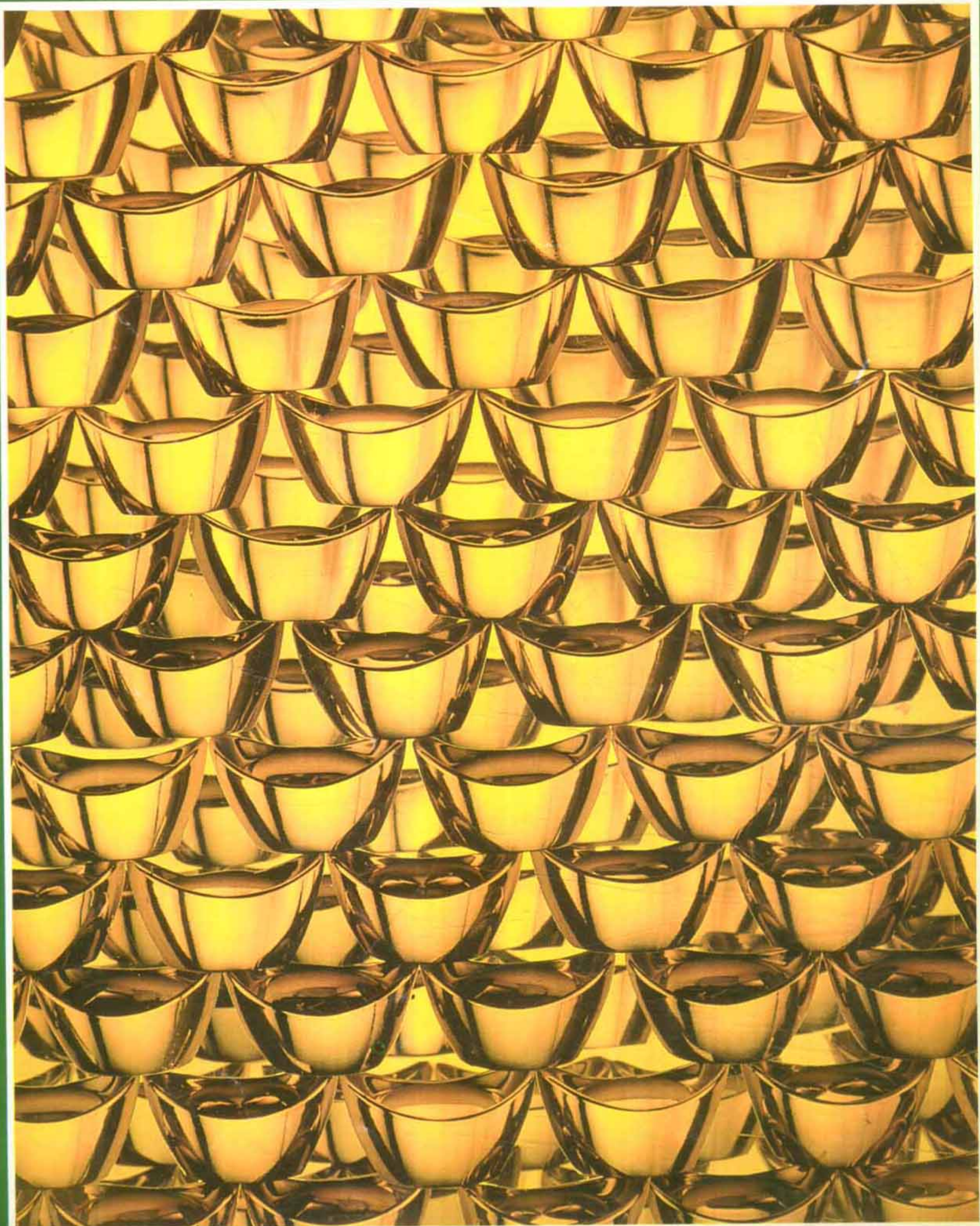
مجلّه ریاضی

برهان

برای دانش آموزان دبیرستان

۳۵

سال یازدهم ، شمارهٔ اول ، تابستان و پاییز ۱۳۸۰ ، بها ۳۰۰۰ ریال



بسم الله الرحمن الرحیم

برهان

سال یازدهم
تابستان ۱۳۸۰
شمارهٔ اول

وابسته به وزارت آموزش و پرورش
صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه
مدیر مسؤول: محمد صادق عزیزی
سردبیر: حمیدرضا امیری
مدیر داخلی: میرشهرام صدر
طراح گرافیک: فرشید پیمان‌پو
مدیر فنی: هوشنگ آشتیانی
رسام: فرشید پیمان‌پو
اعضای هیأت تحریریه: حمیدرضا امیری، محمدهاشم رستمی، احمد قندهاری، میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی، سیدمحمدرضا هاشمی موسوی، غلامرضا یاسی‌پور
(با تشکر از همکاری ارزندهٔ آقای پرویز شهریاری)
چاپ و صحافی: چاپخانه مدرسه

نشانی: خیابان سپهبد قرنی، خیابان سپند شرقی، پلاک ۳۸، صندوق پستی: ۱۹۴۹ / ۱۴۱۵۵
تلفن: ۶ - ۸۸۹۶۷۶۵، دورنویس (فاکس): ۸۹۰۳۸۰۹، تلفن امور مشترکین: ۹ - ۸۸۰۰۳۲۴

برهان

تمامی دبیران محترم و دانش آموزان عزیز را در زمینه های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

- نگارش مقاله های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتابهای ریاضی دبیرستان)
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آنها (برای دانش آموزان)
- طرح مسائل مسابقه ای به همراه حل آنها (برای دانش آموزان)
- طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمهٔ مقاله های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و...)

برهان

هر سه ماه یک شماره منتشر می شود

- هیأت تحریریه در حک و اصلاح و حذف و اضافه مقاله ها آزاد است.
- مقاله های مجله با رسم الخط انتشارات مدرسه به چاپ خواهد رسید.
- مقاله های وارده باید خوانا و حتی الامکان کوتاه باشد.
- مقاله های رسیده مسترد نمی‌شود.
- استفاده از مطالب مجله در کتابها یا مجله های دیگر با ذکر دقیق مأخذ بلامانع است.

حرف اوّل

می خواستم اعداد اول را درس بدهم، تاریخچهٔ مختصری از اعداد اول و کاربردهای آن را به عنوان «سنج» برای هم نهشتی هایی که در نظریهٔ رمزنگاری و رمزگشایی مورد استفاده قرار می گیرد را بازگو کردم، کم کم احساس کردم دانش آموزان نگاهشان عوض شده و گویی می خواهند حرفی بزنند، بالاخره یکی از آنها به خود جرأت داده و گفت ببخشید آقا، این اطلاعات به درد کنکور می خورد؟ جواب او را چه باید می دادم؟ از یک طرف حق داشت که نگران کنکورش باشد و از طرف دیگر، من هم به خودم حق می دادم تا برای ایجاد انگیزه و فهم عمیق مطالب از طرف دانش آموزانم مطالب جانبی در ارتباط با موضوع مطرح کنم.

مسألهٔ کنکور یا بهتر بگویم معضل کنکور، واقعاً به جایی رسیده که می توان گفت، «تیشه به ریشهٔ آموزش و پرورش می زند». بچه ها (و از آن بالاتر خانواده ها) از کلاس پنجم ابتدایی درگیر مسألهٔ کنکور هستند، و مرتب این جریان، دامن زده شده و همواره به سمتی می رود که هیچ نقطهٔ روشن و آینده نگری و حتی برنامه ریزی هدف دار در آن مشاهده نمی شود.

اصلاح این جریان و گزینش صحیح و برنامه ریزی شده، نیاز به عزم ملّی و اراده ای قوی دارد که در ملّتی استوار چون ملّت ایران یافت می شود، برای آگاهان نسبت به مسائل آموزش و پرورش و کلاسهای درس این موضوع قابل لمس است که کنکور موجب از بین رفتن بنیانها و ریشه های علم در ایران شده است و اگر امروز برای این موضوع، فکر اساسی نشود، فردا دیر است. فردایی که شما دانش آموزان و شما آینده سازان، باید به دست توانای خود و با قدرت علم و ایمان واقعی بسازید، فردایی که می بایست شرایط شکوفا شدن در آن برای شما ایجاد شود، فردایی که از دیروز و روزهای قبل به آن فکر کرده اید و هدف خود را امروز مشخص نکرده اید.

شما دانش آموزان باید حداکثر در سالهای اول و دوم دبیرستان علاقه های خود را شناخته و هدف خود، حتی شغل خود را تعیین کرده باشید، نه این که در زمان تعیین رشته، آن هم فقط با اسم رشتهٔ خود و احتمالاً شغل خود آشنا شوید.

عزیزان دانش آموز، در هر مقطعی از تحصیل که هستید به فکر شناسایی علاقه ها و رشته های مورد نظر خود باشید و امیدوار به آینده و سعی کنید مطالب را عمیق و با درک صحیح یاد بگیرید که در هر صورت می توانید از آنها استفاده کنید.

والسلام ـ سردبیر

ریاضیات ملتهای هند

(از: ا.ای. والودارسکی)

● پرویز شهریاری

ورود به مطلب

ملتهای هند در ژرفای تاریخ، دارای چنان فرهنگ غنی و ویژه‌ای بودند که اثر بی‌اندازه‌ای در پیشرفت فرهنگ ملتهای دیگر باقی گذاشت. کاوشهایی که در «مو هِن جُو دارو»، «هاراپ» و دیگر نقطه‌های سرزمین هند انجام گرفته، ثابت می‌کند که این نقطه‌ها، حتی در سه هزار سال پیش از میلاد، دارای کانالهای آبیاری و دستگاه آبرسانی شهری بوده‌اند و در بافندگی و هنرجواهرسازی، پیشرفت بسیار کرده بودند. در کاوشهای «مو هِنْ جُو دارُو» و «هاراپ» از جمله خط‌کشی به دست آمده که در دستگاه دهدهی، بخش‌بندی شده است.

از سدهٔ چهارم پیش از میلاد تا سدهٔ چهاردهم میلادی را، باید دوران موفّقیتهای بزرگ در زمینه‌های دستورزبان، پزشکی، ریاضیات، اخترشناسی و دیگر دانشها در هند دانست. در سده‌های چهارم و سوّم پیش از میلاد، «پانین» دانشمند هندی، «دستور» سانسکریت را پدید آورد. پیشرفتهایی که در دانشهای شیمی و گیاه‌شناسی شده بود، به تکامل دانش پزشکی یاری فراوان رساند.

بی‌تردید، اخترشناسی هندی، برنوشته‌های دانشمندان یونانی تکیه داشت؛ ولی دارای جنبه‌های بکر و تازه نیز بود. «آریابهاتا»ی اوّل، ریاضیدان و اخترشناس سده‌های پنجم و ششم میلادی، به کروی بودن زمین و گردش زمین به دور محور خود اعتقاد داشت. در نوشته‌های اخترشناسی هندی، حرکت ستارگان با دقت کافی محاسبه شده است؛ به همین دلیل، بسیاری از نوشته‌های اخترشناسی هندی، به زبانهای دیگر ترجمه شده است.

پیشرفت ریاضیات هندی، مانند همهٔ سرزمینهای دیگر، در آغاز از نیازهای زندگی سرچشمه می‌گرفت. برای ساختمانها لازم بود مسألهٔ مربوط به محاسبهٔ مساحت و حجم را حل کنند، تعداد مورد نیاز کارگرها را برآورد کنند، مزد آنها را بپردازند، پیشرفت داد و ستد کالا، حلّ مسأله‌های حساب بازرگانی را در برابر آنها گذاشت و... دانشهای دیگر و بویژه اخترشناسی هم به پیشرفت ریاضیات یاری رساندند؛ برای نمونه، یافتن ریشه‌های درست معادله‌های سیّال و پیشرفت مثلثات را باید از آن جمله دانست. باید توجه داشت، بیشتر ریاضیدانان، اخترشناس هم بودند.

نوشته‌های ریاضی را، مثل همهٔ نوشته‌های علمی، ادبی

و دینی، به «سانسکریت» می‌نوشتند. نقش زبان سانسکریت در هند، شبیه نقشی بود که زبان لاتینی در اروپای غربی سده‌های میانه داشت. موضوعهای ریاضی، اغلب کوتاه و بدون استدلال نوشته می‌شد. بسیاری از نوشته‌های ریاضی، به نظم درمی‌آمد و به صورت شعر ثبت می‌شد.

آگاهیهای زیادی از ریاضیات هندی در کتاب «قانون طنابها» (۵۰۰ تا ۷۰۰ سال پیش از میلاد) آمده است و در آن، از برخی ساختمانهای هندسی و نمونه‌هایی از بعضی محاسبه‌ها، جمع‌آوری شده است. بقیهٔ نوشته‌های هندی، مربوط به سده‌های پنجم تا شانزدهم میلادی است و در بسیاری از آنها، باید بخشهای مربوط به ریاضیات را، در بین نوشته‌های اخترشناسی یافت.

دستگاه قدیمی شمار

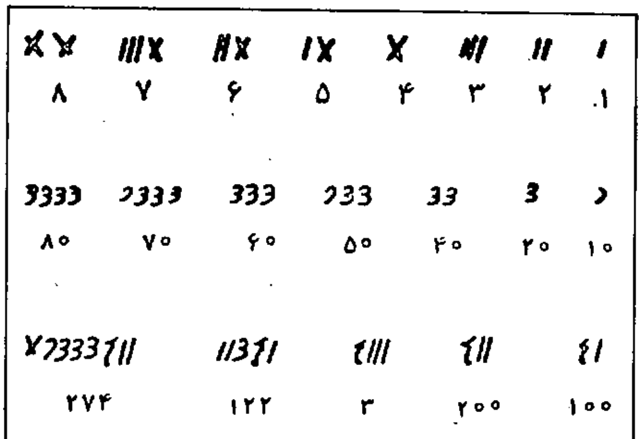
این مطلب روشن شده است که دستگاه عددنویسی دهدهی (که بر پایهٔ موضعی بودن رقمها تنظیم شده است) در هند به درجهٔ کمال خود رسید. ولی مسأله‌های مربوط به دستگاه شمار کهنتر هندی و اثری که در پیدایش دستگاه موضعی دهدهی داشته، کمتر روشن شده است.

در هند قدیم، دستگاه شمار غیرموضعی (نمادهای «کهاروشتا» و «برهما») دستگاه شمار لفظی و دستگاه شمار الفبایی) و همچنین، دستگاه شمار موضعی وجود داشته است. ویژگی دستگاه‌های شمار هندی در این است که اغلب با مبنای ۱۰ کار می‌کرده‌اند. ویژگی دیگر آن، در تکامل نامگذاری توان ۱۰ است. در زمانی که در یونان نامی برای بالاتر از $۱۰^۴$ (میریاد) و در روم برای بالاتر از $۱۰^۳$ (میل) نداشتند، در هند عددهای تا $۱۰^{۲۰}$ را نامگذاری کرده بودند.

به بررسی دستگاه‌های شمار غیر موضعی بپردازیم

رقمهای کهاروشتا در بسیاری نوشته‌ها که در شرق افغانستان امروزی و شمال پنجاب به‌دست آمده، به کار رفته است. این نوشته‌ها مربوط به سدهٔ چهارم پیش از میلاد تا سدهٔ سوّم میلادی است. در این دستگاه غیر موضعی دهدهی، برای هر یک از عددهای ۱، ۴، ۱۰، ۲۰ و ۱۰۰، نمادهایی وجود دارد و عددها از راست به چپ نوشته می‌شوند.

یکانها بر اساس قانون جمع و به یاری نمادهای ۱ و ۴



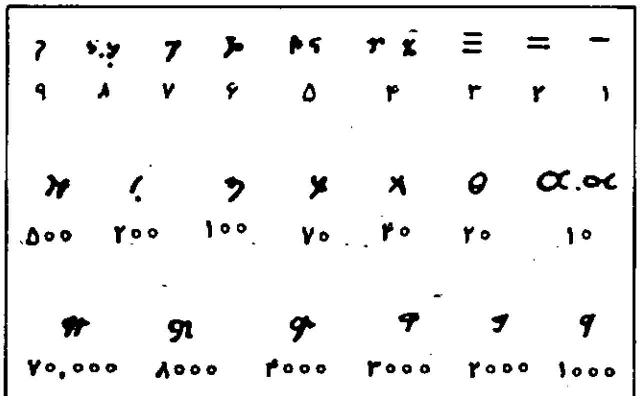
عدد نویسی کهاروشتا

نوشته می‌شد و دهگانها به یاری نمادهای ۱۰ و ۲۰، برای صدگان از قانون ضرب استفاده می‌کردند؛ یعنی نماد صد را می‌گذاشتند و در سمت راست آن، تعداد صدهای لازم را قرار می‌دادند. دستگاه شماری که براساس ضرب تنظیم شده باشد، به دستگاه موضعی نزدیکتر است تا دستگاهی که بر اساس قانون جمع شکل گرفته است.

تقریباً در سدهٔ ششم پیش از میلاد، در کنار رقمهای کهاروشتا، دستگاه عددنویسی دیگری هم به نام «برهما» به صورتی گسترده به کار می‌رفت. رقمهای برهما، در مقایسه با رقمهای کهاروشتا، دو ویژگی متفاوت داشت:

۱. از چپ به راست نوشته می‌شد.

۲. اگر در عددنویسی کهاروشتا، تنها ۵ نماد وجود داشت، رقمهای برهما برای واحد، ده، صد و هزار، نمادهای ویژه‌ای داشتند و در ضمن، عددهای ۴، ۵، ۸ و ۱۰ را با دو نماد مشابه نشان می‌دادند. در عددنویسی برهما، با آغاز از صد، قانون ضرب را به کار می‌بردند.



عددنویسی برهما

عدد نویسی برهما، نزدیک به هزار سال، بدون تغییر به کار می‌رفت، نمادهای نه‌گانه برای ۹ عدد طبیعی نخستین، دست‌کم از سدهٔ دوم پیش از میلاد، در بسیاری جاها وجود داشته است؛ ولی این نمادها، اغلب با توجه به قانون جمع به هم مربوط بودند. وجود نمادهای ویژه را برای عددهای از ۱ تا ۹، که یکی از ویژگیهای مهم در حساب هندی است، باید سرآغاز پیدایش عددنویسی دهدهی دانست.

دستگاه شمار لفظی، در هیچ کشوری به اندازهٔ هند، به طور گسترده به کار نمی‌رفت. در این‌جا رقمها، با واژه‌های مختلف بیان می‌شد؛ واحد را با واژه‌هایی بیان می‌کردند که معرّف یک چیز واحد و یگانه بود؛ مانند ماه یا زمین. «دو» را با نام چیزی بیان می‌کردند که همیشه با یک زوج از آنها برخورد می‌کنیم؛ مانند چشمها، لبها و غیره. ثبت عددها به این گونه، به غنای زبان سانسکریت و به ذخیرهٔ واژه‌های آن از جهت مترادفهای بسیار، کمک فراوان کرد. برای نمونه، برای «آسمان» ۹ واژهٔ مختلف و برای «زمین» ۱۱ واژهٔ مختلف داشتند. در این جا برخی واژه‌ها را که برای عدد به کار می‌بردند، می‌آوریم:

۰. تهی، آسمان، سوراخ، بی‌مرز (بیش از ۱۵ واژه)؛
۱. آغاز، ماه، زمین، بدن، برهمن (بیش از ۳۹ واژه)؛
۲. همزاد، چشمها، لبها، زوج (بیش از ۳۰ واژه)؛
۳. هدفها، آشتیها، زمانها، آتش (بیش از ۲۶ واژه)؛
۴. دریاها، دورانهای صلح، مرحله‌های زندگی، بخشهای عالم (بیش از ۲۹ واژه)؛
۵. تیرها، عنصرها، اندامهای حسی، قهرمانان افسانه‌ای مهابهارات (بیش از ۹ واژه)؛
۶. مزه‌ها، رنگها، بخشهای بدن (بیش از ۱۶ واژه)؛
۷. کوه‌ها، دانشمندان (بیش از ۲۸ واژه)؛
۸. خدایان، مارها، آرشها (بیش از ۲۶ واژه)؛
۹. الاهه‌ها (بیش از ۱۵ واژه)؛
۱۰. انگشتان، مظهرهای خدای ویشنا (بیش از ۱۰ واژه).

برای این که دستگاه لفظی را خوب بشناسیم، باید با فلسفه، ادب، اسطوره‌ها و افسانه‌های هندی آشنا باشیم. البته عملهای حساب را نمی‌توان به وسیلهٔ دستگاه عدد شماری لفظی انجام داد؛ از آنها تنها برای نوشتن عددها در رساله‌های ریاضی و اخترشناسی استفاده می‌کردند. استفاده از دستگاه لفظی، بسیار عمومی بود و امروز هم، کم و بیش آن را به کار می‌برند. ماده تاریخها را، اغلب از راست به چپ می‌نوشتند؛ گرچه گاه و از جمله در رسالهٔ «باهشالیسکا» (سده‌های ششم تا هشتم میلادی) عددها را از چپ به راست نوشته‌اند. با آغاز سده‌های چهارم و پنجم میلادی، دستگاه شمار لفظی به صورت موضعی درآمد و در آن، هر رقم (یعنی هر واژه) بسته به موضع خود، معناهای مختلفی داشت؛ در ضمن، از بیان مرتبه‌ها هم خودداری می‌شد. در کنار واژه‌هایی که به معنای رقم‌های مختلف بودند، از واژه‌هایی هم برای بیان صفر، به صورتی گسترده استفاده می‌شد.

نمونه‌هایی از نوشتن عدد را، با استفاده از دستگاه عددشماری موضعی لفظی می‌آوریم:

۱۲۳۰: آسمان (۰) - زمانها (۳) - لبها (۲) - زمین (۱)؛
۳۲۵۱۰۸: خدایان (۸) - آسمان (۰) - زمین (۱) - تیرها(۵) - لبها (۲) - زمانها (۳).

از دشواریهای دستگاه موضعی لفظی هندیها، این بود که برای نوشتن عددهای بزرگ، به جای زیادی نیاز داشتند، و این، برخلاف میل دانشمندان بود که می‌خواستند موضوعهای مربوط به دانش را، تا جایی که ممکن است کوتاه و فشرده بنویسند. به همین دلیل، برای تغییر دستگاه لفظی، در نوشته‌های ریاضی و اخترشناسی، دستگاه‌شمار الفبایی پدید آمد. البته هندیها، از دستگاه الفبایی، مثل یونانیها و دیگران، در همه جا استفاده نمی‌کردند و تنها در نوشته‌های ریاضی و اخترشناسی به کار می‌بردند. در ضمن، دستگاه الفبایی‌شمار هم چندگونه بود؛ یکی از آنها شامل ۱۶ حرف صدادار و ۳۴ حرف بی‌صدای الفبای سانسکریت است؛ به این ترتیب که ۳۴ حرف بی‌صدا با نخستین حرف صدادار، معرّف عددهای از ۱ تا ۳۴، همان ۳۴ حرف بی‌صدا با دومین حرف صدادار، نمایندهٔ عددهای از ۳۵ تا ۶۸ و غیره بود. بنابراین، عددها به صورت:

$$34(n-1)+m$$

بودند که در آن، n شمارهٔ ردیف حرفهای صدادار و m شمارهٔ ردیف حرفهای بی‌صداست. برای نمونه ۳=گا («گ» حرف سوم بی‌صدا و «ا» حرف اوّل صدادار است)؛ ۱۴۲= چو («چ» حرف ششم بی‌صدا و «و» حرف پنجم صدادار).

دستگاه عددنویسی دهدهی موضعی هندیها، با چند شرط پذیرفته شده بود:

۱. نوشتن شکل ضربی مقدار ردیف در عدد؛
۲. حذف علامت واحد ردیف؛
۳. به کار بردن نماد صفر، برای ردیف‌های خالی؛
۴. پذیرفتن عدد ۱۰، به عنوان مبنای دستگاه‌شمار.

همهٔ این شرطها، در سده‌های نخستین میلادی، در دستگاه‌های عددنویسی رعایت می‌شد. به این ترتیب، به هر صورتی که در نظر بگیریم، دستگاه عددنویسی موضعی دهدهی، در دوره‌ای که از سدهٔ ششم میلادی تجاوز نمی‌کند، در هند پدید آمده بود.

حساب

همان‌طور که بیشتر موضوعها، در دورهٔ مقدماتی هندسهٔ امروزی، از طرحی پیروی می‌کند که اقلیدس ریخته است، حساب و بخشی از جبر ما، از هند سرچشمه گرفته است.

در حساب و برای عددهای درست و کسری، هشت عمل اساسی وجود دارد: جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، به توان ۲ رساندن، ریشهٔ دوم گرفتن، به توان ۳ رساندن، ریشهٔ سوم گرفتن. دربارهٔ توانایی محاسبهٔ دانشمندان هندی، حقیقتی است که آنها، محاسبهٔ ریشهٔ سوم عددها، از عملهای عادی به شمار می‌رفت؛ در حالی که در اروپای غربی سده‌های میانه، کسی که می‌توانست توان دوم عددی را پیدا کند، ارج بسیار داشت.

محاسبه را روی صفحه‌ای که از ماسه یا خاک نرم پوشیده بود، انجام می‌دادند. عددها را با یک تکه چوب می‌نوشتند و برای این که عددها به هم نیامیزند و از یکدیگر جدا باشند، آنها را با اندازه‌های به اندازهٔ کافی بزرگ درنظر می‌گرفتند؛ بنابراین، برای به دست آوردن نتیجهٔ محاسبه، ناچار بودند عملهای بینابینی را پاک کنند، و همهٔ اینها در روش محاسبه اثر می‌گذاشت. عمل جمع را می‌توانستند، هم از راست به چپ، با آغاز از مرتبهٔ کوچکتر، و هم از چپ به راست، با آغاز از مرتبهٔ بزرگتر انجام دهند.

برای ضرب، روش مختلفی وجود داشت؛ ضرب را می‌شد از مرتبهٔ کوچکتر یا از مرتبهٔ بزرگتر آغاز کرد. بجز روش کلی ضرب، راه‌های ویژه‌ای هم وجود داشت، برای نمونه «شریدهارا» (سده‌های نهم و دهم میلادی)، عامل دوم ضرب را به ترتیب در یکان، دهگان، صدگان و هزارگان عامل اوّل، ضرب و سپس نتیجه‌ها را با هم جمع می‌کرد. مثال:

$$۱۲۹۶ \times ۲۱ = (۱۰۰۰ + ۲۰۰ + ۹۰ + ۶) \times ۲۱$$
$$= ۲۱۰۰۰ + ۴۲۰۰ + ۱۸۹۰ + ۱۲۶ = ۲۷۲۱۶$$

«بهاسکارا»ی دوم (سدهٔ دوازدهم میلادی) برای ساده‌تر کردن کار، یکی از عاملهای ضرب را به صورت مجموع یا تفاضل درمی‌آورد:

$$۱۳۵ \times ۱۲ = ۱۳۵(۱۲ + ۸) - ۱۳۵ \times ۸ ;$$
$$۱۳۵ \times ۱۲ = ۱۳۵(۱۲ - ۲) + ۱۳۵ \times ۲$$

برای تقسیم، شبیه راهی که امروز معمول است، عمل می‌کردند.

از آن جا که ضمن عملهای حسابی، اغلب، عمل بینابینی را پاک می‌کردند، نمی‌شد به طور مستقیم، درستی نتیجه را آزمایش کرد. برای آزمایش درستی نتیجهٔ ضرب، تقسیم، توان و ریشه، به عمل وارون آن متوسل نمی‌شدند؛ بلکه از قاعدهٔ معروف به ۹، استفاده می‌کردند. این آزمایش بر این اساس است که باقیماندهٔ حاصل از تقسیم هر عدد بر ۹، برابر است با باقیماندهٔ حاصل از تقسیم مجموع رقمهای آن عدد بر ۹. روشن است، «قاعدهٔ ۹» برای آزمایش درستی عمل کافی نیست و باید آن را با روش دیگری هم آزمایش کرد.

کسر از خیلی قدیم، در هند شناخته شده بود. در رسالهٔ «قانون طنابها» هم (که به سده‌های هفتم تا پنجم پیش از میلاد مربوط می‌شود) کسرها را به صورتی نوشته‌اند که با نمادهای امروزی شباهت زیادی دارد؛ مخرج کسر زیر صورت آن نوشته شده است، البته بدون خط کسری. هر کسر را از کسر دیگر، به وسیلهٔ خطهای راست افقی و قائم از هم جدا می‌کردند؛ نمادی برای جمع وجود نداشت و کسرها را برای جمع کردن به دنبال هم می‌نوشتند. مجموع $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$ به این صورت نوشته می‌شد:

a	c	e
b	d	f

برای نماد تفریق، از نقطه یا عَلامتی شبیه یک صلیب کوچک استفاده می‌کردند. عبارت $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} - \frac{e}{f}$ به این صورت

درمی‌آمد:

a	.c	+e
b	d	f

در کسر مرکب، بخش درست را روی کسر جا می‌دادند؛ کسر مرکب $a\frac{b}{c}$ را به این صورت می‌نوشتند:

a
b
c

گاهی عدد درست کسر مرکب را، با کسری که مخرجی برابر واحد داشت، نشان می‌دادند:

a	b
۱	c

یعنی $\frac{b}{c}+\frac{a}{۱}$ که همان کسر مرکب $a\frac{b}{c}$ می‌شود. برای ضرب، کسرها را پشت سرهم می‌نوشتند، شبیه جمع:

a	c
b	d

و برای تقسیم، یکی را زیر دیگری:

a
b
c
d

یا

a
b
c
d

قاعدهٔ عمل با کسر، تقریباً تفاوتی با امروز ندارد. قاعدهٔ جمع کسرها به وسیلهٔ شریدهارا، این‌گونه شرح داده شده است: «کسرها را به یک مخرج تبدیل کنید، سپس صورتها را جمع کنید.» و برای قاعدهٔ ضرب: «صورتها را ضرب و بر حاصلضرب مخرجها تقسیم کنید تا حاصلضرب دو یا چند کسر به دست آید.»

به عنوان مخرج مشترک، در آغاز، حاصلضرب مخرجها را در نظر می‌گرفتند؛ ولی از آغاز سدهٔ نهم میلادی، کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرجها را پیدا می‌کردند. شریدهارا می‌نویسد: «برای این که دو کسر را با یک مخرج بنویسیم، در آغاز عامل مشترک دو مخرج را کنار می‌زنیم (اگر چنین عاملی وجود داشته باشد)، سپس عددی را که در هر مخرج می‌ماند، در صورت و مخرج کسر دیگر ضرب می‌کنیم.»

قاعدهٔ سه مقدار، پنج مقدار و غیره، وارون قاعدهٔ سه مقدار، مسأله‌های مربوط به «اختلاط» و «امتزاج» درصد و تقسیم به نسبت، جای مهمی را در حساب هندی داشتند. یونانیها و مصریها هم قاعدهٔ سه مقدار را به کار می‌بردند؛ ولی هندیها آن را همچون قانونی از حساب در نظر می‌گرفتند و از آن، به عنوان روشی برای حل، استفاده می‌کردند.

«قاعدهٔ سه مقدار» عبارت است از جست‌وجوی عدد x، به شرطی که با سه عدد داده شدهٔ a، b و c تشکیل یک تناسب بدهد:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$$

یک راه‌حل غیرعادی هم معمول بود. اگر مسأله‌ای منجر به حل معادلهٔ

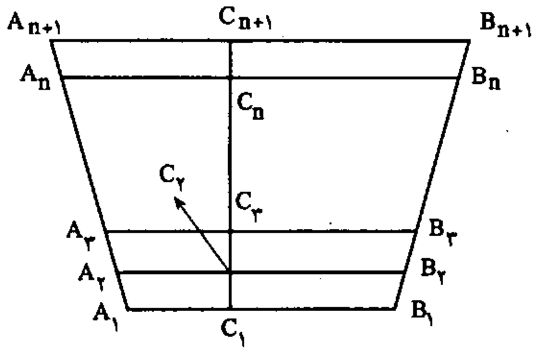
$$ax=c$$

می‌شد، پاسخ را به این صورت می‌نوشتند:

$$x=x_۱\cdot\frac{c}{c_۱}$$

که در آن، $x_۱$ عددی است دلخواه و $c_۱$ مقدار متناظری است که از قرار دادن $x_۱$ در معادله، برای c به دست می‌آید.

ریاضیدانان هندی، مسأله‌های مربوط به تصاعدهای حسابی و هندسی را حل می‌کردند؛ در ضمن، «شریدهارا»، تعبیر هندسی تصاعد حسابی را به صورت ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی که ارتفاع آن برابر تعداد جمله‌های تصاعد است، داده است (شکل را ببینید). مساحت ذوزنقهٔ $A_۱A_۲B_۲B_۱$،



که ارتفاعی برابر واحد دارد ($|c_۱c_۲|=۱$)، عددی است برابر با جملهٔ اوّل تصاعد یعنی a؛ مساحت ذوزنقهٔ $A_۱A_۳B_۳B_۱$، که ارتفاعی برابر ۲ واحد دارد ($|c_۱c_۳|=۲$)، برابر است با

مجموع دو جملهٔ اوّل تصاعد یعنی $2a + d$ و غیره. سرانجام مساحت ذوزنقه $A_1A_{n+1}B_{n+1}B_1$ عددی است برابر با مجموع همهٔ جمله‌های تصاعد حسابی. شریدهارا، مجموع $S_n + \frac{p}{q}(a + nd)$ را برای تصاعدی حسابی، که تعداد جمله‌های آن عددی کسری و برابر $(n + \frac{p}{q})$ است، یافته است که در آن، S_n مجموع n جمله، و $\frac{p}{q}(a + nd)$ به معنای $\frac{p}{q}$ جملهٔ $(n + 1)$ ام تصاعد است. شریدهارا، این مسأله را طرح و حل کرده است: «کارگری برای ماه اول $1\frac{1}{2}$ روپیه دریافت می‌کند. در هر یک از ماه‌های بعد، $\frac{1}{3}$ روپیه بیش از ماه قبل می‌گیرد. بعد از سه ماه‌ونیم، چه مبلغی گرفته است؟» و این طور عمل می‌کند:

$$S_3 + \frac{1}{2}\left(1\frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{3}\right) = 5\frac{1}{2} + 1\frac{1}{4} = 6\frac{3}{4}$$ (روپیه)

پاسخ مسأله مسابقه ای برهان ۳۲

حل: خط دلخواه d غیر موازی با خط Δ را در نظر می‌گیریم و نقطهٔ برخورد آنها را I می‌نامیم. از رأسهای A، B، C، D، E و F خطهایی موازی Δ رسم می‌کنیم تا خط d را بترتیب در نقطه‌های A'، B'، C'، D'، E' و F' قطع کنند.

بنا به ویژگی خطهای موازی داریم:

$$\frac{\overline{A_1A}}{\overline{A_1B}} = \frac{\overline{IA'}}{\overline{IB'}} \quad , \quad \frac{\overline{B_1B}}{\overline{B_1C}} = \frac{\overline{IB'}}{\overline{IC'}} \quad ,$$

$$\frac{\overline{C_1C}}{\overline{C_1D}} = \frac{\overline{IC'}}{\overline{ID'}} \quad , \quad \frac{\overline{D_1D}}{\overline{D_1E}} = \frac{\overline{ID'}}{\overline{IE'}} \quad ,$$

$$\frac{\overline{E_1E}}{\overline{E_1F}} = \frac{\overline{IE'}}{\overline{IF'}} \quad , \quad \frac{\overline{F_1F}}{\overline{F_1A}} = \frac{\overline{IF'}}{\overline{IA'}}$$

از ضرب کردن طرفهای متناظر رابطه‌های بالا نتیجه می‌شود:

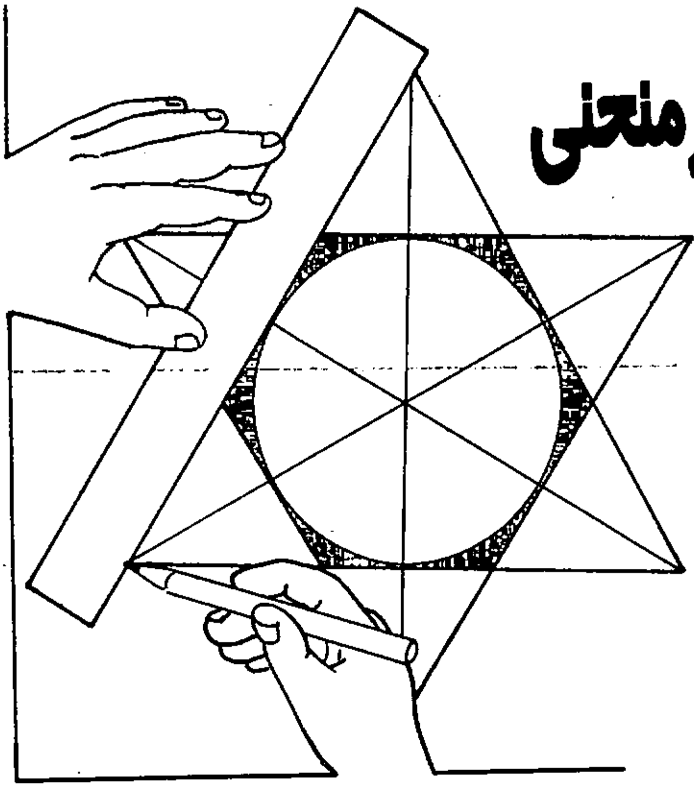
$$\frac{\overline{A_1A}}{\overline{A_1B}} \times \frac{\overline{B_1B}}{\overline{B_1C}} \times \frac{\overline{C_1C}}{\overline{C_1D}} \times \frac{\overline{D_1D}}{\overline{D_1E}} \times \frac{\overline{E_1E}}{\overline{E_1F}} \times \frac{\overline{F_1F}}{\overline{F_1A}} = 1$$

عکس این قضیه درست نیست؛ زیرا اگر رابطهٔ بالا برقرار باشد، الزامی وجود ندارد که نقطه‌های A_1، B_1، C_1، D_1، E_1 و F_1 روی یک خط راست باشند. عکس این قضیه تنها در مورد مثلث درست است.

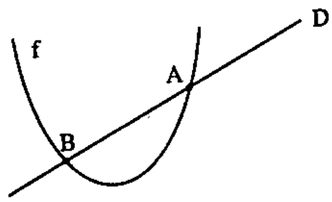
این قضیه تعمیم قضیهٔ منولائوس در مثلث است.

مماس و قائم بر منحنی

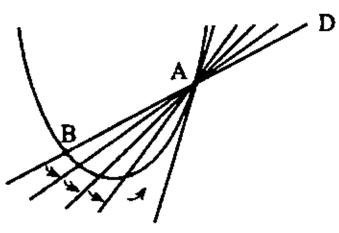
(قسمت اول)



● احمد قندهاری



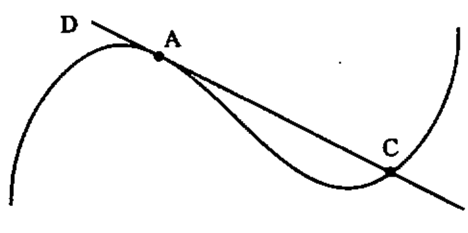
فرض می‌کنیم خط D نمودار تابع f را در دو نقطهٔ متمایز A و B قطع کند، اگر نقطهٔ A را ثابت نگه‌داریم و خط D را حول نقطهٔ A در جهت بیرون منحنی، آهسته آهسته به حرکت درآوریم، نقطهٔ B به نقطهٔ A نزدیک و نزدیکتر می‌شود. هر گاه نقطهٔ B بر نقطهٔ A منطبق شود، خط D یک وضعیت حدی پیدا می‌کند که آن را خط مماس بر منحنی در نقطهٔ A گوییم.



پس می‌توان گفت:

تعریف: خط مماس بر منحنی، یک تابع حدّ قاطع است؛ وقتی دو نقطه تقاطع بر هم منطبق شوند. به عبارت دیگر، خط مماس، خطی است که منحنی تابع را در دو نقطهٔ منطبق بر هم قطع کند.

ممکن است خط مماس بر منحنی یک تابع، در نقطه‌ای مانند A ، نمودار تابع را در نقطهٔ دیگری مانند C قطع کند. (شکل زیر)



پیش از طرح مسائل مربوط به مماس بر منحنی، ریشهٔ مضاعف را بیان می‌کنیم.

ریشهٔ مضاعف

اگر $x = a$ ریشهٔ تکراری دفعات زوج یک معادله باشد، آنگاه $x = a$ را ریشهٔ مضاعف معادله گویند. سایر ریشه‌های معادله که این شرایط را ندارند، ریشهٔ سادهٔ معادله‌اند.

مثال (۱): ریشه‌های ساده و مضاعف معادلهٔ $(x^۲ - ۲\sqrt{۲}x + ۲)(x - \sqrt{۳}) = ۰$ را بیابید.

حل:

$$x^۲ - ۲\sqrt{۲}x + ۲ = ۰ \Rightarrow (x - \sqrt{۲})^۲ = ۰$$

ریشهٔ مضاعف $\Rightarrow x = \sqrt{۲}$

ریشهٔ ساده $x - \sqrt{۳} = ۰ \Rightarrow x = \sqrt{۳}$

توجه: اگر معادله درجه دوم، دو ریشه مساوی داشته باشد، آن ریشه را ریشه مضاعف گوییم.

مثال (۲): معادلهٔ $(x^۲ - ۵x + ۴)^۲(x^۲ - ۳x + ۲) = ۰$ چند ریشهٔ ساده و چند ریشهٔ مضاعف دارد؟

حل:

$$x^۲ - ۵x + ۴ = (x - ۱)(x - ۴)$$
$$x^۲ - ۳x + ۲ = (x - ۱)(x - ۲)$$

با جایگذاری در معادله داریم:

$$(x - ۱)^۲(x - ۴)^۲(x - ۱)(x - ۲) = ۰$$

$$(x - ۱)^۳(x - ۴)^۲(x - ۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ & \text{ریشهٔ ساده} \\ x = ۴ & \text{ریشهٔ مضاعف} \\ x = ۲ & \text{ریشهٔ ساده} \end{cases}$$

* * *

قضیه: اگر معادلهٔ $P(x) = ۰$ ریشهٔ مضاعف $x = a$ داشته باشد، آنگاه $x = a$ ریشهٔ سادهٔ معادلهٔ $P'(x) = ۰$ است.

اثبات: فرض می‌کنیم

$$P(x) = (x - a)^{۲n} Q(x) \quad , \quad n \in \mathbb{N} \, , \quad Q(a) \neq ۰$$

پس $x = a$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $P(x) = ۰$ است. حال:

$$P'(x) = ۲n(x - a)^{۲n-۱} Q(x) + (x - a)^{۲n} Q'(x)$$
$$P'(x) = (x - a)^{۲n-۱} \left[۲n\, Q(x) + (x - a) Q'(x) \right]$$

اگر $P'(x) = ۰$، آنگاه $x = a$ ریشهٔ سادهٔ آن خواهد بود. اگر پرانتز دوم را برابر صفر قرار دهیم، ریشهٔ $x = a$ نخواهد داشت.

توجه: از این قضیه، در مسائل پارامتری درجهٔ دوم به بالا استفاده می‌کنیم.

مثال (۳): به ازای چه مقادیر m معادلهٔ $x^۳ - ۳x + m = ۰$ ریشهٔ مضاعف دارد؟

حل: ریشه‌های سادهٔ معادله (۰ = مشتق) را پیدا می‌کنیم.

$$P(x) = x^۳ - ۳x + m$$

$$P'(x) = ۳x^۲ - ۳ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = -۱ \end{cases} \text{یا}$$

ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $P(x) = ۰$ عدد ۱- یا عدد ۱ می‌باشد.

اگر ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $P(x) = ۰$، عدد ۱ باشد، داریم:

$$x = ۱ \quad ; \quad P(۱) = ۱ - ۳ + m = ۰ \quad \Rightarrow \quad m = ۲$$

اگر ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $P(x) = ۰$، عدد ۱- باشد، داریم:

$$x = -۱ \quad ; \quad P(-۱) = -۱ + ۳ + m = ۰ \quad \Rightarrow \quad m = -۲$$

پس اگر $m = ۲$، آنگاه ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $P(x) = ۰$ عدد (۱) است. چنانچه $m = -۲$، آنگاه ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $P(x) = ۰$، عدد (۱-) است.

* * *

مثال(۴): به ازای چه مقدار m معادلهٔ $x^۶ - ۱۹۲x + ۸۰m = ۰$ ریشهٔ مضاعف دارد؟

حل: ریشهٔ سادهٔ معادلهٔ (۰ = مشتق) ریشهٔ مضاعف معادلهٔ اصلی است.

$$P(x) = x^۶ - ۱۹۲x + ۸۰m = ۰$$
$$P'(x) = ۶x^۵ - ۱۹۲ = ۰ \Rightarrow x^۵ = ۳۲ \Rightarrow x = ۲$$

$x = ۲$ ریشهٔ سادهٔ معادلهٔ $P'(x) = ۰$ است، که ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $P(x) = ۰$ خواهد شد:

$$x = ۲ \quad ; \quad P(۲) = ۲^۶ - ۱۹۲(۲) + ۸۰m = ۰$$

$$۶۴ - ۳۸۴ + ۸۰m = ۰ \quad \Rightarrow \quad m = \frac{۳۲۰}{۸۰} = ۴$$

* * *

دوباره به تعریف خط مماس بر منحنی بر می‌گردیم. گفتیم که خط مماس بر منحنی یک تابع، نمودار تابع را در دو نقطهٔ

منطبق بر هم قطع می‌کند؛ یعنی اگر معادلهٔ خط مماس را با معادلهٔ منحنی تقاطع دهیم (yها حذف)، معادله حاصل باید دو ریشهٔ برابر داشته باشد (ریشهٔ مضاعف داشته باشد).

مثال (۵): به ازای چه مقدار m خط $y = 2x - m$، بر منحنی به معادلهٔ $y = x^2 - 2x$ مماس است.

حل: باید معادلهٔ تقاطع خط و منحنی، ریشهٔ مضاعف (دو ریشه برابر) داشته باشد.

$$\begin{cases} y = 2x - m \\ y = x^2 - 2x \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x = 2x - m \Rightarrow x^2 - 4x + m = 0$$

$\Delta' = b'^2 - ac = 0 \Rightarrow 4 - m = 0 \Rightarrow m = 4$ ؛ دو ریشه برابر

* * *

مثال (۶): به ازای چه مقدار m، منحنی تابع به معادلهٔ $f(x) = (x-1)(x^2 + mx - 4)$ بر محور xها مماس است.

حل: معادلهٔ محور xها $y = 0$ است. باید معادلهٔ تقاطع خط و منحنی، دو ریشه برابر داشته باشد:

$$\begin{cases} f(x) = (x-1)(x^2 + mx - 4) \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x-1)(x^2 + mx - 4) = 0$$

این معادله باید دو ریشه برابر داشته باشد.

معادله $x^2 + mx - 4 = 0$، دو ریشه متمایز دارد؛ زیرا:

$\Delta = m^2 + 16 > 0$

پس این معادله، نمی‌تواند دو ریشه برابر داشته باشد.

ریشهٔ معادلهٔ $x - 1 = 0$، عدد (۱) است. حال m را چنان می‌یابیم که یکی از دو ریشهٔ معادلهٔ $x^2 + mx - 4 = 0$ عدد (۱) باشد.

$x = 1 \;;\; x^2 + mx - 4 = 0 \Rightarrow 1 + m - 4 = 0 \Rightarrow m = 3$

توضیح:

$$m = 3 \;;\; \begin{aligned} &(x-1)(x^2 + mx - 4) = 0 \\ &(x-1)(x^2 + 3x - 4) = 0 \\ &(x-1)(x-1)(x+4) = 0 \end{aligned}$$

$$(x-1)^2(x+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 & \text{ریشهٔ مضاعف} \\ x = -4 & \text{ریشهٔ ساده} \end{cases}$$

مثال (۷): مقادیر m را چنان بیابید تا منحنی تابع به معادلهٔ $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 6x + m)$ بر محور xها مماس باشد.

حل: معادلهٔ $(x^2 - 1)(x^2 - 6x + m) = 0$ باید دو ریشهٔ برابر داشته باشد.

(الف $x^2 - 6x + m = 0 \;;\; \Delta' = 9 - m = 0 \Rightarrow m = 9$

(ب $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$ یا

حال mها را چنان تعیین می‌کنیم که یکی از دو ریشهٔ معادلهٔ $x^2 - 6x + m = 0$، عدد ۱ یا عدد ۱- باشد:

$$x = 1 \;;\; \begin{aligned} &x^2 - 6x + m = 0 \\ &1 - 6 + m = 0 \Rightarrow m = 5 \end{aligned}$$

$$x = -1 \;;\; \begin{aligned} &x^2 - 6x + m = 0 \\ &1 + 6 + m = 0 \Rightarrow m = -7 \end{aligned}$$

در نتیجه، اگر $m = 9$ یا $m = 5$ یا $m = -7$، آنگاه منحنی f بر محور xها مماس است.

* * *

می‌دانیم اگر نقطه‌ای به طول a روی نمودار تابع مشتق‌پذیر f باشد (کافی است تابع f در یک همسایگی a مشتق‌پذیر باشد)، آنگاه $f'(a)$ برابر شیب خط مماس بر منحنی در نقطه‌ای به طول a است و آن را با $m = f'(a)$ نشان می‌دهیم.

* * *

شیب خط مماس در نقطهٔ $A(a\,,\,b)$ واقع بر یک منحنی، برابر است با:

مشتق معادلهٔ منحنی به ازای مختصات نقطهٔ A (نقطهٔ A نقطه تماس است).

برای مثال، شیب خط مماس بر منحنی معادلهٔ $f(x) = x^2 - 4x + 1$، در نقطه‌ای به طول صفر، واقع بر منحنی برابر $f'(0)$ است.

$f'(x) = 2x - 4 \;;\; f'(0) = 0 - 4 = -4 = m$

مثال (۸): شیب خط مماس بر منحنی به معادلهٔ $f(x,y) = -2x + y^2 - 3y + 8 = 0$، در نقطه‌ای به عرض ۱ واقع بر منحنی را بیابید.

حل:

$$y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{-2}{2y-3} = \frac{2}{2y-3}$$

مماس $m = \frac{2}{2(1)-3} = \frac{2}{-1} = -2$

* * *

مثال (۹): شیب خط مماس بر منحنی به معادلهٔ $f(x,y) = 4x^2+y^2-2x-7y=0$ در نقطه‌ای به طول ۲ (با عرض بزرگتر) را بیابید.

حل: $x=2 \;;\; 4(2)^2+y^2-4-7y=0 \Rightarrow$

$$y^2-7y+12=0 \Rightarrow (y-3)(y-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} y=3 \\ y=4 \ \text{قابل قبول} \end{cases}$$

$$y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{8x-2}{2y-7}$$

مماس $m = -\frac{8(2)-2}{2(4)-7} = -\frac{14}{1} = -14$

* * *

بعکس، اگر مشتق معادلهٔ منحنی $f(x,y)=0$ یا $f(x)=0$ را برابر شیب خط مماس قرار دهیم، آن‌گاه:

الف) اگر عبارت مشتق برحسب x باشد، طول نقطهٔ تماس به‌دست می‌آید.

ب) اگر عبارت مشتق برحسب y باشد، عرض نقطهٔ تماس به‌دست می‌آید.

ج) اگر عبارت مشتق برحسب x و y باشد، آن‌گاه رابطه‌ای بین مختصات نقاط تماس به‌دست می‌آید (اگر معادلهٔ حاصل برحسب x و y از درجهٔ اول باشد، معادلهٔ خطی است که از نقاط تماس می‌گذرد).

چنانچه این رابطه را با معادلهٔ منحنی تقاطع دهیم، مختصات نقاط تماس به‌دست می‌آید.

مثال (۱۰): مختصات نقاطی از منحنی به معادلهٔ $f(x)=\frac{2x+1}{2x-1}$ را بیابید که شیب‌های خط‌های مماس بر منحنی در این نقاط، برابر $-\frac{4}{25}$ باشد.

حل: $f'(x)=m=-\frac{4}{25}$ $\qquad f'(x)=\frac{-4}{(2x-1)^2}$

$$\frac{-4}{(2x-1)^2}=\frac{-4}{25} \Rightarrow (2x-1)^2=25 \Rightarrow 2x-1=\pm5$$

$\Rightarrow x=\frac{1\pm5}{2} \Rightarrow x=3\,,\,-2$ طول‌های نقاط تماس

$$f(3)=\frac{7}{5} \quad , \quad f(-2)=\frac{3}{5}$$

نقاط تماس عبارتند از: نقاط $(3,\frac{7}{5})$ و $(-2,\frac{3}{5})$.

* * *

مثال (۱۱): نقطه‌ای از منحنی به معادله $3x+y^2-y-2=0$ را بیابید که شیب خط مماس بر منحنی در آن نقطه برابر $-\frac{1}{5}$ باشد.

حل: شیب خط مماس $= y'_x = -\frac{3}{2y-1}$

عرض نقطهٔ تماس $\frac{-3}{2y-1}=-\frac{1}{5} \Rightarrow 2y-1=15 \Rightarrow y=8$

$$y=8 \xrightarrow{\text{در معادلهٔ منحنی}} 3x+64-8-2=0 \Rightarrow 3x=-54 \Rightarrow x=-18$$

پس نقطهٔ $(-18,8)$ نقطهٔ تماس یا نقطهٔ مطلوب است.

* * *

مثال (۱۲): نقاطی از منحنی به معادلهٔ $2x^2+y^2=3$ را بیابید که خط‌های مماس بر منحنی در آن نقاط، بر خط $2y-x+4=0$ عمود باشد.

حل:

$2y-x+4=0 \Rightarrow m'=\frac{1}{4} \Rightarrow$ مماس $m=-2$

$y'_x=-\frac{4x}{2y}=m$ مماس

$$-\frac{2x}{y}=-2 \Rightarrow y=x$$

$y=x$ معادلهٔ خطی است که از نقاط تماس می‌گذرد (رابطهٔ بین مختصات نقاط تماس).

اگر این خط را با معادلهٔ منحنی تقاطع دهیم، مختصات نقاط تماس به‌دست می‌آید.

$\begin{cases}2x^2+y^2=3\\ y=x\end{cases} \Rightarrow 2x^2+x^2=3 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm1$

طول‌های نقاط تماس

$$x=\pm1 \quad , \quad y=\pm1$$

نقاط تماس یا نقاط مطلوب، عبارتند از $(1,1)$ و $(-1,-1)$.

* * *

حالت اوّل: طرز نوشتن معادلهٔ خط مماس بر منحنی، وقتی نقطه روی منحنی باشد.

۱. طول یا عرض معلوم نقطه را در معادلهٔ منحنی قرار می‌دهیم، عرض یا طول مجهول آن به‌دست می‌آید.

۲. به کمک مشتق، شیب خط مماس را می‌نویسیم.

۳. اگر نقطهٔ تماس را A بنامیم، از فرمول $y-y_A=m(x-x_A)$، معادلهٔ خط مماس را می‌نویسیم.

مثال (۱۳): معادلهٔ خط مماس بر منحنی تابع به معادلهٔ $y=\sqrt[۳]{x^۲}$ در نقطهٔ A به طول ۸ واقع بر منحنی را بنویسید.

حل:

$$y_A=\sqrt[۳]{۸^۲}=\sqrt[۳]{۶۴}=۴$$

$$y'_x=\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}} \quad ; \quad m_{\text{مماس}}=\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{۸}}=\frac{۱}{۳}$$

$$y-y_A=m(x-x_A) \Rightarrow y-۴=\frac{۱}{۳}(x-۸) \Rightarrow y=\frac{۱}{۳}x+\frac{۴}{۳}$$

معادلهٔ خط مماس بر منحنی در نقطهٔ A

مثال (۱۴): معادلهٔ خط مماس بر منحنی به معادلهٔ $x+y^۲-y-۴=۰$ در نقطهٔ A به عرض ۱ واقع بر منحنی را بنویسید.

حل:

$$y_A=۱ \,,\, x+۱-۱-۴=۰ \Rightarrow x_A=۴$$

$$y'_x=-\frac{۱}{۲y-۱} \quad ; \quad m_{\text{مماس}}=-\frac{۱}{۲-۱}=-۱$$

$$y-y_A=m(x-x_A) \Rightarrow y-۱=-۱(x-۴)$$

$$\Rightarrow y=-x+۵$$ معادلهٔ خط مماس

* * *

مثال (۱۵): معادلهٔ خط مماس بر منحنی به معادلهٔ $xy+\sin(xy)-۴y+۴=۰$ در نقطهٔ A به طول صفر را بنویسید.

حل:

$$x_A=۰ \quad , \quad ۰+\sin ۰-۴y+۴=۰ \Rightarrow y_A=۱$$

$$y'_x=-\frac{y+y\cos(xy)}{x+x\cos(xy)-۴}$$

$$A\Big|_{۱}^{۰} \xrightarrow{y'_x \text{ در عبارت}} m_{\text{مماس}}=-\frac{۱+\cos ۰}{۰+۰-۴}=\frac{-۲}{-۴}=\frac{۱}{۲}$$

$$y-y_A=m(x-x_A) \Rightarrow y-۱=\frac{۱}{۲}(x-۰)$$

$$\Rightarrow y=\frac{۱}{۲}x+۱$$ معادلهٔ خط مماس

* * *

مثال (۱۶): معادلهٔ خط مماس بر منحنی تابع به معادلهٔ $y=x+\text{Arctan}\,x$ در نقطه A به طول ۱ واقع بر منحنی را بنویسید.

حل:

$$x_A=۱ \quad , \quad y_A=۱+\text{Arctan}\,۱=۱+\frac{\pi}{۴}=\frac{۴+\pi}{۴}$$

$$y'_x=۱+\frac{۱}{۱+x^۲} \quad ; \quad m_{\text{مماس}}=۱+\frac{۱}{۱+۱}=۱+\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

$$y-y_A=m(x-x_A) \Rightarrow y-\frac{۴+\pi}{۴}=\frac{۳}{۲}(x-۱)$$

$$y=\frac{۳}{۲}x-\frac{۳}{۲}+\frac{۴+\pi}{۴}$$ معادلهٔ خط مماس

ادب ریاضی

«من نمی‌دانم به چه صورتی ممکن است در نظر جهانیان جلوه‌گر شوم؛ اما به نظر خودم چنین می‌آید که همچون کودک خردسالی هستم که در ساحل دریا به بازی مشغولم و گاه‌بیگاه، سنگریزه‌ای صافتر از سنگهای دیگر یا صدفی زیباتر از صدفهای دیگر به دست می‌آورم؛ در حالی که اقیانوس عظیم حقیقت در مقابل من گسترده است و مرا بر آن آگاهی نیست.»

_نیوتون

توزیع های گسسته - تابع متغیر تصادفی

● حمیدرضا امیری

پیشنیاز

اگر بتوانیم اعضای مجموعه‌ای را که با آن سر و کار داریم، شمارش کنیم، این مجموعه به اصطلاح، یک **مجموعهٔ گسسته** نامیده می‌شود، حال اگر یک پدیدهٔ تصادفی رخ دهد؛ به طوری که همهٔ حالت‌های ممکن در به وقوع پیوستن این پدیده، مجموعه‌ای گسسته تشکیل دهد، (اعضای آن قابل شمارش باشند) این مجموعه را **فضای نمونه‌ای گسسته** می‌نامیم و آن را بیشتر با S نمایش می‌دهیم. برای مثال، وقتی یک تاس را می‌اندازیم، همهٔ حالت‌های ممکن، عبارت است از ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵ یا ۶؛ پس $S = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ ، یا وقتی دو تاس را با هم می‌اندازیم (یا تاسی را دو بار می‌اندازیم)، اگر هر حالت ممکن را به صورت زوج مرتّب (a , b) و نمایش دهیم که $۱ \leq a \leq ۶$ و $۱ \leq b \leq ۶$، در این صورت، S دارای ۳۶ عضو به شکل (a , b) بوده و در واقع $S = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\} \times \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$.

حال اگر S فضای نمونه‌ای یک پدیدهٔ تصادفی باشد، هر زیرمجموعهٔ S مانند A، یک **پیشامد تصادفی** از فضای نمونه‌ای S نامیده شده است که احتمال به وقوع پیوستن A یا احتمال رخداد پیشامد A را با $P(A)$ نمایش می‌دهیم و از رابطهٔ $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ محاسبه می‌کنیم. توجه دارید که **تابع احتمال**، تابعی است که دامنهٔ تعریف آن، مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های S است که البته خود S را نیز شامل می‌شود. به‌عنوان مثال، وقتی یک تاس را می‌ریزیم ، S دارای ۶ عضو بوده و $P(S)$ یعنی مجموعهٔ زیرمجموعه‌های S دارای $۶۴ = ۲^۶$ عضو است؛ یعنی برای این پدیده، تابع احتمال P می‌تواند روی ۶۴ عضو اثر کند. به مثالهای زیر توجه کنید:

$$S = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$$

I) $A = \{۱,۲\} \subseteq S$ یا $A \in P(S)$

$$P(A) = P(\{۱\}) + P(\{۲\}) = \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۶} = \frac{۲}{۶}$$

$$II)\ B = \{x \in S \mid (x-2)(x-5)(x-6) = 0\} = \{2,5,6\}$$

$$P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} \quad \text{یا} \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6}$$

لازم است به این نکته توجه کنید که متغیرهای تابع احتمال P، یعنی اعضای P(S) که تعداد آنها ۶۴ است، **متغیرهایی قطعی** محسوب می‌شوند؛ یعنی برای مثال، $A = \{1,2\}$ قطعاً زیر مجموعهٔ S است و تابع احتمال P، قطعاً روی A اثر کرده و حاصل تأثیر P روی A، یعنی P(A) همان $\frac{2}{6}$ است.

حال اگر S فضای نمونه‌ای یک پدیده بوده و تابعی چون X را از خود S به IR تعریف کنیم؛ یعنی $X : S \to \mathbb{R}$، در این صورت، دامنهٔ متغیر برای تابع X مجموعهٔ S بوده و متغیرهای این تابع، یعنی اعضای S، به شکل تصادفی به‌دست می‌آیند. برای مثال، اگر S را فضای نمونه‌ای ریختن یک تاس در نظر بگیریم، در این صورت، وقتی تاس را می‌ریزیم، در نهایت، یکی از اعضای S آن هم به شکل تصادفی رخ خواهد داد. پس این متغیرها تصادفی به دست می‌آیند و به همین دلیل، X را **تابع متغیر تصادفی** می‌نامیم.

در یک تابع متغیر تصادفی مانند X، تأثیر X روی هر یک از متغیرها قطعی نبوده و به صورت تصادفی رخ می‌دهد. بنابراین اعضای مجموعهٔ برد تابع X نیز به شکلی تصادفی و هر یک با احتمالی تولید خواهند شد. به مثال زیر دقت کنید:

فرض کنیم $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ فضای نمونه‌ای ریختن یک تاس باشد و تابع متغیر تصادفیِ X را با چند ضابطه، به صورت $X(1) = X(2) = 0$ ، $X(3) = 1$، $X(4) = 2$ و $X(5) = X(6) = 3$ تعریف کرده باشیم. در این صورت، اگر از ما سؤال شود که آیا قطعاً تابع X روی عدد ۱ اثر می‌کند، جواب خیر خواهیم داد. اگر تاس ۱ بیاید، تابع X روی آن اثر می‌کند. پس در واقع، $\frac{1}{6}$ احتمال دارد تابع X روی ۱ اثر کند و نیز $\frac{1}{6}$ احتمال دارد روی عدد ۲ اثر کند. پس می‌توان گفت $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$. احتمال دارد عدد صفر در بُرد تابع X تولید شود یا $\frac{1}{6}$ احتمال دارد عدد ۱ در برد تابع X تولید شود؛ بنابراین اگر جدولی شامل دو سطر تشکیل دهیم که سطر اوّل آن، مربوط به مقادیر بُرد تابع (x_iها) و سطر دوم آن، مربوط به احتمال‌های به‌وجود آمدن هر یک از آن مقادیر (p_iها) باشد، به چنین جدولی، جدول توزیع احتمال گفته می‌شود، که برای مثال قبل خواهیم داشت:

x_i	۰	۱	۲	۳
p_i	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$

تذکر مهم

همواره حاصل جمع p_iها برابر ۱ است؛ یعنی

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

که در این مثال،

$$\sum_{i=1}^{4} p_i = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = 1$$

حال سعی می‌کنم با ذکر مثال‌های متنوع، مفهوم تابع متغیر تصادفی و مفهوم تابع توزیع احتمال را بیشتر بسط داده و سپس به برخی کاربردهای آن بپردازم.

مثال (۱): یک سکّهٔ سالم را ۴ بار پرتاب می‌کنیم. روی فضای نمونه‌ای حاصل مقدار تابع متغیر تصادفی X را تعداد رو شدنهای H در این ۴ بار پرتاب تعریف می‌کنیم:

$$S = \{(a,b,c,d) \mid a,b,c,d \in \{H,T\}\}$$

$$X : S \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$X(a,b,c,d) = K$$

(که K تعداد H در ۴ بار پرتاب است.)

واضح است که K می‌تواند مقادیر ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ را اختیار کند؛ یعنی در ۴ بار پرتاب، یا اصلاً H نداریم یا یک H یا دو H یا سه H و یا چهار H داریم. برای مثال داریم:

$$X(T,T,T,T) = 0 \quad , \quad X(H,T,T,T) = 1$$

$$X(H,T,H,T) = X(H,H,T,T) = 2$$

بنابراین، جدول توزیع احتمال برای این مثال، به شکل زیر است:

x_i	۰	۱	۲	۳	۴
p_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

$$\text{تعداد حالت‌های یک H در ۴ پرتاب} = \binom{4}{1} = 4$$

$$\text{تعداد حالت‌های دو H در ۴ پرتاب} = \binom{4}{2} = 6$$

$$\text{تعداد حالت‌های سه H در ۴ پرتاب} = \binom{4}{3} = 4$$

مثال (۲): یک جفت تاس را با هم می‌ریزیم و روی فضای نمونه‌ای حاصل تابع متغیر تصادفی X را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. جدول توزیع احتمال را برای این تابع رسم کنید:

$$S=\{(a,b) \mid ۱ \le a \le ۶ , ۱ \le a \le ۶\}$$

$$X:S \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$X(a,b)=a+b$$

برای مثال:

$$X(۲,۳)=X(۳,۲)=۵ , X(۱,۱)=۲ , X(۶,۶)=۱۲ ,...$$

بدیهی است که تابع X، می‌تواند مقادیر ۲، ۳، ... و ۱۲ را تولید کند.

x_i	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
p_i	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۴}{۳۶}$	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{۶}{۳۶}$	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{۴}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$

مثال (۳): در مثال (۲) مطلوب است محاسبهٔ $P(۲ \le x < ۵)$.

منظور از $P(x=۲)$ احتمال تولید عدد ۲ در برد تابع X است. پس:

$$P(۲ \le x \le ۵) = P(x=۲) + P(x=۳) + P(x=۴)$$
$$= \frac{۱}{۳۶} + \frac{۲}{۳۶} + \frac{۳}{۳۶} = \frac{۶}{۳۶}$$

مثال (۴): در مثال (۲) تابع متغیر تصادفی Y را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. جدول توزیع احتمال را برای این تابع رسم کنید.

$$Y:S \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$Y(a,b)=\text{Max}\{a,b\}$$

برای مثال:

$$Y(۲,۳) = \text{Max}\{۲,۳\} = ۳$$

$$Y(۱,۶) = \text{Max}\{۱,۶\} = ۶$$

$$Y(۱,۱) = \text{Max}\{۱,۱\} = \text{Max}\{۱\} = ۱$$

همان طور که مشاهده می‌کنید، تابع Y می‌تواند مقادیر ۱، ۲،... و ۶ را تولید کند و برای مثال داریم:

$$P(Y=۲) = P\{(۱,۲),(۲,۱),(۲,۲)\} = \frac{۳}{۳۶}$$

پس جدول توزیع احتمال این تابع، به شکل زیر است:

y_i	۱	۲	۳	۴	۵	۶
p_i	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{۷}{۳۶}$	$\frac{۹}{۳۶}$	$\frac{۱۱}{۳۶}$

مثال (۵): در یک جعبه، ۷ سیب موجود است، که ۳ تای آنها خرابند. اگر از این جعبه ۳ سیب را تصادفی خارج کنیم و روی فضای نمونه‌ای حاصل مقدار تابع متغیر تصادفی X را تعداد سیب‌های خراب در برداشت ۳ سیب تعریف کنیم، جدول توزیع احتمال و ضابطهٔ تابع توزیع احتمال را بنویسید.

واضح است که تعداد سیب‌های خراب در برداشت ۳ سیب، یا صفر است یا ۱ یا ۲ و یا ۳. پس مقادیر برد تابع X، اعداد صفر تا ۳ است.

(ضابطهٔ تابع توزیع احتمال) $$P(X=x_i)=\frac{\binom{۳}{x_i}\times\binom{۴}{۳-x_i}}{\binom{۷}{۳}}$$

$$\Rightarrow P(X=۰)=\frac{\binom{۳}{۰}\times\binom{۴}{۳}}{\binom{۷}{۳}}=\frac{۴}{۳۵} ,$$

$$P(X=۱)=\frac{\binom{۳}{۱}\times\binom{۴}{۲}}{\binom{۷}{۳}}=\frac{۱۸}{۳۵} ,$$

$$P(X=۲)=\frac{\binom{۳}{۲}\times\binom{۴}{۱}}{\binom{۷}{۳}}=\frac{۱۲}{۳۵} ,$$

$$P(X=۳)=\frac{\binom{۳}{۳}\times\binom{۴}{۰}}{\binom{۷}{۳}}=\frac{۱}{۳۵} ,$$

x_i	۰	۱	۲	۳
p_i	$\frac{۴}{۳۵}$	$\frac{۱۸}{۳۵}$	$\frac{۱۲}{۳۵}$	$\frac{۱}{۳۵}$

مثال (۶): سکّه‌ای طوری ساخته شده است که در آن $P(H)=\frac{۳}{۵}$ است. اگر این سکّه را به دفعات دلخواه پرتاب کرده و مقدار تابع متغیر تصادفی X را تعداد پرتاب‌ها تعریف کنیم تا اوّلین T ظاهر شود، در این صورت، مقادیر بُرد تابع و سپس جدول توزیع احتمال را برای آن رسم کنید.

با توجه به تعریف تابع X داریم:

$$X(T)=۱ \quad , \quad X(H,T)=۲ \quad , \quad X(H,H,T)=۳,$$

$$X(H,H,H,T)=۴ \quad , \quad ...$$

بنابراین برد تابع، مجموعهٔ اعداد طبیعی بوده که مجموعه‌ای نامتناهی است.

وقتی مقدار X برابر با ۳ می‌شود؛ یعنی در پرتاب سوّم T ظاهر شده، پس باید در دو پرتاب قبل، سکّه H آمده باشد.

x_i	۱	۲	۳	۴	۵	...
p_i	$\frac{۲}{۵}$	$\frac{۳}{۵}\times\frac{۲}{۵}$	$\left(\frac{۳}{۵}\right)^{۲}\times\frac{۲}{۵}$	$\left(\frac{۳}{۵}\right)^{۳}\times\frac{۲}{۵}$	$\left(\frac{۳}{۵}\right)^{۴}\times\frac{۲}{۵}$	

$$\left(\Sigma p_i=\frac{۲}{۵}+\frac{۳}{۵}\times\frac{۲}{۵}+\cdots=\frac{\text{جمله‌اول}}{\text{قدرنسبت}-۱}=\frac{\frac{۲}{۵}}{۱-\frac{۳}{۵}}=\frac{\frac{۲}{۵}}{\frac{۲}{۵}}=۱\right)$$

مثال (۷): بهزاد و مهرداد، به ترتیب تاسی را می‌ریزند و با هم قرار می‌گذارند که هر کس برای اوّلین بار ۶ آورد، برنده است. اگر اوّل بهزاد بازی را شروع کند، احتمال برنده شدن مهرداد را محاسبه کنید.

برای حلّ این مسأله، فرض می‌کنیم که تاسی را به دفعات دلخواه پرتاب کرده و روی فضای نمونه‌ای حاصل، مقدار تابع متغیر تصادفی X را تعداد پرتاب‌ها تعریف می‌کنیم تا اوّلین ۶ ظاهر شود. در این صورت، مقدار X می‌تواند ۱ یا ۲ یا ۳ یا... باشد، که به ترتیب نشان دهندهٔ آن است که در پرتاب اوّل ۶ آمده یا در پرتاب دوم ۶ آمده (در پرتاب اول ۶ نیامده و در بار دوم ۶ آمده) یا در پرتاب سوم ۶ آمده (در دو پرتاب اول و دوم ۶ نیامده و در پرتاپ سوم ۶ آمده) یا... .

بنابراین مقادیر برد تابع (x_iها) عبارتند از ۱، ۲، ۳ و... .

حال با رسم جدول توزیع احتمال و مدل‌سازی مسأله روی جدول، می‌توان به راحتی مسأله را حل کرد:

x_i	۱	۲	۳	۴	۵	۶	...
p_i	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۵}{۶}\times\frac{۱}{۶}$	$\left(\frac{۵}{۶}\right)^{۲}\times\frac{۱}{۶}$	$\left(\frac{۵}{۶}\right)^{۳}\times\frac{۱}{۶}$	$\left(\frac{۵}{۶}\right)^{۴}\times\frac{۱}{۶}$	$\left(\frac{۵}{۶}\right)^{۵}\times\frac{۱}{۶}$	...

واضح است که مکان‌های فرد در x_iها متعلق به بهزاد و مکان‌های زوج، به مهرداد تعلّق دارد؛ یعنی مهرداد می‌تواند در بار دوم پرتاب تاس یا بار چهارم یا... برنده شود. پس احتمال برنده شدن مهرداد، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P(\text{برنده شدن مهرداد})=P(x=۲)+P(x=۴)+P(x=۶)+\ldots$$

$$=\frac{۵}{۶}\times\frac{۱}{۶}+\left(\frac{۵}{۶}\right)^{۳}\times\frac{۱}{۶}+\ldots=\frac{\frac{۵}{۶}\times\frac{۱}{۶}}{۱-\left(\frac{۵}{۶}\right)^{۲}}=\frac{\frac{۵}{۳۶}}{\frac{۱۱}{۳۶}}=\frac{۵}{۱۱}$$

(همان‌طور که مشاهده کردید، احتمال برنده شدنِ مهرداد $\frac{۵}{۱۱}$ بوده و احتمال برنده شدن بهزاد $۱-\frac{۵}{۱۱}=\frac{۶}{۱۱}$ است و دلیل بیشتر بودن احتمال برنده شدن بهزاد، این است که او بازی را شروع کرده!)

مثال(۷): روی دو وجه یک تاس، عدد ۱، روی دو وجه دیگر آن، عدد ۲ و روی دو وجه دیگر آن، عدد ۳ را نوشته و آن را سه بار می‌ریزیم، اگر مقدار تابع متغیر تصادفی X را مجموع سه عدد رو شده در سه پرتاب تعریف کنیم، مقادیر برد تابع X و جدول توزیع احتمال را برای آن تشکیل دهید.

با توجه به تعریف تابع X داریم:

$X(۲,۱,۱)=۲+۱+۱=۴$

$X(۱,۱,۱)=۱+۱+۱=۳ \quad , \quad X(۳,۳,۳)=۹$

بنابراین برد تابع X، عبارت است از مجموعهٔ $\{۳,۴,\ldots,۹\}$، و جدول توزیع احتمال آن، به شکل زیر حاصل می‌شود:

x_i	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
p_i	$\frac{۱}{۲۷}$	$\frac{۳}{۲۷}$	$\frac{۶}{۲۷}$	$\frac{۷}{۲۷}$	$\frac{۶}{۲۷}$	$\frac{۳}{۲۷}$	$\frac{۱}{۲۷}$

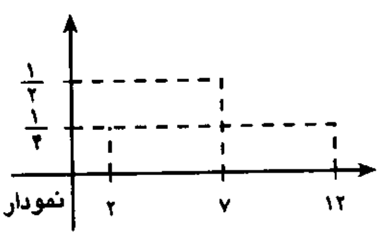
(واضح است که تاس مورد نظر، فضای نمونه‌ای به شکل $S=\{۱,۲,۳\}$ داشته، که چون سه بار ریخته شده است، فضای نمونه‌ای حاصل دارای $۳\times۳\times۳=۲۷$ عضو است.

مثال (۸): روی یک طرف سکه‌ای عدد ۱ و طرف دیگر آن عدد ۶ را نوشته‌ایم. اگر این سکّه را دوبار پرتاب و مقدار تابع متغیر تصادفی X را مجموعه اعداد ظاهر شده در این ۲ پرتاب تعریف کنیم، مقادیر برد X را به دست آورده و جدول توزیع احتمال را برای آن تشکیل دهید و نمودار میله‌ای آن را رسم کنید.

با توجه به تعریف تابع X داریم:

$X(۱,۱)=۲ \quad , \quad X(۶,۶)=۱۲ \quad , \quad X(۱,۶)=X(۶,۱)=۷$

x_i	۲	۷	۱۲
p_i	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۲}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$



نمودار میله‌ای

تمرین

در مثال قبل، اگر سکّه را سه بار پرتاب می‌کردیم، مقادیر برد تابع X و جدول توزیع احتمال آن، به چه صورتی تغییر می‌کرد؟

مکان هندسی

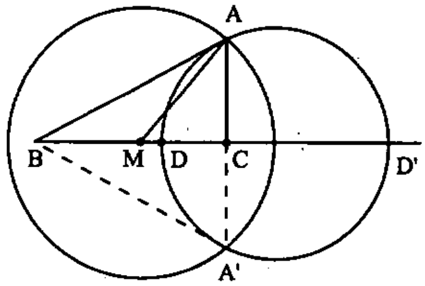
دایره آپولونیوس

(۲۴)

● محمدهاشم رستمی

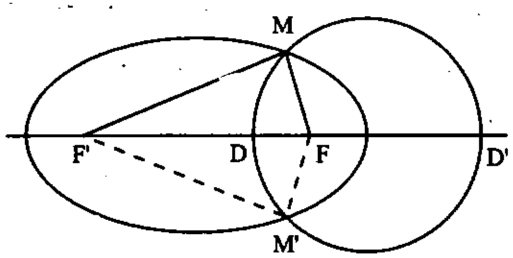
مثال (۴): از مثلث ABC، اندازهٔ ضلع $BC = a$ و $\frac{AB}{AC} = \frac{b}{c}$ و طول میانهٔ رأس A(m_a) معلوم است؛ مثلث را رسم کنید.

حل: ابتدا پاره خط BC را به طول a رسم می‌کنیم.



چون $\frac{AB}{AC} = \frac{b}{c} = k$ است، پس مکان هندسی رأس A، دایره‌ای است که قطرش پاره‌خط BC را به نسبت x تقسیم می‌کند. با مشخص کردن نقطه‌های D و D′ که پاره خط BC را به نسبت $k = \frac{b}{c}$ تقسیم می‌کند، دایره‌ای به قطر DD′ را رسم می‌کنیم. از طرفی $AM = m_a$ معلوم است؛ پس مکان هندسی دیگر رأس A، دایره‌ای به مرکز نقطهٔ M وسط پاره‌خط BC و به شعاع m_a است. این دایره را نیز رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد این دو دایره، رأس A است. از A به B و C وصل می‌کنیم تا مثلث ABC رسم شود. در صورت متقاطع بودن دو دایرهٔ مکان هندسی، مسأله دارای دو جواب برابر است.

مثال (۵): یک بیضی به کانون‌های F و F′ و عدد ثابت ۲a در صفحهٔ P داده شده است. نقطه‌ای از این بیضی را تعیین کنید که نسبت فاصله‌اش از دو کانون F و F′، برابر ۲a باشد.



حل: می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت F و F′، برابر مقدار ثابت ۲a است، دایره‌ای است که قطرش پاره خط FF′ را به نسبت ۲a تقسیم می‌کند. این دایره (دایرهٔ به قطر DD′) را رسم می‌کنیم. نقطه‌های برخورد این دایره با بیضی داده شده، جواب مسأله‌اند. ($\frac{DF'}{DF} = \frac{D'F'}{D'F} = 2a$)

مثال (۶): دو نقطهٔ $A(-1, 2)$ و $B(3, 0)$ در دستگاه مختصات xOy داده شده‌اند. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از این صفحهٔ مختصات را بیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B، برابر $\frac{1}{2}$ باشد.

حل: فرض می‌کنیم $M(x, y)$ یک نقطه از مکان هندسی مورد نظر، یعنی نقطه‌ای باشد که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر $\frac{1}{2}$ است؛ در این صورت داریم:

$$A(-1, 2) \text{ و } B(3, 0) \text{ و } M(x, y) \Rightarrow$$

$$MA = \sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2} \text{ و } MB = \sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2}$$

$$\frac{MA}{MB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}}{\sqrt{(x-3)^2+y^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow 4(x+1)^2+4(y-2)^2 = (x-3)^2+y^2$$

$$\Rightarrow 3x^2+3y^2+14x-16y+11 = 0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+\frac{14}{3}x-\frac{16}{3}y+\frac{11}{3} = 0$$

معادلهٔ دایره آپولونیوس

مثال (۷): خط $D: y-4x+4=0$ و دو نقطهٔ $A(-4, 0)$ و $B(0, 3)$ داده شده‌اند. نقطه‌ای روی خط D بیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر ۳ باشد.

حل: معادلهٔ دایرهٔ آپولونیوس ـ یعنی دایره‌ای که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت ۳ تقسیم می‌کند ـ را می‌نویسیم و نقطهٔ برخورد آن با خط D را می‌یابیم. فرض می‌کنیم $M(x,y)$ یک نقطه از مکان هندسی بالا باشد. خواهیم داشت:

$$A(-4, 0) \text{ و } B(0, 3) \text{ و } M(x, y) \Rightarrow$$

$$MA = \sqrt{(x+4)^2+y^2}, \quad MB = \sqrt{x^2+(y-3)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MB} = 3 \Rightarrow \frac{\sqrt{(x+4)^2+y^2}}{\sqrt{x^2+(y-3)^2}} = 3$$

$$\Rightarrow 9x^2+9(y-3)^2$$

$$= (x+4)^2+y^2 \Rightarrow 8x^2+8y^2-8x-54y+65 = 0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-x-\frac{27}{4}y+\frac{65}{8} = 0$$ معادلهٔ دایرهٔ آپولونیوس

$$\begin{cases} x^2+y^2-x-\frac{27}{4}y+\frac{65}{8} = 0 \\ y = 4x-4 \Rightarrow x^2+(4x-4)^2-x-\frac{27}{4}(4x-4)+\frac{65}{8} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 17x^2-60x+\frac{409}{8} = 0$$

$$\Rightarrow x_1, x_2 = \frac{+30 \pm \sqrt{247}}{17} \Rightarrow y_1, y_2 = \frac{120 \pm 4\sqrt{247}}{17} - 4$$

$$M_1\left(\frac{30+\sqrt{247}}{17}, \frac{52+4\sqrt{247}}{17}\right)$$ و

$$M_2\left(\frac{30-\sqrt{247}}{17}, \frac{52-4\sqrt{247}}{17}\right)$$ نقطه‌های جواب مسأله

مثال (۸): سه نقطهٔ $A(2, -1)$، $B(-2, 3)$ و $C(-4, 0)$ در دستگاه مختصات xOy داده شده‌اند. نقطه‌ای از این صفحهٔ مختصات را تعیین کنید که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد و نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ B و C برابر $\sqrt{2}$ باشد.

حل: نقطهٔ برخورد عمودمنصّف پاره خط AB، با دایرهٔ آپولونیوسی که قطرش پاره خط BC را به نسبت $\sqrt{2}$ تقسیم می‌کند، جواب مسأله است. بنابراین، معادلهٔ این دو مکان هندسی را می‌نویسیم و نقطهٔ برخوردشان را تعیین می‌کنیم.

$A(2, -1)$ و $B(-2, 3) \Rightarrow$ AB وسط $M(0, 1)$ و

$$m_{AB} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$m_{AB} = \frac{3+1}{-2-2} = -1 \Rightarrow$$ عمودمنصف AB

$$m = +1 \Rightarrow y-1 = 1(x-0)$$

$y = x+1$ معادلهٔ عمودمنصّف پاره خط AB

$$B(-2, 3) \text{ و } C(-4, 0) \text{ و } M(x, y) \text{ و } k = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow MB = \sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2} \text{ و } MC = \sqrt{(x+4)^2+y^2}$$

$$\frac{MB}{MC} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}}{\sqrt{(x+4)^2+y^2}} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 2(x+4)^2+2y^2 = (x+2)^2+(y-3)^2$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+12x+6y+19 = 0$$ معادله دایره آپولونیوس

$$\begin{cases} y = x+1 \\ x^2+y^2+12x+6y+19=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2+(x+1)^2+12x+6(x+1)+19=0$$

$$\Rightarrow 2x^2+20x+26=0 \Rightarrow x^2+10x+13=0$$

$$\Rightarrow x_1, x_2 = -5 \pm 2\sqrt{3} \text{ و } y_1, y_2 = -4 \pm 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow M_1(-5+2\sqrt{3}, -4+2\sqrt{3}) \text{ و}$$

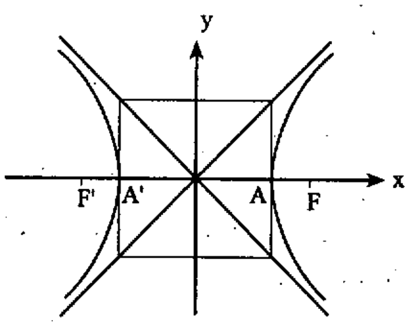
نقطه‌های جواب مسأله $M_2(-5-2\sqrt{3}, -4-2\sqrt{3})$

مثال (۹): هذلولی به معادلهٔ $x^2 - y^2 = 4$ داده شده است.

الف) این هذلولی را رسم کنید و مختصات مرکز، رأس‌ها و کانون‌های آن را بیابید.

ب) مختصات نقطهٔ E مزدوج توافقی نقطهٔ F نسبت به دو رأس A و A' را بیابید و معادلهٔ دایرهٔ به قطر EF را بنویسید.

پ) نقطه‌ای روی هذلولی بالا بیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و A' برابر $3-2\sqrt{2}$ باشد.



حل: الف) $x^2 - y^2 = 4 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$

$\Rightarrow$ O مرکز هذلولی $\,|\, \therefore a^2 = b^2 = 4$

$$\Rightarrow a = b = 2 \Rightarrow c = a\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

و

$$A(2, 0) \text{ و } A'(-2, 0) \text{ و } F(2\sqrt{2}, 0) \text{ و } F'(-2\sqrt{2}, 0)$$

ب) بنا به رابطهٔ نیوتن در تقسیم توافقی داریم:

$$\overline{OE} \cdot \overline{OF} = \overline{OA}^2 \Rightarrow \overline{OE} \times c = a \Rightarrow \overline{OE} = \frac{a^2}{c}$$

$$= \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow E \left| \begin{array}{l} \frac{a\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \\ 0 \end{array} \right.$$

وسط پاره خط EF $\; O' \left| \begin{array}{l} x = \frac{x_E + x_F}{2} = \frac{\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ y = 0 \end{array} \right.$

$$R = O'E = O'F = a\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{4}a = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

شعاع دایرهٔ به قطر EF $\quad = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \Rightarrow$$

معادلهٔ دایرهٔ به قطر EF $\quad \left(x - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{2}$

پ) دو نقطهٔ E و F پاره خط AA' را به نسبت $3-2\sqrt{2}$ تقسیم می‌کنند؛ زیرا داریم:

$$\frac{FA}{FA'} = \frac{EA}{EA'} = \frac{c-a}{c+a} = \frac{a\sqrt{2}-a}{a\sqrt{2}+a}$$

$$= \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = 3-2\sqrt{2}$$

بنابراین مکان هندسی نقطه‌ای از این صفحهٔ مختصات که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و A' برابر $3-2\sqrt{2}$ است، دایرهٔ به قطر EF است. لذا نقطهٔ برخورد این دایره با هذلولی را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = x^2 - 4 \\ \left(x - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \left(x - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + x^2 - 4 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 3\sqrt{2}x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ و } x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$x = 0 \Rightarrow y^2 = -4 \text{ و } x = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y^2 = \frac{9}{2} - 4 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow M_1\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ و } M_2\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

نقطه‌های جواب مسأله

● یدا... ایلخانی پور

آهنگ تغییر

(برای دانش‌آموزان سال سوم دبیرستان رشته ریاضی)

می‌دانید که چگونه از مشتق برای تعیین شیب خط مماس بر منحنی در یک نقطه استفاده می‌شود. اکنون مورد استعمال دیگری از مشتق را در نظر می‌گیریم و آن، تعیین میزان یا آهنگ تغییر یک متغیر نسبت به متغیر دیگری است، که متغیر دیگر، متغیر مستقل می‌باشد.

این میزانهای تغییر، یا آهنگ تغییر را می‌توان در مباحث مختلف، از جمله میزان رشد جمعیت، میزان تولید، افزایش یا کاهش سطح و حجم، سرعت، شتاب و غیره به کاربرد.

الف) آهنگ متوسط تغییر

فرض کنیم مکان یک جسم متحرکی مانند M در هر زمان t، به صورت یکنواخت، تابع مشتق‌پذیر $S = f(t)$ باشد. بنابراین در لحظهٔ t_1، مکان جسم $S_1 = f(t_1)$ است و در لحظهٔ t_2، مکان جسم $S_2 = f(t_2)$ است. آهنگ متوسط تغییر مکان جسم M در فاصلهٔ زمانی t_1 تا t_2، همان سرعت متوسط M است و برابر است با:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

که

$$\Delta S = S_2 - S_1 \ , \ \Delta t = t_2 - t_1$$

ΔS را تغییر مکان و Δt را تغییر زمان می‌نامیم. پس نسبت تغییرات مکان جسم M به تغییرات زمان، در بازهٔ زمانی $[t_1 , t_2]$ برابر است با آهنگ متوسط تغییر مکان جسم M نسبت به تغییر زمان t.

تعریف: اگر $y = f(x)$ معادله‌ای باشد که در هر لحظه، رابطهٔ تغییرات y وابسته به تغییرات x را نشان دهد، نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ را آهنگ متوسط تغییر y نسبت به x دربازهٔ $[x, x + \Delta x]$ می‌نامیم. (نسبت تغییرات متغیر وابسته به تغییرات متغیر مستقل)

(تذکر: اگر x زمان و y مکان یک جسم متحرک باشد، این آهنگ تغییر، سرعت متوسط جسم نیز نامیده می‌شود.)

مثال: غلظت یک دارو در خون یک بیمار، پس از ۱۰ دقیقه، ۲ میلیگرم و پس از ۴۰ دقیقه، ۵۲ میلیگرم در دقیقه بوده است. آهنگ متوسط تغییر غلظت خون بیمار دربازهٔ [۱۰ , ۴۰]، چه قدر است؟

حل: $\Delta y = ۵۲ - ۲ = ۵۰ \ , \ \Delta x = ۴۰ - ۱۰ = ۳۰$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{۵۰}{۳۰} = ۱/۶۶ \ \frac{mg}{m}$ میلیگرم در دقیقه

مثال: آهنگ تغییر متوسط درجهٔ حرارت سانتیگراد به درجهٔ حرارت فارنهایت را به دست آورید؛ در صورتی که $C = \frac{۵}{۹}(F - ۳۲)$ باشد.

حل: کافی است $\frac{\Delta C}{\Delta F}$ را حساب کنیم.

$$\frac{\Delta C}{\Delta F} = \frac{C(F + \Delta F) - C(F)}{\Delta F}$$

$$= \frac{\frac{۵}{۹}(F + \Delta F - ۳۲) - \frac{۵}{۹}(F - ۳۲)}{\Delta F}$$

$$= \frac{\frac{۵}{۹}(F + \Delta F - ۳۲ - F + ۳۲)}{\Delta F}$$

$$= \frac{۵}{۹} \cdot \frac{\Delta F}{\Delta F} = \frac{۵}{۹}$$

نکته: اگر $y = f(x)$ معادلهٔ مسیر یک متحرک باشد، وقتی x به اندازهٔ Δx تغییر کند، y به اندازهٔ $f(x+\Delta x) - f(x)$ تغییر می‌کند. این تغییر Δy را تغییر واقعی f می‌نامند، که این تغییر واقعی، وقتی Δx خیلی کوچک باشد، تقریباً با $f'(x)$، یعنی مشتق f در نقطهٔ x برابر است.

ب) آهنگ آنی (لحظه‌ای) تغییر

تعریف: اگر $y = f(t)$ معادلهٔ تغییر یک کمیت در هر لحظهٔ t باشد، نسبت تغییرات y (یا تغییرات f) در واحد زمان، برابر است با آهنگ آنی تغییر آن کمیّت.

یعنی: $\frac{\Delta y}{۱} = \frac{f(t + ۱) - f(t)}{۱}$

چون $\Delta t = ۱$ کوچک است، مقدار Δy تقریباً با $f'(t)$ برابر است؛ یعنی $\Delta y \simeq f'(t)$؛ پس آهنگ آنی تغییر f در لحظهٔ t، برابر است با $f'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to ۰} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$، که همان **سرعت لحظه‌ای** یک متحرّک در لحظهٔ t است. (f در بازهٔ $[t, t + \Delta t]$ مشتق‌پذیر است.)

مثال: معادلهٔ حرکت یک اتومبیل در هر لحظهٔ t، عبارت است از $f(t) = ۸۰t - ۴۰۰ \ Ln(t + ۵)$، سرعت لحظه‌ای این اتومبیل یا آهنگ آنی تغییر مکان اتومبیل، وقتی $t = ۱$، چه قدر است؟

حل: $f'(t) = ۸۰ - ۴۰۰(\frac{۱}{t + ۵}) = ۸۰(۱ - \frac{۵}{t + ۵})$

$$f'(1) = ۸۰(۱ - \frac{۵}{۶}) = ۸۰ - \frac{۴۰۰}{۶} = \frac{۴۸۰ - ۴۰۰}{۶}$$

$$= \frac{۸۰}{۶} = ۱۳/۳ m/s$$

نکته (۱): اگر $y = f(x)$ معادلهٔ یک تابع مشتق‌پذیر باشد، $f'(x)$ را آهنگ تغییر آنی f نسبت به متغیر مستقل x در نقطهٔ x می‌نامیم.

مثال: یک قطره نفت به شکل دایره، روی سطح آب در حال پخش شدن است. آهنگ تغییر سطح قطرهٔ نفت نسبت به شعاع، وقتی شعاع آن ۲ سانتیمتر است، چه قدر است؟

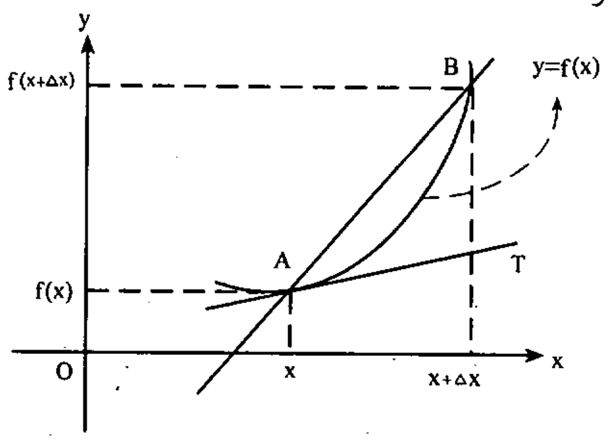
حل: سطح قطرهٔ نفت برابر سطح دایره است؛ یعنی $S(r) = \pi r^۲$ آهنگ تغییر سطح نسبت به شعاع

$S'(r) = ۲\pi r$

$S'(۲) = ۴\pi$

یعنی، سطح قطره وقتی شعاع آن برابر ۲ سانتیمتر است، به ازای هر واحد افزایش شعاع ۴π سانتیمتر مربع افزایش می‌یابد.

نکته (۲): مانند شکل تعبیر هندسی، آهنگ متوسط تغییر تابع f نسبت به x در بازهٔ $[x, x + \Delta x]$، عبارت است از شیب خط قاطعی که از نقاط $A(x \ , \ f(x))$ و $B(x + \Delta x \ , \ f(x + \Delta x))$ می‌گذرد و آهنگ آنی تغییر تابع f نسبت به x در نقطهٔ $A(x \ , \ f(x))$، عبارت است از شیب خط مماس بر منحنی تابع f در نقطهٔ A.



نکته (۳): هر وقت از آهنگ تغییر صحبت می‌شود، منظور، آهنگ آنی تغییر است؛ مگر این که از آهنگ متوسط تغییر نام برده شود.

مثال: میزان افزایش مساحت یک مکعب به طول یال x را نسبت به x، وقتی بیابید که x مساوی ۲ سانتیمتر باشد.

حل: سطح مکعب برابر است با $S(x) = ۴x^۲$؛ پس:

$S'(x) = ۸x$

$S'(۲) = ۸ \times ۲ = ۱۶\ cm^۲$

یعنی، وقتی یک سانتیمتر به طول ضلع مکعب افزوده می‌شود، به سطح آن $۱۶\ cm^۲$ افزوده می‌شود.

میزانهای مرتبط یا کمیّتهای وابسته (قاعدهٔ زنجیر)

اگر y متغیر وابسته به x، به وسیلهٔ تابع $y = f(x)$ باشد و x نیز خود متغیر وابسته به t (t معمولاً زمان است) باشد؛ یعنی $x = y(t)$، در این صورت، آهنگ تغییر f نسبت به t (y نسبت به t) از قاعدهٔ زنجیر (مشتق تابع مرکّب) استفاده می‌شود؛ یعنی:

$$y' = (fog)'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t)$$

یا

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx} \times \frac{dx}{dt}$$

یا

$$y'_t = y'_x \times x'_t$$

این نوع میزان تغییر یا آهنگ تغییر را میزانهای مرتبط یا کمیّتهای وابسته گویند.

مثال: یک بالون کروی، در حال باد شدن است. اگر آهنگ افزایش شعاع آن $۰/۱ m/s$ باشد، هنگامی که شعاع آن ۲ متر است، حجم آن با چه آهنگی افزایش می‌یابد؟

حل: کافی است $\frac{dv}{dt}$ را حساب کنیم؛ ولی داریم:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$$

که

$$\frac{dr}{dt} = ۰/۱ \ , \ v = \frac{۴}{۳}\pi r^۳$$

$$\frac{dv}{dr} = ۴\pi r^۲$$

$$\frac{dv}{dt} = ۴\pi r^۲ \times \frac{dr}{dt}$$

$$= ۴\pi \times ۲^۲ \times ۰/۱ = ۱۶\pi \times ۰/۱ = ۱/۶\pi \ \frac{m^۳}{s}$$

نکته مهم: برای حلّ مسائل آهنگ یا نرخ تغییرات روند زیر را انجام می‌دهیم.

الف) به تمام کمیّتهایی که داده شده‌اند یا باید تعیین شوند، علامت (**متغیری**) نسبت می‌دهیم و در صورت امکان، برای مسأله شکل رسم می‌کنیم تا کمیتها را شناسایی کنیم.

ب) معادله‌ای می‌نویسیم که ارتباط کمیّتها را تعیین کند.

ج) کمیتهای مستقل و وابسته را تعیین می‌کنیم.

د) از کمیتهای وابسته دو طرف معادله نسبت به کمیت مستقل، طبق قاعدهٔ زنجیر و یا ضمنی مشتق می‌گیریم.

هـ) همهٔ مقادیر متغیرهای داده شده را در معادلهٔ مشتق جایگذاری می‌کنیم و سپس نسبت به میزان تغییر (آهنگ تغییر) مطلوب حل می‌کنیم.

مثال: یک ظرف دارای ۴۰ لیتر آب است، در لحظهٔ $t = ۰$، یک سوراخی در ظرف ایجاد می‌کنیم. اگر حجم آب باقیمانده در ظرف، پس از t ثانیه، از رابطهٔ $V = ۴۰\left(۱ - \frac{t}{۱۰۰}\right)^۲$ به دست آید.

الف) با چه آهنگی پس از گذشت ۱ دقیقه، آب از ظرف خارج می‌شود؟

ب) در چه زمانی، آهنگ آنی تغییر V برابر آهنگ متوسط تغییر آن از $t = ۰$ تا $t = ۱۰۰$ ثانیه است؟

حل: آهنگ خروج آب در لحظهٔ $t = ۱$ دقیقه، برابر است با $V'(۶۰)$

$$V'(t) = ۸۰\left(-\frac{۱}{۱۰۰}\right)\left(۱ - \frac{t}{۱۰۰}\right) \qquad (t = ۶۰ \text{ ثانیه})$$

$$V'(۶۰) = ۸۰\left(-\frac{۱}{۱۰۰}\right)\left(۱ - \frac{۶۰}{۱۰۰}\right) = ۸۰\left(\frac{-۴۰}{۱۰۰^۲}\right)$$

$$V'(۶۰) = \frac{-۳۲ \times ۱۰۰}{۱۰۰^۲} = -۰/۳۲$$

(علامت منفی، به دلیل خروج آب است.)

نکته: آهنگ تغییر چون مانند بردار سرعت است، می‌تواند منفی یا مثبت باشد؛ چون جهت دارد.

ب) شرط این که آهنگ آنی برابر آهنگ متوسط شود، باید:

$$V'(t) = \frac{V(۱۰۰) - V(۰)}{۱۰۰}$$

$$\frac{-۸۰}{۱۰۰}\left(۱ - \frac{t}{۱۰۰}\right) = \frac{۴۰\left(۱ - \frac{۱۰۰}{۱۰۰}\right)^۲ - ۴۰(۱ - ۰)^۲}{۱۰۰}$$

$$-\frac{۸}{۱۰}\left(۱ - \frac{t}{۱۰۰}\right) = \frac{-۴۰}{۱۰۰} = -\frac{۴}{۱۰}$$

$$۲\left(۱ - \frac{t}{۱۰۰}\right) = ۱ \Rightarrow ۱ - \frac{t}{۱۰۰} = \frac{۱}{۲}$$

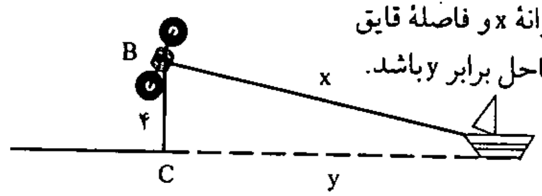
$$\frac{t}{۱۰۰} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow t = ۵۰$$

پس در ثانیهٔ پنجاهم، آهنگ آنی و متوسط در بازهٔ $[۰,۱۰۰]$ برابر می‌شود.

مثال: یک قایق چوبی به وسیلهٔ طنابی که با سرعت ۳ متر

بر دقیقه، به دور یک استوانه می‌پیچد به ساحل کشیده می‌شود. قایق با چه سرعتی (آهنگ نزدیک شدن قایق) در لحظه‌ای که ۲۵ متر تا ساحل فاصله دارد، به ساحل نزدیک می‌شود؛ در صورتی که استوانه در ارتفاع ۴ متری از سطح آب نصب شده باشد؟

حل: فرض می‌کنیم مانند شکل طول طناب، بین قایق و استوانهٔ x و فاصلهٔ قایق تا ساحل برابر y باشد.



کافی است $\frac{dy}{dt}$ را حساب کنیم.

طبق شکل و مثلث قائم الزاویه داریم: $x^{۲} - ۴^{۲} = y^{۲}$

طبق قاعدهٔ زنجیر داریم: $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$

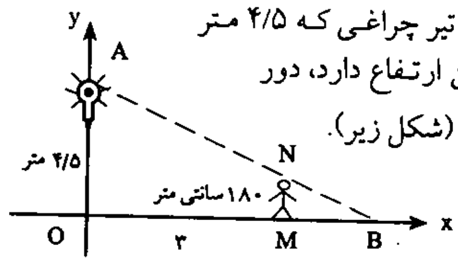
که $\frac{dx}{dt} = ۳$ متر بر دقیقه و $۲x\frac{dx}{dt} = ۲y\frac{dy}{dt}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$

$y = ۲۵$ و $x = \sqrt{۲۵^{۲} + ۴^{۲}}$ پس:

$\frac{dy}{dt} = ۳ \times \frac{\sqrt{۶۲۵ + ۱۶}}{۲۵} \simeq ۳/۰۳$ متر در دقیقه

مثال: مردی به قد ۱۸۰ سانتیمتر با سرعت ۱۵۰ سانتیمتر بر ثانیه، از تیر چراغی که ۴/۵ متر از زمین ارتفاع دارد، دور می‌شود (شکل زیر).



الف) نوک سایه‌اش با چه آهنگی از چراغ دور می‌شود؟

ب) آهنگ تغییر طول سایه‌اش، چه قدر است؟

حل: فرض کنیم $x = OB$ طول سایهٔ به علاوهٔ فاصلهٔ شخص از تیر چراغ باشد،

طول شخص $= MN = ۱۸۰cm$

فاصلهٔ شخص تا چراغ $y = OM$

طول پایهٔ چراغ $= OA = ۴۵۰cm$

الف) کافی است $\frac{dx}{dt}$ را حساب کنیم. طبق نسبت تشابه در مثلثهای OAB و MNB داریم:

$$\frac{MN}{OA} = \frac{MB}{OB} \Rightarrow \frac{۱۸۰}{۴۵۰} = \frac{x-y}{x}$$

پس: $\frac{۲}{۵} = \frac{x-y}{x} \Rightarrow ۵x - ۵y = ۲x$

یا: $x = \frac{۵}{۳}y$

چون $\frac{dy}{dt} = ۱۵۰$، پس $\frac{dx}{dt} = \frac{۵}{۳}$ ،$\frac{dy}{dt} = \frac{۵}{۳} \times ۱۵۰$؛

بنابراین $\frac{dx}{dt} = ۲۵۰cm/s$

ب) طول سایهٔ MB را y در نظر می‌گیریم.

$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$ و $\frac{y}{x} = \frac{۱۸۰}{۴۵۰} \Rightarrow y = \frac{۲}{۵}x$

پس: آهنگ افزایش طول سایهٔ شخص

$\frac{dy}{dt} = \frac{۲}{۵} \times ۱۵۰ = ۶۰cm/s$

تست: آهنگ آنی افزایش حجم یک کره، وقتی شعاع آن برابر ۱۰ سانتیمتر است، کدام است؟ در صورتی که شعاع آن با آهنگ ۰/۲ سانتیمتر در ثانیه افزایش یابد؟

۱) ۴۰۰π ۲) ۴۰π ۳) ۸۰π ۴) ۱۲۰π

جواب گزینهٔ ۳ است.

حل: $v(r) = \frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$، $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = ۴\pi r^{۲} \times \frac{dr}{dt}$

$= ۴\pi \times ۱۰۰ \times \frac{۲}{۱۰} = ۸۰\pi \ cm^{۳}/s$

تست: یک نردبان به طول ۴/۵ متر، به دیواری تکیه دارد. اگر پای نردبان از پای دیوار با سرعت ۶۰ سانتیمتر در ثانیه دور شود، سر نردبان با چه آهنگی به پایین دیوار کشیده می‌شود، وقتی پای آن ۱/۵ متر از دیوار فاصله دارد؟

۱) $-۱۵\sqrt{۲}$ cm/s ۲) $۱۵\sqrt{۲}$ cm/s

۳) $\frac{۱۵}{\sqrt{۲}}$ cm/s ۴) $-\frac{۱۵}{\sqrt{۲}}$ cm/s

جواب گزینهٔ ۱ است.

حل: فاصلهٔ پای نردبان تا دیوار را x و فاصلهٔ سرنردبان تا پای دیوار را y می‌نامیم. طول نردبان برابر ۴/۵ متر است. کافی است $\frac{dy}{dt}$ را حساب کنیم؛ ولی داریم $x^{۲} + y^{۲} = ۴/۵^{۲}$، پس:

$۲y\frac{dy}{dt} = -۲x\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-x}{y} \times ۶۰$

چون $\frac{dx}{dt} = ۶۰$ و $x = ۱/۵$ متر، پس:

$y = \sqrt{(۴/۵)^{۲} - (۱/۵)^{۲}} = ۳\sqrt{۲}$ متر

$\frac{dy}{dt} = \frac{-۱۵۰}{۳۰۰\sqrt{۲}} \times ۶۰ = \frac{-۳۰}{\sqrt{۲}} = -۱۵\sqrt{۲}$ cm/s

نکته: در مسائل اقتصادی، با سه تابع به نامهای: **تابع هزینه C(x)**، **تابع درآمد R(x) و تابع سود P(x)** سروکار داریم. اگر **هزینهٔ متوسط، درآمد متوسط و سود متوسط**

خواسته شود، نسبتهای $\frac{C(x)}{x}$، $\frac{R(x)}{x}$ و $\frac{P(x)}{x}$ را حساب می‌کنیم، و اگر هزینه نهایی خواسته شود $C'(x)$ را محاسبه می‌کنیم. رابطهٔ بین سه تابع فوق به صورت زیر است:

$$P(x)= R(x) - C(x)$$

مثال: کارخانه‌ای برای تولید x ساعت مچی، $C(x)$ تومان هزینه می‌کند که $C(x) = 2000 + 10x + \frac{x^2}{100}$

الف) برای تولید صفر ساعت، چه میزان باید هزینه کند؟ (هزینهٔ اولیّه)

ب) هزینهٔ نهایی چیست؟

ج) هزینهٔ نهایی وقتی $x = 50$ چیست؟ هزینهٔ تولید ۵۱امین ساعت چیست؟

حل: الف) $C(0)= 2000$

ب) $C'(x) = 10 + \frac{x}{50} \Rightarrow C'(50) = 10 + 1 = 11$

ج) $C(51) - C(50) =$

$$2000 + 10(51) + \frac{(51)^2}{100} - 2000 - 10(50) - \frac{(50)^2}{100}$$

$$=10+\frac{1}{100}(51 - 50)(51 + 50) = 10 + 1/01 = 11/01$$

هزینهٔ واقعی ۵۱ امین ساعت.

تمرین

۱. نقطهٔ M روی مسیری به معادلهٔ $y = \sqrt{x^2+1}$ در حرکت است. هنگامی که M در نقطهٔ به طول ۷ قرار دارد، اگر x با آهنگ $10\sqrt{2}$ متر در ثانیه تغییر کند، y با چه آهنگی تغییر می‌کند؟ در چه نقطه‌ای آهنگ تغییر y دو برابر آهنگ تغییر x می‌شود؟

۲. سود هفتگی یک شرکت به وسیلهٔ تعداد تولید x رادیو، P تومان می‌باشد که از فرمول $P(x)= 75x - 0/03x^2-15000$ معین می‌شود. وقتی سطح تولید به ۱۰۰۰ رادیو در هفته می‌رسد، میزان تغییر سود را حساب کنید.

۳. یک بشکهٔ بنزین در حال خالی شدن است. اگر پس از t ثانیه، G گالن بنزین در بشکه موجود باشد و $G(t) = 3(15-t)^2$. (G تعداد گالن بنزین موجود برحسب t است.)

الف) آهنگ متوسط تخلیهٔ بنزین در طول ۱۲ ثانیه چه قدر است؟

ب) آهنگ آنی تخلیهٔ بنزین، پس از ۱۲ ثانیه چه قدر است؟

۴. یک بالن کروی، پر از هواست. اگر هوای آن با آهنگ ۸ سانتیمتر مکعب در دقیقه نشت کند، وقتی شعاع آن ۱۵ سانتیمتر است، آهنگ کاهش شعاع آن چه قدر است؟

۵. یک ظرف قیفی با آهنگ ۳ سانتیمتر مکعب در ثانیه از آب پر می‌شود. ارتفاع این ظرف ۱۰ و شعاع قاعدهٔ آن ۵ سانتیمتر است. آهنگ بالا آمدن سطح آب وقتی این سطح ۴ سانتیمتر بالا آمده باشد، چه قدر است؟

۶. یک بشکهٔ استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ ۳۰۰ سانتیمتر با آهنگ ۸ متر مکعب در دقیقه از گندم پر می‌شود، سرعت افزایش عمق گندم چه قدر است؟

۷. اگر شعاع کره‌ای با آهنگ ۳ میلیمتر در ثانیه افزایش یابد، آهنگ تغییر حجم کره، وقتی مساحت سطح آن برابر ۱۰ میلیمتر مربع است، چه قدر است؟

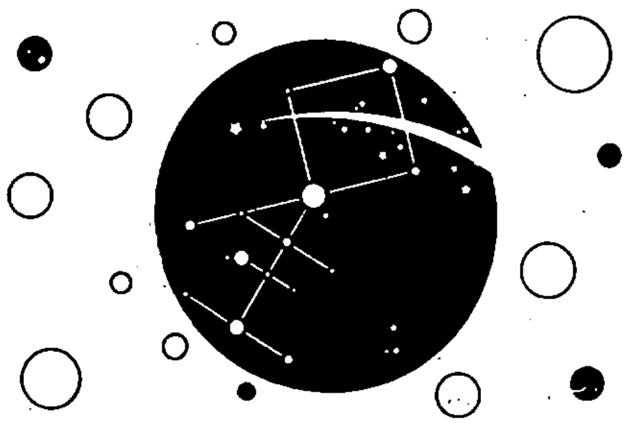
۸. شعاع دایره‌ای در حال بزرگ شدن را بیابید که آهنگ تغییر مساحتش دو برابر آهنگ تغییر شعاعش باشد.

۹. ذرّه‌ای در امتداد منحنی $y = 2x^3 - 3x^2 + 4$ در حرکت است. در لحظه‌ای که $x=2$ است، مؤلفهٔ x ذرّه با آهنگ $\frac{1}{2}$ واحد در ثانیه افزایش می‌یابد. آهنگ تغییر y در این لحظه، چه قدر است؟

۱۰. یک هواپیما که در ارتفاع ۴ کیلومتری زمین، به موازات زمین در پرواز است از روی ایستگاه رادار می‌گذرد. پس از لحظه‌ای، رادار نشان می‌دهد که هواپیما ۵ کیلومتر دور شده است و فاصلهٔ هواپیما تا ایستگاه، به میزان ۳۰۰ کیلومتر در ساعت افزایش می‌یابد. سرعت حرکت افقی هواپیما در آن لحظه چه قدر است؟

۱۱. دختر بچه‌ای بادبادکی را در ارتفاع ۹۰ متری پرواز می‌دهد. باد آن را با سرعت ۷/۵ متر در ثانیه، به طور افقی از وی دور می‌کند. وقتی بادبادک در فاصلهٔ ۱۵۰ متری از او است، سرعت رها شدن نخ از دست وی، باید چه قدر باشد؟

۱۲. ذرّه‌ای روی مسیر $5xy^3 - 8y^2 = 8$ حرکت می‌کند، اگر مؤلّفه x با سرعت 6m/s افزایش یابد، هنگامی که ذرّه در نقطهٔ $(1,2)$ قرار دارد، مؤلّفه y با چه سرعتی تغییر می‌کند؟



● سید محمدرضا هاشمی موسوی

حل معادلهٔ همنهشتی[1] به توسط جدول

(برای دانش‌آموزان دوره پیش‌دانشگاهی)

رشته ریاضی

در معادلهٔ همنهشتی:

$ax \overset{n}{\equiv} c$ (۱)

عدد n را سنج یا پیمانه یا هنگ (mod)، x را مجهول، a را ضریب مجهول و c را عدد ثابت همنهشتی می‌نامیم.

می‌دانیم با فرض ۱ = (a,n) و با توجه به معکوس ضربی a یعنی a^{-1} (وارون ضربی a در همنهشتی):

$a^{-1}.a \overset{n}{\equiv} 1$

معادلهٔ (۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$x \overset{n}{\equiv} a^{-1}.c$;

$x = kn + a^{-1}.c \quad (k \in Z)$

بنابراین برای حلّ معادلهٔ (۱)، کافی است معکوس a را محاسبه کنیم.

می‌دانیم، معکوس a (وارون ضربی a) از معادلهٔ همنهشتی زیر محاسبه می‌شود:

$x_1 = a^{-1} \quad ; \quad ax_1 \overset{n}{\equiv} 1$ (۲)

در معادلهٔ (۲) اگر $a > n$ و r_1 باقیماندهٔ حاصل تقسیم $a : n$ باشد، می‌توان نوشت:

$r_1x_1 \overset{n}{\equiv} 1$ (۳)

معادلهٔ همنهشتی (۳) را می‌توان به صورت معادلهٔ سیّال زیر نوشت:

$r_1x_1 - nx_2 = 1$;

$nx_2 - r_1x_1 = -1$;

$nx_2 \overset{r_1}{\equiv} -1$ (۴)

۱. Congruence (سازگاری، موافقت و تطبیق شیئی با شیء دیگر)

با توجه به $n > r_1$ و با فرض این که r_2 باقیماندهٔ حاصل تقسیم $n : r_1$ باشد، می‌توان نوشت:

$$r_2 x_2 \overset{r_1}{\equiv} -۱ \qquad (۵)$$

مطابق مرحلهٔ پیش معادلهٔ همنهشتی (۵) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$r_1 x_3 \overset{r_2}{\equiv} ۱ \qquad (۶)$$

به همین ترتیب، اگر این عمل را ادامه دهیم، ضریب مجهول، برابر یک خواهد شد و با بازگشت به مرحله‌های پیش، به روش بازگشتی می‌توان x را حساب کرد. (توجه: تمام عملیات فوق را توسط یک جدول چهارسطری انجام می‌دهیم.) این جدول، دارای چهار سطر است که پس از چهار مرحله تکمیل می‌شود؛ به طور مثال، معادلهٔ همنهشتی $۱۹۹۹x \overset{۱۳۷۸}{\equiv} ۱۳۵۷$ را با استفاده از جدول حل می‌کنیم:

$\times n_i$	۱۳۷۸	۶۲۱	۱۳۶	۷۷	۵۹	۱۸	۵	۳	۲	۱
$+c_i$	۱	-۱	۱	-۱	۱	-۱	۱	-۱	۱	
$\div a_i$	۶۲۱	۱۳۶	۷۷	۵۹	۱۸	۵	۳	۲	۱	
x_i	۵۳۷	۲۴۲	۵۳	۳۰	۲۳	۷	۲	۱	۱	

توجه: هر ستون جدول، یک معادلهٔ همنهشتی را مشخص می‌کند.

دراین مثال چون $a = ۱۹۹۹ > n = ۱۳۷۸$، پس باید باقیماندهٔ تقسیم $a : n$ را حساب کرده و در دومین خانهٔ سطر اوّل (از سمت چپ) کنار n (پیمانه) بنویسیم.

پیش از تشریح جدول، این نکته را یادآور می‌شویم که برای حلّ هر معادلهٔ همنهشتی، ابتدا لازم است شرط $(a,n) = ۱$ را بررسی کنیم. در معادلهٔ همنهشتی $ax \overset{n}{\equiv} c$، اگر $(a,n) = d$ در این صورت، معادله وقتی جواب دارد که c بر d بخش‌پذیر باشد ($d | c$).

بنابراین، برای بررسی شرط $(a,n) = ۱$، ابتدا همیشه تقسیمهای متوالی را به صورت زیر انجام می‌دهیم و باقیمانده‌های حاصل را به ترتیب، در سطر اول جدول می‌نویسیم. در صورتی که سطر اول جدول به عدد یک ختم شود، نشان دهندهٔ این است که شرط $(a,n) = ۱$ برقرار است، و در صورتی که به عدد صفر ختم شود و عدد پیش از صفر، عددی بزرگتر از یک باشد، آن عدد بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a و n است.

مرحلهٔ (۱): تقسیمهای متوالی را به‌صورت زیر انجام می‌دهیم و باقیمانده‌های حاصل را در سطر اوّل جدول درج می‌کنیم.

و ۱۳۷۸ | ۶۲۱ و ۱۹۹۹ | ۱۳۷۸
۱۲۴۲ ۲ ۱۳۷۸ ۱
(۱۳۶) (۶۲۱)

۳ | ۲ و...و ۶۲۱ | ۱۳۶
۲ ۱ ۵۴۴ ۴
(۱) (۷۷)

مرحلهٔ (۲): عدد ثابت همنهشتیها را که به طور متناوب ۱ و ۱- است، از سمت چپ به راست در سطر دوم جدول (سطر c_i) می‌نویسیم.

مرحلهٔ (۳): از اوّلین باقیماندهٔ (۶۲۱) تا آخرین باقیماندهٔ (۱) را باردیگر در سطر سوّم (سطر a_i) نظیر سطر اوّل n_i می‌نویسیم.

مرحلهٔ (۴): آخرین خانهٔ سطر چهارم در سمت راست جدول (سطر x_i) را همیشه برابر عدد ثابت (۱+ یا ۱-) آن ستون، واقع در سطر دوم در نظر می‌گیریم. این توضیح لازم است که در سطر اوّل با شرط $(a,n) = ۱$ عدد ۱ ظاهر می‌شود و در نتیجه، عمل تقسیم به پایان می‌رسد.

برای تکمیل سطر چهارم (سطر x_i) از سمت راست به شکل M متوالی (مطابق شکل و در جهت پیکانها) به این ترتیب عمل می‌کنیم (عمل مربوط به هر سطر، ابتدای هر سطر نوشته شده است):

$$\frac{(۱)۳-۱}{۲} = ۱ \text{ و } \frac{۱(۵)+۱}{۳} = ۲ \text{ و } \frac{۲(۱۸)-۱}{۵} = ۷ \text{ و } \frac{۷(۵۹)+۱}{۱۸} = ۲۳ \text{ و...و}^{*}$$

آخرین عدد از سمت راست در سطر چهارم (۵۳۷) را در عدد ثابت همنهشتی ضرب می‌کنیم:

$$^{*}\frac{۲۴۲(۱۳۷۸)+۱}{۶۲۱} = ۵۳۷ \qquad ۵۳۷(۱۳۵۷) = ۷۲۸۷۰۹ \overset{۱۳۷۸}{\equiv} ۱۱۲۵$$

به بیان دیگر، باقیماندهٔ حاصل از تقسیم عدد (۱۳۵۷)۵۳۷ یا ۷۲۸۷۰۹ بر ۱۳۷۸، جواب معادلهٔ همنهشتی است:

$x = ۱۱۲۵$ (جواب اصلی معادله)

بدیهی است که جواب عمومی معادله، به ازای مقادیر صحیح دلخواه k، چنین است:

$x = ۱۳۷۸k + ۱۱۲۵$ (جواب عمومی معادله)

مثال (۱): معادلهٔ همنهشتی زیر را حل کنید.

$$۲۶x \overset{۱۹}{\equiv} ۱۷$$

حل: چون $۱۹ = n < ۲۶ = a$ ابتدا باقیماندهٔ حاصل از تقسیم $۱۹ \div ۲۶$ را در سمت راست سنج (۱۹) می‌نویسیم. سپس تقسیم‌های متوالی را انجام می‌دهیم و باقیمانده‌های حاصل را در سطر اوّل جدول درج می‌کنیم:

$$(-۸) \times ۱۷ = -۱۳۶ \overset{۱۹}{\equiv} ۱$$

با توجه به همنهشتی بالا، جواب اصلی مثبت معادله چنین است:

$$x = ۸(۱۹) - ۱۳۶ = ۱۵۲ - ۱۳۶ = ۱۶$$

$$x = ۱۶$$

$\times n_i$	۱۹	۷	۵	۲	۱
$+c_i$	۱	-۱	۱	-۱	
$\div a_i$	۷	۵	۲	۱	
x_i	-۸	-۳	-۲	-۱	

مثال (۲): وارون عدد ۱۹۹۹ به پیمانهٔ ۱۹۸۰ را بیابید.

حل: بیان ریاضی مسأله، معادلهٔ همنهشتی زیر است:

$$۱۹۹۹x \overset{۱۹۸۰}{\equiv} ۱$$

چون $۱۹۸۰ = n < ۱۹۹۹ = a$، باقیمانده تقسیم $۱۹۸۰ \div ۱۹۹۹$ را در سمت راست پیمانهٔ (۱۹۸۰) می‌نویسیم و سپس تقسیمهای متوالی را انجام می‌دهیم.

توجه: چون همیشه جواب مثبت معادله مورد نظر است، بنابراین، کافی است عدد سنج (۱۹۸۰) را به عدد (۵۲۱-) بیفزاییم تا جواب اصلی معادله به دست آید:

جواب: $x = ۱۹۸۰ - ۵۲۱ = ۱۴۵۹$

$\times n_i$	۱۹۸۰	۱۹	۴	۳	۱
$+c_i$	۱	-۱	۱	-۱	
$\div a_i$	۱۹	۴	۳	۱	
x_i	-۵۲۱	-۵	-۱	-۱	

پس معکوس ضربی عدد ۱۹۹۹ به پیمانهٔ ۱۹۸۰ عدد ۱۴۵۹ است.

مثال (۳): معادلهٔ همنهشتی زیر را از نظر وجود یا عدم جواب بررسی کنید.

$$۲۶۸۰x \overset{۳۹۵۳}{\equiv} ۱۷۶$$

حل: ابتدا با تقسیمهای متوالی و درج باقیمانده‌ها، بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد ۳۹۵۳ و ۲۶۸۰ را به دست می‌آوریم.

$\times n_i$	۳۹۵۳	۲۶۸۰	۱۲۷۳	۱۳۴	۶۷	۰
$+c_i$	۱	-۱	۱	-۱	۱	

با توجه به جدول داریم: $(۲۶۸۰ , ۳۹۵۳) = ۶۷$

چون عدد ثابت معادله (۱۷۶) بر ۶۷ بخش‌پذیر نیست، معادله دارای جواب نیست.

مثال (۴): معادلهٔ همنهشتی زیر را حل کنید.

$$۱۳۷۸x \overset{۷۷}{\equiv} ۷$$

حل: با تشکیل جدول معادله را حل می‌کنیم:

$$(۱۳۷۸ \overset{۷۷}{\equiv} ۶۹)$$

$\times n_i$	۷۷	۶۹	۸	۵	۳	۲	۱
$+c_i$	۱	-۱	۱	-۱	۱	-۱	
$\div a_i$	۶۹	۸	۵	۳	۲	۱	
x_i	-۲۹	-۲۶	-۳	-۲	-۱	-۱	

یکی از جوابهای معادله از بی‌شمار جواب، چنین است:

$$x_۱ = (-۲۹)(۷) = -۲۰۳$$

چون جواب مثبت معادله در نظر است، بنابراین ضریب مثبتی از سنج را به این جواب می‌افزاییم:

$$x = ۳(۷۷) - ۲۰۳ = ۲۳۱ - ۲۰۳ = ۲۸ \quad ;$$

$x = ۲۸$ (جواب اصلی)

مثال (۵): معکوس (وارون ضربی) عدد ۳۴ به پیمانهٔ ۴۱ را بیابید.

حل: این مسأله، معادل با همنهشتی زیر است:

$$۳۴x \overset{۴۱}{\equiv} ۱$$

با تشکیل جدول، معادله را حل می‌کنیم:

$\times n_i$	۴۱	۳۴	۷	۶	۱
$+c_i$	۱	-۱	۱	-۱	
$\div a_i$	۳۴	۷	۶	۱	
x_i	-۶	-۵	-۱	-۱	

با توجه به جدول، جواب $x_۱ = -۶$ به دست می‌آید که

برای یافتن جواب مثبت، کافی است عدد سنج را به آن بیفزاییم.

$x = ۴۱ - ۶ = ۳۵ \quad ; \quad \boxed{x = ۳۵}$

بنابراین معکوس عدد ۳۴ به پیمانهٔ ۴۱، عدد ۳۵ است.

تمرین

معادله‌های همنهشتی زیر را حل کنید:

۱) $۴۴۱x \overset{۲۷۳}{\equiv} ۲۱$ (جواب: $x = ۵$)

۲) $۷۹x \overset{۹}{\equiv} ۱$

۳) $۱۳۷۸x \overset{۱۳۵۷}{\equiv} -۹$

۴) $۱۹۹۹x \overset{۲۹۹۹}{\equiv} ۲۰۰۰$

۵) $۱۹۹۹x \overset{۱۳۷۸}{\equiv} ۱۳۵۷$ (جواب: $x = ۱۱۲۵$)

۶) $۱۳۱۳x \overset{۱۰۲۷}{\equiv} -۲۶$ (جواب: $x = ۴۳$)

توجه: این جدول، کاربردهای بسیاری دارد که در این جا به طور اختصار، کاربرد جدول را در حلّ معادله‌های سیّال خطی تشریح می‌کنیم. از این جدول برای شناسایی اعداد اوّل و یافتن معادل عددهای توانی و... نیز می‌توان استفاده کرد.

حل معادله‌های سیّال خطی چند مجهولی به کمک جدول $(ax + by + cz + \dots = d)$

معادلهٔ سیّال دو مجهولی را به صورت عمومی زیر در نظر می‌گیریم:

$(a, b) = ۱ \quad ; \quad ax + by = c \qquad (۱)$

معادلهٔ (۱) را به صورت معادلهٔ همنهشتی زیر می‌نویسیم:

$(x, y \in Z) \quad , \quad ax \overset{b}{\equiv} c \qquad (۲)$

اینک معادلهٔ (۲) را از طریق جدول حل کرده و از آن جا مقدار x را تعیین می‌کنیم. سپس از رابطهٔ $y = \frac{c - ax}{b}$، مقدار y را نیز به دست می‌آوریم.

مثال (۱): معادلهٔ سیّال زیر را حل کنید.

$۲۵x - ۱۷y = ۳ \qquad (۱)$

حل: ابتدا معادله را به صورت معادلهٔ همنهشتی زیر می‌نویسیم:

$۲۵x \overset{۱۷}{\equiv} ۳ \qquad (۲)$

حال در این جا، معادلهٔ همنهشتی (۲) را به توسط جدول حل می‌کنیم:

$x_۱ = ۳(-۲) = -۶$

$x = ۱۷ - ۶ = ۱۱$

$x = ۱۱ \quad ; \quad y = ۱۶$

$\times n_i$	۱۷	۸	۱
$+c_i$	۱	-۱	
$\div a_i$	۸	۱	
x_i	-۲	-۱	

توجه: با در دست داشتن یک جواب اختصاصی معادلهٔ (۱)، می‌توانیم جواب عمومی معادله را بنویسیم؛ زیرا اگر $\alpha, \beta \in Z$، یک جواب اختصاصی معادله باشد؛ در این صورت:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a\alpha + b\beta = c \end{cases} \quad ;$$

با فرض $(a, b) = ۱$، از تفاضل دو معادلهٔ دستگاه، خواهیم داشت:

$y = \beta - \frac{a}{b}(x - \alpha)$

برای این که $y \in Z$، لازم است که داشته باشیم:

$\frac{x - \alpha}{b} = t \in Z \quad ; \quad x = \alpha + bt$

بنابراین، با فرض $t \in Z$، جوابهای معادلهٔ (۱) از معادله‌های زیر به دست می‌آید:

$x = \alpha + bt \quad , \quad y = \beta - at \qquad (۳)$

بنابر معادله‌های (۳)، جواب عمومی معادلهٔ $۲۵x - ۱۷y = ۳$، چنین است:

$x = ۱۱ - ۱۷t , \; y = ۱۶ - ۲۵t \; (t \in Z)$

مثال (۲): معادلهٔ سیّال زیر را حل کنید.

$۱۳۴۰x - ۳۹۵۳y = ۴۶۹$

حل: ابتدا معادله را به صورت معادلهٔ همنهشتی زیر می‌نویسیم:

$۱۳۴۰x \overset{۳۹۵۳}{\equiv} ۴۶۹ \qquad (۱)$

حال باید حاصل (۳۹۵۳ , ۱۳۴۰) را به دست آوریم:

$\times n_i$	۳۹۵۳	۱۳۴۰	۱۲۷۳	۶۷	۰
$+c_i$	۱	-۱	۱	-۱	

چون سطر اول به صفر ختم شده است، نتیجه می‌شود که عددهای ۱۳۴۰ و ۳۹۵۳ دارای عامل مشترک ۶۷ می‌باشند:

$(1340\ ,\ 3953) = 67$

از طرفی چون ۷ = ۶۷ ÷ ۴۶۹ ؛ بنابراین، معادلهٔ (۱) را می‌توان به ۶۷ ساده کرد:

$$20x \overset{59}{\equiv} 7 \qquad (2)$$

در این جا، برای حلّ معادلهٔ (۲)، جدول را تشکیل می‌دهیم:

$\times n_i$	۵۹	۲۰	۱۹	۱
$+c_i$	۱	-۱	۱	
$\div a_i$	۲۰	۱۹	۱	
x_i	۳	۱	۱	

با توجه به جدول، می‌توان نوشت:

$$x = 3 \times 7 = 21$$

با داشتن مقدار x، می‌توان مقدار y را محاسبه کرد:

$$y = \frac{20x - 7}{59} = \frac{20(21) - 7}{59} = \frac{413}{59} = 7$$

بنابراین، جواب عمومی معادله چنین است:

$$x = 21 - 59t \qquad ; \qquad y = 7 - 20t$$

مثال: جوابهای صحیح و مثبت معادلهٔ سیّال زیر را به دست آورید.

$$7x + 11y + 26z = 130 \qquad (1)$$

حل: بزرگترین ضریب مجهولها، ضریب z است؛ بنابراین، باید داشته باشیم:

$$7 + 11 + 26z \leq 130 \qquad ; \qquad z \leq 4$$

پس، می‌توان نوشت:

$$z_1 = 1 \ :\ 7x_1 + 11y_1 = 104 \ ;\ 7x_1 \overset{11}{\equiv} 104 \qquad (2)$$

با تشکیل جدول خواهیم داشت:

$\times n_i$	۱۱	۷	۴	۳	۱
$+c_i$	۱	-۱	۱	-۱	
$\div a_i$	۷	۴	۳	۱	
x_i	-۳	-۲	-۱	-۱	

$$x_1 = (-3)(104) = -312$$

با توجه به همنهشتی زیر:

$$-312 \overset{11}{\equiv} 7$$

مقادیر x_1 و y_1 چنین است:

$$x_1 = 7 \quad , \quad y_1 = 5$$

به همین ترتیب:

$$Z_2 = 2 \ :\ 7x_2 + 11y_2 = 78 \ ;\ 7x_2 \overset{11}{\equiv} 78 \qquad (3)$$

در این معادلهٔ همنهشتی، ضریب مجهول (x_2) برابر ۷ و پیمانهٔ همنهشتی برابر ۱۱ مطابق با همنهشتی (۲) می‌باشد، بنابراین جواب معادلهٔ (۳) با توجه به جدول اخیر، چنین است:

$$x_2 = (-3)(78) = -234 \overset{11}{\equiv} 8 \qquad , \qquad y_2 = 2$$

معادلهٔ (۱) به ازای ۳ = Z_3 و ۴ = Z_4، جواب صحیح ندارد. پس، معادله دارای دو دسته جواب اختصاصی (۱، ۵، ۷) و (۲، ۲ ، ۸) می‌باشد، که می‌توان با استفاده از این جواب‌های اختصاصی، جواب‌های عمومی معادله را نیز به دست آورد.

تمرین

۱. با فرض $d = (399, 589)$، عددهای صحیح r و s را چنان بیابید که معادلهٔ زیر برقرار باشد.

$$399r + 589s = d$$

۲. معادله‌های سیّال زیر را حل کنید.

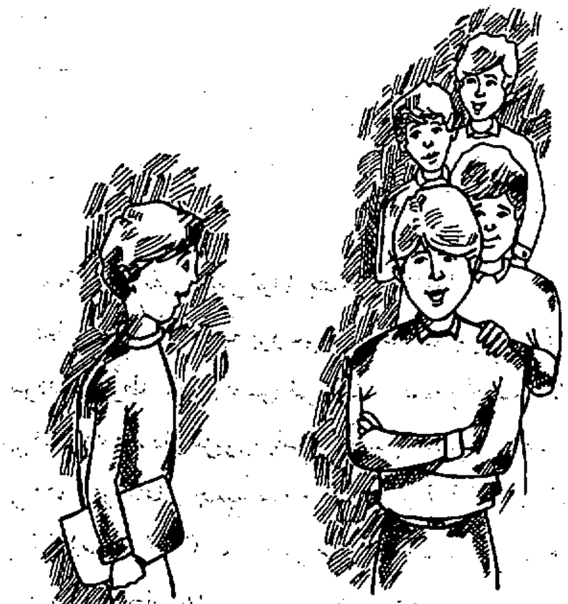
۱) $7x + 5y = 19$

۲) $10x + 86y = 500$

۳) $4x + 3y - 5z = 2$

۴) $x + 2y + 3z + 4t = 10$

۵) $x - y + z - t + u = 1$



(قسمت دوم)

ریاضیات تفریحی

شیر، شتر و کاهو و مسأله ملانصرالدین

یان استیوارت

● ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

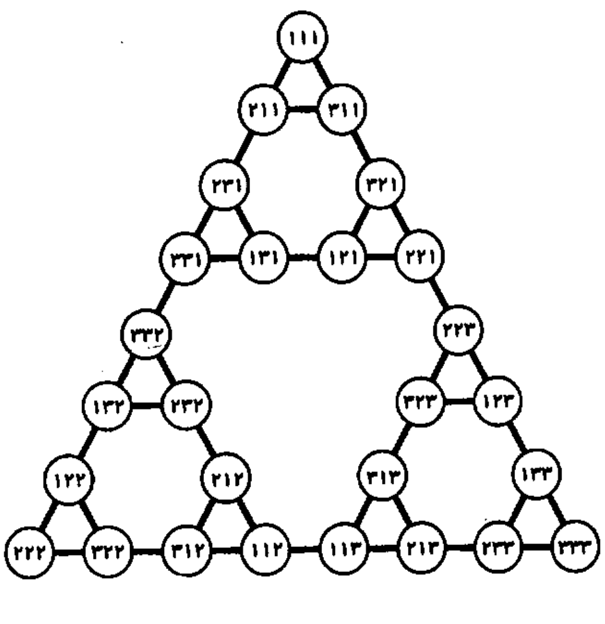
مسألهٔ ۳

تمام مکان‌ها، بجز سه مکان، *دقیقاً* سه حرکت *قانونی* به دست می‌دهند، در *حالی* که سه مکان دیگر، *تنها* دو حرکت قانونی به دست می‌دهند؛ *چرا؟*

تکلیف بعدی، به توجه و دقت، اما اندکی فکر، نیاز دارد. ۲۷ نقطه بر تکه کاغذی رسم و آنها را با ۲۷ مکان مشخص و خطهایی برای نمایش حرکت‌های قانونی رسم می‌کنیم. اوّلین هجومم به این مسأله، با توده‌ای از خطوط ماکارونی مانند متوقف شد. اما پس از اندکی تفکر، با تجدید آرایش رأس‌ها و یال‌ها، برای اجتناب از روی هم قرار گرفتن، به شکل ۴ انجامید.

شکلی که تقریباً نمی‌تواند تصادفی باشد!

اما پیش از آن که به بررسی این مطلب بپردازیم که چرا نمودار مربوطه دارای صورتی چنین منظم است، ملاحظه می‌کنیم که نمودار مزبور، پاسخ پرسش اصلی‌مان را به دست می‌دهد. در انتقال جمیع سه قرص از میلهٔ ۱ (مکان ۱۱۱) به میلهٔ ۲ (مکان ۲۲۲)، صرفاً در مسیر یال سمت چپ حرکت کرده، جا به جایی‌های زیر را انجام می‌دهیم:



شکل (۴) نمودار هانوی ۳ـقرصی، صورتی بسیار ظریف دارد. چرا؟

۱۱۱←۲۱۱←۲۳۱←۳۳۱←۳۳۲←۱۳۲←۱۲۲←۲۲۲

در واقع، با مراجعه به نمودار، آشکار می‌شود که می‌توانیم از هر مکان به مکان دیگر برویم. این نیز واضح است که سریع‌ترین مسیر کدام است.

مسألهٔ ۴

الف) *سریع‌ترین مسیر از ۲۱۱ به ۲۱۲ کدام است؟*

ب) *سریع‌ترین مسیر از ۲۱۱ به ۲۱۳ کدام است؟*

یک پرسش عمیق‌تر: توضیح ساختار قابل توجه شکل (۴) چیست؟

نمودار مورد بحث، شامل سه کپی از نمودار کوچکتری است که برای تشکیل یک مثلث با سه یال منفرد به هم وصل شده‌اند. اما هر نمودار کوچکتر، به نوبهٔ خود، دارای ساختار سه‌تایی مشابهی است. چرا تمام موارد در سه‌تایی‌ها ظاهر می‌شوند و چرا تکّه‌ها به این ترتیب، به هم وصل شده‌اند؟

در صورتی که نمودار هانوی ۲-قرصی را رسم کنیم، متوجه می‌شویم که دقیقاً مشابه بخش سوّم و بالایی شکل (۴) است. حتی شماره‌های رئوس یکسانند؛ با این استثنا که ۱های پایانی، حذف شده‌اند.

در واقع، می‌توان این موضوع را به سادگی و **بدون** رسم مجدد نمودار ملاحظه کرد؛ چه می‌توان بازی هانوی ۲-قرصی را با سه قرص نیز انجام داد. تنها کافی است که قرص سوّم را نادیده بگیریم. برای انجام دادن این کار، فرض می‌کنیم قرص ۳، بر میلهٔ ۱ قرار داشته باشد. در این صورت، بازی هانوی ۳-قرصی را انجام می‌دهیم؛ اما توجه‌مان را تنها به دنباله‌های سه رقمی‌ای معطوف می‌کنیم که به ۱ ختم شده باشند؛ از قبیل ۱۳۱ یا ۲۲۱. این دنباله‌ها دقیقاً همان دنباله‌های بخش سوم و بالایی شکلند.

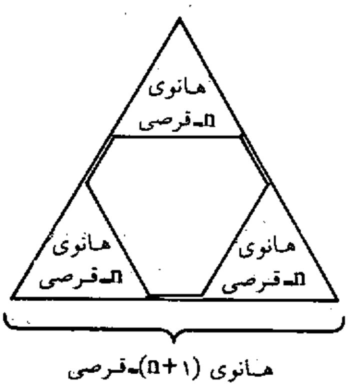
به همین ترتیب، هانوی ۳-قرصی با قرص ۳ی ثابت، بر میلهٔ ۲-هانوی ۲-قرصی تغییر قیافه داده، نظیر بخش سوم چپ پایین شکل است و هانوی ۳-قرصی با قرص ۳ی ثابت بر میلهٔ ۳، نظیر سوّمین بخش راست پایین آن می‌شود.

این مطلب توضیح می‌دهد که چرا سه کپی از نمودار هانوی ۲-قرصی، در نمودار هانوی ۳-قرصی مشاهده می‌شود.

اندکی تفکر بیشتر نشان می‌دهد که این سه زیر نمودار «Subgraph» خود، توسط سه یال منفرد در کلّ معمّا به هم وصل شده‌اند. برای وصل کردن زیر نمودارهای مزبور، باید قرص ۳ را **جابه‌جا** کنیم. اما چه وقت می‌توانیم این کار را انجام دهیم؟ تنها زمانی که یک میله خالی باشد، یکی شامل قرص ۳ و دیگری شامل تمام قرص‌های باقی‌مانده باشد! در این صورت است که می‌توانیم قرص ۳ را به میلهٔ خالی منتقل کرده، میله‌ای خالی (میله‌ای که قرص را از آن برداشته‌ایم) ایجاد کنیم و قرص‌های دیگر را دست نخورده باقی بگذاریم. شش مورد از چنین مکان‌هایی موجود است و حرکت‌های ممکن آنها را دو به دو به هم وصل می‌کند.

همین استدلال، دربارهٔ هر تعداد قرص به کار می‌رود. برای مثال، نمودار هانوی ۴-قرصی، شامل سه کپی از نمودار ۳-قرصی است که در گوشه‌ها مانند مثلثی به هم وصل شده‌اند. هر زیر نمودار، یک هانوی ۴-قرصی را با قرص ۴ ثابت بر یکی از میله‌ها مشخص می‌کند؛ اما این بازی در واقع، همان هانوی ۳-قرصی تغییر قیافه داده است و چنین است اوضاع بقیه (شکل ۵).

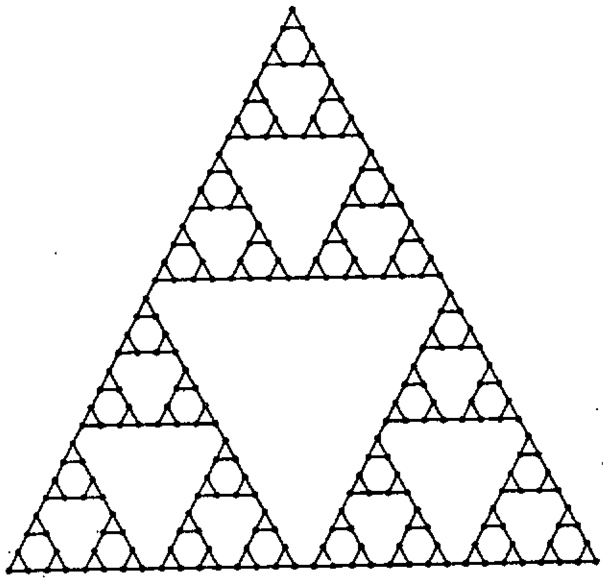
در این مورد، باید گفت که معمّای برج هانوی، دارای ساختاری برگشتی «recursive structure» است؛ به این ترتیب که، جواب هانوی (n+۱)-قرصی با استفاده از پاسخ هانوی n-قرصی و طبق قاعده‌ای ثابت، معین می‌شود. ساختار برگشتی مزبور، توضیح می‌دهد که چرا نمودار هانوی (n+۱)-قرصی را می‌توان از نمودار هانوی n-قرصی ساخت. تقارن مثلثی «Triangular Symmetry» مزبور، به این علت ایجاد می‌شود که قاعده‌های مربوطه در مورد میله‌های ۱، ۲ و ۳ دقیقاً به یک نحوه به کار می‌روند.



شکل (۵) ساختار برگشتی هانوی n-قرصی

در این صورت، می‌توان با استفاده از کاربرد مکرر این قاعده در مورد نمودار هانوی ۰- قرصی -که نقطه‌ای منفرد

است ـ نمودار براهمای ۶۴ـقرصی یا هانویی با هر تعداد قرص دلخواه،استنتاج کرد. برای مثال، شکل (۶) نمودارهانوی ۵ـقرصی را نشان می‌دهد، که با استفاده از ساختار برگشتی مزبور رسم شده است. اندیشه به جای زورا! رسم هانوی ۵ـقرصی با فهرست کردن تمام ۲۴۳ مکان ممکن و یافتن جمیع حرکت‌های بین آنها ساعت‌ها وقت می‌گیرد و احتمالاً چندین اشتباه نیز در مسیر رخ می‌دهد.



شکل (۶) نمودار هانوی ۵ـقرصی شبیه برخالی، معروف به واشرسرپینسکی است.

مسألهٔ ۵

در یک هانوی nـقرصی، کمترین تعداد حرکات لازم برای انتقال جمیع n قرص از یک میله به میلهٔ دیگر، چقدر است؟

مسألهٔ ۶

در یک هانوی nـقرصی، چند حرکت متمایز (یعنی، یال‌های نمودار مربوطه) موجود است؟

مسألهٔ ۷

رأس‌های شکل (۶) را برچسب نزده‌ایم. نگران نشوید؛ چون نمی‌خواهیم شما این کار را انجام دهید! اما مایلیم نشان دهید که این کار را می‌توان اصولاً انجام داد. برای برچسب زدن به هانوی $(n+1)$ـقرصی، قاعده‌ای با این فرض به دست آورید که چگونگی برچسب زدن به نمودار هانوی nـقرصی را می‌دانید.

ملاحظهٔ نهایی

همچنان که تعداد قرص‌ها بیشتر و بیشتر می‌شود، نمودار مربوطه، پیچیده‌تر و پیچیده‌تر شده، شباهت بیشتری به واشرسرپینسکی پیدا می‌کند.[1] شکل مزبور، یک برخال «fractal» است.

شیء هندسی، دارای ساختاری مفصل با تناسب کامل است. دستاورد فوق، دستاوردی جالب و شگفت‌آور است؛ زیرا معمّای مزبور، تقریباً یک قرن پیش از کشف برخال‌ها ابداع شده است. نتیجهٔ مزبور برهان دیگری است بر وحدت قابل توجه ریاضیات، و گذشته از این، دارای کاربرد شگفت‌انگیز زیر است.

داستان از این قرار است که اندکی پس از انتشار اوّلیه این فصل در شمارهٔ اوت ۱۹۸۹ Science Pourla، به کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیات در **کیوتو** رفتم و در آن‌جا با ریاضیدانی آلمانی موسوم به **آندریاس هینتز** (Andreas Hinz) آشنا شدم. وی مشغول کار محاسبهٔ فاصلهٔ متوسط بین دو نقطهٔ واشرسرپینسکی به ضلع واحد بود. یکی از متخصصانی که مورد پرسش قرار گرفته بود، گفت کاری «بس مشکل» است. دیگری جواب داد «بدیهی، و برابر $\frac{۸}{۱۵}$ است»؛ اما در تحلیل دقیق‌تر، اثبات مربوطه به دست نیامد.

خود هینتز، فرمولی برای تعداد متوسط حرکات بین، مکان‌های واقع در معمای برج هانوی به دست آورده بود.

در واقع هینتز و مستقل از او، **چان هات ـ تونگ** «Chan Hat - Tung»، فرمولی دقیق برای تعداد متوسط حرکات بین مکان‌های هانوی nـقرصی یافته بودند.

تعداد **کل** حرکات (با استفاده از کوتاه‌ترین مسیرها) بین جمیع جفت‌های ممکن مکان‌ها توسط فرمول حیرت‌آور زیر به دست می‌آید.

۱. ر.ک. Game , Set , and Math, chapter 9.

$$\frac{۴۶۶}{۸۸۵}۱۸^n - \frac{۱}{۳}۹^n - \frac{۳}{۵}۳^n +$$
$$\left[\frac{۱۲}{۲۹} + \frac{۱۸}{۱۰۰۳}\sqrt{۱۷}\right]\left[\frac{۱}{۲}(۵+\sqrt{۱۷})\right]^n +$$
$$\left[\frac{۱۲}{۲۹} - \frac{۱۸}{۱۰۰۳}\sqrt{۱۷}\right]\left[\frac{۱}{۲}(۵-\sqrt{۱۷})\right]^n$$

فرمولی که آن را به عنوان مثالی از مواردی در نظر می‌گیرم که ریاضیدانان به آنها می‌رسند.

هینتز و چان، متوجه ارتباط این مطلب با واشر سرپینسکی نشدند. اوّلی، با مطالعهٔ مقالهٔ من، ملاحظه کرد که می‌تواند این محاسبه را در مورد برج هانوی به کار برد. در این مورد، به دلیل این که ۳^n مکان موجود است، فاصله متوسط بین دو مکان، مجانب $\frac{۴۶۶}{۸۸۵}۲^n$ است، مقداری که با چشم پوشی از جمیع جملات به استثنای اوّلین (و بزرگترین) جملهٔ فرمول و تقسیم بر ۳^n به دست می‌آید.

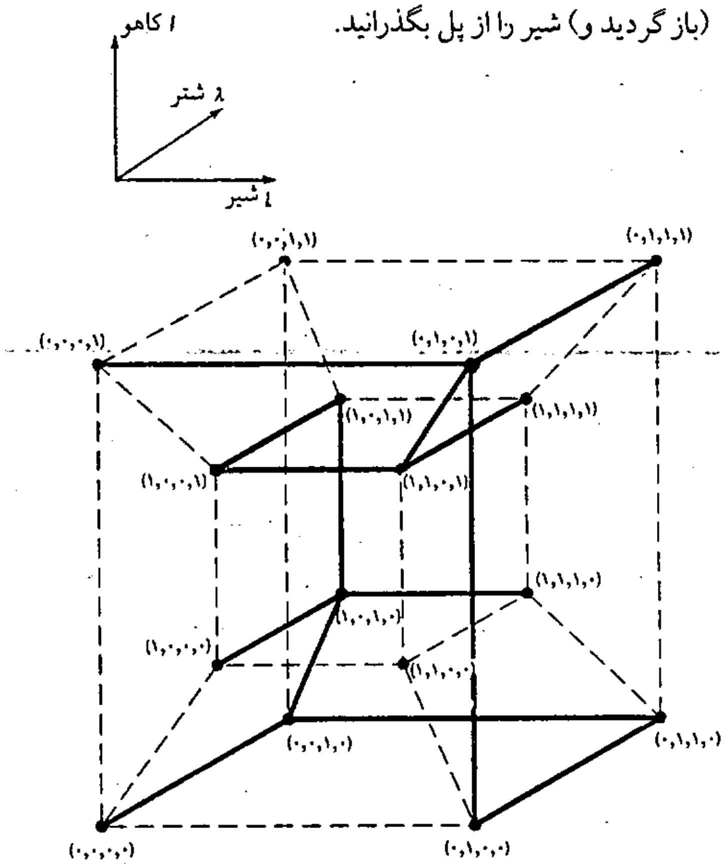
این مطلب، بدان معناست که نسبت پاسخ دقیق و مقدار تقریبی مورد بحث، چون n بسیار بزرگ شود، به ۱ میل می‌کند. اکنون، طول ضلع نمودار، ۲^n است و با تقسیم بر آن، برای برابر کردن ضلع مزبور با ۱، پاسخ $\frac{۴۶۶}{۸۸۵}$ را در حدّ بی‌نهایت قرص به دست می‌آوریم. اما نمودار مربوط به هانویِ با بی‌نهایت قرص، همان واشر مورد بحث است. بنابراین، فاصلهٔ متوسط بین دو نقطه در یک واشر سرپینسکی واحد، دقیقاً $\frac{۴۶۶}{۸۸۵}$ است.

این مقدار ۲ درصدی، از مقدار پیشنهادی متخصص دوم کمتر است. در این صورت، چه کسی می‌گوید ریاضیدانان خلاق، بازده جدّی ندارند؟ از لحاظ آمار نیز هینتز ثابت کرد که واریانس فاصلهٔ مورد نظر، دقیقاً $\frac{۹۰۴,۸۰۸,۳۱۲}{۱۴,۴۴۸,۱۵۱,۵۷۵}$ است. سفارش من به تمام افرادی که در ریاضیات به دنبال اعداد خارق‌العاده‌اند، این است که این دو عدد را نیز به کلکسیون خود اضافه کنیم.

پاسخ‌ها

۱. در این حال، نمودار مربوطه، یک ابر مکعب در فضای نهنگ ـ شیر ـ لاما ـ کاهو، با یال‌های گوناگون حذف شده، چون در شکل (۷) است. یکی از پاسخ‌های ممکن به صورت زیر است:

شتر را به آن طرف ببرید.
(باز گردید و) شیر را از پل بگذرانید.



شکل (۷) ابر مکعب مربوط به معمای نهنگ ـ شیر ـ شتر ـ کاهو. یال‌های خط چین ممنوع و یال‌های پر مجازند.

شتر را بازگردانید.
کاهو را به آن طرف ببرید.
(باز گردید و) نهنگ را از پل بگذرانید.
شتر را به آن طرف ببرید.

راه حلّ شش حرکتی دیگری نیز موجود است، می‌توانید آن را بیابید.

۲. نمودار مربوطه، نسبتاً بزرگ است؛ با طوقه‌ها و بن‌بست‌های بسیار. برای رسم آن، به ورقه‌ای بزرگتر از این صفحه نیاز داریم و تازه برای به دست دادن پاسخ موجود نیز جا نمی‌شود. اما به هر حال، روشی سریع‌تر برای حل این معمّا وجود دارد؛ زیرا معمّای مورد بحث، صورتی تغییر شکل داده از معمّای شیر ـ شتر ـ کاهو است. در این مورد، تیره‌ترین بلوک، از آن شتر است.

۳. در حالت عمومی، هر میله قرص متفاوت شکل، واقع بر بالای خود دارد. در این صورت، سه حرکت ممکن موجود

است؛ قرص کوچکتر به یکی از دو قرص دیگر منتقل می‌شود یا قرص متوسط روی بزرگترین قرص قرار می‌گیرد. اگر یکی از میله‌ها خالی باشد، باز هم سه حرکت وجود دارد: یا یکی از دو قرص بالایی را بر میلهٔ خالی قرار می‌دهیم، یا قرص کوچکتر را بالای قرص بزرگتر قرار می‌دهیم. اما زمانی که دو میله خالی شدند (و تمام قرص‌ها را بر میله‌ای منفرد توده کردیم)، تنها دو حرکت می‌ماند: قرص بالایی را بر یکی از دو سوزن تهی قرار می‌دهیم.

۴.

۲۱۲←۲۳۲←۳۳۲←۳۳۱←۲۳۱←۲۱۱

۲۱۳←۳۱۳←۳۲۳←۲۲۳←۲۲۱←۳۲۱←۳۱۱←۲۱۱

۵. تعداد رأس‌های واقع در امتداد هر ضلع نمودار در هر مرحله، دو برابر می‌شود، بنابراین در مورد هانوی n-قرصی، برابر 2^n است. مسأله تعداد **یال‌های** واقع در امتداد یک ضلع را می‌خواهد، که یک واحد کمتر از این مقدار، یعنی $2^n - 1$ است.

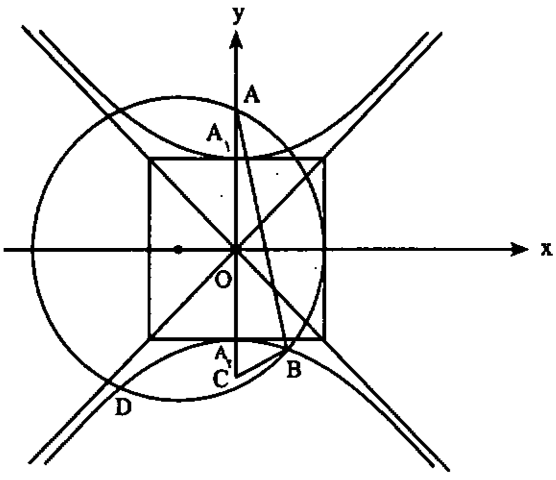
۶. فرض می‌کنیم در نمودار n-قرصی، E_n یال موجود باشد. ساختار برگشتی مربوطه، مستلزم این است که $E_{n+1} = 3E_n + 3$؛ گذشته از این، $E_1 = 3$؛ بنابراین:

$$E_n = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n = (3^{n+1} - 3)/2$$

۷. زیر نمودار بالایی هانوی (n+1)-قرصی را درست مانند مورد هانوی n-قرصی، اما با یک، ۱ اضافه در پایان آن برچسب بزنید. برای به دست آوردن زیر نمودار چپ پایین، زیر نمودار بالایی را به اندازهٔ °۱۲۰، در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت بگردانید و ۱ را به ۲، ۲ را به ۳ و ۳ را به ۱ تبدیل کنید. برای به دست آوردن زیر نمودار راست پایین، °۱۲۰ در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران داده، ۱ را به ۳، ۳ را به ۲ و ۲ را به ۱ تبدیل کنید.

پاسخ مسأله مسابقه ای برهان ۳۳

حل: از رابطه داده شده نتیجه می‌شود: $AD - DC = AB - BC$ یا $AD - DC = d - d' = k$ ؛ یعنی تفاضل فاصله‌های نقطه D از دو نقطه ثابت A و C برابر با مقدار ثابت $d - d' = k$ می‌باشد؛ لذا نقطه D متعلق به هذلولی است که A و C کانونها و $d - d' = k$ مقدار ثابت (تفاضل فاصله‌های هر نقطه هذلولی از دو کانون) آن می‌باشد. نقطه D محل تلاقی هذلولی با دایره است.



تعیین نقطه D : نقطه O وسط پاره‌خط AC مرکز هذلولی است:

$$2c = AC \Rightarrow OA = OC = c$$

A_1 و A_2 رأسهای هذلولی می‌باشند:

$$OA_1 = OA_2 = \frac{d - d'}{2} = \frac{2a}{2} = a$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} \qquad AD > CD$$

باید توجه داشت که چهار نقطه تقاطع وجود دارد، ولی با توجه به موقعیت نقطه D و $AD > CD$، نقطه D روی کمان طرف چپ وتر AC کاملاً مشخص می‌شود.

همراه با درسهای ریاضیات (۲)

حساب به عنوان نظام اصلی ریاضیات

● پرویز شهریاری

۱. خلاصه موضوع

حساب (یونانی «آرتیموس» به معنای عدد)، دانش عدد، ویژگیهای آن و انجام عمل روی آن است. حساب در هر گام زندگی مورد نیاز است و هرکسی از هر تخصصی نیازمند است تا از آن استفاده کند. نمی‌توان فرهنگ انسانی را بدون در نظر گرفتن حساب تصور کرد و به این دلیل است که هر انسانی، باید با دقت و علاقه حساب را یاد بگیرد.

حساب، کهن‌ترین شاخه در بین همهٔ شاخه‌های ریاضیات است و سرچشمه‌های آن به ژرفای تاریخ بازمی‌گردد. همهٔ ملتهای کهن و از آن جمله مصری‌ها، بابلی‌ها، ایرانی‌ها، هندی‌ها و یونانی‌ها به حساب توجه داشتند. این ملت‌ها برای شمردن، اندازه گرفتن و ساختمان خود، به حساب نیازمند بودند. از جمله، مصری‌ها برای ساختن هرم‌های مشهور خود، باید حساب می‌کردند چند قطعه سنگ لازم دارند و بلندی هر قطعه و سطح قاعدهٔ آن، چه قدر باید باشد.

۲. پیدایش عدد درست و دستگاه‌های عدد شماری

ریاضیات، همچون سایر دانش‌های کهن، از دورانی آغاز می‌شود که دربارهٔ آن، هیچ نوشته‌ای نداریم؛ زیرا در زمانی به وجود آمد که هنوز بشر برای ثبت خاطره‌های خود، نمادهایی در نظر نگرفته بود. ولی نتیجهٔ بررسی یادگارهایی که باقی‌مانده است، زبان آنها و همچنین روند تکاملی زبان، به ما این امکان را می‌دهد که حساب، و به طور کلی ریاضیات، تا چه اندازه کند پیش رفته است. در ضمن، روشن شده است که انسان با چه مشقتی و در طول هزاران سال توانسته است به مفهوم‌های اصلی حساب و ریاضیات پی ببرد. با چه رنجی و در طول چه زمانی توانسته است به تدریج و به کندی با اساسی‌ترین مفهوم ریاضیات، یعنی عدد آشنا شود.

عدد، مقیاس و واحدی است برای شمردن و اندازه‌گیری هر آنچه که در پیرامون ماست. شمردن و اندازه‌گیری، سرچشمهٔ پیدایش عدد است ؛ بنابراین باید در رأس مفهوم‌های ریاضی بررسی شود.

امّا مطالعهٔ غیر مستقیم، نمی‌تواند پاسخ روشن و دقیقی به ما بدهد که عدد، چه زمانی و چگونه پدید آمد؛ زیرا ملت‌هایی که در مرحلهٔ بالایی از تمدن قرار داشتند، تنها زمانی به مطالعهٔ ملت‌های دیگر پرداختند که آنها از نظرفرهنگی درسطحی پایین‌تر بودند؛ یعنی وقتی که از آتش استفاده می‌کردند، ساختمانهای نخستین سنگی را برای زندگی ساخته بودند، تیر و کمان را به کار می‌بردند، ظرف چوبی و دیگر وسیله‌ها را ساخته بودند و از قایق‌های ابتدایی استفاده می‌کردند. با چه قوم‌هایی سروکار داشتند ؛ چون هر کدام از آنها در سطحی از پیشرفت ریاضیات بودند. مطالعهٔ فرهنگ ملت‌هایی هم که در

درجهٔ پایینی از تمدن قرار دارند، می‌تواند ما را یاری کند تا پیشرفت ریاضیات را در سده‌ها و هزاره‌های گذشته بهتر درک کنیم.

با جمع‌بندی همهٔ اینها، می‌توانیم به اندازهٔ کافی، سندهایی دربارهٔ تکامل ریاضیات، یا بهتر بگوییم، مفهوم‌های نخستین ریاضیات در گذشتهٔ دور را به دست آوریم.

سخت‌ترین مرحله‌ای که بشر ضمن رسیدن به مفهوم عدد گذرانده است، جدا کردن واحد از «بسیار» بوده است، به احتمالی، این جریان در دورانی که هنوز بشر از اجداد خود جدا نشده بود، اتفاق افتاد. وقتی انگشت خود را به طرف چیزی نشانه می‌رفت، یکی را در برابر «مجموعه» می‌گذاشت. هنوز هم وقتی کودک تازه زبان بازکرده است و می‌گوید «دوتا»، منظورش «خیلی» است نه «دوتا» به مفهومی که ما می‌فهمیم.

برای نمونه، قبیلهٔ «بوتوکود» در برزیل (این قبیله در جریان هجوم اروپایی‌ها، به کلی نابود شد)، تنها عدد «یک» و «بسیار» را می‌شناختند. مفهوم عدد «دو» وقتی به وجود آمد که در هر دست، یک چیز را نگه داشته بودند. در این مرحله، عدد «دو» مترادف با «دو دست» بوده که در هر کدام از آنها، «یکی» را نگه داشته بودند. در این مرحله، هر وقت می‌خواست عدد «دو» را بیان کند، دو دست خود را بالا می‌آورد. برای بیان مفهوم «سه»، به دشواری بیشتری برخورد می‌کرد: انسان سه دست ندارد؛ این دشواری وقتی برطرف شد که سوّمین چیز را روی پای خود قرار داد. بنابراین، عدد «سه» مترادف بود با دو دست و یک پا. مفهوم «چهار» ساده‌تر به دست آمد: چهار به معنای این بود که در هر دست و روی هر پا، یک چیز را نگه می‌داشت. در این مرحله، نامی برای عددها نداشت و آنها را روی دستها و پاها می‌گذاشت یا با اشاره نشان می‌داد.

تکامل بعدی شمارش، به احتمال زیاد، مربوط به دورانی است که انسان با نوعی کار، مثل شکار و ماهیگیری، آشنا شد. انسان برای به دست آوردن اینها، ابزارهایی تهیه کرده بود. بجز این، وقتی به نقطه‌های سرد مهاجرت کرده بود، ناچار شد برای مصون بودن از سرما، لباس و پوست تهیه کند.

رفته رفته اجتماع اولیه بغرنج‌تر می‌شد، تنوّع غذاها بیشتر می‌شد و لباس و اسلحه رو به کمال می‌رفت. در این وضعیت، انسان ناچار بود به نحوی حساب اموال مشترک را نگه دارد، نیروی دشمن را که برای به دست آوردن سرزمین تازه، مجبور به جنگ یا دفاع بود، محاسبه کند. شمارش هم نمی‌توانست در «چهار» متوقف بماند و به ناچار پیشتر و پیشتر می‌رفت.

در ریاضیات، نخستین انتزاع به وجود آمد؛ به این ترتیب که چیزهای شمردنی را با چیزهای دیگری عوض کرد و بین آنها تناظر یک به یک برقرار کرد؛ سنگریزه‌ها، علامت‌ها، گره‌ها و غیره. هر سنگ یا هر گره، نمایندهٔ یک عنصر از چیز شمردنی بود. این گونه شمردن تا امروز هم، اثر خود را در بین ملت‌ها باقی گذاشته است. این وسیله، بعدها در شکل تکاملی خود، یعنی چرتکه ظاهر شد، که امروز هم می‌توان نمونه‌های آن را در بعضی جاها دید. (به ویژه در چین و ژاپن)

تکامل شمارش، وقتی سرعت گرفت که انسان متوجه شد می‌تواند چیزها را با نزدیک‌ترین وسیله به خودش، یعنی انگشتان دست مقایسه کند. در این جا، هر انگشت نقش واحد را به عهده داشت. شمردن با انگشتان، موجب شد که شمارش تا پنج بالا برود؛ زیرا در هر دست، فقط پنج انگشت وجود داشت. ابتدا انگشتان یک دست و سپس انگشتان هر دو دست و در آخر، انگشتان دست و پا مورد استفاده قرار گرفت (انسان در آغاز، کفش به پا نداشت و به این ترتیب بین انگشتان دست و پا تفاوتی نمی‌دید). هنوز هم کودکان ما، برای محاسبه، از انگشتان پا استفاده می‌کنند. بومیان امریکای جنوبی، با تناظر انگشتان دست با انگشتان پا، شمارش می‌کردند.

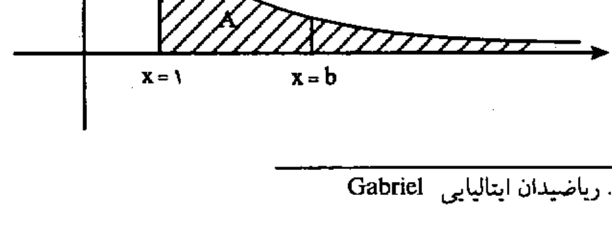
در این دوران، اقتصاد بسیار ابتدایی بود و از جمله، وقتی غذا یا لباسی که در جنگ به غنیمت گرفته بودند، به سادگی قابل تقسیم بود، به همین دلیل، نیازی به نامگذاری عددها نداشته و بیشتر با ایما و اشاره انجام می‌شد. برای مثال، ساکنان بومی جزیره‌های «آن دامان» (پراکنده در خلیج بنگال اقیانوس هند) که اکنون اجتماع آنها پراکنده شده است، برای بیان عددها، واژه نداشتند و ضمن شمردن با حرکت و اشاره، آن را روشن می‌کردند.

پارادکس شیپور گابریل[۱]

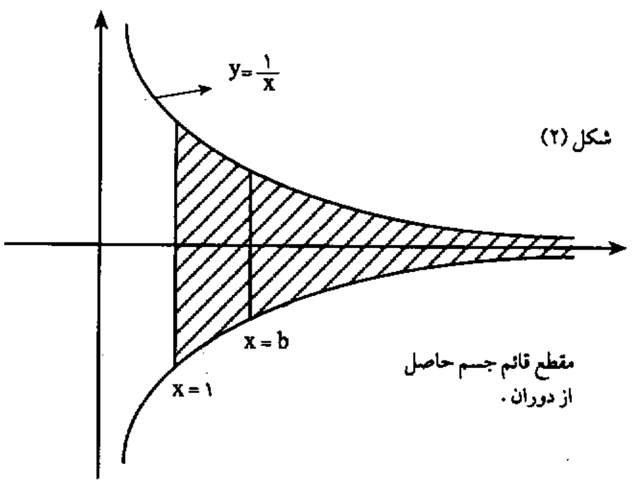
● احمد قندهاری

در این مقاله، این تناقض وجود دارد که: یک بار ثابت می‌شود، تمام رنگ‌های دنیا برای رنگ کردن یک سطح کافی نیست و از طرف دیگر، ثابت می‌شود با مختصر رنگی، می‌توان همان سطح را رنگ کرد. طرح مسأله به صورت زیر است.

تابع حقیقی با ضابطهٔ $y = \frac{1}{x}$ ، $x > 0$ را در نظر می‌گیریم، نمودار تابع را در صفحهٔ محورهای مختصات رسم می‌کنیم.



شکل (۱)



شکل (۲)

مقطع قائم جسم حاصل از دوران.

۱. می‌خواهیم ثابت کنیم سطح زیر منحنی به معادلهٔ $y = \frac{1}{x}$ ، $x \geq 1$ و محور xها را نمی‌توان با همهٔ رنگ‌های دنیا رنگ کرد.

۲. جسم نامتناهی حاصل از دوران این سطح حول محور xها را با π واحد مکعب رنگ می‌توان رنگ کرد. (که در این صورت، سطح جانبی جسم حاصل، هم رنگ خواهد شد.)

۱. ریاضیدان ایتالیایی Gabriel

۳. سطح جانبی این جسم حاصل از دوران این سطح را نمی‌توان با همهٔ رنگ‌های دنیا رنگ کرد.

حل(۱): در حقیقت سؤال این است که آیا سطح A در شکل (۱) متناهی است؟

اگر سطح متناهی باشد، می‌توان آن را رنگ کرد؛ چنانچه سطح نامتناهی باشد، با همهٔ رنگ‌های دنیا نمی‌توان آن را رنگ کرد. حال به محاسبهٔ اندازهٔ سطح A می‌پردازیم.

$$\text{A اندازهٔ} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{Ln}(x)\Big|_1^b$$

$$= \lim_{b\to+\infty}(\operatorname{Ln} b - \operatorname{Ln} 1) = \lim_{b\to+\infty}(\operatorname{Ln} b) = +\infty$$

پس مقدار سطح A نامتناهی است و نمی‌توان آن را با همهٔ رنگ‌های دنیا رنگ کرد.

حل(۲): حال حجم جسم حاصل از دوران سطح نامتناهی A را حول محور xها محاسبه می‌کنیم:

$$\text{حجم جسم نامتناهی} = \lim_{b\to+\infty}\pi\int_1^b y^2 dx = \lim_{b\to+\infty}\pi\int_1^b \frac{1}{x^2}dx$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\pi\left(-\frac{1}{x}\right)_1^b = \lim_{b\to+\infty}\pi\left(-\frac{1}{b}+1\right) = \pi \ \text{واحد مکعب}$$

پس حجم جسم نامتناهی حاصل از دوران سطح نامتناهی A حول محور xها، برابر ۵ واحد مکعب است. پس می‌توان آن را با π واحد مکعب رنگ، پر از رنگ کرد. در این صورت، سطح جانبی جسم هم رنگی خواهد شد؛ در حالی‌که نصف مقطع عرضی آن را که همان سطح نامتناهی A باشد، نمی‌توان رنگ کرد. [حل (۱)]

در ریاضی، این جسم به شیپور گابریل معروف است.

حل (۳): سطح جانبی جسم نامتناهی را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{اندازهٔ سطح جانبی} = S = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b 2\pi y\, dS\,,$$

$$dS = \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$$S = \lim_{b\to+\infty} 2\pi\int_1^b \frac{1}{x}\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$$= \lim_{b\to+\infty} 2\pi\int_1^b \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}{x}dx$$

$$S = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}dx$$

محاسبهٔ این انتگرال مشکل است، ولی توجه داشته باشیم که:

$$\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3} > \frac{\sqrt{x^4}}{x^3} = \frac{1}{x} \quad \text{پس:}$$

$$S > \lim_{b\to+\infty} 2\pi\int_1^b \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to+\infty}(2\pi \operatorname{Ln} b) = +\infty$$

پس سطح جانبی جسم، نامتناهی است و همهٔ رنگ‌های دنیا برای رنگ کردن آن کافی نیست؛ در حالی‌که در حلّ (۲) نتیجه گرفتیم که سطح جانبی به همراه حجم جسم با π واحد مکعب رنگ، رنگی خواهد شد.

پیچ تقر اندیشه

بزرگترین عدد درستی که باید، به ازای جمیع مقادیر عدد درست n، حاصل $n^5 - 5n^3 + 4n$ باشد، چیست؟

جواب: ۱۲۰

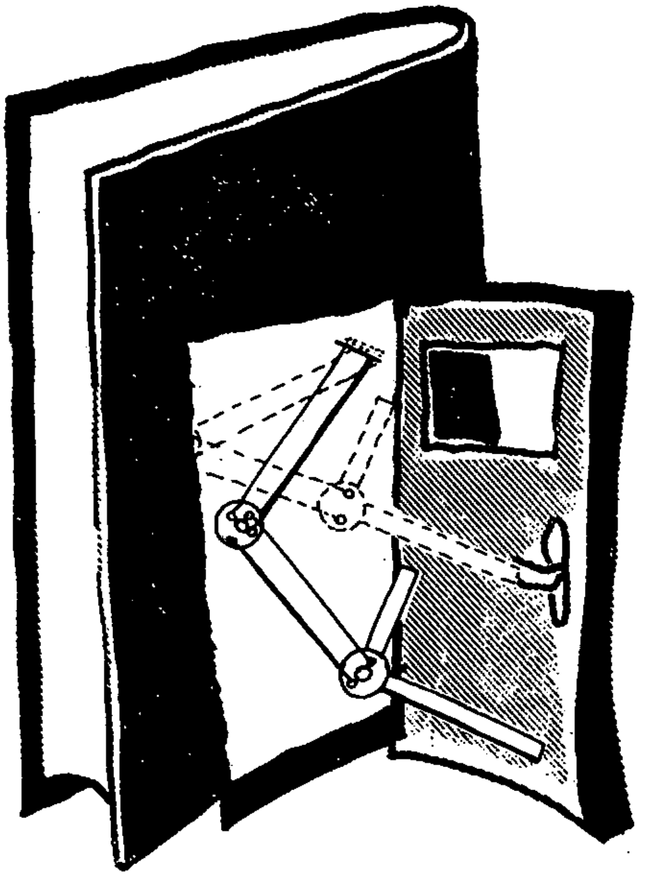
حل:

$$n^5 - 5n^3 + 4n = n(n^4 - 5n^2 + 4)$$
$$= n(n^2-1)(n^2-4)$$
$$= n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)$$
$$= (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$$

ملاحظه می‌کنیم که $(n^5 - 5n^3 + 4n)$ برابر حاصلضرب پنج عدد صحیح متوالی است؛ بنابراین بر ۵ بخش‌پذیر است. گذشته از این، حاصلضرب مزبور باید شامل یک جفت عدد صحیح زوج متوالی باشد، و یکی از این اعداد صحیح بر ۴ بخش‌پذیر است. حاصلضرب مورد بحث باید دست کم شامل مضربی از ۳ نیز باشد. بنابراین: $(n^5 - 5n^3 - 4n)$

همواره مضربی از $120 = 3\times2\times4\times5$ است.

بخشی از یک کتاب



آشنایی بیشتر با کتاب هندسه دلپذیر

(برای دانش‌آموزان دورهٔ پیش‌دانشگاهی)

کتاب «هندسه دلپذیر» اثر دکتر احمدشرف‌الدین در دو سال و چند ماه پیش از سوی انتشارات مدرسه به چاپ رسید و مورد استقبال فراوان استادان، دبیران، دانشجویان و دانش‌آموزان قرار گرفت. سازمان آموزش فنی و حرفه‌ای نیز از این کتاب استقبال کرد و برای کتابخانه‌های مراکز آموزش فنی و حرفه‌ای نسخه‌های متعددی از این کتاب تهیه کرد (بخش دوم این کتاب که اساس هندسی دستگاه‌های صنعتی را شرح می‌دهد مورد توجه آن سازمان است).

آقای دکتر شرف‌الدین طی سالها، تحقیقات متعددی در هندسه عرضه کرده‌اند و به‌علاوه تاکنون به طرح چند دستگاه صنعتی نایل آمده‌اند. از جملهٔ آنها طرح یک ماشین‌حساب آنالوژیک است که در مجله A.I.C.A ارگان انجمن بین‌المللی ماشینهای حساب آنالوژیک به چاپ رسیده است. توفیق آقای دکتر شرف‌الدین در ارائه تحقیقات متعدد در هندسه و طرح چند دستگاه صنعتی موجب شد که تصمیم بگیرند که اساس هندسی دستگاه‌های صنعتی را بررسی کنند و چند سال به بررسی اساس هندسی دستگاه‌های صنعتی پرداختند و سرانجام نتیجه بررسی‌های خود را در کتاب «هندسه دلپذیر» عرضه کردند.

در بخش دوم کتاب هندسهٔ دلپذیر، مؤلف اساس هندسی بیش از چهل دستگاه صنعتی را شرح کرده‌اند (در حدود ۱۷۰ صفحه). تعداد کمی از این دستگاه‌ها در بعضی کتابها یاد شده است آن هم با توضیح بسیار اندک. آقای دکتر شرف‌الدین دربارهٔ اساس هندسی این دستگاه‌ها توضیح کافی داده‌اند. عدهٔ زیادی از این دستگاه‌های صنعتی به وسیله آقای دکتر شرف‌الدین تحلیل شده است؛ مثلاً برهانی که برای ساختمان درهای کشویی عرضه شده است اقتباس از هیچ منبعی نیست. برای تحلیل هندسی ساختمان چند نوع بالابر، بسیاری از آنها را از نزدیک مشاهده کرده و با افرادی که آنها را به کار می‌برند، گفت وگو کرده‌اند و از کارخانه سازنده شکل‌های مربوط را تقاضا کرده و سپس به تحلیل هندسی این دستگاه‌ها پرداخته‌اند.

در بخش اول کتاب هندسهٔ دلپذیر که «هندسهٔ دلها» نامیده شده است، چنین آمده است «نقوش هندسی کاشیکاریهای اماکن متبرکه و قالیهای نفیس، هندسه‌ای است که با زبان هنر بیان شده است و چون هنر زبان همگانی جهان است، می توان این هندسه را با احساس در افق گسترده‌ای عرضه کرد. کودک، جوان و پیر ازهر قوم و متکلم به هر زبان، کر و لال، در یک نگاه چند ثانیه‌ای، مجذوب و مسحور نقوش هندسی کاشیکاری‌های اماکن متبرکه و قالیهای نفیس ایرانی می‌شوند؛ چرا که این آثار هندسه دلهاست» و سپس اضافه کرده‌اند که در سال دو هزار میلادی که به عنوان سال جهانی ریاضی معرفی شده، لازم است هنگام معرفی آثار ریاضیدانهای ایرانی نظیر خوارزمی، ابوریحان، خیام، غیاث‌الدین جمشید کاشانی و ...، آثار استادان نقش آفرین ایرانی در زمینه کاشیکاریها و قالیها نیز معرفی شود.

در بخش سوم کتاب، مثالهایی برای طرح و حل مسائل جبر و آنالیز با هندسه ارائه شده است.

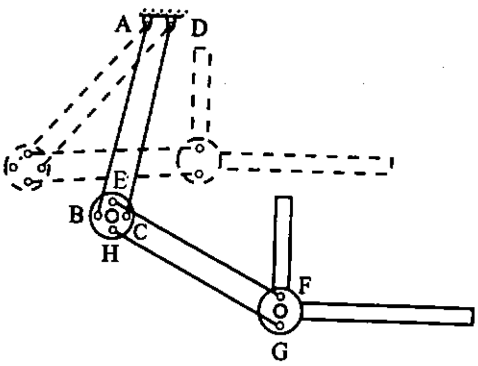
در بخش چهارم، چند حکم هندسه که از آن نتایج فلسفی مهم و جالب حاصل می‌شود، مطرح شده است.

در سطور زیر دو نمونه از دستگاه‌های صنعتی را که در کتاب هندسهٔ دلپذیر اساس هندسی آنها شرح داده شده است، یاد می‌کنیم. مثال اول، اساس هندسی دستگاه است که روی میز نقشه کشی نصب می‌کنند و به کمک آن خطهای موازی رسم می‌کنید. مثال دوم، اساس هندسی دستگاهی است که حرکت چرخشی را به حرکت راستخط تبدیل می‌کند.

اساس هندسی میز نقشه کشی

در شکل زیر یک مکانیزم را که موجب حرکت موازی می‌شود و در میزهای نقشه‌کشی به کار گرفته می‌شود، شرح می‌دهیم. در این شکل A و D دو پایه ثابت‌اند. دو میله AB و CD دارای طول‌های مساوی‌اند و در A و D به پایه‌ها لولا شده‌اند. همین دو میله در B و C به پولک (رینگ) BC لولا شده‌اند. فاصله دو لولای A و D مساوی با فاصله دو لولای B و C اختیار شده است. چون در چهارضلعی ABCD اضلاع روبه‌رو دو به دو مساوی‌اند، پس این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است (بنا بر قضیه ۲ از فصل ۳).

اگر رینگ BC را حرکت دهیم، امتداد خط BC همواره ثابت می‌ماند؛ زیرا خط BC با خط AD موازی است و خط AD دارای وضع ثابت است.



روی رینگ BC دو نقطه E و H به طور قرینه در دو طرف مرکز رینگ انتخاب شده‌اند، به طوری که خط EH بر خط BC عمود است، روی پولک FG دو نقطه F و G به طور قرینه نسبت به مرکز رینگ در اختیار است، به طوری که پاره‌خط FG برابر با طول پاره‌خط EH باشد. دو میله EF و GH با طول‌های مساوی اختیار شده‌اند. این دو میله در نقاط E، F، G و H به دو رینگ لولا شده‌اند. شکل EFGH متوازی‌الاضلاع است؛ زیرا اضلاع روبه‌روی آن، دوبه دو مساوی‌اند. دو خط‌کش طوری به رینگ FG وصل شده‌اند که یکی از آنها در امتداد خط FG و دیگری عمود بر خط FG است.

اگر رینگ FG را روی صفحه میز حرکت دهیم، امتداد خط FG همواره ثابت می‌ماند. برای اثبات می‌گوییم خط FG موازی باخط EH است و خط EH عمود بر خط AD است، پس خط FG عمود بر خط AD است. چون خط AD دارای وضعیت ثابت است، پس امتداد خط متحرک FG با حرکت رینگ FG ثابت می‌ماند.

بنابراین با حرکت رینگ FG امتدادهای دو خط کش متصل به رینگ ثابت می‌ماند و منظور از طرح مکانیزم مشروح در بالا همان ثابت نگاه داشتن امتدادهای دو خط کش است.

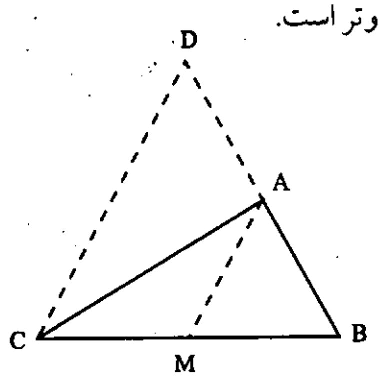
اتصال دو متوازی‌الاضلاع لولایی با رینگ BC امکان می‌دهد که رینگ FG در بخش وسیعی از صفحه حرکت کند و لذا دستگاه امکان پوشش گسترده‌ای را به خط‌کش می‌دهد.

مکانیزمی برای تبدیل حرکت چرخشی به حرکت راستخط

در مطالبی که خواهد آمد ابتدا یک خاصیت مثلث قائم‌الزاویه را شرح می‌دهیم و سپس کاربرد آن را در صنعت یاد می‌کنیم. در پایان، مسأله جالبی را که ابوالوفاء بوزجانی طرح کرده است که با شکل مکانیزم یاد شده بسیار نزدیک است، شرح می‌دهیم.

۱. خاصیتی از مثلث قائم‌الزاویه

الف) قضیه: در مثلث قائم‌الزاویه طول میانه وارد بر وتر نصف طول وتر است.



برهان: مثلث قائم الزاویه ABC را که در زاویهٔ A قائمه است در نظر می‌گیریم. میانه AM را رسم می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که:

$$(۱)\quad \overline{AM} = \frac{۱}{۲}\,\overline{BC}$$

ضلع BA را در جهت B به A به اندازه خود ادامه می‌دهیم تا نقطه D به دست آید، یعنی $\overline{AD} = \overline{AB}$. دو مثلث قائم‌الزاویه BAC و DAC مساوی‌اند (ض.ز.ض)، پس:

$$(۲)\quad \overline{CD} = \overline{CB}$$

پاره‌خط AM وسط ضلع DB از مثلث DBC را به وسط ضلع BC از آن مثلث وصل می‌کند. پس طول پاره‌خط AM نصف طول ضلع سوم، یعنی ضلع CD است:

$$(۳)\quad \overline{AM} = \frac{۱}{۲}\,\overline{CD}$$

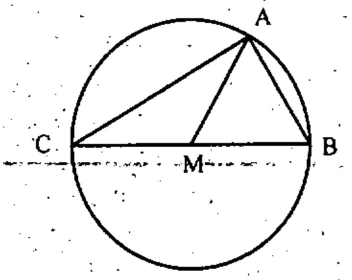
از دو رابطه (۲) و (۳) رابطه (۱) نتیجه می‌شود.

ب) قضیه: اگر در مثلثی طول میانه وارد بر یک ضلع، نصف طول آن ضلع باشد، آن مثلث قائم الزاویه است.

برهان: مثلث ABC را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که طول میانه AM برابر نصف طول ضلع BC است:

$$\overline{AM} = \frac{۱}{۲}\,\overline{BC}$$

دایره‌ای به مرکز M و شعاع MA رسم می‌کنیم. این دایره بر دو نقطه B و C می‌گذرد (زیرا بنابه فرض $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC}$).

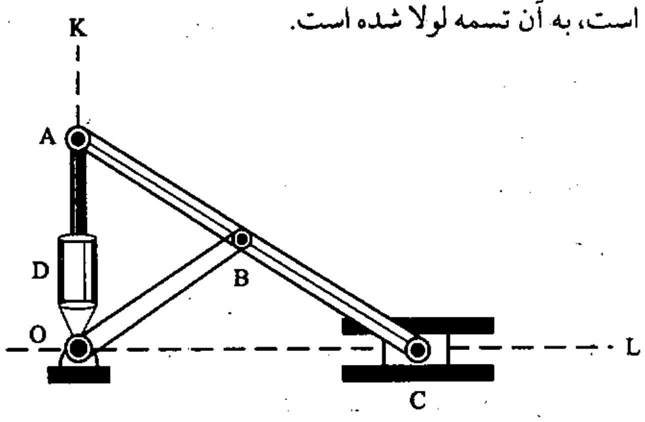


در دایره مذکور BC قطر است و زاویه BAC زاویه محاطی مقابل به این قطر است، پس زاویه BAC قائمه است.

۲. کاربرد صنعتی قضیه بالا

در سطور زیر کاربرد صنعتی قضیه دوم را شرح می‌دهیم.

دستگاهی که در شکل زیر نموده شده است یک حرکت چرخشی را به یک حرکت راستخط تبدیل می‌کند. در این شکل نقطه O نمایش یک پایه ثابت است و تسمه OB در نقطه O به این پایه لولا شده است. طول تسمه OB نصف طول تسمه AC است. تسمه OB در نقطه B که وسط تسمه AC است، به آن تسمه لولا شده است.



هنگامی که تسمه OB را دور لولای ثابت O بچرخانیم کشوی C روی خط راست OL حرکت می‌کند و نقطه A انتهای تسمه BA که انتهای دسته پیستون سیلندر روغنی D است، خط راست OK را که از نقطه O بر خط راست OL عمود است، می‌پیماید. نقش سیلندر روغنی آن است که حرکت نقطه A به طور آهسته و ملایم انجام گیرد.

بحث در وجود و تعداد جوابهای معادله سیاله تحت فضای محدود

● محمد حسین پورسعید ـ گروه ریاضی دانشگاه لرستان

می‌دانیم که معادله سیاله خطی $ax+by=n$ در Z دارای جواب است اگر و فقط اگر $d|n$ ، $d=(a,b)$ (که در آن «.|.» نماد عاد کردن و d بزرگترین مقسوم علیه مشترک a و b است) ولی در صورت اعمال محدودیت روی فضای در برگیرنده x و y و حتی در صورت وجود شرط فوق ممکن است معادله تحت فضای محدود دارای جواب نباشد و در حقیقت شرط فوق، شرطی لازم و نه کافی جهت وجود جواب خواهد بود. به عنوان مثال، معادله $3x+4y=2$ را در نظر می‌گیریم؛ چون $(3,4)=1$ و $1|2$ معادله در Z جواب دارد. با این وجود جوابی صحیح و نامنفی برای این معادله موجود نیست.

نظر به این که در معادله $ax+by=n$ شرط $d=(a,b), d|n$ لازمه وجود جواب در فضای محدود است، می‌توان با تقسیم دو طرف معادله بر عدد d معادله‌ای جدید در نظر گرفت به طوری که ضرایب x و y نسبت به هم اول باشند، بنابراین در معادله $ax+by=n$ با فرض این که a و b متباین و

$$a_1,a_2,a_3,a_4\in Z \text{ ، } a_1\le x\le a_2 \text{ ، } a_3\le y\le a_4$$

در وجود و تعداد جوابهای معادله تحت محدودیت فوق بحث می‌کنیم.

بدون این که خللی به کلیت مسأله وارد آید، فرض می‌کنیم که a عددی مثبت است (در صورت منفی بودن a به‌طور معادل می‌توان معادله $-ax-by=-n$ را در نظر گرفت). به واسطه تباین a و b بدیهی است که معادله در Z جواب دارد. اگر (x_0,y_0) را یکی از جوابها بدانیم، سایر جوابها را در Z می‌توان بر اساس معادلات زیر تعیین نمود. (ر.ک.[1]).

$$x=x_0+kb \quad , \quad y=y_0-ka \text{ ، } k\in Z$$

بنابراین شرط وجود جواب تحت فضای محدود مفروض این است که بتوان مقداری برای $k\in Z$ پیدا کرد به‌طوری‌که:

$$a_1\le x_0+kb\le a_2 \quad , \quad a_3\le y_0-ka\le a_4$$

برای b دو حالت در نظر گرفته و مطلب را پی می‌گیریم.

الف) اگر $b>0$ و تعریف کنیم:

$$M_1=\mathrm{Max}\left\{\frac{a_1-x_0}{b},\frac{y_0-a_4}{a}\right\} \quad ,$$

$$M_2=\mathrm{Min}\left\{\frac{a_2-x_0}{b},\frac{y_0-a_3}{a}\right\}$$

شرط وجود جواب این است که بازه $[M_1,M_2]$ شامل عددی صحیح یا به‌طور معادل $[M_2]+[-M_1]$ عددی نامنفی باشد که در این صورت تعداد جوابها برابر با $[M_2]+[-M_1]+1$ خواهد بود.

ب) اگر $b>۰$ و تعریف کنیم:

$$M_۳=\mathrm{Max}\left\{\frac{a_۲-x_۰}{b}\ ,\ \frac{y_۰-a_۴}{a}\right\}\quad ,$$

$$M_۴=\mathrm{Min}\left\{\frac{a_۱-x_۰}{b}, \frac{y_۰-a_۳}{a}\right\}$$

شرط وجود جواب این است که بازه $[M_۳,M_۴]$ شامل عددی صحیح یا به طور معادل حاصل $[M_۴]+[-M_۳]$ عددی نامنفی باشد که در این صورت تعداد جوابها برابر است با $[M_۴]+[-M_۳]+۱$. به عنوان مثال، معادله $۱۵x+۲۴y=۶۹$ را در فضای محدودِ $-۷۳\le x\le ۱۸۹$ و $۱۵\le y\le ۳۸۱$ درنظر می‌گیریم. چون $(۱۵,۲۴)=۳,\ ۳|۶۹$ معادله در Z جواب دارد؛ بنابراین به طور معادل، معادله $۵x+۸y=۲۳$ را در نظر گرفته که یکی از جواب‌ها به صورت $(x_۰,y_۰)=(۳\ ,۱)$ است.

حال با توجه به مثبت بودن b مقادیر $M_۱$ و $M_۲$ را می‌یابیم:

$$M_۱=\mathrm{Max}\left\{\frac{-۷۳-۳}{۸}\ ,\ \frac{۱-۳۸۱}{۵}\right\}=-\frac{۱۹}{۲}\quad ,$$

$$M_۲=\mathrm{Min}\left\{\frac{۱۸۹-۳}{۸}, \frac{۱-۱۵}{۵}\right\}=-\frac{۱۴}{۵}$$

$$[M_۲]+[-M_۱]=\left[\frac{-۱۴}{۵}\right]+\left[\frac{۱۹}{۲}\right]=-۳+۹=۶$$

بنابراین تحت محدودیت مفروض نیز معادله دارای $۶+۱=۷$ جواب است.

با بهره‌گیری از کتاب «حل مسأله از طریق مسأله» (ر.ک.[۲]) و مطالب فوق، جهت تعیین تعداد جوابهای صحیح نامنفی نامعادله $ax+by\le n$ با شرط $a|n\ ,\ b|n$ می‌توان روشی مناسب ارائه نمود.

به عنوان مثال، در تعیین تعداد جوابهای صحیح نامنفی معادله سیاله $۷x+۱۱y+z=۷۷۰$ یا به طور معادل تعداد جوابهای صحیح نامنفی نامعادله $۷x+۱۱y\le ۷۷۰$ می‌توان تعداد نقاط مشبکه زیر خط $y=\frac{۷۷۰-۷x}{۱۱}$ و نقاط واقع بر آن را در فاصله $x=۰$ تا $x=۱۱۰$ در نظرگرفت. بدیهی است که تعداد نقاط واقع بر خط $y=\frac{۷۷۰-۷x}{۱۱}$ در فاصله مورد نظر، برابر با تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله سیاله $۷x+۱۱y=۷۷۰$ می‌باشد. با استفاده از مطالب مطرح شده، می‌توان نشان داد که این تعداد برابر با ۱۱ مورد است.

از طرفی تعداد نقاط مشبکه واقع بر خط، زیر و بالای خط در فاصله $۰\le y\le ۷۰$ و $۰\le x\le ۱۱۰$ برابر است با $(۱۱۰+۱)(۷۰+۱)=۷۸۸۱$. بنابراین اگر M را تعداد جوابهای نامعادله $۷x+۱۱y\le ۷۷۰$ بدانیم، خواهیم داشت:

$$M=\frac{۷۸۸۱}{۲}+\frac{۱۱}{۲}=۳۹۴۶$$

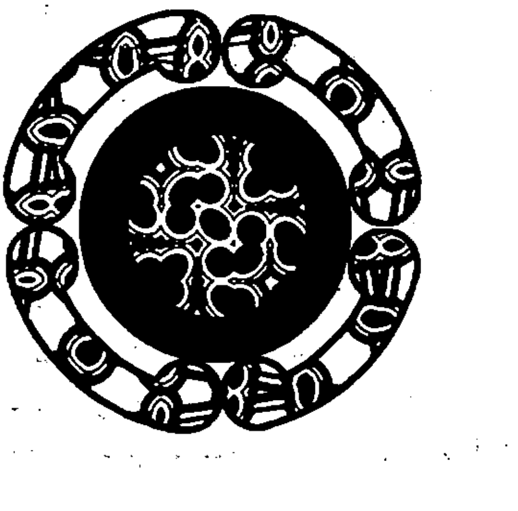
مراجع

[۱]. ریاضیات گسسته دوره پیش دانشگاهی، چاپ پنجم، ۱۳۷۸، صفحات ۵۴ و ۵۵.

[۲]. کتاب «حل مسأله از طریق مسأله» تألیف: لورن سی. لارسن ترجمه علی ساوجی. چاپ اول، ۱۳۷۷، صفحات ۱۰ و ۱۱.

مسأله مسابقه ای برهان ۳۵

ثابت کنید مجموعه عددهای طبیعی به فرم $۳-۲^n$ $(n\in N)$ که هر دو عضو آن نسبت به هم اول هستند، یک مجموعهٔ نامتناهی است، یعنی بی‌شمار عدد طبیعی به فرم $۳-۲^n$ یافت می‌شوند که همگی دو به دو نسبت به هم اول باشند.



ترکیبات ۲

(برای دانش‌آموزان دورهٔ پیش‌دانشگاهی)

رابطه‌ها و گراف‌های جهتدار و ماتریسها

میر شهرام صدر

در این مقاله، خواص رابطه‌ها را به کمک گراف‌های جهتدار و ماتریس متناظر با یک رابطه بررسی خواهیم کرد. برای این منظور، ابتدا گراف جهتدار را معرفی می‌کنیم.

گراف جهتدار

فرض کنیم V یک مجموعهٔ ناتهی و متناهی باشد و مجموعهٔ E زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ $V \times V$ ؛ یعنی $E \subseteq V \times V$ ؛ در این صورت، گراف G متناظر با V و E یک گراف جهتدار نامیده می‌شود و آن را با نماد $G = (V , E)$ نمایش می‌دهیم. در این گراف، V مجموعهٔ رأس‌ها و E مجموعهٔ یال‌هاست.

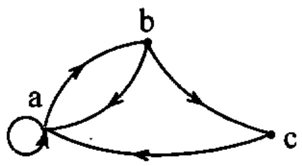
چون در حالت کلی (a , b) با (b , a) برابر نیست؛ بنابراین جهتدار بودن گراف، از تعریف زوج مرتّب به دست می‌آید و داریم:

$((a,b) \in E) \Leftrightarrow$ (یک یال جهتدار بین a و b در جهت a به b وجود دارد.)

تذکر: اگر در گراف جهتدار $G = (V , E)$ داشته باشیم، $(a , a) \in E$، آنگاه یال جهتداری از a به خودش وصل می‌کنیم و به آن **طوقه** می‌گوییم.

مثال: اگر $V = \{a , b , c\}$ و $E = \{(a , a) , (a , b) , (b , c) , (c , a) , (b , a)\}$، آنگاه گراف $G = (V , E)$ را رسم کنید.

حل: چون مجموعهٔ V سه عضو دارد، پس گراف دارای ۳ رأس است که ابتدا رأس‌ها را رسم می‌کنیم، سپس یال‌های جهتدار را با توجه به زوج‌های مرتّب مجموعهٔ E رسم می‌کنیم.



مرتبه و اندازهٔ گراف جهتدار

در گراف جهتدار $G = (V , E)$، تعداد اعضای مجموعهٔ V، یعنی تعداد رأس‌ها را مرتبهٔ G و تعداد اعضای مجموعهٔ E، یعنی تعداد یال‌ها را اندازهٔ G می‌نامیم.

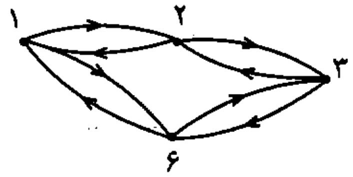
فرض کنیم R یک رابطهٔ m عضوی، روی مجموعهٔ n عضوی $A = \{a_1 , a_2 , \dots , a_n\}$ باشد، $(m \le n^2)$ متناظر با این رابطه، می‌توان یک گراف جهتدار رسم کرد؛ به طوری که این گراف از مرتبهٔ n، یعنی دارای n رأس a_1 ، a_2 ، ... ، a_n و اندازهٔ m است، یعنی اگر $a_i R a_j$ $(1 \le i , j \le n$ و $i \ne j)$ آنگاه یال جهتداری از a_i به a_j رسم می‌کنیم. هرگاه $a_i R a_i$ آنگاه یک طوقه در رأس a_i رسم می‌کنیم.

مثال: فرض کنیم $A = \{1 , 2 , 3 , 6\}$، رابطهٔ R را روی A به صورت $A = \{(x , y) \mid (x + y)$ فرد باشد$\}$ تعریف می‌کنیم، گراف جهتدار R را رسم کنید.

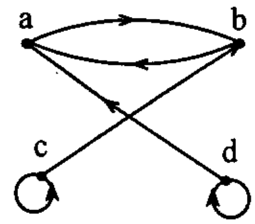
حل: ابتدا رابطهٔ R را روی A می‌نویسیم، سپس متناظر با آن یک گراف رسم می‌کنیم:

R = {(۱,۲),(۱,۶),(۲,۱),(۲,۳),(۳,۲),(۳,۶),(۶,۱),(۶,۳)}

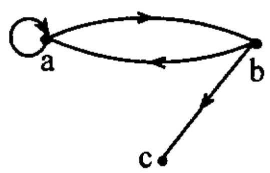
برای این منظور ابتدا چهار رأس در نظر می‌گیریم و اگر aRb آن‌گاه یال جهتداری از a به b رسم می‌کنیم:



مثال: متناظر با گراف‌های جهتدار زیر، رابطه‌ها را بنویسید.



(۱

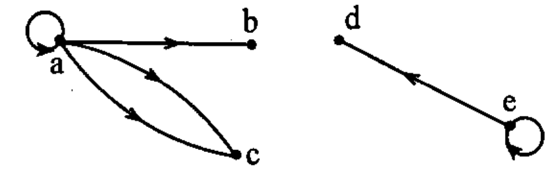


(۲

R_1 = {(a , b) , (b , a) , (d , a) , (c , b) , (c , c) , (d , d)}

R_2 = {(a , a) , (a , b) , (b , a) , (b , c)}

مثال: گراف جهتدار متناظر با رابطهٔ R روی مجموعهٔ A = {a,b,c,d,e} به صورت زیر است، رابطهٔ R را بنویسید.



حل: چون در رأس‌های a و e طوقه داریم، پس (a , a) ∈ R و (e , e) ∈ R و از a به b یال داریم؛ پس (a , b) ∈ R، از a به c و از c به a یال داریم؛ پس (a , c) ∈ R و (c , a) ∈ R، از e به d یال داریم؛ پس (e , d) ∈ R؛ بنابراین داریم:

R = {(a , a), (e , e) , (a , b) , (a , c) , (c , a) , (e , d)}

تشخیص خواص رابطه‌ها به‌کمک گراف جهتدار

فرض کنیم A یک مجموعه و R رابطه‌ای روی A باشد. چنانچه گراف جهتدار متناظر با رابطهٔ R را رسم کنیم، خواهیم داشت:

۱. رابطهٔ R **انعکاسی یا بازتابی** است؛ هرگاه تمام رأس‌های گراف متناظر با R دارای طوقه باشند.

۲. رابطهٔ R **تقارنی** است؛ هرگاه برای a , b ∈ A، اگر از a به b یالی داشته باشیم، آن‌گاه باید از b به a نیز یال وجود داشته باشد.

۳. رابطهٔ R **تعدی** است؛ هرگاه برای a , b , c ∈ A، اگر از a به b و از b به c یال‌هایی وجود داشته باشد، آن گاه از a به c نیز یال موجود باشد.

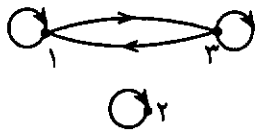
۴. رابطهٔ R **پادتقارنی** است، هرگاه برای a , b ∈ A که a ≠ b، اگر از a به b یال وجود داشته باشد، آن‌گاه از b به a یال موجود نباشد.

مثال: کدام یک از رابطه‌های زیر روی A = {۱,۲,۳}، خاصیت پادتقارنی دارد؟

۱. R_1 = {(۱ , ۱) , (۲ , ۲) , (۳ , ۳) , (۱ , ۳) , (۳ , ۱)}

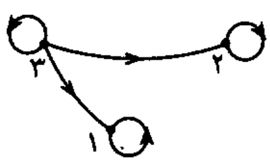
۲. R_2 = {(۱ , ۱) , (۱ , ۲) , (۳ , ۳) , (۳ , ۲) , (۳ , ۱)}

حل: ۱. گراف متناظر با رابطهٔ R_1 به صورت زیر است:



با توجه به گراف، ملاحظه می‌کنیم که از ۱ به ۳ یال داریم و از ۳ به ۱ نیز یال داریم؛ پس R_1 پادتقارنی نیست.

۲. گراف متناظر با رابطهٔ R_2 به صورت زیر است:



باتوجه به گراف، ملاحظه می‌کنیم که R_2 پادتقارنی است.

مثال: رابطهٔ R روی مجموعهٔ A = {-۲ , -۱ , ۰ , ۱ , ۲} به صورت xRy ⇔ |x| = |y| تعریف شده است:

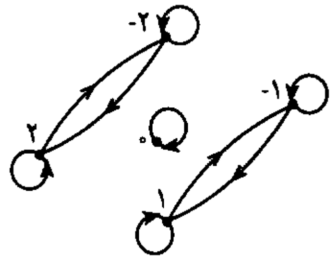
الف ـ گراف جهتدار متناظر با R را رسم کنید.

ب ـ آیا R رابطهٔ هم‌ارزی است؟

حل: الف ـ ابتدا رابطهٔ R را با زوج‌های مرتّب مشخص می‌کنیم:

R = {(-۲ , -۲) , (-۲ , ۲) , (۲ , -۲) , (۲ , ۲) , (-۱ , -۱) , (-۱ , ۱) , (۱ , -۱) , (۱ , ۱) , (۰ , ۰)}

سپس متناظر با رابطهٔ بالا، گراف جهتدار رسم می‌کنیم:



ب ـ هر رأس دارای طوقه است؛ پس R بازتابی است. چون از ۲ به ۲-، از ۲- به ۲، از ۱ به ۱- و از ۱- به ۱ یال داریم، بنابراین R تقارنی است. R تعدی است؛ زیرا:

$$-۲R۲ \text{ و } ۲R-۲ \longrightarrow -۲R-۲ \text{ و } ۲R۲$$

$$-۱R۱ \text{ و } ۱R-۱ \longrightarrow -۱R-۱ \text{ و } ۱R۱$$

در نتیجه، R رابطهٔ هم ارزی است.

رابطه‌ها و ماتریس‌ها

فرض کنیم R رابطه‌ای روی مجموعهٔ n عضوی $A=\{a_۱,a_۲,\dots,a_n\}$ باشد، متناظر با این رابطه، ماتریس مربعی $M=[m_{ij}]_{n\times n}$ را به این صورت تعریف می‌کنیم که اگر $(a_i,a_j)\in R$ آنگاه درایه ij ام ماتریس M، یعنی m_{ij} برابر ۱ است و اگر $(a_i , a_j)\notin R$ آنگاه $m_{ij}=۰$؛ بنابراین درایه‌های ماتریس متناظر با رابطه به صورت زیر است:

$$m_{ij}=\begin{cases} ۱ & a_iRa_j \\ ۰ & a_i\not R a_j \end{cases}$$

مثال: رابطهٔ $R=\{(c , b) , (a , c) , (a , a) , (c , c)\}$ را روی $A=\{a,b,c\}$ در نظر بگیرید، ماتریس متناظر با این رابطه را بنویسید.

حل: چون مجموعهٔ A سه عضوی است، پس ماتریس M از مرتبهٔ ۳ است؛ بنابراین داریم:

$$M=\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \end{array}$$

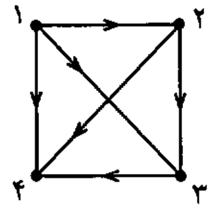
چون aRa پس درایه‌ای که در محلّ برخورد سطر a و ستون a قرار دارد، برابر ۱ است، به همین ترتیب، درایه‌هایی که در محلّ برخورد سطر a و ستون c، سطر c و ستون b، سطر c و ستون c قرار دارند، برابر ۱ هستند و بقیهٔ درایه‌های ماتریس، برابر صفرند.

مثال: رابطهٔ R روی مجموعهٔ $A=\{۱ , ۲ , ۳ , ۴\}$ به صورت $R=\{(x , y) \mid x , y\in A , x < y\}$ است؛ گراف جهتدار و ماتریس متناظر با این رابطه را مشخص کنید.

حل: الف ـ ابتدا رابطهٔ R را با زوج‌های مرتّب مشخص می‌کنیم:

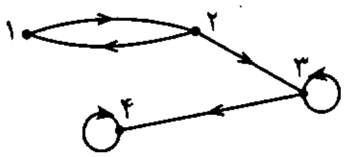
$$R=\{(۱ , ۲) , (۱ , ۳) , (۱ , ۴) , (۲ , ۳) , (۲ , ۴) , (۳ , ۴)\}$$

سپس متناظر با رابطهٔ بالا، گراف جهتدار و ماتریس را مشخص می‌کنیم:



$$M=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \end{array} \\ \begin{array}{c} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \\ ۴ \end{array} & \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \end{array}$$

مثال: فرض کنید $A=\{۱ , ۲ , ۳ , ۴\}$ و R رابطه‌ای است که گراف جهتدار آن در شکل زیر رسم شده است؛ ماتریس متناظر با این رابطه کدام است؟



حل: چون ۱R۲ پس $m_{۱۲}=۱$، ۲R۱ پس $m_{۲۱}=۱$، ۲R۳ پس $m_{۲۳}=۱$، ۳R۳ پس $m_{۳۳}=۱$، ۳R۴ پس $m_{۳۴}=۱$، ۴R۴ پس $m_{۴۴}=۱$ و بقیهٔ درایه‌ها صفرند؛ بنابراین داریم:

$$M=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

مثال: فرض کنیم $A=\{۱ , x , ۴\}$ یک مجموعه سه عضوی و $x\in \mathbb{N}$ و رابطهٔ R را روی A به صورت $xRy \Leftrightarrow x|y$ تعریف می‌کنیم، هرگاه ماتریس متناظر با این رابطه به صورت

$$M=\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} ۱ & x & ۴ \end{array} \\ \begin{array}{c} ۱ \\ x \\ ۴ \end{array} & \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \end{array}$$

باشد، مقدار x را محاسبه کنید.

حل: با توجه به سطر دوم ماتریس M داریم: $x|۴$، چون A سه عضوی است، پس $x\neq ۱ , ۴$ و $x\in \mathbb{N}$، در نتیجه $x=۲$.

تشخیص خواصّ رابطه‌ها به کمک ماتریس‌های متناظر با رابطه‌ها

فرض کنیم A یک مجموعهٔ n عضوی و R رابطه‌ای روی A باشد. چنانچه ماتریس متناظر با رابطهٔ R برابر $M=[m_{ij}]_{n\times m}$ باشد $(۱\le i , j\le n)$، خواهیم داشت:

۱. رابطهٔ R **انعکاسی** یا **بازتابی** است؛ هرگاه همهٔ درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس، برابر ۱ باشند.

۲. رابطهٔ R **تقارنی** است؛ هرگاه ماتریس متناظر با آن متقارن باشد، در این صورت خواهیم داشت:

$$m_{ij}=1 \Leftrightarrow m_{ji}=1 \quad , \quad m_{ij}=0 \Leftrightarrow m_{ji}=0$$

یا به طور کلی برای هر $1 \le i , j \le n$ داشته باشیم: $m_{ij}=m_{ji}$

۳. رابطهٔ R **تعدّی** است؛ هرگاه در ماتریس متناظر با آن داشته باشیم:

$$m_{ij}=1 \text{ و } m_{jk}=1 \Rightarrow m_{ik}=1$$

۴. رابطهٔ R **پادمتقارن** است؛ هرگاه در ماتریس متناظر با آن اگر برای $i \ne j$ داشته باشیم $m_{ij}=1$، آن‌گاه $m_{ji}=0$. همچنین می‌توان گفت برای $i \ne j$ داشته باشیم: $m_{ij}\times m_{ji}=0$.

مثال: فرض کنید $A=\{a , b , c , d\}$ و $R=\{(d,d),(a,a),(a,b),(c,c),(b,a),(b,b)\}$ یک رابطه روی A باشد، با استفاده از ماتریس مجاورت گراف، نشان دهید R روی A یک رابطهٔ هم ارزی است.

حل: چون مجموعهٔ A دارای ۴ عضو است، پس ماتریس متناظر با رابطه از مرتبهٔ ۴ × ۴ است، با توجه به رابطهٔ R داریم:

$$M=\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

چون همهٔ درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس M برابر ۱ است، پس R دارای خاصیت بازتابی است و از طرفی $M^T=M$، یعنی برای هر $1 \le i , j \le 4$ داریم: $m_{ij}=m_{ji}$؛ در نتیجه، رابطهٔ R دارای خاصیت تقارنی است و همچنین رابطهٔ R تعدی است؛ زیرا داریم:

$$m_{12}=1 \text{ و } m_{21}=1 \Rightarrow m_{11}=1 \text{ و } m_{22}=1$$

مثال: رابطهٔ R در مجموعهٔ $A=\{-2 , -1 , 0 , 1 , 2\}$ به صورت $xRy \Leftrightarrow |x|=|y|$ تعریف شده است:

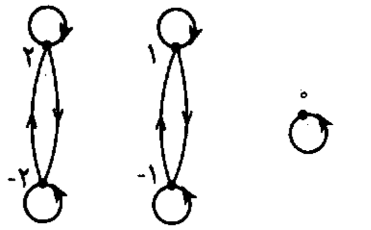
الف ـ گراف متناظر با این رابطه را رسم کنید.

ب ـ ماتریس متناظر با این رابطه را تشکیل دهید.

ج ـ به کمک ماتریس بررسی کنید که آیا R روی A یک رابطهٔ هم ارزی است.

حل: **الف ـ** ابتدا رابطهٔ R را روی A مشخص می‌کنیم، سپس با استفاده از آن، گراف متناظر با رابطه را رسم می‌کنیم:

$$R=\{(-2,-2),(-2,2),(-1,-1),(-1,1),(0,0),(1,-1),(1,1),(2,-2),(2,2)\}$$



چون در هر رأس طوقه داریم، پس R دارای خاصیت بازتابی است، از طرفی، چون از ۲ به ۲- و از ۲- به ۲ و از ۱ به ۱- و از ۱- به ۱ یال‌هایی داریم، پس R تقارنی است. همچنین R دارای خاصیت تعدّی است؛ زیرا از ۲ به ۲- و از ۲- به ۲ یال داریم، و ملاحظه می‌کنیم که در رأس‌های ۲ و ۲- طوقه وجود دارد. همین‌طور از ۱ به ۱- و از ۱- به ۱ یال داریم و ملاحظه می‌کنیم که در رأس‌های ۱ و ۱- طوقه وجود دارد.

ب ـ چون مجموعهٔ A دارای ۵ عضو است، پس ماتریس متناظر با رابطه از مرتبهٔ ۵ × ۵ است؛ با توجه به R داریم:

$$M=\begin{array}{c} \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

ملاحظه می‌کنیم که همهٔ درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس M، برابر ۱ است؛ پس R خاصیت بازتابی دارد. همچنین $M^T=M$، یعنی M متقارن است؛ در نتیجه R دارای خاصیت تقارنی است. R دارای خاصیت تعدی است؛ زیرا:

$$m_{15}=1 \ , \ m_{51}=1 \Rightarrow m_{11}=1 \ , \ m_{55}=1$$

$$m_{42}=1 \ , \ m_{24}=1 \Rightarrow m_{44}=1 \ , \ m_{22}=1$$

اکنون تعداد رابطه‌های بازتابی، تقارنی و پادتقارنی روی یک مجموعهٔ n عضوی را که با استفاده از رابطه‌ها به‌دست آورده‌ایم، به کمک ماتریس متناظر با رابطه بسیار ساده‌تر بیان می‌کنیم.

تعداد رابطه‌های بازتابی، تقارنی و پادتقارنی به کمک ماتریس‌ها

خاصیت بازتابی. فرض کنیم R یک رابطه روی مجموعهٔ n عضوی A باشد، می‌دانیم ماتریس متناظر با این رابطه، مربعی از مرتبهٔ n است؛ یعنی دارای n^2 درایه است. بجز درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس، می‌دانیم تعداد بقیهٔ درایه‌ها برابر با n^2-n است، حال اگر رابطهٔ R بازتابی باشد، پس درایه‌های روی قطر اصلی برابر ۱ و بقیهٔ درایه‌ها می‌توانند عددهای ۰ یا ۱ باشند، اکنون اگر درایه‌های روی غیر قطر اصلی را با مربع مشخص کنیم، در صورتی که R بازتابی باشد، درایه‌های روی

قطر اصلی عدد ۱ و بقیهٔ درایه‌ها، یعنی داخل مربع‌ها می‌توانند عددهای ۰ یا ۱ قرار گیرند؛ بنابراین هر مربع با دو حالت پُر می‌شود، پس طبق اصل ضرب، تعداد رابطه‌های بازتابی روی مجموعهٔ n عضوی A، برابر با $۲^{n^۲-n}$ است.

$$M = \begin{bmatrix} ۱ & \boxed{۲} & \boxed{۲} & \dots & \boxed{۲} \\ \boxed{۲} & ۱ & \boxed{۲} & \dots & \boxed{۲} \\ \boxed{۲} & \boxed{۲} & ۱ & \dots & \boxed{۲} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boxed{۲} & \boxed{۲} & \boxed{۲} & \dots & ۱ \end{bmatrix}_{n\times n}$$

تعداد رابطه‌های بازتابی روی مجموعهٔ n عضوی

$$= \underbrace{۲\times ۲\times \dots \times ۲}_{\text{مرتبه}(n^۲-n)} = ۲^{n^۲-n}$$

خاصیت تقارنی. فرض کنیم R یک رابطه روی مجموعهٔ n عضوی A باشد، متناظر با این رابطه، یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ n وجود دارد که تعداد درایه‌های بالا قطر اصلی یا پایین قطر اصلی آن برابر $\frac{۱}{۲}(n^۲-n)$ است و تعداد درایه‌های بالا (یا پایین) و روی قطر اصلی ماتریس برابر $\frac{۱}{۲}(n^۲-n)+n=\frac{۱}{۲}(n^۲+n)$ است. اکنون اگر رابطهٔ R تقارنی باشد، آنگاه درایه‌های بالا (یا پایین) و روی قطر اصلی، می‌توانند عددهای ۰ یا ۱ باشند، بنابراین اگر هر درایهٔ ماتریس را با یک مربع مشخص کنیم، مربع‌های بالا (یا پایین) و روی قطر اصلی، هر کدام با ۲ حالت ۰ یا ۱ پُر می‌شوند؛ بنابراین داریم:

$$M = \begin{bmatrix} \boxed{۲} & \boxed{۲} & \boxed{۲} & \dots & \boxed{۲} \\ \square & \boxed{۲} & \boxed{۲} & \dots & \boxed{۲} \\ \square & \square & \boxed{۲} & \dots & \boxed{۲} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \square & \square & \square & \dots & \boxed{۲} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

تعداد رابطه‌های تقارنی روی مجموعهٔ n عضوی

$$= \underbrace{۲\times ۲\times \dots \times ۲}_{\frac{۱}{۲}(n^۲+n)\text{ مرتبه}} = ۲^{\frac{۱}{۲}(n^۲+n)}$$

چون ماتریس M متقارن است، یعنی $M = M^T$؛ بنابراین داریم: $m_{ij} = m_{ji}$، یعنی برای محاسبهٔ تعداد رابطه‌های تقارنی، فقط کافی است مربع‌های بالا (یا پایین) قطر را علاوه بر مربع‌های روی قطر اصلی در نظر بگیریم.

خاصیت تقارنی و بازتابی. اگر ماتریس مربعی M از مرتبهٔ n متناظر با رابطهٔ R، روی مجموعهٔ n عضوی A باشد، و R دارای خواص بازتابی و تقارنی باشد، آنگاه درایه‌های روی قطر اصلی برابر ۱ و درایه‌های بالا (یا پایین) قطر اصلی برابر ۰ یا ۱ هستند؛ بنابراین اگر هر درایهٔ ماتریس را با یک مربع مشخص کنیم، مربع‌های بالا (یا پایین) قطر اصلی، هر کدام با ۲ حالت ۰ یا ۱ پُر می‌شوند؛ بنابراین داریم:

$$M = \begin{bmatrix} \boxed{۱} & \boxed{۲} & \boxed{۲} & \dots & \boxed{۲} \\ \square & \boxed{۱} & \boxed{۲} & \dots & \boxed{۲} \\ \square & \square & \boxed{۱} & \dots & \boxed{۲} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \square & \square & \square & \dots & \boxed{۱} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

تعداد رابطه‌های تقارنی و بازتابی روی مجموعهٔ n عضوی

$$= \underbrace{۲\times ۲\times ۲\times \dots \times ۲}_{\frac{۱}{۲}(n^۲-n)\text{ مرتبه}} = ۲^{\frac{۱}{۲}(n^۲-n)}$$

خاصیت پادتقارنی. فرض کنیم R یک رابطه روی مجموعهٔ n عضوی A باشد، متناظر با این رابطه، یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ n وجود دارد. در صورتی که R رابطهٔ پادتقارنی باشد، آنگاه درایه‌های روی قطر اصلی، می‌توانند عددهای ۰ یا ۱ باشند و برای درایه‌های بالا (یا پایین) قطر اصلی سه حالت وجود دارند، که عبارتند از: $m_{ij} = ۰ \Rightarrow m_{ji} = ۱$ یا $m_{ij} = ۱ \Rightarrow m_{ji} = ۰$ یا $m_{ij} = ۰ \Rightarrow m_{ji} = ۰$؛ بنابراین اگر هر درایهٔ ماتریس را با یک مربع مشخص کنیم، مربع‌های روی قطر اصلی هر کدام با ۲ حالت و مربع‌های بالا (یا پایین) قطر اصلی، هر کدام با ۳ حالت پُر می‌شوند؛ بنابراین داریم:

تعداد رابطه‌های پادتقارنی روی مجموعهٔ n عضوی

$$= \underbrace{۲\times ۲\times ۲\times \dots \times ۲}_{n\text{ مرتبه}} \times \underbrace{۳\times ۳\times ۳\times \dots \times ۳}_{\frac{۱}{۲}(n^۲-n)\text{ مرتبه}} = ۲^n \times ۳^{\frac{۱}{۲}(n^۲-n)}$$

مسأله: فرض کنیم A یک مجموعهٔ n عضوی باشد، چند رابطه روی A می‌توان تعریف کرد که بازتابی و پادتقارنی باشند؟

حل: متناظر با رابطهٔ بازتابی و پادتقارنی R روی مجموعهٔ A، ماتریس مربعی M از مرتبهٔ n را در نظر بگیریم. چون R بازتابی است، پس درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس M، همگی برابر ۱ هستند. از طرفی، R پادتقارنی است؛ پس برای

درایه‌های بالا (یا پایین) قطر اصلی، سه حالت وجود دارد. بنابراین اگر هر درایهٔ ماتریس را با یک مربع مشخص کنیم، مربع‌های روی قطر اصلی، هر کدام فقط با یک حالت و مربع‌های بالا (یا پایین) قطر اصلی، هر کدام با ۳ حالت پُر می‌شوند، در نتیجه داریم:

تعداد رابطه‌های بازتابی و پادتقارنی روی مجموعهٔ n عضوی

$$= \underbrace{1 \times 1 \times 1 \times \ldots \times 1}_{\text{مرتبه } n} \times \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times \ldots \times 3}_{\text{مرتبه } \frac{1}{2}(n^2-n)} = 3^{\frac{1}{2}(n^2-n)}$$

نکته: تعداد رابطه‌هایی که تقارنی و پادتقارنی روی مجموعهٔ n عضوی A باشند، برابر با 2^n است؛ زیرا اگر متناظر با این رابطه، یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ n در نظر بگیریم، درایه‌های روی قطر اصلی، می‌توانند ۰ یا ۱ باشند و بقیهٔ درایه‌ها برابر ۰ هستند.

مثال: اگر مجموعه‌ای دارای ۱۰ زیرمجموعهٔ ۳ عضوی باشد، چند رابطهٔ پاد متقارن و بازتابی می‌توان روی آن مجموعه نوشت؟

حل: می‌دانیم که اگر A یک مجموعهٔ n عضوی باشد، تعداد زیر مجموعه‌های k عضوی آن $(k \le n)$ از ترکیب $\binom{n}{k}$ به دست می‌آید؛ بنابراین داریم:

$$\binom{n}{3} = 10 \Rightarrow \frac{n!}{3!(n-3)!} = 10 \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{3!(n-3)!} = 10$$

$$\Rightarrow n(n-1)(n-2) = 60 = 5 \times 4 \times 3 \Rightarrow n = 5$$

تعداد رابطه‌های بازتابی و پاد تقارنی روی مجموعه ۳ عضوی $= 3^{\frac{1}{2}(3^2-3)} = 3^3 = 27$

مثال: تعداد رابطه‌های بازتابی و شامل دو زوج مرتّب (a , b) و (c , d) روی یک مجموعه، برابر 2^{18} است. چند رابطهٔ پادتقارنی که شامل یک زوج مرتّب (a , b) است، روی این مجموعه می‌توان نوشت؟ $(a \ne b , c \ne d)$

حل: می‌دانیم تعداد رابطه‌های بازتابی روی یک مجموعهٔ n عضوی که شامل k زوج مرتّب $(k \le n^2 - n)$ باشند، برابر با $2^{(n^2-n)-k}$ است؛ بنابراین داریم:

$$2^{(n^2-n)-2} = 2^{18} \Rightarrow n^2 - n - 20 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = 5 \in \mathbb{N} & \text{قابل قبول} \\ n = -4 \notin \mathbb{N} & \text{غیرقابل قبول} \end{cases}$$

از طرفی تعداد رابطه‌های پادتقارنی که شامل یک زوج مرتّب (a , b) با شرط $(a \ne b)$ است، برابر با $2^n \times 3^{\frac{1}{2}(n^2-n)-1}$ است، بنابراین داریم:

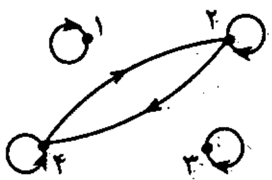
$$n = 5 \Rightarrow 2^5 \times 3^{\frac{1}{2}(5^2-5)-1} = 2^5 \times 3^9$$

مثال: روی مجموعهٔ $A = \{a , b , c , d , e\}$ چند رابطهٔ بازتابی می‌توان نوشت که شامل (a , c) باشند؛ ولی شامل (c,a) نباشند؟

حل: اگر متناظر با این رابطه، یک ماتریس در نظر بگیریم، درایه‌های روی قطر اصلی، عدد ۱ هستند و درایهٔ متناظر با (a,c) عدد ۱ و درایهٔ متناظر با (c , a) عدد ۰ است؛ بنابراین $(n^2 - n) - 2$ درایه می‌توانند ۰ یا ۱ باشند؛ در نتیجه داریم:

$$2^{(n^2-n)-2} = 2^{(5^2-5)-2} = 2^{18}$$

مثال: رابطهٔ R روی مجموعهٔ $A = \{1 , 2 , 3 , 4\}$ با گراف جهتدار زیر تعریف شده است، [۲] (دستهٔ هم‌ارزی ۲) را مشخص کنید.



حل: ابتدا رابطهٔ متناظر با گراف بالا را می‌نویسیم:

$$R = \{(1 , 1) , (2 , 2) , (2 , 4) , (4 , 2) , (4 , 4) , (3 , 3)\}$$

سپس طبق تعریف کلاس یا دسته هم ارزی داریم:

$$[2] = \{x \in A \mid xR2\} = \{x \in A \mid (x , 2) \in R\} = \{2 , 4\}$$

مثال: مجموعهٔ $A = \{-1 , 0 , 1 , 2 , 3\}$ و رابطهٔ R روی A به صورت $R = \{(x , y) : |x| = |y|\}$ تعریف شده است:

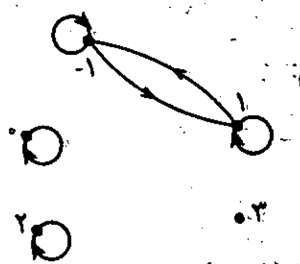
الف ـ گراف جهتدار متناظر با R را بنویسید.

ب ـ با استفاده از گراف جهتدار متناظر با R، تحقیق کنید R پادمتقارن است یا خیر؟

حل: **الف ـ** ابتدا رابطهٔ R را با زوج‌های مرتّب مشخص می‌کنیم:

$$R = \{(-1 , -1) , (-1 , 1) , (1 , -1) , (1 , 1) , (0 , 0) , (2 , 2)\}$$

سپس گراف متناظر با R را رسم می‌کنیم:



ب ـ چون $(-1 , 1) \in R$ و $(1 , -1) \in R$ بنابراین R پادمتقارن نیست.

مسائل برای حل

• تهیه و تنظیم: هیأت تحریریه

ریاضی سال اول

۱. برای مجموعهٔ $A = \{\phi\}$، مطلوب است تعیین مجموعهٔ $P(P(A))$.

۲. کدام یک از مجموعه‌های زیر نسبت به هیچ یک از دو عمل جمع و ضرب، بسته نیست؟

۱) $\{1, -1\}$

۲) $\{0\}$

۳) مجموعهٔ اعداد صحیح منفی

۴) مجموعهٔ اعداد گنگ

۳. کسر اعشاری $1/4\overline{81}$ را به صورت متعارفی تبدیل کنید.

۴. هر یک از عبارت‌های زیر را ساده کرده و با یک توان بنویسید؟

۱) $\dfrac{5^{11} \times 3^{11}}{15^{7} \times 15^{2}}$ ۲) $\dfrac{(x^3)^2 \times (x^2)^3}{(x^3)^{-2} \times (x^2)^{-3}}$

۵. عدد صحیح r را از هر یک از تساوی‌های زیر به دست آورید:

۱) $(5^{r-2})^2 = 25^{2r+2}$

۲) $(2^{3r-1})^2 = 2^r \times (2^2)^r$

۶. تقسیم زیر را انجام داده و خارج قسمت و باقیمانده را مشخص کنید: $a^5 + b^5 \div a + b$

۷. حاصل عبارت زیر را به کمک اتحادها به دست آورید:

$(x + 1)(x + 2)(x + 4)(x - 1)$

۸. عبارت جبری زیر را به حاصلضرب عوامل، تجزیه کنید:

$x^5 + x^4 + 1$

۹. عملیات جبری زیر را انجام داده و نتیجه را کاملاً ساده کنید:

$$\frac{x^3 + 1}{(x + 2)(x^2 - x + 1)} + \frac{x - 3}{x^2 - 4x + 3} - \frac{x^2 + 5x}{x^3 + x^2 - 2x}$$

۱۰. ب.م.م و ک.م.م دو عبارت جبری $x + y + xy + 1$ و $x^4 + x$ را به دست آورید.

ریاضی سال دوم

۱. جواب‌های معادلهٔ $\dfrac{x-2}{x+2} + \dfrac{x}{x-2} = \dfrac{8}{x^2-4}$ را به دست آورید.

۲. مجموعهٔ مقادیر a را به دست آورید که به ازای آنها معادله درجه دوم $x^2 + 4x + a + 2 = 0$ دارای دو ریشه حقیقی منفی و متمایز باشد.

۳. ثابت کنید سه جمله‌ای

$(k^2 - k + 1)x^2 - 2(k^2 - 1)x + (k^2 + k + 1)$

به ازای جمیع مقادیر k و x همواره مثبت است. $(k \neq 0)$

۴. نشان دهید تابع‌های $\begin{cases} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = x^3 + 3 \end{cases}$ و $\begin{cases} g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ g(x) = \sqrt[3]{x - 3} \end{cases}$ وارون یکدیگرند.

۵. وارون‌پذیری تابع f با ضابطهٔ:

$$\begin{cases} f : \mathbb{R}-\{1\} \to \mathbb{R}-\{2\} \\ f(x) = \dfrac{2x + 3}{x - 1} \end{cases}$$

را تحقیق نموده و ضابطه وارون آن را به دست آورید.

۶. دامنهٔ تعریف تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{\dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}}$ را به دست آورید.

۷. دستگاه معادلات زیر را با استفاده از ماتریس وارون، حل کنید.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

۸. m را طوری به دست آورید که دستگاه معادلات $\begin{cases} -4x + my = -2 \\ (m - 1)x + my = 2 \end{cases}$ دارای جواب نباشد.

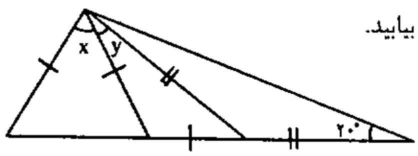
۹. درستی تساوی زیر را نشان دهید:

$$\frac{\operatorname{cotg}170^\circ \operatorname{cotg}100^\circ - \sin 290^\circ \cos 200^\circ}{\sin 160^\circ \sin 70^\circ} = \operatorname{tg}20^\circ$$

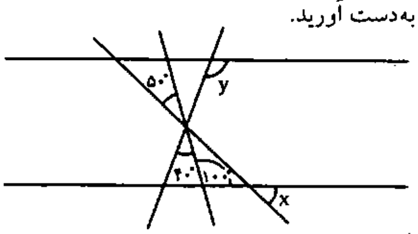
۱۰. برای تابع f با ضابطهٔ $f(x) = x^2 + x$ حدود x را طوری بیابید که f صعودی باشد. (با تشکیل $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ و صرف نظر کردن از مقادیر کوچک Δx)

هندسهٔ ۱

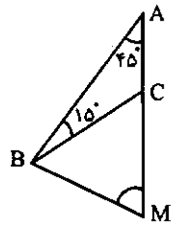
۱. در شکل پاره‌خط‌های مشخص شده با علامت (/) با هم، و پاره‌خط‌های مشخص شده با علامت (//) نیز با هم برابرند. اندازهٔ x و y را بیابید.



۲. با توجه به شکل داده شده نسبت $\dfrac{x}{y}$ را به‌دست آورید.

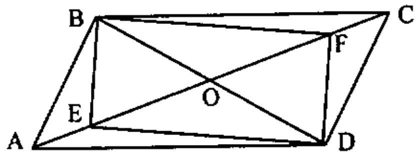


۳. در مثلث ABC، $\hat{A} = ۴۵^\circ$ و $\hat{B} = ۱۵^\circ$ است. بر امتداد ضلع AC از طرف C نقطهٔ M را چنان اختیار می‌کنیم که CM = ۲AC باشد. اندازهٔ زاویهٔ $A\hat{M}B$ را تعیین کنید.

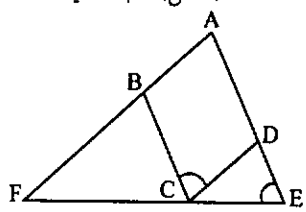


۴. ثابت کنید که اگر در دو مثلث، دو ضلع و میانهٔ وارد بر یکی از آن دو ضلع، نظیر به نظیر متساوی باشند آن دو مثلث همنهشتند.

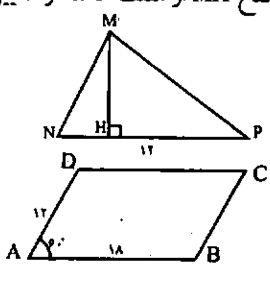
۵. در متوازی‌الاضلاع ABCD قطر AC بزرگتر از قطر BD است. از نقطهٔ O محل برخورد قطرهای متوازی‌الاضلاع دوپاره‌خط OE = OF را به اندازهٔ نصف قطر BD جدا می‌کنیم. ثابت کنید که چهارضلعی BEDF مستطیل است.



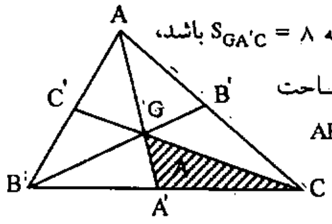
۶. چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع و AF = FE است (شکل)، ثابت کنید که $\hat{E} = \hat{C}$.



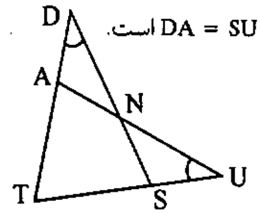
۷. مثلث MNP به قاعدهٔ NP = ۱۲ هم‌ارز متوازی‌الاضلاع ABCD است که در آن AB = ۱۸، AD = ۱۲ و $D\hat{A}B = ۶۰^\circ$ است. اندازهٔ ارتفاع MH از مثلث MNP را تعیین کنید.



۸. مثلث ABC داده شده است. میانه‌های AA′، BB′ و CC′ در نقطه G همرسند. در صورتی‌که $S_{GA'C} = ۸$ باشد، اندازهٔ مساحت مثلث ABC را بیابید.



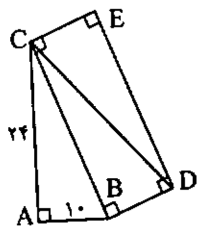
۹. در شکل $\hat{D} = \hat{U}$ و DT = TU است. ثابت کنید که DA = SU است.



۱۰. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = ۹۰^\circ$)، داده شده است. AB = ۱۰ cm و AC = ۲۴ cm است. روی وتر BC مستطیلی به مساحت ۲۶۰cm² می‌سازیم.

الف ـ اندازهٔ ضلع دیگر این مستطیل را تعیین کنید.

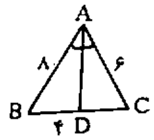
ب ـ طول قطر این مستطیل را به دست آورید.



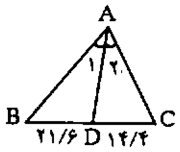
هندسهٔ ۲

۱. شکل حاصل از برخورد نیمسازهای زاویه‌های درونی یک ذوزنقه متساوی‌الساقین را مشخص کنید.

۲. در شکل زیر، AD نیمساز زاویهٔ درونی A از مثلث ABC است. اگر AB = ۸، AC = ۶ و DB = ۴ باشد، اندازهٔ پاره‌خط DC و از آن جا محیط مثلث ABC را تعیین کنید.



۳. اندازهٔ دو پاره‌خطی که نیمساز زاویهٔ درونی A از مثلث ABC روی ضلع BC ایجاد کرده است، مساوی ۱۴/۴ و ۲۱/۶ سانتیمتر است. در صورتی که محیط این مثلث مساوی ۸۶ سانتیمتر باشد، اندازهٔ ضلعهای مثلث را تعیین کنید.

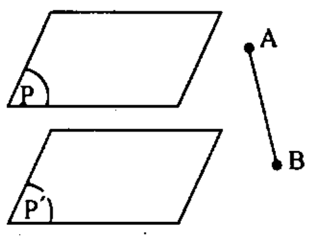


۴. قضیهٔ زیر را به صورت قضیهٔ شرطی بنویسید و سپس تعیین کنید که عکس آن قضیه شرطی است یا نه؟ در صورتی که یک قضیه نباشد، یک مثال نقض بزنید.

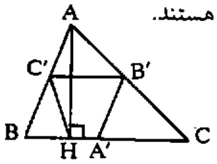
الف ـ هر نقطه واقع بر نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

ب ـ هر دو چهارضلعی همنهشت مساحتهای برابر دارند.

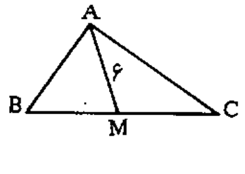
۵. دو نقطهٔ A و B و دو صفحهٔ متوازی P و P′ داده شده‌اند. مکان هندسی نقطه‌ای را بیابید که از دو نقطهٔ A و B متساوی‌الفاصله و همچنین از دو صفحهٔ P و P′ به یک فاصله باشد.



۶. ثابت کنید که در هر مثلث، وسطهای سه ضلع و پای یک ارتفاع، رأس‌های یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین هستند.

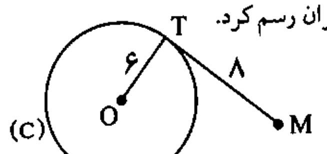


۷. طول میانهٔ AM از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = ۹۰^\circ$)، مساوی ۶ است و این میانه

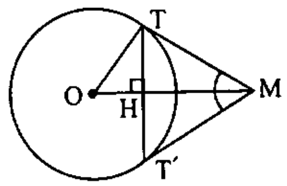


زاویهٔ قائمه را به نسبت ۱:۲ تقسیم کرده است. اندازهٔ مساحت این مثلث را تعیین کنید.

۸. دایرهٔ $C(O , 6)$ داده شده است. مکان هندسی نقطه‌ای از صفحهٔ این دایره را تعیین کنید که از آن نقطه مماسهایی به طول ۸ بر این دایره می‌توان رسم کرد.



۹. از نقطهٔ M دو مماس MT و MT' را بر دایرهٔ C(O ، ۱۲) رسم کرده‌ایم، درصورتی که $\widehat{TMT'}=60^\circ$ باشد؛ طول مماس MT، طول وتر MM' و اندازهٔ تصویر OT روی OM را به دست آورید.



۱۰. از مثلث ABC اندازهٔ سه میانه $AA' = m_a$ ، $BB' = m_b$ و $CC' = m_c$ داده شده است. مثلث را رسم کنید.

جبر و احتمال

۱. برای هر عدد طبیعی n با استفاده از اصل استقرا ثابت کنید:

$$\frac{1}{2\times5}+\frac{1}{5\times8}+\frac{1}{8\times11}+\dots+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{n}{2(3n+2)}$$

۲. برای هر عدد طبیعی n به کمک استقرا ریاضی، درستی رابطهٔ زیر را ثابت کنید:

$(1+\sqrt{2})^n \ge 1+\sqrt{2}n$

۳. با استفاده از اصل استقرا ریاضی، ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n، $4^{2n}-1$، بر ۵ بخش‌پذیر است. $4^{2n}-1=5r$

۴. با استفاده از استدلال برهان خُلف، نشان دهید اگر n^2 مضربی از ۵ باشد، آنگاه n نیز مضربی از ۵ است.

۵. الف ـ روش استدلال برهان خُلف را بیان کنید.

ب ـ $\sqrt{3}$ عدد گنگ است و a یک عدد گویا؛ ثابت کنید $\sqrt{3}-a$ عدد گنگ است.

۶. ثابت کنید $\sqrt[3]{3}$ گنگ است.

۷. با استفاده از استدلال استنتاجی، ثابت کنید حاصلضرب هر دو عدد حقیقی، کوچک‌تر یا مساوی نصف مجموع مربع‌های آنهاست.

۸. کدام یک از احکام زیر صحیح است، احکام صحیح را اثبات کنید و برای ردّ احکام ناصحیح، مثال نقض آورید.

الف ـ اگر x گنگ و y گنگ باشد، آنگاه x.y گنگ است.

ب ـ اگر x گویا و y گویا باشد، آنگاه x + y گویاست.

۹. در داخل جعبه‌ای، ۷ مهره به رنگ‌های سبز، سفید و آبی وجود دارد. این مهره‌ها را در دو جعبه قرار می‌دهیم. ثابت کنید که یکی از این دو جعبه، حدّاقل دارای دو مهره همرنگ است.

۱۰. درون یک مربع به ضلع واحد، ۱۰ نقطه انتخاب می‌کنیم، ثابت کنید حدّاقل فاصلهٔ دو نقطه از این ۱۰ نقطه، کمتر از $\frac{\sqrt{2}}{3}$ است.

حسابان

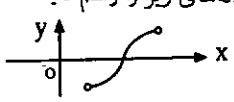
۱. دامنهٔ تابع‌های زیر را پیدا کنید.

الف) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{|x|-x}}$

ب) $f(x)=\sqrt{[x]-[x^2]}$

۲. معادلهٔ $|-x^2+2x| = x^2-2x$ را حل کنید.

۳. اگر نمودار $y=f(x)$ به صورت زیر باشد، نمودار معادله‌های زیر را رسم کنید.



الف) $y=f(x)+|f(x)|$

ب) $y=f(|x|)$

۴. اگر $fog(x)=x-1$ و $g(x)=1-\sqrt{x}$، ضابطهٔ f را حساب کنید.

۵. ماکزیمم و مینیمم مقدار y در $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ را حساب کنید.

۶. نمودارهای معادله‌های توابع زیر را به کمک نمودار $f(x)=x^2$ رسم کنید.

الف) $y=-\frac{1}{f(x)+1}$

ب) $y=f(x-1)+1$

۷. نمودار تابع $f(x)=\sin x-|\sin x|$ را رسم کنید.

۸. چند جمله‌ای درجه سوّمی پیدا کنید که بر $(x+1)^2$ بخشپذیر و باقیماندهٔ آن بر x^2-x، برابر $7x+1$ باشد.

۹. حد تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x+1}, & x\neq -1\\ 5, & x=1\end{cases}$ را در نظر بگیرید. متغیر x در چه بازه‌ای تغییر کند تا فاصلهٔ $|f(x)-(-2)|$ از $\frac{1}{100}$ کمتر باشد.

۱۰. حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$ ب) $\lim_{x\to2}\frac{x^5-32}{x^2-4}$

ج) $\lim_{x\to2^-}\frac{[x+[x+[x]]]}{[-x]-4}$

ریاضی سال سوم تجربی

۱. الف ـ مجموعهٔ زیر را به صورت فاصله نشان دهید.

$A=\{x \mid x\le 1 , x>2\}$

ب ـ فاصله‌های زیر را به صورت مجموعه نشان دهید.

I) $B=]-3,2]$ II) $C=[-2,+\infty)$

۲. مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ زیر را تعیین کنید و روی محور اعداد نشان دهید.

$-1<\frac{3x+1}{2}-\frac{3}{5}\le 3$

۳. تابع f با قانون $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x>1\\ -x+2, & x<1\\ 6, & x=1\end{cases}$ داده شده است، مقدارهای $f(0)$، $f(\sqrt{2}-1)$، $f(\sqrt{2}+1)$ و $f(-1)\times f(1)$ را تعیین کنید.

۴. در تابع f با قانون $f(x)=\begin{cases}\sin(2x-\frac{\pi}{3}), & x\ge\frac{\pi}{6}\\ \frac{1}{\cos 2x}, & x<\frac{\pi}{6}\end{cases}$؛ مقدارهای $f(\frac{\pi}{6})$، $f(\frac{\pi}{3})$ و $f(0)$ را تعیین کنید.

۵. دو تابع $y = x^3 - 3x + c$ و $y = ax + b$ داده شده‌اند. ضریب‌های a، b و c را چنان بیابید که این دو تابع در سه نقطه به طول‌های ۱−، ۰ و ۱+ متقاطع باشند.

۶. دامنهٔ تعریف هر یک از تابع‌های زیر را تعیین کنید.

الف- $f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{\sqrt{1 - |x|}}$

ب- $g(x) = \log_{x-1}(9 - x^2)$

۷. اگر $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x, & x > 3 \\ 3x + 1, & x \le 3 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} -x^2 - x, & x > 3 \\ -3x + 4, & x \le 3 \end{cases}$ باشد، ضابطهٔ تابع‌های $f \pm g$ را به دست آورید.

۸. اگر $f(x) = x + 1$ و $g(x) = ax^2 + bx + c$ باشد، ضریب‌های a، b و c را طوری تعیین کنید که $(gof)(x) = -2x^2 - x$ باشد.

۹. مطلوب است محاسبهٔ:

الف- $\lim_{x \to 2} f(x) = \sqrt{x - 2}$

ب- $\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & x > \frac{\pi}{6} \\ \cos x, & x \le \frac{\pi}{6} \end{cases}$

۱۰. تابع f با قانون $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx - 1, & x > -2 \\ -2x^2 + a, & x \le -2 \end{cases}$ داده شده است. ضریب‌های a و b را چنان بیابید که $\lim_{x \to -2^+} f(x) = 5$ و $\lim_{x \to -2^-} f(x) = -6$ باشد.

پرسشهای چهارگزینه‌ای

ریاضی عمومی ۱

۱. خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است. اگر فرزند اول و آخر همجنس باشند، احتمال آن که ۳ فرزند این خانواده دختر باشند چقدر است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{16}$

۲. در یک جدول داده‌های آماری مرکز دسته (نشان دسته) اول و سوم به ترتیب ۸ و ۱۶ است، مرکز دستهٔ دهم کدام است؟

۱) ۴۴ ۲) ۴۸ ۳) ۸۰ ۴) ۸۸

۳. احتمال بروز عوارض جانبی در مصرف نوعی دارو در مورد هر بیمار ۱۰٪ می‌باشد، هرگاه شش بیمار از این دارو استفاده کنند، احتمال آن که کمتر از دو نفر دچار عوارض جانبی شوند، چقدر است؟

۱) $0/6 \times 0/9^5$ ۲) $0/9^5$ ۳) $1/2 \times 0/9^5$ ۴) $1/5 \times 0/9^5$

۴. اتومبیلی که در جاده‌ای بین شهری در حال تردد است، ۵٪ احتمال دارد که دچار تصادف شود و همین احتمال در صورت ناهموار بودن جاده ۱۵٪ می‌باشد. همچنین می‌دانیم که ۲۰٪ جاده‌ها ناهموارند. اگر در یک جاده معین تصادفی رخ داده باشد، چقدر احتمال دارد که جاده ناهموار بوده باشد؟

۱) ۳۰٪ ۲) ۶۰٪ ۳) ۵۰٪ ۴) ۲۵٪

۵. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2 + 4x - 1 = 0$ باشند، مقدار $\frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha^2 - \beta^2}$ چقدر است؟

۱) $-\frac{15}{4}$ ۲) $\frac{15}{4}$ ۳) $\frac{17}{4}$ ۴) $-\frac{17}{4}$

۶. از دستگاه معادلات زیر $x_1 + x_2 + x_3$ کدام است؟

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 9 \end{cases}$$

۱) ± 2 ۲) -2 ۳) ۲ ۴) $\frac{1}{2}$

۷. خطوط $y = 2x + m$ و $y = mx + 2$ یکدیگر را روی نیمساز ناحیه اول و سوم قطع می‌کنند. m کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۳ ۴) -3

۸. به ازای چه مقدار n در بسط $\left(3x^2 - \frac{4}{x^2}\right)^n$ جملهٔ یازدهم فاقد x می‌باشد؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۲ ۳) ۲۵ ۴) ۳۵

۹. معادلهٔ $\log_x^{(2x+1)} - \log_x^{(x-2)} = 1$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۰. کدام دنبالهٔ زیر صعودی و کراندار است؟

۱) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ ۲) $a_n = \frac{n+1}{n-1}$ ۳) $a_n = \sin\frac{\pi}{n}$ ۲) $a_n = n^2$

دیفرانسیل و انتگرال (۱)

۱. دنبالهٔ $\left\{\frac{(n+1)^n (2n+5)}{4n^{n+1}}\right\}$ همگرا به کدام عدد است؟

۱) ۰ ۲) e ۳) $\frac{e}{2}$ ۴) 2e

۲. سری $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$:

۱) همگرا به ۰ است ۲) همگرا به ۱ است

۳) همگرا به $\frac{1}{2}$ است ۴) واگراست

۳. اگر $\lim_{x \to -\infty}(x^2 + 2x) = +\infty$، آن‌گاه برای هر $N > 0$ داریم:

۱) $x > \sqrt{N+1} + 1 \Rightarrow x^2 + 2x > N$

۲) $x < -(\sqrt{N+1} - 1) \Rightarrow x^2 + 2x > N$

۳) $x < \sqrt{N+1} + 1 \Rightarrow x^2 + 2x > N$

۴) $x < -(\sqrt{N+1} + 1) \Rightarrow x^2 + 2x > N$

۴. اگر $\lim_{x \to \frac{1}{3}} \frac{x^2 + 1}{9x^2 + ax + b} = +\infty$، آن‌گاه $(a + b)$ کدام است؟

۱) ۴- ۲) ۵- ۳) ۶- ۴) ۶

۵. اگر $f(x) = \begin{cases} x - 2 & x > 0 \\ x + 5 & x \le 0 \end{cases}$، آن‌گاه $\lim_{x \to 3} f(f(f(f(x))))$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -1 ۳) -2 ۴) ۱

۶. تابع با ضابطهٔ $f(x) = (x - 1)[x]$ در بازهٔ (۳ , ۰] در چند نقطه ناپیوسته است؟

۱) یک نقطه ۲) دو نقطه

۳) سه نقطه ۴) چهار نقطه

۷. اگر $\frac{\pi}{2} \le x < \frac{3\pi}{2}$ و $f(x) = \sqrt{x - 1}$، در این صورت $f(\cot x)$ در کدام بازه پیوسته است؟

۱) $\frac{\pi}{2} < x \le \frac{3\pi}{4}$ ۲) $\frac{3\pi}{4} \le x < \pi$

۳) $\pi < x \le \frac{5\pi}{4}$ ۴) $\frac{5\pi}{4} \le x < \frac{3\pi}{2}$

۸. منحنی به معادلهٔ $f(x) = \sqrt{\frac{x^3 - 20}{x - 2}}$ چند مجانب دارد؟

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) صفر

۹. اگر f تابعی مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه $\lim_{h \to 0} \frac{2f(x - 3h) - 2f(x + 2h)}{-2h}$ برابر است با:

۱) $6f'(x)$ ۲) $-6f'(x)$

۳) ۵f'(x) ۴) ۳f'(x)-

۱۰. جسمی روی نمودار تابع با ضابطهٔ $y = f(x)$ حرکت می‌کند، در نقطهٔ معینی از آن، شیب خط مماس بر منحنی $\frac{۱}{۴}$ و طول موضع با آهنگ ۲ متر در ثانیه کاهش می‌یابد؛ در همان نقطه، عرض موضع با چه سرعتی تغییر می‌کند؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ متر در ثانیه ۲) $-\frac{۱}{۲}$ متر در ثانیه

۳) ۲ متر در ثانیه ۴) ۲- متر در ثانیه

ریاضیات گسسته

۱. کدام گزاره درست است؟

۱) هر گراف همبند که لااقل یک دور به طول بزرگتر یا مساوی با ۳ داشته باشد همیلتنی است.

۲) اگر گراف G درخت نباشد آن‌گاه حداقل یک دور دارد.

۳) اگر گراف G فقط یک رأس از درجه ۱ داشته باشد، درخت نیست.

۴) هر درخت حداقل دو رأس از درجهٔ ۱ دارد.

۲. در گراف کامل K_p اگر اندازه q باشد و p = q در این صورت p + q کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۱۰ ۱۱

۳. اگر p عددی اول باشد و a عددی صحیح و a مضرب p نباشد و داشته باشیم $p \mid (۲۳)^{۱۷}a$ در این صورت کدام گزینه درست است؟

۱) p | ۱۷ ۲) (p , ۱۷) = ۱

۳) p = ۱ یا p = ۱۷ ۴) p = ۲۳

۴. اگر (a + b) = s و (a , b) = d در این صورت حاصل [s , d] کدام است؟ (a , b ∈ N)

۱) [a , b] ۲) d ۳) s ۴) ab

۵. اگر a و b هر دو اعداد صحیح و دارای یک شمارندهٔ مشترک اوّل باشند و داشته باشیم ra + sb = ۱۳ در این صورت کدام گزینه درست است؟

۱) (a , b) = ۱ ۲) (a , b) = ۲

۳) (a , b) = ۱۳ ۴) (a , b) = (r , s)

۶. باقیمانده تقسیم عدد $A = \sum_{k=1}^{۴۶}(k!)^{۲۲۰}$ بر عدد ۲۳ کدام است؟

۱) ۲۲ ۲) صفر ۳) ۲- ۴) ۲۱

۷. اگر $M_1 = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ماتریس مجاورت رابطهٔ R_1 باشد و M_2 ماتریس مجاورت رابطهٔ R_2 باشد و داشته باشیم $M_2 << M_1$ در این صورت حداکثر تعداد اعضای رابطهٔ R_2 کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) $۲^۴$ ۴) $۲^۵$

۸. تفاضل تعداد حالتهایی که می‌توان ۵ کتاب یکسان را به دلخواه بین سه نفر تقسیم کرد با تعداد حالتهایی که می‌توان ۴ جایزهٔ متمایز را به دلخواه بین سه نفر تقسیم کرد، چقدر است؟

۱) ۳۰ ۲) ۶۰ ۳) صفر ۴) ۱۷

۹. چه تعداد عدد طبیعی کوچکتر یا مساوی با ۱۳۸۰ وجود دارد که بر ۳ یا ۷ بخش‌پذیر می‌باشند؟

۱) ۶۸۴ ۲) ۷۸۴ ۳) ۵۹۶ ۴) ۵۹۲

۱۰. یک تاس را دوبار می‌اندازیم و پیشامدهای A و B را به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌کنیم «تاس اول ۴ بیاید» و «مجموع دو تاس ۷ باشد». در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

۱) A و B مستقل‌اند ۲) A و B وابسته‌اند

۳) $p(A) = \frac{۱}{۳}$ ۴) $p(B) = \frac{۱}{۳۶}$

۱۱. در جعبهٔ A_1، ۵ مهرهٔ سیاه و ۶ مهرهٔ سفید و در جعبهٔ A_2، ۷ مهرهٔ سیاه و ۴ مهرهٔ سفید وجود دارد، یکی از این دو جعبه را به تصادف انتخاب کرده و مهره‌ای از آن خارج می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که سفید است، چقدر احتمال دارد این مهره از جعبهٔ A_1 باشد؟

۱) $\frac{۶}{۱۰}$ ۲) $\frac{۶}{۹}$ ۳) $\frac{۲۱}{۴۵}$ ۴) $\frac{۲۴}{۴۵}$

۱۲. یک جفت تاس را آن‌قدر می‌اندازیم تا برای اولین بار هر دو با هم ۶ بیایند و متغیر تصادفی x را تعداد پرتابها تعریف می‌کنیم تا به این منظور برسیم (x = ۲ یعنی در پرتاب دوم هر دو تاس ۶ آمده و در پرتاب اول هر دو ۶ نیامده). چقدر احتمال دارد تا در حداکثر ۳ پرتاب به چنین منظوری برسیم؟

۱) $\frac{(۳۶)^۲ + ۳۶ + (۳۵)^۲}{(۳۶)^۳}$

۲) $\frac{(۳۶)^۳ + (۳۶)^۲ + ۳۶}{(۳۶)^۴}$

۳) $\frac{(۳۶)^۲ + ۳۶ \times ۳۵}{(۳۶)^۳}$

۴) $\frac{(۳۶)^۲ + ۳۶ \times ۳۵ + (۳۵)^۲}{(۳۶)^۳}$

پاسخ تشریحی مسائل ریاضی سال اول

۱. $A = \{\phi\} \Rightarrow p(A) = \{\phi , \{\phi\}\} \Rightarrow$

$P(p(A)) = \{\phi , \{\phi\} , \{\{\phi\}\} , \{\phi , \{\phi\}\}\}$

لازم به ذکر است که چون مجموعه A یک عضو دارد، لذا ۲ زیر مجموعه داشته و p(A) دو عضو دارد (تهی و مجموعهٔ A) و در نتیجه P(p(A))، $۴ = ۲^۲$ زیر مجموعه داشته و P(p(A)) چهار عضو دارد.

۲. مجموعهٔ (۱) نسبت به جمع بسته نیست (۰ = ۱ + ۱-) ولی نسبت به ضرب بسته است. مجموعه (۲) نسبت به هر دو عمل جمع و ضرب بسته است. مجموعهٔ (۳) نسبت به عمل جمع بسته است (مجموع هر دو عدد منفی عددی منفی است)، ولی نسبت به ضرب بسته نیست (خاصلضرب دو عدد منفی، عددی مثبت است). تنها مجموعهٔ (۴) است که نسبت به هیچ یک از دو عمل جمع و ضرب بسته نیست؛ زیرا مجموع دو عدد گنگ ممکن است عددی گویا باشد (به عنوان مثال، $-\sqrt{۲} + \sqrt{۲} = ۰ \in Q$) همچنین حاصلضرب دو عدد گنگ نیز ممکن است گویا باشد (به عنوان مثال، $\sqrt{۲} \times \sqrt{۲} = ۲ \in Q$).

۳. $۱/۴\overline{۸۱} = x \Rightarrow ۱۰x = ۱۴/\overline{۸۱}$,

$۱۰۰۰x = ۱۴۸۱/\overline{۸۱} \Rightarrow ۹۹۰x = ۱۴۶۷$

$\Rightarrow x = \frac{۱۴۶۷}{۹۹۰} = \frac{۱۶۳}{۱۱۰}$

۴. الف-

$\frac{۵^{۱۱} \times ۳^{۱۱}}{۱۵^{۷} \times ۱۵^{۲}} = \frac{(۵ \times ۳)^{۱۱}}{۱۵^{۹}} = \frac{۱۵^{۱۱}}{۱۵^{۹}} = ۱۵^{۲}$

ب-

$\frac{(x^{۳})^{۲} \times (x^{۲})^{۳}}{(x^{۳})^{-۲} \times (x^{۲})^{-۳}} = \frac{x^{۶} \times x^{۶}}{x^{-۶} \times x^{-۶}} = \frac{x^{۱۲}}{x^{-۱۲}} = x^{۱۲-(-۱۲)} = x^{۲۴}$

۵. الف-

$(۵^{r-۲})^{۲} = ۲۵^{۲r+۲}$

$\Rightarrow ۵^{۲r-۲} = ۵^{۴r+۴}$

$\Rightarrow ۲r - ۲ = ۴r + ۴ \Rightarrow ۲r = -۶ \Rightarrow r = -۳$

ب-

$(۲^{۳r-۱})^{۲} = ۲^{r} \times (۲^{۴})^{r} \Rightarrow ۲^{۶r-۲} = ۲^{۴r+r}$

$\Rightarrow ۶r - ۲ = ۵r \Rightarrow r = ۲$

۶.

$$\begin{array}{l|l}
a^{۵} + b^{۵} & a + b \\ \hline
-a^{۵} \mp a^{۴}b & a^{۴} - a^{۳}b + a^{۲}b^{۲} - ab^{۳} + b^{۴} \\
\hline -a^{۴}b + b^{۵} & \\
\pm a^{۴}b \pm a^{۳}b^{۲} & \\
\hline a^{۳}b^{۲} + b^{۵} & \\
-a^{۳}b^{۲} \mp a^{۲}b^{۳} & \\
\hline -a^{۲}b^{۳} + b^{۵} & \\
\pm a^{۲}b^{۳} \pm ab^{۴} & \\
\hline ab^{۴} + b^{۵} & \\
-ab^{۴} \mp b^{۵} & \\
\hline ۰ &
\end{array}$$

خارج قسمت $a^{۴} - a^{۳}b + a^{۲}b^{۲} - ab^{۳} + b^{۴}$

باقیمانده: صفر

۷. $(x + ۱)(x + ۲)(x + ۴)(x - ۱) =$

$(x^{۲} + ۳x + ۲)(x^{۲} + ۳x - ۴) =$

$(x^{۲} + ۳x)^{۲} + (۲ - ۴)(x^{۲} + ۳x) - ۸ =$

$x^{۴} + ۶x^{۳} + ۹x^{۲} - ۲x^{۲} - ۶x - ۸ =$

$x^{۴} + ۶x^{۳} + ۷x^{۲} - ۶x - ۸$

۸. $x^{۵} + x^{۴} + ۱ =$

$x^{۵} + x^{۴} + x^{۳} - x^{۳} + ۱ =$

$x^{۳}(x^{۲} + x + ۱) - (x^{۳} - ۱) =$

$x^{۳}(x^{۲} + x + ۱) - (x - ۱)(x^{۲} + x + ۱) =$

$(x^{۲} + x + ۱)(x^{۳} - x + ۱)$

۹. $\frac{x^{۳} + ۱}{(x + ۲)(x^{۲} - x + ۱)} + \frac{x - ۳}{x^{۲} - ۴x + ۳} - \frac{x^{۲} + ۵x}{x^{۳} + x^{۲} - ۲x} =$

$\frac{(x + ۱)(x^{۲} - x + ۱)}{(x + ۲)(x^{۲} - x + ۱)} + \frac{(x - ۳)}{(x - ۳)(x - ۱)} - \frac{x(x + ۵)}{x(x^{۲} + x - ۲)} =$

$\frac{x + ۱}{x + ۲} + \frac{۱}{x - ۱} - \frac{x + ۵}{(x - ۱)(x + ۲)} =$

$\frac{(x + ۱)(x - ۱) + (x + ۱) - (x + ۵)}{(x - ۱)(x + ۲)} =$

$\frac{x^{۲} - ۱ + x + ۱ - x - ۵}{(x - ۱)(x + ۲)} = \frac{x^{۲} - ۴}{(x - ۱)(x + ۲)} =$

$\frac{(x - ۲)(x + ۲)}{(x - ۱)(x + ۲)} = \frac{x - ۲}{x - ۱}$

۱۰. $x^{۴} + x = x(x^{۳} + ۱) =$

$x(x + ۱)(x^{۲} - x + ۱)$

$x + y + xy + ۱ =$

$(x + ۱) + y(x + ۱) =$

$(x + ۱)(y + ۱)$

و $(x + ۱) =$ ب.م.م

$x(x + ۱)(x^{۲} - x + ۱)(y + ۱) =$ ک.م.م

ریاضی سال دوم

۱. $\frac{x - ۲}{x + ۲} + \frac{x}{x - ۲} = \frac{۸}{x^{۲} - ۴} \Rightarrow$

$\frac{(x - ۲)^{۲} + x(x + ۲)}{(x + ۲)(x - ۲)} = \frac{۸}{x^{۲} - ۴} \Rightarrow$

$\frac{x^{۲} - ۴x + ۴ + x^{۲} + ۲x}{x^{۲} - ۴} = \frac{۸}{x^{۲} - ۴}$ و

$x^{۲} - ۴ \neq ۰ \Rightarrow ۲x^{۲} - ۲x + ۴ = ۸ \Rightarrow$

$۲x^{۲} - ۲x - ۴ = ۰ \Rightarrow x^{۲} - x - ۲ = ۰$

$\Rightarrow (x - ۲)(x + ۱) = ۰ \Rightarrow x = ۲$ یا $x = -۱$

پاسخ $x = ۲$ غیر قابل قبول است؛ زیرا مخرج دو تا از کسرها را مساوی صفر می‌کند، لذا مجموعه جواب معادله به صورت $\{-۱\}$ می‌باشد.

۲. برای آن که معادله فوق دارای دو ریشه حقیقی و متمایز باشد کافی است $\Delta > ۰$ باشد و برای آن که هر دو ریشه منفی باشند، باید مجموع دو ریشه ($-\frac{b}{a}$) منفی و حاصلضرب دو ریشه ($\frac{c}{a}$) مثبت باشد:

$x^{۲} + ۴x + a + ۲ = ۰$

$\Delta = ۱۶ - ۴(a + ۲) > ۰ \Rightarrow ۴(a + ۲) < ۱۶$

$\Rightarrow a + ۲ < ۴ \Rightarrow a < ۲$

و $۰ > -۴ =$ مجموع دو ریشه

$a > -۲ \Leftarrow ۰ < a + ۲ =$ حاصلضرب دو ریشه

و از اشتراک دو مجموعه، جواب فوق نتیجه می‌شود: $-۲ < a < ۲$

۳. کافی است نشان دهیم که دلتای سه‌جمله‌ای منفی و ضریب $x^{۲}$ مثبت است:

$\Delta = ۴(k^{۲} - ۱)^{۲} - ۴(k^{۲} - k + ۱)(k^{۲} + k + ۱) =$

$۴\left[k^{۴} - ۲k^{۲} + ۱ - (k^{۲} + ۱)^{۲} + k^{۲}\right] =$

$۴\left[k^{۴} - ۲k^{۲} + ۱ - k^{۴} - ۲k^{۲} - ۱ + k^{۲}\right] =$

$۴\left[-۵k^{۲}\right] = -۲۰k^{۲} < ۰$

ضریب $x^{۲}$ نیز سه جمله‌ای $k^{۲} - k + ۱$ است که این سه جمله‌ای نیز همواره مثبت است؛ زیرا دلتای آن $(۰ > ۴ - ۱)$ و ضریب $k^{۲}$ نیز مثبت است. به این ترتیب حکم مسأله ثابت می‌شود.

۴. کافی است نشان دهیم:

$fog(x) = gof(x) = x$

$fog(x) = f(g(x)) = f(\sqrt[۳]{x - ۳})$

$(\sqrt[۳]{x - ۳})^{۳} + ۳ = x - ۳ + ۳ = x$

$gof(x) = g(f(x)) = g(x^{۳} + ۳) =$

$\sqrt[۳]{x^{۳} + ۳ - ۳} = \sqrt[۳]{x^{۳}} = x$

۵. نشان می‌دهیم f یک به یک است.

$f(x_{۱}) = f(x_{۲}) \Rightarrow \frac{۲x_{۱} + ۳}{x_{۱} - ۱} = \frac{۲x_{۲} + ۳}{x_{۲} - ۱} \Rightarrow$

$(۲x_{۱} + ۳)(x_{۲} - ۱) = (x_{۱} - ۱)(۲x_{۲} + ۳) \Rightarrow$

$۲x_{۱}x_{۲} - ۲x_{۱} + ۳x_{۲} - ۳ = ۲x_{۱}x_{۲} + ۳x_{۱} - ۲x_{۲} - ۳$

$\Rightarrow ۵x_{۱} = ۵x_{۲} \Rightarrow x_{۱} = x_{۲}$

پس f یک به یک و لذا وارون‌پذیر است. اکنون با تعویض نقش x و y و تعیین y، ضابطهٔ وارون f را نیز به دست می‌آوریم:

$y = \frac{۲x + ۳}{x - ۱} \Rightarrow x = \frac{۲y + ۳}{y - ۱}$

$\Rightarrow xy - x = ۲y + ۳$

$\Rightarrow (x - ۲)y = x + ۳ \Rightarrow y = \frac{x + ۳}{x - ۲}$

$\Rightarrow \begin{cases} f^{-۱} : \mathbb{R} - \{۲\} \to \mathbb{R} - \{۱\} \\ f^{-۱}(x) = \frac{x + ۳}{x - ۲} \end{cases}$

۶. باید داشته باشیم $x \geq 0$ و نیز $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \geq 0$؛ چون $\sqrt{x}+1 > 0$ (چرا؟) لذا کافی است، $\sqrt{x}-1 \geq 0$ باشد و از آن جا $\sqrt{x} \geq 1$ و $x \geq 1$، بنابراین داریم: $D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R} \;,\; x \geq 1\}$

۷.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = -4 - 3 = -7 \neq 0$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-7}\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 2 \;,\; y = 1$$

۸. از قاعدهٔ گرامر استفاده می‌کنیم:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & m \\ 2 & m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -4 & m \\ m-1 & m \end{vmatrix}} = \frac{-2m - 2m}{-4m - m^2 + m} = \frac{-4m}{-m^2 - 3m}$$

حال برای آن که دستگاه دارای جواب نباشد، باید $-m^2 - 3m = 0$ و $-4m \neq 0$ باشد.

$$-m^2 - 3m = 0 \Rightarrow m(-m-3) = 0$$

$$\Rightarrow m = 0 \quad \text{یا} \quad m = -3$$

و چون باید $-4m \neq 0$ باشد، لذا تنها جواب $m = -3$ قابل قبول است.

۹. به ترتیب می‌نویسیم:

$$\frac{\cot g170^\circ \cot g100^\circ - \sin290^\circ \cos200^\circ}{\sin160^\circ \sin70^\circ} =$$

$$\frac{\cot g(180-10)\cot g(90+10) - \sin(270+20)\cos(180+20)}{\sin(180-20)\sin(90-20)} =$$

$$\frac{(-\cot g10)(-tg10) - (-\cos20)(-\cos20)}{(\sin20)(\cos20)} =$$

$$\frac{tg10 \cot g10 - \cos^2 20}{\sin20 \cos20} = \frac{1 - \cos^2 20}{\sin20 \cos20} =$$

$$\frac{\sin^2 20}{\sin20 \cos20} = \frac{\sin20}{\cos20} = tg20$$

۱۰.

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$\frac{(x+\Delta x)^2 + (x+\Delta x) - x^2 - x}{\Delta x} =$$

$$\frac{x^2 + \Delta x^2 + 2x\Delta x + x + \Delta x - x^2 - x}{\Delta x} =$$

$$\frac{\Delta x(\Delta x + 2x + 1)}{\Delta x} =$$

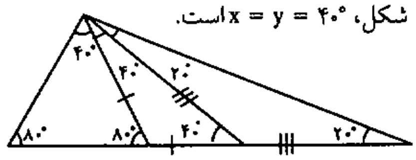
$\Delta x + 2x + 1$ و $\Delta x = 0$

$$\Rightarrow \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

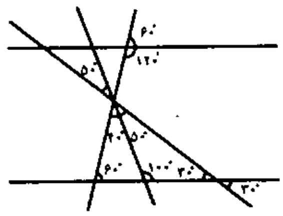
$$2x + 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{-1}{2}$$

هندسهٔ ۱

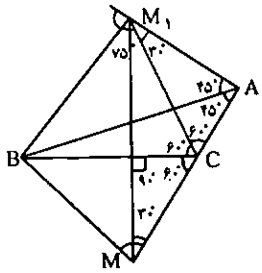
۱. با توجه به مثلثهای متساوی‌الساقین در شکل، $x = y = 40^\circ$ است.



۲. با توجه به تساوی زاویه‌های ایجاد شده بین دو خط متوازی و قاطعهای رسم شده اندازهٔ $x = 30^\circ$ و $y = 120^\circ$ و از آن جا $\frac{x}{y} = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}$ است.

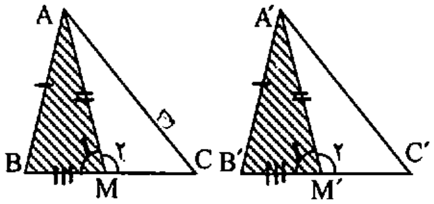


۳. قرینهٔ نقطهٔ M نسبت به ضلع BC را M_1 می‌نامیم. از M_1 به B و C وصل می‌کنیم چون $B\hat{C}M = 60^\circ$ و $B\hat{C}A = 120^\circ$ است. به دلیل تقارن محوری $B\hat{C}M_1 = 60^\circ$ و از آن جا $M_1\hat{C}A = 60^\circ$ می‌باشد. از طرفی $M_1C = CM = 2AC$ است،



بنابراین مثلث M_1AC در رأس A قائمه، یعنی $M_1\hat{A}C = 90^\circ$ است. بنابراین $B\hat{A}C = B\hat{A}M_1 = 45^\circ$، یعنی BA نیمساز زاویهٔ درونی A از مثلث M_1AC است. از طرفی BC نیمساز زاویهٔ M_1CM، یعنی نیمساز برونی رأس C از مثلث M_1AC است. در نتیجه نقطهٔ B روی نیمساز خارجی زاویهٔ M_1 از مثلث M_1AC است که چون $C\hat{M}_1A = 30^\circ$ است، پس $B\hat{M}_1C = 75^\circ$ و در نتیجه $B\hat{M}C = 75^\circ$ است؛ زیرا $B\hat{M}C = B\hat{M}_1C$ است.

۴. در دو مثلث ABC و A'B'C' فرض می‌کنیم که $AB = A'B'$، $BC = B'C'$ و $AM = A'M'$ باشد. دو مثلث ABM و A'B'M'



به دلیل برابری سه ضلع، همنهشتند، زیرا $AB = A'B'$، $AM = A'M'$ و $BM = \frac{BC}{2} = \frac{B'C'}{2} = B'M'$ است. در نتیجه $\hat{M}_1 = \hat{M'}_1$ است. بنابراین $\hat{M}_2 = \hat{M'}_2$ و از آن جا دو مثلث AMC و A'M'C' به دلیل برابری دو ضلع و زاویهٔ بین آنها همنهشتند؛ زیرا $AM = A'M'$، $MC = \frac{BC}{2} = \frac{B'C'}{2} = M'C'$ و $\hat{M}_2 = \hat{M'}_2$. در نتیجه $AC = A'C'$ است. پس دو مثلث ABC و A'B'C' به دلیل تساوی سه ضلع، همنهشتند.

۵. چهار ضلعی BFDE به دلیل آن که دو قطرش منصف یکدیگرند، متوازی الاضلاع است که چون با هم مساوی نیز می‌باشند، پس مستطیل است.

۶. مثلث AFE در رأس F متساوی‌الساقین است. بنابراین $\hat{E} = \hat{A}$ (۱) است؛ از طرفی به دلیل متوازی‌الاضلاع بودن چهار ضلعی ABCD، $\hat{A} = \hat{C}$ (۲) است. از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $\hat{E} = \hat{C}$، و حکم ثابت است.

۷. بنا به فرض مسأله داریم:

$$S_{ABCD} = S_{MNP}$$

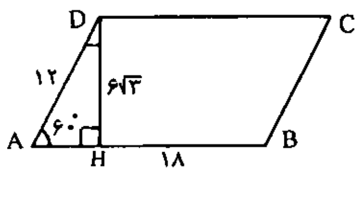
$$\Rightarrow AB \cdot AD \sin60^\circ = \frac{1}{2} NP \times MH$$

$$\Rightarrow 18 \times 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \times 12 \times MH$$

$$\Rightarrow 108\sqrt{3} = 6MH \Rightarrow MH = \frac{108\sqrt{3}}{6}$$

$$\Rightarrow MH = 18\sqrt{3}$$

نکته. برای محاسبهٔ مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD می‌توانیم ارتفاع DH را رسم



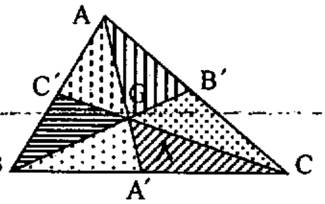
کنیم. در مثلث قائم الزاویهٔ ADH داریم:

$$DH = AD \times \sin ۶۰^\circ = ۱۲ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۶\sqrt{۳}$$

از آن جا:

$$S_{ABCD} = AB \times DH = ۱۸ \times ۶\sqrt{۳} = ۱۰۸\sqrt{۳}$$

۸. می‌دانیم که میانه‌های هر مثلث، آن مثلث را به شش مثلث هم‌ارز افراز (تقسیم) می‌کنند



که مساحت هر کدام، $\frac{۱}{۶}$ مساحت مثلث داده شده است. یعنی داریم:

$$S_{GA'C} = S_{GA'B} = S_{GB'C} = S_{GB'A} = S_{GC'A} = S_{GC'B} = \frac{۱}{۶}S_{ABC}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$S_{ABC} = ۶S_{GA'C} = ۶ \times ۸ = ۴۸$$

۹. دو مثلث DTS و ATU به دلیل برابری دو زاویه و ضلع بین، همنهشتند. زیرا داریم:

$\hat{D} = \hat{U}$ و $\hat{T} = \hat{T}$ و $DT = TU$

در نتیجه $AT = TS$ است. از آن جا:

$$DT - AT = TU - TS \Rightarrow AD = SU$$

۱۰. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = ۹۰^\circ$) داریم:

$$BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ = ۱۰۰ + ۵۷۶ = ۶۷۶$$

$$\Rightarrow BC = ۲۶$$

از آن جا داریم:

$$S_{\text{مستطیل}} = BC \times BD$$

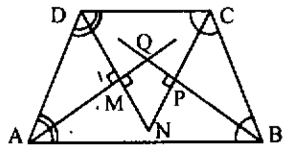
$$\Rightarrow ۲۶۰ = ۲۶ \times BD \Rightarrow BD = ۱۰$$

$$\Rightarrow \text{قطر مستطیل} = CD = \sqrt{BC^۲ + BD^۲} = \sqrt{۶۷۶ + ۱۰۰} = \sqrt{۷۷۶}$$

$$\Rightarrow \text{قطر مستطیل} = ۲\sqrt{۱۹۴}$$

هندسهٔ ۲

۱. ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD به قاعده‌های AB و CD را در نظر می‌گیریم و نیمسازهای زاویه‌های درونی آن را رسم می‌کنیم و چهار ضلعی حاصل از برخورد آنها را MNPQ می‌نامیم(شکل). چون $\hat{B} + \hat{C} = \hat{A} + \hat{D} = ۱۸۰^\circ$ است، پس:



$$\frac{\hat{B}}{۲} + \frac{\hat{C}}{۲} = \frac{\hat{A}}{۲} + \frac{\hat{D}}{۲} = ۹۰^\circ$$

$$\Rightarrow A\hat{M}D = B\hat{P}C = ۹۰^\circ$$

$$\Rightarrow Q\hat{M}N + Q\hat{P}N = ۹۰^\circ + ۹۰^\circ = ۱۸۰^\circ$$

بنابراین چهارضلعی MNPQ محاطی است.

از طـرفی مثلثهای AQB و DNC متساوی‌الساقین و مثلثهای AMD و BPC همنهشتند. بنابراین $MQ = PQ$ و $MN = NP$ است. در نتیجه:

$$QM + NP = QP + NM$$

و بنابراین چهارضلعی MNPQ محیطی می‌باشد. پس چهارضلعی MNPQ هم محاطی و هم محیطی می‌باشد.

۲. بنا به ویژگی نیمسازهای زاویه‌های درونی مثلث داریم:

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{۴}{DC} = \frac{۸}{۶} \Rightarrow DC = ۳ \Rightarrow$$

$$BC = DB + DC = ۴ + ۳ = ۷$$

از آن جا محیط مثلث برابر است با:

$$AB + AC + BC = ۸ + ۶ + ۷ = ۲۱$$

۳. بنا به ویژگی نیمسازهای زاویه‌های درونی مثلث داریم:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{۲۱/۶}{۱۴/۴}$$

$$\Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow c = \frac{۳}{۲}b \qquad (۱)$$

همچنین داریم:

$$BC = DB + DC = ۲۱/۶ + ۱۴/۴ = ۳۶ = a$$

$$AB + AC + BC = ۸۶ \Rightarrow$$

$$c + b + a = ۸۶ \ (۲) \Rightarrow$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow \frac{۳}{۲}b + b + ۳۶ = ۸۶$$

$$\Rightarrow \frac{۵}{۲}b = ۵۰ \Rightarrow b = ۲۰$$

$$\Rightarrow c = \frac{۳}{۲} \times ۲۰ = ۳۰$$

۴. الف. **قضیه.** اگر نقطه‌ای روی نیمساز یک زاویه باشد، آن گاه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

قضیهٔ عکس. اگر نقطه‌ای از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، آن گاه روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

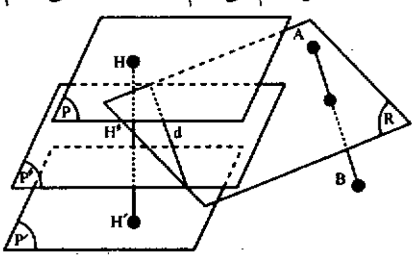
به طوری که می‌دانیم قضیه بالا و عکس آن هر دو درست هستند و می‌توانیم آن را به صورت **یک قضیه دو شرطی** بیان کنیم.

قضیه. شرط لازم و کافی برای آن که نقطه‌ای روی نیمساز یک زاویه باشد، آن است که از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله باشد.

ب. **قضیه.** اگر دو چهارضلعی همنهشت باشند، آن گاه مساحت آنها برابر است.

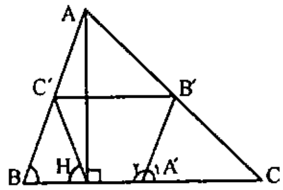
عکس قضیه. اگر دو چهارضلعی مساحتهای برابر داشته باشند آنگاه آن دو چهارضلعی همنهشتند. بدیهی است که عکس این قضیه درست نیست، یعنی یک قضیه درست نیست؛ زیرا دو چهارضلعی می‌توانند مساحتهای برابر داشته باشند، امّا همنهشت نباشند. به عنوان مثال یک مستطیل به ابعاد ۴ و ۹ با مربعی به ضلع ۶ معادل است، امّا همنهشت نیستند و یا متوازی‌الاضلاعی به ضلع ۱۲ و ارتفاع ۸ با ذوزنقه‌ای به قاعده‌های ۲۰ و ۲۸ و ارتفاع ۴ معادل است، امّا این دو چهار ضلعی همنهشت نیستند.

۵. مکان هندسی نقطه‌ای که از دو صفحهٔ موازی P و P′ به یک فاصله است، صفحه‌ای است موازی این دو صفحه، بین این دو صفحه و به یک فاصله از آنهاست. این صفحه را P″ می‌نامیم. از طرفی مکان هندسی نقطه‌هایی از فضا که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله است، صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB است. این صفحه را نیز رسم می‌کنیم و صفحهٔ R می‌نامیم.



فصل مشترک این صفحه با صفحهٔ P″ خط d جواب مسأله است. بدیهی است مسأله در صورتی جواب دارد که دو صفحهٔ R و P″ متوازی نباشند. در صورت انطباق این دو صفحه تمام نقطه‌های واقع در صفحهٔ مشترک جواب مسأله‌اند.

۶. نخست ثابت می‌کنیم که این چهارضلعی ذوزنقه است و سپس متساوی‌الساقین بودن آن را ثابت می‌کنیم:



پاره‌خط $B'C'$ که وسط‌های دو ضلع AC و AB را به هم وصل می‌کند موازی BC است. بنابراین چهارضلعی $A'B'C'H$ ذوزنقه است. از طرفی $A'B'$ موازی AB است پس (۱) $\hat{A'}_1 = \hat{B}$ است. از طرفی در مثلث قائم الزاویهٔ ABH ، HC' میانه وارد بر وتر است. پس مساوی نصف آن می‌باشد. در نتیجه مثلث BHC' متساوی‌الساقین است یعنی (۲) $\hat{B} = B\hat{H}C'$ است. از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $\hat{A'}_1 = B'\hat{H}C'$ است. در نتیجه مکمل‌های این دو زاویه نیز برابرند، یعنی $B'\hat{A'}H = C'\hat{H}A'$ و بنابراین ذوزنقه $A'B'C'H$ متساوی‌الساقین است.

۷. میانهٔ وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه نصف وتر است، پس $AM = MB = MC = 6$ است. از طرفی مثلث AMB متساوی‌الاضلاع است؛ زیرا $B\hat{A}M = 60°$ است، بنابراین $AB = BM = AM = 6$ است. از آن جا داریم:

$BC = 12$ و $AB^2 + AC^2 = BC^2$

$\Rightarrow 36 + AC^2 = 144 \Rightarrow AC^2 = 108$

$\Rightarrow AC = 6\sqrt{3} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \,.\, AC$

$= \frac{1}{2} \times 6 \times 6\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$

۸. از نقطهٔ M به O مرکز دایره وصل می‌کنیم. داریم:

$OM = \sqrt{OT^2 + MT^2} = \sqrt{36 + 64} =$

$\sqrt{100} = 10 =$ مقدار ثابت

چون نقطهٔ O ثابت است؛ پس مکان هندسی نقطهٔ M دایره‌ای به مرکز O و به شعاع ۱۰ است.

۹. زاویهٔ $O\hat{M}T = 30°$ و زاویهٔ $O\hat{T}M = 90°$ است. پس در مثلث قائم الزاویهٔ OMT داریم:

$OM = 2OT = 2 \times 12 = 24 \Rightarrow$

$MT = \sqrt{OM^2 - OT^2} = \sqrt{24^2 - 12^2} =$

$\sqrt{576 - 144} = \sqrt{432} = 12\sqrt{3}$

همچنین در مثلث قائم الزاویه OTH ($\hat{H} = 90°$) داریم: $O\hat{T}H = O\hat{M}T = 30°$

$\Rightarrow OH = \frac{OT}{2} = \frac{12}{2} = 6$

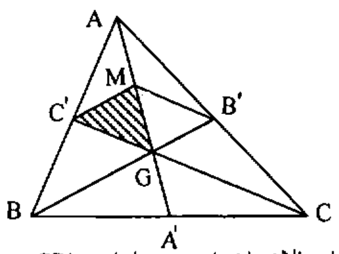
$\Rightarrow TH = \sqrt{OT^2 - OH^2} = \sqrt{12^2 - 6^2}$

$= \sqrt{144 - 36} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$

$\Rightarrow TT' = 2TH = 2 \times 6\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$

نکته. چون مثلث TMT' متساوی‌الساقین ($MT = MT'$) و زاویهٔ رأس آن $T\hat{M}T' = 60°$ است، پس متساوی‌الاضلاع است. بنابراین $TT' = MT = MT' = 12\sqrt{3}$ است. از این ویژگی برای محاسبهٔ TT' نیز می‌توان استفاده کرد.

۱۰. مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. میانه‌های AA' ، BB' و CC' را رسم کرده، محل تلاقی آنها را G می‌نامیم. وسط پاره‌خط GA را M نامیده از M به B' و C' وصل می‌کنیم. چهار ضلعی $GB'MC'$ که قطرهای آن منصف یکدیگرند،



متوازی‌الاضلاع است. بنابراین $MC' = GB'$ است. در نتیجه مثلث GMC' با معلوم بودن اندازهٔ سه‌ضلعش قابل رسم است. زیرا داریم $MC' = GB' = \frac{1}{3} BB' = \frac{1}{3} m_b$ و $GC' = \frac{1}{3} CC' = \frac{1}{3} m_c$ و $GM = \frac{1}{2} GA = \frac{1}{3} AA' = \frac{1}{3} m_a$. بنابراین برای رسم مثلث ABC نخست مثلث GMC' را با معلوم بودن اندازهٔ سه‌ضلعش رسم می‌کنیم. سپس MG را از دو طرف به اندازهٔ خود امتداد می‌دهیم تا نقطه‌های A و A' به دست آیند. از A به C' وصل کرده به اندازه خود امتداد می‌دهیم تا رأس B به دست آید. از B به A' وصل می‌کنیم و به اندازه خود امتداد می‌دهیم تا رأس C به دست آید. از C به A وصل می‌کنیم مثلث ABC جواب مسأله است.

جبر و احتمال

۱. ابتدا صحیح بودن حکم را به ازای $n = 1$ نشان می‌دهیم.

$n = 1 \Rightarrow \frac{1}{2 \times 5} = \frac{1}{2(3 + 2)} \Rightarrow \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$

سپس فرض می‌کنیم حکم به ازای $n = k$ صحیح باشد:

فرض استقرا: $n = k \Rightarrow \frac{1}{2 \times 5} + \frac{1}{8 \times 11} + \frac{1}{8 \times 11} + \dots + \frac{1}{(3k - 1)(3k + 2)} = \frac{k}{2(3k + 2)}$

حال ثابت می‌کنیم حکم به ازای $n = k + 1$ نیز صحیح است:

حکم استقرا: $n = k + 1 \Rightarrow \frac{1}{2\times5} + \frac{1}{8\times11} + \frac{1}{8 \times 11} + \dots + \frac{1}{(3k - 1)(3k + 2)} + \frac{1}{(3k + 2)(3k + 5)} = \frac{k + 1}{2(3k + 5)}$

برای اثبات این حکم، کافی است مجموع k جملهٔ اول را از فرض استقرا جایگزین کنیم و صحیح بودن برابری زیر را اثبات نماییم:

$$\frac{k}{2(3k + 2)} + \frac{1}{(3k + 2)(3k + 5)} = \frac{k + 1}{2(3k + 5)}$$

اثبات برابری اخیر نیز به سادگی و با جمع دو کسر سمت چپ انجام می‌شود:

$$\frac{k}{2(3k + 2)} + \frac{1}{(3k + 2)(3k + 5)} =$$

$$\frac{k(3k + 5) + 2}{2(3k + 2)(3k + 5)} = \frac{3k^2 + 5k + 2}{2(3k + 2)(3k + 5)} =$$

$$\frac{3k^2 + 3k + 2k + 2}{2(3k + 2)(3k + 5)} =$$

$$\frac{3k(k + 1) + 2(k + 1)}{2(3k + 2)(3k + 5)} = \frac{k + 1}{2(3k + 5)}$$

۲. صحیح بودن حکم به ازای $n = 1$ واضح است:

$n = 1 \Rightarrow (1 + \sqrt{2})^1 \geq 1 + \sqrt{2}$

با فرض صحیح بودن حکم به ازای $n = k$ نتیجه می‌شود:

فرض‌استقرا: $n = k \Rightarrow (1 + \sqrt{2})^k \geq 1 + \sqrt{2}k$

حال باید صحیح بودن حکم به ازای $n = k + 1$ با فرض صحیح بودن به ازای $n = k$ ثابت شود؛ یعنی:

حکم استقرا: $n = k + 1 \Rightarrow (1 + \sqrt{2})^{k + 1} \geq 1 + \sqrt{2}(k + 1)$

با ضرب دو طرف فرض در $(\sqrt{2}+1)$ نتیجه می‌شود:

$$(1+\sqrt{2})^{k+1} \ge (1+\sqrt{2}k)(1+\sqrt{2})$$

اینک با توجه به این فرض و برای اثبات حکم، کافی است که صحیح بودن نابرابری زیر ثابت شود:

$$(1+\sqrt{2}k)(1+\sqrt{2}) \ge 1+\sqrt{2}(k+1)$$

که اثبات این نامساوی نیز به کمک استدلال برگشتی و به صورت زیر، مقدور است:

$$(1+\sqrt{2}k)(1+\sqrt{2}) \ge 1+\sqrt{2}(k+1)$$

$$\Rightarrow 1+\sqrt{2}+\sqrt{2}k+2k \ge 1+\sqrt{2}k+\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 2k \ge 0 \Rightarrow k \ge 0$$

که صحیح بودن حکم اخیر واضح است. برگشت‌پذیر بودن مراحل، به سادگی روشن است.

۳. صحیح بودن حکم، به ازای $n = 1$ برقرار است: $4^2-1=15=5\times 3$

حال فرض می‌کنیم حکم به ازای $n=k$ صحیح باشد و داشته باشیم: $5r=4^{2k}-1$ و ثابت می‌کنیم $5r'=4^{2(k+1)}-1$ و برای این منظور، دو طرف فرض را در 4^2 ضرب می‌کنیم:

$$4^{2k}-1=5r \Rightarrow 4^2(4^{2k}-1)=80r$$

$$\Rightarrow 4^{2k+2}-16=80r$$

$$4^{2(k+1)}-1=15+80r=5\underbrace{(3+16r)}_{r'}=5r'$$

۴. فرض می‌کنیم n^2 مضرب ۵ بوده و n مضرب ۵ نباشد؛ پس باید در تقسیم بر ۵، به باقیمانده‌ای غیر از صفر و کوچک‌تر از ۵ برسد؛ یعنی داریم:

$$n=5q+r\ ,\ \ 0<r<5$$

از این جا داریم:

$$n^2=25q^2+10rq+r^2=$$

$$5(5q^2+2rq)+r^2=5r+r^2$$

اما به سادگی و با امتحان، می‌توان تحقیق کرد که $0<r<5$ (یعنی $r=1,2,3,4$) باشد، هرگز r^2 مضرب ۵ نخواهد شد؛ بنابراین n^2 مضرب ۵ نیست و این خلاف فرض است.

۵. **الف** ـ در روش برهان خُلف، حکم را ناصحیح فرض کرده و بر این اساس و به کمک این فرض و قضایای دیگر، به نتیجه‌ای ناصحیح یا خلاف فرض می‌رسیم.

ب ـ از برهان خُلف کمک می‌گیریم، فرض کنیم $a-\sqrt{3}$ عددی گویا باشد، بنابراین می‌توان آن را به صورت یک کسر گویا نوشت: $a-\sqrt{3}=\frac{p}{q}$

و چون $a\in Q$، بنابراین $a=\frac{m}{n}$ و از آن جا:

$$\sqrt{3}=-\frac{p}{q}+\frac{m}{n}=\frac{-np+mq}{nq}=\frac{r}{s}$$

یعنی $\sqrt{3}$ را نیز می‌توان به صورت یک کسر گویا نوشت و این با فرض گنگ بودن عدد $\sqrt{3}$ متناقض است.

۶. از برهان خُلف کمک می‌گیریم و فرض می‌کنیم $\sqrt{3}$ گویا باشد. در این صورت، حتماً می‌توان $\sqrt{3}$ را مساوی با یک کسر گویای ساده شده که صورت و مخرج آن نسبت به هم اوّل هستند، تبدیل کرد؛ یعنی:

$$\sqrt{3}=\frac{p}{q}\ ,\ (p\ ,\ q)=1$$

($(p\ ,\ q)$ یعنی بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد p و q) و از آن جا داریم:

$$p=\sqrt{3}q \Rightarrow p^2=3q^2$$

و از آن جا p^2 مضرب ۳ است، لذا p نیز مضرب ۳ است (این موضوع را در انتها اثبات می‌کنیم)؛ یعنی می‌توان نوشت: $p=3k$ و از جایگذاری این مقدار در تساوی $p^2=3q^2$، خواهیم داشت:

$$p^2=3q^2 \Rightarrow (3k)^2=3q^2 \Rightarrow$$

$$9k^2=3q^2 \Rightarrow q^2=3k^2$$

یعنی q^2 مضرب ۳ است. پس q هم مضرب ۳ است؛ یعنی: $q=3k'$

بنابراین p و q هر دو مضرب ۳ شدند و این با اوّل بودن آنها نسبت به هم تناقض دارد؛ چرا که در این صورت، حداقل داریم: $(p\ ,\ q)=3$

در حلّ این مسأله، از این موضوع استفاده کردیم که اگر مربع عددی مضرب ۳ باشد، خود این عدد نیز مضرب ۳ است. اثبات این موضوع نیز به کمک برهان خُلف در زیر می‌آید:

فرض کنیم $x^2=3k$، می‌خواهیم ثابت کنیم $x=3t$، فرض کنیم x مضرب ۳ نباشد، پس باقیماندهٔ تقسیم آن بر ۳، مساوی یک و یا دو است؛ یعنی $x=3t+1$ یا $x=3t+2$ که در این صورت خواهیم داشت:

$$x=3t+1 \Rightarrow x^2=9t^2+6t+1=$$

$$3\overbrace{(3t^2+2t)}^{k}+1=3k+1$$

$$x=3t+2 \Rightarrow x^2=9t^2+12t+4=$$

$$3(3t^2+4t+1)+1=3k+1$$

که در هر دو صورت، x^2 مضرب ۳ نخواهد بود و این خلاف فرض است که $x^2=3k$، بنابراین x باید مضرب ۳ باشد.

۷. آنچه باید اثبات شود، به صورت زیر است:

$$xy \le \frac{x^2+y^2}{2}$$

و برای این منظور می‌نویسیم:

$$(x-y)^2 \ge 0 \Rightarrow x^2+y^2-2xy \ge 0 \Rightarrow$$

$$x^2+y^2 \ge 2xy \Rightarrow xy \le \frac{x^2+y^2}{2}$$

۸. حکم (الف) صحیح نیست. مثال‌های نقض بسیاری می‌توان نوشت؛ به عنوان مثال، با فرض $x=2-\sqrt{3}$ و $y=2+\sqrt{3}$ که هر دو عددهایی گنگ هستند، داریم:

$$xy=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1$$

یعنی xy عددی گویاست (و گنگ نیست) ولی حکم (ب) همیشه صحیح است. برای اثبات به کمک استدلال استنتاجی، فرض می‌کنیم x و y دو عدد گویا باشند.

$$x=\frac{m}{n}\ \ (m\ ,n\in Z\ ,n\ne 0)\ \ ,\ y=\frac{p}{q}$$

$$(p\ ,q\in Z\ ,\ q\ne 0) \Rightarrow$$

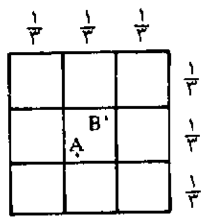
$$x+y=\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{mq+np}{nq}=\frac{a}{b}$$

$$(a\ ,b\in Z\ ,b\ne 0) \Rightarrow x+y\in Q$$

لازم به ذکر است که فرض $a\ ,b\in Z$ با توجه به بسته بودن مجموعهٔ Z نسبت به دو عمل جمع و ضرب نتیجه‌گیری شده است و نیز فرض $b\ne 0$ با توجه به آن که $q\ne 0$ و n به دست آمده است.

۹. چون ۷ مهره در سه رنگ مختلف داریم، بنابراین طبق تعمیم یافتهٔ اصل لانه کبوتری، سه تا از این مهره‌ها همرنگ هستند (زیرا اگر ۷ کبوتر به سمت سه لانه پرواز کنند، حدّاقل سه تای آنها وارد یک لانه می‌شوند)، پس سه تا از این مهره‌ها یک رنگ دارند. اکنون وقتی هفت مهره را در دو جعبه قرار می‌دهیم، این سه مهره باید وارد دو جعبه شوند و دوباره به کمک اصل لانه کبوتری، دوتای آنها باید وارد یک جعبه شوند، لذا در یکی از جعبه‌ها حدّاقل دو مهره همرنگ هستند.

۱۰. مطابق شکل، با رسم خطوط موازی، مربع را به ۹ مربع کوچک به ضلع $\frac{1}{3}$ تفکیک می‌کنیم. اکنون ۱۰ نقطه درون این مربع انتخاب کرده‌ایم. طبق اصل لانه کبوتری، حدّاقل دو نقطه از این نقاط، درون یکی از مربع‌های کوچک واقع می‌شوند و فاصلهٔ این دو نقطه، کوچک‌تر از طول قطر این مربع‌هاست. برای مثال، اگر این دو نقطه مطابق شکل نقاط A و B باشند، می‌توان نوشت:



$$AB<\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}} \Rightarrow AB<\sqrt{\frac{2}{9}} \Rightarrow AB<\frac{\sqrt{2}}{3}$$

حسابان

۱. **الف** ـ برای یافتن دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{1}{\sqrt{|x|-x}}$ دو شرط را باید در نظر گرفت؛ یکی این که مخرج کسر صفر نشود و دیگر این که زیر رادیکال با فرجهٔ زوج منفی نشود؛ پس:

$D_f=\{x\in\mathbb{R} : \sqrt{|x|-x}\neq 0 \text{ و } |x|-x>0\}$

اکنون کافی است نامعادلهٔ $|x|>x$ و $|x|-x\neq 0$ را حل کنیم. این نامعادله‌ها به ازای $x\geq 0$ برقرار نیست و به ازای $x<0$ برقرار است.

$$\begin{cases} x<0 \longrightarrow |x|>x \\ x\geq 0 \longrightarrow |x|=x \end{cases}$$

پس: $D_f=\{x\in\mathbb{R} : x<0\}=(-\infty,0)$

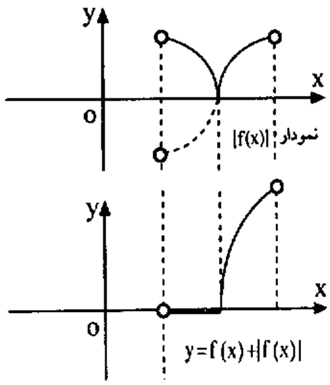
۲. چون $-x^2+2x=-(x^2-2x)$، با انتخاب $y=-x^2+2x$ داریم $|y|=-y$؛ بنابراین باید $y\leq 0$، یعنی نامعادلهٔ $-x^2+2x\leq 0$ را حل می‌کنیم.

$x(-x+2)\leq 0 \longrightarrow x=0$ یا $x=2$

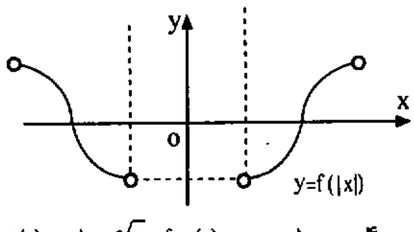
x		۰		۲	
$-x+2$	+		+	۰	−
x	−	۰	+		+
$-x^2+2x$	− جواب	۰	+	۰	− جواب

پس جواب به صورت $(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$ است.

۳. **الف** ـ نمودار $|f(x)|$ را رسم و با نمودار $f(x)$ در راستای محور yها جمع می‌کنیم.



ب ـ برای رسم نمودار $f(|x|)$ نمودار $f(x)$ نسبت به محور yها تقارن پیدا می‌کند.



۴. $g(x)=1-\sqrt{x}\ ,\ fog(x)=x-1$

با فرض $1-\sqrt{x}=t$ داریم:

$f(1-\sqrt{x})=x-1$

$\sqrt{x}=1-t \longrightarrow x=(1-t)^2$

پس: $f(t)=(1-t)^2-1=\cancel{1}+t^2-2t-\cancel{1}$

$f(t)=t^2-2t$ یا $\boxed{f(x)=x^2-2x}$

۵. ابتدا عبارت $\sin x+\sqrt{3}\cos x$ را ساده و به ضرب تبدیل می‌کنیم:

$$\sin x+\sqrt{3}\cos x=\sin x+\tan\frac{\pi}{3}\cos x$$

$$=\sin x+\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\cdot\cos x$$

$$=\frac{\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{\sin(x+\frac{\pi}{3})}{\frac{1}{2}}=2\sin(x+\frac{\pi}{3})$$

از طرفی: $-1\leq\sin(x+\frac{\pi}{3})\leq 1$

پس: $-2\leq 2\sin(x+\frac{\pi}{3})\leq 2$

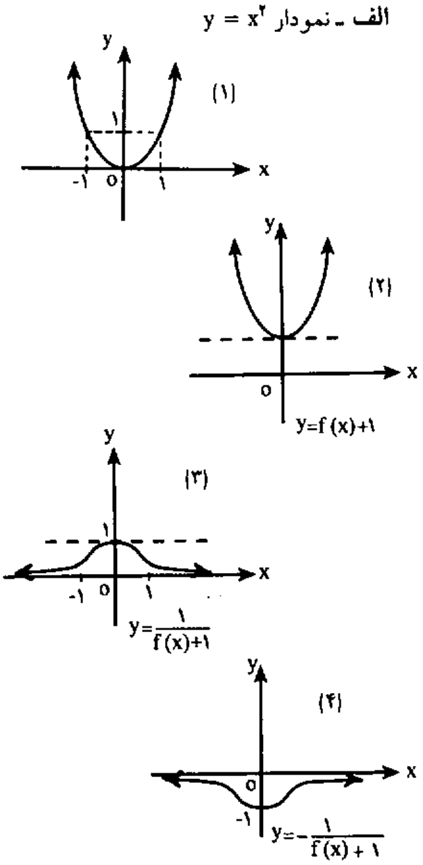
یا $-2\leq y\leq 2$

بنابراین مقدار ماکزیمم y، ۲ و مقدار مینیمم y، ۲- است.

نکته. اگر $y=a\sin x+b\cos x$ آن‌گاه $\sqrt{a^2+b^2}$ مقدار ماکزیمم و $-\sqrt{a^2+b^2}$ مقدار مینیمم y است.

۶. مراحل رسم، به ترتیب به صورت زیر است:

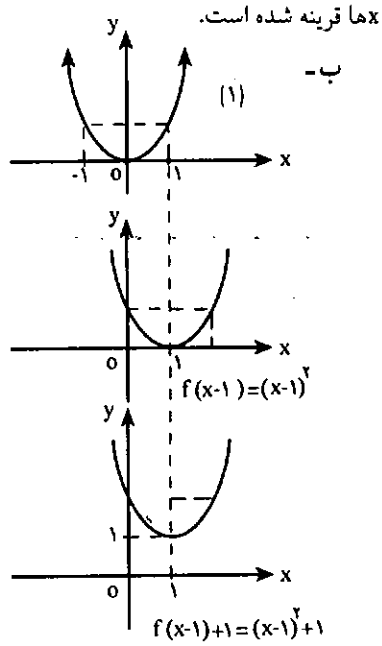
الف ـ نمودار $y=x^2$



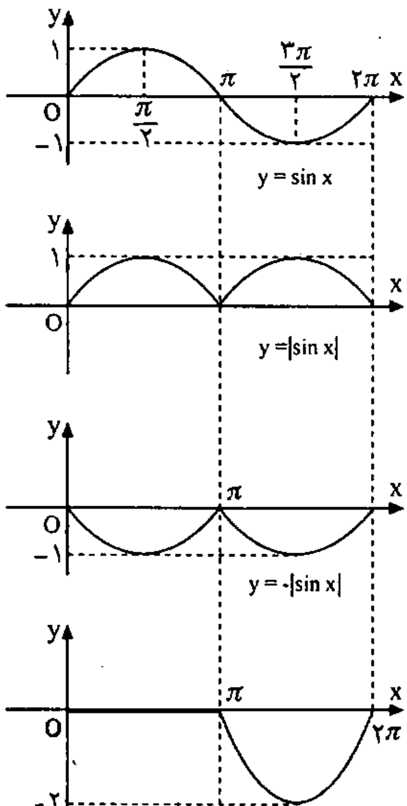
توضیح این که برای رسم نمودار $f(x)=x^2+1$ نمودار x^2 یک واحد به سمت بالای محور yها انتقال یافته است. برای رسم نمودار $\frac{1}{f(x)+1}$،

نمودار $\frac{1}{y}$ که $y = x^2 + 1$ رسم شده است، یعنی yها معکوس شده‌اند، و برای رسم نمودار $-\frac{1}{f(x)+1}$، نمودار $y = \frac{1}{f(x)+1}$ نسبت به محور xها قرینه شده است.

ب-



۷. $f(x) = \sin x - |\sin x|$



۸. چند جمله‌ای درجه ۳ را به صورت f(x) در نظر می‌گیریم. چون بر $(x+1)^2$ بخش‌پذیر است، پس:

$$f(x) = (x+1)^2(cx+d) =$$

$$cx^3 + (2c+d)x^2 + (c+2d)x + d \quad (1)$$

از طرفی:

$$f(x) = (x^2 - x)(mx+n) + 7x + 1$$

$$= mx^3 + (n-m)x^2 + (7-n)x + 1 \quad (2)$$

از مقایسهٔ (۱) و (۲) داریم:

$$m = c,\ d = 1$$

پس:

$$\begin{matrix} 2c + d = n - m \\ c + 2d = 7 - n \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2m + 1 = n - m \\ m + 2 = 7 - n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3m - n = -1 \\ m + n = 5 \end{cases} \longrightarrow 4m = 4 \text{ و } \boxed{m = 1} \text{ و } \boxed{m = 4}$$

پس:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

۹. $\left|f(x) - (-2)\right| = \left|\frac{x^2-1}{x+1} - (-2)\right|$

$$= \left|\frac{x^2-1}{x+1} + 2\right| = \left|\frac{x^2 - 1 + 2x + 2}{x+1}\right|$$

$$= \left|\frac{(x+1)^2}{x+1}\right| = |x+1| < \frac{1}{100}$$

$$-\frac{1}{100} < x + 1 < \frac{1}{100} \longrightarrow$$

$$-\frac{1}{100} - 1 < x < \frac{1}{100} - 1$$

پس:

$$\frac{-101}{100} < x < \frac{-99}{100}$$

۱۰. الف- $\lim_{x\to1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$

از روش گویا کردن حل می‌کنیم تا عامل ابهام از بین برود.

$$\lim_{x\to1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} =$$

$$\lim_{x\to1} \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt[3]{x^2} + 1 + \sqrt[3]{x})(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)(\sqrt[3]{x^2} + 1 + \sqrt[3]{x})} =$$

$$\lim_{x\to1} \frac{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x} + 1)}{\cancel{(x-1)}(\sqrt[3]{x^2} + 1 + \sqrt[3]{x})} =$$

$$\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2} + 1 + \sqrt[3]{x}} = \frac{2}{3}$$

ب- $\lim_{x\to2} \frac{x^5 - 32}{x^2 - 4} =$

$$\lim_{x\to2} \frac{\cancel{(x-2)}(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)}{\cancel{(x-2)}(x+2)} =$$

$$\frac{5 \times 16}{4} = 20$$

ج- $\lim_{x\to2^-} \frac{[x + [x + [x]]]}{[-x] - 4} =$

$$\lim_{x\to2^-} \frac{3[x]}{[-x] - 4} = \lim_{x\to2^-} \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2}$$

توجه: $x\to2^- \equiv x < 2 \equiv -x > -2 \to \begin{matrix} [x] = 1 \\ [-x] = -2 \end{matrix}$

ریاضی سال سوم تجربی

۱. الف- $A =]-\infty, 1] \cup]2, +\infty[$

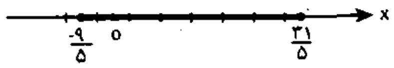
ب- I) $B = \{x \mid x \in R,\ -3 < x \le 2\}$

II) $C = \{x \mid x \in R,\ x \ge -2\}$

۲. داریم:

$$-1 < \frac{15x + 5 - 6}{10} \le 3 \Rightarrow -10 < 15x - 1 \le 30$$

$$\Rightarrow -9 < 15x \le 31 \Rightarrow \frac{-9}{5} < x < \frac{31}{5}$$



۳. داریم:

$$0 < 1 \Rightarrow f(0) = -(0) + 4 = 4$$

$$\sqrt{2} - 1 < 1 \Rightarrow f(\sqrt{2} - 1) =$$

$$-(\sqrt{2} - 1) + 4 = -\sqrt{2} + 5$$

$$\sqrt{2} + 1 > 1 \Rightarrow f(\sqrt{2} + 1) =$$

$$(\sqrt{2} + 1)^2 + 1 = 4 + 2\sqrt{2}$$

$$-1 < 1 \Rightarrow f(-1) = -(-1) + 4 = 5$$

$$f(1) = 6 \Rightarrow f(1)f(-1) = 5 \times 6 = 30$$

۴. داریم:

$$f(\frac{\pi}{6}) = \sin(2 \times \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}) = \sin 0 = 0$$

$$f(\frac{\pi}{3}) = \sin(2 \times \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f(0) = \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1$$

۵. عددهای ۱-، ۰ و ۱ ریشه‌های معادلهٔ برخورد دو تابع داده شده‌اند. پس باید در آن معادله صدق کنند. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} y = x^3 - 3x + c \\ y = ax + b \end{cases} \Rightarrow x^3 - 3x + c = ax + b \Rightarrow$$

$$x^3 - (3 + a)x + c - b = 0$$

معادله طولهای نقطه‌های برخورد

$$x = 1 \xrightarrow{\text{در معادله}} 1 - 3 - a + c - b = 0$$

$$\Rightarrow a + b - c = -2 \quad (1)$$

$$x = 0 \xrightarrow{\text{در معادله}} c - b = 0 \Rightarrow c = b \quad (2)$$

$$x = -1 \xrightarrow{\text{در معادله}} -1 + 3 + a + c - b = 0$$

$$\Rightarrow a + c - b = -2 \quad (3)$$

از رابطه‌های (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌شود:

$a=-2$ و $b=c$

به طوری که دیده می‌شود شرط جواب مسأله آن است که $a=-2$ و $b=c$ باشد، بدیهی است که این بدین معناست که کافی است $b=c\in\mathbb{R}$ باشد.

۶. الف ـ دامنهٔ این تابع $f(x)=\frac{x^2+x+2}{\sqrt{1-|x|}}$ مقدارهایی از x است که زیر رادیکال مثبت باشد؛ یعنی داشته باشیم: $1-|x|>0$

$$\Rightarrow |x|<1 \Rightarrow -1<x<1$$

ب ـ دامنهٔ این تابع $g(x)=\log_{x-1}(9-x^2)$ جواب دستگاه زیر است:

$$\begin{cases}9-x^2>0\\ x-1>0\end{cases}$$

از آن جا داریم:

$$\begin{cases}9-x^2>0\\ x-1>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2<9\\ x>1\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}-3<x<3\\ x>1\end{cases} \Rightarrow 1<x<3$$

۷. با توجه به ضابطه‌های داده شده برای دو تابع f و g داریم:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=$$

$$\begin{cases}2x^2+x-x^2-x\ , & x>3\\ 3x+1-3x+4\ , & x\le 3\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)+g(x)=\begin{cases}x^2\ , & x>3\\ 5\ , & x\le 3\end{cases}$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=$$

$$\begin{cases}2x^2+x+x^2+x\ , & x>3\\ 3x+1+3x-4\ , & x\le 3\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)-g(x)=\begin{cases}3x^2+2x\ , & x>3\\ 6x-3\ , & x\le 3\end{cases}$$

۸. با استفاده از دو تابع f و g، تابع (gof) را محاسبه و با (gof) داده شده در مسأله، متحد قرار می‌دهیم:

$f(x)=x+1\ ,\ g(x)=ax^2+bx+c$ و

$$(gof)(x)=-2x^2-x \Rightarrow (gof)(x)=$$

$$g\big(f(x)\big)=a(x+1)^2+b(x+1)+c \Rightarrow$$

$$(gof)(x)=ax^2+(2a+b)x+a+b+c$$

$$\Rightarrow \begin{cases}a=-2\\ 2a+b=-1\\ a+b+c=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-2\\ b=3\\ c=-1\end{cases}$$

۹. الف ـ دامنهٔ این تابع $x\ge 2$ است. بنابراین وقتی $x\to 2^-$، این تابع حد چپ ندارد؛ امّا حد راست دارد و مقدار آن برابر صفر است؛ زیرا داریم:

$$\lim_{x\to 2^+}\sqrt{x-2}=0$$

بنابراین تابع $f(x)=\sqrt{x-2}$ وقتی $x\to 2$، دارای حد نیست.

ب ـ چون $\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{3}$ است، با توجه به ضابطهٔ داده شده برای تابع f داریم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} f(x)=f(\frac{\pi}{3})=\sin 2(\frac{\pi}{3})=\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۱۰. با توجه به قانون داده شده برای تابع f داریم:

$$\lim_{x\to -2^+} f(x)=a(-2)^2+b(-2)-1=5$$

$$\Rightarrow 4a-2b=6 \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to -2^-} f(x)=-2(-2)^2+a=-6$$

$$\Rightarrow -8+a=-6 \Rightarrow a=2 \qquad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow 8-2b=6 \Rightarrow$$

$$2b=2 \Rightarrow b=1$$

پاسخ تشریحی پرسش‌های چهارگزینه‌ای

ریاضی عمومی ۱

۱. پاسخ صحیح گزینهٔ (۲) است. اگر A پیشامد آن باشد که خانواده دارای ۳ فرزند دختر باشد و B پیشامد همجنس بودن فرزندان اول و آخر باشد، هدف مسأله تعیین $p(A|B)$ می‌باشد و برای تعیین $p(A|B)$ باید $p(A\cap B)$ و $p(B)$ را به دست آورد. $p(B)$ احتمال همجنس بودن فرزندان اول و آخر (هر دو پسر و یا هر دو دختر) است که به کمک قضیهٔ احتمال کل به دست می‌آید:

$$p(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

و $p(A\cap B)$، احتمال آن است که فرزندان اول و آخر همجنس و سه فرزند دختر باشند که این تنها به دو صورت ممکن است. فرزندان اول و دوم و چهارم دختر باشند و یا فرزندان اول و سوم و چهارم دختر باشند و به این ترتیب داریم:

$$p(A\cap B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+$$

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow p(A|B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$$

۲. پاسخ صحیح گزینهٔ (۱) است.

$$\text{طول دسته}=\frac{\text{نشان دسته اول – نشان دسته دوم}}{2}=$$

$$\frac{16-8}{2}=4$$

$$\text{فاصله دسته دهم از دسته اول}=(10-1)\times 4=36$$

$$\Rightarrow \text{نشان دسته دهم}=8+36=44$$

۳. پاسخ صحیح گزینهٔ (۴) است. برای تعیین احتمال آن که کمتر از دو نفر دچار عوارض جانبی شوند، یعنی ۰ یا ۱ نفر دچار عارضه شوند از دستور توزیع احتمال دوجمله‌ای استفاده می‌کنیم:

$$p(A)=\binom{6}{1}(0.1)^1(0.9)^5+\binom{6}{0}(0.1)^0(0.9)^6$$

$$=0.6\times 0.9^5+0.9^6=0.9^5\,(0.6+0.9)$$

$$=1.5\times 0.9^5$$

۴. پاسخ صحیح گزینهٔ (۲) است. اگر A پیشامد آن باشد که اتومبیل تصادف کند و B پیشامد ناهموار بودن جاده باشد، می‌توان نوشت:

$$p(A)=0.05\ ,\ p(A|B)=0.15\ ,$$

$$p(B)=0.20$$

$$p(A)\times p(B|A)=p(B)\times p(A|B) \Rightarrow$$

$$p(B|A)=\frac{0.20\times 0.15}{0.05}=0.60$$

۵. گزینهٔ (۴) درست است. با فرض $S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ و $P=\alpha\beta=\frac{c}{a}$ در معادلهٔ فوق داریم:

$$\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha^2-\beta^2}=\frac{(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}=$$

$$\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{\alpha+\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta}{\alpha+\beta}=$$

$$\alpha+\beta-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}=S-\frac{P}{S}=-4-\frac{-1}{-4}=$$

$$-4-\frac{1}{4}=-\frac{17}{4}$$

۶. گزینهٔ (۳) درست است.

$$\begin{cases}-x_1 + x_2 + x_3 = -1\\ x_1 - x_2 + x_3 = 5\\ x_1 + x_2 - x_3 = 9\end{cases}$$

سه رابطه را با هم جمع می‌کنیم $x_1 + x_2 + x_3 = 13$

۷. گزینهٔ (۲) درست است. مختصات محل تلاقی $y = x$ (نیمساز ناحیه اول و سوم) و خط $y = 2x + m$ را پیدا می‌کنیم و جواب‌ها را در معادله خط $y = mx + 2$ قرار می‌دهیم، جواب‌های حاصل ۱- و ۲ است. بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

$$\begin{cases}y = 2x + m\\ y = x\end{cases} \Rightarrow A\left|\begin{matrix}-m\\-m\end{matrix}\right. \Rightarrow$$

$$-m = -m^2 + 2 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}m=-1\\ m=2\end{cases}$$

۸. گزینهٔ (۳) درست است، جملهٔ $k+1$ ام از بسط $(a+b)^n$ از دستور $T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ به دست می‌آید. بنابراین جملهٔ یازدهم بسط $\left(3x^2 - \frac{4}{x^3}\right)^n$ برابر است با:

$$T_{11} = \binom{n}{10}(3x^2)^{n-10}\left(-\frac{4}{x^3}\right)^{10}$$

و لذا نمای x در این عبارت برابر است با: $2(n-10) - 30$ و در جمله فاقد x نمای x مساوی صفر است، بنابراین داریم:

$$2n - 20 - 30 = 0 \Rightarrow n = 25$$

۹. گزینهٔ (۲) درست است.

$$\log_x^{(2x+1)} - \log_x^{(x-2)} = \log_x^{\frac{2x+1}{x-2}} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{2x+1}{x-2} = x$$

$$x^2 - 2x = 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 4x - 1 = 0$$

$$\Delta = 16 + 4 = 20 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{20}}{2}$$

از این دو جواب، پاسخ $x = \frac{4 - \sqrt{20}}{2}$ غیرقابل قبول است، زیرا در دامنهٔ عبارت‌های لگاریتمی صدق نمی‌کند ($x > 0$ و $x-2 > 0$ و $2x+1 > 0$) پس معادله تنها یک ریشهٔ حقیقی دارد.

۱۰. گزینهٔ (۱) درست است.

$$a_n = \frac{n-1}{n+1} = \frac{n+1-2}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1}$$

اکنون با زیاد شدن n، $\frac{2}{n+1}$ مرتباً کوچک می‌شود و لذا $1 - \frac{2}{n+1}$ زیاد می‌شود، پس a_n صعودی است. حال چون دنباله صعودی است، پس جمله اول آن کوچک‌ترین جمله است و چون دنباله a_n به عدد ۱ همگراست ($\lim_{n\to\infty} a_n = 1$) لذا کران بالای آن نیز مساوی ۱ است:

$$a_1 = 0 \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 1 \Rightarrow 0 \le a_n < 1$$

لازم به ذکر است که پاسخ گزینهٔ (۲) یک دنبالهٔ نزولی است، گزینهٔ (۳) نیز همچنین و گزینهٔ (۴) صعودی است، ولی کراندار از بالا نیست.

$$(\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty)$$

دیفرانسیل و انتگرال ۱

۱. گزینهٔ (۳)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n (2n+5)}{4n^{n+1}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^n}{n^n} \times \frac{2n+5}{4n}\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \times \frac{2n+5}{4n} = e\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e}{2}$$

۲. گزینهٔ (۴)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

چون سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ سری نیمساز است، پس واگراست، در نتیجه مجموع دو سری واگراست

(سری ۱ = $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$)

۳. گزینهٔ (۴)

$$\forall N > 0\ \exists M > 0 \ni x < -M \Rightarrow$$

$$x^2 + 2x > N$$

$$(x+1)^2 > N + 1 \Rightarrow \underset{x\to-\infty}{|x+1|} > \sqrt{N+1} \Rightarrow$$

$$-x - 1 > \sqrt{N+1} \Rightarrow -x > \sqrt{N+1} + 1$$

$$\Rightarrow x < -(\sqrt{N+1} + 1)$$

۴. گزینهٔ (۲)

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}} \frac{x^2+1}{9x^2 + ax + b} = +\infty$$

$$\Rightarrow 9x^2 + ax + b \equiv (3x-1)^2$$

$$\Rightarrow 9x^2 + ax + b \equiv 9x^2 - 6x + 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases}a = -6\\ b = 1\end{cases} \Rightarrow a + b = -5$$

۵. گزینهٔ (۱)

$$f(x) = \begin{cases}x - 2 & ,x > 0\\ x + 5 & ,x \le 0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to3}\left(f(f(f(f(x))))\right) = \lim_{x\to3} f(f(f(1))) =$$

$$\lim_{x\to3} f(f(-1)) = \lim_{x\to3} f(4) = 2$$

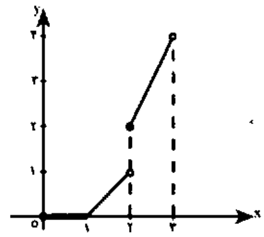
۶. گزینهٔ (۱)

$$f(x) = (x-1)\lfloor x \rfloor$$

$$0 \le x < 1 \Rightarrow f(x) = 0$$

$$1 \le x < 2 \Rightarrow f(x) = x - 1$$

$$2 \le x < 3 \Rightarrow f(x) = 2x - 2$$

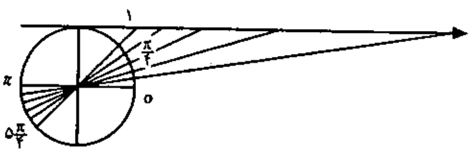


به طوری که نمودار نشان می‌دهد، تابع در $x=2$ ناپیوسته است.

۷. گزینهٔ (۳)

$$f(\cot x) = \sqrt{\cot x - 1} \quad و \quad \cot x \ge 1$$

با توجه به شکل و شرط مسأله $\pi < x \le 5\frac{\pi}{4}$



۸. گزینهٔ (۳)

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3 - 20}{x - 2}} \quad x \to 2^- \Rightarrow f(x) \to +\infty$$

پس مجانب قائم $x = 2$ است.

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 20 & x - 2 \\ \hline -12 & x^2 + 2x + 4 \end{array}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4 + \frac{-12}{x-2}}$$

$$x \to \pm\infty \Rightarrow y = \pm(x+1)$$ مایل

۹. گزینهٔ (۳)

$$\lim_{h\to0} \frac{2f(x-3h) - 2f(x+2h)}{-2h} = \frac{0}{0}$$

$$H: \lim_{h\to0} \frac{-6f'(x-3h) - 4f'(x+2h)}{-2} =$$

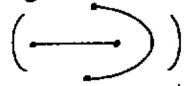
$$\frac{-6f'(x) - 4f'(x)}{-2} = 5f'(x)$$

۱۰. گزینهٔ (۱)

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{۱}{۴} \\ x'_t = ۲ \\ y'_t = ? \end{cases} \qquad \begin{matrix} y = f(x) \\ y'_t = f'(x) \,.\, x'_t \end{matrix}$$

$y'_t = \frac{۱}{۴}(۲) = \frac{۱}{۲}$ متر در ثانیه

ریاضیات گسسته

۱. گزینهٔ (۳). زیرا طبق قضیه اگر G یک درخت باشد از مرتبهٔ $P \geq ۲$ لااقل دو رأس از درجهٔ ۱ دارد و در این گزینه چون یک رأس درجهٔ ۱ دارد پس مرتبهٔ آن، یعنی $P \geq ۲$ است. در مورد گزینهٔ (۴) درخت $T_۱$ رأسی از درجهٔ ۱ ندارد و در مورد گزینه (۲) ممکن است گرافی درخت نباشد، ولی دور نداشته باشد مانند  یعنی ممکن است گرافی ناهمبند باشد.

۲. گزینهٔ (۲). زیرا تنها گراف کامل که در آن مرتبه و اندازه برابر هستند $K_۳$ می‌باشد  که در این حالت $p + q = ۳ + ۳ = ۶$

۳. گزینهٔ (۴). زیرا با توجه به فرض $p \nmid a$ پس $(p,a) = ۱$ و چون $p \mid (۲۳)^{۱۷} \times a$ پس باید $p \mid ۲۳^{۱۷}$ بنابراین نتیجه می‌شود که $p \mid ۲۳$ و چون ۲۳ اول است، پس $p = ۱$ یا $p = ۲۳$ که با توجه به اول بودن p باید $p = ۲۳$.

۴. گزینهٔ (۳). زیرا با توجه به این که $(a,b) = d$ پس داریم:

$$\begin{cases} d \mid a \\ d \mid b \end{cases} \Rightarrow d \mid a + b \Rightarrow d \mid s \Rightarrow [d,s] = s$$

۵. گزینهٔ (۳). زیرا اگر فرض کنیم $(a,b) = d$ در این صورت خواهیم داشت:

$$(a,b) = d \quad \left.\begin{matrix} d \mid a \\ d \mid b \end{matrix}\right\} \Rightarrow d \mid ra + sb = ۱۳ \Rightarrow$$

$d \mid ۱۳ \Rightarrow d = ۱$ یا $d = ۱۳$

از طرفی چون a و b دارای یک شمارندهٔ مشترک اول هستند، پس $d \neq ۱$ لذا باید $d = ۱۳$.

نکته. در حالت کلی، هرگاه a و b دو عدد صحیح و داشته باشیم $ra + sb = P$ و P عددی اول باشد در این صورت $(a,b) = ۱$ یا $(a,b) = P$.

۶. گزینهٔ (۱). زیرا می‌دانیم هر یک از اعداد !۱ و !۲ و !۳ و... و !۲۲ فاقد عامل ۲۳بوده و نسبت به ۲۳ اول می‌باشند، پس طبق قضیهٔ فرما داریم:

$$(۱!)^{۲۲} \overset{۲۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow (۱!)^{۲۲۰} \overset{۲۳}{\equiv} ۱$$

$$(۲!)^{۲۲} \overset{۲۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow (۲!)^{۲۲۰} \overset{۲۳}{\equiv} ۱$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$(۲۲!)^{۲۲} \overset{۲۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow (۲۲!)^{۲۲۰} \overset{۲۳}{\equiv} ۱$$

از طرفی هر یک از اعداد !۲۳ و !۲۴ و... و !۴۶ دارای عامل ۲۳ بوده و بر ۲۳ بخش‌پذیرند، پس از هر توانی بر ۲۳ بخش‌پذیرند بنابراین داریم:

$$A = (۱!)^{۲۲۰} + (۲!)^{۲۲۰} + ... + (۲۲!)^{۲۲۰} + (۲۳!)^{۲۲۰} + ... + (۴۶!)^{۲۲۰} \overset{۲۳}{\equiv} \underbrace{۱ + ۱ + ... + ۱}_{۲۲} + ۰ + ... + ۰ \Rightarrow A \overset{۲۳}{\equiv} ۲۲$$

۷. گزینهٔ (۱). زیرا با توجه به رابطهٔ $M_۲ \ll M_۱$ واضح است که درآیه‌های متناظر با هر درآیهٔ صفر در ماتریس $M_۱$ می‌بایست در ماتریس $M_۲$ نیز صفر باشند، ولی به ازای درآیه‌های ۱ در ماتریس $M_۱$ می‌توان در ماتریس $M_۲$ صفر یا یک قرار داد که چون حداکثر تعداد اعضای $R_۲$ مورد نظر است ۱ قرار می‌دهیم که در این صورت حداکثر ۴ عضو می‌توان برای $R_۲$ در نظر گرفت.

۸. گزینهٔ (۲). زیرا تعداد حالتهایی که ۵ شیء یکسان را می‌توانیم بین ۳ نفر تقسیم کنیم برابر است با تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۵$ و تعداد حالتهایی که می‌توان ۴ شیء متمایز را بین سه نفر تقسیم کرد برابر است با $۳^۴$ پس:

$$۳^۴ - \binom{۷}{۲} = ۸۱ - ۲۱ = ۶۰$$

۹. گزینهٔ (۴). زیرا اگر فرض کنیم $A = \{۱ \leq n \leq ۱۳۸۰ \mid ۳ \mid n\}$ و $B = \{۱ \leq n \leq ۱۳۸۰ \mid ۷ \mid n\}$ در این صورت $|A \cup B|$ مورد نظر است:

$|A| = \frac{۱۳۸۰}{۳} = ۴۶۰$ و $|B| = [\frac{۱۳۸۰}{۷}] = ۱۹۷$

$$|A \cap B| = [\frac{۱۳۸۰}{[۳,۷]}] = [\frac{۱۳۸۰}{۲۱}] = ۶۵$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| =$$

$$۴۶۰ + ۱۹۷ - ۶۵ = ۵۹۲$$

۱۰. گزینهٔ (۱). زیرا:

$P(A) = \frac{۱}{۶}$ و $P(B) = \frac{۱}{۶}$ و $P(A \cap B) = \frac{۱}{۳۶}$

$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$\Rightarrow$ A و B مستقل هستند

۱۱. گزینهٔ (۱). چون تعداد مهره‌های دو جعبه در کلّ با هم برابر است، پس کافی است تعداد مهره‌های سفید جعبهٔ $A_۱$ را بر تعداد کلّ مهره‌های سفید در دو جعبه تقسیم کنیم که عدد$\frac{۶}{۱۰}$ به دست می‌آید. (توجه دارید که اگر تعداد مهره‌ها در دو جعبه برابر با هم نبود می‌بایست از قاعدهٔ بیز استفاده شود و روش ذکر شده، جواب صحیح را حاصل نمی‌کرد.)

روش دوم: (استفاده از قاعدهٔ بیز)

$A =$ مهره از جعبهٔ $A_۱$ باشد

$B =$ مهره سفید باشد

$$P(A \mid B) = \frac{P(A) \times P(B \mid A)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow P(A \mid B) = \frac{\frac{۱}{۲} \times \frac{۶}{۱۱}}{\frac{۱}{۲} \times \frac{۶}{۱۱} + \frac{۱}{۲} \times \frac{۴}{۱۱}}$$

$$\Rightarrow P(A \mid B) = \frac{\frac{۶}{۱۱}}{\frac{۱۰}{۱۱}} = \frac{۶}{۱۰}$$

۱۲. گزینهٔ (۴). با توجه به جدول توزیع احتمال و این که می‌بایست $P(x = ۱) + P(x = ۲) + P(x = ۳)$ را به دست آوریم، داریم:

x_i	۱	۲	۳
P_i	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۳۵}{۳۶} \times \frac{۱}{۳۶}$	$(\frac{۳۵}{۳۶})^۲ \times \frac{۱}{۳۶}$

x_i	۴	۵	...
P_i	$(\frac{۳۵}{۳۶})^۳ \times \frac{۱}{۳۶}$	$(\frac{۳۵}{۳۶})^۴ \times \frac{۱}{۳۶}$	...

$$P(A) = \frac{۱}{۳۶} + \frac{۳۵}{(۳۶)^۲} + \frac{۳۵^۲}{(۳۶)^۳}$$

$$= \frac{(۳۶)^۲ + ۳۶ \times ۳۵ + (۳۵)^۲}{(۳۶)^۳}$$

511615
کد ۹۹۰/۱

ناشر برگزیده
سالهای ۷۵،۷۳
۷۹

انتشارات مدرسه منتشر کرده است
سری کتابهای «از مدرسه تا دانشگاه»

هدف از چاپ سری کتابهای «از مدرسه تا دانشگاه» پر کردن خلأ موجود بین کتابهای کمک درسی و کتابهای آمادگی برای کنکور است.

دانش‌آموزان با مطالعهٔ این سری کتابها، اطلاعات لازم، اعم از مفاهیم درسی، نکته های پنهان در لابه لای این مفاهیم و قضیه ها و مسائل مهم را کسب کرده و با پرسشهای چهارگزینه ای و حل تشریحی آنها و آزمونهای چهارگزینه ای آشنا می شوند، تا هم برای پاسخ گویی به پرسشهای تشریحی و هم برای شرکت در کنکورهای سراسری آمادگی پیدا کنند.

انتشارات مدرسه