رشد

برهان

مجله ریاضی

دوره ی متوسطه

فصلنامه ی آموزشی، تحلیلی، اطلاع رسانی

۵۴

• دوره‌ی شانزدهم • شماره‌ی ۴

• تابستان ۱۳۸۶ • بها ۳۰۰۰ ریال

- تاریخ علم و تمدن در ایران
- مثلث های مزدوج
- رسم نمودار تابع بدون مشتق
- ترکیبیات

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

مشاهیر
ریاضی مسلمان

بیرونی

بیرونی. ابوریحان محمدبن احمد بیرونی، ریاضیدان، منجّم و دانشمند ایرانی که در سوم ذیحجه‌ی سال ۳۶۲ در بیرون خوارزم، پا به عرصه‌ی وجود گذاشت و به سال ۴۴۲ درگذشت.

وی یکی از نوابغ روزگار و یکی از بزرگ‌ترین مفاخر دنیای علم و تحقیق است.

بیرونی ریاضیدانی زبردست و مبتکر بود که علاوه بر آن، جهانگردی زیرک و نکته‌سنج شد و کتاب معروف **تحقیق ماللهند** را در لهجه‌های محلّی و معارف و فلسفه‌ی هندیان نگاشت.

بیرونی، آخرین اثر خود به نام **الصیدنه فی الطّب** را که درباره‌ی داروهای طبی است، در سنی متجاوز از هشتاد سالگی نوشته است.

بعضی از آثار ریاضی موجود بیرونی عبارت است از:

۱ـ کتاب **التفهیم لاوائل صناعة التنجیم**، **بیرونی آن را به دو** زبان فارسی و عربی نوشته است.

۲ـ کتاب **مقالید علم الهیئة** که **یکی از مهم**‌ترین آثار ریاضی بیرونی و نخستین کتاب مستقل **«مثلثات کروی»** است، که نام کامل آن **مقالید علم الهیئة ما یحدث فی سطح الکره** است.

۳ـ مقاله‌ی سوم، کتاب **قانون مسعودی**، که یکی از مهم‌ترین و مفصل‌ترین آثار او است.

کوهی

کوهی. ابوسهل ویجن بن رستم کوهی، ریاضیدان و منجم معروف ایرانی، متوفی در حدود ۴۰۵. از مردم طبرستان است و در بغداد می‌زیسته و هم در این شهر، به سال ۳۷۸ رصدخانه‌ای بنا کرده است. علاوه بر زبردستی در نجوم، در ریاضیات، به‌خصوص هندسه، مقامی شامخ داشته و بنا به قول سارتن، تحقیقاتش در مسائل ارشمیدس و آپولونیوس، از بهترین آثار هندسی دوره‌ی اسلامی است.

بیرونی نیز در کتاب **«قانون مسعودی»** وی را از میرزان زمان خود در هندسه نامیده است.

بعضی از آثار ریاضی موجود وی عبارت است از:

۱ـ رسالة فی البرکارالتام و العمل به، که رساله‌ای است درباره‌ی ساختن و به کار بردن پرگار تام در ترسیم قطوع مخروطی، و مقصود از پرگار تام، پرگاری است که بتوان با آن، خط راست، دایره، بیضی و هذلولی را با حرکت اتصالی رسم کرد.

۲ـ رسالة فی استخراج ضلع المسبع المتساوی الاضلاع، که موضوع آن روش محاط کردن هفت ضلعی منتظم در دایره است، این رساله به زبان آلمانی ترجمه شده است.

۳ـ رسالة فی عمل مخمس متساوی الاضلاع فی مربع معلوم، که موضوع آن، محاط کردن پنج ضلعی منتظم در مربع است.

منبع: فرهنگ ریاضیات/گروه ریاضیات انتشارات مدرسه/ناشر: انتشارات مدرسه

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد برهان ۵۴

مجله‌ی ریاضی

دوره‌ی متوسطه

فصلنامه آموزشی، تحلیلی، اطلاع رسانی

دوره‌ی شانزدهم /شماره‌ی ۴/ تابستان ۱۳۸۶/شمارگان: ۵۰۰۰ نسخه

◆ مدیر مسؤول: علیرضا حاجیان زاده
◆ سردبیر: حمیدرضا امیری
◆ مدیر داخلی: میرشهرام صدر
◆ طراح گرافیک: آزیتا کوثری
◆ ویراستار ادبی: کبری محمودی
◆ اعضای هیات تحریریه: حمیدرضا امیری
محمد هاشم رستمی، احمد قندهاری،
میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی،
سید محمدرضا هاشمی موسوی،
غلامرضا یاسی‌پور
و با تشکر از همکاری ارزنده‌ی
استاد پرویز شهریاری
◆ چاپ و صحافی: شرکت افست (سهامی عام)
◆ نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله: ۹ـ ۸۸۸۳۱۱۶۰ داخلی ۳۹۷
تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ـ ۷۷۳۳۵۱۱۰
www.roshdmag.ir
ISSN 1735 - 4951

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

رشد برهان متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر به همکاری دعوت می‌کند:

- نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی دوره‌ی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمه‌ی مقاله‌های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه‌ی علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش کامپیوتر و ...)

رشد برهان متوسطه هر سه ماه، یکبار منتشر می‌شود.
مجلّه در حکّ، اصلاح، حذف و اضافه‌ی مقاله‌ها آزاد است.
مقاله‌های وارده، باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.
مقاله‌های رسیده مسترد نمی‌شود.
استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر با ذکر دقیق مأخذ بلامانع است.

یادداشت سردبیر

وقتی این شماره از مجله به دست شما می‌رسد، احتمالاً یا در تعطیلات تابستانی هستید و یا به آن نزدیک شده‌اید! به همین دلیل هم سعی کرده‌ایم که مطالب این شماره از مجله عمومی‌تر و متنوع‌تر باشد.

راستی برای تابستان چه برنامه‌ای دارید؟ اصلاً به فکر درس خواندن هستید؟ مطالعه‌ی کتاب‌های غیردرسی چه‌طور؟ با کلاس‌هایی مانند کلاسِ رایانه، و زبان و... چه رابطه‌ای دارید؟

باور می‌کنید، زمان ما وقتی کلاس‌های اول یا دوم دبیرستان را می‌گذراندیم، واقعاً سه ماه تا حتی سه ماه‌ونیم تعطیل بودیم، از کلاس‌های تقویتی، زبان، رایانه و غیره خبری نبود؟ راستش را بخواهید، سه‌ماه از عمر ما به معنی واقعی تلف می‌شد. تازه مطالب درسی که در طول نُه ماه فرا گرفته بودیم، با سه‌ماه دوری از کتاب و مدرسه تا حد زیادی به فراموشی سپرده می‌شد و اول مهر بعضی از مطالب کتاب‌های درسی که دنباله‌ی مطالب کتاب‌های سال قبل بود، به‌نظرمان کاملاً غریب می‌آمد!

امیدواریم شما دانش‌آموز عزیز با برنامه‌ریزی صحیح و حساب‌شده، علاوه بر استراحت نسبی، با مطالعه‌ی مطالب درسی سال قبل (سالی که گذشت) و تأمل روی مباحثی که احتمالاً در طول سال تحصیلی در آن‌ها ضعف داشته‌اید، نقطه‌ضعف‌های خود را بپوشانید و حتی با مطالب سال آینده نیز آشنا شوید.

به هر صورت، تعطیلی تابستان فرصت بسیار خوبی است برای آمادگی هرچه بیشتر به‌منظور شروع یک سال تحصیلی موفق و پرنشاط. ان‌شاءالله این شماره از مجله نیز بتواند، گوشه‌ای از اوقات فراغت شما را به نحو احسن پر کُند.

والسلام

تاریخ علم و تمدن در ایران

یادهای آموزشی (۷)

● پرویز شهریاری

۱

نامه‌ای کم و بیش طولانی از استان خوزستان به دستم رسیده است که در آن از آشفتگی‌هایی که در روایت‌های تاریخی مربوط به گذشته‌ی ایران و ناسازگاری‌هایی که در این روایت‌ها وجود دارند، صحبت شده است. نویسنده در جایی از نامه‌ی خود نوشته‌اند: «آیا در زمینه‌ی پیشرفت دانش، می‌توان سهمی برای ایران درنظر گرفت؟ آیا ایران هم در طول تاریخ چند هزار ساله‌ی خود توانسته است، در پیدایش و تکامل دانش، سهم خود را ادا کند؟ به‌ویژه در دوران‌های کهن‌تر تاریخ این سرزمین، مردم ایران چه نقشی در دانش داشته‌اند؟ نام دانشمندان ما کجا ثبت شده است؟ بر سر نوشته‌های آن‌ها چه آمده است؟»

پیش از آن که به این پرسش‌ها، که چندان هم ساده نیستند، پاسخ بدهیم، باید پنداری نادرست را که بیشتر زاییده‌ی روحیه‌ی نژادپرستانه و سودجویانه‌ی دوران سلطه‌ی نظام سرمایه‌داری جهانی است، از ذهن خود دور کنیم.

تاریخ‌نویسانی که در خدمت جهان سرمایه‌داری هستند، برای توجیه غارتگری‌های خود، برای سرپوش گذاشتن بر تجاوزها، جنگ‌ها، و ویرانگری‌ها، و برای استوار کردن سلطه‌ی خود برجهان، تلاش کرده‌اند بپذیرانند که ملت‌ها را باید به دو گروه «متمدن» و «وحشی» تقسیم کرد. ملت‌های برگزیده‌ای هستند که فرهنگ و تمدن بشر را مدیون آن‌ها هستیم و بنابراین حق دارند، بر ملت‌های دیگر که گویا سهمی در ساختن بنای عظیم دانش و تمدن کنونی نداشته‌اند، سروری و حکومت کنند. و... اگر اندکی دقیق‌تر به این شعارها بیندیشیم، به این نتیجه می‌رسیم که «ملت‌های برگزیده»، نه خود ملت‌ها، بلکه چماق‌به‌دستانی هستند که وظیفه‌ی حفظ و تسلط غارتگران جهانی را برعهده گرفته‌اند و نه تنها به ملت‌های دیگر، بلکه به ملت خود نیز ستم می‌کنند و تا آن‌جا پیش رفته‌اند که محیط زیست طبیعی را در سراسر جهان به تباهی و نابودی کشانده‌اند.

اگر در جایی خواندید یا از کسی شنیدید که فلان ملت یا قوم، در طول تاریخ خود نتوانسته است سهمی در پیشبرد فرهنگ انسانی داشته باشد، مطمئن باشید که پنداری نادرست و ساخته و پرداخته‌ی مبلغان نژادپرست یا ناآگاه جهان سرمایه‌داری است. همه‌ی قوم‌ها و همه‌ی ملت‌ها، بدون هیچ استثنایی، صاحب فرهنگ‌اند و در پدید آوردن فرهنگ و دانش امروزی بشر سهم دارند. شاید این سهم در دوران‌های متفاوت به یک اندازه نباشد، شاید در این یا آن‌جا توقف‌هایی، یا بهتر بگوییم، کُندی‌هایی در حرکت یک ملت یا قوم دیده شود، ولی این را نمی‌توان به حساب فروتر بودن این قوم نسبت به قوم‌های دیگر گذاشت.

در این باره، روشی نادرست را در بررسی تاریخ به ما تحمیل کرده‌اند. فساد، ظلم، بی‌خردی، توطئه و سرانجام فروپاشی یک حکومت را به حساب بی‌فرهنگی مردم گذاشته‌اند. در حالی که حکومت‌ها غالباً ویرانگر فرهنگ بوده‌اند و مردم، سازنده‌ی آن. لشکرکشی‌ها، جنگ‌ها و تجاوزها، زورمدارانی را به جای زورمداران پیشین می‌نشاندند، ولی در این میان، ضربه‌ی اساسی را حرکت فرهنگی مردم تحمل می‌کند. حمله‌ی اسکندر مقدونی به ایران، بیش از هر چیز به رشد و تکامل فرهنگی مردم لطمه زد و رنج و عذاب بیشتری را برای مردم فراهم آورد. البته مردم خیلی زود خود را بازیافتند و به حرکت فرهنگی خویش، گرچه با کُندی بیشتر، ادامه دادند. داستان دل‌نشین «سمک عیار» که بازمانده‌ی روایت‌هایی از دوران پارت‌ها (اشکانیان) است، گواه این مطلب است. شاهان ساسانی، همه‌ی همت خود را صرف ویرانی و نابودی اثرهای فرهنگی دوره‌ی زمامداری پارت‌ها کردند، ولی مردم دوباره راه خود را یافتند و از راه پیشرفت بازنماندند.

۲

در تمامی دوران تاریخ ایران، چه به وسیله‌ی مهاجمان بیگانه و چه به دست زورمداران و حکام بی‌فرهنگ داخلی، باقی‌مانده‌ی اثرهای دوران‌های گذشته، و از آن جمله کتاب‌ها و کتاب‌خانه‌ها به آتش کشیده شده‌اند. از آن میان، تنها به سه نمونه از سه دوره‌ی تاریخی اشاره می‌کنیم:

ابوریحان بیرونی (محمد فرزند احمد، ۳۶۲-۴۴۰ هجری قمری) در کتاب مشهور خود، «آثارالباقیه» درباره‌ی خوارزم می‌نویسد: «قتیبه [سردار عرب] همه‌ی کسانی را که به زبان خوارزمی می‌نوشتند و یا با ادب و افسانه‌های ملی آشنا بودند و [دانش‌ها را] به دیگران می‌آموختند، از بین برد. چنان وضعی برای خوارزم به وجود آورد و چنان زیان‌هایی به مردم آن‌جا زد و [روایت‌های ملی] را چنان نابود کرد که از تاریخ بعد از اسلام خوارزم هم، نمی‌توان به اندک آگاهی دست یافت...»

در «تذکره‌ی دولتشاه سمرقندی» که در سال ۸۹۲ هـ.ق نوشته شده است و به آن «تذکرةالشعرا» هم می‌گویند، می‌خوانیم: وقتی عبدالله طاهر (۱۸۲-۲۳۰ هـ.ق) در خراسان به حکومت رسید و حکومت کرمان را به پسرعمویش داد، پسرعموی او «... فرمود، در قلمرو او، هرجا از تصانیف عجم و مغان کتابی باشد، جمله را بسوزانند...»

حکیم عمر خیام نیشابوری (سده‌های چهارم و پنجم هـ.ق) در پیشگفتار کتاب «جبر و مقابله»ی خود، حکایت روزگارش را این گونه تصویر می‌کند: «... ما شاهد نابودی دانشمندان زیادی بودیم. دانشمندانی که از مرگ نجات یافته‌اند، بسیار اندک‌اند و آن‌ها هم به رنج‌های بسیاری دچار شده‌اند... حکیم‌نمایان روزگار ما همگی دست‌اندرکارند تا راست را با دروغ بیامیزند، و جز ریا و فریب، کاری ندارند. اگر دانش و معرفتی هم دارند، صرف هدف‌های پست جسمانی می‌کنند و اگر با انسانی روبه‌رو شوند که در جست‌وجوی حقیقت و راستی است و روی از نادرستی و زور می‌گرداند و گرد ریا و مردم‌فریبی نمی‌گردد، او را مسخره

می‌کنند و کوچک می‌شمارند...» .

به یاد داشته باشید که خیام، خیلی پیش از تجاوز و قتل و غارت‌های مغولان می‌زیسته است.

با همه‌ی این‌ها مردم، گرچه با رنج و دشواری، همیشه پاسدار فرهنگ و دانش ملی خود بودند. از همان سرزمین خوارزم بود که دانشمندان و ادب‌شناسان بزرگی چون: رودکی (در زمان سامانیان، فوت در ۳۲۹ هـ. ق)، محمد خوارزمی (در سده‌ی سوم هجری)، ابوریحان بیرونی، پورسینا و ابونصر عراق (استادِ ابوریحان که به دست محمود غزنوی کشته شد) برخاستند.

و یا وقتی می‌بینیم از روستاهایی مثل «ماهان» و «تربت جام»، ریاضی‌دانان بزرگی چون ماهانی (ابوعبدالله محمد، سده‌ی سوم هجری) و ابوالوفای بوزجانی (بوزجان نزدیک تربت جام است) برخاسته‌اند که تحصیل نخستین خود را در خانواده به دست آورده‌اند و وقتی شهرتی یافته‌اند، به جمع دانشمندان ساکن در بغداد پیوسته‌اند، باید بپذیریم که مردم ایران، در نگه‌داری فرهنگ و دانش خود، با همه‌ی دشواری‌ها، پیروز بوده‌اند.

البته نشر دانش و فاش کردن راستی‌ها، کار ساده‌ای نبود و خطر می‌آفرید. پورسینا در حکمت «المشرقین» می‌گوید: «... بسیاری از اغلاط را با پرده‌ی تغافل پوشاندم. علت این پرده‌پوشی این بود که نخواستم با چیزهایی که از فرط شهرت برای جاهلان بدیهی شده و به مقامی رسیده که در درستی آن‌ها شکی ندارند، مخالفت کرده باشم. ولی همان طور که وضع اسرار به نزدیک جاهل خطاست، منع معانی از عاقل ناستوده است...»

۳

در این جا به دو نکته‌ی دیگر اشاره می‌کنیم. بیشتر در زمان انوشیروان دادگر (دادگر یعنی قانون‌گذار. دادار از واژه‌ی دات پهلوی به معنای قانون است)، ایرانیان برگردان کتاب‌های فلسفی و علمی را از زبان یونانی آغاز کردند و درنتیجه، بسیاری از کتاب‌های یونانی به زبان پهلوی و سُریانی، و در دو سه سده‌ی اول هجری به زبان عربی برگردانده شدند. بعدها و به‌ویژه در اسپانیا، کسانی پیدا شدند که کتاب‌ها را به طور مستقیم از زبان یونانی به عربی برگرداندند. نخستین کسی که در ایران به برگردان کتاب‌های پهلوی به عربی دست زد، روزبه پارسی معروف به «ابن‌مقفع» بود که از جمله «کلیله و دمنه» را به زبان عربی برگرداند و «باب برزویه‌ی طبیب» را خود به آن افزود.

نکته‌ی دوم این که معمولِ ایرانیان بود که در بیشتر موارد، کتاب‌های فلسفی، علمی و اخلاقی را دسته‌جمعی می‌نوشتند و این است که نویسنده‌ی کتاب چندان معلوم نیست.

۴

بعد از این پیشگفتار که اندکی هم به درازا کشید، به برخی اشاره‌ها می‌پردازیم که در این جا و آن جا درباره‌ی کارهای علمی ایرانیان کهن باقی مانده است. وقتی همه‌ی نشان‌ها را در خود ایران نابود کرده‌اند، ناچاریم راهی غیرمستقیم را انتخاب کنیم و به جست‌وجوی نشان‌ها در گوشه و کنار جهان برویم.

پولینوس، تاریخ‌نویس سده‌ی اول میلادی، نوشته است: هرمی‌توس، برای شرح اندیشه‌های زرتشت، ۲۰ جلد کتاب شعر او را تهیه کرده است. همین پولینوس می‌گوید: «در زمان هخامنشیان موفق به اندازه‌گیری انحنای زمین در ایران شدند. فیثاغوریان به خورشیدمرکزی، و گردش زمین به دور خورشید معتقد بودند؛ دیدگاهی که مورد توجه دیگران قرار نگرفت و می‌دانیم که فیثاغورس «دانش مغان را آموخته بود.» در «فروردین یشت» و «آبان یشت»، به روشنی از کروی بودن زمین سخن رفته است و این در حالی است که در «ایلیاد» هومر، زمین مسطح و آتن در مرکز آن پنداشته شده است.

گاه‌شماری خورشیدی که از هزاران سال پیش معمول بوده، گواه دیگری بر وجود دانش ریاضی و اخترشناسی ایرانیان است. این در حالی است که قوم‌های دیگر تا هزاران سال بعد، هنوز از ماه و سال قمری استفاده می‌کردند که نمی‌توانست فصل‌ها را تشخیص دهد و برای کشاورزان که باید زمان کشت و برداشت را بدانند، دشواری ایجاد می‌کرد. «زیج شهریار» که در زمان ساسانیان تنظیم شده و شامل جدول‌های اخترشناسی بوده، مشهور است، ولی جز نام و چند جمله‌ای از آن (در کتاب‌های تاریخ‌نویسان بعد از آن)، بقیه به فراموشی سپرده شده است و می‌دانیم تنظیم جدول‌های اخترشناسی، به دانش بالایی از ریاضیات نیاز دارد.

خیام که با سفارش نظام‌الملک راهی اصفهان شد تا دوباره گاه‌شماری خورشیدی را سامان دهد، چنان گاه‌شماری به‌وجود آورد که نسبت به گاه‌شمار گریگوری که بیش از ۵۰۰ سال بعد از خیام تنظیم شده، به مراتب دقیق‌تر است.

یکی دیگر از کشف‌های ایرانیان، قنات بود و آب را در جایی که نسبت به اطراف خود بلند بود، از روی گیاهانی که در آن‌جا می‌روییدند پیدا می‌کردند و از زیر زمین با کشیدن کانال‌هایی که گاهی تا دو هزار کیلومتر می‌شد، آن را به سطح زمین می‌رساندند و در آن‌جا صرف آبیاری

می کردند. به‌ویژه در جنوب ایران و در نقطه‌هایی مثل کرمان و یزد، حفر قنات خیلی معمول بود.

۵

تمیستوکلس، سردار یونانی سده‌ی هفتم پیش از میلاد که خود در دانشگاه هکمتانه (همدان) بوده است، می‌نویسد: «این دانشگاه ۱۰۰ دانشجو دارد که به آن‌ها فلسفه، اخترشناسی، جغرافی و پزشکی می‌آموزند. ریاست این مرکز علمی را سئینه بر عهده دارد که پزشکی بزرگ است و شهرت جهانی دارد.»

این پزشک، یعنی سئینه، چنان مشهور بوده است که پس از مرگ به صورت استوره درمی‌آید و در طول زمان، انسانی افسانه‌ای شمرده می‌شود. بسیاری را عقیده بر این است که افسانه ی «سیمرغ» یا «سیرنگ» از نام او گرفته شده است. چرا که سیمرغ و سیرنگ هم در استوره‌های ایرانی، از جمله در شاه‌نامه‌ی فردوسی، در نقش پزشکی کارامد ظاهر می‌شود و دشواری‌های پزشکی را حل می‌کند.

شاید نام «پورسینا» دانشمند و پزشک معروف ایرانی هم از نام او گرفته شده است. چرا که پدر یا پدربزرگ یا پدر پدربزرگ او سینا نبودند. به نظر می‌رسد که او پزشک‌زاده، یعنی از خانواده‌ای پزشک، زاده شده، مشهور شده و پزشکی عالی‌قدر شناخته شده است؛ هم‌چون کسی که بخش بزرگی از زندگی خود را روی دریا گذرانده باشد و به او «فرزند دریا» نام دهند.

از این مرکزها و دانشگاه‌های علمی، در همه جای ایران بوده‌اند و منحصر به هکمتانه نبود. پلوتارک، تاریخ‌نویس یونانی می‌گوید، خود یکی از مرکزهای علمی ایرانی را دیده است که مثل مرکز علمی هکمتانه، ۱۰۰ دانشجو داشته است و به یادگیری فلسفه، اخترشناسی و پزشکی مشغول بودند.

روی مجسمه‌ای که از یک پزشک مصری باقی مانده است، کتیبه‌ای وجود دارد که در بخش سالم آن آمده است: «من به فرمان داریوش، شاه ایران به مصر آمدم تا مردم را از بیماری‌ها برهانم. در این‌جا به کتاب‌خانه‌ها، کتاب دادم، جوانان را به مردان آزموده سپردم تا تعلیم ببینند، و...»

در زمان خشایارشا، فیلسوف و دانشمندی ایرانی که در ری زاده شده بود، به مصر رفت و در آن‌جا به شاگردان خود که از سراسر جهان به آن‌جا آمده بودند، درس می‌داد (مصر در زمان داریوش و خشایارشا، ایالتی از ایران بود). بسیاری از دانشمندان یونانی شاگرد این استاد بودند. از جمله، دکموریت که واضع نظریه ی اتمی است، سال‌ها شاگرد این استاد بوده و به احتمال قوی، نظریه ی اتمی را از او گرفته است. این شخص اُستانس نام داشت و به «منع بزرگ» معروف بود. برخی از کتاب‌های اُستانس، حتی در سده‌های اول بعد از شکست ساسانیان به عربی ترجمه شده است.

سخن را کوتاه می‌کنیم و با نقل قسمتی از نوشته‌ی تحلیل‌گر بزرگ تاریخ، عبدالرحمان ابن‌خلدون (متولد در تونس، ۸۰۸-۷۳۲ هجری قمری) که در پیشگفتار کتابش آمده است، به پایان می‌بریم. این پیشگفتار که بیشتر فلسفه‌ی تاریخ است، در سال‌های ۱۳۳۶ و ۱۳۳۷ خورشیدی به فارسی برگردانده شده است:

«... از امور غریب یکی این است که حاملان علم در اسلام، اغلب از عجم بودند؛ خواه در علوم شرعی و خواه در علوم عقلی. و اگر در میان علما مردی در نسب عربی بود، در زبان و جای تربیت و پرورش، از عجم شمرده می‌شد... پس علوم، خاص نواحی متمدن شد و عرب از آن دور ماند و متمدنان این عهد، همه از عجم یا از کسانی بودند که در معنا از آن دسته شمرده می‌شدند؛ یعنی موالی و اهل شهرهایی که در تمدن، صنایع و حرف، پیرو عجمان [ایرانیان] بودند. زیرا اینان بر اثر رسوخ تمدن در میانشان، از هنگام دولت فُرس، برای این کار بهتر و صالح‌تر بودند... هیچ قومی به حفظ و تدوین علم قیام نکرد، مگر عجمان...»

۶

نام ابوریحان بیرونی را همه شنیده‌ایم؛ دانشمند فرهیخته‌ای که نه‌تنها در بیش از هزار سال پیش، سرامد همگان در سراسر سیاره‌ی زمین بود که امروز و در آغاز سده‌ی بیست‌ویکم هم می‌توان، چه از نظر شیوه‌ی کار علمی و چه از نظر روحیه ی انسانی، از او یاد گرفت. از گفته‌های اوست: «علت این که اعتقاد عوام و خواص متفاوت است، این است که عوام تنها در حد محسوسات می‌اندیشند و به فرع اکتفا می‌کنند. در حالی که طبع خواص، همیشه با معقولات سروکار دارد و به بررسی در اصول و کُنه قضایا می‌پردازند.»

همین ابوریحان که هیچ جمله ای را بدون پژوهش نمی‌نوشت و درباره‌ی هر واژه‌ای می‌اندیشید و به بررسی آزمایشی می‌پرداخت (که از جمله، از بحث‌هایی که ضمن مکاتبه‌هایی با پورسینا داشته، روشن است)، با فروتنی در پیشگفتار شاه‌کار خود، «قانون مسعودی» می‌نویسد: «من چنین کردم تا آیندگان بتوانند در کارهای من اظهارنظر کنند. آن‌چه درست است، تأیید کنند و آن‌چه نادرست است، در اندیشه‌ی تصحیح آن برآیند.»

ترکیبیات

(آنالیز ترکیبی با ابزارهای شمارشی پیشرفته‌تر)
(قسمت اول)

● حمیدرضا امیری

اشاره

در آنالیز ترکیبی یا علم شمارش در سطوح مقدماتی، فقط از اصول جمع و ضرب برای شمارش استفاده می‌شود، حال آن که شمارش می‌تواند توسط ابزارهای دیگر یا اصول دیگری نیز انجام شود. یکی از این ابزارها گراف‌های جهت‌دار و ماتریس‌های مجاورت وابسته به این گراف‌ها، توأم با اصل ضرب است. هم‌چنین، از اصولی چون اصل لانه کبوتری و اصل شمول و عدم شمول نیز می‌توان برای شمارش و حل مسائل شمارشی در آنالیز ترکیبی استفاده کرد. در این مقاله سعی می‌کنیم، پس از تعریف گراف‌های جهت‌دار و بیان ارتباط آن‌ها با رابطه‌ها و نیز تعریف و بررسی خواص رابطه‌ها، به شمارش رابطه‌های باخواص معین بپردازیم.

لازم به تذکر است، وقتی می‌توانیم تعداد رابطه‌های تعریف شده روی یک مجموعه‌ی n عضوی با خاصیت یا خواص معین را بشمریم که خواص رابطه‌ها را خوب درک کرده‌باشیم. بنابراین، ابتدا به مثال‌ها و مسائل حل شده‌ی مربوط به خواص رابطه‌ها دقت بفرمایید.

الف) گراف جهت‌دار

تعریف: اگر V مجموعه‌ای متناهی فرض شود و $V \times V$ را تشکیل دهیم، هر زیر مجموعه‌ی $V \times V$ مانند E، به همراه V یک گراف جهت‌دار را تعریف می‌کند. در این گراف جهت‌دار، برای هر زوج مرتب (a_i, a_j) یالی با جهت از طرف a_i به طرف a_j رسم می‌کنیم.

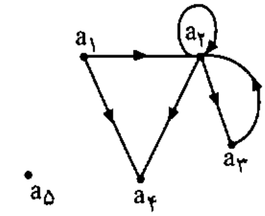
$$V = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$

$$E \subseteq V \times V = \{(a_i, a_j) | a_i, a_j \in V\}$$

مثال ۱. در شکل ۱، گراف جهت‌دار متناظر با مجموعه‌های V و E رسم شده است.

$$V = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$$

$E = \{(a_1,a_2),(a_2,a_3),(a_2,a_4),(a_3,a_2),(a_2,a_2),(a_1,a_4)\}$



(شکل ۱)

نکته: تعداد کل گراف‌های جهت‌دار که با p رأس می‌توان تعریف کرد، برابر است با: «$۲^{p^۲}$».

تفاوت‌های ماتریس مجاورت گراف‌های جهت‌دار با گراف‌های ساده

۱. در گراف‌های جهت‌دار، درایه‌های روی قطر اصلی می‌توانند یک باشند.

۲. ماتریس مجاورت گراف‌های جهت‌دار می‌تواند متقارن نباشد.

۳. تعداد یک‌ها در ماتریس مجاورت گراف‌های جهت‌دار، با تعداد اعضای E برابر است.

۴. وجود یک سطر صفر یا یک ستون صفر در ماتریس مجاورت گراف‌های جهت‌دار، دلیل بر ایزوله(تنها) بودن یک رأس نیست.

تعریف

اگر A مجموعه‌ای ناتهی و دلخواه باشد، هر زیر مجموعه‌ی $A \times A$ را یک رابطه روی A می‌نامیم.

اگر $|A| = m$، در این صورت $|A \times A| = m^۲$ و طبق تعریف، $۲^{m^۲}$ رابطه روی A می‌توان تعریف کرد.

قرارداد: اگر رابطه‌ی R روی A تعریف شده باشد، در این صورت:

$(a,b) \in R \Leftrightarrow aRb$

$(a,b) \notin R \Leftrightarrow a\not{R}b$

ب) خواص رابطه‌ها

۱. خاصیت انعکاسی:

$\forall a \in A$ ، $a R a$ در این صورت رابطه‌ی R روی A خاصیت انعکاسی دارد.

مثال۲. اگر $A = \{۲,۴,۶,۸\}$ در این صورت رابطه‌ی زیر انعکاسی است:

$R = \{(۲,۲),(۴,۴),(۶,۶),(۸,۸),(۲,۶)\}$

☐ اگر A مجموعه‌ای m عضوی باشد و رابطه‌ی R روی A خاصیت انعکاسی داشته باشد، در این صورت R حداقل m عضوی است.

☐ رابطه‌ی تهی روی A خاصیت انعکاسی ندارد.

با توجه به تعریف گراف جهت‌دار، هر رابطه را می‌توان به عنوان مجموعه یال‌های یک گراف جهت‌دار تصور کرد و مجموعه‌ی A که رابطه‌ی R روی آن تعریف شده است، مجموعه‌ی رأس‌های آن گراف است که در این صورت می‌توان گفت:

«رابطه‌ی R انعکاسی است اگر و فقط اگر روی هر رأس گراف متناظر با این رابطه، طوقه وجود داشته باشد و روی قطر اصلی ماتریس مجاورت این گراف، همه‌ی درایه‌ها یک باشند.»

۲. خاصیت تقارنی: $\forall a,b \in A$ ، $aRb \Leftrightarrow bRa$ در این صورت رابطه‌ی R روی A خاصیت تقارنی دارد.

مثال۳. اگر رابطه‌ی R_1 روی $A = \{۲,۴,۶,۸\}$ به صورت $R_1 = \{(۲,۲),(۲,۴),(۴,۲),(۶,۶),(۸,۶)\}$ تعریف شود، خاصیت تقارنی ندارد، زیرا ۸R۶ و ۶R̸۸ و رابطه‌ی $R_۲ = \{(۲,۲),(۴,۲),(۲,۴)\}$ خاصیت تقارنی دارد.

تذکر۱

رابطه‌ی R روی A خاصیت تفارنی دارد اگر و فقط اگر در گراف متناظر با این رابطه، بین هر دو رأس یالی وجود نداشته باشد یا دو یال موجود باشد. و ماتریس متناظر با این گراف، ماتریس متقارن خواهد بود.

۳. خاصیت پادتقارنی: $\forall a \neq b \in A$ ، $aRb \Rightarrow b\not{R}a$ در این صورت رابطه‌ی R روی A خاصیت پادتقارنی دارد.

مثال۴. رابطه‌ی R_1 روی $A = \{۲,۴,۶,۸\}$ به این صورت تعریف شده است:

$R_1 = \{(۲,۲),(۲,۴),(۶,۶),(۶,۸),(۴,۸)\}$

رابطه‌ی R_1 خاصیت پادتقارنی دارد و رابطه‌ی $R_2 = \{(2,2),(2,4),(4,2)\}$ خاصیت پادتقارنی ندارد.

تذکر۲

- هر رابطه‌ی یک عضوی حتماً خاصیت پادتقارنی دارد.
- رابطه‌ی R روی A خاصیت پادتقارنی دارد اگر و فقط اگر در گراف متناظر با این رابطه، بین هر دو رأس متمایز، حداکثر یک یال وجود داشته باشد (وجود یا نبود طوقه روی رأس‌ها، در خاصیت پادتقارنی بی‌تأثیر است.)
- در ماتریس مجاورت رابطه‌های پادتقارنی، اگر درایه‌ای یک باشد، قرینه‌ی آن درایه نسبت به قطر، حتماً صفر است.

۴. خاصیت تعدّی (تراگذری یا ترایایی):

$\forall a,b,c \in A$ ، $(aRb, bRc) \Rightarrow (aRc)$ در این صورت رابطه‌ی R روی A خاصیت تعدی دارد.

مثال۵. اگر $A = \{2,4,6,8\}$ ، در این صورت:

$R_1 = \{(2,4)(6,8)\}$ (خاصیت تعدی دارد.)

$R_2 = \{(2,2),(2,4),(4,8),(6,6),(6,8)\}$ (خاصیت تعدی ندارد.)

زیرا: $4R8$ ، $2R4$ ولی $2\not R 8$.

$R_3 = \{(2,4),(4,2)(2,2)\}$ (خاصیت تعدّی ندارد.)

زیرا: $2R4$ ، $4R2$ ولی $4\not R 4$.

تذکر۳

- هر رابطه‌ی تک‌عضوی حتماً خاصیت تعدی دارد.
- رابطه‌ی تهی روی A سه خاصیت تقارنی، پادتقارنی و تعدی را به انتفای مقدم داراست.

تعریف: اگر رابطه‌ی R روی A سه خاصیت انعکاسی، تقارنی (پادتقارنی) و تعدی را دارا باشد، آن را یک رابطه‌ی هم‌ارزی (ترتیب) می‌نامیم.

تعداد رابطه‌ها با خواص معین

۱. تعداد رابطه‌هایی که می‌توان روی یک مجموعه‌ی nعضوی تعریف کرد و خاصیت انعکاسی داشته باشد، برابر است با: $2^{(n^2-n)}$

مثال۶. چند رابطه روی یک مجموعه‌ی ۴عضوی می‌توان تعریف کرد که انعکاسی، شامل (a,b) و فاقد (c,d) باشند.

۱) 2^{12} ۲) 2^{10} ۳) 2^{8} ۴) 2^{16}

پاسخ: گزینه‌ی۲ درست است زیرا: $2^{(n^2-n)-2} = 2^{10}$. (چرا؟)

رابطه همانی

رابطه‌ی همانی روی مجموعه‌ی A را با I نمایش می‌دهیم و به این صورت تعریف می‌کنیم: $I = \{(a,a) \in A^2 | a \in A\}$

بنابه تعریف بالا، اگر A مجموعه‌ای k عضوی باشد، رابطه‌ی همانی روی A یعنی I نیز k عضوی است.

برای مثال، اگر $A = \{2,4,6\}$ آن‌گاه

$I = \{(2,2),(4,4),(6,6)\}$

- رابطه‌ی همانی روی A، هم رابطه‌ی ترتیب است و هم رابطه‌ی هم‌ارزی و این تنها رابطه‌ای است که هم‌ارزی و ترتیب است.

۲. تعداد رابطه‌هایی که روی یک مجموعه‌ی nعضوی می‌توان تعریف کرد که هم تقارنی باشند و هم پادتقارنی، برابر است با: 2^n (هر زیر مجموعه‌ی رابطه‌ی همانی)

برای مثال، رابطه‌ی $R = \{(2,2),(4,4)\}$ هم‌تقارنی است و هم پادتقارنی.

۳. تعداد رابطه‌های تقارنی که می‌توان روی یک مجموعه‌ی nعضوی تعریف کرد، برابر است با: $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$

(درایه‌های روی قطر برابر با n و نصف درایه‌های غیرواقع بر قطر می‌تواند صفر یا یک باشد که مجموع تعداد این درایه‌ها برابر است با:

$$(n + \frac{n^2-n}{2} = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2})$$

۴. تعداد رابطه‌هایی که روی مجموعه‌ی nعضوی A می‌توان تعریف کرد و خاصیت پادتقارنی دارند، برابر است با:

$$2^n \times 3^{\frac{n^2-n}{2}}$$

$\frac{n^2-n}{2} \Rightarrow 3^{\frac{n^2-n}{2}}$ درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی

$n \Rightarrow 2^n$ درایه‌ی روی قطر

□ روی نصف درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی اختیار داریم و این اختیار سه حالتی است؛ به این صورت:

[۰|۱] و [۰|۰] و [۱|۰]

$$\begin{bmatrix}\square & & & \\ & \square & & \\ & & \ddots & \\ & & & \square\end{bmatrix}_{n\times n}$$

۵. تعداد رابطه‌هایی که روی یک مجموعه‌ی n عضوی می‌توان تعریف کرد، به‌طوری که دو خاصیت انعکاسی و تقارنی داشته باشند، برابر است با: $2^{\frac{n^2-n}{2}}$

۶. تعداد رابطه‌هایی که روی یک مجموعه‌ی nعضوی می‌توان تعریف کرد که دو خاصیت انعکاسی و پادتقارنی داشته باشند، برابر است با: $3^{\frac{n^2-n}{2}}$

تذکر ۴

هر افراز مجموعه‌ی Aبا یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی A متناظر است. در واقع اگر هر یک از مجموعه‌های افراز کننده را در خودش ضرب دکارتی و اجتماع همه‌ی آن‌ها را حساب کنیم، مجموعه‌ی حاصل یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی A خواهد بود. بنابراین می‌توان گفت: «تعداد افرازهای ممکن برای مجموعه‌ی A برابر است با تعداد رابطه‌های هم‌ارزی که می‌توان روی A تعریف کرد.»

مثال۷. اگر مجموعه‌ی $B=\{\underset{A_1}{\{2,4\}},\ \underset{A_2}{\{6,7\}},\ \underset{A_3}{\{8\}}\}$ یک افراز سه‌عضوی برای مجموعه‌ی $A=\{2,4,6,7,8\}$ باشد، رابطه‌ای روی Aتعریف کنید که کلاس‌های هم‌ارزی آن رابطه، اعضای B باشند.

پاسخ: $R=(A_1\times A_1)\cup(A_2\times A_2)\cup(A_3\times A_3)$

$\Rightarrow R=\{(2,2),(4,4),(2,4),(4,2),(6,6),(7,7),(6,7),(7,6),(8,8)\}$

تمرین: تعداد افرازهای مجموعه‌های سه‌عضوی، چهار عضوی و پنج‌عضوی را بیابید.

مثال۸. چند رابطه روی مجموعه‌ی ۴عضوی A می‌توان تعریف کرد، به شرط آن‌که پادتقارنی، شامل (a,a) و فاقد (a,b) باشند؟

۱) $2^4\times 3^4$ ۲) $2^3\times 3^5$ ۳) $2^3\times 3^4$ ۴) $2^4\times 3^5$

پاسخ: چون طبق فرض، رابطه شامل (a,a) است، پس یکی از ۴ درایه‌ی روی قطر اجباراً یک است. از طرف دیگر، چون رابطه فاقد (a,b) است، درایه‌ی مربوط به (a,b) صفر، اما برای درایه‌ی مربوط به (b,a) دو حالت امکان‌پذیر است (صفر یا یک) که در این صورت به انتخاب‌های دو وضعیتی ما یکی اضافه و از انتخاب‌های سه‌وضعیتی ما یکی کم می‌شود و چون قبلاً از دو وضعیتی‌ها یکی کم شده بود، در واقع تغییری در دو وضعیتی‌ها رخ نمی‌دهد. یعنی این تعداد رابطه برابر است با:

$2^{4-1+1}\times 3^{6-1}$

پس گزینه‌ی ۴ درست است.

مثال۹. چند رابطه‌ی ۴عضوی روی مجموعه‌ی A می‌توان تعریف کرد، به شرط آن که پادتقارنی، شامل (a,a) و شامل (a,b) باشند؟

۱) $2^4\times 3^4$ ۲) $2^3\times 3^5$ ۳) $2^3\times 3^4$ ۴) $2^4\times 3^5$

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است. چون طبق فرض، رابطه شامل (a,a) است. پس یکی از ۴ درایه‌ی روی قطر اجباراً یک است. از طرف دیگر، چون رابطه شامل (a,b) است، درایه‌ی مربوط به (a,b) یک و درایه‌ی مربوط به (b,a) صفر است. در این صورت، از انتخاب‌های دو وضعیتی یکی کم و از انتخاب‌های سه‌وضعیتی ما نیز یکی کم می‌شود. یعنی تعداد رابطه‌ها برابر است با: $2^3\times 3^5$

تعریف

روی مجموعه‌ی ماتریس‌های مجاورت، عمل ضربی تعریف می‌کنیم که این عمل در این مجموعه بسته باشد. به عبارت دیگر، حاصل‌ضرب دو ماتریس مجاورت، یک ماتریس مجاورت با درایه‌های صفر یا یک باشد. برای این کار، ماتریس‌ها را به روش معمول (سطر در ستون) ضرب می‌کنیم و هنگام ضرب یک سطر در یک ستون تعریف می‌کنیم:

$$1+1=1$$

مثال۱۰.

$$\overset{A}{\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}\ \overset{A}{\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}=\overset{A^2}{\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}}$$

ترکیب رابطه‌ها (ترکیب یک رابطه با خودش)

تعریف: اگر رابطه‌ی R روی A تعریف شده باشد، ترکیب رابطه‌ی R با خودش را با نماد RoR نمایش می‌دهیم و داریم:
«a(RoR)c اگر و فقط اگر bای در A باشد، به قسمی که aRb و bRc.»

$$R = \{(۲,۴),(۴,۳),(۲,۳),(۳,۲),(۴,۴)\}$$
$$RoR = \{(۲,۳),(۲,۴),(۴,۲),(۲,۲),(۳,۴),(۳,۳),(۴,۳),(۴,۴)\}$$
$$(۲R۴, ۴R۳ \Rightarrow ۲R۳)$$

تعریف: رابطه‌ی $<<$ را روی مجموعه‌ی ماتریس‌های مجاورت به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A << B \Leftrightarrow \forall i,j\ ,\ a_{ij} \le b_{ij}$$

مثال۱۱. $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} << \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$

نکته: معادله‌ی $x << A$ در مجموعه‌ی ماتریس‌های مجاورت، دارای $۲^{(\text{تعداد یک‌های } A)}$ جواب و معادله‌ی $A << x$ دارای $۲^{(\text{تعداد صفرهای } A)}$ جواب است.

قضیه‌ی۱: اگر رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی nعضوی A تعریف شده باشد و Mماتریس مجاورت متناظر با رابطه‌ی R باشد و I_n رابطه‌ی همانی روی A باشد، در این صورت:

I) $I_n << M$ ⇔ رابطه‌ی R انعکاسی است.

II) $M^T = M$ یا M متقارن باشد ⇔ رابطه‌ی R تقارنی است.

III) $M^۲ << M$ ⇔ رابطه‌ی R تراگذری یا تعدّی است.

IV) $M \wedge M^T << I_n$ ⇔ رابطه‌ی R پادتقارنی است.

(اثبات این قضیه در کتاب ریاضیات گسسته‌ی پیش‌دانشگاهی آمده است.)

ضرب مؤلفه به مؤلفه بین دو ماتریس A و B را با نماد $(A \wedge B)$ نمایش می‌دهیم.

مثال۱۲. اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$، در این صورت داریم:

$$(A \wedge B) = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱\times۰ & ۰\times۱ \\ ۱\times۱ & ۱\times۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

مثال۱۳. رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی $A = \{۲,۴,۶\}$ تعریف شده است. با استفاده از قضیه‌ی ۱، خواص R را بررسی کنید.

$$R = \{(۲,۲),(۴,۴),(۶,۶),(۲,۴),(۴,۲),(۲,۶)\}$$

پاسخ: R انعکاسی است زیرا:

$$\mathrm{I})\ M = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\ ,\ I_۳ << M$$

II) $M^T \ne M \Rightarrow$ R متقارن نیست.

$$\mathrm{III})\ M^۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$M^۲ \not<< M$، پس R تراگذری نیست.

$$\mathrm{IV})\ M \wedge M^T = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \not<< I_۳$$

R پاد متقارن نیست.

قضیه‌ی ۲: اگر رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی nعضوی A تعریف شده باشد و ماتریس مجاورت این رابطه را M بنامیم، در این صورت:

I) $R = \phi \Leftrightarrow M = [۰]$

II) $R = A \times A \Leftrightarrow M = [۱]$

III) $M_{(RoR)} = (M_{(R)})^۲$

مثال۱۴. اگر $R = \{(۲,۴),(۲,۶),(۴,۲),(۴,۴),(۶,۴),(۶,۶)\}$ روی مجموعه‌ی $A = \{۲,۴,۶\}$ تعریف شده باشد، با استفاده از قضیه‌ی ۲، RoR را به‌دست آورید.

پاسخ:

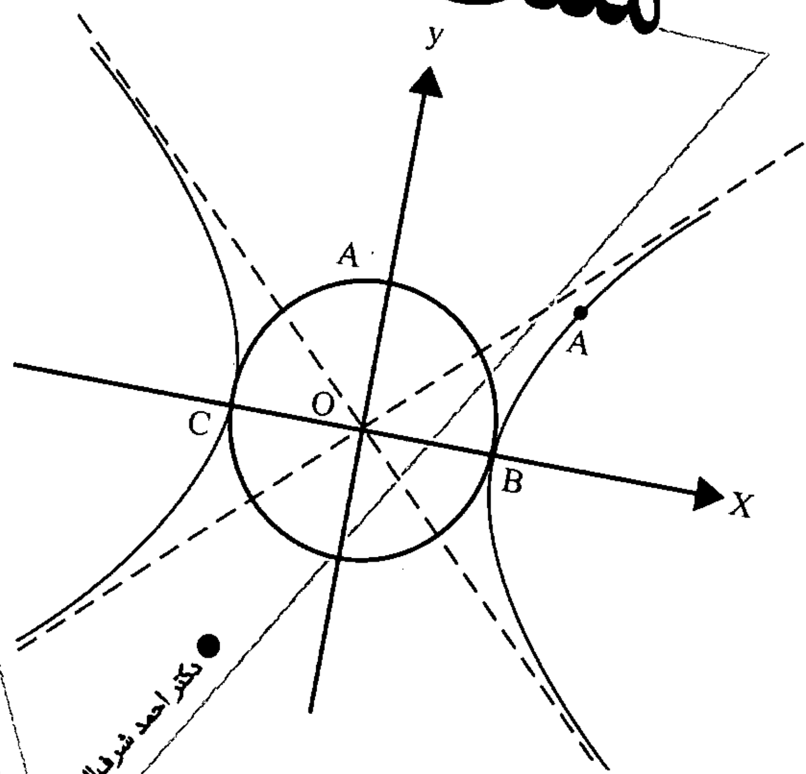
$$\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} = M_{RoR}$$

$$\Rightarrow RoR = A \times A$$

مثلث‌های مزدوج

یکسانی و همسانی چند قضیه در مثلث‌هایی که مجموع یا تفاضل دو زاویه آن‌ها یک قائمه است

● دکتر احمد شرف‌الدین



چکیده

مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC را که در آن A زاویه‌ی قائمه و AH ارتفاع وارد بر وتر است، درنظر می‌گیریم. قرینه‌ی نقطه‌ی B را نسبت به نقطه‌ی H با B' نشان می‌دهیم. با به‌کارگیری علامت جبری ثابت می‌کنیم، دو مثلث ABC و $AB'C$ دارای برخی خواص یکسان و برخی خواص همانند هستند. برای آن‌که خواص موردنظر را به آسانی بیان کنیم، دو مثلث ABC و $AB'C$ را دو مثلث «مزدوج» می‌نامیم. به طور کلی نیز، دو مثلث که در یکی از آن‌ها مجموع دو زاویه، مساوی $90°$ و در دیگری تفاضل دو زاویه، مساوی $90°$ باشد، دارای برخی خواص یکسان و برخی خواص همانند هستند. بر چنین دو مثلثی، دو مثلث «مزدوج» نام می‌نهیم.

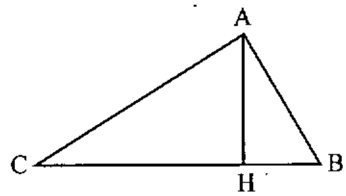
چند حکم در مثلث قائم‌الزاویه

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC که در آن A زاویه‌ی قائمه و AH ارتفاع وارد بر وتر است، رابطه‌های ذیل برقرارند (در بیان مطالب آینده، طول پاره‌خط AB را با AB و اندازه‌ی جبری بردار $\overrightarrow{AB}$ را

اشاره

استاد دکتر شرف‌الدین[1]، همکار گرامی مجله‌ی برهان، سال‌هاست مقالات ارزشمندی برای مجله‌ی برهان می‌نویسند که مورد استفاده‌ی مخاطبان مجله قرار گرفته‌اند. ایشان در هندسه، جبر بول و تاریخ ریاضی تحقیقات متنوعی دارند و به طرح چند دستگاه فیزیکی نیز نائل آمده‌اند. ایشان به تازگی یک ماشین الکترونیکی با به‌کارگیری تحقیقی در جبر بول طراحی کرده‌اند و آن را در کنگره‌ی بین‌المللی ریاضی‌دانان[1] در شهریور امسال عرضه کرده‌اند.

روی محور منطبق بر آن با $\overline{AB}$ نشان می‌دهیم).



(شکل ۱)

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \qquad (1)$$

$$AH^2 = HB.HC \qquad (2)$$

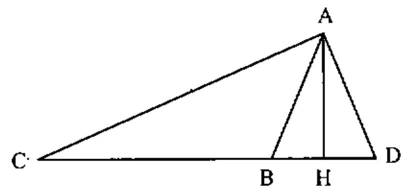
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \qquad (3)$$

$$AB.AC = BC.AH \qquad (4)$$

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{HB}{HC} \qquad (5)$$

مثلثی که تفاضل دو زاویه‌ی آن °۹۰ است

مثلث ABC را که تفاضل دو زاویه‌ی B و C‌ی آن قائمه است، درنظر می‌گیریم ($B - C = 90^\circ$) و ارتفاع AH آن را رسم می‌کنیم. قرینه‌ی نقطه‌ی B را نسبت به نقطه‌ی H با D نشان می‌دهیم. به آسانی می‌توان ثابت کرد که مثلث ACD قائم‌الزاویه است.



(شکل ۲)

به‌کارگیری عدد جبری

در شکل‌های ۱ و ۲، با به‌کارگیری یک محور منطبق بر خط BC و به‌کارگیری عدد جبری نشان می‌دهیم، در دو مثلث مزدوج، بعضی رابطه‌های یکسان و نیز بعضی رابطه‌های همانند وجود دارند.

محور $x'x$ را منطبق بر خط BC و با جهت دلخواه (شکل‌های ۱ و ۲)، و نقطه‌ی H را به عنوان مبدأ محور اختیار می‌کنیم. چنین داریم:

$$\overline{BC} = \overline{BH} + \overline{HC} = \overline{HC} - \overline{HB}$$

$$\overline{BC} = \overline{HC} - \overline{HB} \qquad (6)$$

بررسی بعضی خواص همانند در دو مثلث مزدوج

الف) در شکل ۱، در مثلث ABC، این رابطه برقرار است:

$$AH^2 = HB.HC \qquad (7)$$

رابطه‌ی (۷)، با توجه به تشابه دو مثلث AHB و AHC ثابت می‌شود. در شکل ۲، در مثلث ABC رابطه زیر برقرار است:

$$AH^2 = HB.HC \qquad (8)$$

رابطه‌ی (۸) با توجه به تشابه دو مثلث AHB و AHC ثابت می‌شود.

اکنون با توجه به اندازه‌ی جبری دو بردار $\overrightarrow{HB}$ و $\overrightarrow{HC}$، روی محور $x'x$ چنین داریم:

$$AH^2 = -\overline{HB}.\overline{HC} \quad \text{(در شکل ۱)} \qquad (9)$$

$$AH^2 = \overline{HB}.\overline{HC} \quad \text{(در شکل ۲)} \qquad (10)$$

رابطه‌های (۹) و (۱۰) فقط در یک علامت متفاوت‌اند (نوعی همانندی خاصیت دو مثلث مزدوج).

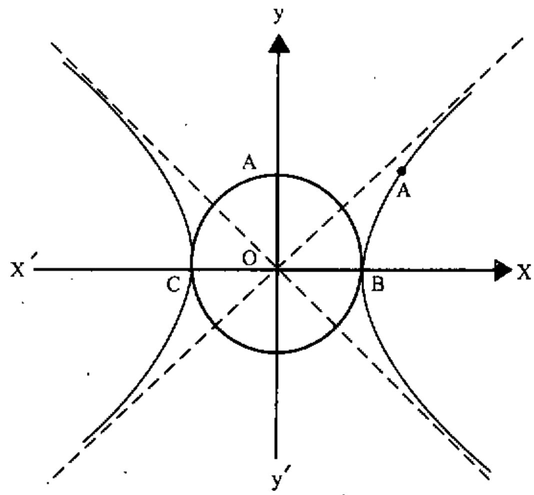
اکنون مسئله را با به‌کارگیری مکان هندسی بررسی می‌کنیم.

مسئله: در صفحه‌ی P دو نقطه‌ی ثابت B و C و نقطه‌ی متحرک A را درنظر می‌گیریم. مطلوب است مکان هندسی نقطه‌ی A، به‌طوری که اگر H پای عمود وارد از نقطه‌ی A بر خط BC باشد، این رابطه برقرار باشد: $AH^2 = HB.HC$

حل: دستگاه مختصات دکارتی xy را طوری انتخاب می‌کنیم که محور $x'x$ آن بر خط BC منطبق باشد. نقطه‌ی O وسط پاره‌خط BC را مبدأ محور $x'x$ اختیار می‌کنیم. طول OB=OC را a می‌نامیم. مختصات دو نقطه‌ی B و C چنین‌اند: $B(a,0)$ و $C(-a,0)$. مختصات نقطه‌ی متحرک A را (x,y) می‌نامیم. مکان هندسی نقطه‌ی A با رابطه‌ی (۸) تعیین می‌شود. رابطه‌ی ۸ به این صورت نوشته می‌شود:

$$y^2 = \pm(a-x)(-a-x)$$

معادله‌ی $y^2 = -(a-x)(-a-x)$ معادله‌ی دایره‌ی $x^2+y^2=a^2$ است؛ یعنی دایره‌ای به قطر BC. معادله‌ی $y^2 = (a-x)(-a-x)$، معادله‌ی هذلولی متساوی‌الساقین به معادله‌ی $x^2-y^2=a^2$ است. این هذلولی دو مجانب به معادله‌های $y=\pm x$ دارد و در نقاط B و C بر خط BC عمود است. مکان هندسی نقطه‌ی متحرک A که در معادله‌ی ۸ صدق می‌کند، اجتماع دایره و هذلولی است (شکل۳).



(شکل ۳)

تبصره: نتیجه شد که در هذلولی متساوی‌الساقین، خاصیت زیر وجود دارد:

هذلولی متساوی‌الساقین با رأس‌های B و C را در نظر می‌گیریم. اگر A نقطه‌ی دلخواهی واقع بر این هذلولی باشد، چنین داریم:

| (اندازه‌ی زاویه‌ی θ) − (اندازه‌ی زاویه‌ی C) | = ۹۰°

ب) ثابت کنید در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC که در آن نقطه‌ی A رأس زاویه‌ی قائمه و AH ارتفاع وارد بر وتر است، رابطه‌ی زیر محقق است:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \qquad (11)$$

اثبات: در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC چنین داریم:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

دو طرف رابطه‌ی بالا را بر $AB^2.AC^2$ بخش می‌کنیم. حاصل می‌شود:

$$\frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{BC^2}{AB^2.AC^2} \qquad (12)$$

با توجه به این که در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC این رابطه مسلم است: $AB.AC = BC.AH$، از رابطه‌ی (۱۲)، رابطه‌ی (۱۱) حاصل می‌شود.

خاصیت ۱۱ در مثلث مزدوج

از مقایسه‌ی دو شکل ۱ و ۲ معلوم است که دو مثلث ABC در هر دو شکل، ضلع‌های مساوی AB و ضلع‌های مساوی AC و ارتفاع‌های مساوی AH دارند. پس رابطه‌ی ۱۱ در این دو مثلث مزدوج برقرار است.

به‌کارگیری مکان هندسی

در صفحه‌ی P دو نقطه‌ی ثابت B و C و نقطه‌ی متحرک A را درنظر می‌گیریم و پای عمود وارد از نقطه‌ی A برخط BC را H می‌نامیم. مطلوب است مکان هندسی نقطه‌ی A به‌طوری که رابطه‌ی (۱۱) برقرار باشد.

حل: دستگاه مختصات دکارتی xy را طوری اختیار می‌کنیم که محور xها بر خط BC منطبق و مبدأ آن نقطه‌ی O وسط پاره‌خط BC باشد. رابطه‌ی (۱۱) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{1}{y^2} = \frac{1}{(x-a)^2+y^2} + \frac{1}{(x+a)^2+y^2} \qquad (12)$$

معادله‌ی (۱۲) پس از عمل‌های جبری متعدد، به صورت زیر درمی‌آید:

$$(x^2+y^2-a^2)(x^2-y^2-a^2) = 0 \qquad (13)$$

از رابطه‌ی (۱۳) نتیجه می‌شود:

$$x^2+y^2-a^2 = 0 \qquad (14)$$

یا

$$x^2-y^2-a^2 = 0 \qquad (15)$$

نمودار معادله‌ی (۱۴) دایره‌ای به قطر BC و نمودار معادله‌ی (۱۵) یک هذلولی متساوی‌الساقین با رأس‌های B و C است. پس مکان هندسی نقطه‌ی A که در رابطه‌ی (۱۲) صدق کند، عبارت است از اجتماع دایره‌ای به قطر BC و هذلولی متساوی‌الساقین با رأس‌های B و C.

تبصره: از آن‌چه در سطرهای گذشته نوشته شد، خاصیتی از هذلولی متساوی‌الساقین نتیجه می‌شود که در زیر یاد می‌کنیم:

اگر از نقطه‌ی A واقع بر هذلولی متساوی‌الساقین، به رأس‌های B و C عمود AH را بر خط BC وارد کنیم، این خاصیت را داریم: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$

خاصیت مذکور، هم در دایره‌ی به قطر BC و هم در هذلولی متساوی‌الساقین با رأس‌های B و C معتبر است (یکسانی یک

خاصیت در دو مثلث مزدوج).

پ) در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC که BC وتر است، رابطه‌ی زیر برقرار است (قضیه‌ی فیثاغورس):

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \qquad (۱۶)$$

اکنون سعی می‌کنیم رابطه‌ی (۱۶) را به صورتی بنویسیم که هم در مثلث قائم‌الزاویه و هم در مثلث مزدوج آن معتبر باشد. رابطه‌ی ۱۶ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$AB^2 + AC^2 = (\overline{HC} - \overline{HB})^2 \qquad (۱۷)$$

رابطه‌ی (۱۷) در مور دمثلث مزدوج یعنی مثلث ABC رسم شده در شکل (۲) نیز معتبر است، زیرا در شکل ۲ چنین داریم:

$$|\overline{HC} - \overline{HB}| = CD$$

رابطه‌ی (۱۷) در مثلث قائم‌الزاویه و در مثلث مزدوج آن معتبر است (همسانی خاصیت در دو مثلث مزدوج).

ت) در مثلث قائم‌الزاویه ABC با زاویه‌ی قائمه‌ی A که نقطه‌ی H پای ارتفاع AH است، رابطه‌ی زیر مسلم است:

$$AH^2 = HB.HC \qquad (۱۸)$$

رابطه‌ی ۱۸ از تشابه دو مثلث AHB و AHC نتیجه می‌شود. در مثلث ABC در شکل ۲، رابطه‌ی (۱۸) نیز معتبر است. از تشابه دو مثلث AHB و AHC، رابطه‌ی (۱۸) به‌دست می‌آید. با به‌کارگیری محور و عدد جبری، در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC چنین داریم:

$$AH^2 = -\overline{HB}.\overline{HC} \qquad (۱۹)$$

و در مثلث مزدوج مثلث قائم‌الزاویه چنین داریم:

$$AH^2 = \overline{HB}.\overline{HC} \qquad (۲۰)$$

دو رابطه‌ی (۱۹) و (۲۰) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$AH^2 = \varepsilon\,\overline{HB}.\overline{HC}\ ;\ \varepsilon \in \{-1, 1\} \qquad (۲۱)$$

رابطه‌ی ۲۱ همسانی یک خاصیت را در دو مثلث مزدوج بیان می‌کند.

به‌کارگیری مکان هندسی

در صفحه‌ی P دو نقطه‌ی ثابت B و C و نقطه‌ی متحرک A را درنظر می‌گیریم. پای عمود وارد از نقطه‌ی A بر خط BC را H می‌نامیم. مطلوب است مکان هندسی نقطه‌ی A، به طوری که رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$AH^2 = HB.HC \qquad (۲۲)$$

دستگاه محورهای مختصات مانند مسائل پیشین انتخاب می‌کنیم. رابطه‌ی (۲۲) با این رابطه بیان می‌شود:

$$AH^2 = |\overline{HB}.\overline{HC}| \qquad (۲۳)$$

رابطه‌ی ۲۳ با معادلات زیر بیان می‌شود:

$$y^2 = \pm(a-x)(a+x)$$

معادله‌ی $y^2 = (a-x)(a+x)$ معادله‌ی دایره به قطر BC است. معادله‌ی $y^2 = -(a-x)(a+x)$ معادله‌ی هذلولی متساوی‌الساقینی با رأس‌های B و C است.

مکان هندسی مورد نظر، اجتماع دایره به قطر BC و هذلولی متساوی‌الساقین با دو رأس B و C است.

ث) در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC که نقطه A رأس زاویه‌ی قائمه است، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. رابطه‌ی زیر محقق است:

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{HB}{HC} \qquad (۲۲)$$

اثبات: دو رابطه‌ی زیر در مثلث ABC محقق هستند:

$$AB^2 = BC.HB$$

$$AC^2 = BC.HC$$

از دو رابطه‌ی اخیر، رابطه‌ی (۲۲) به‌دست می‌آید.

با به‌کارگیری محور و عدد جبری (مانند آن‌چه گفتیم)، می‌توان رابطه‌های زیر را نوشت:

$$\frac{AB^2}{AC^2} = -\frac{\overline{HB}}{\overline{HC}} \qquad (۲۳)$$

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{\overline{HB}}{\overline{HC}} \qquad (۲۴)$$

(رابطه‌ی (۲۳)، در مثلث قائم‌الزاویه و رابطه‌ی (۲۴) در مثلث مزدوج مثلث قائم‌الزاویه)

دو رابطه‌ی (۲۳) و (۲۴) را می‌توان به صورت فشرده‌ی زیر نوشت:

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \varepsilon\frac{\overline{HB}}{\overline{HC}} \quad ; \quad \varepsilon \in \{-1, +1\} \qquad (۲۵)$$

رابطه‌ی (۲۵)، همسانی یک خاصیت را در دو مثلث مزدوج بیان می‌کند.

مطالعه‌ی مسئله با به‌کارگیری مکان هندسی

در صفحه P دو نقطه‌ی ثابت B و C و نقطه‌ی متحرک A را درنظر می‌گیریم. تصویر نقطه‌ی A را روی خط BC با H نشان می‌دهیم. مطلوب است مکان هندسی نقطه A برای آن‌که رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{HB}{HC} \qquad (۲۶)$$

معادله‌ی (۲۶) با به‌کارگیری دستگاه مختصات مناسب که در

صفحات پیشین ذکر شد، به این صورت نوشته می‌شود:

$$\frac{(a-x)^2+y^2}{(a+y)^2+y^2}=\left|\frac{a-x}{a+x}\right|$$

معادله‌ی اخیر، پس از عملیات جبری به صورت زیر درمی‌آید:

$$(x^2+y^2-a^2)(x^2-y^2-a^2)=0 \qquad (27)$$

از معادله‌ی (۲۷) معلوم می‌شود که مکان هندسی موردنظر شکلی است که از اجتماع دایره‌ی $x^2+y^2=a^2$ و هذلولی $x^2-y^2=a^2$ تشکیل می‌شود.

عکس برخی قضیه‌های مثلث قائم‌الزاویه

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC که نقطه‌ی A رأس زاویه‌ی قائمه است، روابط ۱، ۲، ۳، ۴، و ۵ مسلم‌اند.

۱. عکس قضیه‌ی فیثاغورس

رابطه‌ی ۱، بیان قضیه‌ی فیثاغورس است. اگر در مثلث ABC رابطه‌ی ۱ برقرار باشد، آن مثلث قائم‌الزاویه است (عکس قضیه‌ی فیثاغورس).

۲. آیا عکس قضیه‌هایی که با رابطه‌های ۲ تا ۵ بیان می‌شوند، صحیح‌اند؟

اگر در مثلث ABC رابطه‌های ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵ برقرار باشند، آن مثلث می‌تواند قائم‌الزاویه یا مزدوج مثلث قائم‌الزاویه باشد. به عبارت دیگر، اگر در مثلث ABC یکی از رابطه‌های ۲، ۳، ۴ و ۵ برقرار باشد، در آن مثلث مجموع دو زاویه‌ی B و C، ۹۰ درجه است. و یا تفاضل دو زاویه‌ی B و C آن، ۹۰ درجه است.

دایره‌ی C به قطر BC و نقطه‌ی متحرک A را بر محیط آن درنظر می‌گیریم و تصویر نقطه‌ی A بر خط BC را H می‌نامیم. ثابت کنید بین طول‌های AB و AC و AH رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2} \qquad (28)$$

اکنون مطالعه کنیم که آیا عکس حکم اخیر صحیح است؟

در صفحه‌ی P دو نقطه‌ی ثابت B و C و نقطه‌ی متحرک A را درنظر می‌گیریم. مکان هندسی نقطه‌ی متحرک A را تعیین کنید، به طوری که رابطه‌ی (۲۸) بین طول‌های AB، AC و AH برقرار باشد. مکان هندسی مطلوب، تنها دایره به قطر BC نیست، بلکه مکان مطلوب اجتماع دایره به قطر BC و یک هذلولی متساوی‌الساقین است که دو نقطه‌ی B و C در رأس آن هستند.

زیرنویس

1. INTERNATIONAL CONGRESS of MATHEMATICANS August 22-30, 2006, MADRID, SPAIN

تفریح اندیشه

حسین نامی ساعی

مدار دوطرفه

مسئله: دو دوچرخه‌سوار دور میدان دایره‌ای شکلی حرکت می‌کنند. وقتی در خلاف مسیر هم حرکت کنند، هر ۱۰ ثانیه یک‌بار یکدیگر را ملاقات می‌کنند و وقتی در یک جهت حرکت کنند، هر ۱۷۰ ثانیه یک بار به‌هم می‌رسند. اگر محیط میدان ۱۷۰ متر باشد، سرعت هر یک از دوچرخه‌سوارها را پیدا کنید.

حل: اگر سرعت دوچرخه‌سوار اول را x فرض کنیم، بعد از ۱۰ ثانیه، $10x$ متر از راه را می‌رود. در همین مدت، دوچرخه‌سوار دوم باید بقیه‌ی راه، یعنی $(170-10x)$ متر را بپیماید تا بتواند دوچرخه‌سوار اول را ملاقات کند. اگر سرعت دوچرخه‌سوار دوم را y فرض بگیریم، معادله‌ی زیر را خواهیم داشت:

$$170-10x=10y$$

وقتی که دو دوچرخه‌سوار به دنبال هم می‌روند، در ۱۷۰ ثانیه، اولی $170x$ متر و دومی $170y$ متر راه را طی می‌کنند. اگر فرض کنیم سرعت اولی بیشتر باشد، باید از یک برخورد تا برخورد دیگر، به اندازه‌ی یک دور کامل میدان بیشتر راه برود؛ یعنی:

$$170x-170y=170$$

که پس از ساده کردن، دو معادله‌ی زیر را داریم:

$$\begin{cases} x+y=17 \\ x-y=1 \end{cases}$$

و از آن‌جا:

$x=9$ (متر در ثانیه) و $y=8$ (متر در ثانیه)

با راهیان المپیادهای ریاضی

قسمت ۶

● غلامرضا یاسی‌پور

ترسیمات و تبدیلات هندسی

در این جا به بررسی ترسیماتی با خط کش (نامدرج) و پرگاری می‌پردازیم که به تحلیل عرضی تبدیلات هندسی خاصی منجر می‌شوند. در این مورد مثالی از ترسیمی به دست می‌دهیم که با پرگاری با دهانه‌ی ثابت انجام می‌گیرد. این مثال در «المپیاد ریاضی آلمان»[1] به سال ۱۹۷۷ آمده است.

با مفروض بودن نقاط A، B و C در صفحه، و پرگاری با دهانه‌ی ثابت و چنان که شعاع دایره‌ی محیطی مثلث ABC کوچک‌تر از دهانه‌ی پرگار باشد، نقطه‌ی چهارمی رسم کنید، به گونه‌ای که $ABCD$ یک متوازی‌الاضلاع باشد.

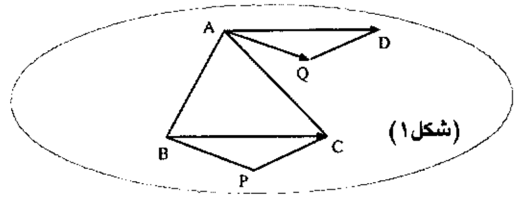
مسئله خواهان انتقال نقطه‌ی A به اندازه‌ی بردار $\overrightarrow{BC}$ است. فرض می‌کنیم، a طول دهانه‌ی پرگار باشد. ترسیم مورد نظر، در حالت خاصی که در آن AB=BC=a باشد، بسیار ساده است. در واقع، اگر دو دایره به شعاع a با مراکز A و C رسم کنیم، یکی از تقاطع‌های آن‌ها B و دیگری نقطه‌ی مطلوب D است. در این صورت، هدفمان این است که حالت عمومی را به این حالت خاص تبدیل کنیم.

مسئله را زمانی که قطعه خط و بردار مورد بحث، هر دو طولی برابر a دارند، حل کرده‌ایم. اکنون نشان می‌دهیم که چگونه زمانی که AB=a باشد، نقطه‌ی A به اندازه‌ی بردار دلخواه $\overrightarrow{BC}$، انتقال داده می‌شود. محدودیت بر اندازه‌ی

مثلث، مستلزم این است که نقطه‌ی Pای به فاصله‌ی a از B و C موجود باشد. P را به عنوان یکی از تقاطع‌های دوایر به مراکز B و C و شعاع‌های a رسم می‌کنیم. نقطه‌ی D از A، با انتقالی به اندازه‌ی بردار $\overrightarrow{BP}$ و بعد انتقالی به اندازه‌ی بردار $\overrightarrow{PC}$ (هر دو بردار دارای طول a) به‌دست می‌آید (شکل ۱).

اگر AB دارای طولی دلخواه باشد، Q را چنان رسم می‌کنیم که QA=QB=a. سپس Q را به R، به اندازه‌ی بردار $\overrightarrow{BC}$، و سرانجام A را به D، به اندازه‌ی بردار $\overrightarrow{QR}$ انتقال می‌دهیم.

در ادامه مسائل بیشتری از این دست آورده‌ایم.



(شکل ۱)

۱. با مفروض بودن یک چندضلعی در صفحه و نقطه‌ی Pای واقع در درون آن، دو نقطه‌ی A و B بر اضلاع این چندضلعی چنان بیابید که P نقطه‌ی وسط قطعه‌ی AB باشد.

۲. با مفروض بودن یک چندضلعی در صفحه، سه نقطه‌ی A، B و C را بر اضلاع این چندضلعی چنان بیابید که مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد.

۳. با خط‌کش (نامندرج) و پرگار، ذوزنقه‌ای با معلوم بودن طول‌های اضلاعش رسم کنید.

۴. ذوزنقه‌ای با مفروضات زیر رسم کنید: طول‌های اقطار، طول پاره‌خط و اصل اوساط اضلاع ناموازی، و یکی از زوایای مجاور به قاعده.

۵. فرض می‌کنیم C_1 و C_2 دو دایره‌ی هم‌مرکز باشند. خط d را چنان رسم کنید که این دوایر را به طور متوالی در A، B، C، و D طوری قطع کند که: AB=BC=CD.

۶. خطوط m و n از نقطه‌ی M می‌گذرند که به یک فاصله از دو خط موازی قرار گرفته است. خط d را چنان رسم کنید که چهار خط مزبور را در A، B، C و D طوری قطع کند که: AB=BC=CD.

۷. نقاط دلخواه A و B مفروض‌اند. با پرگاری با دهانه‌ی ثابت نقطه‌ی C را چنان تعیین کنید که مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد.

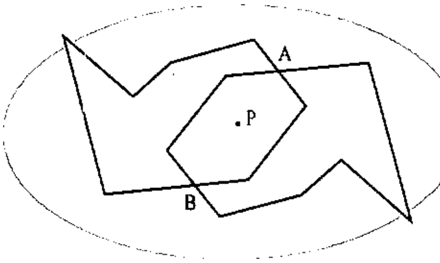
۸. دو نقطه‌ی دلخواه A و B مفروض‌اند. با پرگاری با دهانه‌ی ثابت، نقطه‌ی C را چنان تعیین کنید که ABC مثلثی قائم‌الزاویه باشد.

۹. دایره‌ای در صفحه مفروض است. تنها با استفاده از یک پرگار، مرکز آن را بیابید.

❁ ❁ ❁

پاسخ مسائل ترسیمات و تبدیلات هندسی

۱. تصویر قرینه‌ی خط چند ضلعی را نسبت به P رسم می‌کنیم (شکل ۱).

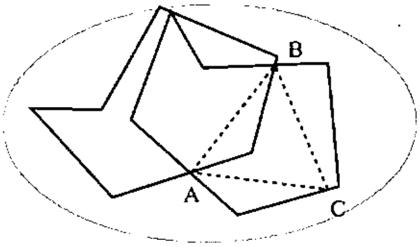


(شکل۱)

هر دو خط چندضلعی، شامل P در درون خود هستند. از آن‌جا که به دلایل تقارن، هیچ‌یک از آن‌ها نمی‌توانند شامل دیگری در درون خود باشند، باید متقاطع شوند. فرض می‌کنیم A یک نقطه‌ی تقاطع باشد. در این صورت، قرینه‌ی A نسبت به P نیز یک نقطه‌ی تقاطع است؛ زیرا کل شکل نسبت به P قرینه است. به این ترتیب، A و B بر خط چندضلعی اول قرار دارند و P وسط AB است، و مسئله حل می‌شود.

(W. L. Putnam Mathematical Competition)

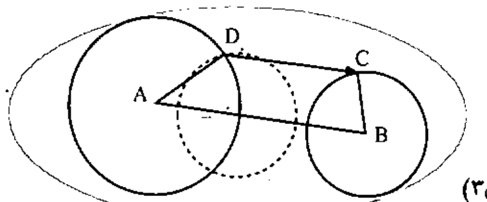
۲. این مسئله مشابه مسئله پیشین است، و بر دوران °۶۰ استوار است. نقطه‌ی A را بر خط چندضلعی مورد بحث، اما نه بر رأس آن، انتخاب می‌کنیم. خط چندضلعی را، به اندازه‌ی °۶۰، حول A دوران می‌دهیم. تصویر حاصل از دوران، خط اول را یک‌بار در A قطع می‌کند، بنابراین دو خط چندضلعی باید دست‌کم یک‌بار متقاطع باشند (در این مورد از این واقعیت استفاده می‌کنیم که A رأس نیست). B را نقطه‌ی تقاطعی متفاوت از A اختیار می‌کنیم. توجه داشته باشید که B بر هر دو خط چندضلعی واقع است، و پیش تصویر Cاش، از طریق دوران، بر خط چندضلعی اولیه واقع است (شکل ۲ را ملاحظه کنید). در این صورت، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع و کار تمام است.



(شکل۲)

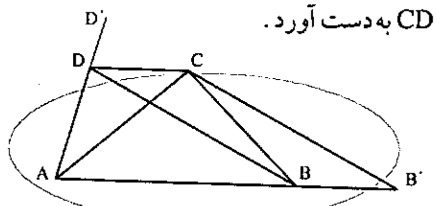
(Pimsner, M., Popa, S., Probleme de geometrie elementară (Problems in elementary geometry), Ed. Didactică si Pedagogică, Bucharest, 1979)

۳. فرض می‌کنیم ABCD ذوزنقه‌ی مورد نظر با قاعده‌های AB و CD باشد. ابتدا، ضلع AB، و سپس دوایر C_1، به مرکز A و شعاع AD، و C_2، به مرکز B و شعاع BC، را رسم می‌کنیم (شکل ۳ را ملاحظه کنید).



(شکل۳)

از آن‌جا که نقطه‌ی C از انتقال D به اندازه‌ی بردار $\vec{r}$ ای موازی AB و به طول DC به دست آمده است، نتیجه می‌شود که C را می‌توان از تقاطع دایره‌ی C_2 با انتقال دایره‌ی C_1 به اندازه‌ی $\vec{r}$ ترسیم کرد. سرانجام، D را می‌توان از تقاطع C_1 و دایره‌ای به مرکز C و شعاع CD به دست آورد.



(شکل۴)

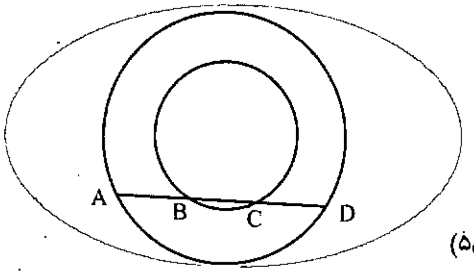
(Duican, L., Duican, I., Trasformări geometrice (Geometric Transformations), Ed. Stiintifică si Enciclopedică, Bucharest 1987)

۴. از آن‌جا که قطعه‌ی واصل اوساط ضلع‌های ناموازی ذوزنقه دارای طولی برابر نصف مجموع طول‌های دو قاعده‌ی آن است، مسئله به ترسیم ذوزنقه‌ی ABCD، با دانستن طول‌های AC، BD، و AB+CD، و اندازه‌ی زاویه‌ی DAB تبدیل می‌شود (شکل ۴ را ملاحظه کنید).

توجه داشته باشید که با انتقال قطر BD به اندازه‌ی بردار $\vec{DC}$، مثلث $AB'C$ را به دست می‌آوریم که طول‌های اضلاعش معلوم‌اند (زیرا: $AB' = AB + CD$). بنابراین، ابتدا کار را با ترسیم این مثلث آغاز می‌کنیم، و سپس زاویه‌ی $D'AB'$ را (برابر با $\angle DAB$) می‌سازیم. نقطه‌ی D از تقاطع AD' با خطی به دست می‌آید که از C موازی AB' رسم شده است. سرانجام، B از تقاطع AB' با خطی حاصل می‌شود که از D موازی $B'C$ رسم شده است.

(Duican, L., Duican, I., Trasformări geometrice (Geometric Transformations), Ed. Stiinçifică si Enciclopedică, Bucharest 1987)

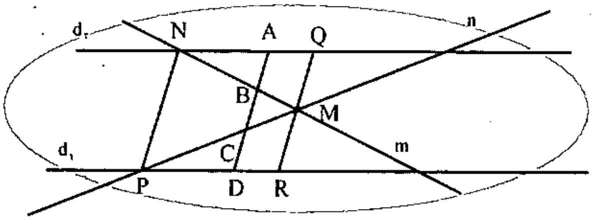
۵. توجه به این مطلب اهمیت دارد که B تصویر C از طریق اتساع[۲] P به مرکز A و نسبت $\frac{1}{2}$ است. A را بر دایره‌ی برونی C_1 اختیار، و $P(C_2)$ را رسم می‌کنیم (شکل ۵).



(شکل۵)

B، یکی از نقاط تقاطع C_2 و $P(C_2)$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت، خط AB در شرط مطلوب صدق می‌کند، زیرا اگر نقاط تقاطع دیگر AB با C_2 و C_1 را به ترتیب با C و D نمایش دهیم، از ترسیم AB=BC، و از تقارن شکل، AB=CD حاصل می‌شود.

۶. فرض می‌کنیم d_1 و d_2 دو خط موازی، N و P به ترتیب تقاطع‌های m و d_1، n و d_2 باشند (شکل ۶).



(شکل۶)

نیز، فرض می‌کنیم Q و R تقاطع‌های خط گذرنده از M به موازات NP باشد. در این صورت، خط با ویژگی مطلوب، انتقال خط NP به اندازه‌ی بردار $2\vec{NQ}/3$ است. در واقع، بنابه تشابه مثلث‌ها، قطعه‌ی BC که توسط m و n بر این خط مشخص شده، دارای طول $NP/3$ است. نیز اگر A و D تقاطع‌های خط BC با d_1 و d_2 باشند، خواهیم داشت:

$AB = 2QM/3 = NP/3$

و نیز:

$CD = NP/3$

بنابراین، سه قطعه برابرند.

(Smaranda; D., Soare, N., Trasformări geometrice (Geometric transformations), Ed. Academiei, Bucharest, 1988).

۷. اگر N و P دو نقطه در صفحه و N' و P' نگاره‌های مربوط به آن‌ها در دورانی به مرکز M و زاویه‌ی α باشند، در این صورت P' را می‌توان با انتقال P به اندازه‌ی بردار $\vec{NN'}$ به P''،

و سپس دوران P'' به اندازه‌ی زاویه‌ی α حول N' نیز به‌دست آورد؛ زیرا قطعات NP و $N'P'$ برابرند و زاویه‌ی بین آن‌ها α است.

مسئله خواهان این است که B را حول A به اندازه‌ی 60° دوران دهیم. نقاط:

$$P_0 = A, P_1, \cdots, P_n = B$$

را چنان‌که:

$$P_1P_2 = P_2P_3 = \cdots = P_{n-1}P_n = 1$$

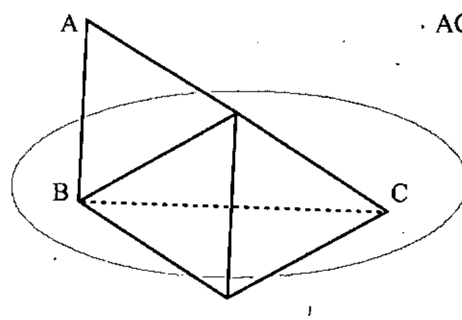
با این فرض انتخاب می‌کنیم که دهانه‌ی پرگار نیز برابر با ۱ باشد.

به سادگی می‌توان مثلث متساوی‌الاضلاع $P_0P_1Q_1$ را رسم کرد که در این حالت، Q_1 دوران P_1 حول A به اندازه‌ی 60° است.

آن‌گاه به‌طور استقرایی، توسط بردار $\overrightarrow{P_{k-1}Q_{k-1}}$، P_k را به R_k انتقال می‌دهیم (آن‌گونه که در قسمت اول این مجموعه مقالات توضیح داده‌ایم). سپس R_k را حول R_{k-1} به اندازه‌ی 60° دوران می‌دهیم تا Q_k به دست آید. در این صورت، از استقرا نتیجه می‌شود که Q_k حاصل دوران P_k حول A به اندازه‌ی 60° است. در حالت خاص، این مطلب در مورد $C=Q_n$ صدق می‌کند که حاصل دوران B است، و مسئله حل می‌شود.

(R. Gelca)

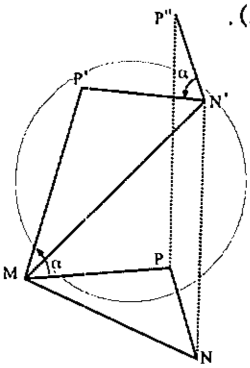
۸. این مسئله مشابه مسئله‌ی پیشین است، اما در این‌جا، دوران را با اتساع ترکیب می‌کنیم. مانند مسئله‌ی قبل فرض می‌کنیم، دهانه‌ی پرگار برابر ۱ باشد. اگر $AB = 1$ باشد، مسئله را می‌توان با استفاده از سه مثلث متساوی‌الاضلاع، چنان‌چه در شکل ۷ ملاحظه می‌شود، حل کرد. در این حالت: $AC / BC = \sqrt{3}$.



(شکل۷)

می‌خواهیم در حالت عمومی، ترکیب دوران 90° را با اتساع نسبت $\sqrt{3}$ انجام دهیم. برای این کار، از ویژگی زیر استفاده می‌کنیم.

اگر N' و P' نگاره‌های N و P در دوران به مرکز M و زاویه‌ی α و پس از آن اتساع به مرکز M و نسبت r باشد، آن‌گاه P' را می‌توان از انتقال P به P'' با بردار $\overrightarrow{NN'}$، و سپس دوران P'' حول N' به اندازه‌ی زاویه‌ی α و اتساع به نسبت r و مرکز N' به دست آورد (شکل ۸ را ملاحظه کنید).



(شکل۸)

در واقع، قطعه‌ی $P''N'$ موازی قطعه‌ی PN است، و هریک از قطعات $P'N'$ و PN نگاره‌ی دیگری در دوران‌ـ‌اتساع به مرکز M هستند. از این رو، طول‌هایشان به نسبت r اند، و زاویه‌ی بین‌شان α است. از این مرحله به بعد، استدلال از مراحل راه‌حل مسئله‌ی ۷ پیروی می‌کند.

$$P_0 = A, P_2, \cdots, P_n = B$$

را چنان اختیار می‌کنیم که:

$$P_0P_1 = P_1P_2 = \cdots = P_{n-1}P_n = 1$$

دوران‌ـ‌اتساع P_1 حول $P_0 = A$ به زاویه‌ی 90° و نسبت $\sqrt{3}$ را انجام می‌دهیم. سپس به طور متوالی فرض می‌کنیم، R_k انتقال P_k ی بردار $\overrightarrow{P_{k-1}Q_{k-1}}$ و Q_k دوران‌ـ‌اتساع R_k حول Q_{k-1} با زاویه‌ی 90° و نسبت $\sqrt{3}$ باشد. به طور استقرایی، درمی‌یابیم که Q_k نگاره‌ی P_k در دوران‌ـ‌اتساع به مرکز A است.

به این ترتیب، اگر $C = Q_n$ را انتخاب کنیم، آن‌گاه $\angle CAB = 90^\circ$ و مسئله حل می‌شود.

(R. Gelca)

۹. برای یافتن مرکز دایره‌ای با پرگار، سه مطلب مهم لازم داریم:

الف) وقتی فقط از یک پرگار استفاده می‌کنیم، انعکاس یک نقطه می‌تواند نسبت به دایره‌ای با مرکز معلوم به‌دست آید.

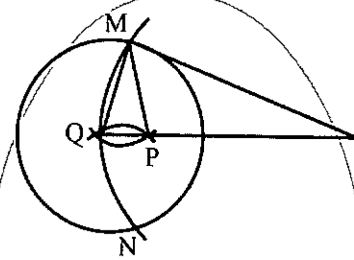
ب) در استفاده از یک پرگار، تقارن یک نقطه می‌تواند نسبت به یک خط، زمانی که تنها دو نقطه از آن معلوم باشد، به دست آید.

ج) با مفروض بودن دایره‌ای به مرکز O گذرنده از مرکز انعکاس Q و خط نگاره‌ی آن، یعنی AB، نگاره‌ی O در انعکاس، قرینه‌ی Q نسبت به AB است.

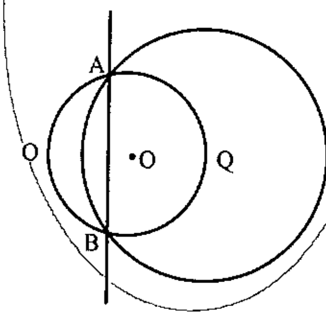
در مورد الف، توجه داشته باشید که انعکاس نقطه‌ی P نسبت به دایره‌ای به مرکز Q را می‌توان به این طریق رسم کرد: ابتدا

دایره‌ی مفروض را با دایره‌ای به مرکز P تقاطع می‌دهیم و فرض می‌کنیم، M و N دو نقطه‌ی تقاطع آن‌ها باشند (شکل ۹). دوایر به مراکز M و N و شعاع‌های برابر QM در نقطه‌ی دوم، یعنی P' تقاطع می‌کنند. از تشابه مثلث‌های PMQ و $MP'Q$ نتیجه می‌گیریم که:

$$PQ.P'Q = MQ^2$$



(شکل۹)



(شکل۱۰)

در نتیجه، P' منعکس P است.

ادعای دوم از این مطلب حاصل می‌شود که قرینه‌ی P نسبت به خط AB می‌تواند به عنوان دومین تقاطع دایره به مرکز A و شعاع AP با دایره‌ای به مرکز B و شعاع BP رسم شود. سرانجام، برای اثبات ادعای سوم توجه می‌کنیم که اگر M و M' تقاطع‌های خط OQ با دایره باشند، و اگر O' نگاره‌ی O در انعکاس باشد، آن‌گاه:

$$QM.QM' = QO.QO'$$

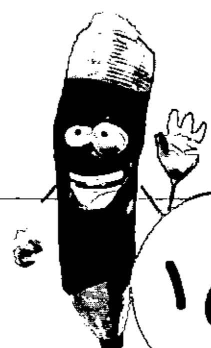
درحالی‌که $QM = 2QO$. به این ترتیب، $QO' = 2QM$ که نشان می‌دهد، O' قرینه‌ی O نسبت به این خط است.

برای حل مسئله، ابتدا نگاره‌ای را در انعکاسی به مرکز O که سعی در یافتنش داریم، رسم می‌کنیم. به این منظور، نقطه‌ی دلخواه Q را بر دایره انتخاب می‌کنیم، و دایره‌ای بزرگ‌تر از دایره‌ی مفروض، به مرکز Q می‌کشیم (شکل ۱۰). تقاطع‌های دو دایره را با A و B نمایش می‌دهیم. قرینه‌ی Q نسبت به AB را O' می‌نامیم. بنابر ویژگی ج (مذکور در فوق)، O' نگاره‌ی O در انعکاس نسبت به دایره‌ای به مرکز Q است. منعکس O' نسبت به دایره‌ای به مرکز Q، O را به دست می‌دهد.

زیرنویس

1. Bundeswettbewerb Mathematik

2. dilation



معمای فکری و منطقی ۱

B، C، J و S، چهار عضو باشگاه گلف V هستند. سن آن‌ها و نیز مهارتشان در بازی گلف، متفاوت است. با این همه، گروه چهار نفری جداناپذیری تشکیل داده‌اند. یک روز هنگامی که توپ را جلوی اولین سوراخ زمین قرار دادند، عضو جدیدی از باشگاه که چند بار بازی آن‌ها را با همدیگر دیده بود، رو به هم صحبتش در تراس کرد و پرسید، آن‌ها کیستند و بازی‌هایشان در چه مرتبه‌ای است.

هم صحبتش پاسخ داد: دقیقاً نمی‌دانم، اما حدس می‌زنم اگرچه J از هریک از این چهار نفر که مسن‌تر از C است بهتر بازی می‌کند، وگرچه هریک از این چهار نفر که بتواند S را شکست دهد، دست کم هم‌سن B است، بهترین گلف‌باز، در حالی که کوچک‌تر از هر کسی است که S می‌تواند شکست دهد، جوان‌ترین نیست، و در حالی که دست‌کم هم‌سن هر کسی است که B می‌تواند شکست بدهد، مسن‌ترین نیست.

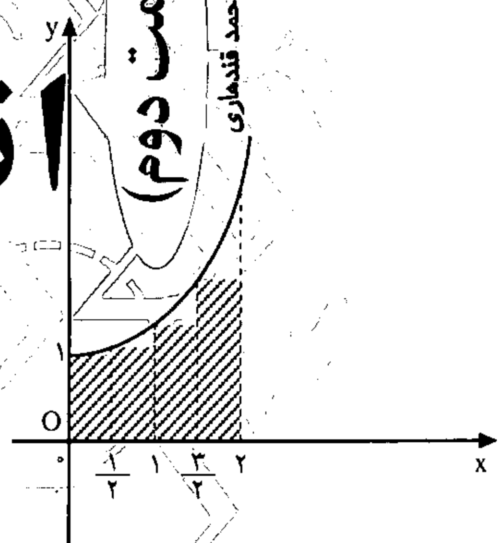
عضو تازه‌وارد مؤدبانه گفت: متوجه شدم؛ در حالی که متقاعد شده بود که با این اطلاعات، تنها راه مشخص کردن مرتبه‌ی بازی آن چهار نفر این است که خودش با آن‌ها بازی کند.

اما از حقایق داده شده می‌توان بدون ابهام مشخص کرد که بهترین گلف‌باز کدام است و چه کسی در مرتبه‌ی دوم و غیره قرار دارد. **شما می‌توانید؟**

انتگرال معیّن

(قسمت دوم)

احمد قندهاری



اشاره

در شماره‌ی قبل اندازه‌ی تقریبی نقصانی و اضافی سطح زیر منحنی را بیان کردیم و شرح دادیم که اندازه‌ی تقریب نقصانی سطح زیر منحنی را «پایین ریمان»، و اندازه‌ی تقریبی اضافی سطح زیر منحنی را «بالا ریمان» گویند. مجموع ریمان‌ها در حالت کلی نیز بیان شد. در این شماره، به تعریف انتگرال معین، و قضایا و ویژگی‌های آن می‌پردازیم.

تابع f را بر بازه‌ی $[a,b]$، انتگرال‌پذیر گویند که اگر این بازه را به n زیربازه‌ی مساوی افراز کنیم، داشته باشیم:

$$\lim_{n\to\infty}\Delta x\sum_{i=1}^{n}f(u_i)=\lim_{n\to\infty}\Delta x\sum_{i=1}^{n}f(l_i)=\lim_{n\to\infty}\Delta x\sum_{i=1}^{n}f(c_i)$$

$$=\int_a^b f(x)dx$$

مثال ۱. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^2+2$، به کمک حد مجموع بالا ریمان یا حد مجموع پایین ریمان، حاصل $\int_0^2 f(x)dx$ را بیابید.

حل: تابع f در بازه‌ی $[0,2]$ صعودی اکید است و $\Delta x=\frac{2}{n}$. چون تابع f صعودی است، راحت‌تر است، مسئله را از راه حد مجموع بالا ریمان حل کنیم.

$$\int_0^2 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\Delta x\sum_{i=1}^{n}f(u_i)=\lim_{n\to\infty}\Delta x\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$$

طول x_i برابر $i\Delta x$ یا $\frac{2i}{n}$ است، پس:

$$\int_0^2 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\Delta x\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{2i}{n}\right)$$

ابتدا $\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{2i}{n}\right)$ را محاسبه می‌کنیم، درضمن:

$f(x)=x^2+2$.

$$\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{2i}{n}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4i^2}{n^2}+2\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{4i^2}{n^2}+\sum_{i=1}^{n}2$$

$$=\frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2+\sum_{i=1}^{n}2=\frac{4}{n^2}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2n$$

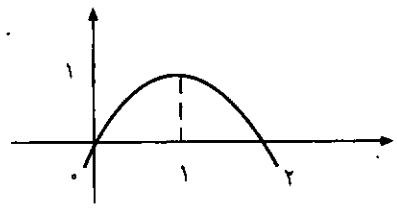
$$=\frac{2(n+1)(2n+1)}{3n}+2n=\frac{10n^2+6n+2}{3n}$$

$$\int_0^2 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\Delta x\sum_{i=1}^{n} f(\frac{2i}{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\times\frac{10n^2+6n+2}{3n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{20n^2+12n+4}{3n^2}=\frac{20}{3}$$ واحد مربع

مثال ۲. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=2x-x^2$ ، به کمک حد مجموع بالا ریمان یا پایین ریمان، حاصل $\int_0^2 f(x)dx$ را بیابید.

حل: تابع f در بازه‌ی $[0,1]$ ، صعودی اکید، در بازه‌ی $[1,2]$ نزولی اکید، و $x=1$ معادله‌ی محور تقارن آن است.



می‌توان مسئله را در بازه‌ی $[0,1]$ حل کرد و سپس آن را در ۲ ضرب نمود. یا بدون توجه به مطالب بالا، مسئله را مستقیماً حل کرد.

روش اول: محاسبه‌ی $2\int_0^1 f(x)dx$ $\qquad \Delta x=\frac{1}{n}$

$$2\int_0^1 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}2\Delta x\sum_{i=1}^{n} f(u_i)=\lim_{n\to\infty}2\times\frac{1}{n}\sum f(\frac{i}{n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum(\frac{2i}{n}-\frac{4i^2}{n^2})=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}(\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} i-\frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}(\frac{2}{n}\times\frac{n(n+1)}{2}-\frac{4}{n^2}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}(n+1-\frac{2(n+1)(2n+1)}{3n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}(2+\frac{2}{n}-\frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2})$$

$$=\lim_{n\to\infty}(2+\frac{2}{n}-\frac{8n^2+12n+4}{3n^2})=2-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}$$

روش دوم: محاسبه‌ی $\int_0^2 f(x)dx$ $\qquad \Delta x=\frac{2}{n}$

$$\int_0^2 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\Delta x\sum_{i=1}^{n} f(u_i)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum f(\frac{i}{n})$$

به خط اول حل روش اول توجه فرمایید. به همان رابطه رسیدیم، پس جواب همان $\frac{4}{3}$ است.

قضیه‌ی بنیادی اول حساب دیفرانسیل و انتگرال

اگر تابع f در بازه‌ی I شامل a پیوسته باشد و F با دامنه‌ی I با ضابطه‌ی $F(x)=\int_a^x f(x)dx$ ، آن‌گاه F روی I مشتق‌پذیر است و برای هر $x\in I$ داریم: $F'(x)=f(x)$.

قضیه‌ی بنیادی دوم حساب دیفرانسیل و انتگرال

اگر f در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد و تابع g به گونه‌ای باشد که برای هر x در بازه‌ی $[a,b]$ داشته باشیم: $g'(x)=f(x)$ ، آن‌گاه $\int_a^b f(x)dx=g(b)-g(a)$.

نکته‌ی ۱. اگر f تابعی پیوسته و فرد باشد، داریم:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$$

نکته‌ی ۲. اگر f تابعی پیوسته و زوج باشد، داریم:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$$

مثال: مطلوب است محاسبه‌ی مقدار A؟

$$A=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{|x|\sin+1}{1+x^2}dx$$

حل:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{|x|\sin x+1}{1+x^2}dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{|x|.\sin x}{1+x^2}dx+\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+x^2}dx$$

تابع با ضابطه‌ی $g(x)=\frac{|x|\sin x}{1+x^2}$ ، تابعی فرد است؛ پس:

$$A=0+\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+x^2}dx=(\operatorname{Arc}\tan x)_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \operatorname{Arc\,tan}\frac{\pi}{4} - \operatorname{Arc\,tan}(-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

ویژگی‌های انتگرال مُعین

$$1)\ \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$2)\ \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$3)\ \int_a^b kdx = k(b-a) \qquad k \neq 0$$

$$4)\ \int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \qquad k \neq 0$$

$$5)\ \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

لزومی ندارد c بین a و b باشد.

مثال: اگر تابع f انتگرال‌پذیر باشد و داشته باشیم: $\int_7^1 f(x)dx = -12$ و $\int_1^5 f(x)dx = 9$، آن‌گاه $\int_5^7 f(x)dx$ را بیابید.

حل:

$$\int_1^7 f(x)dx = \int_1^5 f(x)dx + \int_5^7 f(x)dx$$

$$12 = 9 + \int_5^7 f(x)dx \Rightarrow \int_5^7 f(x)dx = 3$$

قضیه‌ی ۱.

$$6)\ \int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

قضیه‌ی ۲. اگر دو تابع f و g در بازه‌ی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشند و داشته باشیم: $f(x) \leq g(x)$، آن‌گاه $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

تمرین: به کمک قضیه‌ی ۲ ثابت کنید:

برای هر x متعلق به بازه‌ی $[0, \frac{\pi}{2}]$ داریم: $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x$.

حل: داریم:

$$f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

با شرط این‌که f و g انتگرال‌پذیر باشند:

$$-1 \leq -\cos x \Rightarrow \int_0^x (-1)dx \leq \int_0^x -(\cos x)dx$$

$$\Rightarrow -x \leq -\sin x \Rightarrow \int_0^x -xdx \leq \int_0^x -\sin xdx$$

$$\Rightarrow (-\frac{x^2}{2})_0^x \leq (\cos x)_0^x \Rightarrow -\frac{x^2}{2} \leq \cos x - 1$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \Rightarrow \int_0^x (1-\frac{x^2}{2}) \leq \int_0^x \cos xdx$$

$$\Rightarrow (x - \frac{x^3}{6})_0^x \leq (\sin x)_0^x \Rightarrow x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x$$

توجه: توابع با ضابطه‌های

$f_1(x) = -1$ ، $g_1(x) = \cos x$ ، $f_2(x) = -x$ ،
$g_2(x) = -\sin x$ ، $f_3(x) = -\frac{x^2}{2}$ ، $g_3(x) = \cos x$ ،
$f_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ و $g_4(x) = \cos x$ ، همگی انتگرال‌پذیرند.

قضیه‌ی ۳: اگر تابعی در یک بازه‌ی بسته، تعداد متناهی نقطه ناپیوستگی داشته باشد و تابع در آن نقاط دارای حدّ چپ و حدّ راست باشد، باز هم تابع در آن بازه انتگرال‌پذیر است.

مثال:

$$\int_0^4 \lfloor x \rfloor dx = \int_0^1 \lfloor x \rfloor dx + \int_1^2 \lfloor x \rfloor dx + \int_2^3 \lfloor x \rfloor dx + \int_3^4 \lfloor x \rfloor dx$$

و

$$\int_0^2 \lfloor 2x \rfloor dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \lfloor 2x \rfloor dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \lfloor 2x \rfloor dx + \int_1^{\frac{3}{2}} \lfloor 2x \rfloor dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 \lfloor 2x \rfloor dx$$

و

$$\int_0^6 \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor dx = \int_0^2 \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor dx + \int_2^4 \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor dx + \int_4^6 \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor dx$$

قضیه‌ی ۴. اگر تابع‌های f و g تابع‌هایی کران‌دار و در بازه‌ی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشند، چنانچه جز در تعداد متناهی نقطه از بازه‌ی $[a,b]$ داشته باشیم $f(x) = g(x)$، آن‌گاه $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.

مثال: می‌دانیم:

$$\lfloor x\rfloor + \lfloor -x\rfloor = \begin{cases} 0 & x\in Z \\ -1 & x\notin Z\end{cases}$$

پس دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = \lfloor x\rfloor + \lfloor -x\rfloor$ و $g(x) = -1$ در هر بازه‌ی بسته‌ای انتگرال‌پذیرند و داریم:

$$\int_0^{100}(\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor)dx = \int_2^{100}(-1)dx$$

قضیه‌ی ۵. اگر m و M به‌ترتیب کران پایین و کران بالای تابع پیوسته f در بازه‌ی $[a,b]$ باشد، داریم:

$$m \le f(x) \le M \Rightarrow \int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M\,dx$$

$$\Rightarrow \boxed{m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)}$$

$m(b-a)$ را کران پایین انتگرال، $M(b-a)$ را کران بالای انتگرال، و

$$\boxed{m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M}$$

مقدار $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ را مقدار متوسط یا مقدار میانگین تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ گویند.

مثال ۱. ثابت کنید:

$$\frac{1}{9} \le \int_2^5 \frac{1}{x^2+2}dx \le \frac{1}{2}$$

حل:

$$f(x) = \frac{1}{x^2+2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+2)^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \notin [2,5]$$

$$f(2) = \frac{1}{6} = M \qquad f(5) = \frac{1}{27} = m$$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

$$\frac{1}{27}(5-2) \le \int_2^5 f(x)dx \le \frac{1}{6}(5-2) \Rightarrow \frac{1}{9} \le \int_2^5 \frac{1}{x^2+2}dx \le \frac{1}{2}$$

مثال ۲. اگر مقدار متوسط تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{2}{x^2}$ در بازه‌ی $[1,c]$ عدد (۱) باشد، c را بیابید.

حل:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c-1}\int_1^c \frac{2}{x^2}dx = \frac{1}{c-1}\left(-\frac{2}{x}\right)\Big|_1^c = \frac{-1}{c-1}\left(\frac{2}{c}-2\right) \ ; \ c \ne 1$$

$$= \frac{-1}{c-1}\left(\frac{2-2c}{c}\right) = \frac{2(c-1)}{c(c-1)} = \frac{2}{c} = 1 \Rightarrow c = 2$$

قضیه‌ی ۶. (قضیه‌ی مقدار میانگین برای انتگرال‌ها)

اگر f در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد، آن‌گاه عدد حقیقی c، $a < c < b$ وجود دارد که:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)}$$

مثال: عدد c قضیه‌ی مقدار میانگین برای انتگرال‌ها را، برای تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \cos^2 x$ در بازه‌ی $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ بیابید.

حل:

$$f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)dx$$

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos^2 c = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2}\cos^2 x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$0 \le x \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos x > 0 \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

چند رابطه مهم

همواره داریم:

الف) $F(x) = \int_a^x f(x)dx \Rightarrow F'(x) = f(x)$

ب) $F(x) = \int_a^{g(x)} f(t)dt \Rightarrow F'(x) = g'(x).f(g(x))$

ج) $F(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt \Rightarrow F'(x) = g'(x).f(g(x)) - h'(x).f(h(x))$

مثال: مطلوب است محاسبه‌ی:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^3} \sin\sqrt[3]{t}\,dt}{3x^4}$$

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^3}\sin\sqrt[3]{t}\,dt}{3x^4}=\frac{0}{0}$$

هوپیتال تابع با توجه به (ب): $= \lim_{x\to 0}\frac{3x^2\sin x}{12x^3}\sim\lim_{x\to 0}\frac{3x^3}{12x^3}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

محاسبه‌ی بعضی از حدها به کمک انتگرال

فرض می‌کنیم f در بازه‌ی $[0,1]$ تابعی پیوسته باشد. اگر این بازه را به n قسمت مساوی افراز کنیم، طول هر بازه $\Delta x=\frac{1}{n}$ خواهد شد.

$$\int_0^1 f(x)dx=\lim_{x\to\infty}\Delta x\sum_{i=1}^{n}f(c_i)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\Rightarrow$$

$$\boxed{\int_0^1 f(x)dx=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{3}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right)}$$

مثال ۱: مطلوب است محاسبه‌ی:

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{\pi}{n}\left(\cos\frac{\pi}{2n}+\cos\frac{2\pi}{2n}+\cos\frac{3\pi}{2n}+\cdots+\cos\frac{n\pi}{2n}\right)$$

حل:

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{\pi}{n}\left(\cos\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{n}\right)+\cos\frac{\pi}{2}\left(\frac{2}{n}\right)+\cos\frac{\pi}{2}\left(\frac{3}{n}\right)+\cdots+\cos\frac{\pi}{2}\left(\frac{n}{n}\right)\right)$$

$$=\pi\int_0^1\cos\frac{\pi}{2}x\,dx=2\left(\sin\frac{\pi}{2}x\right)_0^1=2(1-0)=2$$

مثال ۲. مطلوب است محاسبه‌ی حد:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}+\frac{2}{\sqrt{4+n^2}}+\frac{3}{\sqrt{9+n^2}}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$$

حل:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}}+\frac{2}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{4}{n^2}\right)}}+\frac{3}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{9}{n^2}\right)}}+\cdots\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}+\frac{2}{n\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}}+\frac{3}{n\sqrt{1+\frac{9}{n^2}}}+\cdots\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}+\frac{\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}}+\frac{\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{9}{n^2}}}+\cdots\right)$$

$$=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\left(\sqrt{1+x^2}\right)_0^1=\sqrt{2}-1$$

تفریح اندیشه

● حسین نامی ساعی

میمون‌های بازی‌گوش

میمون‌ها در دو دسته با هم بازی می‌کردند. مربع یک هشتم آن‌ها با شادی در بیشه جست‌وخیز می‌کردند و دوازده میمون دیگر هم با خوشحالی به آرامی هوا را برهم می‌زدند. شما بگویید چند میمون در آن بیشه بودند؟

حل: اگر تعداد کل میمون‌ها x فرض شود، در این صورت:

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2+12=x$$

و از این‌جا:

$$\frac{x^2}{64}+12=x$$

$$\frac{x^2+768}{64}=x$$

$$x^2-64x+768=0$$

$$(x-16)(x-48)=0$$

بنابراین: $x_2=48\ ,\ x_1=16$

مسئله دارای دو جواب مثبت است: در هر دو دسته می‌تواند ۴۸ یا ۱۶ میمون باشد. هر دو جواب، معادله را کاملاً برقرار می‌کند.

جواب معمای فکری و منطقی

جواب ۱: J بهترین گلف باز است و بقیه به ترتیب عبارت‌اند از C ،B، و S.

جواب ۲: C و H در مقابل A و M بازی می‌کردند. C بزرگ‌ترین است و بقیه به ترتیب سن عبارت‌اند از H ،M، و A.

تقویم منسوب به ژول[2]

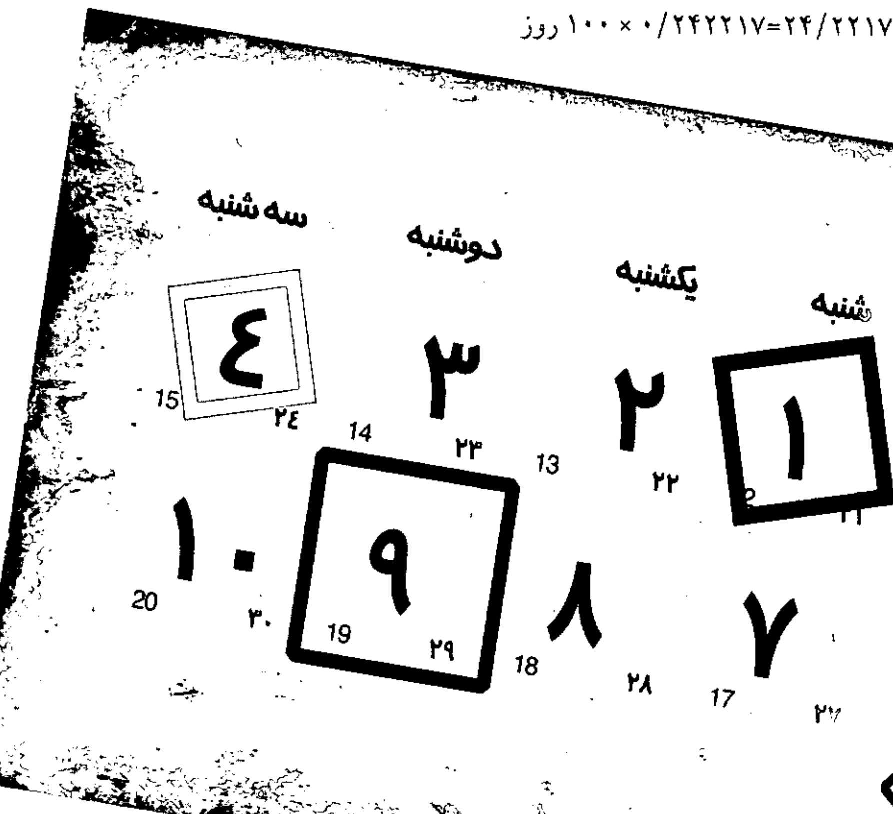
بنای کار را بر بیان خلاصه‌ای از تاریخچه‌ی تغییراتی می‌گذاریم که به دنبال هم در تقویم به‌وجود آمدند.

۱. می‌دانید، سال شمسی ۳۶۵ روز و ۲۴۲۲۱۷ میلیونیم روز است (یا ۳۶۵/۲۴۲۲۱۷ روز) و سالی است که قانون گردش فصل‌ها بر آن متکی است. بنابراین این همان مدت زمانی است که باید پایه و اساس عمومی سال قرار گیرد و در تقویم منظور شود.

آن‌طور که در گذشته‌ی دور مصری‌ها عمل می‌کردند، به طور کلی سال را ۳۶۵ روز ثابت می‌گرفتند که البته در نهایت خطایی را در پی داشت که می‌توانست پس از چندین سال زیاد باشد. مثلاً پس از صد سال، تاریخ درست از ۱۰۰ × ۰/۲۴۲۲۱۷=۲۴/۲۲۱۷ روز بعد شروع می‌شد.

رومی‌ها سال‌های زیادی این تقسیم سال به ۳۶۵ روز را حفظ و با آن کار کردند. ولی در زمان **ژول سزار**[3] فصل‌هایی پیدا شدند که جای آن‌ها کاملاً جابه‌جا شده بود. بنابراین دیکتاتور نامبرده تصمیم گرفت، در هر دوره‌ی چهار ساله‌ی متوالی، سه سال اول ۳۶۵

چه روزی از هفته مربوط به تاریخ معینی است



پیشگفتار

مقاله‌ای را که هم‌اکنون مطالعه می‌کنید، حاوی مطلبی است درباره‌ی تقویم میلادی که می‌توان از آن مانند یک تقویم روزشمار تا سال ۲۹۰۰ یا سال ۳۱۰۰ میلادی استفاده کرد.

درباره‌ی تدوین این تقویم و چگونگی تغییر و تحول تدریجی و شکل‌گیری آن به صورت فعلی، در کتاب «سرگرمی‌های علم حساب»[1] بررسی و تحقیقی صورت گرفته که صرف نظر از کمی تاریخی بودن آن، غالباً با محاسبه توأم است و تمرین‌های جالبی دارد. در پایان بحث و بررسی‌ها، نیز جدولی تنظیم شده است که از آن می‌توان برای «تعیین نام روزهای هفته‌ی مربوط به تاریخ معینی از سال میلادی» استفاده کرد. آنچه در ادامه خواهد آمد، ترجمه و تلخیص این بررسی‌ها و طریقه‌ی ترسیم جدول و طرز استفاده از آن است؛ باشد که مورد توجه قرار گیرد.

محمدعلی شیخان

روز و سال چهارم ۳۶۶ روز حساب شود. از این‌رو طول سال را ۳۶۵ روز و $\frac{1}{4}$ روز یعنی ۳۶۵/۲۵ روز تعیین می‌کرد.

این تغییر و تنظیم، در سال ۳۲۵ میلادی مورد تأئید اسقف‌های آن عصر قرار گرفت که در مجلسی در نیس فرانسه گرد آمده بودند تا به امور مذهبی رسیدگی کنند. از جمله این که تصمیم بگیرند تاریخ عید پاک را با استفاده از قاعده و نظم معینی تثبیت کنند. بنابراین تقویمی را که **ژول** دستور تنظیم آن را داده بود، تأئید کردند و سال چهارم را **کبیسه**[۴] نامیدند، و قرار گذاشتند از سال‌های تاریخی، آن‌ها که بر ۴ قابل قسمت هستند، سال‌های کبیسه باشند (این تقویم را بعدها **تقویم ژولی** می‌خوانم).

تقویم منسوب به گرگوآر[۵]

۲. سال منسوب به ژول به اندازه‌ی ۳۶۵/۲۵-۳۶۵/۲۴۲۲۱۷=۰/۰۰۷۷۸۳ روز، یعنی تقریباً $\frac{3}{400}$ طولانی‌تر بود و درنتیجه، اعتدال ربیعی (بهار) در سال ۱۵۸۲ به ۱۱ مارس رسید (به جای ۲۱ مارس). در این سال **پاپ گرگوآر سیزدهم**[۶] ده روز از تقویم را حذف کرد و فردای روز پنجشنبه ۴ اکتبر را، جمعه ۱۵ اکتبر اعلان کرد و برای آن که از بازگشت به‌حالت مشابهی اجتناب شود، سه روز در هر ۴۰۰ سال را از تقویم حذف کرد. با این تصمیم، از قرنی به قرن دیگر، فقط آن سال‌هایی از قرن‌های کبیسه‌دار باقی ماندند که بر ۴ قابل قسمت باشند. از این قرار سال ۱۶۰۰ کبیسه‌دار می‌شد، سال‌های ۱۷۰۰، ۱۸۰۰ و ۱۹۰۰ کبیسه نداشتند و سال ۲۰۰۰ کبیسه‌دار می‌شد و...

و عبارت زیر:

$$365+\frac{1}{4}-\frac{1}{100}+\frac{1}{400}=365/2425$$

معرف **سال گرگوری** شد که در عین حال نشان‌دهنده‌ی تغییرات تدریجی است که در تقویم به‌وجود آمده‌اند و می‌آیند.

$(+\frac{1}{4})$ نشان می‌دهد که در هر چهار سال یک روز به سال (یعنی ۳۶۵ روز) اضافه می‌شود، $(-\frac{1}{100})$ نشان می‌دهد که در هر صد سال یک روز از صدمین سال که باید کبیسه باشد، حذف می‌شود. $(+\frac{1}{400})$ نشان می‌دهد که در هر چهارصد سال از نو سال را کبیسه می‌گیرند.

این تقویم که خطای کمی را سبب می‌شد، دوام یافت. این خطا هم چیزی جز تقریباً یک روز در هر چهار هزار سال نیست. پس می‌توان بدون خطای مشهود و آشکار قبول کرد، طول **سال گرگوری** ۳۶۵/۲۴۲۵ روز است (تقویم منسوب به **گرگوآر** را نیز **تقویم گرگوری** می‌خوانیم).

***

حال برمی‌گردیم به اصل سؤال، یعنی: **تعیین نام روز هفته**. جواب به این سؤال بر تبصره‌های زیر متکی است:

۳. **تبصره‌ی ۱**: چون از تاریخ روزی (یا بر تاریخ روزی) مضرب‌هایی از ۷ کم (یا مضرب‌هایی از ۷ اضافه) کنیم، به روزی همنام با همان روز نخست می‌رسیم. بدین‌ترتیب، مثلاً اگر دوم مارس روز دوشنبه باشد، روزهای ۹=۲+۷، ۱۶=۲+۱۴، ۲۳=۲+۲۱ و ۳۰=۲+۲۸ نیز روز دوشنبه خواهند بود.

۴. **تبصره‌ی ۲**: از تبصره قبل نتیجه می‌شود، برای شناخت روز هفته‌ی مربوط به تاریخ معینی، درحالی‌که روز مربوط به تاریخ معین دیگری شناخته شده باشد، می‌توان مضرب‌های هفت اختلاف بین این دو تاریخ را نادیده گرفت و فقط به **باقی‌مانده** توجه داشت. برای سهولت بیان، بعدها چنین **باقی‌مانده‌ای** را **رزیدو**[۷] می‌نامیم، و برای تشخیص روز مورد نظر در طول هفته، ردیف آن را از روز مفروض به حساب می‌آوریم و شماره‌ی روز مفروض را صفر می‌گیریم.

۵. کاربرد

الف) اول مارس سالی روز دوشنبه است، ششم اوت همان سال چه روزی است؟

اختلاف بین این دو تاریخ ۱۵۸ روز است[۸]؛ رزیدوی ۱۵۸ مساوی ۴ است، پس روز مطلوب، چهارمین روز، ابتدا از سه‌شنبه، یعنی روز جمعه است.

ب) روز اول ژانویه‌ی سالی معین است، روز اول مارس همان سال چه روزی است؟

ابتدا فرض می‌کنیم که سال مورد نظر کبیسه نباشد. بین اول ژانویه و اول مارس ۵۹ روز اختلاف است که رزیدوی آن ۳ می‌شود و اگر اول ژانویه مثلاً روز پنج‌شنبه باشد، اول مارس روز یک‌شنبه خواهد بود (سه روز بعد). درحالی‌که سال کبیسه باشد، این رزیدو ۴ است.

به عکس می‌توان روز اول ژانویه‌ی سالی را شناخت، درصورتی‌که روز اول مارس همان سال معین باشد. بدین شکل

می‌توان برای این سال مشترک رزیدو را همان عدد ۳ انتخاب کرد، ولی آن‌گاه باید برای یافتن روز مطلوب، ترتیب شمارش را در جهت بازگشت (به عکس) در نظر گرفت. بدیهی است در این مثال، اگر روز یک‌شنبه اول مارس باشد، به جواب روز پنج‌شنبه می‌رسیم. ولی در این حالت سهل‌تر آن است که رزیدو را ۴=۳-۷ بگیریم. آن‌گاه امکان شمارش به‌طور طبیعی میسر می‌شود و نتیجه همان پنج‌شنبه است. با این قیاس، رزیدوی سال کبیسه‌دار ۳=۴-۷ خواهد شد.

۶. **تبصره‌ی ۳**: هر سال شامل ۵۲ هفته است به اضافه‌ی یک یا دو روز؛ برحسب آن‌که کبیسه نباشد یا کبیسه باشد. آن‌گاه رزیدوی مربوطه برحسب حالت یک یا دو است.

از این‌جا نتیجه می‌شود، اگر مثلاً اول ژانویه‌ی سالی که کبیسه نیست، روز دوشنبه باشد، اول ژانویه‌ی سال بعد روز سه‌شنبه است. چنانچه سال کبیسه باشد، اول ژانویه‌ی سال بعد روز چهارشنبه خواهد بود.

۷. **کاربرد**: می‌دانیم اول ژانویه‌ی سال ۱۸۹۹ روز یک‌شنبه است. چه روزی از هفته، اول ژانویه‌ی سال ۱۸۰۱ بوده است؟

اختلاف بین این دو تاریخ ۹۸ سال است که در آن، ۲۴ سال کبیسه‌دار وجود دارد. برای محاسبه‌ی رزیدوی این سال‌ها، باید رزیدوی ۱۲۲=۲۴+۹۸ را حساب کنیم که عدد ۳ خواهد شد. چنانچه این عدد را بدون تغییر به‌کار بریم، باید طبق آنچه قبلاً گفتیم، ردیف روزها را به سمت بازگشت در نظر بگیریم. درنتیجه معلوم می‌شود، اول ژانویه‌ی سال ۱۸۰۱ روز پنج‌شنبه بوده است.

۸. به این ترتیب، فقط به کمک این تبصره‌ها می‌توان تعیین کرد، چه روزی از هفته به تاریخ دلخواهی مربوط است. ولی تدریجاً در دنباله‌ی بحث‌ها سریع‌تر به حل مسأله خواهیم پرداخت.

۹. در آنچه که در آینده دنبال می‌کنیم، قسمت قرن‌ها از یک سال تاریخی معین را از قسمت سال‌های زیر قرن جدا در نظر می‌گیریم. به این ترتیب که مثلاً برای سال ۴۲۵، قسمت ۴ را که جزو قرن‌هاست از ۲۵ که جزو سال‌هاست، جدا می‌کنیم. و یا مثلاً برای سال ۱۸۴۱، جزء ۱۸ را که مربوط به قرن‌ها، و جزء ۴۱ را که مربوط به سال‌هاست، مجزا در نظر می‌گیریم. و بالاخره، برای سهولت عمل و برای نشان دادن جزء صحیح یک خارج قسمت (در صورتی که عبارتی یا عددی بر عدد دیگر قابل قسمت نباشد)، آن را داخل دو کروشه قرار می‌دهیم؛ به این صورت

$$\left[\frac{17}{4}\right]=4.$$

خطای تقویم گرگوری

۱۰. پاپ گرگوآر سیزدهم، در اجرای تغییراتش در تقویم، مخصوصاً این هدف را دنبال می‌کرد که زمان وقوع عید پاک را که به‌وسیله‌ی اسقف‌ها در مجلس خلفای الهی در نیس تثبیت شده بود، بهبود بخشند و برقرار نگه دارد. بنابراین، با فرض درست بودن تاریخ‌ها تا سال ۳۲۵، به اصلاح تقویم پرداخت و روز جمعه ۵ اکتبر را ۱۵ اکتبر سال ۱۵۸۲ اعلام کرد (بند شماره‌ی ۲). درصورتی که آن تاریخ‌ها درست نبودند، نباید سال‌های ۱۰۰، ۲۰۰ و ۳۰۰ کبیسه‌دار می‌شدند. چون مبدأ تاریخ عصر ما به‌جای سال اول، در حقیقت از سال ۳۲۵ است. بنابراین لزوماً بین سال‌های یک و ۳۲۵، تعداد روزهای بیش‌تری از آنچه که در تقویم گرگوری آمده، جریان داشته است. درواقع، ۳۲۴ سال بین سال اول تا سال ۳۲۵ شامل ۳۲۴×۳۶۵/۲۵=۱۱۸۳۴۱ روز است. اگر تقویم گرگوری از ابتدای سال اول به کار برده می‌شد، مشتمل بر ۳۲۴×۳۶۵/۲۴۲۵=۱۱۸۳۳۸/۵۷ روز می‌شد. ملاحظه می‌شود که بین این دو ۲/۴۳ روز اختلاف وجود دارد. (این درحالی است که قبول کنیم، طول مدت سال گرگوری به همان اندازه باشد که سال شمسی. وانگهی خطایی که به این ترتیب، مرتکب می‌شویم، در اغلب حالات قابل صرف‌نظر کردن است.) خلاصه‌ی کلام معلوم می‌شود، تمام تاریخ‌ها ـ در ارتباط با روزهای هفته ـ باید از نتیجه‌ای که به دست آمده است، جلوتر باشند. مثلاً روز یک‌شنبه اول ژانویه‌ی سال ۱۸۹۹ باید سوم ژانویه نامیده می‌شد.

کاربرد

۱۱ـ الف) چه روزی از هفته، اول ژانویه‌ی سال اول بوده است، درصورتی‌که می‌دانیم روز اول ژانویه‌ی سال ۱۸۹۸ روز شنبه بوده است؟

اگر تقویم گرگوری از آغاز تاریخ ما مورد استفاده قرار گرفته بود، روزهایی که بین این دو تاریخ در جریان بودند، مساوی ۱۸۹۷×۳۶۵/۲۴۲۵=۶۹۲۸۶۵/۰۲ روز می‌شد. ولی در این‌جا تاریخ قبل از سال ۳۲۵ هم مورد نظر است. طبق آنچه قبلاً دیدیم، باید به این

عدد، ۲/۴۳ روز را اضافه کنیم تا روز دقیقی را در هفته به دست آوریم. بنابراین، باید رزیدوی عدد ۶۹۲۸۶۷ را تعیین کنیم. این رزیدو هم صفر است. پس روز اول ژانویه‌ی سال اول، شنبه بوده است.

ب) فرض می‌کنیم تقویم گرگوری از ابتدای تاریخ ما مورد استفاده بوده است و دقیقاً اول ژانویه‌ی سال ۱۸۹۸ روز شنبه واقع شود. چه روزی، اول ژانویه‌ی سال اول خواهد بود؟

طبق محاسبه‌ای که در قسمت الف انجام دادیم، باید رزیدوی عدد ۶۹۲۸۶۵ را به دست آوریم که مساوی ۵ است. با شمارش در جهت روزهای قبل، ابتدا از روز شنبه که اول ژانویه‌ی سال ۱۸۹۸ بود، به روز دوشنبه می‌رسیم؛ یعنی اول ژانویه‌ی سال اول روز دوشنبه واقع خواهد شد.

ج) چه روزی در هفته، ۱۲ اکتبر سال ۱۴۹۲ است؟ (تاریخ‌کشف آمریکا توسط کریستف کلمب.)

تقویم ژولی: اختلاف اول ژانویه‌ی سال اول تا اول ژانویه‌ی سال ۱۴۹۲ مساوی ۱۴۹۱ سال است. بنابراین برای محاسبه‌ی رزیدوها داریم:

رزیدوی سال‌های ۱۴۹۱

رزیدوی کبیسه‌ها $\left[\frac{۱۴۹۱}{۴}\right] = ۳۷۲$

و

رزیدوی تعداد روزهای اول ژانویه تا ۱۲ اکتبر ۱۴۹۲	$= ۲۸۵$

بنابراین داریم:

$$۱۴۹۱ + ۳۷۲ + ۲۸۵ = ۲۱۴۸$$

رزیدوی این عدد ۶ است. پس اگر اول ژانویه‌ی سال اول، روز شنبه باشد، ۱۲ اکتبر سال ۱۴۹۲ روز جمعه خواهد بود.

د) ۵ مه سال ۱۷۸۹ چه روزی است؟ (تاریخ تشکیل مجلس قدیم فرانسه.)

تقویم گرگوری: با فرض این که از آغاز تاریخ ما، تقویم گرگوری مورد استفاده قرار گرفته باشد، داریم (برای محاسبه‌ی رزیدوها):

رزیدوی سال‌ها ۱۷۸۸

رزیدوی کبیسه‌ها $\left[\frac{۱۷۸۹}{۴}\right] = ۴۴۷$

رزیدوی تعداد روزهای اول ژانویه تا ۵ مه سال ۱۷۸۹	$= ۱۲۴$

بنابراین داریم:

$$۱۷۸۸ + ۴۴۷ + ۱۲۴ = ۲۳۵۹$$

از این عدد رزیدوی قرن‌ها یعنی $۱۳ = \left[\frac{۱۷}{۴}\right] - ۱۷$ را حذف می‌کنیم که می‌شود: $۲۳۴۶ = ۱۳ - ۲۳۵۹$ و رزیدوی این عدد هم یک است. طبق فرض، اول ژانویه‌ی سال اول روز دوشنبه بود (قسمت ب) پس ۵ مه سال ۱۷۸۹ روز سه‌شنبه خواهد بود.

۱۲. تبصره‌های مهم

الف) از آغاز تاریخ ما، روزهای هفته بدون انقطاع به ترتیب طبیعی‌شان ادامه داشتند. فقط هنگام رفرم گرگوآر بود که چندمین‌ها تغییر کرده بودند. به این معنی که فردای روز پنج شنبه چهارم اکتبر ۱۵۸۲، به روز جمعه ۱۵ اکتبر این سال تبدیل شد.

ب) روس‌ها و یونانی‌ها تقویم ژولی را حفظ کردند. درعوض، سایر ملل اروپایی کلاً تقویم ژولی را از سال اول تا ۴ اکتبر سال ۱۵۸۲ به انضمام آن، تقویم گرگوری را از ابتدای ۱۵ اکتبر سال ۱۵۸۲ به بعد به‌کار برده‌اند.

قاعده‌های کلی

۱۳. تا این‌جا منظور این بود که به خوانندگان ثابت کنیم، می‌توانیم بدون اتکا به شناخت روز هفته‌ی مربوط به تاریخ معینی، روز مربوط به تاریخ دلخواهی را تعیین کنیم. به‌علاوه، مثال‌ها بیش‌تر به منظور فهم و درک چگونگی ساخت تقویم بوده‌اند. ولی می‌توان بسیاری از محاسبات و احتمال خطا را کم کرد. برای این کار، هم‌اکنون دو روش بسیار ساده را معرفی می‌کنیم به توجیه آن‌ها می‌پردازیم که اصل آن را مدیون ستاره‌شناسی فرانسوی و یکی از مکتشفان دستگاه متریک، یعنی دُلامبر[۹] هستیم.

۱۴. از آنچه هم‌اکنون دنبال می‌شود: اولاً، روز آغاز را اول مارس خواهیم گرفت، تا از هر نوع پیچیدگی حاصل از سال‌های کبیسه اجتناب کنیم. ثانیاً، این انتخاب را به قسمی انجام می‌دهیم که در تقسیم بر ۷، رزیدوی صفر پیوسته مشخص و معرف روز یک‌شنبه باشد. به ترتیب، برای روزهای دوشنبه، سه‌شنبه، ... و جمعه و شنبه، اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ را به‌کار می‌بریم. این اعداد را، شماره و علامت روزهای مربوط می‌نامیم (به عبارت دیگر روزها را با این شماره‌ها شناسایی می‌کنیم). پس هر یک از این اعداد به‌طور مطلق معرف یک روز هفته است. روش‌هایی را که بیان خواهیم کرد، دقیقاً این شماره را به کمک یک محاسبه‌ی سریع به ما خواهد داد. ابتدا دو سؤال زیر را مطرح و حل می‌کنیم:

۱۵ . الف) شماره‌ی اولین روز ماهی را می‌شناسیم. مطلوب است تعیین شماره‌ی n امین روز دلخواهی از این ماه.

کافی است، به‌طور کلی رزیدوی اختلاف بین روز اول و nامین روز ماه را (یعنی رزیدوی ۱-n را) حساب کنیم و بر شماره‌ی اولین روز ماه بیفزاییم. مثلاً، شماره‌ی اولین روز ماهی ۳ است، شماره‌ی بیست و چهارمین روز این ماه چیست؟

رزیدوی اختلاف (۱-۲۴) مساوی ۲ است. پس شماره‌ی بیست و چهارمین روز ماه ۲+۳ می‌شود.

ب) شماره‌ی روز اول مارس سالی را می‌شناسیم. شماره‌ی تاریخ دلخواهی از همین سال را پیدا کنید. اول ماه از تاریخ معینی، نسبت به اول مارس رزیدویی دارد که در جدول ۱ آمده است. در این جدول، رزیدوی اول مارس صفر فرض شده است (برای محاسبه‌ی اعداد این جدول، به بند شماره‌ی ۴ تبصره‌ی ۲ و شماره‌ی ۵ـ الف رجوع کنید).

جدول ۱ . رزیدوی سال‌ها

ماه‌ها	رزیدوی مربوط سال: عمومی و مشترک	رزیدوی مربوط سال: کبیسه
ژانویه	۴	۳
فوریه	۰	۶
مارس	۰	
آوریل	۳	
مه	۵	
ژوئن	۱	
ژوئیه	۳	
اوت	۶	
سپتامبر	۲	
اکتبر	۴	
نوامبر	۰	
دسامبر	۲	

از این قرار، شماره‌ی روز اول هر ماه (از سال) با اضافه کردن شماره‌ی روز اول مارس همان سال، بر رزیدوی مربوط به همان ماه که در جدول ثبت است، به‌دست خواهد آمد. بالاخره طبق آنچه که در قسمت الف همین بند اشاره شد، **برای به‌دست آوردن شماره‌ی nامین روز از ماه دلخواهی، کافی است به رزیدوی آن ماه داده شده در جدول بالا، رزیدوی اختلاف nامین روز منهای یک (یعنی رزیدوی ۱-n) و نیز شماره‌ی روز اول مارس صورت مسأله را اضافه کنیم.**

مثلاً می‌خواهیم شماره‌ی ۹ دسامبر سالی را پیدا کنیم، درحالی که می‌دانیم شماره‌ی روز اول مارس همین سال ۳ است. رزیدوی واقع در جدول ۱، مربوط به اول دسامبر، ۲ است؛ رزیدوی اختلاف ۸=۱-۹ مساوی ۱ است. با توجه به شماره‌ی روز اول مارس داده شده، معلوم می‌شود شماره‌ی ۹ دسامبر، ۶=۱+۲+۳ است.

از این قرار، طبق آنچه که گذشت می‌توان دو روش در این‌باره بیان کرد.

۱۶ . **روش اول تقویم ژولی**: فرض کنید منظور تعیین شماره‌ی ۱۲ اکتبر سال ۱۴۹۲ باشد. ابتدا شماره‌ی روز اول مارس سال ۱۴۹۲ را پیدا می‌کنیم. اول ژانویه‌ی سال اول روز شنبه بود (بند شماره‌ی ۱۱، قسمت الف) که شماره‌اش ۶ است. پس شماره‌ی روز اول مارس سال اول، مساوی با رزیدوی ۹=۳+۶ یعنی ۲ است (بند شماره‌ی ۵، کاربرد قسمت ب). طبق آنچه که در بالا دیده‌ایم، لازم است که رزیدوی عبارت زیر را تعیین کنیم:

$$2+1491+\left[\frac{1492}{4}\right]$$

$$=1492+\left[\frac{1492}{4}\right]+1$$

که در آن، ۲ معرف شماره‌ی روز اول مارس سال اول، ۱۴۹۱ برای رزیدوی سال‌ها و $\left[\frac{1492}{4}\right]$ رزیدوی سال‌های کبیسه است. عبارت اخیر را چنین می‌نویسیم:

$$1400+\frac{1400}{4}+92+\left[\frac{92}{4}\right]+1$$

$$=14(100+25)+92+\left[\frac{92}{4}\right]+1$$

یا چون فقط رزیدو مورد نظر است و این‌که ۶+۷×۱۷=۱۲۵، با حذف مضرب ۷ نتیجه می‌شود:

$$14\times 6+92+\left[\frac{92}{4}\right]+1$$

بنابراین، شماره‌ی اول مارس سال ۱۴۹۲، مساوی رزیدوی این عبارت است. برای به‌دست آوردن شماره‌ی ۱۲ اکتبر سال ۱۴۹۲ باید علاوه بر آن، رزیدوی مربوط به اول اکتبر واقع در جدول، یعنی ۴، و رزیدوی(۱-۱۲) را نیز به عبارت اخیر اضافه کنیم. حاصل خواهد شد:

$$(1)\quad 14\times 6+92+\left[\frac{92}{4}\right]+4+12$$

و شماره‌ی مطلوب، رزیدوی عبارت (۱) است که مسلماً با توجه به سلسله دلایل قبلی، مستقل از سال معینی است. به این ترتیب:

الف) قاعده‌ی اول: برای تعیین این‌که چه روزی از هفته مربوط به تاریخ دلخواهی از تقویم ژولی است، باید رزیدوی عبارت (۱) را بررسی کرد و این مجموع تشکیل شده است از: اولاً، شش برابر قسمت قرون سال تاریخی مورد نظر؛ ثانیاً، قسمت سالیانه‌ی آن؛ ثالثاً،

خارج قسمت صحیح قسمت سالیانه‌ی آن بر ۴؛ رابعاً، رزیدوی اول ماه مفروض نسبت به روز اول ماه مارس (واقع در جدول۱)؛ خامساً، چندمین روز داده شده.

رزیدویی که به این ترتیب به‌دست می‌آید، یکی از اعداد صفر و یک تا ۶ خواهد بود که روزهای مورد نظر یکشنبه، دوشنبه... و یا شنبه را مشخص می‌کند. در سؤال بالا، جواب روز جمعه است؛ زیرا رزیدوی عبارت (۱) مساوی ۵ است.

۱۷. **روش دوم- تقویم گرگوری:** مطلوب است تعیین شماره‌ی ۲۱ ژانویه‌ی سال ۱۷۹۳ (تاریخ فوت لویی شانزدهم).

فرض می‌کنیم، شروع تاریخ زمان ما بر مبنای تاریخ تقویم گرگوری باشد که اول ژانویه‌ی سال اول آن روز دوشنبه بود (موارد کاربرد بند شماره‌ی ۱۱، قسمت ب). روز هفته‌ای که شماره‌ی آن ۱ است و شماره‌ی اول مارس سال اول آن مساوی ۴=۳+۱ است (بند شماره‌ی ۵، کاربرد قسمت ب). ابتدا شماره‌ی اول مارس سال ۱۷۹۳ را پیدا می‌کنیم. طبق آنچه که قبلاً دیده‌ایم، باید رزیدوی این عبارت را حساب کنیم:

$$4+1792+\left[\frac{1793}{4}\right]-\left(17-\left[\frac{17}{4}\right]\right)$$

که در آن ۴ معرف شماره‌ی روز اول مارس سال اول، ۱۷۹۲ برای تعیین رزیدوی سال‌ها، $\left[\frac{1793}{4}\right]$ برای رزیدوی سال‌های کبیسه دار و $17-\left[\frac{17}{4}\right]$ رزیدوی قرن‌هاست.

عبارت فوق را می‌توان نوشت:

$$1700+93+\frac{1700}{4}+\left[\frac{93}{4}\right]-17$$

$$+\left[\frac{17}{4}\right]+3=17(100+25-1)$$

$$+\left[\frac{17}{4}\right]+93+\left[\frac{93}{4}\right]+3$$

و بالاخره چون رزیدوی ۱-۲۵+۱۰۰ مساوی ۵ است، شماره‌ی روز اول مارس ۱۷۹۳، به‌وسیله‌ی این عبارت تعیین می‌شود:

$$17\times 5+\left[\frac{17}{4}\right]+93+\left[\frac{93}{4}\right]+3$$

برای یافتن شماره‌ی ۲۱ژانویه‌ی سال ۱۷۹۳، علاوه بر آن باید به این عبارت رزیدوی اول ژانویه واقع در جدول ۱، یعنی ۴، رزیدوی (۱-۲۱) را اضافه کنیم. پس شماره‌ی مطلوب برابر مساوی است با رزیدوی:

$$17\times 5+\left[\frac{17}{4}\right]+93$$

$$+\left[\frac{93}{4}\right]+4+21+2 \qquad (2)$$

بدیهی است که رشته دلایل بالا مستقل از سال معینی است. با این ترتیب:

ب) قاعده‌ی دوم: برای یافتن روزی از هفته‌ی مربوط به تاریخ دلخواهی، با استفاده از تقویم گرگوری، باید رزیدوی عبارت(۲) را به‌دست آوریم که تشکیل شده است از: اولاً، پنج برابر قسمت قرن‌های سال تاریخی مورد نظر؛ ثانیاً، خارج قسمت صحیح این قسمت از قرن‌ها تقسیم بر ۴؛ ثالثاً، قسمت سال‌های پائین‌تر از قرن‌ها؛ رابعاً، خارج قسمت صحیح این قسمت از سال‌ها تقسیم بر ۴؛ خامساً، رزیدوی اول ماه مفروض نسبت به اول مارس واقع در جدول۱؛ سادساً، چندمین روز مفروض؛ سابعاً، ۲ واحد.

رزیدویا عددی که به‌دست می‌آید، یکی از اعداد صفر تا ۶ است که معرف روز مطلوب خواهد بود. در مثالی که انتخاب شد، رزیدوی نهایی مساوی یک است، پس ۲۱ ژانویه‌ی سال ۱۷۹۳ روز دوشنبه است.

تقویم دائمی و کاربرد آن

۱۸. آنچه که تا کنون دیده‌ایم، وسیله ی تشکیل یک تقویم دائمی را ساده و آسان می‌کند؛ یعنی رسم جدولی که بتوان بدون محاسبه به تعیین روز مطلوب رسید. به اختصار اشاره می‌کنم که برای این کار، با صرف نظر کردن از بسیاری از محاسبات، فقط به تعیین چهار رزیدوی قرن‌ها، سال، چندمین روز و ماه اکتفا، و آن‌ها را به شیوه‌ی خاصی در دو جدول تنظیم می‌کنند. در یکی، رزیدوهای چندمین روز و ماه (جدول۲-الف) و در دیگری، رزیدوهای قرن‌ها و سال (جدول۲-ب). حال اگر مثلاً در جست‌وجوی شماره‌ی روز مربوط به رزیدوهای ۲ و ۴ از چندمین روز و ماه، و ۵و۶ از قرن‌ها و سال هستید، از جدول ۲-الف به‌وسیله‌ی دو عدد ۲و۴ که به ترتیب در سطر و ستون اول انتخاب می‌کنید، رزیدوی ۶ را به‌دست می‌آورید و از جدول ۲-ب، به وسیله‌ی اعداد ۵ و ۶رزیدوی ۴ را. حال کافی است، قطر لازم از خانه‌ی ۶ از جدول ۲-الف را امتداد دهیم تا امتداد قطر خانه‌ی ۴ از جدول ۲-ب را قطع کند و در محل تلاقی

این دو قطر، رزیدوی ۶+۴، یعنی ۳ را بنویسیم. این شماره‌ی روزی خواهد بود که می‌خواهیم؛ یعنی روز مطلوب چهارشنبه است. توجه داشته باشید، خانه‌های در طول قطر BD جدول ۲-الف، شامل رزیدوهای مکرر است. همین‌طور است، خانه‌های در طول قطرهای دیگر موازی BD (جدول ۲).

۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۶	۰	۱	۲	۳	۴	۵
۵	۶	۰	۱	۲	۳	۴
۴	۵	۶	۰	۱	۲	۳
۳	۴	۵	۶	۰	۱	۲
۲	۳	۴	۵	۶	۰	۱
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۰

۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۰
۲	۳	۴	۵	۶	۰	۱
۳	۴	۵	۶	۰	۱	۲
۴	۵	۶	۰	۱	۲	۳
۵	۶	۰	۱	۲	۳	۴
۶	۰	۱	۲	۳	۴	۵

از نوشتن رزیدوها در دو جدول قرینه‌ی مذکور هم صرف‌نظر کردیم و در لوزی مرکزی جدول۳، به‌جای شماره‌ها، حرف اول کلمه‌ی روزهای هفته را نوشتیم. اینک با تذکر مجدد این مطلب که جدول جدید، برای تقویم **گرگوری تا سال ۳۱۰۰ میلادی** و برای **تقویم ژولی تا سال ۲۹۰۰ میلادی** قابل استفاده است، با ذکر مشخصات و نحوه‌ی استفاده از آن، مطلب را به پایان می‌بریم.

اما مشخصات جدول، همان طور که پیداست، جدول شامل ستون‌های بزرگ و کوچکی است، در راست و چپ صفحه که در قسمت بالا و متن آن‌ها، سال‌های تاریخی زیرقرن، سال‌ها برحسب قرن، nامین روز ماه و اسامی ماه‌ها ثبت است. ماه‌های **ژانویه و فوریه** که با حروف بزرگ نوشته شده‌اند، مربوط به سال‌های کبیسه‌دار هستند. زیر ستون‌های بزرگ، خانه‌های سفید و نانوشته‌ای وجود دارند که در محل تلاقی امتدادهای اقطار این خانه‌ها، تقریباً در پائین و بین ستون‌ها، حرف اول روزهای هفته (به فرانسه) نوشته شده است (Sشنبه، D یکشنبه، Lدوشنبه، M سه‌شنبه، mچهارشنبه، ژپنجشنبه و V جمعه).

تذکر: اگر جای دیگری این جدول را کپی می‌کنید، می‌توانید برای سهولت تشخیص، روزهای هفته را با شماره‌های صفر تا ۶ نامگذاری کنید (صفر برای روز یکشنبه و بقیه‌ی اعداد به‌ترتیب برای روزهای دوشنبه و... و شنبه).

حال به مثال‌هایی چند و طریقه‌ی استفاده از جدول توجه کنید.

۱. تعیین کنید، ۲۱نوامبر سال ۱۹۹۹چه روزی است؟

ابتدا ۲۱ را در ستون سمت چپ مربوط به روزهای ماه و نیز ماه نوامبر را در ستون مربوط به ماه پیدا می‌کنیم و خانه‌ی وابسته به ستون و سطر این دو را در نظر می‌گیریم که یکی از آن خانه‌های سفید خواهد بود (برای سهولت آن را خانه اول می‌نامیم). سپس از عدد مربوط به سال، قسمت قرن‌ها، یعنی ۱۹ را در ستون کوچک سمت راست تعیین می‌کنیم (بر حسب مورد، یکی از دو ستون کوچک را در نظر می‌گیریم؛ **تقویم گرگوری یا تقویم ژولی**) و قسمت سال‌های زیر قرن، یعنی ۹۹ را در ستون سمت راست مشخص می‌سازیم. آن‌گاه، خانه‌ی التقا این دو مورد را که یکی از خانه‌های سفید زیر ستون سمت راست خواهد بود، پیدا می‌کنیم (آن را هم محض سهولت خانه دوم می‌نامیم). در محل تلاقی امتدادهای قطرهای خانه‌ی اول و دوم مذکور، حرفی نوشته شده که حرف اول نام روز مربوط است. در این مثال، برای تقویم گرگوری حرف D آمده، یعنی یکشنبه. و برای تقویم ژولی حرف S، یعنی شنبه.

۲. ۱۵فوریه سال ۱۸۴۰ چه روزی بود؟ سال کبیسه است.

ابتدا از سمت چپ جدول، عدد ۱۵ و FE'V را در ستون‌های مربوط پیدا می‌کنیم و خانه‌ی التقا این دو مورد را مشخص می‌کنیم (خانه‌ی اول). سپس ۱۸ و ۴۰ را از سمت راست در ستون‌های مربوط تعیین می‌نماییم و خانه‌ی برخورد این دو مورد را هم در نظر می‌گیریم (خانه‌ی دوم). در محل تلاقی امتدادهای اقطار دو خانه‌ی اول و دوم، حرف اول روزی است که می‌خواستیم. در مورد تقویم گرگوری حرف S آمده است، یعنی شنبه و در مورد تقویم دیگر، حرف j، یعنی روز پنجشنبه.

خلاصه‌ی کلام

ابتدا خانه‌ی محل تلاقی ستون و سطر روز و ماه تاریخ معین را از سمت چپ پیدا کنید. قطر این خانه را از چپ به راست و از بالا به پائین امتداد دهید. همین عمل را در قسمت قرن‌ها و سال‌های تاریخی ریزقرن در سمت راست انجام دهید. خانه‌ی وابسته به این دو را به دست آورید. قطر این خانه را نیز از بالا و راست به پائین و چپ امتداد دهید. در محل تلاقی آن با اولی، حرف روز مربوط

نوشته شده است.

مثال‌های زیر را خود بررسی کنید:

۱. ۱۲ اکتبر ۱۴۹۲ چه روزی است؟

۲. ۱۵ مـارس ۲۰۰۴ چـه روزی است؟ سال کبیسه است

۳. ۱۷ فوریه سال ۲۰۰۰ چه روزی است؟ سال کبیسه است.

۴. ۲۰ ژانویه سال ۲۰۰۰ چه روزی است؟ سال کبیسه است.

۵. ۱۱ مه سال ۲۰۰۵ چه روزی است؟

۶. اول ماه مه سال ۲۰۰۶ چه روزی است؟

۷. اول ژانویه سال ۲۰۰۷ چه روزی است؟

۸. ۱۲ آوریل سال ۱۹۱۵ چه روزی است؟

زیرنویس

1. RÉCRÉATIONS ARITHMÉTIQUES
2. Calendrier Julien
3. Jules César
4. Bissextile
5. Calendrier Grégorien
6. Le Pape Grégoire XIII
7. Résidu

۸. روزهای ماه‌های میلادی نامرتب و به‌قرار زیرند:
۲۸ یـا ۲۹ روز = Février (February)، ۳۱ روز= Janvier (January)
۳۱ روز= Mai (May)، ۳۰ روز= Avril (April)، ۳۱ روز= Mars (March)
۳۱ روز= Août (August)، ۳۱ روز= Juillet (July)، ۳۰ روز= Juin (June)
۳۱ روز= Octobre (October)، ۳۰ روز= Septembre (September)
۳۱ روز= Décembre (December)، ۳۰ روز= Novembre (November)

9. Delambre

تقویم دائم میلادی

شنبه	Sa...
یکشنبه	Di...
دوشنبه	Lun...
سه شنبه	Mat...
چهارشنبه	mez...
پنجشنبه	Jen...
جمعه	Ven....

قسمت های تاریخی (زیرقرن)

۰	۱	۲	۳	۰	۴	۵
۶	۷	۰	۸	۹	۱۰	۱۱
۰	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۰	۱۶
۱۷	۱۸	۱۹	۰	۲۰	۲۱	۲۲
۲۳	۰	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۰
۲۸	۲۹	۳۰	۳۱	۰	۳۲	۳۳
۳۴	۳۵	۰	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹
۰	۴۰	۴۱	۴۲	۴۳	۰	۴۴
۴۵	۴۶	۴۷	۰	۴۸	۴۹	۵۰
۵۱	۰	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۰
۵۶	۵۷	۵۸	۵۹	۰	۶۰	۶۱
۶۲	۶۳	۰	۶۴	۶۵	۶۶	۶۷
۰	۶۸	۶۹	۷۰	۷۱	۰	۷۲
۷۳	۷۴	۷۵	۰	۷۶	۷۷	۷۸
۷۹	۰	۸۰	۸۱	۸۲	۸۳	۰
۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۰	۸۸	۸۹
۹۰	۹۱	۰	۹۲	۹۳	۹۴	۹۵
۰	۹۶	۹۷	۹۸	۹۹	۰	۰

قسمت سال ها بر حسب قرن ها

تقویم Julien				تقویم Gzegozien			
۰۷	۱۴	۲۱	۲۸	۱۷	۲۱	۲۵	۲۹
۶	۱۳	۲۰	۲۷				
۵	۱۲	۱۹	۲۶	۱۶	۲۰	۲۴	۲۸
۴	۱۱	۱۸	۲۵	۱۵	۱۹	۲۳	۲۷
۳	۱۰	۱۷	۲۴				
۲	۹	۱۶	۲۳	۱۸	۲۲	۲۶	۳۰
۱	۸	۱۶	۲۲				

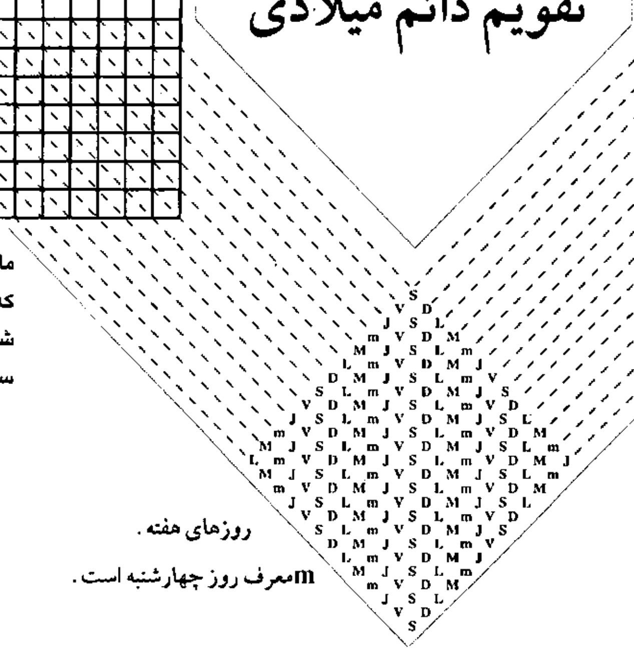
چندمین روز ماه

۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳
۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷
۲۸	۲۹	۳۰	۳۱	۰	۰	۰

جدول ۳. ترتیب دیگر ثبت رزندوهای لازم برای تشکیل تقویم دائمی

ماه
Fév-Mars-Nov.
FÉV.-Août
Mai.
Janv-Octob.
JANV-Avpil.Juil
Sept.-Déc.
Juin.

ماه‌های ژانویه و فوریه که با حروف بزرگ نوشته شده‌اند، مربوط به سال‌های کبیسه‌اند.



روزهای هفته.

mمعرف روز چهارشنبه است.

اشاره

نمودارها می‌توانند درک شهودی ما را نسبت به مطالب ریاضی عمیق‌تر کنند. یکی از روش‌هایی که می‌تواند درک ریاضی را در دانش‌آموزان بالا ببرد، استفاده از قوه‌ی درک و شهود است و اگر قوه‌ی درک و شهود در دانش‌آموزان تحریک و تقویت شود، تفکر دانش‌آموزان رشد می‌یابد و شکوفا می‌شود. درنتیجه، انگیزه به یادگیری ریاضیات، قدرت ابتکار و خلاقیت دانش‌آموزان افزایش می‌یابد.

با کمک اطلاعاتی که از تابع و مشتق‌های اول و دوم آن به‌دست می‌آید، می‌توان نمودار تابع را با دقت نسبتاً خوبی رسم کرد. اما ممکن است تعیین مشتق در بعضی از موارد به سادگی امکان‌پذیر نباشد. اکنون می‌خواهیم روش رسم نمودار تابع را بدون استفاده از مشتق بررسی کنیم.

رسم نمودار تابع بدون مشتق

(قسمت ۱)

● مجتبی رفیعی

دبیر ریاضی منطقه‌ی شهر قدس

به طور کلی، برای رسم نمودار توابع، به این نکات نیاز داریم:

۱. در تابع $f(x)=(x-a)^n g(x)$ با شرط $g(a)\neq ۰$ اگر $n=۱$ باشد، آن‌گاه $x=a$ ریشه‌ی ساده‌ی منحنی تابع f است و محل تقاطع منحنی با محور xهاست.

۲. در تابع $f(x)=(x-a)^n g(x)$ با شرط $n\geq ۲$ و $g(a)\neq ۰$، مقدار مشتق تابع در $x=a$ تا مرحله‌ی $(n-۱)$ ام برابر صفر است. یعنی: $f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(n-۱)}(a)=۰$ ؛

۳. در تابع $f(x)=(x-a)^n g(x)$ با شرط $g(a)\neq 0$، اگر n زوج و $n\geq 2$ باشد، آن‌گاه f در $x=a$ دارای اکسترمم نسبی است. در این حالت، اگر $g(a)>0$ باشد، تابع در a می‌نیمم نسبی دارد و اگر $g(a)<0$ باشد، تابع در a ماکزیمم نسبی دارد.

۴. در تابع $f(x)=(x-a)^n g(x)$ با شرط $g(a)\neq 0$، اگر n فرد و $n\geq 3$ باشد، آن‌گاه f در $x=a$ دارای نقطه‌ی عطف مماس است.

۵. خط $x=a$ را مجانب قائم نمودار تابع f گوییم، هرگاه حداقل یکی از موارد زیر برقرار باشد:

۲) $\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

۱) $\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$

۴) $\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$

۳) $\lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty$

۶. خط $y=L$ را مجانب افقی نمودار تابع f گوییم، هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

۱) $\lim_{x\to +\infty} f(x)=L$ ۲) $\lim_{x\to -\infty} f(x)=L$

۷. اگر $f(x)=mx+h+R(x)$ و $\lim_{x\to\infty} R(x)=0$، آن‌گاه $y=mx+h$ مجانب مایل $y=f(x)$ است.

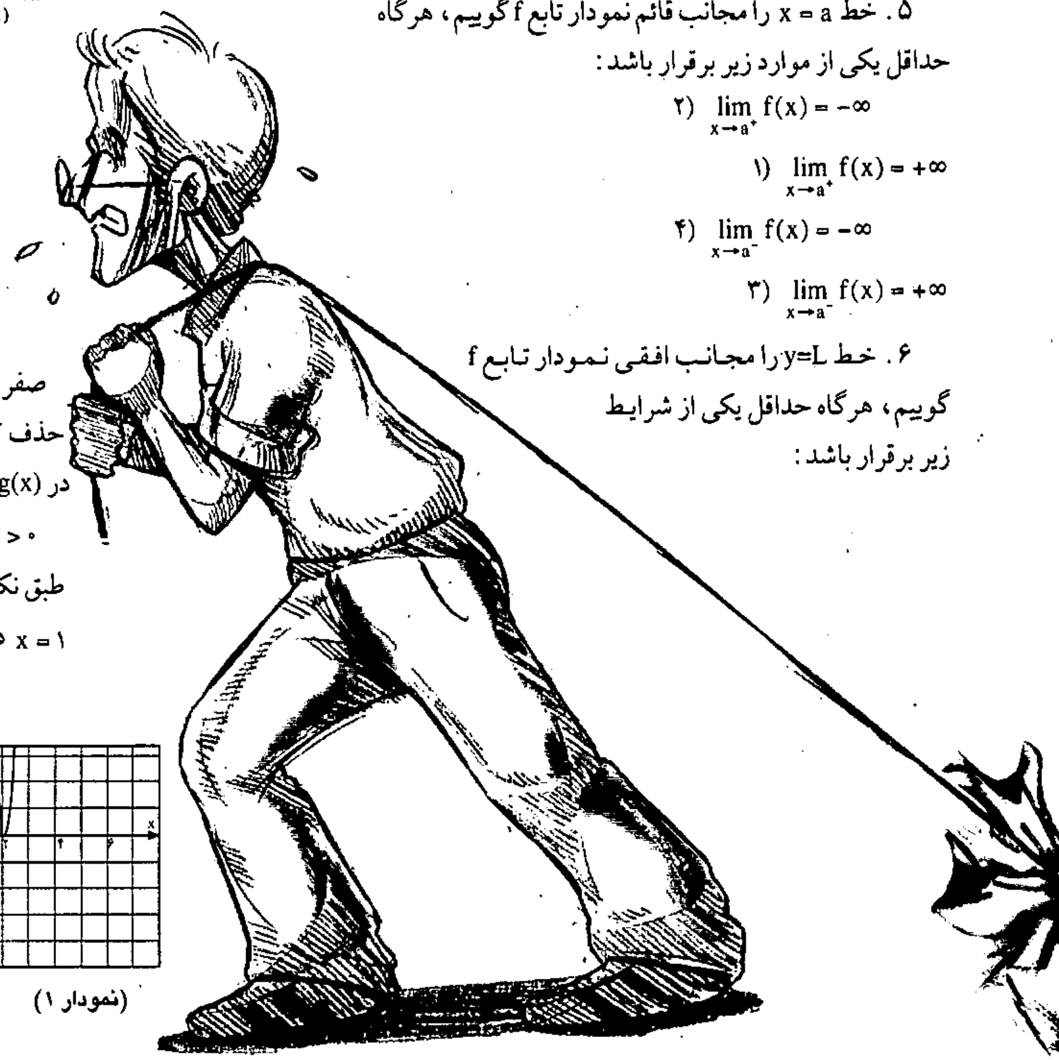
مثال: معادله‌ی $f(x)=(x-1)(x-2)^2(x+1)^3=0$ را به‌طور شهودی رسم کنید؟

این معادله سه ریشه دارد که محور xها را با شرایط زیر قطع می‌کند.

طبق نکته‌ی ۱، منحنی در نقطه‌ی $x=1$ محور xها را قطع می‌کند.

طبق نکته‌ی ۳، منحنی در نقطه‌ی $x=2$ بر محور xها مماس است و این نقطه می‌نیمم نسبی است. زیرا می‌توان نوشت:

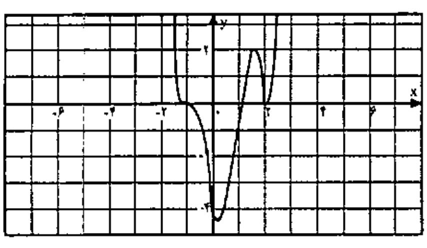
$$f(x)=(x-2)^2\underbrace{\left[(x-1)(x+1)^3\right]}_{g(x)}$$



اکنون اگر عامل صفرشونده یعنی $(x-2)^2$ را حذف کنیم و به‌جای x عدد ۲ را در $g(x)$ قرار دهیم، داریم:

$$g(2)=(2-1)(2+1)^3=27>0$$

طبق نکته‌ی ۴، منحنی در نقطه‌ی $x=1$ دارای نقطه‌ی عطف مماس است.



(نمودار ۱)

رسم نمودار توابع کثیر الجمله‌ای

نمودار توابع زیر را رسم کنید:

۱) $y=x^4-2x^3$

گام اول: چون

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^4-2x^3 \approx \lim_{x\to\pm\infty} x^4=+\infty$$

یعنی:

$$\begin{cases} x\to+\infty \Rightarrow y\to+\infty \\ x\to-\infty \Rightarrow y\to+\infty \end{cases}$$

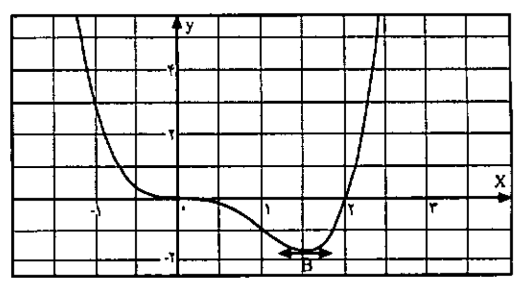
بنابراین، شروع منحنی از ناحیه‌ی دوم و پایان منحنی در ناحیه‌ی اول است.

گام دوم: معادله‌ی $y = 0$ را حل می‌کنیم تا محل تقاطع منحنی با محور xها به‌دست آید.

$$y = x^4 - 2x^3 = x^3(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

نقطه‌ی $x = 0$ ریشه‌ی مرتبه‌ی فرد معادله است، پس نقطه‌ی عطف مماس منحنی است و نقطه‌ی $x = 2$ ریشه‌ی ساده‌ی منحنی است و این نقطه‌ها محل تقاطع منحنی با محور xهاست.

گام سوم: منحنی از ناحیه‌ی دوم به صورت نزولی شروع می‌شود و باید در نقطه‌ی صفر عطف مماس داشته باشد و چون باید نقطه‌ی $x = 2$ را روی محور xها قطع کند، بنابراین در یک نقطه مانند B (نمودار ۲) می‌نیمم دارد که از این نقطه به بعد، نمودار منحنی صعودی است و با عبور از نقطه‌ی $x = 2$ در ناحیه‌ی اول ادامه پیدا می‌کند.



(نمودار ۲)

۲) $y = -x(x-2)^2$

گام اول: چون

$$\lim_{x \to \pm\infty} -x(x-2)^2 = \lim_{x \to \pm\infty} -x^3 = \mp\infty$$

یعنی:
$$\begin{cases} x \to +\infty \Rightarrow y \to -\infty \\ x \to -\infty \Rightarrow y \to +\infty \end{cases}$$

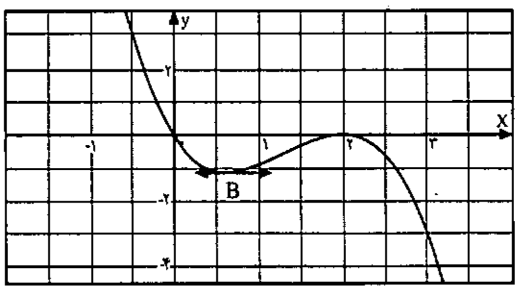
بنابراین، منحنی از ناحیه‌ی دوم شروع می‌شود و در ناحیه‌ی چهارم پایان می‌یابد.

گام دوم: معادله‌ی $y = 0$ را حل می‌کنیم تا محل تقاطع منحنی با محور xها به‌دست آید.

$$y = -x(x-2)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{ریشه‌ی ساده} \\ x = 2 & \text{ریشه‌ی مضاعف} \end{cases}$$

که با توجه به ریشه‌های به‌دست آمده، منحنی از نقطه‌ی صفر می‌گذرد و در نقطه‌ی ۲ بر محور xها مماس می‌شود.

گام سوم: منحنی از ناحیه‌ی دوم نزول می‌کند و چون نقطه‌ی $x = 0$ ریشه‌ی ساده است، آن را قطع می‌کند و باید در نقطه‌ی $x = 2$ بر محور xها مماس شود. پس در نقطه‌ای مانند B (نمودار ۳) می‌نیمم پیدا می‌کند تا در نقطه‌ی $x = 2$ بر محور xها مماس شود.



(نمودار ۳)

۳) $y = x^3(x-2)^2$

گام اول:

$$\lim_{x \to \pm\infty} x^3(x-2)^2 = \lim_{x \to \pm\infty} x^5 = \pm\infty$$

یعنی:
$$\begin{cases} x \to +\infty \Rightarrow y \to +\infty \\ x \to -\infty \Rightarrow y \to -\infty \end{cases}$$

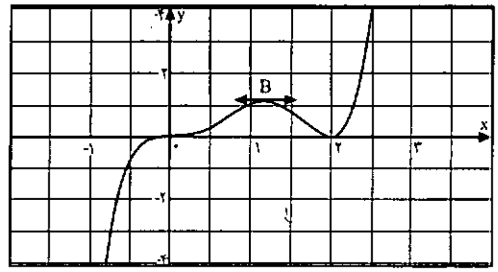
بنابراین شاخه‌ای از منحنی در ناحیه‌ی اول و شاخه‌ی دیگری از آن در ناحیه‌ی سوم قرار دارد.

گام دوم: معادله‌ی $y = 0$ را حل می‌کنیم تا محل تقاطع منحنی با محور xها به‌دست آید.

$$y = x^3(x-2)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{نقطه‌ی عطف مماس} \\ x = 2 & \text{ریشه‌ی مضاعف} \end{cases}$$

که با توجه به ریشه‌های به دست آمده، منحنی در نقطه‌ی $x = 0$ عطف مماس دارد و در نقطه‌ی $x = 2$ بر محور xها مماس می‌شود.

گام سوم: منحنی از ناحیه‌ی چهارم صعود می‌کند و در نقطه‌ی $x = 0$ عطف مماس دارد و سپس در نقطه‌ای مانند B (نمودار ۴) ماکزیمم پیدا می‌کند و در نقطه‌ی $x = 2$ بر منحنی مماس می‌شود.



(نمودار۴)

آزمون‌ها

۱. به ازای کدام مقادیر a، منحنی به معادله‌ی

$$x=(\frac{1}{2}x+a)(x^2-4)$$

بر محور xها در یک نقطه مماس است؟ (سراسری_ ۸۴)

۱) ϕ ۲) $\{1\}$

۳) $\{-1,1\}$ ۴) $\{-2,2\}$

جواب: گزینه‌ی ۳ صحیح است. زیرا برای این‌که منحنی بر محور xها مماس باشد، باید معادله‌ی

$$y=(\frac{1}{2}x+a)(x^2-4)=(\frac{1}{2}x+a)(x-2)(x+2)=0$$

ریشه‌ی مضاعف داشته باشد. بنابراین، ریشه‌های معادله‌ی $(x-2)(x+2)=0$ باید در معادله‌ی $\frac{1}{2}x+a=0$ صدق کنند تا یکی از ریشه‌ها مضاعف شوند.

$$x=2\Rightarrow\frac{1}{2}(2)+a=0\Rightarrow a=-1$$

$$x=-2\Rightarrow\frac{1}{2}(-2)+a=0\Rightarrow a=1$$

۲. منحنی به معادله‌ی

$$y=(x-1)(x^2-ax+a)=0$$

محور xها را فقط در یک نقطه قطع می‌کند. مجموعه مقادیر a به کدام صورت است؟ (سراسری_ ۸۳)

۱) $-4<a<0$ ۲) $0<a<2$

۳) $0<a<4$ ۴) $a>4$

جواب: گزینه‌ی ۳ صحیح است. با توجه به نکات ذکر شده، معادله‌ی $x^2-ax+a=0$ نباید ریشه داشته باشد، زیرا در غیر این‌صورت ممکن است یا ریشه‌ی مضاعف یا نقطه‌ی عطف یا نقطه‌ی تماس دیگری داشته باشد که با فرض در تناقض است.

$$x^2-ax+a=0\xrightarrow{\Delta<0}a^2-4a<0\Rightarrow 0<a<4$$

۳. اگر $f(x)=x^2-1$، نمودار تابع y=fof(x) با محور xها کدام وضعیت را دارد؟ (سراسری_ ۸۳)

۱) یک نقطه تلاقی_ دو نقطه‌ی تماس

۲) دو نقطه‌ی تلاقی_ یک نقطه‌ی تماس

۳) سه نقطه‌ی تلاقی_ فاقد نقطه‌ی تماس

۴) فاقد نقطه‌ی تلاقی_ دو نقطه‌ی تماس

جواب: گزینه‌ی ۲ صحیح است، زیرا:

$$f(f(x))=(x^2-1)^2-1=x^4-2x^2+1-1=0$$

$$x^2(x^2-2)=0\Rightarrow\begin{cases}x^2=0 & \text{ریشه‌ی مضاعف}\\ x^2=2\Rightarrow x=\pm\sqrt{2} & \text{ریشه‌ی ساده}\end{cases}$$

۴. ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $x^3-2x+1=0$ چگونه‌اند؟ (سراسری_ ۸۳)

۱) ریشه‌ی مضاعف مثبت_ یک ریشه‌ی منفی

۲) ریشه‌ی مضاعف منفی_ یک ریشه‌ی مثبت

۳) یک ریشه‌ی مثبت_ دو ریشه‌ی منفی

۴) دو ریشه‌ی مثبت_ یک ریشه‌ی منفی

جواب: گزینه‌ی ۴ صحیح است، زیرا

$$x^3-2x+1=(x-1)(x^2+x-1)=0$$

در این‌صورت $x=1$ یک ریشه‌ی ساده‌ی مثبت و معادله‌ی

$$x^2+x-1=0\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

یک ریشه‌ی ساده‌ی مثبت و یک ریشه‌ی ساده‌ی منفی دارد. در این‌صورت، معادله دارای دو ریشه‌ی ساده‌ی مثبت و یک ریشه‌ی ساده‌ی منفی است.

رسم نمودار توابع مثلثاتی

تذکر: توابع مثلثاتی را در دوره‌ی تناوبشان رسم می‌کنیم. نمودار توابع زیر را رسم کنید.

1) $y=\sin^2 x$

گام اول: چون تابع y=sinx از درجه‌ی دوم است، بنابراین ریشه‌های معادله‌ی $\sin x=0$ نقاط مماس بر محور xها هستند. یعنی:

$$\sin x=0\Rightarrow x=k\pi\Rightarrow x=0,\pi,2\pi,\cdots$$

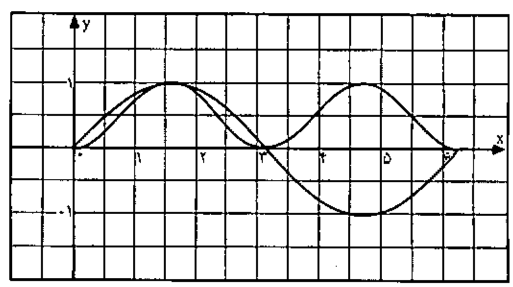
گام دوم: می‌دانیم $-1 \le \sin x \le 1$ ، بنابراین:

$$1)\ \ 0 \le \sin x \le 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \sin^2 x \le 1 \\ \sin^2 x \le \sin x \end{cases}$$

$$2)\ \ -1 \le \sin x \le 0 \Rightarrow 0 \le \sin^2 x \le 1$$

گام سوم: اگر $0 \le x \le \pi$ باشد، آن‌گاه $0 \le \sin x \le 1$ است. در این صورت نمودار $y = \sin^2 x$ ، غیر از سه نقطه‌ی $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ ، پایین‌تر از نمودار y=sinx قرار دارد (در آن سه نقطه با هم برابرند).

گام چهارم: چون دوره‌ی تناوب تابع $y = \sin^2 x$ برابر $T = \pi$ است، بنابراین در بازه‌ی $\pi \le x \le 2\pi$ نمودار تابع $y = \sin^2 x$ همان نمودار بازه‌ی $0 \le x \le \pi$ است (نمودار ۵).



(نمودار۵)

2) $y = \sin^3 x$

گام اول: چون توان sinx برابر ۳ است، بنابراین ریشه‌های sinx نقاط عطف مماس منحنی هستند. یعنی:

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi, \cdots$$

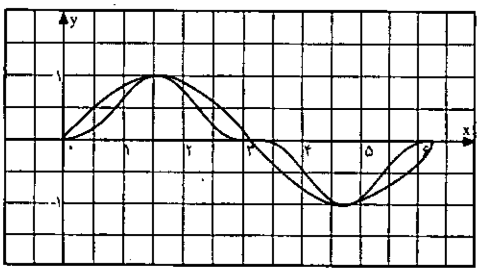
گام دوم: می‌دانیم: $-1 \le \sin x \le 1$ که:

$$1)\ \ -1 \le \sin x \le 0 \Rightarrow \sin^3 x \ge \sin x$$

$$2)\ \ 0 \le \sin x \le 1 \Rightarrow \sin^3 x \le \sin x$$

گام سوم: اگر $0 \le x \le \pi$ باشد، آن‌گاه $0 \le \sin x \le 1$ است. در این صورت نمودار $y = \sin^3 x$ ، غیر از سه نقطه‌ی $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ ، پایین‌تر از نمودار y=sinx قرار دارد (در آن سه نقطه با هم برابرند).

اگر $\pi \le x \le 2\pi$ باشد، آن‌گاه $-1 \le \sin x \le 0$ است. در این صورت نمودار $y = \sin^3 x$ ، غیر از سه نقطه‌ی $x = \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ ، بالاتر از نمودار y=sinx قرار دارد (در آن سه نقطه با هم برابرند) (نمودار ۶).



(نمودار۶)

3) $y = \sqrt[3]{\sin x}$

گام اول: ابتدا نمودار y=sinx را در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ مشخص و سپس به کمک آن نمودار $y = \sqrt[3]{\sin x}$ را رسم می‌کنیم.

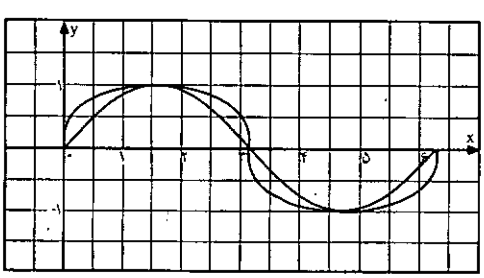
گام دوم: می‌دانیم $-1 \le \sin x \le 1$ ، بنابراین:

$$1)\ \ 0 \le \sin x \le 1 \Rightarrow \sqrt[3]{\sin x} \ge \sin x$$

$$2)\ \ -1 \le \sin x \le 0 \Rightarrow \sqrt[3]{\sin x} \le \sin x$$

گام سوم: اگر $0 \le x \le \pi$ باشد، آن‌گاه $0 \le \sin x \le 1$ است. در این صورت نمودار $y = \sin^3 x$ ، غیر از سه نقطه‌ی $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ ، پایین‌تر از نمودار y=sinx قرار دارد (در آن سه نقطه با هم برابرند).

اگر $\pi \le x \le 2\pi$ باشد، آن‌گاه $-1 \le \sin x \le 0$ است. در این صورت نمودار $y = \sin^3 x$ ، غیر از سه نقطه‌ی $x = \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ ، بالاتر از نمودار y=sinx قرار دارد (در آن سه نقطه با هم برابرند) (نمودار ۷).



(نمودار۷)

تمرین: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

1) $y = x^3(x-2)^3$

2) $y = x^9 + x^7$

3) $y = x^4 - 2x^2$

4) $y = \sqrt[3]{\tan x}$

5) $y = \sin^2 x - \sin x$

6) $y = x.\sin$

برای دانش‌آموزان سال سوم و پیش‌دانشگاهی

بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی سوم

قسمت ۲

اشاره

بخشی از حل و بحث معادله‌ی درجه‌ی سوم را در شماره‌ی قبل دیدیم. اینک ادامه مطلب را در پی می‌آوریم.

● محمدهاشم رستمی

مقدار $4p^3 + 27q^2$ را مبیّن معادله‌ی درجه‌ی سوم $x^3 + px + q = 0$ می‌نامند و با Δ نشان می‌دهند:

$$\Delta = 4p^3 + 27q^2$$

همان‌طوری که دیدیم:

۱. اگر $\Delta = 4p^3 + 27q^2 < 0$ باشد، معادله‌ی درجه‌ی سوم $x^3 + px + q = 0$ سه ریشه‌ی متمایز دارد.

۲. اگر $\Delta = 4p^3 + 27q^2 = 0$ باشد، معادله‌ی درجه‌ی سوم $x^3 + px + q = 0$ یک ریشه‌ی ساده و یک ریشه‌ی مضاعف دارد.

۳. اگر $\Delta = 4p^3 + 27q^2 > 0$ باشد، معادله‌ی درجه‌ی سوم $x^3 + px + q = 0$ تنها یک ریشه دارد.

بنابراین، تعداد ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی سوم $x^3 + px + q = 0$ را با استفاده از علامت مبین آن یعنی علامت $\Delta = 4p^3 + 27q^2$ می‌توان تعیین کرد.

نکته: برای تعیین علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی سوم $x^3 + px + q = 0$، از علامت q استفاده می‌کنیم.

بنابراین، برای بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی سوم $x^3 + px + q = 0$، باید $\Delta = 4p^3 + 27q^2$ و q را تعیین علامت کنیم.

بحث‌های انجام شده تا کنون را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

- $p > 0 \Rightarrow$ معادله تنها یک ریشه دارد $\Rightarrow$
  - $q > 0$. معادله یک ریشه‌ی منفی دارد.
  - $q < 0$. معادله یک ریشه‌ی مثبت دارد.
- $p < 0$
  - $\Delta = 4p^3 + 27q^2 < 0 \Rightarrow$ معادله سه ریشه‌ی متمایز دارد. $\Rightarrow$
    - $q > 0$. یک ریشه منفی و دو ریشه مثبت است.
    - $q < 0$. یک ریشه مثبت و دو ریشه منفی است.
  - $\Delta = 4p^3 + 27q^2 = 0 \Rightarrow$ معادله یک ریشه‌ی ساده و یک ریشه‌ی مضاعف دارد. $\Rightarrow$
    - $q > 0$. ریشه‌ی ساده منفی و ریشه‌ی مضاعف مثبت است.
    - $q < 0$. ریشه‌ی ساده مثبت و ریشه‌ی مضاعف منفی است.
  - $\Delta = 4p^3 + 27q^2 > 0 \Rightarrow$ معادله تنها یک ریشه دارد. $\Rightarrow$
    - $q > 0$. یک ریشه‌ی منفی دارد.
    - $q < 0$. یک ریشه‌ی مثبت دارد.

نکته‌ی مهم: در حالتی که معادله سه ریشه‌ی متمایز دارد، برای تعیین ریشه‌های معادله فرض می‌کنیم $x=\rho\cos\theta$ باشد که در آن: $\rho = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}$ و $\cos 3\theta = \frac{3q}{2p\sqrt{\frac{-p}{3}}}$ است.

باید توجه داشت که برای θ بی‌شمار جواب به دست می‌آید، اما برای $\cos\theta$ تنها سه مقدار به‌دست می‌آید. پس از محاسبه‌ی ρ و $\cos\theta$، آن‌ها را در رابطه‌ی $x=\rho\cos\theta$ قرار می‌دهیم تا x_1، x_2 و x_3 جواب‌های معادله به دست آیند. اینک به چند مثال توجه کنید:

مثال۱. بدون حل کردن معادله‌های زیر، تعداد جواب‌های هریک از آن‌ها را تعیین کنید:

الف) $x^3+2x+4=0$

ب) $x^3+5x-12=0$

پ) $x^3-3x+5=0$

ت) $x^3-5x-1=0$

ث) $x^3-3x+2=0$

ج) $2x^3-x^2+5=0$

چ) $3x^3+2x^2-4x+7=0$

حل: داریم:

الف) در این معادله $p=2>0$ است، پس این معادله تنها یک ریشه دارد.

ب) در این معادله نیز $p=5>0$ است. پس این معادله نیز تنها یک ریشه دارد.

پ) در این معادله $p=-3<0$ است، بنابراین برای تعیین تعداد جواب‌ها باید علامت $\Delta = 4p^3+27q^2$ را تعیین کنیم. داریم:

$$p=-3,\ q=5,\ \Delta = 4p^3+27q^2 = 4(-3)^3+27(5)^2$$
$$\Rightarrow \Delta = -108+675 = 467>0$$

پس این معادله تنها یک ریشه دارد.

ت) در این معادله نیز $p=-5<0$ است، پس باید علامت $\Delta = 4p^3+27q^2$ را تعیین کنیم. داریم:

$$p=-5, q=-1, \Delta = 4p^3+27q^2 = 4(-5)^3+27(-1)^2$$
$$\Rightarrow \Delta = -500+27 = -473<0$$

یعنی این معادله سه ریشه‌ی متمایز دارد.

ث) در این معادله نیز $p=-3<0$ است، بنابراین باید مبین آن را تعیین علامت کنیم. داریم:

$$p=-3, q=2, \Delta = 4p^3+27q^2 = 4(-3)^3+27(-2)^2$$
$$= -108+108 \Rightarrow \Delta = 4p^3+27q^2 = 0$$

پس این معادله یک ریشه‌ی مضاعف و یک ریشه‌ی ساده دارد.

ج) معادله‌ی $2x^3-x^2+5=0$ را نخست باید به صورت $X^3+PX+q=0$ درآوریم. چون ضریب x در این معادله صفر است، فرض می‌کنیم: $x=\frac{1}{X}$. خواهیم داشت:

$$2(\frac{1}{X})^3-(\frac{1}{X})^2+5=0 \Rightarrow \frac{2}{X^3}-\frac{1}{X^2}+\frac{5}{1}=0$$
$$\Rightarrow \frac{2-X+5X^3}{X^3}=0 \Rightarrow 2-X+5X^3=0$$
$$\Rightarrow 5X^3-X+2=0 \Rightarrow X^3-\frac{1}{5}X+\frac{2}{5}=0$$
$$p=-\frac{1}{5}, q=\frac{2}{5}, \Delta = 4p^3+27q^2 = 4(-\frac{1}{5})^3+27(\frac{2}{5})^2$$
$$= \frac{-4}{125}+\frac{108}{25} \Rightarrow \Delta = \frac{536}{125}>0 \Rightarrow$$

پس معادله‌ی $X^3-\frac{1}{5}X+\frac{2}{5}=0$ تنها یک ریشه دارد. در نتیجه، معادله‌ی داده شده، یعنی معادله‌ی $2x^3-x^2+5=0$ نیز تنها یک ریشه دارد.

چ) معادله‌ی درجه‌ی سوم کامل $2x^3+6x^2-4x+7=0$ را باید به صورت معادله‌ی درجه‌ی سوم ناقص $X^3+Px+q=0$ درآوریم. برای این کار فرض می‌کنیم: $x = X-\frac{b}{3a}$. داریم:

$$a=2, b=6, x = X-\frac{b}{3a} = X-\frac{6}{3\times 2} = X-\frac{6}{6} = X-1$$
$$\Rightarrow x = X-1 \xrightarrow{\text{در معادله‌ی داده شده}} 2(X-1)^3+6(X-1)^2-4(X-1)+7=0$$
$$\Rightarrow 3(X^3-3X^2+3X-1)+6(X^2-2X+1)-4X+4+7=0$$
$$2X^3-6X^2+6X-2+6X^2-12X+6-4X+11=0$$
$$\Rightarrow 2X^3-10X+9=0 \Rightarrow X^3-5X+\frac{9}{2}=0$$

$$p=-5,\ q=+\frac{9}{2},\ \Delta=4p^3+27q^2=4(-5)^3+27\left(\frac{9}{2}\right)^2$$

$$=\Delta=-500+\frac{2187}{4}=\frac{187}{4}>0$$

پس معادله‌ی $X^3-5X+\frac{9}{2}=0$ تنها یک ریشه دارد و در نتیجه، معادله‌ی $2x^3+6x^2-4x+7=0$ نیز تنها یک ریشه دارد.

مثال۲. تعداد ریشه‌ها و علامت ریشه‌های معادله‌های زیر را بدون حل کردن معادله، تعیین کنید.

الف) $x^3+7x+2=0$

ب) $x^3+5x-3=0$

پ) $x^3-2x+4=0$

ت) $x^3-3x-1=0$

ث) $2x^3+5x^2-1=0$

ج) $-3x^3+x^2-x+2=0$

حل. برای بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی سوم $x^3+px+q=0$ باید $\Delta=4p^3+27q^2$ و q را تعیین علامت کنیم. داریم:

الف) $x^3+7x+2=0,\ p=7,\ q=2$

$$\Delta=4p^3+27q^2=4(7)^3+27(2)^2$$

$$=4\times 343+108=1480>0$$

پس این معادله تنها یک ریشه دارد که چون $q=2>0$، این ریشه منفی است.

نکته: در این معادله چون $p=7>0$ است، این معادله یک ریشه دارد و نیازی به محاسبه‌ی $\Delta=4p^3+27q^2$ نیست. علامت ریشه هم از روی علامت q مشخص می‌شود.

ب) در معادله‌ی $x^3+5x-3=0$ نیز، چون $p=5>0$ است، این معادله یک ریشه دارد که چون $q=-3<0$، این ریشه مثبت است.

پ) در معادله‌ی $x^3-2x+4=0$، $p=-2<0$ است و برای تعیین تعداد ریشه‌ها، باید $\Delta=4p^3+27q^2$ را تعیین کنیم. داریم:

$$p=-2,\ q=4$$

$$\Delta=4p^3+27q^2=4(-2)^3+27(4)^2=400>0$$

پس این معادله تنها یک ریشه دارد که چون $q=4>0$، این ریشه منفی است.

ت)

$$x^3-3x-1=0,\ p=-3,\ q=-1,\ \Delta=4p^3+27q^2$$

$$\Rightarrow \Delta=4(-3)^3+27(-1)^2=-108+27=-81<0$$

یعنی این معادله سه ریشه‌ی متمایز دارد و چون $q=-1<0$، یک ریشه مثبت و دو ریشه منفی هستند.

ث) معادله‌ی $2x^3+5x^2-1=0$ را با تغییر متغیر $x=\frac{1}{X}$ به صورت معادله‌ی درجه‌ی سوم $x^3+px+q=0$ درمی‌آوریم. داریم:

$$2\left(\frac{1}{X}\right)^3+5\left(\frac{1}{X}\right)^2-1=0\Rightarrow\frac{2}{X^3}+\frac{5}{X^2}-1=0$$

$$\Rightarrow\frac{2+5X-X^3}{X^3}=0\Rightarrow 2+5X-X^3=0$$

$$\Rightarrow X^3-5x-2=0,\ p=-5,\ q=-2$$

$$\Delta=4p^3+27q^2=4(-5)^3+27(-2)^2$$

$$=-500+108=-392<0$$

یعنی این معادله سه ریشه‌ی متمایز دارد که چون $q=-2<0$، یک ریشه مثبت و دو ریشه منفی هستند. بدیهی است که علامت ریشه‌های معادله‌ی $X^3-5X-2=0$، همان علامت ریشه‌های معادله‌ی $2x^3+5x^2-1=0$ است.

ج) معادله‌ی $-3x^3+x^2-x+2=0$ را با تغییر متغیر $x=X-\frac{b}{3a}$ به معادله‌ی درجه‌ی سوم به صورت $X^3+pX+q=0$ تبدیل می‌کنیم. داریم:

$$a=-3,\ b=1,\ x=X-\frac{b}{3a}=X-\frac{1}{-9}=X+\frac{1}{9}$$

$$x=X+\frac{1}{9}\xrightarrow{\text{در معادله‌ی داده شده}}-3\left(X+\frac{1}{9}\right)^3+\left(X+\frac{1}{9}\right)^2-\left(X+\frac{1}{9}\right)+2=0$$

$$-3\left(X^3+\frac{1}{3}X^2+\frac{1}{27}X+\frac{1}{729}\right)+\left(X^2+\frac{2}{9}X+\frac{1}{81}\right)-X-\frac{1}{9}+2=0$$

$$\Rightarrow -3X^3-X^2-\frac{1}{9}X-\frac{1}{243}+X^2+\frac{2}{9}X+\frac{1}{81}-X-\frac{1}{9}+2=0$$

$$\Rightarrow -3X^3-\frac{8}{9}X+\frac{29}{27}=0\Rightarrow X^3+\frac{8}{27}X-\frac{29}{81}=0$$

در این معادله $p=\frac{8}{27}>0$ است. پس این معادله تنها یک

ریشه دارد که چون $q=-\frac{29}{81}<0$، آن‌گاه این ریشه مثبت است. در نتیجه، ریشه‌ی معادله داده شده نیز مثبت است؛ زیرا: $x=X+\frac{1}{9}$.

مثال۳. معادله‌های زیر را حل کنید:

الف) $x^3+4x-\frac{37}{27}=0$

ب) $x^3+3\sqrt[3]{3}x+2=0$

پ) $x^3-12x+16=0$

ت) $x^3-3x+\sqrt{2}=0$

ث) $2x^3-6x^2+x-2=0$

ج) $-4x^3+x^2+\frac{1}{4}=0$

حل:

الف) در معادله‌ی $x^3+4x-\frac{37}{27}=0$، $p=4>0$ است. پس این معادله تنها یک ریشه دارد که آن را از دستور کاردان محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$p=4,q=\frac{-37}{27},$$

$$x=\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

$$\Rightarrow x=\sqrt[3]{\frac{37}{54}+\sqrt{\frac{1369}{2916}+\frac{64}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{37}{54}-\sqrt{\frac{1369}{2916}+\frac{64}{27}}}$$

$$\Rightarrow x=\sqrt[3]{\frac{37}{54}+\sqrt{\frac{8281}{2916}}}+\sqrt[3]{\frac{37}{54}-\sqrt{\frac{8281}{2916}}}$$

$$\Rightarrow x=\sqrt[3]{\frac{37}{54}+\frac{91}{54}}+\sqrt[3]{\frac{37}{54}+\frac{91}{54}}=\sqrt[3]{\frac{128}{54}}+\sqrt[3]{\frac{-54}{54}}$$

$$\Rightarrow x=\sqrt[3]{\frac{64}{27}}+\sqrt[3]{-1}=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}\Rightarrow x=\frac{1}{3}$$

یعنی تنها ریشه‌ی این معادله $x=\frac{1}{3}$ است.

ب) در این معادله نیز $p=3\sqrt[3]{3}>0$ است. پس تنها یک ریشه دارد که برای حل آن از دستور کاردان استفاده می‌کنیم. داریم:

$$x^3+3\sqrt[3]{3}x+2=0\Rightarrow p=3\sqrt[3]{3},q=2$$

$$x=\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

$$\Rightarrow x=\sqrt[3]{\frac{-2}{2}+\sqrt{\frac{4}{4}+\frac{81}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{-2}{2}-\sqrt{\frac{4}{4}+\frac{81}{27}}}$$

$$\Rightarrow x=\sqrt[3]{-1+\sqrt{1+3}}+\sqrt[3]{-1-\sqrt{1+3}}=\sqrt[3]{-1+2}+\sqrt[3]{-1-2}$$

$$\Rightarrow x=\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{-3}\Rightarrow x=1-\sqrt[3]{3}$$

پ) در این معادله $p=-12<0$ است. پس باید علامت $\Delta=4p^3+27q^2$ را تعیین کنیم. داریم:

$$x^3-12x+16=0\Rightarrow p=-12,q=16,\Delta=4p^3+27q^2$$

$$\Rightarrow\Delta=4(-12)^3+27(16)^2=-6912+6912=0$$

یعنی این معادله یک ریشه‌ی مضاعف و یک ریشه‌ی ساده دارد که از دستورهای زیر به‌دست می‌آیند:

ریشه‌ی مضاعف $=x_1=x_2=\sqrt[3]{\frac{q}{2}}=\sqrt[3]{\frac{16}{2}}=\sqrt[3]{8}=2$

$$\Rightarrow x_1=x_2=2$$

ریشه‌ی ساده $=x_3=-2\sqrt[3]{\frac{q}{2}}=-2(2)=-4\Rightarrow x_3=-4$

ت) در معادله‌ی $x^3-3x+\sqrt{2}=0$، $p=-3<0$ است. پس برای تعیین تعداد ریشه‌های آن باید علامت $\Delta=4p^3+27q^2$ را تعیین کنیم. داریم:

$$p=-3,q=\sqrt{2},\Delta=4p^3+27q^2=4(-3)^3+27(\sqrt{2})^2$$

$$\Rightarrow\Delta=-108+54=-54<0$$

نتیجه می‌گیریم که این معادله سه ریشه دارد. برای حل آن فرض می‌کنیم: $x=\rho\cos\theta$ باشد، با توجه به این‌که: $\rho=2\sqrt{\frac{-p}{3}}$ و $\cos3\theta=\frac{3q}{2p\sqrt{\frac{-p}{3}}}$ است. خواهیم داشت:

$$\rho=2\sqrt{\frac{-p}{3}}=2\sqrt{\frac{+3}{3}}=2\times1=2\Rightarrow\rho=2$$

$$\cos3\theta=\frac{3q}{2p\sqrt{\frac{-p}{3}}}=\frac{3\sqrt{2}}{2(-3)\sqrt{\frac{3}{3}}}=\frac{3\sqrt{2}}{-6}=\frac{-\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{3\pi}{4}$$

$$\cos3\theta=\cos\frac{3\pi}{4}\Rightarrow3\theta=2k\pi\pm\frac{3\pi}{4}\Rightarrow\theta=\frac{2k\pi}{3}\pm\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \cos(\frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{4}), k = 0 \Rightarrow \cos\theta = \cos(\pm\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$k = 1 \Rightarrow \cos\theta = \cos(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}) = \cos\frac{11\pi}{12} = \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$,\cos\theta = \cos(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) = \cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$k = 2 \Rightarrow \cos\theta = \cos(\frac{4\pi}{3} \pm \frac{\pi}{4})$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \cos\frac{19\pi}{12} = \cos(\frac{-5\pi}{12})$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$ این جواب برای $\cos\theta$ تکراری است

$$\cos\theta = \cos(\frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) = \cos\frac{19\pi}{12} = -\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\frac{5\pi}{12}$$

$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$ تکراری است

$$k = 3 \Rightarrow \cos\theta = \cos(2\pi \pm \frac{\pi}{4}) = \cos(\pm\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

تکراری است

اگر به k مقدارهای دیگری از مجموعه‌ی عددهای صحیح را نسبت دهیم، خواهیم دید که برای $\cos\theta$ تنها همان سه مقدار $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ و $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ به‌دست می‌آید. بنابراین داریم:

$$x = \rho\cos\theta \Rightarrow x_1 = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$x_2 = 2 \times -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

$$x_3 = 2 \times \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

ث) نخست باید معادله‌ی درجه‌ی سوم کامل $2x^3 - 6x^2 + x - 2 = 0$ را به معادله‌ی درجه‌ی سوم ناقص به صورت $X^3 + pX + q = 0$ تبدیل کنیم. برای این کار فرض می‌کنیم: $x = X - \frac{b}{3a}$. داریم:

$$a = 2\ ,\ b = -6 \Rightarrow x = X - \frac{b}{3a} = X - \frac{-6}{6} = X + 1 \Rightarrow x = X + 1$$

$$x = X + 1 \xrightarrow{\text{در معادله‌ی داده شده}} 2(X+1)^3 - 6(X+1)^2 + (X+1) - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2X^3 + 6X^2 + 6X + 2 - 6X^2 - 12X - 6 + X + 1 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2X^3 - 5X - 6 = 0 \Rightarrow X^3 - \frac{5}{2}X - 3 = 0\ ,\ p = -\frac{5}{2}\ ,\ q = -3$$

$$\Delta = 4p^3 + 27q^2 = 4(-\frac{5}{2})^3 + 27(-3)^2$$

$$= -\frac{125}{2} + 243 = +\frac{361}{2} > 0$$

یعنی این معادله تنها یک ریشه دارد که اندازه‌ی آن را از دستور کاردان محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{-27}{27}}} + \sqrt{\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{-27}{27}}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}}} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

ج) معادله‌ی $-4x^3 + x^2 + \frac{1}{4} = 0$ را نیز باید به معادله‌ی درجه‌ی سوم به صورت $X^3 + pX + q = 0$ تبدیل کنیم. برای این کار، چون معادله‌ی داده شده شامل جمله‌ی درجه‌ی اول نسبت به x نیست، فرض می‌کنیم: $x = \frac{1}{X}$.

داریم:

$$-4(\frac{1}{X})^3 + (\frac{1}{X})^2 + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \frac{-4}{X^3} + \frac{1}{X^2} + \frac{1}{4} = 0$$

$$\frac{-16 + 4X + X^3}{4X^3} = 0 \Rightarrow X^3 + 4X - 16 = 0 \Rightarrow p = 4\ ,\ q = -16$$

چون $p = 4 > 0$ ، این معادله تنها یک ریشه دارد که از دستور کاردان محاسبه می‌شود: $X = 2$. پس $x = \frac{1}{X} = \frac{1}{2}$ ؛ یعنی جواب معادله‌ی داده شده $x = \frac{1}{2}$ است.

محاسبه‌ی حد مجموع به کمک انتگرال معیّن

(قسمت ۱)

● احسان یارمحمدی

برای محاسبه‌ی «حد»[1]، روش‌های متفاوتی وجود دارند؛ مانند: هم‌ارزی‌ها که شامل هم‌ارزی‌های جبری[2]، مثلثاتی[3] و رادیکالی می‌شوند، رفع ابهام‌ها شامل رفع ابهام از حالت‌های $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ که بنابر قاعده‌ی هوپیتال[4] میسرند، رفع ابهام از حالت $\infty \times 0$ و رفع ابهام از حالت $\infty - \infty$ و... اما محاسبه‌ی پاره‌ای از حدها که خود را در قالب مجموع‌های خاصی مطرح می‌سازند، با استفاده از روش‌های متعارف و کلاسیکی که در محاسبه‌ی حدود وجود دارد، میسر نیست. به همین دلیل، در این مقاله محاسبه‌ی این گونه حدود را مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم.

فرض کنید که در یک برگه‌ی امتحانی این سؤال آمده است: حاصل $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$ را به‌دست آورید. بررسی کنید، آیا می‌توان حد بالا را به این صورت محاسبه کرد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n^2}\right)+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n^2}\right)+\cdots+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2}\right)$$
$$= 0+0+0+\cdots+0 = 0$$

یا می‌توان، با استفاده از رابطه‌ی $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ که به ازای هر عدد طبیعی n برقرار است (درستی این رابطه را می‌توانید با استقرا[5] روی n بررسی کنید)، و با جای‌گذاری آن به صورت زیر، حد را محاسبه کرد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

در هر مورد به دقت فکر کنید و پاسخ(های) خود را با دلایل منطقی ارائه دهید.

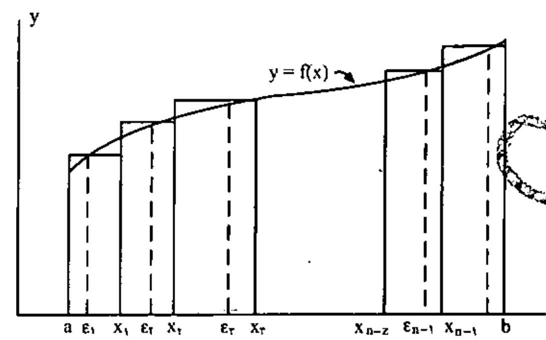
اکنون در این قسمت روشی را در کنار تلفیق با قضیه‌ای کلی پیرامون آن مطرح می‌کنیم که با استناد به آن می‌توانیم پی ببریم، کدام‌یک از راه‌حل‌های ارائه‌شده برای سؤال بالا صحیح و کدام‌یک ناصحیح است.

قضیه: اگر $f(x)$ در بازه $[a,b]$ پیوسته[6] باشد، همواره:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx$$

برهان: چون $f(x)$ در بازه $[a,b]$ پیوسته است، حد

وجود دارد و به روش تقسیم به زیر بازه‌ها وابسته نیست.
(چون $f(x)$ در بازه $[a,b]$ پیوسته است، بنابراین $\int_a^b f(x)dx$ وجود دارد.) اکنون بازه $[a,b]$ را به n قسمت مساوی به طول $x_i - x_{i+1} = \Delta x_i = \Delta x = \frac{b-a}{n}$ تقسیم می‌کنیم (نمودار زیر).



فرض می‌کنیم که $\varepsilon_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$ & $k = 1,2,3,\cdots,n$
در این صورت داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k)\Delta x_k \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+\frac{k(b-a)}{n})$$
$$=\int_a^b f(x)dx$$

درواقع، اگر دنباله‌ی[7] $\{x_n\}$ به این شرح مفروض باشد:

$$x_n = \frac{b-a}{n}(f(a+\frac{b-a}{n}) + f(a+\frac{2(b-a)}{n})+\cdots$$
$$+f(a+\frac{n(b-a)}{n}))$$

می‌توان با به‌دست آوردن ضابطه‌ی $f(x)$ و محاسبه‌ی مقدار «انتگرال معین»[8] $\int_a^b f(x)dx$ حد دنباله‌ی $\{x_n\}$ را تعیین کرد.
البته دنباله‌ی $\{x_n\}$ تا اندازه‌ی زیادی به $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ وابسته است.

مراحل محاسبه‌ی حد مجموع به کمک انتگرال معین

۱. عبارت تحت علامت حد (lim) را تا اندازه‌ی ممکن ساده می‌کنیم تا بتوانیم، از آن a و b ایده‌آل را به‌دست آوریم و با توجه به آن‌ها $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ مطلوب را تعیین کنیم.

۲. با توجه به $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ تعیین شده، دنباله‌ی $\{x_n\}$ مورد نظر را مشخص می‌کنیم.

۳. از مقایسه‌ی دنباله‌ی $\{x_n\}$ به‌دست آمده با دنباله‌ی $\{x_n\}$ که در حالت کلی در قضیه آمده است (برای هر دو دنباله $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ یکسان است)، ضابطه‌ی $f(x)$ را تشکیل می‌دهیم.

۴. انتگرال معین $\int_a^b f(x)dx$ را محاسبه می‌کنیم، تا مقدار حد دنباله‌ی $\{x_n\}$ را که درواقع محاسبه‌ی مقدار یا حد مجموع یک مجموع جزئی[9] است، به‌دست آوریم.

اکنون به همان سؤالی که فرض شد در برگه‌ی امتحانی آمده است، برمی‌گردیم و به محاسبه‌ی آن به کمک تشکیل یک انتگرال معین می‌پردازیم.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}.\frac{1+2+3+\cdots+n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}.$$
$$(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\frac{3}{n}+\cdots+\frac{n}{n})$$

با فرض این‌که $b=1$ و $a=0$ اختیار شوند، $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$ است. بنابراین:

$$\{x_n\} = \frac{1}{n}.(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\frac{3}{n}+\cdots+\frac{n}{n}) \qquad (❋)$$

از مقایسه‌ی (❋) با

$\{x_n\} = \frac{1}{n}.(f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+f(\frac{3}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n}))$ داریم:

$$f(\frac{k}{n}) = \frac{k}{n} \overset{x=\frac{k}{n}}{\Longrightarrow} f(x) = x$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2} = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

حال انتظار می‌رود که بتوانید دلیل روشنی را بیان کنید، برای این‌که چرا روشی که به جواب صفر برای محاسبه‌ی حد $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$ (که در ابتدای مقاله مطرح شد) می‌انجامد، نادرست است.

محاسبه‌ی این نمونه از حدود، به علت داشتن ویژگی‌های منحصر به خود، مانند نظیر کردن یک انتگرال معین متناظر با یک مجموع جزئی و محاسبه‌ی این انتگرال معین با استفاده از

روش‌های انتگرال‌گیری[1]، از اهمیت خاصی برخوردار است. به همین سبب، در این قسمت به ارائه‌ی مثال‌های متنوعی در این رابطه در قالب آزمون چهارگزینه‌ای و مسئله می‌پردازیم.

آزمون ۱. حاصل حد زیر کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$$

۱) صفر ۲) $\ln(\frac{1}{2})$

۳) $+\infty$ ۴) $\ln(2)$

جواب: گزینه‌ی (۴) صحیح است:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n(1+\frac{1}{n})}+\frac{1}{n(1+\frac{2}{n})}+\frac{1}{n(1+\frac{3}{n})}+\cdots+\frac{1}{n(1+\frac{n}{n})}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}.\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\frac{1}{1+\frac{3}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$$

با فرض این‌که $b=1$ و $a=0$ اختیار شوند، $\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{1}{n}$ است. بنابراین:

$$x_n=\frac{1}{n}.\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\frac{1}{1+\frac{3}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)\quad(*)$$

از مقایسه‌ی (*) با

$\{x_n\}=\frac{1}{n}(f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+f(\frac{3}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n}))$ داریم:

$$f(\frac{k}{n})=\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\xRightarrow{x=\frac{k}{n}}f(x)=\frac{1}{1+x}$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$$
$$=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln(2)$$

آزمون ۲. حاصل حد زیر کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\frac{n}{n^2+3^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$$

۱) $\frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$

۳) $\frac{\pi}{6}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

جواب: گزینه‌ی (۲) صحیح است.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\frac{n}{n^2+3^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2(1+\frac{1^2}{n^2})}+\frac{n}{n^2(1+\frac{2^2}{n^2})}+\frac{n}{n^2(1+\frac{3^2}{n^2})}+\cdots+\frac{n}{n^2(1+\frac{n^2}{n^2})}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}.\left(\frac{1}{1+\frac{1^2}{n^2}}+\frac{1}{1+\frac{2^2}{n^2}}+\frac{1}{1+\frac{3^2}{n^2}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n^2}{n^2}}\right)$$

با فرض این‌که $b=1$ و $a=0$ اختیار شوند، $\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{1}{n}$ است. بنابراین:

$$x_n=\frac{1}{n}.\left(\frac{1}{1+\frac{1^2}{n^2}}+\frac{1}{1+\frac{2^2}{n^2}}+\frac{1}{1+\frac{3^2}{n^2}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n^2}{n^2}}\right)\quad(*)$$

از مقایسه‌ی (*) با

$\{x_n\}=\frac{1}{n}(f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+f(\frac{3}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n}))$ داریم:

$$f(\frac{k}{n})=\frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}}=\frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}\xRightarrow{x=\frac{k}{n}}f(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\frac{n}{n^2+3^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$$
$$=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\mathrm{Arc}\tan(x)\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$$

آزمون ۳. حاصل حد زیر کدام‌یک از گزینه‌ها است؟

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{1+\frac{1}{n}}{n^2}}+\sqrt{\frac{1+\frac{2}{n}}{n^2}}+\sqrt{\frac{1+\frac{3}{n}}{n^2}}+\cdots+\sqrt{\frac{1+\frac{n}{n}}{n^2}}\right)$$

۱) $\frac{3}{2}(2\sqrt{2}-1)$ ۲) $\frac{3}{2}(2\sqrt{2}+1)$

۳) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$　　۴) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}+1)$

جواب: گزینه‌ی (۳) صحیح است.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{1+\frac{1}{n}}{n^2}}+\sqrt{\frac{1+\frac{2}{n}}{n^2}}+\sqrt{\frac{1+\frac{3}{n}}{n^2}}+\cdots+\sqrt{\frac{1+\frac{n}{n}}{n^2}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}.\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$$

با فرض این‌که $b=1$ و $a=0$ اختیار شوند، $\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{1}{n}$ است. بنابراین:

$$x_n=\frac{1}{n}.\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)\quad (*)$$

از مقایسه‌ی (*) با

$\{x_n\}=\frac{1}{n}\left(f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+f(\frac{3}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n})\right)$ داریم:

$$f(\frac{k}{n})=\sqrt{1+\frac{k}{n}}\overset{x=\frac{k}{n}}{\Rightarrow}f(x)=\sqrt{1+x}$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{1+\frac{1}{n}}{n^2}}+\sqrt{\frac{1+\frac{2}{n}}{n^2}}+\sqrt{\frac{1+\frac{3}{n}}{n^2}}+\cdots+\sqrt{\frac{1+\frac{n}{n}}{n^2}}\right)$$

$$=\int_0^1\sqrt{1+x}\,dx=\frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3}\Big|_0^1=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

آزمون ۴ . حاصل حد زیر کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

$$\lim_{n\to\infty}\left((\frac{1}{n})\cos^2(\frac{\pi}{n})+(\frac{1}{n})\cos^2(\frac{2\pi}{n})+(\frac{1}{n})\cos^2(\frac{3\pi}{n})+\cdots+(\frac{1}{n})\cos^2(\frac{n\pi}{n})\right)$$

۱) $\frac{\pi}{2}$　　۲) $\frac{1}{2}$

۳) $\frac{\pi}{3}$　　۴) $\frac{1}{3}$

جواب: گزینه‌ی (۲) صحیح است.

$$\lim_{n\to\infty}\left((\frac{1}{n})\cos^2(\frac{\pi}{n})+(\frac{1}{n})\cos^2(\frac{2\pi}{n})+(\frac{1}{n})\cos^2(\frac{3\pi}{n})+\cdots+(\frac{1}{n})\cos^2(\frac{n\pi}{n})\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}.\left(\cos^2(\frac{\pi}{n})+\cos^2(\frac{2\pi}{n})+\cos^2(\frac{3\pi}{n})+\cdots+\cos^2(\frac{n\pi}{n})\right)$$

با فرض این‌که $b=1$ و $a=0$ اختیار شوند، $\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{1}{n}$ است. بنابراین:

$$x_n=\frac{1}{n}.\left(\cos^2(\frac{\pi}{n})+\cos^2(\frac{2\pi}{n})+\cos^2(\frac{3\pi}{n})+\cdots+\cos^2(\frac{n\pi}{n})\right)\quad (*)$$

از مقایسه‌ی (*) با

$\{x_n\}=\frac{1}{n}\left(f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+f(\frac{3}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n})\right)$ داریم:

$$f(\frac{k}{n})=\cos^2(\frac{k\pi}{n})\overset{x=\frac{k}{n}}{\Rightarrow}f(x)=\cos^2(\pi x)$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}\left((\frac{1}{n})\cos^2(\frac{\pi}{n})+(\frac{1}{n})\cos^2(\frac{2\pi}{n})+(\frac{1}{n})\cos^2(\frac{3\pi}{n})+\cdots+(\frac{1}{n})\cos^2(\frac{n\pi}{n})\right)=\int_0^1\cos^2(\pi x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1(1+\cos(2\pi x))dx$$

$$=\frac{1}{2}(x+\frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x))\Big|_0^1=\frac{1}{2}$$

آزمون ۵ . حاصل حد زیر کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-3^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)$$

۱) $\frac{\pi}{6}$　　۲) $\frac{\pi}{4}$

۳) $\frac{\pi}{3}$　　۴) $\frac{\pi}{2}$

جواب: گزینه‌ی (۱) صحیح است.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-3^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2(4-\frac{1^2}{n^2})}}+\frac{1}{\sqrt{n^2(4-\frac{2^2}{n^2})}}+\frac{1}{\sqrt{n^2(4-\frac{3^2}{n^2})}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2(4-\frac{n^2}{n^2})}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}.\left(\frac{1}{\sqrt{4-\frac{1^2}{n^2}}}+\frac{1}{\sqrt{4-\frac{2^2}{n^2}}}+\frac{1}{\sqrt{4-\frac{3^2}{n^2}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4-\frac{n^2}{n^2}}}\right)$$

با فرض این‌که $b=1$ و $a=0$ اختیار شوند، $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$ است. بنابراین:

$$x_n = \frac{1}{n}.\left(\frac{1}{\sqrt{4-\frac{1^2}{n^2}}}+\frac{1}{\sqrt{4-\frac{2^2}{n^2}}}+\frac{1}{\sqrt{4-\frac{3^2}{n^2}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4-\frac{n^2}{n^2}}}\right) \qquad (*)$$

از مقایسه‌ی (*) با

$\left\{x_n\right\} = \frac{1}{n}\left(f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+f(\frac{3}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n})\right)$ داریم:

$$f(\frac{k}{n}) = \frac{1}{\sqrt{4-\frac{k^2}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{4-(\frac{k}{n})^2}} \overset{x=\frac{k}{n}}{\Rightarrow} f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

بنابراین:

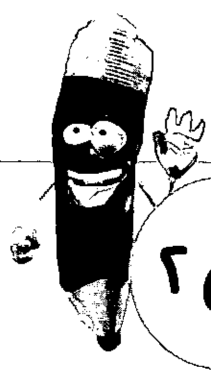
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-3^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \operatorname{Arc}\sin(\frac{x}{2})\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}$$

زیرنویس

1. Limit
2. Algebric
3. Trigonometric
4. L'Hopital Rule
5. Induction
6. Continuous
7. Sequence
8. Definite Integral
9. Partial Sum
10. Integration Methods

منابع

۱. تلگینی، محمود؛ خرده‌پژوه، فروزان؛ رجالی، علی؛ و قیاسیان، احمد. حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره‌ی پیش‌دانشگاهی رشته‌ی علوم ریاضی. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. ۱۳۷۶.
۲. توماس، جورج و فینی، راس. حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی. ترجمه‌ی مهدی بهزاد، سیامک کاظمی و علی کافی. مرکز نشر دانشگاهی. ۱۳۷۰.
۳. اشپیگل، م. حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته. ترجمه‌ی خلیل پاریاب. حمید تولایی و بیژن شمس. انتشارات پاریاب. ۱۳۸۱.
4. Gillett, Philip. "Calculus and Analytic Geometry". D. C. Heath (2nd Edition). 1984.
5. Varerg, D. W. and Purcell, E. j. "Calculus". Prentic Hall (7th Edition). 1997.



معمای فکری و منطقی ۲

A، C، H، M، اخیراً طی یک بازی علمی، مشغول بحث درباره‌ی سنشان بودند. هریک از آن‌ها به خوبی از سن بقیه مطلع بود. با وجود این، در مورد این موضوع، همچنان که بزرگ‌ترها میل دارند، به طور غیرمستقیم و دور سرگرداندن مطلب، چنان بحث می‌کردند که حتی ذهن دقیق نیز به طور دائم دچار گیجی می‌شد. در اثبات این که این مطلب نه لطیفه‌ای محض، نه رجزخوانی صرف است، چهار واقعیتی را که چهار بانوی جوان طی این بخش تیره و مبهم از صحبتشان برملا کردند، می‌آوریم و در دسترس کسی می‌گذاریم که در عرض شصت ثانیه یا کم‌تر، نه تنها سن‌های نسبی این چهار شخص، بلکه چگونگی جفت شدنشان را طی این قسمت از بازی‌شان مشخص می‌کند.

M کوچک‌تر از C است.
H از هریک از دو بازیکن مقابلش بزرگ‌تر است.
M از شریک بازی خود بزرگ‌تر است.
A و C با هم بزرگ‌تر از H و M هستند.

مسابقه‌های ریاضی

منتخبی از مسائل مسابقات ریاضی

دبیرستان‌های امریکا

اشاره

مسابقات ریاضی دبیرستان‌های آمریکا در سه سطح متفاوت برگزار می‌شود:

● **سطح مقدماتی**: که با ۳۰ سؤال پنج گزینه‌ای نسبتاً آسان برگزار می‌شود.

● **سطح متوسط**: که با ۱۵ سؤال تشریحی متوسط برگزار می‌شود.

● **سطح عالی**: که همان المپیاد ملی ریاضی کشور آمریکاست و مشابه المپیاد بین‌المللی برگزار می‌شود.

در شماره‌ی قبل ۹ مسأله از سؤال‌های منتخب سطح متوسط (AIME) دهه‌ی ۱۹۸۰ میلادی را با حل کامل ملاحظه کردید، اینک در ادامه، بقیه مسائل را با حل تشریحی می‌آوریم.

درکشورهای گوناگون دنیا (۶)

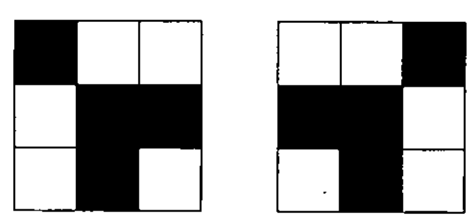
● هوشنگ شرقی

۱۰. نقطه‌ی P درون مثلث ABC مفروض است، به طوری که: $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$. اندازه‌های اضلاع مثلث نیز $AB = 13$، $BC = 14$ و $CA = 15$ است. تانژانت زاویه‌ی PAB به صورت $\frac{m}{n}$ بیان شده است که m و n عددهای طبیعی، نسبت به هم اول هستند. مقدار m+n را به‌دست آورید.

۱۱. عدد طبیعی n را «خوش‌شانس» فرض می‌کنیم، اگر مجموع رقم‌های آن مضرب ۷ باشد و آن را «فوق‌خوش‌شانس» می‌نامیم، اگر خوش‌شانس باشد و هیچ یک از اعداد $n+1$، $n+2$، $n+3$ و... و $n+12$، خوش‌شانس نباشند. کوچک‌ترین عدد فوق خوش‌شانس را بیابید.

۱۲. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی $\{1,2,3,\dots,1000\}$ باشد، به‌طوری که اگر a و b دو عضو (نه الزاماً متمایز) از S باشند، آن‌گاه حاصل ضرب آن‌ها (ab) عضوی از S نباشد. حداکثر تعداد اعضای S چیست؟

۱۳. در شکل‌های زیر بعضی از مربع‌های کوچک موجود در مربع ۳×۳ اصلی سیاه رنگ شده‌اند، به طوری که در هر ردیف و هر ستون حداقل یک خانه‌ی سیاه وجود دارد.



با فرض این که رنگ‌آمیزی‌های متقارن، متمایز در نظر گرفته شوند (یعنی مثلاً دو رنگ‌آمیزی شکل‌های بالا متمایز هستند و متفاوت درنظر گرفته می‌شوند)، مجموع تعداد روش‌هایی که می‌توانیم مربع ۳×۳ را رنگ‌آمیزی کنیم، به‌دست آورید.

۱۴. در یک تورنمنت دوره‌ای از مسابقات، گاهی اوقات یک «دور سه عضوی» رخ می‌دهد، به این صورت که در یک مجموعه‌ی $\{a,b,c\}$ از تیم‌ها، a، b را می‌برد و b، c را، و c نیز a را. اگر ۲۳ تیم یک دوره مسابقات دوره‌ای را با هم داشته باشند و هیچ دو تیمی با هم مساوی نکرده باشند، بیشترین تعداد «دورهای سه عضوی» که می‌تواند رخ داده باشد، چندتاست؟

۱۵. یک «سری نرمال» را به صورت $a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \dots \pm a_n$ تعریف می‌کنیم که در آن ± به معنی + یا −، و ترتیب عملیات، همان ترتیب عادی از چپ به راست است. اکنون یک «سری وارون» را به صورت $R: a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \dots \pm a_n$ تعریف می‌کنیم، به طوری که ± به معنای + یا −، ولی ترتیب عملیات از راست به چپ باشد. برای مثال:

$$R: 3 - 4 - 6 + 5 = 3 - (4 - (6 + 5)) = 3 - 4 + 6 + 5 = 10$$

با این طرز نمایش، هر سری وارون معادل یک سری نرمال با جملات یکسان، ولی با تغییر بعضی از علائم است. به همین ترتیب، هر سری نرمال معادل یک سری وارون است. اگر سری نرمال $a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \dots \pm a_{1000}$ دارای ۶۰۰ علامت منفی از بین ۹۹۹ علامت خود باشد، سری وارون معادل آن حداکثر چند علامت منفی دارد؟

حل مسائل

۱۰. اندازه‌ی سه زاویه‌ی برابر PAB و PBC و PCA را مساوی θ می‌گیریم. و طول‌های PA، PB و PC را به ترتیب x، y و z درنظر می‌گیریم. با توجه به قضیه‌ی کسینوس‌ها در مثلث‌های PAB، PBC و PCA داریم:

$$\begin{cases} y^2 = x^2 + c^2 - 2xc\cos\theta \\ z^2 = y^2 + a^2 - 2ya\cos\theta \\ x^2 = z^2 + b^2 - 2zb\cos\theta \end{cases}$$

از جمع این سه معادله با هم، به معادله‌ی زیر می‌رسیم:

$$2\cos\theta(xc + ya + zb) = a^2 + b^2 + c^2$$

چون $\frac{1}{2}\sin\theta(xc + ya + zb)$، مجموع مساحت‌های مثلث‌های PAB، PBC و PCA (و یا مساحت مثلث ABC) را می‌دهد، بنابراین معادله‌ی بالا را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$2\cos\theta.\frac{S_{ABC}}{\frac{1}{2}\sin\theta} = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow \tan\theta = \frac{4S_{ABC}}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{4\times 84}{590} = \frac{168}{295} = \frac{m}{n} \Rightarrow m + n = 168 + 295 = 463$$

لازم به ذکر است که مساحت مثلث را به کمک قضیه‌ی هرون به‌دست آورده‌ایم:

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ و } p = \frac{a+b+c}{2}$$

۱۱. فرض کنیم u رقم یکان عدد n، و n یک عدد خوش‌شانس باشد. اگر $u < 3$ باشد، آن‌گاه $u + 7 < 10$ و درنتیجه، تفاوت $n + 7$ و n فقط در رقم آخر (رقم یکان) است. درنتیجه، $n + 7$ نیز خوش‌شانس خواهد بود و این خلاف شرط فوق خوش‌شانس بودن n است. اما اگر $u > 3$ باشد، هفت عدد زیر را درنظر می‌گیریم:

$n + (10 - u)$ و $n + (10 - u) + 1$ و ... و $n + (10 - u) + 6$

چون n به شکل $10k + u$ است، این عددها فقط در رقم یکان متفاوت هستند و این تفاوت از ۰ تا ۶ است. درنتیجه مجموع رقم‌های آن‌ها به پیمانه‌ی هفت نیز با هم تفاوت دارد و بنابراین یکی از آن‌ها خوش‌شانس است. چون تفاوت این عددها از n شروع می‌شود، و چون: $[n + (10 - u) + 6] - n < 13$ (زیرا $u > 3$)، پس n نمی‌تواند فوق خوش‌شانس باشد. از این‌جا برمی‌آید که برای همه‌ی عددهای فوق خوش‌شانس باید $u = 3$ باشد.

از آن‌جا که ۳ خودش حتی خوش‌شانس هم نیست، باید رقم دهگان را درنظر بگیریم و آن را با حرف t نمایش می‌دهیم. اگر $t < 9$ باشد، آن‌گاه اگر n خوش‌شانس باشد، مجموع رقم‌های $n + 9$ مضرب ۷ خواهد بود، زیرا با اضافه کردن ۹ به n از رقم یکان یک واحد کاسته، و رقم دهگان با ۱ جمع می‌شود. درنتیجه، نخستین منتخب ما برای عدد فوق‌خوش‌شانس ۹۳ است. اما دوباره می‌بینیم که این عدد حتی خوش‌شانس هم نیست.

به طور مشابه، اگر رقم صدگان را h درنظر بگیریم، به‌ازای $h < 9$، در عدد $n = h93$، اگر n خوش‌شانس باشد، $n + 11$ نیز خوش‌شانس خواهد بود. درنتیجه $h = 9$ و $n = 993$ کوچک‌ترین عدد فوق خوش‌شانس است. با امتحان عددهای ۹۹۴، ۹۹۵ و ... و ۱۰۰۵ ملاحظه می‌شود که هیچ یک از آن‌ها خوش‌شانس نیستند و درنتیجه، ۹۹۳ در شرایط فوق صدق می‌کند.

۱۲. برای نمایش زیرمجموعه‌ی مطلوب S توجه می‌کنیم که $32^2 > 1000$ و در نتیجه زیرمجموعه‌ی زیر:

$$S = \{32, 33, 34, \ldots, 1000\}$$

شرایط مسأله را برآورده می‌کند و ۹۶۹ عضو دارد. برای آن‌که نشان دهیم این بزرگ‌ترین مقدار عضو برای S است، فرض می‌کنیم: $a_i = 31 - i$، $b_i = 32 + i$ و آن‌گاه $c_i = a_i b_i = 992 - i - i^2 (i = 0, 1, 2, \ldots, 29)$:

$$2 = a_{29} < a_{28} < \ldots < a_0 < b_0 < b_1 < \ldots < b_{29} < c_{29} < \ldots < c_0 = 992$$

از این ۹۰ عدد، حداکثر می‌توان ۶ عدد را انتخاب کرد، زیرا از سه عدد a_i، b_i و c_i حداکثر دو تای آن‌ها می‌توانند در S باشند. از بین ۹۰ ـ ۱۰۰۰، یعنی ۹۱۰ عدد باقی مانده نیز حداکثر می‌توان ۹۰۹ عدد را انتخاب کرد، زیرا عدد ۱ در بین آن‌هاست و با انتخاب آن، انتخاب بقیه غیرممکن می‌شود. پس حداکثر تعداد اعضای S، $969 = 909 + 60$ تاست.

۱۳. اگر گفته می‌شد که فقط در هر ستون لااقل یک خانه‌ی سیاه وجود داشته باشد، کار آسان‌تر می‌شد و جواب 7^3 بود. زیرا از هشت راهی که برای رنگ‌آمیزی یک ستون وجود دارد (هر خانه را به دو طریق می‌توان رنگ زد: سفید یا سیاه، پس یک ستون را به $2\times2\times2$ طریق می‌توان رنگ‌آمیزی کرد)، فقط یکی از آن‌ها نامطلوب است (که هر سه خانه سفید باشد). بنابراین برای رنگ‌آمیزی سه ستون طبق اصل ضرب، $7\times7\times7$ راه وجود دارد. اما به هرحال فعلاً محدودیت سطرها را هم داریم و نباید هیچ سطری سفید بماند.

اکنون تعداد حالت‌هایی را که ممکن است یک سطر سفید بماند، به‌دست می‌آوریم. اگر یک سطر سفید بماند، در این صورت دو خانه‌ی هر ستون سه حالت متفاوت دارند (فقط هر دو سفید نیستند). در این‌جا طبق اصل ضرب، $3\times3\times3 = 3^3$ حالت موجود است و درنتیجه برای سه سطر، 3×3^3 حالت نامطلوب وجود دارد. بنابراین $7^3 - 3\times3^3$ حالت مطلوب داریم. ولی با این شمارش سه حالت وجود دارد که طی آن‌ها هر سه سطر سفید است و این جزو 7^3 حالت فوق نبود. پس باید این سه حالت را به آن اضافه کرد و جواب نهایی عبارت است از:

$۷^۳ - ۳ \times ۳^۳ + ۳ = ۲۶۵$

تذکر: بدون بیان مستقیم، ما در این جا از «اصل شمول و عدم‌شمول» استفاده کرده‌ایم. به کمک همین اصل می‌توانیم قاعده‌ای کلی برای یک جدول $n \times n$ به صورت

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k}(2^{n-k}-1)^n$$

به‌دست آوریم.

۱۴. فرض کنید N و N′ به ترتیب معرف تعداد سه‌تایی‌های دوری و غیردوری باشند. آن‌گاه $N + N' = \binom{۲۳}{۳}$ و مسأله به یافتن حداقل تعداد سه‌تایی‌های غیردوری یعنی N′ منجر می‌شود. برای یافتن این مقدار، ابتدا توجه می‌کنیم که در هر سه‌تایی غیردوری باید یکی از تیم‌ها، دو تیم دیگر را برده باشد. (برای درک و اثبات این موضوع مثلثی با سه رأس رسم کنید و اضلاع آن را بردارهایی درنظر بگیرید. سوی بردار از تیم برنده به تیم بازنده است.)

برعکس برای هر جفت نامرتب از تیم‌های j و k که i هر دوی آن‌ها را برده باشد، مجموعه‌ی $\{i, j, k\}$ یک سه عضوی غیردوری است. بنابراین، اگر برای $i = ۱,۲,\dots,۲۳$ ، S_i معرف تعداد تیم‌های باخته به تیم i باشد، آن‌گاه در هر مسابقه با ۲۳ تیم، داریم: $N' = \sum_{i=1}^{۲۳}\binom{S_i}{۲}$.

و این نشان می‌دهد که N′ وقتی حداقل می‌شود که هر S_i معادل ۱۱ باشد. در این صورت، میانگین مقدار S_i ها به ما امکان محاسبه‌ی N′ را می‌دهد و از آن‌جا N نیز به‌دست می‌آید. هم‌چنین باید نشان دهیم که چنین تورنمنتی واقعاً امکان‌پذیر است. اکنون درنظر می‌گیریم که:

(۱ $\forall i = ۱,۲,\dots,۲۳: \ ۰ \le S_i \le ۲۲$

(۲ $\sum_{i=1}^{۲۳} S_i = \binom{۲۳}{۲}$

با توجه به (۲)، میانگین مقدار S_i ها برابر است با:

$$\frac{۱}{۲۳}\binom{۲۳}{۲} = ۱۱$$

و از آن‌جا به سادگی می‌توان نوشت:

$$N = \binom{۲۳}{۳} - N' = \binom{۲۳}{۳} - ۲۳\binom{۱۱}{۲} = ۵۰۶$$

۱۵. فرایند تبدیل یک سری از وارون به نرمال، احتمالاً برای کسی که با پرانتزها زیاد کار کرده باشد، شناخته شده است: یک علامت تغییر می‌کند، اگر و فقط اگر تعداد فردی علامت منفی در سمت چپ آن موجود باشد. فرایند تبدیل از سری نرمال به وارون احتمالاً غیرعادی‌تر است.

دنباله‌ای از علامت‌های + و - را در یک سری درنظر بگیرید. (برای مثال، دنباله‌ی - - + + + - متناظر است با:

$a_1 - a_2 - a_3 + a_4 + a_5 + a_6 - a_7$

توجه داشته باشید که متناظر با نخستین بلوک علائم، یعنی دو علامت منفی نخست، سه عدد وجود دارد.) برای تبدیل از حالت نرمال به حالت وارون، نخست علامت منفی از سمت چپ مربوط به بلوک اول علائم را حفظ کنید و نخستین علامت از سمت چپ را در هر بلوک تغییر دهید. یا در یک منفی ضرب کنید و همه‌ی علائم دیگر را به علامت جمع تغییر دهید. برای مثال، دنباله‌ی علائم داده شده در بالا (با ایجاد فضاهایی در بین آن‌ها برای درک بهتر) به صورت زیر است:

++++ --- +++ ----- ++ ---

و تبدیل می‌شود به:

R: ++++ -++ -++ -++++ -+ -++

هر دو روش با نگاه کردن به مثال‌های متعدد و الگوهای متفاوت کشف شده‌اند، ولی اثبات دقیق، با استقرای ریاضی روی تعداد علامت‌ها انجام می‌شود. حال دنباله‌ی نرمال $a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \dots \pm a_{1\dots}$ را با ۶۰۰ علامت منفی و ۳۹۹ علامت مثبت درنظر بگیرید. n را حداکثر عده‌ی ممکن از بلوک‌ها تعریف می‌کنیم، اگر نخستین بلوک، یک بلوک منفی باشد و m را حداکثر عده‌ی آن‌ها درنظر می‌گیریم، اگر نخستین بلوک، یک بلوک مثبت باشد. آن‌گاه در روند تبدیل بالا، جواب مسئله‌ی ما از n و $m - ۱$ بزرگ‌تر خواهد بود.

اما $m \le n + ۱$ است، زیرا تغییر مکان یک بلوک مثبت اولیه به سمت راست، آن را به یک بلوک منفی تغییر می‌دهد و در انتها یک بلوک را از بین می‌برد. درنتیجه پاسخ در واقع مساوی n است. وقتی تعداد بلوک‌ها حداکثر می‌شود، نمی‌توانیم هم یک بلوک مثبت با حداقل دو عضو و هم یک بلوک منفی با حداقل دو عضو داشته باشیم. پس برای جابه‌جایی یکی از علامت‌های منفی بین دو علامت مثبت، ایجاد ۲ بلوک یا بیشتر، خلاف اصل حداکثر شدن آن‌هاست. چون تعداد بیشتری علامت مثبت داریم، در روند بالا ممکن است نتیجه بگیریم، آن‌ها در ۳۹۹ بلوک مثبت مجزا و منفرد قرار دارند، و درنتیجه، حداکثر ۴۰۰ بلوک منفی (با شروع از یک علامت منفی) داریم. بنابراین، سری نرمال شامل ۷۹۹ بلوک است و سری وارون شامل ۷۹۹ علامت منفی، و این جواب مسأله است.

تابع جزء صحیح
(قسمت ۲)

برای دانش‌آموزان سال دوم و سوم

● میرشهرام صدر
mir_sadr@yahoo.com

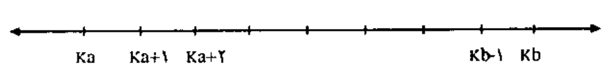
می‌خواهیم تابع با ضابطه‌ی $y=[2x]$ را در بازه‌ی $[-1,2)$ رسم کنیم. برای این منظور، ابتدا باید مقادیر عددی $y=[2x]$ را در بازه‌ی $[-1,2)$ به‌دست آورده، سپس نمودار آن را رسم می‌کنیم. به همین سبب، مطلب زیر را می‌آوریم.

مقادیر $y=[kx]$ در بازه‌ی $a,b\in Z;[a,b)$

برای محاسبه‌ی مقادیر $y=[kx]$ در بازه‌ی $[a,b)$، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

مرحله‌ی اول: $x\in[a,b)\Rightarrow kx\in[ka,kb)$

مرحله‌ی دوم: با فرض این‌که $ka\in Z$، بازه‌ی $[ka,kb)$ را به صورت زیر، به بازه‌های متفاوت (با طول یک واحد) تقسیم کرده و در هر بازه مقدار $y=[kx]$ را محاسبه می‌کنیم:



$$ka\le kx<ka+1\Rightarrow[kx]=ka\Rightarrow y=ka$$
$$ka+1\le kx<ka+2\Rightarrow[kx]=ka+1\Rightarrow y=ka+1$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$kb-1\le kx<kb\Rightarrow[kx]=kb-1\Rightarrow y=kb-1$$

مثال: مقادیر تابع با ضابطه‌ی $y=[2x]$ را در فاصله‌ی $[-1,2)$ به‌دست آورید.

حل: مرحله‌ی اول: در تابع با ضابطه‌ی $y=[2x]$ داریم $k=2$، بنابراین:

$$x\in[-1,2)\Rightarrow 2x\in[-2,4)$$

مرحله‌ی دوم: بازه‌ی $[-2,4)$ را به بازه‌هایی (با طول یک واحد) تقسیم کرده و مقدار $y=[2x]$ را در هر بازه محاسبه می‌کنیم:

$$-2\le 2x<-1\Rightarrow[2x]=-2\Rightarrow y=-2$$
$$-1\le 2x<0\Rightarrow[2x]=-1\Rightarrow y=-1$$
$$0\le 2x<1\Rightarrow[2x]=0\Rightarrow y=0$$
$$1\le 2x<2\Rightarrow[2x]=1\Rightarrow y=1$$
$$2\le 2x<3\Rightarrow[2x]=2\Rightarrow y=2$$
$$3\le 2x<4\Rightarrow[2x]=3\Rightarrow y=3$$

مثال: مقادیر تابع با ضابطه‌ی $y=\left[\frac{1}{3}x\right]$ را در فاصله‌ی $[-6,5)$ به‌دست آورید.

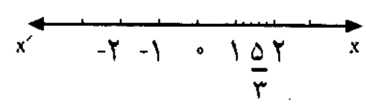
حل: مرحله‌ی اول: در تابع با ضابطه‌ی $y=\left[\frac{1}{3}x\right]$ داریم $k=\frac{1}{3}$، بنابراین:

اشاره

در شماره‌ی پیشین، تابع جزء صحیح را تعریف و رفتار آن را بررسی کردیم. سپس با خاصیت‌های این تابع آشنا شدیم و کاربردهای آن‌ها را در حل مسائل گوناگون دیدیم. اینک در ادامه‌ی مطالب گذشته، رسم توابع جزء صحیح را در پی می‌آوریم.

$$x\in[-6,5)\Rightarrow \frac{1}{3}x\in\left[-2,\frac{5}{3}\right)$$

مرحله‌ی دوم: بازه‌ی $\left[-2,\frac{5}{3}\right)$ را به بازه‌هایی تقسیم کرده و مقدار $y=\left[\frac{1}{3}x\right]$ را در هر بازه محاسبه می‌کنیم:



$$-2\le \frac{1}{3}x<-1\Rightarrow\left[\frac{1}{3}x\right]=-2\Rightarrow y=-2$$

$$-1\le \frac{1}{3}x<0\Rightarrow\left[\frac{1}{3}x\right]=-1\Rightarrow y=-1$$

$$0\le \frac{1}{3}x<1\Rightarrow\left[\frac{1}{3}x\right]=0\Rightarrow y=0$$

$$1\le \frac{1}{3}x<\frac{5}{3}\Rightarrow\left[\frac{1}{3}x\right]=1\Rightarrow y=1$$

رسم نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=[kx]+mx$ در بازه‌ی $a,b\in Z;[a,b)$

برای رسم نمودار این تابع، ابتدا مقادیر $[kx]$ را در بازه‌ی $[a,b)$، به‌دست می‌آوریم و مقادیر به‌دست آمده در هر بازه را در ضابطه‌ی تابع $y=[kx]+mx$ قرار می‌دهیم. سپس نمودار هر کدام را در بازه‌های متناظر با آن رسم می‌کنیم. یعنی:

$$x\in[a,b)\Rightarrow kx\in[ka,kb)$$

با فرض این‌که $ka\in Z$، داریم:

$$a\le x<\frac{ka+1}{k}\Leftarrow ka\le kx<ka+1\Rightarrow[kx]=ka$$
$$\Rightarrow y=ka+mx$$

$$\frac{ka+1}{k}\le x<\frac{ka+2}{k}\Leftarrow ka+1\le kx<ka+2\Rightarrow[kx]=ka+1$$
$$\Rightarrow y=ka+1+mx$$

$$\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots$$

$$\frac{kb-1}{k}\le x<b\Leftarrow kb-1\le kx<kb\Rightarrow[kx]=kb-1$$
$$\Rightarrow y=kb-1+mx$$

اکنون نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=ka+mx$ را در فاصله‌ی $a\le x<\frac{ka+1}{k}$ رسم می‌کنیم و نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=ka+1+mx$ را در فاصله‌ی $\frac{ka+1}{k}\le x<\frac{ka+2}{k}$ و... و نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=kb-1+mx$ را در فاصله‌ی $\frac{kb-1}{k}\le x<b$ رسم می‌کنیم.

برای روشن‌تر شدن مطلب، این مثال‌ها را می‌آوریم.

مثال: نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=[2x+1]$ را در فاصله‌ی $[-1,1)$ رسم کنید.

حل:

روش اول:

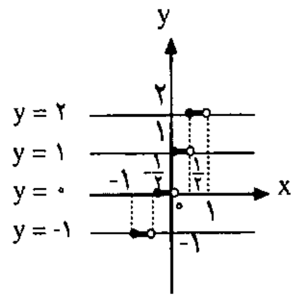
$$y=[2x+1]\Rightarrow y=[2x]+1$$
$$x\in[-1,1)\Rightarrow 2x\in[-2,2)$$

$$-1\le x<-\frac{1}{2}\Leftarrow -2\le 2x<-1\Rightarrow[2x]=-2$$
$$\Rightarrow y=-2+1\Rightarrow y=-1$$

$$-\frac{1}{2}\le x<0\Leftarrow -1\le 2x<0\Rightarrow[2x]=-1$$
$$\Rightarrow y=-1+1\Rightarrow y=0$$

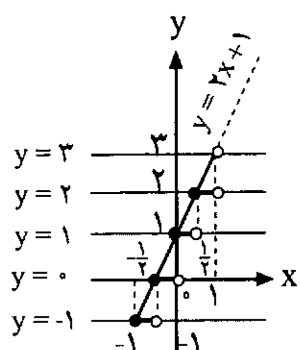
$$0\le x<\frac{1}{2}\Leftarrow 0\le 2x<1\Rightarrow[2x]=0\Rightarrow y=0+1\Rightarrow y=1$$

$\frac{1}{2} \le x < 1 \Leftarrow 1 \le 2x < 2 \Rightarrow [2x]=1 \Rightarrow y=1+1 \Rightarrow y=2$



روش دوم: ابتدا نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=2x+1$ را در بازه‌ی $[-1,1)$ رسم می‌کنیم. سپس خطوطی به معادله‌ی $y=k(k\in z)$ را موازی محور طول‌ها می‌کشیم. اکنون در فاصله‌ی (۱ و ۱-)، قطعه‌هایی از خط به معادله‌ی $y=2x+1$ را که بین دو خط متوالی افقی قرار دارند، روی خط افقی پایین تصویر می‌کنیم تا این‌که نمودار تابع در فاصله‌ی $[-1,1)$ به‌دست آید.

$y=2x+1;\begin{array}{c|cc} x & -1 & 1 \\ \hline y & -1 & 3 \end{array}$



مثال: نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=[2x+1]+x$ را در بازه‌ی $[-1,2)$ رسم کنید.

$y=[2x+1]+x \Rightarrow y=[2x]+x+1$

$x\in[-1,2) \Rightarrow 2x\in[-2,4)$

$-1\le x<-\frac{1}{2} \Leftarrow -2\le 2x<-1 \Rightarrow [2x]=-2 \Rightarrow$

$y=-2+x+1 \Rightarrow y=x-1\ ;\ \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & -1 & 0 \end{array}$

$-\frac{1}{2}\le x<0 \Leftarrow -1\le 2x<0 \Rightarrow [2x]=-1 \Rightarrow$

$y=-1+x+1 \Rightarrow y=x\ ;\ \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & 0 & 1 \end{array}$

$0\le x<\frac{1}{2} \Leftarrow 0\le 2x<1 \Rightarrow [2x]=0 \Rightarrow$

$y=0+x+1 \Rightarrow y=x+1\ ;\ \begin{array}{c|cc} x & 0 & -1 \\ \hline y & 1 & 0 \end{array}$

$\frac{1}{2}\le x<1 \Leftarrow 1\le 2x<2 \Rightarrow [2x]=1 \Rightarrow$

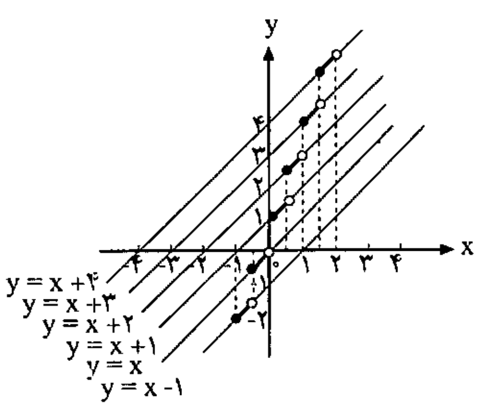
$y=1+x+1 \Rightarrow y=x+2\ ;\ \begin{array}{c|cc} x & 0 & -2 \\ \hline y & 2 & 0 \end{array}$

$1\le x<\frac{3}{2} \Leftarrow 2\le 2x<3 \Rightarrow [2x]=2 \Rightarrow$

$y=2+x+1 \Rightarrow y=x+3\ ;\ \begin{array}{c|cc} x & 0 & -3 \\ \hline y & 3 & 0 \end{array}$

$\frac{3}{2}\le x<2 \Leftarrow 3\le 2x<4 \Rightarrow [2x]=3 \Rightarrow$

$y=3+x+1 \Rightarrow y=x+4\ ;\ \begin{array}{c|cc} x & 0 & -4 \\ \hline y & 4 & 0 \end{array}$



مثال: نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = x\left[\frac{۱}{۲}x\right] + ۳$ را در بازه‌ی $[-۲,۴)$ رسم کنید.

حل:

$x\in[-۲,۴)\Rightarrow \frac{۱}{۲}x\in[-۱,۲)$

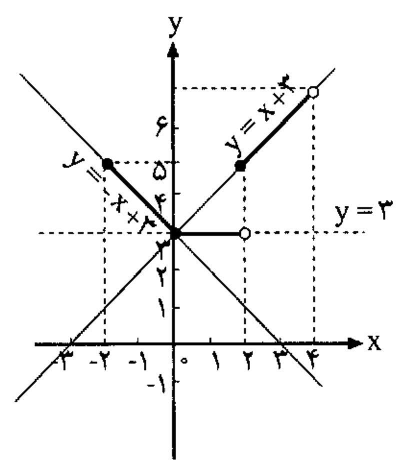
$-۲\le x<۰ \Leftarrow -۱\le \frac{۱}{۲}x<۰\Rightarrow \left[\frac{۱}{۲}x\right]=-۱\Rightarrow$

$y=-x+۳\;;\; \begin{array}{c|cc} x & ۰ & ۳ \\ \hline y & ۳ & ۰ \end{array}$

$۰\le x<۲ \Leftarrow ۰\le \frac{۱}{۲}x<۱\Rightarrow \left[\frac{۱}{۲}x\right]=۰\Rightarrow y=۳$

$۲\le x<۴ \Leftarrow ۱\le \frac{۱}{۲}x<۲\Rightarrow \left[\frac{۱}{۲}x\right]=۱\Rightarrow$

$y=x+۳\;;\; \begin{array}{c|cc} x & ۰ & -۳ \\ \hline y & ۳ & ۰ \end{array}$



مثال: نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = x-[x]$ را در بازه‌ی $[۰,۵)$ رسم کنید.

حل:

$x\in[۰,۵)\;,\; y=x-[x]$

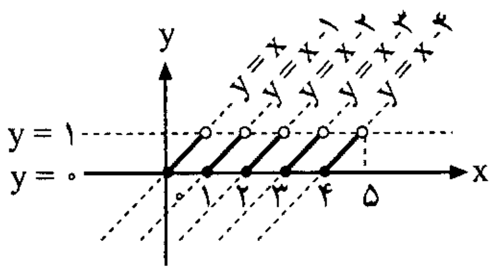
$۰\le x<۱\Rightarrow [x]=۰\Rightarrow y=x\;;\; \begin{array}{c|cc} x & ۰ & ۱ \\ \hline y & ۰ & ۱ \end{array}$

$۱\le x<۲\Rightarrow [x]=۱\Rightarrow y=x-۱\;;\; \begin{array}{c|cc} x & ۱ & ۲ \\ \hline y & ۰ & ۱ \end{array}$

$۲\le x<۳\Rightarrow [x]=۲\Rightarrow y=x-۲\;;\; \begin{array}{c|cc} x & ۲ & ۳ \\ \hline y & ۰ & ۱ \end{array}$

$۳\le x<۴\Rightarrow [x]=۳\Rightarrow y=x-۳\;;\; \begin{array}{c|cc} x & ۳ & ۴ \\ \hline y & ۰ & ۱ \end{array}$

$۴\le x<۵\Rightarrow [x]=۴\Rightarrow y=x-۴\;;\; \begin{array}{c|cc} x & ۴ & ۵ \\ \hline y & ۰ & ۱ \end{array}$



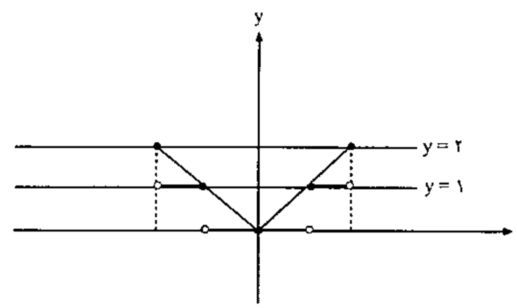
توجه: در خاصیت‌های تابع جزء صحیح گفتیم که $۰\le x-[x]<۱$ (شماره‌ی قبل ـ خاصیت۲). همان‌طور که در این نمودار ملاحظه می‌کنیم، نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=x-[x]$ بین دو خط $y=۰$ و $y=۱$ قرار دارد.

مثال: نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=[|x|]$ را در فاصله‌ی $y=[-۲,۲]$ رسم کنید.

حل:
نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=|x|$ را در بازه‌ی $[-۲,۲]$ رسم می‌کنیم. سپس خط‌های افقی y=k را رسم می‌کنیم و قطعه‌هایی از آن را که بین دو خط متوالی افقی قرار دارند، روی خط پایینی تصویر می‌کنیم.

$y=|x|$;

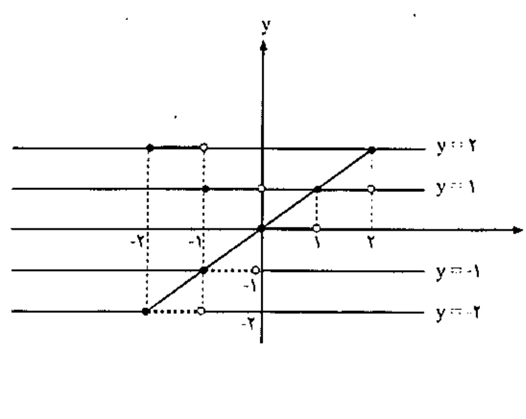
x	-2	0	2
y	2	0	2



مثال: نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=[\![x]\!]$ را در فاصله‌ی $[-2,2]$ رسم کنید.

حل:

نمودار تابع باضابطه‌ی $y=[x]$ را در فاصله‌ی $[-2,2]$ رسم می‌کنیم. سپس قرینه‌ی قسمتی از نمودار را که زیر محور xها قرار دارد، نسبت به محور xها رسم می‌کنیم.



مثال: نمودار تابع با ضابطه‌ی $[y]=[x]$ را در فاصله‌ی $[-2,2]$ رسم کنید.

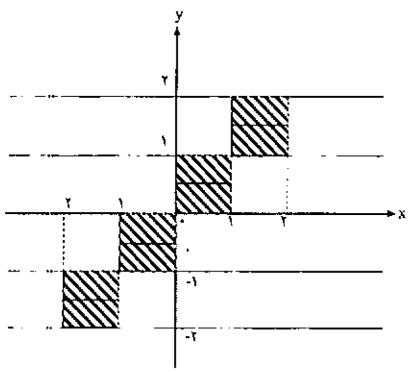
حل:

$$-2\le x<-1 \Rightarrow [x]=-2 \Rightarrow [y]=-2 \Rightarrow -2\le y\le -1$$

$$-1\le x<0 \Rightarrow [x]=-1 \Rightarrow [y]=-1 \Rightarrow -1\le y<0$$

$$0\le x<1 \Rightarrow [x]=0 \Rightarrow [y]=0 \Rightarrow 0\le y\le 1$$

$$1\le x<2 \Rightarrow [x]=1 \Rightarrow [y]=1 \Rightarrow 1\le y<2$$



نمودار بالا نمونه‌ای از دسته‌ی توابع پله‌ای است.

مثال: نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=x^2[x]$ را در بازه‌ی $[-3,2)$ رسم کنید.

حل:

$$x\in[-3,3)\ ,\ y=x^2[x]$$

$$-3\le x<-2 \Rightarrow [x]=-3 \Rightarrow y=x^2\times(-3)\Rightarrow$$

$y=-3x^2$;

x	-3	-2
y	-27	-12

$$-2\le x<-1 \Rightarrow [x]=-2 \Rightarrow y=x^2\times(-2)\Rightarrow$$

$y=-2x^2$;

x	-2	-1
y	-8	-2

$$-1\le x<0 \Rightarrow [x]=-1 \Rightarrow y=x^2\times(-1)$$

$\Rightarrow y=-x^2$;

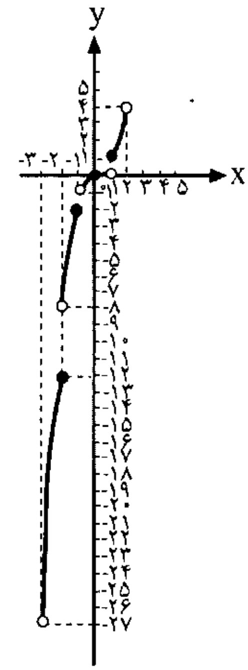
x	-1	0
y	-1	0

$0\le x<1 \Rightarrow [x]=0 \Rightarrow y=x^2\times(0)\Rightarrow y=0$;

x	0	1
y	0	0

$1\le x<2 \Rightarrow [x]=1 \Rightarrow y=x^2\times(1)\Rightarrow y=x^2$;

x	1
y	

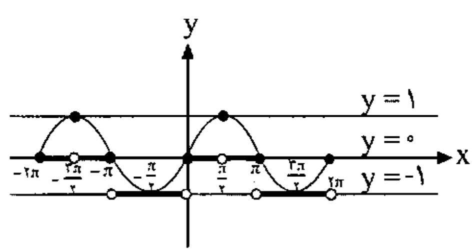


مثال: نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=[\sin x]$ را در فاصله‌ی $[-2\pi,2\pi]$ رسم کنید.

حل:

مرحله‌ی اول- ابتدا منحنی تابع با ضابطه $y=\sin x$ را در فاصله‌ی $[-2\pi,2\pi]$ رسم می‌کنیم.

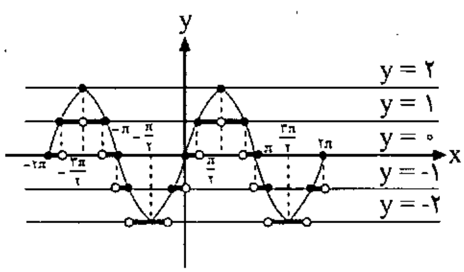
مرحله‌ی دوم- سه خط به معادله‌های $y=-1$ و $y=0$ و $y=1$ را می‌کشیم و نقاطی از منحنی را که روی این سه خط قرار دارند، با نقاطی توپر مشخص می‌کنیم. سپس قسمتی از منحنی را که بین دو خط $y=-1$ و $y=0$ قرار دارد (به غیر از نقاط توپر) روی خط $y=-1$ تصویر می‌کنیم و به همین ترتیب قسمتی از منحنی را که بین دو خط $y=0$ و $y=1$ قرار دارد (به غیر از نقاط توپر) روی خط $y=0$ تصویر می‌کنیم.



مثال: نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=[2\sin x]$ را در فاصله‌ی $[-2\pi,2\pi]$ رسم می‌کنید.

حل: **مرحله‌ی اول-** منحنی نمایش $y=2\sin x$ را رسم می‌کنیم.

مرحله‌ی دوم- خطوط $y=-2$ ، $y=-1$ ، $y=0$ ، $y=1$ و $y=2$ را می‌کشیم و نقاطی از منحنی را که روی این خطوط قرار دارند، پررنگ می‌کنیم. سپس قسمتی از منحنی را که بین دو خط $y=-2$ و $y=-1$ قرار دارد (به‌غیر از نقاط پررنگ) روی خط $y=-2$ تصویر می‌کنیم و قسمتی از منحنی را که بین دو خط $y=-1$ و $y=0$ قرار دارد(به غیر از نقاط پررنگ)، روی خط $y=-1$ تصویر می‌کنیم[1] و به همین ترتیب قسمتی از منحنی را که بین دو خط $y=0$ و $y=1$ قرار دارد (به غیر از نقاط پررنگ) روی خط $y=0$ تصویر می‌کنیم و در مرحله‌ی آخر، قسمتی از منحنی را که بین دو خط $y=1$ و $y=2$ قرار دارد (به غیر از نقاط پررنگ)، روی خط $y=1$ تصویر می‌کنیم تا نمودار این تابع را به‌دست آوریم.

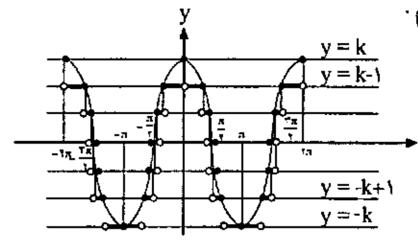


مثال: نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=[k\cos x]$ را که در آن $(|k|\geq 1, k\in Z)$ است، در فاصله‌ی $[-2\pi,2\pi]$ رسم کنید.

حل: **مرحله ی اول-** ابتدا منحنی $y=k\cos x$ را در فاصله‌ی $[-2\pi,2\pi]$ رسم می‌کنیم.

مرحله‌ی دوم- خطوط $y=-k$ و $y=-k+1$ و $y=-k+2$ و... $y=k-1$ و $y=k$ را رسم می‌کنیم و نقاطی از منحنی را که روی این خطوط قرار دارند، پررنگ می‌کنیم. سپس

قسمتی از منحنی را که بین دو خط به معادله‌های $y=-k$ و $y=-k+۱$ قرار دارد، روی خط به معادله‌ی $y=-k$ تصویر می‌کنیم، و... به همین ترتیب در مرحله‌ی آخر، قسمتی از منحنی را که بین دو خط به معادله‌های $y=k-۱$ و $y=k$ قرار دارد، روی خط به معادله‌ی $y=k-۱$ تصویر می‌کنیم، تا نمودار تابع را به دست آوریم.



مثال: نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=[x^۲]$ را در فاصله‌ی $[-۲,۲]$ رسم کنید.

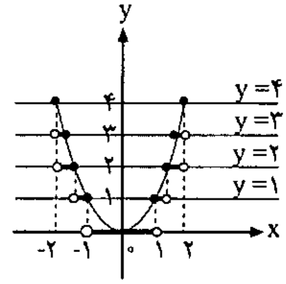
حل: مرحله‌ی اول- نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=x^۲$ را در فاصله‌ی $[-۲,۲]$ رسم می‌کنیم.

مرحله‌ی دوم- خطوط افقی موازی محور طول‌ها به معادله‌ی $(k\in Z)y=k$ را رسم می‌کنیم و نقاطی از نمودار را که روی خطوط افقی قرار دارند، پررنگ می‌کنیم.

اکنون قسمتی از نمودار را که بین دو خط افقی متوالی قرار دارد، روی خط پایینی تصویر می‌کنیم.

$y=x^۲$;

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	۴	۱	۰	۱	۴



خودآزمایی

نمودار توابع زیر را در فاصله‌های داده شده رسم کنید.

۱. $[۰,۶)$; $y=x+[\frac{x}{۲}]$

۲. $[-۳,۴)$; $y=\frac{x}{۲}-[\frac{x}{۲}]$

۳. $[-\frac{۳\pi}{۴},\frac{۹\pi}{۴})$; $y=[\sin(x+\frac{\pi}{۴})]$

۴. $[۱,۵)$; $y=x+[x]$

۵. $[۰,۱۰)$; $y=[\sqrt{x}]$

۶. $[-\frac{۵\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})$; $y=[\cos(x+\frac{\pi}{۲})]$

۷. $[-۲,۱)$; $y=\frac{x}{[x]}$

۸. $[-۲,۲)$; $y=\frac{x+۱}{[x]}$

۹. $[-۸,۲)$; $y=[\frac{x}{۴}-۱]$

۱۰. $[-۱,۲)$; $y=۲x-[۳x]$

زیرنویس

۱. به‌طور کلی، قسمتی از منحنی را که بین دو خط افقی متوالی قرار دارد، روی خط افقی پایین تصویر می‌کنیم. یعنی اگر قسمتی از نمودار منحنی بین دو خط افقی متوالی به معادله‌های $y=i$ و $y=i+۱$ قرار داشته باشد، آن را روی خط به معادله‌ی $y=i$ تصویر می‌کنیم.

منابع

۱. امیری، حمیدرضا و صدر، میرشهرام و حسینی، سیدعلی. خودآموز ریاضیات۲. مؤسسه‌ی آموزش از راه دور. چاپ دوم ۱۳۸۵.

۲. صدر، میرشهرام. رسم منحنی‌های توابع سینوسی و کسینوسی درجه‌ی اول با روش نقطه‌یابی و انتقال. مجله‌ی ریاضی برهان متوسطه۲۲. انتشارات مدرسه. پاییز ۱۳۷۶.

(حل مسأله‌های لاینحل ۲۳۰۰ ساله)

کشف فرمول اعداد اول و نتایج آن*

قسمت ۳

● سید محمدرضا هاشمی موسوی**
hashemi – moosavi@yahoo.com

● یافتن جوابی برای تعمیم قضیه‌ی بزرگ فرما (حکم بزرگ فرما) با استفاده از قضیه‌های مربوط به اعداد اول:

$$(n,m)=1:\ x^n+y^n=z^m \qquad (1)$$

پیش از بررسی معادله‌هایی نظیر معادله‌ی (۱)، لازم است چند قضیه‌ی اساسی مربوط به اعداد اول، مثل قضیه‌ی کوچک فرما، قضیه‌ی اویلر (تعمیمی از قضیه‌ی کوچک فرما) و قضیه‌ی ویلسن را یادآور شویم. به این منظور، ابتدا به عناوین قضایا می‌پردازیم:

۱. قضیه‌ی کوچک فرما

اگر p عدد اول باشد و $(p,a)=1$، آن‌گاه:

$$a^{p-1}\overset{p}{\equiv}1 \quad \text{یا} \quad a^p\overset{p}{\equiv}a$$

۲. قضیه‌ی اویلر

اگر $(a,m)=1$، آن‌گاه:

$$a^{\varphi(m)}\overset{m}{\equiv}1$$

۳. قضیه‌ی ویلسن

اگر p عدد اول باشد، آن‌گاه:

$$(p-1)!\overset{p}{\equiv}-1$$

در این‌جا تنها کافی است اثباتی ساده برای قضیه‌ی اویلر ارایه

دهیم؛ زیرا دو قضیه‌ی دیگر، حالت خاصی از قضیه‌ی اویلر هستند.

اثبات قضیه‌ی اویلر(۲)

اگر $(a,m)=1$ و فرض کنیم $x_1, x_2, \dots, x_n$ که در آن $n=\varphi(m)$، دسته ی ساده‌ی باقی‌مانده به پیمانه‌ی m باشند، واضح است که عددهای ax_1، ax_2، ... و ax_n نیز دسته‌ی ساده‌ی باقی‌مانده‌ها به پیمانه‌ی m هستند؛ زیرا:

$$(a,m)=1,\ \ n=\varphi(m)\ :\quad \begin{array}{l} ax_1 \overset{m}{\equiv} x_1 \\ ax_2 \overset{m}{\equiv} x_2 \\ \dots\dots\dots \\ ax_n \overset{m}{\equiv} x_n \end{array}$$

از ضرب هم‌نهشتی‌ها:

$$a^n x_1.x_2.\cdots.x_n \overset{m}{\equiv} x_1.x_2.\cdots.x_n$$

چون $(m, x_1x_2\dots x_n)=1$، پس از اختصار لازم خواهیم داشت:

$$a^n \overset{m}{\equiv} 1\ ;\ a^{\varphi(m)} \overset{m}{\equiv} 1$$

توضیح: $\varphi(m)$ (تابع φ اویلر)، یعنی تعداد عددهای کوچک‌تر از m که نسبت به m اول‌اند.

اثبات قضیه‌ی فرما(۱)

بدیهی است که اگر m عدد اولی مثل p باشد، قضیه‌ی اویلر به حالت خاص، یعنی قضیه‌ی فرما تبدیل می‌شود:

$$m=p\ :\ \varphi(p)=p-1\ ;\ a^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1$$

اثبات قضیه‌ی ویلسن (۳)

در قضیه‌ی فرما می‌توان فرض کرد $a=(p-1)!$ یا $a=(p-2)!$ و p عدد اول بزرگ‌تر از ۲ فرض می‌شود و هم‌چنین $(p,(p-2)!)=1$ و $(p,(p-1)!)=1$، پس حالت خاص قضیه‌ی کوچک فرما چنین است:

$$(p>2)\ \text{و}\ a=(p-2)!\ :\ ((p-2)!)^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1\ ;\ (p-2)! \overset{p}{\equiv} 1$$

$$(p>2) a=(p-1)!\ :\ ((p-1)!)^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1\ ;\ (p-1)! \overset{p}{\equiv} -1$$

از طریق آزمایش پی می‌بریم که جواب‌های $(p-1)! \overset{p}{\equiv} 1$ و $(p-2)! \overset{p}{\equiv} -1$ خارجی است و این قضیه برای $p=2$ نیز برقرار است.

۱. تعیین جوابی برای معادله‌ی (۱):

$$(m,n)=1\ :\ x^n+y^n=z^m$$

برای تعیین یک سلسله از جواب‌های معادله‌ی (۱)، ابتدا یک سلسله از جواب‌های معادله‌ی زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$k\in \mathbb{N}:\ x_1^{k-1}+x_2^{k-1}=x_3^k \qquad (2)$$

برای تعیین یک سلسله از جواب‌های معادله‌ی (۲)، کافی است آن را با اتحاد زیر مقایسه کنیم:

$$a,b\in \mathbb{Z}:\ (a^k+ab^{k-1})^{k-1}+(ba^{k-1}+b^k)^{k-1}=(a^{k-1}+b^{k-1})^k \qquad (3)$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی (۲) و اتحاد(۳)، خواهیم داشت:

$$\left|\begin{array}{l} x_1=a^k+ab^{k-1} \\ x_2=ba^{k-1}+b^k \\ x_3=a^{k-1}+b^{k-1} \end{array}\right.\quad \text{((یک سلسله جواب معادله‌ی (۲))}$$

در این‌جا، با فرض $k=m^{\varphi(n)}$، معادله‌ی (۲) به معادله‌ی زیر تحویل می‌شود:

$$x_1^{m^{\varphi(n)}-1}+x_2^{m^{\varphi(n)}-1}=x_3^{m^{\varphi(n)}} \quad (4)$$

(φ تابع اویلر است) $\varphi(n)$: تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر از n که نسبت به آن اول‌اند. برای مثال: $\varphi(2)=1$ و $\varphi(12)=4$؛ زیرا ۱، ۵، ۷، ۱۱ نسبت به ۱۲ اول‌اند.

طبق قضیه‌ی اویلر، اگر $(m,n)=1$، آن‌گاه عبارت $m^{\varphi(n)}-1$ بر n بخش‌پذیر است.
از طرف دیگر می‌توان نوشت:

$$(m,n)=1:\ m^{\varphi(n)}-1=n\left(1+2\left\lfloor\frac{m^{\varphi(n)}-1}{2n}\right\rfloor\right)\quad (5)$$

($\lfloor\ \rfloor$: قسمت درست عدد)

با استفاده از رابطه‌ی (۵)، معادله‌ی(۴) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\left(x_1^{1+2\left\lfloor\frac{m^{\varphi(n)}-1}{2n}\right\rfloor}\right)^n+\left(x_2^{1+2\left\lfloor\frac{m^{\varphi(n)}-1}{2n}\right\rfloor}\right)^n=\left(x_3^{m^{\varphi(n)-1}}\right)^m\quad (6)$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی (۱) با اتحاد(۶)، یک سلسله از جواب‌های معادله‌ی (۱) حاصل می‌شود:

$$(7)\quad\begin{cases}x=\left(a^{m^{\varphi(n)}}+ab^{m^{\varphi(n)}-1}\right)^{1+2\left\lfloor\frac{m^{\varphi(n)}-1}{2n}\right\rfloor}\\ y=\left(ba^{m^{\varphi(n)}-1}+b^{m^{\varphi(n)}}\right)^{1+2\left\lfloor\frac{m^{\varphi(n)}-1}{2n}\right\rfloor}\\ z=\left(a^{m^{\varphi(n)}-1}+b^{m^{\varphi(n)}-1}\right)^{m^{\varphi(n)-1}}\end{cases}$$

توضیح: در برابری‌های (۷)، اگر n عددی اول مثل p باشد:

$n=p:\ \varphi(n)=\varphi(p)=p-1$

و اگر m عددی مرکب به صورت $m=p^r.q^s.t^u\dots$ باشد، (p، q، t و ... عامل‌های اول‌اند)، می‌توان نوشت:

$$\varphi(n)=n(1-\frac{1}{p})(1-\frac{1}{q})(1-\frac{1}{t})\cdots=\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&1\\1&1&0&\cdots&2\\1&0&1&\cdots&3\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&n\end{vmatrix}$$

برای مثال:

$$n=205=5\times 41:\varphi(205)=205(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{41})=160$$

$$n=864=2^5\times 3^3:\ \varphi(864)=864(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})=288$$

۲. تعیین جوابی برای معادله‌ی:

$$(p,m)=1:\ X^p+Y^p=Z^m\qquad (2)$$

معادله‌ی (۲) حالت خاصی از معادله $x^n+y^n=z^m$ است.
بنابراین، برای تعیین جواب آن کافی است، در جواب معادله‌ی(۱) $n=p$ را اختیار کنیم:

$$\varphi(p)=p-1:\begin{cases}x=\left(a^{m^{p-1}}+ab^{m^{p-1}-1}\right)^{1+2\left\lfloor\frac{m^{p-1}-1}{2p}\right\rfloor}\\ y=\left(ba^{m^{p-1}-1}+b^{m^{p-1}}\right)^{1+2\left\lfloor\frac{m^{p-1}-1}{2p}\right\rfloor}\\ z=\left(a^{m^{p-1}-1}+b^{m^{p-1}-1}\right)^{m^{p-2}}\end{cases}\quad (8)$$

جواب(۸) حالت خاص جواب (۷) به ازای $\varphi(p)=p-1$ است.
البته جواب معادله‌ی(۲) به طور مستقیم نیز قابل محاسبه است. با استفاده از قضیه‌ی فرما و روشی مشابه حل معادله‌ی(۱)

می‌توان جواب(۸) را برای معادله ی (۲) به‌دست آورد.

۳. تعیین جوابی برای معادله‌ی:

$p_1, p_2 \in N$ و $p_1, p_2 < p$ (prime number)

$$X^{p_1}+Y^{p_2}=Z^p \quad (۳)$$

برای تعیین یک سلسله از جواب‌های معادله ی(۳)، ابتدا یک سلسله از جواب‌های معادله‌ی زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$x_1^n+x_2^n=x_3^{n+1} \quad (۴)$$

به این منظور کافی است، معادله‌ی (۴) را با اتحاد زیر مقایسه کنیم:

$$(a^{n+1}+ab^n)^n+(a^nb+b^{n+1})^n=(a^n+b^n)^{n+1} \quad (۵)$$

اکنون از مقایسه ی معادله ی (۴) با اتحاد(۵) خواهیم داشت:

$$(۶)\quad \begin{cases} x_1=a^{n+1}+ab^n \\ x_2=a^nb+b^{n+1} \\ x_3=a^n+b^n \end{cases}$$

در این جا، با فرض $n=(p-1)!$، معادله ی(۴) به معادله ی زیر تحویل می‌شود:

$$x_1^{(p-1)!}+x_2^{(p-1)!}=x_3^{(p-1)!+1} \quad (۷)$$

طبق قضیه‌ی ویلسن، اگر p عددی اول باشد، عبارت $(p-1)!+1$ بر p بخش‌پذیر است. از طرف دیگر می‌توان نوشت:

$$(p-1)!+1=p\left(1+2\left[\frac{(p-1)!+1}{2p}\right]\right) \quad (۸)$$

([ ] : قسمت درست عدد)

در این جا، با استفاده از رابطه ی (۸) و با توجه به شرط $p_1, p_2 < p$، معادله ی (۷) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(۹)\quad \left(x_1^{\frac{(p-1)!}{p_1}}\right)^{p_1}+\left(x_2^{\frac{(p-1)!}{p_2}}\right)^{p_2}=\left(x_3^{1+2\left[\frac{(p-1)!+1}{2p}\right]}\right)^{p}$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی (۳) با اتحاد (۹)، یک سلسله از جواب‌های معادله‌ی (۳) حاصل می‌شوند:

$$(۷)\quad \begin{cases} X=\left(a^{(p-1)!+1}+ab^{(p-1)!}\right)^{\frac{(p-1)!}{p_1}} \\ Y=\left(a^{(p-1)!}b+b^{(p-1)!+1}\right)^{\frac{(p-1)!}{p_2}} \\ Z=\left(a^{(p-1)!}+b^{(p-1)!}\right)^{1+2\left[\frac{(p-1)!+1}{2p}\right]} \end{cases}$$

توجه: در اتحادها و برابری‌های فوق اگر p را به $p(t)=2\left(\frac{2t+1}{2}\right)^{\Delta_m}$ تبدیل کنیم، به اتحادها و جواب‌های همیشه برقرار به ازای $m \in N$ خواهیم رسید(H(m): فرمول اعداد اول).

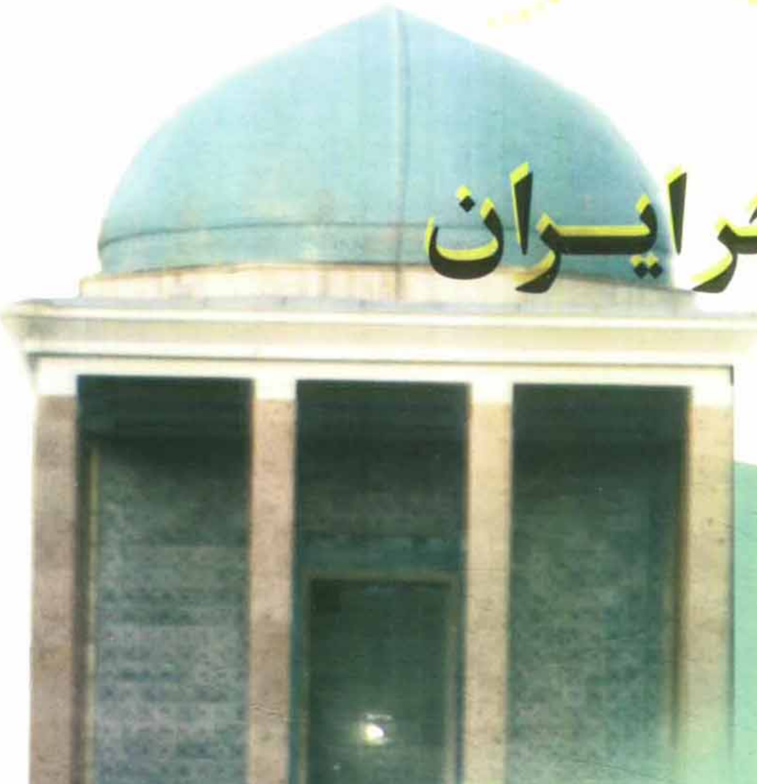
در ادامه‌ی این مقاله یک مجموعه‌ی جواب عمومی برای معادله‌های سیال تعمیم‌یافته‌ی عمومی با درجه‌ی دلخواه (با استفاده از قضیه‌های ویلسن، فرما و اویلر و نشان دادن نقش فرمول اعداد اول در پیدایش اتحادهای جبری) ارایه خواهد شد.

مراجع:

* S.M. R. Hashemi Mossavi. The discovery of prime numbers formula and its results & other top researches. Brill/VSP (2006).

** www. primenumbersformula.com

معرفی مفاخر ایران



نظر استاد سعید نفیسی درباره‌ی شعری از سعدی

یکشنبه ۲۴ دی‌ماه ۱۳۸۵، در انجمن آثار و مفاخر ایران، مراسم یادبود و تجلیل از مقام شامخ علمی و فرهنگی ادیب ارجمند و محقق گران‌قدر، مرحوم سعید نفیسی برگزار شد. همکار گرامی ما، **استاد احمد** شرف‌الدین در کتاب «ریاضی دلاویز در **ادب گهرریز**»، طرز درست نوشتن **یکی از بیت‌های سعدی را با** به‌کارگیری مفاهیم ریاضی **بیان کرده‌اند و برای تأیید** درستی نظر خود از نوشته‌ی ارزشمند **استاد نفیسی در** همین زمینه یاد کرده‌اند. **در سطرهای زیر، نوشته‌ی** استاد شرف‌الدین **را می‌آوریم.**

شعر سعدی **را درست بنویسیم**

بنی آدم اعضای یکدیگرند

که در آفرینش ز یک گوهرند

چو عضوی به درد آورد روزگار

دگر عضوها را نماند قرار

***

بیت نخست شعر **یاد شده، صحیح نوشته نشده** است. ما به کمک **مفاهیم ریاضی، طرز صحیح نوشتن** و صحیح خواندن **بیت نخست را نشان می‌دهیم.**

شعر بالا را به **صورت زیر می‌نویسیم:**

بنی آدم اعضای یک Xاند

که در آفرینش ز یک گوهرند

چو عضوی به درد آورد روزگار

دگر عضوها را نماند قرار

از بیت نخست معلوم می‌شود که X یک مجموعه است؛ زیرا اعضایی دارد که از یک گوهرند. با توجه به بیت دوم X مجموعه‌ای است که اگر عضوی از آن به درد بیاید، دیگر اعضای آن مجموعه بی‌قرار می‌شوند. پس X همان «بدن» است.

اکنون باید در بیت نخست به جای X یک کلمه بگذاریم که به معنی «بدن» و با واژه‌ی «گوهر» هم‌قافیه باشد. واژه‌ی «پیکر» به معنی بدن و با واژه‌ی «گوهر» هم‌قافیه است، پس در بیت نخست به جای X، واژه‌ی «پیکر» را می‌گذاریم. بیت به این صورت درمی‌آید:

بنی آدم اعضای یک پیکرند

که در آفرینش ز یک گوهرند

اکنون این بیت دارای معنی کاملاً مناسبی است.

اکنون نظر زنده یاد استاد سعید نفیسی را در این مورد می‌آوریم (نقل از کتاب در مکتب استاد، برگرفته از برنامه‌های رادیو ایران، شامل بحثی پیرامون درست گفتن و درست نوشتن و درست خواندن، چاپ چهارم، صفحه‌ی ۳۰).

پرسش: راستی استاد محترم! اخیراً چاپ تازه‌ای از گلستان سعدی منتشر کرده‌اید. در آن‌جا دیدم که یک شعر معروف سعدی را که همه‌جور دیگری می‌خوانند و تعبیر می‌کنند، در این چاپ به شکل دیگری انتشار داده‌اید. منظورم این بیت خیلی مشهور است که به بسیاری از زبان‌ها هم ترجمه کرده‌اند:

بنی آدم اعضای یکدیگرند

که در آفرینش ز یک گوهرند

پاسخ: اما متأسفانه همه غلط می‌خوانند. این شعر در اصل این طور بوده است:

بنی آدم اعضای یک پیکرند

که در آفرینش ز یک گوهرند

حالا دلیلش را عرض کنم: در زمان سعدی، نوعی خط رواج داشته است که «خط عمومی» بوده و همه با این خط می‌نوشتند و به آن خط تعلیق می‌گفتند. در خط تعلیق، معمول بوده است که برای تند نوشتن، گاهی بعضی حروف را که باید جدا بنویسند، به هم می‌چسباندند؛ مثل خط شکسته‌ی امروز. از آن جمله، در کلمه‌ی «یکدیگر»، «دال» را به «یا» می‌چسباندند و «پیکر» و «دیگر» را مثل هم می‌نوشتند. تنها در «دیگر»، دال را بزرگ‌تر از «پ» پیکر می‌نوشتند و ممکن بود اگر دقت نکنند، پیکر را دیگر بخوانند. همین بلا بر سر شعر سعدی آمده است. تصور این را بفرمایید که شاعری بزرگ نمی‌گوید، بنی آدم اعضای یکدیگر هستند، مخصوصاً جایی که پس از آن می‌گوید:

چو عضوی به درد آورد روزگار

دگر عضوها را نماند قرار

ملاحظه می‌کنید؟ شکی نیست که عضو یعنی اجزای یک پیکر و یک بدن. وانگهی تصور بفرمایید که اگر اعضای یکدیگر بخوانیم، چه‌قدر مضحک می‌شود. نتیجه این می‌شود که من سر شما هستم و شما مثلاً دست من هستید. مرد بزرگی مثل سعدی هرگز این طور حرف نمی‌زند.