سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

رشد برهان ۴۸

مجله ریاضی

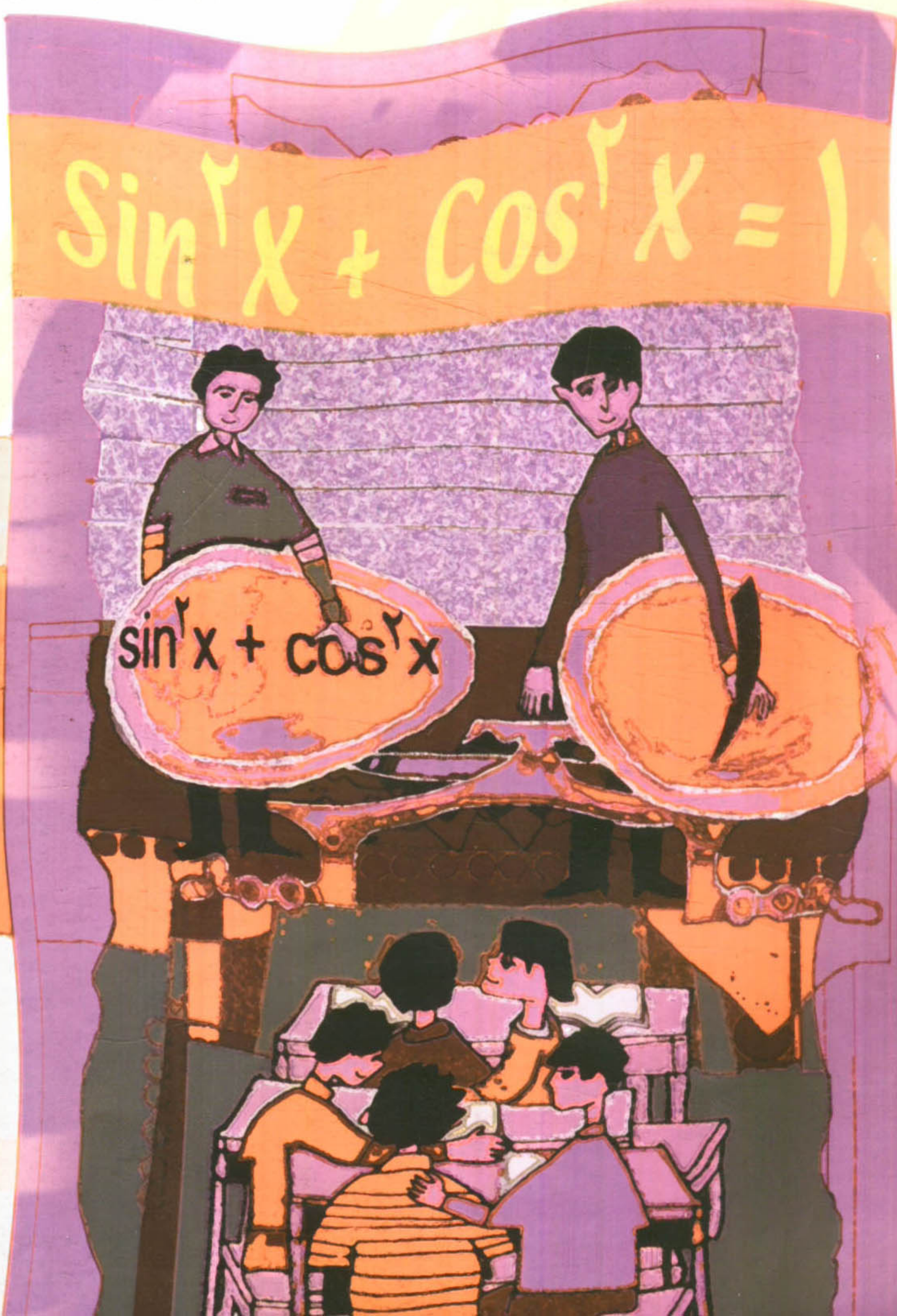
www.roshdmag.org

آموزشی، تحلیلی، اطلاع‌رسانی

برای دانش‌آموزان دوره‌ی متوسطه

❖ دوره‌ی پانزدهم، شماره‌ی ۲

❖ زمستان ۱۳۸۴ ـ بها: ۲۵۰۰ ریال



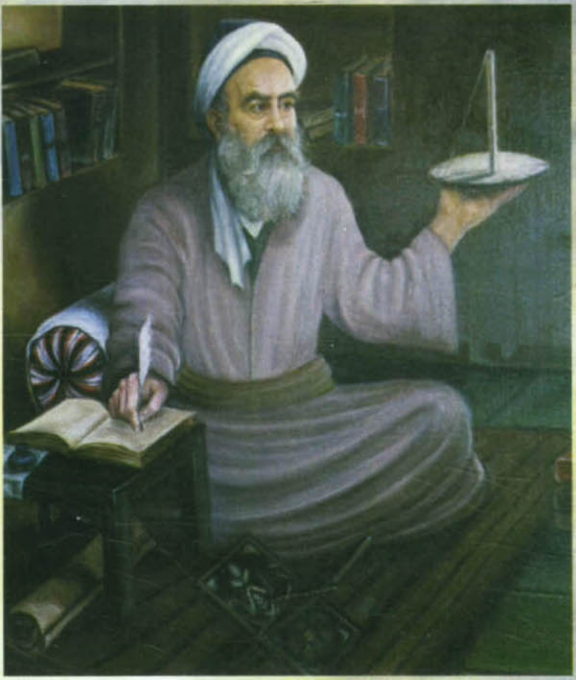
❖ نامعادله‌های گنگ
❖ معادله‌های درجه دوم

❖ یادهای آموزشی
❖ مسائل هندسه‌ی ابوالوفا بوزجانی
❖ مسائلی از احتمال در فضاهای پیوسته

ریاضیدان و منجم ایرانی

خوارزمی

ابوعبدالله محمدبن موسی خوارزمی



خوارزمی که دوران فعالیت علمی او را می توان در اواخر سده ی دوم و ثلث اول سده ی سوم هجری قمری دانست، ریاضیدان، منجم، مورخ، جغرافیدان و یکی از زبردست ترین دانشمندان مسلمان ایرانی و بزرگ ترین عالم عصر خود بود.

وی در ریاضیات و مخصوصاً نجوم ایران پیش از اسلام و تعالیم مکتب جندی شاپور، که در زمان وی هنوز از خاطرها محو نشده بود، دست داشت و آن ها را با ریاضیات هندی درآمیخت و نخستین کتاب های حساب و جبر و نجوم (زیج) را به زبان عربی نوشت و آثار او در بسط و پیشرفت ریاضیات، چه در کشورهای اسلامی و چه بعداً در کشورهای اروپایی، تأثیر فراوان داشت.

خوارزمی نخستین ریاضیدان دوره ی اسلامی است که آثارش به دست ما رسیده و کتاب **جبر و مقابله**ی او قدیمی ترین کتابی است که در این باره نوشته شده است. این کتاب قرن ها مرجع و مأخذ اروپاییان و تا سده ی شانزدهم میلادی مبنای مطالعات علمی آنان در این رشته بود.

کتاب حساب خوارزمی نخستین کتابی است که در دوره ی اسلامی راجع به فنّ حساب هندی تألیف گردیده است. مسلمانان فن حساب هندی را مستقیماً از روی این کتاب فرا گرفتند و اروپاییان به وسیله ی ترجمه هایی که از آن در سده ی دوازدهم میلادی به عمل آمد با حساب هندی آشنا شدند.

ابن ندیم در الفهرست نوشته است که خوارزمی پیوسته در خزانة الحکمه که مأمون تأسیس کرده بود کار می کرد و زیج های اول و دوم او که معروف به «سند هند» است مورد اعتماد و اتکای مردم بود.

محمدبن جریر طبری در کتاب تاریخ طبری در ضمن وقایع سال ۲۳۲ هجری نوشته است که محمدبن موسی الخوارزمی از منجمانی بود که خلیفه الواثق پیش از مرگ به بالین خود خواند تا وی را از عاقبت مرضش مطلع سازند.

خوارزمی در زمان خلافت مأمون یعنی در بین سال های ۱۹۸ تا ۲۱۸ هجری دانشمندی مورد توجه خلیفه ی وقت بود و تا سال ۲۳۲ (سال درگذشت الواثق) حیات داشت و می توان حدس زد که خوارزمی در حدود سال ۱۸۰ یا پیش از آن تاریخ در خوارزم متولد شده و در دهه ی آخر سده ی دوم هجری به حوزه ی علمی بغداد رفته و بعد از سال ۲۳۲ درگذشته است.

***

ادامه در صفحه ی ۳ جلد

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد برهان متوسطه ۴۸

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی
www.roshdmag.org
آموزشی، تحلیلی، اطلاع رسانی

● دوره‌ی پانزدهم ● شماره‌ی ۲ ● زمستان ۱۳۸۴ ● شمارگان: ۱۲۰۰۰ نسخه ● مجله ریاضی، برای دانش‌آموزان دوره‌ی متوسطه

❖ مدیر مسؤول: علیرضا حاجیان زاده ❖ سردبیر: حمیدرضا امیری ❖ مدیر داخلی: میرشهرام صدر ❖ طراح گرافیک: شاهرخ خره‌غانی

❖ ویراستار ادبی: کبری محمودی ❖ اعضای هیات تحریریه: حمیدرضا امیری، محمد هاشم رستمی، احمد قندهاری، میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی سید محمدرضا هاشمی موسوی، غلامرضا یاسی‌پور و با تشکر از همکاری ارزنده‌ی استاد پرویز شهریاری ◆ چاپ و صحافی: شرکت افست (سهامی عام)

رشد برهان متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

- نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمه‌ی مقاله‌های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه‌ی علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش کامپیوتر و ...)

این شماره: ▼

رشد برهان متوسطه هر سه ماه، یکبار منتشر می‌شود.

- مجلّه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافه مقاله‌ها آزاد است.
- مقاله‌های وارده، باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.
- مقاله‌های رسیده مسترد نمی‌شود.
- استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر با ذکر دقیق مأخذ بلامانع است.

نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله: ۹ـ ۸۸۸۳۱۱۶۰ داخلی ۳۷۰
تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ ـ ۷۷۳۳۵۱۱۰

یادداشت سردبیر

هر ساله چند صد هزار نفر دانش‌آموز از طریق شرکت در کنکور سراسری و کنکور دانشگاه آزاد اسلامی وارد دانشگاه‌ها و مؤسسات آموزش عالی شده و به تحصیل مشغول می‌شوند؛ مهندسان برق، مکانیک، عمران، صنایع،... پزشکان، دندان‌پزشکان،... حقوق‌دانان، جامعه‌شناسان، زیست‌شناسان، ریاضی‌دانان، فیزیکدانان... و دیگر نیروهای متخصص که همگی جزو آینده‌سازان این کشور خواهند بود.

این خیل عظیم نیروی انسانی، که همه از خلال همین گزینش، یعنی کنکور انتخاب می‌شوند، می‌بایست در آینده، سهم بزرگی در اداره‌ی کشور و سرنوشت میهن اسلامیمان داشته باشند. بدیهی به نظر می‌رسد که چنین امر مهمّی، یعنی گزینش دانشجو، که با سرنوشت کشور رابطه‌ی مستقیم دارد، می‌بایست خیلی با وسواس و دقّت و نیز در شرایطی کاملاً مناسب و عادلانه انجام پذیرد و حتی‌الامکان عجله‌ای در کار نباشد.

آیا واقعاً همه‌ی شرایط ذکر شده در انتخاب دانشجویان رعایت می‌شود؟ روشن است که پاسخ این سؤال مثبت نیست. آیا سازمان سنجش آموزش کشور نمی‌خواهد در این زمینه تغییر و تحولی ایجاد کند؟ آیا در کشوری که برای پاره‌ای از مسائل نه چندان با اهمیت، سالانه چندین همایش و سمینار و... برگزار می‌شود، جای یک همایش ملّی جهت بهبود وضعیت گزینش دانشجو خالی نیست؟ آیا همه‌ی راه‌ها بررسی شده و هیچ راهی جز وضع موجود، امکان‌پذیر نیست؟ آیا صحیح است که قسمت اعظمی از سرنوشت یک کشور در همان چند ساعت برگزاری جلسه آزمون سراسری رقم بخورد؟

دو سال پیش در منطقه‌ی ۱ آموزش و پرورش شهر تهران همایشی تحت عنوان «نقش کنکور در آموزش ریاضی» برگزار شد که از همه‌ی مسئولین ذیربط سازمان سنجش و نیز مسئولان وزارت علوم و وزارت آموزش و پرورش نیز دعوت شده بود. ولی متأسفانه حتی یک نفرشان هم شرکت نکردند (شاید مسئله برای آنها اهمیتی نداشت) و لذا در پایان، نتیجه‌ی همایش را به صورت یک نامه‌ی سرگشاده برای آن عزیزان ارسال کردند که در طی آن راهکارهای کوتاه‌مدت (مُسکّن) و درازمدت برای برطرف کردن معضل کنکور ارائه شده بود.

حال، از شما دانش‌آموز عزیز می‌پرسیم که: شما، در این زمینه، چه راه حل یا راه حل‌هایی به نظرتان می‌رسد؟ آنها را برای ما ارسال کنید تا ان شاءا... با استفاده از نظریات شما و کارشناسان دیگر بتوانیم همایشی ملّی برگزار کنیم و این کنکور را که به معضلی بزرگ بر سر راه ادامه تحصیل جوانان تبدیل شده است و موجب حرمان بسیاری از این قشر گردیده، به یک فرصت طلایی برای شناخت هرچه بهتر همه‌ی علاقه‌مندان به علم و تحصیل تبدیل کنیم. ان شاءالله

۱۷

○ پرویز شهریاری

یادهای آموزشی

ارنست رنان (۱۸۹۲ـ۱۸۲۳)، نویسنده و تاریخ‌نویس فرانسوی که در آغاز برای کشیش شدن درس می‌خواند، ولی سرانجام به یک انتقادکننده‌ی اجتماعی تبدیل شد و در ضمن هوادار دانش بود و کتاب «آینده‌ی دانش» او مشهور است؛ در جایی می‌نویسد: «انسان برای این زاده نشده است که کورکورانه عمل کند. او باید پیوسته با نادرستی‌ها بجنگد و در برابر آنچه ناصواب است، بایستد.»

آنچه در این جا می‌آید، یادواره‌هایی است که به صورتی پراکنده و جسته و گریخته در زندگی من وجود داشته و بیش‌تر جنبه‌ی آموزشی دارد. اگر برخی جاها تاریخ ندارد و یا تاریخ آن دقیق نیست، باید مرا ببخشید، چون به موقع آن‌ها را یادداشت نکرده‌ام و یا اگر یادداشتی داشته‌ام، مورد خشم روزگار قرار گرفته و از بین رفته است. امیدوارم به گونه‌ای باشد که موجب ملال خوانندگان نشود. به ویژه دانش‌آموزان و آموزگاران و دبیران می‌توانند بیش‌تر و بهتر از این مطالب استفاده کنند؛ شاید راهنمایی برای آن‌ها باشد.

دوشنبه یازدهم آذرماه ۱۳۷۰، بعد از خبرهای ساعت ۲۱، دو بخش از دو «سریال» از سیما پخش شد: «گل پامچال» و «نجوم قبل از تکنولوژی».

سیزده بخش «گل پامچال» روی هم جالب بود و یادآور رنج‌ها، آوارگی‌ها و ویرانگری‌های جنگ، پیش از بازپس‌گیری خرمشهر؛ به ویژه برای تهرانی‌ها که جنگ را با مقیاس چند بمب و چند موشک تجربه کرده بودند، صحنه‌هایی از جنگ واقعی شهرها و وحشی‌گری و بی‌رحمی دشمن و نابودی شهرها و روستاها، بسیار دیدنی بود. پخش زیبا و پیاپی گل پامچال که معرف قدرت هنری تهیه‌کنندگان آن بود و در ضمن، مقاومت، سختکوشی و عاطفه‌ی انسانی مردم را در سراسر سرزمین ایران نشان می‌داد و بی‌آن که به شعار رو آورد، ایرانی را همان‌گونه که هست،

معرفی می‌کرد. «گل پامچال» از نمونه فیلم‌های خوبی بود که در آن کسی فریاد نمی‌زد، تظاهر نمی‌کرد، ایرانی بودن خود را در «کاسه‌ی آب گوشت» و «غذا خوردن با دست» نمی‌دید، بلکه زندگی می‌کرد. البته زندگی سخت و طاقت‌فرسا بود، ولی هرگز انسانی بودن خود را از دست نمی‌داد... و کاش گردانندگان شبکه‌ی اول سیما، بعد از پایان فیلم از آن همه شعارهای طولانی صرف‌نظر کرده بودند، چرا که چیزی به فیلم نیفزود. هنر، اگر به واقع هنر باشد، خود همه‌چیز را می‌گوید. هنر با شعار سازگار نیست، حتی اگر شعار، خود حقیقت باشد، هر چیزی جایی دارد... این فیلم زلال و انسانی نیازی به شعار نداشت.

اما، درباره‌ی رشته گفتارهای «نجوم قبل از تکنولوژی». درباره‌ی بخش‌های پیشین آن چیزی نمی‌گویم، چرا که درباره‌ی دانش اخترشناسی قوم‌های آمریکایی «اینکا»، «آزتاک» و «مایا»، نمی‌دانم این گفتارها تا چه اندازه با واقعیت تطبیق می‌کنند. ولی آنچه در برنامه‌ی یازدهم آذرماه شبکه‌ی اول سیما نشان داده شد، سرشار از عقده‌های حقارت غربی‌ها نسبت به شرق و به ویژه ایران و وارونه‌کردن تاریخ فرهنگ و دانش بود. و این همان چیزی است که باید نام «فرهنگ معترض و ویرانگر غرب» را بر آن نهاد.

این گفتار در واقع، به دوران اخترشناسی شرق در دوران شکوفایی آن تعلق داشت؛ همان دورانی که میراث‌خواران اروپای غربی با استفاده از ارثیه‌ی گرانبهای آن توانستند، پایه‌های اخترشناسی نوین را بگذارند. واقع این است که این دوران، دوران شکوفایی فرهنگ و دانش‌ها (و از جمله اخترشناسی و ریاضیات) قوم‌های ایرانی بود. همه می‌دانند که زبان رسمی آن روزگار زبان عربی بود و بیش‌تر نوشته‌های ایرانیان (و نه همه‌ی آن‌ها) به این زبان بود، شاید اگر کسی دانشمندان آن زمان ایرانی را به نام «کسانی که به زبان عربی می‌نوشتند» یاد کند، چندان دل‌آزار نباشد، ولی در این گفتار تلویزیونی...

در آغاز نوید داد که می‌خواهیم از «نجوم عرب‌ها» صحبت کنیم و بعد از مقدمه‌ای کوتاه و نارسا گفت که «عرب‌ها از وسایلی استفاده می‌کردند که...» و در فاصله‌ای کوتاه از رصدخانه‌ای یاد کرد که آثار ناچیزی از آن در کردستان باقی مانده و متأسف بود که درگیری بین کردها و عرب‌ها، موجب ویرانی آن شده است. شگفتا! آیا کردها، عرب بوده‌اند؟! یا کردها موجب ویرانی رصدخانه‌ای شده‌اند که عرب‌ها ساخته بودند؟

گوینده «از عصر طلایی علم نجوم و نقشی که فرهنگ عرب به عهده داشت»، «از سهم عرب‌ها در علم نجوم قبل از تکنولوژی» از این که «عرب‌ها به مثلثات و به خصوص مثلثات کروی دست یافته» و «از سهم بزرگ عرب‌ها در علم جبر» صحبت کرد و بعد از نیمه ستایشی از **چنگیزخان** که گویا به کمک ستاره‌شناسی توانست از بیابان‌ها و کوهستان‌ها بگذرد و کشورها را در نوردد، به سمرقند پرداخت و **الغ‌بیگ** نوه‌ی **تیمور** را، به عنوان دانشمندی بزرگ که از زمان خود جلوتر بود، نام برد که رصدخانه‌ی سمرقند را ساخت و زیج‌های لازم را تنظیم کرد و گویا چون از زمان خود جلوتر بود، در برگشت از سفر حج مورد هجوم قرار گرفت و کشته شد. او انگار به خاطر جهل مردم که دانش او را نمی‌فهمیدند، و نه به خاطر قدرت‌طلبی‌های درون دربار، کشته شد.

از این جا دیگر گوینده وارد هند شد و تنها از یک نفر نام برد: **مهاراجه جی‌پور**؛ شاهزاده‌ی اخترشناسی که رصدخانه‌ای بزرگ ساخت و...

در تمامی این گفتار، تنها از این افراد، به عنوان اخترشناس نام برده شد؛ البته به جز دانشمندان یونانی که مورخ غربی هرگز نام آن‌ها را فراموش نمی‌کند. **هارون‌الرشید** که نه تنها عیاش و خوش‌گذران نبود، بلکه کتاب‌های یونانی را هم به عربی ترجمه کرد! اما **مأمون** پسر او که جدول‌های اخترشناسی را تنظیم کرد، و چنگیز و سرانجام الغ‌بیگ.

باید به یاد بیاوریم که بیش‌تر کتاب‌های یونانی از پهلوی سُریانی (که آن هم یک زبان ایرانی بود) به عربی برگردانده شدند و تنها در پایان کار بود که مترجمانی از زبان یونانی پدید آمدند.

آیا می‌اندیشید، در سراسر گفتار، حتی نامی از ایران برده شد؟ گمان می‌کنید وقتی از «سهم عرب‌ها در جبر» سخن می‌گفت، نامی از **محمد** فرزند **موسی خوارزمی** یا **محمد کرجی** یا **حکیم عمر خیام** برد؟ وقتی از رصدخانه‌ها و زیج‌ها سخن می‌گفت، یادی از «زیج خوارزمی»، «زیج ملک شاهی» و دیگران کرد؟ یا از رصدخانه‌ی باغ که به یاری **سلیمان سمرقندی** در سده‌ی نهم میلادی تأسیس شده بودند، رصدخانه‌ی جندی‌شاپور (به یاری احمد نهاوندی)، رصدخانه‌ی شیراز (به یاری عبدالرحمان صوفی)، رصدخانه‌ی بغداد (به یاری ابوسهل کوهی و ابوالوفای بوزجانی)، رصدخانه‌ی رازی (به یاری خجندی در سده‌ی دهم میلادی)، رصدخانه‌ی مراغه (به یاری نصیر توسی در سده‌ی سیزدهم میلادی) یاد کرد؟ و یا وقتی از رصدخانه‌ی سمرقند نام می‌برد، **جمشید کاشانی** بنیانگذار آن را، به یاد آورد؟ به هیچ وجه!

مثلثات (مانند جبر و تا اندازه‌ای نظریه‌ی عددها) در ایران زاده شد و نام بزرگانی چون **ابوالوفای بوزجانی** (بوزجان، در مرز ایران با افغانستان است)، **ابوریحان بیرونی**، **کوشیار گیلانی**، **نصیر توسی** و جمشید کاشانی به تارک این دانش ثبت است. واژه‌های سینوس و تانژانت، برگردان واژه‌های «جیب» به معنای شاخص، و «ظل» است که ریاضیدانان ایرانی انتخاب کردند و بعدها این واژه‌ها به زبان فرانسوی «سینوس» و «تانژانت» شدند (سینوس به معنای گریبان و تانژانت به معنای سایه، یعنی همان معانی جیب و ظل را می‌دهند). ولی گوینده تنها به این بسنده کرد که «سهم عرب‌ها در جبر و مثلثات زیاد است...»

نمی‌دانم اصل مطلب نارسا بود یا در برگردان اشتباه شده بود که کشف «صفر» و «لگاریتم» را به الغ بیگ نسبت داد و البته، هر دو دروغ است. صفر را هندی‌ها کشف و همراه گونه‌ی نوشتن موضعی عددها وارد عددنویسی کردند و به وسیله‌ی کتاب «حساب هندی» خوارزمی به اروپا راه یافت. اما درباره‌ی «لگاریتم» که گمان می‌کنم با «اَلگوریتم» اشتباه شده است: «اَلگوریتم» تحریف شده‌ی نام «الخوارزمی» است که در برگردان «حساب هندی» او به زبان لاتینی، «اَلگوریتموس» خواندند، زیرا حرف «خ» نداشتند و به جای آن حرف «گ» گذاشتند «اَل» را هم از جلوی نام خوارزمی برنداشتند و «اوس» را هم به آخر آن افزودند.

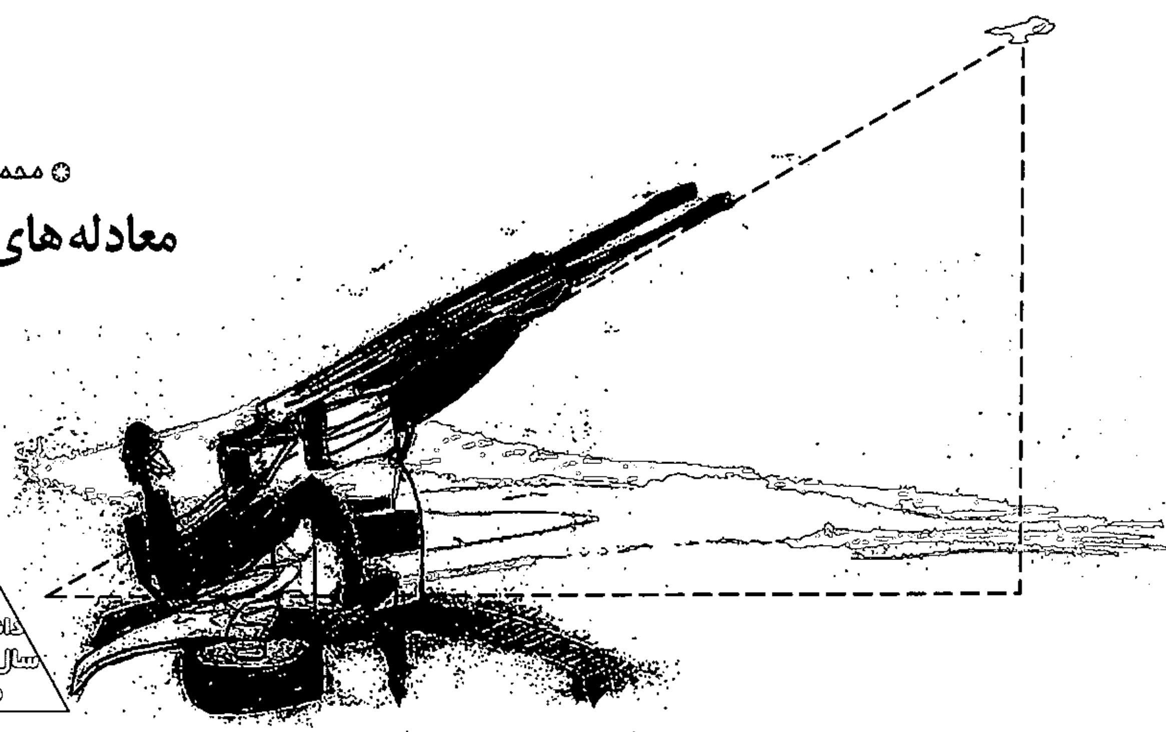
در سده‌های میانی که اروپا در جهل و تعبد به سر می‌برد، در شرق و به ویژه در ایران، دانش به مرز بالایی از شکوفایی رسیده بود. ریاضیدانان ایرانی با تکیه بر دستاوردهای نظری ریاضیات یونانی و ریاضیات نیمه نظری و نیمه کاربردی هندی و استفاده از سنت‌های علمی ایرانی توانستند، دانش ریاضیات را به چنان سطحی بالا ببرند که تا آن زمان نظیر نداشته است. روش ریاضیدانان ایرانی این بود که در آغاز مفهوم‌ها و قضیه‌های نظری را می‌آوردند و می‌کوشیدند، «روش کلی راه‌حل» را پیدا کنند... بعدها این‌گونه روش‌های کلی راه‌حل را «اَلگوریتم» نامیدند. در واقع، مفهوم «اَلگوریتم» در ایران زاده شد، زیرا خود واژه‌ی «الگوریتم»، همان لاتینی شده‌ی نام خوارزمی است و به همین مناسبت روز جهانی «انفورماتیک» را روز «خوارزمی» نامیده‌اند؛ چرا که «انفورماتیک» براساس «الگوریتم‌ها» پدید آمده است.

در پایان گفتار، ضمن بحث از کره‌ی جغرافیایی، گوینده ناگهان در بین واژه‌های عادی، از واژه‌ی «آزیموت» نام برد که به احتمال باید کاربرد آن را از جانب مترجم دانست. «آزیموت» یعنی «سَمت» و «زاویه‌ی سمت» و من نمی‌دانم چرا در بسیاری از برنامه‌های علمی سیما، اصرار بر این است که از واژه‌های فرنگی استفاده شود، به نحوی که گاهی حتی آدم علاقه‌مند هم نمی‌تواند چیزی از آن بفهمد...

این‌که برخی از غربیان به نام مورخ و دانشمند، ما را تحقیر می‌کنند و با وارونه کردن تاریخ می‌کوشند «ثابت کنند» که «در شرق خبری نبوده است»، جای شگفتی ندارد؛ آن‌ها وظیفه‌ی سیاسی خود را انجام می‌دهند. ولی این که ما با دست و زبان خودمان، بافته‌های آن‌ها را تحویل مردم بدهیم، یا ندانسته است و یا گناه؛ آن هم گناهی نابخشودنی.

محمدهاشم رستمی

معادله‌های مثلثاتی



برای دانش‌آموزان سال اول و دوم متوسطه

حل معادله‌های غیرساده‌ی مثلثاتی

اشاره

در شماره‌های قبل، چند روش کلی برای حل معادله‌های غیر ساده‌ی مثلثاتی یک مجهولی را که شکل و راه حل مشخصی ندارند، دیدید. توجه به دسته بندی ارائه شده در این شماره نیز برای حل برخی از این معادله‌ها مفید است.

الف) زاویه‌ی مجهول داده شده در معادله یکی است، اما تابع‌های مثلثاتی داده شده در معادله متفاوتند؛ مانند معادله‌های زیر:

$\sin x + 2\cos^2 x = 1$ ، $2\mathrm{tg}2x - \cot g2x = \frac{1}{\cos 2x}$ و $\sin^4 \frac{a}{2} + \cos^4 \frac{x}{2} = 1$.

برای حل این گونه معادله‌ها، با استفاده از رابطه‌های موجود بین نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه، تمام تابع‌های مثلثاتی داده‌شده در معادله را بر حسب یک تابع مثلثاتی از آن زاویه می‌نویسیم تا معادله‌ای مثلثاتی، شامل یک تابع از یک زاویه، یعنی در واقع معادله‌ای یک مجهولی، به دست آید. آن گاه این معادله را حل می‌کنیم.

مثال ۱. معادله‌ی $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$ را حل کنید.

حل: می‌دانیم که $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. بنابراین داریم:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8} \Rightarrow (1 - \cos^2 x)^2 + \cos^4 x = \frac{5}{8} \Rightarrow$$
$$1 + \cos^4 x - 2\cos^2 x + \cos^4 x - \frac{5}{8} = 0 \Rightarrow$$
$$16\cos^4 x - 16\cos^2 x + 3 = 0$$

با فرض $\cos^2 x = y$ خواهیم داشت:

$$16y^2 - 16y + 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{16} = \frac{8 \pm 4}{16} \Rightarrow$$
$$y = \frac{1}{4} \text{ و } y = \frac{3}{4}$$

هر دو جواب قابل قبول هستند. بنابراین داریم:

$$y=\frac{3}{4}\Rightarrow \cos^2 x=\frac{3}{4}\Rightarrow \cos x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{\pi}{6}$$

$$\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\cos\frac{\pi}{6}=\cos(\pi-\frac{\pi}{6})=\cos\frac{5\pi}{6}\Rightarrow$$

$$x=2k\pi\pm\frac{5\pi}{6}$$ و

$$y=\frac{1}{4}\Rightarrow \cos^2 x=\frac{1}{4}\Rightarrow \cos x=\pm\frac{1}{2}$$

$$\cos x=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

$$\cos x=-\frac{1}{2}=-\cos\frac{\pi}{3}=\cos(\pi-\frac{\pi}{3})=\cos\frac{2\pi}{3}\Rightarrow$$

$$x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$$

نکته: این معادله به روش‌های دیگری نیز حل می‌شود. از آن جمله‌اند:

روش اول: برای کاستن از درجه‌ی معادله، از $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ و $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ استفاده می‌کنیم. داریم:

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{5}{8}\Rightarrow (\frac{1-\cos 2x}{2})^2+(\frac{1+\cos 2x}{2})^2=\frac{5}{8}\Rightarrow$$

$$\frac{2(1+\cos^2 2x)}{4}=\frac{5}{8}\Rightarrow 1+\cos^2 2x=\frac{5}{4}\Rightarrow \cos^2 2x=\frac{1}{4}$$

اما $\cos^2 2x=\frac{1+\cos 4x}{2}$ است. بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{1+\cos 4x}{2}=\frac{1}{4}\Rightarrow 1+\cos 4x=\frac{1}{2}\Rightarrow \cos 4x=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos 4x=\cos\frac{2\pi}{3}\Rightarrow 4x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}\pm\frac{\pi}{6}$$

روش دوم: می‌دانیم که $\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x$ و $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$ است. بنابراین داریم:

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{5}{8}\Rightarrow 1-2\sin^2 x\cos^2 x=\frac{5}{8}\Rightarrow$$

$$1-2(\frac{1}{2}\sin 2x)^2=\frac{5}{8}$$

$$\Rightarrow 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=\frac{5}{8}\Rightarrow -\frac{1}{2}\sin^2 2x=-\frac{3}{8}\Rightarrow \sin^2 2x=\frac{3}{4}$$

اما $\sin^2 2x=\frac{1-\cos 4x}{2}$ است. بنابراین:

$$\frac{1-\cos 4x}{2}=\frac{3}{4}\Rightarrow \cos 4x=-\frac{1}{2}=\cos\frac{2\pi}{3}\Rightarrow 4x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}\pm\frac{\pi}{6}$$

مثال ۲: معادله‌ی $3-7\cos^2 x\sin x-3\sin^3 x=0$ را حل کنید.

حل: با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ داریم:

$$3-7(1-\sin^2 x)\sin x-3\sin^3 x=0\Rightarrow$$

$$3-7\sin x+7\sin^3 x-3\sin^3 x=0$$

$$\Rightarrow 4\sin^3 x-7\sin x+3=0$$

با فرض $\sin x=y$ خواهیم داشت:

$4y^3-7y+3=0$ و $4-7+3=0\Rightarrow y=1\Rightarrow$

$$4y^3-7y+3=(y-1)(4y^2+4y-3)=0\Rightarrow$$

$y=1$ و $4y^2+4y-3=0\Rightarrow y=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{4}$

$\Rightarrow y=\frac{-2\pm 4}{4}\Rightarrow y=\frac{1}{2}$ و $y=-\frac{3}{2}<-1$

جواب‌های $y=1$ و $y=\frac{1}{2}$ قابل قبول هستند، زیرا $\sin x=y$ فرض شده است. پس داریم:

$$y=1\Rightarrow \sin x=1=\sin\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

$$y=\frac{1}{2}\Rightarrow \sin x=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{6}, x=2k\pi+\frac{5\pi}{6}$$

ب) تابع‌های مثلثاتی داده شده در معادله یکی هستند، اما زاویه‌های مجهول داده شده متفاوتند (زاویه‌های داده شده در معادله، مضرب‌هایی از یک زاویه‌ی مجهولند). مانند معادله‌های:

$1+\cos 2x+\cos 4x=0$ ، $\cot g 2x+2\cot g\frac{x}{2}=0$ و

$\sin x+2\sin 2x+\sin 3x=0$

برای حل این گونه معادله‌ها، با استفاده از رابطه‌های موجود بین نسبت‌های مثلثاتی α و $n\alpha$، زاویه‌های موجود در معادله را به یک زاویه تبدیل می‌کنیم. آن‌گاه با توجه به شکل معادله‌ی به‌دست آمده، راه‌حل آن را انتخاب می‌کنیم.

مثال ۱. معادله‌ی $tgx + 2tg\frac{x}{2} = 0$ را حل کنید.

حل: می‌دانیم که $tgx = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 - tg^2\frac{x}{2}}$ است. بنابراین داریم:

$$\frac{2tg\frac{x}{2}}{1 - tg^2\frac{x}{2}} + 2tg\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{2tg\frac{x}{2} + 2tg\frac{x}{2} - 2tg^3\frac{x}{2}}{1 - tg^2\frac{x}{2}} = 0$$

با فرض $1 - tg^2\frac{x}{2} \neq 0$ داریم:

$$4tg\frac{x}{2} - 2tg^3\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow 2tg\frac{x}{2} - tg^3\frac{x}{2} = 0$$

با فرض $tg\frac{x}{2} = y$ نیز خواهیم داشت:

$$2y - y^3 = 0 \Rightarrow y(2 - y^2) = 0 \Rightarrow y = 0$$
$$y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$$

جواب‌ها قابل قبول هستند. پس:

$$y = 0 \Rightarrow tg\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi \Rightarrow x = 2k\pi$$

$$y = \sqrt{2} \Rightarrow tg\frac{x}{2} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi + Arctg\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow x = 2k\pi + 2Arctg\sqrt{2}$$

$$y = -\sqrt{2} \Rightarrow tg\frac{x}{2} = -\sqrt{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi + Arctg(\sqrt{-2})$$
$$\Rightarrow x = 2k\pi + 2Arctg(\sqrt{-2})$$

مثال ۲: معادله‌ی $1 + \cos 3x + \cos 6x = 0$ را حل کنید.

حل: می‌دانیم که $\cos 6x = 2\cos^2 3x - 1$ است.

بنابراین داریم:

$$1 + \cos 3x + \cos 6x = 0 \Rightarrow 1 + \cos 3x + 2\cos^2 3x - 1 = 0 \Rightarrow$$
$$\cos 3x + 2\cos^2 3x = 0 \Rightarrow \cos 3x(1 + 2\cos 3x) = 0 \Rightarrow$$

$$\cos 3x = 0 \Rightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

$$1 + 2\cos 3x = 0 \Rightarrow \cos 3x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow 3x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{2\pi}{9}$$

مثال ۳: معادله‌ی $\sin x - \sin 3x + \sin 5x - \sin 7x = 0$ را حل کنید.

حل: با استفاده از دستور

$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$ داریم:

$$2\sin\frac{x - 3x}{2}\cos\frac{x + 3x}{2} + 2\sin\frac{5x - 7x}{2}\cos\frac{5x + 7x}{2} = 0$$
$$\Rightarrow 2\sin(-x)\cos 2x + 2\sin(-x)\cos 6x = 0$$
$$\Rightarrow -2\sin x\cos 2x - 2\sin x\cos 6x = 0$$

زاویه‌ها در این معادله یکی نیستند، اما در معادله، عامل مشترک $\sin x$ ایجاد شده است. بنابراین داریم:

$$-2\sin x(\cos 2x + \cos 6x) = 0 \Rightarrow -2\sin x = 0$$

$\Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$ و $\cos 2x + \cos 6x = 0$

با استفاده از دستور

$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$ داریم:

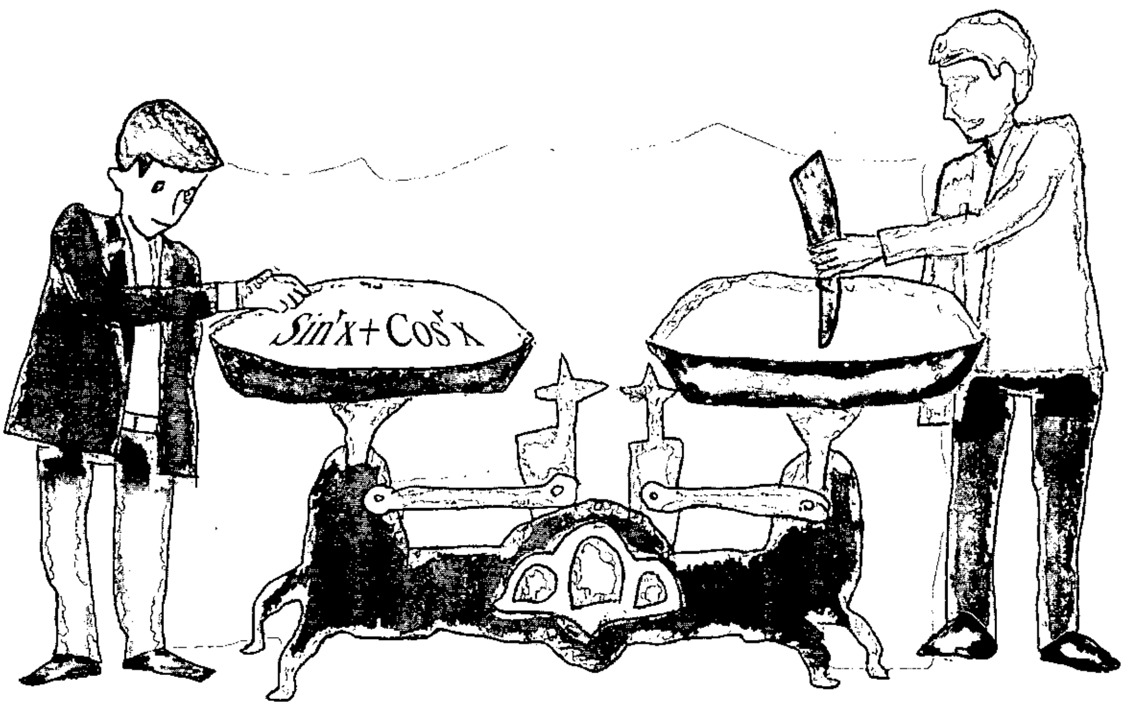
$$2\cos\frac{2x + 6x}{2}\cos\frac{2x - 6x}{2} = 0 \Rightarrow 2\cos 4x\cos(-2x) = 0 \Rightarrow$$

$$2\cos 4x\cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 4x = 0 \Rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$$

$$\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

نکته: در این معادله، اگر تمام زاویه‌ها را به یک زاویه تبدیل کنیم، درجه‌ی معادله افزایش می‌یابد.



پ) زاویه‌های مجهول داده شده در معادله یکی نیستند (مضرب‌هایی از یک زاویه‌ی مجهولند) **و تابع‌های مثلثاتی داده شده نیز یکی نیستند**. مانند معادله‌ی $\sin 2x + 2\cos x = 0$.

برای حل این گونه‌ها معادله‌ها، از حالت‌های الف و ب، یا ترکیبی از آن دو و یا یکی از روش‌های کلی گفته شده برای حل معادله‌های غیر ساده‌ی مثلثاتی استفاده می‌کنیم.

مثال ۱: معادله‌ی $\sin x \sin 3x = \cos 2x$ را حل کنید.

حل: با استفاده از دستور

$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$ داریم:

$$\frac{1}{2}\left[\cos(x-3x) - \cos(x+3x)\right] = \cos 2x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left[\cos(-2x) - \cos 4x\right] = \cos 2x$$

$$\Rightarrow \cos 2x - \cos 4x = 2\cos 2x \Rightarrow \cos 4x = -\cos 2x$$

$\Rightarrow \cos 4x = \cos(\pi - 2x)$ معادله‌ی ساده‌ی مثلثاتی $\Rightarrow$

$$\Rightarrow 4x = 2k\pi \pm (\pi - 2x) \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \text{ و } x = k\pi - \frac{\pi}{2}$$

مثال ۲: معادله‌ی

$$4\sin 2x - 2(\sqrt{5}-1)\cos x - 4\sin x + \sqrt{5} - 1 = 0$$

را حل کنید.

حل: می‌دانیم که $\sin 2x = 2\sin x \cos x$. بنابراین داریم:

$$8\sin x\cos x - 4\sin x - 2(\sqrt{5}-1)\cos x + \sqrt{5} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 4\sin x(2\cos x - 1) - (\sqrt{5}-1)(2\cos x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (2\cos x - 1)(4\sin x - (\sqrt{5}-1)) = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$4\sin x - (\sqrt{5}-1) = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$x = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right) + 2k\pi$$

مثال ۳: معادله‌ی $2\cos\frac{x}{3} - \sin\frac{x}{2} = 2$ را حل کنید.

حل: فرض می‌کنیم $x = 6t$ باشد. در این صورت داریم:

$$2\cos 2t - \sin 3t = 2$$

اما $\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$ و $\sin 3t = 3\sin t - 4\sin^3 t$ هستند. بنابراین خواهیم داشت:

$$2(1 - 2\sin^2 t) - (3\sin t - 4\sin^3 t) - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 4\sin^3 t - 4\sin^2 t - 3\sin t = 0$$

با فرض $\sin t = y$ داریم:

$$4y^3 - 4y^2 - 3y = 0 \Rightarrow y(4y^2 - 4y - 3) = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\text{و}\quad 4y^2 - 4y - 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{4} = \frac{2 \pm 4}{4}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad y = \frac{3}{2} > 0$$

جواب‌های $y = 0$ و $y = -\frac{1}{2}$ قابل قبولند، زیرا $-1 \le \sin t = y \le 1$ است. بنابراین داریم:

$$y = 0 \Rightarrow \sin t = 0 \Rightarrow t = k\pi$$

$$y = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin t = -\frac{1}{2} = \sin(-\frac{\pi}{6})$$

$$\Rightarrow t = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \quad \text{و} \quad t = 2k\pi + \frac{7\pi}{6}$$

اما $x = 6t$ و یا $t = \frac{x}{6}$ اختیار شده است. بنابراین داریم.

$$\frac{x}{6} = k\pi \Rightarrow x = 6k\pi$$

$$\frac{x}{6} = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 12k\pi - \pi$$

$$\frac{x}{6} = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \Rightarrow x = 12k\pi + k\pi$$

مثال ۴: معادله‌ی $tgx + \cot gx = 2\sin 2x$ در فاصله‌ی $[0, 2\pi]$ چند ریشه دارد؟

حل: با تبدیل x به $-x$ معادله تغییر نمی‌کند. بنابراین با استفاده از دستور بیوش، می‌توان $\cos x$ را مجهول کمکی اختیار و معادله را حل کرد. اما این معادله راه‌حل‌های ساده‌تری نیز دارد. از آن جمله:

می‌دانیم که $tgx + \cot gx = \frac{2}{\sin 2x}$ است. بنابراین داریم:

$$\frac{2}{\sin 2x} = 2\sin 2x \Rightarrow \sin^2 2x = 1 \Rightarrow$$

اما $\sin^2 2x = \frac{1 - \cos 4x}{2}$ است. پس خواهیم داشت:

$$\frac{1 - \cos 4x}{2} = 1 \Rightarrow 1 - \cos 4x = 2 \Rightarrow \cos 4x = -1 = \cos\pi$$

$$\Rightarrow 4x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

و

k	0	1	2	3	4
x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π

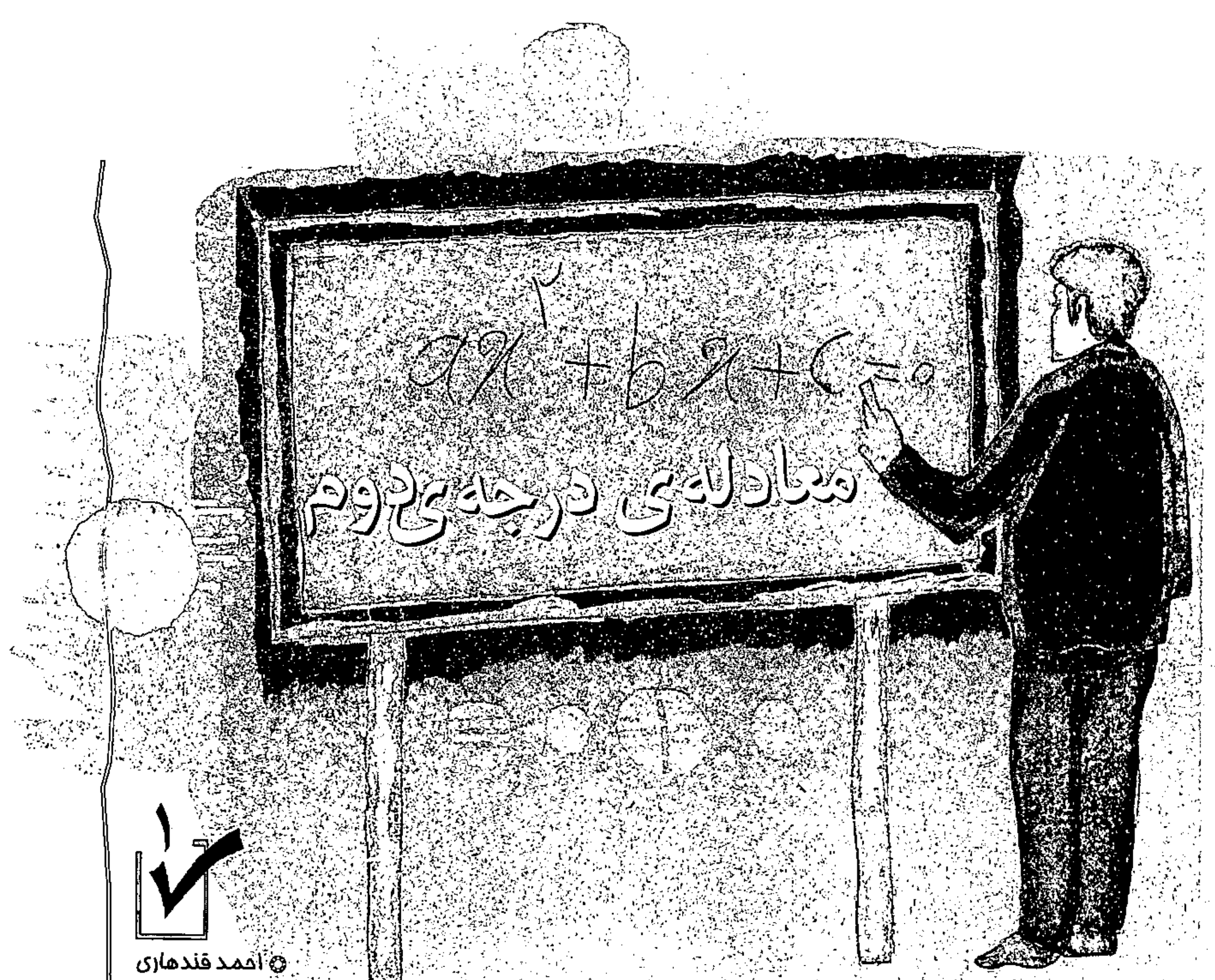
بنابراین معادله‌ی داده شده در بازه‌ی $[0, 2\pi]$، چهار ریشه دارد.

نکته: برای تعیین تعداد ریشه‌های معادله‌ی داده شده در بازه‌ی $[0, 2\pi]$، می‌توان به این روش نیز عمل کرد:

$$x \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow 0 \le x \le 2\pi \Rightarrow 0 \le \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \le 2\pi$$

$$\Rightarrow 0 \le \frac{k}{2} + \frac{1}{4} \le 2 \Rightarrow 0 \le k + \frac{1}{2} \le 4 \Rightarrow -0/5 \le k \le 3/5$$

با توجه به اینکه k عدد صحیح است، بنابراین می‌تواند یکی از چهار مقدار ۰، ۱، ۲ و ۳ را اختیار کند. یعنی معادله‌ی داده‌شده در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ چهار جواب دارد. از این روش می‌توان برای تعیین تعداد ریشه‌های هریک از جواب‌های کلی یک معادله، در یک بازه‌ی داده شده استفاده کرد.



احمد قندهاری

اشاره

مبحث معادله‌ی درجه دوم از مهم‌ترین مباحث ریاضی است و کاربردهای فراوانی دارد. متأسفانه در کتاب‌های درسی به‌طور کافی به آن‌ها پرداخته نشده است بلکه تنها بخشی از آن‌ها در کتاب ریاضی ۲ و بخش دیگری هم به طور ناقص در کتاب حسابان آمده است.

در این نوشته سعی شده است اطلاعات بیشتری درباره‌ی معادله‌ی درجه‌ی دوم پیش روی علاقه‌مندان قرار گیرد.

۱. بررسی حالت‌های ناقص معادله‌ی درجه دوم

الف) اگر در معادله‌ی درجه دوم $ax^2+bx+c=0$، عدد c صفر باشد، آن‌گاه یک ریشه‌ی معادله صفر و ریشه‌ی دیگر آن $\left(-\frac{b}{a}\right)$ است.

$$c=0;\ ax^2+bx=0 \Rightarrow x(ax+b)=0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=0 \\ \text{یا} \\ x=-\frac{b}{a} \end{cases}$$

نتیجه‌ی ۱:

$$\begin{matrix} ax^2+bx+c=0 \\ c=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x'=0 \\ \text{یا} \\ x''=-\frac{b}{a} \end{cases}$$

ب) اگر در معادله‌ی درجه دوم، b و c هر دو با هم صفر باشند، آن‌گاه هر دو ریشه‌ی معادله صفر است.

$$b=0,\ c=0;\ ax^2=0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow (x)(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x'=0 \\ x''=0 \end{cases}$$

نتیجه‌ی ۲:

$$\left.\begin{matrix} ax^2+bx+c=0 \\ b=c=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x'=x''=0$$

ج) اگر در معادله‌ی درجه‌ی دوم $b=0$ و a و c مختلف‌العلامه باشند، آن‌گاه معادله دو ریشه‌ی قرینه دارد:

$$b=0,\ ax^2+c=0 \Rightarrow x^2=-\frac{c}{a}$$

چون a و c مختلف‌العلامه‌اند، پس $\frac{c}{a}$ منفی و $\left(-\frac{c}{a}\right)$

عددی مثبت است.

$$x^2=\frac{-c}{a}\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

نتیجه‌ی ۳:

$$\left.\begin{array}{r} ax^2+bx+c=0 \\ b=0 \\ c,a \text{ مختلف العلامه باشند.} \end{array}\right\} \Rightarrow$$ معادله دو ریشه ی قرینه دارد :

مسأله: معادله‌ی $mx^2+(m-2)(m+2)x+(m-3)(m-2)=0$ مفروض است. m را چنان بیابید که:

اولاً: یک ریشه‌ی معادله صفر باشد.

ثانیاً: هر دو ریشه‌ی معادله صفر باشد.

ثالثاً: معادله دو ریشه‌ی قرینه داشته باشد. در این صورت ریشه‌ها را هم بیابید.

حل: **اولاً** فقط باید $c=0$ و باید توجه داشت که b صفر نباشد. پس:

$$m-3=0\Rightarrow m=3$$

ثانیاً باید m را طوری پیدا کرد که هم c و هم b صفر باشند، پس:

$$m-2=0\Rightarrow m=2$$

ثالثاً فقط باید $b=0$ و a و c مختلف العلامه باشند.

$$m+2=0\Rightarrow m=-2\Rightarrow \begin{cases} a=-2\\ c=(-5)(-4)=20\end{cases}$$

پس وقتی $m=-2$، آن‌گاه a و c مختلف‌العلامه‌اند.

معادله‌ی درجه‌ی دوم: $-2x^2+20=0\Rightarrow x^2=10\Rightarrow x=\pm\sqrt{10}$

۲. طرز پیدا کردن فرمول حل معادله‌ی درجه دوم کامل $ax^2+bx+c=0$

دو طرف معادله را بر $a\neq 0$ تقسیم می‌کنیم:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0\Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

به دو طرف تساوی بالا عبارت $\frac{b^2}{4a^2}$ را اضافه می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\Rightarrow$$

از دو طرف این تساوی ریشه‌ی دوم می‌گیریم.

$$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\Rightarrow x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ **دستور (b)**

نتیجه ۴: معادله‌ی درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ از فرمول $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ **دستور (b)** قابل حل است.

مثال ۱. معادله‌ی $2x^2-5x+2=0$ را حل کنید.

حل: در این معادله $a=2$ و $b=-5$ و $c=2$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{5\pm\sqrt{25-4(2)(2)}}{2(2)}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}$$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{9}}{4}\Rightarrow x=\frac{5\pm 3}{4}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=x'=\frac{5+3}{4}=2\\ \beta=x''=\frac{5-3}{4}=\frac{1}{2}\end{cases}$$

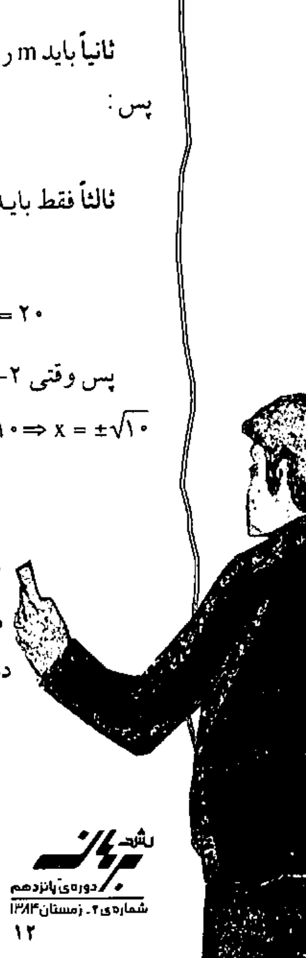
اعداد ۲ و $\frac{1}{2}$ را ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-5x+2=0$ گویند و آن‌ها را با x' و x'' یا α و β نشان می‌دهند.

مثال ۲. معادله‌ی درجه‌ی دوم زیر را حل کنید؟

$$(m,n>0)\; m^2x^2-2m^2x+(m^2-n^2)=0$$

حل: در این معادله $a=m^2$ و $b=-2m^2$ و $c=m^2-n^2$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{2m^2\pm\sqrt{4m^4-4(m^2)(m^2-n^2)}}{2m^2}$$



$$x=\frac{2m^2\pm\sqrt{4m^4-4m^4+4m^2n^2}}{2m^2}=\frac{2m^2\pm\sqrt{4m^2n^2}}{2m^2}$$

$$x=\frac{2m^2\pm 2mn}{2m^2}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha=x'=\dfrac{2m^2+2mn}{2m^2}=\dfrac{2m(m+n)}{2m^2}=\dfrac{m+n}{m}\\[2mm]\beta=x''=\dfrac{2m^2-2mn}{2m^2}=\dfrac{2m(m-n)}{2m^2}=\dfrac{m-n}{m}\end{cases}$$

تذکر مهم: اگر در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$ ، عدد b مضرب ۲ باشد، آن‌گاه نصف آن را b' می‌نامیم؛ یعنی: $b'=\frac{b}{2}$ یا $b=2b'$. حال اگر در فرمول حل معادله‌ی درجه‌ی دوم، به جای b ، $2b'$ را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-2b'\pm\sqrt{4b'^2-4ac}}{2a}\quad \text{و}\quad b=2b'\quad \text{و}$$

$$x=\frac{-2b'\pm\sqrt{4(b'^2-ac)}}{2a}=\frac{-2b'\pm2\sqrt{b'^2-ac}}{2a}\Rightarrow$$

$$x=\frac{2(-b'\pm\sqrt{b'^2-ac})}{2a}\Rightarrow x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

دستور b'

نتیجه (۵):

اگر در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$ ، $b=2b'$ ، آن‌گاه بهتر است معادله را از دستور (b') $x=\frac{(-b'\pm\sqrt{b'^2-ac})}{2a}$ حل کنیم.

مثال ۳. معادله‌ی $x^2-2\sqrt{3}x-(2\sqrt{3}+1)=0$ را حل کنید.

حل: $a=1$ ، $b'=-\sqrt{3}$ و $c=-(2\sqrt{3}+1)$.

معادله را از دستور b' حل می‌کنیم:

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{3+2\sqrt{3}+1}}{1}$$
$$=\sqrt{3}\pm\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}$$

$$x=\sqrt{3}\pm(\sqrt{3}+1)\Rightarrow\begin{cases}\alpha=x'=\sqrt{3}+(\sqrt{3}+1)=2\sqrt{3}+1\\ \beta=x''=\sqrt{3}-(\sqrt{3}+1)=-1\end{cases}$$

توجه: عبارت b^2-4ac را Δ ، و عبارت b'^2-ac را Δ' ، و هر دو را مبیّن معادله گویند. اگرچه $\Delta=4\Delta'$ ، ولی ارزش آن‌ها از لحاظ بیان تعداد ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم یکی است؛ یعنی:

۱) Δ یا $\Delta'>0\Rightarrow$ معادله دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد.

۲) Δ یا $\Delta'=0\Rightarrow$ معادله دو ریشه‌ی حقیقی مساوی یا یک ریشه‌ی حقیقی مضاعف دارد.

۳) Δ یا $\Delta'<0\Rightarrow$ معادله دو ریشه‌ی غیرحقیقی دارد.

سؤال. اگر شخصی بگوید، معادله‌ی درجه‌ی دوم همواره دو ریشه دارد، درست است یا خیر؟ چرا؟

مثال ۴: به ازای چه مقادیر m، معادله‌ی $mx^2-2(m-2)x+(m+1)=0$ ، دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد؟

حل: باید Δ یا Δ' مثبت باشد.

$$\begin{cases}a=m\\ b'=-(m-2)\\ c=(m+1)\end{cases}$$

$$\Delta'>0\Rightarrow b'^2-ac>0\Rightarrow(m-2)^2-m(m+1)>0$$
$$\Rightarrow m^2-4m+4-m^2-m>0$$

$$\Rightarrow -5m+4>0\Rightarrow -5m>-4\Rightarrow m<\frac{4}{5}$$

مثال ۵: به ازای چه مقادیر m، خط به معادله‌ی $y=2x+m$ ، منحنی به معادله‌ی $y=x^2-2x+1$ را قطع نمی‌کند؟

حل: معادله‌ی حاصل از تقاطع خط و منحنی نباید

ریشه‌های حقیقی داشته باشد.

$$\begin{cases} y = 2x + m \\ y = x^2 - 2x + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 2x + m \Rightarrow x^2 - 4x + (1 - m) = 0$$

معادله‌ی $x^2 - 4x + (1 - m) = 0$ ، معادله‌ی حاصل از تقاطع خط و منحنی است و نباید ریشه‌های حقیقی داشته باشد پس باید $\Delta' < 0$.

$$\begin{cases} a = 1 \\ b' = -2 \\ c = (1 - m) \end{cases}$$

$$\Delta' < 0 \Rightarrow b'^2 - ac < 0 \Rightarrow 4 - (1 - m) < 0 \Rightarrow 4 - 1 + m < 0$$
$$\Rightarrow m < -3$$

نکته‌ی ۱ : اگر در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، داشته باشیم: $a + b + c = 0$ ، آن‌گاه یک ریشه‌ی معادله عدد ۱ و ریشه‌ی دیگر $\frac{c}{a}$ است.

اثبات:

$$a + b + c = 0 \Rightarrow c = -a - b$$
$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow ax^2 + bx - a - b = 0$$
$$\Rightarrow ax^2 - a + bx - b = 0 \Rightarrow a(x^2 - 1) + b(x - 1) = 0$$
$$\Rightarrow a(x - 1)(x + 1) + b(x - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$(x - 1)(ax + a + b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ ax + a + b = 0 \Rightarrow ax = -a - b \\ \Rightarrow ax = c \Rightarrow x = \frac{c}{a} \end{cases}$$

نتیجه‌ی ۶:

$ax^2 + bx + c = 0$
مجموع ضرایب صفر باشد $a + b + c = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} \alpha = x' = 1 \\ \beta = x'' = \frac{c}{a} \end{cases}$

مثال ۶ : معادله‌ی $(\sqrt{2} + 1)x^2 - 2\sqrt{2}x + (\sqrt{2} - 1) = 0$ را حل کنید.

حل: در این معادله $a + b + c = 0$ ، زیرا:

$$\sqrt{2} + 1 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} - 1 = 0$$

پس:

$$\begin{cases} \alpha = x' = 1 \\ \beta = x'' = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \end{cases}$$

نکته‌ی ۲ : اگر در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، داشته باشیم $a+c=b$ ، آن‌گاه یک ریشه‌ی معادله عدد ۱- و ریشه‌ی دیگر $-\frac{c}{a}$ است.

اثبات:

$$a + c = b \Rightarrow c = b - a$$
$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow ax^2 + bx + b - a = 0$$
$$\Rightarrow ax^2 - a + bx + b = 0 \Rightarrow a(x^2 - 1) + b(x + 1) = 0$$
$$\Rightarrow a(x - 1)(x + 1) + b(x + 1) = 0 \Rightarrow (x + 1)(ax - a + b) = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ ax - a + b = 0 \Rightarrow ax = a - b \Rightarrow ax = -c \Rightarrow x = -\frac{c}{a} \end{cases}$$

نتیجه‌ی ۷:

$$\begin{matrix} ax^2 + bx + c = 0 \\ a + c = b \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = x' = -1 \\ \beta = x'' = -\frac{c}{a} \end{cases}$$

مثال ۷ : معادله‌ی $x^2 \sin^2\alpha + x.\tan^3\alpha.\cot^3\alpha + \cos^2\alpha = 0$ را حل کنید.

حل:

$$\begin{cases} a = \sin^2\alpha \\ b = \tan^3\alpha.\cot^3\alpha = 1 \\ c = \cos^2\alpha \end{cases}$$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow a+c=b \Rightarrow \begin{cases}\alpha=x'=-1\\ \beta=x''=-\dfrac{c}{a}=\dfrac{-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\\ \quad=-\cot^2\alpha\end{cases}$$

نکته‌ی ۳: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ باشند، داریم:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}=S\\ \alpha.\beta=\dfrac{c}{a}=P\end{cases}$$

اگر در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$، $\frac{c}{a}<0$، آن‌گاه معادله دو ریشه‌ی حقیقی مختلف العلامه دارد؛ زیرا:

$$\frac{c}{a}<0 \Rightarrow a,c<0\ ,\ \ \Delta=b^2-4ac$$

$$\Delta=b^2-4(\underbrace{ac}_{\text{منفی}})\Rightarrow\Delta=b^2+(\underbrace{-4ac}_{\text{مثبت}})>0$$

پس $\Delta>0$. بنابراین، معادله دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد. از طرف دیگر، حاصل ضرب این دو ریشه، یعنی $\frac{c}{a}$ منفی است، پس دو ریشه مختلف‌العلامه‌اند.

نتیجه‌ی ۸:

$$ax^2+bx+c=0\ ,\ \ \frac{c}{a}<0\Rightarrow\alpha<0<\beta$$

α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم هستند.

مثال ۸: m را چنان بیابید که معادله‌ی $(2\sqrt{3}+1)x^2+2(m+1)x+xm^2-18=0$ دو ریشه‌ی حقیقی مختلف‌العلامه داشته باشد.

حل:

$$\frac{c}{a}<0\Rightarrow\frac{2m^2-18}{2\sqrt{3}+1}<0\Rightarrow 2m^2-18<0\Rightarrow m^2<9\Rightarrow -3<m<3$$

نکته‌ی ۴: اگر در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$ α و β ریشه‌های حقیقی معادله باشند و داشته باشیم $\beta=k\alpha$ $(k\neq 0,1)$، آن‌گاه داریم: $\frac{b^2}{ac}=\frac{(k+1)^2}{k}$

اثبات:

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}\Rightarrow\alpha+k\alpha=-\frac{b}{a}\Rightarrow\alpha(k+1)=-\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow\alpha=\frac{-b}{a(k+1)}$$

$$\beta=k\alpha\Rightarrow\beta=\frac{-bk}{a(k+1)}$$

$$\alpha.\beta=\frac{c}{a}\Rightarrow\frac{-b}{a(k+1)}\times\frac{-bk}{a(k+1)}=\frac{c}{a}\Rightarrow\frac{kb^2}{a^2(k+1)^2}=\frac{c}{a}\Rightarrow$$

$$kb^2=ac(k+1)^2\Rightarrow\frac{b^2}{ac}=\frac{(k+1)^2}{k}$$

نتیجه‌ی ۹:

$$ax^2+bx+c=0\ ,\ \ \beta=k\alpha\Rightarrow\frac{b^2}{ac}=\frac{(k+1)^2}{k}$$

α و β ریشه‌های حقیقی معادله باشد.

مثال ۹: اگر در معادله‌ی $(2\sqrt{3}-3)x^2-4(m-1)x+(2\sqrt{3}+3)=0$، یک ریشه ۳ برابر ریشه دیگر باشد، یعنی $\beta=3\alpha$، آن‌گاه m را بیابید.

حل:

$$\frac{b^2}{ac}=\frac{(k+1)^2}{k}\Rightarrow\frac{16(m-1)^2}{(2\sqrt{3}-3)(2\sqrt{3}+3)}=\frac{(3+1)^2}{3}\Rightarrow$$

$$\frac{16(m-1)^2}{12-9}=\frac{16}{3}\Rightarrow\frac{(m-1)^2}{3}=\frac{1}{3}\Rightarrow(m-1)^2=1\Rightarrow$$

$$m-1=\pm1\Rightarrow m=1\pm1\Rightarrow m=2 \ \text{یا}\ m=0$$

ادامه دارد

مسائل هندسه‌ی ابوالوفا بوزجانی

پس از پیدایش نخستین ترجمه‌های «هندسه»، کتاب اصول **اقلیدس** به زبان عربی، و باب هندسه‌ی کتاب «جبر و مقابله‌ی **خوارزمی**»[۱]، میراث علمی شرق و غرب، علم هندسه به زودی مورد بهره‌برداری قرار گرفت و موضوع تحقیقات مستقل و جداگانه شد.

کمی پس از خوارزمی، برادران **بنوموسی**، یعنی **ابوجعفر محمّد** (متوفی به سال ۸۷۲) و حسن و احمد، پسران **موسی بن شاکر**[۲] ـ از نزدیکان خلیفه مأمون ـ به فعالیت علمی وسیعی دست زدند. آنان به ریاضیات، نجوم و آلات موسیقی و مکانیک دلبستگی خاصی داشتند. رصدخانه‌ای مخصوص بنا کردند و به جمع‌آوری نسخه‌های خطی یونانی پرداختند و به ترجمه‌ی آن‌ها به زبان عربی همت گماشتند. برادر بزرگ‌تر (محمد)، در ادامه‌ی یکی از سفرهای خود، دانشمند معروف، **ثابت بن قُرّه** را با خود به بغداد آورد. از میزان سهمیه‌ی هر یک از این سه برادر در آثار مشترک علمی آنان بی‌خبریم. فقط می‌دانیم، احمد به علم مکانیک توجه خاصی داشت. از آنان اثر معروفی موسوم به «هندسه‌ی سه برادر» باقی مانده که ترجمه‌ی لاتینی آن:

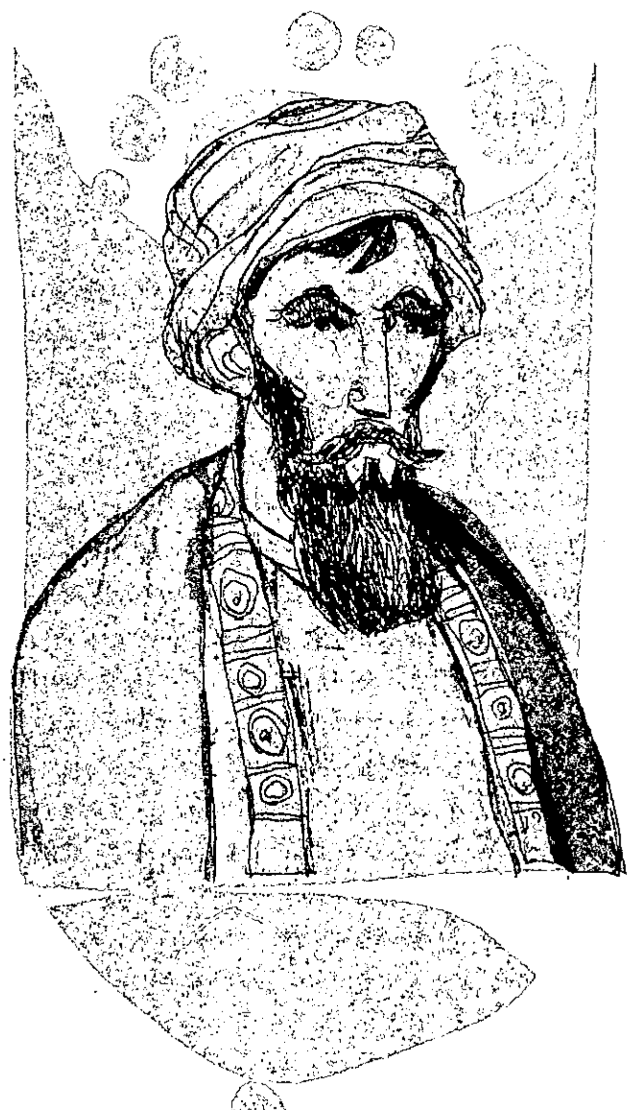
«Liber trium fratrum de geometria»

توسط **جرارد کرمونی**[۳] به دست ما رسیده است.

عنوان عربی این کتاب عبارت است از: «**معرفة مساحة الاشکال البسیط و الکریّه**». نخستین قضایای آن مربوط است به محاسبه‌ی دایره؛ این جاست که برای اولین بار روش یونانی «**افنا**»[۴] در آثار خاص اسلامی قدیم ظاهر می‌شود. البته به وجهی به کار رفته که قابل ایراد است. مؤلفان، به‌خصوص در قضیه‌ی چهارم ثابت می‌کنند که مساحت دایره را می‌توان به وسیله‌ی حاصل ضرب شعاع در نصف محیط دایره بیان کرد. در قضیه‌ی پنجم نشان می‌دهند که نسبت محیط دایره به قطر مقداری است ثابت. در شکل (قضیه‌ی) ششم، با الهام گرفتن از **ارشمیدس** ثابت می‌کنند که این نسبت بین $۳\frac{۱۰}{۷۱}$ و $۳\frac{۱}{۷}$ واقع است. در قضیه‌ی بعدی، آنچه را که دستور **هرون**[۵] مربوط به مساحت مثلث نامیده می‌شود، ثابت می‌کنند؛ البته استدلال آنان کمی با آنچه که مؤلف «متریک» هرون آورده است، تفاوت دارد.

درباره‌ی مخروط و کره، خاطر نشان می‌کنیم که بنابر قضیه‌ی چهاردهم، مساحت سطح نیم کره مساوی است با دو برابر سطح دایره‌ی عظیمه‌اش، و بنابر قضیه‌ی پانزدهم، حجم کره مساوی است با حاصل ضرب نصف قطر در $\frac{۱}{۳}$ مساحت سطح کره. سپس مؤلفان با ارجاع به گفته‌ی **منلائوس**، روش پیچیده‌ی مساحی احجام را که به تعیین دو واسطه‌ی هندسی

نوشته: آ.پ. یوشکویچ[1]
ترجمه و تنظیم از: محمد علی شیخان



بین دو عدد معلوم منجر می‌شود، بیان می‌کنند؛ روشی که بنا به گفته‌ی **اوتوقیوس**[6]، شبیه به روش **آرخوتاس**[7] است.

(از شرح این روش در آثار منلائوس اطلاعی نداریم). مؤلفان، بلافاصله روش ساده‌تری را که اتوقیوس به **افلاطون** نسبت می‌دهد، شرح می‌دهند؛ روشی که در آن دیده می‌شود، چگونه یک ساختمان هندسی عملاً به کمک چند خط کش که به هم بسته شده‌اند و روی یک کولیس می‌لغزند، رسم می‌شود.

در شکل (قضیه‌ی) هیجدهم، مؤلفان موضوع تثلیث زاویه را به کمک یک دایره و یک خط کش مدرج، یعنی به‌وسیله‌ی روش «درج» شرح می‌دهند. بالاخره چگونگی روش محاسبه ریشه‌ی سوم یک عدد را که مکعب کامل نیست، با تقریب دلخواه برحسب کسرهای شصتگانی، نشان می‌دهند. برای این کار عدد مفروض N را که غرض به دست آوردن ریشه‌ی سوم آن است، برحسب احتیاج به ثالثه‌ها $\left(\frac{1}{60^3}\right)$، سادسه‌ها $\left(\frac{1}{60^6}\right)$، تاسعه‌ها $\left(\frac{1}{60^9}\right)$ و غیره تبدیل می‌کنند. سپس بزرگ‌ترین عدد صحیحی را جست‌وجو می‌کنند که مکعب آن در $N.60^{3n}$ بگنجد.

در این صورت، مقدار تقریبی (ریشه) را برحسب دقیقه‌ها، ثانیه‌ها و غیره به دست می‌آورند؛ یعنی: $\sqrt[3]{N} = \frac{\sqrt[3]{N.60^{3n}}}{60^n}$. ولی مؤلفان نمی‌گویند که این بزرگ‌ترین عدد را چگونه می‌توان به دست آورد. احتمال دارد که در آن عصر، روش استخراج ریشه‌ی سوم که بعداً در کتاب **نسوی** آمده، در بغداد شناخته شده بوده است. محتوای این کتاب و روشی که در آن تمام قضایا با استدلالشان بیان شده‌اند، پیشرفت‌های بزرگی را که در تحقیقات هندسی ظرف دو قرن در بغداد صورت گرفته بودند، نشان می‌دهد.

کتاب (هندسه‌ی) بنوموسی تأثیر فراوانی در تکامل بعدی علم هندسه داشته است. در چند قرن بعد، هنوز این اثر در شرق مورد مطالعه بود و مثلاً **نصیرالدین طوسی** آن را تحریر کرده است. همچنین ترجمه‌ی لاتین آن در اروپا به خوبی

شناخته شده بود. باز هم خاطر نشان می‌کنیم که بنا به گفته‌ی **سجزی**، ریاضیدان سده‌های دهم و یازدهم میلادی، برادران بنوموسی رسم بیضی را به وسیله‌ی به کار بردن نخ (روش باغبان) می‌شناخته‌اند. از آنان چند اثر دیگر در زمینه‌ی هندسه، به‌خصوص راجع به مقاطع مخروطی، و نیز درباره‌ی نجوم، استاتیک، فیزیک و غیره باقی مانده‌اند که یا با هم و یا جداگانه آن‌ها را تألیف کرده‌اند.

کتاب هندسه‌ی عملی[8] **ابوالوفا** که به محاسبان و دفترداران اختصاص داده شده است، مستقیماً وابسته به بخش هندسه‌ی کتاب جبر خوارزمی است. **ابوالوفا محمدبن محمد بوزجانی** (۹۴۰ تا تقریباً ۹۹۷) در بوزجان که یکی از شهرهای خراسان و بین هرات و نیشابور واقع است، به دنیا آمد. در سن ۲۰ سالگی از بوزجان به عراق مهاجرت کرد و به زودی در بغداد به عنوان ریاضیدان و منجم ماهری شهرت یافت. مالک چندین اثر بدیع از وی می‌باشیم که از آن جمله‌اند، شرح‌های مفصلی بر آثار **اقلیدس**، **دیوفانت** و **بطلمیوس**. بسیاری از آثارش به دست ما نرسیده‌اند. از وی آثاری باقی مانده است که به‌خصوص در هندسه و مثلثات حائز اهمیت هستند.

ابوالوفا در بخش هندسه‌ی کتاب خود که برای کاتبان نوشته است، بسیاری از مواد بخش هندسه‌ی کتاب خوارزمی را اقتباس و دسته‌ای از مواد دیگر را به آن اضافه کرده است؛ بدون آن‌که مانند خوارزمی، روش استدلال آن‌ها را بیان کند. مثلاً در آن، دستور محاسبه‌ی مساحت مثلث منسوب به هرون (که قبلاً به آن اشاره شده) و نیز دستور محاسبه‌ی سطح کره برحسب دایره‌ی عظیمه، و حجم کره برحسب قطر و محیط دایره‌ی عظیمه $\left(d^2 \cdot \frac{c}{6}\right)$ و همچنین، دستور محاسبه‌ی همین حجم برحسب سطح کره $\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{s.d}{2}\right)$ دیده می‌شود. در تمام این محاسبات، ابوالوفا مقدار π را $\frac{22}{7}$ اختیار می‌کند. برای محاسبه‌ی مساحت سطح قطعه‌ی دایره برحسب قوس یا وتر، او جدولی از طول وترهای دایره‌ای به قطر ۱۴ برای کمان‌های $\frac{k}{22}\cdot 180^\circ$، $(k = 1,2,3,\dots,22)$ تشکیل می‌دهد؛ مقدار این وترها برحسب $\frac{1}{60}$ یعنی شعیر[9] و اجزای آن تعیین شده‌اند. علاوه بر این، ابوالوفا قاعده‌هایی را که برای محاسبه‌ی وترها در حالتی که قطر دایره دلخواه باشد و نیز دستور درج واسطه‌ی خطی را تعیین کرده است. علاوه بر جدول وترها که در مورد آن از **بطلمیوس** نام می‌برد، ابوالوفا دستوری ارائه می‌دهد که از روی آن، قطر دایره (یعنی d) برحسب عده‌ی اضلاع (n) و طول ضلع چند ضلعی منتظم محاطی (a_n) محاسبه می‌شود و آن را هندی می‌نامد:

$$d^2 = a_n^2\left[\frac{(n-1)n}{2}+3\right]\cdot\frac{2}{9} = \frac{a_n^2(n^2-n+6)}{9}$$

همان‌گونه که به آسانی دیده می‌شود، این دستور مقدار دقیق قطر را وقتی که n مساوی با ۳، ۴ و ۶ باشد، معین می‌کند. خطای نقصانی به ازای $n=5$، تقریباً مساوی ۰/۱٪ و برای $n=10$ این خطا تقریباً ۱٪، و برای $n=20$ تقریباً ۲٪ است. حال آن‌که اگر n به سمت بی‌نهایت میل کند، خطا به سمت $\frac{\pi-3}{3}$، یعنی به سمت کم‌تر از ۵٪ میل می‌کند. منشأ این دستور تقریبی مجهول است.

بالاخره، ابوالوفا برای تعیین فاصله یا ارتفاع اشیایی که در دسترس نیستند، روشی تعیین می‌کند که در آن، صفحه‌ی مستطیل شکلی با حاشیه‌ی مدرج که روی آن دوربین متحرکی نصب شده است، به کار می‌رود[10].

می‌دانیم که چند فصل از کتاب حساب **کَرَجی** به هندسه اختصاص دارد. مطالب این کتاب به اندازه‌ای شبیه به قسمتی

از کتاب هندسه‌ی ابوالوفاست که در این‌جا احتیاجی به شرح آن نیست. با این حال، دستور خاصی از این کتاب را که برای محاسبه‌ی حجم کره به کار می‌رود، ذکر می‌کنیم: $V = d^{۳}\left(۱-\frac{۱}{۷}-\frac{۱}{۷}\times\frac{۱}{۲}\right)^{۲}$؛ که به ازای $\pi = \frac{۲۲}{۷}$ به این صورت درمی‌آید: $V = d\left(\frac{\pi d}{۴}\right)^{۲}$. اگر این دستور نتیجه‌ی اشتباه نسخه‌نویس کتاب نباشد، باید نتیجه گرفت که از نظر کرجی، حجم کره مساوی است با حجم متوازی‌السطوح قائمی که ارتفاعش مساوی قطره کره و قاعده‌اش مربعی به ضلع یک چهارم محیط دایره‌ی عظیمه‌ی آن باشد. این دستور روش ناهنجاری را به خاطر می‌آورد که بنا به گفته‌ی ابوالوفا، مسّاحان آن عصر در تربیع به کار می‌بردند.

اگر دایرةالمعارف دستی ریاضیدان مشهور ایرانی، **بهاءالدّین عاملی** یعنی «خلاصة الحساب» را در نظر بگیریم، دستور کرجی مطلب قابل توجهی ندارد. این کتاب پنج قرن پس از کرجی، دستور زیر را برای حجم کره داده است:

$$V = d^{۳}\left\{\left(۱-\frac{۳}{۱۴}\right)-\frac{۳}{۱۴}\left(۱-\frac{۳}{۱۴}\right)-\frac{۳}{۱۴}\left[\left(۱-\frac{۳}{۱۴}\right)-\frac{۳}{۱۴}\left(۱-\frac{۳}{۱۴}\right)\right]\right\}$$
$$=\left(\frac{۱۱}{۱۴}d\right)^{۳}$$

یعنی اگر عدد π را مساوی $\frac{۲۲}{۷}$ بگیریم، حاصل می‌شود: $V = \left(\frac{\pi d}{۴}\right)^{۳}$. به عبارت دیگر، برای بهاءالدین عاملی حجم کره مساوی است با حجم مکعبی که ضلعش $\frac{۱}{۴}$ محیط دایره‌ی عظیمه‌ی آن کره باشد. مقدار π که در دستور بهاءالدین به کار رفته، مساوی ۲/۹ است. بنابراین این مقدار π به حساب بهاءالدین، کمی بهتر از مقدار آن در دستور کرجی یعنی ۳/۷ است. از طرف دیگر، بهاءالدین در همین موضع از کتاب خود اشاره می‌کند: $V = \frac{d}{۲}.\frac{S}{۳}$.

در حالی که پیش از این، S یعنی مساحت سطح کره در برابر $۴d^{۲}\left(۱-\frac{۳}{۱۴}\right)$، یعنی $\frac{۲۲}{۷}d^{۲}$ نشان داده است.

ابوالوفا نیز کتابی درخصوص هندسه‌ی عملی برای صنعتکاران موسوم به: «**فی ما یحتاج الیه الصانع من اعمال الهندسیه**» نوشته است. یک نسخه‌ی خطی به زبان عربی از این کتاب و نیز یک ترجمه‌ی فارسی از آن که تقریباً هم‌زمان با آن تهیه شده، در دست است. این دو متن مکمل یکدیگرند.

کتاب دیگری، مرکب از یک مقدمه و ۱۲ باب شامل عده‌ی زیادی از ساختمان‌های مهم هندسی برای مسّاحی، مهندسی و نقشه‌برداری وجود دارد. جالب است که کتاب مذکور تقریباً ۱۸ مسأله دارد که به وسیله‌ی خط‌کش ساده‌ی غیرمدرج و پرگاری که گشادگی دهانه‌ی آن ثابت است، حل شده‌اند. استفاده از این وسایل گاهی توسط شرایط خود مسأله لازم می‌شود، ولی گاهی هم در خود ساختمان‌های هندسی مورد پیدا می‌کند. اهمیت عملی این نوع ساختمان‌ها ناشی از آن است که غالباً در سطح زمین رسم کردن چند دایره با شعاع‌های متفاوت فایده‌ی چندانی ندارد.

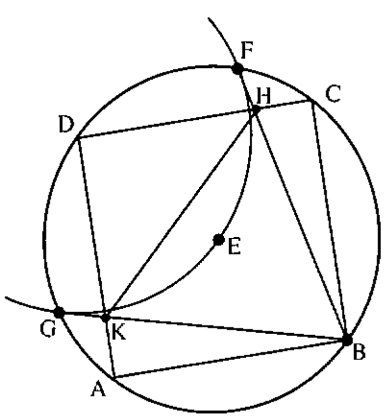
نخستین ساختمان‌های هندسی که با یک گشادگی ثابت پرگار رسم می‌شوند، احتمالاً از قاعده‌ی رسم با «طناب» بهره برده‌اند که اصل آن **هندی** است؛ البته این قاعده نزد یونانیان نیز دیده شده است. ولی افتخار این مطلب متعلق به ابوالوفاست که یک رشته از مسائل اساسی هندسی را در این قلمرو به‌طور منظم حل کرده و با روشنی کامل اهمیت به‌کار بردن این روش را در این گونه مسائل خاطر نشان کرده است. این که در برخی از مسائل به دلیل سادگی نمی‌توان گشادگی پرگار را به اختیار انتخاب کرد، بلکه باید مساوی با پاره‌خط معلوم می‌گرفت، به هیچ وجه از اهمیت کار ابوالوفا نمی‌کاهد. در قرن شانزدهم میلادی، راجع به این موضوع نیز

پژوهش‌هایی در ایتالیا به علت احتیاجات عملی صورت گرفت. از بین کسانی که در این تحقیقات دست داشته‌اند، می‌توان **لئوناردداوینچی**[11] و **بندّتی**[12] و **تارتاگلیا**[13] و **کاردانو**[14]، سپس در آخر قرن هیجدهم **ماشرونی**[15] و در قرن نوزدهم **ژاکوب اشتینر**[16] آلمانی را نام برد.

ابوالوفا در مقدمه‌ی کتاب خود، به کمک خط‌کش و پرگاری با دهانه‌ی ثابت، طریقه‌ی استخراج عمود بر یک پاره‌خط از وسط یا از انتهای آن را معرفی کرده است. او در باب اول که شامل ساختمان‌های هندسی اساسی است، با همین روش‌ها، پاره‌خط دلخواهی را به چندین قسمت متساوی و زاویه‌ای را به دو قسمت متساوی تقسیم می‌کند. در باب دوم که به چند ضلعی‌های منتظم اختصاص دارد، ابوالوفا مثلث متساوی‌الاضلاع، مربع و ۵، ۶، ۸ و ۱۰ ضلعی منتظم را به فرض معلوم بودن یک ضلع آن‌ها می‌سازد. در باب سوم، روش محاط کردن مثلث و ۵، ۶ و ۸ ضلعی را در دایره‌ی معلومی شرح می‌دهد.

در همین باب‌ها، مؤلف چگونگی ترسیم خطوط متوازی، مماس بر دایره و ترسیم هفت ضلعی منتظم را شرح می‌دهد (برای ضلع هفت ضلعی منتظم او تقریباً نصف ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در همان دایره را انتخاب می‌کند). همچنین، چگونگی تثلیث زاویه و تضعیف مکعب و غیره را با روش مکانیکی بیان می‌کند. او در باب اول، دو روش برای ساختن آینه‌های سوزان پیشنهاد می‌کند. در روش اول، شکل هندسی آینه را که سهمی است، به وسیله‌ی دایره‌ای که شعاعش مساوی با دو برابر فاصله‌ی کانونی است، به دست آورده است. او روی عمودهای بر قطر دایره، پاره‌خط هایی متساوی با وترهای واصل بین یک انتهای قطر و فصل مشترک آن‌ها با محیط دایره رسم می‌کند؛ سرهای دیگر پاره‌خط هایی که به این ترتیب به دست می‌آیند، روی سهمی مطلوب قرار دارند. در روش دوم، ابوالوفا از دایره‌هایی استفاده می‌کند که مراکز آن‌ها روی نیم‌خط معلومی واقع شده‌اند و همه‌ی آن‌ها از مبدأ آن نیم خط می‌گذرند. گرچه این ترسیمات بسیار ساده هستند، ولی در آثار یونانیان دیده نمی‌شوند.[17]

در باب ششم، مؤلف چند ضلعی‌هایی را که در یکدیگر محاط و چند ضلعی‌هایی را که بر دایره محیط می‌گردند، شرح می‌دهد. برای مثال، یکی از پنج روشی را که برای محاط کردن مثلث متساوی‌الاضلاع در یک مربع به کار می‌رود، توضیح می‌دهد. ابتدا بر مربع معلوم ABCD، دایره‌ای محیط می‌کند و مرکز آن را E می‌نامد (شکل ۱). سپس به مرکز D و به شعاع DE، قوسی از دایره رسم می‌کند تا دایره‌ی مذکور را در نقاط F و G قطع کند و محل تلاقی BF و BG را با اضلاع DC و AD به ترتیب H و K می‌نامد. این نقاط و نقطه‌ی B رأس‌های مثلث متساوی‌الاضلاع BHK مطلوب است.

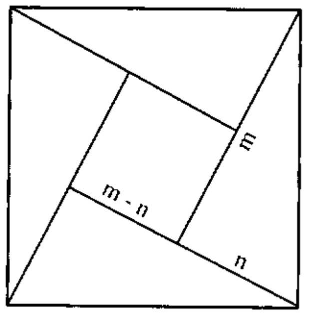


شکل ۱

ابوالوفا در باب‌های هشتم تا دهم، می‌پردازد به تقسیم دایره و شکل‌های محدود به خطوط راست، مانند تقسیم یک چهارضلعی به دو جزء معادل به وسیله‌ی خط راستی که از یکی از رأس‌های چند ضلعی می‌گذرد، و یا تعیین nاُمین قسمت

سطح یک متوازی‌الاضلاع به وسیله‌ی خط راستی که از نقطه‌ی مفروضی واقع در خارج آن رسم شود. البته اقلیدس پیش‌تر کتاب مفصلی درباره‌ی این مسائل تألیف کرده بود.

بالاخره، ابوالوفا در باب یازدهم، مسائل گوناگون مربوط به تبدیل مربع مفروضی به مجموع چند مربع و یا نمایاندن مجموع چند مربع به وسیله‌ی یک مربع را حل می‌کند. او می‌نویسد، بسیاری از هنروران به این مسائل احتیاج دارند، اما هیچ‌یک از روش‌هایی که به کار می‌برند، اساس درستی ندارد. به همین دلیل، قابل اطمینان نیست و صحت ندارد. ابوالوفا می‌خواسته است برای حل این قبیل مسائل روشی کلی معین کند. او ابتدا ساختمان‌های ساده‌تر تقسیم یک مربع به n^2 مربع یا به n^2+m^2 مربع معلوم را بیان می‌کند. در حالت اخیر، مسأله به استفاده از اتحاد $n^2 + m^2 = 2m.n + (m - n)^2$ منجر می‌شود؛ در این صورت او مربع مطلوب را به این نحو به دست می‌آورد که حول مربع $(m - n)^2$، چهار مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع m و n می‌افزاید.

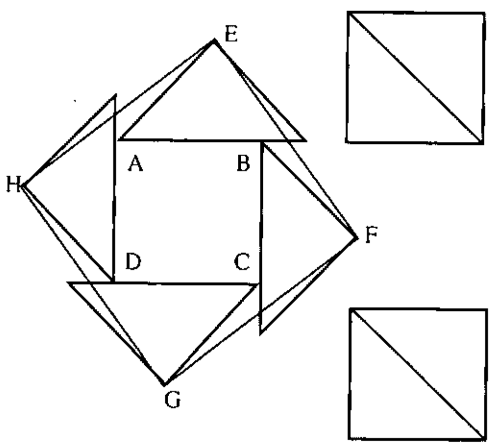


شکل ۲

این ترسیم که به آسانی انجام می‌گیرد، نظیر ساختمانی است که در چین و هند با استفاده از آن قضیه‌ی فیثاغورث را اثبات می‌کردند (شکل ۲). این روش احتمالاً توسط هندیان به عالم اسلام منتقل شده است. مؤلف پس از مسائل مذکور بلافاصله به حل مسائل مشابه مربوط به تقسیم مربّع می‌پردازد.

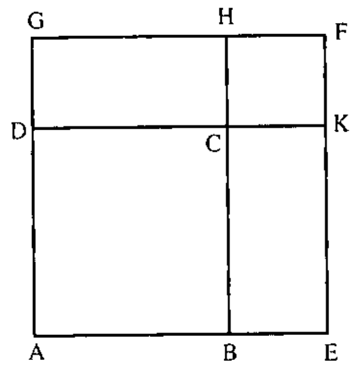
او سپس مسأله‌ی تشکیل یک مربع با عده‌ی دلخواهی از مربعات معلوم را حل می‌کند. البته حالت کلی حل این مسأله را بیان نمی‌کند، بلکه فقط مسأله‌ی پیدا کردن مربعی معادل با سه برابر مربع دیگر را بررسی می‌کند. جواب این مسأله، یعنی ضلع مربع مطلوب، وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که اضلاع زاویه‌ی قائمه‌اش مساوی با ضلع و قطر مربع مفروض باشد. «ابوالوفا می‌گوید که چنین حلی برای مهندس کفایت می‌کند، ولی در عمل قابل استفاده نیست.» البته در این جا مقصود این است که مربع معلومی را به اجزائی تقسیم کنیم که با ترکیب عده‌ای از آن‌ها، مربع جدیدی به‌دست آید.

شکل ۳ مسأله‌ی تشکیل یک مربع معادل با سه برابر مربع معلوم را به وسیله‌ی ابوالوفا نشان می‌دهد: سه مربع متساوی در نظر می‌گیرد، دو تا از آن‌ها را با رسم یک قطرشان به چهار مثلث تقسیم می‌کند و آن‌ها را حول مربع سوم مطابق شکل قرار می‌دهد. سپس رأس‌های E، F، G و H را متوالیاً به هم وصل می‌کند تا مربع مطلوب به دست آید. سطح مربع اخیر سه برابر سطح مربع مفروض ABCD است، زیرا مثلث‌های کوچکی که در اطراف مربع EFGH قرار دارند، معادل با مثلث‌هایی هستند که داخل این مربع قرار گرفته‌اند.



شکل ۳

سپس ابوالوفا دو مربع معلوم را که اضلاعشان دارای طول‌های متفاوتی هستند، به یک مربع تبدیل می‌کند. برای این کار مربع کوچک ABCD را مطابق شکل ۴ روی مربع بزرگ‌تر AEFG قرار می‌دهد. در این صورت، مجموع دو مربع به کمک دو مستطیل متساوی ABHG و AEKD و مربع CKFH تشکیل می‌شود.



شکل ۴

سپس دو مستطیل مذکور را به چهار مثلث قائم‌الزاویه متساوی تجزیه می‌کند و آن‌ها را به طریقی که می‌دانیم، حول مربع CKFH قرار می‌دهد. به این ترتیب، مربعی معادل با مجموع دو مربع مفروض به دست می‌آورد. بالاخره به حل مسأله‌ی تجزیه‌ی یک مربع به دو مربع که طول ضلع یکی از آن‌ها معلوم باشد، می‌پردازد.

حل مسأله‌ی ترسیم مربعی که مساحتش مساوی با مجموع مساحت‌های دو مربع معلوم باشد، توسط ابوالوفا، شامل عناصر یکی از استدلال‌های قضیه‌ی فیثاغورث است که مبتنی است بر اصل مقایسه‌ی شکل‌هایی که از قسمت‌های مناسب تشکیل یافته‌اند. اصل مزبور به خصوص در این جا به نحو جالبی بیان شده است. پیش از این در قرن نهم، **ثابت بن قرّه** استدلال مشابهی به کمک ترسیم بیان می‌کند که کمی با استدلال شکل ۲ فرق دارد. این استدلال، موضوع مقایسه‌ی شکل‌هایی را که از قسمت‌های مناسب تشکیل شده‌اند، بهتر روشن می‌ساخت. استدلال قرّه توسط **نیریزی** به ما رسیده است.

در باب دوازدهم، ابوالوفا مسأله‌ی تجزیه‌ی سطح کره به کثیرالاضلاع‌های منتظم کروی را مورد بررسی قرار می‌دهد. زوایای هر یک از این کثیرالاضلاع‌ها همان زوایای کثیرالوجوه‌های نظیر آن‌هاست. [مقصود کثیرالوجوهی است که رأس آن مرکز کره، و قاعده‌اش کثیرالاضلاع‌های مذکور

زیرنویس

1. ADOLF P.YOUSCHKEVITCH

۲. درباره‌ی پسران موسی بن شاکر، معروف به اخوان ثلاثه می‌توانید به کتاب «مقدمه بر تاریخ علم»، نوشته‌ی جرج سارتن، صفحه‌ی ۶۵۲ نیز مراجعه فرمایید.

3. Gérard de Crémone

4. exhaustion

5. Héron

6. Eutocius

7. Archytas

۸. کتاب Le Livre sur l'arithmétique nécessaire aux scribes et aux marehands که در صفحه‌ی ۲۷ کتاب «ریاضیات عرب» نوشته یوشکویچ از آن گفت‌وگو شده است.

۹. کلمه‌ی «شعیر» به عنوان واحدی که برای اندازه‌گیری طول یا سطح به کار رفته باشد، در جایی دیده نشده و یقیناً اشتباه است.

۱۰. معمولاً چنین صفحه‌ای را پشت اسطرلابی نصب می‌کردند.

11. Léonard de vinci

12. G.Benedetti,

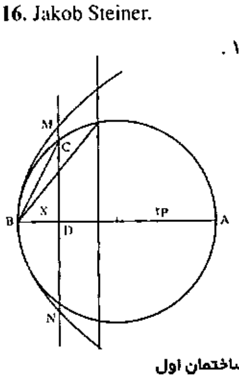
13. N.Tartaglia

14. G.Gardano

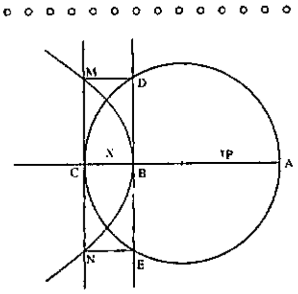
15. L.Macheroni

16. Jakob Steiner.

۱۷.



ساختمان اول



ساختمان دوم

درباره‌ی ساختمان اول: به فرض این‌که AB=۲p قطر دایره باشد، بنا به خواصی که در دایره می‌شناسیم، داریم: $\overline{BC}^2 = AB.BD$، بر طبق

باشد. م]، اما ابوالوفا به این مطلب اشاره نکرده است.

ساختمان‌های هندسی جالب و در عین حال ساده‌ای که در این باب ذکر شده‌اند، شامل پنج کثیرالوجوه منتظم [مقصود اجسام افلاطونی است. م] و همچنین دو عدد از سیزده کثیرالوجوه‌های نیم منتظمی است که ارشمیدس کشف کرده است. این دو کثیرالوجوه عبارتند از: اولاً، یک چهارده وجهی که وجوهش از هشت مثلث و شش مربع تشکیل می‌شود، و ثانیاً، یک ۳۲ وجهی که وجوهش ۲۰ مثلث و ۱۲ پنج ضلعی است. ابوالوفا ساختمان سه کثیره‌الوجوه نیم منتظم دیگر را هم شرح می‌دهد که صحیح نیستند.

منابعی که در این باره از آن‌ها استفاده کرده است، درست شناخته نشده‌اند. علاوه بر کتاب اصول اقلیدس، ابوالوفا بدون تردید از کتاب **پاپوس** هم باید استفاده کرده باشد، اما ساختمان‌های هندسی متفاوت وی در آثار پیشینیان دیده نمی‌شود و به نظر می‌رسد که باید آن‌ها را به خود او نسبت داد. مدت‌ها بعد از آن، س. **استون**[18] و ژ. **کپلر**[19] از نو چند وجهی‌های نیم منتظمی را مورد توجه قرار دادند که پاپوس درباره‌ی آن‌ها تقسیم‌بندی و شرح مختصری داده بود، ولی اطلاعات زیادی از آن حاصل نمی‌شد[20].

ساختمان هندسی، چون $DM=BC$، اگر BD را مساوی x و DM را مساوی y بگیریم، خواهیم داشت: $y^2=2px$ در نتیجه نقطه‌ی M روی سهمی است.

درباره‌ی ساختمان دوم: روی نیم خط AC به مبدأ A، پاره‌خط AB را مساوی $2p$ اختیار می‌کنیم و دایره‌هایی با قطرهای به طول متغیر AC رسم می‌کنیم و وترهای DE را (در نقطه‌ی ثابت B) عمود بر آن می‌کشیم. بر طبق خواص دایره داریم: $BD^2=CB.BA$. پس اگر CB را با x و $CM=BD$ را با y نشان دهیم، خواهیم داشت: $y^2=2px$ یعنی نقطه‌ی M روی سهمی است.

18. S.Stevin

19. J.Kepler

۲۰. در استانبول، یک نسخه‌ی خطی عربی از این کتاب موجود است که از نسخه‌ای که سوتر مورد استفاده قرار داده، کامل‌تر و به نسخه‌ی خطی فارسی مورد استفاده‌ی ویکه نزدیک‌تر است. با این حال، نسخه‌ی خطی استانبول هم کامل نیست.

منبع: کتاب «ریاضیات عرب» نوشته‌ی یوشکویچ.

نظرخواهی

از شما دانش‌آموزان، دانشجویان و دبیران محترم درخواست می‌کنیم به جهت پربارتر شدن و رفع هرگونه نقص احتمالی در مجله خودتان، این برگ نظرخواهی را به دقت مطالعه و به سؤال‌های آن پاسخ دهید و برای ما ارسال کنید. قبلاً از حسن توجه شما تشکر می‌کنیم.

☐ **مجله‌ی رشد برهان را به چه صورت تهیه می‌کنید؟**

از طریق مدرسه ☐ با اشتراک فردی (پست) ☐

معرفی دوستان ☐ اهدایی ☐

☐ **چه مدت است با این مجله آشنا هستید؟**

کمتر از یک سال ☐ ۲ تا ۴ سال ☐

۵ تا ۸ سال ☐ از آغاز انتشار تاکنون ☐

☐ **آیا شماره‌های این مجله را به طور مرتب دریافت می‌کنید؟**

بلی ☐ خیر ☐

در صورتی که پاسخ شما خیر است، دلایل آن را بنویسید؟

....

....

....

☐ **از کدام یک از بخش‌های مجله بیشتر استفاده کرده‌اید؟ (با شماره از ۱ تا ۶ اولویت‌بندی نمایید.)**

- مقالات کمک‌آموزشی ☐
- مقالات کمک درسی ☐
- مقالات تاریخی و فلسفه ریاضی ☐
- سرگرمی‌های ریاضی ☐
- سؤالات و پاسخ تشریحی آن‌ها ☐
- مقالات مربوط به المپیاد ریاضی ☐

■ **نظر خود را راجع به مقالات کمک‌درسی و درصد کمک آن‌ها به شما در جهت فهم مطالب درسی و ارتباط آن‌ها با کتاب درسی، بنویسید. (اگر پیشنهادی دارید مطرح بفرمایید).**

....

....

■ **به نظر شما جای چه نوع مطالب یا مقالاتی در مجله خالی است؟**

....

....

☐ به نظر شما کدام یک از مقالات مجله را می‌توان حذف کرد. در این صورت چه مقالاتی را جایگزین آن‌ها کنیم؟

....

....

☐ آیا مایل هستید با ارسال مطلب برای مجله رشد برهان متوسطه، ما را یاری دهید؟

بلی ☐ خیر ☐

اگر بلی، زمینه‌های مورد علاقه خود را بنویسید؟

....

....

☐ آیا دبیران ریاضی شما از این مجله در کلاس استفاده کرده و آن را به شما توصیه می‌کنند؟

بلی ☐ خیر ☐

☐ در بین مؤلفین و مترجمین مجله که تاکنون مقالاتی را از آن‌ها خوانده‌اید، کدام یک از آن‌ها به زبان بهتری با شما ارتباط برقرار می‌کنند و مقالاتشان را بهتر درک کرده‌اید؟ (به ترتیب اولویت بنویسید)

....

....

☐ از نظر مطبوعاتی، مجله را چگونه ارزیابی می‌کنید؟(صفحه‌آرایی، تصاویر، طرح‌ها، تیترها)

بسیار خوب ☐ خوب ☐ متوسط ☐

ضعیف ☐ خیلی ضعیف ☐

(اگر در این زمینه انتقاد یا پیشنهادی دارید، بنویسید.)

....

....

☐ هر گونه پیشنهاد یا انتقادی دارید، بنویسید.

....

....

با تشکر: هیأت تحریریه

مشخصات تکمیل کننده پرسشنامه

✧ دانش‌آموز کلاس: ....

ساکن شهر: ....

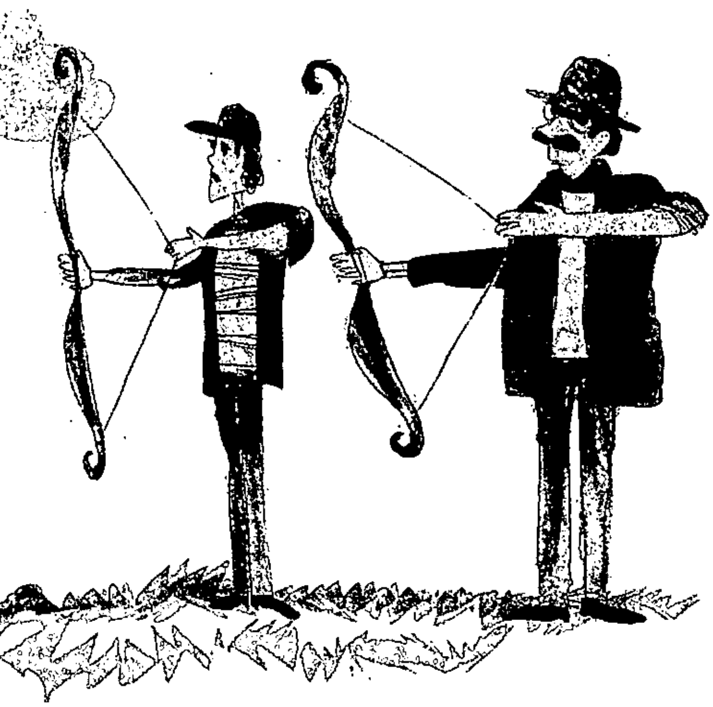
✧ دانشجو سال: ....

رشته‌ی: .... دانشگاه: ....

ساکن شهر: ....

✧ دبیر سابقه تدریس: ....

ساکن شهر: ....



در ادامه‌ی بحث مربوط به احتمال در فضاهای پیوسته، به طرح و حل مسائلِ متنوع‌تر و شاید تا حدودی مشکل‌تر می‌پردازیم. ابتدا چند مسأله‌ی شبیه به مسائل قبل برای یادآوری و سپس مسائل مربوط به زمان و پارامترهای پیوسته‌ی دیگر را مطرح می‌کنیم.

مسأله‌ی ۱. یک عدد حقیقی و بزرگ‌تر از ۱ به تصادف انتخاب می‌کنیم. چه‌قدر احتمال دارد این عدد: الف) کوچک‌تر از ۵ باشد. ب) بزرگ‌تر از ۱۵ باشد. ج) کوچک‌تر از ده میلیون باشد.

حل: فضای نمونه‌ای در این مسأله به صورت زیر تعریف می‌شود که دارای طولِ بی‌نهایت است. $S=\{x\in R | x>1\}$

الف) $A=\{x\in R|1<x<5\}$ $\quad P(A)=\lim_{L_S\to\infty}\frac{4}{L_S}=0$

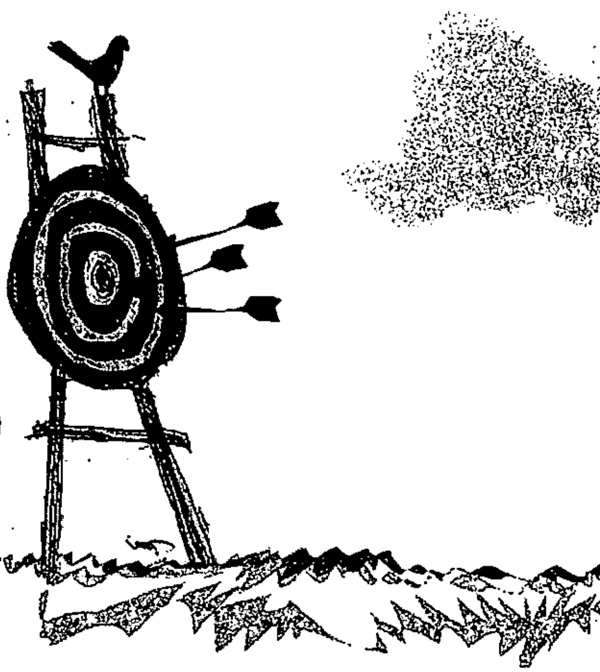
ب) $B=\{x\in R|x>15\}$ $\quad P(B)=\lim_{L_B,L_S\to\infty}\frac{L_B}{L_S}=1$

ج) $P(C)=\lim_{L_S\to\infty}\frac{10^7-1}{L_S}=0$

مسأله‌ی ۲. دو عدد حقیقی در بازه‌ی [۲ و ۰] به تصادف انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن‌که: الف) مجموع دو عدد بیش‌تر از ۱ باشد. ب) هر یک از دو عدد از دو برابر دیگری کوچک‌تر است. ج) مجموع مربعات دو عدد

حمیدرضا امیری

مسائلی از احتمال در فضاهای پیوسته



برای دانش‌آموزان سال سوم و پیش‌دانشگاهی

کوچک‌تر از ۱ باشد. د) هر یک از دو عدد از مربع دیگری بزرگ‌تر باشد.

حل: اگر فضای نمونه‌ای و پیشامدهای تصادفی در حالت‌های الف، ب، ج و د را به ترتیب S، A، B، C و D بنامیم، خواهیم داشت:

$$S = \{(x,y) | x,y \in R, 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2\} = [0,2] \times [0,2]$$

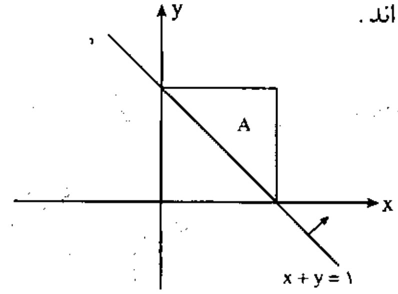
$$A = \{(x,y) | x,y \in S, x + y > 1\}$$

$$B = \{(x,y) | x,y \in S, x < 2y, y < 2x\}$$

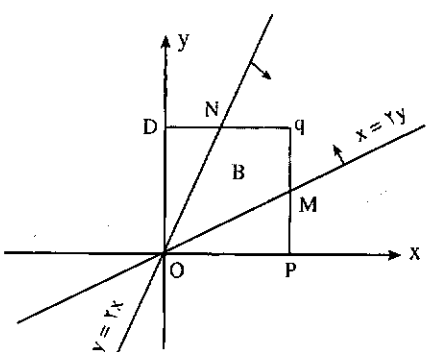
$$C = \{(x,y) | x,y \in S, x^2 + y^2 < 1\}$$

$$D = \{(x,y) | x,y \in S, y > x^2, x > y^2\}$$

هر یک از مجموعه‌های A، B، C و D قسمت‌هایی از سطح مربعی به ضلع ۲ را مشخص می‌کنند که در شکل‌های زیر رسم شده‌اند.



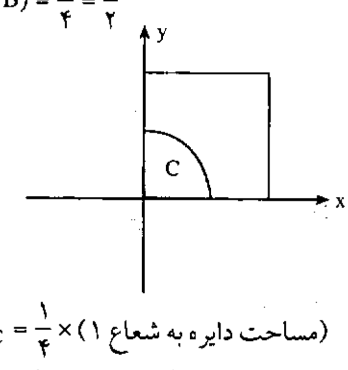
$$P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$



$$a_B = a_S - (a_{\overset{\Delta}{OPM}} + a_{\overset{\Delta}{ODN}})$$

$$a_B = 4 - (1 + 1) = 2$$

$$P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

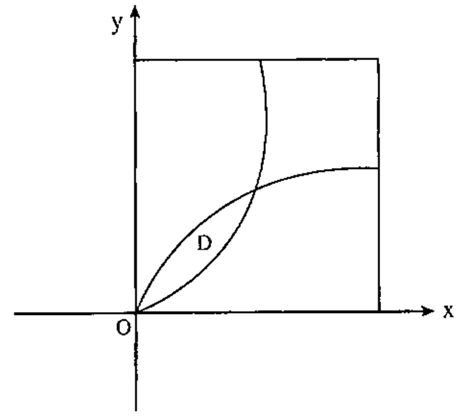


$a_C = \frac{1}{4} \times$ (مساحت دایره به شعاع ۱)

$$a_C = \frac{1}{4} \times \pi \times r^2 = \frac{1}{4}\pi \times 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$P(C) = \frac{\frac{\pi}{4}}{4} = \frac{\pi}{16}$$

برای محاسبه‌ی مساحت سطح D باید مساحت محدود بین دو منحنی $y=x^2$ و $x=y^2$ را از ۰ تا ۱ به دست آوریم:

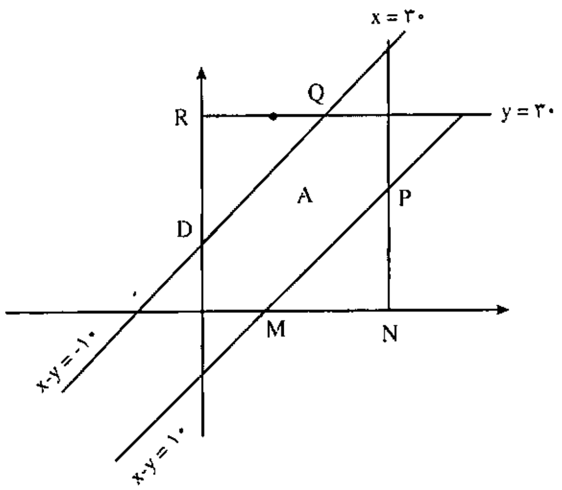


$$a_D = \int_0^1 (x^2 - \sqrt{x})dx = [\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}]_0^1$$

$$\Rightarrow a_D = \left|\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right| = \frac{1}{3} \Rightarrow P(D) = \frac{\frac{1}{3}}{4} = \frac{1}{12}$$

مسأله‌ی ۳. بهزاد و جمشید بین ساعت‌های ۷ و ۷:۳۰ دقیقه با هم قرار ملاقات دارند. با فرض این‌که هر دو در همین فاصله‌ی زمانی به محل قرار برسند، چه‌قدر احتمال دارد هیچ‌یک از آن‌ها بیش‌تر از ده دقیقه معطل نشوند؟

حل: اگر ساعت‌های ورود بهزاد و جمشید را به محل قرار x و y بنامیم و ساعت ۷ را به عنوان مبدأ (زمان صفر) در نظر بگیریم، در این صورت فضای نمونه‌ای به صورت $S = \{(x,y) | x,y \in R, 0 \le x \le 30, 0 \le y \le 30\}$ تعریف می‌شود که در آن، هر زوج مرتب مانند (x,y) به منزله‌ی زمان‌های ورود این دو نفر به محل قرار بعد از ساعت ۷ است. مثلاً زوج مرتب (۱۰ و ۵) به این معنی است که نفر اول ساعت ۷ و ۵ دقیقه و نفر دوم ساعت ۷ و ۱۰ دقیقه به محل قرار رسیده است و در نتیجه، نفر اول ۵ دقیقه معطل مانده است. پس برای آن‌که هیچ‌یک از دو نفر بیش‌تر از ده دقیقه معطل نشوند، باید: $|x-y| \le 10$ بنابراین، پیشامد A به صورت $A = \{(x,y) \in S \| x,y| \le 10\}$ تعریف می‌شود. نمودار هندسی S و A در شکل ذیل مشخص شده است:



$$|x-y| \le 10 \Rightarrow -10 \le x-y \le 10$$
$$a_A = a_S - (a_{\overset{\Delta}{MNP}} + a_{\overset{\Delta}{DQR}})$$
$$\Rightarrow a_A = 900 - (200+200) = 500$$
$$\Rightarrow P(A) = \frac{500}{900} = \frac{5}{9}$$

مسأله‌ی ۴. مثلث غیرمشخصی را به‌طور تصادفی رسم می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن‌که این مثلث یک زاویه‌ی منفرجه داشته باشد.

حل: اگر x و y و z را زاویه‌های مثلث مورد نظر فرض کنیم، فضای نمونه‌ای به صورت

$$S = \{(x,y,z) | x,y,z \in R, 0 < x,y,z < 180^\circ, x+y+z = 180^\circ\}$$

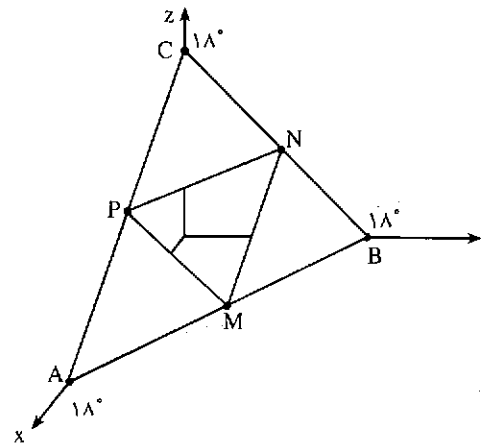
تعریف می‌شود. با توجه به این‌که می‌خواهیم یکی از زاویه‌ها بزرگ‌تر از 90° باشد، پیشامد A به صورت:

$$A = \{(x,y,z) \in S | x > 90^\circ \text{ یا } y > 90^\circ \text{ یا } z > 90^\circ\}$$

تعریف می‌شود. توجه داریم که فقط یکی از x، y و یا z باید بزرگ‌تر از 90° باشد.

برای رسم نمودار هندسی S و A باید از یک دستگاه مختصات سه بعدی استفاده کنیم. فضای نمونه‌ای S عبارت است از نقاط روی صفحه‌ی $x+y+z=180$، با شرط: $0<x,y,z<180$ که این نقاط همان‌طور که در شکل صفحه بعد مشخص شده است، نقاط روی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC هستند.

برای رسم پیشامد A باید سه صفحه‌ی $x=90$، $y=90$ و $z=90$ را رسم کنیم و محل برخورد هریک از این سه صفحه را با صفحه‌ی $x+y+z=180$ که خطی راست است



(NP, MN, MP)، مشخص کنیم و محدوده‌های $x>۹۰$، $y>۹۰$ و $z>۹۰$ را به دست آوریم که در شکل بالا هاشور خورده‌اند. برای محاسبه‌ی مساحت قسمت‌های هاشورخورده، به مختصات نقاط M، N و P نیاز داریم که به راحتی قابل محاسبه‌اند. برای مثال، نقطه‌ی N محل برخورد سه صفحه‌ی $x+y+z=۱۸۰$ و $x=۰$ و $z=۹۰$ است:

$$\begin{cases} x+y+z=۱۸۰ \\ x=۰ \\ z=۹۰ \end{cases} \Rightarrow N\left|\begin{matrix} ۰ \\ ۹۰ \\ ۹۰ \end{matrix}\right.$$

به همین ترتیب $M\left|\begin{matrix} ۹۰ \\ ۹۰ \\ ۰ \end{matrix}\right.$ و $P\left|\begin{matrix} ۹۰ \\ ۰ \\ ۹۰ \end{matrix}\right.$ مشخص می‌شوند.

$$a_A = a_{\overset{\Delta}{ABC}} - a_{\overset{\Delta}{MNP}} = \frac{۱۸۰^۲ \times \sqrt{۳}}{۲} - \frac{۹۰^۲ \times \sqrt{۳}}{۲} = \frac{۳ \times ۹۰^۲ \times \sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{\frac{۳ \times ۹۰^۲ \times \sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۴ \times ۹۰^۲ \times \sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۳}{۴}$$

مسأله‌ی ۵. دو نفر قرار گذاشته‌اند که بین ساعت‌های ۷ و ۸ صبح در آزمایشگاهی حاضر شوند. هر کدام زودتر رسید، فقط ۶ دقیقه منتظر دیگری باشد و سپس کار خود را شروع کند. با کدام احتمال این دو نفر قبل از شروع کار یکدیگر را ملاقات می‌کنند؟

حل: این مسأله که به صورت تست در کنکور سراسری ۸۴ـ۸۳ طرح شده بود، شبیه به مسأله‌ی ملاقات بهزاد و جمشید است. اگر x و y را زمان رسیدن این دو نفر به آزمایشگاه در نظر بگیریم و ساعت ۷ صبح را مبدأ (زمان صفر) فرض کنیم، خواهیم داشت:

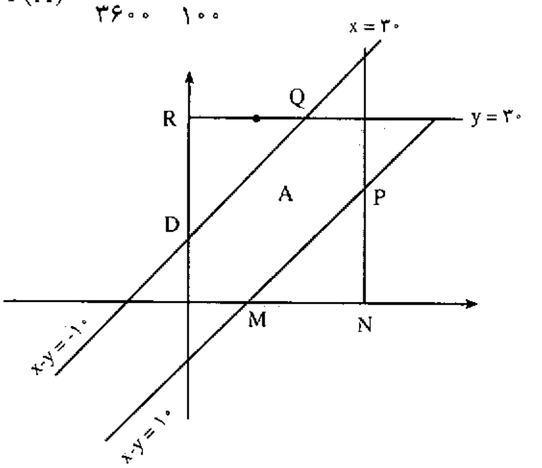
$$S = \left\{(x,y) \middle| x,y \in R, ۰ \le x \le ۶۰, ۰ \le y \le ۶۰\right\}$$

$$A = \left\{(x,y) \in S \middle| |x-y| < ۶\right\}$$

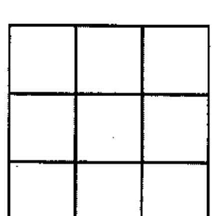
$$a_A = a_S - (S_{MNP} + S_{QRt})$$

$$\Rightarrow a_A = ۳۶۰۰ - (۲ \times \frac{۵۴ \times ۵۴}{۲}) = ۶۸۴$$

$$P(A) = \frac{۶۸۴}{۳۶۰۰} = \frac{۱۹}{۱۰۰}$$

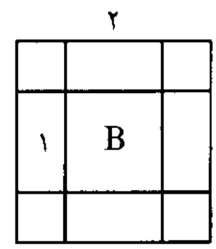


مسأله‌ی ۶. سکه‌ای به شعاع ۰/۵ سانتی‌متر را روی صفحه‌ی شطرنجی شکل زیر که هر ضلع آن ۶ سانتی‌متر است، پرتاب کرده‌ایم. احتمال این که سکه درون مربع‌های سفید قرار گیرد، کدام است؟ (این مسأله نیز به صورت تست در کنکور سراسری ۸۴ـ۸۳ طرح شده بود.)



حل: ابتدا احتمال آن را حساب می‌کنیم که سکه‌ای به شعاع ۰/۵ سانتی‌متر به تمامی درون مربعی به شعاع ۲ سانتی‌متر قرار بگیرد. در این حالت باید فاصله‌ی مرکز سکه

تا محیط مربع بیش‌تر از ۵/۰ سانتی باشد. یعنی مطابق شکل زیر باید مرکز سکه داخل مربعی به ضلع ۱ قرار گیرد که احتمال آن برابر است با:



$$P(B) = \frac{a_B}{a_S} = \frac{۱}{۴}$$

پس $\frac{۱}{۴}$ احتمال دارد، سکه به تمامی داخل هر یک از مربع‌ها قرار گیرد. تعداد مربع‌های سفید ۵ عدد است که احتمال قرار گرفتن در مربع‌های سفید نیز $\frac{۵}{۹}$ می‌شود. یعنی احتمال این که سکه داخل مربع سفید بیفتد و به تمامی داخل آن واقع شود، برابر است با:

$$P(A) = \frac{۱}{۴} \times \frac{۵}{۹} = \frac{۵}{۳۶}$$

به دلیل گستردگی بحث و مسائل متنوعی که در فضاهای پیوسته مطرح هستند، ادامه‌ی طرح و حل مسأله احتمال پیوسته را به شماره‌ی بعدی موکول می‌کنیم. پس تا بعد.

معماهای فکری و منطقی

A، B، M، و S، نام‌های چهار نفر هستند که در طبقات متفاوت یک ساختمان ۱۸ طبقه دفتر دارند. یکی از آن‌ها حسابدار، یکی معمار، یکی دندانپزشک، و یکی هم وکیل دادگستری است.

دفتر A بالاتر از دفتر M است، گرچه پائین‌تر از دفتر S قرار دارد.

دفتر B زیر دفتر دندانپزشک است.

دفتر S پنج بار بالاتر از دفتر وکیل دادگستری است.

اگر قرار باشد معمار دو طبقه بالاتر برود، در نیمه راه دفترهای دندانپزشک و حسابدار واقع می‌شود، و اگر دفترش را نیم فاصله پائین ببرد، در نیمه راه دفترهای دندانپزشک و وکیل دادگستری قرار می‌گیرد.

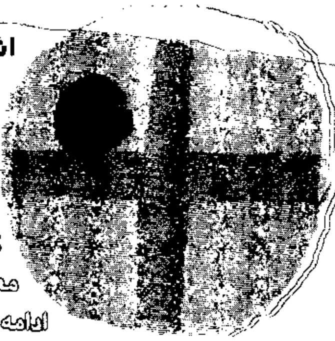
در این ساختمان خاص طبقه‌ی همکف به مغازه‌های گوناگون اختصاص یافته است و شامل هیچ دفتری نیست. در نتیجه، تا آن‌جا که به دفترهای واقع در ساختمان مربوط است، طبقه‌ی اول، طبقه‌ی بلافاصله بالای طبقه‌ی همکف است.

حرفه‌ی هر شخص چیست، و محل دفتر هرکدام در چه طبقه‌ای است؟

میرشهرام صدر

نامعادله‌های گنگ

اشاره: از زمان فیثاغوریان، عددهای غیرگویا را اصم یا گنگ نامیدند. دلیل این نام‌گذاری آن بود که آن‌ها نمی‌توانستند مقدار دقیق این عددها را مانند عددهای گویا مشخص کنند. در شماره‌ی قبل درباره‌ی معادله‌های گنگ بحث کردیم. اینک در ادامه‌ی مطلب، نامعادله‌های گنگ را در پی می‌آوریم.



نامعادله‌های گنگ را به صورت‌های کلی زیر تقسیم‌بندی و روش حل هر کدام را جداگانه بررسی می‌کنیم.

۱. برای حل نامعادله‌ی $\sqrt[2n]{p(x)} < q(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ که در آن $p(x)$ و $q(x)$ عبارت‌های جبری گویا برحسب متغیر x هستند، اگر در حالت خاص $q(x)$ همواره منفی باشد، مجموعه جواب نامعادله تهی است. در غیر این صورت، باید دستگاه نامعادله‌های زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} p(x) \geq 0 \\ q(x) > 0 \\ \sqrt[2n]{p(x)} < q(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p(x) \geq 0 \\ q(x) > 0 \\ p(x) < \left(q(x)\right)^{2n} \end{cases}$$

مثال: نامعادله‌های زیر را حل کنید:

۱) $\sqrt{x-3} < -x^2 + x - 4$ ‏ ۲) $\dfrac{1}{\sqrt{3-x}} > \dfrac{1}{x-2}$

حل:

۱. چون سمت راست نابرابری همواره منفی است، بنابراین طرف چپ نابرابری که مثبت است، نمی‌تواند از مقدار منفی کوچک‌تر باشد. در نتیجه، مجموعه جواب نامعادله تهی است.

$$-x^2 + x - 4 = 0 \; ; \quad \begin{cases} \Delta = -15 < 0 \\ a = -1 < 0 \end{cases}$$

۲. $$\frac{1}{\sqrt{3-x}} > \frac{1}{x-2} \Rightarrow \sqrt{3-x} < x-2 \Rightarrow \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x-2 > 0 \\ \sqrt{3-x} < x-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x > 2 \\ 3-x < (x-2)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (2,3] \\ x \in \left(-\infty, \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}, \infty\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, 3\right)$$

۲. برای حل نامعادله‌ی $\sqrt[2n]{p(x)} \leq q(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ که در آن $p(x)$ و $q(x)$ عبارت‌های جبری گویا برحسب متغیر x هستند، اگر در حالت خاص $q(x)$ همواره منفی باشد، مجموعه جواب نامعادله تهی است. در غیر این صورت، باید

دستگاه زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} p(x)\ge 0\\ q(x)\ge 0\\ \sqrt[2n]{p(x)}\le q(x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p(x)\ge 0\\ q(x)\ge 0\\ p(x)\le\left[q(x)\right]^{2n}\end{cases}$$

مثال: نامعادله‌های زیر را حل کنید:

۱) $\sqrt{x+78}\le x+6$ ۲) $\sqrt{x^2+3x+3}\le 2x+1$

حل:

۱.

$$\sqrt{x+78}\le x+6\Rightarrow\begin{cases}x+78\ge 0\\ x+6\ge 0\\ \sqrt{x+78}\le x+6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge -78\\ x\ge -6\\ x+78\le x^2+12x+36\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x\ge -6\\ x\in(-\infty,-14]\cup[3,\infty)\end{cases}\Rightarrow D=[3,\infty)$$

۲.

$$\sqrt{x^2+3x+3}\le 2x+1\Rightarrow\begin{cases}x^2+3x+3\ge 0\\ 2x+1\ge 0\\ x^2+3x+3\le(2x+1)^2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ x\ge -\frac{1}{2}\\ 3x^2+x-2\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge -\frac{1}{2}\\ x\in(-\infty,-1]\cup[\frac{2}{3},\infty)\end{cases}\Rightarrow D=[\frac{2}{3},\infty)$$

۳. برای حل نامعادله‌ی $\sqrt[2n]{p(x)}>q(x)$ $(n\in\mathbb{N})$ که در آن $p(x)$ و $q(x)$ عبارت‌های جبری گویا برحسب متغیر x هستند، دو حالت زیر را خواهیم داشت:

حالت اول: اگر عبارت $q(x)$ منفی باشد، یعنی: $q(x)<0$، در این صورت هر x که به ازای آن عبارت $\sqrt[2n]{p(x)}$ با معنا باشد، جواب نامعادله است. یعنی در این حالت، مجموعه جواب نامعادله از حل دستگاه زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases}q(x)<0\\ p(x)\ge 0\end{cases}\qquad(1)$$

حالت دوم: اگر $q(x)\ge 0$، در این صورت مجموعه جواب نامعادله از حل دستگاه زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases}q(x)\ge 0\\ p(x)\ge 0\\ p(x)>[q(x)]^{2n}\end{cases}\qquad(2)$$

اکنون مجموعه جواب نامعادله‌ی $\sqrt[2n]{p(x)}>q(x)$ از اجتماع مجموعه جواب‌های دو دستگاه (۱) و (۲) به دست می‌آید.

مثال: نامعادله‌های زیر را حل کنید:

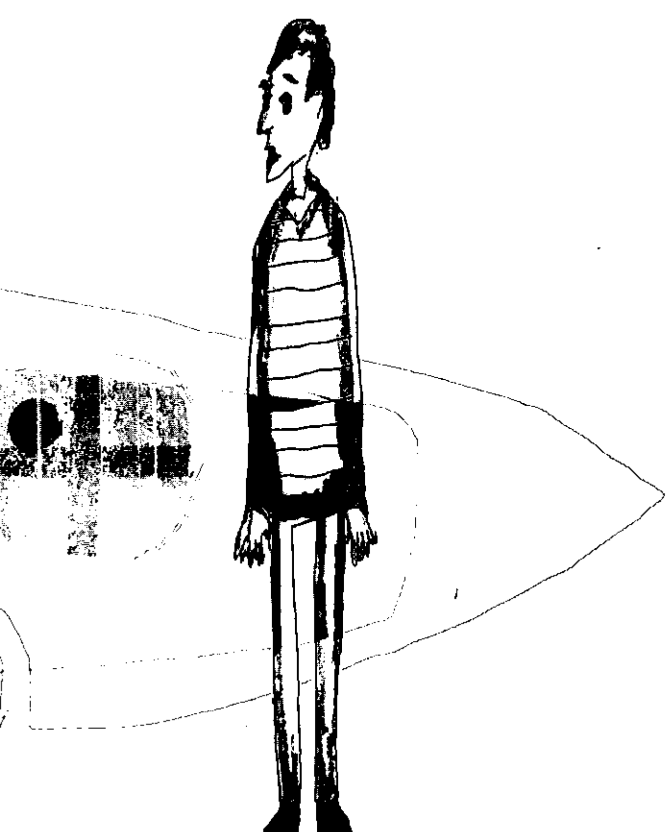
۱) $\sqrt{x^2-4x}>x-3$ ۲) $\sqrt{x^2+x-2}>x$

حل:

۱. $\sqrt{x^2-4x}>x-3$

حالت اول: اگر $x-3<0$، خواهیم داشت:

$$\begin{cases}x-3<0\\ x^2-4x\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<3\\ x\in(-\infty,0]\cup[4,\infty)\end{cases}\Rightarrow D_1=(-\infty,0]$$



حالت دوم: اگر $x-3\ge 0$ ، داریم:

$$\begin{cases} x-3\ge 0\\ x^2-4x\ge 0\\ x^2-4x>(x-3)^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>3\\ x\in(-\infty,0]\cup[4,\infty) \Rightarrow D_2=(\frac{9}{2},\infty)\\ x>\frac{9}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow D=D_1\cup D_2=(-\infty,0]\cup(\frac{9}{2},\infty)$$

۲. $\sqrt{x^2+x-2}>x$

حالت اول: اگر $x<0$، داریم:

$$\begin{cases} x<0\\ x^2+x-2\ge 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in(-\infty,0)\\ x\in(-\infty,-2]\cup[1,\infty)\end{cases} \Rightarrow D_1=(-\infty,-2]$$

حالت دوم: اگر $x\ge 0$ ، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x\ge 0\\ x^2+x-2\ge 0\\ x^2+x-2>x^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in[0,\infty)\\ x\in(-\infty,-2]\cup[1,\infty) \Rightarrow D_2=(2,\infty)\\ x\in(2,\infty)\end{cases}$$

$$\Rightarrow D=D_1\cup D_2=(-\infty,-2]\cup(2,\infty)$$

۴. برای یافتن مجموعه جواب نامعادله‌ی $\sqrt[2n]{p(x)}\ge q(x)$ $(n\in\mathbb{N})$ که در آن $p(x)$ و $q(x)$ عبارت‌های جبری گویا برحسب متغیر x هستند، کافی است اجتماع مجموعه جواب‌های دو دستگاه زیر را به دست آوریم:

$$(1)\ \begin{cases} q(x)<0\\ p(x)\ge 0\end{cases} \qquad \begin{cases} q(x)\ge 0\\ p(x)\ge 0\\ p(x)\ge[q(x)]^{2n}\end{cases}\ (2)$$

تذکر: در صورتی که در حالت خاص $q(x)$ همواره مثبت یا منفی باشد، برای یافتن مجموعه جواب نامعادله‌های حالت‌های ۳ یا ۴ کافی است، یکی از دو دستگاه (۱) یا (۲) را حل کنیم.

مثال: نامعادله‌های زیر را حل کنید:

۱) $\sqrt{x^2-2x}\ge 4-x$ ۲) $\sqrt{x+4}>-x^2-1$

حل:

۱. $\sqrt{x^2-2x}\ge 4-x$

حالت اول: اگر $4-x<0$ ، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} 4-x<0\\ x^2-2x\ge 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in(4,\infty)\\ x\in(-\infty,0]\cup[2,\infty)\end{cases} \Rightarrow D_1=(4,\infty)$$

حالت دوم: اگر $4-x\ge 0$ ، داریم:

$$\begin{cases} 4-x\ge 0\\ x^2-2x\ge 0\\ x^2-2x\ge(4-x)^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in(-\infty,4]\\ x\in(-\infty,0]\cup[2,\infty) \Rightarrow D_2=[\frac{8}{3},4]\\ x\in[\frac{8}{3},\infty)\end{cases}$$

$$\Rightarrow D=D_1\cup D_2=[\frac{8}{3},\infty)$$

۲. $\sqrt{x+4}>-x^2-1$

چون در این نامعادله همواره به ازای هر $x\in\mathbb{R}$، داریم $-x^2-1<0$ ، بنابراین کافی است فقط دستگاه زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} -x^2-1<0\\ x+4\ge 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R}\\ x\in[-4,\infty)\end{cases} \Rightarrow D=[-4,\infty)$$

۵. برای حل نامعادله‌های: $(n \in \mathbb{N})$

$\sqrt[2n+1]{p(x)} > q(x)$ ، $\sqrt[2n+1]{p(x)} < q(x)$ ،

$\sqrt[2n+1]{p(x)} \ge q(x)$ ، $\sqrt[2n+1]{p(x)} \le q(x)$ ،

$\sqrt[2n+1]{p(x)} > \sqrt[2n+1]{q(x)}$ ، $\sqrt[2n+1]{p(x)} < \sqrt[2n+1]{q(x)}$ ،

$\sqrt[2n+1]{p(x)} \ge \sqrt[2n+1]{q(x)}$ و $\sqrt[2n+1]{p(x)} \le \sqrt[2n+1]{q(x)}$

که در آن‌ها، $p(x)$ و $q(x)$ عبارت‌های جبری گویا برحسب x هستند، برای مثال $\sqrt[2n+1]{p(x)} \le q(x)$ ، کافی است دو طرف نامعادله را به توان $2n+1$ برسانیم، یعنی $p(x) \le [q(x)]^{2n+1}$. سپس مجموعه جواب‌های نامعادله را به دست می‌آوریم.

مثال: نامعادله‌های زیر را حل کنید:

۱) $\sqrt[3]{x+2} \le -5$ ۲) $\sqrt[5]{x^2+1} \ge \sqrt[5]{3-x^3}$

حل:

۱.

$$\sqrt[3]{x+2} \le -5 \Rightarrow x+2 \le -125 \Rightarrow x \le -127$$
$$\Rightarrow D = (-\infty, -127]$$

۲.

$$\sqrt[5]{x^2+1} \ge \sqrt[5]{3-x^3} \Rightarrow x^2+1 \ge 3-x^3$$
$$\Rightarrow (x^3-1)+(x^2-1) \ge 0 \Rightarrow (x-1)(x^2+2x+2) \ge 0$$
$$\Rightarrow D = [1, \infty)$$

۶. برای حل نامعادله‌ی $\sqrt[2n]{p(x)} < \sqrt[2n]{q(x)}$ $(n \in \mathbb{N})$ که در آن $p(x)$ و $q(x)$ عبارت‌های جبری گویا بر حسب متغیر x هستند، به صورت زیر مجموعه جواب‌ها را می‌یابیم:

$$\begin{cases} p(x) \ge 0 \\ q(x) \ge 0 \\ \sqrt[2n]{p(x)} < \sqrt[2n]{q(x)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p(x) \ge 0 \\ q(x) \ge 0 \\ p(x) < q(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p(x) \ge 0 \\ p(x) < q(x) \end{cases}$$

بنابراین، برای حل این گونه نامعادله‌ها کافی است، مجموعه جواب‌های دستگاه $\begin{cases} p(x) \ge 0 \\ p(x) < q(x) \end{cases}$ را به دست آوریم.

به طور مشابه، برای حل نامعادله‌ی $\sqrt[2n]{p(x)} \le \sqrt[2n]{q(x)}$ $(n \in \mathbb{N})$ ، کافی است مجموعه جواب دستگاه $\begin{cases} p(x) \ge 0 \\ p(x) \le q(x) \end{cases}$ را به دست آوریم.

مثال: نامعادله‌های زیر را حل کنید:

۱) $\sqrt{4x-x^2} < \sqrt{4-x}$ ۲) $\sqrt{x-1} \le \sqrt{x+1}$

حل:

۱.

$$\sqrt{4x-x^2} < \sqrt{4-x} \Rightarrow \begin{cases} 4-x^2 \ge 0 \\ 4-x^2 < 4-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [-2,2] \\ x \in (-\infty,0) \cup (1,\infty) \end{cases}$$
$$\Rightarrow D = [-2,0) \cup (1,2]$$

۲.

$$\sqrt{x-1} \le \sqrt{x+1} \Rightarrow \begin{cases} x-1 \ge 0 \\ x-1 \le x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [1,\infty] \\ x \in (-\infty,\infty) \end{cases}$$
$$\Rightarrow D = [1, \infty)$$

۷. برای حل نامعادله‌ی $\sqrt[2n]{p(x)} > \sqrt[2n]{q(x)}$ $(n \in \mathbb{N})$ ، که در آن $p(x)$ و $q(x)$ عبارت‌های جبری گویا برحسب متغیر x هستند، به صورت زیر مجموعه جواب را می‌یابیم:

$$\begin{cases} p(x) \ge 0 \\ q(x) \ge 0 \\ \sqrt[2n]{p(x)} > \sqrt[2n]{q(x)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p(x) \ge 0 \\ q(x) \ge 0 \\ p(x) > q(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q(x) \ge 0 \\ p(x) > q(x) \end{cases}$$

بنابراین، برای حل این گونه نامعادله‌ها کافی است، مجموعه جواب دستگاه $\begin{cases} q(x) \ge 0 \\ p(x) > q(x) \end{cases}$ را به دست آوریم.

به طور مشابه، برای حل نامعادله‌ی $\sqrt[2n]{p(x)} \le \sqrt[2n]{q(x)}$ $(n \in \mathbb{N})$ ، کافی است مجموعه جواب دستگاه $\begin{cases} q(x) \ge 0 \\ p(x) \le q(x) \end{cases}$ را به دست آوریم.

مثال: نامعادله‌ی زیر را حل کنید:

$$\sqrt[4]{x+2} > \sqrt[4]{8-x^2}$$

حل:

$$\sqrt[4]{x+2} > \sqrt[4]{8-x^2} \Rightarrow \begin{cases} 8-x^2 \ge 0 \\ x+2 > 8-x^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x \in [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}] \\ x \in (-\infty,-3) \cup (2,\infty) \end{cases} \Rightarrow D = [2, 2\sqrt{2}]$$

۸. برای حل نامعادله‌های

$$\frac{\sqrt[n]{p(x)}}{q(x)} > f(x), \frac{\sqrt[n]{p(x)}}{q(x)} \le f(x), \frac{\sqrt[n]{p(x)}}{q(x)} \ge f(x)$$

و $\frac{\sqrt[n]{p(x)}}{q(x)} < f(x)$ $(1 < n \in \mathbb{N})$، که در آن‌ها $p(x)$، $q(x)$ و $f(x)$ چندجمله‌ای‌های برحسب متغیر x هستند، برای مثال $\frac{\sqrt[n]{p(x)}}{q(x)} \le f(x)$، ابتدا مجموعه جواب دستگاه‌های زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} q(x) \ge 0 \\ \sqrt[n]{p(x)} \le f(x).q(x) \end{cases} (1) \; ; \; \begin{cases} q(x) < 0 \\ \sqrt[n]{p(x)} \ge f(x).q(x) \end{cases} (2)$$

سپس مجموعه جواب نامعادله‌ی $\frac{\sqrt[n]{p(x)}}{q(x)} \le f(x)$ از اجتماع مجموعه جواب‌های دو دستگاه (۱) و (۲) به دست می‌آید.

مثال. مجموعه جواب نامعادله‌های زیر را بیابید:

۱) $\frac{\sqrt{15-x}}{3-x} \ge 1$ ۲) $\frac{\sqrt{52-x^2}}{2-x} \le 1$

حل:

۱. (الف) $\frac{\sqrt{15-x}}{3-x} \ge 1 \Rightarrow \begin{cases} 3-x \ge 0 \\ \sqrt{15-x} \ge 3-x \end{cases}$

(ب) $\begin{cases} 3-x < 0 \\ \sqrt{15-x} \le 3-x \end{cases}$

برای حل دستگاه (الف)، داریم:

$$\begin{cases} 3-x \ge 0 \\ 15-x \ge 0 \\ 15-x \ge (3-x)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le 3 \\ x \le 15 \\ x^2-5x-6 \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty,3] \\ x \in (-\infty,15] \\ x \in [-1,6] \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_1 = [-1,3]$$

مجموعه جواب دستگاه (ب) تهی است. بنابراین $D_2 = \varnothing$. درنتیجه:

$$D = D_1 \cup D_2 = [-1,3]$$

۲.

(الف) $\frac{\sqrt{52-x^2}}{2-x} \le 1 \Rightarrow \begin{cases} 2-x \ge 0 \\ \sqrt{52-x^2} \le 2-x \end{cases}$

(ب) $\begin{cases} 2-x < 0 \\ \sqrt{52-x^2} \ge 2-x \end{cases}$

برای حل دستگاه (الف) داریم:

$$\begin{cases} 2-x \ge 0 \\ 52-x^2 \ge 0 \\ 52-x^2 \le (2-x)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le 2 \\ -2\sqrt{13} \le x \le 2\sqrt{13} \\ 2x^2-4x-48 \ge 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty,2] \\ x \in [-2\sqrt{13}, 2\sqrt{13}] \\ x \in (-\infty,-4] \cup [6,\infty) \end{cases} \Rightarrow D_1 = [-2\sqrt{13},-4]$$

دستگاه (ب) را به صورت زیر حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} 2-x < 0 \\ 52-x^2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ -2\sqrt{13} \le x \le 2\sqrt{13} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in (2,\infty) \\ x \in [-2\sqrt{13}, 2\sqrt{13}] \end{cases} \Rightarrow D_2 = (2, 2\sqrt{13}]$$

$$\Rightarrow D = D_1 \cup D_2 = [-2\sqrt{13},-4] \cup (2, 2\sqrt{13}]$$

۹. برای حل نامعادله‌های گنگ که صورت کلی آن‌ها به غیر از هشت حالت قبل باشند، ابتدا دامنه‌ی تعریف نامعادله را به دست می‌آوریم. برای این منظور کافی است، دستگاه نامعادله‌هایی را حل کنیم که در آن عبارت زیر هر رادیکال با فرجه‌ی زوج را نامنفی قرار دهیم و در صورتی که رادیکال با فرجه‌ی زوج در مخرج کسر باشد، باید عبارت

زیر رادیکال را مثبت قرار دهیم، سپس نامعادله را حل کنیم.

مثال: نامعادله‌های زیر را حل کنید:

۱) $\sqrt{25-x^2}+\sqrt{x^2+7x}>3$

۲) $\dfrac{9x^2-4}{\sqrt{5x^2-1}}\le 3x+2$

۳) $\sqrt{4-\sqrt{1-x}}-\sqrt{2-x}\ge 0$

۴) $\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{x-3}+\sqrt{x-3}>\dfrac{5}{\sqrt{x-3}}$

حل:

۱. $\sqrt{25-x^2}+\sqrt{x^2+7x}>3$

(دامنه‌ی تعریف نامعادله):

$$\begin{cases}25-x^2\ge 0\\ x^2+7x\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in[-5,5]\\ x\in(-\infty,-7]\cup[0,\infty)\end{cases}\Rightarrow D_1=[0,5]$$

$$\begin{cases}x\in[0,5]\\ (\sqrt{25-x^2}+\sqrt{x^2+7x})^2>3\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x\in[0,5]\\ 25-x^2+2\sqrt{25-x^2}.\sqrt{x^2+7x}+x^2+7x>9\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x\in[0,5]\\ 2\sqrt{(25-x^2)(x^2+7x)}>-7x-16\end{cases}$$

چون نامعادله‌ی آخر، به ازای $x\in[0,5]$ همواره به یک نابرابری درست تبدیل می‌شود، یعنی عبارت سمت راست نامعادله به ازای $x\in[0,5]$ همواره منفی و عبارت سمت چپ نامعادله به ازای $x\in[0,5]$ همواره نامنفی است، درنتیجه $D=[0,5]$.

۲.

$$\frac{9x^2-4}{\sqrt{5x^2-1}}\le 3x+2\Rightarrow\frac{(3x-2)(3x+2)}{\sqrt{5x^2-1}}\le 3x+2$$

$$5x^2-1>0\Rightarrow x^2>\frac{1}{5}\Rightarrow D_1=(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{5}})\cup(\frac{1}{\sqrt{5}},\infty)$$

برای حل نامعادله‌ی بالا، دو حالت ذیل را درنظر می‌گیریم:

حالت اول:

$$\begin{cases}x\in(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{5}})\cup(\frac{1}{\sqrt{5}},\infty)\\ 3x+2\ge 0\\ \dfrac{3x-2}{\sqrt{5x^2-1}}\le 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in[-\frac{2}{3},-\frac{1}{\sqrt{5}})\cup(\frac{1}{\sqrt{5}},\infty)=A\\ 3x-2\le\sqrt{5x^2-1}\end{cases}$$

چون عبارت سمت راست این نابرابری به ازای هر $x\in A$ مثبت است، بنابراین برای به دست آوردن مجموعه جواب این دستگاه کافی است، اجتماع مجموعه جواب‌های دو دستگاه زیر را بیابیم:

(الف) $\begin{cases}x\in A\\ 3x-2<0\end{cases}\Rightarrow D_2=[-\frac{2}{3},-\frac{1}{\sqrt{5}})\cup(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{3})$

(ب) $\begin{cases}x\in A\\ 3x-2\ge 0\\ (3x-2)^2\le 5x^2-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in[\frac{2}{3},\infty)\\ x\in[\frac{1}{2},\frac{5}{2}]\end{cases}\Rightarrow D_3=[\frac{2}{3},\frac{5}{2}]$

$$D'=D_2\cup D_3=[-\frac{2}{3},-\frac{1}{\sqrt{5}})\cup(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{5}{2}]$$

حالت دوم:

$$\begin{cases}x\in(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{5}})\cup(\frac{1}{\sqrt{5}},\infty)\\ 3x+2<0\\ \dfrac{3x-2}{\sqrt{5x^2-1}}\ge 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in(-\infty,\frac{2}{3})\\ 3x-2\ge\sqrt{5x^2-1}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x\in(-\infty,-\frac{2}{3})\\ 3x-2>0\\ (3x-2)^2\ge\sqrt{5x^2-1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in\varnothing\\ 4x^2-12x+5\ge 0\end{cases}\Rightarrow D''=\varnothing$$

$$\Rightarrow D=D'\cup D''\Rightarrow D=[-\frac{2}{3},-\frac{1}{\sqrt{5}})\cup(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{5}{2}]$$

۳. $\sqrt{4-\sqrt{1-x}}-\sqrt{2-x}\ge 0\Rightarrow\sqrt{4-\sqrt{1-x}}\ge\sqrt{2-x}$

دامنه‌ی تعریف نامعادله :

$$\begin{cases} 1-x \ge 0 \\ 4-\sqrt{1-x} \ge 0 \\ 2-x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le 1 \\ \sqrt{1-x} \le 4 \Rightarrow D_1 = [-15,1] \\ x \le 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in [-15,1] \\ \sqrt{4-\sqrt{1-x}} \ge \sqrt{2-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [-15,1] \\ \sqrt{1-x} \le x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [-15,1] \\ x+2 \ge 0 \\ (1-x) \le (x+2)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in [-2,1] \\ x^2+5x+3 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow D = [\frac{-5+\sqrt{13}}{2}, 1]$$

۴.

$$\frac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{x-3} > \frac{5}{\sqrt{x-3}} \Rightarrow \frac{\sqrt{x^2-16}+|x-3|}{\sqrt{x-3}} > \frac{5}{\sqrt{x-3}}$$

دامنه‌ی تعریف نامعادله :

$$\begin{cases} x^2-16 \ge 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty,-4] \cup [4,\infty) \\ x \in (3,\infty) \end{cases} \Rightarrow D_1 = [4,\infty)$$

چون به ازای هر $x \in [4,\infty)$ عبارت‌های $|x-3|$ و $\sqrt{x-3}$ مثبت هستند، بنابراین داریم :

$$\begin{cases} x \in [4,\infty) \\ \sqrt{x^2-16}+x-3 > 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [4,\infty] \\ \sqrt{x^2-16} > 8-x \end{cases}$$

برای به‌دست آوردن مجموعه جواب‌های این دستگاه، باید اجتماع مجموعه جواب‌های دو دستگاه (الف) و (ب) را بیابیم :

(الف) $\begin{cases} x \in [4,\infty) \\ 8-x < 0 \end{cases} \Rightarrow D_2 = [8,\infty);$

(ب) $\begin{cases} x \in [4,\infty) \\ 8-x \ge 0 \\ x^2-16 > (8-x)^2 \end{cases} \Rightarrow D_3 = [5,8)$

$$\Rightarrow D = D_2 \cup D_3 \Rightarrow D = (5,\infty)$$

تمرین:

نامعادله‌های زیر را حل کنید:

۱) $4-x \le \sqrt{x^2-2x}$ ۲) $\sqrt{x^2+x} > 1-2x$

۳) $\sqrt{\frac{x-2}{1-2x}} > -1$ ۴) $\sqrt{4-x^2+\frac{|x|}{x}} \ge 0$

۵) $\sqrt{x+1} > \sqrt{3-x}$ ۶) $\sqrt{24-10x} \ge 3-4x$

۷) $x > \sqrt{1-x}$ ۸) $(x-1)\sqrt{x^2-x-2}$

۹) $\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{4}} < \frac{1}{x}-\frac{1}{2}$ ۱۰) $\sqrt{24-5x} \le x$

۱۱) $\sqrt{x+3} > \sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}$

۱۲) $\frac{x-2}{\sqrt{2x-3}-1} < 4$ ۱۳) $\frac{2-\sqrt{x+3}}{x-1} > -\frac{1}{3}$

۱۴) $\sqrt{x+2}-\sqrt{5x} > 4x-2$

۱۵) $\sqrt{x+1}+1 < 4x^2+\sqrt{3x}$

۱۶) $\frac{\sqrt{24+2x-x^2}}{x}$ ۱۷) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{8-x} > 3$

۱۸) $5\sqrt[3]{x-1} < 2\sqrt[3]{(x-1)^2}$ ۱۹) $\sqrt{10-\sqrt[3]{28-x}} < 3$

۲۰) $2\left(x+\sqrt{x^2+4x+3}\right) < 3\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}-2\right)$

۱ـ۲ . چهار ضلعی‌های محاطی

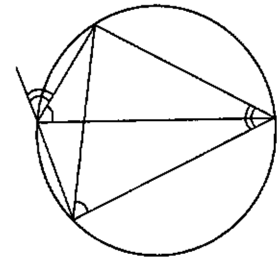
حل مسائل مسابقه‌ای در هندسه‌ی مسطحه، اغلب به اثبات برابری بعضی از زوایا می‌انجامد. در این مورد، یکی از راه‌های سودمند، جست‌وجوی چهارضلعی‌های محاطی، به علت دو ویژگی این چهار ضلعی‌هاست: زاویه‌ی حاصل از یک ضلع و یک قطر آن برابر زاویه‌ی حاصل از ضلع مقابل و قطر دیگر آن است، و هر زاویه‌ی آن، مکمل زاویه‌ی مقابل آن است (شکل ۱ـ۲ـ۱ را ملاحظه کنید). در هر دو حالت، برابری‌ها، به علت زوایای محاطی مقابل به کمان‌های یکسان، برقرارند.

با راهیان المپیادهای ریاضی ۲

غلامرضا یاسی‌پور

اشاره

در شماره‌های قبل به حل مسائلی درباره‌ی مثلث پرداختیم، اینک در ادامه بحث، مسائلی را درباره‌ی چهارضلعی‌ها بیان و اثبات خواهیم کرد.



شکل ۱ـ۲ـ۱

مسائلی را که در این مورد انتخاب کرده‌ایم، می‌توان با استفاده از این دو ویژگی حل کرد. مثال زیر، یکی از این موارد است.

فرض می‌کنیم، AB وتری در یک دایره و P نقطه‌ای بر این دایره باشد. نیز فرض می‌کنیم، Q تصویر P بر AB و R و S تصویرهای P بر مماس‌های بر دایره A و B باشند. ثابت کنید که PQ واسطه‌ی هندسی PR و PS است.

ثابت می‌کنیم، مثلث‌های PRQ و PQS مشابه‌اند. این موضوع، مستلزم آن است که:

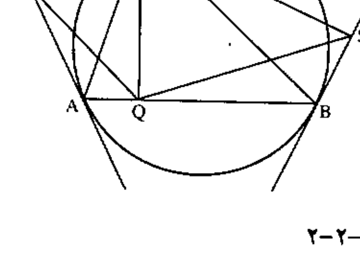
$$PR/PQ=PQ/PS$$

و در نتیجه:

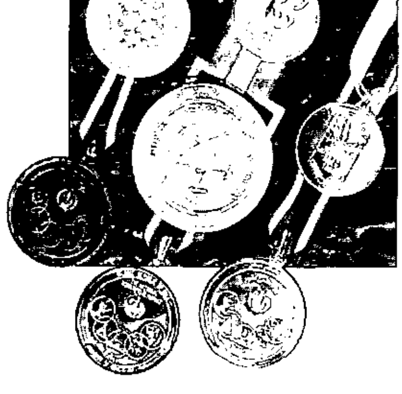
$$PQ^2 = PR.PS$$

چهار ضلعی‌های PRAQ و PQBS محاطی‌اند، زیرا هریک از آن‌ها دو زاویه‌ی قائمه‌ی مقابل دارند (شکل ۱ـ۲ـ۲ را ملاحظه کنید). در چهارضلعی اول: $\angle PRQ = \angle PAQ$، و در چهارضلعی دوم: $\angle PQS = \angle PBS$. بنابر زوایای محاطی، $\angle PAQ$ و $\angle PBS$ برابرند و نتیجه می‌شود که: $\angle PRQ = \angle PQS$. استدلالی مشابه نشان می‌دهد که: $\angle PQR = \angle PSQ$.

این موضوع نشان می‌دهد که مثلث‌های PRQ و PQS مشابه‌اند و نتیجه‌ی مورد نظر به دست می‌آید.



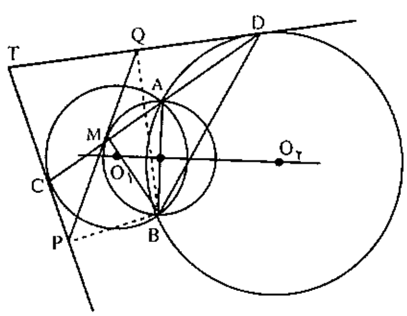
شکل ۱ـ۲ـ۲



مسأله ی منتخب دوم، از کتاب "Ti teica"، با نام Probleme de Geometrie (مسائلی در هندسه) انتخاب شده است.

فرض می‌کنیم، A و B نقاط مشترک دو دایره باشند. خط گذرنده از A دو دایره را در C و D قطع می‌کند. فرض می‌کنیم، P، Q تصویرهای B بر مماس‌های بر دو دایره در C و D باشند. ثابت کنید PQ مماس بر دایره‌ی به قطر AB است.

بعد از رسم شکل (شکل ۱ـ۲ـ۳)، یکی از حدس‌های سودمند این است که نقطه‌ی تماس بر CD قرار دارد. بنابراین، تقاطع دایره‌ی به قطر AB با خط CD را با M نمایش می‌دهیم و ثابت می‌کنیم که PQ در M بر این دایره مماس است.



شکل ۱ـ۲ـ۳

اثبات را در حالتی انجام می‌دهیم که شکل مورد بحث، شکل ترسیم شده باشد؛ حالت‌های دیگر کاملاً مشابه این حالت هستند. فرض می‌کنیم، T تقاطع مماس‌های در C و D باشد. زوایای ABD و ADT برابرند، زیرا هر دو به اندازه‌ی نصف کمان AD هستند. به همین ترتیب، زوایای ABC و ACT برابرند، زیرا به اندازه‌ی نصف کمان AC هستند. این موضوع مستلزم آن است که:

$$\angle CBD = \angle ABD + \angle ABC = \angle ADT + \angle ACT$$
$$= 180^\circ - \angle CTD$$

که در آن، آخرین برابری از مجموع زوایای مثلث TCD

نتیجه می‌شود. بنابراین، چهارضلعی TCBD محاطی است. چهارضلعی TPBQ نیز محاطی است، زیرا دارای دو زاویه‌ی قائمه‌ی متقابل است. این موضوع، مستلزم آن است که:

$$\angle PBQ = 180^\circ - \angle CTD$$

به این ترتیب، $\angle PBQ = \angle DBC$، زیرا هردو زاویه‌ی CTD را به عنوان مکمل خود دارند. بنابراین، با تفریق زاویه‌ی CBQ خواهیم داشت:

$$\angle CBP = \angle QBD$$

چهارضلعی‌های BMCP و BMQD محاطی‌اند، زیرا:

$$\angle CMB = \angle CPB = \angle BQD = \angle DMB = 90^\circ$$

در نتیجه:

$$\angle CMP = \angle CBP = \angle QBD = \angle QMD$$

که نشان می‌دهد، M بر PQ واقع است. از این گذشته، در چهارضلعی دوری (محاطی) QMBD،

$$\angle MBD = 180^\circ - \angle MQD$$
$$= \angle QMD + \angle QDM = \angle QMD + \angle ABD$$

زیرا هم $\angle QDM$ هم $ABD >$ به اندازه‌ی نصف کمان AD هستند. از آن‌جا که:

$$\angle MBD = \angle MBA + \angle ABD$$

برابری فوق، مستلزم آن است که: $\angle QMD = \angle MBA$؛ در نتیجه، MQ بر دایره‌ی مورد بحث مماس است و مسأله حل می‌شود.

در ادامه، فهرستی از مسائلی به دست داده‌ایم که می‌توان با استفاده از ویژگی‌های چهارضلعی‌های محاطی آن‌ها را حل کرد.

۱. فرض می‌کنیم، $\angle AOB$ زاویه‌ای قائمه، M و N نقاطی به ترتیب واقع بر نیم‌خط‌های OA، OB و MNPQ مربعی چنان باشد که MN نقاط O و P را جدا کند. مکان هندسی مرکز مربع را هنگامی که M و N تغییر می‌کند، بیابید.

۲. نقطه‌ی درونی P در مستطیل ABCD چنان انتخاب شده است که:

$$\angle APD + \angle BPC = 180^\circ$$

مجموع زوایای $\angle DAP$ و $\angle BCP$ را بیابید.

۳. فرض می‌کنیم ABCD مستطیل و P نقطه‌ای متفاوت از رأس‌های آن، بر دایره‌ی محیطی آن باشد. نیز فرض می‌کنیم، X، Y، Z و W، به ترتیب، تصویرهای P بر AB، BC، CD، و DA باشند. ثابت کنید، یکی از نقاط X، Y، Z و W، محل تلاقی ارتفاعات مثلثی است که توسط سه نقطه‌ی دیگر ساخته می‌شود.

۴. ثابت کنید، چهار تصویر رأس A از مثلث ABC بر نیمسازهای درونی و برونی $\angle B$ و $\angle C$، بر یک خط راست واقع‌اند.

۵. فرض می‌کنیم، ABCD یک چهارضلعی محدب و چنان باشد که قطرهای AC و BD متعلق به آن متعامد باشند و P نقطه‌ی تلاقی‌شان باشد. ثابت کنید که انعکاس‌های P نسبت به AB، BC، CD و DA هم‌دور هستند.

۶. فرض می‌کنیم، B و C نقاط انتهایی و A نقطه‌ی میانی یک نیم‌دایره باشند. نیز فرض می‌کنیم، M نقطه‌ای واقع بر پاره‌خط AC و P و Q، به ترتیب پاهای عمودهای رسم شده از A و C بر خط BM باشند. ثابت کنید: $BP=PQ+QC$.

۷. نقاط E و F بر ضلع BC از چهارضلعی محدب ABCD مفروضند (E از F به B نزدیک‌تر است). می‌دانیم که $\angle BAE = \angle CDF$ و $\angle EAF = \angle FDE$. ثابت کنید: $\angle FAC = \angle EDB$.

۸. در مثلث ABC، $\angle A = 60^\circ$ و نیمسازهای BB' و CC' در I متقاطع هستند. ثابت کنید: $IB' = IC'$.

۹. فرض می‌کنیم، در مثلث ABC، I مرکز دایره‌ی محاطی داخلی باشد. ثابت کنید، مرکز دایره‌ی محیطی AIB بر CI واقع است.

۱۰. فرض می‌کنیم، ABC یک مثلث و D پای ارتفاع رسم شده از A باشد. نیز فرض می‌کنیم، E و F بر خطی گذرنده از D و چنان باشند که AE بر BE و AF بر CF عمود باشد، و E و F متفاوت از D باشند. نیز فرض می‌کنیم، M و N، به ترتیب، نقاط میانی پاره‌خط‌های BC و EF باشند. ثابت کنید، AN بر NM عمود است.

۱۱. فرض می‌کنیم، ABC مثلثی حادالزوایا، و T نقطه‌ای واقع در درون آن و چنان باشد که:

$\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA$

نیز فرض می‌کنیم، M، N و P، به ترتیب، تصویرهای T بر BC، CA، و AB باشند.

دایره‌ی محیطی مثلث MNP خطوط BC، CA، و AB را برای دومین بار، به ترتیب در M'، N' و P' قطع می‌کنند. ثابت کنید، مثلث $M'N'P'$ متساوی‌الاضلاع است.

۱۲. فرض می‌کنیم، A نقطه‌ای ثابت بر ضلع Ox از زاویه‌ی xOy باشد. دایره‌ی متغیر C بر Ox و Oy، با نقطه‌ی تماس D با Oy مماس است. مماس دوم از A بر C، آن را در E قطع می‌کند. ثابت کنید، زمانی که C تغییر می‌کند، خط DE از نقطه‌ای ثابت می‌گذرد.

۱۳. فرض می‌کنیم، $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$ یک شش‌ضلعی محاطی و P_0 تقاطع A_0A_1 و A_3A_4، P_1 تقاطع A_1A_2 و A_4A_5، و P_2 تقاطع A_2A_3 و A_5A_0 باشد. ثابت کنید، P_0، P_1 و P_2 بر یک خط راست واقع هستند.

حل مسأله‌های قسمت دوم

۲ـ۱. چهار ضلعی‌های محاطی

۱. مرکز مربع را با C نمایش می‌دهیم. از آن‌جا که

$\angle NOM + \angle NCM = ۹۰^\circ + ۹۰^\circ = ۱۸۰^\circ$

نتیجه می‌گیریم که چهارضلعی MONC دوری یا محاطی است. به این ترتیب، $\angle MOC = \angle MNC = ۴۵^\circ$ که نشان می‌دهد C بر نیمساز $\angle AOB$ قرار دارد.

برعکس، به ازای هر C ی واقع بر این نیمساز، مربع‌های MONC و MNPQ را رسم می‌کنیم. از آن‌جا که CMN مثلثی قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است، C مرکز MNPQ است. بنابراین، مکان مورد بحث نیمساز $\angle AOB$ است. (از کتاب درسی دبیرستانی رومانی).

۲. مثلث DCP را به مثلث ABP' تبدیل می‌کنیم. به این طریق، چهارضلعی $APBP'$ را به دست می‌آوریم که دوری است؛ زیرا:

$\angle APB + \angle AP'B = ۳۶۰^\circ -$

$\angle APD - \angle BPC = ۱۸۰^\circ$

فرض می‌کنیم، Q تقاطع AB و PP' باشد. در این صورت، از آن‌جا که خطوط AD، PP' و BC موازی هستند، داریم:

$\angle DAP + \angle BCP = \angle APQ + \angle QP'B$

اندازه‌ی دو زاویه‌ی اخیر برابر نصف کمان‌های AP' و BP از دایره‌ی محیطی چهارضلعی $APBP'$ است. از طرف دیگر، زاویه‌ی BQP که قائمه است، نصف مجموع این دو کمان است. در نتیجه:

$\angle DAP + \angle BCP = \angle BQP = ۹۰^\circ$

(برنامه‌ی تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۹۹۵).

۳. بدون از دست رفتن عمومیت مسأله، فرض می‌کنیم P بر کمان AB ای واقع باشد که شامل C و D نیست. باید ثابت کنیم، XY بر ZW عمود است. این مطلب به اثبات این موضوع تحویل می‌شود که مجموع و زوایای XYP و ZWP برابر ۹۰° است. اما از مستطیل‌های XBYP و ZDWP (که چهار ضلعی‌هایی دوری‌اند) داریم:

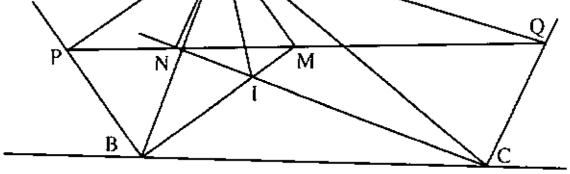
$\angle XYP = \angle XBP$ و $\angle ZWP = \angle ZDP$

نتیجه می‌گیریم که:

$$\angle XYP + \angle ZWP = \angle XBP + \angle ZDP$$
$$= \frac{\overset{\frown}{AP}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{PC}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} = ۹۰^\circ$$

که همان مطلوب است.

۴. فرض می‌کنیم، M و N به ترتیب، تصویرهای رأس A بر نیمسازهای درونی $\angle B$ و $\angle C$، و P و Q تصویرهای A بر نیمسازهای برونی آن‌ها باشند (شکل ۱ـ۲ـ۱)، و اثبات می‌کنیم که P بر MN قرار دارد.



شکل ۱-۲-۱

از آن جا که نیمسازهای درونی و بیرونی یک زاویه‌ی مثلث متعامدند، چهارضلعی APBM مستطیل است. در نتیجه:

$\angle AMP = \angle ABP$

داریم:

$\angle ABP = (۱۸۰^\circ - \angle B)/۲ = \angle A/۲ + \angle C/۲$

مرکز دایره‌ی محاطی داخلی مثلث را با I نمایش می‌دهیم. چهار ضلعی ANIM، از آن جا که دو زاویه‌ی مقابل قائمه دارد، دوری است. در نتیجه:

$\angle AMN = \angle AIN$

زاویه‌ی $\angle AIN$ زاویه‌ی برونی مثلث AIC است؛ در نتیجه:

$\angle AIN = \angle A/۲ + \angle C/۲$

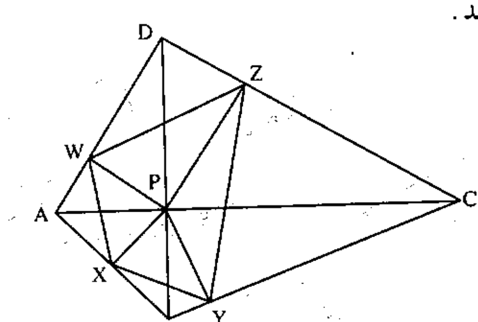
این مطلب نشان می‌دهد که:

$\angle AMP = \angle A/۲ + \angle C/۲ = \angle AMN$

و به این ترتیب، M، N و P بر یک خط راست قرار دارند. استدلالی مشابه مشخص می‌کند که Q بر MN واقع است، و به این ترتیب مسأله حل می‌شود.

۵. چهارضلعی مورد نظر به نسبت ۲ به چهارضلعی حاصل از تصویرهای P بر اضلاع چهارضلعی مورد بحث است. بنابراین کافی است دوری بودن مورد اخیر را ثابت کنیم.

فرض می‌کنیم X، Y، Z و W، به ترتیب تصویرهای P بر اضلاع AB، BC، CD، و AD باشند (شکل ۱ـ۲ـ۲). چهارضلعی‌های AXPW، BYPX، CZPY، و DWPZ دوری هستند، زیرا جمیع آن‌ها دارای یک جفت زاویه‌ی قائمه مقابلند.



شکل ۱ـ۲ـ۲

با درنظر گرفتن زاویه‌های حاصل از یک ضلع و قطر به دست می‌آوریم:

$\angle WAP = \angle WXP \ , \ \angle PXY = \angle PBY \ ,$

$\angle YZP = \angle YCP \ , \ \angle PZW = \angle PDW$

در مثلث‌های APD و BPC داریم:

$\angle PAD + \angle PDA = ۹۰^\circ$

و:

$\angle PBC + \angle PCB = ۹۰^\circ$

درنتیجه:

$$\begin{aligned}\angle WXY + \angle WZY &= \angle WXP + \angle PXY + \angle YZP + \angle PZW \\ &= \angle WAP + \angle PDW + \angle PBY + \angle YCP \\ &= ۹۰^\circ + ۹۰^\circ = ۱۸۰^\circ\end{aligned}$$

که نشان می‌دهد، چهارضلعی XYZW دوری است، و مسأله حل می‌شود. (VSAMO,1993)

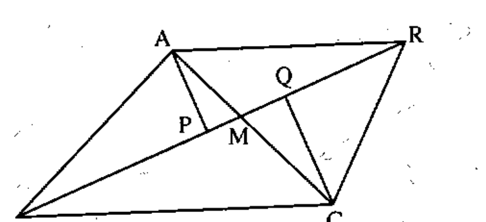
۶. راه‌حل اول: فرض می‌کنیم $R \in BQ$ و چنان باشد که Q بین B و R قرار گیرد و QR=QC (شکل ۱ـ۲ـ۳ را ملاحظه کنید). از آن جا که $\angle BQC$ قائمه است، Q بر نیم‌دایره‌ی مورد بحث قرار دارد. درنتیجه، چهارضلعی BAQC دوری است، و بنابراین:

$\angle AQC = ۱۸۰^\circ - \angle ABC = ۱۳۵^\circ$

نتیجه می‌گیریم که:

$\angle AQR = ۳۶۰^\circ - ۱۳۵^\circ - ۹۰^\circ = ۱۳۵^\circ$

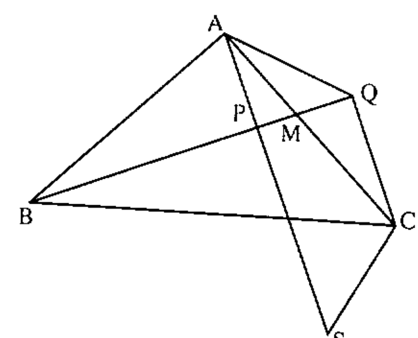
این مطلب مستلزم آن است که مثلث‌های AQC و AQR هم‌نهشت باشند، و از آن: $AR = AC = AB$



شکل ۱ـ۲ـ۳

در مثلث متساوی‌الساقین ABR، AP ارتفاع است، بنابراین: BP=PR. از آن‌جا که: $PR = PQ + QC$، نتیجه به‌دست می‌آید.

راه‌حل دوم. از شکل (۱_۲_۴) استفاده می‌کنیم که در آن، S بر خط AP چنان اختیار شده است که AQCS ذوزنقه‌ای متساوی‌الساقین است. از آن‌جا که $\angle BQC = 90^\circ$، Q بر نیم‌دایره قرار دارد، و بنابراین چهارضلعی ABCQ دوری است.



شکل ۱_۲_۴

نتیجه می‌شود که:

$\angle AQB = \angle ACB = 45^\circ$

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی PAQ، $\angle PAQ = 45^\circ$ که مستلزم آن است که: $\angle ASC = 45^\circ$. از آن‌جا که $\angle ASC = \angle ABC$، چهارضلعی ABSC دوری است، بنابراین:

$\angle ASB = \angle ACB = 45^\circ$

در این صورت، مثلث BPS متساوی‌الساقین است و درنتیجه: BP=PS. سرانجام، در ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین AQCS، $AS = 2AP + QC$

درنتیجه:

$BP = PS = AP + QC = PQ + QC$

(صورتی تعدیل یافته از قضیه‌ای منسوب به ارشمیدس)

۷. چهارضلعی AEFD، بنابر برابری $\angle EAF$ و $\angle FDE$، دوری است. بنابراین:

$\angle AEF + \angle FDA = 180^\circ$

از برابری $\angle BAE$ و $\angle CDF$ داریم:

$\angle ADC + \angle ABC = \angle FDA + \angle CDF + \angle AEF - \angle BAE = 180^\circ$

درنتیجه، چهارضلعی ABCD دوری است. بنابراین:

$\angle BAC = \angle BDC$

و نتیجه می‌گیریم که:

$\angle FAC = \angle BAC - \angle BAF = \angle BDC - \angle EDC = \angle EDB$

(المپیاد ریاضی روسیه، ۱۹۹۶)

۸. از آن‌جا که اندازه‌ی زاویه‌ی A برابر 60° است، نتیجه می‌گیریم که مجموع دو زاویه‌ی دیگر 120° است. درنتیجه:

$\angle IBC + \angle ICB = 60^\circ$

که مستلزم آن است که:

$\angle B'IC' = \angle BIC = 120^\circ$

و درنتیجه، چهارضلعی $AB'IC'$ دوری است؛ زیرا مجموع دو زاویه‌ی مقابل آن 180° است. نتیجه می‌گیریم که:

$\angle IB'C' = \angle IAC' = 30^\circ$

و:

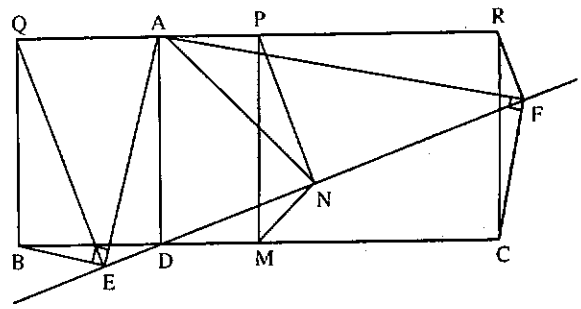
$\angle IC'B' = \angle IAB' = 30^\circ$

زیرا AI نیمساز است. در این صورت، مثلث $IB'C'$ متساوی‌الساقین است، و بنابراین: $IB' = IC'$.

۹. نیمسازهای درونی $\angle A$ و $\angle B$ در I تلاقی می‌کنند، درحالی که نیمسازهای برونی همین زاویه‌ها در I_C، مرکز دایره‌ی محاطی برونی مقابل Cی این مثلث، برخورد می‌کنند. نیمسازهای درونی و برونی یک زاویه متعامدند، بنابراین چهارضلعی $AIBI_C$ دارای دو زاویه‌ی قائمه مقابل است. درنتیجه: A، B، I، و I_C بر دایره‌ای به قطر II_C قرار می‌گیرند که در این صورت دایره‌ی محیطی مثلث ABI است. مرکز این دایره، وسط II_C است. از آن‌جا که C، I، و I_C بر یک خط راست قرار دارند، نتیجه‌ی مطلوب حاصل می‌شود.

۱۰. فرض می‌کنیم، P چنان باشد که ADMP مستطیل

شود. بر خط AP نیز نقاط Q و R را چنان اختیار می‌کنیم که QBDA و ADCR مستطیل باشند (شکل ۱ـ۲ـ۵).



شکل ۱ـ۲ـ۵

نقاط Q، B و D بر دایره‌ای به قطر AB قرار دارند. درنتیجه، ADEQ یک چهارضلعی دوری است. همچنین، R، C و D بر دایره‌ای به قطر AC قرار دارند. درنتیجه ADFR نیز یک چهارضلعی دوری است. چهارضلعی‌های ADEQ و ADFR در یک ضلع مشترکند، و دو ضلع دیگرشان خطوط نگهدارنده‌ی یکسان دارند. از آن‌جا که این دو دوری هستند، دو ضلع باقیمانده‌ی EQ و RF باید موازی باشند. به این ترتیب، E، Q، R و F رأس‌های یک ذوزنقه‌اند.

از طرف دیگر، در مستطیل QBCR، M وسط BC است، و MP موازی QB. بنابراین، P وسط QR است. از آن‌جا که N وسط EF است، نتیجه می‌شود که در ذوزنقه‌ی QEFR، NP موازی QE است، که مستلزم آن است که چهارضلعی ADNP دوری و دارای اضلاعی موازی اضلاع ADFR باشد. گذشته از این، A بر دایره‌ی محیطی این چهارضلعی قرار دارد، زیرا سه رأس دیگر مستطیل ADMP بر آن واقع هستند. درنتیجه، A، D، M و N بر دایره‌ای به قطر AM قرار دارد، و درنتیجه: $\angle ANM = \angle ADM = 90^\circ$.

(المپیاد ریاضی آسیا ـ پاسیفیک، ۱۹۹۸، طراح R. Gelca)

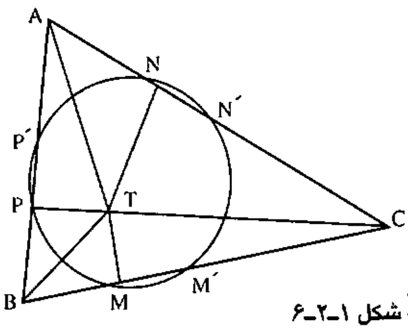
۱۱. چهارضلعی‌های PN'NP' و APTN دوری هستند (شکل ۱ـ۲ـ۶ را ملاحظه کنید).

بنابراین:

$$\angle AN'P' = \angle APN = \angle ATN$$

به همین ترتیب:

$$\angle CN'M' = \angle CMN = \angle CTN$$



شکل ۱ـ۲ـ۶

نتیجه می‌گیریم که:

$$\angle AN'P' + \angle CN'M' = \angle ATN + \angle CTN = \angle ATC = 120^\circ$$

بنابراین:

$$\angle P'N'M' = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

به همین ترتیب:

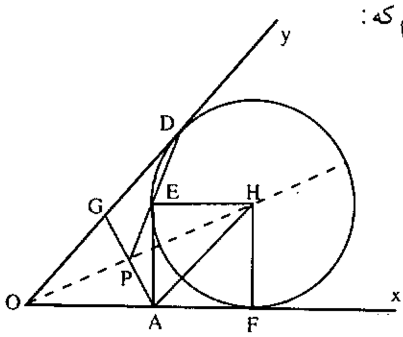
$$\angle N'M'P' = \angle N'P'M' = 60^\circ$$

پس مثلث M'N'P' متساوی‌الاضلاع است.

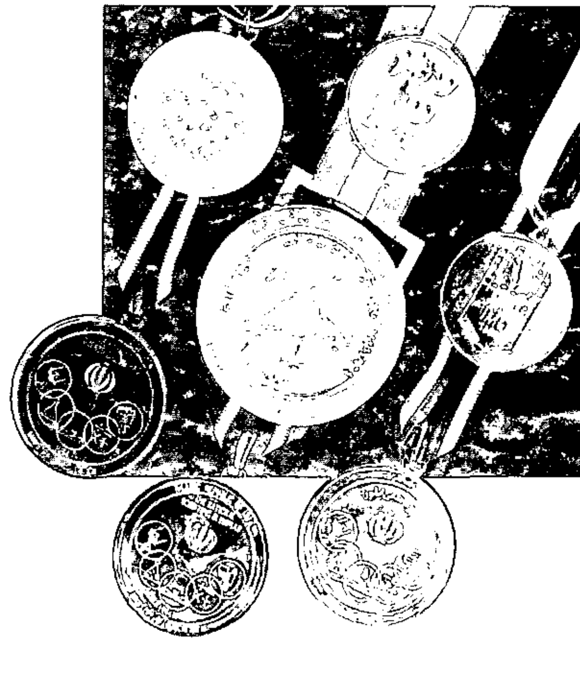
(المپیاد ریاضی رومانی، ۱۹۹۲، طراح C. Cocea)

۱۲. فرض می‌کنیم، G نقطه‌ای بر Oy چنان باشد که OG=OA، و F نقطه‌ی تماس C با Ox، و H مرکز C باشد. هنگامی که F به A نزدیک می‌شود، DE به AG نزدیک می‌شود. بنابراین نقطه‌ی ثابت DE باید بر AG قرار گیرد. نیز فرض می‌کنیم، P تقاطع DE و AG باشد.

ابتدا فرض می‌کنیم، A بین F و O باشد (شکل ۱ـ۲ـ۷). با محاسبه‌ی زاویه‌ها بر حسب کمان‌های دایره‌ی C، نتیجه می‌گیریم که:



شکل ۱ـ۲ـ۷



$$\angle DEF = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle DOF$$

نیز، $\angle GAF$ برونی مثلث متساوی‌الساقین OAG است؛ بنابراین:

$$\angle GAF = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle DOF$$

درنتیجه، $\angle DEF = \angle GAF$ که مستلزم آن است که چهارضلعی PAFE دوری باشد.

با استفاده از تعامد شعاع و مماس بر دایره در نقطه‌ی تماس، نتیجه می‌گیریم که چهارضلعی HEAF دارای دو زاویه‌ی قائمه‌ی مقابل است و درنتیجه دوری است. بنابراین، APFH نیز دوری است (زیرا P و H هر دو بر دایره‌ی محیطی مثلث AEF قرار دارند). نتیجه می‌شود که:

$$\angle HPA = \angle HFA = 90^\circ$$

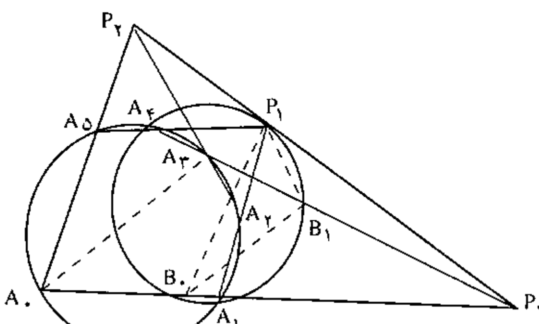
اما HO بر AG عمود است، چرا که نیمساز مثلث متساوی‌الساقین OAG است. این مطلب مستلزم آن است که P نقطه‌ی وسط AG باشد؛ بنابراین وابسته به D نیست.

اگر F بین A و O باشد، محاسبه‌ای مشابه نشان می‌دهد که: $\angle DEC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle AOG = \angle GAF$

بنابراین، چهارضلعی PFAE دوری است. از این مرحله به بعد، اثبات چون قبل است. و (مسائلی در هندسه Titeica,Gh., Probleme de geometrie Ed. Tehnica, Bucharest, 1929.)

۱۳. فرض می‌کنیم، B_0 و B_1 نقاط تقاطع دایره‌ی محیطی مثلث $A_1A_4P_1$ با خطوط A_0A_1 و A_3A_4 باشد (شکل ۱ـ۲ـ۸ را ملاحظه کنید). چهارضلعی $P_1B_1A_1A_4$ دوری است، درنتیجه:

$$\angle B_1P_1A_1 = \angle A_1A_4B_1$$



شکل ۱ـ۲ـ۸

نیز، چهارضلعی $A_1A_2A_3A_4$ دوری است، درنتیجه:

$$\angle A_1A_4A_3 = \angle A_3A_2P_1$$

از آن‌جا که $\angle A_1A_4A_3$ و $\angle A_1A_4B_1$ در واقع یک زاویه هستند، نتیجه می‌شود که:

$$\angle B_1P_1A_1 = \angle A_3A_2P_1$$

و درنتیجه P_1B_1 و A_2P_2 موازی هستند. به طریقی مشابه نشان می‌دهیم، B_0P_1 و A_0P_2، و متقابلاً B_1B_0 و A_0A_3 نیز موازی‌اند. از آن‌جا که مثلث‌های $B_1B_0P_1$ و $A_3A_0P_2$ دارای اضلاع موازی‌اند، پرسپکتیو هستند، و این یعنی: A_0A_1، A_3A_4 و P_1P_2 متقاطع‌اند، و نتیجه می‌گیریم که P_0، P_1 و P_2 بر یک خط راست واقع هستند.

(قضیه‌ی پاسکال، راه‌حل به چاپ رسیده توسط Jan Yzeren در American Mathematical Monthly, 1993).

منبع:

Mathematical olympiad Challenges titu Andreescu Raz van Gelca

شرایط تدریس ریاضی

اشاره

در شماره‌ی قبل درباره‌ی موضوع‌هایی که به تدریس ریاضی مربوط می‌شدند، بحث کردیم که عبارت بودند از: ۱ـ بضاعت علمی معلم، ۲ـ سر و وضع مناسب، ۳ـ بیان مقدمه‌ای مناسب برای شروع درس. اینک ادامه‌ی این گونه شرایط را در پی می‌آوریم.

۴. استفاده از تخته‌ی کلاس، گچ و تخته پاک‌کن

معمولاً تخته پاک‌کن از جنس ابر است. آن را کاملاً بشویید و تخته را خوب پاک کنید. هرگز گچ و تخته پاک‌کن را مانند یک شیء کثیف در دست نگیرید. تخته‌ی کلاس را به وسیله‌ی خط‌های عمودی و با حوصله، به دو یا سه یا چند قسمت مساوی تقسیم کنید. بعد از نوشتن، کنار بروید تا همه‌ی دانش‌آموزان، آن را ببینند. در نوشتن روی تخته عجله نکنید. برای جلب توجه بیش‌تر از گچ رنگی استفاده کنید و حتماً دور مطلب مهم را کادر بکشید.

تعریف‌ها را حتماً روی تخته بدون عجله و خوانا بنویسید؛ چون تعریف‌ها اساس حل مسائل هستند. از تندتند نوشتن، بدخط نوشتن و با بی‌حوصلگی نوشتن پرهیز کنید. ممکن است دست و لباستان گچی شود؛ اشکالی ندارد. این گچی شدن‌ها هم جزو کار تدریس است. مگر یک مکانیک اتومبیل، بدون این که دستش سیاه و روغنی شود، می‌تواند ماشین را تعمیر کند؟ معلم هم همین‌طور است. بدون گچی‌شدن، تدریس ریاضی کامل نخواهد بود. زیبا و مرتب نوشتن، و از گچ رنگی استفاده کردن، هنر است. هر قدر زیبا و دلچسب بنویسید، میزان یادگیری دانش‌آموزان بالا می‌رود.

۵. مطالعه‌ی ادبیات و شعر

معلم ادبیات لازم نیست ریاضی بداند، ولی معلم ریاضی باید ادبیات بداند. تدریس هر مقوله‌ای به کمک کلمات و جملات صورت می‌گیرد. به عبارت دیگر، برای تدریس باید با ادبیات آشنا بود. مطالعه‌ی ادبیات و تسلط بر آن باعث می‌شود بتوانید، یک مفهوم ریاضی را با عبارت‌های متفاوت بیان کنید. به این ترتیب، انتقال اطلاعات به دانش‌آموزان بهتر صورت می‌گیرد.

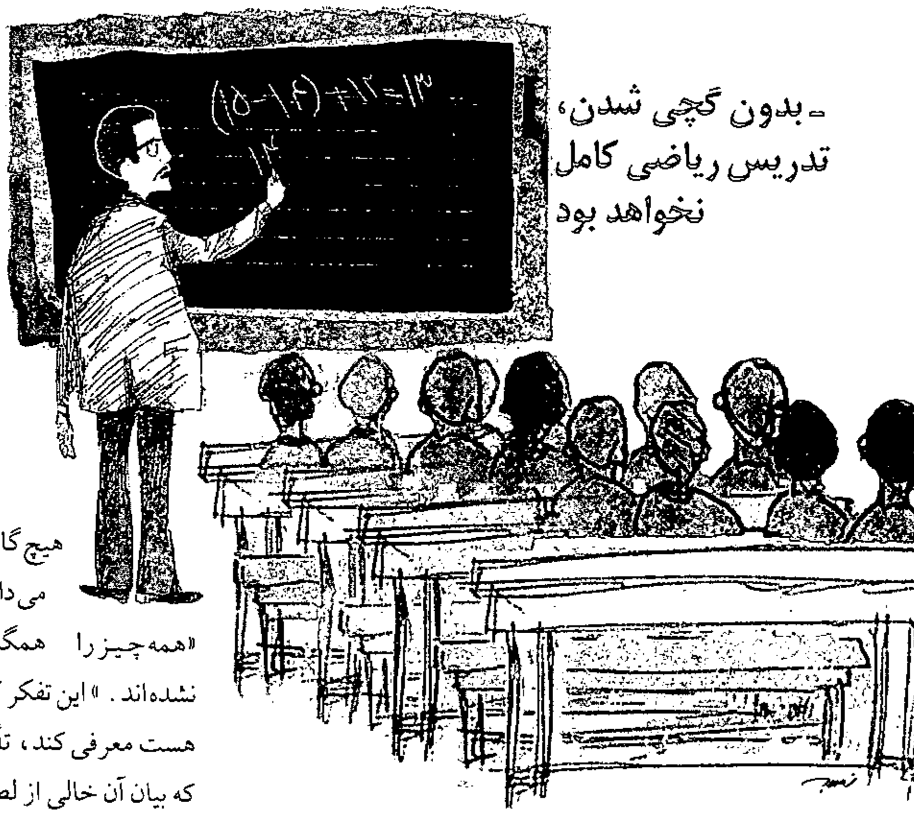
از لغات خارجی و الفاظی که معنی آن‌ها برای دانش‌آموزان روشن نیست، استفاده نکنید. اگر در ادبیات و شعر مطالعه داشته باشید، می‌توانید در تأئید گفته‌های خودتان یا در حواشی مطالب درسی، یکی دو بیت شعر بخوانید. کلاس درس ریاضی را از حالت سُنتی آن که خیلی بی‌روح و خشک بود، خارج کنید. حتی در صورت لزوم، لطیفه‌ای تعریف کنید. بگذارید دانش‌آموزان بخندند و روحیه‌ی شادتری پیدا کنند. از گفته‌های بزرگان استفاده کنید و در صورت نیاز، آن‌ها را معنی و تفسیر کنید.

همه‌ی این موارد در جهت یادگیری بهتر دانش‌آموزان هستند. این گونه گفتار و اعمال نشان می‌دهند که شما آدمی یک بعدی نیستید. نشان دهید که معلم ریاضی می‌تواند روحیه‌ی لطیف هم داشته باشد؛ حتی شاعر هم باشد. اگر معلم ریاضی فقط ریاضی بداند و از ادبیات و شعر بی‌بهره باشد، قبل از هرکس، خودش خسته می‌شود.

در دورانی زندگی می‌کنیم که بی‌اطلاعی از یک موضوع، معادل بی‌سوادی در آن موضوع است. امروزه اگر کسی از رایانه استفاده نکند، در این زمینه بی‌سواد است. من همیشه به

درس دوم

احمد قندهاری



- بدون گچی شدن، تدریس ریاضی کامل نخواهد بود

هیچ‌گاه طوری نشان ندهیم که همه‌چیز را می‌دانیم. به گفته‌ی حکیم «بزرگمهر»: «همه‌چیز را همگان دانند و همگان هنوز از مادرزاده نشده‌اند.» این تفکر که معلم باید خودش را بزرگ‌تر از آن‌چه هست معرفی کند، تأسف‌انگیز است. یاد خاطره‌ای افتادم که بیان آن خالی از لطف نیست.

یادم می‌آید، در سال ۱۳۶۳ یا ۱۳۶۴، روز بعد از کنکور سراسری، با حدود هشت تن از دبیران بسیار خوب ریاضی که در کلاس‌های کنکور تدریس می‌کردند، نشسته بودیم. من مسؤول گروه ریاضی بودم. سؤال‌های ریاضی کنکور در رشته‌ی تجربی به دستمان رسید. هر یک از همکاران نگاهی به سؤال‌ها کرد و عموماً چنین اظهار نظر کردند: سؤال‌ها خیلی سبکند، پیش پا افتاده‌اند، بدون حل هم می‌توان بعضی از آن‌ها را پاسخ داد، جواب‌ها واضحند و...

گفتم: شما مرا می‌شناسید. من اذعان دارم که نمی‌توانم در وقت اعلام شده، این سؤال‌ها را حل کنم. هر کدام از شما که می‌توانید در وقت مقرر این سؤال‌های پیش پاافتاده و ساده را حل کنید، تشریف ببرید اتاق بغلی و آن‌ها را حل کنید.

پاسخ همکاران همان بود که انتظارش را داشتم. یکی گفت الان که نمی‌شود. دیگری گفت من که خسته‌ام، سومی گفت حوصله‌اش را ندارم و... متأسفانه، صداقت بعضی از معلمان کم‌تر از حد معمول است و این آفتی بزرگ برای جامعه‌ی معلمان است.

دانش‌آموزان توصیه می‌کردم، حتماً خلاصه‌ی اخبار رادیو یا تلویزیون را گوش کنند. نباید از حوادثی که در اطراف ما می‌گذرد، بی‌خبر باشیم. مسلماً اطلاعات باعث می‌شود، مطالب زندگی را راحت‌تر جذب و هضم کنیم. ادبیات ما سرشار از نکته‌های دلپذیر و پر از شعرهای دلنشین است که بنا به مناسبت‌هایی می‌شود، از آن‌ها استفاده کرد و روحیه‌ی خود و اطرافیان را تلطیف کرد. من معتقدم، حتی در نوشتن کتاب‌های درسی ریاضی هم باید از لطیفه و شعر و گفتار بزرگان استفاده کرد.

۶. صادقانه تدریس کنید

یکی از موضوعات مهم برای یک معلم، تدریس با صداقت است. یعنی اگر مطلبی، مسأله‌ای یا تستی را نمی‌داند، بگوید نمی‌دانم، هیچ اشکالی ندارد. بگذارید دانش‌آموزان هم احساس کنند که بعضی مطالب را معلم هم نمی‌داند؛ تنها خودش نیست که نمی‌داند.

ندانستن عیب نیست، کتمان ندانستن عیب است.

۷. در کلاس از خود تعریف نکنید و دانش‌آموزان را هم مستقیماً نصیحت نکنید

یک ضرب‌المثل انگلیسی می‌گوید: «نگاه نکنید که چه می‌گوید، ببینید قبلاً چه کارهایی کرده است.»

متأسفانه بسیاری از همکاران سرکلاس می‌گویند: «من شاگرد اول بودم، من چنان بودم، من چنین بودم و... یادم می‌آید حدود ۲۰ سال پیش، یک معلم ریاضی که دیپلمه بود، در کلاس گفت: «من در فوق‌لیسانس، با فلانی هم‌کلاس بودم؟!»

باز یادم می‌آید که یک دبیر ریاضی در یک کلاس پیش‌دانشگاهی در منطقه‌ی سه آموزش و پرورش تهران، سر کلاس گفت: «من فارغ‌التحصیل هاروارد هستم.»

دبیر فیزیکی را می‌شناختم که دیپلمه بود، خودش را دکتر معرفی می‌کرد و حتی روی جزوه‌های خودش هم می‌نوشت دکتر...

همکاران گرامی باید توجه داشته باشند که دانش‌آموزان ممکن است درس ریاضی را خوب ندانند، ولی لزوماً کم‌هوش نیستند. جمع هوش دانش‌آموزان هر کلاس، قطعاً از هوش معلم بیش‌تر است. وقتی معلمی خارج از واقعیت‌ها حرف‌هایی می‌زند، بچه‌ها می‌فهمند و به روی خودشان نمی‌آورند. این مطالب در خارج از کلاس بازگو می‌شود و درنهایت به تمسخر و افت شخصیت آن معلم می‌انجامد. معلم باید توجه کند که مقابل دانش‌آموزان قرار ندارد، بلکه کنار آن‌هاست. نقش او نقش یک راهنماست که باید در یادگیری مطالب درسی به دانش‌آموزان کمک کند، نه این‌که خودش را تافته‌ی جدابافته بداند و مرتباً از خودش تعریف کند که این کار معمولاً باعث دلزدگی دانش‌آموزان خواهد شد.

موضوع دیگر این است که، هیچ‌گاه مستقیماً دانش‌آموزان را نصیحت نکنید که تقریباً هیچ نتیجه‌ای ندارد و گاهی هم اثرات منفی دارد. به جای نصیحت باید با اعمال و رفتار خود، ارزش‌های انسانی را به دانش‌آموزان بشناسانیم و در این مورد، از هیچ تلاشی دریغ نکنیم.

۸. در تدریس دانش‌آموزان را شرکت دهیم

اگر معلم در کلاس یکسره حرف بزند و تدریس کند، دانش‌آموزان پس از مدت کوتاهی خسته می‌شوند؛ زیرا تدریس ریاضیات جذابیت یک رمان یا یک داستان پلیسی را ندارد. اگر دانش‌آموزان را در بحث و تدریس شرکت دهیم و در صورت لزوم، از آن‌ها نظر بخواهیم یا بپرسیم نظر آن‌ها در این مورد خاص چیست، چند فایده دارد:

۱. دانش‌آموزان بیش‌تر به درس توجه می‌کنند، تا این‌که وقتی از آن‌ها نظرخواهی می‌شود، بهتر بتوانند پاسخ دهند.

۲. کلاس از حالت خمودگی و بی‌حالی خارج می‌شود.

۳. موجبات و زمینه‌هایی برای تشویق دانش‌آموزان در این سؤال‌ها و جواب‌ها حاصل می‌شود که در امر تدریس بسیار مهم است.

۹. وقت‌شناسی

کسی که ریاضیات تدریس می‌کند، مانند نَفْس ریاضیات، باید آدمی درست، منطقی، معقول و صادق باشد. یکی از موارد درست و منطقی بودن، رعایت نظم است. قبل از شروع کلاس‌ها در مدرسه حضور داشته باشید و سرساعت به کلاس بروید. درست سر ساعت نیز از کلاس

ـ ندانستن عیب نیست، کتمان ندانستن عیب است

خارج شوید.

موقع ورود به کلاس، حتماً در بزنید و چند ثانیه مکث کنید، سپس وارد کلاس شوید. در لحظه‌ی ورود به کلاس، دانش‌آموزان را نگاه نکنید؛ ممکن است نشستن آن‌ها حالت مناسبی نداشته باشد که هم دانش‌آموز شرمنده شود و هم شما ناراحت شوید. پس از مستقر شدن در جایتان، با نام خدا و گفتن صبح بخیر یا روزبخیر و در صورت امکان، احوال‌پرسی کلی، درس را شروع کنید.

مقدار درس در هر جلسه، باید برای شما روشن باشد. بهتر است در اوایل تدریس، مثال‌ها و مسائل مناسب را یادداشت کنید. هیچ‌گاه در آخر وقت، مسأله‌ای را شروع نکنید که لازم شود، وقت استراحت خودتان و دانش‌آموزان برای ادامه‌ی حل مسأله گرفته شود.

۱۰. خلاصه‌ی درس

پس از آمادگی تدریس کلاس، بهتر است مقدمه‌ای درباره‌ی درس‌های قبلی یا خلاصه‌ای از درس‌های گذشته بیان شود تا ذهن دانش‌آموزان آماده‌ی مطالب جدید شود.

در گفتار صرفه‌جویی نکنید. به اصطلاح معروف، تلگرافی مطلب را بیان نکنید. همین جا دوباره سفارش می‌کنم، از مطالعه در ادبیات غافل نباشید، لازمه‌ی یک بیان خوب و جالب، در اختیار داشتن کلمات و لغات مناسب است. برای مثال، وقتی تابع هموگرافیک را تدریس می‌کنید، حتماً کلمه‌ی هموگرافیک را تعبیر و تفسیر کنید. مثلاً بفرمایید: «همو» یعنی مثل، مانند، شبیه، نظیر، عین، و «گراف» یعنی شکل و نمودار. آن‌گاه بفرمایید: هموگرافیک یعنی یک منحنی که از دو قسمت عین هم، مانند هم، و شبیه هم تشکیل شده باشد. با ملایمت و آرامش تدریس کنید.

در پایان درس، می‌توانید از دانش‌آموزی بخواهید، یک بار خلاصه‌ی درس را بیان کند، و پس از این کار، در تشویق او کوتاهی نکنید. سعی کنید همیشه موقعیت تشویق برای دانش‌آموزان ایجاد کنید. در انتهای ساعت تدریس، تخته را خوب پاک کنید، خلاصه‌ی درس را روی آن بنویسید، و برای جلسه‌ی آینده تکلیف معین کنید.

ـ معلم باید توجه کند که مقابل دانش‌آموزان قرار ندارد، بلکه کنار آن‌هاست

۱۱. تکلیف دانش‌آموزان

وقتی برای دانش‌آموزان تکلیف تعیین می‌کنید، توجه داشته باشید، اگر در تکلیف مسأله مشکلی وجود داشت، آن‌ها را حتماً راهنمایی کنید و به آن‌ها بگویید که جلسه‌ی آینده تکلیف آن‌ها را می‌بینید. در جلسه‌ی بعد، حتماً با حوصله و دقت تکلیف‌ها را نگاه کنید.

کسانی را که به‌طور کامل تکلیف خود را انجام داده‌اند، خیلی تشویق کنید و از کسانی که مسائل کمتری حل کرده‌اند، ضمن تشکر بخواهید که دفعات بعد کامل‌تر حل کنند.

اگر دانش‌آموزی تکلیف را انجام نداد و بهانه‌ای آورد، شما آن را به عنوان عذرخواهی بپذیرید. هیچ‌گاه طوری نشان ندهید که راست نمی‌گوید. ضمن حل مسائل روی تخته، از دانش‌آموزان بخواهید که حل‌های خود را نگاه کنند. چنانچه حل آن‌ها متفاوت باشد، آن را بیان کنند. اگر در مسأله‌ای ملاحظه کردید که راه‌حل دانش‌آموز راه‌حل بهتری است، حتماً او را تشویق کنید.

می‌دانیم، حل تصادفی یک مسأله ارزش ریاضی چندانی ندارد. به دانش‌آموزان یاد دهید که قبل از شروع حل مسأله، حتماً با دقت کامل درس را بخوانند و به مثال‌هایی که ضمن درس در کلاس حل شده‌اند، توجه کنند. سپس صورت مسأله را با دقت بخوانند و قبل از شروع حل مسأله، دقایقی بیندیشند و برای خود بیان کنند که چه اعمالی می‌خواهند در حل مسأله انجام دهند. پس از آن مسأله را آغاز کنند.

۱۲. عذرخواهی دانش‌آموزان را بپذیرید

در هر موردی که دانش‌آموز به دلیلی از شما عذرخواهی کرد، پوزش او را بپذیرید. بگذارید او هم بیاموزد که بعضی اوقات باید گذشت کرد. برای مثال، اگر دانش‌آموزی با تأخیر ورود وارد کلاس شد و بابت این تأخیر مطالبی بیان کرد، اولاً: دقیقاً به حرف‌های او گوش دهید، و ثانیاً نشان دهید که حرف‌هایش را باور دارید و عذرش را بپذیرید.

متأسفانه بعضی از همکاران به علت تأخیر، دانش‌آموز را در کلاس نمی‌پذیرند؛ در حالی که:

اولاً نپذیرفتن دانش‌آموز در کلاس خلاف مقررات است؛

ثانیاً، توقع دارید، این یک جلسه درس ریاضی را، دانش‌آموز چگونه جبران کند؟

ثالثاً؛، مطالب ریاضی زنجیروار به هم مرتبط هستند. اگر یک حلقه از این زنجیر به علتی وجود نداشته باشد، انسجام یادگیری از بین می‌رود.

رابعاً، معلم باید از هر جهت سرمشق باشد؛ چه در گفتار، چه در رفتار.

بسیار اتفاق می‌افتد که معلمی شاگردی را از کلاس اخراج می‌کند که این هم یک خلاف دیگر است. اگر مشکل دانش‌آموز با متانت و گفت‌وگوی پدرانه یا مادرانه قابل حل نباشد، بعد از خاتمه‌ی کلاس می‌توانید اولیای مدرسه را در جریان واقعه قرار دهید. فرض کنیم معلمی به دانش‌آموزی بگوید، از کلاس خارج شود، ولی شاگرد عمل نکند، چه باید کرد؟ باید دست به یقه شد؟ آن‌وقت این موضوع را چگونه می‌شود جمع و جور کرد؟

معلم باید سعی کند، نام دانش‌آموزان را به خاطر بسپارد. اگر معلم درست درس بدهد و رفتار معقولی هم داشته باشد، پس از مدتی رابطه‌ای عاطفی بین او و شاگردان به وجود می‌آید. معلم یک نام نیست، بلکه مجموعه‌ای از اعمال مناسب و منطقی است که باید به آن‌ها عمل شود. عرض کردم، سعی کنید نام شاگردان را به خاطر داشته باشید. اگر نام کسی یادتان رفت و خواستید او را صدا کنید، با القاب خوب و زیبا و دلچسب او را بخوانید. هیچ‌گاه به کسی القاب خنده‌دار یا مضحک ندهید.

۱۳. پرسش دو هفته یک بار

سعی کنید، هر دو هفته یک بار با قرار قبلی، امتحان ساده‌ای از دانش‌آموزان به عمل آورید. در این نوع امتحان‌ها می‌توانید، پایه‌های اعتماد به یکدیگر را پی‌ریزی کنید. برای مثال، لحظاتی از کلاس خارج شوید. وقتی هم برگشتید، آن‌ها را نگاه نکنید. این عمل باعث می‌شود، آن‌ها هم به این عمل شما پاسخ مثبت دهند. حالا اگر یکی دو نفر هم شیطنت کردند و به ورقه‌ی بغل دستی سرک کشیدند، مهم نیست. نفع این عمل بیش‌تر از زیانش است. این نوع رفتارها باعث می‌شوند، دانش‌آموزان خود را قابل اعتماد احساس کنند و بکوشند آن را محفوظ نگه دارند.

این نوع برگزاری امتحان، علاوه بر امتحان، نوعی آموزش است. آموزش پهنه‌ی گسترده‌ای است که یادگیری درس‌ها، بخشی از آن محسوب می‌شود. پس از امتحان، ورقه‌ها را با دقت تصحیح بفرمایید و در جلسه‌ی بعد، را به دانش‌آموزان برگردانید. حتماً مسائل را روی تخته حل کنید و از آن‌ها بخواهید که ورقه‌ی خودشان را به دقت بررسی کنند و چنانچه در دادن نمره اشتباه شده باشد، به شما مراجعه کنند. هیچ‌گاه وقت امتحان را تغییر ندهید. بگذارید دانش‌آموزان منظم بار بیایند.

۱۴. سؤال‌های امتحان پایان ترم

سؤال‌های امتحان باید روشن و واضح و خالی از هر نوع ابهام باشند. تا جایی که مقدور است، سؤال‌ها را خوش‌خط و خوانا بنویسید. حتماً برای طرح سؤال وقت صرف کنید و خودتان قبل از امتحان آن‌ها را حل کنید. اگر معلم خوب تدریس

کرده باشد و امتحانات را دو هفته یک‌بار برگزار کرده باشد و دانش‌آموزان هم طبیعی باشند، معمولاً در امتحانات پایان ترم، به ندرت نمره‌ی کم‌تر از ۱۵ خواهند داشت. معمولاً در یک کلاس طبیعی که تدریس به صورت مطلوب انجام گرفته شده باشد، حدود ۱۵ درصد نمره‌ی کم‌تر از ۱۰ و حدود ۱۵ درصد نمرات عالی می‌گیرند، و بقیه نمراتشان بین ۱۰ تا ۱۷ است. در غیر این صورت، یک جای کار نادرست است: یا تدریس خوب انجام نشده است یا امتحانات هر دو هفته یک‌بار جدی گرفته نشده‌اند، یا سؤال‌های پایان ترم مناسب طرح نشده‌اند، یا...

۱۵. بدقول نباشید

معلم، به هر قول معقول و منطقی که به دانش‌آموزان می‌دهد، باید عمل کند؛ زیرا معلم اول باید کار خودش را جدی بگیرد تا دانش‌آموزان هم او را جدی بگیرند. توجه داشته باشیم، جدی گرفتن با ترسیدن دو مقوله‌ی جدا هستند. در محیط آموزشی، باید ریشه‌های هر نوع ترسی خشکانده شوند. برای مثال، اگر قرار گذاشتید که جلسه‌ی آینده درس را به صورت شفاهی بپرسید، حتماً این کار بکنید؛ حتی اگر تمام وقت کلاس گرفته شود. چه بسا در اثر بازگو کردن درس‌ها به وسیله دانش‌آموزان، مشکل آن‌ها حل شود و در اثر تکرار، آن درس را بهتر بفهمند.

۱۶. مدرسه را به محلی امن برای دانش‌آموزان تبدیل کنید

وقتی صداقت و صمیمیت در رفتار و گفتار شما نمایان باشد، مطمئن باشید، دانش‌آموزان مثل یک پدر یا مادر، شما را دوست خواهند داشت. به حرف‌های شما بیش‌تر توجه می‌کنند و می‌کوشند رضایت شما فراهم شود.

طوری رفتار کنید که دانش‌آموز احساس کند، شما حامی او هستید. اگر با مشکلی مواجه شد، با رغبت آن را با شما در میان بگذارد و احساس کند که شما دلسوز او هستید.

مدرسه فقط محل ارائه‌ی درس نیست. مدرسه محل انسان‌سازی است. در مدرسه دانش‌آموزان باید یاد بگیرند که آدم‌های درستکار، صمیمی و صدیقی باشند. باید یاد بگیرند که به مقررات مدرسه و قوانین جاری در اجتماع احترام بگذارند و آن‌ها را رعایت کنند. مدرسه واقعاً خانه‌ی دوم دانش‌آموزان است؛ نه در شعار، بلکه در عمل.

در امر تدریس و اداره‌ی مدرسه باید از روان‌شناسی، علوم تربیتی و مدیریت بهره‌مند بود. ما در این مملکت به انسان‌های منطقی، با صداقت و درستکار بیش‌تر نیاز داریم تا به مهندس یا پزشک غیر مسؤول و بی‌صداقت.

۱۷. تشویق و تقویت روحیه

ثابت شده است که تشویق بسیار بسیار مفیدتر از تنبیه است. در مواردی حتی اگر اشتباهی از دانش‌آموزی سرزد، عکس‌العمل سریع و بد نشان ندهید، بعد از خاتمه‌ی کلاس با او پدرانه یا مادرانه صحبت کنید. اثرش خیلی بهتر از عکس‌العمل نامناسب است، در اظهارنظرها، خیلی احتیاط کنید. هر حرف شما ممکن است اثر خوب یا بدی در زندگی دانش‌آموز داشته باشد.

همه‌ی ما آلبرت اینشتین دانشمند بزرگ را می‌شناسیم. او در یک دبیرستان در مونیخ مشغول تحصیل بود و شخصی به نام **دگن هارت**، دبیر درس یونانی او بود، آلبرت از درس یونانی چندان خوشش نمی‌آمد. متأسفانه آقای دگن هارت هم در مقابل، عکس‌العمل نامناسب نشان می‌داد. یک روز پدر آلبرت از این دبیر پرسید: «آلبرت در درس شما چگونه شاگردی است؟» آقای دگن هارت سریعاً گفت: «این درس مهم نیست، او در هیچ کاری نمی‌تواند موفق شود.» تاریخ ثابت کرد که این دبیر بسیار غیرمسؤولانه اظهارنظر کرده است. چه بسیار دانش‌آموزانی که به علت رفتار غیرمسؤولانه‌ی یک معلم، حتی مجبور به ترک تحصیل شده‌اند.

به بحث خودمان برگردیم. عرض می‌کردم، دانش‌آموز باید در مدرسه آن‌قدر احساس امنیت کند که حرف دلش را با معلم و مدیران مدرسه در میان بگذارد. چه بسا در این گفت‌وگوها، بسیاری از مشکلات و اشتباهات دانش‌آموزان رفع شود. به دانش‌آموزان باید فهماند که آن‌ها هم حق دارند اظهارنظر کنند، ایراد بگیرند و درد دل کنند. مطمئن باشید، این اعمال نه تنها هیچ عواقب سویی ندارد، بلکه رهگشای جوان دانش‌آموز در زندگی او خواهند شد و او را منطقی‌تر و معقول‌تر بار می‌آورند.

منطق ریاضی ۳

اشاره: در دو قسمت قبل با مقدمات جبر گزاره‌ها و سه ترکیب فصلی، عطفی و شرطی آشنا شدیم. در این شماره، ترکیب دو شرطی گزاره‌ها را معرفی می‌کنیم و به بررسی خواص آن می‌پردازیم. در خاتمه نیز، قوانین جبر گزاره‌ها را بیان می‌کنیم و تا حدی کاربرد آن‌ها را نشان خواهیم داد.

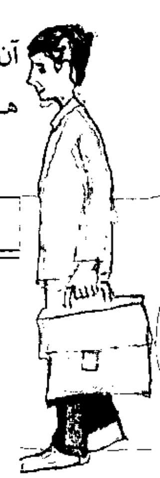
حمیدرضا امیری

ترکیب دوشرطی

هرگاه بخواهیم از گزاره‌ای مانند p، گزاره‌ی q را نتیجه بگیریم و همچنین، از گزاره‌ی q گزاره‌ی p را نتیجه بگیریم، از ترکیب دوشرطی با نماد $(\Leftrightarrow)$ استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم: $(p \Leftrightarrow q)$ و آن را به صورت‌های زیر می‌خوانیم:

«اگر p آن‌گاه q، و اگر q آن‌گاه p»، «اگر p آن‌گاه q و برعکس»، «p نتیجه می‌دهد q را و برعکس»، «p اگر و فقط اگر q»، «q اگر و فقط اگر p» «p شرط لازم و کافی است برای q» و «q شرط لازم و کافی است برای p».

ترکیب دوشرطی بین دو گزاره، گزاره‌ای است که ارزش آن در صورتی درست که دو گزاره‌ی p و q مطابق جدول زیر هم‌ارز باشند (هر دو درست و یا هر دو نادرست باشند):



p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

تذکر: با توجه به تعریف ترکیب‌های دوشرطی، رابطه‌ی زیر به‌راحتی از طریق جدول قابل اثبات است:

$$(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

نقیض ترکیب دوشرطی

با استفاده از هم‌ارزی اخیر و نقیض گزاره‌های شرطی و عطفی، می‌توان نوشت:

$$\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim \left[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)\right] \equiv \left[\sim (p \Rightarrow q) \vee \sim (q \Rightarrow p)\right]$$
$$\equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$$

تذکر: در قسمت‌های بعدی و پس از بیان قوانین بین گزاره‌ها ثابت می‌کنیم:

$$(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p) \equiv (\sim p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Leftrightarrow \sim q)$$

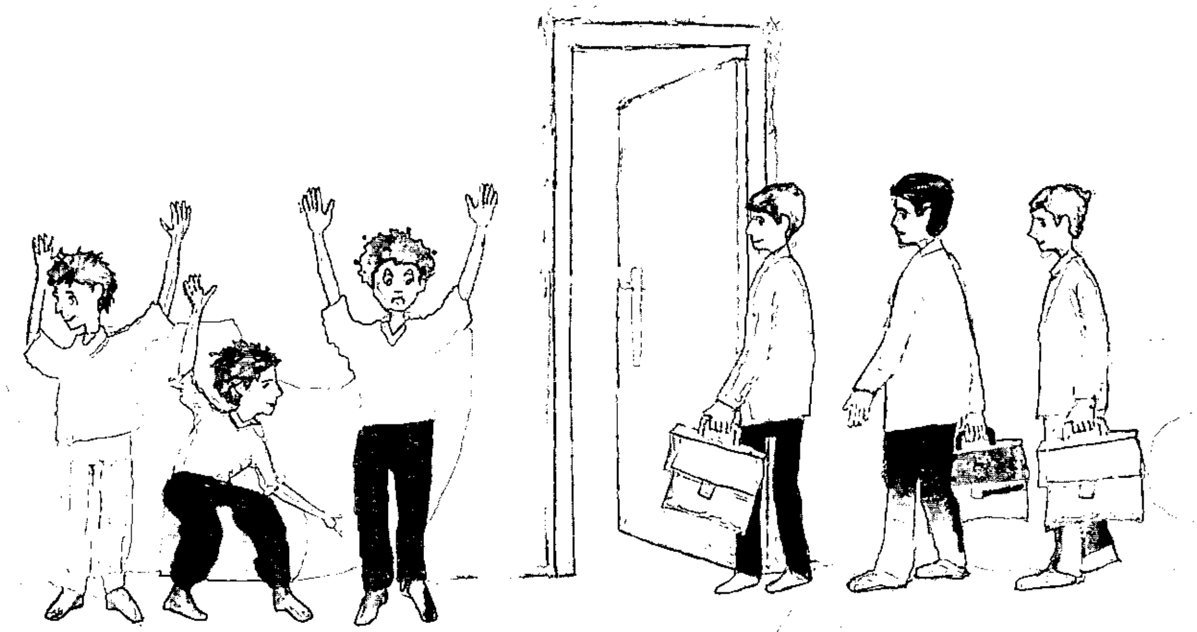
این هم‌ارزی نشان می‌دهد، برای نقیض کردن یک گزاره‌ی دوشرطی کافی است، یکی از دو گزاره را نقیض کنیم؛ یعنی:

$$\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv (\sim p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Leftrightarrow \sim q)$$

این هم‌ارزی‌ها را با استفاده از جدول نیز می‌توان ثابت کرد:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Leftrightarrow q$	$\sim (p \Rightarrow q)$	$\sim p \Leftrightarrow q$	$p \Leftrightarrow \sim q$
د	د	ن	ن	د	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	د	د	د
ن	د	د	ن	ن	د	د	د
ن	ن	د	د	د	ن	ن	ن

در ریاضیات، ترکیب‌های دوشرطی و شرطی کاربردهای فراوان دارند و در واقع، تمام قضیه‌های شرطی به‌نوعی ترکیب‌های شرطی، و قضیه‌های دوشرطی، ترکیب‌های



دو شرطی هستند، اگر با فرض درستیِ گزاره‌ای چون p، درستیِ گزاره‌ای چون q را نتیجه بگیریم و این نتیجه گیری صحیح باشد، درواقع یک قضیه‌ی شرطی بیان کرده‌ایم که در آن، p را فرض و q را حکم می‌نامند. و اگر عکس یک قضیه‌ی شرطی نیز یک قضیه‌ی شرطی باشد، یعنی با فرض درست بودن q بتوانیم درستیِ p را نیز نتیجه بگیریم، یک قضیه‌ی دو شرطی بیان شده است.

قبل از آن‌که به بیان قوانین در جبر گزاره‌ها بپردازیم، لازم است در مورد واژه‌ی «**گزاره‌نما**» که در کتاب‌های درسی از آن استفاده شده و هیچ گونه تعریف دقیقی از آن ارائه نشده است، توضیحاتی بدهیم.

هر عبارت خبری که دارای یک یا چند متغیر باشد و ارزش آن به متغیر یا متغیرهایش بستگی داشته باشد، گزاره‌نما نامیده می‌شود. برای هر گزاره‌نما دو مجموعه می‌توان تعریف کرد:

یکی مجموعه‌ی همه‌ی مقادیری که **می‌توانند** به جای متغیر یا متغیرهای گزاره‌نما قرار بگیرند تا گزاره‌نما را به یک گزاره (چه درست، چه نادرست) تبدیل کنند. به این مجموعه **دامنه‌ی متغیر گزاره‌نما** می‌گویند و آن را با D نمایش می‌دهند.

و دیگری زیرمجموعه‌ای از D (دامنه‌ی متغیر) که اگر به جای متغیر یا متغیرهای گزاره‌نما قرار بگیرد، گزاره‌نما را به گزاره‌ای درست تبدیل می‌کند. به آن **مجموعه‌ی جواب** می‌گویند و آن را با M نمایش می‌دهند.

در هر یک از گزاره‌نماهای زیر، دامنه‌ی متغیر و مجموعه‌ی جواب مشخص شده‌اند:

I) x عددی مثبت است:

$$D = \mathbb{R} \quad \text{و} \quad M = \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

II) y عددی فرد است (صفت زوج و فرد بودن برای اعداد صحیح تعریف می‌شود):

$$D = \mathbb{Z} \quad \text{و} \quad M = 2\mathbb{Z} + 1 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2K + 1\} \quad (K \in \mathbb{Z})$$

III) $(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 1)(x + 2) = 0$

$$D = \mathbb{R} \quad \text{و} \quad M = \{1, -1, -2, 2\}$$

تذکر ۱: توجه دارید که وقتی یک معادله را حل می‌کنیم (ریشه‌های آن را پیدا می‌کنیم)، درواقع مجموعه‌ی جواب آن معادله یا یک گزاره‌نما را محاسبه می‌کنیم. (چون معادله شامل متغیر است).

تذکر ۲: اتحادها، گزاره‌نما به حساب نمی‌آیند، زیرا همواره درست هستند و ارزش آن‌ها به متغیر یا متغیرهایشان بستگی ندارد.

IV) $\frac{x + 3}{x^2 - 1}$ عددی منفی است.

$$D = \mathbb{R} - \{-1, 1\} \quad \text{و} \quad M = (-\infty, -3) \cup (-1, 1)$$

تذکر ۳: اگر گزاره‌نمایی برحسب متغیر x بیان شده باشد، آن را با p(x) نمایش می‌دهیم و اگر از دو متغیر x و y در آن استفاده شده باشد، آن را با p(x,y) نشان می‌دهیم.

از مطلب مربوط به گزاره‌نماها، دامنه‌ی متغیر و مجموعه‌ی جواب در بخش مربوط به **سورها** و گزاره‌های

سوری استفاده خواهیم کرد که مبحثی بسیار مهم و کاربردی است.

قوانین جبر گزاره‌ها

گزاره‌های p، q، r و ... دلخواه در نظر گرفته شده‌اند:

$$۱)\begin{cases}(p\vee q)\equiv(q\vee p)\\(p\wedge q)\equiv(q\wedge p)\end{cases}$$ قوانین جابه‌جایی

$$۲)\begin{cases}p\vee(q\vee r)\equiv(p\vee q)\vee r\\p\wedge(q\wedge r)\equiv(p\wedge q)\wedge r\end{cases}$$ قوانین شرکت‌پذیری

$$۳)\begin{cases}p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r)\\p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)\end{cases}$$

قوانین توزیع‌پذیری (پخشی)

تذکر: قوانین پخشی را از دو طرف هم‌ارزی به خاطر بسپارید. زیرا در بسیاری موارد به جای $(p\vee q)\wedge(p\vee r)$ هم‌ارز آن یعنی $p\vee(q\wedge r)$ را به کار می‌بریم.

$$۴)\begin{cases}p\wedge(p\vee q)\equiv p\\p\vee(p\wedge q)\equiv p\end{cases}$$ قوانین جذب

تذکر: قوانین جذب را می‌توان به این صورت یاد گرفت که اگر گزاره‌ای چون p دو بار ظاهر شده باشد، یک‌بار با « $\vee$ » و بار دیگر با « $\wedge$ »، هر گزاره‌ی دیگر غیر از آن (مانند q) جذب p شود، حاصل خودِ p می‌شود، به مثال‌های زیر توجه کنید:

I) $\underline{\sim r}\wedge\left[(q\wedge p)\vee\underline{\sim r}\right]\equiv\sim r$

II) $\underline{(p\wedge\sim q)}\vee\left[(p\vee s)\wedge\underline{(\sim q\wedge p)}\right]\equiv(p\wedge\sim q)$

$$۵)\begin{cases}\sim(p\wedge q)\equiv(\sim p\vee\sim q)\\\sim(p\vee q)\equiv(\sim p\wedge\sim q)\end{cases}$$ قوانین دمورگان

$$۶)\begin{cases}(p\vee T)\equiv T\\(p\vee\sim p)\equiv T\\F\Rightarrow p\equiv T\end{cases}$$ گزاره‌های همیشه درست

$$۷)\begin{cases}(p\wedge F)\equiv F\\(p\wedge\sim p)\equiv F\\(p\Leftrightarrow\sim p)\equiv F\end{cases}$$ گزاره‌های همیشه نادرست

$$۸)\begin{cases}p\vee F\equiv p\\p\wedge T\equiv p\\T\Rightarrow p\equiv p\end{cases}$$

تمرین ۱. قوانین جذب را با استفاده از قوانین ذکر شده ثابت کنید.

I) $p\vee(p\wedge q)$

$\overset{(۸)}{\equiv}(p\wedge T)\vee(p\wedge q)\overset{(۳)}{\equiv}p\wedge(T\vee p)$

$\overset{(۶)}{\equiv}p\wedge T\overset{(۸)}{\equiv}p$

II) $p\wedge(p\vee q)$

$\overset{(۸)}{\equiv}(p\vee F)\wedge(p\vee q)\overset{(۳)}{\equiv}p\vee(F\wedge q)$

$\overset{(۷)}{\equiv}(p\vee F)\overset{(۸)}{\equiv}p$

تمرین ۲. هریک از عبارت‌های زیر را ساده کنید:

I) $(\sim p\vee q)\wedge(\sim q\vee\sim p)$

II) $\left[(\sim p\wedge r)\vee r\right]\vee\left[\sim r\vee(\sim p\wedge\sim r)\right]$

حل:

I) $(\sim p\vee q)\wedge(\sim q\vee\sim p)\equiv\sim p\vee(q\wedge\sim q)\equiv\sim p\vee F\equiv\sim p$

II) $\underbrace{\left[(\sim p\wedge r)\vee r\right]}_{r}\vee\underbrace{\left[\sim r\vee(\sim p\wedge\sim r)\right]}_{\sim r}\equiv(r\vee\sim r)\equiv T$

تمرین ۳. ثابت کنید، ترکیب شرطی از چپ در عطفی توزیع‌پذیر است یعنی،

$p\Rightarrow(q\wedge r)\equiv(p\Rightarrow q)\wedge(p\Rightarrow r)$

$p\Rightarrow(q\wedge r)$

$\overset{\text{تبدیل شرطی به فصلی}}{\equiv}\sim p\vee(q\wedge r)\overset{\text{پخشی}}{\equiv}(\sim p\vee q)\wedge(\sim p\vee r)$

$\overset{\text{تبدیل فصلی به شرطی}}{\equiv}(p\Rightarrow q)\wedge(p\Rightarrow r)$

از این به بعد سعی می‌کنیم، هم‌ارزی‌ها را بدون استفاده از جدول و فقط با استفاده از قوانین منطق اثبات کنیم؛ یعنی از یک طرف هم‌ارزی حرکت کنیم و با استفاده از قوانین ذکر شده، به سمت دیگر هم‌ارزی برسیم که ان‌شاءالله در شماره‌های بعدی به تفصیل به این موضوع خواهیم پرداخت.

پس تا بعد!

مسائل برای حل

ریاضیات ۱

○ حمیدرضا امیری

۱. مجموعه‌ای را که با اعضا مشخص شده است، با نماد ریاضی و مجموعه‌ای را که با نماد ریاضی مشخص شده است، با اعضایش مشخص کنید.

$A = \{5, 10, 17, \cdots, 82\}$

$B = \left\{(-1)^x \times \frac{1}{x(x+2)} \mid x \in N\right\}$

۲. طرف دوم این تساوی‌ها را به‌دست آورید.

الف) $(A \cup B) - (B - A) =$

ب) $(A \cap B) \cap (A - B) =$

۳. درستی این تساوی را ثابت کنید:

$(A \cup B) - (B \cup C) = (A - B) - C$

۴. بسته بودن مجموعه‌ی داده شده را نسبت به عمل جمع و ضرب بررسی کنید.

$A = \{3k + 1 \mid k \in Z\}$

۵. معادله‌ی توانی زیر را حل کنید.

$$\frac{3^{2x} \times 9^{x-2}}{3^{x-1} \times 6^x} = \frac{1}{2^x}$$

۶. اگر $A = 4^n \times 2^4 \times 5^{n-2}$ و $B = 2^{2n} \times 10^{2n-4}$، چه رابطه‌ای بین A و B برقرار است؟

۷. خارج قسمت و باقی‌مانده‌ی تقسیم $(x^3 + 4x^5)$ بر $(x^2 + x + 1)$ را به‌دست آورید.

۸. در این تساوی، مقادیر a و b و c و d را تعیین کنید:

$(4x^2 + 2x - 7)(3x + 4) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

۹. با استفاده از اتحادها، حاصل هر عبارت را بیابید:

الف) $(a^2 + 2)(a^2 - 2)(a^4 + 4a^2 + 4)(a^4 - 4a^2 + 4)$

ب) $(x^2 + 1 - 5x)(x^2 + 1 + 4x)$

ج) $(3a + a^{-2})^3$

۱۰. اگر $\frac{x^2 + 1}{x} = 2$، در این صورت مقدار عددی $(x - \frac{1}{x})$ را به‌دست آورید $(x \neq 0)$.

۱۱. هریک از عبارت‌های زیر را به حاصل ضرب عوامل اول تجزیه کنید:

الف) $6x - 18 + (x - 3)(x - 2)x$

ب) $a^3 + a - 10$

ج) $(x^2 + 2x)^2 - 3(x^2 + 2x) - 18$

۱۲. دامنه‌ی عبارت داده شده را تعیین کنید و حاصل را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$\frac{a+2}{a-2} - \frac{2}{1-a} + \frac{2a}{a^2 - 3a + 2}$$

ریاضیات ۲

○ سید محمدرضا هاشمی موسوی

۱. به ازای چه مقادیری از m، سه جمله‌ای درجه‌ی دوم

$(2m + 5)x^2 + (2m - 5)x + 2m - 11$

به ازای جمیع مقادیر x، همیشه منفی است؟

۲. حدود n را چنان تعیین کنید که معادله‌ی

$$\frac{7 - x}{n} = \frac{n}{5 + x}$$

دارای جواب‌های حقیقی باشد.

۳. عبارت $p(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 4}$، به ازای چه مقادیری از x در R بی‌معناست؟ اگر $p(x) = x + 2$، مقدار x چه عددی است؟

۴. یک‌به‌یک و پوشا بودن تابع با ضابطه‌های زیر را بررسی کنید. در R^+ مقادیر $f(-3 + \sqrt{10})$ و $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ را محاسبه کنید و نشان دهید، در R^+ تابع معکوس‌پذیر و صعودی است و معکوس آن را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 & x < 0 \\ x + 3 & x \geq 0 \end{cases}$$

۵. معادله‌ی جدید منحنی $x^2 + x - xy - y = 0$ را پس از انتقال محورهای مختصات با حفظ جهت به موازات خود به نقطه‌ی $O'(2,2)$ بیابید. آیا O' مرکز تقارن منحنی جدید است؟

۶. اگر نقاط $A(m + 3, 4)$ و $B(-2, n - 1)$ نسبت به محور yها قرینه یکدیگر باشند، مقدار m و n را بیابید.

۷. تعیین کنید که آیا منحنی $y^2 = x^2 + 9$ محور تقارن $x = 0$ یا $y = 0$ مرکز تقارن (۰ و ۰) دارد؟

۸. دستگاه $\begin{cases} 3x - 2y - 1 = 0 \\ 4y + 3x = 7 \end{cases}$ را به روش کرامر حل کنید.

۹. اگر $A = \begin{bmatrix} m & 1 \\ -1 & -m \end{bmatrix}$ و $m \neq \pm 1$، مقدار m را چنان بیابید که داشته باشیم:

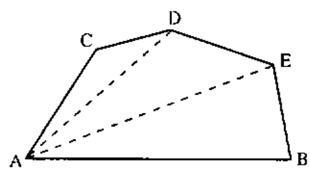
$$(A^2)^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

هندسه ی ۱

○ محمد هاشم رستمی

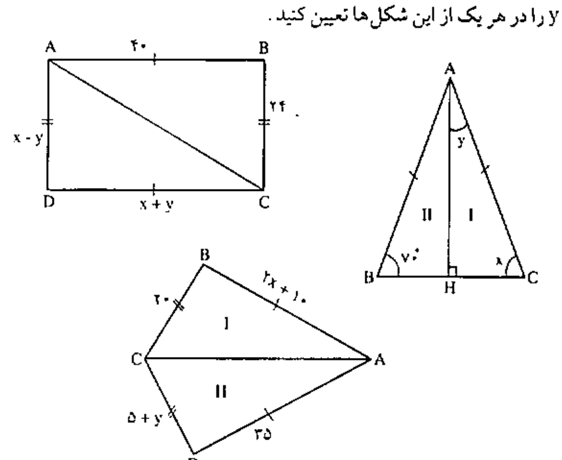
۱ . ثابت کنید، هر پاره‌خط از هر خط شکسته‌ی محیط بر آن، کوچک‌تر است. برای مثال، در شکل زیر ثابت کنید:

$AB<AC+CD+DE+EB$

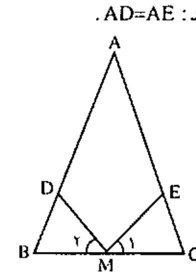


۲ . مجموع زاویه‌های درونی یک n ضلعی محدب ۱۶۲۰ درجه است. n را تعیین کنید.

۳ . در هر یک از شکل‌های زیر، مثلث‌های I و II هم‌نهشت هستند و علامت‌های یکسان، جزءهای متناظر متساوی را نشان می‌دهند. اندازه‌ی x و y را در هر یک از این شکل‌ها تعیین کنید.



۴ . در شکل داده شده، AB=AC، نقطه‌ی M وسط ضلع BC و AD=AE است. ثابت کنید: $\hat{M}_1=\hat{M}_2$.



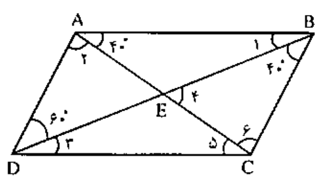
۵ . با استفاده از ۶ پاره‌خط خمی رسم کنید که:

الف) ساده و بسته باشد. ب) ساده نباشد. پ) بسته نباشد، اما ساده نباشد.

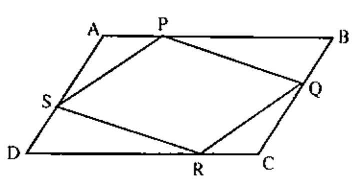
۶ . در متوازی‌الاضلاع ABCD، $A\hat{D}C=70^\circ$ ، $D\hat{B}C=45^\circ$ و $B\hat{A}C=40^\circ$ است. حساب کنید:

الف) اندازه‌ی زاویه‌های $\hat{1}$ ، $\hat{2}$ ، $\hat{3}$ ، $\hat{4}$ ، $\hat{5}$ و $\hat{6}$.

ب) اندازه‌ی زاویه‌های CED و DAB

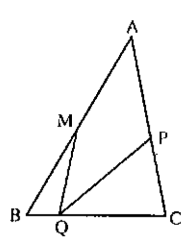


۷ . روی ضلع‌های AB، BC، CD و DA از متوازی‌الاضلاع ABCD، پاره‌خط‌های AP، BQ، CR و DS را مساوی هم جدا می‌کنیم. ثابت کنید که چهارضلعی PQRS متوازی‌الاضلاع است.



۸ . در مثلث ABC، نقطه‌ی Q روی ضلع BC، نقطه‌ی A وسط ضلع AB و نقطه‌ی P وسط ضلع AC است. ثابت کنید که:

$S_{BQM}+S_{PQC}=S_{AMQP}$



۹ . قطر مستطیلی ۵۰ سانتی‌متر و اندازه‌ی یک ضلعش ۳۰ سانتی‌متر است. اندازه‌ی مساحت این مستطیل را تعیین کنید.

۱۰ . اندازه‌ی ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاعی را تعیین کنید که مساحتش مساوی $۲۵\sqrt{۳}$ سانتی‌متر مربع باشد.

۱۱ . اندازه‌ی x و y را از نسبت‌های مساوی زیر به دست آورید:

$$\frac{۲x+y}{۱۲}=\frac{x-۱}{۳}=\frac{۱}{۲}$$

حسابان

○ احمد قندهاری

۱ . دامنه‌ی تعریف تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{2-\sqrt{8-x^2}}$ را بیابید .

۲ . فرد یا زوج زدن تابع‌هایی با ضابطه‌های $f(x)=\frac{2^x+2^{-x}}{2^x-2^{-x}}$ و $g(x)=\left[\frac{4}{2+x}\right]+\left[\frac{6-x}{2-x}\right]$ را بررسی کنید .

۳ . ثابت کنید، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{3x+\sqrt{3x-6}}$ در بازه‌ی $[2,+\infty)$ ، یک به یک است . .

۴ . اگر $x>0$، آن‌گاه ضابطه‌ی تابع معکوس تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x\sqrt{x}+3x+3\sqrt{x}$ را بیابید .

۵ . اگر $x=2$ یکی از صفرهای تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^3-2(\sqrt{2}+1)x^2+(4\sqrt{2}+1)x-2$ باشد، صفرهای دیگر این تابع را بیابید .

۶ . حاصل عبارت $\frac{2\cos 3a\sin a}{\sin 2a}-2\cos 2a$ را بیابید .

۷ . ثابت کنید :

$$\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{3\pi}{9}+\cos\frac{5\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}=\frac{1}{2}$$

۸ . در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=2x+1$ ، اگر $x\to 1^+$ ، آن‌گاه $f(x)\to 3$. اگر بخواهیم $|f(x)-3|<\frac{1}{50}$ ، آن‌گاه حدود x را بیابید .

۹ . حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+6x^2}-x)$ را بیابید .

۱۰ . اگر $x=1$ و $x=\frac{5}{2}$ مجانب‌های قائم و $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ مجانب افقی نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{ax^2+1}{bx^2-14x+c}$ باشد، a و b و c را بیابید .

۱۱ . تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+1 & , \quad |x|<2\\ |x-1| & , \quad |x|\geq 2\end{cases}$ در مجموعه‌ی $\mathbb{R}$ پیوسته است . a و b را بیابید .

۱۲ . تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\frac{b\sin 4x}{\sqrt{1-\cos 4x}} & , \quad x<0\\ a\lfloor x-1\rfloor & , \quad x>0\\ \left[x^2-\sqrt{3}\right] & , \quad x=0\end{cases}$ در $x=0$ پیوسته است . a و b را بیابید .

۱ . به کمک اصل استقرای ریاضی، ثابت کنید، به‌ازای هر عدد طبیعی n داریم :

$$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\leq 3-\frac{1}{n}$$

۲ . به کمک اصل استقرای ریاضی ثابت کنید، به ازای هر عدد طبیعی n ، $2-5^n+5^{n+1}$ بر ۴ بخش‌پذیر است .

۳ . به کمک استدلال استنتاجی ثابت کنید، مربع هر عدد فرد در تقسیم بر ۸ باقی‌مانده‌ی ۱ دارد .

۴ . به کمک برهان خلف ثابت کنید، هرگاه n^2 مضرب ۷ باشد، آن‌گاه n نیز مضرب ۷ است و از آن‌جا نشان دهید، $\sqrt{7}$ عددی گنگ است .

۵ . درستی نابرابری $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\geq a+b$ را برای عددهای حقیقی و مثبت a و b به کمک استدلال برگشتی ثابت کنید و نشان دهید، همه‌ی مرحله‌ها برگشت‌پذیرند .

۶ . حداقل چند عدد طبیعی باید انتخاب کرد تا با اطمینان بتوان گفت که دست‌کم چهار تای آن‌ها در تقسیم بر ۶ یک باقی‌مانده دارند؟

۷ . به کمک قوانین جبر مجموعه‌ها، برای مجموعه‌های A و B و C و D ثابت کنید :

الف) $(A-B)\cap(C-D)=(A\cap C)-(B\cup D)$

ب) $A\subseteq B,\ C\subseteq D\Rightarrow(A\cup C)\subseteq(B\cup D)$

۸ . اگر داشته باشیم : $A=\{x|x\in\mathbb{R},\ x^3=4x\}$ و $B=\{x|x\in\mathbb{Z},\ x^2<4x\}$

الف) مجموعه‌های $A\times B$ و $B\times A$ را تشکیل دهید و نمایش هندسی هر یک را نیز مشخص کنید .

ب) مجموعه‌ی $A^2-A\times B$ چند زیرمجموعه دارد؟

ج) مجموعه‌ی $(A^2-A\times B)\cap(A^2-B\times A)$ را تشکیل دهید .

جبر و احتمال

○ هوشنگ شرقی

هندسه‌ی ۲

○ محمد هاشم رستمی

۱ . ثابت کنید که چهار ضلعی حاصل از برخورد نیمسازهای زاویه‌های درونی متوازی‌الاضلاع، مستطیل است.

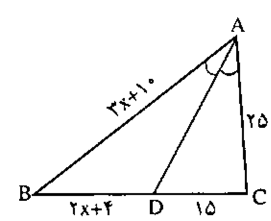
۲ . قضیه‌های زیر را به صورت قضیه‌های شرطی بنویسید و سپس تعیین کنید که عکس آن‌ها قضیه‌ی شرطی است یا نه. اگر قضیه‌ی شرطی است، هر یک از این قضیه‌ها و عکس آن‌ها را به صورت یک قضیه‌ی دو شرطی بنویسید. اگر قضیه‌ی شرطی نیست، یک مثال نقض بیاورید.

قضیه‌ی ۱ . در هر مثلث، ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی کوچک‌تر.

قضیه‌ی ۲ . دو شکل هم‌نهشت مساحت‌های مساوی دارند.

۳ . سه ضلع مثلثی ۱۲، ۵ و ۸ سانتی‌مترند. اندازه‌ی پاره‌خط‌هایی را که نیمساز کوچک‌ترین زاویه‌ی درونی مثلث، روی ضلع روبه‌رویش پدید می‌آورد، تعیین کنید.

۴ . در شکل داده شده، AD نیمساز زاویه‌ی درونی A از مثلث ABC است. با توجه به شکل، اندازه‌ی x را تعیین کنید.



۵ . ثابت کنید، در هر مثلث، اندازه‌ی ارتفاع وارد بر هر ضلع، از مجموع اندازه‌های دو ضلع دیگر مثلث کوچک‌تر است.

۶ . سه پاره‌خط به طول‌های ۱۷، $X-1$ و ۱۳ داده شده‌اند. حدود X را چنان بیابید که این سه پاره‌خط، ضلع‌های یک مثلث باشند.

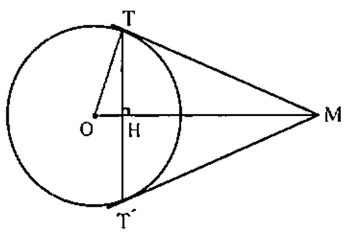
۷ . مثلث ABC را با داده‌های زیر رسم کنید.

الف) دو ضلع AB=C، AC=b و میانه‌ی $AA' = m_a$

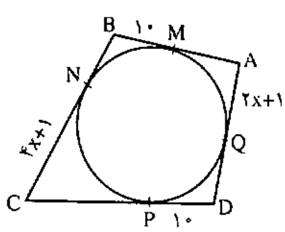
ب) $AA' = m_a$، $BB' = m_b$ و $CC' = m_c$

۸ . سه نقطه‌ی A، B و C در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای از این صفحه را بیابید که از دو نقطه‌ی B و C به یک فاصله و از نقطه‌ی A به فاصله‌ی معلوم R باشد.

۹ . از نقطه‌ی M که به فاصله‌ی ۲۵ از مرکز دایره‌ی C (O و ۱۰) قرار دارد، دو مماس MT و MT′ را بر این دایره رسم کرده‌ایم. اگر OM، پاره‌خط TT′ را در نقطه‌ی H قطع کند، اندازه‌ی پاره‌خط‌های OH، TH و MT را تعیین کنید.

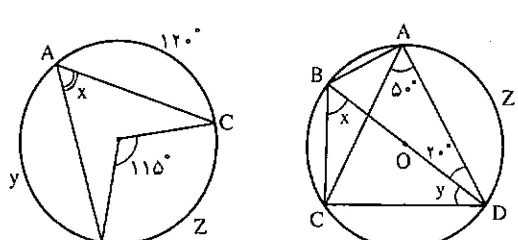


۱۰ . اگر محیط چهارضلعی محیطی ABCD برابر با ۱۰۴ سانتی‌متر باشد، اندازه‌ی x را تعیین کنید.



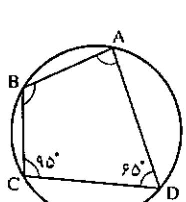
۱۱ . دو دایره‌ی هم مرکز به شعاع‌های ۶ و ۱۰ داده شده‌اند. طول وتری از دایره‌ی بزرگ‌تر را که بر دایره‌ی کوچک‌تر مماس است، تعیین کنید.

۱۲ . اندازه‌ی x، y و z را در هر یک از شکل‌های زیر تعیین کنید.



ب   الف

۱۳ . اگر چهارضلعی ABCD محاطی باشد، اندازه‌ی زاویه‌های A و B از آن را تعیین کنید.



پاسخ تشریحی مسائل

ریاضیات ۱

حل ۱:

$$A=\{5,10,17,\cdots,82\}=\{k^2+1 \mid k\in N, 2\le k\le 9\}$$

$$B=\left\{(-1)^x\times\frac{1}{x(x+2)} \mid x\in N\right\}=\left\{-\frac{1}{3},\frac{1}{8},-\frac{1}{15},\frac{1}{24},-\frac{1}{35},\cdots\right\}$$

حل ۲:

الف) $(A\cup B)-(B-A)=(A\cup B)\cap(B\cap A')'$

$$=(A\cup B)\cap(B'\cup A)$$

$$=A\cup(B\cap B')=A\cup\varnothing=A$$

ب) $(A\cap B)\cap(A-B)=(A\cap B)\cap\overbrace{(A\cap B')}^{(B'\cap A)}$

$$=A\cap(B\cap B')\cap A$$

$$=(A\cap\varnothing)\cap A=\varnothing\cap A=\varnothing$$

حل ۳:

$$(A\cup B)-(B\cup C)=(A\cup B)\cap(B\cup C)'$$

$$=(A\cup B)\cap(B'\cap C')$$

$$=(B'\cap C')\cap(A\cup B)=\left[(B'\cap C')\cap A\right]\cup\left[\underbrace{(B'\cap C')\cap B}_{\varnothing}\right]$$

$$=\left[A\cap(B'\cap C')\right]\cup\varnothing=(A\cap B')\cap C'=(A-B)-C$$

حل ۴: برای این‌که مجموعه‌ای نسبت به یک عمل بسته باشد، باید حاصل ترکیب هر دو عضو آن مجموعه توسط آن عمل، عضوی از همان مجموعه باشد.

فرض کنیم: $(3k_1+1),(3k_2+1)\in A\Rightarrow$

$$(3k_1+1)\times(3k_2+1)=9k_1k_2+3k_1+3k_2+1$$

$$=3(\underbrace{3k_1k_2+k_1+k_2}_{k})+1=(3k+1)\in A\Rightarrow$$

نسبت به ضرب بسته است.

$$(3k_1+1)+(3k_2+1)=3k_1+3k_2+2=3\underbrace{(k_1+k_2)}_{(K'\in Z)}+2=(3k'+2)\notin A$$

حل ۵:

$$\frac{3^{3x}\times 9^{x-2}}{3^{x-1}\times 6^x}=\frac{1}{2^x}\Rightarrow\frac{3^{3x}\times 3^{2(x-2)}}{3^{x-1}\times 3^x\times 2^x}=\frac{1}{2^x}$$

$$\Rightarrow\frac{3^{3x+2x-4}}{3^{x-1+x}\times 2^x}=\frac{1}{2^x}\Rightarrow 2^x\times 3^{5x-4}=2^x\times 3^{2x-1}$$

$$\Rightarrow 5x-4=2x-1\Rightarrow 3x=3\Rightarrow x=1$$

حل ۶:

$$A=4^n\times 2^4\times 5^{n-2}=2^{2n}\times 2^4\times 5^{n-2}=2^{2n+4}\times 5^{n-2}$$

$$B=2^{2n}\times 10^{2n-4}=2^{2n}\times 5^{2n-4}\times 2^{2n-4}=2^{4n-4}\times 5^{2n-4}$$

$$\Rightarrow\frac{B}{A}=\frac{2^{4n-4}\times 5^{2n-4}}{2^{2n+4}\times 5^{n-2}}=2^{(4n-4)-(2n+4)}\times 5^{(2n-4)-(n-2)}$$

$$=2^{2n-8}\times 5^{n-2}$$

حل ۷:

$$\begin{array}{l|l}
4x^5+x^3 & x^2+x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{\pm 4x^5\pm 4x^4\pm 4x^3} & 4x^3-4x^2+x+3 \\
-4x^4-3x^3 & \\
\underline{\pm 4x^4\pm 4x^3\pm 4x^2} & \\
x^3+4x^2 & \\
\underline{\pm x^3\pm x^2\pm x} & \\
3x^2-x & \\
\underline{\pm 3x\pm^2 3x\pm 3} & \\
-4x-3 &
\end{array}$$

خارج قسمت $=4x^3-4x^2+x+3$

باقی‌مانده $=-4x-3$

حل ۸:

$$(4x^2+2x-7)(3x+4)=12x^3+16x^2+6x^2+8x-21x-28$$

$$=12x^3+22x^2-13x-28=ax^3+bx^2+cx+d$$

$$\Rightarrow a=12,\ b=22,\ c=-13,\ d=-28$$

حل ۹:

الف) $(a^2+2)(a^2-2)(a^4+4a^2+4)(a^4-4a^2+4)$

$$=(a^2+2)(a^2-2)(a^2+2)^2(a^2-2)^2$$

$$=(a^4-4)\left[(a^2+2)(a^2-2)\right]^2=(a^4-4)(a^4-4)^2=(a^4-4)^3$$

$$\left[(x^2+1)-5x\right]\left[(x^2+1)+4x\right]$$

ب) $=(x^2+1)^2+(-5x+4x)(x^2+1)+(-5x\times 4x)$

$$=(x^2+1)^2+(-x)(x^2+1)-20x^2$$

$$=(x^4+2x^2+1-x^3-x-20x^2)=x^4-x^3-18x^2-x+1$$

ج) $(3a+a^{-2})^3=(3a+\frac{1}{a^2})^3$

$$=27a^3+9a^2\times\frac{1}{a^2}+\frac{9}{a^4}\times 3a+(\frac{1}{a^2})^3$$

$$=27a^3+9+27\times\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a^6}=27a^3+27a^{-3}+a^{-6}+9$$

حل ۱۰:

$$\frac{x^2+1}{x}=2\overset{(x\neq 0)}{\Longrightarrow}x+\frac{1}{x}=2\Rightarrow(x+\frac{1}{x})^2=4$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=2$$

$$(x-\frac{1}{x})^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2=(x^2+\frac{1}{x^2})-2=2-2=0$$

$$\Rightarrow(x-\frac{1}{x})^2=0\Rightarrow x-\frac{1}{x}=0$$

حل ۱۱:

الف) $6x-18+(x-3)(x-2)x=6(x-3)+(x-3)(x-2)x$

$$= (x-3)[6+(x-2)x]$$
$$= (x-3)(x^2-2x+6)$$

ب) $a^3+a-10 = a^3+a-2-8 = (a^3-8)+(a-2)$

$$= (a-2)(a^2+2a+1)+(a-2)$$
$$= (a-2)(a^2+a+2)$$

ج) $(x^2+2x)^2-3(x^2+2x)-18 = \left[(x^2+2x)-6\right]\left[(x^2+2x)+3\right]$

$$= (x^2+2x-6)(x^2+2x+3)$$

حل ۱۲ :

$a-2=0 \Rightarrow a=2$

$1-a=0 \Rightarrow a=1$

$a^2-3a+2=0 \Rightarrow (a-1)(a-2)=0 \Rightarrow a=1$ یا $a=2$

$$D = \mathbb{R}-\{1,2\}$$

$$\frac{a+2}{a-2}-\frac{2}{-(a-1)}+\frac{2a}{a^2-3a+2} = \frac{(a+2)(1-a)+2(a-2)+2a}{(a-2)(a-1)}$$
$$= \frac{-a^2-a+2+2a-4+2a}{(a-2)(a-1)}$$
$$= \frac{-a^2+3a-2}{(a-2)(a-1)} = \frac{-(a^2-3a+2)}{(a-2)(a-1)}$$
$$= \frac{-(a-1)(a-2)}{(a-2)(a-1)} = -1$$

ریاضی ۲

حل ۱ : برای آن‌که سه جمله‌ای درجه دوم ax^2+bx+c ، همواره منفی باشد، کافی است که $a<0$ و $\Delta<0$ ؛ بنابراین :

$$\begin{cases} a = 2m+5<0 \;:\; m<\frac{-5}{2} \\ \Delta = (2m-5)^2-4(2m+5)(2m-11)<0 \end{cases}$$

$\Delta = 4m^2-20m+25-4(4m^2-12m-55);$

$\Delta = -12m^2+28m+245<0$

برای حل نامعادله‌های درجه‌ی دوم فوق ریشه‌های معادله‌ی $\Delta=0$ را تعیین می‌کنیم :

$$-12m^2+28m+245=0 \;;\; m=\frac{35}{6},\ \frac{-7}{2}$$

m		$-\frac{7}{2}$		$\frac{35}{6}$	
Δ	$-$	0	$+$	0	$-$

با توجه به تعیین علامت Δ باید $m<\frac{-7}{2}$ یا $m>\frac{35}{6}$ باشد تا $\Delta<0$. و با توجه به $a<0$ یعنی $m<\frac{-5}{2}$ و اشتراک جواب $a<0$ و $\Delta<0$ داریم : $m<\frac{-7}{2}$

حل ۲ : باید جواب حقیقی معادله‌ی زیر را تعیین کرد :

$$\frac{7-x}{n}=\frac{n}{5+x};\ (7-x)(5+x)=n^2$$

$35+2x-x^2=n^2;\ x^2-2x+n^2-35=0$

$\Delta = 4-4(n^2-35)\geq 0 \;;\; n^2\leq 36 \;;\; -6\leq n\leq 6$

حل ۳ : عبارت $p(x)=\sqrt{x^2+3x-4}$ به ازای هر مقدار x که $x^2+3x+4\geq 0$ معین است ؛ بنابراین :

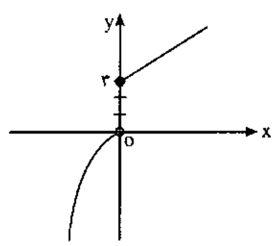
$$x^2+3x-4\geq 0 \;;\; (x-1)(x+4)\geq 0 \;;\; x\leq -4 \text{ یا } X\geq 1$$

$x\in(-\infty,-4]\cup[1,+\infty)$

حل ۴ : با رسم تابع ، به سادگی می‌توان یک به یک و پوشایی آن را تشخیص داد :

با توجه به نمودار تابع نتیجه می‌شود که تابع یک‌به‌یک است ، ولی پوشا نیست .

$$f(x)=\begin{cases} -2x^2 & x<0 \\ x+3 & x\geq 0 \end{cases}$$



زیرا اگر در فاصله‌ی (۳ و ۰) (تابع جداشده) خطی به موازات محور xها رسم شود، منحنی‌ها را قطع نمی‌کنند . در واقع برد تابع $R_f=(-\infty,0)\cup[3,+\infty)$ است و برابر R نیست .

$x=-3+\sqrt{10}\in R^+ : f(-3+\sqrt{10})=-3+\sqrt{10}+3=\sqrt{10}$

$$x\in R^+ : \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$=\frac{(x+\Delta x)+3-(x+3)}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

چون $\frac{\Delta y}{\Delta x}>0$ ، پس تابع در $x\in R^+$ صعودی است . چون تابع f در R یک‌به‌یک است ، بنابراین در R^+ نیز یک‌به‌یک و معکوس‌پذیر است . ضابطه‌ی معکوس f را در R^+ به f^{-1} نشان می‌دهیم :

$y=f(x)=x+3 \;;\; x=y-3 \;;\; f^{-1}(x)=x-3$

حل ۵ : معادله‌ی منحنی $x^2+x-xy-y=0$ را به صورت زیر ساده می‌کنیم :

$$xy+y=x^2+x \;;\; y(x+1)=x^2+x \;;\; y=\frac{x(x+1)}{x+1} \text{ و } O'\Big|\begin{matrix}2\\2\end{matrix}$$

$$(x\neq -1)y=x,\ \begin{vmatrix} x=X+2 \\ y=Y+2 \end{vmatrix} \;:\; Y+2=X+2 \;;\; Y=X$$

نقطه‌ی $A\Big|\begin{matrix}-1\\-1\end{matrix}$ متعلق به منحنی قدیم نیست؛ بنابراین نقطه‌ی $A'\Big|\begin{matrix}-1=X+2\\-1=Y+2\end{matrix}$ یا $A'\Big|\begin{matrix}-3\\-3\end{matrix}$ نیز متعلق به منحنی جدید ، یعنی Y=X نیست و در دستگاه جدید ، نقطه‌ی $A'\Big|\begin{matrix}-3\\-3\end{matrix}$ توخالی است . منحنی جدید ، معادله‌ی خط نیمساز ربع اول و سوم است و در واقع ، O'(2,2) مبدأ جدید مرکز تقارن منحنی

جدید است.

حل ۶: دو نقطه‌ی $A(x,y)$ و $B(z,t)$ نسبت به محور yها قرینه هستند؛ اگر داشته باشیم:

$$\begin{cases} z=-x \\ t=y \end{cases} ; \begin{cases} -2=-(m+3) \\ n-1=4 \end{cases} ; \begin{cases} m=-1 \\ n=5 \end{cases}$$

حل ۷: نسبت به محور xها متقارن است.

$$y \to -y : (-y)^2 = x^2+9 \ ; \ y^2 + x^2 + 9$$

نسبت به محور yها متقارن است.

$$x \to -x : y^2 = (-x)^2+9 ; \ y^2 = x^2+9$$

نسبت به مبدأ متقارن است.

$$\begin{cases} x \to -x \\ y \to -y \end{cases} : (-y)^2 = (-x)^2+9 \ ; \ y^2 = x^2+9$$

حل ۸: ابتدا دستگاه را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$\begin{cases} 3x-2y=1 \\ 3x+4y=7 \end{cases} ; \ x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{4+14}{12+6} = \frac{18}{18} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{21-3}{12+6} = \frac{18}{18} = 1$$

بنابراین، جواب دستگاه چنین است: $x=1$ و $y=1$

حل ۹: با توجه به $m \neq \pm 1$، می‌توان نوشت:

$$A^2 = \begin{bmatrix} m & 1 \\ -1 & -m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m & 1 \\ -1 & -m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2-1 & 0 \\ 0 & m^2-1 \end{bmatrix} = (m^2-1)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

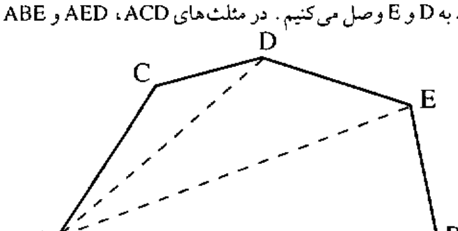
$$(A^2)^{-1} = \frac{1}{|A^2|}\begin{bmatrix} m^2-1 & 0 \\ 0 & m^2-1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(m^2-1)^2}\begin{bmatrix} m^2-1 & 0 \\ 0 & m^2-1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{m^2-1}{(m^2-1)^2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{m^2-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\frac{1}{m^2-1} = 5 \ ; \ m^2-1 = \frac{1}{5}; \ m^2 = \frac{6}{5}; \ m = \pm\sqrt{\frac{6}{5}} = \frac{\pm\sqrt{30}}{5}$$

هندسه ۱

۱. از A به D و E وصل می‌کنیم. در مثلث‌های ACD، AED و ABE داریم:



$AD<AC+CD \quad (1)$

$AE<AD+DE \quad (2)$

$AB<AE+EB \quad (3)$

از جمع کردن رابطه‌های (۱)، (۲) و (۳) داریم:

$$AD+AE+AB<AC+CD+AD+DE+AE+EB$$

پس از حذف مقدارهای مساوی از دو طرف این نامساوی خواهیم داشت:

$$AB<AC+CD+DE+EB$$

۲. می‌دانیم که مجموع زاویه‌های درونی هر n ضلعی محدب برابر $(n-2)\times 180°$ است. بنابراین داریم:

$$(n-2)\times 180° = 1620° \Rightarrow n-2=9 \Rightarrow n=11$$

۳. الف) $\begin{cases} x+y=40° \\ x-y=24 \end{cases} \Rightarrow x=32°, \ y=8°$

ب) $x=70°, \ y=50°$

پ) $\begin{cases} 2x+10=35 \\ 5+y=20 \end{cases} \Rightarrow x=12/5, \ y=15$

۴. دو مثلث MBD و MCE به حالت (ض‌ز‌ض) هم‌نهشت هستند، زیرا:

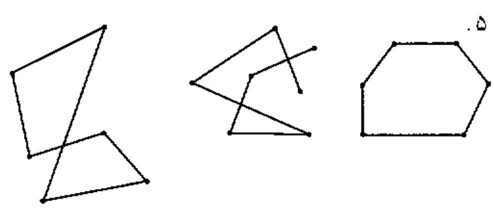
$MB=MC$ و $\hat{M}_1=\hat{M}_2$ و $AB=AC \Rightarrow \hat{B}=\hat{C}$

در نتیجه $BD=CE$ است و چون $AB=AC$ است، پس:

$$AB-BD=AC-CE \Rightarrow AD=AE$$

نکته: می‌توان هم‌نهشت بودن دو مثلث AMD و AME را ثابت کرد.

۵.



الف ب پ

۶. الف) $\hat{6}=80°$ و $\hat{5}=40°$، $\hat{4}=60°$، $\hat{3}=20°$، $\hat{2}=80°$ و $\hat{1}=20°$

ب) $D\hat{A}B=120°$ و $C\hat{E}D=120°$

۷. دو مثلث BPQ و DRS، و همچنین دو مثلث APS و RCQ به حالت (ض‌ز‌ض) هم‌نهشت هستند؛ زیرا:

$\hat{B}=\hat{D}$ و $BQ=DS$ و $PB=DR \Rightarrow \Delta BPQ \cong \Delta DSR$

$\hat{A}=\hat{C}$ و $AP=CR$ و $AS=CQ \Rightarrow \Delta APS \cong \Delta CRQ$

بنابراین: $PQ=SR$ و $PS=QR$ و در نتیجه، چهارضلعی PQRS متوازی‌الاضلاع است.

۸. از Q به A وصل می‌کنیم. در مثلث AQB، QM میانه‌ی وارد بر ضلع AB و در مثلث AQC، QP میانه‌ی وارد بر ضلع AC است. از طرف دیگر، می‌دانیم که هر میانه‌ی یک مثلث، آن مثلث را به دو مثلث هم‌ارز تبدیل می‌کند. پس داریم:

$$S_{BQM}=S_{AQM} \quad (1)$$
$$S_{CQP}=S_{AQP} \quad (2)$$
$$(1)+(2) \Rightarrow S_{BQM}+S_{CQP}=S_{AQM}+S_{AQP}=S_{AMQP}$$

۹. دو ضلع مستطیل را a و b و قطر آن را d و مساحتش را S می‌نامیم. داریم:

$$d=50,\ a=30,\ d=\sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow 50=\sqrt{30^2+b^2}$$
$$\Rightarrow b^2=2500-900=1600 \Rightarrow b=40\text{Cm}$$
$$S=a\times b \Rightarrow S=30\times 40=1200\text{Cm}^2$$

۱۰. می‌دانیم که مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a مساوی $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ و ارتفاع این مثلث برابر $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ است. پس داریم:

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=25\sqrt{3} \Rightarrow a^2=100 \Rightarrow a=10\text{Cm}$$

اندازه‌ی ارتفاع $\Rightarrow h=\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{10\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}\text{Cm}$

۱۱. داریم:

$$2x-2=3 \Rightarrow x=\frac{5}{2},\ \frac{5+y}{12}=\frac{1}{2} \Rightarrow y=1$$

حسابان

حل ۱:

$$\begin{cases} 8-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 8 \Rightarrow -2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2} \\ 2-\sqrt{8-x^2} \geq 0 \Rightarrow 4 \geq 8-x^2 \Rightarrow x^2 \geq 4 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq -2 \end{cases} \text{ یا} \end{cases}$$
$$D_f=[-2\sqrt{2},-2]\cup[2,2\sqrt{2}]$$

حل ۲:

$$f(x)=\frac{2^x+2^{-x}}{2^x-2^{-x}} \Rightarrow f(-x)=\frac{2^{-x}+2^x}{2^{-x}-2^x}=-\frac{2^x+2^{-x}}{2^x-x^{-x}}=-f(x)$$

پس f تابعی فرد است.

$$g(x)=\left|\frac{4}{2+x}\right|+\left|\frac{4+(2-x)}{2-x}\right|=\left|\frac{4}{2+x}\right|\left|\frac{4}{2-x}+1\right|$$
$$g(x)=\left|\frac{4}{2+x}\right|+\left|\frac{4}{2-x}\right|+1$$
$$\Rightarrow g(-x)=\left|\frac{4}{2-x}\right|+\left|\frac{4}{2+x}\right|+1=g(x)$$

پس g تابعی زوج است.

حل ۳:

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow \sqrt{3x_1+\sqrt{3x_1-6}}=\sqrt{3x_2+\sqrt{3x_2-6}}$$
$$3x_1-6=a \Rightarrow 3x_1=a+6,\ 3x_2-6=b \Rightarrow 3x_2=b+6$$
$$\Rightarrow \sqrt{a+6+\sqrt{a}}=\sqrt{b+6+\sqrt{b}} \Rightarrow a+6+\sqrt{a}=b+6+\sqrt{b} \Rightarrow$$
$$a-b+\sqrt{a}-\sqrt{b}=0 \Rightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})+(\sqrt{a}-\sqrt{b})=0$$
$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\underbrace{\sqrt{a}+\sqrt{b}+1}_{\text{مثبت}})=0 \Rightarrow \sqrt{a}-\sqrt{b}=0 \Rightarrow \sqrt{a}=\sqrt{b}$$
$$\Rightarrow a=b \Rightarrow 3x_1-6=3x_2-6 \Rightarrow 3x_1=3x_2 \Rightarrow x_1=x_2$$

حل ۴:

$$y=x\sqrt{x}+3x+3\sqrt{x} \Rightarrow y+1=x\sqrt{x}+3x+3\sqrt{x}+1 \Rightarrow$$
$$y+1=(\sqrt{x}+1)^3 \Rightarrow \sqrt{x}+1=\sqrt[3]{y+1} \Rightarrow \sqrt{x}=\sqrt[3]{y+1}-1$$
$$\Rightarrow x=(\sqrt[3]{y+1}-1)^2 \Rightarrow y=(\sqrt[3]{x+1}-1)^2=f^{-1}(x)$$

حل ۵: باید f(x) را بر $x-2$ تقسیم کرد و سپس خارج قسمت را مساوی صفر قرار داد:

$$x^3-2\sqrt{2}x^2-2x^2+4\sqrt{2}x+x-2 \;\Big|\; \frac{x-2}{x^2-2\sqrt{2}x+1}$$
$$0$$

$$\text{خارج قسمت}=x^2-2\sqrt{2}x+1=0 \Rightarrow x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a} \Rightarrow$$
$$x=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2-1}}{1}=\sqrt{2}\pm 1$$

حل ۶:

$$2\cos 3a.\sin a=\sin(3a+a)-\sin(3a-a)=\sin 4a-\sin 2a$$
$$=2\sin 2a\cos 2a-\sin 2a$$
$$=\sin 2a(2\cos 2a-1) \Rightarrow$$
$$\frac{2\cos 3a.\sin a}{\sin 2a}-2\cos 2a=\frac{\sin 2a(2\cos 2a-1)}{\sin 2a}-2\cos 2a$$
$$\sin 2a \neq 0 \Rightarrow 2\cos 2a-1-2\cos 2a=-1$$

حل ۷: با فرض $x=\frac{\pi}{9}$ خواهیم داشت:

$$\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cos 7x=A$$

دو طرف را در 2sinx ضرب می‌کنیم:

$$2\cos x\sin x+\underbrace{2\cos 3x\sin x}+\underbrace{2\cos 5x\sin x}$$
$$+\underbrace{2\cos 7x\sin x}=2A\sin x$$

$$\sin 2x+\sin 4x-\sin 2x+2\sin 6x-\sin 4x+$$
$$2\sin 8x-\sin 6x=2A\sin x$$
$$\sin 8x=2A\sin x \Rightarrow A=\frac{\sin 8x}{2\sin x},\ x=\frac{\pi}{9}$$
$$A=\frac{\sin\frac{8\pi}{9}}{2\sin\frac{\pi}{9}}=\frac{\sin(\pi-\frac{\pi}{9})}{2\sin\frac{\pi}{9}}=\frac{\sin\frac{\pi}{9}}{2\sin\frac{\pi}{9}}=\frac{1}{2}$$

حل ۸:

$$|f(x)-۳|<\frac{۱}{۵۰}\Rightarrow|۲x+۱-۳|<\frac{۱}{۵۰}\Rightarrow|۲(x-۱)|<\frac{۱}{۵۰}\Rightarrow$$

$$|x-۱|<\frac{۱}{۱۰۰}, x\to ۱^{+}\Rightarrow|x-۱|=x-۱>۰$$

$$|x-۱|<\frac{۱}{۱۰۰}\Rightarrow ۰<x-۱<\frac{۱}{۱۰۰}\Rightarrow ۱<x<\frac{۱۰۱}{۱۰۰}$$

حل ۹:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[۳]{x^{۳}+۶x^{۲}}-x)=+\infty-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[۳]{x^{۳}+۶x^{۲}}-x)\times$$

$$\times\frac{\sqrt[۳]{(x^{۳}+۶x^{۲})^{۲}}+x\sqrt[۳]{x^{۳}+۶x^{۲}}+x^{۲}}{\sqrt[۳]{(x^{۳}+۶x^{۲})^{۲}}+x\sqrt[۳]{x^{۳}+۶x^{۲}}+x^{۲}}\sim$$

$$\sim\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{۳}+۶x^{۲}-x^{۳}}{\sqrt[۳]{x^{۶}}+x\sqrt[۳]{x^{۳}}+x^{۲}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۶x^{۲}}{x^{۲}+x^{۲}+x^{۲}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{۶x^{۲}}{۳x^{۲}}=۲$$

حل ۱۰:

$$bx^{۲}-۱۴x+c=۰ \quad x'=۱\ ,\ x''=\frac{۵}{۲}$$

$$x'+x''=-\frac{b}{a}\Rightarrow ۱+\frac{۵}{۲}=\frac{۱۴}{b}\Rightarrow\frac{۷}{۲}=\frac{۱۴}{b}\Rightarrow\boxed{b=۴}$$

$$x'.x''=\frac{c}{a}\Rightarrow ۱\times\frac{۵}{۲}=\frac{c}{۴}\Rightarrow\frac{۵}{۲}=\frac{c}{۴}\Rightarrow\boxed{c=۱۰}$$

مجانب افقی $x\to\pm\infty\Rightarrow$

حد $f(x)=\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow\frac{a}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow\boxed{a=۲\sqrt{۲}}$

حل ۱۱:

$$f(x)=\begin{cases}ax^{۲}+bx+۱ & -۲<x<۲\\ x-۱ & x\geq ۲\\ -x+۱ & x\leq -۲\end{cases}$$

برای این‌که این تابع در IR پیوسته باشد، باید در ۲ و ۲- پیوسته باشد.

$$\lim_{x\to ۲^{-}}f(x)=\lim_{x\to ۲^{+}}f(x)\Rightarrow ۴a+۲b+۱=۱$$

$$\Rightarrow ۴a+۲b=۰$$

$$\lim_{x\to -۲^{+}}f(x)=\lim_{x\to -۲^{-}}f(x)\Rightarrow ۴a-۲b+۱=۳$$

$$\Rightarrow ۴a-۲b=۲$$

$$\begin{cases}۴a+۲b=۰\\ ۴a-۲b=۲\end{cases}\Rightarrow ۸a=۲\Rightarrow\boxed{a=\frac{۱}{۴}}\ ۱+۲b=۰\Rightarrow\boxed{b=\frac{۱}{۲}}$$

حل ۱۲:

حدّ چپ $\lim_{x\to ۰^{-}}f(x)=\lim_{x\to ۰^{-}}\frac{b\sin ۴x}{\sqrt{۲\sin^{۲}۲x}}=\lim_{x\to ۰^{-}}\frac{b\sin ۴x}{\sqrt{۸x^{۲}}}$

$$=\frac{b(۴x)}{-۲\sqrt{۲}x}=-\frac{۲b}{\sqrt{۲}}$$

مقدار تابع $f(۰)=\lfloor ۰-\sqrt{۳}\rfloor=-۲$

حدّ راست $\lim_{x\to ۰^{+}}f(x)=a\lfloor ۰^{+}-۱\rfloor=-a$

$$-a=-۲\Rightarrow\boxed{a=۲},\ \frac{-۲b}{\sqrt{۲}}=-۲\Rightarrow\boxed{b=\sqrt{۲}}$$

جبر و احتمال

حل ۱:

$$n=۱:\ \frac{۱}{۰!}+\frac{۱}{۱!}\leq ۳-\frac{۱}{۱}\Rightarrow ۱+۱\leq ۲(۱+۱=۲)$$

$$n=k:\ \frac{۱}{۰!}+\frac{۱}{۱!}+\frac{۱}{۲!}+\dots+\frac{۱}{k!}\leq ۳-\frac{۱}{k}\ \text{(فرض استقرا)}$$

$$n=k+۱:\ \frac{۱}{۰!}+\frac{۱}{۱!}+\frac{۱}{۲!}+\dots+\frac{۱}{k!}+\frac{۱}{(k+۱)!}\leq ۳-\frac{۱}{k+۱}\ \text{(حکم استقرا)}$$

طرفین فرض را با $\frac{۱}{(k+۱)!}$ جمع می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۰!}+\frac{۱}{۱!}+\frac{۱}{۲!}+\dots+\frac{۱}{k!}+\frac{۱}{(k+۱)!}\leq ۳-\frac{۱}{k}+\frac{۱}{(k+۱)!}\ \text{(فرض جدید)}$$

از مقایسه‌ی فرض جدید و حکم نتیجه می‌شود که کافی است، نابرابری زیر اثبات شود:

$$۳-\frac{۱}{k}+\frac{۱}{(k+۱)!}\leq ۳-\frac{۱}{k+۱}$$

این نابرابری به روش برگشتی ثابت می‌شود:

$$-\frac{۱}{k+۱}\geq-\frac{۱}{k}+\frac{۱}{(k+۱)!}\Rightarrow\frac{۱}{k}-\frac{۱}{k+۱}\geq\frac{۱}{(k+۱)!}\Rightarrow$$

$$\frac{۱}{k(k+۱)}\geq\frac{۱}{(k+۱)!}\Rightarrow(k+۱)!\geq k(k+۱)\Rightarrow k!\geq k\Rightarrow$$

$$(k-۱)!\geq ۱$$

نابرابری نهایی همواره صحیح است. اکنون استدلال تکمیلی بیان می‌شود:

$$(k-۱)!\geq ۱\Rightarrow k!\geq k\Rightarrow(k+۱)!\geq k(k+۱)\Rightarrow$$

$$\frac{۱}{(k+۱)!}\leq\frac{۱}{k(k+۱)}=\frac{۱}{k}-\frac{۱}{k+۱}\Rightarrow-\frac{۱}{k+۱}\geq-\frac{۱}{k}+\frac{۱}{(k+۱)!}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}۳-\frac{۱}{k}+\frac{۱}{(k+۱)!}\leq ۳-\frac{۱}{k+۱}\\ \frac{۱}{۰!}+\frac{۱}{۱!}+\dots+\frac{۱}{k!}+\frac{۱}{(k+۱)!}\leq ۳-\frac{۱}{k}+\frac{۱}{(k+۱)!}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{۰!}+\frac{۱}{۱!}+\dots+\frac{۱}{k!}+\frac{۱}{(k+۱)!}\leq ۳-\frac{۱}{k+۱}$$

حل ۲:

$$n=۱\Rightarrow ۴|۵^{۲}+۵-۲\Rightarrow ۴|۲۸$$

$$n=k\Rightarrow ۴|۵^{k+۱}+۵^{k}-۲\Rightarrow ۵^{k+۱}+۵^{k}-۲=۴r\ \text{(فرض استقرا)}$$

$$n=k+۱\Rightarrow ۴|۵^{k+۲}+۵^{k+۱}-۲\Rightarrow ۵^{k+۲}+۵^{k+۱}-۲=۴r'\ \text{(حکم استقرا)}$$

طرفین فرض را در ۵ ضرب می‌کنیم:

$$۵(۵^{k+۱}+۵^{k}-۲)=۲۰r\Rightarrow ۵^{k+۲}+۵^{k+۱}-۱۰=۲۰r\Rightarrow$$

$$۵^{k+۲}+۵^{k+۱}-۲=۲۰r+۸=۴(\frac{۵r+۲}{r'})=۴r'$$

حل ۳:

$$a=۲k+۱\Rightarrow a^{۲}=(۲k+۱)^{۲}=۴k^{۲}+۴k+۱=$$

$$۴k(k+۱)+۱$$

چون یکی از دو عدد صحیح و متوالی k و k + 1 زوج هستند، پس حاصل‌ضرب آن‌ها حتماً عددی زوج است؛ یعنی $k(k+1) = 2m$. درنتیجه داریم:

$$a^2 = 4(2m) + 1 = 8m + 1$$

حل ۴:

فرض کنیم n مضرب ۷ نباشد، بنابراین: $n = 7k + r$ و ۶ و ... و ۲ و $r = 1$. و از آن‌جا داریم:

$$n^2 = (7k+r)^2 = 49k^2 + 14kr + r^2 = 7(\underbrace{7k^2 + 2kr}_{m}) + r^2 = 7m + r^2$$

یعنی به ازای هیچ یک از مقادیر r، r^2 مضرب ۷ نیست. بنابراین n^2 هم مضرب ۷ نیست و این با فرض مسأله تناقض دارد.

حال فرض می‌کنیم، $\sqrt{7}$ عددی گویا چون $\frac{m}{n}$ باشد و کسر $\frac{m}{n}$ را آن‌قدر ساده می‌کنیم تا به کسری تحویل‌ناپذیر تبدیل شود، یعنی m و n نسبت به هم اول شوند:

$\sqrt{7} = \frac{m}{n}$ و m و $n \in Z$ و $n \neq 0$ و $(m,n) = 1$

$$\Rightarrow 7 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow m^2 = 7n^2$$

یعنی m^2 مضرب ۷ است و از آن‌جا طبق نتیجه‌ی قبل، m نیز مضرب ۷ است؛ یعنی $m = 7k$. درنتیجه:

$$m^2 = (7k)^2 = 7n^2 \Rightarrow 7k^2 = n^2$$

بنابراین n^2 مضرب ۷ و از آن‌جا n نیز مضرب ۷ است: $n = 7k'$. درنتیجه، m و n هر دو مضرب ۷ هستند و نسبت به یکدیگر اول نیستند که این با فرض اول بودن m و n نسبت به هم تناقض دارد.

حل ۵:

$$a, b > 0 : \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b \Rightarrow \frac{a^3 + b^3}{ab} \geq a + b \Rightarrow$$
$$a^3 + b^3 \geq ab(a+b) \Rightarrow (a+b)(a^2 - ab + b^2) \geq ab(a+b),$$
$$a + b > 0 \Rightarrow a^2 - ab + b^2 \geq ab \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$
$$\Rightarrow (a-b)^2 \geq 0$$

نتیجه‌ی آخر به روشنی درست است. برگشت‌پذیری مرحله‌ها به صورت زیر است:

$$(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - ab + b^2 \geq ab \Rightarrow$$
$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) \geq ab(a+b) \Rightarrow a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$$
$$\Rightarrow \frac{a^3 + b^3}{ab} \geq a + b \Rightarrow \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b$$

حل ۶: باقی‌مانده‌های تقسیم بر ۶، شش نوعند: ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ و ۰ یعنی شش لانه داریم و می‌خواهیم هر لانه شامل حداقل ۴ عضو باشد. پس حداقل $1 + 3 \times 6 = 19$ عدد باید انتخاب کنیم.

حل ۷:

الف) $(A - B) \cap (C - D) = (A \cap B') \cap (C \cap D') = (A \cap C) \cap (B' \cap D') = (A \cap C) \cap (B \cup D)' = (A \cap C) - (B \cup D)$

ب) $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$ و $C \subseteq D \Rightarrow C \cup D = D \Rightarrow (A \cup B) \cup (C \cup D) = B \cup D \Rightarrow (A \cup C) \cup (B \cup D) = B \cup D) \Rightarrow (A \cup C) \subseteq (B \cup D)$

حل ۸:

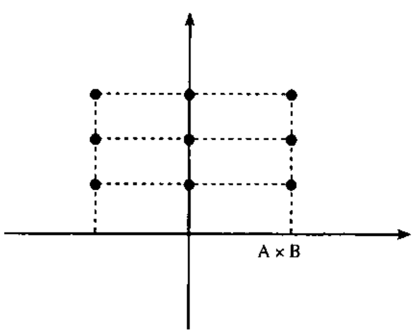
الف) $x^3 = 4x \Rightarrow x^3 - 4x = 0,\ x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow$

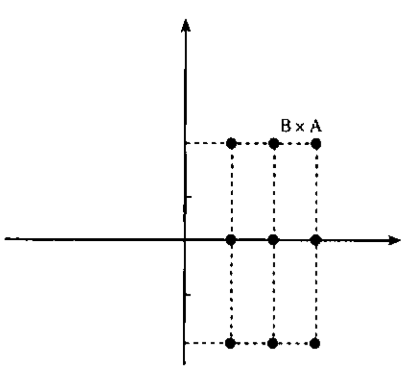
$x = 0$ یا $\pm 2 \Rightarrow A = \{0, 2, -2\}$

$x^2 < 4x \Rightarrow x^2 - 4x < 0 \Rightarrow x(x-4) < 0 \Rightarrow 0 < x < 4,$

$x \in Z \Rightarrow x = 1$ یا ۲ یا ۳ $\Rightarrow B = \{1, 2, 3\} \Rightarrow$

$$A \times B = \{(0,1), (0,2), (0,3), (2,1), (2,2), (2,3), (-2,1), (-2,2), (-2,3)\}$$
$$B \times A = \{(1,0), (2,0), (3,0), (1,2), (2,2), (3,2), (1,-2), (2,-2), (3,-2)\}$$





ب)

$$A^2 = \{(0,0), (0,2), (0,-2), (2,0), (2,2), (2,-2), (-2,0), (-2,2), (-2,-2)\}$$
$$A^2 - A \times B = \{(0,0), (0,-2), (2,0), (2,-2), (-2,0), (-2,-2)\}$$

پس $A^2 - A \times B$، ۶ عضو و درنتیجه $2^6 = 64$ زیرمجموعه دارد.

ج)

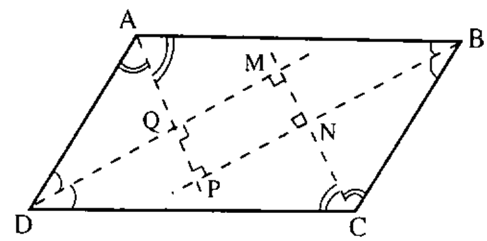
$$A^2 - B \times A = \{(0,0), (0,2), (0,-2), (-2,0), (-2,2), (-2,-2)\}$$
$$\Rightarrow (A^2 - A \times B) \cap (A^2 - B \times A)$$
$$= \{(0,0), (0,-2), (-2,0), (-2,-2)\}$$

هندسه ۲

۱ . می‌دانیم که نیمسازهای هر دو زاویه‌ی مجاور از یک متوازی‌الاضلاع، بر هم عمودند؛ بنابراین:

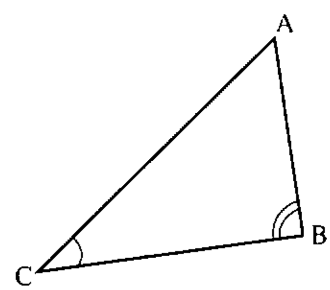
$\hat{M} = \hat{N} = \hat{P} = \hat{Q} = ۹۰^\circ$

و در نتیجه، چهارضلعی MNPQ مستطیل است.



۲ . الف) قضیه: اگر در مثلثی دو زاویه مساوی نباشند، آن‌گاه ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی کوچک‌تر.

برای مثال، در مثلث ABC اگر $\hat{B} > \hat{C}$ باشد، آن‌گاه نتیجه می‌شود که $\overline{AC} > \overline{AB}$ است.



عکس قضیه: اگر در مثلثی دو ضلع مساوی نباشند، آن‌گاه زاویه‌ی روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از زاویه‌ی روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر. یعنی در مثلث ABC، اگر $\overline{AC} > \overline{AB}$ باشد، آن‌گاه $\hat{B} > \hat{C}$ است.

می‌دانیم که این قضیه و عکس آن هر دو درست هستند، پس می‌توان گفت: شرط لازم و کافی برای آن‌که یک زاویه از مثلثی بزرگ‌تر از یک زاویه‌ی دیگر از آن مثلث باشد؛ آن است که ضلع روبه‌رو به این زاویه، بزرگ‌تر از ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی دیگر باشد. یعنی در مثلث ABC داریم:

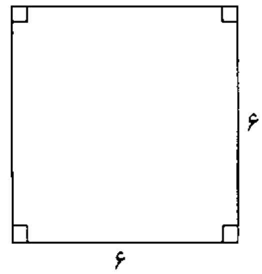
$\hat{B} > \hat{C} \Leftrightarrow AC > AB$

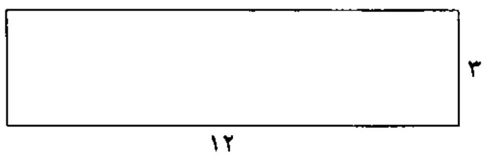
ب) قضیه: اگر دو شکل هم‌نهشت باشند، آن‌گاه مساحت‌های آن‌ها با هم برابر است.

عکس این قضیه درست نیست، زیرا دو شکل که مساحت‌های برابر دارند، همواره هم‌نهشت نیستند. برای مثال، مستطیل ABCD و مربع MNPQ مساحت‌های برابر دارند، زیرا:

$S = ۶^۲ = ۳۶$ مربع

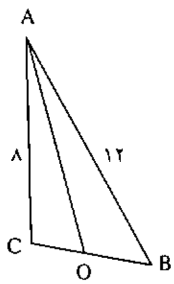
$S = ۳ \times ۱۲ = ۳۶$ مستطیل





اما این دو شکل هم‌نهشت نیستند.

فرض می‌کنیم ۱۲ =AB، BC=۵ و AC=۸ باشد. کوچک‌ترین زاویه، زاویه‌ای است که روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر است. پس در این شکل، زاویه‌ی A کوچک‌ترین زاویه است. بنابراین نیمساز AD را رسم می‌کنیم. داریم:



$$DB = \frac{BC \times AB}{AB + AC} = \frac{a.c}{b+c} = \frac{۵ \times ۱۲}{۱۲ + ۸} = ۳$$

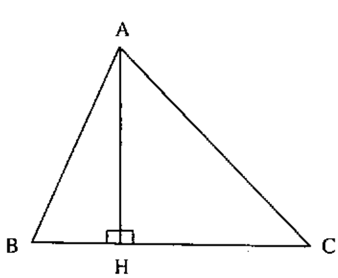
$$DC = \frac{BC \times AC}{AB + AC} = \frac{a.b}{b+c} = \frac{۵ \times ۸}{۱۲ + ۸} = ۲$$

۴ . بنا بر ویژگی نیمساز داریم:

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{۲x+۴}{۱۵} = \frac{۳x+۱۰}{۲۵} \Rightarrow \frac{۲x+۴}{۳} = \frac{۳x+۱۰}{۵}$$

$$۱۰x + ۲۰ = ۹x + ۳۰ \Rightarrow x = ۱۰$$

۵ . مثلث ABC و ارتفاع AH از این مثلث را در نظر می‌گیریم. در مثلث‌های قائم‌الزاویه ABH و ACH داریم:



$$\begin{cases} AH < AB & (۱) \\ AH < AC & (۲) \end{cases}$$

از جمع کردن این دو نامساوی خواهیم داشت:

$$(۱) + (۲) \Rightarrow ۲AH < AB + AC \Rightarrow AH < \frac{AB + AC}{۲}$$

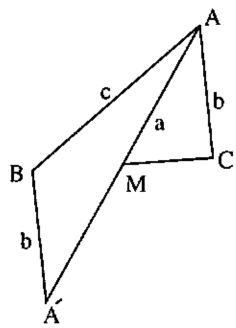
۶ . در مثلث ABC داریم:

$$|AB - AC| < BC < AB + AC$$

پس اگر AB=۱۷ ، BC=x-۱ و AC=۱۳ باشد، داریم:

$$|۱۷-۱۳| < x-۱ < ۱۷+۱۳ \Rightarrow ۴ < x-۱ < ۳۰$$
$$\Rightarrow ۵ < x < ۳۱$$

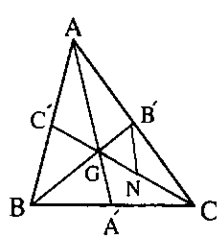
با توجه به این که باید $۰ < x-۱$ یا $x > ۱$ باشد، پس حدود به دست‌آمده برای X قابل قبول است.



۷. الف) فرض می‌کنیم مسأله حل شده و مثلث ABC جواب مسأله باشد. میانه‌ی AM از این مثلث را رسم می‌کنیم و آن را از طرف M به اندازه‌ی خودش تا نقطه‌ی A' امتداد می‌دهیم و از A' به B (یا C) وصل می‌کنیم. چهارضلعی ABA'C متوازی‌الاضلاع است، پس: BA'=AC=b است. از طرف دیگر، AB=C و $AA'=۲AM=۲m_a$ است، بنابراین مثلث ABA' به دلیل معلوم بودن اندازه‌ی سه ضلعش قابل رسم است. برای رسم مثلث خواسته شده به صورت زیر عمل می‌کنیم:

مثلث ABA' را با ضلع‌های AB=C، BA'=b و $AA'=۲m_a$ رسم می‌کنیم. از نقطه‌ی B به نقطه‌ی M وسط ضلع AA' وصل می‌کنیم و پاره‌خط BM را به اندازه‌ی خود امتداد می‌دهیم تا نقطه‌ی C به دست آید. از C به A وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.

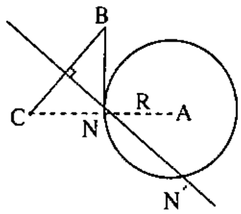
به شرط قابل رسم بودن مثلث ABA'، مسأله جواب دارد.



ب) فرض می‌کنیم مسأله حل شده و مثلث ABC، جواب مسأله باشد. میانه‌های AA'، BB' و CC' را رسم می‌کنیم. می‌دانیم که این میانه‌ها در نقطه‌ی G مرکز ثقل مثلث، هم‌رأسند.

از نقطه‌ی N وسط پاره‌خط GC، به نقطه‌ی B' وسط ضلع AC وصل می‌کنیم. در مثلث AGC، پاره‌خط NB' وسط‌های دو ضلع AC و GC را به هم وصل کرده است؛ پس موازی و مساوی نصف GA است. یعنی: $NB' = \frac{GA}{۲} = \frac{\frac{۲}{۳}m_a}{۲} = \frac{۱}{۳}m_a$. از طرف دیگر، $GN = \frac{۱}{۳}CC' = \frac{۱}{۳}m_c$ و $GB' = \frac{۱}{۳}BB' = \frac{۱}{۳}m_b$ است، بنابراین سه ضلع مثلث GB'N معلوم است. این مثلث به دلیل معلوم بودن اندازه‌ی سه ضلعش قابل رسم است. برای حل مسأله، نخست مثلث GNB' را رسم می‌کنیم و با استفاده از آن، نقطه‌های A، B و C، رأس‌های مثلث ABC را به دست می‌آوریم و این مثلث را رسم می‌کنیم. برای مثال، اگر GB' را به اندازه‌ی دو برابر خود از طرف G امتداد دهیم، رأس B به دست می‌آید و ...

۸. مکان هندسی نقطه‌هایی از یک صفحه که از دو نقطه‌ی B و C به یک فاصله هستند، عمود منصف پاره‌خط BC است، پس عمود منصف پاره‌خط BC



را رسم می‌کنیم و آن را Δ می‌نامیم.

از طرف دیگر، مکان هندسی نقطه‌هایی از این صفحه که از نقطه‌ی A به فاصله‌ی R قرار دارند، دایره‌ای به مرکز A و به شعاع R است. این دایره را نیز رسم می‌کنیم و آن را دایره‌ی C می‌نامیم. نقطه یا نقطه‌های برخورد خط Δ و دایره‌ی C جواب مسأله‌اند. به تعداد نقطه‌های برخورد این دو، مسأله دارای جواب است.

۹. در مثلث قائم‌الزاویه OMT ($\hat{T}=۹۰^\circ$)، TH ارتفاع وارد بر وتر است و داریم:

$$OT^۲ = OH.OM \Rightarrow ۱۰^۲ = OH \times ۲ \Rightarrow OH = ۴$$
$$TH^۲ = OH \times HM \ , \ HM = OM - OH = ۲۵ - ۴ = ۲۱$$
$$\Rightarrow TH^۲ = ۴ \times ۲۱ = ۸۴ \Rightarrow TH = \sqrt{۸۴} = ۲\sqrt{۲۱}$$

از طرف دیگر داریم:

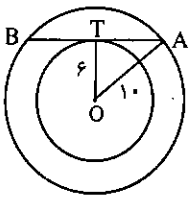
$$MT = \sqrt{OM^۲ - OT^۲} = \sqrt{۲۵^۲ - ۱۰^۲} = \sqrt{۵۲۵} = ۵\sqrt{۲۱}$$

۱۰. می‌دانیم، مماس‌هایی که از یک نقطه بر یک دایره رسم می‌شوند، با هم مساوی‌اند. بنابراین داریم:

$$AM = AQ = ۲x+۱ \ , \ BN = BM = ۱۰ \ , \ CP = CN = ۴x+۱,$$
$$DQ = DP = ۱۰$$

محیط چند ضلعی =AB+BC+CD+DA=۲(AB+CD)

$$\Rightarrow ۱۰۴=۲[(۲x+۱+۱۰)+(۴x+۱+۱۰)]$$
$$\Rightarrow ۱۰۴=۱۲x+۴۴ \Rightarrow ۱۲x=۶۰ \Rightarrow x=۵$$



۱۱. وتر AB از دایره‌ی بزرگ‌تر را که در نقطه‌ی T بر دایره‌ی کوچک‌تر مماس است، در نظر می‌گیریم. از O مرکز مشترک دو دایره به A و T وصل می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی AOT داریم:

$$AT = ۶ \ , \ AO = ۱۰ \ , \ O\hat{T}A = ۹۰^\circ \Rightarrow AT = \sqrt{OA^۲ - OT^۲}$$
$$\Rightarrow AT = \sqrt{۱۰^۲ - ۶^۲} = \sqrt{۶۴} = ۸ \Rightarrow AB = ۲AT = ۱۶$$

بدیهی است که نقطه‌ی T وسط وتر AB است.

۱۲. الف) $x = ۵۰^\circ \ , \ y = ۴۰^\circ \ , \ z = ۱۴۰^\circ$

ب) $z = ۱۱۵^\circ \ , \ x = \frac{۱۱۵^\circ}{۲} = ۵۷^\circ,۳۰'$ و

$$y = ۳۶۰^\circ - (۱۱۵^\circ + ۱۲۰^\circ) = ۱۲۵^\circ$$

۱۳. در هر چهار ضلعی محاطی، زاویه‌های روبه‌رو مکمل یکدیگرند، پس داریم:

$$\hat{A} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A} + ۹۵^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A} = ۸۵^\circ$$
$$\hat{B} + \hat{D} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{B} + ۶۵^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow B = ۱۱۵^\circ$$

این نکته را یادآور می‌شویم که الفاظ «الگوریسم» و «الگوریتم» (که با کلمه‌ی لگاریتم فرق دارد) که در زبان‌های اروپایی تا سده‌ی هجدهم میلادی نام معمولی حساب با ارقام هندی بود و هنوز هم به معنی «روش ویژه‌ی محاسبه در نوع خاصی از مسائل ریاضی» به کار می‌رود، به این مناسبت است که ترجمه‌ی لاتینی کتاب حساب خوارزمی عنوان Liber algorismi (کتاب خوارزمی) داشت و لفظ «الگوریسم» که از تحریف نام الخوارزمی پدید آمد بعدها نزد اروپاییان برای فنّ حساب عملی با ارقام هندی مصطلح شد و این اصطلاح در مقابل اصطلاح «اریثمتیک» (arithmetic) که به معنی علم نظری اعداد (ارثماطیقی) بود به کار می‌رفت. همچنین لفظ «جبر» در زبان‌های اروپایی (algèbre-algebra و غیره) بدون تردید مشتق از عنوان کتاب الجبر و المقابله خوارزمی است، اگرچه بعضی آن را مشتق از لفظ آسوری gabrû دانسته‌اند.

آثار ریاضی خوارزمی

ابن‌ندیم در الفهرست نام چهار کتاب از تألیفات خوارزمی را ذکر کرده که عبارتند از: کتاب زیج در دو نسخه (اول و دوم) و کتاب الرخامه و کتاب العمل بالاسطرلاب و کتاب عمل الاسطرلاب و کتاب التاریخ و از سایر تألیفات وی که موجود است نامی نبرده است.

***

برای مزید فایده متذکر می‌شویم که سارتن در کتاب مدخل تاریخ علم خود فهرست اسامی تقریباً بیست و سه کتاب یا مقاله را که درباره‌ی آثار مختلف خوارزمی تا سال ۱۹۲۷ میلادی (سال تألیف جلد اول کتاب مدخل) به چاپ رسیده بوده آورده و این فهرست را به شش بخش تقسیم کرده است: بررسی‌های عمومی، متون ریاضی، نقد علمی آثار ریاضی، متون نجومی و مثلثاتی، نقد علمی آثار نجومی و مثلثاتی، جغرافیا.

***

اکنون می‌پردازیم به ذکر اسامی آثار ریاضی موجود خوارزمی

۱. مختصر من حساب الجبر و المقابله

این قدیمی‌ترین کتاب ریاضی است که از دوره‌ی اسلامی به دست ما رسیده است. فردریک رُزِن در سال ۱۸۳۱م این کتاب را از روی متن عربی نسخه‌ی خطی آن که در کتابخانه‌ی آکسفورد موجود است به انگلیسی ترجمه کرد و با متن عربی آن به چاپ رسانید. این ترجمه دارای اشتباهاتی است که قسمتی از آن‌ها بعداً توسط محققان تصحیح شده است.

یک نسخه‌ی خطی دیگر از کتاب جبر و مقابله خوارزمی در قاهره موجود است و در شماره‌ی ماه نوامبر ۱۹۵۶م مجله‌ی معهد المخروطات العربیه بالقاهره معرفی شده است.

متن عربی جبر و مقابله‌ی خوارزمی بار دیگر در سال ۱۹۳۹م توسط علی مصطفی مشرفه و محمد مرسی احمد در مصر چاپ شد. این چاپ دارای مقدمه‌ای درباره‌ی زندگینامه‌ی خوارزمی است و در تهیه‌ی یادداشت‌های ذیل صفحات آن از کتاب رزن استفاده شده است.

۲. کتاب الجمع و التفریق

این نخستین کتابی است که در دوره‌ی اسلامی درباره‌ی حساب با ارقام هندی نوشته شده و در بسط و رواج فن حساب هندی، چه در کشورهای اسلامی و چه بعداً در کشورهای اروپایی، تأثیر فوق‌العاده داشته است و مسلمین و اروپاییان نخستین بار توسط این کتاب با حساب هندی آشنا شدند.

قفطی در تاریخ الحکماء نوشته است: «و دیگر از علوم ایشان (=هندیان) که به ما رسیده، کتابی است در علم حساب عدد ایشان. ابوجعفر محمدبن موسی الخوارزمی آن را شرح و بسط داده است.

متن عربی کتاب الجمع و التفریق خوارزمی از بین رفته است ولی یک نسخه‌ی خطی از ترجمه‌ی لاتینی آن در کتابخانه‌ی کمبریج موجود است. روسکا ثابت کرده است که این ترجمه‌ی لاتینی ترجمه‌ی همان کتاب الجمع و التفریق است که احیاناً باید به عنوان عربی آن به حساب الهندی را افزود.

۳. زیج

چنان که پیش از این گفته شد ابن‌ندیم در الفهرست دو زیج به نام خوارزمی ثبت کرده و نوشته است که او دارای دو کتاب زیج است و یادآور شده که این زیج‌ها به «زیج سند هند» معروف هستند.

قفطی در تاریخ الحکماء در ضمن ترجمه‌ی احوال و آثار ابراهیم فزاری از قول ابن‌الادمی نوشته است که در سال ۱۵۶ هـ.ق مردی از اهل هند به خدمت منصور عباسی پیوست و کتابی با وی بود و منصور فرمان داد که آن کتاب را به لغت عربی نقل نمایند و محمدبن ابراهیم فزاری متولی این خدمت شد و کتابی از آن تألیف نمود که منجمان آن را سند هند کبیر می‌نامند و اهل آن زمان به آن عمل می‌نمودند. و افزوده است: «تا زمان مأمون رسید. پس ابوجعفر محمدبن موسی الخوارزمی آن را اختصاری نمود و زیج خود را که در بلاد اسلام مشهور است، از آن بساخت. و در آن زیج اعتماد کرد بر اوساط سند هند و در آن موافقت نمود، لیکن در تعادیل و در میل مخالفت کرد، بلکه در تعادیل، موافقت منجمین فرس و در میل موافقت بطلمیوس اختیار نمود و چندین ابواب نیکو متضمن تقریب و نزدیک شدن حساب به تحقیق اختراع نمود... بالجمله اهل آن زمان از منجمین که معتقد طریقه‌ی سند هند بودند زیج مذکور را پسندیده داشتند و در آفاق مشهور گردانیدند.»

ابوریحان بیرونی به زیج خوارزمی توجه داشته و از آن در تألیفات خود نام برده و علاوه بر این کتابی درباره‌ی علل زیج خوارزمی نوشته بوده است. نیز بیرونی در فصل دوازدهم از رساله‌ی استخراج الاوتار از کتابی یاد می‌کند که ابوالعباس فرغانی در تعلیل و تصحیح زیج خوارزمی نوشته بوده است.

منبع

برگرفته از کتاب زندگی‌نامه ریاضی دانان دوره‌ی اسلامی / ابوالقاسم قربانی

دفتر انتشارات
کمک آموزشی
برگزار می کند

سومین دوره‌ی جشنواره‌ی

عکس رشد

به یاری آفریننده‌ی نقش‌ها

مجلات رشد، وابسته به دفتر انتشارات کمک آموزشی، سومین دوره‌ی «جشنواره‌ی عکس رشد» را برگزار می کنند.

عکاسان بزرگسال و دانش‌آموز هر کدام می توانند در دو گرایش:
۱. آموزش و پرورش از نگاه دوربین. ۲. آزاد.
در این جشنواره شرکت کنند.

جوایز

۱. جایزه نفر اول هر گرایش، علاوه بر دیپلم افتخار، تندیس و چهار سکه‌ی بهار آزادی است.
۲. به کسانی که رتبه‌ی دوم و سوم هر گرایش را به‌دست آورند، علاوه بر اهدای لوح تقدیر وتندیس، به ترتیب به هر کدام سه و دو سکه‌ی بهار آزادی اهدا خواهد شد.
۳. در هر گرایش بنا به نظر گروه داوری، حداکثر از یک نفر تقدیر می‌شود که هریک از آنان، علاوه بر لوح تقدیر، یک سکه‌ی بهار آزادی دریافت خواهند کرد.
۴. به همه‌ی کسانی که عکسشان به نمایشگاه راه پیدا کند، لوح یادبود، پنج حلقه فیلم عکاسی و برخی از تولیدات دفتر انتشارات کمک آموزشی اهدا می‌شود.
۵. نمایشگاه آثار برگزیده و مراسم اهدای جوایز نفرات برتر، شهریورماه ۱۳۸۵ در تهران برگزار خواهد شد که مکان و زمان دقیق برگزاری مراسم، به موقع به اطلاع شرکت کنندگان و علاقه‌مندان خواهد رسید.

مقررات

۱. مهلت ارسال آثار تا ۱۵ اردیبهشت ۱۳۸۵ است.
۲. هر نفر می تواند، حداکثر با پنج قطعه عکس در هر گرایش شرکت کند. (شرکت یک عکاس در هر دو گرایش آزاد است).
۳. ابعاد عکس‌ها باید حداقل ۱۸ × ۱۳ و حداکثر ۳۰ × ۲۰ سانتی‌متر باشند.
۴. عکاسانی که سن آن‌ها کم‌تر از ۱۸ سال است، می‌توانند در گروه دانش‌آموزی، و عکاسانی که سنشان بیش‌تر از ۱۸ سال است، در گروه بزرگسال شرکت کنند.
۵. عکس‌های ارسالی نباید قبلاً در نشریه و یا کتابی به چاپ رسیده باشند.
۶. مسؤولیت درستی اطلاعات مربوط به هر عکس وعکاس آن، بر عهده‌ی شرکت کننده خواهد بود.
۷. شرکت کنندگان باید برگه‌ای شامل گرایش، شماره، تاریخ و مکان عکاسی و نام عکاس را پشت هریک از عکس‌ها بچسبانند.
۸. در برگه‌ای جداگانه، مشخصات کامل خود را با شماره تلفن تماس و نشانی کامل پستی یادداشت کنید و همراه عکس‌ها به نشانی دبیرخانه‌ی جشنواره بفرستید.
۹. دفتر انتشارات کمک آموزشی اجازه دارد، عکس‌های دریافتی را به صورت مجموعه عکس و یا به صورت‌های دیگر، از قبیل چاپ در نشریات یا کتاب‌ها و... لزوماً با ذکر نام عکاس، منتشر کند.

عکس‌هایی که به نمایشگاه راه پیدا می کنند، بازگردانده نخواهند شد و بقیه‌ی عکس‌ها حداکثر تا پایان آبان ۱۳۸۵ به نشانی فرستندگان، ارسال می‌شوند.

نشانی دبیرخانه‌ی جشنواره‌ی عکس رشد: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۳۳۳۱
تلفن: ۸۸۳۰۵۲۷۹