مجله ریاضی

برهان

۲۶

برای دانش آموزان دبیرستان

سال هشتم، شماره دوم، پاییز ۱۳۷۷، بها ۲۰۰۰ ریال

بسم الله الرحمن الرحیم

انتشارات مدرسه وابسته به وزارت آموزش و پرورش

❑ صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه ❑ مدیر مسؤول: محمود ابراهیمی
❑ سردبیر: حمیدرضا امیری ❑ مدیر داخلی: میرشهرام صدر
❑ اعضای هیأت تحریریه: آقایان: ❑ حمیدرضا امیری ❑ محمدهاشم رستمی ❑ احمد قندهاری ❑ میرشهرام صدر
❑ سیدمحمدرضا هاشمی موسوی ❑ غلامرضا یاسی پور (با تشکر از همکاری ارزندهٔ آقای پرویز شهریاری)
❑ مدیرفنی: هوشنگ آشتیانی ❑ طراح گرافیک: امیر بابایی ❑ رسّامی: مهدی ملکوتیان ❑ چاپ و صحافی: چاپخانه مدرسه

مطالب این شماره

◆ حرف اوّل ۱
◆ شما هم می توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۲۶)/ پرویز شهریاری ۲
◆ لگاریتم/ احمد قند هاری ۹
◆ مکان هندسی (قسمت پانزدهم)/ محمّد هاشم رستمی ۱۷
◆ نگاشتهای خطی (قسمت اوّل)/ حمید رضا امیری ۲۳
◆ تاریخچهٔ مجلات ریاضی در ایران (۲۵)/ غلامرضا یاسی پور ۲۹
◆ نابرابریها (قسمت دوم)/ میر شهرام صدر ۳۱
◆ آموزش برنامه نویسی به زبان پاسکال (۴)/ محمّد رحیم ۳۴
◆ معرفی ریاضیدانان دورهٔ اسلامی/ غلامرضا یاسی پور ۳۷
◆ آموزش ترجمه متون ریاضی (۲۲)/ حمید رضا امیری ۴۲
◆ انتگرال کسرهای گویا / (قسمت دوم) سیّد محمّد رضا هاشمی موسوی ۴۸
◆ گزارشی از سوّمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران ۵۰
◆ دو روش در ترسیم نیمساز/ سیامک جعفری ۵۳
◆ یک مسأله ساختمانی هندسهٔ فضایی/ پرویز شهریاری ۵۴
◆ مسائل مسابقه ای ۵۶
◆ مقاله های کوتاه از مجلّه های ریاضی معتبر جهان (۲۳)/ غلامرضا یاسی پور ۵۷
◆ مسأله حل مسأله های ریاضی (۲)/ عبد الحسین مصحفی ۶۱
◆ طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روشهای مقدماتی (۲۳)/ غلامرضا یاسی پور ۶۷
◆ آنچه از دوست رسد . . . ۷۲
◆ مسائل برای حل ۷۴
◆ حل مسائل برهان ۲۵ ۷۹
◆ جوابهای تفریح اندیشه ۸۸

■ **سال هشتم، پاییز ۱۳۷۷، شمارهٔ دوم.**

برهان تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

● نگارش مقالات کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتب ریاضی دبیرستان) ● طرح مسائل کلیدی (برای دانش آموزان) به همراه حل آن ● طرح مسائل مسابقه ای (برای دانش آموزان) به همراه حل آن ● طرح معماهای ریاضی ● نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

■ هیأت تحریریه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافهٔ مقالات آزاد است.
■ مقالات وارده باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.
■ مقالات مجله با رسم‌الخط انتشارات مدرسه به چاپ خواهد رسید.
■ مقالات رسیده مسترد نمی‌شود.

برهان هر سه ماه یک شماره منتشر می‌شود.

استفاده از مطالب مجلّه در کتب یا مجلّات دیگر با ذکر دقیق مأخذ بلامانع است.

نشانی: خیابان سپهبد قرنی، خیابان سپند شرقی، پلاک ۳۸
تلفن: ۶-۸۸۹۶۷۶۵ ، ۷۱-۸۸۰۴۵۶۸ ، دورنویس (فاکس): ۸۸۲۰۵۹۹ ، صندوق پستی: ۱۴۱۵۵/۱۹۴۹

کد ۶۸۶/۱

حرف اوّل

در آستانهٔ ورود به ماه شعبان‌المعظم، ماه پیامبر (ص)، ماه دعا و نیایش و پس از آن ماه مبارک رمضان هستیم، اِن‌شاءا... از برکاتِ ماه رجب بهره‌مند شده باشیم و با توشه‌ای ارزشمند، ماه شعبان را آغاز کنیم و با استمداد از وجود پرفیض و مقدس رسول اکرم (ص)، به میهمانی پروردگار (جل جلاله) بشتابیم.

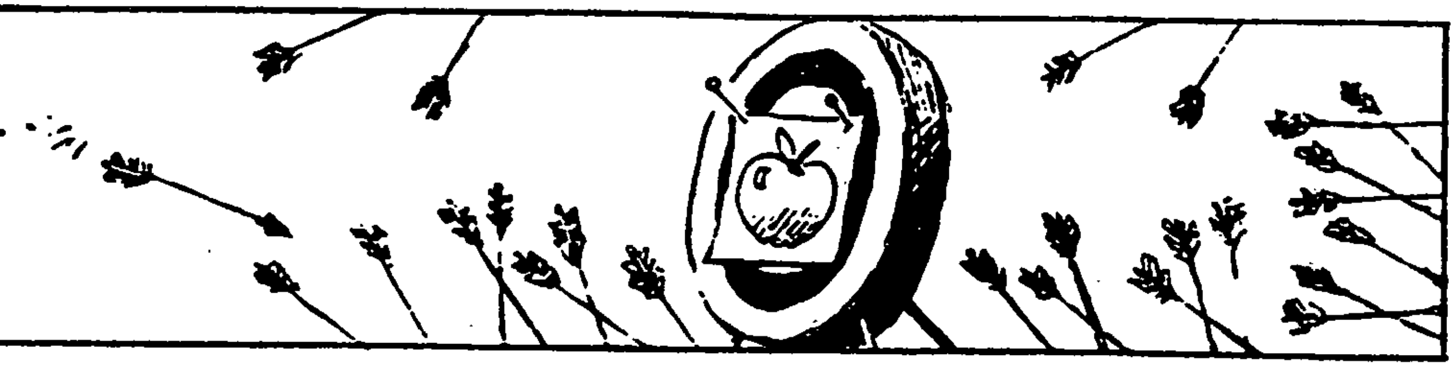
بیایید با هم به یکی از سخنان پُربار و قابل تأملِ رسول گرامی اسلام حضرت محمّد مصطفی (ص)، نظری عمیق و متفکّرانه بیندازیم و یافته‌های خود را برای هم بازگو کنیم، هر بخشی از این حدیث شریف می‌تواند، کلیدی باشد تا دری از درهای عالم معرفت به رویمان باز شود. در این حدیث شریف، خداوند، خزانهٔ خود را معرفی می‌کند و در این معرفی، تشبیهاتی به کار رفته است که هر مسلمان مؤمنی را به فکر فرو می‌برد و در لابه‌لای این تشبیهات و اجزای آن ارتباطها و نکته‌های لطیف و ظریف، بسیار است که اِن‌شاءا... به آنها دست پیدا می‌کنید، مضمونِ حدیث به شرح زیر است:

خداوند می‌فرمایند: مرا خزانه‌ای است، بزرگتر از **عرش**، وسیعتر از **کرسی**، پاکیزه‌تر از **بهشت** و آراسته‌تر از **ملکوت آسمان**. زمینِ آن، **معرفت** است. آسمانِ آن، **ایمان** است. آفتاب آن (آسمان) **شوق** و ماه آن (آسمان)، **محبّت** است. ستارگانش، **فکر و اندیشه** و اَبرش، **عقل** و بارانش، **رحمت** است. درخت آن (زمین) **طاعت** است و میوهٔ آن (درخت) **حکمت** است. درهای خزانه‌ام، **علم**، **حِلم**، **صبر** و **رضا** می‌باشند و همهٔ اینها، **قلب مؤمن**[1] است. عجبا که قلب مؤمن چه‌قدر بزرگ، وسیع، پاکیزه و آراسته است، آیا در زمینِ **معرفت**، درختی بجز درخت **طاعت** می‌روید؟ آیا میوهٔ این درخت، غیر از **حکمت** می‌تواند باشد؟ آیا برای این درخت جز بارانِ **رحمت** از ابرِ **عقل** انتظار می‌رود؟ آیا از آسمانِ **ایمان** انتظار آفتابِ **شوق** نمی‌رود؟ زینت‌بخشِ این آسمان (ایمان) ستارگانِ **فکر و اندیشه**‌اند و **محبّت**، (به خداوند و اهل‌بیت علیهم‌السلام) چون ماه، در این آسمان می‌درخشد و نور می‌دهد.

عزیزان دانش‌آموز! اگر با تأمل و تفکر بیشتر در این حدیث شریف، به رابطه‌هایی بین بخشها و اجزای آن پی بُردید، آنها را مدوّن کنید و به آدرس مجلّه برای ما ارسال کنید تا به حکم قرعه از بین بهترین برداشتها به رسم یادبود، سه نفر را انتخاب و جایزه‌هایی تقدیمشان کنیم.

والسلام ـ سردبیر

۱ـ اَلاٰ وَ هِيَ قَلْبُ الْمُؤمِنِ



شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۲۶)

● پرویز شهریاری

§۳. روش ضریبهای نامعین

روش استفاده از ضریبهای نامعیّن، روشی ساده و در ضمن نیرومند، برای حلّ برخی از مسأله‌های مربوط به جبر محاسبه‌ای است. این روش را، به تقریب می‌توان این طور تعریف کرد:

وقتی منظور از حلّ مسأله، یافتن یک چند جمله‌ای باشد، مسأله را حل شده فرض می‌کنیم و چند جمله‌ای مورد نظر را (که با توجه به شرطهای مسأله از درجهٔ آن آگاهیم)، با ضریبهای مجهول (نامعین) می‌نویسیم. سپس با انجام عملهای ناشی از شرطهای مسأله، خود را به دستگاهی از معادله‌ها می‌رسانیم، که مجهولهای آنها، همان ضریبهای نامعیّن باشند و سرانجام، با حلّ دستگاه (اگر شدنی باشد)، مقدار ضریبها و در نتیجه، چند جمله‌ای مورد نظر را می‌یابیم.

با چند نمونه، با این روش آشنا می‌شویم و نقطه‌های قوّت و ضعف آن را بررسی می‌کنیم.

مثال ۱. m را طوری پیدا کنید که معادلهٔ $x^۳+mx+\sqrt{۲}=۰$ دارای یک ریشهٔ مضاعف (یعنی دو ریشهٔ برابر) باشد، و سپس، معادله را حل کنید.

فرض می‌کنیم معادله را حل کرده‌ایم، ریشهٔ مضاعف آن را α و ریشهٔ سادهٔ آن را β می‌گیریم. در این صورت، باید داشته باشیم:

$$x^۳+mx+\sqrt{۲}=(x-\alpha)^۲(x-\beta)$$

این برابری یک اتحاد است (چرا؟)، و بنابراین، باید ضریبهای جمله‌های متشابه در دو طرف برابری با هم برابر باشند. سمت راست برابری را باز می‌کنیم:

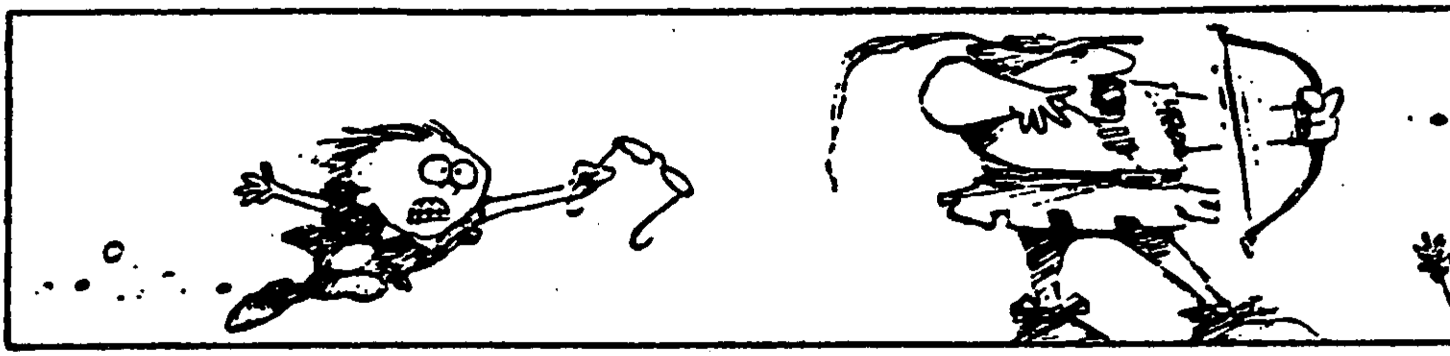
$$x^۳+mx+\sqrt{۲}=x^۳-(۲\alpha+\beta)x^۲+(\alpha^۲+۲\alpha\beta)x-\alpha^۲\beta$$

به این ترتیب، به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases}۲\alpha+\beta=۰\\ \alpha^۲+۲\alpha\beta=m\\ \alpha^۲\beta=-\sqrt{۲}\end{cases}$$

که دستگاهی است شامل سه معادله و سه مجهول α، β و m. اگر بتوانیم این دستگاه را حل کنیم، نه تنها مقدار m، که مقدار ریشه‌ها هم به دست می‌آید. مقدار $\beta=-۲\alpha$ را به جای β در معادلهٔ سوّم قرار می‌دهیم.

$$۲\alpha^۳=\sqrt{۲}\Rightarrow\alpha^۳=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\Rightarrow\alpha=\frac{۱}{\sqrt[۶]{۲}}$$



با در دست داشتن مقدار α، برابری $\beta=-2\alpha$، مقدار β را به ما می‌دهد: $\beta=-\frac{2}{\sqrt[6]{2}}$. اکنون، مقدار m، از معادلهٔ دوم دستگاه محاسبه می‌شود:

$$m=\alpha^2+2\alpha\beta=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+2(\frac{1}{\sqrt[3]{2}})(-\frac{2}{\sqrt[3]{2}})=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}$$

به این ترتیب، هم مقدار m و هم مقدار ریشه‌ها به دست آمد و داریم:

$$x^3-\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}x+\sqrt{2}=(x-\frac{1}{\sqrt[6]{2}})^2(x+\frac{2}{\sqrt[6]{2}})$$

یادداشت: روش ضریبهای نامعین، روشی ساده است؛ ولی همیشه زیباترین راه حل را به ما نمی‌دهد. بجز این، همان طور که در مثالهای بعد خواهید دید، کار را به محاسبه‌های طولانی و ملال‌آور می‌کشاند. بنابراین، از روش ضریبهای نامعین، هنگامی استفاده کنید که از یافتن راه حلّ بهتر و زیباتر درمانده باشید.

در همین مثال ۱، می‌توان روشهای دیگری برای حل انتخاب کرد. می‌دانیم، معادلهٔ درجهٔ سوّم به صورت $x^3+px+q=0$، وقتی و تنها وقتی، دو ریشهٔ برابر دارد، که برای آن داشته باشیم:

$$4p^3+27q^2=0$$

در مسألهٔ ما $p=m$ و $q=\sqrt{2}$؛ بنابراین باید داشته باشیم:

$$4m^3+27(\sqrt{2})^2=4m^3+54=0\Rightarrow m=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}$$

می‌بینید، اگر منظور از حلّ مسأله، تنها پیدا کردن مقدار m باشد، از این راه، خیلی سریعتر به دست می‌آید. ولی پس از به دست آمدن مقدار m، اگر نخواهیم از مفهوم مشتق استفاده کنیم، برای یافتن مقدار ریشه‌ها، دوباره باید به روش ضریبهای نامعیّن متوسّل شویم.

ولی استفاده از مفهوم مشتق، کار را در همهٔ موردها ساده‌تر می‌کند. فرض کنید $f(x)$، یک چند جمله‌ای با ریشهٔ مضاعف باشد، در این صورت می‌توان آن را چنین نوشت:

$$f(x)=(x-a)^2\varphi(x)$$

(a را ریشهٔ مضاعف $f(x)$ گرفته‌ایم). اگر مشتق $f(x)$ را پیدا کنیم، به دست می‌آید:

$$f'(x)=(x-a)\left[2\varphi(x)+(x-a)^2\varphi'(x)\right]$$

یعنی، عدد a، ریشهٔ $f'(x)$ است. به طور کلی:

اگر عدد a، هم $f(x)$ و هم $f'(x)$ را برابر صفر کند، آن وقت a ریشهٔ مضاعف $f(x)$ است.

برای این که معادلهٔ $x^3+mx+\sqrt{2}=0$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد، باید با مشتق خود، یعنی $3x^2+m=0$، ریشهٔ مشترک داشته باشد. این معادله دو ریشه دارد: $x_1=\sqrt{-\frac{m}{3}}$ و $x_2=-\sqrt{-\frac{m}{3}}$. در این جا، در ضمن نتیجه می‌شود که m عددی منفی است. یکی از دو مقدار x_1 یا x_2 (و مثلاً x_1) را، در معادلهٔ درجهٔ سوّم مفروض قرار می‌دهیم (در این جا، چه x_1 را در معادله قرار دهیم و چه x_2 را، در نتیجهٔ کار تغییری حاصل نمی‌شود، آزمایش کنید.) توجه کنیم:

$$(\sqrt{\frac{-m}{3}})^3=\left|\frac{m}{3}\right|\sqrt{-\frac{m}{3}}=-\frac{m}{3}\sqrt{-\frac{m}{3}}$$

(زیرا $m<0$) به‌دست می‌آید:

$$-\frac{m}{3}\sqrt{-\frac{m}{3}}+m\sqrt{-\frac{m}{3}}+\sqrt{2}=0\Rightarrow m=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}$$

مقدار m محاسبه شد. ولی کدام یک از دو عدد x_1 یا x_2 ریشهٔ مضاعفند؟ اکنون معادلهٔ درجه سوّم چنین است:

$$x^3-\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}x+\sqrt{2}=0 \qquad (1)$$

با آزمایش معلوم می‌شود که تنها x_1 در این معادله صدق می‌کند و

$$x_1=\sqrt{-\frac{m}{3}}=\sqrt{\frac{\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}}{3}}=+\frac{1}{\sqrt[6]{2}}$$

معادلهٔ (۱) سه ریشه دارد، که دو ریشهٔ آن برابر $\frac{1}{\sqrt[6]{2}}$ است. ولی حاصل ضرب سه ریشه، با توجه به معادلهٔ (۱) در این مسأله برابر است با $-\sqrt{2}$. پس

$$x_1.x_2.x_3=-\sqrt{2}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt[6]{2}}.\frac{1}{\sqrt[6]{2}}.x_3=-\sqrt{2}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}.x_3=-\sqrt{2}\Rightarrow x_3=-\sqrt{2}.\sqrt[3]{2}=-\sqrt[6]{32}=\frac{-2}{\sqrt[6]{2}}$$

برای حلّ این مسأله، نه تنها توانستیم از روش ضریبهای نامعیّن استفاده کنیم ؛ بلکه این روش، تا حدّی برتری خود را نسبت به روشهای دیگر نشان داد ؛ زیرا با روش ضریبهای نامعیّن، نه تنها مقدار m، که مقدار هر یک از ریشه‌ها هم بسادگی به دست آمد.

مثال ۲. این معادلهٔ درجه سوّم را حل کنید:

$$x^3-7x+2\sqrt{2}=0 \qquad (1)$$

تلاش برای حلّ معادله: می‌دانیم، هر معادلهٔ درجهٔ سوّم، به شرط این که دارای ضریبهای حقیقی باشد، دست کم یک ریشهٔ حقیقی دارد. بنابراین، به احتمال زیاد، نخستین اندیشه‌ای که به ذهن راه می‌یابد، این است که عبارت درجهٔ سوم سمت چپ معادلهٔ (۱) را، به صورت ضرب یک عامل خطی در یک عامل درجهٔ دوم درآوریم. اگر ریشهٔ حقیقی معادله را α بگیریم، باید داشته باشیم :

$$x^3-7x+2\sqrt{2}=(x-\alpha)(x^2+ax+b) \qquad (2)$$

که برای حلّ معادلهٔ (۱)، باید ضریبهای نامعیّن α ، a و b را پیدا کنیم. اگر در دو طرف اتّحاد (۲)، ضریب توانهای مساوی را برابر قرار دهیم، به این دستگاه می‌رسیم :

$$\begin{cases}\alpha-a=0\\ a\alpha-b=7\\ \alpha b=-2\sqrt{2}\end{cases}$$

از معادلهٔ اوّل، $\alpha=a$ را در معادلهٔ دوم قرار می‌دهیم، $b=a^2-7$ به دست می‌آید. مقدارهای α و b را (که برحسب a در اختیار داریم)، در معادلهٔ سوّم می‌گذاریم ؛ به این معادله می‌رسیم :

$$a(a^2-7)+2\sqrt{2}=0\Rightarrow a^3-7a+2\sqrt{2}=0$$

یعنی برای پیدا کردن مقدار a، باید همان معادلهٔ (۱) را حل کرد. تیرمان به سنگ خورد و گرفتار دور باطل شدیم.

راه دیگری را، برای جست‌وجوی ریشه‌ها، با روش ضریبهای نامعیّن آزمایش می‌کنیم. این اتحاد را در نظر می‌گیریم :

$$x^3-7x+2\sqrt{2}=\alpha(x+a)^3+\beta(x+b)^3 \qquad (3)$$

اگر بتوانیم در این اتحاد، مقدارهای α ، β ، a و b را پیدا کنیم، آن وقت، یکی از ریشه‌های معادله به دست می‌آید :

$$\alpha(x+a)^3+\beta(x+b)^3=0\Rightarrow$$

$$x=-\frac{a\sqrt[3]{\alpha}+b\sqrt[3]{\beta}}{\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}} \qquad (4)$$

به یاری اتحاد (۳)، به این دستگاه می‌رسیم :

$$\begin{cases}\alpha+\beta=1\\ a\alpha+b\beta=0\\ a^2\alpha+b^2\beta=-\frac{7}{3}\\ a^3\alpha+b^3\beta=2\sqrt{2}\end{cases}$$

از دو معادلهٔ اوّل و دوم، دستگاه زیر به دست می‌آید :

$$\alpha=-\frac{b}{a-b}\ ,\ \beta=\frac{a}{a-b} \qquad (5)$$

که اگر در دو معادلهٔ سوّم و چهارم دستگاه قرار دهیم، بسادگی نتیجه می‌شود :

$$ab=\frac{7}{3}\ ,\ a+b=-\frac{6\sqrt{2}}{7}$$

بنابراین، a و b، ریشه‌های این معادلهٔ درجهٔ دوم هستند :

$$t^2+\frac{6\sqrt{2}}{7}t+\frac{7}{3}=0$$

این معادله، ریشه‌های حقیقی ندارد و ریشه‌های مختلط آن، به فرض $i=\sqrt{-1}$ ، چنین‌اند :

$$a=-\frac{3\sqrt{2}}{7}+\frac{17}{7\sqrt{3}}i\ ,\ b=-\frac{3\sqrt{2}}{7}-\frac{17}{7\sqrt{3}}i$$

با در دست داشتن a و b و استفاده از برابریهای (۵)، مقدارهای α و β هم به دست می‌آیند :

$$\alpha=-\frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{6}}{34}i\ ,\ \beta=-\frac{1}{2}+\frac{3\sqrt{6}}{34}i$$

(ضمن محاسبه، i^2 را برابر ۱− گرفته‌ایم). α ، β ، a و b به دست

آمدند؛ بنابراین، مقدار x، از رابطهٔ (۴) محاسبه می‌شود؛ ولی اجازه بدهید ادامه ندهیم. برای محاسبهٔ x، باید $\sqrt[3]{\alpha}$ و $\sqrt[3]{\beta}$ را پیدا کرد، و برای این منظور، به محاسبه‌های خسته کننده روی عددهای مختلط نیاز داریم.

در این راه، گرچه مقدار ضریبهای نامعیّن به دست آمد؛ ولی دشواری و طولانی بودن محاسبه‌های بعدی، ما را از ادامهٔ کار بازداشت. البته، حالتهایی از معادلهٔ درجه سوّم وجود دارد، که همین روش می‌تواند ما را به جواب برساند؛ بدون این که گرفتار محاسبه‌های ملال‌آور بشویم. ولی به طور معمول، این روشِ استفاده از ضریبهای نامعیّن، کار را به دشواری می‌کشاند.

به جست‌وجوی خود ادامه می‌دهیم. اتحاد زیر را می‌شناسیم:

$$x^3+a^3+b^3-3abx=$$
$$(x+a+b)(x^2+a^2+b^2-ax-bx-ab)$$

اکنون، این اتحاد را در نظر می‌گیریم:

$$x^3-7x+2\sqrt{2}=x^3-3abx+a^3+b^3 \qquad (6)$$

اگر بتوانیم در این اتحاد، مقدارهای a و b را بیابیم، آن وقت روشن است، که یکی از ریشه‌های معادلهٔ (۱)، برابر $x=-(a+b)$ خواهد بود.

با توجه به اتحاد (۶)، به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases}3ab=7\\ a^3+b^3=2\sqrt{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a^3b^3=\dfrac{343}{27}\\ a^3+b^3=2\sqrt{2}\end{cases}$$

بنابراین، a^3 و b^3، ریشه‌های این معادلهٔ درجهٔ دوم هستند:

$$t^2-2\sqrt{2}t+\frac{343}{27}=0$$

که ریشه‌های آن، عددهایی مختلطند. با فرض $i=\sqrt{-1}$، به دست می‌آید:

$$a^3=\sqrt{2}+\frac{17}{3\sqrt{3}}i\ ,\ \ b^3=\sqrt{2}-\frac{17}{3\sqrt{3}}i$$

در این جا، با اندکی کاوش به دست می‌آید:

$$\sqrt{2}\pm\frac{17}{3\sqrt{3}}i=(\sqrt{2}\pm\frac{1}{\sqrt{3}}i)^3$$

بنابراین:

$$a=\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}i\ ,\ \ b=\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}i$$

و در نتیجه:

$$x_1=-(a+b)=-2\sqrt{2}$$

می‌بینید چه نتیجهٔ جالبی به دست آمد: عمل با عددهای مختلط یاریمان کرد، تا ریشهٔ حقیقی معادله را به دست آوریم.

اکنون دیگر می‌توانیم معادلهٔ (۱) را، به طور کامل حل کنیم. سه جمله‌ای درجهٔ سوّم سمت چپ برابری در معادلهٔ (۱)، بر $x+2\sqrt{2}$ بخش‌پذیر است (زیرا به ازای این عدد برابر صفر می‌شود) و معادلهٔ (۱)، به این صورت درمی‌آید:

$$(x+2\sqrt{2})(x^2-2\sqrt{2}x+1)=0\ ;$$
$$x_1=-2\sqrt{2}\ ,\ \ x_2=\sqrt{2}+1\ ,\ \ x_3=\sqrt{2}-1$$

سرانجام موفق شدیم. البته می‌توان حدس زد که این روش هم، همیشه کارساز نیست، و از آن جا که اغلب منجر به محاسبه روی عددهای مختلط می‌شود، ممکن است کار را دشوار کند؛ ولی به هر حال، در بیشتر حالتها، از روش قبلی ساده‌تر است.

در مثال ۲، روی یک نمونهٔ عددی، دو روش (که هر دو، براساس استفادهٔ از ضریبهای نامعین بود) آوردیم که برای حلّ هر معادلهٔ درجهٔ سوّم، وقتی به صورت $x^3+px+q=0$ باشد، به کار می‌روند. و این، البته به شرطی است که در عملهای مربوط به عددهای مختلط تسلّط یافته باشیم. ولی به هر حال، حلّ معادلهٔ درجهٔ سوّم در حالتهای کلی، طولانی است و به صرف وقت زیادی نیاز دارد. در حالتهای عددی، باید پیش از آزمایش روش استفاده از ضریبهای نامعیّن، راه‌های دیگری را جست‌وجو کرد و تنها در حالت ناچاری، به سراغ این روش رفت. همین معادلهٔ (۱) را می‌توان با روش ساده‌تری حل کرد.

اگر معادلهٔ (۱) را، به صورت:

$$x^3-(4\times2-1)x+2\sqrt{2}=0$$

بنویسیم و فرض کنیم $a=\sqrt{2}$، به این معادلهٔ پارامتری می‌رسیم:

$$x^3-(4a^2-1)x+2a=0$$

معادله را نسبت به a، منظّم می‌کنیم، که معادله‌ای درجهٔ دوم به‌دست می‌آید:

$$4xa^2-2a-(x^3+x)=0$$

و بسادگی قابل حل است و مقدارهای a، برحسب x، چنین می‌شوند:

$$a_1=-\frac{x}{2}\ ,\ \ a_2=\frac{1+x^2}{2x}$$

اکنون، اگر دوباره به جای a، مقدارش $\sqrt{2}$ را قرار دهیم، برای ریشه‌های معادلهٔ (۱)، به این دو معادله می‌رسیم :

$$x+2\sqrt{2}=0\ ,\quad x^2-2\sqrt{2}x+1=0$$

که از آنها، همان جوابهای قبلی به دست می‌آید.

معادلهٔ (۱) را، با راه ساده‌تری می‌توان حل کرد و برای حلّ آن، نیازی به این همه تلاش نبود. اگر در این جا، حلّ آن را با شیوه‌های مختلف مورد آزمایش قرار دادیم، تنها به این دلیل بود که راه‌های کاربرد روش ضریبهای نامعین را نشان دهیم.

عبارت سمت چپ معادلهٔ (۱)، بسادگی قابل تجزیه است :

$$x^3-7x+2\sqrt{2}=x(x^2-8)+(x+2\sqrt{2})=$$
$$=x(x+2\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})+(x+2\sqrt{2})$$
$$=(x+2\sqrt{2})(x^2-2\sqrt{2}x+1)$$

که بسادگی، ریشه‌های آن به دست می‌آیند.

اکنون به نمونهٔ مثالی می‌پردازیم که، به احتمال زیاد، بدون استفاده از روش ضریبهای نامعین، قابل حل نیست.

مثال ۳. عدد طبیعی n را طوری بیابید که چند جمله‌ای

$$f(x,y)=2x^4+4x^3y+nx^2y^2-3xy^3+2y^4$$

به ضرب دو چند جمله‌ای با ضریبهای درست، قابل تجزیه باشد.

در آغاز یادآوری می‌کنیم که : $f(x,y)$ نسبت به x و y متقارن است ؛ یعنی، اگر در آن، x را به y و y را به x تبدیل کنیم، تغییر نمی‌کند. بنابراین، اگر داشته باشیم :

$$f(x,y)=f_1(x,y).f_2(x,y)$$

ممکن است یکی از دو حالت پیش آید :

۱) هر یک از چندجمله‌ایهای $f_1(x,y)$ و $f_2(x,y)$ نسبت به x و y متقارن هستند ؛

۲) در تبدیل x به y و y به x، چند جمله‌ای f_1 به f_2 و چند جمله‌ای f_2 به f_1 تبدیل می‌شوند ؛ یعنی

$$f_1(y,x)=f_2(x,y)\ ,\quad f_2(y,x)=f_1(x,y)$$

که در این صورت، f_1f_2 نسبت به x و y متقارن خواهد شد.

مسأله را، در هر یک از این دو حالت، به طور جداگانه حل می‌کنیم.

۱) در این حالت، دو صورت مختلف ممکن است : الف) f_1 یک دوجمله‌ای درجهٔ اوّل است ؛ ب) f_1، یک سه جمله‌ای درجهٔ دوم است.

الف) در این حالت، باید داشته باشیم :

$$2x^4+3x^3y+nx^2y^2+3xy^3+2y^4=$$
$$=(x+y)(2x^3+mx^2y+mxy^2+2y^3)$$

(چون عبارت درون پرانتز دوم، باید نسبت به x و y متقارن باشد، ضریبهای x^2y و xy^2 را یکسان درنظر گرفته‌ایم ؛ با وجود این، اگر هم ضریبها را یکی m و دیگری p در نظر می‌گرفتیم، نتیجهٔ درست به دست می‌آمد). بسادگی و با برابر قرار دادن ضریبهای جمله‌های متشابه در دو طرف برابری، مقدارهای m و n به دست می‌آیند :

$$m=1\ ,\quad n=2$$

که در نتیجه، $f(x,y)$، به این صورت قابل تجزیه است :

$$f(x,y)=(x+y)(2x^3+x^2y+xy^2+2y^3)$$

ب) در این حالت، باید داشته باشیم :

$$2x^4+3x^3y+nx^2y^2+3xy^3+2y^4=$$
$$=(x^2+\alpha xy+y^2)(2x^2+\beta xy+2y^2)$$

با برابر قرار دادن ضریبهای جمله‌های متشابه در دو طرف برابری، به این دستگاه می‌رسیم :

$$\begin{cases}2\alpha+\beta=3\\ \alpha\beta+4=n\end{cases}$$

اگر β را بین این دو معادله حذف کنیم، می‌توانیم α را برحسب n محاسبه کنیم :

$$\alpha=\frac{3\pm\sqrt{41-8n}}{4}$$

α عددی حقیقی و درست است، پس $0<n\le\frac{41}{8}$. پس n، یکی از عددهای ۱، ۲، ۳، ۴ یا ۵ است (بنابر شرط مسأله، n عددی طبیعی است). به ازای $n=1$ و $n=3$، برای α، عددی گویا به دست نمی‌آید و برای بقیهٔ مقدارهای n داریم :

$$n=2\Rightarrow\alpha=2\ ,\quad \beta=-1;$$
$$n=4\Rightarrow\alpha=0\ ,\quad \beta=3;$$
$$n=5\Rightarrow\alpha=1\ ,\quad \beta=1$$

(جوابهای غیر درست α و β را کنار گذاشته‌ایم). در نتیجه، یکی از سه تجزیهٔ زیر، برای $f(x,y)$، به دست می‌آید :

$$f(x,y)=(x^2+2x+y^2)(2x^2-xy+2y^2),$$
$$f(x,y)=(x^2+y^2)(2x^2+3xy+2y^2),$$

$$f(x,y)=(x^2+xy+y^2)(2x^2+xy+2y^2)$$

۲) در این حالت، باید داشته باشیم :

$$2x^4+3x^3y+nx^2y^2+3xy^3+2y^4=$$
$$=(2x^2+axy+y^2)(x^2+axy+2y^2)$$

که از آن، مقدارهای a و n، بسادگی به دست می‌آیند :

$$a=1\ ,\ \ n=6$$

که تجزیهٔ $f(x,y)$ به این صورت درمی‌آید :

$$f(x,y)=(2x^2+xy+y^2)(x^2+xy+2y^2)$$

به این ترتیب، چندجمله‌ای $f(x,y)$، به ازای $n=2$، $n=4$، $n=5$ و $n=6$ قابل تجزیه به ضرب دو چند جمله‌ای با ضریبهای درست است.

□

ضمن استفاده از روش ضریبهای نامعیّن، باید هوشیار بود و تا جایی که شدنی است، از ضریبهای مجهول کمتری استفاده کرد. به این مثال توجه کنید :

مثال ۴. چند جمله‌ای $f(x)$ از درجهٔ چهارم را طوری پیدا کنید، که بر $x-2$ بخش‌پذیر باشد و ضمن تقسیم بر هر یک از دوجمله‌ایهای $x-1$، $x+1$، $x+2$ و $x-3$، باقیمانده‌ای برابر -12 پیدا کند.

چند جمله‌ای درجهٔ چهارم را به این صورت در نظر می‌گیریم :

$$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$$

با توجه به شرطهای مسأله، باید داشته باشیم :

$$f(2)=0,\ \ f(1)=f(-1)=f(-2)=f(3)=-12$$

که در نتیجه، به دستگاهی شامل پنج معادلهٔ پنج مجهولی می‌رسیم :

$$\begin{cases}16a+8b+4c+2d+e=0\\ a+b+c+d+e=-12\\ a-b+c-d+e=-12\\ 16a-8b+4c-2d+e=-12\\ 81a+27b+9c+3d+e=-12\end{cases}$$

حلّ این دستگاه دشوار نیست، ولی محاسبه‌های طولانی و خسته کننده‌ای را می‌طلبد. در دستگاه‌های خطی، هر چه تعداد معادله‌ها بیشتر شود، میزان وقت لازم برای حلّ آنها، بسرعت بالا می‌رود. مثلاً اگر برای حلّ یک دستگاه شامل دو معادلهٔ خطی، تنها دو دقیقه وقت لازم باشد، برای حلّ یک دستگاه سه معادلهٔ خطی سه مجهولی (از همان نوع)، دست کم شش دقیقه وقت لازم است.

استفادهٔ کورکورانه از روش ضریبهای نامعیّن، در بسیاری حالتها، ما را به دستگاه‌های بزرگی می‌رساند، که گرچه راه حلّ آن روشن است، در عمل نمی‌تواند به نتیجه برسد. اگر محاسبه‌ها با دست (و نه ماشین محاسبه) انجام شود، همیشه احتمال اشتباه وجود دارد و بازیابی اشتباه‌ها، به همان اندازهٔ حلّ دستگاه، وقت می‌گیرد.

روش ضریبهای نامعیّن، تا حدّ زیادی ما را قانع می‌کند که مسأله قابل حل است. ولی اگر با دستگاه‌های بزرگ سروکار پیدا کردیم، یا با دستگاهی روبه‌رو شدیم که شامل معادله‌های غیرخطی است و امکان حلّ آن در اختیار ما نیست و یا سرانجام، اگر با محاسبه‌های طولانی و ملال‌آور روبه‌رو شویم (راه حلّ اوّل مثال (۲) را ببینید)، باید در جست‌وجوی راه حلّ دیگری برای مسأله باشیم.

دربارهٔ مسألهٔ مثال ۴، می‌توان با انتخاب تنها یک ضریب نامعیّن، مسأله را حل کرد. اگر عبارت درجهٔ چهارم

$$a(x-1)(x+1)(x+2)(x-3)$$

را در نظر بگیریم، بر هر یک از دوجمله‌ایهای $x-1$، $x+1$، $x+2$ و $x-3$ بخش‌پذیر است. بنابراین، عبارت درجهٔ چهارم

$$f(x)=a(x-1)(x+1)(x+2)(x-3)-12$$

در تقسیم بر هر یک از این دوجمله‌ایها، به باقی مانده‌ای برابر -12 می‌رسد ؛ یعنی $f(x)$، همان چندجمله‌ای درجهٔ چهارم مورد نظر مسأله است که تنها یک ضریب نامعیّن (a) دارد. برای یافتن مقدار a، از شرط $f(2)=0$ استفاده می‌کنیم که، از آن جا، بسادگی به دست می‌آید :

$$-12a-12=0\Rightarrow a=-1$$

بنابراین، چندجمله‌ای درجهٔ چهارم مطلوب، به این صورت است :

$$f(x)=-(x-1)(x+1)(x+2)(x-3)=$$
$$=-x^4+x^3+7x-x-18$$

مثال ۵. چندجمله‌ای $f(x)$ از درجهٔ پنجم را بیابید، به شرطی که $f(x)+2$ بر $(x+2)^3$ و $f(x)-2$ بر $(x-2)^3$ بخش‌پذیر باشد.

اگر چشم بسته، چندجمله‌ای درجهٔ پنجم $f(x)$ را به صورت :

$$f(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$$

در نظر بگیریم، پس از ماجراهایی (که خود به اندازهٔ کافی

ملال‌آورند)، به دستگاهی از شش معادلهٔ خطی شش مجهولی می‌رسیم که، حلّ آن، به محاسبه‌ای سنگین و خسته کننده نیاز دارد.

ولی اگر از مفهوم مشتق و سپس، تابع اولّیه استفاده کنیم، یک چند جمله‌ای درجهٔ پنجم با دو ضریب نامعین به دست می‌آید.

وقتی $f(x)+۲$ بر $(x+۲)^۳$ بخش‌پذیر باشد، مشتق آن، یعنی $f'(x)$، بر $(x+۲)^۲$ بخش‌پذیر است. همچنین، از آن جا که $f(x)-۲$ بر $(x-۲)^۳$ بخش‌پذیر است، $f'(x)$ بر $(x-۲)^۲$ بخش‌پذیر می‌شود. به این ترتیب، $f'(x)$ بر $(x+۲)^۲$ و بر $(x-۲)^۲$، یعنی بر حاصل ضرب آنها $(x^۲-۴)^۲$ بخش‌پذیر است ($x+۲$ و $x-۲$ نسبت به هم اولّند). در نتیجه $f'(x)$ به این صورت است:

$$f'(x)=a(x^۴-۸x^۲+۱۶)$$

(چون $f(x)$ از درجهٔ پنجم است، مشتق آن از درجهٔ چهارم درمی‌آید). اکنون، برای پیدا کردن $f(x)$، باید تابع اولّیهٔ $f'(x)$ را محاسبه کنیم:

$$f(x)=\int a(x^۴-۸x^۲+۱۶)dx =$$
$$=a(\frac{۱}{۵}x^۵-\frac{۸}{۳}x^۳+۱۶x)+b$$

(b مقداری است ثابت). می‌بینیم برای $f(x)$، تنها دو ضریب نامعیّن وجود دارد: a و b.

برای پیدا کردن a و b، از این دو شرط استفاده می‌کنیم:

$$f(-۲)+۲=۰\ ,\ \ f(۲)-۲=۰$$

در نتیجه، به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} a(-\frac{۳۲}{۵}+\frac{۶۴}{۳}-۳۲)+b+۲=۰ \\ a(\frac{۳۲}{۵}-\frac{۶۴}{۳}+۳۲)+b-۲=۰ \end{cases}$$

از مجموع این دو معادله، به دست می‌آید: $b=۰$ و، سپس، از معادلهٔ دوم، مقدار a محاسبه می‌شود: $a=\frac{۱۵}{۱۲۸}$. از آن‌جا:

$$f(x)=\frac{۱}{۱۲۸}(۳x^۵-۴۰x^۳+۲۴۰x)$$

مثال ۶. $f(x)$ از درجهٔ پنجم را بیابید؛ به شرطی که بدانیم $f(x+۲)-۲$ بر $(x-۲)^۲$ و $f(x-۲)+۲$ بر $(x+۲)^۲$ بخش‌پذیر است.

این مسأله، با اندکی دقت، به مسأله‌ای شبیه مسألهٔ قبل تبدیل می‌شود. $f(x+۲)-۲$ بر $(x-۲)^۲$ بخش‌پذیر است. اگر $x-۲=y$ بگیریم، آن وقت به معنای آن است که $f(y)-۲$ بر $(y-۴)^۲$، یعنی $f(x)-۲$ بر $(x-۴)^۲$ بخش‌پذیر است. همچنین، از شرط دوم مسأله نتیجه می‌شود که $f(x)+۲$ بر $(x+۴)^۲$ بخش‌پذیر است. دنبالهٔ حل شبیه حلّ مثال ۵ است.

۶ ۶ ۶ ۶ = ۵
۶ ۶ ۶ ۶ = ۶
۶ ۶ ۶ ۶ = ۸
۶ ۶ ۶ = ۳۰
۶ ۶ ۶ = ۲۴
۶ ۶ ۶ = ۴۸
۶ ۶ ۶ = ۶۶
۶ ۶ ۶ = ۱۸۰

در هر سطر، چگونه می‌توان تساوی را با قرار دادن علامتهای $+$ ، $-$ ، $\times$ ، : و ( ) بین رقمهای ۶، برقرار ساخت؟

● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمه سیمین‌دخت ترکپور

جواب در صفحهٔ ۸۸

لگاریتم

● احمد قندهاری

جان نپر[1] ریاضیدان اسکاتلندی در سال ۱۶۱۴ میلادی، کتابی به زبان لاتین تحت عنوان «شرح جدول شگفت‌انگیز لگاریتمها» منتشر کرد که فوق‌العاده موزد توجه ریاضیدانان قرار گرفت.

جدول این کتاب، بعدها به «جدول لگاریتم» معروف شد.

«نپر» برای محاسبات این کتاب حدود بیست سال زحمت کشیده بود. مبنای لگاریتم «نپر» عدد «e» است که مقدار آن از سری $e = ۱ + \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} + \dots$ به دست می‌آید (مقدار تقریبی این عدد (۲/۷۱۸۲) است). به همین علت، لگاریتم ابداعی یا اختراعی «نپر» را لگاریتم «نپری» یا «نپرین» گویند و آن را به صورت loge یا Ln نشان می‌دهند.

یک سال پس از انتشار کتاب «نپر»، یک معلم ریاضی در انگلستان به نام «بریگز»[2] دست از کار خود کشید و به اسکاتلند نزد «نپر» رفت. ضمن تشویق و قدردانی، از او خواست که جدول لگاریتمی بر مبنای (۱۰) را بنویسد. نپر از این پیشنهاد استقبال کرد، ولی عمرش کفاف نداد که آن را به پایان برساند.

«بریگز» کار نیمه‌تمام «نپر» را ادامه داد تا در سال ۱۶۲۴ میلادی، جدول لگاریتم دهگانی را به پایان رساند و منتشر کرد. این جدول بعدها به وسیلهٔ دیگران تکمیل شد.

بخش اول: تعریف لگاریتم و فرمولهای آن

کلیه اعدادی که در این مقاله مطرح می‌شود اعداد حقیقی است.

I. تعریف لگاریتم:

فرض می‌کنیم عدد (a) مثبت و مخالف یک باشد.

اگر اعدادی مانند (N) و (x) داشته باشیم ؛ به طوری که $N = a^x$ ، در این صورت بنا به تعریف، می‌گوییم لگاریتم (N) در مبنای (a)مساوی (x) است :

$$N = a^x \Leftrightarrow \log_a^N = x$$

عدد (x) را حاصل لگاریتم و عدد (a) را مبنا و عدد (N) را آنتی‌لگاریتم یا عدد ما به ازاء گویند.

چون a عددی مثبت است و عدد مثبت به هر توان که برسد، مثبت است، پس a^x و در نتیجه N همواره مثبت است. به همین علت است که می‌گوییم اعداد منفی و صفر، لگاریتم ندارند.

مثال : از تساوی $\log_{\sqrt[۴]{۵}}^{۵\sqrt{۵}} = x$ مقدار x را بیابید.

حل: بنا به تعریف می‌توان نوشت :

$$۵\sqrt{۵} = (\sqrt[۴]{۵})^x$$

دوطرف برابری را به توان (۴) می‌رسانیم :

$$۵^۴ \times ۵^۲ = ۵^x$$

$$۵^۶ = ۵^x \Rightarrow \boxed{x = ۶}$$

مثال : از تساوی $\log_{a^۲\sqrt[۳]{a}} N = \frac{۹}{۱۴}$ مقدار N را بیابید.

حل:

$$N = (a^۲\sqrt[۳]{a})^{\frac{۹}{۱۴}} = (a^{۱۸}a^۳)^{\frac{۱}{۱۴}} = (a^{۲۱})^{\frac{۱}{۱۴}} = a^{\frac{۳}{۲}}$$

$$\Rightarrow \boxed{N = a\sqrt{a}}$$

مثال : از تساوی $\log_a(۲+\sqrt{۳}) = -۱$ ، مقدار a را بیابید.

حل:

$$(۲+\sqrt{۳}) = a^{-۱} \Rightarrow \frac{۱}{a} = ۲+\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow a = \frac{۱}{۲+\sqrt{۳}}$$

$$\Rightarrow a = \frac{۱}{۲+\sqrt{۳}} \times \frac{۲-\sqrt{۳}}{۲-\sqrt{۳}}$$

$$\Rightarrow \boxed{a = ۲-\sqrt{۳}}$$

II. فرمولهای لگاریتم:

هر عددی که در مبنای لگاریتم قرار می‌گیرد، شرط مثبت و مخالف یک بودن را داراست.

$$۱ = a^{۰} \Rightarrow \boxed{\log_a^{۱} = ۰} \qquad (۱)$$

$$a = a^{۱} \Rightarrow \boxed{\log_a^{a} = ۱} \qquad (۲)$$

اگر $M = a^x$ و $N = a^y$ ، آن‌گاه خواهیم داشت :

$$\log_a N = y \ , \ \log_a M = x$$

$$M.N = a^x.a^y \Rightarrow MN = a^{x+y}$$

$$\Rightarrow \log_a MN = x+y$$

$$\Rightarrow \boxed{\log_a MN = \log_a M + \log_a N} \qquad (۳)$$

تعمیم :

$$\log_a M.N.K\ldots = \log_a M + \log_a N + \log_a K + \ldots$$

مثال:

$$\log_۴ ۵\times۱۱\times۱۷ = \log_۴ ۵ + \log_۴ ۱۱ + \log_۴ ۱۷$$

می‌توان نوشت : اگر $M = a^x \Rightarrow \log_a M = x$

اگر $N = a^y \Rightarrow \log_a N = y$

$$\frac{M}{N} = \frac{a^x}{a^y} \Rightarrow \frac{M}{N} = a^{x-y}$$

$$\Rightarrow \log_a \frac{M}{N} = x-y$$

$$\Rightarrow \boxed{\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N} \qquad (۴)$$

مثال: $\log_۳ \frac{۶۲۵}{۱۱} = \log_۳ ۶۲۵ - \log_۳ ۱۱$

نتیجه‌ای از فرمول (۴)

$$\log_a \frac{۱}{N} = \log_a ۱ - \log_a N \Rightarrow \boxed{\log_a \frac{۱}{N} = -\log_a N} \ (۵)$$

$$N = a^x \Rightarrow \log_a N = x$$

$x \neq ۰$ یا $N \neq ۱$

فرض می‌کنیم $\log_{a^p}^{N^m} = kx$ ، می‌خواهیم k را بیابیم.

$$\log_{a^p}^{N^m} = kx \Rightarrow N^m = (a^p)^{kx} \Rightarrow N^m = a^{pkx}$$

$$\Rightarrow (a^x)^m = a^{pkx} \Rightarrow a^{mx} = a^{pkx}$$

$$\Rightarrow mx = pkx \Rightarrow m = pk \Rightarrow \boxed{k = \frac{m}{p}}$$

$$\Rightarrow \log_{a^p}^{N^m} = kx \Rightarrow \log_{a^p}^{N^m} = \frac{m}{p}x$$

$$\Rightarrow \boxed{\log_{a^p}^{N^m} = \frac{m}{p}\log_a N} \qquad (۶)$$

مثال:

$$\log_{۱۲۸} ۶۴ = \log_{۲^۷} ۲^۶ = \frac{۶}{۷}\log_۲ ۲ = \frac{۶}{۷}$$

نتایج فرمول (۶)

I) $\log_a N^m = m\log_a N$

II) $\log_{a^p}^{N} = \frac{۱}{p}\log_a N$

III) $\log_{a^m}^{N^m} = \log_a N$

مثال:

$$\log_a N = \log_{a^۲} N^۲ = \log_{a^۳} N^۳ = \ldots = \log_{\sqrt{a}} \sqrt{N}$$

$$= \log_{\sqrt[۳]{a}} \sqrt[۳]{N} = \ldots$$

IV) $\log_{\frac{۱}{a}} \frac{۱}{N} = \log_{a^{-۱}} N^{-۱} = \log_a N$

V) $\log_{\sqrt[p]{a}} \sqrt[m]{N} = \log_{a^{\frac{۱}{p}}} N^{\frac{۱}{m}} = \frac{p}{m}\log_a N$

اگر $\log_b a = x \ , \ \log_a b = y$

آن‌گاه: $a = b^x \ , \ b = a^y \Rightarrow a = (a^y)^x$

$\Rightarrow a = a^{xy}$

$\Rightarrow xy = ۱ \Rightarrow \boxed{\log_b a \times \log_a b = ۱}$ (۷)

نتایج فرمول (۷)

I) $\log_b a \times \log_a b = ۱ \Rightarrow \boxed{\log_b a = \frac{۱}{\log_a b}}$ (۸)

II) $\log_{MN} a = \frac{۱}{\log_a MN} = \frac{۱}{\log_a M + \log_a N}$

$\Rightarrow \boxed{\log_{MN} a = \frac{۱}{\log_a M + \log_a N}}$ (۹)

مثال: ثابت کنید :

$$\log_{\sqrt{۲۴}} \sqrt{۲} = \frac{۱}{۳ + \log_۲ ۳}$$

حل:

$$\log_{\sqrt{۲۴}} \sqrt{۲} = \log_{۲۴} ۲ = \frac{۱}{\log_۲ ۲۴} = \frac{۱}{\log_۲ ۲^۳ \times ۳}$$

$$= \frac{۱}{۳\log_۲ ۲ + \log_۲ ۳} = \frac{۱}{۳ + \log_۲ ۳}$$

فرض می‌کنیم :

$\log_b a = x \ , \ \log_c b = y \ , \ \log_c a = z$

$\Rightarrow a = b^x \ , \ b = c^y \ , \ a = c^z$ (۱)

$\begin{cases} a = b^x \\ b = c^y \end{cases} \Rightarrow a = (c^y)^x \Rightarrow a = c^{xy}$ (۲)

با مقایسهٔ روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت :

$c^{xy} = c^z \Rightarrow xy = z$

$\Rightarrow \boxed{\log_b a \times \log_c b = \log_c a}$ (۱۰)

تعمیم :

$$\log_b a \times \log_c b \times \log_d c \times \ldots \times \log_n k = \log_n a$$

مثال:

$$\log_{۱۰} ۲۵ \times \log_۵ ۱۰ = \log_۵ ۲۵ = \log_۵ ۵^۲ = ۲\log_۵ ۵ = ۲$$

نتیجه‌ای از دستور (۱۰) :

$$\log_b a \times \log_c b = \log_c a \Rightarrow \log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

اگر به جای c عدد (۱۰) را قرار دهیم، خواهیم داشت :

$\boxed{\log_b a = \frac{\log a}{\log b}}$ (۱۱)

توجه : اگر مبنا عدد (۱۰) باشد، آن را نمی‌نویسند.

مثال:

$$\log_{۱۰۰۰} ۱۰۰۰۰ = \frac{\log ۱۰۰۰۰}{\log ۱۰۰۰} = \frac{\log ۱۰^۴}{\log ۱۰^۳}$$

$$= \frac{۴\log ۱۰}{۳\log ۱۰} = \frac{۴}{۳}$$

$$\left.\begin{array}{l} \log_c x = k \Rightarrow x = c^k \\ \log_b k = p \Rightarrow k = b^p \\ \log_a p = m \Rightarrow p = a^m \end{array}\right\} \Rightarrow x = c^k = c^{b^p} = c^{b^{a^m}}$$

$\Rightarrow \log_a p = \log_a(\log_b k) = \log_a(\log b(\log_c x))$

داشتیم $\log_a p = m$

$\Rightarrow \boxed{\log_a(\log_b(\log_c x)) = m \Rightarrow x = c^{b^{a^m}}}$ (۱۲)

مثال: $\log_{\sqrt{۲}}(\log_{\sqrt[۲]{۴}} \log_{\sqrt[۴]{۸}} x) = ۲$

$\Rightarrow x = \sqrt[۴]{۸}^{\sqrt[۲]{۴}^{\sqrt{۲}^۲}} \Rightarrow \boxed{x = ۸}$

اگر $\log_a N = p \ , \ p = \log_a N$

$\Rightarrow N = a^p \Rightarrow \boxed{N = (a)^{\log_a^N}}$ (۱۳)

به‌طور کلی داریم :

$\boxed{(x)^{\log_a^y} = (y)^{\log_a^x}}$ (۱۴)

زیرا اگر از طرفین در مبنای a لگاریتم بگیریم، خواهیم داشت :

$\log_a^y . \log_a^x = \log_a^x . \log_a^y$

مثال: $(۵)^{\log x} = (x)^{\log ۵}$

مثال: $(۱۰)^{\log x} = x$

فرض می‌کنیم $a > ۱$ ، با توجه به مطالب گفته شده خواهیم داشت :

I) $\log_a^N > ۰ \Rightarrow N > a^۰ \Rightarrow N > ۱$

II) $\log_a^N < ۰ \Rightarrow ۰ < N < a^۰ \Rightarrow ۰ < N < ۱$

III) $\log_a^N > 1 \Rightarrow N > a$

IV) $\log_a^N < 1 \Rightarrow 0 < N < a$

V) $\log_a^N > -1 \Rightarrow N > a^{-1} \Rightarrow N > \frac{1}{a}$

VI) $\log_a^N < -1 \Rightarrow 0 < N < a^{-1} \Rightarrow 0 < N < \frac{1}{a}$

حال فرض می‌کنیم $0 < a < 1$ و می‌دانیم $\log a$ عددی است منفی، در این صورت خواهیم داشت:

$$(I)' \quad \log_a^N > 0 \Rightarrow \frac{\log N}{\log a} > 0 \Rightarrow \log N < 0$$

$$\Rightarrow 0 < N < 1$$

$$(II)' \quad \log_a^N < 0 \Rightarrow \frac{\log N}{\log a} < 0 \Rightarrow \log N > 0$$

$$\Rightarrow N > 1$$

$$(III)' \quad \log_a^N > 1 \Rightarrow \frac{\log N}{\log a} > 1 \Rightarrow \log N < \log a$$

$$\Rightarrow 0 < N < a$$

$$(IV)' \quad \log_a^N < 1 \Rightarrow \frac{\log N}{\log a} < 1 \Rightarrow \log N > \log a$$

$$\Rightarrow N > a$$

$$(V)' \quad \log_a^N > -1 \Rightarrow \frac{\log N}{\log a} > -1$$

$$\Rightarrow \log N < -\log a \Rightarrow \log N < \log a^{-1}$$

$$\Rightarrow \log N < \log \frac{1}{a} \Rightarrow 0 < N < \frac{1}{a}$$

$$(VI)' \quad \log_a^N < -1 \Rightarrow \frac{\log N}{\log a} < -1$$

$$\Rightarrow \log N > -\log a \Rightarrow \log N > \log a^{-1}$$

$$\Rightarrow \log N < \log \frac{1}{a} \Rightarrow N > \frac{1}{a}$$

مثال: حدود x را بیابید. $\log(2x-3) < 0$

بنابه رابطه (II) داریم:

$$0 < 2x-3 < 1 \Rightarrow 3 < 2x < 4$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} < x < 2$$

مثال: $\log_{\frac{1}{4}}^{(2x-3)} > 0$

بنابه رابطه ′(I) داریم:

$$0 < 2x-3 < 1 \Rightarrow 3 < 2x < 4$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} < x < 2$$

مثال: $\log_{\frac{1}{6}}(4x-6) < -1$

بنابه رابطه ′(VI) داریم:

$$\Rightarrow 4x-6 > (\tfrac{1}{6})^{-1}$$

$$4x-6 > 6 \Rightarrow 4x > 12 \Rightarrow x > 3$$

مثال: $\log_{\frac{1}{8}}(2x-8) > -1$

بنا به رابطه ′(V) داریم:

$$0 < 2x-8 < (\tfrac{1}{8})^{-1} \Rightarrow 0 < 2x-8 < 8$$

$$8 < 2x < 16 \Rightarrow 4 < x < 8$$

بخش دوم: می‌دانیم:

$$100 = 10^2 \Rightarrow \log 100 = 2$$

$$1000 = 10^3 \Rightarrow \log 1000 = 3$$

اگر عددی بین ۱۰۰ و ۱۰۰۰ باشد، به‌طور مسلم لگاریتم آن بین ۲ و ۳ است.

مثلاً: $\log 200 = 2/30103$

عدد (۲) «مفسّر» و عدد اعشاری ۰/۳۰۱۰۳ را «مانتیس» یا «قسمت اعشاری» گویند که از جدول لگاریتم به‌دست می‌آید.

مفسّر از لحاظ علامت، مثبت یا منفی است و ممکن است صفر هم باشد؛ ولی مانتیس همواره مثبت است.

اگر مبنای لگاریتم(۱۰) باشد؛ به طوری که قبلاً گفته شد، مبنا را نمی‌نویسند و این لگاریتم را لگاریتم اعشاری یا لگاریتم «دهگانی» گویند.

در بحث زیر، مبنای لگاریتم ۱۰ و $N > 1$ است.

مفسّر:

اگرمفسّر مثبت یا صفر باشد، چنانچه یک واحد به آن اضافه

کنیم، تعداد ارقام عدد آنتی لگاریتم به دست می‌آید.

اگر مفسّر منفی باشد، قدر مطلق آن نشان‌دهندهٔ تعداد صفرهای سمت چپ عدد است، با احتساب صفر ممیز.

مثال:

N عددیست پنج رقمی $\Leftarrow \log N = ۴/۲۵۱$ اگر

اگر $\log N = \overline{۳}/۲۵۱ \Rightarrow$

در سمت چپ عدد N با احتساب صفر ممیز سه صفر وجود دارد.

مثال:

$$\log ۰/۱ = -۱$$

$$\log ۰/۰۱ = -۲$$

$$\log ۰/۰۰۱ = -۳$$

کلگاریتم: لگاریتم $\frac{۱}{N}$ را کلگاریتم N گویند، پس

$$-\log N = \operatorname{co}\log N \quad , \quad -\operatorname{co}\log N = \log N$$

طرز تعیین cologN از روی logN

(۱+) را به مفسّر logN اضافه می‌کنیم، پس از جمع جبری، علامت آن را عوض می‌کنیم. در مورد قسمت اعشاری: اوّلین رقم با معنای سمت راست قسمت اعشاری را از (۱۰) و بقیه را از (۹) کم می‌کنیم.

مثال:

$$\operatorname{co}\log N = ? \ , \ \log N = \overline{۲}/۲۱۴۵۰$$

$$\operatorname{co}\log N = ۱/۷۸۵۵$$

سؤال: اگر cologN را داشته باشیم، logN چگونه به دست می‌آید.

پاسخ: به همان طریقی که از روی logN ، cologN را به دست آوردیم:

مثال: $\operatorname{co}\log N = ۴/۲۱۶۰ \Rightarrow \log N = \overline{۵}/۷۸۴$

۱. جمع لگاریتمها:

برای جمع چند لگاریتم، مانتیس آنها را باهم جمع می‌کنیم، سپس واحدهای صحیحی که به دست می‌آید، با مفسّرها جمع جبری می‌کنیم.

مثال:

$$\left.\begin{matrix}\log x = ۲/۸۵۱۲ \\ \log y = \overline{۵}/۹۳۲۰\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\log x + \log y = ۲/۸۵۱۲ + \overline{۵}/۹۳۲۰ = \overline{۲}/۷۸۳۲$$

۲. تفریق لگاریتمها:

برای تفریق لگاریتمها، مفروق را به کلگاریتم تبدیل می‌کنیم، سپس به جای عمل تفریق، عمل جمع را انجام می‌دهیم.

مثال:

$$\begin{cases}\log x = \overline{۴}/۶۳۹۲ \\ \log y = ۲/۱۸۶۰\end{cases} \Rightarrow \log x - \log y =$$

$$\log x + \operatorname{co}\log y = \overline{۴}/۶۳۹۲ + \overline{۳}/۸۱۴۰ = \overline{۶}/۴۵۳۲$$

۳. ضرب عدد m در logx

الف: اگر m مثبت باشد، عمل ضرب معمولی انجام می‌گیرد؛ با توجه به این که مانتیس همواره مثبت است.

مثال:

$$\log x = \overline{۲}/۸۱۴۰ \Rightarrow ۵\log x = ?$$

$$۵\log x = ۵(\overline{۲}/۸۱۴۰) = ۵(-۲+۰/۸۱۴۰)$$

$$= -۱۰ + ۴/۰۷ = \overline{۶}/۰۷$$

ب: اگر عدد m منفی باشد، در این صورت cologx را در |m| ضرب می‌کنیم.

مثال:

$$\log x = ۱/۱۲۴۳ \Rightarrow -۵\log x = ?$$

$$-۵\log x = ۵(\operatorname{co}\log x) = ۵(\overline{۲}/۸۷۵۷)$$

$$= ۵(-۲+۰/۸۷۵۷) = -۱۰ + ۴/۳۷۸۵ = \overline{۶}/۳۷۸۵$$

۴. تقسیم logx بر عدد k

الف: اگر k مثبت و مفسّر، logx، مثبت باشد، در این صورت، با تقسیم معمولی اعشاری، جواب به دست می‌آید.

مثال:

$$\log x = ۲/۱۲۴۵ \Rightarrow$$

$$\frac{\log x}{۳} = \frac{۲/۱۲۴۵}{۳} = ۰/۷۰۸۱۶$$

ب: اگر k مثبت و مفسّر، logx منفی باشد؛ ولی عدد مفسّر به عدد k بخش پذیر باشد بازهم تقسیم به صورت معمولی انجام می‌شود.

مثال:

$$\log x = \bar{۶}/۸۱۴۱ \Rightarrow$$

$$\frac{\log x}{۳} = \frac{\bar{۶}/۸۱۴۱}{۳} = \bar{۲}/۲۷۱۳$$

ج : اگر k مثبت و مفسّر logx منفی باشد ؛ ولی عدد مفسّر بر kبخش‌پذیر نباشد، در این صورت، بزرگترین عدد منفی را به مفسّر اضافه می‌کنیم تا بر عدد k بخش‌پذیر شود و در عین حال، همان عدد با علامت مثبت را به مانتیس اضافه می‌کنیم و سپس عمل تقسیم را انجام می‌دهیم :

مثال:

$$\log x = \bar{۲}/۱۲۲۵ \Rightarrow \frac{\log x}{۵} = \frac{\bar{۲}/۱۲۲۵}{۵}$$

$$= \frac{-۲+۰/۱۲۲۵}{۵} = \frac{-۲-۳+۳+۰/۱۲۲۵}{۵}$$

$$= \frac{-۵+۳/۱۲۲۵}{۵} = -۱+۰/۶۲۴۵$$

$$= \bar{۱}/۶۲۴۵$$

د : اگر k منفی باشد، در این صورت، به جای تقسیم logx بر عدد منفی k، cologx را بر |k| تقسیم می‌کنیم، که در این وضعیت، عملیات به حالتهای گفته شده تبدیل می‌شود.

مثال:

$$\log x = ۲/۲۳۸۶ \Rightarrow \frac{\log x}{-۳} = \frac{-\log x}{۳}$$

$$= \frac{\operatorname{co}\log x}{۳} = \frac{\bar{۳}/۷۶۱۴}{۳} = \bar{۱}/۲۵۳۸$$

۵. ضرب یا تقسیم دو لگاریتم

الف : اگر مفسّرهای هر دو لگاریتم مثبت باشد، اعمال ضرب یا تقسیم، همان اعمال ضرب یا تقسیم دو عدد اعشاری در یکدیگر یا بر یکدیگر است.

مثال:

$$\begin{cases}\log x = ۲/۲۳۴۵\\ \log y = ۳/۰۱۲۴\end{cases} \Rightarrow$$

$$\log x.\log y = ۲/۲۳۴۵ \times ۳/۰۱۲۴ = ۶/۷۳۱۲$$

ب : اگر مفسّرهای هر دو لگاریتم منفی باشد، کلگاریتمهای آنها را در هم ضرب یا تقسیم می‌کنیم.

مثال:

$$\begin{cases}\log x = \bar{۱}/۴۱۲۳\\ \log y = \bar{۴}/۲۱۴۵\end{cases} \Rightarrow \log x.\log y$$

$$= \operatorname{co}\log x.\operatorname{co}\log y = (۰/۵۸۷۷)(۳/۷۸۵۵)$$

$$= ۲/۲۲۴۷$$

ج : اگر یکی از مفسّرها مثبت و دیگری منفی باشد، به جای آن که مفسّرش منفی است، کلگاریتم آن را قرار می‌دهیم. سپس از حاصل‌ضرب یا تقسیم، کلگاریتم می‌گیریم.

مثال:

$$\begin{cases}\log x = ۲/۲۱۴۵\\ \log y = \bar{۳}/۴۱۲۲\end{cases} \Rightarrow \log x.\log y$$

$$= -(\log x)(\operatorname{co}\log x) = -(۲/۲۱۴۵)(۲/۵۸۷۸)$$

$$= -(۵/۷۳۰۷) = \bar{۶}/۲۶۹۳$$

توجه : $\log ۵ = \log \frac{۱۰}{۲} = \log ۱۰ - \log ۲ = ۱ - \log ۲$

$\Rightarrow \log ۵ = ۱ - \log ۲$ یا $\log ۲ = ۱ - \log ۵$

مسائل:

مسألهٔ ۱ ـ اگر $x \neq y$ و داشته باشیم $\log_y^x = \log_x^y$ ، ثابت کنید $xy = ۱$.

حل:

$$\log_y^x = \log_x^y \Rightarrow \log_y^x = \frac{۱}{\log_y^x} \Rightarrow (\log_y^x)^۲ = ۱$$

$$\Rightarrow \log_y^x = \pm ۱ \Rightarrow x = y^{\pm ۱} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = y \quad \text{غ ق ق} \\ x = y^{-۱} \Rightarrow x = \frac{۱}{y} \Rightarrow \boxed{xy = ۱}\end{cases}$$

مسألهٔ ۲ ـ اگر $۳\log x = ۲$ ، x بین کدام دو عدد صحیح متوالی است؟

$$۳\log x = ۲ \Rightarrow \log x^۳ = \log ۱۰۰$$

$\Rightarrow x^{۳} = ۱۰۰ \Rightarrow ۴ < x < ۵$

مسألهٔ ۳ ـ از رابطهٔ $x \times ۵^{\log a} = a$ ، مقدار (x) را بیابید.

$$x = \frac{a}{۵^{\log a}} = \frac{a}{۵^{\log a}} = a^{۱-\log ۵} = a^{\log ۲} \Rightarrow$$

$$x = a^{\log ۲}$$

مسألهٔ ۴ ـ مقدار عددی $(۱۰)^{(۲\log\sqrt[۴]{۶}-\log ۲)}$ را حساب کنید.

$$(۱۰)^{(۲\log\sqrt[۴]{۶}-\log ۲)} = (۱۰)^{\log\sqrt{۶}-\log\sqrt{۲}} =$$

$$(۱۰)^{\log\frac{\sqrt{۶}}{۲}} = \frac{\sqrt{۶}}{۲}$$

مسألهٔ ۵ ـ حدود |x| را بیابید. اگر

$$\log_{\frac{۱}{۵}}(x^{۲}-۴) \geq -۱$$

$$\log_{\frac{۱}{۵}}(x^{۲}-۴) \geq -۱ \Rightarrow ۰ < x^{۲}-۴ \leq (\frac{۱}{۵})^{-۱}$$

$$\Rightarrow ۰ < x^{۲}-۴ \leq ۵ \Rightarrow ۴ < x^{۲} \leq ۹$$

$$\Rightarrow ۲ < |x| \leq ۳$$

مسألهٔ ۶ ـ به ازای چه مقادیر a، معادلهٔ :

$$x^{۲} - ۲(۱+\log a)x + ۱ - \log^{۲} a = ۰$$

دو ریشهٔ مختلف‌العلامه دارد؟

$$\frac{c}{a} < ۰ \Rightarrow \frac{۱-\log^{۲} a}{۱} < ۰ \Rightarrow$$

$$۱-\log^{۲} a < ۰ \Rightarrow \log^{۲} a > ۱ \Rightarrow \begin{cases} \log a > ۱ \\ \log a < -۱ \end{cases} \text{یا}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a > ۱۰ \\ ۰ < a < \frac{۱}{۱۰} \end{cases} \text{یا}$$

مسألهٔ ۷ ـ اگر $\log_{۹}^{۸} = a$ ، عبارت

$$\log_{۲۷} ۱۶ \times \log_{۳} ۲ = ?$$

$$\log_{۹}^{۸} = a \Rightarrow \log_{۳^{۲}} ۲^{۳} = a \Rightarrow \frac{۳}{۲}\log_{۳} ۲ = a$$

$$\Rightarrow \log_{۳} ۲ = \frac{۲}{۳}a$$

$$\log_{۲۷} ۱۶ \times \log_{۳} ۲ = \log_{۳^{۳}} ۲^{۴} \times \log_{۳} ۲ =$$

$$\frac{۴}{۳}\log_{۳} ۲ \times \log_{۳} ۲ = \frac{۴}{۳}(\log_{۳} ۲)^{۲} =$$

$$\frac{۴}{۳}(\frac{۲}{۳}a)^{۲} = \frac{۴}{۳} \times \frac{۴}{۹}a^{۲} = \frac{۱۶}{۲۷}a^{۲}$$

مسألهٔ ۸ ـ اگر $\log ۲ = ۰/۳۰۱۰۳$ ، در سمت چپ عدد $(\frac{۱}{۴})^{۱۰}$ چند صفر با احتساب صفر ممیّز وجود دارد.

$$\Rightarrow \operatorname{colog} ۲ = \overline{۱}/۶۹۸۹۷$$

$$(\frac{۱}{۴})^{۱۰} = (۲^{-۲})^{۱۰} = ۲^{-۲۰}$$

$$\log ۲^{-۲۰} = -۲۰\log ۲ = ۲۰(-\log ۲)$$

$$= ۲۰(\overline{۱}/۶۹۸۹۷) = ۲۰(-۱+۰/۶۹۸۹۷)$$

$$= -۲۰+۱۳/۹۷۹۴ = \overline{۷}/۹۷۹۴$$

پس در سمت چپ $(۴)^{-۱۰}$، با احتساب صفر ممیّز، هفت صفر وجود دارد.

مسألهٔ ۹ ـ معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$۲۵^{\log x} = ۵ + ۴(x^{\log ۵})$$

$۵^{۲\log x} = ۵ + ۴(۵^{\log x})$ فرض می‌کنیم $۵^{\log x} = y$

$$y^{۲} = ۵ + ۴y \Rightarrow y^{۲} - ۴y - ۵ = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -۱ & \text{غ ق ق} \\ y = +۵ \end{cases}$$

$$۵^{\log x} = ۵ \Rightarrow \log x = ۱ \Rightarrow \boxed{x = ۱۰}$$

مسألهٔ ۱۰ ـ اگر

$$(۳)^{\frac{۱+۲+۳+۴+...+n}{n}} = (۴)^{\log_{۲} ۹}$$

مقدار n را بیابید.

$$۱+۲+۳+۴+...+n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

$$\Rightarrow (۳)^{\frac{n(n+۱)}{۲n}} = (۴)^{\log_{۴} ۸۱} \Rightarrow ۳^{\frac{n+۱}{۲}} = ۸۱$$

$$\Rightarrow ۳^{\frac{n+۱}{۲}} = ۳^{۴} \Rightarrow \frac{n+۱}{۲} = ۴ \Rightarrow \boxed{n = ۷}$$

مسألهٔ ۱۱ ـ اگر $\log ۲ = ۰/۳۰۱۰۳$ ، عدد $(۶۲۵)^{۱۰}$ چند رقمی است؟

$$(۶۲۵)^{۱۰} = (۵^{۴})^{۱۰} = ۵^{۴۰} = (\frac{۱۰}{۲})^{۴۰}$$

$$\log(\frac{۱۰}{۲})^{۴۰} = ۴۰(\log\frac{۱۰}{۲}) = ۴۰(۱ - \log ۲)$$

$$= ۴۰(۱ + \operatorname{co}\log ۲) = ۴۰(۱ + \bar{۱}/۶۹۸۹۷)$$

$$= ۴۰(۰/۶۹۸۹۷) = ۲۷/۹۵۸۸$$

چون مفسّر (۲۷) است، پس عدد $(۶۲۵)^{۱۰}$ عددی است بیست و هشت رقمی.

مسألهٔ ۱۲ ـ حدود تغییرات x را در تابع:

$$y = \log_a(\log_a(\log_a x))$$

را با شرط $۰ < a < ۱$ بیابید.

$$\log_a(\log_a x) > ۰ \Rightarrow ۰ < \log_a x < ۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_a x < ۱ \Rightarrow x > a \\ \log_a x > ۰ \Rightarrow ۰ < x < ۱ \end{cases} \Rightarrow ۱ < x < a$$

مسألهٔ ۱۳ ـ معادلهٔ $x + (۲۴)^{\log x} = (۲۶)^{\log x}$ را حل کنید.

$$x = ۱۰^{\log x}$$

دوطرف معادله را بر $(۲۶)^{\log x}$ تقسیم می‌کنیم.

$$(۱۰)^{\log x} + (۲۴)^{\log x} = (۲۶)^{\log x}$$

$$(\frac{۱۰}{۲۶})^{\log x} + (\frac{۲۴}{۲۶})^{\log x} = ۱ \Rightarrow$$

$$(\frac{۵}{۱۳})^{\log x} + (\frac{۱۲}{۱۳})^{\log x} = ۱$$

اعداد $\frac{۵}{۱۳}$ و $\frac{۱۲}{۱۳}$ را درنظر می‌گیریم. چون

$$(\frac{۵}{۱۳})^{۲} + (\frac{۱۲}{۱۳})^{۲} = ۱$$

پس $\log x = ۲$ در نتیجه $\boxed{x = ۱۰۰}$

مسألهٔ ۱۴ ـ بیشترین مقدار $(\log_۳ ۲)^{\sin\alpha}$ چیست؟

$$۰ < \log_۳ ۲ < ۱ \;,\; -۱ \le \sin\alpha \le ۱ \Rightarrow$$

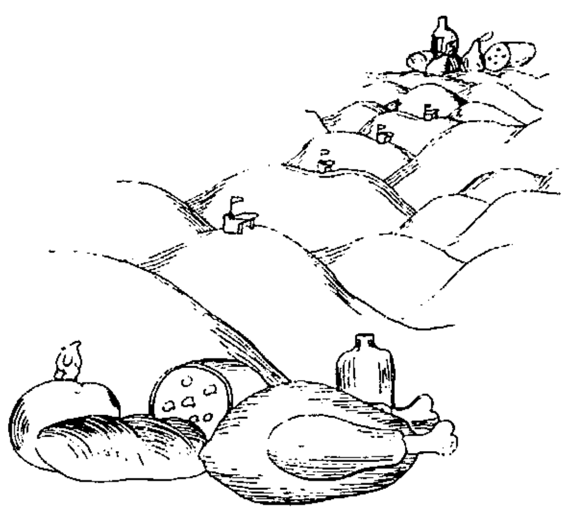
$$\operatorname{Max}(\log_۳ ۲)^{\sin\alpha} = (\log_۳ ۲)^{-۱} = \frac{۱}{\log_۳ ۲} = \log_۲ ۳$$

یادداشتها

۱. Neper یا Nepier

۲. Briggs

تفریح اندیشه ۲



مسافری تصمیم می‌گیرد تنها و بدون هیچ کمکی از مسیری بگذرد که هیچ‌گونه مواد غذایی در آن یافت نمی‌شود. در طول این مسیر که ۱۰۰ کیلومتر است فقط پناهگاههایی وجود دارد که به فاصلهٔ ۲۰ کیلومتر از هم قرار دارند. او فاصله هر ۲۰ کیلومتر را در یک شبانه‌روز می پیماید.

مسافر هر بار آذوقهٔ بیشتر از ۳ روز را نمی‌تواند با خودش ببرد و فقط می‌تواند آذوقه‌ها را در پناهگاهها ذخیره کند.

چند روز لازم است تا مسافر این مسیر لم‌یزرع را بپیماید؟

● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمه سیمین‌دخت ترکپور

جواب در صفحهٔ ۸۸

مکان هندسی

(قسمت پانزدهم)

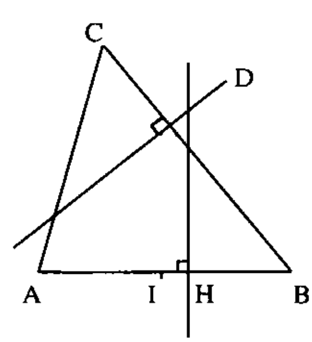
● محمدهاشم رستمی

درشماره قبل درباره مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطه ثابت A و B واقع در آن صفحه، مقدار ثابت k ($k>0$) باشد، مطالبی را ملاحظه کردید، اینک دنباله مقاله را به صورت زیر می‌آوریم:

مثال ۱. سه نقطهٔ همصفحهٔ A، B و C داده شده است. نقطه‌ای از این صفحه را مشخص کنید که از دو نقطهٔ B و C به یک فاصله باشد و تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر مقدار ثابت K ($K>0$) باشد.

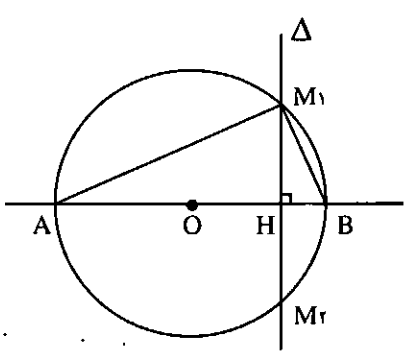
حل. مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که از دو نقطهٔ ثابت B و C واقع در آن صفحه، به یک فاصله است، خط D عمودمنصّف پاره‌خط BC است؛ این خط را رسم می‌کنیم. از طرفی، مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B واقع در آن صفحه، برابر مقدار ثابت K است، خط راستی مانند Δ است که بر خط AB در نقطهٔ H عمود است؛ به قسمی که اگر I وسط پاره‌خط AB باشد، $IH=\frac{K}{2A}$ است.

این خط را نیز رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد دو خط D و Δ جواب مسأله است.



اگر سه نقطهٔ A، B و C همخط باشند، مسأله جواب ندارد و در صورتی که این سه نقطه روی یک خط راست نباشند، مسأله تنها یک جواب دارد.

مثال ۲. دایرهٔ C(O,R) و قطر AB از این دایره داده شده است. نقطهٔ M_1 را روی این دایره، چنان بیابید که $MA^2-MB^2=K$ باشد. درتعداد جوابهای مسأله بحث کنید.



حل. می‌دانیم مکان هندسی نقطهٔ M که برای آن $MA^2-MB^2=K$ است، خط راستی مانند Δ عمود بر خط AB درنقطهٔ H است، به قسمی که $OH=\frac{K}{2AB}$ و در این مسأله $OH=\frac{K}{2R}$ است. این خط را رسم می‌کنیم. نقطه‌های برخورد

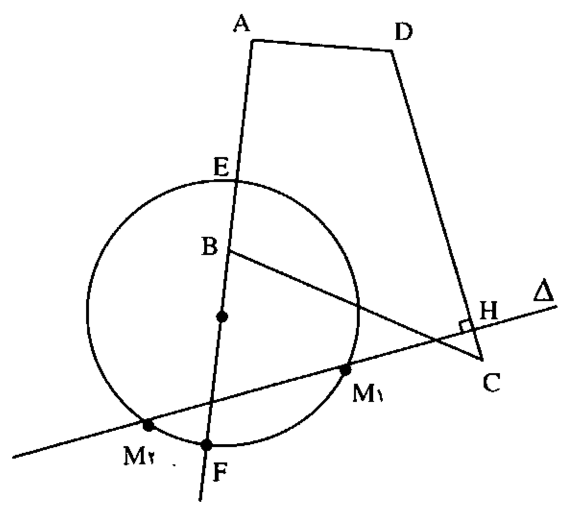
این خط با دایرهٔ داده شده، جواب مسأله است (وسط پاره‌خط AB نقطهٔ O مرکز دایره است).

بحث. ۱. اگر $OH < R$ یعنی $\frac{K}{۲R} < R$ یا $K < ۲R^۲$ باشد، مسأله دو جواب دارد.

۲. اگر $OH = R$ یعنی $\frac{K}{۲R} = R$ یا $K = ۲R^۲$ باشد، مسأله تنها یک جواب دارد.

۳. اگر $OH > R$ یعنی $\frac{K}{۲R} > R$ یا $K > ۲R^۲$ باشد، مسأله جواب ندارد.

مثال ۳. چهارضلعی ABCD مفروض است. نقطه‌ای در صفحهٔ این چهارضلعی بیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر $K_۱$ و تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ C و D برابر $K_۲$ باشد.



حل. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر عدد ثابت $K_۱$ می‌باشد، دایره‌ای است که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت $K_۱$ تقسیم می‌کند (دایرهٔ آپولونیوس). این دایره را رسم می‌کنیم. از طرفی مکان هندسی نقطه‌ای مانند M که برای آن $MC^۲ - MD^۲ = K_۲$ است، خط راستی مانند Δ عمود بر خط CD، در نقطه‌ای مانند H است؛ به قسمی که اگر I وسط پاره‌خط CD باشد، $IH = \frac{K_۲}{۲CD}$ است.

این خط را نیز رسم می‌کنیم. نقطه‌های برخورد دایرهٔ آپولونیوس و خط Δ جواب مسأله است. بر حسب نوع چهارضلعی و مقدارهای $K_۱$ و $K_۲$ در تعداد جوابها می‌توان بحث کرد.

مثال ۴. دو نقطه $A(۳,-۱)$ و $B(-۲,۴)$ داده شده است. مکان هندسی نقطه‌ای از این صفحهٔ مختصات را تعیین کنید که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر ۵، یعنی $MA^۲ - MB^۲ = ۵$ باشد.

حل. فرض می‌کنیم $M(x,y)$ یک نقطه از مکان هندسی موردنظر باشد، خواهیم داشت:

$$A(۳,-۱), B(-۲,۴), M(x,y), MA^۲ - MB^۲ = ۵ \Rightarrow$$
$$(x-۳)^۲ + (y+۱)^۲ - (x+۲)^۲ - (y-۴)^۲ = ۵ \Rightarrow$$
$$-۱۰x + ۱۰y - ۱۵ = ۰ \Rightarrow x - y + ۳ = ۰$$

همان‌طوری که دیده می‌شود، مکان هندسی خواسته شده، یک خط راست است، که بر خط AB عمود است؛ زیرا اگر این خط را Δ بنامیم، داریم:

$$m/\Delta = ۱ \ , \ \ m/AB = \frac{۴+۱}{-۲-۳} = ۱ \Rightarrow m/\Delta \cdot m/AB = -۱$$
$$\Rightarrow \Delta \perp AB$$

اگر نقطهٔ برخورد Δ با خط AB یعنی نقطهٔ H را به دست آوریم، با فرض این که I وسط پاره‌خط AB باشد، درستی رابطهٔ $IH = \frac{۵}{۲AB}$ نیز قابل اثبات است.

مثال ۵. روی منحنی به معادلهٔ $y = \frac{x-۴}{x+۲}$ نقطه‌ای بیابید که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ $A(-۲,۱)$ و $B(۲,۵)$ برابر ۸ باشد.

حل. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر عدد ثابت ۸ باشد، خطی است راست عمود بر خط AB. نقطه یا نقطه‌های برخورد این خط با منحنی داده شده، جواب مسأله است. برای به‌دست آوردن معادله مکان هندسی موردنظر، فرض می‌کنیم $M(x,y)$ یک نقطه از این مکان هندسی باشد. با توجه به این که $A(-۲,۱)$ و $B(۲,۵)$ است، داریم:

$$MA^۲ - MB^۲ = ۸ \Rightarrow (x+۲)^۲ + (y-۱)^۲ - (x-۲)^۲ -$$
$$(y-۵)^۲ = ۸ \Rightarrow ۸x + ۸y - ۳۲ = ۰ \Rightarrow x + y - ۴ = ۰$$
$$\Rightarrow y = -x + ۴$$

$$\begin{cases} y=-x+۴ \\ y=\dfrac{x-۴}{x+۲} \end{cases} \Rightarrow -x+۴=\dfrac{x-۴}{x+۲} \Rightarrow$$

$$(x-۴)(x+۲+۱)=۰ \Rightarrow x=۴\,,\ x=-۳ \Rightarrow$$

نقطه‌های جواب مسأله $M_۱\left|\begin{matrix} x=۴ \\ y=۰ \end{matrix}\right.$ $M_۲\left|\begin{matrix} x=-۳ \\ y=۷ \end{matrix}\right.$

مثال ۶. سه نقطهٔ $A(۳,۰)$ ، $B(۰,۲)$ و $C(-۱,-۳)$ داده شده است. نقطه‌ای از این صفحهٔ مختصات تعیین کنید که مجموع مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B، برابر ۳۹ و تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ B و C، برابر ۶ باشد.

حل. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که مجموع مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر ۳۹ باشد، دایره‌ای است به مرکز وسط AB. برای پیدا کردن معادلهٔ این دایره، فرض می‌کنیم $M(x,y)$ یک نقطه از این مکان هندسی باشد. داریم:

$$M(x,y)\ ,\ A(۳,۰)\ ,\ B(۰,۲)$$

$$MA^۲+MB^۲=۳۹ \Rightarrow (x-۳)^۲+y^۲+x^۲+(y-۲)^۲=۳۹$$

$$\Rightarrow ۲x^۲+۲y^۲-۶x-۴y-۲۶=۰$$

$$\Rightarrow x^۲+y^۲-۳x-۲y-۱۳=۰ \qquad (۱)$$

از طرفی، مکان هندسی نقطه‌ای که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ C و B، برابر ۶ است، خط راستی بر عمود BC است. برای تعیین معادلهٔ این خط، فرض می‌کنیم $M'(x,y)$ یک نقطه از آن باشد. داریم:

$$M'(x,y) \text{ و } B(۰,۲) \text{ و } C(-۱,-۳)$$

$$M'C^۲-M'B^۲=۶$$

$$\Rightarrow (x+۱)^۲+(y+۳)^۲-(x-۰)^۲-(y-۲)^۲=۶$$

$$\Rightarrow ۲x+۱۰y=۰ \Rightarrow x+۵y=۰ \qquad (۲)$$

حال نقطه یا نقطه‌های برخورد دو مکان هندسی (۱) و (۲) را که جوابهای مسأله است، به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} x^۲+y^۲-۳x-۲y-۱۳=۰ \\ x+۵y=۰ \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-۵y)^۲+y^۲-۳(-۵y)-۲y-۱۳=۰ \Rightarrow$$

$$۲۶y^۲+۱۳y-۱۳=۰ \Rightarrow ۲y^۲+y-۱=۰ \Rightarrow$$

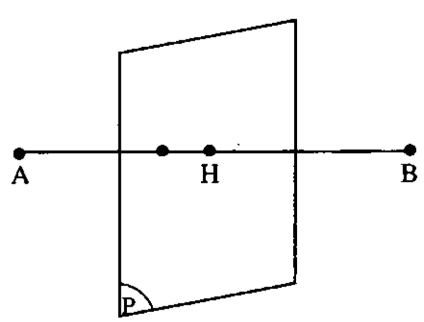
$$y=-۱\ ,\ y=\frac{۱}{۲} \Rightarrow x=۵\ ,\ x=\frac{-۵}{۲}$$

نقطه‌های جواب مسأله $\Rightarrow M_۱\left|\begin{matrix} ۵ \\ -۱ \end{matrix}\right.$ و $M_۲\left|\begin{matrix} \frac{-۵}{۲} \\ \frac{۱}{۲} \end{matrix}\right.$

نکته. می‌توان معادله مکانهای هندسی خواسته شده را با استفاده از تعریف این مکانها به‌دست آورد.

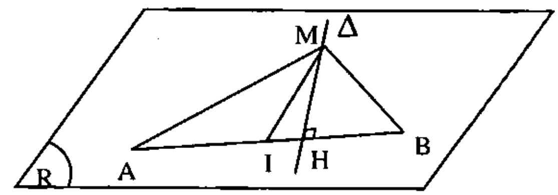
به عنوان مثال، برای تعیین معادلهٔ دایرهٔ مکان هندسی در این مسأله، مختصات نقطهٔ I وسط پاره خط AB را که مرکز دایره است، به‌دست می‌آوریم و شعاع آن را از دستور $R=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲K^۲-a^۲}$ که درآن $K^۲=۳۹$ و $a=AB$ است، محاسبه می‌کنیم و در رابطهٔ $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲$ قرار می‌دهیم.

۱۰ـ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر مقدار ثابت K باشد، صفحه‌ای است عمود بر خط AB.

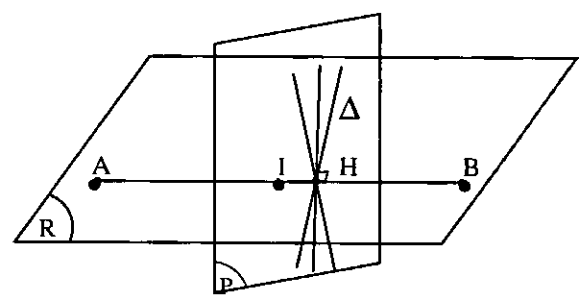


برهان به روش هندسی. یکی از صفحه‌های گذرنده بر خط AB را R و وسط پاره‌خط AB را I می‌نامیم. آن‌گاه مکان هندسی نقطهٔ M از این صفحه را که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر K است، مشخص می‌کنیم. می‌دانیم که این مکان هندسی، خطی راست است که در نقطه‌ای مانند H بر خط AB عمود است، به قسمی که $IH=\frac{K}{۲AB}$ است. این خط را رسم می‌کنیم و Δ می‌نامیم.

حال صفحهٔ R را حول خط AB دوران می‌دهیم. در هر



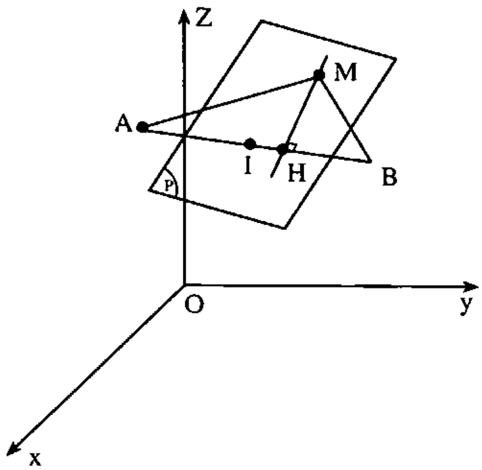
موقعیت جدیدی از صفحهٔ R ، خط Δ در نقطهٔ H برخط AB عمود است. بنابراین، مکان هندسی نقطهٔ M در فضا، مجموعهٔ خطهایی از فضا را تشکیل می‌دهند که در نقطهٔ H بر خط AB است و می‌دانیم که این مجموعه، صفحه‌ای مانند P را تشکیل می‌دهند که در نقطهٔ H بر خط AB عمود است.



بعکس، هر نقطه مانند M از صفحهٔ P جزء مکان هندسی موردنظر می‌باشد ؛ زیرا اگر از M به H وصل کنیم، خط MH در نقطهٔ H بر خط AB عمود است و $IH=\frac{K}{2AB}$ است.

بنابراین، مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر عدد ثابت K است، صفحه‌ای است که در نقطه ثابتی مانند H بر خط AB عمود است ؛ به قسمی که اگر I وسط پاره‌خط AB باشد، $IH=\frac{K}{2AB}$ است.

برهان به روش تحلیلی. دو نقطهٔ $A(x_1,y_1,z_1)$ و $B(x_2,y_2,z_2)$ را در دستگاه مختصات دکارتی $O\cdot xyz$ درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $M(x,y,z)$ یک نقطه از مکان هندسی موردنظر، یعنی نقطه‌ای باشد که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر K است. در این صورت خواهیم داشت :



$$MA^2-MB^2=K\Rightarrow$$
$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2-$$
$$(x-x_2)^2-(y-y_2)^2-(z-z_2)^2=K$$

و یا :

$$2(x_2-x_1)x+2(y_2-y_1)y+2(z-z_1)z+$$
$$x_1^2+y_1^2+z_1^2-(x_2^2+y_2^2+z_2^2)=K$$
$$\Rightarrow(x_2-x_1)x+(y_2-y_1)y+(z_2-z_1)z+$$
$$\frac{1}{2}(x_1^2+y_1^2+z_1^2-x_2^2-y_2^2-z_2^2-K)=0 \qquad (1)$$

معادلهٔ بالا، صفحه‌ای را نشان می‌دهد که بر خط AB عمود است، زیرا اگر این صفحه را P بنامیم، بردار نرمال صفحهٔ P موازی بردار $\overrightarrow{AB}$ است ؛ زیرا داریم :

$$\overrightarrow{AB}(x_2-x_1\ ,\ y_2-y_1\ ,\ z_2-z_1) \text{ و}$$
$$V_P=(x_2-x_1\ ,\ y_2-y_1\ ,\ z_2-z_1)$$

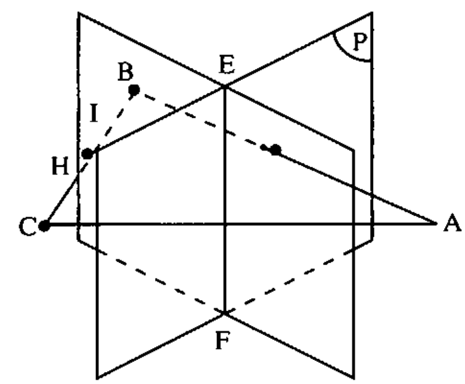
بنابراین، صفحهٔ P بر خط AB عمود است. بسادگی می‌توان نشان داد که صفحهٔ P در نقطه‌ای مانند H بر خط AB عمود می‌باشد ؛ به قسمی که اگر I وسط پاره‌خط AB باشد، $IH=\frac{K}{2AB}$ است.

برای این کار، کافی است نقطهٔ برخورد خط AB به معادلهٔ $AB:\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ را با صفحهٔ P به‌دست آوریم و با توجه به این که $I(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2})$ وسط

پاره‌خط AB و $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

است، با محاسبهٔ IH، درستی رابطهٔ $IH=\frac{K}{2AB}$ را ثابت کنیم.

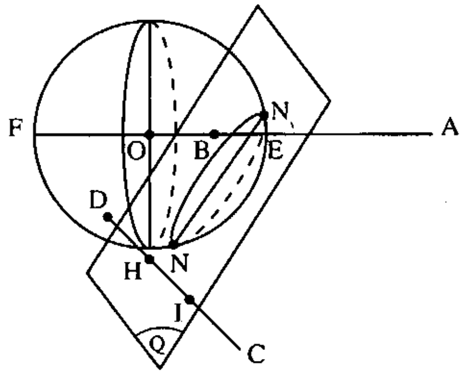
مثال ۱. سه نقطهٔ A، B و C داده شده است. مجموعهٔ نقطه‌هایی از فضا را بیابید که به یک فاصله از دو نقطهٔ A و B می‌باشند و تفاضل مربعهای فاصله‌شان از دو نقطهٔ B و C برابر عدد ثابت K است.



حل. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله است، صفحهٔ عمود منصّف پاره‌خط ABاست. این صفحه را رسم می‌کنیم و P می‌نامیم. از طرفی، مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که تفاضل فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت B و C برابر مقدار ثابت K است، صفحه‌ای است عمود بر خط BC در نقطه‌ای مانند H ؛ به قسمتی که اگر I وسط پاره‌خط BC باشد، $IH=\frac{K}{2BC}$ است. این صفحه را نیز رسم می‌کنیم و آن را Q می‌نامیم. فصل مشترک دو صفحهٔ P و Q جواب مسأله است. این دو صفحه، چون ناموازی‌اند ؛ بنابراین، متقاطع می‌باشند و مسأله همواره دارای جواب است.

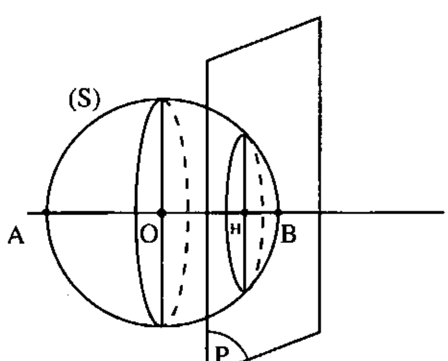
مثال ۲. چهار نقطهٔ A، B،C و D غیرواقع در یک صفحه داده شده است. مجموعهٔ نقطه‌هایی از فضا را بیابید که نسبت فاصله‌شان از دو نقطهٔ A و B برابر K_1 و تفاضل مربعهای فاصله‌شان از دو نقطهٔ C و D برابر K_2 باشد.

حل. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر عدد ثابت K_1 است، یک کره است



که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت K_1 تقسیم می‌کند (کرهٔ آپولونیوس). این کره را رسم می‌کنیم. از طرفی مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت C و D برابر عدد ثابت K_2 است، صفحه‌ای است عمود بر خط CD، در نقطه‌ای مانند H ؛ به قسمتی که اگر I وسط پاره‌خط CD باشد، $IH=\frac{K_2}{2CD}$ است. این صفحه را نیز رسم می‌کنیم. فصل مشترک این صفحه با کرهٔ آپولونیوس (درصورت وجود) جواب مسأله است (در شکل دایرهٔ به قطر NN' جواب مسأله است).

مثال ۳. کرهٔ S(O,R) و قطر AB از این کره داده شده است. مجموعهٔ نقطه‌هایی از این کره را تعیین کنید که تفاضل مربعهای فاصله‌شان از دو نقطهٔ A و B برابر عدد ثابت K باشد.



حل. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که تفاضل فاصله‌شان از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر مقدار ثابت K می‌باشد، صفحه‌ای مانند P است که در نقطهٔ H بر خط AB عمود است ؛ به قسمتی که $OH=\frac{K}{2AB}$ یا $OH=\frac{K}{2R}$ است که O مرکز کره

است. فصل مشترک صفحهٔ P با کره (درصورت وجود) که یک دایره یا یک نقطه است، جواب مسأله است.

با توجه به این که در این مسأله $OH=\frac{K}{2R}$ است، می‌توان در وجود جواب مسأله بحث کرد؛ بدین ترتیب که OH را با R شعاع کره مقایسه کنیم.

مثال ۴. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را بیابید که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ $A(2,-1,3)$ و $B(0,2,1)$ برابر ۱۱ باشد.

حل. فرض می‌کنیم $M(x,y,z)$ یک نقطه از مکان هندسی موردنظر باشد، داریم:

$A(2,-1,3)$ و $B(0,2,1)$ و $M(x,y,z)$

$$MA^2-MB^2=11 \Rightarrow$$
$$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2-(x-0)^2-(y-2)^2-(z-1)^2=11$$
$$-4x+6y-4z+9=11 \Rightarrow 2x-3y+2z+1=0 \qquad (1)$$

(۱) معادلهٔ صفحهٔ مکان هندسی موردنظر است که آن را P می‌نامیم.

می‌توانیم تحقیق کنیم که این صفحه در نقطه‌ای مانند H بر خط AB عمود است، به قسمی که $IH=\frac{11}{2AB}$ است. برای این منظور چنین عمل می‌کنیم:

$$AB/\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \Rightarrow AB/\frac{x-2}{0-2}=\frac{y+1}{2+1}=\frac{z-3}{1-3}$$
$$\Rightarrow AB/\frac{x-2}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{-2}$$
$$\begin{cases}\frac{x-2}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{-2}=t \Rightarrow x=-2t+2,\ y=3t-1,\ z=-2t+3\\ 2x-3y+2z+1=0\end{cases}$$
$$\Rightarrow 2(-2t+2)-3(3t-1)+2(-2t+3)+1=0$$
$$\Rightarrow -17t+14=0 \Rightarrow t=\frac{14}{19} \Rightarrow H(\frac{6}{17},\frac{25}{17},\frac{23}{17})$$

وسط AB $\ I(1,\frac{1}{2},2) \Rightarrow$

$$IH=\sqrt{(\frac{6}{17}-1)^2+(\frac{25}{17}-\frac{1}{2})^2+(\frac{23}{17}-2)^2}$$
$$\Rightarrow IH=\sqrt{\frac{2057}{34}}$$
$$AB=\sqrt{(0-2)^2+(2+1)^2+(1-3)^2}=\sqrt{4+9+4}=\sqrt{17}$$
$$IH=\frac{K}{2AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{2057}}{34}=\frac{11}{2\sqrt{17}} \Rightarrow 187=187$$

مثال ۵. روی خط $D:\frac{x-2}{3}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{2}$ نقطه‌ای بیابید که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ $A(3,0,2)$ و $B(1,-2,0)$ برابر ۴ باشد.

حل. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر ۴ است، می‌نویسیم و نقطهٔ برخورد آن با خط D را به‌دست می‌آوریم.

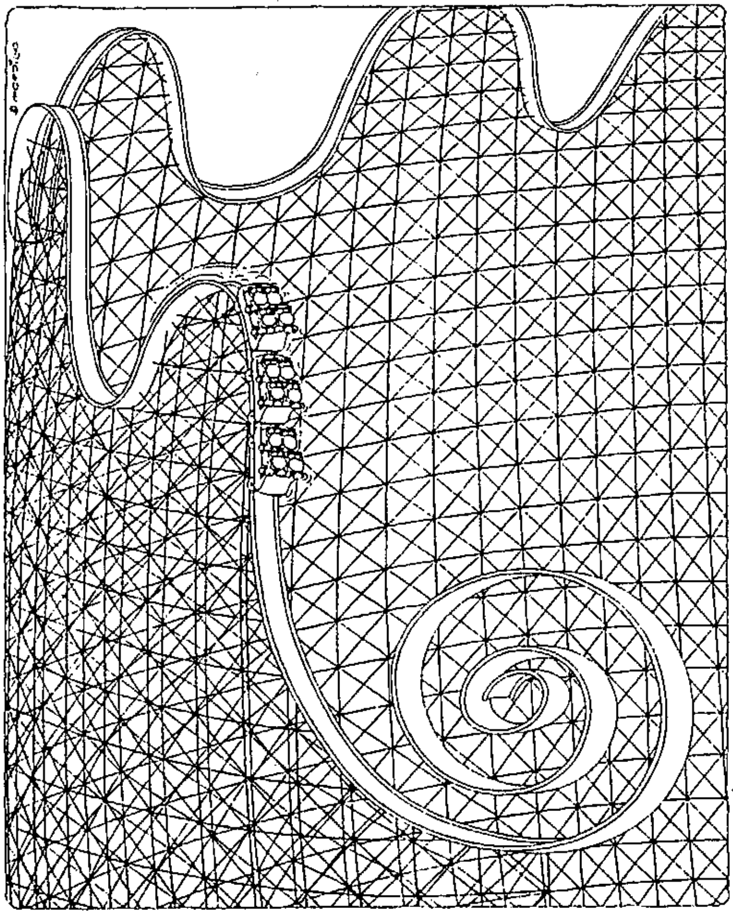
اگر $M(x,y,z)$ یک نقطه از این مکان هندسی باشد، داریم:

$$MA^2-MB^2=4 \Rightarrow$$
$$(x-3)^2+y^2+(z-2)^2-(x-1)^2-(y+2)^2-z^2=4$$
$$-4x-4y-4z+4=0 \Rightarrow x+y+z-1=0 \qquad (1)$$

(۱) معادلهٔ صفحهٔ مکان هندسی موردنظر است که آن را صفحهٔ P می‌نامیم.

$$\begin{cases}D: \frac{x-2}{3}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{2}=t \Rightarrow x=3t+2,\ y=-t,\ z=2t-1\\ P: x+y+z-1=0\end{cases}$$
$$\Rightarrow 3t+2-t+2t-1-1=0 \Rightarrow 4t=0 \Rightarrow t=0$$

$\Rightarrow M_1(2,0,-1)$ نقطهٔ جواب مسأله



نگاشتهای خطی

(تبدیلهای خطی)

(قسمت اوّل)

● حمیدرضا امیری

اشاره:

در یکی از شماره‌های قبل مجله (برهان ۱۷) نگاشت را به عنوان یک تابع معرفی ومفهوم نگاشتهای خطی را هم از دیدگاه تابعی و هم از دیدگاه تبدیل در صفحه و فضا مورد تجزیه و تحلیل قرار دادیم. در این سلسله مقاله‌ها بیشتر به مفهوم نگاشت خطی و کاربردهای آن می‌پردازیم و مقاله را با یادآوری تعریف نگاشت آغاز می‌کنیم.

تعریف: نگاشت $\underset{f(x)=y}{f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n}$ یک نگاشت خطی است ؛ هرگاه مؤلفه‌های $f(x)$ هرکدام، عبارتی درجهٔ اوّل برحسب x_1 ، x_2 ، ... ، x_m بوده و فاقد عدد ثابتِ ناصفر باشند. در تعریف فوق، نگاشت f با تأثیر روی اعضای $\mathbb{R}^m$ ، که m تایی‌هایی مرتّب به صورت $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ هستند، اعضایی از $\mathbb{R}^n$ را نتیجه می‌دهد. در واقع، هر مؤلّفهٔ n تایی‌های حاصل از تأثیر f روی اعضای $\mathbb{R}^m$ ، عبارتی درجهٔ اوّل و بدون جملهٔ ثابت است که توسط x_1 ، x_2 ، ... ، x_m تولید می‌شود و می‌توان هر مؤلّفهٔ این n تایی‌ها را در حکم تابعی چون $\underset{f(x)=a_1x_1+\ldots+a_mx_m}{fi:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}}$ فرض کرد، که در آن $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ یک m تایی از $\mathbb{R}^m$ است.

مثال: نگاشتهای زیر را درنظر بگیرید :

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1x_2, 2x_1 - x_2)$$

$$g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

$$y_1 = x_1 + x_2$$

$y_2 = x_2 + x_3$

$y_3 = x_1 + 2x_2 + 3x_3$

$h:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

که $h(x_1, x_2) = (f_1, f_2)$

$f_1:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f_1(x_1, x_2) = x_1 - x_2$

و $f_2:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f_2(x_1, x_2) = 3x_2 - x_1$

نگاشت f خطی نیست ؛ ولی نگاشتهای g و h خطی می‌باشند.

نکته: تابع $\underset{f(x)=ax+b}{f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}}$ $(a, b \neq 0)$ به تابع خطی معروف است ؛ ولی نگاشت خطی نیست!

تست: کدام یک از نگاشتهای زیر از $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$، خطی است؟

۱) $f(x,y,z) = (xy, x+y, z+y)$

۲) $f(x,y,z) = (x+1, x-y, 2z+x)$

۳) $f(x,y,z) = (x-y, x^2+y, z)$

۴) $f(x,y,z) = (0, y+z, x+y)$

حل: گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ زیرا :

در گزینه‌های (۱) ، (۲) و (۳) به ترتیب به خاطر عبارتهای xy و $x+1$ و x^2+y خاصیت خطی بودن برقرار نمی‌باشد.

ماتریس یک نگاشت خطی

در فضاهای برداری $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ می‌توان هر عضو آنها را با ماتریسهایی ستونی نمایش داد. در این صورت، اگر به‌طور مثال $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ نگاشتی خطی باشد، داریم :

$$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \qquad f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 + cx_3 \\ a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 \end{bmatrix}$$

نگاشت خطی f را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت :

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

که اگر فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix}$ و $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ در این صورت می‌توان نوشت : $f(x) = Ax$.

A را ماتریس نگاشت خطی f می‌نامند.

نکتهٔ مهم: توجه دارید که $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ؛ ولی ماتریس A، ماتریسی 2×3 می‌باشد. در حالت کلّی، اگر f نگاشتی خطی از $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ باشد و A ماتریس این نگاشت باشد، مرتبهٔ A، $n \times m$ است. همچنین هر ماتریس $n \times m$ می‌تواند یک نگاشت خطی از $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ را تعریف کند.

مثال ۱: اگر $\underset{f(x,y)=(x+y,x-2y,y)}{f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3}$ یک نگاشت خطی باشد، ماتریس این نگاشت کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

حل: گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ زیرا :

نگاشت از $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ تعریف شده، پس ماتریس این نگاشت می‌بایست ماتریسی 3×2 باشد. از طرفی می‌توانیم بنویسیم :

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y \\ x-2y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال ۲: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ماتریس نگاشت خطی f باشد، در این صورت f کدام است؟

۱) $\underset{f(x,y)=(x+y,-x+y,2y)}{f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3}$ ۳) $\underset{f(x,y,z)=(x-y,x+2z)}{f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2}$

۲) $\underset{f(x,y)=(x-y,x+y,2y)}{f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3}$ ۴) $\underset{f(x,y,z)=(x-y,x+y+2z)}{f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2}$

حل: گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ زیرا :

ماتریس A از مرتبهٔ ۳×۲ است، پس f باید از $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ باشد و داریم :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x-y \\ x+y+2z \end{bmatrix}$$

معیاری برای تشخیص خطی بودنِ نگاشتها

قضیه: نگاشت $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ یک نگاشتِ خطی است ؛ اگر و فقط اگر هردو شرط زیر برقرار باشد :

I) به ازای هر $x,y \in \mathbb{R}^m$ ، $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

II) به ازای هر $x \in \mathbb{R}^m$ و $r \in \mathbb{R}$ ، $f(rx)=rf(x)$.

نتایج زیر، بلافاصله از قضیهٔ پیش حاصل می‌شود :

I) نگاشت خطی $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ، بردارِ صفر در $\mathbb{R}^m$ را به بردار صفر در $\mathbb{R}^n$ تبدیل می‌کند. به عبارت دیگر $f(0)=0$.

II) اگر $x \in \mathbb{R}^m$ ، در این صورت $f(-x)=-f(x)$.

اثبات I) $f(0)=f(0+0) \Rightarrow f(0)=f(0)+f(0) \Rightarrow f(0)=0$

اثبات II) $f(-x)=f[(-1)x]=(-1)f(x)=-f(x)$

نکته: قضیهٔ پیش را می‌توان به صورت زیر، خلاصه کرد و معادل آن را نوشت :

اگر f نگاشتی از $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ باشد، شرط لازم و کافی برای آن که f خطی باشد، آن است که برای هر $x,y \in \mathbb{R}^m$ و $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ ،

$$f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)$$

مثال ۳: اگر f نگاشتی خطی از $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ و $f(1,0)=(1,2)$ و $f(0,1)=(2,2)$ در این صورت $f(2,1)$ کدام است؟

۱) (۴،۶) ۲) (۴،۴) ۳) (۶،۴) ۴) (۶،۶)

حل: گزینهٔ (۱) صحیح است ؛ زیرا :

طبق مطالب فصل فضای برداری، (۱،۰) و (۰،۱) بردارهای مبنا بوده و هر بردار، بالاخص (۲،۱) را می‌توان برحسب ترکیب خطی آنها نوشت

$$f(2,1)=f[2(1,0)+1(0,1)] \overset{\text{خطی است } f}{=\!=\!=} 2f(1,0)+f(0,1)$$

$$=2(1,2)+(2,2) \Rightarrow f(2,1)=(4,6)$$

مثال ۴: اگر f نگاشتی خطی از $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ و داشته باشیم $f(1,0,0)=(1,2)$ و $f(0,1,0)=(1,-1)$ و $f(0,0,1)=(-2,1)$ در این صورت، حاصل $f(2,1,-1)$ کدام است؟

۱) (۵،۳) ۲) (۵،-۲) ۳) (۵،۲) ۴) (-۵،۲)

حل: گزینهٔ (۳) صحیح است ؛ زیرا :

$$f(2,1,-1)=f[2(1,0,0)+1(0,1,0)-1(0,0,1)]$$

$$=2f(1,0,0)+f(0,1,0)+(-1)\ f(0,0,1)$$

چون f خطی است

$$=2(1,2)+(1,-1)-(-2,1)=(5,2)$$

مثال۵ : اگر f نگاشتی خطی از $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ و داشته باشیم $f(2,1)=(2,4)$ و $f(2,-1)=(4,2)$ در این صورت حاصل $f(2,2)$ کدام است؟

۱) (۱،-۵) ۲) (۵،۱) ۳) (-۵،-۱) ۴) (۱،۵)

حل: گزینه (۴) صحیح است ؛ زیرا :

بردارهای (۲،-۱) و (۲،۱) مستقل خطی بوده ؛ بنابراین می‌توانند یک مبنا تشکیل دهند و هر بردار در $\mathbb{R}^2$ بالاخص (۲،۲) را می‌توان برحسب ترکیب خطی این دو بردار نوشت :

$$x(2,-1)+y(2,1)=(2,2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+2y=2 \\ -x+y=2 \end{cases} \Rightarrow x=-\frac{1}{2}\ ,\ y=\frac{3}{2}$$

$$f(2,2)=f\left[-\frac{1}{2}(2,-1)+\frac{3}{2}(2,1)\right]$$

$$=-\frac{1}{2}f(2,-1)+\frac{3}{2}f(2,1)$$

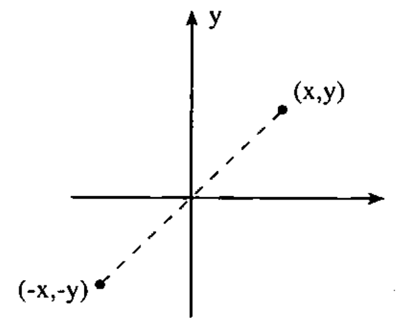
$$=-\frac{1}{2}(4,2)+\frac{3}{2}(2,4)=(1,5)$$

ماتریس نگاشتهای خطّی مهم در صفحه

ماتریس تقارن نسبت به مبدأ مختصات

می‌دانیم اگر نقطه‌ای را نسبت به مبدأ مختصات قرینه کنیم، طول و عرض آن قرینه می‌شوند، لذا نگاشتی خطی چون f باید تعریف کنیم به قسمی که :

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$$



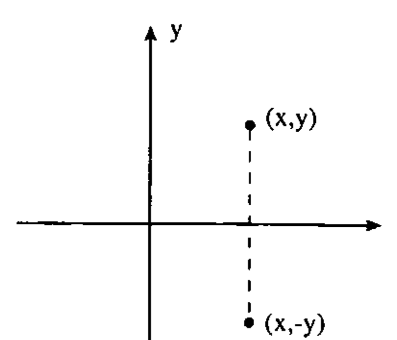
که ماتریس این نگاشت خطی، بنابر مطالب قبل، عبارت است از :

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ماتریس تقارن نسبت به محور xها

برای تقارن نسبت به محور xها نگاشتی چون f باید تعریف کنیم که با تأثیر روی هر نقطه از صفحه، عرض آن نقطه را قرینه کند ؛ پس :

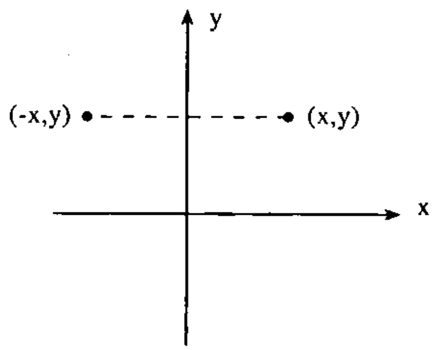
$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \Rightarrow \text{ماتریس نگاشت } f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$
$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$



ماتریس تقارن نسبت به محور yها

نگاشت f در این تبدیل، می‌بایست عرض نقاط را ثابت نگه‌داشته و طول هر نقطه را قرینه کند :

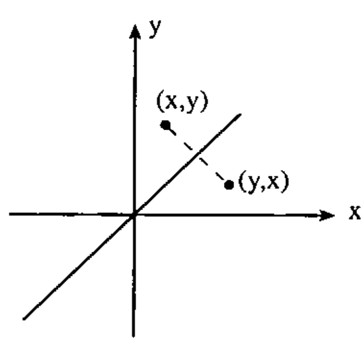
$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \Rightarrow \text{ماتریس نگاشت } f = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$



ماتریس تقارن نسبت به نیمساز ربع اوّل (خط به معادلهٔ y=x)

نگاشت خطی که بتواند هر نقطه در صفحه را نسبت به نیمساز ربع اوّل و سوّم قرینه کند، به صورت زیر تعریف می‌شود :

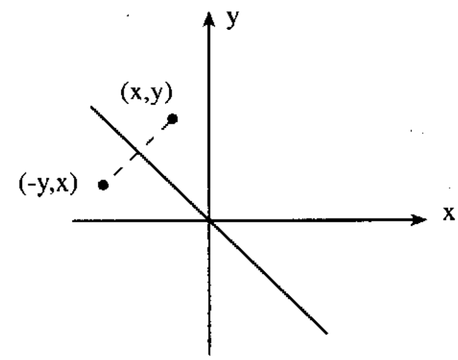
$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \Rightarrow \text{ماتریس نگاشت } f = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$



ماتریس تقارن نسبت به نیمساز ربع دوم و چهارم (خط به معادلهٔ $y=-x$)

نگاشت خطی $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}$ می‌تواند هر نقطه در صفحه را نسبت به خط با معادلهٔ $y=-x$ قرینه کند ؛ بنابراین :

ماتریس نگاشت f $=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$



ماتریس دوران حول مبدأ به اندازهٔ زاویهٔ α

نگاشت خطی $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ با ضابطهٔ $f\left(\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x\cos\alpha-y\sin\alpha\\ x\sin\alpha+y\sin\alpha\end{bmatrix}$ می‌تواند با تأثیر روی هر نقطه از صفحه، آن را به اندازهٔ α ، حول مبدأ مختصات دوران دهد، که ماتریس این نگاشت برابر است با : $\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$.

مثال۶: توسط ماتریس دوران، معادلهٔ تبدیل یافتهٔ منحنی به معادلهٔ $(x-1)^2+(y+2)^2=9$ را بیابید ؛ هرگاه بخواهیم این منحنی را به اندازهٔ 90° حول مبدأ دوران دهیم.

حل: منحنی فوق، دایره‌ای است به مرکز $w\begin{vmatrix}1\\ -2\end{vmatrix}$ و به شعاع۳، و می‌دانیم دایره بر اثر دوران، به دایره‌ای با شعاع قبل، تبدیل شده و فقط مرکز آن تغییر می‌کند. پس کافی است مرکز دایره را به اندازهٔ $\frac{\pi}{2}$ حول مبدأ دوران داده و مرکز جدید را بیابیم :

$$\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2}\\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$$

$(x-2)^2+(y-1)^2=9$: معادلهٔ دایره دوران یافته

نکتهٔ مهم: ماتریسهای دوران حول مبدأ، یعنی $A=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$ دارای سه‌ویژگی زیر می‌باشند :

I) دترمینان ماتریس دوران برابر با ۱ است.

II) طول هر بردار ستونی در ماتریسهای دوران حول مبدأ واحد است.

$$X=\begin{bmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{bmatrix}\Rightarrow|X|=1\ ,\ \ Y=\begin{bmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{bmatrix}\Rightarrow|Y|=1$$

III) بردارهای ستونی در هر ماتریس دوران حول مبدأ بر هم عمودند.

$$X=\begin{bmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{bmatrix}\ ,\ \ Y=\begin{bmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{bmatrix}\Rightarrow X.Y=$$

$$-\sin\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha=0\Rightarrow X\perp Y$$

ماتریس تجانس

نقطهٔ $M=\begin{bmatrix}kx\\ ky\end{bmatrix}$ را مجانس نقطه $M=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ با نسبت تجانس k می‌نامیم و اگر بخواهیم نگاشتی چون f تعریف کنیم ؛ به طوری که $f(\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}kx\\ ky\end{bmatrix}$ ، ماتریس این نگاشت برابر است با :

ماتریس نگاشت f $=\begin{bmatrix}k & 0\\ 0 & k\end{bmatrix}$

در تجانس، توجه دارید که طول و عرض نقاط، به یک نسبت، بزرگ یا کوچک می‌شوند (در حالت خاص $k=1$ ، تغییر نمی‌کنند).

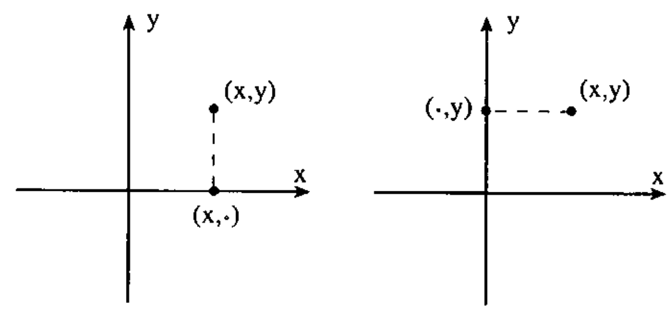
ماتریسهای تصویر قائم روی محور xها و yها

نگاشت خطی $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ با ضابطهٔ $f\left(\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x\\ 0\end{bmatrix}$ هر نقطه در صفحهٔ مختصات را روی محور xها به صورت قائم تصویر می‌کند و ماتریس این نگاشت، برابر است با : $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

و به همین ترتیب، نگاشت $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ با ضابطه

$f\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\y\end{bmatrix}$ هر نقطه در صفحه را روی محور y ها به صورت قائم تصویر می‌کند که ماتریس این نگاشت نیز برابر است با $\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$،

به شکلها توجه کنید :



مثال ۷: منحنی $x^2+y^2=4$ تحت تبدیل $T=\begin{bmatrix}4&0\\0&4\end{bmatrix}$ به کدام منحنی تبدیل می‌شود؟

۱) $x^2+y^2=8$ ۲) $x^2+y^2=16$

۳) $x^2+y^2=64$ ۴) $x^2+y^2=4$

حل: گزینهٔ (۳) صحیح است ؛ زیرا :

تبدیل فوق، یک تجانس است با نسبت ۴، بنابراین دایرهٔ مفروض، ۴ برابر بزرگ می‌شود و به عبارت دیگر، شعاعِ آن ۴ برابر می‌شود و چون شعاع آن، قبل از تبدیل، ۲ است، ۴ برابر شده و باید شعاع آن ۸ باشد.

ماتریسهای کشش در امتداد محور xها و yها

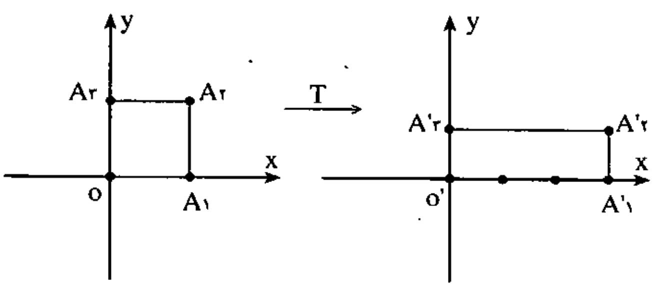
ماتریسهای $A=\begin{bmatrix}k&0\\0&1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1&0\\0&k\end{bmatrix}$ به ترتیب، ماتریسهای کشش در امتداد محور x ها و در امتداد محور yها می‌باشند.

مثال ۸: اگر نقطه‌های $O\begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix}$ و $A_1\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix}$ و $A_2\begin{vmatrix}1\\1\end{vmatrix}$ و $A_3\begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix}$ مختصات رئوس یک چهارضلعی باشند (مربع واحد) شکل حاصل از تأثیر تبدیل Tبا ماتریس $T=\begin{bmatrix}3&0\\0&1\end{bmatrix}$ و مساحت آن را بیابید.

$$\begin{bmatrix}3&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&3&3&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

توجه دارید که تبدیل یافته‌های هر نقطه را تحت تأثیر ماتریس تبدیل محاسبه کرده‌ایم و سپس با وصل کردنِ نقاط حاصل به‌هم، شکل تبدیل یافته مشخص می‌شود.

البته با توجه به این که Tماتریس کشش در امتداد محور x ها است، حدس می‌زدیم که شکل حاصل، یک مستطیل افقی باشد.



$O'A'_1A'_2A'_3$ مساحت $=1\times 3=3$

مثال ۹: تبدیل یافتهٔ منحنی $(x-1)^2+(y+2)^2=25$ تحت ماتریس تبدیل $T=\begin{bmatrix}1&0\\0&3\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) سهمی عمودی ۲) هذلولی عمودی

۳) بیضی افقی ۴) بیضی عمودی

حل: گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ زیرا :

تبدیل مذکور یک کشش در امتداد محور y ها و می‌دانیم کشش، دایره را به بیضی تبدیل می‌کند!

تاریخچهٔ مجلات ریاضی ایران(۲۵)

بررسی مجلهٔ مجموعه را پی می‌گیریم. در شمارهٔ قبل قسمتی از نظریهٔ بازیها را مطرح کردیم، اکنون مابقی این مقاله را به اتفاق می‌خوانیم.

۲.۱. تشریک مساعی

در بازی «موقعیت دشوار زندانیان» که هم اکنون بررسی شد، ملاحظه کردیم که درصورتی که زندانیان مجاز به مشورت با یکدیگر بودند و قرارمی‌گذاشتند که هیچ‌یک اقرار نکنند، به نتیجهٔ بهتر نائل می‌شدند. این موضوع جنبهٔ عمومی این نوع وضعیت رقابت‌آمیز است، یعنی، اگر شرکت کنندگان باهم تشریک مساعی کنند، غالباً به نتیجه‌ای بهتر از زمانی که صرفاً خودخواهانه عمل کنند نائل می‌شوند. به عنوان مثالی دیگر، به بازی با جدول پی‌ـآمد باز می‌گردیم.

	X		Y		Z	
A	۸	۲	۰	۹	۷	۳
B	۳	۶	۹	۰	۲	۷
C	۱	۷	۶	۴	۸	۱
D	۴	۲	۴	۶	۵	۱

ملاحظه کردیم که اگر هر دو شرکت کننده به احتیاط بازی کنند، D و X را انتخاب کرده، به‌ترتیب پی‌ـآمدهای ۴ و ۲ را به‌دست می‌آورند. اما با تشریک مساعی می‌توانند به نتایج بهتری نائل شوند، چه اگر موافقت کنند که C و Y را انتخاب کنند، به‌ترتیب ۴ و ۶ را به دست می‌آورند؛ و اگر قرار بگذارند A و Z را انتخاب کنند، ۷ و ۳ نصیبشان می‌شود. ریاضیات نمی‌گوید که در مورد کدام یک از این دو امکان به توافق می‌رسند، حتی این را نیز که در مورد تشریک مساعی به توافق می‌رسند یا خیر، بیان نمی‌کند؛ تمام چیزی که می‌گوید این است که این بازی، بازیی است که در آن می‌توانند با تشریک مساعی بهتر از با احتیاط بازی‌کردن به نتیجه برسند.

اما چنین نیست که هر بازیی دارای این خاصیت باشد؛ به عنوان مثال، اگر سطر اول و ستون دوم جدول فوق را حذف کنیم، بازی جدیدی با جدول پی‌ـآمد زیر به دست می‌آوریم:

	X		Z	
B	۳	۶	۲	۷
C	۱	۷	۸	۱
D	۴	۲	۵	۱

در این حالت نتیجه‌ای که دو بازیکن، آن را به (۴،۲)ی حاصل از انتخابهای مطمئن D و X ترجیح دهند، موجود نیست. بازیکنها می‌توانند برای انتخاب (مثلاً B و X (به‌جای D و X) باهم معامله‌ای بکنند و R مقداری پول به B برای جبران کاهش دستاوردش از ۴ به ۳ بپردازد؛ R باید بتواند از این معامله سود به‌دست آورد، زیرا دستاوردش را در خود بازی، از ۲ به ۶ افزایش

می‌دهد. پرداختهای جانبی چنین، بخصوص هنگامی که بیش از دو بازیکن موجودند، نقش مهمی در نظریهٔ بازیها ایفا می‌کنند. اما، برای بحث این قسمت از نظریه، از ریاضیات خطی پر دور می‌شویم، و بنابراین در مابقی مقاله معمولاً از امکان پرداختهای جنبی چشم‌خواهیم پوشید.

تمرین

در مورد کدام یک از بازیهای زیر تشریک مساعی (در غیاب پرداختهای جنبی) به سود هر دو بازیکن است؟ در هر حالت، جواب بله یا نه داده، آن را توجیه کنید.

(i)

	X		Y	
A	۴	۶	۱	۱۰
B	۳	۵	۲	۲

(ii)

	X		Y	
A	۴	۶	۱	۱۰
B	۰	۷	۲	۲

(iii)

	X		Y		Z	
A	۸	۲	۱	۹	۷	۳
B	۴	۶	۹	۱	۳	۷
C	۲	۸	۶	۴	۸	۲
D	۶	۴	۴	۶	۶	۴

حل: (i) بله. انتخاب مطمئن B ، B است، زیرا دراین صورت حداقل ۳ را به‌دست می‌آورد. انتخاب مطمئن R ، X است، زیرا حداقل ۵ نصیبش می‌شود. به این ترتیب، نتیجهٔ بازی به احتیاط ۳، ۵ واقع درخانهٔ B، X جدول است. اما، بازیکنها می‌توانند با تشریک مساعی نتیجهٔ ۴، ۶ واقع در خانهٔ A، X را به‌دست آورند.

(ii) نه. انتخاب مطمئن B ، A است، که ۴ را برای او مسلّم می‌کند. انتخاب مطمئن R ، X است، که ۶ را برای او مسلّم می‌کند. بنابراین نتیجهٔ مطمئن ۴، ۶ (درخانهٔ A ، X) است و (در غیاب پرداختهای جنبی) نتیجه‌ای که هر دو بازیکن آن را ترجیح دهند، موجود نیست.

(iii) نه. انتخاب مطمئن B ، D است، که ۴ را برای او مسلّم می‌کند. انتخاب مطمئن R ، X یا Z است. بنابراین نتیجهٔ مطمئن ۶ ، ۴ است، زیــرا این نتیجه از اتفاق در هر دو خـانهٔ D ، X و D ، Z رخ می‌دهد. نتیجه‌ای که هر دو بازیکن آن را به این نتیجه ترجیح دهند، موجود نیست.

۳. ۱. خلاصهٔ بخش ۱

دراین بخش، عبارات زیر را تعریف کردیم:

پی‌ـ آمد

بازی مستطیلی (یا دونفری)

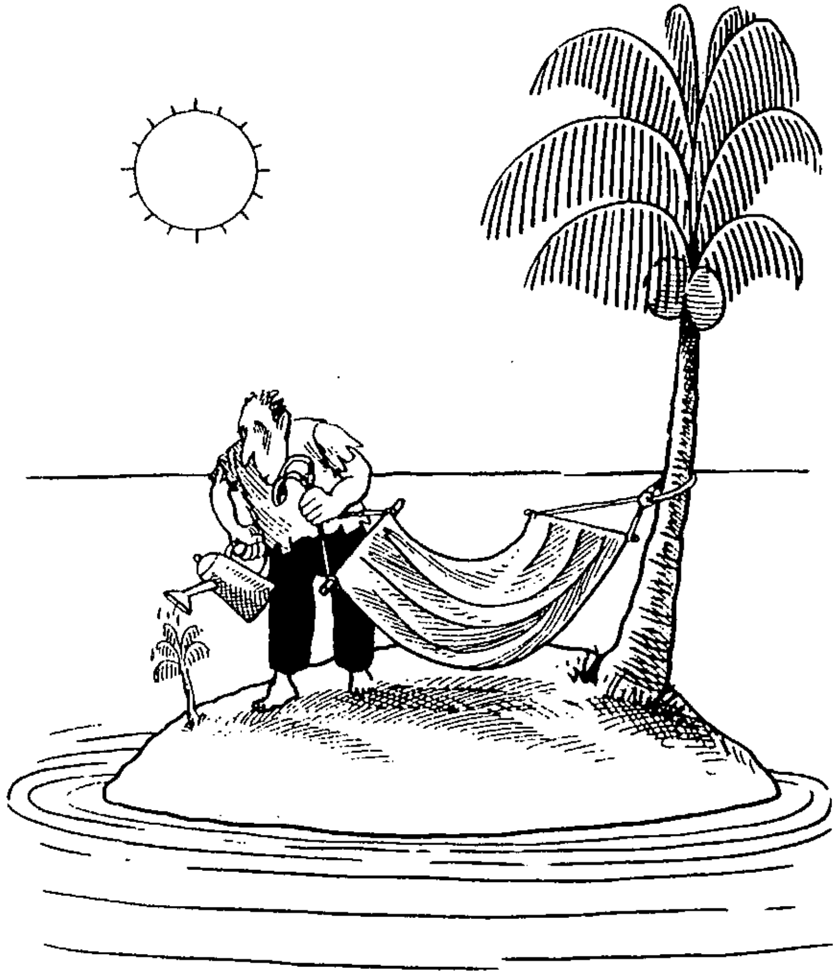
روش: در یک بازی دونفری مفروض، جدول پی‌ـ آمد را رسم کرده، نتایج را در هریک از موارد زیر معین می‌کنیم:

(i) دو بازیکن به احتیاط بازی می‌کنند.

(ii) دو بازیکن تشریک مساعی می‌کنند.

ابوالوفا (۹۹۸ ـ ۹۳۹) که یکی از خلفای حامی علم، او را به ریاست رصدخانهٔ بغداد معیّن کرد، جداول مثلثاتی ذی‌قیمتی به‌دست داد، و علاوه بر حرکتی که بطلمیوس کشف کرده بود توانست یک حرکت کوچک دیگر ماه را نیز معلوم نماید و بعدها تیکوبراهه در آن تدقیق بیشتری کرد.

تاریخ علوم ـ پی‌یر روسو



نابرابریها
(قسمت دوم)

● میرشهرام صدر

خاصیتها و قضیه‌ها

در شماره قبل، تعریف نابرابریها بیان شد، در این شماره به بررسی خاصیتها و قضایاهای نابرابریها می‌پردازیم.

خاصیتهای نابرابری

برای عددهای حقیقی a، bو c داریم :

۱ـ اگر $a<b$ و $b<c$ ، آن‌گاه $a<c$ (خاصیت تعدّی).

۲ـ اگر $a<b$ ؛ در این صورت $a+c<b+c$.

مثال. $-2<4 \Rightarrow -2+3<4+3$

۳ـ اگر $a<b$ ؛ در این صورت $a-c<b-c$.

مثال. $-2<4 \Rightarrow -2-3<4-3$

۴ـ اگر $a<b$ و $c>0$ ؛ در این صورت $ca<cb$.

مثال. $-2<4\ ,\ 3>0 \Rightarrow 3(-2)<3(4)$

۵ـ اگر $a<b$ و $c<0$ ؛ در این صورت $ca>cb$.

مثال. $-2<4\ ,\ -3<0 \Rightarrow -3(-2)>-3(4)$

۶ـ اگر $a<b$ و $c>0$ ؛ در این صورت $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$.

مثال. $-2<4\ ,\ 2>0 \Rightarrow \frac{-2}{2}<\frac{4}{2}$

۷ـ اگر $a<b$ و $c<0$، در این صورت $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$.

مثال. $-2<4\ ,\ -2<0\Rightarrow\frac{-2}{-2}>\frac{4}{-2}$

تذکر. خاصیتهای بالا که دربارهٔ نماد «<» مطرح شد، در مورد نمادهای «>»، «≤» و «≥» برقرار است.

با توجه به تعریف نابرابری، خاصیتهای نابرابری قابل اثبات هستند، در زیر خاصیت‌های (۱) و (۲) را ثابت می‌کنیم و اثبات بقیه را به عنوان تمرین واگذار می‌کنیم.

اثبات خاصیت (۱):

$$\begin{cases}a<b\\ b<c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=a+p & (p>0)\\ c=b+p' & (p'>0)\end{cases}$$

$$\Rightarrow c=a+(p'+p)$$

چون $p+p'>0$ بنابراین با توجه به تعریف نابرابری نتیجه می‌شود که $a<c$.

اثبات خاصیت (۲):

$$a<b\Rightarrow b=a+p\ ,\ (p>0)$$

به دو طرف برابری اخیر عددc را اضافه می‌کنیم بنابراین :

$$(b+c)=(a+c)+p\ ,\ (p>0)$$

با توجه به تعریف نابرابری نتیجه می‌شود که :

$$a+c<b+c$$

قضیهٔ ۱. فرض کنیم $a>0$ و $b>0$ دو عدد حقیقی باشند، در این صورت $a+b>0$.

برهان. به دو طرف نابرابری $a>0$ عدد حقیقی b را می‌افزاییم :

$$a+b>0+b\Rightarrow a+b>b$$

با توجه به $\begin{cases}a+b>b\\ b>0\end{cases}$ و بنابر خاصیت تعدّی رابطه «<» داریم :

$$a+b>0$$

قضیهٔ ۲. فرض کنیم a و b دو عدد حقیقی باشند ؛ $a>b$ اگر و فقط اگر $a-b>0$.

برهان.

$$a>b\Leftrightarrow a+(-b)>b+(-b)$$
$$\Leftrightarrow a-b>0$$

قضیهٔ ۳. برای عدد حقیقی a اگر $a<0$ ، آن گاه $-a>0$.

برهان.

$$a<0\Rightarrow -a+a<-a+0\Rightarrow 0<-a \text{ یا } -a>0$$

قضیهٔ ۴. برای عدد حقیقی a اگر $a\neq 0$ ؛ در این صورت $a^2>0$.

برهان. قضیه را در دو حالت ثابت می‌کنیم :

حالت اوّل : اگر $a>0$ ؛ بنا بر خاصیت ۴ نابرابریها :

$$a>0\Rightarrow a\times a>a\times 0\Rightarrow a^2>0$$

حالت دوم : اگر $a<0$ ، با توجه به قضیه ۳ نتیجه می‌گیریم که $-a>0$ ، پس :

$$-a>0\Rightarrow(-a)\times(-a)>(-\alpha)\times 0\Rightarrow a^2>0$$

قضیهٔ ۵. عدد ۱ مثبت است ؛ یعنی : $1>0$.

برهان. چون $1\neq 0$ پس بنا بر قضیهٔ ۴ ؛ $1^2>0$، اما $1=1^2$ پس :

$$1^2=1>0\Rightarrow 1>0$$

قضیهٔ ۶. اگر $a>b$ و $c>d$ ؛ در این صورت $a+c>b+d$.

برهان.

$$\begin{cases}a>b\Rightarrow a-b>0\\ c>d\Rightarrow c-d>0\end{cases}\Rightarrow a-b+c-d>0$$
$$\Rightarrow a-b+c-d+b+d>0+b+d$$
$$\Rightarrow a+c>b+d$$

قضیهٔ ۷. اگر $a>b>0$ و $c>d>0$ ؛ در این صورت $ac>bd$.

برهان. چون $c>0$ و $b>0$:

$$\begin{cases}a>b>0\Rightarrow ac>bc\\ c>d>0\Rightarrow bc>bd\end{cases}\Rightarrow ac>bd$$

نتیجهٔ ۱. به کمک قضیهٔ (۷) و با استفاده از استقرای ریاضی، می‌توان ثابت کرد که اگر $a>b>0$ و m یک عدد طبیعی باشد، آن گاه $a^m>b^m$.

مثال. ثابت کنید :

۱ ـ معکوس یک عدد مثبت، عددی مثبت است.

۲ ـ معکوس یک عدد منفی، عددی منفی است.

۳ ـ اگر $0<a<b$ آن‌گاه $0<b^{-1}<a^{-1}$ $(0<\frac{1}{b}<\frac{1}{a})$.

حل.

۱. فرض کنید عدد حقیقی $a>0$، اگر $\frac{1}{a}<0$، آن‌گاه $a\times\frac{1}{a}<0\times\frac{1}{a}$ ، یعنی $1<0$ که این یک تناقض است ؛ پس $\frac{1}{a}$ مثبت است.

۲. فرض کنید عدد حقیقی $a<0$، اگر $\frac{1}{a}>0$ ، آن‌گاه

$\frac{1}{a} \times a < 0 \times \frac{1}{a}$، یعنی $1 < 0$ که این یک تناقض است؛ پس $\frac{1}{a}$ منفی است.

۳. چون a، b دو عدد حقیقی مثبت هستند، پس $a \times b$ نیز مثبت است،در نتیجه $\frac{1}{ab}$ مثبت می‌باشد:

$$0 < a < b \Rightarrow 0 < \frac{1}{ab} \times a < \frac{1}{ab} \times b \Rightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

یا $0 < b^{-1} < a^{-1}$

قضیهٔ ۸. اگر $a > 1$ و $b > 1$ آن گاه $ab > 1$.

برهان. روش اول: چون $a > 1 > 0$ و $b > 1 > 0$، طبق قضیهٔ (۷) داریم $ab > 1 \times 1$ یعنی $ab > 1$.

روش دوم:

$$\begin{cases} a > 1 \Rightarrow a - 1 > 0 \\ b > 1 \Rightarrow b - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow (a-1)(b-1) > 0$$

$$\Rightarrow ab - a - b + 1 > 0$$

$$\Rightarrow ab > a + b - 1$$

چون $a > 1$ و $b > 1$، در نتیجه $a + b > 2$؛ بنابراین:

$$ab > a + b - 1 > 2 - 1 \Rightarrow ab > 1$$

نتیجهٔ ۲. اگر a_1، a_2، ...، و a_n عددهای حقیقی باشند و $a_1 > 1$، $a_2 > 1$، ...و $a_n > 1$، آن گاه $a_1 a_2 \ldots a_n > 1$.

نتیجهٔ ۳. اگر $a > 1$ و $n \in \mathbb{N}$، آن گاه $a^n > 1$.

زیرا می‌توان نوشت $\underbrace{a > 1, a > 1, \ldots, a > 1}_{n \text{ مرتبه}}$ در این صورت طبق نتیجهٔ قبل $\underbrace{aa\cdots a}_{n \text{ مرتبه}} > 1$ یعنی $a^n > 1$.

نتیجهٔ ۴. اگر $0 < a < 1$ آن گاه $a^n < 1$.

حل. چون $0 < a < 1$، بنابراین $\frac{1}{a} > 1$ و با توجه به نتیجهٔ ۲:

$$\left(\frac{1}{a}\right)^n > 1 \Rightarrow \frac{1}{a^n} > 1 \Rightarrow a^n < 1$$

مثال. اگر a عددی حقیقی و مثبت باشد و $a^n > 1$، آن گاه $a > 1$.

حل. از برهان «خلف» استفاده می‌کنیم. فرض کنیم که a عددی حقیقی و مثبت باشد؛ به طوری که $a \not> 1$؛ پس $0 < a \le 1$، بنابراین با توجه به نتیجهٔ ۴: $a^n \le 1$ و این با فرض $a^n > 1$ تناقض دارد، لذا فرض خلف ($a \not> 1$) باطل و حکم درست است؛ یعنی $a > 1$.

مثال. ثابت کنید:

۱ـ اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند و $a > b$، آن گاه $a^2 > b^2$.

۲ـ اگر a و b دو عدد حقیقی منفی باشند و $a > b$، آن گاه $a^2 < b^2$.

حل.

۱ـ بنابر قضیهٔ (۷) داریم:

$$\begin{cases} a > b > 0 \\ a > b > 0 \end{cases} \Rightarrow a \times a > b \times b \Rightarrow a^2 > b^2$$

۲ـ اگر $a > b$ در نتیجه $-b > -a$ که در آن $-a$ و $-b$ هر دو عدد حقیقی مثبت می‌باشند؛ بنا بر قسمت قبل $(-b)^2 > (-a)^2$ یعنی $b^2 > a^2$ یا $a^2 < b^2$.

قضیهٔ ۹. فرض کنیم $a > 0$؛ $x^2 < a^2 \Leftrightarrow -a < x < a$.

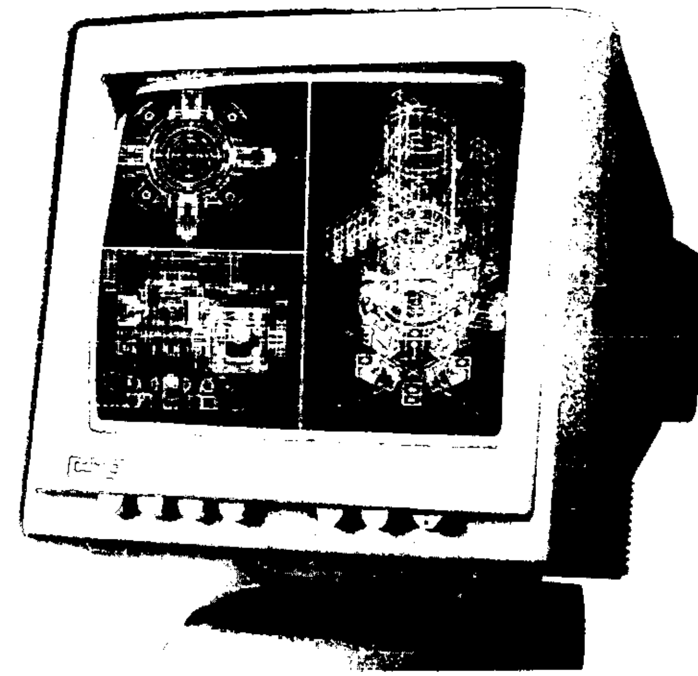
برهان. فرض کنیم $x^2 < a^2$، اگر $-a < x < a$ درست نباشد، در نتیجه $x \ge a$ یا $x \le -a$. اگر $x \ge a$، در نتیجه، بنابر مثال قبل $x^2 \ge a^2$ که این خلاف فرض است و اگر $x \le -a$ که در آن $-a < 0$، بنابر مثال قبل $x^2 \ge a^2$ که این نیز خلاف فرض است؛ بنابراین در هر دو حالت به تناقض می رسیم، پس $-a < x < a$.

بعکس، اگر $-a < x < a$ سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: $x > 0$؛ در این صورت از $x < a$ نتیجه می‌گیریم $x^2 < a^2$.

حالت دوم: $x < 0$؛ در این صورت از $-a < x$ نتیجه می‌گیریم $a^2 > x^2$.

حالت سوم: $x = 0$؛ چون مربع هر عدد حقیقی مثبت است، در نتیجه $x^2 < a^2$.



آموزش برنامه‌نویسی به زبان پاسکال (۴)

● محمّد رحیم

ورودی[1] و خروجی[2]

در طول برنامه‌نویسی لازم است که اطلاعاتی را از ورودی (نظیر صفحهٔ کلید[3]، فایل[4] و ...) دریافت کنیم و یا اطلاعات حاصل از اجرای برنامه را به خروجی (نظیر صفحهٔ نمایش[5]، فایل، چاپگر[6] و ...) ارسال کنیم. به این منظور از دستورات ورودی و خروجی Read، Readln، Write، و Writeln استفاده می‌کنیم.

دستور WRITE و WRITELN

از این دستورات برای ارسال اطلاعات به خروجی استفاده می‌کنیم. نحوهٔ استفاده از این دستورات به صورت زیر است:

Write ([متغیّر خروجی][متغیّر اوّل و متغیّر دوم و ...]) ;

Writeln ([متغیّر خروجی][متغیّر اوّل و متغیّر دوم و ...]) ;

Writeln;

توضیحات:

۱ــ استفاده از علامت [ ] به معنای اختیاری بودن است. برای مثال می‌توانیم متغیر خروجی که معمولاً فایل و یا چاپگر است نداشته باشیم، که در این‌صورت اطلاعات به صفحهٔ نمایش منتقل می‌شوند.

۲ــ به‌طور کلی فرق دستور Write و Writeln در این است که در دستور Write پس از فرستادن اطلاعات بر روی صفحهٔ نمایش، مکان‌نما[7] را به خط بعدی منتقل نمی‌کند، ولی Writeln منتقل می‌کند.

۳ــ دستور ;Writeln هیچ‌گونه اطلاعاتی را بر روی صفحهٔ نمایش نمی‌فرستد و فقط مکان‌نما را به سطر بعدی منتقل می‌کند.

مثال ۱:

```
Program test 1;
var
  x:Integer;
begin
  x:=26 ;
  Writeln ('This is Borhan #', x);
end.
```

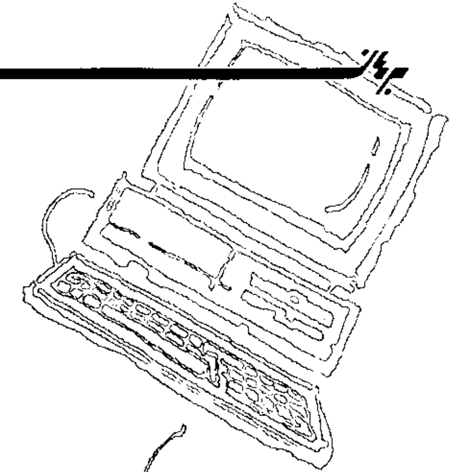
خروجی برنامهٔ فوق چنین است:

```
This is Borhan # 26
-    →    موقعیت مکان نما
```

همان‌طور که مشاهده می‌شود، هر عبارتی که در داخل ' ' بیاید عیناً درخروجی چاپ می‌شود. در دستورهای Write و Writeln می‌توان ترکیبی از متغیّرها با انواع مختلف را به کار برد. به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۲:

```
Program test 2;
```



```
var
   x: Integer;
   ch: char;
   str: String;
begin
   x: =10;
   ch:= 'a';
   str:='Borhan';
   Writeln ('x =',x ,'ch =',ch,'str =',str);
end.
```

خروجی برنامهٔ فوق به صورت زیر است:

x=1ϕ ch=a   str=Borhan

موقعیت مکان‌نما ← _

اگر در برنامهٔ فوق به جای دستور Writeln از دستور Write استفاده کنیم، خروجی برنامه و موقعیت مکان نما چنین خواهد بود:

x =10 ch =a   str =Borhan _ ← موقعیت مکان‌نما

مثال ۳:

```
Program test 3;
var
   A, B, C :byte;
begin
   A: =1;
   B: = 2;
   C: = 3;
   Writeln (A, B, C);
end.
```

خروجی برنامهٔ فوق و موقعیّت مکان‌نماچنین است:

123

موقعیت مکان‌نما ← _

همان‌طور که مشاهده می‌شود، اعداد 3،2،1 در هنگام نمایش به‌هم چسبیده‌اند و کاربر[۸] ممکن است تصور کند که عدد 123 نمایش داده شده است. در یک فرمت[۹] مناسب می‌توان از بروز چنین مشکلی جلوگیری کرد که در ادامه به آن اشاره خواهیم کرد.

دستور READ و READLN

از این دستورات برای دریافت اطلاعات از ورودی استفاده می‌کنیم. نحوهٔ استفاده از این دستورات به صورت زیر است:

Read ([متغیّر ورودی]متغیّر اوّل[, متغیّر دوم و ...]) ;

Readln ([متغیّر ورودی]متغیّر اوّل[, متغیّر دوم و ...]) ;

Read;

Readln;

توضیحات:

۱ـ استفاده از علامت [ ] به معنای اختیاری بودن است. برای مثال می‌توانیم متغیر ورودی که معمولاً فایل است، نداشته باشیم که دراین‌صورت اطلاعات از طریق صفحهٔ کلید دریافت می‌شود.

۲ـ به‌طور کلی فرق دستور Read و Readln در این است که دستور Read پس از دریافت اطلاعات از ورودی، مکان‌نما را به سطر بعد منتقل نمی‌کند، ولی دستور Readln منتقل می‌کند.

۳ـ دستورات ;Read و ;Readln هیچ‌گونه اطلاعاتی را از ورودی دریافت نمی‌کنند و معمولاً برای توقف در اجرای برنامه مورد استفاده قرار می‌گیرند.

مثال ۴: این برنامهٔ ضرایب a و b و c را از ورودی گرفته و چند جمله‌ای $ax^2 + bx + c$ را در خروجی نمایش می‌دهد.

```
Program test 4;
var
   a, b, c : Integer;
begin
   Write ('Enter a, b, c: ');
   Readln (a, b, c);
   Writeln (a,'x^2+',b ,'x +',c);
end .
```

خروجی برنامهٔ فوق چنین است:

Enter a,b,c: 234 ↵

2x^2+3x+4

موقعیت مکان‌نما ← _

در دستور Read و Readln هنگامی که چند متغیر را از ورودی می‌خوانیم، باید بین مقادیر ورودی فاصله وجود داشته باشد و ایجاد این فاصله با کلید Space bar انجام می‌شود.

ذکر این نکته بسیار ضروری است که با دستور Read و Readln نمی‌توان هم پیغام داد و هم اطلاعات را از ورودی خواند. دستورات Read و Readln فقط برای خواندن و دستورات Write و Writeln فقط برای نوشتن در خروجی مورد استفاده قرار

می‌گیرند. دو مثال زیر تفاوت دو دستور Read و Readln را نشان می‌دهد :

مثال ۵:

```
Program test 5;
var
   a,b,c,d: byte;
begin
   Write ('Enter a,b,c,d:');
   Read (a,b);
   Read (c,d);
   Writeln ('a =',a,'b =',b);
   Writeln ('c =',c,'d =',d);
end.
```

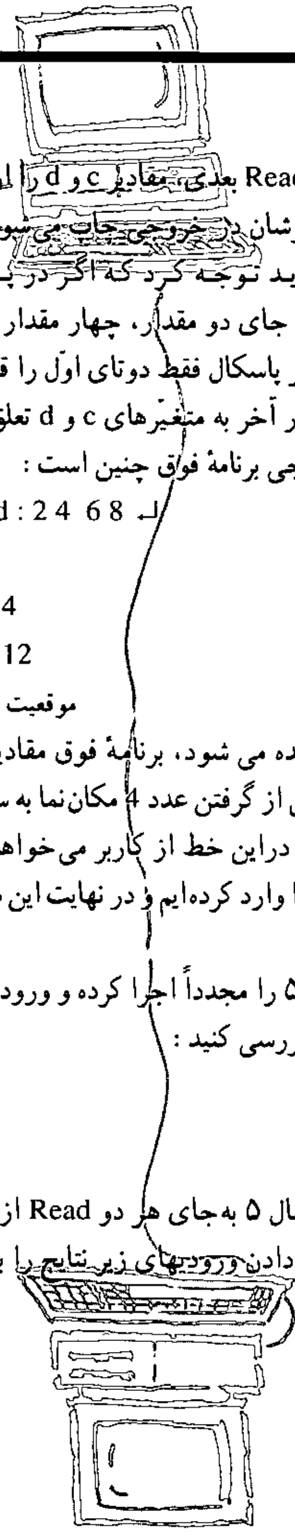
در برنامهٔ فوق پس از پیغام مناسب، اوّلین دستور Read اجرا شده و دو عدد a و b را از ورودی می‌گیرد، مثلاً 2 و 4 از آن‌جایی که در دستور Read مکان‌نما به سطر بعدی نمی‌رود و این برنامه مجدداً از دستور Read استفاده شده، لذا می‌توان مقادیر c و d را در همان خط وارد کرد ؛ مثلاً 6 و 8. بنابراین خروجی برنامه چنین است :

```
Enter a, b, c, d:2 4 6 8 ↵
a = 2        b = 4
c = 6        d = 8
_   → موقعیت مکان‌نما
```

مثال ۶: این مثال، همان مثال ۵ است، بااین تفاوت که به‌جای اوّلین دستورRead از دستورReadln استفاده شده است.

```
Program test 6;
var
   a,b,c,d: byte;
begin
  Write (' Enter a, b, c, d:');
  Readln (a, b);
  Read (c, d);
  Write ('a =',a,'b =',b);
  Write ('c =',c,'d =',d);
end.
```

در برنامهٔ فوق پس از پیغام مناسب، دستور Readln اجرا شده و پس از گرفتن مقادیر a و b مکان‌نما را به خط بعدی منتقل می‌کند و دستور Read بعدی، مقادیر c و d را از ورودی می‌گیرد و در نهایت مقادیرشان در خروجی چاپ می‌شود.



در این‌جا باید توجه کرد که اگر در پاسخ به دستور Readln(a,b); به جای دو مقدار، چهار مقدار به عنوان ورودی داده شود، کامپایلر پاسکال فقط دوتای اوّل را قبول می‌کند و این تصور که دو مقدار آخر به متغیّرهای c و d تعلق می‌گیرد، کاملاً غلط است. خروجی برنامهٔ فوق چنین است :

```
Enter a, b, c, d : 2 4  6 8 ↵
10    12 ↵
a = 2       b = 4
c = 10      b = 12
_     → موقعیت مکان نما
```

همان‌طور که دیده می شود، برنامهٔ فوق مقادیر 6 و 8 را قبول نمی‌کند، چون پس از گرفتن عدد 4 مکان‌نما به سطر بعدی می‌رود و مقادیر c و d را دراین خط از کاربر می‌خواهد که ما در این‌جا اعداد 1ϕ و 12 را وارد کرده‌ایم و در نهایت این مقادیر در خروجی چاپ شده‌اند.

تمرین: مثال ۵ را مجدداً اجرا کرده و ورودیهای زیر را به آن بدهید و نتایج را بررسی کنید :

```
2 4 6 ↵
8 10 12 ↵
```

تمرین: درمثال ۵ به‌جای هر دو Read از دستور Readln استفاده کرده و با دادن ورودیهای زیر نتایج را بررسی کنید :

```
2 4 6 ↵
8 10 12 ↵
```

واژه‌نامهٔ ریاضی و کامپیوتر

۱.Input	۶.Printer
۲.Output	۷.Cursor
۳.Keyboard	۸.User
۴.File	۹.Format
۵.Monitor	

معرفی ریاضیدانان دورهٔ اسلامی

● غلامرضا یاسی‌پور

(غیاث‌الدین کاشانی، ریاضیدان برجستهٔ ایرانی)

قرن نهم هجری

«غیاث‌الدین جمشید مسعود محمود طبیب کاشانی»، ریاضیدان و منجّم مسلمان و ایرانی قرن نهم، که نزد دانشمندان غرب به *الکاشی* معروف است، یکی از بزرگترین و به قولی بزرگترین ریاضیدان دورهٔ اسلامی است.

وی صاحب دو اثر بسیار مهم **مفتاح الحساب** و **رسالهٔ محیطیه** است که هر دو به زبان عربی‌اند. دو اثر مهم دیگر وی، **رسالهٔ وتر وجیب** به عربی و **زیج خاقانی** در تکمیل زیج ایلخانی[1] به فارسی‌اند.

بعدها این آثار را با تفصیل بیشتری مورد بررسی قرار خواهیم داد.

نامهٔ فارسی کاشانی به پدرش: در این نامه که کاشانی آن را حدود ۸۲۴ هجری قمری از سمرقند به پدر خود نوشته، مراتب فضل کاشانی مشخص است. در نامه چنین آمده :

> هرچند روز بندگی حضرت سلطنت پناهی در حلقهٔ درس حاضر می‌شود و چون حاضر شد، درس ریاضیات مقدم می‌دارند و این بنده هم حاضر شد. یکی از امتحان طلبه این است که هر کس به حلقهٔ درسی درآید، غافل است از آن که چه مسأله در میان خواهد بود. ... چون آغاز بحث می‌شد، هر بار به عنایة الله تعالی و یمن همّت آن خداوندی، این بنده دخل کاملی کرده، چنان که چند چیز که ایشان را از مطالعه معلوم نشده گفته و اعتراضات وارده بر سخن ایشان کرده و نکته‌های لطیف بیرون آورده، که همه حیران مانده‌اند.

از مطالعهٔ نامهٔ مزبور، این نیز برمی‌آید که کاشانی از لحاظ اخلاقی و تربیت روحی نیز مردی مردانه بوده است. در نامه چنین می‌خوانیم :

> از تحسینهای حضرت سلطنت پناهی، آن است که هیچ هفته نگذرد که بعضی دوستان به این بنده نرسانند که بندگی حضرت سلطنت پناهی امشب یا امروز چنین و چنان نکته‌ها فرمودند. امثال آنها : مستحضر است، بغایت خوب می‌داند و از همه این بهتر می‌داند و از قاضی[2] مستحضرتر و پرمایه‌تر است و در این فن پرذهن‌تر. چیزی که او به ده روز مشکل می‌یابد، مولانا غیاث‌الدین برفور یا در روز درمی‌یابد. ... نیز مردی نیک و سلیم القلب است، هر کس از جنس موالی و غیره که پیش ما آید، همین که ما او را اندک تربیتی کردیم، خود را نگاه نداشتند و با مردم جنگ می‌کردند و فضولی پا پیش می‌گرفتند. مولانا غیاث‌الدین با وجودی که انواع تربیت و عنایت در حق او فرمودیم و دائماً به شرف مجاورت و مکالمه مستعد است، در این مدت، هرگز با کسی نزاع نکرد و نه او از کس و نه کس از او گله کرد.

رفتن کاشانی به سمرقند در سال ۸۲۴ هجری بوده است و وفاتش در صبح چهارشنبه ۱۹ رمضان ۸۳۲ هجری (مطابق با ۲۲ ژوئن ۱۴۲۹ میلادی) در خارج شهر سمرقند.

اکنون به بحثی مختصر دربارهٔ چهار اثر مهم سابق‌الذکر کاشانی می‌پردازیم و در پایان، نظر بعضی از محققان را دربارهٔ کاشانی می‌خوانیم.

مفتاح الحساب

در مقدمهٔ این کتاب چنین آمده است :

ستایش خداوندی را سزاست که در آفرینش آحاد یگانه است، و در به هم پیوستن اعداد گوناگون، بی‌همتا. و درود بر بهترین آفریدهٔ او، محمد (ص) که والاترین شفاعت کنندهٔ روز رستاخیز است، و بر خاندان او و فرزندانش که راه‌های رهایی و رستگاری را رهنمونند.

اما بعد، نیازمندترین بندگان خدای تعالی به آمرزش و بخشش او، جمشید پسر مسعود پسر محمود پزشک کاشی، ملقّب به غیاث، که خدا روزگارش را نیکو گرداناد، چنین گوید :

چون در اعمال حساب و قوانین هندسه چندان ممارست کردم که به حقایق آن رسیدم، و به دقایق آن پی بردم، و از مسائل پیچیده و دشوار آن پرده برداشتم، و مشکلات آن را گشودم و قوانین و دستورهای بسیار در آن یافتم و آنچه را که استخراجش بر بسیاری از کسان که به آن پرداخته بودند، دشوار بود، به دست آوردم.

کاشانی آن گاه به ذکر بعضی از آثار خود چون **زیج خاقانی** و **زیج تسهیلات** و رسالهٔ **سُلّم السماء** و رسالهٔ **محیطیّه** و رسالهٔ **وتر و جیب** و آلت موسوم به **طبق المناطق** و کتاب **نزهة الحدائق** پرداخته می‌گوید :

هم‌چنین جوابهای مسائل بسیاری را که محاسبان زبردست بر سبیل امتحان یا برای آموختن با من در میان نهادند و حلّ آنها به وسیلهٔ معادلات ششگانهٔ جبری[3] حاصل نشده بود، استخراج کردم. ... و این کتاب را نوشتم ... با احتراز از اطناب مملّ و ایجاز مخلّ ... و همهٔ جدولهایی که در این کتاب وضع شده، ساخته و پرداختهٔ من است و مسؤول آسانی و دشواری آنها من هستم، مگر هفت جدول.

عناوین مقدمه و مقالات *مفتاح الحساب* عبارت است از :

مقدمه: در تعریف حساب و عدد و اقسام آن.

مقالهٔ اول: در حساب عددهای صحیح با ارقام هندی، مشتمل بر شش باب.

مقالهٔ دوم: در حساب کسر، مشتمل بر دوازده باب.

مقالهٔ سوم: در طریق حساب منجّمان، مشتمل بر شش باب.

مقالهٔ چهارم: در مساحت، مشتمل بر مقدمه و نه باب.

مقالهٔ پنجم: در استخراج مجهولات به وسیلهٔ جبر و مقابله و خطأین[4] و غیره، با قواعد حسابی، مشتمل بر چهار باب.

بعضی از تعریفهای مقدمهٔ *مفتاح الحساب* چنین است :

موضوع علم حساب، عدد است و عدد در شمردن به کار می‌آید و مشتمل است بر واحد و آنچه از آن تألیف می‌شود.

عدد مفرد، عددی است که فقط در یک مرتبه واقع شود.

زوج الزوج، عددی است که بتوان آن قدر آن را نصف کرد، تا به یک رسید.

زوج الفرد، عددی است که فقط یک بار بتوان آن را نصف کرد.

از کتاب مفتاح الحساب چنین برمی‌آید که مثلث حسابی *پاسکال*[5] در زمان کاشانی، در زمرهٔ مطالب معمولی ریاضیات بوده است. این مثلث که امروزه به نام **پاسکال** ریاضیدان و فیزیکدان فرانسوی موسوم است، نخستین بار در یک متن ریاضی، از تألیفات ابوبکر محمد بن حسین **کرجی**[6] آمده است.

رسالهٔ محیطیّه

تصنیف این کتاب، که شاهکاری در فن محاسبهٔ شستگانی و یکی از مهمترین آثار ریاضی کاشانی است و در اواسط ماه شعبان سال ۸۲۷ به پایان رسیده است.

در مقدمهٔ این کتاب چنین آمده است :

ستایش خداوندی را سزد که از نسبت قطر به محیط آگاه است و اندازهٔ هر مرکب و بسیط را می‌شناسد و آفرینندهٔ زمین و آسمانها و قراردهندهٔ نور در تاریکی است. و درود و سلام بر محمد مصطفی(ص) که مرکز دایرهٔ رسالت و محیط اقطار رهنمایی و دادگری است و بر خاندان و یاران پاک او باد.

اما بعد، نیازمندترین بندگان خدای تعالی به آمرزش وی جمشید پسر مسعود پسر محمود، طبیب کاشانی ملّقب به غیاث که خداوند احوال او را نیکو گرداند، گوید :

ارشمیدس ثابت کرده است که محیط (دایره) از سه برابر قطرش به اندازهٔ کمتر از $\frac{۱}{۷}$ و بیشتر از $\frac{۱۰}{۷۱}$ قطر، بزرگتر است، پس تفاوت بین این دو مقدار $\frac{۱}{۴۹۷}$ (قطر) است. پس دایره‌ای که قطرش ۴۹۷

ذراع یا قصب یا فرسنگ باشد، مقدار محیطش در حدود یک ذراع یا قصب یا فرسنگ مجهول و مشکوک است و دایرهٔ عظیمه‌ای که بر کرهٔ زمین واقع باشد، محیطش در حدود پنج فرسنگ مجهول است ؛ زیرا قطر آن برحسب فرسنگ تقریباً پنج برابر مقدار مذکور می‌باشد.

رسالهٔ محیطیّه پس از مقدمه ده فصل و یک خاتمه دارد که به ترتیب عبارت است از :

فصل اوّل، در تعیین وتر مجموع دو قوس که اوّلی وترش معلوم و دومی مساوی با نصف تمام (= مکمل) اولی تا نیمدایره باشد.

فصل دوم، در تعیین محیط کثیرالاضلاع محاطی دلخواه و محیط کثیرالاضلاع محیطی مشابه با آن.

فصل سوّم، در این که محیط (دایره) را به چند ضلع (= جزو متساوی) تقسیم می‌کنیم و عمل را تا چند مرتبه (ی شستگانی) ادامه می‌دهیم، تا آنکه (طول) محیط قسمی برایمان حاصل شود که در دایرهٔ مذکور (تفاوت) به مویی نرسد.

فصل چهارم، در اعمال.

فصل پنجم، در استخراج (طول) یک ضلع از کثیرالاضلاع (منتظم) محاط در دایره که عدهٔ اضلاع آن ۴۸، ۱۲، ۱۶، ۸، ۲ و ۱ باشد.

فصل ششم، در استخزاج محیط کثیرالاضلاع (منتظم) محاط در دایره و (محیط) کثیرالاضلاع مشابه با آن و محیط بر دایره که عدهٔ اضلاع هر یک ۸۰۵۳۰۶۳۶۸ باشد.

فصل هفتم، در آنچه از فروگذاشتن کسرهای زاید یا باقی (ناقص) در آخرین رقمهای اعمال پیش حاصل می‌شود.

فصل هشتم، در تبدیل اندازهٔ محیط (دایره) به ارقام هندی، به فرض آن که شعاع دایره معلوم باشد.

فصل نهم، در چگونگی اعمال با دو جدول.

فصل دهم، در شناختن تفاوت بین آنچه نزد ریاضیدانان مشهور و مستعمل است و آنچه ما به دست آورده‌ایم.

خاتمه، در اثبات غلط ابوالوفا و ابوریحان.

یک قضیهٔ رسالهٔ محیطیّه

اگر بر نیمدایره‌ای به قطر $AB = 2r$ و به مرکز O قوس دلخواه AG را در نظر بگیریم و وسط قوس GB را که مکمّل قوس AG است، نقطهٔ D بنامیم و AD را رسم کنیم، رابطهٔ زیر برقرار است :

$$r(2r + AG) = \overline{AD}^2$$

کاشانی در این رساله، مقدار عدد 2π یعنی محیط دایره (با فرض واحد بودن شعاع آن) را تا شانزده رقم اعشاری به دست آورده است که تماماً صحیح است :

$$2\pi = 6/283\ 185\ 307\ 179\ 586\ 5$$

رسالهٔ وتر و جیب

در مورد این رساله، خود کاشانی در مقدمهٔ مفتاح الحساب چنین می‌گوید :

رسالهٔ وتر و جیب در استخراج آن دو برای یک سوّم قوسی که وتر و جیب آن معلوم باشد.

از متن اصلی این رساله، اثری در دست نیست ؛ اما شروحی چند که بر آن نوشته‌اند، در دسترس است و از همانها می‌توان به مطالب اصلی این رساله پی برد.

میرزا ابوتراب، یکی از ریاضیدانان زمان «محمد شاه قاجار»، در مقدمهٔ رساله‌ای موسوم به **رساله در معرفت وتر ثلث قوس معلومة الوتر**، دربارهٔ **رسالهٔ وتر و جیب** چنین می‌نویسد :

... و سایر مهندسان نیز عدم امکان استنباط آن را مسلّم داشته‌اند ؛ مگر فاضل مهندس بارع غیاث‌الدین جمشید الکاشانی، که بعد از اعمال قواعد هندسیه و استعمال جبر و مقابله، طریقه‌ای به جهت آن استنباط و در رسالهٔ وتر و جیب ایراد نموده و امیر شهید میرزا الغ بیک به همان طریقه از وتر شش درجه وتر دو درجه را استنباط و از آن جیب یک درجه را به تحقیق بیرون آورده، و وضع جدول جیب را در زیج به همان قانون کرده است.

زیج خاقانی در تکمیل زیج ایلخانی

تألیف آن در ۸۱۶ هجری به پایان رسیده و در مقدمهٔ آن پس از حمد خدای تعالی و درود به پیغمبر اکرم (ص) و پیروان او چنین

آمده است که :

اما بعد چنین گوید مؤلف این کتاب، اقلّ عباداللّه تعالی جمشیدبن مسعودبن محمود ... که مدتی بود که در اقسام علمی و عملی ریاضیات اجتهاد می‌نمود ...

کاشانی در این مقدمه، از «خواجه نصیرالدین طوسی» با تجلیل یاد می‌کند؛ اما از اشتباه‌های زیج *ایلخانی* او نیز انتقاد می‌کند و چنانکه در مقدمهٔ مفتاح الحساب خاطرنشان کرده است، زیج *خاقانی* را برای تصحیح اشتباه‌ها و تکمیل زیج *ایلخانی* تألیف کرده است.

مقاله‌های زیج *خاقانی* به ترتیب زیر است :

مقالهٔ اوّل، در معرفت تواریخ مشهور.

مقالهٔ دوم، در معرفت جیب و سهم و ظلّ و میل و مطالع (و ذکر طول و عرض بلدان) و آنچه بدان تعلق دارد.

مقالهٔ سوّم، در معرفت موضع کواکب (طول و عرض) و توابع آن.

مقالهٔ چهارم، در استخراج سایر قُسی و خطوط مشهوره.

مقالهٔ پنجم، در استخراج طالع از معلومات مختلفه.

مقالهٔ ششم، در باقی اعمال نجومی که آن تسییرات است.

اکنون به ذکر بعضی از اصطلاحاتی که در آثار کاشانی آمده است، می‌پردازیم :

تضعیف، تنصیف، تداخل، اشتراک، تباین، تجنیس، رفع، ارقام جمّل، دوانیق، شعیرها، ارقام ستّینی، ذوالیمینین، ذوالرجلیَن، قطاع دایره، قطعهٔ دایره، جدول جیب، سطوح مستوی، شبه دایره، مبطل، مدرج، ذوات الشرفات، کثیرالاضلاع مستدیر، ضلع الکره، کثیرالوجوه، طاق وازج، قبهٔ مجوفه، سطوح مقرنس، جبر و مقابله، خطأین، اجناس، شیء، مال، کعب، مفرد، مجرد، مرکب، زوج الزوج، زوج الزوج و الفرد، زوج الفرد، عقود، مراتب، کعب، ضلع، کعب کعب، مال، مال مال، مال کعب، جزء الجذر، جزء المال، جزء الکعب، جزء مال المال، منزل، عدد منزل، مضلع، مضلع مُنطق، مضلع اصمّ، کسر مرکب، معطوف، مستثنی، مضاف، منکسر، درجه، دقیقه، ثانیه، ثالثه، رابعه، مرفوع، معیّن، شبیه المعیّن، جیب، سهم، اهلیلحجی، شلجمی، حلقهٔ مسطحه، هلالی، نعلی، مسألة الجبریة، متعادلان، استثناء، زاید، ناقص، رد و تکمیل، اعداد متحاب، ضلع، زاید، باقی، کسرهای معطوفه.

یکی از کارهای مهم کاشانی، بازیافت (اگر نگوییم اختراع) و ترویج کسرهای اعشاری یا دهدهی به قیاس کسرهای ستّینی یا شستگانی است. گرچه مفاهیم اوّلیهٔ این کسرها در کتاب **الفصول فی الحساب الهندی** در ۳۴۱ هجری به قلم **ابوالحسن احمدبن ابراهیم اقلیدس** آمده است و در کتاب **القوامی فی الحساب الهندی** در سال ۵۶۸ هجری به قلم ابونصر سموأل بن یحیی مغربی به وضوح به کار رفته است؛ اما این کاشانی است که در آثار خود از آنها استفاده کرده، به کار بردنشان را نیز توصیه می‌کند.

اکنون به آوردن اظهارنظر بعضی از محققّان دربارهٔ کاشانی و آثار او می‌پردازیم :

۱ــ اظهارنظر *پاول لوکی* ریاضیدان و خاورشناس آلمانی :

هانکل در کتاب تاریخ ریاضیات خود شرح می‌دهد که چگونه یک منجّم و ریاضیدان مسلمان (= کاشانی) در قرن پانزدهم میلادی، جیب یک درجه را از روی جیب سه درجه با دقت فراوان حساب کرده، و چگونه معادلهٔ درجهٔ سوّم مربوط به آن مسأله را تشکیل داده و با روش استادانه‌ای آن را حل کرده است. هانکل می‌گوید : این روش زیبای حلّ معادلات عددی از حیث دقّت و ظرافت، دست کمی از روشهای تقریبی که از زمان ویت به بعد در مغرب زمین متداول شده است، ندارد. ... بحق می‌توان این روش را از بدیعترین و جالبترین روشهایی دانست که در همهٔ نوشته‌های (ریاضی) اسلامی وجود دارد. مخترع چنین روش تحسین‌آمیزی، یک ایرانی است که در نیمهٔ اوّل قرن پانزدهم میلادی، در انجمن دانشورانی که نزد الغ بیک گرد آمده بودند، می‌زیسته و در آثارش خود را غیاث‌الدین جمشید فرزند مسعود فرزند محمود طبیب کاشانی نامیده است.

(من) او را ریاضیدانی شناخته‌ام هوشمند و مخترع و نقاد و صاحب افکار عمیق و واقف بر آثار ریاضیدانان سلف که بخصوص در فنّ محاسبه و به کار بستن روشهای تقریبی متبحّر و چیره‌دست بوده است. اگر رسالهٔ محیطیّهٔ او به دست ریاضیدانان معاصر وی در مغرب زمین رسیده بود، مردم مغرب زمین از بعضی منازعات و تألیفات مبتذل دربارهٔ اندازه‌گیری دایره (محاسبهٔ عدد π) بی‌نیاز می‌شدند.

پوشکویچ، در کتاب ریاضیات عرب که البته به خطا نامگذاری شد و حق آن است که ریاضیات دورهٔ اسلامی خوانده شود، دربارهٔ مفتاح الحساب کاشانی چنین آورده است :

مفتاح الحساب، کتابی است درسی، دربارهٔ ریاضیات مقدماتی، که استادانه تألیف شده است. این کتاب از حیث فراوانی و تنوع

مواد و مطالب و روانی بیان و سلامت کلام تقریباً در همهٔ آثار (ریاضی) قرون وسطی یگانه است.

هم او دربارهٔ **رسالهٔ محیطیّه** چنین می‌نویسد :

> این رساله که دربارهٔ محاسبهٔ عدد پی نوشته شده، اثری است نفیس و درخشنده در فنّ محاسبهٔ خطاها که نه تنها از حیث نتیجهٔ آن، که مشتمل بر هفده رقم اعشاری دقیق عدد π می‌باشد ؛ بلکه از حیث ظرافت بیان و سادگی روش تخمین و انتخاب ماهرانه از بین مقادیر تقریبی موجود نیز جالب توجه است.

کندی دربارهٔ کاشانی چنین نوشته است :

> پیش از هر چیز باید گفت، **کاشانی** محاسبی زبردست بود و در این فن، مهارت خاصی داشت. کسرهای اعشاری را اختراع کرد. **آلت طبق المناطق** که وی اختراع کرد، نمایندهٔ کاملترین پیشرفتی است که برای این دسته از افزارهای نجومی حاصل شده است.

سرانجام در برگ دوم نسخه‌ای به خط خود کاشانی، که در کتابخانهٔ آستان قدس رضوی موجود است، و نادرشاه افشارآن را به کتابخانهٔ مزبور وقف کرده است، به خط شیخ *بهایی* چنین نوشته شده است :

> الرسالة المحیطیه و هی نسخة الاصل بخطّ مؤلفها المولی الاجل الافضل بطلمیوس زمانه مولانا غیاث‌الدین جمشید الکاشی طاب ثراه، حرّره الفقیر بهاء الدین محمد العاملی.

همان گونه که قبلاً ثبت افتاد، وفات کاشانی روز چهارشنبه نوزدهم ماه رمضان سال ۸۳۲ هجری بوده است و برخی، علت مرگ وی را به اشارهٔ میرزا الغ بیگ دانسته‌اند.

***

یادداشتها:

۱. زیج ایلخانی، اثر خواجه نصیرالدین طوسی است.

۲. صلاح‌الدین پاشا موسی بن محمدبن محمود قاضی زادهٔ رومی، منجم و ریاضیدان ترک (ح ۷۶۶ ـ ح ۸۴۰) همکار غیاث‌الدین جمشید کاشانی، در کار رصدخانهٔ سمرقند و صاحب **رسالة الجیب، شرح اشکال التأسیس، رسالة فی الحساب، حاشیه بر تحریر اقلیدس** خواجه نصیر، و **رسالة فی الهیئة و الهندسة.**

۳. معادله‌های زیر که در آنها a و b و c مثبت‌اند :

$$bx = c,\ ax^2 = c,\ ax^2 = bx,\ ax^2 + bx = c$$

$$ax^2 + c = bx,\ ax^2 = bx + c$$

۴. در باب چهارم *خلاصة الحساب* شیخ *بهائی* دربارهٔ حساب خطأین چنین آمده است :

> مجهول را هر چه که بخواهیم، فرض می‌کنیم و آن را مفروض اوّل می‌نامیم، و بر حسب سؤال در آن تصرف می‌کنیم. اگر حاصل (با عدد داده شده) مطابقت داشت که همان مطلوب است؛ اما اگر خطایی به اضافه یا نقصان بر آن حاصل کرد، آن خطای اوّل است. در این صورت (مجهول را) عددی دیگر فرض می‌کنیم و آن مفروض ثانی است، که اگر خطایی حاصل شد، خطای دوم را حاصل کرده‌ایم؛ آن گاه مفروض اوّل را در خطای ثانی ضرب کرده، نامش را محفوظ اوّل می‌گذاریم، و مفروض دوم را در خطای اوّل ضرب کرده، آن را محفوظ ثانی نام می‌نهیم. آن گاه برای استخراج مجهول، اگر هر دو خطا زیادتر یا کمتر (از عدد داده شده) باشند، تفاضل بین دو محفوظ را بر تفاضل بین دو خطا تقسیم می‌کنیم. اما اگر مختلف باشند (یعنی یکی زیادتر و دیگری کمتر باشد)، آن گاه مجموع دو محفوظ را بر مجموع دو خطا تقسیم می‌کنیم.

۵. مثلث حسابی پاسکال، مثلثی است به صورت زیر که در آن، هر عدد (بجز عدد اوّل) مجموع دو عدد بالای سمت چپ و راست آن است و هر سطر ضرایب بسط دوجمله‌ای را به دست می‌دهد :

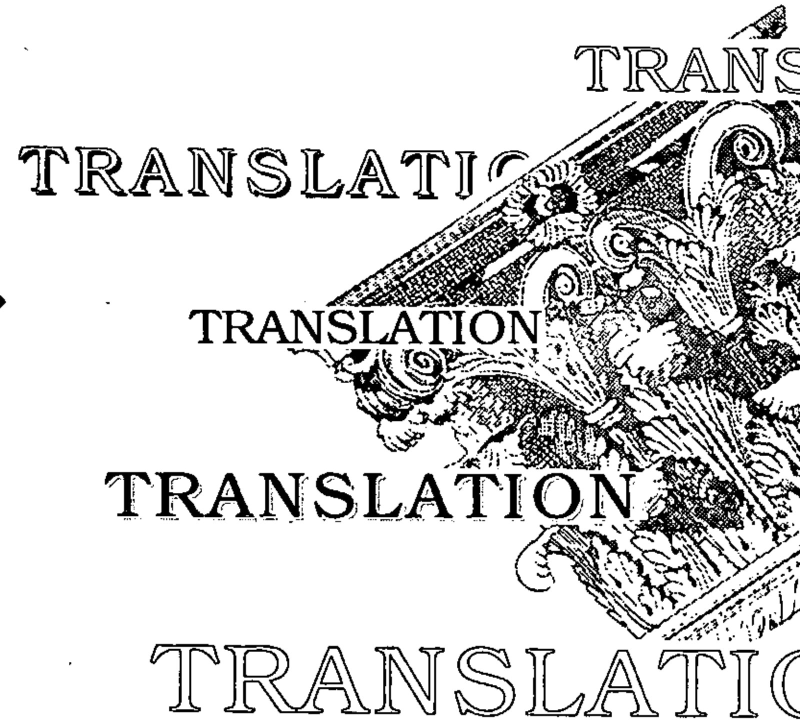
۱
۱ ۱
۱ ۲ ۱
۱ ۳ ۳ ۱
۱ ۴ ۶ ۴ ۱
۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱
۱ ۶ ۱۵ ۲۰ ۱۵ ۶ ۱
....

۶. ریاضیدان ایرانی، متوفی در حدود ۴۲۰ هجری، نویسندهٔ کتب **الفخری فی (صناعة) الجبر و المقابلة، الکافی فی الحساب، البدیع فی الحساب**، و ...

مراجع:

کاشانی‌نامه : ابوالقاسم قربانی
زندگینامهٔ ریاضیدانان دورهٔ اسلامی : ابوالقاسم قربانی
خلاصة الحساب : شیخ بهائی

آموزش ترجمهٔ متون ریاضی (۲۲)



از کتاب: Multiple choice Tests in advanced mathematics

● حمیدرضا امیری

Test 6

Time allowed: 1¼ hours

SECTION I

Questions 1–20 **(Twenty questions)**

تست ۷

وقت $۱\frac{۱}{۴}$ ساعت

بخش ۱

سؤالهای ۱ الی ۲۰ **(بیست سؤال)**

1. An equation of a circle, with radius r and centre (a, b), is

A $x^2 + y^2 = r^2 - a^2 - b^2$

B $x^2 + y^2 + ax + by = r^2 - a^2 - b^2$

C $x^2 + y^2 - ax - by = r^2 - a^2 - b^2$

D $x^2 + y^2 - 2ax - 2by = r^2 - a^2 - b^2$

E $x^2 + y^2 + 2ax + 2by = r^2 - a^2 - b^2$

۱ـ معادلهٔ دایره‌ای به شعاع r و مرکز (a,b) عبارت است از :

۱) $x^{۲}+y^{۲}=r^{۲}-a^{۲}-b^{۲}$

۲) $x^{۲}+y^{۲}+ax+by=r^{۲}-a^{۲}-b^{۲}$

۳) $x^{۲}+y^{۲}-ax-by=r^{۲}-a^{۲}-b^{۲}$

۴) $x^{۲}+y^{۲}-۲ax-۲by=r^{۲}-a^{۲}-b^{۲}$

۵) $x^{۲}+y^{۲}+۲ax+۲by=r^{۲}-a^{۲}-b^{۲}$

2. The complete solution set of the inequality

$$|x - 1| > |x|,$$

where $x \in \mathbb{R}$, is

A $\{x : x > \frac{1}{2}\}$ **B** $\{x : x < 1\}$ **C** $\{x : x < \frac{1}{2}\}$

D $\{x : x < 0\}$ **E** none of the above

۲ـ مجموعهٔ همهٔ جوابهای نامعادلهٔ $|x-۱|>|x|$ کدام است؟

$(x \in \mathbb{R})$

۱) $\left\{x : x > \frac{۱}{۲}\right\}$ ۲) $\{x : x < ۱\}$

۳) $\left\{x : x < \frac{۱}{۲}\right\}$ ۴) $\{x : x < ۰\}$

۵) هیچ کدام از موارد بالا (قبل)

3. $\frac{1-2\cos^2\theta}{1-2\sin^2\theta} =$

A -1 B $\frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}$

C $\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta}$ D $\frac{\sin\theta - \cos\theta}{\sin\theta + \cos\theta}$

E $\frac{\tan^2\theta - 1}{\tan^2\theta + 1}$

۳ـ حاصل $\frac{۱-۲\cos^{۲}\theta}{۱-۲\sin^{۲}\theta}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) $\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}$

۳) $\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$ ۴) $\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$

۵) $\frac{tg^{۲}\theta-۱}{tg^{۲}\theta+۱}$

4. Given that $\tan\alpha = 3/4$ and $\tan\beta = 4/3$, where α and β are both acute, then $\sin(\alpha+\beta) =$

A $\frac{7}{5}$ B $\frac{24}{25}$

C $\frac{7}{25}$ D 0

E 1

۴ـ فرض کنیم α و β زاویه‌هایی حاده و $tg\alpha = \frac{۳}{۴}$ و $tg\beta = \frac{۴}{۳}$، در این صورت حاصلِ $\sin(\alpha+\beta)$ کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۵}$ ۲) $\frac{۲۴}{۲۵}$

۳) $\frac{۷}{۲۵}$ ۴) ۰

۵) ۱

5. $\int \frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{9} - x^2)}}\,dx =$

A $\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$ + constant

B $\sin^{-1}(3x)$ + constant

C $\sin^{-1}\left(\frac{3}{x}\right)$ + constant

D $\frac{3}{2}\ln\left(\frac{1}{9} - x^2\right)$ + constant

E $\frac{3}{2}\ln\left(\frac{1+3x}{1-3x}\right)$ + constant

۵ـ حاصلِ $\int \frac{۱}{\sqrt{(\frac{۱}{۹}-x^{۲})}}dx$ کدام است؟

۱) $\sin^{-۱}(\frac{x}{۳})+c$ ۲) $\sin^{-۱}(۳x)+c$

۳) $\sin^{-۱}(\frac{۳}{x})+c$ ۴) $\frac{۳}{۲}Ln(\frac{۱}{۹}-x^{۲})+c$

۵) $\frac{۳}{۲}Ln(\frac{۱+۳x}{۱-۳x})+c$

6. $\frac{d}{dx}(\ln\tan x) =$

A $\ln(\sec^2 x)$ B $\cot x$

C $\frac{2}{\sin 2x}$ D $\frac{1}{\sin 2x}$

E $\sec x$

۶ـ حاصل $\frac{d}{dx}(Lntgx)$ کدام است؟

۱) $Ln(\sec^{۲}x)$

۲) $\cot gx$

۳) $\frac{۲}{\sin ۲x}$

۴) $\frac{۱}{\sin ۲x}$

۵) $\sec x$

7. Given that the roots of the quadratic equation

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

where $abc \neq 0$, are α and β, then the roots of the equation

$$16cx^2 + 4bx + a = 0$$

are

A $\frac{1}{4\alpha}$ and $\frac{1}{4\beta}$ B $-\frac{1}{4\alpha}$ and $-\frac{1}{4\beta}$

C $\frac{\alpha}{4}$ and $\frac{\beta}{4}$ D $\frac{4}{\alpha}$ and $\frac{4}{\beta}$

E 4α and 4β

8. $\frac{5-i}{4-3i} =$

A $\frac{1}{5}(23 + 11i)$ B $\frac{1}{7}(23 + 11i)$

C $\frac{1}{7}(23 - 11i)$ D $\frac{1}{25}(23 - 11i)$

E $\frac{1}{25}(23 + 11i)$

9. Given that

$$(\lg x)^2 - 4(\lg x) + 3 = 0,$$

where $x \in \mathbb{R}^+$, then
$x =$

A 1 or 3 B 10 or 1000

C 1 or 1000 D $\frac{1}{10}$ or $\frac{1}{1000}$

E 10 or $\frac{1}{1000}$

10. The general solution of the differential equation

$$\frac{dy}{dx} + y = 1$$

is, P being an arbitrary constant,

A $2x + (1 - y)^2 = P$ B $2x - (1 - y)^2 = P$

C $y = 1 + Pe^x$ D $y = 1 + Pe^{-x}$

E $y = Pe^{-x} - 1$

۷ـ فرض کنیم α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ باشند، که $abc \neq 0$ در این صورت ریشه‌های معادلهٔ $16cx^2+4bx+a=0$ عبارتند از :

۱) $\frac{1}{4\alpha}$ و $\frac{1}{4\beta}$ ۲) $-\frac{1}{4\alpha}$ و $-\frac{1}{4\beta}$

۳) $\frac{\alpha}{4}$ و $\frac{\beta}{4}$ ۴) $\frac{4}{\alpha}$ و $\frac{4}{\beta}$

۵) $4\alpha, 4\beta$

۸ـ حاصل $\frac{5-i}{4-3i}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{5}(23+11i)$ ۲) $\frac{1}{7}(23+11i)$

۳) $\frac{1}{7}(23-11i)$ ۴) $\frac{1}{25}(23-11i)$

۵) $\frac{1}{25}(23+11i)$

۹ـ فرض کنیم $(\log x)^2-4(\log x)+3=0$ که $x \in \mathbb{R}$، در این صورت x برابر است با :

۱) ۱ یا ۳ ۲) ۱۰ یا ۱۰۰۰

۳) ۱ یا ۱۰۰۰ ۴) $\frac{1}{10}$ یا $\frac{1}{1000}$

۵) ۱۰ یا $\frac{1}{1000}$

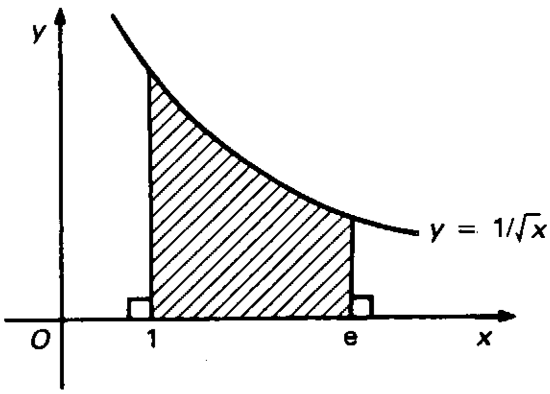
۱۰ـ جوابهای عمومی معادلهٔ دیفرانسیل $\frac{dy}{dx}+y=1$ کدام است؟ (p ثابت دلخواهی است)

۱) $2x+(1-y)^2=p$ ۲) $2x-(1-y)^2=p$

۳) $y=1+pe^x$ ۴) $y=1+pe^{-x}$

۵) $y=pe^{-x}-1$

11.



The volume, in cubic units, generated when the shaded region is rotated completely about Ox is

A π **B** $\pi(1 - e^{-2})$ **C** $2(e^{1/2} - 1)$

D πe **E** $\pi(e - 1)$

12. The number of different permutations of the letters of the word ROTTEN is

A 6! **B** (6!)/2 **C** (5!) × 2

D 5! **E** (5!)/2

13. The sum to infinity of a geometric progression of positive terms is 3. When the second term of the progression is subtracted from the first term the result is 4/3. The common ratio of the progression is

A $\frac{1}{4}$ **B** $\frac{1}{3}$ **C** $\frac{4}{9}$

D $\frac{1}{2}$ **E** $\frac{1}{3}$ or $\frac{5}{3}$

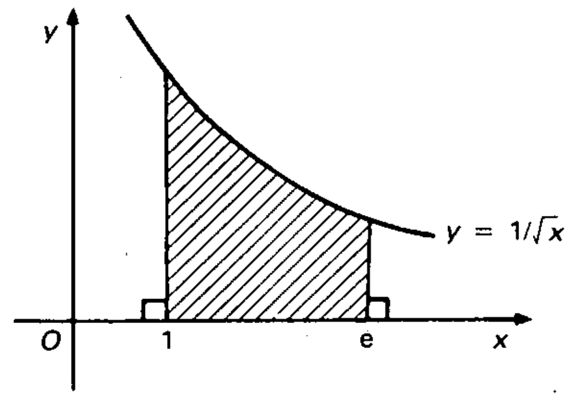
14. Given that $\mathbf{a} = (3\mathbf{i} + 4\mathbf{j})$, $\mathbf{b} = (2\mathbf{i} - \mathbf{j})$, $\mathbf{x} = (\mathbf{i} + 5\mathbf{j})$ and $\mathbf{x} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$,
then the scalars s and t are given by

A $s = -1, \quad t = -1$ **B** $s = -1, \quad t = 1$

C $s = 1, \quad t = -1$ **D** $s = 1, \quad t = 1$

E $s = \sqrt{5}, \quad t = 5$

ـ۱۱



حجم تولید شده توسط دورانِ کامل ناحیهٔ هاشور خورده حول محور ox، در واحد حجم کدام است؟

۱) π ۲) $\pi(1-e^{-2})$ ۳) $2(e^{\frac{1}{2}}-1)$

۴) πe ۵) $\pi(e-1)$

۱۲ـ تعداد جایگشتهای متمایز که می‌توان با حروف کلمهٔ ROTTEN ساخت، کدام است؟

۱) !۶ ۲) $\frac{6!}{2}$ ۳) $5!\times 2$

۴) !۵ ۵) $\frac{5!}{2}$

۱۳ـ حدّ مجموع یک تصاعد هندسی با جمله‌های مثبت برابر ۳ است. درصورتی که تفاضل دومین جملهٔ این تصاعد و جملهٔ اول برابر $\frac{4}{3}$ باشد، قدر نسبت این تصاعد کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{4}{9}$

۴) $\frac{1}{2}$ ۵) $\frac{1}{3}$ یا $\frac{5}{3}$

۱۴ـ فرض کنیم $a=(3i+4j)$ و $b=(2i-j)$ و $x=(i+5j)$ و $x=sa+tb$ در این صورت اسکالرهای (اعداد) s و t عبارتند

۱) $t=-1$, $s=-t$ ۲) $s=-1$, $t=1$

۳) $s=1$, $t=-1$ ۴) $s=1$, $t=1$

۵) $s=\sqrt{5}$, $t=5$

15. All solutions of the simultaneous equations
$2\cos\theta - \sqrt{3} = 0, \quad 2\sin\theta + 1 = 0$
are obtained by taking all integer values of n in

A $n\pi - (-1)^n\frac{\pi}{6}$ B $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$

C $2n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$ D $2n\pi - \frac{\pi}{3}$

E $2n\pi - \frac{\pi}{6}$

16. Given that

$\frac{3^x}{9^y} = 27$ and $5^x = \frac{1}{5^{y+1}}$,

where $x, y \in \mathbb{R}$, then y

A $= -4$ B $= 4$

C $= 3$ D $= -4/3$

E cannot be found

17. The number of asymptotes of the curve $y = \tan x$, where $x \in \mathbb{R}$, is

A 0 B 2 C 4

D 6 E more than 6

18. $\frac{x-1}{x(x+1)} < 0$ for all finite values of x in the interval

A $x > 1$ B $x < 1$ C $x < -1$

D $x > -1$ E $x > 0$

19. Which one of the following expressions is not identically equal to any one of the others?

A $\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$ B $\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}$

C $\tan 2\theta$ D $\frac{2\cot\theta}{\cot^2\theta - 1}$

E $\frac{2\sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta - 1}$

۱۵ـ همهٔ جوابهای دستگاه معادلات $۲\sin\theta+۱=۰$ و $۲\cos\theta-\sqrt{۳}=۰$ با قراردادن مقدار صحیح n در کدامیک (از گزینه‌های زیر) حاصل خواهد شد؟

۱) $n\pi-(-۱)^n\frac{\pi}{۶}$ ۲) $۲n\pi\pm\frac{\pi}{۶}$

۳) $۲n\pi+(-۱)^n\frac{\pi}{۶}$ ۴) $۲n\pi-\frac{\pi}{۳}$

۵) $۲n\pi-\frac{\pi}{۶}$

۱۶ـ اگر فرض کنیم $\frac{۳^x}{۹^y}=۲۷$ و $۵^x=\frac{۱}{۵^{y+۱}}$ که $x,y\in\mathbb{R}$، در این صورت y کدام است؟

۱) -۴ ۲) ۴

۳) ۳ ۴) $-\frac{۴}{۳}$

۵) y ای یافت نمی‌شود

۱۷ـ تعداد مجانبهای منحنی $y=\operatorname{tg}x$ وقتی که $x\in\mathbb{R}$ عبارت است از :

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴

۴) ۶ ۵) بیشتر از ۶

۱۸ـ نامساوی $\frac{x-۱}{x(x+۱)}<۰$ برای مقادیر متناهی x در کدام فاصله برقرار است؟

۱) $x>۱$ ۲) $x<۱$ ۳) $x<-۱$

۴) $x>-۱$ ۵) $x>۰$

۱۹ـ کدام‌یک از عبارتهای زیر عیناً مساوی با بقیهٔ عبارتها نیست؟

۱) $\frac{۲\operatorname{tg}\theta}{۱+\operatorname{tg}^۲\theta}$ ۲) $\frac{۲\sin\theta\cos\theta}{\cos^۲\theta-\sin^۲\theta}$

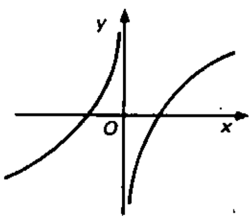
۳) $\operatorname{tg}۲\theta$ ۴) $\frac{۲\operatorname{cotg}\theta}{\operatorname{cotg}^۲\theta-۱}$

۵) $\frac{۲\sin\theta\cos\theta}{۲\cos^۲\theta-۱}$

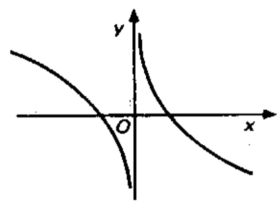
20. The graph of $y = x - \frac{1}{x}$ could be

۲۰ــ نمودار $y = x - \frac{1}{x}$ کدام می‌تواند باشد؟

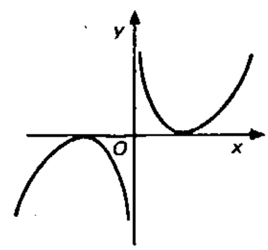
A



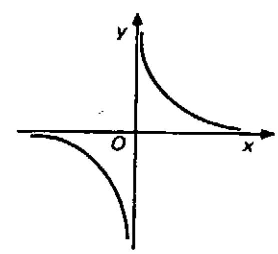
B



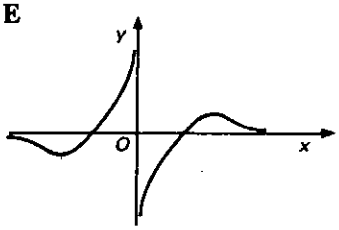
C



D



E



معرفی کتاب معرفی کتاب معرفی کتاب معرفی کتاب

مبانی ریاضیات گسسته
ناشر: نشر اشاره
تألیف: آلبرت د ـ پلیمنی
هـ ـ جوزف استرایت
مترجمان: یداله ایلخانی‌پور
اعظم مجیدی

این کتاب، یکی از مراجع و منابع کتابهای درسی جبر و احتمال سال سومّ نظام جدید و ریاضیات گسستهٔ پیش دانشگاهی می‌باشد.

الف. بیان درس و نگارش آن ساده و دانش‌آموزی است و دارای ۵ مبحث، منطق و روشهای اثبات (روش حل مسأله) ـ مجموعه‌ها ـ نظریهٔ اعداد و همنهشتی ـ رابطه و تابع می‌باشد.

ب. کتاب دارای مثالهای متنوع و مسائل حل شدهٔ بسیار است، که جمعاً دارای ۱۲۹ مثال حل شده و ۴۲۸ مسألهٔ حل نشده است، که ۱۶۰ مسألهٔ آن هم مربوط به پایان فصلها است.

ج. در هر مبحث به زبان پاسکال، برنامه و الگوریتم حلّ مسائل به منظور استفاده در کامپیوتر نیز آمده است، و مثالها و تمرینهایی نیز در این زمینه، ضمیمه شده است.

د. مباحث کتاب، علاوه بر پوشش دادن کتابهای درسی جبر و احتمال و ریاضیات گسسته، دارای مطالب اضافی برای دانش‌آموزانی که برای شرکت در المپیادهای ریاضی مشتاق هستند و نیز برای دانشجویان و دبیران رشتهٔ ریاضی می‌باشد. لذا استفاده از این کتاب به تمامی دانش‌آموزان و دانش‌پژوهان و دبیران ریاضی توصیه می‌شود.

هندسهٔ دلپذیر
ناشر: انتشارات مدرسه
مؤلف: احمد شرف الدین

کتاب «هندسهٔ دلپذیر» اثری است که می‌تواند مورد استفادهٔ استادان، دبیران، دانشجویان و دانش‌آموزان قرار گیرد. بسیاری از مطالب این کتاب، برای دانش‌آموزان آموزنده و سودمند است و علاقه و عشق آنان را به هندسه افزایش می‌بخشد. دبیران می‌توانند از مطالب این کتاب برای دلپذیر ساختن درس خود یاری بجویند. در بخش اوّل کتاب به نام «هندسهٔ دلها»، دربارهٔ قدرت تخیّل آفرینندهٔ استادان نقشگر ایرانی در کاشیکاریها و قالیها، ... سخن رفته است. در بخش دوم کتاب، اساس هندسیِ تعداد زیادی از دستگاه‌های صنعتی شرح داده شده است. در بخش سوم کتاب، مثالهایی برای حلّ و طرح مسائل جبر و آنالیز با هندسه ارائه شده است. در بخش چهارم، چند مثال هندسی که از آن نتایج فلسفی مهم و جالب حاصل می‌شود، مطرح شده است.

نویسندهٔ کتاب در زمینهٔ جبر بول و هندسه تحقیقات متعددی عرضه کرده است و به علاوه تاکنون به طرح چند دستگاه نائل آمده است. از آن میان طرح یک ماشین‌حساب آنالوژیک برای حلّ معادلات جبری است، که ضرایب آنها به پارامترهایی بستگی دارند. توفیق نویسنده در طرح چند دستگاه و علاقهٔ ایشان به هندسه موجب نوشتن کتاب حاضر شده است که قسمت عمدهٔ آن «اساس هندسی دستگاه‌های صنعتی» می‌باشد. مطالعهٔ این کتاب را به همهٔ دبیران، دانش‌آموزان، دانشجویان و علاقه‌مندان ریاضیات توصیه می‌کنیم.

انتگرال کسرهای گویا

● سید محمدرضا هاشمی موسوی

(قسمت دوم)

فرض کنیم، می‌خواهیم $\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$ را که در آن $\frac{p(x)}{q(x)}$ یک کسر گویاست، محاسبه کنیم؛ برای این کار ابتدا $\frac{p(x)}{q(x)}$ را به‌صورت حاصل جمع چند کسر ساده نوشته و سپس از این کسرهای ساده انتگرال می‌گیریم. برای نوشتن $\frac{p(x)}{q(x)}$ به کسرهای ساده از قضایای قبل استفاده می‌کنیم.

مثال: $\int \frac{dx}{x^{۲}-۱}$ را محاسبه کنید.

حل: ابتدا کسر $\frac{۱}{x^{۲}-۱}$ را به صورت مجموع دو کسر ساده می‌نویسیم:

$$\frac{۱}{x^{۲}-۱}=\frac{۱}{(x-۱)(x+۱)}=\frac{A}{x-۱}+\frac{B}{x+۱}$$

$$A=\left.\frac{۱}{x+۱}\right|_{x=۱}=\frac{۱}{۲} \qquad , \qquad B=\left.\frac{۱}{x-۱}\right|_{x=-۱}=\frac{-۱}{۲}$$

بنابراین:

$$\int \frac{dx}{x^{۲}-۱}=\frac{۱}{۲}\int\left(\frac{۱}{x-۱}-\frac{۱}{x+۱}\right)dx=\frac{۱}{۲}\int\frac{dx}{x-۱}-\frac{۱}{۲}\int\frac{dx}{x+۱}$$

$$=\frac{۱}{۲}\ln|x-۱|-\frac{۱}{۲}\ln|x+۱|+C=\frac{۱}{۲}\ln\left|\frac{x-۱}{x+۱}\right|+C$$

با فرض $C=\frac{\ln|k|}{۲}$، خواهیم داشت:

$$\int \frac{dx}{x^{۲}-۱}=\frac{۱}{۲}\ln\left|\frac{k(x-۱)}{x+۱}\right|$$

مثال: $\int \frac{dx}{x^{۳}+۲x^{۲}+x}$ را حساب کنید.

حل: ابتدا کسر $\frac{۱}{x^{۳}+۲x^{۲}+x}$ را به صورت مجموع چند کسر ساده می‌نویسیم:

$$\frac{۱}{x^{۳}+۲x^{۲}+x}=\frac{۱}{x(x^{۲}+۲x+۱)}=\frac{۱}{x(x+۱)^{۲}}$$

$$=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x+1}$$

$$A=\left.\frac{1}{(x+1)^2}\right|_{x=0}=1 \quad , \quad B=\left.\frac{1}{x}\right|_{x=-1}=-1$$

برای محاسبهٔ C کافی است، برابری را به ازای $x=1$ به یک معادلهٔ یک مجهولی تبدیل کنیم :

$$\frac{1}{4}=1-\frac{1}{4}+\frac{C}{2}\Rightarrow\frac{C}{2}=-\frac{1}{2}\Rightarrow C=-1$$

بنابراین :

$$\int\frac{dx}{x^3+2x^2+x}=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{(x+1)^2}-\int\frac{dx}{x+1}$$

$$=\ln|x|+\frac{1}{x+1}-\ln|x+1|+C$$

$$=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+\frac{1}{x+1}+C$$

با فرض $C=\ln|k|$، خواهیم داشت :

$$\int\frac{dx}{x^3+2x^2+x}=\ln\left|\frac{kx}{x+1}\right|+\frac{1}{x+1}$$

مثال: $\int\frac{x+1}{x^3+4x}dx$ را محاسبه کنید.

حل: ابتدا کسر گویای $\frac{x+1}{x^3+4x}$ را به صورت مجموع چند کسر ساده می‌نویسیم :

$$\frac{x+1}{x^3+4x}=\frac{x+1}{x(x^2+4)}=\frac{A}{x}+\frac{kx+s}{x^2+4}$$

$$=\frac{x+1}{x(x^2+4)}=\frac{(A+k)x^2+sx+4A}{x(x^2+4)}$$

$$x+1\equiv(A+k)x^2+sx+4A$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+k=0\\ s=1\\ 4A=1\end{cases}\Rightarrow s=1\ ,\ A=\frac{1}{4}\ ,\ k=-\frac{1}{4}$$

بنابراین :

$$\int\frac{x+1}{x^3+4x}dx=\int\left(\frac{1}{4x}-\frac{x-4}{4(x^2+4)}\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{4}\int\frac{xdx}{x^2+4}+\int\frac{dx}{x^2+4}$$

$$=\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{8}\ln(x^2+4)+\frac{1}{2}\operatorname{Arc\,tan}\frac{x}{2}+C$$

مثال: $\int\frac{dx}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$ را محاسبه کنید.

حل: ابتدا کسر گویای $\frac{1}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$ را به‌صورت مجموع چند کسر ساده می‌نویسیم :

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)(x+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}+\frac{D}{x+3}$$

$$A=\left.\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}\right|_{x=0}=\frac{1}{6},$$

$$B=\left.\frac{1}{x(x+2)(x+3)}\right|_{x=-1}=\frac{-1}{2},$$

$$C=\left.\frac{1}{x(x+1)(x+3)}\right|_{x=-2}=\frac{1}{2}\ ,$$

$$D=\left.\frac{1}{x(x+1)(x+2)}\right|_{x=-3}=\frac{-1}{6}$$

بنابراین :

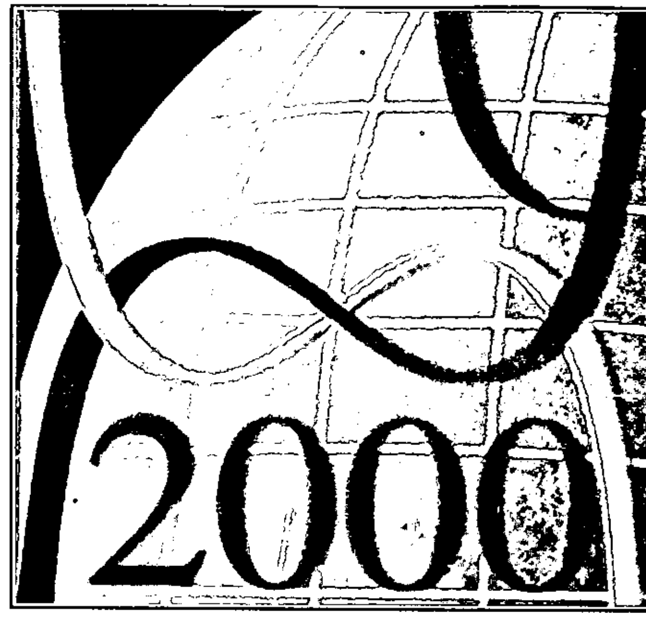
$$\int\frac{dx}{x(x+1)(x+2)(x+3)}=\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}+$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+2}-\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x+3}$$

$$=\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x+2|-\frac{1}{6}\ln|x+3|+C$$

$$=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x}{x+3}\right|+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+2}{x+1}\right|+C$$

گزارشی از سوّمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران



● میرشهرام صدر

سوّمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران با تلاش ادارهٔ کل آموزش و پرورش استان کرمان و با همکاری انجمن ریاضی ایران و دانشکدهٔ ریاضی و کامپیوتر دانشگاه شهید باهنر کرمان، در روزهای چهارم تا ششم شهریور ماه ۱۳۷۷ در دانشکدهٔ فنی شهید چمران، شهر تاریخی و زادگاه ماهانی ریاضیدان مسلمان و مشهور ایرانی برگزار شد.

در این کنفرانس بیش از ۱۰۰۰ نفر شرکت کننده، اعم از دبیران و معلمان ریاضی، اساتید دانشگاه‌ها و دانشجویان و دانش‌آموزان و علاقه‌مندان به ریاضی و میهمانان خارجی شرکت داشتند. این کنفرانس از دو کمیتهٔ اصلی به نامهای کمیتهٔ اجرایی و کمیتهٔ علمی تشکیل شده بود که دبیر کمیتهٔ اجرایی آن آقای مهندس عبدالله نجاتی (رییس دانشکدهٔ فنی چمران کرمان) و دبیر کمیتهٔ علمی آن، آقای دکتر محمود محسنی مقدم (استاد دانشکدهٔ ریاضی و کامپیوتر دانشگاه شهید باهنر کرمان) بودند.

در این کنفرانس از تعداد ۱۲۰ مقاله‌ای که به کمیتهٔ علمی رسیده بود، براساس هدفهای پنج‌گانهٔ زیر، تعداد ۵۳ مقاله جهت سخنرانیهای عمومی، ۴۰ دقیقه‌ای و ۲۰ دقیقه‌ای و همچنین تعداد ۹ مقاله جهت ارائهٔ پوستر پذیرفته شده بود که طی روزهای برگزاری کنفرانس، طبق برنامه و جدول زمانی مشخص، همه مقاله‌ها ارائه گردید و مورد استفادهٔ شرکت‌کنندگان قرار گرفت. همچنین در این کنفرانس دو میزگرد، تحت عنوانهای «دورنمای ریاضیات در ایران» و «مجلات ریاضی در ایران» تشکیل شد.

هدفهای اصلی این کنفرانس عبارت بودند از :

- ارتقای کیفیت آموزش ریاضی
- اعتلای دانش حرفه‌ای معلمان ریاضی
- پرورش استعدادهای ریاضی
- آشکار ساختن نقش ریاضی
- نوآوری در برنامه‌های درسی و روشهای تدریس ریاضی

مراسم افتتاحیه صبح روز چهارشنبه، چهارم شهریور ساعت ۸/۴۵ با تلاوت آیاتی از قرآن کریم و اجرای سرود جمهوری اسلامی ایران توسط گروه دانش‌آموزی کرمان آغاز شد. سخنران اوّل جلسهٔ افتتاحیه، آقای مهندس محمدتقی زاده، مدیرکل آموزش و پرورش استان کرمان و رییس کنفرانس بودند که پس از خیرمقدم به شرکت‌کنندگان داخلی و میهمانان خارجی، گزارشی از وضعیت اجمالی آموزش‌و پرورش استان کرمان را به اطلاع حاضران رساندند. دومین سخنران این جلسه، آقای دکتر محمود محسنی‌مقدم بودند که ضمن خیرمقدم به شرکت‌کنندگان، دربارهٔ چگونگی برنامه‌های کنفرانس و نحوهٔ داوری مقالات، مطالبی را

بازگو کردند و به نکات مهم زیر اشاره نمودند :

ـ در آستانهٔ سال ۷۷، در حادثه‌ای جانخراش، تعدادی از نخبگان و ریاضیدانان جوان ایرانی، جان به جان‌آفرین تسلیم کردند.

ـ پیروزی تیم المپیاد ریاضی ایران و به دست آوردن مقام اوّل در دنیا را تبریک عرض می‌نمایم.

ـ اتحادیهٔ بین‌المللی ریاضیدانان «IMU» سال ۲۰۰۰ میلادی را سال جهانی ریاضیات نام نهاده است.

سوّمین سخنران جلسهٔ افتتاحیه، آقای دکتر رضوی سرپرست تیم المپیاد کشور و نمایندهٔ مجلس مردم کرمان در ارتباط با نحوهٔ برگزاری المپیاد امسال مطالبی را بازگو کردند. همچنین ایشان فرمودند :

دوازده سال قبل، دانش‌آموزان ایرانی برای اوّلین بار در المپیاد کوبا شرکت کردند و در طی این چند سال با تلاش معلمان دلسوز و دانش‌آموزان به لطف خدا توانستیم مقام اوّل را در المپیاد ریاضی به دست آوریم.

چهارمین سخنران این جلسه، آقای دکتر فانی معاونت برنامه‌ریزی و نیروی انسانی وزارت آموزش و پرورش بودند که مطالبی را به صورت زیر مطرح کردند :

در برنامه‌های جدید آموزش و پرورش باید گروه‌های آموزشی مناطق و استانها فعال باشند و در تألیف کتابهای درسی و طرح و بررسی سؤالات، فعالیت و مشارکت داشته باشند. در این نوع کنفرانسها باید بیشتر در آموزش ریاضی به معلمان راهنمایی و ابتدایی توجه کرد. در کنفرانسهای بعدی بهتر است به موضوعاتی که اشاره می‌کنم، توجه شود :

۱ـ درس ریاضی به عنوان درسی شیرین مورد قبول دانش‌آموزان قرار گیرد، زیرا متأسفانه فرزندان ما از این درس به عنوان درسی تلخ یاد می‌کنند.

۲ـ نقد کتابهای درسی و ارائهٔ الگوهای جدید برای تألیف کتابهای درسی.

۳ـ روشهای ایجاد انگیزه نزد معلم و دانش‌آموز.

۴ـ تحوّل در نظام ارزشیابی و انتقال به سطحهای بالاتر.

۵ـ برگزاری این کنفرانسها با تأکید بر آموزش ریاضیات ابتدایی.

همچنین در این مراسم استاد الهی قمشه‌ای در رابطه با ریاضیات و خداوند سخنرانی کردند که بسیار قابل استفاده و مورد تأیید همهٔ شرکت کنندگان قرار گرفت.

یکی از سخنرانان عمومی این کنفرانس که باعث هرچه پربارتر- شدن این کنفرانس گردید، استاد پرویز شهریاری بودند. ایشان سخنرانی خود را دربارهٔ آموزش ریاضی و موانعی که سد راه آموزش هستند، ایراد کردند، که خلاصه سخنرانی ایشان از این قرار است :

ریاضیات را نباید به صورت فرمولی یاد گرفت، بلکه باید آن را به همراه تاریخ و فلسفه و حتی معماهای ریاضی تدریس کرد. امّا متأسفانه در روزگار ما همهٔ این موارد به صورت تئوری و بدون عمل است.

به نظر من، موانع و محدودیتهایی بر سر راه معلم در جهت آموزش ریاضی موجود است که عبارتند از :

۱ـ کنکور دانشگاه‌ها که به صورت تستی برگزار می‌شود. این امر باعث شده که دانش‌آموز از مقطع راهنمایی مایل به حلّ تست است، بدون این که ریاضی را با استدلال و به طور عمیق یاد بگیرد.

۲ـ تا زمانی که مسألهٔ برنامه‌ریزی به صورت فعلی «یعنی پُشت درهای بسته انجام گیرد» کار آموزش ما به سامان نمی‌رسد. به نظر من باید ابتدا طرحهایی در انجمن معلمان شهرستانهای مختلف مطرح شود و برآیند این طرحها برای کل کشور به اجرا درآید.

۳ـ مسألهٔ تأمین نیازهای زندگی و معیشتی معلّمان، همان مسألهٔ تأمین آیندهٔ جامعه است.

میهمانان خارجی این کنفرانس، آقای دکتر علی حاج جعفر از دانشگاه اوهایو امریکا و خانم دکتر هارت از انگلستان بودند که سخنرانیهای خود را دربارهٔ آموزش ریاضی ارائه کردند.

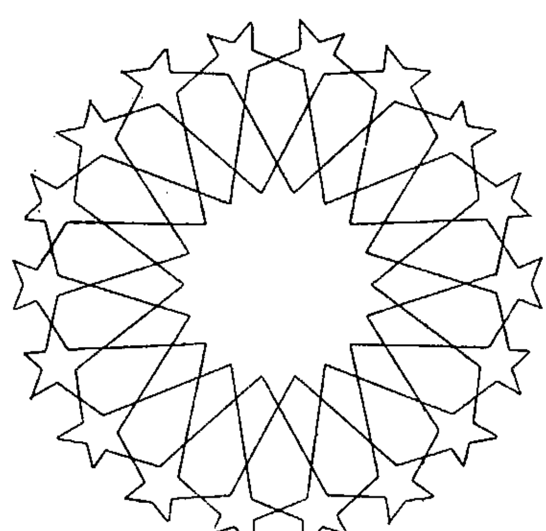
در این کنفرانس، دو میزگرد برپا شد که اوّلین میزگرد در بعداز ظهر روز اوّل برگزاری کنفرانس با هدف دورنمای آموزش ریاضی در ایران با حضور آقایان دکتر رجالی، دکتر رجبعلی‌پور، دکتر بهبودیان و دکتر تومانیان و سرکار خانم دکتر گویا تشکیل شد، که پس از بحث و تبادل نظر بین شرکت کنندگان و اعضای میزگرد به این نتیجه رسیدند که وضعیت آموزش ریاضی در ایران رو به بهبودی است. دومین میزگرد در بعدازظهر روز آخر برگزاری کنفرانس قبل از برنامهٔ اختتامیه، با هدف بررسی مشکلات و وضعیت مجلات ریاضی در ایران با حضور آقایان دکتر رجالی، شهریاری، امیری، تابش و سرکار خانم دکتر گویا تشکیل شد.

پس از بحث و تبادل نظر این نتیجه حاصل شد که تعداد مجلات ریاضی در ایران انگشت‌شمار است و باید برای دانش‌آموزان

پایه‌های مختلف تحصیلی، معلمان ریاضی و دانشجویان و علاقه‌مندان به ریاضی، مجله‌های مختلف و متنوعی با هدفهای مشخص شده چاپ و توزیع شود. همچنین در این جلسه آقای حمیدرضا امیری به عنوان یکی از اعضای میزگرد پس از برشمردن اهداف و مشخص کردن مخاطبان مجله‌های ریاضی برهانِ دبیرستان و راهنمایی از همهٔ دبیران و ریاضیدانان، تقاضای همکاریِ نموده و به نقشی که مقاله‌های ریاضی و نشر آنها می‌تواند در جامعهٔ ریاضی و آموزش ریاضی داشته باشد، اشاره کردند.

جلسهٔ اختتامیهٔ این کنفرانس، روز جمعه ششم شهریور از ساعت ۱۶ تا ۱۷ با حضور کلیهٔ شرکت کنندگان در کنفرانس و مقامات استان کرمان و افتخارآفرینان المپیاد جهانی ریاضی برگزار شد. در این جلسه نمایندهٔ انجمن ریاضی ایران، جناب آقای دکتر بابلیان از زحمات همهٔ دست‌اندرکاران برگزاری این کنفرانس و کمیته‌های علمی و اجرایی تشکر و قدردانی نمودند. همچنین در این جلسه از مدعوین خارج از کشور و افتخارآفرینان المپیاد جهانی ریاضی قدردانی شد و به آنها نیز هدایایی به عنوان یادبود اهدا گردید.

در خاتمه باید از همهٔ دست‌اندرکاران، کمیته‌های علمی و اجرایی سوّمین کنفرانس آموزش ریاضی تشکر و قدردانی کرد که با عشق و علاقه وافر توانستند این کنفرانس را برپا کنند. امید است که هر ساله با برپایی این گونه کنفرانسها بتوانیم در راستای عمومی‌تر کردن ریاضی و ارتقای سطح علمی معلمان ریاضی، گامهای بلندتری برداریم.



تفریح اندیشه ۳

مهرداد و علی با دو مهرهٔ مکعب شکل بازی می‌کنند. اما آنها سطح مهره‌ها را نقطه‌گذاری نکرده‌اند بلکه بعضی سطحها را به رنگ قرمز و بقیه را به رنگ آبی درآورده‌اند.

آنها این دو مهره را همزمان پرتاب می‌کنند. مهرداد وقتی برنده است که سطح فوقانی هر دو مهره پس از افتادن روی زمین از یک رنگ باشند، و علی وقتی برنده است که دو سطح مزبور رنگهای متفاوت داشته باشند. به این ترتیب شانس برنده شدن برای هر دو یکسان است.

مهرهٔ اولی ۵ وجهش قرمز، و یک وجهش آبی است. مهره دیگر چند وجهش قرمز است؟

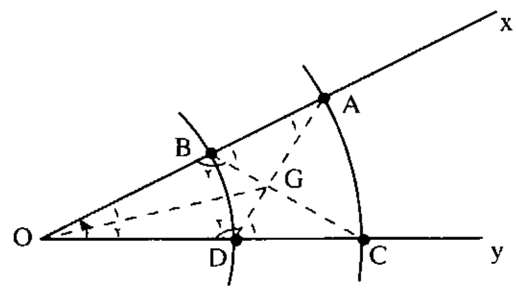
● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمه سیمین‌دخت ترکپور

جواب در صفحهٔ ۸۸

دو روش در ترسیم نیمساز یک زاویه

• سیامک جعفری

روش اوّل:



زاویهٔ $\angle xoy$ مفروض است. هرگاه به مرکز O و به شعاع متفاوت، دو کمان بزنیم، چهار نقطه در تلاقی با اضلاع زاویه ایجاد می‌شود، که اگر آنها را به هم وصل کنیم، OG نیمساز زاویه خواهد شد.

برهان:

$$(AO = CO, BO = OD, \hat{O} = \hat{O}) \Rightarrow A\overset{\Delta}{D}O = C\overset{\Delta}{B}O$$

بنابراین: $\hat{B}_2 = \hat{D}_2 \, , \, \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1$

و $AB = AO - BO = CO - DO = CD$

ازطرفی:

$$(AB = CD, \hat{B}_1 = \hat{D}_1, \hat{A}_1 = \hat{C}_1) \Rightarrow A\overset{\Delta}{G}B = C\overset{\Delta}{G}O$$

پس: $\Rightarrow BG = DG$

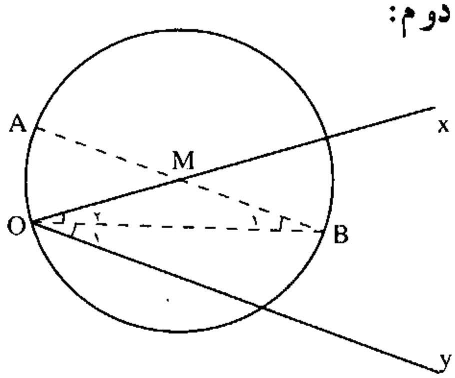
و بالاخره

$$(BG=DG, \hat{B}_2=\hat{D}_2, BO=DO) \Rightarrow B\overset{\Delta}{G}O = D\overset{\Delta}{G}O$$

بنابراین $\Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$

لطف این روش نسبت به روش کلاسیک ترسیم، آن است که در این‌جا نوک سوزنی پرگار ثابت است و تنها دهانهٔ پرگار، دو بار باز می‌شود. می‌توانید به عنوان تمرین، روش مثلثاتی برای برهان پیدا کنید.

روش دوم:



باز هم زاویهٔ $\angle xoy$ مفروض است. نقطهٔ دلخواهی را روی ضلع OX انتخاب و به مرکز آن و شعاع OM دایره‌ای رسم می‌کنیم. از نقطهٔ M خطی به موازات ضلع دیگر زاویه رسم می‌کنیم. دایره را در دو نقطه قطع می‌کند، که پای نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه است.

برهان:

$AB \| OY \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{O}_1$ (۱)

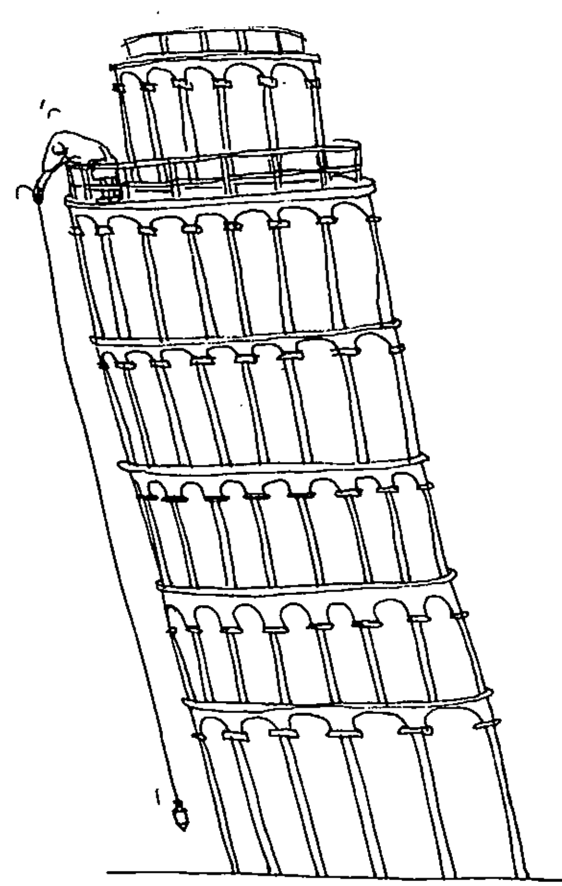
آشکار است که مثلث ΔAOB قائم‌الزاویه است؛ زیرا AB قطر دایره است. OMخط نیمساز خواهد بود.

$OM = MB \Rightarrow \hat{O}_2 = \hat{B}_1$ (۲)

$(1), (2) \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$

$AO \perp OB \Rightarrow OA$ نیمساز خارجی

به عنوان تمرین، روش اخیر را به کمک خط کش انجام دهید. ملاحظه می‌کنید دراین روش، نیمساز خارجی نیز به دست می‌آید.



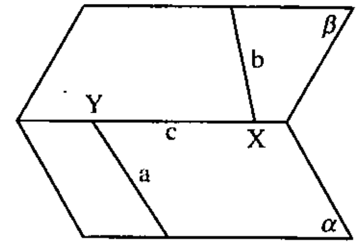
یک مسألهٔ ساختمانی هندسهٔ فضایی

● پرویز شهریاری

مسأله‌های ساختمانی ساده‌ای در هندسهٔ فضایی وجود دارند که در بسیاری از مسأله‌های پیچیده‌تر به آنها برخورد می‌کنیم. در این گونه مسأله‌ها، هم تجسّم فضایی شکل و هم رسم آنها در روی صفحه، اهمیّت جدّی دارد، و هردو جنبه، علاوه بر اطلاع از قانونهای رسم، به تمرین نیازمندند.

مسأله‌هایی را که در این جا آورده‌ایم، در اغلب کتابهای درسی پیدا می‌شوند و شاید از ساده‌ترین مسأله‌های هندسهٔ فضایی باشند؛ ولی گمان می‌رود که توجه به آنها، بتواند برای تسلّط بر مسأله‌های فضایی مفید باشد.

مسألهٔ ۱. از نقطهٔ مفروض M، خط راستی بگذرانید که دو خط راست متنافر a و b را قطع کند. در ضمن، نقطهٔ M متعلق به خطهای راست a و b نیست.



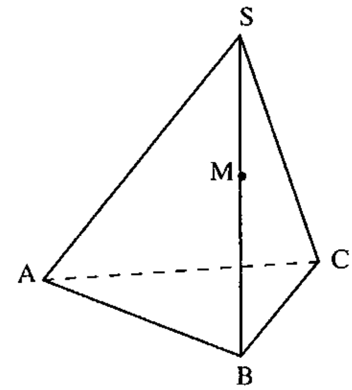
شکل ۱

حل. c را خط راست مجهول می‌گیریم. صفحه‌ای را که از خطهای راست a و c می‌گذرد α، وصفحه‌ای را که از خطهای راست b و c می‌گذرد، β می‌نامیم.

چون M روی خط راست c $(M \in c)$ و c فصل مشترک دو صفحهٔ α و β $(c = \alpha \cap \beta)$ است، پس نقطهٔ M، به هر دو صفحهٔ α و β تعلّق دارد $(M \in \alpha$ و $M \in \beta)$. بنابراین، اگر مسأله جواب داشته باشد، داریم $c = \alpha \cap \beta$، که در آن $\alpha = (M, a)$ و $\beta = (M, b)$. روی شکل (۱)، خط راست مجهول c، خطهای راست a و b را، بترتیب، در نقطه‌های y و x قطع کرده است.

به بررسی جواب بپردازیم. دیدیم خط راست مجهول، روی فصل مشترک دو صفحهٔ α و β است (ولی از این‌جا نمی‌توان نتیجه گرفت که، خط راست مجهول، تنها به کمک صفحه‌های α و β به‌دست می‌آید؛ خواهید دید، مسأله راه حل دیگری هم دارد). این، به معنای آن است که، هر خط راستی که بجز فصل مشترک دو صفحهٔ α و β انتخاب شود، نمی‌تواند پاسخ مسأله باشد. α و β نمی‌توانند بر هم منطبق باشند؛ زیرا خطهای راست a و b متنافرند و نمی‌توانند روی یک صفحه قرار گیرند. بجز این $M \in \alpha \cap \beta$، یعنی $\alpha \cap \beta$، خط راست مورد نظر است. از این‌جا نتیجه می‌شود که مسأله بیش از یک جواب ندارد. البته ممکن است a موازی c یا b موازی c درآید که، در این صورت، مسأله

جواب ندارد.



شکل ۲

ممکن است تصور فضایی این راه حل، برایتان دشوار باشد و نتوانید در ابتدا، موقعیت متقابل خطهای راست a، b و c و صفحه‌های α و β را مجسّم کنید. در این صورت، می‌توانید برای خودتان یک مُدل مقوایی بسازید یا، مثلاً نقطهٔ M و خطهای راست a و b را روی یک چهاروجهی مشخص کنید (مثل چهاروجهی SABC در شکل ۲). باید خط راستی را بیابیم که از نقطهٔ M بگذرد و دو خط راست SA و BC را (که متنافرند) قطع کند.

بسادگی می‌توان متوجه شد که SB، همان خط راست مجهول است. ویژگیهای این خط راست را روشن کنیم : SB فصل مشترک دو صفحهٔ SAB و SBC است ؛ یعنی SB فصل مشترک دو صفحهٔ α و β است ؛ به نحوی که α، از نقطهٔ M و خط راست SA، و β از نقطهٔ M و خط راست BC می‌گذرند.

وقتی راه حل مسأله را بررسی می‌کنید، پاسخ دادن به این پرسشها اهمیت جدّی دارد :

۱. از کجا نتیجه می‌شود، که مسأله بیش از یک جواب ندارد؟

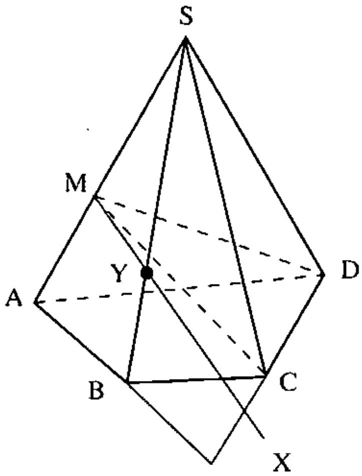
۲. با چه شرطی، مسأله جواب دارد؟

۳. با این که خط راست c، به‌عنوان فصل مشترک دو صفحه α و β همیشه وجود دارد، ممکن است مسأله جواب نداشته باشد. چرا؟

۴. آیا ممکن است با مفروض بودن نقطهٔ M و خطهای راست a و b، مسأله جوابی نداشته باشد؟

برای این که حلّ مسألهٔ ۱ را بهتر بفهمیم، خوب است چند بار به راه حلّ کلی مراجعه کنیم، و سپس خودمان مسأله‌های مشخصی برای آن طرح کنیم. مانند :

مسألهٔ ۲. هرم SABCD و نقطهٔ M روی یال SA داده شده است. از نقطهٔ M خط راستی بگذرانید که خطهای راست SB و CD را قطع کند.



شکل ۳

حل. همان‌طور که در حلّ مسألهٔ ۱ دیدیم، خط راست مجهول، تنها می‌تواند، فصل مشترک دو صفحهٔ $\alpha = (MSB)$ و $\beta = (MCD)$ باشد. برای به‌دست آوردن این خط راست، کافی است نقطهٔ برخورد خط راست CD را با صفحهٔ α به‌دست آوریم (شکل ۳). ساختمان به این ترتیب انجام می‌شود :

۱) $(AB)\cap(CD) = X$ ؛ $X = (CD)\cap(MSB)$

۲) (MX) خط راست مورد نظر است.

این مسأله، راه حلّ دیگری از مسألهٔ ۱ را به‌ما تلقین می‌کند. فرض کنید صفحهٔ α ازنقطهٔ M و خط راست a بگذرد و خط راست b صفحهٔ α را در X قطع کند. خط راست مجهول (MX) است، اگر $(MX)\cap a \neq \varnothing$. روی شکل ۱، $(MX)\cap a = Y$.

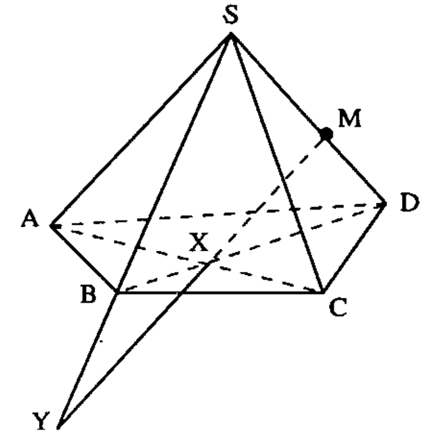
برای این که نقطهٔ X را پیدا کنیم، کافی است صفحهٔ دلخواه γ را از خط راست b بگذرانیم. اگر d فصل مشترک دو صفحهٔ γ و α باشد، آن وقت $X = b\cap d$.

در مسألهٔ ۲، $a = (SB)$، $b = (CD)$، $\alpha = (MSB)$، $\gamma = (ABCD)$، $d = (AB)$ باید به دو نتیجه‌ای که ناشی از دو روش راه حل برای مسألهٔ ۱ است، توجه کنیم :

۱. اگر مسألهٔ ۱ جواب داشته باشد، آن‌وقت $c = \alpha\cap\beta$ خط راست مجهول است.

۲. اگر مسألهٔ ۱ جواب داشته باشد، آن‌وقت $c = (MX)$ خط راست مجهول است که، در آن $X = b\cap d$ این دو نتیجه یکدیگر را نقض نمی‌کنند ؛ زیرا $(MX) = \alpha\cap\beta$.

مسألهٔ ۳. هرم SABCD مفروض است. از نقطهٔ M واقع بر یال SD خط راستی بگذرانید که خطهای راست SB و AC را قطع کند.



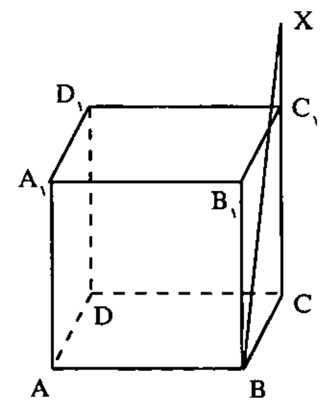
شکل۴

حل. برای یافتن خط راست مجهول، کافی است نقطهٔ برخورد خط راست AC با صفحه $\alpha=(SBD)$ را پیدا کنیم.

نقطهٔ $X=(AC)\cap(BD)$ را به‌دست می‌آوریم (شکل ۴).

در این صورت $X=(AC)\cap\alpha$ و MX خط راست مجهول است. البته با شرط $(MX)\cap(SB)\neq\varnothing$.

مسألهٔ ۴. مکعب مستطیل $ABCDA_1B_1C_1D_1$ و نقطهٔ $M\in[B_1C_1]$ داده شده است. خط راستی رسم کنید که از نقطه M بگذرد و خطهای راست AB و CC_1 را قطع کند.

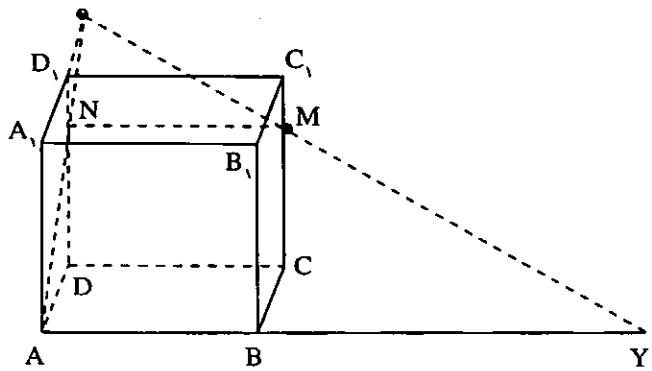


شکل۵

حل. MB خط راست مورد نظر است (شکل ۵). در واقع

$(MB)\cap(AB)=B\ ,\ (MB)\cap(CC_1)=x$

مسألهٔ ۵. مکعب مستطیل $ABCDA_1B_1C_1D_1$ و نقطهٔ $M\in[CC_1]$ داده شده است. خط راستی رسم کنید که از نقطهٔ M بگذرد و خطهای راست AB و A_1D_1 را قطع کند.



شکل۶

حل. اگر از راه حلّ دوم مسألهٔ ۱ استفاده کنیم، به این نتیجه می‌رسیم که خط راست مجهول MX است شکل (۶) که در آن

$X=(A_1D_1)\cap(MBA)$

برای رسم، به این ترتیب، عمل می‌کنیم :

۱) $(AN)=(MBA)\cap(AA_1D_1D)$ ؛ $N\in(DD_1)$ ؛

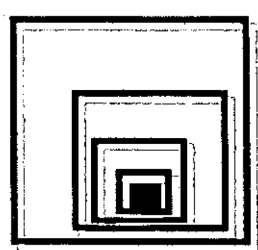
۲) $X=(AN)\cap(A_1D_1)$ ؛ $X=(A_1D_1)\cap(MBA)$ ؛

۳) MX خط راست مجهول است.

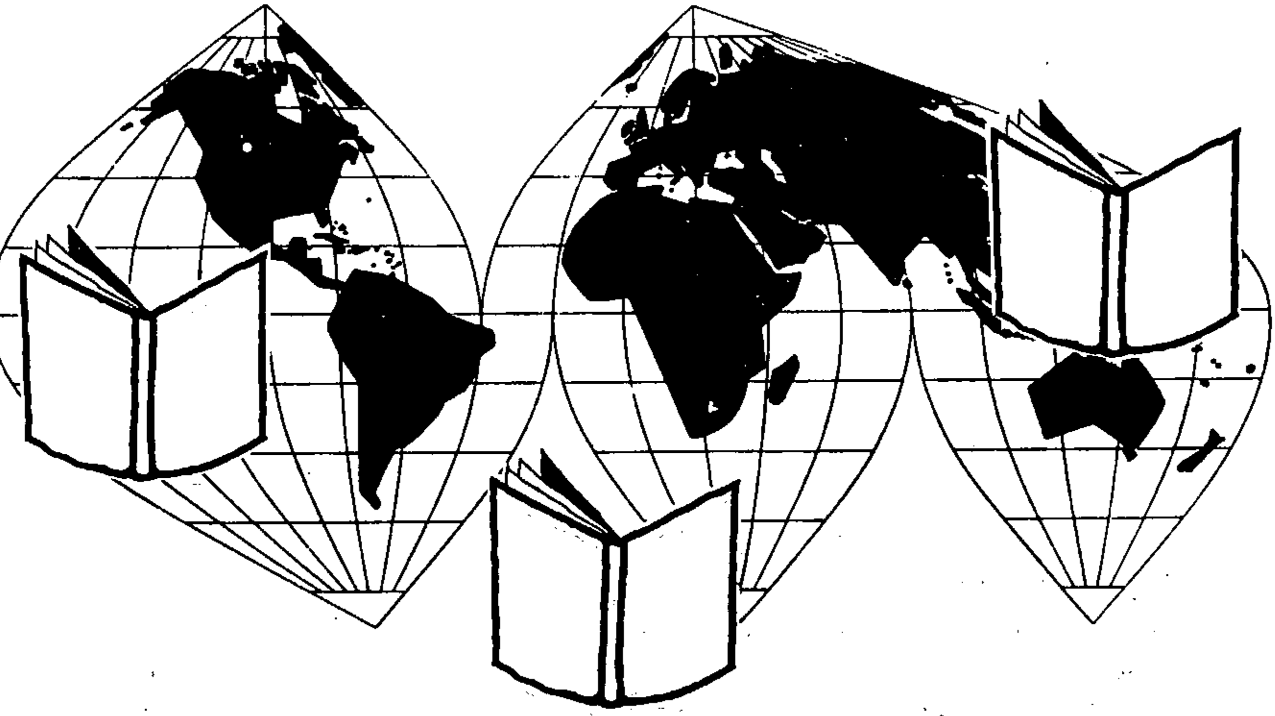
روی شکل ۶ $(MX)\cap(A_1D_1)=X$ ، $(MX)\cap(AB)=Y$

با هر انتخاب نقطهٔ M بین C و C_1 ، مسأله جواب دارد.

مسائل مسابقه‌ای



۱ــ ۶ مهرهٔ آبی و ۱۱ مهرهٔ سفید وجود دارد، به چند طریق می‌توانیم این مهره‌ها را در یک ردیف از راست به چپ کنار هم قرار دهیم، هرگاه بخواهیم بلافاصله بعد از هر مهرهٔ آبی لااقل یک مهرهٔ سفید قرار داشته باشد.



مقاله‌های کوتاه از مجلّه‌های ریاضی معتبر جهان (۲۳)

تحقیق در هندسهٔ مثلّث به کمک کامپیوتر

Adrian Oldknow
The Mathematical Gazete
Volume 79 Number 485 July 1995

● ترجمه : غلامرضا یاسی پور

این مقاله، کاربرد تعدادی از ابزارهای کامپیوتری را در تحقیقات هندسی، همراه با نمایش جبری مناسب اجزای وابسته به مثلث، بررسی می‌کند. این روشها، برای به‌دست آوردن نتایج جدید، در هندسهٔ مثلث به کار رفته است. مقاله با صورتی تعمیم یافته از مقالهٔ داده شده در کنفرانس ۱۹۹۴ «ایستر»، با نام و نشان زیر است :

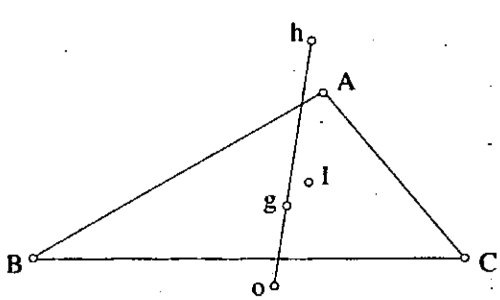
How do computeres change the way we do mathematics?
Association's 1994 Easter Confenence

آدمی، در پاسخ این پرسش می‌ماند که چه چیزی بیش از هندسهٔ محتشم مثلث، که زمانی در مرکز توسعهٔ ریاضیات و برنامهٔ آموزشی قرار داشته، بیگانه‌تر از کامپیوتر فراگیر در همه‌جای دیگر بوده است؟

امروزه، نرم‌افزارهایی کامپیوتری موجودند که ترسیمات کلاسیک خط‌کش نامدرّج و پرگار را انجام می‌دهند. در این مورد، می‌توان ترسیمهای بغرنجی را انجام داد و اشکال حاصل را برای کمک به تجسّم هرگونه تغییرناپذیری موجود، تغییر شکل داد.

دراین باره Cabri Géométre [1]، از فرانسه، و Geometer's Sketchpad [2]، از ایالات متحده، هر دو قابل استفاده در PC و Mac، و به قیمت دانشجویی در دسترسند.

هریک از این دو کشور، مقدار قابل توجهی هندسهٔ کلاسیک در برنامهٔ آموزشی خود دارند. فیلیپ دیویز "Philip J.Davies" در [3]، احتمالاً آینده‌ای درخشان را برای هندسهٔ مثلث، مورد بحث قرار داده است.



شکل ۱

در شکل ۱، I، مرکز دایرهٔ محاطی داخلی، g، مرکز ثقل، o، مرکز دایرهٔ محیطی و h، محل برخورد ارتفاعات مثلث ABC را در یک نمودار، برای به‌دست آوردن روابطشان با یکدیگر، درنظر

می‌گیریم. I به عنوان تقاطع نیمسازهای داخلی زوایای مثلث مشخص شده، g برخورد میانه‌هاست (میانه، یعنی، از A به نقطهٔ وسط BC)، o برخورد عمود منصّفهای اضلاع مثلث و h تلاقی ارتفاعات آن است (ارتفاع، یعنی، عمود از A بر BC). نرم‌افزار هندسی انجام ترسیمها، برچسب‌زدن نقاط، مخفی کردن ترسیمها و ردگیری مواضع نسبی نقاط را به این صورت که، مثلاً، رأس A با استفاده از ماوس "mouse"، به این طرف و آن طرف صفحهٔ مانیتور کشیده شود، آسان می‌کند. به این طریق، بسادگی ملاحظه می‌شود که در حالت عمومی، سه نقطه از این چهارنقطه ـ اما نه هر چهار ـ بر یک خط قرار می‌گیرند. انجام چنین «کشفیاتی»، بخصوص در مواقعی که انتظار ایجاد آنها می‌رود، آسان است!

نرم‌افزار هندسی، می‌تواند در مورد زدن و آزمایش کردن حدسها بسیار سودمند باشد. اما می‌شود آنچه که صفحهٔ مانیتور نمایش می‌دهد، در اثر اشتباه اپراتور در تعریف شیوهٔ ترسیم، یا به علت اشکال در نرم‌افزار، خطا باشد، و نیز چنین نرم‌افزاری، نمی‌تواند هیچ گونه نتایجی را در کاربرد ریاضی به طور متعارف پذیرفته نشدهٔ عبارت مورد بحث اثبات کند. همچنین نرم‌افزارهای دیگری وجود دارد که می‌توانند به جستجوگر هندسی کمک کنند؛ اما این نرم‌افزارها به تجرید اندازه‌گیریها و دستگاه تعمیم‌یافته‌ای برای نمایش نقاط در صفحه نیازمندند. البته، نرم‌افزار هندسی مورد بحث، چنین نمایشی را به‌طور درونی به کار می‌برد؛ ولی ما نمی‌توانیم به آن دسترسی داشته باشیم. در این صورت، با صریح کردن نمایش مزبور می‌توان آن را با دقتی بیشتر مورد بررسی قرار داد. می‌توان درمورد نمایشها، به کمک دستگاهی جبری، از قبیل *درایو* "derive"[4]، به کار پرداخت.

اگر نمایشهای مورد بحث را به‌طور عددی ارزیابی کنیم، آن‌گاه می‌توانیم برای به‌کاربردن آنها، از صفحهٔ گسترده "spread sheet"ای، چون *MathCAD [5]*، یا زبان برنامه‌نویسی‌ای، چون *True BASIC [6]* استفاده کنیم. درهریک از این حالتها، کاربر می‌تواند زمینهٔ تحقیق مناسبی برای مسألهٔ تحت بررسی تعریف کند که از زمینه‌های قابل دسترس واقع در منوهای نرم‌افزار هندسی به‌کاررفته، وسیعتر باشد. در مورد بسته‌های نرم‌افزاری "software packages"[4]، [5] و [6] نیز قیمتهای دانشجویی موجودند.

دراین صورت، یک دستگاه مناسب نمایش، برای استفاده در مثلث، کدام است؟ یکی از موارد نامزد برای این کار، استفاده از بردارهاست. به بردارهای A، B و C با مبدئی دلخواه، می‌توان بردارهای مکانی "position vector"، a، b و c را نسبت داد و در این صورت، عبارت ظریف زیر را برای مرکز ثقل خواهیم داشت:

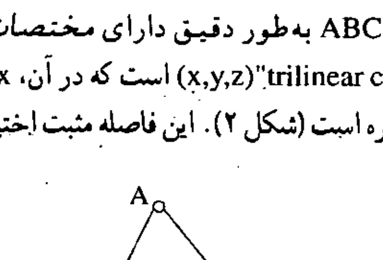
$$g = (\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})/3$$

اما متأسفانه، این کار خیلی سریع، با گرفتاریهای بسیار مواجه می‌شود!

دستگاه متعارف مختصات دوبعدی دکارتی نیز با تقارن ذاتی و «سه‌تایی بودن» "threeness" مثلث در تعارض است. در این مورد، گرچه می‌توان نتایجی را با زحمت به دست آورد؛ اما نتایج به‌دست آمده، بندرت بصیرتی به‌دست می‌دهند. گاهی اوقات درنظرگرفتن صفحه به عنوان نمودار «**آرگاند**» "Argand diagram" و نمایش نقاط به صورت اعداد مختلط در صورت قطبی، با ارجاع به مبدئی معیّن سودمند است. به‌عنوان مثال، با مرکز دایرهٔ محیطی به عنوان مبدأ و شعاع دایرهٔ محیطی به‌صورت یکه، می‌توانیم سه زاویهٔ دلخواه را اختیار کرده، A را به صورت e^{ia} و غیره بنویسیم. اما این دستگاه نیز به آسانی به عبارتهای مفصّل منجر می‌شود. [**تبصره**: اختصار و غیره درمواقعی به‌کار می‌رود که عبارتهای مشابهی موجودند که صورتشان واضح است.]

دستگاه مختصاتی که برای پیشنهاد، مناسبترین دستگاه به‌نظر می‌رسد، دستگاه همگن یا *متجانس* "homogeneous" است. **کاکسیتر** "Coxeter" [7] بر این باور است که «اختراع دستگاه‌های مختصات همگن توسط **موبیوس** "Möbius" یکی از دیریاب‌ترین مفاهیم در تاریخ ریاضی و قابل مقایسه با اختراع حساب دیفرانسیل **لایب‌نیتز** "Leibniz" است.»

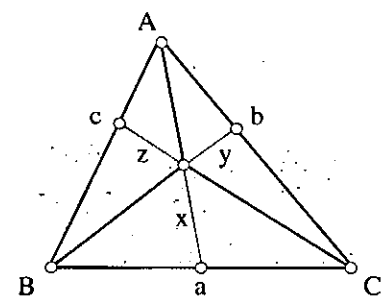
در یک دستگاه *سه‌خطی* "trilinear" نقطهٔ Pی واقع در صفحهٔ مثلث مرجع ABC به‌طور دقیق دارای *مختصات سه‌خطی* "trilinear coordinates"(x,y,z) است که در آن، x فاصلهٔ P از ضلع BC و غیره است (شکل ۲). این فاصله مثبت اختیار می‌شود؛



شکل ۲

اگر P نسبت به BC هم‌طرف با A باشد و صفر اگر بر BC قرار داشته باشد، و منفی، اگر غیر از این دو صورت باشد

واضح است که سه مقدار x، y و z مستقل نیستند و رابطه‌شان را با طولهای a، b و c ی اضلاع و Δ مساحت مثلث می‌توان با استفاده از تقسیم ABC به سه مثلث BPC، CPA و APB ملاحظه کرد (شکل ۳). ملاحظه می‌کنیم که :



شکل ۳

$$ax + by + cz = ۲\Delta \qquad (۱)$$

این معادله، استفاده از دستگاه ساده شدهٔ مختصات سه خطی‌ای موسوم به *انتخاب* "choice" را مجاز می‌کند. فرض می‌کنیم k، عامل مشترکی از مختصات سه‌خطی x، y و z از P باشد؛ بنابراین :

$$(x,y,z) = k(x',y',z')$$

در این‌صورت، می‌توانیم با استفاده از k انشعاب کرده (x',y',z') را به عنوان انتخابی برای P به‌دست دهیم. از آن‌جا که نیاز به رفتن از این انتخاب به مختصات دقیق داریم، می‌توانیم k را بار دیگر از :

$$k = ۲\Delta/(ax' + by' + cz') \qquad (۲)$$

به‌دست آوریم. به این ترتیب، به عنوان مثال، سه‌خطی‌های دقیق I، مرکز دایرهٔ محاطی داخلی، عبارت‌اند از (r,r,r)، که در آنها r مرکز دایرهٔ محاطی داخلی است، و

$$(r,r,r) \equiv (۱,۱,۱)$$

را، برای به‌دست دادن انتخابی آسانتر برای I، می‌نویسیم. درنتیجه، انتخاب سادهٔ $(۱,۰,۰)$ را برای A و غیره داریم.

خواننده می‌تواند با استفاده از مثلثات، موارد زیر را اثبات کند :

نقطهٔ وسط BC $\quad A''(۰,۱/b,۱/c)$ و غیره

مرکز ثقل $\quad g(۱/a,۱/b,۱/c)$

مرکز دایرهٔ محیطی $\quad o(\cos A,\cos B,\cos C)$

نقطهٔ تلاقی ارتفاعات

$$h(\cos B\cos C,\cos C\cos A,\cos A\cos B)$$

یا $\quad (\sec A,\sec B,\sec C)$

مگر این که مثلث قائم‌الزاویه باشد.

مرکز ۹ـ نقطه

$$n(\cos(B-C),\cos(C-A),\cos(A-B))$$

در این جا توان الگوهای واقع در حروف به‌کار رفته، آغاز می‌شوند. یک «مرکز» دارای مختصاتی است که به‌طور مساوی در حروف a، b، c، A، B و C ارزیابی می‌شود. در چنین حالتهایی، کافی است که تنها مختص اوّل را به دست آوریم ومثال اخیر را به‌صورت زیر بنویسیم :

$$(\cos(B-C),\cdots)$$

معادلهٔ خط گذرنده از نقاط $P_۱$ و $P_۲$ با مختصات $(x_۱,y_۱,z_۱)$، $(x_۲,y_۲,z_۲)$ توسط دترمینان

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_۱ & y_۱ & z_۱ \\ x_۲ & y_۲ & z_۲ \end{vmatrix} = ۰ \qquad (۳)$$

داده می‌شود ؛ زیرا ضرب هر سطر در عامل k مقدار دترمینان را در k ضرب می‌کند.

به این ترتیب، معادلهٔ عمومی خط دارای صورت :

$$lx + my + nz = ۰$$

است و مثالهای آن عبارت‌اند از ضلع BC: $x = ۰$ و غیره و نیمساز AI: $y - z = ۰$ و غیره. معادلهٔ $ax + by + cz = ۰$ شامل هیچ نقطهٔ حقیقی‌ای از صفحه نیست ؛ چه این خط، خطی در *بی‌نهایت* است. در صورتی که نقاط $P_۱$، $P_۲$ و $P_۳$ همخط باشند، می‌توان از دترمینان (۳)، با قراردادن مختصات $P_۳$ در سطر اوّل آن، برای آزمون این مطلب استفاده کرد. خواننده می‌تواند همخط بودن o، g و h را آزمایش کرده و معادلهٔ خط مربوطه را به‌دست آورد.

به این ترتیب، مختصات سه‌خطی، ابزاری سودمند برای کاربرد است ؛ اما متأسفانه اغلب کتابهای مربوط به روشهای استفاده از آنها قدیمی‌اند! کتاب Sommerville [8] بخصوص منبعی پرمایه دراین زمینه است.

بین اندازه‌های مثلث، روابط مفیدی موجودند که قاعدهٔ

کسینوسها یکی از آنهاست.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

و غیره. پیرامون مثلث عبارت است از : $a+b+c=2s$ ، فرمول هِرون "Heron" برای Δ ، مساحت مثلث، عبارت است از :

$$\Delta^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) \qquad (۴)$$

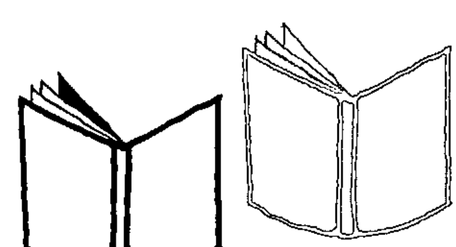
و به شعاع دایرهٔ محاطی داخلی، توسط

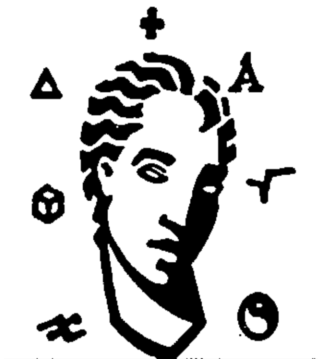
$$r = \Delta / s \qquad (۵)$$

داده می‌شود.

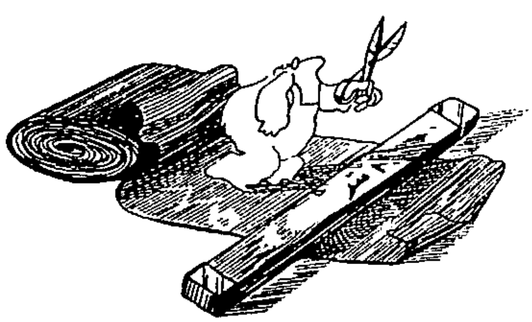
علاوه بر نقاط I، o، g، h و n ی که هم‌اکنون آنها را ذکر کردیم، در رابطه با مثلث عمومی، نقاط و دایره‌های بسیاری موجودند که نام کاشفان خود را دارند. (هم‌ارز هندسی زیست‌شناسی!) که بعضی از آنها در زمان ما به‌طور کامل ناشناخته و گمنامند. علاوه بر نقطهٔ **فرما** "Fermat"، نقاط **لموان** "Lemoine"، **بروکار**"Brocard" و **ژرگون** "Gergonne" و دایره‌های **آپولونیوس** "Apollonius"، **تاکر** "Tucker" و **فویرباخ** "Feuer bach" موجودند. خمهای دیگری نیز وجود دارند و از آن قبیل‌اند مکان **هذلولوی** "hyperbolic locus" و **پوش سهموی** "parabolic envelope" **کی‌پرت** "Kiepert" و مکعبیهای **نُوی‌برگ** "cubic of Neuberg". بجز **خط اویلر** "Euler"، **خطوط سیمسون** "Simson" موجودند که پوش دلتاوار **اشتاینر** "Steiner doltoid" هستند، که با **مثلث مورلی** "Morley triangle" مرتبط است. بسیاری از این دستاوردهای جذّاب را می‌توان در Wells[9] یافت که چنین از **سریل** "Crelle" نقل قول می‌کند : «این موضوع بس شگفت‌انگیز است که شکلی بسادگی مثلث، این گونه ویژگیهای پایان‌ناپذیر دارد».

ادامه دارد





تفریح اندیشه ٤



پارچه‌فروشی می‌خواهد پارچه‌هایش را با ۴۰٪ سود بفروشد. اما وسیله‌ای که برای اندازه‌گیری به کار می‌برد طول مناسبی ندارد. به همین دلیل متوجه می‌شود که به جای ۴۰٪ سود فقط ۳۹٪ سود عایدش شده است. طول وسیله‌ای راکه او برای اندازه‌گیری به کار برده است تعیین کنید.

● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمه سیمین‌دخت ترکپور

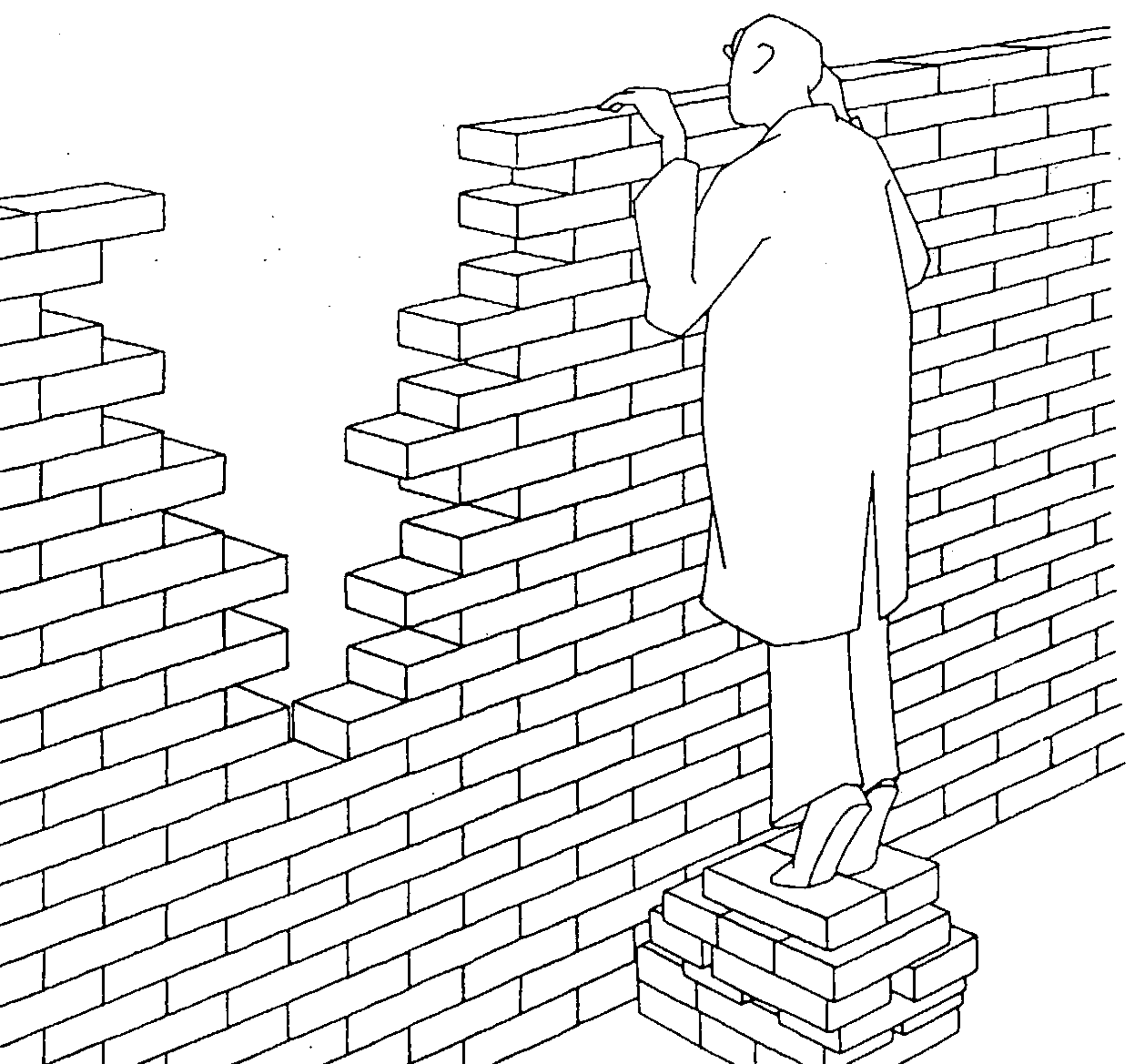
جواب در صفحهٔ ۸۸

مسألهٔ حلّ مسأله‌های ریاضی (قسمت دوم)

• عبدالحسین مصحفی

سرمایه‌گذاری

دستیازی به هرکاری، یک سرمایه می‌خواهد و کامیابی و پیشرفت در آن کار، به کارایی در درست به‌کار بردن آن سرمایه بستگی دارد. کارایی که باشد، همراه با پیشرفت کار، سرمایه هم افزایش می‌یابد و بهره‌دهی بیشتر را به دنبال می‌آورد. حل مسأله‌های ریاضی هم یک کار است. سرمایهٔ این کار چیست، از چه راه می‌توان آن را افزایش داد و کارایی در آن چگونه به‌دست می‌آید؟ شاید بگویید که سرمایهٔ مورد نیاز برای حلّ مسأله‌ها، مجموعهٔ درسهایی است که آموخته‌اید و آنچه این سرمایه را افزایش می‌دهد، درسهایی است که خواهید آموخت. اگر در آموختن درسها ذهن خود را به گونهٔ فعال به‌کار نینداخته و تنها به حفظ کردن آنها (آن هم تا زمان امتحان) بسنده کرده باشید، باید گفت که از این راه هیچ سرمایه‌ای را که به کارآید، فراهم نیاورده‌اید. اگرهم آموخته‌های



شما با ژرف‌نگری و همراه با فعالیت ذهنی فراهم آمده باشند، بازهم باید گفت که تنها بخشی از سرمایهٔ لازم را تشکیل می‌دهند. بخش اصلی سرمایهٔ لازم برای حل مسأله‌های ریاضی را مسأله‌هایی تشکیل می‌دهند که آنها را با به‌کاربردن اندیشهٔ خودتان حل کرده‌باشید. هر مسأله‌ای را هم که به همین گونه حل کنید، افزوده‌ای بر سرمایه به‌شمار می‌آید و این افزوده، آن‌گاه چندین برابر خواهد بود، که پس از دستیابی به راه حلّ یک مسأله و به‌دست آوردن جواب آن، کار را پایان یافته ندانید. بررسی راه حلّ انجام یافته دستیابی به راه حلهای گوناگون آن مسأله و سنجش آنها با هم، پی‌بردن به مسأله‌های خویشاوند با آن مسأله، تعمیم مسأله، و سرانجام کاربردهای آن در حلّ مسأله‌های دیگر، کارهایی هستند که اگر پس از حلّ هر مسأله، آنها را انجام دهید، کارایی و ورزیدگی شما را در حلّ مسأله‌ها دربی خواهد داشت.

بهره‌وری از سرمایه

برای آن‌که مسأله‌هایی هرچه بیشتر را حل کنید، باید دربی آن باشید تا به مسأله‌های بیشتری دست یابید. دسترسی به کتابهای درسی از دور خارج شده و از مؤلفان مختلف، به کتابها و جزوه‌های گوناگون حلّ مسأله، به مجلّه‌های ریاضی، و بویژه به کتابهایی که مسأله‌های تاریخی را شرح می‌دهند، از جمله راه‌های دستیابی شما به مسأله‌های گوناگون است. نکته‌ای مهم که باید به آن توجه داشته باشید، این است که به هر مسأله‌ای دست می‌یابید، اگر با حلّ آن همراه است، آن راه حل را نادیده بگیرید و بکوشید تا آن مسأله را با فکر خودتان حل کنید. اگر چنین نکنید و برآن باشید تا راه‌حلّ مسأله‌ها را با خواندن از روی کتاب یاد بگیرید، ذهن خود را تنبل بار می‌آورید و ورزیدگی و توانایی برای حلّ مسأله‌ها را به‌دست نخواهید آورد. پس از آن‌که به راه حلّ مسأله و جواب آن دست یافتید، آن‌گاه راه حلّی را که خودتان به کار برده‌اید و راه‌حلّی را که در کتاب به‌کار رفته است، با هم بسنجید. اگر راه حلها متفاوتند، مشخص کنید که کدام یک ساده‌تر است و وقت کمتری را می‌برد، و اگر جوابهای به‌دست آمده یکی نیستند، راه حلها را بررسی و مشخص کنید که درکدام یک و کجا اشتباه شده است. درکتابها و جزوه‌ها اشتباه‌های چاپی و غیر آن پیش می‌آید. اگر آن مسأله را در جاهایی دیگرهم بیابید و راه حلهای گوناگون آن را با هم بسنجید، برای ورزیدگی ذهنی شما تأثیر بهتری خواهد داشت.

مثال۱. درمجموعه‌ای از پرسشهای چند گزینه‌ای، به این پرسش برخورده‌اید: معادلهٔ

$$\sqrt{(x+1)^2}+\sqrt{(x-1)^2}=1$$

چند جواب دارد؟

الف) دو جواب　　　ب) بیش از دو جواب

ج) تنها یک جواب　　　د) هیچ جواب

به این نکته توجه دارید که $\sqrt{a^2}$ برابر با $|a|$ و در حالت نامنفی بودن a برابر با a و درحالت منفی بودن a برابر با $-a$ است، پس می‌نویسید:

$$|x+1|+|x-1|=1 \qquad (1)$$

و چنین استدلال می‌کنید: هریک از دو جمله‌ایهای $x+1$ و $x-1$ می‌تواند نامنفی یا منفی باشد. اگر هر دو نامنفی باشند، خواهیم داشت:

$$(x+1)+(x-1)=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

اگر هر دو منفی باشند، داریم:

$$(-x-1)+(-x+1)=1 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

و اگر یکی از آنها نامنفی و دیگری منفی باشد، x حذف می‌شود و معادله به یک برابری ناممکن تبدیل می‌شود و جواب ندارد.

از استدلالی که به‌کاربرده‌اید، نتیجه می‌گیرید که معادلهٔ داده شده دو جواب می‌تواند داشته باشد. اما به پاسخنامه که مراجعه می‌کنید، می‌بینید که گزینهٔ (د) را درست دانسته است. راه حلّ خود را باز می‌نگرید و می‌بینید که استدلالتان درست است. به این فکر می‌افتید که نکند در پاسخنامه،اشتباه چاپی روی داده است. برای آن‌که بفهمید این فکرتان بجاست یا نه، برآن می‌شوید که جوابهای به‌دست آمده را در معادله امتحان کنید. با این کار درمی‌یابید که هیچ کدام در معادله صدق نمی‌کنند. پی می‌برید که خودتان درجایی اشتباه کرده‌اید. در جُست و جوی این اشتباه متوجه می‌شوید که اگر دو جمله‌ایها هردو نامنفی باشند:

$$\begin{cases} x+1\geq 0 \\ x-1\geq 0 \end{cases} \Rightarrow x\geq 1$$

و از این رو، جواب $x=\frac{1}{2}$ پذیرفته نیست و اگر دو جمله‌ایها هردو منفی باشند:

$$\begin{cases} x+1< 0 \\ x-1< 0 \end{cases} \Rightarrow x< -1$$

و جواب $x=-\frac{1}{2}$ هم پذیرفته نیست. می‌پذیرید که معادله بدون جواب است. این بار به راهنمای حل مسأله مراجعه می‌کنید. با شگفتی می‌بینید که راه‌حلّ مسأله خیلی ساده‌تر از راهی است که شما به‌کاربرده‌اید: در معادلهٔ (۱)، اگر x نامنفی باشد، مقدار $|x+1|$ ناکوچکتر از ۱ است و چون با مقدار مثبت $|x-1|$ جمع شود، حاصل از ۱ بزرگتر می‌شود. پس اگر x نامنفی باشد، معادله جواب ندارد. اگرهم x منفی باشد، مقدار $|x-1|$ بزرگتر از ۱ است و با مقدار مثبت $|x+1|$ هم که جمع شود، باز بزرگتر از ۱ است و باز هم معادله جواب ندارد.

مثال ۲. در یک مجلهٔ ریاضی، با این مسأله روبه‌رو می‌شوید:

اگر a عددی گویا باشد، مقدار آن را از رابطهٔ زیر به‌دست آورید:

$$8(a+2\sqrt{2})^3 = 315+236\sqrt{2}$$

این رابطه را بسط می‌دهید، نسبت به a مرتّب می‌کنید و به‌دست می‌آورید:

$$8a^3+48\sqrt{2}a^2+192a-108\sqrt{2}-315=0 \qquad (1)$$

و بر آن می‌شوید تا عبارت معادله را تجزیه کنید. روشهای گوناگون تجزیه را به‌کار می‌برید و سرانجام به‌دست می‌آورید:

$$12\sqrt{2}(4a^2-9)+8a^3+192a-315=0$$

$$12\sqrt{2}(2a+3)(2a-3)+8a^3+192a-315=0$$

اگر بتوانید یکی از دو عامل $2a+3$ یا $2a-3$ را از سه جمله‌ای درجهٔ سوّم استخراج کنید، به تجزیهٔ عبارت دست می‌یابید. پس چنین عمل می‌کنید:

$$\begin{aligned} 8a^3+192a-315 &= 8a^3-27+27+192a-315 \\ &= 8a^3-27+192a-288 \\ &= (2a-3)(4a^2+6a+9)+96(2a-3) \\ &= (2a-3)(4a^2+6a+105) \end{aligned}$$

و رابطهٔ داده شده به صورت زیر درمی‌آید:

$$(2a-3)\left[4a^2+6(4\sqrt{2}+1)a+36\sqrt{2}+105\right]=0$$

عبارت داخل کروشه نسبت به a از درجهٔ دوم است و مبیّن آن را حساب می‌کنید و خواهید داشت:

$$\begin{aligned} \Delta' &= 9(4\sqrt{2}+1)^2-4(36\sqrt{2}+105) \\ &= -123-72\sqrt{2}<0 \end{aligned}$$

پس این سه‌جمله‌ای جواب ندارد و جواب معادلهٔ (۱) عبارت است از:

$$2a-3=0 \Rightarrow a=\frac{3}{2}$$

راه حلّی طولانی را به‌کار برده‌اید؛ اما خشنودید که به جواب دست یافته‌اید. اما پس از آن‌که شمارهٔ بعدی مجله به دستتان می‌رسد با تعجب می‌بینید که این مسأله هم راه حلّی ساده‌تر دارد. معادلهٔ (۱) چنین نوشته می‌شود:

$$(8a^3+192a-315)+(48a^2-108)\sqrt{2}=0$$

حاصل جمع یک مقدار گویا با یک مقدار گنگ، تنها آن‌گاه برابر صفر است که هریک از آن دو مقدار، صفر باشد، بنابراین:

$$\begin{cases} 8a^3+192a-315=0 & (2) \\ 48a^2-108=0 & (3) \end{cases}$$

از معادلهٔ (۳) داریم:

$$48a^2-108=12(2a-3)(2a+3)$$

$$2a-3=0 \Rightarrow a=\frac{3}{2}$$

$$2a+3=0 \Rightarrow a=-\frac{3}{2}$$

معادلهٔ (۲) نمی‌تواند جواب منفی داشته باشد (زیرا حاصل جمع سه عدد منفی نمی‌تواند صفر باشد) و جواب $a=-\frac{3}{2}$ پذیرفته نیست. جواب $a=\frac{3}{2}$ را هم درمعادلهٔ (۲) امتحان می‌کنیم که در آن صدق می‌کند؛ بنابراین، معادلهٔ (۱) جواب یکتای $a=\frac{3}{2}$ دارد.

مسأله‌ای را با فکر خودتان حل کرده‌اید، از این‌رو، راه حلّ دیگری را که برای آن یافته‌اید، با علاقه و دقّت ازنظر می‌گذرانید، و چون درمی‌یابید این راه حل بر پایهٔ یک ویژگی مهم انجام گرفته است، که تاکنون یا بر آن آگاهی نداشته‌اید، یا به اهمیت آن پی نبرده بودید، شادمان می‌شوید و این ویژگی در خاطرتان پابرجا می‌ماند.

یادآوری. کاربرد این مسأله درتجزیهٔ رادیکالهای مرکب با فرجهٔ ۳ است:

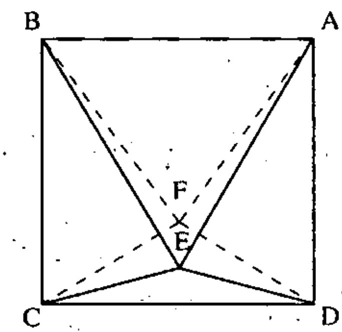
$$\sqrt[3]{315+236\sqrt{2}}=2\left(\frac{3}{2}+2\sqrt{2}\right)=3+4\sqrt{2}$$

سنجش راه حلهای یک مسأله

برای ورزیده شدن در حل مسأله‌های ریاضی، نباید به دستیابی

به راه حل یک مسأله بسنده کنید. سعی کنید نه تنها خودتان آن را از راه یا راه‌های دیگری هم حل کنید؛ بلکه از جاهای گوناگون هم راه حلهایی را که برای آن به‌کار رفته است، به‌دست آورید. پس ازآن، این راه حلها را باهم بسنجید و ببینید هرکدام از آنها چه امتیازی دارد.

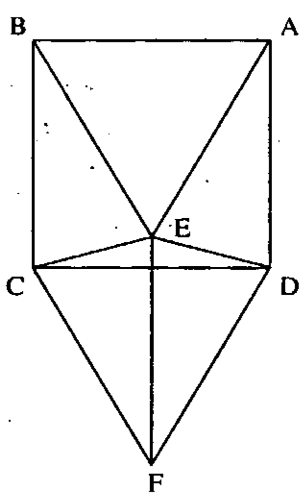
مثال ۳. در داخل مربع ABCD نقطهٔ E چنان به‌دست آمده که مثلث ECD متساوی‌الساقین و هر زاویهٔ مجاور به CD از آن برابر با ۱۵ درجه است. ثابت کنید: زاویهٔ AEB به اندازهٔ ۶۰ درجه است.



۱) بسادگی درمی‌یابید که AE با BE برابر و مثلث AEB متساوی‌الساقین است و کافی است ثابت کنید این مثلث متساوی‌الاضلاع است. پس چنین استدلال می‌کنید؛ چون هریک از دو مثلث AEB و CED به رأس E متساوی‌الساقین است، نقطهٔ E بر عمودمنصف دو ضلع AB و CD از مربع واقع است. اگر مثلث AEB متساوی‌الاضلاع نباشد، نقطهٔ F بر عمودمنصف دو ضلع AB و CD وجود خواهد داشت، که مثلث ABF متساوی‌الاضلاع باشد. در این صورت، هریک از زاویه‌های ABF و BAF برابر ۶۰ درجه و هریک از زاویه‌های FAD و FBC برابر ۳۰ درجه است. از برابری AF و همچنین BF با AB نتیجه می‌شود AF با AD و BF با BC برابر است. مثلثهای ADF و BCF متساوی‌الساقین‌اند و هریک از زاویه‌های ADF و BCF برابر ۷۵ درجه و هریک از زاویه‌های FDC و FCD برابر با ۱۵ درجه و مثلث FCD همان مثلث ECD است و F بر E واقع و مثلث AEB متساوی‌الاضلاع است.

۲) دریک کتاب می‌بینید که برای حلّ این مسأله، پس از اثبات برابری AE با BE چنین استدلال شده است: اگر AE با AB برابر نباشد، یا از آن بزرگتر یا از آن کوچکتر است. درحالت AB > AE، زاویهٔ AEB باید از هریک از دو زاویهٔ EAB و EBA بزرگتر و بنابرآن، باید به اندازه‌ای بیش از ۶۰ درجه باشد. در این صورت، زاویهٔ AED به اندازه‌ای کمتر از ۷۵ درجه و کوچکتر از زاویهٔ ADE خواهد بود. نتیجه می‌شود AD < AE که خلاف فرض AB > AE است و تناقض پیش می‌آید. در حالت AB < AE به روش مشابه به‌دست می‌آید AD > AE و باز تناقض وجود خواهد داشت. بنابراین AB = AE و مثلث ABE متساوی‌الاضلاع است.

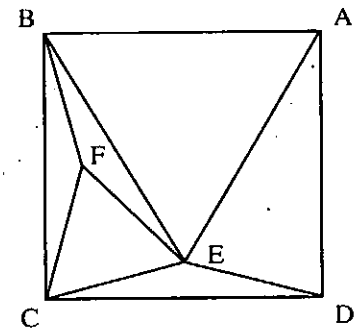
۳) دریک کتاب دیگر: مثلث متساوی‌الاضلاع CDF مطابق با شکل رسم می‌شود. پاره خط EF که عمود منصف CD است، با AD موازی است و دو مثلث ADE و FDE باهم برابرند؛ زیرا FD که با CD برابر است، با AD نیز برابر است و دو زاویهٔ EDF و EDA که هردو به اندازهٔ ۷۵ درجه‌اند، باهم برابرند و ضلع DE درهر دو مثلث مشترک است. از برابری این دو مثلث، به دست می‌آید که دو زاویهٔ FED و AED باهم برابر و هرکدام به اندازهٔ ۷۵ درجه‌اند. بنابراین، مثلث ADE متساوی‌الساقین است و AE با AD و در نتیجه با AB برابر است و مثلث ABE متساوی‌الاضلاع است.



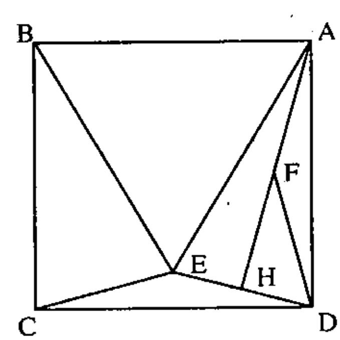
۴) در یک مجلهٔ ریاضی، مثلث BCF برابر با مثلث CDE مطابق با شکل رسم می‌شود. از برابری CF با CE و از این‌که هریک از زاویه‌های BCF و DCE به اندازهٔ ۱۵ درجه است، به دست می‌آید که زاویهٔ ECF به اندازهٔ ۶۰ درجه و مثلث CEF متساوی‌الاضلاع و EF با BF برابر است.

از این که زاویه های BFC و CFE به ترتیب به اندازه های

۱۵۰ و ۶۰ درجه‌اند. نتیجه می‌شود، زاویهٔ BFE به اندازهٔ °۱۵۰ است و دو مثلث BFC و BFE با هم برابرند و بنابرآن، BE با BC و با AB برابر است و مثلث ABE متساوی‌الاضلاع است.



۵) در همان مجلّه : مطابق با شکل، مثلث AFD برابر با مثلث CDE رسم می‌شود و AF امتداد می‌یابد تا در H با DE برخورد کند. از این‌که هریک از دو زاویهٔ FAD و FDA به اندازهٔ ۱۵ درجه‌اند، نتیجه می‌شود که زاویهٔ FDH به اندازهٔ ۶۰ درجه و زاویهٔ DFH به اندازهٔ ۳۰ درجه است. زاویهٔ H از مثلث DFH به اندازهٔ ۹۰درجه می‌شود و در این مثلث قائم‌الزاویه، ضلع DH نصف ضلع DF و بنابرآن، نصف ضلع DE است. AH عمود-منصف DE است و AE با AD و با AB برابر و مثلث ABE متساوی‌الاضلاع است.



از مقایسهٔ راه حلّی که خودتان به‌کار برده‌اید، با چهار راه حلّ دیگری که به آنها دست یافته‌اید، چه نتیجه‌هایی را به‌دست می‌آورید؟ غیر از آن‌که درمی‌یابید از این راه‌حلها، کدام ساده‌تر درک می‌شود، کدام با برهان مستقیم و کدام با برهان غیرمستقیم یا برهان خلف ثابت شده است، برای توضیح دادن کدام یک مدت زمان کمتری صرف می‌شود، آیا بر نکته‌ها و ویژگیهای تازه‌ای آگاهی یافته‌اید؟ آیا نکته‌ها و ویژگیهایی را فراموش کرده بودید و اکنون به یادتان آمد؟ آیا راه حلّ تازه‌ای از مسأله به نظرتان رسیده است؟ و سرانجام آن‌که، کدام مسألهٔ ساده، در حالت عکس، به این مسأله تبدیل شده است؟

تمرین ۲:

۱ـ از دو رابطهٔ زیر که نسبت به a و b از درجهٔ دومند، رابطه یا رابطه‌هایی را بین a و b به‌دست آورید که نسبت به a و b از درجهٔ یکم باشند. راه حلهایی گوناگون را می‌توانید به‌کار ببرید. درهرحال، جوابها را امتحان کنید.

$$\begin{cases} ۳a^۲ - ۷ab + ۲b^۲ = ۸ \\ a^۲ + ۲ab - ۸b^۲ = ۷ \end{cases}$$

۲ـ کدام عبارت جبری است که نسبت به x و y از درجهٔ دوم، متقارن و متجانس (=همگن) باشد و اگر $x = y$ حاصل عبارت صفر شود و اگر

$$x = \sqrt[۴]{\frac{۷-۴\sqrt{۳}}{۷+۴\sqrt{۳}}} \text{ و } y = \sqrt[۴]{\frac{۷+۴\sqrt{۳}}{۷-۴\sqrt{۳}}}$$

حاصل عبارت برابر با ۲۴ شود.

۳ـ ثابت کنید اگر $x + y + z = a$ ، آن‌گاه :

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ \geq \frac{a^۲}{۳}$$

۴ـ به فرض $-۱ \leq y \leq ۱$ و $y \neq ۰$ و

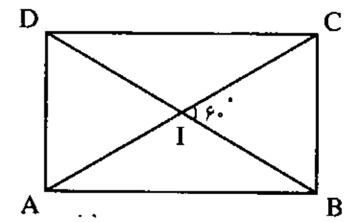
$$tgx = \frac{\sqrt{۱+y} + \sqrt{۱-y}}{\sqrt{۱+y} - \sqrt{۱-y}}$$

y را به صورت تابعی از x و به ساده‌ترین صورت به‌دست آورید.

۵ـ کوچکترین عدد طبیعی را بیابید که اگررقم سمت راست آن به سمت چپ آن برده شود، عددی یک‌و نیم برابر آن عدد به‌دست آید.

۶ـ مستطیل ABCD که دو قطر آن در I باهم برخورد می‌کنند و باهم زاویهٔ ۶۰ درجه می‌سازند، مطابق با شکل صفحه بعد داده شده است. نخست انتقالی روی آن انجام می‌گیرد که نقطهٔ I را روی نقطهٔ B می‌برد. آن‌گاه تقارن آن نسبت به رأس D به‌دست می‌آید. سرانجام به مرکز D وبه زاویهٔ α درجه در جهت عکس

حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌یابد که دراین حالت، رأس A در جای نخستین خود واقع می‌شود. زاویهٔ α چند درجه است؟آخرین وضع مستطیل چگونه است؟ برایند سه تبدیل یاد شده، چه تبدیلی است؟



حلّ مسأله‌های تمرین ۱:

۱ـ باید داشته باشیم :

$$\begin{cases} x^2-1\geq 0 \\ 1-x^2\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 1 \ \text{یا}\ x\leq -1 \\ -1\leq x\leq 1 \end{cases} \Rightarrow x=\pm 1$$

اما در حالت $x=\pm 1$ معادله به رابطهٔ ناممکن $2=0$ تبدیل می‌شود. پس مجموعهٔ جواب معادله، تهی است.

۲ـ میانگین حسابی دو عدد مثبت نابرابر از میانگین هندسی آنها بزرگتر است ؛ زیرا :

$$(a-b)^2>0 \Rightarrow a^2+b^2-2ab>0$$

$$a^2+b^2+2ab>4ab \Rightarrow (a+b)^2>4ab$$

$$a+b>2\sqrt{ab} \Rightarrow \frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$$

از این رو پاره‌خط MN به قاعدهٔ بزرگ ذوزنقه نزدیکتر است و $a>b$.

۳ـ دو مجموعه باهم برابرند.

۴ـ دو مثلث BCD و BCM متشابه‌اند و داریم :

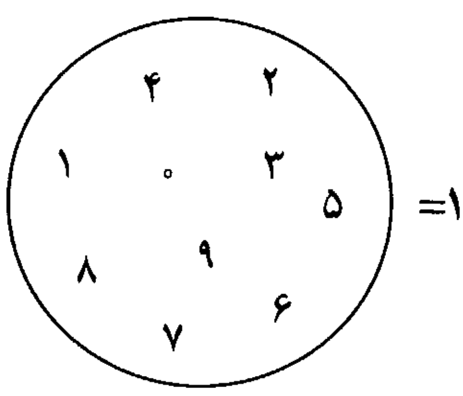
$$\frac{BM}{BC}=\frac{BC}{CD} \Rightarrow BM=\frac{b^2}{a},$$

$$AM=AB-BM=a-\frac{b^2}{a}=\frac{a^2-b^2}{a}$$

۵ـ g جملهٔ هفتم از تصاعد هندسی با جملهٔ اوّل A و با قدر نسبت $k=\frac{b}{a}$ است.

$$\begin{cases} g=a\cdot k^6=\dfrac{b^6}{a^5} \\ g=9a \end{cases} \Rightarrow \frac{b^6}{a^6}=9\,,\ \frac{b}{a}=\sqrt[3]{3}$$

۶ـ عمود MK بر AB رسم می‌شود. ارتفاع CH چه بیرون و چه درون مثلث باشد، MK برابر با نصف CH و در نتیجه، برابر با نصف AM است. اما MK ارتفاع مثلث AMB است و نصف AM که باشد، بنابر آنچه در مثال ۹ ثابت شد، زاویهٔ MAB یا ۳۰ درجه یا ۱۵۰ درجه است.



با چند عمل سادهٔ حسابی و فقط یک بار استفاده از ارقام ۰ تا ۹، می‌تواند حاصل، عدد ۱ باشد؟

جواب در صفحهٔ ۸۸

فصلی از کتاب FAMOUS PROBLEMS

• ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور

طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روشهای مقدماتی (۲۳)

معادلات جبری که با استفاده از ریشه‌های دوم حل‌پذیرند

قضایا[۱]ی زیر که از نظریهٔ معادلات جبری[۲] برگرفته شده‌اند، احتمالاً برای خواننده آشنا به نظر می‌رسند، اما برای تأمین وضوح بیشتر نظرگاهمان، بحث مختصری در موردشان مطرح می‌کنیم.

اگر x، کمیتی[۳] که باید رسم شود، تنها به عبارات گویا[۴] و ریشه‌های دوم[۵] وابسته باشد، ریشهٔ معادلهٔ تحویل‌ناپذیر[۶] $\varphi(x)=0$ است، که درجه[۷]اش همواره توانی[۸] از ۲ است.

۱. برای به دست آوردن مفهوم روشنی از ساختار[۹] کمیت x، آن را، فی‌المثل، به صورت

$$x=\frac{\sqrt{a+\sqrt{c+ef}}+\sqrt{d+\sqrt{b}}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{p+\sqrt{q}}{\sqrt{r}}$$

فرض می‌کنیم، که در آن a، b، c، d، e، f، p، q، r عباراتی گویا هستند.

۲. تعداد رادیکالها[۱۰]ی یکی روی دیگری رخ دهند. در هر جملهٔ x ی مرتبهٔ (آن) جمله[۱۱] نامیده می‌شود؛ عبارات پیشین شامل جمله‌های از مراتب ۰، ۱، ۲ اند.

۳. فرض می‌کنیم μ مرتبهٔ ماکزیمم[۱۲] را مشخص کند، بنابراین هیچ جمله‌ای نمی‌تواند بیش از μ رادیکال یکی روی دیگری داشته باشد.

۴. در مثال $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$، سه عبارت از مرتبهٔ اوّل داریم، اما از آن‌جا که آن را می‌توان به صورت

$$x=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{2}.\sqrt{3}$$

نوشت، مثال مورد بحث تنها به دو عبارت متمایز وابسته است.
فرض می‌کنیم که تحویل مزبور در جمیع جملات x انجام گرفته باشد، لذا هیچ یک از n جملهٔ از مرتبهٔ μ نمی‌تواند به‌گونه‌ای گویا به صورت تابعی[۱۳] از هر یک از جمله‌های از مرتبهٔ μ یا کمتر دیگر بیان شود.

همین فرض را در مورد جمله‌های از مرتبهٔ $\mu-1$ یا کمتر در نظر می‌گیریم، خواه جمله‌های مزبور به طور صریح، خواه به‌طور

ضمنی رخ دهند. واضح است که فرض[14] مزبور بسیار طبیعی است و در مباحث بعدی از اهمیت بسیاری برخوردار است.

۵. صورت نرمال[15] x.

در صورتی که عبارت x مجموع[16] جمله‌هایی با مخرجها[17]ی متفاوت باشد، می‌توانیم آنها را به یک مخرج تحویل کرده، به این ترتیب x را به صورت خارج‌قسمت[18] دو تابع تام[19] به دست آوریم.

$\sqrt{Q}$ را یکی از جملات x از مرتبهٔ μ درنظر می‌گیریم؛ این جمله می‌تواند در x تنها به طور صریح رخ دهد، زیرا μ از مرتبهٔ ماکسیمم است. گذشته از این، از آن‌جا که توانهای $\sqrt{Q}$ را می‌توان به صورت توابعی از $\sqrt{Q}$ و Q، که عبارتی از مرتبهٔ پایینتر است، بیان کرد، می‌توانیم بگذاریم:

$$x = \frac{a + b\sqrt{Q}}{c + d\sqrt{Q}}$$

که a، b، c، d ی آن شامل بیش از $n-1$ جمله از مرتبهٔ μ، علاوه بر جملات از مرتبهٔ پایینتر نیست.

$\sqrt{Q}$، با ضرب هر دو جملهٔ کسر مورد بحث در $c - d\sqrt{Q}$، از مخرج آن ناپدید می‌شود، و می‌توان نوشت

$$x = \frac{(ac - bdQ) + (bc - ad)\sqrt{Q}}{c^2 - d^2Q} = \alpha + \beta\sqrt{Q}$$

که α و β ی آن شامل بیش از $n-1$ جمله از مرتبهٔ μ نیستند.

در مورد جملهٔ از مرتبهٔ μ ی دوم، به روشی مشابه، $x = \alpha_1 + \beta_1\sqrt{Q_1}$ را داریم، و همین‌طور الی‌آخر.

بنابراین x می‌تواند چنان تبدیل شود که شامل جمله‌ای از مرتبهٔ مفروض μ تنها در صورتش[20] و تنها به‌طور خطی باشد.

ولی ملاحظه می‌کنیم که ممکن است حاصل‌ضربهایی[21] از مرتبهٔ μ رخ دهند؛ زیرا α و β همچنان به $n-1$ جملهٔ از مرتبهٔ μ وابسته‌اند. در این‌صورت، ممکن است قرار دهیم

$$\alpha = \alpha_{11} + \alpha_{12}\sqrt{Q_1} \quad , \quad \beta = \beta_{11} + \beta_{12}\sqrt{Q_1}$$

و در نتیجه

$$x = (\alpha_{11} + \alpha_{12}\sqrt{Q_1}) + (\beta_{11} + \beta_{12}\sqrt{Q_1})\sqrt{Q}$$

۶. به طریقی مشابه در مورد جملات از مرتبهٔ $\mu - 1$ متفاوتی، که به‌طور صریح و در Q، Q_1، و غیره، رخ می‌دهند، عمل می‌کنیم، و بنابراین هر یک از کمیّتهای مزبور تابع خطی تام[22] از مرتبهٔ $\mu - 1$ تحت بررسی خواهد شد. در این صورت به جملاتی از مرتبهٔ پایینتر می‌رسیم و سرانجام x، یا دقیقتر، جملات از مراتب متفاوتش، را تحت صورت توابع خطی تام عبارات رادیکالی فردی که به‌طور صریح رخ می‌دهد، به دست می‌آوریم. آن‌گاه می‌گوییم که x به صورت *نرمال* تحویل شده است.

۷. فرض می‌کنیم m تعداد کلّ[23] ریشه‌های دوم مستقل(۴) رخ‌دهندهٔ در این صورت نرمال باشد. با دادن علامت دوگانه[24] به ریشه‌های دوم مزبور و ترکیب آنها به جمیع طرق ممکن، دستگاهی از 2^n مقدار[25] $x_1, x_2, \ldots, x_{2m}$ به دست می‌آوریم، که آنها را مقادیر مزدوج[26] می‌نامیم.

اکنون باید معادله‌ای را که مقادیر مزدوج مزبور را به عنوان ریشه می‌پذیرد جست‌وجو کنیم.

۸. لزوماً جمیع مقادیر مزبور متمایز نیستند؛ بنابراین، اگر داشته باشیم

$$x = \sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{a - \sqrt{b}}$$

عبارت مزبور، چون علامت $\sqrt{b}$ را تغییر دهیم، تغییر نمی‌کند.

۹. اگر x کمیّتی دلخواه باشد و چند جمله‌ای[27] زیر را تشکیل دهیم

$$F(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{2m})$$

$F(x) = 0$ به طور واضح معادله[28]ای است که مقادیر مزدوج مورد بحث را به عنوان ریشه دارد. این معادله از درجهٔ 2^m است، اما می‌تواند ریشه‌های برابر داشته باشد (۸).

ضرایب[29] چند جمله‌ای F(x)، مرتب شده نسبت به x گویا هستند.

زیرا چون علامت یکی از ریشه‌های دوم را تغییر می‌دهیم، با این کار دو ریشه، مثلاً x_λ و $x_{\lambda'}$ را به هم تبدیل می‌کنیم؛ چراکه تمام ریشه‌های $F(x) = 0$ دقیقاً مقادیری مزدوج‌اند و از آن‌جا که ریشه‌های مورد بحث تنها تحت حاصل‌ضرب

$$(x - x_\lambda)(x - x_{\lambda'})$$

وارد F(x) می‌شوند، صرفاً ترتیب عوامل[30] F(x) تغییر می‌کند، و

در نتیجه چند جمله‌ای تغییر نمی‌کند.

در این صورت $F(x)$، چون علامت هر یک از ریشه‌های دوم مورد بحث را تغییر دهیم، ناوردا[۳۱] (تغییرناپذیر) می‌ماند؛ و بنابراین تنها شامل مربعات آنهاست؛ و در نتیجه $F(x)$ تنها ضرایب گویا دارد.

۱۰. *هنگامی که هر یک از مقادیر مزدوج مورد بحث در معادلهٔ با ضرایب گویای مفروض $f(x)=0$ صدق کند، این موضوع در مورد جمیع مقادیر دیگر نیز صادق است.*

$f(x)$ لزوماً مساوی $F(x)$ نیست، و ممکن است غیر از x_1 ها ریشه‌های دیگری را نیز اختیار کند.

فرض می‌کنیم $x_1=\alpha+\beta\sqrt{Q}$ یکی از مقادیر مزدوج مورد بحث باشد؛ اکنون $\sqrt{Q}$، جمله‌ای از مرتبهٔ μ ؛ α و β تنها به جملاتی از مرتبهٔ μ و جملاتی از مرتبهٔ پایینتر وابسته‌اند. در این صورت، باید مقدار مزدوج

$$x_1'=\alpha-\beta\sqrt{Q}$$

موجود باشد.

اکنون معادلهٔ $f(x_1)=0$ را تشکیل می‌دهیم. $f(x_1)$ را می‌توان در صورت نرمال نسبت به $\sqrt{Q}$ قرار داد،

$$f(x_1)=A+B\sqrt{Q}$$

عبارت فوق، تنها وقتی که A و B به‌طور همزمان صفرند، می‌تواند برابر صفر باشد. چه در غیر این صورت باید داشته باشیم:

$$\sqrt{Q}=-\frac{A}{B}$$

یعنی، $\sqrt{Q}$ بتواند به‌طور گویا به صورتی تابع جملاتی از مرتبهٔ μ و جملاتی از مرتبهٔ پایینتر واقع در A و B بیان شود، که مناقض فرض استقلال جمیع ریشه‌های دوم است (۴).

اما آشکارا داریم

$$f(x_1')=A-B\sqrt{Q}$$

در نتیجه اگر $f(x_1)=0$، آن‌گاه $f(x_1')=0$، که از آن قضیهٔ زیر حاصل می‌شود:

اگر x_1 در معادلهٔ $f(x)=0$ صدق کند، این مطلب در مورد جمیع مقادیر مزدوج مستخرج از x_1 با تغییر علامات ریشه‌های از مرتبهٔ μ، نیز صادق است.

اثبات مقادیر مزدوج دیگر به طریقی مشابه به دست می‌آید. به عنوان مثال، چنان که بدون تأثیر بر عمومیت استدلال[۳۲] می‌توان انجام داد، فرض می‌کنیم، که عبارت x_1 تنها به دو جملهٔ از مرتبهٔ μ ی $\sqrt{Q}$ و $\sqrt{Q'}$ وابسته است. $f(x_1)$ را می‌توان به صورت نرمال زیر تحویل کرد:

$$f(x_1)=p+q\sqrt{Q}+r\sqrt{Q'}+s\sqrt{Q}\times\sqrt{Q'}=0 \qquad (a)$$

اگر x_1 به بیش از دو جمله از مرتبهٔ μ وابسته باشد، باید به عبارت پیشین تنها تعداد بیشتری از جملات با ساختار مشابه اضافه کنیم.

معادلهٔ (a) تنها هنگامی که به طور جداگانه

$$p=0,\ q=0,\ r=0,\ s=0 \qquad (b)$$

را داریم ممکن است، چه در غیر این صورت $\sqrt{Q}$ و $\sqrt{Q'}$ برخلاف فرضمان، با رابطه‌ای گویا به یکدیگر مربوط می شوند.

اکنون فرض می‌کنیم $\sqrt{R}$ ، $\sqrt{R'}$ ، ... جملات از مرتبهٔ $\mu-1$ ی باشند که x_1 به آنها وابسته است: جمله‌های مزبور در p، q، r، s رخ می‌دهند؛ در این صورت کمیتهای p، q، r، s، که در آنها رخ می‌دهند، می‌توانند به صورت نرمال، نسبت به $\sqrt{R}$ و $\sqrt{R'}$، تحویل شوند؛ و اگر، به خاطر اختصار، تنها دو کمیّت $\sqrt{R}$ و $\sqrt{R'}$ را در نظر بگیریم،

$$p=k+\lambda_1\sqrt{R}+\mu_1\sqrt{R'}+v_1\sqrt{R}.\sqrt{R'}=0 \qquad (c)$$

و سه معادلهٔ مشابه برای q، r، s داریم.

فرض استقلال ریشه‌های مزبور، که تاکنون چند بار به کار رفته است، معادلات

$$k=0,\ \lambda=0,\ u=0,\ v=0 \qquad (d)$$

را سروسامان می‌دهد.

در نتیجه، معادلات (c) و نتیجتاً $f(x)=0$ چون به جای x_1 مقادیر مزدوج حاصل از تغییر علامات $\sqrt{R}$ و $\sqrt{R'}$ را قرار دهیم، برقرار می‌شوند.

بنابراین معادلهٔ $f(x)=0$ نیز توسط جمیع مقادیر مزدوج حاصل از x_1 با تغییر علامات ریشه‌های از مرتبهٔ $\mu-1$، برقرار است.

همین استدلال در مورد جملات از مرتبهٔ $\mu-2$، $\mu-3$، ... به کار می‌رود و قضیه‌مان به‌طور کامل اثبات می‌شود.

۱۱. تاکنون دو معادلهٔ

$$F(x)=0\ ,\ \ f(x)=0$$

را مورد بررسی قرار داده‌ایم. هر دو معادله دارای ضرایب گویا هستند و شامل x_1 ها به عنوان ریشه‌اند. $F(x)$ از درجهٔ 2^m است و می‌تواند ریشه‌های چندگانه[۳۳] داشته باشد؛ $f(x)$ می‌تواند دارای ریشه‌های دیگری جز x_1 ها باشد. اکنون معادلهٔ دیگری، $\varphi(x)=0$، را معرفی می‌کنیم، که به عنوان معادله‌ای از پایینترین درجه، با ضرایب گویا، و پذیرندهٔ ریشهٔ x_1 و در نتیجه تمام x_1 ها، تعریف شده است (۱۰).

۱۲. ویژگیهای معادلهٔ $\varphi(x)=0$.

I. $\varphi(x)=0$ *معادله‌ای تحویل‌ناپذیر است؛* یعنی $\varphi(x)$ نمی‌تواند به دو عامل چند جمله ای گویا تجزیه شود. تحویل‌ناپذیری مزبور نظر به این فرض است که $\varphi(x)=0$ معادله‌ای گویا از *پایین‌ترین* درجه است که توسط x_1 ها برقرار می‌شود.

زیرا اگر داشته باشیم

$$\varphi(x)=\psi(x)\chi(x)$$

آن‌گاه $\varphi(x_1)=0$ ایجاب کنندهٔ $\psi(x_1)=0$ یا $\chi(x_1)=0$ یا هردوست. اما از آن‌جا که معادلات مزبور توسط تمام مقادیر مزدوج مورد بحث برقرارند (۱۰)، $\varphi(x)=0$ در این صورت معادلهٔ از پایینترین درجهٔ برقرار توسط x_1 ها نخواهد بود.

II. $\varphi(x)=0$ *ریشه‌های چندگانه ندارد.* در غیر این صورت $\varphi(x)$ می‌تواند، توسط روشهای معروف جبر، به عوامل اوّل تجزیه شود، و $\varphi(x)=0$ تحویل‌ناپذیر نخواهد بود.

III. $\varphi(x)=0$ *ریشه‌های چندگانهٔ دیگری جز x_1 ها ندارد،* در غیر این صورت $F(x)$ و $\varphi(x)$ بزرگترین مقسوم علیه مشترکی[۳۴] را می‌پذیرد، که می‌تواند به‌طور گویا معین شود. در این صورت می‌توانیم $\varphi(x)$ را به عوامل گویا تجزیه کنیم، و $\varphi(x)$ تحویل‌ناپذیر نخواهد بود.

IV. فرض می‌کنیم M تعداد x_1 هایی باشد که کمیتهای متمایز دارند، و فرض می‌کنیم:

$$x_1, x_2, \ldots, x_M$$

مقادیر متمایز مورد بحث باشند. در این صورت داریم:

$$\varphi(x)=C(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_M)$$

زیرا $\varphi(x)=0$ توسط کمیّتهای x_1 برقرار می‌شود و ریشه‌های چندگانه ندارد. در این صورت چند جمله‌ای $\varphi(x)$، به استثنای عامل ثابتی که مقدارش اثری بر $\varphi(x)=0$ ندارد، معین می‌شود.

V. $\varphi(x)=0$ *تنها معادلهٔ تحویل ناپذیر با ضرایب گویای برقرار با x_1 ها است،* زیرا اگر $f(x)=0$ معادلهٔ تحویل‌ناپذیر گویای دیگر برقرار با x_1 و در نتیجه با x_1 ها باشد، $f(x)$ بر $\varphi(x)$ بخش‌پذیر می‌شود و بنابراین تحویل‌ناپذیر نخواهد بود.

به این ترتیب، بنا به دلیل پنج ویژگی $\varphi(x)$ به این ترتیب اثبات شده، می‌توانیم معادلهٔ مزبور را، به‌طور مختصر، به عنوان تنها معادلهٔ تحویل‌ناپذیر برقرار با x_1 ها، مشخص کنیم.

۱۳. اکنون به مقایسهٔ $F(x)$ و $\varphi(x)$ می‌پردازیم. این دو چندجمله‌ای x_1 ها را به عنوان تنها ریشه‌های خود دارند، و $\varphi(x)$ ریشه‌های چندگانه ندارد. $F(x)$، در این صورت، بر $\varphi(x)$ بخش‌پذیر است؛ یعنی:

$$F(x)=F_1(x)\varphi(x)$$

$F_1(x)$ لزوماً ضرایب گویا دارد؛ زیرا خارج قسمت حاصل از تقسیم $F(x)$ بر $\varphi(x)$ است. اگر $F_1(x)$ ثابت نباشد، ریشه‌های متعلق به $F(x)$ را می‌پذیرد، و با پذیرفتن یک x_1 جمیع x_1 ها را می‌پذیرد (۱۰). در نتیجه؛ $F_1(x)$ نیز بر $\varphi(x)$ بخش‌پذیر است، و

$$F_1(x)=F_2(x)\varphi(x)$$

این استدلال، در صورتی که $F_2(x)$ ثابت نباشد، در حالی که درجهٔ خارج قسمت با هر عمل پایینتر می‌آید، همچنان برقرار است. در نتیجه در پایان تعداد محدودی تقسیم به معادله‌ای به صورت زیر می‌رسیم:

$$F_{\nu-1}(x)=c_1.\varphi(x)$$

و در مورد $F(x)$،

$$F(x)=c_1.[\varphi(x)]^{\nu}$$

در این صورت چند جمله‌ای $F(x)$، به استثنای عامل ثابت، توانی از چند جمله‌ای درجه مینیمم $\varphi(x)$ است.

۱۴. اکنون می‌توانیم M، درجهٔ $\varphi(x)$ را معین کنیم. $F(x)$ از درجهٔ ۲^{m} است؛ از این گذشته، توان vام $\varphi(x)$ است. در نتیجه:

$$۲^{m} = v.M$$

بنابراین، M نیز توانی از ۲ است و قضیهٔ زیر را به دست می‌آوریم:

درجهٔ معادلهٔ تحویل‌ناپذیری که توسط عبارتی، که تنها از ریشه‌های دوم تشکیل شده است، برقرار می‌شود، همواره توانی از ۲ است.

۱۵. از طرف دیگر، از آن‌جا که تنها یک معادلهٔ تحویل‌ناپذیر برقرار توسط جمیع x_1 ها موجود است (۱۲، v)، عکس قضیه را نیز داریم:

اگر معادلهٔ تحویل‌ناپذیری از درجهٔ ۲^{h} نباشد، نمی‌تواند با استفاده از ریشه‌های دوم حل شود.

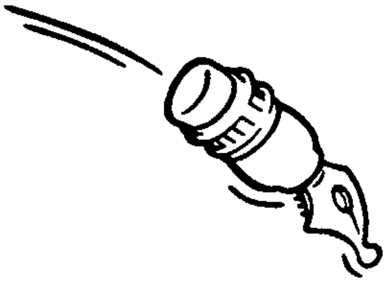
* * *

یادداشتها

1. Propositions
2. Theory of Algebraic Equations
3. Quantity
4. Rational Expressions
5. Square Roots
6. Irreducible Equation
7. Degree
8. Power
9. Structure
10. Radicals
11. Order of Term
12. Maximum Order
13. Function
14. Hypothesis
15. Normal Form
16. Sum
17. Denominators
18. Quotient
19. Intire Function = Integral Function
20. Numerator
21. Products
22. Integral Linear Function
23. Total Number
24. Double Sign
25. Value
26. Conjugate Values
27. Polynomial
28. Equation
29. Coefficients
30. Factor
31. Invariable
32. Reasoning
33. Multiple Roots
34. Highest Common Divisor

یکی از شرایط اساسی برای این‌که درخت علم بتواند با کمال سرعت، رشد و نمو کند آن است که در محلّ مسدودی کاشته نشود، برای این درخت هوایی لازم است که زود به زود تازه و تجدید شود و نسیمی که از خارج بوزد، و عدهٔ بیشماری که در تقویت آن سهیم شوند.

تاریخ علوم - پی‌یر روسو



آنچه از دوست رسد ...

با عرض سلام، خدمت دانش‌آموزان و خوانندگان مجلهٔ ریاضی برهان

از این که به طور مرتّب نامه‌های پرمحتوا و محبت‌آمیز شما عزیزان در دفتر مجله به دست ما می‌رسد، بسیار خوشحالیم و از این بابت خداوند بزرگ را شکرگزاریم.

هر روز در لابه‌لای نامه‌های رسیده، نه تنها به مقاله‌ها و مسائل برمی‌خوریم، بلکه به نامه‌هایی از طرف شما عزیزان برخورد می‌کنیم، که نشانه آن است که مجله را به طور نقّادانه بررسی می‌کنید و با ارائهٔ پیشنهادات و انتقادات سازنده، ما را در راستای پیشرفت کار و غنی‌تر شدن مجله یاری می‌رسانید.

مانند همیشه یک نامه از لابه‌لای نامه‌ها انتخاب کرده‌ایم، به گونه‌ای که باعث علاقه‌مندی بیشتر شما به ریاضی شود : اینجانب مازیار قاسخرادهٔ سنگرودی از استان مازندران و شهرستان بهشهر با شما مکاتبه می‌کنم. اگر ممکن است، نامهٔ من را چاپ کنید تا بقیهٔ دانش‌آموزان بفهمند که خواندن یک مطلب می‌تواند نظر دانش‌آموز را به کلّی عوض کند. من دانش‌آموزی بودم که اصلاً به درس ریاضی هیچ علاقه‌ای نداشتم (البته نمی‌گویم که درسم بد بود، چون ترم اوّل نمرهٔ خوبی از ریاضی گرفتم) و تا جایی این کار ادامه داشت که قصد داشتم به رشته‌ای بروم که ریاضی در آن نباشد. بدون اغراق می‌گویم، از کلاس ریاضی و درس ریاضی بدم می‌آمد. تا روزی که به کتابخانهٔ شهرمان رفتم و مجلهٔ شما را دیدم ؛ شمارهٔ ۲۲ بود، ابتدا به آن سطحی نگاه کردم و دیدم مجلهٔ خوبی است، سپس دوباره آن را خواندم و باور کنید که به کلّی نظرم نسبت به ریاضی عوض شده و هم‌اکنون خیلی به ریاضیات علاقه‌مند شده‌ام و حتی در رشتهٔ ریاضی ثبت‌نام کرده‌ام و ....

اسامی تعدادی از خوانندگان محترم مجلهٔ ریاضی برهان که برای ما نامه ارسال کرده‌اند:

آقایان : سعید حسن‌پور (خمینی شهر)، فخرالدین ملائی دارابی (ساری ـ روستای دارابکلا)، شیرین میر (مشهد)، سید محمّد پویان (تهران)، مهدی حسنی (زنجان)، رادفر (تهران)، سیدضیاء حسینی (کرمان)، نیما هنرمند (بندرانزلی)، احسان ژاله رجبی (زنجان)، ثاقب کوهپایه عراقی (اراک)، عنایت‌اله راستی‌زاده (شیراز)، حسین منصوری (دانشجوی رشتهٔ ریاضی ـ بوشهر) و سرکار خانم الهام نظام اسلامی (کرج).

از همگی شما برای ارسال مسائل همراه با حل و مقاله‌های درسی و کمک درسی و پیشنهادات سازنده سپاسگزاریم. در صورت امکان از این مسأله‌ها در قسمت مسأله برای حل و مسائل مسابقه‌ای مجله استفاده خواهیم کرد. و مقاله‌های شما را پس از تصویب در هیأت تحریریه چاپ خواهیم کرد.

آقای رضا بیات تاجور (تهران) : مقاله‌ای تحت عنوان حلقه و میدان در برهان شمارهٔ ۸ چاپ شده است. آقای مجید رضا نجاد (اراک) در برهان شمارهٔ ۲۴ فهرست الفبایی مقاله‌های برهانهای ۱ الی ۲۳ را به این منظور آوردیم، که در صورت نیاز به مقاله عنوان شده، مراجعه کنید.

آقای امین خسروشاهی (مشهد)، روش تثلیث زاویه به کمک خط‌کش غیر مدرج و پرگار، در حالت کلّی امکان‌پذیر نیست و امتناع آن را می‌توانید در برهان شمارهٔ ۲۵ ملاحظه کنید.

سرکار خانم فرناز طاهرخانی (شاهرود)، ریشهٔ nام گیری ($1 < n \in N$) از دو طرف یک رابطهٔ همنهشتی، راه حلّ کلّی ندارد و همواره برقرار نیست، فقط در بعضی موارد خاص که شما هم اشاره کرده‌اید، ممکن است، این عمل امکان‌پذیر باشد.

آقای احمد بابایی (رودسر)، از آن‌جا که جدولهای اعداد ارسالی شما می‌تواند، مورد استفادهٔ دانش‌آموزان قرار گیرد، بنابراین یکی از آنها را می‌آوریم و حلّ کلیدی جدول را در آنچه از دوست رسد ... در شمارهٔ بعد چاپ خواهیم کرد.

۱	۲		۳	۴
۵		۶		۷
	۸	۹	۱۰	
۱۱		۱۲		۱۳
۱۴	۱۵		۱۶	۱۷

❊ افقی:

۱ـ عددی اوّل به صورت $\overline{ab}$، که رابطهٔ: $b^2-16a=1$ * بین ارقام آن برقرار است.

۳ـ اگر نصف عدد تام $\overline{mcd}$ را با یک مکعب کامل جمع کنیم، مجذور این عدد حاصل می‌شود.

۸ـ ریشهٔ معادلهٔ لگاریتمی: $x^{\log_7^5{}^{\log_5^{13}{}^{\log_{13}^7}}}=100$

۱۴ـ عددی است اوّل که از نصف عدد ۸ افقی بزرگتر است، و حاصل، مجموع ارقام آن هم عددی اوّل است، و اگر این عدد را با مقلوبش جمع کنیم، یک مجذور کامل به دست می‌آید.

۱۶ـ اگر این عدد را نصف کنیم، و نصف آن را مجذور کنیم، تصویر آن در آینهٔ تخت، همان عدد اولیه می‌باشد.

❊ عمودی:

۱ـ عددی است اوّل که مقلوبش هم اوّل است.

۴ـ مجموع اعداد طبیعی، تا این عدد دو رقمی برابر است با: ۱۸۹۱.

۶ـ اگر یک واحد به عدد ۸ افقی اضافه کنیم، به دست می‌آید.

۱۱ـ ریشهٔ معادلهٔ: $\binom{89}{11}=\binom{x+1}{10}+\binom{x+1}{11}$

۱۳ـ ۳ برابر این عدد به اضافهٔ یک مجذور کامل، عدد ۸ افقی را به‌دست می‌دهد.

آقای علی مشکین قلم (دانشجوی کامپیوتر تبریز)، از شما به خاطر ارسال زندگینامهٔ ریاضیدانان همراه با عکس آنها متشکریم. در صورت نیاز، در بخش مشاهیر ریاضی جهان یا ادب ریاضی از آنها استفاده خواهیم کرد.

آقای امیرحسین بسطامی (دانشجو از تهران)، از شما به خاطر ارسال ۱۸ مسأله با راه حل، متشکریم. از آن جا که مسائل ارسالی شما می‌تواند مورد استفادهٔ دانش‌آموزان قرار گیرد، بنابراین یکی از آنها را با راه حل آورده‌ایم:

ثابت کنید:

$$\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{8}$$

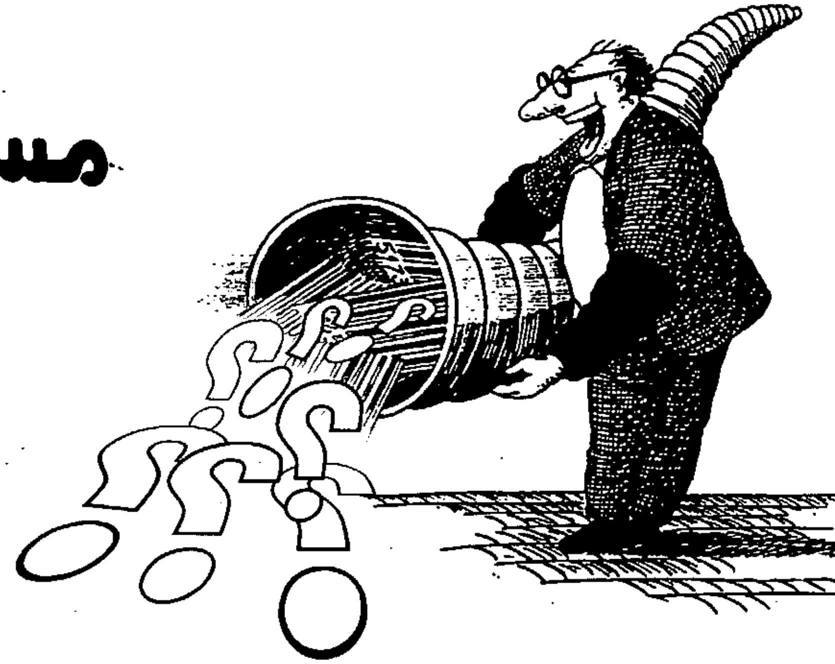
حل: ابتدا عبارت $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}$ را بر $2\sin\frac{\pi}{7}$ ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{(2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7})\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}$$

$$=\frac{(\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7})\cos\frac{3\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}}{4\sin\frac{\pi}{7}}$$

$$=\frac{\sin\pi+\sin\frac{\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{1}{8}$$

مسائل برای حل



□ احمد قندهاری
□ محمد هاشم رستمی
□ حمید رضا امیری
□ میرشهرام صدر
□ سید محمدرضا هاشمی موسوی

مسأله‌های ریاضی ۲

۱. نقطه‌ای روی نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم و در ربع چهارم قرار دارد و فاصلهٔ آن از مبدأ مختصات $\sqrt{34}$ است، مختصات نقطه را بیابید.

۲. اگر خط به معادلهٔ $x+ay=4$ بر خط به معادلهٔ $ax+by=3$ عمود باشد و از نقطهٔ $A(-1,1)$ نیز بگذرد، مقدار a و b را بیابید $(a,b\neq 0)$.

۳. اگر نقاط مفروض $A(2m-n\,,4m+4)$ و $B(2m+n,4n-4)$ نسبت به نقطهٔ $M(-2,2)$ قرینهٔ یکدیگر باشند، مقدار m و n را بیابید.

۴. معادلهٔ عمود منصف پاره خط MN را با فرض $M(-2,1)$ و $N(2,-3)$، بنویسید.

۵. نمودار $y=|x-2|$ را رسم کنید.

۶. طول مستطیلی، ۴ برابر عرض آن و محیط مستطیل، ۵۰ متر است. قطر مستطیل را حساب کنید.

۷. رأس مربعی روی مبدأ مختصات واقع است، در صورتی که معادلهٔ یک ضلع این مربع $6x+8y=3$ باشد، مساحت مربع را حساب کنید.

۸. به ازای چه مقدارهایی از m، سهمی به معادلهٔ $y=(2m^2-8)x^2-4$، دارای نقطهٔ ماکزیمم است؟

۹. حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$P=(\sqrt[3]{2-\sqrt{2}})(\sqrt[3]{\sqrt{2}+2})\sqrt[3]{4}$$

۱۰. مخرج کسر زیر را گویا کنید.

$$\frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$$

۱۱. درستی برابری زیر را تحقیق کنید. $(x\neq \frac{k\pi}{2})$

$$2\cos^2 x(1+\tan^2 x)+2\sin^2 x(1+\cot^2 x)=4$$

مسأله‌های ریاضی ۴

۱. با توجه به مجموعهٔ داده‌ها $\{11,12,13,14,15\}$، میانگین و انحراف معیار را حساب کنید.

۲. جملهٔ سوّم یک تصاعد عددی ۴، و جملهٔ یازدهم آن برابر ۱۲− است، جملهٔ نوزدهم آن چه عددی است؟

۳. شش جملهٔ اوّل یک تصاعد هندسی را مشخص کنید، که جملهٔ سوّم آن ۹− و جملهٔ پنجم آن ۸۱− باشد.

۴. معادلهٔ $\cot^2 x-3\cot x+2=0$ را حل کنید و جواب عمومی آن را بنویسید.

۵. اگر $\tan(x+y)=\frac{1}{3}$ و $\tan y=-2$، حاصل $|\cos x|$ را

بیابید.

۶. اگر $\vec{V_1}=\begin{bmatrix}-۶\\ ۸\end{bmatrix}$ و $\vec{V_2}=۳\vec{i}-۴\vec{j}$ ، طول دو بردار و زاویهٔ بین آن دو بردار را حساب کنید.

۷. با حرفهای کلمهٔ PENCIL، چند کلمهٔ چهار حرفی می‌توان ساخت؟ (تکرار حروف جایز نیست.)

۸. با عددهای ۰,۱,۲,۳,۴,۵ چند عدد پنج رقمی می‌توان نوشت، به طوری که :

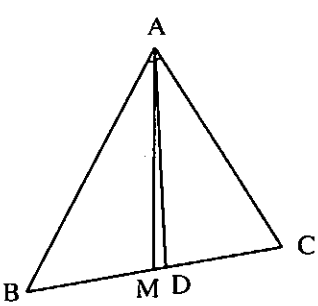
الف ـ زوج باشد. ب ـ بر ۵ بخش‌پذیر باشد. ج ـ باقیماندهٔ آن بر ۱۰ برابر ۲ باشد. د ـ بزرگتر از ۳۴۰۰۰ باشد.

۹. دو عدد از مجموعهٔ {۱,۲,۳,...,۹} انتخاب می‌کنیم، اگر مجموع این دو عدد زوج باشد، مطلوب است محاسبهٔ احتمال آن که، هر دو عدد فرد باشند.

صورت مسأله‌های هندسهٔ ۲

۱. الف. در مثلث ABC، $AB \neq AC$ است، ثابت کنید $d_a < m_a$ است، که d_a اندازهٔ نیمساز زاویهٔ درونی A و m_a اندازهٔ میانهٔ نظیر رأس A است.

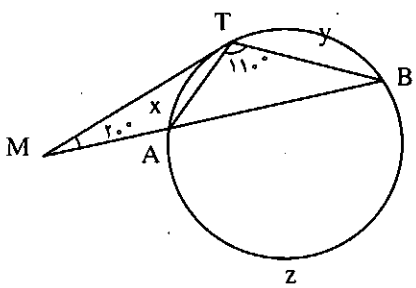
ب. ثابت کنید : در هر مثلث $d_a + d_b + d_c \le m_a + m_b + m_c$. تساوی در چه مثلثی برقرار است؟



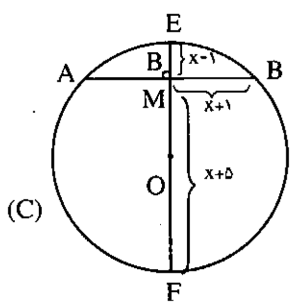
۲. خط d و دو نقطهٔ A و B غیر واقع بر این خط، در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای از این صفحه را بیابید، که از آن نقطه، پاره خط AB به زاویهٔ α دیده شود و فاصلهٔ این نقطه از خط، برابر طول پاره خط AB باشد.

۳. از مثلثی ضلع $BC = a$ ، اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A} = \alpha$ و r شعاع دایرهٔ محاطی درونی مثلث معلوم است، مثلث را رسم کنید.

۴. با استفاده از شکل داده شده، اندازهٔ x، y و z را تعیین کنید (خط MT در نقطهٔ T بر دایره مماس است).



۵. در دایرهٔ C(O,R) اندازهٔ x و از روی آن اندازهٔ R شعاع دایره را تعیین کنید.



۶. سه نقطهٔ $A=(۱,۲)$ ، $B=(-۲,۱)$ و $C=(۳,-۲)$ در یک دستگاه مختصات داده شده‌اند.

الف. قانون انتقالی را که نقطهٔ B را به نقطهٔ C نظیر می‌کند، تعیین کنید.

ب. مختصات نقطه‌های A' ، B' و C' به ترتیب تبدیل‌یافته‌های نقطه‌های A، B و C را با استفاده از انتقال قسمت الف به دست آورید.

پ. نقطهٔ A'' دوران یافتهٔ نقطهٔ A' تحت دوران $R(x,y)=(y,x)$ ، نقطهٔ B'' قرینهٔ نقطهٔ B' نسبت به مبدأ مختصات و نقطهٔ C'' مجانس نقطهٔ C تحت تجانس $H(x,y)=(۲x,۲y)$ را تعیین کنید.

ت. اندازهٔ ارتفاع رأس A'' از مثلث $A''B''C''$ و اندازهٔ مساحت این مثلث را به دست آورید.

۷. بازتاب خط $D:2x-y+1=0$ ، خط $D':x+2y-3=0$ است. معادلهٔ محور تقارن این بازتاب را بنویسید.

مسائل حسابان ۲

مسألهٔ ۱. مشتق‌پذیری تابع به معادلهٔ $f(x)=|x^2-4x+3|\sqrt{|x+1|}$ را در نقطهٔ $x_0=3$ بررسی کنید و زاویهٔ بین دو نیم مماس را در این نقطه بیابید.

مسألهٔ ۲. ثابت کنید: تناوب اصلی تابع به معادلهٔ $f(x)=\pi x-\lfloor nx\rfloor$ ، $n>0$ برابر $\frac{1}{n}$ است. $\lfloor x\rfloor$ نماد جزء صحیح x است.

مسألهٔ ۳. جدول تغییرات و منحنی به معادلهٔ $y=\frac{\cos x}{2\cos x+1}$ را در بازهٔ $[0,2\pi]$ رسم کنید.

مسألهٔ ۴. جدول تغییرات و منحنی تابع به معادلهٔ $y=\text{Arcsin}(x-2)$ را رسم کنید.

مسألهٔ ۵. در دایره‌ای به شعاع ۲cm مستطیلی به مساحت ماکزیمم محاط کرده‌ایم، مقدار این مساحت را بیابید.

مسألهٔ ۶. نامعادلهٔ $\log_{\frac{1}{5}}(x^2-4)>-1$ را حل کنید.

مسألهٔ ۷. معادله‌های دایره‌هایی را بنویسید که در ربع چهارم بر محورهای مختصات مماس باشد و از نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}1\\-1\end{matrix}\right.$ بگذرد.

مسألهٔ ۸. معادلهٔ یک هذلولی را بنویسید که نقاط $F\left|\begin{matrix}1\\2\sqrt{3}\end{matrix}\right.$ و $F'\left|\begin{matrix}1\\-2\sqrt{3}\end{matrix}\right.$ کانونهای آن باشد و خروج از مرکز آن $\frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

مسألهٔ ۹. مطلوب است محاسبهٔ $\int_{-3}^{3}\frac{dx}{9+x^2}$.

مسألهٔ ۱۰. مطلوب است محاسبهٔ $\int_{0}^{4}[x+1]dx$.

مسائل حساب دیفرانسیل و انتگرال ۲ پیش‌دانشگاهی

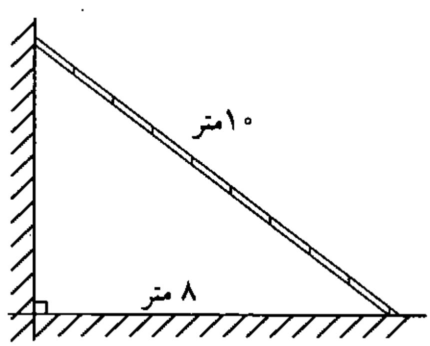
مسألهٔ ۱. ثابت کنید: برای هر دو عدد حقیقی x_1 و x_2 داریم: $|\text{Arctan}\,x_2-\text{Arctan}\,x_1|<|x_2-x_1|$.

مسألهٔ ۲. سوی تقعّر و نقاط عطف تابع به معادلهٔ $y=\sqrt[3]{1-x^2}$ را بیابید.

مسألهٔ ۳. نقطه‌ای روی منحنی تابع به معادلهٔ $y=x^2-2x$ بیابید، که فاصله‌اش از خط به معادلهٔ $y=2x-9$ مینیمم باشد و مقدار مینیمم را بیابید.

مسألهٔ ۴. مطلوب است رسم جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع به معادلهٔ $y=\frac{3x^2-1}{x^3}$.

مسألهٔ ۵. نردبانی به طول ۱۰ متر به دیواری تکیه دارد (مطابق شکل). اگر فاصلهٔ پای نردبان تا دیوار قائم ۸ متر باشد، چنانچه پای نردبان به اندازهٔ $\frac{1}{2}$ متر دورتر شود، به کمک دیفرانسیل مقدار تقریبی ارتفاع نردبان را حساب کنید.



مسألهٔ ۶. به کمک بالا ریمان یا پایین ریمان ثابت کنید: $\int_{0}^{b}x^3dx=\frac{b^4}{4}$.

مسألهٔ ۷. به کمک قاعدهٔ هوپیتال حدّ تابع به معادلهٔ

$y=\dfrac{x-\sin x-\frac{x^3}{6}}{x^5}$ وقتی $x\to 0$ را بیابید.

مسألهٔ ۸. مطلوب است محاسبهٔ $\int xe^{2x}dx$.

مسألهٔ ۹. مطلوب است محاسبهٔ $\int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}}\dfrac{5+\operatorname{Arcsin}x}{4+9x^2}dx$.

مسألهٔ ۱۰. سطح محصور بین منحنی تابع به معادلهٔ $y=\dfrac{\cos 2x}{\sin(x+\frac{\pi}{4})}$ و محورxها و دو خط $x=0$ و $x=\frac{\pi}{4}$ را بیابید.

مسائل ریاضیات گسستهٔ پیش‌دانشگاهی

۱. اگر $G=(V,E)$ یک گراف همبند باشد و $|E|=19$ و برای هر $a\in V$ داشته باشیم: $\deg(a)\geq 3$، در این صورت حداکثر مقدار $|V|$ را بیابید.

۲. اگر M ماتریس مجاورت گراف K_p باشد، ثابت کنید هر درایهٔ واقع روی قطر اصلی ماتریس M^2 برابر است با $(p-1)$.

۳. در یک تقسیم، مقسوم ۱۸ برابر باقیمانده است و باقیمانده حداکثر مقدار خود را دارا می‌باشد. مقسوم، مقسوم علیه، باقیمانده و خارج قسمت را معلوم کنید.

۴. اگر $(a,b)=1$، ثابت کنید $(a^m,b^n)=1$.

۵. با استفاده از روش استقرای ریاضی، ثابت کنید برای هر $n\in\mathbb{N}$ عبارت $(2^{2n}+6n-1)$ همواره بر ۹ بخش‌پذیر است.

۶. ثابت کنید برای هر $n\in\mathbb{N}$، $3^{15n+2}\times 2^{2n+2}\times 20^{2n}+3\overset{13}{\equiv}0$.

۷. مطلوب است تعداد شناسنامه‌هایی که شمارهٔ آنها پنج رقمی بوده و در هر یک از آنها، هر یک از رقمهای ۱ و ۵، حداقل یک بار به کار رفته باشد.

۸. اگر $A=\{2,4,6\}$ و رابطهٔ R روی A به صورت زیر تعریف شده باشد، مطلوب است محاسبهٔ (RoR) .

$R=\{(2,2)(4,4)(6,6)(2,4)(4,2)\}$

۹. اگر یک شرکت ساعت‌سازی دارای سه کارخانه باشد که ۴۷ درصد، ۲۶ درصد و ۲۷ درصد از محصولات این شرکت را تأمین می‌کنند و درصد تولید ساعتهای معیوب در این کارخانه‌ها به ترتیب ۸ و ۶ و ۵ باشد، چه قدر احتمال دارد جنسی که به تصادف از تولیدات این شرکت انتخاب می‌شود، معیوب باشد.

۱۰. یک تاس و دو سکه را با هم می‌اندازیم و این عمل را ۵ بار تکرار می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن که دقیقاً سه بار از این ۵ بار «دو سکه H و تاس عدد ۶» را نشان دهد.

۱۱. در جعبه‌ای ۷ عدد لامپ وجود دارد که ۳ تای آنها خراب است، یک نمونهٔ ۴ تایی را از آن جعبه به تصادف خارج می‌کنیم. اگر تابع توزیع احتمال X ، تعداد لامپهای خراب در این نمونه باشد، جدول توزیع احتمال X را بنویسید.

مسائل ریاضی عمومی ۲ پیش دانشگاهی

۱. اگر برای هر $x\in\mathbb{R}$، $f(x)=|x^3+3x|$ ، مشتق‌پذیری تابع را در نقاط $x=0$ و $x=-3$ بررسی کنید.

۲. معادلهٔ خط مماس بر منحنی با ضابطهٔ $\sin x\cos y=\frac{1}{2}$ در نقطه‌ای به طول $x=\frac{\pi}{4}$ واقع بر منحنی را بیابید.

۳. تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+x+1}$ مفروض است، نقاط بحرانی و نقاط ماکزیمم و مینیمم مطلق یا نسبی تابع را (در صورت وجود) تعیین کنید.

۴. ضرایب a و b و c را چنان تعیین کنید که، تابع با ضابطهٔ $f(x)=ax^2+bx+c$ در (۷ و ۱) ماکزیمم نسبی داشته باشد و نمودار تابع از نقطهٔ $(2,-2)$ بگذرد.

۵. ارتفاع یک استوانهٔ مستدیر قائم با بزرگترین مساحت جانبی محاط در یک کره به شعاع ۶ سانتیمتر را بیابید.

۶. نمودار منحنی با ضابطهٔ $y=\dfrac{2x^2+1}{x^2+2x}$ را رسم کنید.

۷. معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که، بر خطهای به معادلهٔ $D:4x-3y-30=0$ و $D':4x-3y+10=0$ مماس بوده و خط $\Delta:x+3y-10=0$ قطری از آن باشد.

۸. معادلهٔ هذلولی را بنویسید که دو خط به معادله‌های $3x+4y=7$ و $3x-4y=-1$ مجانبهای آن و $F(6,1)$ یکی از کانونهای آن باشد.

۹. با استفاده از نمودار، مقدار انتگرال معین زیر را بیابید:

$$\int_{-3}^{2}\left|x^2-3x\right|dx$$

۱۰. مقدار هر یک از انتگرالهای زیر را بیابید:

الف) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\sin x-\sin 3x}{1+\cos x}dx$

ب) $\int_{-2}^{6}x^2\sqrt[3]{x+2}\;dx$

۱۱. حاصل $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x-1}}$ را بیابید.

۱۲. حجم حادث از دوران سطح محصور بین منحنی به معادلهٔ $y=\frac{1}{\cos x}$ و محور yها و خط به معادلهٔ $x=\frac{\pi}{3}$ را بیابید.

مسائل ریاضی پایهٔ پیش‌دانشگاهی

۱. برای هر عدد طبیعی n به کمک اصل استقرای ریاضی ثابت کنید:

الف.

$$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

ب. ثابت کنید: 10^n-1 بر ۹ بخش‌پذیر است.

۲. ثابت کنید: $3+\sqrt{5}$ عددی گنگ است.

۳. جملهٔ عمومی یک دنباله $a_n=n^2-22n+120$ است، جملهٔ چندم آن منفی است؟

۴. از ارتفاع ۲ متری زمین، توپی را رها می‌کنیم. در صورتی که توپ در هر بار برخورد به زمین، نصف ارتفاع قبل بالا بیاید، مجموع فاصله‌هایی را بیابید که توپ در هر بار برخورد به زمین بالا می‌آید، تا این که بر سطح زمین ساکن شود.

۵. اگر مجموع یازدهٔ جملهٔ نخست یک دنبالهٔ حسابی ۱۱۰ و مجموع هفت جملهٔ ابتدایی آن ۱۴ باشد، قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۶. در یک دنبالهٔ هندسی مجموع چهار جملهٔ نخست آن ۱۵ و مجموع هشت جملهٔ اوّلیهٔ آن ۲۵۵ است، قدرنسبت این دنباله را پیدا کنید.

۷. در دنبالهٔ فیبوناتچی، مجموع شش جملهٔ اوّل دنبالهٔ فیبوناتچی بر کدام یک از اعداد اوّل، بخش‌پذیر است.

۸. اگر $\log_3^a$ و $\log_3^b$ ریشه‌های معادلهٔ $x^2-3x-(\log_3^{10})^2=0$ باشند، حاصل $\frac{ab}{\log_3^a+\log_3^b}$ را بیابید.

۹. یک شرکت، x واحد کالا را در هفته تولید می‌کند و به فروش می‌رساند، معادله‌های هزینه و تقاضای هفتگی به صورت زیر داده شده است:

$C(x)=5000+2x$: معادلهٔ هزینه

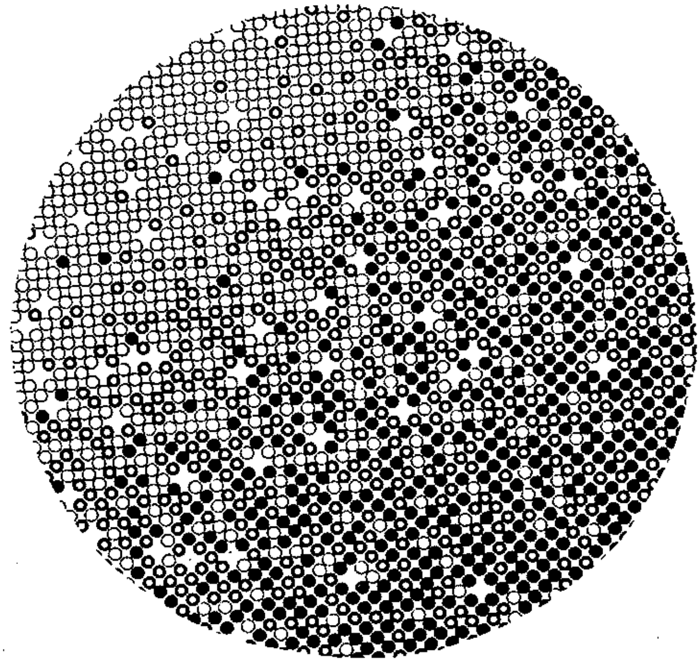
$x=1000-10p$: معادلهٔ تقاضا

الف ـ معادلهٔ درآمد شرکت را پیدا کنید. ب ـ چند واحد کالا در هفته تولید کند، تا بیشترین درآمد را داشته باشد، ج ـ سپس بیشترین درآمد شرکت را در هفته بیابید. د ــ چند واحد کالا در هفته تولید کند، تا بیشترین سود را داشته باشد.

۱۰. در کلاسی ۱۰ مرد و ۲۰ زن شرکت دارند، به طوری که نصف مردان و نصف زنان چشم قهوه‌ای هستند، یک نفر را به تصادف از این کلاس انتخاب می کنیم، احتمال این که مرد یا چشم قهوه‌ای باشد، کدام است؟

۱۱. احتمال آن که یک دانش‌آموز از درسهای فیزیک و ریاضی نمره بیاورد، بترتیب ۰/۴ و ۰/۳ است؛ اگر احتمال گذراندن حداقل یکی از آنها ۰/۶ باشد، احتمال آن را به دست آورید، که دانش‌آموز در هر دو درس نمره بیاورد.

۱۲. اگر در بسط دو جمله‌ای $(K^5x^3+4)^5$، مجموع ضرایب برابر ۲۴۳ باشد، K را بیابید.



حلّ مسائل برهان ۲۵

حلّ مسائل ریاضی ۱

● سید محمدرضا هاشمی موسوی

۱. $A=\{x\in\mathbb{R} | x\geq 4\}$ و $B=\{x\in\mathbb{R} | x<-3\}$

$$A\cup B=\{x\in\mathbb{R} | x<-3\ ;\ x\geq 4\}$$
$$\Rightarrow (A\cup B)'=\{x\in\mathbb{R} | -3\leq x<4\}$$
$$A'=\{x\in\mathbb{R} | x<4\}\ ,\quad B'=\{x\in\mathbb{R} | x\geq -3\}$$
$$\Rightarrow A'\cap B'=\{x\in\mathbb{R} | -3\leq x<4\}$$

بنابراین :

$$(A\cup B)'=A'\cap B'$$

۲. می‌دانیم تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی برابر با 2^n است. بنابراین :

$$2^{k+5}-112=2^{k+2}\ ;\ 2^5\times 2^k-2^2\times 2^k=112\ ;$$
$$2^k(32-4)=112\ ;\ 28\times 2^k=112\ ;\ 2^k=\frac{112}{28}=4\ ;$$
$$2^k=2^2\ ;\ \boxed{k=2}$$

۳.

$$P=\frac{2^5\times 2^x+2^3\times 2^x-2^4\times 2^x+5\times 2\times 2^x}{27\times 2\times 2^x+9\times 2^2\times 2^x+9\times 2^4\times 2^x-45\times 2^2\times 2^x}$$
$$=\frac{2^x(32+8-16+10)}{2^x(54+36+144-180)}=\frac{34}{54}=\frac{17}{27}$$

۴.

$$\begin{cases}x-y=\sqrt{5}\\ xy=2\end{cases}\ :\ \begin{cases}x-y=\sqrt{5}\\ y=\dfrac{2}{x}\end{cases}$$

$$(x^3-y^3)^2=\left[(x-y)(x^2+xy+y^2)\right]^2$$
$$=\left[\sqrt{5}\left((x-y)^2+3xy\right)\right]^2$$
$$=5\left[(\sqrt{5})^2+3(2)\right]^2$$
$$=5(5+6)^2=5\times 11^2=5\times 121=605$$

۵.

$$\sqrt{4x-4}+\sqrt{\frac{1}{x+1}}+\sqrt{\frac{2}{2-x}}$$

دامنهٔ متغیّر :

$$\begin{cases}4x-4\geq 0\\ \dfrac{1}{x+1}>0\\ \dfrac{2}{2-x}>0\end{cases}\ ;\ \begin{cases}x\geq 1\\ x>-1\\ x<2\end{cases}\Rightarrow 1\leq x<2$$

۶.

$$1)\ 2x^3+2x^2-8x-8=2x^2(x+1)-8(x+1)$$
$$=2(x+1)(x^2-4)$$
$$=2(x+1)(x-2)(x+2)$$

$$2)\ (2x^3+x+5)^2-(x+3)^2$$
$$=(2x^3+x+5-x-3)(2x^3+x+5+x+3)$$
$$=2(x^3+1)(2x^3+2x+8)$$
$$=4(x+1)(x^2-x+1)(x^3+x+4)$$

۷.

$$P=\frac{(x-k)(x+k)(x^2-kx+k^2)(k^2+kx+x^2)(x-1)(x-2)}{(x+k)(x-k)(x^2+kx+k^2)(k^2-kx+x^2)(x-2)}$$
$$=x-1$$

حلّ مسائل هندسهٔ ۱

● محمد هاشم رستمی

۱ـ با توجه به شکل، $AB=A'B'$ و $AC=A'C'$، از آن‌جا :

$$\begin{cases}2x-3=y+3\\ y+1=x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x-y=6\\ -x+y=-1\end{cases}\Rightarrow x=5\ ,\ y=4$$

۲ـ ارتفاع برج را x و اندازهٔ پاره‌خط AH را برابر y فرض می‌کنیم، در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ ACH و BCH داریم :

$$\mathrm{tg}\,30^\circ=\frac{CH}{AH}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{x}{y+100}$$

$$\Rightarrow x-\frac{\sqrt{3}}{3}y=\frac{100\sqrt{3}}{3}\qquad (1)$$

$$\mathrm{tg}\,60^\circ=\frac{CH}{AH}\Rightarrow\sqrt{3}=\frac{x}{y}\Rightarrow x=\sqrt{3}\,y\qquad (2)$$

$$(1)\ \text{و}\ (2)\Rightarrow\sqrt{3}y-\frac{\sqrt{3}}{3}y=\frac{100\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\frac{2\sqrt{3}}{3}y=\frac{100\sqrt{3}}{3}$$

$\Rightarrow y=50\Rightarrow x=50\sqrt{3}$ ارتفاع برج

۳ـ می‌دانیم که $BC^2=BH\cdot AB$ است. پس :

$$64=2\times AB\Rightarrow AB=32$$

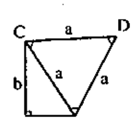
از طرفی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم : $AB^2=AC^2+BC^2$. بنابراین :

$$32^2=AC^2+8^2\Rightarrow AC=8\sqrt{15}$$

و مساحت مثلث برابر است با :

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}\times 8\sqrt{15}\times 8=32\sqrt{15}$$

۴ـ مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=90^\circ$) را درنظر می‌گیریم. با توجه به داده‌های مسأله داریم :



$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=2\times\frac{1}{2}bc\Rightarrow a^2\sqrt{3}=4bc\ ،\ a^2=b^2+c^2$$
$$\Rightarrow\sqrt{3}(b^2+c^2)=4bc\Rightarrow\sqrt{3}\,b^2-4bc+\sqrt{3}c^2=0$$
$$\Rightarrow(\sqrt{3}b-c)(b-\sqrt{3}c)=0\Rightarrow\sqrt{3}b-c=0$$
$$\Rightarrow\frac{b}{c}=\frac{1}{\sqrt{3}}\ ,\ b-\sqrt{3}c=0\Rightarrow\frac{b}{c}=\sqrt{3}$$

۵ـ با توجه به این که نسبت مساحتهای دو مثلث متشابه، برابر مجذور نسبت تشابه آن دو مثلث است، خواهیم داشت :

$$\left(\frac{AH}{A'H'}\right)^2=\frac{4}{25}\Rightarrow\left(\frac{x-1}{2x+1}\right)^2=\frac{4}{25}\Rightarrow\frac{x-1}{2x+1}=\frac{2}{5}$$
$$\Rightarrow 5x-5=4x+2\Rightarrow x=7$$

۶ـ داریم :

الف. اندازهٔ ضلع مربع محیط بر یک دایره برابر قطر آن دایره

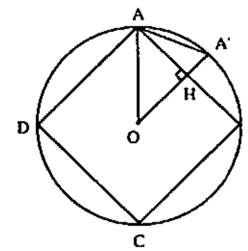
است. بنابراین:

ضلع مربع محیطی $= 2\times12 = 24cm$

ب. ضلع مربع محاط در دایره‌ای به شعاع R برابر $C_4 = R\sqrt{2}$ است. پس:

$C_4 = 12\sqrt{2}$

پ. برای محاسبهٔ C_8 از دستور محاسبهٔ C_8 بر حسب C_4 (C_{2n} برحسب C_n) می‌توان استفاده کرد و یا می‌توان از شکل زیراستفاده نمود، که در آن 'AA ضلع هشت‌ضلعی منتظم محاط در دایره و AB ضلع مربع محاط در دایره است. داریم:



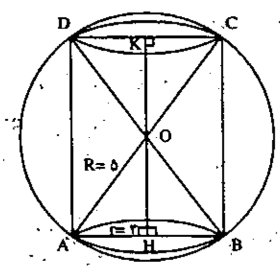
$OA' = 12 \cdot OH = AH = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\times12\times\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

$\Rightarrow HA' = OA' - OH = 12 - 6\sqrt{2}$,

$AA' = \sqrt{AH^2 + HA'^2} = \sqrt{72 + (12-6\sqrt{2})^2}$

$= 12\sqrt{2-\sqrt{2}}$

۷ـ ارتفاع استوانه را محاسبه می‌کنیم. داریم:



$OH = \sqrt{25-9} = 4$

$\Rightarrow HK = 8cm$ ارتفاع استوانه

از آن‌جا با توجه به این که $r=3$ ، $h=4$ و $R=5$ است، داریم:

جانبی استوانه $S = 2\pi rh = 2\pi\times3\times8 = 48\pi cm^2$

حجم استوانه $= \pi r^2h = \pi\times3^2\times8 = 72\pi cm^3$

حجم کره $= \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\times5^3 = \frac{500\pi}{3}cm^3$

$\frac{\text{حجم استوانه}}{\text{حجم کره}} = \frac{72\pi}{\frac{500\pi}{3}} = \frac{216}{500} = \frac{54}{125}$

حلّ مسائل ریاضی ۳

● سید محمدرضا هاشمی موسوی

۱. $\frac{x}{x+1}+2 > \frac{1}{x+1}$; $\frac{x}{x+1}-\frac{1}{x+1}+2>0$;

$\frac{x-1}{x+1}+2>0$; $\frac{x-1+2x+2}{x+1}>0$; $\frac{3x+1}{x+1}>0$

x	$-\infty$ تا -1	-1 تا $-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$ تا $+\infty$
x+1	−	+	+
3x+1	−	−	+
جواب	+	−	+

مجموعهٔ جوابهای نامعادله $= \left\{x\in\mathbb{R} \,|\, x<-1 ; x > \frac{-1}{3}\right\}$

۲.

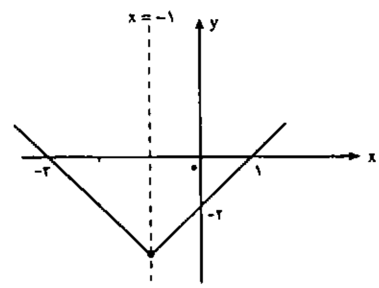
$\sqrt{3x^2+4} - \sqrt{2x+9} = 0$; $\sqrt{3x^2+4} = \sqrt{2x+9}$;

$3x^2+4 = 2x+9$; $3x^2-2x-5=0$;

$(x+1)(3x-5)=0$; $x=-1$; $x=\frac{5}{3}$

۳. $f(x) = |x+1|-2 = \begin{cases} x-1 & x\ge -1 \\ -x-3 & x<-1\end{cases}$

با استفاده از تعریف یک به یکی:



$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow |x_1+1|-2 = |x_2+1|-2$

$\Rightarrow |x_1+1| = |x_2+1|$

$\Rightarrow x_1+1 = \pm(x_2+1) \not\Rightarrow x_1 = x_2$

اگر خطی موازی محور xها رسم کنیم، نمودار را در دو نقطه قطع می‌کند. بنابراین f یک به‌یک نیست.

۴. $S_n = (n+1)^2 - 1 = n^2+2n+1-1 = n^2+2n$ (1)

$S_n = \frac{d}{2}n^2 + (a-\frac{d}{2})n$ (2)

از مقایسهٔ رابطه‌های (۱) و (۲):

$\begin{cases}\frac{d}{2} = 1\\ a-\frac{d}{2} = 2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=2 \\ a=3\end{cases}, 13+7a+7d = 13+21+14=48$

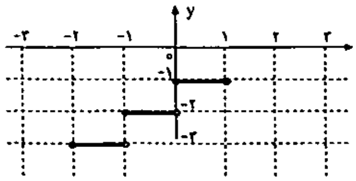
۵. اگر a، a_n و q بترتیب جملهٔ اول، جمله nام و قدر نسبت تصاعد هندسی مورد نظر باشند:

$a_3 = aq^2$, $a_9 = aq^8$: $a_3.a_9 = a^2q^{10} = 96$

$a_2 = aq = 6$, $a_{10} = aq^9$: $a_2.a_{10} = a^2q^{10}$

$\Rightarrow a_2.a_{10} = a_3.a_9$; $a_{10} = \frac{a_3.a_9}{a_2} = \frac{96}{6} = 16$

۶. برای رسم نمودار $y=[x+1]-2$ یا $y=[x]-1$، باشرط $-2\le x<1$، بترتیب زیر عمل می‌کنیم:



$-2\le x<-1$: $y=-2-1=-3$

$-1\le x<0$: $y=-1-1=-2$

$0\le x<1$: $y=0-1=-1$

۷. با توجه به قانونهای لگاریتم:

$\log_5(x-1) - \log_5(x^2-1) = -2\log_5^2$:

$\log_5\left(\frac{x-1}{x^2-1}\right) = \log_5^{\frac{1}{4}}$:

$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{4}$; $x+1=4$; $\boxed{x=3}$

حلّ مسائل ریاضی ۵

● میرشهرام صدر

۱ـ $-x^2\le0$; $x^2-x+1>0$;

$x^4 - x^3 = 0 \Rightarrow x^3(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases}x=0\\x=1\end{cases}$

x	$-\infty$ تا 0	0 تا 1	1 تا $+\infty$
$-x^2$	−	−	−
x^2-x+1	+	+	+
x^3	−	+	+
x−1	−	−	+
P	−	+	−

تعریف نشده (در 0)، تعریف نشده (در 1)

$D=(0,1)$

۲ـ در صورتی که به جای x در تابع x− قرار دهیم، خواهیم داشت:

$\begin{matrix} -bx \\ ax \end{matrix}\begin{cases} af(-x)+bf(x) = -cx \\ af(x)+bf(-x) = cx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{-abf(-x)} - b^2f(x) = bcx \\ a^2f(x)+\cancel{abf(-x)} = acx\end{cases}$

$(a^2-b^2)f(x) = (a+b)cx$

$\Rightarrow f(x) = \frac{cx}{a-b}$ $(a\ne -b)$

۳ـ الف:

$\begin{cases}\frac{5x-x^2}{4}>0 \Rightarrow x\in(0,5) \\ \log\frac{5x-x^2}{4}\ge0 \Rightarrow \log\frac{5x-x^2}{4}\ge\log1 \Rightarrow \frac{5x-x^2}{4}\ge1\end{cases}$

$\Rightarrow x\in[1,4]$

$\Rightarrow \begin{cases}x\in(0,5)\\x\in[1,4]\end{cases}\Rightarrow D_f=[1,4]$

ب: $g(x) = \frac{x+1}{x-[x]}$

$x-[x]=0\Rightarrow x=[x]\Rightarrow x\in Z \Rightarrow D_g = \mathbb{R}-Z$

۴ـ $D_{fog} = \{x \,|\, x\in D_g , g(x)\in D_f\}$

$x-2\ge0 \Rightarrow D_f = [2,+\infty)$

$x^2-1\ge0\Rightarrow x^2\ge1\Rightarrow x\le-1$ یا

$x\ge1 \Rightarrow D_g = (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

$$\begin{cases} x \in D_g \Rightarrow x \in (-\infty,-1)\cup(1,+\infty) \\ \quad و \\ \sqrt{x^2-1} \in [2,+\infty) \Rightarrow \sqrt{x^2-1} \geq 2 \Rightarrow x^2-1 \geq 4 \\ \Rightarrow x^2 \geq 5 \Rightarrow x \leq -\sqrt{5} \;\; \text{یا} \;\; x \geq \sqrt{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty,-1)\cup(1,+\infty) \\ \quad و \\ x \in (-\infty,-\sqrt{5})\cup(\sqrt{5},+\infty) \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_{fog} = (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$$

۵ـ الف: $L = \lim_{x\to 2}(x^2-2x)\tan\frac{\pi}{4}x = 0\times\infty$

در این حالت، برای رفع ابهام، حدّ تابع را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$L = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{\frac{1}{\tan\frac{\pi}{4}x}} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{\cot\frac{\pi}{4}x} = \lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)}{\tan(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}x)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)}{\tan\left[-\frac{\pi}{4}(x-2)\right]}$$

وقتی $x \to 2$، خواهیم داشت $x-2 \to 0$، بنابراین با تغییر متغیر زیر داریم:

$$\begin{cases} x-2=t \Rightarrow x=t+2 \\ x \to 2 \\ t \to 0 \end{cases}$$

$$L = \lim_{t\to 0}\frac{(t+2)\times t}{\tan(-\frac{\pi}{4}t)} = \lim_{t\to 0}\frac{(t+2)\times t}{-\frac{\pi}{4}t} = \frac{2}{-\frac{\pi}{4}} = \frac{-8}{\pi}$$

ب: $L = \lim_{x\to -\infty}\sqrt{4x^2-8x-1}+2x = \infty-\infty$

$$L = \lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{4x^2-8x-1}+2x\right)\times\frac{\sqrt{4x^2-8x-1}-2x}{\sqrt{4x^2-8x-1}-2x}$$

$$= \lim_{x\to -\infty}\frac{-8x-1}{\sqrt{x^2\left(4-\frac{8}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}-2x}$$

$$= \lim_{x\to -\infty}\frac{x(-8-\frac{1}{x})}{x\left(-\sqrt{4-\frac{8}{x}-\frac{1}{x^2}}-2\right)}$$

$$= \frac{-8}{-4} = 2$$

۶ـ

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(\tfrac{1}{2})$$

(۱) $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}[-x] = -3$

(۲) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\frac{a|x-2|}{x-2} = \lim \lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{-a(x-2)}{x-2} = -a$

(۳) $f(2) = (b+1)\times 2 = 2b+2$

با توجه به تعریف پیوستگی تابع در یک نقطه و رابطه‌های (۱) و ب(۲) و (۳) داریم:

$$\begin{cases} -a=-3 \\ 2b+2=-3 \end{cases} \Rightarrow a=3, b=\frac{-5}{2}$$

۷ـ الف:

$$y=3\sin^5\left(\sqrt[5]{\frac{x+2}{x}}\right) \Rightarrow y'=3\times 5\times\frac{\frac{-2}{x^2}}{5\sqrt[5]{\left(\frac{x+2}{x}\right)^4}}$$

$$= \frac{-6}{x^2\sqrt[5]{\left(\frac{x+2}{x}\right)^4}}$$

ب: $y = \frac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x^2-1}} \Rightarrow$

$$y' = \frac{\left(\sqrt{x}+\frac{x}{2\sqrt{x}}\right)\times\sqrt[3]{x^2-1} - \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}(x\sqrt{x}-1)}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$$

$$\Rightarrow y = \frac{3\left(\frac{3x}{2\sqrt{x}}\right)(x^2-1)-2x(x\sqrt{x}-1)}{(x^2-1)\sqrt[3]{x^2-1}}$$

۸ـ

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{x+\Delta x+2}{2(x+\Delta x)-3}-\frac{x+2}{2x-3}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(2x-3)(x+\Delta x+2)-(x+2)[2(x+\Delta x)-3]}{\Delta x[2(x+\Delta x)-3](2x-3)}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-7\Delta x}{\Delta x[2(x+\Delta x)-3](2x-3)} = \frac{-7}{(2x-3)^2}$$

۹ـ ابتدا محلّ تقاطع دو منحنی را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} y=x^2-3x-3 \\ y=x^2-5x+1 \end{cases}$$

$$x^2-3x-3=x^2-5x+1 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2$$

$$x=2 \Rightarrow y=2^2-3\times 2-3=-5$$

$\Rightarrow A\Big|_{-5}^{2}$ محل برخورد دو منحنی

سپس شیب خط مماس بر هر دو منحنی را در نقطهٔ $A\Big|_{-5}^{2}$ به‌دست می‌آوریم:

$$y=x^2-3x-3 \Rightarrow y'=2x-3 \Rightarrow m_{1\,\text{مماس}}=1$$

$$y=x^2-5x+1 \Rightarrow y'=2x-5 \Rightarrow m_{2\,\text{مماس}}=-1$$

$\tan\alpha = \frac{|m_1-m_2|}{1+m_1m_2} = \frac{|1-(-1)|}{1+1(-1)} = \frac{2}{1-1}$ تعریف نشده

چون $\tan\alpha$، تعریف نشده است؛ لذا زاویهٔ بین دو منحنی برابر است با: $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

حلّ مسائل جبر و احتمال

● **میرشهرام صدر**

۱ـ روش استدلالی که به کمک یک مثال بتوان، درستی یک حکم را نقض کرد، روش استدلال به‌وسیلهٔ مثال نقض گوییم. برای بررسی رابطهٔ $n(A-B)=n(A)-n(B)$، فرض کنیم، $A=\{2,3,4,5\}$ و $B=\{3,4,6\}$. بنابراین داریم:

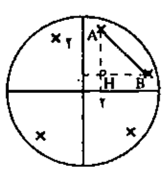
$$A-B=\{2,5\} \Rightarrow n(A-B)=2 \qquad (1)$$

$$n(A)=4,\; n(B)=3$$

$$\Rightarrow n(A)-n(B)=4-3=1 \qquad (2)$$

با توجه به رابطه‌های (۱) و (۲) ملاحظه می‌کنیم که حکم $n(A-B)=n(A)-n(B)$ در حالت کلی برقرار نیست. درحقیقت با ارائهٔ یک مثال نقض، نادرستی این حکم را در حالت کلی ثابت کردیم.

۲ـ اگر دو قطر عمود بر هم را در دایره رسم کنیم، دایره به چهار قسمت تقسیم می‌شود، اگر این چهار قسمت را به عنوان چهار لانه و پنج نقطه را به عنوان پنج کبوتر در نظر بگیریم و قرار باشد کبوترها، لانه‌ها را اشغال کنند، آن‌گاه طبق اصل لانهٔ کبوتری، حداقل یک لانه موجود است که با بیش از یک کبوتر پُر می‌شود. بنابراین داریم:



$$AH<2 \Rightarrow AH^2<4$$

$$BH<2 \Rightarrow \underline{BH^2<4}$$

$$AH^2+BH^2<8 \Rightarrow AB^2<8$$

$$\Rightarrow AB<2\sqrt{2}$$

۳ـ اثبات به برهان خُلف. فرض کنیم $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ و هیچ کدام از 2^n زیرمجموعهٔ A، حاصل جمع اعضایشان بر n بخش‌پذیر نباشد، بنابراین، زیرمجموعه‌هایی از A مانند:

$$A_1=\{a_1\},\; A_2=\{a_1,a_2\}, A_3=\{a_1,a_2,a_3\}, \ldots, A_n=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$$

نیز مجموع اعضایشان مضرب n نیست، پس عددهای زیر هیچ کدام بر n بخش‌پذیر نیستند:

$$S_1=a_1 \;,\; S_2=a_1+a_2 \;,\; S_3=a_1+a_2+a_3, \ldots,\; S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$$

از طرفی می‌دانیم باقیماندهٔ تقسیم این n عدد طبیعی بر n، یکی از اعداد ۱ تا $n-1$ است (چون این عددها هیچ کدام بر n بخش‌پذیر نیستند، پس صفر جزو باقیمانده‌ها نیست)، لذا چون n موجود است و $n-1$ باقیمانده، داریم (از ۱ تا $n-1$)، پس طبق **اصل لانهٔ کبوتری**، حداقل ۲ عدد از این n عدد باقیماندهٔ تقسیمشان بر n با هم برابر می‌شود، فرض کنیم S_i و S_j بر *n* هم باقیمانده باشند که $j>i$، پس داریم:

$$S_j-S_i=kn \;,(k\in z) \;,\; S_j-S_i=a_{i+1}+\ldots+a_j$$

واضح است که $a_{i+1},\ldots,a_j$ اعضای A هستند و اگر قرار دهیم $B=\{a_{i+1},\ldots,a_j\}$، همواره $B\subset A$ و دیدیم که مجموع اعضای B مضرب n است و این، با فرض خُلف تناقض دارد، در نتیجه، حکم ثابت می‌شود.

۴ـ درست است $n=1: 2!<2^2(1!)^2 \Rightarrow 2<4$

فرض استقرا $n=k: (2k)!<2^{2k}(k!)^2$

حکم استقرا $n=k+1: (2k+2)!<2^{2k+2}[(k+1)!]^2$

دو طرف فرض استقرا را در $(2k+1)(2k+2)$ ضرب می‌کنیم:

$$(2k+2)(2k+1)(2k)!<(2k+2)(2k+1)2^{2k}(k!)^2$$

$$\Rightarrow (2k+2)!<2(k+1)(2k+1)2^{2k}(k!)^2$$

$< 2(k+1)(2k+2)2^{2k}(k!)^2$

$\Rightarrow (2k+2)! < (k+1)^2 2^{2k+2}(k!)^2$

$\Rightarrow (2k+2)! < 2^{2k+2}[(k+1)!]^2$

۵ـ الف : $(ac+bd)^2 \le (a^2+b^2)(c^2+d^2)$

$\Leftrightarrow a^2c^2+2abcd+b^2d^2 \le a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$

$\Leftrightarrow a^2d^2+b^2c^2-2abcd \ge 0$

$\Leftrightarrow (ad-bc)^2 \ge 0$

ب : $a^2+b^2+1 \ge ab+a+b$

$\Leftrightarrow 2(a^2+b^2+1) \ge 2(ab+a+b)$

$\Leftrightarrow (a^2-2ab+b^2)+(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1) \ge 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2 \ge 0$

۶ـ الف : $A\cap B=\varnothing,\ A\cup B=M \Rightarrow B'=A$

$B' = M\cap B' = (A\cup B)\cap B' = (A\cap B')\cup(B\cap B')$

$= A\cap B' = \varnothing\cup(A\cap B')$

$= (A\cap B)\cup(A\cap B')$

$= A\cap(B\cup B') = A\cap U = A$

$\Rightarrow B'=A$

ب : $A\cap(B-C) = (A\cap B)-(A\cap C)$

$(A\cap B)-(A\cap C) = (A\cap B)\cap(A\cap C)'$

$= (A\cap B)\cap(A'\cup C')$

$= [(A\cap B)\cap A']\cup[(A\cap B)\cap C'] = (A\cap B)-C$

ـ۷

$A_1 = \{m\in Z \mid m \ge -1\ ,\ 2^m \le 1\} = \{-1,0,1\}$

$A_2 = \{m\in Z \mid m \ge -2\ ,\ 2^m \le 2\} = \{-2,-1,0,1\}$

$A_2^2 - A_1^2 = \{(-2,-2),(-2,-1),(-2,0),(-2,1),$
$(-1,-2),(0,-2),(1,-2)\}$

چون مجموعهٔ $A_2^2 - A_1^2$ دارای ۷ عضو است، بنابراین $128 = 2^7$ زیرمجموعه دارد.

۸ـ الف :

$(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow (b-d) = 5(a-c)$

۱ـ بازتابی $(a,b)R(a,b) \Leftrightarrow (b-b) = 5(a-a)$

$\Leftrightarrow 0=0$

۲ـ تقارنی $(a,b)R(c,d) \Rightarrow (c,d)R(a,b)$

$(a,b)R(c,d) \Rightarrow (b-d) = 5(a-c)$

$\Rightarrow -(b-d) = -5(a-c)$

$\Rightarrow (d-b) = 5(c-a)$

$\Rightarrow (c,d)R(a,b)$

۳ـ تعدّی $\begin{cases}(a,b)R(c,d)\\ \text{و}\\ (c,d)R(e,f)\end{cases} \Rightarrow (a,b)R(e,f)$

$\left.\begin{array}{l}(a,b)R(c,d) \Rightarrow b-d = 5(a-c)\\ (c,d)R(e,f) \Rightarrow d-f = 5(c-e)\end{array}\right\}$

$\Rightarrow b-f = 5(a-e) \Rightarrow (a,b)R(e,f)$

بنابراین، رابطهٔ R روی $\mathbb{R}^2$ هم ارزی است.

ب : $[(2,3)] = \{(x,y) \mid (x,y)R(2,3)\}$

$(x,y)R(2,3) \Rightarrow y-3 = x-2 \Rightarrow y = x+1$

$[(2,3)] = \{(x,y) \mid y = x+1\}$

ـ۹ $3^{6n+2}+3^{3n+1}+1 \overset{13}{\equiv} 0$

$\left.\begin{array}{l}3^3 \overset{13}{\equiv} 1 \Rightarrow 3^{6n} \overset{13}{\equiv} 1 \Rightarrow 3^{6n+2} \overset{13}{\equiv} 9\\ 3^3 \overset{13}{\equiv} 1 \Rightarrow 3^{3n} \overset{13}{\equiv} 1 \Rightarrow 3^{3n+1} \overset{13}{\equiv} 3\end{array}\right\}$

$\Rightarrow 3^{6n+2}+3^{3n+1} \overset{13}{\equiv} 12$

$\Rightarrow 3^{6n+2}+3^{3n+1}+1 \overset{13}{\equiv} 0$

۱۰ـ الف : $n(S) = \binom{11}{3} = 165$

$n(A) = \binom{5}{1}\times\binom{4}{1}\times\binom{2}{1} = 40$

$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{40}{165} = \frac{8}{33}$

ب : $n(B) = \binom{5}{1}\binom{4}{2}\binom{2}{0} + \binom{5}{0}\binom{4}{2}\binom{2}{1} + \binom{5}{0}\binom{4}{3}\binom{2}{0}$

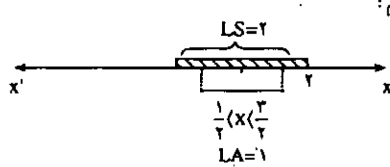
$= 30+12+4 = 46 \Rightarrow P(B) = \frac{46}{165}$

ـ۱۱ $\overbrace{\qquad\quad}^{1m}$ و $\overbrace{\underbrace{\qquad}_{x}\ A\ \underbrace{\qquad\quad}_{2-x}}^{2m}$

اگر قطعه چوب ۲ متری را در نقطهٔ A ارّه کنیم، آن‌گاه سه قطعه چوب با طولهای ۱ و x و x−۲ متری داریم. اگر بخواهیم با این سه قطعه چوب، مثلث بسازیم، بنا به اصل نامساوی در مثلث داریم :

$\begin{cases}2-x+x>1 \Rightarrow 2>1 & \text{(همواره درست است)}\\ 2-x+1>x \Rightarrow x<\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}\\ x+1>2-x \Rightarrow x>\frac{1}{2}\end{cases}$

چون نقطهٔ A را روی پاره‌خط دو متری درنظر می‌گیریم، بنابراین داریم :



$\Rightarrow P(A) = \frac{LA}{LS} = \frac{1}{2}$

ـ۱۲

$\begin{cases}P(1)=x\\ P(2)=2x\\ P(3)=3x\\ P(4)=4x\\ P(5)=5x\\ P(6)=6x\end{cases} \begin{array}{l}\Rightarrow x+2x+3x+4x+5x+6x=1\\ \Rightarrow x=\frac{1}{21}\end{array}$

$P(1)=\frac{1}{21};\ P(2)=\frac{2}{21};\ P(3)=\frac{3}{21};$

$P(4)=\frac{4}{21};\ P(5)=\frac{5}{21};\ P(6)=\frac{6}{21}$

$\begin{cases}P(\text{ر}) = 3P(\text{پ})\\ P(\text{پ}) = x\\ P(\text{ر}) = 3x\end{cases} \Rightarrow x+3x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{4}$

$P(\text{ر}) = \frac{3}{4};\ P(\text{پ}) = \frac{1}{4}$

درصورتی که تاس کمتر از ۴ و سکهٔ رو بیاید، خواهیم داشت :

$A = \{(1,\text{ر}),(2,\text{ر}),(3,\text{ر})\}$

$P[(1,\text{ر})] = P(1)\times P(\text{ر}) = \frac{1}{21}\times\frac{3}{4} = \frac{3}{84};$

$P[(2,\text{ر})] = P(2)\times P(\text{ر}) = \frac{2}{21}\times\frac{3}{4} = \frac{6}{84}$

$P[(3,\text{ر})] = P(3)\times P(\text{ر}) = \frac{3}{21}\times\frac{3}{4} = \frac{9}{84}$

$\Rightarrow P(A) = \frac{3}{84}+\frac{6}{84}+\frac{9}{84} = \frac{18}{84}$

حلّ مسائل حسابان ۱

● حمیدرضا امیری

۱ـ درحالت کلی اگر $|x| \ge a$ ، در این صورت $x \ge a$ یا $x \le -a$ پس :

$|4x-2| \ge 2 \Rightarrow \begin{cases}4x-2 \ge 2 \Rightarrow x \ge 1\\ \text{یا}\\ 4x-2 \le -2 \Rightarrow x \le 0\end{cases}$

$\Rightarrow$ مجموعهٔ جواب $= \{x\in\mathbb{R} \mid x \ge 1 \text{ یا } x \le 0\}$

۲ـ خیر، دو تابع $f(x)=x$ و $g(x)=(\sqrt{x})^2$ به دلیل این‌که دامنه‌های برابر ندارند، مساوی نمی‌باشند.

$D_f = \mathbb{R}$ و $D_g = \mathbb{R}^+\cup\{0\}$

۳ـ طبق فرض مسأله $f(x) = 2x-1$ و

$g(x) = \begin{cases}x+1 & x>0\\ 2 & x=0\\ x-2 & x<0\end{cases}$

$x>0 \Rightarrow fog(x) = f(g(x)) = 2(x+1)-1 = 2x+1$

$x=0 \Rightarrow fog(0) = f(g(0)) = f(2) = 3$

$x<0 \Rightarrow fog(x) = f(g(x)) = 2(x-2)-1 = 2x-5$

$\Rightarrow fog(x) = \begin{cases}2x+1 & x>0\\ 3 & x=0\\ 2x-5 & x<0\end{cases}$

$f(x) = 2x-1>0 \Rightarrow gof(x) = (2x-1)-1 = 2x-2$

$f(x) = 2x-1=0 \Rightarrow gof(x) = g(0) = 2$

$f(x) = 2x-1<0 \Rightarrow gof(x) = (2x-1)-2 = 2x-3$

$\Rightarrow gof(x) = \begin{cases}2x-2 & x>\frac{1}{2}\\ 2 & x=\frac{1}{2}\\ 2x-3 & x<\frac{1}{2}\end{cases}$

حال، قسمت دوم مسأله را حل می‌کنیم، اگر $h(x) = tg(\sin x)$ ، داریم :

$h(-x) = tg(\sin(-x)) = tg(-\sin x) = -tg(\sin x) = -h(x)$

$\Rightarrow h(-x) = -h(x) \Rightarrow$ تابع h فرد است.

۴ـ طبق فرض مسأله داریم :

$f(x) = (x^2-4)Q(x)+(2x-1)$

$\Rightarrow f(x) = (x-2)(x+2)Q(x)+(2x-1)$

در تساوی فوق x را به $(x-4)$ تبدیل می‌کنیم :

$f(x-4) = (x-6)(x-2)Q(x-4)+(2x-9)$

و اگر قرار دهیم $(x-6)Q(x-4) = Q_1(x)$ ، در این صورت داریم :

$$f(x-4)=(x-2)Q_1(x)+(2x-9)$$

پس، باقیمانده $f(x-4)$ بر $(x-2)$ برابر $(2x-9)$ است.

۵ـ طبق فرض مسأله، تابع f زوج است، پس طبق تعریف برای هر $x\in D_f$، همواره $-x\in D_f$ و $f(-x)=f(x)$. حال اگر فرض کنیم: $f(x)=y$، چون $f(-x)=f(x)$، پس: $f(-x)=y$ بنابراین، دو عضو دامنه، به یک عضو از بُرد نسبت داده شده است و این، با تعریف یک به یک بودن تابع تناقض دارد.

۶ـ با توجه به رابطهٔ $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$ داریم:

$$\frac{2\sin x\cos 3x}{\sin 2x}=\frac{\cancel{2\sin x}(4\cos^3 x-3\cos x)}{\cancel{2\sin x}\cos x}$$

$$=4\cos^2 x-3=4(1-\sin^2 x)-3=1-4\sin^2 x$$

۷ـ طبق فرض مسأله داریم، $3-\sin x\le f(x)\le 4-2\operatorname{tg}\frac{x}{2}$

حال برای محاسبهٔ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)$ از قضیهٔ ساندویچ یا فشار استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(3-\sin x)=3-1=2 \quad ①$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(4-2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)=4-2\times1=2 \quad ②$$

$$① , ② \Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=2$$ و

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{f(x)}=\frac{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} 1}{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)}=\frac{1}{2}$$

۸ـ ۱) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[7]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\frac{0}{0}$ مبهم

روش اوّل: (تغییر متغیر)

اگر در کسر فوق x را به z^7 تغییر دهیم، خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[7]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim_{z\to1}\frac{(z-1)}{\sqrt[3]{z^7}-1}=\lim_{z\to1}\frac{z-1}{z^2\sqrt[3]{z}-1}=\frac{0}{0}$$

رفع ابهام: $\frac{(z-1)}{z^2\sqrt[3]{z}-1}=\frac{(z-1)(z^4\sqrt[3]{z^2}+z^2\sqrt[3]{z}+1)}{(z^7-1)}$

$$=\lim_{z\to1}\frac{\cancel{(z-1)}(z^4\sqrt[3]{z^2}+z^2\sqrt[3]{z}+1)}{\cancel{(z-1)}(z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1)}=\frac{3}{7}$$

روش دوم: (استفاده از قاعدهٔ هوپیتال)

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[7]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{7\sqrt[7]{x^6}}}{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}=\frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{7}$$

۲) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-2x}-x^2=\infty-\infty$ مبهم

رفع ابهام: $\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-2x}-x^2\right)\left(\sqrt{x^2-2x}+x^2\right)}{\left(\sqrt{x^2-2x}+x^2\right)}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2-2x)-x^4}{\sqrt{x^2-2x}+x^2}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(-x^3+x-2)}{|x|\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}(-x^3+x-2)}{-\cancel{x}\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)}=-\infty$$

۳) $\lim_{x\to1}(x-1)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=0\times\infty$ مبهم

(از تغییر متغیر و سپس از هم‌ارزی استفاده می‌کنیم.)

رفع ابهام: اگر $(x-1)=y\Rightarrow x=y+1$

$x\to1\Rightarrow y\to0$

$$\lim_{x\to1}(x-1)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\operatorname{cotg}(\frac{\pi x}{2})}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)}{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2})}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)}{\operatorname{tg}\left[-\frac{\pi}{2}(x-1)\right]}=\frac{\cancel{(x-1)}}{-\frac{\pi}{2}\cancel{(x-1)}}=\frac{1}{-\frac{\pi}{2}}=-\frac{2}{\pi}$$

۹ـ چون می‌خواهیم تابع در $x_0=1$ پیوسته باشد، پس باید $f(1)$ با حدّ چپ تابع در $x_0=1$ و با حدّ راست تابع در $x_0=1$ برابر باشد.

$$f(1)=2a-1 \quad ①$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{\sin(x-1)}{(x-1)}=1 \quad ②$$

$$① , ② \Rightarrow 2a-1=1\Rightarrow \boxed{a=1}$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}[-x+1]-b=0-b=-b$$

$$\Rightarrow -b=1\Rightarrow \boxed{b=-1}$$

۱۰ـ ابتدا محلّ تلاقی دو منحنی را می‌یابیم:

$$\begin{cases}y=x^3-2x^2\\ y=x^3-2\end{cases}\Rightarrow x^3-2x^2=x^3-2\Rightarrow -2x^2=-2$$

$$\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm1\Rightarrow A_1\begin{vmatrix}1\\-1\end{vmatrix},\ A_2\begin{vmatrix}-1\\-3\end{vmatrix}$$

$$y'=3x^2-4x\Rightarrow m_{\text{مماس}}=y'(1)=3-4=-1$$

معادلهٔ خط مماس: $(y+1)=-1(x-1)\Rightarrow \boxed{y=-x}$

۱۱ـ ۱) $y=\sqrt[5]{(2x-1)^3}\Rightarrow y'=\frac{3\times2}{5\sqrt[5]{(2x-1)^2}}$

$$\left(y=\sqrt[m]{u^n}\Rightarrow y'=\frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}\right)$$

۲) $y=\sin^4\left(\cos^3(x^2)\right)$

$$\Rightarrow y'=4\times\left[-3\times(2x)\sin x^2\cos^2 x^2\right]$$
$$\cos\left(\cos^3(x^2)\right)\sin^3\left(\cos^3(x^2)\right)$$

$$\left(y=\sin^m u\Rightarrow y'=mu'\cos u\sin^{m-1}u\right)$$

۳) $y=\frac{2x^2-4x}{\sqrt{x^2-1}}\Rightarrow$

$$y'=\frac{(4x-4)\sqrt{x^2-1}-\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\times(2x^2-4x)\right)}{(x^2-1)}$$

۴) $f(x)=\frac{\sin^3 2x}{\cos^2 x}$

$$y'=\frac{(3\times2\cos2x\sin^2 2x)(\cos^2 x)-(-2\sin x\cos x)(\sin^3 2x)}{\cos^4 x}$$

۱۲ـ طبق فرض مسأله $f'(x)=3x-1$، از طرفی داریم:

$$y=f(g(x))\Rightarrow y'=g'(x)\times f'(g(x))$$

۱) $y=f(4x)\Rightarrow y'=4\times f'(4x)$

$$\Rightarrow y'=4\times[3(4x)-1]\Rightarrow y'=48x-4$$

۲) $y=f(\sin x)\Rightarrow y'=\cos x\times f'(\sin x)\Rightarrow$

$$y'=\cos x\times[3(\sin x)-1]\Rightarrow y'=3\sin x\cos x-\cos x$$

حلّ مسائل جبر خطی پیش‌دانشگاهی

● حمیدرضا امیری

۱ـ اگر x و y دو بردار از $\mathbb{R}^n$ و مضرب ناصفری از هم باشند، یعنی $x=\alpha y$ که $\alpha\neq0$، پس $x-\alpha y=\vec{0}$ و تساوی اخیر، یک ترکیب خطی از این دو بردار است، که بردار صفر را تولید کرده و این ترکیب خطی دارای ضرایب ناصفر است، پس دو بردار وابستهٔ خطی‌اند.

۲ـ طبق فرض f نگاشتی خطی و $f(1,0)=(1,-1,0)$ و $f(0,1)=(0,1,2)$. حال برای محاسبهٔ $f(2,-1)$ به شکل زیر عمل می‌کنیم:

ابتدا $(2,-1)$ را برحسب بردارهای $(1,0)$ و $(0,1)$ می‌نویسیم،

$$(2,-1)=2(1,0)-1(0,1)$$

حال f را روی دو طرف تساوی اثر می‌دهیم،

$$f(2,-1)=f[2(1,0)-1(0,1)]$$
$$=2f(1,0)-1f(0,1)$$ چون f خطی است.
$$=2(1,-1,0)-1(0,1,2)=(2,-3,-2)$$

۳ـ برای محاسبهٔ هستهٔ هر یک از نگاشتهای داده شده، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱) $f(x,y)=(x-2y,2x+y)$

هسته: $K_f=\{(x,y)|f(x,y)=(0,0)\}$

$$=\{(x,y)|(x-2y,2x+y)=(0,0)\}$$

$$\Rightarrow K_f=\{(x,y)|x=0\ ,\ y=0\}=\{(0,0)\}$$

و بُعد K_f صفر است.

۲) $f(x,y,z)=(x,y+z)$

$$K_f=\{(x,y,z)|f(x,y,z)=(0,0)\}$$
$$K_f=\{(x,y,z)|(x,y+z)=(0,0)\}$$
$$K_f=\{(x,y,z)|x=0\ ,\ y+z=0\}$$

که K_f تقاطع دو صفحهٔ $x=0$ و $y+z=0$ می‌باشد، که یک خط بوده و بُعد آن یک است.

۳) $f(x,y)=(x,0,0)$

$$K_f=\{(x,y)|f(x,y)=(0,0,0)\}$$
$$K_f=\{(x,y)|(x,0,0)=(0,0,0)\}=\{(x,y)|x=0\}$$

که K_f یک خط در صفحه را مشخص می‌کند و بُعد آن یک است (محور yها).

۴) $f(x,y,z)=(x,2y,0)$

$$K_f=\{(x,y,z)|(x,2y,0)=(0,0,0)\}$$
$$K_f=\{(x,y,z)|x=0\ ,\ y=0\}$$

در این نگاشت K_f محلّ برخورد دو صفحهٔ $x=0$ و $y=0$ است، که همان محور zها می‌باشد و بُعد آن یک است.

۴ـ چون نگاشت خطی است و همواره هستهٔ هر نگاشت خطی، یعنی K_f باید شامل بردار صفر فضای دامنه باشد، پس باید $(0,0,0)\in K_f$، بنابراین باید داشته باشیم:

$$(0,a+b,2a-b+3)=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+b=0\\ 2a-b+3=0\end{cases}\xRightarrow{a=-b}-2b-b+3=0$$

$$\Rightarrow b=1\ ,\ a=-1$$

$$\Rightarrow a^3+2b^2-6=(-1)^3+2(1)^2-6=-5$$

۵ـ فرض کنیم (x,y) نقطهٔ دلخواهی از خط $2y=x-1$ باشد و نگاشتِ خطی f را روی این نقطه اثر می‌دهیم که خواهیم داشت:

$$f(x,y)=(X,Y)\Rightarrow(x-y,2x+y)=(X,Y)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-y=X\ ①\\2x+y=Y\end{cases}\Rightarrow 3x=X+Y\Rightarrow x=\frac{X+Y}{3}$$

$$①\Rightarrow y=x-X=\frac{X+Y}{3}-X\Rightarrow y=\frac{Y-2X}{3}$$

حال در معادلهٔ خط به جای x و y، تبدیل‌یافته‌های آنها را برحسب X و Y قرار می‌دهیم،

$$2y=x-1\Rightarrow 2\left(\frac{Y-2X}{3}\right)=\left(\frac{X+Y}{3}\right)-1$$

۶ـ اگر $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ یک نگاشت خطی باشد، برای بررسی پوشایی این نگاشت، از رابطهٔ $m-n=$ بُعد هستهٔ f، استفاده می‌کنیم که اگر تساوی برقرار باشد، نگاشت f پوشا بوده و در غیر این صورت، پوشا نمی‌باشد.

$1)\ f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

$f(x,y)=(x-2y,-2x+4y)$

$K_f=\{(x,y)|(x-2y,-2x+4y)=(0,0)\}$

$K_f=\{(x,y)|x-2y=0\}\Rightarrow$ بُعد $k_f=1$

و چون $2-2\neq 1$، پس تابع پوشا نمی‌باشد.

$2)\ f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$

$f(x,y,z)=(y,z)$

$K_f=\{(x,y,z)|(y,z)=(0,0)\}$

$K_f=\{(x,y)|y=0\ ,\ z=0\}=$ محور xها

$\Rightarrow$ بُعد $K_f=1$ و $3-2=1\Rightarrow$ نگاشت پوشاست.

$3)\ f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$

$f(x,y,z)=(z,0)$

$K_f=\{(x,y,z)|(z,0)=(0,0)\}$

$K_f=\{(x,y,z)|z=0\}=$ صفحهٔ xoy

$\Rightarrow$ بُعد $K_f=2$ و $2\neq 3-1\Rightarrow$ نگاشت پوشا نمی‌باشد.

$4)\ f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$

$f(x,y,z)=(x-y,y+z,2x)$

$K_f=\{(x,y,z)|(x-y,y+z,2x)=(0,0,0)\}$

$K_f=\{(x,y,z)|x-y=0,y+z=0,2x=0\}$

$K_f=\{(x,y,z)|x=y=z=0\}=\{(0,0,0)\}$

بُعد $K_f=0=3-3\Rightarrow$ نگاشت پوشاست.

(توجه دارید که در مورد نگاشتهای از $\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$، شرط لازم و کافی برای پوشا بودنِ آنها، یک به یک بودن است.)

۷ـ طبق فرض مسأله $f(x,y)=(x-2y,x+y)$، حال برای به‌دست آوردن ضابطهٔ f^{-1} به شکل زیر عمل می‌کنیم:

$$f(x,y)=(x_1,y_1)\Rightarrow(x-2y,x+y)=(x_1,y_1)$$

$$\Rightarrow -\begin{cases}x-2y=x_1\\x+y=y_1\ ①\end{cases}\Rightarrow 3y=y_1-x_1\Rightarrow y=\frac{y_1-x_1}{3}$$

$$①\Rightarrow x=y_1-y\Rightarrow x=y_1-\frac{y_1-x_1}{3}=\frac{2y_1-x_1}{3}$$

$$\Rightarrow x=\frac{2y_1-x_1}{3}\Rightarrow f^{-1}(x,y)=\left(\frac{2y-x}{3},\frac{y-x}{3}\right)$$

۸ـ طبق قضیهٔ کتاب، می‌دانیم که اگر f یک نگاشت خطی باشد، f^{-1} نیز نگاشتی خطی است. از طرفی می‌دانیم اگر $f(1,0)=(1,-1)$ و $f(0,1)=(2,1)$، در این صورت $f^{-1}(1,-1)=(1,0)$ و $f^{-1}(2,1)=(0,1)$، پس کافی است برای محاسبهٔ $f^{-1}(3,-3)$، ابتدا $(3,-3)$ را برحسب ترکیب خطی بردارهای $(2,1)$ و $(1,-1)$ بنویسیم و سپس از خاصیت خطی بودنِ f^{-1} (مشابه مسألهٔ ۲) استفاده کنیم.

$$(3,-3)=3(1,-1)+0(2,1)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(3,-3)=f^{-1}[3(1,-1)]$$

$$\Rightarrow f^{-1}(3,-3)=3f^{-1}\underbrace{(1,-1)}_{(1,0)}=3(1,0)=(3,0)$$

۹ـ طبق فرض مسأله داریم، $f(x,y)=(2x,-y)$، بنابراین، برای محاسبهٔ $f^{-1}of(2,-3)$ یا $fof^{-1}(2,-3)$ نیاز به ضابطهٔ f^{-1} داریم:

$$f(x,y)=(x_1,y_1)\Rightarrow(2x,-y)=(x_1,y_1)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2x=x_1\Rightarrow x=\frac{x_1}{2}\\-y=y_1\Rightarrow y=-y_1\end{cases}\Rightarrow f^{-1}(x,y)=(\frac{x}{2},-y)$$

$$f^{-1}of(2,-3)=f^{-1}[f(2,-3)]$$

$$=f^{-1}(4,3)=(\frac{4}{2},-3)=(2,-3)$$

$$fof^{-1}(2,-3)=f\left[f^{-1}(2,-3)\right]$$

$$=f(1,3)=(2,-3)$$

(البته در حالت کلّی نیز $f^{-1}of(X)=X$ و $fof^{-1}(X)=X$)

۱۰ـ برای حلّ دستگاه داده شده به کمک ماتریس وارون، نیاز به وارونِ ماتریس ضرایب دستگاه داریم و سپس از رابطهٔ $X=A^{-1}B$ استفاده می‌کنیم:

$$A=\begin{bmatrix}2&-1&+1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{bmatrix}$$

$A_{11}=3\ ,\ A_{12}=3\ ,\ A_{13}=3$

$A_{21}=-1\ ,\ A_{22}=-5\ ,\ A_{23}=-3$

$A_{31}=1\ ,\ A_{32}=-1\ ,\ A_{33}=-3$

$$\Rightarrow A^{*}=\begin{bmatrix}3&-1&1\\3&-5&-1\\3&-3&-3\end{bmatrix}$$

$$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$
$$=2\times3+(-1)\times3+(1)\times3=6$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{3}{6}&-\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\\\frac{3}{6}&-\frac{5}{6}&\frac{-1}{6}\\\frac{3}{6}&\frac{-3}{6}&\frac{-3}{6}\end{bmatrix}$$

$$X=A^{-1}B\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{6}&-\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\\\frac{3}{6}&-\frac{5}{6}&-\frac{1}{6}\\\frac{3}{6}&-\frac{3}{6}&-\frac{3}{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\0\\-3\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\\z=3\end{cases}$$

حلّ مسأله‌های هندسهٔ تحلیلی

● محمد هاشم رستمی

۱ـ بردار هادی محور xها $i=(1,0,0)$ و $a=2i-j+3k$ است. با توجه به این که قرینهٔ بردار a نسبت به بردار b، بردار a' است، به قسمی که $a'=2\frac{a\cdot b}{b\cdot b}b-a$ بنابراین، قرینهٔ بردار a نسبت به بردار i را اگر a' بنامیم، داریم:

$$a'=2\frac{a\cdot i}{i\cdot i}i-a\Rightarrow a'=2\frac{2+0+0}{1}(1,0,0)-(2,-1,3)$$

$$\Rightarrow a'=(4,0,0)-(2,-1,3)=(4-2,0+1,0-3)$$

$$\Rightarrow a'=(2,1,-3)\ \text{یا}\ a'=2i+j-3k$$

نکته. قرینهٔ بردار $a=(a_1,a_2,a_3)$ نسبت به محور xها بردار $a'=(a_1,-a_2,-a_3)$ است، که از این ویژگی نیز مسألهٔ بالا را می‌توان حل کرد.

۲ـ با توجه به این که $a=i+3j$ یا $a=(1,3,0)$ و $b=2j+3k$ و یا $b=(0,2,3)$ است، داریم:

الف: $\cos(a,b)=\frac{a\cdot b}{|a|\cdot|b|}=\frac{0+6+0}{\sqrt{1+9+0}.\sqrt{0+4+9}}$

$$=\frac{6}{\sqrt{130}}\Rightarrow(a\hat{,}b)=2k\pi+\text{Arccos}\frac{6}{\sqrt{130}}$$

ب: a' تصویر بردار a روی بردار b (و یا راستای بردار b) برابر است با:

$$a'=\frac{a\cdot b}{b\cdot b}b\Rightarrow a'=\frac{6}{13}(0,2,3)$$

$$\Rightarrow a'=(0,\frac{12}{13},\frac{18}{13})\ \text{یا}\ a'=\frac{12}{13}j+\frac{18}{13}k$$

پ: $a\cdot b=0+6+0=6$

$$a\times b=(9,-3,2)\Rightarrow|a\times b|=\sqrt{81+9+4}=\sqrt{94}$$

۳ـ با توجه به این که $A=(0,2,3)$ و $B=(1,-1,1)$ است، داریم:

الف: $A'=(0,2,-3)$ و $B'=(1,-1,-1)$

ب: $AB:\frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{2}$

$$A'B':\frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+1}{-2}$$

پ: $\begin{cases}AB & \frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{2}\\A'B' & \frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+1}{-2}\end{cases}\Rightarrow M(\frac{3}{2},\frac{-5}{2},0)$

نقطهٔ M روی صفحهٔ xoy است.

۴ـ نقطهٔ دلخواه $N\left|\begin{matrix}2t+1\\-t+2\\3t\end{matrix}\right.$ روی خط D را درنظر می‌گیریم. با توجه به این که $N\left|\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}\right.$ است، داریم:

$$\overrightarrow{MN}=(2t,-t,3t-3)$$

از طرفی $\overrightarrow{V}_D=(2,-1,3)$ است. حال شرط عمود بودن $\overrightarrow{MN}$ بر $\overrightarrow{V}_D$ را می‌نویسیم:

$$\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{V_D}\Rightarrow\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{V_D}=0\Rightarrow 4t+t+9t-9=0$$

$$\Rightarrow 14t-9=0\Rightarrow t=\frac{9}{14}$$

بای عمود رسم شده از A بر خط D. $\Rightarrow N=\left(\frac{16}{7},\frac{19}{14},\frac{27}{14}\right)$

$$\Rightarrow MN=\sqrt{\left(\frac{16}{7}-1\right)^2+\left(\frac{19}{14}-2\right)^2+\left(\frac{27}{14}-3\right)^2}$$

$$\Rightarrow MN=\sqrt{\left(\frac{9}{7}\right)^2+\left(\frac{-9}{14}\right)^2+\left(\frac{-15}{14}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{14}\sqrt{324+81+225}\Rightarrow MN=\frac{3\sqrt{70}}{14}$$

۵ـ معادلهٔ دسته صفحهٔ گذرنده بر خط D را می‌نویسیم و از بین صفحه‌های این دسته صفحه، صفحه‌ای را انتخاب می‌کنیم که بر نقطهٔ A بگذرد. داریم:

$$D:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{4}\Rightarrow\begin{cases}3x-2y+2=0\\2x-z=0\end{cases}$$

دسته صفحهٔ گذرنده بر خط D: $\alpha(3x-2y+2)+\beta(2x-z)=0$

$$A=(2,0,1)\xrightarrow{\text{درمعادلهٔ دسته صفحه}}\alpha(6-0+2)+\beta(4-1)=0$$

$$\Rightarrow 8\alpha+3\beta=0 \text{ یا } \alpha=\frac{-3}{8}\beta$$

$$\Rightarrow\frac{-3}{8}\beta(3x-2y+2)+\beta(2x-z)=0$$

$$\Rightarrow -9x+6y-6+16x-8z=0$$

معادلهٔ صفحهٔ خواسته شده $\Rightarrow 7x+6y-8z-6=0$

۶ـ معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌هایی را که از صفحهٔ P به فاصلهٔ ۴ قرار دارند، می‌نویسیم و نقطه‌های برخورد آنها با خط D را به‌دست می‌آوریم. با توجه به این که $D:\begin{cases}x+y-z=2\\2x-y=4\end{cases}$ و $P=2x+2y-z+1=0$ است، داریم:

$$3x-z=6\Rightarrow x=\frac{z+6}{3} \text{ و } 2x-y=4\Rightarrow x=\frac{y+4}{2}$$

معادلهٔ پارامتری خط D $\quad\Rightarrow D:x=\frac{y+4}{2}=\frac{z+6}{3}$

برای نوشتن معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ مورد نظر فرض می‌کنیم: $M(x,y,z)$ یک نقطه از این مکان هندسی باشد، دراین صورت:

$$4=\frac{|2x+2y-z+1|}{\sqrt{4+4+1}}\Rightarrow|2x+2y-z+1|=12$$

$$\Rightarrow P_1:2x+2y-z-11=0 \quad \text{و}$$

$$P_2:2x+2y-z+13=0$$

معادلهٔ صفحه‌های مکان هندسی

$$P_1:\begin{cases}2x+2y-z-11=0\\D:x=\frac{y+4}{2}=\frac{z+6}{3}=t\Rightarrow x=t,y=2t-4,z=3t-6\end{cases}$$

$$2(t)+2(2t-4)-(3t-6)-11=0$$

$$\Rightarrow 3t-13=0\Rightarrow t=\frac{13}{3}\Rightarrow M_1=\left(\frac{13}{3},\frac{14}{3},7\right)$$

$$P_2:\begin{cases}2x+2y-z+13=0\\D:x=\frac{y+4}{2}=\frac{z+6}{3}=t\end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(t)+2(2t-4)-(3t-6)+13=0\Rightarrow 3t+11=0$$

$$\Rightarrow t=\frac{-11}{3}\Rightarrow M_2=\left(\frac{-11}{3},\frac{-34}{3},-17\right)$$

حلّ مسائل ریاضی عمومی ۱

● میرشهرام صدر

۱ـ الف:

$$\overline{x_1}=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{2+3+3+6+7+9}{6}=\frac{30}{6}=5$$

$$\sigma_1^2=\frac{\sum(x_i-\overline{x_1})^2}{n}$$

$$=\frac{(2-5)^2+(3-5)^2+(3-5)^2+(7-5)^2+(9-5)^2}{6}$$

$$=\frac{9+4+4+4+16}{6}=\frac{37}{6}$$

$$\Rightarrow\sigma_1=\sqrt{\frac{37}{6}}\cong 2/48$$

$$\overline{x_2}=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{1+2+3+4+6+8}{6}=\frac{24}{6}=4$$

$$\sigma_2^2=\frac{\sum(x_i-\overline{x_2})}{n}$$

$$=\frac{(1-4)^2+(2-4)^2+(3-4)^2+(4-4)^2+(6-4)+(8-4)}{6}$$

$$=\frac{9+4+1+0+4+16}{6}=\frac{34}{6}$$

$$\Rightarrow\sigma_2=\sqrt{\frac{34}{6}}\cong 2/38$$

بامقایسهٔ σ_1 و σ_2، ملاحظه می‌کنیم که پراکندگی در داده‌های گروه اوّل، بیشتر از پراکندگی داده‌های گروه دوم است.

ب:

$$V_1=\frac{\sigma_1}{\overline{x_1}}=\frac{2/48}{5}\cong 0/5\ ;\ \ V_2=\frac{\sigma_2}{\overline{x_2}}=\frac{2/38}{4}\cong 0/6$$

۲ـ برای این که بررسی کنیم که دو پیشامد A و B مستقل یا وابسته هستند، یک بار مقدار $P(A)\times P(B)$ و بار دیگر مقدار $P(A\cap B)$ را به دست می‌آوریم. اگر این دو مقدار با یکدیگر برابر باشند، آن‌گاه دو پیشامد A و B مستقل‌اند. در غیر این صورت دو پیشامد A و B وابسته هستند.

$$P(B)=1-P(B')\Rightarrow P(B)=1-0/35=0/65$$

$$P(A)\times P(B)=0/25\times 0/65=0/1625 \qquad (1)$$

$$P(A'\cap B')=P[(A\cup B)']=1-P(A\cup B)$$

$$\Rightarrow P(A\cup B)=1-P(A'\cap B')$$

$$\Rightarrow P(A\cup B)=1-0/6=0/4$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$\Rightarrow 0/4=0/25+0/65-P(A\cap B)$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=0/5 \qquad (2)$$

با توجه به (۱) و (۲) ملاحظه می‌کنیم که $P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$، پس دو پیشامد A و B مستقل نیستند.

۳ـ

$$P(x=k)=\binom{n}{k}\times P^k\times(1-P)^{n-k}$$

$$P(x=40)=\binom{50}{40}\times(0/6)^{40}\times(1-0/6)^{50-40}$$

$$=\binom{50}{40}\times(0/6)^{40}\times(0/4)^{10}$$

$$P=0/6\Rightarrow P'=1-P=1-0/6=0/4$$

$$E(x)=n.P'=50\times 0/4=20$$

بنابراین، انتظار داریم ۲۰ نفر دارای خونی با RH منفی باشند.

۴ـ می‌دانیم که

$$x^4\le x^4+4x^3+6x^2+4x<x^4+4x^3+6x^2+4x+1$$

یا این که $x^4\le x^4+4x^3+6x^2+4x\le(x+1)^4$، بنابراین چون $x>0$، داریم:

$$x\le\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+4x}\le x+1$$

در نتیجه:

$$\left[\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+4x}\right]=x$$

۵ـ

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2+7}{n^2-1}=2$$

برای هر $\varepsilon>0$ وجود دارد عددی مانند $M>0$، به طوری که اگر $n\ge M$ در این صورت $\left|\frac{2n^2+7}{n^2-1}-2\right|<\varepsilon$. بنابراین داریم:

$$n\ge M\Rightarrow\left|\frac{2n^2+7-2n^2+2}{n^2-1}\right|<\varepsilon$$

$$n\ge M\Rightarrow\left|\frac{9}{n^2-1}\right|<\varepsilon$$

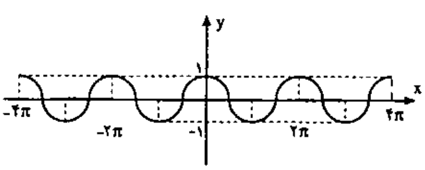
$$n\ge M\Rightarrow\left|n^2-1\right|>\frac{9}{\varepsilon}$$

$$n\ge M\Rightarrow n^2>\frac{9}{\varepsilon}+1 \quad (n\to+\infty \text{ جون})$$

$$n\ge M\Rightarrow n\ge\sqrt{\frac{9}{\varepsilon}+1}$$

بنابراین، اگر $M\ge\left[\sqrt{\frac{9}{\varepsilon}+1}\right]+1$، آن‌گاه حدّ بالا برقرار خواهد بود.

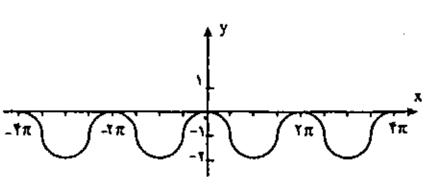
۶ـ ابتدا نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\cos x$ را در فاصلهٔ $[-4\pi,4\pi]$ رسم می‌کنیم:



(نمودار ۱)

$$y=\cos x(-4\pi\le x\le 4\pi)$$

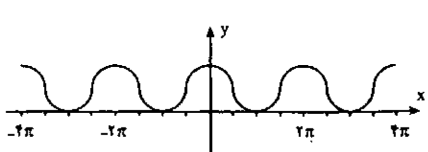
اکنون اگر نمودار را به اندازهٔ یک واحد موازی محور yها به سمت پایین انتقال دهیم، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=-1+\cos x$ به‌دست می‌آید:



(نمودار ۲)

$$y=-1+\cos x(-4\pi\le x\le 4\pi)$$

در این مرحله، برای رسم نمودار $y=|-1+\cos x|$ کافی است قرینهٔ (نمودار ۲) را نسبت به محور xها به دست آوریم:



(نمودار ۳)

۷ـ

$(\lambda+2)x+(4\lambda-3)y-5+3\lambda=0$

$\Rightarrow \lambda x+2x+4\lambda y-3y-5+3\lambda=0$

$\Rightarrow (x+4y+3)\lambda+(2x-3y-5)=0$

$\Rightarrow \begin{cases}x+4y+3=0\\2x-3y-5=0\end{cases}\Rightarrow x=1,\ y=-1$

$\Rightarrow A\Big|^{1}_{-1}$ (مختصات نقطهٔ ثابت)

۸ـ جملهٔ عمومی بسط فوق به صورت زیر است:

$t_k=\binom{15}{k-1}\times(2x^2)^{k-1}\times\left(\frac{3}{x^3}\right)^{15-(k-1)}$

$\Rightarrow t_k=\binom{15}{k-1}\times 2^k\times 3^{16-k}\times(x^2)^{k-1}\times(x^{-3})^{16-k}$

برای این که شمارهٔ جملهٔ مستقل از x را بیابیم، باید در معادلهٔ زیر مقدار k را به دست آوریم:

$(x^2)^{k-1}\times(x^{-3})^{16-k}=x^0$

$\Rightarrow x^{2k-2-48+3k}=x^0\Rightarrow 5k=50\Rightarrow k=10$

برای به دست آوردن مجموع ضرایب بسط فوق کافی است در عبارت $\left(2x^2+\frac{3}{x^3}\right)^{15}$ قرار دهیم، $x=1$:

مجموع ضرایب بسط $\left(2\times(1)^2+\frac{3}{1^3}\right)^{15}=(2+3)^{15}=5^{15}$

۹ـ الف:

$(27^x)^{x+2}=\frac{1}{9}\Rightarrow\left[(3^3)^x\right]^{x+2}=\frac{1}{3^2}\Rightarrow 3^{3x(x+2)}=3^{-2}$

$\Rightarrow 3x^2+6x=-2\rightarrow 3x^2+6x+2=0$

$\Rightarrow x=\frac{-3-\sqrt3}{3},\ x=\frac{-3+\sqrt3}{3}$

ب:

$Ln(2x-1)+Ln13=Ln91-Ln(x+1)$

$\Rightarrow Ln(2x-1)\times13=Ln\frac{91}{x+1}\Rightarrow(2x-1)\times13=\frac{91}{x+1}$

$\Rightarrow(x+1)(2x-1)=7$

$\Rightarrow 2x^2+x-8=0$

(غ. ق. ق) $x=\frac{-1-\sqrt{65}}{4}$ و (ق. ق) $\Rightarrow x=\frac{-1+\sqrt{65}}{4}$

۱۰ـ

$u_n:\frac{2n^2+4n+2-2}{(n+1)^2}=\frac{2(n^2+2n+1)-2}{(n+1)^2}$

$=\frac{2(n+1)^2}{(n+1)^2}-\frac{2}{(n+1)^2}\Rightarrow u_n=2-\frac{2}{(n+1)^2}$

$u_1=2-\frac{2}{4}=\frac32,\ u_2=2-\frac29=\frac{16}{9},\ \dots,\ u_n$

$=2-\frac{2}{(n+1)^2},\ u_{n+1}=2-\frac{2}{(n+2)^2}$

با توجه به جمله‌های دنبالهٔ $\{u_n\}$ ملاحظه می‌کنیم که $u_n<u_{n+1}$؛ بنابراین، این دنباله صعودی است.

با توجه به جمله‌های دنبالهٔ $\{u_n\}$ ملاحظه می‌کنیم، که برای هر $n\in N$ داریم $u_n\ge\frac32$ و $u_n<2$، یعنی این دنباله از بالا و پایین کراندار است.

۱۱ـ برای یافتن مجانب افقی تابع با ضابطهٔ $y=f(x)$ (در صورت وجود) باید از فرمول $y=\lim_{x\to\infty}f(x)$ استفاده نماییم، اگر حدّ تابع برابر یک عدد حقیقی باشد، در این صورت، تابع دارای مجانب افقی است. بنابراین:

$\lim_{x\to\infty}\frac{(a-1)x^3+(a-b+2)x^2+4}{2x^2+5}$

حدّ بالا وقتی برابر یک عدد حقیقی است، که ضریب x^3 برابر صفر باشد، یعنی داریم:

$a-1=0\Rightarrow a=1$

در نتیجه خواهیم داشت:

$y=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-1)x^3+(1-b+2)x^2+4}{2x^2+5}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{(3-b)x^2}{2x^2}=\frac{3-b}{2}$

از طرفی می‌دانیم که $y=2$ مجانب افقی منحنی است، بنابراین:

$\frac{3-b}{2}=2\Rightarrow 3-b=4\rightarrow b=-1$

حلّ مسائل حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱)

● احمد قندهاری

۱. باید ثابت کنیم برای هر $\varepsilon>0$، عدد طبیعی M وجود دارد که:

$n\ge M\Rightarrow|a_n-L|<\varepsilon$

$|a_n-L|<\varepsilon\Rightarrow\left|\frac{4n^2-1}{n^2-4}-4\right|<\varepsilon$

$\Rightarrow\left|\frac{4n^2-1-4n^2+16}{n^2-4}\right|<\varepsilon$

$\Rightarrow\left|\frac{15}{n^2-4}\right|<\varepsilon\Rightarrow\frac{15}{|n^2-4|}<\varepsilon\Rightarrow\frac{|n^2-4|}{15}>\frac1\varepsilon$

$\Rightarrow|n^2-4|>\frac{15}{\varepsilon}\qquad n\to+\infty\Rightarrow|n^2-4|=n^2-4$

$\Rightarrow n^2-4>\frac{15}\varepsilon\Rightarrow n^2>\frac{15}\varepsilon+4\Rightarrow n>\sqrt{\frac{15}\varepsilon+4}$

$\Rightarrow M\ge\left[\sqrt{\frac{15}{\varepsilon}+4}\right]+1$

$\Rightarrow n\ge\left[\sqrt{\frac{15}\varepsilon+4}\right]+1\Rightarrow\left|\frac{4n^2-1}{n^2-4}-4\right|<\varepsilon$

۲.

$2>1\Rightarrow2^{\frac1n}>1$

اگر $2^{\frac1n}=1+\alpha_n$ که $\alpha_n>0$ فرض شود داریم:

$(2^{\frac1n})^n=(1+\alpha_n)^n\Rightarrow2=\binom n1\alpha_n+\binom n2\alpha_n^2+\dots+\alpha_n^n$

$\Rightarrow2>\binom n2\alpha_n^2\Rightarrow2>\frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2\Rightarrow\alpha_n^2<\frac{4}{n(n-1)}$

$\Rightarrow0<\alpha_n^2<\frac4{n(n-1)}\qquad n\to\infty\Rightarrow\frac4{n(n-1)}\to0$

$\Rightarrow0<\alpha_n^2<0\Rightarrow\alpha_n^2=0\Rightarrow\alpha_n=0$

$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}2^{\frac1n}=1$

۳. جملات این دنباله عبارتند از:

$\sqrt3,\sqrt{3\sqrt3},\sqrt{3\sqrt{3\sqrt3}},\dots$

حدس می‌زنیم برای هر $n\in N$، $a_n<3$، حال به کمک استقرا ثابت می‌کنیم که این حدس درست است.

$n=1,\ a_1<3$

$n=k,\ a_k<3$ فرض استقرا

باید ثابت کنیم $n=k+1$، $a_{k+1}<3$ یا باید ثابت کنیم:

$\sqrt{3a_k}<3$

داریم: $\sqrt{3a_k}<3\xrightarrow{\text{به توان ۲}}3a_k<9\Rightarrow a_k<3$

چون به رابطهٔ $a_k<3$ رسیدیم، این رابطهٔ فرض استقراست، پس حکم یعنی، $a_{k+1}<3$ درست است. پس این دنباله کراندار است.

برای نشان دادن این که دنباله صعودی است، ثابت می‌کنیم:

$\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$

زیرا $a_n<3$: $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\sqrt{3a_n}}{a_n}\Rightarrow\frac{3a_n}{a_n^2}=\frac{3}{a_n}>1$

$\Rightarrow\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2>1\Rightarrow\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$

پس این دنباله، صعودی هم هست.

۴.

$\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{A}{k+1}+\frac{B}{k+2}=\frac{(A+B)k+2A+B}{(k+1)(k+2)}$

$\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\\2A+B=1\end{cases}\Rightarrow A=1,\ B=-1$

$\Rightarrow\frac1{(k+1)(k+2)}=\frac1{k+1}-\frac1{k+2}$

$\frac{\sin\frac1{(k+1)(k+2)}}{\cos\frac1{k+1}\cdot\cos\frac1{k+2}}=\frac{\sin\left(\frac1{k+1}-\frac1{k+2}\right)}{\cos\frac1{k+1}\cdot\cos\frac1{k+2}}$

$=\frac{\sin\frac1{k+1}\cos\frac1{k+2}-\cos\frac1{k+1}\sin\frac1{k+2}}{\cos\frac1{k+1}\cdot\cos\frac1{k+2}}$

این کسر را تفکیک می‌کنیم:

$=\tan\frac1{k+1}-\tan\frac1{k+2}$

مقدار سری $=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\tan\frac1{k+1}-\tan\frac1{k+2}\right)$

بنا به قاعده ادغام:

$\sum_{k=1}^{n}\left(f(k)-f(k+1)\right)=f(1)-f(n+1)$

$\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}\left(\tan\frac1{k+1}-\tan\frac1{k+2}\right)=\tan\frac12-\tan\frac1{n+2}$

$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\tan\frac12-\tan\frac1{n+2}\right)$

$=\tan\frac12-\tan0=\tan\frac12$

۵. فرض می‌کنیم $\{a_n\}=\left\{1+\frac1n\right\}$ پس $\lim_{n\to\infty}a_n=1$ و

$\forall n \in N \,,\, a_n \neq 1$

$\Rightarrow \{f(a_n)\} = \left\{f(1+\frac{1}{n})\right\} = \left\{(1+\frac{1}{n})\left[1+\frac{1}{n}\right]\right\}$

$= \left\{(1+\frac{1}{n})\times 1\right\} = \left\{1+\frac{1}{n}\right\}$

$\Rightarrow \lim f(a_n) = 1 = l_1$

فرض می‌کنیم $\{b_n\} = \left\{1-\frac{1}{n}\right\}$ پس $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$ و $\forall n \in N \,,\, b_n \neq 1$

$\Rightarrow \{f(b_n)\} = \left\{f(1-\frac{1}{n})\right\} = \left\{(1-\frac{1}{n})\left[1-\frac{1}{n}\right]\right\}$

$= \left\{(1-\frac{1}{n})\times 0\right\} = \{0\}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = 0 = l_2$

چون $l_2 \neq l_1$، پس تابع فوق در $x_0 = 1$ حد ندارد.

.۶

$x \to 2^+ \Rightarrow \lim f(x) = 2a + \lfloor 4 - 2/5 \rfloor = 2a+1$

حدّ راست

$x \to 2^- \Rightarrow \lim f(x) = 2b - 1 + 4 = 2b+3$ حدّ چپ

$x = 2 \Rightarrow f(2) = \lfloor -8 + 1/4 \rfloor = \lfloor -6/6 \rfloor = -7$

مقدار تابع

$\Rightarrow 2a+1 = -7 \Rightarrow \boxed{a=-4}$

$2b+3 = -7 \Rightarrow \boxed{b=-5}$

.۷

$\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{8ax^3+b-8a-b}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{8ax^3-8a}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{8a(x^3-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{8a\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{x-1}}$

$= 8a(1+1+1) = 24a = f'_+(1)$

$\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{4bx^2+4-4b-4}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{4bx^2-4b}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{4b(x^2-1)}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{4b\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}$

$= 4b(1+1) = 8b = f'_-(1)$

$\Rightarrow 24a = 8b \Rightarrow \boxed{3a=b}$

چون تابع f در $x_0 = 1$ مشتق‌پذیر است، پس در این نقطه حد دارد و پیوسته هم هست.

$x \to 1^+ \Rightarrow \lim f(x) = 8a+b$

$x \to 1^- \Rightarrow \lim f(x) = 4b+4$

$\Rightarrow 8a+b = 4b+4 \Rightarrow \boxed{8a-3b=4}$

$b = 3a \Rightarrow 8a - 12a = 4 \Rightarrow -4a = 4$

$\Rightarrow \boxed{a=-1} \,,\, \boxed{b=-3}$

.۸ $f(x) = x^4 + 2x - 1$

$f(0) = -1$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{16}$ $\Rightarrow f(0).f(\frac{1}{2}) < 0$

درنتیجه $f(x)$ یک صفر بین دو عدد ۰ و $\frac{1}{2}$ است، پس منحنی محور xها را در این بازه در یک نقطه قطع می‌کند.

.۹ $y = x - 1 + \frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}$

مجانب قائم : $y \to \infty \Rightarrow x^2 - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{2}}$

$x \to +\infty \Rightarrow \lim y = \lim(x+1+\frac{x^2}{x}) \Rightarrow \boxed{y=2x+1}$

معادله مجانب مایل

$x \to -\infty \Rightarrow \lim y = \lim(x+1+\frac{x^2}{-x}) \Rightarrow \boxed{y=1}$

معادله مجانب افقی

.۱۰

$5x^2 - 2y^2 = 18 \quad y = 1 \Rightarrow 5x^2 - 2 = 18$

$5x^2 = 20 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \boxed{x=+2}$

$10xx'_t - 4yy'_t = 0 \quad \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

$10\,(2).x'_t = 4(1).y'_t \longrightarrow y'_t = \frac{20x'_t}{4} \Rightarrow y'_t = 5x'_t$

پس آهنگ افزایش مؤلفهٔ y، ۵ برابر آهنگ افزایش مؤلفهٔ x است.

.۱۱ $A'\big|^2 \Rightarrow A\big|_2 \quad , \quad f(x) = x^3 + x$

$y = 2 \Rightarrow x^3 + x = 2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow A\big|^1_2 \Rightarrow A'\big|^2_1$

$f'(x) = 3x^2 + 1 \xrightarrow{x=1} m_{\text{مماس بر منحنی } f} = 4 \Rightarrow m_{\text{مماس بر منحنی } f^{-1}} = \frac{1}{4} \Rightarrow m_{\text{قائم بر منحنی } f^{-1}} = -4$

$y - y_{A'} = m'_{\text{قائم}}(x - x_{A'}) \Rightarrow y - 1 = -4(x-2)$

$\Rightarrow \boxed{y=-4x+9}$

۱۲. داریم :

$2\sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$

$2\sin\frac{7x}{2}.\sin\frac{x}{2} = \cos 3x$

$\Rightarrow \cos(\frac{7x}{2}-\frac{x}{2}) - \cos(\frac{7x}{2}+\frac{x}{2}) = \cos 3x$

$\Rightarrow \cos 3x - \cos 4x = \cos 3x \Rightarrow -\cos 4x = 0$

$\Rightarrow \cos 4x = 0 \Rightarrow \left\{4x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}\right.$

$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{8} \,,\, k \in Z$

جوابهای تفریح اندیشه

پاسخ ۱:

((۶×۶)−۶)÷۶ = ۵

۶ + ((۶−۶))×۶ = ۶

۶ + ((۶+۶)÷۶) = ۸

(۶−(۶÷۶))×۶ = ۳۰

(۶×۶)−۶−۶ = ۲۴

(۶×۶)+(۶+۶) = ۴۸

(۶+۶)×۶−۶ = ۶۶

(۶×۶−۶)×۶ = ۱۸۰

پاسخ ۲:

پناهگاهها را A، B، C و D می‌نامیم.

طی ۸ روز اول، مسافر ۴ رفت و برگشت به پناهگاه A انجام می‌دهد که طی این مدت هربار یک روز غذا در پناهگاه A ذخیره می‌کند (یعنی هربار سه وعده غذا با خود می‌برد، دو وعده را مصرف می‌کند، و یک وعده را در A ذخیره می‌کند، پس در پایان روز هشتم به اندازهٔ ۴ روز غذا در A ذخیره دارد).

روز نهم به اندازهٔ ۳ روز غذا برمی‌دارد، یک وعده را در راه مصرف می‌کند و به اندازه دو روز غذا در A ذخیره می‌کند. به این ترتیب در پایان روز نهم به اندازهٔ ۶ روز غذا در A ذخیره دارد.

روزهای دهم و یازدهم یک رفت و برگشت از پناهگاه A به پناهگاه B برای ذخیره کردن یک روز غذا در B انجام می‌دهد. روز دوازدهم از A به B می‌رود و برای دو روز دیگر غذا در B ذخیره می‌کند. به این ترتیب در پایان روز دوازدهم به اندازه ۳ روز غذا در پناهگاه B ذخیره دارد، و این امکان برایش فراهم می‌شود که در پایان روز پانزدهم در مقصدش باشد. پس این مسافر می‌تواند این مسیر لم‌یزرع را در مدت ۱۵ روز بپیماید.

پاسخ ۳:

هر مهره دارای ۶ وجه است. وقتی دو مهره را با هم می‌اندازند، برای دو وجه ۳۶ = ۶×۶ نوع ترکیب وجود دارد. برای اینکه، امکان دو رنگ یکسان داشتن، نصف کل امکانها باشد، باید ۱۸ ترکیب مربوط به حالتی باشد که دو سطح مهره‌ها یک رنگ باشند.

مهره اول ۵ سطحش قرمز و یک سطحش آبی است. فرض می‌کنیم X سطح مهرهٔ دیگر قرمز باشد. در این صورت سطوح آبی رنگ آن X − ۶ خواهد بود.

تعداد ترکیبهایی که دو سطح مهره‌ها همرنگ باشند برابر حاصل‌ضرب تعداد سطوح قرمز مهرهٔ اول در تعداد سطوح قرمز مهره دوم، یعنی ۵X است.

همچنین تعداد ترکیبهایی که دو رنگ آبی می‌دهد، مساوی حاصل‌ضرب ۱ در X − ۶، یعنی X − ۶ می‌باشد. در نتیجه تعداد ترکیبهایی که دو سطح از یک رنگ باشند برابر است با:

۵x + ۶ − x = ۱۸ ⇒ ۴x = ۱۲ ⇒ x = ۳

پس مهرهٔ دیگر، سه طرفش قرمز و سه طرفش آبی است.

پاسخ ٤:

فرض کنیم پول خرید یک متر پارچه یک تومان و طول وسیله‌ای که برای اندازه‌گیری مورد استفاده قرار گرفته است L باشد. هنگامی که پارچه فروش گمان می‌کند که یک متر پارچه فروخته است، در واقع L متر پارچه فروخته است و قیمت خرید آن L تومان می‌باشد. پس در واقع این مقدار پارچه را به ۱/۴۰ تومان فروخته است و ۱/۴۰ − L تومان برای L تومان خرید، سود برده است. بنابراین درصد سود او برابر است با:

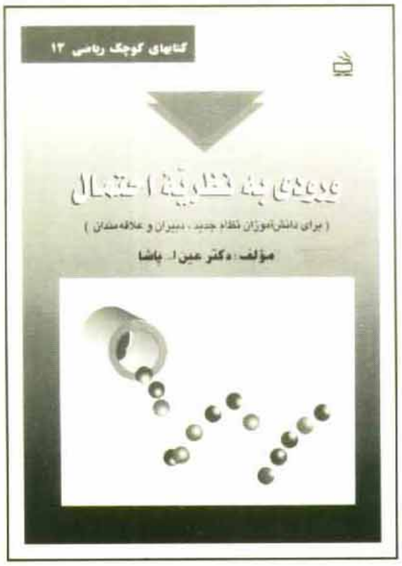
$$\frac{۳۹}{۱۰۰} = \frac{۱/۴۰ - L}{L} \Rightarrow L = \frac{۱۴۰}{۱۳۹} = ۱/۰۰۷۱$$

پس وسیلهٔ اندازه‌گیری او قدری بیشتر از ۷ میلیمتر، بزرگتر از یک متر بوده است.

پاسخ ۵:

$$\frac{۳۵}{۷۰} + \frac{۱۴۸}{۲۹۶} = ۱$$

معرفی کتابهای ریاضی انتشارات مدرسه



ورودی به نظریهٔ احتمال

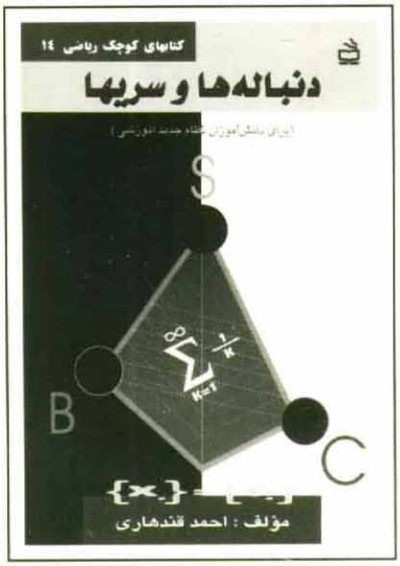
جدید

مؤلف : دکتر عین‌ا... پاشا

۱۱۲ صفحه / تک رنگ / چاپ اوّل / ۳۳۰۰۰ ریال

این کتاب که سیزدهمین کتاب از سری کتابهای کوچک ریاضی انتشارات مدرسه است، به نظریهٔ احتمال و مباحث مربوط به آن اختصاص دارد.

به نظر مؤلف محترم، محدود بودن حجم کتابهای درسی باعث شده است تا این نظریه از حدّ مقدماتی، فراتر نرفته و حتی برخی از موضوعها با ابهامهایی بیان شود، لذا این کتاب در جهت تکمیل مطالب درسی و رفع برخی از ابهامها تألیف شده است. بخشها و قسمتهای مختلف کتاب عبارتند از : تاریخچهٔ احتمال، احتمال همشانس، اصول احتمال، امید ریاضی، احتمال و ژنتیک که در تمام این فصلها مسائل کلیدی و اساسی طرح و حل شده‌اند در انتها نیز به تجزیه و تحلیل و حل تشریحی پرسشهای چهارگزینه‌ای دانشگاهها پرداخته شده است. مطالعهٔ این کتاب را به همهٔ دانش‌آموزان و دبیران محترم توصیه می کنیم.



دنباله‌ها و سریها

جدید

مؤلف : احمد قندهاری

۱۲۸ صفحه / تک رنگ / چاپ اول / ۳۵۰۰۰ ریال

این کتاب که چهاردهمین کتاب از سری کتابهای کوچک ریاضی انتشارات مدرسه می‌باشد به دو موضوع اساسی و مهم یعنی دنباله‌ها و سریها می‌پردازد.

مؤلف محترم در این کتاب و برای هر مفهوم پس از بیان تعریفها و اصول اولیه و قضیه‌های لازم، با طرح و حل مسائل کلیدی و اساسی، این مفاهیم را به طور مبسوط برای دانش‌آموز تجزیه و تحلیل می کند و مشکلات مربوط به درسهای همگرایی و واگرایی دنباله‌ها و سریها را برطرف می‌سازد. در لابه‌لای موضوعهای بحث شده در کتاب به دو موضوع تصاعدهای حسابی و هندسی نیز پرداخته شده است، کتاب از تمرینهای متنوع و متعادلی برخوردار است و در انتهای آن نیز طرح و حل تشریحی پرسشهای چهار گزینه‌ای به چشم می‌خورد، مطالعه این کتاب را به همهٔ دانش‌آموزان و دبیران محترم توصیه می کنیم.

توجه : از سری کتابهای کوچک ریاضی، کتابهای زیر در دست چاپ می‌باشند :

۱ ـ مثلثات / احمد فیروزنیا ۲ ـ ورودی به نظریه اعداد/ حمید رضا امیری ـ مازیار رامین راد

۳ ـ دیفرانسیل و انتگرال نامعین / محمّد عابدی ۴ ـ انتگرال معین و کاربردهای آن/ محمّد عابدی

۵ ـ بردارها / سیدمحمّدرضا هاشمی موسوی ۶ ـ عبارتهای جبری و معادلات / علی حسن‌زاده ماکویی

۷ ـ نابرابری‌ها و نامعادله‌ها / میرشهرام صدر

شرف‌الدین طوسی (ریاضیدان مسلمان ایرانی)

شرف‌الدین طوسی که گاهی او را شرف‌الدین مسعودی نیز نامیده‌اند، چنان‌که از آثارش پیداست، ریاضیدانی بسیار زبردست، منجمی عالیقدر و مخترع آلات نجومی بود. وی در نیمهٔ دوم سدهٔ ششم و اوایل سدهٔ هفتم هجری می‌زیست و در حدود سال ۶۱۰ درگذشت.

اصل وی چنان‌که از نسبش پیداست از طوس بوده و نوشته‌اند که به شهرهای دمشق و موصل و بغداد سفر کرده و در آن‌جا به تدریس می‌پرداخته است. یکی از مهمترین شاگردان او در موصل، ریاضیدان و منجم معروف، کمال‌الدین ابن یونس بوده است. تاریخ درگذشت او را در منابع مختلف ۶۰۹ یا ۶۱۰ هجری قمری ثبت کرده‌اند و می‌دانیم که در سال ۶۰۶ یعنی در اواخر عمرش در همدان به سر می‌برده است؛ زیرا جوابی که در آن سال به یک سؤال ریاضی داده به صورت یک رسالهٔ مختصر موجود است.

مهمترین اثر ریاضی شناخته شدهٔ شرف‌الدین طوسی کتاب *«فی الجبر و المقابله»* اوست. این کتاب که به تازگی مورد بررسی متخصصان تاریخ علوم، قرار گرفته از جهت تاریخ علم جبر حائز اهمیّت فوق‌العاده است؛ زیرا تا قبل از این بررسیها اگرچه مورخان علوم از نظریهٔ هندسی حلّ معادلات درجهٔ سوّم توسط عمرخیام آگاهی داشتند و می‌دانستند که او چگونه این روش را برای جدا کردن ریشه‌های معادلات مذکور به کار برده، امّا نمی‌دانستند که مسلمانان روشهای خاصی هم برای محاسبهٔ تقریبی ریشه‌های معادلات چندجمله‌ای عددی از درجات مختلف داشته‌اند.

در این جا چند نمونه از معادلاتی را که شرف‌الدین طوسی حل کرده است، نقل می‌کنیم:

$$x^3+12x^2+102x=34345395$$

$$x^3+6x^2+30000000x=996694407$$

$$x^3-30x^2-600x=29792331$$

شرف‌الدین طوسی همچنین مخترع نوعی اسطرلاب بدیع است موسوم به «اسطرلاب خطی» و آن قطعه چوبی بوده است مدرّج و به شکل عصا و به همین مناسبت آن را «عصای طوسی» نیز نامیده‌اند. طوسی این اسطرلاب را با یک ریسمان دولا و یک خط‌کش سوراخ‌دار به کار می‌برده است. تاکنون هیچ نمونهٔ ساخته شده‌ای از آن به دست نیامده امّا شرف‌الدین طوسی روش ساختن و به کار بردن آن را در چند رساله بیان کرده و سهولت ساختن و سادگی به کار بردن آن را ستوده است. چند نسخهٔ خطی از رسالهٔ *«في الاسطرلاب الخطّی»* در موزهٔ بریتانیا و استانبول موجود است. متن عربی و ترجمهٔ فرانسوی این رساله در روزنامهٔ *آسیایی* به چاپ رسیده است.

برگرفته از کتاب «زندگینامه ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی» ابوالقاسم قربانی / مرکز نشر دانشگاهی