف) را نشانه زده‌اید. اما هنگام کنترل جوابها در پاسخنامه دیده‌اید که گزینهٔ (ب) پذیرفتنی اعلام شده است. در کتابهای درسی هم که موضوع حلّ معادله‌های کسری را یافته و بررسی کرده‌اید، به علت اختلاف پی نبرده‌اید.

در این‌باره، به یک نکته توجه نداشته‌اید؛ یک کسر *اگر معین باشد*، آن‌گاه برابر صفر است که صورتش صفر باشد و هرگاه مخرج یک کسر صفر باشد، آن کسر نامعین است. در کسر داده شده در پرسش بالا، آن‌گاه که $x=1$ هم صورت و هم مخرج صفر می‌شوند و کسر نامعین است و از این‌رو $x=1$ پذیرفته نیست و آن‌گاه که $x=2$، صورت کسر صفر می‌شود؛ اما مخرج کسر صفر نمی‌شود و کسر معین است. بنابراین $x=2$ پذیرفته است.

۳ـ هرگاه α زاویه‌ای باشد که اندازه‌اش بین صفر و ۹۰ درجه است، کدام‌یک از برابریهای زیر می‌تواند درست باشد:

الف) $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{6}}{2}$

ب) $\sin\alpha.\cos\alpha=-2$

ج) $tg\alpha+cotg\alpha=-1$

د) $\sin\alpha+\cos\alpha=2$

در این پرسش، برابریها را معادله‌هایی دانسته‌اید که باید حل شوند و چون دیده‌اید وقتگیر است، پرسش را رها کرده‌اید و به

پرسشهای دیگر پرداخته‌اید. در مراجعه به متن مثلثات و به موضوع حلّ معادله‌های مثلثاتی، به جایی نرسیده‌اید. اما اگر تعریف هر یک از تابعهای $\sin x$ ، $\cos x$ ، $\operatorname{tg}x$ و $\operatorname{cotg}x$ و تغییرهای آنها را در متن کتاب می‌یافتید و می‌خواندید، و بار دیگر به یاد می‌آوردید که اگر زاویه‌ای حاده باشد، هر یک از تابعهای مثلثاتی چهارگانهٔ بالا مثبت است و همچنین باز به یاد می‌آوردید که sin یک زاویهٔ حاده و cos آن بین صفر و یک واقعند، متوجه می‌شدید که در گزینه‌های (ب) و (ج) طرف اوّل برابری مثبت است و نمی‌تواند با یک مقدار منفی برابر باشد. در گزینهٔ (د) هم، چون $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ هر دو نمی‌توانند یک باشند، مجموع آنها از ۲ کوچکتر است و نمی‌تواند برابر با ۲ باشد. بدون آن که محاسبه‌ای یا حلّ معادله‌ای لازم باشد، سه گزینهٔ (ب)، (ج) و (د) رد می‌شوند و گزینهٔ (الف) پذیرفته است.

همیاری و پرس‌وجو

خودورزی، که لازم است کامل و صحیح انجام گیرد، در موردهایی لنگ می‌ماند؛ از راه مراجعه به کتابهای درسی و به یادداشتهایی که داشته‌اید، به نکته‌های مربوط به چندتایی از پرسشها نمی‌توانید پی ببرید. برای چاره‌جویی، چند راه در پیش دارید:

- کتاب یا جزوه‌ای را به‌دست آورید که راهنمای حل و پاسخگویی به آن پرسشهایی را در برداشته باشد که دربارهٔ آنها مشکل دارید.
- در کلاسی شرکت کنید که آن پرسشها و پاسخهایشان تشریح و موشکافی می‌شوند.
- دربارهٔ آن پرسشها و پاسخ درست آنها، از دوستان، همکلاسیها و دبیر ریاضی خود پرس‌وجو کنید و راهنمایی بخواهید.
- خودورزی را با همکاری و همیاری یکی یا دو نفر از همکلاسیها انجام دهید؛ نه به‌گونه‌ای که یکی گوینده و دیگری شنونده باشد؛ بلکه روی هر پرسش بحث و تبادل نظر داشته‌باشید. با این روش، در وقت هم صرفه‌جویی کرده‌اید و نتیجه‌ای بهتر را به‌دست می‌آورید.

خودآزمایی مرحلهٔ دوم

خودورزی را که به پایان رساندید و به چون و چرای گزینهٔ پذیرفتنی هر پرسش پی بردید و همه را بترتیب یادداشت کردید، نوبت تکرار خودآزمایی است. همان خودآزمایی قبلی را با همان مجموعهٔ پرسشها و به همان گونه انجام می‌دهید؛ تنها با این تفاوت که مدت آزمون را سه چهارم مدت دفعهٔ قبل می‌گیرید؛ اگر آن بار دو ساعت بوده است، این بار یک‌ساعت‌ونیم باشد. پس از پایان مدت، این بار هم درصد امتیاز خود را حساب می‌کنید. هر چند ممکن است بعضی پرسشها را که آن بار پاسخ درست داده بودید، این بار غیر از آن باشد؛ اما خواهید دید که امتیاز به‌دست آمده، افزایشی چشمگیر داشته است. این امتیاز، خوشایندتان باشد یا نباشد، یک بار دیگر خودورزی و پس از آن باز هم خودآزمایی را با همان شیوه انجام دهید. خودورزی این بار، مطالعهٔ یادداشتهایی خواهد بود که در دفعهٔ قبل فراهم آورده‌اید. این از سرگیری دوباره، هم موجب می‌شود آن نکته‌های تازه‌ای را که دریافته‌اید، بخوبی در ذهنتان جای گیرند و هم این‌که برای سرعت در عمل تمرین کرده‌اید.

فرایندهای خودآزمایی و خودورزی را می‌توانید به همین شیوه که یادآوری شد، روی هر مجموعهٔ پرسشها به‌کار ببرید و آمادگی و ورزیدگی همه جانبه‌ای را برای کامیابی در آزمونی که در پیش دارید، فراهم آورید.

تمرین سرعت عمل

مدت زمان هر آزمون محدود است و سرعت در عمل، یکی از عاملهای تضمین‌کنندهٔ کامیابی، بویژه در آزمونهای با پرسشهای چند گزینه‌ای محسوب می‌شود. خیلی از پرسشهای چنین آزمونهایی، مسأله‌های ساده‌ای هستند که فوری می‌شود به آنها پاسخ داد. هر کدام از آنها نکته‌ای را دربردارد و به یک ویژگی یا یک تعریف مربوط می‌شود و کافی است دانستنیهای شما آن اندازه باشند که بتوانید به آن نکته و ویژگی پی‌ببرید یا آن تعریف را باز شناسید. پرسشهای زیر از این گونه‌اند.

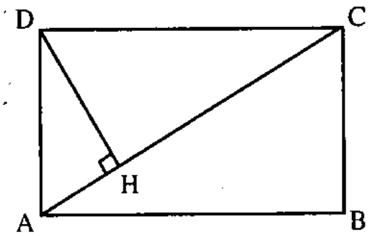
سعی کنید هر پرسش را فوری پاسخ دهید

۱ـ معادلهٔ $(x-r)(x-s)=0$ چه موقع ریشهٔ دوگانه (= ریشهٔ مضاعف) دارد؟

۲ـ گنجایش مخزن B لیتری دو برابر مخزن A لیتری، و گنجایش مخزن C لیتری برابر با مجموع گنجایشهای مخزنهای B لیتری و A لیتری است. مجموع گنجایشهای این سه مخزن، برابر با ۱۴۰۳۲۵۰ لیتر می‌تواند باشد یا نه؟

۳ـ متمّم مجموعهٔ A را با A' نشان می‌دهیم. هرگاه عضو a وجود داشته باشد که: $a \in B \cap A'$، آیا مجموعهٔ B می‌تواند زیرمجموعهٔ A باشد یا نه؟ چرا؟

۴ـ در مستطیل ABCD، عمود DH بر قطر AC رسم شده است. دو حاصلضرب $AB.BC$ و $AC.DH$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

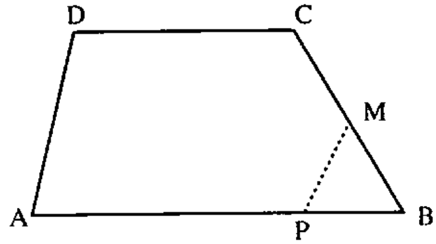


۵ـ دو نقطهٔ A به طول r و B به طول $-r$ روی محور $x'x$ واقعند و r عددی حقیقی و مخالف صفر است. جهت از A به B آیا در جهت مثبت محور است یا در جهت منفی آن؟

۶ـ معادلهٔ $\sin x.\cos ۲x = \sqrt{۲}$ جواب دارد یا نه؟

۷ـ در صفحهٔ دو محور عمود بر هم، فاصلهٔ دو نقطهٔ $M(a\,,\,k)$ و $N(b\,,\,k)$ از یکدیگر چه مقدار است؟

۸ ـ در چهارضلعی ABCD دو ضلع AB و CD با هم موازی‌اند. از M وسط BC، خطی موازی با AD رسم شده که با AB در P برخورد کرده است. اگر $AB = a$ و $CD = b$ و $AP = x$، بین a، x و b چه رابطه‌ای برقرار است؟



۹ـ به فرض $x \neq ۰$ کدام نقطه از محور $x'x$ به طول $\frac{|x|}{x}$ است؟

۱۰ـ هرگاه $P(x)$ یک چند جمله‌ای و k یک عدد ثابت مخالف صفر باشد، دو معادلهٔ $P(x) + k = ۰$ و $P(x) - k = ۰$ ریشهٔ مشترک دارند یا نه؟

۱۱ـ به فرض آن‌که x' و x'' ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ باشند، نابرابری زیر، چه موقع برقرار است؟

$b^۲ - ۴ac \neq a^۲(x' - x'')^۲$

۱۲ـ نمودار تابع $y = \sin x$ چند مرکز تقارن و چند محور تقارن دارد؟

۱۳ـ تعداد جایگشتهای حرفهای واژهٔ «کنکور» برابر با چه عددی است؟

۱۴ـ در صفحهٔ دو محور عمود برهم $x'x$ و $y'y$، دایرهٔ به معادلهٔ

$$(x - ۳)^۲ + (y - ۴)^۲ = ۲۵$$

از مبدأ مختصها می‌گذرد و با دو محور، بترتیب در A و B برخورد می‌کند. درازای پاره‌خط AB برابر با چه عددی است؟

۱۵ـ در صفحهٔ دو محور عمود برهم $x'x$ و $y'y$ دو منحنی C و C' نسبت به محور $y'y$ قرینه‌اند. اگر منحنی C نمودار تابع $y = ax^۲ + bx + c$ باشد، منحنی C' نمودار کدام تابع است؟

۱۶ـ چهار مهرهٔ سفید، سه مهرهٔ قرمز و پنج مهرهٔ آبی درون کیسه‌ای ریخته می‌شوند. پس از آن‌که این مهره‌ها را خوب به‌هم می‌زنند، یکی از آنها را از کیسه بیرون می‌کشند. احتمال آن‌که این مهره سفید نباشد، چه‌قدر است؟

۱۷ـ عدد حقیقی a چگونه باشد تا معادلهٔ $\cos x.\cos(-x) = -a^۲$ جواب داشته باشد؟

۱۸ـ نقطهٔ M در کجای صفحهٔ دایره‌ای داده شده واقع باشد تا از آن بتوان بیش از یک خط را عمود بر دایره رسم کرد؟

۱۹ـ طول کمانی از دایرهٔ به شعاع ۷ سانتیمتر که اندازه‌اش $\frac{\pi}{۷}$ رادیان باشد، چند سانتیمتر است؟

۲۰ـ ده برابر کدام عدد را چون در پایهٔ ۲ لگاریتم بگیرید، عدد ۵ به‌دست می‌آید؟

۲۱ـ هر گاه داشته باشید:

$$P(x) = x(۲x - ۱)^۲(۳x - ۲)^۳(۴x - ۳)^۴ \ldots [nx - (n - ۱)]^n$$

و $P(x)$ را به‌صورت یک چند جمله‌ای مرتّب کنید، مجموع ضریبهای همهٔ جمله‌های آن، برابر با چه عددی می‌شود؟

۲۲ـ حاصل جمع کدام سه کسر برابر است با $\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}$ ؟

۲۳ـ به فرض $f(x)=f(x-1)+4x^2$ و $f(0)=0$، مقدار $f(1)$ با چه عددی برابر است؟

پاسخها

۱ـ آن‌گاه که $r=s$.

۲ـ مجموع گنجایشهای سه مخزن مضربی از ۶ است و عدد داده شده، این ویژگی را دارد.

۳ـ مجموعهٔ B نمی‌تواند زیرمجموعهٔ A باشد؛ زیرا a که عضو B هست، عضو A نیست.

۴ـ دو حاصلضرب با هم برابرند؛ زیرا هر کدام با مساحت مستطیل برابر است.

۵ـ اگر r مثبت باشد، جهت از A به B، مخالف جهت مثبت محور است و اگر r منفی باشد، جهت از A به B، همان جهت مثبت محور است.

۶ـ زاویهٔ x هر اندازه که باشد $-1\le \sin x\le 1$ و $-1\le \cos 2x\le 1$ و طرف نخست معادله، عددی کوچکتر از یک است و با $\sqrt{2}$ برابر نیست و معادله جواب ندارد.

۷ـ فاصلهٔ دو نقطه برابر است با $|a-b|$ و نوشتن آن به یکی از دو صورت $a-b$ یا $b-a$ اشتباه است؛ مگر آن که بترتیب با قید $a>b$ و $a<b$ همراه باشند.

۸ـ اگر N وسط AD باشد، AP با MN و با $\frac{a+b}{2}$ برابر است.

۹ـ بنابر آن که $x\ge 0$ یا $x<1$ طول نقطه ۱ یا ۱− است.

۱۰ـ ریشهٔ مشترک دو معادله، ریشهٔ معادلهٔ حاصل از تفاضل و همچنین مجموع دو معادله نیز هست. تفاضل دو معادلهٔ داده شده $2k=0$ است و چون k مخالف صفر فرض شده، رابطه‌ای نامکن است و جواب ندارد. بنابراین، دو معادله نمی‌توانند ریشهٔ مشترک داشته باشند.

۱۱ـ آن‌گاه که معادله جواب حقیقی نداشته باشد، در این صورت، طرف نخست، رابطهٔ منفی است و با مقدار نامنفی طرف دوم برابر نیست.

۱۲ـ دامنهٔ تابع همهٔ محور $x'x$ است و هر نقطهٔ به طول $x=k\pi$ و به عرض صفر، مرکز تقارن منحنی و هر خط به معادلهٔ $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$، محور تقارن منحنی است.

۱۳ـ واژهٔ کنکور دارای پنج حرف است که دو تای آنها ـ «ک» ـ تکراری است و تعداد جایگشتها می‌شود:

$$\frac{5!}{2!}=\frac{120}{2}=60$$

۱۴ـ زاویهٔ AOB قائمه، AB قطر دایره و برابر با ۱۰ است.

۱۵ـ در تابع $y=ax^2+bx+c$ چون x به $-x$ تبدیل شود، تابع $y=ax^2-bx+c$ به‌دست می‌آید.

۱۶ـ تعداد همهٔ مهره‌ها ۱۲ و تعداد مهره‌هایی که سفید نیستند ۸ و احتمال خواسته شده $\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$ است.

۱۷ـ طرف اوّل معادله $\cos^2 a$ و مثبت است و طرف دوم نامنفی است و معادله آن‌گاه ممکن است که $a=0$.

۱۸ـ یک خط آن‌گاه بر دایره عمود است که از مرکز آن بگذرد. بر نقطهٔ M و مرکز دایره، تنها یک خط می‌گذرد؛ مگر آن که M بر مرکز دایره واقع باشد.

۱۹ـ محیط دایره که به اندازهٔ 2π رادیان است، به درازای 14π سانتیمتر است، پس کمان به اندازهٔ $\frac{\pi}{7}$ رادیان به درازای π سانتیمتر است.

۲۰ـ از معادلهٔ $\log_2^{10x}=5$ به‌دست می‌آید $10x=2^5$ و بنابراین $x=\frac{32}{10}=$ ۳/۲.

۲۱ـ مجموع ضریبهای چندجمله‌ای $P(x)$ به این ترتیب به‌دست می‌آید که در آن x با عدد یک جانشین شود. در عبارت داده شده، اگر $x=1$، حاصل عبارت برابر $1\times1\times1\times\ldots\times1=1$ می‌شود.

۲۲ـ

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}=\frac{a^2}{abc}+\frac{b^2}{abc}+\frac{c^2}{abc}$$

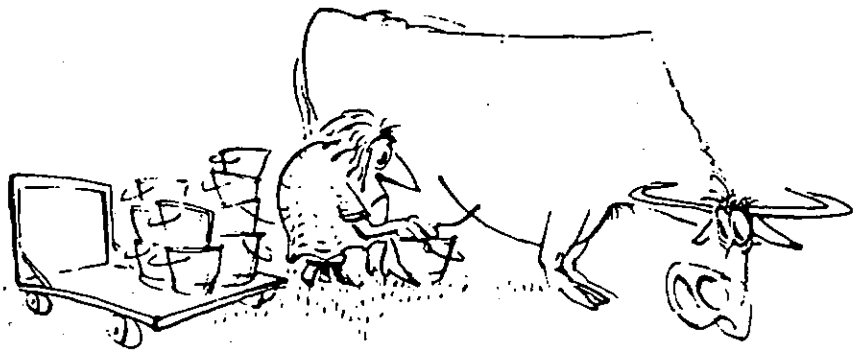
$$=\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}$$

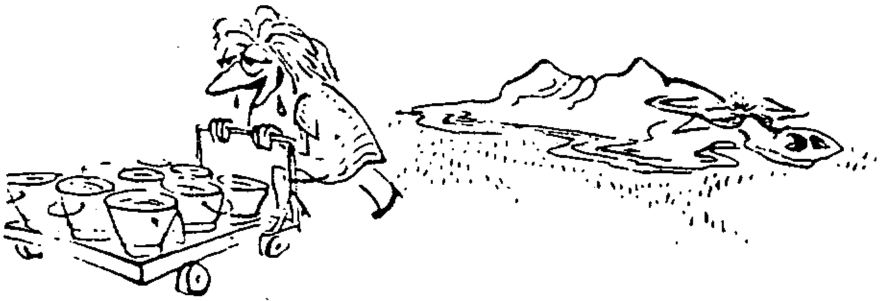
۲۳ـ بنابر رابطهٔ داده شده: $f(1)=f(0)+4=4$.

بخش پذیری

$x^n - y^n$ بر $x - y$

(یک مثال ساختاری)





● ترجمه: میرشهرام صدر

MATHEMATICS TEACHER

APRIL 1998

Volume 91 Number 4 (NCTM)

Francis G. French

در این مقاله با روش استدلال استقرایی، بخش‌پذیری $x^n - y^n$ را بر $x - y$ ($x \neq y$ و $n \in \mathbb{N}$) مورد بررسی و تحقیق قرار می‌دهیم. در این مقاله، مثالهایی را مطرح می‌کنیم که به دانش‌آموزان کمک می‌کنند تا درک بهتری از ماهیت استدلال استقرایی و اثباتهای استقرایی داشته باشند و بتوانند دربارهٔ این موضوع حداقل در فضای سه‌بعدی تحقیق، فرضیه‌سازی و آزمایش کنند و مدلهای فیزیکی و تصویری بسازند. دانش‌آموزان من مرکّب از معلّمان دورهٔ راهنمایی و دبیرستان در دوره‌های ضمن خدمت بودند. بیشتر آنها با کاربرد مدلهای فیزیکی و دست‌ساز آشنا نبودند، که این کاربردها برای معلّمان و دانش‌آموزان هدفدار هستند. در هریک از فعّالیتهای زیر، آنها معلّم بودن خود را به شوخی می‌گرفتند و وانمود می‌کردند که دانش‌آموز دبیرستانی هستند.

استدلال خود را با دوره بر مطالبی مربوط به مفهومهای تئوری اعداد، شروع می‌کنیم. همچنین از ویژگیهای توانها، روشهای تشخیص فاکتورهای صحیح مثبت و قضیهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

قضیه. اگر a و b دو عدد صحیح باشند، به‌طوری که عدد صحیح c هر دوی آنها را بشمارد، آن‌گاه c عدد a+b را می‌شمارد. ($c|a, c|b \Rightarrow c|a+b$).

موضوع مقاله را در پنج قسمت، شرح و بسط می‌دهیم: (۱) تحقیق عددی با استفاده از ماشین حساب (۲) پایهٔ حدس اصلی در این تحقیق (۳) آزمایش عددی حدس یا فرضیه، یافتن مثال نقض و فرصت تصحیح این فرضیه (۴) مدل‌سازی (۵) اثبات، با

استفاده از اصل استقرای ریاضی.

x	y	$x-y$	x^2-y^2	$\frac{x^2-y^2}{x-y}$	x^3-y^3	$\frac{x^3-y^3}{x-y}$	x^4-y^4	$\frac{x^4-y^4}{x-y}$
۱۲	۷	۵	۹۵	۱۹	۱۳۸۵	۲۷۷	۱۸۳۳۵	۳۶۶۷
۱۹	۲	۱۷	۳۵۷	۲۱	۶۸۵۱	۴۰۳	۱۳۰۳۰۵	۷۶۶۵

شکل ۱. صفحه کار برای آزمایش بخش‌پذیری $x^n - y^n$ بر $x - y$

قسمت اول: تحقیق با استفاده از صفحهٔ کار یا ماشین‌حساب

صفحهٔ کار را مطابق با شکل (۱) به دانش‌آموزان داده و از آنها می‌خواهیم که با انتخاب دو عدد صحیح برای x و y آن را کامل کنند. دانش‌آموزانی که در این فعالیّت به کامپیوتر و ماشین‌حساب دسترسی ندارند، یک صفحهٔ چرک‌نویس بزرگ برای آنها مفید خواهد بود.

ابتدا دو مقدار ۱۲=x و ۷=y را درنظر بگیرید. سپس با تکمیل یک سطر از جدول به کمک این دو عدد صحیح، نتیجه می‌گیریم که عددهای مختلف $x^2 - y^2$ ، $x^3 - y^3$ و $x^4 - y^4$ بر $x - y$ بخش‌پذیر هستند. دانش‌آموزان با آزمایش بر روی دو عدد صحیح دیگر، همین نتیجه را گرفتند. هیچ یک از دانش‌آموزان دو عدد x و y را یکسان انتخاب نکردند. در این بحث، x=y را یک حالت خاص درنظر می‌گیریم.

قسمت دوم: فرضیه‌سازی

بعد از بیان نتیجهٔ بالا، گمان می‌کنیم که بتوان قاعده یا دستوری برای این نتیجه پیدا کنیم. دانش‌آموزان باهوش، بسرعت توانستند حدس زیر را بزنند:

اگر x و y دو عدد صحیح باشند، آن‌گاه $(x-y)|(x^n - y^n)$.

عقیدهٔ من و معلّمان این بود که ممکن است، نیاز به مثالهای بیشتری باشد تا این که دانش‌آموزان دبیرستانی بتوانند چنین حدسی را بزنند.

همان‌طور که در این حدس ملاحظه می‌کنید، به این مطلب اشاره نشده است که n باید عددی طبیعی و $x \neq y$. ما در روند اثبات، این مطالب را تصحیح می‌کنیم.

قسمت سوّم: آزمایش کردن

به دانش‌آموزان گفتیم که این فرضیه را آزمایش می‌کنیم، برای این کار آنها می‌توانند از صفحهٔ کار در شکل (۱) استفاده کنند. بعضی از معلّمان تصور کردند که این آزمایش، ممکن است یک تکلیف زیاد و تکراری برای دانش‌آموزان آنها باشد و اثبات این مطلب در جلسهٔ دیگری کامل گردد؛ امّا از آزمایش کردن، دو هدف را دنبال می‌کنیم: **اوّل**؛ یافتن مثال نقض، **دوم**؛ یافتن راه‌هایی برای تصحیح فرضیه. سرانجام، دانش‌آموزان را تشویق کردم که مثالهای زیادی را آزمایش کنند، و آنها امیدوار شدند که قدرت فکر کردن روی فرضیهٔ ناموفق را دارند. آنها به تذکّرهای من توجه می‌کردند و با شور و شوق پاسخ می‌دادند.

برای آزمایش، ده دقیقه وقت درنظر گرفتیم؛ که برای اثبات، وقت کافی بود. مطالبی که در زیر آمده است، نشان‌دهندهٔ مشاهدات دانش‌آموزان دربارهٔ این فرضیه است:

۱. مقدار x نمی‌تواند با مقدار y برابر باشد.

۲. توان n باید عدد صحیح نامنفی باشد.

۳. اگر x و y دو عدد غیرصحیح باشند، نتیجه بی‌معنا می‌شود.

۴. با توجه به مطالبی که در مشاهدات ۱، ۲و ۳ عنوان شد، فرضیه برای همه عددهای آزمایش شده، برقرار است.

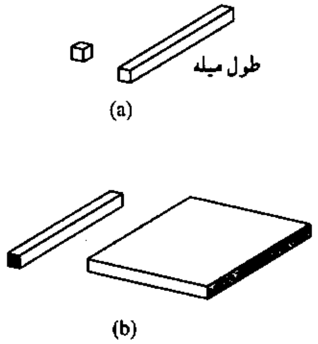
بر اساس این نتایج، فرضیه را به این صورت بیان می‌کنیم: اگر x و y دو عدد صحیح باشند و $x \neq y$ و n عدد صحیح مثبتی باشد، آن‌گاه $(x-y)|(x^n - y^n)$.

قسمت چهارم: مدل‌سازی

ما از ده قطعه اصلی برای مدل‌سازی فرایندی که منجر به اثبات شهودی می‌شود، استفاده می‌کنیم. به‌طور یقین، هر مجموعهٔ *مقایسه‌پذیر*[1] از مدلهای جبری تشکیل شده است. ده قطعهٔ اصلی شامل، یک مکعب کوچک که *واحد*[2] نامیده می‌شود؛ مکعبهایی که از ۱۰ واحد تشکیل شده‌اند و *میله*[3] نامیده می‌شوند؛ مربعهای ۱۰۰ واحدی که *تخت*[4] نامیده می‌شوند؛ و مکعبهای بزرگی که از ۱۰۰۰ واحد تشکیل شده‌اند و *مکعب*[5] نامیده می‌شوند. هر گروه باید مجموعه‌ای از این وسایل کارگاهی را داشته باشند.

دانش‌آموزان با استفاده از ابعاد میله و قطعاتی شبیه به رشته‌های ماکارونی، مجموعه‌ای از پاره‌خطها با دو طول مختلف را ساختند. مجموعهٔ اول، پاره‌خطهایی که اندازهٔ آنها برابر با یک ضلع مکعب واحد است و مجموعهٔ دیگر، پاره‌خطهایی که اندازهٔ آنها برابر طول میله است. (شکل **۲a** را ملاحظه کنید.)

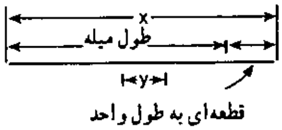
دانش‌آموزان باید با کاغذ یا مقوای نازک، مجموعه‌ای از سه نوع سطح را بسازند. مجموعهٔ اول، سطحی مانند وجه کوچک میله؛ مجموعهٔ دوم، سطحی مانند وجه بزرگ میله و مجموعهٔ سوم، سطحی مانند بزرگترین وجه تخت. (شکل **۲b** را ملاحظه کنید.)



شکل ۲

در هر مرحله، کار گروهی که باید دانش‌آموزان انجام دهند، کار با پروژکتور اُورهد است، به‌طوری که نتیجه‌ها روی پردهٔ سفیدی پدیدار گردد تا این‌که نقطهٔ اصلی بحث، تفهیم شود.

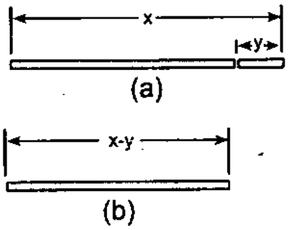
ما باید مدلهای متفاوتی را برای اثبات حالتهای n=۱، n=۲ و n=۳ به‌کار ببریم. همچنان‌که کار پیش می‌رفت، ما از نتیجه‌هایی که در هر مرحله به‌دست می‌آوردیم، برای اثبات درستی قسمت بعدی استفاده می‌کردیم. از مدلهای طولی استفاده می‌کنیم، یک قطعه به اندازهٔ طول میله و دو قطعه به اندازهٔ طول ضلع مکعب واحد برمی‌داریم. قطعه‌ای به طول واحد را در قسمت انتهایی قطعه‌ای به طول میله قرار می‌دهیم، سپس طول قطعه به‌دست آمده را x می‌نامیم. به‌علاوه قطعهٔ دیگر به طول واحد را y می‌نامیم. از این دو قطعه به طولهای x و y در روند اثبات، به‌عنوان خط‌کش استفاده می‌کنیم.



شکل ۳. خط‌کشها

مرحلهٔ اول: n = ۱

یک قطعه به اندازه طول میله و قطعه‌ای به طول واحد برمی‌داریم. قطعهٔ به طول واحد را در قسمت انتهایی قطعهٔ به طول میله قرار می‌دهیم و اندازهٔ طول قطعهٔ به‌دست آمده را x درنظر می‌گیریم. اکنون قطعهٔ به طول واحد را از این قطعهٔ جدید برمی‌داریم. (اندازهٔ طول قطعهٔ واحد را y درنظر بگیرید.) عبارتی جبری برای اندازهٔ میلهٔ باقیمانده بنویسید. (شکل **۴** را ملاحظه کنید.)



شکل ۴. مدل فضای یک بعدی

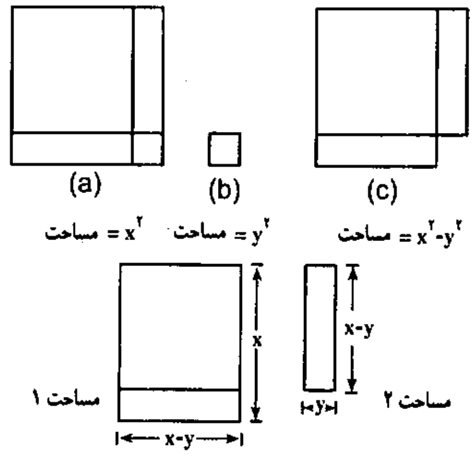
دانش‌آموزان کلاس خیلی سریع به عبارت $x - y$ برای اندازهٔ میلهٔ باقیمانده رسیدند. می‌دانیم که:

$$(x-y)|(x-y)$$

مرحلهٔ دوم: n = ۲

در این مرحله، باید نتیجه‌هایی را که از مدل فضای یک‌بعدی به‌دست آوردیم، برای مدل فضای دوبعدی مورد استفاده قرار دهیم. مدلهای سطحهای مختلف در **شکل ۲b** را به‌کار ببرید و مربعی شبیه به **شکل ۵a** بسازید. با استفاده از اندازهٔ طول قطعه‌های **شکل ۴**، یک عبارت برای مساحت مربع بنویسید. اکنون مربع کوچک را از روی مدل برمی‌داریم. یک عبارت برای مساحت این مربع کوچک بنویسید. (**شکل ۵b**) سرانجام یک عبارت برای مساحت مدل باقیمانده بنویسید. (**شکل ۵c** را ملاحظه کنید.)

مدل **شکل ۵c** را به دو قسمت تقسیم کنید، به‌طوری که هر قسمت، یک ضلع به اندازهٔ طول مدل **شکل ۴b** داشته باشد. اندازه اضلاع هر قسمت را بیابید، سپس برای مساحت هر قسمت، یک عبارت جبری بنویسید. در صورت نیاز از خط‌کشها استفاده کنید.



شکل ۵. مدل فضای دو بعدی

در این مرحله، دانش‌آموزان با اندکی تأمل توانستند، عبارتهایی جبری برای مساحتهای این دو قسمت مشخص کنند. مساحت ۱ با حاصلضرب $x(x-y)$ و مساحت ۲ با حاصلضرب $y(x-y)$ محاسبه می‌شود. چون هر دو قسمت شامل عامل $x-y$ است، درنتیجه $x-y$ مجموع این دو عبارت را می‌شمارد، بنابراین داریم:

$$x(x-y)+y(x-y)=x^2-xy+xy-y^2$$
$$=x^2-y^2$$

و $x-y$ عبارت x^2-y^2 را می‌شمارد.

مرحلهٔ سوم: n = ۳

در این مرحله، باید نتیجه‌هایی را که از مدل فضای دوبعدی به‌دست آوردیم، برای مدل فضای سه‌بعدی مورد استفاده قرار دهیم. برای این کار، یک مکعب بزرگ، سه‌تخت، سه میله و یک مکعب واحد را بردارید. سپس با استفاده از همهٔ آنها یک مکعب بسازید و عبارتی برای حجم این مکعب بنویسید. اکنون مکعب واحد را از این مدل بردارید و یک عبارت جبری برای حجم آن بنویسید. سپس یک عبارت جبری برای حجم مدل باقیمانده بنویسید. اکنون این مدل را به دو حجم ۱ و ۲ تفکیک کنید، به‌طوری که یکی از قسمتها، سطحی مانند مدل **شکل 5c** داشته باشد. سرانجام، ابعاد هر دو قسمت را مشخص کنید و عبارتهای جبری برای حجمهای هر قسمت بنویسید. در صورت نیاز، از خط‌کشها استفاده کنید. (**شکل ۶** را ملاحظه کنید.)

در این مرحله، دانش‌آموزان باید نسبت به دو مرحلهٔ قبل، مقدار بیشتری تلاش می‌کردند. سرانجام آنها مشخص کردند که حجم ۱ با حاصلضرب $x^2(x-y)$ و حجم ۲ با حاصلضرب $y(x^2-y^2)$ محاسبه می‌شود. به اتحاد زیر توجه کنید:

$$x^2(x-y)+y(x^2-y^2)=x^3-x^2y+x^2y-y^3$$
$$=x^3-y^3$$

به‌علاوه، حجم ۱ شامل عامل $x-y$ است. حجم ۲ شامل عامل x^2-y^2 است که در مدل فضای ۲ـ بعدی نشان دادیم: $(x-y)|(x^2-y^2)$. درنتیجه، حجم هر دو قسمت شامل عامل $x-y$ است، بنابراین $x-y$ عبارت x^3-y^3 را می‌شمارد، یعنی: $(x-y)|(x^3-y^3)$.

مرحلهٔ چهارم: n = ۴

اگرچه تصور فضای ۴ـ بعدی بیش از ظرفیّت ذهن ماست؛ امّا سعی می‌کنیم، نتیجه‌هایی را که برای n=۱، n=۲ و n=۳ به‌دست آوردیم، برای فضای ۴ـ بعدی به‌کار ببریم. به یاد بیاورید که x^3-y^3 را به دو قسمت تفکیک کردیم. یک قسمت، شامل عامل $x-y$ و قسمت دیگر، شامل نتیجه‌های مدل فضا ۲ـ بعدی دربارهٔ x^2-y^2 است. با دقت، به عبارتهایی که برای حجمهای این دو قسمت به‌دست آمد؛ توجه کنید و به‌طور مشابه برای x^4-y^4 بحث کنید.

بعد از چند دقیقه، بعضی از گروه‌های کاری توانستند اتحاد زیر را بیابند:

$$x^4-y^4=x^3(x-y)+y(x^3-y^3)$$

به اتحاد زیر توجه کنید:

$$x^3(x-y)+y(x^3-y^3)=x^4-x^3y+x^3y-y^4$$
$$=x^4-y^4$$

با توجه به این اتحاد ملاحظه می‌کنیم که (۱) $x-y$ عبارت x^4-y^4 را می‌شمارد و (۲) قرارداد می‌کنیم که نتیجه‌های مشابهی را برای مقادیر صحیح بزرگتر از n به‌دست می‌آوریم.

این قرارداد را آزمایش می‌کنیم، دانش‌آموزان کلاس نتیجه را برای n=۵ به‌صورت زیر مشخص کردند:

$$x^5-y^5=x^4(x-y)+y(x^4-y^4)$$

به اتحاد زیر توجه کنید :

$$x^4(x-y)+y(x^4-y^4)=x^5-x^4y+x^4y-y^5$$
$$=x^5-y^5$$

مرحلهٔ پنجم: برهان

این فرضیه را با روش استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم، بنابراین لازم است که :

۱) نشان دهیم که فرضیه برای مرحلهٔ اوّل برقرار است.

۲) نشان می‌دهیم که اگر فرضیه برای عدد صحیح و مثبت n برقرار باشد، آن‌گاه فرضیه برای عدد n+۱ برقرار است.

ثابت می‌کنیم که x و y دو عدد صحیح باشند به‌طوری که $x \neq y$ و n عدد صحیح مثبتی باشد آن‌گاه $x-y$ عبارت x^n-y^n را می‌شمارد. روند اثبات به‌صورت زیر است :

۱) در این‌جا، لازم است که نشان دهیم، n=۱ در فرضیه صدق می‌کند.

۲) فرض می‌کنیم که $x-y$ عبارت x^k-y^k را بشمارد. آیا می‌توانیم با استفاده از این فرض، ثابت کنیم که $x-y$ عبارت $x^{k+1}-y^{k+1}$ را می‌شمارد؟

با استفاده از قرارداد کلی، قادر خواهیم بود که این‌کار را انجام دهیم. فرض کنیم که $x-y$ عبارت x^k-y^k را می‌شمارد، اکنون الگویی را که برای $n=1,2,3,4$ ملاحظه کردید، بسط دهید و یک اتحاد بسازید. دانش‌آموزان با یک کار گروهی نسبتاً سریع، توانستند اتحاد زیر را بیابند :

$$x^{k+1}-y^{k+1}=x^k(x-y)+y(x^k-y^k)$$

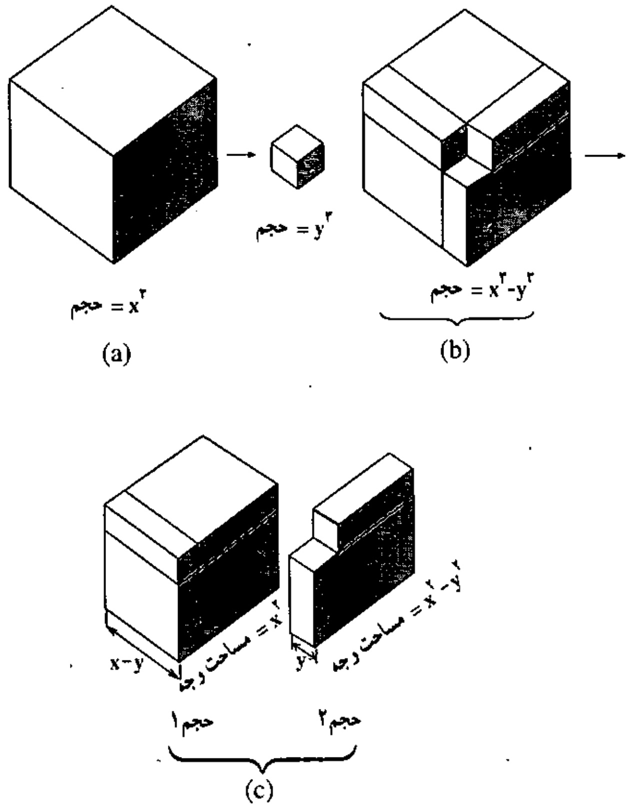
واضح است که $x-y$ عبارت $x^k(x-y)$ را می‌شمارد و $x-y$ طبق فرض استقرا عبارت x^k-y^k را می‌شمارد، بنابراین داریم :

$$\left.\begin{array}{l}(x-y)\,\big|\,x^k(x-y)\\(x-y)\,\big|\,y(x^k-y^k)\end{array}\right\}\Rightarrow (x-y)\,\big|\,x^k(x-y)+y(x^k-y^k)$$

در نتیجه، $(x-y)\,|\,x^{k+1}-y^{k+1}$. بنابراین حکم برای هر عدد طبیعی n برقرار است و در این مرحله اثبات کامل می‌گردد.

نتیجه

تعداد زیادی از دانش‌آموزان، اطمینان کامل داشتند که استدلال استقرایی و اثبات استقرایی را فهمیده‌اند. به‌طورکلی آنها موافق بودند که استفاده از مدلهای دست‌ساز، بسیار مناسب است و آنها نشان دادند که می‌توانند از مدلهای دست‌ساز استفاده کنند.



شکل ۶.مدل فضای سه بعدی

یادداشتها :

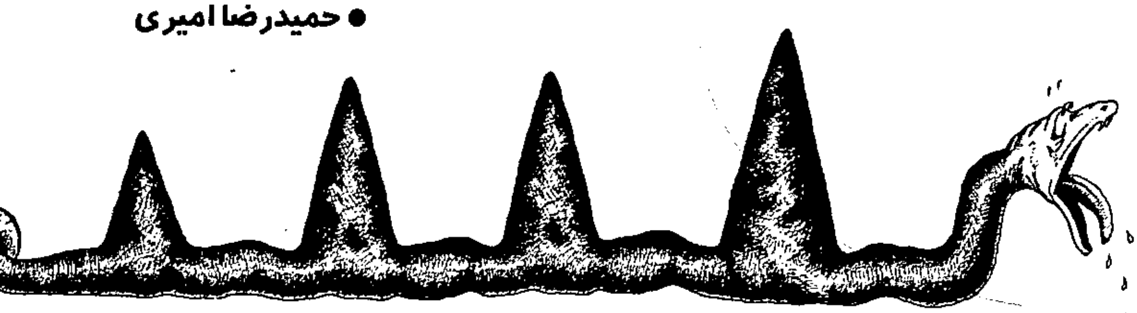
۱. دو مجموعهٔ A و B را مقایسه‌پذیر گویند، هرگاه $A \subseteq B$ یا $B \subseteq A$.
۲. units
۳. rod
۴. flat
۵. cube

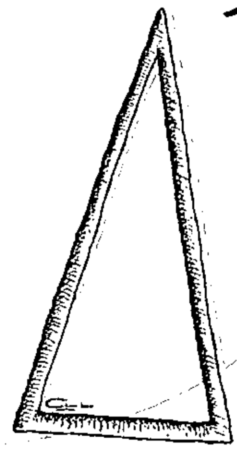
در حاشیهٔ مثلثات

(قسمت دوم)

دایرهٔ مثلثاتی و رابطهٔ بین نسبتهای مثلثاتی

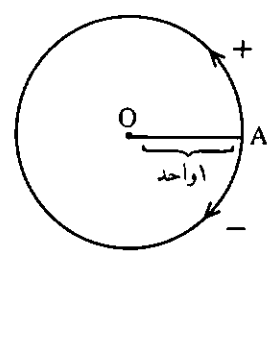
● حمیدرضا امیری





تعریف دایرهٔ مثلثاتی و محورهای نسبتهای مثلثاتی روی آن:

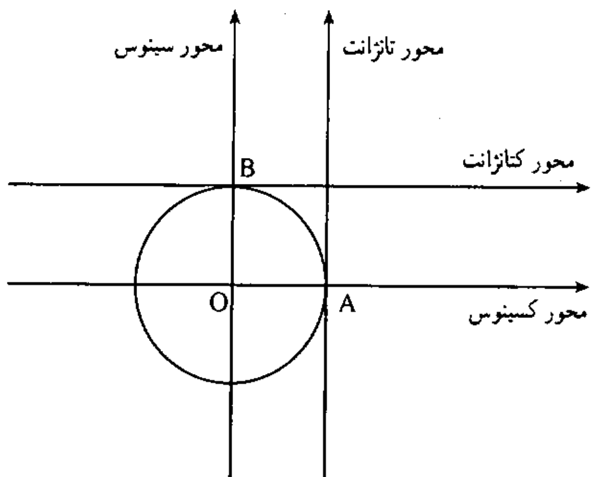
تعریف: دایرهٔ مثلثاتی، دایره‌ای است **جهت‌دار** با شعاع واحد، که جهت مثبت روی دایرهٔ مثلثاتی، خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت در نظر گرفته می‌شود (مطابق شکل ۵). نقطهٔ O را مرکز دایرهٔ مثلثاتی و نقطهٔ A را مبدأ دایرهٔ مثلثاتی می‌نامیم. حال روی



شکل۱

دایرهٔ مثلثاتی و مطابق با شکل (۲) محورهای نسبتهای مثلثاتی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

الف) محور سینوسها: محور عمودی که از مرکز دایرهٔ مثلثاتی



شکل۲

عبور می‌کند.

ب) محور کسینوسها: محور افقی که از مرکز دایرهٔ مثلثاتی عبور می‌کند.

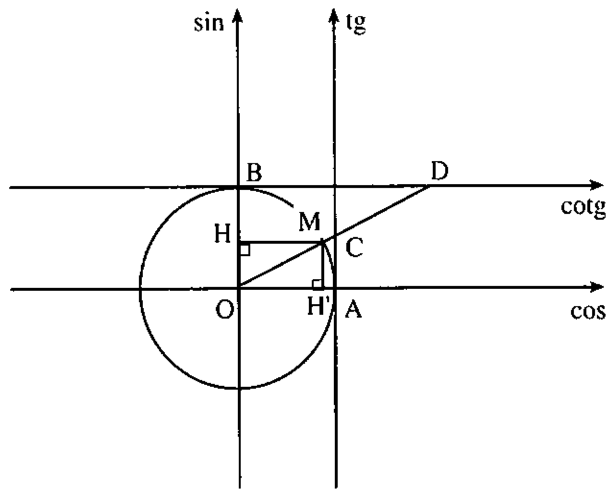
ج) محور تانژانتها: محور عمودی که از مبدأ دایرهٔ مثلثاتی (نقطهٔ A) عبور می‌کند.

د) محور کتانژانتها: محور افقی که برمحورهای سینوس و تانژانت عمود است و مطابق شکل، از نقطهٔ B عبور می‌کند.

تبصره: روی همهٔ این محورها، از مبدأ هر محور افقی به

سمت راست، مثبت و به سمت چپ را منفی قرارداد می‌کنیم و نیز روی محورهای عمودی، از مبدأ محور به سمت بالا را مثبت و به سمت پایین را منفی قرارداد می‌کنیم.

حال فرض کنیم α، زاویه‌ای دلخواه باشد، انتهای کمان این زاویه را M می‌نامیم و از نقطهٔ M مطابق شکل (۳) عمودهایی بر محورهای سینوس و کسینوس رسم می‌کنیم، تا بترتیب این محورها را در نقاط H و H' قطع نمایند و نیز از نقطهٔ M به مرکز دایرهٔ مثلثاتی وصل کرده و امتداد می‌دهیم، تا از یک سمت، محورهای تانژانت و کتانژانت را بترتیب در نقاط C و D قطع کند. حال ثابت می‌کنیم: $\cos\alpha = \overline{OH'}$ و $\sin\alpha = \overline{OH}$ و $tg\alpha = \overline{AC}$ و $cotg\alpha = \overline{BD}$.



شکل۳

در صورتی که روابط فوق اثبات شوند، با توجه به توضیحات بالا برای یافتن نسبتهای مثلثاتی یک زاویه، کافی است از انتهای کمان مربوط به آن زاویه، عمودهایی بر محورهای سینوس و کسینوس رسم کرده و اندازهٔ جبری $\overline{OH}$ و $\overline{OH'}$ را بترتیب، سینوس و کسینوس آن زاویه بنامیم و نیز از انتهای کمان به مرکز دایرهٔ مثلثاتی وصل کرده، امتداد دهیم تا محورهای تانژانت و کتانژانت را قطع نماید و اندازهٔ جبری $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ را تانژانت و کتانژانت آن زاویه بنامیم. حال، با توجه به شکل به اثبات روابط فوق می‌پردازیم:

الف) در مثلث قائم‌الزاویهٔ OMH داریم: (OM شعاع دایرهٔ مثلثاتی) $\cos\alpha = \frac{OH}{OM} = \frac{OH}{1} = OH$ ؛ پس $\cos\alpha = OH$، یعنی فاصلهٔ پای عمود تا مرکز دایرهٔ مثلثاتی.

ب) در مثلث قائم‌الزاویه OMH داریم:

$$\sin\alpha = \frac{MH}{\underbrace{OM}_{\text{شعاع دایره مثلثاتی}}} = \frac{MH}{1} \Rightarrow \sin\alpha = MH$$

و چون چهارضلعی $OHMH'$ مستطیل است، پس $MH = OH'$، لذا $\sin\alpha = OH'$ که OH' فاصلهٔ پای عمود بر محور سینوسها تا مرکز دایره مثلثاتی است.

ج) مثلث قائم‌الزاویهٔ OAC را در نظر می‌گیریم، در این مثلث، داریم:

$$tg\alpha = \frac{AC}{\underbrace{OA}_{\text{شعاع دایره مثلثاتی}}} = \frac{AC}{1} = AC$$

پس $tg\alpha = AC$، که AC محل تقاطع امتدادِ انتهای کمان α با محور تانژانتها می‌باشد.

د) در مثلث قائم‌الزاویه ODB بنابر خاصیت خطوط موازی و مورّب، $< D = \alpha$ و داریم:

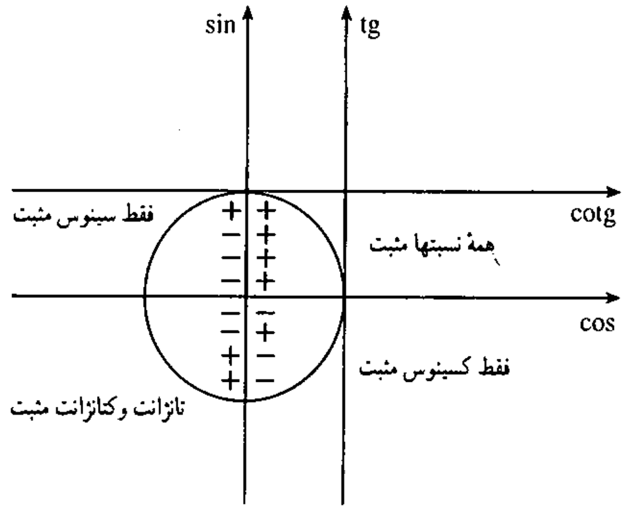
$$cotg\alpha = \frac{BD}{\underbrace{OB}_{\text{شعاع دایره مثلثاتی}}} = \frac{BD}{1} \Rightarrow cotg\alpha = BD$$

که BD محل تقاطع امتدادِ انتهای کمانِ α با محور کتانژانتها می‌باشد.

علامت جبری نسبتهای مثلثاتی در نواحی مختلف دایرهٔ مثلثاتی

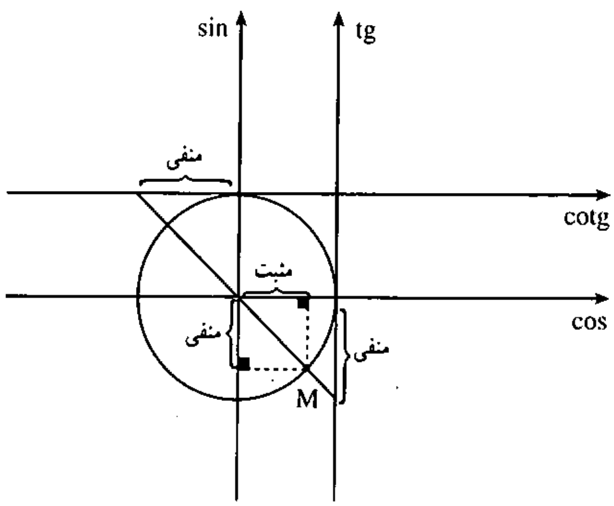
با توجه به تعریف دایرهٔ مثلثاتی، تعریف محورهای نسبتهای مثلثاتی روی این دایره و نحوهٔ محاسبهٔ سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت یک زاویهٔ دلخواه که قبلاً ذکر شد، علامت جبری نسبتهای مثلثاتی روی دایرهٔ مثلثاتی، مطابق شکل (۴) می‌باشد.

تبصره: در حالت کلّی، برای یافتن علامتهای جبری نسبتهای مثلثاتی در هر ناحیه، یک زاویهٔ دلخواه در آن ناحیه در نظر می‌گیریم و انتهای کمان مربوط به آن زاویه را مشخص کرده (مطابق شکل ۵) و از آن نقطه، عمودهایی بر محورهای سینوس و کسینوس رسم می‌کنیم. سمت راست و بالا را مثبت، سمت چپ و پایین را منفی درنظر می‌گیریم، و اگر از انتهای کمانِ زاویهٔ دلخواه، به



شکل۴

مرکز، وصل و امتداد دهیم تا محور کتانژانتها و تانژانتها را قطع کند، بترتیب، مانند محورهای سینوس و کسینوس درنظر می گیریم.



شکل۵

حدود تغییرات نسبتهای مثلثاتی

الف) حدود تغییرات سینوس: با توجه به شکل (۶) تغییرات سینوس را از زاویهٔ صفر درجه تا ۳۶۰° بررسی می کنیم که به قرار زیر است (توجه داریم که شعاع دایرهٔ مثلثاتی ۱ واحد است):

$$\sin ۰ = ۰$$

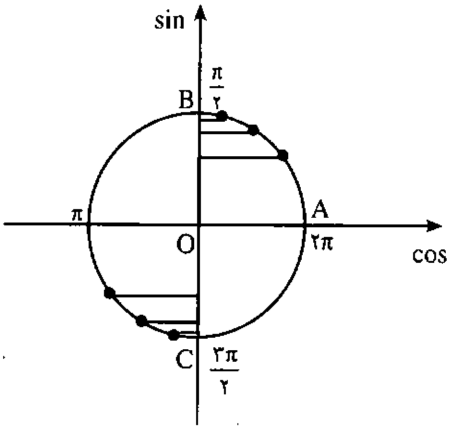
$$\sin\frac{\pi}{۲} = OB = ۱$$

$$\sin\pi = ۰$$

$$\sin\frac{۳\pi}{۲} = OC = -۱$$

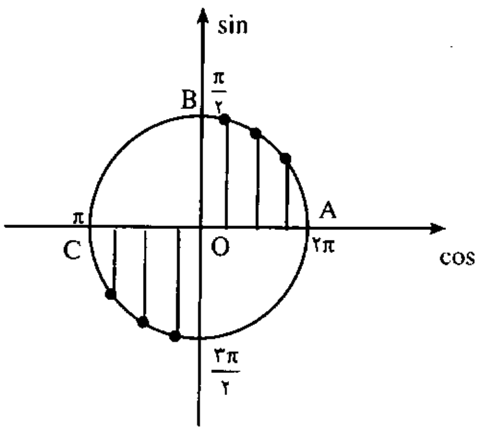
$$\sin ۲\pi = ۰$$

بطور کلّی اگر $۰ \le \alpha \le ۲\pi \Rightarrow -۱ < \sin\alpha \le ۱$



شکل۶

ب) حدود تغییرات کسینوس: با توجه به شکل (۷) تغییرات کسینوس یک زاویه، به ازای تغییر آن زاویه از صفر درجه تا ۳۶۰ درجه، به‌صورت زیر می‌باشد:



شکل۷

$$\cos ۰ = OA = ۱$$

$$\cos\frac{\pi}{۲} = ۰$$

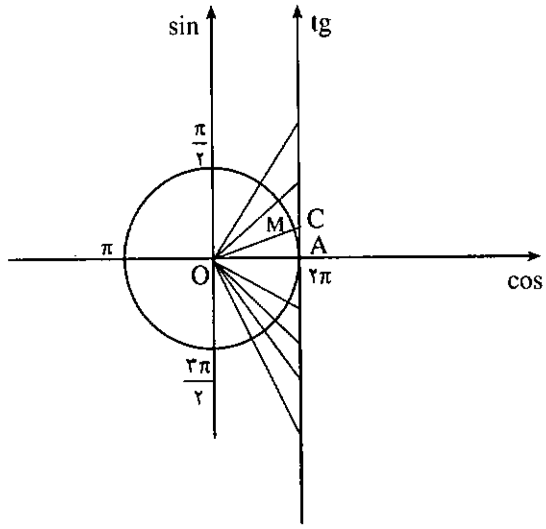
$$\cos\pi = OC = -۱$$

$$\cos\frac{3\pi}{2}=0$$

$$\cos 2\pi = OA = 1$$

پس اگر $0\le\alpha\le 2\pi \Rightarrow -1\le\cos\alpha\le 1$

ج) حدود تغییرات تانژانت: با توجه به شکل (۸) تغییرات تانژانت یک زاویه به ازای تغییرات آن زاویه از صفر تا 360° به‌صورت زیر است : هرگاه زاویه از صفر تا $\frac{\pi}{2}$ تغییر کند، تانژانت



شکل۸

آن زاویه، یعنی مثلاً اندازهٔ AC از صفر به سمت اعداد خیلی بزرگ مثبت تغییر می‌کند، و هرقدر زاویه به $\frac{\pi}{2}$ نزدیکتر می‌شود، مقدار AC بزرگتر خواهد شد و به سمت $+\infty$ نزدیک می‌شود ؛ ولی در نقطهٔ $\frac{\pi}{2}$ چون امتداد OM محور تانژانتها را قطع نمی‌کند، تانژانت تعریف نمی‌شود (با توجه به فرمول $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$، اگر $\cos\alpha=0$، آن گاه تانژانت تعریف نمی‌شود و داریم $\cos\frac{\pi}{2}=0$) و اگر تغییرات زاویه از $\frac{\pi}{2}$ تا π ادامه یابد به محض این که زاویه به مقدار خیلی کم از $\frac{\pi}{2}$ بیشتر شود و در ربع دوم قرار گیرد، مقدار AC از مقادیر خیلی کوچک و منفی (از $-\infty$) به طرف صفر تغییر می‌کند، و نیز در صورت تغییر زاویه از π تا $\frac{3\pi}{2}$، مقادیر AC از صفر تا $+\infty$ تغییر کرده و در خود نقطهٔ $\frac{3\pi}{2}$ تعریف نمی‌شود ($\cos\frac{3\pi}{2}=0$) و اگر زاویه از $\frac{3\pi}{2}$ تا 2π تغییر کند، مقدار AC از $-\infty$ تا صفر تغییر خواهد کرد و به طور کلّی :

اگر $0\le\alpha\le 2\pi\Rightarrow -\infty<\operatorname{tg}\alpha<+\infty$

$$\operatorname{tg}0=0 \quad \text{یا} \quad \operatorname{tg}0=\frac{\sin 0}{\cos 0}=\frac{0}{1}=0$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}=\text{تعریف نشده} \quad \text{یا} \quad \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{0}=\text{تعریف نشده}$$

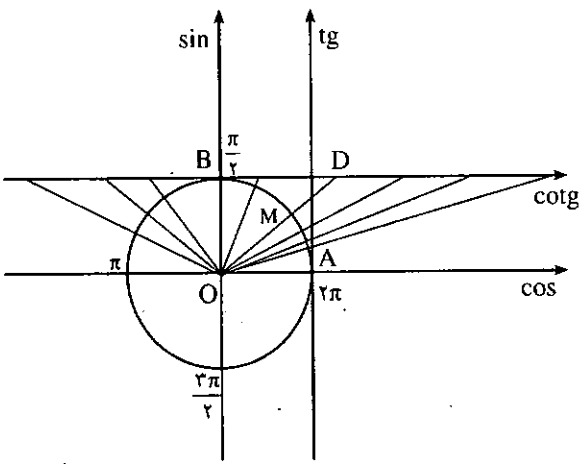
$$\operatorname{tg}\pi=0 \quad \text{یا} \quad \operatorname{tg}\pi=\frac{\sin\pi}{\cos\pi}=\frac{0}{-1}=0$$

$$\operatorname{tg}\frac{3\pi}{2}=\text{تعریف نشده} \quad \text{یا} \quad \operatorname{tg}\frac{3\pi}{2}=\frac{\sin\frac{3\pi}{2}}{\cos\frac{3\pi}{2}}$$

$$=\frac{-1}{0}=\text{تعریف نشده}$$

$$\operatorname{tg}2\pi=0 \quad \text{یا} \quad \operatorname{tg}2\pi=\frac{\sin 2\pi}{\cos 2\pi}=\frac{0}{1}=0$$

د) حدود تغییرات کتانژانت: با توجه به شکل (۹) و مشابه



شکل۹

آنچه در مورد تانژانت ذکر شد، از زاویه از صفر تا $\pi/۲$ تغییر کند، کتانژانت آن زاویه، یعنی :BD از مقادیر خیلی بزرگ $(+\infty)$ به سمت صفر نزدیک خواهد شد، در خود نقطهٔ A یعنی صفر درجه کتانژانت تعریف نمی‌شود ؛ زیرا امتداد OM محور کتانژانتها را قطع نمی‌کند (با توجه به فرمول $\cot g\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ اگر $\sin\alpha = ۰$ ، آن‌گاه کتانژانت تعریف نخواهد شد و توجه داریم، $\sin ۰ = ۰$) و اگر تغییرات زاویه از $\frac{\pi}{۲}$ تا π ادامه یابد، تغییرات کتانژانت زاویه یا تغییرات اندازهٔ BD از صفر تا $-\infty$ خواهد بود و در صورت تغییرات زاویه از π تا $\frac{۳\pi}{۲}$ ، مقدار کتانژانت زاویه از $+\infty$ تا صفر و در صورت تغییر زاویه از $\frac{۳\pi}{۲}$ تا ۲π اندازهٔ کتانژانت زاویه از صفر تا $-\infty$ تغییر خواهد کرد. (در نقاط π و ۲π نیز کتانژانت تعریف نشده است و به‌طور کلّی

اگر $۰ < \alpha < ۲\pi \Rightarrow -\infty < \cot g\alpha < +\infty$

$\cot g\, ۰ = \frac{\cos ۰}{\sin ۰} = \frac{۱}{۰}$ یا تعریف نشده $= \cot g\, ۰$

$\cot g\frac{\pi}{۲} = \frac{\cos\frac{\pi}{۲}}{\sin\frac{\pi}{۲}} = \frac{۰}{۱} = ۰$ یا $\cot g\frac{\pi}{۲} = ۰$

$\cot g\pi = \frac{\cos\pi}{\sin\pi} = \frac{-۱}{۰}$ یا تعریف نشده $= \cot g\pi$

$\cot g\frac{۳\pi}{۲} = \frac{\cos\frac{۳\pi}{۲}}{\sin\frac{۳\pi}{۲}} = \frac{۰}{-۱} = ۰$ یا $\cot g\frac{۳\pi}{۲} = ۰$

$\cot g۲\pi = \frac{\cos ۲\pi}{\sin ۲\pi} = \frac{۱}{۰}$ یا تعریف نشده $= \cot g۲\pi$

مسألهٔ ۱) ثابت کنید : تانژانت و کتانژانت هر زاویه، در هر یک از نواحی دایرهٔ مثلثاتی، همیشه هم علامتند.

می‌دانیم $tg\alpha.\cot g\alpha = ۱$ پس در صورتی می‌تواند حاصل‌ضرب ۲ عدد حقیقی برابر با مقدار مثبتی باشد که علامت آنها یکی باشند ؛ یعنی یا هر دو مثبت یا هر دو منفی باشند.

تبصره: هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشند، خواهیم داشت :

اگر $a \times b < ۰ \Rightarrow$ b,a مختلف‌العلامه‌اند

اگر $a \times b > ۰ \Rightarrow$ b,a متحدالعلامه‌اند

اگر $a \times b = ۰ \Rightarrow a = ۰$ یا $b = ۰$

مسألهٔ ۲) اگر $\sin^۲\alpha \times \cot g\alpha < ۰$ معین کنید : انتهای کمان مربوط به α در کدام ناحیهٔ دایرهٔ مثلثاتی است؟ مسأله را به دو روش حل می‌کنیم :

روش اوّل: چون $\sin^۲\alpha \geq ۰$ پس تأثیری در جهت نامساوی ندارد، لذا برای برقراری نامساوی، می‌بایست $\cot g\alpha < ۰$ و این امکان‌پذیر نیست، مگر در ناحیه دوم و چهارم دایرهٔ مثلثاتی که $\cot g\alpha$ منفی می‌باشد.

روش دوم : $\sin^۲\alpha.\cot g\alpha < ۰ \Rightarrow \sin^۲\alpha.\frac{\cos\alpha}{\cancel{\sin\alpha}} < ۰$

$\Rightarrow \sin\alpha.\cos\alpha < ۰$

بنابراین، می‌بایست $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ علامتهای گوناگون داشته باشند، پس α ، باید زاویه‌ای در ربع دوم دایره مثلثاتی ($\sin\alpha$ مثبت و $\cos\alpha$ منفی) یا در ربع چهارم ($\cos\alpha$ مثبت و $\sin\alpha$ منفی) واقع باشد.

مسألهٔ ۳) اگر $A = \frac{tg\alpha.\cot g^۲\alpha}{(۱-\cos\alpha)} < ۰$ معین کنید : α در کدام ناحیهٔ دایرهٔ مثلثاتی باید واقع باشد. ابتدا کسر فوق را ساده می‌کنیم.

$$A = \frac{\overbrace{tg\alpha.\cot g\alpha}^{۱}.\cot g\alpha}{(۱-\cos\alpha)} < ۰ \Rightarrow A = \frac{\cot g\alpha}{۱-\cos\alpha} < ۰$$

اولاً : با توجه به مخرج کسر $\cos\alpha \neq ۱$ ، پس $\alpha \neq ۲\pi$ و $\alpha \neq ۰$ و ثانیاً : با توجه به حدود تغییرات کسینوس $(-۱ \leq \cos\alpha \leq ۱)$ مخرج کسر فوق، یعنی : $۱ - \cos\alpha$ ، همواره مثبت است، پس علامت کسر فقط به صورت آن بستگی پیدا می‌کند، پس باید $\cot g\alpha < ۰$ باشد و این ممکن نیست جز این‌که α در ناحیهٔ دوم یا چهارم دایرهٔ مثلثاتی واقع باشد.

مسألهٔ ۴) هرگاه $\frac{\pi}{۲} < \alpha < \pi$ و $\cos\alpha = ۲m - ۱$ ، حدود تغییرات m را معین کنید.

طبق فرض داریم $\pi/۲ < \alpha < \pi \Rightarrow -۱ < \cos\alpha < ۰$

$\Rightarrow -۱ < ۲m - ۱ < ۰$

$$\left.\begin{array}{l}\text{الف)}\ 2m-1<0 \Rightarrow 2m<1 \Rightarrow m<\frac{1}{2}\\ \text{ب)}\ 2m-1>-1 \Rightarrow 2m>0 \Rightarrow m>0\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{حدود تغییرات } m} 0<m<\frac{1}{2}$$

مسألهٔ ۵) هرگاه $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ و $\cos 4\alpha=\frac{m-1}{4m+2}$ حدود تغییرات m را معین کنید.

$\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2} \Rightarrow \pi<4\alpha<2\pi \Rightarrow -1<\cos 4\alpha<1$: داریم

$$\Rightarrow -1<\frac{m-1}{4m+2}<1$$

الف) $\frac{m-1}{4m+2}<1 \Rightarrow 1-\frac{m-1}{4m+2}>0$

$$\Rightarrow \frac{4m+2-m+1}{4m+2}>0 \Rightarrow \frac{3m+3}{4m+2}>0 \qquad (1)$$

m	$-\infty$	-1		$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$3m+3$	$-$	0	$+$		$+$
$4m+2$	$-$		$-$	0	$+$
کسر	$+$	0	$-$	تعریف نشده	$+$

با توجه به نامساوی (۱) و جدول فوق برای حالت «الف»،

حدود تغییرات m عبارت است از : $m>-\frac{1}{2}$ یا $m<-1$.

ب) $\frac{m-1}{4m+2}>-1 \Rightarrow \frac{m-1}{4m+2}+1>0$

$$\Rightarrow \frac{m-1+4m+2}{4m+2}>0 \Rightarrow \frac{5m+1}{4m+2}>0 \qquad (2)$$

m	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{5}$	$+\infty$
$5m+1$	$-$		$-$	0	$+$
$4m+2$	$-$	0	$+$		$+$
کسر	$+$	تعریف نشده	$-$		$+$

با توجه به نامساوی (۲) و جدول برای حالت «ب»، حدود تغییرات m عبارت است از : $m>-\frac{1}{5}$ یا $m<-\frac{1}{2}$ که اشتراک جوابهای حالت «الف» و «ب» به قرار زیر است :

$$\left\{m \mid m<-\frac{1}{2}\right\} \cup \left\{m \mid m>-\frac{1}{5}\right\} \longrightarrow \text{حدود تغییرات } m$$

(اگر $m>-\frac{1}{5}$ داریم $m>-\frac{1}{2}$ و اگر $m<-\frac{1}{2}$ داریم $m<-1$)

مسألهٔ ۶) بیشترین و کمترین مقدار عبارت $A=\frac{1-2\sin x}{3}$ را معین کنید.

برای حل این گونه تمرینها که نسبتهای مثلثاتی از درجه ۱ می‌باشند، با توجه به حدود تغییرات نسبت مثلثاتی موجود، بیشترین و کمترین مقدار عبارت را محاسبه می‌کنیم.

کمترین مقدار A اگر $\sin x=1 \Rightarrow A=\frac{1-2}{3}=-\frac{1}{3}$

بیشترین مقدار A ۱ اگر $\sin x=-1 \Rightarrow A=\frac{1+2}{3}=\frac{3}{3}=1$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، در این مسأله، بیشترین مقدار عبارت A به ازای کمترین مقدار sinx یعنی ۱− و کمترین مقدار عبارت A به ازای بیشترین مقدار sinx یعنی ۱ به‌دست آمد.

مسألهٔ ۷) بیشترین و کمترین مقدار عددی عبارت $A=\sin^2 x-2\sin x+5$ را محاسبه کنید.

برای حلّ این مسأله، از تبدیل به مربع کامل استفاده می‌کنیم. لازم به یادآوری است که عبارتهای درجهٔ دوم به شکل x^2+bx+c را با اضافه و کم کردن $(\frac{b^2}{4})$ می‌توان به مربع کامل تبدیل کرد.

$$x^2+bx+c=x^2+ax+\frac{b^2}{4}+c-\frac{b^2}{4}$$

$$=(x+\frac{b}{2})^2+\frac{4c-b^2}{4}$$

داریم : $A=\sin^2 x-2\sin x+5$

$$=\sin^2 x-2\sin x+1+5-1=(\sin x-1)^2+4$$

$$\Rightarrow A=(\sin x-1)^2+4$$

حال، واضح است که اگر مقدار داخل پرانتز، صفر باشد ؛ یعنی : $\sin x=1$ آنگاه عبارت A کمترین مقدار خود را خواهد داشت ؛ یعنی : $\min A=4$ و اگر داخل پرانتز بیشترین مقدار را داشته باشد، A نیز بیشترین مقدار خود را خواهد داشت ؛ یعنی : اگر $\sin x=-1$ ، داریم $\mathrm{Max} A=8$.

مسألهٔ ۸) فقط کمترین مقدار عددی عبارت $A = tg^۲x + ۴tgx - ۵$ را محاسبه کنید.

$$A = tg^۲x + ۴tgx - ۵ = tg^۲x + ۴tgx + ۴ - ۵ - ۴$$
$$= (tgx + ۲)^۲ - ۹$$

اگر داخل پرانتز مخالف صفر باشد (مثبت باشد یا منفی) چون از درجهٔ ۲ است، همواره مثبَت خواهد بود و مقدار عددی A از ۹- بیشتر می‌شود. پس کمترین مقدار عددی A زمانی است که پرانتز صفر باشد؛ یعنی $tgx = -۲$ که در این حالت $\min A = -۹$.

(با توجه به حدود تغییرات تانژانت که از ∞- تا ∞+ می‌باشد، عبارت A دارای بیشترین مقدار یا Max نمی‌باشد. در حقیقت مقدار عددیِ A تا ∞+ پیش می‌رود.)

فرمول اساسی مثلثات و نتیجه‌های حاصل از آن (رابطه‌های تبدیل نسبتهای مثلثاتی به یکدیگر)

با توجه به فرمول اساسیِ مثلثات، یعنی $\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱$ مشاهده کردیم که اگر مثلاً: سینوس زاویه‌ای مشخص باشد، می‌توان کسینوس، تانژانت و کتانژانت آن زاویه را با توجه به ناحیهٔ مثلثاتی که آن زاویه دارد، مشخص کرد.

$$\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱ \Rightarrow \sin^۲\alpha = ۱ - \cos^۲\alpha$$
$$\Rightarrow \sin\alpha = \pm\sqrt{۱ - \cos^۲\alpha}$$
$$\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱ \Rightarrow \cos^۲\alpha = ۱ - \sin^۲\alpha$$
$$\Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{۱ - \sin^۲\alpha}$$

مسألهٔ ۹) اگر $\cos\alpha = \frac{۳}{۵}$ و α زاویه‌ای در ربع چهارم دایرهٔ مثلثاتی باشد، سایر نسبتهای مثلثاتی زاویه α

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{۱ - \cos^۲\alpha} \xrightarrow{\alpha \text{ در ربع چهارم}} \sin\alpha = -\sqrt{۱ - \cos^۲\alpha}$$
$$= -\sqrt{۱ - \frac{۹}{۲۵}} = -\sqrt{\frac{۱۶}{۲۵}} = -\frac{۴}{۵} \Rightarrow \boxed{\sin\alpha = -\frac{۴}{۵}}$$
$$\Rightarrow tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-۴/۵}{۳/۵} = -\frac{۴}{۳} \Rightarrow \boxed{tg\alpha = -\frac{۴}{۳}}$$
$$\text{و داریم } cotg\alpha = \frac{۱}{tg\alpha} \Rightarrow \boxed{cotg\alpha = -\frac{۳}{۴}}$$

حال، اگر تانژانت یا کتانژانت زاویه‌ای معلوم باشد و بخواهیم سایر نسبتهای مثلثاتی آن را محاسبه کنیم، می‌بایست به دنبال روابطی بین تانژانت و کتانژانت با سینوس و کسینوس باشیم، که به‌ترتیب زیر، این روابط را با استفاده از فرمول اساسی مثلثات، محاسبه می کنیم.

رابطه‌های کسینوس برحسب تانژانت و کتانژانت:

$$\text{داریم}: \sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱ \xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم}]{\text{دو طرف را بر } \cos^۲\alpha} \frac{\sin^۲\alpha}{\cos^۲\alpha} + \frac{\cos^۲\alpha}{\cos^۲\alpha}$$
$$= \frac{۱}{\cos^۲\alpha} \Rightarrow tg^۲\alpha + ۱ = \frac{۱}{\cos^۲\alpha}$$
$$\text{۲طرف تساوی معکوس می‌شود} \Rightarrow \cos^۲\alpha = \frac{۱}{۱ + tg^۲\alpha}$$
$$\Rightarrow \boxed{\cos\alpha = \frac{۱}{\pm\sqrt{۱ + tg^۲\alpha}}}$$
$$tg^۲\alpha = \frac{۱}{cotg^۲\alpha} \text{ و داریم } \Rightarrow \cos\alpha = \frac{۱}{\pm\sqrt{۱ + \frac{۱}{cotg^۲\alpha}}}$$
$$= \frac{۱}{\pm\sqrt{\frac{cotg^۲\alpha + ۱}{cotg^۲\alpha}}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{۱}{\pm\frac{\sqrt{۱ + cotg^۲\alpha}}{cotg\ \alpha}}$$
$$\Rightarrow \boxed{\cos\alpha = \frac{cotg\alpha}{\pm\sqrt{۱ + cotg^۲\alpha}}}$$

رابطه‌های سینوس برحسب تانژانت و کتانژانت

$$\text{داریم}: \sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱ \xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم}]{\text{۲ طرف را بر } \sin^۲\alpha} \frac{\sin^۲\alpha}{\sin^۲\alpha} + \frac{\cos^۲\alpha}{\sin^۲\alpha}$$
$$= \frac{۱}{\sin^۲\alpha} \Rightarrow ۱ + cotg^۲\alpha = \frac{۱}{\sin^۲\alpha}$$
$$\text{۲ طرف تساوی معکوس می‌شود} \Rightarrow \sin^۲\alpha = \frac{۱}{۱ + cotg^۲\alpha}$$
$$\Rightarrow \boxed{\sin\alpha = \frac{۱}{\pm\sqrt{۱ + cotg^۲\alpha}}}$$

$$\cot g^{۲}\alpha = \frac{۱}{tg^{۲}\alpha} \text{ و داریم } \Rightarrow \sin\alpha = \frac{۱}{\pm\sqrt{۱+\frac{۱}{tg^{۲}\alpha}}}$$

$$= \frac{۱}{\pm\sqrt{\frac{۱+tg^{۲}\alpha}{tg^{۲}\alpha}}} = \frac{۱}{\pm\frac{\sqrt{۱+tg^{۲}\alpha}}{tg\,\alpha}} = \frac{tg\alpha}{\pm\sqrt{۱+tg^{۲}\alpha}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\pm\sqrt{۱+tg^{۲}\alpha}}}$$

تبصره: لازم به تذکر است، در حلّ مسائل و استفاده از فرمولهای فوق، عملاً می‌توان فقط از دو فرمول $\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱$ و $\cos\alpha=\frac{۱}{\pm\sqrt{۱+tg^{۲}\alpha}}$ استفاده کرد و سایر نسبتهای مثلثاتی مجهول را به‌دست آورد.

مسألهٔ ۱۰) اگر $\cot g\alpha = \frac{۴}{۵}$ و α زاویه‌ای در ربع سوم دایرهٔ مثلثاتی باشد، سایر نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ α را محاسبه کنید.

$$\cot g\alpha = \frac{۴}{۵} \xrightarrow{tg\alpha=\frac{۱}{\cot g\alpha}} tg\alpha = \frac{۱}{\frac{۴}{۵}} \Rightarrow \boxed{tg\alpha = \frac{۵}{۴}}$$

$$\text{و داریم } \cos\alpha = \frac{۱}{\pm\sqrt{۱+tg^{۲}\alpha}} \xRightarrow{\alpha \text{ در ربع سوم}}$$

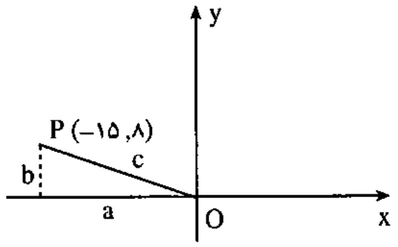
$$\cos\alpha = \frac{۱}{-\sqrt{۱+tg^{۲}\alpha}} = \frac{۱}{-\sqrt{۱+\frac{۲۵}{۱۶}}} = \frac{۱}{-\sqrt{\frac{۴۱}{۱۶}}} = \frac{۴}{-\sqrt{۴۱}}$$

$$\text{گویا می‌کنیم } \Rightarrow \boxed{\cos\alpha = \frac{-۴\sqrt{۴۱}}{۴۱}}$$

$$\text{و داریم } tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{۵}{۴} = \frac{\sin\alpha}{-\frac{۴\sqrt{۴۱}}{۴۱}}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{-۲۰\sqrt{۴۱}}{۴\times۴۱} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{-۵\sqrt{۴۱}}{۴۱}$$

مسألهٔ ۱۱) در صفحهٔ مختصات دکارتی، اگر $P\Big|^{-۱۵}_{۸}$ و O مبدأ مختصات باشد و زاویه ای را که OP با محور x ها می سازد (زاویهٔ حاده) θ بنامیم، مطلوب است محاسبهٔ کلیهٔ نسبتهای مثلثاتی زاویه θ.



شکل۱۰

$$c = \overline{OP} = \sqrt{(-۱۵)^{۲}+۸^{۲}} = \sqrt{۲۲۵+۶۴} = \sqrt{۲۸۹} = ۱۷$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin\theta = \frac{۸}{۱۷} & \cot g\theta = -\frac{۱۵}{۸} \\ \cos\theta = -\frac{۱۵}{۱۷} & \sec\theta = -\frac{۱۷}{۱۵} \\ tg\theta = -\frac{۸}{۱۵} & \operatorname{cosec}\theta = \frac{۱۷}{۱۸} \end{cases}$$

مسألهٔ ۱۲) اگر زاویه‌ای را که خط $y = ۳x$ با محور xها می‌سازد، θ بنامیم، بدون استفاده از رابطه‌های تبدیل نسبتهای مثلثاتی به یکدیگر، همهٔ نسبتهای مثلثاتی θ را بیابید.

ابتدا خط $y = ۳x$ را رسم می‌کنیم. برای رسم خط، به ۲ نقطهٔ آن نیازمندیم، که واضح است یک نقطهٔ آن $O\Big|$ ونقطهٔ دیگر را قرار دهیم $x = ۱$، خواهیم داشت $y = ۳$، پس $P\Big|^{۱}_{۳}$. حال، با توجه به این دو نقطه، خط را رسم می کنیم (شکل ۱۱).

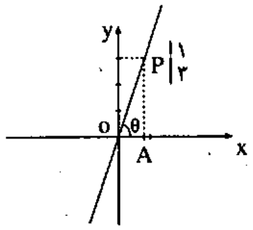
$$\overline{OP} = \sqrt{(۱)^{۲}+(۳)^{۲}} = \sqrt{۱۰} \Rightarrow \overline{OP} = \sqrt{۱۰}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAP داریم :

$$\sin\theta = \frac{۳}{\sqrt{۱۰}} = \frac{۳\sqrt{۱۰}}{۱۰} \qquad \cos\theta = \frac{۱}{\sqrt{۱۰}} = \frac{\sqrt{۱۰}}{۱۰}$$

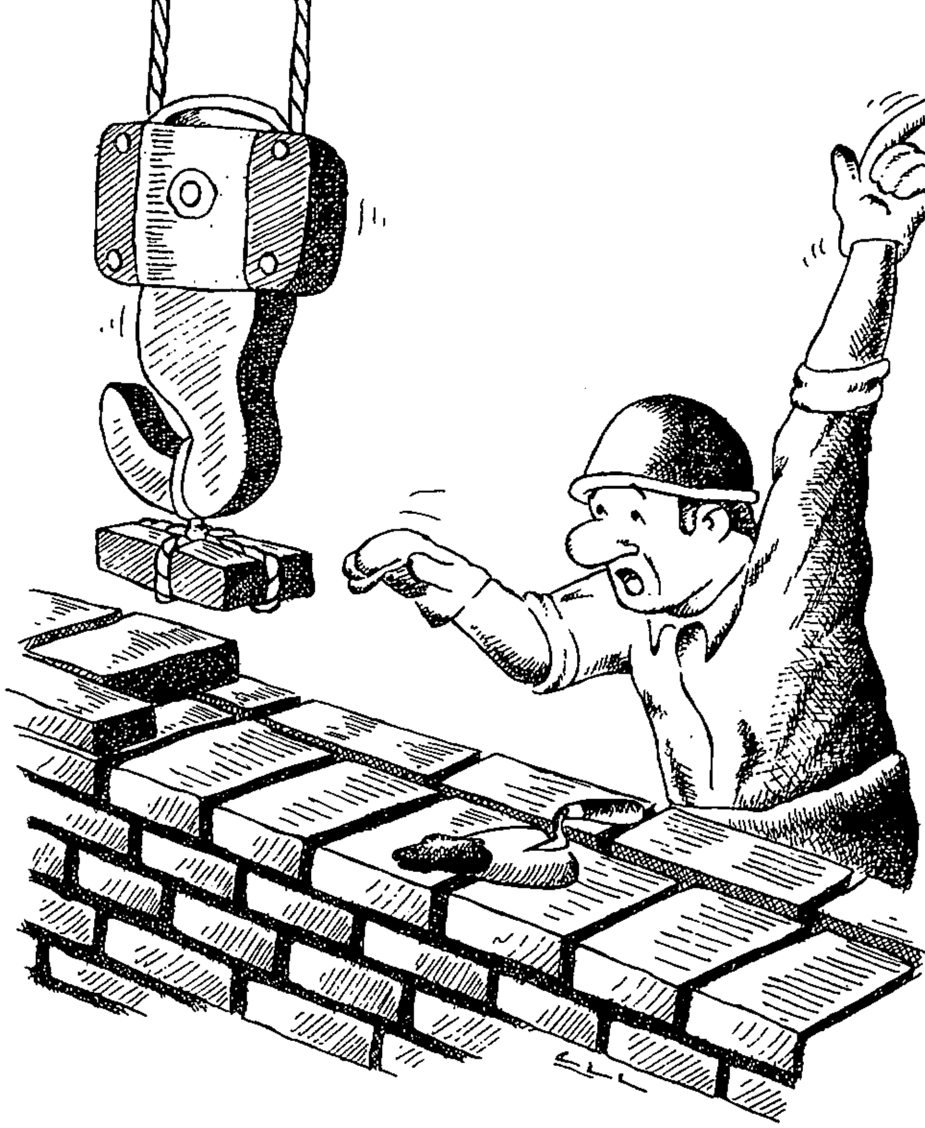
$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{۱}{\sin\theta} = \frac{\sqrt{۱۰}}{۳} \qquad \sec\theta = \frac{۱}{\cos\theta} = \sqrt{۱۰}$$

$$tg\theta = \frac{۳}{۱} = ۳ \qquad \cot g\theta = \frac{۱}{۳}$$



شکل۱۱

گشت و گذارها در ریاضیات معاصر



تهیه و تنظیم: غلامرضا یاسی پور

نظریهٔ مجموعه ها

نظریهٔ مجموعه ها، سنگ اساس بنای ریاضیات جدید است. تعریفهای دقیق جمیع مفاهیم ریاضی، مبتنی برنظریهٔ مجموعه هاست. گذشته از این روشهای استنتاج ریاضی، با استفاده از ترکیبی از استدلالهای منطقی و مجموعه ـ نظری تنظیم شده اند. مختصر بگوییم ؛ زبان نظریهٔ مجموعه ها، زبان مشترکی است که ریاضیدانان سراسر دنیا با آن صحبت کرده و آن را درک می کنند.

از مطالب فوق، چنین برمی آید که، اگر کسی بخواهد پیشرفتی در ریاضیات عالی یا کاربردهای عملی آن داشته باشد، باید با مفاهیم اساسی و نتایج نظریهٔ مجموعه ها و زبانی که در آن بیان شده اند، آشنا شود.

تعریف مجموعه، که در زیر ذکر شده است، این تصور را می دهد که درک مفهوم عامیانهٔ مجموعه، به علت وضوح ظاهری آن، آسان است ؛ اما در واقع، این تعریف در عمل، به مشکلات بسیاری می انجامد، که تنها با استفاده از دستاورد دستگاه های اصل موضوعی بر آنها فائق آمده اند.

زمانی که «**جورج کانتور**» Georg Cantor (۱۸۴۵ـ ۱۹۱۸)، مؤسّس نظریهٔ مجموعه ها، مفاهیم و استدلالهای جدید و متهورانهٔ خود را منتشر کرد، اهمیت آنها تنها توسط تعداد کمی از ریاضیدانان درک شد ؛ اما این نظریه درتوسعهٔ بعدی اش، تقریباً در تمام شاخه های ریاضیات نفوذ کرد و تأثیری عمیق بر گسترش آنها داشت ؛ به طوری که حتی باعث تغییر نظریه های تثبیت شده گردید. در واقع، توسعهٔ بعضی از نظامهای ریاضی، از قبیل توپولوژی، اساساً به ابزار نظریهٔ مجموعه ها وابسته است. از اینها مهمتر، نظریهٔ مجموعه ها نیرویی متحدکننده به دست داد که به تمام شاخه های ریاضیات مبنایی مشترک و مفاهیم آنها، وضوح و دقّتی تازه بخشیده است.

مفهوم مجموعه

عبارت «مجموعه» در کاربرد محاوره‌ای، معمولاً به معنای دسته‌ای از اشیا درنظر گرفته شده است که به مفهومی وابسته به یکدیگر یا شبیه هم باشند. دقیق ساختن جنبهٔ اخیر، مشکل است و بنابراین از مفهوم ریاضی حذف می‌شود.

تعریف «کانتور» از مجموعه : یک مجموعه، نتیجهٔ جمع‌آوری اشیای خوش تشخیصی "well-determined" از برداشت یا تصورمان در یک کلّ منفرد است ؛ این اشیا را عنصرهای آن مجموعه می‌نامیم.

این تعریف، به رغم فقدان دقّتش که در عمل به تناقضهایی منتهی می‌شود، برای معرفی چندین تعریف و مفهوم مهم کفایت می‌کند.

اگر شیء a عنصری از مجموعهٔ S باشد، می‌نویسیم $a \in S$ (می‌خوانیم «a متعلق است به S» یا «S شامل a است».) در صورتی که a عنصری از S نباشد، می‌نویسیم $a \notin S$. اگر S مجموعهٔ عناصر a، b، c، ... باشد، می‌نویسیم : $S = \{a, b, c, ...\}$، به عنوان مثال، $\{۱, ۲, ۳, ...\}$ مجموعهٔ اعداد طبیعی مثبت است. اگر S تنها شامل یک عنصر a باشد، آن‌گاه S را ***تک‌عنصری*** "singleton" می‌نامیم، $S = \{a\}$. اگر S شامل دو عنصر متمایز a و b باشد، آن‌گاه S را جفت نامرتّب "unordered pair" می‌نامیم، $S = \{a, b\}$.

زیرمجموعه

T، **زیرمجموعهٔ** "Subset" هر مجموعهٔ S، هر مجموعه‌ای است که جمیع عناصرش متعلق به S باشند ؛ این موضوع را با $T \subseteq S$ نمایش می‌دهیم. زیرمجموعه‌های Tای از S که با خود S متمایزند، به **زیرمجموعه‌های سره** "proper subsets" S موسومند ؛ در این حالت می‌نویسیم $T \subset S$. مجموعهٔ تهی "empty set" مجموعه‌ای است که اصلاً عنصری ندارد. معرفی این مجموعه برای گردکردن "to round off" گزاره‌ها و استدلالهای نظریهٔ مجموعه‌ها مناسب به‌نظر رسیده است ؛ درست همان‌طور که عدد ۰ (از لحاظ تاریخی اختراعی جدید) گزاره‌ها و محاسبه‌های حساب را گرد می‌کند. نماد معمول مجموعهٔ تهی $\varnothing$ است.

مجموعه‌هایی که عنصرهای آنها خود مجموعه‌اند، به **خانواده** "family" یا **دستگاه** "system" موسومند. به عنوان مثال، یک قوم یا ملت، مجموعه‌ای از اشخاص است و خود عنصری از خانوادهٔ اقوام یا ملتهاست. یکی از دستگاه‌های بسیارمهم، مجموعهٔ جمیع زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ S است ؛ این دستگاه به **مجموعهٔ توانی** "power set" موسوم است و با $p(S)$ نمایش داده می‌شود.

چهار اصل اساسی مشترک دستگاه‌های اصل موضوعی نظریهٔ مجموعه‌ها $\{x \in N \mid x = y^۲$ ، به ازای هر $y \in N\}$

جمیع دستگاه‌های اصل موضوعی نظریهٔ مجموعه‌ها، که در نیمهٔ اوّل این قرن (قرن بیستم میلادی) توسعه یافتند، چهار اصل اساسی مشترک دارند : اصلهای توسیع‌پذیری "principles of extensionality" اصل ساخت مجموعه‌ای "principle set constructions"، وجود مجموعه‌های نامتناهی، "existence of infinite sets" و اصل موضوع انتخاب "axiom of choice".

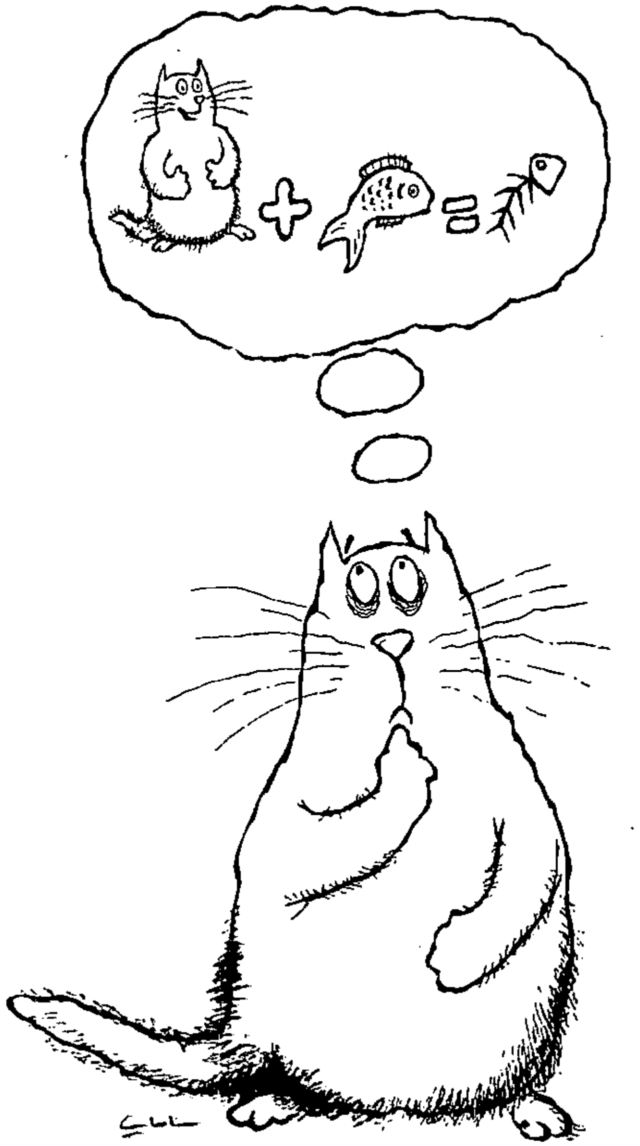
اصل **توسیع‌پذیری** بر این است که دو مجموعهٔ S و Tی دارای عنصرهای یکسان (یعنی، دو مجموعه‌ای که با یک توسیع باشند) همانندند $(S = T)$. کلمهٔ همانند "identical" را در این‌جا به مفهوم **لایب نیتز** "leibniz" گرفته‌ایم ؛ یعنی در هر گزاره می‌توان T را به جای S قرار داد بی‌آن‌که صدق (راست بودن) یا کذب (دروغ بودن) گزاره تغییر کند.

اصل **ساخت** بر این است که انواع محدود خاصی از گزاره‌ها مجموعه‌ها را تعریف می‌کنند ؛ یکی از محدودیتهای معمول این است که گزاره تنها شامل نمادهای شیئی "object symbols"، نمادهای منطقی "logical symbols" و نماد $\in$ است.

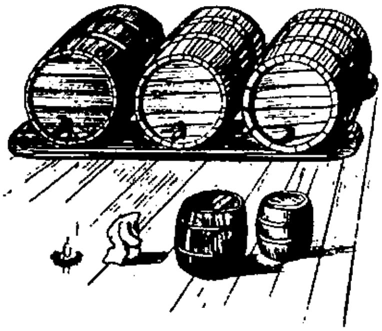
وجود مجموعه‌های نامتناهی بیانگر همین مطلب است. البته معنای نامتناهی را باید دقیق کنیم. مشکل است که این اصل با استفاده از ارجاع مستقیم علت و انگیزه موضوعی شود ؛ اما بدون آن قسمت اعظم ریاضیات وعلوم نظری "theoretical science" از قبیل حساب دیفرانسیل و انتگرال و مکانیک کلاسیک، بی‌معنا خواهد شد. بی‌آن حتی نمی‌توان اساس مجموعه نظری نظریهٔ اعداد طبیعی را به‌دست داد.

سرانجام، **اصل موضوع انتخاب** است که پایهٔ بسیاری از استدلالهای ریاضی است. با وجود این، بسیاری از مؤلفان به این اصل موضوع با تردیدی می‌نگرند؛ مشابه موردی که اصل موضوع موازیهای اقلیدس در دوران اولّیه با آن برخورد داشت.

اصل انتخاب: اگر S دستگاهی از مجموعه‌های ناتهی باشد، آن‌گاه مجموعهٔ Aای موجود است که به‌طور دقیق یک عنصر مشترک با هر مجموعهٔ S از S دارد.



تفریح اندیشه ۲



فروشنده‌ای سه ظرف، هر یک به گنجایش ۱۰۰ لیتر، و دو ظرف دیگر به گنجایش ۵۰ لیتر و ۲۵ لیتر در اختیار دارد.

سه ظرف اول پر هستند، اولی حاوی شیر پر چربی، دومی پر از شیر معمولی و سومی مملو از شیر کم چربی است. دو ظرف دیگر خالی می‌باشند. فروشنده برای اینکه سه نوع شیر مخلوط با نسبتهای مشخص در سه ظرف ۱۰۰ لیتری داشته باشد، فقط از ۵ ظرف بالا استفاده می‌کند. پس از انجام ۶ عمل ظرفهای ۱۰۰ لیتری همگی پر از شیر مخلوط با نسبتهای زیر می‌باشند:

اولی حاوی $\frac{1}{2}$ شیر پرچربی، $\frac{1}{4}$ شیر معمولی و $\frac{1}{4}$ شیر کم‌چربی

دومی حاوی $\frac{1}{2}$ شیر معمولی، $\frac{1}{4}$ شیر پرچربی، $\frac{1}{4}$ شیر کم‌چربی

سومی حاوی $\frac{1}{2}$ شیر کم‌چربی، $\frac{1}{4}$ شیر پرچربی، $\frac{1}{4}$ شیر معمولی.

فروشنده چگونه عمل کرده است؟

● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمه سیمین‌دخت ترکیور

جواب در صفحهٔ ۸۸

● محمدهاشم رستمی

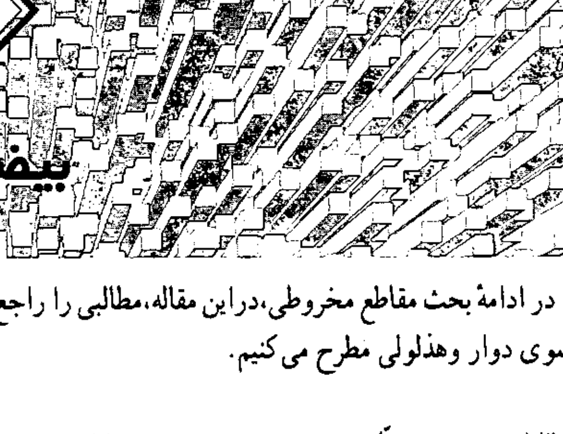
مکان هندسی

(قسمت نوزدهم)

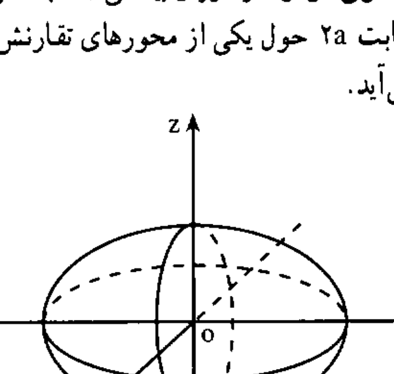
بیضوی دوّار

در ادامهٔ بحث مقاطع مخروطی، دراین مقاله، مطالبی را راجع به بیضوی دوار وهذلولی مطرح می‌کنیم.

۱۳. بیضوی دوّار. از دوران بیضی (E) به کانونهای F و F′ و عدد ثابت ۲a حول یکی از محورهای تقارنش، بیضوی دوّار پدید می‌آید.



معادلهٔ بیضوی دوّار. بیضی به معادلهٔ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ واقع در صفحهٔ xOy از دستگاه مختصات O − xyz را در نظر



می‌گیریم. از دوران این بیضی حول محور xها یک بیضوی دوّار پدید می‌آید. برای تعیین معادلهٔ این بیضوی دوّار، بیضی (E) به

معادلهٔ $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}$ را یک نصف‌النهار از آن در نظر می‌گیریم.

معادلهٔ یک مدار دلخواه از این بیضوی دوّار چنین است :

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=m\\ x=n\end{cases}$$

اکنون بین ۴ معادلهٔ دستگاه زیر x، y و z را حذف می‌کنیم.

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\\ x^2+y^2+z^2=m\\ x=n\end{cases}$$

$$\Rightarrow n^2+y^2+0=m\Rightarrow y^2=m-n^2$$

$$\Rightarrow \frac{n^2}{a^2}+\frac{m-n^2}{b^2}=1$$

اکنون به جای m و n مقدار می‌گذاریم تا معادلهٔ بیضوی دوّار به دست آید. داریم :

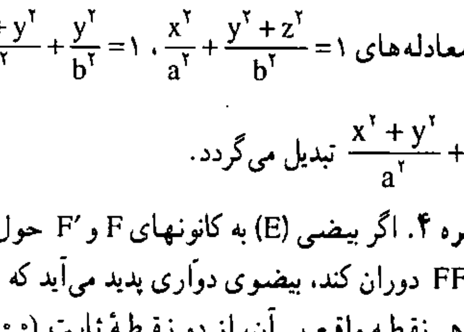
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^2+y^2+z^2-x^2}{b^2}=1\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$$

تبصره ۱. اگر بیضی (E) به معادلهٔ $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}$ را حول محور yها دوران دهیم، بیضوی به معادلهٔ $\frac{x^2+z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ به‌دست می‌آید.

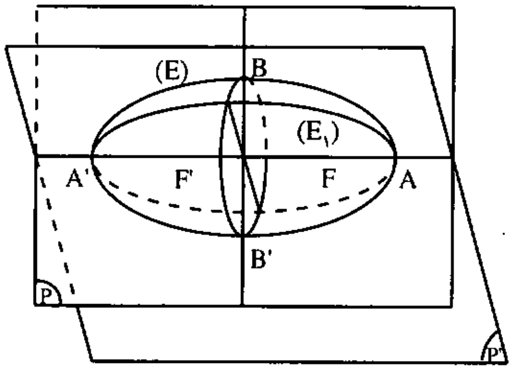
تبصره ۲. از دوران بیضی به معادلهٔ $\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1\right.$ حول محور zها بیضوی دوّار به معادلهٔ $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$ به‌دست می‌آید.

تبصره ۳. هرگاه در بیضوی به معادلهٔ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$، $b=c$ ، $c=a$ یا $a=b$ باشد، بیضوی بترتیب، به بیضویهای دوّار به معادله‌های $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$ ، $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ و $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ تبدیل می‌گردد.

تبصره ۴. اگر بیضی (E) به کانونهای F و F′ حول محور کانونی FF′ دوران کند، بیضوی دوّاری پدید می‌آید که مجموع فاصلهٔ هر نقطه واقع بر آن، از دو نقطهٔ ثابت $F(f,0,0)$ و $F'(-f,0,0)$ ، برابر مقدار ثابت ۲a است.

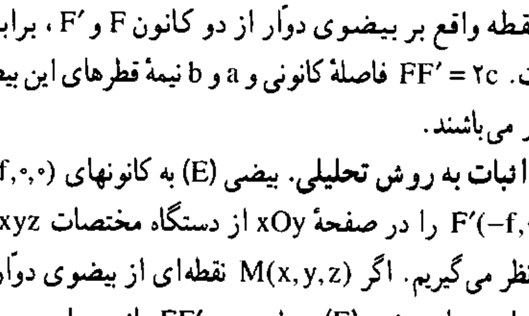


اثبات به روش هندسی: صفحه‌ای را که بیضی در آن قرار دارد، P می‌نامیم و این صفحه را حول محور کانونی FF′ دوران می‌دهیم. اگر یک موقعیت جدید صفحهٔ P را P_1 و موقعیت بیضی (E) در صفحهٔ P_1 را (E_1) بنامیم، مجموع فاصلهٔ هر نقطه واقع بر بیضی (E_1) از دو نقطهٔ ثابت F و F′ ، برابر ۲a است؛



زیرا بیضی (E_1) همان بیضی (E) به کانونهای F و F′ و عدد ثابت ۲a است. بنابراین، در هر موقعیتی از دوران، مجموع فاصله‌های هر نقطه واقع بر بیضوی دوّار از دو کانون F و F′ ، برابر ۲a است. $FF'=2c$ فاصلهٔ کانونی و a و b نیمهٔ قطرهای این بیضوی دوّار می‌باشند.

اثبات به روش تحلیلی. بیضی (E) به کانونهای $F(f,0,0)$ و $F'(-f,0,0)$ را در صفحهٔ xOy از دستگاه مختصات $O-xyz$ در نظر می‌گیریم. اگر $M(x,y,z)$ نقطه‌ای از بیضوی دوّار پدید آمده از دوران بیضی (E) حول محور FF′ باشد، داریم :



$$MF+MF'=2a\ ,\ \ MF=\sqrt{(x-f)^2+y^2+z^2}\ ,$$

$$MF'=\sqrt{(x+f)^2+y^2+z^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-f)^2+y^2+z^2}+\sqrt{(x+f)^2+y^2+z^2}=2a$$

این معادله را گویا می‌کنیم :

$$\sqrt{(x-f)^2+y^2+z^2}=2a-\sqrt{(x+f)^2+y^2+z^2}$$

$$\Rightarrow (x-f)^2+y^2+z^2 =$$
$$4a^2+(x-f)^2+y^2+z^2-4a\sqrt{(x+f)^2+y^2+z^2}$$
$$\Rightarrow -4fx-4a^2=-4a\sqrt{(x+f)^2+y^2+z^2}$$
$$\Rightarrow \frac{f.x}{a}+a=\sqrt{(x+f)^2+y^2+z^2}$$
$$\Rightarrow \frac{f^2.x^2}{a^2}+a^2+2fx=x^2+f^2+2fx+y^2+z^2$$
$$\Rightarrow (a^2-f^2)x^2+a^2(y^2+z^2)=a^2(a^2-f^2),$$
$$a^2-f^2=b^2$$
$$\Rightarrow b^2x^2+a^2(y^2+z^2)=a^2b^2$$
$$\Rightarrow \frac{b^2x^2}{a^2b^2}+\frac{a^2(y^2+z^2)}{a^2b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$
$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$$

بنابراین می‌توان گفت مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که مجموع فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت $F(f,0,0)$ و $F'(-f,0,0)$، مقدار ثابت $2a$ است. بیضوی دوّار به معادلهٔ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$ است که $b^2=a^2-f^2$ است.

مثال ۱. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را بیابید که مجموع فاصله‌اش از دو نقطهٔ $F(4,0,0)$ و $F'(-4,0,0)$، برابر ۱۰ باشد.

حل. این مکان هندسی بیضوی دوّاری است که F و F' کانونها و ۱۰، عدد ثابت آن است. بنابراین داریم:

$$FF'=2f=|x_F-x_{F'}|=|4-(-4)|=8\Rightarrow f=4$$
$$2a=10\Rightarrow a=5\Rightarrow b=\sqrt{a^2-f^2}=\sqrt{25-16}=3$$
$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1\Rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2+z^2}{9}=1$$

مثال ۲. روی خط $\Delta: \frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{4}$ نقطه‌ای تعیین کنید که مجموع فاصله‌اش از دو نقطهٔ $F(0,5,0)$ و $F'(0,-5,0)$ برابر ۲۶ باشد.

حل. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که مجموع فاصله‌اش از دو نقطهٔ داده شدهٔ F و F'، برابر عدد ثابت ۲۶ است، یک بیضوی دوّار به معادلهٔ $\frac{x^2+z^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ است. امّا:

$$2a=26\Rightarrow a=13,$$
$$FF'=2f=|y_F-y_{F'}|=|5-(-5)|=10$$
$$\Rightarrow f=5\Rightarrow b=\sqrt{a^2-f^2}=\sqrt{169-25}=12$$
$$\Rightarrow \frac{x^2+z^2}{144}+\frac{y^2}{169}=1 \quad \text{معادلهٔ بیضوی}$$

اکنون نقطه‌های برخورد خط D و این بیضوی دوّار را که جوابهای مسأله هستند، تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases}\frac{x^2+z^2}{144}+\frac{y^2}{169}=1\\ \frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{4}=t\Rightarrow x=2t\ ,\ \ y=3t\ ,\ \ z=4t+1\end{cases}$$

$$\frac{4t^2+(4t+1)^2}{144}+\frac{9t^2}{169}=1$$
$$\Rightarrow \frac{20t^2+8t+1}{144}+\frac{9t^2}{169}=1$$
$$4676t^2+1352t-24167=0\Rightarrow\ t_1=\dots,t_2=\dots$$

این معادله دو جواب دارد؛ بنابراین دو نقطه، جواب مسأله است.

مثال ۳. معادلهٔ فصل مشترک بیضوی دوّار به معادلهٔ $\frac{x^2+y^2}{25}+\frac{z^2}{16}=1$ با صفحه‌های: الف. $x=3$؛ ب. $y=-2$؛ ج. $z=2$ به‌دست آورید.

حل. الف.

$$\begin{cases}\frac{x^2+y^2}{25}+\frac{z^2}{16}=1\\ x=3\end{cases}\Rightarrow \frac{9+y^2}{25}+\frac{z^2}{16}=1$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{16}=1-\frac{9}{25}\Rightarrow \frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{16}=\frac{16}{25}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{\frac{256}{25}}=1\\ x=3\end{cases}$$

فصل مشترک یک بیضی است.

ب.

$$\begin{cases}\dfrac{x^۲+y^۲}{۲۵}+\dfrac{z^۲}{۱۶}=۱ \\ y=-۲\end{cases} \Rightarrow \frac{x^۲+۴}{۲۵}+\frac{z^۲}{۱۶}=۱$$

$$\Rightarrow \frac{x^۲}{۲۵}+\frac{z^۲}{۱۶}=۱-\frac{۴}{۲۵}=\frac{۲۱}{۲۵}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\dfrac{x^۲}{۲۱}+\dfrac{y^۲}{\frac{۳۳۶}{۲۵}}=۱ \\ y=-۲\end{cases}$$

فصل مشترک یک بیضی است.

پ.

$$\begin{cases}\dfrac{x^۲+y^۲}{۲۵}+\dfrac{z^۲}{۱۶}=۱ \\ z=۲\end{cases} \Rightarrow \frac{x^۲+y^۲}{۲۵}+\frac{۴}{۱۶}=۱$$

$$\Rightarrow \frac{x^۲+y^۲}{۲۵}=\frac{۳}{۴} \Rightarrow x^۲+y^۲=\frac{۷۵}{۴}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x^۲+y^۲=\dfrac{۷۵}{۴} \\ z=۲\end{cases}$$

این فصل مشترک، یک دایره است.

نکته. فصل مشترک این بیضوی دوّار :

الف. با هر صفحهٔ $x=k_۱$ $(-۵<k_۱<۵)$ یک بیضی است.

ب. با هر صفحهٔ $y=k_۲$ $(-۵<k_۲<۵)$ یک بیضی است.

پ. با هر صفحهٔ $z=k_۳$ $(-۴<k_۳<۴)$ یک دایره است.

ت. با هر یک از صفحه‌های $x=۵$ ، $x=-۵$ ، $y=۵$ ، $y=-۵$ ، $z=۴$ و $z=-۴$ یک نقطه است.

مثال ۴. مختصات مرکز و نیمه قطرهای بیضوی دوّار به معادلهٔ $x^۲+۱۶y^۲+z^۲-۴x+۳۲y-۵=۰$ را تعیین کنید.

حل. داریم :

$$x^۲-۴x+۱۶(y^۲+۲y)+z^۲-۵=۰$$

$$\Rightarrow (x-۲)^۲-۴+۱۶\left[(y+۱)^۲-۱\right]+z^۲-۵=۰$$

$$(x-۲)^۲+۱۶(y+۱)^۲+z^۲=۲۵$$

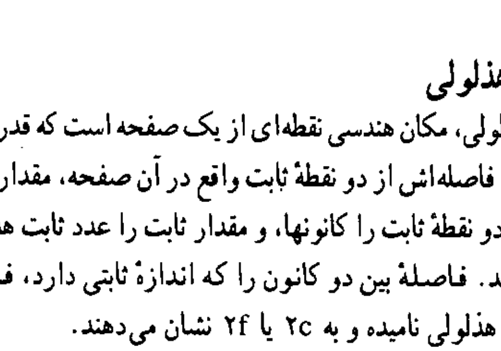
$$\Rightarrow \frac{(x-۲)^۲}{۲۵}+\frac{(y+۱)^۲}{\frac{۲۵}{۱۶}}+\frac{z^۲}{۲۵}=۱$$

$$\Rightarrow a^۲=c^۲=۲۵ \Rightarrow a=c=۵ \,,$$

$b^۲=\frac{۲۵}{۱۶} \Rightarrow b=\frac{۵}{۴}$ ، $O'(۲,-۱,۰)$ مرکز تقارن

۱۴. هذلولی

هذلولی، مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه است که قدرمطلق تفاضل فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت واقع در آن صفحه، مقدار ثابتی باشد. دو نقطهٔ ثابت را کانونها، و مقدار ثابت را عدد ثابت هذلولی می‌نامند. فاصلهٔ بین دو کانون را که اندازهٔ ثابتی دارد، فاصلهٔ کانونی هذلولی نامیده و به $۲c$ یا $۲f$ نشان می‌دهند.



اگر M نقطه‌ای متعلق به هذلولی به کانونهای F و 'F و عدد ثابت $۲a$ باشد، $|MF'-MF|=۲a$ یا $MF'-MF=\pm ۲a$ است. MF و 'MF شعاع حاملهای نقطهٔ M نامیده می‌شوند.

هذلولی دو شاخهٔ متمایز دارد که یکی را شاخهٔ کانون F و دیگری را شاخهٔ کانون 'F می‌نامند.

تعریف هذلولی، نشان می‌دهد که هذلولی دارای نقطهٔ بی‌نهایت دور است.

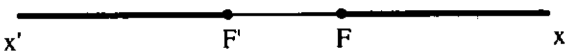
خروج از مرکز هذلولی. اگر M نقطه‌ای دلخواه از هذلولی به کانونهای F و 'F و عدد ثابت $۲a$ باشد، داریم :

$$FF'>|MF'-MF| \Rightarrow ۲c>۲a \Rightarrow c>a \Rightarrow \frac{c}{a}>۱$$

$\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز هذلولی نامیده و به e نمایش می‌دهند ؛

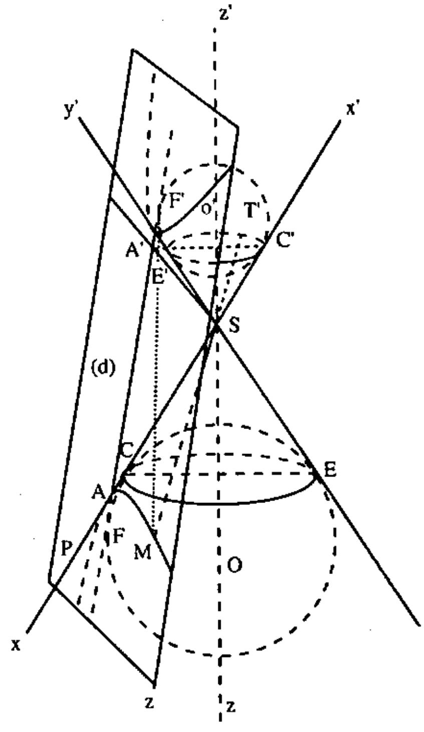
$e=\frac{c}{a}>1$. خروج از مرکز هذلولی، همواره از ۱ بزرگتر است.

در صورتی که $e=1$ باشد، $\frac{c}{a}=1$ یا $c=a$ یا $2c=2a$ خواهد بود. در این صورت، هذلولی به دو نیمخط Fx و F'x' از خط راست FF' تبدیل می‌شود (شکل).

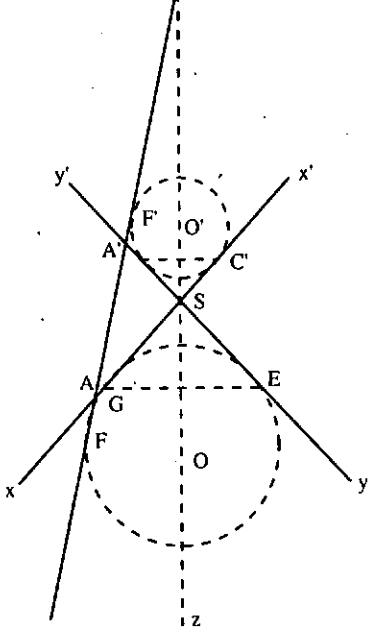


قضیهٔ داندلن. اگر صفحهٔ P، مولدهای سطح مخروطی دوار به رأس S، مولد Δ و محور D را در دو طرف رأس قطع کند، فصل مشترک یک هذلولی است.

اثبات به روش هندسی. صفحهٔ Q را چنان بر محور سطح مخروطی دوار مرور می‌دهیم که بر صفحهٔ P عمود باشد و آن را صفحهٔ شکل می‌نامیم. آن‌گاه سطح مخروطی دوار و صفحهٔ P را



بر صفحهٔ شکل تصویر می‌کنیم. تصویر صفحهٔ P بر صفحهٔ شکل و مقطع آن با صفحهٔ مذکور، خط d و تصویر سطح مخروطی دوار بر صفحهٔ شکل و فصل مشترکش با آن صفحه، زاویهٔ xSy و زاویهٔ متقابل آن x'Sy' می‌باشد.



چون صفحهٔ P سطح مخروطی دوار را در دو طرف رأس S قطع کرده است، خط d ضلع Sx را در نقطهٔ A، و Sy' امتداد ضلع Sy را در نقطهٔ A' قطع می‌کند. دو دایره رسم می‌کنیم که بر خط d در نقطه‌های F و F' بر ضلعهای زاویهٔ xSy و امتداد آنها، در نقطه‌های G ،E و E'، G' مماس شوند. از دوران این دو دایره حول محور Sz، دو کره به‌وجود می‌آید که در نقطه‌های F و F' بر صفحهٔ قاطع و در طول دو دایره به قطرهای EG و E'G' بر سطح مخروطی دوار مماسند. در مثلث ASA' داریم:

$AF=AG=A'F'=A'E'$

اگر M یکی از نقطه‌های مقطع و T و T' نقطه‌های برخورد مولد SM با دو دایرهٔ تماس باشند، $MF=MT$ ؛ زیرا هر دو مماسهایی هستند که از M بر کرهٔ (O) رسم شده‌اند و $MF'=MT'$ ، به دلیل آن که هر دو مماسهایی هستند که از M بر کرهٔ (O') رسم شده‌اند ؛ پس:

$MF'-MF=MT'-MT=TT'=GG'=$

$AG'-AG=AF'-AF=AF'-A'F'=AA'$

و با فرض $AA'=2a$ ، خواهیم داشت:

$MF'-MF=2a$

بنابراین، مکان هندسی نقطهٔ M، یک هذلولی به کانونهای F و F' و عدد ثابت ۲a یا رأسهای A و A' است.

نکته. فصل مشترک صفحهٔ دایرهٔ تماس کرهٔ (O) و صفحهٔ تماس کرهٔ (O′) با صفحهٔ P، دو خط راست δ و δ' می‌باشند که بترتیب خطهای هادی نظیر کانونهای F و F′ نامیده می‌شوند. خطهای هادی ویژگی زیر را دارند:

نسبت فاصلهٔ هر نقطهٔ هذلولی از یک کانون به فاصلهٔ آن نقطه از خط هادی نظیر آن کانون، مقدار ثابت $\frac{c}{a}$ است.

این ویژگی را، با توجه به این که در هذلولی $\varphi < \alpha$ است (φ زاویهٔ خط d با محور سطح مخروطی دوار و α نصف زاویهٔ رأس سطح مخروطی دوار است)، ثابت کنید.

اثبات به روش تحلیلی. می‌دانیم معادلهٔ سطح مخروطی دوار حاصل از دوران خط $D: \frac{x-x_0}{a'} = \frac{y-y_0}{b'} = \frac{z-z_0}{c'}$ حول خط $\Delta: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ به صورت

$$\left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\right]\cos^2\alpha$$
$$= \left[a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0)\right]^2$$

است، که در آن، α زاویهٔ بین دو خط D و Δ است. حال اگر صفحهٔ P به معادلهٔ $Ax + By + Cz + D = 0$ را چنان اختیار کنیم که هر دو دامنهٔ سطح مخروطی دوار را قطع کند، با تعیین معادلهٔ تقاطع، ثابت می‌شود که مقطع یک هذلولی است.

مطلب را برای مقطع سطح مخروطی دوار حاصل از دوران خط $\begin{cases} y - 2x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ حول محور xها و صفحهٔ $P: y = 4$ ثابت می‌کنیم. نخست معادلهٔ این سطح مخروطی دوار را به دست می‌آوریم. داریم:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = m \\ x = n \\ y - 2x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = 2n \Rightarrow n^2 + 4n^2 + 0 = m \Rightarrow m - 5n^2 = 0$$
$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 5x^2 = 0$$
$$\Rightarrow y^2 + z^2 - 4x^2 = 0 \qquad \text{معادلهٔ سطح مخروطی دوار}$$

حال مقطع این سطح مخروطی دوار با صفحهٔ $P: y = 4$ را به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} y^2 + z^2 - 4x^2 = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow 4 + z^2 - 4x^2 = 0$$

$$\Rightarrow 4x^2 - z^2 = 4 \Rightarrow \frac{x^2}{1} - \frac{z^2}{4} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - \frac{z^2}{4} = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

معادلهٔ به‌دست آمده یک هذلولی را مشخص می‌کند.

ادب ریاضی

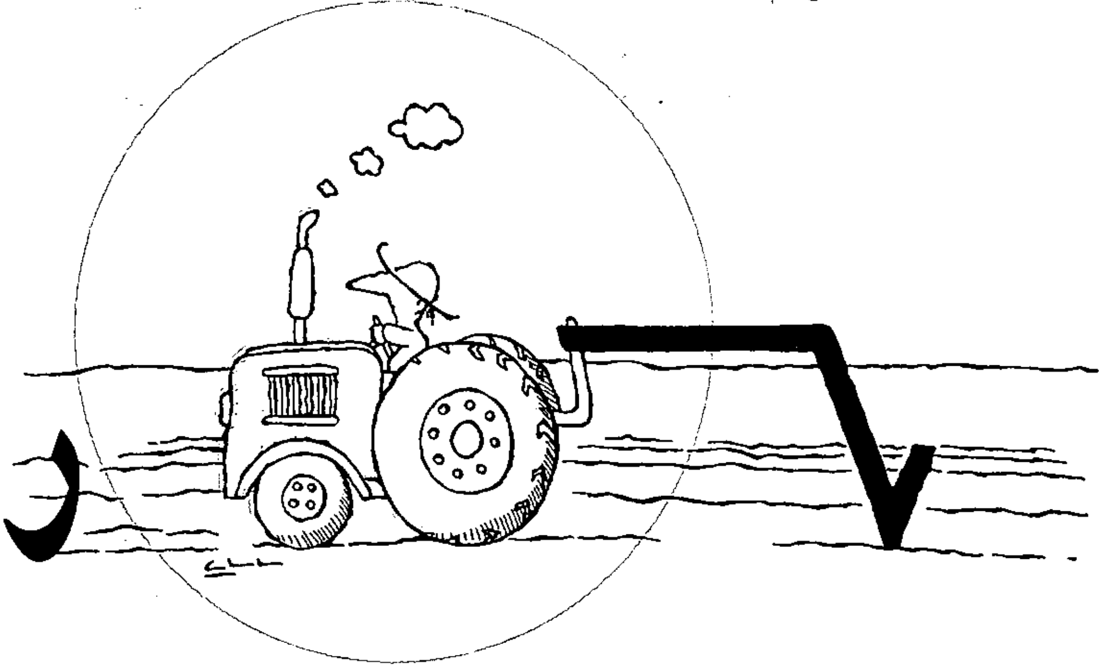
حساب احتمالات در واقع چیزی جز عقل سلیم نیست که به محاسبه درآمده است. این حساب چیزی را که صاحبان فکر بدون آنکه متوجه باشند به غریزه درمی‌یابند، با دقت و صحت بیان می‌دارد. این علم که با ملاحظات مربوط به بازیهای شانسی و تصادف به وجود آمد، امروزه آنچنان اهمیتی یافته است که از مهمترین مسائل معرفت آدمی به شمار می‌آید.

پی‌یر سیمون لاپلاس

● سیّد محمّدرضا هاشمی موسوی

قسمت اوّل

رادیکال



عددهای گنگ

هر عددی که قابل تبدیل به نسبت دو عدد درست نباشد، عددی گنگ (اصم) است. می‌دانیم طول قطر مربعی به ضلع ۱ واحد، برابر $\sqrt{۲}$ است؛ که یک عدد گنگ است. بدیهی است که هیچ عدد گویایی نمی‌توان یافت که به‌طور دقیق، برابر $\sqrt{۲}$ باشد؛ زیرا:

$$۱/۴^۲ = ۱/۹۶ < ۲ < ۱/۵^۲ = ۲/۲۵$$

$$۱/۴۱^۲ = ۱/۹۸۸۱ < ۲ < ۱/۴۲^۲ = ۲/۰۱۶۴$$

$$۱/۴۱۴^۲ = ۱/۹۹۹۳۹۶ < ۲ < ۱/۴۱۵^۲ = ۲/۰۰۲۲۲۵$$

$$۱/۴۱۴۲^۲ = ۱/۹۹۹۹۶۱۶۴ < ۲ < ۱/۴۱۴۳^۲ = ۲/۰۰۰۲۴۴۴۹$$

و هرچه کار را ادامه دهیم، به عددی دهدهی نخواهیم رسید که مجذور آن برابر ۲ باشد.

به‌عبارت دیگر، اگر m و n عددهایی درست فرض شوند، نمی‌توان $\sqrt{۲}$ را به‌صورت نسبت $\frac{m}{n}$ نوشت. در این‌جا این مطلب را با روش «برهان خلف» به اثبات می‌رسانیم: اگر $\frac{m}{n}$ را کسری ساده نشدنی فرض کنیم، یعنی m و n نسبت به هم، اوّل باشند. به بیان دیگر، بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد m و n برابر واحد باشد (دو عدد m و n، هردو، جز واحد بر هیچ عدد دیگری، بخش‌پذیر نباشند).

و فرض کنیم $\sqrt{۲}$ عدد گویا باشد و داشته باشیم:

$$\sqrt{۲} = \frac{m}{n} ; ۲ = \frac{m^۲}{n^۲} ; m^۲ = ۲n^۲ \quad (۱)$$

از تساوی (۱) نتیجه می‌شود که سمت راست برابری بر ۲ بخش پذیر است؛ پس باید $m^۲$، یعنی m هم بر ۲ بخش‌پذیر باشد و داشته باشیم:

$$m = ۲k \qquad (k \in z)$$

در برابری (۱)، ۲k را به جای m می‌گذاریم:

$$(۲k)^۲ = ۲n^۲ ; ۴k^۲ = ۲n^۲ ; ۲k^۲ = n^۲ \qquad (۲)$$

از برابری (۲) هم باید نتیجه گرفت که عدد n نیز بر ۲ بخش‌پذیر است.

ولی از آن جا که m و n را نسبت به هم اوّل گرفته بودیم، نتیجه

می‌گیریم که فرض ما نادرست بوده است و نمی‌توان $\sqrt{2}$ را به‌صورت کسر $\frac{m}{n}$ نوشت: $\sqrt{2}$ یک عدد گنگ است. تعداد عددهای گنگ، بی‌نهایت است؛ از این جالبتر، بین هر دو عدد گویا، یا بین هر دو عدد گنگ، یا بین یک عدد گویا و یک عدد گنگ، بی‌نهایت عدد گنگ وجود دارد. مجموعهٔ همهٔ عددهای گویا و گنگ را، مجموعهٔ عددهای حقیقی ($\mathbb{R}$) می‌نامند.

ریشهٔ دوم یک عدد

مساحت مربعی ۱۶ سانتیمترمربع است، طول ضلع مربع، چند سانتیمتر است؟ برای حلّ این مسأله، طول ضلع مربع را x سانتیمتر فرض می‌کنیم؛ در این صورت، مساحت مربع x^2 خواهد بود:

$$x^2 = 16 \qquad (1)$$

در تساوی (۱) باید عدد x را پیدا کنیم؛ یعنی عددی را بیابیم که توان دوم آن ۱۶ باشد. با کمی دقت، ملاحظه می‌شود که دو عدد ۴ و ۴- وجود دارند که توان دوم آنها ۱۶ است؛ زیرا:

$$4^2 = 16 \text{ و } (-4)^2 = 16$$

و چون طول ضلع، عدد منفی نمی‌تواند باشد، بنابراین طول ضلع مربع، یعنی x برابر ۴ سانتیمتر می‌شود:

$$x = 4$$

عددهای ۴ و ۴- را ریشهٔ دوم عدد ۱۶ می‌نامند.

ریشه‌های دوم عدد $\frac{1}{16}$، عددهای $\frac{1}{4}$ و $-\frac{1}{4}$ می‌باشند؛

زیرا:

$$(-\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16}\ ,\ (\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16}$$

ریشهٔ دوم ۰ نیز ۰ است؛ زیرا:

$$0^2 = 0$$

آیا عدد ۱۶- ریشهٔ دوم دارد؟

عدد ۱۶- ریشهٔ دوم ندارد؛ زیرا اگر فرض کنیم عددهای ۴ و ۴- یا هر عدد حقیقی دیگر، ریشهٔ دوم ۱۶- باشد، باید توان دوم این عددها (۴ و ۴- یا هر عدد حقیقی دیگر که ریشهٔ دوم ۱۶- فرض می‌شود) برابر ۱۶- شود؛ ولی می‌دانیم که توان دوم هر عدد حقیقی، هیچ‌گاه عدد منفی نیست؛ از این‌رو عدد ۱۶- ریشهٔ دوم حقیقی ندارد و به همین دلیل:

عددهای منفی، ریشهٔ دوم حقیقی ندارند.

همان‌طور که گفته شد، ۴ و ۴- ریشه های دوم ۱۶ می‌باشند. ریشه‌های دوم ۱۶ را با $\sqrt{16}$ و $-\sqrt{16}$ نشان می‌دهیم و بترتیب می‌خوانیم: رادیکال ۱۶ و منهای رادیکال ۱۶.

ریشه‌های دوم ۰/۰۱ عبارت است از:

$$\sqrt{0/01} = 0/1 \text{ و } -\sqrt{0/01} = -0/1$$

زیرا:

$$(0/1)\times(0/1) = 0/01 \text{ و } (-0/1)\times(-0/1) = 0/01$$

ریشه های دوم ۲ عبارت است از $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$ ($\sqrt{2}$ همان جذر عدد ۲ است که مقدار آن را با هر تقریبی، می توان حساب کرد).

ریشه های دوم عدد a (a بزرگتر یا مساوی صفر) را با $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$ نشان می‌دهیم. $\sqrt{a}$ ریشهٔ دوم مثبت و $-\sqrt{a}$ ریشهٔ دوم منفی است.

به‌طورکلی، اگر x یک عدد حقیقی و a یک عدد مثبت و $x^2 = a$ باشد، داریم:

$$x = \sqrt{a} \text{ و } x = -\sqrt{a} \quad (a \geq 0)$$

به بیان دیگر، اگر a یک عدد حقیقی مثبت یا صفر باشد، b را ریشهٔ دوم عدد حقیقی a گویند؛ هرگاه: $b^2 = a (a \geq 0)$

مثال: ریشه‌های دوم عددهای ۳۶، ۹، ۱۰۰، ۰/۰۰۰۱، ۰/۸۱، $\frac{9}{16}$، $\frac{4}{81}$، ۱، ۲، ۴-، ۱۰۰- و $\frac{-1}{9}$ را در صورت وجود بیابید.

حل:

$$\pm\sqrt{36} = \pm 6\ ,\ \pm\sqrt{9} = \pm 3\ ,\ \pm\sqrt{100} = \pm 10\ ,$$

$$\pm\sqrt{0/0001} = \pm 0/01\ ,\ \pm\sqrt{0/81} = \pm 0/9\ ,$$

$$\pm\sqrt{\frac{9}{16}} = \pm\frac{3}{4}\ ,\ \pm\sqrt{\frac{4}{81}} = \pm\frac{2}{9}\ ,\ \pm\sqrt{1} = \pm 1\ ,$$

$$\pm\sqrt{2} \cong \pm 1/414$$

عددهای ۴-، ۱۰۰- و $\frac{-1}{9}$، چون اعدادی منفی هستند، ریشهٔ دوم ندارند.

توجه: ریشهٔ دوم مثبت عدد $(-2)^2$ یا ۴، برابر ۲ است؛ یعنی:

$$\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

و ریشهٔ دوم منفی آن، برابر ۲- است؛ یعنی:

$-\sqrt{(-۲)^۲} = -\sqrt{۴} = -۲$

همچنین توجه داشته باشید که عبارت $\sqrt{(-۹)^۲}$ و $\sqrt{-۹^۲}$ یکی نیست ؛ زیرا :

$\sqrt{(-۹)^۲} = \sqrt{۸۱} = ۹$ و $\sqrt{-۹^۲} = \sqrt{-۸۱}$

(عدد ۸۱- ریشهٔ دوم حقیقی ندارد.)

یعنی ریشهٔ دوم مثبت $(-۹)^۲$ برابر ۹ است و $-۹^۲$ ریشهٔ دوم حقیقی ندارد.

محاسبه $\sqrt{x^۲}$

برای مثال، عبارت $\sqrt{x^۲}$ را به‌ازای برخی از مقادیر مختلف x محاسبه می‌کنیم :

$x = ۴:\ \sqrt{x^۲} = \sqrt{۴^۲} = ۴$

$x = ۰/۲:\ \sqrt{x^۲} = \sqrt{۰/۲^۲} = ۰/۲$

$x = -۵:\ \sqrt{x^۲} = \sqrt{(-۵)^۲} = \sqrt{۲۵} = ۵$

$x = \frac{-۲}{۳}:\ \sqrt{x^۲} = \sqrt{(\frac{-۲}{۳})^۲} = \sqrt{\frac{۴}{۹}} = \frac{۲}{۳}$

ریشهٔ nام یک عدد

به همان ترتیب که از تعریف توان دوم یک عدد، ریشهٔ دوم را تعریف کردیم، می‌توان از تعریف توان سوم، توان چهارم، توان پنجم و ... توان nام (n عدد طبیعی)، ریشه‌های سوم، چهارم، پنجم و ... ریشهٔ nام را تعریف کرد.

مثال:

از $۱۲۵ = ۵^۳$ نتیجه می‌شود $۵ = \sqrt[۳]{۱۲۵}$ و می‌خوانیم «ریشهٔ سوم ۱۲۵ برابر ۵ است».

از $۱۶ = ۲^۴$ نتیجه می‌شود $۲ = \sqrt[۴]{۱۶}$ و می‌خوانیم «ریشهٔ چهارم ۱۶ برابر ۲ است».

از $۲۴۳ = ۳^۵$ نتیجه می‌شود $۳ = \sqrt[۵]{۲۴۳}$ و می‌خوانیم «ریشهٔ پنجم ۲۴۳ برابر ۳ است».

از $۶۴ = ۲^۶$ نتیجه می‌شود $۲ = \sqrt[۶]{۶۴}$ و می‌خوانیم « ریشهٔ ششم ۶۴ برابر ۲ است».

به‌طورکلی :

برای هر عدد طبیعی n بزرگتر یا برابر ۲، ($n \geq ۲$) و عددهای حقیقی a و b، اگر $a^n = b$ و n عددی فرد باشد :

$$a = \sqrt[n]{b}$$

و اگر n عددی زوج و $b \geq ۰$:

$$|a| = \sqrt[n]{b}$$

برای مثال :

$-۲ = \sqrt[۳]{-۸}$ ؛ زیرا : $-۸ = (-۲)^۳$.

$۲ = \sqrt[۵]{۳۲}$ ؛ زیرا : $۳۲ = ۲^۵$.

$۲ = \sqrt[۶]{۶۴}$ ؛ زیرا : $۶۴ = ۲^۶$.

$\frac{۳}{۲} = \sqrt[۴]{\frac{۸۱}{۱۶}}$ ؛ زیرا : $\frac{۸۱}{۱۶} = (\frac{۳}{۲})^۴$.

عبارتهایی مانند :

$\sqrt[۶]{-۶۴}$ ، $\sqrt[۴]{-۱۶}$ ، $\sqrt[۸]{-۲^۸}$ ، $\sqrt[۱۰]{-۱۰^{۱۰}}$ ، $\sqrt{-۸۱}$ ، $\sqrt[۷۴]{-۲}$

و $\sqrt[۱۰۰]{-۱}$ عدد حقیقی نیستند ؛ زیرا **عددهای منفی، ریشهٔ زوج ندارند.**

مثال: حاصل عبارتهای زیر را در صورت وجود بیابید.

۱) $\sqrt[۵]{\frac{-۱}{۳۲}}$ ۲) $\sqrt{(-۳)(-۳)^۳} - \sqrt{۸۱}$

۳) $۲ + \sqrt[۳]{-۸}$ ۴) $۲\sqrt{۵^۲} - \sqrt[۴]{۸۱} - \sqrt[۴]{۶۲۵}$

حل:

۱) $\sqrt[۵]{\frac{-۱}{۳۲}} = \sqrt[۵]{(-\frac{۱}{۲})^۵} = -\frac{۱}{۲}$

۲) $\sqrt{(-۳)(-۳)^۳} - \sqrt{۸۱} = \sqrt{(-۳)^۴} - ۹$
$= (-۳)^۲ - ۹ = ۹ - ۹ = ۰$

۳) $۲ + \sqrt[۳]{-۸} = ۲ + \sqrt[۳]{(-۲)^۳} = ۲ - ۲ = ۰$

۴) $۲\sqrt{۵^۲} - \sqrt[۴]{۸۱} - \sqrt[۴]{۶۲۵} = ۲ \times ۵ - \sqrt[۴]{۳^۴} - \sqrt[۴]{۵^۴}$
$= ۱۰ - ۳ - ۵ = ۲$

تعریف

هرگاه عدد حقیقی k توان nام عدد حقیقی a باشد، k را توان nام کامل a می‌نامند ؛ برای مثال : «۲۵ توان دوم کامل ۵+ یا ۵-»، «۸ توان سوم کامل ۲»، «۶۲۵ توان چهارم کامل ۵+ یا ۵-»، «۳۲ توان پنجم کامل ۲» و «۶۴ توان ششم کامل ۲+ یا

۲-» می‌باشد.

به همین ترتیب، اگر عبارت جبری D توان nام عبارت جبری A باشد، D را توان nام کامل A می‌نامند؛ برای مثال:

«$a^2+2ab+b^2$ یا $(a+b)^2$ توان دوم کامل $(a+b)$ یا $-(a+b)$»، «$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ یا $(a-b)^3$ توان سوم کامل $(a-b)$»، «x^{74} توان هفتاد و چهارم کامل x یا $-x$» و «$a^{12}b^6c^{18}$ توان ششم کامل (a^2bc^3)» می‌باشد. بنابراین، هر توان کاملی که زیر رادیکال بوده و نمای آن برابر با فرجهٔ رادیکال باشد، از زیر رادیکال بیرون می‌آید؛ برای مثال:

$$\sqrt[3]{x^9}=\sqrt[3]{(x^3)^3}=x^3\ ,\quad \sqrt[7]{5^7}=5\ ,\quad \sqrt[5]{32}=\sqrt[5]{2^5}=2\ ,$$

$$\sqrt[6]{7^6}=7\ ,\quad \sqrt[5]{a^{10}b^{20}c^{35}}=\sqrt[5]{(a^2b^4c^7)^5}=a^2b^4c^7\ ,$$

$$\sqrt[75]{(x^3+1)^{75}}=x^3+1 .$$

توجه:

۱) اگر فرجهٔ رادیکال (n) عددی زوج باشد، عدد یا عبارتی که از زیر رادیکال بیرون می‌آید، نمی‌تواند منفی باشد؛ برای مثال:

$\sqrt[10]{(-10)^{10}}=-(-10)=10$ و

$$\sqrt[74]{(-2)^{74}}=-(-2)=2$$

$$\sqrt[8]{(-2)^8}=-(-2)=2$$

$$\sqrt[2k]{(-5)^{2k}}=-(-5)=5 \quad (k\in\mathbb{N})$$

$$\sqrt[6]{(-4)(-4)^2(-4)^3}=\sqrt[6]{(-4)^6}=-(-4)=4$$

$$\sqrt[2k]{x^{4k}}=\sqrt[2k]{(x^2)^{2k}}=x^2$$

$$\sqrt[4k]{(-a)^{8k}}=\sqrt[4k]{((-a)^2)^{4k}}=\sqrt[4k]{(a^2)^{4k}}=a^2$$

$$\sqrt[4]{a^8b^{16}c^{40}}=\sqrt[4]{(a^2b^4c^{10})^4}=a^2b^4c^{10}$$

$$\sqrt{x^4+2x^2+1}=\sqrt{(x^2+1)^2}=x^2+1$$

۲) اگر عددها یا عبارتهای جبری زیر رادیکال، مضربی صحیح از فرجهٔ رادیکال نباشند، آن رادیکال را گنگ (اصم) می‌نامند؛ برای مثال:

$$\sqrt{2}\ ,\ \sqrt[3]{9}\ ,\ \sqrt[5]{34}\ ,\ \sqrt{x^2+1}\ ,\ \sqrt[4]{(x^2+1)^3}\ ,\ \sqrt[74]{2^{75}}$$

۳) اگر فرجهٔ رادیکال عددی زوج و عدد یا عبارت زیر رادیکال همواره منفی باشد، در این صورت، آن عدد یا عبارت رادیکالی در مجموعهٔ عددهای حقیقی ($\mathbb{R}$) بی‌معناست. برای مثال، تمام عددها و عبارتهای رادیکالی زیر، در مجموعهٔ عددهای حقیقی ($\mathbb{R}$) بی‌معنا هستند:

$$\sqrt{-4}\ ,\ \sqrt[6]{-64}\ ,\ \sqrt{\sqrt[5]{2\sqrt[3]{-4}}}\ ,\ \sqrt{-x^2-1}\ ,$$

$$\sqrt[78]{\frac{-1}{x^2}}\ ,\ \sqrt[3]{-\sqrt{-2}}$$

مثال: عبارتهای زیر، به ازای چه مقادیری از مجموعهٔ عددهای حقیقی ($\mathbb{R}$) معنا دارند؟

۱) $\sqrt{x}$ ۲) $\sqrt{-x}$ ۳) $\sqrt{x^2}$ ۴) $\sqrt{-\sqrt[3]{x}}$ ۵) $\sqrt[4]{-x^2-1}$

حل: ۱) $\sqrt{x}$ به ازای هر $x\geq 0$ معنا دارد.

۲) $\sqrt{-x}$ به‌ازای هر $-x\geq 0$ یا $x\leq 0$.

۳) $\sqrt{x^2}$ به‌ازای هر $x^2\geq 0$ یا $x\in\mathbb{R}$.

۴) $\sqrt{-\sqrt[3]{x}}$ به‌ازای هر $-\sqrt[3]{x}\geq 0$ یا $x\leq 0$.

۵) $\sqrt[4]{-x^2-1}$ به ازای هر عدد حقیقی بی‌معناست، پس: $x\in\varnothing$ (x متعلق مجموعهٔ تهی است).

مثال: عبارت $\sqrt[74]{\frac{x+x^3}{x^2+1}}$ به‌ازای چه مقادیری از x، معنا دارد؟

حل:

$\sqrt[74]{\frac{x+x^3}{x^2+1}}$ به ازای هر $\frac{x+x^3}{x^2+1}=\frac{x(x^2+1)}{x^2+1}=x\geq 0$ معنا دارد.

قدرمطلق

علی ۲۰۰ ریال موجودی دارد و حمید ۲۰۰ ریال قرض دارد. در این جا، برای علی و حمید از عدد ۲۰۰ استفاده کردیم؛ درحالی که علی ۲۰۰+ ریال و حمید ۲۰۰- ریال دارد.

پس، وقتی فقط از خود عدد یاد شود و علامت آن (یعنی مثبت یا منفی بودن آن) مورد نظر نباشد، می‌گوییم با قدرمطلق عدد روبه‌رو هستیم. برای نشان دادن قدرمطلق، از دو پاره‌خط راست کوتاه و موازی که در دو طرف عدد قرار می‌دهیم، استفاده می‌کنیم؛ بنابراین:

$$|-200|=200\ ,\quad |+200|=200$$

به بیان ساده‌تر، می‌توان گفت: منظور از قدرمطلق یک عدد،

مقدار عددی آن، با علامت مثبت است؛ زیرا وقتی می نویسیم ۲۰۰، منظور ما در واقع ۲۰۰+ است.

مثال ۱: قدرمطلق عددهای $-\sqrt{۲}$، $+\sqrt{۲}$، $۷-\sqrt{۵}$، $\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۵}-۲$ را بیابید.

حل:

$$|-\sqrt{۲}|=\sqrt{۲} \quad , \quad |+\sqrt{۲}|=\sqrt{۲}$$

می‌دانیم $\sqrt{۵}<۷$ ؛ پس: $۷-\sqrt{۵}>۰$، بنابراین قدرمطلق عدد $۷-\sqrt{۵}$ با خودش برابر است:

$$|۷-\sqrt{۵}|=۷-\sqrt{۵}$$

همچنین می‌دانیم $\sqrt{۲}<\sqrt{۳}$ ؛ پس: $\sqrt{۳}-\sqrt{۲}>۰$، بنابراین قدرمطلق عدد $\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$ با خودش برابر است:

$$|\sqrt{۳}-\sqrt{۲}|=\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$$

و همین‌طور:

$$\sqrt{۵}>۲ \; ; \; \sqrt{۵}-۲>۰ \; ; \; |\sqrt{۵}-۲|=\sqrt{۵}-۲$$

با توجه به مثال (۱)، قدرمطلق عدد حقیقی a را می‌توان به شکل برابری زیر نشان داد:

$$|a|=\begin{cases} a & a\geq ۰ \\ -a & a<۰ \end{cases} \qquad (۱)$$

تعبیر برابری (۱) این است که اگر a عددی مثبت یا صفر باشد، قدرمطلق آن با خودش برابر است؛ ولی اگر a عددی منفی باشد، قدرمطلق آن، برابر با قرینهٔ آن عدد است.

توجه داشته باشید که $\sqrt{۹}$ با ریشهٔ دوم ۹ فرق دارد:

ریشهٔ دوم عدد ۹، می‌تواند ۳+ یا ۳- باشد؛ ولی $\sqrt{۹}$ همیشه برابر ۳؛ یعنی قدرمطلق ۳+ و ۳- می‌باشد:

$$\sqrt{۹}=\sqrt{(\pm ۳)^۲}=|\pm ۳|=۳$$

به این ترتیب، همیشه باید نوشت:

$$\sqrt{a^۲}=|a| \qquad (۲)$$

برابری (۲) نشان می‌دهد که جذر هر عدد حقیقی مثبت همیشه برابر یک عدد حقیقی مثبت است.

مثال ۲: حاصل عبارتهای زیر را پیدا کنید.

۱) $|-\sqrt{۲}|$ ۲) $\left|\frac{۲}{۳}-\frac{۳}{۲}\right|$

۳) $\left|-\sqrt{(-\frac{۳}{۴})^۲}\right|$ ۴) $|۷-\sqrt{۵۰}|$

۵) $\left|\sqrt{(-۳)^۲}-\sqrt{(-۵)^۲}\right|$ ۶) $\left||۳-\sqrt{۱۰}|-|۴+\sqrt{۱۰}|\right|$

۷) $\sqrt{(\sqrt{۳}-۴)^۲}$

حل: با توجه به تعریف قدر مطلق داریم:

۱) $|-\sqrt{۲}|=\sqrt{۲}$

۲) $\left|\frac{۲}{۳}-\frac{۳}{۲}\right|=\left|\frac{۴-۹}{۶}\right|=\left|\frac{-۵}{۶}\right|=\frac{۵}{۶}$

۳) $\left|-\sqrt{(-\frac{۳}{۴})^۲}\right|=\left|\sqrt{(-\frac{۳}{۴})^۲}\right|=\left|-\frac{۳}{۴}\right|=\frac{۳}{۴}$

۴) $|۷-\sqrt{۵۰}|=|-(\sqrt{۵۰}-۷)|=|\sqrt{۵۰}-۷|=\sqrt{۵۰}-۷$

۵) $\left|\sqrt{(-۳)^۲}-\sqrt{(-۵)^۲}\right|=\left||-۳|-|-۵|\right|=|۳-۵|=|-۲|=۲$

۶) $\left||۳-\sqrt{۱۰}|-|۴+\sqrt{۱۰}|\right|=\left||-(\sqrt{۱۰}-۳)|-(۴+\sqrt{۱۰})\right|$

$=\left||\sqrt{۱۰}-۳|-۴-\sqrt{۱۰}\right|$

$=|\sqrt{۱۰}-۳-۴-\sqrt{۱۰}|=|-۷|=۷$

۷) $\sqrt{(\sqrt{۳}-۴)^۲}=|\sqrt{۳}-۴|=|-(۴-\sqrt{۳})|$

$=|۴-\sqrt{۳}|=۴-\sqrt{۳}$

برای هر x و y حقیقی همیشه داریم:

۱) $\sqrt{(xy)^۲}=\sqrt{x^۲y^۲}=\sqrt{x^۲}.\sqrt{y^۲}\Rightarrow |x.y|=|x|.|y|$

۲) $\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^۲}=\sqrt{\frac{x^۲}{y^۲}}=\frac{\sqrt{x^۲}}{\sqrt{y^۲}}\Rightarrow \left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|} \quad (y\neq ۰)$

۳) $\sqrt{x^{۲n}}=\sqrt{(x^n)^۲}=(\sqrt{x^۲})^n\Rightarrow |x^n|=|x|^n \quad (n\in\mathbb{N})$

مثال ۳: حاصل عبارتهای $|-۵x^۲|$ و $\frac{|x|}{x}$ را پیدا کنید. $(x\neq ۰)$

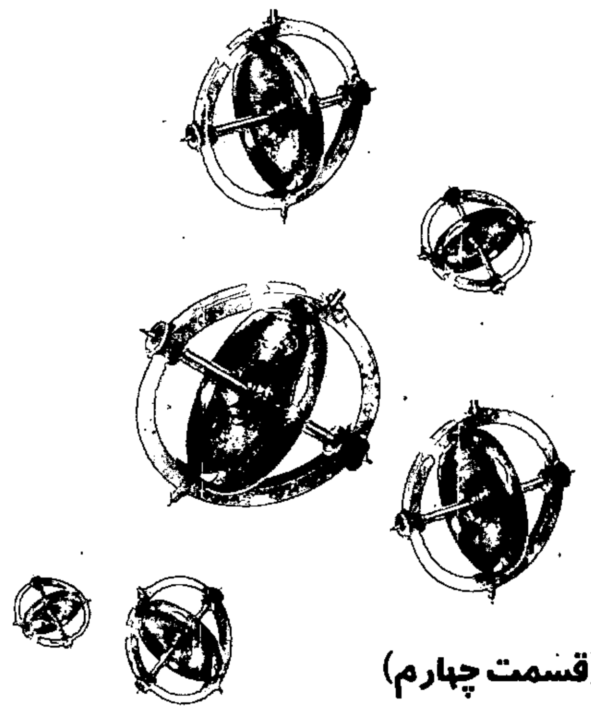
حل:

۱) $|-۵x^۲|=|-۵||x^۲|=۵x^۲$

۲) $\frac{|x|}{x}=\begin{cases} \frac{x}{x} & x>۰ \\ \frac{-x}{x} & x<۰ \end{cases}\Rightarrow \frac{|x|}{x}=\begin{cases} ۱ & x>۰ \\ -۱ & x<۰ \end{cases}$

اثبات نامساویها به کمک قضیهٔ

مقدار میانگین



(قسمت چهارم)

●محمدصادق عسگری

مثال ۲۳: برای هر دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید:

$$|\cos a-\cos b|\le|a-b|$$

حل: بدون آن‌که کلیت مسأله از بین برود، می‌توان فرض کرد $a<b$. تابع $f(x)=\cos x$ را روی بازهٔ $[a,b]$ در نظر می‌گیریم، f پیوسته است و روی بازهٔ $]a,b[$ مشتق‌پذیر است. پس بنا بر قضیهٔ مقدار میانگین نقطهٔ c که $a<c<b$ وجود دارد که

$\cos b-\cos a=(-\sin c)(b-a)$ یا

$$|\cos b-\cos a|=|-\sin c||b-a|$$

چون $|\sin c|\le 1$ است، پس:

$$|\cos a-\cos b|\le|a-b|$$

مثال ۲۴: الف ـ برای هر دو عدد حقیقی a و b، ثابت کنید:

$$\mathrm{Arc\,tg}\left(\frac{b-a}{1+ab}\right)=\mathrm{Arc\,tg}\,b-\mathrm{Arc\,tg}\,a$$

ب ـ اگر $a<b$ ، $a>0$، ثابت کنید:

$$\frac{b-a}{1+a^2}<\mathrm{Arc\,tg}\left(\frac{b-a}{1+ab}\right)<\frac{b-a}{1+b^2}$$

حل: الف) قرار می‌دهیم $f(x)=\mathrm{Arc\,tg}\,x$ و $g(x)=\mathrm{Arc\,tg}\left(\frac{x-a}{1+ax}\right)+\mathrm{Arc\,tg}\,a$ توابع f و g مشتق‌پذیرند و:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

$$g'(x)=\frac{\frac{1+a^2}{(1+ax)^2}}{1+\left(\frac{x-a}{1+ax}\right)^2}\Rightarrow g'(x)=\frac{1+a^2}{(1+ax)^2+(x-a)^2}$$

$$\Rightarrow g'(x)=\frac{1+a^2}{a^2x^2+x^2+a^2+1}\Rightarrow g'(x)=\frac{1+a^2}{(1+a^2)(1+x^2)}$$

$$\Rightarrow g'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

یعنی $f'(x)=g'(x)$ طبق نتیجهٔ ۳ عدد ثابت c وجود دارد، به‌طوری که $f(x)=g(x)+c$

$$\mathrm{Arc\,tg}\,x=\mathrm{Arc\,tg}\left(\frac{x-a}{1+ax}\right)+\mathrm{Arc\,tg}\,a+c$$

اگر در رابطهٔ بالا قرار دهیم $x=a$، در نتیجه داریم:

$$\text{Arc tg}(a) = \text{Arc tg}(0) + \text{Arc tg}a + c$$

یعنی $c = 0$ پس برای هر x داریم:

$$\text{Arc tg}x = \text{Arc tg}\left(\frac{x-a}{1+ax}\right) + \text{Arc tg}a$$

$$\Rightarrow \text{Arc tg}\left(\frac{x-a}{1+ax}\right) = \text{Arc tg}x - \text{Arc tg}a$$

حال اگر قرار دهیم $x = b$، داریم:

$$\text{Arc tg}\left(\frac{b-a}{1+ab}\right) = \text{Arc tg}b - \text{Arc tg}a$$

ب) تابع $f(x) = \text{Arc tg}x$ را روی بازهٔ $[a,b]$ در نظر می‌گیریم. f پیوسته است و روی بازهٔ $]a,b[$ مشتق‌پذیر است. پس بنا بر قضیهٔ مقدار میانگین وجود دارد: $a < c < b$ ؛ به‌طوری که $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$

$$f(x) = \text{Arc tg}x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{Arc tg}b - \text{Arc tg}a}{b-a} = \frac{1}{1+c^2}$$

حال با فرض $0 < a < c < b$ داریم:

$$a^2 < c^2 < b^2 \Rightarrow 1+a^2 < 1+c^2 < 1+b^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+b^2} < \frac{1}{1+c^2} < \frac{1}{1+a^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+b^2} < \frac{\text{Arc tg}b - \text{Arc tg}a}{b-a} < \frac{1}{1+a^2}$$

$$\Rightarrow \frac{b-a}{1+b^2} < \text{Arc tg}b - \text{Arc tg}a < \frac{b-a}{1+a^2}$$

حال بنابر قسمت الف، می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \text{Arctg}\left(\frac{b-a}{1+ab}\right) < \frac{b-a}{1+a^2}$$

مثال ۲۵: اگر $x > 0$ ثابت کنید: $1 - \frac{1}{x} < \text{Ln}x < x-1$.

حل: حالت اوّل: فرض کنیم $0 < x < 1$ دلخواه و پس از این ثابت باشد. تابع $f(t) = \text{Ln}t$ را روی بازهٔ $[x,1]$ در نظر می‌گیریم. f پیوسته است و روی بازهٔ $]x,1[$ مشتق‌پذیر است. پس طبق قضیهٔ مقدار میانگین نقطه $x < c < 1$ وجود دارد؛ به‌طوری که

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(x)}{1-x}$$

$$f(t) = \text{Ln}(t) \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{t}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c} = \frac{\text{Ln}(1) - \text{Ln}x}{1-x} \quad , \quad x < c < 1$$

$$\Rightarrow \frac{-\text{Ln}x}{1-x} = \frac{1}{c} \Rightarrow \frac{\text{Ln}x}{x-1} = \frac{1}{c}$$

از $x < c < 1$ نتیجه می‌گیریم: $1 < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$ و $x - 1 < 0$.

بنابراین:

$$\Rightarrow 1 < \frac{\text{Ln}x}{x-1} < \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{x-1}{x} < \text{Ln}x < x-1$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{x} < \text{Ln}x < x-1$$

حالت دوم: فرض کنیم $x > 1$ باشد. در این صورت، تابع $f(t) = \text{Ln}t$ را روی بازهٔ $[1,x]$ در نظر می‌گیریم. بنابر قضیهٔ مقدار میانگین، وجود دارد $1 < c < x$ ؛ به‌طوری که $f'(c) = \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$. یا $\frac{\text{Ln}x - \text{Ln}(1)}{x-1} = \frac{1}{c}$ از $1 < c < x$ داریم $\frac{1}{x} < \frac{1}{c} < 1$، درنتیجه: $\frac{1}{x} < \frac{\text{Ln}x}{x-1} < 1$ ؛ چون $x - 1 > 0$.

بنابراین $\frac{x-1}{x} < \text{Ln}x < x-1$ یا $1 - \frac{1}{x} < \text{Ln}x < x-1$.

مثال ۲۶: ثابت کنید برای هر $x \neq 0 , 1$، داریم

$$1 < \left(\frac{2^x - 1}{x}\right)^{\frac{1}{x-1}} < 2.$$

حل: فرض کنیم $x \neq 0 , 1$ دلخواه و پس از این، ثابت باشد. تابع $f:[1,2] \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(t) = t^x$ را در نظر می‌گیریم. f پیوسته است و روی بازهٔ $]1,2[$ مشتق‌پذیر است. پس طبق قضیهٔ مقدار میانگین، نقطهٔ $1 < c < 2$ وجود دارد؛ به‌طوری که $f'(c) = \frac{f(2) - f(1)}{2-1}$ یا $f'(c) = 2^x - 1$.

$$f(t) = t^x \Rightarrow f'(t) = xt^{x-1}$$

$$\Rightarrow f'(c) = xc^{x-1} \Rightarrow 2^x - 1 = xc^{x-1}$$

$$\Rightarrow \frac{2^x-1}{x}=c^{x-1}\Rightarrow c=\left(\frac{2^x-1}{x}\right)^{\frac{1}{x-1}}$$

چون $1<c<2$. درنتیجه داریم:

$$1<\left(\frac{2^x-1}{x}\right)^{\frac{1}{x-1}}<2$$

مثال ۲۷: اگر $0<a<b$ ثابت کنید: $\frac{b-a}{b}<Ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}$.

حل: تابع $f(x)=Lnx$ را روی بازهٔ $[a,b]$ در نظر می‌گیریم. f پیوسته است و روی بازهٔ $]a,b[$ مشتق‌پذیر است. بنابر قضیهٔ مقدار میانگین نقطهٔ $a<c<b$ وجود دارد؛ به‌طوری که

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$f(x)=Lnx\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$$

$$\frac{Lnb-Lna}{b-a}=\frac{1}{c}$$

حال با فرض $0<a<c<b$، داریم:

$$\frac{1}{b}<\frac{1}{c}<\frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b}<\frac{Lnb-Lna}{b-a}<\frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{b-a}{b}<Lnb-Lna<\frac{b-a}{a}$$

$$\frac{b-a}{b}<Ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}$$

مثال ۲۸: با فرض $x>-1$، ثابت کنید: $\frac{x}{x+1}<Ln(x+1)<x$.

حل: طبق مثال ۲۳ برای هر $x>0$، داریم $1-\frac{1}{x}<Lnx<x-1$.

حال فرض کنیم $x>-1$ دلخواه و پس از این ثابت باشد. قرار می‌دهیم $u=x+1$، در نتیجه داریم: $u>0$ و $1-\frac{1}{u}<Lnu<u-1$. با قرار دادن $u=x+1$

$$\Rightarrow 1-\frac{1}{x+1}<Ln(x+1)<x+1-1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+1}<Ln(x+1)<x$$

مثال ۲۹: فرض کنیم f تابعی حقیقی مشتق‌پذیر باشد و برای هر x و y داشته باشیم: $|f(x)-f(y)|\le (x-y)^2$. ثابت کنید f یک تابع ثابت است.

حل: فرض کنیم $x=a$ یک عدد حقیقی دلخواه و پس از این ثابت باشد. بنا به فرض داریم:

$$|f(x)-f(a)|\le (x-a)^2$$

$$\Rightarrow \frac{|f(x)-f(a)|}{|x-a|}\le |x-a|$$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right|\le |x-a|$$

$$\Rightarrow -|x-a|\le \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\le |x-a|$$

چون $\lim\limits_{x\to a}|x-a|=0$ بنابر قضیهٔ ساندویچ $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=0$؛ یعنی $f'(a)=0$. چون a دلخواه است، درنتیجه برای هر عدد حقیقی x داریم $f'(x)=0$. درنتیجه، طبق نتیجهٔ (۲)، f یک تابع ثابت است.

مثال ۳۰: با استفاده از قضیهٔ مقدار میانگین، نشان دهید:

$$0<\int_0^1 Arc\,tg(\sqrt{x})dx<\frac{\pi}{4}$$

حل: تابع $f(t)=\int_0^t Arc\,tg(\sqrt{x})dx$ را روی بازهٔ $[0,1]$ در نظر می‌گیریم. f پیوسته است و روی بازهٔ $]0,1[$ مشتق‌پذیر است. پس طبق قضیهٔ مقدار میانگین نقطه $0<c<1$ وجود دارد؛ به‌طوری که

$$f'(c)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}\Rightarrow f'(c)=f(1)-f(0)$$

حال داریم:

$$f(t)=\int_0^t Arc\,tg(\sqrt{x})dx\Rightarrow f'(t)=Arc\,tg(\sqrt{t})$$

$$\Rightarrow Arc\,tg(\sqrt{c})=f(1)-f(0)$$

$$\Rightarrow Arc\,tg(\sqrt{c})=\int_0^1 Arc\,tg(\sqrt{x})dx-\int_0^0 Arc\,tg(\sqrt{x})dx$$

$$\Rightarrow \text{Arc tg}(\sqrt{c}) = \int_{۰}^{۱} \text{Arc tg}(\sqrt{x})dx$$

از $۰<c<۱$، داریم: $۰<\sqrt{c}<۱$. در نتیجه،

$$\text{Arc tg}(۰) < \text{Arc tg}(\sqrt{c}) < \text{Arc tg}(۱)$$

$۰ < \text{Arc tg}(\sqrt{c}) < \frac{\pi}{۴}$. بنابراین $۰ < \int_{۰}^{۱} \text{Arc tg}(\sqrt{x})dx < \frac{\pi}{۴}$.

تذکر: مثال ۲۷ را می‌توان به کمک خواص انتگرال معین نیز حل کرد.

مثال ۳۱: نشان دهید $\left|\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sin(x^{۲})dx\right| \le \frac{\pi}{۲}$.

حل: تابع $f(t)=\int_{۰}^{t} \sin(x^{۲})dx$ را روی بازهٔ $\left[۰,\frac{\pi}{۲}\right]$ در نظر می‌گیریم. f پیوسته است و روی بازهٔ $\left]۰,\frac{\pi}{۲}\right[$ مشتق‌پذیر است و $f'(t)=\sin(t^{۲})$؛ چون $|\sin(t^{۲})|\le ۱$، بنابر نتیجهٔ (۱) داریم:

$$\left|f\left(\frac{\pi}{۲}\right)-f(۰)\right| \le \left|\frac{\pi}{۲}-۰\right|$$

$$\Rightarrow \left|\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sin(x^{۲})dx - ۰\right| \le \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \left|\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sin(x^{۲})dx\right| \le \frac{\pi}{۲}$$

مثال ۳۲: برای هر $-۱<x<۱$، ثابت کنید: $\text{Arc}\sin x + \text{Arc}\cos x = \frac{\pi}{۲}$.

حل: تابع $f(x) = \text{Arc}\sin x + \text{Arc}\cos x$ را روی بازهٔ $[-۱,۱]$ در نظر می‌گیریم. f پیوسته است و روی بازهٔ $]-۱,۱[$ مشتق‌پذیر است و به علاوه

$$f'(x) = \frac{۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}} + \frac{-۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}} = ۰$$

یعنی برای هر $-۱<x<۱$، داریم $f'(x)=۰$. پس طبق نتیجهٔ (۲)، f تابع ثابت است. بنابراین، عدد ثابت c وجود دارد؛ به‌طوری که $f(x)=c$ یا $\text{Arc}\sin(x)+\text{Arc}\cos(x)=c$. اگر قرار دهیم $x=۰$، داریم:

$$\Rightarrow \text{Arc}\sin(۰)+\text{Arc}\cos(۰)=c$$

$$\Rightarrow c=\frac{\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow \text{Arc}\sin x + \text{Arc}\cos x = \frac{\pi}{۲}$$

مثال ۳۳: برای هر $x\in\mathbb{R}$، نشان دهید: $\text{Arc tg}x + \text{Arc cotg}x = \frac{\pi}{۲}$.

حل: تابع $f(x)=\text{Arc tg}x+\text{Arc cotg}x$ را روی $\mathbb{R}$ در نظر می‌گیریم. f پیوسته و مشتق‌پذیر است. و به علاوه

$$f'(x)=\frac{۱}{۱+x^{۲}}+\frac{-۱}{۱+x^{۲}}=۰$$

یعنی برای هر x، داریم: $f'(x)=۰$. پس طبق نتیجهٔ (۲)، f تابع ثابت است. در نتیجه، $f(x)=c$ یا $\text{Arc tg}x+\text{Arc cotg}x=c$. اگر قرار دهیم $x=۰$

$$\Rightarrow \text{Arc tg}(۰)+\text{Arc cotg}(۰)=c$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{۲}=c$$

$$\Rightarrow \text{Arc tg}x+\text{Arc cotg}x=\frac{\pi}{۲}$$

مثال ۳۴: فرض کنیم f تابعی پیوسته بر بازهٔ $[a,b]$ باشد. در این صورت، وجود دارد $a<c<b$؛ به‌طوری که $\int_{a}^{b} f(x)dx=(b-a)f(c)$.

حل: تابع $F(t)=\int_{a}^{t} f(x)dx$ را روی بازهٔ $[a,b]$ در نظر می‌گیریم.

F پیوسته است و روی بازهٔ $]a,b[$ مشتق‌پذیر است. همچنین $F'(t)=f(t)$. پس بنابر قضیهٔ مقدار میانگین، وجود دارد $a<c<b$؛ به‌طوری که $F'(c)=\frac{F(b)-F(a)}{b-a}$ یعنی

$$f(c)=\frac{\int_{a}^{b} f(x)dx-۰}{b-a}$$

$$\Rightarrow \int_{a}^{b} f(x)dx=(b-a)f(c)$$

این مثال به نام قضیهٔ مقدار میانگین برای انتگرال نیز معروف است.

مثال ۳۵: فرض کنیم a یک عدد حقیقی مثبت و f تابعی حقیقی مشتق‌پذیر باشد، با فرض $f(a)=a$ و $f(-a)=-a$ و به ازای هر x، داشته باشیم: $|f'(x)|\le ۱$. نشان دهید $f(۰)=۰$.

حل: *حالت اول*: تابع f بر فاصلهٔ $[۰,a]$ پیوسته و بر بازهٔ $]۰,a[$ مشتق‌پذیر است. پس طبق قضیهٔ مقدار میانگین، وجود

دارد $0<c<a$ ؛ به‌طوری که $\frac{f(a)-f(0)}{a}=f'(c)$ ، چون $|f'(c)|\le 1$ ، درنتیجه :

$$\Rightarrow \left|\frac{f(a)-f(0)}{a}\right|\le 1 \Rightarrow |f(a)-f(0)|\le a$$

$$\Rightarrow |a-f(0)|\le a$$

$$\Rightarrow -a\le a-f(0)\le a$$

$$\Rightarrow -2a\le -f(0)\le 0$$

$$\Rightarrow 0\le f(0)\le 2a \Rightarrow f(0)\ge 0 \qquad (*)$$

حالت دوم: تابع f روی بازهٔ $[-a,0]$ پیوسته و مشتق‌پذیر است. پس طبق قضیهٔ مقدار میانگین، وجود دارد $-a<c'<0$ ؛ به‌طوری که $\frac{f(0)-f(-a)}{a}=f'(c')$ ، چون $|f'(c')|\le 1$ ، درنتیجه :

$$\left|\frac{f(0)-f(-a)}{a}\right|\le 1 \Rightarrow |f(0)-f(-a)|\le a$$

$$\Rightarrow |f(0)+a|\le a$$

$$\Rightarrow -a\le f(0)+a\le a$$

$$\Rightarrow -2a\le f(0)\le 0 \Rightarrow f(0)\le 0 \qquad (**)$$

از روابط $(*)$ و $(**)$، داریم $f(0)=0$.

مثال ۳۶: فرض کنید f تابعی حقیقی پیوسته بر بازهٔ $[a,b]$ باشد و عدد حقیقی مثبت M وجود داشته باشد ؛ به طوری که برای هر x داشته باشیم $|f(x)|\le M$ ، نشان دهید :

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le M(b-a)$$

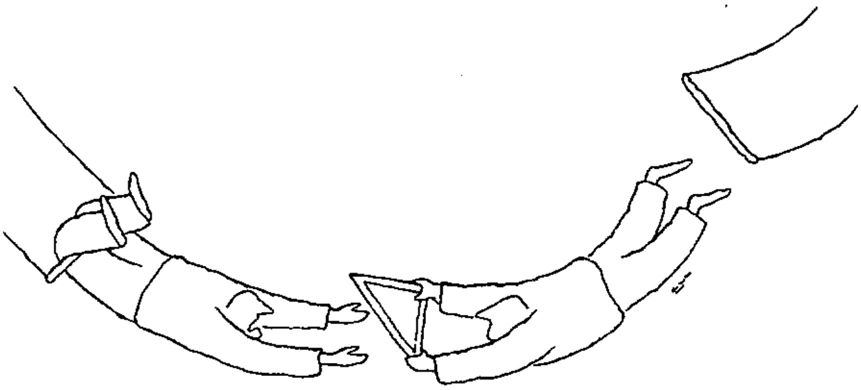
حل: تابع $F(t)=\int_a^t f(x)dx$ روی بازهٔ $[a,b]$ پیوسته و مشتق‌پذیر است ؛ چون $F'(t)=f(t)$ و $|F'(x)|=|f(x)|\le M$ ، پس طبق نتیجهٔ (۱) برای تابع F داریم :

$$|F(b)-F(a)|\le M|b-a| \Rightarrow \left|\int_a^b f(x)dx-0\right|\le M(b-a)$$

$$\Rightarrow \left|\int_a^b f(x)dx\right|\le M(b-a)$$

قبل از اقلیدس هندسه عبارت بود از مجموعهٔ قواعدی که ماحصل تجارب و ادراکات متفرق بوده‌اند و هیچ ارتباطی با یکدیگر نداشته‌اند و هیچ کس حتی حدس نمی‌زد که مجموعهٔ این قواعد را ممکن است از عدهٔ بسیار کمی اصول نتیجه گرفت. امروزه استدلال ریاضی تا آن حد جزو اساس و مبنای این علم به شمار می‌رود که حتی تصور این موضوع نیز برای ما ممکن نیست که ریاضیات بدون استدلال چه وضع و حالی داشته است.

ای. تی. بل



دربارهٔ یک مسأله از کتاب هندسهٔ عملی ابوالوفاء بوزجانی

● دکتر احمد شرف‌الدین

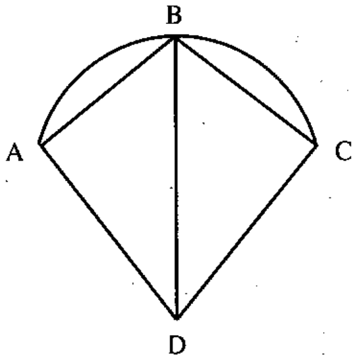
«ابوالوفاء بوزجانی» ریاضیدان و منجّم برجسته در قرن چهارم هجری است. «جورج سارتن» دانشمند بزرگ که تاریخ علم را به‌صورت علمی مستقل عرضه کرد و کرسی تاریخ علم را در جهان، برای اوّلین بار تأسیس نمود، در کتاب خود، «مقدمه‌ای بر تاریخ علم»، تاریخ علم را به عصرهای پنجاه ساله تقسیم می‌کند و در هر عصر، کوششهای علمی را که در جهان انجام گرفته، شرح می‌دهد. وی هفت عصر را به‌نام دانشمندان ایرانی نام نهاده است، بدین‌قرار:

عصر جابربن‌حیان (نیمهٔ دوم سدهٔ هشتم میلادی)، عصر خوارزمی (نیمهٔ اوّل سدهٔ نهم)، عصر رازی (نیمهٔ دوم سدهٔ نهم)، عصر مسعودی (نیمهٔ اوّل سدهٔ دهم)، عصر ابوالوفاء (نیمهٔ دوم سدهٔ دهم)، عصر بیرونی (نیمهٔ اوّل سدهٔ یازدهم)، عصر عمر خیّام (نیمهٔ دوم سدهٔ یازدهم).

از این‌که یک عصر از تاریخ علم، به ابوالوفاء نسبت داده شده است، شایستگی او را درمی‌یابیم. از جملهٔ آثار ابوالوفاء، کتاب «هندسهٔ عملی» اوست که در آن، ابتکارهای جالبی به‌کار برده است. در سطور زیر، یکی از مسائل کتاب ابوالوفاء و نکتهٔ جالبی را که در حلّ آن درنظر گرفته و مورد عنایت قرار نگرفته است، شرح می‌دهیم.

مسأله. تعیین مرکز یک کمان از دایره

حل. کمان AC از دایره را درنظر گرفته، وسط آن را B می‌نامیم. سپس از نقطهٔ A عمودی بر خط AB و از نقطهٔ C عمودی بر خط CB اخراج می‌کنیم. این دو عمود، در نقطه‌ای مانند D یکدیگر را قطع می‌کنند. وسط پاره‌خط DB مرکز مطلوب است.



استاد ارجمند، جناب آقای «ابوالقاسم قربانی» که با همکاری آقای «محمدعلی شیخان»، کتاب بوزجانی نامه را نوشته‌اند، در صفحهٔ ۳۴ کتاب مذکور، پس از ذکر مسألهٔ بالا تبصرهٔ مذکور در زیر را اضافه کرده‌اند.

تبصره ـ مؤلّف چنین نوشته؛ ولی بهتر است نقطهٔ B را به‌طور دلخواه اختیار کرد.

توضیح دربارهٔ حلّ ابوالوفاء. این‌که ابوالوفاء نقطهٔ B را وسط کمان AC اختیار می‌کند، برای آن است که جای مرکز کمان، عملاً دقیقتر تعیین شود. ما در سطرهای زیر، دربارهٔ این ابتکار ابوالوفاء توضیح می‌دهیم:

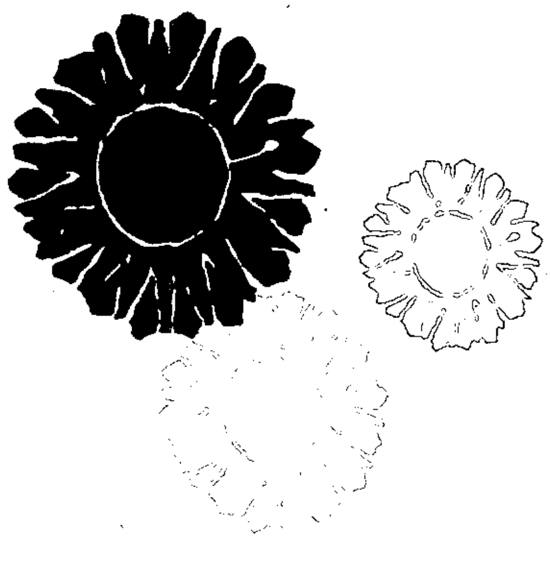
در حلّ مذکور در بالا، از نظر اینجانب، منظور ابوالوفاء از وسط کمان AC دقیقاً وسط کمان AC نیست؛ بلکه منظور او، نقطه‌ای است از کمان AC که به‌نظر، وسط کمان AC می‌نماید. در این مورد توضیح می‌دهیم:

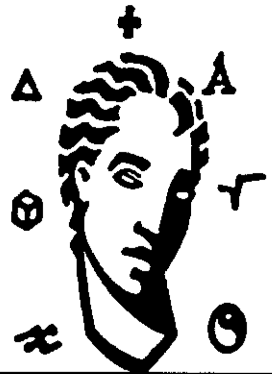
الف. اگر نقطهٔ B دقیقاً وسط کمان AC باشد، پس عمودمنصّف پاره‌خط AC معلوم است و لذا نقطهٔ D با رسم فقط عمود AD یا عمود CD معلوم می‌شود و احتیاج به رسم هر دو عمود نیست.

ب. اکنون بررسی کنیم که چرا ابوالوفاء نقطهٔ «وسط» کمان را برای شروع ترسیمها انتخاب نموده و نقطهٔ دیگری از کمان AC را برای شروع ترسیمها اختیار نکرده است.

اگر به‌جای وسط کمان AC، نقطهٔ دیگری چون M بر کمان AC اختیار کنیم، طول یکی از دو پاره‌خط MA و MB از دیگری کوچکتر می‌شود ؛ اما پاره‌خط کوچک خطی را که به آن متکی است، به‌طور دقیق مشخص نمی‌کند (زیرا اگر از یک خط d دو نقطهٔ آن که به هم نزدیکند، در دسترس باشد، وضعیت آن خط، به‌طور دقیق مشخص نمی‌شود ؛ بعکس، اگر از یک خط d دو نقطهٔ آن که از هم دورند معلوم باشد، وضعیت خط، دقیقتر معلوم می‌شود).

به اختصار آن‌که ابوالوفاء نقطهٔ وسط کمان (منظور نقطه‌ای است که به‌نظر وسط کمان می‌نماید) را برای شروع ترسیمها انتخاب می‌کند تا جای مرکز کمان، عملاً دقیقتر تعیین شود.





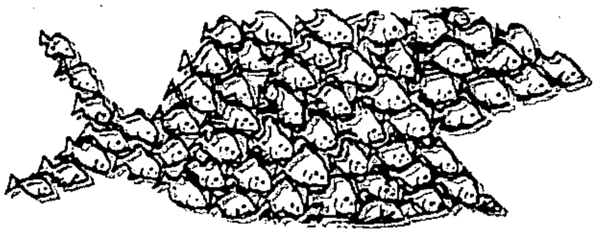
تفریح اندیشه ۳

آیا می‌توان مربع بالا را با اولین ۹ عدد اول :
۱ و ۲ و ۳ و ۵ و ۷ و ۱۱ و ۱۳ و ۱۷ و ۱۹ چنان پر کرد که مربع جادویی شود. یعنی مجموع عددهای هر سطر، هر ستون و هر قطر برابر باشند؟

نکته ـ مؤلف کتاب ۱ را عدد اول دانسته است. حال اینکه می‌دانیم ۱ عدد اول نیست، و نخستین عدد اول ۲ می‌باشد. اما این مطلب، به درستی مسأله‌ها لطمه‌ای نمی‌زند. مترجم

● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمه سیمین‌دخت ترکپور

جواب در صفحهٔ ۸۸



جزء صحیح

(قسمت سوّم)

● علی حسن زاده ماکویی

ب ـ چند مثال، در مورد نابرابری جزء صحیح دار

۱. مجموعهٔ جواب نابرابری $|2-[x+2]|\le 1$ در دامنهٔ Z چند عضو دارد؟

حل: $-1\le[x+2]-2\le 1$ یا $-1\le[x]\le 1$

$[x]\le 1\Rightarrow x<2\ ,\ [x]\ge -1\Rightarrow x\ge -1\Rightarrow -1\le x<2$

$\Rightarrow n=2-(-1)=3\ ,\ x\in\{-1,0,1\}$

۲. مجموعهٔ جواب نابرابری $[2x+1]\le -4$ کدام است؟

۱) $(-\infty,-3]$ ۲) $(-\infty,-2]$

۳) $(-\infty,-2)$ ۴) $(-\infty,-3)$

حل: گزینهٔ سوّم صحیح است.

$[2x+1]\le -4\Rightarrow 2x+1<-3$ یا $x<-2\Rightarrow x\in(-\infty,-2)$

۳. در دامنهٔ $(0,\pi)$ مجموعهٔ جواب نابرابری $0\le[\cot x]<2$ کدام است؟

حل: $[\cot x]=0\Rightarrow\ 0\le\cot x<1\Rightarrow\frac{\pi}{4}<x\le\frac{\pi}{2}$

$[\cot x]=1\Rightarrow\ 1\le\cot x<2\Rightarrow \operatorname{Arc}\cot 2<x\le\frac{\pi}{4}$

۴. مجموعهٔ جواب نابرابری $[|x-1|]<2$ کدام است؟

۱) $[-2,-1]$ ۲) $(-1,3)$

۳) $(-2,2)$ ۴) $[1,2)$

حل: گزینهٔ دوم صحیح است.

$|1-x|<2\Rightarrow -2<1-x<2$ یا $-3<-x<1$ یا $x\in(-1,3)$

۵. به ازای کدام مجموعهٔ m رابطهٔ $x^2-3x-[m]>0$ همواره برقرار است.

۱) $(-2,3)$ ۲) $(-1,2)$

۳) $(-\infty,2)$ ۴) $(-\infty,-2)$

حل: گزینهٔ چهارم صحیح است.

$\Delta<0$ یا $9+4[m]<0\Rightarrow[m]<-\frac{9}{4}$

$\Rightarrow m<-۲\Rightarrow m\in(-\infty,-۲)$

پ ـ حدّ تابعهایی که دارای جزء صحیح هستند

یادآوری: تابع، $y=[f(x)]$ وقتی $x\to x_۱$ و $x_۱\in\mathbb{R}$ دارای حدّ است که $f(x_۱)\notin Z$ و یا $f(x_۱)\in\mathbb{R}-Z$. به‌عنوان مثال، تابع $\left[\frac{۲x+۴}{۵}\right]$ وقتی که $x\to ۳$ فاقد حد است؛ زیرا $f(۳)=[۲]=۲\in Z$.

به مثالهای زیر توجه کنید.

مقدار هریک از عبارتهای زیر را معین کنید.

۱. $\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۳}}[۳x-۱]$

حل:

$$x\to\frac{۱^-}{۳}\ ,\ x=\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{n}\ ,$$

$$L_۱=\lim_{x\to\frac{۱^-}{۳}}[۳x-۱]=\lim_{n\to+\infty}\left[-\frac{۳}{n}\right]=-۱$$

$$x\to\frac{۱^+}{۳}\ ,\ x=\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{n}\ ,$$

$$L_۲=\lim_{x\to\frac{۱^+}{۳}}[۳x-۱]=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{۳}{n}\right]=۰$$

تابع $[۳x-۱]$ وقتی که $x\to\frac{۱}{۳}$ فاقد حد است. زیرا $L_۱\neq L_۲$.

۲. $L=\lim\limits_{x\to\frac{۲}{۳}}\big([x+۲].[۱-x]\big)$

حل:

$$L=\lim_{x\to\frac{۲}{۳}}\big(۲+[x]\big).\big(۱+[-x]\big)$$

$$\lim_{x\to\frac{۲}{۳}}[x]=۰\ \text{و}\ \lim_{x\to\frac{۲}{۳}}[-x]=-۱\Rightarrow L=(۲+۰)(۱-۱)=۰$$

۳. $\lim\limits_{x\to۵}\frac{([x])^۲-۲۵}{x^۲-۲۵}$

حل:

$$L_۱=\lim_{x\to۵^-}\frac{([x])^۲-۲۵}{x^۲-۲۵}=\lim_{x\to۵^-}\frac{۴^۲-۲۵}{x^۲-۲۵}$$

$$=\lim_{x\to۵^-}\frac{-۹}{x^۲-۲۵}=+\infty$$

$$L_۲=\lim_{x\to۵^+}\frac{([x])^۲-۲۵}{x^۲-۲۵}=\lim_{x\to۵^+}\frac{۲۵-۲۵}{x^۲-۲۵}=۰$$

تابع حد ندارد؛ زیرا $L_۱\neq L_۲$.

۴. $\lim\limits_{x\to۴}\frac{[x-۳]+x-۵}{x^۲-۱۶}$

حل:

$$L_۱=\lim_{x\to۴^-}\frac{[x-۳]+x-۵}{x^۲-۱۶}=\lim_{x\to۴^-}\frac{۰+x-۵}{x^۲-۱۶}=+\infty$$

$$L_۲=\lim_{x\to۴^+}\frac{[x-۳]+x-۵}{x^۲-۱۶}=\lim_{x\to۴^+}\frac{۱+x-۵}{x^۲-۱۶}$$

$$=\lim_{x\to۴^+}\frac{۱}{x+۴}=\frac{۱}{۸}$$

تابع مفروض، وقتی که $x\to۴$ فاقد حد است؛ زیرا، $L_۱\neq L_۲$.

۵. تحقیق کنید که:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}[\cos x]=-۱\ ,\ \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^-}[\cos x]=۰ \qquad (۱)$$

$$\lim_{x\to۰^+}[\sin x]=۰\ ,\ \lim_{x\to۰^-}[\sin x]=-۱ \qquad (۲)$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}[\cot x]=-۱\ ,\ \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^-}[\cot x]=۰ \qquad (۳)$$

$$\lim_{x\to۱^+}[\log x]=۰\ ,\ \lim_{x\to۱^-}[\log x]=-۱ \qquad (۴)$$

یادآوری می‌شود که هرگاه (ε) یک عدد حقیقی مثبت بسیارکوچکی فرض شود، داریم:

$$x=۱+\varepsilon\Rightarrow\ ۰<\log x<۱\Rightarrow[\log x]=۰$$

و

$$x=۱-\varepsilon\Rightarrow\ -۱<\log x<۰\Rightarrow[\log x]=-۱$$

$x=1 \Rightarrow [\log x]=0$

۶. مقدار $\lim\limits_{x\to 2^-}[1-2x]$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -3 ۳) -4 ۴) موجود نیست

حل: گزینهٔ دوم صحیح است.

$$x=2-\varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to 2^-}[1-2x]=\lim_{\varepsilon\to 0^+}[1-4+2\varepsilon]$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}[-3+2\varepsilon]=-3$$

۷. مقدار $a>0$ و $\lim\limits_{x\to 0^+}(a^{[x]}-2)$ کدام است؟

۱) -2 ۲) 2 ۳) 1 ۴) -1

حل: گزینهٔ چهارم صحیح است.

$$\lim_{x\to 0^+}[x]=0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+}(a^{[x]}-2)=(1-2)=-1$$

۸. مقدار $L=\lim\limits_{x\to -2^+}\left(|x|-[x]\right)$ کدام است؟

۱) 4 ۲) 3 ۳) -2 ۴) -1

حل: گزینهٔ اول صحیح است.

$$\lim_{x\to -2^+}[x]=-2\ ,\quad \lim_{x\to -2^+}|x|=2\ ,\quad L=2-(-2)=4$$

۹. مقدار $L=\lim\limits_{x\to 1^-}\left[x+1-[1-2x]\right]$ کدام است؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 4

حل: گزینهٔ دوم صحیح است.

$$f(x)=\left[x+1-[1-2x]\right]=[x+1]-[1-2x]$$
$$=[x]-[-2x]$$
$$L=\lim_{x\to 1^-}f(x)=0-(-2)=2$$

۱۰. مقدار $L=\lim\limits_{x\to \pi^+}[2+\sin x]$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

حل: گزینهٔ سوم صحیح است.

$$L=\lim_{x\to \pi^+}\left(2+[\sin x]\right)=2-1=1$$

ت ـ پیوستگی تابعهایی که دارای جزء صحیح هستند

تابع، $y=[f(x)]$ در دامنهٔ $f(x)\in \mathbb{R}-\mathbb{Z}$ پیوسته است.

چند مثال

پیوستگی تابعهای زیر را در نقطهٔ مفروض بررسی کنید.

۱. $n\in \mathbb{Z}$ و $y=[x+n]-[x]$ در نقطهٔ $x=x_1\in \mathbb{R}$

حل: $n\in \mathbb{Z}\Rightarrow y=[x]+n-[x]\Rightarrow y=n$

تابع در دامنهٔ $\mathbb{R}$ پیوسته است.

۲. $f(x)=\begin{cases}[x]\ , & x<2\\ 2x-3\ , & x>2\end{cases}$ و $f(2)=-3$ و $x=2$

حل:

$$L_1=\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}[x]=1\ ,$$
$$L_2=\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}(2x-3)=1$$

$L_1=L_2\neq f(2)\Rightarrow$ تابع پیوسته نیست.

۳. تابع $f(x)=\begin{cases}\mathrm{Sgn}(x+1)\ , & x<2\\ [mx+2]\ , & x=2\\ |x-3|\ , & x>2\end{cases}$ را در نظر می‌گیریم.

مجموعهٔ m را چنان معین کنید که $y=f(x)$ در نقطهٔ $x=2$ پیوسته باشد.

یادآوری: تابع $g(x)=\mathrm{Sgn}x$ که به تابع علامت مشهور است، به‌صورت زیر تعریف می‌شود :

$$g(x)=\begin{cases}-1\ , & x<0\\ 0\ , & x=0\\ 1\ , & x>0\end{cases}$$

حل:

$$L_1=\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim \mathrm{Sgn}(3)=1\ ,$$
$$L_2=\lim_{x\to 2^+}f(x)=|-1|=1$$

$f(2)=[2m]+2=1$ یا $[2m]=-1\Rightarrow -1\leq 2m<0$

$$\Rightarrow m\in\left[-\frac{1}{2},0\right)$$

۴. تابع $f(x)=\frac{x^{۲}}{x-[x]}$ در کدام مجموعه پیوسته است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}-\{۱\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{۰\}$ ۴) $\mathbb{R}-Z$

حل: گزینهٔ چهارم صحیح است.

شرط پیوستگی $\rightarrow x-[x]\neq ۰$ یا $[x]\neq x \Rightarrow x\notin Z$

۵. تابع $f(x)=x-[x]+\sin\left(\frac{\pi}{۲}[x]\right)$ را در نظر می‌گیریم.

الف. نمودار $f(x)$ را در بازهٔ $x\in[۰,۶]$ رسم و تحقیق کنید که $f(x)$ متناوب بوده و دورهٔ تناوب آن $T=۴$ است.

ب. تعیین کنید $f(x)$ در بازهٔ $[۳,۶]$ در چند نقطه ناپیوسته است.

حل: الف. $۰\leq x<۱\Rightarrow[x]=۰\Rightarrow f(x)=x$

$۱\leq x<۲\Rightarrow[x]=۱\Rightarrow f(x)=x-۱+\sin\frac{\pi}{۲}=x$

$۲\leq x<۳\Rightarrow[x]=۲\Rightarrow f(x)=x-۲+\sin\pi=x-۲$

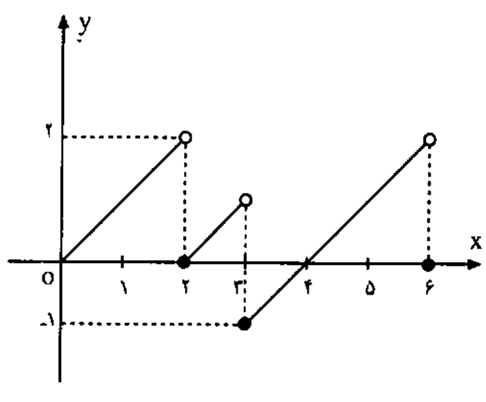
$۳\leq x<۴\Rightarrow[x]=۳$,

$f(x)=x-۳+\sin\frac{۳\pi}{۲}=x-۴$

$۴\leq x<۵\Rightarrow[x]=۴\Rightarrow f(x)=x-۴+\sin۲\pi=x-۴$

$۵\leq x<۶\Rightarrow[x]=۵\Rightarrow f(x)=x-۵+\sin\frac{۵\pi}{۲}=x-۴$

$x=۶\Rightarrow[x]=۶\Rightarrow f(x)=۰$



$f(x+۴)=x+۴-[x+۴]+\sin(\frac{\pi}{۲}[x+۴])$

$=x-[x]+\sin(\frac{\pi}{۲}[x])=f(x)$

ب. تابع در بازهٔ $[۳,۶]$ در نقطهٔ $x=۶$ ناپیوسته است. درنتیجه، در بازهٔ مزبور، فقط در یک نقطه ناپیوسته می‌باشد. توجه دارید که $f(x)$ در نقطهٔ $x=۳$ پیوستگی راست دارد.

تمرین

۱. مقدار $\lim_{x\to۲^+}[۳x+۱]$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۲ ۴) ۳

۲. مقدار $\lim_{x\to۳^-}[۲x+۳]$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۴ ۴) ۶

۳. مقدار $\lim_{x\to۲^-}([۳-x]+x^{۲}+۲x)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۸ ۴) ۹

۴. مقدار $\lim_{x\to۳^+}([۲-x]+۵x^{۲}+۳)$ کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۴۰ ۳) ۴۵ ۴) ۴۶

۵. مقدار $\lim_{x\to۳^+}\frac{[۲x-[x+۳]]}{x-۳}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) -۲

۶. مقدار $\lim_{x\to۳^+}([x]+Sgn(x-۲)+x)$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) هیچ‌کدام

۷. مقدار $\lim_{x\to\frac{۱}{۴}}(۳x+[x]+Sgn(۲x-۱))$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۸. در کدام‌یک از مجموعه‌های زیر، تابع $f(x)=\frac{۳x+۱}{[x]-۱}$ و $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ پیوسته است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}-\{۱\}$ ۳) $\mathbb{R}-[۱,۲)$ ۴) $[۱,۲)$

۹. تابع $f(x)=[x]-[x-۲]$ و $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ در کدام‌یک از مجموعه‌های صفحه بعد پیوسته است؟

۱) $\mathbb{R}-Z$ ۲) $\mathbb{R}$ ۳) $\mathbb{R}^{+}$ ۴) $\mathbb{R}^{-}$

۱۰. تابع $\begin{cases} \mathrm{Sgn}(\sin x) , & x>\pi \\ [\sin x] , & x<\pi \\ ۰ , & x=\pi \end{cases}$ در نقطهٔ $x=\pi$ چگونه است؟

۱) دارای حد است ۲) پیوستگی چپ دارد

۳) پیوستگی راست دارد ۴) پیوسته است

۱۱. مجموعه نقطه‌های ناپیوستگی تابع

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و $f(x)=[۲x]-|x-۲|$

کدام است؟

۱) $\{x|x\in Z\}$ ۲) $\{x|\frac{x}{۲}\in Z\}$

۳) $\{x|۲x\in Z\}$ ۴) $\{x|x\in R-Z\}$

۱۲. مجموعهٔ نقطه‌های ناپیوستگی تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و $f(x)=\dfrac{۲x-۷}{[x]-۳}$

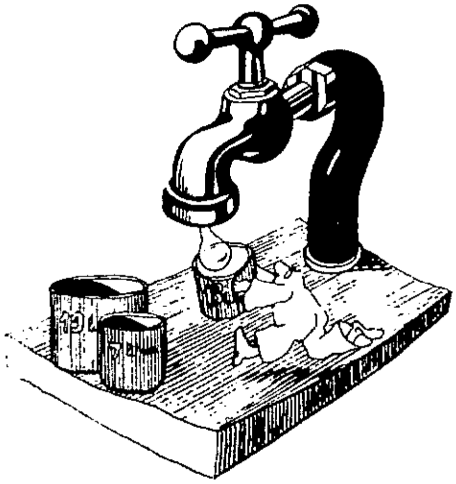
کدام است؟

۱) $[۳,۴)$ ۲) $(۳,۴]$ ۳) $\{۳\}$ ۴) $\{۳,۴\}$

پاسخ تمرینها

شماره	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
پاسخ	۲	۱	۴	۴	۱	۳	۳	۳	۲	۲	۳	۱

تفریح اندیشه ٤



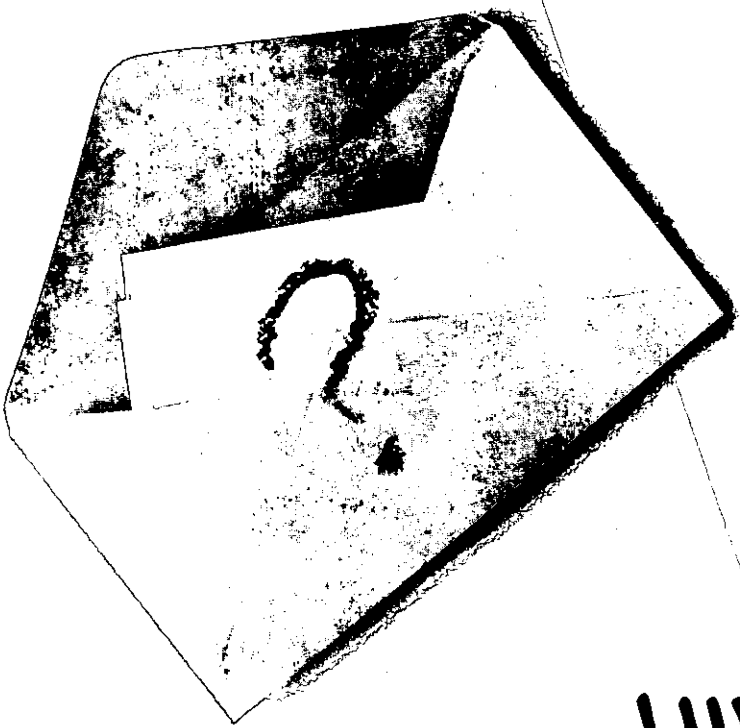
مهرداد جلوی یک شیر آب است. او سه ظرف خالی ۱۹ لیتری، ۱۳ لیتری و ۷ لیتری در اختیار دارد.

مهرداد می‌خواهد در هر یک از دو ظرف اول ۱۰ لیتر آب داشته باشد.

برای انجام این کار چند عمل لازم است؟ ضمن آنکه حتی یک قطره آب نباید به خارج از ظرفها بریزد.

● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمه سیمین‌دخت ترکپور

جواب در صفحهٔ ۸۸



آنچه از دوست رسد...

با عرض سلام، خدمت همگی دانش‌آموزان و خوانندگان محترم مجلهٔ برهان

نامه‌های محبّت‌آمیز و پرمحتوای شما را دریافت کردیم! خداوند بزرگ را بسیار سپاس می‌گوییم که توانسته‌ایم هر چند گامی کوچک در جهت بالا بردن سطح کیفی درس ریاضی شما برداریم و تا اندازه‌ای شما را به ریاضیات علاقه‌مند سازیم. در این شمارهٔ مجله و پس از این، حلّ مسائل و پاسخ پرسشهای چهارگزینه‌ای را با هم در مجله چاپ می‌کنیم.

نام تعدادی از خوانندگان محترم مجلهٔ ریاضی برهان که برای ما نامه ارسال کرده‌اند:

آقایان: مجتبی دهقانی (میبد یزد)، قادر فرهودی (خلخال)، محمّدحسین شاهزمانیان (اصفهان)، حمزه علیزاده (قائم‌شهر)، عبدالعلی و ابوذر بازیاری (کازرون)، فریدون خسروی (بوکان)، مصطفی نبی‌پور (تهران)، احمد فضلی (شیراز)، سامان جهانی (تهران)، مهدی قربانی (ماهدشت کرج)، علیرضا قزلسفلو (مینودشت)، همکار محترم آقای بهمن رحمانی (زنجان)، محمدهادی بابایی (گیلان)، علی دولتی (شیراز)، رضا خواجوی‌نیا (اصفهان) و خانمها: مهسا همتی (سمنان) و زینب طاهری (مشهد مقدس).

از همهٔ شما عزیزان، به پاس ارسال مقاله، مسائل همراه با حل و پیشنهادها و انتقادهای سازنده سپاسگزاریم. در صورت امکان، از این مسأله‌ها در قسمت مسأله برای حل و مسائل مسابقه‌ای مجلّه استفاده خواهیم کرد و مقاله‌های شما را پس از تصویب در هیأت تحریریه، چاپ خواهیم کرد.

آقای علی‌اصغر قائمی (بیجار)، امتناع تثلیث زاویه به کمک خط غیرمدرّج و پرگار اثبات شده است. جنابعالی می‌توانید به مقالهٔ تثلیث زاویه در برهان ۲۵ رجوع کنید.

آقای داود نبی‌زاده (لارستان) نشانی چند مجلهٔ ریاضی معتبر در زیر آمده است:

1) The American Mathematical Monthly

Department of mathematics, Indiana university

Bloomington, TN 47405

John. Ewing, Editor

2) MATHEMATICS MAGAZINE

THE MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA

1529 Eighreenth Street, NW

Washington, D. C. 20036

3) The Mathematical gazette

259 London Road, Leicester LE2 3BE,

telephone 0116 2703877

آقای امیرپاشا شیرازی‌نیا (مشهد مقدس)، از آن‌جا که مقالهٔ ترجمه شدهٔ شما تحت عنوان «$۲=۱$» می‌تواند مورد استفادهٔ علاقه‌مندان به ریاضی قرار گیرد، بنابراین، قسمتهایی از آن را در زیر می‌آوریم. از خوانندگان محترم تقاضا می‌کنیم پس از مطالعهٔ هر قسمت، اشتباه اثبات را بیابند.

۱ـ اثبات به کمک جبر

فرض کنید $x=۱$، پس $x^۲-x=x^۲-۱$، بنابراین $x(x-۱)=(x-۱)(x+۱)$، با تقسیم دو طرف برابری فوق بر $(x-۱)$ خواهیم داشت: $x=x+۱$ و در نتیجه $۲=۱$.

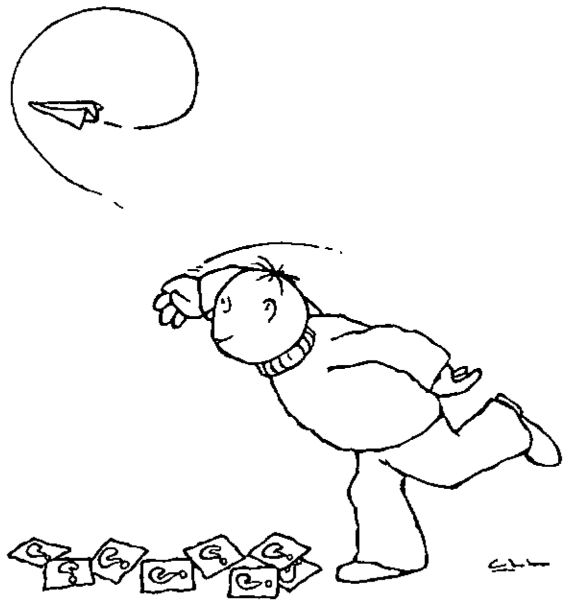
۲ـ اثبات به کمک لگاریتم

داریم $۲\geq۱$، بنابراین داریم: $۱\times\log_{۱۰}^{(\frac{۱}{۲})}\leq ۲\times\log_{۱۰}^{(\frac{۱}{۲})}$

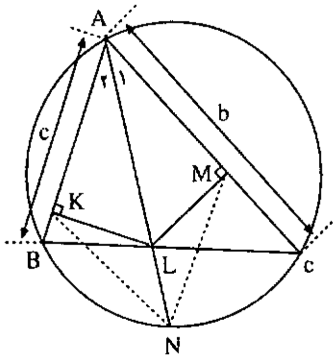
$$\Rightarrow \log_{۱۰}^{(\frac{۱}{۲})}\leq \log_{۱۰}^{(\frac{۱}{۲})^۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}\leq\frac{۱}{۴}\Rightarrow ۲\geq ۴\Rightarrow ۱\geq ۲$$

در نتیجه $۲=۱$.



حل مسألهٔ مسابقه‌ای برهان ۲۸



فرض $\left\{\begin{array}{l} AM=AK \\ \hat{A}_۱=\hat{A}_۲=\frac{\hat{A}}{۲}\end{array}\right.$

برهان:

$AL\times LN=BL\times LC$

(خاصیت وترهای متقاطع)

$$\Rightarrow AL.AN=AL^۲+BL.LC=bc$$

$$\Rightarrow AL.AN=bc \quad (۱)$$

دو طرف رابطهٔ (۱) را در $\cos\frac{A}{۲}$ ضرب می‌کنیم.

$$AL.AN.\cos\frac{A}{۲}=bc\cos\frac{A}{۲}$$

$$\Rightarrow AN.AM=bc\cos\frac{A}{۲}$$

دو طرف را در $۲\sin\frac{A}{۲}$ ضرب می‌کنیم.

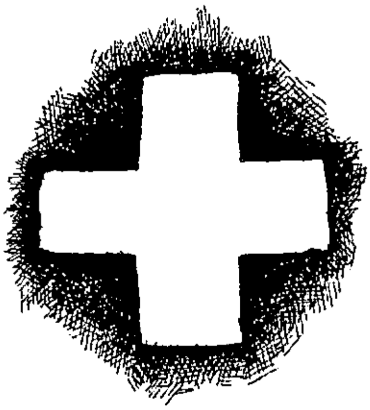
$$AN.AM.۲\sin\frac{A}{۲}=bc\sin A$$

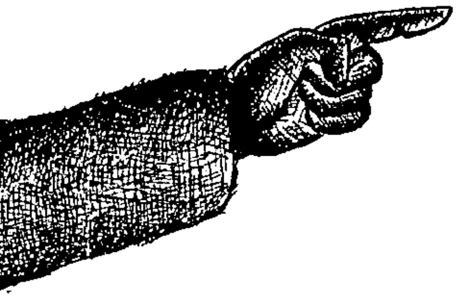
$$\Rightarrow ۲S_{\overset{\Delta}{ABC}}=۲S_{AKMN}\Rightarrow S_{ABC}=S_{AKMN}$$

مسألهٔ مسابقه‌ای

اگر $b>۱$ عددی طبیعی باشد و m و n نیز اعداد طبیعی، حکم زیر را در صورت درستی اثبات و یا در غیر این‌صورت با یک مثال نقض رَد کنید:

$$(b^m-۱)|(b^n-۱)\Rightarrow m|n$$





تعیین علامت عبارتهای جبری، حلّ نامعادله ها

قسمت دوم

● هوشنگ شرقی

حلّ نامعادله‌های درجهٔ دوم، کسری و درجه‌های بالاتر

اکنون می‌توان کاربرد تعیین علامت را در حلّ نامعادله‌های کسری، درجهٔ دوم و بالاتر مشاهده کرد. فرض کنید می‌خواهیم نامعادلهٔ $P(x) > ۰$ را حل کنیم. ($P(x)$ عبارتی جبری برحسب x می‌باشد) کافی است که $P(x)$ را تعیین علامت نموده و مجموعهٔ مقادیر x را که به‌ازای آنها $P(x)$ مثبت می‌شود، به‌عنوان جواب نامعادله درنظر گرفت.

نتیجه : برای حلّ نامعادلهٔ $P(x)>Q(x)$ که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ عبارتهایی جبری برحسب x هستند، کافی است همهٔ عبارتها را به یک طرف نابرابری ببریم ؛ یعنی یکی از دو صورت $P(x) - Q(x) > ۰$ یا $Q(x) - P(x) < ۰$ را بسازیم. اکنون می‌توانیم عبارت جبری $P(x) - Q(x)$ یا $Q(x) - P(x)$ را تعیین علامت نموده و مجموعهٔ مقادیر x را که خواستهٔ مسأله را برآورده می‌کند، به‌عنوان جواب نامعادله، درنظر بگیریم.

مثال: نامعادلهٔ $\frac{x-۲}{x-۳} \geq \frac{x+۲}{x-۴}$ را حل کنید.

حل: ابتدا می‌نویسیم $\frac{x+۲}{x-۴} - \frac{x-۲}{x-۳} \geq ۰$، اکنون کافی است عبارت جبری سمت چپ نابرابری را ساده و به حاصلضرب تبدیل کنیم و آن را تعیین علامت نموده و مجموعه مقادیر x را که این عبارت به‌ازای آنها مثبت یا صفر می‌شود، انتخاب کنیم.

$$P = \frac{(x+۲)(x-۳) - (x-۴)(x-۲)}{(x-۴)(x-۳)}$$

$$= \frac{x^۲ - x - ۶ - (x^۲ - ۶x + ۸)}{(x-۴)(x-۳)}$$

$$P = \frac{۵x - ۱۴}{(x-۴)(x-۳)} \geq ۰ \quad ۵x - ۱۴ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۱۴}{۵},$$

$$x - ۴ = ۰ \Rightarrow x = ۴ \ ; \ x - ۳ = ۰ \Rightarrow x = ۳$$

x	$-\infty$		$\frac{۱۴}{۵}$		۳		۴		$+\infty$
$۵x-۱۴$		−	۰	+		+		+	
$x-۴$		−		−		−	۰	+	
$x-۳$		−		−	۰	+		+	
P		−	۰	+	∥	−	∥	+	

اکنون از روی این جدول، مشخص است که به‌ازای xهای بزرگتر یا مساوی $\frac{14}{5}$ و کوچکتر از ۳ و یا xهای بزرگتر از ۴، P مثبت یا صفر است و این، همان مجموعهٔ جواب مسأله است (چون ما می‌خواهیم $P \ge 0$ باشد)؛ یعنی مجموعهٔ جواب نامعادله، به‌صورت زیر است:

$\frac{14}{5} \le x < 3$ یا $x > 4$

مثال: مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $x^3 < 4x$ را به‌دست آورید.

حل: ابتدا می‌نویسیم $x^3 - 4x < 0$ و بعد از تجزیه عبارت سمت چپ، خواهیم داشت:

$$x(x^2-4)<0 \Rightarrow x(x-2)(x+2)<0$$

و با تعیین علامت عبارت $A = x(x-2)(x+2)$ می‌توان مجموعهٔ مقادیر x را که به‌ازای آنها $A<0$ می‌شود، به‌عنوان مجموعهٔ جواب نامعادله درنظر گرفت:

$$x=0 \quad x-2=0\Rightarrow x=2 \quad x+2=0\Rightarrow x=-2$$

x	$-\infty$ تا -2	-2 تا 0	0 تا 2	2 تا $+\infty$
x	−	−	+	+
x−2	−	−	−	+
x+2	−	+	+	+
A	−	+	−	+

با توجه به جدول، مجموعهٔ جواب نامعادله، به‌صورت زیر مشخص می‌شود: $x<-2$ یا $0<x<2$

مثال: نامعادلهٔ مضاعف $-1 \le \frac{x+2}{2x-3} \le 1$ را حل کنید.

حل: درواقع، باید دستگاه نامعادله‌های زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{2x-3} \le 1 \\ \dfrac{x+2}{2x-3} \ge -1 \end{cases}$$

برای حلّ این دستگاه، جواب هریک از نامعادله‌ها را به روش گفته شده، به‌ترتیب زیر می‌یابیم:

$$1)\ \frac{x+2}{2x-3} \le 1 \Rightarrow \frac{x+2}{2x-3} - 1 \le 0 \Rightarrow \frac{x+2-(2x-3)}{2x-3} \le 0$$

$\Rightarrow \frac{-x+۵}{۲x-۳} \le ۰$

$-x+۵=۰ \Rightarrow x=۵ \;;\; ۲x-۳=۰ \Rightarrow x=\frac{۳}{۲}$

x	$-\infty$ تا $\frac{۳}{۲}$	$\frac{۳}{۲}$ تا ۵	۵ تا $+\infty$
$-x+۵$	+	+	−
$۲x-۳$	−	+	+
$P_۱$	−	+	−

از روی این جدول، مشخص است که نابرابری $P_۱ \le ۰$ که موردنظر مسأله است، به‌ازای $x < \frac{۳}{۲}$ یا $x \ge ۵$ به‌دست می‌آید، که همان مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ اوّل می‌باشد.

$۲) \frac{x+۲}{۲x-۳} \ge -۱ \Rightarrow \frac{x+۲}{۲x-۳}+۱ \ge ۰ \Rightarrow \frac{x+۲+۲x-۳}{۲x-۳} \ge ۰$

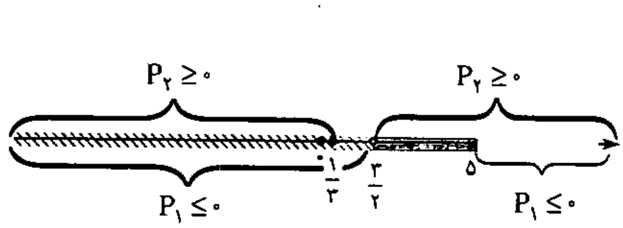
$\Rightarrow \frac{۳x-۱}{۲x-۳} \ge ۰$

$۳x-۱=۰ \Rightarrow x=\frac{۱}{۳} \;;\; ۲x-۳=۰ \Rightarrow x=\frac{۳}{۲}$

x	$-\infty$ تا $\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$ تا $\frac{۳}{۲}$	$\frac{۳}{۲}$ تا $+\infty$
$۳x-۱$	−	+	+
$۲x-۳$	−	−	+
$P_۲$	+	−	+

از روی این جدول نیز معلوم است که نابرابری $P_۲ \ge ۰$ که موردنظر نامعادله می‌باشد، به‌شرط $x > \frac{۳}{۲}$ یا $x \le \frac{۱}{۳}$ حاصل می‌شود.

اکنون باید مجموعهٔ جواب مشترک دو نامعادلهٔ $P_۱ \le ۰$ و $P_۲ \ge ۰$ را به‌دست آوریم که این کار را می‌توانیم به کمک محور عددهای حقیقی و به‌صورت زیر انجام دهیم :



از روی این نمودار، مجموعهٔ جواب مشترک دو نامعادله، به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$x \le \frac{۱}{۳}$ یا $x \ge ۵$

روش دیگری که برای حلّ این نوع مسائل می‌تواند به کار رود و دقت بیشتری هم دارد، این است که دو جدول تعیین علامت را بدون این که علامتهای آنها را درهم ضرب کنیم، زیر هم و یکجا رسم کنیم و آن‌گاه مجموعهٔ جواب مشترک دو نامعادله را روی جدول به‌دست می‌آوریم. نمودار زیر، گویای این روش است :

x	$-\infty$ تا $\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$ تا $\frac{۳}{۲}$	$\frac{۳}{۲}$ تا ۵	۵ تا $+\infty$
$-x+۵$	+	+	+	−
$۲x-۳$	−	−	+	+
$P_۱$	−	−	+	−
$۳x-۱$	−	+	+	+
$۲x-۳$	−	−	+	+
$P_۲$	+	−	+	+

با مشاهدهٔ علامتهای $P_۱$ و $P_۲$ در ستونهای مختلف، بروشنی دیده می‌شود، جایی که $P_۱$ منفی یا صفر و $P_۲$ مثبت یا صفر($P_۱ \le ۰$ و $P_۲ \ge ۰$) می‌باشند، دو فاصلهٔ $x \le \frac{۱}{۳}$ و $x \ge ۵$ می‌باشد.

روش فوق بخصوص اگر با تعداد بیشتری نامعادله‌های توأم مواجه باشیم، مناسبتر می‌باشد.

تمرین :

۱ـ هریک از نامعادله‌های زیر را حل کنید :

$۱)\; x^۲-۵x>۰$

$۲)\; ۷x^۲-x-۶\le ۰$

$۳)\; \frac{x^۲-۴}{x^۲-۱}\ge ۰$

$۴)\; \frac{(x^۲-۵x)(۴-x^۲)}{(x^۲-۹)(۴-x)}<۰$

$۵)\; \frac{x^۲+۱}{x}\ge ۲$

$۶)\; \frac{۲x+۱}{۳x-۲}\ge \frac{۳x+۱}{۴x-۳}$

$۷)\; \frac{۱}{x+۱}+\frac{۱}{x-۱}\ge \frac{۴}{x^۲-۱}$

$۸)\; x^۴+x^۲<۲$

$۹)\; \frac{x+۱}{x-۱}-\frac{x-۱}{x+۱}\ge \frac{۲}{x-۲}+\frac{۲}{x+۲}$

$۱۰)\; \frac{x^۴-۱}{x^۲-۴}\le ۱۶$

۲ـ مجموعهٔ جواب هریک از نامعادله‌های مضاعف زیر را به‌دست آورید :

$$1)\ \begin{cases} x^2 - 4x > 5 \\ x^2 + x < 0 \end{cases}$$

$$2)\ -2 < \frac{x+2}{x-2} < 2$$

$$3)\ \begin{cases} \dfrac{x+4}{x-1} > \dfrac{x-2}{x-3} \\[2ex] \dfrac{x+3}{x} < x+1 \end{cases}$$

روشهای سریع و ذهنی در حلّ نامعادله‌ها

برای آن‌که مجموعهٔ جواب یک نامعادله یا دستگاه نامعادله‌ها را با سرعت بیشتری به‌دست آوریم، روشهایی خاص وجود دارد که این موضوع، بخصوص در پاسخ‌گویی به پرسشهای چهارگزینه‌ای، حائز اهمیت ویژه‌ای است. در زیر، به تعدادی از این روشها اشاره می‌کنیم :

۱ـ تعیین علامت عبارتهای درجهٔ ۳ و بیشتر، و عبارتهای کسری در جدول یک سطری:

جدول تعیین علامت عبارتهای جبری درجهٔ سه و کسری را می‌توان در یک جدول کوچکتر خلاصه نمود و این، از حجم کار می‌کاهد و سرعت عمل را بیشتر می‌نماید. به این منظور، باید ریشه‌های کلیهٔ عبارتهای درجهٔ اوّل و دوم تشکیل‌دهندهٔ کسر یا عبارت جبری را که می‌خواهیم آن را تعیین علامت کنیم، به‌دست آوریم. آن‌گاه علامت کسر یا عبارت جبری را از ضرب علامتهای عبارتهای درجهٔ اوّل و دوم تشکیل‌دهندهٔ آن (که علامت ضریب بزرگترین درجهٔ هریک از آنها می‌باشد) به‌دست می‌آوریم. آن‌گاه در یک جدول یک سطری، همهٔ ریشه‌ها را به‌ترتیب صعودی قرار می‌دهیم و در آخرین ستون سمت راست، علامتی موافق علامت کسر یا عبارت جبری قرار می‌دهیم و علامتها را یک در میان عوض می‌کنیم، تنها روی ریشه‌های مضاعف و تکراری از مرتبهٔ زوج (یعنی دو بار یا چهار بار یا... تکراری) تغییر علامت نمی‌دهیم. مطالب گفته شده را با یک مثال روشنتر می‌کنیم.

مثال: عبارت جبری $P = \dfrac{(x-2)(4-x^2)(x^2-x)}{(x^2+x-2)(x^2-1)}$ را تعیین علامت کنید.

حل: ابتدا ریشه‌های همهٔ پرانتزها را به‌دست می‌آوریم :

$$x-2=0 \Rightarrow x=2\ ,\ \ 4-x^2=0 \Rightarrow x=\pm 2\ ,$$

$$x^2-x=0 \Rightarrow x(x-1)=0 \Rightarrow x=0\ ,$$

$$x=1\ ,\ \ x^2+x-2=0 \Rightarrow (x-1)(x+2)=0 \Rightarrow x=1\ ,$$

$$x=-2\ \ \ x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1$$

ملاحظه می‌شود که ریشه‌های عبارتهای تشکیل‌دهندهٔ کسر P، عبارت است از ۰، ۲، ۲−، ۱ و ۱−، که ریشهٔ ۲، دو بار تکرار شده (یک‌بار در معادلهٔ $4-x^2=0$ و بار دیگر در معادلهٔ $x-2=0$) و ریشهٔ ۲− نیز دو بار تکرار شده (یک‌بار در معادلهٔ $4-x^2=0$ و بار دیگر در معادلهٔ $x^2+x-2=0$) و ریشهٔ ۱ نیز سه بار تکرار شده است (یک‌بار در معادلهٔ $x^2-x=0$، بار دیگر در معادلهٔ $x^2+x-2=0$ و مرتبهٔ سوّم در معادلهٔ $x^2-1=0$) علامت کسر P نیز که از حاصلضرب علامتهای پنج عبارت در یکدیگر به‌دست می‌آید. (درواقع علامتهای ضرایب بزرگترین درجه‌های آنها)، منفی می‌باشد. بنابراین، مطابق آنچه گفته شد، جدول تعیین علامت P به‌صورت زیر می‌باشد :

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
P		+	‖	+	‖	−	‖	+	‖	−	‖	−	

همان‌گونه که ملاحظه می‌کنید، از سمت راست در جدول علامت کسر را که منفی است، گذاشته‌ایم و بعد از ۲ و ۲− که ریشه‌های دو بار تکراری هستند، تغییر علامت نداده‌ایم ؛ ولی روی ۱ که سه بار تکرار شده است، تغییر علامت داده‌ایم. همچنین روی ریشه‌های مخرج کسر (۱−، ۱ و ۲−) نیز کسر تعریف نشده می‌باشد که با علامت ∞ روی آنها مشخص شده است و روی سایر ریشه‌ها $P(0,2)$ مساوی صفر است.

مثال: کسر $A = \dfrac{(4x-x^2)(x^2+2x)}{(2x^2+x-10)(5-x)}$ را تعیین علامت کنید.

حل: به همان ترتیبی که گفته شده است، عمل می‌کنیم. علامت A مثبت است. (چرا؟)

$4x-x^2=0 \quad x(4-x)=0 \Rightarrow x=0$ یا $x=4$

$x^2-2x=0 \quad x(x+2)=0 \Rightarrow x=0$ یا $x=-2$

$$2x^2+x-10=0 \quad \Delta = 1-4(2)(-10)=81 \Rightarrow x=\frac{-1\pm 9}{4}$$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{5}{2}\ ,\ \ x_2 = 2$$

$$5 - x = 0 \Rightarrow x = 5$$

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		-2		0		2		4		5		$+\infty$
A		$-$	0	$+$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$-$	0	$+$	

مرحله‌های حلّ مسأله را یک‌بار مرور کنید. (چرا در $x=0$، A تغییر علامت نداده است؟)

مثال: نامعادلهٔ $\frac{x+2}{x-2} \geq \frac{x+3}{x-3}$ را حل کنید.

حل: با آوردن همهٔ عبارتها به سمت چپ نتیجه می‌شود :

$$\frac{x+2}{x-2} - \frac{x+3}{x-3} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x+2)(x-3)-(x-2)(x+3)}{(x-2)(x-3)} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - x - 6 - x^2 - x + 6}{(x-2)(x-3)} \geq 0 \Rightarrow \frac{-2x}{(x-2)(x-3)} \geq 0$$

اکنون عبارت $P = \frac{-2x}{(x-2)(x-3)}$ را تعیین علامت می‌کنیم (ریشه‌های عبارتهای تشکیل دهندهٔ P به‌صورت ذهنی قابل محاسبه‌اند : ۲، ۳ و ۰ و علامت P نیز منفی است).

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
P		$+$	0	$-$	|	$+$	|	$-$	

اکنون از روی این جدول پاسخ مسأله، یعنی مجموعهٔ جواب نامعادله $(P \geq 0)$ به‌صورت زیر مشخص می‌شود :

$x \leq 0$ یا $2 < x < 3$

مثال: مجموعهٔ مقادیر x را که صادق در نامعادلهٔ $x^4 > 2x^2$ هستند، به‌دست آورید.

حل: می‌توان نوشت :

$$x^4 > 2x^2 \Rightarrow x^4 - 2x^2 > 0 \Rightarrow x^2(x^2-2) > 0$$

ریشه‌های عبارتهای تشکیل‌دهندهٔ $x^2(x^2-2)$ عبارت است از صفر و $\pm\sqrt{2}$ که ریشهٔ صفر، دوبار تکراری می‌باشد (چرا؟) بنابراین، در جدول زیر، تعیین علامت آن انجام می‌شود :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$x^2(x^2-2)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

و لذا جواب نامعادله به‌صورت $x > \sqrt{2}$ یا $x < -\sqrt{2}$.

مثال: کسر $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}$ در کدام فاصلهٔ زیر، منفی است؟

۱) $(-\infty,1)$ ۲) $(2,3)$

۳) $(3,4)$ ۴) $(2,+\infty)$

کنکور تجربی ۷۰

حل: ریشه‌های عبارتهای تشکیل‌دهندهٔ این کسر، بسادگی مساوی ۱، ۲، ۳ و ۴ به‌دست می‌آیند و علامت کسر نیز مثبت است. پس بسرعت می‌توان آن را در جدول زیر تعیین علامت نمود.

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
P		$+$	0	$-$	0	$+$	|	$-$	|	$+$	

از روی این جدول، می‌توان دریافت که این کسر، در فاصله‌های $(3,4)$ و $(1,2)$ منفی می‌باشد، که درنتیجه، پاسخ صحیح تنها گزینهٔ ۳ می‌باشد.

۲ـ استفاده از نابرابریهای اتحادی زیر:

$$1)\ \left.\begin{array}{l} x^2 < a^2\ ,\ a > 0 \\ |x| < a \end{array}\right\} \Rightarrow -a < x < a$$

$$2)\ \left.\begin{array}{l} x^2 > a^2\ ,\ a > 0 \\ |x| > a \end{array}\right\} \Rightarrow x > a \ \text{یا}\ x < -a$$

مثال: نامعادلهٔ $x^2 < 4$ را حل کنید.

حل: مطابق نابرابری شمارهٔ (۱) نتیجه می‌شود :

$$-2 < x < 2$$

مثال: نامعادلهٔ $|3x-2| < 3$ را حل کنید.

حل: مطابق نابرابری شمارهٔ (۱) می‌نویسیم :

$$-3 < 3x - 2 < 3$$

اکنون ۲ واحد به دو طرف اضافه می‌کنیم :

$$-1 < 3x < 5$$

و با تقسیم دوطرف نابرابری بر سه، نتیجه می‌گیریم :

$$-\frac{1}{3} < x < \frac{5}{3}$$

مثال: مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $x^2 + 2x > 8$ را به‌دست آورید.

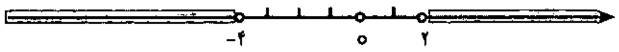
حل: ابتدا یک واحد به دوطرف نامعادله اضافه می‌کنیم :

$$x^2+2x+1>9 \Rightarrow (x+1)^2>9$$

حال، از نابرابری شمارهٔ (۲) استفاده می‌کنیم :

$$x+1>3 \text{ یا } x+1<-3 \Rightarrow x>2 \text{ یا } x<-4$$

این مجموعه، جواب نامعادله می‌باشد. به‌منظور آشنایی بیشتر، نمودار هندسی آن نیز در زیر رسم شده است :



تمرین : هریک از نامعادله‌ها و دستگاه‌های نامعادله‌های زیر را حل کنید :

۱) $x^2<16$ ۲) $x^2>9$

۳) $|x-2|<5$ ۴) $|x+1|>3$

۵) $|3x-1|>2$ ۶) $\begin{cases} x^2<4 \\ |x-1|>3 \end{cases}$

۳ـ توجه و شناسایی عبارتهای همیشه مثبت و همیشه منفی:

بسیاری از عبارتهای جبری، همواره مثبت یا همواره مثبت و صفر می‌باشند، مانند عبارتهای مربع کامل، قدرمطلقها، رادیکالهای با فرجهٔ زوج و... به نمونه‌هایی از این عبارتها که در زیر آمده‌اند، دقت کنید :

$$(x+2)^2 \,,\ (x^2-1)^4 \,,\ x^2+1 \,,\ x^4+x^2+3 \,,$$

$$|x+2| \,,\ \sqrt{x+1}$$

همچنین، همان‌طورکه می‌دانیم هر سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم که مبین آن منفی می‌باشد و ضریب x^2 آن مثبت باشد، همواره مثبت می‌باشد. نمونه‌هایی از این عبارتها نیز در زیر آمده است :

$$x^2+x+1 \,,\ 3x^2+2x+2 \,,\ 5x^2+10x+6$$

در موقع تعیین علامت و نیز حلّ نامعادله‌ها می‌توان عبارتهای همیشه مثبت را درنظر نگرفت و بدون درنظر گرفتن آنها بقیهٔ عبارت جبری را تعیین علامت کرد و این از حجم کار می‌کاهد. همچنین در موقع حلّ نامعادله‌ها می‌توان، عبارتهای همیشه مثبت را کنار گذاشت و برای مثبت یا منفی بودن عبارت جبری، سایر عبارتها را درنظر گرفت و اگر عبارتی همیشه منفی داشته باشیم (عبارت همیشه منفی از ضرب یک عبارت همیشه مثبت در یک علامت منفی حاصل می‌شود) می‌توانیم پس از درنظر گرفتن علامت آن، آن را کنار بگذاریم. با چند مثال، مسأله روشنتر می‌شود.

مثال: نامعادلهٔ $\frac{(x^2+1)(x^2-4)}{(x^2+x+1)} \le 0$ را حل کنید.

حل: x^2+1 همیشه مثبت است و مبین x^2+x+1 نیز، منفی است. $(\Delta=1-4<0)$ و لذا این عبارت نیز همواره مثبت است.

بنابراین، برای آن‌که کسر $\frac{(x^2+1)(x^2-4)}{(x^2+x+1)}$ منفی یا صفر باشد، لازم و کافی است که $x^2-4\le 0$ باشد و از آن‌جا $x^2\le 4$ و درنتیجه $-2\le x\le 2$ است.

مثال: جواب نامعادلهٔ $x^4+x^2<4x^2+4$ کدام است؟
(کنکور تجربی ۷۱)

۱) $-4<x<4$ ۲) $-2<x<2$

۳) $x>2$ یا $x<-2$ ۴) $x>4$ یا $x<-4$

حل: پس از آن‌که کلیهٔ عبارتها را به سمت چپ تساوی بردیم، نتیجه می‌شود :

$$x^4+x^2-4x^2-4<0 \Rightarrow x^4-3x^2-4<0$$

$$\Rightarrow (x^2+1)(x^2-4)<0$$

اکنون می‌بینیم که x^2+1، همواره مثبت است، پس باید $x^2-4<0$ باشد و از آن‌جا $x^2<4$ و درنتیجه : $-2<x<2$ و پاسخ صحیح گزینهٔ ۲ است.

مثال: به‌ازای کدام مجموعهٔ کسر $\frac{x^2-1}{x^2+1}$ از ۲ کمتر است؟

۱) R ۲) $\varnothing$

۳) $\{x \mid -1<x<1\}$ ۴) $\{x \mid x<-1\}$

(کنکور پیش‌دانشگاهی ریاضی ۷۶)

حل: می توان نوشت :

$$\frac{x^2-1}{x^2+1}<2 \Rightarrow \frac{x^2-1}{x^2+1}-2<0 \Rightarrow \frac{x^2-1-2x^2-2}{x^2+1}<0$$

$$\Rightarrow \frac{-x^2-3}{x^2+1}<0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+3}{x^2+1}>0 \quad \text{(با ضرب دوطرف نابرابری در یک منفی)}$$

صورت و مخرج کسر فوق همواره مثبت هستند و لذا کسر فوق، به‌ازای همهٔ مقادیر حقیقی x، همیشه مثبت است و پاسخ صحیح گزینهٔ ۱ است.

تمرین : مجموعهٔ جواب هریک از نامعادله‌های زیر را به‌دست آورید :

۱) $\frac{(x^۲+۱)(x^۲+۴)}{x^۲-۴} \le ۰$

۲) $\frac{(x^۲+۳x+۱)(۱-x^۲)}{x^۲-۴x+۴} > ۰$

۳) $\frac{(x^۲+۱)(x^۴+۱)}{(x^۴-۸۱)} < ۰$

۴) $x^۴ < x^۲$

۵) $(x-۱)^۲ > (x-۱)^۲(x-۲)$

۶) $\frac{x^۲-۵x}{x^۲+۱} > ۱$

۴ـ عبارتهایی که تنها دو ریشهٔ حقیقی دارند، به‌صورت ذهنی قابل تعیین علامت کردن هستند و نیازی به رسم جدول ندارند.

مثال: عبارت جبری $x^۲-۴x$ را تعیین علامت کنید.

حل: ریشه‌های این عبارت به‌صورت ذهنی، قابل محاسبه می‌باشند. و بسادگی به‌دست می‌آیند :

$x^۲-۴x=۰ \quad x(x-۴)=۰ \Rightarrow x=۰$ یا $x=۴$

اکنون بدون رسم جدول، می‌توان گفت بین این دو ریشه، علامت $x^۲-۴x$ منفی و خارج از فاصلهٔ این دو ریشه، عبارت منفی است ؛ یعنی اگر $۰<x<۴$ باشد $x^۲-۴x<۰$ و اگر $x>۴$ یا $x<۰$ باشد $x^۲-۴x>۰$ است. به کمک این موضوع، می‌توان جواب نامعادله‌هایی را که دو ریشهٔ حقیقی دارند، بسرعت و به‌صورت ذهنی محاسبه نمود.

مثال: جواب نامعادلهٔ $x^۲-۵x+۴<۰$ چیست؟

حل: چون مجموع ضرایب سه جملهٔ فوق، مساوی صفر است $(۱-۵+۴=۰)$ ؛ بنابراین یک ریشهٔ آن مساوی ۱ و دیگری $\frac{c}{a}$ معادله است ؛ یعنی $x'=۱$ و $x''=۴$.

اکنون بین دو ریشهٔ فوق، علامت سه جمله‌ای، مخالف علامت ضریب $x^۲$، یعنی منفی است و خارج فاصلهٔ دو ریشه مثبت است. و ما می‌خواهیم این سه جمله‌ای، منفی باشد $(x^۲-۵x+۴<۰)$ و بنابراین، بین دو ریشه جواب می‌باشد (یعنی : $۱<x<۴$).

مثال: نامعادلهٔ $\frac{x-۲}{۴-x} \ge ۰$ را حل کنید.

حل: ریشه‌های صورت و مخرج کسر ۲ و ۴ هستند و علامت کسر منفی است؟ (چرا؟)، بنابراین بین دو ریشه، علامت کسر، مثبت و خارج آن، علامت کسر، منفی است و ما می‌خواهیم کسر مثبت یا صفر باشد. پس بین دو ریشه، جواب می‌باشد ؛ یعنی $۲ \le x < ۴$. توجه کنید که علامت مساوی روی ۲ $(x \ge ۲)$ برای این است که کسر فوق می‌تواند صفر نیز باشد و چون ۴ ریشهٔ مخرج کسر می‌باشد، لذا $x \ne ۴$ است و علامت مساوی روی ۴ نیامده است. $(x<۴)$

مثال: مجموعه جوابهای نامعادلهٔ $|x|(x^۲-۳x+۲) \le ۰$ کدام است؟ (کنکور تجربی ۶۵)

۱) $[۱,۲]$ ‏ ‏ ‏ ‏ ۲) $[۱,۲]\cup\{۰\}$

۳) $[-۲,-۱]$ ‏ ‏ ‏ ‏ ۴) $\{۰\}\cup[-۲,-۱]$

حل: $|x| \ge ۰$ می‌باشد و لذا کافی است $x^۲-۳x+۲ \le ۰$ باشد. ریشه‌های این معادله چون مجموع ضرایب آن، صفر است $(۱-۳+۲=۰)$ مساوی ۱ و $\frac{c}{a}$ معادله است و لذا $x'=۱$ و $x''=۲$ ؛ اما چون علامت ضریب x مثبت است ؛ بنابراین، بین این دو ریشه، سه‌جمله‌ای منفی و خارج از فاصلهٔ دو ریشه، سه‌جمله‌ای مثبت است و نامعادله می‌خواهد که سه‌جمله‌ای، منفی یا صفر باشد ؛ پس لازم است که $۱ \le x \le ۲$ از طرفی چون $|x|$ نیز می‌تواند مساوی صفر باشد (به‌ازای $x=۰$) و اگر صفر شود، حاصل عبارت سمت چپ نابرابری، صفر می‌شود ؛ پس $x=۰$ نیز یک جواب می‌باشد. بنابراین، جواب نهایی به‌صورت زیر است :

$x=۰$ یا $۱ \le x \le ۲$

و این نشان می‌دهد که گزینهٔ ۲ صحیح می‌باشد.

تمرین : هریک از نامعادله‌های زیر را با سریعترین روش حل کنید :

۱) $\frac{(x-۱)(x^۴+۱)}{x-۲} \le ۰$

۲) $\frac{(x-۲)|x|}{x-۳} \ge ۰$

۳) $\frac{(x^۲+x+۱)(x-۱)}{(x+۱)|x+۱|} \le ۰$

۴) $\dfrac{(3x^2-x+1)(x^2-4)}{|x+2|}\ge 0$

۵) $\dfrac{(x^2-5x)(x^2+4x+10)}{(x^2+4)}<0$

کاربردهایی از نامعادله‌ها

حلّ نامعادله‌های مختلف، کاربردهای بسیاری در ریاضیات دارند و تقریباً می‌توان گفت جزو الفبای ریاضیات می‌باشند. بعضی از کاربردهای ابتدایی آنها در مثالهای زیر می‌آید :

مثال: حدود m را طوری به‌دست آورید که معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2+mx+m^3=0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی باشد.

حل: می‌دانیم برای آن‌که معادلهٔ درجهٔ دوم، دو ریشهٔ حقیقی داشته باشد، لازم و کافی است که مبین آن مثبت باشد ؛ پس : $\Delta>0$ و از آن‌جا به‌صورت زیر، حدود m به‌دست می‌آید :

$$\Delta=m^2-4m^3>0\Rightarrow m^2(m-4)>0$$

چون m^2 همواره مثبت یا صفر است، پس کافی است $m-4>0$ باشد و لذا $m>4$ و این، یعنی به‌ازای هر عدد حقیقی m که بزرگتر از ۴ باشد، معادلهٔ فوق دارای دو ریشهٔ حقیقی می‌باشد.

مثال: به‌ازای کدام مجموعهٔ مقادیر x عبارت جبری $\sqrt{4-x^2}+\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$ تعریف شده است؟

حل: می‌دانیم عبارتهای شامل رادیکالهای با فرجهٔ زوج، هنگامی تعریف شده هستند که زیر رادیکال آنها مثبت یا صفر باشد، پس درواقع باید ریشه‌های دستگاه نامعادله‌های زیر را به‌دست آوریم :

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{x-2}\ge 0\\ 4-x^2\ge 0\end{cases}$$

هر دو نامعادله‌ها را می‌توان با روشهای سریع و بدون تشکیل جدول حل کرد. نامعادلهٔ اوّل، دو ریشهٔ x=1 و x=2 دارد که بین آن دو علامت، کسر منفی و خارج از فاصلهٔ آنها کسر مثبت است (چرا؟)، پس لازم است که :

(۱) $x\le 1$ یا $x>2$

و برای حلّ نامعادلهٔ دوم نیز می‌نویسیم :

(۲) $4-x^2\ge 0\Rightarrow x^2\le 4\Rightarrow -2\le x\le 2$

و از اشتراک مجموعهٔ جوابهای (۱) و (۲) به‌دست می‌آید :

$$-2<x\le 1$$

یعنی به‌ازای هر عدد حقیقی متعلق به فاصلهٔ $(-2,1]$ هر دو رادیکال فوق، تعریف شده می‌باشند.

مثال: حدود m را طوری به‌دست آورید که نقطهٔ $A\begin{vmatrix}m^2-2\\ m^2-4\end{vmatrix}$ در دستگاه مختصات، همواره در ناحیهٔ چهارم واقع باشد.

حل: می‌دانیم در دستگاه مختصات دو بعدی، نقاطی در ناحیهٔ چهارم واقع هستند که طول آنها مثبت و عرضشان منفی باشد ؛ بنابراین می‌توان نوشت :

$$\begin{cases}m^2-2>0\\ m^2-4<0\end{cases}$$

و از حلّ این دو نامعادله، به‌ترتیب زیر، به‌دست می‌آید :

$$m^2>2\Rightarrow m>\sqrt{2} \text{ یا } m<-\sqrt{2}$$

$$m^2<4\Rightarrow -2<m<2$$

و از اشتراک این دو مجموعه، جواب به‌دست می‌آید :

$$-2<m<-\sqrt{2} \text{ یا } \sqrt{2}<m<2$$

مثال: حدود m را طوری به‌دست آورید که به‌ازای جمیع مقادیر x، سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم $(m-3)x^2+2mx+m$ همواره منفی باشد.

حل: می‌دانیم سه‌جمله‌ای درجهٔ دومی که دلتای آن منفی باشد، همواره علامتی موافق علامت ضریب x^2 دارد. پس برای آن‌که سه‌جمله‌ای فوق همواره منفی باشد، لازم و کافی است که $\Delta<0$ و $a<0$ باشد و بنابراین باید دستگاه نامعادله‌های $\begin{cases}\Delta<0\\ a<0\end{cases}$ را به‌صورت زیر حل کنیم :

$$\begin{cases}\Delta=(2m)^2-4m(m-3)<0\\ a=(m-3)<0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}4m^2-4m^2+12m<0\\ m-3<0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}12m<0\\ m<3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m<0\\ m<3\end{cases}$$

و اشتراک دو جواب $m<0$ می‌باشد ؛ یعنی به‌ازای هر $m<0$، سه‌جمله‌ای فوق به‌ازای همهٔ مقادیر x منفی خواهد بود.

مثال: به‌ازای کدام مقادیر m خط $y=mx$، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\frac{x+1}{1-x}$ را قطع نمی‌کند؟

۱) $3-2\sqrt{2}<m<3+2\sqrt{2}$

۲) $3-\sqrt{2}<m<3+\sqrt{2}$

۳) $2-3\sqrt{2}<m<2+3\sqrt{2}$

۴) $2-\sqrt{2}<m<2+\sqrt{2}$

(کنکور تجربی ۷۵)

حل: می‌دانیم برای یافتن طولهای نقاط برخورد دو منحنی به معادله‌های y_1 و y_2 در دستگاه مختصات دکارتی، $y_1=y_2$ قرار داده و معادلهٔ حاصل را حل می‌کنیم. پس برای یافتن نقاط برخورد خط $y=mx$ و منحنی $y=\frac{x+1}{1-x}$ باید معادلهٔ $mx=\frac{x+1}{1-x}$ را حل کنیم و پاسخ سؤال این است که باید معادلهٔ فوق جواب نداشته باشد. بنابراین، پس از ساده و مرتّب کردن معادلهٔ فوق، دلتای آن را منفی قرار می‌دهیم :

$$mx=\frac{x+1}{1-x} \Rightarrow mx-mx^2=x+1$$

$$\Rightarrow mx^2+(1-m)x+1=0$$

$$\Delta=(1-m)^2-4m<0 \Rightarrow m^2+1-2m-4m<0$$

$$\Rightarrow m^2-6m+1<0$$

اکنون ریشه‌های معادلهٔ $m^2-6m+1=0$ را به‌دست می‌آوریم :

$$m^2-6m+1=0 \Rightarrow \Delta=36-4=32$$

$$\Rightarrow m=\frac{6\pm\sqrt{32}}{2}=\frac{6\pm4\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow m_1=3+2\sqrt{2}\ ,\ m_2=3-2\sqrt{2}$$

حال بین m_1 و m_2 علامت m^2-6m+1 منفی و خارج از فاصلهٔ آنها مثبت است و ما می‌خواهیم این سه‌جمله‌ای منفی باشد، پس باید $m_2<m<m_1$ و لذا $3-2\sqrt{2}<m<3+2\sqrt{2}$ و پاسخ صحیح گزینهٔ ۱ است.

ادب ریاضی

اگر اکتشافهای گاوس در موقع خود، به اطلاع مردم رسیده بود، مانع می گردید که **کوشی، آبل، ژاکوبی** و بسیاری ریاضیدانان دیگر، وقت خود را در مسائلی تلف کنند که وی قبلاً آنها را حل کرده بود و نیز موجب پیشرفت عظیمی در علوم ریاضی می‌شد.

متأسفانه گاوس که شخصی تندخو و ترشرو بود و لجاجتی بی‌مانند داشت، فقط وقتی اکتشافهای خود را انتشار می‌داد که کاملاً تمام و از قید طرح و چوب بستی که برای ساختن آن ایجاد گردیده بود، فارغ شده باشد.

دوستانش میل داشتند که وی متون واضحتری برای ایشان بنویسد یا روش خود را در حصول نتیجه به آنان بگوید ؛ اما گاوس جواب داد که فقط برای تبعیت از طبع خود کار می کند، نه برای آموختن به دیگران. بنابراین، همواره اکتشافهای خود را به‌صورت معمّاهایی از این قبیل یادداشت می کرد : «یافتم : عدد $=\Delta+\Delta+\Delta$» (یعنی هر عدد صحیح مثبت، مساوی با مجموع سه عدد مثلث شکل است، از قبیل اعداد ۱، ۳، ۶ و غیره. (این اعداد را از آن جهت مثلث شکل می گویند که عبارت‌اند از مجموع اعداد متوالی ابتدا از واحد که می توانند به‌صورت مثلثی نوشته شوند.)

تاریخ علوم ـ پی‌یر روسو ـ حسن صفّاری

حل مسائل را در همین شماره ببینید!

مسائل برای حل

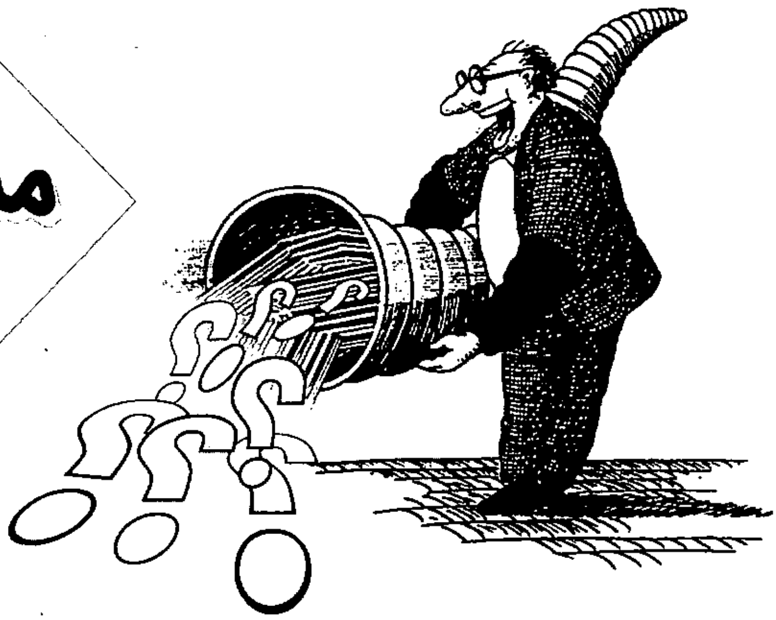
احمد قندهاری

محمد هاشم رستمی

حمیدرضا امیری

میرشهرام صدر

سید محمدرضا هاشمی موسوی



ریاضی ۲

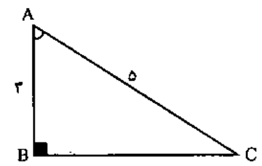
۱ـ نقاط $A(1,-2)$ ، $B(-3,2)$ و $C(3,2)$ سه رأس مثلث ABC هستند. فاصلهٔ نقطهٔ M، وسط پاره‌خط BC، از رأس A را بیابید.

۲ـ حاصل عبارت زیر را بیابید :

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$$

۳ـ مخرج کسر $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$ را با فرض $x>0$ ، گویا کنید.

۴ـ در مثلث قائم‌الزاویهٔ زیر نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ A را محاسبه کنید.



۵ـ درستی برابری زیر را تحقیق کنید $(\theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2})$.

$$2\cos\theta - \cos\theta\sin^2\theta = \cos^3\theta(2+\tan^2\theta)$$

۶ـ مختصات رأس و محور تقارن نمودار سهمی به معادلهٔ $y = x^2 + 4x + 5$ را بیابید.

۷ـ معادلهٔ $\frac{x+5}{6} = \frac{x+2}{3} + \frac{x-1}{2}$ را حل کنید.

۸ـ در معادلهٔ $2x^2 - mx + 2 = 0$ ، مقدار m را چنان بیابید که معادله ریشهٔ مضاعف داشته باشد. سپس تعیین کنید به ازای چه مقادیری از m معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.

۹ـ معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ $A(-2,1)$ بگذرد و بر خط $x - 2y = 1$ عمود باشد.

۱۰ـ فاصلهٔ نقطهٔ $A(-3,2)$ را از خط $2x + 3y = 13$ حساب کنید.

۱۱ـ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC که $\hat{C} = 90^\circ$ ، اگر $b = 2$ و $\hat{A} = 60^\circ$ ؛ مقدار a (ضلع روبرو به زاویهٔ A) را حساب کنید.

۱۲ـ نامعادلهٔ زیر را حل کنید :

$$(2x+3)^2 - x \geq 4x^2 - 3x + 20$$

ریاضی ۴

۱ـ انحراف معیار داده‌های زیر را به دست آورید :

۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۱۱

۲ـ حاصل عبارتهای زیر را بیابید :

$$p = (\tan 1^\circ)(\tan 2^\circ)\ldots(\tan 89^\circ)$$

$$q = \log(\tan 1^\circ) + \log(\tan 2^\circ) + \ldots + \log(\tan 89^\circ)$$

۳ـ اگر $\cot\beta = 3$ و $\tan(\alpha+\beta) = 2$ ، مقدار α را محاسبه کنید.

۴ـ معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کنید :

$$\sin^2 x - \cos^2 x = \sin x$$

۵ـ دستگاه زیر را به روش کرامر یا ماتریس، معکوس حل کنید :

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x - 4y = -1 \end{cases}$$

۶. اگر $\vec{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ ، تعیین کنید :

الف. مختصات $\vec{u} + \vec{v}$

ب. اندازهٔ بردار $(\vec{u} + \vec{v})$

ج. حاصلضرب درونی $\vec{u}.\vec{v}$ را محاسبه کنید و تعیین کنید که زاویهٔ بین دو بردار، حاده است یا منفرجه؟

۷ـ اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $f(x) = x^2 - 3x$ ، حاصل $f(A)$ و A^n را بیابید.

۸ـ اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ، ثابت کنید :

$$(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$$

۹ـ عبارت $p(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ به ازای چه مقادیری از x در $\mathbb{R}$ بی‌معناست؟

۱۰ـ تعیین کنید :

الف. چند عدد طبیعی سه رقمی وجود دارد؟

ب. چند عدد چهاررقمی طبیعی با رقمهای مختلف وجود دارد؟

ج. چند عدد پنج رقمی که همهٔ رقمهای آن فرد باشد، وجود دارد؟

۱۱ـ مجموع n جملهٔ یک تصاعد، عددی برابر $S_n = 4n^2 + 4n$ است ؛ قدر نسبت و جملهٔ دهم این تصاعد را بیابید.

۱۲ـ جملهٔ عمومی یک تصاعد هندسی $a_n = \frac{1}{2^{n+1}}$ است ؛ حدّ مجموع این تصاعد را بیابید.

۱۳ـ در یک کیسه، ۴ مهرهٔ سفید و ۷ مهرهٔ سیاه موجود است. ۲ مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم : تعیین کنید احتمال این که :

الف. هر دو مهره سیاه باشند.

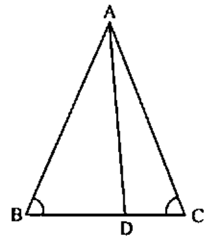
ب. یک مهره سیاه و یک مهره سفید باشد.

۱۴ـ تعداد قطرهای یک n ضلعی محدب را از طریق ترکیب r شیء از n شیء بیابید.

هندسهٔ ۲

۱ـ حدود m را چنان تعیین کنید که $۳+m$ ، $۲m+۱$ و $m-۲$ اندازه‌های سه ضلع مثلث ABC باشند.

۲ـ نقطهٔ D را روی مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB=AC)$ را اختیار می‌کنیم. ثابت کنید، اگر $DB>DC$ باشد، $D\hat{A}B>D\hat{A}C$ است.

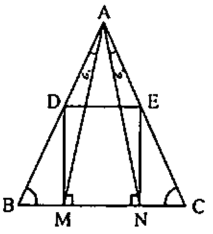


۳ـ مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است و $B\hat{A}M=C\hat{A}N=۱۵^\circ$ و MD و NE عمود بر BC می‌باشند، ثابت کنید :

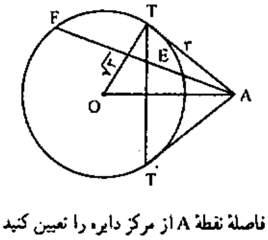
الف. خط DE با ضلع BC موازی است.

ب. چهارضلعی MDEN مربع است.

پ. با استفاده از مسألهٔ بالا، روشی برای رسم مربع محاط در یک مثلث متساوی‌الاضلاع بیان کنید.



۴ـ طول پاره‌خط AT، مماس رسم شده از نقطهٔ A بر دایرهٔ $C(O,\sqrt{۳})$ برابر ۳ است.



الف. فاصلهٔ نقطهٔ A از مرکز دایره را تعیین کنید.

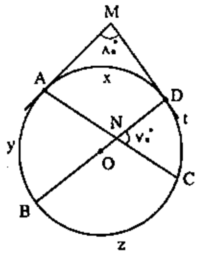
ب. زاویهٔ بین دو مماسی را که از نقطهٔ A بر دایره رسم می‌شوند، به دست آورید.

پ. طول پاره‌خط وصل شده بین دو نقطهٔ تماس مماسهای رسم شده از A بر دایره را تعیین کنید (طول پاره خط TT').

ت. از نقطهٔ A قاطع AEF را نسبت به دایره رسم می‌کنیم؛ به قسمی که $EF=۳$ باشد. طول پاره‌خط AE را بیابید.

۵ـ مثلث ABC را با معلوم بودن ضلع $BC=a$ ، زاویهٔ $\hat{A}=\alpha$ و مجموع دو ضلع دیگر $b+c=l$ رسم کنید.

۶ـ با توجه به اندازه‌های داده شده در شکل، مقدار x، y، z و t را بیابید. نقطهٔ O مرکز دایره است.



۷ـ معادلهٔ تبدیل‌یافتهٔ منحنی به معادلهٔ $x^۲+y^۲-۲x+۶y+۱=۰$ تحت تبدیل $T(x,y)=(x+۱\ ,y-۳)$ به دست آورید.

۸ـ چهار نقطهٔ $A=(۲,-۳)$ ، $B=(۳,۲)$ ، $C=(۰,۴)$ و $D=(-۵,-۲)$ داده شده‌اند :

الف. تبدیل‌یافتهٔ نقطه‌های A و B را تحت دوران $R(x,y)=(y,-x)$ به‌دست آورید و A' و B' بنامید.

ب. تبدیل‌یافته‌های نقطه‌های C و D را تحت $H(x,y)=(\frac{۱}{۲}x,\frac{۱}{۲}y)$ تعیین کنید و C' و D' بنامید.

پ. طول پاره‌خطهای AB ، A'B' ، CD و C'D' را بیابید. در مورد اندازهٔ پاره‌خطهای AB و A'B' چه می‌توانید بگویید؟ از مقایسهٔ اندازه‌های دو پاره‌خط CD و C'D' چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

جبر و احتمال

(نیمسال دوم سال تحصیلی ۷۸ـ۷۷ ـ سراسری)

۱ـ با استفاده از اصل استقرای ریاضی ثابت کنید. $(n\in IN)$

$$۴+۹+۱۴+...+(۵n-۱)=\frac{n(۵n+۳)}{۲}$$

۲ـ کدام یک از احکام زیر درست است : احکام درست را اثبات کنید و برای ردّ احکام نادرست، مثال نقض بیاورید :

الف. اگر x گنگ و y گنگ باشد، آن‌گاه xy گنگ است.

ب. اگر x گویا و y گویا باشد، آن‌گاه $x+y$ گویاست.

۳ـ با استفاده از برهان خُلف، ثابت کنید :

اگر $n\in Z$ و $n^۲$ فرد باشد، آن‌گاه n نیز فرد است.

۴ـ پنج نقطهٔ داخل مربعی به ضلع ۴ سانتیمتر مفروضند. ثابت کنید حداقل فاصلهٔ دو نقطه از این پنج نقطه، کمتر از $۲\sqrt{۲}$ است.

۵ـ به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید :

الف) اگر $B\subset A$ آن‌گاه $A'\subset B'$

ب) $(A\cap B\cap C)\cup(C-A)\cup(C-B)=C$

۶ـ اگر $A=\{x|x\in Z,|x|<۲\}$ و

$B=\{۲k+۱|k\in Z,-۲\le k<۰\}$

$A\times B$ را با اعضا مشخص کرده و نمودار آن را روی صفحهٔ مختصات رسم کنید.

۷ـ رابطهٔ R در Z به‌صورت $mRn \Leftrightarrow m^۲+n=n^۲+m$ تعریف شده است.

اولاً ثابت کنید R یک رابطهٔ هم‌ارزی است، ثانیاً اعضای کلاس هم‌ارزی [۲] را مشخص کنید.

۸ـ به کمک هم‌نهشتی باقیماندهٔ تقسیم $۷+۴^{۲n+۱}$ را بر ۵ تعیین کنید. $(n\in N)$

۹ـ یک سکه و یک تاس سالم را با هم می‌اندازیم، مطلوب است :

الف. فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی.

ب. پیشامد A که سکّه رو یا تاس ۳ باشد.

ج. پیشامد B آن که سکّه پشت و تاس ۳ باشد.

د. پیشامد $A'\cup B'$.

۱۰ـ در کیسه‌ای ۵ مهرهٔ قرمز، ۳ مهرهٔ سفید و ۲ مهرهٔ سیاه موجود است، سه مهره را به تصادف بیرون می‌آوریم. احتمال آن‌که دو مهره، قرمز و یک مهره، سفید باشد، چه‌قدر است؟

۱۱ـ سه تیرانداز a، b و c در یک مسابقهٔ تیراندازی شرکت می‌کنند و فرض کنیم که احتمال برد a نصف احتمال برد b و احتمال برد b یک سوم احتمال برد c باشد، مطلوب است :

الف. احتمال آن که تیرانداز a برنده نشود.

ب. تیرانداز b یا تیرانداز c برنده شود.

۱۲ـ دو عدد حقیقی در فاصلهٔ [۰,۲] به تصادف انتخاب می‌کنیم، احتمال آن که مجموع دو عدد، کوچکتر یا مساوی $\frac{۵}{۲}$ و بزرگتر یا مساوی ۱ باشد، چه‌قدر است؟

۱۳ـ به فرض آن که A' و B دو پیشامد مستقل باشند، ثابت کنید : $۱-p(A\cup B')=p(A').p(B)$

حسابان ۲

۱ـ تابع به معادلهٔ $f(x)=ax^۲+bx+c$ مفروض است :

الف. a، b و c را چنان بیابید تا منحنی تابع محور yها را در نقطه‌ای به عرض 1- قطع کند و نقطهٔ $M(۳-,۱)$ می‌نیمم نسبی تابع باشد.

ب. از نقطهٔ $P(۰,-۳)$ دو مماس بر منحنی تابع با ضابطهٔ $y=۲x^۲-۴x-۱$ رسم می‌کنیم، معادله‌های مماسها را بیابید.

۲ـ a و b را چنان بیابید تا تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}ax^۲+bx & x>۱\\ ۳\sqrt[۳]{x^۲} & x\le۱\end{cases}$ در $x=۱$ مشتق‌پذیر باشد.

۳ـ معادلهٔ خط قائم بر منحنی تابع با ضابطهٔ $f(x)=\operatorname{Arccos}4x$ را در نقطه‌ای به طول $\frac{1}{8}$ بیابید.

۴ـ مطلوب است رسم جدول تغییرات و نمودار تابع با ضابطهٔ:
$$f(x)=\operatorname{Ln}\frac{2-x}{2+x}$$

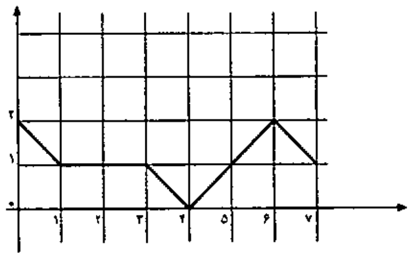
۵ـ معادلهٔ مثلثاتی $4\cos^2x-2(\sqrt{2}+1)\cos x+\sqrt{2}=0$ را حل کنید و جوابهای کلی آنها را بنویسید.

۶ـ در کره‌ای به شعاع R، استوانه‌ای به حجم ماکزیمم محاط شده است، اگر شعاع کره ($R=2\sqrt{6}$) باشد، ماکزیمم حجم استوانه را بیابید.

۷ـ اگر $\log 2=0/301$ و $\log 3=0/471$، مطلوب است محاسبهٔ $\log(\sqrt{2}.\sqrt[4]{3})$.

۸ـ مطلوب است محاسبهٔ انتگرالهای زیر:
$$I_1=\int_{-2}^{1}([x]+|3x-1|)dx \qquad I_2=\int_0^3\frac{dx}{9+x^2}$$

۹ـ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است، اگر $A'=f$ و $A(x)=\int_0^x f(t)dt$ و $A(0)=0$، مطلوب است رسم نمودار تابع A در بازهٔ $[0,7]$.



ریاضیات گسستهٔ پیش دانشگاهی

۱ـ گراف G از مرتبهٔ ۸ مفروض است، اگر درجهٔ هر رأس این گراف، ۴ یا ۵ باشد و مرتبهٔ آن ۱۸، در این صورت گراف G چند رأس از درجهٔ ۴ و چند رأس از درجهٔ ۵ دارد؟

۲ـ اگر درجهٔ رأسهای گراف سادهٔ G، تصاعد عددی با قدر نسبت d تشکیل دهد، در این صورت، d را بیابید.

۳ـ اگر در یک تقسیم، باقیمانده ۱۵ و خارج قسمت ۴ باشند، حداکثر چند واحد می‌توانیم به مقسوم علیه اضافه کنیم تا مقسوم و خارج قسمت تغییر نکنند؟

۴ـ اگر a و b دو عدد صحیح و ناصفر باشند، ثابت کنید:
$$[a,b]=c\Leftrightarrow[na,nb]=nc$$
(راهنمایی: از رابطهٔ مشابه رابطهٔ فوق، برای ب م م استفاده کنید.)

۵ـ اگر $(10!,6^9)=3^b\times 2^a$ باشد، در این صورت، معادلهٔ $ax+by=5c-11$ به‌ازای چه مقادیری از c دارای جواب است؟

۶ـ باقیماندهٔ تقسیم 21^{1378} را بر ۱۷ و ۸ بیابید.

۷ـ به چند طریق می‌توان ۶ مهره را در ۴ جعبهٔ خالی، به‌دلخواه قرار داد؟
(توزیع دلخواه ۶ شیئی در ۴ جای خالی)

۸ـ به چند طریق می‌توانیم از بین ۴ نوع گل که از هر نوع به تعداد کافی موجود است، دسته‌گلی شامل ۶ شاخهٔ گل انتخاب کرد؟

۹ـ در جعبهٔ A، ۴ مهرهٔ قرمز و ۳ مهرهٔ سیاه، در جعبهٔ B، ۳ مهرهٔ قرمز و ۵ مهرهٔ سیاه و در جعبهٔ C، ۴ مهرهٔ قرمز و ۴ مهرهٔ سیاه موجود است. از جعبه‌های A، B و C بترتیب، ۳، ۵ و ۴ مهره به تصادف برداشته و در جعبهٔ D قرار می‌دهیم و از جعبهٔ D به تصادف، مهره‌ای بیرون می‌کشیم. مطلوب است احتمال آن که مهرهٔ انتخابی از جعبهٔ D، قرمز باشد.

۱۰ـ دو تاس را با هم می‌اندازیم و این کار را به دفعات دلخواه تکرار می‌کنیم، و متغیر تصادفی X را روی فضای نمونه‌ای حاصل، به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:
$$X(a,b)=a+b$$
جدول توزیع احتمال را برای این تابع متغیر تصادفی، بنویسید.

دیفرانسیل و انتگرال ۲ پیش دانشگاهی

۱ـ ثابت کنید معادلهٔ $x^3-3x^2+10x-5=0$ دقیقاً یک ریشهٔ حقیقی دارد.

۲ـ Cهای قضیهٔ مقدار میانگین تابع با ضابطهٔ $f(x)=\cos^2x+\frac{x}{2}$ را در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ بیابید.

۳ـ تابع با ضابطهٔ $f(x)=x-\sqrt{x^2-2x}$ مفروض است. جدول رفتار و نمودار تابع را رسم کنید.

۴ـ ثابت کنید، اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت باشند و مقدار ثابت $x+y=S$، آن‌گاه، ماکزیمم x.y برابر $\frac{S^2}{4}$ است.

۵ـ حدهای زیر را محاسبه کنید:

۱) $\lim_{x\to0}\frac{x-\tan x}{x^2\sin x}$

۲) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(x.\tan x-\frac{\pi}{2}\sec x)$

۶ـ مقدار تقریبی $(0/9)^3+\sqrt[3]{0/9}$ را بیابید.

۷ـ با دوبار به‌کارگیری فرمول نیوتن، ریشهٔ مثبت معادلهٔ $x^2-6=0$ را بیابید.

۸ـ به کمک مجموع ریمان $\int_0^1(1-x^2)dx$ را محاسبه کنید.

۹ـ بازه‌ای را بیابید که $\int_1^3\frac{dx}{3+x^2}$ در آن قرار داشته باشد.

۱۰ـ انتگرالهای زیر را محاسبه کنید:
$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x\,dx}{2-\sin^2 2x}$$
$$I_2=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin^2x.\cos^2x}$$

۱۱ـ ثابت کنید:
$$\int_0^\pi xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx$$

ریاضی عمومی ۲ پیش دانشگاهی

۱ـ ماکزیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x)=|[x]|$ را در فاصلهٔ $[-1,2]$ مشخص کنید.

۲ـ مقادیر اکسترمم مطلق تابع با ضابطهٔ $f(x)=(x+2)^{\frac{2}{3}}$ را بر بازهٔ $[-3,1]$ به دست آورید.

۳ـ ثابت کنید محل برخورد مجانبهای تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$، مرکز تقارن این تابع است.

۴ـ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{16x}{(x^2+1)^2}$ را رسم کنید.

۵ـ مطلوب است، مساحت بزرگترین مثلث متساوی‌الساقینی که محیط آن ۱۸ متر است.

۶ـ وضعیت دو دایره به معادله‌های $x^2+y^2-2x-2y-7=0$ و $x^2+y^2-6x-4y+9=0$ را مشخص کنید.

۷ـ مطلوب است، تعیین معادلهٔ یک سهمی که نقطهٔ $F(2,-\frac{1}{2})$ کانون و خط به معادلهٔ $y=\frac{5}{2}$ خط هادی باشد.

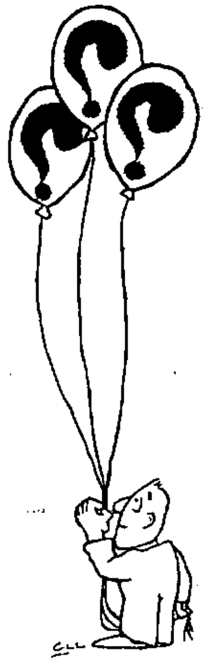
۸ـ نشان دهید که وقتی یک نردبان از روی دیواری سُر می‌خورد، هر نقطهٔ ثابت P از آن، غیر از نقاط انتهایش، $\frac{1}{4}$ یک بیضی را می‌پیماید.

۹ـ مقادیر انتگرالهای معین زیر را به دست آورید:

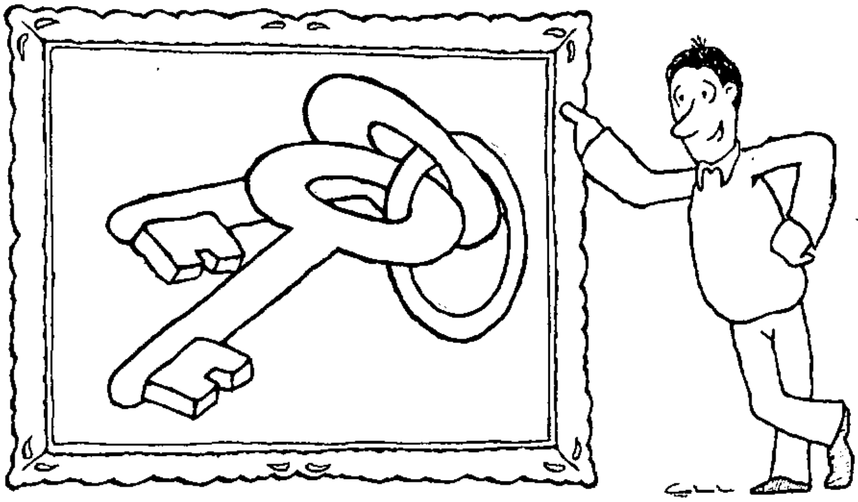
الف) $\int_{-2}^{1}[x]|x|dx$

ب) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4\sin^3x}{1+\cos x}dx$

۱۰ـ مطلوب است، محاسبهٔ سطح محصور بین نمودارهای دو تابع با ضابطه‌های $f(x)=x^3+2$ و $g(x)=2x^2-x+2$.



حلّ تشریحی مسائل برهان ۳۰



○ ریاضی ۲

۱ـ $A(۱,-۲)$، $B(-۳,۲)$ و $C(۳,۲)$:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{۲} = \frac{-۳+۳}{۲} = ۰ \quad ;$$

$$y_M = \frac{y_B + y_C}{۲} = \frac{۲+۲}{۲} = ۲ \quad ; \quad M(۰,۲)$$

$$AM = \sqrt{(x_M - x_A)^۲ + (y_M - y_A)^۲}$$
$$= \sqrt{(۰-۱)^۲ + (۲+۲)^۲} = \sqrt{۱۷}$$

۲ـ

$$\frac{\sqrt{۳}+\sqrt{۵}}{\sqrt{۳}-\sqrt{۵}} + \frac{\sqrt{۳}-\sqrt{۵}}{\sqrt{۳}+\sqrt{۵}} = \frac{(\sqrt{۳}+\sqrt{۵})^۲ + (\sqrt{۳}-\sqrt{۵})^۲}{(\sqrt{۳}-\sqrt{۵})(\sqrt{۳}+\sqrt{۵})}$$

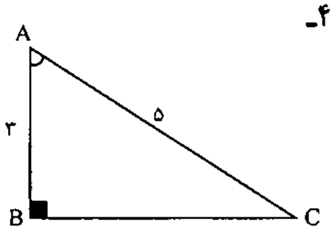
$$= \frac{۳+۵+۲\sqrt{۱۵}+۳+۵-۲\sqrt{۱۵}}{۳-۵} = \frac{۱۶}{-۲} = -۸$$

۳ـ صورت و مخرج کسر را در عبارت $(\sqrt{x} - \sqrt{۲})$ ضرب می‌کنیم:

$$x > ۰ : \frac{\sqrt{x}-\sqrt{۲}}{\sqrt{x}+\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{x}-\sqrt{۲}}{\sqrt{x}-\sqrt{۲}}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{۲})^۲}{\sqrt{x^۲}-\sqrt{۴}} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{۲})^۲}{x-۲}$$

۴ـ



$$\cos A = \frac{۳}{۵} \ ,$$

$$\sin^۲ A = ۱ - \cos^۲ A = ۱ - \frac{۹}{۲۵} = \frac{۲۵-۹}{۲۵} \ ;$$

$$\sin^۲ A = \frac{۱۶}{۲۵} \ ; \ \sin A = \frac{۴}{۵}$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{۴}{۵}}{\frac{۳}{۵}} = \frac{۴}{۳} \ ,$$

$$\cot A = \frac{۱}{\tan A} = \frac{۱}{\frac{۴}{۳}} = \frac{۳}{۴}$$

۵ـ

$$۲\cos\theta - \cos\theta \sin^۲\theta = \cos^۳\theta(۲+\tan^۲\theta) \quad (۱)$$

$$\cos\theta(۲-\sin^۲\theta) = \cos^۳\theta(۱+۱+\tan^۲\theta)$$

با توجه به فرض $\theta \neq k\pi + \frac{\pi}{۲}$ و استفاده از اتحاد $۱+\tan^۲\theta = \frac{۱}{\cos^۲\theta}$، می‌توان نوشت:

$$۱+۱-\sin^۲\theta = \cos^۲\theta(۱+\frac{۱}{\cos^۲\theta})$$

و با استفاده از اتحاد $۱-\sin^۲\theta = \cos^۲\theta$ و اختصار لازم، خواهیم داشت:

$$۱+\cos^۲\theta = \cos^۲\theta + ۱ \quad (۲)$$

برابری (۱) و (۲) با شرط $\theta \neq k\pi + \frac{\pi}{۲}$، همیشه برقرارند؛ بنابراین، درستی رابطهٔ (۱) محقّق است.

۶ـ رأس و محور تقارن سهمی به معادلهٔ استاندارد $y-\beta = k(x-\alpha)^۲$ بترتیب $S(\alpha,\beta)$ و $x=\alpha$ است. بنابراین، ابتدا معادلهٔ سهمی را به شکل استاندارد می‌نویسیم:

$$y = x^۲+۴x+۵ = (x^۲+۴x+۴)+۱ = (x+۲)^۲+۱ \ ;$$

$y-۱ = (x+۲)^۲$ و $S(-۲,۱)$

(مختصات رأس سهمی)

$x=-۲$ (معادلهٔ محور تقارن سهمی)

۷ـ $\frac{x-1}{2}+\frac{x-2}{3}=\frac{x+5}{6}$

دوطرف معادله را در ۶ ضرب می‌کنیم :

$6(\frac{x-1}{2}+\frac{x-2}{3})=6(\frac{x+5}{6})$;

$3(x-1)+2(x-2)=x+5$;

$3x-3+2x-4=x+5$;

$4x=12$; $x=\frac{12}{4}$; $\boxed{x=3}$

۸ـ شرط این که معادلهٔ عمومی $ax^2+bx+c=0$ ، ریشهٔ مضاعف داشته باشد، این است که مبین آن یعنی $\Delta=b^2-4ac$ برابر صفر باشد : $\Delta=b^2-4ac=0$

بنابراین، برای معادلهٔ $2x^2-mx+2=0$:

$a=2$, $b=-m$, $c=2$

$\Delta=b^2-4ac=(-m)^2-4(2)(2)=m^2-16=0$,

$m^2=16$; $\boxed{m=\pm4}$

(شرط این معادله، ریشهٔ مضاعف داشته باشد.)

می‌دانیم اگر $\Delta\ge0$ ، در این صورت، معادله ریشهٔ حقیقی دارد و اگر $\Delta<0$ ، معادله، ریشهٔ حقیقی ندارد :

$\Delta=m^2-16<0$; $m^2<16$; $\boxed{-4<m<4}$

۹ـ

$A(-2,1)$, $x-2y=1$, $m=\frac{1}{2}$, $m'=-2$

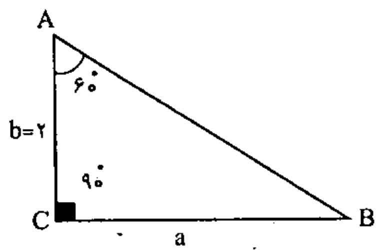
$y-y_A=m'(x-x_A)$: $y-1=-2(x+2)$

$y=-2x-4+1$; $\boxed{y=-2x-3}$

۱۰ـ $A(-3,2)$, $D: 2x+3y-13=0$

$d=\frac{|2(-3)+3(2)-13|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{13}{\sqrt{13}}=\sqrt{13}$

۱۱ـ



$\tan\hat{A}=\frac{a}{b}$; $a=2\tan60^\circ=2\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

۱۲ـ $(2x+3)^2-x\ge4x^2-3x+20$

$4x^2+12x+9-x\ge4x^2-3x+20$

$12x-x+3x\ge20-9$

$14x\ge11$; $\boxed{x\ge\frac{11}{14}}$

○ ریاضی ۴

۱ـ $\bar{x}=\frac{3+4+5+6+7+11}{6}=\frac{36}{6}=6$

$S^2=\frac{1}{6}\Big[(3-6)^2+(4-6)^2+(5-6)^2+(6-6)^2+(7-6)^2+(11-6)^2\Big]$

$S^2=\frac{1}{6}(9+4+1+0+1+25)=\frac{40}{6}=\frac{20}{3}$

$S=\sqrt{\frac{20}{3}}$ (انحراف معیار)

۲ـ $p=(\tan1^\circ)(\tan2^\circ)\dots(\tan89^\circ)$

با توجه به برابری‌های $\tan89^\circ=\cot1^\circ$ ، $\tan88^\circ=\cot2^\circ$ ، ... و $\tan46^\circ=\cot44^\circ$ ، می‌توان نوشت :

$p=(\tan1^\circ\cot1^\circ)(\tan2^\circ\cot2^\circ)$

$\dots(\tan44^\circ\cot44^\circ).\tan45^\circ$

با توجه به اتحاد مثلثاتی $\tan x\cot x=1$ و برابری $\tan45^\circ=1$:

$p=1\times1\times\dots\times1\times1=1$; $\boxed{p=1}$

$q=\log(\tan1^\circ)+\dots+\log(\tan89^\circ)$

$=\log(\underbrace{\tan1^\circ\tan2^\circ\dots\tan89^\circ}_{1})$

$q=\log(1)=0$; $\boxed{q=0}$

۳ـ با استفاده از اتحاد : $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ و با توجه به رابطهٔ $\tan\beta=\frac{1}{\cot\beta}$:

$2=\frac{\tan\alpha+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}\tan\alpha}$; $2-\frac{2}{3}\tan\alpha=\tan\alpha+\frac{1}{3}$;

$\tan\alpha=1$; $\boxed{\alpha=k\pi+\frac{\pi}{4}}$

۴ـ $\sin^4x-\cos^4x=(\sin^2x+\cos^2x)$

$(\sin^2x-\cos^2x)=\sin x$

با استفاده از اتحادهای $\sin^2x+\cos^2x=1$ و $\cos2x=\cos^2x-\sin^2x$:

$-\cos2x=\sin x$; $\cos2x=-\sin x=\cos(\frac{\pi}{2}+x)$;

$2x=2k\pi\pm(\frac{\pi}{2}+x)$; $x=k\pi\pm(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})$;

$x_1=k\pi+\frac{\pi}{4}+\frac{x_1}{2}$; $\frac{x_1}{2}=k\pi+\frac{\pi}{4}$;

$\boxed{x_1=2k\pi+\frac{\pi}{2}}$

$x_2=k\pi-\frac{\pi}{4}-\frac{x_2}{2}$; $\frac{3x_2}{2}=k\pi-\frac{\pi}{4}$;

$\boxed{x_2=\frac{2k\pi}{3}-\frac{\pi}{6}}$

۵ـ روش کرامر :

$\begin{cases}2x-y=1\\3x-4y=-1\end{cases}$ $x=\frac{\begin{vmatrix}1&-1\\-1&-4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&-1\\3&-4\end{vmatrix}}$ و $y=\frac{\begin{vmatrix}2&1\\3&-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&-1\\3&-4\end{vmatrix}}$

$x=\frac{-4-1}{-8+3}=\frac{-5}{-5}=1$

$y=\frac{-2-3}{-8+3}=\frac{-5}{-5}=1$; $\boxed{x=y=1}$

۶ـ

$\vec{u}=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$, $\vec{v}=\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}$;

$\vec{u}+\vec{v}=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1+2\\2-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

$|\vec{u}+\vec{v}|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$ (طول بردار)

$\vec{u}.\vec{v}=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}=[-1\ 2]\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}$

$=(-1)(2)+(2)(-3)=-8$

چون حاصلضرب درونی دو بردار، عددی منفی است، نتیجه می‌شود که زاویهٔ بین دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ، منفرجه است.

۷ـ $A=\begin{bmatrix}-1&0\\-2&1\end{bmatrix}$ ، $f(x)=x^2-3x$

$$f(A)=\left(\begin{bmatrix}-1&0\\-2&1\end{bmatrix}\right)^2-3\begin{bmatrix}-1&0\\-2&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1&0\\-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0\\-2&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&0\\6&-3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&0\\6&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+3&0\\6&1-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0\\6&-2\end{bmatrix}$$

در این‌جا، با استفاده از $A^2=I$ و با درنظر گرفتن زوج یا فرد بودن n، حاصل A^n را به دست می‌آوریم:

(زوج) $n=2k:\ A^{2k}=I^k=I$

(فرد) $n=2k+1:\ A^{2k+1}=A^{2k}.A=I.A=A$

۸ـ $A=\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}1&-1\\0&3\end{bmatrix}$:

$$A.B=\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\-1&1\end{bmatrix}$$

$$(A.B)^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&-1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}0&-1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&2\end{bmatrix},$$

$$B^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}3&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{3}\\0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

$$B^{-1}.A^{-1}=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{3}\\0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

بنابراین، ثابت شد:

$$(A.B)^{-1}=B^{-1}.A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

۹ـ $p(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$

عبارت $p(x)$ ، وقتی بی‌معناست که داشته باشیم:

$$x^2-3x+2<0\ ;\ (x-1)(x-2)<0\ ;\ \boxed{1<x<2}$$

۱۰ـ الف. تعداد عددهای طبیعی سه رقمی:

$\{0,1,2,3,\ldots,9\}$

$$9\times10\times10=900$$

ب. تعداد عددهای چهاررقمی طبیعی با رقمهای مختلف:

$$9\times9\times8\times7=4536$$

ج. تعداد عددهای پنج رقمی که همهٔ رقمهای آن فرد باشد:

$$5\times5\times5\times5\times5=5^5=3125$$

۱۱ـ روش اول:

$S_n=4n^2+4n$ ، $a_{10}=S_{10}-S_9$

$S_{10}=4(10)^2+4(10)=440$, $S_9=4(9)^2+4(9)=360$

و $a_{10}=440-360=80$ (جملهٔ دهم)

$a_1=4(1)^2+4(1)=8$

$a_2=S_2-S_1=24-8=16$

(قدر نسبت) $d=a_2-a_1=16-8=8$

روش دوم:

$a_1=8$, $d=8$: $a_{10}=8+9(8)=8+72=80$

(جملهٔ دهم)

۱۲ـ با استفاده از جملهٔ عمومی تصاعد $(a_n=\frac{1}{2^{n+1}})$ ، جملهٔ اوّل و قدر نسبت تصاعد را به‌دست می‌آوریم:

$$a_1=\frac{1}{2^{1+1}}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}\ ,\ a_2=\frac{1}{2^{2+1}}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$$

$$q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$

(حدّ مجموع تصاعد) $S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

۱۳ـ الف.

$$C(11,2)=\frac{11!}{(11-2)!2!}=\frac{11!}{9!2!}=\frac{10\times11}{2}=55$$

(کل طریقه‌ها)

$$C(7,2)=\frac{7!}{(7-2)!2!}=\frac{7!}{5!2!}=\frac{6\times7}{2}=21$$

P (هردو سیاه) $=\frac{21}{55}$

ب. $C(11,2)=55$ ، $C(4,1)=4$ ، $C(7,1)=7$

P (یکی سیاه و یکی سفید) $=\frac{7\times4}{55}=\frac{28}{55}$

۱۴ـ یک n ضلعی دارای n رأس می‌باشد و قطر n ضلعی از وصل هردو رأس غیرمجاور n ضلعی به‌دست می‌آید. بنابراین، مسأله در واقع یک ترکیب ۲ از n است؛ ولی رابطهٔ $C(n,2)$ رأسهای مجاور را هم که برابر n است نیز شامل می‌شود، بنابراین:

$$C(n,2)-n=\frac{n!}{(n-2)!2!}-n$$

$$=\frac{n(n-1)}{2}-n=\frac{n^2-n-2n}{2}$$

$$=\frac{n^2-3n}{2}=\frac{n(n-3)}{2}$$

هندسهٔ ۲

۱ـ با فرض $a=2m-3$ ، $b=m+1$ و

$c = m-2$ نخست باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} 2m-3>0 \\ m+1>0 \\ m-2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m>\frac{3}{2} \\ m>-1 \\ m>2 \end{cases} \Rightarrow m>2 \qquad (1)$$

آن‌گاه با توجه به رابطهٔ (۱) باید داشته باشیم:

$$|b-c|<a<b+c$$

یا $|(m+1)-(m-2)|<2m-3<(m+1)+(m-2)$

یا $|3|<2m-3<2m-1$

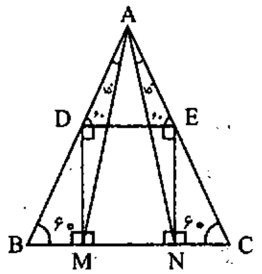
$$\Rightarrow \begin{cases} 2m-3<2m-1 \\ 2m-3>|3| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3<-1 \\ 2m-3>|3| \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} 2m-3>3 \Rightarrow m>3 \qquad (2) \\ 2m-3<-3 \Rightarrow m<0 \qquad (3) \end{matrix}$$

(۳) با (۲) ناسازگار است؛ بنابراین جواب مسأله $m>3$ است.

۲ـ دو مثلث DAB و DAC را با هم مقایسه می‌کنیم. داریم $AB = AC$ ، AD مشترک و $DB > DC$. پس بنا به عکس قضیهٔ لولا $D\hat{A}B > D\hat{A}C$ است.

۳ـ الف. از همنهشتی دو مثلث ABM و ANC نتیجه می‌شود که $MB = NC$ است. درنتیجه، دو مثلث قائم‌الزاویهٔ BMD و CNE همنهشتند. از آن‌جا $MD = NE$ ؛ یعنی دو نقطهٔ D و E از ضلع BC به یک فاصله‌اند. پس این دو نقطه، روی خطی موازی ضلع BC واقعند؛ یعنی $DE \parallel BC$ است.



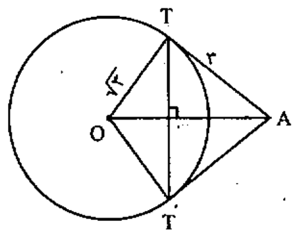
ب. چون $DE \parallel BC$ است، پس $A\hat{D}E = A\hat{E}D = 60°$ ، لذا مثلث ADE متساوی‌الاضلاع است؛ یعنی (۱) $AD = DE$.

از طرفی $A\hat{D}M = 90° + 60° = 150°$. پس $A\hat{M}D = 15°$ ؛ یعنی مثلث AMD و به روش مشابه مثلث ANE متساوی‌الساقین می‌باشد. درنتیجه (۲) $AD = DM$ است. از آن‌جا نتیجه می‌شود که $EN = DE = MD = MN$ است؛ یعنی چهارضلعی MDEN که ۴ زاویهٔ قائمه نیز دارد، مربع است.

پ. برای رسم مربع محاط در یک مثلث متساوی الاضلاع، از یک رأس آن و در درون مثلث، دو خط چنان رسم می‌کنیم که با دو ضلع مجاور به آن رأس، زاویهٔ ۱۵° بسازند. نقطه‌های برخورد این دو خط با ضلع روبه‌روی آن رأس، دو رأس از مربع مورد نظر است. از این دو نقطه، دو خط عمود بر این ضلع اخراج می‌کنیم تا دو ضلع دیگر را در دو نقطه که دو رأس دیگر مربع می‌باشند، قطع می‌کنند.

۴ـ الف. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAT داریم:

$$OA = \sqrt{OT^2 + AT^2}$$
$$= \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$



ب. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAT داریم:

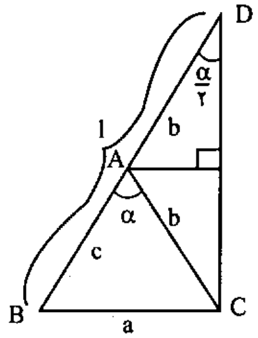
$$\operatorname{tg} O\hat{A}T = \frac{OT}{AT} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \operatorname{tg} 30°$$
$$\Rightarrow O\hat{A}T = 30° \Rightarrow T\hat{A}T' = 60°$$

پ. مثلث TAT' متساوی‌الاضلاع است؛ پس $TT' = AT = 3$

ت. بنا به رابطهٔ طولی در دایره داریم:

$$AT'^2 = AE.AF \Rightarrow (3)^2 = AE(AE+3) \Rightarrow$$
$$AE^2 + 3AE - 9 = 0 \Rightarrow AE$$
$$= \frac{-3 \pm 3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow AE = \frac{-3+3\sqrt{5}}{2}$$

۵ـ فرض می‌کنیم مسأله حل شده و مثلث ABC جواب مسأله باشد. ضلع AB را از طرف A به اندازهٔ $AD = AC$ امتداد می‌دهیم و از D به C وصل می‌کنیم. مثلث ADC

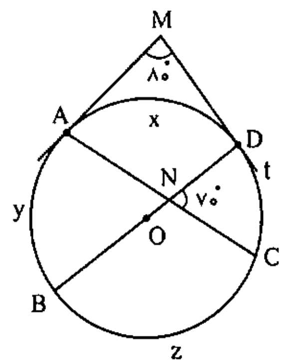


متساوی‌الساقین و $B\hat{D}C = \frac{\alpha}{2}$ است. از طرفی $BD = BA + AD = AB + AC = b + c = l$ است. درنتیجه، مثلث BDC با معلوم بودن ضلع $BC = a$ ، ضلع $BD = b + c = l$ و $B\hat{D}C = \frac{\alpha}{2}$ قابل رسم است. بنابراین، برای رسم مثلث ABC چنین عمل می‌کنیم:

پاره‌خط BC به طول a را رسم می‌کنیم. آن‌گاه کمان درخور زاویهٔ $\frac{\alpha}{2}$ روبه‌رو به پاره‌خط BC را رسم می‌کنیم. سپس به مرکز B و به شعاع $b + c = l$ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا کمان درخور زاویهٔ $\frac{\alpha}{2}$ را در نقطهٔ D قطع کند. از D به B و C وصل و عمود منصّف پاره‌خط DC را رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد این عمود منصّف با ضلع

DB رأس A از مثلث ABC است. از A به C وصل می‌کنیم، مثلث ABC رسم می‌شود. شرط امکان رسم مثلث ABC آن است که مثلث DBC قابل رسم باشد و این مثلث را وقتی می‌توان رسم نمود که کمان درخور زاویهٔ $\frac{\alpha}{۲}$ دایرهٔ به مرکز B و به شعاع $b+c=l$ را قطع کند. شرط تقاطع این دو را نیز با مقایسهٔ خط‌المرکزین و شعاعهای دو دایره می‌توان مشخص کرد.

۶ـ داریم :



$$\hat{M}=\frac{y+z+t-x}{۲}\Rightarrow ۸۰^\circ=\frac{y+z+t-x}{۲}$$

$$\Rightarrow y+z+t-x=۱۶۰^\circ \quad (۱)$$

از طرفی $x+y+z+t=۳۶۰^\circ \quad (۲)$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $y+z+t=۲۶۰^\circ$

درنتیجه، $x=۱۰۰^\circ$ است. از طرفی $x+y=۱۸۰^\circ$ می‌باشد، بنابراین $y=۸۰^\circ$ است. برای محاسبهٔ z و t، داریم :

$$D\hat{N}C=\frac{y+t}{۲}\Rightarrow ۷۰^\circ=\frac{۸۰^\circ+t}{۲}\Rightarrow t=۶۰^\circ$$

و از آنجا $z=۱۸۰^\circ-۶۰^\circ=۱۲۰^\circ$

۷ـ با توجه به تبدیل $T(x,y)=(x+۱,y-۳)$ داریم :

$$x^۲+y^۲-۲x+۶y+۱=۰$$

$$\Rightarrow (x+۱)^۲+(y-۳)^۲-۲(x+۱)+۶(y-۳)+۱=۰$$

$$\Rightarrow x^۲+y^۲-۹=۰$$

معادلهٔ تبدیل‌یافتهٔ منحنی داده شده

۸ـ با توجه به $A=(۲,-۳)$ ، $B=(۳,۲)$ ، $C=(۰,۴)$ و $D=(-۵,-۲)$ داریم :

الف. $R(x,y)=(y,-x)\ ,\ A=(۲,-۳)\ ,$

$$B=(۳,۲)\Rightarrow A'=(-۳,-۲),\ B'=(۲,-۳)$$

ب. $H(x,y)=(\frac{۱}{۲}x,\frac{۱}{۲}y)\ ,$

$$C=(۰,۴)\ ,\ D=(-۵,-۲)$$

$$\Rightarrow C'=(۰,۲)\ ,\ D'=(-\frac{۵}{۲},-۱)$$

پ. $AB=\sqrt{(۳-۲)^۲+(۲+۳)^۲}=\sqrt{۲۶}$

$$A'B'=\sqrt{(۲+۳)^۲+(-۳+۲)^۲}=\sqrt{۲۶}$$

$$CD=\sqrt{(-۵-۰)^۲+(-۲-۴)^۲}=\sqrt{۶۱}$$

$$C'D'=\sqrt{(-\frac{۵}{۲}-۰)^۲+(-۱-۲)^۲}$$

$$=\sqrt{\frac{۲۵}{۴}+۹}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۶۱}$$

اندازهٔ پاره‌خط $A'B'$ برابر طول پاره‌خط AB است؛ بنابراین دوران، طول پاره‌خطها را ثابت نگه می‌دارد. از طرفی $C'D'=\frac{۱}{۲}CD$ است؛ بنابراین تجانس، طول پاره‌خطها را به نسبت تجانس، کوچک یا بزرگ می‌کند. در این مسأله $K=\frac{۱}{۲}$ است. بنابراین، $C'D'=\frac{۱}{۲}CD$ است.

○ جبر و احتمال

۱ـ

درست است $n=۱:\ ۴=\frac{۱(۵\times۱+۳)}{۲}\Rightarrow ۴=۴$

$$n=k:\ ۴+۹+۱۴+\ldots+(۵k-۱)=\frac{k(۵k+۳)}{۲}$$

$$n=k+۱:\ ۴+۹+۱۴+\ldots+(۵k-۱)+(۵k+۴)=\frac{(k+۱)(۵k+۸)}{۲}$$

به دو طرف فرض استقرا عبارت $(۵k+۴)$ را می‌افزاییم :

$$۴+۹+۱۴+\ldots+(۵k-۱)+(۵k+۴)$$

$$=\frac{k(۵k+۳)}{۲}+۵k+۴$$

$$=\frac{۵k^۲+۳k+۱۰k+۸}{۲}$$

$$=\frac{۵k^۲+۱۳k+۸}{۲}=\frac{(k+۱)(۵k+۸)}{۲}$$

بنابراین حکم استقرا برای هر $n\in N$ برقرار است.

۲ـ الف. نادرست است. اگر $x=\sqrt{۲}$ و $y=۳\sqrt{۲}$ در نظر بگیریم، خواهیم داشت :

$$xy=\sqrt{۲}\times۳\sqrt{۲}=۶\notin Q'$$

ب. درست است. فرض کنیم $x=\frac{p_۱}{q_۱}$ و $y=\frac{p_۲}{q_۲}$ که $p_۱,p_۲,q_۱,q_۲\in Z$ و $q_۱\neq۰$ و $q_۲\neq۰$ بنابراین داریم :

$$x+y=\frac{p_۱}{q_۱}+\frac{p_۲}{q_۲}$$

$$=\frac{\overbrace{p_۱q_۲+q_۱p_۲}^{\in Z}}{\underbrace{q_۱q_۲}_{\in Z-\{۰\}}}=\frac{p}{q}\in Q$$

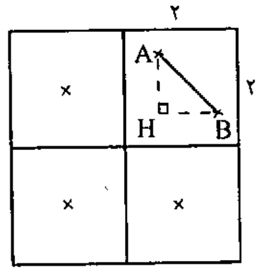
۳ـ (فرض خلف) $n\in N$ و n عدد فرد نباشد، پس n عدد زوج است و داریم :

$$n=۲k\ (k\in Z)\Rightarrow n^۲=۴k^۲=۲\underbrace{(۲k^۲)}_{\in Z}=۲k'$$

یعنی $n^۲$ عددی زوج است و این متناقض با

فرض مسأله است، در نتیجه فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

۴ـ مربع به ضلع ۴ سانتیمتر را مانند شکل زیر به چهار قسمت، تقسیم می‌کنیم. اکنون اگر این پنج نقطه بخواهند چهارخانه را اشغال کنند، آن‌گاه طبق اصل لانه کبوتری حداقل یک خانه موجود است که در آن بیش از یک نقطه قرار



دارد. بنابراین داریم:

$$\Delta AHB:\begin{cases} AH < 2 \Rightarrow AH^2 < 4 \\ BH < 2 \Rightarrow \underline{BH^2 < 4} \end{cases}$$

$$AH^2 + BH^2 < 8 \Rightarrow AB^2 < 8$$

$$\Rightarrow AB < 2\sqrt{2}$$

۵ـ الف.

$$B \subset A \Rightarrow A \cup B = A \Rightarrow (A \cup B)' = A'$$

$$\Rightarrow A' \cap B' = A' \Rightarrow A' \subset B'$$

ب.

$$(A \cap B \cap C) \cup (C - A) \cup (C - B)$$

$$= (A \cap B \cap C) \cup (C \cap A') \cup (C \cap B')$$

$$= (A \cap B \cap C) \cup [(A' \cup B') \cap C]$$

$$= [(A \cap B) \cup (A' \cup B')] \cap C$$

$$= [(A \cap B) \cup (A \cup B)'] \cap C$$

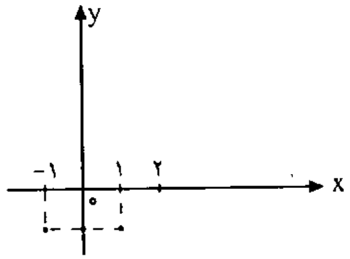
$$= U \cap C = C$$

ـ۶

$$A = \{x | x \in \mathbb{Z}, |x| < 2\} = \{-1, 0, 1\}$$

$$B = \{2k+1 | k \in \mathbb{Z}, -2 \le k < 0\} = \{-1\}$$

$$A \times B = \{-1, 0, 1\} \times \{-1\}$$



$$= \{(-1,-1), (0,-1), (1,-1)\}$$

ـ۷ $mRn \Leftrightarrow m^2 + n = n^2 + m$

۱ـ خاصیت بازتابی دارد ؛ زیرا :

$$mRm \Leftrightarrow m^2 + m = m^2 + m$$

۲ـ خاصیت تقارنی دارد ؛ زیرا :

$$mRn \Rightarrow m^2 + n = n^2 + m$$

$$\Rightarrow n^2 + m = m^2 + n \Rightarrow nRm$$

۳ـ خاصیت تعدی دارد ؛ زیرا :

$$\begin{cases} mRn \Rightarrow m^2 + n = n^2 + m \\ nRp \Rightarrow n^2 + p = p^2 + n \end{cases}$$

$$\Rightarrow m^2 + n + n^2 + p = n^2 + m + p^2 + n$$

$$\Rightarrow m^2 + p = p^2 + m \Rightarrow mRp$$

پس R یک رابطهٔ هم‌ارزی روی $\mathbb{Z}$ است.

$$[3] = \{x | xR3\} \;; xR3 \Rightarrow x^2 + 3$$

$$= 3^2 + x \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow x = 3 \;,\; x = -2$$

$$[3] = \{-2, 3\}$$

ـ۸ $4^{2n+1} + 7 \overset{5}{\equiv} ?$

$$4^2 \overset{5}{\equiv} 1 \Rightarrow (4^2)^n \overset{5}{\equiv} (1)^n \Rightarrow 4^{2n} \overset{5}{\equiv} 1$$

$$\Rightarrow 4 \times 4^{2n} \overset{5}{\equiv} 4 \times 1 \Rightarrow 4^{2n+1} \overset{5}{\equiv} 4$$

$$\Rightarrow 4^{2n+1} + 7 \overset{5}{\equiv} 4 + 7 = 11 \Rightarrow 4^{2n+1} + 7 \overset{5}{\equiv} 1$$

۹ـ الف.

S = { (ر ,۱) , (ر ,۲) , … , (ر ,۶) , (پ ,۱) , … , (پ ,۶) } :

$n(S) = 12$

ب.

(سکه رو باشد)

C = { (ر ,۱) , (ر ,۲) , … , (ر ,۶) }

(تاس عدد ۳ باشد)

D = { (ر ,۳) , (پ ,۳) }

(سکه رو یا تاس ۳ باشد)

A = C∪D = { (ر ,۱) , (ر ,۲) , … , (ر ,۶) , (پ ,۳) }

ج.

(سکه پشت باشد)

E = { (پ ,۱) , … , (پ ,۶) }

(سکه پشت و تاس ۳ باشد)

B = E∩D = { (پ ,۳) }

د. $A' \cup B' = (A \cap B)'$

A ∩ B = { (پ ,۳) }

(A ∩ B)′ = { (ر ,۱) , … , (ر ,۶) , (پ ,۱) , (پ ,۲) , (پ ,۴) , (پ ,۵) , (پ ,۶) }

ـ۱۰

$$n(S) = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \times 7!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

سیاه سفید قرمز

$$n(A) = \binom{5}{2}\binom{3}{1}\binom{2}{0} = 10 \times 3 \times 1 = 30$$

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}$$

ـ۱۱ $p(a) = \frac{1}{2} p(b)$

$$p(b) = \frac{1}{3} p(c)$$

با فرض این که $p(c) = x$ ؛ خواهیم داشت :

$$p(b) = \frac{1}{3}x \;;\; p(a) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}x = \frac{1}{6}x$$

$$p(a) + p(b) + p(c) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6}x+\frac{1}{3}x+x=1 \Rightarrow x=\frac{2}{3}$$

$$p(c)=\frac{2}{3}\ ;\ p(b)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}\ ;$$

$$p(a)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{9}=\frac{1}{9}$$

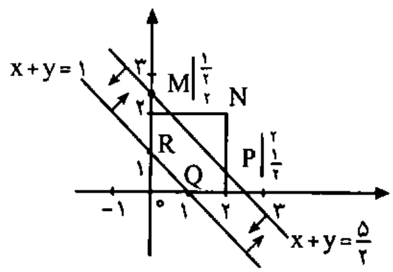
الف. $p(a')=1-p(a)=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$

ب. $p(b)+p(c)=\frac{2}{9}+\frac{2}{3}=\frac{8}{9}$

۱۲ـ $a(S)=2^2=4$

$x,y\in[0,2]$

$1\le x+y\le\frac{5}{2}$



$$\Rightarrow\begin{cases} x+y\le\frac{5}{2}\ ;\ x+y=\frac{5}{2}\ ;\ \begin{array}{c|cc} x & 0 & \frac{5}{2} \\ \hline y & \frac{5}{2} & 0\end{array} \\ x+y\ge 1\ ;\ x+y=1\ ;\ \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & 1 & 0\end{array}\end{cases}$$

$$a(A)=a(s)-S_{O\hat{R}Q}-S_{M\hat{N}P}$$

$$S_{O\hat{R}Q}=\frac{1\times 1}{2}=\frac{1}{2}$$

برای محاسبهٔ مختصات نقطهٔ M باید دو خط MP و MN را با یکدیگر قطع دهیم:

$$\begin{cases} y=2 \\ x+y=\frac{5}{2}\end{cases}\Rightarrow x=\frac{1}{2}\Rightarrow M\left|\begin{array}{c}\frac{1}{2}\\ 2\end{array}\right.\Rightarrow MN=\frac{3}{2}$$

برای محاسبهٔ مختصات نقطه P باید دو خط NP و MP را با یکدیگر قطع دهیم:

$$\begin{cases} x=2 \\ x+y=\frac{5}{2}\end{cases}\Rightarrow y=\frac{1}{2}\Rightarrow P\left|\begin{array}{c}2\\ \frac{1}{2}\end{array}\right.\Rightarrow NP=\frac{3}{2}$$

$$S_{M\hat{N}P}=\frac{\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}}{2}=\frac{9}{8}$$

$$a(A)=4-\frac{1}{2}-\frac{9}{8}=\frac{19}{8};\ p(a)=\frac{\frac{19}{8}}{4}=\frac{19}{32}$$

۱۳ـ چون $A\cup B'=(A'\cap B)'$ بنابراین داریم:

$$1-P(A\cup B')=1-P(A'\cap B)'=P(A'\cap B)$$
$$=P(A').P(B)$$

(چون A' و B' دو پیشامد مستقل هستند.)

○ حسابان ۲

۱ـ الف.

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

$A\left|\begin{array}{c}0\\-1\end{array}\right.\quad M\left|\begin{array}{c}1\\-3\end{array}\right.$ می‌نیمم نسبی

$$A\in f\Rightarrow -1=0+0+c\Rightarrow c=-1$$

$$M\in f\Rightarrow -3=a+b+c\Rightarrow -3=a+b-1$$

$$\Rightarrow a+b=-2$$

$$f'(x)=2ax+b=0\xrightarrow{x=1}2a+b=0$$

$$-1\begin{cases} a+b=-2 \\ 2a+b=0\end{cases}\Rightarrow a=2\ ,\ b=-4$$

ب. فرض می‌کنیم نقطهٔ A به طول x_0 نقطهٔ تماس باشد. معادلهٔ مماس بر منحنی را در نقطهٔ A واقع بر منحنی می‌نویسیم:

$$f(x)=2x^2-4x-1\Rightarrow f'(x)=4x-4$$

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

$$y-2x_0^2+4x_0+1=(4x_0-4)(x-x_0)$$

معادلهٔ مماس بر منحنی در نقطهٔ A

حال مختصات نقطهٔ $P(0,-3)$ را در این معادله قرار می‌دهیم:

$$-3-2x_0^2+4x_0+1=(4x_0-4)(0-x_0)$$

$$-2-\cancel{2}x_0^2+4x_0=-\cancel{4}x_0^2+4x_0$$

$$2x_0^2=2\Rightarrow x_0^2=1\Rightarrow x_0=\pm 1$$

طولهای نقاط تماس

این طولها را در معادلهٔ مماس نقطهٔ A قرار می‌دهیم:

$$x_0=1\Rightarrow y-2+4+1=0(x-1)\Rightarrow y=-3$$

معادلهٔ یک مماس

$$x_0=-1\Rightarrow y-2-4+1=-8(x+1)$$

$\Rightarrow y=-8x-3$ معادلهٔ مماس دیگر

۲ـ اولاً: تابع f باید در $x=1$ پیوسته باشد، پس:

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^-}f(x)=f(1)$$

$$\lim_{x\to 1^+}(ax^2+bx)=\lim_{x\to 1^-}3\sqrt[3]{x^2}\Rightarrow a+b=3$$

ثانیاً: باید مشتق راست در نقطهٔ ۱ مساوی مشتق چپ در نقطهٔ ۱ باشد.

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{ax^2+bx-a-b}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{a(x^2-1)+b(x-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{a(x-1)(x+1)+b(x-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(ax+a+b)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}(ax+a+b)=2a+b=f'_+(1)$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{3\sqrt[3]{x^2}-3}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{3(\sqrt[3]{x^2}-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{3(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{3(\sqrt[3]{x}+1)}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1} = \frac{3(2)}{1+1+1} = 2$$

$$= f'_-(1)$$

$$-1\begin{cases} 2a+b=2 \\ a+b=3 \end{cases} \Rightarrow a=-1\ ,\ b=4$$

۳ـ

$$f(x) = \mathrm{Arccos}\,4x$$

$$f'(x) = \frac{-4}{\sqrt{1-16x^2}}$$

$$x = \frac{1}{8} \Rightarrow y = \mathrm{Arccos}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow A\left|\begin{matrix}\frac{1}{8}\\ \frac{\pi}{3}\end{matrix}\right.$$

$$x = \frac{1}{8} \Rightarrow f'\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{-4}{\sqrt{1-\frac{16}{64}}} = \frac{-2}{\sqrt{\frac{3}{4}}}$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{-4}{\sqrt{3}} = m_{\text{مماس}}$$

$$\Rightarrow m_{\text{قائم}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$y - y_A = m_{\text{قائم}}(x - x_A)$$

$$\Rightarrow y - \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(x - \frac{1}{8}\right)$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{4}x - \frac{\sqrt{3}}{32} + \frac{\pi}{3}$$

معادلهٔ خط قائم بر منحنی f در نقطهٔ A

۴ـ

$$f(x) = \mathrm{Ln}\frac{2-x}{2+x}$$

دامنهٔ تابع: $\frac{2-x}{2+x} > 0 \Rightarrow x = 2, -2$

$$\Rightarrow D_f = (-2, 2)$$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{2-x}{2+x}\right)'}{\frac{2-x}{2+x}} = \frac{\frac{-4}{(2+x)^2}}{\frac{2-x}{2+x}} = \frac{4}{4-x^2} < 0$$

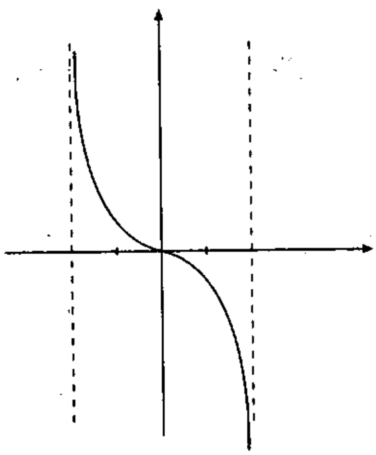
تابع نزولی اکید است.

$$x \to -2^+ \Rightarrow y \to +\infty$$

$$x \to 2^- \Rightarrow y \to -\infty$$

x	-2^+		0		2^-
f'(x)		$-$	‖	$-$	
f(x)	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$

a



۵ـ

$$4\cos^2 x - 2(\sqrt{2}+1)\cos x + \sqrt{2} = 0$$

$$\cos x = y$$

$$4y^2 - 2(\sqrt{2}+1)y + \sqrt{2} = 0$$

$$a = 4,\ b' = -(\sqrt{2}+1)\ ,\ c = \sqrt{2}$$

$$\Delta' = b'^2 - ac = (\sqrt{2}+1)^2 - 4\sqrt{2} = (\sqrt{2}-1)^2$$

$$y = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$$

$$= \frac{\sqrt{2}+1 \pm (\sqrt{2}-1)}{4} \begin{cases} y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

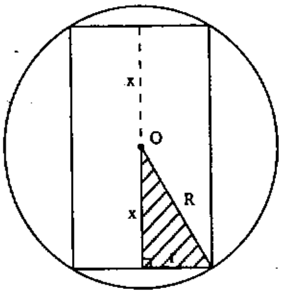
$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}\ ,\ k \in Z$$

$$\cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}\ ,\ k \in Z$$

۶ـ نقطهٔ O مرکز کره است و ارتفاع استوانه $h = 2x$ ، در مثلث قائم‌الزاویه شکل داریم :



$$x^2 + r^2 = R^2$$

$$x^2 + r^2 = 24 \Rightarrow r^2 = 24 - x^2$$

حجم استوانه $= \pi r^2.h = \pi(24 - x^2)(2x)$

$$V = 2\pi(24x - x^3)$$

$$V'_x = 2\pi(24 - 3x^2) = 0$$

$$24 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 8$$

$\Rightarrow x = 2\sqrt{2}$ جواب قابل قبول

$$V_{Max} = 2\pi(48\sqrt{2} - 16\sqrt{2})$$

$$= 2\pi(32\sqrt{2}) = 64\pi\sqrt{2}$$

۷ـ

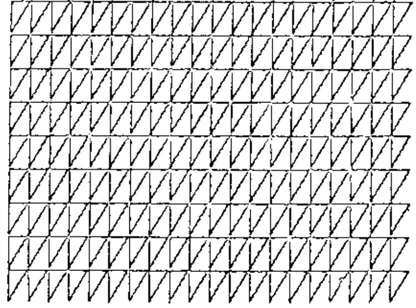
$$\log 2 = 0/301$$

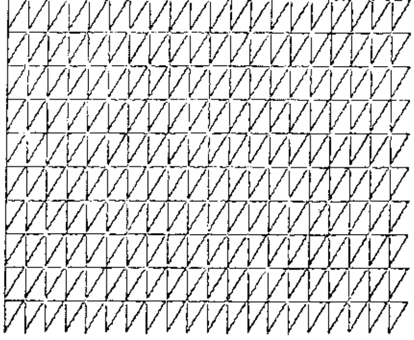
$$\log 3 = 0/471$$

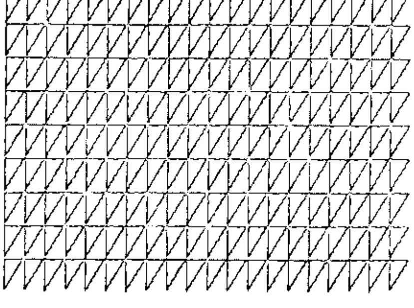
$$\log\sqrt{2}.\sqrt[3]{3} = \log 2^{\frac{1}{2}}(3)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \log 2^{\frac{1}{2}} + \log 3^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{3}\log 3 = \frac{0/301}{2} + \frac{0/471}{3}$$







$= 0/1505 + 0/157 = 0/3075$

۸ـ قسمت اول :

$I=\int_{-2}^{1}(\lfloor x\rfloor+|3x-1|)dx$

$=\int_{-2}^{1}\lfloor x\rfloor dx+\int_{-2}^{1}|3x-1|dx$

$=\int_{-2}^{-1}-2dx+\int_{-1}^{0}-1dx+\int_{0}^{1}0dx+$

$\int_{-2}^{\frac{1}{3}}(1-3x)dx+\int_{\frac{1}{3}}^{1}(3x-1)dx=$

$(-2x)_{-2}^{-1}+(-x)_{-1}^{0}+0+(x-\frac{3x^2}{2})_{-2}^{\frac{1}{3}}+$

$(\frac{3x^2}{2}-x)_{\frac{1}{3}}^{1}=2-4+(0)-(1)+(\frac{1}{3}-\frac{\frac{1}{3}}{2})-$

$(-2-\frac{12}{2})+(\frac{3}{2}-1)-(\frac{\frac{1}{3}}{2}-\frac{1}{3})$

$=-3+(\frac{1}{3}-\frac{1}{6})+8+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}$

$=5+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=5+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{35}{6}$

قسمت دوم :

$I_2=\int_{0}^{3}\frac{dx}{9+x^2}=\int_{0}^{3}\frac{dx}{3^2+x^2}$

$=(\frac{1}{3}\mathrm{Arc}\tan\frac{x}{3})_{0}^{3}$

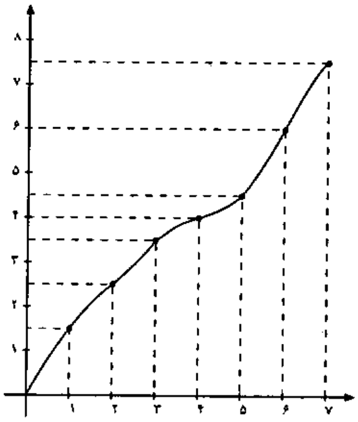
توجه: داریم :

$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\mathrm{Arc}\tan\frac{x}{a}+c$

$-I=\frac{1}{3}(\mathrm{Arc}\tan 1-\mathrm{Arc}\tan 0)=\frac{1}{3}(\frac{\pi}{4}-0)=\frac{\pi}{12}$

۹ـ با توجه به نمودار مساحت زیر، منحنی تابع f محدود به محور xها را از ۰ تا x به ازای xهای مختلف محاسبه کرده، در جدول زیر می‌نویسیم :

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
A(x)	۰	۱/۵	۲/۵	۳/۵	۴	۴/۵	۶	۷/۵



ریاضیات گسستهٔ پیش‌دانشگاهی

۱ـ اگر فرض کنیم G دارای x رأس از درجهٔ ۴ و y رأس از درجهٔ ۵ باشد، در این صورت طبق فرض داریم :

I) مجموع درجه‌های رأسها $=4x+5y$

$=2q=2\times 18=36$

II) $x+y=$ مرتبهٔ G $=p=8$

$\Rightarrow \begin{cases}4x+5y=36\\ x+y=8 \quad (-4)\end{cases}\Rightarrow y=4\ ,\ x=4$

۲ـ فرض کنیم، a_1 ، a_1+d ، a_1+2d ، ... و a_1+nd دنبالهٔ درجهٔ رأسهای گراف G باشند. می‌دانیم ماکزیمم درجهٔ رأسهای هرگراف، حداکثر می‌تواند از تعداد رأسها یکی کمتر باشد ؛ یعنی :

$a_1+nd\le\underbrace{(n+1)}_{\text{تعداد رأسها}}-1\Rightarrow n(1-d)\ge a_1$

$\Rightarrow 0\le\frac{a_1}{n}\le 1-d$

$\Rightarrow 1-d\ge 0\Rightarrow d\le 1\Rightarrow d=0$ یا $d=1$

که اگر $d=1$ دنبالهٔ درجهٔ رأسها از $(n+1)$ عدد صحیح متوالی تشکیل می‌شود و چون باید در یک گراف حداقل دو رأس همدرجه وجود داشته باشد (چرا؟)، ممکن نیست ؛ پس باید $d=0$.

۳ـ اگر فرض کنیم در حالت کلی، $a=bq+r$ با توجه به فرض مسأله داریم :

$a=4b+15$ (1)

فرض کنیم x واحد به مقسوم علیه اضافه شده $\Leftarrow a=4(b+x)+r_1$

$\Rightarrow a=4b+4x+r_1$ (2)

$\overset{(1),(2)}{\Longrightarrow} 4b+15=4b+4x+r_1$

$\Rightarrow r_1=15-4x\ ,\ r_1\ge 0$

$\Rightarrow 15-4x\ge 0\Rightarrow 4x\le 15\Rightarrow \frac{15}{4}$

$\Rightarrow x=3$

(در حالت کلی، اگر در یک تقسیم، خارج قسمت q وباقیمانده r باشد، حداکثر $\left[\frac{r}{q}\right]$ واحد می‌توان به مقسوم‌علیه اضافه کرد تا مقسوم و خارج قسمت تغییر نکنند.)

۴ـ فرض کنیم $(a,b)=d$ که با توجه به قضیهٔ نرو و نتایج حاصل از آن، ثابت می‌شود :

$(a,b)=d\Leftrightarrow(na,nb)=nd=n(a,b)$

حال فرض کنیم $[a,b]=c$. ثابت می‌کنیم $[na,nb]=nc$ ،

طبق قضیه‌داریم :

$\frac{ab}{(a,b)}=[a,b]=c\Rightarrow\frac{na.nb}{n(a,b)}=nc$

$\Rightarrow\frac{na.nb}{(na,nb)}=nc$ (1)

و می‌دانیم طبق قضیه : $\frac{na.nb}{(na,nb)}=[na,nb]$ (2)

$(1),(2)\Rightarrow[na,nb]=nc$

برای اثبات عکس مسأله، به طریق مشابه عمل کنید.

۵ـ $(10!,6^9)=(10!,2^9\times 3^9)\Rightarrow$

تعداد عاملهای ۲ و ۳ را در !۱۰ بیابیم

تعداد عاملهای عدد۲در !۱۰

$=[\frac{10}{2}]+[\frac{10}{4}]+[\frac{10}{8}]=5+2+1=8$

تعداد عاملهای عدد۳در !۱۰

$=[\frac{10}{3}]+[\frac{10}{9}]=3+1=4$

$$\Rightarrow (۱۰!,۲^۹\times ۳^۹)=(۲^۸\times ۳^۴,۲^۹\times ۳^۹)$$

$$=۲^۸\times ۳^۴=۲^a\times ۳^b$$

$$\Rightarrow a=۸\ ,\ b=۴\Rightarrow ۸x+۴y=۵c-۱۱$$

شرط وجود جواب:

$$(۸,۴)|۴۵-۱۱\Rightarrow ۴|۵c-۱۱$$

$$\Rightarrow ۵c-۱۱\overset{۴}{\equiv}۰\Rightarrow ۵c\overset{۴}{\equiv}۱۱\Rightarrow ۵c\overset{۴}{\equiv}۱۱+۴$$

$$\Rightarrow ۵c\overset{۴}{\equiv}۱۵=۵\times ۳\Rightarrow c\overset{۴}{\equiv}۳\Rightarrow \boxed{c=۴k+۳}$$

(تذکر: درحالت کلّی، تعداد عاملهای عدد اوّلِ p در $n!$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:)

$$[\frac{n}{p}]+[\frac{n}{p^۲}]+\dots+۰+۰+\dots$$

۶ـ برای باقیماندهٔ تقسیم عدد $۲۱^{۱۳۷۸}$ بر ۱۷، از قضیهٔ فرما استفاده می‌کنیم.

$$(۱۷,۲۱)=۱\Rightarrow ۲۱^{۱۶}\overset{۱۷}{\equiv}۱\Rightarrow (۲۱^{۱۶})^{۸۶}\times ۲۱^۲$$

$$\overset{۱۷}{\equiv}۱^{۸۶}\times ۲۱^۲\Rightarrow ۲۱^{۱۳۷۸}\overset{۱۷}{\equiv}۲۱^۲$$

$$۲۱\overset{۱۷}{\equiv}۴\Rightarrow ۲۱^۲\overset{۱۷}{\equiv}۴^۲=۱۶\Rightarrow r=۱۶$$ و

برای نمایش باقیماندهٔ تقسیم بر ۸ داریم:

$$۲۱\overset{۸}{\equiv}(-۳)$$ و $$(-۳)^۲\overset{۸}{\equiv}۱\Rightarrow ۲۱^۲\overset{۸}{\equiv}۱$$

$$\Rightarrow (۲۱^۲)^{۶۸۹}\overset{۸}{\equiv}۱\Rightarrow ۲۱^{۱۳۷۸}\overset{۸}{\equiv}۱$$

۷ـ برای قرار دادنِ مهرهٔ اوّل، ۴ راه انتخاب داریم و برای مهرهٔ دوم نیز ۴ راه انتخاب و ... و برای مهرهٔ ششم نیز ۴ راه انتخاب داریم (می‌توانیم همهٔ مهره‌ها را در یک جعبه قرار دهیم)، پس طبق اصل شمارش (اصل ضرب) $۴\times۴\times۴\times۴\times۴\times۴=۴^۶$ راه انتخاب داریم.

۸ـ در این مسأله، بر خلاف مسألهٔ قبل که بحث توزیع n شیئی در k جای خالی است، می‌خواهیم n گل را از بین k نوع گل انتخاب کنیم، که طبق قضیهٔ کتاب، برابر است با:

جواب مسأله $$\binom{n+(k-1)}{k-1}\Rightarrow\binom{۶+۳}{۳}=\binom{۹}{۳}$$

۹ـ پیشامد قرمز بودنِ مهره از جعبهٔ D را $A_۱$ می نامیم و فرض کنیم:

پیشامد این که مهرهٔ انتخابی از D، از جعبهٔ A آمده باشد $=B_۱$

پیشامد این که مهرهٔ انتخابی از D، از جعبهٔ B آمده باشد $=B_۲$

پیشامد این که مهرهٔ انتخابی از D، از جعبهٔ C آمده باشد $=B_۳$

طبق فرمول احتمال کل، داریم:

$$p(A_۱)=p(A_۱/B_۱)\times p(B_۱)+p(A_۱/B_۲)\times p(B_۲)$$
$$+p(A_۱/B_۳)\times p(B_۳)$$

(احتمال این که قرمز باشد، به شرط این که بدانیم از جعبهٔ A بوده)

$$p(A_۱/B_۱)=\frac{۴}{۷}$$

$$p(A_۱/B_۲)=\frac{۳}{۸}$$ و $$p(A_۱/B_۳)=\frac{۴}{۸}$$

(احتمال این که مهرهٔ برداشته شده از A آمده باشد)

$$p(B_۱)=\frac{۳}{۱۲}$$

$$p(B_۲)=\frac{۵}{۱۲}$$ و $$p(B_۳)=\frac{۴}{۱۲}$$

$$\Rightarrow p(A_۱)=\frac{۴}{۷}\times\frac{۳}{۱۲}+\frac{۳}{۸}\times\frac{۵}{۱۲}+\frac{۴}{۸}\times\frac{۴}{۱۲}$$

۱۰ـ در پرتاب دو تاس، فضای نمونه‌ای دارای ۳۶ عضو (زوج مرتب) است و مقادیر بُرد تابع x از ۲ تا ۱۲ تغییر می‌کند؛ زیرا، $x(۱,۱)=۱+۱=۲$ و $x(۶,۶)=۶+۶=۱۲$. پس خواهیم داشت:

x_i	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
p_i	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۴}{۳۶}$	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{۶}{۳۶}$	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{۴}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، در پرتاب دو تاس، احتمال این که مجموع دو تاس ۷ باشد، از هر عدد دیگری بیشتر است.

○ دیفرانسیل و انتگرال ۲ پیش‌دانشگاهی

۱ـ $f(x)=x^۳-۳x^۲+۱۰x-۵$

روش اوّل: اگر $x\to -\infty$، آن‌گاه $y\to -\infty$، پس نمودار این تابع از ربع سوم محورها شروع می‌شود. چنانچه $x\to +\infty$، آن‌گاه $y\to +\infty$، پس نمودار تابع به ربع اوّل ختم می‌شود. چون $f'(x)=۳x^۲-۶x+۱۰>۰$؛ زیرا $\Delta<۰$ و $a>۰$ پس تابع اکیداً صعودی است (اکسترمم ندارد). پس نمودار تابع از ربع سوم شروع می‌شود و به ربع اوّل ختم می‌شود و تابع صعودی اکید هم هست؛ پس نمودار آن، محور xها را دقیقاً در یک نقطه، قطع می‌کند.

روش دوم: $f(۰)=-۵$ و $f(۱)=۳$ پس معادله یک ریشه بین $(۰,۱)$ دارد؛ یعنی $۰<x<۱$.

از طرفی:

$$f'(x)=۳x^۲-۶x+۱۰=۳[x^۲-۲x]+۱۰$$

$$f'(x)=۳[(x-۱)^۲-۱]+۱۰$$

$$=۳(x-۱)^۲+۷>۰$$

فرض می‌کنیم معادلهٔ $f(x)=۰$ در بازهٔ $(۰,۱)$ دو ریشهٔ حقیقی متمایز $x_۱$ و $x_۲$ داشته باشد؛ پس $f(x_۱)=f(x_۲)=۰$. بنا به قضیهٔ رُل، برای حداّقل یک c بین $x_۱$ و $x_۲$، باید داشته باشیم $f'(c)=۰$؛ درحالیکه $f'(x)>۰$ است و این غیرممکن است. پس معادلهٔ $f(x)=۰$ دقیقاً یک ریشهٔ حقیقی دارد.

۲ـ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\cos^۲x+\frac{x}{۲}$ در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ پیوسته و در بازهٔ $(-\pi,\pi)$ مشتق‌پذیر است، پس: cای که $-\pi<c<\pi$ وجود دارد که:

$$f'(c)=\frac{f(\pi)-f(-\pi)}{\pi+\pi}$$

$$f'(x)=-۲\sin x\cos x+\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}-\sin ۲x$$

$$\Rightarrow f'(c)=\frac{۱}{۲}-\sin ۲c$$

$$\frac{۱}{۲}-\sin ۲c=\frac{f(\pi)-f(-\pi)}{\pi+\pi}=\frac{۱+\frac{\pi}{۲}-(۱-\frac{\pi}{۲})}{۲\pi}$$

$$=\frac{\pi}{۲\pi}=\frac{۱}{۲}$$

$$\frac{۱}{۲}-\sin ۲c=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \sin ۲c=۰\Rightarrow ۲c=k\pi\ \ k\in\mathbb{Z}$$

$$c=\frac{k\pi}{۲}\Rightarrow c=-\frac{\pi}{۲}\ ,\ ۰\ ,\frac{\pi}{۲}$$

۳ـ $f(x)=x-\sqrt{x^2-2x}$

$x^2-2x=0 \Rightarrow x=0,2$

$\Rightarrow D_f=(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$

$x\to-\infty \Rightarrow \lim f(x)=\lim(x+(x-1))$

$=\lim(2x-1)=-\infty$

معادلهٔ مجانب مایل $\Rightarrow y=2x-1$

توجه: هم‌ارزی رادیکالها :

$$\sqrt[p]{ax^p+bx^{p-1}+\dots}\sim\pm\sqrt[p]{a}\,(x+\frac{b}{ap})\quad \text{زوج } p,\quad x\to\pm\infty$$

اگر p فرد باشد، سمت راست $(\pm)$ لازم نیست.

$x\to+\infty \Rightarrow \lim f(x)=\lim(x-(x-1))=1$

مجانب افقی $\Rightarrow y=1$

$y'=1-\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}}=1-\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$

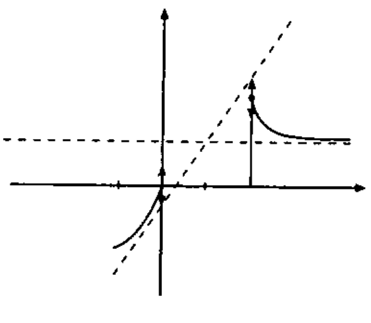
$=\frac{\sqrt{x^2-2x}-(x-1)}{\sqrt{x^2-2x}}=0$

$\Rightarrow \sqrt{x^2-2x}=x-1$

$\Rightarrow x^2-2x=x^2-2x+1\Rightarrow 0\neq1$

یعنی $f'(x)=0$ ریشه ندارد.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	∞		∞	−	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0		2	↘	1



۴ـ بنا به فرض داریم: $x+y=S$ ، پس $y=S-x$

$P=x.y\Rightarrow P=x(S-x)\Rightarrow P=-x^2+Sx$

در تابع P قرار می‌دهیم.

$P'_x=-2x+S=0\Rightarrow x=\frac{S}{2}$

$\text{Max }\ P=-\frac{S^2}{4}+\frac{S^2}{2}=\frac{S^2}{4}$

۵ـ می‌دانیم :

$\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{ax}=1$ یا $\underset{x\to0}{\sin ax\sim ax}$

الف.

$\lim_{x\to0}\frac{x-\tan x}{x^2.\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x-\tan x}{x^3}=\frac{0}{0}$

دستور هوپیتال:

$\lim_{x\to0}\frac{1-(1+\tan^2x)}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\tan^2x}{3x^2}$

$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{\sin^2x}{\cos^2x}}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\sin^2x}{3x^2\cos^2x}\sim\lim_{x\to0}\frac{-x^2}{3x^2\cos^2x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{-1}{3\cos^2x}=-\frac{1}{3}$

ب.

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(x.\tan x-\frac{\pi}{2}.\sec x)=\infty-\infty$

وقتی $x\to a$ و ابهام مسأله به‌صورت $+\infty-\infty$ باشد، با مخرج مشترک گیری، ابهام مسأله به $\frac{0}{0}$ تبدیل می‌شود.

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\frac{x\sin x}{\cos x}-\frac{\pi}{2\cos x})$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{2x\sin x-\pi}{2\cos x}=\frac{0}{0}$

دستور هوپیتال:

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{2(\sin x+x\cos x)}{-2\sin x}=\frac{2(1+0)}{-2(1)}=-1$

۶ـ محاسبهٔ مقدار تقریبی $(0/9)^3+\sqrt[3]{0/9}$

$f(x)=x^3+\sqrt[3]{x}\Rightarrow$

$f'(x)=3x^2+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\qquad \begin{cases}x=1\\ \Delta x=-\frac{1}{10}\end{cases}$

$f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x).\Delta x$

$(x+\Delta x)^3-\sqrt[3]{(x+\Delta x)}=x^3+\sqrt[3]{x}$

$+(3x^2+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}).\Delta x$

$(1-\frac{1}{10})^3-\sqrt[3]{(1-\frac{1}{10})}=1+1+(3+\frac{1}{3})(-\frac{1}{10})$

$0/9^3-\sqrt[3]{0/9}=2-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$

۷ـ $f(x)=x^2-6\Rightarrow f'(x)=2x$

فرض می‌شود $x_1=2$

در فرمول نیوتن داریم :

$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$\Rightarrow x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\qquad x_1=2$

$x_2=2-\frac{-2}{4}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}\Rightarrow x_2=\frac{5}{2}$

$x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}\qquad x_2=\frac{5}{2}$

$x_3=\frac{5}{2}-\frac{0/25}{5}=2/5-0/05=2/45$

پس ریشهٔ تقریبی مثبت معادلهٔ $x^2-6=0$ ، $2/45$ است.

۸ـ $\Delta x=\frac{1}{n}$

$\int_0^1 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1-\frac{i^2}{n^2})$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}1-\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i^2)$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(n-\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(n-\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\right)$$

$$=1-\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+2}{6n^2}=1-\frac{2}{6}=\frac{2}{3}$$

۹ـ اگر m مینیمم مطلق تابع f و M ماکزیمم مطلق تابع f در بازهٔ $[a,b]$ باشد، داریم:

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$$

$$f(x)=\frac{1}{3+x^3}\Rightarrow f'(x)=\frac{-3x^2}{(3+x^3)^2}=0$$

$$\Rightarrow x=0\notin(1,3)$$

$$f(1)=\frac{1}{3+1}=\frac{1}{4}=M$$

$$f(3)=\frac{1}{3+27}=\frac{1}{30}=m$$

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$$

$$\frac{1}{30}(3-1)\le\int_1^3\frac{dx}{3+x^3}\le\frac{1}{4}(3-1)$$

$$\frac{1}{15}\le\int_1^3\frac{dx}{3+x^3}\le\frac{1}{2}$$

بازهٔ مورد نظر $[\frac{1}{15},\frac{1}{2}]$ است.

ـ۱۰

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x dx}{2-\sin^2 2x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x dx}{2-(1-\cos^2 2x)}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x dx}{1+\cos^2 2x}$$

$$\begin{cases}u=\cos 2x\Rightarrow du=-2\sin 2x dx\\ x=0\Rightarrow u=1\ ,\ x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow u=0\end{cases}$$

$$I_1=\int_1^0\frac{-\frac{1}{2}du}{1+u^2}=-\frac{1}{2}(\operatorname{Arctan}u)_1^0$$

$$=-\frac{1}{2}(\operatorname{Arctan}0-\operatorname{Arctan}1)$$

$$=-\frac{1}{2}(0-\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{8}$$

$$I_2=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin^2 x.\cos^2 x}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\frac{1}{4}\sin^2 2x}$$

$$\begin{cases}\sin 2x=2\sin x\cos x\\ \sin^2 2x=4\sin^2 x.\cos^2 x\end{cases}$$

$$=4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin^2 2x}dx=4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}(1+\cot^2 2x)dx$$

$$=4(-\frac{1}{2}\cot 2x)_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=-2(\cot 2x)_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=-2(\cot\frac{2\pi}{3}-\cot\frac{\pi}{2})$$

$$=-2(-\cot\frac{\pi}{3}-0)$$

$$=-2(-\frac{\sqrt{3}}{3})=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

ـ۱۱

$$I=\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)dx$$

$$u=\pi-x\Rightarrow du=-dx\ ,$$

$$x=\pi-u\begin{cases}x=0\Rightarrow u=\pi\\ x=\pi\Rightarrow u=0\end{cases}$$

$$I=\int_{\pi}^{0}(\pi-u).f(\sin(\pi-u))(-du)$$

$$=-\int_{\pi}^{0}(\pi-u).f(\sin u)du$$

$$=\int_0^{\pi}(\pi-u)f(\sin u)du$$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\pi}\pi f(\sin u)du-\int_0^{\pi}uf(\sin u)du$$

u را به x تبدیل می‌کنیم:

$$\Rightarrow\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\int_0^{\pi}\pi f(\sin x)dx$$

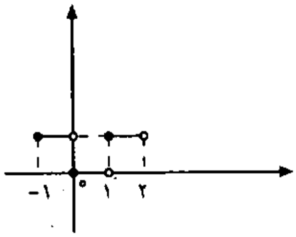
$$-\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx$$

$$\Rightarrow 2\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\pi\int_0^{\pi}f(\sin x)dx$$

$$\Rightarrow\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)dx$$

ریاضی عمومی ۲ پیش‌دانشگاهی

۱ـ ابتدا نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=[\![x]\!]$ را در فاصلهٔ $[-1,2]$ رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار تابع، ملاحظه می‌کنیم که این تابع در نقطهٔ $x=1$ دارای ماکزیمم نسبی است.

۲ـ چون اکسترممهای مطلق این تابع، می‌تواند در نقاط بحرانی یا نقاط به طولهای ۳- و ۱ باشد، بنابراین، ابتدا مقادیر تابع را به ازای عددهای بحرانی f روی $[-3,1]$ به‌دست می‌آوریم و سپس مقادیر عددی $f(-3)$ و $f(1)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x)=(x+2)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{(x+2)^2}\ ;$$

$$f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x+2}}$$

$x+2=0\Rightarrow x=-2\in[-3,1]$ نقطهٔ بحرانی

$$x=-2\Rightarrow f(-2)=0$$

$$x=-3\Rightarrow f(-3)=\sqrt[3]{(-3+2)^2}=1$$

$$x=1\Rightarrow f(1)=\sqrt[3]{(1+2)^2}=\sqrt[3]{9}$$

$\operatorname{Max}\{0,1,\sqrt[3]{9}\}=\sqrt[3]{9}$ ماکزیمم مطلق

$\operatorname{Min}\{0,1,\sqrt[3]{9}\}=0$ می‌نیمم مطلق

۳ـ ابتدا محلّ برخورد مجانبهای f را تعیین می‌کنیم:

$\begin{cases}x\to\pm\infty\\ y\to 2\end{cases}\Rightarrow y=2$ مجانب افقی

$\begin{cases}y\to\pm\infty\\ x\to 1\end{cases}\Rightarrow x=1$ مجانب قائم

بنابراین، محلّ برخورد مجانبها نقطهٔ $A\begin{vmatrix}1\\2\end{vmatrix}$ است.

اکنون برای این که ثابت کنیم نقطهٔ A مرکز تقارن منحنی است، مبدأ مختصات را به نقطهٔ A منتقل می‌کنیم:

$$\begin{cases}X=x-\alpha\\Y=y-\beta\end{cases};\quad\begin{cases}X=x-1\\Y=y-2\end{cases};\quad\begin{cases}x=X+1\\y=Y+2\end{cases}$$

$$Y+2=\frac{2(X+1)+1}{(X+1)-1}\Rightarrow Y=\frac{3}{X}$$

با تبدیل $X\to -X$ و $Y\to -Y$، ملاحظه می‌کنیم که ضابطهٔ تابع f تغییر نمی‌کند؛ بنابراین مبدأ مختصات جدید یا همان نقطهٔ $A\begin{vmatrix}1\\2\end{vmatrix}$ مرکز تقارن تابع f است.

۴ـ $f(x)=\frac{16}{(x^2+1)^2}$; $D_f=\mathbb{R}$

$$\begin{cases}x\to\pm\infty\\y\to 0\end{cases}\Rightarrow y=0 \quad \text{مجانب افقی}$$

چون $x^2+1\neq 0$، بنابراین منحنی نمایش تابع f مجانب قائم ندارد.

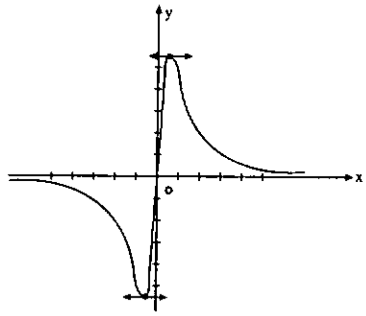
$$y'=\frac{16(x^2+1)^2-4x(x^2+1)\times 16x}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{16(-3x^2+1)}{(x^2+1)^3}$$

$$=0\Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{3}\ ,\ x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

x	y
$-\infty$	0
$+\infty$	0
$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$3\sqrt{3}$
$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-3\sqrt{3}$
0	0

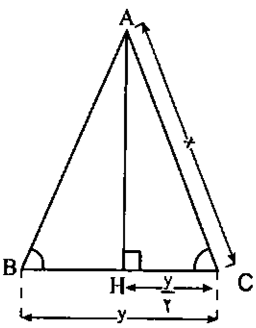
x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
f'	−	⋮ +	| +	⋮ −	
f	0 ↘	$-3\sqrt{3}$ ↗	↗	$3\sqrt{3}$ ↘	0
		Min		Max	



۵ـ اگر طول ساقهای مثلث متساوی‌الساقین را x متر و قاعدهٔ آن را y متر درنظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$A\overset{\Delta}{H}C: AH^2=AC^2-HC^2\Rightarrow AH^2=x^2-\frac{y^2}{4}$$

$$\Rightarrow AH=\sqrt{x^2-\frac{y^2}{4}}$$



معادلهٔ اوّلیه: $S=\frac{1}{2}(AH\times BC)=\frac{y}{4}\sqrt{x^2-\frac{y^2}{4}}$

معادلهٔ ثانویه: $x+x+y=18\Rightarrow x=\frac{18-y}{2}$

اکنون اگر در معادلهٔ اوّلیه قرار دهیم: $x=\frac{18-y}{2}$، دراین صورت، معادلهٔ اوّلیه را به یک متغیر وابسته کرده‌ایم:

$$S=\frac{y}{2}\sqrt{\left(\frac{18-y}{2}\right)^2-\frac{y^2}{4}}\Rightarrow S^2=f(y)$$

$$=\frac{y^2}{4}\left[\left(\frac{18-y}{2}\right)^2-\frac{y^2}{4}\right]$$

$$f(y)=\frac{81}{4}y^2-\frac{9}{4}y^3$$

$$\Rightarrow f'(y)=\frac{27}{4}y(6-y)=0$$

$$\Rightarrow y=0\ ,\ y=6$$

y	$-\infty$	0	6	$+\infty$
f'	−	+	−	
f	↘	↗	↘	

با توجه به جدول بالا، ملاحظه می‌کنیم که تابع f در $y=6$ دارای ماکزیمم نسبی است، بنابراین داریم:

$$y=6\ ,\ x=\frac{18-y}{2}\Rightarrow x=6$$

بنابراین، بزرگترین مساحت مثلث، برابر است با:

$$S=\frac{y}{4}\sqrt{x^2-\frac{y^2}{4}}=\frac{6}{4}\sqrt{36-\frac{36}{4}}=\frac{18\sqrt{3}}{4}$$

۶ـ

$$x^2+y^2-6x-4y+9=0$$

$$\Rightarrow C_1\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)=(3,2)$$

$$r_1=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}=\frac{1}{2}\sqrt{36+16-36}=2$$

$$x^2+y^2-2x-2y-7=0$$

$$\Rightarrow C_2\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)=(1,1)$$

$$r_2=\frac{1}{2}\sqrt{4+4+28}=3$$

$$C_1C_2=\sqrt{(1-3)^2+(1-2)^2}=\sqrt{5}$$

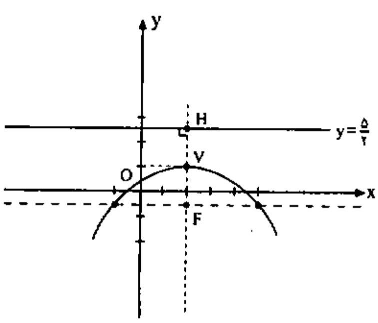
با مقایسهٔ r_1، r_2 و C_1C_2 داریم:

$$|3-2|<\sqrt{5}<3+2\Rightarrow |r_2-r_1|<C_1C_2<r_2+r_1$$

پس دو دایره، یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند.

۷ـ با مشخص کردن کانون در صفحهٔ مختصات و رسم خطّ هادی، ملاحظه می‌کنیم که سهمی رو به پایین باز است:

$$FH=2P=3\Rightarrow P=\frac{3}{2}$$

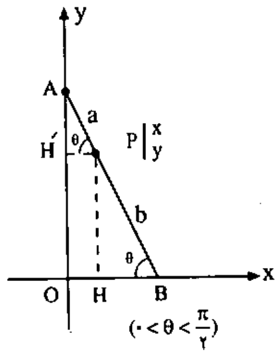


$$F\left|\begin{array}{l}\alpha=2\\ \beta-P=-\frac{1}{2}\Rightarrow\beta-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\beta=1\end{array}\right.\;;$$

$$V\left|\begin{array}{l}\alpha=2\\ \beta=1\end{array}\right.$$ (مختصات رأس سهمی)

$$(x-\alpha)^2=-4P(y-\beta)\Rightarrow(x-2)^2=6(y-1)$$

۸ـ



$$P\left|\begin{array}{l}x=OH=OB-HB=(a+b)\cos\theta-b\cos\theta=a\cos\theta\\ y=OA-H'A=(a+b)\sin\theta-a\sin\theta=b\sin\theta\end{array}\right.$$

$$P\left|\begin{array}{l}x=a\cos\theta\\ y=b\sin\theta\end{array}\right.\Rightarrow\begin{cases}\frac{x}{a}=\cos\theta\\ \frac{y}{b}=\sin\theta\end{cases}\;;\;0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\sin^2\theta+\cos^2\theta$$

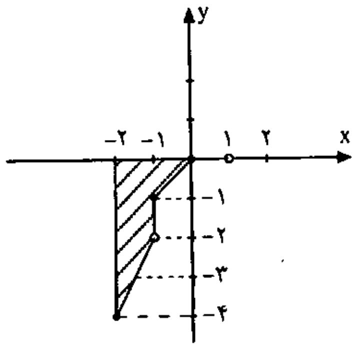
$$\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

چون $0<\theta<\frac{\pi}{2}$، پس مکان هندسی نقطهٔ P، $\frac{1}{4}$ بیضی است.

۹ـ الف. ابتدا نمودار تابع با ضابطهٔ $y=[x]|x|$ را در فاصلهٔ $[-2,1]$ رسم می‌کنیم:

$$-2\le x<-1\Rightarrow[x]=-2\Rightarrow y=-2(-x)$$

$$=2x\;;\;\begin{array}{c|cc}x&-2&-1\\ \hline y&-4&-2\end{array}$$



$$-1\le x<0\Rightarrow[x]=-1\Rightarrow y=-1(-x)$$

$$=x\;;\;\begin{array}{c|cc}x&-1&0\\ \hline y&-1&0\end{array}$$

$$0\le x<1\Rightarrow[x]=0\Rightarrow y=0$$

چون این تابع در نقطهٔ $x=-1$ ناپیوسته است، بنابراین داریم:

$$\int_{-2}^{1}[x]|x|dx=\int_{-2}^{-1}[x]|x|dx+\int_{-1}^{1}[x]|x|dx$$

$$=-\left(\frac{4+2}{2}\times1\right)+\left[-\left(\frac{1\times1}{2}\right)\right]=-\frac{7}{2}$$

ب. $$F(x)=\int\frac{4\sin^2x}{1+\cos x}dx$$

$$=\int\frac{4\sin^2x}{1+\cos x}\times\frac{1-\cos x}{1-\cos x}dx$$

$$F(x)=4\int\sin x\,dx-4\int\sin x\cos x\,dx$$

$$=4\int\sin x\,dx-2\int\sin2x\,dx$$

$$=-4\cos x+\cos2x+c$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{4\sin^3x}{1+\cos x}dx=-4\cos x+\cos2x+c\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=-2\sqrt{2}+3$$

۱۰ـ ابتدا طول محلّ برخورد دو منحنی را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}y=x^3+2\\ y=2x^2-x+2\end{cases}\Rightarrow x^3+2=2x^2-x+2$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ x=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\ b=1\end{cases}$$

$$S=\left|\int_a^b[f(x)-g(x)]dx\right|$$

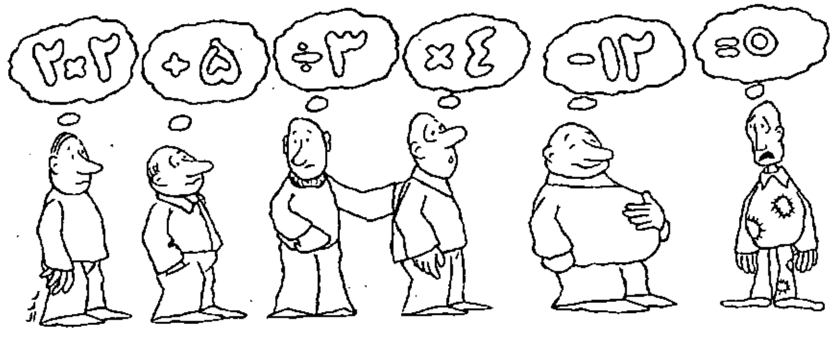
$$=\left|\int_0^1(x^3+2-2x^2+x-2)dx\right|$$

$$=\left|\int_0^1(x^3-2x^2+x)dx\right|$$

$$\int(x^3-2x^2+x)dx=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+c$$

$$S=\left|\int_0^1(x^3-2x^2+x)dx\right|$$

$$=\left|\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+c\Big]_0^1\right|=\frac{1}{12}$$



جوابهای تفریح اندیشه

○ پاسخ ۱ :

در مورد حل این مسأله با توجه به عددهای داده شده (۰/۵ لیتر، $\frac{1}{4}$ لیتر، ۰/۵ لیتر) نیازی به محاسبه نیست. در واقع پس از انجام عملیات جابه‌جایی، در ظرف A همان مقدار مایع وجود دارد که قبل از عملیات جابه‌جایی وجود داشت، و این مطلب در مورد ظرف B نیز صدق می‌کند و حجم آب و شیر جابه‌جا شده یکسان است.

بنابراین پس از انجام عملیات جابه‌جایی مقدار شیری که در ظرف A موجود است با مقدار آبی که در ظرف B وجود دارد با هم برابرند.

نکته ـ به وسیلهٔ محاسبه نیز ثابت می‌شود که پس از انجام اعمال جابه‌جایی با شرطهای داده شده، مقدار شیر موجود در ظرف A مساوی $\frac{11}{27}$ لیتر و مقدار آب موجود در ظرف B نیز برابر $\frac{11}{27}$ لیتر است.

○ پاسخ ۲ :

فروشنده برای به دست آوردن مخلوطهای دلخواه، ۶ مرحله طی کرده، و از بشکهٔ ۲۵ لیتری هم استفاده نکرده است. سه ظرف ۱۰۰ لیتری را A و B و C و ظرف ۵۰ لیتری را X می‌نامیم.

این شش عمل به شرح زیر است :

۱ـ از ظرف A داخل ظرف X می‌ریزیم تا پر شود.

۲ـ از ظرف B داخل ظرف A می‌ریزیم تا پر شود پس، $A=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$

۳ـ از ظرف C داخل ظرف B می‌ریزیم تا پر شود پس، $B=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$

۴ـ از ظرف A داخل ظرف C می‌ریزیم تا پر شود پس، $C=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$

۵ـ از ظرف B داخل ظرف A می‌ریزیم تا پر شود پس، $A=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$

۶ـ از ظرف X داخل ظرف B می‌ریزیم تا پر شود پس، $B=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$

○ پاسخ ۳ :

ساختن مربع جادویی با این ۹ عدد غیرممکن است.

در واقع مجموع این ۹ عد برابر ۷۸ است و چون مجموع عددهای نوشته شده در هر سطر و هر ستون باید برابر باشند، پس مجموع عددهای نوشته شده در هر سطر یا هر ستون باید ۲۶=۳ :۷۸ باشد. بنابراین در بعضی از سطرها و بعضی از ستونها باید سه عدد فرد نوشته شده باشد که مجموعشان ۲۶ باشد و این ممکن نیست (مجموع سه عدد فرد همیشه عددی فرد است نه زوج)

○ پاسخ ۴ :

جمعاً به ۱۸ بار پر کردن و جابه‌جایی ظرفها نیاز است. جدول زیر نحوهٔ عمل را نشان می‌دهد.

۱۹ لیتری	۱۳ لیتری	۷ لیتری
۰	۰	۷
۰	۱۳	۷
۷	۱۳	۰
۱۹	۱	۰
۱۲	۱	۷
۱۲	۸	۰
۵	۸	۷
۵	۱۳	۲
۱۸	۰	۲
۱۸	۲	۰
۱۱	۲	۷
۱۱	۹	۰
۴	۹	۷
۴	۱۳	۳
۱۷	۰	۳
۱۷	۳	۰
۱۰	۳	۷
۱۰	۱۰	۰

معرفی کتابهای ریاضی انتشارات مدرسه

جدید

نابرابریها و نامعادله ها

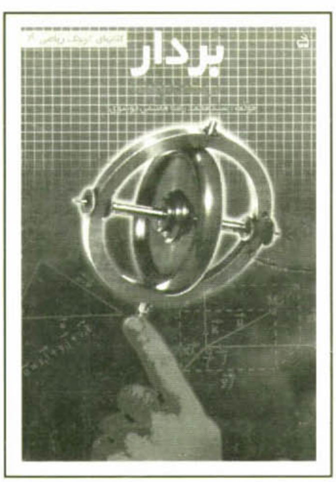
مؤلف: میرشهرام صدر / ناشر: انتشارات مدرسه

کتاب نابرابریها و نامعادله ها بیستمین کتاب از سری کتابهای کوچک ریاضی است. مباحثی که در این کتاب ملاحظه می کنید از اهمیت فراوانی در ریاضیات دبیرستانی و پیش دانشگاهی برخوردار است. در فصل اول این کتاب به تعیین علامت انواع گوناگون عبارتهای جبری و در فصل دوم به مبحث نابرابریها پرداخته شده است. همچنین در این فصل مسائلی از المپیادهای ریاضی را درباره نابرابریها با تکنیکهایی چند اثبات کرده است، زیرا که تقریباً در همهٔ المپیادهای ریاضی مبحث نابرابریها مورد آزمون قرار می گیرد. در فصل سوم، انواع نامعادله ها را با مثالهایی چند تشریح و حل کرده است. همچنین در این فصل به مسائل کاربردی نامعادله ها در علوم و فنون مختلف پرداخته شده است. باید گفت که نامعادله ها در زمینهٔ اقتصاد، محاسبات فنی، روان شناسی، زمین شناسی، پزشکی، فیزیک، شیمی و غیره به کار می آید. در پایان کتاب مجموعه ای از پرسشهای چهارگزینه ای به همراه حل کلیدی آورده شده است. مطالعه این کتاب را به همهٔ دانش آموزان، دبیران و دانشجویان مراکز تربیت معلم و علاقه مندان به ریاضی توصیه می کنیم.

جدید

بردار در صفحه و فضا

مؤلف: سیدمحمدرضا هاشمی موسوی / ناشر: انتشارات مدرسه



این کتاب حاوی مطالبی از مفاهیم و تعریفهای مربوط به دستگاه مختصات در قالب یادآوری و شامل شرح و بسط مفاهیم هندسی، تحلیلی، ماتریسی و مختصاتی «بردار» در صفحه و فضا می باشد که پس از درس، با توجه به مفاهیم و مثالهای متن درس، مسائل و تمرینهای دوره ای برای احاطه و تسلط کامل روی مطالب فراگرفته شده، طرح شده است. در آخر تستهای کنکورهای سراسری مربوط به «بردار» رشته های علوم ریاضی و فنی و علوم تجربی و تستهایی برای پوشش دادن به مطالب، همراه با پاسخ تحلیلی و تشریحی آنها، آورده شده است تا آگاهیهای کافی و مهارت لازم را برای داوطلبان شرکت در آزمونهای سراسری فراهم کند. در ضمن، قسمت عمده ای از مسائل که در این کتاب آمده، می تواند مورد استفادهٔ عموم دانش پژوهان قرار گیرد. در کتاب، به مسائل مشکلی هم برخورد خواهیم کرد که حل آن، تفکر و ابتکار بیشتری را طلب می کند.

توجه: از سری کتابهای کوچک ریاضی، کتابهای زیر در دست چاپ است:

۱ـ ورودی به نظریهٔ اعداد / حمیدرضا امیری ۲ـ تقارن در جبر و روش ضرایب نامعین / پرویز شهریاری
۳ـ استقرای ریاضی / پرویز شهریاری ۴ـ آمار / دکتر عین‌ا... پاشا

سجزی

ابوسعید احمد بن محمد بن عبدالجلیل سجزی

ریاضیدان و منجم مسلمان ایرانی (حدود ۴۱۵ - ۳۳۰ ه.ق)

از مردم سیستان و از مشاهیر ریاضیدانان و معاریف منجمان سدهٔ چهارم هجری و معاصر با ابوریحان بیرونی و عضدالدولهٔ دیلمی بوده و بسیاری از تألیفات خود را به نام عضدالدوله نوشته است. ظاهراً سجزی غالب اوقات عمر خود را در شیراز به سر برده و گاهی نیز در خراسان می زیسته است.

از آثار ریاضی سجزی پیداست که وی بخصوص در هندسه، بسیار زبردست بوده و تحقیقاتی دربارهٔ تقاطع قطوع مخروطی و مسائل دیگر ریاضی کرده است. بیرونی در کتاب *آثارالباقیة* او را «مهندس» نامیده است. سوتر نوشته است که وی یکی از مبرزترین هندسه دانان دورهٔ اسلامی است. تا زمان سجزی، ریاضیدانان مسألهٔ تثلیث زاویه را با روش هندسهٔ متحرک به وجهی تقریبی حل می کردند. سجزی به جای این روش، مسألهٔ مذکور را به وسیلهٔ تقاطع یک دایره و یک هذلولی متساوی القطرین حل کرد و آن را روش هندسهٔ ثابت نامید و این روش کاملاً هندسی است و بعداً مورد توجه ریاضیدانان قرار گرفت. علاوه بر این سجزی چند رسالهٔ بدیع دیگر دربارهٔ *مخروطات* و *پرگار تام* نوشته است.

از سجزی در حدود ۴۵ کتاب و رساله می شناسیم که در حدود ۳۴ فقره از آنها مربوط به مطالب ریاضی و بقیه دربارهٔ نجوم و احکام نجوم و ابزار نجومی است و آثار نجومی وی بسیار مفصلتر از آثار ریاضی خالص اوست.

بیرونی در چند موضع، از آثار خود از سجزی نام برده و راه حلهایی از مسائل مختلف هندسی از او نقل کرده است. سجزی، بنا به نوشتهٔ بیرونی، در رصدی که توسط «عبدالرحمان صوفی» در شیراز صورت گرفت، حضور داشته است.

نظر سجزی دربارهٔ حرکت وضعی زمین: در بین ریاضیدانان و منجمان دورهٔ اسلامی نخستین کسی که عملاً عقیده به *حرکت وضعی کرهٔ زمین* را به کار بست، *ابوسعید سجزی بود*.

چند مسألهٔ معروف از سجزی را که در یکی از رساله های وی طرح و حل شده است، یادآور می شویم:

۱. از نقطه ای مفروض در داخل دایره ای معلوم، وتری رسم کنید که در نقطهٔ مذکور به نسبت معلوم تقسیم شود.

۲. از نقطه ای مفروض در داخل دایره ای معلوم، وتری رسم کنید که مجموع مربعات دو قطعهٔ آن مساوی با سطح معینی شود.

۳. از نقطه ای مفروض در داخل دایره ای معلوم، وتری به طول معین رسم کنید.

۴. از نقطه ای مفروض در داخل دایره ای معلوم، وتری رسم کنید که نسبت مربعات دو قطعهٔ آن مساوی با نسبت معینی شود.

۵. از نقطه ای مفروض در خارج دایره ای معلوم، قاطعی رسم کنید که نسبت قطعهٔ خارجی آن به قطعهٔ داخلی مساوی با نسبت معینی شود.

۶. از نقطه ای مفروض در خارج دایره ای معلوم، قاطعی رسم کنید که مجموع مربعات آن قاطع و قسمت خارجی آن مساوی با سطح معینی شود.

سال ۲۰۰۰ سال جهانی ریاضیات

کد ۷۸۸/۱

511321

گروه گرافیک رویش