رشد آموزش ریاضی ۹۹

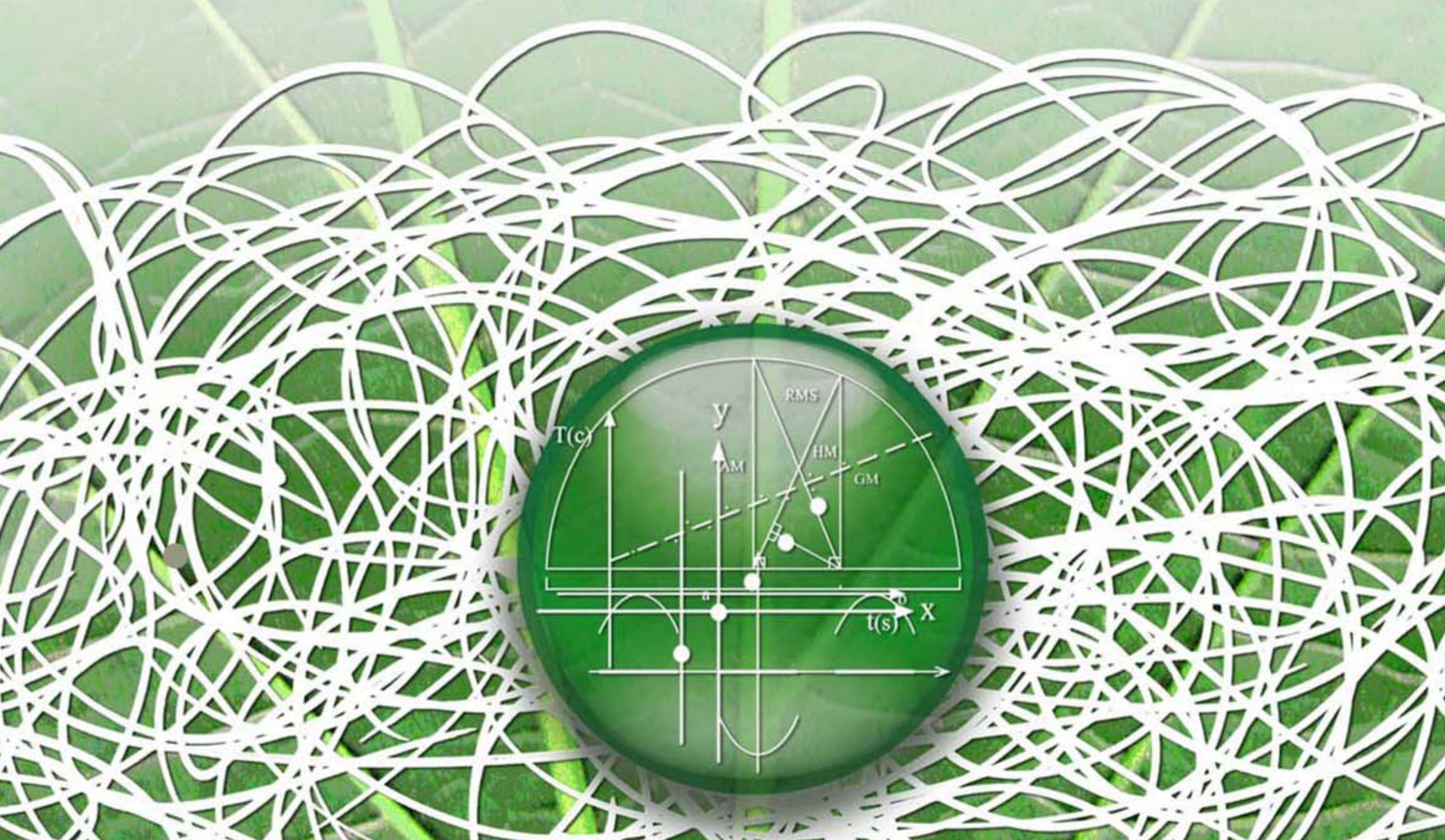
وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

دوره‌ی بیست و هفتم/ شماره‌ی۳ / بهار ۱۳۸۹ / ۶۴ صفحه/ ۴۵۰۰ ریال

فصلنامه‌ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

www.roshdmag.ir

ISSN: 1606-9188



- داستان جبر
- ضرورت تلفیق در برنامه‌ی درسی
- درک دانش آموزان از مفهوم اصلی تابع
- اثبات نامساوی‌ها به کمک توابع محدب

بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

رشد آموزش ریاضی ۹۹

دوره‌ی بیست و هفتم/ شماره‌ی ۳/ بهار ۱۳۸۹

فصلنامه‌ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

فهرست

سخن سردبیر ۲ زهرا گویا
داستان جبر، منافع و دام‌های شیء انگاری (قسمت اول) ۴ آنا اسفارد و لیُرا لینچوسکی
ترجمه : زهرا کامیاب وامیرحسین اصغری
بازنگری یک تجربه؛ ضرورت تلفیق در برنامه‌ی درسی ۱۵ سپیده چمن‌آرا
درک دانش‌آموزان از مفهوم اصلی تابع ۲۴ بی بی زکیه پرهیزگار و زهرا گویا
روایت معلمان: بررسی ویژگی‌های چهارضلعی‌ها ۳۴ نغمه حاجی صادقی
چگونگی انتخاب تکالیف برای کلاس درس ۳۸ افسانه حیدری ارجلو
دیدگاه(۱):تعلم وتربیت قرون وسطایی به سبک جدید! ۴۲ مریم گویا
دیدگاه(۲):درباره دیدگاه تحلیل و روش تدریس ریاضی۲ متوسطه و... ۴۵ مؤلفان ریاضی ۲
اثبات نامساوی‌ها به کمک توابع محدب (قسمت ۲) ۴۷ علی غلامیان
استفاده از کتاب‌های کمک آموزشی ریاضی؛ آری یا نه؟ ۵۲ محسن تنده
سرگرمی‌های تاریخی در آموزش ریاضی ۵۶ نرگس عصارزادگان
معرفی نشریه ۶۴

عکس روی جلد: رضا بهرامی

مجله‌ی رشد آموزش ریاضی نوشته‌ها و گزارش تحقیقات پژوهشگران و متخصصان تعلیم وتربیت، به ویژه معلّمان دوره‌های تحصیلی مختلف را در صورتی که در نشریات عمومی درج نشده و مرتبط با موضوع مجله باشد ،می پذیرد . لازم است در مطالب ارسالی موارد زیر رعایت شود:

- مطالب یک خط در میان و در یک روی کاغذ نوشته و در صورت امکان تایپ شود.
- شکل قرار گرفتن جدول ها، نمودارها و تصاویر، پیوست و در حاشیه‌ی مطلب نیز مشخص شود.
- نثر مقاله، روان و از نظر دستور زبان فارسی درست باشد و در انتخاب واژه‌های علمی و فنی دقت شود.
- برای ترجمه‌ی مقاله، نخست اصل مقاله و منبع دقیق آن، به همراه ترجمه‌ی یک بند از آن، به دفتر مجله ارسال شود تا مورد بررسی هیئت تحریریه قرار گیرد و پس از تصویب مقاله و ترجمه‌ی ارایه شده، سفارش ترجمه به فرستنده‌ی مقاله داده خواهد شد. در غیر این صورت،مجله می‌تواند سفارش ترجمه‌ی مقاله را به مترجم دیگری بدهد.
- در متن های ارسالی تا حد امکان از معادل‌های فارسی واژه‌ها و اصطلاحات استفاده شود.
- پی‌نوشت ها و منابع، کامل و شامل نام اثر، نام نویسنده، نام مترجم، محل نشر، ناشر، سال انتشار و شماره‌ی صفحه‌ی مورد استفاده باشد.
- چکیده ای از اثر و مقاله‌ی ارسال شده در حد اکثر ۲۵۰ کلمه ، همراه مطلب ارسال شود.
- در مقاله های تحقیقی یا توصیفی، واژه‌های کلیدی در انتهای چکیده، ذکر شود.

هم چنین:

- مجله در پذیرش، رد، ویرایش یا تلخیص مقاله های رسیده مجاز است.
- مطالب مندرج در مجله ، الزاما مبیّن نظر دفتر انتشارات کمک آموزشی نیست و مسئولیت پاسخ‌گویی به پرسش های خوانندگان، با خود نویسنده یا مترجم است.
- مقاله‌های دریافتی در صورت پذیرش یا رد ، بازگشت داده نمی‌شود.

- **نشانی دفتر مجله :** تهران، ایرانشهر شمالی، پلاک ۲۶۶. صندوق پستی:۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
- **تلفن :** ۹-۸۸۸۳۱۱۶۱ (داخلی ۳۷۴)
- **نمابر:** ۸۸۳۰۱۴۷۸
- **پایگاه اینترنتی:** www.roshdmag.ir
- **رایانامه:** riazi@roshdmag.ir
- **تلفن پیام‌گیر نشریان رشد:** ۸۸۳۰۱۴۸۲
- **کد مدیرمسئول:** ۱۰۲ ● **کد دفتر مجله:**۱۱۳ ●
کد امور مشترکین: ۱۱۴
- نشانی امور مشترکین : تهران، صندوق پستی : ۱۶۵۹۵/۱۱۱
- **تلفن امور مشترکین :**۷۷۳۳۶۶۵۶-۷۷۳۳۶۶۵۵
- **چاپ:** شرکت افست (سهامی عام)
- **شمارگان:**۱۲۰۰۰

مدرسه: حق یا امتیاز

هر که در این سرا درآید، نانش دهید
نانش دهید و از نامش مپرسید
چه آن کس که به درگاه باری تعالی به جان ارزد،
البته بر خوان بوالحسن به نان ارزد.

شیخ ابوالحسن خرقانی

کتاب نورالعلوم

قرن چهارم و اوایل قرن پنجم هجری

از شروع قرن تمام شده، مدرسه جزو حقوق اولیه‌ی بشری شد و بدین سبب، نهادی به نام آموزش عمومی و جایگاهی به نام مدرسه، تأسیس شد. طبیعی است که این حرکت در تداوم خود، بیشتر و بیشتر به وظیفه‌ی اصلی‌اش که همانا آموزش همگانی باشد، نزدیک شد. مهم‌ترین علت وجودی تمام آموزش‌های عمومی، تأمین این حقوق ـ یعنی حق آموزش ـ بیان شده است و در نتیجه، در سراسر جهان، تمام دولت‌ها موظف‌اند که مدرسه رفتن افراد را تسهیل کنند. در واقع، حق آموزش، وظیفه‌ی هر دولتی در قبال جامعه‌ی خود است و این حقی است که هر شهروندی ـ در هر جای دنیا ـ از جامعه‌ی خویش طلب می‌کند.

اما در عصر جدید، موازنه‌ها به هم ریخته است و به جهت شأنیت و جایگاه، مدرسه تداوم آموزش در گذشته نیست. به‌طور مثال، در ایران مدارس متنوعی تأسیس شده‌اند که افراد را برای بهره‌مندی از حق طبیعی خود یعنی آموزش دیدن، سَرَند می‌کنند و به خیال خویش، سره را از ناسره جدا می‌کنند و برای آن، توجیهات مردم پسندانه می‌آورند. در حالی که از منظر علم تعلیم و تربیت ـ نه سلیقه‌های آموزشی که اغلب ریشه در آرمان‌های افراد دارد و بسیاری از آن‌ها از نظر علمی قابل دفاع نیستند ـ روش‌های مورد استفاده در بسیاری از این مدارس متنوع، از چنان یکنواختی و کهنگی برخوردارند که شگفت‌آورند و این فرصت‌سوزی غریب است.

واقعیتی که در ایران اتفاق افتاده این است که حتی مدارسی که دارای امکانات فراوان اجتماعی و اقتصادی هستند، باز هم از نظر اصول علمی ـ آموزشی، دچار مشکلات فراوان‌اند زیرا برنامه‌های این مدارس، از **کهنگی دیدگاهی** رنج می‌برند.

در حقیقت، به دلیل فقدان چشم‌اندازهای آموزشی پیشرو، و کمبود دانش تخصصی آموزشی مبتنی بر مدرسه، حتی بسیاری از افراد توانمند و تحصیل کرده نیز، جز تجربه‌های دوران تحصیل خود، به ندرت الگوی دیگری دارند و در نتیجه، تعالی آموزشی را با تکرار آموزش دوره‌ی خودشان، انتظار می‌کشند.

گاهی پدر و مادرهای تحصیل کرده و آرمان‌خواه نیز، تجربه‌های آموزشی خود را به عنوان بهترین الگو، به مدارس ویژه تحمیل می‌کنند؛ الگوهایی که بدون قضاوت و نقد منصفانه، انگار که تنها الگوهای موجود بوده‌اند.

به گفته‌ی گاردنر، اگر یک نفر از قرن نوزدهم وارد مدارس کنونی ما شود، به راحتی با این مدارس سازگار می‌گردد و احساس غربت نمی‌کند و در واقع، احساس می‌کند که هیچ مشکلی با آن‌ها نخواهد داشت! زیرا به گفته‌ی وی، در همین کلاس قرن بیست و یکم، هم‌چنان معلم پای تابلو مشغول نوشتن است، دانش‌آموز یادداشت برمی‌دارد، درس گفته می‌شود، آموزه‌ها در سکوت ـ و گاهی با چاشنی تنوع در قالب کاری در گروه‌های کوچک یادگیری! ـ دریافت می‌شوند! **تمرین** داده می‌شود، **تکرار** می‌شود و داستان با **همین یکنواختی**، ادامه می‌یابد. گاردنر در ادامه می‌گوید؛

این در زمانی است که اگر آن قرن نوزدهمی وارد جامعه‌ی واقعی شود، وحشت‌زده می‌گردد و به شدت احساس غربت می‌کند، زیرا تکنولوژی آن چنان موازین جامعه را زیر و رو کرده که بین این دنیا و دنیای قرن نوزدهم خود، هیچ فصل مشترکی نمی‌بیند، ولی در مواجهه با مدرسه و درون حصار مدرسه، مثل آن است که دوران خودش را تجربه می‌کند!

مدرسه در مواجهه با تغییرات، بیشتر ماهیت محافظه‌کارانه دارد و این امر، منحصر به ایران نیست، اما شدت و ضعف دارد. در بعضی از مناطق دنیا، خیلی شدیدتر است و در بعضی جاها ضعیف‌تر. به این علت، تلاش‌های بسیاری می‌شود تا فاصله‌ی بین مدرسه و دنیای واقعی کمتر شود.

با این وجود، انتخاب روش آموزشی اغلب چنین است که می‌شنویم و می‌بینیم که دیگران چگونه عمل کرده‌اند! اگر از محصول آموزش آن‌ها خوشمان آمد، آن روش‌ها را صرف نظر از تناسبشان با ویژگی‌های دانش‌آموزان خود، به کار می‌بندیم تا محصول مشابه تولید کنیم! در نتیجه، چون چشم‌اندازهای روشن آموزشی و الگوهای کلان و منعطف نداریم، تقریباً به روزمرگی می‌افتیم و هر الگوی جدیدی را هم که به بدنه‌ی آموزشی تزریق می‌کنیم، عملاً پاسخ نمی‌گیریم.

اما با وجود این کهنگی دیدگاهی که در بطن آموزش ما وجود دارد، محصولات خوبی تولید می‌شوند زیرا جامعه خارج از چارچوب‌های تنگ مدرسه، به حیات طبیعی خود و رسیدن به تعالی ادامه می‌دهد. هم‌چنان که انکار تکنولوژی مانند انکار روشنایی روز است، نادیده گرفتن ظرفیت‌های پیدا و پنهان جمعیت عظیم دانش‌آموزان فهیم و کم بهره از آموزش‌های خوب فکر شده اما توانمند در بهره بردن از حداقل‌های موجود و امیدوار به آینده‌ای که متعلق به آن‌هاست، خطایی جبران‌ناپذیر است. حیف است که با سرند کردن‌های به‌جا و نابه‌جا، جامعه‌ی کلان دانش‌آموزی را از هم تفکیک کنیم و برای جمع قلیلی از آن‌ها، آموزش‌های به اصطلاح ویژه تدارک ببینیم. حیف است که از ادبیات و فرهنگ غنی ایرانی ـ اسلامی خود بهره نبریم که در هزار سال پیش نیز، حقوق عمومی افراد را محترم می‌شمرد و از زبان پیر دانا ـ شیخ ابوالحسن خرقانی، نهیب می‌زد که «چه آن‌کس که به درگاه باری تعالی به جان ارزد، البته بر خوان بوالحسن به نان ارزد!» این سخن نغز خرقانی، تمثیل زیبایی برای آموزش مدرسه‌ای در ایران است که آموزش عمومی، خوان گسترده‌ای است که همه‌ی دانش‌آموزان ـ تیزهوش و معمولی و دیر یادگیرنده ـ حق بهره‌بردن جمعی از آن را دارند و خوشبختانه، یافته‌های پژوهشی فراوانی بر این نظر صحّه گذاشته‌اند که تفکیک دانش‌آموزان از هر نظر ـ استعداد، هوش، قابلیت یادگیری، سطح آموزشی و نظایر آن ـ و اغلب با پشتوانه‌ی نتایج آزمون‌های عدیده و کثیره، صدماتی که در درازمدت به آموزش عمومی می‌زند، بیش از اندک باری است که ممکن است از دوش آموزش عمومی بردارد.

***

هر سال جدید، همیشه نویدبخش تحول در قلب‌هاست که عاجزانه در موقع تحویل سال، از مقلب‌القلوب طلب می‌نمائیم. امیدوارم سال ۱۳۸۹، سالی از هر نظر پر برکت و نشاط‌آور و مولد باشد. در ضمن، به معلمان عزیز هم که روزشان را در همین فصل جشن می‌گیرند تبریک مضاعف گفته و برایشان، موفقیت بیشتر را آرزو دارم.

داستان جبر

منافع و دام‌های شیءانگاری

بخش اول

نویسندگان: آنا اسفارد و لیُرا لینچِوسکی
مترجمان: زهرا کامیاب
دانشجوی دکتری آموزش ریاضی واحد علوم و تحقیقات دانشگاه آزاد اسلامی
امیرحسین اصغری
دانشگاه شهید بهشتی

چکیده

نمادهای جبری به خودی خود حرفی برای گفتن ندارند. درحقیقت، آن‌چه از نمادها درک می‌شود، وابسته به شرایط مسئله‌ای است که نمادها برای آن به‌کار رفته‌اند. علاوه بر این، این مسئله به آن‌چه فرد می‌تواند درک کند و آمادگی توجه کردن به آن را دارد، وابسته است. آخرین عبارت، موضوع مهم این مقاله است، یعنی تمرکز اصلی بر تغییرپذیری[1] و انطباق‌پذیری[2] دانش جبری دانش‌آموزان است.

تجزیه و تحلیل، در درون چارچوب نظریه‌ی شیءانگاری مفاهیم انجام شده است. براساس این نظریه، یک دوگانگی فرایند-شیء ذاتی در بیش‌تر مفاهیم ریاضی وجود دارد. اساس نظریه این است که در ابتدا، مفهوم عملیاتی (فرایندمحور[3]) ایجاد می‌شود و پس از آن از طریق شیءانگاری فرایندها، اشیای ریاضی (مفاهیم ساختاری) ایجاد می‌شوند. شواهد بسیاری وجود دارد که نشان می‌دهند رسیدن به شیءانگاری مفاهیم، دشوار است.

در این مقاله، ابتدا ماهیت و رشد تفکر جبری از دیدگاه شناخت‌شناسی مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. حامی این دیدگاه، مشاهدات تاریخی است. درنهایت، رشد تفکر جبری به‌عنوان دنباله‌ای از انتقال‌های همواره رو به پیشرفت، از نگاه عملیاتی به ساختاری معرفی شده است. سپس، این مدل برای یادگیری فردی به‌کار رفته است. تمرکز بر دو انتقال تعیین‌کننده است: انتقال از جبر عملیاتی محض به جبر ساختاری از «یک مقدار ثابت» (از یک مجهول) و سپس از این‌جا به جبر تابعی (از یک متغیر). بعد از این، دشواری‌هایی که یادگیرندگان در این نقاط اتصال تجربه می‌کنند، با استفاده از داده‌های تجربی بیش‌تری که از دامنه‌ی وسیعی از منابع به‌دست آمده، شرح داده شده است.

کلید واژه‌ها: جبر مدرسه‌ای، شیءانگاری مفاهیم، تفکر جبری.

زمانی که به یک عبارت جبری مانند $۳(x+۵)+۱$ نگاه می‌کنید، چه چیزی می‌بینید؟ بستگی دارد. احتمالاً در بعضی موقعیت‌ها خواهید گفت، این توصیفی کوتاه و رسا از یک فرایند محاسباتی است. در این حالت

$3(x+5)+1$ هم‌چون دنباله‌ای از دستورالعمل‌ها است: ۵ را به عددی که دارید اضافه کنید، نتیجه را در ۳ ضرب و سپس ۱ را اضافه کنید. در موقعیتی دیگر ممکن است این عبارت جبری را طور دیگری ببینید: $3(x+5)+1$ عدد معینی را نمایش می‌دهد. این عبارت، نتیجه‌ی محاسبات است نه خود محاسبات. اگرچه عدد x مجهول است و در هر لحظه نمی‌توان نتیجه را مشخص کرد، با این وجود، این عبارت جبری هنوز یک عدد است و انتظار می‌رود کل عبارت به‌عنوان یک عدد عمل کند. تعبیر دیگری هم وجود دارد: ممکن است $3(x+5)+1$ را به‌عنوان یک تابع در نظر بگیریم. تابع، نگاشتی است که هر عدد x را به عدد دیگری می‌برد. در این حالت، فرمول هیچ مقدار ثابتی (حتی مجهول) را نشان نمی‌دهد. در عوض، نشان‌دهنده‌ی یک تغییر است. اگر در این عبارت جبری به جای یکی از ضرایب عددی (مثلاً ۳) یک حرف قرار گیرد (مثلاً a)، عبارت جبری حاصل $a(x+5)+1$، پیچیده‌تر به نظر می‌رسد. در این حالت ممکن است عبارت به‌عنوان خانواده‌ای از توابع از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ در نظر گرفته شود. علاوه بر این، تعبیر دیگری نیز وجود دارد: ممکن است فردی ادعا کند آن‌چه در پس نمادها پنهان شده، تابعی از دو متغیر، از $\mathbb{R}^2$ به $\mathbb{R}$ است.

البته شیوه‌ی ساده‌تری نیز برای مشاهده‌ی $3(x+5)+1$ وجود دارد: ممکن است این عبارت، براساس شکل ظاهری آن صرفاً به‌عنوان رشته‌ای از نمادها که چیزی را نمایش نمی‌دهند، در نظر گرفته شود. این عبارت جبری به خودی خود یک شیء جبری است. اگرچه این عبارت از نظر معنایی تهی است، اما هنوز ممکن است با آن دست‌ورزی شود و براساس قواعد مشخصی که به‌خوبی تعریف نشده‌اند، با سایر عباراتی از این نوع ترکیب شود.

در این‌جا می‌توان پرسید که آیا در عمل نیز، مشاهدات بالا از معانی جبر مهم هستند؟ پاسخ مثبت است. به‌عنوان مثال، زمانی که با معادلاتی از قبیل $(p+2q)x^2+x=5x^2(3p-q)x$ مواجه می‌شویم، بدون دانستن این‌که آیا تساوی مربوط، عددی یا تابعی است، نمی‌توانیم مسئله را حل کنیم. در این‌جا این سؤال مطرح است که آیا هدف، به‌دست آوردن مقدار x است به‌طوری که تساوی برقرار باشد (این مقدار باید برحسب p و q بیان شود)؟ یا هدف، به دست آوردن مقادیر پارامترهای p و q است، به‌طوری که دو تابع $(p+2q)x^2+x$ و $5x^2(3p-q)x$ مساوی باشند؟ تفاسیر مختلف، شیوه‌های متفاوت درگیر شدن با مسئله و راه‌حل‌های متفاوت را نتیجه می‌دهد: در حالت اول، فرد ریشه‌های معادله را با به‌کار بردن فرمول $x_1,\ x_2=(-b\pm\sqrt{\Delta})/2a$ پیدا می‌کند و در حالت دوم، با مساوی قرار دادن ضرایب توان‌های یکسان x در دو عبارت ($3p-q=1$ و $p+2q=5$)، مقادیر پارامترهای p و q به‌دست می‌آیند. حالت دیگری هم وجود دارد که ممکن است نمادها برای فرد معنایی نداشته باشند. این دیدگاه در ابتدا، کمکی به حل مسأله نمی‌کند. اما ممکن است فرد یک عکس‌العمل غیر ارادی نشان دهد. او احتمالاً به‌طور غیر ارادی کاری را انجام می‌دهد که برای آن شرطی شده است، یعنی در مواجهه با یک معادله‌ی درجه‌ی دوم، بدون توجه به سؤالی که پرسیده شده، به فرمول ریشه‌ها متوسل می‌شود.

ریاضی‌دان فرانسوی فرنکوئیز ویت (۱۶۰۳-۱۵۴۰) اولین کسی بود که مقادیر معین عددی را با نمادها جایگزین کرد. این ابداع، منجر به تغییرات مفهومیِ دور از دسترس در جبر شد

تعدد دیدگاه‌ها نسبت به شی ظاهراً ساده‌ای مانند $3(x+5)+1$، حقیقتاً گیج‌کننده است. در بخش‌های بعدی خواهیم گفت این مسئله، هم‌چنین منشأ قدرت جبر است.

۱. مقدمات: جبر از نگاه نظریه‌ی شیءانگاری مفاهیم

نمادهای جبری به خودی خود حرفی برای گفتن ندارند. درحقیقت، آن‌چه از نمادها درک می‌شود، وابسته به شرایط مسئله‌ای است که نمادها برای آن به‌کار رفته‌اند. هم‌چنین این مسئله به هرچه که فرد می‌تواند درک کند و آمادگی توجه کردن به آن را دارد، وابسته است. آخرین عبارت، موضوع مهم این مقاله است. تمرکز اصلی بر تغییرپذیری و انطباق‌پذیری دانش جبری دانش‌آموزان است. سؤالی که در این‌جا مطرح است این است که یادگیرنده تا چه اندازه می‌تواند تفاسیر گوناگون محتملی از ساخت‌های جبری را درک کند و به کار برد. قبل از درگیر شدن با این مسئله، بر نوع تجزیه و تحلیلی که در این‌جا انجام خواهد شد، تأمل می‌کنیم.

تمایزهایی که در مثال‌های ابتدای مقاله مطرح کردیم، بسیار ظریف هستند و به آن‌چه که در ذهن افراد رخ می‌دهد اشاره دارد،

نه به آن‌چه که روی کاغذ می‌نویسند و به معلم تحویل می‌دهند. درواقع، تفاوت بین تفاسیر مختلف معادله‌ی $(p+2q)x^2+x=5x^2(3p-q)x$ همیشه در یک آزمون استاندارد نشان داده نمی‌شود. علت این است که دانش‌آموز، چه عبارت را یک تساوی عددی تصور کند، چه آن‌را فقط به‌عنوان رشته‌ای از نمادها در نظر بگیرد، احتمالاً فرمول‌های یکسانی به‌کار می‌برد و دست‌ورزی‌های یکسانی انجام می‌دهد. یک بررسی بسیار دقیق و با جزئیات از رفتارها و اظهارات دانش‌آموز لازم است تا بتوانیم نسبت به تفکر او بصیرتی پیدا کنیم (به‌عنوان مثال شونفیلد[۴] و همکاران را ببینید، ۱۹۹۳؛ نویسندگان این نوع از تجزیه و تحلیل را میکروژنتیک[۵] می‌نامند).

ریاضی یک ساختار چندسطحی است، موضوعی که در آن ایده‌های اساساً یکسان اگر از موقعیت‌های مختلف مشاهده شوند، متفاوت خواهند بود

ما در این‌جا سعی می‌کنیم تجزیه و تحلیل دقیق و همراه با جزئیات را با اتکا به یک چارچوب نظری معین که آن را نظریه‌ی شیء‌انگاری مفاهیم می‌نامیم، انجام دهیم (یادآور می‌شویم که ممکن است سایر نویسندگان، اصطلاحات علمی متفاوتی برای ایده‌های مرتبط یکسان یا تقریباً یکسان به‌کار برده باشند؛ فهرست نام‌های احتمالی را در هرل[۶] و کاپوت[۷]، ۱۹۹۱ ببینید). با کمک این چارچوب، حقایق بی‌قاعده‌ی فراوانی تبدیل به یک کل معنادار و قابل کنترل می‌شوند. مانند هر مدل نظری دیگری، این مدل نیز بر جنبه‌های خاصی از حوزه‌ی مورد جست‌وجو تأکید دارد و سایر جنبه‌ها را کنار می‌گذارد. با این وجود، این مدل به‌عنوان ابزاری برای تجزیه و تحلیل توسعه‌ی مفاهیم گوناگون ریاضی، به‌خصوص مفهوم تابع، مورد توجه است (اسفارد، ۱۹۹۲؛ بریدنباخ[۸] و همکاران، ۱۹۹۲). هم‌چنین، این مدل برای نظم بخشیدن به بخش عمده‌ای از یافته‌های روبه‌رشد در مورد تفکر جبری به‌کار رفته است (کیرن[۹]، ۱۹۹۲). در قسمت‌های بعدی، جبر را از دریچه‌ی این مدل خواهیم دید.

در باقی‌مانده‌ی این بخش، ایده‌ی اصلی نظریه‌ی شیء‌انگاری مفاهیم را ارائه خواهیم کرد. ادعاهایی که داریم، نظامی را شکل می‌دهند. در سرتاسر این مقاله، عناصر مختلف این نظام، مورد بحث قرار خواهند گرفت. توصیه می‌شود، خواننده برای شناخت جامع‌تر ایده‌های اصلی این مدل، به اسفارد (۱۹۹۱) و کیرن (۱۹۹۱) مراجعه کند. علاوه بر این، دوبینسکی[۱۰] (۱۹۹۱) و هرل و کاپوت (۱۹۹۱)، مدل تقریباً مشابهی را توصیف می‌کنند. ایده‌های دوبینسکی، تعمیمی از نظریه‌ی تجرید بازتابی[۱۱] پیاژه است (بت[۱۲] و پیاژه، ۱۹۶۶). مشاهدات کاپوت و هرل براساس مفهوم گرینو[۱۳] از هستی مفهومی[۱۴] است (گرینو، ۱۹۸۳). خاطرنشان می‌سازیم، ایده‌ی دوییت فرایند ـ شی اشیای ریاضی که در این مقاله نقش اساسی دارد، دوگانگی ابزار ـ شیء دوآدی[۱۵] (۱۹۸۵) را به‌یاد می‌آورد.

در مثال ابتدای مقاله، اشیای ریاضی گوناگونی به‌عنوان مصداق‌های عبارت جبری معرفی شده‌اند. مثلاً یک عدد، یک تابع، یک خانواده (مجموعه) از توابع مصداق‌هایی از عبارت‌های جبری هستند. اما یکی از تعابیر عبارت جبری ماهیت متفاوتی داشت؛ زمانی که $3(x+5)+1$ به‌عنوان یک‌سری از عملیات خوانده شد، این فرایند محاسباتی بود که به نمادها معنا بخشید نه هر شیء مجرد دیگری (البته صرف‌نظر از اعدادی که در فرایند به‌کار رفته‌اند). چیزی که در این مثال مشاهده شد، ظاهراً در کل ریاضی شایع است: نمایش یکسان و مفاهیم ریاضی یکسان، ممکن است گاهی به‌عنوان فرایندها و گاهی به‌عنوان مفاهیم تفسیر شوند؛ یا، به بیان اسفارد (۱۹۹۱)، ممکن است هم عملیاتی و هم ساختاری درک شوند. بنابراین، شیوه‌های به‌ظاهر ناسازگار در درک ساخت‌های ریاضی، در هر نوع فعالیت ریاضی حضور دارند و مکمل یک‌دیگرند. این واقعیت، نقطه‌ی شروع مدل یادگیری و حل مسئله‌ی ریاضی ما را شکل می‌دهد. مفهوم مکمل به همان شیوه‌ای که در فیزیک به‌کار می‌رود (براساس ایده‌های نیل بوهر[۱۶])، در این‌جا نیز به‌کار رفته است. در فیزیک برای توجیه برخی مشاهدات، موجودات درون‌اتمی را هم به‌عنوان ذره‌های مادی و هم به‌عنوان موج در نظر می‌گیریم.

مدل‌های تفکر عملیاتی و ساختاری، تفاوت‌های ظریفی دارند و تمایز قائل‌شدن بین آن‌ها ساده نیست. توانایی درک ریاضی به این شیوه‌ی دوگانه، جهان ایده‌های مجرد را به تصویری از جهان مادی تبدیل می‌کند: مشابه جهان واقعی، اعمالی که در این‌جا انجام می‌شوند، «مواد خام» و محصولاتی دارند. این

مواد خام و محصولات، موجوداتی هستند که با آن‌ها به‌عنوان اشیای اصیل و پایدار رفتار می‌شود. با این وجود، برخلاف زندگی واقعی، یک نگاه دقیق‌تر به این موجودات آشکار می‌کند که نمی‌توان آن‌ها را به‌عنوان موجودات قائم به ذات[17] که بتوانند از فرایندها جدا باشند، در نظر گرفت. اشیای مجردی مانند $\sqrt{-1}$ و ۲− یا تابع $3(x+5)+1$ نتیجه‌ی نگاه‌های متفاوت به رویه‌های به‌دست آوردن ریشه‌ی دوم از ۱−، منفی کردن ۲ و نگاشت اعداد حقیقی روی خودشان از طریق یک تبدیل خطی است. بنابراین، اشیای ریاضی نتیجه‌ای از شی‌انگاری مفاهیم هستند و شی‌انگاری مفاهیم حاصل توانایی ذهنی ما برای دیدن نتیجه‌ی فرایندها به‌عنوان موجودات پایدار قائم به‌خود است.

زمانی که ایده‌های جبری فقط با کلام بیان شده‌اند، به دشواری می‌توان رویکرد ساختاری پیشرفته‌تری را تصور کرد. در رویکرد ساختاری، فرایندهای محاسباتی به‌طور کلی از دید بالاتری مورد ملاحظه قرار می‌گیرند، اما رویکردهای عملیاتی و ساختاری، بازنمایی‌های یکسانی دارند. به‌عبارت دیگر، کلمات، مانند نمادها قابل دست‌ورزی نیستند. قابل دست‌ورزی بودن است که این امکان را فراهم می‌کند تا مفاهیم جبری، کیفیت شیء مانندی داشته باشند. امکان انجام فرایندهای سطح بالاتر در فرایندهایی که با عبارات فشرده نمایش داده شده‌اند، تفکر ساختاری را ترغیب می‌کند

این مشاهده‌ی هستی‌شناسانه، نتایج نظری متعددی دربردارد، نظام کاملی از ادعاها در مورد حل مسئله‌ی ریاضی تدارک می‌بیند و مدلی از شکل‌گیری مفاهیم را به‌وجود می‌آورد. این مدل، هم‌چنان که برای درک تحول تاریخی مفاهیم به‌کار می‌رود، برای یادگیری فردی نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد و دلایلی برای دشواری‌هایی که دانش‌آموز در فهمیدن یک ایده‌ی ریاضی جدید تجربه می‌کند، ارائه می‌دهد. در ادامه، همه‌ی این موضوعات را مورد بحث قرار می‌دهیم. در بخش ۲، بحث را با یک تجزیه و تحلیل معرفت‌شناختی که توسط مشاهدات تاریخی حمایت می‌شود، آغاز می‌کنیم. در بخش ۳، یک دیدگاه روان‌شناسی مطرح می‌کنیم و تلاش خواهیم کرد نشان دهیم که مدل شکل‌گیری جبر که از طریق تجزیه و تحلیل تاریخی و معرفت‌شناختی ساخته شده، تا حدود زیادی متناسب با فرایندهایی است که همراه با یادگیری فرد رخ می‌دهند.

۲. جبر چیست و چگونه توسعه یافته است؟

برای نشان دادن این‌که در ریاضی، مفهوم عملیاتی مقدم بر مفهوم ساختاری است، می‌توان بحث‌های نظری و تجربی بسیاری به‌کار برد. آن‌چه در یک سطح به‌عنوان یک فرایند درک می‌شود، در سطح بالاتر به‌عنوان یک شیء درک می‌شود (به‌عنوان مثال؛ اسفارد، ۱۹۹۱ و ۱۹۹۲ را ببینید). به‌نظر می‌رسد زمانی که کاپوت (۱۹۸۹) بیان می‌کند که «موجودات ذهنی که از طریق شیءانگاری مفاهیم (دیدن اعمال، رویه‌ها و مفاهیم به‌عنوان اشیای پدیدارشناختی) ساخته شده‌اند، می‌توانند به‌عنوان پایه‌هایی برای اعمال، رویه‌ها و مفاهیم جدید در سطح بالاتری از سازمان‌دهی به‌کار روند» (ص. ۱۶۸)، مشاهدات مشابهی داشته است. هرچند ممکن است نقطه‌ی شروع برای ما و کاپوت کاملاً متفاوت باشد (به‌نظر می‌رسد ایده‌های کاپوت براساس نظریه‌ی تجرید بازتابی پیاژه بوده است)، اما اتفاق‌نظر اساسی در مورد نقش فرایندها و اشیای ریاضی و وابستگی متقابل آن‌ها وجود دارد. فرودنتال یکی از صریح‌ترین طرفداران تصور ریاضی به‌عنوان سلسله‌مراتبی از دیدگاه‌های متناوب است: «تجزیه و تحلیل من از فرایند یادگیری ریاضی سطوحی را در فرایند یادگیری آشکار ساخته است، جایی که ریاضیاتی که در یک سطح انجام می‌شود، ریاضی مشاهده شده در سطح بعدی می‌شود» (فرودنتال، ۱۹۷۸، ص ۳۳). هرچند این ادعا براساس تجزیه و تحلیل‌های متفاوتی بنا شده است، اما مانند نظریه‌ی ما، به‌ویژگی‌های اساسی یکسانی از ساخت‌های ریاضی اشاره دارد؛ یعنی بر این حقیقت تأکید دارد که ریاضی یک ساختار چندسطحی است، موضوعی که در آن ایده‌های اساساً یکسان اگر از موقعیت‌های مختلف مشاهده شوند، متفاوت خواهند بود.

همان‌طور که قبلاً گفتیم، ساخت‌های جبری باید دوبیت فرایند ـ شیء را انتقال دهند. اما انعطاف‌پذیری در هستی‌شناسی موجب می‌شود تا رسیدن به توانایی درک جنبه‌ی ساختاری، ساده نباشد. بنابراین، نقاط اتصال مهم در رشد ریاضی جایی است که انتقال از یک سطح به سطحِ دیگر رخ می‌دهد. این نقاط،

دشوارترین و جالب‌ترین نقاط هستند. بار دیگر عبارات فرودنتال را به‌کار می‌بریم؛ «اگر فرایند یادگیری را مورد مشاهده قرار دهیم، لحظات مهم و ارزشمند، ناپیوستگی‌ها هستند. آن‌ها جهش‌هایی‌اند که در فرایند یادگیری رخ می‌دهند» (ص ۷۸). بدین‌سبب، در تجزیه و تحلیلی که در ادامه می‌آید، تمرکز بر نقاط منفرد در رشد مفاهیم جبری است. برای آن‌که پیشرفت بیش‌تری صورت گیرد، دیدگاه هستی‌شناسی باید انطباق (فرایندـ شیء) را در این نقاط بپذیرد.

قبل از توضیح رشد جبر، ماهیت تحقیق‌مان را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. مانند هر حوزه‌ی دیگری از دانش بشری، امکان دارد ساخت جبر از دیدگاه‌های گوناگونی مورد بررسی قرار گیرد. فرد ممکن است بر ساختار منطقی موضوع تمرکز کند و بپرسد که چگونه بخش‌های مختلف دانش به یک نظام منسجم مرتبط می‌شوند؟ این نوع تجزیه و تحلیل را منطقی[۱۸] می‌نامیم. دیدگاه دیگر، رویکرد تاریخی است. این رویکرد تلاش‌های جمعی را که در طول زمان برای ساخت نظام مفروض مفاهیم انجام شده، مورد توجه قرار می‌دهد. درنهایت، ممکن است، محقق فرایندهای شناختی را که باعث شکل‌گیری یادگیری فردی می‌شوند، مورد بررسی قرار دهد. فرد قطعاً انتظار ندارد که این سه نوع تجزیه و تحلیل نتایج یکسانی دربرداشته باشند. همان‌طوری که برخی از نویسندگان نوشته‌اند، این، یک افسانه است که «ساختار [منطقی] ریاضی به‌طور دقیق تاریخ آن را منعکس کند» (کرو[۱۹]، ۱۹۸۸). علاوه بر این، فرد باید دقت کند که روان‌شناسی، نسخه‌ی دوباره نوشته شده‌ای از تاریخ نیست. به‌عبارت دیگر، فرایند هدایت عامدانه‌ی دوباره‌سازی مفاهیم جبری همان مسیر پرپیچ‌وخم اولین نویسندگانی که این راه نرفته را طی کرده‌اند، نیست. با این وجود، فرد ممکن است

گروهی از صورت‌گرایان انگلیسی (اِی. دمورگان، جی. پی‌کات و دی.اِف. گریگوری) پیشنهاد کردند که جبر باید از بار تفسیر اولیه‌اش رها شود. از این به بعد، باید با یک فرمول جبری به خودی خود به عنوان یک شیء رفتار کرد. شیئی که به شیوه‌های مختلف قابل تفسیر است اما خودش معنایی ندارد

نمادهای جبری به خودی خود حرفی برای گفتن ندارند. درحقیقت، آن‌چه از نمادها درک می‌شود، وابسته به شرایط مسئله‌ای است که نمادها برای آن به کار رفته‌اند

انتظار داشته باشد، شباهت‌های برجسته‌ای بین نتایج انواع مختلف تجزیه و تحلیل ببیند. گارسیا[۲۰] و پیاژه (۱۹۸۹)، برای مقایسه‌ی تحولات تاریخی و روان‌شناسی، مورد ویژه‌ای را بررسی کردند. بهتر است احتیاط کنیم، اما نباید تجزیه و تحلیل منطقی را کنار بگذاریم، زیرا منطق می‌تواند یک منشأ بالقوه‌ی ایجاد بصیرت در مورد فرایند یادگیری ریاضی است. ریاضی یک ساختار سلسله‌مراتبی است که در آن، بعضی از لایه‌ها قبل از کامل شدن بقیه، ساخته نمی‌شوند. درنتیجه، بعد از این‌که براساس تجزیه و تحلیل‌های منطقی، هستی‌شناسی و تاریخی، ادعاهایی در رابطه با توسعه‌ی جبر ارائه کردیم، نشان خواهیم داد که این مراحل، در یادگیری فردی نیز وجود دارند.

۱.۲. جبر به‌عنوان حساب تعمیم‌یافته: جنبه‌ی عملیاتی

در تمام تجزیه و تحلیل، نوعی از جبر را «عملیاتی» و نوع دیگر را «ساختاری» می‌نامیم. این بدین معنا نیست که در گام‌های متفاوت، در توسعه‌ی جبر، فقط یکی از انواع جبر (عملیاتی یا ساختاری) حضور دارد. ماهیت مکمل فرایندها و اشیا نشان می‌دهد که حضور یکی بدون دیگری ممکن نیست. علاوه بر این، روشن است که اگر فرایندها (مؤلفه‌های عملیاتی) مورد توجه قرار گیرند، باید اشیای معینی (عوامل ساختاری) وجود داشته باشند که این فرایندها برای آن‌ها به‌کار روند. ادعاهای ما مبنی بر این‌که انواع معینی از جبر ویژگی عملیاتی دارند درحالی‌که انواع دیگر ساختاری هستند، نشان می‌دهد تمرکز اولیه بر کدام نوع جبر است. به‌عنوان مثال، این عبارت که «جبر در ابتدا ویژگی عملیاتی دارد» یعنی؛ پیشرفته‌ترین و اصلی‌ترین ایده‌هایی که در این مرحله مورد توجه قرار می‌گیرند، به‌طور عملیاتی درک می‌شوند نه ساختاری.

تاریخ جبر، بیش‌تر مؤید این فرضیه است که رویکرد عملیاتی مقدم بر رویکرد ساختاری است زیرا طی چند هزار سال، جبر چیزی بیش از علم رویه‌های محاسباتی نبود.

از نقطه‌نظر توسعه‌ای، جبر ادامه‌ی حساب است. مشابه حساب (حداقل در مراحل اولیه‌اش) با اعداد و با محاسبات عددی کار می‌کند، اما نوع سؤالاتی که می‌پرسد متفاوت است و الگوریتم‌ها را به شیوه‌ی عمومی‌تری مورد دست‌ورزی قرار می‌دهد. آن‌هایی که نمایش نمادین را به‌عنوان ویژگی لازم جبر

نمی‌دانند، اتفاق نظر دارند که هم در تاریخ و هم در فرایند یادگیری ریاضی، تفکر جبری خیلی زودتر از معرفی هر نماد خاصی ظاهر می‌شود. به‌عنوان مثال، تفکر جبری با اولین تلاش برای پیدا کردن عدد مجهول شروع می‌شود. عدد مجهول عددی است که یک عملیات مشخص روی آن انجام شده و یک نتیجه‌ی معین به‌دست آمده است. در این نوع فعالیت، شیوه‌ی متداول حساب که به‌کار بردن یک الگوریتم محاسباتی برای یک عدد محسوس است، باید به‌طور معکوس انجام شود: به‌عنوان مثال، در یک

معادلات درجه‌ی دوم هستند (یا حداقل مسئله‌حل‌کن امروزی از چنین روشی استفاده می‌کند). در هر دو نمونه، به‌جای ضرایب عمومی، از اعداد محسوس استفاده می‌شود و راه‌حل به شکل توصیف کلامی برای پیدا کردن مجهول ارائه می‌گردد. بنابراین، رویکردی کاملاً عملیاتی است؛ تمرکز بر فرایندهای عددی است و هیچ اشاره‌ای به اشیا مجرد غیر از اعداد نیست.

از اولین دوران‌ها تا قرن شانزدهم، جبر لفظی[۲۴] (آن‌چه مورخین برای اشاره به جبر کلامی به‌کار می‌برند) مورد استفاده

جدول ۱

جبر لفظی ـ مثال‌ها

۱. بابلی‌ها، دو (؟) هزار سال قبل از میلاد (برگرفته از بویر[۲۲]، ۱۹۸۵، ص ۳۴)	
مسئله:	اگر مساحت منهای ضلع برابر ۱۴:۳۰ باشد، ضلع مربع را به‌دست آورید (اعداد در مبنای ۶۰ نمایش داده شده‌اند).
راه‌حل:	نصف یک را بگیرید که ۰:۳۰ است، سپس ۰:۳۰ را در ۰:۳۰ ضرب کنید که می‌شود ۰:۱۵ این را به ۱۴:۳۰ اضافه کنید تا ۱۴:۳۰:۱۵ را به‌دست آورید. این عدد مربع ۲۹:۳۰ است. حال ۰:۳۰ را به ۲۹:۳۰ اضافه کنید. نتیجه ۳۰ است که همان ضلع مربع است.
۲. خوارزمی، ۸۲۵ بعد از میلاد، (برگرفته از استروئیک[۲۳]، ۱۹۸۶، ص ۵۸)	
مسئله:	مجذوری که اگر با ده برابر ریشه‌اش جمع شود عدد ۳۹ به‌دست آید، چند است؟
راه‌حل:	... نصف ۱۰ را بگیرید، ۵ به دست می‌آید که اگر در خودش ضرب شود ۲۵ می‌شود، مقداری که اگر به ۳۹ اضافه کنید، ۶۴ به‌دست می‌آید. ۸ ریشه‌ی دوم ۶۴ است. عدد ۵ را از ۸ کم کنید، ۳ باقی می‌ماند. بنابراین، عدد سه یک ریشه از این مجذور است. بنابراین، مجذور ۹ است.

مسئله، فرد باید قیمت تعداد معینی مداد و یک دفتر یادداشت را به‌دست آورد، در مسئله‌ای دیگر، فرد باید تعداد مدادها را با «معکوس انجام دادن»[۲۱] آن‌چه برای محاسبه‌ی قیمت مدادها و دفتر انجام شده، به‌دست آورد. اگرچه این معکوس‌سازی در ابتدا کاملاً ساده و شهودی است، اما زمانی که مسائل کلامی نسبتاً دشوار ظاهر می‌شوند، این امر بدیهی نخواهد بود.

مراحل اولیه در توسعه‌ی جبر را مورد توجه قرار می‌دهیم. دو نمونه از جبر کهن و جبر قرون وسطایی را در نظر می‌گیریم (جدول ۱ را ببینید).

هرچند این نمونه‌ها از لحاظ زمانی سه هزار سال با هم فاصله دارند، اما ویژگی‌های اصلی آن‌ها یکسان است زیرا هر دو،

قرار می‌گرفت. این جبر، همان جبری است که دانش‌آموزان مدرسه‌ای امروز، قبل از این‌که هر نماد صوری به آن‌ها معرفی گردد، با آن مواجه می‌شوند. طبیعتاً آن‌چه دانش‌آموزان به‌طور لفظی حل می‌کنند، ساده‌تر است و عباراتی که آن‌ها برای راه‌حل‌هایشان به‌کار می‌برند، کاملاً متفاوت است، اما هنوز به‌طور اساسی نوع یکسانی از ریاضیات را نشان می‌دهند: کلامی یا عملیاتی.

در این‌جا باید تأکید شود که ویژگی عملیاتی جبر، جدا از کلامی بودن آن نیست. زمانی که ایده‌های جبری فقط با کلام بیان شده‌اند، به دشواری می‌توان رویکرد ساختاری پیشرفته‌تری را تصور کرد. در رویکرد ساختاری، فرایندهای محاسباتی به‌طور

کلی از دید بالاتری مورد ملاحظه قرار می‌گیرند، اما رویکردهای عملیاتی و ساختاری، بازنمایی‌های یکسانی دارند. به‌عبارت دیگر، کلمات، مانند نمادها قابل دست‌ورزی نیستند. قابل دست‌ورزی بودن است که این امکان را فراهم می‌کند تا مفاهیم جبری، کیفیت شی‌ءمانندی داشته باشند. امکان انجام فرایندهای سطح بالاتر در فرایندهایی که با عبارات فشرده نمایش داده شده‌اند، تفکر ساختاری را ترغیب می‌کند. بنابراین، به‌نظر می‌رسد، معرفی یک نمادگذاری برای شیءانگاری مفاهیم لازم باشد. اما این نمادگذاری برای انتقال به حالت ساختاری کافی نیست. همان‌طور که قبلاً در مثال اول ذکر شد، مفاهیم عملیاتی از طریق بازنمایی‌های نمادین هم انتقال می‌یابند. اما، ابزارهای کلامی، تفکر عملیاتی را دائمی می‌سازند. شاید این مسئله، یکی از دلایلی باشد که حوزه‌ی جبری عملیاتی چند هزار سال طول کشید.

گریگوری می‌نویسد، جبر در حال تبدیل شدن به دانشی بود که «موضوع آن ترکیب عملیات است؛ در حالی که، این عملیات با ماهیت خودشان، یعنی آن‌چه هستند یا آن‌چه را که انجام می‌دهند، تعریف نشده‌اند، بلکه توسط قواعد ترکیبی که روی آن‌ها اعمال می‌شود تعریف شده‌اند»

۲.۲. جبر به عنوان حساب تعمیم‌یافته: جنبه‌ی ساختاری

قبل از این‌که گام‌های بیش‌تری را در تاریخ جبر برداریم، لازم است بعضی مقدمات نظری را روشن سازیم.

اولاً، لازم است بر آخرین تذکر بخش قبل تأکید کنیم که تاریخ جبر، تاریخ نمادها نیست، هر چند از مرحله‌ای به بعد، مفاهیم جبری از نمادها جداناپذیر شدند. این درست مانند مفهوم ذهنی هنرمند از یک تصویر یا یک مجسمه است که از آن مجسمه یا تصویر، جداناپذیر است. در واقع، مفاهیم جبر جدید را به سختی می‌توان با هر وسیله‌ای غیر از نمادهای جبری انتقال داد. علاوه بر این، دانش جبری جدید از طریق دست‌ورزی و بررسی عبارات صوری ساخته شده است و بدین جهت، تغییرات در نمادگذاری به موازات تغییر شکل‌های مفهومی می‌باشد. اگرچه تاریخ جبر و تاریخ نمادها مجزا بودند، اما از لحظه‌ای که نمادگذاری جبری جدید معرفی شد، به‌طور ماهرانه‌ای درهم آمیختند، به‌طوری که از لحاظ عملی، بیان تاریخِ یکی از آن‌ها بدون دیگری، غیرممکن است.

موضوع مهم دیگری که در این‌جا مطرح است، ارتباط بین پیشرفت از جبر عملیاتی به ساختاری و دشواری‌هایی است که ایده‌های جبری برای فرد ایجاد می‌کنند. نکته‌ای که می‌خواهیم بگوییم این است که بالا رفتن از سلسله مراتب ایده‌های جبری، لزوماً معادل با پیچیدگی تفکر فرد نیست. حتی ممکن است فردی بگوید که انتقال از جبر عملیاتی به جبر ساختاری، اگرچه یک گام رو به جلو در افزایش درجه‌ی تجرید و تعمیم است، نه تنها بر دشواری نمی‌افزاید، بلکه تسهیل در عملکرد را نتیجه می‌دهد. هر چند رسیدن به شی‌انگاری مفاهیم دشوار است، اما زمانی که رخ دهد، منافع آن فوراً آشکار می‌شود. تا حدود زیادی دشواری کاهش می‌یابد و قابلیت دست‌ورزی افزایش می‌یابد. ممکن است آن‌چه در چنین انتقالی رخ می‌دهد، با رویدادی مقایسه شود که در آن، فردی اشیای متفاوت زیادی را با دست حمل می‌کند. او تصمیم می‌گیرد همه‌ی آن‌ها را در یک کیف بگذارد و کیف را حمل کند. برای آن‌که کاملاً قدردان اثر تسهیل‌کننده‌ی شی‌انگاری مفاهیم باشیم (که از طریق یک نمادگذاری مناسب به دست آمده است) کافی است نگاهی اجمالی به نمونه‌ی جبر لفظی ارائه شده در جدول(۱) داشته باشیم. الگوریتم‌ها، زمانی که از طریق دست‌ورزی‌های صوری روی فرمول‌های کوتاه انجام می‌شوند، بسیار ساده و آشکار به نظر می‌رسند، اما زمانی که با بازنمایی کلامی و صرفاً عملیاتی به‌کار می‌روند، واقعاً دشوارند. بنابراین، ریاضی‌دانان قرون وسطی سزاوار بیش‌ترین قدر و اعتبار هستند زیرا اقدام به حل مسائل پیشرفته و پیچیده‌ای مانند معادلات درجه دو و سه می‌کردند، بدون آن‌که ابزارهای مبتکرانه‌ی جبر نمادین ساختاری را در اختیار داشته باشند (الگوریتم‌های پیچیده‌ای که در حالت لفظی به وسیله کاردان[۲۶] در اثر معروفش[۲۷] در سال ۱۵۴۵ ارائه شده است). تا آن‌جایی که توانایی و تکامل تفکر آن‌ها مورد توجه است، می‌توان آن‌ها را به بهترین ریاضی‌دانان امروزی که با پیشرفته‌ترین مسائل ریاضی مدرن سروکار دارند، مقایسه کرد. زمانی که بر جریان‌های یادگیری فردی و حل مسئله تمرکز داریم، باید همه‌ی این حقایق را در ذهن داشته باشیم.

۲ . ۲ . ۱ . جبر مقدار ثابت[۲۸] (از یک مجهول). همان‌طور که قبلاً گفته شد، نمادگذاری جبری در قدرتش برای مختصر کردن ایده‌های عملیاتی و تبدیل کردن آن‌ها به قطعه‌های فشرده[۲۹] و در

توانایی بالقوه‌اش برای تسهیل درک و ایده‌ها و دست‌ورزی با آن‌ها بی‌نظیر است. اگر صرفه‌جویی نمادین زودتر معرفی شده بود، می‌توانست میزان توسعه‌ی جبر را تغییر دهد و به دانشمندان در محاسبات کمک کند. در مقایسه با هندسه، جایی که ابزارهای تفکر ساختاری به شکل بازنمایی‌های تصویری به سادگی در دسترس هستند، پیشرفت جبر بسیار کند و با شک و تردید بود. تا آخر قرن شانزدهم، جبر به درجه‌ای از دشواری رسید که بدون انتقال به حالت ساختاری، پیشرفت بیش‌تر آن ممکن نبود. مورخان ریاضی غالباً تعجب کرده‌اند که چرا متفکران گذشته که انگیزه‌ی قوی برای یک تغییر بنیادین در روش داشته‌اند، زودتر از این‌ها به ایده‌ی بازنمایی‌های غیرکلامی دست نیافتند.

اگرچه مفهوم علامت‌گذاری نمادین برای ما خیلی طبیعی است، اما از قرار معلوم، برای آن‌ها اصلاً آشکار نبوده است. در حقیقت، دشواری صرفاً مرتبط با ایده‌ی به‌کار بردن حروف به جای اعداد و علامت‌ها نیست (این مطلب، از زمانی به زمان دیگر در نوشته‌های قدیمی دیده شده است)، بلکه مرتبط با نیاز به فرمول‌های نمادین با دو معنی رویه‌های محاسباتی و اشیائی که تولید شده‌اند نیز می‌باشد. در حساب، به سادگی می‌توانیم این دو معنی را با استفاده از دو عبارت، مجزا سازیم: ۲+۳ عملیات را نشان می‌دهد و ۵ نتیجه است. در جبر، چنین مجزاسازی در عبارتی مانند $a+b$ یا $3(x+5)+1$ امکان‌پذیر نیست. در این‌جا، فرایند نمی‌تواند به‌طور واقعی شکل بگیرد؛ از عملیات هیچ مقدار دیگری به دست نمی‌آید. فرمول با جنبه‌ی عملیاتی برجسته (شامل علائم و نشانه‌هایی[30] برای عمل به شکل عملگر است)، باید به عنوان نتیجه‌ی فرایندی که نمایش می‌دهد نیز تفسیر شود. حتی مجردترین تفکر ما با استفاده از استعاره‌هایی شکل گرفته‌اند که توسط تجربه‌ی حسی ایجاد شده‌اند (لاکف[31] و جانسن[32]، ۱۹۸۰). این تجارب حسی، برخلاف ایده‌ی فرایند است که هیچ مقدار دیگری اضافه نمی‌کند و طوری عمل می‌کند مثل این‌که خودش نتیجه است. در واقع، هیچ چیزی مانند این در زندگی واقعی امکان‌پذیر نیست: ما نمی‌توانیم دستورپخت یک کیک را بخوریم و تظاهر کنیم که خود کیک است (اگرچه می‌توانیم کیک یا این‌که کیک را می‌خوریم را تصور کنیم)! بنابراین، حداقل در ابتدا شهود ما در مقابل دوگانگی عملیاتی ـ ساختاری نمادهای جبری مقاومت می‌کند. (انواع جدید اعداد همواره در طول تاریخ با عدم باورپذیری مواجه شده‌اند. در این‌جا مثال دیگری از پدیده‌ای که احتمالاً به ناهماهنگی هستی‌شناسانه‌ی یکسانی نسبت داده می‌شود، می‌آوریم: اشیایی مانند ۳/۴، ۲- یا $\sqrt{-1}$ از عملیات تقسیم، تفریق و به دست آوردن ریشه‌ی دوم به‌وجود آمدند، در حالی‌که به نظر نمی‌رسید این اعمال، هرگز چیزی تولید کنند.)

درست است یک بار موفق شدیم بر این مشکل (دوگانگی فرایند ـ شیء) غلبه کنیم، اما به سرعت آن‌را فراموش کردیم. برای آن‌هایی که در دست‌ورزی‌های جبری بسیار متبحرند (مثلاً معلمان)، این مسئله خیلی زود عادی می‌شود. در واقع، عادت و باورهای هستی‌شناسانه‌ی ما به سادگی چشم‌مان را کور می‌کند. با این حال، ممکن است در کلاس‌های امروزی، شواهد بیش‌تری برای دشواری شی‌انگاری مفاهیم یافت شود، مشروط بر این‌که کسانی که به دانش‌آموزان گوش می‌دهند، به اندازه‌ی کافی بی‌تعصب باشند تا شکاف بین خودشان و یادگیرندگان کم تجربه را درک کنند. در بخش ۳. ۲ و ۳. ۳(در شماره‌ی آینده‌ی مجله)، با استفاده از مثال‌هایی، این ادعا را مستند می‌سازیم.

مدل‌های تفکر عملیاتی و ساختاری، تفاوت‌های ظریفی دارند و تمایز قائل‌شدن بین آن‌ها ساده نیست

حقایق تاریخی نشان می‌دهد که ایده‌ی دوگانگی عملیاتی ـ ساختاری برای نسل ریاضی‌دانان نیز دشوار بود. احتمالاً دیوفانتوس[33] (سال ۲۵۰ بعد از میلاد) اولین گام معنادار را در جهت یک رویکرد ساختاری برای رویه‌های محاسباتی برداشت. او با ادغام نظام‌مند حروف با کلمات، برای خودش نوع خاصی از جبر ابداع کرد که به عنوان «مختصرکننده‌ی واژه‌ها»[34] شناخته می‌شود. در هنگام حل مسئله‌های کلامی، دیوفانتوس عباراتی مانند $x-10$ و $x+10$ ساخت (البته با استفاده از حروف یونانی نوشت) و مانند اعداد واقعی، آن‌ها را مورد دست‌ورزی قرار داد (به عنوان مثال، او عبارت‌ها را ضرب کرد و x^2-100 را به دست آورد (فاول[35] و گری[36]، ۱۹۸۷، ص ۲۱۸) را ببینید). این حقیقت که سیزده قرن پس از دیوفانتوس، ریاضی‌دانان هنوز طولانی‌نویسی جبر لفظی را ترجیح می‌دادند، حاکی از دشواری ذاتی شیوه‌ی تفکر دیوفانتوس است.

در عبارات جبری که دیوفانتوس به کاربرد، یک حرف به عنوان

یک مجهـول با مقدار ثابت اسـت. بـرای او عبـارات حاصـل، اعدادی هستند کـه از تـرکیب مجهـول با سایر اعـداد بـه دسـت آمده‌اند. خواهیم گفت آن‌چه به‌وجود آورد، جبر مقدار ثابت بود که در مقابل جبـر تـابعـی[۳۷] قـرار دارد. در جبر تابعی، حـروف تغییرات را نشان می‌دهند نه مقادیر ثابت را. ایده‌ی حرف به عنوان متغیر (به عنوان نمادی که به جای آن هر عددی ممکن است قرار گیـرد) امروزه برای ما بسیـار روشن است، اما بـرای دیـوفانتـوس آشکار نبود. در ادامه، راه‌حل او را برای مسئله‌ای مانند «پیداکردن دو عدد با داشتـن جـمـع و ضـرب آن‌ها» مـی‌آوریـم. او اعـداد محسـوس را به عنـوان مقادیر معین بـه کـار مـی‌بُرد. ایده‌ی یک عبـارت جبری به عنـوان یک بازنمایی که نتیجه‌ی نهـایـی ایـده‌ی به‌کاربردن فرمول‌ها به عنوان بازنمایی‌های موقت و دست‌ورزی‌ها روی مجهول است، کاملاً متفاوت و پذیرفتن آن دشوارتر است. این ایده ـ این توانایی که فرمول پارامتری بالا به صورت یک عدد در نظر گرفته شود و نه عبارتی که امکان انجام عملی با آن نیست ـ قطعاً نیاز به یک دیدگاه ساختاری تمام و کمال نسبت به عبارات جبری دارد.

جبـر یـک سـاخـتـار سلسله مراتبی است؛ آن‌چه در یک سطـح به‌طور عملیـاتـی درک مـی‌شـود، در سطـح بالاتـر بـایـد بـه‌طـور ساختـاری درک شود. درک تفاسیر عبارات جبـری و ارتبـاط‌هـای متقابل آن‌ها بسیار مهم است

۲.۲.۲. جبـر تـابـعـی (از یـک متغیر). از قـرن شـانـزدهـم بـه بـعـد، عبارات جبری برای نشان دادن توابع به کار رفت نه مقادیر ثابت. کشـفـیـات مهمی در گام‌های متعـددی رخ داد که اولین آن‌ها، معـرفی نمادهای خـاص برای عملیات و روابط بود که با ایده‌ی یک حرف به عنـوان یک پـارامتر (یـک مقدار معین) دنبال شد.

ریاضـی‌دان فـرانسـوی فـرنکـوئیـز ویت[۳۸] (۱۶۰۳-۱۵۴۰) اولین کسـی بود که مقادیر معین عددی را با نمادهـا جایگزیـن کـرد. این ابداع، منجر به تـغـییـرات مفهـومیِ دور از دسترس در جبر شد: اولاً، دوگانگی فـرایند ـ نتیجه‌ی عِبـارت جبـری، هم‌زمان با ایده‌ی بـه‌کـار بـردن حـروف به عنـوان اعـداد نامعین، به ریاضی‌دانان تحمیل شد (عملیات روی حروف، مثلاً $3(x+5)+1$، نمی‌توانند در عمل انجام شوند، پس برای این‌که فرد پیش رود و روی عدد نهایی کاری انجام دهد، انتخابی ندارد مگر این‌که فـرمول را به عنوان نتیجه‌ی محاسبه در نظر بگـیـرد). ثانیاً، زمانی که فرمول‌های حرفی برای نمایش اشیای معین پذیرفته شدند، یک حسـاب نـمـادیـن جـبـری ابداع شد کـه شـیـوه‌هـای دست‌ورزی معـادلات را مشخص می‌کـرد و یک تغییر مـؤثـر در مقایسه بـا جـبـر عـمـلـیـاتـی بـود، جایی کـه مـسـائـل عـمـدتـاً بـا معکوس‌کردن فرایندهای محاسباتی حل می‌شوند. ثالثاً، بعد از این‌که اختراع جدید (عمدتاً توسط دکارت و فرما) به هندسه انتقال یافت تا به عنوان نوع دیگری از بازنمایی‌های تصویری استانـدارد به کار رود و سپس در علـوم، برای نمایش پدیده‌های طبیـعـی، مورد استفاده قرار گیرند (توسط گالیله، نیوتن و لایب نیتز)، جبر نهایتاً از یک علم مقادیر ثابت به علم اندازه‌های متغیر تبدیل شد. از این زمان به بعد، تـلاش بـرای اصول منطقی جبـر آغـاز شـد. معنای عبارات جبری و اجزای نمادین آن‌ها به گـونه‌ای بود که به دست آوردن تعریف ریاضی برایشان دشـوار بود. نام‌هایی مانند «عدد تعمیم‌یافته» یا «عدد متغیـر» بـه‌زودی به خاطر عدم دقـت مردود شدنـد (فرگِه، ۱۹۷۰ را ببینـیـد). سـرانجام، مسئـلـه بـا رهاکردن تعریف ایدِه‌ی متغیـر و ارائه‌ی تفسیـری کلی بـرای یک فرمول جبری، حل شد. تابع به عنوان نوع جدیدی از شیء ریاضی مجرد، ابداع شد تـا بـه صـورت مصداقـی بـرای عبـاراتی مـانـنـد $3(x+5)+1$ یا x^2+2y+5 به‌کار رود.

ماهیت دشوار مفهوم جدید که با جزئیات، مورد ملاحظه و تجزیه و تحلیـل مـورخان و روان‌شناسان قـرار گـرفت (به عنـوان مثال، کلینر[۳۹]، ۱۹۸۹؛ دوبینسکی و هرل، ۱۹۹۲ را ببینید)، موضـوع جداگانه‌ای است و در این مقالـه، بـه آن نـمـی‌پـردازیم (مقاله‌ی دیـگـری منحصـراً به این مـوضوع اختـصـاص داده شـده است). با این وجود، درک دشـواری‌های ذاتی مفهوم تابع بـرای آن‌هایی که می‌خواهند بینش عمیقی سبب به فرایند یادگیری داشته باشند، لازم است.

۳.۲. جبر مجـرد: جبر عملیـات صـوری و جـبـر ساختارهای مجرد

در نقاط اتصال رشد دانش ریاضی، جایی که برخی فرایندهای جدید معرفی می‌شوند، اشیای مجرد مانند انواع مختلف اعداد و توابع پدید می‌آیند. ایـن فـرایندهای جدید باید بـرای فـرایندهای معین دیگـری به‌کار روند که از قبل شناخته شده هستـنـد. یـک شیء مجـرد بین دو تای دیگـر واسطه می‌شـود، ممکن است بـه

عنوان نتیجه‌ای از فرایند سطح پایین‌تر در نظر گرفته شود که برای دست‌ورزی‌های سطح بالاتر به‌کار می‌رود. بنابراین، در ارتباط با یک شیء مفروض، فرایندهای سطح پایین‌تر و بالاتر را به ترتیب اولیه[40] و ثانویه[41] می‌نامیم. به عنوان مثال، ایده‌ی اعداد گویا، ریشه در تقسیم اعداد صحیح بر اعداد صحیح دارد (فرایند اولیه)، اما موجودی مانند ۳/۴ به خودی خود یک عدد را شکل می‌دهد که مورد دست‌ورزی قرار می‌گیرد و با سایر اعداد ترکیب می‌شود (فرایندهای ثانویه). در جبر، فرایندهای اولیه عملیات حسابی روی اعدادند و فرایندهای ثانویه آن‌هایی هستند که ورودی آن‌ها، عملیات حسابی است. فرایندهای ثانویه در دست‌ورزی روی فرمول‌های جبری به کار می‌روند. پس ایده‌ی تابع، یک پیوند مفهومی را بین محاسبات عددی و دست‌ورزی‌های جبری نمادین شکل می‌دهد. این ایده، به عنوان اتصالی است که از طریق آن، دانش جبری جدید به نظام مفاهیم حسابی مرتبط می‌شود.

اگر فرایند یادگیری را مورد مشاهده قرار دهیم، لحظات مهم و ارزشمند، ناپیوستگی‌ها هستند. آن‌ها جهش‌هایی‌اند که در فرایند یادگیری رخ می‌دهند

بعد از این‌که جبر ویت تبدیل به ابزار مهمی برای انجام دادن ریاضی شد، مرحله‌ی بعدی، بالا رفتن به نقطه‌ی بالاتری است که از آن‌جا بتوان عملیات ثانویه‌ای را که روی توابع اجرا می‌شوند و بر دست‌ورزی‌ها روی فرمول‌ها دلالت می‌کنند، مورد مطالعه قرار داد (یک فرایند که در یک سطح فرایند ثانویه است، در سطح بالاتر، فرایند اولیه می‌شود).

این مرحله از رشد جبر در دهه‌ی سوم قرن نوزدهم در انگلیس شروع شد. در ادامه، داستانی را مطرح می‌کنیم که به دلایلی ارزش گفتن دارد. این دلایل زمانی روشن خواهد شد که دیدگاه‌های امروزه‌ی دانش‌آموزان در مورد فرمول‌ها و معادلات نمادین، مورد تجزیه و تحلیل قرار گیرد (بخش ۳ . ۳).

تا قرن نوزدهم، جبر به عنوان «حساب کلی[42]» در نظر گرفته می‌شد، موضوعی که مختص بیان قواعد حاکم بر رویه‌های حساب به یک شیوه‌ی عمومی بود. این تفسیر تا حد زیادی هدف و کارایی عملیات در فرمول‌های جبری را محدود می‌کند (به عنوان مثال، محدودیت $a > b$ یک مکمل لازم برای عبارت $\sqrt{a-b}$ است.) حالا زمانی که تمرکز بر دست‌ورزی‌های صوری تغییر کرده است، ریاضی‌دانان اصرار بر تنظیم جبر، جدا از هر محدودیتی دارند. گروهی از صورت‌گرایان انگلیسی (ای. دمورگان، جی. پی‌کات[43] و دی. اف. گریگوری) پیشنهاد کردند که جبر باید از بار تفسیر اولیه‌اش رها شود. از این به بعد، باید با یک فرمول جبری به خودی خود به عنوان یک شیء رفتار کرد. شیئی که به شیوه‌های مختلف قابل تفسیر است اما برای خودش معنایی ندارد. در واقع، عبارت جبری تبدیل به یک وسیله‌ی نقلیه‌ی تهی شد که منتظر است یک بار معنایی را حمل کند. مکتب صورت‌گرایی به اندازه‌ای که به قواعد حاکم بر حرکت وسیله‌ی نقلیه علاقه داشت به «بار[44]» بالقوه‌اند وسیله علاقه نداشت.

همان‌طور که گریگوری می‌نویسد، جبر در حال تبدیل شدن به دانشی بود که «موضوع آن ترکیب عملیات است؛ در حالی که، این عملیات با ماهیت خودشان، یعنی آن‌چه هستند یا آن‌چه را که انجام می‌دهند، تعریف نشده‌اند، بلکه توسط قواعد ترکیبی که روی آن‌ها اعمال می‌شود تعریف شده‌اند» (گریگوری، ۱۸۴۰؛ نقل قول شده توسط نوی، ۱۹۷۳، ص ۱۹۴). در این‌جا، کلمه‌ی عملیات برای نشان دادن فرایندهای اولیه به کار رفته است در حالی که ترکیب‌ها به وضوح، فرایندهای ثانویه هستند. بدین دلیل، صورت‌گرایان انگلیسی، مرحله‌ی عملیاتی سطح بالاتری را در جبر آغاز کردند. این اولین گام در رشد جبر مجرد بود.

اگرچه داستان جبر در این‌جا پایان نمی‌یابد، اما جایی است که توضیحات تاریخی ما متوقف می‌شود. علم اشیای مجرد مانند گروه‌ها، حلقه‌ها، میدان‌ها یا ایده‌آل‌ها که در ابتدا در قرن نوزدهم توسعه یافت، به موضوع ما ارتباطی ندارد، همان‌طور که در سطح دبیرستان نیز تدریس نمی‌شوند. فقط برای کامل کردن این تصویر یادآور می‌شویم که با ظهور نظریه‌ی گروه‌ها، یک جنبه‌ی ساختاری آغاز می‌شود که جانشینی طبیعی برای جبر عملیاتی سطح بالاتر صورت‌گرایان انگلیسی است.

مراحل گوناگون در توسعه‌ی جبر در جدول(۲) خلاصه شده است و ادعای اولیه‌ی ما را تقویت می‌کند: جبر یک ساختار سلسله مراتبی است؛ آن‌چه در یک سطح به‌طور عملیاتی درک می‌شود، در سطح بالاتر باید به‌طور ساختاری درک شود. درک تفاسیر عبارات جبری و ارتباط‌های متقابل آن‌ها بسیار مهم است. در بحث‌های بعدی، یادگیری جبر توسط دانش‌آموزان مدرسه‌ای

مورد تجزیه و تحلیل قرار خواهد گرفت.

(ادامه‌ی مطلب در شماره‌های آینده...)

جدول ۲

مراحل توسعه‌ی جبر

نوع	مرحله	تمرکز جدید	بازنمایی	نکات برجسته‌ی تاریخی
۱. حساب تعمیم‌یافته	۱.۱. عملیاتی	۱.۱.۱. **محاسبات** عددی	کلامی (لفظی)	پاپیروس رایند سال ۱۶۵۰ قبل از میلاد
			ادغام کلامی ـ نمادین (مختصرکننده‌ی واژه‌ها)	دیوفانتوس سال ۲۵۰ بعد از میلاد
	۱.۲. ساختاری	۱.۲.۱. (عددی) **نتیجه‌ی محاسبات** (جبر مقدار ثابت)	نمادین (حرف به عنوان یک **مجهول**)	قرن شانزدهم از همه مهم‌تر ویت (۱۵۴۰–۱۶۰۳)
		۱.۲.۲. (عددی) **تابع** (جبر تابعی)	نمادین (حرف به عنوان **متغیر**)	ویت، لایب نیتز (۱۶۴۶–۱۷۱۶) نیوتن (۱۶۴۲–۱۷۲۷)
۲. جبر مجرد	۲.۱. عملیاتی	**فرایندها روی نمادها** (ترکیب عملیات)	نمادین (حرف بدون هیچ معنایی)	مکتب صورت‌گرایی انگلیسی (دمورگان، پی‌کاک، گریگوری) از سال ۱۸۳۰
	۲.۲. ساختاری	**ساختارهای مجرد**	نمادین	قرن ۱۹ و ۲۰: نظریه‌ی گروه‌ها، حلقه‌ها، میدان‌ها و غیره و جبر خطی

توضیحات تکمیلی برای خواننده‌ی این مقاله:

۱. متن حاضر ترجمه‌ی دو بخش اول مقاله است، دو بخش انتهایی در شماره‌های بعدی خواهد آمد.

۲. مترجمان به متن اصلی پای‌بند بوده‌اند ولی مقاله، مقاله‌ی «سختی» است بنابراین احتمالاً باید بیشتر از یک‌بار خوانده شود.

۳. این مقاله به دلیل ارتباط با مقالات دیگری که در مورد جبر نوشته شده، ترجمه شده است. به‌خصوص توصیه می‌شود این مقاله در کنار «a چه ساکت است» خوانده شود چرا که این دو مقاله به دو جنبه‌ی کاملاً متفاوت «سکوت نمادها» اشاره دارند.

پی‌نوشت

1. Versatility
2. Adaptability
3. Process-Oriented
4. Schoenfeld
5. Microgenetic
6. Harel
7. Kaput
8. Breidenbach
9. Kieran
10. Dubinsky
11. Reflective Abstraction
12. Beth
13. Greeno
14. Conceptual Entity
15. Douady
16. Niels Bohr
17. Self-sustained
18. Logical
19. Crowe
20. Garcia
21. Undo
22. Boyer
23. Struik
24. Rhetoric Algebra
25. Cardrn
26. Ars Magna
27. Algebra of a Fixed Value
28. Compact Chunks
29. Prompts
30. Lakeoff
31. Johnson
32. Diophantus
33. Syncopaed
34. Fauvel
35. Grey
36. Functional Algebra
37. Francois Viete
38. Kleiner
39. Primary
40. Secondary
41. Universal Arithmetic
42. Peacock
43. Cargo
44. Novy

* منابع و مراجع این مقاله را در شماره‌ی آینده خواهید دید.

بازنگری یک تجربه
ضرورت تلفیق در برنامه‌ی درسی

سپیده چمن‌آرا
کارشناس ارشد آموزش ریاضی و معلم ریاضی راهنمایی منطقه‌ی ۲ تهران

مقاله‌ی ارائه شده در دهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران، یزد، مرداد ۱۳۸۷

چکیده

در مقاله‌ی حاضر، ضمن مروری بر رویکرد تلفیقی در برنامه‌ی درسی، یک تجربه‌ی عملی در تدریس مبحث معادله‌ی خط راست و مفهوم شیب و عرض از مبدأ خط در پایه‌ی سوم راهنمایی ارائه می‌شود.

کلید واژه‌ها: برنامه‌ی درسی تلفیقی، برنامه‌ی درسی بین‌رشته‌ای، تدریس ریاضی، تدریس مبحث معادله‌ی خط راست، ریاضی سوم راهنمایی.

مقدمه

همواره یکی از اهداف آموزش‌وپرورش، تربیت افرادی برای احراز شغل‌های آینده بوده است. در سال‌های خیلی دور ـ آن زمان که «آموزش» در «مدرسه»، اولین سال‌های تولد خود را می‌گذراند، شاید تنها هدف از آن، همین تربیت برگزیدگان برای مناصب و مشاغل خاصی بود که در جوامع آن زمان تعریف شده بودند. به مرور که آموزش رسمی عمومی‌تر شد و طیف وسیع‌تری از افراد جامعه را تحت پوشش خود قرار داد، اهداف عمومی‌تری نیز به این اهداف خاص اضافه شدند و امروزه که در بسیاری از کشورها، آموزش رسمی، اجباری است و جزو وظایف دولت‌ها محسوب می‌شود و با توجه به شرایط و ویژگی‌های قرن حاضر ـ که حدود یک دهه از آن را پشت سر گذاشته‌ایم ـ علاوه بر تربیت افرادی برای مهارت‌ها و شغل‌های آینده، تربیت شهروندانی توانمند برای زندگی در قرن بیست‌ویکم و مواجه شدن با مسائل و مشکلات مختص آن نیز هدف مهم‌تری برای آموزش‌وپرورش است.

سازمان‌های بین‌المللی، برای انسان قرن بیست‌ویکم، ویژگی‌هایی را تعریف و مشخص کرده‌اند که بسیار پیچیده‌تر از ویژگی‌های لازم برای زندگی در ۳۰۰۰ سال پیش است ـ زمانی که «مدرسه» تازه در جامعه موجودیت می‌یافت.

این امر، رسالت ما معلمان را بسیار سنگین‌تر از حتی قرن پیش از این می‌کند. معلمان این نسل باید توجه کنند که دانش‌آموزان امروز آن‌ها، نسبت به دانش‌آموزان بیست ـ سی سال پیش، برای زندگی آینده‌ی خود در جامعه، با مسائل

پیچیده‌تری مواجه خواهند شد و لذا نقش خویش در تربیت و آماده‌سازی این نسل را هرگز نباید از خاطر ببرند.

از سوی دیگر نظریه‌های جدید یاددهی ـ یادگیری (به ویژه نظریه‌ی ساخت و سازگرایی) که متناسب با نیازهای دانش‌آموزان و جامعه، روش‌های جدیدی برای یاددهی و یادگیری پیشنهاد می‌کنند و روش‌های سنتی تدریس را در رسیدن به اهداف آموزشی این دوره، ناکارآمد و ناقص می‌دانند، ضمن تکیه بر تجربه‌های شخصی و عملی دانش‌آموزان، یکی از جنبه‌های مهم یادگیری عمیق و معنادار را ایجاد ارتباط میان مفاهیم مختلف ـ اعم از یک حوزه یا از حوزه‌های مختلف ـ می‌دانند. این رویکرد درست در نقطه‌ی مقابل سنت‌های علمی ـ آموزشی قرون گذشته است که با شتاب به سوی شاخه‌شاخه شدن علوم و تخصصی شدن رشته‌های درسی حرکت می‌کرد. امروزه علوم بین‌رشته‌ای، در تحقیقات و آموزش‌های دوره‌های عالی، حرف اول را می‌زنند. لذا این تلفیق و نزدیک شدن مجدد علوم مختلف به هم باید به دوره‌های آموزشی پایین‌تر ـ از دوره‌ی پیش‌دبستان تا دیپلم ـ نیز وارد شود.

علاوه بر این، به‌نظر می‌رسد با پیشرفت روزافزون علوم مختلف و وارد شدن آن‌ها به آموزش مدرسه‌ای، برنامه‌ی درسی روز به روز سنگین‌تر می‌شود و این امر، ضرورت حرکت به سوی یک برنامه‌ی درسی تلفیقی را به منظور کاهش فشار از دوش معلمان و مجریان این برنامه، دوچندان می‌کند [نقل به مضمون از لیک (Kathy Lake)، ۱۹۹۴، ص ۵]

لیک (۱۹۹۴) به نقل از بنجامین (Benjamin, 1989) دلایل ضرورت برنامه‌ی درسی تلفیقی و بین‌رشته‌ای را چنین برمی‌شمارد: «گرایش به وابستگی[1] و درهم‌تنیدگی[2] سراسری در سیستم‌های پیچیده، رشد آهنگین قرن بیست‌ویکم و پیچیدگی‌های آن، بدنه‌ی در حال توسعه‌ی دانش و نیاز به افراد شاغلی که در بسیاری از حوزه‌ها توانمند بوده و توانایی حل مسئله‌هایی را داشته باشند که شامل عوامل متعدد مرتبط باشد.» وی از پرکینز (Perkins, 1991) نیز نقل می‌کند که «تمایل به مرتبط ساختن اشیا باهم، تلفیق ایده‌های مرتبط با یک موضوع یا

برنامه‌ی درسی بین‌رشته‌ای، برنامه‌ای است که چند موضوع مدرسه‌ای را باهم ترکیب می‌کند و یک پروژه‌ی فعال از آن‌ها می‌سازد و در نتیجه‌ی آن، چگونگی برخورد کودکان با موضوعات دنیای واقعی شکل می‌گیرد

موضوعات مختلف با یکدیگر، و ارتباط عناصر زندگی خارج از مدرسه، فی‌نفسه متقاضی درک و فهم وسیع‌تر و عمیق‌تر است. به‌علاوه اتحاد طبیعی میان کسانی که برای **تدریس برای درک و فهم** تلاش‌های ویژه‌ای می‌کنند با کسانی که برای **آموزش تلفیقی** در حال تلاش هستند، وجود دارد» [۳].

با توجه به همه‌ی این شواهد، و با توجه به این‌که در حال حاضر در بعضی از کشورها مانند آمریکا و کانادا، برنامه‌های درسی تلفیقی و بین‌رشته‌ای در حال تدوین و اجرا است، ضروری است ما معلمان ایرانی نیز با این مقوله آشنا شویم و سعی کنیم آن را در روش‌های تدریس خود وارد کنیم.

چیستی تلفیق

«پشتیبانی حرکت از رویکردی که موضوعات را جدا از هم می‌بیند به سمت یک برنامه‌ی درسی کل‌نگرانه، سنتی طولانی دارد. اوایل سال ۱۸۹۹ میلادی، بخش شیکاگو در انجمن ریاضی آمریکا[3] از برنامه‌ی «همبستگی کاری[4]» بین موضوعات حساب و هندسه و جبر، حمایت کرد. در دهه‌ی ۱۹۲۰ میلادی، با نام‌های مختلف دروس ترکیبی، دروس عمومی، یا دروس یک‌پارچه، حرکت به سوی ریاضی تلفیقی با طراحی سال‌های اولیه‌ی دبیرستان، شدت گرفت. در اثر اصلاحات در دوره‌ی راهنمایی در دهه‌های ۱۹۷۰ و ۱۹۸۰، مناسب بودن ریاضی تلفیقی برای یادگیرندگان نوجوان، پیشرفت بیش‌تری کرد. رویکرد تلفیقی به ریاضی به دو مؤلفه در فلسفه‌ی آموزش دوره‌ی راهنمایی وابسته است: تدریس بین‌رشته‌ای و یادگیری مشارکتی» [۴].

زمانی که به تعریف برنامه‌ی درسی تلفیقی می‌پردازیم، لازم است به واژگان وابسته به آن، مانند تدریس بین‌رشته‌ای؛ تدریس موضوعی؛ آموزش از طریق همیاری؛ ... نیز توجه کنیم. هم‌چنین آگاهی از تعاریف افراد مختلف از برنامه‌ی درسی تلفیقی، به ما کمک می‌کند از زاویه‌های مختلف به این موضوع بنگریم و جنبه‌های مختلف آن را دریابیم.

همفری، پُست و اِلیس، تعریف اساسی زیر را پیشنهاد

می‌کنند:

«مطالعه‌ی تلفیقی، مطالعه‌ای است که در آن دانش‌آموزان به‌طور وسیعی دانش را در موضوعات مختلف مرتبط با جنبه‌هایی خاص از محیط اطراف خود، کشف می‌کنند» (همفری، پُست و الیس، ۱۹۸۱، نقل شده در لیک [۳].)

شومیکر (۱۹۸۹) برنامه‌ی درسی تلفیقی را چنین تعریف می‌کند:

«آموزش تلفیقی، آموزشی است که به گونه‌ای سازمان‌دهی شده است که خطوط موضوع ـ محور را قطع کرده، به منظور تمرکز بر روی حوزه‌های وسیع مطالعه، جنبه‌های مختلف برنامه‌ی درسی را در یک وابستگی معنادار، کنار هم قرار می‌دهد» (شومیکر، ۱۹۸۹؛ نقل شده در لیک [۳].)

درسل در تعریف خود، از مرتبط کردن موضوعات مختلف برای تولید مدل‌های جدیدی از درک و فهم دنیا، فراتر می‌رود. وی معتقد است:

«در برنامه‌ی درسی تلفیقی، تجربه‌های یادگیری طراحی شده نه تنها (با یادگیری مدل‌ها و سیستم‌ها و ساختارهای فرهنگی) به یادگیرندگان یک نگاه یک‌پارچه به دانش می‌دهد، بلکه توانایی یادگیرنده برای دریافت ارتباط‌های جدید و در نتیجه خلق مدل‌ها و سیستم‌ها و ساختارهای جدید را توسعه می‌دهد» (درسل، ۱۹۵۸؛ نقل شده در لیک [۳].)

اورت نیز معتقد است:

«برنامه‌ی درسی بین‌رشته‌ای، برنامه‌ای است که چند موضوع مدرسه‌ای را باهم ترکیب می‌کند و یک پروژه‌ی فعال از آن‌ها می‌سازد و در نتیجه‌ی آن، چگونگی برخورد کودکان با موضوعات دنیای واقعی شکل می‌گیرد» (اورت، نقل شده در لیک [۳].)

لیک یادآوری می‌کند که همه‌ی تعاریف ارائه شده برای برنامه‌ی درسی تلفیقی یا بین‌رشته‌ای، شامل موارد زیر است:

- ترکیبی از موضوعات؛
- تأکید بر پروژه‌ها؛
- منابعی فراتر از کتاب‌های درسی؛
- ارتباط میان مفاهیم مختلف؛
- واحدهای موضوعی به‌عنوان اصول سازمان‌دهنده؛
- برنامه‌های انعطاف‌پذیر؛
- گروه‌بندی انعطاف‌پذیر دانش‌آموزان [۳].

مطالعه‌ی تلفیقی، مطالعه‌ای است که در آن دانش‌آموزان به‌طور وسیعی دانش را در موضوعات مختلف مرتبط با جنبه‌هایی خاص از محیط اطراف خود، کشف می‌کنند

یک تجربه: تدریس مبحث معادله‌ی خط راست و مفهوم شیب خط

دانش‌آموزان ایرانی با معادله‌ی خط راست نخستین بار در نیم سال دوم پایه‌ی سوم راهنمایی آشنا می‌شوند. این موضوع در صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۲۰ کتاب ریاضی سوم راهنمایی آمده است. در راهنمای معلم این کتاب، **موضوعات** این بخش **در یک نگاه** چنین ذکر شده است:

«درس معادله‌ی خط مهم‌ترین درس در کلاس سوم راهنمایی است. دانش‌آموزان با این درس برای اولین‌بار مواجه می‌شوند؛

بنابراین تمرکز و تأکید بر آن ضروری به‌نظر می‌رسد. در ابتدا با بیان رابطه‌ی بین طول و عرض نقاط معادله‌ی خط‌های مبدأ گذر معرفی و چگونگی رسم آن‌ها آموزش داده می‌شود. پس با بیان خط‌های غیر مبدأ گذر، شیب و عرض از مبدأ آموزش داده می‌شود. در پایان با طرح شکل کلی معادله‌ی خط، خط‌های موازی با محورها آموزش داده می‌شوند» [۱] ص ۱۹۹.

با توجه به پاراگراف اخیر و با بررسی کتاب درسی، متوجه می‌شویم که نگاه مؤلفان به این موضوع، جزءنگرانه بوده است:

ابتدا در یک فعالیت و کار در کلاسِ پس از آن، دانش‌آموزان با حالت خاصیِ از مجموعه نقاطی که روی یک خط راست قرار دارند، آشنا می‌شوند که در همه‌ی آن‌ها، مختصه‌ی دوم مضربی از مختصه‌ی اول است و این رابطه‌های ضربی را به‌عنوان معادله‌ی خط راست می‌شناسند. پس از آن، رسم خطی که معادله‌ی آن داده شده است با مثال‌های خاص (به قول کتاب؛ فقط خطوط مبدأ گذر) آموزش داده می‌شود و سپس با نمودار مجموعه‌ای از نقاط صفحه آشنا می‌شوند. ولی در این قسمت، با مجموعه نقاط گسسته و متناهی در صفحه مواجه می‌شوند. هیچ فعالیت یا تمرینی این دو موضوع را به هم مرتبط نمی‌کند و هیچ‌جا به تفاوت بین یک خط راست که از بی‌نهایت نقطه تشکیل شده است و مثال‌های متناهی ارائه شده، اشاره نمی‌شود؛ حتی هیچ پرسشی مبتنی بر این‌که آیا نقاط هر مجموعه روی یک خط راست قرار دارند یا نه و اگر چنین است، سایر نقاط آن خط کجا هستند و چه رابطه‌ای بین x و y آن نقاط وجود دارد، نمی‌شود.

مطلب بعدی، خط‌های غیر مبدأ گذر است که بدون هیچ فعالیت آموزشی و تنها با دو مثال معرفی می‌شود که در مثال نخست، تعدادی نقطه روی یک خط راست مشخص شده و از دانش‌آموز خواسته شده رابطه‌ی بین مختصات آن‌ها را بیابد و بلافاصله بیان شده: «معادله‌ی خط l عبارت است از $y = x + 1$» [۲]، ص ۱۱۱. در مثال دوم، معادله‌ی $y = 2x + 4$ داده شده و با استفاده از جدول نقطه‌یابی، نمودار آن رسم شده است. بسیار طبیعی است که با این شیوه‌ی تدریس، اغلب دانش‌آموزان نتوانند بین این دو نوع معادله‌ی خط (مبدأ گذر و غیر مبدأ گذر) ارتباط معنادار برقرار سازند و اساساً مفهوم معادله‌ی خط را به درستی و عمیق درک نمی‌کنند!

گرایش به وابستگی و درهم‌تنیدگی سراسری در سیستم‌های پیچیده، رشد آهنگین قرن بیست‌ویکم و پیچیدگی‌های آن، بدنه‌ی در حال توسعه‌ی دانش و نیاز به افراد شاغلی که در بسیاری از حوزه‌ها توانمند باشند، از جمله دلایل ضرورت برنامه‌ی درسی تلفیقی و بین‌رشته‌ای است

مفهوم شیب خط نیز با همین نگرش معرفی شده است: «به‌طور کلی اگر معادله‌ی خطی به‌صورت $y = ax + b$ نوشته شود، ضریب x (یعنی a) شیب خط نامیده می‌شود» [۲]، ص ۱۱۳.

بالاخره شیوه‌ی معرفی «صورت دیگر معادله‌ی خط راست» و باز هم فقدان ارتباط میان مطلب جدید با آن‌چه از معادله‌ی خط راست در حالت‌های مختلف پیش از آن گفته شده، مشکلات موجود در این بخش را تکمیل می‌کند! به اعتقاد من، مسیر معرفی معادله‌ی خط راست در کتاب درسی، درست عکس مسیری است که با یک نگاه ساخت و سازگرایانه به آموزشِ این موضوع می‌توان طی کرد. در واقع دانش‌آموزان باید ابتدا با مفاهیم کلی، یعنی مفهوم معادله‌ی چند نقطه که بین مختصه‌ی اول و دوم تک‌تک آن‌ها، یک رابطه‌ی مشترک وجود دارد، آشنا شوند. سپس حالت خاص آن، یعنی معادله‌ی خط راست و ویژگی‌های آن و شکل‌های مختلف آن را بشناسند و بین این بازنمایی‌های جبری با تصویر هندسی خط، ارتباط معنادار برقرار سازند. بالاخره با مفهوم شیب به‌صورت عینی و فیزیکی آشنا شوند و از طریق محاسبات ساده‌ی جبری، نقش آن را در معادله‌ای که به‌صورت $y = ax + b$ است، بیابند.

برای دست‌یابی به این رویکرد در تدریس این مبحث، علاوه بر جابه‌جایی در ترتیب مطالب و ادغام برخی از آن‌ها برای رسیدن به دید کلی نسبت به موضوع، به اعمال زیر نیز مبادرت کردم:

ـ برای آغاز مبحث، یک فعالیت کتبی گروهی طراحی کردم (پیوست ۱). ایده‌ی اصلی آن را از فعالیت ابتدای مبحث در کتاب گرفتم لیکن آن را توسعه دادم و با تغییر پرسش‌ها و دقت در کلمات به‌کار رفته در آن‌ها، سعی کردم مفهوم معادله‌ی چند نقطه

را به عنوان یک رابطه ی مشترک موجود بین مختصه ی اول و دوم این نقطه ها معرفی کنم و ضمناً با توسعه ی مثال ها، دانش آموزان را با انواع خط (اعم از مبدأ گذر یا غیر مبدأ گذر؛ به جز خطوط موازی محورها) در صفحه ی مختصات مواجه سازم. اغلب گروه ها در انتهای پرسش ۶ در این فعالیت، این تصور نادرست را دارند که وجود هر نوع رابطه ی جبری بین x و y مجموعه ای از نقاط، متضمن این است که آن نقاط روی یک خط راست باشند. از این رو در پرسش ۷ در انتهای فعالیت، با ارائه ی مثالی از نقاط روی سهمی $y = x^2$ (بدون ذکر نام سهمی)، موقعیتی ایجاد کردم که تجربه ای داشته باشند که متوجه این بدفهمی یا تعمیم نادرست خود بشوند و نهایتاً در جمع بندی کلاسی، به این نتیجه برسیم که معادله ی خط راست باید دارای ویژگی هایی باشد. پس از رسیدن به این مرحله، ویژگی های معادله ی خط راست را به آن ها معرفی کردم و فرم کلی آن را که به صورت یک معادله ی دومجهولی درجه یک است (دانش آموزان را با این واژه ها در مبحث عبارات جبری به خوبی آشنا کرده ام) و نیز حالت ساده شده یا به قولی، استاندارد آن $y = ax + b$ را بیان کردم.

ـ پس از این که طی این فعالیت، دانش آموزان با بازنمایی جبری خط راست (یعنی معادله ی آن) آشنا شدند، روی ارتباط بین بازنمایی جبری و بازنمایی هندسی (یعنی نمودار خط در صفحه ی مختصات) تمرین کردیم و ضمن این مثال ها و تمرین ها، عرض از مبدأ و طول از مبدأ خط را نیز روی نمودارها معرفی کردم و ارتباط بین نقش هندسی و مقدارهای آن ها در معادله ی جبری خط توسط خود دانش آموزان در تمرین های مختلف، کشف شد.

ـ برای درک بیش تر مفهوم رابطه ی خطی و نیز آشنایی تجربی با مفهوم شیب، با یکی از همکارانم در بخش علوم مشورت کردم و با مطرح کردن ایده ام مبنی بر استفاده از اعداد واقعی و ملموس برای نقطه های روی یک خط راست، وی راهنمایی ام کرد که گرم شدن آب، یک پدیده ی خطی است که شیب مثبت دارد و البته یادآوری کرد که سرد شدن آن تنها در یک محدوده ی دمایی، خطی

در حال حاضر در بعضی از کشورها مانند آمریکا و کانادا، برنامه های درسی تلفیقی و بین رشته ای در حال تدوین و اجرا است

(با شیب منفی) است. هم چنین در طراحی آزمایش هایی برای مشاهده ی پدیده های خطی با شیب های مختلف(درواقع به زبان دقیق تر؛ بانرخ تغییر متفاوت) از وی کمک گرفتم.

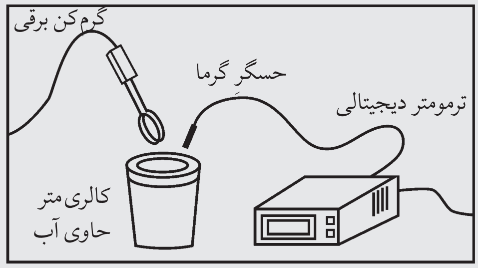
ـ برای ادامه ی تدریس، دانش آموزان در یک فعالیت گروهی عملی و با استفاده از ترمومتر دیجیتالی، در جدول مناسبی (شکل ۲) دمای آب و زمان را برای آبی که با یک گرم کن (Heater) گرم می شد، ثبت کرده (شکل ۱) و آن ها را به عنوان نقاط روی یک صفحه ی مختصات رسم کردند و خط برازش آن ها را ترسیم کردند (شکل ۳).

بحث خطا در آزمایش و انواع آن به طور کلی و خطاهای محتمل در آزمایشی که انجام شد؛ هم چنین تکرار آزمایش برای گروه هایی که داده های پرخطایی داشتند نیز صورت گرفت. بعضی از گروه ها که داده هایشان را به دقت جمع آوری کرده بودند، کاملاً یک خط راست درآوردند.

ـ با استفاده از این تجربه ی عملی و از روی نمودار گروه های مختلف، مفهوم شیب به عنوان نسبت تغییرات دما به تغییرات زمان در این آزمایش و سپس در حالت کلی برای دو متغیر، معرفی شد و دانش آموزان هر گروه، شیب خط نشان دهنده ی آزمایش گروه خود را به دست آوردند.

ـ برای تعمیق بیش تر مفهوم شیب، دو آزمایش دیگر نیز انجام شد: گرم کردن آب با دو گرم کن؛ گرم کردن الکل (یا محلول آب و الکل) با یک گرم کن. مقایسه ی داده های حاصل از این آزمایش ها و شکل خط ها و شیب آن ها با هم، موضوع را برای دانش آموزان به زیبایی روشن می کرد.

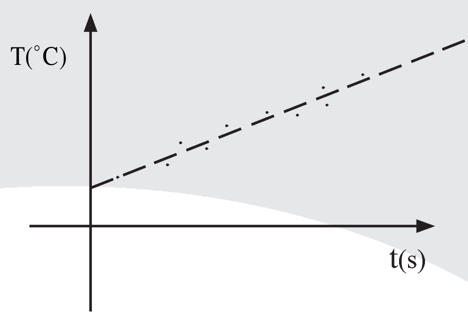
ـ پس از این که دانش آموزان با مفهوم شیب و نقش آن در نمودار خط راست آشنا شدند، نقش مقدار شیب در معادله ی خط به آن ها معرفی شد (ضریب x در معادله ی $y = ax + b$) و حتی در کلاس هایی که دانش آموزان آن از توان ذهنی بیش تری برخوردار بودند، با استفاده از **مفهوم شیب**، **مقدار** آن از معادله ی $y = ax + b$ (که همان a بود) به دست آمد. سپس دو جلسه به تمرین کتبی و حل مسئله برای تسلط بیش تر بر موضوع و آشنایی



شکل ۱. آزمایش گرم شدن آب با یک گرم‌کن

$m_{(gr)}$	$T(^\circ C)$	$t(s)$
	$T_\circ = \cdots$	

شکل ۲. جدول مربوط به آزمایش گرم شدن آب با یک گرم‌کن



شکل ۳. نمودار خط برازش مربوط به آزمایش گرم شدن آب با یک گرم‌کن

با خطوط موازی محورها، اختصاص یافت.

ـ آخرین جلسه‌ی این مبحث، دانش‌آموزان یک تکلیف گروهی انجام دادند (پیوست ۲) که هدف آن، به کار بستن دانش و آمادگی برای موضوع بعدی (دستگاه معادله‌های خطی و حل آن‌ها) بود.

نتیجه‌گیری

در یک جمع‌بندی کلی، می‌توان تجربه‌ی تدریس تلفیقی مبحث معادله‌ی خط راست در پایه‌ی سوم راهنمایی را در ۱۰ جلسه به‌صورت زیر خلاصه کرد:

✓ **جلسه‌های ۱ و ۲:** فعالیت گروهی کتبی؛ درک مفهوم معادله‌ی مجموعه‌ای از نقاط و معرفی شکل کلی معادله‌ی خط راست $(y = ax + b)$ و ویژگی‌های آن.

✓ **جلسه‌ی ۳:** تدریس رسم خط راست با داشتن معادله‌ی آن برای ایجاد ارتباط بین بازنمایی جبری و بازنمایی هندسی خط؛ معرفی عرض از مبدأ خط راست و نقش آن در معادله‌ی خط. معرفی طول از مبدأ خط راست.

✓ **جلسه‌ی ۴:** فعالیت گروهی عملی: بررسی تغییرات دمای آب در حال گرم شدن با یک گرم‌کن؛ برداشت داده‌های واقعی و رسم نمودار خط برازش آن‌ها و بررسی خطی بودن آن‌ها.

✓ **جلسه‌ی ۵:** استفاده از تجربه و نتایج آزمایش انجام‌شده برای معرفی شیب خط راست به‌عنوان نسبت تغییرات y به تغییرات x و معرفی نقش آن در معادله‌ی خط. نوشتن معادله‌ی خط داده‌های برداشت‌شده از آزمایش و مشاهده‌ی شیب در تغییرات داده‌ها نسبت به هم.

✓ **جلسه‌های ۶ و ۷:** دو فعالیت گروهی عملی: بررسی تغییرات دمای آب در حال گرم شدن با دو گرم‌کن؛ بررسی تغییرات دمای الکل در حال گرم شدن با یک گرم‌کن؛ برداشت داده‌های واقعی و رسم نمودار خط برازش آن‌ها و بررسی خطی بودن آن‌ها و مقایسه‌ی شیب‌ها و معادله‌های خطوط آن‌ها و مشاهده‌ی عینی نقش شیب در داده‌ها.

✓ **جلسه‌های ۸ و ۹:** آشنایی بیش‌تر با صورت‌های مختلف معادله‌ی خط راست؛ کسب مهارت بیش‌تر در اعمال جبری و آشنایی با خطوط موازی محورها و به‌دست آوردن شیب هریک با

استفاده از تعریف شیب.

✓ **جلسه‌ی ۱۰:** فعالیت گروهی کتبی؛ تعمیق مفاهیم قبلی و ورود به مبحث جدید دستگاه معادلات و حل آن.

نکته‌ی قابل توجه این است که در این طرح درس، به جز تعریف شیب و مشاهده‌ی شهودی آن در چند آزمایش، هیچ فرمول یا رابطه‌ی دیگری به دانش‌آموزان گفته نمی‌شود و در عین حال آن‌ها می‌توانند به‌راحتی با استفاده از تعریف شیب، همه نوع مسئله از این مبحث را با هر نوع داده و مجهولی حل کنند. مهم‌ترین نکته این‌که نقش ریاضیات را در مدل‌سازی پدیده‌های فیزیکی اطراف خود می‌بینند و بیش از پیش، قدردان ریاضی و آن‌چه یاد گرفته‌اند می‌شوند.

سخن آخر این‌که:

به دانش‌آموزانمان کمک کنیم برای زندگی در قرن بیست‌و‌یکم آماده‌تر شوند!

به آن‌ها فرصت دهیم از یادگیری ریاضی لذت ببرند...

برای تحقق این اهداف و اهداف مشابه، با مطالعه و استفاده از نظرات آموزشی جدید، با تعداد کم در یک سال تحصیلی آغاز کنیم و ضمن بازخورد گرفتن از آن، به‌مرور آن را توسعه دهیم.

تشکر و قدردانی

لازم می‌دانم در این‌جا از همکاری‌های همکارانم در بخش علوم مدرسه، که ایده‌های من در خصوص جمع‌آوری داده‌های واقعی خطی برای ملموس ساختن این مبحث برای دانش‌آموزان را جامه‌ی عمل پوشاندند و آن را به یک فعالیت عملی واقعی تبدیل کردند؛ قدردانی کنم.

منابع

۱. داودی، خسرو؛ پندی، زهره؛ دلشاد، کبری؛ وزیری حامانه، سید حامد. **کتاب معلم (راهنمای تدریس) ریاضی سال سوم راهنمایی**؛ سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش، ۱۳۸۴.

۲. فرزان، مسعود؛ باهمت شیروانه ده، صفر؛ دیبایی، محمدتقی؛ فرهودی‌مقدم، پرویز. **کتاب درسی ریاضی سال سوم راهنمایی**؛ سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش، ۱۳۸۴.

3. Lake, Kathy, Integrated Curriculum; available at: http://www.nwrel.org/scpd.sirs/8/c016.html

4. Berlin; Danna F. Integrated Mathematics for Middle School: Internatinal Impressions, available at: http://www.nctm.org/resources/content.aspx?id=1696.

5. Integrated Curriculum Guide; available at: http://www.archeworks.org/projects/tcsp/ic-guide.html.

پیوست ۱: برگه‌ی فعالیت گروهی (جلسه‌ی اول)

توجه: همراه این برگه‌ها، چند برگ کاغذ شطرنجی در اختیار شما قرار می‌گیرد. در صورت لزوم، از آن‌ها استفاده کنید.

سایر وسایل لازم: خط‌کش، ماشین‌حساب، مداد یا خودکار رنگی.

هدف از انجام این فعالیت، برقرار کردن ارتباط بین مفهوم خط راست در هندسه، با اعداد و محاسبات در حساب است.

پیش از این، بین نقطه‌های یک صفحه (در هندسه) و مختصات (یعنی یک جفت عدد در حساب)، ارتباط برقرار کرده‌ایم.

۱) نقطه‌های زیر را (بادقت)، در یک دستگاه مختصات رسم کنید:

$$\begin{bmatrix} -2\frac{1}{2} \\ -2\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

اگر این نقطه‌ها را به‌ترتیب به هم وصل کنیم، آیا یک خط راست به‌وجود می‌آید یا یک خط شکسته؟

آیا در اولین نقطه، رابطه‌ای میان مختصه‌ی اول و مختصه‌ی دوم وجود دارد؟

آیا این رابطه، در تک‌تک نقاط دیگر نیز میان مختصه‌ی اول و مختصه‌ی دوم وجود دارد؟

اگر x، به جای مختصه‌ی اول و y به‌جای مختصه‌ی دوم این نقطه‌ها باشد، آیا می‌توانید رابطه‌ی به دست آمده برای همه‌ی نقاط در قسمت قبل [در صورت وجود] را به‌صورت یک عبارت جبری با استفاده از x و y، بنویسید؟

۲) همان پرسش‌ها را برای این نقطه‌ها، دوباره پاسخ دهید:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

۳) همان پرسش‌ها را برای این نقطه‌ها، دوباره پاسخ دهید:

$$\begin{bmatrix} \frac{۱}{۵} \\ ۱ \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} ۱ \\ ۵ \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -\frac{۱}{۵} \\ -۱ \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -۱ \\ -۵ \end{bmatrix}$$

۴) همان پرسش‌ها را برای این نقطه‌ها، دوباره پاسخ دهید:

$$\begin{bmatrix} ۲ \\ ۴ \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} \\ ۱ \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -\frac{۱}{۴} \\ -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -۳ \\ -۶ \end{bmatrix}$$

۵) همان پرسش‌ها را برای این نقطه‌ها، دوباره پاسخ دهید:

$$\begin{bmatrix} ۳ \\ ۵ \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} ۲ \\ ۴ \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} ۰ \\ ۲ \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -۲ \\ ۰ \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -۴ \\ -۲ \end{bmatrix}$$

۶) به نظر شما، آیا در هریک از موارد بالا می‌توانستیم بدون ترسیم نقطه‌ها، در یک دستگاه مختصات، و تنها با استفاده از عبارت‌های جبری که یافته این، بفهمیم که نقاط مورد نظر روی یک خط راست هستند یا نه؟

۷) اگر پاسخ شما به سؤال ۶ مثبت است، نظریه‌ی خود را برای هریک از مجموعه نقاط زیر امتحان کنید:

$$\left\{\begin{bmatrix} -۲ \\ ۶ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -۱ \\ ۳ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{۱}{۲} \\ ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ \\ -۳ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۲ \\ -۶ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۳ \\ -۹ \end{bmatrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{bmatrix} -۲ \\ -۳ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -۱ \\ -۲ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۰ \\ -۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{bmatrix} -۴ \\ -۲ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -۲ \\ -۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -۱ \\ \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} +۴ \\ ۲ \end{bmatrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{bmatrix} -۲ \\ ۴ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۲ \\ ۴ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۳ \\ ۹ \end{bmatrix}\right\}$$

۸) چه نتیجه‌ای از سؤال ۷ می‌گیرید؟ آیا حدس شما در سؤال ۶، درست بود؟ چرا؟

۹) با مرور مراحلی که طی شد، این فعالیت را جمع‌بندی کنید:

پیوست ۲: برگه‌ی تکلیف گروهی (جلسه‌ی ۱۰)

۱. داده‌های جدول‌های زیر، مربوط به دو آزمایش هستند که هم‌زمان صورت گرفته‌اند. در هر دو آزمایش، مایعی درون کالری‌متر با heater گرم شده است و دمای مایع، با گذشت زمان، در فواصل زمانی معین، ثبت شده است. از آن‌جا که مایع‌های درون دو کالری‌متر، متفاوت بوده و دمای مایع‌ها در آغاز آزمایش یکسان نبوده است، داده‌های دو آزمایش، متفاوت است.

با توجه به این اطلاعات، به پرسش‌های زیر پاسخ دهید:

ـ در زمان ۱۵ ثانیه، دمای مایع دوم چند درجه بوده است؟

ـ در چه زمانی دمای مایع اول، ۵۵ درجه بوده است؟

ـ آیا زمانی وجود داشته که دمای دو مایع، در آن لحظه از زمان، برابر بوده باشد؟ چرا؟

T(°C)	t(s)
۴۰/۰	۰
۴۳/۲	۴
۴۶/۴	۸
۴۹/۸	۱۲
۵۳/۰	۱۶
۵۶/۲	۲۰
۵۹/۴	۲۴
۶۲/۶	۲۸
۶۵/۸	۳۲
۶۹/۰	۳۶

داده‌های مربوط به تغییرات دمای مایع اول

T(°C)	t(s)
۲۵/۰	۰
۳۰/۶	۴
۳۶/۲	۸
۴۱/۸	۱۲
۴۷/۴	۱۶
۵۳/۰	۲۰
۵۸/۶	۲۴
۶۴/۲	۲۸
۶۹/۸	۳۲
۷۵/۴	۳۶

داده‌های مربوط به تغییرات دمای مایع دوم

پس از جمع‌بندی فعالیت فوق در کلاس، تکالیف زیر را در گروه انجام دهید:

تکلیف ۱. داده‌های جدول‌های زیر نیز، مربوط به دو آزمایش هستند که هم‌زمان صورت گرفته‌اند. در هر دو آزمایش، مایعی درون کالری‌متر با heater گرم شده است و دمای مایع، با گذشت زمان، در فواصل زمانی معین، ثبت شده است.

با توجه به این اطلاعات، به پرسش‌های زیر پاسخ دهید:

ـ در زمان ۱۰ ثانیه، دمای مایع دوم چند درجه بوده است؟

ـ در چه زمانی دمای مایع اول، ۶۵ درجه بوده است؟

ـ آیا زمانی وجود داشته که دمای دو مایع، در آن لحظه از زمان، برابر بوده باشد؟ چرا؟

T(°C)	t(s)
۴۰/۰	۰
۴۵/۶	۴
۵۱/۲	۸
۵۶/۸	۱۲
۶۲/۴	۱۶
۶۸/۰	۲۰

داده‌های مربوط به تغییرات دمای مایع اول

T(°C)	t(s)
۲۵/۰	۰
۲۸/۲	۴
۳۱/۴۴	۸
۳۴/۶	۱۲
۳۷/۸	۱۶
۴۱/۰	۲۰

داده‌های مربوط به تغییرات دمای مایع دوم

تکلیف ۲. داده‌های جدول‌های زیر نیز، مربوط به دو آزمایش هستند که هم‌زمان صورت گرفته‌اند. در هر دو آزمایش، مایعی درون کالری‌متر با heater گرم شده است و دمای مایع، با گذشت زمان، در فواصل زمانی معین، ثبت شده است. با توجه به این اطلاعات، آیا زمانی وجود داشته که دمای دو مایع، در آن لحظه از زمان، برابر بوده باشد؟ چرا؟

T(°C)	t(s)
۵۳/۰	۸
۵۷/۸	۱۲
۶۲/۶	۱۶
۶۷/۴	۲۰
۷۲/۲	۲۴
۷۷/۰	۲۸
۸۱/۸	۳۲

داده‌های مربوط به تغییرات دمای مایع اول

T(°C)	t(s)
۴۳/۲	۸
۴۸/۰	۱۲
۵۲/۸	۱۶
۵۷/۶	۲۰
۶۲/۴	۲۴
۶۷/۲	۲۸
۷۲/۰	۳۲

داده‌های مربوط به تغییرات دمای مایع دوم

پی‌نوشت

1. Interdependence
2. Interconnectedness
3. American Mathematical Society
4. Correlation of Work

تابع

درک دانش‌آموزان از مفهوم اصلی

بی بی زکیه پرهیزگار
کارشناس ارشد آموزش ریاضی
زهرا گویا
دانشگاه شهید بهشتی

مقدمه

دنیا از کهکشان‌ها، کوه‌ها، مخلوقات، ماشین‌ها و چیزهایی ساخته شده که هر یک به‌نظر منحصر به فرد می‌آیند. هم‌چنین، دنیا یک امر آشوبی است که در آن، همه‌ی آن چیزها به راه‌های گوناگون و اغلب به‌طور خشونت‌بار اما گاهی هم بسیار نافذ، در کار هم دخالت می‌کنند. در چنین اوضاعی، باید از ریاضی ممنون بود که مردم را قادر ساخته است تا درباره‌ی دنیای اشیاء و رخدادها فکر کنند و با آن افکار، به گونه‌ای که وحدت و نظم را آشکار می‌سازد، ارتباط برقرار کنند (پروژه‌ی علوم برای تمام آمریکایی‌ها، ۱۹۹۷، ترجمه‌ی گویا و مرتاضی مهربانی، ۱۳۸۳، ص ۴).

این پروژه در ادامه، با توجه به هدف‌های سوادآموزی عمومی علوم، تأکید کرده است که برای دانش‌آموزان مهم است که

۱) بفهمند که به چه معنا، ریاضی مطالعه‌ی الگوها و روابط است؛

۲) با بعضی از آن الگوها و روابط آشنا شوند؛

۳) یاد بگیرند که از آن‌ها در زندگی روزانه استفاده کنند.

یک **رابطه**، عبارتی است که چگونگی ارتباط بین دو شیء یا بیش‌تر را نشان می‌دهد و به شکل‌های مختلفی به نمایش گذاشته می‌شود، مانند جدول و نمودار و تصویر. **الگوها** نیز این رابطه‌ها را به خوبی تعریف می‌کنند، رابطه‌هایی که از **تغییر** اشیاء حاصل می‌شوند.

اما تابع به‌عنوان یکی از مفاهیم اساسی ریاضیات، می‌تواند این امر را که ریاضی علم الگوها و روابط است توجیه کند، چرا که تابع، خود یک رابطه است و الگویی است که بسیاری از روابط پیچیده‌ی پدیده‌های جهان واقعی را روشن می‌سازد.

بنابراین، درک صحیح و همه‌جانبه‌ی دانش‌آموزان از مفهوم تابع، می‌تواند در جهت تحقق اهداف سوادآموزی علوم، بسیار مهم و اساسی باشد.

کلید واژه‌ها: مفهوم تابع، بازنمایی‌های مختلف تابع، درک دانش‌آموزان از تابع، فرهوم.

استفاده از بازنمایی‌های چندگانه در یادگیری ریاضی و به‌ویژه یادگیری مفهوم تابع، یعنی اتصال، مقایسه و تبدیل از یک حالت بازنمایی به حالت دیگر بازنمایی به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا بتوانند مهارت‌های نمایش و تشخیص مفهوم تابع را در بازنمایی‌های مختلف کسب کنند و بتوانند بین آن‌ها، اتصال و ارتباط برقرار نمایند

دانش‌آموزان و مفهوم تابع

مفهوم تابع یکی از اساسی‌ترین مفاهیم ریاضی است که یادگیرنده‌ها از دوران ابتدایی تا دانشگاه، با آن سروکار دارند. آموزش این مفهوم نیز در تمام سطوح، معمولاً با یک تعریف رسمی آغاز می‌شود و سپس، برای بهتر فهمیدن آن توسط دانش‌آموزان، مثال‌هایی با بازنمایی‌های مختلف ارائه می‌شوند که از آن جمله، می‌توان به نمایش تصویری مانند استفاده از نمودار ون، ماشین تابع، جدول مقادیر، نمودار مختصاتی و فرمول اشاره کرد که هر کدام از این بازنمایی‌ها، ویژگی‌های خاص خود را دارند و برای درک عمیق‌تر مفهوم تابع توسط دانش‌آموزان به‌کار می‌روند. استفاده از بازنمایی‌های چندگانه برای یک ایده‌ی مشابه و انتقال از یک بازنمایی به بازنمایی دیگر، به درک عمیق‌تر مفهوم کمک می‌کند، چون زمانی می‌توان مطمئن شد دانش‌آموز معنای واقعی رابطه‌ای را درک کرده است که بتواند آن رابطه را در جدول‌ها، نمودارها، نمادها و کلمات نشان دهد (پروژه‌ی علوم برای تمام آمریکایی‌ها، ۱۹۹۷، ترجمه‌ی گویا و مرتاضی مهربانی، ۱۳۸۳، ص ۴). از طرف دیگر، یافته‌های تحقیقی نشان می‌دهند که دانش‌آموزان در دیدن ارتباط بین بازنمایی‌های چندگانه، ناتوان هستند (کارلسون، ۱۹۹۹). هم‌چنین، قاعده‌ای که توسط دانش‌آموزان برای تعیین یک تابع به‌کار می‌رود با تعریف رسمی این مفهوم ـ حتی برای دانش‌آموزانی که می‌توانند این تعریف را به‌کار برند ـ متفاوت است (مدقالچی، ۸۰ ـ ۱۳۷۹، ص ۲۴ به نقل از وینر و دریفوس، ۱۹۸۹). این یافته‌ها نشان می‌دهند که آگاهی از چگونگی درک دانش‌آموزان از مفهوم تابع و مشکلاتی که حین استفاده از بازنمایی‌های چندگانه برای یادگیری تابع به‌وجود می‌آید، حائز اهمیت زیادی است. به‌خصوص با توجه به کاربردهای وسیعی که تابع در زمینه‌های مختلف ریاضی دارد، انجام تحقیقاتی که به قصد بهبود آموزش این مفهوم انجام می‌شوند، ضروری‌اند.

اهمیت مفهوم تابع در برنامه‌ریزی درسی ریاضی مدرسه‌ای

یکی از اولین کسانی که بر اهمیت و نقش اساسی مفهوم تابع در کل برنامه‌ی آموزش ریاضیات تأکید زیادی داشت، فلیکس کلاین بود (هملی[1]، ۱۹۳۴). وی در سال ۱۸۹۳ در یک سخنرانی قبل از شروع کنگره‌ی بین‌المللی ریاضیات که در شیکاگو برگزار شد، توجه تمام معلمان ریاضی را به اهمیت اساسی آن‌چه که او آن را «تفکر تابعی» نامیده بود، جلب کرد. کلاین بارها در کنفرانس‌های بین‌المللی اظهار داشت که «مفهوم تابع» باید یک مفهوم محوری در آموزش ریاضیات باشد. وی مجدداً در ارائه‌ی گزارشی به کنگره‌ی بین‌المللی ریاضیات که در سال ۱۹۰۸ در رم برگزار شد، دوباره بر روی مفهوم تابع تأکید کرده و اعلام نمود که «نه تنها معلمان باید این مفهوم را به‌عنوان یک روش ریاضی در نظر بگیرند، بلکه باید آن را به‌عنوان قلب و روح آموزش ریاضی به‌شمار آورند. وی در ادامه اظهار داشت که «این اعتقاد من است» که مفهوم تابع، باید روح مطالعه‌ی ریاضیات در مدارس باشد» (نقل شده در هملی ۱۹۳۴، ص ۱۷۰ـ۱۶۹).

به گفته‌ی هدریک[2] (۱۹۳۸)، مفهوم تابع در مراحل ابتدایی، با ایده‌ی تناظر متغیرها مرتبط می‌شود. وی توضیح می‌دهد که مثلاً در مبحث اثر مقاومت هوا بر حرکت یک اتومبیل، هنگامی که می‌گوییم مقاومت به سرعت بستگی دارد، تفکر تابعی ظاهر می‌شود. برای تفکر تابعی، الزاماً نیاز به داشتن یک فرمول دقیق نیست. هرگونه مشاهده‌ای مانند این‌که افزایش سرعت باعث افزایش مقاومت می‌شود، در حوزه‌ی تفکر تابعی قرار می‌گیرد. علاوه بر این، هدریک اظهار می‌دارد که تحقیق درباره‌ی داده‌های تجربی نیز، یکی دیگر از مراحل تفکر تابعی است. مثلاً بررسی اطلاعات آماری که برای مقاومت در سرعت‌های مختلف به‌دست می‌آید و کشیدن نموداری که اطلاعات صریح‌تری درباره‌ی ماهیت رابطه ارائه می‌دهد نیز جزو تفکر تابعی محسوب

می‌شوند. وی در ادامه، بیان می‌کند که حتی در هر مرحله‌ای از حساب ابتدایی، تفکر تابعی ممکن است ظاهر شود؛ مثل وقتی که با دانستن قیمت یک واحد از هر شیء، قیمت چند واحد دیگر را به‌دست می‌آوریم که با چنین محاسباتی، ایده‌ی رابطه‌ی بین متغیرها می‌تواند به ذهن دانش‌آموز خطور کند. به همین ترتیب، مفهوم تابع و تفکر تابعی در تمام حوزه‌های ریاضیات مانند جبر، هندسه، حسابان، مثلثات و ریاضیات پیشرفته ظاهر می‌شود که همه‌ی آن‌ها، نیازمند درک صحیحی از مفهوم تابع می‌باشند.

بنابراین، با مفهوم تابع در کل ریاضیات ـ از اولین گام‌ها در حساب ابتدایی گرفته تا ریاضیات پیشرفته در سطح دانشگاهی، سروکار داریم زیرا به گفته‌ی هدریک (۱۹۳۸)، مفهوم تابع، موضوعی است که مستعد هماهنگ‌کردن کل ریاضیات است و ریاضیات را با زندگی و علم تلفیق می‌کند. در تأیید چنین دیدگاهی، آکوک و تال (۲۰۰۶) به نقل از استانداردهای شورای ملی معلمان ریاضی (NC TM) (۱۹۸۹) بیان می‌دارند:

مفهوم تابع، یک ایده‌ی هماهنگ‌کننده[3] و مهم در ریاضی است. توابع که تناظرهای خاص بین دو مجموعه هستند، در سراسر برنامه‌ی درسی مشترک‌اند. در حساب، توابع به‌عنوان عملیات مفید بر روی اعداد مانند متناظر شدن یک جفت عدد به یک عدد خاص و مانند جمع دو عدد به‌نظر می‌رسند؛ در جبر، توابع روابطی بین متغیرها هستند که اعداد را ارائه می‌دهند؛ در هندسه، توابع مجموعه‌ای از نقاط را به تصویرشان تحت حرکت‌هایی مانند برگرداندن‌ها[4]، سریدن‌ها[5] و چرخش‌ها، مرتبط می‌کنند؛ و در احتمال، توابع، پیشامدها را به احتمالات آن‌ها مربوط می‌سازند. هم‌چنین، اهمیت دیگر تابع این است که تابع، رابطه‌ی ریاضی متشکل از موقعیت‌های ورودی و خروجی جهان واقعی است.

هم‌چنین، کارلسون (۱۹۹۹) معتقد است که داشتن درک بالا و قوی از مفهوم تابع، برای هر دانش‌آموزی ضروری است تا بتوان امیدوار بود که وی، حسابان را درک کند. از طرف دیگر، به گفته‌ی ساجکا (۲۰۰۳)، تابع یکی از مفاهیم اساسی ریاضی است که در گوناگونی تفسیرها و بازنمایی هایش شگفت‌آور است و توجه و زمان زیادی در فرآیندهای آموزشی بر روی آن صرف شده است. با این حال، تابع هم‌چنان مفهومی پیچیده و مشکل باقی‌مانده است، زیرا با وجودی که دوگانگی فرآیند ـ شیء و بازنمایی‌های مختلف، ظرافت و پیچیدگی مفهوم تابع را نشان می‌دهد، دانش‌آموزان اغلب بر ایده‌های شهودی و غیرمتفکرانه از روابط تابعی متکی هستند. بدین سبب و همان‌طور که دیویس و مک گان (۲۰۰۲)، مشاهده کرده‌اند، مفهوم تابع با طیف وسیعی از نمادهایش با بدفهمی‌های گسترده‌ای همراه است.

با توجه به اهمیت قابل ملاحظه‌ای که تابع در ریاضی و حتی سایر علوم دارد، به‌نظر می‌رسد تحقیقات بر روی آموزش و درک این مفهوم ضروری است. به‌ویژه این‌که تحقیقات نشان می‌دهند درک مفهوم تابع برای دانش‌آموزان سخت است و حتی دانش‌آموزانی که نمره‌های بالایی در حسابان دارند، درک ضعیفی از این مفهوم دارند (بردنباخ[6]، دوبینسکی، هاوس[7] و نیکولز[8]، ۱۹۹۲؛ کارلسون[9]، ۱۹۹۹).

معرفی یک پژوهش

با توجه به نقش و اهمیت تابع در ریاضی و مشکلاتی که دانش‌آموزان در یادگیری این مفهوم محوری دارند، تحقیقی با تبیین اهداف زیر طراحی شد:

۱) شناخت دشواری‌ها و پیچیدگی‌های احتمالی دانش‌آموزان در برخورد با بازنمایی‌های چندگانه‌ی تابع؛

۲) بررسی تصورات دانش‌آموزان نسبت به مفهوم تابع؛

۳) بررسی چگونگی استفاده‌ی دانش‌آموزان از ویژگی‌های تعریف تابع برای بازنمایی‌های مختلف.

با توجه به اهداف بالا، یکی از سؤال‌هایی که در این پژوهش طراحی شد، چنین بود:

دانش‌آموزان در برخورد با بازنمایی‌های مختلف تابع، چگونه از تعریف تابع استفاده می‌کنند؟

چارچوب نظری این تحقیق، براساس دیدگاه تامسون از مفهوم اصلی تابع شکل گرفت.

تامسون (۱۹۹۴) اظهار می‌دارد که مفهوم اصلی تابع، تنها از طریق ارائه‌ی بازنمایی‌های چندگانه حاصل نمی‌شود بلکه لازم است که به جای تمرکز بر این بازنمایی‌های مجرد، ابتدا یک حس ذهنی غیرمتزلزل در دانش‌آموزان ایجاد کنیم.

هم‌چنین، آکوک و تال (۲۰۰۳)، با استناد به یافته‌های تامسون بیان می‌کنند که ضروری است که دانش‌آموزان هنگام کار کردن با بازنمایی‌های مختلف تابع، ایده‌های نهفته در آن‌ها را درک کنند. در غیر این‌صورت برای دانش‌آموزان، بازنمایی تبدیل به موضوعی می‌شود که جداگانه باید یاد گرفته شود.

معلمان، برنامه‌ریزان درسی و مؤلفان کتاب‌های ریاضی مخاطبان اصلی این تحقیق هستند. معلمان ریاضی می‌توانند از

آشنایی معلمان با تصورهای دانش‌آموزان نسبت به مفهوم تابع، می‌تواند به برطرف کردن مشکلات و پیچیدگی‌هایی که ممکن است با تعریف رسمی مفهوم تابع در ذهن آن‌ها شکل گیرد، کمک کند

نتایج به‌دست آمده در این تحقیق برای ارتقای کیفیت تدریس و بهبود یادگیری دانش‌آموزان استفاده کنند. برنامه‌ریزان درسی و مؤلفان کتاب‌های درسی نیز می‌توانند با بهره‌گیری از نتایج این تحقیق، هم در انتخاب محتوای کتاب‌های درسی ریاضی و هم در سازمان‌های تألیف، از به‌کارگیری آن‌چه که با ساختارهای شناختی دانش‌آموزان مغایرت دارد، اجتناب ورزند.

این تحقیق تمرکز خود را تنها بر روی درک دانش‌آموزان پایه‌های دوم و سوم دبیرستان از مفهوم تابع قرارداد و نتایج به‌دست آمده درباره‌ی درک دانش‌آموزان از مفهوم تابع، محدود به شرکت‌کنندگان در این تحقیق است. هرچند پژوهشگر برای رفع بعضی ابهامات و سؤالات ذهنی، در منطقه‌ی دیگر از کشور، همین تحقیق را عیناً تکرار کرد و نتایج به‌دست آمده تا حد زیادی مؤید یکدیگر بودند.

در این پژوهش، واژه‌های تابع، بازنمایی، فرهوم با تعریف‌های عملیاتی زیر استفاده شد:

تابع؛ عبارت است از یک تناظر بین دو مجموعه‌ی ناتهی که به هر عنصر از مجموعه‌ی اول (دامنه) دقیقاً یک عنصر در مجموعه‌ی دوم (هم‌دامنه) نسبت داده می‌شود (مفهوم دریکله ـ بورباکی).

گاهی اوقات، برای اجتناب کردن از واژه‌ی تناظر، تابع به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب که شرایط خاصی دارند معرفی می‌شوند (وینر و دریفوس[10]، ۱۹۸۹).

بازنمایی؛ روشی برای ارائه‌ی یک مفهوم ریاضی است. مثلاً، بازنمایی عددی، رویه‌ای عددی برای محاسبه‌ی یک نتیجه‌ی عددی است؛ بازنمایی نموداری وقتی به‌کار می‌رود که ورودی و خروجی محاسبات با نمودار نمایش داده شود و بازنمایی نمادین هنگامی است که برحسب نمادگذاری جبری نمایش داده شوند (سرشتی، ۱۳۸۴).

فرهوم[11]؛ ترکیبی از فرآیند، مفهوم و نماد است، تال ۱۹۹۷، به نقل از گری و تال ۱۹۹۴، در توضیح فرهوم مثال زیر را بیان کرده‌اند:

یک فرآیند (مانند جمع ۳ و ۴)، یک مفهوم (که به‌وسیله‌ی فرآیند تولید می‌شود مانند عمل جمع) و یک نماد که فرآیند یا مفهوم را فرامی‌خواند (یعنی ۴+۳).

در این بخش، بعضی از نتایج این پژوهش به اجمال بررسی می‌شود. این بررسی براساس ویژگی‌های تابع است که از کتاب‌های ریاضی ۲* و حسابان استخراج شده‌اند. این ویژگی‌ها عبارتند از:

فرض کنید A و B به ترتیب نمایانگر دامنه و هم‌دامنه تابع f باشد، آن‌گاه:

۱. به ازای هر $x \in A$، y ای متعلق به B وجود داشته باشد به طوری که $(x,y) \in f$ باشد.

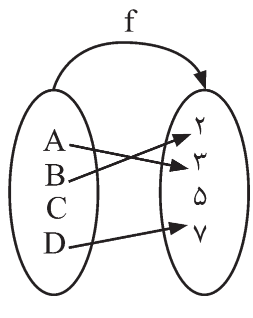
۲. اگر $(x,y_۱) \in f$ و $(x,y_۲) \in f$ باشند. آن‌گاه $y_۱ = y_۲$ است.

۳. عضوهای متفاوت در A می‌توانند به یک عضو یکسان در B نسبت داده شوند.

۴. برخی عضوها در B ممکن است نظیر هیچ عضوی از A نشوند.

جمع‌بندی پاسخ‌های مربوط به نمودارهای وِن

سؤال ۱. آیا نمودار وِن زیر، تابع است؟ پاسخ خود را شرح دهید.



هدف این سؤال، بررسی درک دانش‌آموزان از این ویژگی تابع بود که به هر عضو در دامنه، باید عضوی در هم‌دامنه نسبت داده شود. نمونه‌های زیر معرف پاسخ‌های دانش‌آموزان است.

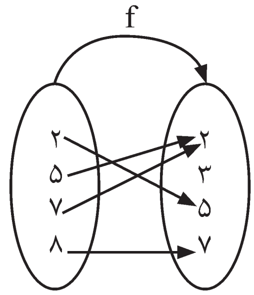
● **تابع است، چون هر x به یک y می‌رود.**

● **تابع است، چون مؤلفه‌های اول با یکدیگر برابر نیستند و به هر یک از مؤلفه‌های اول عددی خاص تعلق گرفته است.**

تجزیه و تحلیل پاسخ‌های دانش‌آموزان نشان داد که تنها تعداد کمی از دانش‌آموزان در حین کار کردن با بازنمایی‌های مختلف تابع، بر روی ویژگی‌های تعریف تابع متمرکز شدند

● **تابع نیست، زیرا به ازای هر عضو در B عضوی در B وجود ندارد.**
● **تابع نیست، زیرا به ازای هر عضو در A عضوی در B وجود ندارد.**

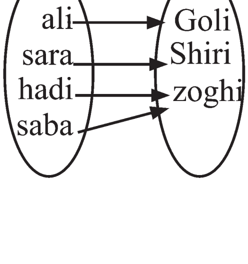
سؤال ۲. آیا نمودار زیر، تابع است؟ پاسخ خود را شرح دهید.



هدف این سؤال، بررسی درک دانش‌آموزان از این ویژگی تابع بود که برخی عناصر در هم‌دامنه، ممکن است نظیر هیچ عضوی از دامنه نشوند. نمونه‌های زیر معرف پاسخ‌های دانش‌آموزان است:

● **تابع است، چون دو x می‌تواند به یک y برود.**
● **تابع است، زیرا مؤلفه‌هایشان یکی است و yهایشان هم باید یکی باشد، ولی این جا x ها متفاوت‌اند، اشکالی ندارد yهایشان یکی باشد.**
● **تابع نیست، زیرا به ازای هر عضو در B عضوی در A وجود ندارد.**
● **تابع نیست، زیرا به ازای هر عضو در A عضوی در B وجود ندارد.**

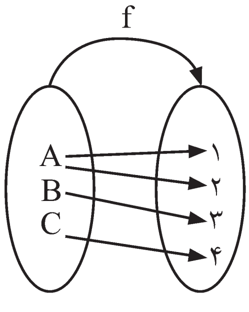
سؤال ۳. آیا نمودار ون زیر، تابع است؟ پاسخ خود را شرح دهید.



هدف این سؤال، بررسی درک دانش‌آموزان از این ویژگی تابع بود که عضوهای متفاوت در دامنه می‌توانند به یک عضو یکسان در هم‌دامنه نسبت داده شوند. نمونه‌های زیر معرف تنوع پاسخ‌های دانش‌آموزان به این سؤال است:

● **تابع اَست، چون دو x می‌تواند به یک y برود.**
● **تابع است، چون مؤلفه‌های اول هر کدام فقط به یکی از مؤلفه‌های دوم وصل‌اند، مانند مورد (۲).**
● **تابع است، چون مؤلفه‌های x شان متفاوت ولی yهایشان یکی است، اشکالی ندارد.**

سؤال ۴. آیا نمودار وِن زیر، تابع است؟ پاسخ خود را شرح دهید.



هدف این سؤال، بررسی درک دانش‌آموزان از این ویژگی تابع بود که به هر عضو دامنه، عضو معین و منحصر به فردی از هم‌دامنه نسبت داده می‌شود. نمونه‌های زیر معرف پاسخ‌های متنوع دانش‌آموزان است:

● **تابع نیست، چون یک x نمی‌تواند به دو y برود.**
● **تابع نیست، چون به A یک دفعه ۱ و یک دفعه ۳ داده است.**
● **تابع نیست، مؤلفه‌های xشان یکی است، yهایشان هم باید یکی باشد.**
● **طبق تعریف در تابع نباید هیچ دو زوج دارای مؤلفه‌ی (x) یکسان باشند.**

نتایج تجزیه و تحلیل داده‌های مربوط به نمودارهای ون نشان داد که ۶۲/۵٪ و ۵۶/۲۵٪ از دانش‌آموزان به ترتیب، به سؤال یک و دو پاسخ نادرست دادند و تمام دانش‌آموزان، به سؤال‌های ۳ و ۴ پاسخ درست دادند. در واقع، می‌توان عوامل محتملی که سبب شد دانش‌آموزان به نمایش‌های نمودار ون اول و دوم پاسخ

درست دهند را به صورت زیر جمع آوری نمود.

● **آگاهی نداشتن و یا توجه نکردن به این نکته که باید به ازای هر عضو در دامنه، یک عضو در هم‌دامنه نسبت داده شود، یعنی تابع باید به ازای تمام اعضای دامنه تعریف شده باشد (ویژگی (۱)).**

● **آگاهی نداشتن نسبت به این نکته که برخی عناصر در هم‌دامنه ممکن است نظیر هیچ عضوی از دامنه نشوند (ویژگی (۴)).**

هم‌چنین، دانش‌آموزان نسبت به ویژگی‌های (۳) و (۲) از تعریف تابع، «یعنی عناصر متفاوت در دامنه می‌توانند به عنصر یکسانی از بُرد نسبت داده شوند» و «اگر دو زوج دارای مؤلفه‌های اول یکسان باشند، آن‌گاه مؤلفه‌های دوم آن‌ها نیز باید باهم برابر باشند»، آگاهی کافی داشتند و به سادگی توانستند آن‌ها را در دیاگرام‌ها وِن ببینند.

در مجموع، تجزیه و تحلیل پاسخ‌های این قسمت این حدسیه را تقویت کردند که آگاهی نداشتن نسبت به ویژگی‌های (۱) و (۴)، می‌تواند یک عامل جدی برای ایجاد پیچیدگی‌های شناختی در ذهن دانش‌آموزان شود که این عامل، حتی مانع توجه دانش‌آموزان به ویژگی‌هایی شد که از آن‌ها آگاهی داشتند.

یافته‌های حاصل از تجزیه و تحلیل مجموعه‌ی جفت‌های مرتب

سؤال: آیا نمایش زوج مرتبی زیر تابع است؟ پاسخ خود را شرح دهید.

$$f:\{۱,۲,۳,۷,۹\}\to \mathbb{R}$$
$$f=\{(۱,۳),(۲,۵),(۳,۲),(۷,-۱),(۹,۱)\}$$

هدف از طرح این سؤال، بررسی درک دانش‌آموزان از تعریف تابع به صورت بازنمایی زوج مرتبی بود. نمونه‌های زیر معرف تنوع پاسخ‌های متفاوت دانش‌آموزان به این سؤال است:

● **تابع است، چون هیچ زوج مرتبی را نمی‌توان یافت که مؤلفه‌های اول آن یکسان باشد.**

● **تابع است، چون اعداد f باهم یکی نیست و متفاوت است.**

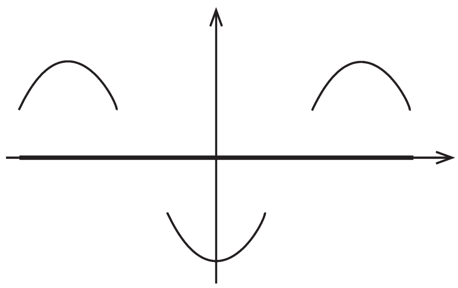
● **تابع است، چون به ازای هر x یک y وجود دارد.**

تمام دانش‌آموزان نیز به این سؤال، با تکیه بر ویژگی (۲) پاسخ صحیح ارائه دادند. دانش‌آموزان مصاحبه شونده نیز، با استفاده از ویژگی (۲) استدلال کردند که «اگر یک داشته باشیم، دو مقدار برای یک نداریم». در نتیجه، به این سؤال پاسخ صحیح دادند.

این پاسخ‌ها نشان دادند که دانش‌آموزان، بازنمایی زوج مرتبی تابع را به خوبی می‌شناختند و توانایی استفاده از آن را داشتند.

یافته‌های حاصل از تجزیه و تحلیل سؤالات مربوط به بازنمایی نموداری

سؤال ۱. آیا نمودار زیر تابع است؟ پاسخ خود را شرح دهید.



هدف این سؤال، بررسی درک دانش‌آموزان از مفهوم تابع در بازنمایی نموداری و به‌خصوص مفهوم دامنه بود. البته، این نمودار با مثال‌هایی که دانش‌آموزان به‌عنوان تابع با آن‌ها آشنا بودند، متفاوت بود و همین، عاملی برای انتخاب این سؤال بود. نمونه‌های زیر معرف تنوع پاسخ‌های متفاوت دانش‌آموزان به این سؤال است:

● **تابع است، زیرا دامنه تمام اعداد حقیقی است.**

● **تابع است، زیرا در این دامنه هر خط موازی محور yها، آن را در یک نقطه قطع خواهد کرد.**

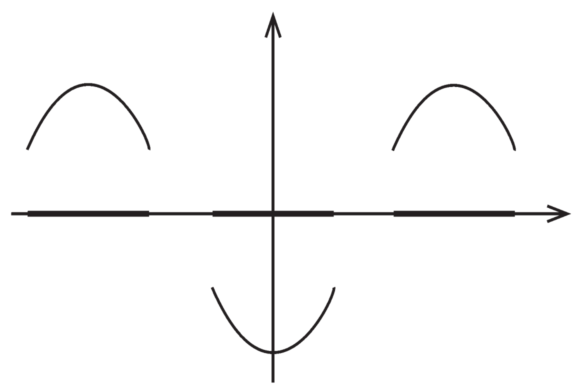
● **تابع است، چون دامنه‌ی نمودار آن تمام اعداد حقیقی است و در نتیجه هر خط موازی محور yها آن را در یک نقطه قطع خواهد کرد.**

این پاسخ‌ها نشان می‌دهند که اکثر دانش‌آموزان در پاسخ به این سؤال، موفق نبودند. یکی از دانش‌آموزان، با مقایسه‌ی نمودار شماره‌ی (۱) و نمودار شماره‌ی (۲) باهم، به این نتیجه رسید که «تابع نمی‌تواند دامنه‌های قطعه‌قطعه داشته باشد، بنابراین، چون دامنه‌ی این نمودار تمام اعداد حقیقی است، پس باید این نمودار تابع باشد» (البته دامنه تمام اعداد حقیقی نیست).

بعضی از دانش‌آموزان، به استناد ملاک تشخیص تابع از روی نمودار به راحتی نتیجه گرفتند که این نمودار تابع است. در حالی که مسئله‌ی مهمی که در این سؤال مطرح بود، توجه به نقاطی از **دامنه** بود که هیچ yای برای آن‌ها تعریف نشده بود و دانش‌آموزان به این شرط مهم توجه نکرده بودند که «ملاک تشخیص تابع از روی نمودار» در دامنه‌ی تعریف شده معنا دارد نه هر نقطه‌ی دلخواه.

از این گذشته، ۱۲ نفر (۷۵٪) از دانش‌آموزان، دو دلیل برای تابع بودن ارائه دادند و دلیل دوم را نتیجه‌ی دلیل اول، معرفی کردند. از این دو دلیل، دو برداشت متفاوت می‌توان داشت؛ یکی این‌که از طریق مقایسه‌ی دو نمودار حدس زده بودند که اگر دامنه تمام اعداد حقیقی باشد، امکان آن بیش‌تر است که آن نمودار، تابع باشد و برداشت دیگر این‌که دانش‌آموزان، خط موازی محور yها را در نقاطی که تابع در آن‌ها تعریف نشده بود نیز رسم کردند که این خط، در هر صورت دامنه را در یک نقطه قطع می‌کرد و بدین‌سبب، نتیجه گرفتند که این نمودار، در تمام نقاط دامنه تابع است. این حدس از آن‌جا تقویت می‌شود که اکثر دانش‌آموزان، بدون این‌که این خط را رسم کنند، چنین استدلالی ارائه کردند. این پاسخ‌ها نشان می‌دهند که دانش‌آموزان درکی عمیق از مفهوم دامنه‌ی تابع نداشتند.

سؤال۲. آیا نمودار زیر، تابع است؟ پاسخ خود را شرح دهید.



اگرچه این سؤال، همان اهداف سؤال قبل را دنبال می‌کرد، اما این تفاوت را داشت که این نمودار، یک تابع بود و به بررسی عمیق‌تر درک دانش‌آموزان از مفهوم دامنه می‌پرداخت. پیش‌بینی پژوهشگر این بود که دانش‌آموزان، از تکنیک خط موازی محور yها استفاده کنند و نسبت به دامنه توجه کمتری داشته باشند. نمونه‌های زیر معرف پاسخ‌های گوناگون دانش‌آموزان به این سؤال است:

● **تابع نیست، چون دامنه‌ی اعداد حقیقی محدود است و قسمتی از اعداد x می‌باشد.**

● **تابع نیست، زیرا دارای دامنه‌های متفاوتی است.**

● **تابع نیست، چون دامنه‌ی نمودار آن محدود است و می‌توان خطی موازی محور yها رسم کرد که تابع را در هیچ نقطه‌ای قطع نکند و آن خط تابع را باید حداکثر در یک نقطه قطع کند.**

● **نمی‌دانیم، چون تشخیص تابع در صورتی که دامنه‌های متفاوت داشته باشد در حوزه‌ی تعلیمات ما نمی‌باشد.**

و تنها پاسخ صحیح به این سؤال این بود که:

● **تابع است، چون هر خطی که موازی محور yها بکشیم، تابع را فقط در یک نقطه قطع خواهد کرد.**

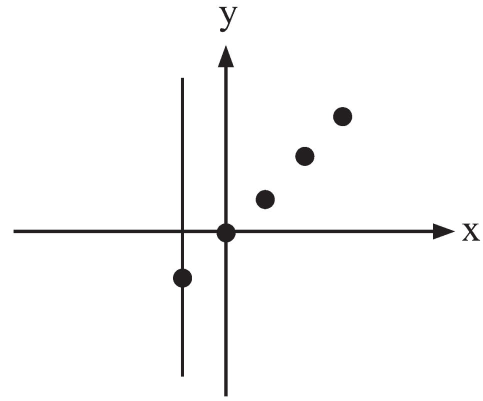
در مجموع، از بررسی پاسخ‌های دانش‌آموزان استنباط می‌شود که اغلب آن‌ها، نموداری را که دارای دامنه‌های قطعه‌قطعه باشد، تابع نمی‌دانستند. هم‌چنین، اکثر دانش‌آموزان از تکنیک خط موازی محور yها برای قضاوت راجع‌به تابع بودن یا نبودن تابع استفاده کردند و نتیجه گرفتند که «این نمودار نمی‌تواند تابع باشد». در واقع، آن‌ها خط موازی محور yها را در بین قطعه‌های مختلف نمودار رسم کردند و چون نمودار را در هیچ نقطه‌ای قطع نکرد، آن را دلیل محکمی برای تابع نبودن دانستند. شاید علت این نوع استفاده از تکنیک خط موازی محور yها، این توصیه‌ی کتاب ریاضی سال دوم، ص۲۴ باشد که:

«از نظر نموداری، رابطه‌ای تابع است که هر خط موازی محور yها به‌صورت x=a، نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند».

در نتیجه، دانش‌آموزان بیش‌تر به دنبال این بودند که خط موازی محور yها، تابع را در بیش‌تر از یک نقطه قطع نکند. در حالی که اکثر آن‌ها، به این نکته توجهی نداشتند که این خط، باید در **محدوده‌ی نمودار** رسم شود.

اگرچه دانش‌آموزان، ظاهراً از تکنیک خط موازی محور yها استفاده کردند، ولی چون این نمودارها را با نمونه‌ها و مثال‌هایی که قبلاً تجربه کرده بودند مقایسه می‌کردند، چنین استدلال‌هایی را ارائه کردند. شاید عدم سازگاری دانش موجود با تجربه‌های قبلی، یکی از دلایلی بود که دانش‌آموزان، «محدود بودن دامنه» را «دلیلی برای تابع نبودن» به حساب آوردند.

به‌طور مثال، یکی از دانش‌آموزان پایه‌ی دوم، به عدم آشنایی با نموداری که دارای دامنه‌های مجزاست، اشاره نمود. در حالی که در صفحه‌ی ۲۴ کتاب ریاضی ۲، نموداری ارائه شده است که نمودار نقطه‌ای است.



بنابراین استدلال این دانش‌آموزان می‌تواند چند پیام داشته باشد که یکی عدم توجه و دقت وی به مثال‌های ارائه شده در کتاب درسی و دیگری عدم استفاده‌ی معلم از کتاب‌های درسی یا عدم تأکید معلم به مثال‌های خاص است که منجد به ناسازگاری دانش موجود با تجربه‌های قبلی دانش‌آموز شده است. همه‌ی این دلایل و دلایل دیگری که شاید وجود داشته باشند و هنوز برای پژوهشگر ناشناخته هستند، باعث شد تا همه‌ی دانش‌آموزان به جز یک نفر، نتوانند در برخورد به این سؤال پاسخ درست دهند.

تنها فردی هم که به این سؤال پاسخ درست داد، به قطعه قطعه بودن دامنه‌ی نمودار توجهی نکرده بود. با این حال، این فرد در پاسخ به نمودار شماره‌ی (۱) دچار اشتباه شد. یعنی با وجودی که وی به این سؤال پاسخ داد، ولی پاسخ نادرست او به نمودار شماره‌ی یک، عدم توجه و درک دامنه را نشان می‌دهد. که این قضاوت، نیازمند بررسی‌های عمیق‌تر می‌باشد.

چهار دانش‌آموز شرکت‌کننده در مصاحبه نیز، این دو نمودار را تابع دانستند. آن‌ها با استفاده از تکنیک خط موازی محور yها، استدلال کردند که این خط، نمودار را در دو نقطه قطع نمی‌کند. هم‌چنین، وقتی از آن‌ها در مورد نقاطی از دامنه‌ی نمودار (۱) سؤال شد، پاسخ دادند که «هیچ مقداری برای آن‌ها وجود ندارد» ولی در نهایت گفتند که «نمودارها هر دو تابع‌اند». شاید دلیل این امر، این باشد که آن‌ها در مواجه شدن با نمودار، تعریف تابع را فراموش کردند و فقط سعی کردند که با استفاده از این تکنیک، تابع بودن نمودارها را تشخیص دهند.

یافته‌های این بخش نشان داد که نمودارها به‌عنوان یکی از مهم‌ترین بازنمایی‌های تابع، همیشه به‌طور مستقیم با ایده‌ی تابع در ذهن دانش‌آموزان مرتبط نمی‌شوند. دانش‌آموزان در تفسیر مفهوم تابع با استفاده از بازنمایی نموداری، به شکل جدی مشکل

قاعده‌ای که توسط دانش‌آموزان برای تعیین یک تابع به کار می‌رود با تعریف رسمی این مفهوم ـ حتی برای دانش‌آموزانی که می‌توانند این تعریف را به کار برند ـ متفاوت است

دارند. از طرف دیگر، تعبیر و تفسیر درست نمودارها توسط دانش‌آموزان، به درک آن‌ها از مفهوم تابع وابسته است. در مجموع، یافته‌های این بخش را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد که دانش‌آموزان:

ـ به نقاطی از دامنه که yای برای آن‌ها تعریف نشده بود، توجهی نکردند.

ـ تکنیک خط موازی محور yها را به راحتی به‌کار می‌بردند، ولی از این نکته غافل بودند که خط موازی محور yها، باید **نمودار** را حداکثر در یک نقطه قطع کند. در واقع دانش‌آموزان درک صحیحی از دامنه نداشتند.

ـ نموداری که دارای دامنه‌ی محدود یا قطعه‌قطعه باشد را تابع نمی‌دانستند.

ـ به‌طور کلی، آن‌ها استدلال‌های قانع‌کننده‌ای برای پاسخ‌هایشان ارائه نکردند و این ناتوانی تا حدی، مربوط به درک ضعیف دانش‌آموزان از مفهوم دامنه و عدم سازگاری این دانش با تجربه‌های قبلی آن‌ها بود.

این یافته‌ها بیانگر این حقیقت بودند که برای درک مفهوم تابع، دانش‌آموزان نیازمند فهم عمیق‌تری از بازنمایی نموداری هستند.

یافته‌های حاصل از تجزیه و تحلیل سؤالات مربوط به فرمول‌ها

سؤال ۱. آیا فرمول زیر، تابع است؟ پاسخ خود را شرح دهید.

$$f: R \to R$$

$$f(x) = \frac{۱}{x}$$

هدف این سؤال، بررسی درک دانش‌آموزان از مفهوم تابع در بازنمایی فرمولی بود و سعی شد این سؤال جزو مثال‌هایی باشد که برای دانش‌آموزان آشنا است. نمونه‌های زیر معرف پاسخ‌های

لازم است تا فرصت کافی برای ایجاد تصورات دانش‌آموزان نسبت به مفهوم تابع و زمینه‌سازی برای درک مفهوم اصلی تابع ایجاد شود

دانش‌آموزان به این سؤال است:

● **تابع نیست، چون تعریف نشده، بی‌معنی است. به ازای $x = ۰$ مقداری برای y به دست نمی‌آید $f(۰)$، اگر دامنه به صورت $f:R > ۰ \to$ باشد، تابع است.**

● **تابع نیست، $R - \{۰\}$ ، $x = ۰$.**

● **تابع است، زیرا طبق تعریف و هم از روی نمودار و هم از دامنه‌ی آن تابع محسوب می‌شود.**

● **تابع است،**

$$f(x) = ۱ \quad f(x) = ۲$$
$$y = \frac{۱}{۱} \quad \text{و} \quad y = \frac{۱}{۲} \, .$$

سؤال ۲. آیا فرمول زیر تابع است؟ پاسخ خود را شرح دهید.

$$f:R \to R$$
$$f(x) = \sqrt{x}$$

ـ اکثر دانش‌آموزانی که به سؤالات بازنمایی مربوط به فرمول، پاسخ درست دادند، به راحتی توانستند اعضایی از دامنه‌ی داده شده را که تابع در آن تعریف نشده بود، ببینند.

ـ یکی از دلایلی که باعث شد برخی از دانش‌آموزان پاسخ نادرست دهند، عدم توجه آن‌ها به نماد معرفی تابع $(f:R \to R)$ بود. در واقع، بعضی از دانش‌آموزان، قبلاً با این دو فرمول به‌عنوان مثال‌های اولیه از تابع که دامنه‌های صحیح داشتند، آشنا شده بودند و بدین جهت، این‌ها را تابع دانستند. مثلاً این دانش‌آموزان، با رسم نمودار تابع $\sqrt{x}$ برای $x \geq ۰$ و با استفاده از تکنیک خط موازی محور yها، استدلال کردند که این فرمول تابع است.

ـ علاوه بر این‌ها، هیچ‌یک از چهار مصاحبه‌شونده، به این سؤال پاسخ درستی ندادند و این نکته قابل توجه بود که این دانش‌آموزان، روش‌های مختلفی را می‌دانستند و آن‌ها را به‌کار می‌بردند، ولی سرانجام در ارائه‌ی درست ناموفق ماندند.

یافته‌های حاصل از تجزیه و تحلیل سؤالات مربوط به تابع ثابت

سؤال: آیا عبارت‌های زیر تابع هستند؟ دلایل خود را شرح دهید.

$y = ۴$

$y = ۴$ (برای همه‌ی مقادیر x)

$y = ۴(x \geq ۲)$

هدف این سؤال، بررسی درک دانش‌آموزان از مفهوم تابع ثابت در عبارت‌های مختلف و شناسایی مشکلات احتمالی آن‌ها در حرکت از یک حالت بازنمایی به حالت دیگر بود.

پاسخ به سؤال اصلی تحقیق

یکی از اهداف این تحقیق، بررسی و تحلیل چگونگی استفاده‌ی دانش‌آموزان از تعریف‌های رسمی تابع و تصورهای مفهوم شکل گرفته در ذهن آن‌ها بود. تجزیه و تحلیل پاسخ‌های دانش‌آموزان نشان داد که تنها تعداد کمی از دانش‌آموزان در حین کار کردن با بازنمایی‌های مختلف تابع، بر روی ویژگی‌های تعریف تابع متمرکز شدند. به‌طور کلی، می‌توان گفت که اکثر دانش‌آموزان در برخورد با نمایش نمودارهای ون و نمایش زوج مرتبی، توانستند ویژگی‌های تعریف تابع را به وضوح ببینند. دانش‌آموزان در برخورد با بازنمایی‌های نموداری و فرمول، تعریف تابع را کنار گذاشتند و با استفاده از تکنیک‌هایی که در دست داشتند به استدلال تشخیص تابع بودن پرداختند. همین امر، پیچیدگی‌های متفاوتی را در برخورد با هر کدام از این بازنمایی‌ها برای آن‌ها به‌وجود آورد. علت این امر این بود که دانش‌آموزان بیش‌تر به تجارب قبلی خود تکیه داشتند تا تعریف تابع، به‌طوری که در برخورد با یک نمودار ناآشنا دچار مشکل می‌شدند و با توجه به خواص مثال‌های اولیه و نمونه‌های آشنا به این نوع سؤال‌ها پاسخ دادند. به‌طور کلی، می‌توان چگونگی استفاده‌ی دانش‌آموزان از تعریف تابع را به‌صورت زیر خلاصه کرد:

● بیش‌تر دانش‌آموزان قادر بودند تعریف تابع را برای بازنمایی‌های ساده از جمله نمایش تابع به‌صورت زوج مرتب یا نمایش آن به صورت نمودارهای ون که جزو نمونه‌های اولیه‌ی

نمایش تابع هستند ارائه دهند؛

● زمانی که دانش‌آموزان از ویژگی‌های تعریف تابع استفاده نمی‌کردند، بیش‌تر به مثال‌هایی که قبلاً تجربه کرده بودند تکیه داشتند و به‌طور کلی، درک کلی و مبهمی از تعریف تابع داشتند.

سخن پایانی: چند توصیه‌ی آموزشی

براساس یافته‌های این مطالعه، توصیه‌های آموزشی زیر ارائه می‌شود:

● لازم است تا فرصت کافی برای ایجاد تصورات دانش‌آموزان نسبت به مفهوم تابع و زمینه‌سازی برای درک مفهوم اصلی تابع ایجاد شود.

● آشنایی معلمان با تصورهای دانش‌آموزان نسبت به مفهوم تابع، می‌تواند به برطرف کردن مشکلات و پیچیدگی‌هایی که ممکن است با تعریف رسمی مفهوم تابع در ذهن آن‌ها شکل گیرد، کمک کند.

● فراهم آوردن مجموعه‌ای از مثال‌های متنوع از تابع‌های مختلف توسط معلمان، برای تقویت تصورات دانش‌آموزان مفید است.

● استفاده از بازنمایی‌های چندگانه در یادگیری ریاضی و به‌ویژه یادگیری مفهوم تابع، یعنی اتصال، مقایسه و تبدیل از یک حالت بازنمایی به حالت دیگر بازنمایی به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا بتوانند مهارت‌های نمایش و تشخیص مفهوم تابع را در بازنمایی‌های مختلف کسب کنند و بتوانند بین آن‌ها، اتصال و ارتباط برقرار نمایند.

پی‌نوشت

1. Hamley
2. Hedrick
3. Unifying
4. Flips
5. Slides
6. Bredenbach
7. Hawks
8. Nichols
9. Carlson
10. Dreyfus
11. Procept*

* فرهوم از دو کلمه‌ی process به معنی فرآیند و concept به معنی مفهوم ساخته شده است.

مفهوم تابع یکی از اساسی‌ترین مفاهیم ریاضی است که یادگیرنده‌ها از دوران ابتدایی تا دانشگاه، با آن سروکار دارند

منابع

الف) فارسی

۱. سرشتی، حمیده. (۱۳۸۴). **نقش تکنولوژی در ارتقاء مفاهیم ریاضی عمومی**، پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در آموزش ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی.

۲. گویا، زهرا؛ مرتاضی مهربانی، نرگس. (۱۳۸۳). ماهیت ریاضی. **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**، شماره‌ی ۷۶، صص ۳۶ـ۲۸، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۳. مدقالچی، علیرضا. (۸۰ ـ ۱۳۷۹)، چالش‌های آموزش ریاضی در حوزه‌ی حسابان. **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**، شماره‌ی ۶۱، صص ۱۰ـ۴، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

ب) انگلیسی

4. Akkoc, H. & Tall, D. (2006). AMismatch Between Curriculum Design and Student Learning: The Case of the Function Concept, *Proceedings of the sixth British Congress of Mathematics Education held at University of Warwick,* pp.1-8.

5. Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J. & Nichols, D. (1992). Development of the process Conception of Function, *Educational Studies in Mathematics,* 23, (3), pp. 247-285.

6. Carlson, M. (1999). A Study of Second Semester Calculus Students' Function Conceptions. *Published in Proceeding of PME 23.*

7. Davis, Gray E; Mc Gowen, Mercedes A. (2002). Function Machines & Flexible Algebraic Thought. *Proceeding of the 26th International Group for the psychology of Mathematics Education*, University of East Anglia, Norwich, U.K.

8. Hamley, H. R. (1934). The Function Concept in School Mathematics. The *Mathematical Gazette,* Vol. 18, No. 229. pp. 169-179.

9. Hedrick, E.R. (1938). The Function Concept in Dlementary Teaching and in Advanced Mathematics, The *American Mathematical Monthly,* Vol. 45, No. 7. pp. 448-455.

10. Sajka, M. (2003). A Secondary School Students' Understanding of the Concept of Function: A Case Study, *Educational Studies in Mathematics,* 53, (3), pp. 229-254.

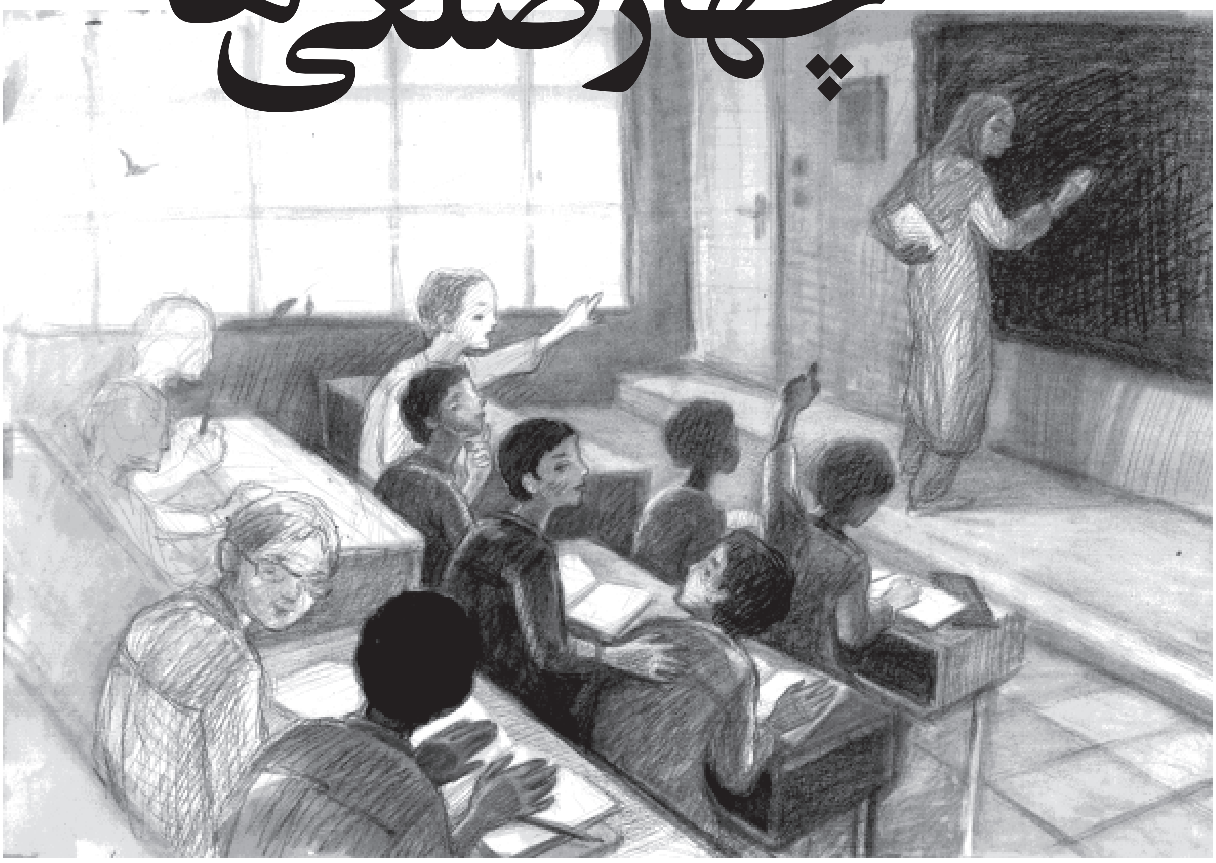
11. Tall, D. (1997). Function and Calculus, In A. J. Bishop et al (Eds), *International Handbook of Mathematics Education,* pp. 289-325.

12. Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Defintion in Mathematics with Particular Reference to Limit and Continuity. *Educational Studies in Mathematics,* 12, pp. 151-169.

13. Vinner, S. & Dreyfus, T. (1989). Images and Definitions for the Concept of Function. *Journal for Research in Mathematics Education,* 20. (4), pp. 356-366.

نغمه حاجی صادقی
کارشناس ریاضی و معلم ریاضی ابتدایی، منطقه‌ی ۲ تهران

بررسی ویژگی‌های چهارضلعی‌ها



به‌دلیل اهمیت نقش معلم، برنامه‌های آموزش معلمان از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. مجله‌ی رشد آموزش ریاضی در نظر دارد که این مهم را به‌عنوان یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به‌همین منظور، ستونی در مجله با عنوان روایت‌های معلمان ریاضی باز شده است تا از طریق آن، بتوانیم رابطه‌ی نزدیک‌تری با معلمان ریاضی برقرار کنیم. این روایت‌ها برای محققان و معلمان محقق فرصت ارزنده‌ای به‌وجود می‌آورد تا به تبیین نظریه‌های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلم می‌جوشد، بپردازند. آن‌گاه نظریه‌ها به عمل درمی‌آیند و مجدداً عمل به نظریه کشانده می‌شود و این فرآیند هم‌چنان ادامه پیدا می‌کند.

از همکاران گرامی انتظار می‌رود که روایت‌های خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قرار گیرد، زیرا که زکات علم نشر آن است. معلمان عزیز باید به اهمیت تجربه‌های خود واقف شوند و با پویایی به غنی‌تر کردن آن‌ها بپردازند.

مقدمه

روایتی که به دنبال می‌آید، تجربه‌ی جدیدی را در ایران مطرح می‌کند؛ تجربه‌ای که با وجود قدمتش در خارج از ایران و رواجش در مجامع تحقیقی، در حوزه‌ی آموزش معلمان در ایران، مورد کم‌توجهی قرار گرفته است. این تجربه، فیلم‌برداری تدریس کلاس درسی توسط خود معلم، و به منظور آموزش وی است. از طرف هیأت تحریریه‌ی مجله به ایشان تبریک می‌گویم که جسارت خودنقدی را که مقدمه‌ای بر یادگیری‌های عمیق‌تر است، در خود ایجاد نموده‌اند.

امیدواریم که این تجربه‌ها، به تدریج موضوع تحقیقات اثربخش و متنوعی در این حوزه گردد.

سردبیر

قسمتی از برنامه‌ی آموزش درس هندسه در سال چهارم دوره‌ی ابتدایی بر مبنای یادگیری فهرستی از تعاریف و ویژگی‌های چهارضلعی‌ها توسط دانش‌آموزان است. بررسی و اثبات ویژگی‌های چهارضلعی‌ها در سال دوم راهنمایی هم مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد. زمانی که دوره‌ی کارآموزی خود را در سال دوم راهنمایی می‌گذراندم، متوجه شدم که به خاطر سپردن این ویژگی‌ها و تعاریف، بیش‌تر موجب گمراهی دانش‌آموزان شده و چه بسا تعداد زیادی از آن‌ها این خواص را فراموش کرده بودند. در حقیقت، شواهد نشان می‌دادند که اگر دانش‌آموزان، فقط با تکرار و به شکل طوطی‌وار بخواهند به حفظ کردن این ویژگی‌ها بپردازند، برایشان مشکل خواهد بود که شباهت‌ها و تفاوت‌های چهار ضلعی‌ها را بیان کنند و در سال دوم راهنمایی هم به خوبی نمی‌توانند دوباره به این مفاهیم برگشته و درک عمیق‌تری از این مفاهیم پیدا کنند.

با توجه به این نکته که مشاهده و مقایسه‌ی دقیق اشکال، وسیله‌ی بسیار مناسبی برای کشف و درک حقایق و روابط هندسی است، پس از بررسی فعالیت‌های مربوط به آشنایی با خواص چهارضلعی‌ها در کتاب درسی با این هدف که دانش‌آموزان به طور شهودی با اندازه‌گیری و تجربه، به خواص موجود در چهارضلعی‌ها پی ببرند و از آن خواص برای رسم شکل آن‌ها استفاده کنند، فعالیتی را برای پایه‌ی چهارم ابتدایی طراحی کردم.

در کلاس من، فعالیت‌های گروهی مختلفی از ابتدای سال اجرا شده بود، دانش‌آموزان با کار گروهی آشنا بودند و از آنجا که نقش من در کلاس به عنوان هدایت‌کننده‌ی دانش‌آموزان بود، انتظار نداشتند که در فعالیت آن‌ها دخالت مستقیم کنم و من را به عنوان معلمی که فقط موضوعی را تدریس و تمرین‌های مربوط به آن موضوع را حل کنم نمی‌شناختند. بنابراین، دانش‌آموزان درگیر فعالیت‌ها می‌شدند و به کمک هم گروه‌های خود، فعالیت‌ها را پیش برده و اگر با مشکلی روبه‌رو می‌شدند، تلاش می‌کردند خودشان در گروه آن را حل کنند.

طبق برنامه‌ی قبلی، قرار بود یکی از همکاران برای فیلم‌برداری به کلاس من بیایند. از این‌که می‌خواستم در مقابل دوربین کلاس را اداره و فعالیتی را که تا به حال تجربه نکرده بودم برای اولین بار اجرا کنم، با هیجان و تپش قلب وارد کلاس شده و مراحل زیر را برای اجرای فعالیت انجام دادم.

ابتدا دانش‌آموزان در گروه‌های ۵ یا ۶ نفری خود نشستند. سپس یک پاکت شامل شکل‌های مقوایی متوازی‌الاضلاع، مستطیل، لوزی و مربع، گونیا و خط‌کش در اختیار هر گروه گذاشتم.

اسامی شکل‌های هندسی اگرچه با توجه به صفات شکل انتخاب شده‌اند، ولی بیشتر جنبه‌ی قراردادی داشته و در جلسات قبل با نشان دادن شکل‌ها، نام آن‌ها را به دانش‌آموزان معرفی و یادآوری کرده بودم.

دانش‌آموزان فعالیت خود را آغاز کرده و از آن‌ها خواستم ابتدا درستی یا نادرستی خاصیت نوشته شده را حدس بزنند. سپس با استفاده از ابزار موجود، درستی حدس خود را بررسی کنند.

جدولی مانند جدول کشیده شده در برگه‌ی فعالیت را در پای تخته کشیدم. نمونه‌ای از برگه‌ی فعالیت در زیر آمده است.

به‌نام خدا

درس : ریاضی

کلاس : چهارم　　　فعالیت چهار ضلعی‌ها　　　تاریخ :

نام اعضای گروه :

در جدول زیر، ویژگی‌های چهار ضلعی‌ها نوشته شده است.

برای هر شکل، ویژگی را بررسی کن و آن را علامت بزن.

ویژگی‌ها	متوازی‌الاضلاع	مستطیل	لوزی	مربع
ضلع‌های روبه‌رو با هم مساوی هستند.				
ضلع‌های روبه‌رو با هم موازی هستند.				
زاویه‌های روبه‌رو با هم مساوی هستند.				
قطرها همدیگر را نصف می‌کنند.				
اندازه‌ی دو قطر با هم مساویند.				
همه‌ی زاویه‌ها قائمه هستند.				
قطرها برهم عمود هستند.				
همه‌ی ضلع‌ها هم اندازه هستند.				

از انجام این فعالیت به چه نتیجه یا نتایجی می‌رسید؟ توضیح دهید.

در حین انجام فعالیت، به گروه‌ها سرزده و مشاهده کردم که برخی از گروه‌ها، ویژگی اول (تساوی ضلع‌های روبه‌رو) را برای هر چهار شکل بررسی می‌کردند و برخی دیگر، همه‌ی ویژگی‌ها را برای یک شکل (ستون اول) بررسی کرده و سپس شکل بعدی را مورد مطالعه قرار می‌دادند. یک سؤال موجب تعجب اکثر گروه‌ها شده بود که چرا برخی از ویژگی‌ها را هر چهار شکل دارا هستند؟ با مطرح کردن این پرسش، به نظر می‌رسید که گروه‌ها در جهت مناسبی حرکت می‌کنند. دانش‌آموزان با هم تبادل نظر کرده و از ابزار مربوطه استفاده می‌کردند و با افزایش مهارت اندازه‌گیری که یکی از اهداف این فعالیت بود، درگیر شده بودند تا کمترین خطای اندازه‌گیری را داشته باشد. گاهی گروه‌ها برای اطمینان بیشتر، از دو یا سه خط‌کش مختلف استفاده کرده و درستی حدس خود را بررسی می‌کردند. پس از ۲۰ دقیقه، کار گروه‌ها پایان یافت و جدول کشیده شده روی تخته توسط یکی از اعضای هر گروه کامل شد، و ضمن آن، دانش‌آموز مراحل کار و حدس گروه خود را بیان می‌کرد.

در این مرحله، از دانش‌آموزان هر گروه خواستم تا با مداد رنگی، دور علامت‌های مربوط به هر ویژگی را که با شکل دیگری شباهت دارند، خط بکشند و هم‌زمان، همان‌کار روی تخته، توسط یکی از دانش‌آموزان در جدول مشابه، با استفاده از گچ‌های رنگی انجام شد.

در زیر، نمونه‌ای از جدول کامل شده توسط گروه‌ها ارایه می‌شود:

راهنمای جدول: ○ ← رنگ قرمز، ❐ ← رنگ آبی، Δ ← رنگ سبز

ویژگی‌ها	متوازی‌الاضلاع	مستطیل	لوزی	مربع
ضلع‌های روبه‌رو با هم مساوی هستند.	⊗	⊗	⊗	⊗
ضلع‌های روبه‌رو با هم موازی هستند.	⊗	⊗	⊗	⊗
زاویه‌های روبه‌رو با هم مساوی هستند.	⊗	⊗	⊗	⊗
قطرها همدیگر را نصف می‌کنند.	⊗	⊗	⊗	⊗
اندازه‌ی دو قطر با هم مساویند.		⊠		⊠
همه‌ی زاویه‌ها قائمه هستند.		⊠		⊠
قطرها برهم عمود هستند.			Δ×	Δ×
همه‌ی ضلع‌ها هم اندازه هستند.			Δ×	Δ×

پس از تکمیل جدول، این سؤال توسط یک دانش‌آموز پرسیده شد که با توجه به این جدول، آیا درست است که مربع، همه‌ی ویژگی‌های لوزی، مستطیل و متوازی‌الاضلاع را دارد؟ با طرح

این پرسش، دانش‌آموزان با توجه بیشتری به رابطه‌ی خط‌هایی که با مداد رنگی کشیده بودند پی بردند و دست‌های زیادی برای طرح سؤال بالا رفت. آن‌گاه، به گروه‌ها فرصت دادم تا با یکدیگر بحث کنند و نتایج به دست آمده از این فعالیت را در برگه‌ی فعالیت خود، ثبت نمایند.

در پایان، نتیجه‌گیری و سؤال‌های هر گروه مطرح شد. سؤال‌هایی از قبیل این‌که ویژگی‌های هر شکل کدامند؟

ـ شباهت‌ها و تفاوت‌های چهار ضلعی‌ها چیست؟

ـ آیا مربع، لوزی و مستطیل، نوعی متوازی‌الاضلاع هستند یا خیر؟

ـ آیا می‌توان ذوزنقه را نیز نوعی متوازی‌الاضلاع نامید؟

آیا مربع نوعی مستطیل است یا مربع نوعی لوزی است؟

و...

همه‌ی این سؤال‌ها مورد بحث قرار گرفتند و به پرسش‌های مطرح شده در کلاس، با مشارکت همه‌ی دانش‌آموزان، پاسخ داده شد.

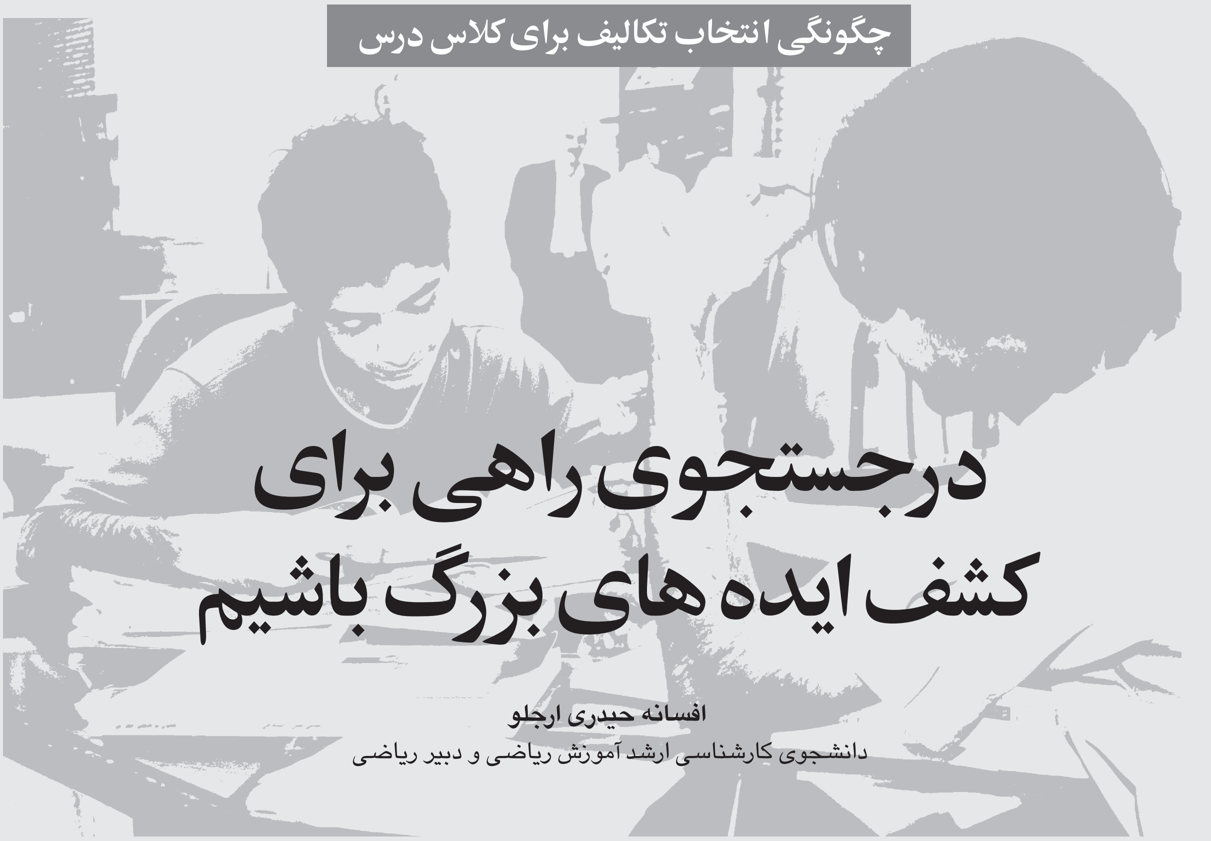
بالاخره، جمع‌بندی نهایی توسط یکی از دانش‌آموزان و با کمک من انجام شد و این فعالیت به پایان رسید.

این فعالیت برای یک جلسه تنظیم شده بود و در جلسه‌ی بعدی، مطالب مربوط به چهار ضلعی‌ها که در کتاب درسی آمده، مرور شد. چون دانش‌آموزان خود ضمن اندازه‌گیری و تجربه‌ی عملی به خواص پی برده بودند، فعالیت‌های کتاب درسی را کامل و بدون مشکل انجام می‌دادند و هنگام رسم چهار ضلعی‌ها، به خوبی از تجربه‌های خود استفاده می‌کردند.

با بازبینی در برنامه‌ی این فعالیت، به نظر می‌رسد اگر زمان بیشتری برای انجام فعالیت توسط دانش‌آموزان در نظر گرفته می‌شد، با توجه به گفت‌وگوهای پرچالشی که برای پاسخ به سؤال‌های دانش‌آموزان در کلاس و هنگام نتیجه‌گیری انجام شد، می‌توانستیم حتی چهارضلعی‌ها (متوازی‌الاضلاع، مستطیل، مربع و لوزی) را به کمک خود دانش‌آموزان **تعریف** کنیم.

شواهد نشان می‌دهد که اگر دانش‌آموزان بخواهند با تکرار و به شکل طوطی‌وار به حفظ کردن ویژگی‌های چهارضلعی‌ها بپردازند، مشکل خواهد بود که بتوانند شباهت و تفاوت‌های چهارضلعی‌ها را بیان کنند

در پایان فعالیت و خاتمه‌ی فیلم‌برداری، خوشحال بودم. هر چند این کلاس بدون نقص نبود، ولی حداقل با دیدن فیلم می‌توانستم عیب‌های فعالیت و کلاسم را مشاهده کنم و از آن به عنوان تجربه‌ای در سال‌های بعدی تدریسم استفاده کنم.



در جستجوی راهی برای کشف ایده های بزرگ باشیم

افسانه حیدری ارجلو
دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی

بشر برای این نیامده که کورکورانه و از روی نادانی کار کند، بلکه باید پیوسته با آن‌چه نادرست است در جدال و با آن‌چه نارواست در جنگ باشد.

«ژوزف ارنست رنان»

مقدمه

مطالعه‌ی چگونگی توسعه‌ی حرفه‌ای معلمان ریاضی یک هدف تحقیقی مهم در آموزش ریاضی بیان شده و در این راستا، تحلیل انواع نگرش‌ها و مطالعه‌ی روش‌های تدریس، سازماندهی گفتمان کلاسی و فعالیت‌های دانش‌آموزان از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. یکی از نتایج این مطالعات این است که به معلمان ریاضی کمک کنیم تا در طرح و انتخاب یک تکلیف خوب، ماهیت این گفتمان‌ها و مهارت‌های ایجاد آن را به خوبی دریابند. لذا توصیه می‌شود که این توسعه، از طریق برنامه‌های آموزش ضمن خدمت و قبل از خدمت صورت پذیرد. در این نوشته، نمونه‌ای از روش تدریس یک تکلیف در یک کلاس درس ریاضی ارائه می‌شود.

طبق تعریف، تکلیف‌های آموزشی توسط کسی طراحی می‌شود تا توسط کس دیگری، اجرا شود؛ آن‌ها برای هدفی با اثر قصد شده، طراحی می‌شوند» (تامپسون و همکاران، ۲۰۰۷).

کلید واژه‌ها: تکلیف ریاضی.

معمولاً، تکلیف به‌عنوان کاری تکمیلی از سوی مؤلفان کتاب‌های درسی یا معلمان، برای دانش‌آموزان تهیه می‌شود تا آنان در کلاس یا در خانه، به انجام آن‌ها بپردازند. طراحی، انتخاب و انجام تکلیف، وقت زیادی از دانش‌آموز و معلم را ـ چه در خانه و چه در مدرسه ـ به خود اختصاص می‌دهد و در صورت استفاده‌ی مناسب، می‌تواند باعث توسعه‌ی فکر و تعمیق یادگیری دانش‌آموزان شود. لذا ضرورت آموزش معلمان در این زمینه، امری اجتناب‌ناپذیر است. آموزشگران ریاضی توصیه می‌کنند که تکالیف یا مسائل به گونه‌ای طراحی شوند تا دانش‌آموز را درگیر مفاهیم پیش‌بینی شده در کتاب‌های درسی ریاضی‌اشان کنند (نقل به مضمون از چمن‌آرا، ۱۳۸۲).

چنین تکالیفی می‌توانند دانش‌آموز و معلم را نسبت به هماهنگی ریاضی آگاه‌تر کنند، زیرا همانطور که گویا (۱۳۸۴) به نقل از هوو (۲۰۰۱) اظهار داشته است، «معلمی که نسبت به

هماهنگی ریاضیات نابینا است، نمی‌تواند به دانش‌آموزان کمک کند تا آن را ببینند.» برای ایجاد چنین بصیرتی در معلمان، لازم است که دانش ریاضی مورد نیاز تدریس شناخته شده و به‌دنبال آن، برنامه‌های آموزش‌های قبل و بعد از خدمت معلمان طراحی و اجرا گردند. یادگیری ریاضی دانش‌آموزان، در گرو یادگیری معلمان است و این هر دو یادگیری، از ظرافت‌ها و پیچیدگی‌های ژرفی برخوردار است. تامپسون و همکاران (۲۰۰۷)، برای هر تکلیف، یکی از سه هدف زیر را در نظر می‌گیرند:

۱. یادگیرندگان را مشغول فعالیت‌های تکراری می‌کند[۱] (که گاهی به‌عنوان تمرین شناخته می‌شوند.)

۲. یادگیرندگان را درگیر بازتاب انتزاعی[۲] می‌کند.

۳. تمایلات[۳] مدرسان برای ایجاد بحث‌هایی که یادگیرندگان و معلمان، فعالیت در حال انجام خود را به‌عنوان هدف گفتمان در نظر می‌گیرند، حمایت می‌کنند. اگرچه این سه هدف در طول زمان[۴] درهم تنیده می‌شوند[۵] اما در هر لحظه قابل تمیز هستند» (ص ۴۱۶).

آن‌ها در ادامه، با اشاره به ضرورت آموزش طراحی و انتخاب تکلیف به معلمان ریاضی، ۹ تکلیف را از دو جنبه، در توسعه‌ی حرفه‌ای معلمان ریاضی مهم می‌دانند:

الف) به دانشجو ـ معلمان و معلمان ریاضی کمک می‌کنند تا بتوانند به مفاهیم ریاضیاتی که یاد گرفته‌اند، انسجام بخشند؛

ب) می‌توانند زمینه‌ای ایجاد کنند که در آن‌ها، فرصت بحث و به‌کارگیری و استفاده از فهم و درک منسجمی که در دانش‌آموزان ایجاد شده فراهم شود (تامپسون، کارلسن و سیلورمن، ۲۰۰۷).

تحلیل انواع تکالیف ریاضی و سازماندهی درست آن‌ها و مطالعه‌ی ارتباط بین آن تکالیف و فعالیت‌های دانش‌آموزان، اساس طرح و انتخاب هر تکلیف ریاضی را تشکیل می‌دهد و برای این‌که انتخاب مناسبی ایجاد شود، لازم است که معلمان، این ارتباط را ایجاد کنند.

به این منظور در سال‌های اخیر، مقاله‌های زیادی در زمینه‌ی طرح تکالیف ریاضی در سطح جهانی منتشر شده است که هریک به نحوی، می‌توانند راهنمایی مفیدی برای معلمان ریاضی باشد. به‌عنوان مثال، پرس‌تیج و پرکز[۶] (۲۰۰۷) مدلی در زمینه‌ی طراحی تکالیف در کلاس درس ریاضی ارائه داده‌اند و بیان داشته‌اند که ساختار آن برای آموزش معلمان می‌تواند مؤثر باشد. این مدل، مطابق نقشه‌ای براساس موضوع اصلی تشکیل دهنده‌ی دانش معلمان که مرتبط با اتفاقات کلاس درس هستند، مطرح شده است:

۱. **خرد عملی**[۷]: خردی که در اثر بودن و حضور در کلاس درس کسب می‌شود؛

۲. **سنت‌های حرفه‌ای**[۸]: دانشی که از برنامه‌های درسی موجود مدارس و تجربه‌ها و تحقیقات حاصل می‌شود؛

۳. **دانشِ‌خود دانش‌آموز از ریاضی دانش یادگیرنده**[۹] (ص ۳۸۲).

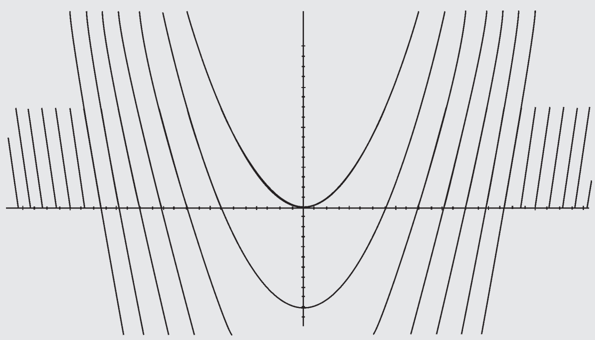
نمونه‌ای از طراحی یک تکلیف برای آموزش معلمان ریاضی

تامپسون و همکاران (۲۰۰۷)، درسی را برای آموزش معلمان طراحی کردند و در آن از فعالیت‌هایی استفاده کردند که معلمان، با تجربه‌های شخصی خود، نیاز به انجام تکلیف را درک کنند. به‌طور مثال، آن‌ها تابع mod را طراحی کردند که حدس می‌زدند معلمان، راه‌های حاضر و آماده‌ای برای فکر کردن به آن ندارند. آن‌چه که درپی می‌آید، خلاصه‌ای از انجام این تکلیف توسط آنان است که در آن مقاله به آن اشاره شده است.

به گفته‌ی آن‌ها، «معمولاً فکر می‌کنیم که a و b در تعریف «a mod b» برای اعداد حسابی برقرار است. مثلاً $۲۷ \bmod ۳$ صفر است زیرا اگر ۲۷ را بر ۳ تقسیم کنیم، باقیمانده‌اش صفر می‌شود و $۲۷ \bmod ۵$، ۲ است زیرا اگر ۲۷ را بر ۵ تقسیم کنیم باقیمانده‌ی آن ۲ است. اما می‌توانیم این ایده را برای کسرها و اعداد گنگ نیز تعمیم دهیم. تعریف «a mod b» که اجازه‌ی این تعمیم را می‌دهد این است. a mod b باقیمانده‌ای است که از کم‌کردن mb از a به‌دست می‌آید. وقتی که m، بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی $\frac{a}{b}$ است. با این تعریف، $۶/۵ \bmod ۲/۱ = ۰/۲$ زیرا ۳، بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی $\frac{۶/۵}{۲/۱}$ است و $۶/۵ - ۳(۲/۱) = ۰/۲$. به‌طور مشابه، $۶/۵ \bmod (-۲/۱) = -۱/۹$ زیرا ۴− بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی $\frac{۶/۵}{-۲/۱}$ و $۶/۵ - (-۴)(-۲/۱) = -۱/۹$ است.» (ص ۱۱ و ۱۲)

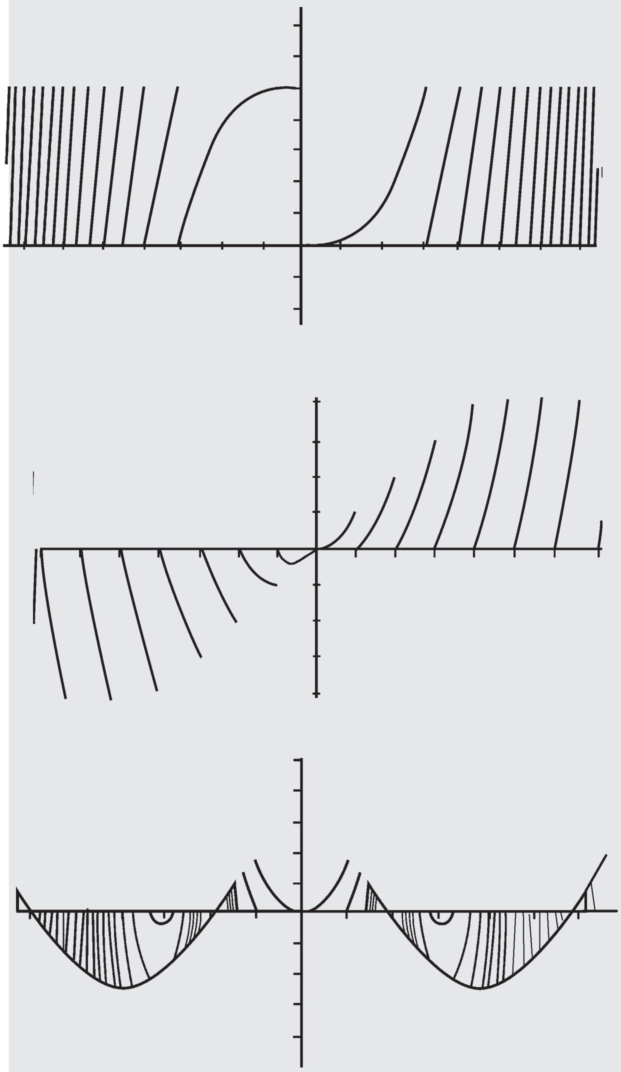
در کلاس، تمرین کردیم که چگونه a mod b را برای مقادیر مختلف a و b محاسبه کنیم. معلمان ۱۷ دقیقه ۶ مقادیر مختلف کار کردند تا بالاخره یک تصویر ذهنی پیدا کردند که فرد موقع

محاسبه‌ی $a \bmod b$ ، ابتدا بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی $\frac{a}{b}$ را محاسبه می‌کند (آن را g بنامید) و سپس، $a - gb$ را محاسبه می‌کند. درضمن این ۱۷ دقیقه، معلمان با محاسبات مختلف، اول تعریف mod را برای مقادیر غیرصحیح a, b درونی کردند و در پایان، برای تعمیم‌های خود، به‌طور کلی استدلال کردند که $a \bmod b \le ۰$ وقتی که $b < ۰$ و $a \bmod b \ge ۰$ وقتی که $۰ < b$ باشد. آن‌ها این فعالیت را با این سؤال ادامه دادند که «با داشتن این تعریف از mod در ذهن، نمودار $y = \mathrm{mod}(x^۲,۲)$ را حدس بزنید.» هنگامی که معلوم شد تکلیف درباره‌ی تابع $\mathrm{mod}(x^۲,۲)$ است، معلمان واقعاً فرایند درک mod را می‌ساختند به گونه‌ای که فرد، هم‌زمان بتواند تغییرات $x, \mathrm{mod}(x^۲,۲)$ را تصور کند. سپس بحث کردیم که نمودار $\mathrm{mod}(a^۲,۲)$ با تغییر جزیی مقدار a چه شکلی خواهد بود. معلمان باید هم‌چنین با پیچیدگی مربع کردن $x^۲$ آشنا شوند تا بتوانند مقدار $\mathrm{mod}(x^۲,۲)$ را محاسبه کنند. ما هم‌چنین، بحث کردیم که چرا و کجا تابع شکسته می‌شود، بعد از مدتی، آن‌ها استدلال کردند که هروقت $x^۲$ عددی زوج، باشد، مقدار تابع صفر خواهد شد. بنابراین، برای $\sqrt{۲} > x > ۰$ ، رفتار کلی نمودار تابع مانند نمودار تابع $y = x^۲$ و برای $۲ > x > \sqrt{۲}$ ، نمودار تابع مانند نمودار تابع $y = x^۲ - ۲$ و برای $\sqrt{۶} > x > ۲$ ، نمودار تابع مانند نمودار تابع $y = x^۲ - ۶$ خواهد شد و به‌همین ترتیب، می‌توانیم ادامه دهیم.



شکل ۱: نمودار $y = \mathrm{mod}(x^۲,۲)$ و

$y = x^۲ - a, a = ۰,۲,۴\cdots$



شکل ۲: نمودار توابع $y = \mathrm{mod}(x^۲,\cos(x))$ ، $y = \mathrm{mod}(x^۲,x)$ و $y = \mathrm{mod}(x^۳,۲)$

در هر مرحله، از معلمان درخواست کردیم که شرح دهند که در هر مورد، نمودارها چه رفتاری دارند و اصرار داشتیم از

توضیحاتشان، ریشه در درک آن‌ها از مفهوم $\mathrm{mod}(a,b)$ و این‌که مقدار $\mathrm{mod}(x^2,2)$ با تغییر مقدار x تغییر می‌کند داشته باشد. بدین‌ترتیب، فرصتی برای معلمان فراهم کردیم تا تصورشان را از تابع mod عمیق‌تر کنند. سپس تکلیفی به آن‌ها دادیم و از ایشان خواستیم که رفتارهای تابع‌های $y = \mathrm{mod}(x^2, \cos(x))$، $y = \mathrm{mod}(x^2, x)$ و $y = \mathrm{mod}(x^3, 2)$ را ابتدا با حدس‌زدن نمودار آن مشخص کنند و سپس، توضیحاتشان را با دیدن نمودار، دقیق‌تر کنند. بالاخره، از آن‌ها خواستیم که رفتار نمودار را شرح دهند و بگویند نمودار چرا و در کجا شکسته می‌شود. (شکل ۲)

همه‌ی معلمان به‌جز یک نفر، درباره‌ی دو تابع اول توضیحات رضایت‌بخشی دادند، اما فقط یکی از توضیحات درباره‌ی تابع سوم رضایتبخش بود. در این توضیحات، هم مفهوم تابع mod به‌کار برده شده بود و هم مفهوم هم‌تغییری[11] نشان داده شده بود، اگرچه همه‌ی معلمان، به‌طور صریح، از مفهوم هم‌تغییری استفاده نکرده بودند.

البته امیدواریم که معلمان با در نظر گرفتن تجربه شخصی خود از این تکالیف، ابتدا دانش‌آموزان را در مرحله‌ی انجام تکلیف و تمرین قرار دهند و سپس آن‌ها را به مرحله‌ی تجرید سوق دهند.

البته توضیح این نمودارها، تنها پایانی برای یک مرحله‌ی آماده‌سازی برای سؤالی بود که واقعاً می‌خواستیم معلمان آن را در نظر بگیرند و آن سؤال این بود که:

از این تکلیف، برای این‌که چگونه ممکن است به دانش‌آموزان کمک کنید تا فرایند تصورات خود را از تعریف‌های تابع و درک هم‌تغییری توسعه دهند، چه یاد گرفتید؟ (خلاصه‌ای از صفحات ۴۲۵ تا ۴۲۷ مقاله‌های تامپسون و همکاران، ۲۰۰۷).

بحث و نتیجه‌گیری

زمانی که تکلیفی را برای دانش‌آموزان مطرح می‌کنیم، باید به دانش‌آموزان فرصت دهیم تا هم با این تکالیف به‌صورت انفرادی یا گروهی دست‌و‌پنجه نرم کنند و هم راه‌حل‌ها و استراتژی‌های خود را با تمام کلاس درمیان بگذارند و درباره‌ی آن‌ها بحث کنند. انتخاب تکالیف خوب مستلزم آن است که معلمان، هر روز به شیوه‌های فکر کردن دانش‌آموزان درباره‌ی ریاضیاتی که در حال بحث کردن روی آن هستند، گوش فرادهند. انتخاب تکلیف برای روز بعد باید چنان صورت گیرد، که به دانش‌آموزان در بازتاب بر آن‌چه که شما قصد ایجاد و توسعه‌ی آن‌ها را دارید کمک کند. سعی کنید، در جست‌وجوی راهی برای کشف ایده‌های بزرگ باشید. در یک تکلیف خوب، دانش‌آموزان به درون ریاضیات مهمی که قصد دارید آن‌ها یاد بگیرند، خواهند افتاد (لاپان و برایوز، ۱۹۹۵، نقل شده در چمن‌آرا زمستان ۱۳۸۲).

البته لازم است که معلمان، محتوای ریاضی درسی را که تدریس می‌کنند کامل بدانند تا بتوانند آن را به‌طور واضح به دانش‌آموزان ارائه دهند و ایده‌های ریاضی را برای طیف وسیعی از دانش‌آموزان، قابل دسترسی نمایند و دانش‌آموزان را درگیر فعالیت‌های چالش‌آور ریاضی کنند (گویا، تابستان ۸۴).

پی‌نوشت

1. Repetitive
2. Reflective Abstraction
3. Intention
4. Overtime
5. Intertwined
6. Prestage and Perks
7. Practical Wisdom
8. Professional Traditions
9. Learner Knowledge
10. Adaptation
11. Covariation

منابع

۱. گویا، زهرا. (۱۳۸۳). دانش ریاضی مورد نیاز برای تدریس در دوره‌های ابتدایی. **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**. شماره‌ی ۸۰. تابستان ۸۴. ارائه شده در هفتمین کنفرانس آموزش ریاضی.

۲. هیبرت و همکاران. (۱۹۹۶). توسعه و فهم درک ریاضی. ترجمه‌ی سپیده چمن‌آرا. **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**. شماره‌ی ۷۴. زمستان ۸۲.

3. Prestage. S., & Perks. P. (2007). Developing teacher knowledge using a tool for creating tasks for the classroom. **Journal of Mathematics Teacher Education**, 10: 381-390. Springer.

4. Thompson, P. W.; Carlson, M. P.; Silverman, J. (2007). The design of tasks in support of teachers’ development of coherent mathematied meanings. **Journal of Mathematics Teacher Education**. 10: 415-432. Springer.

دیدگاه

تعلیم و تربیت قرون وسطایی به سبک جدید!

چه کسی پاسخ‌گوی این رفتارها در مدارس است؟

مریم گویا
دبیر بازنشسته‌ی ریاضی

اشاره

مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، تداوم معنادار خود را مدیون تعامل و تبادل‌نظر دائمی با مخاطبان اصلی خود که معلمان ریاضی و دست‌اندرکاران آموزش معلمان ریاضی هستند، می‌داند. به همین دلیل، بیش‌ترین تلاش اعضای هیئت تحریریه‌ی مجله، جست‌وجو برای پیدا کردن راه‌های مختلف ایجاد چنین تعامل و تبادل‌نظری بوده است. خوشبختانه از سال ۱۳۸۱ که به همت مسئولان محترم دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، تولید و توزیع مجله، نظم بیش‌تری یافته و تیراژ آن نیز بالاتر رفته است، معلمان محترم ارتباط بیش‌تری با مجله‌ی خودشان برقرار کرده‌اند و بیش‌تر از گذشته، دیدگاه‌های خود را برای چاپ، ارسال دارند. به همین دلیل، آرزوی دیرینه‌ی دفتر انتشارات کمک‌آموزشی و هیئت تحریریه‌ی مجله‌ی رشد آموزش ریاضی می‌رود تا تحقق یابد. درنتیجه، با نظر هیئت تحریریه‌ی مجله، قرار شد تا دیدگاه‌های ارسالی عیناً و بدون ویرایش چاپ شوند. درضمن، از خوانندگان محترم استدعا داریم که پاسخ‌گو و منتقد دیدگاه‌ها باشند و تعامل و تبادل‌نظر را از طریق بازتاب بر آن‌ها، معنادارتر و کارآتر کنند.

البته لازم به توضیح است که دیدگاه‌های مطرح شده، الزاماً هم‌سو با سیاست‌ها و دیدگاه‌های دفتر انتشارات کمک‌آموزشی و هیئت تحریریه‌ی مجله‌ی رشد آموزش ریاضی نیستند.

این روزها بازار انواع و اقسام نوآوری‌ها در زمینه‌های مختلف گرم است و اختراع و ابتکار و... رواج فراوان دارد؛ به‌ویژه در آموزش‌وپرورش که ظاهراً دیوارش از همه کوتاه‌تر است و همه می‌توانند به نوعی از آن بالا بروند. طبیعی است بیش از همه قدکوتاهان مشتاق پیمودن چنین دیوارهایی هستند، چون هم می‌توانند و هم پس از بالا رفتن احساس بلندی و برتری می‌کنند. متأسفانه نیروهای نظارتی یا نمی‌بینند یا نمی‌خواهند ببینند. چرا که گذر از ارتفاعی چنین کوتاه جرم محسوب نمی‌شود و در صورت مشاهده، کسر شأن ناظرین است که به این گونه تخلفات بها بدهند.

بگذریم که قصه فراوان است و هر روز ماجرایی تازه ـ آن هم از نوع ابتکاری و شکوفا شده‌اش! ـ در این دیار به وقوع می‌پیوندد. به نمونه‌ای از روش‌های خلاق! و در عین حال مفید!! که نتایج درخشانی در امر یادگیری داشته و باعث رتبه‌های دورقمی در کنکور سراسری و نخبه‌پروری و رشد و شکوفایی و خلاقیت! و... شده است اشاره می‌کنم.

و اما بشنوید ـ ببخشید؛ بخوانید ـ قصه‌ی امروز را:

بخش نخست (سال ۱۳۸۷): یکی بود، یکی نبود. غیر از خدا هیچ‌کس نبود. در شهر رنگارنگ و پردود و غبارآلود و پرسروصدای ما؛ قرار شد برای کمک به بودجه‌ی دولت، بخش خصوصی فعال شود و همان‌طور که می‌دانید بهترین جا و پربازده‌ترین حوزه‌ها در زمینه‌ی سوددهی، آموزش‌وپرورش بود. به همین جهت با حمایت‌های بی‌دریغ مسئولان و کارشناسان از جنبه‌ی مالی و غیرمالی؛ مدارس غیرانتفاعی ـ غیرانتفاعی برای کاربران نه مؤسسان ـ یکی پس از دیگری به ثبت رسیدند و صاحب امتیازان آن‌ها با هدف پرورش نسلی خلاق و زبده و با فرهنگ و با... و با... و با... به ارائه‌ی ایده‌های مبتکرانه‌ی خود پرداختند. ابتکارات هم در تربیت بود و هم در تعلیم و در این مورد هر کس سعی می‌کرد گوی سبقت را از دیگری برباید و روی دست دیگران بلند شود. مدرسه‌ی «الف»، کلاس تست می‌گذاشت، مدرسه‌ی «ب» علاوه بر آن، اردوی آموزشی برگزار می‌کرد.

مدرسه‌ی «پ» به غیر از موارد فوق، به ایجاد کلاس‌های هوش هیجانی و مدیریت زمان، هوش اجتماعی و... مبادرت می‌کرد.

مدرسه‌ی تازه‌تأسیس دیگری به غیر از بهره‌گیری از ابتکارات دیگران، برنامه‌ی زمان‌بندی در خانه و خارج از مدرسه برای دانش‌آموزان در نظر می‌گرفت که بتواند همه‌ی ساعات شبانه‌روز دانش‌آموزان را تحت کنترل داشته باشد و مطمئن باشد که معجونی که تدارک دیده حتماً پخته می‌شود و طرحی نو درمی‌اندازد. به هر حال روزها یکی پس از دیگری اما با شتاب می‌گذشت و روزبه‌روز، هم به تعداد و هم به ابتکارات چنین مدارسی افزوده می‌گشت. نمی‌خواهم سرتان را درد بیاورم که پیه این طرح و لایحه و قانون‌ها در امر آموزش‌وپرورش تقریباً به تن همه خورده است و همه به نوعی از مزایای بی‌شمار روش‌های خودسرانه و مبتکرانه و چه در تعلیم‌وتربیت بهره‌مند شده‌اند و نتایج درخشان چنین اقداماتی را در ادبیات کلامی و رفتار و کردار نسل جوان مشاهده می‌کنند. بگذریم از پشت صحنه‌ی این روش‌ها و آموزش‌ها که با اندکی تحمل و تعقل ـ آن هم تنها اندکی و نه بیشتر! ـ می‌توان انواع بیماری‌های

روانی، افسردگی‌ها، پشت پا زدن به همه‌ی اصول و تعالیم و... را در گروهی از نسل جوان مشاهده کرد. در همین آشفته‌بازاری که ذکر آن رفت؛ پدر و مادر عزیزی که خواهان قبولی فوری و بی‌قید و شرط فرزند نازنینشان در کنکور سراسری بودند و می‌خواستند هر آن‌چه از دستشان برمی‌آید انجام دهند تا به وظایف شرعی و قانونی و عرفی و... خود عمل کرده باشند و کم نگذاشته باشند؛ پس از ماه‌ها جست‌وجو و پی‌گیری و پرسش از افراد مختلف بالاخره نام او را در یکی از مدارس غیرانتفاعی برای دوره‌ی پیش‌دانشگاهی نوشتند و نفس راحتی کشیدند. علت این همه تلاش هم در ظاهر به خاطر ناکامی فرزندشان در سه سال دوره‌ی دبیرستان دولتی بود که نتیجه‌ی مطلوبی عایدشان نشده بود. این مرکز از همان ابتدا به آن‌ها اطمینان داد که فرزندشان بسیار بهتر از تصور آن‌ها است و با برنامه‌های ویژه‌ی مدرسه حتماً در کنکور سراسری قبول می‌شود؛ به شرط آن‌که نعل به نعل مطابق روش‌ها و برنامه‌های مدرسه عمل کند. کلاس و درس مطابق سایر مراکز پیش‌دانشگاهی غیرانتفاعی از تابستان شروع شد و رفت و آمد در روزهای گرم ادامه داشت. این مرکز نیز نتوانست در دانش‌آموز مذکور رضایت خاطری ایجاد کند زیرا تحمل قوانین و مقررات مدرسه ـ منظور همان مرکز پیش‌دانشگاهی است ـ و برنامه‌های تحمیلی و اطاعت کورکورانه و بی‌قید و شرط از اولیاء مدرسه را نداشت و هر روز دل‌زده‌تر و ناراضی‌تر می‌شد ـ شاید دلیلش تشابه او با بقیه افراد خانواده‌ی بزرگ پدری و مادری‌اش بود که همه تقریباً غیرمتعارف بودند و در قالب عرف تحمیلی نمی‌گنجیدند و رفتارهای غیرمعقول ـ از نظر تعریف اجتماعی ـ داشتند. در چنین حال و هوایی از بد حادثه یک روز صبح که باید به موقع به مدرسه می‌رسید و سر کلاس حاضر می‌شد و اتفاقاً از روزهای بسیار خسته‌کننده هم بود ـ از نظر خودش ـ حال بسیار بدی داشت و بدنش به شدت درد می‌کرد. به این درد آن بیزاری و دل‌زدگی از چنین روزی نیز اضافه شده بود و با بی‌میلی و سختی و درد و... همراه پدر خود راهی مدرسه شد زیرا اندکی از ساعت کلاس گذشته بود و اجازه‌ی ورود به مدرسه را بدون ولی خود نداشت. چون دیر به کلاس رسیده بود، مشمول قانون خانم دبیر شد (قانونی که طبق گفته‌ی خود دبیر و مسئولین مدرسه در مدارس دیگر هم، باعث شده دانش‌آموزان ایشان با رتبه‌های دورقمی به دانشگاه‌های معتبر راه پیدا کنند) و اما قانون این دبیر گرامی که ظاهراً خودشان طرحش را داده و خودشان در ذهن خودشان تصویبش کرده‌اند؛ این است که هر کس دیر به کلاس بیاید تا آخر ساعت باید سرپا بایستد و حق نشستن روی صندلی یا نیمکت را ندارد. موضوع به همین جا ختم نشد. همان‌طور که ذکر شد این روز از روزهای بسیار خسته‌کننده بود زیرا از ۷:۳۰ الی ۱۶:۳۰ لاینقطع ریاضی درس داده می‌شود آن هم با همان دبیر و هر سه درس ریاضی (البته برنامه‌های مدرسه از نظر مسئولین از پشتوانه‌ی غنی آموزشی و استحکام کافی برخوردار می‌باشد). حال تصور کنید دختری که مریض است و به همین دلیل دیر به کلاس رسیده، در طول ۸

در عصر پرشتاب امروز در کجای دنیا، ساعت‌ها جوانی را سرپا نگه می‌دارند و تحقیر می‌کنند تا آن که متنبه شود مشکلات و گرفتاری‌های روحی، روانی و رفتاری جوانان کم است که چنین مشکلاتی را هم به آن‌ها اضافه می‌کنیم؟

ساعت سرپا بایستد و هر لحظه به میزان درد و بیزاری‌اش افزوده شود. مسأله‌ی جدی‌تر این که بقیه‌ی دانش‌آموزان هیچ اعتراضی نمی‌کنند و از روش تربیتی و تدریس خانم دبیر بسیار استقبال می‌کنند و معتقدند که چنین روش‌هایی باعث می‌شود آن‌ها منضبط شده و وقتشان بیهوده تلف نشود.

این دانش‌آموز عزیز آن روز را با هر زحمت و مشقتی که بود تحمل می‌کند و وقتی نالان و اشک‌ریزان به خانه می‌رسد، پاهایش دیگر تحمل کشیدن بدنش را ندارد و به زمین می‌افتد و از درد جسمی و بیشتر از آن درد روحی و تحقیری که شده و دیگران حتی کَکشان هم نگزیده است، ساعت‌ها به خود می‌پیچد و مسئول همه‌ی کج‌رفتاری‌های دیگران و ناکامی و درد خود را پدر و مادرش می‌داند که به خواسته‌ها و حرف‌های او توجهی نکرده و علی‌رغم نق‌زدن‌ها و نالیدن‌ها و اعتراض‌های او در مورد مدرسه، حاضر نشده بودند مدرسه‌ی او را تغییر دهند و او را از این همه مصیبت نجات دهند.

عده‌ای از چنین جوانان، یا سرکش و عاصی و لجوج و خودخواه می‌شوند یا مطیع و بله‌قربان‌گو و خوار و ذلیل؛ کسانی که چشم به بزرگ‌ترها و توانگرها می‌دوزند تا برایشان تصمیم بگیرند

آن‌ها که آگاهانه و یا ناآگاهانه در جهت تخریب نسل جوان می‌کوشند باید در دنیا و آخرت پاسخ‌گو باشند

چند روزی از این ماجرا گذشت و این نازنین سرخورده و دلخور حتی اجازه نداد هیچ‌کس از مدرسه و دبیر و چنین روش‌هایی شکایت کند یا با آن‌ها حرف بزند. در نهایت خود را مقصر دانست و نتیجه گرفت که اشکال از او است. چون دیگران هم درس را خوب می‌فهمند و هم از دبیر و روشش راضی هستند و او که تحمل چنین روش یا روش‌هایی را ندارد و درس را نمی‌فهمد حتماً غیرعادی و غیرمتعارف و خنگ و ضعیف است! و مدرسه و معلم و... تقصیری ندارند.

قصه‌ی ما در همین حد باقی مانده اما تمام نشده است. بقیه‌ی داستان و سرانجام این قصه‌ی پرغصه، باشد برای سال بعد که نتایج کنکور اعلام می‌شود.

در حال حاضر روی سخنم با پدرها و مادرها، با مسئولین و دست‌اندرکاران و با همه‌ی کسانی است که هنوز دارای خرد و تعقل و احساس و عاطفه‌اند. چرا به خود نمی‌آییم؟ چرا تفکر و تعقل جای خود را به روش‌های خلق‌السّاعه و قرون وسطایی داده؟ در زمان حاضر، در عصر پرشتاب امروز در کجای دنیا، ساعت‌ها جوانی را سرپا نگه می‌دارند و تحقیر می‌کنند تا آن‌که متنبه شود تا پس از این، چنین عمل بد و زشتی!! ـ دیر آمدن به کلاس! ـ را انجام ندهد. اگر با نیم‌ساعت دیرکرد بخش کوچکی از درس را متوجه نمی‌شد، با این روش تمام هشت ساعت کلاس یعنی یک روز کامل درسی را از دست داد.

واقعاً چه کسی پاسخ‌گو است؟ چه کسی مسئول چنین اقدامات خودسرانه‌ای است؟

چه کسی مسئولیت ناشی از عواقب چنین روش یا روش‌هایی از این دست را به‌عهده می‌گیرد؟ مشکلات و گرفتاری‌های روحی، روانی و رفتاری جوانان کم است که چنین مشکلاتی را هم به آن‌ها اضافه می‌کنیم؟ با این روش‌ها به کجا می‌خواهیم برسیم؟ این عزیزان در کجا باید آموزش زندگی ببینند؟ چند درصد آن‌ها پس از ورود به دنیای واقعی، کار، ازدواج و... از پس مشکلات واقعی برمی‌آیند و توان حل مسائل و تطبیق دادن خود با شرایط ناهماهنگ را دارند؟ عده‌ای از چنین جوانان، یا سرکش و عاصی و لجوج و خودخواه می‌شوند یا مطیع و بله‌قربان‌گو و خوار و ذلیل؛ کسانی که چشم به بزرگ‌ترها و توانگرها می‌دوزند تا برایشان تصمیم بگیرند. زمان می‌گذرد و ما باید پاسخ‌گوی آیندگان باشیم و درباره‌ی عواقب تصمیماتی که می‌گیریم، بیندیشیم. باید بدانیم هیچ عملی از ذهن تاریخ پاک نمی‌شود و همه‌ی تصمیم‌ها و برنامه‌ریزی‌ها، چه خوب و چه بد، در سابقه‌ی تاریخی یک ملت ثبت می‌شود. به‌ویژه در دنیای امروز که هیچ حرف و حرکتی در هیچ کجای دنیا از چشم دیگران پوشیده نمی‌ماند و برای ابد ثبت و ضبط خواهد شد. آن‌ها که آگاهانه و یا ناآگاهانه در جهت تخریب نسل جوان می‌کوشند باید در دنیا و آخرت پاسخ‌گو باشند. به خود آییم و بیش از این عاقبت خود را تباه نسازیم. زمستان می‌گذرد و ما می‌مانیم و روسیاهی زغال.

بهار ۱۳۸۸: سال جدید (۱۳۸۸) آغاز می‌شود. مدرسه دست به ابتکار تازه‌ای می‌زند. برای دانش‌آموزان کلاس‌های جمع‌بندی در تالار... برگزار می‌کند و هر دانش‌آموز برای شرکت در کلاس‌ها باید مبلغی بپردازد. این کلاس‌ها بنا به اظهارنظر مسئولان مدرسه توسط بهترین دبیران اداره می‌شود به این ترتیب که کل مطالب هر درس از ابتدا تا پایان دوره‌ی پیش‌دانشگاهی، در یک روز (۸ ساعت)، مرور و جمع‌بندی می‌شود. این ابتکار، هم مروری است بر درس‌های گذشته و هم در ایام عید و دید و بازدید حواس دانش‌آموزان پرت نمی‌شود و وقتشان بیهوده تلف نمی‌گردد و...

اما بشنوید پایان ماجرا را... .

شهریور ۸۸: قصه‌ی ما به سر رسید ولی دختر عزیز ما نه تنها رتبه‌ی دورقمی نیاورد که با رتبه‌ی پنج‌رقمی در هیچ رشته‌ای در کنکور سراسری موفق نشد و این قصه‌ها هم‌چنان ادامه دارد و قربانی می‌گیرد.

درباره‌ی دیدگاه «دوره‌ی تحلیل و روش تدریس ریاضی۲ متوسطه و بازآموزی علمی آن»

مؤلفان کتابِ ریاضی (۲)

در بخش دیدگاه مجله‌ی رشد شماره‌ی ۹۸، مقاله‌ای با نام بالا به چاپ رسیده است که مؤلفان کتاب ریاضی ۲ را بر آن داشت که توضیحاتی را ارائه کنند.

ابتدا باید بگوییم که نقد یکدیگر، عملی نیکو و پسندیده است به شرط آن‌که در جهت رفع نقص‌ها و رشد یکدیگر باشد و این نمونه‌ای از همان فریضه‌ی امر به معروف و نهی از منکر است. ما با همین نگاه، نقدهای انجام شده در آن مقاله را خواندیم و امیدواریم خوانندگان نیز با همین نگاه، نقدهای ما را بخوانند.

بخشی از نقدهای انجام شده در آن مقاله، مربوط به دوره‌ی تأمین مدرسی بود که نیازی به سخن گفتن درباره‌ی آن نیست و بخش دیگر این نقدها، مربوط به کتاب بود که نیازمند بررسی است.

پیشاپیش، گروه مؤلفان اذعان می‌دارند که این کتاب دارای نقایص فراوانی است که بخشی از آن به طور طبیعی در هر تألیف جدیدی رخ می‌دهد و بخش دیگری نیز مربوط به مشکلات فراوانی بود که به‌طور غیرطبیعی بر مؤلفان تحمیل شد. انتظار ما از همه‌ی معلمان و کارشناسان آموزشی آن است که با مطالعه‌ی سنجیده‌ی کتاب، ما را با این نقیصه‌ها آشنا کنند تا اصلاحات لازم در آن صورت بگیرد.

اما مناسب است نقدهای ناقد محترم را یک به یک بررسی کنیم.

۱. **ناقد**: در فصل «هنر شمارش»، مقدمه‌ای طولانی برای مفهوم ساده‌ی اصل ضرب آمده است و نهایتاً، با مثال‌های ابتدایی این مفهوم توضیح داده شده است.

یکی از مشکلات کتاب‌های فعلی ما آن است که مفاهیم در زمینه‌های مناسب و طبیعی عرضه نمی‌شوند و دانش‌آموزان در مرتبط کردن مفاهیم ریاضی با زندگی روزمره‌ی خود، دچار مشکل می‌شوند. عرضه‌ی مفاهیم در زمینه‌های طبیعی از اصول آموزش است و اتفاقاً با نشست‌هایی که با معلمان در نقاط مختلف کشور داشته‌ایم، همگی از این فصل احساس رضایت می‌کردند. ناگفته نماند که در نسخه‌ی نهایی کتاب، عنوان «هنر شمارش» وجود ندارد و ظاهراً ناقد محترم، نقد خود را بر مبنای نسخه‌ی عرضه شده در دوره‌ی تأمین مدرسی گذاشته‌اند. هم‌چنین، ناقد محترم نقدهایی هم در مورد «بردار» انجام داده‌اند که آن نیز در نسخه‌ی نهایی وجود ندارد.

۲. **ناقد**: مؤلفان بر خودآموز نبودن کتاب تأکید داشته‌اند در حالی که قسمت‌های بسیاری از کتاب خودآموز است.

آن‌چه که مؤلفان تأکید داشته‌اند این است که کتاب درسی به صورت کتاب خودآموز نوشته نمی‌شود و اگر احیاناً در برخی موارد کتاب توانسته باشد مطلبی را خوب پرورش داده باشد که بدون هدایت و کمک معلم مفهوم یاد گرفته شود، اتفاق مبارکی است و آن را باید حُسن کتاب محسوب کرد.

۳. **ناقد**: مؤلفان گفته‌اند رویکرد حل مسئله را در کتاب پیاده کرده‌اند. در حالی که با مروری بر کتاب، این ادعا رنگ می‌بازد.

رویکرد حل مسئله یکی از روش‌های نوین آموزشی است و محور اصلی تألیف کتاب‌های درسی خواهد بود. اما این‌که تا چه حد در این کار موفق باشیم، بستگی به موضوعات و توانایی‌های آموزشی ما دارد. رویکرد حل مسئله مورد توجه ما

بوده است و هر کجا توانسته‌ایم آن را پیاده کرده‌ایم و رگه‌های آن در کتاب قابل مشاهده است. ولی قبول می‌کنیم که هنوز در پیاده‌سازی این روش، در اول راه قرار داریم.

۴. **ناقد:** برخی تعریف‌ها غیردقیق، در برخی موارد غیرعلمی است.

کسانی که با آموزش ریاضی به طور جدی سروکار دارند می‌دانند که یادگیری یک مفهوم با تعریف دقیق و منطقی آن آغاز نمی‌شود، بلکه ابتدا درک‌های شهودی رخ می‌دهند بعد ارتباطات کشف می‌شوند و بعد در زمینه‌های مختلف مشاهده می‌شوند و تعریف دقیق مفهوم آخرین مرحله‌ی آموزش است. بنابراین، هرجا که قرار است دانش‌آموزان را با مفهوم جدیدی آشنا کنیم، آن سخن‌های غیردقیق و توصیف‌های غیردقیق رخ می‌دهند که دقیق‌شدن آن‌ها شاید به سال‌های بعد هم موکول شود. البته رعایت دقت در تعاریف تا حد امکان که موجب غامض‌شدن مفهوم نشود و آموزش را مختل نسازد کاملاً ضروری است و حتماً انجام شده است و اگر موارد خاصی خلاف آن باشد مؤلفان خوشحال می‌شوند که این موارد برای گروه تألیف فرستاده شوند.

۵. **ناقد:** برخی مطالب از منابعی آمده است و هیچ ارجاعی به آن‌ها نشده است.

در کتاب‌های درسی رسم بر آن نیست که مرجع هر مطلبی بلافاصله ذکر شود و معمولاً در آخر کتاب این مراجع می‌آیند و در این کتاب نیز همین عمل انجام شد ولی به خاطر برخی ملاحظات در تعداد صفحات که باید مضرب ۸ باشند صفحه مراجع حذف شده است. مطمئناً هیچ عمدی در کار نبوده است و بدیهی است که در نوشتن بسیاری از مطالب از مراجع مختلف استفاده شده است.

۶. **ناقد:** کتاب‌های ریاضی ۱ و ۲ قبلی تجرید بالایی داشتند و کتاب‌های فعلی شهود زیادی دارند و دانش‌آموزان دانشمند فردا را از جذابیت‌های ریاضی محروم می‌کنند.

گزینش مواد درسی و شیوه‌های ارایه و اهداف کتاب‌های درسی، در برنامه‌ی درسی تعیین می‌شوند و ما نمی‌توانیم از پیش خود هدف‌های سلیقه‌ای برای خود انتخاب کنیم و کتاب‌ها را طبق ذوق و سلیقه‌ی خود تألیف کنیم. کتاب‌های درسی برای کل دانش‌آموزان کشور و تحت اهداف مشخص نوشته می‌شوند و مخصوص قشر نخبه‌ی دانش‌آموزان نیستند. بنابراین، اگر قرار است در مورد مواد و روش‌های ارائه و هدف‌ها نقدی صورت بپذیرد باید راهنمای برنامه‌ی درسی را نقد کرد. شاید قبلاً در تألیف کتاب‌های درسی ذوق و سلیقه‌ی مؤلفین نقش اصلی را در تألیف کتاب بازی می‌کرده است و فرض شده است مؤلفین جدید هم به خاطر سلیقه‌های شخصی خود به چنین روندهایی در تألیف روی آورده‌اند. اما مسئله عمیق‌تر از این حرف‌ها است.

۷. **ناقد:** تألیف کتاب‌های درسی حساسیت‌های بالاتری را می‌طلبد و نباید کوچک‌ترین اشکالی در آن‌ها باشد.

در این مورد کاملاً با ناقد محترم هم عقیده‌ایم ولی کجاست آن شرایط و محیط مطلوبی که چنین امکانی را به ما بدهد. در حال حاضر تألیفات جدید در شرایطی سخت و با کمترین امکانات صورت می‌گیرد و ما نیز متأسفیم.

علی غلامیان
کارشناس ارشد ریاضی محض و دبیر ریاضی بجستان

اثبات نامساوی‌ها به کمک توابع محدب (۲)

اشاره

در قسمت اول این مقاله به معرفی توابع محدب و هم‌چنین بیان و اثبات نامساوی ینسن پرداختیم. نامساوی ینسن کاربردهای متنوعی دارد و از آن می‌توان در اثبات تعداد زیادی از نامساوی‌های کلاسیک و مهم استفاده کرد. در این مقاله، قصد داریم دنباله‌ای از نامساوی‌های کلاسیک و مشهور را به‌دست آوریم.

یادآوری

تابع محدب. تابع حقیقی مقدار f روی بازه‌ی I محدب[1] است هرگاه برای هر $x, y \in I$ و $\lambda \in [0,1]$؛

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

تابع f اکیداً محدب نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x, y \in I$، $x \neq y$ و $\lambda \in (0,1)$؛

$$f(x + (1-\lambda)y) < f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

توجه. f مقعر (اکیداً مقعر) روی I نامیده می‌شود اگر f- روی I محدب (اکیداً محدب) باشد.

نامساوی ینسن[4]. فرض کنید $f: I \to \mathbb{R}$ یک تابع محدب باشد. هم‌چنین فرض کنید $x_1, \dots, x_n \in I$ و $\lambda_1, \dots, \lambda_n \ge 0$ به‌طوری که $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$. در این صورت

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \le \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n) \qquad (1)$$

- اگر f یک تابع مقعر باشد، آن‌گاه

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \ge \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n) \qquad (2)$$

- اگر f یک تابع اکیداً محدب (اکیداً مقعر) باشد، آن‌گاه وقتی $x_1 = \dots = x_n$ تساوی در (۱) و (۲) برقرار است.

قبل از بیان نامساوی مهم و کاربردی میانگین توانی وزن‌دار، دو نامساوی کلاسیک را بیان و اثبات می‌کنیم.

نامساوی میانگین حسابی ـ میانگین هندسی وزن‌دار[5]

فرض کنید $x_1, \dots, x_n \ge 0$ و $w_1, \dots, w_n > 0$ باشند. در این صورت؛

$$\frac{w_1 x_1 + \dots + w_n x_n}{w_1 + \dots + w_n} \ge \left(x_1^{w_1} x_2^{w_2} \dots x_n^{w_n}\right)^{\frac{1}{w_1 + \dots + w_n}} \qquad (3)$$

حالت تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

اثبات. فرض کنیم $x_1, \dots, x_n > 0$ (در غیر این صورت، نامساوی به‌وضوح برقرار است.) در این صورت، با استفاده از نامساوی (۲) با تابع اکیداً مقعر $f(x) = \mathrm{Ln}x$ روی $(0, \infty)$ با انتخاب $\lambda_i = \frac{w_i}{w_1 + \dots + w_n}$ $(1 \le i \le n)$ داریم

$$\mathrm{Ln}\left(\frac{w_1x_1+\ldots+w_nx_n}{w_1+\ldots+w_n}\right) \geq \frac{w_1\mathrm{Ln}x_1+\ldots+w_n\mathrm{Ln}x_n}{w_1+\ldots+w_n}$$

یا

$$\mathrm{Ln}\left(\frac{w_1x_1+\ldots+w_nx_n}{w_1+\ldots+w_n}\right) \geq \mathrm{Ln}\left(x_1^{w_1}\ldots x_n^{w_n}\right)^{\frac{1}{w_1+\ldots+w_n}}$$

چون $f(x)=\mathrm{Ln}x$ یک تابع اکیداً افزایشی روی $(0,\infty)$ است. از این رو

$$\frac{w_1x_1+\ldots+w_nx_n}{w_1+\ldots+w_n} \geq \left(x_1^{w_1}\ldots x_n^{w_n}\right)^{\frac{1}{w_1+\ldots+w_n}}$$

❐

با قرار دادن $w_1=\ldots=w_n=1$ در نامساوی (۳) داریم

نامساوی میانگین حسابی ـ میانگین هندسی (AM-GM):

اگر $x_1,\ldots,x_n \geq 0$ ، آن‌گاه

$$\frac{x_1+\ldots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1\ldots x_n} \qquad (۴)$$

تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $x_1=\ldots=x_n$.

نامساوی میانگین هندسی ـ میانگین هارمونیک وزن‌دار[۶]

فرض کنید $x_1,\ldots,x_n$ و $w_1,\ldots,w_n$ اعداد حقیقی مثبت باشند. در این صورت؛

$$\frac{w_1+\ldots+w_n}{\frac{w_1}{x_1}+\ldots+\frac{w_n}{x_n}} \leq \left(x_1^{w_1}\ldots x_n^{w_n}\right)^{\frac{1}{w_1+\ldots+w_n}} \qquad (۵)$$

تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $x_1=\ldots=x_n$.

اثبات.

راه اول. به‌طور مستقیم از نامساوی (۱) با تابع اکیداً محدب $f(x)=\mathrm{Ln}\frac{1}{x}$ روی $(0,\infty)$ با انتخاب $\lambda_i=\frac{w_i}{w_1+\ldots+w_n}$ $(1\leq i\leq n)$ ، نامساوی موردنظر حاصل می‌شود.

راه دوم. با جای‌گذاری $\frac{1}{x_1},\ldots,\frac{1}{x_n}$ در نامساوی (۳) به جای $x_1,\ldots,x_n$ ، نامساوی موردنظر به‌دست می‌آید.

❐

با قرار دادن $w_1=w_2=\ldots=w_n=1$ در نامساوی (۵) داریم:

نامساوی میانگین هندسی ـ میانگین هارمونیک (GM-HM):

اگر $x_1,\ldots,x_n > 0$ ، آن‌گاه

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} \qquad (۶)$$

تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $x_1=x_2=\ldots=x_n$.

میانگین توانی وزن‌دار[۷]

فرض کنید $x_1,x_2,\ldots,x_n$ و $w_1,\ldots,w_n$ اعداد حقیقی مثبت باشند. در این صورت برای هر عدد حقیقی $t\neq 0$ ، میانگین توانی وزن‌دار از مرتبه‌ی t را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$M_t(x_1,\ldots,x_n)=\left(\frac{w_1x_1^t+\ldots+w_nx_n^t}{w_1+\ldots+w_n}\right)^{\frac{1}{t}} \qquad (۷)$$

بعضی از میانگین‌های وزن‌دار اسامی خاص دارند:

- $M_1(x_1,\ldots,x_n)=\frac{w_1x_1+\ldots+w_nx_n}{w_1+\ldots+w_n}$ میانگین حسابی وزن‌دار[۸] (WHM)
- $M_{-1}(x_1,\ldots,x_n)=\frac{w_1+\ldots+w_n}{\frac{w_1}{x_1}+\ldots+\frac{w_n}{x_n}}$ میانگین هارمونیک وزن‌دار[۹] (WHM)
- $M_2(x_1,\ldots,x_n)=\sqrt{\frac{w_1x_1^2+\ldots+w_nx_n^2}{w_1+\ldots+w_n}}$ جذر میانگین مربعات وزن‌دار[۱۰] (WRMS)
- اگر قرار دهیم $M_0(x_1,\ldots,x_n)=\lim_{t\to 0}M_t(x_1,\ldots,x_n)$ ، آن‌گاه با استفاده از خواص تابع لگاریتم و قاعده‌ی هوپیتال داریم:

$$\mathrm{Ln}M_0(x_1,\ldots,x_n)=\lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{Ln}\left(\frac{w_1x_1^t+\ldots+w_nx_n^t}{w_1+\ldots+w_n}\right)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{w_1x_1^t\ln x_1+\dots+w_nx_n^t\ln x_n}{w_1+\dots+w_n}}{\frac{w_1x_1^t+\dots+w_nx_n^t}{w_1+\dots+w_n}}$$

$$= \frac{w_1\ln x_1+\dots+w_n\ln x_n}{w_1+\dots+w_n} = \ln(x_1^{w_1}\dots x_n^{w_n})^{\frac{1}{w_1+\dots+w_n}}$$

از این رو $M_0(x_1,\dots,x_n) = (x_1^{w_1}\dots x_n^{w_n})^{\frac{1}{w_1+\dots+w_n}}$ است که میانگین هندسی وزنی[11] (WAM) نامیده می‌شود.

● اگر قرار دهیم $M_\infty(x_1,\dots,x_n) = \lim_{t\to\infty} M_t(x_1,\dots,x_n)$، آن‌گاه،

$$M_\infty = \lim_{t\to-\infty}\left(\frac{w_1x_1^t+\dots+w_nx_n^t}{w_1+\dots+w_n}\right)^{\frac{1}{t}}$$

حال وجود دارد j ای $(1\le j\le n)$ که $x_j = \max\{x_1,\dots,x_n\}$. با توجه به این‌که

$$(1\le i\le n)\lim\left(\frac{x_i}{x_j}\right)^t = 0 \text{ یا } 1$$

داریم:

$$M_\infty(x_1,\dots,x_n) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{x_j^t\left[w_1\left(\frac{x_1}{x_j}\right)^t+\dots+w_n\left(\frac{x_n}{x_j}\right)^t\right]}{w_1+\dots+w_n}\right)^{\frac{1}{t}}$$

$$= x_j\lim_{t\to\infty}\left(\frac{w_1\left(\frac{x_1}{x_j}\right)+\dots+w_n\left(\frac{x_n}{x_j}\right)^t}{w_1+\dots+w_n}\right)^{\frac{1}{t}} = xj$$

از این رو $M_\infty(x_1,\dots,x_n) = \max\{x_1,\dots,x_n\}$.

به همین ترتیب اگر $M_{-\infty}(x_1,\dots,x_n) = \lim_{t\to-\infty} M_t(x_1,\dots,x_n)$، آن‌گاه می‌توان ثابت کرد

$M_{-\infty}(x_1,\dots,x_n) = \min\{x_1,\dots,x_n\}$

تبصره. اگر در تعریف (۷) قرار دهیم $w_1=\dots=w_n=1$، آن‌گاه $M_t(x_1,\dots,x_n) = \left(\frac{x_1^t+\dots+x_n^t}{n}\right)^{\frac{1}{t}}$ را میانگین توانی از مرتبه t و M_1، M_{-1}، M_2 و M_0 را به ترتیب میانگین حسابی (AM)، میانگین هارمونیک (HM)، جذر میانگین مربعات (RMS) و میانگین هندسی (EM) می‌نامیم.

حال می‌خواهیم ارتباط بین میانگین‌های کلاسیک را به دست می‌آوریم.

نامساوی میانگین توانی وزن‌دار

فرض کنید $x_1,x_2,\dots,x_n$ و $w_1,\dots,w_n$ اعداد حقیقی مثبت باشند. در این صورت اگر s و t اعداد حقیقی مخالف صفر باشند، به طوری که $s<t$، آن‌گاه

$$\left(\frac{w_1x_1^s+\dots+w_nx_n^s}{w_1+\dots+w_n}\right)^{\frac{1}{s}} \le \left(\frac{w_1x_1^t+\dots+w_nx_n^t}{w_1+\dots+w_n}\right)^{\frac{1}{t}} \qquad (8)$$

اثبات.

حالت اول. اگر $0<s<t$ یا $s<t<0$ آن‌گاه با به‌کاربردن نامساوی (۱) برای $x_1^s,\dots,x_n^s$ و $\lambda_i = \frac{w_i}{n}$ $1\le i\le n$ و با تابع کاملاً محدب $f(x) = x^{\frac{t}{s}}$ داریم:

$$f\left(\frac{w_1x_1^s+\dots+w_nx_n^s}{w_1+\dots+w_n}\right) \le \frac{w_1f(x_1^s)+\dots+w_nf(x_n^s)}{w_1+\dots+w_n}$$

یا

$$\left(\frac{w_1{x_1}^s+\cdots w_n{x_n}^s}{w_1+\cdots+w_n}\right)^{\frac{t}{s}} \le \frac{w_1({x_1}^s)^{\frac{t}{s}}+\cdots+w_n({x_n}^s)^{\frac{t}{s}}}{w_1+\cdots+w_n}$$

از این رو

$$\left(\frac{w_1{x_1}^s+\cdots w_n{x_n}^s}{w_1+\cdots+w_n}\right)^{\frac{1}{s}} \le \left(\frac{w_1{x_1}^t+\cdots w_n{x_n}^t}{w_1+\cdots+w_n}\right)^{\frac{1}{t}}$$

حالت دوم. اگر $s<t<0$ آن‌گاه $0<-t<-s$. حال طبق حالت اول برای $\frac{1}{x_1}$ و $\frac{1}{x_2}$ و ... و $\frac{1}{x_n}$ داریم:

$$\left[\frac{w_1\left(\frac{1}{x_1}\right)^{-t}+\cdots+w_n\left(\frac{1}{x_n}\right)^{-t}}{w_1+\cdots+w_n}\right]^{-\frac{1}{t}} \le \left[\frac{w_1\left(\frac{1}{x_1}\right)^{-s}+\cdots+w_n\left(\frac{1}{x_n}\right)^{-s}}{w_1+\cdots+w_n}\right]^{-\frac{1}{s}}$$

یا

$$\left(\frac{w_1x_1^s+\cdots w_nx_n^s}{w_1+\cdots+w_n}\right)^{\frac{1}{s}} \le \left(\frac{w_1x_1^t+\cdots w_nx_n^t}{w_1+\cdots+w_n}\right)^{\frac{1}{t}}$$

تبصره. با توجه به نامساوی‌های (۳) و (۵) و (۸) به‌وضوح دنباله‌ی نامساوی کلاسیک زیر را داریم:

$$\min\{x_1,\dots,x_n\} \le \frac{w_1+\cdots+w_n}{\frac{w_1}{x_1}+\cdots+\frac{w_n}{x_n}} \le (x_1^{w_1}\cdots x_n^{w_n})^{\frac{1}{w_1+\cdots+w_n}}$$

$$\le \frac{w_1x_1+\cdots+w_nx_n}{w_1+\cdots+w_n} \le \sqrt{\frac{w_1x_1^2+\cdots+w_nx_n^2}{w_1+\cdots+w_n}} \le \max\{x_1,\dots,x_n\}$$

(۹)

اگر در دنباله‌ی نامساوی بالا $w_1=w_2=\cdots=w_n=1$ قرار دهیم، آن‌گاه

$$\min\{x_1,\dots,x_n\} \le \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}} \le \sqrt{x_1\cdots x_n} \le \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$$

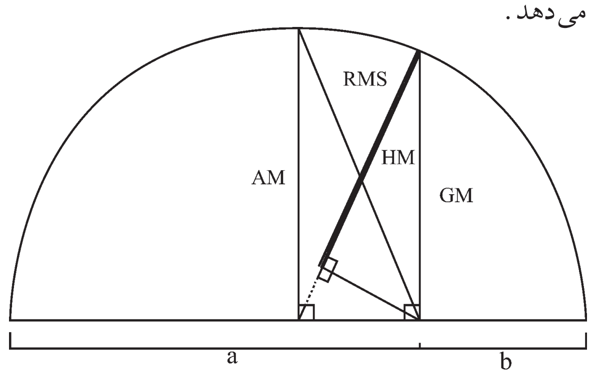
$$\le \sqrt{\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n}} \le \max\{x_1,\dots,x_n\} \qquad (10)$$

نتیجه. اگر $x_1>0$ $(1\le i\le n)$ آن‌گاه

$$(x_1+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right) \ge n^2 . \qquad (11)$$

اثبات. با توجه به دنباله‌ی نامساوی (۱۰) به‌وضوح برقراراست.

نمودار زیر، دنباله‌ی نامساوی (۱۰) را برای حالت n=۲ نشان می‌دهد.



$HM \le GM \le AM \le RMS$

مثال‌ها

مثال۱. اگر $\alpha+\beta=1$ ، $\alpha,\beta>0$ و $a,b\ge 0$ آن‌گاه

$$a^{\alpha}b^{\beta} \le \alpha a+\beta b$$

حل. با استفاده از نامساوی (۳) و انتخاب $w_1=\alpha$ ، $w_2=\beta$ ، $x_1=\alpha$ و $x_2=\beta$ در حالت n=۲ ، نامساوی به‌وضوح برقرار است.

مثال۲. اگر r یک عدد حقیقی و n یک عدد طبیعی باشد، آن‌گاه

$$(1^r+2^r+\cdots+n^r)^n \ge n^n(n!)^r$$

حل. با استفاده از نامساوی (۴) (نامساوی AM-GM) داریم:

$$\frac{1^r+2^r+\cdots+n^r}{n} \ge \sqrt[n]{1^r.2^r\cdots n^r}$$

یا

$$1^r+2^r+\cdots+n^r \ge n\sqrt[n]{(n!)^r}$$

و از این رو

$$(1^r+2^r+\cdots+n^r)^n \ge n^n(n!)^r$$

مثال۳. اگر $a_1a_2\cdots a_n=1$ آن‌گاه

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \ge 2^n$$

حل. با استفاده از نامساوی (۴) داریم:

$$1+a_1 \ge 2\sqrt{a_1}$$
$$1+a_2 \ge 2\sqrt{a_2}$$
$$\vdots$$
$$1+a_n \ge 2\sqrt{a_n}$$

حال با ضرب دو طرف نامساوی درهم داریم:

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \ge 2^n\sqrt{a_1a_2\cdots a_n}$$

با توجه به این‌که $a_1a_2\cdots a_n=1$ نامساوی برقرار است.

مثال۴. اگر $a,b,c,>0$ آن‌گاه

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\right) \ge \frac{9}{2}$$

حل. با انتخاب $x_1=a+b$ ، $x_2=b+c$ و $x_3=a+c$ در

نامساوی (۱۱) داریم :

$$[(a+b)+(b+c)+(a+c)](\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c})\ge 9$$

$$2(a+b+c)(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c})\ge 9$$

و از این رو

$$(a+b+c)(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c})\ge 9$$

مثال۵. (روسیه ۱۹۹۵) برای هر $x,y>0$ ثابت کنید

$$\frac{x}{x^4+y^2}+\frac{y}{y^4+x^2}\le\frac{1}{xy}$$

حل. با استفاده از نامساوی (۶) (نامساوی GM-HM) داریم :

$$\frac{x}{x^4+y^2}=\frac{1}{\frac{1}{\frac{x}{x^4}}+\frac{1}{\frac{x}{y^2}}}\le\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{x^4}\cdot\frac{x}{y^2}}=\frac{1}{2xy}$$

$$\frac{y}{y^4+x^2}=\frac{1}{\frac{1}{\frac{y}{y^4}}+\frac{1}{\frac{y}{x^2}}}\le\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{y^4}\cdot\frac{y}{x^2}}=\frac{1}{2xy}$$

حال با جمع دو طرف، نامساوی مورد نظر به‌دست می‌آید.

مسائلی برای حل

۱. اگر $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ، $p,q>0$ ، $a,b\ge 0$ آن‌گاه

$$ab\le\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$$

راهنمایی: مانند مثال یک عمل کنید.

۲. اگر $a,b,c>0$ آن‌گاه

$$(a+b)(a+c)(c+a)\ge 8abc$$

راهنمایی: از نامساوی (۴) (نامساویAM-GM) استفاده کنید.

۳. اگر a و b و c اعداد مثبتی باشند به‌طوری که مجموع هر دو تای آن‌ها بزرگ‌تر از سومی باشد، آن‌گاه

$$(1+\frac{b-c}{a})^a(1+\frac{c-a}{b})^c(1+\frac{a-b}{c})^c\le 1$$

راهنمایی: از نامساوی (۳) با انتخاب $x_1=1+\frac{b-c}{a}$ ، $x_2=1+\frac{c-a}{b}$ ، $x_3=1+\frac{a-b}{c}$ ، $w_1=a$ ، $w_2=b$ ، $w_3=c$ کمک بگیرید.

۴. اگر مجموع nعدد مثبت $a,b,\dots,L\ (n>1)$ و...وbوa برابر با s فرض شود، آن گاه

$$\frac{s}{s-a}+\frac{s}{s-b}+\dots+\frac{s}{s-L}\ge\frac{n^2}{n-1}$$

راهنمایی: از نامساوی (۱۱) استفاده کنید.

۵. برای اعداد حقیقی مثبت a و b و c نشان دهید:

$$(a^2b+b^2c+c^2a)(ab^2+bc^2+ca^2)\ge 9a^2b^2c^2$$

راهنمایی: از نامساوی (۴) استفاده کنید.

پی نوشت

1.Jensen Inequality
2. Weighted AM-GM Inequality
3. Weighted GM-HM Inequality
4.Weighted Power Mean
5.Weighted Arithmetic Mean
6.Weighted Harmonic Mean
7.weighted Root Mean Square
8.Weighted Geometric Mean

منابع

۱. رودین، والتر، (سال اصل اثر). **اصول آنالیز ریاضی**، ترجمه‌ی دکتر علی‌اکبر عالم‌زاده، انتشارات علمی و فنی، ۱۳۶۲، صفحه‌ی ۱۲۶.

2. Hrimiuc Dragos, (2001). Inequalities for Convex Functions (Part I), " π in the Sky". PIMS

3. Kedlaya Kiran, A<B (Ais less than B), based on notes for the Math Olympiad Program (Mop) version 10, last revised August, 1999.

4. Mildorf, T.J, (2005). Olympiad Inequalities. December 22, 2005.

5. Popescu, P.G. and Diaz-Barrero ,J. L. Certain, (2006): Inequalities for Convex Function, J. Ineq. Pure and Appl. Math. 7(2)Art. 47,2006.

محسن تنده، کارشناس ارشد آموزش ریاضی

استفاده از کتاب‌های کمک‌آموزشی ریاضی آری یا نه؟

مقدمه

یکی از اهداف اصلی کتاب‌های درسی، انتقال مطالب علمی روز به دانش‌آموزان است. اما هدف جنبی دیگر این است تا لذت کتاب‌خوانی را در کام دانش‌آموزان شیرین کند و خودشان کنجکاوانه به سراغ کتاب‌های علمی و ادبی و هنری بروند و علاوه بر تکمیل آموزش علم روز، به زیور ادب و هنر نیز آراسته شوند.

اما در نظام آموزش‌وپرورش، گاهی جریانی جایگزین این هدف اصلی می‌شود که نه تنها دانش‌آموزان را به کتاب و کتاب‌خوانی نزدیک نمی‌سازد، بلکه با اشتباهات برخی از معلمان و اولیا، دانش‌آموز از کتاب و مطالعه، بیزار هم می‌شود و این تنفر تا آن‌جا ادامه می‌یابد که با وجود حضور در معروف‌ترین مدارس، دانش‌آموز نه تنها نتیجه‌ی دلخواه اولیا در کسب رتبه‌های برتر آزمون‌های ورودی به دانشگاه‌ها را به دست نمی‌آورد، بلکه گاهی رتبه‌ی او از دانش‌آموزان معمولی در یک مدرسه‌ی متوسط هم پایین‌تر می‌آید؛ چرا که چنین دانش‌آموزی، حداقل در چهار سال دوره‌ی دبیرستان و پیش‌دانشگاهی و سه سال دوره‌ی راهنمایی تحصیلی، تحت فشار و بمباران کتاب‌های کمک‌آموزشی قرار داشته که او را از هدف اصلی درس و مدرسه دور ساخته است.

البته خوب یا بد این کتاب‌ها، صرفاً از طریق ارزیابی دقیق و کارشناسی شده امکان‌پذیر است. اما آن‌چه واقعیت دارد، وجود پرحجم این کتاب‌ها در نظام تعلیم و تربیت فعلی است؛ کتاب‌هایی که با طرح سؤالات و تست‌های مختلف، دانش‌آموزان را به دستگاه‌های زنده‌ی تست‌زن تبدیل کرده‌اند!

در چنین شرایطی، سؤال اساسی این است که آیا واقعاً این کتاب‌های کمک‌درسی می‌توانند جایگزین کتاب‌های درسی یا

مکمل آن‌ها شوند؟ آیا معلم، دانش‌آموز و اولیا از تأثیر مفید و مؤثر و یا احیاناً مخرب این کتاب‌ها آگاه هستند؟ آیا آموزش‌وپرورش به عنوان نهاد متولی آموزش، این کتاب‌ها را آفت‌زدایی و آسیب‌شناسی کرده است؟ آیا این کتاب‌ها سبب نمی‌شوند که دانش‌آموزان نه تنها از کتاب‌های غیر درسی، که حتی از کتاب‌های درسی هم متنفر و فراری شوند؟

در کنار آن، این سؤال اساسی هم مطرح است که آیا واقعاً فقط کتاب‌های درسی وزارت آموزش‌وپرورش باید ملاک آموزش علم و پرورش فضائل اخلاقی تلقی شود؟ به‌عنوان نمونه، آیا کتاب درسی کامپیوتر می‌تواند با اطلاعات به روز، دانش‌آموز را در رشته‌ی کامپیوتر، به فردی کارآمد تبدیل سازد؟ شیوه‌ی کشورهای توسعه یافته در این زمینه چیست؟ آیا نمی‌توان همانند بسیاری از کشورها، از منابع مختلف و آزاد برای یک درس استفاده کرد و دست معلم و دانش‌آموز را با رعایت استانداردهای مورد تأیید نظام آموزش و پرورش آزاد گذاشت؟

در اکثر نظام‌های آموزش‌وپرورش موفق، چه از نوع متمرکز آن مثل ژاپن و چه از نوع غیرمتمرکز آن مانند کانادا و استرالیا در دوره‌های مختلف تحصیلی، سیاست‌های آموزشی، رئوس مواد و سرفصل‌های برنامه‌ی درسی و سیاست‌های کلی تدریس، توسط بخش‌های دولتی آموزش‌وپرورش (ایالتی، فدرال، منطقه یا کشور) تهیه و تنظیم و به جامعه‌ی آموزشی ابلاغ می‌شود. اما در مکان‌های گوناگون آموزشی مثل مدرسه، ناحیه، منطقه‌های آموزش‌وپرورش؛ دانشگاه‌ها و مؤسسات تحقیقات تربیتی، ناشران خصوصی و گروه‌های مؤلفان، دست‌اندرکاران طراحی و تولید کتاب‌های درسی و آموزشی هستند که با داشتن استقلال نسبی و اقتدار در زمینه‌ی کار خود و در نظر گرفتن چارچوب‌های تعیین شده در برنامه و رئوس تعیین شده و محتوای دروس دوره‌های تحصیلی و از جمله دوره‌ی متوسطه، به طراحی، تدوین و تولید کتاب‌های آموزشی، با طرح‌های متفاوت می‌پردازند. البته این کتاب ها قبل از چاپ سپاری (به‌خصوص در مورد کتاب‌های درسی) باید به نوعی با توجه به درجه‌ی تمرکز نظام آموزشی، مراحل گرفتن مجوز و تأییدیه را از کمیته‌ی تخصصی و دفاتر مربوطه در سطح محلی، منطقه‌ای یا وزارت آموزش‌وپرورش طی کنند [سرکارآرانی، ۱۳۷۹].

در ایران، کتاب‌های درسی به‌صورت متمرکز و توسط دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی تهیه می‌شوند. اما کتاب‌های کمک آموزشی توسط ناشرانی که بعضی از آن‌ها وابسته به بخش دولتی و بعضی خصوصی هستند چاپ و انتشار می‌یابد و توسط بخش دولتی بر آن‌ها نظارت عام (توسط وزارت ارشاد نه آموزش‌وپرورش) انجام می‌گیرد.

انواع کتاب‌های آموزشی

کتاب‌های کمک‌آموزشی به‌طور گسترده‌ای در نظام آموزشی فعلی ایران مورد استفاده می‌باشد. از طرف دیگر، جامعه‌ی آموزش ریاضی کشور نیز اهدافی را برای آموزش ریاضی در نظر گرفته است که برای اطلاع از این اهداف، می‌توان به کتاب‌های معلم (راهنمای تدریس) که به‌طور خلاصه اهداف آموزش ریاضی را در هر پایه مشخص کرده است، یا به سندهای بالادستی که توسط دفتر انتشارات کمک‌آموزشی تهیه شده، مراجعه کرد (حاجیان‌زاده، ۱۳۷۹).

دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، انواع کتاب‌های آموزشی را به شش دسته تقسیم‌بندی کرده و برای هر کدام تعریفی داده است که در این‌جا می‌آوریم:

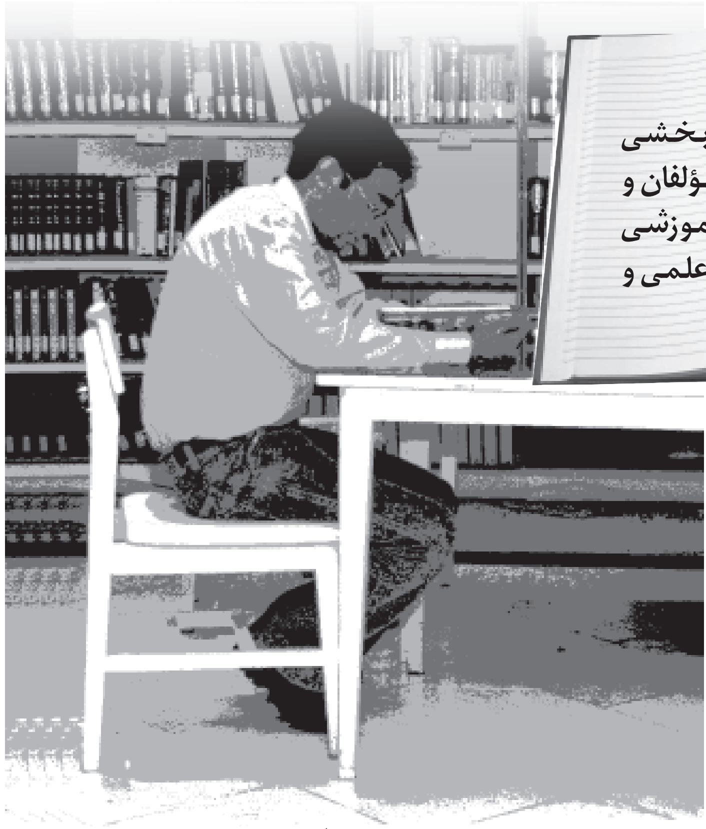
الف) کتاب‌های دانش‌افزایی دبیران

کتاب‌هایی هستند که به افزایش و ارتقای دانش پایه‌ی ریاضی یا توسعه‌ی توانایی‌های حرفه‌ای آن‌ها در زمینه‌ی روش‌های تدریس، یادگیری و آموزش ریاضی می‌پردازند.

از آن‌جا که در دوره‌ی متوسطه، درس‌های ریاضی تا حدود زیادی تخصصی می‌شوند (جبر، هندسه، هندسه تحلیلی، آمار و احتمال، حسابان و ریاضیات گسسته)، ارتقای توانایی‌ها در زمینه‌ی دانش موضوعی ریاضی، از نیازهای ضروری دبیران ریاضی برای آموزش مطلوب‌تر است. از طرف دیگر، یک دبیر برای موفقیت در تدریس و آموزش، باید دانش حرفه‌ای خود را در زمینه‌هایی مثل روان‌شناسی یادگیری، برنامه‌ریزی درسی، شیوه‌های ارزشیابی و نظایر آن افزایش دهد. کتاب‌های دانش‌افزایی دبیران ریاضی دوره‌ی متوسطه، برای پاسخ گویی به این دو نیاز دبیران تولید می‌شوند.

ب) کتاب‌های جنبی و سرگرمی

کتاب‌هایی هستند که شگفتی‌ها و زیبایی‌های ریاضیات را قابل مشاهده می‌کنند، دانش‌آموزان را با جنبه‌های متفاوت و مختلف ریاضی ـ که در برنامه‌ی درسی فرصت‌های کمتری برای بروز و ظهور داشته‌اند ـ آشنا می‌سازند و تاریخ کشف، بسط و



یکی از اهداف «طرح سامان‌بخشی کتاب‌های آموزشی»، تشویق مؤلفان و ناشران به تولید کتاب‌های آموزشی مطلوب و منطبق با معیارهایی علمی و تربیتی است

گسترش مفاهیم گوناگون ریاضی را با آنان در میان می‌گذارند. این نوع کتاب‌ها به‌طور معمول مستقل از کتاب‌های درسی هستند و در صورت تغییر محتوای برنامه‌ی درسی، موجودیت خود را حفظ می‌کنند و کمتر دست‌خوش تغییر می‌شوند.

پ) کتاب‌های سنجش و ارزشیابی پیشرفت تحصیلی

کتاب‌هایی هستند که به‌منظور آشنا کردن دانش‌آموزان با ارزشیابی‌های پایانی از جمله آزمون‌های ورود به دانشگاه‌ها و آماده کردن آنان برای شرکت در چنین آزمون‌هایی تولید می‌شوند. این کتاب‌ها در چارچوب برنامه‌ی درسی مصوب، برای یک دوره یا یک واحد درسی، به منظور ارزشیابی پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان منتشر می‌شوند.

ت) کتاب‌های کمک‌درسی

کتاب‌هایی که در چارچوب برنامه‌ی درسی مصوب، به تکمیل، تعمیق و توسعه‌ی آموزش محتوای مورد نظر می‌پردازند و کاستی‌ها و کمبودهای کتاب درسی را رفع می‌کنند و به تفصیل توضیح می‌دهند. هم‌چنین، فرصت‌های تازه‌ای برای تمرین فراهم می‌آورند. قالب اصلی این نوع کتاب‌ها را بخش آموزش تشکیل می‌دهد. این کتاب‌ها که برای یک موضوع و یا یک واحد درسی معین منتشر می‌شوند، ابتدا به شرح، بسط، توضیح و آموزش مفاهیم و محتوای مورد نظر می‌پردازند و سپس، نمونه سؤال‌ها و تمرین‌ها، ، مثال‌های حل شده و مطالب جنبی را ذکر می‌کنند. در هر صورت، ساختار غالب کتاب‌های کمک درسی را محتوای کتاب‌های درسی شکل می‌د هند.

ث) کتاب‌های دانش‌افزایی دانش‌آموزان

کتاب‌هایی هستند که به منظور ارائه‌ی مطالب و مفاهیم ریاضی ـ که در برنامه‌ی مصوب درسی به آن‌ها کمتر پرداخته شده است یا به‌طور کلی در برنامه‌ی درسی مصوب وجود ندارند ـ به دانش‌آموزان مستعد و علاقه‌مند، تهیه و تولید می‌شوند. این کتاب‌ها فارغ از برنامه‌ی درسی، آموزش‌های رسمی، امتحانات و آزمون‌های پایانی و کنکور، به طرح مطالب ریاضی می‌پردازند و خواندن آن‌ها به درک بهتر و عمیق‌تر مطالب برنامه‌ی درسی کمک می‌کند.

ج) کتاب‌های دایرة‌المعارف و فرهنگ

کتاب‌هایی هستند که جنبه‌ی مرجع دارند و در چارچوب برنامه‌ی درسی، به ارائه‌ی اطلاعات و دانش‌های مورد نیاز دانش‌آموزان به‌صورت طبقه‌بندی شده می‌پردازند. این آثار، منبع و مرجع دانش‌آموزان و دبیران برای دست‌یابی به تعریف‌ها، اطلاعات فرهنگ و دایرة‌المعارفی، فرمول‌ها و روابط، زندگی‌نامه‌ی دانشمندان و مانند این‌ها در حوزه‌ی دانش ریاضی هستند.

سامانه بخش کتاب‌های آموزشی

وضعیت نشر کتاب‌های آموزشی تا پیش از سال ۱۳۷۸، به لحاظ عدم توجه به اصول علمی و آموزشی در تألیف و چاپ این

نوع کتاب‌ها و هم‌سویی ناچیز با هدف‌های برنامه درسی، موجب بروز انتقاداتی از سوی رسانه‌های جمعی، مدیران، متخصصان آموزشی و معلمان شد. این مطلب، علاقه‌مندان و دلسوزان آموزش‌وپرورش را واداشت که از «سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی» بخواهند در این زمینه چاره‌اندیشی کند. سازمان پژوهش نیز با توجه به رسالت خطیر خود در هدایت و سمت‌دهی بازار نشر کتاب‌های آموزشی، تصمیم گرفت طرح ساماندهی کتاب‌های آموزشی را به اجرا در آورد. در نتیجه، «طرح ساماندهی کتاب‌های آموزشی» از سال ۱۳۷۸ و با هدف دست‌یابی به مقاصد زیر به اجرا گذاشته شد:

در اکثر نظام‌های آموزش و پرورش موفق، سیاست‌های آموزشی توسط بخش‌های دولتی تهیه و تنظیم و به جامعه‌ی آموزشی ابلاغ می‌شود

۱. هدایت ناشران و تولید کنندگان کتاب‌های آموزشی مورد نیاز معلمان و دانش‌آموزان، به سمت تولید و نشر کتاب‌های کمک‌آموزشی و کمک‌درسی مناسب و منطبق با معیارها و استانداردهای آموزشی؛

۲. تشویق مؤلفان و ناشران به تولید کتاب‌های آموزشی مطلوب و منطبق با معیارهای علمی و تربیتی؛

۳. شناسایی و معرفی آثار برتر.

یکی از فعالیت‌های مهمی که در راستای «طرح ساماندهی کتاب‌های آموزشی» انجام گرفته است، برگزاری هفت جشنواره‌ی کتاب‌های آموزشی به ترتیب در سال‌های ۱۳۷۹ (دوره‌ی ابتدایی)، ۱۳۸۰ (دوره‌ی راهنمایی)، ۱۳۸۱ (دوره‌ی متوسطه نظری و فنی و حرفه‌ای)، ۱۳۸۳ (دوره‌های آموزش ابتدایی و راهنمایی)، ۱۳۸۴ (دوره‌ی آموزش متوسطه نظری، پیش‌دانشگاهی، فنی و حرفه‌ای و کاردانش)، ۱۳۸۶ (دوره‌ی آموزش ابتدایی و راهنمایی) و بالاخره، ۱۳۸۷ (دوره‌ی متوسطه نظری، پیش‌دانشگاهی و فنی و حرفه‌ای و کاردانش) است که در آن، به دنبال رسیدن به اهداف زیر بوده‌اند:

۱. تبیین و انتقال سیاست‌ها، هدف‌ها و برنامه‌های آموزش‌وپرورش در حوزه‌ی انتشار کتاب‌های آموزشی؛

۲. ارزشیابی کتاب‌های آموزشی موجود، به منظور بررسی کیفیت، انتخاب و معرفی کتاب‌های برگزیده؛

۳. انتخاب مؤلفان و ناشران برتر در حوزه‌ی تألیف و نشر کتاب‌های آموزشی؛

۴. فراهم آوردن امکانی برای تبادل نظر میان پدیدآورندگان کتاب‌های آموزشی؛

۵. شناخت مشکلات و تبیین راهبردهایی برای انتشار کتاب‌های آموزشی؛

۶. پشتیبانی و تشویق آن دسته از پدیدآورندگان کتاب‌های آموزشی که در راستای تحقق هدف‌های برنامه‌های آموزشی بیش‌ترین نقش را داشته‌اند.

با توجه به این اهداف، جایگاه کتاب‌های کمک‌آموزشی شامل کتاب‌های سنجش و ارزشیابی پیشرفت تحصیلی و کتاب‌های کمک‌درسی مورد بررسی قرار گرفت.

این بررسی نشان داد که هر دوی کتاب‌درسی و کتاب کمک‌آموزشی، جایگاه و نقش بالایی در فرایند آموزش مدرسه‌ای در ایران دارند.

این کتاب‌ها به وفور در آموزش مدرسه‌ای وجود دارند و با وجود بسیاری از تصوراتی که کتاب‌های کمک‌آموزشی را در فرایند آموزش ریاضی ـ آن‌گونه که مورد استفاده قرار می‌گیرد ـ مؤثر و مفید فایده نمی‌دانند، باز هم بعضی از معلمان معتقدند که کتاب‌های کمک‌آموزشی، تأثیر زیادی در بهبود وضعیت آموزش ریاضی مدرسه‌ای دارند و این تصورات، این سؤال را به ذهن می‌آورد که با این اوصاف، جایگاه کتاب درسی در آموزش مدرسه‌ای کجا قرار دارد؟ و با توجه به این‌که مجوز اکثر کتاب‌های کمک‌آموزشی از سوی مراکز مرتبط وزارت آموزش‌وپرورش صادر می‌شود، آیا این به منزله‌ی خفیف کردن نقش کتاب درسی در فرایند آموزش مدرسه‌ای توسط خود آموزش‌وپرورش نیست؟

منابع

۱. **بیانیه‌ی هیأت داوران چهارمین دوره جشنواره‌ی کتاب‌های آموزشی رشد**، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی.

۲. حاجیان‌زاده علیرضا (۱۳۸۷)؛ افقی نو در سامان ملی کتاب‌های آموزشی، **جوانه**، شماره ۲۴.

۳. **سومین جشنواره کتاب‌های آموزشی رشد**، دوره‌ی آموزش متوسطه، ۱۳۸۱، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، دبیرخانه‌ی کتاب‌های آموزشی.

۴. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی (www.roshdmag.org).

۵. دفتر تألیف و برنامه‌ریزی درسی (www.talif.net).

۶. شبکه‌ی ملی مدارس ایران (www.roshd.ir).

سرگرمی‌های تاریخی در آموزش ریاضی

نرگس عصارزادگان
دبیر ریاضی، کارشناس ارشد مدیریت آموزشی، سرگروه ریاضی آموزش و پرورش منطقه‌ی برخوار استان اصفهان

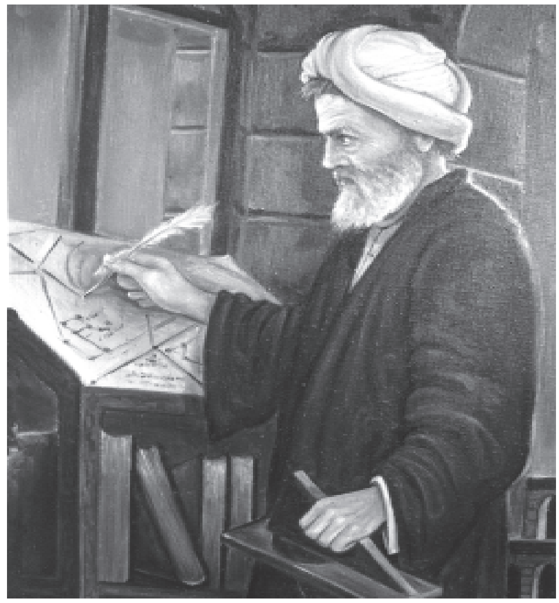
چکیده

در نوشته‌ای که پیش رو دارید، چندین مسئله‌ی کلامی از سه منبع تاریخی ارائه شده است. این مسایل از سه وجه قابل تأمل هستند: ۱. بیان معماگونه و سرگرم‌کننده‌ی این مسایل برای دانش‌آموزان جذاب است، ۲. از آن‌جا که مسایل از نسخه‌های تاریخی مربوط به سده‌های ۵ و ۶ هجری گردآوری شده‌اند به این وسیله می‌توان به هنگام آموزش، نگاهی به فرهنگ گذشتگان و تاریخ علم ریاضی داشت، ۳. از لحاظ آموزش ریاضی دانش‌آموزان یاد می‌گیرند که چگونه مسایل کلامی را به زبان ریاضی برگردانند و روش‌های مناسب حل مسئله را برای آن‌ها به کار گیرند.

کلید واژه‌ها: تاریخ ریاضی، مسائل تاریخی ریاضی.

پیش گفتار

سرگرمی‌ها و معماهای ریاضی از ابعاد جذاب و آموزنده‌ی ریاضیات هستند که در جلب توجه نوآموزان و غیرحرفه‌ای‌ها نقش زیادی دارند. سرگرمی‌های ریاضی اغلب در قالب عناصری از زندگی روزمره حتی به‌طور غیر واقعی بیان می‌شوند به گونه‌ای که غیر ریاضیدانان هم مجذوب آن‌ها می‌شوند و برای حل آن‌ها تلاش می‌کنند. این نکته برای برانگیختن علاقه‌ی دانش‌آموزان به ریاضیات بسیار مهم است و آن‌ها را به سوی قلمروهای تازه‌تری سوق می‌دهد. از دیگر سو، با بررسی ریشه‌های تاریخی این نوع سرگرمی‌ها، می‌توان به رواج جهانی برخی از آن‌ها در محیط‌ها و زمان‌های گوناگون دست یافت که تبادل‌های فرهنگی را نشان می‌دهد. هم‌چنین، پرداختن به ریاضیات قومی و استفاده از مسایلی که ریشه در فرهنگ و تاریخ ما دارند، می‌تواند به فراگیرندگان کمک کند تا درک بهتری از گذشته داشته باشند. ما به تاریخ علاقه‌مندیم نه به این دلیل که احساس می‌کنیم به گذشته تعلق داریم، بلکه می‌خواهیم درک بهتری از اکنون داشته باشیم و آینده را پیش‌بینی کنیم. تاریخ ریاضی ابزار مناسبی برای مشاهده‌ی ریاضیات است، نه‌تنها به‌طور مستقل و در قالب دانش کلاسیک، بلکه به‌عنوان یک فعالیت بشری مداوم که به



سایر حوزه‌ها پیوند خورده، و برای کمک به حل بسیاری از انواع مسایل در زندگی واقعی انسان ابداع شده است.

مسئله‌های کلامی برای آموزش روش حل مسئله بسیار مفید هستند. دانش‌آموز در این مسایل یاد می‌گیرد که چگونه می‌توان مسئله‌ای را به زبان عادی داده شده است، با نشانه‌های ریاضی و به زبان جبری ترجمه کرد. در مواردی این ترجمه روشن است، ولی مواردی وجود دارد که، برای تبدیل شرط‌های مسئله به معادلات یا دستگاه معادلات، به تجربه‌ای بیشتر، یا نیروی خلاقانه‌ای بیشتر و یا صرف وقت بیشتری نیاز دارد. این نوع مسایل را می‌توان برحسب شرایط فراگیرندگان در کلاس‌های دوره‌ی راهنمایی به هنگام آموزش راهبردهای حل مسئله و یا کلاس اول دبیرستان به‌کار برد.

در این مقاله، نمونه‌هایی از مسایل سرگرم‌کننده‌ی مشابه از کتاب‌های لب‌الحساب تألیف علی‌بن یوسف‌بن علی منشی سده‌ی ششم هجری قمری، مفتاح‌المعاملات ابوجعفر محمدبن ایوب حاسب طبری ریاضی‌دان سده‌ی پنجم هجری قمری، و التکمله فی‌الحساب ابومنصور بغدادی سده‌ی پنجم هجری قمری بررسی می‌شود.

معرفی کوتاه نسخه‌های منبع و مؤلفان آن‌ها

۱. التکمله فی‌الحساب ابومنصور بغدادی

التکمله فی الحساب تألیف ابومنصور بغدادی است. ابومنصور بغدادی (عبدالقاهر بغدادی) فقیه شافعی و ریاضیدان عراقی بوده است. بغدادی در بغداد به دنیا آمد. پدرش او را به نیشابور برد تا ادامه تحصیل دهد و در آن‌جا مقیم شد. گروهی از علمای خراسان از شاگردان وی بودند زیرا او هفده فن مختلف و به‌خصوص حساب و فقه و فرایض را تدریس می‌کرد. وی به علت فتنه‌ی ترکمان‌ها نیشابور را ترک کرد و به اسفراین رفت و اندکی بعد در سال ۴۲۹ در آن‌جا درگذشت. کتاب التکمله فی الحساب بسیار معروف بوده و تحصیل آن برای محصلان ریاضی واجب بوده است. التکمله فی الحساب به زبان عربی است و یک نسخه‌ی نفیس آن در کتابخانه‌ی مرکزی دانشگاه تهران موجود است. از بغدادی، آثار دیگری نیز موجود است: الایضاح عن اصول صناعه المسّاح و کتاب فی المساحت. در این نوشته ترجمه‌ی برخی مسایل به زبان فارسی آورده می‌شود.

۲. مفتاح المعاملات حاسب طبری

رساله‌ی فارسی مفتاح المعاملات تألیف ابوجعفر محمدبن ایوب طبری معروف به حاسب طبری، ریاضی‌دان و اخترشناس ایرانی اهل طبرستان (مازندران کنونی) است. طبری در نیمه‌ی دوم قرن پنجم فعالیت علمی داشته است. شمارنامه عنوان اثر دیگر اوست که قدیمی‌ترین متن فارسی موجود درباره‌ی حساب هندی است مفتاح‌المعاملات برای غیر ریاضیدان‌ها نگاشته شده است. نمونه‌هایی از مسایل جالب با عنوان نوادر و مضمرات در فصل چهارم کتاب مفتاح المعاملات وجود دارد که حاوی ۵۴ مسئله است. نمونه‌هایی از این مسایل ریشه در آثار تاریخی کهن‌تر دارد که نزد اقوام مختلف نیز بیان می‌شود.

۳. لب‌الحساب

لب‌الحساب تصنیف علی‌بن یوسف‌بن علی (منشی، مستوفی یا محاسب) متعلق به سده‌ی پنجم و ششم هجری قمری ات. این نسخه‌ی منحصر به‌فرد فارسی شامل ۲۷۴ صفحه است و در کتابخانه‌ی مرکزی دانشگاه تهران به شماره ۵۲۱۳ نگهداری می‌شود. از آن‌جا که لب‌الحساب شامل همه‌ی موضوعاتی که در حوزه‌ی حساب و هندسه‌ی آن زمان وجود داشته می‌شود، به‌واقع دایرة‌المعارف بی‌نظیری از حساب و هندسه است. از نویسنده‌ی لب‌الحساب اطلاعی در دست نیست. آقای ادیب برومند در کتاب خردنامه تألیف و نگارش ابوالفضل یوسف‌بن علی مستوفی (از اوائل سده ششم هجری) از احوال و هویت نویسنده که به احتمالی اهل خراسان است اظهار بی‌اطلاعی

کرده‌اند و در زیرنویس کتاب عنوان کرده‌اند که محتمل است صاحب لب‌الحساب فرزند نویسنده خردنامه باشد.

منشی در لب‌الحساب از بغدادی به‌عنوان استاد معظم نام برده است. احتمال می‌رود که وی در نیشابور شاگرد بغدادی بوده است. در بسیاری از موارد مسئله با نگارش اصلی قابل درک است، از این‌رو برای حفظ شیوه‌ی بیان اصلی، فقط در برخی موارد به زبان فارسی جدید برگردانده شده است.

سرگرمی‌های ریاضی موجود در سه نسخه‌ی التکمله فی‌الحساب، مفتاح‌المعاملات و لب‌الحساب

۱. درختی است که ثلث آن در خاک، ربعش در آب، و ۳ ذرع آن بیرون است، طولش چقدر است؟ (نگر: التکمله فی‌الحساب: باب ۱۱ فی نوادر الحساب من فنون مختلفه، ص ۲۸۹)

$$(\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴})x+۳=x \Rightarrow \frac{۵}{۱۲}x=۳ \Rightarrow x=\frac{۳۶}{۵}$$

۲. «اگر پرسند ما را از درختی که بالای او سه یک در آب است، و چهار یک او در گل، بر هوا شده است ده گز. جمله چند گز باشد بالای درخت؟» (نگر: مفتاح‌المعاملات حاسب طبری، مسئله‌ی ۱۸)

که پاسخ به‌صورت زیر است.

$$\frac{x}{۳}+\frac{x}{۴}+۱۰=x \Rightarrow x=۲۴$$

۳. همین مسئله در باب ۳۸ کتاب آمده که در آن یک‌سوم درخت در آب، یک‌چهارم در گل، یک‌پنجم در ریگ، و ۱۰ گز در هواست. همین داده‌ها در مسئله‌ی ۳۱ با ساختاری متفاوت ظاهر می‌شود که در آن‌جا از ارتفاع درختی یک‌دوم در آب، یک‌سوم در گل و جذرش در هواست، که حل آن به‌صورت زیر است:

$$x=\frac{x}{۲}+\frac{x}{۳}+\sqrt{x} \Rightarrow x=۳۶$$

۴. «اگر بپرسند ما را از ماهیی که سرش سه‌یک اوست و دنبش پنج‌یک او، میانش بی‌سر و دنب ده من. جمله چند من باشد؟» (نگر: مفتاح‌المعاملات حاسب طبری، مسئله‌ی ۳۷)

$$\frac{x}{۳}+\frac{x}{۵}+۱۰=x \Rightarrow \frac{۷}{۱۵}x=۱۰ \Rightarrow x=\frac{۱۵۰}{۷}$$

۵. حوضی ۳ مجرا دارد، یکی از آن‌ها حوض را در سه روز، و دیگری در چهار روز، و سومی در پنج روز پر می‌کند. این سه مجرا را در یک ساعت واحد باز می‌کنیم. چه مدتی طول می‌کشد تا حوض پر شود؟ (نگَر: التکمله فی‌الحساب باب ۱۱ فی نوادر الحساب من فنون مختلفه ص ۲۸۹)

$$۱ \div (\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵})=\frac{۶۰}{۲۰+۱۵+۱۲}=\frac{۶۰}{۴۷}$$

۶. حوضی ۳ مجرا دارد، یکی از آن‌ها حوض را در یک روز، دومی در دو روز، و سومی در سه روز پر می‌کند، هر سه را باز می‌کنیم، حوض پس از چه مدتی پر می‌شود؟ (نگر: التکمله فی الحساب باب ۱۱، ص ۲۸۹)

$$۱ \div (۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳})=\frac{۶}{۱۱}$$

جورج پولیا نیز مسئله‌ای از همین نوع عنوان کرده است: یک لوله‌ی آب، حوض را در ۱۵ دقیقه، لوله‌ی دوم در ۲۰ دقیقه و لوله‌ی سوم در ۳۰ دقیقه پر می‌کنند. اگر هر سه لوله باز باشند، در چه مدت حوض پر می‌شود؟ (نگر: خلاقیت ریاضی، ص ۷۰)

گنجایش حوض را a لیتر می‌گیریم. در این صورت سرعت جریان آب، از لوله‌ی اول، برابر است با $\frac{a}{۱۵}$ لیتر در دقیقه. چون گنجایش برابر است با سرعت ضرب در زمان پس، مقدار آبی که در t دقیقه، از لوله جاری می‌شود، برابر است با $\frac{a}{۱۵}t$ لیتر. اگر با باز بودن هر سه لوله، حوض در t دقیقه پر شود، مقدار آب وارد به حوض را، به دو طریق می‌توان بیان کرد:

$$\frac{a}{۱۵}t+\frac{a}{۲۰}t+\frac{a}{۳۰}t=a$$

سمت چپ برابری، مقدار آبی را که از هر لوله وارد حوض می‌شود، بیان می‌کند؛ و سمت راست، مجموع آبی که به‌وسیله‌ی سه لوله وارد حوض شده است. اگر دو طرف برابری را بر a تقسیم کنیم، به این معادله می‌رسیم:

$$\frac{t}{۱۵}+\frac{t}{۲۰}+\frac{t}{۳۰}=۱$$

که از روی آن می‌توان مجهول t را به‌دست آورد.

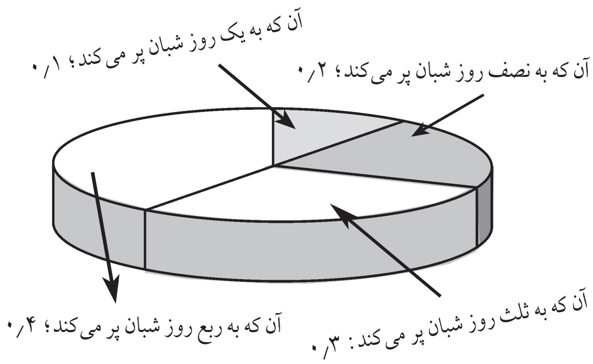
۷. «چون حوضی هست و او را چهار مجرا آب هست از یک مجرا حوض پر می‌شود به یک روز شبان و به دیگر به نصف روز شبان و به دیگر به ربع و به دیگر به ثلث، این زمان اگر هر چهار مجرا بگشایند به چند ساعت پر می‌شود؟» (نگر: لب‌الحساب، ص ۵۷)

$$۱+۲+۳+۴=۱۰$$

$$\frac{۱}{۱۰}=\frac{x}{۲۴}$$

$$x=۲/۴=۲\frac{۲}{۵}$$

جالب است بدانید مؤلف لب‌الحساب، نموداری شبیه نمودار زیر در انتهای حل مسئله رسم کرده است.



مسئله‌ی مشابهی با عنوان شستن ظرف‌ها در کتاب قدیمی چینی (کتاب ریاضی Sun Chi، ۲۰۰ سال پیش از میلاد) وجود دارد: پیرزنی در حال شست‌وشوی ۶۵ ظرف غذا است، از او می‌پرسند چند نفر مهمان داشته‌ای می‌گوید: هر ۲ نفر در یک ظرف سبزی، هر ۳ نفر در یک ظرف ماهی، و هر ۴ نفر در یک ظرف مرغ شریک بوده‌اند. تعداد مهمان‌ها را پیدا کنید.

$$۶۵\div(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴})=۶۰$$

۸. «حوضی ۳ چشمه آب به این حوض می‌رود، یک چشمه در یک روز پر می‌کند و یکی در دو روز و یکی در سه روز. این ۳ چشمه را به یک‌بار در آن حوض گشودند در چند ساعت پر کند. از سؤال معلوم می‌شود که در ۶ روز یازده‌بار پر می‌شود پس نسبت ۶ با یازده هم‌چنان باشد که نسبت مطلوب با یکی پس به شش جزو از یازده روز پر شود.» این مسئله در التکمله نیز عنوان شده است. (نگر: لب‌الحساب، ص ۲۶۲)

$$\frac{۶}{۱۱}=\frac{x}{۱}\Rightarrow x=\frac{۶}{۱۱}$$

۹. «در این مسئله اگر سؤال کنند که یکی در نصف روزی پر می‌کند و یکی در خمسی و یکی در دو روز، از سؤال ایضاً معلوم می‌شود که هر ۳ این را در دو روز پانزده‌بار پر می‌کنند پس نسبت دو با پانزده چون نسبت مطلوب بود با یکی پس در دو جزو از پانزده روز پر شود.» (نگر: لب‌الحساب، ص ۲۶۲)

$$۱\div(۲+۵+\frac{۱}{۲})=\frac{۲}{۱۵}$$

$$\frac{۲}{۱۵}=\frac{x}{۱}\Rightarrow x=\frac{۲}{۱۵}$$

۱۰. «دیگر اگر سؤال کنند که یکی در ربع روزی و یکی در سُدس (یک‌ششم) روزی پر می‌کند و یکی در سُبع (یک‌هفتم) روزی و این حوض یک مجری دارد که اگر حوض پر باشد در تُسع (یک‌نهم) روزی خالی می‌شود هر ۳ چشمه را گشودند به چند پر می‌شود با مجری حوض که خالی می‌شود؟ از سؤال معلوم می‌شود که هر ۳ چشمه در یک روز هفده‌بار پر می‌کنند و مجری ۹ بار تهی می‌کند پس فصل[1] پر شدن بر تهی‌شدن در یک روز به هشت نوبت باشد پس در ثُمن (یک‌هشتم) روزی پر می‌شود، والسلام.» (نگر: لب‌الحساب، ص ۲۶۲)

$$۴+۶+۷-۹=۸ \text{ و } \frac{۱}{۸}=\frac{x}{۱}\Rightarrow x=\frac{۱}{۸}$$

۱۱. دو نفر ۸ قرص نان دارند، یکی ۳ قرص و دیگری ۵ قرص: مهمانی برای آن‌ها می‌رسد، آن‌ها نان‌ها را بین ۳ نفرشان به تساوی تقسیم می‌کنند، مهمان به‌ازای نانی که خورده ۸ دینار می‌پردازد، به نفر اول و دوم هرکدام چند دینار می‌رسد؟ دارنده‌ی ۳ نان ۱ دینار و صاحب ۵ نان ۷ دینار، چرا که اگر هر کدام نان‌ها را به ۳ قسمت تقسیم کنند، می‌شود ۲۴ قسمت نان که بین ۳ نفر تقسیم می‌شود و هر کدام ۸ قسمت می‌گیرد. اما نفر او ۱۵ قسمت داشته و ۷ قسمت داده، و نفر دوم ۹ قسمت داشته و ۱ قسمت داده پس به نفر اول ۷ دینار و به نفر دوم ۱ دینار می‌رسد. (نگر: التکمله فی‌الحساب باب ۱۱ فی نوادر الحساب من فنون مختلفه، ص ۲۹۰)

$$۵-\frac{۸}{۳}=\frac{۷}{۳}$$

$$۳-\frac{۸}{۳}=\frac{۱}{۳}$$

مشابه این مسئله در مفتاح‌المعاملات عنوان شده است:

۱۲. سه نفر مقداری نان با هم به تساوی خوردند. یکی از آنان ۳ قرص نان و دیگری ۲ قرص نان آورده بود. نفر سوم نانی نیاورده بود بنابراین ۵ درم داد تا آن‌ها بین خود تقسیم کنند این ۵ درم چگونه باید بین دو نفر تقسیم شود؟ (نگر: مفتاح‌المعاملات، مسئله‌ی ۵۴)

$۳+۲=۵,\ ۵\div ۳=\frac{۵}{۳}$

$۳-\frac{۵}{۳}=\frac{۴}{۳},\ ۲-\frac{۵}{۳}=\frac{۱}{۳}$

۱۳ . «حیوانی هر روز از سوراخ خمسی از بدن بیرون می‌آورد و سُدسی (یک ششم) باز پس می‌رود به چند روز از این سوراخ بیرون آید؟» (نگر : لب الحساب، ص ۲۶۳)

$\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۳۰},\frac{۲۴}{۳۰}+\frac{۱}{۵}=۱$

۱۴ . «دو برید[۲] یکی از یزد تا کرمان و یکی از کرمان تا یزد دوانیدند به شرط آن‌که یکی هر روز ثلث راه قطع کند و آخر ربع راه به چند به هم رسند؟» (نگر : لب الحساب، ص ۲۶۳)

$\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}=\frac{۷}{۱۲}$

$\frac{۷}{۱۲}=\frac{۱}{x}\Rightarrow x=\frac{۱۲}{۷}=۱\frac{۵}{۷}$

۱۵ . «بریدی را فرستادند به جایی بر وجهی که هر روز ۳ فرسنگ برود، بیست روز رفت، بریدی دیگر را در عقب وی فرستادند بر وجهی که هر روز هفت فرسنگ برود به چند روز به وی رسد؟» (نگر : لب الحساب، ص ۲۶۳)

$۶۰+۳n=۷n$

$n=۱۵$

جدول زیر را مؤلف در پایان حل مسأله ارائه داده است.

	اولی	دومی
روز	۱۵+۲۰=۳۵	۱۵
فرسخ	۳×۳۵=۱۰۵	۷×۱۵=۱۰۵

۱۶ . لشکری غنیمتی گرفتند اگر این غنیمت را بین یک چهارم لشکر تقسیم کنند به اولی ۱، دومی ۲، سومی ۳ درهم و به بقیه نیز به همین ترتیب تعلق می‌گیرد، حال اگر این غنیمت را بین همه (کل لشکر) به‌طور مساوی تقسیم کنند به هر یکی ۳ درهم می‌رسد، اصل غنیمت چقدر بوده است؟ (نگر : لب الحساب، ص ۲۶۳)

طبق داده‌های مسأله اگر غنیمت را بر ربع لشکر تقسیم کنیم دنباله‌ی ...,۱,۲,۳,۴ و اگر بر همه‌ی لشکر تقسیم کنیم دنباله‌ی ...,۳,۳,۳ به دست می‌آید، یعنی اگر بر ربع لشکر تقسیم کنیم به هر یکی ۱۲ درهم می‌رسد. پس باید ببینیم دو دنباله‌ی ...,۱,۲,۳,۴ و ...,۱۲,۱۲,۱۲ چه وقت با هم مساوی می‌شوند.

$۱۲n=\frac{n(n+۱)}{۲}\Rightarrow n=۲۳$

لشکر	غنیمت	ربع لشکر
۹۲	۲۷۶	۲۳

۱۷ . «اگر سؤال کنند که مربع را چهار ضلع او با مساحت ۱۴۰ است یک ضلع چند بود؟» (نگر : لب الحساب، ص ۲۶۵)

$x^۲+۴x=۱۴۰\Rightarrow x=۱۰$

«و اگر سؤال کند که از مساحت مربع چون چهار ضلع وی از وی اسقاط می‌کنی[۳] باقی ۶۰ می‌بود ضلع چند بود؟»

$x^۲-۴x=۶۰\Rightarrow x=۱۰$

«اگر گویند این مربع مثل مساحت است ضلعش چند بود؟»

$x^۲=۴x$

«اگر گویند اضلاع مربع دو مثل یا ۳ مثل مساحت است عدد اضلاع را بر عدد امثال قسمت باید کرد آنچه خارج شود قدر ضلع باشد.»

$۴x=۲x^۲$

$۴x=۳x^۲$

«اگر مساحت مستطیل ۴۸ باشد و تفاضل میان طول و عرض ۲، طول چند بود؟»

$$\begin{cases}ab=۴۸\\ a-b=۲\end{cases}$$

$a=?$

«اگر قطر مستطیل عشره بود و مساحت ۴۸ طولش چند بود؟»

$$\begin{cases}ab=۴۸\\ \sqrt{a^۲+b^۲}=۱۰\end{cases}$$

«اگر قطر مستطیل عشره بود و تفاضل میان طول و عرض ۲ مساحت چند بود؟»

$$\begin{cases}\sqrt{a^۲+b^۲}=۱۰\\ a-b=۲\end{cases}$$

$S=?$

۱۸ . «یکی آمد و طبقی فندق آورد و ده دانه از آن به سه کس داد که هر یکی چندی برگیرند، و صد دانه دیگر در طبقی کرد، به اول می‌گوید آنچه تو داری دو چندان از این طبق برگیر و به ثانی می‌گوید ۹ چندان که داری از این طبق برگیر و به ثالث می‌گوید ده چندان برگیر، باقی که بماند بر هشت قسمت کن آنچه صحیح بیرون آید از آن اول بود، و باقی که قسمت‌پذیر نبود از آن ثانی و باقیِ عشره از آنِ ثالث، والسّلام» (نگر: لب‌الحساب، ص ۲۶۶)

$$x+y+z=10$$

$$x=\left[\frac{100-(2x+9y+10z)}{8}\right]-\frac{y}{8}$$

طبق اول	طبق دوم
اولی: x	اولی: $2x$
دومی: y	دومی: $9y$
سومی: z	سومی: $10z$

۱۹ . «رسولی را فرستادند و شرط کردند که هر روز ۶ فرسخ برود و رسولی دیگر را فرستادند بعد از وی در پنج یوم و شرط کردند که در روز اول یک فرسخ بود و در روز دوم دو فرسخ و در روز سوم ۳ فرسخ و علی هذا بر نظم طبیعی تا این زمان که به وی رسد خواستیم که مدت الحاق بدانیم؟» (نگر: لب‌الحساب، ص ۲۷۰)

برای نفر اول دنباله‌ی ... و ۶ و ۶ و ۶ و ۶ و برای نفر دوم دنباله‌ی ... و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ را در نظر می‌گیریم، از آن‌جا که نفر دوم ۵ روز دیرتر از نفر اول آغاز کرده است پس داریم:

$$\frac{n(n+1)}{2}=6n+5(6)$$

$$n^2+n=12n+60$$

$$n^2-11n-60=0$$

$$(n-15)(n+4)=0$$

$$n=15,\quad n=-4$$

پس بعد از ۱۵ روز به هم می‌رسند، و مسافتی که پیموده‌اند برای هر دو ۱۲۰ فرسخ است:

	اول ۲۰	ثانی ۱۵
مسافت	۱۲۰	۱۲۰

۲۰ . «۲ رسول را فرستادند از دو بلد مختلف در یک روز و شرط کردند یکی را که هر روز ثَمن (یک هشتم) طریق قطع کند و ثانی عَشر (یک دهم) طریق خواستیم که مدت الحاق بدانیم و بَعد بین البلدین و سیر هر یکی تا مدت الحاق.» (نگر: لب‌الحساب، ص ۲۷۰)

مؤلف راه‌حل زیر را بیان داشته است:

زمان رسیدن دو فرد به هم عبارت است از:

$$1\div\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{10}\right)=\frac{40}{9}=4\frac{4}{9}$$

مسافت‌های طی شده توسط نفر اول و دوم عبارت است از ۲۰۰ و ۱۶۰.

$$x_1=\left(\frac{1}{8}40\right)(40)=200,\quad x_2=\left(\frac{1}{10}40\right)(40)=160$$

$$x_1+x_2=360$$

$$\frac{1}{8}360=45$$

$$\frac{1}{10}360=36$$

نفر اول هر روز ۴۵ و نفر دوم هر روز ۳۶ فرسخ طی می‌کنند تا به هم برسند.

۲۱ . «دو کس هر یکی مالی دارند اولی به ثانی می‌گوید اگر تو ۲ خمس آنچه داری به من دهی بها جامه بود و ثانی می‌گوید اگر تو ۳ سبع آنچه داری به من دهی بها جامه بود؛ فرا گرفتیم مخرج خمس ۵ و مخرج سبع هفت پس اسقاط کردیم از مخرج خمس ۲ باقی ماند ۳ ضرب کردیم در مخرج سبع شد ۲۱ این از آن صاحب سبع بود و نقصان کردیم از مخرج سبع ۳ باقی ماند ۴ ضرب کردیم در مخرج خمس شد ۲۰ این از آن صاحب خمس بود.» (نگر: لب‌الحساب، ص ۲۷۲)

$$\begin{cases} x+\frac{2}{5}y=z \\ \frac{3}{7}x+7=z \end{cases}\Rightarrow x=21,\quad y=20$$

استخراج اعداد مضمر: استخراج اعداد مضمر یعنی یافتن عددی که کسی در ذهن خود انتخاب کرده است از طریق گرفتن اطلاعات جانبی از او. در هر سه کتاب منبع این مقاله، در بخش‌هایی به این موضوع پرداخته شده است. در لغت مُضمر به معنی آن‌چه پوشیده و پنهان است و در ضمیر نگه داشته و در دل پنهان شده می‌باشد.

۲۲. «یکی ۶ و ۷ در دل گرفت از مجموع هر دو که ۱۳ است خبر باید داد و آن ۱۳ مربع کند باشد ۱۶۹ بعد از آن یکی از آن عدد مثلاً هفت را در مجموع که ۱۳ است ضرب کند نود و یک باشد بعد از آن عدد دیگر را که ۶ است در عددی که کمتر از ۱۳ بود ضرب کند مثلاً عشره ۶۰ باشد این دو مبلغ جمع کند باشد ۱۵۱ این از مربع ۱۳ برود. باقی مانده هجده قسمت کند بر فصل میان ۱۳ و عشره و آن ۳ است خارج آید ۶ از ۱۳ برود باقی ماند ۷.» (نگر: لب‌الحساب، ص ۲۶۴)

$$x+y=۱۳,\ \ x=?,\ \ y=?$$

$$\frac{(x+y)^۲-[x(x+y)+۱۰y]}{x+y-۱۰}$$

$$=\frac{x^۲+y^۲+۲xy-x^۲-xy-۱۰y}{x+y-۱۰}=\frac{y(x+y-۱۰)}{(x+y-۱۰)}=y$$

$$x=۱۳-y$$

۲۳. **استخراج نام‌ها**: «از مضمر سؤال کردیم که این نام چند حرف است. او را بگوید تا حرف اول را ترک کند و باقی به حساب جمل برگیرد، و بگوید که چند است بعد از آن حرف دوم را ترک کند و باقی برگیرد و بگوید که چند است و علی هذا تعداد این جمع کند و بر عدد حروف الّا واحدی قسمت کند آنچه خارج شود عدد حروف باشد به حساب جَمل چون جمله اول از این اسقاط کند باقی حرف اول بود و علی هذا مثلاً او گفت این نام ۳ حرف است گفتیم که اول از این طرح کن و باقی برهم گیر گفت چهل است دیگر گفتیم ثانی طرح کن گفت هشتاد است دیگر گفتیم ثالث طرح کن گفت صد است بر هم افزودیم شد ۲۲۰ بر دو قسمت کردیم خارج آمد صد و ده این عدد حروف است جمله اول از وی برفتیم بماند هفتار جمله ثانی از وی برفتیم بماند ۳۰ جمله ثالث از وی برفتیم بماند ده پس معلوم شد که این اسم علی است.» (نگر: لب‌الحساب، ص ۲۶۴)

برای مثال به کسی که اسم علی را نزد خود در نظر گرفته می‌گوییم حرف اول آن را حذف کند و جمع بقیه را بازگو کند، می‌دانید که در حساب جمل ع معادل ۷۰، ل معادل ۳۰، و ی معادل ۱۰ است، پس اگر بخواهیم که بار اول ع، بار دوم ل، و بار سوم ی را حذف کند و جمع بقیه را بگوید داریم:

$$y+z=۴۰$$
$$x+z=۸۰$$
$$x+y=۱۰۰$$

حال اگر معادلات فوق را با هم جمع کنیم داریم:

$$۲(x+y+z)=۲۲۰$$
$$x+y+z=۱۱۰$$

تا اینجا جمع حروف معلوم می‌شود، اینک معادله‌ی

$y + z = ۴۰$ را در آخرین رابطه جایگزین کرده که برای x عدد ۷۰ که متناظر با ع است به دست می‌آید، و بقیه نیز به همین ترتیب محاسبه می‌شود. پس نام پنهان شده علی بوده است.

۲۴. «**استخراج خاتم** هرگه که شخصی خاتمی از زر در دستی نهد و خاتمی از نقره در دستی دیگر که خواهند که بدانند که خاتم زر در کدام دست است و نقره در کدام طریق آن باشد که در آن دست که خاتم زر است عددی زوج برگیرد و آن نقره عددی فرد آن عدد که در دست راست است ضرب کند در عدد زوج، و آنچه در دست چپ است ضرب کند در عدد فرد، و هر دو مبلغ برهم گیرد اگر بعد از تنصیف کسری باشد خاتم زر در دست راست بود و اگر کسری نباشد در دست چپ بود.» (نگر: لب‌الحساب، ص ۲۶۵)

مشابه این مسئله در مفتاح‌المعاملات و التکمله نیز آمده است. فرض می‌کنیم خاتم زر در دست راست و نقره در دست چپ باشد، پس در دست راست عدد $۲k_۱$ در نظر می‌گیریم و در دست چپ $۲k_۳ + ۱$، آن گاه طبق راه‌حل مؤلف داریم:

$$\frac{۲k_۱.۲k_۲ + (۲k_۳ + ۱)(۲k_۴ + ۱)}{۲}$$

$$= \frac{۴k_۱k_۲ + ۴k_۳k_۴ + ۲k_۳ + ۲k_۴ + ۱}{۲} = \frac{۲k_۵ + ۱}{۲}$$

چون عدد کسری (ناصحیح) به دست آمد پس خاتم زر در دست راست است.

حال اگر خاتم زر در دست چپ و نقره در دست راست باشد داریم:

$$\frac{۲k_۱(۲k_۲ + ۱)(۲k_۳ + ۱).۲k_۴}{۲} = \frac{۲k_۵}{۲} = k_۵$$

عدد صحیح به دست آمد پس خاتم زر در دست چپ است و نقره در دست راست.

۲۵. «دو کس می‌گویند میان ما ده عدد پنهان است هر یکی چند داریم به یکی گو آنچه تو داری مضاعف کن و به آخر گو آنچه تو داری یکی ده گردان پس مجموع آن بازپرس و از مربع عشره اسقاط کن آنچه بماند بر هشت قسمت کن آنچه خارج آید از آن اول بود.» (نگر: لب‌الحساب، ص ۲۶۶)

$$x = \frac{۱۰۰ - (۲x + ۱۰y)}{۸} \Leftrightarrow$$

$$۸x = ۱۰۰ - ۲x - ۱۰y \Leftrightarrow$$

$$۸x + ۲x + ۱۰y = ۱۰۰ \Leftrightarrow$$

$$x + y = ۱۰$$

سخن آخر

هنر معلم ریاضی این است که بتواند زمینه‌ی یادگیری فعال را برای دانش‌آموزان فراهم کند، در آن‌ها بهترین انگیزه‌ها را ایجاد کند و آن‌ها را به تفکر و اندیشیدن وا دارد و چه قدر لحظات کلاس درس دلپذیر است وقتی معلم بتواند علاوه بر موارد مذکور به تاریخ و فرهنگ و ریاضیات قومی نیز بپردازد و به این وسیله فضای سرشار از شادابی به شاگردان درس ریاضی هدیه کند.

پی‌نوشت

۱. تفاضل
۲. پیک، قاصد
۳. کم کن

منابع

1. HPM newsletter. No. 69. July 2008. Available: http://www.clab.edu. uoc.gr/hpm

۲. التکمله فی الحساب، عبدالقاهر بن طاهر بغدادی. با تحقیق و مقدمه دکتر احمد سلیم سعیدان. چاپ اول. کویت. ۱۴۰۶ هجری.

۳. چاپ عکسی لب‌الحساب، مقدمه و فهرست جمال‌الدین شیرازیان. بنیاد دایرة‌المعارف اسلامی. مرکز انتشارات نسخ خطی. ۱۳۶۸.

۴. خردنامه. ابوالفضل یوسف بن علی مستوفی. به تصحیح و کوشش ادیب برومند. انتشارات انجمن آثار ملی. تهران. ۱۳۴۷.

۵. خلاقیت ریاضی. جورج پولیا. مترجم: پرویز شهریاری. انتشارات فاطمی. چاپ سوم. تهران. ۱۳۷۵.

۶. دهمین کنفرانس آموزش ریاضی. *Chenge Chun Chor. Problem Solving through Pattern Recognition Litwin*. یزد. مرداد ۸۷.

۷. زندگی‌نامه‌ی ریاضی‌دانان دوره‌ی اسلامی. ابوالقاسم قربانی. مرکز نشر دانشگاهی. چاپ اول ۱۳۶۵.

۸. شماره‌نامه. محمد ایوب طبری (حاسب طبری). مقدمه تقی بینش. چاپ بنیاد فرهنگ ایران. ۱۳۴۵.

۹. کنزالحساب. شیخ بهایی. ترجمه اعتماد السلطنه. چاپ اصفهان. ۱۲۸۳.

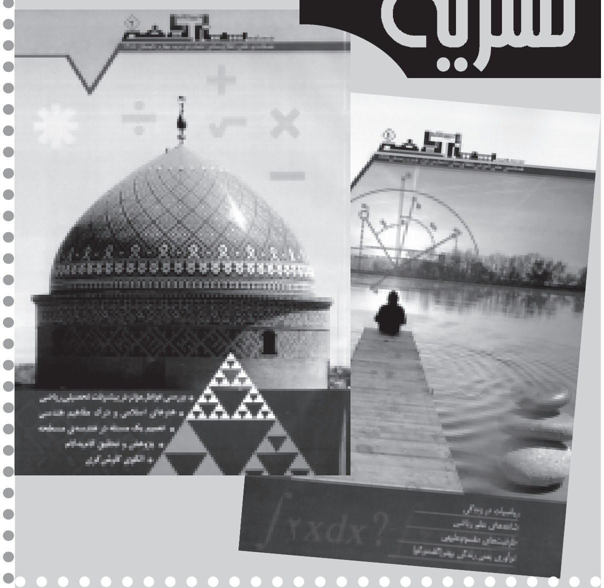
۱۰. گوشه‌هایی از ریاضیات دوره‌ی اسلامی. جی ال برگن. ترجمه‌ی محمد قاسم وحیدی و علیرضا جمالی. انتشارات فاطمی. ۱۳۷۴.

۱۱. مجموعه مقالات سومین همایش تاریخ ریاضی. داوری و تدوین احمد شرف‌الدین. دانشگاه هرمزگان. چاپ اول. ۱۳۸۰.

۱۲. مفتاح‌المعاملات. محمد بن ایوب طبری، به کوشش محمد امین ریاحی، تهران، ۱۳۴۹.

۱۳. موزه آن لاین تاریخ علم آکسفورد: www.mhs.ox.ac.uk/exhibits/

معرفی نشریه



پیام دبیرخانه‌ی ریاضی

شماره‌های ۱ و ۲ پیام دبیرخانه ی ریاضی به ترتیب در پاییز و زمستان ۱۳۸۷ و بهار و تابستان ۱۳۸۸ به چاپ رسیده است. این فصل نامه ی علمی، آموزشی، اطلاع رسانی که توسط دبیرخانه ی راهبری ریاضی کشور به چاپ می‌رسد، شامل اخبار مرتبط با این نهاد و نیز مقاله هایی در حوزه های ریاضی و مرتبط با آموزش ریاضی می باشد. از آن جمله می توان به این مطالب اشاره کرد:

- هنرهای اسلامی و درک مفاهیم هندسی (در شماره‌ی ۲)؛
- الگوهای کاوش گری (در شماره‌ی ۲)؛
- کاربرد صفحه گسترده‌ی **Excel** برای درک بهتر حد یک دنباله (در شماره‌ی ۲)؛
- بررسی عوامل مؤثر در پیشرفت تحصیلی (در شماره‌ی ۲)؛
- تاریخچه‌ی عدد صفر (در شماره‌ی ۱)؛
- زیرمجموعه‌های فارسی (در شماره‌ی ۱)؛
- ریاضیات در زندگی (در شماره‌ی ۱)؛
- الگوهای یادگیری (در شماره‌ی ۱)؛
- و...

جهت آشنایی و اطلاعات بیش تر، به نشانی math.teo.ir مراجعه کنید یا برای نشانی math-gs@yahoo.com نامه‌ی الکترونیکی بفرستید.

Ministry of Education
Organization of Research& Educational Planning
Teaching-Aids Publications Office

Roshd
Mathematics Education Journal 99

Vol. 27 No. 3 2010 ISSN: 1606 - 9188

2. Editor's Note
4. The Story of Algebra (part1)
by: Ana Esfard & Lyora Linchovski
trans: Z. Kamyab & A. H. Asgari
15. Review of an Experience; The Nessecity of Curriculum Integration
by: S.Chamanara
24. Students' Understanding of the Basic Concept of Function
by: B. Parhizkar & Z. Gooya
34. Teachers' Narative
by: N. Hajisadegi
38. How to Choose Tasks For Classroom
by: A. H. Orgloo
42. View point(1)
by: M.Gooya
45. View point (2)
by: Autors of Math(2)
47. Prooving Inequalities by Convex Functions (Part 2)
by: A. Golamian
52. Using Books As Teaching Aides; Yes or No?!
by: M. Tandeh
56. Historical Amusements in Mathematics Education
by: N. Assarzadegan
64.Journal Presentation

P.O.Bax : Tehran 15875 - 6585
E-mail: riazi@roshdmag.ir