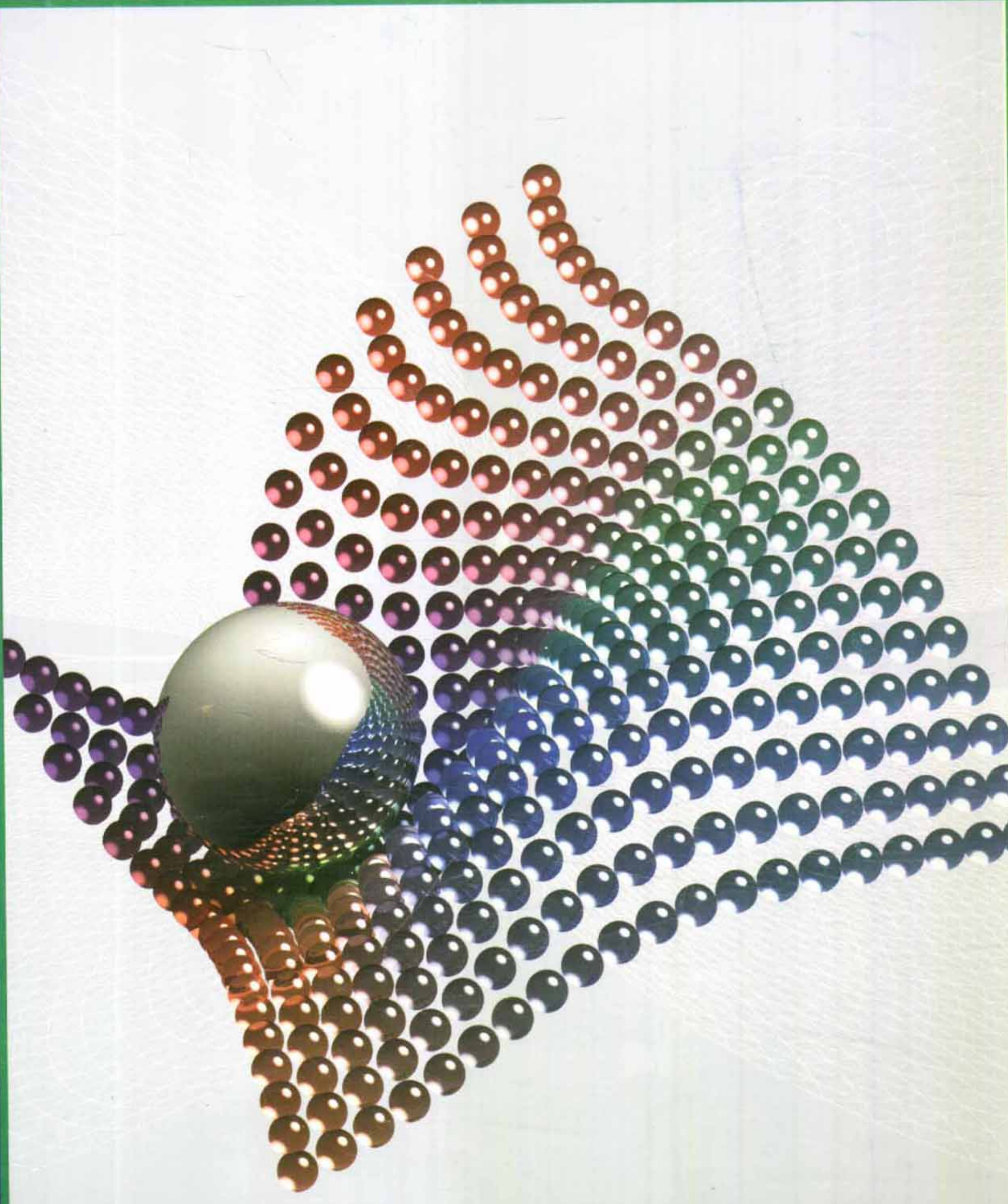
مجله ریاضی

برهان

برای دانش آموزان دبیرستان

۳۴

سال دهم، شمارهٔ سوم، بهار ۱۳۸۰، بها ۲۰۰۰ ریال



بسم الله الرحمن الرحیم

برهان

سال دهم
بهار ۱۳۸۰
شمارهٔ سوم

وابسته به وزارت آموزش و پرورش

صاحب امتیاز : انتشارات مدرسه

مدیر مسؤول : محمد صادق عزیزی

سردبیر: حمیدرضا امیری

مدیر داخلی : میرشهرام صدر

طراح گرافیک : فریبرز سیامک نژاد

مدیر فنی : هوشنگ آشتیانی

رسام : علیرضا عابدی

اعضای هیأت تحریریه : حمیدرضا امیری ، محمدهاشم رستمی ، احمد قندهاری ، میرشهرام صدر ، هوشنگ شرقی ، سیدمحمدرضا هاشمی موسوی ، غلامرضا یاسی پور

(با تشکر از همکاری ارزنده آقای پرویز شهریاری)

چاپ و صحافی : چاپخانه مدرسه

نشانی : خیابان سپهبد قرنی ، خیابان سپند شرقی ، پلاک ۳۸ ، صندوق پستی: ۱۹۴۹ / ۱۴۱۵۵
تلفن : ۶ - ۸۸۹۶۷۶۵ ، دورنویس (فاکس) : ۸۸۲۰۵۹۹ ، تلفن امور مشترکین : ۹ - ۸۸۰۰۳۲۴

برهان

تمامی دبیران محترم و دانش آموزان عزیز را در زمینه های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

- نگارش مقاله های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتابهای ریاضی دبیرستان)
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آنها (برای دانش آموزان)
- طرح مسائل مسابقه ای به همراه حل آنها (برای دانش آموزان)
- طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمه مقاله های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، زندگینامهٔ علمی واجتماعی ریاضیدانان، نکته های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و...)

برهان

هر سه ماه یک شماره منتشر می شود

- هیات تحریریه در حک و اصلاح و حذف و اضافه مقاله ها آزاد است.
- مقاله های مجله با رسم الخط انتشارات مدرسه به چاپ خواهد رسید.
- مقاله های وارده باید خوانا و حتی الامکان کوتاه باشد.
- مقاله های رسیده مسترد نمی شود.
- استفاده از مطالب مجله در کتابها یا مجله های دیگر با ذکر دقیق ماخذ بلامانع است.

حرف اول

دانش‌آموزان عزیز و خوانندگان محترم مجله برهان،

بااهدای سلام.

آیا یک کتاب کمک‌آموزشی یا کمک‌درسی مفید و استاندارد را می‌شناسید؟

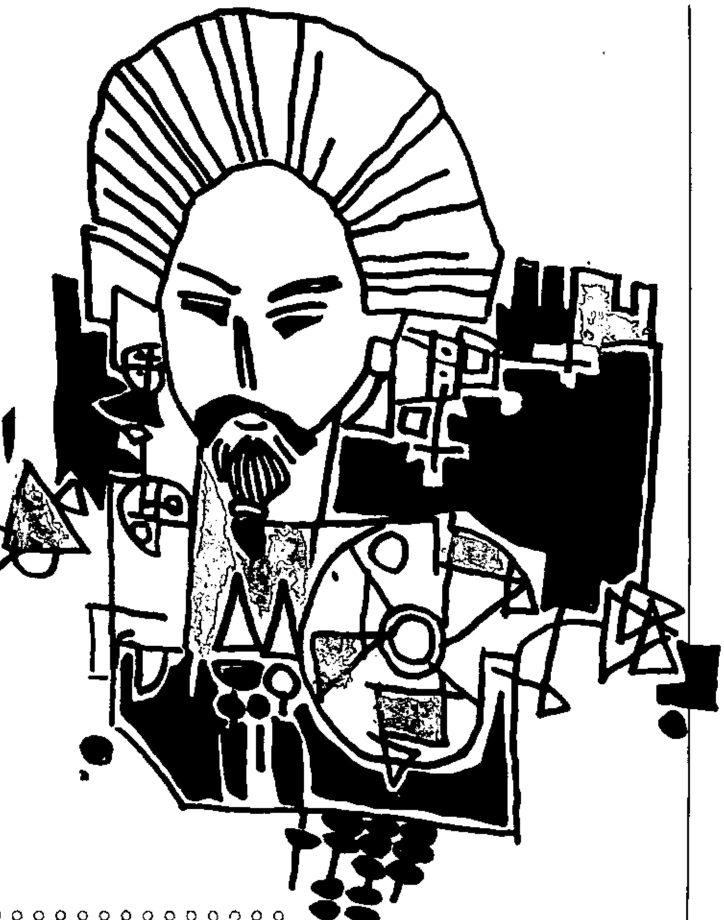
تألیف کتاب‌های درسی یکی از مهمترین وظیفه‌های وزارت آموزش و پرورش است که به‌عهدهٔ سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی درسی است. به‌دلیل محدودیت‌هایی که در کتاب درسی از قبیل زمان لازم برای تدریس، موقعیت مکانی و منطقه‌ای دانش‌آموزان و حجم کتاب وجود دارد و به‌منظور گسترش و عمق‌بخشی و کاربرد مفاهیم کتاب، باید در کنار کتاب درسی، کتاب‌هایی به‌صورت مکمل موجود باشد که منطبق با هدف‌های برنامه‌ریزی تألیف کتاب درسی باشند تا این‌که دانش‌آموزان با مطالعه این نوع کتاب‌ها، مطالب کتاب درسی را بهتر فراگیرند و با کاربردهای مفاهیم علمی آشنا شوند.

برای این منظور بهتر است که شما عزیزان، کتاب‌های خود را از ناشران و مؤلفان متعهد و خوش‌نام انتخاب کنید؛ چون اغلب دانش‌آموزان و اولیا از استانداردهای آموزشی برای یک کتاب کمک‌درسی و کمک‌آموزشی اطلاع دقیقی ندارند و کتاب‌هایی خریداری می‌کنند که در آنها تمرین‌های موجود کتاب‌های درسی را حل کرده‌اند. این نوع کتاب‌ها نه‌تنها بازدهی مطلوبی را ندارند، بلکه بسیاری از هدف‌های کتاب درسی را زیرپا می‌گذارند و زحمت‌های کارشناسان کتاب درسی را به‌هدر می‌دهند. تمرین‌های کتاب درسی به‌طور قطع با هدف‌های آموزشی خاصی طرح شده است تا دانش‌آموزان خود را بسنجند و معلم میزان فراگیری و وضعیت کلاسی را درک کند.

بنابراین بر همه دانش‌پژوهان و دبیران محترم است که با آگاهی از این مطالب، جلوی این مشکل اجتماعی و فرهنگی را بگیرند که به‌شدت جامعه آموزشی ما را به مخاطره انداخته است و بر مسؤولان فرهنگی است که از چاپ چنین کتاب‌هایی جلوگیری قانونی به‌عمل آورند.

والسلام ـ سردبیر

از تاریخ بیاموزیم ۸



پرویز شهریاری

دنبالهٔ مقالهٔ «آگاهیهایی از ریاضیات چین باستان»

کسرهای با منطق متری را، هنوز نمی‌توان کسرهای دهدهی امروزی دانست ؛ آنها تنها شکل نخستینِ کسرهای دهدهی به شمار می‌آیند. برای این که مفهوم کسر دهدهی، به صورتی انتزاعی شکل بگیرد، باید از پوشش منطق متری بیرون آید ؛ یعنی از پوسته و از حوزهٔ مقدارهایی که به خودی خود، اندیشهٔ تقسیم منظم واحدها را تلقین می‌کند، خارج شود و بتواند به طور کلی تا هر جا که لازم است، ادامه یابد. رسیدن به چنین ساختمان انتزاعی، کاری دشوار بود ؛ زیرا برای ریاضیدانان باستانی، همیشه مسأله‌ها به صورت مشخص و عملی آن مطرح بود.

در مسأله‌های باستانی، به طور معمول، سخن از اندازهٔ مساحت کف اتاق، حجم آب بند و آبراه و دیوار قلعه، گنجایش انبارهای غلّه، وزن ابریشم یا پنبهٔ خام و اندازهٔ پارچه‌های ابریشمی یا کتانی است. بنابراین، در مسأله‌هایی که از زندگی روزانه گرفته شده است، اغلب با مقدارهایی با منطق متری یا با عددهایی که برای واحدهای مختلف آن نامی وجود داشته باشد، سروکار دارند.

ولی ریاضیات، جوهر اصلی این مسأله‌های مشخص را جدا می‌کند و روشهایی برای حلّ کلی یک دسته از مسأله‌های معین به وجود می‌آورد، و کلی‌ترین و دشوارترین نوع مسأله‌ها را به حلّ ساده‌ترینِ آنها می‌رساند. به این ترتیب، مضمون عملی مسأله‌ها، تسلیمِ طرح‌های کلی می‌شود و با کنار رفتن آن، مسأله‌های خالص علمی پدید می‌آید.

در واقع، اکنون دیگر همهٔ امکانها، برای تنظیم مسأله‌ها به صورت کلی و بدون توجه به جنبهٔ عملی و کاربردی آنها پدید آمده بود. در «ریاضیات در نُه کتاب» به مسأله‌های کلی و حلّ جبری آنها برمی‌خوریم، در کتاب هفتم با عنوان «زیادی و کاستی» و در کتاب هشتم با عنوان «قانون خان ـ چین». ولی به طور کلی، برای مسأله‌های چینی، این ویژگی اساسی وجود دارد که جنبهٔ کاربردی، با مضمون انتزاعی به هم آمیخته است ؛ شبیه آن چه پیش از این برای بخشهای کسری آدم دیدیم.

سون تسرزی هم، وقتی درک خود را از کسرهای دهدهی، با مفهوم کلی پیشنهاد می‌کند، درست به همین ترتیب عمل می‌کند. او مقداری را انتخاب می‌کند که از پیش معلوم است بخشهای کوچکتری ندارد. این مقدار بخش‌ناپذیر، چیزی مثل آدم است که نمی‌توان دربارهٔ بخشی از آن سخن گفت. روشن است، بخشهای دهدهی چنین عددی، کسرهای دهدهی امروزی را معرفی می‌کند ؛ گرچه خود به عدد به ظاهر انتزاعی نیست و به چیزی وابسته است. این مسأله را از کتاب آخر سون تسرزی انتخاب کرده‌ایم.

از بین ۱۵۰۰۰۰۰۰ دهقان، ۴۰۰۰۰۰ سرباز انتخاب شده است. می‌خواهیم بدانیم، از هرچند دهقان، یک نفر به سربازی رفته است!

✱ پاسخ: ۳۷ دهقان و ۵ فن.

در این جا آموزش کسر دهدهی مطرح نیست ؛ ولی کسر دهدهی وجود دارد : ۳۷ عدد درست و ۵ دهم، با این که ۵ دهم دهقان نمی‌تواند وجود داشته باشد. در این‌جا ریاضیدان چینی، برای بخشهای دهدهی عدد از واژهٔ «فن» استفاده کرده است که به معنای $\frac{1}{10}$ تسون است. به کار بردن نامهای مشخص برای بخشهای دهدهی انتزاعی، همیشه معمول بوده است، بعدها هم از این عادت پیروی شده است. در چین باستان، این بخشهای دهدهی را از روی ارزش سکّه‌ها نامگذاری می‌کردند. سون تسرزی، بخشهای دهدهی «بو» را به کار می‌برد که به طور کلی وجود نداشت : «بو» از ۶ «چی» تشکیل شده بود. در این حالت «بو» مثل آدم، بخش‌پذیر بود.

این مرحله که بخشهای دهدهی هر عدد را با نام یک مقدار مشخص به کار می‌بردند، گذری است از مفهوم کسر با منطق متری به مفهوم کسر دهدهی. می‌بینیم، چگونه هر سه مقیاس، برای طول، وزن و حجم لازم می‌شود ؛ در حالی که در آغاز، یکی از این مقیاسها کافی بود.

وقتی «فن» بخش دهدهی «تسون»، معنای نخستین خود را از دست داد، معنای تازه‌ای یافت و به طور کلی، برای بخش دهدهی به کار رفت. این معنا تنها برای بقیهٔ مقدارهای با منطق متری نبود ؛ بلکه به طورکلی به بخش دهدهی یک عدد گفته می‌شد.

این درک تازه از مفهوم عدد و گسترده کردن آن، به صورت دستگاه دهدهی و پیدا شدن ردیفهای کوچکتر از واحد، ناشی از منطق درونی خود ریاضیات بود و به همین دلیل، در آغاز کاربردی محدود داشت.

دو مسأله را از رسالهٔ سون‌تسرزی مقایسه می‌کنیم. این مقایسه بخوبی می‌تواند، احتیاطی را که در گذار به وضع تازه وجود داشته است، روشن کند. یکی از آنها، مسألهٔ بیست و یکم از کتاب میانهٔ رساله است، به این شرح :

کف اتاقی به شکل منحنی است که طول آن ۶۳۹ بو و قطر آن ۳۸۰ بو است. مساحت کف اتاق چقدر است؟

باید مساحت قطاع دایره را بنابر دستور چینی به دست آوریم.

$$\text{مساحت قطاع} = \frac{C}{۲} \times \frac{D}{۲}$$

که در آن، C طول کمان و D طول قطر دایرهٔ قطاع ست. برای نصف کردن طول کمان، یعنی ۶۳۹ بو، عدد دهدهی ۳۱۹/۵ بو به دست می‌آید. سون تسرزی، این مقدار را این طور به دست می‌آورد :

طول کمان را نصف می‌کنم، ۳۱۹ بو ۵ فن می‌شود.

ولی در همین کتاب از رساله، مسألهٔ شانزدهم هم وجود دارد :

طنابی داریم به طول ۵۷۹۴ بو. اگر با آن مربعی بسازیم، طول ضلع مربع چه قدر است؟

✱ پاسخ: ۱۴۴۸ بو و ۳ چی.

پاسخ این مسأله را می‌شد به صورت کسر دهدهی ۱۴۴۸/۵ بو داد ؛ ولی سون تسرزی این کار را نمی‌کند. از این دو مسأله، روشن می‌شود که سون تسرزی، زیر فشار سنت بوده است. در عملی که سون تسرزی، به عنوان یک عمل بینابینی انجام می‌دهد، به خودش حق می‌دهد، از یک بدعت محاسبه‌ای استفاده کند. این کار برای او خطری ندارد ؛ زیرا در مسألهٔ اوّل و برای محاسبهٔ قطاع، سرانجام باید ۳۱۹/۵ را در ۱۹۰ ضرب کند و در نتیجه، کسر دهدهی باقی نمی‌ماند. ولی وضع در مسألهٔ دوم فرق می‌کند. کارمند ادارهٔ ارضی، کتاب را مطالعه می‌کند و ممکن است به خاطر واحد اختراعی تازه، به زحمت بیفتد و می‌بینیم که سون تسرزی لازم می‌بیند، در این مسأله از

قانون خودش بگذرد و همان اندازه‌های قدیمی و عادی را برای طول در نظر بگیرد. البته، حَل مسأله پیچیده‌تر می‌شود؛ ولی آیا سون تسرزی هم می‌خواهد همین را نشان بدهد؟ به جای یک عمل تقسیم، ناچار شده است دو عمل دیگر را هم انجام دهد :

طول طناب را ۵۷۹۴ بو برقرار می‌کنم، آن را بر ۴ تقسیم می‌کنم، ۴۴۸ بو به دست می‌آورم و ۲ بو هم باقی می‌ماند. باقیمانده را در ۶ ضرب می‌کنم، ۱ چژان و ۲ چی به دست می‌آید. آن را بر ۴ تقسیم می‌کنم، ۳ چی به دست می‌آورم.

همین شباهت تاریخی را در ریاضیات بابلی هم می‌توان یافت. در آن‌جا از دستگاه شصت شصتی محاسبه استفاده می‌کردند که بر اساس موضعی‌بودن رقمها بنا شده بود و تنها در محاسبه‌ها به کار می‌رفت؛ ولی مقدارهای داده شده و نتیجه را در دستگاه شصت شصتی یا دستگاه دهدهی غیرموضعی (که در متنهای اقتصادی به کار می‌رفت و در زندگی و عمل رواج داشت) بیان می‌کردند.

ویژگی اصلی کسر دهدهی، یعنی انتقال ممیّز به راست (یا به چپ) با ضرب عدد در توانی از ۱۰ (یا تقسیم عدد بر توانی از ۱۰)، در چین باستان بخوبی شناخته شده بود، در زبان چینی، دو اصطلاح وجود داشت؛ «شان شی چژه» به معنای بزرگ کردن یک عدد با ضرب آن در ۱۰ و «توی» به معنای عقب کشیدن و حرکت از یک مرتبه به سمت چپ. این عمل‌ها ضمن حلّ مسأله‌های ۲۱ و ۲۲ در کتاب سوّم سون تسرزی وجود دارد. یکی از این مسأله‌ها را در این‌جا می‌آوریم :

یک «پی» کتان ۱۸۰۰۰ «تسیان» می‌ارزد. ارزش یک «چژان»، یک «چی» و یک «تسون» کتان به طور جداگانه چه قدر است؟

✱ پاسخ: چژان ۴۵۰۰ تسیان؛ چی ۴۵۰ تسیان؛ تسوی ۳۴ تسیان[1]

روش حل : ۱۸۰۰۰ تسیان را برقرار می‌کنم. آن را بر ۴ تقسیم می‌کنم، ارزش یک چژان به دست می‌آید. به طرف راست عقب می‌کشم، دوباره به طرف راست عقب می‌کشم و ارزش چی و تسون را به دست می‌آورم.

در این مسأله، اصطلاح «توی» به کار رفته است. در مسألهٔ ۲۲ که عدد ۱۸۰۰۰۰۰۰ را در ۱۰۰ ضرب می‌کند، مرتبه را به سمت چپ می‌برد؛ یعنی به زبان امروزی، نماد ممیّز را دو رقم به سمت راست می‌برد. در مسألهٔ ۹ از کتاب سوّم رسالهٔ سون تسرزی، ضرب در ۴۰ با دو عمل انجام می‌شود؛ ضرب در ۱۰ و سپس ضرب در ۴.

به این ترتیب چینیها، به دلیل روش خوب و پیشرفته‌ای که در محاسبه داشتند، در حالی که نه لگاریتم را می‌شناختند و نه مثلثات را، به برتری کسرهای دهدهی پی برده بودند و نظر من این است که مفهوم کسر دهدهی، در سدهٔ سوم میلادی و در چین کشف شده است. درست است که بعدها هم، ویژگی متری بودن کسرهای دهدهی باقی ماند؛ ولی این ویژگی به سمت انتزاع کشش داشت.

به گواهی تاریخ، «تسه زو چون ـ چژی»، ریاضیدان سدهٔ پنجم چین هم از این کسرها استفاده می‌کرد. نام این ریاضیدان، به آن دلیل در تاریخ آمده است که عدد π را تا شش رقم درست بعد از ممیّز محاسبه کرده بود.

«تسین تسه زیو ـ شا او»، «چژوشی ـ تسه‌زه»، «لی له» و «یان هوئد» جبردانهای سدهٔ سیزدهم و چهاردهم میلادی هم، کسرهای دهدهی را به کار برده‌اند. اصطلاح امروزی چینی «سیا او شو» (عددهای کوچک)، برای کسرهای دهدهی، مربوط به «چژوشی ـ تسه‌زه» است. او برای اندازه‌گیری طول تا 10^{-16} «چی» پیش رفته بود و نامهایی برای این مقیاسها گذاشته بود که تا مدتها و تا زمانی که ریاضیات غرب به چین نفوذ کرد، به کار برده می‌شد. «یان هوئد» در یکی از مسأله‌های خود، در آغاز کسر متعارفی را به کسر دهدهی تبدیل می‌کند، و سپس عمل ضرب را انجام می‌دهد. در دورهٔ «کانگ ـ هی» (۱۶۶۲ ـ ۱۷۱۲) در واحدهای اندازه‌گیری قدیمی ـ که گویا «هوان دی» امپراتور افسانه‌ای سدهٔ بیست و هفتم پیش از میلاد، آنها را به کار می‌برد ـ تجدیدنظر کردند. جدولهای اندازه‌گیری را به این ترتیب درست کرده، در «فرهنگ ریاضی» ضبط کردند. در این جدولها، اندازه‌های کسری دقیق داده شده است؛ برای طول تا 10^{-31} «چی»، برای حجم تا 10^{-14} «شن» و برای وزن تا 10^{-16} «لانو» بستگی بین واحدها، تقریباً در همه‌جا به صورت دهدهی است و بستگیهای از نوع «۶ چی = ۱ بو» به بستگی ساده‌تر «۵ چی = ۱ بو» تغییر یافته است.

در این‌جا، تکامل کسرهای دهدهی را، از صورت کسرهای با منطق متری به کسرهای دهدهی انتزاعی، کم و بیش به تفضیل بررسی کردیم. ولی خود کسرهای با منطق متری چگونه پدید آمدند؟ چه ضرورتی موجب پیدایش آنها شد؟

روشن است، بدون در نظر گرفتن اثر تختهٔ محاسبه (که محاسبه با کسرهای دهدهی به یاری آنها انجام می‌گرفت)، نمی‌توان پاسخ این پرسش را یافت. برای این بررسی، نگاهی به تاریخ منطق متری می‌اندازیم.

واحدهای مختلف اندازه‌گیری، در رشته‌های گوناگون فعالیت آدمی، همزمان و بدون بستگی با یکدیگر پدید آمده است. به یاری «پی» و «دوان» (یعنی تکّه) پارچه را اندازه می‌گرفتند، به یاری «بو» (گام) طول ضلعهای تکّه زمینها را به دست می‌آوردند، به‌یاری «لی» (ورست) فاصله تا نقطه‌های پرجمعیت را بیان می‌کردند و «چی» که اکنون برابر $\frac{1}{3}$ متر است و در طول تاریخ از ۰/۱۹ متر تا ۰/۳۴ متر تغییر کرده است، برای اندازه‌گیری وسیله‌های منزل و بعضی چیزهای دیگر به کار می‌رفت.

وقتی هر کدام از این واحدها در جای خود مستقر شدند، لازم بود با هم مقایسه شوند. البته بستگی بین این واحد، دهدهی نبود. ولی وقتی ضمن محاسبه، دانشمندان به عددهای خیلی کوچک و خیلی بزرگ برخوردند، وضع تغییر کرد. در این حالتها باید از مقیاسی منظم استفاده می‌شد و این مقیاس به طور طبیعی در دستگاه شمار دهدهی وجود داشت؛ زیرا در آن می‌توان به طور دلخواه و تا هر اندازه که لازم باشد، از دو طرف عدد جلو رفت.

تاریخ چین، از نخستین قانونگذاری دربارهٔ اندازه‌ها خبر می‌دهد. این قانونگذاری در سدهٔ سوّم پیش از میلاد و به وسیلهٔ «تسین شی هوان دی» انجام گرفت. این امپراتور، چین را به صورت یک دولت واحد درآورد و اصلاحهایی انجام داد؛ خط نوشتنی را یکنواخت کرد، برای عبور ارّابه‌ها جاده کشید و غیره. تا زمان او آشفتگی زیادی در زمینهٔ اندازه‌گیریها بود. برای نمونه:

۸ «چی» = ۱ «سیون»، = «۲ سیون» = ۱ «چژان» و همچنین ۸ «چی» = ۱ «ژن». گاهی هم ممکن بود ۴ «چی» یا ۷ «چی» تشکیل یک «ژن» را بدهند.

بویژه مطالب زیادی دربارهٔ منطق متری می‌توان در «رسالهٔ ریاضی سون تسرزی» یافت. اگر نخستین صفحهٔ این رساله را باز کنیم، به جدول اندازه‌ها و وزنها برمی‌خوریم. با این جدولها بیشتر آشنا شویم. بیش از همه، جدول سوّم برای اندازه‌گیری حجمها جالب است که در مسألهٔ «مربوط به مبادله» غلّه، با آن برخورد می‌کنیم. این جدول شامل جزءهای کوچکتر، نسبت به واحد «دوی» است:

برای تعیین حجم با آغاز از «سو»:

زاگه = ۱۰ شا او	زاگوی = ۶ سو
زاشه‌نو = ۱۰ گو	راتسو = ۱۰ گوی
زادوی = ۱۰ شرنو	زاچااو = ۱۰ تسو
اهو = ۱۰ دوی	زاشااو = ۱۰ چا او

این جدول از این جهت جالب است که در همهٔ برابریها، بجز نخستین آنها، با شمار دهدهی ساخته شده است. به همین دلیل، همان‌طور که پیش از این هم دیدیم، می‌توان از آنها برای نشان دادن عددها به صورت کسرهای با منطق دهدهی بسادگی استفاده کرد. برای نمونه، اگر «دوی» را واحد بگیریم، به یاری جدول می‌توان تا ۶ رقم دهدهی را محاسبه کرد.

یادآور می‌شویم اگر بعکس، «گوی» را به عنوان واحد در نظر بگیریم، می‌توان دستگاهی با ردیفهای مشخص برای بیان عددهای بزرگ در دست داشت؛ به نحوی که برای هر مرتبه، نامی وجود داشته باشد. سون تسرزی، دو نمونه از چنین دستگاهی را ساخته است؛ در دستگاه اول، به هر مرتبهٔ تازه که از 10^8 آغاز می‌شود، نامهای ویژه‌ای داده است. در دستگاه دوم (که برای عددهای بزرگ است) نامهای مشابهی برای هریک از مرتبه‌های جدید، یعنی 10^8، 10^{12}، 10^{16}، ... آمده است.

جدول دیگر، شامل اندازهٔ وزنهاست که ابتدا جزءهای آن، اهمیت جزءهای واحد حجم را ندارد. واحدهای وزن در چین، دهدهی نبود؛ بجز آن که این جدول دهدهی نیست و از قانون هماهنگی هم پیروی نمی‌کند.

برای وزن کردن با آغاز «شو»:

یک تسه زین = ۱۶ لانو	ز یک لِنِی = ۱۰ شو
یک تسه زیون = ۳۰ تسه‌زین	ز یک چژو = ۱۰ رنی
یک دوانیو = ۴ تسه زیون	ز یک لانو = ۲۴ چژو

همان‌طور که دیده می‌شود، برابری بین اندازه‌ها در این جدول، بجز دو تای اوّل، به صورتهای متفاوت است. بروشنی معلوم است که، برابری اوّل هم، بعد از تنظیم جدول به آن

اضافه شده است. این موضوع، به ما در این نتیجه‌گیری کمک می‌کند که جدولهای سون‌تسرزی، نه یک جمع‌آوری سادهٔ واحدهای موجود، بلکه نتیجه تنظیم و اصلاح آنها بوده است، در آغاز، واحد اصلی تعریف می‌شود، سپس رابطهٔ بین واحدهای مختلف، تا حدّ امکان، به صورت دهدهی داده شده است.

جدولها، بروشنی دربارهٔ منطق متری سخن می‌گویند. برای تشکیل اندازه‌های کوچکتر یا بزرگتر، واحدهای اصلی را با شیوه‌های مختلف می‌شکستند یا با هم یکی می‌کردند. تنها بعدها این عمل را به صورت مقیاس دهدهی در آوردند. این مطلب را بیش از همه، می‌توان از جدول اندازه‌های طول فهمید که سون تسرزی، رسالهٔ خود را با آن آغاز می‌کند :

برای اندازه‌گیری طول، از «هو» آغاز می‌کنم. اگر بخواهی دربارهٔ «هو» بدانی، نخی است که کرم ابریشم پدید می‌آورد :

یک پنیو = ۱۰ چژان	یک سی = ۱۰ هو
یک دوانیو = ۵۰ چی	یک ها او = ۱۰ سی
یک پی = ۴۰ چی	یک لی = ۱۰ ها او
یک بو = ۶ چی	یک فن = ۱۰ لی
یک مو = ۲۴۰ بو	یک تسون = ۱۰ فن
یک لی = ۳۰۰ لو	یک چی = ۱۰ تسون
	یک چژان = ۱۰ چی

اندازهٔ طول «هو»، به اندازهٔ قطر تار ابریشم تعیین می‌شود. یکی از اندازه‌هایی که در این جا نام برده شده، مربوط به مساحت است. «هو» واحد مساحت است و بنابراین، باید گفته می‌شد : ۲۴۰ «بو»ی مربع برابر است با یک «مو»ی مربع. آن طور که از مسألهٔ اوّل «ریاضیات در نُه کتاب» برمی‌آید، این مساحت مستطیلی است با ضلعهای به طول ۱۵ و ۱۶ بو (گام). «تسین شی هوان دی»، اندازهٔ «چی» را با ۵ رقم دهدهی داده است.

می‌بینیم، چگونه روش محاسبه، در منطق متری اثر می‌گذارد و این به نوبهٔ خود، مایهٔ اصلی برای عامتر شدن کسرهای دهدهی شد. تختهٔ محاسبه، همراه با استفاده از روش موضعی عددنویسی، به پیدایش کسرهای دهدهی یاری رساند. روی این تخته باید بسادگی عملهای تقسیم و ریشه گرفتن، بدون توجه به مرزی که ستون عددهای درست را مشخص می‌کنند، انجام شود. هر ستون خالی که در سمت راست ستون واحد باشد، می‌تواند برای به دست‌آوردن رقمهای دهدهی به کار رود، که به زبان امروز، به معنای این است که در سمت راست نماد ممیّز، صفر قرار دهیم.

ولی تختهٔ محاسبه هم، به نوبهٔ خود محدودیتهایی پدید آورده بود ؛ بعد از انجام عمل روی تخته، به محض این که نتیجه را از آن جدا می‌کردند، شکل موضعی بودن خود را از دست می‌داد. چینیها برای نوشتن، از اصل «ترکیب ضربی» استفاده می‌کردند ؛ یعنی از دستگاه دهدهی که رقمهای آن نامهای موضعی داشت ؛ شبیه آن چه در دستگاه عدد شماری شفاهی امروز داریم. در این عددشماری، صفر وجود ندارد ؛ همان‌طور که روی تخته هم وجود نداشت. نبودن نماد صفر (به نحوی که صفر را به عنوان یک رقم مثل سایر رقمها در نظر بگیرند)، سدی در راه شکل نهایی کسرهای دهدهی شد. به همین دلیل است که در کسر دهدهی چینی، نمادی برای ممیّز هم وجود ندارد. روی تخته، شبیه کسرهای دهدهی امروزی نشان داده می‌شد و هر رقم درست در جای خودش بود ؛ ولی همین که از تخته جدا می‌شد و نتیجهٔ عمل به صورت نوشته در می‌آمد، صورت منطق متری، یعنی رقمهایی با نامهای ویژه به خود می‌گرفت ؛ درست مثل شمار شفاهی که یک دستگاه موضعی با ترکیب ضربی است. ما شاهد سون تسرزی و تلاش او برای بیرون آمدن از این وضع بودیم و در ضمن دیدیم، چگونه با سختی توانست در این راه موفّق شود.

از این به بعد، کسرهای متعارفی و دهدهی، در مسیر پیشرفت خود، به دو راه مختلف افتادند. کسر به عنوان نسبت دو عدد، آغازی برای تعمیم مفهوم عدد شد و این امکان به دست آمد که زمینه‌های مختلف جبر ساخته شود، این جنبهٔ جبری، تعمیم مفهوم عدد بود.

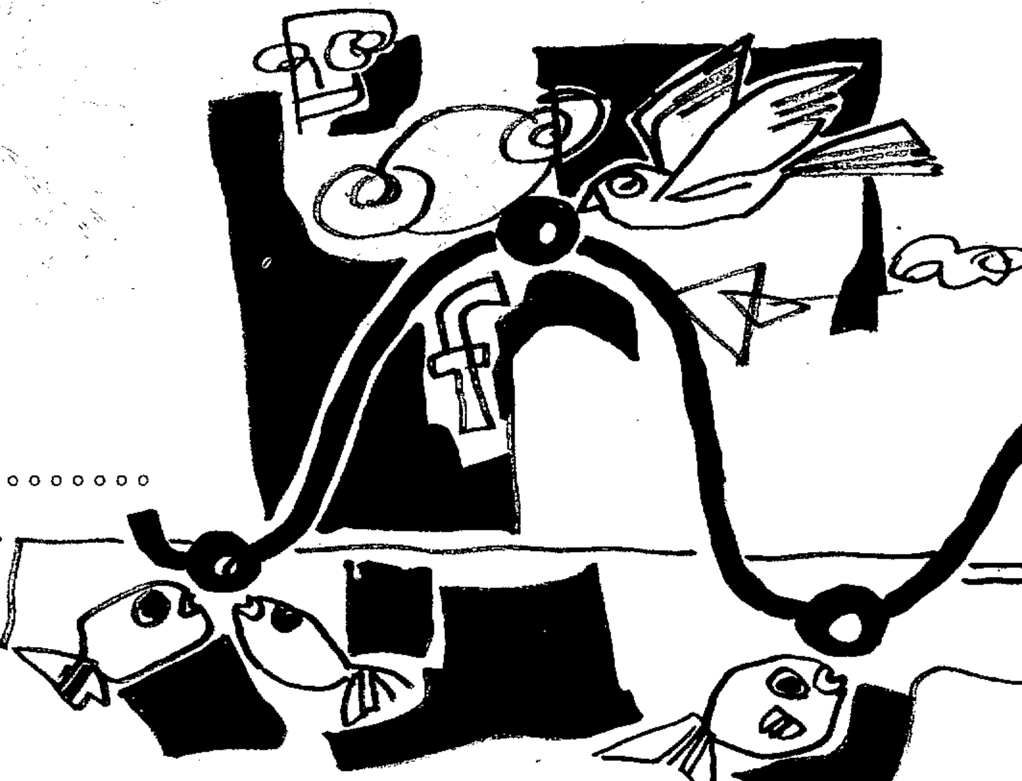
اگر کسرهای متعارفی، نمونه‌های ساده‌ای هستند که عملهایی بنابر قاعده‌های معلوم، روی آنها انجام می‌شود، کسرهای دهدهی، مفهوم بی‌نهایت و مسأله‌های ناشی از آن را، در درون خود نهفته داشتند.

کسر دهدهی، پایه‌ای برای تعمیم و پیشرفت مفهوم تقریب در زمینهٔ رشته‌ها و کسرهای مسلسل شد. بی‌تردید نیوتون برای تبدیل تابع به یک رشته، از اندیشهٔ کسر دهدهی الهام گرفته است ؛ زیرا کسر دهدهی شبیه رشتهٔ پیوسته‌ای است که در آن، هر رقم معرّف درجه‌ای از دقّت مقدار واقعی عدد است، و این، جنبهٔ تحلیلیِ مفهوم عدد است.

*

روش تعیین عرضهای اکسترمم نسبی تابع f بدون استفاده از مشتق

(برای دانش‌آموزان سال سوم و پیش دانشگاهی)



احمد قندهاری

تابع به معادلهٔ $y=x^2-2x+4$ را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم عرض می‌نی‌مم نسبی این تابع را ابتدا به کمک مشتق محاسبه کنیم. می‌نویسیم:

طول می‌نی‌مم نسبی تابع

$$y'=2x-2=0 \Rightarrow x=1$$

در معادلهٔ تابع

$$x=1 \longrightarrow y=1-2+4=3 \Rightarrow y=3$$

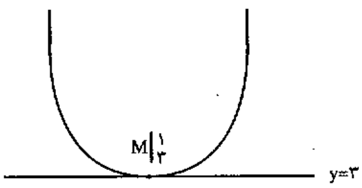
عرض می‌نی‌مم نسبی تابع

پس نقطهٔ $M\Big|{}^{1}_{3}$ می‌نی‌مم نسبی تابع است.

چون عرض می‌نی‌مم نسبی (۳) است، حال نشان می‌دهیم که خط $y=3$ بر منحنی تابع مماس است:

$$\begin{cases} y=x^2-2x+4 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow x^2-2x+4=3$$

$$x^2-2x+1=0 \qquad \Delta=b^2-4ac=4-4=0$$



توجه داریم که اگر خطی بر یک منحنی مماس باشد، چنانچه معادله‌های آنها را با هم تقاطع دهیم (yها حذف)، معادله حاصل باید دو ریشهٔ برابر داشته باشد یا دلتای معادله حاصل برابر ۰ باشد.

حال فرض می‌کنیم $y = k$ عرض می‌نی‌مم نسبی تابع باشد، پس اگر خط $y = k$ را با معادلهٔ منحنی تقاطع دهیم (yها حذف)، دلتای معادلهٔ تقاطع حاصل باید برابر ۰ باشد.

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 4 \\ y = k \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x + (4 - k) = 0$$

$$\Delta = 4 - 4(4 - k) = 0 \Rightarrow 1 - 4 + k = 0 \Rightarrow k = 3$$

پس عرض می‌نی‌مم نسبی منحنی تابع برابر (۳) است.

حال عرض اکسترمم نسبی تابع درجه دوم به معادلهٔ $y = ax^2 + bx + c$ را بدون استفاده از مشتق به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = k \end{cases}$$

فرض می‌کنیم $y = k$ عرض اکسترمم نسبی تابع باشد.

$$ax^2 + bx + c - k = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4a(c - k) = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac + 4ak = 0$$

$$4ak = 4ac - b^2 \Rightarrow k = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

پس عرض اکسترمم نسبی تابع درجه دوم به معادلهٔ $y = ax^2 + bx + c$ برابر $\frac{4ac - b^2}{4a}$ است.

مثال: عرضهای اکسترمم نسبی تابع به معادلهٔ $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$ را به دو روش بیابید.

■ روش اوّل با استفاده از مشتق:

$$y' = \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

طولهای اکسترمم نسبی تابع

$$y' = 0 \Rightarrow 2 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

(توجه داریم که ریشه‌های سادهٔ مشتق، طولهای اکسترمم نسبی تابع است.)

$$x = 1 \xrightarrow{\text{در معادلهٔ تابع}} y = \frac{2}{2} = 1$$

عرض ماکزیمم نسبی تابع

$$x = \xrightarrow{\text{در معادلهٔ تابع}} y = \frac{-2}{2} = -1$$

عرض می‌نی‌مم نسبی تابع

■ روش دوم بدون استفاده از مشتق: به جای این که فرض کنیم $y = k$ عرض اکسترمم نسبی تابع است، فرض می‌کنیم $y = y$ عرض اکسترمم نسبی تابع باشد. (در واقع معادلهٔ تابع را طرفین وسطین می‌کنیم و بر حسب x مرتب می‌نویسیم.)

$$\begin{cases} y = \frac{2x}{x^2 + 1} \\ y = y \end{cases} \Rightarrow \frac{2x}{x^2 + 1} = y \Rightarrow yx^2 + y = 2x$$

$$yx^2 - 2x + y = 0 \;;\; \Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow 4 - 4y^2 = 0$$

$y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$ عرضهای اکسترمم نسبی تابع

تذکر: چون منحنی این تابع مجانب قائم ندارد، عرض ماکزیمم نسبی بزرگتر از عرض می‌نی‌مم نسبی تابع است؛ پس $y = 1$ عرض ماکزیمم نسبی و $y = -1$ عرض می‌نی‌مم نسبی است.

توجه: عملاً در مسائل به جای این‌که خط $y = k$ یا خط $y = y$ را با معادلهٔ منحنی تقاطع دهیم، یکباره معادلهٔ تابع را بر حسب x مرتّب می‌نویسیم. (در مسائل کسری ابتدا معادلهٔ تابع را طرفین وسطین می‌کنیم.)

مثال: عرضهای اکسترمم نسبی تابع به معادلهٔ $y = \frac{x^2 + 1}{x}$ را بیابید.

از روش مورد بحث (بدون استفاده از مشتق استفاده می‌کنیم):

$$y=\frac{x^2+1}{x}\Rightarrow x^2+1=yx\rightarrow x^2-yx+1=0$$
$$\Delta=b^2-4ac=0\Rightarrow y^2-4=0\Rightarrow y=\pm 2$$

چون $x=0$ مجانب قائم منحنی تابع است؛ یعنی منحنی تابع مجانب قائم دارد، پس عرض می‌نی‌مم نسبی تابع بزرگتر از عرض ماکزیمم نسبی تابع است.

بنابراین $y=-2$ عرض ماکزیمم نسبی تابع و $y=2$ عرض می‌نی‌مم نسبی تابع است.

خلاصه برای تعیین عرضهای اکسترمم نسبی تابع، معادلهٔ تابع را بر حسب x مرتّب می‌نویسیم، سپس $\Delta=0$، از حلّ معادلهٔ $\Delta=0$ عرضهای اکسترمم نسبی تابع به دست می‌آید.

مثال: عرضهای اکسترمم نسبی تابع به معادلهٔ $y=\frac{x^2}{x^2-5x+4}$ را بدون استفاده از مشتق بیابید.

حل: معادلهٔ تابع را بر حسب x مرتّب می‌نویسیم:

$$y=\frac{x}{x^2-5x+4}\Rightarrow yx^2-5yx+4y=x$$
$$yx^2-(5y+1)x+4y=0\ ,\quad \Delta=(5y+1)^2-16y^2=0$$
$$9y^2+10y+1=0\qquad a+c=b\ ;\ \begin{cases} y=-1\\ y=-\frac{1}{9}\end{cases}$$

چون منحنی این تابع مجانب قائم دارد، $y=-1$ عرض ماکزیمم نسبی و $y=-\frac{1}{9}$ عرض می‌نی‌مم نسبی تابع است.

تابع به معادلهٔ $y=f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ (حداقل a یا a' مخالف است)، می‌خواهیم عرضهای اکسترمم نسبی این تابع را بیابیم:

$$y=\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$$
$$\Rightarrow ax^2+bx+c=a'yx^2+b'yx+c'y$$

معادلهٔ مرتّب شده بر حسب x

$$(a-a'y)x^2+(b-b'y)x+(c-c'y)=0$$
$$\Delta=(b-b'y)^2-4(a-a'y)(c-c'y)=0\Rightarrow$$
$$(b'^2-4a'c')y^2+2(2ac'+2a'c-bb')y+b^2-4ac=0$$

ریشه‌های این معادله، عرضهای اکسترمم نسبی تابع f است. فرض می‌کنیم ریشه‌های این معادله y_1 و y_2 باشد.

$$y_1\cdot y_2=\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{b'^2-4a'c'}=\frac{\Delta_{\text{صورت تابع } f}}{\Delta_{\text{مخرج تابع } f}}$$
$$y_1+y_2=-\frac{b}{a}=\frac{-2(2ac'+2a'c-bb')}{b'^2-4a'c'}$$

مثال: در تابع به معادلهٔ $y=\frac{x^2-4x+m}{x-\frac{m}{4}}$، مجموع عرضهای اکسترمم نسبی تابع برابر (-۴) است، m را بیابید.

حل: توجه $a'=0$

$$y_1+y_2=\frac{-2(2ac'+2a'c-bb')}{b'^2-4a'c'}$$
$$-4=\frac{-2(-\frac{m}{2}+0+4)}{1}\Rightarrow\frac{-m}{2}+4=2\Rightarrow m=4$$

مثال: در تابع به معادلهٔ $y=\frac{x-1}{x^2+mx}$، اگر حاصلضرب عرضهای اکسترمم نسبی برابر $\frac{1}{4}$ باشد، m را بیابید.

حل:

$$y_1\cdot y_2=\frac{b^2-4ac}{b'^2-4a'c'}=\frac{1}{m^2}=\frac{1}{4}\Rightarrow m^2=4\Rightarrow m=\pm 2$$

مسأله: تابع به معادلهٔ $y=\frac{x^2+4ax+12}{x^2-ax-3}$ مفروض است. ثابت کنید به ازای جمیع مقادیر a یکی از مقادیر اکسترمم

نسبی تابع مقدار ثابتی است. همچنین a را چنان بیابید تا مقدار دیگر اکسترمم نسبی تابع برابر $-\frac{1}{4}$ باشد.

حل:

$$y=\frac{x^2+4ax+12}{x^2-ax-3}$$
$$yx^2-ayx-3y=x^2+4ax+12$$
$$(y-1)x^2-a(4+y)x-3(y+4)=0$$
$$\Delta=b^2-4ac=a^2(4+y)^2+12(y-1)(y+4)=0$$
$$(y+4)(a^2(4+y)+12(y-1))=0$$
$$y+4=0\Rightarrow y=-4$$

یکی از مقادیر اکسترمم نسبی که مقدار ثابتی است.

$$a^2(4+y)+12(y-1)=0$$
$$y=-\frac{1}{4}\ ;\ a^2(4-\frac{1}{4})+12(-\frac{1}{4}-1)=0\Rightarrow 15a^2=5(12)$$
$$\Rightarrow a^2=4\Rightarrow a=\pm 2$$

مسأله: تابع به معادلهٔ $y=\frac{x+2m}{x^2-mx-2}$ مفروض است. m را چنان بیابید تا عرض می‌نی‌مم نسبی تابع ۹ برابر عرض ماکزیمم نسبی تابع باشد.

حل:

$$y=\frac{x+2m}{x^2-mx-2}\Rightarrow yx^2-myx-2y=x+2m$$
$$yx^2-(my+1)x-(2y+2m)=0$$
$$\Delta=b^2-4ac=0\Rightarrow(my+1)^2+4y(2y+2m)=0\Rightarrow$$
$$\underbrace{(m^2+8)}_{a}\,y^2+\underbrace{10m}_{b}\,y+\underbrace{1}_{c}=0\quad(I)$$

تذکر مهم: اگر در معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$، یک ریشهٔ k برابر ریشه دیگر باشد، داریم: $\frac{b^2}{ac}=\frac{(k+1)^2}{k}$

در معادلهٔ (I) یک ریشهٔ ۹ برابر ریشهٔ دیگر است؛ پس

$$\frac{b^2}{ac}=\frac{(9+1)^2}{9}\Rightarrow\frac{100m^2}{m^2+8}=\frac{100}{9}$$
$$9m^2=m^2+8\Rightarrow m^2=1\Rightarrow m=\pm 1$$

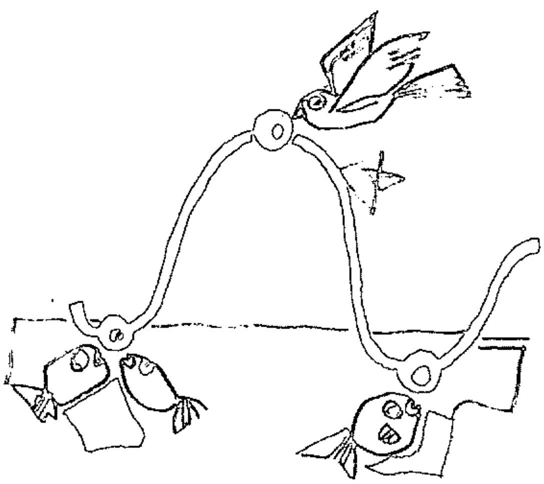
تمرین: بدون استفاده از مشتق عرضهای اکسترمم نسبی، هریک از تابعهای به معادلهٔ زیر را بیابید.

$$1)\ y=\frac{x^2+5}{x}$$

$$2)\ y=\frac{(x-1)^2}{x+1}$$

تمرین: در تابع به معادلهٔ $y=\frac{x}{x^2-5x+m}$، اگر حاصلضرب عرضهای اکسترمم نسبی تابع برابر $\frac{1}{9}$ باشد، m را بیابید.

تمرین: در تابع به معادلهٔ $y=\frac{x-2a}{x^2-a}$، $(a\neq 0)$ تحقیق کنید، حاصل جمع اکسترمم‌های نسبی تابع مقدار ثابت ۲ است.



ملانصرالدین و مسأله ی شیر، شتر و کاهو

قسمت اوّل

یان استیوارت، ترجمه: غلامرضا یاسی پور

روزگاری در یکی از جاده‌های خاکی و طویلی که در سرزمین جابُلقا فراوانند، دهقانی در حرکت بود. در دست راست دهقان، کاهویی بزرگ و در دست چپش، افسار دو حیوان بود. در جلوِ افسار، شتری به آهستگی روان بود و پشت سر شتر، شیری پاورچین پاورچین قدم برمی‌داشت. صفی عجیب و غریب، اما مناظری چنین در سرزمین ناهموار جابلقا عادی‌اند؛ ناحیه‌ای که ـ به‌خصوص در جمعه‌ها ـ به‌علت کشاورزی غیرعادی‌اش، مشهور و معروف است. جمعه‌ها، جمعه‌بازار است و دهقان که، همان ملّانصرالدین خودمان باشد، محصول مزرعه‌اش را به بازار می‌برد.

اما در راه، ملّانصرالدین با مشکلی مواجه شد. پل واقع بر رودخانهٔ مسیر فرو ریخته بود و به‌جای آن، پلی موقّتی از لاستیک و گونی بنا شده بود. پل، تنها طاقت حمل ملّانصرالدین را با یکی از محصولات مزرعه‌اش، یعنی شیر، شتر یا کاهو داشت. (همان‌گونه که گفتیم، کاهوی مزبور، کاهویی بسیار بزرگ بود و شتر موردبحث، حقیقتش را بخواهیم، شتری نسبتاً تنومند.)

ممکن است با نگاهی سرزنش‌آمیز بگویید: این‌که خیلی ساده است، **ابتدا شیر را به آن طرف ببرد، بعد برای بردن شتر برگردد و سرانجام کاهو را انتقال دهد.** اما واضح است که شما کشاورز نیستید؛ چه هر زادهٔ راستین زمین، به‌طور شهودی و بدون تفکر منطقی، می‌داند نقشه‌ای چنین به کجا می‌انجامد. ملّانصرالدین هنگامی که برای بردن شتر بازگردد، با شتری چاق و راضی مواجه می‌شود؛ اما از کاهو اثری نمی‌یابد. چرا که شتر در یک حمله، تمامی کاهو را، هرچند بزرگ، یک لقمهٔ چپ می‌کند.

نقشهٔ ارائه شده باز هم دارای نقصی قطعی است؛ چه زمانی که شیر با شتر تنها بماند، آن را بیشتر به‌صورت یک شتر برگر می‌بیند تا یک شتر. از طرف دیگر، انتظار نداریم که شیر گرسنه‌ای در کرتِ صیفی‌جات، در جست‌وجوی کاهویی بزرگ و آبدار باشد؛ بنابراین سبزیجات را می‌توان با اطمینان‌خاطر، نزد این حیوان گوشتخوار رها کرد.

شاید متوجه شده باشید که مشکل ملّانصرالدین، همان معمّای قدیمی گرگ و بز و کلم است که در این‌جا به‌صورتی دیگر عرضه شده است و شاید به این نکته نیز رسیده باشید که ملّانصرالدین همان **الکوئین** "Alcuin" (۷۳۵ـ ۸۰۴م) ریاضیدان قرون‌وسطی است؛ ریاضیدانی که معمّای مزبور را معمولاً به او نسبت می‌دهند؛ چه این معمّا، به‌طور قطع،

مسأله‌ای باستانی است که در مرجع زیر ظاهر شده است :

Ozanam's Récréations Mathématiques et Physiques of 1694

این را هم اضافه کنیم که در این مورد، حدّاقل از یک لحاظ حق دارید ؛ زیرا فکر ملاّنصرالدین، فکر منطقی کسی است که از شکم مادر، ریاضیدان متولد شده باشد. برای چنین شخصی، روش آزمون و خطا به‌کار نمی‌آید ؛ بلکه کار او استدلال منظّم و سیستماتیک است و بدین‌ترتیب است که ملاّنصرالدین چنین استدلال می‌کند :

«باید ابتدا مسأله را ساده کرده، جنبه‌های اساسی آن را بیابم. مطلب مهم این است که هریک از سه شیئ باب جمعه‌بازارم را در کدام طرف درّه بگذارم. این‌که خودم کجا باشم یا پل زوار دررفته کجا باشد، مهم نیست ؛ زیرا پل نمی‌تواند به میل خود حرکت کند. اما بنابه محدودیتهای مربوط به خوردوخوراک دو حیوان مزبور، نباید شیر را با شتر و شتر را با کاهو تنها گذاشت.

مکان هریک از سه شیئ مزبور را می‌توانم با عددهای ۰ و ۱ نمایش دهم ؛ به این ترتیب که از ۰ برای نمایش این طرف درّه و از ۱ برای نمایش طرف دیگر استفاده می‌کنم.

به این ترتیب، ترکیب سه شیئ موردبحث، توسط سه‌تایی (L , λ , l) در فضای سه‌بعدی شیر- شتر- کاهو نمایش داده می‌شود. به‌عنوان مثال، $(L,\lambda,l) = (1,0,1)$ موارد :

$L = 1 , \ \lambda = 0 , \ l = 1$

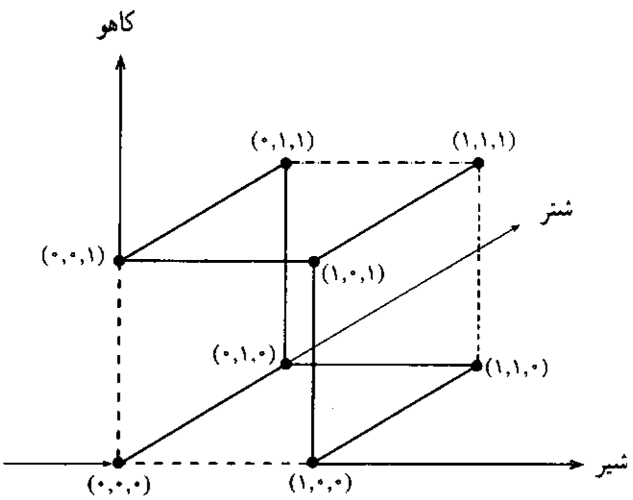
را نمایش می‌دهد، که به این معناست که، شیر در طرف دیگر درّه است، شتر در این‌طرف آن و کاهو در طرف دیگر آن.

اما در این مورد، چند ترکیب موجودند؟ هر مختص L، λ ، یا l می‌تواند یکی از دو مقدار ۰ یا ۱ را اختیار کند. به این ترتیب $8 = 2\times2\times2$ امکان وجود دارد. گذشته از این، امکانات مزبور دارای ساختار هندسی زیبایی نیز هستند : آنها هشت رأس مکعبی واحد در فضای شیر- شتر- کاهو را تشکیل می‌دهند(شکل ۱ الف).

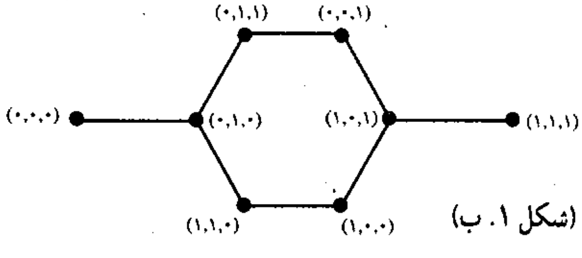
در هربار می‌توانم تنها یکی از این سه موجود را حرکت دهم ؛ یعنی، تنها می‌توانم از یالهای مکعب مزبور عبور کنم، اما گذشتن از بعضی از این یالها قدغن است. برای مثال، یال از (۰،۰،۰) به (۱،۰،۰) نظیر بردن شیر به آن طرف درّه است ؛ ولی این‌کار شتر و کاهو را بی‌نگهبان برجا می‌گذارد و در بازگشت، شتری چاق و چلّه به من سلام و درود می‌گوید ؛ در حالی‌که از کاهو خبری نیست.

در واقع محدودیتهای مربوط به خوردوخوراک شیر و شتر دقیقاً **چهار** یال را کنار می‌گذارد ؛ چهار یالی که آنها را با خط‌چین و بقیه را که حرکتهای مجاز را نمایش می‌دهند، با خط پر رسم می‌کنم.

به این ترتیب، مسأله به مسأله‌ای هندسی تبدیل می‌شود : آیا می‌توان با عبور از یالهای پر مکعب از (۰،۰،۰)- تمام موجودات در **این‌طرف**- آغاز کرد و به (۱،۱،۱)- تمام موجودات در **طرف دیگر**- رسید؟ و صد البته که پاسخ«آری» است. در واقع، از نظرگاه توپولوژیک، می‌توان یالها را مسطح کرد(شکل ۱ ب)



(شکل ۱. الف)



(شکل ۱. ب)

شکل ۱. الف. حرکتهای ممکن در فضای شیر- شتر- کاهو بانمودار مشخص شده‌اند. یالهای خط‌چین قدغن و یالهای پر مجازند. ب. نمودار سادهٔ شدهٔ یالهای پر، دو پاسخ متمایز را واضح می‌کند.

راه‌حل زل در چشمان من نگاه کند. در واقع، در صورتی که از تکرارهای غیرضروری اجتناب کنم[جدول زیر را ملاحظه کنید] **دو** راه‌حل و **تنها** دو راه موجودند. آنها تنها در عملِ متقارن شیر/ کاهو متفاوتند.

روش هندسی ملّانصرالدین در حوزهٔ وسیعی از معمّاهایی به‌کار می‌رود که در آنها اشیا را باید طبق قواعد خاصی تجدید آرایش کرد و هدف، رفتن از مکان آغازی معلومی به مکان پایانی معلومی است. طریقهٔ راه در این‌گونه مسائل، ترسیم **نموداری** است شامل رأسها(نقطه‌ها)یی که توسط یالها(خطها) به‌هم وصل شده باشند. در این‌صورت، هر رأس نظیر مکانی در معمّا و هر یال نظیر حرکتی قانونی است. بنابراین، راه‌حلّ معمّا مسیری از نمودار است که رأس آغازی را به پایانی وصل می‌کند. معمولاً چنین مسیری به وضوح به چشم می‌آید؛ البته به‌شرطی که معمّا آن‌قدر ساده باشد که کل نمودارِ آن را بتوان ترسیم کرد.

چگونه از رودخانه بگذریم تا محصولاتمان سالم بماند.

راه‌حلّ اول:

(۰،۰،۰)	آغاز
(۰،۱،۰)	شتر را به آن طرف ببرید
(۰،۱،۱)	(بازگردید و) کاهو را ببرید
(۰،۰،۱)	شتر را بازگردانید
(۱،۰،۱)	شیر را به آن طرف ببرید
(۱،۱،۱)	(بازگردید و) شتر را ببرید

راه‌حلّ دوم:

(۰،۰،۰)	آغاز
(۰،۱،۰)	شتر را به آن طرف ببرید
(۱،۱،۰)	(بازگردید و) شیر را ببرید
(۱،۰،۰)	شتر را بازگردانید
(۱،۰،۱)	کاهو را به آن طرف ببرید
(۱،۱،۱)	(بازگردید و) شتر را ببرید

معمّاهایی از این دست، در واقع مارپیچهایی تغییر قیافه داده‌اند؛ زیرا مارپیچ در حقیقت، نموداری است که به‌گونه‌ای اندک متفاوت رسم شده است.

■ مسألهٔ ۱

هفتهٔ بعد، *ملّانصرالدین یک کاهو، یک شتر، یک شیر و یک نهنگ به بازار برد. پل همچنان فرسوده بود.* همان‌طور که *می‌دانیم، نهنگهایی که تحت مواظبت نباشند، شیرها را می‌خورند؛ مگر این‌که پای کاهویی نیز در میان باشد؛ زیرا هنگامی‌که بوی کاهوی تازه به مشام نهنگی برسد، رام و بی‌آزار می‌شود. نموداری رسم(ممکن است ملاحظهٔ این مطلب مفید باشد که نمودار موردبحث ابرمکعبی "hypercube"، با مختصات* (d,L,λ,l) جمیعاً ۰ *یا* ۱، *و بعضی یالهای حذف شده، در فضای نهنگ- شیر- شتر- کاهو است) و ملاحظه کنید که برای این مسأله، راه‌حلّی وجود دارد یا خیر؟*

گرچه رهیافت نموداری ملّا به‌طور اصولی در مورد بسیاری از معمّاها کاربردپذیر است؛ اما اغلب با اشکالی عملی مواجه می‌شویم و آن اشکال، این است که اگر تعداد مکانها یا حرکتها خیلی زیاد باشد، نمودار مربوطه را نمی‌توان رسم کرد. به‌عنوان مثال، اصولاً نمی‌توان مکعب روبیک "Rubic Cube" را با رسم نمودارش حل کرد؛ چرا که نمودار مزبور به

۴۳،۲۵۲،۰۰۳،۲۷۴،۴۸۹،۸۵۶،۰۰۰

رأس نیاز دارد!

مسألهٔ بعدی، تا اندازه‌ای حدود امکانهای عملی را مشخص می‌کند و نیز این موضوع را که اندکی تفکر اضافه، می‌تواند به راه‌حلّ ساده‌تری منجر شود.

■ مسألهٔ ۲

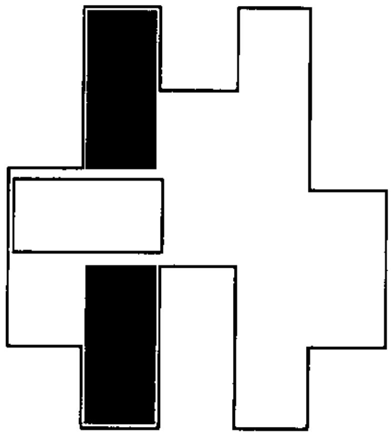
با استفاده از روش نموداری ملّانصرالدین، طریقی بیابید که طبق آن، سه بلوک(شکل ۲) را بدون برگرداندن آنها، چنان بلغزانید که سمت راست ناحیهٔ مشخص شده را اشغال کنند.

آیا معمّای بلوکها مسألهٔ ساده‌تری را به یادتان می‌آورد؟ از چه راهی به کمکتان می‌آید؟

معمّای قدیمی دیگری، به نموداری با زیبایی قابل‌ملاحظه‌ای

منجر می‌شود. برج هانوی "Tower of Hanoi" در سال ۱۸۸۳ میلادی توسط ریاضیدان خلّاق فرانسوی **ادوارد لوکاس** "Edouard Lucas" (با نام مستعار **ام. کلاوس** "M. Claus") به بازار آمد.

به‌سال ۱۸۸۴ **ام. دوپارویل**



شکل ۲ ــ آیا می‌توانید بلوکها را به سمت راست ناحیه بلغزانید؟

"M. De parville" در **La Nature** این مسأله را با عبارتهای شاعرانهٔ زیر توصیف کرده است:

در معبد بزرگ بنارس، زیر گنبدی که مرکز زمین را مشخص می‌کند، صفحه‌ای برنجین قرار دارد که در آن، سه میلهٔ الماسین به ارتفاع یک اَرَج و به ضخامت بدن یک زنبور تعبیه شده است. بر یکی از این میله‌ها، خداوند متعال، در آغاز خلقت، شصت‌وچهار قرص زرّین چنان قرار داده است که بزرگترین قرص بر صفحهٔ برنجین واقع شده و قرصهای دیگر، به‌ترتیب، از بزرگ به کوچک روی یکدیگر قرار گرفته‌اند. این همان **برج براهما** "Tower of Brahma" است.

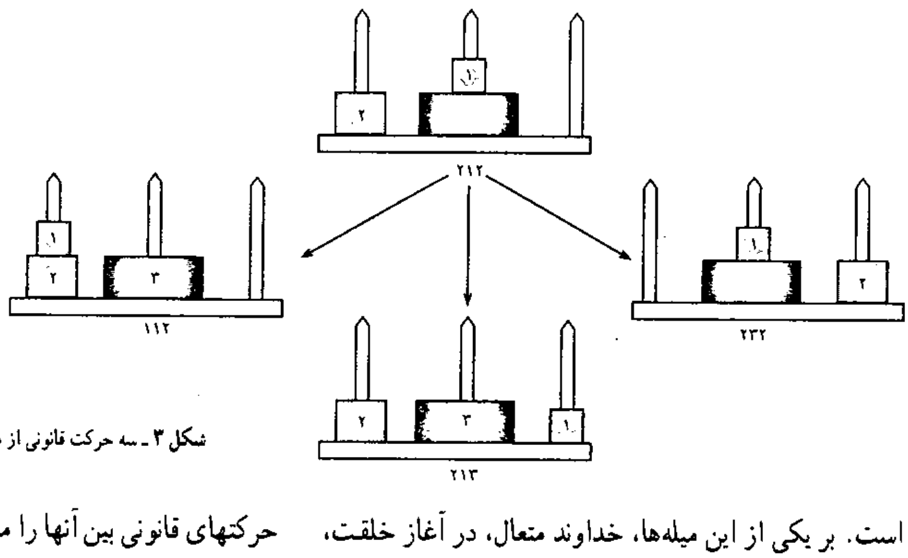
بَرهمنان معبد شب و روز، بدون وقفه، قرصها را طبق قوانین ثابت ولایتغیر براهما، از یکی از میله‌های الماسین به دیگری انتقال می‌دهند. قوانین مزبور برآنند که کاهن دست‌اندرکار این وظیفه، نباید هربار بیش از یک قرص را حرکت دهد و باید این قرص را بر میله چنان قرار دهد که قرص کوچکتری زیر آن واقع نشود.

زمانی‌که به این ترتیب، شصت‌وچهار قرص موردبحث از میله‌ای که آنها را خداوند در آغاز خلقت بر آن قرار داده است، بر یکی از میله‌های دیگر منتقل شود، برج، معبد، نیز برهمنان خرد و خمیر خواهند شد و دنیا با صدایی رعدآسا به پایان می‌رسد.

برج هانوی مشابه برج براهماست؛ منتها با هشت(یا گاهی کمتر از هشت) قرص. برج مزبور یکی از دوستان قدیمی ریاضیدانان حوزهٔ تفریح اندیشه است و به‌نظر نمی‌رسد که بتوان مطلب تازه‌ای دربارهٔ آن بیان کرد.

اما چنان‌که ملاحظه خواهیم کرد، رهیافت نموداری ملاّنصرالدین به هماهنگی جالب و شگفت‌انگیزی با عصر جدید می‌انجامد.

در این‌جا برای تصریح کار، هانوی ۳ـ قرصی، یعنی، برج هانویی با سه قرص را درنظر می‌گیریم. مکانها و حرکتهای قانونی نمونه را در شکل۳ نشان داده‌ایم. برای تشکیل نمودار، باید ابتدا راهی برای نمایش جمیع مکانهای ممکن بیابیم، سپس



شکل ۳ ـ سه حرکت قانونی از مکان ۲۱۲

حرکتهای قانونی بین آنها را مشخص کنیم و سرانجام به ترسیم نمودار بپردازیم.

از آن‌جا که آغاز کار واضح نیست، توضیح می‌دهم عملاً چه‌کار کردم و سپس با واپس‌نگری، ملاحظه خواهیم کرد که

روشی بس هوشمندانه‌تری نیز وجود دارد.

اما چگونه می‌توان یک مکان را نمایش داد؟ سه قرص موردنظر را با شماره‌های ۱، ۲ و ۳ چنان مشخص می‌کنیم که ۱ کوچکترین و ۳ بزرگترین قرص باشد. میله‌ها را از چپ به راست ۱، ۲ و ۳ می‌نامیم. فرض می‌کنیم می‌دانیم هر قرص بر کدام‌یک از سه میله واقع است ؛ به‌عنوان مثال، قرص ۱ بر سوزن ۲، قرص ۲ بر سوزن ۱ و قرص ۳ بر سوزن ۲. در این‌صورت، مکان موردنظر را به‌طور کامل معین کرده‌ایم ؛ زیرا قواعد مزبور مستلزم این است که قرص ۳ باید **زیر** قرص ۱ قرار داشته باشد. این اطلاعات را در دنبالهٔ ۲۱۲ رمزبندی می‌کنیم، سه رقم مزبور، به‌ترتیب، میله‌های مربوط به قرصهای ۱، ۲ و ۳ را نمایش می‌دهند.

بنابراین، هر مکان واقع در هانوی ۳ـ قرصی موردنظر، نظیر دنباله‌ای سه‌رقمی است که هریک از آنها ۱، ۲ یا ۳ است. برای واضح کردن این امر، شکل۳ شامل این رمزهاست.

نتیجه می‌شود که دقیقاً $27 = 3 \times 3 \times 3$ مکان متفاوت در هانوی ۳ـ قرصی موجود است ؛ اما حرکتهای مجاز کدامند؟

کوچکترین قرص واقع بر یک میلهٔ مفروض، باید در بالا واقع باشد. در این‌صورت، این وضعیت نظیر **اولّین** ظهور شمارهٔ آن میله در دنباله است. در صورت حرکت دادن این قرص، باید آن را به بالای تودهٔ واقع در میلهٔ دیگر قرار دهیم ؛ یعنی شماره را چنان تغییر می‌دهیم که **اولّین** ظهور شماره‌ای دیگر شود.

به‌عنوان مثال، در مکان ۲۱۲ ی فوق، فرض می‌کنیم مایل به جابه‌جا کردن قرص ۱ باشیم. این قرص بر میلهٔ۲ قرار دارد و نظیر اولّین ظهور ۲ در دنبالهٔ مربوطه است و فرض می‌کنیم این اولّین ۲ را به ۱ تغییر می‌دهیم. در این‌صورت، این رقم(به‌طور بدیهی!) اولّین ظهور رقم ۱ است ؛ بنابراین، جابه‌جایی از ۲۱۲ به ۱۱۲ قانونی است.

همچنین است جابه‌جایی ۲۱۲ به ۳۱۲ ؛ زیرا اولّین ظهور ۳ در اولّین مرتبهٔ دنبالهٔ مربوطه است. می‌توان قرص۲ را نیز جابه‌جا کرد ؛ زیرا اولّین ظهور نماد ۱ در مرتبهٔ دوم دنبالهٔ مربوطه است. اما نمی‌توان آن را به ۲ تغییر داد ؛ زیرا ۲ قبلاً، در مرتبهٔ اولّ ظاهر شده است. اما تبدیل به ۳ قانونی است. بنابراین می‌توان ۲۱۲ رابه ۲۳۲ تبدیل کرد(اما به ۲۲۲ **نمی‌توان**). ـ (جدول زیر)

سرانجام قرص ۳ را نمی‌توان حرکت داد ؛ زیرا رقم سوّم واقع در دنبالهٔ۲ است و این اولّین ظهور ۲ **نیست**.

در جمع‌بندی : از مکان ۲۱۲ جابه‌جاییهای قانونی به ۱۱۲، ۳۱۲ و ۲۳۲، و **تنها** به اینها را می‌توان انجام داد.

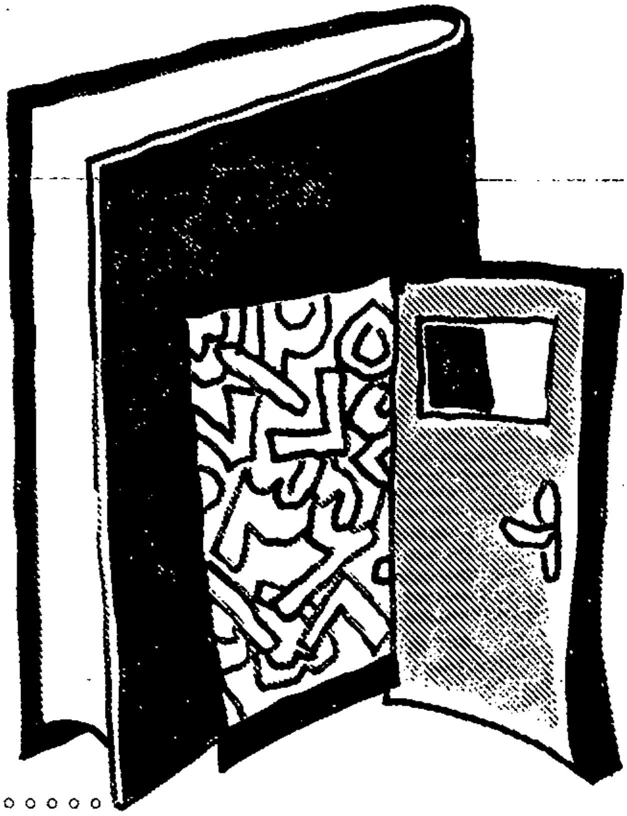
با پیروی از قاعده‌های فوق، می‌توان جمیع ۲۷ مکان و تمام حرکتهای ممکن را فهرست کرد ؛ نتیجهٔ این کار را در جدول داده شده نشان داده‌ایم.

۱۱۳	به یکی از اینها ختم کنید	....	از این‌جا آغاز کنید
۱۱۲	۳۱۱	۲۱۱	۱۱۱
۱۳۱	۳۱۲	۲۱۲	۱۱۲
۱۳۲	۳۱۳	۲۱۳	۱۱۳
۱۳۳	۳۲۱	۲۲۲	۱۲۱
۱۲۱	۳۲۲	۲۲۳	۱۲۲
۱۲۲	۳۲۳	۲۳۱	۱۲۳
۱۲۳	۳۳۱	۲۳۲	۱۳۱
۲۳۱	۳۳۲	۲۳۳	۱۳۲
۲۳۲	۳۳۳	۱۱۱	۱۳۳
۲۳۳	۳۱۱	۱۱۲	۲۱۱
۲۲۳	۳۱۲	۱۱۳	۲۱۲
۲۲۱	۳۱۳	۱۲۱	۲۱۳
۲۱۱	۳۲۱	۱۲۲	۲۲۱
۲۱۲	۳۲۲	۱۲۳	۲۲۲
۲۱۳	۳۲۳	۱۳۱	۲۲۳
۳۲۱	۳۳۱	۱۳۲	۲۳۱
۳۲۲	۲۳۲	۱۳۳	۲۳۲
۳۲۳	۳۳۲	۱۱۱	۲۳۳
۳۱۱	۲۱۱	۱۱۲	۳۱۱
۳۱۲	۲۱۲	۱۱۳	۳۱۲
۳۱۳	۲۱۳	۱۲۱	۳۱۳
۳۳۲	۲۲۱	۱۲۲	۳۲۱
۳۳۱	۲۲۲	۱۲۳	۳۲۲
	۲۲۳	۱۳۱	۳۲۳
	۲۳۱	۱۳۲	۳۳۱
	۲۳۲	۱۳۳	۳۳۲
	۲۳۳		۳۳۳

حرکتهای قانونی در هانوی ۳ـ قرصی

بقیه در شمارهٔ بعد

بخشی از یک کتاب



ورودی به نظریه اعداد
(سری کتابهای کوچک ریاضی)

(برای دانش‌آموزان دورهٔ پیش‌دانشگاهی)

حمیدرضا امیری

بزرگترین مقسوم علیه مشترک (ب م م) یا بزرگترین شمارندهٔ مشترک

عدد صحیح c را مقسوم‌علیه مشترک یا شمارندهٔ مشترک دو عدد صحیح a و b می‌نامیم، در صورتی که هر دو را بشمارد؛ یعنی $c|a$ و $c|b$.

به عنوان مثال، عدد ۳ یک شمارندهٔ مشترک برای دو عدد ۶ و ۹- است؛ زیرا $3|6$ و $3|-9$.

تعریف: اگر a و b دو عدد صحیح باشند؛ به طوری که حداقل یکی از آنها صفر نباشد، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک (ب‌م‌م) a و b را با نماد (a,b) نمایش داده و آن عددی است طبیعی چون d، که اولاً مقسوم‌علیه مشترک a و b باشد و دوم این که هر مقسوم‌علیه مشترک a و b از d کوچکتر باشد.

اگر بخواهیم معادل تعریف فوق را با نمادهای ریاضی بیان کنیم، خواهیم داشت:

$$(a,b)=d \Leftrightarrow \begin{cases} \text{I)}\ d|a,\quad d|b \\ \text{II)}\ \forall c>0,\ c|a,\ c|b \Rightarrow c\leq d \end{cases}$$

به مثالهای زیر توجه کنید:

$$(3,-6)=3,\ (4,9)=1,\ (6,8)=2$$

تعریف: اگر برای دو عدد صحیح a و b داشته باشیم $(a,b)=1$، در این صورت می‌گوییم a و b نسبت به هم اوّل هستند (یا نسبت به هم متباین هستند). به‌عنوان مثال، $(4,9)=1$، $(3,5)=1$ و $(5,6)=1$.

تذکر: اگر دو عدد صحیح a و b مفروض باشند و مجموعهٔ همهٔ شمارنده‌های مشترک a و b را A بنامیم؛ یعنی فرض کنیم $A=\{c \mid c|a,\ c|b\}$ واضح است که $A\subseteq Z$ و $A\neq\varnothing$؛ زیرا، $1\in A$. از طرفی اگر فرض کنیم $a<b$، در این صورت $|a|$

$|a|$ یک کران بالا برای مجموعهٔ A است (زیرا عددی بزرگتر از $|a|$ نمی‌تواند a را عاد کند)، پس طبق قضیّه‌های[1] قبل مجموعهٔ A باید دارای عضو انتها باشد که این عضو انتها همان ب‌م‌م است. درواقع ثابت شد که همواره ب‌م‌م دو عدد صحیح که حدّاقل یکی از آنها مخالف صفر باشد، موجود است.

قضیهٔ ۱: اگر a و b دو عدد صحیح و $a|b$ $(a \neq 0)$، در این صورت $(a,b) = |a|$.

اثبات: باید ثابت کنیم که $|a|$ هر دو شرط ب‌م‌م را دارد:

$$\text{I)}\ a|a, -a|a \Rightarrow |a||a$$

(یعنی $|a|$ یک مقسوم علیه مشترک a و b است.)

طبق فرض: $a|b \Rightarrow -a|b \Rightarrow |a||b$

II) فرض کنیم $c > 0, c|a, c|b$

$$c|a \Rightarrow |c| \leq |a| \overset{c>0}{\Rightarrow} c \leq |a|$$

(یعنی $|a|$ از هر مقسوم‌علیه مشترک a و b بزرگتر است.)

قضیهٔ ۲: اگر p عددی اوّل باشد و a عددی صحیح؛ به طوری که $p \nmid a$، در این صورت همواره $(p,a) = 1$ (عدد اوّل p نسبت به هر عددی که مضرب p نباشد، اوّل است.)

اثبات: فرض کنیم $(p,a) = d$، ثابت می‌کنیم $d = 1$.

$$(p,a) = d \begin{cases} d|a \\ d|p \overset{p\ \text{اول}}{\Rightarrow} d=1 \quad (1) \quad \text{یا} \quad d = p \end{cases}$$

اگر $d = p$ باشد، در این صورت، با توجه به (۱) باید $p|a$ (به جای d قرار می‌دهیم p) که با فرض $(p \nmid a)$ تناقض دارد؛ پس باید $d = 1$.

قضیهٔ ۳ (قضیهٔ بزو): اگر a و b دو عدد صحیح و حدّاقل یکی از آنها مخالف صفر باشد، در این صورت، عضو ابتدای مجموعهٔ $A = \{ma + nb > 0 | m, n \in Z\}$، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a و b است؛ یعنی: $\min A = (a,b)$.

اثبات: واضح است که $A \subseteq N$، از طرفی حدّاقل یکی از دو عدد a و b ناصفر است، بنابراین حدّاقل یکی از دو عدد $|a|$ یا $|b|$ عضو A است و $A \neq \varnothing$؛ زیرا:

$$\text{I)}\ a \neq 0 \Rightarrow |a| > 0 \Rightarrow |a| = \pm a + 0b \Rightarrow |a| \in A$$

$$\text{II)}\ b \neq 0 \Rightarrow |b| > 0 \Rightarrow |b| = 0a \pm b \Rightarrow |b| \in A$$

(توجه دارید که عددی عضو A است که دو شرط داشته باشد؛ یکی آن که مثبت باشد و دیگر آن که به صورت ترکیبی خطی و صحیح از a و b نوشته شود.)

پس ثابت شد که A زیرمجموعه‌ای ناتهی از N است؛ بنابراین طبق اصل خوش‌ترتیبی، باید دارای عضو ابتدا باشد. اگر عضو ابتدای A را d بنامیم، کافی است ثابت کنیم $d = (a,b)$. البته توجه دارید که چون فرض شده $d = \min A$، پس باید $d \in A$؛ یعنی m_0 و n_0ای در Z باشند، به قسمی که $d = m_0a + n_0b$ (۱).

برای اثبات این که $d = (a,b)$، دو شرط ب‌م‌م را برای d بررسی کنیم، شرط اوّل آن است که $d|a$ و $d|b$، پس a را بر d تقسیم می‌کنیم که طبق قضیّهٔ تقسیم داریم: $a = dq + r$ که $0 \leq r < d$.

اگر $0 < r < d$ در این صورت داریم:

$$0 < r = a - dq \overset{(1)}{=} a - (m_0a + n_0b)q = \underbrace{(1 - m_0q)}_{m}a + \underbrace{(n_0q)}_{n}b$$

(r هر دو شرط را برای عضو A بودن داراست.) $\Rightarrow r \in A$

امّا $r \in A$ با توجه به این که $r < d$ و تعریف عضو ابتدا برای d یک تناقض ایجاد می‌کند (زیرا عضوی از عضو ابتدا کوچکتر نمی‌توانیم در مجموعه داشته باشیم.) پس باید $r = 0$؛ یعنی $a = dq$ یا $d|a$ و به همین طریق، ثابت می‌شود $d|b$.

حال فرض کنیم $c > 0$ و $c|a$ و $c|b$، ثابت می‌کنیم که $c \leq d$.

$$\left.\begin{aligned} c|a &\Rightarrow c|m_0a \\ c|b &\Rightarrow c|n_0b \end{aligned}\right\} \Rightarrow c|m_0a + n_0b \overset{(1)}{\Rightarrow} c|d \Rightarrow c \leq d$$

نتیجه‌های حاصل از قضیّهٔ بزو

نتیجهٔ ۱: اگر $(a,b) = d$ آن‌گاه اعدادی صحیح و نسبت به هم اوّل مانند r و s وجود دارند؛ به قسمی که $ra + sb = d$

(ب‌م‌م دو عدد را بر حسب ترکیب خطی آن دو عدد می‌توان نوشت).

اثبات: طبق قضیهٔ بزو d عضو ابتدای مجموعهٔ ترکیبهای خطی a و b است، پس باید $d \in A$ و هر عضو A ترکیبی خطی از a و b است. اثبات نسبت به هم اول بودن ضرایب این ترکیب خطی؛ یعنی r و s را درنتیجهٔ (۴) ملاحظه کنید.

نتیجهٔ ۲: هرگاه عددی دو عدد را بشمارد، آن‌گاه همواره ب‌م‌م آنها را نیز می‌شمارد؛ یعنی:

$$a|b,\ a|c \Rightarrow a|(b,c)$$

اثبات: فرض کنیم $(b,c)=d$ ثابت می‌کنیم که $a|d$.

$$(b,c)=d \overset{\text{قضیهٔ بزو}}{\Rightarrow} \exists r,s,\ rb+sc=d$$

از طرفی $a|b,\ a|c \Rightarrow a|rb,\ a|sc \Rightarrow a|rb+sc=d \Rightarrow a|d$

تذکر مهم: عکس قضیهٔ بزو در حالت کلّی برقرار نمی‌باشد؛ یعنی اگر عددی چون d برابر با ترکیب خطی دو عدد صحیح مانند a و b باشد، نمی‌توان نتیجه گرفت که d ب‌م‌م دو عدد a و b است.

به عنوان مثال $۲۷ = ۳ \times ۵ + ۴ \times ۳$ ولی $(۵,۳)=۱ \neq ۲۷$.

نتیجهٔ ۳: عکس قضیهٔ بزو در حالت $d=۱$ برقرار است؛ یعنی اگر ترکیب خطی دو عدد صحیح، مساوی با یک باشد، آن‌گاه آن دو عدد نسبت به هم اول هستند.

$ra+sb=۱ \Rightarrow (a,b)=۱$

اثبات: فرض کنیم $(a,b)=d$ و ثابت می‌کنیم که $d=۱$.

$$(a,b)=d \begin{cases} d|a \Rightarrow d|ra \\ d|b \Rightarrow d|sb \end{cases} \Rightarrow d|ra+sb$$

و چون طبق فرض $ra+sb=۱$ ، بنابراین باید $d|۱$ که نتیجه می‌شود $d=۱$.

نتیجهٔ ۴: اگر دو عدد صحیح مانند a و b را بر بزرگترین مقسوم‌علیه مشترکشان تقسیم کنیم، آن‌گاه خارج‌قسمتها نسبت به هم اول خواهند بود؛ یعنی:

$$(a,b)=d \Rightarrow \left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)=۱$$

اثبات: کافی است ثابت کنیم یک ترکیب خطی از $\frac{a}{d}$ و $\frac{b}{d}$ مساوی با عدد یک است و طبق نتیجهٔ (۳) ثابت می‌شود $\frac{a}{d}$ و $\frac{b}{d}$ نسبت به هم اول هستند.

$$(a,b)=d \overset{\text{قضیهٔ بزو}}{\Rightarrow} \exists r,s\in Z\text{،}\quad ra+sb=d \overset{\text{دو طرف بر d تقسیم}}{\Rightarrow}$$

$$r\frac{a}{d}+s\frac{b}{d}=\frac{d}{d} \Rightarrow r\frac{a}{d}+s\frac{b}{d}=۱ \overset{\text{نتیجهٔ ۳}}{\Rightarrow} \left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)=۱$$

تذکر مهم: تساوی $r\frac{a}{d}+s\frac{b}{d}=۱$ ترکیبی خطی از r و s نیز هست که در این صورت، ثابت می‌شود $(r,s)=۱$ ؛ یعنی در قضیهٔ بزو ضرایب ترکیب خطی که d را می‌سازد، همواره نسبت به هم اول هستند!

نتیجهٔ ۵ (لم اقلیدس): هرگاه عددی حاصلضرب دو عدد را بشمارد و نسبت به یکی از آن دو، عدد اول باشد، آن‌گاه همواره دیگری را می‌شمارد:

$$a|bc,\ (a,b)=۱ \Rightarrow a|c$$

اثبات: برای اثبات این که $a|c$ کافی است که ثابت کنیم $c=aq$ ، پس به دنبال یک تساوی هستیم که یک طرف آن c باشد و طرف دیگر مضرب a باشد:

$$(a,b)=۱ \overset{\text{قضیهٔ بزو}}{\Rightarrow} ra+sb=۱ \Rightarrow rac+sbc=c \qquad (۱)$$

از طرفی طبق فرض: $a|bc \Rightarrow bc=aq_۱ \overset{(۱)}{\Rightarrow} rac+s(aq_۱)=c$

$$\Rightarrow c=a\underbrace{(rc+sq_۱)}_{q} \Rightarrow c=aq \Rightarrow a|c$$

مسألهٔ مهم: ثابت کنید، اگر a، b، c و d اعداد طبیعی بوده

و $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ و داشته باشیم $(a,b)=(c,d)=1$ ، آن‌گاه $a=c$ و $b=d$.

اثبات: کافی است ثابت کنیم $a\le c$ و $c\le a$ که در این صورت $a=c$ و در نتیجه $b=d$ حاصل می‌شود :

$$(1)\quad \text{طبق فرض}: ad=bc\Rightarrow a|bc,(a,b)=1\overset{\text{لم اقلیدس}}{\Rightarrow} a|c\Rightarrow a\le c$$

$$(2)\quad \text{طبق فرض}: ad=bc\Rightarrow c|ad,(c,d)=1\overset{\text{لم اقلیدس}}{\Rightarrow} c|a\Rightarrow c\le a$$

$$(1)\ \text{و}\ (2)\quad a=c,ad=bc\Rightarrow \cancel{a}d=b\cancel{a}\Rightarrow b=d$$

تست: اگر a و b دو عدد صحیح و $p|ab$ و $37p-29a=1$ ، کوچکترین عضو مثبت مجموعهٔ $A=\{mp+nb:m,n\in Z\}$ کدام است؟ (سراسری ۷۵)

۱) b ‏ ‏ ‏ ۲) p

۳) ۱ ‏ ‏ ‏ ۴) ۸

حل: گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ زیرا با توجه به رابطهٔ $37p-29a=1$ و نتیجهٔ (۳) باید $(p,a)=1$ و چون $p|ab$ پس طبق لم اقلیدس باید $p|b$ ؛ بنابراین $(p,a)=|p|$ که طبق قضیهٔ بزو $\min A=(p,b)$ ، پس $\min A=|p|$ که البته در گزینه‌ها باید به جای p عدد $|p|$ به کار می‌رفت!

نتیجهٔ ۶: اگر عددی بر دو عدد بخش‌پذیر باشد و آن دو عدد نسبت به هم اوّل باشند، آن‌گاه بر حاصلضرب آن دو عدد نیز بخش‌پذیر است :

$$b|a,c|a,(b,c)=1\Rightarrow bc|a$$

اثبات: برای اثبات این که، $bc|a$ کافی است ثابت کنیم $a=bcq$ که به یک تساوی نیازمندیم ؛ طوری که در یک طرف آن a و طرف دیگر آن مضرب bc باشد :

$$(1)\quad (b,c)=1\overset{\text{قضیهٔ بزو}}{\Rightarrow} rb+sc=1\overset{\text{دو طرف در a ضرب}}{\Rightarrow} rab+sac=a$$

$$\text{از طرفی طبق فرض}:\ b|a,c|a\Rightarrow a=bq_1,\ a=cq_2$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} r(cq_2)b+s(bq_1)c=a\Rightarrow a=bc\underbrace{(rq_2+sq_1)}_{q}$$

$$\Rightarrow a=bcq\Rightarrow bc|a$$

تست: عدد k بر دو عدد ۹ و t بخش‌پذیر است، اگر k بر 9t نیز بخش‌پذیر باشد، در این صورت t کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۳ ‏ ‏ ‏ ۲) ۶

۳) ۴ ‏ ‏ ‏ ۴) ۹

حل: گزینهٔ (۳) صحیح است ؛ زیرا طبق نتیجهٔ ۶، باید $(9,t)=1$ که در بین گزینه‌ها فقط $(9,4)=1$.

نتیجهٔ ۷: اگر p عددی اوّل و $p|ab$ ، آن‌گاه $p|a$ یا $p|b$ (p حداقل یکی از a یا b را عاد می‌کند).

اثبات: اگر $p|a$ حکم ثابت است و اگر $p\nmid a$ طبق قضیهٔ (۲) باید $(p,a)=1$ و

در نتیجه، بنابر لم اقلیدس، باید $p|b$ ؛ یعنی :

$$p\nmid a\Rightarrow (p,a)=1,\ p|ab\Rightarrow p|b$$

که در این صورت نیز حکم به اثبات رسید ؛ یعنی همواره $p|a$ یا $p|b$.

نتیجهٔ ۸: اگر $(a,b)=d$ و $k\in N$ در این صورت $(ka,kb)=kd$ و بعکس.

اثبات (شرط لازم):

$$\overbrace{(a,b)=d}^{\text{فرض}}\Rightarrow \overbrace{(ka,kb)=kd}^{\text{حکم}}=k(a,b)$$

دو شرط ب‌م‌م را برای kd بررسی می‌کنیم :

$$\mathrm{I})\ (a,b)=d\ \begin{cases} d|a\Rightarrow kd|ka\\ d|b\Rightarrow kd|kb\end{cases}$$

$$\mathrm{II})\ \text{فرض کنیم}\ c>0,c|kb\overset{\text{باید ثابت کنیم}}{\Rightarrow} c\le kd$$

$$(1)\quad \text{طبق فرض}\ (a,b)=d\overset{\text{قضیهٔ بزو}}{\Rightarrow} ra+sb=d\Rightarrow rka+skb=kd$$

از طرفی فرض کرده‌ایم: $c|ka, c|kb \Rightarrow c|rka, c|skb \Rightarrow c|rka+skb$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} c|kd \Rightarrow c \le kd$$

(شرط کافی):

$$\overbrace{(ka,kb)=kd}^{\text{فرض}} \Rightarrow \overbrace{(a,b)=d}^{\text{حکم}}$$

حال دو شرط ب‌م‌م را برای d بررسی می‌کنیم :

$$\text{I)}\ (ka,kb)=kd \begin{cases} kd|ka \Rightarrow d|a \\ kd|kb \Rightarrow d|b \end{cases}$$

II) فرض کنیم $c>0, c|a, c|b \overset{\text{باید ثابت کنیم}}{\Longrightarrow} c \le d$

$$(ka,kb)=kd \overset{\text{قضیهٔ بزو}}{\Longrightarrow} rka+skb=kd \Rightarrow ra+sb=d \qquad (2)$$

از طرفی فرض کرده‌ایم : $c|a, c|b \Rightarrow c|ra, c|sb \Rightarrow c|ra+sb$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} c|d \Rightarrow c \le d$$

تست: اگر $(a,b)=1$، در این صورت $(a+b,a-d)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۱ یا ۲ ۴) ۱ یا ۲ یا ۴

حل: گزینهٔ (۳) صحیح است ؛ زیرا اگر فرض کنیم $(a+b,a-b)=d$ در این صورت داریم :

$$\left.\begin{array}{l} d|a+b \\ d|a-b \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow d|(a+b)+(a-b) \Rightarrow d|2a \\ \Rightarrow d|(a+b)-(a-d) \Rightarrow d|2b \end{array}$$

$$d|2a, d|2b \overset{\text{نتیجهٔ ۲}}{\Longrightarrow} d|(2a,2b) \overset{\text{نتیجهٔ ۸}}{\Longrightarrow} d|2(a,b) \Rightarrow d|2\times 1=2$$

$$\Rightarrow d=1 \text{ یا } d=2$$

نتیجهٔ ۹: اگر عددی نسبت به دو عدد اوّل باشد، آن‌گاه نسبت به حاصلضرب آن دو عدد نیز اوّل است و بعکس :

$$(a,b)=1, (a,c)=1 \Leftrightarrow (a,bc)=1$$

اثبات (شرط لازم):

$$\left.\begin{array}{l} (a,b)=1 \overset{\text{قضیهٔ بزو}}{\Longrightarrow} r_1a+s_1b=1 \\ (a,c)=1 \overset{\text{قضیهٔ بزو}}{\Longrightarrow} r_2a+s_2c=1 \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{در هم ضرب}]{\text{دو طرف تساویها}}$$

$$r_1r_2a^2+r_1s_2ac+r_2s_1ab+s_1s_2bc=1$$

$$\Rightarrow \underbrace{(r_1r_2a+r_1s_2c+r_2s_1b)}_{r}a+\underbrace{(s_1s_2)}_{s}bc=1$$

$$\Rightarrow ra+sbc=1 \overset{\text{نتیجهٔ ۳}}{\Longrightarrow} (a,bc)=1$$

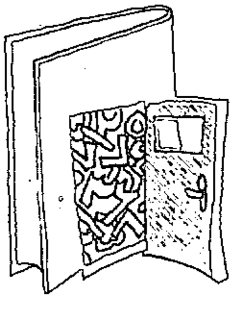
اثبات (شرط کافی):

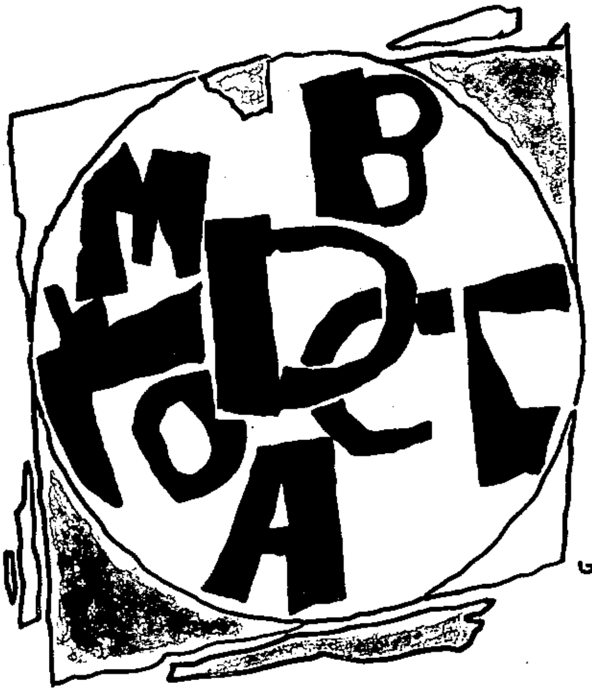
$$(a,bc)=1 \overset{\text{قضیهٔ بزو}}{\Longrightarrow} ra+sbc=1 \qquad (1)$$

$$(1) \Rightarrow ra+(sb)c=1 \overset{\text{نتیجهٔ ۳}}{\Longrightarrow} (a,c)=1$$

$$(1) \Rightarrow ra+(sc)b=1 \overset{\text{نتیجهٔ ۳}}{\Longrightarrow} (a,b)=1$$

۱. هر زیر مجموعهٔ ناتهی Z که از بالا کراندار باشد، دارای عضو انتها است.



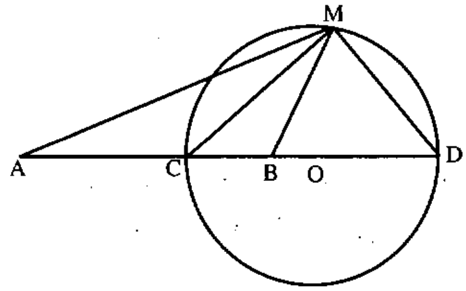


مکان هندسی (۲۳)

دایره آپولونیوس

محمدهاشم رستمی

دایرهٔ آپولونیوس: مکان هندسی، نقطه‌ای از یک صفحه که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B واقع در آن صفحه، مقدار ثابت $K(K \neq 0\ ,\ K \neq 1)$ باشد، دایره‌ای است که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت K تقسیم می‌کند.



اثبات به روش هندسی: دو نقطهٔ ثابت A و B را روی صفحهٔ P درنظر گرفته، خط راست AB را رسم می‌کنیم و روی این خط، دو نقطهٔ C و D را چنان اختیار می‌کنیم که پاره‌خط AB را به نسبت K تقسیم کنند ؛ یعنی، $\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB}=K$ (۱) باشد. دایره به قطر CD مکان هندسی موردنظر، یعنی مکان هندسی نقطه‌ای است که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر K است ؛ زیرا :

اولاً: هر نقطه مانند M که روی این دایره قرار داشته باشد، نسبت فاصله‌اش از A و B برابر K است ؛ زیرا اگر از M به نقطه‌های A، B، C و D وصل کنیم، چون (ABCD) یک تقسیم توافقی است، پس دستگاه M-ABCD دستگاهی توافقی می‌باشد و چون دو شعاع غیرمتوالی این دستگاه توافقی، یعنی MC و MD بر هم عمود می‌باشند(زاویهٔ $C\hat{M}D$ محاطی روبه‌رو به قطر و برابر 90° است)، پس این دو شعاع، نیمسازهای زاویه‌های داخلی و خارجی زاویه‌های بین دو شعاع دیگر می‌باشند ؛ یعنی MC نیمساز زاویهٔ داخلی AMB و MD نیمساز زاویهٔ خارجی AMB است. از طرفی می‌دانیم نیمسازهای هر زاویه، ضلع روبه‌رو آن زاویه را به نسبت دو ضلع دیگر تقسیم می‌کنند. پس داریم :

$$\frac{CA}{CB}=\frac{MA}{MB}=K$$

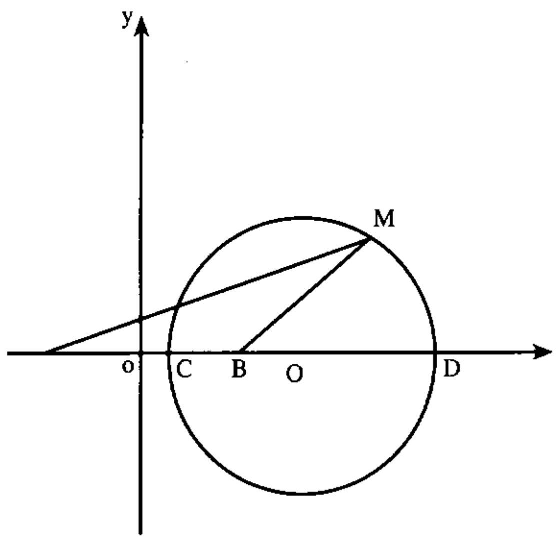
ثانیاً: هر نقطه مانند M که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر مقدار ثابت K ، یعنی (۲) $\frac{MA}{MB}=K$ باشد، روی دایرهٔ به قطر CD قرار دارد ؛ زیرا اگر از M به نقطه‌های A، B، C و D وصل کنیم، از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که

$K=\frac{MA}{MB}=\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB}$: اما این رابطه نشان می‌دهد که MC و MD به ترتیب نیمسازهای زاویه‌های داخلی و خارجی رأس M از مثلث ABC می‌باشد که چون این دو نیمساز بر هم عمودند، پس $\widehat{CMD}=90^\circ$ و در نتیجه نقطهٔ M روی دایرهٔ به قطر CD واقع است.

این دایره را دایرهٔ آپولونیوس می‌نامند.

(Appolonieus of perga)

اثبات به روش تحلیلی: دو نقطهٔ ثابت A و B را در صفحهٔ P درنظر می‌گیریم. خط AB را محور xها و عمودمنصّف پاره‌خط AB را محور yها اختیار می‌کنیم. اگر M(x,y) نقطه‌ای از مکان هندسی موردنظر، یعنی نقطه‌ای باشد که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B مقدار ثابت K است، با فرض $AB=a$ داریم:



$$A(-\frac{a}{2}, 0),\ B(\frac{a}{2}, 0),\ M(x,y) \Rightarrow$$

$$MA=\sqrt{(x+\frac{a}{2})^2+y^2}$$

$$MB=\sqrt{(x-\frac{a}{2})^2+y^2},\ \frac{MA}{MB}\doteq K \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{(x+\frac{a}{2})^2+y^2}}{\sqrt{(x-\frac{a}{2})^2+y^2}}=k \Rightarrow$$

$$(x+\frac{a}{2})^2+y^2=K^2(x-\frac{a}{2})^2+K^2y^2 \Rightarrow$$

$$(K^2-1)x^2+(K^2-1)y^2-a(K^2+1)x+(K^2-1)\frac{a^2}{4}=0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-\frac{a(K^2+1)}{K^2-1}x+\frac{a^2}{4}=0 \qquad (1)$$

معادلهٔ(۱) معادلهٔ دایره‌ای است که مرکزش نقطهٔ $O_1(\frac{a(K^2+1)}{2(K^2-1)}, 0)$ و شعاعش $R=\left|\frac{aK}{K^2-1}\right|$ است.

بعکس ثابت می‌شود، هر نقطه‌ای که مختصاتش در معادلهٔ(۱) صدق کند، نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B، برابر K است. قطر CD از این دایره، پاره‌خط AB را به نسبت K تقسیم می‌کند؛ زیرا داریم:

$$O_1A=\left|\frac{a(K^2+1)}{2(K^2-1)}+\frac{a}{2}\right|,\ O_1B=\left|\frac{a(K^2+1)}{2(K^2-1)}-\frac{a}{2}\right|,$$

$$O_1C=O_1D=R=\left|\frac{aK}{K^2-1}\right| \Rightarrow O_1C^2=O_1D^2=\overline{O_1A}\,.\,\overline{O_1B}$$

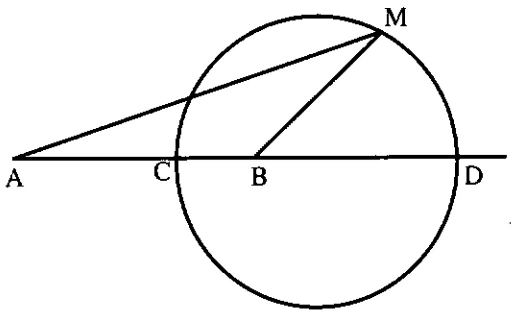
$$\Rightarrow \frac{a^2K^2}{(K^2-1)^2}=\left|\frac{a(K^2+1)}{2(K^2-1)}+\frac{a}{2}\right|.\left|\frac{a(K^2+1)}{2(K^2-1)}.\frac{a}{2}\right| \Rightarrow$$

$$\frac{a^2K^2}{(K^2-1)^2}=\frac{a^2}{4}.(\frac{(K^2+1)^2}{(K^2-1)^2}-1) \Rightarrow \frac{a^2K^2}{(K^2-1)^2}=\frac{a^2K^2}{(K^2-1)^2}$$

بنابراین، مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B واقع در آن صفحه، برابر مقدار ثابت K است، دایره‌ای است که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت K تقسیم می‌کند.

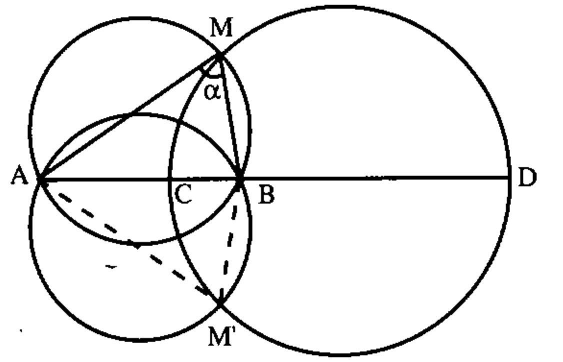
مثال ۱: پاره‌خط AB به‌طول ۱۲ سانتیمتر در یک صفحه داده شده است. مکان هندسی نقطه‌ای از این صفحه را بیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر ۲ است.

حل: نقطه‌های C و D را روی پاره‌خط AB و در امتداد آن چنان اختیار می‌کنیم که این پاره‌خط را به نسبت ۲ تقسیم کنند؛ یعنی $2\doteq\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB}$ باشد. در این‌صورت



$CA = ۸$ ، $CB = ۴$ ، $DA = ۲۴$ و $DB = ۱۲$ سانتیمتر است. حال دایرهٔ به قطر CD را رسم می‌کنیم. این دایره، مکان هندسی موردنظر است.

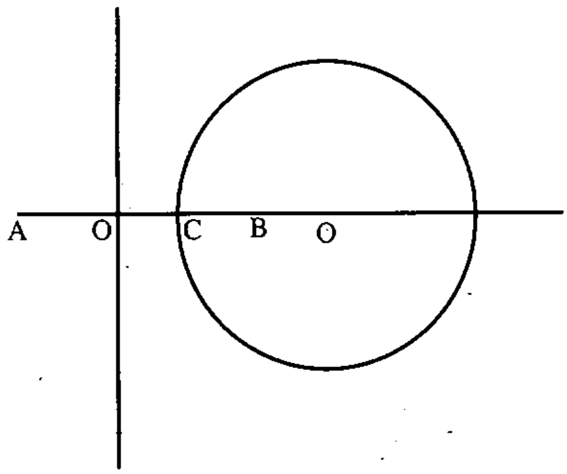
مثال ۲: دو نقطهٔ A و B در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای از این صفحه را تعیین کنید که از آن نقطه پاره‌خط AB به زاویهٔ α دیده می‌شود و نسبت فاصلهٔ آن نقطه از دو نقطهٔ A و B، برابر مقدار ثابت K باشد.



حل: کمان درخور زاویهٔ α وابسته به پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. سپس مکان هندسی نقطه‌ای از این صفحه را که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر K است، رسم می‌کنیم. نقطه‌های برخورد این دو مکان هندسی، جواب مسأله‌اند و مسأله همواره دو جواب دارد.

مثال ۳: دو نقطهٔ A و B در یک صفحه داده شده‌اند. آیا نقطه‌ای وجود دارد که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر عدد ثابت K باشد و این نقطه از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد؟

حل: نقطه‌های C و D را روی پاره‌خط AB و در امتداد آن، چنان اختیار می‌کنیم که پاره‌خط AB را به نسبت K تقسیم کنند؛ پس دایرهٔ به قطر CD را رسم می‌کنیم، (دایرهٔ آپولونیوس). از طرفی، مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله است، خط Δ عمودمنصّف پاره‌خط AB است، که این خط را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن با AB را که وسط پاره‌خط AB است، O می‌نامیم. اما



می‌دانیم بنا به رابطهٔ نیوتن در تقسیم توافقی، دو نقطهٔ C و D در یک طرف نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB قرار دارند(ABCD یک تقسیم توافقی است). بنابراین عمودمنصّف پاره‌خط AB، دایرهٔ آپولونیوس، یعنی مکان هندسی نقطه‌ای را که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر K است، هیچ‌گاه قطع نمی‌کند؛ پس مسأله دارای جواب نیست.

ترکیبات ۱

(برای دانش‌آموزان دورهٔ پیش‌دانشگاهی)

میر شهرام صدر

در این سری مقاله‌ها ابتدا به یادآوری رابطهٔ روی مجموعهٔ شمارش‌پذیر و خواص مربوط به آنها خواهیم پرداخت و به دنبال راههایی ساده‌تر و جذّابتر برای بررسی خواصّ رابطه‌ها هستیم. به همین سبب، متناظر با هر رابطه یک گراف جهت‌دار و متناظر با آن یک ماتریس مجاورت را نسبت می‌دهیم و ترکیب رابطه‌ها را مطالعه می‌کنیم. سپس یکی از ابزارهای مهّم شمارش به نام «اصل شمول و عدم شمول» را معرفی کرده و کاربرد این اصل را در حلّ مسأله‌های ترکیبیات بررسی خواهیم کرد.

رابطه

دو مجموعهٔ $A=\{a,b\}$ و $B=\{c\}$ را درنظر بگیرید، اکنون $A\times B$ را به دست می‌آوریم:

$$A\times B=\{(x,y)\,|\,x\in A, y\in B\}=\{(a,c),(b,c)\}$$

سپس همهٔ زیر مجموعه‌های $A\times B$ را می‌نویسیم؛ چون $A\times B$: ۲ عضو دارد، پس تعداد زیرمجموعه‌های آن برابر $2^2=4$ است: $R_1=\varnothing$، $R_2=\{(a,c)\}$، $R_3=\{(b,c)\}$ و $R_4=\{(a,c),(b,c)\}$ بنابه تعریف، R_1، R_2، R_3، R_4 را رابطه‌هایی از مجموعه A به مجموعهٔ B گوییم.

تعریف. فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند، هر یک از زیرمجموعه‌های $A\times B$ را یک رابطهٔ از A به B می‌گوییم. اگر R رابطه‌ای از A به B باشد و $(a,b)\in R$، آن‌گاه می‌گوییم a با b رابطه دارد و می‌نویسیم aRb.

نکته. اگر مجموعهٔ A دارای n عضو و مجموعهٔ B دارای m عضو باشد، آن‌گاه $A\times B$ دارای $m\times n$ عضو است و تعداد رابطه‌ها از A به B برابر با $2^{m\times n}$ است.

دامنهٔ یک رابطه

فرض کنیم R رابطه‌ای از A به B باشد. مجموعهٔ حاصل از مؤلفه‌های اوّل زوجهای مرتّب رابطهٔ R را دامنه R می‌نامیم و آن را با D_R نمایش می‌دهیم؛ واضح است که $D_R\subset A$.

برد یک رابطه

فرض کنیم R رابطه‌ای از A به B باشد. مجموعهٔ حاصل از مؤلفه‌های دوم زوجهای مرتّب رابطهٔ R را برد R می‌نامیم و آن را با R_R نمایش می‌دهیم؛ واضح است که $R_R \subset B$.

مثال. مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,۶\}$ را درنظر بگیرید. رابطهٔ $R=\{(x,y) \mid x^۲ \le y\}$ را روی مجموعه A مشخص کنید، سپس دامنه و برد رابطهٔ R را بیابید.

حل.

$$R=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۶),(۲,۶)\}$$
$$D_R=\{۱,۲\} \quad ; \quad R_R=\{۱,۲,۳,۶\}$$

تذکر. اگر A یک مجموعه باشد، هریک از زیر مجموعه‌های $A\times A$ را یک رابطه روی A می‌گوییم.

نکته. اگر مجموعهٔ A دارای n عضو باشد، آن‌گاه $A\times A$ دارای $n^۲$ عضو است و تعداد رابطه‌ها روی A برابر $۲^{n^۲}$ است.

خواص رابطه ها

۱ـ رابطهٔ انعکاسی یا بازتابی

فرض کنیم رابطهٔ R روی مجموعهٔ A تعریف شده باشد. R خاصیت بازتابی دارد؛ اگر و تنها اگر برای هر عضو A، داشته باشیم $(a,a)\in R$ یا aRa . رابطهٔ R روی مجموعهٔ A خاصیت بازتابی ندارد؛ هرگاه $x\in A$ ای وجود داشته باشد؛ به طوری که $(x,x)\notin R$.

مثال. مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ را درنظر بگیرید، آیا رابطهٔ $R=\{(a,b) \mid a,b\in A, a\le b\}$ روی مجموعهٔ A خاصیت بازتابی دارد؟

حل. ابتدا رابطهٔ R را روی A مشخص می‌کنیم:

$$R=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۲,۲),(۲,۳),(۲,۴),(۳,۳),(۳,۴),(۴,۴)\}$$

همان طور که ملاحظه می‌کنید، ۱R۱ ، ۲R۲ ، ۳R۳ و ۴R۴ ؛ یعنی هر یک از عضوهای A با خودش در رابطه است، پس R روی A دارای خاصیت بازتابی است.

نکته. مجموعهٔ $A=\{a_۱,a_۲,a_۳,\dots,a_n\}$ را در نظر بگیرید، رابطهٔ R روی A خاصیت بازتابی دارد؛ هرگاه داشته باشیم:

$$\{(a_۱,a_۱),(a_۲,a_۲),(a_۳,a_۳),\dots,(a_n,a_n)\}\subseteq R$$

مثال: مجموعهٔ $A=\{۲,۳,۴\}$ را درنظر بگیرید. آیا رابطهٔ $R=\{(x,y) \mid x,y\in A, x \mid y\}$ روی مجموعهٔ A خاصیت بازتابی دارد؟

حل. ابتدا رابطه Rرا روی A مشخص می‌کنیم:

$$R=\{(۲,۲),(۲,۴),(۳,۳),(۴,۴)\}$$

چون $\{(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴)\}\subseteq R$ ، پس R روی A دارای خاصیت بازتابی است.

مثال. مجموعهٔ دو عضوی $A=\{a,b\}$ را در نظر بگیرید، تعداد رابطه‌های انعکاسی روی مجموعهٔ A را مشخص کنید؟

حل.

$$A\times A=\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$$

در صورتی که R یک رابطهٔ انعکاسی روی مجموعه A باشد، R باید شامل دو عضو (a,a) و (b,b) باشد. همچنین R می‌تواند بجز این دو عضو، شامل عضوهای (a,b) یا (b,a) باشد.

اکنون اگر همهٔ زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $B=\{(a,b),(b,a)\}$ را بنویسیم و به هریک از این زیرمجموعه‌ها، دو عضو (a,a) و (b,b) را اضافه کنیم، همهٔ رابطه‌های انعکاسی روی Aبه دست می‌آید، که تعداد رابطه‌های انعکاسی روی A برابر ۴ است:

$$\{(a,b)\}\subseteq B \quad ; \quad R_۱=\{(a,a),(b,b),(a,b)\}$$
$$\{(b,a)\}\subseteq B \quad ; \quad R_۲=\{(a,a),(b,b),(b,a)\}$$
$$\{(a,b),(b,a)\}\subseteq B \quad ; \quad R_۳=\{(a,a),(b,b),(a,b)(b,a)\}$$
$$\varnothing\subseteq B \quad ; \quad R_۴=\{(a,a),(b,b)\}$$

تعداد رابطه‌های بازتابی روی مجموعهٔ n عضوی A

در حالت کلی اگر $A=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ یک مجموعهٔ n عضوی باشد، می‌دانیم $A\times A$ دارای n^2 عضو است و تعداد عضوهای A^2 که به صورت (x_i,x_i) $1\le i\le n$ هستند، برابر n است ؛ بنابراین مجموعهٔ $B=\{(x_i,x_j)\mid i\neq j,\ 1\le i,j\le n\}$ وجود دارد که دارای n^2-n عضواست. اکنون اگر به هر یک از زیرمجموعه‌های B عضوهای مجموعهٔ $A=\{(a_1,a_1),(a_2,a_2),\dots,(a_n,a_n)\}$ را بیفزاییم، رابطه‌های انعکاسی روی A به دست می‌آید ؛ چون B دارای 2^{n^2-n} زیرمجموعه است، پس تعداد رابطه‌های انعکاسی (بازتابی) روی مجموعهٔ n عضوی A برابر 2^{n^2-n} است.

تست. روی مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d,e\}$ چند رابطهٔ بازتابی می‌توان تعریف کرد؟

۱) 2^{15} ۲) 2^{20}

۳) 2^{10} ۴) 2^{30}

حل. گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ زیرا تعداد اعضای A برابر ۵ است، پس تعداد رابطه‌های بازتابی روی A برابر است با :

$$2^{n^2-n}=2^{5^2-5}=2^{20}$$

۲ـ رابطهٔ تقارنی

فرض کنیم R رابطه‌ای روی مجموعه A باشد، R رابطهٔ تقارنی است، هرگاه برای هر $x,y\in A$ داشته باشیم :

$$(a,b)\in R\Rightarrow(b,a)\in R \text{ یا } aRb\Rightarrow bRa$$

مثال. مجموعهٔ $A=\{-1,0,1\}$ را درنظر بگیرید، آیا رابطهٔ $R=\{(x,y)\mid x,y\in A, y=|x|\}$ روی A دارای خاصیت تقارنی است؟

حل. ابتدا رابطهٔ R را روی A مشخص می‌کنیم :

$$R=\{(-1,1),(0,0),(1,1)\}$$

چون $(-1,1)\in R$ ، ولی $(1,-1)\notin R$ ؛ بنابراین R خاصیت تقارنی روی A ندارد.

مثال. مجموعهٔ سه عضوی $A=\{a,b,c\}$ را درنظر بگیرید، تعداد رابطه‌های تقارنی روی مجموعهٔ A را مشخص کنید؟

حل.

$$A\times A=A^2=\begin{Bmatrix}(a,a),(a,b),(a,c),(b,a)\\,(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\end{Bmatrix}$$

مجموعهٔ $A_1=\{(a,a),(b,b),(c,c)\}$ دارای ۳ عضو است ؛ بنابراین مجموعهٔ :

$$A_2=A^2-A_1=\{(a,b),(a,c),(b,a),(b,c),(c,a),(c,b)\}$$

دارای $3^2-3=6$ عضو است و مجموعهٔ A_2 دارای $\frac{1}{2}(3^2-3)=3$ زیرمجموعهٔ به صورتهای $A_3=\{(a,b),(b,a)\}$ ، $A_4=\{(a,c),(c,a)\}$ ، $A_5=\{(b,c),(c,b)\}$ است. برای نوشتن رابطهٔ متقارن R روی A ، می‌توانیم هریک از عضوهای A_1 را در R قرار دهیم یا ندهیم. همچنین می‌توانیم عضوهای هریک از مجموعه‌های A_3 یا A_4 یا A_5 را در R قراردهیم یا ندهیم ؛ بنابراین طبق اصل ضرب تعداد رابطه‌های تقارنی روی مجموعهٔ A برابر است با :

$$\text{تعداد رابطه‌های تقارنی روی مجموعه } A=2^3\times2^{\frac{1}{2}(3^2-3)}=2^{\frac{1}{2}(3^2+3)}=2^6$$

تعداد رابطه‌های تقارنی روی مجموعهٔ n عضوی

در حالت کلی، مجموعهٔ n عضوی $A=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم که $A\times A$ دارای n^2 عضو است و مجموعهٔ $A_1=\{(x_i,x_i)\mid 1\le i\le n\}$ دارای n عضو است. بنابراین مجموعهٔ $A_2=A^2-A_1=\{(x_i,x_j)\mid i\neq j, 1\le i,j\le n\}$ دارای n^2-n عضو است و مجموعهٔ A_2 دارای $\frac{1}{2}(n^2-n)$ ، زیرمجموعهٔ به صورت $A_{ij}=\{(x_i,x_j),(x_j,x_i)\}$ است. برای نوشتن رابطهٔ متقارن R روی مجموعهٔ A، می‌توانیم هریک از عضوهای A_1 را در R قرار دهیم یا ندهیم. همچنین می‌توانیم عضوهای هریک از مجموعه‌های A_{ij} را در R قرار دهیم یا ندهیم. بنابراین طبق اصل ضرب، تعداد رابطه‌های تقارنی روی مجموعهٔ A به صورت زیر به دست می‌آید :

$$\text{تعداد رابطه‌های تقارنی روی یک مجموعهٔ } n \text{ عضوی}=2^n\times2^{\frac{1}{2}(n^2-n)}=2^{\frac{1}{2}(n^2+n)}$$

تست. روی مجموعهٔ $A=\{۲,۳,۵,۷,۸\}$ چند رابطهٔ متقارن می‌توان تعریف کرد؟

۱) $۲^{۱۷}$ ۲) $۲^{۱۰}$

۳) $۲^{۲۲}$ ۴) $۲^{۱۵}$

حل. گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ زیرا مجموعه A دارای ۵ عضو است، بنابراین :

$$۲^{\frac{۱}{۲}(n^۲+n)}=۲^{\frac{۱}{۲}(۵^۲+۵)}=۲^{۱۵}$$

تذکر. برای نوشتن رابطهٔ R که تقارنی و انعکاسی باشد، کافی است عضوهای مجموعهٔ $A_۱$ را در R قرار دهیم و می‌توانیم عضوهای هریک از مجموعه‌های A_{ij} را در R قرار دهیم یا ندهیم ؛ بنابراین تعداد رابطه‌های تقارنی و انعکاسی روی مجموعهٔ n عضوی A برابر تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $B=\{A_{ij}\,|i\neq j, i\leq i,j\leq n\}$ است، چون مجموعهٔ B دارای $\frac{۱}{۲}(n^۲-n)$ عضو است ؛ بنابراین داریم :

$۲^{\frac{۱}{۲}(n^۲-n)}=$ تعداد رابطه‌های تقارنی و انعکاسی روی یک مجموعهٔ n عضوی

۳ـ رابطهٔ تعدی یا تراگذاری

فرض کنیم رابطهٔ R روی مجموعهٔ A تعریف شده باشد. R خاصیت تعدی دارد ؛ هرگاه برای هر c∈A و b و a داشته باشیم :

$$(a,b)\in R \text{ و } (b,c)\in R\Rightarrow(a,c)\in R$$

مثال. مجموعهٔ $A=\{۲,۴,۶\}$ را درنظر بگیرید. هریک از رابطه‌های زیر روی مجموعهٔ A رابطه‌های تعدی هستند :

$R_۱=\{(۲,۲)\}$; $R_۲=\{(۲,۴)\}$; $R_۳=\{(۲,۴),(۴,۶),(۲,۶)\}$

$R_۴=\{(۲,۲),(۴,۴),(۶,۶)\}$; $R_۵=\{(۲,۲),(۴,۴),(۲,۴)\}$

امّا رابطه $R_۶=\{(۲,۴),(۴,۲),(۲,۲)\}$ روی A رابطهٔ تعدی نیست ؛ زیرا :

$$(۴,۲)\in R \text{ و } (۲,۴)\in R\Rightarrow(۴,۴)\notin R$$

تذکر. فرض کنیم R رابطه‌ای روی مجموعهٔ $A=\{a_۱,a_۲,\ldots,a_n\}$ باشد. رابطهٔ $R=\{(a_i,a_j)\}$ روی مجموعهٔ A یک رابطهٔ تعدی است ؛ این مطلب را می‌توانیم به برهان خلف به صورت زیر ثابت کنیم : فرض کنیم رابطهٔ $R=\{(a_i,a_j)\}$ روی A تعدی نباشد (فرض خلف)، بنابراین باید در رابطهٔ R داشته باشیم $(a_i,a_j)\in R$ و $(a_j,a_k)\in R$ ، امّا $(a_i,a_k)\notin R$ ؛ چون (a_j,a_k) را نمی‌توان در R درنظر گرفت، بنابراین به تناقض رسیده‌ایم ؛ پس فرض خلف باطل و R رابطهٔ تعدی است.

۴ـ رابطهٔ هم‌ارزی

رابطهٔ R روی مجموعهٔ A یک رابطهٔ هم‌ارزی است ؛ هرگاه R سه خاصیت زیر را داشته باشد :

۱. رابطهٔ R انعکاسی یا بازتابی باشد ؛ یعنی برای هر $a\in A$ داشته باشیم : $(a,a)\in R$.

۲. رابطهٔ R تقارنی باشد ؛ یعنی برای $a,b\in A$ اگر $(a,b)\in R$ ، آن گاه $(b,a)\in R$.

۳. رابطهٔ R تعدی باشد ؛ یعنی برای c∈A و b و a، اگر $(a,b)\in R$ و $(b,c)\in R$ ، آن گاه $(a,c)\in R$.

نکته. تعداد رابطه‌های هم‌ارزی که می‌توانیم روی مجموعهٔ A تعریف کنیم، برابر با تعداد افرازهای A است.

مثال. روی مجموعهٔ $A=\{a,b,c\}$ چند رابطهٔ هم‌ارزی می‌توان تعریف کرد؟

حل. تعداد رابطه‌های هم‌ارزی روی A برابر با تعداد افرازهای Aاست ؛ بنابراین تمام افرازهای A را می‌نویسیم :

$$\{\{a\},\{b\},\{c\}\}\ ,\ \{\{a,b\},\{c\}\}\ ,\ \{\{a,c\},\{b\}\}$$
$$\{\{b,c\},\{a\}\}\ ,\ \{\{a,b,c\}\}$$

بنابراین ۵ رابطهٔ هم‌ارزی می‌توان روی A تعریف کرد.

برای یافتن رابطهٔ هم‌ارزی که توسط افراز $\{\{a,c\},\{b\}\}$ روی مجموعهٔ $A=\{a,b,c\}$ به وجود می‌آید، به صورت زیر عمل می‌کنیم :

$$A_۱=\{a,c\}\times\{a,c\}=\{(a,a),(a,c),(c,a),(c,c)\}$$
$$A_۲=\{b\}\times\{b\}=\{(b,b)\}$$
$$R=A_۱\cup A_۲=\{(a,a),(a,c),(c,a),(c,c),(b,b)\}$$

۵ـ رابطهٔ پاد تقارنی

فرض کنیم رابطهٔ R روی مجموعهٔ A تعریف شده باشد. R خاصیت پادتقارنی دارد؛ در صورتی که برای $a \neq b$ ، اگر $(a,b) \in R$ ، آن گاه $(b,a) \notin R$.

مثال. آیا رابطهٔ $R = \{(a,b) |$ a بر b بخش‌پذیر است $\}$ روی مجموعهٔ $A = \{۱,۲,۳,۴\}$ یک رابطهٔ پادتقارنی است؟

حل. ابتدا رابطهٔ R را می‌نویسیم :

$$R = \{(۱,۱),(۲,۱),(۲,۲),(۳,۱),(۳,۳),(۴,۱),(۴,۲),(۴,۴)\}$$

همان طور که ملاحظه می‌کنید، برای هر دو عضو متمایز a و b از A، اگر aRb، آن گاه $b \not R a$.

مثال. آیا رابطهٔ $\varnothing$ روی مجموعهٔ ناتهی A یک رابطهٔ پادتقارنی است؟

حل) برهان خلف. فرض کنیم A یک مجموعه ناتهی، اگر $\varnothing$ روی A پادتقارنی نباشد (فرض خلف) آن گاه باید در $\varnothing$ ، aRb و bRa که این غیرممکن است؛ بنابراین فرض خلف باطل و $\varnothing$ رابطهٔ پادتقارنی است.

مسأله. ثابت کنید تعداد رابطه‌های پادتقارنی روی مجموعهٔ n عضوی A برابر $P_n = ۲^n \times ۳^{\frac{n(n-۱)}{۲}}$ است.

حل. این مسأله را به کمک اصل استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم :

$$n = ۱ : \ P_۱ = ۲^۱ \times ۳^۰ = ۲$$

به ازای $n = ۱$ رابطه درست است؛ زیرا روی مجموعهٔ یک عضوی $A = \{a_۱\}$ دو رابطهٔ پادتقارنی $R_۱ = \{(a_۱,a_۱)\}$ و $R_۲ = \varnothing$ را می‌توان تعریف کرد.

$$n = k : \ P_k = ۲^k \times ۳^{\frac{k(k-۱)}{۲}} \quad \text{فرض استقرا}$$

$$n = k+۱ : \ P_{k+۱} = ۲^{k+۱} \times ۳^{\frac{(k+۱)k}{۲}} \quad \text{حکم استقرا}$$

مجموعهٔ $k+۱$ عضوی $B = \{a_۱,a_۲,\ldots,a_i,a_k,a_{k+۱}\}$ رادرنظر می‌گیریم، اگر a_i را از این مجموعه حذف کنیم، یک مجموعهٔ k عضوی مانند C به دست می‌آید که طبق فرض استقرا دارای $P_k = ۲^k \times ۳^{\frac{k(k-۱)}{۲}}$ رابطهٔ پادتقارنی است، اکنون a_i را به مجموعهٔ C اضافه می‌کنیم، در این صورت ملاحظه خواهیم کرد که $B^۲$ علاوه بر اعضای مجموعهٔ $C^۲$ دارای اعضای مجموعه‌های زیر است :

$$D = \{(a_i,a_i)\}$$

$$A_j = \{(a_i,a_j),(a_j,a_i) \ | i \neq j\} \ ; \ (۱ \leq j \leq k+۱)$$

در رابطه پادتقارنی R می‌توان عضو مجموعه D را قرار دهیم یا ندهیم؛ یعنی دو حالت وجود دارد. همچنین در رابطهٔ پادتقارنی R می‌توان (a_i,a_j) یا (a_j,a_i) یا هیچ کدام آنها را از A_j درنظر گرفت؛ یعنی سه حالت وجود دارد؛ چون K مجموعه به صورت A_j داریم، پس ۳^k حالت وجود دارد؛ بنابراین داریم :

$$P_{k+۱} = ۲^k \times ۳^{\frac{k(k-۱)}{۲}} \times ۲ \times ۳^k = ۲^{k+۱} \times ۳^{\frac{k(k+۱)}{۲}}$$

تعداد رابطه‌های پادتقارنی مجموعهٔ $(k+۱)$ عضوی

تست. روی مجموعهٔ $A = \{a,b,c,d\}$ چند رابطهٔ پادتقارن می‌توان تعریف کرد؟

۱) $۲^{۱۰}$ ‏ ۲) $۲^۴ \times ۳^۶$

۳) $۲^۴ \times ۳^{۱۰}$ ‏ ۴) $۳^{۱۰}$

حل. گزینه (۲) صحیح است؛ زیرا :

$$n = ۴ \ ; \ P_۴ = ۲^۴ \times ۳^{\frac{۴(۴-۱)}{۲}} = ۲^۴ \times ۳^۶$$

نکته. تعداد رابطه‌های تقارنی و پادتقارنی روی مجموعهٔ n عضوی A برابر ۲^n است.

تذکر. تعداد رابطه‌هایی که خاصیت پادتقارنی و تقارنی دارند، با تعداد رابطه‌هایی که سه خاصیت پادتقارنی، تقارنی و بازتابی را دارند، برابر است.

نکته. تعداد رابطه‌های پادتقارنی روی مجموعهٔ n عضوی $A = \{a_۱,a_۲,\ldots,a_n\}$ که شامل (a_i,a_j) باشند، برابر با $۲^n \times ۳^{\frac{n(n-۱)}{۲}-۱}$ است.

■

قضیهٔ کوتاهترین راه را قضیهٔ حمار بنامیم یا قضیهٔ مسیر نور

دکتر احمد شرف‌الدین

چکیده

اگر دو نقطه A و B در یک محیط همگن داده شده باشند و بخواهیم از نقطهٔ A به نقطه B برویم، کوتاهترین راه، پاره خط راست AB است. این مطلب را در کتابهای هندسه تحت عنوان «قضیهٔ حمار» بیان می کنند. از نظر نویسندهٔ این سطور، عنوان قضیهٔ حمار، برای قضیهٔ کوتاهترین راه صحیح نیست؛ بلکه عنوان «قضیهٔ مسیر نور» مناسب است. در این باره توضیح می دهیم.

* * *

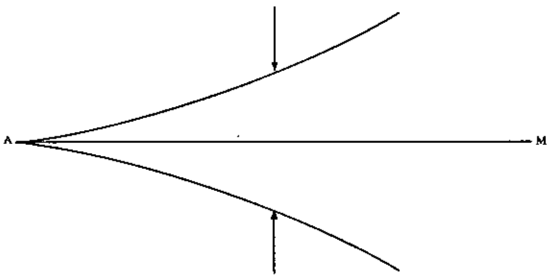
۱- قضیه

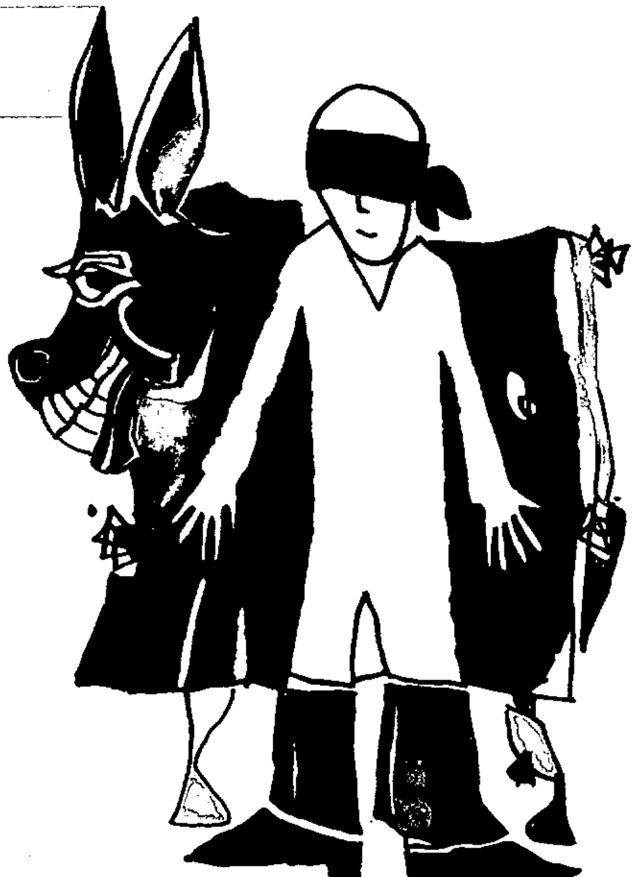
در هر مثلث، طول هر ضلع کوچکتر از مجموع دو ضلع دیگر است.

قضیهٔ یاد شده در بالا را قضیهٔ حمار می‌نامند و این نامگذاری را این طور توجیه می‌کنند که درک قضیهٔ مورد نظر، فوق‌العاده آسان است؛ به طوری که حتی حمار که عقل و فکری بسیار ضعیف دارد، می‌داند که برای رفتن از نقطهٔ A به نقطهٔ B، باید روی خط راست AB حرکت کند تا کمترین راه را بپیماید.

۲- حرکت با چشم بسته

در یک زمین وسیع و هموار، هدفی درنظر می‌گیریم. برای مثال، درختی که در نقطهٔ M است (شکل پایین). از شخصی که در نقطهٔ A به فاصله‌ای کافی از درخت، مثلاً ۱۵۰ متر قرار دارد، می‌خواهیم که از نقطهٔ A به طرف نقطهٔ B با چشم بسته حرکت کند تا به نقطهٔ B برسد. این شخص، با چشم بسته نمی‌تواند به طور مستقیم حرکت کند، لذا به درخت نمی‌رسد؛ بلکه روی یک کمان حرکت می‌کند و خیال می‌کند روی خط راست به جلو می‌رود.





بیشتر افراد، با چشم بسته جهت حرکت خود را گم می‌کنند و به طرف چپ منحرف می‌شوند (مسیر ۱). بعضی افراد با چشم بسته از خط راست به طرف راست منحرف می‌شوند (مسیر ۲). اگر دربارهٔ شخصی که در حرکت خود به طرف چپ منحرف شده است، آزمایشهای متعددی انجام دهیم، او همواره به طرف چپ منحرف می‌شود و اگر از شخصی که در حرکت خود به طرف راست منحرف شده است، آزمایشهای متعددی انجام دهیم، او همواره به طرف راست منحرف می‌شود.

افرادی که در بیابانها، هنگامی که کولاک یا مه غلیظ وجود دارد یا شب کاملاً تاریک است و در نتیجه جهت‌یابی با چشم (یعنی بدون وسایل فیزیکی) برای آنها ممکن نیست، حرکت می‌کنند، راه راست به سوی هدف را گم می‌کنند و روی یک منحنی حرکت و خیال می‌کنند که روی خط راست حرکت می‌نمایند. همچنین قایقرانی که در دریا به هنگام مه غلیظ یا تاریکی شب حرکت می‌کند و تصمیم داردخط راستی را برای رسیدن به هدف طی کند، ازخط راست منحرف می‌شود؛ اما خیال می‌کند که مسیر مستقیم را می‌پیماید؛ برای حیوانات نیز چنین است.

موجودات زنده فقط هنگامی می‌توانند بدون کمک چشم روی خط راست حرکت کنند، که تقارن بدن آنها از لحاظ هندسی و بیولوژی کامل باشد و در نتیجه، عضله‌های سمت راست و چپ آنها به طور یکسان عمل کنند. در بیشتر انسانها و حیوانات، عضله‌های سمت راست بدن نسبت به سمت چپ، رشد و توانایی بیشتری دارند، لذا راهپیما قدم راست خود را اندکی بلندتر از قدم سمت چپ برمی‌دارد و در نتیجه، با چشم بسته نمی‌تواند روی خط راست حرکت کند و به طرف چپ منحرف می‌شود. همچنین قایقرانی که بازوی راست او قویتر ازبازوی سمت چپش می‌باشد، هنگامی که در تاریکی پارو می‌زند، مسیری را طی می‌کند که به طرف چپ انحراف دارد.

۳ـ توضیح دربارهٔ نادرست بودن عنوان «قضیهٔ حمار»

در سطور زیر در بندهای ۳.۱ و ۳.۲ دربارهٔ نادرست بودن عنوان قضیهٔ موردنظر توضیح می‌دهیم.

۳ـ۱ـ حلّ مسائل با چشم بسته: چشم یک دانشمند ادبیات را با دستمال می‌بندیم و سپس شعری را که هرگز نخوانده است و مشکل است، برای او می‌خوانیم و از او معنای آن را طلب می‌کنیم. آن ادیب، به طور مسلّم با چشم بسته پس از دقایقی فکر کردن، آن شعر را معنا می‌کند. اما او با چشم بسته نمی‌تواند در یک زمین هموار، از نقطهٔ معین A طوری حرکت کند که به نقطهٔ معین B برسد (فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B به اندازهٔ کافی بزرگ است).

ادیب برای معنا کردن شعر، از فکر و عقل و معلومات خود کمک می‌گیرد، نه از مسیر شعاع نور؛ در صورتی که برای رفتن از نقطهٔ معین A به نقطهٔ معین B با چشم باز، مسیر شعاع نور است که او را روی خط راست AB هدایت می‌کند؛ نه عقل و فکر او.

برای مثال، همین تجربه را دربارهٔ یک ریاضیدان، یک فیزیکدان، یک شطرنج‌باز و... اجرا می‌کنیم؛ یعنی چشم یک ریاضیدان را با دستمال می‌بندیم و سپس صورت یک مسأله‌ای را که ندیده است، برای او می‌خوانیم و حلّ آن را از او طلب می‌کنیم. ریاضیدان پس از مدتی تفکر، مسأله را حل می‌کند. اما این ریاضیدان با چشم بسته نمی‌تواند در یک زمین هموار از نقطهٔ معین A طوری حرکت کند که به نقطهٔ معین B برسد.

ریاضیدان برای حلّ مسأله، از فکر و عقل و معلومات خود یاری می‌گیرد، نه از مسیر شعاع نور؛ در صورتی که برای رفتن از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر، با چشم باز، مسیر شعاع نور است که او را روی خط راست هدایت می‌کند؛ نه عقل و فکر او.

۳ـ۲ـ علت نامگذاری قضیهٔ حمار (خر): قضیهٔ مذکور در شمارهٔ (۱) را از این جهت قضیهٔ حمار می‌نامند که معتقدند درک درستی آن به اندازه‌ای آسان است که حتی حمار هم که دارای فکر و عقل فوق‌العاده کمی است، درستی آن را درک می‌کند و برای رفتن از نقطهٔ معین A به نقطهٔ معین B، روی خط راست AB حرکت می‌کند.

این که موجود زنده در یک محیط همگن، برای رفتن از یک نقطهٔ مفروض A به یک نقطهٔ مفروض B، خط راست AB را می‌پیماید، هرگز به فکر و عقل او مربوط نیست؛ بلکه تنها به مسیر شعاع نور مربوط است.

اگر محیط مادی طوری باشد که در آن جا نور یک خط منحنی بپیماید، آن گاه موجود زندهٔ آن محیط، برای رسیدن به هدف، یک خط منحنی می‌پیماید. به این دلیل است که عنوان قضیهٔ مسیر نور را برای حکم مورد نظر مناسب می‌دانم؛ نه عنوان قضیهٔ حمار را.

■

معادلهٔ یک مجهولی درجهٔ دوم

(برای دانش‌آموزان سال اوّل دبیرستان)

$$ax^2+bx+c=0$$

هوشنگ شرقی

شکل کلی معادلهٔ درجهٔ دوم به‌صورت $ax^2+bx+c=0$ می‌باشد و روشن است که $a\neq 0$ می‌باشد. (چرا؟)

از این‌رو، مشخص می‌شود که در این نوع معادله، برخلاف معادلهٔ درجهٔ اوّل، روش ابتدایی ما این است که همهٔ مجهولها و معلومها را به‌یک طرف معادله برده و درسمت راست معادله، عددصفر را باقی گذاریم، آن‌گاه معادله را به‌ترتیب درجات نزولی مجهول معادله، مرتّب کنیم.

مثال: معادلهٔ $(x+1)(x-2)+7=(3x+1)(x-3)$ را به‌شکل استاندارد خود تبدیل کنید.

حل: پس‌از ضرب پرانتزها و بردن همهٔ عبارتها به‌سمت چپ تساوی، نتیجه می‌شود:

$$x^2-x-2+7=3x^2-9x+x-3$$

$$\Rightarrow x^2-x-2+7-3x^2+9x-x+3=0$$

$$\Rightarrow -2x^2+7x+8=0$$

که شکل استاندارد یک معادلهٔ درجهٔ دوم را دارا می‌باشد.

پس از آن‌که معادلهٔ درجهٔ دوم را به‌شکل استاندارد خود تبدیل نمودیم، روی روشهای حلّ آن بحث می‌کنیم. ابتدا از حالتهای خاص این نوع معادله شروع می‌کنیم. $(ax^2+bx+c=0)$:

الف) حالت خاصی که در آن $c=0$ باشد: در این حالت، معادله به‌صورت $ax^2+bx=0$ درمی‌آید. حال با فاکتورگیری از x و تجزیهٔ عبارت‌جبری سمت‌چپ تساوی، نتیجه می‌شود: $x(ax+b)=0$ ، اکنون دوعامل داریم که حاصلضرب آنها مساوی صفر می‌باشد و ما می‌دانیم که اگر حاصلضرب دوعامل، مساوی صفر باشد، لااقل یکی از آنها مساوی صفرمی‌باشد؛ یعنی: $AB=0 \Rightarrow A=0$ یا $B=0$ ، لذا می‌توان نوشت:

$$x(ax+b)=0 \Rightarrow x=0 \text{ یا } ax+b=0 \Rightarrow x=\frac{-b}{a}$$

و از آن‌جا دو ریشهٔ حقیقی معادلهٔ مفروض، به صورت $x'=0$ و $x''=\frac{-b}{a}$ به‌دست می‌آید. این شیوه را برای حلّ

کلیهٔ معادله‌های درجه دومی که عدد ثابت c نداشته باشند نیز به‌کار می‌بریم. لذا یکی از ریشه‌های این معادله، همواره مساوی صفر می‌باشد.

مثال: حلّ معادلهٔ $۴x^۲ - ۳x = ۰$

حل: باهمان روش گفته شده و به‌صورت زیر، معادله را حل می‌کنیم:

$$۴x^۲ - ۳x = ۰ \;\; ; \;\; x(۴x-۳) = ۰ \Rightarrow x = ۰ \;\text{ یا }$$

$$۴x - ۳ = ۰ \Rightarrow x' = ۰ \;\text{ و }\; x'' = \frac{۳}{۴}$$

مثال: حلّ معادلهٔ $\frac{x+۱}{x-۱} + \frac{x-۲}{x+۲} = -۲$.

حل: ابتدا دامنهٔ معادله را به‌دست آوریم:

$$x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲ \;\text{ و }\; x-۱=۰ \Rightarrow x=۱ \Rightarrow D = IR - \{۱,-۲\}$$

اکنون برای حلّ معادله، مجموع کسرهای سمت چپ تساوی را به‌دست آورده و آن را ساده می‌کنیم:

$$\frac{(x+۱)(x+۲)+(x-۱)(x-۲)}{(x-۱)(x+۲)} = -۲$$

$$\Rightarrow \frac{x^۲+۳x+۲+x^۲-۳x+۲}{x^۲+x-۲} = -۲$$

$$\Rightarrow \frac{۲x^۲+۴}{x^۲+x-۲} = -۲$$

اکنون باطرفین ـ وسطین تناسب بالا، نتیجه می‌شود:

$$۲x^۲+۴ = -۲x^۲-۲x+۴ \Rightarrow ۲x^۲+۴+۲x^۲+۲x-۴ = ۰$$

$$\Rightarrow ۴x^۲+۲x = ۰ \Rightarrow x(۴x+۲) = ۰ \Rightarrow$$

$$x=۰ \;\text{ یا }\; ۴x+۲=۰ \Rightarrow x'=۰ \;\text{ و }\; x'' = -\frac{۲}{۴} = -\frac{۱}{۲}$$

هر دوجواب معادلهٔ $(۰ , -\frac{۱}{۲})$ دردامنهٔ معادله صدق می‌کنندوقابل قبول هستند.

تمرین: هریک از معادله‌های زیر را حل کنید:

۱) $۴x^۲ + ۶x = ۰$

۲) $۵x^۲ - ۲x = ۰$

۳) $۶x^۲ + ۴x = ۰$

۴) $x^۲ - ۳x = ۰$

۵) $x(x+۱) - ۲x(x-۲) = ۰$

۶) $\frac{۴x+۱}{x-۱} = \frac{x+۱}{۲x-۱}$

۷) $\frac{x+۲}{x-۲} - \frac{x}{x+۱} = -۱$

ب) حالت خاصی که در آن $b=۰$ باشد: یعنی معادله به‌صورت خاص $ax^۲ + c = ۰$ درآید.

دراین حالت، برای حلّ معادله مانند معادله‌های درجهٔ اول، می‌توان از این تساوی، $x^۲$ را به‌دست آورد:

$$ax^۲ + c = ۰ \Rightarrow ax^۲ = -c \Rightarrow x^۲ = -\frac{c}{a}$$

و باجذر گرفتن از دو طرف این تساوی، x را به‌دست می‌آوریم:

$$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

و شرط وجود جواب دراین حالت، آن است که $-\frac{c}{a} \geq ۰$ ، یعنی $\frac{c}{a} \leq ۰$ ، لذا باید a و c مختلف‌العلامه باشند (چرا؟)

مثال: حلّ معادلهٔ $۳x^۲ - ۱۲ = ۰$

حل: به‌ترتیبی که گفته شد، می‌نویسیم:

$$۳x^۲ - ۱۲ = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ = ۱۲ \Rightarrow x^۲ = \frac{۱۲}{۳} = ۴ \Rightarrow x = \pm ۲$$

مثال: حلّ معادلهٔ درجهٔ دوم $x(x+۳) + (x-۱)^۲ = x+۵$

حل: باساده کردن دوطرف تساوی و بردن عبارتها به سمت چپ آن، نتیجه می‌شود:

$$x^2+3x+x^2-2x+1-x-5=0$$
$$\Rightarrow 2x^2-4=0 \Rightarrow 2x^2=4 \Rightarrow$$
$$x^2=\frac{4}{2} \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

مثال: حلّ معادلهٔ
$$(x+2)^2-(3-x)(3+x)+6=4x$$
حل: باساده کردن عبارتهای سمت‌چپ و بردن همهٔ عبارتها به‌همان سمت، به‌دست می‌آید:

$$x^2+4x+4-(9-x^2)+6-4x=0$$
$$\Rightarrow x^2+4x+4-9+x^2+6-4x=0$$
$$\Rightarrow 2x^2+1=0 \Rightarrow 2x^2=-1 \Rightarrow x^2=-\frac{1}{2}$$

و چون $x^2\geq 0$ می‌باشد، لذا معادله دارای ریشهٔ حقیقی نمی‌باشد.

تمرین: هریک از معادله‌های زیر را حل کنید:

۱) $3x^2-9=0$

۲) $-4x^2+5=0$

۳) $6x(x+1)-(3x+1)(x+2)+x=0$

۴) $\frac{x+2}{x-2}-\frac{x-1}{x+1}=-6$

۵) $\frac{x+2}{x-2}-\frac{x+2}{x+1}=-3$

۶) $(4x+1)^2-(x+1)^2=6x-4$

ج) حالت خاصی که در آن $a=1$ باشد: یعنی معادله به‌صورت $x^2+bx+c=0$ باشد. دراین حالت، ممکن است به‌کمک اتحاد جملهٔ مشترک و جملهٔ غیرمشترک، عبارت $x^2+bx+c=0$ را به‌حاصلضرب دو پرانتز از درجهٔ اوّل تجزیه نمود و باصفر قرار دادن هریک از این پرانتزها ریشه‌های معادله را به‌دست آورد.

مثال: معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-7x+12=0$ را حل کنید.

حل: باکمی دقت، می‌توان دریافت دوعددی که مجموع آنها ۷- و حاصلضرب آنها۱۲می‌باشد، عددهای ۴- و ۳- می‌باشند و بنابراین، سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم $x^2-7x+12$، به‌صورت $(x-3)(x-4)$ قابل تجزیه می‌باشد، لذا معادلهٔ مزبور، به‌صورت زیرقابل حل است:

$$x^2-7x+12=(x-4)(x-3)=0$$

اکنون حاصلضرب دوعامل $(x-4)(x-3)$ مساوی صفر شده است، لذا یکی از آن‌دو، باید مساوی صفر باشد؛ یعنی $x-3=0$ یا $x-4=0$ و درنتیجه $x=3$ یا $x=4$؛ یعنی معادله، دوریشهٔ حقیقی مساوی ۴،۳ دارد.

مثال: حلّ معادلهٔ درجهٔ‌دوم $x^2+5x+6=0$.

حل: باتجزیهٔ عبارت x^2+5x+6 می‌توان معادلهٔ فوق را به‌صورت زیر حل نمود:

$$x^2+5x+6=0 \Rightarrow (x+2)(x+3)=0 \Rightarrow$$
$$x+2=0 \Rightarrow x=-2 \quad \text{و} \quad x+3=0 \Rightarrow x=-3$$

مثال: ریشه‌های معادلهٔ $\frac{2x+1}{x-1}=1+\frac{8}{x}$ را به‌دست آورید.

حل: دامنهٔ معادله، عبارت‌است از $D=\mathbb{R}-\{0,1\}$، حال پس‌از ساده کردن کسر سمت راست‌تساوی و طرفین ـ وسطین کردن تناسب حاصل، به‌معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$\frac{2x+1}{x-1}=\frac{x+8}{x} \Rightarrow x(2x+1)=(x-1)(x+8)$$
$$\Rightarrow 2x^2+x=x^2+7x-8$$

اکنون بابردن عبارتهای جبری به‌سمت چپ تساوی و صفر قرار دادن آن، به‌یک معادلهٔ درجهٔ‌دوم می‌رسیم و باتجزیهٔ آن به‌حاصلضرب دو پرانتز، ریشه‌های معادلهٔ مزبور را به‌دست می‌آوریم:

$$2x^2+x-x^2-7x+8=0 \Rightarrow x^2-6x+8=0$$
$$\Rightarrow (x-4)(x-2)=0 \Rightarrow$$
$$x-4=0 \;\text{یا}\; x-2=0 \Rightarrow x=4 \;\text{یا}\; x=2$$

هر دو ریشهٔ معادله قابل قبول می‌باشند.

تمرین: معادله‌های زیر را حل کنید :

$$1)\ x^2-5x+4=0$$
$$2)\ x^2-4x+4=0$$
$$3)\ x^2-8x+12=0$$
$$4)\ x^2-9x+21=0$$
$$5)\ x^2+2x-80=0$$
$$6)\ (x+1)^2+(x-1)^2-(x+1)(x-1)=2x$$
$$7)\ 1+\frac{10}{x-4}=x$$

■ **حل معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ درحالت کلی**

روش اول (تبدیل به‌مربع کامل نمودن سه‌جمله‌ای):

مراحل حلّ معادلهٔ درجهٔ دوم کامل را بااین روش، بایک مثال نشان می‌دهیم.

مثال: معادلهٔ $3x^2-4x+1=0$ را حل کنید.

مراحل حلّ معادله بااین روش، به‌شرح زیر می‌باشد :

۱) دوطرف معادله را برضریب x^2 (دراین‌جا ۳) تقسیم می‌کنیم و عدد ثابت را به‌طرف دیگر معادله می‌بریم :

$$3x^2-4x+1=0 \Rightarrow x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}=0 \Rightarrow x^2-\frac{4}{3}x=-\frac{1}{3}$$

۲) نصف ضریب x (دراین‌جا $-\frac{4}{3}$) را به‌دست آورده و به‌توان دو می‌رسانیم :

$$-\frac{4}{3}\div 2=-\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}=-\frac{2}{3} \Rightarrow \left(-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$

۳) عدد حاصل (دراین‌جا $\frac{4}{9}$) را به‌دو طرف معادله اضافه می‌کنیم : $x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}=-\frac{1}{3}+\frac{4}{9}$

۴) سمت چپ معادله، همیشه مربع کامل است. [به‌کمک اتحادهای $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ و $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$] آن را به‌صورت مربع دوجمله‌ای می‌نویسیم و سمت راست معادله را نیز ساده می‌کنیم :

$$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$$

۵) از دوطرف تساوی آخر، جذر می‌گیریم (به شرطی که عدد سمت راست، مثبت یا صفر باشد) و جوابهای معادله را به‌دست می‌آوریم :

$$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{9} \Rightarrow x-\frac{2}{3}=\pm\frac{1}{3} \Rightarrow x=\frac{2}{3}\pm\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x_1=1 \text{ یا } x_2=\frac{1}{3}$$

و به‌این ترتیب، دوریشهٔ حقیقی معادله به‌دست می‌آید. به‌مثالی دیگر توجه کنید.

مثال: ریشه‌های معادلهٔ $2x^2+x-10=0$ را به‌دست آورید.

حل: همان مراحل رابترتیب طی می‌کنیم. درستی عمل را در هر مرحله تحقیق کنید :

$$1)\ x^2+\frac{1}{2}x-5=0 \Rightarrow x^2+\frac{1}{2}x=5$$

(این مرحله را درحلّ مسأله نمی نویسیم، دراین‌جا برای آشنایی خواننده آمده است.)

$$2)\ \frac{1}{2}\div 2=\frac{1}{4} \qquad \left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$$
$$3)\ x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}=5+\frac{1}{16}$$
$$4)\ \left(x+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{81}{16}$$
$$5)\ x+\frac{1}{4}=\pm\frac{9}{4} \Rightarrow x=-\frac{1}{4}\pm\frac{9}{4} \qquad x_1=-\frac{5}{2}\ ,\ x_2=2$$

یعنی ریشه‌های معادله، ۲ و $-\frac{5}{2}$ می‌باشند.

مثال: معادلهٔ $2x^2+x+3=0$ را حل کنید.

حل: می‌نویسیم :

$$x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}=0 \Rightarrow x^2+\frac{1}{2}x=-\frac{3}{2} \Rightarrow$$
$$x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}=\frac{1}{16}-\frac{3}{2} \Rightarrow \left(x+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{-23}{16}<0$$

چون سمت راستِ، عددی منفی است و جذر ندارد، لذا

معادله، ریشهٔ حقیقی ندارد.

تمرین: هریک از معادله‌های زیر را به‌روش گفته شده حل کنید:

۱) $2x^2-x-6=0$

۲) $3x^2-x-2=0$

۳) $5x^2+3x-2=0$

۴) $6x^2-13x+6=0$

■ **روش دوم (دستور b یا دستور Δ):**

برای حلّ معادله از این روش، در واقع باید معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ را در حالت کلی، به روش تبدیل به‌مربع کامل حل نمود. برای این منظور، مراحل پیش‌گفته را بترتیب می‌نویسیم:

$$1)\ ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

$$2)\ \frac{b}{a}\div 2=\frac{b}{a}\times\frac{1}{2}=\frac{b}{2a}\quad ;\quad \left(\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}$$

$$3)\ x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$$

$$4)\ \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$5)\ x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$(b^2-4ac\geq 0)\ \Rightarrow\ x=\frac{-b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow\ x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

نتیجه: درحالتی که b^2-4ac مثبت باشد، این معادله دارای ریشهٔ حقیقی است که از دستور $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ به دست می‌آیند. درحالتی که $b^2-4ac=0$ باشد، دو ریشهٔ معادله باهم مساوی شده و معادله دارای دوریشهٔ مساوی (به‌اصطلاح ریشهٔ مضاعف) به‌صورت $x=\frac{-b}{2a}$ می‌باشد و درحالتی که $b^2-4ac<0$ باشد، معادله ریشهٔ حقیقی ندارد. b^2-4ac را که درحلّ معادله و تعیین تعداد ریشه‌های آن، نقش اساسی دارد، **مبیّن معادله** نامیده و آن را با نماد Δ نمایش می‌دهیم. خلاصهٔ بحث بااین نمادگذاری، به‌صورت زیر می‌باشد:

برای حلّ معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ ابتدا مبیّن معادلهٔ $\Delta=b^2-4ac$ را تشکیل می دهیم و سپس:

معادله، دوریشهٔ حقیقی به‌صورت زیر دارد:

$$\Delta>0 \Rightarrow\quad x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\quad ,\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

معادله دارای دوریشهٔ مضاعف به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\Delta=0 \Rightarrow\ x_1=x_2=\frac{-b}{2a}$$

و اگر $\Delta<0$ باشد، معادله ریشه حقیقی ندارد.

مثال: معادلهٔ $3x^2-5x+2=0$ را به‌روش گفته شده حل کنید:

حل: مبیّن معادله (Δ) را تشکیل می‌دهیم:

$$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times 3\times 2=25-24=1$$

چون $\Delta>0$ است، پس معادله دوریشهٔ حقیقی دارد که از فرمول گفته‌شده، به‌صورت زیر به دست می آیند:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{+5\pm\sqrt{1}}{6}=\frac{5\pm 1}{6}$$

$$x_1=1\quad \text{و}\quad x_2=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

یعنی ریشه‌های معادله، ۱ و $\frac{2}{3}$ هستند.

مثال: ریشه‌های معادلهٔ $3x^2-10x+3=0$ را به‌دست آورید.

حل: به‌کمک همان روش، می‌توان نوشت:

$$\Delta=b^2-4ac=(10)^2-4\times 3\times 3=100-36=64$$

$$\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{10\pm\sqrt{64}}{6}=\frac{10\pm 8}{6}\Rightarrow x_1=\frac{10+8}{6}=3$$

$$x_2=\frac{10-8}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

یعنی ریشه‌های معادله، ۳ و $\frac{1}{3}$ هستند.

مثال: حلّ معادلهٔ $4x^2-4x+1=0$

حل: $\Delta=(-4)^2-4\times4\times1=16-16=0$

چون $\Delta=0$ می‌باشد، پس معادله دارای ریشهٔ مضاعف به‌صورت زیر می‌باشد:

$$x_1=x_2=\frac{-b}{2a}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

یعنی معادله دارای یک ریشهٔ (یا دوریشهٔ برابر) مساوی $\frac{1}{2}$ است.

مثال: حلّ معادلهٔ درجهٔ دوم $3x^2-x+1=0$.

حل: $\Delta=(-1)^2-4\times3\times1=1-12=-11<0$

چون $\Delta<0$ می باشد، پس معادله دارای ریشهٔ حقیقی نمی‌باشد.

مثال: حلّ معادله $\frac{x-2}{x+2}+\frac{x}{x-2}=\frac{8}{x^2-4}$

حل: دامنهٔ معادله، مساوی $D=\mathbb{R}-\{-2,2\}$ می‌باشد. (چرا؟) اکنون بامخرج‌مشترک گیری از سمت چپ معادله، نتیجه می‌شود:

$$\frac{(x-2)^2+x(x+2)}{(x+2)(x-2)}=\frac{8}{x^2-4}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-4x+4+x^2+2x}{x^2-4}=\frac{8}{x^2-4}$$

$$\Rightarrow 2x^2-2x+4=8 \Rightarrow 2x^2-2x-4=0$$

$$\Rightarrow x^2-x-2=0$$

$$\Delta=(-1)^2-4(1)(-2)=1+8=9$$

$$x=\frac{1\pm3}{2} \Rightarrow x_1=\frac{1+3}{2}=\frac{4}{2}=2$$

$$x_2=\frac{1-3}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

جوابهای معادله ۲ و ۱- هستند؛ اما جواب $x=2$ جزء دامنهٔ تعریف معادله نمی‌باشد، لذا تنها جواب قابل قبول معادله $x=-1$ است. اکنون شما نیز درتمرین زیر، هریک از معادله‌های داده شده را حل کنید. توجه داشته باشید که انواع معادله‌های داده شده، متنوّع بوده و حالتهای خاص نیز که پیش از این گفته شد، درنمونه‌های داده شده وجود دارند.

تمرین: ریشه‌های هریک از معادله‌های زیر را به‌دست آورید:

۱) $2x^2-5x+3=0$

۲) $4x^2+x+1=0$

۳) $3x^2-5x-8=0$

۴) $2x^2-7x+6=0$

۵) $6x^2-31x+5=0$

۶) $\frac{4x+1}{x-2}+\frac{x-2}{x+2}=-\frac{11}{2}$

۷) $2x^2+4x-1=0$

۸) $x^2+3x+5=0$

۹) $9x^2-6x+1=0$

۱۰) $\frac{x+2}{x}-\frac{x-1}{x+1}=4$

۱۱) $12x^2-5x=9x^2+7x$

۱۲) $\frac{4}{x^2-10x+25}+\frac{1}{25-x^2}=\frac{1}{x+5}$

۱۳) $\frac{x^2}{a}-\frac{x}{b}=0$

۱۴) $x^2-2ax-3a^2=0$

۱۵) $4x^2-4ax+4a^2=b^2$

۱۶) $\frac{x^2}{6}-\frac{2x}{3}=\frac{3x-10}{4}$

۱۷) $(x+1)^2+(x-1)^2+(x+1)(x-1)=13$

چند مثال دیگر: **مثال:** m را طوری تعیین کنید که معادلهٔ $x^2-2mx+6-m=0$ دارای ریشهٔ مضاعف باشد.

حل: برای آن‌که معادلهٔ بالا دارای ریشهٔ مضاعف (مساوی) باشد، لازم است $\Delta=0$ باشد، بنابراین داریم:

$$\Delta=(2m)^2-4(6-m)=0$$

$$\Rightarrow 4m^2-24+4m=0 \Rightarrow m^2+m-6=0$$

اکنون مقدار m را از حلّ معادلهٔ درجهٔ دوم بالا به‌کمک تجزیهٔ آن به‌حاصلضرب، به‌دست می‌آوریم:

$$(m+3)(m-2)=0 \Rightarrow m+3=0 \Rightarrow m-3$$

یا

$$m-2=0 \;\Rightarrow\; m=2$$

یعنی به‌ازای $m=2$ یا $m=-3$ معادلهٔ فوق دارای ریشهٔ مضاعف خواهد بود.

تمرین: به‌ازای این دومقدار، m معادله را حل کنید و ریشهٔ مضاعف آن را به‌دست آورید.

مثال: اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ باشند، x_1+x_2 و $x_1.x_2$ را برحسب a، b و c به‌دست آورید.

حل: بترتیب می‌نویسیم:

$$ax^2+bx+c=0 \quad \Delta=b^2-4ac$$
$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\ ,\ x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$\Rightarrow x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$
$$\Rightarrow x_1+x_2=-\frac{b}{a}$$
$$x_1.x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}$$
$$=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$
$$\Rightarrow x_1.x_2=\frac{c}{a}$$

یعنی مجموع و حاصلضرب ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ از دستورهای $x_1+x_2=\frac{-b}{a}$ و $x_1x_2=\frac{c}{a}$ به‌دست می‌آیند.

مثلاً درمعادلهٔ درجهٔ دوم $3x^2-x-4=0$ اگر ریشه‌های معادله x_1 و x_2 باشند، داریم:

$$x_1x_2=-\frac{4}{3}\ ,\ x_1+x_2=\frac{1}{3}$$

مثال: ثابت کنید درمعادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$، اگر مجموع ضرایب صفر باشد، $(a+b+c=0)$، آن‌گاه یکی از ریشه‌های مساوی ۱ و دیگری مساوی $\frac{c}{a}$ معادله است.

حل: بافرض $a+b+c=0$ نتیجه می‌شود $b=-(a+c)$ و بااین فرض و از دستور Δ معادله را بترتیب زیر حل می‌کنیم:

$$\Delta=b^2-4ac=(a+c)^2-4ac=a^2+c^2+2ac-4ac$$
$$=a^2+c^2-2ac=(a-c)^2$$

بنابراین داریم:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{a+c\pm\sqrt{(a-c)^2}}{2a}=\frac{a+c\pm(a-c)}{2a}$$
$$\Rightarrow\ x_1=\frac{a+c+a-c}{2a}=\frac{2a}{2a}=1$$
$$x_2=\frac{a+c-a+c}{2a}=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}$$

و این، معادل باحکم مسأله می‌باشد.

از این موضوع، درحلّ سریعتر معادله‌هایی که مجموع ضرایب آنها مساوی صفر است، استفاده می‌کنیم. مثلاً ریشه‌های معادلهٔ $8x^2+11x-19=0$ برابرند با $x_1=1\ ,\ x_2=-\frac{19}{8}$.

تمرین:

۱ـ ثابت کنید درمعادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$، هرگاه $a+c=b$ باشد، آن‌گاه یکی از دوریشه مساوی ۱- و دیگری مساوی $-\frac{c}{a}$ می‌باشد.

۲ـ هرگاه درمعادلهٔ $x^2+2mx+m^2+n=0$ ریشه‌ها بایکدیگر مساوی باشند، ثابت کنید: $n=0$

۳ـ m را طوری به‌دست آورید که ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-5x+m=0$ عکس یکدیگر باشند.

۴ـ اگر یکی از ریشه‌های معادلهٔ: $x^2-(4a+4)x+(3a^2+6a+3)=0$ مساوی ۲ باشد، a، و ریشهٔ دیگر را به‌دست آورید.

۵ـ a را طوری به‌دست آورید که ریشه‌های معادلهٔ $x^2-(3a+1)x+2a^2+2=0$ باهم مساوی باشند.

کاربرد معادله‌ها در حلّ مسائل مختلف

این بحث را باچند مثال توضیح می‌دهیم :

مثال: محیط یک مستطیل ۱۶ سانتیمتر است. ابعاد آن را طوری بیابید که مساحت آن ۱۲ سانتیمتر مربع باشد.

حل: می‌دانیم که مساحت مستطیل، حاصلضرب طول در عرض آن است. اگر طول مستطیل را x فرض کنیم، عرض آن $\frac{12}{x}$ می‌باشد. (چرا؟) و باتوجه به‌اندازهٔ محیط مستطیل، که مساوی دوبرابر مجموع طول‌و عرض آن است، می‌توان نوشت :

$$2(x+\frac{12}{x})=16 \Rightarrow x+\frac{12}{x}=8$$

و از حلّ این معادله بافرض $x\neq 0$ می‌توان طول مستطیل و از آن‌جا عرض آن را به دست آوریم :

$$\frac{x^2+12}{x}=8 \Rightarrow x^2+12=8x$$

$$\Rightarrow x^2-8x+12=0 \Rightarrow (x-6)(x-2)=0$$

$$\Rightarrow x=6 \quad \text{یا} \quad x=2$$

طول مستطیل را مساوی ۶ درنظر بگیریم، عرض آن مساوی ۲ می‌شود.

مثال: سنّ علی دوبرابر سنّ برادرش می‌باشد. ۱۰ سال دیگر سنّ علی ۱/۵ برابر سنّ برادرش می‌شود. علی و برادرش چند سال دارند؟

حل: اگر سنّ برادر علی را x درنظر بگیریم، سنّ علی مساوی $2x$ می‌باشد. اما ۱۰ سال دیگر سنّ علی $2x+10$ و سنّ برادرش $x+10$ است. باتوجه به‌فرض مسأله، برابری زیر مسلّم است :

$$2x+10=1/5(x+10)$$

از حلّ این معادلهٔ درجهٔ اوّل، x به‌دست می‌آید :

$$2x+10=1/5x+15 \Rightarrow 2x-1/5x=15-10$$

$$\Rightarrow 0/5x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{0/5} \Rightarrow x=10$$

یعنی برادر علی ۱۰ سال و علی ۲۰ سال دارد. ۱۰ سال دیگر علی ۳۰ساله و برادرش ۲۰ سال خواهد داشت و سنّ علی ۱/۵ برابر سنّ برادرش خواهد بود.

مثال: دریک میهمانی، عده‌ای حاضر بودند و همگی باهم دست دادند و معلوم شد جمعاً ۵۵بار دستها فشرده شده است، چند نفر دراین میهمانی حاضر بوده‌اند؟

حل: اگر تعداد افراد حاضر دراین میهمانی را مساوی x بگیریم، بدیهی است که، چون هرکس باسایر افراد دست داده است، پس هر کس با $x-1$ نفر دست داده است، لذا مجموع تعداد دست دادنها برابر است با $x(x-1)$، اما دراین شمارش، چون هربار دست دادنها، برای هر دو نفری که باهم دست داده‌اند، یک‌بار شمرده شده است، لذا تعداد فشرده شدن دستهادوبرابر مقدارواقعی آن است. بنابراین، تعداد فشرده شدن دستها دقیقاً برابر است با $\frac{x(x-1)}{2}$ و باتوجه به‌فرض مسأله، می‌توان نوشت : $\frac{x(x-1)}{2}=55$ و از حلّ این معادلهٔ درجهٔ دوم، x به دست می‌آید :

$$\frac{x^2-x}{2}=55 \Rightarrow x^2-x=110 \Rightarrow x^2-x-110=0$$

$$\Rightarrow (x-11)(x+10)=0 \Rightarrow x_1=11 , x_2=-10$$

روشن است که جواب $x_2=-10$، قابل قبول نمی‌باشد و تنها پاسخ صحیح $x_1=11$ است و یعنی ۱۱ نفر دراین میهمانی حاضر بوده‌اند.

مثال: محیط یک مثلث قائم‌الزاویه برابر ۲۴ و اندازهٔ وتر آن ۱۰ می‌باشد. اندازه‌های دو ضلع دیگر مثلث را به‌دست آورید.

حل: اگر طول یکی از اضلاع زاویهٔ قائمهٔ مثلث را x بگیریم، باتوجه به‌اندازهٔ محیط آن و طول وتر، طول ضلع دیگر زاویهٔ قائمه، مساوی $14-x$ می‌باشد (چرا؟). حال به‌کمک قضیهٔ فیثاغورث درمثلثهای قائم‌الزاویه، می‌توان نوشت :

$$10^2=x^2+(14-x)^2$$

و از حلّ این معادلهٔ درجهٔ دوم بترتیب زیر، می‌توان x را به‌دست آورد :

$$100=x^2+196+x^2-28x \Rightarrow 2x^2-28x+96=0$$
$$\Rightarrow x^2-14x+48=0$$
$$\Rightarrow (x-6)(x-8)=0 \Rightarrow x-6=0 \text{ یا } x-8=0$$
$$\Rightarrow x=6 \text{ یا } x=8$$

و از آن‌جا طول یکی از اضلاع زاویهٔ قائمه مساوی ۶ و دیگری مساوی ۸ می‌باشد. (اگر $x=8$ درنظر گرفته شود، $14-x=6$ و اگر $x=6$ باشد، $14-x=8$ می‌شود.)

مثال: پنج عدد صحیح متوالی به‌دست آورید که مجموع مربعات سه‌تای اوّل، برابر مجموع مربعات دوتای آخر باشد.

حل: اگر این پنج عدد متوالی را $n+2$ و $n+1$ و n و $n-1$ و $n-2$ بنامیم، باتوجه به‌فرض مسأله، خواهیم داشت:

$$(n-2)^2+(n-1)^2+n^2=(n+1)^2+(n+2)^2$$

باساده کردن این عبارتها و بردن همهٔ عبارتها به‌سمت چپ تساوی، به‌یک معادلهٔ درجه دوم می‌رسیم:

$$n^2-4n+4+n^2-2n+1+n^2$$
$$=n^2+2n+1+n^2+4n+4$$
$$3n^2-6n+5=2n^2+6n+5$$
$$\Rightarrow 3n^2-2n^2-6n-6n+5-5=0$$
$$n^2-12n=0 \Rightarrow n(n-12)=0 \Rightarrow n=0 \text{ یا } n=12$$

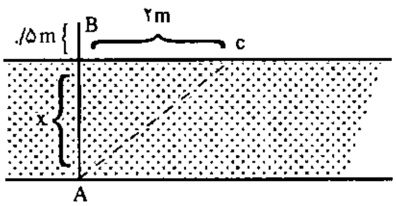
اگر $n=0$ درنظر گرفته شود، این پنج عدد به‌صورت: ۲ و ۱ و ۰ و ۱- و ۲- و اگر $n=12$ در نظر گرفته شود، این پنج عدد به‌صورت: ۱۴ و ۱۳ و ۱۲ و ۱۱و ۱۰ به دست می‌آیند، که هر دو سری اعداد، باشرط گفته شده، وفق می‌کنند.

آخرین مثال این بخش را از یک مسألهٔ تاریخی هندوستان برگرفته‌ایم:

گلی که دریک دریاچه روییده است، به‌اندازهٔ ۰/۵ متر از آب بیرون آمده است. دراثر وزش باد، از ریشه خم شده و درمحلّی که درفاصلهٔ ۲ متری محل اوّل آن است، درآب فرو می‌رود. عمق دریاچه چه‌قدر است؟

حل: اگر به‌شکل دقت کنیم و عمق دریاچه را x فرض کنیم، ارتفاع گل $x+0/5$ می‌باشد.

اکنون بانوشتن قضیهٔ فیثاغورث درمثلث $\hat{A}BC$، به‌معادله‌ای می‌رسیم که باحلّ آن، x که همان عمق دریاچه است، به‌دست می‌آید:



$$AC^2=AB^2+BC^2 \Rightarrow (x+0/5)^2=x^2+4$$
$$\Rightarrow x^2+0/25+x=x^2+4 \Rightarrow x^2+x-x^2=4-0/25$$
$$\Rightarrow x=3/75m$$

یعنی عمق دریاچه ۳/۷۵ بوده و ارتفاع گل ۴/۲۵m می‌باشد.

تمرین:

۱ـ دو عدد طبیعی متوالی به‌دست آورید که مجموع مربعات آنها مساوی ۱۱۳ باشد.

۲ ـ طولهای اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه، سه عدد زوج متوالی‌اند، آنها را بیابید.

۳ ـ مجموع مربعات سه عدد فرد متوالی، ۳۷۱ است، آن سه عدد را بیابید.

۴ ـ عددی را پیدا کنید که مجموع آن، بامعکوس خودش، مساوی $\frac{34}{15}$ باشد.

۵ ـ عددی را به‌دست آورید که حاصلضرب آن در ۱۴، به‌اندازهٔ ۸۴ واحد از حاصلضرب آن در ۱۷ کمتر باشد.

■

جشن
آغاز دهمین سال
انتشار مجلهٔ ریاضی برهان

ساعت ۱۰:۳۰ دقیقهٔ صبح سه‌شنبه ۵ مهرماه ۱۳۷۹، به مناسبت آغاز دهمین سال انتشار مجلهٔ ریاضی برهان، جلسه‌ای با شرکت اعضای هیأت تحریریهٔ مجله و آقای «فریدون» صاحب امتیاز مجله و ریاست محترم انتشارات مدرسه و آقای «برادری» معاون فرهنگی محترم انتشارات مدرسه، منعقد گردید. اعضای حاضر هیأت تحریریه، عبارت بودند از :

آقایان: پرویز شهریاری، رستمی، قندهاری، امیری، صدر، هاشمی، شرقی و یاسی‌پور.

جلسه با تلاوت آیاتی چند از کلام‌الله مجید آغاز شد و سپس جناب استاد شهریاری به نمایندگی از اعضای هیأت تحریریه، از زحمات سردبیر و مدیرداخلی مجله، آقایان امیری و صدر تشکّر و خاطرنشان کردند که اولاً، در صورت امکان، فاصلهٔ زمانی بین دو شمارهٔ مجله کمتر شود و ثانیاً تاریخ نشر آن دقیق‌تر باشد. ایشان همچنین اشاره‌ای داشتند به محاسن کار گروهی و بقا و استمرار مجله با توجه به کار دسته‌جمعی.

در ادامهٔ جلسه، آقای یاسی‌پور با اشاره به آیهٔ کریمهٔ قرآن : فارجع البصر،...، ثمّ ارجع البصر برای رسیدن به اهداف مجله و بهبود هرچه بیشتر کیفیت آن، رجوع به کارهای گذشته و برنامه‌ریزی برای مقاله‌های آینده را خاطرنشان کردند. در ضمن، اشاره‌ای داشتند به وجود صمیمیت و همدلی اعضای هیأت تحریریه و این نکته را یکی از دلایل بقای مجله تا این تاریخ دانستند. ایشان با اشاره به بعضی از دست‌اندرکاران سابق مجله، از جمله آقای «چینی‌فروشان» رئیس اسبق، آقای «ابراهیمی» رئیس سابق انتشارات مدرسه و آقای «سیّد موسوی» عضو سابق هیأت تحریریه، یادشان را گرامی داشتند و از زحماتشان در پیشبرد مجله قدردانی کردند.

آقای رستمی بحثی داشتند دربارهٔ اطلاع‌رسانی مجله و معرفی وسیعتر آن. این نکته را آقای موسوی نیز مطرح کردند و نکاتی را دربارهٔ بهبود آن متذکر شدند. در ضمن، آقای رستمی تشکیل کتابخانهٔ مجهز ریاضیات و شرکت در کنفرانسهای ریاضی ایران را خواستار شدند.

آقای شرقی، عضو دیگر هیأت تحریریه، دربارهٔ معرفی رشته‌های گوناگون ریاضی و کاربردهای آن که یکی از بخشهای دورهٔ جدید مجله است، تذکراتی دادند.

جناب آقای قندهاری نیز با تشکّر از دست‌اندرکاران انتشار مجله، تشکّری نیز به مناسبت چاپ کتاب **فرهنگ ریاضیات** داشتند و آن را یکی از کارهای ارزندهٔ جنبی انتشار مجله قلمداد کردند.

آقای صدر نیز تشکّری داشتند از آقایان امیری و برادری، و تذکری دربارهٔ گردهمایی دست‌اندرکاران نشریات ریاضی دادند و وجود گردهماییهایی از این قبیل را لازم شمردند.

سپس نوبت سخن به آقای امیری، سردبیر محترم مجله

رسید که به ترتیب، به موارد زیر اشاره کردند :

۱ـ نشر مجله پس از این تاریخ، در هر دو ماه یک بار انجام می شود و تاریخ انتشار آن نیز منظّم خواهد شد.

۲ـ کارهای جنبی مجله از قبیل نشر فرهنگ ریاضیات و کتابهای کوچک ریاضی، که در این مورد از آقایان دکتر پاشا و عابدی نیز سپاسگزاری کردند.

۳ـ توزیع مجله با سیستم توزیع رشد ریاضی انجام می شود که بهبود قابل توجهی در این وضع به وجود خواهد آورد.

۴ـ در مورد تبلیغات برای معرفی مجله، کارهایی انجام شده است؛ از قبیل تهیهٔ پوستر، بروشور و یک دوره مسابقهٔ تلویزیونی ریاضی به نام برهان.

۵ـ کارهای در دست انجام از قبیل تهیه و تألیف تاریخ ریاضی.

پس از سخنان آقای امیری و پذیرایی مختصری از دوستان، جناب آقای برادری، معاونت محترم فرهنگی، رشتهٔ سخن را به دست گرفتند و سخنانی مبسوط ایراد کردند که به طور خلاصه چنین بود :

اولاً، جلسهٔ سالگرد مجلهٔ برهان مصادف است با سالگرد شکست حصر آبادان، شکست حصری که اگر فرمان امام راحل(ره) و فداکاری رزمندگان اسلام نبود، انجام نمی گرفت و امروز ما امکان نشر این مجله و نیز دیگر فعالیتهای فرهنگی و شاید تمام فعالیتها را نداشتیم و به این ترتیب، ضمن سپاس از خالق، به خاطر تقریباً یک دهه انتشار مجلهٔ برهان، از دست‌اندرکاران آن تشکّر کردند.

ایشان ضمن سخنان خود، اشاره‌ای داشتند به یکی از صفات حضرت احدیت و گفتند : خداوند متعال مؤلّف القلوب است و هم او است که جمع صمیمی و یکدل مجلهٔ برهان را به وجود آورده و از حضرت باریتعالی درخواست کردند که جشن چهل سالگی برهان نیز به همین سبک و سیاق برگزار شود.

آن‌گاه به تداوم کار اشاره کردند و برای تداوم نشر مجله، شناخت آفتهای کار را از واجبات به شمار آوردند. به اهمیت استمرار مجله اشاره داشتند و آن را منوط به تازگی و طراوت مقاله‌ها و روزآمد بودن آنها دانستند. موارد زیر، از جمله موارد موردنظر ایشان در بهبود مجله بود :

۱ـ تشکیل سیستمی برای نقد دوره ای مجله توسط جمیع صاحبنظران.

۲ـ مشخص کردن اهداف بلندمدت و کوتاه مدت مجله.

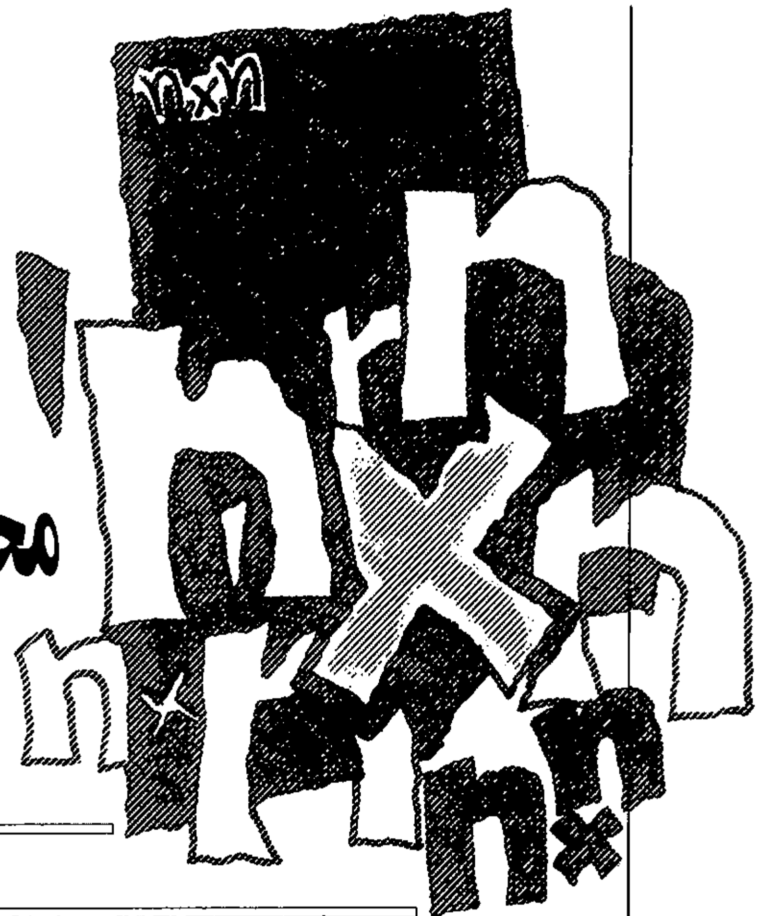
۳ـ توازن مطالب علمی و مطالب کمک آموزشی مجله.

۴ـ توجه به هدف اصلی مجله که آشنا کردن مخاطب با علم ریاضی و کاربردهای آن است.

۵ـ نشر و توزیع مرتّب و به موقع مجله.

پس از سخنان مبسوط آقای برادری، جناب آقای فریدون، رئیس محترم انتشارات مدرسه، طی سخنان کوتاهی، از هیأت تحریریهٔ مجله تشکر کردند و گروه ریاضی را یکی از بهترین گروه‌های انتشارات مدرسه دانستند، و به خصوص تأکید بسیاری بر این مطلب داشتند که گروه ریاضی، طرحهای زیربنایی خود را ارائه دهد تا انتشارات مدرسه در تهیه و نشر آنها اقدام لازم را به عمل آورد.

جلسه همزمان با اذان ظهر پایان گرفت و دوستان هیأت تحریریه، با دلی گرمتر و عزمی راسختر، برای خدمت به خلق، به عبادت خالق شتافتند.



روش جدید و سریع برای محاسبهٔ دترمینانهای n×n

(برای دانش‌آموزان دورهٔ پیش دانشگاهی)

سید محمدرضا هاشمی موسوی

برای نشان دادن روش جدید محاسبه دترمینان، کافی است که به محاسبهٔ چند دترمینان در حالت کلی و عددی بپردازیم. بنابراین، دترمینان مرتبهٔ سوم و چهارم را در حالت کلی و عددی محاسبه می‌کنیم.

۱) محاسبهٔ دترمینان مرتبهٔ سوم

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

روش محاسبه: با توجه به قوانین دترمینانها همواره می‌توان فرض کرد که عنصر میانی ستون اوّل، یعنی a_2 مخالف صفر است ($a_2 \neq 0$). بنابراین فرض Δ_3 را به دترمینان مرتبه دوم زنجیره‌ای تحویل می‌دهیم. روش عمل به صورت زیر است.

روش عمل: ابتدا سطر دوم را بار دیگر می‌نویسیم. مرحلهٔ بعد، ستون اوّل حاصله را نیز یک مرتبهٔ دیگر میان ستون دوم و سوم قرار می‌دهیم. سپس عناصر به دست آمده را به دسته‌های چهارتایی تقسیم می‌کنیم و هر یک از دسته‌های چهارتایی را یک دترمینان ۲ × ۲ در نظر می‌گیریم، که در این صورت، یک دترمینان ۲ × ۲ داریم که هریک از عناصرش، خود یک دترمینان ۲ × ۲ است. در آخر، برای محاسبهٔ Δ_3 کافی است مقدار حاصله را بر a_2 تقسیم کنیم.

مراحل عمل: سطر دوم را یک بار دیگر نوشته و ستون اوّل حاصله را نیز بار دیگر میان ستون دوم و سوم صداده‌ایم. سپس عناصر به دست آمده را به دسته‌های چهارتایی افراز کرده‌ایم:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix};$$ مرحلهٔ (۱)

$$\text{مرحلهٔ (۲)}\quad \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

هریک از دسته‌های چهارتایی، یک دترمینان 2×2 تشکیل می‌دهند. سپس از محاسبهٔ هریک از دترمینانهای 2×2 و محاسبهٔ دترمینان کلی و تقسیم عدد حاصل بر a_2، مقدار Δ_3 محاسبه می‌شود :

$$\text{مرحلهٔ(۳)}\quad \Delta_3 = \frac{1}{a_2} \begin{vmatrix} \underbrace{a_1b_2 - a_2b_1}_{A_1} & \underbrace{a_1c_2 - a_2c_1}_{B_1} \\ \underbrace{a_2b_3 - a_3b_2}_{A_2} & \underbrace{a_2c_3 - a_3c_2}_{B_2} \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{a_2}(A_1B_2 - A_2B_1) \quad (a_2 \neq 0)$$

بنابراین Δ_3 چنین است :

$$\Delta_3 = \frac{1}{a_2}[(a_1b_2 - a_2b_1)(a_2c_3 - a_3c_2) - (a_2b_3 - a_3b_2) \times (a_1c_2 - a_2c_1)]$$

$$\Delta_3 = \frac{1}{a_2}[a_1a_2b_2c_3 - \cancel{a_1a_3b_2c_2} - a_2^2b_1c_3 + a_2a_3b_1c_2 - a_1a_2b_3c_2 + a_2^2b_3c_1 + \cancel{a_3a_1b_2c_2} - a_2a_3b_2c_1]$$

پس از اختصار لازم :

$$\Delta_3 = a_1b_2c_3 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1$$

مثال ۱ : دترمینان زیر را محاسبه کنید :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

محاسبه به روش دترمینان زنجیره‌ای مرتبهٔ دوم :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix};$$

۱) سطر دوم را بار دیگر نوشته‌ایم

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -3 \end{vmatrix};$$

۲) ستون اوّل حاصله را بار دیگر نوشته‌ایم

$$\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} \end{vmatrix};$$

۳) به دترمینانهای مرتبهٔ دوم افراز کرده‌ایم

$$\begin{vmatrix} -8 & 5 \\ 1 & -7 \end{vmatrix};$$

۴) دترمینان زنجیره‌ای مرتبهٔ دوم را محاسبه می‌کنیم

$$\Delta_3 = \frac{51}{3};$$

۵) حاصل دترمینان زنجیره‌ای مرتبهٔ دوم را تقسیم بر عنصر میانی ستون اوّل دترمینان می‌کنیم

$$\Delta_3 = 17$$

۶) مقدار محاسبه شده Δ_3

ساده شدهٔ روش عمل دترمینان زنجیره‌ای

حال در این جا روش دترمینان زنجیره‌ای مرتبهٔ دوم را به صورتی مختصر و ساده‌تر ارائه می‌دهیم.

ابتدا ستون اوّل را جدا می‌کنیم و عملیات روی سطرهای متوالی را به شکل زیر انجام می‌دهیم :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(با توجه به قوانین دترمینانها، فرض شده است که $a_2 \neq 0$)

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \underbrace{a_1b_2 - a_2b_1}_{A_1} & \underbrace{a_1c_2 - a_2c_1}_{A_2} \\ \underbrace{a_2b_3 - a_3b_2}_{B_1} & \underbrace{a_2c_3 - a_3c_2}_{B_2} \end{vmatrix} ;$$

$$\Delta_2 = A_1B_2 - A_2B_1 \ ; \ \boxed{\Delta_3 = \frac{\Delta_2}{a_2}} \ (a_2 \neq 0)$$

در این‌جا مثال ۱ را با روش ساده شده دترمینان زنجیره‌ای مرتبهٔ دوم محاسبه می‌کنیم.

ابتدا ستون اوّل را جدا می‌کنیم و عملیات روی سطرها را انجام می‌دهیم و سپس Δ_2 را محاسبه می‌کنیم.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -8 & 5 \\ 1 & -7 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = 51 \qquad \boxed{\Delta_3 = \frac{51}{3} = 17}$$

۲) محاسبهٔ دترمینان مرتبهٔ چهارم به روش افراز (دترمینان مرتبهٔ دوم زنجیره‌ای) :

با روشی مشابه، ابتدا Δ_4 را به Δ_3 تحویل داده و سپس Δ_3 را مانند قبل به دترمینان مرتبهٔ دوم زنجیره‌ای تحویل می‌دهیم.

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

برای افراز Δ_4 به دترمینانهای مرتبهٔ دوم، کافی است سطر دوم و سوم را بار دیگر نوشته و ستون اوّل حاصله را یک در میان به طور مکرّر بنویسیم و سپس افراز را انجام دهیم. در این جا نیز با توجه به قوانین دترمینانها، a_2 و a_3 را مخالف صفر فرض می‌کنیم (مثلاً با تعویض دو سطر یا دو ستون). بنابراین همواره می‌توان فرض کرد که $a_3 \neq 0$ و a_2، سپس با این فرض، Δ_4 را افراز می‌کنیم :

$$\Delta_4 = \frac{1}{a_2a_3} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_2 & d_2 \\ a_3 & d_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_3 & c_3 \\ a_4 & c_4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_3 & d_3 \\ a_4 & d_4 \end{vmatrix} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{a_2a_3} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

* با توجه به قوانین دترمینانها می‌توان فرض کرد که $A_2 \neq 0$

و در نتیجه :

$$\Delta_4 = \frac{1}{a_2 a_3 A_2}\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} A_2 & C_2 \\ A_3 & C_3 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{a_2 a_3 A_2}\begin{vmatrix} A_4 & B_4 \\ A_5 & B_5 \end{vmatrix} = \frac{\overbrace{A_4 B_5 - A_5 B_4}^{\Delta}}{a_2 a_3 A_2}$$

$$\boxed{\Delta_4 = \frac{\Delta}{a_2 a_3 A_2}}$$

(فرض: a_2 و a_3 و $A_2 \neq 0$)

اکنون روش ساده شدهٔ دترمینان زنجیره‌ای مرتبهٔ دوم را ارائه می‌دهیم:

ابتدا ستون اوّل را جدا می‌کنیم و سپس عملیات روی سطرها را به شکل زیر انجام می‌دهیم. فرض شده است:

A_2 و a_2 و $a_3 \neq 0$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \underbrace{a_1 b_2 - a_2 b_1}_{A_1} & \underbrace{a_1 c_2 - a_2 c_1}_{B_1} & \underbrace{a_1 d_2 - a_2 d_1}_{C_1} \\ \underbrace{a_2 b_3 - a_3 b_2}_{A_2} & \underbrace{a_2 c_3 - a_3 c_2}_{B_2} & \underbrace{a_2 d_3 - a_3 d_2}_{C_2} \\ \underbrace{a_3 b_4 - a_4 b_3}_{A_3} & \underbrace{a_3 c_4 - a_4 c_3}_{B_3} & \underbrace{a_3 d_4 - a_4 d_3}_{C_3} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \underbrace{A_1 B_2 - A_2 B_1}_{\alpha_1} & \underbrace{A_1 C_2 - A_2 C_1}_{\beta_1} \\ \underbrace{A_2 B_3 - A_3 B_2}_{\alpha_1} & \underbrace{A_2 C_3 - A_3 C_2}_{\beta_2} \end{vmatrix} =$$

$$\overbrace{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1}^{\Delta_2} \Rightarrow \Delta_4 = \frac{\Delta_2}{a_2 a_3 A_2}$$

(Δ_4: حاصل دترمینان)

* این توضیح لازم است که برای محاسبهٔ دترمینان مرتبهٔ nام وقتی $n \geq 5$، نیز از روش ساده شده دترمینان زنجیره‌ای مرتبهٔ دوم استفاده می‌شود؛ زیرا هر قدر مرتبهٔ دترمینان بالاتر رود، نیاز ما به روشی با سرعت بالا بیشتر می‌شود. برای محاسبهٔ Δ_n باید توجه داشت که عناصر میانی ستون اوّل هر مرحله، یعنی Δ_{n-1} و Δ_{n-2} و Δ_{n-3} و... باید مخالف صفر باشند. به عنوان مثال، برای محاسبهٔ Δ_5 باید داشته باشیم: $\alpha_2 \neq 0$ و A_3 و A_2 و a_4 و a_3 و a_2؛ زیرا در مرحلهٔ (۱) Δ_5 باید داشته باشیم: $a_4 \neq 0$ و a_3 و a_2، در مرحلهٔ (۲) Δ_4 باید داشته باشیم: $A_3 \neq 0$ و A_2 و در مرحلهٔ (۳) Δ_3 باید داشته باشیم: $\alpha_2 \neq 0$. واضح است که با توجه به قوانین دترمینانها برای هر مرحله، این فرض مسلّم است و به عام بودن مسأله هیچ خللی وارد نمی‌کند.

مثال ۲: دترمینان مرتبهٔ چهارم زیر را به روش دترمینان زنجیره‌ای مرتبهٔ دوم محاسبه کنید.

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

محاسبه به روش دترمینان زنجیره‌ای مرتبهٔ دوم:

$$\Delta_4=\frac{1}{(-1)(3)}\left|\begin{matrix}\begin{vmatrix}2&-3\\3&-2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&1\\3&-3\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&-1\\3&6\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}3&-2\\-1&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}3&-3\\-1&2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}3&6\\-1&-4\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}-1&1\\1&4\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}-1&2\\1&-1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}-1&-4\\1&1\end{vmatrix}\end{matrix}\right|$$

$$\frac{1}{-3}\begin{vmatrix}5&-9&15\\1&3&-6\\-5&-1&3\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{(-3)(1)}\left|\begin{matrix}\begin{vmatrix}5&-9\\1&3\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}5&15\\1&-6\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1&3\\-5&-1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&-6\\-5&3\end{vmatrix}\end{matrix}\right|$$

$$=-\frac{1}{3}\begin{vmatrix}24&-45\\14&-27\end{vmatrix}$$

$$=-\frac{1}{3}\left[(24)(-27)-(-45)(14)\right];$$

$$\Delta_4=-\frac{1}{3}(-18)=6\,;\ \boxed{\Delta_4=6}$$

در این‌جا مثال ۲ را نیز با روش ساده شدهٔ دترمینان زنجیره‌ای مرتبهٔ دوم محاسبه می‌کنیم.

برای این منظور، ابتدا ستون اوّل را جدا می‌کنیم و عملیات روی سطرها را به شکل زیر انجام می‌دهیم (مشابه دترمینان مرتبهٔ سوّم):

$$\Delta_4=\left|\begin{array}{c|ccc}2&-3&1&-1\\3&-2&-3&6\\-1&1&2&-4\\1&4&-1&1\end{array}\right|$$

$$\Delta_3=\left|\begin{array}{c|cc}5&-9&15\\1&3&-6\\-5&-1&3\end{array}\right|\ ;\ \Delta_2=\begin{vmatrix}24&-45\\14&-27\end{vmatrix}\ ;\ \Delta_2=-18$$

$$\Delta_4=\frac{\Delta_2}{(3)(-1)(1)}=\frac{-18}{(3)(-1)(1)}=6\ ;\ \boxed{\Delta_4=6}$$

مثال ۳: دترمینان مرتبهٔ پنجم زیر را محاسبه کنید.

حل: عملیات روی سطرها را انجام می‌دهیم و سپس دترمینانهای Δ_4، Δ_3 و Δ_2 را به دست می‌آوریم.

$$\Delta_5=\left|\begin{array}{c|cccc}1&-2&1&-1&-2\\2&-1&-1&1&-3\\1&-1&1&-2&1\\-1&2&1&-1&3\\1&-1&2&1&-1\end{array}\right|$$

$$\Delta_4=\left|\begin{array}{c|ccc}3&-3&3&1\\-1&3&-5&5\\1&2&-3&4\\-1&-3&0&-2\end{array}\right|$$

$$\Delta_3=\left|\begin{array}{c|cc}6&-12&16\\-5&8&-9\\-1&-3&2\end{array}\right|$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}-12&26\\23&-19\end{vmatrix}$$

حاصل دترمینان چنین خواهد شد:

$$\Delta_5=\frac{\Delta_2}{(2)(1)(-1)(-1)(1)(-5)}=\frac{-370}{-10}=37\ ;$$

$$\boxed{\Delta_5=37}$$

همراه با درسهای ریاضیات

پرویز شهریاری

گالیله می‌گفت : «ریاضیات، زبان طبیعت است» ؛ یعنی دانشمند طبیعت‌شناس (اخترشناس، فیزیکدان، زیست‌شناس، شیمیدان، ژن‌شناس و...) بدون ریاضیات نمی‌تواند حتی یک گام به‌جلو بردارد. ریاضیات یار وفادار صنعت است و درپشت این چرخها و دنده‌ها، دستورها و بستگیهای ریاضیات پنهان است. از روزی که دربیش‌از ۳۵۰ سال پیش نخستین ماشین‌حساب مکانیکی را ساخت، تا امروز که با رایانه‌های پرقدرت، فاکس و اینترنت سروکار داریم، همه در پرتو ریاضیات و از برکت آن پدید آمده‌اند. ریاضیات دردانشهای دیگری همچون اقتصاد، جامعه‌شناسی و روان‌شناسی هم نفوذ کرده است و امروز یکی از ابزارهای شناخت به‌شمار می‌رود.... ریاضیات، همچنین به‌ذهن نظم می‌بخشد و کسی که باریاضیات کار می‌کند، به‌نظم عادت می‌کند و تااندازه‌ای درزندگی و برنامه‌ریزی برای زندگی عادی خود، و هم برای کارآیندهٔ خویش، موّفقتر است... ولی از همهٔ اینها جالبتر، این است که ریاضیات زیباست و از این‌جهت، باهنر قابل مقایسه است. می‌گویند دانش بابرون سروکار دارد و هنر بادرون آدمی ؛ ولی ریاضیات باهر دوجنبه کار دارد و از یک‌طرف و از آن جا که«زبان‌طبیعت است»، بیرون را می‌شکافد و چون باذهن آدمی سروکار دارد، درون را می‌کاود. می‌گویند دانش کارش خرد کردن است، هر پدیده‌ای را می‌شکند، درجزئیات وارد می‌شود و به‌ژرفا می‌رود، و هنر همه‌چیز را درمجموع خود می‌بیند. اگر دانش، جامعه و سپس انسان را آن‌قدر خرد می‌کند تاسرانجام به‌سلول برسد، هنر، تمامی انسانها و تمامی جامعه را یکی می‌یابند و درمجموع، دربارهٔ آن داوری می‌کند ؛ ولی ریاضیات از طرفی راهنمای دانش درشناسایی اجزاست و ازطرفی، مددکار هنر درشناخت «مجموعه»ی چیزها.

اما همهٔ اینها به‌شرطی است که همراه بادرسهای ریاضی خود، به‌تاریخ و فلسفه آن و به کاربردهای آن توجه داشته باشیم و این بجز آن است که به‌درس ریاضی همچون درسی که به‌حافظه مربوط می‌شود، نگاه نکنیم. ریاضیات را باید درمجموع خود درک کرد ؛ نه به‌صورت نکته‌ها و اشاره‌ها. زمانی‌که درس می‌خوانید، باید به عمق مطالب توجه داشته باشید و به‌طور دائم از خود بپرسید : این بخش درس از کجا آمده؟ چرا این موضوع مطرح شده است؟ آیا تصادفی به‌ذهن دانشمندی آمده است یا روند طبیعی پیشرفت، آن را رشد داده است؟ هیچ‌چیز درجهان و به‌ویژه در دانش، تصادفی نیست ؛ ولی ما باید از علتها آگاه باشیم. بیش‌از چهارصد سال نیست که نهادها و نشانه‌های ریاضی پدید آمده‌اند ؛ اما چه عامل یا عاملهایی موجب پدید آمدن آنها شده است؟ پیش‌از پیدایش نمادها، ریاضیدانان از چه وسیله‌ای برای بیان اندیشه‌های خود استفاده می‌کردند و چرا؟ همین عمل ضرب را که به‌راحتی انجام می‌دهیم و حاصلضرب عددهای چندرقمی را به‌دست می‌آوریم، مدیون ده انگشت دست هستیم. تازمانی که بشر نتوانسته بود نمادهایی برای ده عدد نخستین بیابد و تازمانی که برای عددصفر، علامتی قرار نداده بود، کار عمل‌ضرب بسیار دشوار بود. دریونان‌باستان، عددها را باالفبای یونانی نشان

می‌دادند و درنتیجه، عملهای حسابی بسیار دشوار بود. به‌همین دلیل، یا یکی از دلیلها ، آن است که یونانیها، بیشتر استدلالهای خود را به‌زبان هندسه می‌نوشتند؛ چون عددنویسی نداشتند و عددنویسی بابلی- میخی هم از بین رفته بود.

خیال داریم دراین‌جا، تنها به‌یک‌جنبه از موضوعی که همراه باکتابهای درسی لازم است، بپردازیم و آن، کوشش و کششی است که انسان درطول موجودیت خود، دراین چندهزار سالی که از موجودیت انسان اندیشمند و ابزارمند می‌گذرد، درزمینهٔ ریاضیات انجام داده است.

ازآن زمانی‌که انسان دوران خوشبختی نخستین خود را در طول هزاران سال می‌گذراند، تنها پنج یا شش‌هزارسال می‌گذرد. درآن دوران کودکی انسان نخستین، زندگی بسیار ساده بود، همه برای زندگی کار می‌کردند و از دسترنج همگان، همهٔ قبیله استفاده می‌کرد. اقتصاد برپایهٔ شکارو درختان جنگلی قرار داشت. درغارها و کنار رودخانه‌ها جا گرفته بودند. هیچ‌کسی دیگری را نمی‌آزارد و محصول شکار یا میوه‌های جنگلی که یک‌نفر به‌دست می‌آورد، برای همه بود. هر کسی وظیفه‌ای داشت و زندگی به‌سامان و راحت می‌گذشت. دریکی از غارهای بهشهر، استخوانی پیدا شده که مربوط به تقریباً هجده‌هزار سال قبل است. روشی این استخوان، پاره‌خطهای راست موازی هم کنده شده است و روشن است که نوعی حساب اولیه برای قبیله بوده است. انسان از همان آغاز، درتلاش برای پیشرفت خود بوده است؛ ولی این پیشرفت درابتدا بسیار کند بود. سده‌های متوالی می‌گذشت و انسان همچنان درشکار و استفاده از جنگل به‌سر می‌برد تا این‌که یاد گرفت از کاشت برخی گیاهان استفاده کند و... کشاورزی آغاز شد. کشاورزی نیاز به‌شناختن زمان دارد تا زمان کشت‌وبرداشت روشن باشد. انسان که پیش‌از آن، از حرکت ماهو ستارگان برای یافتن راه‌خود سود می‌جست، دیگر نمی‌توانست به‌آن بسنده کند و... درطول سده‌ها، توانست روزشمار و گاه‌نامهٔ خورشیدی را سامان دهد. ایرانیان از نزدیک به‌پنج‌هزار سال پیش گاه‌شماری خورشیدی داشته‌اند و روزوماه و سال را باآن می‌سنجیده‌اند؛ بدون این که بدانند زمین به‌دور خورشید می‌چرخد.

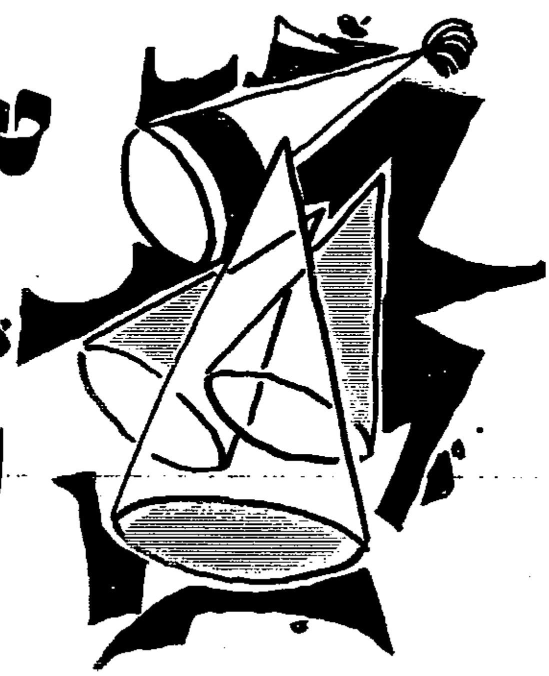
گرفتاری بشر، از زمانی آغاز شد که پا به‌مرحلهٔ تازه‌ای گذاشت. دیگر می‌توانست با کشت خود، بسیاری از چیزها را تهیه کند؛ باتنه‌های درخت قایق ساخت و رودخانه‌ها و بعدها دریاها را درنوردید و... صاحب سلاح شد. عده‌ای دیگران را به‌کار کشیدند؛ آنان باید روی زمین‌ها کار می‌کردند، کشتیها را راه می‌انداختند، برای صاحبان خود، خانه و کاخ می‌ساختند و... دوران بردگی انسان آغاز شد. جامعه‌شناسان سدهٔ نوزدهم، که سرمایه‌داری تجاری همه‌جا نفوذ کرده بود، نظریهٔ «انسان‌وحشی»را پیش کشیده‌اند. گویا انسان وحشی، انسانهای دیگر را می‌خورده است؛ ولی «انسانهای وحشی» همان کسانی بودند که دیگران را به‌زنجیر کشیده و از آنها کار می‌کشیده‌اند. انسانهای وحشی کسانی بودند که دردوران بردگی و ارباب-رعیتی (که پس‌از آن آمد) خود را صاحب جان‌ومال همهٔ مردم می‌دانستند و از دسترنج آنها استفاده می‌کردند. جامعه‌شناسان نظام سرمایه‌داری، دلیل دیگری هم برای نظریهٔ خود داشتند؛ آنها می‌خواستند جنایتهای حکّام سرمایه‌داری را که به‌کشورهای دیگر می‌تاختند و مردم آن را درخدمت خود می‌گرفتند، به‌نام لشکرکشی «انسان‌متمدن» به‌کشورهایی که درآن‌جا «انسانهای وحشی» زندگی می‌کنند، توجیه کنند.

انسان به‌بند کشیده شد؛ ولی به‌هرحال گامی به‌پیش برداشته بود، و دراین میان، هوشمندان جامعه، که از همهٔ حقوق محروم بودند و دربین آنان، کاهنان هم بودند، بتدریج دانش و از آن جمله، دانش ریاضی را پیش بردند. هنوز دوران اسارت انسان به‌پایان نرسیده است؛ ولی ما درزمان خود، شاهد پیشرفت و تکامل دانشها، به‌صورتی که باورکردنی نیست، هستیم...

□

ریاضیات را زمانی می‌توان یاد گرفت و به‌کار بست که دوران گذشته و پراز خوف‌و هراس آن را بشناسیم. باکششها و کوششهایی که اغلب به‌دست ساده‌ترین و محروم‌ترین انسانها انجام گرفته است، آشنا شویم و خود را درمیان انبوه آگاهیها و دستورها گم نکنیم. «گوته» می‌گفت: «تاریخ دانش، خود دانش است.» و اگر ما می‌خواهیم درمیان هیاهوی زمان، راه خود را بیابیم، باید تاریخ را بشناسیم و خود را تنها درچارچوب دانش‌روز محبوس نکنیم.

از این‌رو، تاریخ دانش‌ریاضی، از ساده‌ترین تا پیچیده‌ترین آنها، روایت خواهد شد. دلیل پیدایش این یا آن نظریهٔ ریاضی را، در بستگی بازمان خود، خواهیم آورد و خواهیم دید چه تلاشهایی صورت گرفته است تا انسان به‌این جایی که ما امروز هستیم، رسیده است.



حجم یک مخروط، بدون کاربرد حساب دیفرانسیل و انتگرال

ام. هیرشهورن[1]

ترجمهٔ کریم احمدی دلیر، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تبریز

همه می‌دانیم که اگر حجم، مساحت قاعده و ارتفاع یک مخروط را به ترتیب با حروف V، A و h نشان دهیم، حجم آن از فرمول $V=\frac{1}{3}Ah$ به‌دست می‌آید. عامل $\frac{1}{3}$ در این فرمول از انتگرالگیری از x^2 نسبت به x ظاهر می‌شود. هدف این مقاله، با شروع از فرض V=cAh، نشان دادن ـ **بدون کاربرد حساب دیفرانسیل و انتگرال** ـ این مطلب است که $c=\frac{1}{3}$.

با استفاده از این فرمول مخروط، فرمولهای حجم و مساحت سطح یک کره به شعاع R را نیز نتیجه خواهیم گرفت.

مخروطی ناقص به ارتفاع h، مساحت بالایی a و مساحت قاعدهٔ A را در نظر بگیرید که از یک مخروط به ارتفاع e+h («e» برای قسمت «اضافی» است) و مساحت قاعدهٔ A بریده شده است. حجم این مخروط ناقص عبارت است از:

$$V=cA(e+h)-cae.$$

حال، مساحت یک برش عرضی این مخروط با مربع فاصلهٔ آن از رأس مخروط متناسب است؛ بنابراین:

$$\frac{\sqrt{a}}{e}=\frac{\sqrt{A}}{e+h}.$$

از این نتیجه می‌شود که:

$$e=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{A}-\sqrt{a}}h \ ،\ e+h=\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A}-\sqrt{a}}h$$

و حجم این مخروط ناقص عبارت است از:

$$V=cA(\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A}-\sqrt{a}}h)-ca(\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A}-\sqrt{a}}h)$$

$$=c(\frac{A\sqrt{A}-a\sqrt{a}}{\sqrt{A}-\sqrt{a}})h=c(A+\sqrt{Aa}+a)h.$$

حال ملاحظه می‌کنیم که همچنان که a به A میل می‌کند، چه اتفاقی می‌افتد. این مخروط ناقص به یک استوانه تبدیل می شود و درمی‌یابیم که $V=3cAh$. اما می‌دانیم که برای یک استوانه، V=Ah، بنابراین $c=\frac{1}{3}$، و نتیجه می‌گیریم که حجم یک مخروط عبارت است از:

$$V=\frac{1}{3}Ah.$$

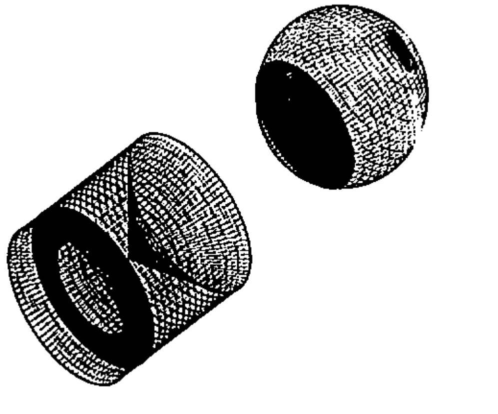
به عنوان یک جایزه، حجم یک مخروط ناقص را به دست می‌آوریم:

$$V=\frac{1}{3}(A+\sqrt{Aa}+a)h.$$

دو کاربرد ساده از این فرمول را نتیجه می‌گیریم.

حجم یک کُره

شکل ۱ کره‌ای به شعاع R را همراه با استوانه‌ای به شعاع R و طول ۲R را نشان می‌دهد. مخروطهایی از هریک از دو انتهای استوانه به مرکز آن حفر شده‌اند.



اگر هر کدام از این دو شیء را در فاصلهٔ x از مرکز آن ببریم، مساحت این برش در هر دو حالت عبارت است از $\pi(R^2 - x^2)$، لذا این دو جسم دارای حجم یکسانی هستند و نتیجه می‌گیریم که :

$$V = \pi R^2 . 2R - 2.\frac{1}{3}.\pi R^2 . R = \frac{4}{3}\pi R^3 .$$

مساحت سطح یک کُره

به ازای یک کرهٔ مفروض، سطح آن را به تعداد زیادی قطعه‌های (مسطح) بسیار کوچک به مساحت A_i، $i = 1, 2, \ldots, n$ تقسیم می‌کنیم. هرکدام از این قطعه‌ها را به مرکز کُره وصل می‌کنیم تا مخروطهایی نوک‌تیز تشکیل شوند.

حجم یک مخروط نوعی عبارت است از $V = \frac{1}{3}A_iR$ و جمع کل حجمهای تمامی مخروطها عبارت است از :

$$V = \frac{1}{3}R\sum_{i=1}^{n} A_i = \frac{1}{3}RS,$$

که در آن S عبارت است از مساحت سطح کره، لذا $\frac{1}{3}RS = \frac{4}{3}\pi R^3$ ؛ بنابراین :

$$S = 4\pi R^2 .$$

زیرنویس:

مقالهٔ حاضر ترجمهٔ "The Volume of a cone, without Calculus" چاپ شده در (Mathematics Magazine) شمارهٔ Vol. 70, No. 4. Oct. 1997 است.

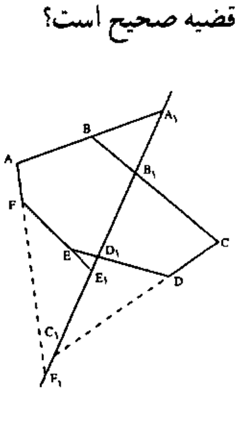
1. M. Hirschhorn, University of New South Wales, Sydney. 2052, NSW, Australia.

مسأله مسابقه‌ای برهان

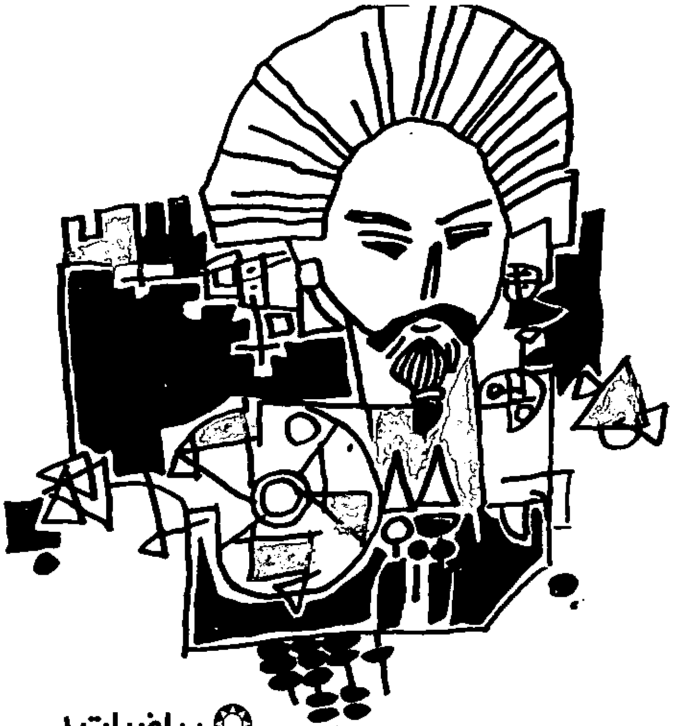
چندضلعی مسطح دلخواهی، برای مثال، شش‌ضلعی ABCDEF و قاطع Δ که ضلعهای AB، BC، CD، DE، EF و FA از این چندضلعی را به‌ترتیب در نقطه‌های A_1، B_1، C_1، D_1، E_1 و F_1 قطع می‌کند، درنظر می‌گیریم. ثابت کنید :

$$\frac{\overline{A_1A}}{\overline{A_1B}} \times \frac{\overline{B_1B}}{\overline{B_1C}} \times \frac{\overline{C_1D}}{\overline{C_1E}} \times \frac{\overline{D_1E}}{\overline{D_1F}} \times \frac{\overline{F_1F}}{\overline{F_1A}} = 1$$

آیا عکس این قضیه صحیح است؟



پرسشهای چهارگزینه‌ای



ریاضیات ۱

۱ـ کدام گزینه نادرست است؟

الف) مجموعهٔ تهی زیرمجموعهٔ هرمجموعه است.

ب) اگر $A \not\subset B$ ، آن‌گاه باید حداقل یک عضو در A باشد که آن عضو در B نباشد.

ج) هرمجموعه، زیرمجموعهٔ خودش است.

د) اگر $A \not\subset B$ و $C \subset A$، آن‌گاه $B \subset C$.

۲ـ کدام گزینه درست است؟ (M مجموعهٔ مرجع)

الف) $A \cup (B \cap A) = B$

ب) $B \cap (A \cup B) = A'$

ج) $A \cap M = A'$

د) $(B \cup \varnothing) \cap M = B$

۳ـ باتوجه به‌تعریف تفاضل دومجموعه $(A-B)$ ، کدام گزینه نادرست است؟ (M مجموعهٔ مرجع)

الف) $(A-B)$ ب) $A - \varnothing = A$

ج) $A - M = \varnothing$ د) $A - B = A' \cap B$

۴ـ اگر $A - B = \varnothing$ ، کدام گزینه نادرست است؟ (A' متمم A است.)

الف) $A \cup B = B$ ب) $A \subset B$

ج) $A \cap B' = A'$ د) $B' \subset A'$

۵ـ اگر تعداد زیرمجموعه‌های یک‌مجموعهٔ $(n+2)$ عضوی، ۲۲۴ واحد کمتراز تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ $(n+5)$ عضوی باشد، n کدام است؟

الف) $n=2$ ب) $n=3$

ج) $n=4$ د) $n=5$

۶ـ اگر باقیماندهٔ تقسیم دوعبارت $A = 13x^{1380} + 7x^{1381} - 9$ و $B = x^2 + mx + 1$ برعبارت $(x+1)$ برابر باشند، m کدام است؟

الف) ۹   ب) ۷

ج) ۵   د) ۱

۷ـ عبارت $k = \left(\frac{3a^3b^{-7}c^2}{8^4a^{-2}b^{-3}c^{-4}}\right)^{5+2}$ ، به‌ازای $a=(-1)^{-3}$ ، $b=2^{-1}$ و $c=2$ برابر چه عددی است؟

الف) $k=\frac{-3}{2^{10}}$ ب) $k=\frac{-3}{2^{20}}$

ج) $k=\frac{-3}{2^{30}}$ د) $k=\frac{-3}{2^{40}}$

۸ـ مساحت مربعی به‌ضلع x^{1380} ، برابر مساحت مستطیلی به‌طول $64x^{2216}$ و عرض $4x^{345}$ است ؛ ۶۴ برابر محیط مربعی به‌ضلع x چه عددی است؟

الف) ۱   ب) ۲

ج) ۴   د) ۱۶

۹ـ اگر برابری $k(x+1)^2 + s(x-1) = 2x - 2$ ، به‌ازای هرمقدار x برقرار باشد، حاصل $S^{s^k} + s^k + 1$ کدام است؟

الف) ۲   ب) ۳

ج) ۴   د) ۵

۱۰ـ عدد $T = (2^{34} + 2)$ برکدام یک از اعداد زیر بخش‌پذیر است؟

الف) $18(2^{11}+1)$ ب) $19(2^{27}+1)$

ج) $28(2^{17}+2)$ د) $29(2^{15}+2)$

ریاضیات ۳

۱ـ معادلهٔ $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x}=5$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲ـ تابع f با ضابطهٔ $y=\frac{x+2}{x-1}$ مفروض است. به‌ازای کدام مجموعهٔ مقادیر از دامنهٔ تابع، $-1\le y\le 1$ است؟

الف) $[-\frac{1}{2}\,,+\infty)$

ب) $[-\frac{1}{2}\,,+\infty)-\{1\}$

ج) $(-\infty\,,-\frac{1}{2}]$

د) $[0\,,-\frac{1}{2}]$

۳ـ اگر $f(x)=\begin{cases}\operatorname{Sin}x+\operatorname{Cos}x, & x>\sqrt{2}\\ \operatorname{Sin}x-\operatorname{Cos}x, & x<\sqrt{2}\end{cases}$ باشد، حاصل $f(\frac{\pi}{3})$ برابر با کدام گزینه است؟

الف) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ ب) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

ج) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ د) $\frac{\sqrt{3}-2}{2}$

۴ـ تابع حقیقی f با ضابطهٔ $f(x)=x^2-2x$ روی کدام مجموعهٔ مقادیر دامنهٔ تعریف، یک‌به‌یک نیست؟

الف) $[1\,,+\infty)$ ب) $(-\infty\,,1]$

ج) $[2\,,+\infty)$ د) $(-\infty\,,2]$

۵ـ دو تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^2+x$، با فرض $x\neq-2$، حاصل $\frac{f(x+2)-f(x+1)}{f(x+3)-f(x)}$، برابر با کدام گزینه است؟

الف) $\frac{1}{3}$ ب) ۳ ج) $\frac{2}{3}$ د) ۲

۶ـ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x|-[x]$، وقتی $x\in[-2\,,2]$ باشد، به کدام صورت زیر است؟

الف) چهار پاره‌خط موازی.

ب) چهار پاره‌خط موازی و یک نقطه.

ج) چهار پاره‌خط، شامل دو جفت دوبه‌دو موازی.

د) چهار پاره‌خط شامل دو جفت دوبه‌دو موازی و یک نقطه.

۷ـ تابع $\begin{cases}f:\mathbb{R}\to z\\ f(x)=[x]\end{cases}$ کدام است؟

الف) یک به یک است و پوششی نیست.

ب) پوششی است و یک‌به یک نیست.

ج) نه یک‌به‌یک است و نه پوششی.

د) هم یک‌به‌یک است و هم پوششی.

۸ـ اگر $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ دترمینان ماتریس A^2-B^2 کدام است؟

الف) ۳۸ ب) ۲۱ ج) ۴۶ د) ۲۹

۹ـ اگر برای ماتریس دودردوی A داشته باشیم $A^2-2A=I$ و $|A|\neq0$، حاصل $A-A^{-1}$ برابر با کدام است؟

الف) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$

۱۰ـ به‌ازای چه مقدار m دستگاه معادله‌های $\begin{cases}mx+2y=0\\ 2x+my=0\end{cases}$ دارای جواب غیرصفر است؟

الف) $m\in\varnothing$ ب) $m=2$

ج) $m=-2$ د) $m=\pm2$

۱۱ـ K چه باشد تا دستگاه معادله‌های $\begin{cases}kx-(5k+6)y=4\\ x+ky=-2\end{cases}$ دارای جواب نباشد؟

الف) ۲- ب) ۳- ج) ۲- یا ۳- د) ۰

۱۲ـ به‌ازای کدام مجموعهٔ مقادیر x عبارت جبری $\delta=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\times\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ تعریف شده است؟

الف) $\mathbb{R}$ ب) $\mathbb{R}-\{\pm1\}$

ج) $R-(-1\,,1)$ د) $\mathbb{R}-[-1\,,1]$

۱۳ـ اگر $\log_{5}^{2}=a$ باشد، $\log 2$ بر حسب a کدام است؟

الف) $\frac{a+1}{a}$ ب) $\frac{a}{a+1}$

ج) $\frac{a}{a-1}$ د) $\frac{a-1}{a}$

۱۴ـ معادلهٔ $\log_{2x-2}^{x^2}=2$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳

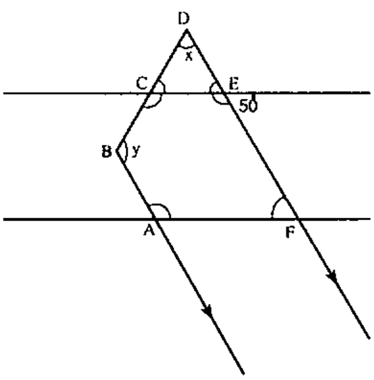
۱۵ـ اگر $f(x)=x^2-x-1$ باشد، حاصل $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ با صرف‌نظر از مقادیر کوچک Δx برابر با کدام گزینه می‌شود؟

الف) $2x$ ب) $2x-1$

ج) $2x+1$ د) $4x-1$

هندسهٔ ۱

۱ـ اندازهٔ $x+y$، درصورتی که $DC=DE$ و پیکانهای هم‌جهت خطهای موازی را نشان دهند، چه قدر است؟

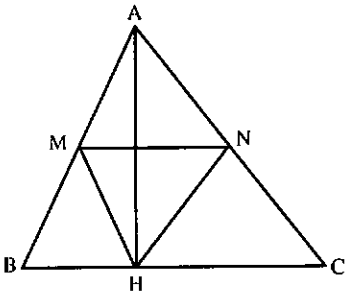


الف) °۱۰۰ ب) °۸۰

ج) °۱۲۰ د) °۱۸۰

۲ـ AH ارتفاع مثلث ABC و M و N

به‌ترتیب وسطهای ضلعهای AB و AC است. نسبت محیط مثلث HMN به محیط مثلث ABC کدام است؟



الف) ۲ ب) $\frac{1}{3}$

ج) $\frac{1}{2}$ د) ۳

۳ـ کدام‌یک از نمودارهای زیر نمایش‌دهندهٔ یک خم نیست؟

الف)  ب) 

ج)  د) 

۴ـ مستطیلی به‌ابعاد ۱۲ و ۱۸، معادل مثلثی به‌قاعدهٔ ۲۴ است. اندازهٔ ارتفاع نظیر این قاعدهٔ مثلث کدام است؟

الف) ۱۲ ب) ۱۴

ج) ۱۶ د) ۱۸

۵ـ مساحت متوازی‌الاضلاعی به‌قاعدهٔ $x+2$ و ارتفاع X، دوبرابر مساحت یک لوزی به‌قطرهای ۶ و ۸ است. اندازهٔ قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع چه‌قدر است؟

الف) ۲ ب) ۴

ج) ۶ د) ۸

۶ـ درچهارضلعی ABCD دوقطر AC و BD برهم عمودند. اگر AC=۳۶ و BD=۲۴ باشد، اندازهٔ مساحت این چهارضلعی کدام است؟

الف) ۸۶۴ ب) ۴۳۲

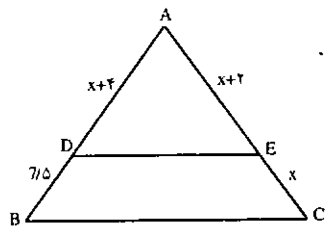
ج) ۱۷۲۸ د) ۲۱۶

۷ـ شش‌ضلعی منتظمی، معادل ذوزنقه‌ای به‌قاعده‌های ۸ و ۱۲ و ارتفاع ۶ است. اندازهٔ ضلع این شش‌ضلعی منتظم، درصورتی که اندازهٔ سهم آن برابر ۴ باشد، چه قدر است؟

الف) ۲ ب) ۳

ج) ۴ د) ۵

۸ـ درشکل، DE∥BC است. نسبت مساحت مثلث ADE به‌مساحت مثلث ABC کدام است؟



الف) $\frac{16}{49}$ ب) $\frac{4}{7}$

ج) $\frac{8}{49}$ د) $\frac{7}{4}$

۹ـ منشور مربع‌القاعدهٔ قائمی به‌قاعدهٔ ۱۲ و ارتفاع ۱۸ است. حجم استوانه محاط دراین منشور کدام است؟

الف) 648π ب) ۶۴۸

ج) 324π د) ۳۲۴

۱۰ـ نسبت مساحتهای سطح دوکره برابر $\frac{4}{9}$ است. نسبت حجمهای این دوکره چه‌قدر است؟

الف) $\frac{4}{9}$ ب) $\frac{2}{3}$

ج) $\frac{8}{27}$ د) $\frac{16}{9}$

ریاضیات ۵

۱ـ درتابع f باضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}ax+2, & x>2\\ x-2, & x<2\end{cases}$، اگر $f(1)f(3)=-5$ باشد، $2a$ چه‌قدر است؟

الف) ۱ ب) ۲

ج) ۳ د) ۴

۲ـ دامنهٔ تعریف تابع $f(x)=\sqrt[3]{2x-1}$ کدام است؟

الف) $x>\frac{1}{2}$ ب) $x\geq\frac{1}{2}$

ج) $x\leq\frac{1}{2}$ د) IR

۳ـ اگر $f(x)=x^2-4\sqrt{x}$ و $g(x)=\frac{1}{x-2}$ باشد، $g(x)=\frac{1}{x-2}$ چه‌قدراست؟

الف) ۲ ب) ۳

ج) ۳- د) ۲-

۴ـ اگر $f(x)=ax+2$، $g(x)=(2-3a)x+3$ و $(f+g)(-1)=5$ باشد، a چه‌قدر است؟

الف) ۱ ب) ۲

ج) ۳ د) ۲-

۵ـ حدّکسر $\frac{\sqrt{x+1}-1}{\mathrm{Sin}3x}$ وقتی $x\to 0$، کدام است؟

الف) $\frac{1}{3}$ ب) $\frac{1}{4}$

ج) $\frac{1}{5}$ د) $\frac{1}{6}$

۶ـ اگرتابع f باضابطه $f(x)=\begin{cases}x^2-a, & x<1\\ bx-1, & x>1\\ 3, & x=1\end{cases}$ به‌ازای همهٔ مقادیر X پیوسته باشد، $a+b$ چه‌قدر است؟

الف) ۱ ب) ۲

ج) ۳ د) ۴

۷ـ درتابع $f(x)=\mathrm{Sin}(2x-\frac{\pi}{6})+\mathrm{Cos}2x$، مقدار $f'(\frac{\pi}{2})$ چه‌قدر است؟

الف) $\sqrt{3}$ ب) $-\sqrt{3}$

ج) $2\sqrt{3}$ د) $-2\sqrt{3}$

۸ـ تابع $f(x)=\frac{3x-1}{x-2}$ درفاصله‌های $[0,1]$ و $[3,5]$ به‌ترتیب چگونه است؟

الف) صعودی ـ صعودی

ب) صعودی ـ نزولی

ج) نزولی ـ صعودی

د) نزولی ـ نزولی

۹ـ به‌ازای کدام مقدار a و b، نقطهٔ $A=(3,-16)$، نقطهٔ ماکزیمم یا می‌نی‌مم تابع

f باضابطهٔ $f(x)=ax^2+bx-7$ است؟

الف) $a=1$ ، $b=6$

ب) $a=1$ ، $b=-6$

ج) $a=7$ ، $b=1$

د) $a=6$ ، $b=-2$

۱۰ـ معادلهٔ خط مماس برمنحنی تابع f باضابطهٔ $f(x)=2x^3-x^2+5x-1$ درنقطه‌ای به‌طول ۱- واقع‌برآن کدام است؟

الف) $f(x)=2x^3-x^2+5x-1$

ب) $y=-13x+4$

ج) $y=13x-4$

د) $y=13x+4$

حسابان ۱

۱ـ دامنهٔ تعریف کدام یک از تابعهای به معادله‌های زیر مجموعهٔ $\mathbb{R}$ است؟

۱) $f(x)=\log x^2$

۲) $f(x)=\log|x+1|$

۳) $f(x)=\sqrt{x^2+4x+1}$

۴) $f(x)=\sqrt{x^2-4x+4}$

۲ـ تابع به معادلهٔ زیر:

$f(x)=\mathrm{Log}(\sqrt{a^2x^2+1}-3x)$ فرد است،

a کدام است؟

۱) $\{\pm1\}$ ۲) $\{\pm2\}$

۳) $\{\pm3\}$ ۴) $\{\pm9\}$

۳ـ اگر باقیماندهٔ تقسیم عبارت زیر:

$P(x)=x^3+3x^2+3x$ بر $(x-a)$ ، ۲۸

باشد، a کدام است؟

۱) $a=1$ ۲) $a=2$

۳) $a=-1$ ۴) $a=-2$

۴ـ اگر f تابعی یک به یک و داشته باشیم $g(x)=f(\frac{1}{x})-4$ ، $g^{-1}(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{f^{-1}(x-4)}$

۲) $\frac{1}{f^{-1}(x+4)}$

۳) $\frac{-1}{f^{-1}(x-4)}$

۴) $\frac{-1}{f^{-1}(x+4)}$

۵ـ عبارت $\mathrm{Cot}x-\tan x$ برابر است با:

۱) $\mathrm{Cot}2x$ ۲) $\tan 2x$

۳) $2\,\mathrm{Cot}2x$ ۴) $2\tan 2x$

۶ـ حاصل $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{3x}-3}$ برابر است با:

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$

۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{2}{5}$

۷ـ حاصل $\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{Sin}2x}{\sqrt{1-\mathrm{Cos}2x}}$ برابر است با:

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۳) $\pm\sqrt{2}$ ۴) حدّ ندارد

۸ـ منحنی تابع به معادلهٔ زیر:

$f(x)=\frac{(x^2+4x+3)\sqrt{x}}{(x+1)(x+2)(x-4)}$ چند

مجانب قائم دارد؟

۱) ۰ ۲) ۱

۳) ۲ ۴) ۳

۹ـ تابع به معادلهٔ زیر:

$f(x)=\begin{cases}\left[x-\frac{5}{2}\right]+a, & x\ge2\\ \left[x+\frac{1}{1000}\right]+2a, & x<2\end{cases}$ در ۲

پیوسته است، a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱-

۳) ۲- ۴) ۳-

۱۰ـ اگر $f'(x)=\frac{1}{x}$ ، آن‌گاه مشتق تابع به معادلهٔ $y=f(\sqrt[3]{x^2})$ در $x=2$ ، کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$

۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{8}{3}$

هندسهٔ تحلیلی پیش دانشگاهی

۱ـ قرینهٔ نقطهٔ (۲ و ۲- و ۱)=M نسبت به‌صفحهٔ $P: 2x-y-z-8=0$ کدام نقطه است؟

۱) $M'=(5,4,0)$

۲) $M'=(-5,-4,1)$

۳) $M'=(5,-4,0)$

۴) $M'=(0,-4,5)$

۲ـ طول میانهٔ رأس B از مثلث ABC، A=(۴و۰و۲)، B=(aو۱-و۲) و C=(۰و۲و۲-) برابر ۳ است، مقدار a کدام است؟

۱) ±3 ۲) ±1

۳) ۳+ و ۱- ۴) ۳- و ۱+

۳ـ اگر، $a=-2i+j-6k$ باشد، تصویر بردار $-\frac{2}{3}a$ روی محور zها کدام است؟

۱) $+\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{2}{3}$

۳) ۴- ۴) ۴+

۴ـ اگر (۱و ۰ و ۱-)=a، (۲ و ۲ و ۲)=b و (۴و ۱- و ۳)=c باشد، $c.(a\times b)$ کدام است؟

۱) ۱۸+ ۲) ۱۸-

۳) ۹- ۴) ۹+

۵ـ فاصلهٔ نقطهٔ A=(۲-و۱و۳) از خط D به معادله‌های پارامتری $x=2t-1$ و $y=t$ و $z=-t+2$ چه‌قدر است؟

۱) $\frac{\sqrt{21}}{3}$ ۲) $\frac{\sqrt{21}}{2}$

۳) $\sqrt{21}$ ۴) $2\sqrt{21}$

۶ـ معادلهٔ صفحه گذرنده بر نقطه A=(۱ و ۲ و ۴-) و عمود بر دو صفحه $P_1: x+z-2=0$ و $P_2: y+2z=3$ ، کدام است؟

۱) $2x-y+z=0$
۲) $x-y+z-9=0$
۳) $-x+2y+9=0$
۴) $-x-2y+z+9=0$

۷ـ کدام نقطه از خط $L:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+5}{7}$ به فاصلهٔ ۳ از صفحهٔ $P:2x+2y-z+4=0$ و بالای این صفحه واقع است؟

۱) (۴۷- و ۱۹- و ۱۱-)
۲) (۴۷ و ۱۹ و ۱۱)
۳) (۴۷ و ۱۹- و ۱۱)
۴) (۴۷ و ۹- و ۱۱)

۸ـ اگر سه نقطهٔ A=(a و ۱ و ۲)، B=(۴- و ۱- و ۰) و C=(۲ و a+b-۱ و ۴) روی یک خط راست واقع باشند، a+b چه‌قدر است؟

۱) ۱   ۲) ۲
۳) ۳   ۴) ۴

۹ـ معادلهٔ صفحه‌ای که در نقطهٔ برخورد صفحهٔ $P:x-2y+z+4=0$ با محور عرضها بر این محور عمود می‌شود، کدام است؟

۱) $x+y=2$ ۲) $y=2$
۳) $z=2$ ۴) $x=2$

۱۰ـ فصل مشترک صفحه‌های: $P_1:x+z+4=0$ ، $P_2:2x+y-z+4=0$ و $P_3:-x+z=2$ کدام نقطه است؟

۱) (۱- و ۱ و ۳-)   ۲) (۱ و ۱ و ۳)
۳) (۱- و ۱- و ۳-)   ۴) (۰ و ۱- و ۳)

جبر خطی پیش‌دانشگاهی

۱ـ حاصل

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 5 & 5 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱۲
۳) ۱۴
۴) ۱۲-

۲ـ اگر $A=\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 9 \end{vmatrix}$ باشد، حاصل دترمینان $(A^*)^T$ کدام است؟

۱) ۶   ۲) $\frac{1}{6}$
۳) ۳۶   ۴) $\frac{1}{36}$

۳ـ اگر A ماتریسی مربعی از مرتبهٔ ۶ و $|A|=3$ ، حاصل $|\sqrt[3]{3}A|$ کدام است؟

۱) ۹   ۲) ۲۷
۳) ۸۱   ۴) $3\sqrt{3}$

۴ـ کدام یک از دسته بردارهای زیر مستقل خطی‌اند؟

۱) (۵ و ۰) و (۱ و ۲) و (۱- و ۱)
۲) (۱- و ۲) و (۲- و ۴)
۳) $(\sqrt{5},0)$ و (۰ و ۳)
۴) (۳ و ۶) و $(2,\frac{1}{2})$

۵ـ اگر $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ نگاشتی خطی باشد و داشته باشیم (۲ و ۲) = (۰ و ۰ و ۱)f و (۱- و ۱) = (۰ و ۱ و ۰)f ، (۲ و ۱-) = (۱ و ۰ و ۰)f در این صورت (۱- و ۱ و ۲)f کدام است؟

۱) (۱ و ۶)   ۲) (۱ و ۲)
۳) (۱ و ۶-)   ۴) (۵- و ۶)

۶ـ اگر $A=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ ماتریس نگاشت (fog) باشد، نگاشت f کدام می‌تواند باشد؟

۱) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ۲) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$
۳) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ ۴) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$

۷ـ بُعد هستهٔ نگاشت خطی $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ با ضابطهٔ $f(x,y,z)=(x,0)$ کدام است؟

۱) صفر   ۲) ۱
۳) ۲   ۴) ۳

۸ـ اگر k هستهٔ نگاشت خطی $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ بوده و f یک به یک باشد، کدام گزینه نادرست است؟

۱) $n(k)=1$ ۲) $k=\{(0,0)\}$
۳) $k=\{(0,0,0)\}$ ۴) $f(0,1,2)\neq(0,0)$

۹ـ تصویر خط به معادلهٔ y=2x تحت نگاشت $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ با ضابطهٔ $f(x,y)=(x+y,y)$ کدام است؟

۱) خط به معادلهٔ x=3y
۲) خط به معادلهٔ y=0
۳) خط به معادلهٔ 2x=3y
۴) محور y ها

۱۰ـ اگر $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ نگاشتی خطی باشد و داشته باشیم (۱- و ۱)=(۰ و ۱)f و (۲ و ۱)=(۰,۱)f حاصل $f^{-1}(3,-3)$ کدام است؟

۱) $(\frac{1}{3},3)$ ۲) (۰ و ۳)
۳) (۰ و ۳-)   ۴) (۳- و ۰)

۱۱ـ اگر $A=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ ، در این صورت حاصلِ A^{1379} کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ ۲) A

۳) I   ۴) $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

۱۲ـ اگر داشته باشیم، $A^2+A-I=0$ ، وارون ماتریس A کدام است؟

۱) (A-I)   ۲) (A+I)
۳) (I-A)   ۴) A^2

حساب دیفرانسیل و انتگرال ۱

۱ـ دنبالهٔ $\left\{\frac{n^2+1}{n^2+2}\right\}$:

۱) کراندار و نزولی است.
۲) بی‌کران و نزولی است.
۳) کراندار و صعودی است.
۴) بی‌کران و صعودی است.

۲ـ سری $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{3})^{2k}(x-4)^k$ به‌ازای کدام مقادیر x همگراست؟

۱) $-13<x<5$ ۲) $-5<x<13$

۳) $5<x<13$ ۴) $-13<x<-5$

۳ـ مقدار $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\lfloor \sin x+\cos x\rfloor$ برابر است با:

۱) ۰ ۲) ۱

۳) ۱- ۴) حدّ ندارد

۴ـ تابع به معادله زیر:

$f(x)=(x^2+ax)\lfloor x\rfloor+2x^2+b\lfloor x\rfloor$

در $x=1$ و $x=2$ پیوسته است، a و b کدامند؟

۱) $\begin{cases}a=3\\b=-2\end{cases}$ ۲) $\begin{cases}a=-3\\b=-2\end{cases}$

۳) $\begin{cases}a=3\\b=2\end{cases}$ ۴) $\begin{cases}a=-3\\b=2\end{cases}$

۵ـ مجموع مقادیر اکسترمم نسبی تابع به معادلهٔ $y=x^3-3x^2+m$ برابر (۱۰) است، m کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۷- ۴) ۶-

۶ـ اگر f تابعی یک جمله و مشتق‌پذیر و داریم $x^4 f(x)=f'(x).f''(x).f'''(x)$ ، درجهٔ f کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۷ـ طول از مبدأ و عرض از مبدأ خطهای مماس بر منحنی به معادلهٔ $x^2+y^2=8$ برابرند؛ معادله خطی که نقاط تماس را به‌هم وصل می‌کند، کدام است؟

۱) $y=x$ ۲) $y=-x$

۳) $y=2x$ ۴) $y=\pm x$

۸ـ معادله‌های مجانبهای تابع به معادلهٔ $y=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$ کدام است؟

۱) $y=\pm x$ ۲) $y=\pm\frac{x}{2}$

۳) $y=\pm 2x$ ۴) $y=\pm x\sqrt{2}$

۹ـ تابع به معادله زیر:

$f(x)=(x-a)^n\lfloor x-a\rfloor\ ,\ n\in N$

در a مشتق‌پذیر است، آن‌گاه باید:

۱) $n\geq 1$ ۲) $n\geq 2$

۳) $n\leq 3$ ۴) $n\leq 4$

۱۰ـ نقطه‌ای روی مسیر به معادلهٔ $y=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[4]{x^3}$ در حرکت است، اگر آهنگ افزایش مؤلفهٔ x در نقطه‌ای به‌طول $x=4096$ برابر ۱۲ متر در ثانیه باشد، آهنگ افزایش مؤلفهٔ y کدام است؟

۱) $\frac{13}{8}$ ۲) $\frac{15}{8}$ ۳) $\frac{17}{8}$ ۴) $\frac{19}{8}$

ریاضی عمومی۱

۱ـ ضریب تغییرات داده‌های زیر کدام است؟

۱۲،۲۵،۶۶،۱۵،۱۷،۲۳

۱) ۰/۶۹ ۲) ۱/۴۳

۳) ۰/۵۸ ۴) ۱/۷۲

۲ـ اگر بخواهیم تعداد دسته‌ها را دوبرابر کنیم، طول دسته‌ها:

۱) دو برابر می‌شود.

۲) تغییر نمی‌کند.

۳) نصف می‌شود.

۴) چهار برابر می‌شود.

۳ـ از ظرفی که شامل ۷ مهرهٔ سفید و ۵ مهره سیاه است، دو مهره با هم خارج می‌کنیم. احتمال آن که دو مهره همرنگ نباشند، کدام است؟

۱) $\frac{31}{66}$ ۲) $\frac{35}{66}$

۳) $\frac{10}{66}$ ۴) $\frac{21}{66}$

۴ـ ظرفی شامل ۶ مهره سفید و ۷ مهره سیاه است، دو مهره به طور متوالی و با جایگذاری خارج می‌کنیم، احتمال آن که هر دو مهره سفید باشند، کدام است؟

۱) $\frac{5}{26}$ ۲) $\frac{5}{13}$

۳) $\left(\frac{6}{13}\right)^2$ ۴) $\left(\frac{5}{26}\right)^2$

۵ـ ظرف I شامل ۵ مهره سفید و ۳ مهرهٔ سیاه است. در ظرف II، ۷ مهره سفید و ۵ مهرهٔ سیاه موجود است. مهره‌ای از ظرف I به تصادف به ظرف II منتقل می‌کنیم، سپس از ظرف II مهره‌ای خارج می‌کنیم، احتمال آن که این مهره سفید باشد، کدام است؟

۱) $\frac{43}{104}$ ۲) $\frac{21}{104}$

۳) $\frac{40}{104}$ ۴) $\frac{61}{104}$

۶ـ شرط این که دستگاه معادله‌های $\begin{cases}(m-1)x_1+4x_2=0\\x_1+2x_2=0\end{cases}$ جواب غیر صفر داشته باشد، کدام است؟

۱) $m=-1$ ۲) $m=1$

۳) $m=-3$ ۴) $m=3$

۷ـ اگر معادله‌های قطرهای یک دایره به صورت $(m-1)x+2y-m+5=0$ باشد، مختصات مرکز دایره کدام است؟

۱) $(1,-2)$ ۲) $(-1,2)$

۳) $(1,2)$ ۴) $(-1,-2)$

۸ـ در بسط $(3x^2-2x)^4$ ضریب شامل جملهٔ x^6 کدام است؟

۱) ۲۱۶ ۲) ۲۱۶-

۳) ۲۱۴ ۴) ۲۱۴-

۹ـ دنبالهٔ $x_n=\frac{n^2+1}{2n^2+n+3}$ به کدام عدد همگراست؟

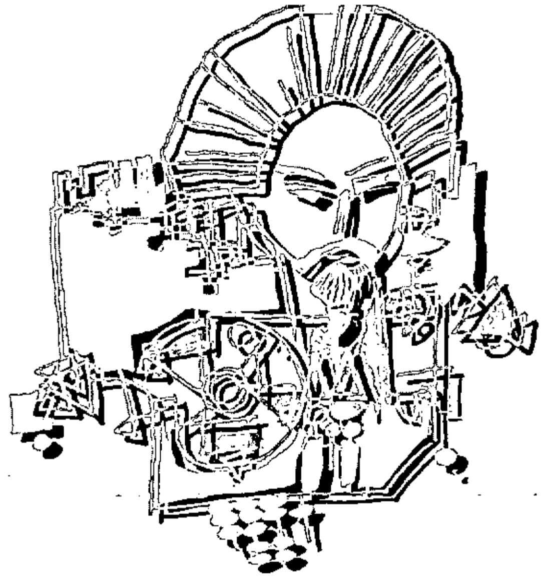
۱) ۰ ۲) $\frac{1}{2}$

۳) ۱ ۴) $\frac{1}{3}$

۱۰ـ اگر معادلهٔ مجانب مایل منحنی به معادلهٔ $y=\frac{3x^2-mx+1}{x-1}$ به صورت $y=3x+2$ باشد، m کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲-

۳) ۱ ۲) ۱-



پاسخ تشریحی پرسشهای چهارگزینه‌ای

ریاضیات ۱

۱ ـ گزینهٔ (۴) نادرست است ؛ زیرا با شرایط $A \subset B$ و $C \subset A$ خواهیم داشت $C \subset B$ ؛ برای مثال، با فرض $B = \{1,2,3\}$ ، $A = \{1,2\}$ و $C = \{2\}$ ، ملاحظه می‌شود که $C \subset B$.

۲ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ زیرا :

$B \cup \emptyset = B \ , \ B \cap M = B$

۳ ـ گزینهٔ (۴) نادرست است ؛ زیرا :

$A - B = A \cap B'$

۴ ـ گزینهٔ (۳) نادرست است ؛ زیرا :

$A - B = \phi \Leftrightarrow A \subset B \ , \ A \subset B \Leftrightarrow B' \subset A'$

$A - B = A \cap B'$

$= \phi \ , \ A - B = \phi \Leftrightarrow A \cup B$

$= B, A \cap B = A$

۵ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ زیرا :

(2^k، تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ k عضوی است)

$$2^{n+5} - 2^{n+2} = 2^n \times 2^5 - 2^n \times 2^2$$
$$= 2^n(2^5 - 2^2) = 2^n(32 - 4)$$
$$= 28 \times 2^n = 224 \ ; \ 2^n = \frac{224}{28};$$

$2^n = 8 \ ; \ 2^n = 2^3; \ \boxed{n = 3}$

۶ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است ؛ زیرا :

$x + 1 = 0 \ ; \ x = -1 :$

(باقیماندهٔ A) $R_A = 13(-1)^{1380}$

$+7(-1)^{1381} - 9 = -3$

(باقیماندهٔ B) $R_B = (-1)^2 + m(-1) + 1$

$= 2 - m \ ; \ R_A = R_B;$

$-3 = 2 - m \ ; \ \boxed{m = 5}$

۷ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ زیرا :

(می‌دانیم :

$a = (-1)^{-3} = -1, (-1)^{\pm 2k} = 1 \ , \ (-1)^{\pm(2k+1)} = -1$

$b = 2^{-1} \ , \ c = 2^{-2}:$

$$k = \left(\frac{3(-1)^3 (2^{-1})^{-7} (2^{-2})^2}{8^4 (-1)^{-2} (2^{-1})^{-3} (2^{-2})^{-4}} \right)^{-1+2} = \frac{(-3).2^{7-4}}{2^{12+3+8}}$$

$$k = (-3).2^{3-23} = (-3).2^{-20} = \frac{-3}{2^{20}} \ ; \ \boxed{k = \frac{-3}{2^{20}}}$$

۸ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است ؛ زیرا :

(مساحت مربع) $S = (x^{1380})^2 = x^{2760},$

(مساحت مستطیل) $S' = (64x^{2416}).(4x^{345});$

$S' = 2^8 x^{2761} \ , \ S = S' : \ x^{2760} = 2^8 x^{2761};$

$x^{2761-2760} = \frac{1}{2^8} \ ; \ x = \frac{1}{4 \times 64} \ ; \ 64p = 64(4x)$

$64p = 64(\frac{4}{4 \times 64}) = 1$

$\boxed{64p = 1}$ (۶۴ برابر محیط مربعی به ضلع X)

۹ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است ؛ زیرا :

این برابری، چون به ازای هر مقدار x، همیشه برقرار است ؛ پس یک اتحاد است :

$$K(x^2 + 2x + 1) + S(x - 1) \equiv 2x - 2$$

$kx^2 + (2k + s)x + k - s \equiv 2x - 2$

$$; \begin{cases} \boxed{k = 0} \\ 2k + s = 2 \ , \ \boxed{s = 2} \\ k - s = -2 \end{cases}$$

$S^{s^k} + S^k + 1 = 2^{2^0} + 2^0 + 1 = 2^1 + 1 + 1 = 4$

توجه: می‌توانستیم با قرار دادن x=۱ دربرابری، به نتیجهٔ k=۰ و با قرار دادن x=-۱ در برابری، به نتیجه S=۲ برسیم.

۱۰ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است ؛ زیرا :

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$
$$T=2^{34}+2=2(2^{33}+1)=2\left[(2^{11})^3+1\right]$$
$$=2(2^{11}+1)\times((2^{11})^2-(2^{11})+1)$$

از این برابری نتیجه می‌شود که T بر $2(2^{11}+1)$ بخش‌پذیر است. همچنین با استفاده از اتحاد :

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots+b^{n-1})$$

می‌توان نوشت :

$$T=2(2^{33}+1)=2((2^3)^{11}+1)$$
$$=2(2^3+1)((2^3)^{10})-(2^3)^9+\cdots+1)=18k$$

بنابراین عدد T بر $18(2^{11}+1)$ بخش‌پذیر است.

ریاضیات ۳

۱ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است.

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{x}=5\Rightarrow\sqrt{2x+1}=5-\sqrt{x}\Rightarrow$$
$$(\sqrt{2x+1})^2=(5-\sqrt{x})^2\Rightarrow 2x+1=25+x-10\sqrt{x}$$
$$\Rightarrow 10\sqrt{x}=24-x\Rightarrow 100x=(24-x)^2$$
$$\Rightarrow 576+x^2-48x=100x\Rightarrow x^2-148x+576=0$$
$$(x-4)(x-144)=0\Rightarrow x=4 \quad x=144$$

پاسخ x=۱۴۴ در معادله صدق نمی‌کند و ریشهٔ خارجی است، و تنها پاسخ قابل قبول x=۴ می‌باشد.

۲ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است.

$$-1\le y\le 1\Rightarrow -1\le\frac{x+2}{x-1}\le 1\Rightarrow$$
$$(\frac{x+2}{x-1})^2\le 1\Rightarrow(x+2)^2\le(x-1)^2\Rightarrow$$
$$x^2+4x+4\le x^2-2x+1\Rightarrow 6x\le -3\Rightarrow$$
$$x\le -\frac{1}{2}$$

۳ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است. $\pi\approx 3/14$ و $\sqrt{2}\approx 1/4$ ، در نتیجه $\frac{\pi}{3}<\sqrt{2}$ و لذا داریم :

$$f(\frac{\pi}{3})=\mathrm{Sin}\frac{\pi}{3}-\mathrm{Cos}\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

۴ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است. شرط یک به یک بودن را می‌نویسیم :

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$$
$$x_1^2-2x_1=x_2^2-2x_2\Rightarrow(x_1-1)^2-1=(x_2-1)^2-1$$
$$\Rightarrow(x_1-1)^2=(x_2-1)^2$$

حال اگر x_1-1 و x_2-1 هر دو نامنفی یا هر دو نامثبت باشند، می‌توانیم از دو طرف رابطهٔ بالا جذر بگیریم و به برابریهای زیر برسیم :

$$x_1-1,x_2-1\ge 0\Rightarrow x_1-1=x_2-1\Rightarrow x_1=x_2$$
$$x_1-1,x_2-1\le 0\Rightarrow 1-x_1=1-x_2\Rightarrow x_1=x_2$$

که در هر دو حال، تابع یک به یک خواهد بود. بنابراین دربازه‌های $(1,+\infty)$ و $(-\infty,1]$ و بازهٔ $[2,+\infty)$ که زیر مجموعه یکی از آنهاست، تابع یک به یک است. ولی دربازهٔ $(-\infty,2]$ تابع یک به یک نیست.

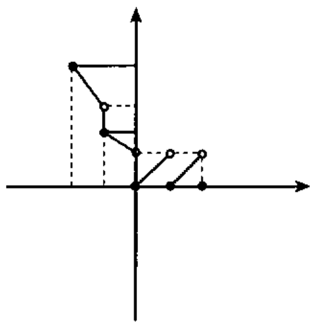
۵ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است.

$$\frac{f(x+2)-f(x+1)}{f(x+3)-f(x)}$$
$$=\frac{\left[(x+2)^2+(x+2)\right]-\left[(x+1)^2+(x+1)\right]}{(x+3)^2+(x+3)-(x^2+x)}$$
$$=\frac{x^2+4x+4+x+2-x^2-2x-1-x-1}{x^2+6x+9+x+3-x^2-x}=\frac{2x+4}{6x+12}$$
$$=\frac{2(x+2)}{6(x+2)}=\frac{1}{3}\quad x$$

۶ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است.

$$\begin{array}{ll} -2\le x<-1 & f(x)=-x+2 \\ -1\le x<0 & f(x)=-x+1 \\ 0\le x<1 & f(x)=x \\ 1\le x<2 & f(x)=x-1 \\ x=2 & f(x)=0 \end{array}$$

با توجه به ضوابط فوق، روشن است که نمودار تابع شامل دو پاره‌خط با شیب ۱- و دو پاره خط با شیب ۱ و یک نقطهٔ (۰ و ۲) است، لذا نیازی به رسم نمودار نمی‌باشد. اما برای اطلاع بیشتر نمودار تابع نیز رسم می‌شود :



۷ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است.

با توجه به هم دامنهٔ تابع که مجموعهٔ z می‌باشد و همواره $[x]\in z$ ، روشن است که تابع پوشاست ؛ ولی یک به یک نیست ؛ زیرا به ازای همهٔ مقادیر $n\le x<n+1$ ، $[x]=n$ ، برای مثال، $f(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{3})=0$

۸ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است.

$$A^2=\begin{bmatrix}2&3\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&3\\1&4\end{bmatrix}$$
$$B^2=\begin{bmatrix}1&2\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&2\\-1&-2\end{bmatrix}$$
$$A^2-B^2=\begin{bmatrix}8&1\\2&6\end{bmatrix}\Rightarrow\left|A^2-B^2\right|=48-2=46$$

۹ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است.

$$A^2-2A=I\Rightarrow A(A-2I)=I, A.A^{-1}=I\Rightarrow$$
$$A-2I=A^{-1}\Rightarrow A-A^{-1}=2I$$

۱۰ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است.
پاسخهای دستگاه از روی دستور کرامر به صورت زیر می‌باشد :

$$x=\frac{\begin{vmatrix}0 & 2\\ 0 & m\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}m & 2\\ 2 & m\end{vmatrix}},\ y=\frac{\begin{vmatrix}m & 0\\ 2 & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}m & 2\\ 2 & m\end{vmatrix}}$$

دترمینانهای صورت هر دو کسر بالا، برابر صفر است. (چرا؟)

بنابراین اگر دترمینانهای مخرج که یکسانند، مخالف صفر باشد، جواب منحصر به فرد دستگاه، $x=y=0$ خواهد بود ؛ ولی اگر دترمینان مخرج کسرها نیز صفر شود، دستگاه معادله‌های مبهم شده و دارای بی‌شمار جواب خواهد بود، لذا جواب غیرصفر نیز دارد. پس می‌نویسیم :

$$\begin{vmatrix}m & 2\\ 2 & m\end{vmatrix}=0\Rightarrow m^2-4=0\Rightarrow m=\pm 2$$

۱۱ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است. از دستور کرامر استفاده می‌کنیم :

$$x=\frac{\begin{vmatrix}4 & -(5k+6)\\ -2 & k\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}k & -(5k+6)\\ 1 & k\end{vmatrix}}=\frac{4k-10k-12}{k^2+5k+6}$$
$$=\frac{-6k-12}{(k+2)(k+3)}$$

مخرج کسر فوق به ازای $k=-2$ و $k=-3$ برابر صفر شده است، ولی به ازای $k=-2$ صورت کسر هم صفر می‌شود و دستگاه دارای بی‌شمار جواب می‌باشد ؛ بنابراین تنها به ازای $k=-3$ دستگاه دارای جواب نیست.

۱۲ ـ گزینهٔ (۴) صحیح می‌باشد. شرط این که S تعریف شده باشد، آن است که عبارتهای زیر رادیکالها مثبت یا صفر باشند :

$$\frac{x-1}{x+1}\geq 0\ ,\ \frac{x+1}{x-1}\geq 0$$

از نامعادلهٔ اول داریم : $x\geq 1$ $x<1$

و از دومی به دست می‌آید : $x\leq -1$ یا $x>1$ و

از اشتراک دو جواب به دست می‌آید :

$x<-1$ یا $x>1$, $x\in\mathbb{R}-[-1,1]$

۱۳ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است. از دستور $\log_b^a=\frac{\log a}{\log b}$ استفاده می‌کنیم :

$$\log_5^2=\frac{\log 2}{\log 5}=\frac{\log 2}{\log\frac{10}{2}}=\frac{\log 2}{\log 10-\log 2}=\frac{\log 2}{1-\log 2},$$
$$\frac{\log 2}{1-\log 2}=a$$
$$\Rightarrow \log 2=a-a\log^2\Rightarrow (a+1)\log 2=a\ .\ \log 2=\frac{a}{a+1}$$

۱۴ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است.

$$\log_{3x-2}^{x^2}=2\Rightarrow x^2=(3x-2)^2\Rightarrow$$
$$x^2=9x^2-12x+4\Rightarrow 8x^2-12x+4$$
$$=0\Rightarrow 2x^2-3x+1=0$$
$$\Rightarrow x=1\qquad x=\frac{1}{2}$$

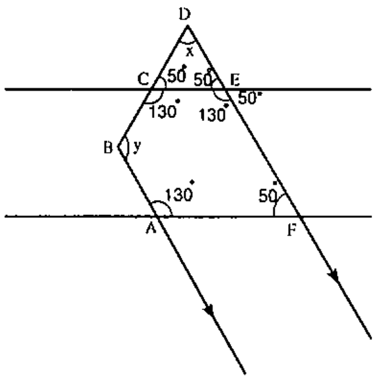
هر دو جواب با توجه به دامنهٔ تعریف لگاریتم قابل قبول نیستند ؛ زیرا باید $3x-2\neq 1, 3x-2>0$ باشد.
در نتیجه : $x>\frac{2}{3}$ و $x\neq 1$ ؛ بنابراین معادلهٔ فوق ریشهٔ حقیقی ندارد.

۱۵ـ گزینهٔ (۲) صحیح است.

$$\sqrt{(a-1)^2+(1+1)^2+(1-2)^2}=3$$
$$\Rightarrow (a-1)^2=4\Rightarrow a-1=\pm 2\Rightarrow a=3, a=-1$$

هندسهٔ ۱

۱ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ زیرا در مثلث CDE، اندازهٔ زاویهٔ D مساوی 80° است. پس $x=80^\circ$ و در پنج ضلعی محدب ABCEF، که مجموع زاویه‌هایش 540° است، اندازهٔ زاویهٔ $\hat{B}$، یعنی $y=100^\circ$ است ؛ بنابراین $x+y=180^\circ$ است.



۲ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است ؛ زیرا در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ ABH و ACH، $MH=\frac{1}{2}AB$ و $NH=\frac{1}{2}AC$ ، و در مثلث ABC، $MN=\frac{1}{2}BC$ است ؛ پس :

$$MH+MN+NH$$
$$=\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}BC+\frac{1}{2}AC$$
$$=\frac{1}{2}(AB+BC+AC)$$

$\Rightarrow MM+$ محیط مثلث $=\frac{1}{2}\times ABC$ محیط مثلث

۳ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ زیرا بدون برداشتن قلم از روی صفحهٔ کاغذ، این شکل رسم نمی‌شود.

۴ ـ گزینهٔ (۴) درست است ؛ زیرا داریم :

مستطیل $S=12\times 18=216$,
مثلث $S=\frac{1}{2}a.h_a\Rightarrow\frac{1}{2}\times 24\times h_a=12h_a$
$\Rightarrow 216=12h_a\Rightarrow h_a=18$

۵ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است ؛ زیرا داریم :

$$x(x+2)=\frac{1}{2}\times 6\times 8\Rightarrow x^2+2x-24=0\Rightarrow$$

قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع

$$x=-6<0\ ,\ x=4\Rightarrow x+2=4+2\doteq 6$$

۶ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ زیرا مساحت هر

چهارضلعی که قطرهایش بر هم عمود باشد، برابر نصف حاصلضرب اندازهٔ دو قطر آن است ؛ پس :

$S_{\text{چهار ضلعی}} = \frac{۱}{۲}\times ۳۶\times ۲۴ = ۴۳۲$

۷ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ زیرا داریم :

S شش ضلعی منتظم = S ذوزنقه

$S \Rightarrow \frac{۱}{۲}(۸+۱۲)\times ۶ = \frac{۱}{۲}\times ۶\times a\times ۴$

$\Rightarrow ۶۰ = ۱۲a \Rightarrow a = ۵$

اندازهٔ ضلع شش ضلعی منتظم

۸ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است ؛ زیرا داریم :

$\frac{x+۲}{x} = \frac{x+۴}{۷/۵} \Rightarrow x^۲+۴x = ۷/۵x+۱۵$

$\Rightarrow x^۲ - ۳/۵x - ۱۵ = ۰$

$\Rightarrow x = -۲/۵ < ۰ ,\ x = ۶ \Rightarrow AE = ۸ ,\ AC = ۱۴$

$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = (\frac{AE}{AC})^۲ = (\frac{۸}{۱۴})^۲ = \frac{۱۶}{۴۹}$

۹ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است ؛ زیرا شعاع قاعدهٔ استوانه محاط در این منشور، برابر نصف ضلع مربع قاعدهٔ منشور است و ارتفاع استوانه، برابر ارتفاع منشور است ؛ یعنی داریم :

$R = ۱۲ \div ۲ = ۶ ,\ h = ۱۸$

$\text{حجم استوانه} = \pi R^۲ h = \pi(۶)^۲\times ۱۸ = ۶۴۸\pi$

۱۰ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است ؛ زیرا نسبت مساحت سطح دو کره، برابر مجذور نسبت شعاعهای آنهاست و نسبت حجم دو کره، برابر مکعب نسبت شعاعهای آنها ؛ پس داریم :

$\frac{S_۱}{S_۲} = \frac{۴}{۹} = (\frac{۲}{۳})^۲$

$\Rightarrow \frac{R_۱}{R_۲} = \frac{۲}{۳}$

$\frac{V_۱}{V_۲} = (\frac{R_۱}{R_۲})^۳ = (\frac{۲}{۳})^۳$

$= \frac{۸}{۱۷}$

ریاضیات ۵

۱ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ زیرا داریم :

$f(۱) = ۱-۲ = -۱ ,\ f(۳) = ۳a+۲ ,$

$f(۱)f(۳) = -۵ \Rightarrow$

$-۳a-۲ = -۵ \Rightarrow a = ۱ \Rightarrow ۲a = ۲$

۲ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ زیرا در تابعهای اصم با فرجهٔ فرد، دامنهٔ تابع، همان دامنهٔ عبارت زیر رادیکال است و دامنهٔ تعریف دو جمله‌ای $۲x-۱$ نیز $\mathbb{R}$ است.

۳ ـ گزینهٔ (۳) درست است ؛ زیرا داریم :

$(fog)(۳) = f(g(۳)) ,\ g(۳) = \frac{۱}{۳-۲} = ۱ \Rightarrow$

$f(g(۳)) = f(۱) = (۱)^۲ - ۴\sqrt{۱} = ۱-۴ = -۳$

۴ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است ؛ زیرا داریم :

$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = ax+۲+(۲-۳_a)$

$x+۳ = (۲-۲a)x+۵$

$\Rightarrow (f+g)(-۱) = (۲-۲a)(-۱)+۵ = ۲a+۳ = ۵ \Rightarrow a = ۱$

۵ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ زیرا داریم :

$\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{x+۱}-۱}{Sin۳x} = \lim_{x\to ۰}\frac{(x+۱-۱)}{Sin۳x(\sqrt{x+۱}+۱)} =$

$\lim_{x\to ۰}\frac{x}{Sin۳x(\sqrt{x+۱}+۱)} = \frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۶}$

۶ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ زیرا داریم :

$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = ۳ \Rightarrow ۱-a = ۳ \Rightarrow a = -۲$

$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = ۳ \Rightarrow b-۱ = ۳ \Rightarrow b = ۴$

$\Rightarrow a+b = -۲+۴ = ۲$

۷ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ زیرا داریم :

$f'(x) = ۲Cos(۲x-\frac{\pi}{۶}) - ۲Sin۲x \Rightarrow$

$f'(\frac{\pi}{۲}) = ۲Cos(n-\frac{\pi}{۶}) - ۲Sin\pi \Rightarrow$

$۲Cos\frac{۵\pi}{۶} - ۲Sin\pi = ۲(\frac{-\sqrt{۳}}{۲}) - ۲(۰) = -\sqrt{۳}$

۸ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ زیرا داریم :

$f'(x) = \frac{۳(x-۲)-۱(۳x-۱)}{(x-۲)^۲} = \frac{-۵}{(x-۲)^۲} \Rightarrow f'(x) < ۰$

۹ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ زیرا :
اولاً : مختصات نقطهٔ A در معادلهٔ منحنی صدق می‌کند ؛ پس داریم :

(۱) $A = (۳,-۱۶) \xrightarrow{\text{در معادله}} -۱۶ = ۹a + ۳b - ۷ \Rightarrow ۹a+۳b = -۹$

ثانیاً : طول نقطهٔ ماکزیمم یا مینی‌موم A، ریشهٔ مشتق اول تابع است ؛ یعنی داریم :
(۲)

$f'(x) = ۲ax+b \Rightarrow ۰ = ۲a(۳)+b \Rightarrow$
$۶a+b = ۰$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود : a=۱ و b=-۶

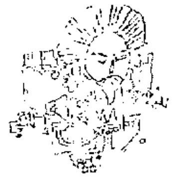
۱۰ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ زیرا داریم :

$x = -۱ \xrightarrow{\text{در تابع}} y = -۲-۱-۵-۱ = -۹ \Rightarrow$

نقطه تماس M=(-۱,-۹)

$y' = f'(x) = ۶x^۲-۲x+y \Rightarrow m_{\text{تماس در }M} = ۶(-۱)^۲ -۲(-۱)+۵ = ۱۳$

$\Rightarrow y-y_۱ = m(x-x_۱) \Rightarrow y+۹ = ۱۳(x+۱) \Rightarrow$
$y = ۱۳x+۴$



حسابان ۱

۱ ـ گزینهٔ (۴)

گزینهٔ (۱) : $D_f = \mathbb{R} - \{۰\}$

گزینهٔ (۲) : $D_f = \mathbb{R} - \{-۱\}$

گزینهٔ (۳) : $D_f=(-\infty,a]\cup[b,+\infty)$

a و b ریشه‌های داخل رادیکال است، زیرا $\Delta>0$.

گزینهٔ (۴) :

$$f_{(x)}=\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|\quad D_f=\mathbb{R}$$

۲ ـ گزینهٔ (۳) برای این‌که f فرد باشد، باید

$$f(-x)+f(x)=0$$

$$f(-x)+f(x)=\log(\sqrt{a^2x^2+1}+3x)+\log(\sqrt{a^2x^2+1}+-3x)$$

$$f(-x)+f(x)=\log(a^2x^2+1-9x^2)=\log(1)=0$$

$$a^2=9\Rightarrow a=\pm3$$

۳ ـ گزینهٔ (۲)

$$R=P(a)=a^3+3a^2+3a=28$$

$$a^3+3a^2+3a+1=27\Rightarrow(d+1)^3=27\Rightarrow a+1=3\Rightarrow a=2$$

۴ ـ گزینهٔ (۲)

$$g(x)=f(\frac{1}{x})-4$$

$$f(\frac1x)=y\Rightarrow f^{-1}(y)=\frac1x\Rightarrow x=\frac{1}{f^{-1}(y)}$$

$$g(x)=y-4\Rightarrow g^{-1}(y-4)=x$$

$$g^{-1}(y-4)=\frac{1}{f^{-1}(y)}\quad y\xrightarrow{\text{تبدیل}}x+4$$

$$g^{-1}(x)=\frac{1}{f^{-1}(x+4)}$$

۵ ـ گزینهٔ (۳)

$$\text{Cot}x-\tan x=\frac{\text{Cox}}{\text{six}}-\frac{\sin x}{\text{Cox}}=\frac{\text{Cox}^2-\sin^2x}{\sin x\ \text{Cox}}=\frac{\text{Co}2x}{\frac12\sin2x}=2\text{Cot}2x$$

۶ ـ گزینهٔ (۱)

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{3x}-3}=\frac00\times\frac{\sqrt{2x+3}+3}{\sqrt{2x+3}+3}\times\frac{\sqrt{3x}+3}{\sqrt{3x}+3}$$

$$=\lim\frac{(2x+3-9)(\sqrt{3x}+3)}{(3x-9)(\sqrt{2x+3}+3)}=\lim_{x\to3}\frac{2(x-3)(\sqrt{3x}+3)}{3(x-3)(\sqrt{2x+3}+3)}=\frac{2(6)}{3(6)}=\frac23$$

$x\to3$

۷ ـ گزینهٔ (۴)

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin2x}{\sqrt{1-\cos2x}}\sim\lim_{x\to0}\frac{2x}{\sqrt{2x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{\sqrt2|x|}$$

حدّ راست

الف: $\lim_{x\to0^+}\frac{2x}{\sqrt2|x|}=\frac{2}{\sqrt2}=\sqrt2$

ب: $\lim_{x\to0^-}\frac{2x}{\sqrt2|x|}=\frac{-2}{\sqrt2}=-\sqrt2$ حدّ چپ

۸ ـ گزینهٔ (۲)

$$f(x)=\frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x+\frac32}}{(x+1)(x+2)(x-4)=0}$$

$x=-1\quad x\to-1\Rightarrow f(x)=\frac00$

$=\frac{2\sqrt{\frac12}}{-5}$ غیرقابل قبول

$x=-2\ ;\sqrt x=\sqrt{-2}$ غیرقابل قبول

$x=4\quad x\to4\Rightarrow f(x)\to\infty$ قابل قبول

۹ ـ گزینهٔ (۴)

$$\lim_{n\to2^+}f(x)=-1+a$$

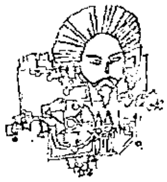
$$\lim_{n\to2^-}f(x)=2+2a\quad 2+2a=-1+a\Rightarrow a=-3$$

۱۰ ـ گزینهٔ (۱)

$$y=f(\sqrt[3]{x^2})\qquad f'(x)=\frac1x$$

$$y'_x=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}f'(\sqrt[3]{x^2})=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\times\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{2}{3x}$$

$$y'_x=1\quad=\frac23$$



هندسه تحلیلی پیش‌دانشگاهی

۱ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است. راه اوّل، بین نقطه‌های داده شده، تنها نقطهٔ M´=(۰، ۴-، ۵) است که بردار MM´=(۲-، ۲-، ۴) بر صفحهٔ P عمود است.

راه دوم، مختصات وسط پاره خط MM´ در معادلهٔ صفحهٔ P، باید صدق کند، که این ویژگی تنها برای نقطهٔ (۰ و ۴ـ و ۵) صحیح است.

راه سوّم، مختصات نقطهٔ H پای عمودی را که از M بر صفحهٔ P رسم می‌شود، به‌دست می‌آوریم و آن‌گاه نقطهٔ M´ را طوری تعیین می‌کنیم که H وسط پاره‌خط MM´ باشد.

۲ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است ؛ داریم :

$$M=(1,1,1),\ B=(a,-1,2),\ BM=3$$

$\Rightarrow AC$ وسط

$$\sqrt{(a-1)^2+(1+1)^2+(1-2)^2}=3$$

$$\Rightarrow(a-1)^2=4\Rightarrow a-1=\pm2\Rightarrow a=3,a=-1$$

۳ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است.

$$a=-2i+j-6k\Rightarrow-\frac23a=\frac43i-\frac23j+4k$$

به طوری که دیده می‌شود، تصویر $-\frac23a$ روی محور Zها برابر ۴+ است.

۴ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ داریم :

$$a=(-1,0,1),\ b=(2,2,2)\Rightarrow a\times b=(-2,4,-2)$$

$$c=(3,-1,4)\Rightarrow c=(a\times b)=(3)(-2)+(-1)(4)+(4)(-2)=-6-4-8=-18$$

۵ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است.

$D: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1} \Rightarrow \vec{V}_D = (2,1,-1),\ A = (-2,1,3)$

$B = (-1,0,2) \in D,\ AH = d = \frac{|\vec{AB}\times\vec{V}|}{|\vec{V}|}$

$\vec{AB} = (1,-1,-1) \quad \vec{AB}\times\vec{V} = (2,-1,3) \Rightarrow$

$|\vec{AB}\times\vec{V}| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14} \quad |\vec{V}| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$

$\Rightarrow d = AH = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{21}}{3}$

۶ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ داریم :

$\vec{V}_{P_1} = (1,0,1), \quad \vec{V}_{P_2} = (0,1,2), \quad A = (1,2,-4)$

بردار عمود بر صفحهٔ مورد نظر

$\vec{V}_{P_1} \times \vec{V}_{P_2} = (-1,-2,1)$

$\Rightarrow a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \Rightarrow$

$-1(x-1)-2(y-2)+1(z+4)=0 \Rightarrow -x-2y+z+9=0$

۷ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، فصل مشترک صفحه‌ای که به فاصلهٔ ۳ از صفحهٔ P و با ارتفاع از مبدأ بیشتر می‌باشد، با صفحهٔ P جواب مسأله است ؛داریم :

$3 = \frac{|2x+2y-z+4|}{\sqrt{4+4+1}} \Rightarrow |2x+2y-z+4| = 9 \Rightarrow$

$p_1: 2x+2y-z-5=0,\ p_2: 2x+2y-z+13=0$

$$\begin{cases}\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+5}{7}=t \Rightarrow x=2t+1, y=\\ 3t-1, z=7t-5\\ 2n+2y-z+13=0\end{cases}$$

$\Rightarrow 4t+2+6t-2-7t+5+13=0 \Rightarrow t=-6 \Rightarrow$

$A=(-11,-19,-47)$

۸ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است. باید بردارهای $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ همراستا باشند.

$\vec{AB} = (4-a,-1-1,0-2) \Rightarrow \vec{AB} = (4-a,-2,-2)$

$\vec{AC} = (2-a,a+b-2,4-2) \Rightarrow \vec{AC} = (2-a,a+b-2,2)$

$\Rightarrow \frac{4-a}{2-a} = \frac{-2}{a+b-2} = \frac{-2}{2} \Rightarrow \begin{cases}4-a=-2+a\\ a+b-2=2\end{cases} \Rightarrow$

$a=3,\ b=1$

۹ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است. نقطهٔ برخورد صفحهٔ $p = x-2y+z+4=0$ با محور yها نقطهٔ $M=(0,2,0)$ است و صفحهٔ عمود بر محور yها در این نقطه، به معادلهٔ $y=2$ است.

۱۰ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است ؛ داریم :

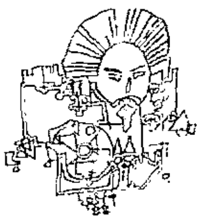
$$\begin{cases}x+z+4=0\\ 2x+y-z+4=0\\ -x+z=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x+z=-4\\ -x+z=2\end{cases} \Rightarrow z=-1 \Rightarrow$$

$x=-3,\ 2x+y-z+4=0 \Rightarrow$

$2(-3)+y-(-1)+4=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow$

$M=(-3,1,-1)$

نقطهٔ همرسی سه صفحه



جبر خطی پیش‌دانشگاهی

۱ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ زیرا اگر در دترمینان دومی، جای ستون اوّل و سوّم را عوض کنیم ؛ داریم :

$$\begin{vmatrix}2&5&4\\4&2&1\\1&7&2\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}2&5&4\\4&2&1\\1&7&2\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}4&2&-1\\3&5&4\\6&10&8\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}4&2\\3&5\end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix}4&2&-1\\3&5&4\\3&5&4\end{vmatrix} + 12 = 12$$

۲ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است ؛زیرا :

$|(A^*)^T| = |A^*| = |A|^{n-1},\ |A| = -1\times\begin{vmatrix}0&-2\\3&4\end{vmatrix} = -6$

$\Rightarrow |(A^*)^T| = (-6)^{3-1} = 36$

۳ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ زیرا اگر A ماتریس از مرتبهٔ n باشد، داریم :

$|\alpha A| = \alpha^n|A|$ ؛ بنابراین :

$\left|\sqrt[3]{3}A\right| = (\sqrt[3]{3})^6|A| = 9\times 3 = 27$

۴ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ زیرا گزینهٔ ۱ سه بردار در فضای برداری R^2 است که وابستهٔ خطی‌اند و بردارهای گزینه‌های ۲ و ۳ در یک راستا می‌باشند ؛ پس وابسته خطی هستند. در گزینهٔ (۴) داریم :

$$\begin{vmatrix}2&\frac{1}{2}\\6&3\end{vmatrix} = 6-3 = 3 \neq 0$$

پس بردارهای گزینهٔ (۴) مستقل خطی‌اند.

۵ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است ؛ زیرا :

$f(2,1,-1) = 2f(1,0,0)+f(0,1,0)-f(0,0,1)$

$= 2(2,2)+(1,-1)-(-1,2) = (6,1)$

۶ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ زیرا A ماتریس از مرتبهٔ ۳×۲ است، پس $fog:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$، درنتیجه $g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^k$ و $f:\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^2$.

۷ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ زیرا :

$K = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=0\}$

$f(x,y,z)=(0,0) \Rightarrow (x,0)=(0,0) \Rightarrow x=0$

درنتیجه داریم :

$K = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=0\} = \{(0,y,z) \mid y,z\in\mathbb{R}\}$

هستهٔ نگاشت صفحه yoz است، پس بعد هسته برابر ۲ است.

۸ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ چون f نگاشت یک به یک است، بنابراین هستهٔ مجموعه‌ای تک‌عضوی، شامل $(0,0,0)\in\mathbb{R}^3$ است.

۹ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است ؛زیرا :

$$f(x,y)=(x',y')\Rightarrow\begin{cases}x+y=x'\Rightarrow x=x'-y'\\ y=y'\end{cases}$$

$$y=2x\Rightarrow y'=2(x'-y')\Rightarrow 2x'=3y'$$

۱۰ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ زیرا می‌دانیم $f(ej)=A^j$ ، بنابراین داریم :

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\ ;\ A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$f^{-1}(3,-3)=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3\\ -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 0\end{bmatrix}$$

۱۱ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است ؛ زیرا می‌دانیم $R_{2\pi}=I$ ، از طرفی داریم :

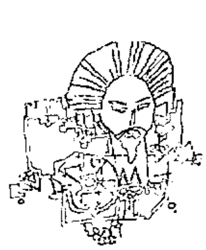
$$A=R_{\frac{\pi}{4}}\Rightarrow A^8=R_{2\pi}=I$$

$$A^{1379}=(A^8)^{172}\times A^3=I^{172}\times A^3=A^3$$

$$A^3=\begin{bmatrix}Cos135^\circ & -Sin135^\circ\\ Sin135^\circ & Cos135^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sqrt{\frac{2}{2}} & -\sqrt{\frac{2}{2}}\\ \sqrt{\frac{2}{2}} & -\sqrt{\frac{2}{2}}\end{bmatrix}$$

۱۲ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ زیرا :

$$A^2+A=I\Rightarrow\begin{cases}A(A+I)=I\\ (A+I)A=I\end{cases}\Rightarrow A^{-1}=A+I$$



حساب دیفرانسیل و انتگرال ۱

۱ ـ گزینهٔ (۳)، پس دنباله همگراست ؛ بنابراین کراندار است :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^2+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2}=1$$

$$a_n=\frac{n^2+1}{n^2+2}=\frac{n^2+2-1}{n^2+2}=1-\frac{1}{n^2+1}$$

باافزایش n، $\frac{1}{n^2+1}$ کاهش می‌یابد ؛ درنتیجه جمله‌های دنباله، به‌طور مرتّب افزایش می‌یابند، بنابراین دنباله صعودی است.

۲ ـ گزینهٔ (۲)

$$a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{2k}(x-4)^k=\left(\frac{1}{9}\right)^k(x-4)^k=\left(\frac{x-4}{9}\right)^k$$

$$-1<r<1\Rightarrow -1<\frac{x-4}{9}<1\Rightarrow -9<x-4<9\Rightarrow -5<x<13$$

توضیح سری $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x-4}{9}\right)^k$ برای این‌که همگرا باشد باید هندسی با $-1<r<+1$ باشد.

۳ ـ گزینهٔ (۴)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\lfloor Sinx+Cosx\rfloor=\lim_{n\to\frac{\pi}{4}}\left\lfloor\sqrt{2}Sinx\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right\rfloor$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+}\left\lfloor\sqrt{2}\,Sinx\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right\rfloor$$

$$=\left\lfloor\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}^-}{2}\right\rfloor=\lfloor 1^-\rfloor=0$$ حدّراست

$$\lim\left\lfloor\sqrt{2}\,Sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right\rfloor$$

$$=\left\lfloor\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}^+}{2}\right\rfloor=\lfloor 1^+\rfloor=1$$ حدّچپ

۴ ـ گزینهٔ (۴)

$$f(x)=(x^2+ax+b)\lfloor x\rfloor+2x^2$$

برای این‌که تابع دراعداد صحیح $x=2$ و $x=1$ پیوسته باشد، باید جملهٔ $\lfloor x\rfloor$ حذف شود ؛ پس‌لازم است. $x^2+ax+b=0$ ، $x=1$ و $x=2$ جوابهای این معادله‌اند :

۵ ـ گزینهٔ (۲) درتابع درجهٔ سوّم نقطهٔ عطف وسط Max و Min است :

$$y=x^3-3x^2+m$$

$$x_F=-\frac{b}{3a}=-\frac{-3}{3}=1\ ,\ y_F=\frac{y_{Max}+y_{Min}}{2}=\frac{10}{2}=5$$

$$F|^1_5\xrightarrow{\text{درمعادلهٔ تا}}5=1-3+m\Rightarrow m=7$$

۶ ـ گزینهٔ (۲)

$$f(x)=x^n\ ,\ f'(x)=nx^{n-1}\ ,$$

$$f''(x)=n(n-1)x^{n-2}$$

$$f'''(x)=n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

چون درجهٔ f(x) مورد سؤال است، لذا ضرایب را نمی‌نویسیم :

$$x^4(x^n)=x^{n-1}\times x^{n-2}\times x^{n-3}$$

$$\Rightarrow n+4=3n-6\Rightarrow n-5$$

۷ ـ گزینهٔ (۴) : چون طول از مبدأ و عرض از مبدأ مماسها برابرند، پس مماسها موازی نیمسازها می‌باشند ؛ بنابراین $m=\pm1$

شیب‌مماسها = مشتق

معادلهٔ خطی که نقاط تماس را به‌هم وصل می‌کند :

$$y'_x=-\frac{x}{y}=\pm1\Rightarrow y=\pm x$$

۸ ـ گزینهٔ (۱)

$$y=\frac{x^2}{\pm x}\Rightarrow y=\pm x$$

$$y=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\quad x\to\pm\infty\ ؛$$

۹ ـ گزینهٔ (۲)

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)^n\lfloor x-a\rfloor}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}(x-a)^{n-1}\lfloor x-a\rfloor=0\ ,\ y=\frac{x^2}{\pm x}\Rightarrow y=\pm x$$

باید $n-1\geq1$ یا $n\geq2$ تا جملهٔ $(x-a)^{n-1}$ وجود داشته باشد.

۱۰ ـ گزینهٔ (۱)

$$y = \sqrt[۳]{x^۲} + \sqrt[۴]{x^۳}$$

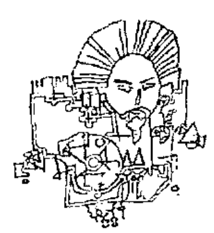
$$۴۰۹۶ = ۲^{۱۲}$$

$$y'_t = \left(\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}} + \frac{۳}{۴\sqrt[۴]{x}}\right)x'_t$$

$$= \left(\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{۲^{۱۲}}} + \frac{۳}{۴\sqrt[۴]{۲^{۱۲}}}\right)\times ۱۲$$

$$y'_t = \left(\frac{۲}{۳(۲^۴)} + \frac{۳}{۴(۲^۳)}\right)(۱۲)$$

$$= \left(\frac{۲^۳}{۲^۴} + \frac{۹}{۲^۳}\right) = \frac{۱}{۲} + \frac{۹}{۸} = \frac{۱۳}{۸}$$



ریاضی عمومی۱

۱ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است ؛ زیرا :

$$\bar{x} = \frac{\sum xi}{n} = \frac{۱۵۸}{۶} = ۲۶/\bar{۳}$$

$$\delta^۲ = \frac{\sum (xi - \bar{x})^۲}{n} = \frac{۲۰۰۷/۳۴}{۶} = ۳۳۴/۵۵\bar{۶}$$

$$\Rightarrow \delta = \sqrt{۳۳۴/۵۵\bar{۶}} \sim ۱۸/۲۹$$

$$cv = \frac{\delta}{\bar{x}} = \frac{۱۸/۲۹}{۲۶/۳} = ۰/۶۹$$

۲ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است ؛ زیرا طول دسته‌ها از دستور $C = \frac{R}{K}$ به دست می‌آید ؛ در صورتی که K دو برابر، آن گاه C نصف می‌شود.

۳ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ زیرا :

$$n(s) = \binom{۱۲}{۲} = \frac{۱۲!}{۲!\times ۱۰!} = ۶۶$$

دو مهره همرنگ نباشند ؛ یعنی یک مهرهٔ سفید و یک مهرهٔ سیاه باشد، بنابراین داریم :

$$n(A) = \binom{۷}{۱}\binom{۵}{۱} = ۳۵$$

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳۵}{۶۶}$$

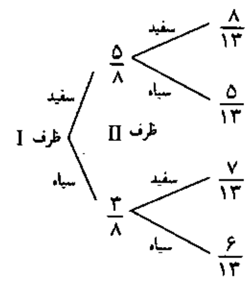
۴ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است ؛ زیرا :

مهره اول سفید $p(A) = \frac{۶}{۱۳}$

مهره دوم سفید $p(B) = \frac{۶}{۱۳}$

$$p(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \left(\frac{۶}{۱۳}\right)^۲$$

۵ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ زیرا :



$$P(A) = \frac{۵}{۸}\times\frac{۸}{۱۳} + \frac{۳}{۸}\times\frac{۷}{۱۳} = \frac{۶۱}{۱۰۴}$$

۶ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ زیرا شرط این که دستگاه معادله های همگن، جواب غیر صفر داشته باشد، این است که دترمینان ضرایب آن برابر صفر باشد ؛ بنابراین داریم :

$$\begin{vmatrix} m-۱ & ۴ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} = ۰ \Rightarrow ۲(m-۱) - ۴ = ۰$$

$$\Rightarrow m = ۳$$

۷ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است ؛ زیرا :

$$(m-۱)x + ۲y - m + ۵ = ۰$$

$$\Rightarrow mx - x + ۲y - m + ۵ = ۰$$

$$\Rightarrow m(x-۱) + (-x + ۲y + ۵) = ۰$$

$$\begin{cases} x - ۱ = ۰ \\ -x + ۲y + ۵ = ۰ \end{cases} \Rightarrow x = ۱, y = -۲ \quad \text{معادله دسته‌خط}$$

۸ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است ؛ زیرا در بسط $(a-b)^n$ جملهٔ kام به صورت زیر به دست می‌آید :

$$t_k = (-۱)^{k+۱}(k^n - ۱)\, a^{n-(k-۱)}\, b^{k-۱}$$

$$t_k = (-۱)^{k+۱}(k^۴ - ۱)(۲x)^{۴-k+۱}(۳x^۲)^{k-۱}$$

$$t_k = (-۱)^{k+۱}(k^۴ - ۱)(۲)^{۵-k}(۳)^{k-۱}x^{k+۳}$$

$$\Rightarrow x^{k+۳} = x^۶ \Rightarrow k = ۳$$

$$x^۶ \text{ ضریب } = \binom{۴}{۲}\times(۲)^۲\times(۳)^۲ = ۲۱۶$$

۹ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ زیرا :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^۲+۱}{۲n^۲+n+۳} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^۲}{۲n^۲} = \frac{۱}{۲}$$

۱۰ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است ؛ زیرا :

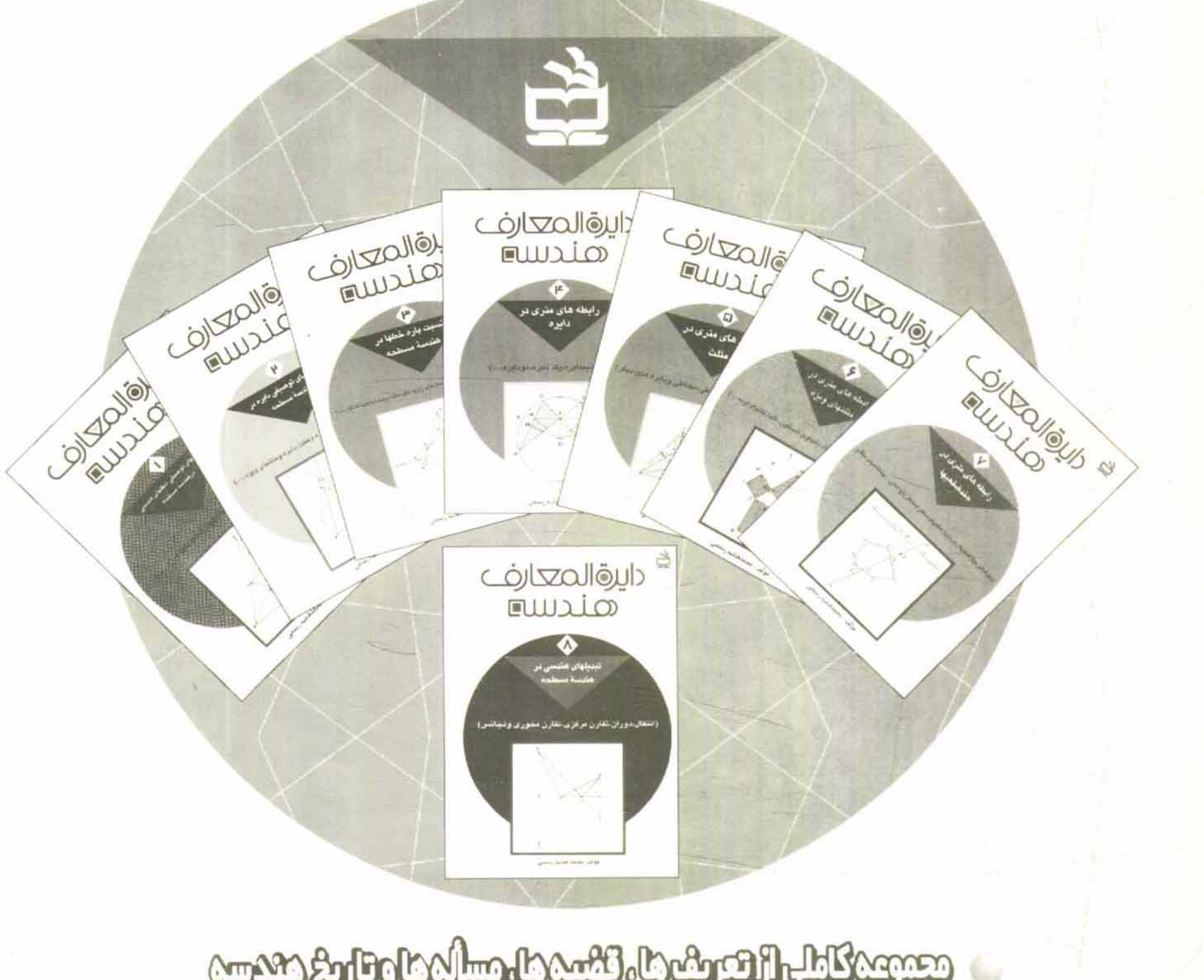
$$\begin{array}{l|l} ۳x^۲ - mx + ۱ & x - ۱ \\ \cline{2-2} \underline{-۳x^۲ + ۳x} & ۳x + (۲-m) \\ (۳-m)x + ۱ & \\ \underline{-(۳-m)x + ۳ - m} & \\ ۴ - m & \end{array}$$

$$۳x + ۳ - m = ۳x + ۲$$

$$\Rightarrow ۳ - m = ۲ \Rightarrow m = ۱$$

گروه ریاضی انتشارات مدرسه در سال جهانی ریاضیات
منتشر کرده است

دایرة المعارف
هندسه



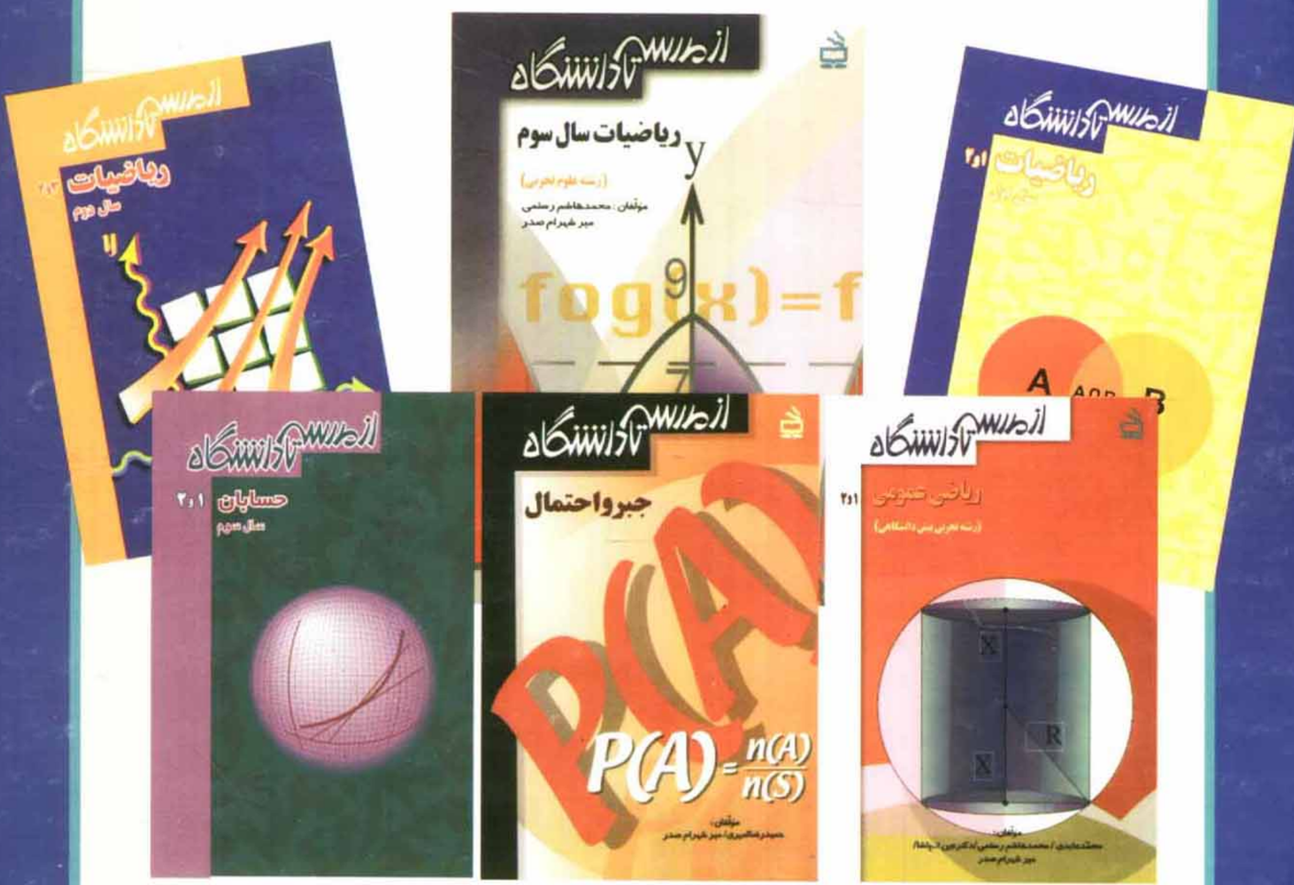
- مجموعه کاملی از تعریف ها، قضیه ها، مسأله ها و تاریخ هندسه
- تاکنون ۸ جلد به چاپ رسیده و در هر جلد به تفکیک به موضوعهای مختلف هندسه پرداخته شده است
- راجع به هر مسأله یا قضیه در هندسه به راحتی اطلاعات جامع در دسترس شماست .

ناشر برگزیده
سالهای ۷۳،۷۵
۷۹

انتشارات مدرسه منتشر کرده است
سری کتابهای «از مدرسه تا دانشگاه»

هدف از چاپ سری کتابهای «از مدرسه تا دانشگاه» پر کردن خلأ موجود بین کتابهای کمک درسی و کتابهای آمادگی برای کنکور است.

دانش آموزان با مطالعهٔ این سری کتابها، اطلاعات لازم، اعم از مفاهیم درسی، نکته های پنهان در لابه لای این مفاهیم و قضیه ها و مسائل مهم را کسب کرده و با پرسشهای چهارگزینه ای و حل تشریحی آنها و آزمونهای چهارگزینه ای آشنا می شوند، تا هم برای پاسخ گویی به پرسشهای تشریحی و هم برای شرکت در کنکورهای سراسری آمادگی پیدا کنند.



کتابهای زیر از این سری در دست چاپ است:

۱ - ریاضیات گسسته

۲ - هندسه تحلیلی و جبر خطی

انتشارات مدرسه

511574

کد ۹۵۳/۱