دوره‌ی چهاردهم، شماره‌ی ۳
بهار ۱۳۸۴، بها: ۲۵۰۰ ریال

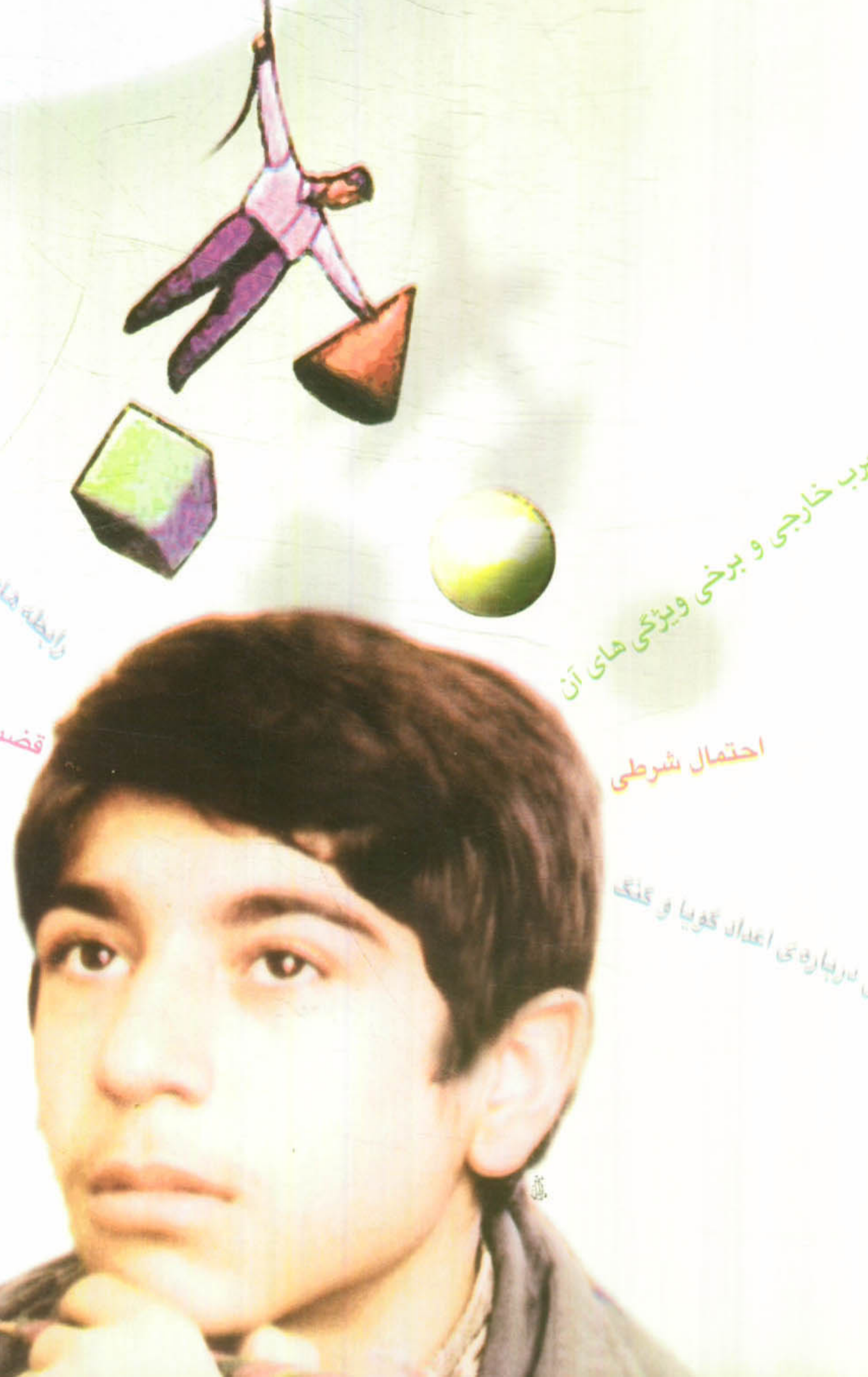
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

رشد برهان ۴۵

برای دانش آموزان دوره‌ی متوسطه

آموزشی، تحلیلی، اطلاع رسانی

www.roshdmag.org



رابطه های هم ارزی - کلاس های هم ارزی

قضیه ی رول و قضیه ی مقدار میانگین

تصاعد عددی

...رب خارجی و برخی ویژگی های آن

احتمال شرطی

... درباره‌ی اعداد گویا و گنگ

الغ بیگ

محمد تراغای معروف به الغ بیگ[1]
پادشاه، منجم و ریاضیدان (۷۹۶-۸۵۳)

الغ بیگ پسر شاهرخ تیموری بود که از ۸۰۷ تا ۸۵۰ هجری قمری سلطنت کرد، در ۷۹۶ در سلطانیه (نزدیک زنجان کنونی) تولد یافت و در ایام حیات جدّش امیر تیمور در لشکرکشی هند و کابل و بعضی لشکرکشی های دیگر همراه او بود. چون به یازده سالگی رسید امیر تیمور درگذشت و از آن پس او در سایه‌ی پدرش شاهرخ می زیست.

نوشته اند که الغ بیگ پادشاهی بود که به کثرت فضیلت و هنرپروری و به وفور عدالت و دادگستری از همه‌ی امثال خود برتر و گذشته از این مردی دانش پرور بود و دانشمندان زمان را گرامی می داشت. خود نیز به ریاضیات و نجوم دلبستگی فراوان و در آنها تبحّر کامل داشت.

در حدود سال ۸۲۴ رصدخانه‌ی سمرقند را که یکی از مهمترین رصدخانه های دوره‌ی اسلامی بود آغاز نهاد و زیج الغ بیگی را که آخرین اثر بزرگ منجمان دوره‌ی اسلامی است به کمک دانشمندان مشهوری چون غیاث الدین جمشید و معین الدین کاشانی و قاضی زاده‌ی رومی در سال ۸۱۴ به پایان رسانید.

با مرگ الغ بیگ رفته رفته رصدخانه‌ی سمرقند از کار افتاد و بنای آن‌رو به ویرانی نهاد تا آنجا که در حدود سده‌ی دهم دیگر حتی اثر و نشانه‌ای هم از بنای آن دیده نمی شد. تا این که در سال ۱۹۰۸ میلادی هیأتی روسی ویرانه های آن را کشف نمود و اطلاعاتی درباره‌ی بنای آن به دست آورد. بار دیگر هم سال ۱۹۴۱ میلادی هیأتی روسی به سمرقند رفت و مدفن الغ بیگ را در مقبره‌ی امیر تیمور کشف نمود. جسد وی را با لباسی که در هنگام به قتل رسیدن برتن داشته در تابوتی در قبرش یافتند. ظاهراً علّت این که او را با لباسش دفن کرده بوده‌اند این بود که او را شهید می دانستند و شهید را باید با لباسش دفن کرد. در جسد او جای سلاحی که او را از پای درآورده بود هویدا بوده است.

در نامه‌ای که غیاث‌الدین جمشید از سمرقند به پدرش که در کاشان بوده نوشته است اطلاعاتی درباره‌ی طرز رفتار الغ بیگ با او و دیگران و همچنین درباره‌ی رصدخانه‌ی سمرقند می توان یافت. قسمت هایی از این نامه در کتاب «قربانی: کاشانی نامه» صفحات ۳ تا ۶ نقل شده است.

زیج الغ بیگ[2]

زیجی الغ بیگ درست ترین و دقیق ترین زیج هایی است که در دوره‌ی اسلامی پدید آمده است. عده‌ای از ریاضی دانان و منجمان بزرگ مانند غیاث‌الدین جمشید کاشانی و قاضی زاده‌ی رومی در تهیه‌ی آن شرکت داشته‌اند. اگرچه مندرجات آن تا اندازه‌ای شبیه زیج های مهم دیگر است امّا به علّت جامع بودن و دقت فوق‌العاده‌اش بر همه‌ی زیج های دوره‌ی اسلامی برتری دارد. قسمتی از مقدمه‌ی این زیج در کتاب «مصاحب: جبرخیام» به چاپ رسیده است.

این زیج دارای چهار مقاله است: مقاله‌ی اول در تواریخ

بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

رشد برهان متوسطه

دورهٔ چهاردهم، شماره ۳
بهار ۱۳۸۴
بها: ۲۵۰۰ ریال
تیراژ: ۱۵۰۰۰ نسخه
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه

www.roshdmag.org

رشد برهان متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

- **نگارش مقاله‌های کمک درسی** (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)
- **طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها** (برای دانش‌آموزان)
- **طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها** (برای دانش‌آموزان)
- **طرح معماهای ریاضی**
- **نگارش یا ترجمهٔ مقاله‌های عمومی ریاضی** (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش کامپیوتر و ...)

رشد برهان متوسطه هر سه ماه یک شماره منتشر می‌شود.

- **مجلّه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافه مقاله‌ها آزاد است.**
- **مقاله‌های وارده، باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.**
- **مقاله‌های رسیده مسترد نمی‌شود.**
- **استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر با ذکر دقیق ماخذ بلامانع است.**

نشانی دفتر مجلّه: صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله: ۹ـ ۸۸۳۱۱۶۰ داخلی ۳۷۰
تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ ـ ۷۷۳۳۱۱۱۰

یادداشت سردبیر

آیا تا به حال به مفهوم اصطلاح «تولید علم» فکر کرده اید؟ به واژه ی «مصرف علم» چه؟ به نظر شما «جامعه ی مصرفی» آیا فقط به جامعه ای گفته می شود که مصرف کننده ی کالای مادّی، اعم از کالای کشاورزی، صنعتی، نظامی و... باشد؟ مسلماً پاسخ شما منفی است، زیرا جامعه به کالاهای فرهنگی هم نیاز دارد. حال اگر کمی با تأمّل بیشتری به این موضوع فکر کنیم به این نتیجه می رسیم که در جهان امروز، اگر مصرف گرایی در یافته های علمی صرفاً تقلید از دیگران منحصر و محدود شود چه بسا مضرتر از مصرف گرایی در مقوله های مادی است.

اشاره های اخیر رهبر معظم و فرزانه ی انقلاب به مسئله ی تولید علم و تاکیدات مکرر ایشان در ارتباط با «جنبش نرم افزاری» مبنی بر لزوم نهادینه کردن این موضوع در جامعه، حاکی از اهمیت این مسئله است. اکنون وظیفه ی همه ما بخصوص دانش آموزان و دانش پژوهان جوان است که نسبت به مسئله ی تولید علم و جنبش نرم افزاری عمیقاً احساس مسئولیت کنیم تا بتوانیم نقش مؤثری در این انقلاب و جنبش نرم افزای داشته باشیم.

ما اگر در مراحلی مصرف کننده علم دیگران (اعم از خودی یا بیگانه) هستیم به این نیّت است که بتوانیم دانشی و نرم افزاری فراتر، جهان شمول تر و سالم تر و کاربردی تر تولید کنیم. به امید روزی که در همه ی زمینه های علمی از جمله بخصوص ریاضیات که ما در علوم است، تولیداتی قابل صدور به همه ی جهان داشته باشیم، اِن شاءا...

از تاریخ بیاموزیم

بحران بلوغ ریاضیات نظری

۱۸

۱۷

● پرویز شهریاری

اشاره

در هفدهمین بخش از سلسله مطالب «از تاریخ بیاموزیم»، دربارهٔ ریاضیات نظری و چگونگی نحوهٔ شکل گرفتن سازوکار تکامل آن بحث شد، اینک ادامه مطلب را در پی می‌آوریم.

در نخستین مرحلهٔ وجود ریاضیات نظری، نقش عمده به عهدهٔ روابط منطقی است که به طور مؤثر در بنای اولیه به کار می‌رود. تکامل ریاضیات نظری از مرکز مفهومی واحد حرکت می‌کند و استدلال و اثبات این حق را پیدا می‌کنند که مراقب باشند تا بستگی‌های منطقی از روش‌های مشخصی جدا نشوند؛ علاوه بر این مفهوم‌های طبیعی و روشن، تنها به این مناسبت لازم‌اند که به استدلال‌ها پایهٔ منطقی بدهند.

مفهوم‌های تازه‌ای که به وجود می‌آیند، تأثیر خود را تا آن‌جا ادامه می‌دهند که زنجیرهٔ نتیجه‌گیری‌های متوالی، معنای خود را از دست ندهد و بین تکامل دانش ریاضی، از یک طرف، و تصورهایی که دربارهٔ امکان نتیجه‌گیری‌ها وجود دارد، از طرف دیگر، تعارضی به وجودنیاید، یعنی تا جایی که نتیجه‌های حاصل، به صورتی نامنتظر، دیدگاه‌های عادی و سنّتی را نقض نکنند.

وجود سلسله مراتب در دانش نظری ریاضی، بستگی‌های نظری را به وجود می‌آورد که در حالت بحران روابط منطقی قطع می‌شود. این بحران، با تغییر روابط منطقی به پایان می‌رسد و با آزادی از ساختمان نظری به طور مستقل پیش می‌رود و گاهی به عنوان پارادوکسی نسبت به عقل سلیم، تکامل می‌یابد.

نتیجه‌گیری‌های پارادوکسی در ریاضیات نظری، ارزش بی‌چون و چرایی از نظر آموزشی و روش‌شناسی دارند و اغلب با تجاوز به حریم بی‌نهایت ریاضی پدید می‌آیند که در آن عادت‌ها تغییر می‌کند. در این حالت‌ها، بیش از همه، آن‌جایی ظاهر می‌شود که ریاضیات، که علم دربارهٔ بی‌نهایت هاست (ویل) ممکن است تصورهای نامنتظری دربارهٔ بی‌نهایت بدهد. به همین ترتیب، برای بحران رابطه‌های منطقی هم، وقتی که منطق از بستگی‌های منطقی ساده‌لوحانه استفاده می‌کند (مثل وقتی که از صغرا و کبرا استفاده می‌کنند)، به ویژه ضمن بررسی بی‌نهایت، رو در روی تصورها قرار می‌گیرد. در ریاضیات نظری کلاسیک، این رویارویی عبارت است از درک مسأله‌های مربوط به بی‌نهایت ضمن کشف معمایی، وقتی که ضربهٔ بحران بر ساختمان نظری گسترش یافته فرود آید. معلوم شد تکامل روش‌های اثبات، به ویژه اثبات با برهان خلف، منجر به برخورد با آموزش‌های فلسفی فیثاغورسی می‌شود که بنابر آن، هرچیزی را می‌تون با زبان عددهای طبیعی و نسبت‌های آن‌ها بیان کرد.

آ. سابو دربارهٔ اندازه‌پذیرها و کشف عددهای گنگ، نظر دیگری دارد. در کتاب «آغاز ریاضیات یونانی» که در زبان آلمانی در سال ۱۶۶۹ و به زبان انگلیسی در سال ۱۷۷۹ چاپ شد، دیدگاه او را در این‌باره شرح می‌دهد. سابو ضمن بررسی قضیه‌های اصلی نظریهٔ نسبت‌ها[۱]،

نتیجه می‌گیرد که نظریهٔ نسبت‌های اودوکس، در نظریهٔ موسیقی به دست آمد، نه آن‌طور که گمان می‌رود در نتیجهٔ کشف عددهای گنگ، نظریهٔ نسبت‌ها از همان آغاز خصلت موسیقیایی داشت و وسیله‌هایی که به کمک آن‌ها بررسی انجام می‌گرفت، مونوکورد[2] (سنج) و قانون بود. استفاده از صحت سنج و قانون، شرایطی را به‌وجود آورد که از تعریف پاره خط‌های راست، به تعریف عددها برسیم: سنج یک سیم داشت و در آن فاصلهٔ موسیقی با نسبت دو عدد بیان می‌شد؛ اما برای قانون، پیدا کردن نسبت چهار عدد لازم بود (حالت هندسی). یونانی‌ها، پیش از کشف اندازه‌ناپذیرها هم می‌توانستند از عددها به پاره‌خط‌ها بروند و در این‌جا، حلقهٔ اتصالی نظریهٔ موسیقیایی نسبت‌ها بود.

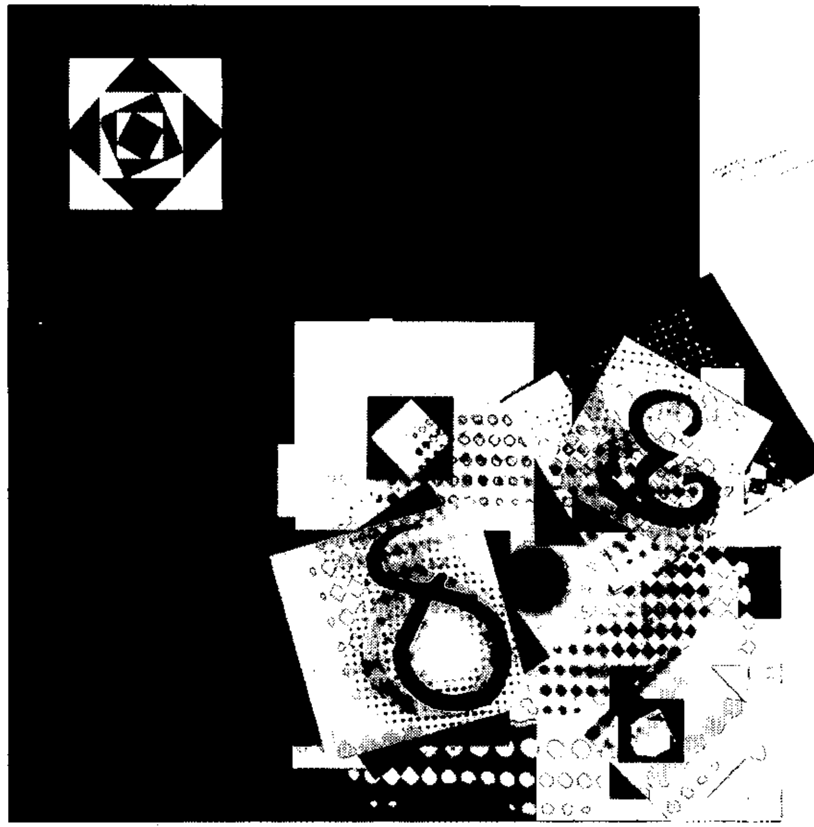
سپس در جریان حل مسأله‌های مربوط به نظریهٔ موسیقیایی نسبت‌ها بود که به کشف اندازه‌ناپذیرها رسیدند: مسأله‌های مربوط به تقسیم مهم‌ترین فاصله‌های موسیقی، به زیر فاصله‌ها، به نحوی که هماهنگی صدا حفظ شود. «این مسأله که ابتدا در نظریهٔ نسبت‌های موسیقی مورد توجه قرار گرفت، موجب شد تا پیدا کردن واسطهٔ هندسی بین طول سیم‌ها (که به صورت عددهای مناسب بیان می‌شد)، آسان‌تر شود، تا بتوانند فاصله‌های مجهول را تولید کنند. در نتیجهٔ این بررسی‌ها، یونانی‌ها متوجه شدند که همیشه برای دو عدد گویا، واسطهٔ هندسی وجود ندارد». کاربرد این درک تازه از نظریهٔ نسبت‌های موسیقی در حساب هندسی، موجب بررسی و مطالعه در دو حوزه شد. از طرفی شرط لازم و کافی برای دو عددی که واسطهٔ هندسی دارند، به کمک عددها مورد بررسی قرار گرفت و از طرف دیگر، مفهوم تشابه هندسی (برای شکل‌های با زاویهٔ قائمه)، مفهوم دقیق برای نسبت‌های هندسی را تعریف کرد.

با وجود این، چنین بررسی‌هایی می‌توانست مدت‌ها، بدون وجود مبنای نظری وجود نسبت‌ها، ادامه یابد. «... تجزیهٔ متوالی و کسرهای برگشتی [کسرهایی از نوع $f_{n+1} = \frac{1}{1+f_n}$، که با آغاز $f_1 = 1$، تقریب $\sqrt{2}$ را می‌دهد]، چیزی جز تفسیر عملی پیدا کردن اندازه‌ناپذیر نیست، اندازه ناپذیر یک درک نظری است، نه ویژگی تجربی نسبت‌های هندسی».

در ریاضیات نظری پایان سدهٔ هجدهم، مرکز بحران به مرکز آنالیز ریاضی منتقل شد. نظریهٔ ریاضی که بر اساس مفهوم‌های تابع و رابطهٔ تابعی بنیان گذاشته شده بود تا حدّ زیادی نمایان‌گر رابطه‌های منطقی پویا (دینامیک) بود. استفاده از بستگی‌های نظری، بدون این‌که مرز و شرطی را برای آن‌ها قائل باشند، گاهی منجر به نتیجه‌ای نادرست و بی‌معنی می‌شد. استفاده از مفهوم‌های مبهم رابطه‌های منطقی، نتیجه‌گیری‌ها را کم‌ارزش کرد و دربارهٔ آن‌ها تردیدهایی به‌وجود آورد. در بین ریاضیدانان حرفه‌ای، جدال دربارهٔ بستگی‌های منطقی دینامیک درگرفت. جدال از مرزهای درونی ریاضیات تجاوز کرد و همان‌طور که اغلب چنین است، دامن غیر حرفه‌ای‌ها را هم گرفت. بکلی در رساله «مقدمات دانش انسانی» (۱۷۱۰) و به ویژه در کتاب «آنالیست» خود (۱۷۳۴)، نا استواری و غیرقابل اطمینان بودن ساختمان‌های نظری ریاضیات را خاطرنشان می‌کند. ف. که جوری (Cajori) می‌نویسد: «استدلال‌های او همچون بمبی بر دژ ریاضیات فرود آمد.» عکس‌العمل آموزشی در برابر تکامل دانش ریاضی، نه تنها از مرزهای ریاضیات که از مرزهای آموزشی و روش‌های ریاضی به طور کلی گذشت و از هدف برطرف کردن دشواری‌ها دورتر رفت. ولی فرض برکلی، برگشت به عقب و به خاک سپردن تمامی دنیای ساختمان‌های ریاضی و صرف‌نظر کردن از نتیجه‌های ثمربخش بررسی‌های ریاضی بود. راه خروجی برای فرار از موقعیت‌های پیچیده، ناهماهنگی ساختمان‌های ریاضی و بستگی‌های منطقی، جست‌وجو می‌شد. مثل یونان باستان، خروج از بحران به کمک دقیق‌تر کردن نتیجه‌های اثبات‌کردنی، بستگی‌های نظری و سازکار کردن آن‌ها با چهرهٔ ساختمان‌های نظری تحقق می‌یافت؛ حتی اگر این دقیق کردن، برخی از بستگی‌های نظری و رابطه‌های منطقی اولیه را تهدید به کنار گذاشتن می‌کرد و این کار، با عمیق‌تر شدن درانتزاع‌ها و سرایت دادن آن با عمل انجام می‌گرفت.

ریاضیات نظری عصر جدید، به صورت روشنی، تمایل به شکفتن تصورهای اولیه مربوط به دانش نظری و دربارهٔ بازبینی دقیق رابطه‌های منطقی دینامیک، در کنگرهٔ ریاضی فرهنگستان علوم برلن (۱۷۸۴–۱۷۸۶) زیر عنوان «دربارهٔ نظریهٔ ریاضی بی‌نهایت» ظاهر شد. روحیهٔ آن زمان را می‌توان به خوبی از مسابقه‌ای که فرهنگستان علوم برلن پیشنهاد داده بود، دریافت:

«می‌دانیم که هندسهٔ عالی [که در آن



زمان، آنالیز ریاضی هم جزو آن بود] به طور پیوسته از بی‌نهایت بزرگ و بی‌نهایت کوچک استفاده می‌کند. ولی در یونان باستان، با وسواس و دقت از هرچیزی که نزدیک به بی‌نهایت بود، پرهیز می‌کردند و آنالیست‌های مشهور امروزی معتقدند که بیان «کمیّت بی‌نهایت» در درون خود تضاد دارد. فرهنگستان می‌خواهد روشن کند، چرا از یک متناقض، نتیجه‌های درستی به دست می‌آید [تمایل اولیه به حفظ دستاوردها] و چگونه می‌توان «بی‌نهایت» را با واژه‌ای درست و روشن عوض کرد که از نظام ریاضی پیروی کند و بررسی‌هایی که به کمک آن انجام می‌گیرد، نه چندان دشوار باشد و نه چندان طولانی شود.»

حفظ دستاوردهایی که پژوهشگران با روش‌های تردیدآمیز پیدا کرده بودند، بیشتر از حفظ رابطه‌های منطقی به صورت نخستین خود، ارزش داشت. با اندک تغییری در سخن هیلبرت می‌توان گفت: هیچ کس نمی‌توانست ریاضیدانان را از بهشتی که به وسیلهٔ کارهای دکارت و فرما، نیوتن و لایب‌نیتس، اویلر، خانوادهٔ برنولی، مونژ و دیگران ساخته شده بود، بیرون کند. دوباره دانش ریاضیات نظری تجدید ساختمان کرد، استقلال خود را با صدای بلند اعلام داشت و آغاز به پاک کردن خود از مسیرهای شهودی و رابطه‌های منطقی ناشی از آن کرد.

بستگی‌های تکوینی رابطه‌های منطقی و الگوریتم‌هایی که از آن‌ها پیدا شده بود، با وارد شدن خواست تازه برای دقت و استدلال و تعریف مفهوم‌ها، فرو ریخت. سطح دقت درکار بالا رفت و تصورهای شهودی جای خود را به استدلال و اثبات داد. برای ریاضیات نظری یونان باستان، دربارهٔ این روند، تنها به طور غیرمستقیم می‌توانیم داوری کنیم؛ با مقایسهٔ آنچه که قبل و بعد از کشف اندازه ناپذیرها وجود داشت. برای ریاضیات نظری عصر جدید، با بالا رفتن تقاضای دقت در اثبات‌ها، در رابطه با «تعریف به یاری ε و δ) به جای درک پیوستگی‌ها و امکان تجزیهٔ تابع به رشته‌های توانی (تصور تحلیلی) عملی شد. تلاش ریاضیدانان در جهت سازگار کردن بستگی‌های منطقی دینامیک با انبوه دستاوردهای ریاضی و زدودن ابهام از ساختار رشد یافتهٔ ریاضیات نظری، در کارها و موفقیت‌های ب. بولتر انو (۱۸۱۷)، اُ. کوشی (۱۸۲۳)، ن. ای. لباچوسکی (۱۸۳۴)، پ. لوژن دیریکله (۱۸۳۷) دیده می‌شود که مفهوم‌های گذر به حد، تابع، دیفرانسیل‌گیری و انتگرال‌گیری را بر اساس خواست‌های ریاضیات نظری تدوین شده، دقیق‌تر کردند. مانع‌هایی که سد راه پیشرفت آیندهٔ ریاضیات بود، برداشته شد و تکامل دانش واحد ریاضی، در رابطه با مفهوم‌های بستگی‌های نظری آغاز گردید. ریاضیات نظری با پشت سرگذاشتن بحران مربوط به بستگی‌های منطقی، موجودیت خود را باز یافت و به زندگی خود ادامه داد.

به این ترتیب، چه برای ریاضیات سنّتی و چه برای ریاضیات نظری عصر جدید، وارد شدن مفهوم‌های ریاضیات نظری اولیه (که هنوز به اندازهٔ کافی آماده دقیق شدن نبودند)، منجر به بحرانی شد که در برخورد با بی‌نهایت به وجود آمده و پرده‌های عادت‌ها و رسم‌ها را دریده بود.

زیرنویس ....

۱. δiαδτημα، فاصلهٔ موسیقی در معنای نخستین واژه؛ λογos به معنای نسبت دو عدد در نظریهٔ فیثاغورس موسیقی.

۲. Monocord، آلت موسیقی با یک سیم که برای پیدا کردن نسبت میان صداهای موسیقی به کار می‌رود.

ضرب خارجی
و برخی ویژگی های آن

برای دانش آموزان دورهٔ پیش دانشگاهی، رشته ریاضی

✪ **محمد هاشم رستمی**

بنا به تعریف، ضرب خارجی دو بردار $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ که به صورت $\vec{a}\times\vec{b}$ یا $\vec{a}\wedge\vec{b}$ نمایش داده می‌شود، برداری مانند $\vec{c}$ است؛ به قسمی که:

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2,\, a_3b_1-a_1b_3,\, a_1b_2-a_2b_1)$$

این بردار را به صورت زیر نیز نمایش می‌دهند.

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

به عنوان مثال، اگر $\vec{a}=(2,-5,3)$ و $\vec{b}=(-1,2,-4)$ باشد، $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ برابر است با:

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -5 & 3\\ -1 & 2 & -4\end{vmatrix}=\vec{i}(20-6)+\vec{j}(-3+8)+\vec{k}(4-5)$$

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=14\vec{i}+5\vec{j}-\vec{k}$$

ضرب خارجی دو بردار را به صورت زیر نیز می‌توان تعریف کرد:

تعریف: حاصل ضرب خارجی دو بردار ناصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$، برداری است مانند $\vec{c}$؛ به قسمی که:

الف. بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است؛

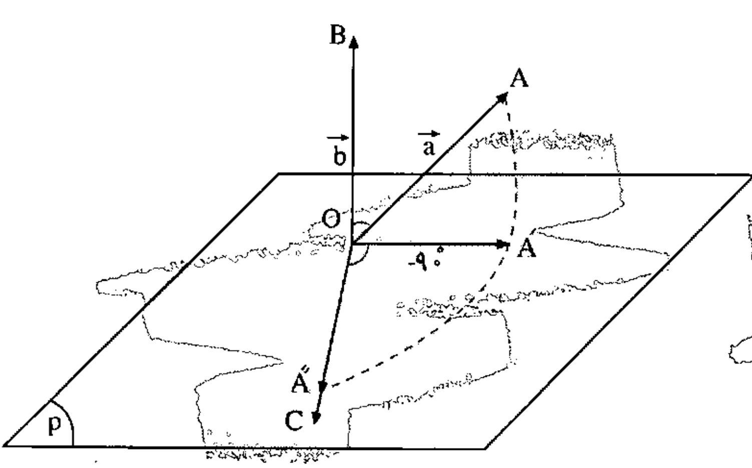
ب. کنج $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ مستقیم است؛

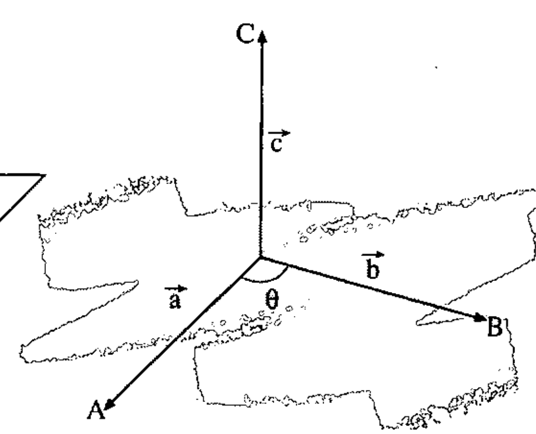
پ. طول آن برابر است با $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$.

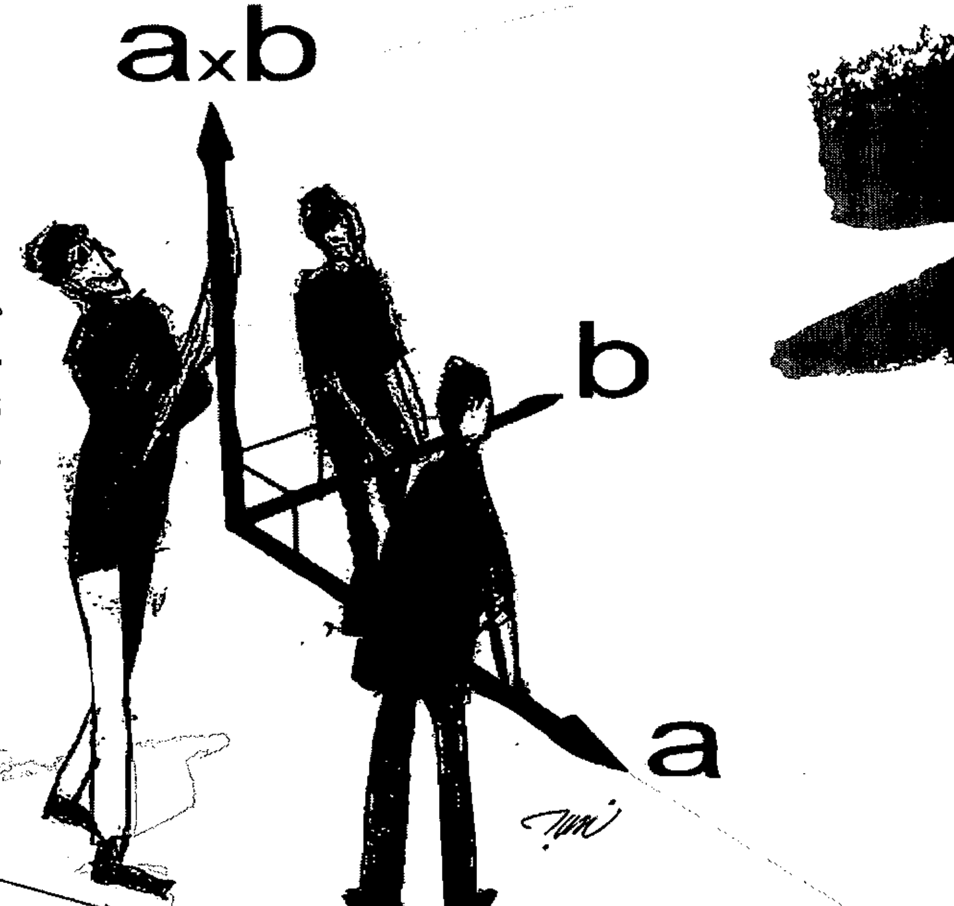
اگر حداقل یکی از دو بردار $\vec{a}$ یا $\vec{b}$ برابر صفر باشد حاصل ضرب خارجی دو بردار را صفر تعریف می‌کنیم.

این تعریف، با تعریف حاصل ضرب خارجی دو بردار برحسب تصویرهای آن دو بردار هم ارز است.

ساخت هندسی بردار $\vec{a}\times\vec{b}$. بردار $\vec{OA}=\vec{a}$ را بر صفحهٔ P که عمود بر $\vec{OB}=\vec{b}$ است، تصویر می‌کنیم و تصویر را $\vec{OA'}$ می‌نامیم. $\vec{OA'}$ را حول نقطهٔ O در صفحهٔ مزبور به







اندازهٔ (-90°) دوران می‌دهیم تا به وضع $\overrightarrow{OA'_1}$ درآید. این بردار را در عدد $|\vec{b}|$ ضرب می‌کنیم تا بردار $\overrightarrow{OC}$ به دست آید. این بردار همان بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ است؛ زیرا:

الف. $\overrightarrow{OC}$ بر بردارهای $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ یعنی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است؛

ب. کنج (OC و OB و OA) مستقیم است؛

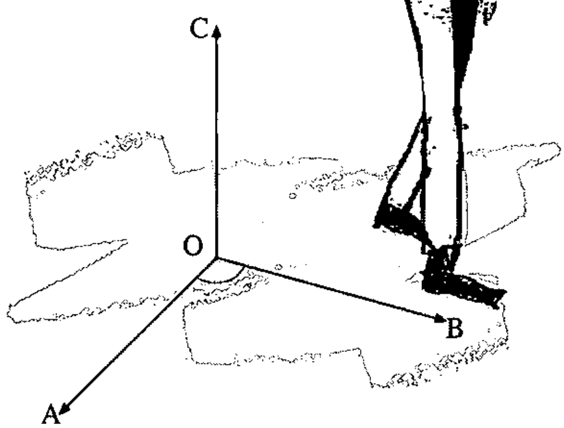
پ.

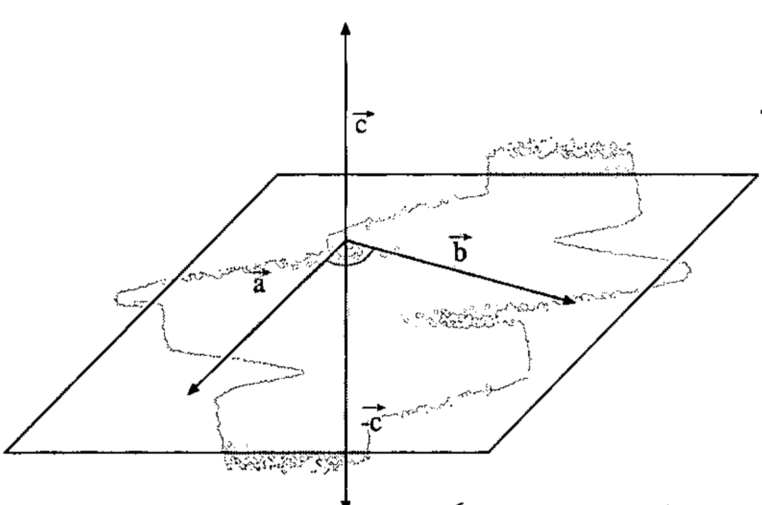
$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{OC}| &= \left||\vec{b}|\overrightarrow{OA'_1}\right| \\
&= |\vec{b}||\overrightarrow{OA'}| = |\vec{b}||\overrightarrow{OA}|\cos(\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OA}) \\
&= |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b})
\end{aligned}
$$

تعریف. کنج جهت‌دار، کنجی است که برای یال‌های آن ترتیب قائل شده باشند. کنج جهت‌دار (OC و OB و OA) را مستقیم یا راستگرد می‌نامند؛

هرگاه برای ناظری که روی OC ایستاده و OB را نگاه می‌کند، OC در طرف چپش واقع شود؛ اگر OC در طرف راست ناظر قرار گیرد، کنج معکوس یا چپگرد نامیده می‌شود.

در شکل (O-ABC) کنج مستقیم یا راستگرد است.

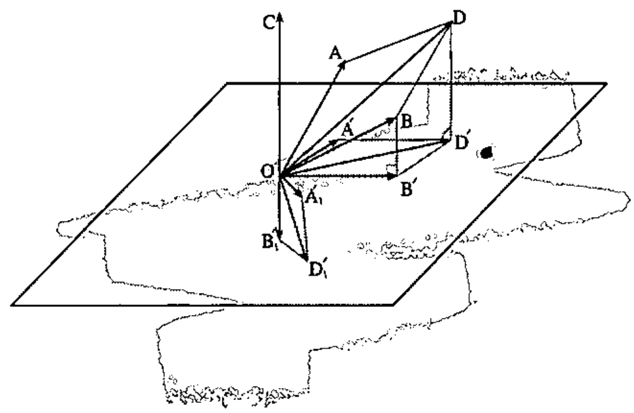




نکته. اثبات برخی ویژگی‌های ضرب خارجی بردارها، به کمک تعریف بالا ساده‌تر است؛ به عنوان مثال، رابطهٔ $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$ به سادگی با توجه به شکل ثابت می‌شود.

اثبات هندسی ویژگی توزیع پذیری ضرب خارجی. سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم ثابت کنیم که $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$.

فرض می‌کنیم $\vec{OA}=\vec{a}$ و $\vec{OB}=\vec{b}$ و $\vec{OC}=\vec{c}$ و $\vec{OD}=\vec{OA}+\vec{OB}=\vec{a}+\vec{b}$ باشد.



صفحهٔ P را در نقطهٔ O عمود بر $\vec{OC}$ رسم می‌کنیم و تصویرهای بردارهای $\vec{OA}$ ، $\vec{OB}$ و $\vec{OD}$ روی این صفحه را $\vec{OA'}$ ، $\vec{OB'}$ و $\vec{OD'}$ می‌نامیم. چهارضلعی $OA'D'B'$ نیز متوازی‌الاضلاع است و داریم $\vec{OD'}=\vec{OA'}+\vec{OB'}$. بنابراین اگر این متوازی‌الاضلاع را به اندازهٔ 90° حول نقطهٔ O دوران دهیم، متوازی‌الاضلاع $OA'_1D'_1B'_1$ به دست خواهد آمد، که در آن رابطهٔ $\vec{OD'_1}=\vec{OA'_1}+\vec{OB'_1}$ برقرار است. دو طرف این رابطهٔ برداری را در عدد $|\vec{OC}|=|\vec{c}|$ ضرب می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$|\vec{OC}|\vec{OD''}=|\vec{OC}|\vec{OA''}+|\vec{OC}|\vec{OB''}$$

از آن‌جا بنا به روش ساختن بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ نتیجه می‌شود:

$$\vec{OD}\times\vec{OC}=\vec{OA}\times\vec{OC}+\vec{OB}\times\vec{OC}$$
$$\Rightarrow(\vec{OA}+\vec{OB})\times\vec{OC}=\vec{OA}\times\vec{OC}+\vec{OB}\times\vec{OC}$$
$$\Rightarrow(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$$

بنابراین ضرب خارجی بردارها نسبت به عمل جمع، از راست توزیع‌پذیر است.

به راحتی می‌توان ثابت کرد که این توزیع‌پذیری از چپ نیز وجود دارد؛ زیرا داریم:

$$\vec{c}\times(\vec{a}+\vec{b})=-[(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}]=-[\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}]$$
$$=-(\vec{a}\times\vec{c})-(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{c}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{b}$$

مثال۱. بردارهای $\vec{a}=(-2,0,3)$ ، $\vec{b}=(1,-1,2)$ و $\vec{c}=(5,3,-4)$ داده شده‌اند. $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})$ را به دست آورید.

راه حل اوّل. بردار $\vec{b}+\vec{c}$ را مشخص می‌کنیم و سپس $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\vec{b}+\vec{c}=(1,-1,2)+(5,3,-4)=(6,2,-2)$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-2&0&3\\6&2&-2\end{vmatrix}=-6\vec{i}+14\vec{j}-4\vec{k}$$

راه‌حل دوم. از توزیع‌پذیری ضرب خارجی نسبت به جمع بردارها استفاده می‌کنیم.

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-2&0&3\\1&-1&2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-2&0&3\\5&3&-4\end{vmatrix}$$

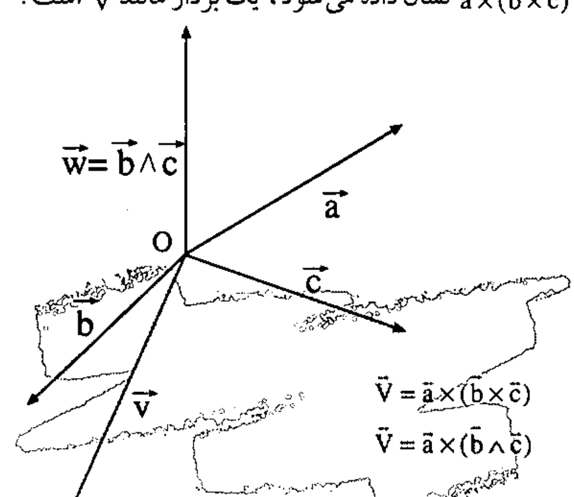
$$=(3\vec{i}+7\vec{j}+2\vec{k})+(-9\vec{i}+7\vec{j}-6\vec{k})=-6\vec{i}+14\vec{j}-4\vec{k}$$

مثال۲. بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برهم عمودند و $|\vec{a}|=3$ و $|\vec{b}|=4$ است. اندازهٔ $|(3\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}-2\vec{b})|$ را به دست آورید.

حل: با استفاده از توزیع‌پذیری ضرب خارجی بردارها نسبت به عمل جمع داریم:

$$|(3\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}-2\vec{b})|$$
$$=|(3\vec{a})\times\vec{a}-(3\vec{a})\times(2\vec{b})-(\vec{b})\times(\vec{a})+(\vec{b})\times(2\vec{b})|$$
$$=|\vec{0}-6(\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{b})+0|=|-5(\vec{a}\times\vec{b})|=5|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b})$$
$$=5\times3\times4\times\sin90=60$$

ضرب دوگانهٔ خارجی سه بردار. حاصل ضرب دوگانهٔ (مضاعف) خارجی سه بردار $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ که به صورت $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ نشان داده می‌شود، یک بردار مانند $\vec{V}$ است:



با توجه به این‌که بردارهای $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ همگی بر بردار $(\vec{b}\times\vec{c})$ عمودند، پس این سه بردار هم‌صفحه یا موازی یک صفحه‌اند و می‌توان نوشت:

$$\vec{V} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c} \qquad (1)$$

اگر $\vec{i}$ بردار یکّه در راستای $\vec{b}$ ، $\vec{k}$ بردار یکّه در راستای $\vec{W} = \vec{b}\times\vec{c}$ و $\vec{j} = \vec{k}\times\vec{i}$ و $(\vec{b},\vec{c}) = \theta$ فرض شود، $\vec{b} = b\vec{i}$ و $\vec{W} = bc\sin\theta\vec{k}$ می‌شود.

حال دو طرف رابطهٔ (۱) را در $\vec{j}$ ضرب عددی می‌کنیم:

$$\vec{V}.\vec{j} = \alpha\vec{b}.\vec{j} + \beta\vec{c}.\vec{j}$$

چون $\vec{b}.\vec{j} = 0$ است، پس:

$$\vec{V}.\vec{j} = p(\vec{c}.\vec{j}) \qquad (2)$$

از طرفی داریم:

$$\vec{c}.\vec{j} = c\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = c\sin\theta$$

$$\vec{V}.\vec{j} = \vec{j}(\vec{a}\times\vec{w}) = \vec{j}\vec{a}\vec{w} = \vec{a}\vec{w}\vec{j}$$

$$= \vec{a}.(\vec{w}\times\vec{j}) = bc\sin\theta\vec{a}.(\vec{k}\times\vec{j})$$

$$= -b\sin\theta\ \vec{a}.\vec{i} = -c\sin\theta(\vec{a}.\vec{b})$$

پس رابطهٔ (۲) چنین نوشته می‌شود:

$$-c\sin\theta(\vec{a}.\vec{b}) = \beta c\sin\theta \Rightarrow \beta = -(\vec{a}.\vec{b})$$

حا اگر در طرف اوّل رابطهٔ $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \alpha\vec{b} + J\vec{c}$ جای $\vec{b}$ و $\vec{c}$ را عوض کنیم، داریم:

$$\vec{a}\times(\vec{c}\times\vec{b}) = (-\beta)\vec{c} + (-\alpha)\vec{b} \Rightarrow \alpha = (\vec{a}.\vec{c})$$

بنابراین داریم:

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$$

نتیجه: داریم:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = -[\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})] = (\vec{c}.\vec{b})\vec{a} - (\vec{c}\,\vec{a})\vec{b}$$

پس:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{c}.\vec{a})\vec{b} - (\vec{c}.\vec{b})\vec{a}$$

نکته. حاصل ضرب مضاعف خارجی سه بردار را برحسب تصویرهای آن سه بردار می‌توان به‌دست آورد.

مثال۱. اگر $\vec{a} = (2,1,-1)$ ، $\vec{b} = (3,0,-2)$ و $\vec{c} = (-1,2,0)$ باشد، تصویرهای بردار $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ و اندازهٔ این بردار را تعیین کنید.

حل: داریم:

$$\vec{b}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 12\vec{j} + 6\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{b}\times\vec{c} = (4,2,6)$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 8\vec{i} - 16\vec{j} = \vec{V}$$

$$\left|\vec{V}\right| = \sqrt{64+256} = \sqrt{320} = 8\sqrt{5}$$

مثال۲. اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برهم عمود باشند، ثابت کنید.

$$\vec{a}\times\left\{\vec{a}\times[\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})]\right\} = \left|\vec{a}\right|^4\vec{b}$$

حل: با توجه به این‌که $(\vec{a},\vec{b}) = 90^\circ$ است، بردارهای $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{a}\times\vec{b}$ کنج سه قائمه می‌سازند.

بنا به تعریف ضرب خارجی دو بردار داریم:

$$\left|\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})\right| = \left|\vec{a}\right|\,\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin(\vec{a},\vec{b})$$

$$= \left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|\sin 90^\circ = \left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right| \Rightarrow$$

$$\left|\vec{a}\times[\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})]\right|$$

$$= \left|\vec{a}\right|\,\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|\times\sin 90^\circ = \left|\vec{a}\right|^3\left|\vec{b}\right| \Rightarrow$$

$$\left|\vec{a}\times\left\{\vec{a}\times[\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})]\right\}\right|$$

$$= \left|\vec{a}\right|\,\left|\vec{a}\right|^3\left|\vec{b}\right|\times\sin 90^\circ = \left|\vec{a}\right|^4\left|\vec{b}\right|$$

حاصل ضرب طرف اوّل، برداری است در راستای بردار $\vec{b}$ ، که قدرمطلق آن مساوی $\left|\vec{a}\right|^4\left|\vec{b}\right|$ است. بنابراین این بردار $\left|\vec{a}\right|^4\vec{b}$ می‌باشد؛ پس اتحاد داده شده برقرار است.

نکته۱. با استفاده از اتحاد $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$ نیز درستی اتحاد بالا را می‌توان ثابت کرد.

نکته۲. با استفاده از تصویر بردارها، اتحاد بالا را می توان ثابت کرد.

تست. اگر $\vec{a} = (1,0,0)$ ، $\vec{b} = (0,1,0)$ و $\vec{c} = (0,0,1)$ باشد، $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ برابر کدام است؟

۱) $\vec{a}$ ۲) $\vec{b}$

۳) $\vec{c}$ ۴) $\vec{0}$

حل. گزینهٔ (۴) صحیح است؛ زیرا بردارهای داده شده $\vec{a} = \vec{i}$ ، $\vec{b} = \vec{j}$ و $\vec{c} = \vec{k}$ بردارهای یکّه دستگاه مختصات xoy هستند؛ یعنی داریم:

$$\vec{i}\times(\vec{j}\times\vec{k}) = \vec{i}\times\vec{i} = \vec{0}$$

● احمد قندهاری

دنباله

◆ برای دانش آموزان دورهٔ پیش دانشگاهی، رشته ریاضی

دنباله ، تابعی است که دامنهٔ آن ، مجموعهٔ اعداد طبیعی و برد آن ، زیر مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد . به هریک از این مقادیر برد آن ، یک جملهٔ دنباله گویند .

مثال. تابع $a:N \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $a(n)=\frac{n}{n+1}$ یک دنباله است . جملهٔ اوّل دنباله را با a_1 ، جملهٔ دوم دنباله را با a_2 ، جملهٔ سوم دنباله را با a_3 و... و جملهٔ nام دنباله را با a_n نشان می‌دهند . خود دنباله را با $\{a_n\}$ نشان می‌دهند .

در این دنباله داریم : $a_1=\frac{1}{2}\ ,\ a_2=\frac{2}{3}\ ,\ a_3=\frac{3}{4}\ ,\ \dots$

و در دنبالهٔ $\left\{\cos\frac{n\pi}{2}\right\}$ داریم :

$$a_1=\cos\frac{\pi}{2}=0\ ,\ a_2=\cos\pi=-1\ ,\ a_3=\cos\frac{3\pi}{2}=0$$

دنبالهٔ همگرا ـ اگر $\{a_n\}$ یک دنباله باشد ، چنانچه $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L\ ,\ L\in\mathbb{R}$ ، در این صورت دنباله را همگرا یا همگرا به L گویند .

تعریف حدّ دنباله ـ می‌گوییم حدّ دنباله $\{a_n\}$ وقتی $n\to\infty$ ، عدد حقیقی L است هرگاه؛

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists M\in N\quad \ni n\geq M \Rightarrow |a_n-L|<\varepsilon$$

در این صورت می‌گوییم دنباله به عدد حقیقی L همگرا است و می‌نویسیم $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L$. برای پیدا کردن عدد طبیعی M ، باید نامساوی $|a_n-L|<\varepsilon$ را حل کرد یا به نامساوی $n\geq M$ رسید . پس از یافتن M ، باید بتوانیم از $n\geq M$ نتیجه بگیریم $|a_n-L|<\varepsilon$.

مسألهٔ ۱ . با استفاده از تعریف ، ثابت کنید حدّ دنبالهٔ $\left\{\frac{2n-4}{n+10}\right\}$ ، عدد (۲) است .

حل : باید ثابت کنیم :

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists M\in N\quad \ni n\geq M \Rightarrow \left|\frac{2n-4}{n+10}-2\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{2n-4}{n+10}-2\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{2n-4-2n-20}{n+10}\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{-24}{n+10}\right|<\varepsilon \Rightarrow$$

$$\frac{۲۴}{n+۱۰} < \varepsilon \Rightarrow \frac{n+۱۰}{۲۴} > \frac{۱}{\varepsilon} \Rightarrow n+۱۰ > \frac{۲۴}{\varepsilon}$$

رابطهٔ برگشت‌پذیری $n > \frac{۲۴}{\varepsilon} \Rightarrow n+۱۰ > \frac{۲۴}{\varepsilon}$

پس: $M = \left[\frac{۲۴}{\varepsilon}\right] + ۱$

اگر $M = \left[\frac{۲۴}{\varepsilon}\right] + ۱$، آن گاه از $n \geq M$ با توجه به رابطهٔ برگشت‌پذیری، به نامساوی $\left|\frac{۲n-۴}{n+۱۰} - ۲\right| < \varepsilon$ خواهیم رسید.

مسألهٔ ۲. ثابت کنید دنبالهٔ $\left\{\sqrt{n+۹} - \sqrt{n+۳}\right\}$ به صفر همگراست.

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall \varepsilon > ۰ \quad \exists M \in N \quad \ni n \geq M \Rightarrow \left|\sqrt{n+۹} - \sqrt{n+۳} - ۰\right| < \varepsilon$$

$$\left|\sqrt{n+۹} - \sqrt{n+۳}\right| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\left|(\sqrt{n+۹} - \sqrt{n+۳}) \times \frac{\sqrt{n+۹} + \sqrt{n+۳}}{\sqrt{n+۹} + \sqrt{n+۳}}\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\frac{n+۹-n-۳}{\sqrt{n+۹} + \sqrt{n+۳}}\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{۶}{\sqrt{n+۹} + \sqrt{n+۳}} < \varepsilon$$

داریم: $\frac{۶}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} > \frac{۶}{\sqrt{n+۹} + \sqrt{n+۳}}$

رابطهٔ برگشت‌پذیری

$$\frac{۶}{۲\sqrt{n}} < \varepsilon \Rightarrow \frac{۶}{\sqrt{n+۹} + \sqrt{n+۳}} < \varepsilon$$

$$\frac{۶}{۲\sqrt{n}} < \varepsilon \Rightarrow \frac{۳}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{۳} > \frac{۱}{\varepsilon} \Rightarrow \sqrt{n} > \frac{۳}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow n > \frac{۹}{\varepsilon^۲} \qquad M = \left[\frac{۹}{\varepsilon^۲}\right] + ۱$$

اگر $n \geq M$، با توجه به رابطهٔ برگشت‌پذیری، به نامساوی $\left|\sqrt{n+۹} - \sqrt{n+۳}\right| < \varepsilon$ خواهیم رسید.

دنبالهٔ واگرا ـ اگر $\{b_n\}$ یک دنباله باشد، چنانچه $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ مساوی چند عدد یا مقدار نامعلوم و یا ∞ شود. در این صورت می‌گوییم دنبالهٔ $\{b_n\}$ واگراست.

برای مثال، دنبالهٔ $\{(-۱)^n\}$ واگراست؛ زیرا:

$$\lim_{n\to\infty}(-۱)^n = \begin{cases} ۱ & \text{اگر n زوج باشد} \\ -۱ & \text{اگر n فرد باشد} \end{cases}$$

پس دنبالهٔ $\{(-۱)^n\}$ واگراست و دنباله $\{\sin n\}$ نیز واگراست؛ زیرا:

عددی نامعلوم در بازهٔ $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n = [-۱,۱]$

اثبات واگرایی دنباله

اگر دنباله‌ای واگرا باشد و بخواهیم ثابت کنیم دنباله واگراست، چنین عمل می‌کنیم. فرض می‌کنیم دنباله به عدد حقیقی L همگرا باشد؛ پس از مختصری حل به تناقض می‌رسیم.

مسأله ۳. ثابت کنید دنبالهٔ $\{(-۱)^n\}$ واگراست.

حل: فرض می‌کنیم دنباله به عدد حقیقی L همگرا باشد؛ پس می‌توان نوشت:

$$\forall \varepsilon > ۰ \quad \exists M \in N \quad \ni n \geq M \Rightarrow \left|(-۱)^n - L\right| < \varepsilon$$

برای درک بهتر، فرض می‌کنیم $\varepsilon = \frac{۱}{۲}$

الف. اگر n زوج باشد، پس:

$$\left|(-۱)^n - L\right| < \frac{۱}{۲} \Rightarrow |۱ - L| < \frac{۱}{۲} \Rightarrow |L-۱| < \frac{۱}{۲} \Rightarrow$$

رابطه (۱) $-\frac{۱}{۲} < L - ۱ < \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲} < L < \frac{۳}{۲}$

ب. اگر n فرد باشد، پس:

$$\left|(-۱)^n - L\right| < \frac{۱}{۲} \Rightarrow |-۱ - L| < \varepsilon \Rightarrow |L+۱| < \varepsilon \Rightarrow$$

رابطه (۲) $-\frac{۱}{۲} < L + ۱ < \frac{۱}{۲} \Rightarrow -\frac{۳}{۲} < L < -\frac{۱}{۲}$

چون L یک عدد حقیقی است، نمی‌تواند همزمان در دو رابطهٔ (۱) و (۲) صدق کند. بنابراین دنباله نمی‌تواند همگرا باشد؛ پس واگراست.

مثال ۴. ثابت کنید دنبالهٔ $\{۲ - n^۲\}$ واگراست.

حل: فرض می‌کنیم این دنباله به عدد حقیقی L همگرا باشد، پس می‌توان نوشت:

$$\forall \varepsilon > ۰ \quad \exists M \in N \quad \ni n \geq M \Rightarrow \left|n^۳ - ۲ - L\right| < \varepsilon$$

برای درک بهتر، فرض می‌کنیم $\varepsilon = ۱$

$$\left|n^۳ - ۲ - L\right| < \varepsilon$$

$$\left|n^۳ - ۲ - L\right| < ۱ \Rightarrow -۱ < n^۳ - ۲ - L < ۱ \Rightarrow ۱ + L < n^۳ < L + ۳$$

$n^۳ > ۱ + L$ اشکالی ندارد، ولی $n^۳ < L + ۳$ اشکال دارد؛ زیرا:

$$n^۳ < L + ۳ \Rightarrow n < \sqrt[۳]{L + ۳}$$

چون در محاسبهٔ حدّ دنباله $n \to \infty$، نامساوی $n < \sqrt[۳]{L + \varepsilon}$ بیان می‌کند که مجموعهٔ اعداد طبیعی از بالا کراندار است و این غیرممکن است، بنابراین فرض این‌که این دنباله به عدد حقیقی L همگراست، غیرممکن است؛ پس این دنباله واگراست.

دنبالهٔ کراندار

دنبالهٔ $\{a_n\}$ را از بالا کراندار گوییم، هرگاه عدد حقیقی $M_۱$ وجود داشته باشد؛ به‌طوری که برای هر $n \in N$، داشته باشیم $a_n \leq M_۱$.

و دنبالهٔ $\{a_n\}$ را از پائین کراندار گوییم، هرگاه عدد حقیقی $M_۲$ وجود داشته باشد؛ به‌طوری که برای هر $n \in N$، داشته باشیم $a_n \geq M_۲$.

یک دنباله را وقتی کراندار گوییم که هم کران بالا داشته باشد و هم کران پایین. به طور کلّی دنبالهٔ $\{a_n\}$ را وقتی کراندار گوییم، هرگاه عدد حقیقی مثبت K وجود داشته باشد؛ به طوری که برای هر $n \in N$ داشته باشیم $|a_n| \leq k$.

برای مثال، دنبالهٔ $\{\sin n\}$ کراندار است؛ زیرا:

$$\forall n \in N \quad |\sin n| \leq ۱$$

مسألهٔ ۵. ثابت کنید دنباله با جملهٔ عمومی $a_n = \left(۱ - \frac{۱}{۲^n}\right)^۳$ کراندار است.

حل:

$$۰ < \frac{۱}{۲^n} \leq \frac{۱}{۲} \Rightarrow -\frac{۱}{۲} \leq \frac{-۱}{۲^n} < ۰ \Rightarrow ۱ - \frac{۱}{۲} \leq ۱ - \frac{۱}{۲^n} < ۱$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲} \leq ۱ - \frac{۱}{۲^n} < ۱ \Rightarrow \frac{۱}{۸} \leq \left(۱ - \frac{۱}{۲^n}\right)^۳ < ۱$$

عدد (۱) کران بالای دنباله است و عدد $\frac{۱}{۸}$ کران پایین دنباله است و می‌توان نوشت:

$$۱ = Max\left\{\left|\frac{۱}{۸}\right|, |۱|\right\} \; ; \; \forall n \in N \quad |a_n| \leq ۱$$

دنباله یکنوا

اگر در دنبالهٔ $\{a_n\}$ داشته باشیم:

$$\forall n \in N \quad a_{n+۱} \geq a_n \;\text{ یا }\; \frac{a_n + ۱}{a_n} \geq ۱$$

آن‌گاه دنباله را صعودی گوییم، و اگر داشته باشیم:

$$\forall n \in N \quad a_{n+۱} \leq a_n \;\text{ یا }\; \frac{a_n + ۱}{a_n} \leq ۱$$

آن‌گاه دنباله را نزولی گوییم.

دنباله‌ای را که همواره صعودی یا همواره نزولی باشد، دنباله یک نوا گوییم.

مسألهٔ ۶: ثابت کنید دنبالهٔ $\left\{\frac{۲^n}{n!}\right\}$ نزولی است.

حل: باید ثابت کنیم برای هر $n \in N$ داریم: $a_{n+۱} \leq a_n$

$$\Rightarrow \frac{۲^{n+۱}}{(n+۱)!} \leq \frac{۲^n}{n!} \Rightarrow \frac{۲(۲^n)}{(n+۱)n!} \leq \frac{۲^n}{n!} \Rightarrow$$

$\frac{۲}{n+۱} \leq ۱ \Rightarrow \frac{n+۱}{۲} \geq ۱ \Rightarrow n + ۱ \geq ۲ \Rightarrow n \geq ۱$ همواره برقرار است.

قضیهٔ فشار

اگر در سه دنبالهٔ $\{a_n\}$، $\{b_n\}$ و $\{c_n\}$، از ای به بعد داشته باشیم $a_n \leq c_n \leq b_n$، چنانچه $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$، آن‌گاه نتیجه می‌شود: $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$

مسأله ۷. به کمک قضیهٔ فشار، حدّ دنبالهٔ $\left\{\frac{۲^n}{n!}\right\}$ را بیابید (وقتی $n \to \infty$).

حل:

$$۰ < \frac{۲^n}{n!} = \frac{\overbrace{(۲)(۲)(۲)(۲)\ldots(۲)}^{n \text{ مرتبه}}}{(۱)(۲)(۳)(۴)\ldots(n)} \leq \frac{۲}{۱} \times \frac{۲}{۲} \times \frac{۱}{۱} \times \frac{۱}{۱} \times \ldots \times \frac{۲}{n}$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{2^n}{n!} \le \frac{4}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}(0) < \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!} \le \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n} \Rightarrow 0 < \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!} \le 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!} = 0$$

نکات دنباله

۱. اگر بخواهیم بدانیم عدد M چندمین جملهٔ دنبالهٔ $\{a_n\}$ است، باید معادلهٔ $a_n = M$ را حل کنیم (با توجه به این که $n \in N$).

تست ۱. عدد ۳۹۹ چندمین جملهٔ دنبالهٔ $\{n^2 - 2n\}$ است؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۲ ۳) ۲۳ ۴) ۲۴

حل: گزینهٔ ۱ صحیح است. $n^2 - 2n = 399 \Rightarrow$

$$n^2 - 2n - 399 = 0 \Rightarrow n = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

$$n = 1 \pm \sqrt{1+399} \Rightarrow n = 1 \pm \sqrt{400} \Rightarrow$$

$$n = 1 \pm 20 \Rightarrow n = 21, -19$$

پس عدد ۳۹۹ جملهٔ بیست‌ویکم دنباله است. $n \in N \Rightarrow n = 21$

۲. اگر بخواهیم بدانیم دنبالهٔ $\{a_n\}$ چند جملهٔ مثبت یا منفی دارد، باید نامعادلهٔ $a_n > 0$ یا $a_n < 0$ را حل کنیم (با توجه به این که $n \in N$).

تست ۲. دنبالهٔ $\{2n^2 - 129n + 127\}$ چند جملهٔ منفی دارد؟

۱) ۶۰ جمله ۲) ۶۱ جمله

۳) ۶۲ جمله ۴) ۶۳ جمله

حل: گزینهٔ ۳ صحیح است.

$$2n^2 - 129n + 127 < 0 \quad n = 1, \frac{127}{2}$$

$a > 0 ;\ 1 < n < \frac{127}{2}$ یا $1 < n < 63/5 \Rightarrow n = 2, 3, \ldots, 63$

تعداد $= (63 - 2) + 1 = 62$

۳. برای این که بدانیم از جملهٔ چندم جمله‌های دنبالهٔ $\{a_n\}$ که به L همگراست، در بازهٔ $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ قرار می‌گیرد، باید نامساوی $|a_n - L| < \varepsilon$ را حل کنیم.

تست ۳. از جملهٔ چندم، جمله‌های دنبالهٔ $\left\{\frac{2n-10}{n+1}\right\}$ در بازهٔ $\left(2-\frac{1}{100}, 2+\frac{1}{100}\right)$ قرار می‌گیرد،

۱) ۱۱۹۷ ۲) ۱۱۹۸

۳) ۱۱۹۹ ۴) ۱۲۰۰

حل: گزینهٔ ۴ صحیح است، دنباله به عدد ۲ همگراست.

$$\left|\frac{2n-10}{n+1} - 2\right| < \frac{1}{100} \Rightarrow$$

$$\left|\frac{2n-10-2n-2}{n+1}\right| < \frac{1}{100} \Rightarrow \left|\frac{-12}{n+1}\right| < \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{12}{n+1} < \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{n+1}{12} > 100 \Rightarrow$$

$$n+1 > 1200 \Rightarrow n > 1199 \Rightarrow n \ge 1200$$

۴. برای این که بدانیم چند جملهٔ دنبالهٔ $\{a_n\}$ که به L همگراست، در بازهٔ $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ قرار نمی‌گیرد، باید نامساوی $|a_n - L| \ge \varepsilon$ را حل کنیم.

تست ۴. چند جمله از دنبالهٔ $\left\{\frac{2n-5}{4n}\right\}$ در خارج بازهٔ $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{100}, \frac{1}{2}+\frac{1}{100}\right)$ قرار دارد؟

۱) ۱۲۴ جمله ۲) ۱۲۵ جمله

۳) ۱۲۶ جمله ۴) ۱۲۷ جمله

حل: گزینهٔ ۲ صحیح است، دنباله به عدد $\frac{1}{2}$ همگراست.

$$\left|\frac{2n-5}{4n} - \frac{1}{2}\right| \ge \frac{1}{100} \Rightarrow \left|\frac{2n-5-2n}{4n}\right| \ge \frac{1}{100} \Rightarrow \left|\frac{-5}{4n}\right| \ge \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4n} \ge \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{4n}{5} \le 100 \Rightarrow 4n \le 500 \Rightarrow n \le 125$$

۱۲۵ جمله از این دنباله، در بازهٔ فوق قرار نمی‌گیرد.

۵. اگر $0 < a < b < c,\ n \in N$ ؛ $n \to \infty ;\ a^n + b^n + c^n \sim c^n$

تست ۵. دنبالهٔ $\left\{\frac{2^n + 3^{n-1} + 4^{n-1}}{2^{n+1} + 3^n + 4^{n-2}}\right\}$ به کدام عدد همگراست؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲

۳) $\frac{1}{4}$ ۴) ۴

حل: گزینهٔ ۴ صحیح است.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^{n-1}+4^{n-1}}{2^{n+1}+3^n+4^{n-2}}\sim\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n-1}}{4^{n-2}}=4$$

۶. اگر دنبالهٔ $\{a_n\}$ به L همگرا باشد، داریم:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}a_{n-1}$$

تست۶. در دنبالهٔ همگرای مثبت $\{a_n\}$، داریم $a_{n+1}=\sqrt{20+a_n}$، حدّ دنباله کدام است؟

۱) -4 ۲) 4

۳) 5 ۴) -5

حل: گزینهٔ ۳ صحیح است. فرض می‌کنیم حدّ دنباله L باشد، با توجه به نکتهٔ ۶ داریم:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=L$$

$$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{20+a_n}=\sqrt{20+\lim_{n\to\infty}a_n}\Rightarrow L=\sqrt{20+L}$$

$$L^2=20+L\Rightarrow L^2-L-20=0\Rightarrow\begin{cases}L=5\\ L=-4 \quad \text{غیرقابل قبول}\end{cases}$$

۷. اگر در دنبالهٔ غیرثابت $\{f(n)\}$، $n=x\geq 1$ و تابع f مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه داریم: اگر $f'(x)\geq 0$، آن‌گاه دنبالهٔ $\{f(n)\}$ صعودی و اگر $f'(x)\leq 0$، آن‌گاه دنبالهٔ $\{f(n)\}$ نزولی است.

تست ۷. چندتا از دنباله‌های زیر صعودی است؟

$$\left\{\frac{2n-3}{n+2}\right\}\quad\left\{\frac{n+2}{2n-1}\right\}\quad\left\{\sqrt{2}n^5+\sqrt{3}n^3+1\right\}$$

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۰

حل: گزینهٔ ۲ صحیح است.

$$\left\{\frac{2n-3}{n+2}\right\},\ n=x\geq 1\Rightarrow$$

$$f(x)=\frac{2x-3}{x-2}\Rightarrow f'(x)=\frac{7}{(x+2)}>0$$ دنباله صعودی است

$$\left\{\frac{n+2}{2n-1}\right\},\ n=x\geq 1\Rightarrow$$

$$f(x)=\frac{x+2}{2x-1}\Rightarrow f'(x)=\frac{-5}{(2x-1)^2}<0$$ دنباله نزولی است

$$\left\{\sqrt{2}n^5+\sqrt{3}n^3+1\right\},\ n=x\geq 1\Rightarrow$$

$$f(x)=\sqrt{2}x^5+\sqrt{3}x^3+1\Rightarrow f'(x)=5\sqrt{2}x^4+3\sqrt{3}x^2\geq 0$$

دنباله صعودی است

۸. سرعت رشد $\quad n\in N,\ p>0,\ k>1$

$$n\to\infty;\ \log n<n<n^p<k^n<n!<n^n$$

تست۸. چندتا از دنباله‌های زیر، همگرا به صفرند.

$$\left\{\frac{2\log n}{n}\right\}\quad\left\{\frac{n^2}{3^n}\right\}\quad\left\{\frac{5^n}{n!}\right\}\quad\left\{\frac{n!}{n^n}\right\}$$

۱) ۴ ۲) ۳

۳) ۲ ۴) ۱

حل: گزینهٔ ۱ صحیح است. بنا به نکتهٔ ۸، حدّ هر چهار دنباله صفر است.

۹. دنبالهٔ همگرا کراندار است (دنبال ممکن است کراندار باشد؛ ولی همگرا نباشد).

تست۹. چندتا از دنباله‌ها کراندار هستند؟

$$\left\{\frac{2n^2-5}{n^2+n}\right\}\quad\left\{\left[\frac{(-1)^n}{n}\right]\right\}\quad\left\{\frac{n!+(n+1)!}{n!+(n+2)!}\right\}$$

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) هیچکدام

حل: گزینهٔ ۳ صحیح است.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-5}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2}=2$$ همگراست، پس کراندار است

$$\forall n\in N\quad\left|\left[\frac{(-1)^n}{n}\right]\right|\leq 1$$ کراندار است.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!+(n+1)!}{n!+(n+2)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+2)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}=0$$

همگراست، پس کراندار است

تست ۱۰. حدّ دنبالهٔ $\left\{\frac{\lfloor\sqrt{5}n\rfloor}{n}\right\}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱

۳) $\sqrt{5}$ ۴) ۰

حل: گزینهٔ ۳ صحیح است.

داریم؛ $x-1<\lfloor x\rfloor \le x \Rightarrow \sqrt{5}n-1<\lfloor \sqrt{5}n\rfloor \le \sqrt{5}n$

نامساوی را بر n تقسیم می‌کنیم.

$$\sqrt{5}-\frac{1}{n}<\frac{\lfloor \sqrt{5}n\rfloor}{n}\le \sqrt{5}$$

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{5}-\frac{1}{n})<\lim_{n\to\infty}\frac{\lfloor \sqrt{5}n\rfloor}{n}\le \lim_{n\to\infty}\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \sqrt{5}<\lim\frac{\lfloor \sqrt{5}n\rfloor}{n}\le \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\lfloor \sqrt{5}n\rfloor}{n}=\sqrt{5}$$

تست ۱۱. اگر در دنبالهٔ $\{a_n\}$ داشته باشیم $a_1=5$ و $a_{n+1}=2n+a_n$، آن‌گاه جملهٔ عمومی دنباله کدام است؟

۱) $2n^2-2n+5$ ۲) $3n^2-3n+5$

۳) $4n^2-4n+5$ ۴) n^2-n+5

حل: گزینهٔ ۴ صحیح است.

داریم: $a_{n+1}=a_n+2n$

$$\begin{array}{l} n=1 \\ n=2 \\ n=3 \\ \\ n\to n \end{array}\begin{cases} a_2=a_1+2(1) \\ a_3=a_2+2(2) \\ a_4=a_3+2(3) \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_n=a_{n-1}+2(n-1) \end{cases}$$

$$\overline{a_n=2(1+2+3+\dots+(n+1))+a_1}$$

$$=2\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)+5=n^2-n+5$$

تست ۱۲. بزرگ‌ترین جمله‌های دنبالهٔ $\left\{\frac{5^n}{n!}\right\}$ کدام است؟

۱) a_3,a_4 ۲) a_4,a_5

۳) a_5,a_6 ۴) a_6,a_7

حل: گزینهٔ ۲ صحیح است.

$$\frac{a_n+1}{a_n}=\frac{\frac{5^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{5^n}{n!}}=\frac{5(5^n)n!}{5^n(n+1)n!}=\frac{5}{n+1}$$

$$n=4 \Rightarrow \frac{a_n+1}{a_n}=1 \Rightarrow a_n+1=a_n \xrightarrow{n=4} a_5=a_4$$

$n>4\Rightarrow \frac{a_n+1}{a_n}<1$ دنباله نزولی است

$n<4\Rightarrow \frac{a_n+1}{a_n}>1$ دنباله صعودی است

پس دو جملهٔ a_4 و a_5 مساوی‌اند و بزرگ‌ترین جمله‌های دنباله می‌باشند.

تست ۱۳. اگر در دنبالهٔ $\{a_n\}$ داشته باشیم

$a_n=\begin{cases}\frac{n+4}{n} & \text{n زوج،} \\ \frac{n+2}{n} & \text{n فرد،}\end{cases}$، چند جمله از دنباله در بازه $(1-\frac{1}{100},1+\frac{1}{100})$ قرار ندارد.

۱) ۲۰۰ جمله ۲) ۲۵۰ جمله

۳) ۳۰۰ جمله ۴) ۶۰۰ جمله

حل: گزینهٔ ۴ صحیح است. بنا به نکتهٔ (۴)

$$\frac{n+4}{n}-1\ge\frac{1}{100}\Rightarrow\frac{4}{n}\ge\frac{1}{100}\Rightarrow$$

$\frac{n}{4}\le 100\Rightarrow\begin{cases}n\le 400 \\ n\end{cases}$ ۲۰۰جمله؛ زوج

$$\frac{n+2}{n}-1\ge\frac{1}{100}\Rightarrow\frac{2}{n}>\frac{1}{100}\Rightarrow$$

$\frac{n}{2}\le 100\Rightarrow\begin{cases}n\le 200 \\ n\end{cases}$ ۱۰۰جمله؛ فرد

پس جمعاً ۳۰۰ جمله.

اصل خوش ترتیبی - استقرای ریاضی

● سید محمدرضا هاشمی موسوی
www.primenumbersformula.com

آشنایی با نظریهٔ اعداد

نظریهٔ اعداد، یکی از شاخه‌های زیبا و جالب ریاضی است که ریشه در تاریخ بشر دارد و به دلیل زیبایی و کارایی همواره مورد علاقه بوده است. پیشرفت‌های علوم دیگر مانند رایانه و رمزنگاری که تکیه بر نظریهٔ مقدماتی اعداد دارند، به شادابی و زنده بودن این شاخه از دانش بشری کمک کرده‌اند.

نظریهٔ اعداد، شامل موضوع‌هایی در ریاضیات است که توانسته توجه بشر را برای هزاران سال به خود جلب کند. در این شاخه از ریاضیات، به مسأله‌ها، قضیه‌ها و برهان‌هایی برمی‌خوریم که بیش از دو هزار سال قدمت دارند. برای مثال، در حدود سال ۳۰۰ قبل از میلاد مسیح(ع)، اقلیدس برهانی مقدماتی و ساده برای اثبات بی‌نهایت بودن اعداد اول ارایه داد. مسأله‌هایی نیز طرح شده‌اند که چندصد سال، عدهٔ کثیری از علاقه‌مندان و ریاضیدانان را به خود مشغول داشته و باعث پیدایش شاخه‌هایی جدید و نظریه‌های بدیع شده‌اند.

امروزه نظریهٔ اعداد، آن‌چنان وسعت یافته که تقریباً در تمام شاخه‌های ریاضی رخنه کرده و حتی توانسته در علوم غیرریاضی همچون رایانه، کاربرد بسیار داشته باشد. همچنین

در این شاخه از ریاضیات، مسأله‌های لاینحل بسیاری وجود دارد که تا به امروز انسان به حل آن نزدیک هم نشده است. یکی از مسأله‌هایی که حدود ۳۵۰ سال دوام آورد، قضیهٔ بزرگ فرما بود که بالأخره در سال ۱۹۹۴ میلادی به توسط اندرو وایلز در بیش از ۲۰۰ صفحه به اثبات رسید و این، اثری بسیار عظیم در ریاضیات قرن بیستم گذاشت. اما از این موفقیت، بسیاری ناخرسند شدند؛ زیرا قضیهٔ بزرگ فرما که سال‌های سال انگیزه‌ای برای ارایهٔ نظریه‌های جدید ریاضیات بود، از میان رفت.

می‌دانیم اعداد صحیح و به‌خصوص اعداد صحیح مثبت (طبیعی) و قاعده‌های مربوط به حساب آن‌ها، جزو قدیمی‌ترین و پایه‌ای‌ترین فراورده‌های تفکر بشری محسوب می‌شود و انسان‌ها در تمدن‌های باستانی، به اهمیت و ضرورت شمارش برای مقاصدی چون داد و ستد، اندازه‌گیری طول و مساحت زمین‌ها و ساختمان‌ها، تعیین وقت و غیره پی‌بردند و تقریباً پنج‌هزار سال پیش، چینی‌ها و مصری‌ها به طور منظم حساب و شمارش را در زندگی روزمرهٔ خود به کار می‌بردند.

نظریهٔ اعداد، شاخه‌ای از ریاضیات است که بیشتر به خواص اعداد طبیعی:

۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ...

می‌پردازد. در مورد چگونگی به‌وجود آمدن اعداد طبیعی، اطلاع درستی در دست نیست. اما شواهدی وجود دارند که نشان می‌دهند بشر اولیه اعداد طبیعی را برای شمارش مورد استفاده قرار داده است و به‌تدریج روش‌هایی را برای نمایش اعداد و انجام محاسبات ابداع کرده است.

اگر به صورتی ساده، ولی کلی بخواهیم این علم را توصیف کنیم، باید بگوییم که نظریهٔ اعداد، شاخه‌ای از ریاضیات است که به مطالعهٔ اعداد و خواص آنها می‌پردازد، که البته منظور اعداد صحیح، یعنی ... و ۲ و ۱ و ۰ و ۱- و ۲- و... و در حالت خاص اعداد طبیعی و در حالتی خاص‌تر، اعداد اول است:

۲, ۳, ۵, ۷, ...

نظریهٔ اعداد به روش‌های بسیار جالب توانسته است در طراحی الگوریتم‌های بسیاری سودمند و مؤثر باشد. در این راستا می‌توان از حساب کامپیوتری نام برد که روش‌ها و الگوریتم‌های محاسباتی بسیاری در دههٔ گذشته کشف شده است.

موضوع‌های قابل توجه و جذاب همچون اعداد اول، قضیهٔ اساسی حساب، بخش‌پذیری و تجزیهٔ اعداد بزرگ، تشخیص اعداد اول بسیار بزرگ، معادله و دستگاه‌های سیال (مانند معادله مربوط به قضیهٔ بزرگ فرما)، همیشه از زمان‌های قدیم تاکنون، ریاضیدانان بسیاری را به خود مشغول داشته که در این راستا ریاضیدانان بزرگی همچون فرما دچار اشتباهاتی شده‌اند که امروزه حتی بر دانش‌آموزان دبیرستانی نیز آشکار است.

در اوایل قرن نوزدهم، کارل فردریش گاوس، ریاضیدان بزرگ آلمانی، با بیان هم‌نهشتی‌ها توانست راهی نو را برای حل بسیاری از مسأله‌های نظریهٔ اعداد نشان دهد و درواقع راهگشای حل مشکلات فراوان شود. هم‌نهشتی‌ها کاربردهای بسیاری در دانش کامپیوتر، از جمله حساب با اعداد صحیح بزرگ، رمزنگاری، فایل حافظهٔ کامپیوتر و ایجاد اعداد شبه‌تصادفی دارد.

یکی از اساسی‌ترین و مهم‌ترین مباحث نظریه اعداد، مبحث مربوط به **اعداد اول** و قضیه‌ها و احکام آن است.[1] این اعداد درواقع سنگ بنای شالودهٔ نظریهٔ اعداد را تشکیل می‌دهند و شاید از بحث‌انگیزترین و به نوعی جالب‌ترین اعداد طبیعی‌اند. اعدادی که تعدادشان بی‌نهایت است و ممکن است مسأله‌های بسیاری در رابطه با این اعداد طرح شود که حل آنها

نیاز به سال‌ها تفکر و مطالعه و پژوهش داشته باشد.

د و مسأله که از ابتدا مورد بحث بوده است، یکی یافتن قاعده یا قانونی برای تولید اعداد اول و دیگر چگونگی توزیع آنها بین اعداد طبیعی است. شاید این اعداد را به خاطر این اول می‌نامند که هم اعدادی ساده (از نظر تجزیه) و هم زیربنایی (از نظر تجزیهٔ بقیه اعداد طبیعی به جز یک، به حاصل ضرب آنها) هستند. کار بر روی اعداد، هیچ پیشنیازی نمی‌خواهد، به همین علت برای همه کس قابل فهم و بسیار سرگرم‌کننده است. توصیف نظریه اعداد را از زبان یکی از ریاضیدانان مشهور انگلیس «هاردی» می‌آوریم:

«نظریه مقدماتی اعداد، باید یکی از مهم‌ترین موضوع‌ها برای تعلیم اولیه ریاضیات باشد. چندان اطلاع قبلی نمی‌خواهد و موضوعش ملموس و مأنوس است. طریقه‌های استدلالی که به کار می‌گیرد، ساده، کلی و تعدادشان کم است و از لحاظ تحریک کنجکاوی طبیعی آدمی، در علوم ریاضی مانند ندارد. یک ماه تعلیم فهیمانه در نظریه اعداد، دو بار آموزنده‌تر، دو بار مفیدتر و حداقل ده بار سرگرم‌کننده‌تر از همان مدت تعلیم حسابان برای مهندسان است.»

برخی از اصول بنیادی نظریه اعداد

پیش از بیان اصول بنیادی نظریهٔ اعداد، به معرفی چند مجموعهٔ اصلی می‌پردازیم.

دنبالهٔ اعداد طبیعی از ۱ شروع می‌شود و هر عضو دیگر آن، با افزودن یک واحد به عدد قبلی به دست می‌آید. با مجموعهٔ اعداد طبیعی:

$\mathbb{N} = \{۱, ۲, ۳, \cdots\}$

و عمل‌های جمع و ضرب آنها و با ویژگی‌های این دو عمل اصلی و نیز با عمل تفریق روی مجموعه اعداد صحیح:

$\mathbb{Z} = \{\cdots, -۳, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, \cdots\}$

آشنا شده‌اید.

همچنین هر عدد طبیعی و بزرگ‌تر از ۱ مثل P که هیچ مقسوم‌علیه مثبتی جز P و ۱ نداشته باشد، عدد اول است. مجموعهٔ اعداد اول را با $\mathbb{P}$ نمایش می‌دهیم:

$\mathbb{P} = \{۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹, \cdots\}$

با کمی دقت، ملاحظه می‌شود که تمام اعداد صحیح مثبت را می‌توان از راه جمع کردن تعداد مناسبی ۱، تولید کرد:

$۱ = ۱,\ ۲ = ۱+۱,\ ۳ = ۱+۱+۱,\ ۴ = ۱+۱+۱+۱,\ \cdots$

اگر به مجموعهٔ تولیدشده توسط واحد، قرینه‌های آنها و عدد صفر را هم اضافه کنیم، مجموعهٔ اعداد صحیح، یعنی Z به وجود می‌آید.

حال که Z (مجموعهٔ اعداد صحیح) را توانستیم تولید کنیم، آمادهٔ بررسی خواص و اصول بنیادی اعضای این مجموعه می‌شویم.

تعریف عضو ابتدا و انتهای یک مجموعه

اگر $A \subseteq \mathbb{R}$ و ($\mathbb{R}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی)، در این صورت a **عضو ابتدا** نامیده می‌شود؛ هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند:

$$\begin{cases} \text{(I)}\ a \in A \\ \text{(II)}\ \forall x \in A \Rightarrow a \le x \end{cases}$$

به همین ترتیب، عدد b **عضو انتهاست**؛ هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند:

$$\begin{cases} \text{(I)}\ b \in A \\ \text{(II)}\ \forall y \in A \Rightarrow y \le b \end{cases}$$

توجه: شرط اول برای عضو ابتدا و انتها یکسان است.

باید توجه داشته باشیم که **شرط اول** بسیار مهم است؛ زیرا برای مثال، مجموعهٔ زیر **عضو انتها** ندارد:

$A = \{x \in \mathbb{R} : x < ۲۵\}$

هر چند همهٔ اعضای مجموعهٔ A از ۲۵ کوچک‌ترند؛ ولی چون ۲۵ عضو A نیست ($۲۵ \notin A$)، پس ۲۵ نمی‌تواند عضو انتها باشد و بدیهی است که عدد حقیقی قبل از ۲۵ مشخص نیست! (چرا؟)

مثال ۱. عضو ابتدا و انتهای مجموعهٔ زیر را تعیین کنید.

$B = \{x \in \mathbb{Z} : -۵ < x < ۳\}$

حل: ابتدا اعضای مجموعهٔ B را مشخص می‌کنیم:

$B = \{-۴, -۳, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲\}$

بدیهی است که بین ۵- و ۴- عدد صحیحی وجود ندارد؛ پس عدد ۴- کوچک‌ترین عضو مجموعهٔ B است و درنتیجه عضو ابتداست. همچنین واضح است که بین ۲ و ۳ نیز عدد

صحیحی موجود نیست؛ پس، عدد ۲ بزرگ‌ترین عضو مجموعهٔ B است و درنتیجه عضو انتهاست.

قرارداد: عضو ابتدا و انتهای مجموعهٔ A را که درواقع به ترتیب کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو آن مجموعه محسوب می‌شوند، با نماد $a = \min A$ (عضو ابتدای A) و $b = \mathrm{Max}A$ (عضو انتهای A) نشان می‌دهند.

مثال۲. برای مجموعهٔ زیر، حاصل $\frac{\min A + \mathrm{Max}A}{۲}$ را بیابید.

$$A = \{x \in \mathbb{Z}: -۳ \le x < ۶\}$$

حل: با توجه به اعضای مجموعهٔ A، بدیهی است که عضو ابتدا و انتهای A به ترتیب ۳- و ۵- هستند.

بنابراین:

$$\frac{\min A + \mathrm{Max}A}{۲} = \frac{-۳+۵}{۲} = ۱ \ : \ \mathrm{Max}A = ۵$$ (عضو انتهای A) و $\min A = -۳$ (عضو ابتدای A)

مثال ۳. در صورت وجود، عضو ابتدا و عضو انتهای مجموعه‌های زیر را تعیین کنید.

I) $A = \{x \in \mathbb{R}: -۲ \le x < ۳\} = [-۲,۳)$

II) $B = \{x \in \mathbb{Q}: -\sqrt{۵} \le x \le \sqrt{۲}\}$

III) $C = \{x \in \mathbb{Z}: -\sqrt[۹]{۳} \le x \le \sqrt[۳]{۴}\}$

IV) $D = \{x \in \mathbb{N}: -۸۳ \le x < ۱۳۸۴\}$

V) $E = \{x \in \mathbb{R}: -\sqrt[۴]{۳} \le x \le \sqrt[۳]{۴}\} = [-\sqrt[۴]{۳}, \sqrt[۳]{۴}]$

حل:

I) مجموعهٔ A عضو انتها ندارد؛ ولی دارای عضو ابتدای $\min A = -۲$ است.

II) مجموعهٔ B دارای عضو ابتدا و انتها نیست؛ زیرا اگرچه به‌ظاهر $-\sqrt{۵}$ و $\sqrt{۲}$ هردو به مجموعهٔ B تعلق دارند و به ترتیب کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین اعضای این مجموعه هستند، ولی درواقع با توجه به تعریف مجموعهٔ B که شامل اعداد گویای بین $-\sqrt{۵}$ و $\sqrt{۲}$ است، هیچ‌کدام به Q تعلق ندارند و مجموعهٔ B معادل مجموعه زیر است:

$$B = \{x \in \mathbb{Q}: -\sqrt{۵} < x < \sqrt{۲}\}$$

III) با توجه به $\sqrt[۳]{۴} \approx ۱/۵۸۷$ و $\sqrt[۹]{۳} \approx ۱/۲۴۵۷$، عضو ابتدای مجموعهٔ C برابر $\min C = -۱$ و عضو انتهای آن برابر $\mathrm{Max}C = ۱$ است؛ زیرا:

$$C = \{x \in \mathbb{Z}: -۱ \le x \le ۱\} = \{-۱, ۰, ۱\}$$

IV) با توجه به $x \in \mathbb{N}$، بدیهی است که $\min D = ۱$ و $\mathrm{Max}D = ۱۳۸۳$؛ زیرا مجموعهٔ D معادل مجموعهٔ زیر است:

$$D = \{x \in \mathbb{N}: ۱ \le x \le ۱۳۸۳\}$$

V) با توجه به مجموعهٔ $E = [-\sqrt[۴]{۳}, \sqrt[۳]{۴}]$، بدیهی است که عضوهای ابتدا و انتهای آن به ترتیب $\min E = -\sqrt[۴]{۳}$ و $\mathrm{Max}E = \sqrt[۳]{۴}$ است.

در این جا، این سؤال مطرح می‌شود که آیا عضو ابتدا یا عضو انتها در صورت وجود، منحصربه‌فرد هستند؟

پاسخ این سؤال را به توسط قضیهٔ زیر می‌توان داد.

قضیه. اگر $A \subseteq \mathbb{R}$، در این صورت عضوهای ابتدا و انتهای A در صورت وجود، منحصربه‌فرد هستند.

برهان. فرض کنیم a_1 و a_2 هردو عضو ابتدای A باشند، باید ثابت کنیم $a_2 = a_1$. چون a_1 و a_2 هر دو عضو ابتدا در نظر گرفته شده‌اند، پس طبق تعریف باید: $a_1 \in A$ و $a_2 \in A$؛ بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = \min A,\ a_2 \in A \Rightarrow a_1 \le a_2 \\ a_2 = \min A,\ a_1 \in A \Rightarrow a_2 \le a_1 \end{array}\right\} \Rightarrow a_1 = a_2$$

به همین ترتیب و با روشی مشابه، منحصربه‌فرد بودن عضو انتها نیز اثبات می‌شود.

در این جا، دو مفهوم دیگر، یعنی کران پایین و کران بالا در یک مجموعه را بیان می‌کنیم.

کران پایین: اگر $S \subseteq \mathbb{R}$، عدد حقیقی a را کران پایین مجموعهٔ S می‌نامیم؛ در صورتی که:

$$\forall x \in S \Rightarrow a \le x$$

گوییم مجموعهٔ S از پایین کراندار است و اگر S از پایین کراندار نباشد، می‌گوییم از پایین بی‌کران است.

برای مثال، مجموعهٔ $A = \{x \in \mathbb{R}: ۳ < x < ۴\}$، دارای کران پایین ۳ است که هر عدد حقیقی کوچک‌تر از ۳ نیز، یک کران پایین برای مجموعهٔ A محسوب می‌شود.

کران بالا: اگر $S \subseteq \mathbb{R}$، عدد حقیقی b را کران بالای S

می‌نامیم؛ در صورتی که:

$\forall x \in S \Rightarrow x \le b$

گوییم مجموعهٔ S از بالا کراندار است و اگر S از بالا کراندار نباشد، می‌گوییم از بالا بی‌کران است. برای مثال، مجموعهٔ $B = \left\{x \in \mathbb{R} : ۱ < x < \sqrt{۳}\right\}$، دارای کران بالای $\sqrt{۳}$ است که هر عدد حقیقی بزرگ‌تر از $\sqrt{۳}$ نیز، یک کران بالای مجموعهٔ B محسوب می‌شود.

تذکر ۱. اگر به تعریف‌های اخیر دقت شود، متوجه خواهیم شد که دو تفاوت اساسی بین مفهوم‌های فوق وجود دارد؛ یعنی عضو ابتدا که منحصر به فرد است و باید عضو مجموعه باشد؛ در مقابل آن کران پایین نه لزومی دارد که عضو مجموعه باشد و نه لازم است که منحصر به فرد باشد. به همین ترتیب، کران بالا نیز لزومی ندارد که عضو مجموعه باشد و نه لازم است که منحصر به فرد باشد. به همین خاطر، می‌توانیم مجموعهٔ کران‌های پایین و مجموعهٔ کران‌های بالا را تعریف کنیم.

تذکر ۲. با توجه به تعریف‌های ارائه شده، می‌توان گفت: I) هر عضو ابتدا یک کران پایین است؛ ولی هر کران پایین، ممکن است عضو ابتدا نباشد. به همین ترتیب، هر عضو انتها یک کران بالاست؛ ولی هر کران بالا، ممکن است عضو انتها نباشد. II) عضو ابتدای یک مجموعه، در صورت وجود، بزرگ‌ترین کران پایین آن مجموعه است و عضو انتهای هر مجموعه، در صورت وجود، کوچک‌ترین کران بالای آن مجموعه است.

مثال ۴. آیا مجموعهٔ زیر عضو ابتدا، عضو انتها، کران پایین و کران بالا دارد؟

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} : x^۲ \ge ۲\right\}$$

حل: ابتدا مجموعه D را به صورتی ساده‌تر می‌نویسیم:

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} : x \ge \sqrt{۲} \text{ یا } x \le -\sqrt{۲}\right\}$$

$$= \left(-\infty, -\sqrt{۲}\right] \cup \left[\sqrt{۲}, +\infty\right)$$

بدیهی است که مجموعهٔ D از بالا و پایین بی‌کران است؛ پس نمی‌تواند دارای عضو ابتدا و انتها باشد.

مثال ۵. در مجموعهٔ زیر، عضو ابتدا، عضو انتها، بزرگ‌ترین کران پایین و کوچک‌ترین کران بالا را تعیین کنید.

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} : x^۲ \le ۲\right\}$$

حل: ابتدا مجموعهٔ S را به صورتی ساده‌تر می‌نویسیم:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} : -\sqrt{۲} \le x \le \sqrt{۲}\right\} = \left[-\sqrt{۲}, \sqrt{۲}\right]$$

اعداد $-\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۲}$ به‌ترتیب عضو ابتدا و عضو انتهای مجموعه S هستند و $-\sqrt{۲}$ یک کران پایین S (بزرگ‌ترین کران پایین[۲]) و $\sqrt{۲}$ یک کران بالای S (کوچک‌ترین کران بالا[۳]) محسوب می‌شوند.

در این‌جا، برای ورود به مطلب اصلی، یعنی بخش‌پذیری در Z و بیان قضیهٔ تقسیم، نیاز داریم چند اصل و قضیهٔ مهم در رابطه با مجموعه‌های مرتب و خوش‌ترتیب بیان شود که پس از آن بتوانیم اصلی مهم به نام اصل خوش‌ترتیبی را بیان کنیم.

تعریف مجموعهٔ مرتب: اگر رابطهٔ R روی مجموعهٔ S تعریف شده باشد و رابطهٔ R سه خاصیت انعکاسی، پادتقارنی و تعدی را داشته باشد، رابطهٔ R را یک رابطهٔ ترتیب می‌نامند و مجموعهٔ S همراه رابطهٔ R یک مجموعهٔ مرتب است.

مثال ۶. آیا $\mathbb{R}$ همراه رابطهٔ $(\le)$ یک مجموعهٔ مرتب است؟

حل: چون رابطهٔ $(\le)$ در مجموعهٔ اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$، یک رابطهٔ ترتیب است:

$\mathrm{I})\ \forall a \in \mathbb{R}, a \le a$ (انعکاسی)

$\mathrm{II})\ \forall a, b \in \mathbb{R}, a \le b, b \le a \Rightarrow a = b$ (پادتقارنی)

$\mathrm{III})\ \forall a, b, c \in \mathbb{R}, a \le b, b \le c \Rightarrow a \le c$ (تعدی)

پس $\mathbb{R}$ همراه $(\le)$ یک مجموعهٔ مرتب است.

تعریف مجموعهٔ خوش‌ترتیب: اگر $S \subseteq \mathbb{R}$ و S همراه رابطهٔ R یک مجموعهٔ مرتب باشد، مجموعهٔ S را خوش‌ترتیب می‌نامیم؛ در صورتی که هر زیر مجموعهٔ ناتهی S دارای عضو ابتدا باشد.

مثال ۷. آیا مجموعهٔ زیر خوش‌ترتیب است؟

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} : ۲ \le x \le ۶\right\}$$

حل: مجموعهٔ S خوش‌ترتیب نیست؛ زیرا $(۳,۴) \subseteq S$ و بازهٔ $(۳,۴)$ دارای عضو ابتدا نیست. بنابراین اگر S خودش عضو ابتدا داشته باشد، شرط لازم است؛ ولی کافی نیست.

مثال ۸. آیا مجموعهٔ زیر خوش‌ترتیب است؟

$A = \{x \in Z: x > -۳\}$

حل: مجموعهٔ A خوش‌ترتیب است؛ زیرا خودش دارای عضو ابتداست:

$\min A = -۲$

همچنین هر زیرمجموعهٔ آن نیز دارای عضو ابتداست؛ زیرا $A \subseteq Z$ و از پایین کراندار است.

تبصرهٔ ۱. قضیه‌ای تحت این عنوان که «اگر A زیرمجموعه‌ای ناتهی از اعداد صحیح Z و از پایین کراندار باشد، در این صورت، A دارای عضو ابتداست»، ثابت شده است.

تبصرهٔ ۲. قضیه‌ای تحت این عنوان که «هر زیرمجموعهٔ ناتهی Z که از بالا کراندار باشد، دارای عضو انتهاست»، ثابت شده است.

تمرین. آیا مجموعه‌های زیر خوش‌ترتیب هستند؟

I) $A = \{x \in \mathbb{R}: ۱ \le x \le ۳\}$

II) $B = \{x \in Z: x > -۱\}$

III) $C = \{x \in Z: x \le ۲\}$

اصل خوش‌ترتیبی

هر زیرمجموعهٔ ناتهی از اعداد طبیعی، دارای عضو ابتداست.

به طور کلی، اگر مجموعه‌ای دارای این خاصیت باشد که تمام زیرمجموعه‌های ناتهی آن عضو ابتدا داشته باشد، یک مجموعهٔ خوش‌ترتیب نامیده می‌شود. بنابراین، اصل خوش‌ترتیبی را به صورت زیر می‌توان بیان کرد:

«مجموعهٔ اعداد طبیعی ($\mathbb{N}$) خوش‌ترتیب است».

مثال ۹. کدام یک از مجموعه‌های زیر، خوش‌ترتیب است؟

I) $A = \{x \in \mathbb{R}: x \ge -۵\}$

II) $B = \{x \in \mathbb{R}: ۸ \le x \le ۳۴\}$

III) $C = \{x \in Z: x < -۳\}$

IV) $D = \{x \in Z: x > -۴\}$

حل:

I) مجموعهٔ A خودش دارای عضو ابتداست؛ ولی زیرمجموعهٔ $(-۴,-۳) \subseteq A$ عضو ابتدا ندارد.

II) مجموعهٔ B دارای عضو ابتدا و انتهاست؛ ولی زیرمجموعهٔ $(۹,۱۰) \subseteq B$ عضو ابتدا ندارد.

III) مجموعهٔ C خودش دارای عضو ابتدا نیست.

IV) مجموعهٔ D خودش دارای عضو ابتداست و هر زیرمجموعهٔ ناتهی آن نیز دارای عضو ابتداست؛ بنابراین D خوش‌ترتیب است (عدد ۴- یک کران پایین D و هر زیرمجموعهٔ D است).

تمرین. کدام یک از مجموعه‌های زیر، خوش‌ترتیب است؟

I) $A = \{x \in Z: x \le -۲\}$

II) $B = \{x \in \mathbb{N}: x \ge ۷\}$

III) $C = \{x \in \mathbb{R}: x \ge -۳\}$

IV) $D = \{x \in Q: x > \sqrt{۲}\}$

VI) $E = \{x \in Z: -۳۴ < x \le ۸\}$

V) $F = \{x \in Z: x > ۴\}$

در این جا، با بیان اصلی به نام «اصل استقرای ریاضی» که در واقع، با اصل خوش‌ترتیبی معادل است (به بیان دیگر، با قبول هریک می‌توان دیگری را ثابت کرد)، این قسمت را خاتمه می‌دهیم.

اصل استقرای ریاضی[۴]

اگر $S \subseteq \mathbb{N}$ و S دارای دو خاصیت زیر باشد، آن‌گاه $S = \mathbb{N}$.

I) $۱ \in S$.

II) برای هر K، اگر $K \in S$ آن‌گاه $(K+۱) \in S$.

می‌توانیم این اصل را به‌عنوان یک قضیه و با استفاده از اصل خوش‌ترتیبی اثبات کنیم.

برهان. فرض می‌کنیم $S \subseteq \mathbb{N}$ و دو شرط (I) و (II) برقرار باشند. باید ثابت کنیم: $S = \mathbb{N}$. اگر فرض کنیم چنین نباشد (فرض خلف)، پس باید عضوی در $\mathbb{N}$ باشد که آن عضو در S نباشد. به بیان ریاضی $T = \mathbb{N} - S \neq \varnothing$ و چون $T \subseteq \mathbb{N}$، طبق اصل خوش‌ترتیبی باید مجموعهٔ T دارای عضو ابتدا باشد. با فرض این که $t_1 \in T$، عضو ابتدای T باشد، با توجه به (I) یعنی $۱ \in S$ و $T = \mathbb{N} - S$، نتیجه می‌شود $۱ \notin T$؛ پس $t_1 > ۱$ $(t_1 - ۱ > ۰)$؛ بنابراین $(t_1 - ۱) \in \mathbb{N}$ و بدیهی است که

$t_1 > (t_1 - 1)$ و از آن‌جا که t_1 عضو ابتدای T است، پس نتیجه می‌شود که $(t_1 - 1) \notin T$؛ بنابراین باید $(t_1 - 1) \in S$ و با توجه به (II) باید $((t_1 - 1) + 1) \in S$ یا $t_1 \in S$ که با $t_1 \in T$ تناقض دارد؛ پس فرض خلف باطل است و درنتیجه حکم برقرار است؛ یعنی $S = \mathbb{N}$.

نتیجهٔ اصل استقرای ریاضی (معادل اصل استقرای ریاضی)

اگر در اعداد طبیعی گزاره نمایی مانند $p(n)$ داشته باشیم و برای آن $p(1)$ درست باشد و به ازای هر k طبیعی از درستی $p(k)$، درستی $p(k+1)$ نتیجه شود، آن‌گاه $p(n)$ به ازای هر عدد طبیعی چون n درست است.

تعمیم این مطلب: فرض کنیم $p(n)$ گزاره نمایی در اعداد صحیح (Z) باشد و برای یک $m \in Z$، عبارت $p(m)$ درست باشد و هرگاه $n \geq m$ و از درستی $p(n)$، درستی $p(n+1)$ نتیجه شود، آن‌گاه $p(n)$ به ازای هر عدد صحیح $n \geq m$ درست است.

تذکر: این نتیجه می‌تواند در اثبات بسیاری از مسأله‌های ریاضی که به صورت گزاره‌نماهایی در $\mathbb{N}$ مطرح می‌شوند، کاربرد داشته باشد. ولی همیشه به این مطلب باید توجه داشت که این نوع استدلال، در کل ناقص است و ممکن است برخی از گزاره‌نماها همهٔ شرط‌های استقرایی را داشته باشند؛ ولی همواره برقرار نباشند؛ یعنی گزاره‌نما برای $p(1)$ درست باشد و همچنین از درستی $p(k)$، درستی $p(k+1)$ نیز نتیجه شود؛ ولی در کل $p(n)$ درست نباشد.

درواقع استدلال استقرایی، به طور معمول با مقایسهٔ مشاهده‌ها و نتیجه‌های حاصل از آزمایش‌های محدودی آغاز می‌شود. سپس نتیجهٔ این آزمایش‌ها را به همهٔ پدیده‌های مشابه تعمیم می‌دهند. در اصل، استدلال استقرایی، اثبات دقیق ریاضی محسوب نمی‌شود؛ زیرا مجموعهٔ مشاهدات ما همواره محدود است و نمی‌توانیم آزمایش را روی همهٔ پدیده‌ها انجام دهیم. این نوع استدلال، فقط روش خوبی برای حدس‌زدن است و برای اثبات درستی این حدس، باید از اصول استقرای ریاضی استفاده کرد.

مثال ۱۰. با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید:

$$p(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

حل:

$$p(1) = 1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

فرض استقرا: $p(k) = 1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$

حکم استقرا: $p(k+1) = 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$\text{سمت چپ حکم} = \underbrace{1 + 2 + 3 + \cdots + k} + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$= \frac{k^2 + 3k + 2}{2} = \frac{\overbrace{(k+1)(k+2)}^{\text{(سمت راست حکم)}}}{2}$$

مثال ۱۱. ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی n، عدد $25^n - 1$ بر ۸ بخش‌پذیر است.

حل: حکم استقرا را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

$25^n - 1 = 8k$ (حکم استقرا)

$n = 1: 25^1 - 1 = 24 = 8 \times 3;$

و $n = k: 25^k - 1 = 8k_1$ (فرض)

$n = k+1: 25^{k+1} - 1 = 8k_2$ (حکم)

اگر دو طرف فرض را در ۲۵ ضرب کنیم، در این صورت:

$25^{k+1} - 25 = 200k_1;$

$25^{k+1} - 1 = 200k_1 + 24 = 8(25k_1 + 3) = 8k_2$

(حکم برای هر $n \in \mathbb{N}$ برقرار است).

تمرین. به روش استقرا ثابت کنید به ازای هر n طبیعی عدد $p(n) = 2^{2n} + 15n - 1$ بر ۹ بخش‌پذیر است.

(ادامه در شمارهٔ بعد)

زیرنویس

۱. برای اطلاع از آخرین دستاوردها و اکتشافات و تحولات در زمینه نظریه اعداد به سایت نویسنده مقاله رجوع شود.

2. Infimum

3. Supermum

۴. برای اطلاع بیشتر از این موضوع به شماره‌های (۴۰) و (۴۱) مجله ریاضی رشد برهان متوسطه رجوع شود.

۳

حمیدرضا امیری

احتمال شرطی

(قضیه‌ی حاصل‌ضرب، نمودار درختی، افرازها و قضیه‌ی بیز)

برای دانش‌آموزان دوره پیش‌دانشگاهی

اشاره: در شماره‌ی قبل مشاهده شد که با توجه به رابطه‌ی $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ رابطه‌ی $P(A\cap B)=P(B)P(A|B)$ حاصل شده که به قانون ضرب احتمالات معروف است. حال می‌توانیم با استفاده از استقرای ریاضی تعمیم رابطه‌ی فوق را به‌عنوان یک قضیه (قضیه‌ی حاصل ضرب) به صورت زیر بیان کنیم.

قضیه‌ی حاصل‌ضرب: اگر $A_1, A_2, \cdots, A_n$ پیشامدهایی از فضای نمونه‌ای S باشند خواهیم داشت:

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3\cdots\cap A_n)$$
$$=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1\cap A_2)\cdots P(A_n|A_1\cap\cdots\cap A_{n-1})$$

قضیه‌ی حاصل‌ضرب ما را در حل بسیاری از مسائل احتمال یاری می‌دهد. در زیر به بیان چند نمونه از این مسایل می‌پردازیم:

مسأله‌ی ۱: در جعبه‌ای ۱۱ مهره‌ی سیاه و سفید داریم که ۴ تای آن‌ها سیاه است. ۳ مهره را به تصادف و یکی پس از دیگری (بدون جایگذاری) بیرون می‌آوریم. چقدر احتمال دارد که هر سه مهره سفید باشند؟

حل: توجه دارید که در حل این مسأله و پس از خارج کردن مهره‌ی اول به نوعی باید از احتمال شرطی استفاده کرد: یعنی احتمال سفید بودن مهره‌ی دوم را بدهیم به شرط آن که اولی سفید باشد و احتمال سفید بودن مهره‌ی سوم را بدهیم به شرط آن که مهره‌های اول و دوم سفید باشند؛ و به همین دلیل می‌نویسیم: (احتمال سفید بودن مهره‌ی اول و دوم و سوم را به ترتیب A_1, A_2, A_3 فرض می‌کنیم)

$$P(\text{هر سه سفید})=P(A_1)\times P(A_2|A_1)\times P(A_3|A_1\cap A_2)$$
$$=\frac{7}{11}\times\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}=\frac{14}{66}$$

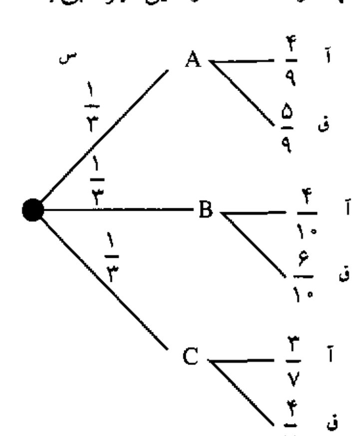
(وقتی می‌خواهیم احتمال سفید بودن مهره‌ی دوم را حساب کنیم فرض می‌کنیم مهره‌ی اول سفید بوده است، پس ۱ مهره از

مهره‌های سفید و ۱ مهره از اعضای فضای نمونه‌ای کم می‌کنیم و برای محاسبه‌ی احتمال سفید بودن مهره‌ی سوم فرض می‌کنیم که دو مهره‌ی اول و دوم سفید بوده‌اند؛ پس شرط سفید بودن مهره‌های اول و دوم برای مهره‌ی سوم فرض شده و به همین دلیل دو مهره از مهره‌های سفید و دو مهره از فضای نمونه‌ای کم کرده‌ایم)

فرآیندهای تصادفی متناهی و نمودار درختی

تعدادی (متناهی) آزمایش که هر کدام از آن‌ها دارای نتایج متناهی با احتمالی معین باشند یک **فرآیند تصادفی متناهی** نامیده می‌شود. نمودارهای درختی، مطابق آنچه در زیر خواهد آمد، روش بسیار خوبی برای تجزیه و تحلیل و تشریح چنین فرآیندهایی به شمار می‌رود. زیرا محاسبه‌ی احتمال فرآیندهای تصادفی از طریق نمودارهای درختی، خطا را به صفر رسانیده و از هرگونه جاافتادگی حالت‌ها یا زیاده‌گویی و تکرار بی‌مورد جلوگیری می‌کند. دقت داشته باشید که محاسبه‌ی احتمال روی هر یک از شاخه‌های نمودار درختی توسط قضیه‌ی حاصل‌ضرب انجام می‌پذیرد.

مسأله‌ی ۲: در سه جعبه‌ی A و B و C به ترتیب ۵ مهره‌ی قرمز و ۴ مهره‌ی آبی؛ ۶ قرمز و ۴ آبی؛ ۴ قرمز و ۳ آبی وجود دارد. یکی از این سه جعبه را به تصادف انتخاب و مهره‌ای از آن خارج می‌کنیم. چقدر احتمال دارد این مهره آبی باشد؟

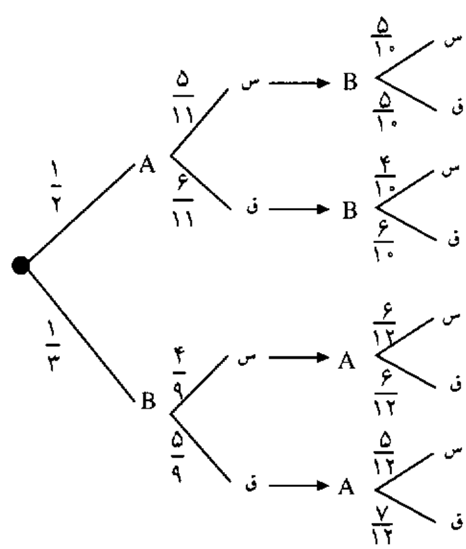


$$P(\text{آبی})=\frac{1}{3}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{7}=\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}+\frac{4}{10}+\frac{3}{7}\right)$$

مسأله‌ی ۳: در جعبه‌ی A، ۵ مهره‌ی سفید و ۶ مهره‌ی قرمز و در جعبه‌ی B، ۴ مهره‌ی سفید و ۵ مهره‌ی قرمز موجود است. یکی از دو جعبه را به تصادف انتخاب و مهره‌ای از آن خارج کرده و در جعبه‌ی دیگر می‌گذاریم و سپس از آن جعبه‌ی دیگر مهره‌ای به تصادف برمی‌داریم.

الف: چقدر احتمال دارد مهره‌ی دوم قرمز باشد؟

ب: چقدر احتمال دارد دو مهره همرنگ باشند؟

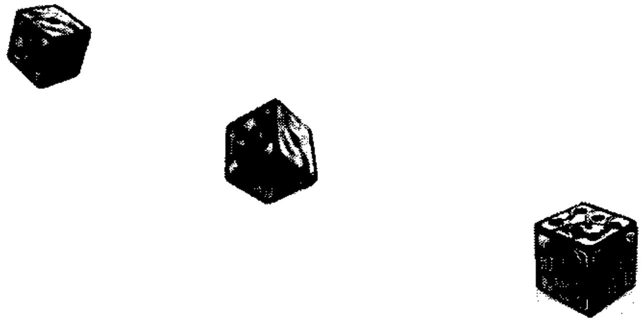


الف: با توجه به نمودار و این که به طور مثال اگر مهره‌ی سفید از جعبه‌ی A خارج شود و در جعبه‌ی B قرار گیرد ۱ مهره‌ی سفید به مهره‌های سفید و ۱ مهره به فضای نمونه‌ای جعبه‌ی B اضافه می‌شود؛ داریم (روی مسیرها یا شاخه‌هایی حرکت می‌کنیم که به قرمز (ق) منتهی شود):

$$P(\text{قرمز})=\frac{1}{2}\times\frac{5}{11}\times\frac{5}{10}+\frac{1}{2}\times\frac{6}{11}\times\frac{6}{10}+\frac{1}{2}\times\frac{4}{9}\times\frac{6}{12}+\frac{1}{2}\times\frac{5}{9}\times\frac{7}{12}$$

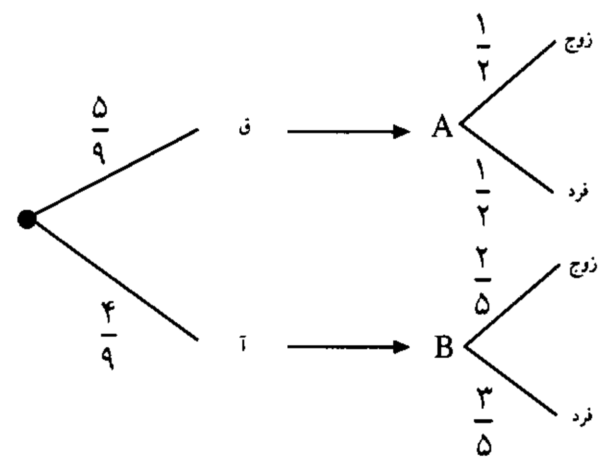
ب: برای حل قسمت ب روی مسیرهایی حرکت می‌کنیم که دو سفید یا قرمز وجود داشته باشد.

$$P(\text{دومهره همرنگ})=\frac{1}{2}\times\frac{5}{11}\times\frac{5}{10}+\frac{1}{2}\times\frac{6}{11}\times\frac{6}{10}$$
$$+\frac{1}{2}\times\frac{4}{9}\times\frac{6}{12}+\frac{1}{2}\times\frac{5}{9}\times\frac{7}{12}$$



مسأله‌ی ۴ : در جعبه‌ای ۵ مهره‌ی قرمز و ۴ مهره‌ی آبی وجود دارد و دو مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $B=\{۵,۶,۷,۸,۹\}$ مفروضند. یک مهره از جعبه به تصادف خارج می‌کنیم؛ اگر قرمز باشد از مجموعه‌ی A و اگر آبی باشد از مجموعه‌ی B عددی به تصادف برمی‌داریم. چقدر احتمال دارد عدد انتخاب شده فرد باشد؟

حل : نمودار درختی این فرایند تصادفی را رسم می‌کنیم:



$$P(\text{فرد})=\frac{۵}{۹}\times\frac{۱}{۲}+\frac{۴}{۹}\times\frac{۳}{۵}$$

قانون بیز و کاربردهای آن

با توجه به این که $(A\cap B)=(B\cap A)$ و قانون ضرب احتمالات می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{array}{l}P(A\cap B)=P(B)\times P(A|B)\\ P(B\cap A)=P(A)\times P(B|A)\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow P(B)\times P(A|B)=P(A)\times P(B|A)$$

$$\Rightarrow P(A|B)=\frac{P(A)}{P(B)}\times P(B|A)$$

در واقع قانون فوق ارتباطی است بین $P(A|B)$ و $P(B|A)$ و این ارتباط در حل بسیاری از مسائل پیچیده‌ی احتمال به کمک ما می‌آید و راه‌حل را قابل فهم و ساده در اختیار ما قرار می‌دهد.

گاهی اوقات شرط و مشروط به گونه‌ای تعریف می‌شوند که ما نمی‌توانیم ارتباط لازم و قابل فهمی بین آن‌ها برقرار کنیم، ولی اگر جای شرط و مشروط را عوض کنیم مسأله به راحتی قابل فهم و حل است؛ به عبارت دیگر ممکن است $P(A|B)$ مفهوم نباشد ولی $P(B|A)$ کاملاً قابل درک باشد. به مسأله‌ی بعد توجه کنید:

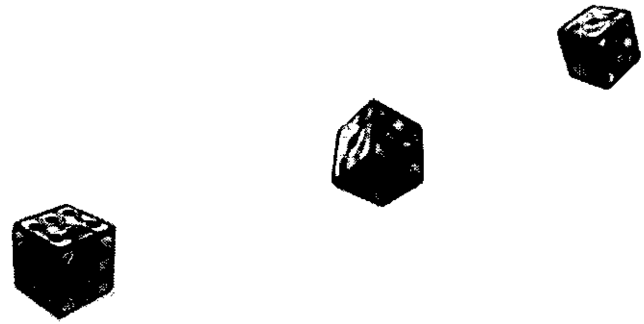
مسأله‌ی ۵ : در جعبه‌ی A، ۴ مهره‌ی قرمز و ۴ مهره‌ی آبی و در جعبه‌ی B، ۶ مهره‌ی قرمز و ۲ مهره‌ی آبی و در جعبه‌ی C، ۳ مهره‌ی قرمز و ۵ مهره‌ی آبی وجود دارد. یکی از سه جعبه را به تصادف انتخاب و مهره‌ای از آن خارج می‌کنیم. اگر این مهره آبی باشد چقدر احتمال دارد از جعبه‌ی C باشد؟

حل : اگر B را پیشامدی که رخ داده (مهره آبی است) و A را پیشامد مطلوب (مهره از جعبه‌ی C باشد) فرض کنیم باید $P(A|B)$ را به دست آوریم که تا حدودی نامفهوم است (احتمال این که از جعبه‌ی C باشد به شرطی که بدانیم آبی است) ولی اگر جای A و B عوض شود $P(B|A)$ کاملاً مفهوم است یعنی احتمال آن که مهره آبی باشد به شرط آن که بدانیم از جعبه‌ی C انتخاب شده است که برابر است با $\frac{۵}{۸}$، و با توجه به قانون بیز یعنی $P(A|B)=\frac{P(A)}{P(B)}\times P(B|A)$ محاسبه‌ی $P(A|B)$ نیز آسان خواهد بود (توجه دارید که $P(A)$ یعنی احتمال آن که مهره از جعبه‌ی C باشد که $\frac{۱}{۳}$ است و $P(B)$ یعنی احتمال آبی بودن مهره که شبیه مسأله‌ی ۲ و به روش درختی قابل محاسبه است.

$$P(A|B)=\frac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۱}{۳}(\frac{۴}{۸}+\frac{۲}{۸}+\frac{۵}{۸})}\times\frac{۵}{۸}=\frac{\frac{۵}{۸}}{\frac{۱۱}{۸}}=\frac{۵}{۱۱}$$

یک راه‌حل شگفت‌انگیز و بسیار ساده برای مسأله‌ی فوق

ما می‌خواهیم احتمال این را حساب کنیم که مهره از جعبه‌ی

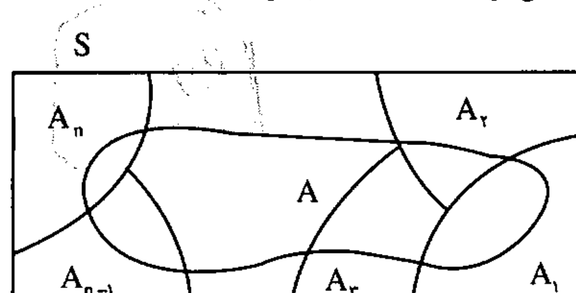


C باشد به شرط آن که بدانیم مهره‌ی انتخابی آبی است. پس فضای نمونه‌ای را پیشامد رخ داده در نظر می‌گیریم، یعنی تعداد کلّ مهره‌های آبی که تعدادشان ۱۱ عدد است و تعداد مهره‌های آبی در جعبه‌ی C، ۵ می‌باشد، پس احتمال مورد نظر، $\frac{5}{11}$ است!

تذکر بسیار مهمّ: از روش ذکر شده فقط وقتی می‌توان استفاده کرد که تعداد کلّ مهره‌ها در هر جعبه با جعبه‌های دیگر برابر باشد. در مسأله‌ی قبل هر سه جعبه دارای ۸ مهره می‌باشند و در واقع فضای نمونه‌ای هر جعبه با جعبه‌های دیگر همشانس است. حال اگر تعداد مهره‌های جعبه‌ها برابر نباشد، جواب صحیح فقط از طریق قانون بیز قابل محاسبه است.

قضیه‌ی افرازها (قانون احتمال کلّ)

گاهی اوقات پیشامد A از فضای نمونه‌ای S پیشامدی با تعداد حالت‌های بسیار زیاد بوده و لذا عملاً امکان محاسبه‌ی احتمال رخداد آن از طریق نمودار درختی ضعیف است و حجم زیادی از عملیات جبری را به خود اختصاص می‌دهد. حال اگر بتوانیم افرازی مناسب و شناخته‌شده برای پیشامد A در نظر بگیریم، با توجه به قضیه‌ی افرازها یا قانون احتمال کلّ به راحتی می‌توان با راه‌حلّی کوتاه، P(A) را محاسبه کرد.



با توجه به شکل قبل می‌توان نوشت:

$$A = S\cap A = (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)\cap A$$
$$= (A_1 \cap A)\cup \cdots \cup (A_n \cap A)$$

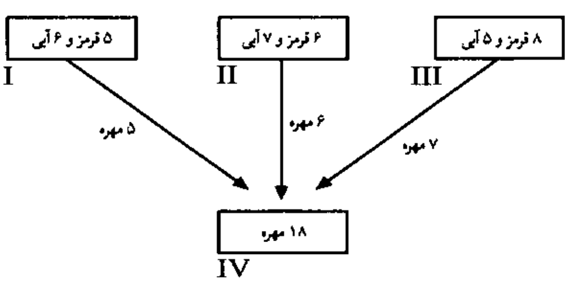
و چون A_iها افرازی برای مجموعه‌ی A هستند لذا همه‌ی $(A_i \cap A)$ ها با هم ناسازگارند و می‌توان نوشت،

$$P(A) = P(A_1 \cap A) + P(A_2 \cap A) + \cdots + P(A_n \cap A)$$

$$\xrightarrow{\text{قانون ضرب}} P(A) = P(A_1)P(A|A_1)$$
$$+P(A_2)P(A|A_2) + \cdots + P(A_n)P(A|A_n)$$
$$\Rightarrow P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(A|A_i)$$

تساوی اخیر به قانون احتمال کلّ معروف است.

مسأله‌ی ۶: در سه جعبه‌ی (I)، (II) و (III) به ترتیب، ۵ قرمز و ۶ آبی، ۶ قرمز و ۷ آبی، ۸ قرمز و ۵ آبی وجود دارد از جعبه (I) ۵ مهره و از جعبه‌ی (II) ۶ مهره و از جعبه‌ی (III) ۷ مهره به تصادف خارج کرده و به صورت دَرهم در جعبه‌ی شماره (IV) که خالی بوده، می‌ریزیم و سپس مهره‌ای از جعبه‌ی (IV) به تصادف برمی‌داریم چقدر احتمال دارد این مهره آبی باشد؟



همان‌طور که مشاهده می‌کنید برای ۱۸ مهره‌ای که در جعبه‌ی (IV) قرار گرفته حالت‌های بسیار متنوع و زیادی می‌توانیم در نظر بگیریم. بنابراین به فکر افرازی مناسب برای فضای نمونه‌ای هستیم و اگر پیشامد آبی بودن مهره را A فرض کنیم، بهترین و مناسب‌ترین افراز به صورت زیر تعریف می‌شود.

A_1 = مهره از جعبه‌ی (I) باشد

A_2 = مهره از جعبه‌ی (II) باشد

A_3 = مهره از جعبه‌ی (III) باشد

در واقع ما مسأله را از آخر به اول نگاه کردیم؛ یعنی گفتیم که اگر از جعبه‌ی (IV) مهره‌ای به تصادف خارج کنیم از این سه

حالت خارج نیست: یا مهره از جعبه‌ی (I) بوده یا از جعبه‌ی (II) و یا جزء هفت مهره‌ای بوده که از جعبه‌ی (III) درون (IV) قرار گرفته است. دقت دارید که افراز فوق کاملاً شناخته شده و مفهوم هستند، یعنی جعبه‌های (I)، (II) و (III) را ما کاملاً می‌شناسیم؛ حال می‌توان نوشت:

$$P(A)=P(A_1)\times P(A|A_1)+P(A_2)\times P(A|A_2)$$
$$+P(A_3)\times P(A|A_3)$$

$P(A_1)$ یعنی احتمال آن که مهره از جعبه‌ی (I) باشد و مقدار این احتمال $\frac{5}{18}$ است زیرا از ۱۸ مهره‌ای که در جعبه‌ی (IV) قرار دارد، ۵ مهره از جعبه‌ی (I) است و $P(A|A_1)$ یعنی احتمال آن که مهره آبی باشد به شرط آن که بدانیم از جعبه‌ی (I) است که مقدار آن برابر است با $\frac{6}{11}$ (۶ آبی در بین ۱۱ مهره‌ی جعبه‌ی (I) وجود دارد) پس به همین صورت برای قسمت‌های بعد می‌توان نوشت:

$$P(A)=\frac{5}{18}\times\frac{6}{11}+\frac{6}{18}\times\frac{7}{13}+\frac{7}{18}\times\frac{5}{13}$$

نتیجه‌ی مهّم: با توجه به قانون بیز و قانون احتمال کلّ می‌توان نوشت:

$$P(A|B)=\frac{P(A)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}\times P(B|A)$$

(در بعضی از منابع رابطه‌ی فوق را به‌عنوان قضیه‌ی بیز معرفی کرده‌اند)

تذکر مهّم: در مسائل احتمال شرطی که رنگ یا نوع یا جنس اشیاء مورد نظر باشد از نمودار درختی استفاده می‌شود ولی اگر رنگ یا نوع یا جنس اشیاء مشخص و مفروض در نظر گرفته شود و منبع آن شیئی مورد نظر باشد از قضیه‌ی بیز استفاده می‌شود.

تذکر: گاهی اوقات در حل مسائل احتمال شرطی از رابطه‌ی اصلی احتمال شرطی استفاده می‌شود، یعنی از رابطه‌ی $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$. به مثال بعد توجه کنید.

مسأله‌ی ۷: در یک کلاس ۲۰٪ دانش‌آموزان در درس ریاضی، ۱۵٪ در درس شیمی و ۱۰٪ در هر دو درس مردود شده‌اند. دانش‌آموزی را به طور تصادفی از این کلاس انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن که:

I) در درس ریاضی مردود باشد به شرط آن که بدانیم در شیمی مردود است.

II) در درس شیمی مردود باشد به شرط آن که بدانیم در ریاضی مردود است.

III) در درس ریاضی یا شیمی مردود باشد.

حل: فرض کنیم:

پیشامد مردود بودن در ریاضی = M

پیشامد مردود بودن در شیمی = C

$$\text{I)}\ \ P(M|C)=\frac{P(M\cap C)}{P(C)}=\frac{\frac{10}{100}}{\frac{15}{100}}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$$

$$\text{II)}\ \ P(C|M)=\frac{P(C\cap M)}{P(M)}=\frac{\frac{10}{100}}{\frac{20}{100}}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$$

$$\text{III)}\ \ P(M\cup C)=P(M)+P(C)-P(M\cap C)$$
$$=\frac{20}{100}+\frac{15}{100}-\frac{10}{100}$$
$$\Rightarrow P(M\cup C)=\frac{25}{100}$$

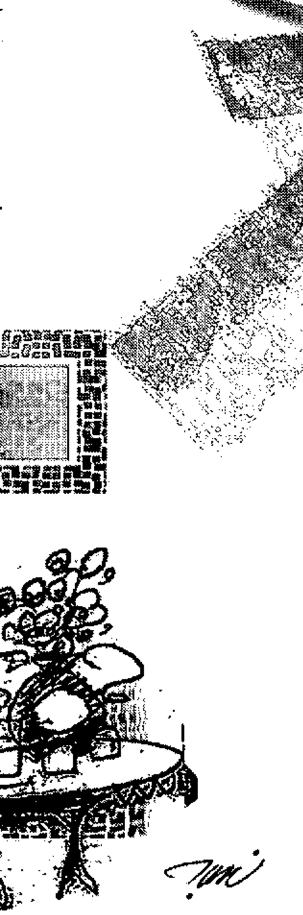
تذکر: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و $\overline{A}$ متمم پیشامد A باشد. در این صورت داریم:

$$P(\overline{A}|B)=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B\cap\overline{A})}{P(B)}=\frac{P(B-A)}{P(B)}$$
$$=\frac{P(B)-P(B\cap A)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}-\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$
$$=1-P(A|B)$$
$$\Rightarrow P(\overline{A}|B)=1-P(A|B)$$

۱۷

○ ترجمه:
غلامرضا یاسی‌پور

نظریهٔ مقدماتی مجموعه‌ها



مقدمه

جرج کانتور[1] در ۱۸۹۵ در آغاز اثرش Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre تعریف زیر را آورده‌است:

منظورمان از **مجموعهٔ** "set" هر گردایهٔ M از اشیای معین، متمایز m از برداشت یا تصورمان (که **عنصرها** "elements" M نامیده می‌شوند) به‌صورت یک کل است.

به این ترتیب، مثال‌های مجموعه‌ها عبارت‌اند از: **Z**، مجموعهٔ جمیع اعداد درست، که در این جا **اعداد صحیح** "integers" نامیده می‌شوند؛ **C,R,Q**، به ترتیب، مجموعه‌های جمیع **اعداد گویا** rational numbers، جمیع **اعداد حقیقی** "real numbers" و جمیع **اعداد مختلط** "complex numbers"، M مجموعه‌ای شامل جمیع قمرهای مریخ و حتی H، مجموعهٔ جمیع اختاپوس‌های دوپایی که اول اردیبهشت گذشته از آبادان دیدن کرده‌اند.

نیاز کانتور برای چنین تعریفی در حدود ۱۸۷۲ از تحقیقاتش درمورد یکتایی ممکن نمایش توابع توسط توابع مثلثاتی برخاسته‌بود. در موقع خود آشکار شد که تمام ریاضیات را می‌توان بر پایه‌ای مجموعه ـ نظریه‌ای "set - theoric base" مبتنی کرد. به‌خصوص **کانتور و ریچارد دکیند**، در اثرشان **Stetigkeit und irrationale Zahle** (۱۸۷۲)، نشان دادند چگونه **اعداد گنگ** "irrational numbers" تا اندازه‌ای ناملموس(یعنی آن عناصری از **R** که در **Q** نیستند) را می‌توان با استفاده از مفهوم مجموعه‌ها، بر حسب **Q** اعتبار داد. و **گوتلوب فرگه** "Gottlob Frege" (۱۸۸۴) مبرهن کرد چگونه اعداد ۰، ۱، ۲، ۳، ... را می‌توان با عبارت‌های مجموعه ـ نظریه‌ای تعریف کرد. علاوه بر این، مفهوم تابع را نیز می‌توان از لحاظ مجموعه ـ نظریه‌ای تعریف نمود.

بنابراین تعجب آور نیست که امروزه نمادگذاری، اصطلاحات و مفهوم‌های ساده‌تر نظریهٔ مجموعه‌ها، قسمت اصلی زبانی را تشکیل می‌دهند که مباحث ریاضی معاصر بر آن بنا شده‌اند.

مجموعه‌ها

کلمه‌های مجموعه "set"، **گردایه** "collection" و **دسته** "aggregate" را مترادف درنظر می‌گیریم. گاهی عنصرهای یک مجموعه را **عضوها** "members" آن می‌نامیم. اگر A یک مجموعه و شیء a عنصری از A باشد، می‌نویسیم $a \in A$. معمولاً نماد $a \in A$ را به‌صورت "**a متعلق است به A**" می‌خوانیم. اگر a عضو A نباشد، می‌نویسیم $a \notin A$ و می‌گوییم «**a به A متعلق نیست**».

به این ترتیب می‌توان نوشت:

$$3 \in Z, \frac{5}{3} \notin Z, \frac{5}{3} \in Q, \pi \in \mathbb{R}, \pi \notin Q$$

مجموعه‌ها را می‌توان با فهرست کردن عضوهایشان بین دو آکولاد نیز توصیف کرد. البته توصیف مجموعه‌های شامل بی‌نهایت عضو به این طریق غیرممکن است. در چنین مواقعی،

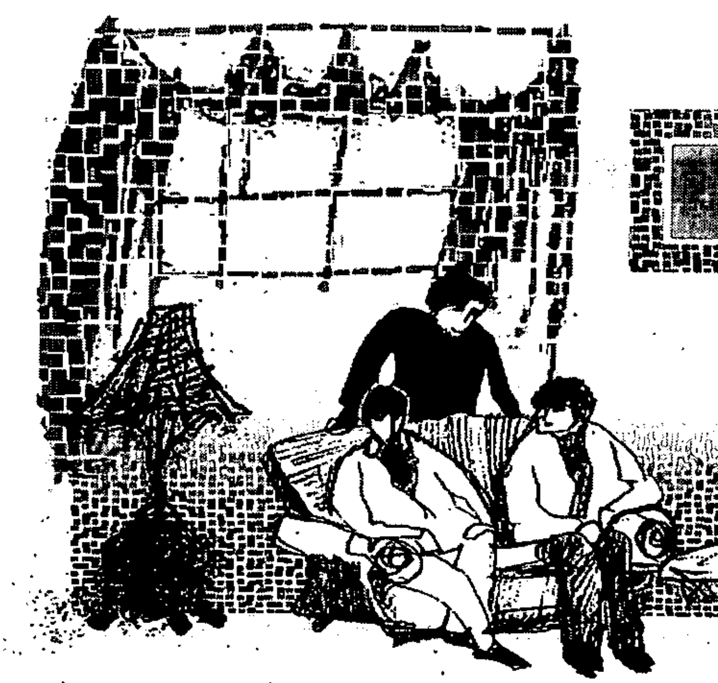
ممکن است وسوسه شده بنویسیم $\{x:P(x)\}$ که در آن $P(a)$ مشخص می‌کند که شیء a دارای ویژگی P است و در نتیجه در مجموعهٔ موردنظر قرار دارد.[۲] به این ترتیب Z^+، مجموعهٔ جمیع اعداد صحیح مثبت را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$Z^+ = \{x : x \in Z, x > 0\}$$

(این نماد به این صورت خوانده می‌شود Z بعلاوه، مجموعهٔ تمام xها است، به طوری که x به Z تعلق دارد و x بزرگ‌تر از صفر است.) گرچه گاهی نیز نماد:

$$Z^+ = \{1,2,3,4,\ldots\}$$

به کار می‌رود که سه نقطهٔ آن عبارت مبهم و «غیره» را مشخص



می‌کند. مجموعه‌های متناهی کوچک را می‌توان به چند طریق نمایش داد. فی‌المثل داریم.

M={x : x فوبوس است یا x دیموس است}

یا:

M={x : x ماه مریخ است}

اگر A و B مجموعه باشند و اگر هر عنصر A به مجموعهٔ B متعلق باشد، می‌گوییم A زیرمجموعهٔ "subset"ای از B یا A مشمول[۳] "contained"، در B است، و می‌نویسیم $A \subseteq B$ (یا $B \supseteq A$، مورد اخیر به صورت «B شامل A» است. نیز خوانده می‌شود). در حالت خاص به‌ازای هر مجموعهٔ A، $A \subseteq A$ و اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$، آن‌گاه $A \subseteq C$.

با معلوم‌بودن $A \subseteq B$، اگر بدانیم (و اگر برایمان مهم باشد!) که B شامل عنصرهایی غیرواقع در A است، آن‌گاه می‌نویسیم $A \subset B$ (یا $B \supset A$) یا حتی اگر تأکید بیشتری لازم باشد $A \subsetneq B$ ($B \supsetneq A$). در این صورت A را زیرمجموعهٔ سره "proper B subset" می‌نامیم. به این ترتیب، مطابق با تأکید لازم می‌نویسیم $Z \subset Q, Z \subset Q$ یا $Z \subsetneq Q$.

اگر A زیرمجموعهٔ B نباشد، می‌نویسیم $A \not\subseteq B$ ($B \not\supseteq A$). توجه داشته باشید که $A \not\subseteq B$ وقتی و تنها وقتی که A شامل حداقل یک عضو باشد که در B نیست.

A و B را برابر "equal" می‌گوییم و می‌نویسیم A=B، وقتی و تنها وقتی که $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ همزمان برقرار باشند. نتیجه می‌شود که یکی از طریق‌های مفید اثبات برابری دو مجموعهٔ A و B اثبات $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ هردو، است.

اخطار: سعی داشته باشید $\in$ را با $\subseteq$ اشتباه نکنید. به بیانی تقریبی: $\in$ در رابطه با مجموعه با عنصرهایش؛ و $\subseteq$ در رابطه با مجموعه با زیرمجموعه‌هایش به کار می‌رود. در توضیح این مطلب، فرض می‌کنیم:

$$A = \{1,\{1\},2,\{3,4\},Z\}$$

در این صورت A مجموعه‌ای با پنج عنصر ۱، {۱}، ۲، {۳، ۴} و Z است. در نتیجه:

$$1 \in A, 1 \not\subseteq A, \{1\} \in A, \{1\} \subseteq A, \{2\} \notin A, \{2\} \subseteq A$$

$$\{3\} \notin A, \{3\} \not\subseteq A, \{3,4\} \in A, \{3,4\} \not\subseteq A, Z \in A, R \subseteq A$$

(در ضمن، مجموعه‌هایی چون {۲} که شامل دقیقاً یک عنصرند، منفرد "Singleton" نامیده می‌شوند.)

اکنون مجموعه‌های

$$F = \{x : x \in Z, x^2 < 0\}, G = \{\ \}$$

و H پیش از این ذکرشده را در نظر می‌گیریم. آشکار است که هیچ‌یک از آنها اصلاً شامل عضوی نیست. مجموعهٔ بدون عضو را مجموعهٔ تهی "empty set" می‌نامیم.

به‌رغم تفاوت‌های واقع در تعریف H,G,F می‌توان نشان داد

که تنها یک مجموعهٔ تهی وجود دارد. برای اثبات این و چیزی هم بیشتر از آن، فرض می‌کنیم $\varnothing$ مجموعه‌ای تهی و A مجموعه‌ای دلخواه باشد. در این صورت $\varnothing \subseteq A$ ، زیرا در غیر این صورت $\varnothing \not\subseteq A$ و بنابراین $\varnothing$ شامل عنصری است که در A یافت نمی‌شود.

اما این احمقانه است؛ زیرا $\varnothing$ دارای عضو نیست. اکنون فرض می‌کنیم $\varnothing_1$ مجموعه تهی دیگری باشد. از آن‌جا که $\varnothing$ تهی است $\varnothing \subseteq \varnothing_1$. از آن‌جا که $\varnothing_1$ تهی است $\varnothing_1 \subseteq \varnothing$. و این دو نابرابری، چون با هم درنظر گرفته شوند، مستلزم $\varnothing_1 \subseteq \varnothing$ اند. به این ترتیب می‌توان از **مجموعهٔ تهی(یکتا)** سخن گفت.

مسأله ۱ . اشتباه استدلال زیر در اثبات $\varnothing \not\subseteq A$ چیست؟

در اثبات $B \subseteq A$ باید نشان دهیم هر عنصر B در A نیز موجود است. از آنجا که $\varnothing$ دارای عضوی نیست، نمی‌توان نشان داد که $\varnothing \subseteq A$ ؛ درنتیجه $\varnothing \not\subseteq A$.

فرض می‌کنیم A و B مجموعه باشند. در این صورت مجموعه‌های:

$$A \cap B = \{x : x \in A, x \in B\}$$

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ یا } x \in B \text{ (یا هر دو)}\}$$

را به ترتیب، **اشتراک** "intersection"و **اجتماع** "union" A و B می‌نامیم. به این ترتیب اگر:

$$A = \{۳,۱,۴\}$$

و

$$B = \{\pi, ۴, \text{البورکرامول}, ۱\}$$

باشد، آن‌گاه:

$$A \cap B = \{۱,۴\}$$

در حالی که:

$$A \cup B = \{۳,۱,۴,\pi, \text{البورکرامول}\}$$

بلافاصله نتیجه می‌شود که به‌ازای مجموعه‌های A و Bداریم:

$$A \cap A = A, \quad A \cap B = B \cap A, \quad A \cap \varnothing = \varnothing$$

$$A \cup A = A, \quad A \cup B = B \cup A, \quad A \cup \varnothing = A$$

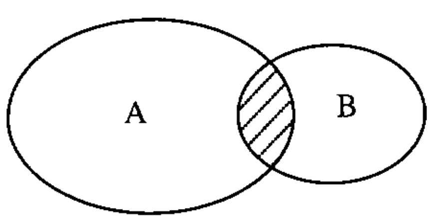
اشتراک و اجتماع مجموعه‌ها را می‌توان بر حسب ناحیه‌های سایه خوردهٔ واقع در شکل ۱ درنظر گرفت؛ چنین شکل‌هایی را نمودارهای ون "Venn diagrams" می‌نامیم.

اگر مجموعهٔ سوم Cای را معرفی کنیم و ناحیهٔ مشترک $A \cup B$ و C را سایه بزنیم(شکل ۲). آشکار می‌شود که مجموعه‌های $(A \cup B) \cap C$ و $(A \cap C) \cup (B \cap C)$ برابرند.

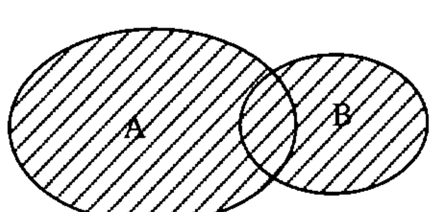
این مطلب را می‌توان با استدلالی که به شکل وابسته نباشد، تحقیق کرد. [شکل می‌تواند فریب دهنده باشد. اثبات تصویری موردبحث درصورتی که، مثلاً، $C \cap B = \varnothing$ یا $A \subseteq B$ باشد، چه اعتباری دارد؟

بسط تعریف اجتماع و اشتراک به گردایه‌هایی بزرگ‌تر، اما متناهی، حتی نامتناهی از مجموعه‌ها، بدون اشکال است. به‌عنوان مثال، اگر به‌ازای هر $n \in Z^+$

$$S_n = \left\{x : x \in R, -\frac{۱}{n} < x < \frac{۱}{n}\right\}$$

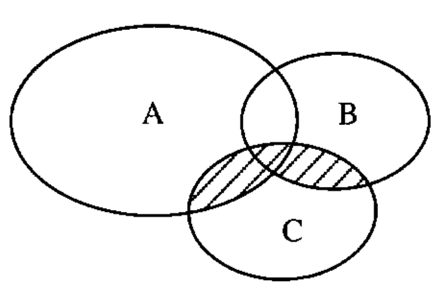


$A \cap B$



$A \cup B$

شکل ۱



شکل ۲ $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

را تعریف کنیم، در این صورت، مجموعهٔ عنصرهای مشترک جمیع S_n ها با $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ تعریف می‌شود. در واقع $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ برابر $\{0\}$، مجموعهٔ شامل یک عدد حقیقی ۰ است. در این جا Sهای گوناگون را با عنصرهای مجموعهٔ Z^+ «شاخص دار» کرده‌ایم. می‌توانیم عنصرهای $\mathbf{R}^+$ (تمرین ۶ را ملاحظه کنید) یا درواقع عنصرهای هر مجموعه را نیز به‌عنوان **مجموعهٔ شاخص** "indexing set" به‌کار بریم

طریق دیگر ساختن مجموعه‌ای جدید از دو مجموعهٔ قدیم A و B تعریف **تفاضل** "difference"آنهاست.

$$A \setminus B = \{x : x \in A, x \notin B\}$$

در این صورت، در حالت خاص، مجموعهٔ جمیع عددهای حقیقی نا صفر را با $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف بعدی توسط مختصات معرفی‌شده در صفحهٔ حقیقی مطرح شده‌است. نقطه‌های واقع در صفحهٔ حقیقی با جفت‌های عددهای حقیقی، و **برعکس**، چنان در نظر گرفته شده‌اند که اگر به نقطه‌های P و Q، به‌ترتیب، مختصات (a_1, a_2) و (b_1, b_2) داده شوند، آن‌گاه P و Q وقتی و تنها وقتی منطبق می‌شوند که $a_1 = b_1$ و $a_2 = b_2$. در حالت خاص $(2, 1)$ و $(1, 2)$ متناظر با نقطه‌هایی متمایزند. از آن‌جا که تنها تمایز بین $(2, 1)$ و $(1, 2)$ ترتیبی است که عددهای ۱ و ۲ طبق آن نوشته شده‌اند به جفت‌های عددهایی چنین به صورت **جفت‌های مرتب** اشاره کنیم.

به صورت عمومی‌تر تعریف زیر را به دست می‌دهیم.

تعریف. فرض می‌کنیم A و B مجموعه باشند. در این صورت $A \times B$ **مجموعهٔ جفت‌های مرتب** به صورت زیر است:

$$\{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

$A \times B$ را حاصلضرب دکارتی A و B می‌نامیم. کلمهٔ «مرتب» مستلزم این است که برابری عنصرهای (a,b)، (c,d) ی واقع در $A \times B$، وقتی و تنها وقتی تعریف شود که $a = c$ و $b = d$ **هردو برقرار باشند.**

(i) مفهوم جفت مرتب را می‌توان به روشی صرفاً مجموعه – نظریه‌ای "set - theoretic" توصیف کرد.

(ii) به طریقی مشابه می‌توان $A \times B \times C$، مجموعهٔ **سه‌تایی‌های مرتب "ordered triples"** (a,b,c) را تعریف کرد که در آن $a \in A$، $b \in B$، $c \in C$. شخص می‌تواند حتی حاصلضرب دکارتی گردایه‌ای از بی‌نهایت مجموعه را تشکیل دهد.

مثال. اگر $A = \{1, \pi\}$ ، $B = \{1, e, h\}$، آن‌گاه

$$A \times B = \{(1,1), (1,e), (1,h), (\pi,1), (\pi,e), (\pi,h)\}$$

توجه داشته باشید که $A \times B$ و $B \times A$ هریک $(6 = 3 \times 2 = 2 \times 3)$ عنصر دارند؛ اما $A \times B \neq B \times A$ [چرا نیست؟]

آخرین سخن دربارهٔ تولید مجموعه‌ها "set prodution":

تعریف. فرض می‌کنیم A مجموعه‌ای دلخواه باشد. با $\rho_{(A)}$ مجموعهٔ جمیع زیرمجموعه‌های A را نمایش می‌دهیم. $\rho_{(A)}$ به مجموعهٔ توانی "power set" A موسوم است.

مثال اگر $A = \{a, b, \gamma\}$، آن‌گاه:

$$\rho_{(A)} = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{\gamma\}, \{a, b\}, \{b, \gamma\}, \{\gamma, a\}, \{a, b, \gamma\}\}$$

توجه داشته باشد که A دارای سه عنصر است، در حالی که $\rho_{(A)}$، 2^3 عنصر دارد.

پانوشت

۱. جورج کانتور(۳ مارس ۱۸۴۵ - ۶ ژانویهٔ ۱۹۱۸).

۲. شاید شگفت‌انگیز باشد که تعریفی چنین ساده می‌تواند به تناقضاتی بینجامد. درواقع حتی کانتور نیز این موضوع را دریافت، اگرچه بهترین مثال در این مورد از آن ریاضیدان و فیلسوف انگلیسی برتراند راسل است که p(x)را شرط $x \notin x$ در نظر گرفت. واضح است که $1 \notin 1$ ؛ ، $z \notin z$ بنابراین $R = \{x : x \notin x\}$ مطمئناً ناتهی است. در این صورت، شخص می‌تواند بپرسد: «آیا R متعلق به R است؟» اگر چنین باشد، در این صورت R به علت این که عضوی از R است، در شرط $(x \notin x)$ صدق می‌کند؛ در نتیجه $R \notin R$. اگر نباشد، آن گاه R در آزمون $x \notin x$ بازمی‌ماند و نتیجه می‌گیریم $R \in R$. به این ترتیب $R \in R$ وقتی که و تنها وقتی که $R \notin R$. اکسیومی سازی‌های گوناگونی از نظریهٔ مجموعه ها(به خصوص اکسیومی سازی تسرملو "zermelo")؛ برای اجتناب از ظهور چنین پارادوکس هایی طرح شده‌اند: جمیع مجموعه‌های تحت‌بررسی ما در طرح تسرملو پذیرفتنی اند).

۳. بعضی از ریاضیدانان برای اجتناب از اشتباه ممکن در کاربرد بعدی «A شامل a است» در توصیف $a \in A$ گنجیده در "included in" را ترجیح می‌دهند. این کاربرد دوگانگی «شامل»، بد، اما معمول است.

قضیه مقدار میانگین و قضیه رول

● میر شهرام صدر

برای دانش آموزان دورهٔ پیش دانشگاهی ـ رشتهٔ ریاضی

میشل رول[1] (۱۷۱۹ـ۱۶۵۲) ریاضی‌دان فرانسوی بیشتر ریاضیات را خودآموز فراگرفته بود. کار او در اصل حسابداری بود، ولی هرگاه وقتی پیدا می‌کرد روی جبر و معادلات دیوفانتی نیز کار می‌کرد.

ژاک اُزانام[2] (۱۷۱۷ـ۱۶۴۰) یکی از ریاضی‌دانان فرانسوی معاصر با رول بود که مسائل مهمی را در زمینهٔ ریاضیات طرح کرده بود. بعد از این که رول راه‌حل دقیقی را برای یکی از مسائل ریاضیات تفریحی اُزانام ارائه کرد، دولت وقت از تحقیقات ریاضی او حمایت کرد و به همین سبب در سال ۱۶۹۰ رول کتاب آموزشی جبر[3] را انتشار داد. این کتاب شامل مباحث تازه‌ای دربارهٔ دستگاه اعداد حقیقی و روش‌هایی برای یافتن ریشه‌های معادلات بود. رول سپس در سال ۱۶۹۱ قضیهٔ مشهور خود را منتشر کرد. صورت قضیهٔ او، که به قضیهٔ رول مشهور شده، این است که:

«بین هر دو صفر یک تابع چندجمله‌ای[4]، نقطه‌ای وجود دارد که مشتق تابع در آن نقطه برابر با صفر است.» در این مقاله به بیان این قضیه و کاربردهای آن می‌پردازیم.

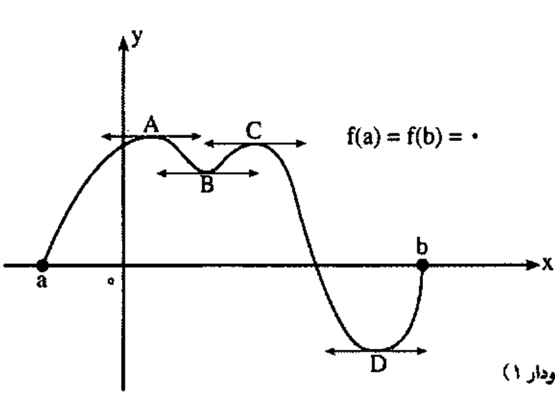
قضیه رول. فرض کنید تابعی مانند f دارای شرایط زیر باشد:

۱) روی بازه بسته $[a,b]$ پیوسته باشد؛

۲) روی بازه (a,b) مشتق‌پذیر باشد؛

۳) $f(a)=f(b)=0$.

در این صورت حداقل یک عدد مانند c واقع در بازه (a,b) وجود دارد، به‌طوری که $f'(c)=0$



(نمودار ۱)

در نمودار ۱ چهار نقطه در بازه باز (a,b) وجود دارد که

مشتق در آن نقاط برابر با صفر است.

مثال. درستی قضیه رول را دربارهٔ تابع با ضابطه $f(x)=x^{۳}-۲x^{۲}-x+۲$ روی فاصله $[۱,۲]$ بررسی کنید.

حل. تابع چند جمله‌ای f روی $[۱,۲]$ پیوسته است، همچنین روی بازه باز $(۱,۲)$ مشتق‌پذیر است. و داریم:

$$f(۱)=f(۲)=۰$$

در نتیجه نقطه‌ای مانند $c\in(۱,۲)$ وجود دارد، به طوری که $f'(c)=۰$. برای یافتن نقطه c به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$f'(x)=۳x^{۲}-۴x-۱=۰\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{۲+\sqrt{۷}}{۳}\in(۱,۲)\\ x=\dfrac{۲-\sqrt{۷}}{۳}\notin(۱,۲)\end{cases}$$

در نتیجه $c=\dfrac{۲+\sqrt{۷}}{۳}$.

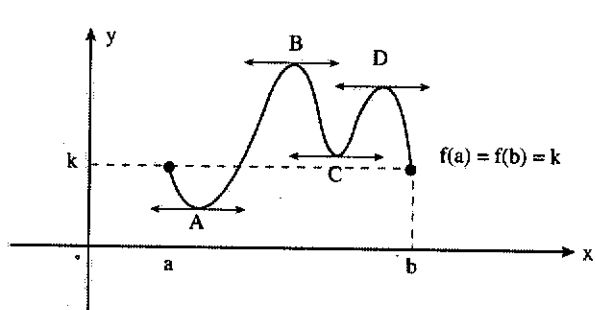
نتیجه قضیه رول. فرض کنید تابعی چون f دارای شرایط زیر باشد:

۱) روی بازه بسته $[a,b]$ پیوسته باشد؛

۲) روی بازه (a,b) مشتق‌پذیر باشد؛

۳) $f(a)=f(b)=k$ که در آن k عددی ثابت است.

در این صورت حداقل یک عدد مانند c واقع در بازه (a,b) وجود دارد، به طوری که $f'(c)=۰$.



مثال. درستی نتیجه قضیه رول را دربارهٔ تابع با ضابطه $f(x)=\dfrac{۱}{۱+x^{۲}}$ روی بازه $[\dfrac{-\sqrt{۳}}{۳},\dfrac{\sqrt{۳}}{۳}]$ تحقیق کنید.

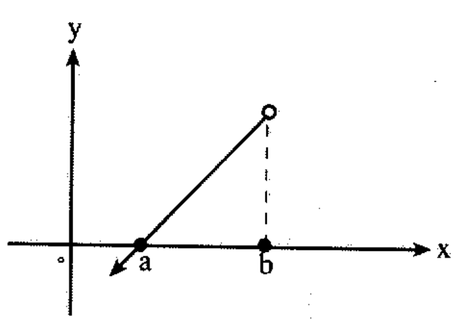
حل. $f(x)=\dfrac{۱}{۱+x^{۲}}$ و $f'(x)=\dfrac{-۲x}{(۱+x^{۲})^{۲}}$ بنابراین $f'(x)$ به ازای همه مقادیر حقیقی x وجود دارد. پس f روی بازه بسته $[\dfrac{-\sqrt{۳}}{۳},\dfrac{\sqrt{۳}}{۳}]$ پیوسته و بر بازه $(\dfrac{-\sqrt{۳}}{۳},\dfrac{\sqrt{۳}}{۳})$ مشتق‌پذیر است و داریم:

$$f(-\frac{\sqrt{۳}}{۳})=f(\frac{\sqrt{۳}}{۳})=\frac{۳}{۴}$$

در این صورت حداقل یک عدد مانند $c\in(\dfrac{-\sqrt{۳}}{۳},\dfrac{\sqrt{۳}}{۳})$ وجود دارد، به طوری که $f'(c)=۰$.

$$f'(x)=\frac{-۲x}{(۱+x^{۲})^{۲}}=۰\Rightarrow x=۰\Rightarrow c=۰\in(\frac{-\sqrt{۳}}{۳},\frac{\sqrt{۳}}{۳})$$

تذکر. در قضیه رول شرط این که f در نقاط $x=a$ و $x=b$ پیوسته باشد، شرطی اساسی است. در شکل زیر، نمودار تابعی نشان داده شده است که بر بازه $[a,b)$ پیوسته است، ولی در b پیوسته نیست و در بازه (a,b) مشتق‌پذیر می‌باشد. مقادیر تابع در نقاط انتهایی برابر با صفرند یعنی $f(a)=f(b)=۰$ با وجود این، روی نمودار هیچ نقطه‌ای وجود ندارد که خط مماس بر آن موازی با محور xها باشد، یا مشتق تابع در آن نقطه برابر با صفر باشد.



با استفاده از قضیه رول، یکی از مهم‌ترین قضیه‌های بحث کاربرد مشتق، موسوم به قضیه مقدار میانگین یا قانون میانگین را بیان می‌کنیم.

قضیه مقدار میانگین

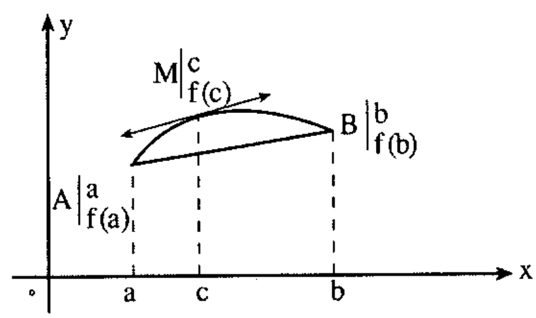
فرض کنید f تابعی با شرایط زیر باشد:

۱) روی بازه بسته $[a,b]$ پیوسته باشد؛

۲) روی بازه باز (a,b) مشتق‌پذیر باشد.

در این صورت حداقل یک عدد مانند c در بازه باز (a,b) وجود دارد. به‌طوری که:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$



به‌طوری که در شکل بالا ملاحظه می‌شود، کسر $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ برابر $\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$ و مساوی ضریب زاویه وتر AB است. بنابراین حداقل یک نقطه به طول c در بازه باز (a,b) وجود دارد که خط مماس بر منحنی تابع در آن نقطه، موازی وتر AB است.

مثال. تابع با ضابطه $f(x)=x^۳+x^۲-x$ را در نظر بگیرید؛ نشان دهید که تابع مفروض روی بازه $[-۲,۱]$ فرض قضیه مقدار میانگین را برآورده می‌کند. سپس مقادیر مناسبی برای c بیابید که در حکم قضیه مقدار میانگین صدق کند.

حل. تابع f روی بازه $[-۲,۱]$ پیوسته و $f'(x)=۳x^۲+۲x-۱$ بر بازه باز $(-۲,۱)$ موجود است و داریم:

$$a=-۲\Rightarrow f(a)=f(-۲)=(-۲)^۳+(-۲)^۲-(-۲)=-۲$$
$$\Rightarrow f(a)=-۲;\quad A(-۲,-۲)$$

$$b=۱\Rightarrow f(b)=f(۱)=(۱)^۳+(۱)^۲-۱=۱\Rightarrow f(b)=۱;\quad B(۱,۱)$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{-۲-۱}{-۲-۱}=۱$$

بنابراین نقطه‌ای مانند c واقع در بازه باز $(-۲,۱)$ وجود دارد، به‌طوری که $f'(c)=۱$:

$$f'(c)=۱\Rightarrow ۳c^۲+۲c-۱=۱\Rightarrow ۳c^۲+۲c-۲=۰$$

که از آن نتیجه می‌شود:

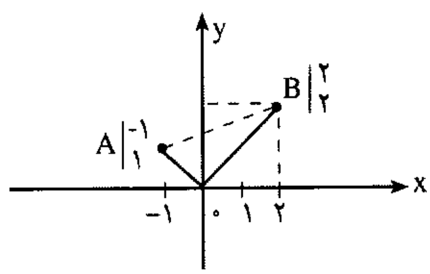
$$c_۱=\frac{-۱+\sqrt{۷}}{۳}\in(-۲,۱)$$ قابل قبول

و

$$c_۲=\frac{-۱-\sqrt{۷}}{۳}\in(-۲,۱)$$ قابل قبول

یعنی اگر از نقاطی با طول های $c_۱$ و $c_۲$ واقع بر منحنی، خطی برآن مماس کنیم، موازی با وتر AB است.

تذکر. در قضیه مقدار میانگین شرط این‌که f بر بازه باز (a,b) مشتق‌پذیر باشد، شرطی اساسی است. برای مثال، تابع با ضابطه $f(x)=|x|$ در بازه $[-۱,۲]$ پیوسته و در بازه $(-۱,۲)$ به جز در نقطه ۰ مشتق‌پذیر است.

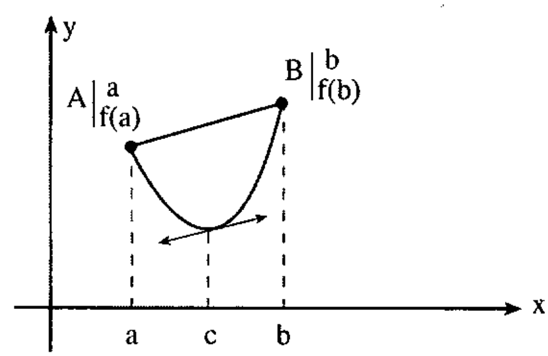


شیب وتر AB را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{۲-۱}{۲-(-۱)}=\frac{۱}{۳}$$

بنابراین شیب وتر AB برابر $\frac{۱}{۳}$ است، اما با توجه به شکل بالا در هیچ‌جا مشتق برابر $\frac{۱}{۳}$ نیست، زیرا همواره شیب OB برابر ۱ و شیب OA برابر ۱- است. درنتیجه اگر شرط مشتق‌پذیری تابع f در بازه باز (a,b) در قضیه مقدار میانگین برقرار نباشد، آن‌گاه حکم قضیه درست نخواهد بود.

مثال. ثابت کنید روی نمودار هر تابع درجه دوم، وتر واصل بین نقاط $x=a$ و $x=b$ واقع بر منحنی، موازی خط مماس برمنحنی در نقطه میانی $x=\frac{a+b}{۲}$ است.



حل. تابع درجه دوم با ضابطهٔ زیر را در نظر می‌گیریم:

$(m \neq ۰) f(x) = mx^۲ + nx + h$

چون f در بازه بسته $[a,b]$ پیوسته و بر بازه باز (a,b) مشتق‌پذیر است، بنابراین شرایط قضیه مقدار میانگین را دارد. درنتیجه حداقل نقطه‌ای مانند $c \in (a,b)$ وجود دارد که شیب خط مماس بر منحنی در آن نقطه موازی با وتر AB است. اکنون طول c را به صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x) = ۲mx + n$$

$$x = a \Rightarrow f(a) = ma^۲ + na + h$$

$$x = b \Rightarrow f(b) = mb^۲ + nb + h$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{mb^۲ + nb + h - ma^۲ - na - h}{b-a} = \frac{m(b^۲-a^۲)+n(b-a)}{b-a}$$

$$= \frac{(b-a)[m(b+a)+n]}{b-a} = m(b+a)+n$$

از $f'(c) = m(b+a)+n$ نتیجه می‌شود:

$$۲mc + n = m(b+a) + n \Rightarrow c = \frac{a+b}{۲}$$

می‌دانیم اگر c یک عدد حقیقی باشد، مشتق تابع ثابت با ضابطه $f(x) = c$، برابر صفر است. اکنون به کمک قضیه مقدار میانگین می‌توان ثابت کرد که اگر f تابعی مشتق‌پذیر باشد و به ازای هر $x \in (a,b)$ داشته باشیم $f'(x) = ۰$، آنگاه f روی بازه (a,b) ثابت است (چرا؟). در این صورت به نتیجه مطلوب زیر می‌رسیم:

نتیجه. اگر f روی بازه (a,b) مشتق‌پذیر باشد، مشتق f روی بازه (a,b) صفر است اگر و فقط اگر f تابع ثابت باشد.

مسائل

درستی قضیهٔ رول را درباره توابع با ضابطه‌های زیر روی بازه داده شده تحقیق کنید.

۱) $f(x) = x^۳ - ۶x^۲ + ۱۱x - ۶;\ \ x \in [۲,۳]$

۲) $f(x) = \sin ۲x;\ \ x \in [۰, \frac{\pi}{۲}]$

حل:

۱. تابع چندجمله‌ای f روی $[۲,۳]$ پیوسته و همچنین روی بازه باز $(۲,۳)$ مشتق‌پذیر است و داریم:

$f(۲) = f(۳) = ۰$

درنتیجه نقطه‌ای مانند $c \in (۲,۳)$ وجود دارد، به‌طوری‌که $f'(c) = ۰$. برای یافتن c به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۱۲x + ۱۱ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{۶+\sqrt{۳}}{۳} \notin (۲,۳) \\ x = \dfrac{۶-\sqrt{۳}}{۳} \in (۲,۳) \end{cases}$$

درنتیجه $c = \frac{۶-\sqrt{۳}}{۳}$.

۲. تابع با ضابطه $f(x) = \sin ۲x$ روی بازه $[۰, \frac{\pi}{۲}]$ پیوسته و همچنین روی بازه باز $(۰, \frac{\pi}{۲})$ مشتق‌پذیر است و داریم:

$f(۰) = f(\frac{\pi}{۲}) = ۰$

درنتیجه نقطه‌ای مانند $c \in (۰, \frac{\pi}{۲})$ وجود دارد به‌طوری که $f'(c) = ۰$. برای یافتن c به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$f'(x) = ۲\cos ۲x = ۰ \Rightarrow \cos ۲x = ۰ \Rightarrow ۲x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$$

درنتیجه: $c=\frac{\pi}{4}\in(0,\frac{\pi}{2})$.

۳. فرض کنیم $f(x)=x^4-2x^3+2x^2-x$. ثابت کنید معادله $4x^3-6x^2+4x-1=0$ در بازه $(0,1)$ حداقل یک ریشه دارد.

حل. تابع چندجمله‌ای f بر بازه $[0,1]$ پیوسته و بر بازهٔ باز $(0,1)$ مشتق‌پذیر است و $f(0)=f(1)=0$.

پس بنا بر قضیه رول حداقل یک عدد مانند $c\in(0,1)$ وجود دارد که: $f'(c)=0$. درنتیجه داریم:

$$f'(x)=4x^3-6x^2+4x-1$$

$$f'(c)=0\Rightarrow 4c^3-6c^2+4c-1=0 \quad (1)$$

با توجه به معادله ۱، نتیجه می‌شود که حداقل یک عدد مانند $c\in(0,1)$ وجود دارد که ریشه معادله $4x^3-6x^2+4x-1=0$ است.

۴. ثابت کنید اگر معادله $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x=0$ یک ریشه مثبت x_0 داشته باشد، آنگاه معادله $na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\dots+a_1=0$ ریشه مثبتی کوچک‌تر از x_0 دارد.

حل. تابع با ضابطه $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x$ بر بازه $[0,x_0]$ پیوسته $(x_0>0)$ و بر بازه $(0,x_0)$ مشتق‌پذیر است و داریم:

$f(0)=0;\ f(x_0)=0$ (چون x_0 ریشه معادله است)

بنابراین داریم:

$$f(0)=f(x_0)=0$$

پس بنابر قضیه رول حداقل یک عدد مانند $c\in(0,x_0)$ وجود دارد، به‌طوری که $f'(c)=0$ ، درنتیجه:

$$na_nc^{n-1}+(n-1)a_{n-1}c^{n-2}+\dots+a_1=0 \quad (2)$$

با توجه به معادله ۲ نتیجه می‌شود که حداقل یک عدد مثبت مانند $c\in(0,x_0)$ $(0<c<x_0)$ وجود دارد که ریشه معادله $na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\dots+a_1=0$ است.

تابع‌هایی با ضابطه‌های زیر را در نظر بگیرید و نشان دهید که تابع‌های مفروض روی بازه داده شده، فرض قضیه مقدار میانگین را برآورده می‌کند، سپس مقادیر مناسبی برای c بیابید که در حکم قضیه مقدار میانگین صدق کند.

۵) $f(x)=x^{\frac{2}{3}}-1;\ x\in[0,1]$

۶) $f(x)=\sin x;\ x\in[0,\frac{\pi}{2}]$

حل:

۵. تابع f روی بازه $[0,1]$ پیوسته و بازه $(0,1)$ مشتق‌پذیر است و داریم:

$$a=0\Rightarrow f(a)=f(0)=-1;\ A\left|\begin{matrix}0\\-1\end{matrix}\right.$$

$$b=1\Rightarrow f(b)=f(1)=0;\ B\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{0-(-1)}{1-0}=1$$

بنابراین نقطه‌ای مانند $c\in(0,1)$ وجود دارد، به‌طوری که $f'(c)=1$:

$$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}};\ f'(c)=1\Rightarrow\frac{2}{3\sqrt[3]{c}}=1$$

$$\Rightarrow c=\frac{8}{27}\in(0,1)$$

۶. چون تابع با ضابطه $f(x)=\sin x$ بر بازه $[0,\frac{\pi}{2}]$ پیوسته و بر بازه $(0,\frac{\pi}{2})$ مشتق‌پذیر است و داریم:

$$a=0\Rightarrow f(a)=f(0)=0;\ A(0,0)$$

$$b=\frac{\pi}{2}\Rightarrow f(b)=f(\frac{\pi}{2})=1;\ B(\frac{\pi}{2},1)$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{1-0}{\frac{\pi}{2}-0}=\frac{2}{\pi}$$

بنابراین نقطه‌ای مانند $c\in(0,\frac{\pi}{2})$ وجود دارد، به‌طوری که $f'(c)=\frac{2}{\pi}$.

$$f'(x)=\cos x;\ f'(c)=\frac{2}{\pi}\Rightarrow\cos c=\frac{2}{\pi}$$

$$\Rightarrow c=\mathrm{Arc}\cos\frac{2}{\pi}\in(0,\frac{\pi}{2})$$

۷ . با استفاده از قضیه مقدار میانگین، نابرابری $|\sin b - \sin a| \le |b-a|$ را ثابت کنید.

حل . تابع با ضابطه $f(x) = \sin x$ را بر بازه $[a,b]$ در نظر می‌گیریم، می‌دانیم که f بر $[a,b]$ پیوسته و بر بازه باز (a,b) مشتق‌پذیر است و داریم:

$$x = a \Rightarrow f(a) = \sin a;\quad A\left|\begin{matrix} a \\ f(a)\end{matrix}\right.$$

$$x = b \Rightarrow f(b) = \sin b;\quad B\left|\begin{matrix} b \\ f(b)\end{matrix}\right.$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\sin b - \sin a}{b-a}$$

بنابراین نقطه‌ای مانند $c \in (a,b)$ وجود دارد، به‌طوری که:

$$\frac{\sin b - \sin a}{b-a} = f'(c)$$

$$f'(x) = \cos x; \frac{\sin b - \sin a}{b-a} = \cos c$$

از طرفی چون همواره $|\cos c| \le ۱$ بنابراین:

$$\left|\frac{\sin b - \sin a}{b-a}\right| \le ۱$$

درنتیجه داریم:

$$|\sin b - \sin a| \le |b-a|$$

۸ . فرض کنید تابعی چون f روی $[a,b]$ پیوسته باشد و به‌ازای تمام xهای در (a,b) ، $f'(x) = ۱$. ثابت کنید به ازای هر $x \in [a,b]$ ، داریم: $f(x) = x - a + f(a)$.

حل . فرض می‌کنیم $x \in [a,b]$ $(a \le x \le b)$ ، چون تابع f روی $[a,b]$ پیوسته است بنابراین بر بازه $[a,x]$ پیوسته است و چون برای هر $x \in (a,b)$ داریم $f'(x) = ۱$ ، بنابراین تابع f بر بازه (a,x) مشتق‌پذیر است، درنتیجه لااقل یک عدد مانند $c \in (a,x)$ موجود است، به طوری که:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c)$$

برای هر $c \in (a,x)$ ، داریم: $f'(c) = ۱$ ، درنتیجه:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = ۱ \Rightarrow f(x) = x - a + f(a)$$

مسائل تکمیلی

درستی قضیهٔ رول را درباره تابع‌ها با ضابطه‌های زیر، روی بازه داده شده تحقیق کنید.

۱) $f(x) = x^۲ - ۴x + ۳;\ x \in [۱,۳]$

۲) $f(x) = ۳\cos^۲ x;\ x \in [\frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲}]$

۳) $f(x) = ۴x^۳ - ۹x;\ x \in [۰, \frac{۳}{۲}]$

۴ . به کمک قضیهٔ رول ثابت کنید که معادلهٔ $x^۳ + ۲x + c = ۰$ ، که در آن c یک عدد ثابت دلخواه است، نمی‌تواند بیش از یک ریشهٔ حقیقی داشته باشد.

تابع‌هایی با ضابطه‌های زیر را در نظر بگیرید و نشان دهید تابع‌های مفروض روی بازه‌های داده شده، فرض قضیه مقدار میانگین را برآورده می‌کند، سپس مقادیر مناسبی برای c بیابید که در حکم قضیه مقدار میانگین صدق کند.

۵) $f(x) = x^۳ + x^۲ - x;\ x \in [-۲,۱]$

۶) $f(x) = ۲\cos x;\ x \in [\frac{\pi}{۳}, \frac{۲\pi}{۳}]$

۷) $f(x) = \frac{x^۲ + ۴x}{x - ۷};\ x \in [۲,۶]$

برای هریک از تمرین‌های زیر، در بازه داده شده هیچ عددی مانند c وجود ندارد که در حکم قضیه مقدار میانگین صدق کند. در هر تمرین، تعیین کنید کدام قسمت از فرض قضیه مقدار میانگین برقرار نیست.

۸) $f(x) = \frac{۴}{(x-۳)^۲};\ x \in [۱,۶]$

۹) $f(x) = ۳(x-۴)^{\frac{۲}{۳}};\ x \in [-۴,۵]$

۱۰) $f(x) = \begin{cases} ۲x + ۳ & x < ۳ \\ ۱۵ - ۲x & x \ge ۳ \end{cases};\ x \in [-۱,۵]$

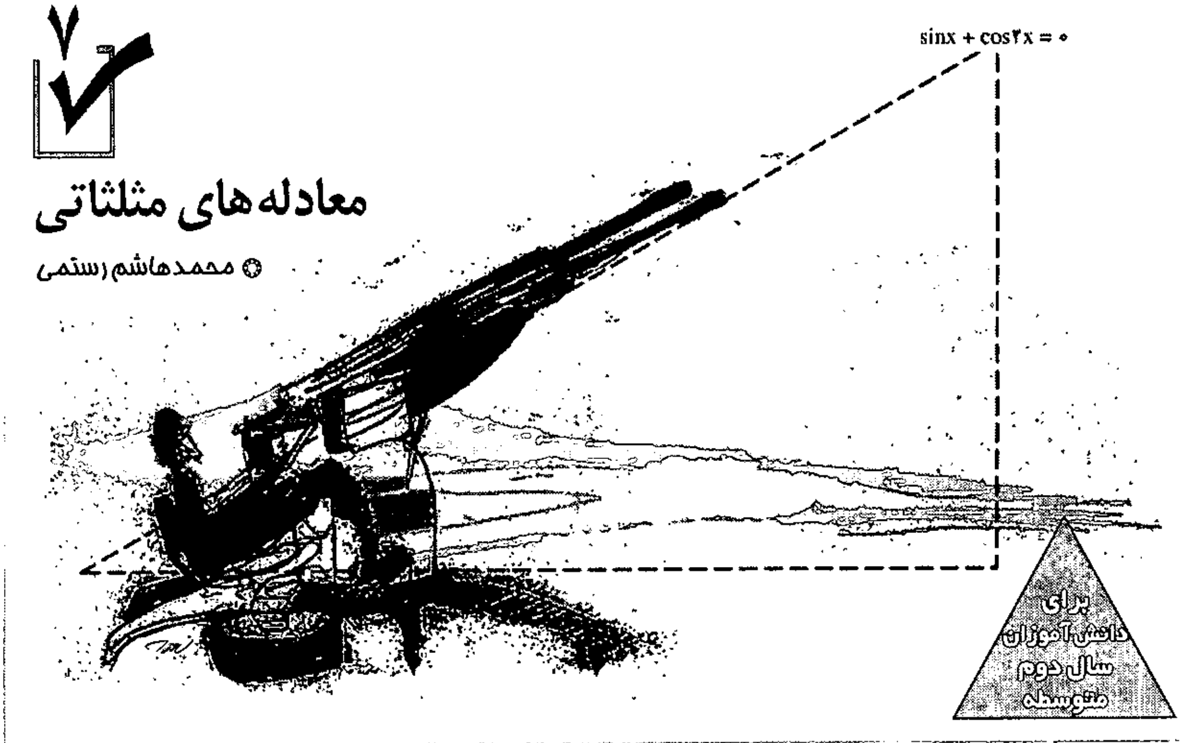
زیرنویس..

1. Michel Rolle
2. Jacques ozanam
3. Traité d´algere
4. zeros of a ploynomial function

۷

معادله های مثلثاتی

محمدهاشم رستمی



حل معادله های غیرسادهٔ مثلثاتی

هر معادلهٔ مثلثاتی غیر از معادله های چهارگانهٔ $\sin X = a \;,\; (-1 \le a \le 1)$ ؛ $\cos X = b \;,\; (-1 \le b \le 1)$ ؛ $\operatorname{tg} X = c \;,\; (c \in \mathbb{R})$ و $\cot g X = d \;,\; (d \in \mathbb{R})$ را معادلهٔ غیرسادهٔ مثلثاتی می‌نامیم؛ مانند:

$\cos 2x + \cos x + 1 = 0$ و $\sin 2x + 2\sin x = 0$

$\sin 3x + \sin 2x + \sin x = 0$ و $\operatorname{tg} 2x + 2\operatorname{tg} x = 0$

$\sin^2 x - \sin x \cos x = 2\cos^2 x$ و $\sin x + 2\cos x = 1$

$x + \sin x = 0$

معادله های غیرسادهٔ مثلثاتی را به این دو دستهٔ کلی می‌توان تقسیم کرد:

دستهٔ اول. معادله هایی که فرم یا صورت مشخصی ندارند و راه‌حل آن‌ها نیز مشخص نیست. این معادله ها را معادله های مثلثاتی غیرکلاسیک می‌نامند.

دسته دوم. معادله هایی که صورت مشخصی دارند و راه‌حل آن‌ها نیز مشخص است. این معادله ها را معادله های مثلثاتی کلاسیک می‌نامند.

نکتهٔ بسیار مهم آن است که برای حل هر معادلهٔ غیرسادهٔ مثلثاتی اعم از کلاسیک یا غیرکلاسیک، باید آن را به معادله یا معادله های سادهٔ مثلثاتی تبدیل کنیم و سپس این معادله های سادهٔ مثلثاتی را حل کنیم.

نکته. حل معادله های مثلثاتی که شامل کمان مجهول هستند، مانند معادلهٔ $x + 2\sin x = 0$، جداگانه بررسی خواهد شد.

حل معادله‌های مثلثاتی دستهٔ اول

با وجود آن که این معادله های غیرسادهٔ مثلثاتی، صورت و

راه‌حل مشخصی ندارند، امّا می‌توان آن‌ها را به گونه‌ای، به صورت‌های زیر دسته‌بندی کرد:

۱. معادله‌هایی که به صورت $A\times B\times C\times\cdots=۰$ یا قابل تبدیل به این صورت هستند و در آن‌ها $A=۰$، $B=۰$، $C=۰$ و ...است، معادله‌های سادهٔ مثلثاتی‌اند؛ مانند معادلهٔ مثلثاتی

$$(۳tgx-\sqrt{۳})(\sin x+۱)(۲\cos x-۱)=۰$$

برای حل این معادله‌ها، معادله‌های سادهٔ مثلثاتی $A=۰$، $B=۰$، $C=۰$ و ... را حل می‌کنیم. مجموعهٔ جواب‌های کلی این معادله‌های ساده، جواب‌های کلی معادله‌ی داده شده‌اند.

به مثال‌های زیر توجه کنید:

مثال۱. معادلهٔ $(۲\sin x-۱)(\cos x+۱)(tgx-\sqrt{۳})=۰$ را حل کنید.

حل: داریم:

$$۲\sin x-۱=۰\Rightarrow ۲\sin x=۱\Rightarrow \sin x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \sin x=\sin\frac{\pi}{۶}$$

$$\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶} \text{ و } x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶} \text{ یا } x=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۶}؛$$

$$\cos x+۱=۰\Rightarrow \cos x=-۱\Rightarrow \cos x=\cos\pi\Rightarrow x=۲k\pi+\pi؛$$

$$tgx-\sqrt{۳}=۰\Rightarrow tgx=\sqrt{۳}\Rightarrow tgx=tg\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۳}$$

پس جواب‌های معادلهٔ داده شده عبارت‌اند از:

$$x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶} \quad \text{و} \quad x=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۶}$$

$$x=۲k\pi+\pi \quad \text{و} \quad x=k\pi+\frac{\pi}{۳}$$

مثال۲. معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کنید.

$$\sin(\frac{x}{۲}-\frac{\pi}{۴})\cos\frac{۲x}{۳}(۱+\cot gx)=۰$$

حل: داریم:

$$\sin(\frac{x}{۲}-\frac{\pi}{۴})=۰\Rightarrow \frac{x}{۲}-\frac{\pi}{۴}=k\pi\Rightarrow \frac{x}{۲}=k\pi+\frac{\pi}{۴}$$

$$\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}؛$$

$$\cos\frac{۲x}{۳}=۰\Rightarrow \frac{۲x}{۳}=k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{۳k\pi}{۲}+\frac{۳\pi}{۴}؛$$

$$۱+\cot gx=۰\Rightarrow \cot gx=-۱\Rightarrow \cot gx=\cot g(\frac{-\pi}{۴})$$

$$\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۴}$$

بنابراین جواب‌های معادلهٔ داده شده عبارت‌اند از:

$$x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲} \text{ و } x=\frac{۳k\pi}{۲}+\frac{۳\pi}{۴} \text{ و } x=k\pi-\frac{\pi}{۴}$$

مثال۳. معادلهٔ $\sin^۲ x+\sin x\cos x=۰$ را حل کنید.

حل: به کمک فاکتورگیری از عامل مشترک، معادلهٔ داده شده را به صورت $A\times B=۰$ تبدیل و سپس معادله‌های سادهٔ مثلثاتی $A=۰$ و $B=۰$ را حل می‌کنیم. داریم:

$$\sin^۲ x+\sin x\cos x=۰\Rightarrow \sin x(\sin x+\cos x)=۰$$

$$\Rightarrow \sin x=۰\Rightarrow x=k\pi$$

$$\sin x+\cos x=۰$$

$$\Rightarrow \sin x=-\cos x=-\sin(\frac{\pi}{۲}-x)=\sin(x-\frac{\pi}{۲})$$

$$\Rightarrow x=۲k\pi+x-\frac{\pi}{۲}\Rightarrow ۰\times x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲} \text{ معادلهٔ غیرممکن}$$

$$\Rightarrow x=۲k\pi+\pi-(x-\frac{\pi}{۲})\Rightarrow ۲x=۲k\pi+\frac{۳\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow x=k\pi+\frac{۳\pi}{۴}$$

پس جواب‌های معادلهٔ داده شده، عبارت‌اند از:

$$x=k\pi \text{ و } x=k\pi+\frac{۳\pi}{۴}$$

نکته: معادله‌ی $\sin x+\cos x=۰$ به روش‌های دیگری نیز قابل حل است.

مثال۴. معادلهٔ $\sin ۳x-\sin ۲x+\sin x=۰$ را حل کنید.

حل: نسبت‌های مثلثاتی یکسان و زاویه‌های داده شده،

تشکیل تصاعد حسابی داده‌اند: $2x = \frac{3x+x}{2}$؛ بنابراین با استفاده از دستور تبدیل مجموع به حاصل ضرب، $\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$، داریم:

$$\sin 3x - \sin 2x + \sin x = 0 \Rightarrow \sin 3x + \sin x - \sin 2x = 0$$

$$\Rightarrow 2\sin\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2} - \sin 2x = 0$$

$$\Rightarrow 2\sin 2x\cos x - \sin 2x = 0$$

$$\Rightarrow \sin 2x(2\cos x - 1) = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}\ ;$$

$$2\cos x - 1 = 0 \Rightarrow 2\cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

پس جواب‌های معادلهٔ داده شده، عبارتند از:

$$x = \frac{k\pi}{2} \quad \text{و} \quad x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

مثال ۵. معادلهٔ $\cos 2x + \sin x - 1 = 0$ را حل کنید.

حل: $\cos 2x$ را بر حسب $\sin x$ می‌نویسیم (با استفاده از دستور $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$). داریم:

$$1 - 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Rightarrow -2\sin^2 x + \sin x = 0$$

$$\Rightarrow \sin x(-2\sin x + 1) = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi\ ;$$

$$-2\sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow$$

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{و} \quad x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$$

آزمون۱. معادلهٔ زیر در فاصلهٔ $[0,2\pi]$ چند ریشه دارد؟

$$(2\sin x - 1)(4\sin x - 5)(5\sin x - 9) = 0$$

۱) ۳ ۲) ۶

۳) صفر ۴) ۲

کنکور دانشگاه آزاد ۱۳۸۱

حل: داریم:

$$(2\sin x - 1)(4\sin x - 5)(5\sin x - 9) = 0$$

$$\Rightarrow 2\sin x - 1 = 0 \Rightarrow 2\sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{و} \quad x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \quad \text{یا} \quad x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$$

$$4\sin x - 5 = 0 \Rightarrow 4\sin x = 5 \Rightarrow \sin x = \frac{5}{4} > 1 \quad \text{جواب ندارد}$$

$$5\sin x - 9 = 0 \Rightarrow 5\sin x = 9 \Rightarrow \sin x = \frac{9}{5} > 1 \quad \text{جواب ندارد}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادلهٔ داده شده، $x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ و $x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$ است.

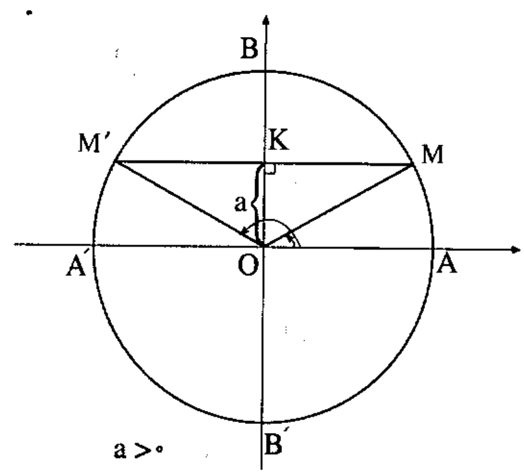
اکنون جواب‌های خصوصی موجود در بازهٔ $[0,2\pi]$ را تعیین می‌کنیم:

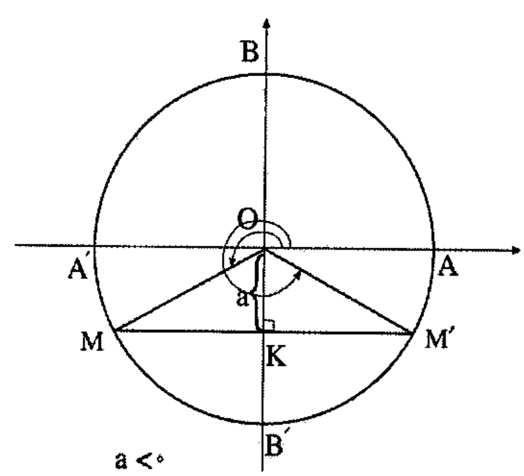
k	x	
-1	$\frac{-11\pi}{6} < 0\ ,\ \frac{-7\pi}{6} < 0$	
0	$\frac{\pi}{6}\ ,\ \frac{5\pi}{6}$	جواب
1	$2\pi + \frac{\pi}{6} > 2\pi\ ,\ 2\pi + \frac{5\pi}{6} > 2\pi$	

همان‌طوری که دیده می‌شود، معادله تنها دو جواب در بازهٔ $[0,2\pi]$ دارد؛ بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

نکته. معادله داده شده به صورت $A \times B \times C = 0$ است، که در آن $A = 0$ و $B = 0$ و $C = 0$ معادله‌های سادهٔ مثلثاتی‌اند. از بین این معادله‌ها، که $2\sin x - 1 = 0$، $4\sin x - 5 = 0$ و $5\sin x - 9 = 0$ هستند، تنها معادلهٔ $2\sin x - 1 = 0$ یا $\sin x = \frac{1}{2}$ جواب دارد. از طرفی می‌دانیم که معادلهٔ سادهٔ مثلثاتی $\sin x = a$ و $(-1 < a < +1)$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ دو جواب خصوصی دارد؛ زیرا اگر روی محور سینوس‌ها $\overline{ok} = a$ را جدا کنیم و از k خطی موازی محور کسینوس‌ها رسم نماییم،

دایرهٔ مثلثاتی را در دو نقطهٔ M و ´M قطع می‌کند، که کمان‌های $\widehat{AM}$ و $\widehat{AM'}$ جواب‌های مسأله‌اند؛ یعنی کمان‌هایی هستند که سینوس آن‌ها عدد a است.



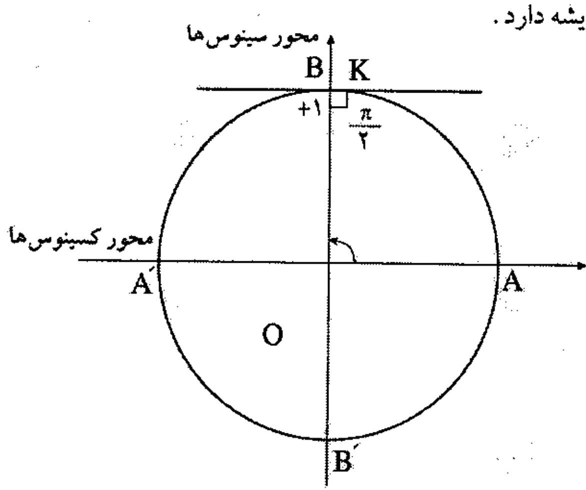


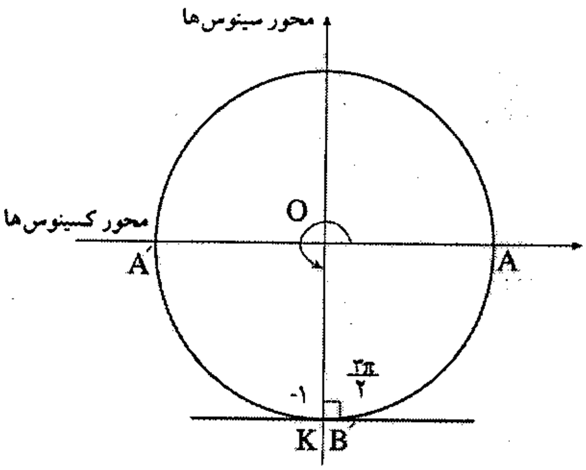
حال اگر $a > ۰$ باشد، انتهای کمان‌ها در ربع اول و دوم دایرهٔ مثلثاتی است؛ یعنی کمان‌های جواب مسأله به بازهٔ $[۰,\pi]$ تعلق دارند و اگر $a < ۰$ باشد، انتهای کمان‌های جواب مسأله در ربع‌های سوم و چهارم دایرهٔ مثلثاتی قرار دارند؛ یعنی کمان‌های جواب مسأله به بازهٔ $[\pi,۲\pi]$ یا $[-\pi,۰]$ تعلق دارند.

بنابراین بدون حل کردن معادلهٔ $\sin x = \frac{۱}{۲}$ می‌توان گفت که این معادله در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ دو ریشه دارد.

در حالت خاص

الف. اگر $a = ۱$؛ یعنی $\sin x = ۱$ باشد، نقطهٔ k بر نقطهٔ B انتهای کمان $+\frac{\pi}{۲}$ منطبق می‌شود و نقطه‌های M و ´M نیز بر این نقطه منطبق می‌شوند؛ یعنی معادلهٔ $\sin x = ۱$ ریشهٔ مضاعف $x = \frac{\pi}{۲}$ دارد. پس این معادله در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ تنها یک ریشه دارد.





ب. اگر $a=-1$ ، یعنی $\sin x=-1$ باشد، نقطهٔ k بر نقطهٔ B' انتهای کمان $\frac{3\pi}{2}$ منطبق می‌شود و نقطه‌های M و M' نیز بر این نقطه منطبق می‌شوند؛ یعنی معادلهٔ $\sin x=-1$ دارای ریشهٔ مضاعف $x=\frac{3\pi}{2}$ است. پس این معادله در بازهٔ $[0,2\pi]$ تنها یک ریشه دارد.

آزمون ۲. معادلهٔ $(2\sin x+1)(3\sin x+2)=0$ در بازهٔ $[\pi,2\pi]$ چند ریشه دارد؟

۱) ۳   ۲) ۲

۳) ۴   ۴) ۱

کنکور پزشکی دانشگاه آزاد ـ ۱۳۸۳

حل: داریم:

$$(2\sin x+1)(3\sin x+2)=0\Rightarrow$$

$$2\sin x+1=0\Rightarrow 2\sin x=-1\Rightarrow \sin x=-\frac{1}{2}$$

$$3\sin x+2=0\Rightarrow 3\sin x=-2\Rightarrow \sin x=-\frac{2}{3}$$

چون $0>-\frac{1}{2}>-1$ و $0>-\frac{2}{3}>-1$ است، پس هریک از این دو معادله در بازهٔ $[\pi,2\pi]$ دو جواب خصوصی متمایز دارند، پس معادلهٔ داده شده روی‌هم چهار جواب در بازهٔ $[\pi,2\pi]$ دارد؛ بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

آزمون ۳. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی زیر کدام است؟

$$\sin 4x-\sin 2x=\sin(\frac{\pi}{2}+3x)$$

۱) $\frac{k\pi}{6}$ ۲) $\frac{k\pi}{3}$

۳) $\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}$

کنکور سراسری سال ۱۳۸۱

حل: می‌دانیم که:

$$\sin(\frac{\pi}{2}+3x)=\cos 3x,$$

$$\sin 4x-\sin 2x=2\sin x\cos 3x$$

با استفاده از دستور زیر داریم:

$$\sin p-\sin q=2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

$$2\sin x\cos 3x=\cos 3x\Rightarrow 2\sin x\cos 3x-\cos 3x=0$$

$$\Rightarrow \cos 3x(2\sin x-1)=0$$

معادله به صورت حاصل‌ضرب دو عامل مساوی صفر است، پس خواهیم داشت:

$$\cos 3x=0\Rightarrow 3x=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\quad (1)$$

و

$$2\sin x-1=0\Rightarrow \sin x=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{6}\quad (2)$$

$$x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6} \text{ یا } x=2k\pi+\frac{5\pi}{6}\quad (3)$$

جواب کلی (۱) شامل جواب‌های کلی (۲) و (۳) نیز هست؛ بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

آزمون ۴. معادلهٔ $tgx\,tg2x=\sin x\sin 2x$ در بازهٔ $\left[\frac{\pi}{4},\frac{9\pi}{4}\right]$ چند ریشه دارد؟

۱) ۱   ۲) ۴

۳) ۲   ۴) صفر

کنکور دانشگاه آزاد ـ ۱۳۸۱

حل. با توجه به این که tgx به ازای ریشه‌های معادلهٔ $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ و tg2x به ازای ریشه‌های معادلهٔ $2x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ یا $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ تعریف نشده‌اند، داریم:

$$tgx\,tg2x=\sin x\sin 2x\Rightarrow\frac{\sin x}{\cos x}\times\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=\sin x\sin 2x$$

$$\Rightarrow \sin x\sin 2x=\sin x\sin 2x\cos x\cos 2x$$

$$\sin x\sin 2x-\sin x\sin 2x\cos x\cos 2x=0\Rightarrow$$

$$\sin x\sin 2x(1-\cos x\cos 2x)=0\Rightarrow$$

$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$

$\sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$

$1 - \cos x \cos 2x = 0 \Rightarrow \cos x \cos 2x = 1 \Rightarrow \cos x = 1,\ \cos 2x = 1$

یا $\cos x = -1,\ \cos 2x = -1 \Rightarrow \cos x = 1 = \cos 0 \Rightarrow x = 2k\pi$

$\cos 2x = 1 = \cos 0 \Rightarrow 2x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi,$

$\cos x = -1 = \cos \pi \Rightarrow x = 2k\pi \pm \pi,$

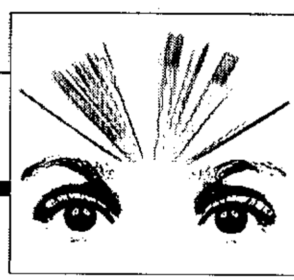
$\cos 2x = -1 \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \pi \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{2}$

جواب کلی $x = \frac{k\pi}{2}$ شامل بقیهٔ جواب‌های کلی نیز هست؛ اما این جواب کلی در بازهٔ $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right]$ چهار ریشهٔ $\frac{\pi}{2}$، π، $\frac{3\pi}{2}$ و 2π دارد، که دو ریشهٔ آن، یعنی $x = \frac{\pi}{2}$ و $x = \frac{3\pi}{2}$ قابل قبول نیستند (در دامنهٔ تعریف تابع قرار ندارند)، پس تنها دو ریشهٔ قابل قبول $x = \pi$ و $2\pi = \pi$ در بازهٔ $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right]$ وجود دارد؛ بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

نکته. معادلهٔ $\cos x \cos 2x = 1$ در صورتی جواب دارد که $\cos x = 1$ و $\cos 2x = 1$ و یا $\cos x = -1$ و $\cos 2x = -1$؛ زیرا اگر قدرمطلق یکی از این دو مقدار کوچک‌تر از ۱ باشد، قدرمطلق دیگری باید بزرگ‌تر از ۱ باشد، که این امکان‌پذیر نیست؛ زیرا مقدارهای cosx و $\cos 2x$ هر دو به بازهٔ $[-1, 1]$ تعلق دارند.

معادلهٔ $\cos x \cos 2x = 1$ را به روش‌های دیگری هم می‌توان حل کرد که بعداً خواهیم دید.

ادامه حل معادله‌های غیر ساده مثلثاتی در شماره‌های آینده مجله خواهد آمد.

معماهای فــکری و منطقی

BJane، Janice، Jack، Jasper، و Jem نام‌های پنج یار دبیرستانی است. نام خانوادگی آنان. نه لزوماً به این ترتیب، عبارت است از: Carter , Carver , Clark , Clayton , Cramer

مادر Jasper مرده است.

آقا و خانم Clayton به احترام یک عمهٔ بسیار ثروتمند، هنگامی که ازدواج کردند، قرار گذاشتند اگر صاحب دختری شدند، نام او را Janice بگذارند.

پدر و مادر Jane هیچ‌گاه پدر و مادر Jack را ملاقات نکرده‌اند.

بچه‌های Cramer و Carter در چندین تیم قهرمانی مدرسه هم تیمی‌اند.

Cramer زمانی که شنید Carver قصد دارد در شب جشن اولیا و دانش‌آموزان مدرسه به خارج شهر برود، به خانم Carver تلفن و پیشنهاد کرد از پسر او نگهداری کند؛ اما پدر Jack قبلاً از او خواسته بود برود.

دو خانوادهٔ Clark و Carter، که دوستان بسیار خوب یکدیگرند، زمانی که بچه‌هاشان به نامزدی یکدیگر درآمدند، خوشحال شدند.

نام خانوادگی هر یک چیست؟

رابطه‌های هم‌ارزی - کلاس‌های هم‌ارزی

برای
دانش‌آموزان
سال سوم ریاضی

یکی از مفاهیمی که بسیاری از دانش‌آموزان در شناخت آن دچار مشکل هستند، مفهوم کلاس‌های هم‌ارزی است. در این‌جا سعی می‌کنیم این مفهوم را با زبانی ساده برای شما روشن کنیم. ما در این شماره، مفهوم رابطهٔ هم‌ارزی را به‌طور دقیق شناسایی می‌کنیم و در شمارهٔ آینده به مفهوم کلاس‌های هم‌ارزی می‌پردازیم.

تعریف رابطه: هر زیر مجموعه از حاصل ضرب دکارتی دو مجموعهٔ A و B را یک رابطه از A روی B (یا از A در B) می‌نامیم. به عنوان مثال، اگر $A=\{a,b,c\}$ و $B=\{۱,۲,۳\}$،

$$A\times B=\{(a,۱),(a,۲),(a,۳),(b,۱),(b,۲),(b,۳),(c,۱),(c,۲),(c,۳)\}$$

و چون $A\times B$، ۹ عضو دارد، بنابراین $۲^۹=۵۱۲$ زیرمجموعه دارد. به هریک از این ۵۱۲ زیرمجموعه، یک رابطه از A به B می‌گوییم. به‌عنوان مثال، رابطه‌های $R_۱$ و $R_۲$ و $R_۳$ را در نظر بگیرید:

$R_۱=\{(a,۱),(b,۱)\}$ و $R_۲=\{(a,۲)\}$ و

$R_۳=\{(b,۱),(b,۲),(c,۱),(c,۳)\}$

همچنین رابطهٔ R را که از مجموعهٔ A به خودش تعریف شده باشد، رابطه‌ای روی A می‌نامیم. در حالت کلی رابطهٔ R از A به B را با نماد $R:A\longrightarrow B$ نمایش می‌دهیم. در مثال بالا می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}R_۴:A\longrightarrow B\\ R_۴=\{(a,۱),(b,۱),(c,۱)\}\end{cases}$$ و

$$\begin{cases}R_۵:A\longrightarrow A\\ R_۵=\{(a,a),(a,b),(b,c)\}\end{cases}$$

سؤال: اگر مجموعهٔ A، n عضو داشته باشد، چند رابطه

هوشنگ شرقی

روی A می‌توان نوشت؟ اگر مجموعهٔ B، m عضو داشته باشد، چند رابطه از A در B می‌توان نوشت؟

انواع رابطه‌ها

۱. رابطهٔ انعکاسی

رابطهٔ R روی مجموعهٔ A را انعکاسی می‌نامیم؛ هرگاه:

برای هر $x \in A \Rightarrow xRx((x,x) \in R)$

به زبان ساده R یک رابطهٔ انعکاسی روی مجموعهٔ A است؛ هرگاه برای هر عضو x از A، زوج مرتب (x,x) در رابطهٔ R وجود داشته باشد.

مثال. رابطه‌های $R_۱$ و $R_۲$ در مجموعهٔ $A = \{۱,۲,۳,۴\}$ تعریف شده‌اند:

$$R_۱ = \{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۲,۲),(۴,۴)\}$$

$$R_۲ = \{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۴),(۲,۲),(۲,۳),(۳,۳),(۴,۳),(۴,۴)\}$$

کدام‌یک از روابط فوق انعکاسی هستند؟

جواب: $R_۱$ انعکاسی نیست؛ زیرا شامل (۳ و ۳) نیست؛ ولی $R_۲$ انعکاسی است.

نتیجه: هر رابطه‌ای که روی مجموعهٔ A از مثال بالا تعریف شده و انعکاسی باشد، باید حتماً شامل چهار زوج مرتب (۱ و ۱) و (۲ و ۲) و (۳ و ۳) و (۴ و ۴) باشد و بدیهی است که می‌توانند شامل هر تعداد زوج مرتب دیگر هم باشد.

سؤال: در مجموعهٔ A (از مثال قبل) چند رابطهٔ انعکاسی می‌توان نوشت؟

جواب: چون A، ۴ عضو دارد، پس $A^۲$، ۱۶ عضو (زوج مرتب) دارد. چهار تا از این زوج‌های مرتب، حتماً باید در رابطه‌های انعکاسی باشند. هریک از ۱۲ زوج مرتب دیگر؛ دو وضع دارند، می‌توانند در رابطهٔ انعکاسی باشند یا نباشند.

بنابراین ترکیب آنها $۲^{۱۲}$ حالت مختلف دارد و $۲^{۱۲}$ رابطه انعکاسی روی A می‌توان نوشت.

تمرین. در حالت کلی، روی یک مجموعهٔ n عضوی چند رابطهٔ انعکاسی می‌توان نوشت؟

مثال. آیا رابطهٔ زیر که در مجموعهٔ اعداد حقیقی نوشته شده، انعکاسی است؟

$$\begin{cases} R: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ xRy \Leftrightarrow x + y \leq ۲ \end{cases}$$

حل: فرض کنیم R انعکاسی باشد، در این صورت داریم:

$$xRx \Rightarrow x + x \leq ۲ \Rightarrow ۲x \leq ۲ \Rightarrow x \leq ۱$$

ولی نابرابری فوق برای همهٔ اعضای $\mathbb{R}$ برقرار نیست. به عنوان مثال، $۲ \not R ۲$؛ زیرا $۲ + ۲ > ۲$ و درنتیجه R انعکاسی نیست. اما با توجه به شرط فوق، اگر دامنه و برد تعریف رابطه را از $\mathbb{R}$ به بازهٔ $(-\infty, ۱]$ محدود کنیم، یعنی رابطهٔ زیر:

$$\begin{cases} R: (-\infty, ۱] \to (-\infty, ۱] \\ xRy \Leftrightarrow x + y \leq ۲ \end{cases}$$

یک رابطهٔ انعکاسی خواهد بود.

تمرین ۱. کدام یک از روابط زیر، خاصیت انعکاسی دارند؟

الف) $\begin{cases} R: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ xRy \Leftrightarrow xy \geq ۰ \end{cases}$

ب) $\begin{cases} R: Z \to Z \\ xRy \Leftrightarrow x \mid y \end{cases}$ ج) $\begin{cases} R: N \to N \\ xRy \Leftrightarrow x + y \leq xy \end{cases}$

مثال. آیا رابطهٔ موازی بودن در مجموعه خطوط صفحه، خاصیت انعکاسی دارد؟

حل: ابتدا توجه می‌کنیم که مفهوم این رابطه یعنی چه؟ اگر این رابطه را با نماد ریاضی نمایش دهیم، با فرض آن‌که A مجموعه خطوط صفحه باشد، می‌نویسیم:

$$\begin{cases} R: A \to A \\ d_۱ R d_۲ \Leftrightarrow d_۱ \parallel d_۲ \end{cases}$$

و این رابطهٔ انعکاسی است؛ زیرا طبق قرارداد، هر خط با خودش موازی است:

$$d_۱ R d_۱ \Leftrightarrow d_۱ \parallel d_۱$$

سؤال. آیا رابطهٔ همشهری بودن در مجموعهٔ انسان‌ها، یک رابطهٔ انعکاسی است؟

رابطهٔ دوستی چطور؟

۲. رابطهٔ تقارنی

رابطهٔ R در مجموعهٔ A تقارنی است، اگر و فقط اگر از xRy نتیجه شود yRx؛ یعنی داشته باشیم:

$(x,y)\in R \Leftrightarrow (y,x)\in R$

مثال: آیا رابطه‌های R_1 و R_2 که در مجموعهٔ $A=\{1,2,3,4\}$ به صورت زیر تعریف شده‌اند، تقارنی هستند؟

$R_1=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,3)\}$

$R_2=\{(1,2),(2,1),(3,3)\}$

حل: R_1 تقارنی نیست؛ زیرا $(2,3)\in R_1$ ولی $(3,2)\notin R_1$، اما R_2 تقارنی است.

مثال. رابطه‌های R_1، R_2، R_3 و R_4 را در مجموعهٔ A از مثال قبل چنان بنویسید که R_1 انعکاسی باشد و تقارنی نباشد، R_2 تقارنی باشد و انعکاسی نباشد، R_3 نه تقارنی باشد و نه انعکاسی، و R_4 هم تقارنی باشد و هم انعکاسی.

حل:

$R_1=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,4)\}$

$R_2=\{(2,3),(3,2),(3,3),(4,4)\}$

$R_3=\{(1,1),(2,3),(4,1)\}$

$R_4=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(4,2),(2,4),(2,3),(3,2)\}$

مثال. آیا رابطهٔ R که در مجموعهٔ اعداد حقیقی به صورت زیر تعریف شده، تقارنی است؟

$$\begin{cases}R:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ xRy\Leftrightarrow x+y\geq 2\end{cases}$$

حل. برای بررسی خاصیت تقارنی در مورد روابطی که با ضابطه بیان شده‌اند، نتایج xRy و yRx را می‌نویسیم (یعنی در ضابطه، جای x و y را با هم عوض می‌کنیم). اگر این دو، یکدیگر را نتیجه بدهند، رابطهٔ فوق تقارنی است و در غیر این صورت، تقارنی نیست. به عنوان مثال، در مورد رابطهٔ بالا می‌توان نوشت:

$xRy\Leftrightarrow yRx$

$x+y\geq 2\Leftrightarrow y+x\geq 2$

و گزارهٔ دو شرطی فوق، همواره درست است، لذا رابطهٔ R تقارنی است.

مثال. آیا رابطهٔ زیر در مجموعهٔ اعداد حقیقی تقارنی است؟

$$\begin{cases}R:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ xRy\Leftrightarrow x^2+y^3=9\end{cases}$$

حل.

$xRy\Leftrightarrow yRx$

$x^2+y^3=9\overset{?}{\Leftrightarrow}y^2+x^3=9$

واضح است که گزارهٔ دو شرطی بالا همواره درست نیست. به‌عنوان مثال، اگر $x=1$ و $y=2$ باشد، تساوی سمت چپ درست است؛ ولی تساوی سمت راست درست نیست. پس این رابطه، تقارنی نیست.

تمرین ۲. کدام یک از روابط ذکر شده در تمرین ۱، خاصیت تقارنی دارند؟

مثال. آیا رابطهٔ موازی بودن در مجموعهٔ خط های صفحه، خاصیت تقارنی دارد؟ رابطهٔ عمود بودن چطور؟

حل: رابطهٔ موازی بودن، خاصیت تقارنی دارد؛ زیرا: $d_1\parallel d_2\Leftrightarrow d_2\parallel d_1$، و رابطهٔ عمود بودن نیز خاصیت تقارنی دارد؛ زیرا بدیهی است که: $d_1\perp d_2\Leftrightarrow d_2\perp d_1$.

مثال. آیا رابطهٔ دوستی در مجموعهٔ انسان‌ها، خاصیت تقارنی دارد؟ رابطهٔ برادری چطور؟

حل: رابطهٔ دوستی خاصیت تقارنی دارد؛ زیرا بدیهی است که اگر x دوست y باشد، y هم دوست x است (دوستی دو طرفه است؛ توجه کنید که رابطهٔ دوستی با رابطهٔ دوست‌داشتن، اشتباه نشود). اما رابطهٔ برادری تقارنی نیست؛ زیرا اگر x برادر y باشد، لزومی ندارد که y برادر x باشد (ممکن است y خواهر x باشد).

۳. رابطهٔ تعدی (تراگذری یا ترایایی)

رابطهٔ R در مجموعهٔ A را تعدی گوییم؛ اگر و فقط اگر هرگاه xRy و yRz، آن‌گاه حتماً داشته باشیم: xRz و یا این‌که: $(x,y) \in R$ و $(y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$.

از این‌جا روشن است که رابطهٔ تعدی هیچ‌گونه شرطی را به صورت ابتدا به ساکن به رابطه تحمیل نمی‌کند (برخلاف رابطهٔ انعکاسی)؛ بلکه می‌گوید اگر زوج‌های مرتب (x,y) و (y,z) متعلق به R بود (اگر بود)، آن‌گاه حتماً زوج مرتب (x,z) هم باید باشد.

مثال. کدام یک از روابط زیر که روی مجموعهٔ $A = \{۱,۲,۳,۴\}$ تعریف شده‌اند، دارای خاصیت تعدی هستند؟

$R_۱ = \{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۳),(۱,۳),(۳,۴),(۱,۴)\}$

$R_۲ = \{(۱,۲),(۲,۱),(۱,۱)\}$

$R_۳ = \{(۱,۲),(۳,۲),(۴,۴)\}$

$R_۴ = \{(۲,۴),(۴,۲),(۲,۲),(۴,۴),(۱,۱)\}$

$R_۵ = \{(۲,۳)\}$

حل: رابطهٔ $R_۱$ دارای خاصیت تعدی نیست؛ زیرا به عنوان مثال: ۲R۴ و ۳R۴ و ۲R۳ (یک مثال نقض کافی است).
رابطهٔ $R_۲$ نیز تعدی نیست؛ زیرا: ۲R۲ و ۱R۲ و ۲R۱، اما با اضافه شدن زوج (۲ و ۲) این رابطه به رابطه‌ای تعدی تبدیل خواهد شد.

رابطهٔ $R_۳$ تعدی است؛ زیرا چنانچه مشاهده می‌کنید، مؤلفهٔ دوم هیچ کدام از زوج‌های مرتب این رابطه، خود مؤلفهٔ اول زوج‌های مرتب دیگر نیستند؛ یعنی هیچ مثال نقضی برای تعدی بودن رابطهٔ فوق وجود ندارد.

رابطهٔ $R_۴$ نیز تعدی است؛ زیرا برای هر x، y و z که $xR_۴y$ و $yR_۴z$ داریم: $xR_۴z$ درواقع چند زوج مرتب داریم که مؤلفهٔ دوم آنها، مؤلفهٔ اول زوج مرتب دیگر است و در مورد آنها شرط تعدی برقرار است:

$۲R_۴۴$ و $۴R_۴۲ \Rightarrow ۲R_۴۲$ و $۴R_۴۲$ و $۲R_۴۴ \Rightarrow ۴R_۴۴$ و ...

رابطهٔ $R_۵$ نیز تعدی است. (چرا؟)

مثال. روی مجموعهٔ $A = \{۱,۲,۳,۴\}$ رابطه‌هایی بنویسید که به ترتیب:

۱) تعدی باشد و تقارنی و انعکاسی نباشد.
۲) تعدی و تقارنی باشد و انعکاسی نباشد.
۳) تقارنی باشد و انعکاسی و تعدی نباشد.
۴) انعکاسی باشد و تقارنی و تعدی نباشد.
۵) تعدی و انعکاسی باشد و تقارنی نباشد.
۶) انعکاسی، تقارنی و تعدی باشد.

حل: به ترتیب می‌توان نوشت:

$R_۱ = \{(۱,۲),(۳,۴)\}$

$R_۲ = \{(۱,۳),(۳,۳),(۳,۱),(۱,۱)\}$

$R_۳ = \{(۲,۳),(۳,۲),(۴,۱),(۱,۴)\}$

$R_۴ = \{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۲,۳),(۳,۴)\}$

$R_۵ = \{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۲,۳)\}$

$R_۶ = \{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۱,۲),(۲,۱),(۳,۴),(۴,۳)\}$

مثال. کدام یک از رابطه‌های زیر تعدی هستند:

$$\begin{cases} R_۱: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ xR_۱y \Leftrightarrow x^۲ - y^۲ = x - y \end{cases} \qquad \begin{cases} R_۲: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ xR_۲y \Leftrightarrow x + y \geq ۲ \end{cases}$$

حل: برای تشخیص وجود یا عدم وجود خاصیت تعدی در یک رابطه، به کمک ضابطهٔ آن، مفاهیم xRy و yRz را می‌نویسیم. اگر از ترکیب این دو بتوان نتیجه xRz را گرفت، رابطه مزبور تعدی است؛ مانند رابطهٔ $R_۱$:

$$xR_۱y,\ yR_۱z \overset{?}{\Rightarrow} xR_۱z$$

$$+\begin{cases} x^۲ - y^۲ = x - y \\ y^۲ - z^۲ = y - z \end{cases}$$
$$\overline{x^۲ - z^۲ = x - z \Rightarrow xR_۱z}$$

ولی در رابطهٔ $R_۲$ چنین نیست:

$$xR_۲y,\ yR_۲z \overset{?}{\Rightarrow} xR_۲z$$

$$\left.\begin{matrix} x + y \geq ۲ \\ y + z \geq ۲ \end{matrix}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} x + z \geq ۲$$

بدیهی است که نتیجهٔ بالا درست نیست؛ زیرا مثلاً:

$(۱,۱/۵) \in R_۲(۱+۱/۵ \geq ۲)$, $(۱/۵,۰/۷) \in R_۲(۱/۵+۰/۷ \geq ۲)$,
$(۱,۰/۷) \notin R_۲(۱+۰/۷ < ۲)$

تمرین. کدام یک از رابطه‌های تمرین ۱ خاصیت تعدی دارند؟

مثال. آیا رابطهٔ موازی بودن در مجموعه خطوط صفحه، یک رابطهٔ تعدی است؟ رابطهٔ عمود بودن چطور؟

حل: رابطهٔ موازی بودن، یک رابطهٔ تعدی است؛ زیرا:

$d_۱ \parallel d_۲, d_۲ \parallel d_۳ \Rightarrow d_۱ \parallel d_۳$

ولی رابطهٔ عمود بودن تعدی نیست؛ زیرا از هندسه می‌دانیم:

$d_۱ \perp d_۲$ و $d_۲ \perp d_۳ \Rightarrow d_۱ \parallel d_۳$

(و نتیجه نمی‌شود که: $d_۱ \perp d_۳$)

مثال. آیا رابطهٔ دوستی در مجموعهٔ انسان‌ها، یک رابطهٔ تعدی است، رابطهٔ برادری چطور؟

حل: رابطهٔ دوستی تعدی نیست؛ زیرا واضح است که اگر x دوست y و y دوست z باشد، لزومی ندارد که x دوست z باشد؛ ولی رابطهٔ برادری خاصیت تعدی دارد؛ زیرا اگر x برادر y و y برادر z باشد، x برادر z است (z می‌تواند دختر یا پسر باشد).

سؤال. آیا رابطهٔ همشهری بودن در مجموعهٔ انسان‌ها، یک رابطهٔ تعدی است؟

رابطهٔ هم‌قد بودن یا هم‌وزن بودن چطور؟

اکنون می‌توانیم یک مفهوم اساسی را در ریاضی تعریف کنیم:

رابطهٔ هم‌ارزی

رابطه‌ای که سه خاصیت انعکاسی، تقارنی و تعدی را با هم داشته باشد، یک رابطهٔ هم‌ارزی می‌نامیم. به عنوان مثال، رابطهٔ موازی بودن در مجموعه خط‌های صفحه همان‌گونه که دیدیم، هر سه خاصیت انعکاسی، تقارنی و تعدی را داشت، یک رابطهٔ هم‌ارزی می‌باشد؛ ولی رابطهٔ دوستی در مجموعهٔ انسان‌ها چون خاصیت تعدی ندارد، یک رابطهٔ هم‌ارزی نیست.

تمرین ۴. وجود یا عدم وجود هریک از خواص انعکاسی، تقارنی و تعدی را در مورد هریک از روابط زیر تحقیق کنید. روابط هم‌ارزی را در میان این روابط مشخص کنید:

۱) $\begin{cases} R_۱: \{۱,۲,۳,۴,۵\} \longrightarrow \{۱,۲,۳,۴,۵\} \\ R_۱ = \{(۱,۱),(۲,۵),(۳,۲),(۲,۲)\} \end{cases}$

۲) $\begin{cases} R_۲: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ xR_۲y \Leftrightarrow x+y < ۲ \end{cases}$

۳) $\begin{cases} R_۳: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ xR_۳y \Leftrightarrow ۲x+y = ۵ \end{cases}$

۴) $\begin{cases} R_۴: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ xR_۴y \Leftrightarrow x^۲+y^۲+xy = ۱ \end{cases}$

۵) $\begin{cases} R_۵: \{-۱,۲,۳,۴,۵\} \longrightarrow \{-۱,۲,۳,۴,۵\} \\ R_۵ = \{(-۱,۴),(۲,۳),(۴,۵),(۳,۵),(۳,۴),(۲,۵),(۲,۴),(-۱,۵)\} \end{cases}$

۶) $\begin{cases} R_۶: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ xR_۶y \Leftrightarrow |x-y| < ۱ \end{cases}$

۷) $\begin{cases} R_۷: Z \to Z \\ xR_۷y \Leftrightarrow x-y = ۷k \end{cases}$

۸) $\begin{cases} R_۸: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ xR_۸y \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor \end{cases}$

۹) $\begin{cases} R_۹: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ xR_۹y \Leftrightarrow x^۳-y^۳ = x^۲-y^۲ \end{cases}$

تمرین ۵. روابطی روی مجموعهٔ $A = \{a,b,c,d,e,f\}$ بنویسید که:

الف) انعکاسی باشد و تقارنی و تعدی نباشد.

ب) تقارن و تعدی باشد و انعکاسی نباشد.

ج) تقارنی و تعدی باشد و انعکاسی نباشد.

د) هم‌ارزی باشد.

اشاره

در شماره قبل مسائلی را عنوان کردیم که برای آن‌ها راه‌حل‌هایی از حساب را آورده بودیم که آن راه‌حل‌ها نسبت به راه‌های جبری جالب‌تر بود و ملاحظه گردید که حساب در برخی حالت‌ها، کارآمدتر از جبر است. اکنون ادامه مطلب را در پی می‌آوریم:

حل برخی معادله‌های نامتعارف

از همان زمانی که با نوشتن کتاب «جبر و مقابله» توسط خوارزمی در سده‌های سوم و چهارم هجری، جبر وارد در ریاضیات شد، به حل معادله‌ها پرداخته شد. خود واژهٔ جبر به معنای جبران کردن و مقابله به معنای رو به رو قرار دادن دو سوی برابری است. نام «جبر» از همان زمان باقی مانده است، تنها وقتی این واژه به اروپا رفت، آن را برای عموم در زبان فرانسوی «آلجبر» خواندند؛ یعنی «آل» که در زبان عربی به اول «جبر» اضافه شده بود و امروز هم در تمام جهان به صورت‌های مختلف همان «الجبر» می‌خوانند. البته سده‌ها طول کشید تا «جبر حرفی» معمول شد و به صورت امروزی درآمد. ولی هستهٔ اصلی جبر همچنان حل معادله‌هاست. اگرچه امروز «جبر جدید» پیدا شده است که به کلی انتزاعی و غیر از «جبر رسمی» است، ولی این افتخار برای ایران باقی مانده است که نامی که خوارزمی روی این دانش گذاشت، به همهٔ جهان به ارث رسیده است.

ولی در جبر رسمی، گاهی با معادله‌هایی رو به رو می‌شویم که تا حدی «نامتعارف‌اند» و ما در این‌جا به برخی از آن‌ها می‌پردازیم.

مسألهٔ ۱. مقدار تقریبی جواب این معادله را پیدا کنید و دقت تقریب جواب مثبت را معین کنید:

$$0/000002x^2 + 4x - 1 = 0$$

حل: اگر در معادلهٔ $ax^2 + bx + c = 0$، ضریب a به سمت صفر میل کند، یکی از ریشه‌ها به سمت $-\frac{c}{b}$ و دیگری از لحاظ قدرمطلق به سمت بی‌نهایت میل می‌کند. بنابراین با توجه به کوچک بودن ضریب x^2 نسبت به دو ضریب دیگر (از نظر قدرمطلق)، یکی از ریشه‌ها به $\frac{1}{4}$ نزدیک است. می‌توانستیم

معادله و اتحاد ۶

پرویز شهریاری

این طور استدلال کنیم: اگر از جملهٔ درجه دوم معادله، به دلیل کوچکی آن نسبت به $\frac{۱}{۴}$، صرف نظر کنیم، مقدار تقریبی یکی از جواب‌ها به دست می‌آید. بنابراین:

$$x_۱ \approx \frac{۱}{۴} \qquad (۱)$$

از طرف دیگر، بنابه رابطه‌ای که بین ریشه‌ها و ضریب‌ها وجود دارد، داریم:

$$x_۱x_۲ = -\frac{۱}{۰/۰۰۰۰۰۲} = -۵ \times ۱۰^۵$$

و بنابراین:

$$x_۲ \approx -۲ \times ۱۰^۶$$

اکنون ببینیم ریشهٔ مثبت یعنی $x_۱$، با چه دقتی محاسبه شده است؟ برای این منظور اگر (۱) را از معادلهٔ اصلی کم می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$۰/۰۰۰۰۰۲x^۲ = ۴(x_۱ - x)$$

سمت چپ این برابری مثبت است، یعنی $x < x_۱$، بنابراین مقدار واقعی ریشه از $\frac{۱}{۴}$ کوچک‌تر است و داریم:

$$۴|x_۱ - x| < ۰/۰۰۰۰۰۲ \times \left(\frac{۱}{۴}\right)^۲ ,$$

$$|x_۱ - x| < ۲ \times ۱۰^۶ \times \frac{۱}{۶۴} = \frac{۱}{۱۰^۶} \times \frac{۱}{۳۲} < \frac{۱}{۱۰^۷}$$

و همان‌طور که می‌بینیم، دقت در مرز بالایی است.

مسألهٔ ۲. مقدار تقریبی ریشهٔ این معادله را پیدا کنید.

$$0/000001x + 1 - \sqrt{1/00001} = 0$$

حل: باید مقدار تقریبی عدد:

$$x = \frac{\sqrt{1/00001} - 1}{0/000001}$$

را پیدا کنیم. محاسبهٔ این کسر را با دو روش می‌توان به انجام رساند. یا به یاری رابطهٔ:

$$\sqrt{1+a} \approx 1 + \frac{a}{2}$$

و یا به یاری این تبدیل:

$$\frac{\sqrt{0/00001} - 1}{0/000001} = \frac{0/00001}{0/000001(\sqrt{0/00001} + 1)} =$$

$$\frac{10}{\sqrt{1/00001} + 1} \approx \frac{10}{2} = 5$$

مسألهٔ ۳. از این دو عدد، کدام بزرگ‌ترند؟

$$A = \frac{2/0000000004}{(1/0000000004)^2 + 2/0000000004^2}$$

$$B = \frac{2/0000000002}{(1/0000000002)^2 + 2/0000000002}$$

حل: فرض می‌کنیم $\alpha = 1/0000000004$ و $\beta = 1/0000000002$. بنابراین عددهای مسأله به این صورت درمی‌آیند:

$$\frac{1+\alpha}{1+\alpha+\alpha^2}, \quad \frac{1+\beta}{1+\beta+\beta^2}$$

چون $\alpha > \beta$، پس روشن است که:

$$\frac{1+\alpha}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\beta} = \frac{1+\beta}{\beta^2},$$

$$\frac{\alpha^2}{1+\alpha} = 1:\left(\frac{1+\alpha}{\alpha^2}\right) > 1:\left(\frac{1+\beta}{\beta^2}\right) = \frac{\beta^2}{1+\beta}$$

$$\frac{1+\alpha+\alpha^2}{1+\alpha} = 1 + \frac{\alpha^2}{1+\alpha} > 1 + \frac{\beta^2}{1+\beta} = \frac{1+\beta+\beta^2}{1+\beta}$$

و این به معنای $\frac{1}{A} > \frac{1}{B}$ و در نتیجه $A<B$ است.

در آغاز تعریفی را به یاد می‌آوریم. در نظریهٔ عددها تابعی که با نماد $[x]$ نشان داده می‌شود و برای همهٔ عددهای حقیقی x معین است، به معنای بزرگ‌ترین عدد درستی است که از x تجاوز نمی‌کند. این تابع را بخش درست x گویند یا $[x]$ می‌نامند و گاهی $E(x)$ نشان می‌دهند؛ برای نمونه:

$$[5] = 5, \ [-\sqrt{3}] = -2, \ [-1/5] = -2, \ [0/7] = 0, \ [3/2] = 3$$

یعنی در هر حال داریم: $[x] \le x < [x] + 1$.

همچنین نماد $\{x\}$ را برای بخش کسری x در نظر می‌گیرند؛ یعنی:

$$\{x\} = x - [x] \ \text{یا} \ x = [x] + \{x\}$$

چند نمونه می‌آوریم:

$$\{2/3\} = 0/3 \ ; \ \{0/4\} = 0/4 \ ; \ \{-1/5\} = 0/5$$

چند مثال

مسألهٔ ۴. درستی این اتحاد را ثابت کنید:

$$[\log_2 x - \log_2[x]] = [\log_2 x] - [\log_2[x]]$$

حل: برای $x < 1$ مقدار $[x]$ برابر صفر یا عددی منفی می‌شود و از آن‌جا که لگاریتم صفر یا عدد منفی معنا ندارد، پس برابری تنها برای $x \ge 1$ معنا دارد. $x = 2^k \times 2^\alpha$ می‌گیریم، که در آن k عددی درست و غیر نفی و $0 \le \alpha < 1$ است. داریم:

$$\log_2 x = k + \alpha \ , \ [\log_2 x] = k$$

چون داریم: $[x] \le x$، بنابراین:

$$k \le \log_2[x] \le k + \alpha \ , \ [\log_2[x]] = k$$

از آن‌جا:

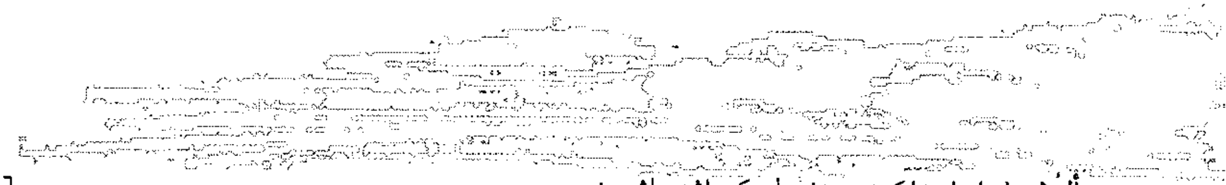
$$0 \le \log_2 x - \log_2[x] \le \alpha$$

و بنابراین:

$$[\log_2 x - \log_2[x]] = 0$$

$$[\log_2 x] - [\log_2[x]] = 0$$

و درستی اتحاد ثابت می‌شود.



مسألهٔ ۵. {x} را پیدا کنید، به شرطی که داشته باشیم:

$$\left[x+\frac{3}{8}\right]+[x]=[2x]$$

حل: $x=k+\alpha$ می‌گیریم، که در آن k عددی درست و $0 \le \alpha < 1$ است. در این صورت برابر فرض را می‌توان این طور نوشت:

$$\left[\alpha+\frac{3}{8}\right]=[2\alpha]$$

اگر $\alpha<\frac{5}{8}$ باشد، به برابری $[2\alpha]=0$ می‌رسیم که برای $\alpha<\frac{1}{2}$ برقرار است. در حالتی که $\alpha \ge \frac{5}{8}$ باشد، به دست می‌آید: $[2\alpha]=1$، که برای $\alpha>\frac{1}{2}$ یا با توجه به شرط $\alpha \ge \frac{5}{8}$ برقرار است.

پاسخ: $\{x\}=\left[0,\frac{1}{2}\right)\cup\left[\frac{5}{8},1\right)$.

مسألهٔ ۶. مسافری x روز در راه بود (x عددی است درست) و هر روز هم x کیلومتر را پیمود تا به مقصد رسید. اگر این مسافر هر روز ۲۰ کیلومتر می‌رفت و بعد از هر ۴۰ کیلومتر، یک روز استراحت می‌کرد، زمان مسافرت او ۳۷ روز بیشتر می‌شد. مسافر چند روز در راه بوده است؟

حل: مسافر x روز در راه بوده و هر روز هم x کیلومتر پیموده است؛ بنابراین فاصلهٔ آغاز حرکت او تا مقصد، برابر x^2 کیلومتر است.

از سوی دیگر، اگر مسافر، بعد از هر ۴۰ کیلومتر یک روز استراحت می‌کرد، تعداد روزهای استراحت او برابر $\left[\frac{x^2}{40}\right]$ می‌شد و به این معادله می‌رسیم:

$$\left(x+27-\left[\frac{x^2}{40}\right]\right)20=x^2$$

که بعد از تبدیل‌های ساده چنین می‌شود:

$$\left[\frac{x^2}{40}\right]=x+37-\frac{1}{20}x^2$$

و در نتیجه باید داشته باشیم:

$$x+37-\frac{1}{20}x^2 \le \frac{x^2}{40} < x+38+\frac{1}{20}x^2$$

با حل این دو نامعادله، به این پاسخ‌ها می‌رسیم:

$$\frac{20+22\sqrt{10}}{3} \le x < \frac{20+4\sqrt{310}}{3}$$

مقدار سمت چپ بین ۲۹ و ۳۰ و مقدار سمت راست بین ۳۰ و ۳۱ است:

$$29/000 \le x < 30$$

پاسخ: $x=30$.

مسألهٔ ۷. پیاده‌ای با سرعت ۵ کیلومتر در ساعت حرکت می‌کند. بعد از پیمودن هر ۴ کیلومتر به استراحت می‌پردازد. هر استراحت او، به جز استراحت چهارم، ۱۰ دقیقه طول می‌کشد و در توقف چهارم، یک ساعت استراحت می‌کند. اگر این مسافر، ساعت ۴ صبح راه افتاده و در ساعت ۱۲ ظهر به مقصد رسیده باشد، چه فاصله‌ای را پیموده است؟

حل: فاصله‌ای را که پیاده پیموده است، برابر x کیلومتر می‌گیریم. در این صورت

تعداد توقف‌های او برابر $\left[\frac{x}{4}\right]$ می‌شود. هر کدام از این توقف‌ها ۱۰ دقیقه (یعنی $\frac{1}{6}$ ساعت) طول کشیده است؛ به جز توقف چهارم که مدت آن یک ساعت بوده به این ترتیب، کل زمان استراحت مسافر، بر حسب ساعت، چنین است:

$$\frac{1}{6}\left(\left[\frac{x}{4}\right]-1\right)+1$$

بنابراین، زمانی که مسافر در حال حرکت بود، بر حسب ساعت، برابر است با:

$$8-\left(\left[\frac{x}{4}\right]-1\right)\frac{1}{6}-1=7\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\left[\frac{x}{4}\right]$$

بنابراین مسافت x برابر می‌شود:

$$x=5\left(7\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\left[\frac{x}{4}\right]\right)=35\frac{5}{6}-\frac{5}{6}\left[\frac{x}{4}\right];$$

$$\left[\frac{x}{4}\right]=\frac{215-6x}{5}$$

از آن‌جا، به این نامعادله‌ها می‌رسیم:

$$\frac{215-6x}{5}\le\frac{x}{4}<\frac{215-6x}{5}+1$$

با حل این نامعادله‌ها به دست می‌آید:

$$\frac{215}{29}\le x<\frac{220}{29}\Rightarrow 7/4000\le\frac{x}{4}<7/5000$$

یعنی $x=7$ و به این معادله می‌رسیم:

$$\frac{215-6x}{5}=7\Rightarrow x=30\ (\text{کیلومتر})$$

مسألهٔ ۸. معادلهٔ $\left[x+\frac{1}{2}\right]+[x]^2=[2x]+2$ را حل کنید.

حل: در آغاز یک اتحاد را ثابت می‌کنیم:

$$\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]-[x] \qquad (1)$$

هر عدد x را می‌توان به صورت $x=k+\alpha$ یا $x=k+\frac{1}{2}+\alpha$ نوشت که در آن‌ها k عددی درست و $0\le\alpha<\frac{1}{2}$.

برای $x=k+\alpha$ داریم:

$$\left[x+\frac{1}{2}\right]=\left[k+\alpha+\frac{1}{2}\right]=k\ ;$$

$$[2x]=[2k+2\alpha]=2k\ ;\ [x]=[k+\alpha]=k$$

یعنی: $\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]-[x]$.

برای $x=k+\frac{1}{2}+\alpha$ به دست می‌آید:

$$\left[x+\frac{1}{2}\right]=[k+1+\alpha]=k+1\ ;$$

$$[2x]=[2k+1+2\alpha]=2k+1\ ;$$

$$[x]=\left[k+\frac{1}{2}+\alpha\right]=k$$

و بنابراین $\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]-[x]$.

برای حل مسألهٔ اصلی، اگر از اتحاد (۱) استفاده کنیم، به این صورت درمی‌آید:

$$[x]^2-[x]-2=0$$

این، یک معادلهٔ درجه دوم نسبت به $[x]$ است که جواب‌های آن ۱- و ۲ است؛ پس:

$$2\le x<3\ ,\ -1\le x<0$$

مسألهٔ ۹. این دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی را حل کنید:

$$\begin{cases}x+[y]+\{z\}=1/1\\ y+[z]+\{x\}=2/2\\ z+[x]+\{y\}=3/3\end{cases}$$

حل: با توجه به اتحاد $[a]+\{a\}=a$، سه معادلهٔ دستگاه را با هم جمع می‌کنیم؛ به دست می‌آید:

$$2(x+y+z)=6/6$$

یا:

$$x+y+z=3/3 \quad (1)$$

مجموع دو معادلهٔ اول و دوم را از معادلهٔ (۱) کم می‌کنیم،

نتیجه چنین می‌شود :

$$[y]+\{x\}=0$$

از این‌جا نتیجه می‌شود: x عددی درست است و $0 \le y < 1$ ، به این ترتیب معادلهٔ اول دستگاه به این صورت درمی‌آید :

$$x+\{z\}=1/1$$

از آن‌جا $x=1$ و $\{z\}=0/1$ و معادلهٔ دوم دستگاه به این صورت درمی‌آید :

$$y+\{z\}=3/2$$

درنتیجه : $[z]=2$, $y=0/2$.

پاسخ. $x=1$, $y=0/2$, $z=2/1$.

مسألهٔ ۱۰. معادلهٔ $\big||x|-[x]\big|=\big[|x|-[x]\big]$ را حل کنید.

حل : از آن‌جا که $|x|\ge x\ge [x]$ ، پس سمت چپ برابری مساوی است با $|x|-[x]$. چون $[x]$ عددی درست است، پس سمت راست معادله برابر $[|x|]-[x]$ می‌شود. به این ترتیب، معادلهٔ مفروض به این صورت درمی‌آید :

$$|x|=[|x|]$$

این برابری وقتی برقرار است که $|x|$ و در نتیجه خود x عددی درست باشد.

پاسخ. هر عدد درستی جواب معادله است.

مسألهٔ ۱۱. این مسأله، یکی از مسأله‌های المپیاد سراسری روسیه در سال تحصیلی ۱۹۷۹ ـ ۱۹۸۰ است. در این دنباله، چند عدد مختلف وجود دارد؟

$$\left[\frac{1^2}{1980}\right],\left[\frac{2^2}{1980}\right],\left[\frac{3^2}{1980}\right],\dots,\left[\frac{1980^2}{1980}\right]$$

حل : جملهٔ kام دنبالهٔ مفروض را x_k می‌نامیم.

$$x_k=\left[\frac{k^2}{1980}\right]$$

یادآوری می‌کنیم که دنبالهٔ (x_k) غیرنزولی است. روشن است که :

$$x_1=x_2=\dots=x_{44}=0$$

زیرا برای $k\le 44$ داریم $\frac{k^2}{1980}<1$. به همین ترتیب، به سادگی قابل تحقیق است که :

$$x_{45}=x_{46}=\dots=x_{62}=1$$

زیرا برای $45\le k\le 62$ داریم :

$$1<\frac{k^2}{1980}<2$$

جملهٔ بعد از x_{62} برابر است با ۲ ؛ یعنی ۱۸ جملهٔ دنباله برابر واحد است.

می‌بینیم، بین ۶۲ جملهٔ اول دنباله، تنها ۲ عدد متفاوت وجود دارد. از طرف دیگر :

$$x_{1980}=\left[\frac{1980^2}{1980}\right]=1980$$

و این، به معنای آن است که در دنبالهٔ x_k ، همهٔ عددهای طبیعی از ۰ تا ۱۹۸۰ وجود ندارد؛ یعنی «جاافتادگی‌هایی» در آن پیدا می‌شود.

این تفاضل را در نظر می‌گیریم :

$$y_k=\frac{(k+1)^2}{1980}-\frac{k^2}{1980}=\frac{2k+1}{1980}$$

اگر $y_k>1$ ، آن وقت عددهای x_k و x_{k+1} مختلف‌اند. این وضع وقتی پیش می‌آید که داشته باشیم :

$$2k+1>1980\Rightarrow k>\frac{1979}{2}>989$$

بنابراین، همهٔ عددهای x_{990} ، x_{991} ، ... ، x_{1980} مختلف‌اند (به تعداد ۹۹۱ عدد).

در حالت $y_k<1$ یا x_k و x_{k+1} بر هم منطبق‌اند و یا یک واحد با هم فرق دارند؛ یعنی «جاافتادگی» وجود ندارد؛ چون :

$$x_{989}=\left[\frac{989^2}{1980}\right]=494$$

یعنی، در مجموعهٔ $\{x_1,x_2,\dots,x_{989}\}$ به همهٔ عددهای درست از ۰ تا ۴۹۴ برمی‌خوریم (روی هم ۴۹۵ عدد).

به این ترتیب، تعداد عددهای مختلف در دنبالهٔ مفروض، برابر است با :

$$991+495=1486$$

تصاعد عددی

احسان یارمحمدی

برای
دانش‌آموزان
سال دوم

با مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت که در واقع همان مجموعه اعداد طبیعی هستند و به صورت $Z^+ = N = \{۱, ۲, ۳, ...\}$ نمایش داده می‌شود و دارای تعداد نامتناهی عضو است، آشنا هستید.

اگر عضوهای این مجموعه را از داخل آکولاد خارج کنیم و آنها را با همان نظم و ترتیب خاصی که دارند، به صورت متوالی و به دنبال یکدیگر بنویسیم، خواهیم داشت:

۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ ، ...

با اندکی دقت، درمی‌یابیم که اولین عضو، عدد یک است و بقیه اعضا به صورت:

۲=۱+۱

۳=۲+۱

۴=۳+۱

۵=۴+۱

⋮

به دست می‌آیند؛ به عبارت دیگر، برای به دست آوردن هر عضو آتی، عضو قبل از آن را با عدد یک جمع می‌کنیم تا عضو موردنظر حاصل شود.

قرارداد ۱.

پس از این، به جای استفاده از کلمهٔ «عضو» در بحث تصاعد، از کلمهٔ «جمله» برای بیان مقصودمان استفاده می‌کنیم.

اکنون به اعداد زیر توجه می‌کنیم:

۳ , ۹ , ۱۵ , ۲۱ , ۲۷ , ۳۳ , ۳۹ , ۴۵ , ۵۱ ، ...

به سهولت و با استفاده از شهود خود، درخواهیم یافت که جملهٔ اول عدد ۳ و بقیهٔ جمله‌ها حاصل جمع جملهٔ قبل خود به اضافهٔ عدد ثابت ۶ هستند. در ضمن، با مشاهدهٔ جمله‌های این دنباله، به این نتیجه می‌رسیم که جمله‌های این دنباله، در حال بزرگ شدن (از نظر اندازهٔ عددی) و

به اصطلاح پیشروی و پیشرفت هستند؛ بنابراین همین توالی و فراگشت، بهانهٔ خوبی ایجاد می‌کند تا این اعداد طبیعی، را «تصاعد[3]» بنامیم.

عدد ثابتی که در شکل‌گیری بقیهٔ جمله‌ها در این تصاعد به‌واسطهٔ عمل جمع، نقش اساسی را ایفا می‌کند، نام این تصاعد را «تصاعد عددی» قرار می‌دهیم.

قرارداد ۲.

در هر تصاعد عددی، مقدار ثابت و مخالف صفری را که در پیدایش جمله‌های آن تصاعد نقش دارد، «تفاضل مشترک»[5] یا «قدر نسبت» می‌نامیم.

بنابراین با توجه به مطالب ارائه شده، اگر جملهٔ اول یک تصاعد عددی را با x_0 و قدر نسبت آن را با r نمایش دهیم، در این صورت، شکل کلی تصاعد عددی به صورت زیر است:

$$x_0, x_0+r, x_0+2r, x_0+3r, \ldots, x_0+(n-1)r$$

می‌دانیم که اگر بخواهیم شناختی دربارهٔ موضوعی به دست آوریم، داشتن یک ضابطه که نشان‌دهندهٔ قانونمندی در آن موضوع است، می‌تواند کمک بسیار ارزنده‌ای را در مورد آشکارسازی مشخصه‌های پنهان در آن موضوع به ما عرضه کند؛ لذا در این قسمت، سعی بر این است که ضابطه‌ای را با عنوان «رابطهٔ بازگشت[6]» در تصاعد عددی مطرح کنیم.

در واقع رابطهٔ بازگشت، یک معادله برای دنباله‌ای از اعداد طبیعی مانند x_n است که می‌توانیم هر جمله از این دنباله را برحسب تعدادی با پایان (متناهی) از جمله‌های قبل بیان و مشخص کنیم؛ بنابراین روابط زیر را عرضه می‌کنیم:

$\mathrm{I})\ x_n - x_{n-1} = r$

$\mathrm{II})\ x_n = x_{n-1} + r$

$\mathrm{III})\ x_{n-1} = x_n - r$

با توجه به سه رابطهٔ بازگشت بالا که هر کدام از دیگری نتیجه می‌شود، می‌توان با داشتن یک جمله و قدر نسبت یک تصاعد عددی، بقیهٔ جمله‌های آن را به دست آورد؛ بدین صورت که اگر قدر نسبت را به جمله‌ای مفروض اضافه کنیم و این عمل را مرتب ادامه دهیم، جمله‌های بعدی تصاعد عددی مشخص می‌شوند؛ و اگر قدر نسبت را از جمله‌ای مفروض کم کنیم و این عمل را به طور متوالی انجام دهیم، جمله‌های قبلی جمله‌ی مفروض تصاعد عددی معین می‌شوند.

لذا با توجه به مطالب گفته شده، درخواهیم یافت که در یک تصاعد عددی با جملهٔ اول x_0 و قدر نسبت r، جملهٔ عمومی به صورت $x_n = x_0 + (n-1)r$ است.

مثال. اگر در یک تصاعد عددی، جملهٔ اول ۱۰ و قدر نسبت r=5 باشد، پس جملهٔ عمومی این تصاعد به صورت $x_n = 10+5(n-1)$ است، اکنون اگر هر جملهٔ این تصاعد را بخواهیم، می‌توانیم با انتخاب یک $n \in N$ دلخواه، جملهٔ موردنظر خود را به دست آوریم. به عنوان مثال، اگر n=3 را اختیار کنیم، جملهٔ سوم در این تصاعد، به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$x_3 = 10+5(3-1) = 20$$

مثال. چند جمله از جمله‌های یک تصاعد عددی، به صورت ۲, ۴, ۶, ۸، ... , ۴۲, ۴۴ است؛ بنابراین مجموع سه جمله بعد از جملهٔ چهارم در این تصاعد، برابر با ۳۶ است؛ زیرا:

۱۰=۲+۸= جمله پنجم

۱۲=۲+۱۰= جمله ششم

۱۴=۲+۱۲= جمله هفتم

همچنین، مجموع سه جملهٔ قبل از جمله ماقبل آخر، یعنی ۴۲، برابر با ۱۱۴ است؛ زیرا:

۴۰=۲-۴۲= جملهٔ بیست‌ویکم

۳۸=۲-۴۰= جملهٔ بیستم

۳۶=۲-۳۸= جملهٔ نوزدهم

واسطهٔ عددی

قضیه: اگر z, y, x سه جملهٔ متوالی از یک تصاعد عددی باشند، آن‌گاه $y = \frac{x+z}{2}$ را واسطهٔ این تصاعد عددی می‌نامیم.

برهان

بنابر آن‌چه در محتوای متن ارائه شد، داریم $x = x_n$ ، $y = x_n + r$ ، $z = x_n + 2r$ ؛ بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} y = x_n + r \Rightarrow 2y &= 2(x_n + r) \\ &= 2x_n + 2r \\ &= x_n + x_n + 2r \\ &= x_n + (x_n + 2r) \\ &= x + z \Rightarrow y = \frac{x+z}{2} \end{aligned}$$

مثال. سه عدد $3x+3$ ، $2(x-2)$ و $2x+1$ به ترتیب جمله‌های یک تصاعد عددی هستند، لذا با توجه به قضیه بالا، می‌توان چنین نوشت؛ $2(2x-4) = (3x+3) + (2x+1)$ ، و x را محاسبه کرد که، مقدار x برابر با ۱۲- است.

لذا جمله‌های این تصاعد عددی، با قدر نسبت $r = -5$ ، به‌صورت زیر است.

۲-و ۸-و ۱۳-و ۱۸-و ۲۳-و ۲۸-و ۳۳-و ۳۸-و ۴۳-و ...

مثال. سه عدد $7x^2$ ، $9x^2 - 4$ ، $4x^2 - 1$ به‌ازای $x > 0$ ، به‌ترتیب جمله‌های یک تصاعد عددی هستند، بنابراین، می‌توان نوشت $2(9x^2 - 4) = (4x^2 - 1) + 7x^2$ ، که پس از محاسبه و ساده‌کردن، مقدار x برابر با یک است.

بنابراین جمله‌های این تصاعد عددی با قدر نسبت $r = 2$ ، به‌صورت زیر است:

۱ ، ۳ ، ۵ ، ۷ ، ۹ ، ۱۱ ، ۱۳ ، ۱۵ ، ۱۷ ، ۱۹ ، ...

تصاعد عددی یکنوا

به‌دنبالهٔ اعداد زیر که یک تصاعد عددی را تشکیل می‌دهند، دقت کنید.

۱ ، ۵ ، ۹ ، ۱۳ ، ۱۷ ، ۲۱ ، ۲۵ ، ۲۹ ، ...

جمله‌های این تصاعد در حال بزرگ شدن است؛ دلیل آن چیست؟ دلیل آن قدر نسبت این تصاعد، عدد ۴ است که صعودی‌بودن این تصاعد را نشان می‌دهد.

اکنون به‌دنبالهٔ دیگری از اعداد که بیانگر یک تصاعد عددی است، توجه کنید:

۱۸ ... ، ۱۵ ، ۱۲ ، ۹ ، ۶ ، ۳

هنگامی که به جمله‌های این تصاعد عددی دقت می‌کنیم، این مطلب به ذهن ما می‌رسد که جمله‌های این تصاعد در حال کوچک‌شدن است. اگر دلیل آن را بررسی کنیم، متوجه می‌شویم که علت آن، قدر نسبت این تصاعد عددی، یعنی عدد ۳- است که نزولی‌بودن این تصاعد است.

به‌طور کلی در یک تصاعد عددی، اگر قدر نسبت تصاعد عددی مثبت باشد، آن تصاعد را یک تصاعد عددی صعودی می‌نامیم، که در آن، همواره $x_n < x_{n+1}$ برقرار است.

به طور کلی تصاعد عددی صعودی یا نزولی را تصاعد عددی یکنوا می‌گوییم.

اگر قدر نسبت تصاعد عددی منفی باشد، آن تصاعد را یک تصاعد عددی نزولی می‌نامیم که در آن همواره $x_{n+1} < x_n$ برقرار است.

مثال. دنبالهٔ «اعداد طبیعی زوج» که با جملهٔ عمومی $x_n = 2n$ معرفی می‌شوند را، درنظر بگیرید، برای این دنباله به‌ازای $n \in N$ داریم:

۲ ، ۴ ، ۶ ، ۸ ، ۱۰ ، ۱۲ ، ۱۴ ، ۱۶ ، ...

بنابراین دنبالهٔ اعداد طبیعی زوج یک «تصاعد عددی صعودی»[8] با جملهٔ اول $x_0 = 2$ و قدر نسبت $r = 2$ است.

مثال. دنبالهٔ اعداد صحیح منفی را که با جملهٔ عمومی $x_n = -n$ معرفی می‌شوند را مدّنظر بگیرید. برای این دنباله به‌ازای $n \in N$ داریم:

۱- ، ۲- ، ۳- ، ۴- ، ۵- ، ۶- ، ۷- ، ۸- ، ۹- ، ۱۰- ، ...

بنابراین دنبالهٔ اعداد صحیح منفی یک «تصاعد عددی نزولی»[9] با جملهٔ $x_0 = -1$ و قدر نسبت $r = -1$ را تشکیل می‌دهد.

تصاعد عددی باپایان[10] (متناهی)

اگر جملهٔ آخر یک تصاعد عددی مشخص باشد، آن

تصاعد عددی را متناهی می‌نامیم.

درواقع در این چنین تصاعدهایی، جملهٔ آخر به طور کامل مشخص است که ما آن را با L نمایش می‌دهیم؛ لذا شکل کلی یک تصاعد عددی باپایان(متناهی) با جملهٔ اول x_0 و قدر نسبت r و جملهٔ آخر l به صورت زیر است:

$x_0, x_0+r, x_0+۲r, \ldots L-۲r, L-r, L$

مثال. هریک از تصاعدهای زیر، بیانگر یک تصاعد عددی متناهی هستند.

الف) ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ...، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰

ب) ۱۷-، ۱۶-، ۱۵-...، ۶-، ۵-، ۴-

ج) ۶-، ۵-، ۴-، ...، ۴، ۵، ۶

مثال. تعداد جمله های تصاعد عددی متناهی ۱، ۳، ۵، ...، ۲۹، ۳۱ برابر با ۱۶ است؛ زیرا در این تصاعد عددی متناهی، جملهٔ اول $x_0=۱$، قدر نسبت $r=۲$ و جملهٔ آخر $L=۳۱$ است؛ لذا بنابر مطلب ارائه شدهٔ فوق داریم:

$$۳۱=۱+(n-۱)(۲) \Rightarrow n=۱۶$$

ارائه چند قضیه برای تصاعد عددی باپایان(متناهی)

«کارل فردریش گاوس»[۱] (۱۸۵۵ـ۱۷۷۷) ریاضیدان شهیر آلمانی، هنگامی که تحصیلات خود را در دبستان سپری می‌کرد، در پاسخ به سؤالی که معلم در کلاس مطرح کرده‌بود، روشی را ارائه کرد که باعث حیرت بسیارفراوان معلم خویش و همکلاسی‌هایش شد.

معلم گاوس به‌عنوان تمرین، از شاگردان کلاس خواسته‌بود که مجموع جمله های تصاعد عددی متناهی زیر را به‌دست آورند:

۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ...، ۹۵، ۹۶، ۹۷، ۹۸، ۹۹، ۱۰۰

اگر از حرف S که از ابتدای کلمهٔ Sum و به معنای جمع است، استفاده کنیم، درواقع آن چیزی که مدّنظر معلم کلاس بوده، عبارت است از:

$$S=۱+۲+۳+۴+\ldots+۹۷+۹۸+۹۹+۱۰۰$$

محاسبهٔ این جمع، وقت نسبتاً زیادی را لازم داشت و معلم که خود از قبل جواب را محاسبه کرده‌بود، با این کار درواقع می‌خواست که شاگردان کلاس، مشغول به حل این سؤال شوند و از بازیگوشی پرهیز کنند که ناگهان متوجه شد شاگردی(گاوس) جواب سؤال را پاسخ داد.

گاوس روش خارق‌العادهٔ خود را به صورت زیر ارائه کرد.

گاوس مجموع اعداد را S نامید و این اعداد را یک مرتبه از کوچک به بزرگ(از چپ به راست) نوشت و با هم جمع کرد و بار دیگر این اعداد را از بزرگ به کوچک(از راست به چپ) و زیر همان اعداد مرتبهٔ اول نوشت و با هم جمع کرد که چنین شد:

$$S=۱+۲+۳+۴\ldots+۹۷+۹۸+۹۹+۱۰۰$$

$$S=۱۰۰+۹۹+۹۸+۹۷\ldots+۴+۳+۲+۱$$

سپس گاوس طرفین دو تساوی بالا را با هم جمع کرد؛ لذا:

$$۲S=(۱+۱۰۰)+(۲+۹۹)+(۳+۹۸)+(۴+۹۷)+\ldots$$
$$(۹۷+۴)+(۹۸+۳)+(۹۹+۲)+(۱۰۰+۱)$$

گاوس خوب می دانست که حاصل جمع داخل هر پرانتز، برابر با ۱۰۱ است و از طرفی تعداد جمله‌های تصاعد عددی متناهی که معلّم مطرح کرده‌بود، برابر با ۱۰۰ بود؛ بنابراین:

$$۲S=(۱۰۱)(۱۰۰) \Rightarrow S=۵۰۵۰$$

قضیهٔ ۱.

در تصاعد عددی متناهی با جملهٔ اول x_0، قدر نسبت r و جملهٔ آخر L مجموع جمله‌های آن که با S_n نمایش داده می‌شود، برابر است با $S_n=\frac{n}{۲}(x_0+L)$.

برهان

صورت کلی یک تصاعد عددی متناهی، به‌صورت زیر است:

$x_0+x_0+r, x_0+۲r, \ldots, L-۲r, L-r, L$

بنابراین با استفاده از روش گاوس، مجموع جمله های آن به صورت زیر است:

$$S_n = x_0 + (x_0 + r) + (x_0 + 2r) + \ldots + (L - 2r) + (L - r) + L$$

برای ادامهٔ کار نیز از روش گاوس استفاده می کنیم.

$$S_n = x_0 + (x_0 + r) + (x_0 + 2r) + \ldots + (L - 2r) + (L - r) + L$$

$$S_n = L + (L - r) + (L - 2r) + \ldots + (x_0 + 2r) + (x_0 + r) + x_0$$

اکنون از جمع طرفین دو تساوی بالا داریم:

$$2S_n = (x_0 + L) + (x_0 + L) + (x_0 + L) + \ldots$$
$$+ (x_0 + L) + (x_0 + L) + (x_0 + L)$$

چون می دانیم که تعداد جمله های این تصاعد عددی متناهی برابر با n است؛ بنابراین:

$$2S_n = n(x_0 + L) \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(x_0 + L)$$

از طرفی چون جملهٔ عمومی در تصاعد عددی متناهی به صورت $L = x_0 + (n-1)r$ است، پس می توان مجموع جمله های تصاعد عددی متناهی را به صورت $S_n = \frac{n}{2}[2x_0 + (n-1)r]$ نیز مطرح کرد.

مثال. مجموع بیست جملهٔ تصاعد عددی $1, 10, 19, 28, \ldots$ برابر با ۱۷۹۰ است؛ زیرا:

$$S_n = \frac{20}{2}[2(1) + (20-1)(9)] = 1790$$

قضیهٔ ۲

اگر S_n مجموع جمله های تصاعد عددی متناهی با جملهٔ عمومی x_n باشد، آن گاه:

$$x_n = S_n - S_{n-1}$$

برهان

می دانیم

$$S_n = x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n \ (I)$$

$$S_{n-1} = x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-2} + x_{n-1} \ (II)$$

اکنون اگر تساوی (II) را از تساوی (I) کم کنیم، داریم:

$$x_n = S_n - S_{n-1}$$

قضیهٔ ۳

اگر S_n مجموع جمله های یک تصاعد عددی متناهی با جمله عمومی x_n و قدر نسبت r باشد، آن گاه:

$$r = S_n - 2S_{n-1} + S_{n-2}$$

برهان

می دانیم:

$$S_n = x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-2} + x_{n-1} + x_n$$

$$S_{n-1} = x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-2} + x_{n-1}$$

$$S_{n-2} = x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-2}$$

از طرفی چون $r = x_n - x_{n-1}$ و طبق قضیهٔ ۲ داریم: $x_{n-1} = S_{n-1} - S_{n-2}$؛ لذا خواهیم داشت:

$$r = S_n - 2S_{n-1} + S_{n-2}$$

آزمون. در یک تصاعد عددی، جملهٔ اول برابر ۷ و جملهٔ ششم برابر ۲۷ است. قدر نسبت این تصاعد عددی کدام گزینه است؟

۱) ۱ ‏ ۲) ۲ ‏ ۳) ۳ ‏ ۴) ۴

جواب: گزینهٔ ۴ صحیح است.

$$x_n = x_0 + (n-1)r \Rightarrow 27 = 7 + 5r \Rightarrow r = 4$$

آزمون. در یک تصاعد عددی با جمله های فرد، قدر نسبت این تصاعد عددی کدام است؟

۱) صفر ‏ ۲) ۱ ‏ ۳) ۲ ‏ ۴) ۳

جواب: گزینهٔ ۳ صحیح است؛ زیرا ۷ همواره عددی مخالف صفر و $r = x_n - x_{n-1}$ است.

آزمون. در یک تصاعد عددی، مجموع n جملهٔ اول برابر ۱۶۵، مجموع n-۱ جملهٔ اول برابر ۱۳۵ و مجموع n-۲ جملهٔ اول برابر ۱۰۸ است. قدر نسبت این تصاعد عددی کدام گزینه است؟

۱) ۱ ‏ ۲) ۴ ‏ ۳) ۲ ‏ ۴) ۳

جواب: گزینهٔ ۴ صحیح است.

$$r = r = S_n - 2S_{n-1} + S_{n-2} \Rightarrow r = 165 - 2(135) + 108 \Rightarrow r = 3$$

نکاتی دربارهٔ اعداد گویا و گنگ

مرتضی بیات و مهدی حسنی
مرکز تحصیلات تکمیلی در علوم پایهٔ زنجان

چکیده

تفهیم اعداد گنگ به سادگی بیانشان نیست. بیان نمادهای صوری $\sqrt{۲}$، e و π، به مراتب راحت‌تر از درک عمیق آن است که آنها چه نوع اعدادی هستند. در این مقالهٔ کوتاه، کوشش خواهد شد گامی هر چند کوچک در جهت درک بهتر اعداد گویا و گنگ برداشته شود. اشاره به زمینه‌های تاریخی موضوع نیز به درک بهتر مطالب کمک خواهد کرد و نیز اثبات گنگ بودن اعداد $\sqrt{۲}$، e و π به روش کوتاه و جدید و همچنین بررسی قضیهٔ هالموس (صورت سادهٔ مسألهٔ هفتم هیلبرت) و قضیهٔ بیتی، پایان بخش این مقاله خواهد بود.

۱. ملاحظات تاریخی در باب اعداد گویا و گنگ

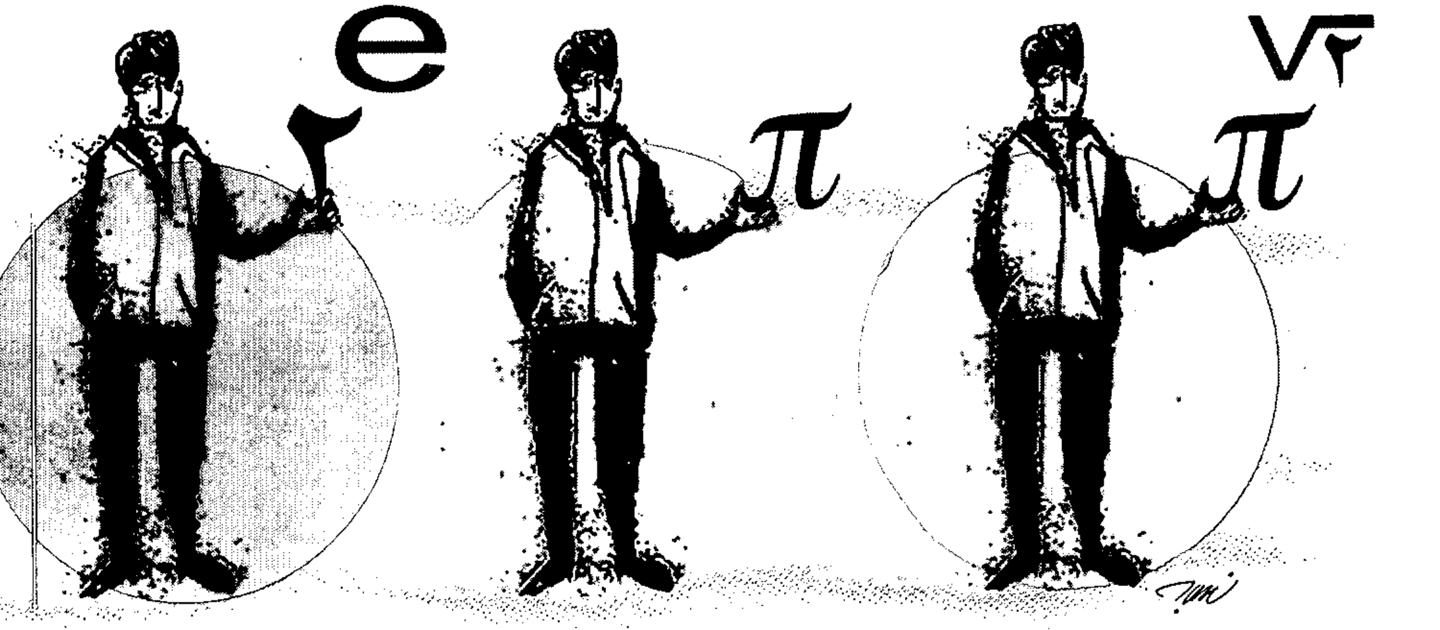
اعداد گویا و گنگ، سابقه‌ای قدیمی دارند. کشف گنگ بودن نسبت قطر مربع به ضلع آن، به فیثاغورثیان منسوب است. تئودوروس (اواخر قرن پنجم قبل از میلاد)، استاد افلاطون در ریاضیات، تحقیقات قابل توجهی در این زمینه کرده است و گنگ بودن جذر ۳ و سایر اعداد طبیعی غیرمجذور کامل را تا ۱۷ به اثبات رسانید. یونانیان، به جای عدد مجرد، عمدتاً به کمّیات هندسی نظر داشتند. کارهای آنها در زمینهٔ اعداد گنگ در کتاب اصول هندسه، از اقلیدس، به اوج می‌رسد. بحث هندسی از کمّیات گنگ، به‌تدریج منجر به مفهوم عدد شد و مبحث اعداد گنگ، در کتاب‌های «حساب نظری» قرن ۱۵ م میلادی دیده می‌شود.

یکی از مشهورترین اعداد ریاضی، نسبت محیط دایره به قطر آن است، که از ایّام بسیار قدیم مورد توجه بوده و این عدد از زمان اویلر به‌بعد، به نام « π » خوانده می‌شود. عدد مشهور دیگر، عدد « e » می‌باشد و سابقه‌اش ظاهراً پس از کشف لگاریتم است. تا اواسط قرن ۱۸ میلادی، کسی نمی‌دانست که این اعداد گویا هستند یا گنگ، تا آن‌که لامبرت در ۱۷۶۱ گنگ بودن آنها را ثابت کرد. گنگ بودن $e^{۲}$ در ۱۸۴۰ به وسیلهٔ لیوویل به اثبات رسید. امروزه می‌دانیم که همهٔ قوای طبیعی e و π و کثیرالجمله‌های صحیح بر حسب e یا π با ضرایب گویا، اعداد گنگ هستند. گنگ بودن اعداد ۲^{e}، π^{e} و $\pi^{\sqrt{۲}}$ و عدد اویلر،

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}((۱+\frac{۱}{۲}+\dots+\frac{۱}{n})-\ln n),$$

هنوز دانسته نیست، ولی می‌دانیم که اعداد $۲^{\sqrt{۲}}$ و e^{π} گنگ‌اند.

مسألهٔ جبری یا متعالی بودن یک عدد، خود مسألهٔ دیگری است. در این موضوع، سه مسألهٔ متمایز می‌توان طرح کرد؛ اوّل اثبات وجود اعداد متعالی (بدون الزام به عرضه کردن چنین اعدادی)، دوم عرضه کردن عددی متعالی، سوم ـ که به مراتب مشکل‌تر است ـ اثبات این‌که عدد معینی (نه عددی که بدین منظور ساخته شده است، بلکه اعدادی مانند e، π، و اعداد مشخص دیگر متداول در آنالیز) متعالی



هست یا نه. نخستین ریاضیدانی که دسته‌ای از اعداد متعالی را عرضه کرد، لیوویل است (۱۸۴۴). پس از وی، هرمیت، متعالی بودن e را ثابت کرد (۱۸۷۳)، و سپس، لیندمان متعالی بودن π را به ثبوت رسانید (۱۸۲۲). با اثبات قضیهٔ شگفت‌انگیز کانتور، معلوم شد که ـ به عبارت مجازی ـ تقریباً همهٔ اعداد متعالی هستند. در واقع، اعداد متعالی، اعداد استثنایی نیستند، بلکه اعداد غیرمتعالی اند که جنبهٔ استثنایی دارند.

در کنگرهٔ پاریس (سال ۱۹۰۰) هیلبرت توجه ریاضیون را به بیست و سه مسألهٔ لاینحل جلب کرد. هفتمین آنان، در متعالی بودن اعدادی بود به صورت a^b با مفروضات $a \neq 1$ و $b \neq 1$ جبری بودن a و b و گنگ بودن b. در ۱۹۳۴ ثابت شد که این اعداد جملگی متعالی هستند.

۲. عدد و تعبیر هندسی

در واقع، انسان از آن موقعی که تناظر یک به یک اعداد و نقاط روی یک محور را درک کرد، این قدرت آفرینش در انسان شکوفا شد و اندازه‌گیری طول یک پاره خط، شروع این خلاقیت بود. راه طبیعی اندازه‌گیری طول، این است که با خط‌کش که ابزار اندازه‌گیری است، شروع کنیم. اگر تکرار اندازهٔ خط‌کش ممکن باشد، آن را به دنبال هم کنار طولی که باید اندازه‌گیری شود، قرار می‌دهیم. در صورتی که سنجش کامل با چهار خط‌کش صورت گیرد، گوییم طول برابر با ۴ است. اگر سه طول چهار واحدی به دنبال هم قرار گیرند، تعداد ۱۲ خط‌کش اندازه‌گیری برای سنجش کامل تمام طول‌ها، لازم است. ملاحظه می‌کنیم که، اگر طول پاره‌خط، مضرب صحیحی از طول خط‌کش نباشد، با روش فوق اندازه‌گیری طول پاره‌خط امکان‌پذیر نیست. اگر معلوم شود که m واحد اندازه‌گیری برای سنجش n طول مساوی لازم است، در آن صورت طول مطلوب x در تساوی زیر صدق می‌کند:

$$m = n \times x \qquad (1)$$

متأسفانه اگر بخواهیم اعداد طبیعی را به کار بریم، باید گفت که معادله (۱)، معمولاً جواب ندارد. یونانیان قدیم از این مسأله دوری می‌کردند، به این ترتیب بیان می‌نمودند، طول واحد اندازه‌گیری به نسبت $\frac{m}{n}$ است و این در واقع، نقطهٔ شروع آشنایی آنها با اعداد گویا (مُنطق) بود.

از اعداد می‌توانیم برای اندازه‌گیری طول، یا کمّیت‌های دیگر فیزیکی استفاده کنیم؛ ولی یونانیان می‌دانستند پاره‌خط‌هایی هم وجود دارند که طول آنها را نمی‌توان در «تئوری» دقیقاً با اعداد گویا اندازه گرفت. آنان هندسه‌دانان بزرگی بودند، یکی از قضیه‌های ساده، ولی عمیقشان، قضیهٔ فیثاغورث بود.

فلاسفهٔ مکتب فیثاغورث، البته با قضیهٔ فیثاغورث آشنا بوده‌اند و از استدلال‌هایی استفاده می‌کردند که در آن مساحت‌های اشکال مختلف به کار گرفته می‌شد.

به محض این که قضیهٔ فیثاغورث کشف شد، در محدودهٔ کوچکی باید توافق می‌شد که پاره‌خطی به طول $\sqrt{2}$، گنگ است. نتیجه با بهت و حیرت پذیرفته شد؛ حتی سعی گردید تا این «نقض کلّی» را مخفی نگه دارند، ارسطو در کتاب طبیعیات خود در باب عقاید فیثاغورث می‌گوید:

«... لیکن فیثاغورس یا اصحاب اوّلیهٔ او، به آسانی ثابت کرده بودند که مجذور هیچ عدد صحیحی نمی‌تواند دو برابر مجذور عدد دیگری باشد و به این جهت، طول ضلع یا طول وتر از مقادیر گنگ است؛ یعنی، هر واحد طول را هر اندازه کوچک اختیار کنید، اگر تعداد دفعاتی که واحد در طول ضلع تکرار می‌شود، بدون کسر باشد، در طول وتر بدون کسر نخواهد بود و بالعکس.»

همهٔ ما با کار پارچه فروشی آشنا هستیم؛ او میله‌ای به اندازهٔ یک متر در اختیار دارد. حال اگر از وی خواسته شود که دقیقاً $\sqrt{۲}$ متر پارچه جدا کند، آیا او قادر به انجام چنین کاری خواهد بود یا نه؟!

حتی اگر وی با وسیله‌ای، طول مترش را به n قسمت مساوی تقسیم کند، باز هم نمی‌تواند این کار را به طور دقیق با $\frac{۱}{n}$ مترش انجام دهد؛ زیرا اگر $\frac{۱}{n}$، مترش را در طول $\sqrt{۲}$ متر پارچه بسنجد، به طور طبیعی تعداد m تا $\frac{۱}{n}$ از طول $\sqrt{۲}$ متر پارچه بیشتر یا کمتر خواهد شد و در غیر این صورت، باید داشته باشیم:

$$\sqrt{۲} = m \times \frac{۱}{n} = \frac{m}{n}, \qquad (۲)$$

که البته بعداً ثابت می‌کنیم که این تساوی هیچ‌گاه اتفاق نمی‌افتد. از این جا متوجه می‌شویم که قسمت اضافی یا کسری که در انتهای سنجش $\sqrt{۲}$ متر پارچه به‌وجود می‌آید، باید به طریقی صرف‌نظر شود. این عمل را «تقریب اعداد گنگ به کمک اعداد گویا» می‌گویند. هر قدر مقدار اضافی یا کسری کمتر باشد، «تقریب دقیق‌تر» خواهد بود و از این جاست که «مفهوم حد» ظاهر می‌شود. حال سعی می‌کنیم

ادامه در صفحه بعد

$\sqrt{2}$ را با اعداد گویا تقریب بزنیم. دانش‌آموزان دبیرستانی با محاسبهٔ حد،

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2}-1)^n=0, \qquad (3)$$

آشنا هستند؛ ولی کاربرد دقیق آن را نمی‌دانند. بگذارید بدون استفاده از ماشین حساب، مقدار تقریبی $\sqrt{2}$ را به کمک حد مذکور به دست آوریم. هر گاه تعداد مراحل (یعنی n) بیشتر شود به تقریب بهتری برای $\sqrt{2}$، می‌رسیم:

$$\begin{aligned}
n=1 &\to (\sqrt{2}-1)^1 \approx 0 \to \sqrt{2}\approx 1\\
n=2 &\to (\sqrt{2}-1)^2 \approx 0 \to 3-2\sqrt{2}\approx 0 \to \sqrt{2}\approx 1/5\\
n=3 &\to (\sqrt{2}-1)^3 \approx 0 \to -7+5\sqrt{2}\approx 0 \to \sqrt{2}\approx 1/4\\
n=4 &\to (\sqrt{2}-1)^4 \approx 0 \to 17-12\sqrt{2}\approx 0 \to \sqrt{2}\approx 1/4166\\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

اثبات گنگ بودن $\sqrt{2}$، به روش‌های مختلفی در مرجع [۶] بیان شده است؛ اما در این‌جا یک برهان ساده و جدیدی را از [۵] بیان می‌کنیم.

قضیه. $\sqrt{2}$ گنگ است.

اثبات. فرض کنیم $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$ و $\frac{m}{n}$ کوچک‌ترین کسر باشد، از طرفی دیگر داریم $\sqrt{2}=\frac{2n-m}{m-n}$ و $\frac{2n-m}{m-n}$ کوچکترین کسر می‌باشد، که این یک تناقض است.

(در اثبات قضیهٔ اخیر، سه موضوع حائز اهمیت است، صورت و مخرج کسر دوم به‌ترتیب کوچک‌تر از صورت و مخرج کسر اوّل است و نیز هنوز صورت و مخرج کسر دوم مثبت‌اند؛ در ضمن این دو کسر با هم برابرند).

به همین نحو، می‌توان ثابت کرد که برای هر عدد طبیعی k، که مربع کامل نیست، $\sqrt{k}$ گنگ است. برای این کار فرض کنیم که j عددی طبیعی باشد؛ به‌طوری که $j<\sqrt{k}<j+1$، اگر داشته باشیم $\sqrt{k}=\frac{m}{n}$ و $\frac{m}{n}$ کوچک‌ترین کسر باشد، به‌طوری که $m,n\in Z^+$، بنابراین داریم؛ $\sqrt{k}=\frac{kn-jm}{m-jn}$، که $\frac{kn-jm}{m-jn}$ کوچک‌ترین کسر است؛ که این یک تناقض است، پس $\sqrt{k}$ گنگ است.

ادامه دارد...

نمای بیرونی رصد خانه ی سمرقند

(دارای مقدمه و پنج باب)، مقاله ی دوم در اوقات و طالع هر وقت (در بیست و دو باب) و مقاله ی سوم در سیر ستارگان (در سیزده باب)، مقاله ی چهارم در دیگر اعمال نجومی (در دو باب).

در این زیج جدول جیب ها[۳] از صفر تا نود درجه دقیقه به دقیقه با پنج رقم شصتگانی حساب شده و جدول ظل های آن از صفر تا ۴۵ درجه، دقیقه به دقیقه و از ۴۵ درجه تا ۷۹ درجه و ۵۰ دقیقه، هر ده دقیقه به ده دقیقه با پنج رقم شصتگانی حساب شده و هر دو جدول دارای ستون تفاضل های جدولی نیز هست. این جدول ها براساس محاسبه ی دقیق جیب یک درجه به وسیله ی حل معادله ی درجه ی سوم $ax = b + x^3$ که مربوط به تثلیث زاویه است تهیه شده و دقّت آنها تحسین آمیز است. در معادله ی فوق x مساوی با جیب یک درجه است. بنا به قول عبدالعلی بیرجندی برای حل معادله ی فوق دو روش به کار رفته است که یکی از آنها از خود الغ بیگ و دیگری اثر فکر غیاث الدین جمشید کاشانی است. کاشانی این معادله را با روش تکراری فوق العاده جالب توجهی حل کرده و از محاسبات او مقدار زیر برای سینوس یک درجه به دست می آید:

sin ۱° = ۰٫۰۱۷۴۵۲۴۰۶۴۳۷۲۸۳۵۷۱

به علّت اهمیّتی که این زیج دارا بوده بارها گزیده هایی به زبان های فرانسوی و انگلیسی و عربی از آن انتشار یافته که معروف ترین آن ها مقدمات زیج الغ بیگ است که لویی آملی سدّیو در سال ۱۸۴۷ میلادی به زبان فرانسوی انتشار داده است.

نمای داخلی رصد خانه ی سمرقند

زیرنویس

۱. شاهزاده بزرگ

۲. زیج گورکانی یا زیج سلطانی نیز گفته می شود.

۳. سینوس ها

● برگرفته از کتاب ریاضی دانان دوره ی اسلامی / تألیف ابوالقاسم قربانی

فراخوان
پنجمین
جشنواره کتاب های آموزشی رشد

(دوره آموزش متوسطه)
آبان ماه ۱۳۸۴

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

نشانی

تهران ● ایرانشهر شمالی ● ساختمان شماره چهار وزارت آموزش و پرورش (شهید سلیمی) ● پلاک ۲۶۸ ● دفتر انتشارات کمک آموزشی ● طبقه پنجم ● دبیرخانه جشنواره کتاب‌های آموزشی رشد ● صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۳۳۳۱

تلفن: ۸۳۰۶۰۷۱
۹-۸۸۳۱۱۶۱ (داخلی ۳۷۳)

دورنگار: ۸۳۰۱۴۷۸

www.samanketab.com

E-mail:
info@samanketab.com

هدف ها

۱. تبیین و انتقال سیاست ها، هدف ها و برنامه های آموزش و پرورش در حوزهٔ انتشار کتاب های آموزشی؛
۲. ارزشیابی کتاب‌های آموزشی موجود، به منظور انتخاب و معرفی کتاب‌های برگزیده؛
۳. انتخاب نویسندگان و ناشران برتر در حوزهٔ تالیف و نشر کتاب های آموزشی؛
۴. فراهم آوردن امکان تبادل نظر میان پدیدآورندگان کتاب های آموزشی؛
۵. شناخت مشکلات و تبیین راهبردهای مناسب برای انتشار کتاب های آموزشی.

برنامه ها

جشنواره در دو بخش برگزار خواهد شد:

الف) بخش انتخاب، معرفی و تقدیر

در این بخش، مجموعه آثار رسیده بررسی می‌شوند و از میان آن‌ها در هر یک از گروه‌های هفتگانه مربوط به حوزهٔ آموزشی زیر انتخاب، معرفی و تقدیر خواهند شد. متوسطه نظری شامل: «تعلیم وتربیت دینی و قرآن، زبان و ادبیات فارسی، اقتصاد، تاریخ، تربیت‌بدنی و آمادگی دفاعی، جغرافیا، ریاضی و آمار، روانشناسی، زیست‌شناسی، زمین‌شناسی، زبان خارجی، شیمی، فیزیک، فلسفه و منطق، علوم اجتماعی، عربی» و فنی و حرفه‌ای و کاردانش شامل حوزه‌های آموزشی: عمران (ساختمان و نقشه‌برداری)؛ مکانیک (نقشه‌کشی، ساخت و تولید، صنایع فلزی، مکانیک خودرو، تأسیسات و صنایع چوب و کاغذ)؛ برق (الکترونیک و الکتروتکنیک)؛ مواد (متالوژی، صنایع شیمیایی، صنایع نساجی، سرامیک، معدن، سیمان)؛ علوم و فنون دریایی (ناوبری، مکانیک موتورهای دریایی، الکترونیک و مخابرات دریایی)؛ هنر (چاپ، نقاشی، طراحی و دوخت، نقشه‌کشی، معماری، صنایع دستی، سینما، نمایش، چاپ دستی، مجسمه‌سازی، موسیقی ایرانی، مرمت آثار فرهنگی، گرافیک، پشتیبانی صحنه و عمومی)؛ حسابداری بازرگانی؛ بهداشت و کودکیاری؛ کامپیوتر (شامل متوسطه نظری هم می‌باشد)؛ مدیریت خانواده و کشاورزی (امور دامی، امور زراعی و باغی، ماشین‌های کشاورزی و صنایع غذایی).

کتاب های آموزشی شامل هفت گروه هستند:

۱. دانش افزایی دانش‌آموزان؛
۲. پرورش مهارت های فرایندی، علمی، پروژه‌ای و هنری دانش‌آموزان؛
۳. دانش افزایی، مهارتی و روشی برای معلمان؛
۴. کار و فعالیت‌های یادگیری برای دانش‌آموزان؛
۵. تمرین به منظور تثبیت، تقویت و آموزش جبرانی یادگیری دانش‌آموزان؛
۶. سنجش و ارزشیابی پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان؛
۷. فعالیت محور در چارچوب هدف‌های برنامه‌های درسی خاص برای دانش‌آموزان

□ توجه:

تشکل ها و انجمن های علمی و فرهنگی غیردولتی حوزهٔ تولید کتاب‌های آموز
که تمایل دارند، در داوری جشنواره مشارکت داشته باشند، می‌توانند با معرفی‌نام
جلسه روز سه‌شنبه ساعت ۱۰ صبح مورخ ۸۴/۳/۳ (واقع در طبقه سوم ساختم
دفتر) شرکت نمایند.

ب) بخش فعالیت‌های جنبی

۱. تقدیر از ناشران برگزیده در حوزهٔ تولید کتاب های آموزشی
۲. انتشار خبرنامهٔ آینه و ویژه‌نامهٔ جشنواره
۳. برگزاری نمایشگاه کتاب‌های آموزشی، مرتبط با موضوع جشنواره
۴. استقرار غرفهٔ ارزشیابی، مشاوره و اطلاع‌رسانی
۵. برگزاری میزگردهای علمی کاربردی.

□ توجه:

هیات تحریریهٔ ویژه‌نامهٔ جوانه از صاحب‌نظران دعوت می کند، مقالات و آثار خو
در زمینهٔ موضوع های مرتبط با هدف‌های جشنواره به آدرس دبیرخانه ارسال کن

شرایط ارسال آثار

دو نسخه از کتاب‌های آموزشی در فاصله سال های ۱۳۸۱ تا ۱۳۸۳ که برای او
بار چاپ شده باشند.

زمان ارسال آثار

مشخصات اثر را بر روی یک برگه مرقوم فرمایید و به همراه هر یک از کتاب‌ها حدا
تا پایان وقت اداری روز سه‌شنبه ۳۱ خردادماه ۱۳۸۴ به دبیرخانهٔ جشنواره ارسال فرمای

□ توجه:

مشخصات اثر: نام کتاب، نویسنده، تاریخ چاپ اول، تاریخ آخرین چاپ، گروه س
مخاطب، ناشر، حوزه آموزشی، چکیدهٔ کتاب (معرفی در چند سطر)، این اثر در کا
یک از گروه‌های هفتگانه قرار می گیرد؟ و نشانی و تلفن ارسال کننده اثر.