رشد برهان

۶۷

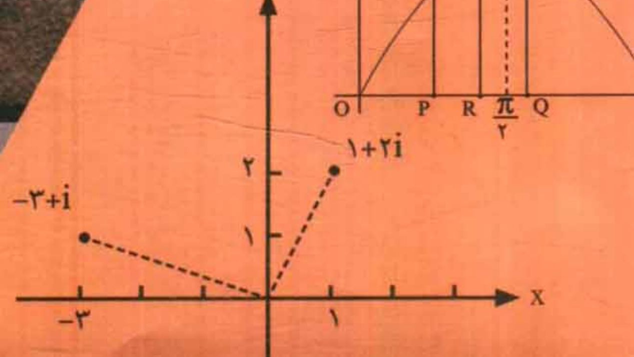
مجله‌ی ریاضی

دوره‌ی آموزش متوسطه

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک‌آموزشی

دوره‌ی بیستم/ پاییز ۱۳۸۹/ شماره‌ی ۱/ ۶۴ صفحه/ ۵۰۰۰ ریال
فصلنامه‌ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
www.roshdmag.ir

مهر؛ بهار تعلیم و تربیت



ریاضی دانان مسلمان

شیخ بهایی

بهاءالدین عاملی یا شیخ بهایی. محمدبن حسین بهاءالدین عاملی، متخلص به بهایی و معروف به شیخ بهایی، دانشمند معروف و ریاضی‌دان، که به سال ۹۵۳ در بعلبک متولد شد و در سال ۱۰۳۱ در اصفهان وفات یافت.

کتاب شیخ بهایی در ریاضی، به نام خلاصه‌الحساب است، که کتابی است درسی در ریاضیات مقدماتی که شرح‌های متعددی به زبان‌های عربی و فارسی بر آن نگاشته‌اند و چاپ‌های متعددی در ایران، ترکیه، هندوستان و سوریه از آن به عمل آمده است. این کتاب، در ۱۸۴۳ به آلمانی و در ۱۸۴۶ به فرانسوی ترجمه شد.

کتاب وی در نجوم، تشرح‌الافلاک نام دارد که خلاصه‌ای است در علم هیأت، که بر آن نیز شرح‌ها و حاشیه‌های متعدد نوشته شده است.

بیرونی

بیرونی، ابوریحان محمدبن احمد بیرونی، ریاضی‌دان، منجّم و دانشمند ایرانی که در سوم ذیحجه‌ی سال ۳۶۲ در بیرون خوارزم، پا به عرصه‌ی وجود گذاشت و به سال ۴۴۲ درگذشت.

وی یکی از نوابع روزگار و یکی از بزرگ‌ترین مفاخر دنیای علم و تحقیق است. بیرونی ریاضی‌دانی زبردست و مبتکر بود که علاوه بر آن، سیّاحی زیرک و نکته‌سنج شد و کتاب معروف تحقیق ماللهند را در لهجه‌های محلی و معارف و فلسفه‌ی هندیان نگاشت.

بیرونی، آخرین اثر خود به نام الصیدنه فی الطب را که درباره‌ی داروهای طبی است، در سنی متجاوز از هشتاد سالگی نوشته است.

بعضی از آثار ریاضی موجود بیرونی عبارت است از:

۱. کتاب التفهیم لاوائل صناعه‌التنجیم، که بیرونی آن را به دو زبان فارسی و عربی نوشته است.

۲. کتاب مقالید علم‌الهیئه که یکی از مهم‌ترین آثار ریاضی بیرونی و نخستین کتاب مستقل «مثلثات کروی» است، که نام کامل آن مقالید علم‌الهیئه مایحدث فی سطح‌الکره است.

۳. مقاله‌ی سوم، کتاب قانون مسعودی، که یکی از مهم‌ترین و مفصل‌ترین آثار او است.

منبع: فرهنگ ریاضیات/ گروه ریاضی انتشارات مدرسه/ انتشارات مدرسه‌ی برهان

بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت آموزش‌وپرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

رشد برهان ۶۷
مجله‌ی ریاضی
دوره‌ی آموزش متوسطه

فصلنامه‌ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
دوره‌ی بیستم/ شماره‌ی ۱/ پاییز ۱۳۸۹

سال همت مضاعف، کار مضاعف

● مدیر مسئول: **محمد ناصری** ● سردبیر: **حمیدرضا امیری**
● مدیر داخلی: **میرشهرام صدر** ● طراح گرافیک: **جعفر وافی**
● هیئت تحریریه: **حمیدرضا امیری، محمد هاشم رستمی، احمد قندهاری، میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی، سید محمدرضا هاشمی موسوی، غلامرضا یاسی‌پور**
و با تشکر از همکاری ارزنده‌ی **استاد پرویز شهریاری**
● ویراستار ادبی: **لعیا عروجی**
● **پایگاه اینترنتی:** www.roshdmag.ir
● **رایانامه:** Borhanm@roshdmag.ir
● **پیام‌گیر نشریات رشد:** ۸۸۳۰۱۴۸۲ ـ ۰۲۱
نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
● **تلفن دفتر مجله:** ۸۸۳۰۵۸۶۲ ـ ۰۲۱
● **تلفن امور مشترکین:** ۷۷۳۳۶۶۵۶ ـ ۷۷۳۳۶۶۵۵ ـ ۰۲۱
● **شمارگان:** ۱۳۰۰۰ نسخه
● چاپ: **شرکت افست (سهامی عام)**

رشد برهان متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر به همکاری دعوت می‌کند:

- ● نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی دوره‌ی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)
- ● طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- ● طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- ● طرح معماهای ریاضی
- ● نگارش یا ترجمه‌ی مقاله‌های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه‌ی علمی و اجتماعی ریاضی دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش کامپیوتر و...)

سرمقاله

«هذا من فضل ربّی»

وقتی برای چاپ اولین شماره‌ی مجله‌ی ریاضی رشد برهان و تولد این مجله، اولین جلسه‌ی هیئت تحریریه تشکیل شد و برای نام مجله، هریک از اعضا پیشنهادی دادند، استاد **پرویز شهریاری** نام برهان را به زبان آورد و این کلمه را خیلی با معنی و برای مجله‌ی ریاضی مناسب دانستند همه‌ی اعضای هیئت تحریریه نیز به اتفاق با این نام موافقت کردند و سرانجام این نام که هم یک اصطلاح ریاضی و هم یک واژه‌ی قرآنی است، برای مجله انتخاب شد.

از آن روزها حدود ۲۰ سال می‌گذرد و در آستانه‌ی ورود به بیستمین سال انتشار این مجله هستیم؛ مجله‌ای که در طول این ۲۰ سال فراز و نشیب‌های بسیاری را پشت سر گذاشته است و چه بسیار دانش‌آموزانی که از خوانندگان این مجله بوده‌اند و الآن در مشاغل گوناگون مشغول خدمت هستند. حتی تعدادی از این عزیزان، هنوز با مجله ارتباط دارند و آن را مطالعه می‌کنند. شما هم از هر کجا که در زمره‌ی علاقه‌مندان و خوانندگان این مجله قرار گرفته‌اید، می‌توانید با حفظ و نگه‌داری شماره‌های این مجله، جزو کسانی باشید که پس از حداکثر چهار سال دیگر که اِن‌شاءالله وارد دانشگاه شدید، هم‌چنان با ما ارتباط داشته باشید (البته دفتر انتشارات کمک آموزشی در نظر دارد، تمام شماره‌های ۱ تا آخرین شماره‌ی امسال را در یک لوح فشرده در اختیار علاقه‌مندان قرار دهد).

به هر صورت ادامه‌ی کار مجله و رسیدن آن به ۲۰ سالگی در درجه‌ی اول مرهون لطف و فضلِ الهی بوده و در درجه‌ی دوم مدیون زحمات اعضای محترم هیئت تحریریه و مدیران مسئول و پشتیبانی شما خوانندگان عزیز که همواره پیشنهادات و انتقادات سازنده و راه‌گشایتان توشه‌ی راه ما بوده و خواهد بود.

از شما دانش‌آموزان که مخاطبان اصلیِ این مجله هستید، درخواست دارم که با مجله ارتباط بگیریم (از طریق ارسال نامه یا سایت) و هیئت تحریریه را با نظرات، پیشنهادات و انتقادات خود آشنا کنید. شاید سؤالات زیر بتواند سمت و سوی مناسب‌تری برای ایجاد این ارتباط فراهم سازد:

۱. چند درصد از مقالات و مطالب مجله برای شما قابل استفاده است؟
۲. از چه مقاله یا مطلبی بیشتر استفاده کردید؟
۳. آیا مطالب عمومی مانند تاریخ ریاضیات، مسئله، سرگرمی و... برای شما قابل استفاده بوده است؟
٤. کدام‌یک از مقالات از نثر روان‌تری برخوردار بوده است؟
٥. کدام مقاله کمک درسی، خودآموزتر از بقیه بیان شده است؟
٦. آیا جای مقاله یا مطلبی را در مجله خالی می‌بینید؟
۷. گرافیک مجله (صفحه‌آرایی، تیترها، طرح‌ها و...) را چگونه ارزیابی می‌کنید؟
۸. دست‌یابی شما به مجله از چه طریقی است و برای تهیه‌ی آسانِ آن چه پیشنهادی دارید؟
۹. آیا «سرمقاله‌ی» هر شماره را مطالعه کرده‌اید؟ چقدر برای شما سودمند بوده است؟
۱۰. آیا معلمین شما از این مجله استفاده می‌کنند و آن را می‌شناسند؟
۱۱. چرا برای ما مقاله یا مسئله ارسال نمی‌کنید؟
۱۲. اگر قبلاً هم این مجله را مطالعه کرده‌اید و خاطره یا نکته‌ی مهمی در ارتباط با مجله دارید، برای ما بفرستید.

در خاتمه، سال تحصیلی بسیار خوب و پر از موفقیتی برای همه‌ی شما عزیزان دانش‌آموز آرزو دارم و از درگاه حضرت حق، توفیق روزافزون برای شما خواستارم.

والسلام ـ سردبیر

ریاضیات در ایران(۸)

پرویز شهریاری

کلیدواژه‌ها:
پورسینا، ابوعلی‌سینا، ابوعبداله‌جوزانی، رساله‌های ریاضی پورسینا

پورسینا

بوعلی حسین، فرزند عبداله فرزند سینا که غالباً او را فرزند سینابوعلی می‌نامند، نزد اروپاییان به آوسین شهرت دارد. او در سال ۹۸۰ میلادی، در نزدیکی‌های «بخارا» متولد شد و در سال ۱۰۳۷ میلادی در همدان درگذشت. اکنون مقبره‌اش در همدان است.

پورسینا هم فیلسوف و پزشک بود و هم ریاضی‌دان و اخترشناس؛ دانشمند مشهوری که برای شرح زندگی او، باید به نوشته‌ی خودش که سرگذشت ۳۰ سال نخست زندگی‌اش را نوشته و نوشته‌ی شاگردش، از روزی که به نزد او آمد و تا آخر عمر که با او بود، مراجعه کرد.

«پدرم مردی بود از اهل بلخ و از آن‌جا به بخارا رفت. در زمان نوح‌بن منصور، او کارهای دیوانی را انجام می‌داد. پدرم دختری از اهل قریه بخواست و در آن‌جا بماند. من و برادرم همان‌جا به‌دنیا آمدیم... پدرم مرا نزد مردی فرستاد که سبزی فروختی و در ضمن حساب هندی هم می‌دانست تا از وی تعلیم یابم ... پدرم، ابوعبداله ناتلی را که دعوی فلسفه می‌کرد، به خانه‌ی ما آورد به این امید که از او فلسفه بیاموزم... تا آن که منطق را خواندم ... بعد از آن خودم کتاب ها را مطالعه می‌کردم تا دانش منطق را محکم ساختم ... در این حال، ناتلی از ما مفارقت کرد... در این وقت شانزده سال داشتم ... پس از این پدرم فوت شد.»

ابوعلی‌سینا در سال ۴۰۴ به ری و سپس از ری در سال ۴۰۵ به قزوین و سپس همدان نزد شمس‌الدوله دیلمی رفت و در آن‌جا قرار یافت. او به ریاضیات و اخترشناسی کمتر پرداخته است، با وجود این کتاب‌های ریاضیات و اخترشناسی او را معرفی می‌کنم.

پورسینا به ریاضیات بیشتر از جنبه‌ی فلسفی می‌نگریست. او «اصل‌های اقلیدسی» را به عربی ترجمه کرده است. هم‌چنین، طرح نه‌نه را برای عددها و استفاده از آن را برای جذر و کعب بیان کرده است (در همدان).

مفهوم‌های عمده‌ی فیزیکی مثل حرکت، نیرو، اصطکاک، نور و حرارت را نیز بررسی کرده است. کراوره می‌گوید: رساله‌ای نوشته است و «احکام نجوم» را در آن ابطال کرده‌است که چند نسخه‌ی خطی از آن وجود دارد.

ابوعبداله جوزانی که شاگرد پدر سینا بود، سرگذشتی برای پورسینا نوشته است.

«... در مجسطی ده شکل در اختلاف منظر ایراد کرد و در آخر مجسطی در دانش اخترشناسی چیزهایی آورد که سابق بروی کسی اثبات به آن‌ها ننموده بود. ، در اقلیدس شبهه‌ای چند ایراد کرد ... و در موسیقی مسئله‌ها افزود که از آن غافل بودند.

مهم‌ترین نوشته‌های پورسینا، یعنی نوشته‌های ریاضی و اخترشناسی همان است که خود پورسینا در کتابی از آن‌ها یاد کرده است. این کتاب به زبان آلمانی هم برگردان شده است. در حال حاضر این رساله‌ها از پورسینا در دست هستند.

۱. رساله‌ای درباره‌ی زاویه‌ها که از آن یک نسخه‌ی خطی موجود است.

۲. رساله‌ای تحقیقی و هندسه و از آن دو نسخه موجود است.

۳. رساله‌ای برای دیدن ستارگان که یک نسخه‌ی خطی از آن در مشهد است و نسخه‌های خطی دیگری در «ایاصوفیه» و «بریتیش میوزیوم» موجود است. در کتاب خانه‌ی مرکزی دانشگاه تهران نیز فیلمی از آن وجود دارد.

۴. قانون عمل خورشید و ماه و زمان‌های شب و روز که تنها یک نسخه از آن در «اسکوریال» موجود است.

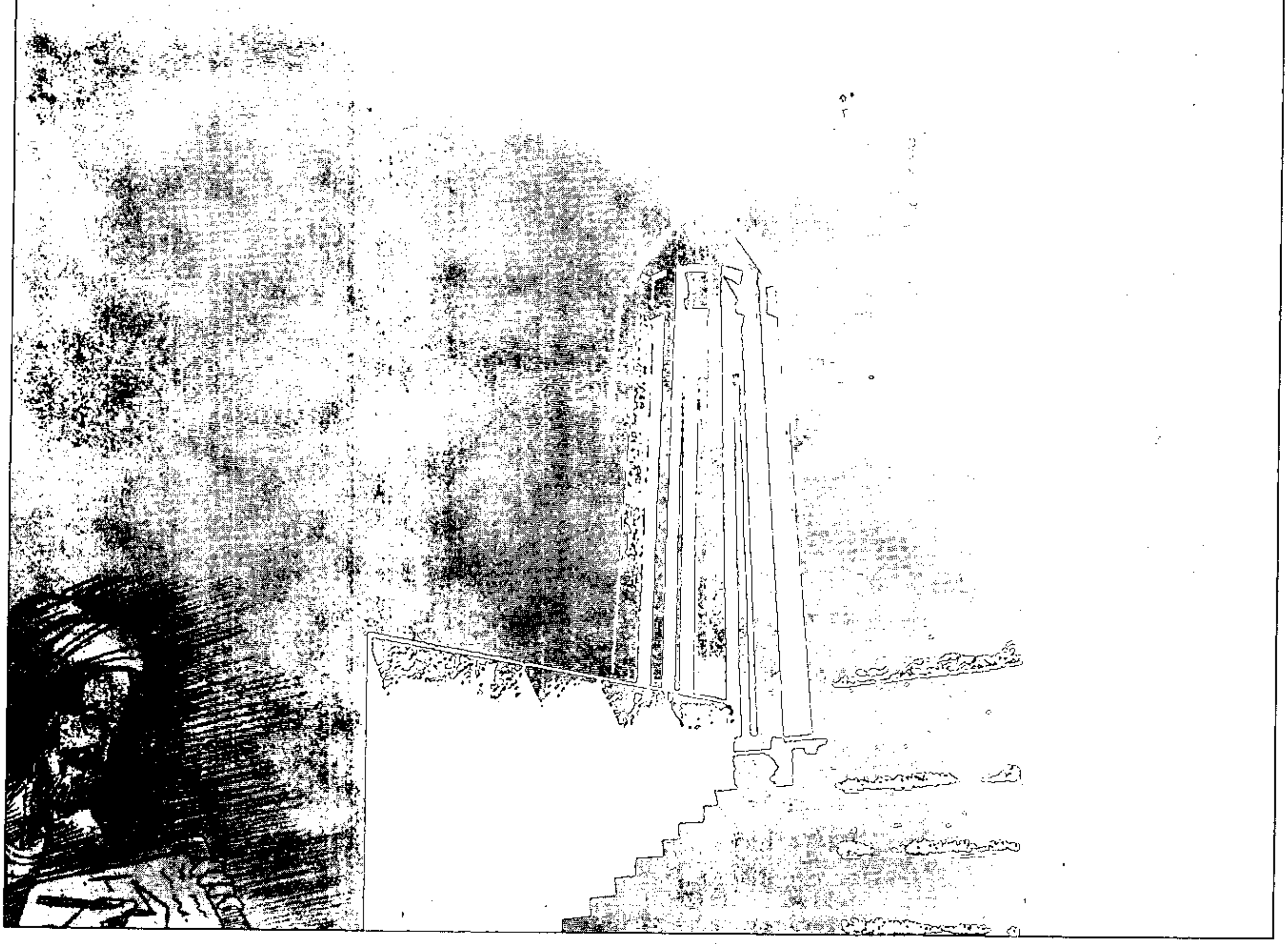
۵. رساله‌ای که پورسینا در جرجانیه برای احمدبن محمدسهلی نوشته است و چند نسخه خطی از آن موجود است.

۶. رساله‌ای درباره‌ی دانش اخترشناسی و از آن چند نسخه‌ی خطی وجود دارد.

۷. کوتاه شده‌ای از مجسطی که از آن یک نسخه در پاریس و یک نسخه هم در «آکسفورد» موجود است.

پی‌نوشت

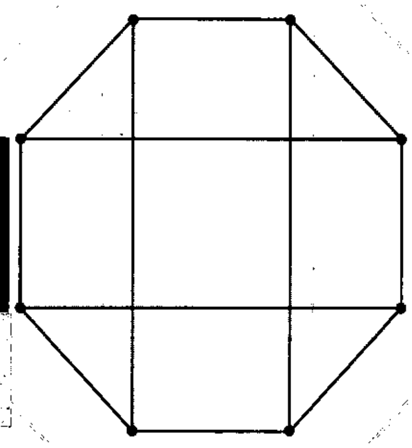
۱. این مقاله را قبل از مطالب دیگری که در نظر داشتم، نوشتم و شامل همان چیزهایی است که پورسینا درباره‌ی ریاضیات و اخترشناسی نوشته است.



گراف‌های منتظم و کامل

حمیدرضا امیری

کلید واژه‌ها:
گراف منتظم، گراف کامل، تعداد یال‌های گراف کامل، مسائل گراف‌های کامل و منتظم



گراف منتظم

اگر در یک گراف از مرتبه‌ی[1] p، درجه‌ی[2] همه‌ی رأس‌ها با هم برابر باشند، چنین گرافی منتظم است و اگر درجه‌ی رأس‌ها برابر با عدد حسابیِ r باشند، آن را گراف r- منتظم می‌نامیم. به بیان دیگر، اگر بزرگ‌ترین درجه‌ی رئوس یک گراف را ماکزیمم درجه‌ی گراف و کوچک‌ترین درجه‌ی رئوس یک گراف را مینی‌مم درجه‌ی گراف بنامیم، و آن‌ها را به ترتیب با Δ و δ نمایش دهیم، داریم:

$\Delta = \delta = r \Leftrightarrow$ G گرافی r- منتظم است.

از طرف دیگر، با توجه به قضیه‌ی کتاب درسی که بیان می‌کند: «مجموع درجات رئوس یک گراف از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی[3] q همواره دو برابر تعداد یال‌های آن گراف است»، می‌توان نتیجه گرفت که «در هر گراف r- منتظم از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q، همواره داریم: $pr = 2q$». بنابراین در هر گراف r- منتظم با مفروض بودنِ r، همواره رابطه‌ای بین q و p برقرار است و اگر یک معادله‌ی دیگر برحسب p و q مفروض باشد، با حل دستگاه دو معادله، دو مجهول p و q محاسبه می‌شوند.

مثال: در یک گراف ۴- منتظم از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q، داریم: $5p - 3q = -9$. مجموع درجات رئوسِ این گراف را بیابید.

حل:

$$\begin{cases} 4p = 2q \\ 5p - 3q = -9 \end{cases} \overset{q=2p}{\Longrightarrow} 5p - 6p = -9 \Rightarrow p = 9$$

$$q = 2p = 2 \times 9 = 18$$

$\Rightarrow 2q = 36 =$ مجموع درجات رئوس

گراف کامل

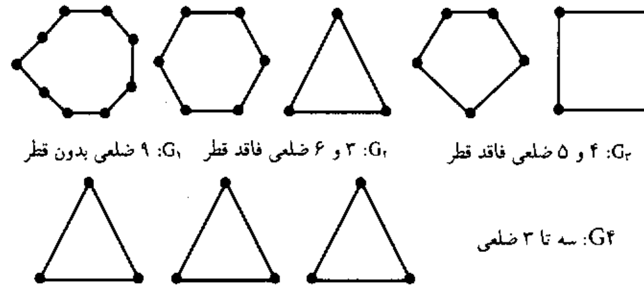
گراف‌های کامل، دسته‌ی خاصی از گراف‌های منتظم محسوب می‌شوند و همان‌طور که از اسم آن‌ها می‌توان دریافت، گراف‌هایی هستند که اندازه‌ی آن‌ها کامل است. گراف کامل از مرتبه‌ی p که با K_p نمایش داده می‌شود، گرافی است که درجه‌ی هر رأسِ آن $(p-1)$ باشد. به عبارت دیگر، «هرگراف $(p-1)$ - منتظم از مرتبه‌ی p را کامل می‌گوییم». بنابراین در هر گراف کامل از مرتبه‌ی P داریم:

$$rp = 2q \overset{r=p-1}{\Longrightarrow} p(p-1) = 2q$$

$$\Rightarrow q = \frac{p(p-1)}{2}$$

همان‌طورکه ملاحظه می‌کنید، q حداکثر مقدار خودِ را دارد. زیرا q تعداد یال‌های یک گراف از مرتبه‌ی p است که چون مجموعه‌ی یال‌های یک گراف شامل زیرمجموعه‌های دو عضویِ مجموعه‌ی رأس‌های آن است و تعداد کل زیرمجموعه‌های دو عضویِ یک مجموعه‌ی p عضوی برابر است با: $\binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$، پس q در گراف کامل، حداکثر است.

یک نکته‌ی مهم: گراف‌های r- منتظم از مرتبه‌ی p که $r < p-1$، در بسیاری از موارد منحصر به‌فرد نیستند، ولی گراف‌های کامل از هر مرتبه، منحصر به‌فردند. برای مثال، گراف‌های ۲- منتظم از مرتبه‌ی ۹ را رسم کرده‌ایم که تعداد آن‌ها ۴ عدد است، اما تعداد گراف‌های کامل از مرتبه‌ی ۹ فقط یکی است.



(G_1 و G_3 گراف‌های دو بخشی و G_4 گراف سه‌بخشی هستند.)

تمرین: تعداد گراف‌های ۳- منتظم از مرتبه‌ی ۱۲ را بیابید و آن‌ها را رسم کنید. (جواب: ۴ گراف)

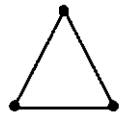
در جدول زیر، به‌دلیل اهمیت و موارد استفاده‌ی بسیار، تعداد یال‌های گراف‌های کامل از K_1 تا K_{11} آمده است:

گراف K_p	$q=\frac{p(p-1)}{2}=\binom{p}{2}$ (تعداد یال‌ها)
K_1	۰
K_2	$\binom{2}{2}=1$
K_3	$\binom{3}{2}=3$
K_4	$\binom{4}{2}=6$
K_5	$\binom{5}{2}=10$
K_6	$\binom{6}{2}=15$
K_7	$\binom{7}{2}=21$
K_8	$\binom{8}{2}=28$
K_9	$\binom{9}{2}=36$
K_{10}	$\binom{10}{2}=45$
K_{11}	$\binom{11}{2}=55$

مثال: در گراف کامل K_p، اگر داشته باشیم: $p=q$، این گراف را رسم کنید.

$$\begin{cases} q=\frac{p(p-1)}{2} \\ q=p \end{cases} \Rightarrow p=\frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow$$

$$2p=p(p-1) \Rightarrow (p-1) \overset{p\neq 0}{=} 2 \Rightarrow p=3$$



مثال: اگر گراف G دارای ۳۸ یال باشد، این گراف حداقل چند رأس دارد؟

حل: برای پاسخ‌گویی به این نوع سؤال‌ها کافی است مشخص کنیم تعداد یال‌های گراف موردنظر بین تعداد یال‌های کدام دو گرافِ کامل قرار دارد! در این مثال داریم: $\binom{9}{2}<38<\binom{10}{2}$. به عبارت دیگر، با ۹ رأس حداکثر ۳۶ یال می‌توان تعریف کرد. لذا برای تعریف دو یال دیگر، به‌حداقل یک رأسِ دیگر نیاز داریم. پس جواب این سؤال عدد ۱۰ است. درواقع گراف G با نزدیک‌ترین گراف کامل از نظر تعداد یال مقایسه شد.

تذکر مهم: مقایسه کردنِ یک گراف با گراف کاملِ نزدیک به آن، روشی است که مسائل دیگری را نیز می‌توان توسطِ آن حل کرد. چون گراف‌های کامل گراف‌های خاص و منحصر به‌فردی هستند، گاهی حذفِ یک یا چند یال از یک گراف کامل می‌تواند راه‌گشا باشد. به مثال‌های زیر توجه کنید:

مثال: گراف G از مرتبه‌ی ۹ دارای ۳۵ یال است، این گراف چند رأس از درجه‌ی ۸ (از درجه‌ی ماکزیمم) و چند رأس از درجه‌ی مینی‌مم دارد؟

حل: می‌دانیم K_9 دارای ۳۶ یال است، لذا اگر یک یال از K_9 حذف کنیم، گراف G حاصل می‌شود. واضح است که اگر از K_9 یک یال حذف شود، دو رأسِ آن آسیب می‌بینند و از درجه‌ی ۸ به درجه‌ی ۷ تنزّل پیدا می‌کنند! بنابراین، گراف G دارای ۷ = ۲ − ۹ رأس از درجه‌ی ماکزیمم و دو رأس از درجه‌ی مینی‌مم دارد.

مثال: گراف G از مرتبه‌ی ۸ دارای ۲۶ یال است. این گراف حداقل و حداکثر چند رأس از درجه‌ی ماکزیمم است؟

حل: در این مثال باید ۲ یال از گراف K_8 حذف کنیم تا گراف G حاصل شود. حذف این دو یال به دو صورت امکان‌پذیر است: یا هر دو یال را از یک رأس حذف کنیم (۳ رأس آسیب می‌بیند)، و یا دو یال را طوری حذف کنیم که رأس مشترک نداشته باشند (۴ رأس آسیب می‌بیند).

در حالت اول از یک رأس دو درجه و از دو رأس دیگر هرکدام ۱ درجه کم می‌شود و گرافی دارای ۵ رأسِ ماکزیمم (از درجه‌ی ۷) و ۱ رأس مینی‌مم (از درجه‌ی ۵) خواهیم داشت.

در حالت دوم نیز تعداد رأس‌های ماکزیمم (از درجه‌ی ۷) برابر است با: $4 = 8-4$. ۴ رأس نیز از درجه‌ی مینی‌مم (از درجه‌ی ۶) در گراف موجود است.

مثال: گراف G از مرتبه‌ی ۱۰ دارای ۴۲ یال است. اگر در این گراف داشته باشیم: $(\Delta - \delta) = 1$، در این‌صورت گراف G چند رأس ماکزی‌مم و چند رأس مینی‌مم دارد؟

حل: بدیهی است که اگر از K_{10} که ۴۵ یال دارد، ۳ یال حذف کنیم، گرافی با تعداد یال‌های برابر با G به‌دست می‌آید. اما چون طبق فرض $\Delta - \delta = 1$، حذف این سه یال باید به‌گونه‌ای باشد که از هیچ رأسی دو یال حذف نشود. زیرا در این‌صورت خواهیم داشت: $\Delta - \delta = 2$ که خلاف فرض است. پس سه یال حذف شده نباید رأس مشترک داشته باشند که در این‌صورت، درجه‌ی ۶ یال هرکدام ۱ درجه کاهش می‌یابد و $10-6 = 4$ رأس از درجه‌ی ماکزیمم (از درجه‌ی ۹) و ۶ رأس از درجه‌ی مینی‌مم (از درجه‌ی ۸) در گراف G موجود است.

تمرین: مثال قبل را با فرض $\Delta - \delta = 2$ حل کنید.

تذکر مهم: یکی دیگر از کاربردهای گراف‌های کامل در تعیین ماکزیمم تعداد یال‌های یک گراف چندبخشی است که در مثال‌های زیر به آن می‌پردازیم.

مثال: گراف G از مرتبه‌ی ۷ گرافی دو بخشی است. این گراف حداکثر چند یال می‌تواند داشته باشد؟

حل: توجه داریم که رأس ایزوله یا تنها، یک بخش محسوب می‌شود. برای مثال، گراف‌های  هر یک دو بخشی هستند. در این مثال اگر بخواهیم گرافی دوبخشی با ۷ رأس و حداکثر یال داشته باشیم، کافی است یک رأس از ۷ رأس را ایزوله کنیم و با ۶ رأس دیگر یک گراف کامل (K_6) بسازیم. در این حالت $\binom{6}{2}=15$ یال برای گراف حاصل می‌شود که این تعداد یال ماکزیمم خواهد بود.

تمرین: گراف G از مرتبه‌ی ۱۰ از سه بخش تشکیل یافته است. این گراف حداکثر چند یال دارد؟ (جواب: $\binom{8}{2}=28$)

مثال: گراف G از مرتبه‌ی ۱۲ فقط دارای دو رأس ایزوله است و از چهار بخش تشکیل یافته است. این گراف حداکثر چند یال می‌تواند داشته باشد؟

حل: از ۱۲ رأسِ گراف G، دو رأس را به‌صورت ایزوله کنار می‌گذاریم و بین دو رأس دیگر یک یال رسم می‌کنیم و با ۸ رأس باقی‌مانده، یک گراف کامل تشکیل می‌دهیم. در این حالت، گراف G دارای ماکزیمم تعداد یال، یعنی $\binom{8}{2}+1=29$ یال است.

گراف G ← K_8 

مثال: گراف G از مرتبه‌ی ۱۴ دارای چهار بخش است و داریم: $\delta = 1$. این گراف حداکثر چند یال دارد؟

حل: گراف G طبق فرض رأس ایزوله ندارد و به‌صورت زیر است.

گراف G → K_8 

$$\text{تعداد یال‌های } G: \binom{8}{2}+3=31$$

مثال: گراف G از مرتبه‌ی ۱۸ دارای سه بخش است. اگر در این گراف داشته باشیم: $\delta = 2$، در این‌صورت Gحداکثر چند یال می‌تواند باشد؟

حل: طبق فرض، گراف G رأس ایزوله و رأس از درجه‌ی یک ندارد و باید به شکل زیر باشد:

گراف G ← K_{12} 

$$\text{تعداد یال‌های } G: \binom{12}{2}+6=66+6=72$$

مثال: گراف G از مرتبه‌ی P_1 دارای K بخش است. اگر در این گراف داشته باشیم: $\delta = P_2$، در این‌صورت G حداکثر چند یال می‌تواند داشته باشد؟

حل: گراف G باید دارای $(K-1)$ بخش با حداکثر یال و $\delta = P_2$ باشد که $(K-1)$ گراف کامل از مرتبه‌ی (P_2+1) است و یک بخشِ کامل از مرتبه‌ی رأس‌های باقی مانده که تعداد رأس‌های باقی‌مانده برابر است با:

$$P = P_1 - [(K-1)\times(P_2+1)]$$

حداکثر تعداد یال‌های چنین گرافِ K بخشی برابر است با:

$$\text{تعداد یال‌های } G: \binom{P}{2}+(K-1)\times\binom{P_2+1}{2}$$

تمرین: از گراف‌های کامل برای به‌دست آوردن شرط هم‌بندی و ناهم‌بندی چگونه می‌توان استفاده کرد؟

پی‌نوشت

۱. مرتبه‌ی گراف: تعداد رأس‌های یک گراف را مرتبه‌ی آن گراف می‌گوییم.

۲. درجه‌ی یک رأس: تعداد یال‌هایی که از یک رأس عبور می‌کنند، درجه‌ی آن رأس نامیده می‌شود.

۳. اندازه‌ی گراف: تعداد یال‌های یک گراف را اندازه‌ی آن گراف می‌گوییم.

تاریخچه‌ی مجلات ریاضی ایران(۲)

غلامرضا یاسی‌پور

کلید واژه‌ها: مسائل هندسه، اصل تسهیل، اصل تمثیل، اصل پویایی

اشاره:
از شماره‌ی ۲ الی ۲۷ برهان متوسطه، سلسله مقاله‌هایی با عنوان «تاریخچه‌ی مجلات ریاضی در ایران» به قلم استاد یاسی‌پور در مجله به چاپ می‌رسید که بنا به استقبال خوانندگان محترم و تأیید هیأت تحریریه از شماره‌ی ۶۶ مجله، دنباله‌ی این مقالات در برهان از سر گرفته شد. در این شماره استاد به معرفی مجله‌ی کوانتوم پرداخته و یک مقاله خواندنی و جذاب از آن را انتخاب کرده‌اند.

یکی دیگر از مجلات ریاضی، مجله‌ی «کوانتوم» است مجله‌ای که خوش درخشید، ولی دولت مستعجل بود. از این مجله تنها یک شماره در پاییز ۱۳۷۲ به چاپ رسید و عدم انتشار آن به علت فوت صاحب امتیاز آن بود.

صاحب امتیاز و مدیر مسئول: دکتر محمد رجبی‌طرخورانی، استاد دانشکده‌ی علوم دانشگاه تهران و سردبیر: غلامرضا یاسی‌پور

هیئت تحریریه: محمّد رجبی‌طرخورانی، پرویز شهریاری، سیّدحسین سیّدموسوی، مجید ملکان و غلامرضایاسی‌پور

ویراستار ریاضی: غلامرضایاسی‌پور

ویراستار فیزیک: مجید ملکان

در سرمقاله‌ی مجله چنین آمده است:

«در اواخر دهه‌ی ۱۹۶۰، شش تن از اعضای برجسته‌ی فرهنگستان علوم شوروی، از جمله کاپیتسا و کولموگوروف، طی نامه‌ای به عالی‌ترین مرجع اداره‌ی کشور، پیشنهاد نشر ماهنامه‌ی ریاضی ـ فیزیک کوانت را مطرح کردند. پیشنهاد از جانب بزرگان فن بود و مورد تأییدقرارگرفت. بدین ترتیب نخستین شماره‌ی مجله‌ی کوانت در آغاز سال ۱۹۷۰ منتشر شد.

سردبیری نخستین شماره‌های مجله را دوتن از مهم‌ترین اعضای این فرهنگستان: آندره نیکلایه‌ویچ کولموگوروف و ایساک کنستانتی نوویچ کی‌کواین، به عهده داشتند، و هردو تا آخرین روزهای زندگی خود به این کار ادامه دادند.

هدف از انتشار ماه‌نامه‌ی ریاضی ـ فیزیک کوانت یافتن استعدادهای جوان و شکوفا کردن و پرورش دادن این استعدادها بود.

مجله‌ی کوانت به سرعت جای خود را در میان مجلات ریاضی ـ فیزیک آن‌چنان باز کرد که از طرف یونسکو مورد تأیید قرار گرفت و مقاله‌های آن به زبان‌های فرانسوی، ژاپنی، آلمانی، یونانی، بلغاری و نیز زبان‌های دیگر ترجمه شد.

چاپ نسخه‌ی انگلیسی این مجله به سال ۱۹۹۰ و تحت نام کوانتوم، مجله‌ی دانش‌آموزی ریاضی و علوم و به عنوان نشریه‌ای از انجمن ملی معلمان علوم و دایره‌ی کوانتوم فرهنگستان علوم شوروی و در رابطه با انجمن معلمان فیزیک آمریکا و شورای ملی معلمان ریاضی، در آمریکا آغاز شد.

در مورد نسخه‌ی فارسی مجله در سرمقاله چنین می‌خوانیم:

«و اما نسخه‌ی فارسی این مجله، یعنی همین نسخه‌ای که پیش رو دارید و قرار است به یاری خداوند به صورت فصل‌نامه منتشر شود، از دو بخش اصلی تشکیل شده است. بخش اول آن، شامل مقالات جالب و مفید مجله‌ی کوانتوم آمریکایی است که عیناً به زبان فارسی درآمده و گهگاه مقاله‌ای از کوانت روسی نیز به همراه دارد. بخش دوم آن، شامل مطالب و مواردی است خاص دانش‌آموزان و دانشجویان خودمان. از ویژگی‌های بخش دوم پرداختن به مسائل متناسب با برنامه‌ی دبیرستان‌های ایران و تهیه‌ی شرح احوال و آثار

ریاضی‌دانان و فیزیک‌دانان ایرانی و مسلمان و مطالب مربوط به تعلیم و تربیت ریاضی و فیزیک در این گوشه از جهان است. به‌خصوص در مورد این بخش، به یاری و مساعدت صاحب‌نظران نیاز مبرم داریم و در همین‌جا از آنان دعوت می‌کنیم که به یاریمان برخیزند و از کمکمان دریغ نورزند.»

در این مرحله به ذکر یکی از مقاله‌های مجله، تحت عنوان «هندسه‌ی جزایی یا پیروی از اصول» می‌پردازیم.

هندسه‌ی جزایی یا پیروی از اصول

نمایشنامه‌ی روش‌شناسی در یک پرده

نوشته‌ی د.و.فومین

صحنه تاریک است. آهنگی آرام و شیرین به گوش می‌رسد. چراغ‌ها روشن می‌شوند. سالن پذیرایی در ۲۲۱B، «بیکراستریت[1]». شرلوک هُلمز[2] در حال نگریستن به روزنامه‌ی عصر نشسته است. واتسون[3] وارد می‌شود.

هلمز: عصر به‌خیر، رفیق عزیز. به‌نظر می‌رسد که قصد داری مدتی به‌جای طبابت به هندسه بپردازی.

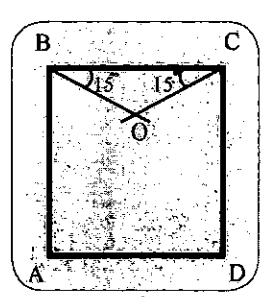
واتسون: چه‌طور فهمیدی؟

هلمز: روزنامه‌ی دیلی‌جوک دیروز، با مسابقه‌ی هندسه‌اش، از جیبت بیرون زده است. معلوم است که وقت زیادی برای حل حداقل یکی از مسائل آن صرف کرده‌ای.

واتسون: اما از کجا فهمیدی که هیچ یک از آن‌ها را حل نکرده‌ام؟ راستش را بخواهی، صددرصد حق به جانب توست ... (می‌نشیند)

هلمز: واتسون عزیز، ناراحت نشو. توجه داشته باش که تمام مسئله‌ها عملاً از یک طریق حل می‌شوند؛ البته، اگر راه صحیح رسیدن به آن‌ها را پیدا کنیم. راستش، هنوز مسائل مسابقه‌ای مورد بحث را ندیده‌ام، اما ... خب، اجازه بده نگاهی به آن‌ها بکنیم.

مسئله‌ی ۱. نقطه‌ی O داخل مربع ABCD مفروض است. زاویه‌های OCB و OBC هردو ۱۵ درجه‌اند. ثابت کنید که مثلث OAD متساوی‌الاضلاع است.



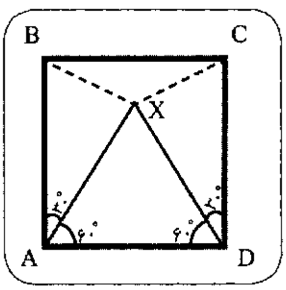
(شکل ۱)

واتسون: (با وحشت دست‌هایش را به طرف جلو حرکت می‌دهد) رازآمیزی این مسئله مرا به یاد شاه ربوده شده می‌اندازد! راستی آن را به‌خاطر داری؟

هلمز: رفیق عزیز، راجع به چه صحبت می‌کنی؟ من، هم الآن پاسخ مسئله را می‌دهم. در این مورد از «اصل آغاز از انتها» استفاده می‌کنیم. امیدوارم از حل مسئله متوجه بشوی که اصل مزبور چیست؟ نقطه‌ی X ی را، که رأس سوم مثلث متساوی‌الاضلاعی است که دو رأس دیگرش A و Dاند، در نظر می‌گیریم.

واتسون: اما دو نقطه از چنین نقاطی موجودند.

هلمز: البته. ولی ما آن را که داخل مربع است اختیار می‌کنیم (شکل ۲). حالا زاویه‌های XBC و XCB را پیدا می‌کنیم. خوب، واتسون، با توجه به پیوستگی علوم دقیقه، رابطه‌ها را در این مورد می‌دانی. انجام دادی؟



(شکل ۲)

واتسون: یک لحظه ... باید از این حقیقت که BAX و XCD مثلث‌هایی متساوی‌الساقین‌اند، استفاده کنیم. اوه! هریک از آن‌ها ۱۵ درجه است. هوم! بعد چه؟

هلمز: این بدان معنی است که نقاط O و X منطبق‌اند. اما دوست عزیز، این مطلب، مطلبی مقدماتی است.

واتسون: عالیه! اما ... این اصلِ شما کمکی به حل مسئله‌ی دوم نمی‌کند.

هلمز: خب، در این صورت از اصل دیگری استفاده می‌کنیم. و بنابراین ...

مسئله‌ی ۲: طول‌های اضلاع چهارضلعی محدب ABCD (در جهت حرکت عقربه‌های ساعت) برابر a، b، c و dاند. ثابت کنید که مساحت ABCD بزرگتر از $\frac{1}{4}(a+b)(c+d)$ نیست.

بله، این مسئله، مسئله‌ای کاملاً متفاوت است ... نابرابری. واتسون، این مسئله ناگهان مرا به یاد معمای پروفسور موریارتی انداخت.

واتسون (رؤیایی): بله، کلکی در این موضوع نهفته بود. او، در صورتی که بخواهیم حق مطلب را ادا کنیم، ریاضی‌دانی برجسته بود... اما هلمز، مثل این که از موضوع منحرف شدی.

هلمز: این تویی که از مطلب پرت افتاده‌ای واتسون. درضمن من

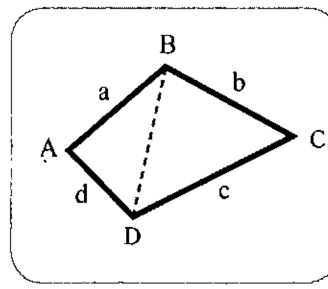
مسئله را حل کردم. ابتدا پرانتزها را برمی‌داریم:

$$\frac{۱}{۴}(a+b)(c+d)$$

$$=\frac{۱}{۴}(ad+bc)+\frac{۱}{۴}(ac+bd)$$

واتسون «اصل تسهیل» را به‌خاطر بسپار: ابتدا ساده‌ترین و طبیعی‌ترین طریق حل مسئله را بررسی کن.

واتسون: بسیار خب، اثبات این موضوع را که مجموع ad + bc کمتر از دو برابر مساحت چهارضلعی مورد بحث نیست، می‌توانم خودم انجام دهم: ad کمتر ازدو برابر مساحت مثلث ABD (شکل ۳) و bc کمتر از دو برابر مساحت مثلث BCD نیست؛ این که هیچ. اما با عبارت ac + bd چه کار می‌توان کرد؟



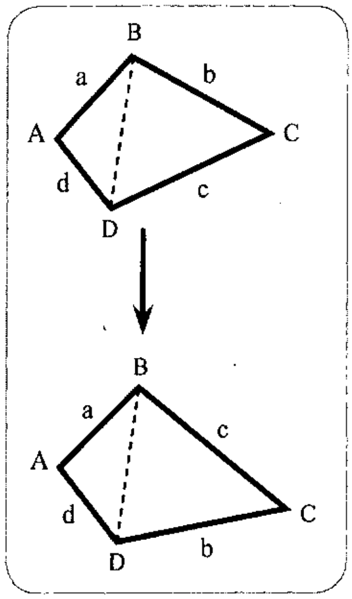
(شکل ۳)

هلمز: در این‌جا «اصل تمثیل» به کارمان می‌آید. دوست عزیز، تمام چیزی که در این مورد لازم داریم، تفکر سازگار و منطقی است. این کار در ریاضیات، به اندازه‌ی جرم‌شناسی، اساسی است. موفقیت در محاسبه‌ی قبلی مرهون چه موردی بود؟ از این حقیقت کمک گرفتی که اضلاع a و d پهلوی یکدیگر قرارگرفته‌اند. همین‌طور اضلاع b و c، درست است؟ بنابراین باید کاری کنی که a را پهلوی c بیاوری.

واتسون: در مورد b و d چی؟

هلمز: خوب فکرکن واتسون: اگر a پهلوی c باشد، در این صورت b نیز پهلوی d خواهد بود. همواره شرایط نالازم را بررسی کن! اما این کار در درجه‌ی دوم اهمیت است و بنابراین: برای این که مساحت چهارضلعی‌مان، هنگامی که ضلع a پهلوی c قرار می‌گیرد، یکسان باقی بماند، با آن چه می‌کنیم؟ ... دوست عزیز، موضوع چیست؟ ... چاقوی جراحی‌ات را همراه نیاورده‌ای؟

واتسون (متوجه نمی‌شود): نه، نیاورده‌ام. چرا این سؤال را ...؟ (به شکل نگاه می‌کند و ناگهان متوجه می‌شود). عالیه! صرفاً ABCD را در امتداد قطر BD قطع می‌کنیم و ... و یکی از تکه‌ها را برمی‌گردانیم (شکل ۴). و بعد، البته، با استدلالی شبیه قبل، مشخص می‌کنیم که ac + bd کمتر از دو برابر مساحت چهارضلعی مورد بحث نیست. با ترکیب آن با نامساوی پیشین، آن‌چه را به دنبال اثباتش بودیم، برقرار می‌کنیم. عالیه!



(شکل ۴)

هلمز: توجه داشته باش که در این‌جا هنگام حل مسئله، زمانی که مفروضاتمان راتغییر دادیم، از «اصل پویایی» نیز استفاده کردیم. این اصل که اصلی کاملاً چشم‌گیر است، به‌صورت زیر است: در مسئله، هر چیزی را که مایل به تغییردادنش هستیم ـ تنظیمش، مفروضاتش، احکامش ـ به شرطی که راه حل مسئله‌ی جدید راه حل مسئله‌ی قدیم را به دستمان دهد، تغییر می‌دهیم. اصل مزبور، به‌خصوص بر این است که: مفروضات مسئله را به عنوان مطالبی غیرقابل تغییر درنظر نگیریم. برای مثال، اگر به دنبال دستگیر کردن جنایتکاری هستیم، نباید فراموش کنیم که او موجودی زنده است و می‌تواند آزادانه با «عملکرد»مان تغییر موضع دهد.

واتسون: در این مورد مطلبی است که هنوز خوب متوجه آن نشده‌ام...

هلمز: اجازه بده نگاهی به سومین مسئله‌ی مسابقه بیندازیم، واتسون.

واتسون: هلمز، خواهش می‌کنم نه تنها راه حل، بلکه جمیع مراحل استدلال را بلافاصله برایم توضیح بدهی. تا همین‌جا هم از حیرت فرسوده شده‌ام. (از جایش برمی‌خیزد و به طرف هلمز حرکت می‌کند.)

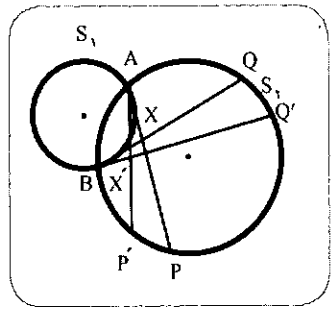
هلمز: سعی‌ام را می‌کنم، دوست عزیز، و بنابراین،

مسئله‌ی ۳: دو دایره‌ی $S_۱$ و $S_۲$ در نقاط A و B برهم عمودند. نقطه‌ی X واقع بر دایره‌ی اول، اما داخل دایره‌ی دوم است. شعاع‌های AX و BX دایره‌ی $S_۲$ را در نقاط P و Q تلاقی می‌کنند. ثابت کنید که قطعه خط PQ قطر دایره‌ی $S_۲$ است.

واتسون: من اصلاً صورت این مسئله را نمی‌فهمم. یعنی چه «دایره‌ها برهم عمودند»؟ مهمل است.

هلمز: ابداً، واتسون. این عبارت صرفاً به این معنی است که

خطوط مماس در نقاط تقاطع دوایر برهم عمودند. اکنون، دقت کن که اصل پویایی چگونه در این مورد به‌کار می‌رود. نقطه‌ی X را در امتداد کمان AB از دایره‌ی S_1 حرکت می‌دهیم ـ این نقطه X' می‌شود و شعاع‌های AX' و BX'، دایره‌ی S_2 را در نقاط P' و Q' قطع می‌کنند ـ نگاه کن، آن را روی این تکه کاغذ رسم می‌کنم (شکل ۵).



(شکل ۵)

روشن است که زوایای $X'AX$ و $X'BX$ مساوی‌اند. به‌همین علت است که اندازه‌های زاویه‌ای کمان‌های PP' و QQ' برابرند. اما این بدان معنی است که اندازه‌ی زاویه‌ای کمان $P'Q'$ مساوی اندازه‌ی زاویه‌ای کمان PQ است.

واتسون (درحالی که سخن هلمز را قطع می‌کند): ولی هلمز، از کجا فکر اثبات آن را به‌دست آوردی؟

هلمز: دوست عزیز، خودت راجع به آن فکر کن: اگر قطعه خط PQ به ازای هر موضع نقطه‌ی X واقع بر کمان AB، قطری از دایره باشد، در این صورت اندازه‌ی زاویه‌ای کمان PQ، هرچه نقطه‌ی X را حرکت دهیم، تغییر نخواهد کرد. اگر چیزی که حکم مسئله است، راست باشد، در این صورت این مطلب نیز به وضوح باید راست باشد. و بار دیگر اصل آغاز از انتها.

و حالا، واتسون، نقطه‌ی X مان را به طرف نقطه‌ی B حرکت می‌دهیم. چه چیزی به دست می‌آوریم؟ در این حالت، اندازه‌ی زاویه‌ای کمان PQ دقیقاً ۱۸۰ درجه خواهد شد.

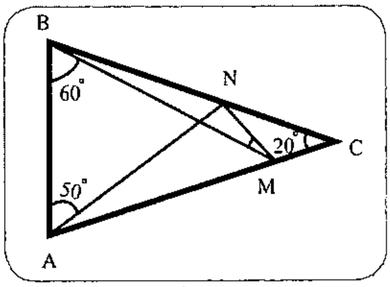
واتسون: آخر چرا این اصل؟ اوه. بله ... از این حقیقت که دوایر مورد بحث در زوایای قائمه تقاطع کرده‌اند، استفاده می‌کنیم. ضمناً، هلمز، اصل دیگری نیز در این مورد موجود است. تمام مفروضات مسئله را به‌کار برید و به خاطر داشته باشید که آن‌ها باید به طریقی مورد استفاده قرار گیرند! این اصل را چه بنامیم؟

هلمز (با متانت): آن را «اصل تکمیل راه حل» می‌نامم.

واتسون: باید بگویم بسیار خوب! اما آدم فکر می‌کند تو در هر جیبت یک اصل داری!

هلمز: نه، دوست عزیزم، من آن‌ها را در سرم دارم. اما باید تذکر بدهم که گاهی، اصلی که هم‌اکنون برایت مطرح شد، در زندگی واقعی کاربردناپذیر است. بعضی از حقایق در نگاه اول مشکوک یا صریحاً متهم‌کننده به‌نظر می‌رسند، اما بعداً مشخص می‌شود که تصادف محض یا تاکتیک‌هایی انحرافی از جانب مقصر اصلی بوده‌اند. مورد نیم‌تاج یاقوت نشان را به‌خاطر داری؟ ... بسیار خب، به هر تقدیر، این هم آخرین مسئله است.

مسئله‌ی ۴. مثلث ABC متساوی‌الساقین، و C زاویه‌ی رأس آن ۲۰ درجه است. نقاط M و N بر ساق‌های AC و BC ی آن چنان درنظر گرفته شده‌اند که زاویه‌ی NAB برابر ۵۰ درجه و زاویه ی MBA برابر ۶۰ درجه است. ثابت کنید زاویه‌ی NMB برابر ۳۰ درجه است (شکل ۶).



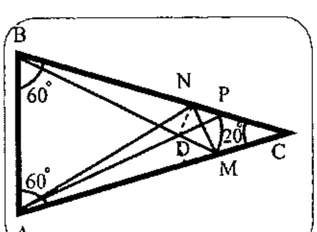
(شکل ۶)

واتسون: من سعی داشتم این زاویه را با استفاده از مثلثات حساب کنم ...

هلمز: دوست عزیز، خواهش می‌کنم نیروهایت را ذخیره کن! شاید بتوانی، هنگامی که من چند دقیقه‌ای را صرف این مسئله می‌کنم، روزنامه‌ات را بخوانی.

(طی پنج یا شش دقیقه‌ی بعد، واتسون هنگامی که هلمز شکل زیر را به دقت مطالعه می‌کند، روزنامه‌اش را می‌خواند. موسیقی آرامی نواخته می‌شود.)

هلمز: خب واتسون، این مسئله در واقع کمی پوست کلفت است. بگذار به نقطه‌ی P واقع بر ضلع BC، چنان که زاویه‌ی PAB برابر ۶۰ درجه باشد، نگاهی بیندازیم. روشن است که خط PM موازی AB است، و مثلث PDM متساوی‌الاضلاع می‌شود (D نقطه‌ای است که قطعات PA و BM در آن تقاطع می‌کنند ـ شکل ۷. چون مثلث BNA متساوی‌الساقین است، طول‌های قطعه خط‌های BA، BN و BD برابرند و زوایای BND و BDN هردو ۸۰ درجه‌اند. از این مطلب به سادگی نتیجه می‌شود که زاویه‌ی NDP برابر ۴۰ درجه است. لذا، مثلث NDP متساوی‌الساقین است و در نتیجه، MN نیمساز زاویه‌ی BMP. بنابراین، زاویه‌ی NMB نصف زاویه‌ی DMP و برابر



(شکل ۷)

۳۰ درجه است. و به این ترتیب اثبات‌مان به اتمام می‌رسد.

واتسون (مبهوت): ولی ... ولی ... چه‌طور؟ چه‌طور به‌یک چنین راه حل ماهرانه‌ای رسیدی؟

هلمز: واتسون عزیز، فکر می‌کنم بتوانم داستان مهیجی در مورد چگونگی پیدا کردن راه حل مورد بحث، به کمک یک دوجین اصل با مهارت انتخاب شده، برایت تعریف کنم... چرا می‌خندی،واتسون؟! البته،بعضی اصل‌ها سهل‌الوصول‌اند. فی‌المثل، «اصل هدف» قابل توجه است: همواره به خاطر داشته باشید که برای رسیدن به هدفتان چه کارهایی برای انجام دادن باقی مانده است. و محققاً، معدودی مطالب کوچک در گوشه و کنار ... به هر تقدیر، دوست من، برای حل یک مسئله، به مطالبی بیش از تنها یک مجموعه قواعد استاندارد تفکر نیاز داریم. به چیزهایی چون تجربه و شهود احتیاج است. تصور می‌کنی کارها این‌قدر ساده‌اند که برای انجام دادنشان، تنها چیزی که لازم داریم به‌خاطر سپردن تعدادی اصل و آموختن طرز به‌کار بردن آن‌ها به‌ترتیبی خاص است؟

خوش‌بختانه، برهان بشری به گونه‌ی اندازه‌ناپذیری وسیع‌تر از این‌هاست ... البته این اصول نیز که در اساس چیزی بیش از کلیشه‌های فکری نیستند، می‌توانند کاربردهایی داشته باشند. واتسون، آدمی نباید از چیزی که عقلایی است تغافل کند!

واتسون (با خستگی روی صندلیش می‌نشیند، و روزنامه‌اش را برمی‌دارد): هی! به این گوش کن هلمز: «شب گذشته، تبهکاران ناشناسی، پس از داخل شدن به دفتر روزنامه‌ی دیلی جوک، صندوق سردبیر روزنامه را شکستند و جایزه‌ی مسابقه‌ی سالانه‌ی هندسه را دزدیدند. این جایزه نوار موبیوس طلایی[۴] به اندازه‌ی واقعی و به قیمت ...» مطلب جالب دیگری ندارد ... اوه، گوش کن! «کارآگاه رابینسون اعلام کرد که پلیس سرنخی در این مورد به دست نیاورده است. سردبیر دیلی جوک به خبرنگاران گفت، روزنامه برای افزایش تعداد مشترکین و اصلاح وضع مادی‌اش، در یکی از شماره‌های آینده مسابقه‌ی حل مسئله‌ی مخصوصی را مطرح خواهد کرد...»

دوست عزیز، پس از تمام چیزهایی که امروز شنیده‌ام، باید این تبهکاران را دستگیر کنی، چه بالاخره، این مورد نیز از موارد پیروی از اصول است!

هنگامی که این آخرین کلمات گفته می‌شود، صحنه تاریک می‌شود و آخرین ضربه‌های آهنگ همراه صحنه، در تاریکی شنیده می‌شود.

***

موارد زیر مسائلی از مسابقه‌ی مخصوص اعلام شده در روزنامه است. به‌خاطر داشته باشید که هریک از آن‌ها شگردی مخصوص خود دارد که آن را می‌توان با استفاده از اصول مطرح شده توسط کارآگاه بزرگ، آسان‌تر یافت.

۱. چهارضلعی ABCD در دایره‌ای محاط است و طول قطعه خط AD برابر مجموع طول‌های قطعات AB و CD است. ثابت کنید که نیم‌سازهای زوایای B و C بر ضلع AD تقاطع می‌کنند.

۲. دزد بی‌دستی می‌خواهد سکه‌ای را از میز پول خردکنی با هول دادن سکه با استفاده از بینی‌اش بر میز، بدون برخورد دادن آن با هیچ یک از سکه‌های میز بدزدد. آیا موفق می‌شود؟ سکه‌ها گردند، به اندازه‌های متفاوت‌اند، و با یکدیگر تماس ندارند.

۳. مربعی به چند مستطیل تقسیم شده است. نسبت ضلع کوچک‌تر به ضلع بزرگ‌تر هریک از این مستطیل‌ها را می‌توان محاسبه کرد. ثابت کنید که مجموع این نسبت‌ها کمتر از ۱ نیست.

پی‌نوشت

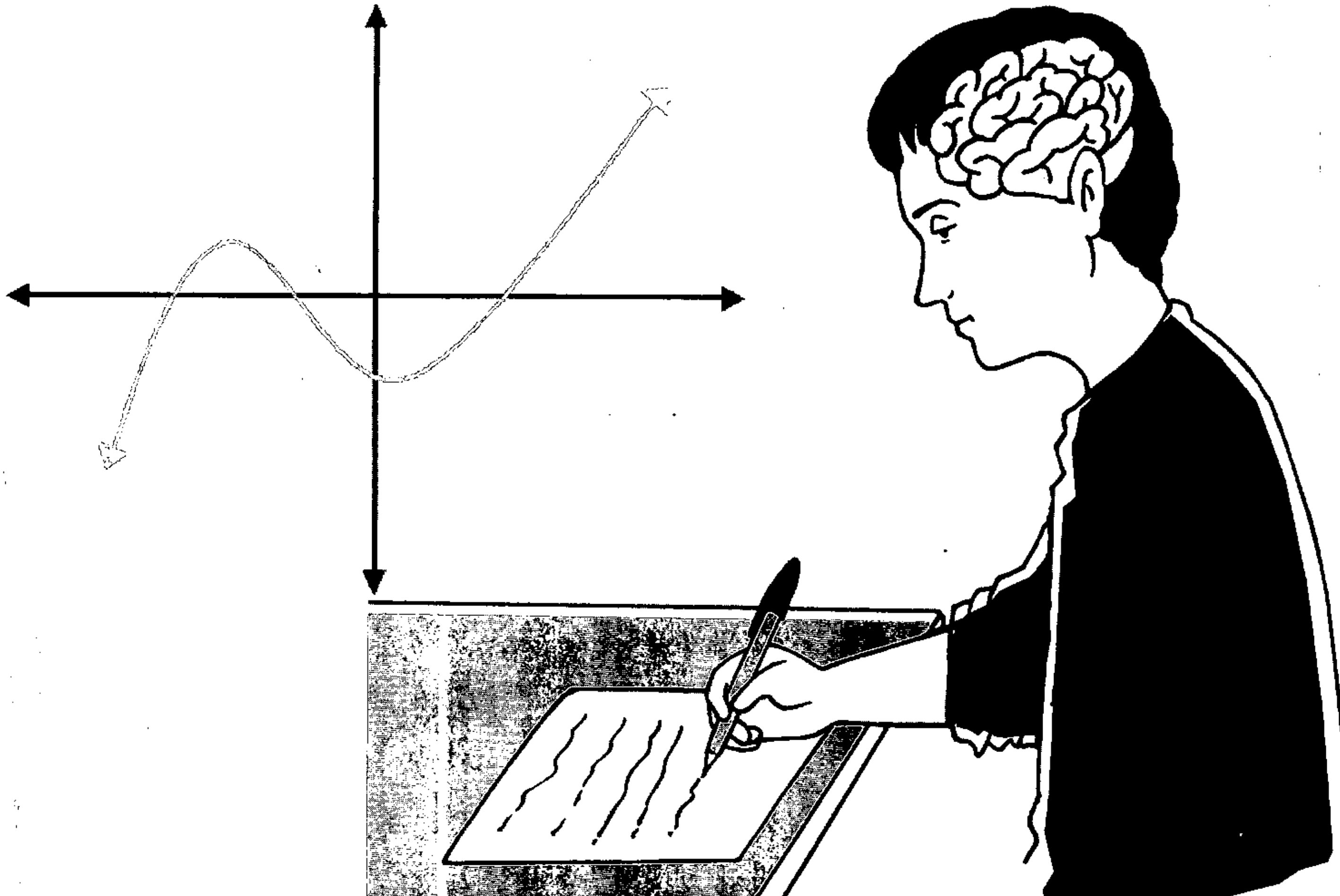
۱. خیابانی که منزل شرلوک هلمز در آن بوده است.
۲. کارآگاه معروف داستان‌های شرلوک هلمز
۳. دکتر واتسون، دوست شرلوک هلمز
۴. نواری که از پیچ دادن یک نوار معمولی و وصل کردن دو سر آن به هم حاصل می‌شود و یک رویه دارد.

ادب ریاضی

نظرما تغییر یافته است و باز هم تغییر می‌یابد و تکامل پیدا می‌کند. به کلام دکارت: «فضا و حرکت را به من بدهید و من دنیایی به شما خواهم داد.» اینشتاین امروز چنین جواب می‌دهد: «آن‌چه خواسته شده است، به واقع زیاد است و حقیقت آن است که اصولاً تقاضای دکارت فاقد مفهوم است: بدون وجود «دنیا» (یعنی بدون وجود ماده)، نه فضایی وجود دارد و نه حرکتی موجود است.»

ریاضی‌دانان نامی

اریک تمپل بل، حسن صفاری



مسائل f(x)ها

احمد قندهاری

کلیدواژه‌ها: تابع، تابع مرکب، مسائل f(x)ها

هر عبارتی برحسب x را می‌توان به‌صورت f(x) نشان داد؛ مانند:

$f(x)=\sin x+\cos^۴ x$ ، $f(x)=x^۲-۴x+۱$

و $f(x)=x+\sqrt{x^۲-۱}$

هر عبارتی برحسب x و y را می‌توان به‌صورت f(x,y) نشان داد، مانند:

$f(x,y)=\sin x+\cos y$ و $f(x,y)=x^۲+xy+\frac{۴x}{y}$

هر عبارتی برحسب x و y و z را می‌توان به‌صورت $f(x,y,z)$ نشان داد، مانند:

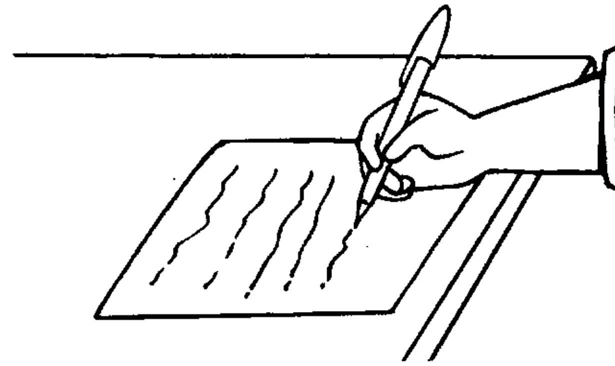
$f(x,y,z)=x^۲+y^۲+z^۲-۵xyz$

و

$f(x,y,z)=\sin(x+y)+\cos(y+z)$

۱. مسئله‌ی اصلی f(x)

یعنی f(x) معلوم است و می‌خواهیم $f(h(x))$ را محاسبه کنیم. h(x) می‌تواند هر عبارتی برحسب x باشد. برای محاسبه‌ی $f(h(x))$، باید در عبارت f(x) به‌جای x، عبارت h(x) را قرار دهیم. باید توجه داشته باشیم که این عمل، یک عمل جای‌گذاری است و به معنی برابری h(x) با x نیست.



مثال ۱. اگر $f(x)=3x-4x^3$، مطلوب است محاسبه‌ی عبارت‌های زیر:

$$f(2x-5)\ ,\ f(\frac{2x+1}{2x-1}), f(x+\sqrt{x^2+1}), f(\sin\alpha), f\big(f(x)\big)$$

حل:

$$f(x)=3x-4x^3$$

$$1)\ f(2x-5)=3(2x-5)-4(2x-5)^3$$

$$2)\ f(\frac{2x+1}{2x-1})=3(\frac{2x+1}{2x-1})-4(\frac{2x+1}{2x-1})^3$$

$$3)\ f(x+\sqrt{x^2+1})=3(x+\sqrt{x^2+1})-4(x+\sqrt{x^2+1})^3$$

$$4)\ f(\sin\alpha)=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha=\sin 3\alpha$$

$$5)\ f\big(f(x)\big)=f(3x-4x^3)=3(3x-4x^3)-4(3x-4x^3)^3$$

مثال ۲. اگر داشته باشیم: $f(x,y)=x^2+5xy$، مطلوب است محاسبه‌ی عبارت‌های زیر:

$f(2-\sqrt{2},\frac{7}{11})$ و $f(x+y,x-y)$

حل:

$$f(x,y)=x^2+5xy$$

$$1)\ f(2-\sqrt{2},\frac{7}{11})=(2-\sqrt{2})^2+5(2-\sqrt{2})(\frac{7}{11})$$

$$2)\ f(x+y,x-y)=(x+y)^2+5(x+y)(x-y)$$

مثال ۳. اگر $f(x,y,z)=x^2-3xyz$ باشد، مطلوب است محاسبه‌ی:

$$f(a-b,b-c,c-a)$$

حل:

$$f(x,y,z)=x^2-3xyz$$

$$f(a-b,b-c,c-a)=(a-b)^2-3(a-b)(b-c)(c-a)$$

۲. مسئله‌ی معکوس f(x)

یعنی $f\big(h(x)\big)$ معلوم است و می‌خواهیم $f(x)$ را محاسبه کنیم. به مثال زیر دقت کنید.

مثال ۱. اگر $f(x+5)=4x+23$، آن‌گاه $f(x)$ کدام است؟

الف) $4x+1$ ب) $4x+2$

ج) $4x+3$ د) $4x+4$

حل: روش اول:

$x+5=a$ فرض می‌کنیم $\Rightarrow x=a-5$

$$f(x+5)=4x+23$$

$$f(a)=4(a-5)+23\Rightarrow f(a)=4a+3\Rightarrow f(x)=4x+3$$

روش دوم: در این روش که به «روش تبدیل» معروف است، در سمت راست عبارت $(x+5)$ را می‌سازیم. سپس در سراسر مسئله $(x+5)$ را به x تبدیل می‌کنیم.

$$f(x+5)=4x+23$$

$$f(x+5)=4(x+5)+3$$

$$(x+5)\xrightarrow{\text{تبدیل}}x\ ;\ f(x)+4x+3$$

روش سوم: به x عددی نسبت می‌دهیم: مثلاً $x=1$. آن‌گاه عبارت $f(x+5)$ بدین‌صورت خواهد شد:

$$f(6)=4+23\Rightarrow f(6)=27$$

می‌گوییم گزینه‌ای درست است که اگر به‌جای x، عدد ۶ را قرار دهیم، حاصل برابر ۲۷ شود. پس گزینه‌ی ج صحیح است. (این روش برای مسائل چند گزینه‌ای به‌کار می‌رود)

مثال ۲. اگر $f(x+\frac{1}{x})=x^3+\frac{1}{x^3}$، آن‌گاه $f(\frac{1}{x})$ را بیابید.

حل:

$$f(x+\frac{1}{x})=x^3+\frac{1}{x^3}$$

$$f(x+\frac{1}{x})=(x+\frac{1}{x})^3-3x(\frac{1}{x})(x+\frac{1}{x})$$

$$f(x+\frac{1}{x})=(x+\frac{1}{x})^3-3(x+\frac{1}{x})$$

$$(x+\frac{1}{x})\xrightarrow{\text{تبدیل}}\frac{1}{x}\ ;\ f(\frac{1}{x})=\frac{1}{x^3}-3(\frac{1}{x})=\frac{1-3x^2}{x^3}$$

مثال ۳. اگر $f(x+\frac{1}{x})=x^4+\frac{1}{x^4}$، آن‌گاه $f(\frac{1}{4x})$ را بیابید.

حل:

$$f(x+\frac{1}{x})=x^4+\frac{1}{x^4}$$

$$f(x+\frac{1}{x})=(x^2+\frac{1}{x^2})^2-2x^2(\frac{1}{x^2})=(x^2+\frac{1}{x^2})^2-2$$

$$f(x+\frac{1}{x})=\Big((x+\frac{1}{x})^2-2\Big)^2-2$$

$$(x+\frac{1}{x})\xrightarrow{\text{تبدیل}}\frac{1}{4x}$$

$$f(\frac{1}{4x})=\Big((\frac{1}{4x})^2-2\Big)^2-2$$

مثال ۴. اگر $f(x+y,x-y)=2xy$، آن‌گاه $f(x,y)$ کدام است؟

الف) $\frac{1}{8}(x^2-y^2)$ ب) $\frac{1}{4}(x^2-y^2)$

ج) $\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ د) $\frac{1}{2}(x^2-y^2)$

حل: روش اول: در عبارت f قرار می‌دهیم:

$$f(x+y,x-y)=2xy$$

$$\begin{cases}x+y=a\\x-y=b\end{cases}\Rightarrow x=\frac{a+b}{2},\ y=\frac{a-b}{2}$$

$$f(a,b)=2\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a-b}{2}\right)\Rightarrow$$

$$f(a,b)=\frac{1}{2}(a^2-b^2)\Rightarrow f(x,y)=\frac{1}{2}(x^2-y^2)$$

روش دوم:

$$f(x+y,x-y)=2xy$$

$$f(x+y,x-y)=\frac{1}{2}\Big((x+y)^2-(x-y)^2\Big)$$

$$\begin{cases}x+y\xrightarrow{\text{تبدیل}}x\\x-y\xrightarrow{\text{تبدیل}}y\end{cases}\Rightarrow f(x,y)=\frac{1}{2}(x^2-y^2)$$

روش سوم: به x و y دو عدد نسبت می‌دهیم:

$$\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}\Rightarrow f(3,1)=2(2)(1)\Rightarrow f(3,1)=4$$

می‌گوییم گزینه‌ای صحیح است که $f(3,1)$ آن برابر ۴ شود. بنابراین گزینه‌ی (ج) قابل‌قبول است.

مثال ۵. اگر $f(x+y,x-y)=2\sin x\cos y$، آن‌گاه $f(x,y)$ را بیابید.

حل: عبارت سمت راست را به حاصل‌جمع تبدیل می‌کنیم:

$$f(x+y,x-y)=2\sin x.\cos y$$

$$f(x+y,x-y)=\sin(x+y)+\sin(x-y)$$

$$\begin{cases}x+y\xrightarrow{\text{تبدیل}}x\\x-y\xrightarrow{\text{تبدیل}}y\end{cases}\Rightarrow f(x,y)=\sin x+\sin y$$

مثال ۶. اگر $f(x+y,x-y)=\cos x+\cos y$، آن‌گاه $f(x,y)$ را بیابید.

حل: عبارت سمت راست را به حاصل‌ضرب تبدیل می‌کنیم:

$$f(x+y,x-y)=\cos x+\cos y$$

$$f(x+y,x-y)=2\cos\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\begin{cases}x+y\xrightarrow{\text{تبدیل}}x\\x-y\xrightarrow{\text{تبدیل}}y\end{cases}\Rightarrow f(x,y)=2\cos\frac{x}{2}.\cos\frac{y}{2}$$

مثال ۷. اگر $f(\frac{y}{x})=\frac{1}{x}\sqrt{x^2+y^2}$ و $x<0$، آن‌گاه f(x) را بیابید.

حل: در سمت راست x را به داخل رادیکال می‌بریم و چون $x<0$ است، باید در خارج رادیکال منفی بگذاریم:

$$f(\frac{y}{x})=\frac{1}{x}\sqrt{x^2+y^2}=-\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{y^2}{x^2}}=-\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}$$

$$\frac{y}{x}\xrightarrow{\text{تبدیل}}x\Rightarrow f(x)=-\sqrt{1+x^2}$$

مثال ۸. اگر $f(x+\frac{1}{x})=x^2-\frac{1}{x^2}$ و $x>0$ و $x>\frac{1}{x}$، آن‌گاه f(x) را بیابید.

حل:

$$f(x+\frac{1}{x})=x^2-\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})(x-\frac{1}{x})$$

فرض می‌کنیم $x+\frac{1}{x}=a$

$$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}+2=a^2\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}-2=a^2-4$$

داریم: $x>\frac{1}{x}$

$$\Rightarrow(x-\frac{1}{x})^2=a^2-4\Rightarrow(x-\frac{1}{x})=\sqrt{a^2-4}$$

$$f(x+\frac{1}{x})=(x+\frac{1}{x})(x-\frac{1}{x})$$

$$f(a)=a\sqrt{a^2-4}\Rightarrow f(x)=x\sqrt{x^2-4}$$

۳. مسئله‌ی گسترده‌ی f(x)

در این‌گونه مسائل که به‌صورت

$$af\big(h(x)\big)+bf\big(t(x)\big)=k(x)$$

هستند، می‌خواهیم f(x) را بیابیم. ابتدا باید تبدیلی صورت گیرد تا h(x) و t(x) به یکدیگر تبدیل شوند. سپس دستگاه حاصل را حل می‌کنیم و آن‌گاه f(x) محاسبه می‌شود.

مثال ۱. اگر $3f(x)+2f(-x)=15x$، آن‌گاه f(x) را بیابید.

حل: $x\xrightarrow{\text{تبدیل}}-x\Rightarrow 3f(-x)+2f(x)=-15x$

$$\begin{matrix}3\\-2\end{matrix}\begin{cases}3f(x)+2f(-x)=15x\\3f(-x)+2f(x)=-15x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}9f(x)+6f(-x)=45x\\-6f(-x)-4f(x)=30x\end{cases}$$

$$5f(x)=75x\Rightarrow f(x)=15x$$

مثال ۲. اگر $2f(2x-3)+f(3-2x)=4x$، آن‌گاه $f(x)$ را بیابید.

$$2x-3=a \Rightarrow \begin{cases}3-2x=-a\\ 2x=a+3\end{cases}$$

$$-2\begin{cases}2f(a)+f(-a)=2(a+3)\\ 2f(-a)+f(a)=2(-a+3)\end{cases}\qquad a\xrightarrow{\text{تبدیل}}-a$$

$$\begin{cases}-4f(a)-2f(-a)=-4(a+3)\\ 2f(-a)+f(a)=2(-a+3)\end{cases}$$

$$-3f(a)=-4a-12-2a+6\Rightarrow -3f(a)=-6a-6$$

$$\Rightarrow f(a)=2a+2\Rightarrow f(x)=2x+2$$

مثال ۳. اگر $f(\sin x)+2f(\cos x)=2\sin^2 x$، آن‌گاه $f(x)$ را بیابید.

حل:

$$f(\sin x)+2f(\cos x)=2\sin^2 x \qquad x\xrightarrow{\text{تبدیل}}(\frac{\pi}{2}-x)$$

$$f\left(\sin(\frac{\pi}{2}-x)\right)+2f\left(\cos(\frac{\pi}{2}-x)\right)=2\sin^2(\frac{\pi}{2}-x)$$

$$\begin{cases}f(\sin x)+2f(\cos x)=2\sin^2 x\\ -2\quad f(\cos x)+2f(\sin x)=2\cos^2 x\end{cases}$$

$$\begin{cases}f(\sin x)+2f(\cos x)=2\sin^2 x\\ -2f(\cos x)-4f(\sin x)=-4\cos^2 x\end{cases}$$

$$\Rightarrow -3f(\sin x)=-4\cos^2 x+2\sin^2 x$$

$$-3f(\sin x)=-4(1-\sin^2 x)+2\sin^2 x$$

$$\Rightarrow -3f(\sin x)=6\sin^2 x-4$$

$$\Rightarrow f(\sin x)=-2\sin^2 x+\frac{4}{3} \qquad \sin x\xrightarrow{\text{تبدیل}}x$$

$$f(x)=-2x^2+\frac{4}{3}$$

۴. مسئله‌ی ترکیبی (نوع اول)

در این حالت $f(x)$ و $f(g(x))$ معلوم است و می‌خواهیم $g(x)$ را محاسبه کنیم. با توجه به ساختن $f(g(x))$، $g(x)$ به‌راحتی محاسبه می‌شود.

مثال. اگر $f(x)=2x-5$ و $f(g(x))=4x^6+2x^2-1$، آن‌گاه $g(x)$ را بیابید.

حل: $f(g(x))=2g(x)-5=4x^6+2x^2-1\Rightarrow$

$$2g(x)=4x^6+2x^2+4\Rightarrow g(x)=2x^6+x^2+2$$

۵. مسئله‌ی ترکیبی (نوع دوم)

در این مسئله $f(x)$ و $g(f(x))$ معلوم است و می‌خواهیم $g(x)$ را محاسبه کنیم.

مثال: اگر $f(x)=2x+3$ و $g(f(x))=8x+11$، آن‌گاه $f(x)$ را بیابید.

حل: $g(f(x))=g(2x+3)=8x+11$

$$g(2x+3)=4(2x)+11=4(2x+3)-12+11$$

$$g(2x+3)=4(2x+3)-1 \quad (2x+3)\xrightarrow{\text{تبدیل}}x$$

$$g(x)=4x-1$$

مثال. اگر $f(\frac{x-1}{x+1})=2^x$، آن‌گاه $f(\frac{x-1}{x+1}).f(\frac{x+1}{x-1})$ را بیابید.

حل: $f(\frac{x-1}{x+1})=2^x$

صورت و مخرج کسر را در (۱-) ضرب می‌کنیم:

$$x\xrightarrow{\text{تبدیل}}-x\Rightarrow f(\frac{-x-1}{-x+1})=2^{-x}$$

$$\Rightarrow f(\frac{x+1}{x-1})=2^{-x}$$

$$f(\frac{x-1}{x+1})=2^x\ ,\ f(\frac{x+1}{x-1})=2^{-x}$$

$$\Rightarrow f(\frac{x-1}{x+1}).f(\frac{x+1}{x-1})=2^x\times2^{-x}=2^0=1 \quad (x\neq\pm1)$$

مثال: اگر $f(x)=x^2-5x+4$ و $g(x)=x^2+5x$، آن‌گاه معادله‌ی $f(g(x))=0$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

حل:

$$f(x)=x^2-5x+4\ ,\ f(g(x))=f(x^2+5x)$$

$$f(x)=(x-1)(x-4)\quad x\xrightarrow{\text{تبدیل}}(x^2+5x)$$

$$f(x^2+5x)=(x^2+5x-1)(x^2+5x-4)$$

$$f(x^2+5x)=0\Rightarrow (x^2+5x-1)(x^2+5x-4)=0$$

$$x^2+5x-1=0,\Delta>0$$

معادله دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد.

$$x^2+5x-4=0,\Delta>0$$

معادله دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد.

پس معادله‌ی $f(g(x))=0$ چهار ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد.

سؤال: آیا ممکن نیست دو معادله‌ی $x^2+5x-1=0$ و $x^2+5x-4=0$، یک ریشه‌ی مشترک داشته باشند؟ چرا؟

آشنایی با بسته‌ی نرم‌افزاری Mathematica

قسمت اول

کلید واژه‌ها:

بسته‌های نرم‌افزاری Methematica

. Evaluate Cells ،Cells ،Basic mathInput ،Palettes

• مقدمه

بسته‌ی نرم‌افزاری Mathematica حدود ۲۲ سال پیش توسط استفن ولفرم[۱] به عنوان یک نوآوری علمی کارا برای امور تحقیقاتی ارائه شد. وی مؤسس شرکت معتبر نرم‌افزاری ولفرم است که درسال ۱۹۸۷ پایه‌گذاری شد. اولین نسخه‌ی Mathematica در سال ۱۹۸۸ معرفی شد و طی دو دهه، نسخه‌های کامل‌تر این بسته‌ی نرم‌افزاری وارد بازار شد؛ به‌طوری که هم‌اکنون نسخه‌ی ۷ آن در بازار موجود

استفن ولفرم

است.

این بسته‌ی نرم‌افزاری نه تنها به منظور انجام محاسبات ریاضی، بلکه با هدف مدل‌سازی، شبیه‌سازی، تجسم، مستندسازی و پیشرفت و توسعه در زمینه‌های گوناگون علوم فنی و کاربردی طراحی شد. Mathematica سرآغازی برای محاسبات فنی مدرن بود. تا قبل از پیدایش این بسته، بسته‌های متفاوتی وجود داشتند که تنها قادر به انجام محاسبات جبری و عددی مشخص و انجام اعمال گرافیکی محدودی بودند. در حالی‌که با ابداع این نرم‌افزار جدید، کاربران قادر به انجام محاسبات پیشرفته و جامعی شدند.

زمانی‌که نسخه‌ی اول Mathematica به بازار آمد، به‌عنوان یکی از مهم‌ترین ده محصول اول آن سال معرفی شد. چرا که از اهمیت عملکرد آن نمی‌شد چشم پوشید. نخستین نسخه‌ی آن برای استفاده در علوم ریاضی و فیزیک و مهندسی طراحی شده بود، ولی در ادامه و طی سال‌های بعد، در سایر علوم نظیر پزشکی، زیست‌شناسی، علوم اجتماعی و بازرگانی نیز مورد استفاده قرار گرفت. در مهندسی نیز به عنوان ابزاری استاندارد برای طراحی، تولید و توسعه‌ی محصولات موردنظر به کار می‌رود.

Mathematica به شکل اساسی در طول تحصیلات مقدماتی و دانشگاهی و در سطوح متفاوت آموزش از دبیرستان به بعد، به عنوان یک ابزار آموزشی مناسب درسطح جهان مورد استفاده قرار گرفته است. به ویژه به دلیل طراحی ساده، جذاب و قابل فهم آن و امکان دست‌رسی ساده به این نرم‌افزار، دانش‌آموزان دبیرستانی در سراسر جهان به شکل عمومی از آن استفاده می‌کنند. تنوع موجود در این بسته به گونه‌ای است که کاربران از سن ۱۰ سال به بالا می‌توانند حتی برای سرگرمی از آن استفاده کنند.

در حال حاضر این بسته نرم‌افزاری در بسیاری از سازمان‌ها، شرکت‌ها و ارگان‌های دولتی کشور آمریکا و بزرگ‌ترین دانشگاه‌های جهان مورد بهره‌برداری قرار دارد. طی سال‌های اخیر، طراحی این بسته نرم‌افزاری به شکل قابل‌توجهی توسعه یافت، به‌طوری که پس از دو دهه، به‌عنوان یک سیستم تعریف شده برای طیف گسترده‌ای از محاسبات هم‌چنان مورد بهره‌برداری قرار می‌گیرد. در این راستا تصمیم گرفته شد، مجموعه‌ای از مقالات برای آشنایی دانش‌آموزان و خوانندگان گرامی با این بسته‌ی نرم‌افزاری نوشته شود. در این مقالات براساس مطالب موجود در ریاضیات دوره‌ی دبیرستان، چگونگی انجام محاسبات در محیط این بسته‌ی نرم‌افزاری مطرح خواهد شد. ابتدا با توجه به محتوای کتاب‌های ریاضی ۱ و ۲ دبیرستان، به معرفی توابع مقدماتی و نحوه‌ی اجرا و به کارگیری آن‌ها در محیط این بسته می‌پردازیم. در ادامه‌ی این مقالات، در چارچوب دروس حسابان، حساب دیفرانسیل و انتگرال، چگونگی محاسبه توابع، حد، مشتق، انتگرال، رسم منحنی و ... در این بسته آموزش داده می‌شود. به این منظور نسخه‌ی Mathematica 6 در نظر گرفته شده است و تمامی محاسبات ودستورالعمل‌ها در محیط این نسخه از نرم‌افزار معرفی می‌شوند. بسته‌ی نرم‌افزاری Mathematica تحت سیستم عامل ویندوز قابل اجرا است.

نصب نرم‌افزار

به‌منظور نصب Mathematica روی رایانه‌ی شخصی خود، ابتدا سی‌دی حاوی این بسته نرم‌افزاری را در سی‌دی‌خوان قرار دهید و فایل Setup.exe را اجرا کنید تا اجرای مراحل نصب به‌طور خودکار آغاز شود. در ابتدا اطلاعات شما و کلمه‌ی عبور خواسته می‌شود. با اجرای فایل Keygen.exe، می‌توانید پس از قرار دادن شماره‌ی MathID و فشار دکمه‌ی Generate، «شماره‌ی شناسایی»[۲] و «کلمه‌ی عبور»[۳] را اخذ و در قسمت مربوط کپی کنید تا مراحل نصب دنبال شود. پس از اتمام نصب، رایانه‌ی خود را restart کنید.

مشخصات نرم‌افزار

صفحه‌ی اصلی Mathematica شامل گزینه‌های File، Edit، Insert، Format، Cell، Graphics، Evaluation، Palettes، Windows و Help است. توصیه می‌شود هم‌زمان با مطالعه‌ی این توضیحات، برای یادگیری بهتر، هر کدام از توابع و دستورالعمل‌های معرفی شده را روی رایانه‌ی شخصی خود اجرا کنید. به منظور ایجاد یک فایل جدید، گزینه‌ی «New» را در پنجره‌ی «File» انتخاب و اطلاعات موردنظر خود را روی صفحه تایپ و اجرا می‌کنیم. برای ذخیره‌ی اطلاعات، گزینه‌ی «Save» از پنجره File را انتخاب و با یک نام نظیر «Sample» فایل را ذخیره می‌کنیم. تمام یادداشت‌های Mathematica که در صفحه‌ی اصلی درج می‌گردند، به صورت فایلی با پسوند «nb.» در ماشین ذخیره می‌شوند. هم‌چنین، برای باز کردن فایل‌های قبلی در محیط این نرم‌افزار، گزینه‌ی «Open»

از پنجره‌ی File را انتخاب می‌کنیم و فایل موردنظر را می‌یابیم و باز می‌کنیم.

از جمله پنجره‌های قابل توجه در Mathematica، «Palettes» است. در این پنجره، گزینه‌ای به نام «BasicMathInput» وجود دارد که با انتخاب آن، صفحه‌ای شامل نمادهای اصلی در ریاضی، چون توان‌رسانی، کسر، ریشه‌گیری، مشتق‌گیری، انتگرال‌گیری، مجموع، حاصل‌ضرب، ماتریس و ... به همراه اعمال اصلی ریاضی و حروف الفبای یونانی ظاهر می‌شوند. با انتخاب هر یک از این نمادها، عیناً آن نماد در صفحه‌ی اصلی ظاهر می‌شود که باید با پر کردن جاهای خالی، عبارت موردنظر برای محاسبه را آماده کنیم.

چند مثال

مثلاً به‌منظور محاسبه‌ی 5^7، گزینه $\blacksquare^{\square}$ را انتخاب می‌کنیم. با این عمل یک سلول روی صفحه پدید می‌آید، که با یک کروشه‌ی بسته مشخص می‌شود. حال داخل دومربع را در پایه و توان پر می‌کنیم. با دکمه‌ی «Tab» روی صفحه‌ی کلید، به سادگی می‌توان از مربع پایینی به بالایی منتقل شد. پس از تایپ 5^7 با فشار هم‌زمان دکمه‌های «Enter» و«Shift»، نتیجه روی صفحه به صورت ۷۸۱۲۵ مشخص می‌شود. در این حالت ورودی با «In» و نتیجه با «Out» در یک سلول نمایش داده می‌شود. لازم به ذکر است، در Mathematica هر عبارت ورودی جهت محاسبه در یک «سلول»[4] قرار می‌گیرد و پس از اجرا، نتیجه نیز در همان سلول به نمایش درمی‌آید. هر سلول داخل یک علامت به شکل کروشه‌ی بسته قرار دارد. به‌جز دکمه‌های Enter و Shift، برای محاسبه می‌توان از گزینه‌ی «محاسبه‌ی سلول‌ها»[5] در پنجره‌ی Evaluation نیز استفاده کرد.

حال سلول دیگری را ایجاد می‌کنیم تا در آن عبارت $\frac{2}{7}+\frac{3}{4}$ محاسبه شود. ابتدا گزینه‌ی $\frac{\blacksquare}{\square}$ را در پنجره‌ی «BasicMathId» انتخاب و در مربع‌های خالی به ترتیب ۲ و ۷ را تایپ می‌کنیم. سپس جلوی کسر $\frac{2}{7}$ نماد + را تایپ و پس از آن مجدداً روی گزینه‌ی $\frac{\blacksquare}{\square}$ کلیک می‌کنیم و درمربع‌های خالی به ترتیب ۳ و ۴ را تایپ می‌کنیم. از کلید Tab برای انتقال از صورت به مخرج کسر می‌توان استفاده کرد. حال سلول حاصل را با فشار هم‌زمان دکمه‌های Enter و Shift محاسبه می‌کنیم. در این لحظه کسر $\frac{29}{28}$ به عنوان خروجی درصفحه‌ی نمایش ظاهر می‌شود.

ممکن است تمایل داشته باشیم مقدار این کسر را به شکل اعشاری ببینیم. به این منظور کافی است یک سلول جدید زیرهمین کسر با تایپ حرف N و قرار دادن علامت ٪ داخل یک کروشه جلوی آن، ایجاد کنیم. با اجرای دستور N[٪]، نتیجه‌ی کسر فوق به‌صورت ۱/۰۳۵۷۱ در صفحه ظاهر می‌شود. درحالت کلی دستور [ ]N، عبارت قرار گرفته داخل کروشه را به‌صورت عددی و با نمایش اعشاری مشخص می‌کند. در این حالت، ۵ رقم از ارقام قسمت اعشاری نمایش داده می‌شود که می‌توان با قراردادن عددی در کنار عبارت مربوط، تعداد ارقام اعشار موردنظر را مشخص کرد.

به‌طور کلی دستور [n و عبارت]N، مقدار عبارت داخل کروشه را به صورت تقریبی و تا n−۱ رقم اعشار نمایش می‌دهد. هم‌چنین اگر عبارت در سلول یا سلول‌های قبلی وجود داشته باشد، نیازی به تایپ مجدد عبارت نیست و کافی است از علامت ٪ استفاده کرد.

دستور N[٪,n] مقدار عبارت موجود در آخرین سلول را به صورت عددی تا (n−۱) رقم اعشار مشخص می‌کند. برای مثال، اگربخواهیم نتیجه‌ی عبارت $(\frac{9}{7})^4$ را به صورت تقریبی تا ۲۰ رقم اعشار ملاحظه کنیم، ابتدا گزینه‌ی توان‌رسانی را انتخاب و داخل مربع اول، روی گزینه کسر ($\frac{\blacksquare}{\square}$) کلیک می‌کنیم. حال ابتدا ۹، سپس ۷ و در نهایت ۴ را در مربع‌ها تایپ می‌کنیم. با دکمه‌ی Tab سریع‌تر می‌توان به مربع بعدی رفت. پس از اجرای سلول حاوی $(\frac{9}{7})^4$، حاصل این عبارت به صورت $\frac{6561}{2401}$ نمایش داده می‌شود. حال زیر این نتیجه تایپ می‌کنیم: N[٪,۲۰]. با محاسبه‌ی این سلول نتیجه‌ی عبارت به صورت ۲/۷۳۲۶۱۱۴۱۱۹۱۱۷۰۳۴۵۶۹ مشخص می‌شود.

5^7

78125

$\frac{2}{7}+\frac{3}{4}$

$\frac{29}{28}$

N [%]

1.03571

$\left(\frac{9}{4}\right)^4$

$\frac{6561}{2401}$

N [%, 20]

2.7326114119117034569

جذرگیری از جمله اعمال دیگری است که در پنجره‌ی BasicMathInput وجود دارد. فرض کنید که می‌خواهیم $\sqrt{2}$ را با ۱۰ رقم اعشار محاسبه کنیم. به این منظور، ابتدا روی علامت $\sqrt{\blacksquare}$ در این پنجره کلیک می‌کنیم تا عین همین علامت روی صفحه ظاهر شود. سپس درون مربع عدد ۲ را تایپ می‌کنیم. حال برای محاسبه‌ی تقریبی $\sqrt{2}$ آن را درون تابع محاسبه عددی N به صورت $N\left[\sqrt{2},10\right]$

قرار می‌دهیم. با اجرای این سلول، پاسخ ۱/۴۱۴۲۱۳۵۶۲ را دریافت می‌کنیم.

توجه داشته باشید، اگر $\sqrt{۲}$ را درون دستورالعمل محاسباتی N[۰,n] قرارندهیم، خود $\sqrt{۲}$ در نتیجه‌ی اجرای سلول ظاهر می‌شود. هم‌چنین می‌توان با استفاده از نماد $\sqrt[\square]{\blacksquare}$ در این صفحه، ریشه‌گیری یک عدد را انجام داد. مثلاً برای محاسبه‌ی $\sqrt[۵]{۳}$ روی این نماد کلیک می‌کنیم و ابتدا ۳ را در مربع زیر رادیکال و سپس ۵ را در مربع داخل فرجه‌ی رادیکال تایپ می‌کنیم. به‌منظور انتقال به مربع دوم از دکمه‌ی Tab استفاده می‌کنیم. حال $\sqrt[۵]{۳}$ را درون تابع N قرار می‌دهیم و سلول حاصل را به‌صورت $N\left[\sqrt[۵]{۳}\right]$ با فشار دکمه‌های Enter و Shift محاسبه می‌کنیم. در این لحظه، مقدار ۱/۲۴۵۷۳ به عنوان نتیجه مشخص می‌شود. البته می‌توان با مشخص کردن تعداد ارقام اعشار موردنظر، تقریب این عدد را با رقم‌های بیشتری ملاحظه کرد.

N [$\sqrt{2}$, 10]

1.414213562

N [$\sqrt[5]{3}$]

1.24573

با استفاده از دستور محاسبه‌ی عددی N می‌توان مقدار عدد پی را تا هر تعداد رقم اعشاری محاسبه کرد. به منظور مشاهده‌ی عدد پی با یک دقت معلوم، از نماد Pi استفاده می‌کنیم. به این منظور در صفحه‌ی نمایش تایپ می‌کنیم. N[Pi,50]، و با محاسبه‌ی این سلول مقدار عدد π تا ۴۹ رقم اعشار مشخص می‌شود. اگر فقط سلول حاوی Pi را اجرا کنیم، نتیجه به صورت π در صفحه‌ی نمایش ظاهر می‌شود.

N [Pi, 50]

3.1415926535897932384626433832795028841971693993751

Pi

π

توابع حسابی

تابع جمع[۶]: فرمول کلی این تابع به شکل $Plus[x_1,x_2,...,x_n]$ است. نتیجه‌ی این تابع برابر است با: $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n$ ؛ یعنی مجموع اعداد مندرج در داخل کروشه. اگر بخواهیم یک دسته عدد را با یک عدد ثابت جمع کنیم، ابتدا این اعداد را داخل آکلاد تایپ می‌کنیم و بین هر کدام یک کاما قرار می‌دهیم. سپس علامت + و بعد از آن عددی را که باید با مقادیر داخل آکلاد جمع شود، تایپ می‌کنیم. با محاسبه‌ی سلول، حاصل مجموعه اعداد موردنظر حاصل می‌شود.

Plus [2.5, 0.97, 31.29, 0.405]

35.165

{3, 8, −4, −10, 23} +6

{9, 14, 2, −4, 29}

تابع تفریق[۷]: دستور Sabtract[a,b] حاصل a−b را به‌عنوان نتیجه مشخص می‌کند.

مثال:

Subtract [67, 31]

36

تابع ضرب[۸]: دستور Times [x,y,z] حاصل ضرب x، y، z را به صورت xyz مشخص می‌کند.

مثال:

Times [54, 3.1, 7.64, 1.77]

2263.72

تابع تقسیم[۹]: دستور Divide [x,y] نتیجه‌ی تقسیم x بر y را مشخص می‌کند.

لازم به ذکراست، هنگام استفاده از این تابع اگر x بر y بخش‌پذیر نباشد، نتیجه‌ی تقسیم مشخص نمی‌شود. در این حالت می‌توان از دستورمحاسبه‌ی عددی N استفاده کرد و حاصل تقسیم را به شکل اعشاری یافت.

مثال:

Divide [825, 75]

11

N [Divide[19, 7]]

2.71429

تابع توان[۱۰]: دستور Power [x,n] حاصل x^n را مشخص می‌کند. این دستور به صورت x^n نیز می‌تواند بیان شود.

هم‌چنین اگر بخواهیم چند عدد را هم‌زمان به‌توان یکسان برسانیم، فهرست این اعداد را در یک مجموعه قرار می‌دهیم و بعد از آن علامت ^ (نماد توان) و به دنبال آن توان موردنظر را تایپ می‌کنیم.

مثال:

Power [3, 10]

59049

3^10

59049

{4.5, 7, 1.2, 10}^3

{91.125, 343, 1.728, 1000}

تابع جذرگیری[۱۱]: دستور Sqrt [x] جذرعدد x را مشخص

می‌کند. اگر x عددی مربع کامل نباشد، نتیجه‌ی اجرای این دستور به شکل $\sqrt{x}$ مشخص می‌شود. به منظور محاسبه‌ی عددی این مقدار باید از دستور N استفاده کرد. هم‌چنین اگر x عددی منفی باشد، اجرای این دستور به صورت یک عدد موهومی برحسب مضربی از i (که $i^2=-1$) نمایش داده می‌شود.

مثال:

Sqrt [81]

9

Sqrt [35]

$\sqrt{35}$

N [Sqrt [35]]

5.91608

Sqrt [-4]

2 i

نکته: حرف اول هر یک از توابع به‌کار رفته در محیط Mathematica باید به صورت بزرگ تایپ شود.

محاسبه‌ی عبارت‌های جبری

تابع **Expand**: دستور، [ ] Expand عبارت داخل کروشه را به‌صورت بسط داده شده مشخص می‌کند.

درمثال‌زیر، دوعبارت $(x+y)^3$ و $(3x-5y^2)^2+(4x+7y^2)^2$ محاسبه شده‌اند.

Expand [{x+y}^3]

$\{x^3+3xy^2+y^3\}$

Expand [(3x−5y^2)^2 + (4x + 7y^2)^2]

$25x^2+26xy^2+74y^4$

تابع **Factor**: دستور [ ] Factor، عبارت جبری داخل کروشه را به شکل حاصل‌ضربی از عوامل اول تجزیه می‌کند. در مثال زیر، عبارت‌های $1+4x+4x^2$، x^4-y^8، a^3-b^3 و $6x^2+13x-5$ تجزیه شده‌اند.

Factor [1 + 4x + 4x^2]

$(1+2x)^2$

Factor [x^4−y^8]

$(x-y^2)(x+y^2)(x^2+y^4)$

Factor [a^3-b^3]

$(a-b)(a^2+ab+b^2)$

Factor [6x^2+13x-5]

$(5+2x)(-1+3x)$

پی‌نوشت

۱. Stephen Wolfram
۲. License Number
۳. Password
۴. Cell
۵. Evaluate Cells
۶. Plus
۷. Subtract
۸. Times
۹. Divide
۱۰. Power
۱۱. Sqrt

تفریح اندیشه

کشف یک عدد با بازی ریاضی

میر شهرام صدر

با یک بازی ریاضی برای کشف یک عدد آشنا شوید. در این بازی شما می‌توانید از دوست خود بخواهید که عددی را در ذهن خود در نظر بگیرد، سپس با انجام یک الگوریتم می‌توانید آن عدد را کشف کنید. برای مثال، عددی که دوست شما در نظر می‌گیرد می‌تواند مقدار پول توجیبی یا شماره‌ی شناسنامه یا تاریخ تولد یا هر عدد دیگری باشد. در این‌جا با انجام یک بازی ریاضی می‌خواهیم تاریخ تولد دوست خود را کشف کنید.

برای این کار ابتدا از دوست خود بخواهید که تاریخ تولدش را به‌صورت یک عدد شش رقمی در ذهنش تصور کند. برای مثال، عدد شش رقمی متناظر با تاریخ پانزدهم مردادماه سال ۷۳ به‌صورت زیر است:

۱۵ ۰۵ ۷۳

روز ماه سال

سپس از دوست خود بخواهید که الگوریتم زیر را انجام دهد.

مرحله‌ی ۱) عدد شش رقمی را دو برابر کند.

مرحله‌ی ۲) به عدد حاصل از مرحله‌ی ۱، سه واحد بیافزاید.

مرحله‌ی ۳) عدد حاصل از مرحله‌ی ۲ را ۵ برابر کند.

مرحله‌ی ۴) از عدد حاصل از مرحله‌ی ۳، شش واحد کم کند.

مرحله‌ی ۵) عدد حاصل از مرحله‌ی ۴ را به شما اعلام کند.

اکنون با حذف رقم یکان عدد اعلام شده، تاریخ تولد دوست خود را می‌یابید.

بقیه در صفحه‌ی ۶۰

روشی دیگر برای محاسبه‌ی وارون ماتریس (با قابلیت کنترل خطا)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & -6 & 4 & -1 \\ -6 & 14 & -11 & 3 \\ 4 & -11 & 10 & -3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

کلید واژه‌ها: وارون ماتریس، دستگاه سه معادله‌ی سه مجهولی، دترمینان، ترانهاده ماتریس.

[illegible]
[illegible]@yahoo.com

مقاله را با ارائه‌ی روش محاسبه و اثبات وارون ماتریس:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

آغاز می‌کنیم. همان‌طور که می‌دانیم، وارون ماتریس A را با نماد A^{-1} نمایش می‌دهیم و شرط لازم و کافی برای این‌که ماتریس A وارون‌پذیر باشد، این است که دترمینان A مخالف صفر باشد ($|A| \neq 0$). هم‌چنین می‌دانیم، حاصل‌ضرب وارون A در خودش، ماتریس مربع واحد مرتبه‌ی سوم می‌شود:

$$A^{-1} \times A = I_3$$

به عبارت دیگر داریم:

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

از ضرب وارون A در A^{-1} و متحد قرار دادن ماتریس حاصل و ماتریس مربع واحد مرتبه‌ی سوم، سه دستگاه سه معادله‌ی سه مجهولی برحسب درایه‌های مجهول A^{-1} به‌ترتیب زیر به‌دست می‌آید:

از تساوی دو ماتریس اخیر سه دستگاه سه معادله‌ی سه مجهولی به شکل زیر حاصل می‌شود، یعنی:

$$\begin{bmatrix} a_1x_1 + a_2y_1 + a_3z_1 & b_1x_1 + b_2y_1 + b_3z_1 & c_1x_1 + c_2y_1 + c_3z_1 \\ a_1x_2 + a_2y_2 + a_3z_2 & b_1x_2 + b_2y_2 + b_3z_2 & c_1x_2 + c_2y_2 + c_3z_2 \\ a_1x_3 + a_2y_3 + a_3z_3 & b_1x_3 + b_2y_3 + b_3z_3 & c_1x_3 + c_2y_3 + c_3z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

دستگاه (۱)
$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2y_1 + a_3z_1 = 1 \\ b_1x_1 + b_2y_1 + b_3z_1 = 0 \\ c_1x_1 + c_2y_1 + c_3z_1 = 0 \end{cases}$$

دستگاه (۲)
$$\begin{cases} a_1x_2 + a_2y_2 + a_3z_2 = 0 \\ b_1x_2 + b_2y_2 + b_3z_2 = 1 \\ c_1x_2 + c_2y_2 + c_3z_2 = 0 \end{cases}$$

دستگاه (۳)
$$\begin{cases} a_1x_3 + a_2y_3 + a_3z_3 = 0 \\ b_1x_3 + b_2y_3 + b_3z_3 = 0 \\ c_1x_3 + c_2y_3 + c_3z_3 = 1 \end{cases}$$

بدیهی است، در این‌جا از حل سه دستگاه فوق، درایه‌های ماتریس A^{-1} به‌دست می‌آیند. اکنون سه دستگاه را در یک سیستم حل می‌کنیم

	x_i	y_i	z_i	k_1	k_2	k_3	Σc
(مرحله‌ی ۱)	a_1	a_2	a_3	۱	۰	۰	$a_1+a_2+a_3+1=\delta_1$
	b_1	b_2	b_3	۰	۱	۰	$b_1+b_2+b_3+1=\delta_2$
	c_1	c_2	c_3	۰	۰	۱	$c_1+c_2+c_3+1=\delta_3$
(مرحله‌ی ۲)	$\underbrace{a_1b_2-a_2b_1}_{A_1}$		$\underbrace{a_1b_3-a_3b_1}_{A_2}$	$-b_1$	a_1	۰	$a_1\delta_2-b_1\delta_1=\delta_4$
	$\underbrace{b_1c_2-b_2c_1}_{B_1}$		$\underbrace{b_1c_3-b_3c_1}_{B_2}$	۰	$-c_1$	b_1	$b_1\delta_3-c_1\delta_2=\delta_5$
(مرحله‌ی ۳) $D\neq0$ شرط لازم و کافی برای وجود وارون	$D=A_1B_2-A_2B_1$			$\underbrace{b_1B_1}_{S_1}$	$\underbrace{-(A_1c_1+a_1B_1)}_{S_2}$	$\underbrace{A_1b_1}_{S_3}$	$A_1\delta_5-B_1\delta_4=\delta_6$

تذکر ۱. ستون Σc برای کنترل هر سطر است و مقدار آن همیشه برابر مجموع سطر مربوطه است. اگر δ_4، δ_5 و δ_6 برابر مجموع عناصر سطر مربوطه‌ی خود نشوند، در محاسبه خطا وجود دارد که این اشتباه باید رفع شود. درواقع، ستون Σc در هر لحظه هر سطر عملیات انجام شده‌ی هر مرحله را کنترل می‌کند و به ما امکان می‌دهد که بلافاصله به خطای موجود در هر سطر پی ببریم و آن را اصلاح کنیم.

تبصره: در مرحله‌ی آخر عملیات (در این‌جا برای ماتریس مربع مرتبه‌ی سوم) می‌توان مقدار دترمینان A را نیز محاسبه کرد. در این‌جا مقدار دترمینان A چنین است:

$$|A|=\frac{D}{b_1}\neq 0$$

تذکر ۲. همان‌طور که گفته شد، مقدار دترمینال A از مرحله‌ی نهایی عملیات به‌دست می‌آید و شرط لازم و کافی برای آن‌که A وارون‌پذیر باشد، آن است که داشته باشیم: $D\neq 0$

از مرحله‌ی ۳، مقادیر z_1، z_2 و z_3 به شکل زیر محاسبه می‌شوند.

از مرحله‌ی ۳ داریم:

$$Dz_i=k_i \quad (D\neq 0)$$

$$z_i=\frac{k_i}{D}\ ;\ i=1:z_1=\frac{k_1}{D}=\frac{b_1B_1}{D}=\frac{S_1}{D},$$

$$i=2:z_2=\frac{S_2}{D},\ i=3:z_3=\frac{A_1b_1}{D}=\frac{S_3}{D}$$

از مرحله‌ی ۲، مقادیر y_1، y_2 و y_3 به شکل زیر محاسبه می‌شوند.

از مرحله‌ی ۲ داریم:

$$A_1y_i+A_2z_i=k'_i$$

$$y_i=\frac{k'_i}{A_1}-A_2\frac{k_i}{DA_1}\ ;$$

$$i=1:y_1=\frac{k'_1}{A_1}-\frac{A_2}{A_1}\frac{k_1}{D}=\frac{-b_1}{A_1}-\frac{A_2}{A_1}\frac{S_1}{D}$$

$$=\frac{-(b_1D+A_2S_1)}{A_1D}=\frac{t_1}{D}$$

$$i=2:y_2=\frac{k'_2}{A_1}-\frac{A_2}{A_1}\frac{k_2}{D}=\frac{a_1}{A_1}-\frac{A_2}{A_1}\frac{S_2}{D}$$

$$=\frac{a_1D-A_2S_2}{A_1D}=\frac{t_2}{D}$$

$$i=3:y_3=\frac{k'_3}{A_1}-\frac{A_2}{A_1}\frac{k_3}{D}=\frac{-A_2}{A_1}\frac{S_3}{D}=\frac{t_3}{D}$$

از مرحله‌ی ۱، مقادیر x_1، x_2 و x_3 به شکل زیر محاسبه می‌شوند. باید توجه داشت، از هر مرحله ساده‌ترین معادله را انتخاب می‌کنیم.

از مرحله‌ی ۱ داریم:

$$a_1x_i+a_2y_i+a_3z_i=k''_i$$

و به‌طور مشابه داریم:

$$i=1:x_1=\frac{U_1}{D}\ ,i=2:x_2=\frac{U_2}{D},i=3:x_3=\frac{U_3}{D}$$

بنابراین، ماتریس وارون A چنین می‌شود:

روش محاسبه

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}$$

روش محاسبه‌ی ماتریس وارون A چنین است که ابتدا ترانهاده‌ی A را به‌دست می‌آوریم و سپس ماتریس واحد هم‌مرتبه‌ی A را کنار آن می‌نویسیم.

پس از آن، عملیات روی سطر و ستون را انجام می‌دهیم و از هر مرحله، سه درایه‌ی مجهول ماتریس A^{-1} را به‌دست می‌آوریم. در آخر، به همان‌صورتی که درایه‌های مجهول را نوشته‌ایم، مقدار هر درایه‌ی مجهول را جای‌گزین آن می‌کنیم.

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{U_1}{D} & \frac{t_1}{D} & \frac{S_1}{D} \\ \frac{U_2}{D} & \frac{t_2}{D} & \frac{S_2}{D} \\ \frac{U_3}{D} & \frac{t_3}{D} & \frac{S_3}{D} \end{bmatrix}$$

مثال ۱. وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ را حساب کنید.

حل: وارون ماتریس A را چنین فرض می‌کنیم:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}$$

اکنون ترانهاده‌ی A را به‌دست می‌آوریم و ماتریس واحد مرتبه‌ی سوم را کنار ماتریس حاصل می‌نویسیم. سپس عملیات روی سطرها

	x_i	y_i	z_i	k_1	k_2	k_3	$\sum c$
	۱	۰	۱	۱	۰	۰	۳
(مرحله‌ی ۱)	۲	۱	۳	۰	۱	۰	۷
	۴	۶	۲	۰	۰	۱	۱۳
(مرحله‌ی ۲)		۱	۱	−۲	۱	۰	۱
		۸	−۸	۰	−۴	۲	−۲
(مرحله‌ی ۳)			−۱۶	۱۶	−۱۲	۲	−۱۰
(دترمینال A) $\lvert A\rvert=\frac{-16}{2}=-8$				$z_1=\frac{16}{-16}$	$z_2=\frac{-12}{-16}$	$z_3=\frac{2}{-16}$	
					$z_1=-1$		
					$z_2=\frac{3}{4}$		
					$z_3=-\frac{1}{8}$		

را انجام می‌دهیم:

توجه ۱. در هر سطر، مقدار $\sum c$ باید برابر مجموع عناصر آن سطر باشد. در غیر این‌صورت، در سطر فوق، یعنی سطری که مجموع عناصرش برابر مقدار $\sum c$ نیست، اشتباهی وجود دارد که باید اصلاح شود.

توجه ۲. از مرحله‌ی ۳ درایه‌های ستون آخر ماتریس وارون A به‌دست می‌آید.

با توجه به z_1، z_2 و z_3 و مرحله‌های ۲ و ۱ درایه‌های A^{-1} را حساب می‌کنیم.

حال از مرحله‌ی ۲ معادله‌ی اول آن را که ساده‌تر است، انتخاب و درایه‌های ستون میانی A^{-1} را حساب می‌کنیم. یعنی از مرحله‌ی ۲، مقادیر y_1، y_2 و y_3 را محاسبه می‌کنیم. با توجه به معادله‌ی اول مرحله‌ی ۲ داریم:

$$y_i+z_i=k_i$$

$$i=1: y_1+z_1=k_1\ ;\ y_1-1=-2\ ;\ \boxed{y_1=-1}$$

$$i=2: y_2+z_2=k_2\ ;\ y_2+\frac{3}{4}=1\ ;\ y_2=1-\frac{3}{4}\ ;\ \boxed{y_2=\frac{1}{4}}$$

$$i=3: y_3+z_3=k_3 \Rightarrow y_3-\frac{1}{8}=0 \Rightarrow \boxed{y_3=\frac{1}{8}}$$

در این‌جا از مرحله‌ی ۱، ساده‌ترین معادله را انتخاب و x_1، x_2 و x_3 را نیز محاسبه می‌کنیم. با توجه به معادله‌ی اول مرحله‌ی ۱ داریم:

$$x_i+z_i=k_i$$

$$i=1: x_1+z_1=k_1\ ;\ x_1-1=1\ ;\ \boxed{x_1=2}$$

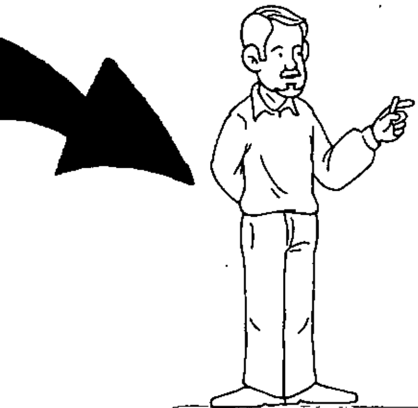
$$i=2: x_2+z_2=k_2\ ;\ x_2+\frac{3}{4}=0\ ;\ \boxed{x_2=-\frac{3}{4}}$$

$$i=3: x_3+z_3=k_3\ ;\ x_3-\frac{1}{8}=0\ ;\ \boxed{x_3=\frac{1}{8}}$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ \frac{-3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{8} \end{bmatrix}$$

در این‌جا ماتریس وارون A یعنی A^{-1} به‌دست می‌آید.

مثال ۲. وارون ماتریس زیر را حساب کنید:



$$A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ & -۱ & ۱ \\ -۳ & -۲ & ۰ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۳ & ۲ \end{bmatrix}$$

حل: ابتدا ترانهاده‌ی A یعنی A' را به‌دست می‌آوریم. کنار آن ماتریس واحد مرتبه‌ی ۴ را می‌نویسیم و عملیات روی سطرها را

	x_i	y_i	z_i	t_i	$K_۱$	$K_۲$	$K_۳$	$K_۴$	Σc
(مرحله‌ی ۱)	۱	۰	−۳	−۱	۱	۰	۰	۰	−۲
	−۱	۱	−۲	۱	۰	۱	۰	۰	۰
	۲	−۱	۰	۳	۰	۰	۱	۰	۵
	۳	۱	۱	۲	۰	۰	۰	۱	۸
(مرحله‌ی ۲)		۱	−۵	۰	۱	۱	۰	۰	−۲
		−۱	۴	−۵	۰	−۲	−۱	۰	−۵
		۵	۲	−۵	۰	۰	−۳	۲	۱
(مرحله‌ی ۳)			−۱	−۵	۱	−۱	−۱	۰	−۷
			−۲۲	۳۰	۰	۱۰	۸	−۲	۲۴
(مرحله‌ی ۴)				−۱۴۰	۲۲	−۳۲	−۳۰	۲	−۱۷۸

توجه: بدون این‌که به عمومیت مسئله خللی وارد شود همیشه می‌توان عناصر میانی ستون اول مرحله ۱ و مرحله ۲ را غیر صفر درنظر گرفت؛ زیرا با جابه‌جایی سطرها یا جمع سطرها این فرض مسلم است.

انجام می‌دهیم:

از مرحله‌ی ۴ نتیجه می‌شود:

$$|A'|=|A|=\frac{-۱۴۰}{(-۱)(۲)(-۱)}=-۷۰$$

$$-۱۴۰t_i=k_i\ ;\ t_i=\frac{k_i}{-۱۴۰}$$

$$i=۱:t_۱=\frac{۲۲}{-۱۴۰}=\frac{-۱۱}{۷۰}\ ;$$

$$i=۲:t_۲=\frac{k_۲}{-۱۴۰}=\frac{-۳۲}{-۱۴۰}=\frac{۸}{۳۵}\ ;$$

$$i=۳:t_۳=\frac{k_۳}{-۱۴۰}=\frac{-۳۰}{-۱۴۰}=\frac{۳}{۱۴}\ ;$$

$$i=۴:t_۴=\frac{k_۴}{-۱۴۰}=\frac{۲}{-۱۴۰}=-\frac{۱}{۷۰}$$

از مرحله‌ی ۳ داریم:

$$-z_i-۵t_i=k_i\Rightarrow z_i+۵t_i=-k_i$$

$$i=۱:z_۱+۵t_۱=-k_۱\ ;\ z_۱+۵t_۱=-۱$$

$$z_۱+۵(-\frac{۱۱}{۷۰})=-۱\ ;\ z_۱=-\frac{۳}{۱۴},i=۲:z_۲+۵t_۲=-k_۲$$

$$z_۲+۵(\frac{۸}{۳۵})=-(-۱)\ ;\ z_۲=۱-\frac{۸}{۷}\ ;\ z_۲=-\frac{۱}{۷}$$

$$i=۳:z_۳+۵t_۳=-k_۳\ ;\ z_۳+۵(\frac{۳}{۱۴})=-(-۱)\ ;\ z=-\frac{۱}{۱۴}$$

$$i=۴:z_۴+۵t_۴=-k_۴\ ;\ z_۴+۵(-\frac{۱}{۷۰})=۰\ ;\ z_۴=\frac{۱}{۱۴}$$

از معادله‌ی اول مرحله‌ی ۲ داریم:

$$y_i-۵z_i=k_i$$

$$i=۱:y_۱-۵z_۱=k_۱\ ;\ y_۱-۵(-\frac{۳}{۱۴})=۱\ ;$$

$$y_1 = 1 - \frac{15}{14} \; ; \; y_1 = -\frac{1}{14}$$

$$i = 2 : y_2 - 5z_2 = k_2 \; ; \; y_2 - 5(-\frac{1}{7}) = 1 \; ; \; y_2 = \frac{2}{7}$$

$$i = 3 : y_3 - 5z_3 = k_3 \; ; \; y_3 - 5(-\frac{1}{14}) = 0 \; ; \; y_3 = -\frac{5}{14}$$

$$i = 4 : y_4 - 5(\frac{5}{70}) = 0 \; ; \; y_4 = \frac{5}{14}$$

از معادله‌ی اول مرحله‌ی ۱ داریم:

$$x_i - 3z_i - t_i = k_i$$

$$i = 1 : x_1 - 3z_1 - t_1 = k_1 \; ;$$

$$x_1 - 3(-\frac{3}{14}) - (-\frac{11}{70}) = 1 \; ; \; x_1 = \frac{1}{5}$$

$$i = 2 : x_2 - 3z_2 - t_2 = k_2 \; ;$$

$$x_2 - 3(-\frac{1}{7}) - (\frac{8}{35}) = 0 \; ; \; x_2 = -\frac{1}{5}$$

$$i = 3 : x_3 - 3z_3 - t_3 = k_3 \; ;$$

$$x_3 - 3(-\frac{1}{14}) - \frac{3}{14} = 0 \; ; \; x_3 = 0$$

$$i = 4 : x_4 - 3z_4 - t_4 = k_4 \; ;$$

$$x_4 - 3(\frac{5}{70}) - (-\frac{1}{70}) = 0 \; ; \; x_4 = \frac{1}{5}$$

* توجه: این روش برای تعیین وارون هر ماتریس مربع قابل تعمیم است که در این مختصر به همین دو مثال اکتفا می‌کنیم.

بنابراین، در این‌جا تمام درایه‌های A^{-1} به‌دست می‌آید و کافی است مقادیر درایه‌های مجهول را جانشین کنیم؛ یعنی:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & t_4 \end{bmatrix};$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{-1}{14} & \frac{-3}{14} & \frac{-11}{70} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{7} & \frac{-1}{7} & \frac{8}{35} \\ 0 & \frac{-5}{14} & \frac{-1}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{1}{5} & \frac{5}{14} & \frac{1}{14} & \frac{-1}{70} \end{bmatrix}$$

مثال ۳. نسبت دو ماتریس زیر را به‌دست آورید.

$$\frac{B}{A} = \frac{\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}} = ?$$

حل: حاصل نسبت را X درنظر می‌گیریم. بنابراین داریم:

$$\frac{B}{A} = X \; ; \; B = AX$$

برای محاسبه‌ی X کافی است طرفین رابطه‌ی اخیر را در وارون A (از طرف چپ) ضرب کنیم، یعنی:

$$A^{-1}B = A^{-1}AX \; ; \; A^{-1}B = I_3X \; ; \; X = A^{-1}B$$

بنابراین، نسبت فوق برابر با حاصل‌ضرب وارون مخرج در صورت (از طرف چپ) است. همان‌طور که دیده می‌شود، مسئله‌ی نسبت دو ماتریس نیز به محاسبه‌ی وارون ماتریس مخرج منتهی می‌شود. در این‌جا برای حل مسئله کافی است ابتدا وارون ماتریس A را محاسبه و سپس در ماتریس B ضرب کنیم.

* توجه: این روش برای هر ماتریس مربع n×n نیز قابل تعمیم است.

ادب ریاضی

تئوری مقدماتی اعداد باید یکی از بهترین موضوع‌ها برای تعلیم اولیه‌ی ریاضیات باشد. چندان اطلاع قبلی نمی‌خواهد، موضوعش ملموس و مأنوس است، طریقه‌های استدلال که به‌کار می‌گیرد، ساده و تعدادشان کم است و از لحاظ تحریک کنجکاوی طبیعی آدمی در علوم ریاضی‌مانند ندارد.

یک ماه تعلیم فهیمانه تئوری اعداد دو بار آموزنده‌تر و مفیدتر و حداقل ده بار سرگرم‌کننده‌تر از همان مدت تعلیم حسابان برای مهندسین می‌باشد.
(هاردی)

منبع:
تئوری مقدماتی اعداد/ دکتر غلامحسین مصاحب

«سن پترزبورگ» نام پایتخت روسیه‌ی تزاری بود که پس از انقلاب ۱۹۱۷ و تغییر رژیم، به «لنینگراد» تغییر نام یافت. تا قبل از فروپاشی این اتحادیه (شوروی) و تجزیه‌ی آن به کشورهای گوناگون، المپیادهای ریاضی به‌طور مستقل در هریک از جمهوری‌ها برگزار می‌شد و برگزیدگان در قالب تیم‌هایی در المپیاد سراسری اتحاد شوروی شرکت می‌کردند. تیم نهایی المپیاد ریاضی این کشور نیز از دل این رقابت‌ها انتخاب می‌شد. با این توضیحات می‌توان حدس زد که سطح سؤالات این آزمون‌ها بسیار قوی بوده است و همین طور هم بود.

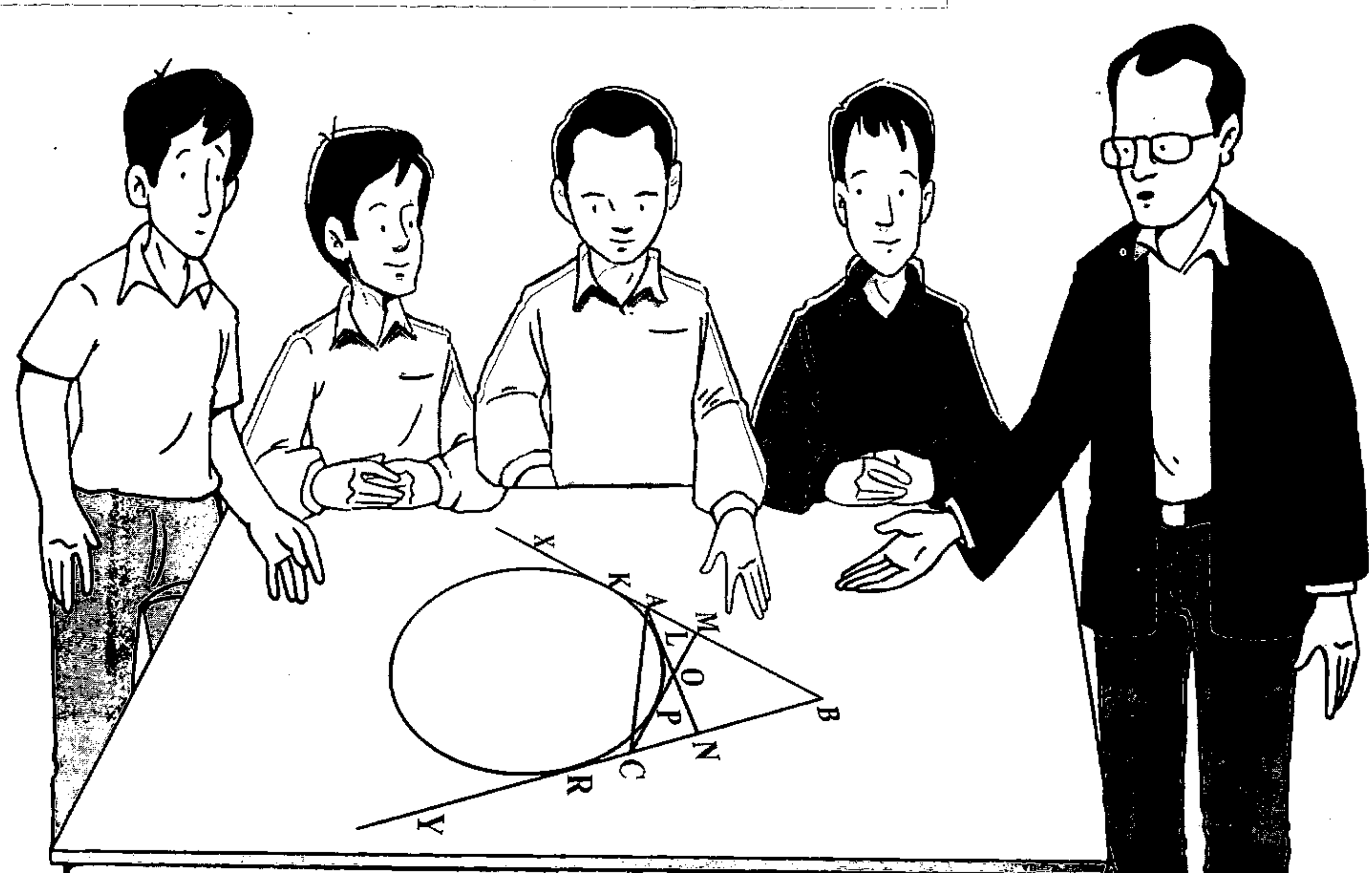
درباره‌ی تاریخچه‌ی المپیاد ریاضی در شوروی سابق و روسیه و جمهوری‌های استقلال‌یافته‌ی بعدی بسیار می‌توان نوشت و امیدوارم در فرصتی دیگر بتوانم به طور مستقل به این موضوع بپردازم. ولی همین‌قدر باید گفت که کشور شوروی از بنیان‌گذاران المپیاد بین‌المللی ریاضی در سال ۱۹۵۹ بود و از نخستین دوره تا زمان فروپاشی، در تمام المپیادها شرکت داشت. همواره هم جزو ۱۰ تیم برتر این رقابت‌ها بود. تنها در فاصله‌ی سال‌های ۱۹۶۳ تا ۱۹۶۷ این کشور در پنج دوره‌ی متوالی مقام نخست این رقابت‌ها را از آن خود کرد و در مجموع چهارده بار (تا سال ۱۹۹۳ که با نام اتحاد شوروی شرکت کرده است) مقام نخست و شش بار مقام دوم را کسب کرد!

پس از فروپاشی شوروی سابق نیز، کشور روسیه و سایر جمهوری‌های شوروی سابق توانسته‌اند موفقیت‌های بسیاری در المپیاد بین‌المللی ریاضی به‌دست آورند. مسائلی که درجریان رقابت‌های این جمهوری‌ها طی سال‌های متمادی مطرح شده‌اند، منبع عظیمی از مسائل ناب ریاضی هستند که متأسفانه دسترسی کاملی به آن‌ها وجود ندارد. ای کاش می‌شد مجموعه‌ی همه‌ی آن‌ها را جمع‌آوری و طبقه‌بندی کرد و در اختیار علاقه‌مندان قرار داد. کتاب «المپیادهای ریاضی لنینگراد» که مجموعه‌ی مسائل مسابقات ریاضی این شهر از سال ۱۹۶۱ تا سال ۱۹۹۳ را در برمی‌گیرد، یک مجموعه‌ی عالی از مسائل کم‌نظیر ریاضی است که به‌راستی و بی‌اغراق باید آن را غنیمت شمرد و در واقع جزو معدود منابع منتشرشده‌ی مسائل ریاضی شوروی سابق است. این کتاب که توسط دیمیتری ولادمیرویچ فومین و آلکسی کرچنکو نگارش یافته، تاکنون

گزیده‌ای از مسائل المپیادهای ریاضی لنینگراد

هوشنگ شرقی

کلید واژه‌ها: المپیاد لنینگراد، صورت مسائل المپیادهای لنینگراد، حل مسائل المپیادهای لنینگراد.



به ده‌ها زبان زنده‌ی دنیا ترجمه شده و مورد استفاده‌ی میلیون‌ها نفر از علاقه‌مندان رشته‌ی ریاضی قرار گرفته است. در کشور ما نیز این کتاب به زبان فارسی ترجمه شده است و مترجم آن کسی نیست جز استاد پرویز شهریاری که زحمت ترجمه‌ی بسیاری از کتاب‌های المپیاد ریاضی را نیز متحمل شده‌اند. نگارنده به‌خوبی به یاد دارد، از هنگامی که نخستین چاپ این کتاب در سال ۱۳۷۴ منتشر شد، تاکنون بارها و بارها آن‌را به دانش‌آموزان داوطلب شرکت در المپیاد ریاضی معرفی کرده است و یقین دارد که یکی از بهترین منابع سؤال است و شاید برترین آن‌ها باشد. از جمله امتیازات این مجموعه مسائل آن است که چون مسابقات المپیاد ریاضی در لنینگراد (و در دیگر شهرهای شوروی سابق) در همه‌ی سطوح دبیرستانی برگزار می‌شده است، بنابراین مسائلی مناسب همه‌ی سنین دارد و می‌تواند هر دانش‌آموز علاقه‌مند را با مسائل خود ساعت‌ها به چالش بکشاند. نکته‌ی جالب توجه آن است که بعضی از مسائل کتاب که برای دانش‌آموزان سال ششم و هفتم این شهر (معادل اول و دوم راهنمایی کشور خودمان) مطرح شده‌اند، مسائل بسیار دشواری هستند که حل آن‌ها برای بسیاری از دانش‌آموزان دبیرستان‌ها می‌تواند کاملاً چالش‌برانگیز باشد! وقتی تصمیم گرفتم بعضی از مسائل این المپیادها را برای این شماره انتخاب کنم، حیفم آمد که آن را به یک شماره و چند مسئله محدود کنم و تصمیم گرفتم طی چند شماره‌ی پیاپی به این مسائل بپردازم. در این شماره پنج مسئله از مسائل ویژه‌ی کلاس‌های دهم در سال ۱۹۹۰ را انتخاب و مطرح می‌کنم و در شماره‌های بعد به مسائل دیگری می‌پردازم. سعی کرده‌ام مسائلی را انتخاب کنم که حل یا راهنمایی آن‌ها در کتاب مزبور وجود نداشته باشد. امیدوارم که خوانندگان مجله از این مسائل لذت کافی ببرند و قبل از ملاحظه‌ی راه حل آن‌ها، خود نیز سعی کنند با آن ها، ولو اندک زمانی به چالش بپردازند. من خود طی سال‌های متمادی از این مسائل به‌راستی لذت برده‌ام و امیدوارم برای شما نیز چنین باشد. در انتها ذکر این نکته هم بد نیست که پس از فروپاشی شوروی سابق، نام شهر لنینگراد دوباره به سن پترزبورگ تغییر یافته است و المپیاد ریاضی آن با این نام هم‌چنان برگزار می‌شود.

صورت مسائل

۱. آیا می‌توان با استفاده از رقم‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ (و از هرکدام یک بار) عددی شش‌رقمی و بخش‌پذیر بر ۱۱ درست کرد؟

۲. چند جمله‌ای f با ضریب‌های درست داده شده است. می‌دانیم $f(2)$ بر ۵ و $f(5)$ بر ۲ بخش‌پذیر است. ثابت کنید $f(7)$ بر ۱۰ بخش‌پذیر است.

۳. برای عدد حقیقی و مثبت x می‌دانیم:

$$x^n = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1$$

ثابت کنید: $\quad (n>1)\quad 2 - \frac{1}{n} < x < 2$

۴. برای عددهای طبیعی a و b می‌دانیم a^2+ab+1 بر b^2+ab+1 بخش‌پذیر است. ثابت کنید: $a=b$.

۵. نقطه‌ی دل‌خواه P را روی ضلع BC از مربع ABCD انتخاب کرده‌ایم. دایره‌ای که از سه نقطه‌ی A، B و P می‌گذرد، قطر BD را در نقطه‌ی دیگر Q قطع می‌کند. دایره‌ای که از سه نقطه‌ی C، P و Q می‌گذرد، BD را در نقطه‌ی دیگر R قطع می‌کند. ثابت کنید A، R و P بر یک امتدادند.

حل مسائل

۱. این نخستین و آسان‌ترین مسائل است!

مجموع این رقم‌ها را در نظر بگیرید:

$$1+2+3+4+5+6 = \frac{6\times 7}{2} = 21$$

امّا می‌دانیم که باقی‌مانده‌ی تقسیم هر عدد بر ۱۱، برابر است با باقی‌مانده‌ی تقسیم عددی که از جمع و تفریق یک درمیان ارقام این عدد بر ۱۱ (از سمت راست) به‌دست می‌آید؛ یعنی:

$$\overline{abcdef} \overset{11}{\equiv} f-e+d-c+b-a$$

و اگر بخواهیم این عدد بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد، باید داشته باشیم:

$$f-e+d-c+b-a = 11m \Leftrightarrow \overline{abcdef} \overset{11}{\equiv} 0$$

اگر $m=0$ باشد، نتیجه می‌شود: $f+d+b=a+c+e$. یعنی مجموع سه تا از رقم‌ها مساوی مجموع سه‌تای دیگر باشد و با توجه به این که مجموع هر شش رقم مساوی ۲۱ است، چنین چیزی ممکن نیست. (چرا؟)

به‌ازای $m=1$ نیز، با توجه به مجموع رقم‌ها، نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} f+d+b-(e+c+a)=11 \\ f+d+b+(e+c+a)=21 \end{cases} \Rightarrow f+d+b=16.$$

$$e+c+a=5$$

که این هم ممکن نیست. (چرا؟) برای $m>1$ نیز به سادگی مشخص می‌شود که امکان‌پذیر نیست. لذا پاسخ منفی است.

۲. ابتدا لم زیر را اثبات می‌کنیم.

اگر چندجمله‌ای $f(x)$ با ضرایب صحیح مفروض باشد، $f(b)-f(a)$ بر $b-a$ بخش‌پذیر است.

اثبات لم آسان است.

$$f(x) = C_n x^n + C_{n-1}x^{n-1} + \ldots + C_1 x + C_0$$

$$f(b) - f(a) =$$

$$C_n(b^n - a^n) + C_{n-1}(b^{n-1} - a^{n-1}) + \cdots + C_1(b-a)$$

و با توجه به اتحاد

$$b^m - a^m = (b-a)(b^{m-1} + ab^{m-2} + \cdots + a^{m-1})$$

بدیهی است که همه‌ی پرانتزها عامل $b-a$ را دارند و درنتیجه: $b-a \mid f(b)-f(a)$.

اکنون با توجه به لم فوق داریم:

$$7-2 \mid f(7)-f(2) \Rightarrow 5 \mid f(7)-f(2), 5 \mid f(2)$$
$$\Rightarrow 5 \mid f(7) \quad (*)$$
$$7-5 \mid f(7)-f(5) \Rightarrow 2 \mid f(7)-f(5), 2 \mid f(5)$$
$$\Rightarrow 2 \mid f(7) \quad (**)$$

و با توجه به دو رابطه‌ی * و ** بدیهی است که: $10 = 2\times 5 \mid f(7)$
؛ یعنی $f(7)$ بر ۱۰ بخش‌پذیر است.

۳. معادله را به‌صورت زیر تغییر می‌دهیم:

$$f(x) = x^n - (x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1) = 0$$

حال از قضیه‌ی موسوم به قضیه‌ی بولتزانو استفاده می‌کنیم:

قضیه: اگر f تابعی پیوسته در بازه‌ی $[a,b]$ باشد و داشته باشیم: $f(a) > 0$ و $f(b) < 0$ یا $f(a) < 0$ و $f(b) > 0$، آن‌گاه معادله‌ی $f(x) = 0$ در بازه‌ی $[a,b]$ لااقل یک ریشه‌ی حقیقی دارد.

اکنون می‌نویسیم:

$$f(x) = x^n - \frac{x^n - 1}{x-1}$$

$$= \frac{x^{n+1} - x^n - x^n + 1}{x-1} = \frac{x^{n+1} - 2x^n + 1}{x-1}$$

$$= \frac{x^n(x-2)+1}{x-1}$$

$$f(2) = 1 > 0$$

$$f(2-\frac{1}{n}) = \frac{(2-\frac{1}{n})^n(-\frac{1}{n})+1}{1-\frac{1}{n}}$$

و چون $n > 1$، پس، $1-\frac{1}{n} > 0$ و به کمک قضیه‌ی استقرای ریاضی می‌توان ثابت کرد: $(2-\frac{1}{n})^n > n$ (برای گذر استقرایی از بسط دوجمله‌ای نیوتون استفاده کنید). بنابراین:

$$n - (2-\frac{1}{n})^n < 0$$

و از آن جا:

$$\frac{n - (2-\frac{1}{n})^n}{n} < 0$$

و درنتیجه:

$$(-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n})^n + 1 < 0$$

بنابراین:

$$f(2-\frac{1}{n}) < 0$$

و طبق قضیه‌ی بولتزانو:

$$2 - \frac{1}{n} < x < 2$$

۴. از ویژگی‌های رابطه‌ی بخش‌پذیری (عادکردن) استفاده می‌کنیم:

$$\left.\begin{matrix} b^2+ab+1 \mid a^2+ab+1 \\ b^2+ab+1 \mid b^2+ab+1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$b^2+ab+1 \mid b(a^2+ab+1) - a(b^2+ab+1) = b-a$$

$$\Rightarrow b^2+ab+1 \mid b-a$$

ولی روشن است که اگر $a,b \in \mathbb{N}$ باشند، داریم:

$$\Rightarrow b^2+ab+1 > b-a$$

(زیرا $b^2 \geq b$). پس باید $b-a=0$ باشد و از آن‌جا: $a=b$.

۵. بدون آن‌که دایره‌ی محیطی مثلث CPQ را رسم کنیم، ثابت می‌کنیم که نقطه‌ی برخورد BD و AP (نقطه‌ی R') و سه نقطه‌ی C، P، و Q رئوس یک چهارضلعی محاطی اند. بنابراین دایره‌ی محیطی مثلث CPQ از R' می‌گذرد و R' همان R است. درنتیجه R، A و P بر یک استقامت‌اند.

مطابق شکل، دو مثلث CBQ و ABQ به حالت (ض‌زض) همنهشت‌اند ($\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = 45°$، AB=BC و BQ=BQ). بنابراین: $\hat{C}_1 = \hat{A}_1 + \hat{A}_2$ و نیز داریم:

$$\hat{A}_2 = \hat{B}_2 = \frac{\widehat{PQ}}{2} \Rightarrow \hat{A}_2 = 45° \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{A}_1 + 45° \quad (1)$$

در مثلث $AR'B$ نیز زاویه‌ی خارجی R'_1 برابر است با:

$$\hat{R'}_1 = \hat{B}_1 + \hat{A}_1 = 45° + \hat{A}_1 \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{R'}_1 \text{ و}$$
$$\hat{R'}_1 + \hat{R'}_2 = 180° \Rightarrow \hat{C}_1 + \hat{R'}_2 = 180°$$

بنابراین، چهارضلعی $CQR'P$ محاطی است و طبق آن‌چه که گفتیم، دایره‌ی محیطی مثلث CPQ از R' می‌گذرد. لذا نقطه‌ی برخورد آن با BD همان R' و R' بر R منطبق است. یعنی حکم اثبات شده است.

رویکرد هندسی ـ رویکرد جبری در آموزش هندسه (۱۲)

محمد هاشم رستمی

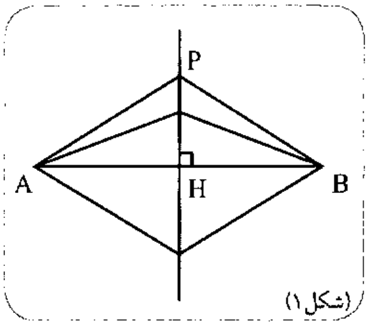
کلید واژه‌ها: عمود منصف پاره‌خط، نیم‌ساز، مکان هندسی.

به منظور استفاده‌ی عده‌ی بیشتری از دانش‌آموزان از این رویکرد در حل مسئله‌های هندسه، به ارتباط این دو رویکرد در حل مسئله‌های هندسه در صفحه می‌پردازیم. به‌این ترتیب با دستگاه مختصات دکارتی در صفحه سروکار خواهیم داشت.

ویژگی‌های عمود منصف یک پاره‌خط در یک صفحه

قضیه: ثابت کنید عمود منصف هر پاره‌خط واقع در یک صفحه، مکان هندسی نقطه‌ای از آن صفحه است که از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله قرار دارد.

یعنی:



(شکل ۱)

۱. هر نقطه‌ای که روی عمود منصف این پاره‌خط باشد، از دو سر این پاره‌خط به یک فاصله است.

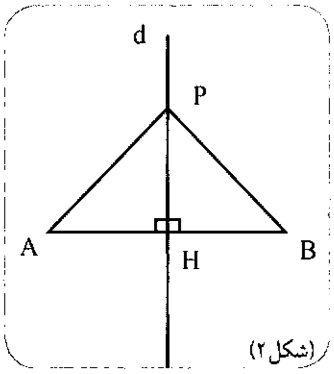
۲. هر نقطه‌ای که از دو سر این پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمود منصف این پاره‌خط قرار دارد.

این قضیه را با دو روش هندسی و جبری ـ مختصاتی ثابت می‌کنیم.

الف) اثبات به روش هندسی

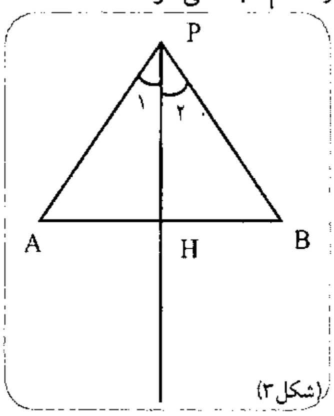
۱. عمود منصف پاره‌خط AB را d و نقطه‌ی برخورد آن با پاره‌خط AB را که در واقع همان وسط پاره‌خط AB است، H می‌نامیم. از نقطه‌ی دل‌خواه P واقع بر خط d (عمود منصف پاره‌خط AB)، به دو نقطه‌ی A و B وصل می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که: PA= PB. دو مثلث PAH و PBH همنهشت‌اند، زیرا داریم:

$$\begin{cases} AH = BH \\ PH = PH \\ P\hat{H}A = P\hat{H}B = 90^\circ \end{cases}$$



(شکل ۲)

بنابراین ضلع‌های سوم این دو مثلث با هم برابرند؛ یعنی: PA=PB و حکم ثابت می‌شود.



(شکل ۳)

۲. نقطه‌ی P و پاره‌خط AB در یک صفحه چنان واقع‌اند که داریم: PA=PB. می‌خواهیم ثابت کنیم که نقطه‌ی P روی عمودمنصف پاره‌خط AB است. برای اثبات نیم‌ساز زاویه‌ی درونی از مثلث PAB را رسم می‌کنیم و پای این نیم‌ساز را H می‌نامیم. دو مثلث PHA و PHB به حالت (ض‌زض) همنشهت هستند، زیرا داریم:

$$\begin{cases} PA = PB \\ A\hat{P}H = B\hat{P}H \qquad \hat{P}_1 = \hat{P}_2 \\ PH = PH \end{cases}$$

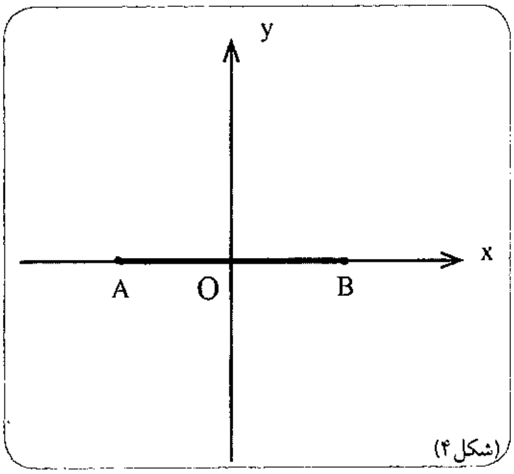
در نتیجه AH=BH . یعنی H وسط پاره‌خط AB است. از طرف دیگر: $A\hat{H}P = B\hat{H}P$ که چون $A\hat{H}P + B\hat{H}P = 180^\circ$ است، پس: $A\hat{H}P = B\hat{H}P = 90^\circ$. یعنی PH بر AB عمود است. در نتیجه PH عمودمنصف پاره‌خط AB و حکم مسئله درست است.

ب) راه حل جبری ـ مختصاتی

صورت مسئله را بار دیگر بیان می‌کنیم:

قضیه: ثابت کنید عمود منصف هر پاره‌خط واقع در یک صفحه، مکان هندسی نقطه‌ای از آن صفحه است که از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است.

اثبات: اندازه‌ی پاره‌خط AB را ۲a فرض می‌کنیم. مهم‌ترین کار در روش حل جبری ـ مختصاتی انتخاب دستگاه مختصات مناسبی است که راه حل مسئله را به ساده‌ترین صورت، ممکن سازد.



(شکل۴)

در این مسئله، محور xها را روی خط AB و محور yها را روی عمودمنصف پاره‌خط AB اختیار می‌کنیم. نقطه‌ی برخورد این دو محور نقطه‌ی o (که همان نقطه‌ی H در راه حل هندسی است)، مبدأ مختصات است. نقطه‌ی دل‌خواه P را روی عمودمنصف پاره‌خط AB که در این‌جا همان محور yهاست، اختیار می‌کنیم و مختصات این نقطه را $P = (0, y)$ در نظر می‌گیریم. از P به A و B وصل می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم، برای هر نقطه‌ی P از عمودمنصف پاره‌خط AB داریم: PA=PB. با توجه به این‌که در این دستگاه مختصات قائم $A = (-a, 0)$ و $B = (a, 0)$ است، داریم:

$$PA = PB \Rightarrow \sqrt{(-a-0)^2 + (0-y)^2}$$
$$= \sqrt{(a-0)^2 + (0-y)^2} \Rightarrow \sqrt{a^2 + y^2}$$
$$= \sqrt{a^2 + y^2} \Rightarrow a^2 + y^2 = a^2 + y^2$$

این تساوی همواره برقرار است. بنابراین همواره PA=PB است.
پس هر نقطه واقع بر عمودمنصف پاره‌خط AB از دوسر این پاره‌خط، یعنی از دو نقطه‌ی A و B، به یک فاصله است.

اکنون ثابت می‌کنیم هر نقطه‌ای که از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف این پاره‌خط واقع است. بدین ترتیب که اگر P=(x , y) نقطه‌ای واقع در صفحه‌ی مختصات قائم ذکر شده در بالا باشد و از دو سر پاره‌خط AB ($A = (-a, 0)$ و $B = (a, 0)$) به یک فاصله باشد، خواهیم داشت:

$$P = (x, y), A = (-a, 0), B = (a, 0), PA = PB$$
$$\Rightarrow \sqrt{(x+a)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2}$$
$$\Rightarrow (x+a)^2 + \cancel{y^2} = (x-a)^2 + \cancel{y^2}$$
$$\Rightarrow (x+a)^2 - (x-a)^2 = 0$$
$$\Rightarrow 4ax = 0, a \neq 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow p = (0, y)$$

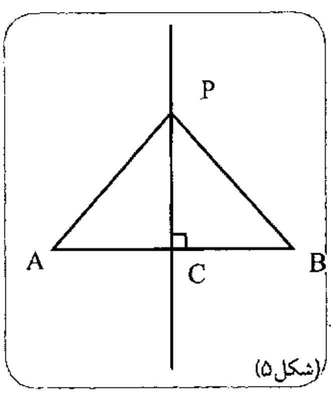
یعنی نقطه‌ی P روی محور yها واقع است که همان عمودمنصف پاره‌خط AB محسوب می‌شود. بنابراین، به روش تحلیلی نیز ثابت کردیم که عمودمنصف هر پاره‌خط واقع در یک صفحه، مکان هندسی نقطه‌ای از آن صفحه است که از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است؛ زیرا:

الف) هر نقطه مانند P که روی عمودمنصف پاره‌خط AB باشد، از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله است؛ یعنی PA=PB.

ب) هر نقطه‌ای که از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله باشد (یعنی PA=PB)، روی عمودمنصف پاره‌خط AB است.

نکته: به طوری‌که دیده می‌شود، اثبات این قضیه به‌روش جبری ـ مختصاتی، ساده‌تر از اثبات آن به روش هندسی است. اینک به چند مثال توجه کنید.

مثال ۱. ثابت کنید هر نقطه مانند P روی عمودمنصف پاره‌خط AB، از نقاط A و B به یک فاصه است (مسئله‌ی ۱۹ صفحه‌ی ۲۷ کتاب هندسه‌ی ۱).



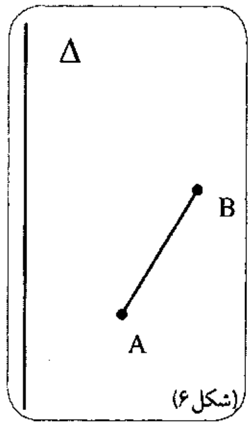
(شکل۵)

حل: این مثال قسمت اول مسئله‌ی ابتدای مقاله است که با دو روش هندسی و جبری ـ مختصاتی حل شده است.

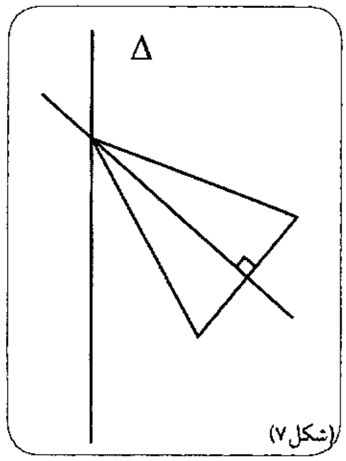
مثال ۲. دو نقطه‌ی A و B و خط Δ در یک صفحه داده شده‌اند، نقطه‌ای روی خط Δ بیابید که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله باشد.

حل: الف) رویکرد هندسی

می‌دانیم، مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله است، عمودمنصف آن پاره‌خط است. بنابراین نقطه‌ی جواب مسئله، هم باید روی عمودمنصف پاره‌خط AB باشد و هم باید روی خط Δ باشد. پس این نقطه محل برخورد این دو خط است، در نتیجه، برای حل مسئله عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم و آن را d می‌نامیم. نقطه‌ی برخورد خط d با خط Δ که آن را M می‌نامیم، جواب مسئله است. یعنی اگر از M به A و B وصل کنیم، داریم: MA=MB.



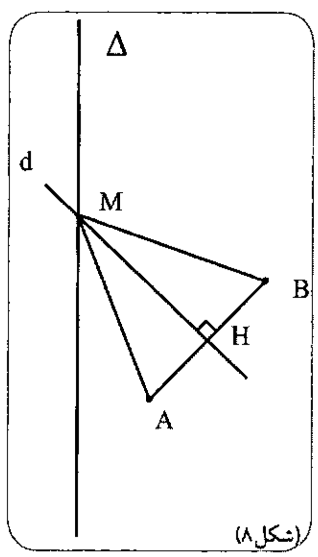
(شکل ۶)



(شکل ۷)

بحث در تعداد جواب مسئله

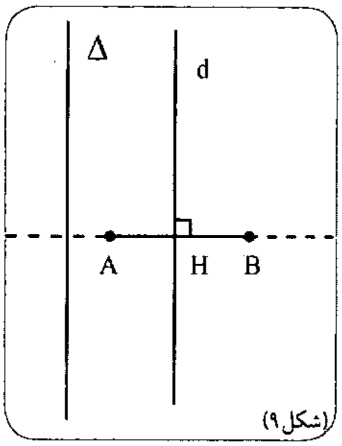
۱. اگر خط d عمودمنصف پاره‌خط AB، با خط Δ متقاطع باشد، مسئله تنها یک جواب دارد که همان نقطه‌ی M است. این در صورتی است که راستای خط AB عمود بر راستای Δ نباشد (شکل ۸). به بیان دیگر، اگر خط AB خط Δ را قطع کند و بر آن عمود هم نباشد.



(شکل ۸)

۲. اگر خط d عمودمنصف پاره‌خط AB، موازی خط Δ باشد، مسئله جواب ندارد. این در صورتی است که راستای خط AB بر خط Δ عمود باشد (شکل ۹).

نکته: در این حالت راستای AB راستای Δ را قطع می‌کند، اما دو راستا بر هم عمودند.

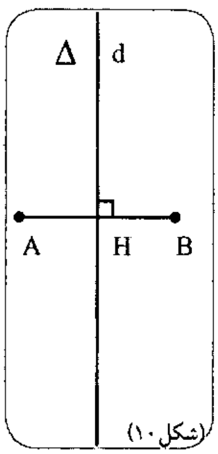


(شکل ۹)

۳. اگر خط d عمودمنصف پاره‌خط AB منطبق بر خط Δ باشد، مسئله بی‌شمار جواب دارد. زیرا هر نقطه از خط Δ که همان خط d است، جواب مسئله محسوب می‌شود (شکل ۱۰). البته این در صورتی است که خود خط Δ عمودمنصف پاره‌خط AB باشد.

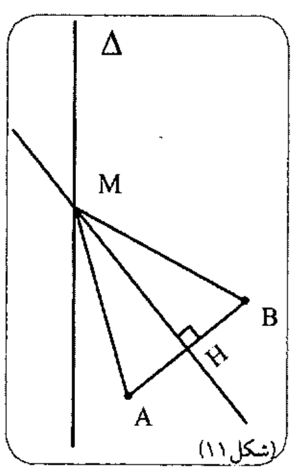
روشی‌دیگر برای حل هندسی مثال ۲

مسئله را حل شده فرض می‌گیریم، یعنی فرض می‌کنیم نقطه‌ی M، نقطه‌ی جواب مسئله باشد؛ یعنی نقطه‌ای باشد که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله است (MA=MB). چون مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو نقطه‌ی A و B به‌یک فاصله هستند، خط عمودمنصف پاره‌خط AB است، پس نقطه‌ی M یکی از نقطه‌های عمودمنصف پاره‌خط AB است.



(شکل ۱۰)

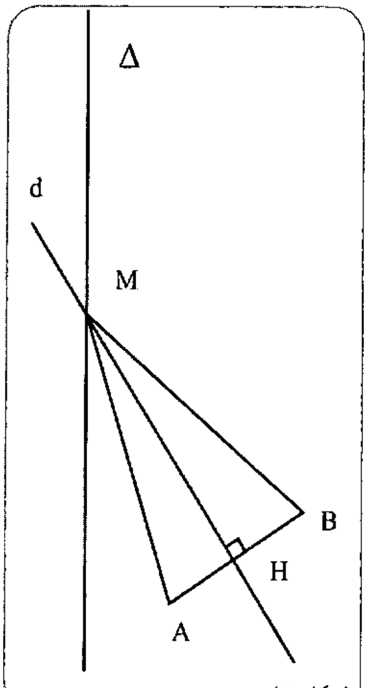
یعنی عمودمنصف پاره‌خط AB از این نقطه می‌گذرد. به‌عبارت دیگر، نقطه‌ی M محل برخورد عمودمنصف پاره‌خط AB و خط Δ است.



(شکل ۱۱)

از این‌جا روش حل مسئله مشخص می‌شود. بدین‌ترتیب که برای تعیین نقطه‌ی M، عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم و آن را

d می‌نامیم. نقطه‌ی برخورد این خط و خط Δ را نقطه‌ی M می‌نامیم که این نقطه جواب مسئله است. زیرا اگر از این نقطه به A و B وصل کنیم، داریم: MA=MB. بحث مربوط به تعداد جواب برای مسئله همانند بحث روش قبلی است.



(شکل۱۲)

نکته: روش مسأله را حل شده فرض کردن: یکی از راهبردهای مهم در حل مسئله‌ها، به‌ویژه حل مسئله‌های هندسه و به‌ویژه در مواردی است که حل کردن مسئله با داده‌های موجود آسان نباشد و به داده‌های بیشتری نیاز داشته باشیم. تا به کمک آن‌ها بتوانیم مسئله را حل کنیم؛ برای مثال:

«مثلثی رسم کنید که اندازه‌ی سه میانه‌ی آن داده شده است.»

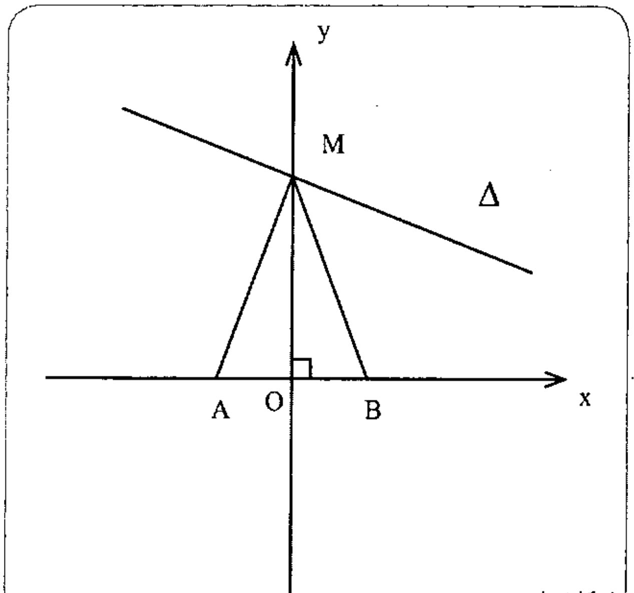
حل این مسئله و مسئله‌های مشابه دیگری که با این روش حل می‌شوند، در جلدهای ۱۱، ۱۲ و ۱۳ دایرةالمعارف که به رسم شکل‌های هندسی با روش هندسی اختصاص دارند، وجود دارد.

ب) حل با رویکرد جبری ـ مختصاتی

مسئله را بار دیگر بیان می‌کنیم:

دو نقطه‌ی A و B و خط Δ در یک صفحه داده شده‌اند، نقطه‌ای روی خط Δ بیابید که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله باشد.

برای اثبات، دستگاه مختصات قائم xoy را در صفحه‌ای که A و B و خط Δ قرار دارد، به‌گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که محور xها روی خط AB و مبدأ مختصات وسط پاره‌خط AB باشد، در این دستگاه مختصات، اگر $A=(x_1,0)$ و $B=(-x_1,0)$ اختیار شود، معادله‌ی عمودمنصف پاره‌خط AB ـ که در واقع محور yهاست ـ عبارت است از: $x=0$ معادله‌ی خط Δ در این دستگاه مختصات به‌صورت کلی $ax+by+c=0$ خواهد بود. در این صورت، مختصات نقطه‌ی M که محل برخورد عمودمنصف پاره‌خط AB و خط Δ است، از دستگاه دو معادله‌ی دو مجهولی زیر به‌دست می‌آید.



(شکل۱۳)

$$\begin{cases} x=0 \\ ax+by+c=0 \end{cases} \Rightarrow by+c=0$$

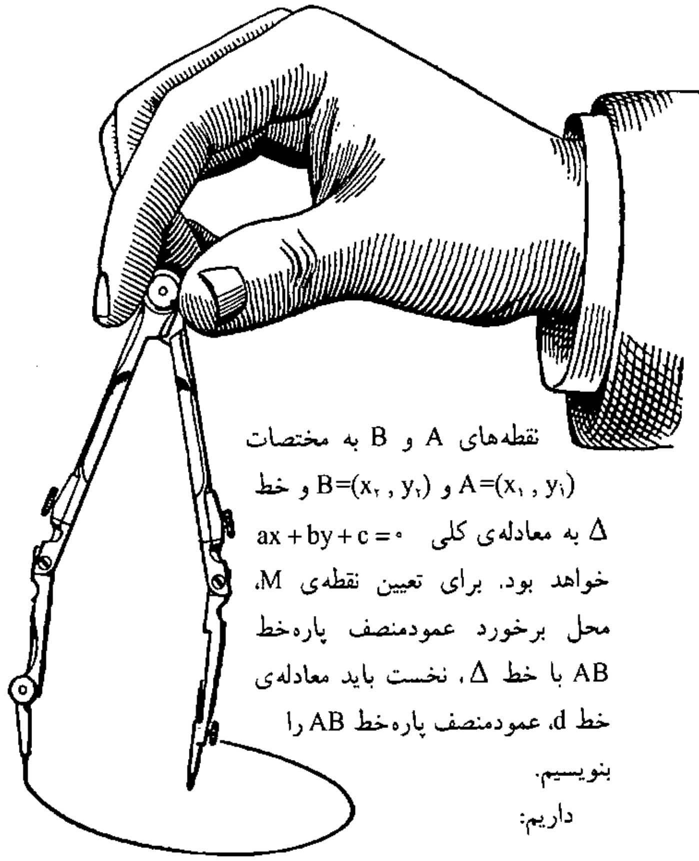
$$\Rightarrow y=-\frac{c}{b} \Rightarrow M=(0,-\frac{c}{b})$$

این نقطه که نقطه‌ای از خط Δ است،از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله است؛ زیرا داریم: $M=(0,-\frac{c}{b})\,,\ A=(x_1,0)\,,\ B=(-x_1,0)$

$$\Rightarrow MA=\sqrt{x_1^2+\frac{c^2}{b^2}}\,,\ MB=\sqrt{x_1^2+\frac{c^2}{b^2}}$$

$$\Rightarrow MA=MB$$

نکته: اگر دستگاه مختصات قائم xoy درصفحه‌ی گذرنده بر A و B و Δ را به‌صورت دل‌خواه در نظر بگیریم، حل مسئله با رویکرد جبری ـ مختصاتی مشکل‌تر خواهد شد. زیرا در این صورت



نقطه‌های A و B به مختصات $A=(x_1 , y_1)$ و $B=(x_2 , y_2)$ و خط Δ به معادله‌ی کلی $ax+by+c=0$ خواهد بود. برای تعیین نقطه‌ی M، محل برخورد عمودمنصف پاره‌خط AB با خط Δ، نخست باید معادله‌ی خط d، عمودمنصف پاره‌خط AB را بنویسیم.

داریم:

$$m/AB=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\Rightarrow m/d=-\frac{1}{m_{AB}}$$
$$=-\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}$$

وسط پاره‌خط AB $H=(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})$, $y-y_1=m(x-x_1)$

$$\Rightarrow d: y-\frac{y_1+y_2}{2}=-\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}(x-\frac{x_1+x_2}{2})$$

معادله‌ی عمودمنصف پاره‌خط AB

اکنون باید پاسخ دستگاه دومعادله‌ی دو مجهولی زیر را که همان نقطه‌ی M جواب مسئله است، به‌دست آوریم.

$$\begin{aligned}\Delta&: \begin{cases} ax+by+c=0 \\ y-\frac{y_1-y_2}{2}=-\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}(x-\frac{x_1+x_2}{2}) \end{cases}\\ d&: \\ &\Rightarrow M=(\cdots,\cdots)\end{aligned}$$

این مطلب را با یک مثال نشان می‌دهیم:

مثال: نقطه‌ای روی خط $\Delta: 2x+y+1=0$ به‌دست آورید که از دو نقطه‌ی $A=(3,-1)$ و $B=(1,5)$ به یک فاصله باشند.

حل: عمودمنصف پاره‌خط AB را d می‌نامیم و معادله‌ی آن را می‌نویسیم. آن‌گاه مختصات نقطه‌ی برخورد خط d و خط Δ را به‌دست می‌آوریم. داریم:

$$A=(3,-1), B=(1,5), m_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$
$$=\frac{5+1}{1-3}=-3\Rightarrow m_d=\frac{-1}{m_{AB}}=\frac{1}{3} ,$$

وسط پاره‌خط AB

$$H=(\frac{3+1}{2},\frac{-1+5}{2})=(2,2)\Rightarrow y-y_1$$
$$=m(x-x_1)\Rightarrow y-2=\frac{1}{3}(x-2)\Rightarrow y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$$

معادله‌ی عمودمنصف پاره‌خط AB

$$\begin{matrix} d: \\ \Delta: \end{matrix}\begin{cases} y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3} \\ 2x+y+1=0 \end{cases}\Rightarrow 2x+\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}+1=0$$
$$\Rightarrow \frac{7}{3}x=-\frac{7}{3}\Rightarrow x=-1\Rightarrow y=1\Rightarrow M=(-1,1)$$

جواب مسئله

درستی جواب مسئله را می‌توان با محاسبه‌ی اندازه‌ی پاره‌خط‌های MA و MB و مساوی بودن آن‌ها مشخص کرد.

$$A=(3,-1) \quad , \quad B=(1,5) \quad , \quad M=(-1,1)$$
$$\Rightarrow MA=\sqrt{(3+1)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$
$$MB=\sqrt{(1+1)^2+(5-1)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$
$$\Rightarrow MA=MB=2\sqrt{5}$$

پس نقطه‌ی M از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله است.

ادب ریاضی

نقطه...

۱. آن‌چه در هیچ جهتی قابل تقسیم نیست، اما دارای موقعیتی است.

(ارسطو، قرن چهارم قبل از میلاد)

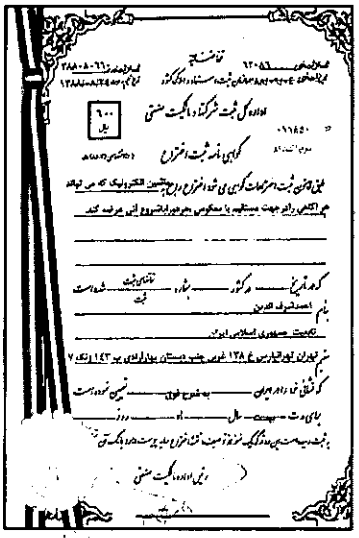
۲. نقطه چیزی است که دارای هیچ جزئی نیست. حد خط نقطه است.

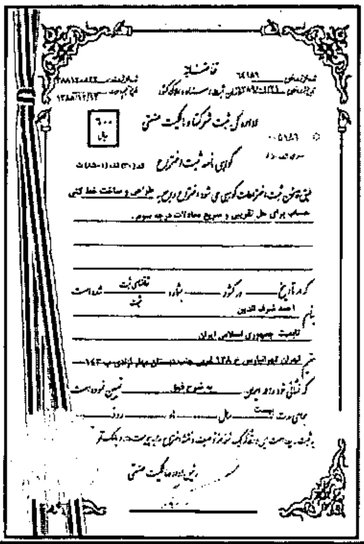
(اقلیدوس، قرن سوم قبل از میلاد)

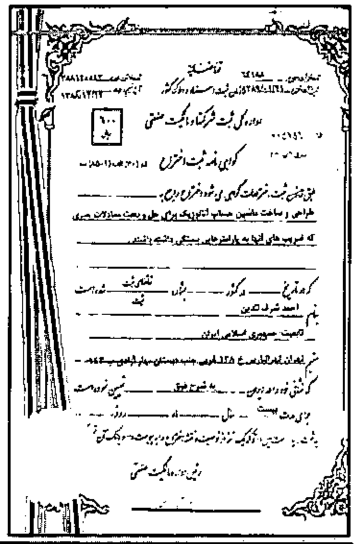
۳. وجود یک اتم برای تحقق یافتن یک نقطه‌ی ریاضی کفایت می‌کند.

(کوشی ۱۸۳۲)

۴. **نقطه: مفهوم است و تعریف‌نشدنی است.**







درباره‌ی یکی از نظرهای هوشمندانه‌ی ابوالوفای بوزجانی در هندسه

دکتر احمد شرف‌الدین

کلید واژه‌ها: محمدبن محمدبن یحیی، مرکز یک کمان از دایره.

اشاره

استاد احمد شرف‌الدین، چه در سال‌هایی که در دبیرستان تدریس می‌کرد و چه هنگامی که استاد دانشگاه بود، همواره در کنار دبیران ریاضی حضور داشت؛ چرا که همواره برای آن‌ها مقاله‌های آموزنده و جذاب می‌نوشت.

در این شماره‌ی «مجله‌ی برهان»، مقاله‌ی تازه‌ای از ایشان به چاپ رسانده‌ایم. در مقاله‌ی حاضر، آقای شرف‌الدین با استدلال دقیق هندسی، نظر ابوالوفای بوزجانی را در ترسیم یک ساختمان هندسی تأیید می‌کند. به‌علاوه، در انتهای این مقاله عناوین اختراعات ثبت شده آقای دکتر شرف‌الدین را خواهیم آورد.

در این نوشتار، ابتدا مختصری از مقام علمی بوزجانی می‌نویسیم و سپس درباره‌ی نظری که این دانشمند در مورد تعیین دقیق جای مرکز یک کمان دایره عرضه کرده است، شرح می‌دهیم.

ابوالوفا محمدبن محمدبن یحیی، از بزرگ‌ترین ریاضی‌دانان و منجمان ایرانی است. او در سال ۳۲۸ هجری قمری در «بوزجان» از نواحی تربت‌جام به دنیا آمد. بوزجان از شهرهای عالم‌پرور خراسان بوده است. بوزجانی تا ۲۰ سالگی در زادگاه خود، علم عدد و هندسه را نزد عمو و دایی‌اش آموخت. سپس برای ادامه‌ی تحصیلات به بغداد رفت. در آن روزگار، بغداد از مراکز بسیار مهم علم بود. بوزجانی تا پایان عمر خود، یعنی سال ۳۸۸ ه.ق، در بغداد به مطالعه و تحقیق در ریاضیات و نجوم پرداخت.

بوزجانی سهم ارزشمندی در بسط مثلثات دارد. وی قضیه‌های مهمی در مثلثات کروی کشف کرده است. البته با کمال تأسف، بعضی آثار ارزنده‌ی او، هم‌چون حاشیه‌ای بر هندسه‌ی اقلیدس و حساب دیوفانتوس، و نیز زیج او به‌نام «زیج واضح» مفقود شده‌اند و تنها رساله‌هایی در هندسه، حساب و نجوم از او باقی مانده است.

درباره‌ی کتاب «اعمال هندسی» بوزجانی

از جمله آثار علمی باارزش بوزجانی، کتابی است در هندسه. نام این کتاب چنین است:

«کتاب فی ما یحتاج الیه الصّانع من اعمال الهندسه»؛ یعنی «کتاب درباره‌ی آن‌چه از اعمال هندسی مورد احتیاج صنعتگران است». کتاب «اعمال هندسی» بوزجانی، توسط استادان، زنده یاد دکتر ابوالقاسم قربانی و آقای محمدعلی شیخان به فارسی با عنوان «بوزجانی‌نامه» تحریر شده است. این تحریر با کوشش و دقت انجام گرفته است و خدمت ارزنده‌ای محسوب می‌شود.

تعیین جای دقیق مرکز یک کمان از دایره

در باب اول کتاب «بوزجانی‌نامه» مسئله‌ی زیر عرضه شده است:

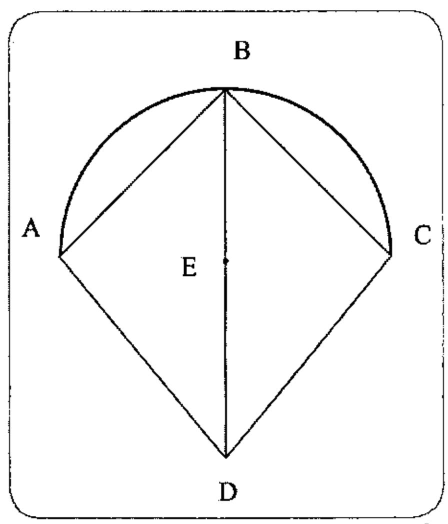
● **تعیین مرکز یک قوس از دایره**

● **راه‌حل:** قوس AC از دایره‌ای را درنظر می‌گیریم وسط آن را نقطه‌ی B می‌نامیم. سپس از نقطه‌ی A عمودی به AB و از نقطه‌ی C عمودی بر CB اخراج می‌کنیم. این دو عمود در نقطه‌ای مانند D یکدیگر را قطع می‌کنند. وسط پاره‌خط DB مرکز دایره‌ی مطلوب است.

تبصره: مؤلف چنین نوشته، ولی بهتر است نقطه‌ی B را به‌طور دل‌خواه اختیار کرد.

در ادامه با توضیحاتی ثابت می‌کنیم که نظر بوزجانی درست است. یعنی ثابت می‌کنیم، وسط کمان AC مناسب‌ترین نقطه است که سبب می‌شود، جای مرکز کمان AC با دقت بیشتری مشخص شود.

مقدار خطای مطلق در اندازه‌گیری طول‌های دو وتر AM و CM



شکل ۱

در شکل ۲، مرکز کمان AC و طول آن را به‌ترتیب O و R می‌نامیم. نقطه‌ی دل‌خواه M از کمان AC را درنظر می‌گیریم. اندازه‌های دو زاویه‌ی AOM و COM را به‌ترتیب با ۲a و ۲b نشان می‌دهیم. وسط‌های دو وتر AM و CM را به‌ترتیب E و F می‌نامیم. طول‌های دو وتر AM و CM را برحسب R، a و b حساب می‌کنیم.

$$\overline{AM} = 2R\sin a$$
$$\overline{CM} = 2R\sin b$$

مقدار خطای مطلق در اندازه‌گیری طول‌های دو وتر AM و CM را e می‌نامیم. خطای نسبی در اندازه‌گیری دو وتر یاد شده به‌ترتیب عبارت‌اند از:

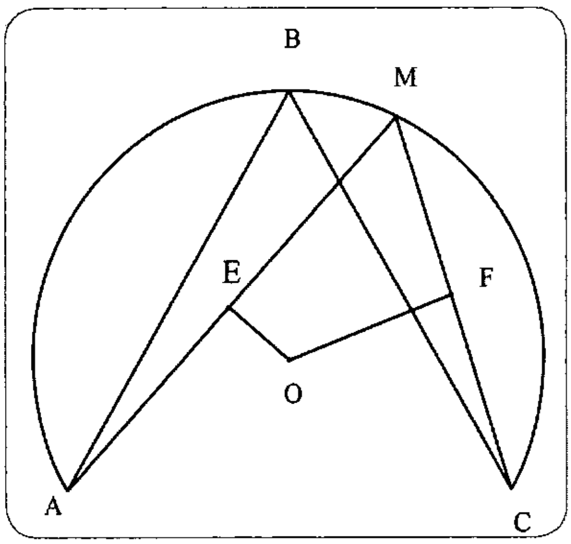
$$\frac{e}{\overline{AM}}, \frac{e}{\overline{eM}}$$

بنابراین، خطای نسبی در اندازه‌گیری طول خط شکسته‌ی ACB چنین است:

$$\frac{e}{2R\sin a} + \frac{e}{2R\sin b}$$

اگر نقطه‌ی B، وسط کمان AC باشد، خطای نسبی اندازه‌گیری طول خط شکسته‌ی ACB چنین است:

$$\frac{2e}{2R\sin\frac{a+b}{2}}$$



شکل ۲

جای مرکز کمان AB هنگامی با دقت تعیین می‌شود که خطای نسبی در اندازه‌گیری خط شکسته AMC کمترین مقدار باشد. برای تأمین این منظور باید نامساوی زیر مسلم باشد:

$$\frac{e}{2R\sin a} + \frac{e}{2R\sin b} > \frac{2e}{2R\sin\frac{a+b}{2}}$$

یعنی باید نامساوی زیر برقرار باشد:

$$\frac{1}{\sin a} + \frac{1}{\sin b} > \frac{2}{\sin\frac{a+b}{2}}$$

چنین داریم:

$$\overline{AM} = 2R\sin a$$
$$\overline{CM} = 2R\sin b$$

مقدار خطای مطلق در اندازه‌گیری طول‌های دو وتر AM و CM را e می‌نامیم. خطای نسبی در اندازه‌گیری طول‌های دو وتر یاد شده

به ترتیب عبارت‌اند از: $\frac{e}{AM}$ و $\frac{e}{CM}$. بنابراین، خطای نسبی در اندازه‌گیری طول خط شکسته ACM چنین است:

$$\frac{e}{۲R\sin a}+\frac{e}{۲R\sin b}$$

اگر نقطه‌ی B وسط کمان AC باشد، خطای نسبی در اندازه‌گیری خط شکسته ACB چنین است:

$$\frac{e}{۲R\sin\frac{a+b}{۲}}$$

جای مرکز کمان AB هنگامی با دقت تعیین می‌شود که خطای نسبی در اندازه‌گیری خط شکسته AMC کمترین مقدار باشد. برای تأمین این منظور باید نامساوی زیر مسلم باشد:

$$\frac{e}{۲R\sin a}+\frac{e}{۲R\sin b}>\frac{۲e}{۲R\sin\frac{a+b}{۲}}$$

یعنی باید نامساوی زیر برقرار باشد:

$$\frac{۱}{\sin a}+\frac{۱}{\sin b}>\frac{۲}{\sin\frac{a+b}{۲}}$$

اکنون درستی نامساوی زیر را، وقتی a و b در فاصله‌ی (π و ۰) باشند، ثابت می‌کنیم:

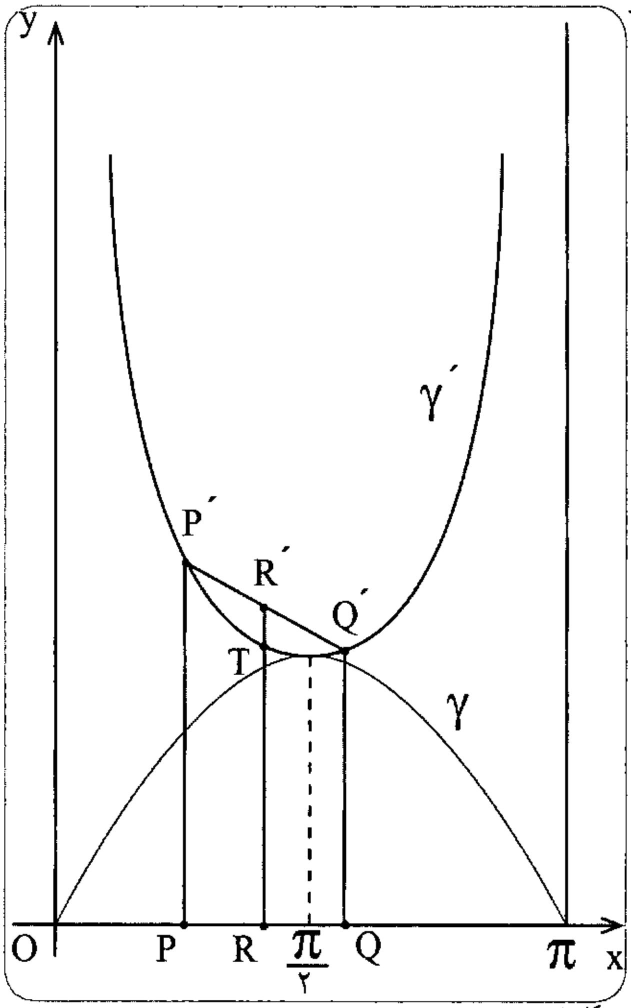
در شکل ۳، منحنی γ نمایشگر تابع $y=\sin x$ است و منحنی γ' نمایشگر تابع $y=\frac{۱}{\sin x}$. (نمودار تابع $y=\sin x$ در فاصله‌ی $[۰, \pi]$ رسم شده است و نمودار تابع $y=\frac{۱}{\sin x}$، در فاصله‌ی $(۰, \pi)$).

در شکل ۳ داریم: $\overline{OP}=a$، $\overline{OQ}=b$ و $\overline{OR}=\frac{a+b}{۲}$. سه خط PP'، RR' و QQ' عمود بر خط Ox هستند؛ پس: $\overline{PP'}=\frac{۱}{\sin a}$، $\overline{QQ'}=\frac{۱}{\sin b}$، $\overline{RR'}=\frac{۱}{۲}(\sin\frac{۱}{a}+\sin\frac{۱}{b})$ و $\overline{RT}=\sin\frac{۱}{\frac{a+b}{۲}}$.

چون گودی منحنی γ' به سوی بالاست، پس: $\overline{RP'}>RT$. از رابطه‌ی اخیر نتیجه می‌شود:

$$\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{\sin a}+\frac{۱}{\sin b}\right)>\sin\frac{۱}{\frac{a+b}{۲}}$$

دو نقطه‌ی P و Q را به دل‌خواه در فاصله‌ی (π و ۰) اختیار می‌کنیم. از دو نقطه‌ی یاد شده، عمودهایی بر خط Ox اخراج می‌کنیم و نقطه‌های برخورد آن‌ها را با منحنی γ'، به ترتیب P' و Q' می‌نامیم. از نقطه‌ی R وسط پاره‌خط PQ، عمودی بر خط Ox اخراج می‌کنیم و نقطه‌های برخورد آن را با منحنی γ' و خط $P'Q'$، به ترتیب R'



شکل ۳

و T می‌نامیم. چون گودی (تقعّر) منحنی γ' به سوی بالاست، نتیجه می‌شود:

$$\overline{RR'}>\overline{RT}$$

از سوی دیگر در ذوزنقه‌ی $PQQ'P'$ چنین داریم:

$$\overline{PP'}+\overline{QQ'}=۲\overline{RR'}$$

از دو رابطه‌ی اخیر نامساوی زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱}{\sin(OP)}+\frac{۱}{\sin(OQ)}>\frac{۲}{\sin(OR)}$$

این رابطه همان رابطه‌ی مطلوب زیر است:

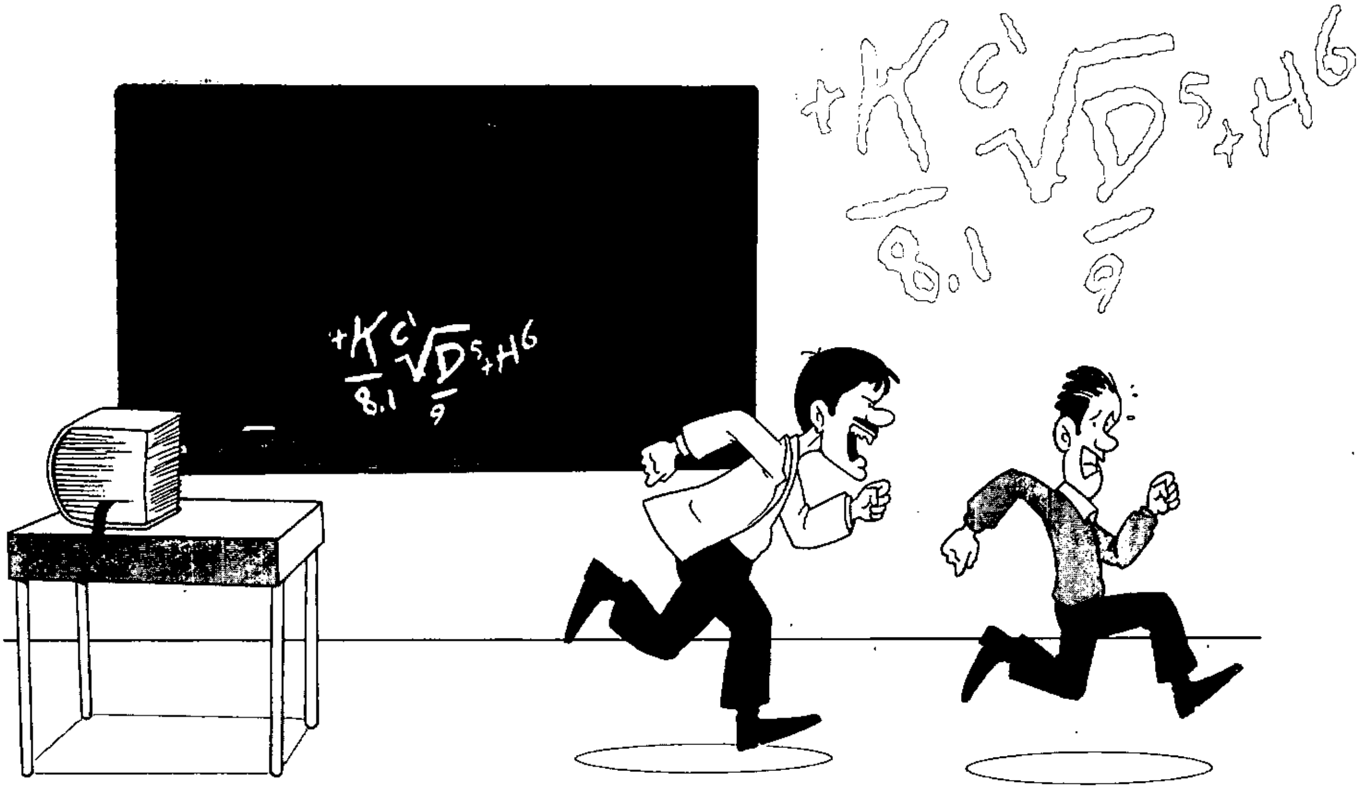
$$\frac{۱}{\sin a}+\frac{۱}{\sin b}>\frac{۲}{\sin\frac{a+b}{۲}}$$

عناوین اختراعات دکتر احمد شرف‌الدین

۱.طراحی و ساخت خط‌کش حساب برای حل تقریبی و سریع معادلات درجه سوم.

۲.ماشین الکترونیک که می‌تواند هر آگاهی را در جهت مستقیم یا معکوس، هر دو را با شروع آنی عرضه کند.

۳.طراحی و ساخت ماشین حساب آنالوژیک برای حل و بحث معادلات جبری که ضریب‌های آن‌ها به پارامترهایی بستگی داشته باشند.



اثبات بازگشتی یا اثبات از آخر به اول

عنایت‌الله راستی‌زاده

کلید واژه‌ها: اثبات بازگشتی، نابرابری‌ها، میانگین حسابی و هندسی، روابط برگشت‌پذیر.

اشاره

در مقاله‌ی حاضر، پس از توضیح روش اثبات بازگشتی، نمونه مسائل متنوعی طرح و حل شده‌اند. مثال‌ها از مباحث هندسه، جبر و مثلثات انتخاب شده‌اند تا بتوان فراگیربودن استفاده از این روش را در اغلب شاخه‌های ریاضی دبیرستانی نشان داد.

در این روش اثبات که بیشتر برای بررسی درستی نابرابری‌ها به‌کار می‌رود، درستی حکم را می‌پذیریم و با انجام محاسبات لازم، نابرابری یا گزاره‌ی حکم را تا آن‌جا ساده می‌کنیم که به گزاره‌ای برسیم که بدیهی است یا درستی آن را از قبل می‌دانیم. در صورتی که مراحل انجام شده برگشت‌پذیر باشند، درستی روش اثبات تأیید شده است.

مثال ۱. ثابت کنید برای هر عدد حقیقی دل‌خواه و مثبت a، نابرابری زیر همیشه برقرار است:

$$a+\frac{1}{a}\geq 2$$

اثبات: اگر حکم مسئله برقرار باشد، آن‌گاه با ضرب طرفین نابرابری در a ($a>0$)، داریم:

$$a^2+1\geq 2a$$

دراین‌صورت: $a^2-2a+1\geq 0$، پس: $(a-1)^2\geq 0$. رابطه‌ی اخیر به‌وضوح برقرار است و تمام روابط فوق برگشت‌پذیر هستند. پس حکم برقرار است. درواقع:

$$(a-1)^2\geq 0 \Rightarrow a^2-2a+1\geq 0$$

$$\Rightarrow a^2+1\geq 2a \xrightarrow{\div a} a+\frac{1}{a}\geq 2$$

مثال ۲. ثابت کنید برای هر دو عدد حقیقی و دل‌خواه x و y، نابرابری زیر همواره برقرار است:

$$x^2+y^2+1\geq x+y+xy$$

اثبات: درستی حکم را می‌پذیریم و به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$2x^2+2y^2+2\geq 2x+2y+2xy$$

$$\Rightarrow x^2+x^2+y^2+y^2+1+1-2x-2y-2xy\geq 0$$

$$\Rightarrow (x^2-2x+1)+(y^2-2y+1)+(x^2-2xy+y^2)\geq 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(x-y)^2\geq 0$$

رابطه‌ی اخیر بدیهی است (زیرا جمع سه مقدار نامنفی همواره نامنفی است) و تمام مراحل انجام شده بازگشت‌ناپذیر هستند. لذا طبق روش اثبات بازگشتی حکم مسئله برقرار است. (لزومی به بازنویسی پاسخ یعنی نوشتن اثبات از آخر به اول نیست.)

تذکر: گاهی در برگه‌ی امتحانی دانش‌آموزان دیده می‌شود که پاسخ از آخر به اول مجدداً نوشته شده است. این کار خطاست (به شرطی که ذکر شود، مراحل انجام شده بازگشت‌پذیر هستند) یا این‌که تنها اثبات مستقیم (و نه بازگشتی) را بنویسیم؛ مانند نمونه‌ی زیر:

مثال ۳. ثابت کنید برای هر دو عدد حقیقی و مثبت x و y، نابرابری زیر همیشه برقرار است:

$$\frac{1}{2}(x+y) \geq \sqrt{xy}$$

اثبات: چون $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$ همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر است، لذا: $x+y-2\sqrt{xy} \geq 0$. در این‌صورت: $x+y \geq 2\sqrt{xy}$ و با تقسیم طرفین نامساوی بر ۲ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2}(x+y) \geq \sqrt{xy}$$

تذکر: نامساوی اخیر را به‌نام نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی می‌شناسیم.

مثال ۴. ثابت کنید:

$$\frac{1+\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{1-\sin x};(x \neq k\pi + \frac{\pi}{2})$$

اثبات: درستی تساوی را می‌پذیریم و طرفین وسطین می‌کنیم:

$$(1+\sin x)(1-\sin x) = (\cos x)(\cos x)$$

پس طبق اتحاد مزدوج: $1-\sin^2 x = \cos^2 x$ که این هم یعنی $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ و تساوی اخیر نیز به وضوح برقرار است. مراحل برگشت‌پذیرند و لذا حکم برقرار است.

مثال ۵. ثابت کنید هرگاه x و y دو عدد حقیقی مثبت و معکوس هم باشند، آن‌گاه:

$$(1+x)(1+y) \geq 4$$

اثبات: با پذیرفتن درستی حکم داریم:

$$1+x+y+xy \geq 4, xy=1 \Rightarrow x+y+2 \geq 4 \Rightarrow x+y \geq 2$$

اما: $xy=1$، پس: $y=\frac{1}{x}$. بنابراین $x+\frac{1}{x} \geq 2$ و درستی این رابطه را نیز از قبل می‌دانیم. با توجه به برگشت‌پذیر بودن تمام مراحل انجام شده، حکم برقرار است.

مثال ۶. ثابت کنید:

$$x^3+y^3 \geq x^2y+xy^2 \ (x>0, y>0)$$

اثبات: به روش بازگشتی داریم:

$$(x+y)^3 - 3xy(x+y) \geq x^2y+xy^2$$

$$\Rightarrow (x+y)^3 - 3xy(x+y) - x^2y - xy^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow (x+y)^3 - 3xy(x+y) - (x+y)xy \geq 0$$

$$\Rightarrow (x+y)\left((x+y)^2 - 4xy\right) \geq 0 \Rightarrow (x+y)^2 - 4xy \geq 0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+2xy-4xy \geq 0 \Rightarrow x^2-2xy+y^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow (x-y)^2 \geq 0$$

رابطه‌ی اخیر بدیهی است و تمام روابط (مراحل) برگشت‌پذیرند، لذا حکم اولیه برقرار است.

مثال ۷. ثابت کنید نصف محیط مثلث، از طول هر ضلع آن بزرگ‌تر است.

اثبات: می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$\frac{a+b+c}{2} > a, \frac{a+b+c}{2} > b, \frac{a+b+c}{2} > c$$

(اثبات یکی از این سه کفایت می‌کند.)

ثابت می‌کنیم: $\frac{a+b+c}{2} > a$. با ضرب طرفین در ۲ (درستی حکم را پذیرفتیم!) داریم: $a+b+c > 2a$

لذا: $b+c > 2a-a$

پس: $b+c > a$

و این آخری را در هندسه ثابت کرده‌اید! (قضیه‌ی حمار؛ مجموع هر دو ضلع از طول ضلع سوم بزرگ‌تر است). مراحل اثبات بازگشت‌پذیرند، بنابراین حکم ثابت می‌شود.

در مثال بعدی، به اثبات یک تساوی رادیکالی به روش بازگشتی خواهیم پرداخت.

مثال ۸. ثابت کنید: $\frac{1}{2}(\sqrt{30}-\sqrt{2}) = \sqrt{8-\sqrt{15}}$

به روش بازگشتی (پذیرش حکم) داریم:

$$\frac{1}{4}(\sqrt{30}-\sqrt{2})^2 = 8-\sqrt{15}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}(30+2-2\sqrt{60}) = 8-\sqrt{15}$$

$$32-2\sqrt{60} = 32-4\sqrt{15} \Rightarrow 2\sqrt{60} = 4\sqrt{15}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{4 \times 15} = 4\sqrt{15}$$

پس: $4\sqrt{15} = 4\sqrt{15}$

مراحل بازگشت‌پذیرند، لذا تساوی اولیه برقرار است.

در دو مثال بعدی، به اثبات دو نامساوی مثلثاتی به روش بازگشتی می‌پردازیم.

مثال ۹. ثابت کنید:

$$2\tan^2\theta + 1 \geq 2\tan\theta(\sin\theta + \cos\theta), \ \theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$$

اثبات: اگر حکم برقرار باشد، آن‌گاه:

$$\tan^2\theta+\tan^2\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta \ge 2\tan\theta\sin\theta$$
$$+2\tan\theta\cos\theta$$

$$\Rightarrow (\tan^2\theta-2\tan\theta\sin\theta+\sin^2\theta)$$

$$+(\tan^2\theta-2\tan\theta\cos\theta+\cos^2\theta)\ge 0$$

$$\Rightarrow (\tan\theta-\sin\theta)^2+(\tan\theta-\cos\theta)^2\ge 0$$

درستی آخرین نابرابری بدیهی است و تمام مراحل بازگشت‌پذیرند، پس نامساوی حکم برقرار است.

مثال ۱۰. ثابت کنید:

$$\sin^4\theta+\cos^4\theta\ge\frac{1}{2}\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

اثبات: با پذیرش حکم و توجه به اتحاد زیر داریم:

$$a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2$$

بنابراین:

$$(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta\ge\frac{1}{2}$$

چون: $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$، پس:

$$1-2\sin^2\theta\cos^2\theta\ge\frac{1}{2}\xrightarrow{\times 2}2-4\sin^2\theta\cos^2\theta\ge 1$$

$$-4\sin^2\theta\cos^2\theta\ge -1\Rightarrow \sin^2\theta\cos^2\theta\le\frac{1}{4}$$

$$\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)\to\sin\theta\cos\theta\le\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2\sin\theta\cos\theta\le 1,1=\sin^2\theta+\cos^2\theta$$

$$\Rightarrow \sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta\ge 0$$

$$\Rightarrow (\sin\theta-\cos\theta)^2\ge 0$$

رابطه‌ی اخیر بدیهی است و مراحل از آخر به اول برقرارند (برگشت‌پذیرند). لذا طبق روش اثبات بازگشتی، نامساوی مسئله برقرار است. امیدواریم این ده مثال آن‌قدر متنوع بوده باشند که فراگیر بودن این روش را در اثبات‌ها نشان دهد. با وجود این، اگر علاقمند به حل چند مسئله‌ی خاص هستید پیشنهاد می‌شود مسئله‌های زیر را هم ببینید.

سه مسئله‌ی ویژه

مسئله‌ی ۱. می‌دانیم اگر $1+a\ge 0$ و $n\in N$ آن‌گاه: $(1+a)^n\ge 1+na$.

با استفاده از مطلب فوق و روش اثبات بازگشتی ثابت کنید:

$$n\left(\frac{n}{2}\right)^{n-1}\le\left(\frac{n+1}{2}\right)^n (n\in N)$$

اثبات: فرض می‌کنیم حکم درست است. دراین‌صورت:

$$\frac{n^n}{2^{n-1}}\le\frac{(n+1)^n}{2^n}\Rightarrow 2\times n^n\le(n+1)^n\Rightarrow 2\le\frac{(n+1)^n}{n^n}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\ge 2\Rightarrow\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\ge 2$$

که می‌توان آخرین نامساوی را به‌صورت $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\ge 1+n\left(\frac{1}{n}\right)$ نوشت و این رابطه با توجه به راهنمایی صورت مسئله و انتخاب $a=\frac{1}{n}$ همواره درست است.

چون همه‌ی نتایج به‌دست آمده برگشت‌پذیر هستند، پس حکم اولیه برای هر عدد طبیعی درست است.

مسئله‌ی ۲. اگر a، b و c طول اضلاع یک مثلث باشند، نشان دهید:

$$3(ab+bc+ca)\le(a+b+c)^2\le 4(ab+bc+ca)$$

اثبات: نابرابری $3(ab+bc+ca)\le(a+b+c)^2$ به‌سادگی قابل اثبات و برای هر a، b و c (حتی اگر طول اضلاع مثلث نباشند) برقرار است و از آن می‌گذریم.

حال نشان می‌دهیم:

$$(a+b+c)^2\le 4(ab+bc+ca)\qquad(1)$$

فرض کنیم، حکم درست است:

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\le 4ab+4bc+4ac$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2\le 2ab+2ac+2bc$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2\le ab+ab+ac+ac+bc+bc$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2\le a(b+c)+b(a+c)+c(a+b)\quad(2)$$

برای اثبات درستی رابطه‌ی (۲) دقت کنیم که a، b و c سه ضلع یک مثلث هستند. در هر مثلث مجموع اندازه هر دو ضلع از اندازه‌ی ضلع سوم بزرگ‌تر است، لذا:

$$\left.\begin{array}{l}a<b+c\Rightarrow a^2<a(b+c)\\ b<a+c\Rightarrow b^2<b(a+c)\\ c<a+b\Rightarrow c^2<c(a+b)\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2<a(b+c)+b(a+c)+c(a+b)$$

پس رابطه‌ی (۲) درست است.

می‌توان نشان داد تمام روابط از (۲) به (۱) برگشت‌پذیر هستند. بنابراین رابطه (۱) برقرار است، یعنی:

$$(a+b+c)^2\le 4(ab+ac+bc)$$

مسئله‌ی ۳. ثابت کنید:

$$\frac{5^n}{1+5^{2n}}\ge\frac{5^{n+1}}{1+5^{2n+2}}\quad(n\in N)$$

اثبات: فرض کنیم حکم درست است. پس:

$$5^n(1+5^{2n+2}) \ge 5^{n+1}(1+5^{2n}) \Rightarrow 1+5^{2n+2} \ge 5(1+5^{2n})$$

$$1+5^{2n+2} \ge 5+5^{2n+1} \Rightarrow 5^{2n+2}-5^{2n+1} \ge 4$$

$$\Rightarrow 5^{2n+1}(5-1) \ge 4 \Rightarrow 5^{2n+1} \ge 1$$

رابطه‌ی اخیر برای هر n طبیعی درست است و تمامی روابط برگشت‌پذیر هستند. پس طبق روش اثبات بازگشتی حکم برقرار است.

حالا این شبهه‌ها را خودتان حل کنید:

۱. ثابت کنید: $\sqrt{5}+\sqrt{6} > \sqrt{3}+\sqrt{8}$

۲. ثابت کنید هرگاه: $x>0$ و $y<0$. آن‌گاه: $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \le -2$

۳. ثابت کنید: $(\tan\theta+\cot\theta)^2 \ge 4$ و $(\theta \ne \frac{k\pi}{2})$

۴. شخصی ادعا کرد که «هر عدد با ثلث خودش برابر است» و استدلال کرد که:

$$a=\frac{1}{3}a \to 3a=a$$

و چون تساوی خاصیت جابه‌جایی دارد، پس: $a=3a$.

درنتیجه:

$$\begin{cases}3a=a\\ a=3a\end{cases} \Rightarrow 3a+a=a+3a \Rightarrow 4a=4a \Rightarrow a=a$$

و این آخری همواره برقرار است. بگویید کجای اثبات اشکال دارد؟!

۵. ثابت کنید: $|x|+|y| \ge \sqrt{x^2+y^2}$

۶. مثلث ABC در رأس A قائمه است. اگر AH ارتفاع وارد بر وتر باشد، ثابت کنید:

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}$$

۷. اگر $n \ge 3$ و n عددی طبیعی باشد، ثابت کنید:

$$\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} < \frac{n^2}{2^n}$$

۸. اگر a، b و c سه عدد حقیقی مثبت باشند و $a<b+c$، ثابت کنید:

$$\frac{a}{1+a} < \frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}$$

معرفی سایت‌های ریاضی جهان

احسان یارمحمدی

Mathpro Press

نشانه‌ی اینترنتی سایت: http://www.mathpropress.com

سایت Mathpro Press به مسائل و فهرست‌های پیکارجو و ارزنده‌ی ریاضی اختصاص دارد. در این سایت اطلاعات آنلاین در مورد مسائل ریاضی، کتاب‌های ریاضی و مجلات ریاضی عرضه می‌شود. صفحه‌ی اصلی سایت دربردارنده‌ی پنج عنوان عمده‌ی زیر است که هریک از آن‌ها شامل زیر عنوان‌های گوناگون و حاوی مطالب متنوع است:

♦ کتاب‌ها (Books)

☐ کتاب‌فروشی Mathpro Press (کتب منتشر شده یا توزیع شده به‌وسیله‌ی Mathpro Press)

Mathpro Press (Books Published or distributed by Mathpro Press)

☐ چگونه کتاب را از ما سفارش بگیرید.

(How to order books from us.)

☐ خلاصه‌ای از کتاب‌های مسائل ریاضی.

(Compendium of mathematics problems books)

☐ کتاب‌های مسائل جدید.

(Recent problem books)

☐ کتاب‌هایی درباره‌ی المپیادهای بین‌المللی ریاضی

(Books about the international mathematical Olympiads)

♦ مسائل (Problems)

☐ Mathpro آنلاین (یک مجموعه قابل جست‌وجو آنلاین دربرگیرنده بیش از ۲۰،۰۰۰ مسئله‌ی ریاضی)

Mathpro Online (An online searchable collection of over 20,000 math problems)

☐ وب‌سایت‌هایی درباره‌ی رقابت‌های ریاضی

(Web sites about Mathematics competitions)

☐ مسائل گردآوری شده از استنلی روبینوویتز، ۱۹۶۳ تا ۲۰۰۵

(Collected problems of Stanley Robinowitz 1963-2005)

☐ رقابت‌های ریاضی در ایالات‌متحده

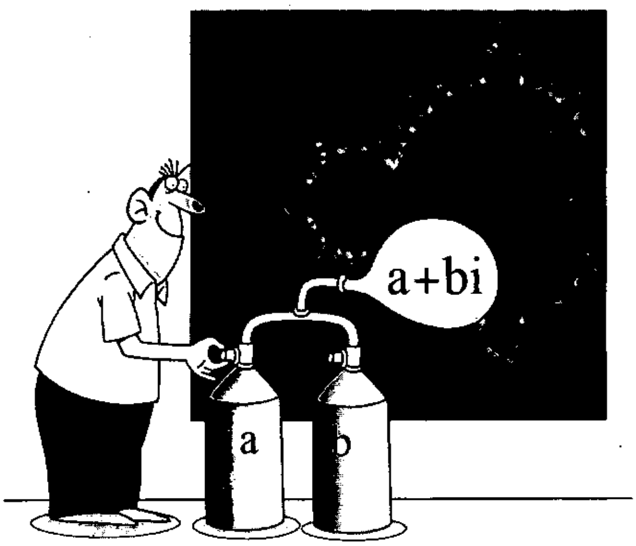
(Mathematics competitions in the United States)

بقیه در صفحه‌ی ۴۹

اعداد موهومی

غلامرضا یاسی‌پور

کلید واژه‌ها: اعداد موهومی، اعداد مختلط، اعداد حقیقی، نمودار آرگان، مزدوج عدد مختلط، گسترش اعداد مختلط.



محققاً می‌توان اعداد را تصور کرد. گاهی اوقات فکر می‌کنم در حساب پس‌اندازم یک میلیون پوند دارم، و بحثی در میان نیست که این عدد «عددی موهومی» است. امّا کاربرد ریاضی موهومی کاری با این رؤیاهای روزانه ندارد.

تصور می‌رود که برچسب «موهومی» ابتدا توسط رِنه دِکارتِ[۱] فیلسوف و ریاضی‌دان، در شناخت جواب‌های غریب معادلاتی به کار رفت که به طور قطع اعدادی معمولی نبودند. امّا آیا اعداد موهومی موجودند یا خیر؟ این پرسشی بود که بر ذهن فیلسوفان، زمانی که بر کلمه‌ی موهومی متمرکز می‌شدند، سنگینی می‌کرد.

برای ریاضی‌دانان، موجود بودن اعداد موهومی، از اهمیت برخوردار نیست. این اعداد به اندازه‌ی ۵ یا π جزئی از زندگی روزمره‌ی ما هستند. گرچه ممکن است این اعداد به خرید رفتن‌هایمان کمک نکنند، اما چون از طراح هواپیما یا مهندس برق در موردشان سؤال کنیم، در خواهیم یافت که اهمیتی حیاتی دارند. با جمع یک عدد حقیقی و یک عدد موهومی با یکدیگر، چیزی را به دست می‌آوریم که «عدد مختلط»[۲] نامیده می‌شود، و به نظر می‌رسد از لحاظ فلسفی کمتر مشکل ساز باشد. نظریّه‌ی اعداد مختلط، با ریشه‌ی دوم ۱- ارتباط دارد. بنابراین، کدام عدد است که چون مربع شود، ۱- را به دست می‌دهد؟

هنگامی که عدد ناصفری را در نظر بگیریم و آن را در خودش ضرب کنیم (یعنی مربع کنیم)، همواره عددی مثبت را به‌دست می‌آوریم. این موضوع وقتی اعداد مثبت را مربع می‌کنیم باورپذیر است، اما آیا در صورتی که اعداد منفی را مربع کنیم نیز صادق است؟ برای امتحان، می‌توان ۱- یا ۱+ را به کار برد. در این صورت، حتی اگر قاعده‌ی دبیرستانی «ضرب دو منفی، مثبت تشکیل می‌دهد» را از یاد برده باشیم، ممکن است به خاطر داشته باشیم که پاسخ (۱-)×(۱-) برابر با ۱ است. اما درصورتی که بیندیشیم (۱-)×(۱-) برابر ۱- است، می‌توانیم هر طرف این رابطه را بر ۱- تقسیم کنیم، و به نتیجه‌ی ۱=۱- برسیم که یاوه است. بنابراین، باید نتیجه بگیریم: ۱=(۱-)×(۱-) که جوابی مثبت است.

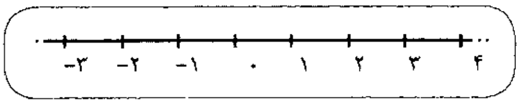
همین استدلال را می‌توان در مورد هر عدد منفی دیگری غیر از ۱- نیز به کار برد. بنابراین، هر عدد حقیقی، چون مربع شود، نتیجه هیچ‌گاه نمی‌تواند منفی باشد.

مهندسی $\sqrt{-1}$

حتّی مهندسان ـ دار و دسته‌ای بس عملی ـ کاربردهایی برای اعداد مختلط یافته‌اند. زمانی که مایکل فارادی "Michael Faraday" در دهه‌ی ۱۸۳۰، جریان متناوب را کشف کرد، اعداد موهومی واقعیّتی فیزیکی به‌دست آوردند. در این حال، به جای i حرف j برای نمایش $\sqrt{-1}$ به کار می‌رود، زیرا i به جای جریان الکتریکی به کار می‌رود.

این موضوع، موجب بروز تردیدهایی در سال‌های اوّلیه‌ی اعداد مختلط در قرن شانزدهم شد. اما زمانی که بر آن فائق آمدند، پاسخ به دست آمده، ریاضیات را از قید و بند اعداد معمولی آزاد کرد. بدین ترتیب افق‌های وسیعی از پژوهش در مقابل محققان باز شد که پیش از این حتی خوابش را هم نمی‌دیدند. گسترش اعداد مختلط، «تکمیل اعداد حقیقی» به دستگاهی به‌طور طبیعی کامل‌تر است.

ریشه‌ی دوم ۱-



پیش از این، در صورتی که محدود به محور اعداد حقیقی باشیم، ملاحظه کردیم، از آن‌جا که مربّع هیچ عددی نمی‌تواند منفی باشد، ریشه‌ی دوم ۱- موجود نیست. بنابراین اگر اعداد را هم‌چنان بر

محور اعداد حقیقی در نظر بگیریم، ممکن است کار را تمام شده بدانیم، و به موهومی نامیدن این اعداد شامل $\sqrt{-۱}$ ادامه دهیم و کار دیگری با آن‌ها نداشته باشیم. یا این گام جسارت آمیز را برداریم که $\sqrt{-۱}$ را به عنوان موجود جدیدی که آن را با i نمایش می‌دهیم، بپذیریم.

اعداد موهومی، با همین عمل ذهنی ساده، پا به حیات می‌گذارند. این را که آن‌ها چیست‌اند، نمی‌دانیم، اما به‌وجودشان اعتقاد داریم. دست کم می‌دانیم $i^۲ = -۱$. بنابراین، در دستگاه اعداد جدیدمان، جمیع یاران قدیمی، از قبیل اعداد حقیقی

$$۱, ۲, ۳, ۴, \pi, e, \sqrt{۲}, \sqrt{۳}$$

را، همراه با دوستان تازه‌ای که شامل i هستند، از قبیل

$$۱+۲i, -۳+i, ۲+۳i, ۱+i\sqrt{۲}, \sqrt{۳}+۲i, e+\pi i$$

و غیره، خواهیم داشت.

گام حساس ضروری مورد بحث، در آغاز قرن نوزدهم و زمانی برداشته شد که از محور اعداد یک بُعدی، به سوی صفحه‌ی اعداد دو بُعدی ناآشنایی حرکت کردیم.

جمع و ضرب

اکنون که در ذهنمان اعداد مختلط، یعنی اعدادی به‌صورت a+bi را داریم، با آن‌ها چه می‌توان کرد؟ این اعداد نیز درست مانند اعداد حقیقی، می‌توانند با هم جمع، و درهم ضرب شوند. جمع‌شان را با جمع اجزای مربوطه و متناسب آن‌ها انجام می‌دهیم. بنابراین، ۲+۳i چون با ۸+۴i جمع شود (۲+۸)+(۳+۴)i را با نتیجه‌ی ۱۰+۷i به‌دست می‌دهد.

ضرب نیز تقریباً به همین سادگی است. اگر بخواهیم ۲+۳i را در ۸+۴i ضرب کنیم، ابتدا هر جفت نماد را در هم ضرب می‌کنیم:

$$(۲+۳i)\times(۸+۴i) = (۲\times۸)+(۲\times۴i)+(۳i\times۸)+(۳i\times۴i)$$

و عبارات حاصل را یعنی ۱۶، ۸i، ۲۴i و ۱۲i² (درعبارت اخیر به جای i² عدد ۱- را قرار می‌دهیم) با هم جمع می‌کنیم. بنابراین، نتیجه‌ی ضرب می‌شود:

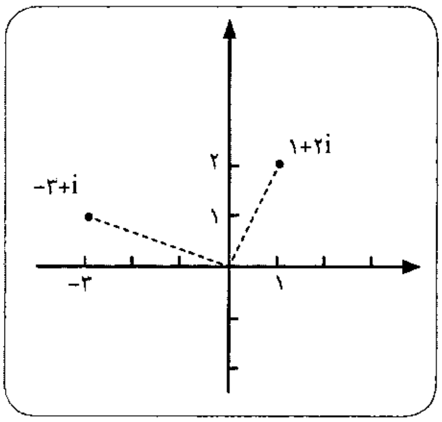
$$(۱۶-۱۲)+(۸i+۲۴i)$$

که برابر با مختلط ۴+۳۲i است.

در مورد اعداد مختلط، جمیع قواعد معمولی حساب برقرار و تفریق و تقسیم همواره امکان‌پذیر است؛ غیر از تقسیم بر عدد مختلط ۰+۰i که این کار در مورد صفر در اعداد حقیقی نیز مجاز نیست. در واقع اعداد مختلط، از جمیع ویژگی‌های اعداد حقیقی، جز یکی، برخوردارند؛ این که آن‌ها را نمی‌توانیم مانند اعداد حقیقی، به مثبت و منفی تقسیم‌بندی کنیم.

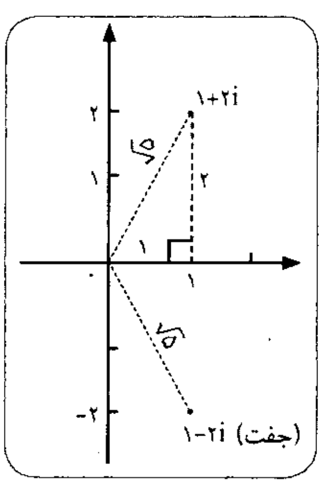
نمودار آرگان

دو بُعدی بودن اعداد مختلط را می‌توان به گونه‌ای واضح، با نمایش آن‌ها بر یک نمودار ملاحظه کرد. اعداد مختلط ۳+i- و ۱+۲i را می‌توانیم روی نموداری به نام «آرگان» رسم کنیم. روش تصویری کردن اعداد مختلط توسط ژان روبر آرگان[۳]، ریاضی‌دان سوئیسی، ارائه شد؛ گرچه در حوالی همان سال‌ها دیگران نیز مفهومی مشابه را ارائه دادند.



هر عدد مختلط، زوج یا جفت[۴]، موسوم به «مزدوج»[۵] آن دارد. به این ترتیب، زوج ۱+۲i عدد ۱-۲i است که از تغییر دادن علامت واقع در جلوی مؤلفه‌ی دوم به‌دست می‌آید. جفت ۱-۲i نیز به همین ترتیب، ۱+۲i است. بنابراین زوجیت مورد بحث، رابطه‌ای صادقانه است.

جمع و ضربِ با هم و در هم جفت‌ها، همواره عددی حقیقی به‌دست می‌دهد. با جمع ۱+۲i و ۱-۲i عدد ۲ را حاصل می‌کنیم، و با ضرب آن‌ها ۵ را به دست می‌آوریم. این ضرب، جالب‌تر نیز هست. زیرا پاسخ ۵، مربع «طول» عدد مختلط ۱+۲i است که با طول جفتش نیز برابر است. به‌طریق دیگر، می‌توانیم طول عدد مختلط را به صورت زیر تعریف کنیم:



$$\text{W طول} = \sqrt{(\text{W} \times \text{W جفتِ})}$$

با بررسی این مطلب در مورد $-۳+i$، درمی‌یابیم که طول $(-۳+i)$ برابر است با $\sqrt{(-۳+i)\times(-۳-i)}=\sqrt{(۹+۱)}$ بنابراین طول $(-۳+i)$ برابر است با $\sqrt{۱۰}$.

تفکیک اعداد مختلط از راز و رمز، به مقدار زیادی مرهون سِر ویلیام روآن همیلتون[۶]، مهم‌ترین ریاضی‌دان ایرلند در قرن نوزدهم است. وی دریافت که در این نظریّه، عملاً به i نیازی نیست. زیرا این موجود، تنها به عنوان جا نگه‌دار عمل می‌کند و می‌توان آن را به گوشه‌ای افکند. همیلتون عدد مختلط را به صورت «جفت مرتّب»ی از اعداد حقیقی (a,b) در نظر گرفت که کیفیت دوبُعدی خود را نشان می‌دهند. و به $\sqrt{-۱}$ مرموز متوسل نمی‌شوند. در این صورت، عاری از i، جمع به صورت

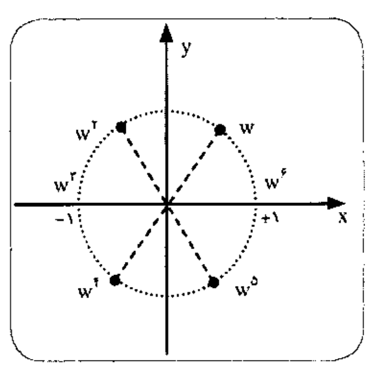
$(۲,۳)+(۸,۴)=(۱۰,۷)$

درمی‌آید و به گونه‌ای با وضوح کمتر، ضرب می‌شود:

$(۲,۳)\times(۸,۴)=(۴,۳۲)$

کامل بودن دستگاه اعداد مختلط زمانی آشکارتر می‌شود که به «n امین ریشه‌ی واحد» بیندیشیم (از نظر ریاضی‌دانان «واحد» یا «یکه»[۷] به معنی «یک» است). این ریشه‌ها جواب‌های معادله‌ی $z^n=۱$ هستند. در این مورد، $z^۶=۱$ را برای نمونه اختیار می‌کنیم. دو ریشه‌ی $z=۱$ و $z=-۱$ بر محور حقیقی موجودند (زیرا $۱^۶=۱$ و $(-۱)^۶=۱$)، اما در حالی که مطمئناً باید شش ریشه داشته باشیم. بقیه کجا هستند؟ همه‌ی این شش ریشه نیز، مانند دو ریشه‌ی حقیقی، دارای طولی واحدند و بر دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع واحد یافت می‌شوند.

علاوه بر این موارد، اگر به $w=\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}i$ که ریشه‌ی واقع در



ربع اول است، نگاهی بیفکنیم، ریشه‌های متوالی (در حرکت در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت) چنین به‌دست می‌آیند:

$w^۲,w^۳,w^۴,w^۵,w^۶=۱$

که بر رأس‌های یک شش ضلعی منتظم قرار دارند. درحالت کلی، هر یک از n ریشه‌ی واحد بر این دایره واقع‌اند و بر گوشه‌ها یا «رأس‌ها»ی یک n ضلعی منتظم قرار دارند.

گسترش اعداد مختلط

هنگامی که ریاضی‌دانان اعداد مختلط را به دست آوردند، به‌طور غریزی تعمیمات آن را جست‌وجو کردند. اعداد مختلط دو بُعدی هستند، اما خاص بودن ۲ از کجا آمده است؟ همیلتون، سال‌ها در جست‌وجوی اعداد سه بُعدی بود و به جمع و ضرب آن‌ها می‌پرداخت، اما تنها زمانی که به اعداد چهار بُعدی روی آورد، توفیق یافت. اندکی پس از این، اعداد چهار بُعدی مزبور، خود به هشت بُعدی (موسوم به اعداد کِیلی[۸]) تعمیم یافتند. بسیاری به اندیشه‌ی تداوم امکان این ماجرا به جست‌وجوی اعداد شانزده بُعدی رفتند، اما ۵۰ سال بعد از شاهکار با اهمیت همیلتون، ناممکن بودنشان به‌اثبات رسید.

چند تاریخچه

[illegible] میلادی: رافائل بمبلی به معادله با اعداد موهومی [illegible]

۱۷۷۷ میلادی: برای اولین بار، اویلر از نماد i برای نمایش ریشه‌ی دوم عدد ۱− استفاده کرد.

۱۸۰۶ میلادی: نمایش نموداری آرگان، منجر به نام «نمودار آرگان»، شد.

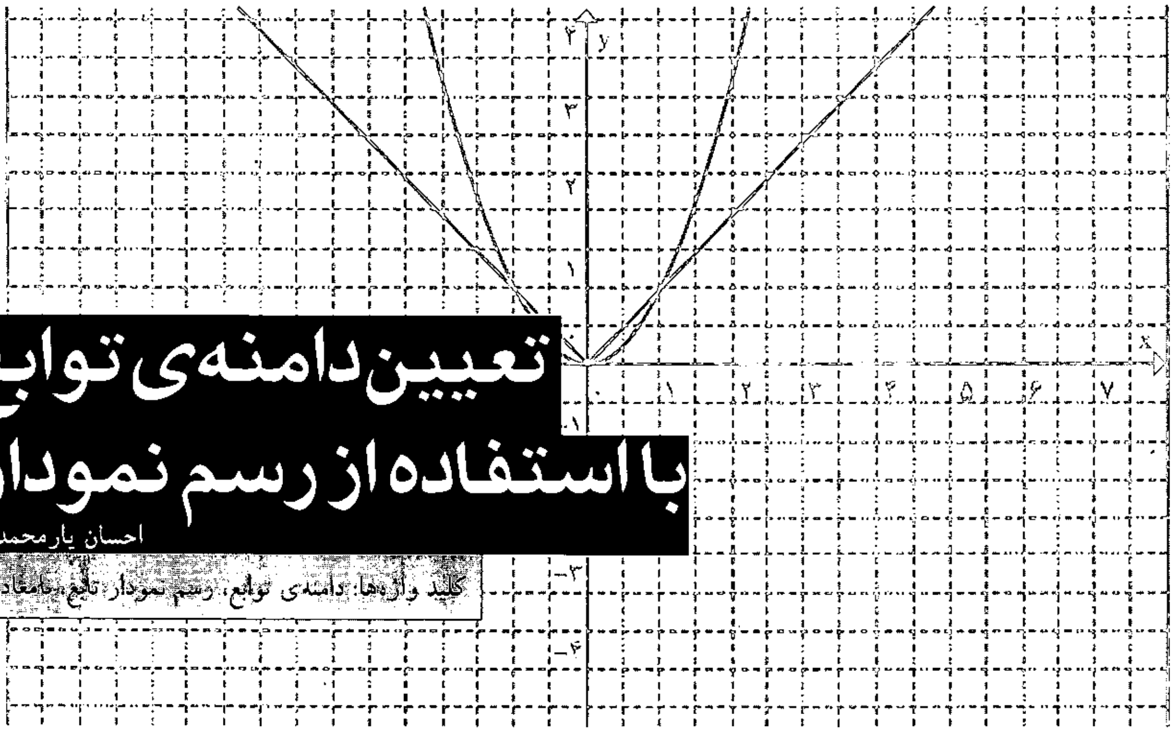
۱۸۱۱ میلادی: کارل فِردریش گاوس به کار با توابع متغیّرهای عدد مختلط پرداخت.

۱۸۳۷ میلادی: همیلتون، اعداد مختلط را به عنوان جفت‌های مرتب اعداد حقیقی در نظر گرفت.

مَخلَص کلام
اعداد ناحقیقی با کاربردهای حقیقی

پی نوشت

۱. René Descartes
۲. Complex number
۳. Jean Robert Argand
۴. Mate
۵. Conjugate
۶. Sir William Rowan Hamilton
۷. Unity
۸. Cayley



تعیین دامنه‌ی توابع با استفاده از رسم نمودار

احسان یارمحمدی

کلید واژه‌ها: دامنه‌ی توابع، رسم نمودار تابع، نامعادله

برای تعیین دامنه‌ی[1] توابع[2] با توجه به نوع توابع و نیز ساختار و ساختمان آن‌ها، راهکارها و روش‌هایی برای حل هر یک متناسب با نوع توابع وجود دارد. اما در پاره‌ای از موارد ممکن است طی انجام محاسبات برای تعیین دامنه‌ی توابع، به معادلات[3] و نامعادلات دشواری برخورد کنیم که شامل عبارات جبری نامتجانس با یکدیگر یا تلفیقی از عبارات جبری[4] و متعالی[5] باشند و در ادامه قادر نباشیم آن‌ها را با روش‌های متعارف و متداول حل کنیم. اگر هم مایل باشیم آن‌ها را با قواعد و روش‌های جاری به سرانجام برسانیم، راهی بس دشوار را پیش روی خویش قرار داده‌ایم. به همین علت در این مقاله روشی مبتنی بر رسم نمودار را که به درک شهودی شایسته نیاز دارد، ارائه خواهیم داد. در این روش، هر یک از ریاضی‌پژوهان و خوانندگان باید شناخت و اطلاعات ارزنده و بسنده‌ای از توابع پایه‌ای و نمودارهای متناظر با آن‌ها، اصول و اسلوب انتقال نمودارها و رسم نمودار توابع در حالت کلی داشته باشند تا بتوانند به واسطه‌ی آن، نگرشی پویاتر را در قبال این مقاله داشته باشند.

فرض بر این است که هنگام تعیین دامنه‌ی توابع، با عباراتی برخورد می‌کنیم که بتوانیم اجزای سازنده‌ی آن‌ها را به دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ با ظاهری که قادر باشیم نمودار آن‌ها را تداعی کنیم[6]، تبدیل سازیم و در نهایت یکی از حالت‌های، $f(x)=g(x)$, $f(x)\neq g(x)$ $f(x)> g(x)$, $f(x)\geq g(x)$, $f(x)\leq g(x)$ و $f(x)< g(x)$ به‌وجود خواهد آمد. بنابراین برای حل هر یک از معادلات یا نامعادلات یاد شده به روش زیر عمل می‌کنیم:

گام اول: نمودارهای توابع $f(x)$ و $g(x)$ را به‌صورت دقیق و مرتب در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.

گام دوم: با بهره‌گیری از درک شهودی، نمودارهای توابع $f(x)$ و $g(x)$ را باهم مقایسه می‌کنیم تا ببینیم با توجه به نمودارهاچه‌مقدار یا مقادیری برای x مناسب و صحیح است که در هر یک از معادلات و یا نامعادلات $f(x)>g(x)$، $f(x)<g(x)$، $f(x)\geq g(x)$ و $f(x)\leq g(x)$ ، $f(x)=g(x)$, $f(x)\neq g(x)$ صدق کند.

مثال ۱ـ دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{\sqrt{۴-x^۲}}{\sqrt{x-|x|}}$ کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

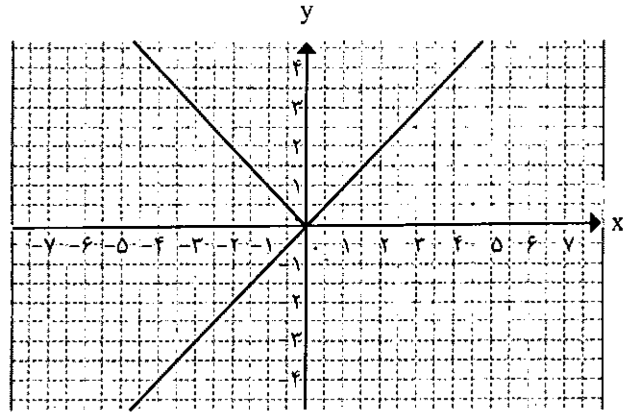
الف) $\{\}$ ب) $[-۲,۲]$

ج) $\mathbb{R}$ د) $\{-۲,۲\}$

جواب: گزینه‌ی (الف) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt{۴-x^۲}\geq ۰ \Rightarrow ۴-x^۲\geq ۰ \Rightarrow x^۲\leq ۴ \Rightarrow -۲\leq x\leq ۲$$
$$\sqrt{x-|x|}>۰ \Rightarrow x-|x|>۰ \Rightarrow x>|x| \Rightarrow$$
$$f(x)=x \;\&\; g(x)=|x|$$

اکنون نمودارهای توابع $f(x)=x$ و $g(x)=|x|$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



با توجه به نمودارهای توابع $f(x)=x$ و $g(x)=|x|$ در می‌یابیم، هیچ مقداری برای x یافت نمی‌شود که در نامعادله‌ی $x>|x|$ صدق کند.

مثال ۲ـ دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^{2}-|x|}}{\sqrt{x-\lfloor x\rfloor}}$ کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

الف) $(\mathrm{IR}-\mathbb{Z})-\{x \mid x\in(-2,2)\}$

ب) $\{\ \}$

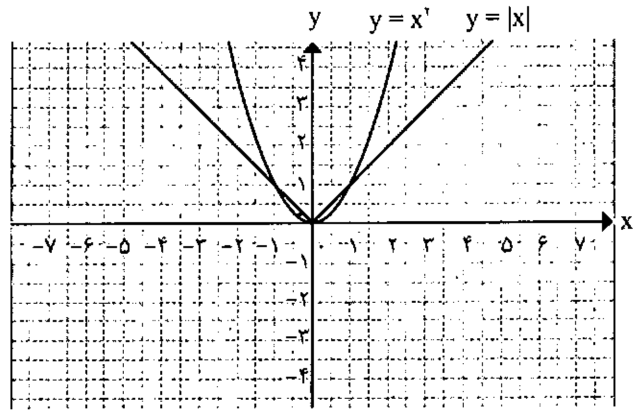
ج) $\mathrm{IR}-\mathbb{Z}$

د) $(\mathrm{IR}-\mathbb{Z})-\{x \mid x\in(-1,1)\}$

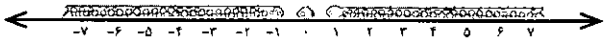
جواب: گزینه‌ی (د) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt{x^{2}-|x|}\ge 0 \Rightarrow x^{2}-|x|\ge 0 \Rightarrow x^{2}\ge |x|$$
$$\Rightarrow f(x)=x^{2} \;\&\; g(x)=|x|$$

اکنون نمودارهای توابع $f(x)=x^{2}$ و $g(x)=|x|$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.

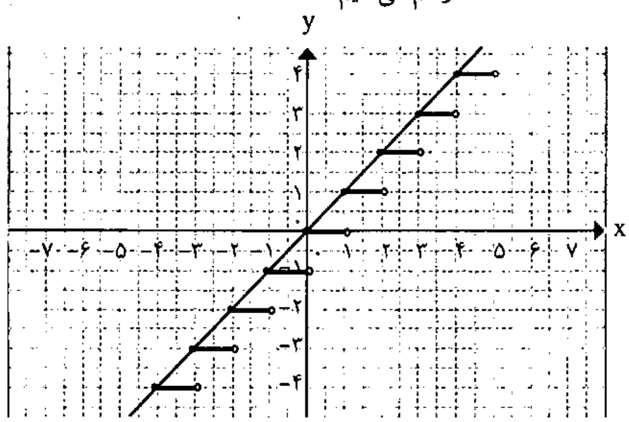


با توجه به نمودارهای توابع $f(x)=x^{2}$ و $g(x)=|x|$ در می‌یابیم، مقادیری برای x یافت می‌شوند که در نامعادله‌ی $x^{2}\ge|x|$ صدق می‌کنند. این مقادیر روی محور اعداد زیر نمایش داده شده‌اند.

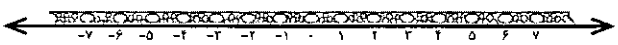


$$\sqrt{x-\lfloor x\rfloor}>0 \Rightarrow x-\lfloor x\rfloor>0 \Rightarrow x>\lfloor x\rfloor \Rightarrow$$
$$f(x)=x \;\&\; g(x)=\lfloor x\rfloor$$

اکنون نمودارهای توابع $f(x)=x$ و $g(x)=\lfloor x\rfloor$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



با توجه به نمودارهای توابع $f(x)=x$ و $g(x)=\lfloor x\rfloor$ نیز در می‌یابیم، مقادیری برای x یافت می‌شوند که در نامعادله‌ی $x>\lfloor x\rfloor$ صدق می‌کنند. این مقادیر روی محور اعداد زیر نمایش داده شده‌اند.



اکنون دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^{2}-|x|}}{\sqrt{x-\lfloor x\rfloor}}$ را که از اشتراک دامنه‌ی صورت کسر با مخرج آن حاصل می‌شود، می‌توان روی محور اعداد زیر مشخص کرد.

مثال ۳ـ دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{x^{2}+|x|+1}{\sqrt{\lfloor x\rfloor-\ln(x)}}$ کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

الف) $\{\ \}$ ب) IR-Z

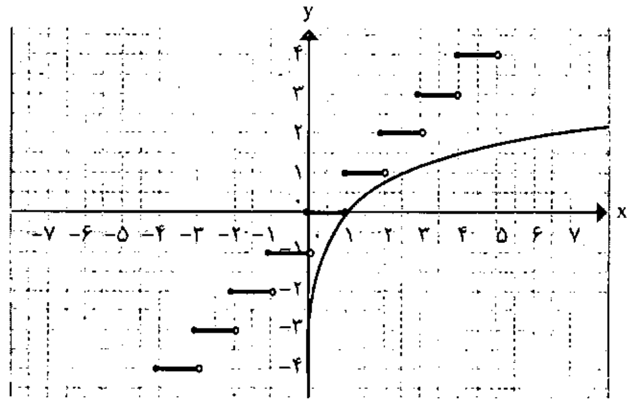
ج) $(0,+\infty)$ د) IR

جواب: گزینه‌ی (ج) صحیح است، زیرا:

$\sqrt{\lfloor x\rfloor-\ln(x)}>0\Rightarrow\lfloor x\rfloor-\ln(x)>0\Rightarrow\lfloor x\rfloor>\ln(x)$

$\Rightarrow f(x)=\lfloor x\rfloor \,\&\, g(x)=\ln(x)$

در ضمن می‌دانیم که دامنه‌ی تابع $g(x)=\ln(x)$ برابر با بازه‌ی باز $(0,+\infty)$ است. اکنون نمودارهای توابع $f(x)=\lfloor x\rfloor$ و $g(x)=\ln(x)$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



با توجه به نمودارهای توابع $f(x)=\lfloor x\rfloor$ و $g(x)=\ln(x)$ در می‌یابیم که تمام مقادیر حقیقی $x\in(0,+\infty)$ در نامعادله‌ی $\lfloor x\rfloor>\ln(x)$ صدق می‌کند.

مثال ۴ـ دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{|x|+\lfloor x^2\rfloor}{\lfloor x\rfloor-|x|}$ کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

الف) IR ب) $IR-Z^+$

ج) $\{\ \}$ د) $IR-Z^-$

جواب: گزینه‌ی (ب) صحیح است، زیرا:

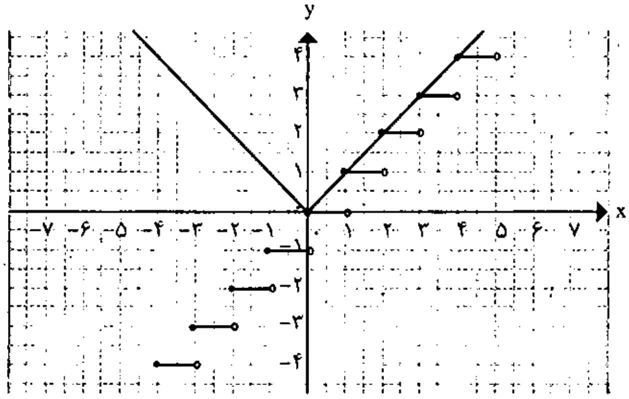
$\lfloor x\rfloor-|x|\neq 0\Rightarrow\lfloor x\rfloor\neq|x|$

بنابراین باید مقادیری برای x تعیین کنیم و آن‌ها را از مجموعه‌ی اعداد حقیقی خارج سازیم.

پس: $\lfloor x\rfloor-|x|=0\Rightarrow\lfloor x\rfloor=|x|\Rightarrow$

$f(x)=\lfloor x\rfloor \,\&\, g(x)=|x|$

اکنون نمودارهای توابع $f(x)=\lfloor x\rfloor$ و $g(x)=|x|$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



با توجه به نمودارهای توابع $f(x)=\lfloor x\rfloor$ و $g(x)=|x|$ در می‌یابیم که تمام مقادیر $x\in(IR-Z^+)$ در نامساوی $\lfloor x\rfloor\neq|x|$ صدق می‌کنند.

مثال ۵ـ دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt{\lfloor x\rfloor-x^2}}$ کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

الف) IR ب) $IR-\{0\}$

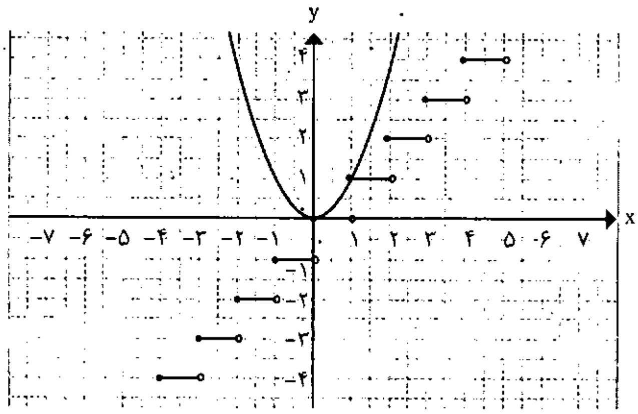
ج) $\{\ \}$ د) $IR-Z$

جواب: گزینه‌ی (ج) صحیح است، زیرا:

$\sqrt{\lfloor x\rfloor-x^2}>0\Rightarrow\lfloor x\rfloor-x^2>0\Rightarrow\lfloor x\rfloor>x^2\Rightarrow$

$f(x)=\lfloor x\rfloor \,\&\, g(x)=x^2$

اکنون نمودارهای توابع $f(x)=\lfloor x\rfloor$ و $g(x)=x^2$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



با توجه به نمودارهای توابع $f(x)=\lfloor x\rfloor$ و $g(x)=x^2$ در می‌یابیم، هیچ مقدار برای x یافت نمی‌شود که در نامعادله‌ی $\lfloor x\rfloor>x^2$ صدق کند.

مثال ۶ـ دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^3-|x|}}{\sqrt{\sqrt{x}-x}}$ کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

الف) $\{\ \}$ ب) $[1,+\infty)$

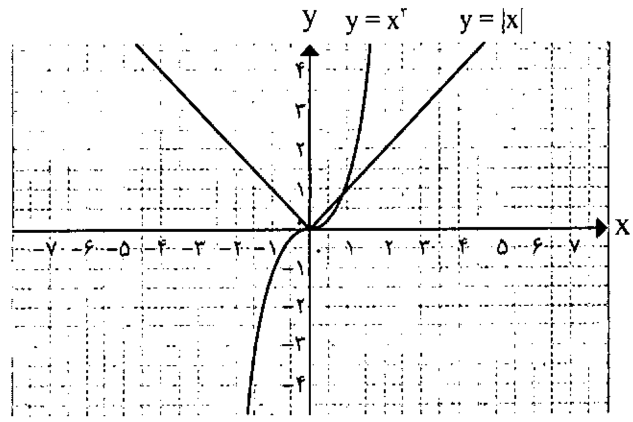
ج) IR د) $(-1,1)$

جواب: گزینه‌ی (الف) صحیح است، زیرا:

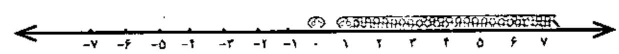
$\sqrt{x^3-|x|}\geq 0\Rightarrow x^3-|x|\geq 0\Rightarrow$

$x^3\geq|x|\Rightarrow f(x)=x^3 \,\&\, g(x)=|x|$

اکنون نمودارهای توابع $f(x)=x^3$ و $g(x)=|x|$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



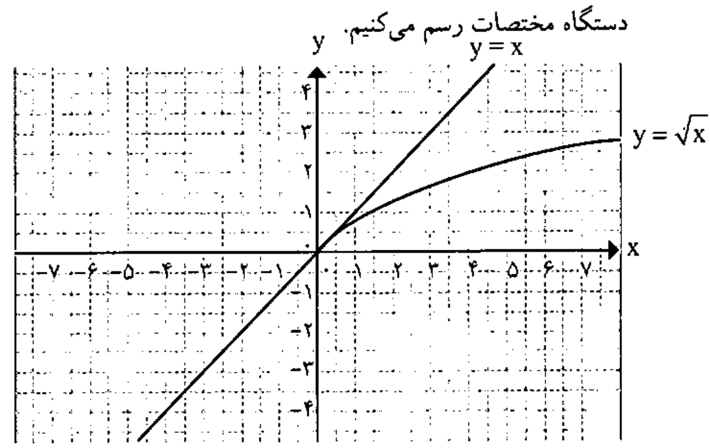
با توجه به نمودارهای توابع $f(x)=x^{3}$ و $g(x)=|x|$ در می‌یابیم، مقادیری برای x یافت می‌شوند که در نامعادله‌ی $x^{3}\geq |x|$ صدق می‌کنند. این مقادیر روی محور اعداد زیر نمایش داده شده‌اند.



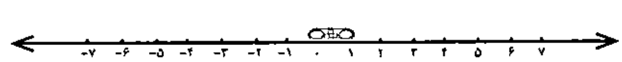
$$\sqrt{\sqrt{x}-x}>0 \Rightarrow \sqrt{x}-x>0 \Rightarrow \sqrt{x}>x$$

$$\Rightarrow f(x)=\sqrt{x}\ \&\ g(x)=x$$

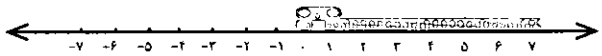
اکنون نمودارهای توابع $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=x$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



با توجه به نمودارهای توابع $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=x$ در می‌یابیم، مقادیری برای x یافت می‌شوند که در نامعادله‌ی $\sqrt{x}>x$ صدق می‌کنند. این مقادیر روی محور اعداد زیر نمایش داده شده‌اند.



اکنون دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^{3}-|x|}}{\sqrt{\sqrt{x}-x}}$ را که از اشتراک دامنه‌ی صورت کسر با مخرج آن حاصل می‌شود، می‌توان روی محور اعداد زیر مشخص کرد.



مثال ۷ـ دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{x^{3}-|x|+\sqrt{x}}{\sqrt{\lfloor x\rfloor-e^{x}}}$ کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

الف) $\{0,1\}$ ب) $\mathbb{R}$

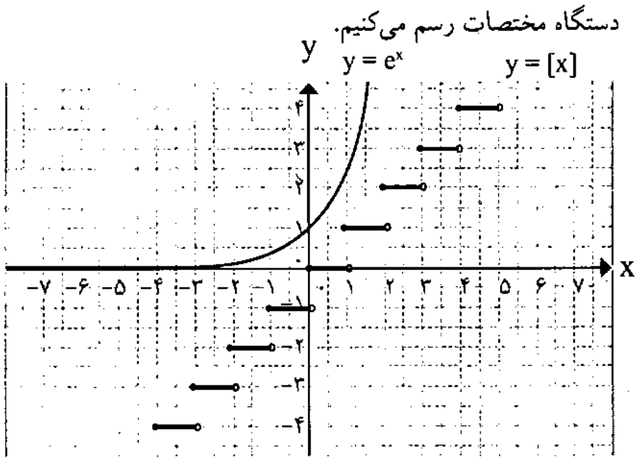
ج) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ د) $\{\ \}$

جواب: گزینه‌ی (د) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt{\lfloor x\rfloor-e^{x}}>0 \Rightarrow \lfloor x\rfloor-e^{x}>0 \Rightarrow \lfloor x\rfloor>e^{x}$$

$$\Rightarrow f(x)=\lfloor x\rfloor\ \&\ g(x)=e^{x}$$

اکنون نمودارهای توابع $f(x)=\lfloor x\rfloor$ و $g(x)=e^{x}$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



با توجه به نمودارهای توابع $f(x)=\lfloor x\rfloor$ و $g(x)=e^{x}$ در می‌یابیم، هیچ مقدار برای x یافت نمی‌شود که در نامعادله‌ی $\lfloor x\rfloor>e^{x}$ صدق کند.

مثال ۸ـ دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{|\lfloor x\rfloor-x|}{\sqrt{\lfloor -x\rfloor-|x|}}$ کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

الف) $[0,+\infty)$ ب) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}^{+}$

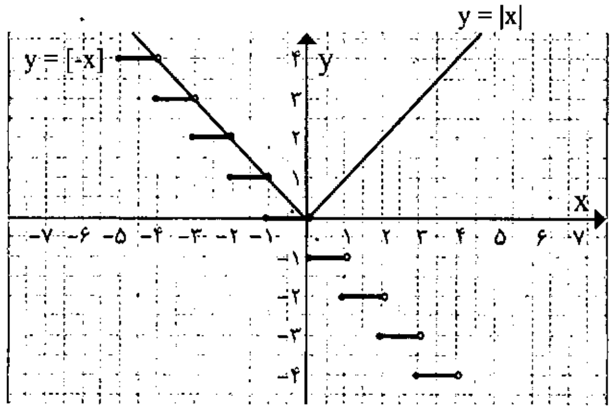
ج) $\{\ \}$ د) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}^{-}$

جواب: گزینه‌ی (ج) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt{\lfloor -x\rfloor-|x|}>0 \Rightarrow \lfloor -x\rfloor-|x|>0 \Rightarrow \lfloor -x\rfloor>|x|$$

$$\Rightarrow f(x)=\lfloor -x\rfloor\ \&\ g(x)=|x|$$

اکنون نمودارهای توابع $f(x)=\lfloor -x\rfloor$ و $g(x)=|x|$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



با توجه به نمودارهای توابع $f(x)=\lfloor -x \rfloor$ و $g(x)=|x|$ درمی‌یابیم، هیچ مقدار برای x یافت نمی‌شود که در نامعادله‌ی $|x|>\lfloor -x \rfloor$ صدق کند.

تمرین: دامنه‌ی هر یک از توابع زیر را مشخص کنید.

۱) $f(x)=\dfrac{\sqrt{|x|-x}}{\sqrt{\lfloor x \rfloor - x}}$

۲) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-|x|}}{\sqrt{1-x^2}}$

۳) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{\ln(x)-\lfloor x \rfloor}}$

۴) $f(x)=\dfrac{\lfloor x^3+x^2-|x|+1 \rfloor}{\sqrt{x-\sqrt{x}}}$

۵) $f(x)=\dfrac{|x+1|-|x+2|}{|x|-\lfloor -x \rfloor}$

۶) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-|x|}}{\sqrt{e^x-\lfloor x \rfloor}}$

۷) $f(x)=\dfrac{2^x+\lfloor \sqrt{x} \rfloor}{|x|-x^3}$

۸) $f(x)=\dfrac{x^4+|\lfloor x-2 \rfloor|}{\sqrt{\sqrt{x}-x^3}}$

منابع

۱ـ حسابان (رشته‌های ریاضی و فیزیک). مؤلفان: محمدحسن بیژن‌زاده، غلامعلی فرشادی و یدالله ایلخانی‌پور. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. ۱۳۸۸.

۲ـ ریاضیات (۱). مؤلفان: اسماعیل بابلیان، میرزا جلیلی، رضا شهریاری و علیرضا مدقالچی. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. ۱۳۸۸.

زیرنویس

1. Domain 2. Functions 3. Equations 4. Algebraic 5. Transcendental

۶. البته ممکن است با مواردی روبه‌رو شویم که قادر نباشیم به صورت آنی نمودار آن‌ها را تداعی کنیم. در این حالت با توجه به روش‌هایی که برای رسم نمودار فرا گرفته‌ایم، نمودار مربوطه را رسم می‌کنیم.

ادامه‌ی مطلب صفحه‌ی ۴۱

♦ مجلات (Journals)

☐ فهرست مجلات ریاضی مقدماتی
(List of elementary mathematics journals)

☐ لیست مجلات با ستون‌های مسائل ریاضی
(List of journals with mathematical problem columns)

☐ مجلات ریاضی که کتاب‌های ریاضی را مرور می‌کنند.
(Mathematics journals that review mathematics books.)

☐ مجلات با ستون‌های مسائل آنلاین
(Journals with online problem columns)

♦ اطلاعات (Info)

☐ لغت‌نامه‌ی ریاضی آنلاین
(Online mathematics dictionary)

☐ واژه‌نامه‌ی آنلاین نمادگذاری تخصصی
(Online glossary of technical notation)

☐ راهنمای ریاضی ایالتی
(state mathematics guidelines)

☐ برنامه‌های تابستانی ریاضی/اردوگاه‌های تابستانی برای دانش‌آموزان دبیرستان
(Mathematics summer programs/Summer camps for high school students)

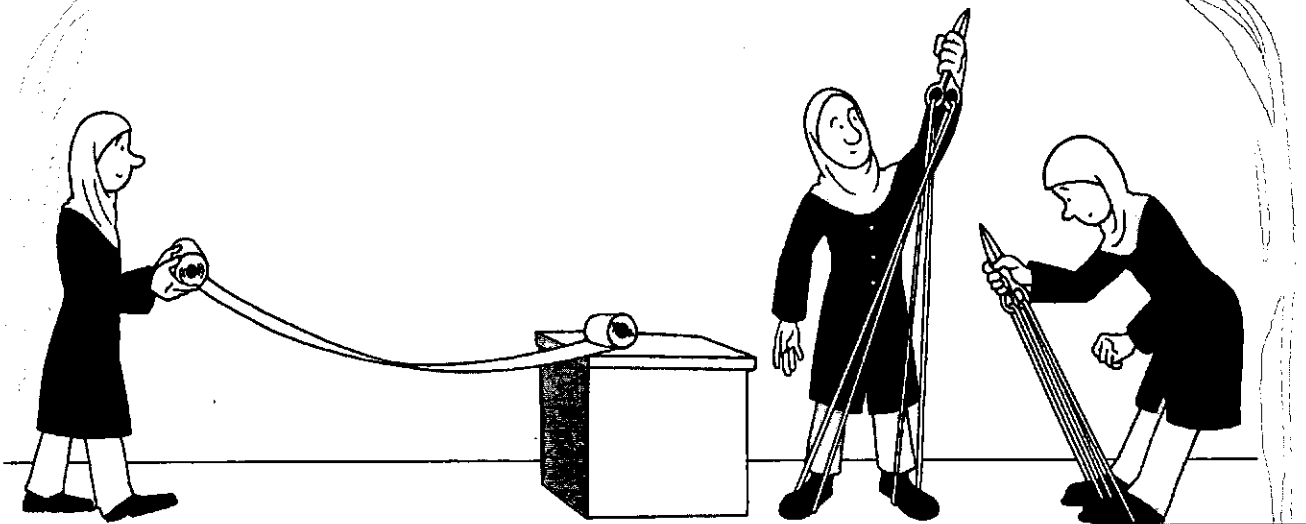
♦ درباره‌ی ما (About Us)

☐ درباره‌ی
(About Mathpro Press) Mathpro press

☐ درباره‌ی لوگوی ما (About our logo)

☐ چگونه با ما تماس بگیرید (How to contact us)

☐ فراخوان مؤلفان (Authors wanted)



سرگرمی برای اندیشه‌پروری و ذهن‌ورزی

نویسنده: مارتین گاردنر / مترجم: حسن نصیرنیا

کلیدواژه‌ها: پی. ای. ام دیراک، قیچی دیراک، حرکت‌های چرخشی، فرمیون.

قیچی دیراک

پی.ای.ام دیراک[1] یکی از نوابغ بزرگ خلاق در نظریه‌ی کوانتوم جدید بود. در این مقاله می‌خواهیم معمای توپولوژیک دل‌پذیری را که با استفاده از یک قیچی و مقداری نخ ارائه می‌شود، معرفی کنیم. دیراک، هنگامی که در دهه‌ی سال‌های ۲۰ عمر خود بود، این معما را ابداع کرد تا به کمک آن، به‌شرح یکی از عجیب‌ترین خواص الکترون بپردازد.

اگر یک صندلی را ۳۶۰ درجه بچرخانیم، نسبت به همه‌ی اشیای درون اتاق به وضع نخست برمی‌گردد. اما اگر یک الکترون ۳۶۰ درجه چرخانده شود، به همان وضع پیشین برنمی‌گردد. برای این که الکترون نسبت به همه‌ی اشیای پیرامونش به وضع نخست بازگردد، لازم است یک دور کامل دیگر ـ یعنی روی هم ۷۲۰ درجه ـ چرخانده شود.

درک این مطلب بدون وارد شدن به مبحث ریاضیات پیشرفته‌ی مکانیک کوانتوم امکان‌پذیر نیست. دیراک که دریافته بود، دانشجویان مبتدی او در فهم این چنین ویژگی خارق‌العاده‌ی برخی ذرات خاص دچار زحمت هستند، شیوه‌ای ملموس برای نمایش دادن آن اندیشید. من نخستین بار در سال ۱۹۵۹ از قیچی دیراک، که نام معمای او بود، آگاهی یافتم و در آن هنگام مطالب ستون «بازی‌های ریاضی» مجله‌ی Scientific American را تنظیم می‌کردم. در آن سال نامه‌ای برای دیراک نوشتم و پاسخ مختصر و مفید او به نامه‌ام که از دانشگاه کمبریج ارسال شده بود را دریافت کردم. اکنون یکی از دارایی‌های گران‌قدر من است:

آقای گاردنر عزیز

متأسفم از این که به سبب مشغله‌ی فراوان نتوانستم پاسخ‌نامه‌ی شما را زودتر بدهم. نخستین بار در سال ۱۹۲۹ به تفکر در مسئله‌ی نخ‌ها پرداختم و از آن برای نشان دادن یک ویژگی حرکت‌های چرخشی استفاده کردم؛ و آن این‌که دوبار چرخش یک جسم حول یک محور، می‌تواند با حرکت پیوسته از طریق یک مجموعه حرکاتی صورت گیرد که هریک به وضعیت اصلی ـ وضعیتی که در آن اصلاً حرکتی وجود نداشته است ـ منجر شود.

این یک نتیجه از این ویژگی چرخش‌هاست که گشتاور زاویه‌ای یک جسم چرخان می‌تواند نصف یک کوانتوم باشد، ولی نمی‌تواند هیچ کسر دیگری از یک کوانتوم باشد.

ارادتمند پی.ای. ام. دیراک

آخرین جمله‌ی دیراک به این حقیقت اشاره دارد که چرخش سریع همه‌ی ذرات، موسوم به «فرمیون»[2]، بسته به جهت چرخش آن‌ها، برابر به علاوه یا منهای ۱/۲ است. متأسفانه در این مقاله جای آن نیست که درباره‌ی رمز و راز چرخش سریع ذره یا آن‌گونه که جیمزبلیش[3] در رمان‌های علمی ـ تخیلی‌اش، ضمن کار با اسباب ضدگرانشی «چرخش سرسام‌آور» نام می‌گذارد، بحث کنیم. به‌طور کلی، چرخش سریع ـ مانند چرخش یک فرفره ـ پدیده‌ی مبهمی است و نمی‌توان آن را با اصطلاحات فیزیک کلاسیک مجسم کرد یا شرح داد.

برای نشان دادن معمای دیراک، یک قیچی و دو قطعه نخ هریک به طول تقریبی ۳ متر نیاز دارید. هر قطعه نخ را از یکی از دو سوراخ

دسته‌ی قیچی بگذرانید و دو انتهای آن را گره بزنید تا دوحلقه تشکیل شود. هم‌چنان که درشکل می‌بینید، پاهای خود را درون دو حلقه‌ی درست شده بگذارید و قیچی را تا مقابل صورت خود بالا بیاورید. به این ترتیب، چهار رشته نخ کشیده و بدون تاب خواهید داشت که رابط میان قیچی و کف اتاق خواهند بود.

حال قیچی را به حالت قائم طوری بگیرید که نوک آن به‌طرف سقف باشد. سپس در همین حالت قیچی را حول محور قائم، درست به زاویه‌ی ۳۶۰ درجه (خواه در جهت حرکت عقربه‌های ساعت، خواه در جهت عکس آن) بچرخانید تا رشته‌های نخ به هم تابیده شوند.

آیا می‌توانید ترتیبی اتخاذ کنید که بدون چرخاندن قیچی در هریک از دو جهت مذکور، تاب نخ‌ها از هم باز شود؟ شما می‌توانید برای انجام این کار هر نقل و انتقالی که می‌خواهید در هوا به قیچی بدهید، مشروط بر این که قیچی همواره در فضا در همان جهت اولیه باقی بماند و نخ‌ها از زیرپاهایتان درنیایند. پاسخ پرسش بالا این است که باز کردن تاب نخ‌ها امکان‌پذیر نیست. ممکن است بتوانید نحوه‌ی تاب‌خوردگی نخ‌ها را عوض کنید، ولی هرچه با نخ‌ها و قیچی کلنجار روید، نمی‌توانید آن‌هارا به وضعیت نخست بازگردانید.

پس از این که متقاعد شدید که این کار عملی نیست، مجموعه‌ی نخ‌ها و قیچی را به شکل نخست درآورید. حال قیچی را در هر جهتی که می‌خواهید دو دور کامل (۷۲۰ درجه) بچرخانید. خواه باور کنید، خواه باور نکنید، بدون ایجاد چرخش بیشتر، قیچی و نخ‌ها به همان وضعیت نخست بازمی‌گردند! از دیدگاه یک توپولوژیست، این به معنای آن است که پس از دو دور کامل چرخاندن قیچی، ساخت توپولوژیک قیچی و نخ‌ها، نسبت به شما و همه‌چیز موجود در اتاق، تغییر نیافته است. برای آگاهی از راه حل شگفت‌انگیز این معما به «پاسخ» مراجعه کنید.

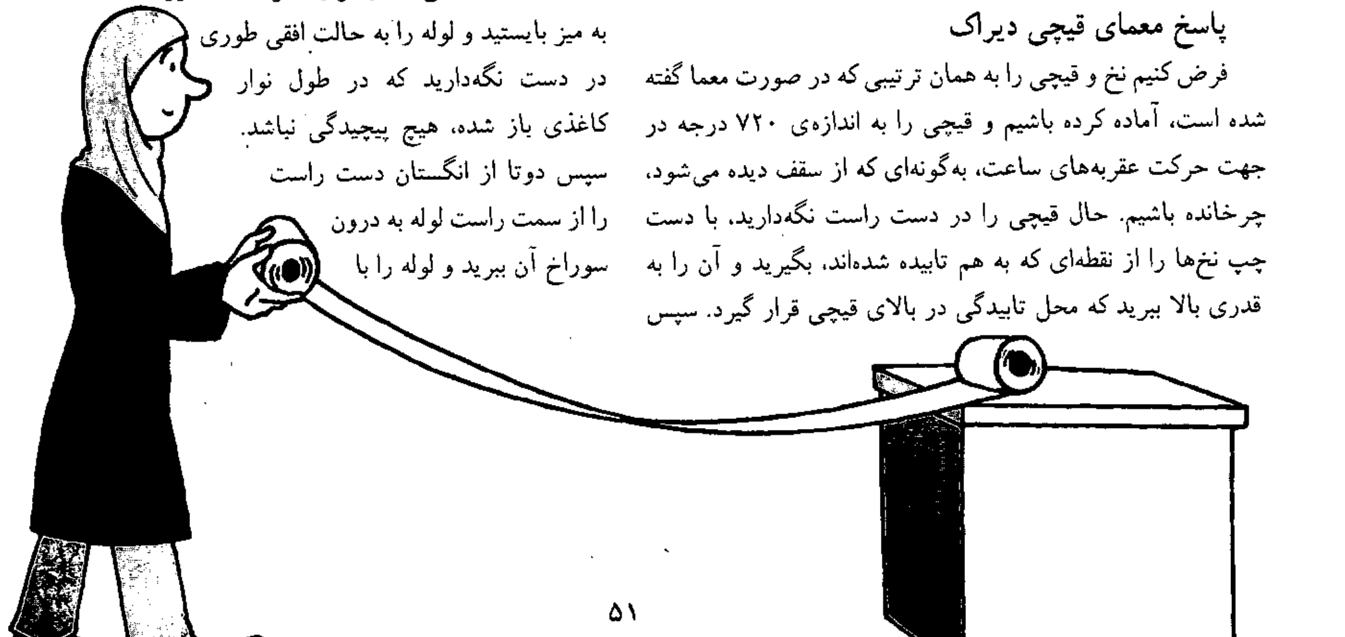
پاسخ معمای قیچی دیراک

فرض کنیم نخ و قیچی را به همان ترتیبی که در صورت معما گفته شده است، آماده کرده باشیم و قیچی را به اندازه‌ی ۷۲۰ درجه در جهت حرکت عقربه‌های ساعت، به‌گونه‌ای که از سقف دیده می‌شود، چرخانده باشیم. حال قیچی را در دست راست نگه‌دارید، با دست چپ نخ‌ها را از نقطه‌ای که به هم تابیده شده‌اند، بگیرید و آن را به قدری بالا ببرید که محل تابیدگی در بالای قیچی قرار گیرد. سپس حلقه‌ی تاب را از بالای قیچی بگذرانید تا روی بازوی راست شما بیفتد. قیچی را در دست چپ بگیرید. آن‌گاه با رها کردن حلقه‌ی نخ، قیچی را با دست راست از گیر آزاد کنید. حال اگر قیچی را بلند کنید، وضعیت قیچی و نخ‌ها به حالت اول بازمی‌گردد و تابیدگی از میان می‌رود!

برای اثبات معما لازم نیست حتماً از قیچی استفاده کنید؛ چه، هر شیء دیگری که برگزینید می‌تواند وافی به مقصود باشد. و هم چنین هر تعداد رشته نخ را (مشروط بر آن‌که دست کم از دو رشته کم‌تر نباشد) بخواهید، می‌توانید به شیء انتخابی ببندید و سرهای آزاد نخ‌ها را هم به هر نقطه‌ای از سقف ببندید. برای مثال، فرض کنید شیء انتخابی یک قهوه‌جوش باشد که دسته‌ی آن را با دوازده رشته نخ کشسان به هرجایی از دیوار، سقف یا کف اتاق بسته‌اید. اگر قهوه‌جوش را حول محوری به اندازه‌ی ۳۶۰ درجه بچرخانید، با هیچ گونه دستکاری نمی‌توان رشته نخ‌های کشسان را از تاب درآورد. اما اگر آن را به‌جای ۳۶۰ درجه، ۷۲۰ درجه بچرخانید، امکان بازگرداندن آن به وضعیت اول همواره میسر است.

در پاراگراف بعد گونه‌ی دیگری از تجربه‌ی فوق را بررسی می‌کنیم که برای برخی، روشن می‌سازد که چگونه می‌توان شیئی را که توسط یک کابل یا یک لوله‌ی لاستیکی به دیوار متصل شده است، پشت سرهم آن‌قدر چرخاند ـ بی‌آن که کابل تاب بخورد ـ تا اتصال باز شود. همین‌طور تجربه‌ی زیر می‌تواند مبین این مشاهده‌ی بسیار جالب باشد که چگونه شخص در حال تاب یا واتاب دادن رشته‌ی سیم برق یا لوله‌ی لاستیکی، با مشکل پیچ و تاب خوردن آن‌ها (رشته‌ی سیم و کابل) دست به گریبان است.

یک دستمال توالت لوله‌ای بردارید. انتهای آزاد دستمال را زیر یک کتاب سنگین واقع بر روی میز قرار دهید. در حالی که دستمال لوله‌ای کاغذ در دست را باز می‌کنید، از میز دور شوید و به فاصله‌ی مشخصی از آن قرار بگیرید. حال رو به میز بایستید و لوله را به حالت افقی طوری در دست نگه‌دارید که در طول نوار کاغذی باز شده، هیچ پیچیدگی نباشد. سپس دوتا از انگشتان دست راست را از سمت راست لوله به درون سوراخ آن ببرید و لوله را با



آن دور انگشت نگه‌دارید. آن‌گاه لوله را شل کنید (اندکی به طرف میز بروید) و با دست چپ، کاغذ را به اندازه‌ی یک دور کامل از لوله بازکنید، بی‌آن‌که کاغذ پاره شود یا لوله بچرخد. به این ترتیب در نوار کاغذی حد فاصل لوله و کتاب یک پیچیدگی ایجاد می‌شود.

حال همین عمل را بار دیگر تکرارکنید. با این تفاوت که نقش انجام شده توسط دست چپ را به دست راست و نقش انجام شده توسط دست راست را به دست چپ واگذار کنید. پس از باز کردن یک دور کامل کاغذ با دست راست، یک پیچ دیگر (معکوس با پیچ قبلی) در طول نوار ایجاد می‌شود و سرانجام طول نوار افزایش می‌یابد و پیچ قبلی از میان می‌رود. تاکنون هیچ چرخشی به حلقه نداده‌ایم. حال اگر بخواهیم به وضعیت نخست برگردیم، کافی است لوله را دو دورکامل حول محورش به عقب بپیچانیم. با تکرار این روند، می‌توانیم در طول نوار به هر تعداد بار که بخواهیم پیچیدگی ایجاد کنیم، بی‌آن که کاغذ را پاره کرده باشیم.

حال می‌خواهیم به شرح این موضوع بپردازیم که چگونه این تجربه‌ها به «خصوصیت چرخش‌ها مربوط می‌شوند؛ به‌این معنی که دوبار چرخش (کامل) یک جسم حول یک محور می‌تواند به‌تدریج در آن تغییر شکل ایجاد کند و این کار از طریق یک مجموعه چرخش‌هایی که هریک به‌وضعیت اولیه ـ وضعیتی که در آن ابداً هیچ چرخشی مشهود نیست ـ منجر می‌شود، صورت می‌گیرد» (نگاه کنید به نامه‌ی دیراک، در قسمت صورت معما).

در آزمایش ما، به قطعه‌هایی از کاغذ توالت که همواره روی لوله قرار می‌گیرند، دو چرخش کامل داده می‌شود. در سایر قطعه‌های کاغذ که نزدیک لوله قرار دارند، حرکت‌های دیگری ایجاد می‌شود؛ اما در پایان تجربه، هریک به وضعیت اصلی درمی‌آید. هم‌چنین، اگر قطعه‌های متفاوت نوار کاغذی را کوچک فرض کنیم، حرکت ایجاد شده درهریک از آن‌ها، در مقایسه با قطعه‌های مجاور بسیار مشابه خواهد بود. باز اگر هم‌چنان در طول نوار به سوی کتاب پیش برویم، درمی‌یابیم که رشته‌های حرکت‌های موردنظر دیراک به هیچ حرکتی منجر نخواهد شد.

از آن‌جا که چرخش در حول یک محور عمود بر راستای نوار کاغذ صورت می‌گیرد، تجربه اصلاً تعجب‌آور به‌نظر نمی‌رسد. ولی البته راستای نخست نوار حائز اهمیت نیست؛ چه نوار کاغذ را می‌توان فراتر از میز امتداد داد و به نقطه‌ای روی دیوار ـ که عمود بر محور چرخش لوله است ـ چسباند.

الگوی نخ‌های دیراک با آن‌چه که توپولوژیست‌ها «کلاف‌های تاری» می‌نامند، هم‌خوانی دارد. برای دست‌یابی به اطلاعات بیشتر در این زمینه که چگونه معمای قیچی دیراک با کلاف‌های تاری و مکانیک کوانتوم ارتباط می‌یابد، رجوع کنید به مقاله‌ی «کلاف تاری و نظریه‌ی کوانتوم»[۴] نوشته‌ی هربرت برنشتین و آنتونی فیلیپ در شماره‌ی ژوئیه‌ی ۱۹۸۱ از مجله‌ی Scientific American و هم‌چنین به نامه‌های ارسالی خوانندگان درباره‌ی این مطلب که در شماره‌های اکتبر و نوامبر همان سال مجله درج شده است. در شماره‌ی دسامبر ۱۹۷۵ همان مجله، در ستون «دانشمند آماتور»، شرحی در مورد کاربرد عملی قیچی دیراک در ساختن اسباب مکانیکی ابتکاری درج شده است که در آن یک کابل، پیوسته در گردش است بی‌آن که پیچ و تاب بردارد.

در مورد دیراک روایت‌های شنیدنی بسیاری نقل کرده‌اند که یکی از بهترین آن‌ها به خواهر یوجین ویگنر[۵]، برنده‌ی جایزه‌ی فیزیک نوبل مربوط می‌شود. معروف است که اندکی پس از ازدواج دیراک با خواهر ویگنر، دیراک میزبان دوستی قدیمی بود که از جریان ازدواج او اطلاعی نداشت. خوب است ادامه‌ی داستان از قول جورج گاموف[۶] درکتابش موسوم به «سی‌سالی که فیزیک را تکان داد» بشنویم. گاموف می‌نویسد: «مهمان متوجه حضور زنی در منزل دیراک شد که چای آورد و بعد روی کاناپه نشست ... سپس دیراک با هیجان گفت: اوه، من فراموش کردم او را به تو معرفی کنم! او خواهر ویگنر است.»

گاموف در جای دیگر گزارشی از دیدار دیراک با پیتر کاپیتسا[۷]، فیزیک‌دان نامدار روسی می‌دهد. دیراک که محو تماشای طرح لباس دست‌بافت خانم کاپیتسا شده بود، چند ساعت پس از ترک دوستش، با عجله برگشت و خود را به منزل میزبان رساند تا به خانم کاپیتسا بگوید که در این مدت درباره‌ی جنبه‌های توپولوژیک لباس او فکر کرده و راه دیگری برای بافتن طرح آن لباس یافته است. پس از این که دیراک آن شیوه‌ی بافتن را به او نشان می‌دهد، خانم کاپیتسا به مهمان می‌گوید که الحق با این شیوه، او گلابتون‌دوزی را دوباره اختراع کرده است.

داستان آخر ما باز از گاموف است که به وقت پرسش و پاسخ بعد از یکی از سخنرانی‌های دیراک مربوط می‌شود. یکی از حاضران در جلسه‌ی سخن‌رانی برمی‌خیزد و می‌گوید: «من نمی‌فهمم که شما چه طور آن فرمول سمت چپ تخته‌ی سیاه را استنتاج کردید.»

دیراک پاسخ می‌دهد: «این پرسش شما یک قضیه است، نه سؤال. سؤال بعدی، لطفاً.»

پی‌نوشت

۱. Paul Adrien Maurice Dirac
۲. Fermion
۳. James Blish
۴. Fiber bundles and quantum theory
۵. Eugene Wigner
۶. George Gamow
۷. Peter Kapitza

رمزنگاری و رمزگشایی

• سید محمدرضا هاشمی موسوی
hasem_moosavi@yahoo.com

کلیدواژه‌ها: رمزنگاری، رمزگشایی، نوتاریکن، رمز ابجدی.

در تاریخ، به مواردی برمی‌خوریم که رمزگشایی سبب موفقیت‌های بسیاری در امور سیاسی، نظامی، تاریخی و ... هم‌چنین فعالیت‌های ضدجاسوسی بوده است. هدف از تدوین مقاله‌ی حاضر، آشنا کردن خواننده با بعضی از شیوه‌های بنیادی رمزگشایی است. کار از شرح یک فرایند رمزنگاری شروع می‌شود و به شیوه‌هایی که بتوان با آن‌ها بدون داشتن اطلاعی درباره‌ی آن فرایند، به بازسازی و گشودن

مقدمه

یکی از اساسی‌ترین علل پیشرفت بشر را می‌توان «برقراری ارتباطات با هم‌نوعان» دانست. یک جنبه‌ی اصلی این قابلیت، توانایی ارتباط از طریق «نوشتن» است. در بعضی موقعیت‌ها، کسانی می‌خواستند اطلاعات خود را فقط به عده‌ی محدودی برسانند. آنان اسراری داشتند که می‌خواستند فاش نشود. به همین دلیل، دنبال طرح‌هایی بودند که از طریق آن‌ها بتوانند مکاتبه‌های خود را از دید عمومی نامفهوم سازند. روش‌های کلی به انجام رساندن چنینْ مقصودی، یعنی پنهان داشتن مفهوم پیام‌ها، مبحثی را تشکیل می‌دهد که آن را با عنوان «رمزنگاری» می‌شناسیم.

پیش از پیدایش پست و تلگراف، ارسال پیام از طریق قاصد خصوصی انجام می‌گرفت. در این شیوه هم باز لازم بود که از روش‌های پنهان‌سازی و رمزنگاری پیام استفاده شود؛ زیرا امکان دستگیر شدن قاصد یا خیانت وی وجود داشت.

در روزگار کنونی نیز که ارسال پیام از طریق الکتریکی یا بی‌سیم انجام می‌شود، برای هرکسی این امکان وجود دارد که با انتخاب فرکانس مناسب، پیام ارسالی را دریافت و رونوشتی از آن تهیه کند. در چنین موردی هم، اگر فرستنده قصد پنهان کردن محتوای پیام را داشته باشد، باید از نوعی شیوه‌ی پنهان‌سازی یا رمزنگاری استفاده کند.

اما همان‌طور که فرستنده‌ی پیام می‌کوشد اطلاعات خود را از هر کس به جز گیرنده‌ی موردنظر پنهان دارد، کسانی هم هستند که به کشف محتوای پیام بسیار علاقه‌مندند و چه بسا این افراد از همان کسانی باشند که فرستنده تلاش دارد، اطلاعات خود را از ایشان پنهان دارد. البته تلاش چنین کسانی برای آشکار کردن رازی که پیام حاوی آن است، بدون داشتن اطلاعاتی درباره‌ی جزئیات عمل رمزنگاری ممکن است تلاشی بیهوده باشد. در هر صورت تلاشی که از این راه و باهدف خواندن پیام‌های سرّی انجام می‌پذیرد، زیر عنوان مبحثی به نام «رمزگشایی» قرار می‌گیرد.

رمز پرداخت، ختم می‌شود. البته باید به این نکته توجه داشت که با درک نحوه‌ی تحلیل در رمزگشایی می‌توان روش‌هایی برای بهبود رمزنگاری یافت؛ یعنی روش‌هایی برای رفع آن نواقص رمزنگاری که در رمزگشایی مورد استفاده قرار گرفته‌اند. چنین بهبودی مسئله‌ی جدیدی را برای رمزگشا به‌دنبال می‌آورد. این بهبود که به صورت پی‌درپی انجام گرفته است، در حقیقت تاریخ پیشرفت «رمزشناسی» بوده است. رمزشناسی عنوانی است که برای نشان دادن هر دو مفهوم رمزنگاری و رمزگشایی به کار می‌رود.

فرایندهای تحلیلی که در رمزگشایی به کار می‌روند، بااستفاده از روش‌هایی صورت می‌گیرند که بعضی از آن‌ها ریاضی‌اند، بعضی مربوط به زبان‌اند. بعضی ماهیت مهندسی دارند و بعضی هم به راحتی قابل توصیف نیستند؛ مانند شانس، حس ششم و غیره.

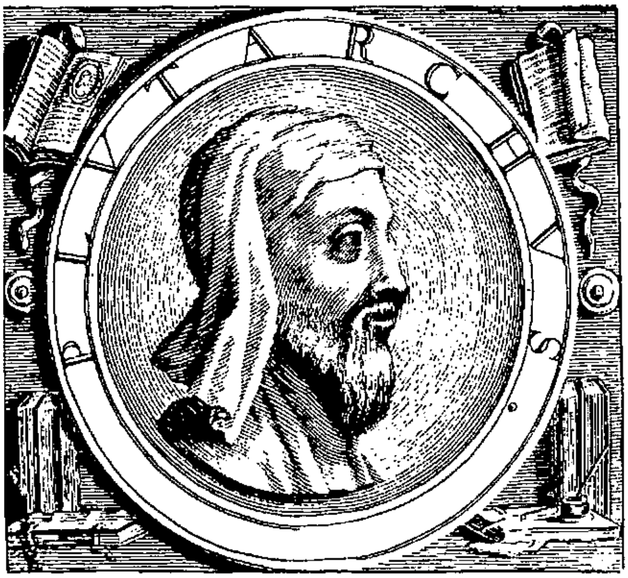
این توضیح لازم است که سیستم‌های رمزنگاری که در این جا بررسی می‌شوند، هم مقدماتی‌اند و هم به‌طور کامل شناخته شده‌اند. از آن‌جا که سیستم‌های رمزنگاری قراردادی هستند، ممکن است خواننده با درک این سیستم‌ها و ابتکار عمل لازم، بتواند سیستم‌های رمزنگاری پیچیده‌تری را طراحی کند. البته مهم‌ترین نوع پیشرفت‌های جدید با متداول شدن ماشین‌های الکترومکانیکی و الکترونیکی حاصل شده‌اند و به سیستم‌های رمزنگاری ماهیت پیچیده‌تری بخشیده‌اند. بنابراین، شیوه‌های گشودن رمز چنین سیستم‌هایی نیز باید به‌همان نسبت پیچیده‌تر و پیشرفته‌تر باشد.

توصیه‌ی اساسی که می‌تواند برای خواننده مفید باشد، این است که به دقت روش‌های رمزنگاری و رمزگشایی را مطالعه کند و با تمرین‌های مناسب، هر یک از روش‌ها را به طور کامل فرا گیرد. زیرا اگر کار و تمرینی انجام نشود، مطالب فرا گرفته شده به سرعت فراموش می‌شوند. هم‌چنین، همیشه سعی کنید که با فراگرفتن یک روش به دنبال تعمیم و یا روش‌های ساده‌تر و یا حتی پیچیده‌تر غیر از آن روش باشید، تا همه‌ی روش‌ها را در برابر فراموشی و دیگر خطرات حفظ آن، ایمن سازید.

تاریخچه‌ی مختصر رمزنویسی

از ۴۰۰۰ سال پیش، در هیروگلیف‌های مصری، آثاری از رمز به معنی اخص آن پیدا شد. از هندی‌ها، ایرانی‌ها، اسپارتی‌ها، آشوری‌ها و بابلی‌ها هم نمونه‌هایی تاریخی از رمزنگاری موجود است.

آن‌طورکه از نوشته‌های پلوتارک، مورخ یونانی برمی‌آید، اولین ماشین رمز را می‌توان به اسپارت‌ها منتسب کرد که عبارت بود از نوار چرمی و یک چوب استوانه‌ای شکل. کاربرد آن به این صورت بود که مطلبی را روی نوار چرمی می‌نوشتند و فقط وقتی این نوار (با عرض مشخصی) روی استوانه‌ی چوبی (با قطر مشخصی) پیچیده



می‌شد، آن مطلب قابل خواندن بود.

اولین رمز جدولی در آثار یونانی‌ها دیده شده است. جاسوسان یونانی در ایران، پیام‌های خود را روی سرتراشیده‌ی غلامان و بردگان می‌نوشتند و پس از بلندشدن مو، آن‌ها را به یونان روانه می‌کردند.

با پیدایش اسلام، حکما و ریاضی‌دانان مسلمان به طور جدی به امر رموز اهتمام ورزیدند، زیرا رمز و کاربرد آن حتی در قرآن هم مشاهده می‌شود. حروف مقطّعه‌ی قرآن که ابتدای بعضی از سوره‌ها آمده، مانند یک کلید رمز مقابل چشم مسلمین قرار داشته است. هم‌چنین، نمونه‌های دیگر شبه رمز هم در قرآن به چشم می‌خورند؛ مثل «کل فی فلک» که مقلوب همین عبارت است. مسلمانان فن آزمایی‌های زیادی برای حل آن به خرج داده‌اند. برای مثال، شیعیان از اتصال این حروف مقطعه جمله‌ی «صراط علی حق نسکه» را ساخته‌اند. سایر حکما از همان قدیم به این واقعیت پی‌برده بودند که بعضی از سوره‌ها که دارای حروف رمز هستند، درصد تکرار آن حروف در کل سوره از سایر حروف بیشتر است. ازاین واقعیت امروزه به عنوان یکی از شگردهای شکستن رمز استفاده می‌کنند.

سیستم رمز دیگری که به نام «رمز ابجدی» (ابجد صغیر و ابجد کبیر[1]) مرسوم بوده، به ظاهر پیش از اسلام میان اعراب رواج داشته است و از آن برای به‌خاطر سپردن اعداد و ارقام استفاده می‌کردند. یکی از حکمای اسلامی به نام شهاب‌الدین عبدالله قلقشندی که به موضوع رمزها پرداخته، در کتاب معروف خود «صبح الاعشی» که در واقع یک دایرةالمعارف عظیم چند جلدی است، در مورد تاریخ رمز فصلی را آورده است. وی از شش نوع سیستم رمزی نام می‌برد که از این قرارند:

۱. قراردادن حروف به جای یکدیگر؛

۲. پشت و رو نوشتن کلمات؛

۳. تحریف و قلب (به عکس کردن) حروف و کلمات؛

۴. تبدیل حروف به ارقام از طریق رمز ابجدی؛

۵. معادل کردن هر حرف با تعدادی حروف که به حساب ابجدی با یکدیگر برابر باشند؛

۶. معادل کردن هر حرف یا نام مرد یا پرنده یا شیء دیگر و ...

در آثار ثعالبی و هم‌چنین ابن خلدون نیز مطالبی درباره‌ی رمز به چشم می‌خورد. از نویسندگان که بگذریم، تاریخ اسلام رمزشکنانی نیز در دامان خود پرورانده است؛ از جمله منهاجی که از او به عنوان یکی از حلّالین رموز نام برده می‌شود. فراهیدی (۱۷۵ـ۱۰۰ هـ .ق.) نیز در کتاب خود به نام «کتاب المعّما»، شرح می‌دهد که چگونه توانسته است یک نامه‌ی رمزی متعلق به امپراتور «بیزانس» را، با حدس این که نامه احتمالاً با «بسم‌الله» یا شبیه به آن آغاز می‌شود، بشکند (این طریق، امروزه نیز با عنوان رمزشکنی سخت رواج دارد و استفاده از قرائن و اشارات، یکی از روش‌های متداول برای شکستن رمزهاست).

در تاریخ تشیع، از قول ائمه‌ی معصومین (علیهم‌السلام) هم مواردی از کاربرد رمز دیده می‌شود. برای مثال، گفته شده است که امام جعفر صادق (علیه‌السلام) هر بار که می‌خواسته است از «بنی العباس» با کنایه نام ببرد، از آن به صورت «اولاد سابع» یاد می‌کرده که کلمه‌ی سابعَ مقلوب عباس است.

بعد که علوم غریبه در میان متصوفه و اطبا، ریاضی‌دانان و کیمیاگران رواج گرفت، برای آن‌که فوت و فن کار محفوظ بماند، به‌طور وسیعی از رمزنویسی استفاده شد. دامنه‌ی این کار به ادبیات و شعر نیز کشیده شد و امروزه ما با ذخیره‌ی پرباری از انواع کنایه، مجاز، معما، رمز و ... در ادبیات سروکار داریم که در آن نام معشوقه، ماده‌ی تاریخ و ... به رمز کشیده شده است و بیشتر جنبه‌ی تفنّنی و تذوق دارد؛ مانند این شعر:

گـر زنـام یـار مـن خـواهـی نـشـان
رو تو قلب قلب را بر قلب قلب زن

یا مانند این بیت:

عـاشـق بی پا و سـر در تـپه‌ی بی‌پایان عـشـق
چون حدیث وصل آمد از سر و جان درگذشت

بر اثر مراوده‌ی مسلمین با مسیحیان به‌خصوص در جنگ‌های صلیبی، از میان فنونی که به اروپا راه یافت، یکی هم فن رمزنویسی بود. در قرون وسطای اروپا اول بار به نام شارلمانی در فن رمزنویسی برمی‌خوریم که به فرماندهان خود دستور می‌داد، مجموعه‌ی کامل الفبای رمز را حفظ کنند و در مکاتبات خود از آن بهره بگیرند.

در قرن شانزدهم، یکی از نظریه‌پردازان «حساب احتمال» در

اروپا، به نام کاردانو، اولین رمزهای «خود کلید» را ابداع کرد. در سال ۱۸۸۰، اولین دستگاه رمزشکن مکانیکی توسط مارکیز ساخته شد و بعدها سازمان‌های زیرزمینی اروپایی سیستم‌های رمزی متفاوتی را وضع کردند؛ مانند نهضت کاربو ناریست‌ها که از انقلابیون فرانسه بودند، یا فراماسون‌ها، و جنبش نهیلیستی و آنارشیستی روسیه (به سرکردگی با کونین و کریپتوکین).

اولین ماشین‌های به رمز نوشتن الکترونیکی در سال ۱۹۱۷ توسط دپارتمان توسعه و تحقیق شرکت «آمریکن تلفن‌اند تلگراف» طراحی شد. امروزه انواع به رمزنویس مخابراتی و ارتباطی، گستردگی فوق‌العاده‌ای یافته‌اند. به خصوص پس از دو جنگ جهانی اول و دوم، دیگر رمزنویسی از امری ذوقی، سرگرم‌کننده و معمایی به ضرورتی برای بسیاری از رشته‌های ارتباطی حکومتی مانند ارتش و دیپلماسی، و حتی بازرگانی، تندیویسی و ... تبدیل شده است و انواع کدبوک‌ها، در زمینه‌های گوناگون کاربرد دارند.

به لحاظ علمی، تجزیه و تحلیل رمز جزو شاخه‌ای از ریاضیات عالی (محاسبات عددی) است و فارغ‌التحصیلان ریاضیات پیشرفته،

پی‌نوشت

(۱) ابجد کبیر:

ا	ب	ج	د	...	ظ	غ
۱	۲	۳	۴		۹۰۰	۱۰۰۰

تفریح اندیشه

گله‌ی گاوی، شامل گاوهای نر و ماده، از چهار دسته‌ی: سیاه، سفید، خالخال و قهوه‌ای تشکیل شده است.

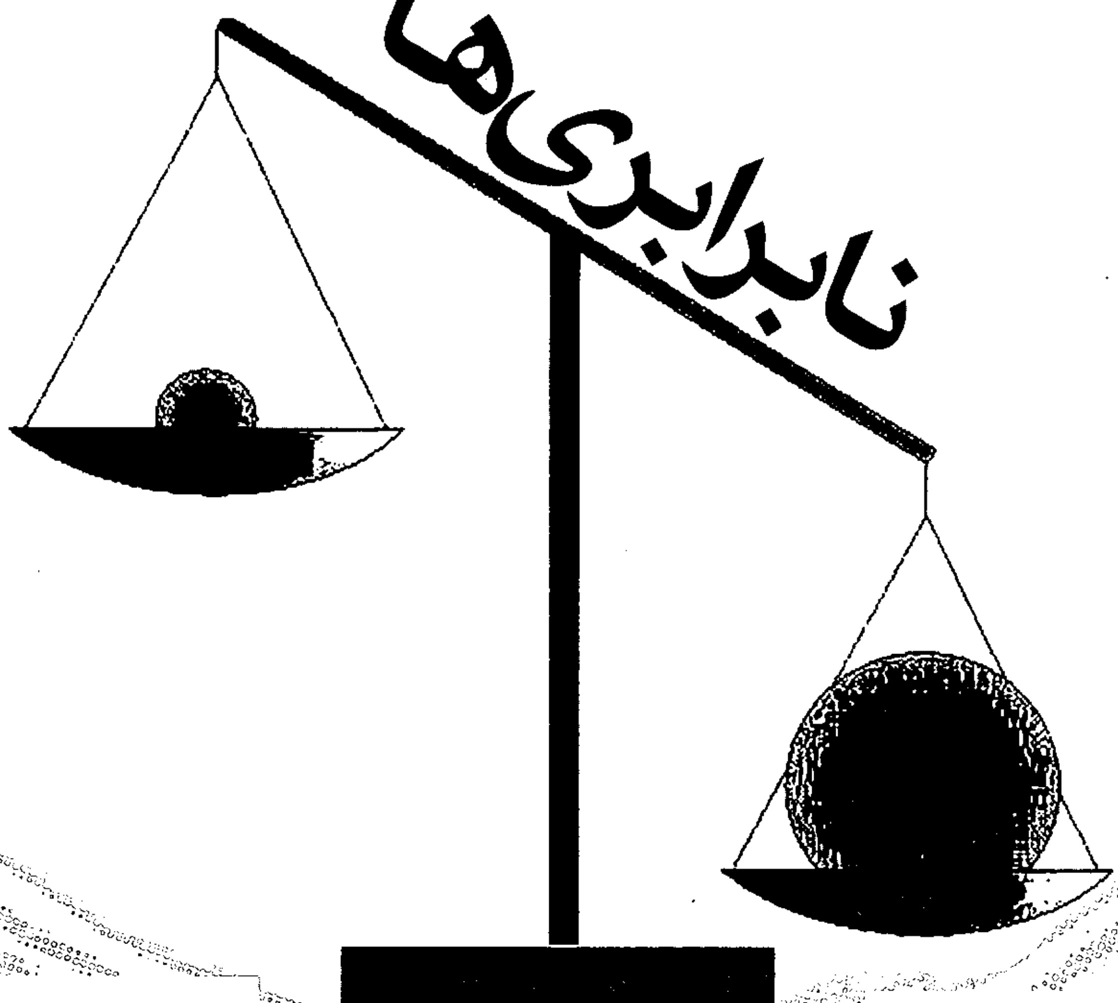
بین گاوهای نر؛ تعداد گاوهای سفید نصف به‌علاوه‌ی ثلث تعداد گاوهای سیاه و بیشتر از گاوهای قهوه‌ای است، تعداد گاوهای سیاه ربع به‌علاوه‌ی خمس تعداد گاوهای خالخال و بیشتر از گاوهای قهوه‌ای است؛ تعداد گاوهای خالخال سدس به‌علاوه‌ی سبع تعداد گاوهای سفید و بیشتر از گاوهای قهوه‌ای است.

بین گاوهای ماده؛ تعداد گاوهای سفید ثلث به‌علاوه‌ی ربع تعداد تمام گاوهای سیاه گله است؛ تعداد گاوهای سیاه ربع به‌علاوه‌ی خمس تعداد گاوهای خالخال تمام گله است؛ تعداد گاوهای خالخال خمس به‌علاوه‌ی سُدُس تعداد تمام گاوهای قهوه‌ای گله است؛ تعداد گاوهای قهوه‌ای سُدُس به‌علاوه‌ی سبع تعداد تمام گاوهای سفید گله است.

تعداد هر دسته از گاوهای سفید، سیاه، قهوه‌ای و خالخال نر و ماده‌ی گله را تعیین کنید.

پاسخ در صفحه‌ی ۶۴

نابرابری‌ها



کلید واژه‌ها: خواص نابرابری‌ها، نامعادله‌ها، مسائل نابرابری‌ها

خواص نابرابری‌ها

۱. به طرفین نابرابری می‌توان عددی اضافه یا کم کرد:

$$a > b \Rightarrow a \pm c > b \pm c$$

۲. طرفین هر نابرابری را می‌توان در عدد مثبتی ضرب یا بر عدد مثبتی تقسیم کرد:

$$\begin{cases} a > b \\ m > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} am > bm \\ \dfrac{a}{m} > \dfrac{b}{m} \end{cases}$$

۳. اگر طرفین هر نابرابری را در عدد منفی ضرب یا برعددی منفی تقسیم کنیم، جهت نابرابری عوض می‌شود.

$$\begin{cases} a > b \\ k < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ak < bk \\ \dfrac{a}{k} < \dfrac{b}{k} \end{cases}$$

۴. طرفین هر نابرابری را می‌توان به توان عدد فرد رساند یا از طرفین آن ریشه‌ی فرد گرفت.

$$\underset{n\in N}{a > b} \Rightarrow \begin{cases} a^{2n+1} > b^{2n+1} \\ \sqrt[2n+1]{a} > \sqrt[2n+1]{b} \end{cases}$$

۵. اگر دو طرف نابرابری مثبت باشند، می‌توان طرفین را به توان عددی فرد یا زوج رساند یا از طرفین ریشه‌ی فرد یا زوج گرفت.

$$\underset{n\in N}{a > b > 0} \Rightarrow \begin{cases} a^{2n} > b^{2n} \\ \sqrt[2n]{a} > \sqrt[2n]{b} \end{cases}$$

۶. $a^{2n} > b^{2n} \Rightarrow |a| > |b|$

۷. $\begin{cases} a > b > 0 \\ b < a < 0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$

۸. $a > 0 > b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

۹. دو نابرابری هم‌جهت را می‌توان نظیر به نظیر با هم جمع کرد:

$$\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a + c > b + d$$

۱۰. هرگاه طرفین دو نابرابری هم‌جهت مثبت باشند، می‌توان آن‌ها را نظیر به نظیر درهم ضرب کرد.

$$\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow ac > bd$$

$$11)\ 0 < a < 1 \Rightarrow \begin{cases} a > a^2 > a^3 \ldots \\ a < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a} \ldots \end{cases}$$

$$12)\ a > 0; a + \frac{1}{a} \geq 2$$

$$13)\ a < 0; a + \frac{1}{a} \leq -2$$

$$14)\ a, b \neq 0; (a^2 + b^2)(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}) \geq 4$$

$$15)\ a, b, c \neq 0; (a^2 + b^2 + c^2)(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}) \geq 9$$

۱۶) $a, b, c, d, \ldots > 0$ و $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n > 0$

آن‌گاه داریم:

الف) $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

ب) $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$

ج) $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$

در حالت کلی داریم:

د) $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1.a_2.a_3.\ldots.a_n}$

چند نابرابری در نامعادله‌ها

$$1)\ \begin{cases} x^2 \leq a^2 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$$

مثال ۱.

$$(2x-1)^2 \leq 25 \Rightarrow -5 \leq 2x - 1 \leq 5$$
$$\Rightarrow -4 \leq 2x \leq 6 \Rightarrow -2 \leq x \leq 3$$

مثال ۲.

$$2)\ \begin{cases} x^2 \geq a^2 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq a \\ x \leq -a \end{cases}$$

$$(2x-5)^2 \geq 49 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 5 \geq 7 \\ 2x - 5 \leq -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x \geq 12 \\ 2x \leq -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 6 \\ x \leq -1 \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} a^2 \leq x^2 \leq b^2 \\ 0 < a < b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < x < b \\ -b < x < -a \end{cases}$$

مثال ۳.

$$9 \leq (2x-3)^2 \leq 25 \Rightarrow \begin{cases} 3 \leq 2x - 3 \leq 5 \\ -5 \leq 2x - 3 \leq -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6 \leq 2x \leq 8 \\ -2 \leq 2x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \leq x \leq 4 \\ -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

مسئله‌ی ۱. ثابت کنید برای هر $a, b, c \in R$ داریم:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$$

می‌دانیم که:

$$\begin{cases} (a-b)^2 \geq 0 \\ (b-c)^2 \geq 0 \\ (c-a)^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \\ b^2 + c^2 - 2bc \geq 0 \\ c^2 + a^2 - 2ac \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 \geq 2ab \\ b^2 + c^2 \geq 2bc \\ c^2 + a^2 \geq 2ac \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2ac + 2bc$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$$

مسئله‌ی ۲. اگر $a, b, c > 0$، ثابت کنید:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

حل:

$$\begin{cases} (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \\ (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 \geq 0 \\ (\sqrt{c} - \sqrt{a})^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0 \\ b + c - 2\sqrt{bc} \geq 0 \\ c + a - 2\sqrt{ac} \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b\ge 2\sqrt{ab}\\ b+c\ge 2\sqrt{bc}\\ c+a\ge 2\sqrt{ac}\end{cases}$$

این سه نامساوی را درهم ضرب می‌کنیم (بنا به شماره‌ی ۱۰):

$$(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8\sqrt{a^2b^2c^2}$$

$$(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8abc$$

مسئله‌ی ۳. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، $\hat{A}=90^\circ$، a وتر و b و c اضلاع زاویه‌ی قائمه‌اند. ثابت کنید: $a^3>b^3+c^3$.

حل: داریم:

$a>b$ (در $b^2>0$ ضرب می‌کنیم) $\Rightarrow ab^2>b^3$

$a>c$ (در $c^2>0$ ضرب می‌کنیم) $\Rightarrow ac^2>c^3$

دو رابطه را جمع می‌کنیم:

$ab^2+ac^2>b^3+c^3 \Rightarrow a(b^2+c^2)>b^3+c^3$ و داریم:

$a^2=b^2+c^2$

$\Rightarrow a(a)^2>b^3+c^3 \Rightarrow a^3>b^3+c^3$

مسئله‌ی ۴. با شرط $a,b,c>0$ ثابت کنید:

$$P=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9$$

حل:

$$P=1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1$$

$$P=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+3$$

(بنا به شماره‌ی ۱۲):

$$\begin{cases} \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\ge 2\\ \left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)\ge 2\\ \left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\ge 2\end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\ge 6$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+3\ge 9 \Rightarrow P\ge 9$$

مسئله‌ی ۵. با شرط $a,b>0$ ثابت کنید:

$$\frac{a^3+b^3}{2}\ge\left(\frac{a+b}{2}\right)^3$$

حل: فرض می‌کنیم نامساوی مسئله همواره درست باشد. پس داریم:

$$\frac{a^3+b^3}{2}\ge\left(\frac{a+b}{2}\right)^3$$

$$\Rightarrow \frac{a^3+b^3}{2}\ge\frac{(a+b)^3}{8}\Rightarrow 4(a^3+b^3)\ge(a+b)^3$$

$$\Rightarrow 4(a+b)(a^2+b^2-ab)\ge(a+b)^3$$

$$\Rightarrow 4(a^2+b^2-ab)\ge(a+b)^2$$

$$\Rightarrow 4a^2+4b^2-4ab\ge a^2+b^2+2ab$$

$$\Rightarrow 3a^2+3b^2-6ab\ge 0$$

$$3(a^2+b^2-2ab)\ge 0\Rightarrow 3(a-b)^2\ge 0$$

این نامساوی همواره درست است. و چون مراحل بالا همگی برگشت‌پذیر هستند فرض ما درست است.

مسئله‌ی ۶. با شرط $a,b,c>0$، ثابت کنید:

$$a^3+b^3+c^3\ge 3abc$$

حل: به‌راحتی می‌توان ثابت کرد:

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$

راهنمایی: اگر دو پرانتز سمت راست را درهم ضرب کنید، پس از جمع جبری، عبارت سمت چپ به‌دست می‌آید.

از طرف دیگر، در مسئله‌ی ۱ ثابت کردیم:

$$a^2+b^2+c^2\ge ab+ac+bc$$

پس:

$$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\ge 0$$

و عبارت $(a+b+c)$ هم مثبت است. پس:

$$a^3+b^3+c^3-3abc\ge 0\Rightarrow a^3+b^3+c^3\ge 3abc$$

مسئله‌ی ۷. با شرط $a,b>0$، ثابت کنید:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$$

حل: فرض می‌کنیم نامساوی مسئله همواره درست باشد؛ پس داریم:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$$

دو طرف نامساوی را در مقدار مثبت $ab(a+b)$ ضرب می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$b(a+b)+a(a+b)\ge 4ab$$

$$\Rightarrow (a+b)(a+b)\ge 4ab$$

$$\Rightarrow (a+b)^2\ge 4ab$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+2ab\ge 4ab\Rightarrow a^2+b^2-2ab\ge 0$$

$$\Rightarrow (a-b)^2\ge 0$$

این نامساوی همواره درست است. و چون مراحل بالا همگی برگشت‌پذیر هستند پس فرض ما درست است.

مسئله‌ی ۸. با شرط $x\neq 0$، بیشترین و کمترین مقدار $P=\frac{4x}{x^2+1}$ را بیابید.

الف) فرض می‌کنیم $x > 0$. صورت و مخرج کسر را بر x تقسیم می‌کنیم:

(شماره‌ی ۱۳) $P = \dfrac{4}{x+\frac{1}{x}}$,

$x > 0 \; ; \; x+\frac{1}{x} \geq 2$

پس مینیمم مخرج کسر ۲ است.

درنتیجه: $\text{Max}P = \frac{4}{2} = 2$

ب) فرض می‌کنیم $x < 0$، صورت و مخرج کسر را بر x تقسیم کنیم:

(شماره‌ی ۱۴) $P = \dfrac{4}{x+\frac{1}{x}}$,

$x < 0 \; ; \; x+\frac{1}{x} \leq -2$

پس ماکزیمم مخرج کسر ۲- است.

درنتیجه: $\text{Min}P = \frac{4}{-2} = -2$

آزمون ۱. اگر $a > b$ و $b \neq 0$، آن‌گاه کدام‌یک از نامساوی‌های زیر همواره درست است؟

۱) $a^2 > ab$ ۲) $a^3 > a^2 b$

۳) $ab^2 > b^3$ ۴) $a^4 > b^4$

حل: گزینه‌ی ۳. چون $b \neq 0$ پس $b^2 > 0$. طرفین نامساوی $a > b$ را در $b^2 > 0$ ضرب می‌کنیم. درنتیجه: $ab^2 > b^3$. پس گزینه‌ی ۳ درست است.

آزمون ۲. اگر $a > b$ و $c > d$، آن‌گاه کدام‌یک از نامساوی‌های زیر همواره درست است؟

۱) $ac > bd$ ۲) $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$

۳) $a+b > b+c$ ۴) $a-d > b-c$

حل: گزینه‌ی ۴. (بنا به شماره‌ی ۹) داریم:

$$\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} ; \; a+c > b+d \; ; \; a-d > b-c$$

آزمون ۳. اگر $a+b+c=0$ و $A = ab+ac+bc$، آن‌گاه:

۱) $A > 0$ ۲) $A < 0$

۳) $A \geq 0$ ۴) $A \leq 0$

حل: گزینه‌ی ۴.

داریم: $\underbrace{(a+b+c)^2}_{0} = \underbrace{a^2+b^2+c^2}_{0 \text{ یا } +} + 2\underbrace{(ab+ac+bc)}_{A}$

برای این‌که تساوی برقرار باشد، باید $A \leq 0$

آزمون ۴. اگر $a,b,c,d > 0$ و $A = a^4+b^4+c^4+d^4$ و $B = \sqrt{abcd}$ آن‌گاه همواره داریم:

۱) $A \geq 4B$ ۲) $A \geq 4B^2$

۳) $A \geq 4B^4$ ۴) $A \geq 4B^3$

حل: گزینه‌ی ۲

(بنا به قسمت ج، شماره‌ی ۱۶) با شرط $x,y,z,t > 0$، داریم:

$$\frac{x+y+x+t}{4} \geq \sqrt[4]{xyzy}, x = a^4, y = b^4, z = c^4, t = d^4$$

$$\Rightarrow \frac{a^4+b^4+c^4+d^4}{4} \geq \sqrt[4]{a^4b^4c^4d^4} \Rightarrow \frac{A}{4} \geq abcd$$

$$\Rightarrow A \geq 4abcd \Rightarrow A \geq 4B^2$$

تفریح اندیشه

ادامه‌ی مطلب صفحه‌ی ۲۱

برای اثبات درستی این ادعا، فرض کنیم عدد شش‌رقمی متناظر با تاریخ تولد دوستتان به‌صورت $\overline{abcdef}$ باشد. بنابراین داریم:

$$\overline{abcdef} = a\times 10^5 + b\times 10^4 + c\times 10^3 + d\times 10^2 + e\times 10 + f$$

در این‌جا مراحل الگوریتم را انجام می‌دهیم.

مرحله‌ی ۱)

$$2\overline{abcdef} = 2a\times 10^5 + 2b\times 10^4 + 2c\times 10^3 + 2d\times 10^2 + 2e\times 10 + 2f$$

مرحله‌ی ۲)

$$2\overline{abcdef} + 3 = 2a\times 10^5 + 2b\times 10^4 + 2c\times 10^3 + 2d\times 10^2 + 2e\times 10 + 2f + 3$$

مرحله‌ی ۳)

$$5(2\overline{abcdef} + 3) = a\times 10^6 + b\times 10^5 + c\times 10^4 + d\times 10^3 + e\times 10^2 + f\times 10 + 15$$

مرحله‌ی ۴)

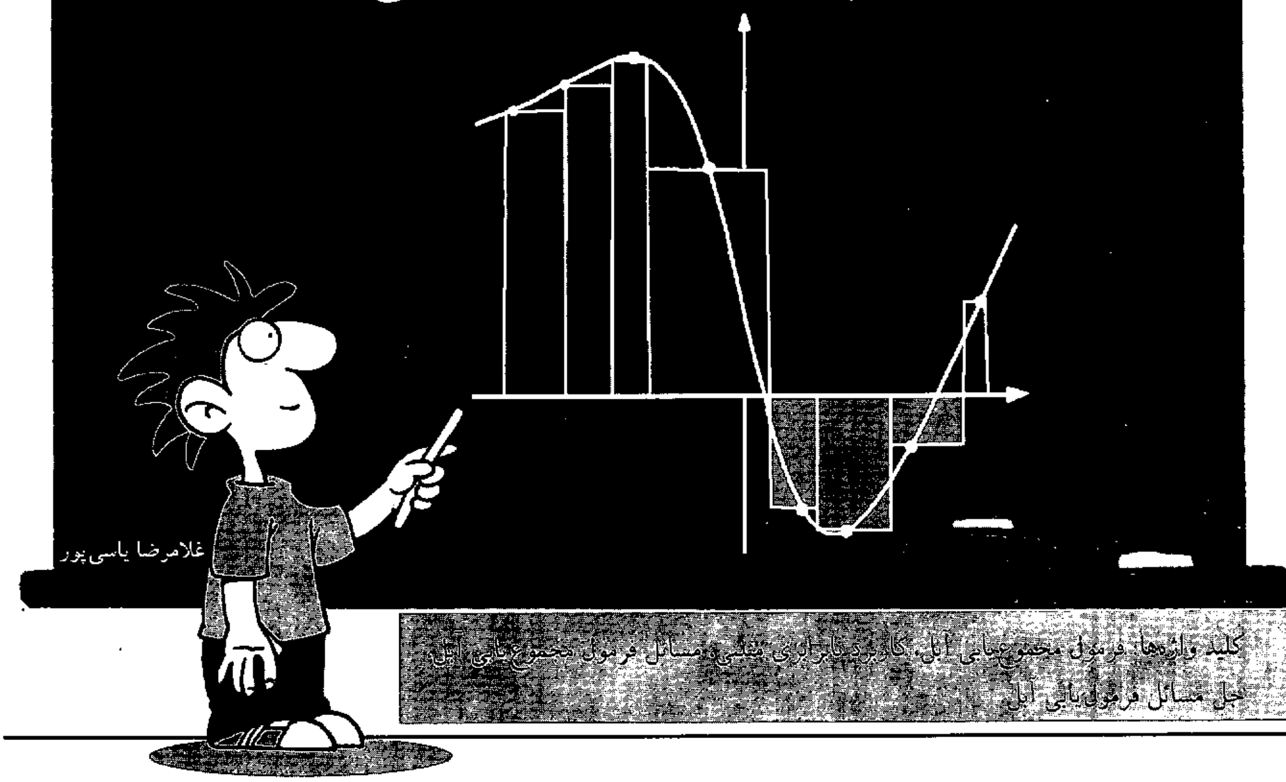
$$5(2\overline{abcdef} + 3) - 6 = a\times 10^6 + b\times 10^5 + c\times 10^4 + d\times 10^3 + e\times 10^2 + f\times 10 + 9$$

مرحله‌ی ۵) در این مرحله عدد هفت‌رقمی حاصل به‌صورت $\overline{abcdef9}$ توسط دوستتان اعلام می‌شود.

اکنون با حرف رقم یکان (که همیشه ۹ است) شما می‌توانید تاریخ تولد دوست خود را به‌صورت $\overline{abcdef}$ کشف کنید.

درضمن حتماً به دوست خود توصیه کنید که یک ماشین‌حساب به همراه داشته باشد.

با راهیان المپیادهای ریاضی ۱۸



غلامرضا یاسی‌پور

کلید واژه‌ها: فرمول مجموع‌یابی آبل، کاربرد نابرابری مثلثی، مسائل فرمول مجموع‌یابی آبل، حل مسائل فرمول‌یابی آبل

فرمول مجموع‌یابی آبل

بسیاری از دستاوردهای ریاضیات پیوسته، از قبیل نابرابری‌های کلاسیک مربوط به انتگرال‌ها، معمولاً از مشابه‌های گسسته‌شان، با استفاده از فرایندی حدی استنتاج می‌شوند. اما گاهی اتفاق می‌افتد که مفاهیم مربوط به ریاضیات پیوسته آشناتر از نظایر گسسته‌شان باشند.

هدف این مقاله بررسی مشابه گسسته‌ی فرمول انتگرال‌گیری جزء به جزء، یعنی فرمول مجموع‌یابی آبل است، که به‌صورت زیر بیان می‌شود:

فرض می‌کنیم a_1 ، a_2 ، ... ، a_n و b_1 ، b_2 ، ... ، b_n دو دنباله‌ی متناهی اعداد باشند، در این صورت:

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=(a_1-a_2)b_1+(a_2-a_3)(b_1+b_2)+\cdots+(a_{n-1}-a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_{n-1})+a_n(b_1+b_2+\cdots+b_n)$$

شباهت این موضوع با انتگرال‌گیری جزء به جزء در صورتی آشکار می‌شود که به خاطر بیاوریم انتگرال‌گیری متناظر با مجموع‌یابی جمیع جملات است، در حالی‌که دیفرانسیل‌گیری متناظر با تفریق جمله‌های متوالی است.

خط چند ضلعی $P_0P_1\ldots P_n$ را چنان در نظر می‌گیریم که:

$$\angle P_0P_1P_2=\angle P_1P_2P_3=\cdots=\angle P_{n-2}P_{n-1}P_n$$

در حالی‌که همه را در جهت ساعتگرد اندازه‌گیری کرده‌ایم. اگر:

$$P_0P_1>P_1P_2>\cdots>P_{n-1}P_n$$

نشان دهید P_0 و P_n نمی‌توانند منطبق باشند.

برای حل مسأله، مختصات مختلطی را با مبدأ در P_0 و محور xهای P_0P_1 در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم α زاویه‌ی بین هر دو قطعه‌ی متوالی باشد، و:

$$a_1>a_2>\cdots>a_n$$

طول‌های این قطعات باشند. اگر قرار دهیم $z=e^{i(\pi-\alpha)}$، آن‌گاه مختص P_n عبارت است از:

$$a_1+a_2z+\cdots+a_nz^{n-1}$$

باید ثابت کنیم این عدد برابر صفر نیست. با استفاده از فرمول مجموع‌یابی آبل، به‌دست می‌آوریم:

$$a_1+a_2z+\cdots+a_nz^{n-1}=(a_1-a_2)+(a_2-a_3)(1+z)+\cdots+a_n(1+z+\cdots+z^{n-1})$$

اگر α صفر باشد، این مقدار عددی اکیداً حقیقی و مثبت است، و اثبات کامل است. اما اگر چنین نباشد، آن را در $1-z$ ضرب می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم:

$$(a_1-a_2)(1-z)+(a_2-a_3)(1-z^2)+\cdots+a_n(1-z^n)$$

این عبارت نمی‌تواند صفر باشد، در واقع، از آن‌جا که $|z|=1$، بنا به نابرابری مثلثی داریم:

$$\left|(a_1-a_2)z+(a_2-a_3)z^2+\cdots+a_nz^n\right|$$
$$<\left|(a_1-a_2)z\right|+\left|(a_2-a_3)z^2\right|+\cdots+\left|a_nz^n\right|$$
$$=(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots+a_n$$

و نتیجه حاصل می‌شود.

مسأله‌های زیر را نیز می‌توان با استفاده از فرمول مجموع‌یابی فوق حل کرد.

۱. با استفاده از فرمول مجموع‌یابی آبل، مجموع‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $1+2q+3q^2+\cdots+nq^{n-1}$

ب) $1+4q+9q^2+\cdots+n^2q^{n-1}$

۲. اعداد:

$$a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_n > 0$$

و:

$$b_1 \ge b_2 \ge \cdots \ge b_n > 0$$

در

$$a_1 \ge b_1,\ a_1+a_2 \ge b_1+b_2,\ \cdots,$$
$$a_1+a_2+\cdots+a_n \ge b_1+b_2+\cdots+b_n$$

صدق می‌کنند. ثابت کنید به ازای هر عدد صحیح و مثبت k داریم:

$$a_1^k+a_2^k+\cdots+a_n^k \ge b_1^k+b_2^k+\cdots+b_n^k$$

۳. فرض می‌کنیم a، b، c، و d اعدادی نامنفی و چنان باشند که:

$$a \le 1,\ a+b \le 5,$$
$$a+b+c \le 14,\ a+b+c+d \le 30$$

ثابت کنید:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d} \le 10$$

۴. فرض می‌کنیم a_1، a_2، ...، a_n اعدادی نامنفی و چنان باشند که، به ازای هر k،

$$a_1a_2\cdots a_k \le \frac{1}{(2k)!}$$

ثابت کنید:

$$a_1+a_2+\cdots+a_n \ge \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

۵. فرض می‌کنیم x_1، x_2، ...، x_n و $y_1 \ge y_2 \ge \cdots \ge y_n$ دو دنباله از اعداد مثبت و چنان باشند که:

$$x_1 \ge y_1,\ x_1x_2 \ge y_1y_2,\ \cdots,\ x_1x_2\cdots x_n \ge y_1y_2\cdots y_n$$

ثابت کنید:

$$x_1+x_2+\cdots+x_n \ge y_1+y_2+\cdots+y_n$$

حل مسئله‌ها

۱. الف) با به‌کار بردن فرمول مجموع‌یابی آبل به‌دست می‌آوریم:

$$1+2q+3q^2+\cdots+nq^{n-1}=(1-2)+(2-3)(1+q)$$
$$+(3-4)(1+q+q^2)+\cdots+((n-1)-n)$$
$$(1+2+\cdots+q^{n-2})+n(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1})$$
$$=-(\frac{q-1}{q-1}+\frac{q^2-1}{q-1}+\frac{q^3-1}{q-1}+\cdots+\frac{q^{n-1}-1}{q-1})$$
$$+n\frac{q^n-1}{q-1}=-\frac{1}{q-1}(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}-n)$$
$$+n\frac{q^n-1}{q-1}=-\frac{1}{q-1}(\frac{q^n-1}{q-1}-n)+n\frac{q^n-1}{q-1}\frac{nq^n}{q-1}$$
$$-\frac{q^n-1}{(q-1)^2}$$

ب) با به‌کار بردن دوباره‌ی فرمول مجموع‌یابی‌آبل خواهیم داشت:

$$1+4q+9q^2+\cdots+n^2q^{n-1}$$
$$=(1-4)+(4-9)(1+q)+(9-16)(1+q+q^2)$$
$$+(1+q+q^2)+\cdots+((n-1)^2-n^2)(1+q+\cdots+q^{n-2})$$
$$+n^2(1+q+\cdots+q^{n-1})$$

با جمع سری‌های هندسی به‌دست آمده، داریم:

$$=-(3\frac{q-1}{q-1}+5\frac{q^2-1}{q-1}+7\frac{q^3-1}{q-1}+\cdots$$
$$+(2n-1)\frac{q^{n-1}-1}{q-1})+n^2\frac{q^n-1}{q-1}=(\frac{q-1}{q-1}+\frac{q^2-1}{q-1}$$
$$+\frac{q^3-1}{q-1}+\cdots+\frac{q^{n-1}-1}{q-1})-2(2\frac{q-1}{q-1}+3\frac{q^2-1}{q-1}$$
$$+4\frac{q^3-1}{q-1}+\cdots+n\frac{q^{n-1}-1}{q-1})+n^2\frac{q^n-1}{q-1}$$
$$=\frac{1}{q-1}(1+q+\cdots+q^{n-1}-n)$$

$$-\frac{2}{q-1}(1+2q+\cdots+nq^{n-1}-\frac{n(n+1)}{2})+n^2\frac{q^n-1}{q-1}.$$

با استفاده از قسمت الف مسئله، درمی‌یابیم که این عبارت برابر است با:

$$\frac{1}{q-1}(\frac{q^n-1}{q-1}-n)-\frac{2}{q-1}(\frac{nq^n}{q-1}-\frac{q^n-1}{(q-1)^2}-\frac{n(n+1)}{2})$$
$$+n^2\frac{q^n-1}{q-1}=\frac{n^2q^n}{q-1}-\frac{(2n-1)q^n+1}{(q-1)^2}+\frac{2q^n-2}{(q-1)^3}$$

منبع

Yaglom, A.M., Yaglom, I.M. Ncelementarnye zadaci v elementarnom izlozenii (Non-elementary problems in an elementary exposition), Gosudarstv. Izdat. Tehn. Teor. Lit., Moscow, 1954.

۲. می‌توان نوشت:

$$a_i^k-b_i^k=(a_i-b_i)(a_i^{k-1}+a_i^{k-2}b_i+\cdots+$$
$$a_ib_i^{k-2}+b_i^{k-1})$$

برای ساده‌کردن محاسبات قرار می‌دهیم:

و:

$$c_i=a_i-b_i$$

$$d_i=a_i^{k-1}+a_i^{k-2}b_i+\cdots+a_ib_i^{k-2}+b_i^{k-1}$$

فرض مسئله مستلزم این است که:

$$c_1+c_2+\cdots+c_j\geq 0$$

به ازای هر i:

$$d_i\geq d_{i+1}>0$$

و مورد اخیر، از آن‌جا که a_i و b_i دنباله‌هایی مثبت و نزولی‌اند، نتیجه می‌دهد:

$$a_1^k-b_1^k+a_2^k-b_2^k+\cdots+a_n^k-b_n^k=c_1d_1$$
$$+c_2d_2+\cdots+c_nd_n=(d_1-d_2)c_1+(d_2-d_3)$$
$$(c_1+c_2)+\cdots+d_n(c_1+c_2+\cdots+c_n)\geq 0$$

و نابرابری به اثبات می‌رسد.

منبع

Busneag, D., Mafei, I.,V.,Teme pentru cercurile Si concursurile de matematica ale elevilor (Lectures for students mathematics circles and competitions), Scrisul romanesc, Craiova, 1983.

۳. گزاره‌ی عمومی‌تری را اثبات می‌کنیم.

اگر a_1، a_2، ...، a_n مثبت باشند،

$$0\leq b_1\leq b_2\leq\cdots\leq b_n$$

و به ازای جمیع مقادیر $k\leq n$ داشته باشیم:

$$a_1+a_2+\cdots+a_k\leq b_1+b_2+\cdots+b_k$$

در این‌صورت:

$$\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_n}\leq\sqrt{b_1}+\sqrt{b_2}+\cdots+\sqrt{b_n}$$

حالت خاص مسئله‌ی اصلی، به ازای $n=4$ با قرار دادن:
$b_k=k^2, k=1,2,3,4$

به‌دست می‌آید.

اکنون به اثبات دستاورد فوق می‌پردازیم. داریم:

$$\frac{a_1}{\sqrt{b_1}}+\frac{a_2}{\sqrt{b_2}}+\cdots+\frac{a_n}{\sqrt{b_n}}$$
$$=a_1\left(\frac{1}{\sqrt{b_1}}-\frac{1}{\sqrt{b_2}}\right)+(a_1+a_2)\left(\frac{1}{\sqrt{b_2}}-\frac{1}{\sqrt{b_3}}\right)$$
$$+(a_1+a_2+a_3)\left(\frac{1}{\sqrt{b_3}}-\frac{1}{\sqrt{b_4}}\right)+\cdots$$
$$+(a_1+a_2+\cdots+a_n)\frac{1}{\sqrt{b_n}}$$

تفاضل‌های واقع در پرانتزها همه مثبت‌اند. با به‌کاربردن فرض درمی‌یابیم که این عبارت کمتر از یا برابر با مورد زیر است:

$$b_1\left(\frac{1}{\sqrt{b_1}}-\frac{1}{\sqrt{b_2}}\right)+(b_1+b_2)\left(\frac{1}{\sqrt{b_2}}-\frac{1}{\sqrt{b_3}}\right)$$
$$+\cdots+(b_1+b_2+\cdots+b_n)\frac{1}{\sqrt{b_n}}$$
$$=\sqrt{b_1}+\sqrt{b_2}+\cdots+\sqrt{b_n}$$

بنابراین:

$$\frac{a_1}{\sqrt{b_1}}+\frac{a_2}{\sqrt{b_2}}+\cdots+\frac{a_n}{\sqrt{b_n}}\leq\sqrt{b_1}+\sqrt{b_2}+\cdots+\sqrt{b_n}$$

با استفاده از این نتیجه و نابرابری «کوشی ـ شوارتز»، به دست می‌آوریم:

$$(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_n})^2$$

$$=\left(\sqrt[4]{b_1}\cdot\sqrt{\frac{a_1}{\sqrt{b_1}}}+\sqrt[4]{b_2}\cdot\sqrt{\frac{a_2}{\sqrt{b_2}}}+\cdots+\sqrt[4]{b_n}\cdot\sqrt{\frac{a_n}{\sqrt{b_n}}}+\right)^2$$

$$\leq(\sqrt{b_1}+\sqrt{b_2}+\cdots+\sqrt{b_n})\left(\frac{a_1}{\sqrt{b_1}}+\frac{a_2}{\sqrt{b_2}}+\cdots+\frac{a_n}{\sqrt{b_n}}\right)$$
$$\leq(\sqrt{b_1}+\sqrt{b_2}+\cdots+\sqrt{b_n})^2$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_n}\le\sqrt{b_1}+\sqrt{b_2}+\cdots+\sqrt{b_n}$$

(آزمون انتخابی IMO رومانی، ۱۹۷۷، طرح از V.Cârtoaje)

۴. داریم:

$$a_1+a_2+\cdots+a_n$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)(1\cdot 2a_1)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)(3\cdot 4a_2)$$
$$+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)((2n-1)\cdot 2na_n)$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)(1\cdot 2a_1)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)$$
$$(1\cdot 2a_1+3\cdot 4a_2)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)(1\cdot 2a_1+3\cdot 4a_2$$
$$+\cdots+(2n-1)\cdot 2na_n)$$

با استفاده از نابرابری AM.GM و فرض مسئله درمی‌یابیم که:

$$1\cdot 2a_1\ge 1$$
$$1\cdot 2a_1+3\cdot 4a_2\ge 2,\ldots,1\cdot 2a_1+3\cdot 4a_2+\cdots$$
$$+(2n-1)\cdot 2na_n\ge n$$

در نتیجه:

$$a_1+a_2+\cdots+a_n\ge\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$$
$$+2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)+\cdots+n\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$$
$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}$$
$$-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$
$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

و کار به سامان می‌رسد.

۵. می‌خواهیم نابرابری‌های شامل حاصل‌ضرب‌ها را به‌نابرابری‌های شامل مجموع‌ها تبدیل کنیم. به این منظور از نابرابری AM-GM استفاده می‌کنیم. داریم:

$$\frac{x_1}{y_1}+\frac{x_2}{y_2}+\cdots+\frac{x_k}{y_k}\ge k\sqrt[k]{\frac{x_1}{y_1}\frac{x_2}{y_2}\cdots\frac{x_k}{y_k}}\ge k$$

که آخرین نابرابری آن از فرض به‌دست می‌آید.

با بازگشت به نابرابری اصلی، داریم:

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=\frac{x_1}{y_1}y_1+\frac{x_2}{y_2}y_2+\cdots+\frac{x_n}{y_n}y_n$$
$$=\frac{x_1}{y_1}(y_1-y_2)+\left(\frac{x_1}{y_1}+\frac{x_2}{y_2}\right)(y_2-y_3)+\cdots$$
$$+\left(\frac{x_1}{y_1}+\frac{x_2}{y_2}+\cdots+\frac{x_n}{y_n}\right)y_n$$

با استفاده از نابرابری‌های تبدیل شده در ابتدای این راه حل، برای عامل اول در هر جمله، این نکته را درمی‌یابیم که این عبارت بزرگ‌تر از یا برابر است با:

$$1(y_1-y_2)+2(y_2-y_3)+\cdots+ny_n$$
$$=y_1+y_2+\cdots+y_n$$

و اثبات به انجام می‌رسد.

تفریح اندیشه

پاسخ

تعداد گاوهای نر سفید، سیاه، خالخال و قهوه‌ای را به X، Y، Z و T و تعداد گاوهای ماده از رنگ‌های مزبور را به‌ترتیب به x، y، z و t نمایش می‌دهیم. معادلات زیر را خواهیم داشت:

$$X-T=\frac{5}{6}Y \quad \text{و} \quad Y-T=\frac{9}{20}Z \quad \text{و} \quad Z-T=\frac{13}{42}X$$
$$\text{و}\quad x=\frac{7}{12}(Y+y) \quad \text{و} \quad y=\frac{9}{20}(Z+z) \quad \text{و} \quad z=\frac{11}{30}(T+t)$$
$$\text{و}\quad t=\frac{13}{42}(X+x)$$

از حل دستگاه معادلات سیال بالا نتیجه خواهد شد:

$$X=10366482k,\ Y=7460514k,\ Z=7358060k \quad \text{و} \quad T=4149387k$$
$$x=7206360k,\ y=4893246k,\ z=3515820k \quad \text{و} \quad t=5439213k$$

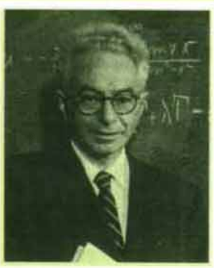
که k عدد صحیح مثبت است، تعداد جواب‌های مسئله بیشمار است. کوچک‌ترین آن‌ها به‌ازای k=1 حاصل می‌شود.

نیمی از یک مفهوم ریاضی، ابداع علامتی مناسب برای آن است.

پیر سیمون لاپلاس

انتگرال گیری معمولی تنها خاطره‌ای است از مشتق گیری.

آگوستوس دمرگان



حساب دیفرانسیل و انتگرال، حاصل تلاش هنری فکر است که دو هزار و پانصد سال در جریان بوده است.

ریچارد کورانت