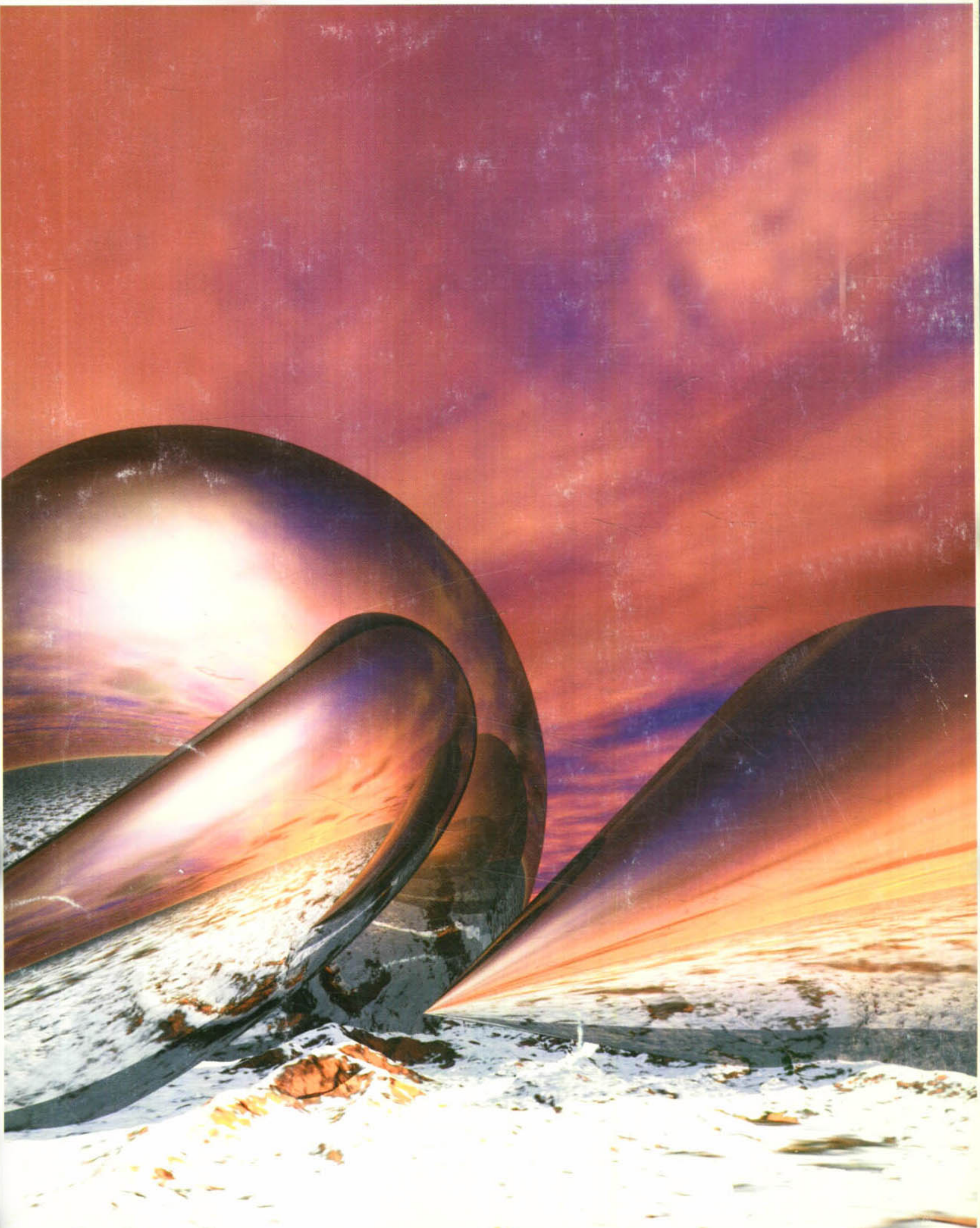
مجلّه ریاضی

برهان

۳۱

برای دانش آموزان دبیرستان

سال نهم ، شماره سوّم ، زمستان ۱۳۷۸، بها ۲۰۰۰ ریال



بسم الله الرحمن الرحیم

سال نهم، زمستان ۱۳۷۸، شمارهٔ سوم.

صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه

مدیر مسؤول: عبد العظیم فریدون

سردبیر: حمیدرضا امیری

مدیر داخلی: میرشهرام صدر

اعضای هیأت تحریریه:

آقایان: حمیدرضا امیری، محمدهاشم رستمی، احمد قندهاری، میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی، سیدمحمدرضا هاشمی موسوی، غلامرضا یاسی پور

(با تشکر از همکاری ارزندهٔ آقای پرویزشهریاری)

مدیرفنی: هوشنگ آشتیانی

طراح گرافیک: امیر بابایی

چاپ و صحافی: چاپخانه مدرسه

برهان

نشانی: خیابان سپهبد قرنی، خیابان سپند شرقی، پلاک ۳۸

تلفن: ۶-۸۸۹۶۷۶۵ ، ۷۱-۸۸۰۴۵۶۸ ، دورنویس (فاکس): ۸۸۲۰۵۹۹ ، صندوق پستی: ۱۴۱۵۵/۱۹۴۹

تلفن امور مشترکین: ۹-۸۸۰۳۲۴

انتشارات مدرسه

وابسته به وزارت آموزش وپرورش

برهان تمامی دبیران محترم و دانش آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می کند:

● نگارش مقاله های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتابهای ریاضی دبیرستان) ● طرح مسائل کلیدی (برای دانش آموزان) به همراه حل آنها ● طرح مسائل مسابقه ای (برای دانش آموزان) به همراه حل آنها ● طرح معماهای ریاضی ● نگارش یا ترجمهٔ مقاله های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

برهان هر سه ماه یک شماره منتشر می شود.

■ هیأت تحریریه در حک و اصلاح وحذف و اضافهٔ مقاله‌ها آزاد است.

■ مقاله‌های مجله با رسم‌الخط انتشارات مدرسه به چاپ خواهد رسید.

■ مقاله‌های وارده باید خوانا وحتی‌الامکان کوتاه باشد.

■ مقاله‌های رسیده مسترد نمی شود.

■ استفاده از مطالب مجله در کتابها یا مجله های دیگربا ذکر دقیق مآخذ بلا مانع است.

حرف اوّل

«به جوانان عزیز کشورمان، به این سرمایه ها و ذخیره های عظیم الهی و به این گلهای معطّر و نوشکفتهٔ جهان اسلام سفارش می کنم که قدر و قیمت لحظات شیرین زندگی خود را بدانید و خودتان را برای یک مبارزهٔ علمی و عملی بزرگ تا رسیدن به اهداف عالی انقلاب اسلامی آماده کنید و .....»

امام خمینی (ره)

عزیزان دانش‌آموز، ما در دنیایی زندگی می کنیم که سرعتِ پیشرفتهای علمی بسیار زیاد و تبادل اطلاعات، حتی در یک روز از حجم بالایی برخوردار است. کتابهای پرمحتوا و دقیق و نرم‌افزارهای رایانه ای بسرعت در حال انتشار و تکثیر هستند. راستی در این میان یک دانش‌آموز ایرانی چه وظیفه ای دارد؟ چگونه باید خودش را برای رسیدن به «اهداف عالی انقلاب اسلامی» آماده کند؟

در دنیای امروزی بدونِ برنامه ریزی دقیق بر اساس اهداف، امکانات و نیازها و رعایت نظم در همهٔ امور، حرکتِ صحیح، پویا و استوار امکان پذیر نمی باشد. آیا شما برای «لحظه های شیرین» عمر خود و گذرانِ زمان، برنامه ریزیِ دقیق کرده و به آن عمل می کنید؟ آیا می دانید که با برنامه ریزی دقیق براساس مطالبِ ذکر شده، وقت شما به صورت منطقی تقسیم شده و درس یا موضوع یا ... از قلم نمی افتد؟ البته عمل به برنامه ریزی نیاز به نظم و ترتیب دارد که همواره از طرف خداوند تعالی و رهبران دینی مان به آنها سفارش شده ایم و نیز توکّل به حضرت حق که لازمهٔ شروع هر فعالیت و برنامه ریزی است.

پس تا دیر نشده، دست به کار شویم و از لحظه لحظهٔ زندگی خود و امکانات موجود استفاده کنیم و همواره رضای خدا و خدمت به میهن اسلامی و مردم را در نظر داشته باشیم.

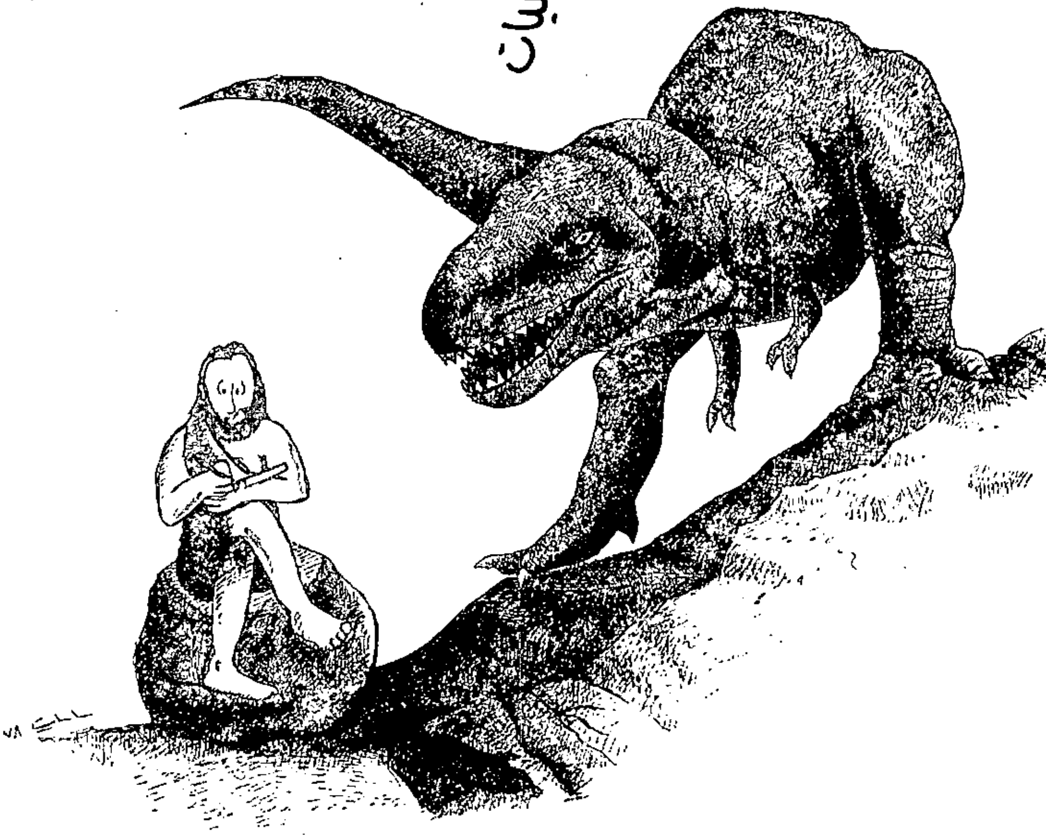
بدانیم که ما و شما وارث خون شهیدان انقلاب اسلامی هستیم و مدارس سنگرهایی است که باید با تعلیم و تربیت اسلامی نگهدار این سنگر مقدس باشیم. ان شاءا...

والسلام - سردبیر

سال ۲۰۰۰، سال جهانی ریاضیات

از تاریخ بیاموزیم(۵)

• پرویز شهریاری



ریاضیات در سرزمین بابل (از بوریس بولگارسکی)

سرزمین بابل قدیم که به «میان دورود» (یا بین‌النهرین) شهرت دارد، در منطقه‌ای بین بستر دو رودخانهٔ دجله و فرات واقع است. بابل، شهر بزرگ دولتهای حاکم بر میان دورود، در ساحل فرات قرار داشت. دولت بابل در ۱۹ سدهٔ پیش از میلاد و با نظام برده‌داری دولتی ـ آیینی تشکیل شد. کشاورزی بیشتر بر اساس آبیاری مصنوعی انجام می‌گرفت، که به مجموعه‌ای از راه آبها و کانالهای پیچیده نیاز داشت. دهقانان اغلب به صورت جمعی روی زمینها کار می‌کردند؛ ولی شاه حق داشت بخشی از زمینهای کشاورزی را به نزدیکان خود ببخشد و به همین مناسبت بتدریج قشری از زمینداران پدید آمدند.

شکوفایی دولت بابل از نیمهٔ دوم سدهٔ هجدهم پیش از میلاد آغاز می‌شود. دراین دوران، دولت به عنوان بزرگترین زمیندار از تمامی تلاش خود برای اصلاح دستگاه آبیاری، استفاده کرد. آبراهها را پاک کردند و برای آبرسانی به سطح گسترده‌تری از زمینهای کشاورزی، اقدامهایی جدّی صورت گرفت. از تولید کشاورزی (غلّه، میوه و پنبه) برای بازرگانی با کشورهای همسایه استفاده می‌شد. بازرگانی رونق گرفت و درضمن، موجب پدید آمدن رباخواری و رباخواران شد. و البته، در هر حال، چه در زمینهای دولتی و چه در زمینهای شخصی، همهٔ کارها بر دوش برده‌ها بود.

پیشرفت بازرگانی، پیش از هرچیز، موجب فراوانی فرآورده‌های کشاورزی شد. از زمینهای بارور، گندم و جو فراوانی به‌دست می‌آمد، درختان فراوان خرما، شراب، سرکه، آرد و پارچه را فراهم می‌آوردند. بجز این، بازرگانی به گسترش کشتیرانی هم کمک کرد. از بابل، به عنوان مرکز بازرگانی کشتیها از راه رودخانه، خود را به دریا می‌رساندند و کالاهای بازرگانی را به پاریس و مصر می‌بردند.

بابل در سال ۶۸۹ پیش از میلاد، به وسیلهٔ «سنا ضریب»(۷۰۵_۶۸۰ پیش از میلاد) شاه آشور (که بر خلاف پدرش سارگُن، جنگ طلب بود) تسخیر و ویران شد ؛ ولی جانشین او، «آسارخادون» در سال ۶۸۰ پیش از میلاد، آن را بازسازی کرد. شکفتگی دوبارهٔ شهر را باید مربوط به سالهای ۶۰۴ تا ۵۶۲ پیش از میلاد، دوران حکومت «نبوکد نسر» دانست. بابل در سال ۳۳۱ پیش از میلاد، به وسیلهٔ اسکندر مقدونی اشغال شد و جانشین او بخش عمدهٔ ساکنان شهر را از آن‌جا بیرون راند. از این زمان، بابل اهمیت خود را ازدست داد و در سدهٔ دوم پیش از میلاد، از صحنهٔ تاریخ حذف شد.

در بابل، در دوران شکفتگی خود، کارهای کارگاهی و هم بازرگانی بسرعت پیش می‌رفت. بجز محصولهای طبیعی، قالی، پارچه‌های ابریشمی و پشمی، پوست، گردن‌بند، دست‌بند، شمشیر، نیزه، عطر و وسیله‌های خانگی هم از آن‌جا صادر می‌شد.

پیشرفت بازرگانی، موجب پیشرفت دستگاه پولی شد. نخستین واحدهای پولی برای مبادله، با غلّه یا نقره محاسبه می‌شد. مالیاتهای دولتی، به وسیلهٔ غلّه یا نقره محاسبه می‌شد. بتدریج پولهای نقره‌ای، جای دیگران را گرفت و داد و ستدهای پایاپای (کالا در برابر کالا) راکنار زد و در نتیجه، دستگاه محاسبهٔ پولی تکمیل شد. بازرگانی گسترده ایجاب می‌کرد همهٔ دستگاه‌های اندازه‌گیری، تکمیل و دقیق شود و در بابل دستگاه اندازه‌گیریها شبیه آن‌چه امروز داریم، ساخته شد. تنها بابلیها به جای مبنای ۱۰ ـ که در دستگاه متری به‌کار می‌رود ـ از مبنای ۶۰ استفاده می‌کردند. نمونهٔ دستگاه اندازه‌گیری بابلیها را می‌توان در محاسبهٔ زمان یا محاسبهٔ اندازهٔ زاویهٔ دید که امروز هم به همان صورت پیشنهادی بابلی به‌کار می‌رود ؛ یک ساعت برابر ۶۰ دقیقه و یک دقیقه برابر ۶۰ ثانیه ؛ یک درجهٔ زاویه‌ای برابر ۶۰ دقیقهٔ زاویه‌ای و غیره. برای اندازه‌گیری وزن، اندکی از این قاعده منحرف شده بودند :

۱تالانت = ۶۰ مین ؛ ۱ مین= ۶۰ سیکل ؛ ۱ سیکل =۱۸۰ گندم

که این آخری با مقیاس امروزی، به تقریب برابر ۱۰ گرم می‌شد. از مقیاسهایی که بابلیها برای طول داشته‌اند، کمتر باقی مانده است.

بابلیها برای عددشماری و عددنویسی از هر دو مبنای ۱۰ و ۶۰ استفاده می‌کردند ؛ به‌ویژه انتخاب مبنای ۶۰ بسیار هوشمندانه است. عدد ۶۰ بخشیابهای زیادی دارد : ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۱۰، ۱۲، ۱۵، ۲۰، ۳۰، ۶۰. و همین وضع، کار هرگونه محاسبه‌ای را ساده‌تر می‌کند ؛ بویژه که برای نوشتن عددهای بزرگ (که در اخترشناسی کاربرد دارد) رقمهای کمتری لازم است. برخی از پژوهشگران هم، انتخاب مبنای ۶۰ را تفسیر هندسی آن می‌دانند که دربارهٔ آن صحبت خواهیم کرد.

عددنویسی بابلی، در دورانی بسیار کهن پدید آمد. گمان می‌رود، بابلیها عددنویسی را از ملتهایی گرفته باشند که پیش از شکل گرفتن دولت بابلی، در آن جا می‌زیستند. آنها عددها را شبیه سایر نوشته‌های خود، روی صفحه‌های گلی و با خط میخی می‌نوشتند ؛ در ضمن برای نوشتن از میله‌ای با سه وجه جانبی استفاده می‌کردند. با این وسیله، می‌شد شکلهای میخ مانند را، سه‌گونه نوشت : عمودی با نوک تیز به طرف پایین، افقی با نوک تیز به سمت چپ وافقی با نوک تیز به سمت راست. در ضمن، نماد 𒁹 برای یکان، نماد 〉 برای دهگان و نماد 〈 برای صدگان به‌کار می‌رفت. به‌یاری همین سه نماد و با استفاده از روش عددنویسی موضعی، عددهای چندرقمی را می‌نوشتند. برای نمونه، نماد 𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹 به معنای ۵، نماد 𒁹𒁹𒁹〉〉 به معنای ۲۳ بود و غیره.

همین نمادها را برای نوشتن عدد در دستگاه به مبنای ۶۰ هم ـ بویژه وقتی که با اندازه ها سروکار داشتند ـ به‌کار می‌بردند. در این حالت هم، اصل موضعی بودن رقمها را رعایت می‌کردند. در ضمن، رقم با مرتبهٔ بالاتر را در سمت چپ رقم با مرتبهٔ پایین‌تر می‌نوشتند ؛ یعنی همان ردیفی را رعایت می‌کردند که برای عددنویسی در مبنای ۱۰ به‌کار می‌رفت. برای نمونه، عدد

(۱) 〉〉〉𒁹𒁹𒁹𒁹 〉〉𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹

به معنای عدد $۲۵+۶۰×۳۴$ یعنی ۲۰۶۵ است ؛ ولی ازآن‌جا که بابلیها، بخش کسری را از بخش درست عدد با نشانه‌ای جدا نمی‌کردند (آن‌طور که ما امروز درعددنویسی دهدهی، بخش کسری را با ممیّز جدا می‌کنیم)، همین عدد (۱) می‌توانست به‌معنای $\frac{۲۵}{۶۰}+۳۴$ و یا $\frac{۳۴}{۶۰}+\frac{۲۵}{۶۰^۲}$ هم باشد. بنابراین، برای این که عدد را، آن‌گونه که منظور نویسنده بوده است، بخوانیم، باید به ماهیت مسأله و اندازه‌هایی که استفاده کرده است، با دقت توجه کنیم. به این ترتیب، بابلیها دستگاه عددنویسی بسیار پیشرفته‌ای داشتند [چیزی که یونانیها، سده‌ها بعد از بابلیها نتوانستند به آن دست یابند].

نیاز به گسترش بازرگانی، اقتصاد، کشاورزی و صنعت کارگاهی، تا اندازهٔ زیادی به بابلیها کمک کرد تا ضمن تجربه،

آگاهیهای زیادی در زمینهٔ ریاضیات به‌دست آورند. درارابطه با گسترش گردش کالا و پیچیده‌تر شدن کارهای کارگاهی، سازمانهایی پدید آمد که خیلی شبیه بانکهای امروزی بود. کار این مؤسسه‌ها پرداخت حواله‌ها، ثبت میزان روزهای کار و بسیاری چیزهای دیگر بود و روشن است چنین وظیفه‌هایی، نیاز به محاسبه داشت و بنابراین به پیشرفت ریاضیات محاسبه‌ای کمک می‌کرد. ازجمله می‌دانیم که بابلیها، عمل ضرب را تقریباً به همان صورتی که امروز عمل می‌کنیم، انجام می‌دادند؛ برای تقسیم بر یک عدد، از ضرب در عکس آن عدد، که برای عددهای درمبنای ۶۰ ساده بود، استفاده می‌کردند. این سادگی، ناشی از این ویژگی است که عدد ۶۰ بخشیابهای زیادی دارد.

کشت و برداشت محصول کشاورزی و همچنین دامداری، نیاز به شناخت فصلهای سال داشت؛ بجز این، کشتیرانی و حرکت کاروانها، بابلیها را واداشت تا به بررسی آسمان و شناسایی ستارگان بپردازند؛ زیرا در آن زمان، ماه و خورشید و برخی ستارگان، تنها معیاری بودند که به یاری آنها می‌شد سمت حرکت را تشخیص داد. به همین مناسبت، بابلیها با بررسی دقیق، ستارگانی را که با چشم دیده می‌شد و حرکت ظاهری آنها، آغاز کرده و توانستند نقشه‌های جالب و کم و بیش دقیقی از آسمان تهیه کنند. آنها متوجه شدند که برخی از ستارگان، از حرکت معمول دیگران ـ یعنی حرکت ظاهری به دور زمین ـ پیروی نمی‌کنند ومسیرهای حرکت دیگری را برای خود انتخاب کرده‌اند، و به این ترتیب بود که سیّاره‌ها را شناختند. طبیعی است که در آغاز، از بین سیّاره‌ها، که در بین ستارگان، مسیر مستقلی برای حرکت خود داشتند، به آنهایی پی ببرند که بزرگتر و به زمین نزدیکترند. نخست به خورشید، ماه و ناهید (زهره = ونوس) توجه کردند. بازهم طبیعی است وقتی بابلیها، اهمیت خورشید را برای انسان و زندگی روی زمین احساس می‌کردند، به آن، با دید احترام بنگرند و برای آن و دیگر جرمهای آسمانی که کشف کرده بودند، یعنی خورشید، ماه و ناهید، ویژگیهای خدایی قایل شوند. و وقتی سیّاره‌های تازه‌ای را کشف کردند، مانند برجیس (مشتری = ژوپیتر)، بهرام (مریخ = مارس)، تیر (عطارد = مرکوری) و کیوان (زُحل = ساتورن) آن وقت تعداد خدایان آنها به هفت رسید.

بابلیها، حرکت ماه را با دقت بررسی کردند و طول ماه قمری را ۳۰ روز تعیین کردند. همین محاسبه، اساس گاه‌شماری آنها قرار گرفت. دوازده ماه قمری، یک سال را تشکیل می‌داد. ولی از آن‌جا که ماه قمری اندکی کمتر از ماه خورشیدی بود و در نتیجه، سال بابلی کوتاهتر از سال خورشیدی می‌شد، بابلیها این اشتباه را با اضافه کردن یک ماه به برخی سالها، جبران می‌کردند. آنها به‌جز واحدهای ساعت و دقیقه که برای اندازه‌گیری زمان داشتند، از واحد هفته هم استفاده می‌کردند و هر روز آن را به نام یکی از هفت ستاره و سیّاره‌ای می‌شناختند، نامگذاری کرده بودند. بسیاری از ملتها، تا امروز، همین نامها را برای روزهای هفته با اندک تفاوتهایی نگه داشته‌اند. برای نمونه فرانسویها، برخی روزهای هفته را این طور می‌نامند:

vendredi روز ونوس، Jeudi روز ژوپیتر، mercredi روز مرکوری، mardi روز مارس، lundi روز ماه.

آلمانیها، نامهای sonntag (روز خورشید) و montag (روز ماه) و انگلیسیها نام saturday (روز ساتورن) را دارند و غیره.

با مشاهدهٔ صورتهای ماه، بابلیها جدولهایی تنظیم کرده بودند که تغییرهای صورتهای ماه را با دقت کامل در آنها روشن کرده‌اند. یکی از این جدولها را، با عددنویسی امروزی، ولی درمبنای ۶۰ (آن‌طور که در اصل وجود دارد) می‌آوریم:

۵:۱۰;۲۰;۴۰;۱/۲۰;۱/۲۰;۱/۳۶;۱/۵۲;

۲/۸:۲/۲۴;۲/۴۰;۲/۵۶;۳/۱۲:۳/۲۸;۳/۴۴

عددهای این جدول را باید این طور تفسیر کرد:

۱/۲۰=۶۰+۲۰=۸۰;۲/۸=۲×۶۰+۸=۱۲۸;

۳/۱۲=۳×۶۰+۱۲=۱۹۲;...

این جدول، صورتهای ماه را، با این فرض که قرص کامل ماه را برابر ۳/۴۴، یعنی ۲۲۴ واحد بگیریم، داده شده است. عددها نشان می‌دهند که تغییر صورت ماه از قرص کامل، اگر از جهت عکس (از آخر به اوّل) درنظر بگیریم، چگونه است.

تصور بابلیها از حرکت ظاهری خورشید به دور زمین، این بود که خورشید در هر شبانه‌روز، ۳۶۰ گام برمی‌دارد [آنها طول نیمدایرهٔ مسیر حرکت ظاهری خورشید را که در روز دیده می‌شود، ۱۸۰ برابر قطر خورشید می‌دانستند] و به همین جهت، برای محیط دایره ۳۶۰ بخش در نظر گرفتند؛ به احتمالی به حساب آوردن ۳۶۰ روز برای سال هم از همین جا سرچشمه گرفته باشد. برخی از پژوهشگران هم عقیده دارند، تقسیم محیط دایره به ۳۶۰ بخش برابر، به دلیل وجود عددنویسی شصت‌شصتی آنها بوده است. هواداران این دیدگاه، بر این مطلب تکیه می‌کنند که بابلیها با تقسیم محیط دایره به ۶ بخش برابر آشنا بودند؛ برای نمونه، ارّابه‌سازان همیشه چرخ را به ۶ بخش برابر تقسیم و آن را با ۶ پرّه محکم می‌کردند. اگر آنها می‌توانستند محیط دایره را به ۶ بخش

برابر تقسیم کنند، آن‌وقت طبیعی بود که، با توجه به دستگاه عددنویسی شصت‌شصتی، هر بخش را به ۶۰ بخش برابر تقسیم کنند.

بررسی روشهای محاسبه‌ای بابلیها، ما را به مفهومهای دقیق و پیچیده‌ای می‌رساند. آنها می‌توانستند ریشهٔ دوم عددها را با تقریب لازم محاسبه کنند؛ ولی روش جذر گرفتنِ آنها، بسیار بغرنج بود و به همین دلیل، ترجیح می‌دادند برای این منظور، از جدولهایی که آماده کرده بودند، استفاده کنند. به همین ترتیب، جدولهایی برای ریشهٔ سوّم عددها و توانهای دوم و سوّم عددها در اختیار داشتند. بابلیها، در برخی جاها، از مفهومهای جبر هم استفاده می‌کردند. برخی گونه‌های معادله‌های درجهٔ اوّل و درجهٔ دوم، و حتی درجهٔ سوّم را با موفقیّت حل می‌کردند. در ضمن برای معادله‌های درجهٔ دوم، از دستگاه شامل دومعادلهٔ دومجهولی استفاده می‌کردند؛ تعیین دو عدد، با معلوم بودن مقدار حاصلضرب و مقدار مجموع (یا تفاضل) آنها. با مطالعهٔ جدولهایی که برای تغییر صورتهای ماه تنظیم شده است، می‌توان متوجه شد که بابلیها با مفهوم تصاعدها آشنا بودند؛ در سطر اوّل، یک تصاعد هندسی قرار دارد و در سطر دوم، تصاعدی حسابی با قدر نسبت ۱۶.

آگاهی بابلیها در زمینهٔ هندسه، بسیار گسترده بود. گرچه در نوشته‌های بابلی، صحبتی از اصل، قضیه یا استدلال نشده است؛ ولی به اندازهٔ کافی می‌توان به مسأله‌هایی برخورد که برای حلّ آنها تسلّط بر بسیاری از ساختمانهای هندسی لازم است. اگر با خطهای راست موازی سروکار داشتند، از پاره‌خطهای راست متناسب استفاده می‌کردند، از رابطهٔ بین ضلعها در مثلث قائم‌الزاویه آگاه بودند، مساحت مثلث و ذوزنقه را محاسبه می‌کردند، رابطهٔ مربوط به محاسبهٔ حجم منشور و استوانه را می‌دانستند و غیره. ولی بابلیها محیط ومساحت دایره را با دقت لازم به‌دست نمی‌آوردند؛ آنها محیط دایره را سه برابر قطر آن به‌حساب می‌آوردند. به این ترتیب، نسبت محیط دایره به قطر آن را برابر ۳ می‌گرفتند. ریاضیدانان بابلی، حجم مخروط ناقص و هرم ناقص را هم محاسبه می‌کردند؛ ولی اغلب این محاسبه نادرست است؛ زیرا ارتفاع را در نصف مجموع سطحهای دو قاعده ضرب می‌کردند.

به این نکته هم باید توجه کرد که، مشاهده‌های اخترشناسی، بابلیها را به مفهومهایی راهنمایی کرد که بعدها پایه‌ای برای پدید آمدن مثلثات شد. در ضمن، آنها با مشاهدهٔ حرکتهای ستارگان، نتیجهٔ آگاهیهای خود را روی یک نیمکره رسم می‌کردند، نه روی صفحه. به همین دلیل پیش از مثلثات مسطّحه به مفهومهای مثلثات کروی پی برده بودند.

سخن کوتاه، در سرزمین باستانی بابل، در دورانی دور از ما، آگاهیهای با ارزشی به وسیلهٔ دانایان زمان ثبت شده است که بسیاری از آنها به ریاضیات مربوط می‌شود؛ ولی هنوز نمی‌توانیم بگوییم دارای دانش ریاضی پیشرفته‌ای بوده‌اند. جمع‌آوری آگاهی‌های پراکنده را نمی‌توان دانش نظری دانست؛ بلکه تنها نتیجه‌ای ازمشاهده و تجربه به حساب می‌آیند. تعمیم مسأله‌ها، نتیجه‌گیریهای کلی و استدلال منطقی در نوشته‌های بابلی دیده نمی‌شود.

در عوض، در بابل قدیم، شبه دانشهایی رشد کرد که می‌توانست برای تکامل دانش زیانمند باشد. از این‌گونه شبه دانشها می‌توان از اخترشماری و اعتقاد خرافی به نیروی عدد نام برد.

اخترشماری، شبه دانشی است که تأکید می‌کند، زندگی هر انسان به طور جداگانه و زندگی یک جامعه در مجموع، به رابطهٔ سیّاره‌ها و ستارگان نسبت به یکدیگر بستگی دارد. از آن‌جا که بویژه خورشید برای زندگی انسان و برای تعیین کشت و برداشت اهمیت جدّی داشت، بابلیها دچار این تصور شدند که سرنوشت انسان در اختیار ستارگان است و بنابراین، به نیایش آنها می‌پرداختند. آنها تا آن‌جا پیش رفتند که معتقد بودند موقعیت سیّاره‌ها در لحظهٔ تولد شخص، می‌تواند سرنوشت آیندهٔ او را مشخص کند. نتیجه‌گیریهای مشابهی هم در بارهٔ حکومت و تمامی مردم می‌کردند. این اعتقادهای بابلیها، تنها در سرزمین بابل باقی نماند، به سایر جاها هم نفوذ کرد و سرچشمه‌ای برای رواج اندیشه‌های خرافی شد که در مجموع، مانعی برای پیشرفت دانش است.

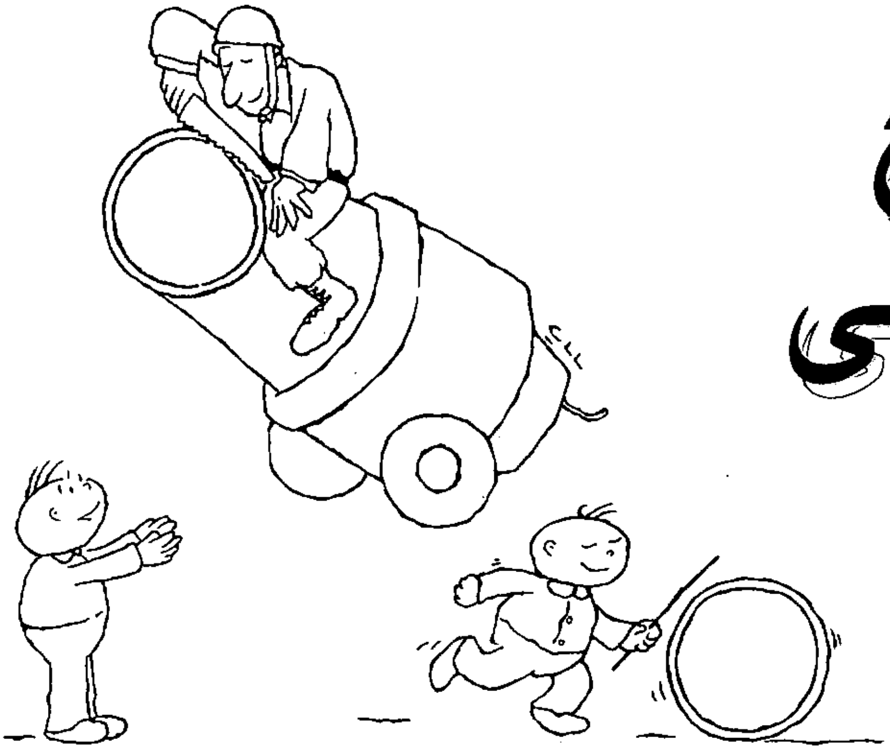
در زمینهٔ عددها هم، بابلیها معتقد بودند، هر عدد «رازی» ویژهٔ خود دارد. از آن زمان که بابلیها، خورشید و ماه و زهره را می‌شناختند و آنها را به عنوان سه خدای خود پذیرفتند، عدد ۳ برایشان «مقدس» شد و عدد «خوشبختی» به‌شمار می‌رفت. و وقتی هفت ستاره را شناختند، عدد ۷، جای عدد ۳ را گرفت و عدد «خوشبختی» شد. عجیب است که با پیشرفت ریاضیات و اخترشناسی، گمانهای دروغین و خرافی دربارهٔ ستارگان و عددها از بین نرفت؛ به نحوی، در بین برخی ملتها و در دورانهای خاصی، به عنوان سدّی در برابر دانش واقعی قرار گرفته است.

مقاطع مخروطی

قسمت اول

دایره

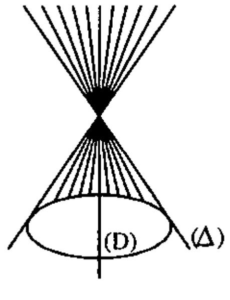
● احمد قندهاری



چهار نوع منحنی مسطح با خاصیتهای مهم، از زمانهای دور، به مقاطع مخروطی معروف است. هر یک از این منحنیها، فصل مشترک یک صفحه با یک سطح مخروطی است.

سطح مخروطی

سطح مخروطی دوّار، از دوران یک خط مانند Δ حول خط دیگری مانند D که با آن متقاطع است، ایجاد می‌شود. خط ثابت D را محور سطح مخروطی و خط متحرّک Δ را مولّد سطح مخروطی و نقطهٔ تقاطع دو خط Δ و D را رأس سطح مخروطی گویند. هر یک از دو بخش سطح مخروطی که در دو طرف رأس قرار دارند، یک دامنهٔ سطح مخروطی نامیده می‌شود.



در این شکل، خط (Δ) حول خط D که با آن در نقطهٔ S متقاطع است، دوران کرده و سطح مخروطی ایجاد شده است. خط (Δ) را مولّد، خط D را محور و نقطهٔ S را رأس سطح مخروطی گویند.

۱ـ اگر صفحه‌ای عمود بر محور سطح مخروطی، آن را قطع کند، فصل مشترک یا مقطع ایجاد شدهٔ یک دایره است.

۲ـ اگر صفحه‌ای غیرعمود بر سطح مخروطی و غیرموازی با مولّد یک دامنه از سطح مخروطی را قطع کند، مقطع حاصل (فصل مشترک) یک بیضی است.

۳ـ اگر صفحه‌ای با یک مولّد سطح مخروطی موازی باشد و فقط یک دامنه از سطح مخروطی را قطع کند، مقطع حاصل (فصل مشترک) یک سهمی است.

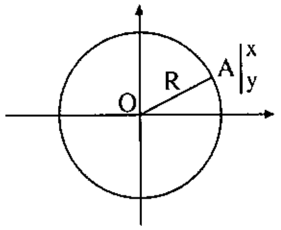
۴ـ هرگاه صفحه‌ای موازی محور سطح مخروطی هر دو دامنه سطح مخروطی را قطع کند، مقطع حاصل، یک هذلولی است.

دایره

مجموعهٔ نقاطی از صفحه که فاصلهٔ آنها تا نقطهٔ ثابتی، برابر مقدار ثابت باشد، منحنی بسته‌ای است به نام دایره، آن نقطهٔ ثابت

را مرکز دایره و آن مقدار ثابت را شعاع دایره گویند. شعاع دایره را با R نشان می‌دهند.

دایرهٔ نوع اوّل: فرض کنیم نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ در صفحهٔ محورهای مختصات باشد. به مرکز O و شعاع OA دایره‌ای رسم می‌کنیم، معادلهٔ این دایره، چنین به‌دست می‌آید :

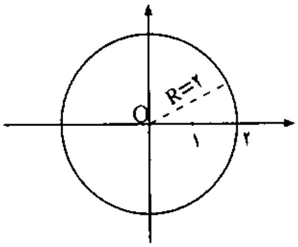


$$OA=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow R=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2+y^2=R^2}$$

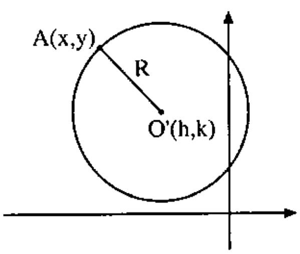
پس $x^2+y^2=R^2$ ، معادلهٔ دایره‌ای است که مرکزش روی مبدأ مختصات و شعاع آن R است.

مثال: دایره به معادلهٔ $x^2+y^2=4$ را رسم کنید.



حل: مرکز دایره روی مبدأ مختصات و $R=2$.

دایرهٔ نوع دوم: اگر $O'(h,k)$ مرکز دایره و R شعاع دایره باشد (شکل مقابل)، معادلهٔ دایره، چنین به‌دست می‌آید :



$$O'A=R \Rightarrow \sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=R$$

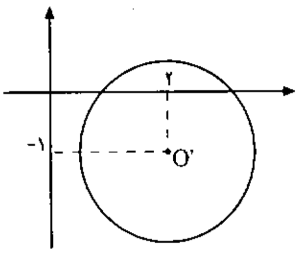
$$\Rightarrow (x-h)^2+(y-k)^2=R^2$$

مثال: دایره به معادلهٔ $(x-2)^2+(y+1)^2=4$ را رسم کنید.

حل: با مقایسهٔ معادلهٔ این دایره با معادلهٔ کلّی دایرهٔ $(x-h)^2+(y-k)^2=R^2$ ، نتیجه می‌گیریم :

$$O'\left|\begin{matrix}h=2\\k=-1\end{matrix}\right. \qquad R^2=4 \Rightarrow R=2$$

جای نقطهٔ O' را پیدا می‌کنیم، سپس به مرکز O' و شعاع ۲ دایره را رسم می‌کنیم.



مربع کامل

می‌خواهیم عبارت $x^2 \pm px$ یا $y^2 \pm ty$ را به مربع کامل تبدیل کنیم ؛ از دستور مقابل استفاده می‌کنیم :

$$1)\quad \boxed{x^2 \pm px=(x\pm\frac{p}{2})^2-\frac{p^2}{4}}$$

مثال:

$$x^2 \pm 10x=(x\pm 5)^2-25$$

$$x^2 \pm 6x=(x\pm 3)^2-9$$

$$x^2 \pm 3x=(x\pm\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}$$

همچنین :

$$2)\quad \boxed{y^2 \pm ty=(y\pm\frac{t}{2})^2-\frac{t^2}{4}}$$

مثال:

$$y^2 \pm 3y=(y\pm\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}$$

$$y^2 \pm 20y=(y\pm 10)^2-100$$

$$y^2 \pm 4y=(y\pm 2)^2-4$$

توجه کنید: ممکن است معادلهٔ دایره، به صورت $x^2+y^2-2x+4y=-1$ باشد ؛ این نوع معادله را معادلهٔ گستردهٔ دایره گوییم. این معادله را باید به معادلهٔ کلّی دایره تبدیل کنیم تا بتوان آن را رسم کرد.

طرز تبدیل معادلهٔ گستردهٔ دایره به معادلهٔ دایره در حالت کلّی

۱ـ دو طرف معادله را بر ضریب x^2 تقسیم می‌کنیم (اگر ضریب x^2، ۱ باشد، این کار لزومی ندارد).
۲ـ جمله‌های x را پهلوی هم و جمله‌های y را هم پهلوی هم می‌نویسیم.
۳ـ جمله‌های x را به مربع کامل و جمله‌های y را هم به مربع کامل تبدیل می‌کنیم.
۴ـ اعداد را به سمت راست تساوی برده، جمع جبری می‌کنیم.

مثال: دایره به معادلهٔ $4x^2+4y^2-4x-8y-11=0$ را رسم کنید.

حل: دو طرف معادله را بر ضریب x^2 یعنی ۴ تقسیم می‌کنیم:

$$x^2+y^2-x-2y=\frac{11}{4}$$

سپس جمله‌های x و جمله‌های y را پهلوی هم می‌نویسیم:

$$\underbrace{x^2-x}+\underbrace{y^2-2y}=\frac{11}{4}$$

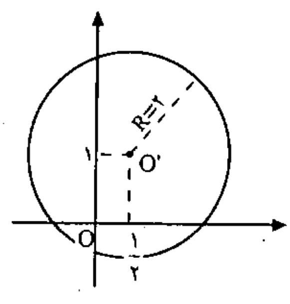
حال، جمله‌های x و جمله‌های y را به مربع کامل تبدیل می‌کنیم:

$$(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+(y-1)^2-1=\frac{11}{4}$$

$$\Rightarrow (x-\frac{1}{2})^2+(y-1)^2=\frac{11}{4}+1+\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow (x-\frac{1}{2})^2+(y-1)^2=4$$

$$O'\left|\begin{array}{l}h=\frac{1}{2}\\ k=1\end{array}\right. \qquad R^2=4\Rightarrow R=2$$



بررسی معادلهٔ $x^2+y^2+ax+by+c=0$

آیا این معادله، معادلهٔ یک دایره است؟ اگر نیست، تحت چه شرایطی این معادله می‌تواند معادلهٔ یک دایره باشد.

سعی می‌کنیم این معادله را به صورت کلّی معادلهٔ یک دایره تبدیل کنیم؛ بدین ترتیب:

$$\underbrace{x^2+ax}+\underbrace{y^2+by}=-c$$

$$(x+\frac{a}{2})^2-\frac{a^2}{4}+(y+\frac{b}{2})^2-\frac{b^2}{4}=-c$$

$$(x+\frac{a}{2})^2+(y+\frac{b}{2})^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c$$

$$(x+\frac{a}{2})^2+(y+\frac{b}{2})^2=\frac{a^2+b^2-4c}{4}$$

اگر این معادله، معادلهٔ یک دایره باشد، باید:

$$R^2=\frac{a^2+b^2-4c}{4}$$

چون R^2 مثبت یا صفر است، پس باید: $a^2+b^2-4c\geq 0$ یا $a^2+b^2\geq 4c$.

نتیجه: در معادلهٔ $x^2+y^2+ax+by+c=0$ اگر $a^2+b^2\geq 4c$، آن‌گاه این معادله، معادلهٔ یک دایره است که مرکز آن $O'\left|\begin{array}{l}h=-\frac{a}{2}\\ k=-\frac{b}{2}\end{array}\right.$ و $R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$.

مسأله: به ازای چه مقادیر m معادلهٔ $x^2+\sqrt{2}x+y^2+(m-1)y+\frac{3}{2}=0$، معادلهٔ یک دایره است؟

حل: $c=\frac{3}{2}$ $\qquad b=m-1$ $\qquad a=\sqrt{2}$

باید: $a^2+b^2\geq 4c$

$$2+(m-1)^2\geq 6\Rightarrow (m-1)^2\geq 4\Rightarrow \begin{cases}m-1\geq 2\\ m-1\leq -2\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}m\geq 3\\ m\leq -1\end{cases}$$

نکته: اگر در معادلهٔ $x^2+y^2+ax+by+c=0$ ، عدد c منفی باشد، معادلهٔ فوق حتماً معادلهٔ یک دایره است.

مثال: به ازای چه مقادیر m، معادلهٔ $x^2+y^2+(2m-3)x+my-1=0$ معادلهٔ یک دایره است.

جواب: چون $c=-1<0$ ، پس به ازای همهٔ مقادیر m، این معادله، معادلهٔ یک دایره است.

طرز تعیین معادلهٔ یک دایره

برای تعیین معادلهٔ یک دایره، باید سه عامل h، k و R را داشته باشیم، سپس آنها را در معادلهٔ $(x-h)^2+(y-k)^2=R^2$ قرار می‌دهیم.

مسألهٔ ۱. معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که $O'\left|\begin{matrix}-2\\1\end{matrix}\right.$ مرکز آن باشد و از نقطهٔ $M\left|\begin{matrix}2\\-2\end{matrix}\right.$ بگذرد.

حل: چون $O'\left|\begin{matrix}-2\\1\end{matrix}\right.$ مرکز دایره است، پس $h=-2$ و $k=1$ ، حال باید R را محاسبه کنیم. چون دایره از نقطهٔ M می‌گذرد، داریم :

$$O'M=R\Rightarrow\sqrt{(2+2)^2+(-2-1)^2}=R$$

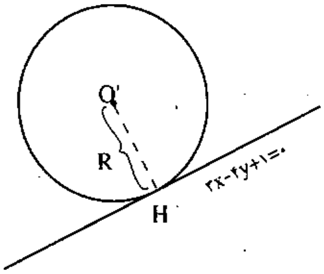
$$\Rightarrow\sqrt{16+9}=R\Rightarrow R=5$$

حال مقادیر h، k و R را در معادلهٔ $(x-h)^2+(y-k)^2=R^2$ قرار می‌دهیم.

معادلهٔ دایره $\Rightarrow(x+2)^2+(y-1)^2=25$

مسألهٔ ۲. معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکزش $O'\left|\begin{matrix}2\\-2\end{matrix}\right.$ باشد و بر خط $3x-4y+1=0$ مماس باشد.

حل: شکل مسأله چنین است : $O'\left|\begin{matrix}2=x_1\\-2=y_1\end{matrix}\right.$



فاصلهٔ O'H برابر شعاع دایره است : $\underbrace{3x}_{a}\underbrace{-4y}_{b}\underbrace{+1}_{c}=0$

$$R=O'H=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|3(2)-4(-2)+1|}{\sqrt{9+16}}=\frac{15}{5}=3$$

معادلهٔ دایره : $(x-h)^2+(y-k)^2=R^2$

$$\Rightarrow(x-2)^2+(y+2)^2=9$$

مسألهٔ ۳. معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که از سه رأس مثلث $O\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right.$ ، $A\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}0\\2\end{matrix}\right.$ بگذرد.

حل: معادلهٔ دایره را به صورت $x^2+y^2+ax+by+c=0$ در نظر می‌گیریم :

$$O\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right.\xrightarrow{\text{در معادلهٔ دایره}}0+0+0+0+c=0\Rightarrow c=0$$

$$A\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.\xrightarrow{\text{در معادلهٔ دایره}}1+0+a+0+c=0$$

$$\Rightarrow1+a+0=0\Rightarrow a=-1$$

$$B\left|\begin{matrix}0\\2\end{matrix}\right.\xrightarrow{\text{در معادلهٔ دایره}}0+4+0+2b+c=0$$

$$\Rightarrow4+2b=0\Rightarrow b=-2$$

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

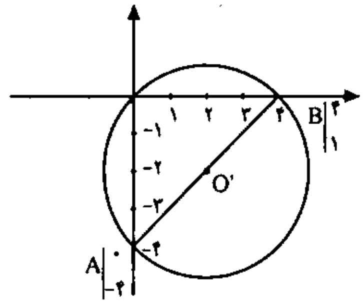
معادلهٔ دایره $\Rightarrow x^2+y^2-x-2y=0$

مسألهٔ ۴. خط به معادلهٔ $y=x-4$ محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می‌کند، معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که AB قطری از آن دایره باشد.

حل:

$$x=0\Rightarrow y=-4\Rightarrow A\left|\begin{matrix}0\\-4\end{matrix}\right.$$

$$y=0\Rightarrow x-4=0\Rightarrow x=4\Rightarrow B\left|\begin{matrix}4\\0\end{matrix}\right.$$



$$O' \text{ نقطهٔ مرکز دایره وسط AB است} \Rightarrow \begin{cases} x_{O'} = h = \dfrac{x_A + x_{A'}}{۲} = \dfrac{۰+۴}{۲} = ۲ \\ y_{O'} = k = \dfrac{y_A + y_{A'}}{۲} = \dfrac{-۴+۰}{۲} = -۲ \end{cases} \Rightarrow O'\left|\begin{matrix} ۲ \\ -۲ \end{matrix}\right.$$

$$AO' = R = \sqrt{(x_A - x_{O'})^۲ + (y_A - y_{O'})^۲}$$

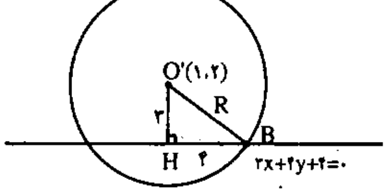
$$= \sqrt{(۰-۲)^۲ + (-۴+۲)^۲} = \sqrt{۸}$$

معادلهٔ دایره: $(x-h)^۲ + (y-k)^۲ = R^۲$

$$\Rightarrow (x-۲)^۲ + (y+۲)^۲ = ۸$$

مسألهٔ ۵. معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکزش $O'\left|\begin{matrix} ۱ \\ ۲ \end{matrix}\right.$ و از خط به معادلهٔ $۳x + ۴y + ۴ = ۰$ ، وتری به طول ۸ جدا کند.

$$O'\left|\begin{matrix} ۱ = x_۱ \\ ۲ = y_۱ \end{matrix}\right. \qquad \underbrace{۳}_{a}x + \underbrace{۴}_{b}y + \underbrace{۴}_{c} = ۰$$



حل: فاصلهٔ $O'H$ را به‌دست می‌آوریم.

$$O'H = \frac{|ax_۱ + by_۱ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|۳+۸+۴|}{\sqrt{۹+۱۶}} = \frac{۱۵}{۵} = ۳$$

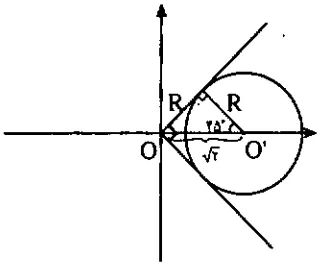
اندازهٔ HB برابر ۴ است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل، داریم :

$$O'B^۲ = O'H^۲ + HB^۲ \Rightarrow R^۲ = ۹ + ۱۶ = ۲۵ \Rightarrow R = ۵$$

معادلهٔ دایره : $(x-h)^۲ + (y-k)^۲ = R^۲$

$$\Rightarrow (x-۱)^۲ + (y-۲)^۲ = ۲۵$$

مسألهٔ ۶. مرکز دایره به طول $\sqrt{۲}$ بر محور xها واقع است، این دایره بر نیمساز ناحیهٔ اوّل و چهارم محورها مماس است. معادلهٔ دایره را بیابید.



حل: در مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل، داریم :

$$R^۲ + R^۲ = (\sqrt{۲})^۲$$

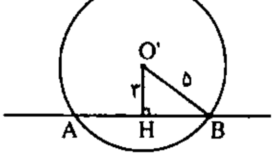
$$۲R^۲ = ۲ \Rightarrow R^۲ = ۱ \Rightarrow R = ۱$$

$$O'\left|\begin{matrix} \sqrt{۲} = h \\ ۰ = k \end{matrix}\right. \qquad R = ۱$$

معادلهٔ دایره : $(x-h)^۲ + (y-k)^۲ = R^۲$

$$\Rightarrow \quad (x - \sqrt{۲})^۲ + y^۲ = ۱$$

مسألهٔ ۷. خط به معادلهٔ $۳x + ۴y + ۴ = ۰$ دایره به معادلهٔ $(x-۱)^۲ + (y-۲)^۲ = ۲۵$ را در نقاط A و B قطع می‌کند. طول پاره‌خط AB را بیابید.



حل: مرکز دایره $O'\left|\begin{matrix} ۱ = x_۱ \\ ۲ = y_۱ \end{matrix}\right. \quad \underbrace{۳}_{a}x + \underbrace{۴}_{b}y + \underbrace{۴}_{c} = ۰$

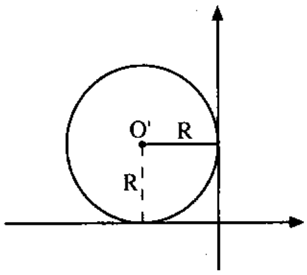
$$O'H = \frac{|ax_۱ + by_۱ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|۳+۸+۴|}{\sqrt{۹+۱۶}} = \frac{۱۵}{۵} = ۳$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل :

$$HB^۲ = ۵^۲ - ۳^۲ = ۲۵ - ۹ = ۱۶ \Rightarrow HB = ۴$$

$$\Rightarrow AB = ۸$$

مسألهٔ ۸. معادله‌های دایره‌هایی را بیابید که در ربع دوم محورها بر محورهای مختصات مماس باشند و از نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}-۱\\ ۲\end{matrix}\right.$ بگذرند.



حل: شکل کلّی مقابل را در نظر بگیرید ؛ مرکز این دایره $O'\left|\begin{matrix}-R\\ R\end{matrix}\right.$ و شعاعش R است، پس معادلهٔ این دایره را به صورت $(x+R)^۲+(y-R)^۲=R^۲$ می‌باشد.

حال مختصات نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}-۱\\ ۲\end{matrix}\right.$ را در معادلهٔ این دایره قرار می‌دهیم.

$$(-۱+R)^۲+(۲-R)^۲=R^۲$$

$$\Rightarrow ۱+R^۲-۲R+۴+R^۲-۴R=R^۲$$

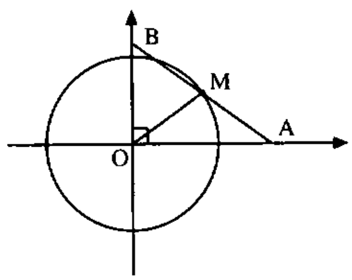
$$\Rightarrow R^۲-۶R+۵=۰ \Rightarrow \begin{cases}R=۱\\ R=۵\end{cases}$$

در معادلهٔ $(x+R)^۲+(y-R)^۲=R^۲$، یک‌بار به‌جای R، ۱ و یک‌بار به‌جای R، ۵ را قرار می‌دهیم.

معادلهٔ دایرهٔ کوچکتر $(x+۱)^۲+(y-۱)^۲=۱$

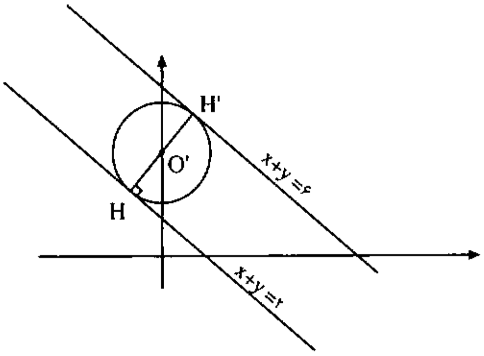
معادلهٔ دایرهٔ بزرگتر $(x+۵)^۲+(y-۵)^۲=۲۵$

مسألهٔ ۹. میلهٔ AB (مطابق شکل) به طول ۱۲ سانتیمتر، طوری جابه‌جا می‌شود که همیشه دو سرش روی محور xها و محور yها قرار دارد. معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ M وسط AB را بیابید.



حل: طول وتر مثلث قائم‌الزاویه شکل (۱۲) است و OM میانهٔ وارد بر وتر است که نصف وتر است. پس OM برابر ۶ است. میلهٔ AB هر جور روی محورها جابه‌جا شود، فاصلهٔ نقطهٔ M وسط AB تا مبدأ مختصات مقدار ثابت ۶ است، پس مکان نقطهٔ M، دایره‌ای است به مرکز O و شعاع ۶ ؛ معادلهٔ آن به صورت $x^۲+y^۲=۳۶$ می‌باشد. پس مکان نقطهٔ M دایره‌ای است به معادلهٔ $x^۲+y^۲=۳۶$.

مسألهٔ ۱۰. معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکزش روی محور yها و بر دو خط به معادله‌های $x+y=۲$ و $x+y=۶$ مماس باشد.



حل: مرکز دایره $O'\left|\begin{matrix}۰\\ k\end{matrix}\right.$

فاصلهٔ دو خط موازی HH' است که مساوی $۲R$ می‌باشد.

$$HH'=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|-۶+۲|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{۴}{\sqrt{۲}}=۲\sqrt{۲}=۲R$$

$$\Rightarrow R=\sqrt{۲}$$

$$O'\left|\begin{matrix}۰=x\\ k=y_۱\end{matrix}\right. \qquad O'H=R=\frac{|ax_۱+by+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۰+k-۲|}{\sqrt{۱+۱}}$$

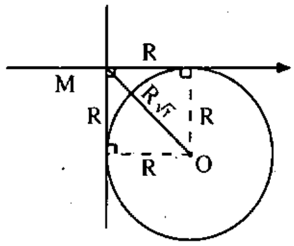
$$=\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow |k-۲|=۲\Rightarrow k-۲=\pm ۲\Rightarrow k=۲\pm۲\Rightarrow k=۴,۰$$

$k=۰$ غیرممکن است، پس $k=۴$.

در نتیجه $O'\left|\begin{matrix}۰\\ ۴\end{matrix}\right.$ و $R=\sqrt{۲}$، پس معادلهٔ دایره به صورت $x^۲+(y-۴)^۲=۲$ است.

دایرهٔ مونژ: مکان هندسی نقاطی از صفحه که بتوان از آن نقاط دو مماس عمود بر هم بر دایرهٔ مفروضی به شعاع R رسم نمود، دایره‌ای است هم مرکز با دایرهٔ اصلی و شعاع $R\sqrt{۲}$.



$OM = \sqrt{R^۲ + R^۲} = R\sqrt{۲}$

نقطهٔ M یک نقطه از دایرهٔ مونژ است.

مسألهٔ ۱۱. دایره به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y = ۳$ مفروض است. معادلهٔ دایرهٔ مونژ این دایره را بنویسید.

حل: $x^۲ - ۲x + y^۲ + ۴y = ۳$

$(x-۱)^۲ - ۱ + (y+۲)^۲ - ۴ = ۳$

$(x-۱)^۲ + (y+۲)^۲ = ۸ \quad R^۲ = ۸ \Rightarrow R = ۲\sqrt{۲}$

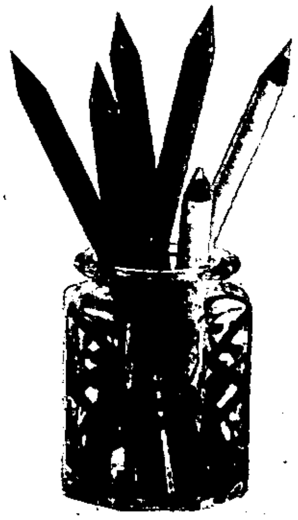
شعاع دایرهٔ مونژ $۴ = (\sqrt{۲})۲\sqrt{۲} = R\sqrt{۲} = R'$ $\quad O' \left| \begin{matrix} ۱ \\ -۲ \end{matrix} \right.$ مرکز دایرهٔ مونژ

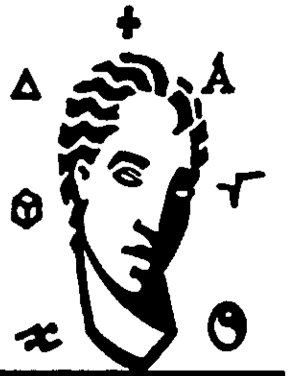
معادلهٔ دایرهٔ مونژ : $(x-۱)^۲ + (y+۲)^۲ = ۱۶$

نتیجهٔ دایرهٔ مونژ:

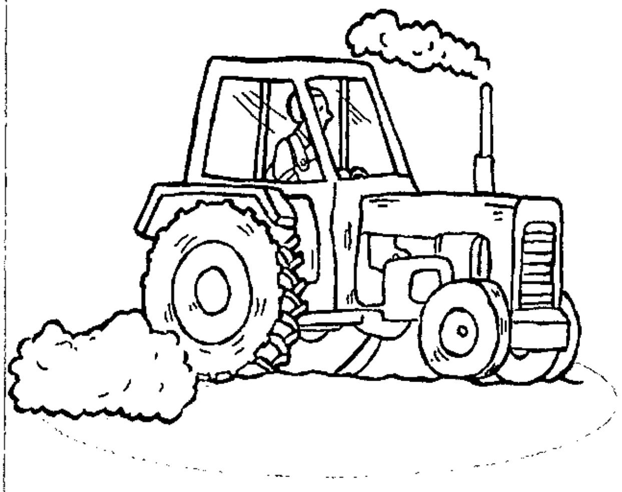
الف ـ اگر از نقطه‌ای دو مماس بر دایره به شعاع R رسم کنیم، چنانچه طول هر مماس برابر R باشد، زاویهٔ بین دو مماس ۹۰° است.

ب ـ اگر از نقطه‌ای، دو مماس بر دایره به شعاع R رسم کنیم، به طوری که فاصلهٔ نقطه تا مرکز دایره، برابر $R\sqrt{۲}$ باشد، زاویهٔ بین دو مماس ۹۰° است.





تفریح اندیشه ۱

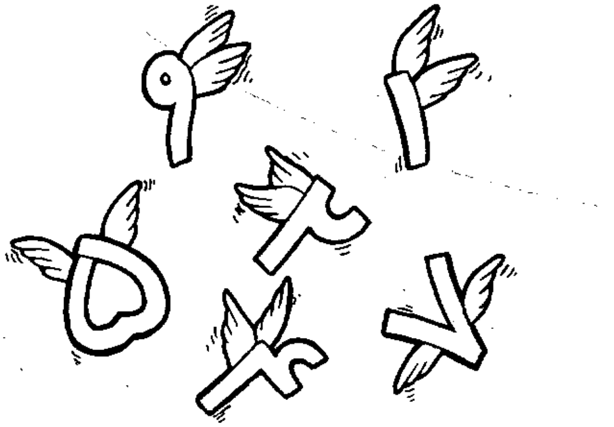


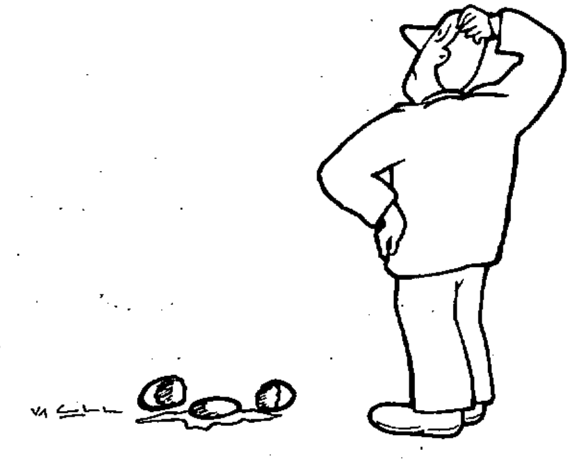
شعاع چرخ جلوِ تراکتور کشاورزی ۲۵ سانتیمتر است و هر ثانیه، دو و نیم دور می‌زند. قطر چرخ عقب تراکتور ۱۲۵ سانتیمتر است. این چرخ در هر ثانیه چند دور می‌زند؟

جواب در صفحهٔ ۸۸

گشت وگذاری در ریاضیات معاصر

نظریهٔ اعداد





● غلامرضا یاسی پور

کار اولیهٔ «نظریهٔ اعداد» "number theory" بررسی ویژگیهای اعداد صحیح بوده است. گسترش سیستماتیک این نظریه به عنوان شاخه‌ای از ریاضیات، نسبتاً دیر انجام گرفت. در دوران باستان، نتایج خاصی از این نظریه ـ به عنوان مثال، برای **اقلیدس** "EUCLID" (حدود ۳۰۰ ق.م.) و **دیوفانت** "DIOPHANTOS" (در حدود ۲۵۰ ب.م.) ـ معلوم بود.

در قرن هفدهم کشفیات علمی مهمی و بیشتر از همه، در زمینهٔ تحقیقات **پی‌یر فرما** "PIERRE FERMAT" (۱۶۰۱ـ۱۶۶۶) رخ داد. در آثار بسیار **لئونهارد اویلر** "LEONHARD EULER" (۱۷۰۷ـ۱۷۸۳) قدمهای بزرگی به طرف جلو برداشته شد، که پر از اندیشه‌های وسیع و دامنه‌دار بود.

سرانجام، **کارل فردریش گاوس** "CARL FRIEDRICH GAUSS" (۱۷۷۷ـ۱۸۵۵) نظریه‌ای یکدست تنظیم کرد. وی در سال ۱۸۰۱ *حساب تجسسات* "*Disquisitiones arithmetic*" خود را منتشر کرد؛ اثری به‌جا ماندنی، که اساس حساب عالی "*higher arithmetic*" در مفهوم دقیق آن شد.

امروزه، نظریهٔ اعداد، نظریه‌ای با شاخه‌های وسیعی است، که هم از جبر مجرّد "*abstract algebra*" (بخصوص در *نظریهٔ اعداد جبری* "*algebraic number theory*") و هم از روشهای بنیادی آنالیز (در *نظریهٔ اعداد تحلیلی* "*analytic number theory*") استفادهٔ بسیاری می‌برد. این کار به مسائل و نظریه‌های جدیدی می‌انجامد که تنها ارتباطهایی غیرمستقیم با اعداد صحیح دارد.

در برابر سایر بخشهای ریاضیات، بسیاری از مسائل و نتایج نظریهٔ اعداد، برای افراد غیرمتخصص در ریاضیات نیز قابل درک است. اما آشکار است که اثبات قضایا، اغلب به تجهیزات ریاضی وسیعی نیازمند است.

گاوس ریاضیات را ملکهٔ علوم "*queen of the sciences*" نامیده و در سال ۱۸۰۸ (در نامه‌ای به دوستش بولیایی "*BO'LYAI*") چنین گفته است: «جالب توجه است که تمام کسانی که به مطالعهٔ این علم می‌پردازند، به طور جدّی، نوعی دلبستگی به آن پیدا می‌کنند.»

حلقه‌ها و میدانها (هیئتها)

موارد اساسی *نظریهٔ اعداد مقدماتی* "*elementary number theory*" را در فصل اوّل بررسی کرده‌ایم. از نظریهٔ بخشپذیری "*theory of divisibility*" مشخص است که خارج قسمت دوعدد صحیح، ممکن است؛ اما نیاز نیست که عددی صحیح باشد؛ به‌عنوان مثال $\frac{۱۵}{۳}=۵$ ، اما $\frac{۱۵}{۷}$ عددی صحیح نیست.

در این صورت، می‌گوییم: تقسیم، عمل وارون ضرب، را نمی‌توان همیشه در حوزهٔ اعداد صحیح انجام داد. دستگاه‌هایی عددی که بتوان عملهای جمع، تفریق و ضرب را در آنها، بدون محدودیت انجام داد، حلقه "*ring*" نامیده می‌شوند.

در صورتی که تقسیم (غیراز بر ۰) را نیز بتوان در یک دستگاه عددی انجام داد، از *میدان (هیئت)* "*field*" صحبت می‌کنیم؛ به‌عنوان مثال، اعداد گویا یک میدان تشکیل می‌دهند.

در موارد بعدی، حلقهٔ اعداد صحیح ۰، ۱±، ۲±، ... را با Z و میدان اعداد گویا را با Q نمایش می‌دهیم.

اگر a و b دو عدد در Z باشند و $b \neq ۰$ ، خارج قسمت a/b در Q، اما نه لزوماً درZ واقع می‌شود. در صورتی که مورد اخیر رخ دهد، آن‌گاه گفته می‌شود a بخشپذیر "*divisible*" بر b یا مضرب "*multiple*" b است.

ایده آلها

بجز Z به حلقه‌های Rی نیاز داریم که عنصرهای آنها می‌توانند اعداد حقیقی یا مختلط باشند. از این دست هستند زیرمجموعه‌های I از حلقهٔ Rی که دارای ویژگیهای زیر می‌باشند:

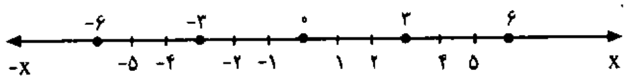
(i) اگر a و b اعدادی در I باشند، آن‌گاه $a - b$ نیز چنین است؛

(ii) به ازای هر عدد r واقع در R و هر عدد a واقع در I، حاصلضرب ra نیز در I قرار دارد. این زیرمجموعه‌های I از R را *ایده‌آلهای* "*ideals*" واقع در R می‌نامیم.

برای مثال، اگر m عددی طبیعی باشد، کل اعداد

$$۰, \pm m, \pm ۲m, \pm ۳m, \ldots$$

ایده‌آلی در Z است (شکل ۳۰ــ۱ ایده‌آل (۳) بر خط عددی).



شکل ۳۰-۱

واضح است که، تفاضل دو مضرب صحیح m بازهم مضربی از m است (ویژگی (i))، و هر مضرب مضربی از m خود مضربی از m است (ویژگی (ii)). در چنین حالتی، ایده‌آل مورد بحث را با $M = (m)$ نمایش می‌دهیم تا مشخص شود که شامل جمیع مضربهای عدد m است.

ایده‌آلهای شامل جمیع مضربهای عنصر منفردی از حلقهٔ R، در حالت مورد بحث m، به *ایده‌آلهای اصلی* "*principal ideals*" موسوم هستند.

بسادگی می‌توان به اثبات رساند که در Z هر ایده‌آل اصلی است، بنابراین جمیع ایده‌آلهای (m) واقع در Z را با به‌نوبت قراردادن $m = ۰,۱,۲,\ldots$ ، به‌دست می‌آوریم.

مفهوم بخشپذیری را نیز می‌توان برای ایده‌آلها تعریف کرد. دراین مورد می‌گوییم ایده‌آل A بر ایده‌آل B بخشپذیر است. اگر هر عنصر A عنصری از B نیز باشد، به عبارت دیگر، $A \subseteq B$.

در ظاهر، مفهوم اصلی کلمهٔ بخشپذیر در این مورد، به مفهوم مقابل آن تبدیل می‌شود؛ اما ارتباط با نظریهٔ بخشپذیری، بلافاصله دلیل این نام‌گذاری را روشن می‌کند.

کاربردی ازاین تعریف در مورد دو ایده‌آل $A = (a)$ و $B = (b)$ در Z، نشان می‌دهد که A بر B بخشپذیر است؛ اگر و تنها اگر a بر b بخشپذیر باشد.

برای مثال، ایده‌آل (۲) شامل اعداد

$$۰, \pm ۲, \pm ۴, \pm ۶, \pm ۸, \ldots$$

و ایده‌آل (۴) شامل اعداد

$$۰, \pm ۴, \pm ۸, \pm ۱۲, \ldots$$

است. درنتیجه، از لحاظ مجموعه ـ نظریه‌ای $(۴) \subseteq (۲)$ ؛ اما این بدان معناست که ایده‌آل (۴) بر ایده‌آل (۲) بخشپذیر است؛ زیرا ۴ بر ۲ بخشپذیر است.

سپس، AB، حاصلضرب دو ایده‌آل A و B را تعریف می‌کنیم؛ یعنی، به صورت ایده‌آل شامل جمیع مجموعهای حاصلضربهای به تعداد متناهی ab، که a و bی آن، بترتیب، عنصرهای *دلخواه* A و Bاند. در Z نتیجه می‌گیریم که به ازای $A = (a)$ و $B = (b)$ ، حاصلضرب $AB = (ab)$ ، به عنوان مثال، $(۲)\cdot(۴) = (۸)$.

مفهوم ایده‌آل در توسعهٔ نظریهٔ اعداد جبری به‌وجود آمد. *نظریهٔ ایده‌آلها* "*ideal theory*" ساختار حلقه‌ها و ایده‌آلهای آنها را بررسی می‌کند. به خاطر ساده کردن گزارهٔ نتایج، بهتر است که از سبک گفتار زیر استفاده کنیم: فرض می‌کنیم a و b اعدادی از حلقهٔ R و I ایده‌آلی در R باشند؛ دراین صورت می‌گوییم:

$$a \equiv b \pmod{I}$$

(و می‌خوانیم : a هم‌نهشت با b به پیمانهٔ I است) اگر $a-b$ عددی در I باشند.

رابطهٔ هم‌نهشتی "*congruence*" فوق با توجه به ترایا، متقارن و بازتابی بودن، رابطه‌ای هم‌ارزی است.

بر مبنای ویژگیهای فوق، جمیع اعداد R را می‌توان به رده‌های مانده‌های مجزّایی "*disjoint resedue classes*" به پیمانهٔ I، چنان تقسیم کرد که جمیع اعداد هم‌نهشت به پیمانهٔ I متعلق به یک رده باشند.

اهمیت طریق نوشتن صوری مزبور، دراین واقعیت قرار دارد که اغلب قاعدهٔ محاسبهٔ معادله‌ها، درمورد هم‌نهشتیهای به پیمانه‌ای ثابت نیز برقرارند.

از لحاظ تاریخی، مفهوم هم‌نهشتی ابتدا توسط گاوس برای حلقهٔ Z ایجاد شد. دراین مورد $a \equiv b \pmod m$ ، بدین معناست که تفاضل دو عدد صحیح a و b در ایده‌آل $M=(m)$ قرار دارد ؛ بنابراین، $a-b$ بر m بخشپذیر است، یا a و b در تقسیم بر m باقیمانده‌های یکسان دارند.

مثالها: $۸۸ \equiv -۱۰ \pmod{۱۴}$ ؛ زیرا $۹۸ = (-۱۰) - ۸۸$ بر ۱۴ بخشپذیر است ؛

$$۲^{۳۲} \equiv -۱ \pmod{۶۴۱} \qquad ۳^{۷} \equiv ۱ \pmod{۱۰۹۳}$$

اعداد صحیح

ویژگیهای معینی از رده‌های مانده‌های واقع در حلقهٔ اعداد صحیح Z را می‌توان در رابطه با بخشپذیری اعداد بررسی کرد. دراین مورد فرض می‌کنیم (a,b) بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک (ب.م.م) دو عدد a ، b و p عددی اوّل را نمایش دهد.

حلقهٔ ردهٔ مانده‌ها

رده‌های مانده‌های به پیمانهٔ m را می‌توان با تعریف جمع و ضرب رده‌های مانده‌ها در حلقه به‌کار برد. این مطلب را با مثالی توضیح می‌دهیم.

فرض می‌کنیم $r_۱$ ردهٔ مانده‌های $\overline{۲}$ به پیمانهٔ ۶ شامل اعداد

$$\ldots,-۱۰,-۴,۲,۸,۱۴,\ldots$$

و $r_۲$ ردهٔ مانده‌های $\overline{۵}$ به پیمانهٔ ۶ شامل اعداد

$$\ldots,-۷,-۱,۵,۱۱,\ldots$$

باشد. در این صورت، $r_۱+r_۲$ را به عنوان ردهٔ مانده‌هایی تعریف می‌کنیم که شامل $۷=۵+۲$ باشد، و در واقع شامل جمیع اعدادی که در تقسیم بر ۶ باقیماندهٔ «۱» را به‌جا می‌گذارند.

در این مورد می‌نویسیم $\overline{۱}=\overline{۵}+\overline{۲}$ ؛ مثالهای دیگر عبارتند از $\overline{۵}=\overline{۰}+\overline{۵}$ ، $\overline{۰}=\overline{۳}+\overline{۳}$ ، حاصلضرب مورد بحث توسط $\overline{۴}=\overline{۱۰}=\overline{۲}\cdot\overline{۵}$ تعریف می‌شود ؛ مثالهای دیگر به پیمانهٔ ۶ عبارت است از : $\overline{۵}\cdot\overline{۰}=\overline{۰}$, $\overline{۳}\cdot\overline{۳}=\overline{۳}$, $\overline{۲}\cdot\overline{۳}=\overline{۰}$

تحت جمع و ضرب تعریف شدهٔ پیشین، رده‌های مانده‌های به پیمانهٔ m، حلقهٔ *ردهٔ مانده‌های "residue class ring"* به پیمانهٔ m را تشکیل می‌دهند. ساختار این حلقه را می‌توان در گزاره‌هایی دقیق توصیف کرد. این حلقه، اگر و تنها اگر m عددی اوّل باشد، میدان است.

گروه رده‌های مانده‌های اوّل

با انتخاب جمیع آنهایی که اعدادشان با m اوّلند، از میان m ردهٔ مانده‌های متمایز

$$\overline{۰},\overline{۱},\overline{۲},\ldots,\overline{m-۱} \mod m$$

رده‌های مانده‌های اوّل به پیمانهٔ m را به‌دست می‌آوریم. به‌ازای $m=۶$ دو ردهٔ مانده‌های اوّل $\overline{۱}$ و $\overline{۵}$ موجود است ؛ به ازای $m=p$ همواره $P-۱$ حالت وجود دارد ؛ یعنی :

$$\overline{۱},\overline{۲},\ldots,\overline{p-۱}$$

تعداد رده‌های مانده‌های اوّل به پیمانهٔ m را با $\varphi(m)$ (*تابع اویلر "Euler's function"*) نمایش می‌دهیم. برای مثال :

$$\varphi(۶)=۲ \;,\; \varphi(p)=p-۱$$

$\varphi(m)$ یک تابع عدد ـ نظریه‌ای "number-theoretical function" است ؛ یعنی، تابعی تعریف شده به ازای آرگومانهای صحیح. تابع مزبور، تابعی ضربی است ؛ یعنی $\varphi(a,b)=\varphi(a)\varphi(b)$ ؛ البته به شرطی که $(a,b)=۱$. بسادگی می‌توان محاسبه کرد که :

$$\varphi(p^k)=p^k-p^{k-۱}=p^{k-۱}(p-۱)$$

قاعده‌ای که هم‌اکنون به آن اشاره کردیم، محاسبهٔ $\varphi(m)$ را به‌ازای هر m ممکن می‌کند ؛ به عنوان مثال :

$$\varphi(۳۲۴۰)=\varphi(۲^۳)\varphi(۳^۴)\varphi(۵)=۴\cdot۵۴\cdot۴=۸۶۴$$

رده‌های مانده‌های اوّل به پیمانهٔ m، تحت عمل ضرب، گروه G_m ای از مرتبهٔ $\varphi(m)$ می‌سازند. ساختار G_m در مورد جمیع mها دارای اهمیت است ؛ اما در این‌جا تنها به بررسی حالت $m=p$ پرداخته می‌شود.

G_p دوری است، که بدین معناست که هر ردهٔ مانده‌های اوّل به پیمانهٔ p را می‌توان به عنوان توانی از ردهٔ مانده‌های ثابت $\bar{g}$ ای نوشت؛ چنین gای را ریشهٔ اوّلیهٔ *"primitive root"* به پیمانهٔ p می‌نامیم.

برای مثال، به ازای p = ۱۱ ، گروه ردهٔ مانده‌های G_{11} که می‌تواند با $\bar{g}=\bar{2}$ (یا $\bar{6}$، $\bar{7}$، $\bar{8}$) برای توانهای:

$$2^0\equiv1, 2^1\equiv2, 2^2\equiv4, 2^3\equiv8, 2^4\equiv5, 2^5\equiv10, 2^6\equiv9,$$
$$2^7\equiv7, 2^8\equiv3, 2^9\equiv6 \pmod{11}$$

تولید شود. جمیع $p-1=10$ ردهٔ مانده‌های اوّل $\bar{1}$، $\bar{2}$، ...، $\overline{10}$ را به‌دست می‌دهد.

از آن‌جا که هر عنصر a از G، گروه متناهی‌ای از مرتبهٔ n، در برابری $a^n=e$ (e عنصر واحد) صدق می‌کند، به ازای $G=G_m$، قضیهٔ اویلر *"Euler's theorem"* را داریم:

قضیهٔ اویلر: $a^{\varphi(m)}\equiv1 \pmod m$ هنگامی که $(a,m)=1$.
این قضیه در حالت خاص می‌شود.
قضیهٔ فرما: $a^{p-1}\equiv1 \pmod p$ **هنگامی که بر p بخشپذیر نیست.**

هم نهشتیها با مجهولات

در حلقهٔ ردهٔ مانده‌ها و گروه ردهٔ مانده‌ها مسائل جبری خاصی را می‌توان حل کرد. برای مثال، می‌توان این پرسش را مطرح کرد که کدام یک از رده‌های مانده‌های $\bar{x}$ پیمانهٔ m و درمعادله‌های مفروضی، مثلاً $\overline{ax}=\bar{b}$ ، صدق می‌کنند. معادله‌هایی چنین به هم‌نهشتیهای به پیمانهٔ mی با مجهولات می‌انجامند.

هم نهشتی خطی "Linear Congruence"

$ax\equiv b \pmod m$ را نمی‌توان همواره حل کرد. برای مثال، $3x\equiv2 \pmod{12}$ حل‌ناپذیر است؛ زیرا هیچ مضرب صحیح ۳ای در تقسیم بر ۱۲، باقیماندهٔ ۲ به‌جا نمی‌گذارد.

درواقع، $ax\equiv b \pmod m$ حل‌پذیر است؛ اگر و تنها اگر، b بر بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک (a, m) بخش‌پذیر باشد.

هم نهشتی از درجهٔ n

$$x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n\equiv0 \pmod m$$

می‌تواند جوابهای ناهم‌نهشتی "incongruent solutions" بیش از آنچه درجهٔ nاش مقرّر می‌کند، داشته باشد. برای مثال، $x^2\equiv1 \pmod 8$ دارای جوابهای $x\equiv1,3,5,7$ است.

این معادله، در صورتی که پیمانهٔ m عدد اوّل p باشد، اصلاً نیاز به داشتن جواب ندارد و نمی‌تواند بیش از n ردهٔ مانده‌ها به عنوان جواب داشته باشد.

مانده‌های توانی

در هم‌نهشتی دوجمله‌ای *"binomial congruence"*

$$x^n\equiv a \pmod p$$

a بر p بخش‌پذیر نیست. رده‌های مانده‌های a(mod p)ی که در مورد آنها این هم‌نهشتی حل‌پذیر است، به مانده‌های توانی "power residues" به پیمانهٔ p موسوم است. در این مورد، دو پرسش اساسی مطرح می‌شود:

۱. مانده‌های توانی nام مربوط به اوّلی، مفروض کدام اعدادند؟

۲. به ازای کدام یک از اوّلهای p عدد مفروض a ماندهٔ توانی nام است؟

به پرسش اوّل توسط *معیار اویلر "euler's criterion"*، یعنی، $a^{(p-1)/d}\equiv1 \pmod p$ که در آن $d=(p-1,n)$، پاسخ داده شد. رده‌های مانده‌های aای که در این شرط صدق می‌کنند و فقط همین رده‌ها مانده‌های توانی nام‌اند.

پاسخ پرسش دوم به *قوانین تقابل "reciprocity laws"* منجر می‌شود، که از جمله دستاوردهای زیبا و بنیادی نظریهٔ اعداد می‌باشند.

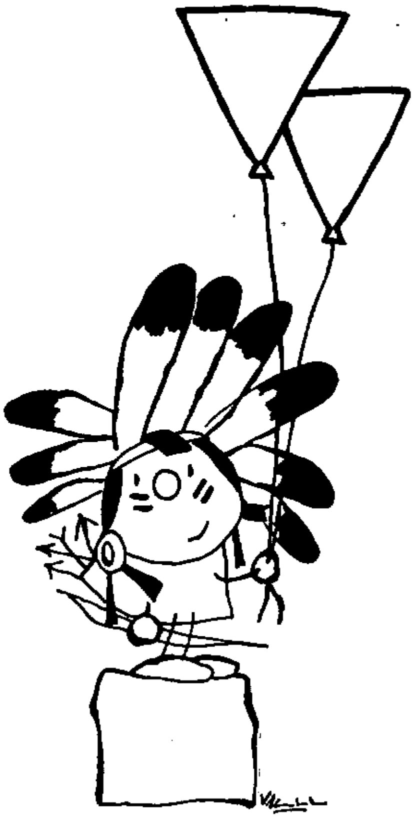
به ازای n = ۲ ، رده‌های مانده‌های a(mod p) با $(a,p)=1$، که به ازای آنها هم‌نهشتی $x^2\equiv a \pmod p$ حل‌پذیر است، به *مانده‌ها(ی درجهٔ دوم) "(quadratic)residues"* موسومند و مواردی که به ازای آنها هم‌نهشتی مزبور حل‌ناپذیر است، *نامانده‌ها(ی درجهٔ دوم) "(quadratic) non-residues"* نامیده می‌شوند.

به ازای pهای فرد، تعداد مانده‌ها با تعداد نامانده‌های به پیمانهٔ p برابر است و به عبارت دیگر تعداد هریک $(p-1)/2$ است.

برای مثال، به پیمانهٔ ۱۷داریم:

$$1^2\equiv1, 2^2\equiv4, 3^2\equiv9, 4^2\equiv16, 5^2\equiv8, 6^2\equiv2, 7^2\equiv15,$$
$$8^2\equiv13$$

در نتیجه، ۱،۲،۴،۸،۹،۱۳،۱۵،۱۶ هشت مانده و ۳،۵،۶،۷،۱۰،۱۱،۱۲،۱۴ هشت نامانده‌اند.



در حاشیهٔ مثلثات

(قسمت سوم)

اتحادهای مثلثاتی، نامساویهای مثلثاتی

● حمید رضا امیری

۱ـ ساده کردن عبارتهای مثلثاتی

یادآوری و اثبات چند فرمول مهم مثلثاتی، برای استفاده در ساده کردن و اثبات اتحادهای مثلثاتی

الف) $\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱ \Leftrightarrow \sin^{۲}\alpha=۱-\cos^{۲}\alpha$

$\Leftrightarrow \cos^{۲}\alpha=۱-\sin^{۲}\alpha$

ب) $\boxed{۱+\tan^{۲}\alpha=\frac{۱}{\cos^{۲}\alpha}=\sec^{۲}\alpha}$

ج) $\boxed{۱+\cot^{۲}\alpha=\frac{۱}{\sin^{۲}\alpha}=\operatorname{cosec}^{۲}\alpha}$

د) $\boxed{\tan^{n}\alpha.\cot^{n}\alpha=۱}$

$\Leftrightarrow \tan^{n}\alpha=\frac{۱}{\cot^{n}\alpha} \Leftrightarrow \cot^{n}\alpha=\frac{۱}{\tan^{n}\alpha} (n\in \mathrm{IN})$

هـ) $(\sin\alpha\pm\cos\alpha)^{۲}=\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha$

$\pm ۲\sin\alpha\cos\alpha=۱\pm ۲\sin\alpha\cos\alpha$

$\Rightarrow \boxed{(\sin\alpha+\cos\alpha)^{۲}=۱+۲\sin\alpha\cos\alpha}$ و

$\boxed{(\sin\alpha-\cos\alpha)^{۲}=۱-۲\sin\alpha\cos\alpha}$

و) $\boxed{\sin^{۴}\alpha+\cos^{۴}\alpha=۱-۲\sin^{۲}\alpha\cos^{۲}\alpha}$

اثبات

$(\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha)^{۲}=۱^{۲} \Rightarrow$

$\sin^{۴}\alpha+\cos^{۴}\alpha+۲\sin^{۲}\alpha\cos^{۲}\alpha=۱$

$\Rightarrow \sin^{۴}\alpha+\cos^{۴}\alpha=۱-۲\sin^{۲}\alpha\cos^{۲}\alpha$

ز) $\boxed{\sin^{۶}\alpha+\cos^{۶}\alpha=۱-۳\sin^{۲}\alpha\cos^{۲}\alpha}$

اثبات

$(\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha)^{۳}=۱^{۳} \Rightarrow$

$\sin^{۶}\alpha+۳\sin^{۴}\alpha\cos^{۲}\alpha+۳\cos^{۴}\alpha\sin^{۲}\alpha$

$+\cos^{۶}\alpha=۱$

$\Rightarrow \sin^{۶}\alpha+\cos^{۶}\alpha+۳\sin^{۲}\alpha\cos^{۲}\alpha\underbrace{(\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha)}_{۱}=۱$

$\Rightarrow \sin^{۶}\alpha+\cos^{۶}\alpha=۱-۳\sin^{۲}\alpha\cos^{۲}\alpha$

ح) $\boxed{\sin^{۴}\alpha-\cos^{۴}\alpha=\sin^{۲}\alpha-\cos^{۲}\alpha}$

اثبات

$\sin^{۴}\alpha-\cos^{۴}\alpha=$

$(\sin^{۲}\alpha-\cos^{۲}\alpha)\underbrace{(\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha)}_{۱}=\sin^{۲}\alpha-\cos^{۲}\alpha$

به همین ترتیب خواهیم داشت :

$$\boxed{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$$

ط) $\boxed{\tan\alpha+\cot\alpha=\dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}}$

اثبات

$$\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=$$

$$\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

ساده کردن عبارتهای مثلثاتی و مسائل حل شده

برای ساده کردن عبارتهای مثلثاتی، با استفاده از فرمولها و برابریهای مهم که اهمّ آنها به اثبات رسید، عبارت مثلثاتی را به ساده‌ترین صورت درآورده، به‌طوری که ساده‌تر نشود. (در حقیقت، هرگاه طرف دوم یک اتحاد مثلثاتی را که مفصّل دربارهٔ آن مطلب خواهیم گفت، حذف کنیم، عبارتی مثلثاتی به‌دست می‌آید که اگر ساده شود، همان طرف دوم حاصل می‌شود.)

مسألهٔ ۱ـ عبارت مثلثاتی زیر را ساده کنید :

$$A=(\cos x+\sin x-1)(\cos x+\sin x+1)$$

اتحاد مزدوج $\Rightarrow A=(\cos x+\sin x)^2-1=$

$$(1+2\sin x\cos x)-1=2\sin x\cos x$$

مسألهٔ ۲ـ عبارت مثلثاتی زیر را ساده کنید :

$$B=(\sin\alpha+\cos\alpha)(\tan\alpha+\cot\alpha)$$

$$B=(\sin\alpha+\cos\alpha)\left(\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\Rightarrow B=\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}$$

تذکر: در حقیقت، از تجزیه کسرها استفاده شده است و به‌طور کلی داریم :

$$\frac{A+B-C+D-E}{F}=\frac{A}{F}+\frac{B}{F}-\frac{C}{F}+\frac{D}{F}-\frac{E}{F}$$

مسألهٔ ۳ـ عبارت مثلثاتی زیر را ساده کنید :

$$C=(\sin\alpha+\cos\alpha)\left(\frac{1}{\sin\alpha}-\frac{1}{\cos\alpha}\right)=$$

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)\left(\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)$$

اتحاد مزدوج $\Rightarrow C=\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=$

$$\frac{\cos^{\cancel{2}}\alpha}{\sin\alpha\cancel{\cos\alpha}}-\frac{\sin^{\cancel{2}}\alpha}{\cancel{\sin\alpha}\cos\alpha}=\cot\alpha-\tan\alpha$$

۲ـ اتحادهای مثلثاتی

تعریف و روشهای اثبات اتحادهای مثلثاتی و مسائل حل‌شده

تعریف: هر تساوی مثلثاتی بین چند نسبت مثلثاتی که به ازای جمیع مقادیر متغیر یا متغیرهای آن همواره برقرار باشد را یک اتحاد مثلثاتی می‌نامیم.

برای اثبات یک اتحاد مثلثاتی به سه طریق می‌توان عمل نمود که هرکدام از این روشها را پس از توضیح، با ذکر مثالی و حل از همان روش، در زیر آورده‌ایم.

روش اوّل: در این روش، از یک طرف تساوی استفاده کرده و با کمک‌گیری از فرمولهای مثلثاتی و برابریهای اثبات شده که قبلاً آمده است، به طرف دیگر تساوی می‌رسیم. لازم به ذکر است که اگر از طرف چپ اتحاد، به طرف راست یا از سمت راست اتحاد، به سمت چپ برسیم، فرقی ندارد و بستگی به سلیقه و تشخیص خودمان دارد.

مسألهٔ ۴ـ اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت کنید.

$$\frac{\cos^4x-\sin^4x}{\cos^2x}=(1-\tan x)(1+\tan x)$$

$$\frac{\cos^4x-\sin^4x}{\cos^2x}=\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\cos^2x}=$$

$$\frac{\cos^2x}{\cos^2x}-\frac{\sin^2x}{\cos^2x}=1-\tan^2x=(1-\tan x)(1+\tan x)$$

تذکر: قبلاً ثابت کردیم :

$$\cos^4x-\sin^4x=\cos^2x-\cos^2x$$

روش دوم: در این روش، از هر دو طرف تساوی استفاده می‌شود و با کمک گرفتن از فرمولها و برابریهای اثبات شده، دو طرف تساوی را ساده کرده تا به یک مقدار مشترک برسیم.

مسألهٔ ۵ـ اتحاد مثلثاتی صفحهٔ بعد را اثبات کنید (x در ناحیهٔ اوّل دایرهٔ مثلثاتی) :

$$\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}=\frac{1}{\cos x}-\tan x$$

سمت راست $=\dfrac{1}{\cos x}-\tan x=\dfrac{1}{\cos x}-\dfrac{\sin x}{\cos x}$

$$=\boxed{\frac{1-\sin x}{\cos x}}$$

سمت چپ $=\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}=$

$$\underbrace{\sqrt{\frac{(1-\sin x)(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}}}_{\text{اتحاد مزدوج}}=\sqrt{\frac{(1-\sin x)^2}{1-\sin^2 x}}=$$

$$\sqrt{\frac{(1-\sin x)^2}{\cos^2 x}}=\boxed{\frac{1-\sin x}{\cos x}}$$

هر دو طرف به عبارت $\dfrac{1-\sin x}{\cos x}$ رسید، بنابراین، دو طرف با هم برابرند، لذا اتحاد برقرار است.

روش سوم (روش اثبات بازگشتی) : در این روش، ما تساوی را برقرار فرض می‌کنیم و دو طرف تساوی را ساده کرده یا مثلاً یک طرف را به طرف دیگر منتقل می‌کنیم تا به یک تساوی منطقی و همیشه درست برسیم (در این راه از همهٔ خواص تساویها علاوه بر فرمولهای مثلثاتی، می‌توان استفاده کرد). به محض این‌که به تساوی منطقی رسیدیم، همهٔ عملیات را از تساوی منطقی که همیشه برقرار است، به سمت عقب بازمی‌گردیم تا به اتحاد مثلثاتی موردنظر دست یابیم. در این‌جا نه تنها اتحاد مثلثاتی ثابت شده است ؛ بلکه به‌دست آمده است. در حقیقت، این روش (مرحلهٔ برگشت از تساوی منطقی به طرف خود اتحاد) می‌تواند روشی برای ساختن اتحادهای مثلثاتی باشد.

مسألهٔ ۶ـ اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت کنید :

$$\frac{\sin z\tan z}{\tan z-\sin z}=\frac{\tan z+\sin z}{\sin z\tan z}$$

فرض کنیم اتحاد برقرار باشد با طرفین وسطین و استفاده از اتحاد مزدوج داریم :

$$\sin^2 z\tan^2 z=\tan^2 z-\sin^2 z\Leftrightarrow\sin^2 z\tan^2 z=$$

$$\frac{\sin^2 z}{\cos^2 z}-\sin^2 z=\frac{\sin^2 z-\sin^2 z\cos^2 z}{\cos^2 z}$$

$$\Leftrightarrow\sin^2 z\tan^2 z=\frac{\sin^2 z(1-\cos^2 z)}{\cos^2 z}=$$

$$\frac{\sin^2 z\sin^2 z}{\cos^2 z}=\tan^2 z.\sin^2 z$$

$\Leftrightarrow\sin^2 z\tan^2 z=\sin^2 z\tan^2 z\leftarrow$ تساوی منطقی

مسألهٔ ۷ـ اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت کنید :

$$\sin^2 y-\sin^2 x=\cos^2 x-\cos^2 y$$

فرض کنیم اتحاد برقرار باشد $\Rightarrow\sin^2 y+\cos^2 y=$

$\cos^2 x+\sin^2 x\Rightarrow 1=1\leftarrow$ تساوی منطقی

$\Rightarrow 1=1$ حال داریم

$$\sin^2 y+\cos^2 y=\sin^2 x+\cos^2 x\Rightarrow$$

$$\sin^2 y-\sin^2 x=\cos^2 x-\cos^2 y$$

مسألهٔ ۸ـ اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت کنید :

$$\sin^3 x+\cos^3 x=$$

$$\sin x+\cos x-\sin^2 x\cos x-\cos^2 x\sin x$$

$$\sin^3 x+\cos^3 x=$$

$$(\sin x+\cos x)(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)$$

$$=(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)$$

$$=\sin x-\sin^2 x\cos x+\cos x-\sin x\cos^2 x$$

مسألهٔ ۹ـ اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت کنید :

$$\cos^2 x=\cot^2 x-\cot^2 x.\cos^2 x$$

سمت راست $=\cot^2 x-\cot^2 x.\cos^2 x$

$$=\cot^2 x(1-\cos^2 x)=\cot^2 x.\sin^2 x$$

$=\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}.\sin^2 x=\cos^2 x=$ سمت چپ

مسألهٔ ۱۰ـ اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت کنید :

$$\frac{\cos^4 x.\cot^2 x}{1+\cot^2 x}+\frac{\sin^4 x.\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=1-3\sin^2 x\cos^2 x$$

داریم : $1+\cot^2 x=\dfrac{1}{\sin^2 x}\Rightarrow\dfrac{1}{1+\cot^2 x}=\sin^2 x$

و نیز داریم : $\frac{1}{1+\tan^2 x}=\cos^2 x$

$\Rightarrow$ سمت چپ اتحاد $=\frac{1}{1+\cot^2 x}.\cos^4 x.\cot^2 x$

$+\frac{1}{1+\tan^2 x}.\sin^4 x.\tan^2 x$

$=\sin^2 x.\cos^4 x.\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}+\cos^2 x.\sin^4 x\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$

$=\underbrace{\cos^6 x+\sin^6 x=1-3\sin^2 x\cos^2 x}_{\text{قبلاً ثابت شده است}}=$ سمت راست

مسألهٔ ۱۱ـ اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت کنید :

$\sin^8 x+\cos^8 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x(2-\sin^2 x\cos^2 x)$

داریم : $(\sin^4 x-\cos^4 x)^2=(\sin^2 x-\cos^2 x)^2$

$\Rightarrow \sin^8 x+\cos^8 x-2\sin^4 x\cos^4 x$

$=\sin^4 x+\cos^4 x-2\sin^2 x\cos^2 x$

و نیز داریم : $\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x$

$\Rightarrow \sin^8 x+\cos^8 x-2\sin^4 x\cos^4 x$

$=1-2\sin^2 x\cos^2 x-2\sin^2 x\cos^2 x$

$\Rightarrow \sin^8 x+\cos^8 x=1-4\sin^2 x\cos^2 x+2\sin^4 x\cos^4 x$

$\Rightarrow \sin^8 x+\cos^8 x=$

$1-2\sin^2 x\cos^2 x(2-\sin^2 x\cos^2 x)$

و اتحاد به‌دست آمد.

مسألهٔ ۱۲ـ اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت کنید :

$\sec^2 x-\operatorname{cosec}^2 x=\tan^2 x-\cot^2 x$

قبلاً ثابت کردیم : $(\sin^4 x-\cos^4 x=\sin^2 x-\cos^2 x)$

سمت چپ $=\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}$

$=\frac{\sin^4 x-\cos^4 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{\sin^4 x}{\sin^2 x\cos^2 x}-\frac{\cos^4 x}{\sin^2 x\cos^2 x}$

$=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\Rightarrow \tan^2 x-\cot^2 x=$ سمت راست

مسألهٔ ۱۳ـ اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت کنید :

$\frac{1}{\sin^4 x}-\frac{2}{\sin^2 x}+1=\cot^4 x$

از اتحاد $1+\cot^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}$ استفاده می‌کنیم :

سمت چپ $=(\frac{1}{\sin^2 x})^2-2\times(\frac{1}{\sin^2 x})+1$

$=(1+\cot^2 x)^2-2\times(1+\cot^2 x)+1$

$=1+\cot^4 x+\cancel{2\cot^2 x}-2-\cancel{2\cot^2 x}+1=\cot^4 x$

و اتحاد ثابت شد.

مسألهٔ ۱۴ـ اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت کنید :

$\frac{\sin^6 x-\cos^6 x}{2\sin^2 x-1}=1-\sin^2 x+\sin^4 x$

از اتحاد $(a^3-b^3)=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ استفاده می‌شود :

سمت چپ =

$\frac{(\sin^2 x-\cos^2 x)(\sin^4 x+\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)}{2\sin^2 x-(\sin^2 x+\cos^2 x)}$

قبلاً ثابت کردیم : $\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x$

$\Rightarrow$ سمت چپ $=\frac{\cancel{(\sin^2 x-\cos^2 x)}(1-\sin^2 x\cos^2 x)}{\cancel{(\sin^2 x-\cos^2 x)}}$

$=1-\sin^2 x\cos^2 x=1-\sin^2 x(1-\sin^2 x)$

$=1-\sin^2 x+\sin^4 x=$ سمت راست تساوی

مسألهٔ ۱۵ـ اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت کنید :

$(\tan\alpha+\cot\alpha-\sqrt{2})(\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}+\sqrt{2})$

$=\tan^2\alpha+\cot^2\alpha$

قبلاً ثابت کردیم $\rightarrow \tan\alpha+\cot\alpha=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$

$\Rightarrow$ سمت چپ $=(\tan\alpha+\cot\alpha-\sqrt{2})(\tan\alpha+\cot\alpha+\sqrt{2})$

$\overset{\text{اتحاد مزدوج}}{=\!=}(\tan\alpha+\cot\alpha)^2-(\sqrt{2})^2$

$=\tan^2\alpha+\cot^2\alpha+2\tan\alpha\cot\alpha-2$

$=\tan^2\alpha+\cot^2\alpha+2-2=\tan^2\alpha+\cot^2\alpha$

۳ـ نامساویهای مثلثاتی

روشهای اثبات نامساویهای مثلثاتی ـ مسائل حل شده

برای اثبات برقراری نامساویهای مثلثاتی، روشهای مختلفی

برحسب نامساوی مورد نظر موجود است. مثلاً بعضی از نامساویهای مثلثاتی را از روشهای ابتکاری و بعضی با استفاده از نامساویهای جبری اثبات می‌شوند ؛ اما می‌توان یک روش کلی برای اثبات نامساویهای مثلثاتی به‌کار برد ؛ به این صورت که ابتدا نامساوی را اثبات شده و برقرار فرض کرده، سپس با استفاده از خواص نامساویها آن را ساده می‌کنیم تا به یک نامساوی منطقی برسیم ؛ یعنی به یک نامساوی همیشه برقرار، مثلاً، $\sin^2 x \geq 0$ و بلافاصله به محض رسیدن به چنین نامساوی منطقی، از همان نامساوی شروع و روابط را به عقب برمی‌گردیم تا به نامساوی مزبور برسیم و این‌جاست که نه تنها نامساوی اثبات شده، بلکه به‌دست آمده است. در حقیقت، این روش که تقریباً در همهٔ موارد، براحتی نتیجه می‌دهد، نه تنها روشی است برای اثبات نامساویها ؛ بلکه روشی است برای ساختن و طرح مسائل نامساویهای مثلثاتی. حال، به حلّ چند نمونه از نامساویهای مثلثاتی می‌پردازیم :

مسألهٔ ۱۶ـ درستی نامساوی زیر را تحقیق کنید(α زاویهٔ حاده).

$$\sin\alpha\cos\alpha \leq \frac{1}{2}$$

$$\sin\alpha\cos\alpha \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 2\sin\alpha\cos\alpha \leq 1 \Rightarrow$$

$$\underbrace{1-2\sin\alpha\cos\alpha}_{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2} \geq 0$$

$\Rightarrow (\sin\alpha-\cos\alpha)^2 \geq 0 \leftarrow$ نامساوی همیشه برقرار

حال داریم : $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2 \geq 0 \Rightarrow$

$$1-2\sin\alpha\cos\alpha \geq 0 \Rightarrow 2\sin\alpha\cos\alpha \leq 1$$

$$\Rightarrow \sin\alpha\cos\alpha \leq \frac{1}{2}$$

مسألهٔ ۱۷ـ درستی نامساوی زیر را تحقیق کنید (α زاویهٔ حاده).

$$\sin\alpha+\cos\alpha \leq \sqrt{2}$$

$$\sin\alpha+\cos\alpha \leq \sqrt{2} \Rightarrow (\sin\alpha+\cos\alpha)^2 \leq 2$$

$$\Rightarrow 1+2\sin\alpha\cos\alpha \leq 2 \Rightarrow 1-2\sin\alpha\cos\alpha \geq 0$$

$\Rightarrow (\sin\alpha-\cos\alpha)^2 \geq 0 \leftarrow$ نامساوی منطقی

حال داریم :

$$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2 \geq 0 \Rightarrow 1-2\sin\alpha\cos\alpha \geq 0$$

$$\Rightarrow 2-1-2\sin\alpha\cos\alpha \geq 0$$

$$\Rightarrow 1+2\sin\alpha\cos\alpha \leq 2 \Rightarrow (\sin\alpha+\cos\alpha)^2 \leq 2$$

$$\Rightarrow \sin\alpha+\cos\alpha \leq \sqrt{2}$$

مسألهٔ ۱۸ـ درستی نامساوی زیر را تحقیق کنید (α زاویهٔ حاده).

$$\tan\alpha+\cot\alpha \geq 2$$

برای اثبات این نامساوی از یک نامساوی جبری می‌توان استفاده کرد که ابتدا آن نامساوی را ثابت می‌کنیم :

$a \geq 0$ فرض کنیم $\Rightarrow (1-a)^2 \geq 0 \Rightarrow$

$$1-2a+a^2 \geq 0 \xrightarrow{\text{دو طرف بر } a \text{ تقسیم}} \frac{1}{a}-2+a \geq 0$$

$$\Rightarrow a+\frac{1}{a} \geq 2$$

حال با توجه به این که حدود تغییرات تانژانت و کتانژانت از $-\infty$ تا $+\infty$ می‌باشد، پس هر عدد حقیقی، می‌تواند تانژانت یا کتانژانت زاویه‌ای باشد و بعکس. اگر فرض کنیم $a=\tan\alpha$، داریم :

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{\tan\alpha}=\cot\alpha \Rightarrow \tan\alpha+\cot\alpha \geq 2$$

و حکم ثابت است.

تمرین:

☐ عبارتهای مثلثاتی زیر را ساده کنید :

۱) $A=\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}-\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$

۲) $B=(\dfrac{1}{\sin x}-\sin x)(\dfrac{1}{\cos x}-\cos x)$

۳) $C=\dfrac{\tan^2 x-\sin^2 x}{\cot^2 x-\cos^2 x}$

۴) $D=\dfrac{\sec^2 x}{\sec^2 x-1}$

۵) $E=\dfrac{\sec\alpha.\sin\alpha}{\tan\alpha+\cot\alpha}$

۶) $F=(1-\sin^2\alpha)(1+\tan^2\alpha)$

۷) $G=\dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

۸) $H=(\sec x-\tan x)(\operatorname{cosec}x+1)$

۹) $I=\dfrac{\operatorname{cosec}x}{1+\operatorname{cosec}x}-\dfrac{\operatorname{cosec}x}{1-\operatorname{cosec}x}$

☐ اتحادهای مثلثاتی زیر را ثابت کنید :

۱) $\left(\dfrac{1+\tan^2\alpha}{\tan\alpha}\right)^2=\dfrac{1+\tan^4\alpha}{\tan^2\alpha}+2$

۲) $(\tan\alpha+\cot\alpha)(\tan\alpha-2\cot\alpha)$

$$=\frac{\tan^4\alpha+\tan^2\alpha-1}{1+\tan^2\alpha}-\frac{2\cot^4\alpha+2\cot^2\alpha+1}{1+\cot^2\alpha}$$

۳) $(\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+\sqrt{5})(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha-\sqrt{5})$

$$=-4(1+\sin^2\alpha\cos^2\alpha)$$

۴) $\cos\alpha-\dfrac{\tan\alpha}{\sin\alpha}+\tan\alpha.\sin\alpha=0$

۵) $\dfrac{\cos^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-1}{\sin^2\alpha}=\cot\alpha-1$

۶) $(\sin\alpha+\cos\alpha)(\tan\alpha+\cot\alpha)=\sec\alpha+\operatorname{cosec}\alpha$

۷) $\sec^4\alpha-\tan^4\alpha=\sec^2\alpha+\tan^2\alpha$

۸) $\dfrac{1+\cot\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha}=\dfrac{1+\tan\alpha}{\sec\alpha}$

۹) $\dfrac{\tan\alpha}{1+\sec\alpha}+\dfrac{1+\sec\alpha}{\tan\alpha}=2\operatorname{cosec}\alpha$

۱۰) $\left(\dfrac{\sin^2\alpha}{\tan^4\alpha}\right)^3\left(\dfrac{\operatorname{cosec}^3\alpha}{\cot^6\alpha}\right)^2=1$

۱۱) $\dfrac{\tan\alpha}{1-\cot\alpha}+\dfrac{\cot\alpha}{1-\tan\alpha}=1+\sec\alpha.\operatorname{cosec}\alpha$

۱۲) $\dfrac{1+\sec\alpha}{\sin\alpha+\tan\alpha}=\operatorname{cosec}\alpha$

۱۳) $\dfrac{\cos\alpha}{1-\tan\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{1-\cot\alpha}=\cos\alpha+\sin\alpha$

۱۴) $\dfrac{\tan\alpha-\sin\alpha}{\sec\alpha}=\dfrac{\sin^3\alpha}{1+\cos\alpha}$

۱۵) $\cot\alpha.\sec\alpha=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$

۱۶) $\dfrac{\sec x-1}{\sec x+1}+\dfrac{\cos x-1}{\cos x+1}=0$

۱۷) $\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=2\sec\alpha$

۱۸) $\sec^4\alpha-\sec^2\alpha=\dfrac{1}{\cot^4\alpha}+\dfrac{1}{\cot^2\alpha}$

۱۹) $\dfrac{1-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\tan\alpha-\cot\alpha$

۲۰) $\dfrac{1}{\sec^2\alpha}+\sec^2\alpha+\dfrac{1}{\operatorname{cosec}^2\alpha}-\dfrac{\sec^2\alpha}{\operatorname{cosec}^2\alpha}=2$

☐ عبارتهای زیر را با تغییر متغیر مناسب به عبارتهای مثلثاتی تبدیل کرده و ساده کنید :

۱) $A=\sqrt{a^2+x^2}$

۲) $B=\dfrac{1}{x^2+a^2}$

(راهنمایی : قرار دهید $x=a\tan\alpha$)

۳) $C=\dfrac{\sqrt[3]{(a^2+x^2)^2}}{x}$

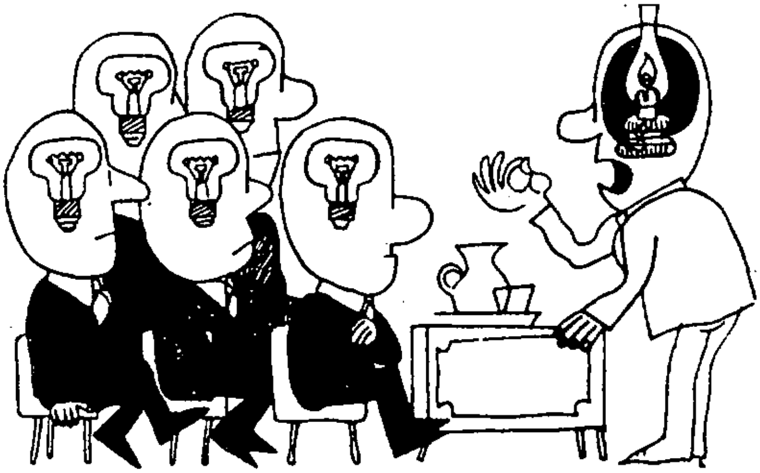
۴) $D=\sqrt{x^2-a^2}$

۵) $\dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}$

(راهنمایی : قرار دهید $x=a\sec\alpha$)

۶) $\dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}$

معمّاهایی با ماهیت ریاضی



قسمت سوّم: معادله های سیاله

● هوشنگ شرقی

همهٔ دانش‌آموزان علاقه‌مند رشتهٔ ریاضی، احتمالاً با مفهوم معادلهٔ سیاله آشنایی دارند و می‌دانند معادلهٔ سیاله، معادله‌ای است که جوابهای آن در مجموعهٔ عددهای صحیح بررسی می‌شود. به عبارت دیگر، هدف از حلّ یک معادلهٔ سیاله، یافتن مجموعهٔ عددهای صحیحی می‌باشد که درمعادله صدق می‌کنند. معادله‌های سیاله، انواع بسیاری دارند و زیبایی مباحث آنها در این است که در بیشتر موارد، با یک معادله با بیش از یک مجهول سروکار داریم که ممکن است مجموعهٔ جوابهای صحیح آن، کاملاً محدود باشد. به عنوان مثال، معادلهٔ سیالهٔ $y = \frac{2x-3}{x-1}$ را درنظر بگیرید، می‌توان ثابت نمود که تنها جوابهای صحیح این معادله، زوجهای $(2,1)$ و $(0,3)$ می‌باشند و این ازنظر هندسی، معادل با آن است که روی منحنی تابع، با ضابطهٔ $y = \frac{2x-3}{x-1}$ تنها دو نقطهٔ $A(2,1)$ و $B(0,3)$ با مختصات صحیح وجود دارند. همچنین می‌توان ثابت کرد که تنها و تنها یک سه‌تایی از عددهای صحیح در رابطهٔ $x^3 = 2y^3 + 4z^3$ صدق می‌کند، که روشن است، سه تایی $x=0$ و $y=0$ و $z=0$ می‌باشد. البته در بسیاری از موارد نیز معادلهٔ سیاله می‌تواند دارای جوابهای بی‌شماری باشد. به عنوان مثال، معادلهٔ $x+y=5$ را درنظر بگیرید. با کمی دقت، واضح است که بی‌شمار زوج عددهای صحیح در این رابطه صدق می‌کنند. (آیا می‌توانید بگویید چند زوج عدد طبیعی در این رابطه، صادق هستند؟)

در این مقاله، بنای ما بر ارائهٔ راه‌حلهای، حلّ معادله‌های سیاله نمی‌باشد وخوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند برای اطلاع از روشهای مختلف حلّ معادله‌های سیاله، به کتابهای مربوط مراجعه نماید. (معادله‌های سیاله بخشی از مباحث نظریهٔ اعداد می‌باشد و یکی از انواع سادهٔ آن، یعنی معادلهٔ سیالهٔ درجهٔ اوّل $ax+by=c$ در کتاب ریاضی گسسته دورهٔ پیش‌دانشگاهی بحث شده است.) اما در ضمن حلّ مسائل، سعی می‌شود اشاره‌ای نیز به شیوهٔ حلّ مسائل بشود؛ ولی وارد جزئیات مباحث مربوط به حلّ معادله نمی‌شویم. هدف اصلی این مقاله، اشاره به معمّاهایی است که به کمک معادله‌های سیاله حل می‌شوند. در شماره‌های قبل، معمّاهایی که ریشه در بحث استقرای ریاضی و نظریهٔ گرافها داشت، بررسی کردیم، و دراین شماره، به معمّاهایی می‌پردازیم که پاسخ آنها با حلّ معادله‌ای سیاله به‌دست می‌آید. در بسیاری از معمّاها، جوابها باید درمجموعهٔ عددهای طبیعی به‌دست آید و این کار را آسان‌تر می‌کند.

الف ـ معادلهٔ سیالهٔ درجهٔ اوّل $(ax+by=c)$

معادلهٔ سیالهٔ درجهٔ اوّل، در حالت کلی، جوابهای بی‌شماری

دارد ؛ به شرطی که $(a,b)|c$ ، یعنی بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a و b ، عدد c را بشمارد ؛ ولی در مجموعهٔ عددهای طبیعی، این معادله، تعداد محدودی جواب دارد. بگذارید با یک مثال آغاز کنیم.

مثال: قیمت یک خودکار ۱۵ تومان و قیمت یک مداد، ۱۸ تومان می‌باشد. علی با ۳۰۰ تومان پول خود، چند مداد و چند خودکار می‌تواند بخرد؟

روشن است که اگر مسأله را با نمادهای ریاضی نمایش دهیم، با فرض این که او x خودکار و y مداد بخرد، به معادلهٔ دو مجهولی زیر می‌رسیم :

$$15x+18y=300$$

یا این که :

$$5x+6y=100$$

بدیهی است که این معادله درمجموعه عددهای حقیقی، جوابهای بی‌شماری دارد ؛ اما در مجموعهٔ عددهای صحیح نیز مسأله در حالت کلی، جوابهای بی‌شماری دارد ؛ زیرا $(5,6)=1$ و $1|100$ ؛ یعنی ۱۰۰ بر ۱ بخش‌پذیر است. اکنون دقت کنید که چگونه مجموعه جوابهای صحیح این معادله را به‌دست می‌آوریم. یکی از دو متغیر (مثلاً y) را بر حسب متغیر دیگر به‌دست می‌آوریم :

$$5x+6y=100 \Rightarrow y=\frac{100-5x}{6}$$

اکنون سعی می‌کنیم عدد ۱۰۰ و متغیر $-5x$ را به دو قسمت، طوری بنویسیم که هر دو بر مخرج کسر (یعنی ۶) بخش‌پذیر باشند ؛

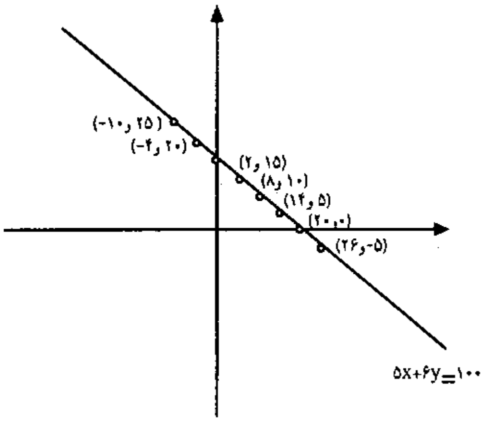
یعنی می‌نویسیم :

$$y=\frac{96-6x+4+x}{6}$$

و پس از تفکیک کسر، خواهیم داشت :

$$y=16-x+\frac{x+4}{6}$$

روشن است که اگر y بخواهد عددی صحیح باشد، باید $x+4$ بر ۶ بخش‌پذیر باشد ؛ یعنی $x+4=6k$ و از آن‌جا $x=6k-4$ و به دست می‌آید : $y=20-5k$ ؛ به عبارت دیگر، همهٔ زوج عددهای صحیح، به صورت $(x=6k-4, y=20-5k)$ در معادله صدق می‌کنند و با امتحان نیز می‌توان به همین نتیجه رسید و باز روشن است که به ازای مقادیر مختلف k، زوجهای مختلفی برای (x,y) به‌دست می‌آید. به عنوان مثال، اگر $k=1$ باشد، به‌دست می‌آید : $(x,y)=(2,15)$ و به ازای $k=5$ ، $(x,y)=(26,-5)$. تعبیر هندسی موضوع فوق، این است که روی خط $5x+6y=100$ نقطه‌های بی‌شماری با مختصات صحیح وجود دارد، که همگی آنها به صورت $(6k-4, 20-5k)$ می‌باشند :



بعضی از این نقاط که به ازای مقادیر مختلف k به‌دست آمده‌اند، در شکل مشخص شده‌اند. اما همان‌طور که از مسأله برمی‌آید، در این‌جا هدف ما تنها تعیین مجموعه جوابهای طبیعی یا صفر می‌باشد، که فقط چهار زوج $(2,15)$، $(8,10)$، $(14,5)$ و $(20,0)$ را شامل می‌شود. برای به‌دست آوردن این چهار جواب، دقت می‌کنیم که x و y، چون تعداد خودکار و مداد می‌باشند، نمی‌توانند عددهای منفی باشند ؛ یعنی لازم است که $20-5k\ge 0$ و $6k-4\ge 0$ و از آن‌جا به‌دست می‌آید $\frac{2}{3}\le k\le 4$ ، و چون $k\in Z$ می‌باشد، پس $k=1,2,3,4$ که به ازای این چهار مقدار، همان چهار زوج به‌دست می‌آید ؛ یعنی او می‌تواند ۲ خودکار و ۱۵ مداد یا ۸ خودکار و ۱۰ مداد یا ۱۴ خودکار و ۵ مداد بخرد یا این که تنها ۲۰ خودکار بخرد. اکنون اگر شرط دیگری نیز به مسأله اضافه شود، می‌توان جواب مسأله را دقیق‌تر به‌دست آورد. مثلاً فرض کنید قید زیر به مسأله اضافه شود :

« او چند مداد و چند خودکار خریده است ؛ اگر به حداکثر ۶ مداد نیاز داشته باشد و بخواهد حتماً مداد نیز بخرد.»

واضح است که با این شرط، تنها جواب مسأله $x=14$ و $y=5$ است ؛ یعنی او ۱۴ خودکار و ۵ مداد خریده است. اکنون با روشنتر شدن موضوع، می‌توان معمّاهایی را مطرح و حل نمود. به مثالهای زیر توجه کنید :

مثال ۱: سه ماهیگیر از یک صبح تا شب، ماهیگیری نموده و شب را به استراحت می‌پردازند. صبح، اوّلین ماهیگیر از خواب

بیدار و ماهیها را به سه قسمت مساوی تقسیم نموده و سهم خود را برمی‌دارد و یک ماهی اضافه را به دریا می‌اندازد و می‌رود. سپس نفر دوم از خواب برخاسته و به تصور آن‌که ماهیگیر دوم چیزی برنداشته است و درهمان اطراف می‌باشد، ماهیهای باقی‌مانده را به سه قسمت مساوی تقسیم و سهم خود را برداشته و باز یک ماهی را که اضافه مانده به دریا انداخته و می‌رود. نفر سوّم نیز پس از بیدار شدن، با همان تصور، ماهیها را به سه قسمت مساوی تقسیم و سهم خود را برداشته و یک ماهی اضافه را به دریا می‌اندازد و می‌رود. حدّاقل تعداد ماهیهای گرفته شده، چه‌قدر بوده است؟

حل: فرض می‌کنیم تعداد ماهیهای اوّلیه، x بوده باشد. از فرض مسأله، بلافاصله برمی‌آید که $x = ۳t + ۱$ ماهیگیر اوّل یک ماهی را دور انداخته و t ماهی را برمی‌دارد، لذا $۲t$ ماهی می‌ماند. چون ماهیگیر دوم نیز با همین وضع روبه رو شده است، پس $۲t = ۳m + ۱$ (زیرا ماهیهای باقی‌مانده نیز پس از تقسیم به ۳، یک ماهی اضافه داشتند)، ماهیگیر دوم نیز یک ماهی اضافه را دور انداخته و m ماهی را برمی‌دارد، پس $۲m$ ماهی باقی می‌ماند و چون ماهیگیر سوّم نیز با وضعی مشابه دو ماهیگیر قبل، روبه رو شده است، پس می‌توان نوشت: $۲m = ۳n + ۱$ و از این معادله‌ها به دستگاه معادله‌های زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} ۲m = ۳n + ۱ \\ ۲t = ۳m + ۱ \\ x = ۳t + ۱ \end{cases}$$

m را از معادلهٔ اوّل بر حسب n به‌دست آورده، در معادلهٔ دوم قرار می‌دهیم:

$$m = \frac{۳n+۱}{۲} \Rightarrow ۲t = \frac{۳(۳n+۱)}{۲} + ۱ = \frac{۹n+۳}{۲} + ۱$$

$$\Rightarrow ۲t = \frac{۹n+۵}{۲} \Rightarrow t = \frac{۹n+۵}{۴}$$

و t را در معادلهٔ سوّم قرار می‌دهیم:

$$x = ۳\left(\frac{۹n+۵}{۴}\right) + ۱ = \frac{۲۷n+۱۵}{۴} + ۱ = \frac{۲۷n+۱۹}{۴}$$

$$\Rightarrow ۴x = ۲۷n + ۱۹ \Rightarrow ۴x - ۲۷n = ۱۹$$

و این یک معادلهٔ سیاله است که با همان روش گفته شده، حل می‌شود:

$$x = \frac{۲۷n+۱۹}{۴} = \frac{۲۸n+۲۰-n-۱}{۴} = ۷n + ۵ - \frac{n+۱}{۴}$$

برای این‌که x عددی صحیح باشد، لازم است که $n + ۱ = ۴k$ و از آن‌جا به‌دست می‌آید: $n = ۴k - ۱$ و لذا داریم:

$$x = ۲۸k - ۷ + ۵ - k \Rightarrow x = ۲۷k - ۲$$

اکنون برای آن‌که x عددی طبیعی باشد، کافی است $k \geq ۱$ باشد که کمترین مقدار x به ازای $k = ۱$ به‌دست می‌آید که مساوی ۲۵ می‌باشد؛ یعنی حدّاقل تعداد ماهیهای صیدشده، ۲۵ عدد بوده است. درستی پاسخ را با پیدا کردن سهم سه ماهیگیر تحقیق کنید. اگر بدانیم تعداد ماهیها بین ۷۰ تا ۱۰۰ ماهی بوده است، چند ماهی صید شده است؟

مثال ۲: یک اسکناس ۱۰۰۰ تومانی را به چند طریق می‌توان به اسکناسهای ۱۰۰ تومانی و ۵۰ تومانی خرد کرد؟

حل: فرض کنیم x اسکناس ۱۰۰ تومانی و y اسکناس ۵۰ تومانی، حاصل خرد شدن اسکناس ۱۰۰۰ تومانی باشد؛ بنابراین، به زبان ریاضی می‌توان نوشت:

$$۱۰۰x + ۵۰y = ۱۰۰۰ \Rightarrow ۲x + y = ۲۰$$

برای حلّ این معادلهٔ سیاله، براحتی می‌نویسیم:

$$y = ۲۰ - ۲x$$

اکنون به ازای هر عدد صحیح $n = k$، یک عدد صحیح $y = ۲۰ - ۲k$ به‌دست می‌آید. برای آن‌که جوابهای معادله را در مجموعهٔ عددهای صحیح مثبت یا صفر بیابیم، می‌نویسیم: $x \geq ۰$ و $y \geq ۰ \Leftarrow ۲۰۰ - ۲k \geq ۰$ و $k \geq ۰$ و از آن‌جا به‌دست می‌آید: $۰ \leq k \leq ۱۰$؛ یعنی برای k یازده امکان وجود داشته و از آن‌جا مسأله، یازده جواب دارد که عبارت‌است از:

(۰,۲۰) و (۱,۱۸) و (۲,۱۶) و (۳,۱۴) و (۱۴,۱۲) و (۵,۱۰) و (۶,۸) و (۷,۶) و (۸,۴) و (۹,۲) و (۱۰,۰)

که مؤلفهٔ اوّل، هر زوج تعداد اسکناسهای ۱۰۰ تومانی و مؤلفهٔ دوم، تعداد اسکناسهای ۵۰ تومانی را مشخص می‌کند.

مثال ۳: اکنون مسأله را قدری تعمیم می‌دهیم. فرض می‌کنیم بخواهیم اسکناس ۱۰۰۰ تومانی را به اسکناسهای ۵۰، ۱۰۰ و ۲۰۰ تومانی خرد کنیم، چند امکان مختلف وجود دارد؟

حل: فرض کنیم x اسکناس ۵۰ تومانی، y اسکناس ۱۰۰ تومانی و z اسکناس ۲۰۰ تومانی، حاصل خرد شدن اسکناس ۱۰۰۰ تومانی باشد. بنابراین می‌توان نوشت:

$$۵۰x + ۱۰۰y + ۲۰۰z = ۱۰۰۰$$

و یا این‌که: $x + ۲y + ۴z = ۲۰$، اکنون بسادگی به‌دست می‌آید:

$x = ۲۰-(۲y+۴z)$

و چون $x \geq ۰$ می‌باشد، داریم:

$$۲۰-(۲y+۴z)\geq ۰ \Rightarrow ۲y+۴z\leq ۲۰ \Rightarrow y+۲z\leq ۱۰$$

حال اگر $y+۲z=m$ فرض شود، داریم:

$$y=m-۲z$$

و چون $y\geq ۰$ می‌باشد، پس داریم: $m-۲z\geq ۰\Rightarrow z\leq \frac{m}{۲}$

واز آن‌جایی که $m\leq ۱۰$ می‌باشد، بنابراین: $z\leq ۵$

حال به ازای مقادیر مختلف z ($z=۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵$) مقادیر مختلفی برای y بر حسب m به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} z=۳ \\ y=m-۶ \end{cases} \text{ و } \begin{cases} z=۴ \\ y=m-۸ \end{cases} \text{ و } \begin{cases} z=۵ \\ y=m-۱۰ \end{cases}$$

$$\begin{cases} z=۰ \\ y=m \end{cases} \text{ و } \begin{cases} z=۱ \\ y=m-۲ \end{cases} \text{ و } \begin{cases} z=۲ \\ y=m-۴ \end{cases}$$

و برای m نیز ۱۱ امکان مختلف ($m=۰,۱,۲,...,۱۰$) وجود دارد که البته همهٔ آنها با توجه به مثبت یا صفر بودن y در هر مورد قابل قبول نخواهند بود. در حالت $z=۵$، فقط $m=۱۰$ مورد قبول بوده و از آن‌جا $y=۰$ و $x=۰$ و در حالت $z=۴$، $m=۸,۹,۱۰$ قابل قبول بوده و از آن‌جا زوجهای (۴,۰)، (۲,۱) و (۰,۲) برای x و y حاصل می‌شود و با همین روش، همهٔ سه‌تایی‌های قابل قبول برای x، y و z را که تعداد آنها ۳۶ تا می‌باشد، به صورت زیر می‌توان مشخص نمود:

(۰,۰,۵) و (۴,۰,۴) و (۲,۱,۴) و (۰,۲,۴) و (۰,۴,۳) و (۲,۳,۳) و
(۴,۲,۳) و (۶,۱,۳) و (۸,۰,۳) و (۰,۶,۲) و (۲,۵,۲) و (۴,۴,۲) و
(۲,۷,۱) و (۸,۲,۲) و (۱۰,۱,۲) و (۱۲,۰,۲) و (۰,۸,۱) و (۶,۳,۲)
(۴,۶,۱) و (۶,۵,۱) و (۸,۴,۱) و (۱۰,۳,۱) و (۱۲,۲,۱) و (۱۴,۱,۱) و
(۱۶,۰,۱) و (۰,۱۰,۰) و (۲,۹,۰) و (۴,۸,۰) و (۶,۷,۰) و (۸,۶,۰)
و (۱۰,۵,۰) و (۱۲,۴,۰) و (۱۴,۳,۰) و (۱۶,۲,۰) و (۱۸,۱,۰) و (۲۰,۰,۰)

یعنی ۳۶ روش مختلف برای خرد کردن یک اسکناس هزارتومانی به اسکناسهای ۵۰، ۱۰۰ و ۲۰۰ تومانی وجود دارد. البته اگر هدف، تنها شمارش تعداد روشها بود، مسأله به مباحث آنالیز ترکیبی مربوط می‌شد و روشهایی برای شمارش تعداد جوابهای مثبت و صفر معادله‌های سیالهٔ درجهٔ اوّل (بدون به‌دست آوردن خود جوابها) وجود دارد که خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند به تفصیل، آنها را در کتاب «ریاضیات انتخاب» یا «چگونه بدون شمارش بشماریم»، از نشر دانشگاهی، تألیف ایوان نیون و ترجمهٔ بتول جذبی و علی عمیدی، فصلهای پنجم تا هفتم کتاب را مطالعه نماید.

مثال۴: در طی مسابقه‌های فوتبال، تیم A پس از پنج بازی، ۱۰ امتیاز و تیم B پس از ۱۰ بازی، ۲۰ امتیاز به‌دست آورده‌اند. تعداد باختهای کدام یک از دو تیم بیشتر بوده است؟ (هر برد ۳ امتیاز، هرمساوی ۱ امتیاز و باخت صفر امتیاز دارد.)

حل: اگر تعداد بردهای تیم A، $x_۱$ و تعداد مساویهای آن، $y_۱$ و تعداد باختهای آن، $z_۱$ باشد، مطابق مفروضهای مسأله داریم:

$$\begin{cases} x_۱+y_۱+z_۱=۵ \\ ۳x_۱+y_۱=۱۰ \end{cases}$$

مشخص است که $x_۱\leq ۳$ (زیرا اگر $x_۱>۳$ آن‌گاه، $۳x_۱+y>۱۰$).

اگر از معادلهٔ اوّل، $y_۱$ را به‌دست آورده و در معادلهٔ دوم قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$x_۱+۱۰-۳x_۱+z_۱=۵\Rightarrow ۲x_۱-z_۱=۵\Rightarrow z_۱=۲x_۱-۵$$

و چون $z_۱\geq ۰$، بنابراین $۲x_۱-۵\geq ۰$ و لذا $x_۱\geq \frac{۵}{۲}$ و بنابراین داریم $\frac{۵}{۲}\leq x_۱\leq ۳$ و چون $x_۱$ عددی صحیح می‌باشد، پس تنها جواب قابل قبول، $x_۱=۳$ می‌باشد و از آن‌جا $z_۱=۱$ و $y_۱=۱$.

اما اگر تعداد بردهای تیم B را $x_۲$ و تعداد تساویهای آن را $y_۲$ و تعداد باختهای آن را $z_۲$ بنامیم، با توجه به شرایط مسأله داریم:

$$\begin{cases} x_۲+y_۲+z_۲=۱۰ \\ ۳x_۲+y_۲=۲۰ \end{cases}$$

و با همان روش، واضح است که $x_۲\leq ۶$ و با قرار دادن $y_۲$ ازمعادلهٔ دوم در معادلهٔ اوّل، نتیجه می‌شود:

$$y_۲=۲۰-۳x_۲\Rightarrow x_۲+۲۰-۳x_۲+z_۲=۱۰\Rightarrow z_۲$$
$$=۲x_۲-۱۰\geq ۰\Rightarrow x_۲\geq ۵$$

یعنی داریم: $۵\leq x_۲\leq ۶$ بنابراین، برای $x_۲$، دو جواب ۵ و ۶ قابل قبول است و از آن‌جا دو سری جواب زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} x_۲=۶ \\ y_۲=۲ \\ z_۲=۲ \end{cases} \qquad \begin{cases} x_۲=۵ \\ y_۲=۵ \\ z_۲=۰ \end{cases}$$

بنابراین z_1 می‌تواند از z_2 بزرگتر یا کوچکتر باشد؛ یعنی نمی‌توان گفت که تعداد باختهای کدام تیم بیشتر بوده است؛ ولی می‌توان گفت تعداد بردهای تیم B و تعداد مساویهای آن، بیشتر بوده است.

مثال ۵: اینک به مسأله‌ای از المپیاد ریاضی شوروی سابق در سال ۱۹۸۷ توجه کنید:

عمودریا هر عصر از بین ۳۳ پهلوانی که برای نگهبانی نامزد شده‌اند، ۹ یا ۱۰ نفر را به صلاحدید خود انتخاب می‌کند. حداقل پس از چند روز، همهٔ پهلوانان به تعداد برابر نگهبانی داده‌اند؟

حل: ظاهر مسأله به هیچ عنوان ارتباط آن را با بحث ما نشان نمی‌دهد؛ ولی اگر کمی دقت کنیم، درمی‌یابیم که درواقع، با حلّ یک مسألهٔ معادلهٔ سیّاله مواجه هستیم. اگر فرض کنیم پس از این مدت، همهٔ پهلوانان به تعداد برابر، m روز نگهبانی داده باشند، بنابراین، تعداد کل روزهای نگهبانی آنها $33m$ می‌باشد؛ اما از آن‌جایی که هر عصر ۹ یا ۱۰ پهلوان نگهبانی می‌دهند، پس اگر x عصر، ۹ پهلوان و y عصر، ۱۰ پهلوان نگهبانی داده باشند، می‌توان نوشت: $9x+10y=33m$

و این معادله‌ای سیّاله، از درجهٔ اوّل می‌باشد. برای حلّ و بحث این معادله، به m، مقادیر مختلف می‌دهیم:

$$m=1 \Rightarrow 9x+10y=33 \Rightarrow y=\frac{33-9x}{10}$$

$$=\frac{30-10x+3+x}{10} \Rightarrow y=3-x+\frac{3+x}{10}$$

و لذا $x+3=10k$ و $x=10k-3$ و $y=6-9k$ و با توجه به این‌که $x\ge 0$ و y به‌دست می‌آید $\frac{3}{10}\le k\le \frac{2}{3}$ و چون $k\in z$ بنابراین، برای k هیچ مقداری به دست نمی‌آید و مسأله جواب ندارد. به ازای $m=2$ خواهیم داشت:

$$9x+10y=66 \Rightarrow y=\frac{66-9x}{10}=\frac{70-10x+x-4}{10}$$

$$\Rightarrow y=7-x+\frac{x-4}{10} \Rightarrow x-4=10k \Rightarrow x=10k+4$$

و $y=3-9k$ که با توجه به مثبت بودن x و y، به‌دست می‌آید $-\frac{4}{10}\le k\le \frac{1}{3}$ و لذا $k=0$ و از آن‌جا $x=4$ و $y=3$؛ یعنی پهلوانان در مجموع، ۷ عصر نگهبانی داده‌اند که ۴ عصر آن، ۹ نفره و ۳ عصر آن، ۱۰نفره بوده‌اند و هر پهلوان، ۲ عصر نگهبان بوده است. اینک معمّاهای زیر که همگی به حلّ معادله‌ای سیاله از درجهٔ اوّل ختم می‌گردند، برای تمرین اضافی ارائه می‌شوند. تلاش کنید با حلّ آنها مباحث طرح شده را برای خود تکرار کنید.

۱ـ عدد ۲۰۰۰ را به دو عدد چنان تقسیم کنید، که یکی مضرب ۱۳ و دیگری مضرب ۱۵ باشد؛ مسأله چند جواب دارد؟

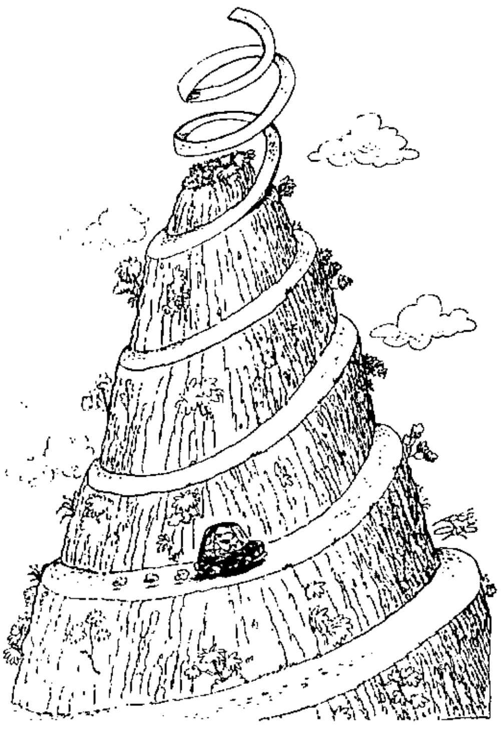
۲ـ علی با ۵۰۰ تومان پول خود روی هم ۶۰ تمبر خرید که شامل تمبرهای ۳، ۵ و ۱۰ تومانی بودند. او از هر یک از این تمبرها چند عدد خریده است. اگر از هریک حداقل ۶ عدد خریده باشد.

۳ـ عدد ۱۰۰ را به صورت مجموع سه عدد بنویسید که یکی مضرب ۵، دیگری مضرب ۷ و دیگری مضرب ۱۱ باشد. مسأله چند جواب دارد؟

۴ـ یک اسکناس صدتومانی را به چند طریق می‌توان به اسکناسهای ۱۰، ۲۰ و ۵۰ تومانی خرد کرد؟

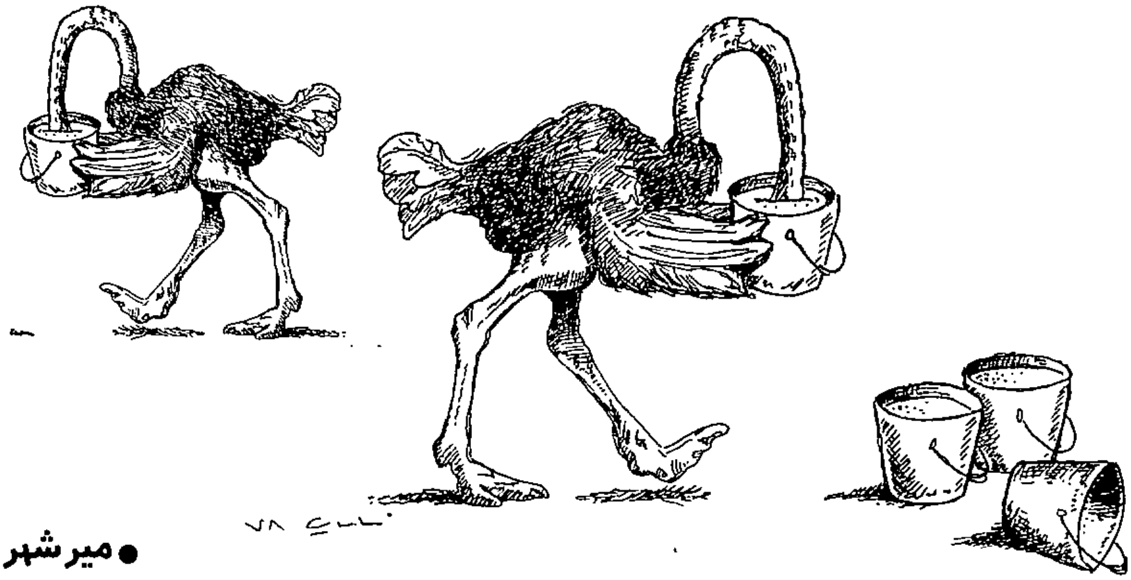
۵ـ علی و رضا هریک مقداری پول دارند و پول احمد، مساوی مجموع $\frac{3}{4}$ پول علی و $\frac{7}{5}$ پول رضا می‌باشد. احمد حدّاقل چه‌قدر پول دارد؟

۶ـ ۱۳۷۷ و ۱۳۷۸ دو عدد متوالی هستند که اوّلی مضرب ۱۷ و دومی مضرب ۱۳ می‌باشد. چند سال دیگر دوباره برای عدد دو سال شمسی متوالی، همین وضعیت رخ می‌دهد؟



اتحادهای جبری

برای دانش‌آموزان سال اوّل



● میرشهرام صدر

مفهوم اتحاد(برابری همیشه برقرار)

اتحاد بین دو عبارت جبری[1] یعنی «هم‌عددی یا برابری» دو عبارت جبری به ازای همهٔ مقادیر حقیقی که جانشین متغیرهای عبارتهای جبری می‌شوند.

برای مثال، عبارتهای $(a+b)^2$ و $a^2+2ab+b^2$ را درنظر می‌گیریم، اگر $a=2$ و $b=1$ را جایگزین متغیرهای عبارتهای فوق کنیم، خواهیم داشت:

$$(a+b)^2=(2+1)^2=(3)^2=9$$

$$a^2+2ab+b^2=(2)^2+2(2)(1)+(1)^2=4+4+1=9$$

اکنون اگر $a=\frac{1}{2}$ و $b=0/1$ را اختیار کنیم، خواهیم داشت:

$$(a+b)^2=(\frac{1}{2}+0/1)^2=(0/5+0/1)^2=(0/6)^2=0/36$$

$$a^2+2ab+b^2=(\frac{1}{2})^2+2(\frac{1}{2})(0/1)+(0/1)^2$$

$$=\frac{1}{4}+0/1+0/01=0/25+0/1+0/01=0/36$$

به همین ترتیب، اگر به جای a و b اعداد حقیقی دلخواه دیگری را جایگزین کنیم، حاصل دو عبارت برابر خواهد شد. در این حالت، برابری دو عبارت جبری $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ را یک اتحاد گوییم.

برابریهای زیر اتحاد هستند:

$$3x+1=x+1+2x\ ,\ x(x-1)=x^2-x\ ,\ 3x-x=2x$$

آشنایی با اتحادهای جبری و به‌خاطر سپردن آنها، در محاسبه‌های ریاضی، سرعت بیشتری به ما می‌دهد. در زیر، اتحادهای مهم را بیان و اثبات می‌کنیم.

◁ اتحادهای مهم جبری

۱) مربع دوجمله‌ای

الف) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \quad (a,b\in\mathbb{R})$

(اوّلی+دومی)^2 = (اوّلی)^2+۲(اوّلی)(دومی)+(دومی)^2

ب) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (a,b \in \mathbb{R})$

(اولی − دومی)^2 = (اولی)^2 − ۲(اولی)(دومی) + (دومی)^2

تذکر: به خاطر سپردن صورت فارسی اتحادها، می‌تواند در حلّ مسائل بهتر استفاده شود.

اثبات اتحاد مربع دوجمله‌ای

اثبات اتحاد «الف»

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a(a+b) + b(a+b)$$
$$= a^2 + ab + ab + b^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2$$

اثبات اتحاد «ب»

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a(a-b) - b(a-b)$$
$$= a^2 - ab - ab + b^2$$
$$= a^2 - 2ab + b^2$$

مثال: حاصل هریک از عبارتهای زیر را بیابید:

۱) $(x^2 + \frac{1}{x^2})^2$ ۲) $(2xy - \frac{1}{2}x^3)$

۳) $(\frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{2}y^3)^2$ ۴) $(2x + 5y^3z^2)^2$

۵) $(-2xy - x^3)^2$ ۶) $(-\frac{x^2}{3} + \frac{3}{x^2})^2$

حل:

(اولی+دومی)^2 = (اولی)^2+۲(اولی)(دومی)+(دومی)^2

۱) $(x^2 + \frac{1}{x^2})^2 = (x^2)^2 + 2(x^2)(\frac{1}{x^2}) + (\frac{1}{x^2})^2 \quad (x \neq 0)$

$$= x^4 + \frac{2x^2}{x^2} + \frac{1}{x^4} = x^4 + 2 + \frac{1}{x^4}$$

۲) $(2xy - \frac{1}{2}x^3)^2 = (2xy)^2 - 2(2xy)(\frac{1}{2}x^3) + (\frac{1}{2}x^3)^2$

$$= 4x^2y^2 - \frac{4x^4y}{2} + \frac{1}{4}x^6$$
$$= 4x^2y^2 - 2x^4y + \frac{1}{4}x^6$$

۳) $(\frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{2}y^3)^2 = (\frac{2}{3}x^2)^2 + 2(\frac{2}{3}x^2)(\frac{3}{2}y^3) + (\frac{3}{2}y^3)^2$

$$= \frac{4}{9}x^4 + \frac{12x^2y^3}{6} + \frac{9}{4}y^6$$
$$= \frac{4}{9}x^4 + 2x^2y^3 + \frac{9}{4}y^6$$

۴) $(2x + 5y^3z^2)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(5y^3z^2) + (5y^3z^2)^2$

$$= 4x^2 + 20xy^3z^2 + 25y^6z^4$$

۵) $(-2xy - x^3)^2 = (-2xy + (-x^3))^2$

$$= (-2xy)^2 + 2(-2xy)(-x^3) + (-x^3)^2$$
$$= 4x^2y^2 + 4x^4y + x^6$$

۶) $(-\frac{x^2}{3} + \frac{3}{x^2})^2 = (\frac{3}{x^2} - \frac{x^2}{3})^2$

$$= (\frac{3}{x^2})^2 - 2(\frac{3}{x^2})(\frac{x^2}{3}) + (\frac{x^2}{3})^2 \quad (x \neq 0)$$
$$= \frac{9}{x^4} - 2 + \frac{x^4}{9}$$

۲) مربع سه جمله‌ای

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \quad (a,b,c \in \mathbb{R})$$

(اولی+دومی+سومی)^2 = (اولی)^2 + (دومی)^2 + (سومی)^2

+۲(اولی)(دومی) + ۲(اولی)(سومی) + ۲(دومی)(سومی)

اثبات اتحاد مربع سه‌جمله‌ای

$$(a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c)$$
$$= a(a+b+c) + b(a+b+c) + c(a+b+c)$$
$$= a^2 + ab + ac + ba + b^2 + bc + ca + cb + c^2$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

مثال: حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید:

۱) $(2 - x^2 - 3x)^2$ ۲) $(a^2 + 2b - 5)^2$

حل:

۱) $(2 - x^2 - 3x)^2 = (2)^2 + (-x^2)^2 + (-3x)^2$

$$+2(2)(-x^2)+2(2)(-3x)+2(-x^2)(-3x)$$
$$=4+x^4+9x^2-4x^2-12x+6x^3$$
$$=4+x^4+5x^2-12x+6x^3$$

۲) $(a^2+2b-5)^2=(a^2)^2+(2b)^2+(-5)^2$
$$+2(a^2)(2b)+2(a^2)(-5)+2(2b)(-5)$$
$$=a^4+4b^2+25+4a^2b-10a^2-20b$$

۳) مکعب[2] دوجمله‌ای

الف) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \quad (a,b\in\mathbb{R})$

(دومی + اولی)^۳ = (اولی)^۳ + ۳(اولی)^۲(دومی) + ۳(اولی)(دومی)^۲ + (دومی)^۳

ب) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \quad (a,b\in\mathbb{R})$

(دومی − اولی)^۳ = (اولی)^۳ − ۳(اولی)^۲(دومی) + ۳(اولی)(دومی)^۲ − (دومی)^۳

اثبات اتحاد مکعب دوجمله‌ای

دراین‌جا کافی است یکی از این‌دو اتحاد را اثبات کنیم :

$$(a-b)^3=(a-b)(a-b)^2=a(a-b)^2-b(a-b)^2$$
$$=a(a^2-2ab+b^2)-b(a^2-2ab+b^2)$$
$$=a^3-2a^2b+ab^2-ba^2+2ab^2-b^3$$
$$=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

مثال: حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید. $(x\neq 0)$

۱) $(x^y-y^x)^3$ ۲) $(x-\frac{1}{x})^3$

حل:

۱) $(x^y-y^x)^3=(x^y)^3-3(x^y)^2(y^x)+3(x^y)(y^x)^2-(y^x)^3$
$$=x^{3y}-3x^{2y}y^x+3x^yy^{2x}-y^{3x}$$

۲) $(x-\frac{1}{x})^3=(x)^3-3(x)^2(\frac{1}{x})+3(x)(\frac{1}{x})^2-(\frac{1}{x})^3$
$$=x^3-\frac{3x^2}{x}+\frac{3x}{x^2}-\frac{1}{x^3}=x^3-3x+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}\quad(x\neq 0)$$

۴) اتحاد مزدوج

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2 \quad (a,b\in\mathbb{R})$

(دومی + اولی)(دومی − اولی) = (اولی)^۲ − (دومی)^۲

اثبات اتحاد مزدوج

$$(a+b)(a-b)=a(a-b)+b(a-b)$$
$$=a^2-ab+ba-b^2=a^2-b^2$$

تذکر: برای پیدا کردن حاصل یک عبارت به کمک اتحاد مزدوج، معمولاً حاصلضرب دو پرانتز از عبارتهای جبری را داریم، به‌طوری که بدون درنظرگرفتن علامتهای جملات داخل پرانتزها، جملات دو پرانتز یکسان می‌باشند. جمع جبری جمله‌هایی که علامتهای آنها در دو پرانتز یکسان می‌باشند، «اوّلی» و جمع جبری جمله‌هایی که در دو پرانتز علامتهای قرینه دارند، «دومی» درنظر می‌گیریم.

مثال: حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید :

۱) $(5t^2-a)(a+5t^2)$

۲) $(2a-3c+b)(2a-b+3c)$

۳) $(a-b-c)(a+b-c)$

۴) $(x^2-x+1-x^3)(x^2-x-1+x^3)$

حل:

۱) $(5t^2-a)(a+5t^2)=(5t^2)^2-(a)^2=25t^4-a^2$

۲) $(2a-3c+b)(2a-b+3c)=(2a)^2-(-3c+b)^2$
$$=4a^2-(b-3c)^2$$
$$=4a^2-(b^2-6bc+9c^2)$$
$$=4a^2-b^2+6bc-9c^2$$

۳) $(a-b-c)(a+b-c)=(a-c)^2-(b)^2$
$$=a^2-2ac+c^2-b^2$$

۴) $(x^2-x+1-x^3)(x^2-x-1+x^3)$
$$=(x^2-x+1-x^3)(x^2-x-(1-x^3))$$
$$=(x^2-x)^2-(1-x^3)^2$$
$$=(x^2)^2-2x^2\times x+x^2-(1-2x^3+(x^3)^2)$$
$$=x^4-2x^3+x^2-1+2x^3-x^6$$

$= x^4 + x^2 - 1 - x^6$

۵) اتحاد یک جملهٔ مشترک

$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

اثبات اتحاد یک جملهٔ مشترک

$(x+a)(x+b) = x(x+b) + a(x+b)$

$= x^2 + bx + ax + ab$

$= x^2 + (a+b)x + ab$

مثال: حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید :

۱) $(x+5)(x-2)$ ۳) $(5a-3b^4)(5a+3b^3)$

۲) $(x^2y+2ay)(2ay-b)$ ۴) $(a+b-2c)(a+b+c)$

حل:

۱) $(x+5)(x-2) = x^2 + (5-2)x + 5\times(-2)$

$= x^2 + 3x - 10$

۲) $(2ay + x^2y)(2ay-b)$

$= (2ay)^2 + (x^2y - b)2ay + x^2y(-b)$

$= 4a^2y^2 + 2ax^2y^2 - 2aby - bx^2y$

۳) $(5a-3b^4)(5a+3b^3)$

$= (5a)^2 + (-3b^4 + 3b^3)5a + (-3b^4)(3b^3)$

$= 25a^2 - 15ab^4 + 15ab^3 - 9b^7$

۴) $(a+b-2c)(a+b+c)$

$= (a+b)^2 + (-2c+c)(a+b) + (-2c)(c)$

$= a^2 + 2ab + b^2 - c(a+b) - 2c^2$

$= a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc - 2c^2$

۶) مجموع و تفاضل مکعبات دوجمله‌ای

الف) $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3 \quad (a,b \in \mathbb{R})$

(اوّلی + دومی)((اوّلی)^2 − (اوّلی)(دومی) + (دومی)^2)

= (اولی)^3 + (دومی)^3

ب) $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3 \quad (a,b \in \mathbb{R})$

(اوّلی − دومی)((اوّلی)^2 + (اوّلی)(دومی) + (دومی)^2)

= (اوّلی)^3 − (دومی)^3

اثبات اتحاد مجموع و تفاضل مکعبات دوجمله‌ای

کافی است یکی از این دو اتحاد را ثابت کنیم :

$(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$= a(a^2-ab+b^2) + b(a^2-ab+b^2)$

$= a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3$

$= a^3 + b^3$

مثال: حاصل عبارتهای زیر را بیابید :

۱) $(x+2)(x^2-2x+4)$

۲) $(x^2+5y)(x^4-5x^2y+25y^2)$

۳) $(2x-3y)(2x+3y)(16x^4+36x^2y^2+81y^4)$

حل:

۱) $(x+2)(x^2-2x+4) = (x)^3 + (2)^3 = x^3 + 8$

۲) $(x^2+5y)(x^4-5x^2y+25y^2)$

$= (x^2)^3 + (5y)^3 = x^6 + 125y^3$

۳) $(2x-3y)(2x+3y)(16x^4+36x^2y^2+81y^4)$

$= (4x^2-9y^2)(16x^4+36x^2y^2+81y^4)$

$= (4x^2)^3 - (9y^2)^3$

$= 64x^6 - 729y^6$

نتایج اتحادها (اتحادهای دیگر)

در زیر، چند نتیجهٔ مهم از اتحادها ارائه شده است که به کمک آنها می‌توان سرعت بیشتری به عملیات جبری بخشید :

۱) $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$

۲) $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$

۳) $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$

۴) $(a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3)$
$= 3(a+b)(a+c)(b+c)$

5) $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax-by)^2+(bx+ay)^2$

۶) $a^2+\frac{1}{a^2}=(a+\frac{1}{a})^2-2 \qquad (a\neq 0)$

۷) $a^3+\frac{1}{a^3}=(a+\frac{1}{a})^3-3(a+\frac{1}{a}) \qquad (a\neq 0)$

۸) $a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$

۹) اگر $\begin{cases} a+b+c=0 \\ \text{یا} \\ a=b=c \end{cases} \Leftrightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$

بعضی از اتحادهای بالا را ثابت می‌کنیم و اثبات بقیه را به‌عنوان تمرین، برعهدهٔ دانش‌آموزان عزیز واگذار می‌کنیم.

اثبات اتحاد ۳ :

$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

$(a+b)^2-(a-b)^2=a^2+2ab+b^2-(a^2-2ab+b^2)$

$=a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2$

$=4ab$

اثبات اتحاد ۴:

$(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)$

$=3(a+b)(a+c)(b+c)$

طرف اوّل $=(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)$

$=[(a+b)+c]^3-a^3-b^3-c^3$

$=(a+b)^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2$
$+c^3-a^3-b^3-c^3$

$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3c(a^2+2ab+b^2)$
$+3ac^2+3bc^2+c^3-a^3-b^3-c^3$

$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3a^2c+6abc+3b^2c$
$+3ac^2+3bc^2+c^3-a^3-b^3-c^3$

$=3a^2b+3ab^2+3a^2c+6abc+3b^2c+3ac^2+3bc^2$

طرف دوم $=3(a+b)(a+c)(b+c)$

$=[(3a+3b)(a+c)](b+c)$

$=[3a(a+c)+3b(a+c)](b+c)$

$=(3a^2+3ac+3ab+3bc)(b+c)$

$=3a^2b+3a^2c+3abc+3ac^2+3ab^2$
$+3abc+3b^2c+3bc^2$

$=3a^2b+3a^2c+6abc+3ac^2+3ab^2+3b^2c+3bc^2$

اثبات اتحاد ۵:

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax-by)^2+(bx+ay)^2$

طرف اوّل $=(a^2+b^2)(x^2+y^2)$

$=a^2(x^2+y^2)+b^2(x^2+y^2)$

$=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2$

طرف دوم $=(ax-by)^2+(bx+ay)^2$

$=a^2x^2-2abxy+b^2y^2+b^2x^2+2abxy+a^2y^2$

$=a^2x^2+b^2y^2+b^2x^2+a^2y^2$

کاربرد اتحادها

از اتحادها برای حاصلضرب عددها و به توان رساندن آنها می‌توان استفاده کرد. برای نمونه :

نمونهٔ ۱:

$101^3=(100+1)^3=100^3+3\times 100^2\times 1$
$+3\times 100\times 1^2+1^3$

$=1000000+30000+300+1$

$=1030301$

نمونهٔ ۲:

$250^2-150^2=(250-150)(250+150)$

$=100\times 400=40000$

نمونهٔ ۳:

$87\times 93=(90-3)(90+3)$

$=90^2-3^2=8100-9=8091$

نمونهٔ ۴:

$1021^2=(1000+20+1)^2$

$=1000^2+20^2+1^2+2\times1000\times20$

$+2\times1000\times1+2\times20\times1$

$=1000000+400+1+40000+2000+40$

$=1042441$

نمونهٔ ۵:

$259^3-250^3-9^3=(250+9)^3-250^3-9^3$

$=250^3+3\times250^2\times9+3\times250\times9^2+9^3-250^3-9^3$

$=3\times250^2\times9+3\times250\times9^2$

$=3\times250\times9(250+9)$

$=1748250$

تفاوت بین اتحاد و معادله

همان‌طور که می‌دانید، هدف از حلّ معادله‌ای مانند: $x+2=0$، به دست آوردن مقادیری برای مجهول است که در معادله صدق کند. با کمی دقّت، درمی‌یابیم که جواب معادلهٔ فوق ۲- است (۲- ریشهٔ معادله است).

برای این‌که رابطهٔ بالا برقرار باشد، فقط به جای x می‌توانیم عدد ۲- را قرار دهیم، پس:

$-2+2=0$

بنابراین معادله، یک رابطهٔ جبری است که فقط به ازای ریشه‌هایش (جوابهایش) به یک برابری عددی درست تبدیل می‌شود. اگر در معادلهٔ بالا به جای x عدد ۲ یا ۳ یا هر عدد دیگری به غیر از ۲- را قرار دهیم، در معادله صدق نخواهد کرد و به یک برابری درست عددی نخواهیم رسید.

اکنون اتحاد $(x+1)^2=x^2+2x+1$ را درنظر می‌گیریم. اگر به جای x هر عدد دلخواهی را قرار دهیم، در اتحاد صدق می‌کند؛ به‌طور مثال اگر به جای x عدد ۲ یا ۵ را قرار دهیم:

$x=2:(2+1)^2=2^2+2\times2+1^2$

$3^2=4+4+1$ ، $9=9$

$x=5:(5+1)^2=5^2+2\times5+1^2$

$6^2=25+10+1$

$36=36$

با توجه به مطالب اخیر، درمی‌یابیم که معادله فقط به ازای بعضی از مقادیری که جایگزین مجهول می‌شود، به یک برابری درست تبدیل می‌شود؛ اما در اتحادها هر مقداری را که جایگزین متغیرهایش کنیم، به یک برابری درست تبدیل می‌شود.

تذکر بسیار مهم: عبارتهایی مانند: $a^2-2ab+b^2$ یا a^2-b^2 یا $(a+b)^2$ اتحاد نیستند؛ بلکه عبارتهای جبری هستند.

برابریهای جبری به صورتهای زیر را یک اتحاد گوییم:

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

$x(x+1)=x^2+x$

در زیر، چند مسأله برای تکمیل شدن بحث می‌آوریم.

مسألهٔ ۱. به جای نقطه‌چین جمله‌هایی قرار دهید تا برابریهای زیر برقرار باشند:

۱) $(\ldots+3b^2)^2=4a^2+\ldots+9b^4$

۲) $(x^2-2y)(x^4+\ldots+4y^2)=\ldots-8y^3$

۳) $(\ldots-\ldots)^2=36x^2y^2-12xy+\ldots$

حل: ۱) چون در پرانتز $(\ldots+3b^2)^2$ دو جمله قرار می‌گیرد و توان پرانتز عدد ۲ است، بنابراین به کمک اتحاد اوّل می‌توان در جاهای خالی عبارت مناسب قرار داد:

$(\ldots+3b^2)^2=4a^2+\ldots+9b^4$

$(2a+3b^2)^2=(2a)^2+2(2a)(3b^2)+9b^4$

$(2a+3b^2)^2=4a^2+12ab^2+9b^4$

۲) به کمک اتحاد تفاضل مکعبات:

$(x^2-2y)((x^2)^2+\ldots+(2y)^2)=\ldots-(2y)^3$

$(x^2-2y)((x^2)^2+(x^2)(2y)+(2y)^2)=(x^2)^3-(2y)^3$

$(x^2-2y)(x^4+2x^2y+4y^2)=x^6-8y^3$

۳) چون در پرانتز $(\ldots-\ldots)^2$ دو جمله قرار می‌گیرد و توان

پرانتز عدد ۲ است، بنابراین به کمک اتحاد اوّل می‌توان در جاهای خالی عبارت مناسب قرار داد :

$$(6xy - \dots)^2 = (6xy)^2 - 12xy + \dots$$

می‌دانیم که جملهٔ دوم عبارت سمت راست برابری، بنابر اتحاد اوّل به صورت زیر است :

$$2\times(\text{اوّلی})(\text{دومی}) = 12xy$$

$$2\times(6xy)\times(\text{دومی}) = 12xy \Rightarrow \text{دومی} = 1$$

در نتیجه :

$$(6xy-1)^2 = (6xy)^2 - 12xy + 1^2$$

مسألهٔ ۲. اگر $x+y=\sqrt{5}$ و $xy=1$ حاصل عبارت x^2+y^2 و x^3+y^3 را بیابید.

حل: با توجه به نتایج اتحادها خواهیم داشت :

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$$

$$x^2+y^2=(\sqrt{5})^2-2(1)=5-2=3$$

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$$

$$x^3+y^3=(\sqrt{5})^3-3(1)(\sqrt{5})$$

$$=5\sqrt{5}-3\sqrt{5}=2\sqrt{5}$$

مسألهٔ ۳. اگر $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac$ ، آن‌گاه حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$P=\frac{\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{b^2c}+\sqrt[3]{c^2a}}{\sqrt[3]{abc}}$$

حل: ابتدا دو طرف فرض را در عدد ۲ ضرب می‌کنیم، سپس از اتحاد اوّل استفاده می‌کنیم :

$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc=0$$

$$a^2+a^2+b^2+b^2+c^2+c^2-2ab-2ac-2bc=0$$

$$(a^2+b^2-2ab)+(a^2+c^2-2ac)+(b^2+c^2-2bc)=0$$

$$(a-b)^2+(a-b)^2+(b-c)^2=0$$

حاصل جمع چند مقدار نامنفی، وقتی برابر با صفر است که داشته باشیم :

$$\left.\begin{array}{l}(a-b)^2=0\Rightarrow a-b=0\Rightarrow a=b\\(a-c)^2=0\Rightarrow a-c=0\Rightarrow a=c\\(b-c)^2=0\Rightarrow b-c=0\Rightarrow b=c\end{array}\right\}\Rightarrow a=b=c \quad (1)$$

حال برای به دست آوردن حاصل عبارت، با توجه به نتیجهٔ (۱) خواهیم داشت :

$$P=\frac{\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{b^2c}+\sqrt[3]{c^2a}}{\sqrt[3]{abc}}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{a^2a}+\sqrt[3]{a^2a}+\sqrt[3]{a^2a}}{\sqrt[3]{a.a.a}}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{a^3}+\sqrt[3]{a^3}+\sqrt[3]{a^3}}{\sqrt[3]{a^3}}=\frac{3a}{a}=3 \quad (a\neq 0)$$

مسألهٔ ۴. هرگاه $a^2+b^2=4ab$ ، حاصل عبارت $(\frac{a-b}{a+b})^4$ را محاسبه کنید.

حل: اگر به دوطرف برابری $a^2+b^2=4ab$ ، عبارت $2ab$ را اضافه کنیم ؛ خواهیم داشت :

$$a^2+b^2+2ab=2ab+4ab$$

$$(a+b)^2=6ab \qquad (\text{با توجه به اتحاد اوّل})$$

دوطرف رابطهٔ بالا را به توان ۲ می‌رسانیم :

$$(a+b)^4=(6ab)^2 \quad (1)$$

اگر به دوطرف برابری $a^2+b^2=4ab$ عبارت $-2ab$ را اضافه کنیم :

$$a^2+b^2-2ab=-2ab+4ab$$

$$(a-b)^2=2ab$$

دوطرف رابطهٔ بالا را به توان ۲ می‌رسانیم :

$$(a-b)^4=(2ab)^2 \quad (2)$$

با جایگزین کردن (۱) و (۲) در عبارت زیر خواهیم داشت :

$$(\frac{a-b}{a+b})^4=\frac{(a-b)^4}{(a+b)^4}$$

$$=\frac{(2ab)^2}{(6ab)^2}=(\frac{2ab}{6ab})^2=\frac{1}{9} \quad (ab\neq 0)$$

مسأله ۵. اگر $x+\frac{1}{x}=-1$ ، عبارتهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $x^2+\frac{1}{x^2}$ ب) $x^3+\frac{1}{x^3}$

حل:

الف) $x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2$

$$x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}=(-۱)^{۲}-۲=-۱$$

ب)
$$x^{۳}+\frac{۱}{x^{۳}}=(x+\frac{۱}{x})^{۳}-۳(x+\frac{۱}{x})$$

$$x^{۳}+\frac{۱}{x^{۳}}=(-۱)^{۳}-۳(-۱)=۲$$

مسألهٔ ۶. اگر $c^{۲}-d^{۲}=۳۰$ و $c-d=-۵$ ، عبارت $(c+d)-۱۱$ را محاسبه کنید.

حل: به کمک اتحاد مزدوج :

$$c^{۲}-d^{۲}=(c+d)(c-d)=۳۰$$

$$(c+d)\times(-۵)=۳۰\Rightarrow c+d=-۶$$

پس :
$$(c+d)-۱۱=-۶-۱۱=-۱۷$$

مسألهٔ ۷. اگر $a+b+c=۰$ ، ثابت کنید :

$$a^{۳}+b^{۳}+c^{۳}=۳abc$$

حل:
$$a+b+c=۰\Rightarrow a+b=-c \qquad (۱)$$

دوطرف رابطهٔ (۱) را به توان ۳ می‌رسانیم :

$$(a+b)^{۳}=(-c)^{۳}$$

$$a^{۳}+b^{۳}+۳a^{۲}b+۳ab^{۲}=-c^{۳}$$

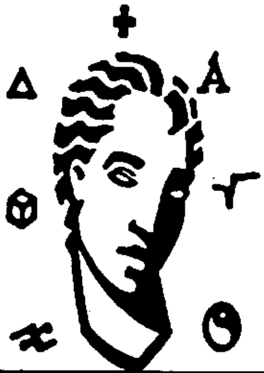
$$a^{۳}+b^{۳}+c^{۳}=-۳a^{۲}b-۳ab^{۲}$$

$$a^{۳}+b^{۳}+c^{۳}=-۳ab\underbrace{(a+b)}_{-c}=۳abc$$

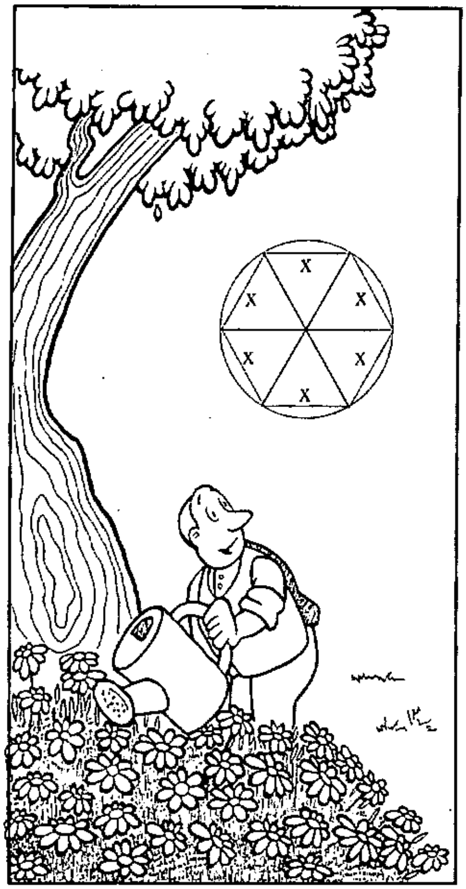
یادداشتها :

۱ـ اگر روی اعداد و متغیرها، چهار عمل اصلی و عمل جذرگیری و توان را اعمال کنیم، یک عبارت جبری به‌دست می‌آید.

۲ـ $a^{۳}$ را مکعب عدد حقیقی $a\neq ۰$ می‌گوییم.



تفریح اندیشه ۲



باغبانی باغچهٔ دایره شکلی با چمن شش‌ضلعی منتظم محاط درآن دارد. چمن موردبحث از $\sqrt{۱۰۸}$ متر مربع سبزه تشکیل شده است. قطر باغچه چه‌قدر است؟

جواب در صفحهٔ ۸۸

نقد و تحلیل و بررسی کتاب

دفاعیهٔ یک ریاضیدان

اثر: گاودفری هَرولد هاردی

ترجمه: سیامک کاظمی

● غلامرضا یاسی پور

کتاب **دفاعیهٔ یک ریاضیدان** یکی از کتابهای خوبی است که در سالهای اخیر (۱۳۷۳) توسط شرکت سهامی انتشارات و آموزش انقلاب اسلامی به چاپ رسیده است. تیراژ کتاب ۵۰۰۰ نسخه، قطع آن رقعی، و تعداد صفحات آن ۱۱۲ صفحه است.

فهرست مطالب کتاب چنین است :

توضیح ناشر

دیباچه، به قلم چارلز پرسی اسنو

پیشگفتار نویسنده

متن کتاب ۲۹ بخش

یادداشت:

و به این ترتیب، ملاحظه می‌شود که با این که کتاب یادداشت ناشر دارد، و این بسیار خوب است، یادداشت مترجم ندارد، و این ظاهراً یکی از نقایص هر کتاب ترجمه شده به شمار می‌رود.

اصولاً مقدمهٔ کتاب، برای درد دل کردن است و در مقدمه، نویسنده یا مترجم به گفت‌و‌گویی صمیمانه با خواننده می‌نشیند و سفرهٔ دلش را پیش او باز می‌کند. خواننده با کتابی که نویسنده یا مترجم آن، مقدمه‌ای هم بر آن نوشته باشد، بهتر رابطه برقرار می‌کند و هنگام مطالعهٔ آن در فضای راحت‌تری حرکت می‌کند.

از این مرحله که بگذریم به توضیح ناشر کتاب می‌رسیم که در آن، بر این اعتقاد کتاب را به دست نشر سپرده است که علوم ریاضی را دریچه‌ای برای ورود به دنیای امروز و نگریستن به آن می‌داند، و می‌نویسد : در واقع ریاضیات، با سه هدف مطرح می‌شود. اوّل به عنوان یکی از مبانی تمدن بشر، دیگر به‌عنوان یکی از ابزارهای تربیت فکر، و بالاخره به خاطر اهمیت آن در کاربردهای آن.

از این مرحله هم می‌گذریم و می‌رسیم به دیباچهٔ کتاب که به قلم چارلز پرسی اسنو[1]، فیزیکدان و نویسنده‌ای مشهور است. اسنو دربارهٔ هاردی چنین می‌نویسد :

«در سالن غذاخوری کالج کریست[2] دور میز شام استادان نشسته بودیم. شبی کاملاً عادی بود ؛ اما با شبهای دیگر یک فرق داشت :

هاردی[3] مهمان جمع ما بود. حرفهای زیادی دربارهٔ او از ریاضیدانان جوانِ کمبریج شنیده بودم. آنها از بازگشت او خوشحال بودند. می گفتند یک ریاضیدان *واقعی* است. او از قماش دیراک[4] و بور[5]، که فیزیکدانها خیلی دربارهٔ آنها صحبت می کردند، نبود؛ بلکه محض‌ترین محض‌گرایان بود. وی شخصی بود نامتعارف، استثنایی، رادیکال و آماده برای صحبت کردن دربارهٔ هر موضوعی. سال ۱۹۳۱ بود.»

و به این ترتیب، مقدمهٔ اسنو بی‌مقدمه به سراغ ویژگی اصلی ریاضیدان مورد بحث خود می‌رود و او را به عنوان یک ریاضیدان محض‌گرا، که تنها به ریاضیات محض می‌پردازد، معرفی می کند، و به عبارت دیگر از صفت معنوی «بَراعتِ استهلال» استفاده می کند.

اسنو، دربارهٔ هاردی می نویسد:

«تعیین دقیق مرتبهٔ هاردی به عهدهٔ مورخان ریاضی است؛ اما از جنبهٔ دیگری هاردی به وضوح برتر از اینشتین یا رادرفورد یا هر نابغهٔ بزرگ دیگر است، و آن این است که وی هر کار فکری را، خواه مهم باشد یا غیرمهم و یا سرگرمی محض، به یک کار هنری تبدیل می کرد.»

اسنو می گوید: «برخلاف اینشتین، بیشتر دوران کودکی هاردی، همانند دوران کودکی کسی بود که در آینده ریاضیدان می‌شود. وی دَر سن دو سالگی می توانست هر عددی را تا چندین میلیون بنویسد.»

هاردی در بزرگسالی با دوتن همکاری داشت. اوّلی «لیتل وود» بود که همکاری‌اش با او سی و پنج سال طول کشید و دومی «راما نوجان» ریاضیدان هندی بود، که خود هاردی استعداد ریاضی او را کشف کرده بود.

او به آسانی با افراد فقیر، تیره بخت، کمرو و کسانی که به خاطر نژادشان مورد تبعیض بودند دَمخور می‌شد. هاردی این قبیل افراد را به شکم گنده‌*ها* ترجیح می‌داد.

اسنو دربارهٔ مرگ هاردی می‌نویسد:

«هاردی دو سه هفته قبل از مرگ، وقتی شنید که قرار است انجمن سلطنتی انگلستان، عالیترین نشان افتخار خود را به او اعطا کند، لبخندی شیطنت‌آمیز بر لبانش نقش بست و گفت: حالا می‌دانم که پایان کارم نزدیک است، وقتی مردم برای اعطای افتخارات عجله می کنند، باید استنباط کرد که فرجام کار رسیده است.»

مقدمهٔ اسنو به کتاب کوچک **دفاعیهٔ یک ریاضیدان** نسبتاً مفصل است، گویی به این خاطر، به تفصیل نوشته شده است که جبران کوتاهی کتاب اصلی را بنماید. باری، خوانندهٔ مقدمهٔ کتاب، با خواندن آن، کم و بیش با هاردی و روحیاتش آشنایی پیدا می کند و آمادهٔ ورود به متن اصلی می‌شود.

هاردی در پیشگفتار نویسنده، از پیشنهادهای دو تن از کسانی که دست نوشتهٔ کتابش را خوانده و انتقادهای ارزشمند بسیاری را عنوان کرده‌اند، تشکر می کند و پس از آن که می گوید بسیاری از ابهامها و ناپختگیهای متن را با استفاده از آن پیشنهادها زدوده است، دست خواننده را می گیرد و به کتابش می‌برد.

اما، این کتابِ هاردی، که نامش، همان طور که اشاره کردیم، **دفاعیهٔ یک ریاضیدان** است، همان گونه که پیش از این هم متذکر شدیم ۲۹ بخش دارد، که بعضی از آنها در حد یک بندند و برخی در حدود سه چهار صفحه. طولانی‌ترین بخش کتاب، بخش آخر آن است، که در انتهای آن از قول هاردی چنین آمده است:

«واقعیت زندگی من و زندگی هر ریاضیدان دیگر این است که: من چیزی به دانش افزوده‌ام، و به دیگران هم کمک کرده‌ام که چیزی به آن بیفزایند، و این چیزها، ارزشی دارند که تفاوتش با ارزش ابداعات ریاضیدانان بزرگ و هنرمندان کوچک و بزرگ دیگری که یادگاری از خود به جا گذاشته‌اند، فقط از لحاظ درجه است، نه از لحاظ نوع.»

هاردی، همان‌طور که مشخص است، در این فراز، اشاره به معلم بودن خود می کند و آن را در شمار یکی از دو کار مهم دوران حیات خود می‌آورد. کار مهمّ اوّل هاردی ابداعات او در ریاضیات است. در این مرحله می‌پردازیم به نقد و تحلیل و بررسی خود کتاب: آیا آن گونه که هاردی در دفاعیهٔ یک ریاضیدان می گوید: برای ریاضیدان حرفه‌ای صحبت دربارهٔ ریاضیات ملال‌آور است؟

وی معتقد است که کار ریاضیدان، اثبات قضایای جدید است، نه سخن گفتن دربارهٔ آنچه ریاضیدانها کرده‌اند.

* هاردی می گوید: «نقد و تفسیر کار ذهنهای درجه دوم است، و نقاشان را در خوار داشتنِ منتقدان هنری، محقّ می‌داند.»

آن گاه می‌پرسد: پس چرا خودَ به چنین کاری پرداخته‌ام؟ و پاسخ می‌دهد: به این علت که از مرز شصت سالگی گذشته‌ام و دیگر آن که، طراوت و انرژی و شکیبایی لازم برای انجام دادن کار اصلی خود یعنی، پرداختن به خود ریاضیات را ندارم.

عطار نیشابوری در «منطق الطیر» خود همین کار را انجام

داده و می‌گوید : «من عارف نیستم ؛ اما دربارهٔ عارفان سخن می‌گویم» ؛ وی این کار را حقیر نمی‌داند و از آن احساس خوشدلی می‌کند و می‌فرماید :

گر نیم زیشان از ایشان گفته‌ام

خوشدلم کاین نکته از جان گفته‌ام

گفتهٔ بی محبت هاردی را با این سخن «آندره ژید» تعدیل کنیم که می‌گوید : «بر هر نویسندهٔ درجه اوّلی واجب است که یکی از آثار مهم ادبی جهان را به زبان مادری خود ترجمه کند.»

بسیاری از رشته‌های ریاضیات، کاربردهایی عملی پیدا کرده‌اند ؛ اما بعضی از قسمتهای این علم، در عمل به کار نمی‌روند و به‌عبارت دیگر، در مقابل **ریاضیات محض**، ریاضیاتی عملی یا **کاربردی** داریم.

* بعضی از اندیشمندان، سودمندی ریاضیات را در عملی بودن آن می‌دانند و برخی برعکس، از بی‌فایدگی آن، اظهار رضایت می‌کنند و مفتخر از این‌اند که کارشان بدون فایدهٔ عملی است.

* هاردی، در دفاعیهٔ یک ریاضیدان، بر این است که هیچ ریاضیدانی آن قدر نادان نیست که از کاربرد علمش برای مثال در زیست‌شناسی یا شیمی، ناراضی باشد و آن را تقبیح کند. در این صورت، در دفاع از این خشنودی، چنین اظهار سخن می‌کند که : «علم گاهی به برآورده شدن نیّتهای شیطانی نیز کمک می‌رساند و اظهار رضایت بعضی ریاضیدانان از غیرعملی بودن کارشان به این علت است که علمی وجود دارد که دور از اعمال عادی بشر، همچنان پاک و منزه باقی مانده است.»

بعضی از ریاضیدانها کاملاً مشهورند ؛ اما آیا شهرت ریاضیدانها پایدار است، یا دست کم به اندازهٔ شهرت دانشمندان دیگر می‌پاید؟

* هاردی، در دفاعیهٔ یک ریاضیدان، پس از این که ریاضیات شرقی را مبحثی جالب و شگفتی‌انگیز می‌خواند، می‌گوید : «ریاضیات یونانی، حتی از ادبیات یونانی ماندگارتر است، ممکن است **آشیل** فراموش شود، اما **ارشمیدس** همچنان به یاد ماندنی است، و واژهٔ فناناپذیر هر معنایی داشته باشد، ریاضیدان بیشترین بخت برخورداری از آن را داراست.»

* هاردی در ادامهٔ بحث می‌افزاید : «تقریباً تمام افرادی که نامشان در تاریخ ریاضیات آمده، شایستگی آن را داشته‌اند و سرمایه‌گذاری در شهرت ریاضی، در صورتی که کسی توان آن را داشته باشد، یکی از سودمندترین سرمایه‌گذاریهاست.»

به این ترتیب، برای پرسشی که مطرح کردیم به این پاسخ می‌رسیم که شهرت ریاضیدان نه تنها میرا نیست که به پایندگی شهرت مشاهیر دیگر است، و ایدهٔ ریاضی نه تنها از بین نمی‌رود که دست کم به اندازهٔ ایده‌های دیگر می‌زید.

در چه دورانی از عمر می‌توان ریاضی ورزید، و به عبارت دیگر تا چه سنّ و سالی می‌شود به تحقیقات ریاضی پرداخت؟

به نظر می‌رسد این دوران، بیشتر ایام جوانی ریاضیدانها را دربرمی‌گیرد. در این باره هاردی می‌نویسد : «اوج خلاقیت نیوتن، تا چهل سالگی بود، وی در ایام سالخوردگی مدیر ضرابخانه بود، مرگ گالوا در ۲۱ سالگی اتفاق افتاد، و آبل در ۲۷ سالگی مرد، و ریمان در ۴۰ سالگی.»

گاوس، مقالهٔ مهم خود در هندسهٔ دیفرانسیل را در ۵۰ سالگی انتشار داد، اما ایدهٔ آن را در ۴۰ سالگی مطرح کرده بود.

هاردی پس از این اشارات، می‌گوید : «هیچ دست‌آورد ریاضی مهمی را نمی‌شناسد که ایدهٔ آن پس از ۵۰ سالگی به خاطر ریاضیدانی خطور کرده باشد.» آن گاه می‌افزاید : «اگر کسی در سنین پیری، علاقهٔ خود را به ریاضیات از کف بدهد، زیان قابل توجهی به ریاضیات نخواهد رسید.»

قضایای ریاضی، معمولاً عمومی‌اند، یعنی، از کلیت و تعمیم برخوردارند. در این صورت، این سؤال مطرح می‌شود که این تعمیم و کلیت تا چه حد باید باشد و بر آن تا چه مقدار باید تأکید کرد؟

هاردی، در دفاعیهٔ یک ریاضیدان، بر این است که بر این کلیت، نباید تأکید بیش از اندازه داشت، و در این باره می‌گوید :

«دستاورد مهم ریاضیات جدید، توجه بیش از اندازه به تعمیم و تعمیمهای پی در پی نیست. البته، هر قضیهٔ ریاضی تراز اوّلی باید تا حدودی کلی باشد ؛ اما کلیت و تعمیم بیش از اندازه هم خوشایند نیست. ما دوستان خود را به این علت انتخاب نمی‌کنیم که تمام ویژگیهای یک انسان برتر را دارند، بلکه علت انتخابشان تشخص و فردیتشان است، قضایای ریاضی نیز چنین‌اند.»

هاردی در این جا قول «وایتهد» را می‌آورد که : تعمیم سودمند، تعمیمی است که در عین حال، با تخصیصی مناسب همراه باشد.

چه اتفاقی در زندگی کودک یا نوجوانی رخ می‌دهد که به ریاضیات علاقه‌مند و سرانجام، ریاضیدان می‌شود؟ انگیزهٔ تحقیق ریاضی چگونه در نوجوان یا جوانی که ریاضیدان آینده است، ایجاد می‌شود؟

هاردی در این باره، در دفاعیهٔ یک ریاضیدان، می‌گوید :

«به خاطر ندارم که خواسته باشم، کاری جز ریاضیات انجام دهم. همیشه می‌دانستم استعدادهایم در این رشته از علم قرار دارد و در این مورد، هیچ گاه نظرِ بزرگترهایم را هم نپرسیده‌ام.

دور از صداقت است که بگویم از همان دوران کودکی به ریاضیات علاقه داشته‌ام. برای من ریاضیات در امتحانها و بورسهای تحصیلی متجلّی بود. دلم می‌خواست جلوتر از بقیه باشم و به نظرم می‌رسید از طریقِ ریاضیات سریعتر به این مقصود می‌رسم.»

مسلم است که هاردی در سنین پایین با چنین انگیزه‌ای به ریاضیات روی آورده است و چه بسا که بعدها نظرش در این باره عوض شده باشد.

آیا ریاضیدان همان گونه است که اغلب مردم کوچه و بازار می‌پندارند یا به نوعی با این برداشت عامیانه، متفاوت است؟

از همه مهمتر، این برداشت با برداشتِ خود ریاضیدان از خودش تا چه اندازه متفاوت است؟ و وظیفهٔ معلمان و استادان در این باره چیست؟

هاردیْ بر این است که : یکی از اولّین وظایف استاد، در هر رشته، بخصوص ریاضیات، این است که اهمیت آن رشته، نیز محققان آن رشته را بنمایاند.

آن که هنوز برایش مشخص نشده که کاری که انجام می‌دهد به زحمتش می‌ارزد یا نه و هنوز به این سؤال جواب نداده که خودش شخص مناسبی برای این کار هست یا خیر هم خودش پیشرفت نمی‌کند، هم موجب دلسردی دیگران می‌شود.

به عبارت دیگر، هاردی به ریاضیدان می‌آموزد که به خود و رشته‌اش ایمان و اعتقاد داشته باشد ؛ اما این را هم می‌افزاید که این اعتقاد، نباید چندان باشد که به تعصب بینجامد.

اهمیت ریاضی در چیست؟ آیا در زیبایی آن است؟ پس این سؤال مطرح می‌شود که زیبایی ریاضی در چیست؟

هاردی در این باره، از **مسألهٔ شطرنج**، مثال می‌آورد و می گوید : «مسألهٔ شطرنج یکی از مسائل ریاضیات اصیل است. اما ریاضیاتی نازل، چه این مسأله، این کمبودِ اساسی را دارد که **بی‌اهمیت** است، یعنی، برخلافِ مسائل عالیِ ریاضیات، **جدی** نیست.»

اما جدی بودن یک مسألهٔ ریاضی در کاربردی بودن آن نیست، بلکه در **پرمضمون** بودن آن است. در پیامدهایش هم نیست، چه پیامدهای یک قضیه تنها *گواه* جدی بودن آن قضیه‌اند.

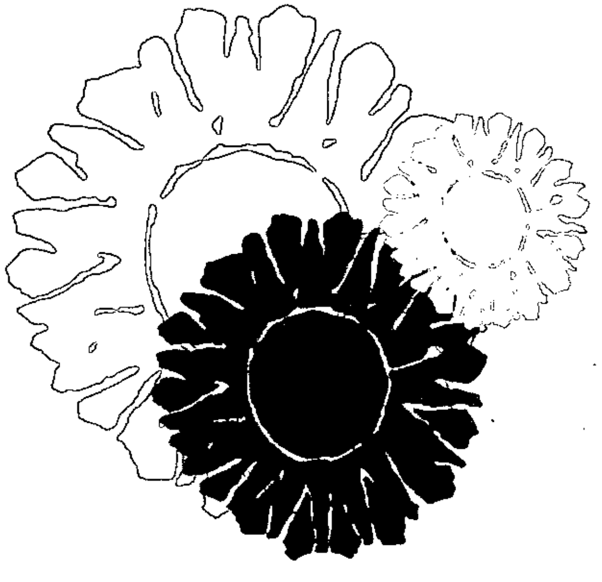
پس اهمیت ریاضی، به قول هاردی، در جدی بودن آن است که در محتوای قضایای آن سرچشمه می‌گیرد و به کاربرد و پیامدهای آن مرتبط نمی‌شود. وی در این مورد، دو قضیهٔ قدیمی اثبات بی‌نهایت بودن اعداد اول و گنگ بودنِ $\sqrt{2}$ را مثال می‌آورد.

همان‌طور که ملاحظه می‌شود هاردی در کتاب **دفاعیهٔ یک ریاضیدان** صمیمانه با خوانندهٔ خود به درد دل پرداخته و دربارهٔ ریاضیات هر چه در دل داشته بیرون انداخته است، و از خود به جای **تصویر** یک ریاضیدان، که معمولاً موجودی تخیّلی و موهومی است، **تصور** یک انسان متعارف را در ذهن خواننده ایجاد کرده است.

همان‌طور که قبلاً هم اشاره کردیم کتاب **دفاعیهٔ یک ریاضیدان** یکی از نوشته‌های مهم ریاضیدانهای معاصر است. خوب نوشته شده و خوب به زبان فارسی درآمده است. مترجم کتاب از مترجمان خوب ریاضیات است و از عهدهٔ ترجمهٔ این کتاب نیز بخوبی برآمده است. نویسندهٔ مقاله، خواندن کتاب را برای هر دانش‌آموز و هر معلم علم ریاضی لازم می‌داند و اکیداً توصیه می کند.

یادداشتها :

۱. C.P.Snow
۲. Christ
۳. Hardy
۴. Dirac
۵. Bohr

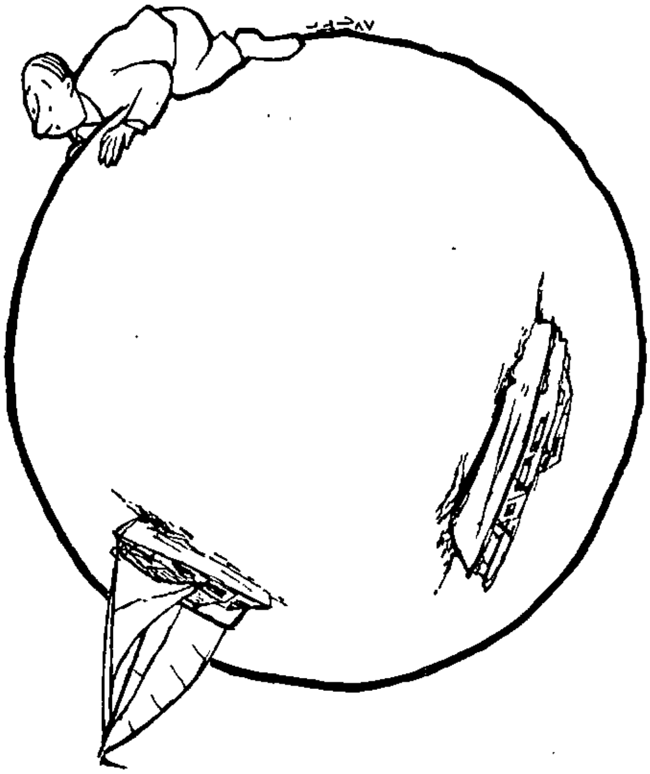


مکان هندسی

(قسمت بیستم)

معادلهٔ هذلولی

● محمدهاشم رستمی

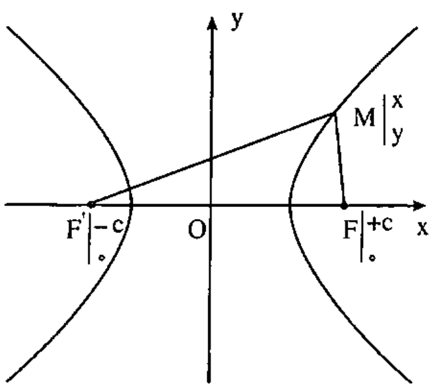


معادلهٔ هذلولی. هذلولی به کانونهای F و F' و عدد ثابت $2a$ را در نظر می‌گیریم. محور طولها را منطبق بر FF' و محور yها را عمود منصف پاره خط FF' اختیار می‌کنیم.

در این صورت $F(c,0)$ و $F'(-c,0)$ خواهد بود. اگر $M(x,y)$ نقطه‌ای دلخواه از این هذلولی باشد، داریم :

$$MF' - MF = \pm 2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a \qquad (1)$$



$$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \sqrt{(x-c)^2+y^2} \pm 2a$$

$$\Rightarrow (x+c)^2+y^2 =$$

$$(x-c)^2+y^2+4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow 4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{cx}{a} - a = \pm\sqrt{(x-c)^2+y^2} \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \frac{c^2x^2}{a^2} + a^2 - 2cx = x^2 + c^2 - 2cx + y^2$$

$$\Rightarrow \frac{(c^2-a^2)x^2}{a^2} - y^2 = c^2 - a^2$$

با فرض $c^2 - a^2 = b^2$ ، داریم :

$$\frac{b^2x^2}{a^2} - y^2 = b^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3)$$

بعکس، می‌توان ثابت کرد نقطه‌هایی از صفحه، که مختصات آنها

در معادلهٔ (۳) صدق کند، روی هذلولی به کانونهای F و F′ و عدد ثابت ۲a قرار دارند ؛ یعنی از رابطهٔ (۳) می‌توان به رابطهٔ (۱) رسید. معادلهٔ (۳) رامعادلهٔ کانونیک هذلولی می‌نامند.

نکته . در هذلولی $c^۲ = b^۲ + a^۲$ است.

شعاع حاملهای نقطهٔ M. رابطهٔ (۲) یک شعاع حامل نقطهٔ M است ؛ یعنی $MF = \left|\frac{cx}{a} - a\right|$. به روش مشابه از رابطهٔ (۱) شعاع حامل دیگر نقطهٔ M، یعنی MF′ برابر است با $MF' = \left|\frac{cx}{a} + a\right|$.

تبصره. اگر از معادلهٔ $\frac{x^۲}{a^۲} - \frac{y^۲}{b^۲} = ۱$ ، y را بر حسب x به دست آوریم، داریم :

$$y^۲ = \frac{\pm b}{a}\sqrt{x^۲ - a^۲}$$

دامنهٔ این تابع $x^۲ > a^۲$ یا $x > +a$ و $x < -a$ است و این خود نشان می‌دهد که اولاً هذلولی، شاخهٔ بی‌نهایت دور دارد و ثانیاً از دو شاخهٔ متمایز تشکیل می‌شود.

محورهای تقارن و مرکز تقارن هذلولی. هذلولی به معادلهٔ $\frac{x^۲}{a^۲} - \frac{y^۲}{b^۲} = ۱$ را در نظر می‌گیریم :

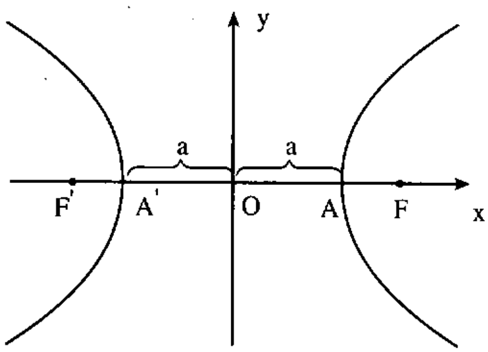
۱. با تبدیل y به −y ، معادلهٔ هذلولی تغییر نمی‌کند ؛ بنابراین محور xها و در حقیقت FF′ محور تقارن هذلولی است، که آن را محور تقارن کانونی یا به طور خلاصه، محور کانونی هذلولی می‌نامند.

۲. با تبدیل x به −x ، معادلهٔ هذلولی تغییر نمی‌کند ؛ پس محور yها یعنی عمود منصف پاره‌خط FF′ محور تقارن هذلولی است که آن را محور تقارن ناکانونی یا به طور خلاصه، محور ناکانونی هذلولی می‌نامند.

۳. با تبدیل x به −x و y به −y ، معادله تغییر نمی‌کند ؛ بنابراین مبدأ مختصات مرکز تقارن هذلولی است که به طور خلاصه آن را مرکز هذلولی می‌نامند.

رأسهای هذلولی. ۱. نقطهٔ برخورد هذلولی به معادلهٔ $\frac{x^۲}{a^۲} - \frac{y^۲}{b^۲} = ۱$ با محور xها، یعنی محور کانونی آن را به دست می‌آوریم، داریم :

$$y = ۰ \Rightarrow x^۲ = a^۲ \Rightarrow x = \pm a \Rightarrow A\left|\begin{matrix} +a \\ ۰ \end{matrix}\right. ,\ A'\left|\begin{matrix} -a \\ ۰ \end{matrix}\right.$$



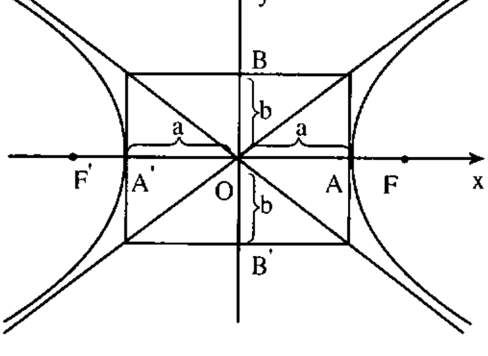
بنابراین، محور کانونی هذلولی، آن را در دو نقطهٔ A و A′ قطع می‌کند ؛ به قسمی که $AA' = ۲a$ است. دو نقطهٔ A و A′ را رأسهای حقیقی هذلولی و پاره‌خط AA′ را قطر قاطع هذلولی می‌نامند.

۲. هذلولی به معادلهٔ $\frac{x^۲}{a^۲} - \frac{y^۲}{b^۲} = ۱$ محور yها ، یعنی محور ناکانونی آن را قطع نمی‌کند ؛ زیرا :

$$x = ۰ \Rightarrow -\frac{y^۲}{b^۲} = ۱ \Rightarrow y^۲ = -b^۲ < ۰$$

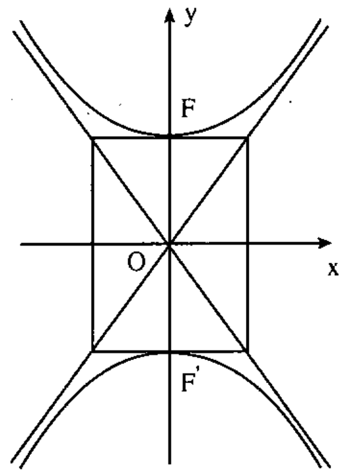
به همین دلیل، محور ناکانونی هذلولی را محور غیر قاطع هذلولی می‌نامند. اما به دلیل اهمیت پارامتر b در هذلولی، دو نقطهٔ B و B′ را در دو طرف مرکز روی محور ناکانونی اختیار می‌کنند و این دو نقطه را رأسهای غیرحقیقی و پاره‌خط BB′ را قطر غیرقاطع یا قطر غیرحقیقی هذلولی می‌نامند.

مجانبهای هذلولی. هر هذلولی، دو مجانب دارد که از مرکز آن می‌گذرند. این مجانبها قطرهای مستطیلی هستند که مرکزش منطبق بر مرکز هذلولی است و ضلعهایش برابر ۲a و ۲b و موازی محورهای تقارن هذلولی است. ثابت می‌شود که مجانبهای هذلولی به معادلهٔ $\frac{x^۲}{a^۲} - \frac{y^۲}{b^۲} = ۱$ به معادلهٔ $y = +\frac{b}{a}x$ و $y = \frac{-b}{a}x$ می‌باشند.



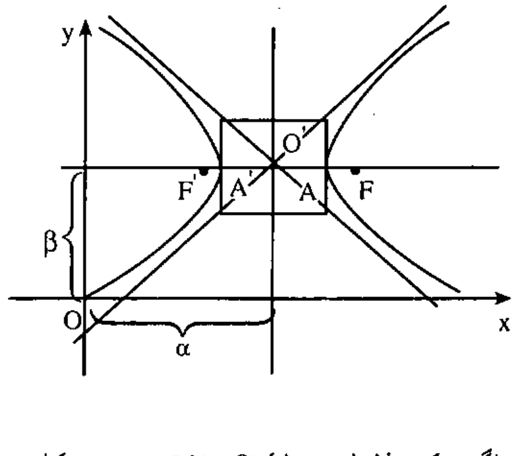
صورتهای دیگر معادلهٔ هذلولی

۱. اگر محور کانونی هذلولی منطبق بر محور yها و محور ناکانونی آن منطبق بر محور طولها باشد، معادلهٔ هذلولی به صورت $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ است.



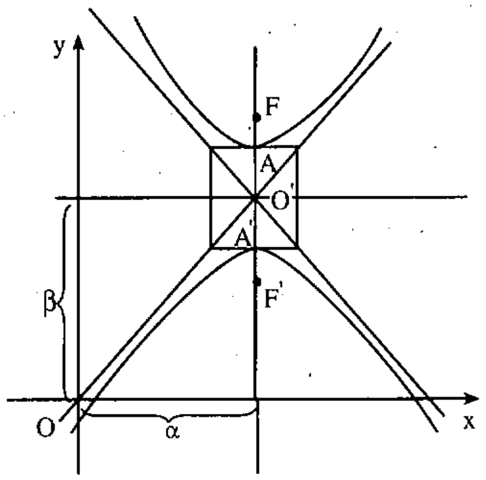
۲. اگر مرکز هذلولی نقطهٔ $O'(\alpha,\beta)$ و محور کانونی آن موازی محور طولها باشد، معادلهٔ هذلولی به صورت زیر است:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$$



۳. اگر مرکز هذلولی نقطهٔ $O'(\alpha,\beta)$ و محور کانونی آن، موازی محور عرضها باشد، معادلهٔ آن به صورت زیر است:

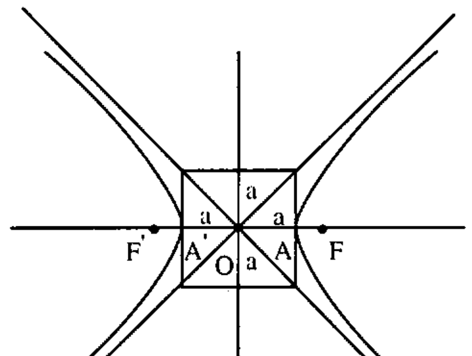
$$\frac{(y-\beta)^2}{a^2}-\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}=1$$



۴. اگر محورهای هذلولی غیرموازی با محورهای مختصات باشند، معادلهٔ آن به صورت کلی:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey=0$$

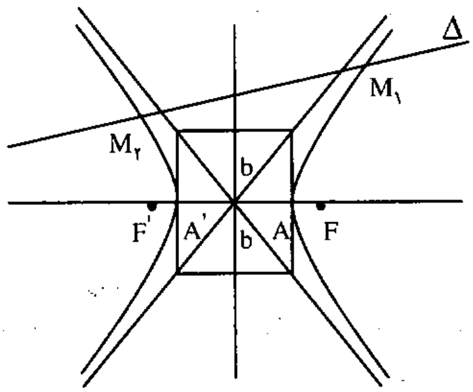
است که در آن $A.C<0$ است. این معادله را با انتقال مبدأ مختصات به مرکز تقارن هذلولی و دوران محورهای مختصات می‌توان به صورت کانونیک $AX^2+BY^2+CX+DY+E=0$ تبدیل نمود.



هذلولی متساوی‌الساقین. اگر در هذلولی، $a=b$ باشد، هذلولی متساوی‌الساقین یا متساوی‌المحورین یا متساوی‌القطرین نامیده می‌شود. در این هذلولی، $c^2=2a^2$ یا $c=a\sqrt{2}$ و معادلهٔ آن، در حالتی که محور کانونی منطبق بر محور xها و محور yها، عمودمنصف FF' است، به صورت $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$ و یا $x^2-y^2=a^2$ و یا $x^2-y^2=\frac{c^2}{2}$ است.

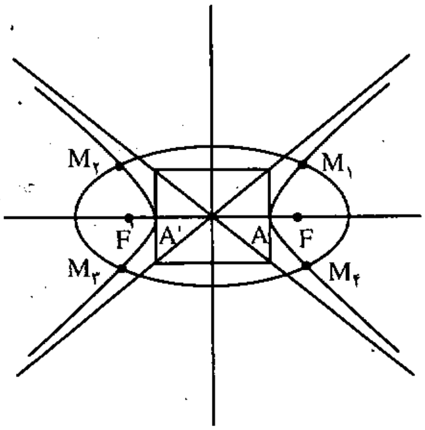
مثال ۱. خط Δ و دو نقطهٔ F و F' در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای روی خط Δ تعیین کنید که تفاضل فاصله‌اش از دو نقطهٔ F و F'، برابر ۸ باشد.

حل. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که تفاضل فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت F و F'، برابر ۸ است، یک هذلولی به کانونهای F و F' و عدد ثابت $2a=8$ است. این هذلولی را رسم می‌کنیم. نقطه یا نقطه‌های برخورد این هذلولی با خط Δ (در صورت وجود) جواب مسأله‌اند.



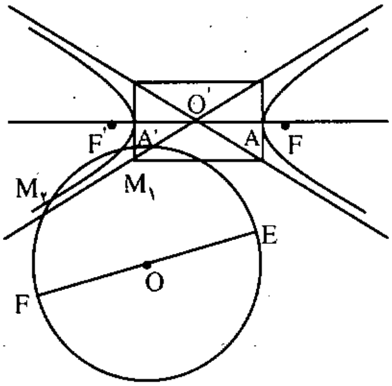
مثال ۲. دو نقطهٔ F و F' در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای از این صفحه را مشخص کنید که مجموع فاصله‌اش از این دو نقطه، برابر ۱۲ و تفاضل فاصله‌اش از این دو نقطه، مساوی ۸ باشد.

حل. نقطه‌های تقاطع بیضی به کانونهای F و F' و عدد ثابت ۱۲، و هذلولی به کانونهای F و F' و عدد ثابت ۸، جوابهای مسأله‌اند و مسأله همواره داری چهار جواب است.



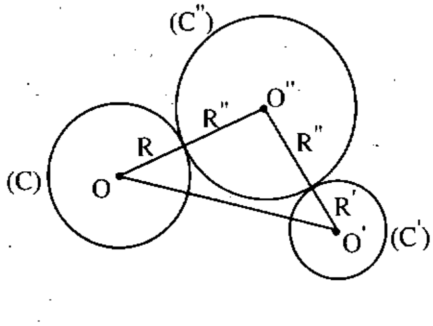
مثال ۳. چهار نقطهٔ A، B، C و D در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای از این صفحه را تعیین کنید که مجموع مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B، برابر K^2 و تفاضل فاصله‌اش از دو نقطهٔ C و D، برابر $2a$ باشد.

حل. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که مجموع مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B، مقدار ثابت K^2 است، دایره‌ای به مرکز نقطهٔ O وسط پاره خط AB و به شعاع $\frac{1}{2}\sqrt{2K^2-AB^2}$ است. این دایره را رسم می‌کنیم. از طرفی، مکان هندسی نقطه‌ای که تفاضل فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت C و D برابر $2a$ است، یک هذلولی به کانونهای C و D و عدد ثابت $2a$ می‌باشد. این مکان هندسی را نیز رسم می‌کنیم. نقطه‌های برخورد این دو مکان هندسی (در صورت وجود) جواب مسأله‌اند.



مثال ۴. مکان هندسی مرکز دایره‌های مماس برون‌بر دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را تعیین کنید.

حل. فرض می‌کنیم دایرهٔ $C''(O'',R'')$ یکی از دایره‌های مماس برون بر دو دایرهٔ داده شده باشد. از O'' به O و O' وصل می‌کنیم. در این صورت داریم:



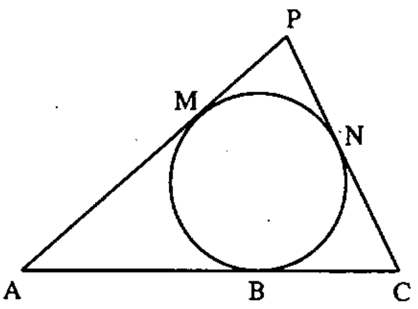
$$O''O = R + R'' \qquad (1)$$

$$O''O' = R' + R'' \qquad (2)$$

$$(1)-(2) \Rightarrow O''O - O''O' = (R+R'') - (R'+R'')$$
$$= R - R' = \text{مقدار ثابت}$$

چون دو نقطهٔ O و ′O ثابت و تفاضل فاصلهٔ نقطهٔ ″O از این دو نقطه، مقدار ثابتی است، بنابراین مکان هندسی نقطهٔ ″O، یعنی مکان هندسی مرکز دایره‌های مماس برون بر دو دایرهٔ (C) و (′C) یک هذلولی به کانونهای O و ′O و عدد ثابتِ $|R-R'|$ است.

مثال ۵. سه نقطهٔ A، B و C پشت سر هم بر خط مستقیمی قرار دارند. دایرهٔ متغیری همواره در B بر این خط مماس است. از A و C مماسهایی بر این دایره رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ P قطع کنند. مکان هندسی نقطهٔ P را بیابید.



حل. نقطه‌های تماس مماسهای رسم شده از A و C بر دایرهٔ متغیر را به ترتیب M و N می‌نامیم. با توجه به برابریهای $PM = PN$، $MA = AB$ و $NC = CB$، داریم:

$$|PA - PB| = |(PM + MA) - (PN + NC)|$$
$$= |MA - NC| = |AB - BC|$$

با توجه به این که AB و BC ثابت می‌باشند، مقدار ثابت = $|PA - PB|$ و در نتیجه مکان هندسی نقطهٔ P، یک هذلولی به کانونهای A و B و عدد ثابت $|AB - BC|$ است.

نکته. اگر نقطهٔ B وسط پاره خط AC باشد، مکان هندسی نقطهٔ P عمودمنصف پاره‌خط AC است.

مثال ۶. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را بیابید که تفاضل فاصله‌اش از دو نقطهٔ $F(3,0)$ و $F'(-3,0)$ برابر ۴ است.

حل. این مکان هندسی، یک هذلولی به کانونهای F و ′F و عدد ثابت ۴ است. برای تعیین معادلهٔ آن، به یکی از دو راه زیر عمل می‌کنیم.

راه اول. فرض می‌کنیم $M(x,y)$ یک نقطه از این هذلولی باشد. در این صورت داریم:

$$MF = \sqrt{(x-3)^2 + y^2}\ ,\ MF' = \sqrt{(x+3)^2 + y^2}$$
$$MF - MF' = \pm 2a$$
$$\Rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + y^2} - \sqrt{(x+3)^2 + y^2} = \pm 4$$
$$\Rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = \sqrt{(x+3)^2 + y^2} \pm 4 \Rightarrow$$
$$(x-3)^2 + y^2 = (x+3)^2 + y^2 + 16 \pm 8\sqrt{(x+3)^2 + y^2}$$
$$-12x - 16 = \pm 8\sqrt{(x+3)^2 + y^2}$$
$$\Rightarrow -\frac{3}{2}x - 2 = \pm\sqrt{(x+3)^2 + y^2}$$
$$\Rightarrow \frac{9}{4}x^2 + 4 + 6x = x^2 + 9 + 6x + y^2$$
$$\Rightarrow \frac{5}{4}x^2 - y^2 = 5 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$$

معادلهٔ هذلولی موردنظر

راه دوم. با توجه به این که ′FF روی محور xها و مرکز بیضی منطبق بر مبدأ مختصات است، معادلهٔ هذلولی به صورت $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ است. بنابراین داریم:

$$2a = 4 \Rightarrow a = 2$$
$$FF' = 2c = |x_F - x_{F'}| = |3 + 3| = 6$$
$$\Rightarrow c = 3\ ,\ b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$$
$$\Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1 \qquad \text{معادلهٔ هذلولی موردنظر}$$

مثال ۷. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را بیابید که تفاضل فاصله‌اش از دو نقطهٔ $F(3,5)$ و $F'(-2,3)$، برابر ۴ است.

حل. این مکان هندسی، یک هذلولی به کانونهای F و ′F و عدد ثابت ۴ است که چون ′FF موازی محورهای مختصات نیست، برای تعیین معادلهٔ آن، بهتر است به روش زیر عمل کنیم:

فرض می‌کنیم $M(x,y)$ یک نقطهٔ اختیاری از این هذلولی باشد. در این صورت داریم:

$$MF = \sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2}\ ,$$
$$MF' = \sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2}$$
$$MF - MF' = \pm 2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-۳)^۲+(y-۵)^۲}-\sqrt{(x+۲)^۲+(y-۳)^۲}=\pm ۴$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-۳)^۲+(y-۵)^۲}=\sqrt{(x+۲)^۲+(y-۳)^۲}\pm ۴$$

$$\Rightarrow (x-۳)^۲+(y-۵)^۲=$$

$$(x+۲)^۲+(y-۳)^۲+۱۶\pm ۸\sqrt{(x+۲)^۲+(y-۳)^۲}$$

$$\Rightarrow -۱۰x-۴y+۵=\pm ۸\sqrt{(x+۲)^۲+(y-۳)^۲}$$

$$\Rightarrow ۱۰۰x^۲+۱۶y^۲+۲۵+۸۰xy-۱۰۰x-۴۰y=$$

$$۶۴(x^۲+۴x+۴)+۶۴(y^۲-۶y+۹)$$

$$\Rightarrow ۳۶x^۲-۴۸y^۲+۸۰xy-۳۵۶x+۳۴۴y-۸۰۷=۰$$

مثال ۸. خط $\Delta: y+x+۲=۰$ و دو نقطهٔ $M(۲,۶)$ و $N(۲,-۲)$ داده شده‌اند. نقطه‌ای روی خط Δ تعیین کنید که تفاضل فاصله‌اش از دو نقطهٔ M و N، برابر ۶ باشد.

حل. نقطهٔ برخورد هذلولی به کانونهای M و N و عدد ثابت ۶ با خط Δ، جواب مسأله است. اما محور کانونی این هذلولی، موازی محور عرضهاست. بنابراین، معادلهٔ آن به صورت $\frac{(y-\beta)^۲}{a^۲}-\frac{(x-\alpha)^۲}{b^۲}=۱$ است. اما داریم:

مرکز هذلولی $O'\left|\begin{array}{l}\alpha=\frac{x_M+x_N}{۲}=\frac{۲+۲}{۲}=۲\\ \beta=\frac{y_M+y_N}{۲}=\frac{۶-۲}{۲}=۲\end{array}\right.$

$$O'F=c=|y_F-y_{O'}|=|۶-۲|=۴\ ,$$

$$۲a=۶\Rightarrow a=۳$$

$$c^۲=b^۲+a^۲\Rightarrow ۱۶=b^۲+۹\Rightarrow b^۲=۷\Rightarrow b=\sqrt{۷}$$

از آن جا معادلهٔ هذلولی به صورت $\frac{(y-۲)^۲}{۹}-\frac{(x-۲)^۲}{۷}=۱$

و نقطه‌های جواب مسأله، جوابهای دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی زیر است:

$$\begin{cases}\frac{(y-۲)^۲}{۹}-\frac{(x-۲)^۲}{۷}=۱\\ y+x+۲=۰\Rightarrow y=-x-۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow ۷(-x-۲-۲)^۲-۹(x-۲)^۲=۶۳\Rightarrow$$

$$۷(x+۴)^۲-۹(x-۲)^۲-۶۳=۰$$

$$\Rightarrow -۲x^۲+۹۲x+۱۳=۰\Rightarrow ۲x^۲-۹۲x-۱۳=۰$$

$$\Rightarrow x=\frac{۴۶\pm\sqrt{۲۱۱۶+۲۶}}{۲}=\frac{۴۶\pm ۳\sqrt{۲۳۸}}{۲}$$

$$\Rightarrow M_۱\left|\begin{array}{l}x=\frac{۴۶+۳\sqrt{۲۳۸}}{۲}\\ y=\frac{-۵۰-۳\sqrt{۲۳۸}}{۲}\end{array}\right. ,$$

$$M_۲\left|\begin{array}{l}x=\frac{۴۶-۳\sqrt{۲۳۸}}{۲}\\ y=\frac{-۵۰+۳\sqrt{۲۳۸}}{۲}\end{array}\right.$$

مثال ۹. دو نقطهٔ $F(۴,۰)$ و $F'(-۴,۰)$ در دستگاه مختصات xOy داده شده‌اند. نقطهٔ M از این صفحهٔ مختصات را چنان بیابید که $|MF-MF'|=۶$ و $MF^۲-MF'^۲=۹۶$ باشد.

حل. نقطهٔ برخورد هذلولی به کانونهای F و F' و عدد ثابت $۲a=۶$، و خط راست Δ عمود بر FF' در نقطهٔ H به قسمی که اگر I وسط FF' باشد، $\overline{IH}=\frac{۹۶}{۲\overline{FF'}}$ جواب مسأله است.

بنابراین:

$$۲a=۶\Rightarrow a=۳$$

$$۲c=|x_F-x_{F'}|=|۴+۴|=۸\Rightarrow c=۴$$

$$c^۲=b^۲+a^۲\ ,\ ۱۶=b^۲+۹\Rightarrow b^۲=۷\ ,\ \frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲}=۱$$

$\Rightarrow \frac{x^۲}{۹}-\frac{y^۲}{۷}=۱$ معادلهٔ هذلولی

$$MF^۲-MF'^۲=۹۶$$

$$\Rightarrow (x-۴)^۲+y^۲-(x+۴)^۲-y^۲=۹۶$$

$\Rightarrow -۱۶x=۹۶\Rightarrow x=-۶$ معادلهٔ خط Δ

$$\begin{cases}\frac{x^۲}{۹}-\frac{y^۲}{۷}=۱\\ x=-۶\end{cases}\Rightarrow \frac{۳۶}{۹}-\frac{y^۲}{۷}=۱\Rightarrow \frac{y^۲}{۷}=۳$$

$\Rightarrow y^۲=۲۱ \Rightarrow y=\pm\sqrt{۲۱}$

$\Rightarrow M_۱\left|\begin{matrix}-۶\\ \sqrt{۲۱}\end{matrix}\right. \ ,\ M_۲\left|\begin{matrix}-۶\\ -\sqrt{۲۱}\end{matrix}\right.$

مثال ۱۰. مختصات مرکز، نیمهٔ قطرها، مختصات کانونها و رأسهای هذلولی به معادلهٔ $۴x^۲-۹y^۲-۸x-۳۶y+۴=۰$ را تعیین و هذلولی را رسم کنید.

حل. معادلهٔ داده شده را به صورت کانونیک در می‌آوریم:

$۴(x^۲-۲x)-۹(y^۲+۴y)+۴=۰$

$\Rightarrow ۴\left[(x-۱)^۲-۱\right]-۹\left[(y+۲)^۲-۴\right]+۴=۰$

$\Rightarrow ۴(x-۱)^۲-۹(y+۲)^۲=-۳۶$

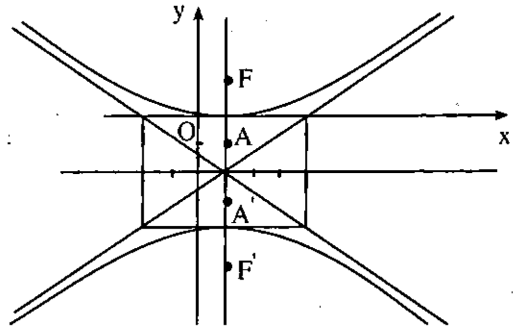
$\Rightarrow \dfrac{(y+۲)^۲}{۴}-\dfrac{(x-۱)^۲}{۹}=۱ \Rightarrow O'(۱,-۲)$

$a^۲=۴ \Rightarrow a=۲\ ,\ b^۲=۹ \Rightarrow b=۳\ ,$

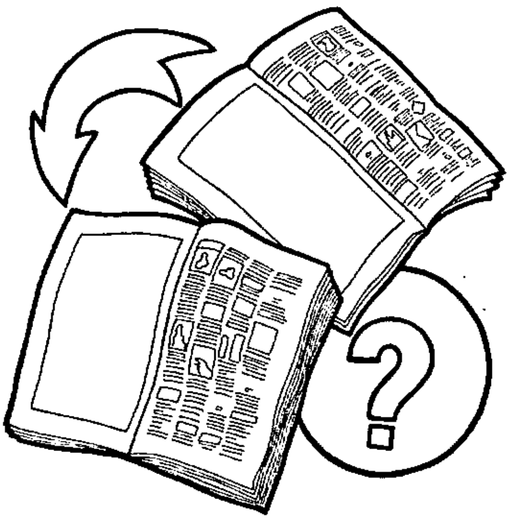
$c=\sqrt{a^۲+b^۲}=\sqrt{۹+۴}=\sqrt{۱۳}$

$F\left|\begin{matrix}\alpha=۱\\ \beta+c=-۲+\sqrt{۱۳}\end{matrix}\right. \ ,\ F'\left|\begin{matrix}\alpha=۱\\ \beta-c=-۲-\sqrt{۱۳}\end{matrix}\right.$

$A\left|\begin{matrix}\alpha=۱\\ \beta+a=-۲+۲=۰\end{matrix}\right. \ ,\ A'\left|\begin{matrix}\alpha=۱\\ \beta-a=-۲-۲=-۴\end{matrix}\right.$



تفریح اندیشه ۳



صفحهٔ ۷ یکی از ورقهای یک روزنامهٔ ۶۰ صفحه‌ای، که تنها یک دوخت دارد، سفید است؛ یعنی چاپ نخورده است. صفحه‌های سفید دیگر روزنامه کدامند؟

جواب در صفحهٔ ۸۸

پارادوکسهای ریاضیات و علوم

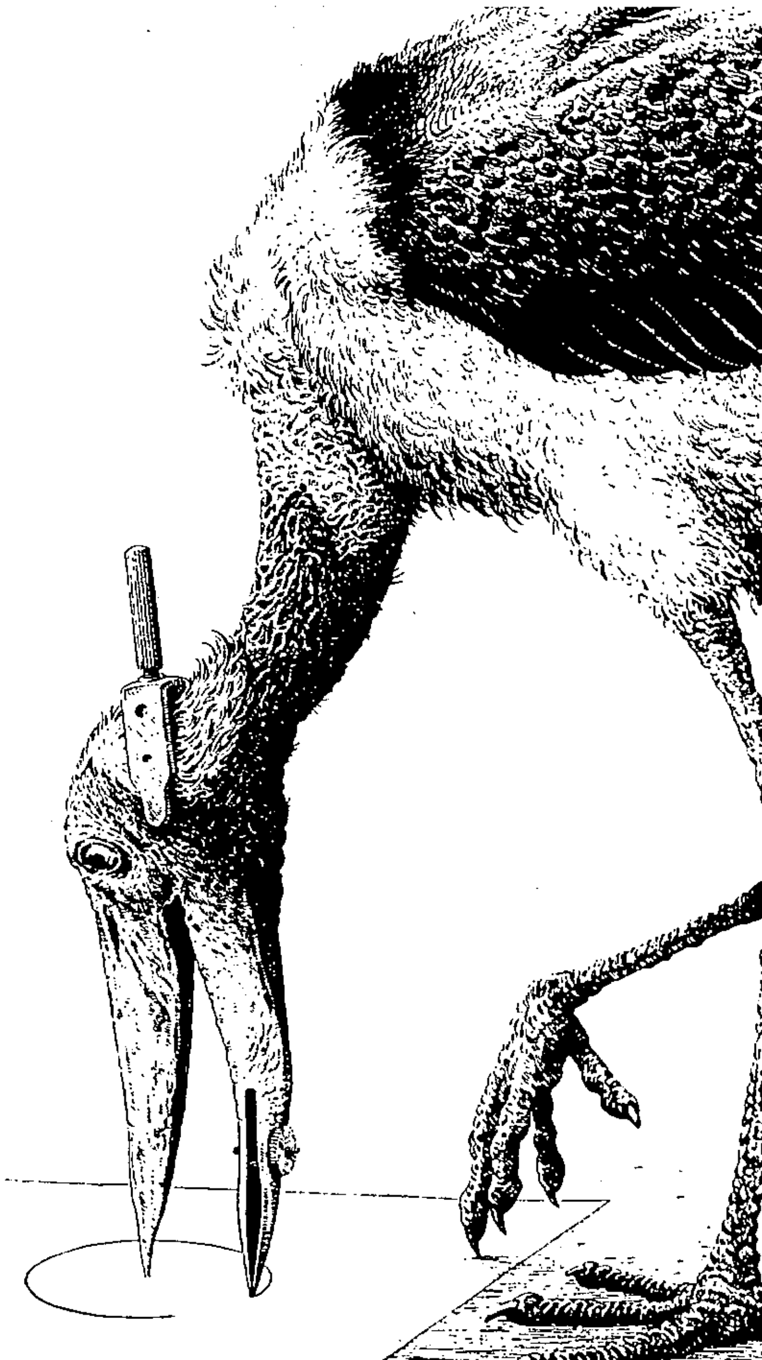
(سرگرمی برای اندیشه‌ورزی)

اثرِ دکتر مارتین گاردنر

●ترجمهٔ حسن نصیرنیا

اشاره: پارادوکس (Paradox) یا شگفت‌نما، واژه‌ای یونانی است که از دو جزء Para به معنای «فراتر» و dox به معنای «اعتقاد» تشکیل شده است. بنا به تعریفی عام، منظور از آن، احکامی است که با عقل سلیم مغایرند و با اصول مقدماتی منطق، تضاد دارند. در رشتهٔ مقاله‌های «پارادوکسهای ریاضیات و علوم»، پارادوکس به مفهوم وسیعی گرفته شده است که دربرگیرندهٔ هر نتیجه‌ای است که با عقل سلیم و شهود، مغایرت دارد و بی‌درنگ احساس شگفتی آدمی را برمی‌انگیزد.

پارادوکسهای ریاضیات، مانند پارادوکسهای علوم، ممکن است فراتر از لطیفه باشند و به پیدایش بینشهای ژرف منجر شوند. برای اندیشمندان متقدّم یونانی، یک پارادوکس مزاحم، آن بود که قطر مربعی به ضلع واحد را نمی‌توان حتی با خط‌کش دارای درجه‌های بسیار ظریف، بدرستی اندازه گرفت. این حقیقت دردسر آفرین، موجب گشوده شدن حوزهٔ پهناور نظریهٔ عددهای گنگ شد. درنظر ریاضیدانان سدهٔ نوزدهم، آنچه بسیار متناقض می‌نمود، این بود که همهٔ عضوهای یک مجموعهٔ نامتناهی، ممکن است با عضوهای یکی از زیرمجموعه‌های خود، در تناظر یک به یک قرار گیرند و دو مجموعهٔ نامتناهی، ممکن است وجود داشته باشند که عضوهای آنها را نتوان در وضعیت تناظر یک به یک نهاد. این پارادوکسها به پیدایش نظریهٔ جدید مجموعه‌ها منجر شد و این نظریه نیز تأثیر زیادی بر فلسفهٔ علوم گذاشت. پارادوکسها می توانند بسیار آموزنده باشند. پارادوکسها مانند حقّه‌های ماهرانهٔ شعبده‌بازی، آن‌چنان شگفت‌آورند که آدمی بی‌درنگ می خواهد به چگونگی پدید آمدن آنها پی ببرد. شعبده‌بازان هرگز چگونگی انجام کار خود را آشکار



نمی‌کنند : امّا ریاضیدانان هیچ نیازی به پنهان نگهداشتن کارهای خود ندارند.

در این سلسله مطالب، سعی بر آن است که سبب تناقض هر پارادوکس و تا آن‌جا که ممکن است به زبانی غیرفنی و در نهایت اختصار، تشریح شود. ـ م.

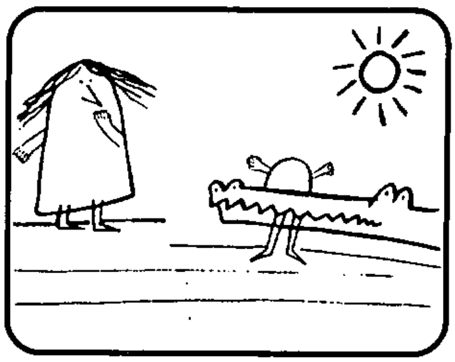
* * *

تمساح و کودک

فیلسوفان یونانی دوست داشتند دربارهٔ تمساحی سخن بگویند که کودکی را از مادرش می‌رباید.

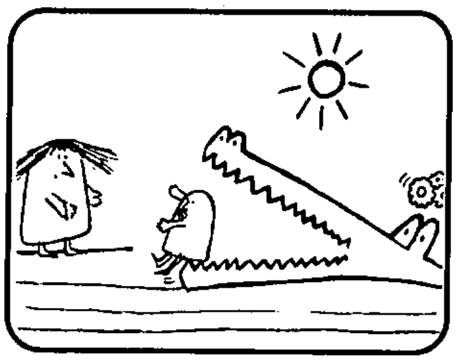
تمساح: می‌توانم کودکت را بخورم؟ پاسخ درست بده تا کودک را سالم به تو برگردانم.

مادر: اِی وای! می‌خواهی کودکم را بخوری.



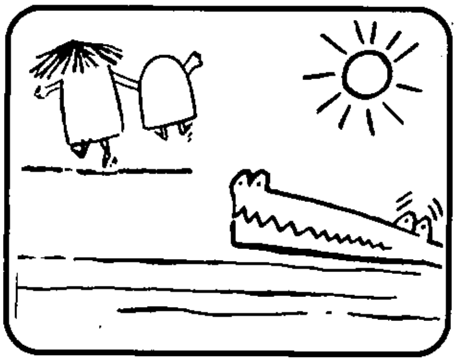
تمساح: چه باید بکنم؟ اگر کودک را به تو برگردانم، تو سخنِ نادرست گفته‌ای. من باید او را خورده باشم... که این‌طور ؛ پس او را برنخواهم گرداند.

مادر: تو باید این‌کار را بکنی. اگر کودکم را بخوری، من سخن درست گفته‌ام و تو باید او را پس بدهی.



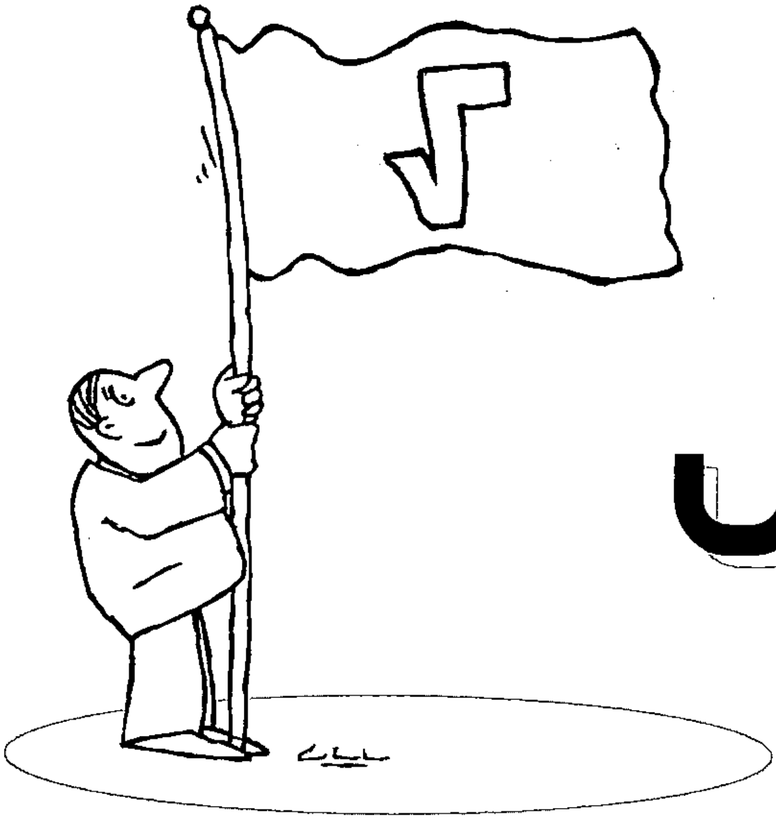
تمساح بیچاره، آن‌قدر دو دل بود که کودک را رها کرد. مادر کودک را قاپید و در رفت.

تمساح: لعنت بر این بخت و اقبال! ای کاش گفته بود من باید کودک را پس می‌دادم. (در آن‌صورت) غذای لذیذی خورده بودم.



لابد، میل دارید که بدانید **اراتوستن** چگونه برای اندازه‌گیری زمین اقدام کرد. استدلال او از این قبیل بود : می‌دانیم که محیط دایره به ۳۶۰ درجه تقسیم می‌شود، پس اگر من بتوانم طول یک درجهٔ آن را بر حسب استاد "Stade" معین کنم (هر استاد تقریباً ۱۵۷/۵ متر است) برای تعیین محیط کرهٔ زمین کافی است عدد حاصل را در ۳۶۰ ضرب کنم، بنابراین مطلب رجوع شده بود به این‌که طول کمان یک درجه را معین کنند.

تاریخ علوم ـ پی‌یر روسو



رادیکال

قسمت دوم

●سیّد محمّدرضا هاشمی موسوی

اعمال روی عددها و عبارتهای رادیکالی

۱) ضرب عددها و عبارتهای رادیکالی

مـی‌دانـیـم $\sqrt{۱۶}\times\sqrt{۲۵}=۴\times۵=۲۰$ و $\sqrt{۴۰۰}=۲۰$ ، بنابراین :

$$\sqrt{۱۶}\times\sqrt{۲۵}=\sqrt{۱۶\times۲۵}=\sqrt{۴۰۰}=۲۰$$

و همچنین :

$\sqrt[۳]{-۸}\times\sqrt[۳]{۸}=(-۲)\times۲=-۴$ و $\sqrt[۳]{-۶۴}=-۴$ ، بنابراین :

$$\sqrt[۳]{-۸}\times\sqrt[۳]{۸}=\sqrt[۳]{(-۸)\times۸}=\sqrt[۳]{-۶۴}=-۴$$

به‌طورکلی : برای عددهای حقیقی a، b و عدد طبیعی n بزرگتر یا برابر ۲ $(n\geq ۲)$ ، اگر n عددی فرد باشد :

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab} \qquad (۱)$$

و اگر n زوج باشد، a و b باید بزرگتر یا مساوی صفر باشند :

$$\sqrt[n]{|a|}\times\sqrt[n]{|b|}=\sqrt[n]{|ab|}$$

مثال: حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید (از شماره‌های ۷ تا ۱۲ به عنوان تمرین است).

۱) $\sqrt{۲}\times\sqrt{۱۸}$

۲) $\sqrt{۱۴}\times\sqrt{۷}\times\sqrt{۲}$

۳) $\sqrt[۳]{۹-\sqrt{۱۷}}\times\sqrt[۳]{۹+\sqrt{۱۷}}$

۴) $\sqrt{\frac{۲}{۳}}\times\sqrt{۶}\times\sqrt{\frac{۵}{۷}}\times\sqrt{۱۴}\times\sqrt{۱۰}$

۵) $\sqrt[۵]{۳}\times\sqrt[۵]{۹}\times\sqrt[۵]{\frac{۳}{۵}}\times\sqrt[۵]{\frac{۵}{۹}}\times\sqrt[۵]{۲۷}$

۶) $\sqrt[۴]{۱۰-\sqrt{۱۹}}\times\sqrt[۴]{۱۰+\sqrt{۱۹}}$

۷) $\sqrt[۳]{a^۲+b^۲}\times\sqrt[۳]{a^۴+۲a^۲b^۲+b^۴}$

۸) $\sqrt[۵]{x}\times\sqrt[۵]{x^۲}\times\sqrt[۵]{x^۲}$

۹) $\sqrt[۳]{a^۲bc}\times\sqrt[۳]{ab^۲c}\times\sqrt[۳]{c}$

۱۰) $\sqrt[۵]{a^۲b^۳}\times\sqrt[۵]{a^۳b^۲}$

$$۱۱)\ \sqrt[۷]{a^۲b^۳c}\times\sqrt[۷]{a^۳b^۲c^۴}\times\sqrt[۷]{a^۲b^۲c^۲}$$

$$۱۲)\ \sqrt[۳]{a-b}\times\sqrt[۳]{a^۲+ab+b^۲}\times\sqrt[۳]{(a^۳-b^۳)^۲}$$

حل:

$$۱)\ \sqrt{۲}\times\sqrt{۱۸}=\sqrt{۲\times۱۸}=\sqrt{۳۶}=۶$$

$$۲)\ \sqrt{۱۴}\times\sqrt{۷}\times\sqrt{۲}=\sqrt{۱۴\times۷\times۲}=\sqrt{۱۴\times۱۴}$$
$$=\sqrt{۱۴^۲}=۱۴$$

$$۳)\ \sqrt[۳]{۹-\sqrt{۱۷}}\times\sqrt[۳]{۹+\sqrt{۱۷}}=\sqrt[۳]{(۹-\sqrt{۱۷})(۹+\sqrt{۱۷})}$$
$$=\sqrt[۳]{۹^۲-۱۷}=\sqrt[۳]{۸۱-۱۷}=\sqrt[۳]{۶۴}=۴$$

$$۴)\sqrt{\frac{۲}{۳}}\times\sqrt{۶}\times\sqrt{\frac{۵}{۷}}\times\sqrt{۱۴}\times\sqrt{۱۰}=\sqrt{\frac{۲}{۳}\times۶\times\frac{۵}{۷}\times۱۴\times۱۰}$$
$$=\sqrt{۲\times۲\times۵\times۲\times۱۰}=\sqrt{۲۰^۲}=۲۰$$

$$۵)\ \sqrt[۵]{۳}\times\sqrt[۵]{۹}\times\sqrt[۵]{\frac{۳}{۵}}\times\sqrt[۵]{\frac{۵}{۹}}\times\sqrt[۵]{۲۷}$$
$$=\sqrt[۵]{۳\times۹\times\frac{۳}{۵}\times\frac{۵}{۹}\times۲۷}=\sqrt[۵]{۳\times۳^۲\times۳\times۳}=\sqrt[۵]{۳^۵}=۳$$

$$۶)\ \sqrt[۴]{۱۰-\sqrt{۱۹}}\times\sqrt[۴]{۱۰+\sqrt{۱۹}}=\sqrt[۴]{(۱۰-\sqrt{۱۹})(۱۰+\sqrt{۱۹})}$$
$$=\sqrt[۴]{۱۰۰-۱۹}=\sqrt[۴]{۸۱}=\sqrt[۴]{۳^۴}=۳$$

۷) جواب: $a^۲+b^۲$

۸) جواب: x

۹) جواب: abc

۱۰) جواب: ab

۱۱) جواب: abc

۱۲) جواب: $a^۳-b^۳$

نکته: برای بردن عددی به داخل رادیکال که ضریب رادیکال است باید آن‌را به توان فرجهٔ رادیکال برسانیم و سپس آن‌را در عدد زیر رادیکال ضرب کنیم ؛ بنابراین، اگر فرجه زوج باشد، باید عدد مورد نظر مثبت باشد ؛ مانند: $\sqrt{۱۲}=\sqrt{۲^۲\times۳}=۲\sqrt{۳}$.

مثال: در عبارتهای زیر، ضریب رادیکال را به داخل رادیکال برده‌ایم.

$$۱)\ ۲\sqrt[۳]{۳}=\sqrt[۳]{۲^۳\times۳}=\sqrt[۳]{۸\times۳}=\sqrt[۳]{۲۴}$$

$$۲)\ -۵\sqrt{۲}=-\sqrt{۵^۲\times۲}=-\sqrt{۵۰}$$

$$۳)\ ۳\sqrt[۴]{۳}=\sqrt[۴]{۳^۴\times۳}=\sqrt[۴]{۸۱\times۳}=\sqrt[۴]{۲۴۳}$$

$$۴)\ -۲\sqrt[۴]{۳}=-\sqrt[۴]{۲^۴\times۳}=-\sqrt[۴]{۴۸}$$

$$۵)\ x\sqrt[۵]{x^۳}=\sqrt[۵]{x^۵.x^۳}=\sqrt[۵]{x^۸}$$

$$۶)\ xy^۲\sqrt[۷]{x^۳y^۴}=\sqrt[۷]{(xy^۲)^۷x^۳y^۴}=\sqrt[۷]{x^۷y^{۱۴}x^۳y^۴}$$
$$=\sqrt[۷]{x^{۱۰}y^{۱۸}}$$

$$۷)\ -a^۲\sqrt[۴]{۲a^۲}=-\sqrt[۴]{(a^۲)^۴(۲a^۲)}=-\sqrt[۴]{a^۸(۲a^۲)}=-\sqrt[۴]{۲a^{۱۰}}$$

توجه کنید که در عبارتهای $-۵\sqrt{۲}$ ، $-۲\sqrt[۴]{۳}$ و $-a^۲\sqrt[۴]{۲a^۲}$ نمی‌توانیم (-۵) ، (-۲) و $(-a^۲)$ را به زیر رادیکال ببریم ؛ زیرا فرجهٔ رادیکالها زوج است و می‌دانیم از داخل رادیکال با فرجهٔ زوج عدد منفی بیرون نمی‌آید :

$$-۵\sqrt{۲}\neq\sqrt{(-۵)^۲(۲)}\quad,\quad -۲\sqrt[۴]{۳}\neq\sqrt[۴]{(-۲)^۴(۳)}$$

همچنین اگر a عدد حقیقی مخالف صفر باشد، داریم :

$$-a^۲\sqrt[۴]{۲a^۲}\neq\sqrt[۴]{(-a^۲)^۴(۲a^۲)}\quad (a\in\mathbb{R}-\{۰\})$$

به‌طورکلی : برای عددهای حقیقی a ، b و عدد طبیعی n بزرگتر یا برابر ۲ $(n\geq۲)$ ، اگر n عددی فرد باشد :

$$a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^nb}\qquad (۲)$$

و اگر n عددی زوج و $b\geq۰$:

$$\sqrt[n]{a^nb}=|a|\sqrt[n]{b}$$

۲) تقسیم عددها و عبارتهای رادیکالی

می‌دانیم $\frac{\sqrt{۹}}{\sqrt{۴}}=\frac{۳}{۲}$ و $\sqrt{\frac{۹}{۴}}=\frac{۳}{۲}$ ؛ بنابراین :

$$\frac{\sqrt{۹}}{\sqrt{۴}}=\sqrt{\frac{۹}{۴}}=\frac{۳}{۲}$$

و همچنین $\frac{\sqrt[۳]{۲۷}}{\sqrt[۳]{۶۴}}=\frac{۳}{۴}$ و $\sqrt[۳]{\frac{۲۷}{۶۴}}=\frac{۳}{۴}$ ؛ بنابراین :

$$\frac{\sqrt[۳]{۲۷}}{\sqrt[۳]{۶۴}}=\sqrt[۳]{\frac{۲۷}{۶۴}}=\frac{۳}{۴}$$

به‌طور کلی :

برای عددهای حقیقی a، b و عدد طبیعی n بزرگتر یا برابر ۲ ($n \geq 2$) و $b \neq 0$، اگر n عددی فرد باشد :

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \qquad (3)$$

و اگر n عددی زوج و $\frac{a}{b} \geq 0$:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}} \qquad (4)$$

مثال: حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید (۳ تا ۷ به‌عنوان تمرین است).

۱) $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$ ۲) $\frac{\sqrt{3} \times \sqrt{6}}{\sqrt{2}}$ ۳) $\frac{\sqrt{15} \times \sqrt{50} \times \sqrt{3}}{\sqrt{6} \times \sqrt{30} \times \sqrt{2}}$

۴) $\frac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}}$ ۵) $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}$ ۶) $\frac{\sqrt[9]{x^2y^3} \times \sqrt[9]{xy^{12}}}{\sqrt[9]{xy^{21}} \times \sqrt[9]{x^{20}y^3}}$

۷) $\frac{x^2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^{10}}}$

حل:

۱) $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{20}{5}} = \sqrt{4} = 2$

۲) $\frac{\sqrt{3} \times \sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3$

۳) جواب: $\frac{5}{2}$ ۴) جواب: ۳

۵) جواب: $\frac{2}{3}$ ۶) جواب: $\frac{1}{x^2y}$ ۷) جواب: $\frac{1}{x}$

در این‌جا، روش محاسبهٔ دو عبارت ۶ و ۷ را می‌آوریم :

۶) $\frac{\sqrt[9]{x^2y^3} \times \sqrt[9]{x\,y^{12}}}{\sqrt[9]{xy^{21}} \times \sqrt[9]{x^{20}y^3}} = \frac{\sqrt[9]{x^2y^3.xy^{12}}}{\sqrt[9]{xy^{21}.x^{20}y^3}} = \sqrt[9]{\frac{x^3y^{15}}{x^{21}y^{24}}}$

$$= \sqrt[9]{\frac{1}{x^{18}y^9}} = \sqrt[9]{\left(\frac{1}{x^2y}\right)^9} = \frac{1}{x^2y}$$

۷) $\frac{x^2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^{10}}} = \frac{\sqrt[3]{(x^2)^3.x}}{\sqrt[3]{x^{10}}} = \frac{\sqrt[3]{x^6.x}}{\sqrt[3]{x^{10}}} = \sqrt[3]{\frac{x^7}{x^{10}}}$

$$= \sqrt[3]{\frac{1}{x^3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{x}\right)^3} = \frac{1}{x}$$

۳) جمع جبری عددها و عبارتهای رادیکالی

با مقایسهٔ تساویهای $7x + 4x = (7+4)x = 11x$ و

$$7\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = (7+4)\sqrt{2} = 11\sqrt{2}$$

و تساویهای

$$7y - 4y = (7-4)y = 3y$$

و

$$7\sqrt[7]{a} - 4\sqrt[7]{a} = (7-4)\sqrt[7]{a} = 3\sqrt[7]{a}$$

ملاحظه می‌شود جمع جبری عددها و عبارتهای رادیکالی، شبیه جمع جبری یک‌جمله‌ایهاست ؛ یعنی جمع جبری عددها و عبارتهای رادیکالی را وقتی می‌توان به‌صورت ساده نوشت که عدد فرجهٔ رادیکال و عبارت زیر رادیکال با هم مساوی (یا عددها و عبارتهای رادیکالی با هم معادل) باشند.

مثال: حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید.

۱) $5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - \sqrt{2}$

۲) $7\sqrt[4]{4} - 5\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 4\sqrt[4]{4}$

۳) $2\sqrt[15]{8} - 3\sqrt[5]{2} - 4\sqrt[15]{8} + 5\sqrt[5]{2}$

۴) $5\sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{5} - 14\sqrt[9]{125} + 4\sqrt[3]{5} + \sqrt[9]{125}$

حل:

۱) $5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - \sqrt{2}$

$$= (5+3-4+2-1)\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

۲) $7\sqrt[4]{4} - 5\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 4\sqrt[4]{4}$

$$= (7-4)\sqrt[4]{4} + (-5+4)\sqrt{2} = 3\sqrt[4]{4} - \sqrt{2}$$

با توجه به معادل بودن عدد $\sqrt[4]{4}$ با $\sqrt{2}$، یعنی :

$$\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt{2}$$

داریم :

$$3\sqrt[4]{4} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2} - \sqrt{2} = (3-1)\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

۳) $2\sqrt[15]{8} - 3\sqrt[5]{2} - 4\sqrt[15]{8} + 5\sqrt[5]{2}$

$$= (2-4)\sqrt[15]{8} + (-3+5)\sqrt[5]{2} = -2\sqrt[15]{8} + 2\sqrt[5]{2}$$

با توجه به معادل بودن عدد $\sqrt[15]{8}$ با $\sqrt[5]{2}$، یعنی :

$$\sqrt[15]{8}=\sqrt[15]{2^3}=\sqrt[5]{2}$$

داریم :

$$-2\sqrt[15]{8}+2\sqrt[5]{2}=-2\sqrt[5]{2}+2\sqrt[5]{2}$$
$$=(-2+2)\sqrt[5]{2}=(0)\sqrt[5]{2}=0$$

۴) $5\sqrt[3]{5}+2\sqrt[3]{5}-14\sqrt[9]{125}+4\sqrt[3]{5}+\sqrt[9]{125}$
$$=(5+2+4)\sqrt[3]{5}+(-14+1)\sqrt[9]{125}$$
$$=11\sqrt[3]{5}-13\sqrt[9]{125}$$

با توجه به معادل بودن عدد $\sqrt[9]{125}$ با $\sqrt[3]{5}$ ، یعنی :

$$\sqrt[9]{125}=\sqrt[9]{5^3}=\sqrt[3]{5}$$

داریم :

$$11\sqrt[3]{5}-13\sqrt[9]{125}=11\sqrt[3]{5}-13\sqrt[3]{5}$$
$$=(11-13)\sqrt[3]{5}=-2\sqrt[3]{5}$$

توجه داشته باشید که در جمع جبری، عبارتهای رادیکالی ابتدا باید عواملی را که توان کامل فرجهٔ رادیکال هستند از زیر رادیکال بیرون آورد و سپس عبارت را ساده کرد.

مثال: حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید (۴،۳ و ۵ به‌عنوان تمرین است).

۱) $\sqrt{54}+3\sqrt{6}-5\sqrt{24}+4\sqrt{6}-\sqrt{24}+\sqrt[4]{36}$

۲) $2\sqrt[3]{16}-7\sqrt[3]{2}+5\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{54}+4\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{16}+\sqrt[6]{4}$

۳) $3\sqrt[4]{405}+5\sqrt[4]{5}-2\sqrt[4]{80}+4\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{405}+\sqrt[4]{80}$

۴) $\sqrt[3]{a^7}-2\sqrt[3]{a^4}+5\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{a^{10}}+3\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{a^{10}}-\sqrt[3]{a^7}$

۵) $\sqrt[5]{a^6b^6}-2b\sqrt[5]{a^6b}-5\sqrt[5]{a^6b^6}+3a\sqrt[5]{ab^6}+3ab\sqrt[5]{ab}$

حل:

۱) $\sqrt{54}+3\sqrt{6}-5\sqrt{24}+4\sqrt{6}-\sqrt{24}+\sqrt[4]{36}$
$$=\sqrt{9\times6}+(3+4)\sqrt{6}+(-5-1)\sqrt{4\times6}+\sqrt[4]{36}$$
$$=3\sqrt{6}+7\sqrt{6}-6\times2\sqrt{6}+\sqrt[4]{36}$$
$$=(3+7-12)\sqrt{6}+\sqrt[4]{36}$$
$$=-2\sqrt{6}+\sqrt[4]{36}$$

با توجه به معادل بودن عدد $\sqrt[4]{36}$ با $\sqrt{6}$ ، یعنی :

$$\sqrt[4]{36}=\sqrt[4]{6^2}=\sqrt{6}$$

داریم :

$$-2\sqrt{6}+\sqrt[4]{36}=-2\sqrt{6}+\sqrt{6}=(-2+1)\sqrt{6}=-\sqrt{6}$$

۲) $2\sqrt[3]{16}-7\sqrt[3]{2}+5\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{54}+4\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{16}+\sqrt[6]{4}$
$$=(2+5-1)\sqrt[3]{16}+(-7+4)\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{54}+\sqrt[6]{4}$$
$$=6\sqrt[3]{2^3\times2}-3\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3^3\times2}+\sqrt[6]{4}$$
$$=6\times2\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{2}+\sqrt[6]{4}$$
$$=(12-3-3)\sqrt[3]{2}+\sqrt[6]{4}$$
$$=6\sqrt[3]{2}+\sqrt[6]{4}$$

با توجه به معادل بودن عدد $\sqrt[6]{4}$ با $\sqrt[3]{2}$ ، یعنی :

$$\sqrt[6]{4}=\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[3]{2}$$

داریم :

$$6\sqrt[3]{2}+\sqrt[6]{4}=6\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}=(6+1)\sqrt[3]{2}=7\sqrt[3]{2}$$

۳) جواب : $13\sqrt[4]{5}$ ۴) جواب : $6a\sqrt[3]{a}$ ۵) جواب : ۰

نکته: جمع دو عدد $\sqrt{5}$ و $\sqrt{3}$ به‌صورت $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ نوشته می‌شود. همچنین دو عدد $\sqrt{2}$ و $\sqrt[3]{2}$ به‌صورت $\sqrt[3]{2}+\sqrt{2}$ جمع بسته می‌شوند.

توان رساندن عددها و عبارتهای رادیکالی

بنا به تعریف توان، می‌توان نوشت :

۱) $(\sqrt[5]{3})^4=\sqrt[5]{3}\times\sqrt[5]{3}\times\sqrt[5]{3}\times\sqrt[5]{3}=\sqrt[5]{3\times3\times3\times3}$
$$=\sqrt[5]{3^4}$$

و به‌طورکلی می‌توان نوشت :

$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$ (اگر n زوج باشد، باید $a\geq0$)

مثال: $(\sqrt[3]{-4})^5=-8\sqrt[3]{2}$

حالت خاص: به مثالهای زیر توجه کنید :

۱) $(\sqrt{2})^2=\sqrt{2^2}=2$ ۲) $(\sqrt[5]{7})^5=\sqrt[5]{7^5}=7$

۳) $(\sqrt[3]{4})^3=\sqrt[3]{4^3}=4$ ۴) $(\sqrt[4]{3})^4=\sqrt[4]{3^4}=3$

به‌طورکلی : برای عدد حقیقی a و عدد طبیعی n بزرگتر یا برابر ۲($n \geq 2$)، اگر n عددی فرد باشد :

$$\sqrt[n]{a^n} = a \qquad (5)$$

و اگر n عددی زوج باشد :

$$\sqrt[n]{a^n} = |a| \quad , \quad (\sqrt[n]{|a|})^n = |a|$$

ریشهٔ مثبت یک عدد و یا عبارت رادیکالی

به مثالهای زیر توجه کنید :

$$1)\ \sqrt[2]{\sqrt[2]{81}} = \sqrt[2]{9} = 3$$

و

$$\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$$

بنابراین :

$$\sqrt[2]{\sqrt[2]{81}} = \sqrt[4]{81}$$

همچنین

$$2)\ \sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

و

$$\sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$$

بنابراین :

$$\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[6]{64}$$

در مثال ۱، ملاحظه می‌شود که ریشهٔ دوم $\sqrt[2]{81}$ برابر با ریشهٔ چهارم ۸۱ است.

در مثال ۲، مشاهده می کنید که ریشهٔ سوم $\sqrt{64}$ برابر با ریشهٔ ششم ۶۴ است.

به‌طورکلی :

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \qquad (6)$$

ریشهٔ mام $\sqrt[n]{a}$ ، برابر با ریشهٔ mnام a است.

m و n عددهای طبیعی و $m \geq 2$ و $n \geq 2$ می‌باشند و $a \in \mathbb{R}$ است.

اگر m یا n و یا هر دو زوج باشند، a نمی‌تواند منفی باشد.

نکته: در حالت کلی، اگر $a \geq 0$ و تعداد رادیکالها n باشد :

$$\underbrace{\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\ldots\sqrt{a}}}}}_{\text{n مرتبه}} = \sqrt[2^n]{a^{2^n-1}} \qquad (a \geq 0)$$

مثال:

$$1)\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}} = \sqrt[2^4]{2^{2^4-1}} = \sqrt[16]{2^{16-1}} = \sqrt[16]{2^{15}}$$

$$2)\ \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}}}} = \sqrt[2^6]{3^{2^6-1}} = \sqrt[64]{3^{63}}$$

با توجه به مثالهای اخیر، در حالت کلی خواهیم داشت :

$$\sqrt[k]{\sqrt[p]{\sqrt[q]{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}}}} = \sqrt[kpqmn]{a}$$

n، m، p، q و k عددهای طبیعی بزرگتر یا برابر ۲ می‌باشند ؛ که اگر لااقل یکی از آنها زوج باشد، a نمی‌تواند منفی باشد. برای مثال داریم :

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt[5]{\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{75}}}}}} = \sqrt[1800]{75} \quad , \quad \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[5]{\sqrt[4]{2}}}} = \sqrt[120]{2}$$

توجه: می‌دانیم :

$$\sqrt[2\times2]{4^{1\times2}} = \sqrt[4]{4^2} = \sqrt[4]{2^4} = 2 \ , \ \sqrt{4^1} = 2$$

بنابراین :

$$\sqrt{4} = \sqrt[2\times2]{4^{1\times2}}$$

همچنین $\sqrt[5]{a^5} = a$ و $\sqrt[5\times3]{(a^5)^3} = \sqrt[15]{a^{15}} = a$ ، بنابراین :

$$\sqrt[5]{a^5} = \sqrt[5\times3]{a^{5\times3}}$$

به‌طورکلی :برای عدد حقیقی a و عدد طبیعی n بزرگتر یا برابر ۲($n \geq 2$)، اگر p عددی فرد باشد :

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}} \qquad (7)$$

اگر n زوج باشد، a^m نمی‌تواند منفی باشد.

و اگر p عددی زوج باشد : $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{|a|^m}$

یعنی: عدد فرجهٔ رادیکال و توان عبارت زیر رادیکال را می‌توانیم در یک عدد طبیعی ضرب یا بر یک عدد طبیعی تقسیم کنیم.

مثال:

۱) $\sqrt[۳]{۴}=\sqrt[۳]{۲^۲}=\sqrt[۷\times۳]{۲^{۷\times۲}}=\sqrt[۲۱]{۲^{۱۴}}$

۲) $\sqrt[۴]{۲x^۲}=\sqrt[۲\times۴]{(۲x^۲)^۲}=\sqrt[۸]{۴x^۴}$

۳) $\sqrt[۱۲]{۳^۴}=\sqrt[۳\times۴]{۳^۴}=\sqrt[۳]{۳}$

۴) $\sqrt[۱۵]{\sqrt[۳]{a^۹}}=\sqrt[۴۵]{a^۹}=\sqrt[۹\times۵]{a^۹}=\sqrt[۵]{a}$

نکتهٔ مهم

در مورد تقسیم فرجهٔ رادیکال و توان عبارت زیر رادیکال بر یک عدد زوج یا ضرب فرجهٔ رادیکال و توان عدد زیر رادیکال در یک عدد زوج، توجه به علامت عدد زیر رادیکال بسیار ضروری است.

مثال:

۱) $\sqrt[۴]{(-۹)^۲}=\sqrt[۴]{۸۱}=۳$ یا $\sqrt[۴]{(-۹)^۲}=\sqrt{|-۹|}=\sqrt{۹}=۳$

یعنی: $\sqrt[۴]{(-۹)^۲}\neq\sqrt{-۹}$

۲) $\sqrt[۳]{-۲۷}=-۳$

همچنین: $\sqrt[۳]{-۲۷}\neq\sqrt[۳\times۲]{(-۲۷)^۲}$

از خاصیتهای اخیر، برای ضرب یا تقسیم عبارتهای رادیکالی با فرجه‌های نابرابر استفاده می‌کنند؛ بدین ترتیب که ابتدا فرجه‌های رادیکالها را به فرجهٔ مشترک تبدیل کرده و سپس عمل ضرب یا تقسیم را انجام می‌دهیم.

مثال:

۱) $\sqrt[۴]{۲}\times\sqrt{۲}=\sqrt[۴]{۲}\times\sqrt[۲\times۲]{۲^۲}=\sqrt[۴]{۲}\times\sqrt[۴]{۴}$

$=\sqrt[۴]{۲\times۴}=\sqrt[۴]{۸}$

۲) $۲\sqrt[۳]{-۴}\times۳\sqrt{۲}=-۲\sqrt[۳]{۴}\times۳\sqrt{۲}$

$=-۲\sqrt[۳\times۲]{۴^۲}\times۳\sqrt[۲\times۳]{۲^۳}$

$=-۲\sqrt[۶]{۴^۲}\times۳\sqrt[۶]{۲^۳}=-۶\sqrt[۶]{۴^۲\times۲^۳}$

$=-۶\sqrt[۶]{۲^۴\times۲^۳}=-۶\sqrt[۶]{۲^۷}$

$=-۶\sqrt[۶]{۲^۶\times۲}=-۶\times۲\sqrt[۶]{۲}=-۱۲\sqrt[۶]{۲}$

۳) $\sqrt[۳]{۴}\div\sqrt[۵]{۸}=\sqrt[۳\times۵]{۴^۵}\div\sqrt[۵\times۳]{۸^۳}=\sqrt[۱۵]{۴^۵}\div\sqrt[۱۵]{۸^۳}$

$=\sqrt[۱۵]{۴^۵\div۸^۳}=\sqrt[۱۵]{۲^{۱۰}\div۲^۹}$

$=\sqrt[۱۵]{۲^{۱۰-۹}}=\sqrt[۱۵]{۲}$

۴) $\sqrt[۴]{۳۶}\div\sqrt{۳}=\sqrt[۴]{۳۶}\div\sqrt[۲\times۲]{۳^۲}=\sqrt[۴]{۳۶}\div\sqrt[۴]{۹}$

$=\sqrt[۴]{۳۶\div۹}=\sqrt[۴]{۴}=\sqrt{۲}$

مثال: حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید.

۱) $\sqrt[۳]{۴}\times\sqrt{۲}$ ۲) $۵\sqrt{۲}\times۲\sqrt[۳]{-۲}$

۳) $\sqrt[۵]{۸}\times\sqrt[۳]{۴}\times\sqrt{۲}$ ۴) $۵\sqrt[۳]{۲۵}\times۲\sqrt{۳\sqrt{۴}}$

۵) $\sqrt{۱۵}\div\sqrt[۳]{۵}$ ۶) $\sqrt[۴]{۲۲۵}\div\sqrt{۲۵}$

۷) $\sqrt[۳]{a\sqrt[۳]{a}}\times\sqrt[۳]{a^۲\sqrt[۵]{a}}$ ۸) $\dfrac{\sqrt[۳]{a^۲}\div\sqrt[۷]{a^۳}}{\sqrt[۲۱]{a^{۱۲}}}$

حل:

۱) $\sqrt[۳]{۴}\times\sqrt{۲}=\sqrt[۳\times۲]{۴^۲}\times\sqrt[۲\times۳]{۲^۳}=\sqrt[۶]{۴^۲}\times\sqrt[۶]{۲^۳}$

$=\sqrt[۶]{۴^۲\times۲^۳}=\sqrt[۶]{۲^۴\times۲^۳}$

$=\sqrt[۶]{۲^۷}=\sqrt[۶]{۲^۶\times۲}=۲\sqrt[۶]{۲}$

۲) $۵\sqrt{۲}\times۲\sqrt[۳]{-۲}=-۵\sqrt{۲}\times۲\sqrt[۳]{۲}=-۵\sqrt[۶]{۲^۳}\times۲\sqrt[۶]{۲^۲}$

$=-۱۰\sqrt[۶]{۲^۳\times۲^۲}$

$=-۱۰\sqrt[۶]{۲^۵}=-۱۰\sqrt[۶]{۳۲}$

۳) $\sqrt[۵]{۸}\times\sqrt[۳]{۴}\times\sqrt{۲}=\sqrt[۳۰]{۸^۶}\times\sqrt[۳۰]{۴^{۱۰}}\times\sqrt[۳۰]{۲^{۱۵}}$

$=\sqrt[۳۰]{۸^۶\times۴^{۱۰}\times۲^{۱۵}}$

$=\sqrt[۳۰]{۲^{۱۸}\times۲^{۲۰}\times۲^{۱۵}}=\sqrt[۳۰]{۲^{۵۳}}$

$=\sqrt[۳۰]{۲^{۳۰}\times۲^{۲۳}}=۲\sqrt[۳۰]{۲^{۲۳}}$

۴) $۵\sqrt[۳]{۲۵}\times۲\sqrt{۳\sqrt{۴}}=۵\sqrt[۳]{۲۵}\times۲\sqrt{۳\times۲}$

$=۵\sqrt[۳]{۲۵}\times۲\sqrt{۶}$

$=۵\sqrt[۶]{۲۵^۲}\times۲\sqrt[۶]{۶^۳}=۱۰\sqrt[۶]{۲۵^۲\times۶^۳}$

$=۱۰\sqrt[۶]{۱۳۵۰۰۰}$

۵) $\sqrt{۱۵}\div\sqrt[۳]{۵}=\sqrt[۶]{۱۵^۳}\div\sqrt[۶]{۵^۲}=\sqrt[۶]{۱۵^۳\div۵^۲}$

$=\sqrt[۶]{\dfrac{۵^۳\times۳^۳}{۵^۲}}=\sqrt[۶]{۵\times۳^۳}=\sqrt[۶]{۵\times۲۷}$

$=\sqrt[۶]{۱۳۵}$

۶) $\sqrt[۴]{۲۲۵}\div\sqrt{۲۵}=\sqrt[۴]{۲۲۵}\div\sqrt[۴]{۲۵^۲}=\sqrt[۴]{۲۲۵\div۲۵^۲}$

$$=\sqrt[4]{\frac{5^2\times 3^2}{5^4}}=\sqrt[4]{\frac{3^2}{5^2}}=\sqrt[4]{(\frac{3}{5})^2}$$

$$=\sqrt{\frac{3}{5}}=\sqrt{0/6}$$

$$7)\ \sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}}\times\sqrt[3]{a^2\sqrt[5]{a}}=\sqrt[3]{a^3\sqrt[3]{a}\times\sqrt[5]{a}}$$

$$=a\sqrt[3]{\sqrt[15]{a^5}\times\sqrt[15]{a^3}}$$

$$=a\sqrt[3]{\sqrt[15]{a^5.a^3}}=a\sqrt[3]{\sqrt[15]{a^8}}$$

$$=a\sqrt[45]{a^8}$$

$$8)\ \frac{\sqrt[3]{a^2}\div\sqrt[7]{a^3}}{\sqrt[21]{a^{12}}}=\frac{\sqrt[21]{(a^2)^7}\div\sqrt[21]{(a^3)^3}}{\sqrt[21]{a^{12}}}$$

$$=\sqrt[21]{\frac{a^{14}\div a^9}{a^{12}}}=\sqrt[21]{\frac{a^5}{a^{12}}}=\sqrt[21]{\frac{1}{a^7}}$$

$$=\sqrt[21]{(\frac{1}{a})^7}=\sqrt[3]{\frac{1}{a}}$$

مسألهٔ مسابقه‌ای

(ابن هیثم قرن یازدهم، فیبوناتچی اوایل قرن سیزدهم).
از سبدی هر بار ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ عدد تخم‌مرغ بیرون می‌آوریم. اما در هر بار، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ عدد تخم‌مرغ در سبد می‌ماند. اگر هر بار، ۷ تخم‌مرغ را بیرون بیاوریم، تخم‌مرغی در سبد نمی‌ماند. حداقل، چند تخم‌مرغ ممکن است در سبد باشد.

حل مسائل مسابقه‌ای برهان ۲۹

مسأله: باقیماندهٔ تقسیم عدد زیر را بر ۵ حساب کنید:

$$S=1^n+2^n+3^n+4^n+5^n+6^n+7^n+8^n$$

حل: می‌دانیم اگر n فرد باشد x^n+y^n بر $x+y$ بخش‌پذیر است. پس 2^n+8^n ، 3^n+7^n و 6^n+4^n بترتیب به $2+8$ ، $3+7$ و $6+4$، یعنی ۱۰ بخش‌پذیرند. پس ماندهٔ تقسیم S بر ۵ مساوی است با 1^n، یعنی ۱.

اگر n زوج باشد فرض می‌کنیم $n=2k$ ، آن‌گاه داریم:

$$S=1+4^k+9^k+16^k+25^k+36^k+49^k+64^k$$

اولاً اگر k زوج باشد هریک از جمله‌ها به صورت $(5m+1)$ هستند بجز 25^k؛ پس ماندهٔ تقسیم S بر ۵ مساوی است با ماندهٔ تقسیم: $7=1+1+1+1+1+1+1$ بر ۵، یعنی ۲.

ثانیاً اگر k فرد باشد عددهای 4^k ، 9^k، 49^k و 64^k به صورت $(5m-1)$ و عددهای 16^k و 36^k به صورت $(5m+1)$ می‌باشند در نتیجه ماندهٔ تقسیم S بر ۵ مساوی است با:

$$1-1-1+1+0+1-1-1=-1$$

و یا: $4=(-1)+5$

جزء صحیح

مؤلف: مظفّر غربی

انتشارات یکان

با توجه به کاربرد گستردهٔ «توابع جزء صحیح» در شاخه‌های مختلف علوم پایه و خلأ کتاب مدوّن در زمینه‌های، حل و بحث معادلات شامل جزء صحیح، رسم نمودار توابع شامل جزء صحیح، رسم نمودار دنباله‌های شامل جزء صحیح، رسم نمودار توابع هذلولی و توابع معکوس آنها و آرکهای شامل جزء صحیح، این کتاب تألیف شده است.

مؤلف محترم ،کتاب را از طرف استان کردستان به کمیتهٔ سال جهانی ریاضیات اهدا کرده است. مطالعهٔ این کتاب را به همهٔ دانش‌آموزان و علاقه‌مندان ریاضی توصیه می‌کنیم.

گنجینه ای از تئوری اعداد

مؤلف: بهزاد صالحیان

انتشارات مهاجر

نظریهٔ اعداد یکی از شاخه‌های بسیار پربار ریاضیات است که ریشه در اعماق تاریخ بشر دارد. از زمانی که انسان شمارش را آغاز کرد، نظریهٔ اعداد را نیز بنیاد نهاد. پیشینهٔ این نظریه به حدود چهارهزار سال پیش ـ یعنی به تمدن بابلی و سومری ـ می‌رسد.

اکنون در آستانهٔ قرن بیست و یکم، نظریهٔ اعداد ـ بخصوص با حل قضیهٔ آخر فرما، توسط اندرو وایلز ـ یکی از شکوفاترین و پیشروترین شاخه‌های ریاضیات محسوب می‌شود.

در این کتاب سعی شده است تا قضایا و مفاهیمی آورده شود که هم برنامهٔ درسی دبیرستانی را پوشش دهد و هم برای دانش‌آموزانی که مایل به داشتن دانش بیشتری در این زمینه از ریاضیات هستند، مفید باشد.

همچنین، در این کتاب صدها مسألهٔ نمونه به طور کامل حل شده است، تا خواننده با نمونه‌های بیشتری از مسائل حل شده و روشهای حل آنها آشنا گردد. در پایان هر فصل، تعداد زیادی تمرین گنجانده شده تا خواننده بتواند با استفاده از آنها هم مطالب فراگرفته شده را دوباره مرور و تمرین کند و هم مأخذی از سؤالات متنوع در دسترس داشته باشد.

تعیین تعداد روابط روی یک مجموعهٔ متناهی، تحت شرایطی خاص

از جمله منعکس بودن، متقارن بودن و ....، هم ارز بودن رابطه

قابل استفادهٔ دانش آموزان دورهٔ پیش‌دانشگاهی (ریاضیات گسسته)

● ترجمه و جمع آوری: سیمین اکبری زاده
دبیر ریاضی ـ اراک

● منبع مورد استفاده: ریاضیات گسسته و ترکیبیاتی (رالف ـ پ ـ گریمالدی)

برای یادآوری ابتدا تعریف خاصیت مورد نظر، مطرح می‌شود و سپس به بررسی تعیین تعداد روابطی که دارای آن خاصیت می باشند، می پردازیم.

تعریف رابطه: هرگاه A و B دو مجموعه دلخواه باشند، هر زیرمجموعهٔ $A\times B$ را یک رابطه از A در B می‌نامیم.

قرارداد: هرگاه R از A در A تعریف شود، یعنی $R\subset A\times A$ می‌گوییم رابطهٔ R روی A تعریف شده است.

مسألهٔ ۱: برای رابطهٔ R روی مجموعه A، فرض کنید $R^\circ=\{(a,a)|a\in A\}$. اگر $|A|=n$، ثابت کنید $s,t\in W$ وجود دارد که $0\le s<t\le 2^{n^2}$، به طوری که $R^s=R^t$ (راهنمایی: از اصل لانهٔ کبوتری استفاده کنید).

($W=N\cup\{0\}$ = مجموعه اعداد حسابی)

حل: می‌دانیم تعداد روابط تعریف شده روی مجموعهٔ A برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $A\times A$. با توجه به این که $|A\times A|=n^2$ لذا تعداد روابط تعریف شده روی مجموعهٔ A، برابر است با 2^{n^2}. از طرفی، تعداد اعداد حسابی از ۰ تا 2^{n^2}، برابر $2^{n^2}+1$ می‌باشد. لذا طبق اصل لانهٔ کبوتری، چون $2^{n^2}+1>2^{n^2}$، هرگاه روابط تعریف شده روی مجموعهٔ A را لانهٔ کبوترها و اعداد طبیعی از ۰ تا 2^{n^2} را کبوترها درنظر بگیریم، نتیجه خواهیم گرفت، دوعدد حسابی مانند s و t وجود دارد که $0\le s<t\le 2^{n^2}$، به طوری که $R^s=R^t$.

تعریف. خاصیت بازتابی (انعکاسی): هرگاه $A\neq\varnothing$ و رابطهٔ R روی A تعریف شده باشد گوییم R خاصیت بازتابی یا انعکاسی دارد؛ هرگاه برای هر عضو مجموعهٔ A مانند a، (a,a) در R موجود باشد.

تعیین تعداد روابط منعکس روی مجموعهٔ متناهی A

فرض می‌کنیم A مجموعه‌ای متناهی با n عضو باشد. قرار می‌دهیم:

$$A=\{a_1,a_2,...a,a_n\}$$

می‌دانیم هر رابطه، زیر مجموعه‌ای از حاصل ضرب دکارتی $A\times A$ است و

$$A\times A=\{(a_1,a_1),...,(a_n,a_n),(a_1,a_2),...,(a_{n-1},a_n)\}$$

$|A\times A|=|A|\times|A|=n^2$. برای پیدا کردن تعداد روابط منعکس روی A، باید ببینیم، برای هر عضو $A\times A$ چند انتخاب وجود دارد.

$A\times A$ را به صورت اجتماع دو مجموعهٔ جدااز هم A_1 و A_2 درنظر می‌گیریم:

$$A_1=\{(a_i,a_i)|1\le i\le n\}\Rightarrow|A_1|=n$$

$$A_2=\{(a_i,a_j)|1\le i,j\le n, i\ne j\}$$

$$\Rightarrow|A_2|=|A\times A|-|A_1|=n^2-n$$

با توجه به این که هدف، پیدا کردن تعداد روابط منعکس مثل R روی A است، طبق تعریف، رابطهٔ منعکس هریک ازاعضای A_1 (زوجهای مرتّب با دو مؤلّفهٔ یکسان) حتماً باید عضو R باشند. پس برای هر عضو A_1 یک انتخاب وجود دارد.

برای هریک از اعضای A_2 (زوجهای مرتّب با دو مؤلّفه متفاوت) دو انتخاب وجود دارد (می‌تواند عضو رابطهٔ R باشد یا نباشد).

بنابراین طبق اصل ضرب $\underbrace{1\times1\times...\times1}_{n\text{ بار}}\times\underbrace{2\times2\times...\times2}_{n^2-n}=2^{n^2-n}$ رابطهٔ منعکس روی مجموعهٔ n عضوی A می‌توان نوشت.

تعریف: *خاصیت تقارنی*: گوییم رابطهٔ R روی مجموعهٔ ناتهی A خاصیت تقارنی دارد؛ هرگاه برای هر زوج مرتّب مانند (x و y) که در R موجود است، (y و x) نیز در R موجود باشد.

تعیین تعداد روابط متقارن روی مجموعهٔ n عضوی A

برای شمردن تعداد روابط متقارن روی $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$، $A\times A$ را به صورت اجتماع دو مجموعهٔ جدا از هم A_1 و A_2 می‌نویسیم، که:

$$A_1=\{(a_i\ ,a_i)|1\le i\le n\}\Rightarrow|A_1|=n$$

و

$$A_2=\{(a_i\ ,a_j)|1\le i\ne j\le n\}\Rightarrow|A_2|=n^2-n$$

بنابراین هر زوج مرتّب $A\times A$ دقیقاً دریکی از دو مجموعهٔ A_1 و A_2 وجود دارد. مجموعهٔ A_2 شامل $\frac{n^2-n}{2}$ زیرمجموعهٔ ۲ عضوی به شکل $S_{ij}=\{(a_i,a_j),(a_j,a_i)|1\le i<j\le n\}$ می‌باشد. با توجه به این که هدف ساختن رابطهٔ متقارن R روی A می‌باشد، هریک از n عضو A_1 می‌تواند عضو R باشد یا نباشد، لذا برای هر عضو A_1 دو انتخاب وجود دارد.

و نیز برای هریک از $\frac{n^2-n}{2}$ زیر مجموعهٔ A_2 (S_{ij}، $1\le i<j\le n$) دو انتخاب وجود دارد (می‌توانند هر دو زوج مرتّب، اعضای رابطهٔ R باشند یا هیچ کدام از دو زوج، عضو R نباشند). بنابراین، طبق اصل ضرب $2^n\times2^{\frac{n^2-n}{2}}=2^{\frac{n^2+n}{2}}$ رابطهٔ متقارن روی مجموعهٔ n عضوی A موجود است.

تعیین تعداد روابط منعکس و متقارن روی مجموعهٔ n عضوی A

با روشی مشابه، تعیین تعداد روابط متقارن روی A عمل می‌کنیم؛ با این تفاوت که چون رابطه، علاوه بر متقارن بودن، باید منعکس نیز باشد، لذا برای هر زوج مرتّب در A_1 فقط یک انتخاب وجود دارد (چون حتماً باید عضو رابطه باشد). بنابراین، تعداد

روابط منعکس و متقارن برابر است با : $2^{\frac{n^2-n}{2}} = 1^n \times 2^{\frac{n^2-n}{2}}$.

تعریف: *خاصیت پادمتقارن* : فرض کنید، R رابطه‌ای روی مجموعهٔ A باشد ($R \subseteq A \times A$). رابطهٔ R پاد متقارن نامیده می‌شود ؛ هرگاه برای هر $a,b \in A$ ، اگر $(a,b) \in R$ و نیز $(b,a) \in R$ ، آن‌گاه $a = b$.

مثال ۱: هرگاه $A = \{1,2\}$ ، رابطهٔ $R = \{(1,2),(2,1)\}$ یک رابطهٔ پاد متقارن روی A نیست ؛ چون $(1,2) \in R$ و نیز $(2,1) \in R$ ولی $2 \neq 1$.

مثال ۲: برای مجموعهٔ مفروض U، رابطهٔ R را روی $P(U)$ (مجموعهٔ تمام زیر مجموعه‌های U) به‌صورت زیر درنظر بگیرید :

برای هر $A,B \subseteq U$ و $ARB \Leftrightarrow A \subseteq B$. این رابطه، یک رابطه پاد متقارن است ؛ زیرا اگر ARB و BRA، آن‌گاه $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$. لذا طبق تعریف تساوی مجموعه‌ها، خواهیم داشت : $A = B$.

توجه: «متقارن نیست» با «پاد متقارن است» هم معنا نیست (این موضوع در مثال زیر بررسی می‌شود).

مثال ۳: برای $A = \{1, 2, 3\}$ ، رابطهٔ R را روی A چنین تعریف کنید : $R = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3)\}$. این رابطه پادمتقارن نیست ؛ چون $(2, 1) \in R$ و $(1, 2) \in R$ ولی $2 \neq 1$. R متقارن هم نیست ؛ چون $(2, 3) \in R$ ولی $(3, 2) \notin R$. یا رابطهٔ $R_1 = \{(1, 1), (2, 2)\}$ روی A، هم متقارن است و هم پادمتقارن.

مسألهٔ ۲: آیا رابطهٔ عاد کردن روی مجموعه اعداد صحیح، پادمتقارن است؟

حل: خیر، چون برای هر $a \in Z$ ، $a|-a$ و $-a|a$ ولی $a \neq -a$ $(a \neq 0)$.

تعیین تعداد روابط پاد متقارن روی مجموعهٔ n عضوی A

با روشی مشابه تعیین تعداد روابط متقارن روی A عمل می‌کنیم. ولی با توجه به این که هدف، نوشتن رابطهٔ پادمتقارن است، برای هریک از $\frac{n^2 - n}{2}$ زیرمجموعهٔ $S_{ij} = \{(a_i , a_j), (a_j , a_i) | 1 \leq i < j \leq n\}$ در A_2 سه انتخاب وجود دارد (۱ـ ممکن است فقط $(a_i , a_j) \in R$ ۲ـ ممکن است فقط $(a_j , a_i) \in R$ ۳ـ ممکن است هیچ‌کدام عضو رابطه R نباشند).

و برای هریک از n عضو مجموعهٔ A_1 ، ۲ انتخاب وجود دارد (یا عضو رابطهٔ R هست و یا نیست).

لذا طبق اصل ضرب $2^n \times 3^{\frac{n^2-n}{2}}$ رابطهٔ پاد متقارن، روی مجموعهٔ n عضوی A موجود است.

تعیین تعداد روابط متقارن و پاد متقارن روی مجموعهٔ nعضوی A

اگر R هم خاصیت تقارنی و هم پاد تقارنی داشته باشد، باید زیرمجموعه‌ای از رابطهٔ همانی باشد و هرگاه R روی یک مجموعهٔ n عضوی تعریف شده باشد، رابطهٔ همانی (رابطه‌ای متشکّل از تمام زوجهای مرتّب $A \times A$ که هردو مؤلّفه با هم برابر باشند) 2^n زیرمجموعه دارد. لذا تعداد چنین روابطی 2^n می‌باشد.

تعریف : *خاصیت تعدی* (ترایایی، تراگذری) : فرض کنیم رابطهٔ R روی مجموعهٔ A تعریف شده باشد، اگر برای هر $x,y,z \in A$ که $(x , y) \in R$ و $(y , z) \in R$، بتوانیم ثابت کنیم $(x , z) \in A$. گوییم R خاصیت تعدی دارد. مثل رابطهٔ $\leq$ روی مجموعهٔ اعداد حقیقی.

تعریف: *رابطهٔ هم‌ارزی* : رابطهٔ هم‌ارزی R روی A، رابطه‌ای است که هم انعکاسی، هم تقارنی و هم تعدی باشد.

تعداد روابط هم ارزی روی مجموعهٔ mعضوی A

در کتاب جبر واحتمال (نظام جدید) نشان داده شد که اگر $P = \{A_1 , A_2 , \ldots , A_m\}$ یک افراز برای مجموعهٔ A باشد،

برای پیدا کردن تعداد روابط هم ارزی روی مجموعهٔ m عضوی A، کافی است تعداد افرازهای مجموعه A را به دست آوریم.

تعیین تعداد راه‌های افراز یک مجموعهٔ m عضوی به n زیر مجموعه ناتهی (تعداد راه‌های توزیع m شئ مختلف داخل n ظرف مشابه، به طوری که هیچ ظرفی خالی نماند).

هرگاه A و B دو مجموعهٔ متناهی باشند که $|A| = m \geq n = |B|$، آن‌گاه تعداد توابع پوشای موجود از A به B، برابر است با:

$$\binom{n}{n}n^m - \binom{n}{n-1}(n-1)^m + \binom{n}{n-2}(n-2)^m - \dots$$

$$+(-1)^{n-1}\binom{n}{1}1^m = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{n-k}(n-k)^m$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{n-k}(n-k)^m$$

(حالت خاص این موضوع، با انتخاب $n = 3$ و $m = 4$ در کتاب ریاضیات گسستهٔ پیش‌دانشگاهی، با استفاده از اصل طرد و شمول اثبات شده است.)

مثال: هرگاه $A = \{a, b, c, d\}$ و $B = \{1, 2, 3\}$، تعداد توابع پوشا از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B، با درنظر گرفتن $|A| = m = 4$ و $|B| = n = 3$ برابر است با:

$$\sum_{k=0}^{3}(-1)^k\binom{3}{3-k}(3-k)^4 = \binom{3}{3}3^4 - \binom{3}{2}2^4 + \binom{3}{1}1^4$$

$$+0 = 36$$

به طور مشابه، برای توزیع ۴ شیء متمایز در ۳ ظرف متفاوت، به‌طوری که هیچ ظرفی خالی نماند، ۳۶ راه وجود دارد. در بین این ۳۶ توزیع مجموعه‌های ۶ تایی می‌یابیم. به عنوان مثال، یکی از این مجموعه‌های ۶ تایی عبارت است از:

۱) $\{a, b\}_1, \{c\}_2, \{d\}_3$

۲) $\{a, b\}_1, \{d\}_2, \{c\}_3$

۳) $\{c\}_1, \{a, b\}_2, \{d\}_3$

۴) $\{c\}_1, \{d\}_2, \{a, b\}_3$

۵) $\{d\}_1, \{a, b\}_2, \{c\}_3$

۶) $\{d\}_1, \{c\}_2, \{a, b\}_3$

(منظور از $\{c\}_2$ آن است که c در ظرف دوم قرار گرفته است).

حال اگر بین ظرفها تمایز قائل نشویم، این $3! = 6$ توزیع یکسان خواهند بود. بنابراین $\frac{36}{3!} = 6$ راه برای توزیع ۴ شئ متمایز بین ۳ ظرف مشابه، به طوری که هیچ ظرفی خالی نماند، وجود دارد.

به طور کلی برای $m \geq n$، $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{n-k}(n-k)^m$ روش برای توزیع m شئ مختلف در n ظرف شماره‌دار (که هیچ ۲ شماره‌ای همانند نیست)، بدون آن که ظرفی خالی بماند، وجود دارد.

اگر اعداد را از روی ظروف برداریم، ظروف به ظاهر مشابه خواهند بود و متوجه خواهیم شد هر توزیع داخل ظروف مشابه (غیرخالی)، با $n!$ از چنین توزیعهایی، داخل ظروف شماره‌دار متناظر است. لذا تعداد راه‌های ممکن برای توزیع m شئ متفاوت داخل n ظرف مشابه، به طوری که هیچ ظرفی خالی نماند، عبارت است از $\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{n-k}(n-k)^m$ که با $S(m, n)$ نشان داده می‌شود و عدد استرلینگ از نوع دوم نامیده می‌شود.*

مسألهٔ ۱: به چند روش می‌توان ۴ شئ متمایز d و c و b و a در ۲ ظرف مشابه قرار داد؛ به طوری که هیچ ظرفی خالی نماند؟ (به عبارت دیگر، تعداد افرازهای مجموعهٔ ۴ عضوی $\{a, b, c, d\}$ به ۲ زیرمجموعهٔ ناتهی را تعیین کنید).

حل: روش اوّل: استفاده از فرمول عدد استرلینگ، با قراردادن $m = 4$ و $n = 2$.

$$S(4,2) = \frac{1}{2!}\sum_{k=0}^{2}(-1)^k\binom{2}{2-k}(2-k)^4 = \frac{1}{2!}$$

$$\left[\binom{2}{2}2^4-\binom{2}{1}1^4+0\right]=7$$

روش دوم: درنظر گرفتن حالتهای مختلف:

الف) یک عضو در یک مجموعه و سه عضو باقیمانده در مجموعهٔ دیگر که این توزیع به $\binom{4}{1}\binom{3}{3}=4$ روش انجام می گیرد و عبارت است از :

۱) $\{a\},\ \{b,c,d\}$

۲) $\{b\},\ \{a,c,d\}$

۳) $\{c\},\ \{a,b,d\}$

۴) $\{d\},\ \{a,b,c\}$

ب) دو عضو در یک مجموعه و دو عضو باقیمانده در مجموعهٔ دیگر که این توزیع به $\frac{\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{2!}=3$ روش انجام می گیرد. (به این ترتیب که ابتدا از بین ۴ عضو، ۲ عضو انتخاب کرده و سپس از ۲ عضو باقیمانده، ۲ عضو انتخاب می کنیم. طبق اصل ضرب $\binom{4}{2}\binom{2}{2}$ راه برای توزیع موجود است. منتهی با توجه به این که به عنوان مثال، افرازهای ۱) $\{a,c\},\{b,d\}$ ۲) $\{b,d\},\{a,c\}$ هر دو یک افراز محسوب می‌شوند، حاصل را بر !۲ (تعداد جایگشتهای ۲ مجموعهٔ دوعضوی تقسیم می کنیم). این سه افراز متمایز، عبارتند از :

۱) $\{a,b\},\{c,d\}$

۲) $\{a,c\},\{b,d\}$

۳) $\{b,c\},\{a,d\}$

با توجه به قسمتهای الف و ب، و اصل جمع، خواهیم داشت :

$$S(4,2)=4+3=7$$

نکتهٔ ۱: به طور کلی برای $m\geq n$ ، $\sum_{i=1}^{n}S(m,i)$ روش برای توزیع m شئ متمایز داخل n ظرف مشابه، به طوری که مجاز به خالی ماندن ظروف باشیم، وجود دارد. به عبارت دیگر، تعداد افرازهای مجموعهٔ m عضوی به n زیرمجموعه نامرتّب (بدون محدودیت) برابر است با $S(m,1)+S(m,2)+\ldots+S(m,n)$

مسألهٔ ۲: به چند روش می توان ۴ شئ متمایز d و c و b و a را در ۳ ظرف مشابه قرار داد، به طوری که مجاز به خالی ماندن ظروف باشیم.

حل: ممکن است ۴ شئ در یک ظرف یا در دو ظرف و یا در هر ۳ ظرف قرار بگیرند، لذا طبق اصل جمع :

= تعداد توزیعهای ۴ شئ متمایز در ۳ ظرف مشابه یا کمتر

$$S(4,1)+S(4,2)+S(4,3)\overset{*}{=}1+7+6=14$$

$$\left(S(4,3)=\frac{1}{3!}\sum_{k=0}^{3}(-1)^k\binom{3}{3-k}(3-k)^4=\frac{1}{3!}\left[\binom{3}{3}3^4-\binom{3}{2}2^4+\binom{3}{1}1^4+\binom{3}{0}0^4\right]=\frac{1}{6}(81-48+3)=\underset{*}{6}\right)$$

> **نکتهٔ ۲:** تعداد کل راه‌های افراز یک مجموعهٔ m عضوی و نیز تعداد روابط هم‌ارزی روی مجموعهٔ m عضوی، برابر است با : $S(m,1)+S(m,2)+\ldots+S(m,m)=\sum_{i=1}^{m}S(m,i)$

مسألهٔ ۳: تعداد کل افرازهای مجموعهٔ ۴ عضوی $\{a,b,c,d\}$ را بیابید :

حل :

= تعداد افرازهای مجموعهٔ ۴ عضوی

$$\sum_{i=1}^{4}S(4,i)=S(4,1)+S(4,2)+S(4,3)+S(4,4)$$

$$=1+7+6+1=15$$

و بالاخره مسألهٔ ۴: تعداد روابط هم‌ارزی روی مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d\}$ را بیابید.

حل: تعداد روابط هم‌ارزی روی مجموعهٔ A، برابر است با تعداد افرازهای مختلف مجموعهٔ A، لذا طبق مسألهٔ ۳، جواب مسأله، ۱۵ می‌باشد.

مسألهٔ ۵: هرگاه $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ ، مشخص کنید تعداد

روابط روی A را که :

الف) منعکس هستند. ب) متقارن هستند.

پ) منعکس و متقارن هستند. ت) منعکس و شامل(۲و۱)هستند.

ث)متقارن و شامل(۲و۱)هستند. ج) پادمتقارن هستند.

چ) متقارن و پادمتقارن هستند.

ح) منعکس،متقارن و پادمتقارن هستند.

خ) منعکس، متقارن و متعدی (هم ارزی) هستند.

د) منعکس و متقارن، ولی غیر متعدی هستند.

ذ) هم ارزی هستند و دقیقاً ۲ کلاس هم‌ارزی را مشخص می‌کنند.

ر) هم‌ارزی هستند و ۱∈[۲]. ز) هم‌ارزی هستند و ۲∈[۴] و ۱.

حل:

الف) $2^{6^2-6}=2^{30}$

ب) $2^n\times 2^{\frac{n^2-n}{2}}=2^6\times 2^{15}=2^{21}$

پ) $1^n\times 2^{\frac{n^2-n}{2}}=2^{15}$

ت) $A\times A=\left\{\underbrace{(1,1),(2,2),\ldots,(6,6)}_{\text{(تعداد: ۶) ۱×۱×...×۱ انتخاب}},\underbrace{(1,2)}_{\text{۱ انتخاب}},\underbrace{(2,1),(1,3),(3,1),\ldots,(5,6),(6,5)}_{\text{(تعداد: ۲۹ = ۱ − ۶ − ۶}^2\text{) ۲×۲×۲×...×۲ انتخاب}}\right\}$

(۲و۱) زوجهای مرتب با دو مؤلفهٔ مساوی تعداد کل اعضای $A\times A$

جواب : $1^6\times 1\times 2^{29}=2^{29}$

ث) $A\times A=\left\{\underbrace{(1,1),(2,2),\ldots,(6,6)}_{\text{(تعداد: ۶) ۲×۲×...×۲ انتخاب}},\underbrace{((1,2),(2,1))}_{\text{۱ انتخاب}},\underbrace{((1,3),(3,1)),\ldots,((5,6),(6,5))}_{\text{(تعداد: }\frac{6^2-6}{2}-1=14\text{) ۲×...×۲ انتخاب}}\right\}$

تعداد زوجهای مرتبی که هر مؤلفهٔ آنها نیز یک زوج مرتب با مؤلفه‌های متفاوت است

$((1,2),(2,1))$

جواب : $2^6\times 1\times 2^{14}=2^{20}$

ج) $A\times A=\left\{\underbrace{(1,1),(2,2),\ldots,(6,6)}_{\text{(تعداد: ۶) ۲×۲×...×۲ انتخاب}},\right.$

$\left.\underbrace{((1,2),(2,1)),((1,3),(3,1)),\ldots,((5,6),(6,5))}_{\text{(تعداد: ۱۵ = }\frac{6^2-6}{2}\text{) → ۳ × ۳ × ... × ۳ × ۳ انتخاب}}\right\}$

جواب: $2^6\times 3^{15}$

چ) جواب : 2^6

ح) جواب: ۱ عبارت است از: $\{(1,1),(2,2),\ldots,(6,6)\}$

خ) $\text{تعداد}=\sum_{i=1}^{6}S(6,i)=S(6,1)+S(6,2)+S(6,3)+S(6,4)+S(6,5)+S(6,6)$

$=1+31+90+65+15+1=203$ رابطهٔ هم‌ارزی

روشهای محاسبهٔ $S(6,i)$، $1\le i\le 6$: روش اوّل (با استفاده از فرمول عدد استرلینگ):

به عنوان مثال، روش محاسبهٔ $S(6,3)$ با استفاده از فرمول عدد استرلینگ نوشته می‌شود:

$S(6,3)=\frac{1}{3!}\sum_{k=0}^{3}(-1)^k\binom{3}{3-k}(3-k)^6$ یعنی تعداد افرازهای مجموعهٔ ۶ عضوی، به ۳ زیرمجموعهٔ ناتهی ۹۰ می‌باشد

$$=\frac{1}{3!}\left(3^6-\binom{3}{2}2^6+\binom{3}{1}1^6+0\right)=\frac{729-192+3}{6}=90$$

روش دوم (بدون استفاده ازفرمول عدد استرلینگ):

$S(6,1):\ \{\square\ \square\ \square\ \square\ \square\ \square\}\Rightarrow S(6,1)=1$

$S(6,2)$:

الف) $\{\square\ \square\ \square\ \square\ \square\}\{\square\}\Rightarrow\binom{6}{5}\binom{1}{1}=6$ = تعداد افرازهای مجموعهٔ ۶ عضوی، به ۲ زیر مجموعهٔ ۵ عضوی و یک عضوی

ب) $\{\square\ \square\ \square\ \square\}\{\square\ \square\}\Rightarrow\binom{6}{4}\binom{2}{2}=15$ = تعداد افرازهای مجموعهٔ ۶ عضوی، به ۲ زیر مجموعهٔ ۴ عضوی و دو عضوی

ج) $\{\square\ \square\ \square\}\{\square\ \square\ \square\}\Rightarrow\frac{\binom{6}{3}\binom{3}{3}}{2!}=10$ = تعداد افرازهای مجموعهٔ ۶ عضوی، به ۲ زیر مجموعهٔ ۳ عضوی

یعنی تعداد افرازهای مجموعهٔ ۶ عضوی، به ۲ زیرمجموعهٔ ناتهی، ۳۱ می‌باشد. الف و ب و ج $\xrightarrow{\text{طبق اصل جمع}} S(6,2)=6+15+10=31$

$$S(6,3):\begin{cases}\{\square\ \square\ \square\ \square\}\{\square\}\{\square\}\Rightarrow \\ \{\square\ \square\ \square\}\{\square\ \square\}\{\square\}\Rightarrow \\ \{\square\ \square\}\{\square\ \square\}\{\square\ \square\}\Rightarrow\end{cases}$$

$15=\dfrac{\binom{6}{4}\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{2!}=$ تعداد افرازهای مجموعهٔ ۶ عضوی، به ۱ زیرمجموعهٔ ۴ عضوی و ۲ زیرمجموعهٔ یک عضوی

$60=\binom{6}{3}\binom{3}{2}\binom{1}{1}=$ تعداد افرازهای مجموعهٔ ۶ عضوی، به ۱ زیر مجموعهٔ ۳ عضوی و ۱ زیر مجموعهٔ ۲عضوی و ۱ زیرمجموعهٔ یک عضوی

$15=\dfrac{\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{3!}=$تعداد افرازهای مجموعهٔ ۶ عضوی، به ۳ زیر مجموعهٔ ۲ عضوی

د) می‌دانیم: $n(A\cap B\cap C')=n(A\cap B)-n(A\cap B\cap C)$

جواب: $\xrightarrow{\text{طبق قسمتهای «ب» و «خ»}} 2^{15}-203=32565$

ذ) جواب $=S(6,2)=31$

ر) برای تعیین تعداد افرازهای A، به طوری که اعداد ۱ و ۲ در یک کلاس هم‌ارزی (زیرمجموعهٔ A) موجود باشند، اعداد ۱ و ۲ را با هم یکی درنظر می‌گیریم و تعداد افرازهای متمایز یک مجموعهٔ ۵ عضوی را می‌یابیم که عبارت است از :

$$\sum_{i=1}^{5}S(5,i)=S(5,1)+S(5,2)+S(5,3)+S(5,4)$$
$$+S(5,5)=1+15+25+10+1=52$$

ز) کافی است اعداد ۱، ۲ و ۴ را یک عضو در نظر گرفته و تعداد افرازهای متمایز یک مجموعهٔ ۴عضوی را بیابیم که برابر است با :

$$\sum_{i=1}^{4}S(4,i)=S(4,1)+S(4,2)+S(4,3)+S(4,4)=$$
$$1+7+6+1=15$$

این۱۵ افراز را می‌توان با روش زیر نیز به‌دست آورد.

۱) افرازهایی از A به صورت $\{\overset{?}{\square},\overset{?}{\square},\overset{?}{\square}\}$ و $\{1,2,4\}$.

تعداد چنین افرازهایی برابر است با $1=\binom{3}{3}$.

۲) افرازهایی از A به صورت $\{\overset{?}{\square},\overset{?}{\square}\}$ و $\{\overset{?}{\square}\}$ و $\{1,2,4\}$.

تعداد چنین افرازهایی برابر است با $3=\binom{3}{2}\binom{1}{1}$.

۳) افرازهایی از A به صورت $\{\square\}$ و $\{\square\}$ و $\{\square\}$ و $\{1,2,4\}$.

تعداد چنین افرازهایی برابر است با $1=\dfrac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{3!}$.

۴) افرازهایی از A به صورت $\{\square,\square\}$ و $\{1,2,4,\square\}$. تعداد چنین افرازهایی برابر است با $3=\binom{3}{1}\binom{2}{1}$.

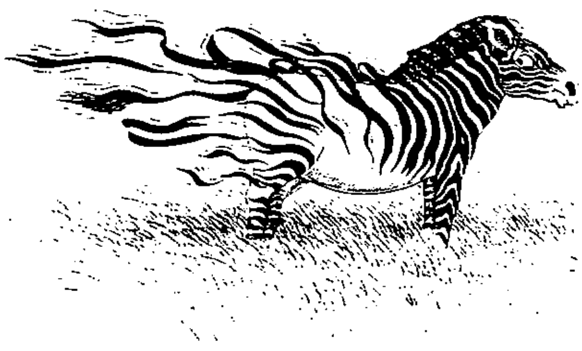
۵) افرازهایی از A به صورت $\{\square\}$ و $\{\square\}$ و $\{1,2,4,\square\}$.

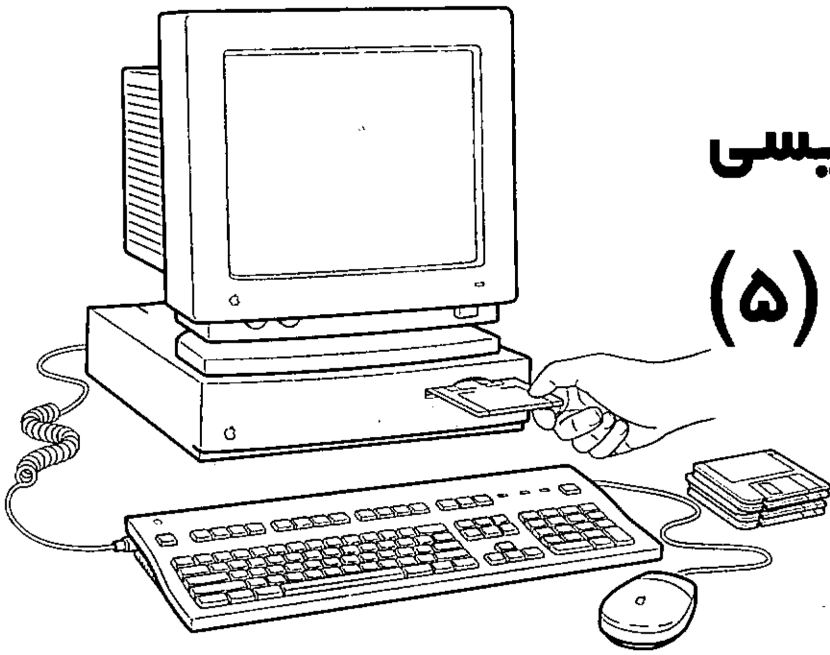
تعداد آنها برابر است با $3=\dfrac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{2!}$.

۶) افرازهایی از A به صورت $\{\square\}$ و $\{1,2,4,\square,\square\}$، تعداد آنها برابر است با $3=\binom{3}{2}\binom{1}{1}$.

۷) افرازهایی از A به صورت $\{1,2,4,\square,\square,\square\}$. تعداد آنها $1=\binom{3}{3}$ می‌باشد که همان مجموعهٔ A است.

جواب مسأله : $1+3+1+3+3+3+1=15$





آموزش برنامه نویسی به زبان پاسکال (۵)

• محمد رحیم

شکل‌دهی خروجی[1] در دستور چاپ

در شمارهٔ ۲۶ مجلهٔ برهان، به دستورهای write و writeln اشاره کردیم. در رابطه با این دو دستور، نکاتی وجود دارد. مترجم[2] زبان پاسکال به‌طور پیش‌فرض، اعداد صحیح و اعشاری و نیز کارکترها و رشته‌ها[3] را از جایی که مکان‌نما قرار دارد، از سمت چپ به راست می‌نویسد و به‌طور خاص، اعداد اعشاری را به‌طور پیش‌فرض، به صورت توانی از ۱۰ (به‌طور مثال، 5000000E+02) نمایش می‌دهد، که معمولاً کاربر نمی‌پسندد. از طرفی، در بعضی از برنامه‌ها کاربران نیاز دارند تا نتایج حاصل از برنامهٔ آنها در قالب سطر و ستون و زیر هم چاپ شوند. در مترجم زبان پاسکال، تسهیلاتی در این زمینه وجود دارد که با استفاده از آنها می‌توان خروجی را مطابق با خواست خود شکل‌دهی کنیم. به‌این منظور، می‌بایست تعداد فضای لازم برای نمایش خروجی، روی صفحهٔ نمایش مشخص شود. این عمل بدین‌صورت انجام می‌شود که پس از نام متغیر موردنظر، علامت : را می‌آوریم و سپس تعداد فضای لازم را مشخص می‌کنیم ؛ یعنی :

تعداد فضای لازم : متغیر یا عبارت رشته‌ای و کارکتری

تعداد فضای لازم : متغیر یا عبارت عددی صحیح

تعداد فضای اعشاری : تعداد فضای لازم : متغیر یا

عبارت عددی اعشاری

همان‌طور که در بالا مشاهده می‌شود، در مورد اعداد اعشاری، ابتدا باید تعداد فضای لازم برای کلّ عدد اعشاری (شامل بخش صحیح، علامت اعشار و بخش اعشاری) را مشخص کرد و بعد از آن باید تعداد فضای لازم برای بخش اعشاری مشخص شود.

به مثالهای زیر توجه کنید :

مثال ۱:

```
var
   A,B,C: Integer;
   Name : string;
begin
   A:=1;
   B:=2;
   C:=3;
   Name:= 'Borhan';
   writeln (A,B,C);
   writeln (A:2,B:2,C:2);
   writeln ('This is', Name);
   writeln ('This is', Name: 7);
end.
```

خروجی برنامه چنین است :

```
123
1 2 3
This is Borhan
This is Borhan
```

مثال ۲:

```
var
   A,B,C: Integer;
begin
   A: = 10;
   B: = 2;
   C: = 100;
   writeln (' =⇒',A,B,C);
   writeln (' =⇒',A:2 ,B:2,C:2);
   writeln (' =⇒',A:3,B:3,C:3);
   writeln (' =⇒',A,B:2,C:4);
end.
```

خروجی برنامه چنین است:

```
=⇒102100
=⇒10 2100
=⇒10  2100
=⇒10 2100
```

مثال ۳:

```
var
   x: Real;
begin
   x: = 421.53;
   writeln (x);
   writeln (x:8);
end.
```

خروجی برنامه چنین است :

```
4.2153000000E+02
4.2E+02
```

مثال۴:

```
var
   x:real;
begin
   x:=421.53;
   writeln (x:6:2);
   writeln (x:8:2);
   writeln (x:8:4);
end.
```

خروجی برنامه چنین است :

```
421.53
  421.53
421.5300
```

به نکات زیر توجه شود :

۱ـ اگر فضای تخصیص داده شده، از تعداد فضای عبارت یا متغیر کمتر باشد، مترجم پاسکال، فضای تخصیص داده شده را درنظر نمی‌گیرد و هنگام چاپ و نمایش، تعداد فضای عبارت یا متغیر را ملاک عمل خود قرار می‌دهد.

۲ـ همان‌طور که در مثالهای فوق مشخص است، مترجم پاسکال به‌طور پیش فرض، به صورت «تنظیم از چپ»[4] عمل می کند ؛ یعنی عبارت مورد نظر را در فضای مربوطه از سمت چپ می‌نویسد. با قرار دادن علامت منفی، جلو تعداد فضای لازم، مترجم پاسکال به صورت «تنظیم از راست»[5] عمل خواهد کرد.

نکات فوق در مثال زیر گنجانیده شده است :

مثال ۵:

```
begin
   writeln ('=⇒' ,12:5);
   writeln ('=⇒' ,1234567:5);
   writeln ('=⇒' ,12: –5);
   writeln ('=⇒' ,'Rahim':7);
   writeln ('=⇒' ,'Rahim': –7);
   writeln ('=⇒' ,1.5:5:0);
   writeln ('=⇒' ,1.5:5:1);
   writeln ('=⇒' ,1.5: –5:0);
end.
```

خروجی برنامه چنین است :

```
=⇒   12
=⇒1234567
=⇒12
=⇒  Rahim
=⇒Rahim
=⇒
```

==⇒ 1.5

==⇒

ساختارهای کنترلی[6]

تا این‌جا با دستورهای ورودی و خروجی آشنا شدیم. در این بخش و نیز در ادامهٔ آن، شما را با ساختارهای کنترلی آشنا می‌کنیم.

دستور IF

این دستور، هنگامی به‌کار می‌رود که بخواهیم تعدادی از دستورهای برنامه را در صورت برقراری یک یا چند شرط، اجرا کنیم. دستور IF چنین است: if شرط Then دستور;

در واقع، دستور مورد نظر، هنگامی اجرا می‌شود که شرط موردنظر برقرار باشد؛ در غیر این صورت این دستور، اجرا نشده و مترجم سراغ دستورهای بعدی برنامه می‌رود.

مثال ۱:

```
if x<10 Then
    writeln ('x=', x);
```

مثال ۲:

```
if (x<10) and (x>2) Then
    writeln ('2<x<10' );
```

همان‌طوری که در مثال ۲ دیده می‌شود، در صورتی که بخواهیم می‌توانیم از چندین شرط استفاده کنیم. در چنین حالتی، اگر کلّ عبارت شرطی برابر TRUE باشد، دستور موردنظر اجرا می‌شود. و در مثال ۲، اگر 2<x<10 باشد، این عبارت برابر TRUE خواهد شد.

در غیراین‌صورت FALSE می‌شود. برای ساختن یک عبارت شرطی، می‌توان از «عملگر»[7] های نسبی[8] یا منطقی[9] استفاده کرد. این عملگرها در شماره‌های قبل، توضیح داده شده‌اند. نکتهٔ مهمی را که باید به آن اشاره کرد، این است که دستور IF فقط یک دستور را تحت پوشش قرار می‌دهد؛ در صورتی که بخواهیم دستورهای بیشتری تحت پوشش قرار بگیرد، باید از یک بلوک فرعی استفاده کرد. به مثالهای زیر توجه کنید.

مثال ۳:

```
x: = 4;
if x>6 Then
    writeln ('x=',x);
    writeln ('x>'2);
```

اگر قطعه برنامهٔ فوق را اجرا کنیم، نتیجه چنین است: x>2

در مثال فوق، مشاهده می‌شود که برقراری یا عدم برقراری شرط در دستور if تأثیری در اجرای دومین دستور writeln ندارد؛ چون خارج از دستور if است. برای آن که هر دو دستور تحت شرط دستور if قرار گیرند، باید از بلوک فرعی استفاده کرد. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۴:

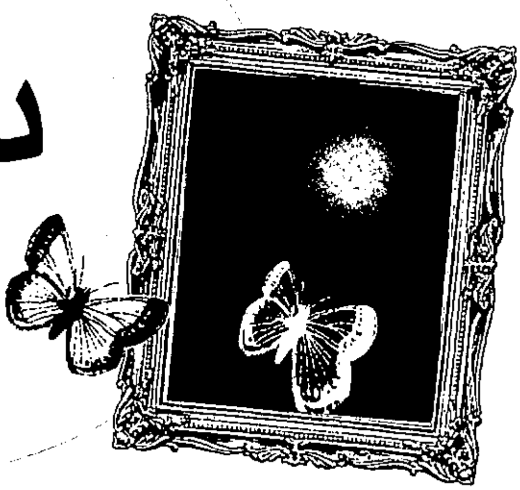
```
x: = 10;
If x>6 Then
begin
    writeln ('x =',x);
    writeln ('x >'6);
end.
```

واژه‌نامهٔ ریاضی و کامپیوتر

1- Format
2- Compiler
3- String
4- Left Justification
5 - Right Justification
6- Control Structure
7- Operator
8- Relational
9- Logical

در آینه

عالمی داشت...



• علی فرخ مهر

انشانویس کلاسها بودم. در آبادانِ داغ و پرشور، با آن مدرسه‌های خوب و منظّم، فقط به خاطرِ زنگهای انشا درخشندگی داشتم و در زنگهای ریاضی، دست به عصا و آهسته و پیوسته و گاهی هر دو پا در گِل!

معلمان ریاضی که به خود دیدم، آقایان: ریاحی، بدیعی، مریمی، دیلمقانی، مختاری درخشان و عمیدی بودند. آقای هاشمی را هم فراموش نکنم که لاغر اندام بود و سفیدچهره، و موهای نرم قهوه‌ای شانه خورده. آذری و خیلی جدّی! عبوس بودن و نظم او، کاری کرد که این من! از درس جبر بگیرم نمرهٔ نوزده! فقط به‌خاطرِ ترس از آبرو! فقط به‌خاطرِ حفظ آبرومندی!

کسی که در زنگهای انشا بچه‌ها برای او کف می‌زدند، البته که نباید در زنگِ جبر یا مثلثات، خراب می‌کرد!

کسی که بارها موردِ تشویق آقایان اسدی لاری[1]، سیّدرضا طباطبایی، فیلی شیرازی و جوان قرار می‌گرفت، نمی‌باید در زنگهای ریاضی، آبروریزی می‌کرد! درحدّ توان سعی خودم را می‌کردم. امّا ادبیات و زنگهای انشا، عالمی داشت؛ زیبا، دلربا و مثلِ باغ هزار نقش!

آشنایی با آقای علی عمیدی[2] و آقای علی مختاری درخشان، کاری کرد که بدانم خیلی از معلمان ریاضی، «ادبیات» را هم دوست دارند و با آن کلامِ خوش و لحنِ زیبا و ذوق لطیف، می‌توانند ادبیات را هم خیلی خوب و هنرمندانه درس بدهند!

بعدها در موسمِ دانشگاه، دیدار و آشنایی با استاد پرویز شهریاری، به من ثابت کرد که معلمان ریاضی آشنا با دنیای وسیع و لطیف ادبیات، خیلی بهتر می‌توانند موفّق شوند و در دلها رخنه و نفوذ کنند!

لحظه‌های درس و کلاسِ استاد پرویز شهریاری، عالمی داشت.

می‌خواهم بروم سراغ معلمانِ ریاضی که به خود دیده‌ام؛ و امروز در گوشه و کنارِ ایران، کار می‌کنند و زحمت می‌کشند، و خدمت به بچه‌ها.

از آن معلم خوبِ همدانی که به ما مرابحه و مشارکت و تنزیل و رفع و تجنیس درس می‌داد، تا آن معلمِ زحمتکش اما تندخوی آذربایجانی که گاهی بعضی از بچه‌ها را می‌بست به مشت و لگد! با آن چشمهای زاغ و چهرهٔ گلگون و پُرخون! به لطف خدا می‌خواهم طوری بگویم و به‌گونه‌ای که بچه‌ها قدر معلمانِ خوبِ خود را بدانند و معلمان عزیز و گرانمایهٔ ریاضی، بر ارزشهای خود واقفتر شوند. روشمندی و توانمندی معلم در تدریس یک طرف، و سوی دیگر، هنر رخنه و نفوذ او به دلها به خاطرِ سازندگی و پرورش آدمهای نیکو.

عالمی دارد سرکشی به دنیای بچه‌های کلاس! عالمی دارد بررسی و وارسی ریشه‌ها. عالمی دارد تماشای رخسارِ دانش‌آموز

و معلم، در آینه! آن هم دانش‌آموز ریاضی‌خوان و معلم ریاضیدان! آن هم گفت‌وگو در باب معلمانِ ریاضی که در طبقه‌بندی ذهنِ بچه‌ها صدرنشین‌اند! که دلَم می‌خواهد صدر نشینند و «قدر» بینند. که دلمان می‌خواهد، فکرِ بچه‌ها را به «تعادل»، به «پویندگی» به «هدفداری» و «آزادگی» عادت دهند.

مبنا و الفبای زندگی را معلمان ریاضی، خیلی خوب و دقیق می‌دانند و می‌شناسند. ذهنِ محاسبه‌گر و نکته‌سنج آنها، مو را از ماست بیرون می‌کشد. بابی که به بهانهٔ در آینه ـ در برهان ـ گشوده خواهد شد، محض خاطر گستردن سفرهٔ پند و اندرز نیست؛ به‌خاطر نگاه به آینه است برای خود شکستن و نه آینه را شکستن!

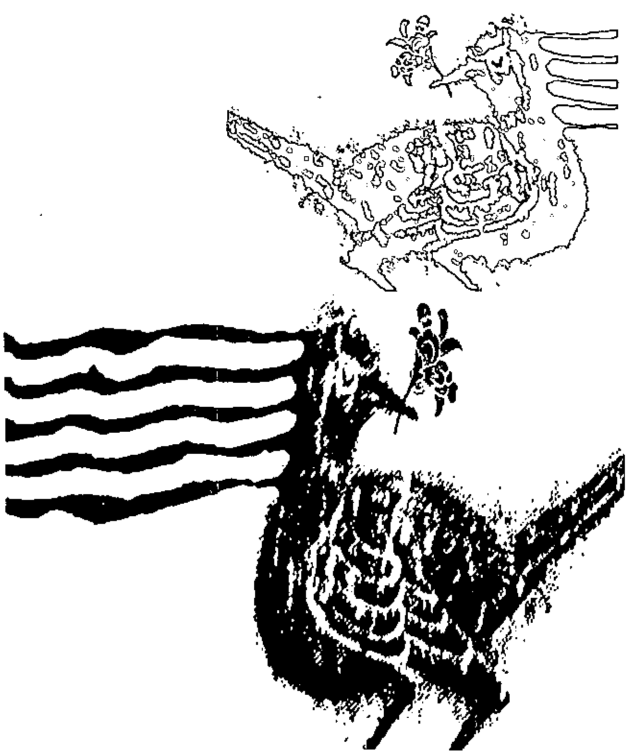
هرگز نشود بـه‌وصـل مغـرور   هر دیده که در فراق بیناست*

یادداشتها:

۱. زنده یاد دکتر حسن اسدی‌لاری که در زمان وزارت آقای دکتر اکرمی، معاونت پارلمانی وزارت آموزش و پرورش را عهده‌دار بود.

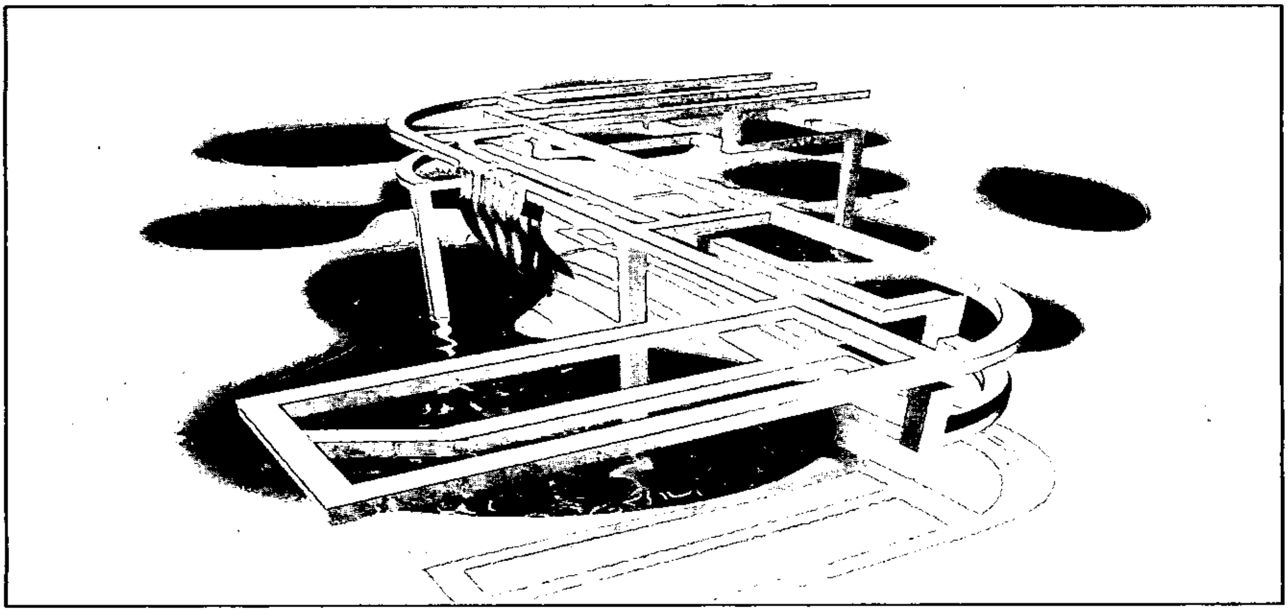
۲. دکتر علی عمیدی، که آن سالهای دور، از معلمان موفق و سرشناس ریاضی در آبادان بود.

* سنایی



«ابن بنّا»ی مراکشی، ریاضیدان و ستاره‌شناس مراکشی، متولد سال ۶۵۴ هجری در مراکش. وی پس از فراگرفتن صرف و نحو، حدیث، فقه و ریاضیات به تدریس ریاضیات و هیئت پرداخت. ابن بنّا دانشمندی جامع بود و در رشته‌های گوناگون دانش دست داشت. در بیان علوم به زبان ساده مهارت داشت و از اَجَلّهٔ محاسبان با ارقام بود. دانشمندی بود باوقار، نیک‌نَفس و پاکیزه‌خو.

ابن بنّا در ۵ رجب ۷۲۱ هجری در مراکش درگذشت. پس از مرگ وی، زمانی نگذشت که افسانه‌هایی درباره‌اش ساخته شد. مردم او را به منزلهٔ ساحری شمردند که با به‌کار بردن معلومات خود در سحر و ساحری، می‌توانسته اعجاز کند. اثر مهم وی، تلخیص «اعمالُ الحساب» ازمشهورترین کتابهای ریاضی در کشورهای اسلامی است که بیش از دو قرن مورد استفادهٔ دانشجویان این علم بوده است.



مکان هندسی و روش دو مکان هندسی در حلّ مسائل ترسیمی

• علیرضا عین اللهی

در این مقاله، به طور مختصر تصمیم داریم شما را با روشی از روشهای حلّ مسأله آشنا کنیم، که توسط آن، شما می‌توانید بسیاری از مسائل ترسیمی هندسهٔ خود را با کمی دقت و موشکافی، حل کنید.

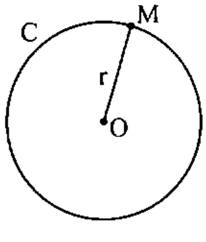
یکی از مفاهیمی که در هندسهٔ دورهٔ متوسطه با آن آشنا می‌شوید، مفهوم مکان‌هندسی است. فرض کنید A مجموعه‌ای از نقاط باشد و P یک ویژگی و خاصیت معین باشد. مجموعهٔ A را یک مکان‌هندسی می‌گوییم ؛ هرگاه دو شرط ذیل برقرار باشد :

I . هر نقطه در A خاصیت P دارد.

II . هر نقطه که خاصیت P دارد، عضو مجموعهٔ A است.

برای درک بهتر تعریف فوق، به مثالهای زیر توجه کنید :

مثال (۱): فرض کنید Cمجموعهٔ نقاط روی دایرهٔ شکل (۱) باشد و P این ویژگی باشد که «فاصلهٔ نقطهٔ دلخواه M از نقطهٔ ثابت O برابر عدد ثابت r است.» با شناختی که شما عزیزان از مفهوم دایره دارید، می‌دانید که :



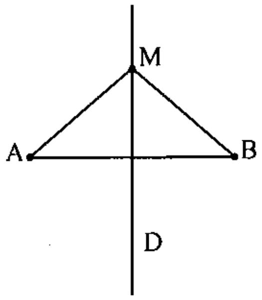
شکل۱

I . فاصلهٔ هر نقطهٔ M از دایرهٔ شکل (۱) تا نقطهٔ O (مرکز دایره) برابر مقدار ثابت r است ؛ یعنی هر نقطه از مجموعهٔ C دارای خاصیت P است.

II. اگر فاصلهٔ نقطهٔ M از نقطهٔ O برابر مقدار ثابت r باشد، در این صورت، M روی دایرهٔ شکل (۱) قرار دارد ؛ یعنی هر نقطه که خاصیت P دارد، عضو مجموعهٔ C است.

بنابراین، می‌توانید بگویید مجموعهٔ C، یعنی **دایره‌ای به مرکز O و شعاع r**، یک مکان‌هندسی می‌باشد. ▲

مثال (۲): به احتمال زیاد همهٔ شما با مفهوم عمودمنصف یک پاره‌خط آشنا هستید. حال فرض کنید که D مجموعهٔ نقاط خط مشخص شده در شکل (۲) باشد و P این خاصیت باشد که «فاصلهٔ نقطهٔ M از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر است.» در این صورت شما می‌دانید که :



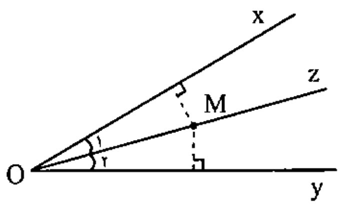
شکل۲

I. هر نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط AB از دو سر این پاره‌خط، به یک فاصله‌اند ؛ یعنی هر نقطه در مجموعهٔ D خاصیت P دارد.

II. هر نقطه که از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن قرار می‌گیرد ؛ یعنی هر نقطه با خاصیت P در مجموعهٔ D قرار دارد.

پس بنابه تعریف مکان هندسی، مجموعهٔ D، یعنی **عمودمنصف پاره‌خط AB**، یک مکان هندسی است. ▲

مثال (۳): در شکل (۳) نیمخط Oz نیمساز زاویهٔ xOyاست.



شکل۳

فرض کنید H مجموعهٔ نقاط روی این نیمخط باشد و P این خاصیت باشد که «فاصلهٔ نقطهٔ M از دو نیمخط ثابت Ox و Oy برابرند.» با توجه به شناختی که شما دانش‌آموزان عزیز از خواص مربوط به نیمساز یک زاویه دارید، دیده می‌شود :

I . فاصلهٔ هر نقطه روی نیمساز Oz از دو نیمخط Ox و Oy برابرند ؛ یعنی هر نقطه از مجموعهٔ H خاصیت P دارد.

II. هر نقطه که فاصله‌اش از دو نیمخط Ox و Oy برابر باشد، روی نیمساز Oz قرار دارد ؛ یعنی هر نقطه با خاصیت P در مجموعهٔ H قرار دارد.

بنابراین، مجموعهٔ H، یعنی **نیمساز زاویهٔ xOy**، یک مکان هندسی است. ▲

برای این‌که با مفهوم مکان هندسی، بیشتر و بهتر آشنا شوید، مکانهای هندسی خواسته شده در تمرینهای زیر را به دست آورید و مشابه آنچه در مثالهای بالا ذکر شد، درستی گفتهٔ خود را ثابت کنید :

تمرین (۱): مکان هندسی نقاطی که از یک خط مفروض و ثابت، به فاصلهٔ مفروض و ثابت باشند.

تمرین (۲): مکان هندسی نقاطی که از دو خط موازی مفروض و ثابت، به یک فاصله‌اند.

تمرین (۳): از مثلثی، دو رأس A و B و زاویهٔ α ، روبه‌رو به ضلع AB، معلوم می‌باشد. مکان هندسی رأس سوّم این مثلث را پیدا کنید.

اوّلین قدم در ورود به یک مسأله، «فهمیدن مسأله» است. برای فهم یک مسأله، کافی است سه قسمت زیر از آن بدقت مشخص شود :

I. مجهول یا مجهولها (آنچه را که باید در مسأله پیدا کنید.)

II. داده یا داده‌ها (آنچه که در مسأله برای شما مشخص است.)

III. شرط (آنچه که مجهول را با داده‌ها، به‌طور مشخص، مربوط می‌سازد.) برای درک بهتر مطالب اخیر، به مثالهای زیر توجه کنید :

مثال (۴): مسألهٔ زیر را درنظر بگیرید :

«دایره‌ای بر مثلث ABC مفروض، محیط کنید.»

I. مجهول چیست؟

جواب: یک دایره است.

II. داده‌ها کدامند؟

جواب: مثلث مفروض ABC.

III. شرط چیست؟

جواب: دایرهٔ خواسته شده، بر مثلث معلوم ABC محیط است.▲

مثال (۵): به مسألهٔ زیر توجه کنید :

«مثلثی با معلوم بودن سه ضلع آن، رسم کنید.»

I. مجهول چیست؟

جواب: یک مثلث است.

II. داده‌ها کدامند؟

جواب: سه پاره‌خط.

III. شرط چیست؟

جواب: پاره‌خطهای داده شده، اضلاع مثلث خواسته شده است. ▲

مثال (۶): مثلثی با معلوم بودن دو ضلع و میانهٔ وارد بر یکی از این اضلاع را رسم کنید.

I. مجهول چیست؟

جواب: یک مثلث است.

II. داده‌ها کدامند؟

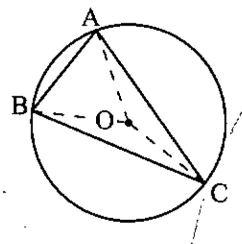
جواب: سه پاره‌خط.

III. شرط چیست؟

جواب: دو پاره‌خط از سه پاره‌خط داده شده، اضلاع و دیگری میانهٔ مثلث خواسته شده است. ▲

دومین قدم در حلّ مسأله، به روش دو مکان هندسی، تبدیل مسألهٔ داده شده به یک مسألهٔ هم‌ارز با آن می‌باشد، که در آن، **مجهول تنها یافتن یک نقطه است و شرط از دو جزء تشکیل یافته است.** به عبارت دیگر، باید مسأله‌تان را چنان تغییر دهید که اوّل، در اصل مسأله خدشه‌ای وارد نشود، دوم، در مجهول فقط یافتن یک نقطه مطرح شود و سوّم، شرط به دو قسمت مجزّا، که ارتباط بین داده‌های مختلف و مجهول است، تفکیک شود. به مثالهای زیر توجّه کنید :

مثال (۷): یک بار دیگر به مثال (۴) توجه کنید. همان‌طور که در شکل (۴) می‌بینید، اگر O مرکز دایرهٔ خواسته شده باشد، در



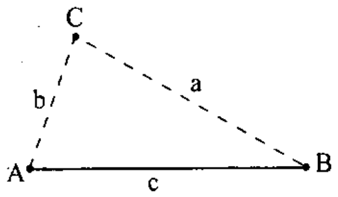
شکل۴

این صورت، فاصلهٔ O از رئوس مثلث برابر است. بنابراین، مسأله را می‌توانید به مسأله‌ای تبدیل کنید که در آن :

مجهول: یافتن نقطهٔ O است.

شرط: ۱) $AO = BO$ و ۲) $AO = CO$. ▲

مثال (۸): در مثال (۵) اگر یکی از اضلاع معلوم را مطابق شکل (۵) رسم کنید، دو رأس مثلث خواسته شده، مشخص می‌شود



شکل۵

(مانند رئوس A و B)، سپس مسأله تبدیل به یافتن رأس C مثلث می‌شود ؛ اما چون دو ضلع دیگر مثلث نیز معلوم است، پس فاصلهٔ C تا A و همچنین فاصلهٔ C تا B مشخص می‌باشد. بنابراین داریم :

مجهول : یافتن نقطهٔ C است.

شرط: ۱) فاصلهٔ C از A برابر مقدار معلوم b است.
۲) فاصلهٔ C از B برابر مقدار معلوم a است. ▲

مثال (۹): آیا می‌توانید دومین قدم روش دو مکان‌هندسی را برای مثال (۶) بیان کنید؟

آخرین قدم برای حلّ مسأله به روش دو مکان هندسی چیست؟ اگر کمی به اجزای شرط در دو مثال (۷) و (۸) دقت کنید، خواهید دید که هر جزء یک مکان هندسی برای نقطه‌ای می‌باشد که در مجهول خواسته شده است، لذا نقطهٔ مجهول در مسأله محلّ برخورد این دو مکان هندسی در شرط می‌باشد. برای درک بهتر آن، به مثالهای زیر توجه کنید :

مثال (۱۰): دایره‌ای بر مثلث ABC مفروض، محیط کنید.

حل: بر طبق توضیحات مثال (۴) داریم :

مجهول: یک دایره.

داده‌ها: مثلث مفروض ABC.

شرط: دایرهٔ خواسته شده، بر مثلث معلوم ABC محیط است.

از این‌جا مطابق با توضیحات مثال (۷) داریم :

مجهول: یک نقطهٔ O.

شرط: (۱ $AO = BO$.
(۲ $AO = CO$.

از جزء (۱) شرط دیده می‌شود که نقطهٔ O روی عمودمنصف پاره‌خط AB است. همچنین از جزء (۲) شرط دیده می‌شود که نقطهٔ O روی عمود منصّف پاره‌خط AC است. (مثال (۲) را ببینید.)

بنابراین برای پایان حلّ آن، کافی است عمودمنصّف پاره‌خطهای AB و AC را رسم کنید؛ محلّ برخورد این دو عمودمنصّف، نقطهٔ O را می‌دهد. ▲

مثال (۱۱): مثلثی با معلوم بودن سه ضلع آن، رسم کنید.

حل: در مثال (۵) دیدید که:

مجهول: یک مثلث.

داده‌ها: سه پاره‌خط.

شرط: پاره‌خطهای داده شده، اضلاع مثلث خواسته شده است. بر مبنای توضیحات مثال (۸) دیدید که:

مجهول: یک نقطهٔ C.

شرط: (۱) $AC = b$.
(۲) $BC = a$.

از جزء (۱) شرط دیده می‌شود که C روی دایره‌ای به مرکز A به شعاع b است. همچنین از جزء (۲) شرط دیده می‌شود که C روی دایره‌ای به مرکز B به شعاع a است (مثال (۱) را ببینید).

در نتیجه، برای کامل شدن حل آن، کافی است دو دایره، یکی به مرکز A به شعاع b و دیگری به مرکز B به شعاع a رسم کنید. محلّ برخورد این دو دایره، نقطهٔ C را می‌دهد. ▲

مثال (۱۲): مثلثی با معلوم بودن دو ضلع و میانهٔ وارد بر یکی از این اضلاع را رسم کنید.

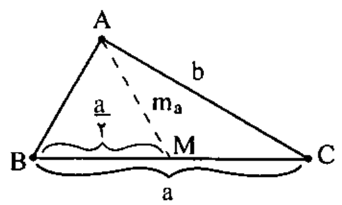
حل: بر اساس مثال (۶) داریم:

مجهول: یک مثلث.

داده‌ها: سه پاره‌خط.

شرط: دو پاره‌خط از سه پاره‌خط داده شده اضلاع و دیگری میانهٔ مثلث خواسته شده است.

مطابق شکل، اگر دو ضلع a و b و میانهٔ m_a معلوم باشد، در این صورت داریم:



مجهول: یک نقطهٔ A. (چرا؟)

شرط: (۱) فاصلهٔ A تا نقطهٔ معلوم C برابر b است؛ یعنی $AC = b$.
(۲) فاصلهٔ A تا نقطهٔ معلوم M برابر m_a است؛ یعنی $AM = a$. (چرا؟)

پس نقطهٔ A محلّ برخورد دو مکان هندسی است، که این مکانها بترتیب، دو دایره یکی به مرکز C و شعاع b، و دیگری به مرکز M و شعاع m_a می‌باشد. (چرا؟) ▲

در انتها با حل تمرینهای ذیل، شما می‌توانید مهارت لازم در حلّ مسائل ترسیمی هندسه به روش دو مکان‌هندسی را کسب نمایید.

تمرین (۱): با فرض معلوم بودن a (ضلع مثلث)، h_a (ارتفاع نظیر ضلع a) و m_a (میانهٔ وارد بر ضلع a)، مثلث را رسم کنید.

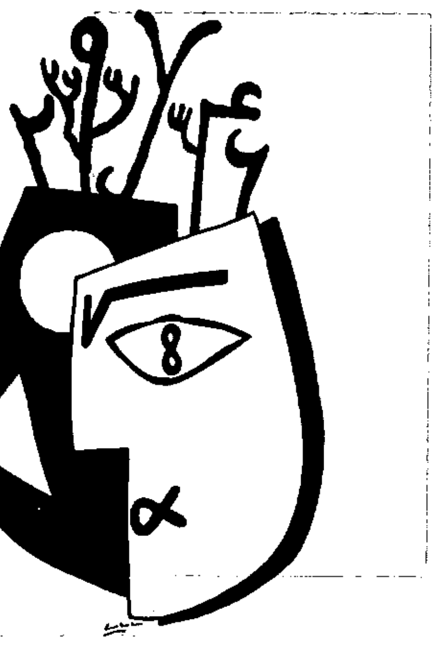
تمرین (۲): با فرض معلوم بودن a (ضلع مثلث)، h_a (ارتفاع نظیر ضلع a) و α (زاویهٔ روبه‌رو به ضلع a)، مثلث را رسم کنید.

تمرین (۳): با معلوم بودن سه خط راست، دایره‌ای رسم کنید که بر دو خط مماس باشد و مرکزش روی خط سومّ قرار گیرد.

تمرین (۴): در داخل مثلث، نقطه‌ای پیدا کنید که از آن‌جا، هر سه ضلع مثلث، به یک زاویه دیده شود.

● **منبع برای مطالعهٔ بیشتر**

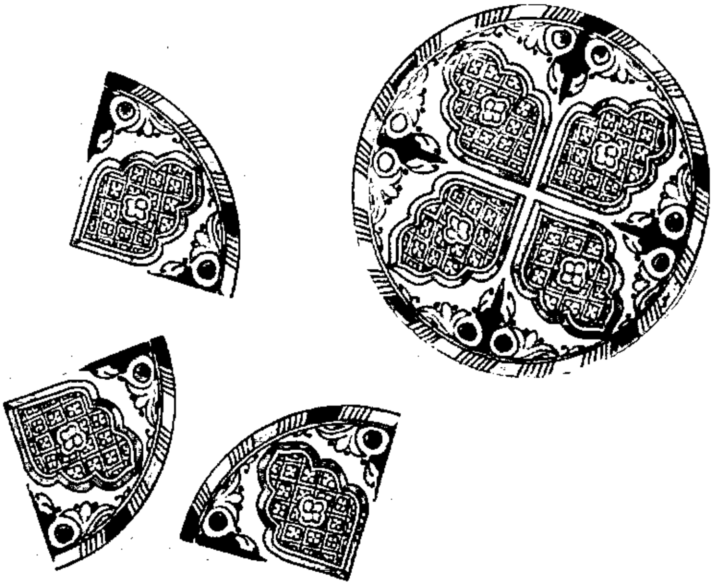
خلاقیت ریاضی: تألیف جورج پولیا، ترجمهٔ پرویز شهریاری، انتشارات فاطمی.



جزء صحیح

(قسمت چهارم)

● علی حسن زاده ماکویی



ث ـ مشتق تابع $y=[g(x)]$.

تابع y در مجموعهٔ $g(x)\in \mathbb{R}-Z$ مشتق‌پذیر بوده و مشتق آن برابر صفر است.

چند مثال

۱. تابع $f(x)=\left[\frac{2x+1}{3}\right]$ را درنظر می‌گیریم. در بازهٔ $[0,8)$ به‌ازای چند عدد متعلق به مجموعهٔ Z، تابع $f(x)$ مشتق‌پذیر است؟

حل:

$\frac{2x+1}{3}=u$ و $0\le x<8 \Rightarrow \frac{1}{3}\le u<\frac{17}{3}$

$\frac{1}{3}\le u<1\Rightarrow 0\le x<1$ و $f'(x)=0\ ,\ x_1=0$

$1<u<2\Rightarrow 1<x<\frac{5}{2}$ و $f'(x)=0\ ,\ x_2=2$

$2<u<3\Rightarrow \frac{5}{2}<x<4$ و $f'(x)=0\ ,\ x_3=3$

$3<u<4\Rightarrow 4<x<\frac{11}{2}$ و $f'(x)=0\ ,\ x_4=5$

$4<u<5\Rightarrow \frac{11}{2}<x<7$ و $f'(x)=0\ ,\ x_5=6$

$5<u<\frac{17}{3}\Rightarrow 7<x<8$ و $f'(x)=0$, ریشه ندارد

با توجه به مطالب بالا در بازهٔ $[0,8)$ به‌ازای پنج عدد صحیح تابع مشتق‌پذیر است.

۲. تابع
$$f(x)=\begin{cases}[x]+2x & ,\ x>1\\ [\mathrm{Ln}(4x^2+1)] & ,\ 0<x\le 1\\ |x^2-x-6| & ,\ x\le 0\end{cases}$$
را درنظر می‌گیریم.

مقدار عبارت $A=f'(-3)+f'(\frac{1}{2})+f'(\frac{5}{2})$ چه‌قدر است؟

۱) ۷- ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۵-

حل: گزینهٔ چهارم صحیح است.

$x=-3, f(x)=x^2-x-6, f'(x)=2x-1, f'(-3)=-7$

$x=\frac{1}{2}\ ,\ f(x)=[\mathrm{Ln}2]\ ,\ f'(\frac{1}{2})=0$

$x\to\frac{5}{2}\ ,\ f(x)=2+2x\ ,\ f'(\frac{5}{2})=2\Rightarrow A=-5$

ج ـ انتگرال تابعهایی که دارای جزء صحیح هستند.

یادآوری می‌شود که تابع $y=[f(x)]$ وقتی که $f(x)\in Z$، ناپیوسته می‌باشد. بنابراین، در انتگرال‌گیری تابعهایی که شامل جزء صحیح هستند، باید دقّت بیشتری کرد و برای تعیین انتگرال تابعهای به‌صورت: $I=\int_p^q [nx]dx$ باید I را به انتگرالهای جزء

به‌صورت $\int_{a_1}^{b_1}[nx]dx$ و $n\in Z$ تبدیل کرد؛ به قسمی که (b_1-a_1) برابر $\frac{1}{n}$ باشد.

چند مثال

مقدار عبارتهای زیر را تعیین کنید.

۱. $I=\int_{-1}^{2}[x]dx$

حل: $I=\int_{-1}^{0}(-1)dx+\int_{0}^{1}(0)dx+\int_{1}^{2}(1)dx \Rightarrow$

$I=(-x)\Big|_{-1}^{0}+(0)+(x)\Big|_{1}^{2}=-1+(2-1)=0$

۲. $I=\int_{-1}^{1}[2x]dx$

حل:

$$I=\int_{-1}^{-0/5}[2(-1)]dx+\int_{-0/5}^{0}[2(-0/5)]dx+\int_{0}^{0/5}[2(0)]dx$$
$$+\int_{0/5}^{1}[2(0/5)]dx=(-2x)\Big|_{-1}^{-0/5}+(-x)\Big|_{-0/5}^{0}+(x)\Big|_{0/5}^{1}$$
$$=(1-2)+(0-0/5)+(1-0/5)=-1$$

۳. $I=\int_{-1}^{1}[2x-1]dx$

حل: $-1\le x<-\frac{1}{2}\Rightarrow[2x-1]=-3$,

$-\frac{1}{2}\le x<0\Rightarrow[2x-1]=-2$

$0\le x<\frac{1}{2}\Rightarrow[2x-1]=-1$,

$\frac{1}{2}\le x<1\Rightarrow[2x-1]=0\Rightarrow$

$I=\int_{-1}^{-0/5}(-3)dx+\int_{-0/5}^{0}(-2)dx+\int_{0}^{0/5}(-1)dx\Rightarrow$

$I=(-\frac{3}{2})+(-1)+(-\frac{1}{2})=-3$

۴. $I=\int_{1}^{e^3}\frac{[Lnx]}{x}dx$

حل:

$1\le x<e\Rightarrow 0\le Lnx<1\Rightarrow[Lnx]=0$

$e\le x\le e^2\Rightarrow 1\le Lnx<2\Rightarrow[Lnx]=1$

$e^2\le x<e^3\Rightarrow 2\le Lnx<3\Rightarrow[Lnx]=2$

$I=\int_{1}^{e}(\frac{0}{x})dx+\int_{e}^{e^2}(\frac{1}{x})dx+\int_{e^2}^{e^3}(\frac{2}{x})dx\Rightarrow$

$I=0+(Lnx)\Big|_{e}^{e^2}+2(Lnx)\Big|_{e^2}^{e^3}=(2-1)+2(3-2)=3$

۵. $I=\int_{0}^{6}[x]\sin(\frac{\pi x}{6})dx$

حل:

$I_1=\int_{0}^{1}(0)\sin\frac{\pi x}{6}dx$, $I_2=\int_{1}^{2}(1)\sin\frac{\pi x}{6}dx$,... ,

$I_6=\int_{5}^{6}5\sin\frac{\pi x}{6}$

$I=I_1+I_2+\cdots+I_6=\frac{30}{\pi}$

۶. $I=\int_{0}^{2}\left[e^x\right]dx$

حل: $0\le x<Ln2\Rightarrow 1\le e^x<2\Rightarrow\left[e^x\right]=1$,

$I_1=\int_{0}^{Ln2}(1)\,dx$

$Ln2\le x<Ln3\Rightarrow 2\le e^x<3\Rightarrow\left[e^x\right]=2$,

$I_2=\int_{Ln2}^{Ln3}(2)\,dx$

....

$Ln7\le x\le 2\Rightarrow 7\le e^x\le e^2\Rightarrow\left[e^x\right]=7$,

$I_7=\int_{Ln7}^{2}(7)\,dx$

$I=I_1+I_2+...+I_7=14-Ln(7!)$

۷. $I=\int_{1}^{n+1}Ln[x]dx$, $n\in IN$

حل: $I_1=\int_{1}^{2}Ln(1)dx$, $I_2=\int_{2}^{3}Ln(2)dx$,...,

$I_n=\int_{n}^{n+1}Ln(n)dx$

$I=I_1+I_2+\cdots+I_n=Ln(1\times2\times\cdots\times n)=Ln(n!)$

۸. $I=\int_{1}^{2}\left[x^2\right]dx$

حل:

$I_1=\int_{1}^{\sqrt{2}}dx$, $I_2=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}2dx$, $I_3=\int_{\sqrt{3}}^{2}3dx\Rightarrow$

$I=I_1+I_2+I_3=5-(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

۹. مقدار، $I=\int_{1}^{e^2}\frac{[Lnx]}{x-1}dx$ کدام است؟

۱) $Ln(e^2-1)$ ۲) $Ln(e+1)$

۳) $Ln(e^2-1)-1$ ۴) $Ln(e-1)$

حل: گزینهٔ دوم صحیح است.

$I=\int_{1}^{e}\frac{0}{x-1}dx+\int_{e}^{e^2}\frac{dx}{x-1}=0+Ln(x-1)\Big|_{e}^{e^2}\Rightarrow$

$$I = Ln(e^2-1) - Ln(e-1) = Ln\frac{e^2-1}{e-1} = Ln(e+1)$$

۱۰. مقدار، $\int_{-1}^{1}[2x+1]dx$ چه‌قدر است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۱

حل: گزینهٔ چهارم صحیح است.

$$I=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}(-1)dx+\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(0)dx+\int_{0}^{\frac{1}{2}}(1)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2)dx \Rightarrow$$

$$I=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1=1$$

۱۱. قسمتی از نمودار تابع $y=[x]$ را که بین دو خط $x=1$ و $x=3$ قرار دارد، حول محور $x'x$ دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل چه‌قدر است؟

۱) π ۲) 3π ۳) 5π ۴) 7π

حل: گزینهٔ سوّم صحیح است.

$$V=\pi\int_{1}^{3}([x])^2dx=\pi\int_{1}^{2}dx+\pi\int_{2}^{3}4dx=5\pi$$

تمرین

۱. اگر $f(x)=3x^2+[x]$، آن‌گاه $f'(3)$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) $\varnothing$

۲. اگر $f(x)=x^3-6x+\left[\frac{5x+1}{7}\right]$، آن‌گاه $f'(2)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) $\varnothing$

۳. مقدار $\int_{-1}^{3}[x]dx$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۵

۴. مقدار $\int_{-1}^{3}[x+1]dx$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۷ ۴) ۶

۵. مقدار $\int_{2}^{\frac{5}{2}}[x+2]dx$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) ۰

۶. مقدار $\int_{1}^{\frac{3}{2}}[x].(x^2+3)dx$ کدام است؟

۱) $\frac{17}{24}$ ۲) $\frac{47}{24}$ ۳) $\frac{55}{24}$ ۴) $\frac{61}{24}$

۷. مقدار $x\neq 0$ و $\int_{-1}^{3}[x]^{Sgnx}dx$ کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۲

۸. مقدار $\int_{1}^{4}[x]^{[x]}dx$ کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۳۰ ۳) ۲۴ ۴) ۱۸

۹. مقدار $\int_{0}^{2\pi}[\sin x]dx$ کدام است؟

۱) -2π ۲) $-\pi$ ۳) π ۴) 2π

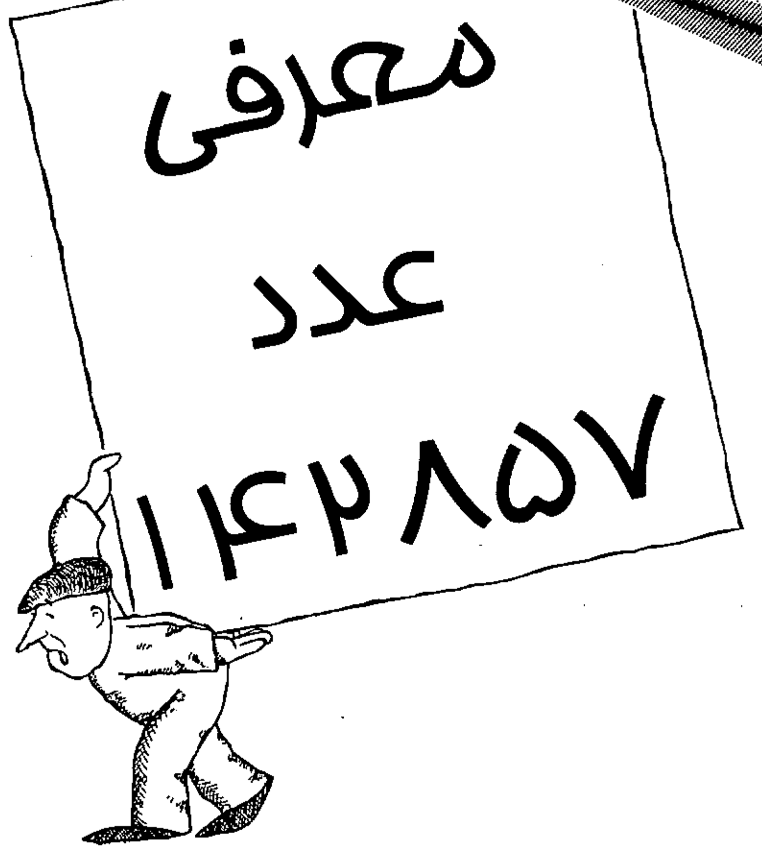
۱۰. مقدار $\int_{1}^{4}Ln[x]dx$ کدام است؟

۱) $Ln2$ ۲) $Ln3$ ۳) $Ln\frac{2}{3}$ ۴) $Ln6$

پاسخها:

شماره	پاسخ
۱	۴
۲	۳
۳	۱
۴	۴
۵	۲
۶	۳
۷	۴
۸	۱
۹	۲
۱۰	۴

معرفی عدد ۱۴۲۸۵۷



● علی اکبر بناگر

عددی را به شما معرفی می‌کنیم که بسیار بی‌نظیر است. این عدد ۱۴۲۸۵۷ می‌باشد، که دو رقم اوّل سمت چپ آن، عدد ۱۴، نزد ما معروفیت خاص دارد و شب ۱۴ ماه قمری را به‌خاطر می‌آورد. در این شب، قرص ماه به‌طور کامل در آسمان می درخشد و نورافشانی آن، شکوه و جلوهٔ خاص دارد. دو رقم بعد، ۲۸، دو برابر ۱۴ می‌باشد و اگر از دو رقم آخر، یعنی ۵۷، یک واحد کم کنیم، عدد ۵۶ نیز چهار برابر ۱۴ است. چنانچه دایره‌ای به شعاع دلخواه رسم کنیم و ارقام ۱۴۲۸۵۷ را مطابق شکل مقابل، در کنارهٔ آن و در جهت حرکت عقربه‌های ساعت بنویسیم، این دایره را دایرهٔ محاسب می‌نامیم.

دایرهٔ محاسب

چنانچه ۱۴۲۸۵۷ را در هر یک از اعداد ۵،۴،۳،۲ و ۶ ضرب کنیم، ۵ عدد شش رقمی دیگر به‌ترتیب ۲۸۵۷۱۴، ۴۲۸۵۷۱، ۵۷۱۴۲۸، ۷۱۴۲۸۵ و ۸۵۷۱۴۲ حاصل می‌شود، که هر یک از این پنج عدد ۶رقمی را روی دایرهٔ محاسب، می‌توان مشاهده کرد. طریق یافتن پنج عدد روی دایره، به‌این ترتیب است که، اوّلین رقم سمت چپ هر یک از ۵ عدد بالا را روی دایره می‌یابیم. آن‌گاه پنج رقم دیگر آن را بعد از آن رقم و در جهت حرکت عقربه‌های ساعت پیدا نموده، در سمت راست آن رقم می‌نویسیم؛ مثلاً اگر بخواهیم ۷۱۴۲۸۵ را روی دایره ملاحظه کنیم، عدد هفت را روی دایره پیدا نموده، ۵ رقم دیگر آن عدد را بعد از ۷ و در جهت حرکت عقربه‌های ساعت که اعداد ۸،۲،۴،۱ و ۵ می‌باشند، می‌بینیم.

اعداد دوّار

هر یک از شش عدد ۶ رقمی ۱۴۲۸۵۷، ۲۸۵۷۱۴، ۴۲۸۵۷۱، ۵۷۱۴۲۸، ۷۱۴۲۸۵ و ۸۵۷۱۴۲ را که روی دایره و در جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌توان مشاهده نمود، اعداد دوّار می‌نامیم.

طرز پیدا کردن اعداد دوّار: اگر از یک میلیون، یک واحد کم کنیم و عدد ۹۹۹۹۹۹ را بر هفت تقسیم نماییم، عدد ۱۴۲۸۵۷ به‌دست می‌آید، و اگر عدد ۱۴۲۸۵۷ را بترتیب، در اعداد ۵،۴،۳،۲ و ۶ ضرب کنیم، ۵ عدد ۶ رقمی دیگر دوّار حاصل می‌شود.

$۱۴۲۸۵۷ \times ۲ = ۲۸۵۷۱۴$ ، $۱۴۲۸۵۷ \times ۳ = ۴۲۸۵۷۱$ ،

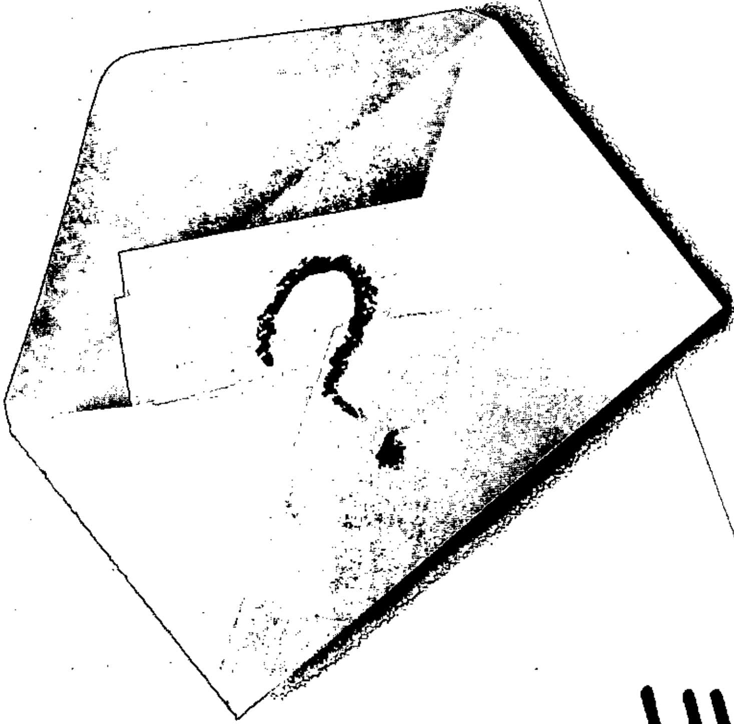
$۱۴۲۸۵۷ \times ۴ = ۵۷۱۴۲۸$ ، $۱۴۲۸۵۷ \times ۵ = ۷۱۴۲۸۵$ ،

$۱۴۲۸۵۷ \times ۶ = ۸۵۷۱۴۲$

$$۱۰۰۰۰۰۰ - ۱ = ۹۹۹۹۹۹ = ۷ \times ۱۱ \times ۱۳ \times ۲۷ \times ۳۷$$

$$= ۷ \times ۱۴۲۸۵۷$$

$$۱۴۲۸۵۷ = ۱۱ \times ۱۳ \times ۲۷ \times ۳۷$$



آنچه از دوست رسد...

با عرض سلام، خدمت همگی دانش‌آموزان و خوانندگان محترم مجلّهٔ ریاضی برهان

هر روز، نامه‌های پرمحتوا و دلگرم کننده شما عزیزان در دفتر مجلّه به دستمان می‌رسد، از خداوند بزرگ بسیار سپاسگزاریم که توانسته‌ایم، تا حدی مشکلات درسی شما عزیزان را برطرف کنیم و تا اندازه‌ای شما را به ریاضیات علاقه‌مند سازیم. در این شماره پرسشهای چهارگزینه‌ای با حل تشریحی درسهایی را ارائه کردیم که دانش آموزان در ترم اول گذرانده‌اند و در شمارهٔ بعد، ادامه پرسشهای چهارگزینه‌ای با حل تشریحی را خواهیم آورد.

اسامی تعدادی از خوانندگان محترم مجلّه که برای ما نامه ارسال کرده‌اند:

آقایان: سید مصطفی شریعت‌زاده (اهواز)، علی رحیمی (آذربایجان غربی - خوی)، مصطفی جعفری (تهران)، احسان تقی‌پور (بروجرد)، همکار محترم آقای منصور دوباش (کرمانشاه)، مجتبی دهقانی (فارسان)، همکار محترم خانم بهدخت کشمیری‌پور (شیراز)، سیدعلی حسینی (مینودشت)، حامد اولادغفاری (تبریز)، علیرضا قزلسفلو (مینودشت)، محسن ساعی نیک (تبریز)، سراج‌الدین طلّایی (گنبدکاوس)، عباس نخستین (لاهیجان)، عادل طاهرخانی (تاکستان)، وحید طاهری (تبریز)، علی ملکی و حسین آقایی (تهران)، سیدهادی ناصری (دانشگاه مازندران)، بابک مقبولی (تهران)، احسان ایزدی (سبزوار)، رضا خواجوی‌نیا (ملک‌شهر اصفهان)، همکار محترم آقای مراد کریمی شهمارروند (فرخ‌شهر)، محمود اکبری (شیراز)، و **خانمها**: کبری جهانی مقدم (قاین)، معصومه پناهی شهری (تهران) و مریم خانجانی (تهران).

از همه شما عزیزان، به پاس ارسال مقاله، مسائل همراه با حل و پیشنهادها و انتقادهای سازنده سپاسگزاریم. در صورت امکان از مسائل و مقاله‌های شما پس از تصویب در هیأت تحریریه، در مجلّه استفاده خواهیم کرد.

آقای محمدحسن منشیان (اصفهان) از پیشنهادات جناب‌عالی دربارهٔ کتاب کوچک ریاضی دنباله‌ها و سریها سپاسگزاریم و منتظر دریافت نامه‌های بعدی از طرف شما هستیم.

آقای سیدمصطفی شریعت‌زاده (اهواز) برای این که مطالبی

را دربارهٔ ویژگیها و تولید فرکتالها مطالعه کنید، به مجلّه رشد آموزش ریاضی شماره ۵۳ مراجعه کنید.

آقای مصطفی فولادکار (مشهد مقدس)، کتابهای زیر از طرف گروه ریاضی انتشارات مدرسه در دست تهیه و چاپ است :

۱. فرهنگ و دایرةالمعارف ریاضیات دبیرستانی و پیش‌دانشگاهی/ مؤلفان : گروه ریاضی انتشارات مدرسه.

۲. مکان هندسی/ مؤلف : محمدهاشم رستمی

۳. نظریهٔ اعداد (از سری کتابهای کوچک ریاضی)/ مؤلف : حمیدرضا امیری

۴. سری کتابهای آمادگی برای المپیاد ریاضی/ هیأت مؤلفان

۵. سری کتابهای از مدرسه تا دانشگاه/ مؤلفان : گروه ریاضی انتشارات مدرسه

در ضمن از پیشنهادات و انتقادات سازندهٔ شما سپاسگزاریم و منتظر دریافت نامه‌های بعدی از طرف شما هستیم.

آقای افاضت (اصفهان) نشانی چند مجلّه ریاضی معتبر خارجی را در قسمت آنچه از دوست رسد برهان شماره ۳۰ چاپ کرده‌ایم. در ضمن قسمتی از مطالب تفریح اندیشه از کتاب تفریح اندیشه، نوشته : پی‌یر برلوکن/ ترجمه : سیمین‌دخت ترکپور/ انتشارات محراب قلم است و بقیه مطالب تفریح اندیشه و ادب ریاضی را آقای غلامرضا یاسی‌پور تهیه می‌کنند.

همکار محترم جناب آقای حسین زارعی، دبیر ریاضی شهرستان آباده (استان فارس) از آن‌جا که مسائل ارسالی جناب‌عالی می‌تواند مورد استفاده دانش‌آموزان قرار گیرد، بنابراین دو مسأله را در زیر می‌آوریم :

مسأله ۱. اگر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابع باشد و به ازای هر $x,y\in\mathbb{R}$ داشته باشیم $f(x+y)=f(x)-f(y)$ ، ثابت کنید برای هر $x\in\mathbb{R}$ داریم : $f(x)=0$.

حل. با فرض $x=y=0$ داریم :

$$f(0+0)=f(0)-f(0)\Rightarrow f(0)=0 \quad (1)$$

اکنون با فرض $x=0$ و $0\neq y\in\mathbb{R}$ خواهیم داشت :

$$f(0+y)=f(0)-f(y)\Rightarrow f(y)=-f(y)\Rightarrow f(y)=0 \quad (2)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که برای هر $x\in\mathbb{R}$ داریم : $f(x)=0$.

مسأله ۲. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ یک تابع باشد و برای هر $x,y\in\mathbb{R}$ داشته باشیم $f(x+y)=f(x)\times f(y)$ و f^{-1} وجود داشته باشد، ثابت کنید $f^{-1}(xy)=f^{-1}(x)+f^{-1}(y)$.

حل. فرض کنید $f(x)=t$ و $f(y)=t'$. بنابراین داریم : $tt'=f(x)\times f(y)$.

$$f(x+y)=f(x)\times f(y)\Rightarrow f^{-1}[f(x+y)]=f^{-1}[f(x)\times f(y)]$$

$$\Rightarrow f^{-1}[f(x+y)]=f^{-1}(tt')$$

$$\Rightarrow f^{-1}(tt')=(x+y) \quad (1)$$

$$\begin{cases} f(x)=t\Rightarrow x=f^{-1}(t) \\ f(y)=t'\Rightarrow y=f^{-1}(t') \end{cases} \quad (2)$$

با توجه به (۱) و (۲) داریم :

$$f^{-1}(tt')=f^{-1}(t)+f^{-1}(t')$$

با تبدیل t' و t به x و y خواهیم داشت :

$$f^{-1}(xy)=f^{-1}(x)+f^{-1}(y)$$

یکی از شرایط اساسی برای این که درخت علم بتواند با کمال سرعت، رشد و نمو کند آن است که در محلّ مسدودی کاشته نشود، برای این درخت هوایی لازم است که زود به زود تازه و تجدید شود و نسیمی که از خارج بوزد، و عدهٔ بیشماری که در تقویت آن سهیم شوند.

تاریخ علوم - پی‌یر روسو

پاسخ پرسشهای چهار گزینه ای را در همین شماره مجله ببینید.

پرسشهای چهارگزینه‌ای

● احمد قندهاری ● محمدهاشم رستمی ● حمیدرضا امیری ● میرشهرام صدر ● هوشنگ شرقی ● سیدمحمدرضا هاشمی موسوی

ریاضیات ۱

۱. اگر $A=\{x|x\in \mathbb{Z}, x\geq 4\}$ و $B=\{x|x\in \mathbb{R}, x<-2\}$ حاصل $A'\cap B'$ کدام است؟

۱) $x\in \mathbb{Z}:\{x|-2\leq x<4\}$

۲) $x\in \mathbb{R}:\{x|-2\leq x<4\}$

۳) $x\in \mathbb{Z}:\{x|-2\leq x\leq 4\}$

۴) $x\in \mathbb{Z}:\{x|-2< x\leq 4\}$

۲. اگر $A=\{2,\{2\},\{\{2\}\},\{\ \}\}$ کدام گزینه نادرست است؟

۱) $\{0,\{2\}\}\notin A$ ۲) $\{\varnothing\}\in A$

۳) $\{\{2\}\}\not\subset A$ ۴) $\{\{2\}\}\in A$

۳. کوچکترین عددی که اگر در عبارت $A=2^5\times 3^6\times 7^2\times 5^2$ ضرب کنیم، مکعب کامل می‌شود، کدام است؟

۱) $2^4\times 5^4\times 3^2\times 7^3$ ۲) $2^4\times 3^3\times 7^2\times 5$

۳) $2\times 3^3\times 7^2\times 5^4$ ۴) $2\times 7^2\times 5$

۴. کوچکترین مضرب مشترک عددهای ۲۴، ۱۴۴ و ۱۲۰، کدام است؟

۱) ۱۸۰ ۲) ۳۶۰

۳) ۵۴۰ ۴) ۷۲۰

۵. حاصل عبارت تواندار $45(7\times 2)^7\div 9(2^4\times 7^3)$، کدام است؟

۱) $2^3\times 7^2\times 5$ ۲) $2^3\times 7^4\times 5$

۳) $2^2\times 7^2\times 5$ ۴) $2^3\times 7^5\times 5$

۶. حاصلضرب دو عدد فرد متوالی مثبت برابر ۹۹ است: حاصلجمع آن دو عدد کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۹

۳) ۲۰ ۴) ۲۱

۷. حاصل عبارت $A=\dfrac{5^{-2}+3^{-2}}{3\times 2^{-1}+2^{-3}}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{2144}{10125}$ ۲) $\dfrac{4288}{1125}$

۳) $\dfrac{1072}{10125}$ ۴) $\dfrac{1072}{4288}$

۸. کسر متعارفی مولد عدد اعشاری $3/0\bar{4}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{134}{45}$ ۲) $\dfrac{135}{45}$

۳) $\dfrac{136}{45}$ ۴) $\dfrac{137}{45}$

۹. ربع عدد $(12)^3$ را به ثلث آن اضافه کرده‌ایم، حاصل چه عددی است؟

۱) $4^2\times 3^2\times 7$ ۲) $4^2\times 3^2\times 5$

۳) $4^2\times 3^3$ ۴) $4^3\times 3^2$

۱۰. خارج قسمت تقسیم عبارت $8x^3+1$ بر $(2x+1)$، به‌اضافهٔ خارج‌قسمت تقسیم $8x^3-1$ بر $(2x-1)$، کدام است؟ $(x\neq \pm\frac{1}{2})$

۱) $4x^2$ ۲) 2

۳) $4x^2+2$ ۴) $2(4x^2+1)$

۱۱. اگر $a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$، آن‌گاه حاصل عبارت $\dfrac{3\sqrt[3]{abc}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}$ کدام است؟ $(abc\neq 0)$

۱) $\sqrt[3]{a^2}$ ۲) $\sqrt[3]{a}$

۳) $3\sqrt[3]{a^2}$ ۴) $3\sqrt[3]{a}$

۱۲. معادلهٔ $3^{x+1}+9^x=108$ به ازای چه مقداری از x برقرار است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) هیچ یک از سه مورد قبل

ریاضیات ۳

۱. معادلهٔ درجه دومی که ریشه‌های آن قرینهٔ نصف ریشه‌های معادلهٔ $2x^2+x=4$ هستند، کدام است؟

۱) $2x^2-x-4=0$ ۲) $4x^2+x-2=0$

۳) $4x^2-x-2=0$ ۴) $2x^2-x-2=0$

۲. مجموعه جوابهای معادلهٔ $2x+\sqrt{x^2-7}+5=0$ کدامند؟

۱) $\{-4\}$ ۲) $\left\{-\dfrac{8}{3}\right\}$

۳) $\left\{-4,-\dfrac{8}{3}\right\}$ ۴) $\varnothing$

۳. مجموعه جواب نامعادلهٔ $\dfrac{1}{x^2}\geq 1$ برابر است با:

۱) $[-1,1]$ ۲) $(-1,1)$

۳) $[-1,1]-\{0\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{0\}$

۴. به ازای کدام یک از مجموعه مقادیر زیر کسر $\dfrac{(x-1)(x-2)^2}{(x+1)^3}$ منفی است؟

۱) $(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ ۲) $(-1,2)$

۳) $(-1,\frac{1}{2})$ ۴) $(-\frac{3}{2},\frac{1}{2})$

۵. برای آن که $(2-m)x^2+2(m-2)x-m$ به‌ازای جمیع

مقادیر x منفی باشد، باید داشته باشیم :

۱) $m>۲$ ۲) $m<۲$
۳) $۱<m\leq ۲$ ۴) $۲\leq m<۳$

۶. تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases} x+۲ & x\geq ۰ \\ -x^۲ & x<۰ \end{cases}$ در مجموعهٔ اعداد حقیقی تعریف شده است. این تابع :

۱) پوششی است و یک به یک نیست.
۲) یک به یک است و پوششی نیست.
۳) یک به یک و پوششی است.
۴) نه یک به یک است و نه پوششی.

۷. ضابطهٔ معکوس تابع $\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x)=۲^{x-۱}-۱ \end{cases}$ کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x)=\log_۲^{x+۱}$ ۲) $f^{-۱}(x)=\log_۲^{۲x+۱}$
۳) $f^{-۱}(x)=\log_۲^{۲x+۴}$ ۴) $f^{-۱}(x)=\log_۲^{۲x+۲}$

۸. اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $|A+A^{-۱}|$ کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۲۵−
۳) ۲۹ ۴) ۲۹−

۹. به‌ازای کدام مقدار m دستگاه معادلات $\begin{cases} (m-۱)x+۴y=۶ \\ ۳x+(m+۳)y=۵ \end{cases}$ دارای جواب یکتا می‌باشد؟

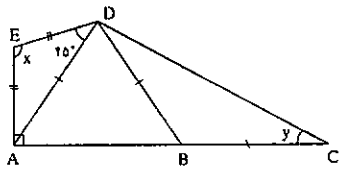
۱) $m\neq ۲$ ۲) $m\neq ۳$
۳) $m\neq ۳,-۵$ ۴) $m\neq -۳,۵$

۱۰. جواب معادلهٔ $\log_۳^x+\log_{\sqrt{۳}}^x+\log_{\frac{۱}{۳}}^x=۶$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۹ ۳) ۲۷ ۴) $\frac{۱}{۳}$

هندسهٔ ۱

۱. در شکل، ضلعهای مشخص شده با علامتهای یکسان با هم برابر و $AB\perp AE$ است. اندازهٔ $x+y$ چه‌قدر است؟

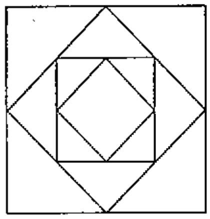


۱) ۱۰۵° ۲) ۱۱۵°
۳) ۱۲۵° ۴) ۱۳۵°

۲. مساحت یک مستطیل برابر ۱۴۴۰ و طول آن ۲/۴ برابر عرض آن است. نسبت اندازهٔ محیط این مستطیل به طول قطر آن چند است؟

۱) $\frac{۳۴}{۱۳}$ ۲) $\frac{۶۸}{۱۳}$
۳) $\frac{۱۷}{۱۳}$ ۴) $\frac{۱۷}{۲۶}$

۳. در شکل، وسطهای ضلعهای هر مربع به‌طور متوالی به هم وصل شده‌اند. نسبت مساحت کوچکترین مربع به مساحت بزرگترین مربع چند است؟

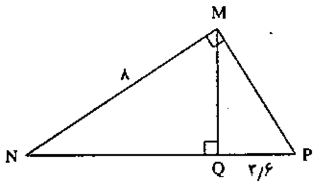


۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$
۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۱۶}$

۴. مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی برابر $۹\sqrt{۳}cm^۲$ است. اندازهٔ ارتفاع این مثلث برابر است با :

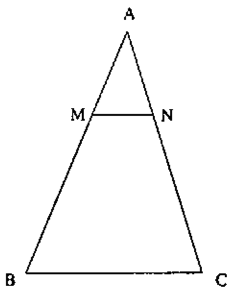
۱) $۴\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۳}$
۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $۳\sqrt{۳}$

۵. در مثلث قائم الزاویهٔ $MNP(\hat{M}=۹۰^\circ)$، ارتفاع MQ رسم شده است. اگر $MN=۸$ و $PQ=۳/۶$ باشد، اندازهٔ MP برابر است با :



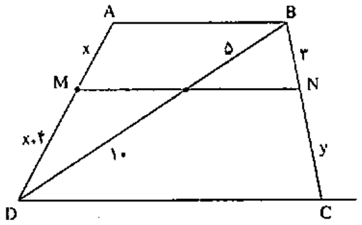
۱) ۴ ۲) ۶
۳) ۸ ۴) ۱۰

۶. نقطه‌های M و N روی ضلعهای AB و AC چنان قرار دارند که $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{۱}{۴}$ است. نسبت مساحت چهارضلعی MNCB به مساحت مثلث AMN چه‌قدر است؟



۱) ۳ ۲) ۲
۳) ۴ ۴) ۵

۷. در ذوزنقهٔ ABCD، $MN\parallel AB\parallel CD$ است. با توجه به شکل، $۲x-y$ چه‌قدر است؟



۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) ۴

۸. قاعدهٔ منشور قائمی، شش ضلعی منتظمی به ضلع ۱۰ است. اگر ارتفاع این منشور برابر ۱۸ باشد، اندازهٔ مساحت کل آن چه قدر است؟

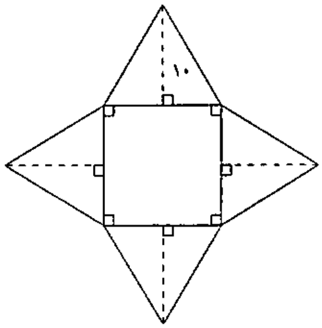
۱) $۳۰۰\sqrt{۳}$ ۲) ۱۰۸۰
۳) $۶۰(۱۸-۵\sqrt{۳})$ ۴) $۶۰(۱۸+۵\sqrt{۳})$

۹. مخروط دواری به شعاع قاعدهٔ R و ارتفاع h داده شده است. اگر شعاع قاعدهٔ این مخروط ۲ برابر و ارتفاع آن نصف شود، حجم آن چند برابر می‌شود؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) ۱ ۴) ۲

۱۰. شکل زیر، گستردهٔ یک هرم مربع‌القاعده است. اندازهٔ ضلع مربع چه‌قدر باشد تا ارتفاع هرم برابر ۸ گردد؟

۱) ۶ ۲) ۱۰
۳) ۱۲ ۴) ۱۶



ریاضی ۵

۱. سادهٔ شدهٔ عبارت $]-۳,۵[\cap[۳,۷]$ کدام است؟

۱) $[۳,۵]$ ۲) $]۳,۵[$
۳) $[۳,۵[$ ۴) $]۳,۵]$

۲. تابع f به‌صورت $\begin{cases} f(x)=\sqrt{3}+x, & x\geq 1 \\ f(x)=\sqrt{3}-x, & x<1 \end{cases}$ تعریف شده است، اندازهٔ $f(3-\sqrt{3}).f(\sqrt{3}-1)$ چه‌قدر است؟

۱) ۳　۲) ۴

۳) ۵　۴) ۶

۳. دامنهٔ تعریف تابع $f(x)=\log_x(16-x^2)$ کدام است؟

۱) $0<x<4$　۲) $-4<x<4$

۳) $x\neq 1, -4<x<4$　۴) $x\neq 1, 0<x<4$

۴. اگر $f(x)=x+4$ و $g(x)=x-4$ باشند، $(gof)(x)-(fog)(x)$ کدام است؟

۱) $2x$　۲) 0

۳) 8　۴) $x-8$

۵. اگر تابع $f(x)=\begin{cases} ax+1, & x>2 \\ 11, & x=2 \\ ax^2+bx-1, & x<2 \end{cases}$ در نقطهٔ $x=2$ پیوسته باشد، $2a+b$ کدام است؟

۱) ۶　۲) ۷

۳) ۸　۴) ۹

۶. مشتق تابع $y=\frac{2x+1}{\sqrt{2x+1}}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2\sqrt{2x+1}}$　۲) $\frac{3}{\sqrt{2x+1}}$

۳) $\frac{2}{\sqrt{2x+1}}$　۴) $\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

۷. اگر $f(x)=\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}$ باشد، $f'(\frac{\pi}{6})$ چه‌قدر است؟

۱) $2(2+\sqrt{3})$　۲) $3(2+\sqrt{3})$

۳) $4(2+\sqrt{3})$　۴) $4(2-\sqrt{3})$

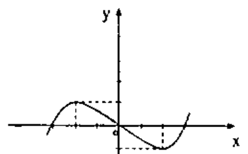
۸. اگر $(1,2)$ نقطهٔ عطف منحنی به معادلهٔ $y=x^3+ax^2+bx+2$ باشد، $a+2b$ چه‌قدر است؟

۱) ۷　۲) ۸

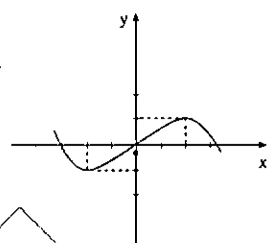
۳) ۹　۴) ۱۰

۹. نمودار تابع $y=-x^3+3x$ کدام است؟

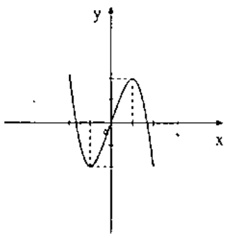
۱)



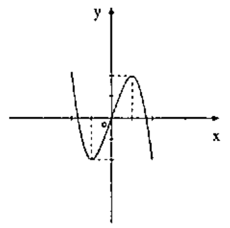
۲)



۳)



۴)



۱۰. معادلهٔ خط قائم بر منحنی به معادلهٔ $y=\frac{1}{x^2}-x$ در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر آن کدام است؟

۱) $3y+x+1=0$　۲) $3y-x+1=0$

۳) $3y-x-1=0$　۴) $3y+x-1=0$

حسابان ۱

۱. کدام یک از تابعهای به معادله‌های زیر مساویند.

۱) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{1-\sin^2 x} \\ g(x)=\cos x \end{cases}$　۲) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{1+\tan^2 x} \\ g(x)=\frac{1}{\cos x} \end{cases}$

۳) $\begin{cases} f(x)=\frac{x^4-1}{x^2-1} \\ g(x)=x^2+1 \end{cases}$　۴) $\begin{cases} f(x)=0 \\ g(x)=\left\lfloor \frac{x^2}{x^2+1} \right\rfloor \end{cases}$

۲. اگر $f(x)=\sqrt{4-x}$ و $g(x)=\sqrt{x-2}$، آن‌گاه دامنهٔ fog کدام است؟

۱) $[2,4]$　۲) $[2,16]$

۳) $[0,18]$　۴) $[2,18]$

۳. تابع با ضابطهٔ $f(x)=\log(\sqrt{1+x^2}-x)$، تابعی:

۱) فرد است　۲) زوج است

۳) هم فرد است و هم زوج　۴) نه فرد است و نه زوج

۴. در معادلهٔ درجه دوم $x^2+(m-1)x-8=0$ اگر یکی از ریشه‌ها مربع ریشهٔ دیگر باشد، m کدام است؟

۱) -1　۲) -2

۳) -3　۴) -4

۵. اگر باقیماندهٔ تقسیم $2x^3+ax+b$ بر $(x+1)$ مساوی -2 باشد، آن‌گاه باقیماندهٔ تقسیم $5x^2+2ax+2b$ بر $(x+1)$ کدام است؟

۱) $a+b$　۲) $a-b$

۳) 5　۴) -5

۶. به‌ازای کدام مقدار m، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\frac{(m-1)x+4}{2x-2m}$ بر نمودار تابع معکوس خودش منطبق است؟

۱) -1　۲) -2

۳) -3　۴) -4

۷. تابع با ضابطهٔ $f(x)=\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor$ مفروض است، کدام نتیجه درست است؟

۱) $\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to\sqrt{2}} f(x)$

۲) $\lim_{x\to 5} f(x)\neq\lim_{x\to\frac{1}{5}} f(x)$

۳) این تابع در اعداد صحیح حد ندارد.

۴) این تابع در اعداد غیرصحیح حد ندارد.

۸. حاصل $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin 2x}$ برابر است با:

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　۲) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

۳) $\sqrt{2}$　۴) $-\sqrt{2}$

۹. منحنی با ضابطهٔ $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-2}}{x-1}$ چه مجانبهایی دارد؟

۱) یک قائم و یک افقی　۲) یک قائم و دو افقی

۳) فقط یک افقی　۴) فقط دو افقی

۱۰. تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} \frac{\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{1-\cos 2x}} & x>0 \\ \lfloor x\rfloor+b & x<0 \\ a(\lfloor x\rfloor+1) & x=0 \end{cases}$ در $x=0$ پیوسته است، $(a+b)$ کدام است؟

۱) ۴　۲) ۳

۳) ۲　۴) ۱

۱۱. اگر $y=(\sqrt{4+x^2}-x)^{10}$ و $z=(\sqrt{4+x^2}+x)^{10}$، آن‌گاه حاصل $y'_x.z+z'_x.y$ برابر است با:

۱) $10(4)^9$　۲) 4^{10}

۳) 0　۴) 10

۱۲. اگر $f(x)=x(x-1)(x-2)...(x-5)$، $f'(4)$ کدام است؟

۱) ۲۴　۲) ۱۲۰

۳) -120　۴) -24

تستهای ترکیبی در ریاضیات گسسته

۱. درخت T از مرتبهٔ p و اندازهٔ q مفروض است، اگر p عددی اول و $p|7^{11}$، در این صورت، مجموع درجهٔ رأسهای این درخت کدام است؟

۱) ۶　۲) ۱۲　۳) ۷　۴) ۱۴

۲. اگر p و q بترتیب، مرتبه و اندازهٔ درخت T بوده و هر دو اعداد اول باشند، در این صورت، حاصل (p^2+q^2) کدام است؟

۱) ۵　۲) ۲۵　۳) ۱۶　۴) ۱۳

۳. اگر p و q به ترتیب، مرتبه و اندازهٔ درخت T باشند، در این صورت، بزرگترین مقسوم علیه مشترک p^2q^2 و p^2-q^2 کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) p ۴) q

۴. دو تاس را با هم می‌ریزیم، مطلوب است احتمال آن که مجموع دو تاس برابر با عدد k باشد؛ به شرط آن که بدانیم k تعداد عاملهای عدد ۷ در !۵۰ است.

۱) $\frac{5}{36}$ ۲) $\frac{6}{37}$ ۳) $\frac{3}{36}$ ۴) $\frac{4}{36}$

۵. معادلهٔ $x_1+x_2+x_3=r$ چند جواب صحیح نامنفی دارد؛ به شرط آن که r باقیماندهٔ تقسیم $(14)^{1802}$ بر عدد ۱۹ باشد؟

۱) ۵۶ ۲) ۴۸ ۳) ۲۴ ۴) ۲۸

۶. از بین اعداد طبیعی کوچکتر یا مساوی با ۲۱۰۰، عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن که عدد انتخاب‌شده بر ۵ و بر ۳ تقسیم‌پذیر نباشد.

۱) $\frac{58}{201}$ ۲) $\frac{56}{105}$ ۳) $\frac{112}{2100}$ ۴) $\frac{1012}{2100}$

۷. تعداد رابطه‌هایی که می‌توان روی مجموعهٔ A تعریف کرد، که هم خاصیت تقارنی و هم خاصیت پادتقارنی داشته باشند، برابر است با $[\varphi(42)+20]$؛ A چند عضو دارد؟ (φ تابع حسابی اویلر است.)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۳

۸. از بین جوابهای معادلهٔ X >> $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$ یک ماتریس به تصادف انتخاب می‌کنیم، احتمال آن که ماتریس انتخاب شده، ماتریس واحد (I_3) باشد، کدام است؟

۱) $\frac{1}{64}$ ۲) $\frac{1}{16}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{32}$

۹. گراف همبند G از مرتبهٔ p و اندازهٔ q مفروض است، به‌طوری که $sp-rq=1$: اگر $pq=40$، در این صورت، مجموع درجه‌های رأسهای این گراف کدام است؟ $(p<q)$

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۰ ۴) ۱۶

حساب دیفرانسیل و انتگرال ۱

۱. حدّ دنبالهٔ $\left\{\frac{2^n}{n!}\right\}$ وقتی $n\to\infty$ برابر است با: $n\in N$

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۰

۲. سری $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)$

۱) همگرا به ۱ است ۲) همگرا به ۱- است
۳) همگرا به ۰ است ۴) واگراست

۳. اگر $\lim_{x\to+\infty}(x^2-2x)=+\infty$، آن‌گاه برای هر $N>0$ وجود دارد: $M>0$، به طوری که $x>M \Rightarrow x^2-2x>N$، M بزرگتر و مساوی کدام است؟

۱) $\sqrt{N+1}$ ۲) $\sqrt{N-1}$
۳) $\sqrt{N-1}+1$ ۴) $\sqrt{N+1}+1$

۴. در معادلهٔ $ax^{2n-1}+bx^{2n-2}+...+k=0$، ضرایب حقیقی‌اند و $n\in N$. کدام نتیجه درست و کامل است؟

۱) معادله حداکثر n ریشهٔ حقیقی دارد.
۲) معادله حداکثر $(2n-1)$ ریشهٔ حقیقی دارد.
۳) معادله حداقل یک ریشه دارد.
۴) گزینه‌های ۲ و ۳

۵. مقدار $\lim\left[\frac{7x^2-1}{x^2+1}\right]$ وقتی $x\to+\infty$، برابر است با:

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴

۶. مقدار $\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^{x^2}$ برابر است با:

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) e ۴) e^2

۷. تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}[x]+a & x>2\\ [x^2-4] & x=2\\ [x]+bx & x<2\end{cases}$، در $x_0=2$ پیوسته است، $(a+b)$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) $-\frac{5}{2}$ ۳) $\frac{7}{2}$ ۴) $-\frac{7}{2}$

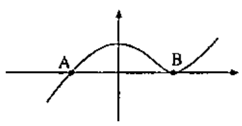
۸. معادله‌های مجانبهای مایل تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{\frac{x^3-6}{x-2}}$ کدام است؟

۱) $y=\pm x$ ۲) $y=\pm(x-1)$
۳) $y=\pm(x+1)$ ۴) $y=x\pm2$

۹. اگر $f(x)=\sin 2x$، آن‌گاه $\lim_{h\to0}\frac{f'(\frac{\pi}{4}+h)-f'(\frac{\pi}{4})}{h}$ برابر است با:

۱) ۴ ۲) ۴- ۳) ۲ ۴) ۲-

۱۰. اگر نمودار تابع f' به صورت زیر باشد، آن‌گاه کدام گزینه درست است؟



۱) دو اکسترمم نسبی دارد. ۲) یک ماکزیمم نسبی دارد.
۳) یک می‌نیمم نسبی دارد. ۴) اکسترمم نسبی ندارد.

۱۱. اگر در تابع وارون‌پذیر f داشته باشیم $f'(x)=f(x)$، آن‌گاه $(f^{-1})'(2x)$ کدام است؟

۱) $2x$ ۲) $\frac{2}{x}$ ۳) $\frac{1}{2x}$ ۴) $\frac{x}{2}$

۱۲. ذره‌ای روی مسیر به معادلهٔ $2y^2-3y-x^2+4x=5$ حرکت می‌کند، چنانچه مؤلفه x با سرعت ۰/۲ متر در ثانیه افزایش یابد، در نقطهٔ (۲، ۱)، مؤلفهٔ y با چه سرعتی تغییر می‌کند.

۱) $\frac{2}{25}$ ۲) $-\frac{2}{25}$ ۳) $-\frac{25}{2}$ ۴) $\frac{25}{2}$

ریاضی عمومی ۱

۱. اگر واریانس درجه حرارت در شهری برحسب سانتیگراد برابر ۵ باشد، انحراف معیار درجه حرارت در این شهر، بر حسب فارنهایت کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۹ ۳) ۳۷ ۴) ۴۱

۲. از جعبه‌ای که ۵ مهرهٔ سفید و ۹ مهرهٔ سبز دارد، به طور متوالی و با جایگذاری، مهره‌ای خارج می‌کنیم، احتمال آن که اولین مهرهٔ سبز، سومین مهره‌ای باشد که از جعبه خارج می‌کنیم، کدام است؟

۱) $\frac{180}{14^3}$ ۲) $\frac{180}{14\times13\times12}$
۳) $\frac{225}{14\times13\times12}$ ۴) $\frac{225}{14^3}$

۳. اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند و $P(A)=\frac{1}{2}$ و $P(B)=\frac{1}{3}$، $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$، آن‌گاه $P(\bar{A}|\bar{B})$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{3}{8}$ ۳) $\frac{5}{8}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۴. اگر $A=\left[\begin{array}{ccc|c}0&1&2&5\\0&(a+1)&0&1\\0&0&0&b-1\end{array}\right]$ ماتریس سطری پلکانی باشد، آن‌گاه کدام درست است؟

۱) $-a=b=1$ ۲) $a=b=1$
۳) $a=-b=1$ ۴) $a=b=-1$

۵. در بسط دوجمله‌ای $(3x^2-2x)^4$ ضریب جملهٔ شامل x^6 کدام گزینه است؟

۱) ۲۱۶ ۲) ۲۱۶- ۳) ۲۱۴ ۴) ۲۱۴-

۶. مجانب موازی محور xهای تابع با ضابطهٔ $y=e^{-x+2}-3$ کدام است؟

۱) $y=3$ ۲) $y=-3$
۳) $y=2$ ۴) $y=-2$

۷. حاصل $\lim_{x\to+\infty}(1-\frac{3}{x})^x$ کدام است؟

۱) e^3 ۲) e^{-3} ۳) $3e$ ۴) $-3e$

۸. در بازهٔ دنبالهٔ $\left\{\frac{n^2+3}{n^2+1}\right\}$ کدام درست است؟

۱) از بالا کراندار است.
۲) از پایین کراندار است.
۳) نزولی است.
۴) از بالا و پایین کراندار است.

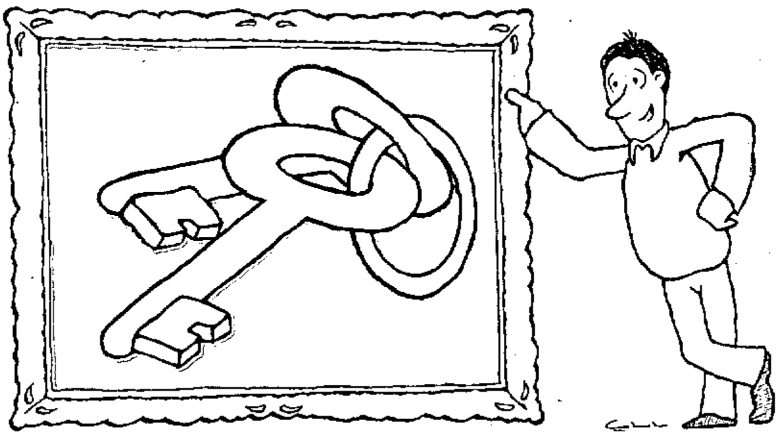
۹. مشتق تابع با ضابطهٔ $y=x^{e^x}$ در نقطهٔ $x=1$ کدام است؟

۱) $e+1$ ۲) $1-e$ ۳) e ۴) $-e$

۱۰. به ازای چه مقدار m، خط به معادلهٔ $y=x+m$، بر منحنی به معادلهٔ $y=x^2-x$ مماس است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۲-

پاسخ پرسشهای چهار گزینه‌ای



● ریاضیات ۱

۱. گزینهٔ (۱) صحیح است ؛ زیرا :

$A=\{x|x\in Z, x\geq 4\}=\{4,5,6,7,...\}$

$\rightarrow A'=\{x|x\in Z, x<4\}$

$B=\{x|x\in \mathbb{R}, x<-2\}\rightarrow B'=\{x|x\in \mathbb{R}, x\geq -2\}$

$A'\cap B'=\{-2,-1,0,1,2,3\}=\{x|x\in Z, -2\leq x<4\}$

۲. گزینهٔ (۳) صحیح است.

۳. گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ زیرا :

$$A=2^5\times 3^6\times 7^4\times 5^2=\frac{2^6\times 3^6\times 7^6\times 5^3}{2\times 7^2\times 5}$$

$$=\frac{(2^2\times 3^2\times 7^2\times 5)^3}{2\times 7^2\times 5}$$

$A(2\times 7^2\times 5)=(2^2\times 3^2\times 7^2\times 5)^3$ (مکعب کامل)

۴. گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ زیرا :

$24=2^3\times 3\ ,\ 144=2^4\times 3^2\ ,\ 120=2^3\times 3\times 5$

کوچکترین مضرب مشترک $=2^4\times 3^2\times 5=720$

۵. گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ زیرا :

$$45(7\times 2)^7+9(2^4\times 7^3)=\frac{9\times 5\times 7^7\times 2^7}{9\times 2^4\times 7^4}$$

$$=2^3\times 7^4\times 5$$

۶. گزینهٔ (۳) صحیح است ؛ زیرا :

$(2k-1)(2k+1)=4k^2-1=99\ ;\ 4k^2=100\ ;$

$k^2=25\ ,\ k=5$ (k مثبت)

$k=5\ :\ (2k-1)+(2k+1)$

$=(2(5)-1)+(2(5)+1)=20$

۷. گزینهٔ (۳) صحیح است ؛ زیرا :

$$A=\frac{5^{-3}+3^{-2}}{3\times 3^{-1}+2^{-3}}=\frac{\frac{1}{5^3}+\frac{1}{3^2}}{3^0+\frac{1}{2^3}}=\frac{\frac{9+5^3}{5^3\times 9}}{1+\frac{1}{8}}$$

$$=\frac{\frac{134}{5^3\times 9}}{\frac{9}{8}}=\frac{8\times 134}{5^3\times 9^2}=\frac{8\times 134}{125\times 81}=\frac{1072}{10125}$$

۸. گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ زیرا :

$x=3/0\overline{4}\ ;\ 10x=30/\overline{4}\ ;\ 100x=304/\overline{4}$

$100x-10x=304/\overline{4}-30/\overline{4}\ ;\ 90x=304-30\ ;$

$x=\frac{274}{90}\ ;\ x=\frac{137}{45}$ (کسر متعارفی عدد ۳/۰۴)

۹. گزینهٔ (۱) صحیح است ؛ زیرا :

$(12)^3=12\times 12\times 12=4^3\times 3^3\ ;$

$\frac{1}{4}(12)^3=\frac{4^3\times 3^3}{4}=4^2\times 3^3\ ,$

$\frac{1}{3}(12)^3=\frac{4^3\times 3^3}{3}=4^3\times 3^2\ ,$

$4^2\times 3^3+4^3\times 3^2=4^2\times 3^2(3+4)$

مجموع ربع عدد $(12)^3$ به اضافهٔ ثلث آن $=4^2\times 3^2\times 7$

۱۰. گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ زیرا :

$$\frac{8x^3+1}{2x+1}=\frac{(2x)^3+1}{2x+1}=\frac{(2x+1)(4x^2-2x+1)}{2x+1}$$

$$=4x^2-2x+1\qquad (x\neq -\frac{1}{2})$$

$$\frac{8x^3-1}{2x-1}=\frac{(2x)^3-1}{2x-1}=\frac{(2x-1)(4x^2+2x+1)}{2x-1}$$

$$=4x^2+2x+1\qquad (x\neq \frac{1}{2})$$

$(4x^2-2x+1)+(4x^2+2x+1)=8x^2+2=2(4x^2+1)$

۱۱. گزینهٔ (۱) صحیح است ؛ زیرا :

$a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc\ ;$

$2a^2+2b^2+2c^2=2ab+2ac+2bc$

$a^2+a^2+b^2+b^2+c^2+c^2-2ab-2ac-2bc=0\ ;$

$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2=0$

طرف اوّل برابری اخیر، همیشه مثبت است و تنها وقتی صفر است که همهٔ عبارتها برابر صفر باشند :

$(a-b)^2=0\ ,\ (a-c)^2=0\ ,\ (b-c)^2=0\ ;\ a=b=c$

$$a=b=c\ :\ \frac{3\sqrt[3]{abc}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}=\frac{3\sqrt[3]{a^3}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a}}$$

$$=\frac{3\sqrt[3]{a^3}}{3\sqrt[3]{a}}=\sqrt[3]{a^2}$$

۱۲. گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ زیرا :

$3^{x+1}+9^x=108\ ;\ 3\times 3^x+3^{2x}=108\ ;$

$(3^x)^2+3(3^x)-108=0$

$3^x=k\ :\ k^2+3k-108=0\ ;$

$(k-9)(k+12)=0 \begin{cases} k=9 \\ k=-12 \end{cases}$ (غیرقابل قبول)

$k=9\ :\ 3^x=9=3^2\ ;\ \boxed{x=2}$

● ریاضیات ۳

۱. پاسخ صحیح، گزینهٔ (۳) می‌باشد. اگر مجهول معادلهٔ موردنظر مسأله X باشد، با توجه به فرض مسأله $X=-\frac{x}{2}$ و لذا $x=-2X$ و با جایگزینی این مقدار در معادلهٔ اصلی، نتیجه می‌شود :

$2x^2+x=4\Rightarrow 2(-2X)^2+(-2X)=4$

$\Rightarrow 8X^2-2X-4=0\Rightarrow 4X^2-X-2=0$

۲. پاسخ صحیح، گزینهٔ (۳) است :

$$2x+5=-\sqrt{x^2-7} \Rightarrow 4x^2+20x+25=x^2-7$$
$$\Rightarrow 3x^2+20x+32=0$$
$$\Delta=400-384=16 \Rightarrow x=\frac{-20\pm 4}{6}$$
$$\Rightarrow x_1=-4\ ,\ x_2=-\frac{8}{3}$$

هر دو پاسخ در دامنهٔ تعریف معادله صدق کرده و در معادله نیز صدق می‌کنند.

۳. پاسخ صحیح، گزینهٔ (۳) است :

$$\frac{1}{x^2}\ge 1 \Rightarrow \frac{1-x^2}{x^2}\ge 0\ ,\ (x^2>0) \Rightarrow 1-x^2\ge 0 \Rightarrow x^2\le 1$$
$$\Rightarrow -1\le x\le 1\ ,\ x\ne 0 \Rightarrow x\in[-1,1]-\{0\}$$

۴. پاسخ صحیح، گزینهٔ (۳) است. کسر فوق را می‌توان به‌صورت $\frac{(x-1)(x-2)^2}{(x+1)^2(x+1)}$ نوشت. از آن‌جایی که $(x-2)^2$ و $(x+1)^2$ نامنفی هستند، لذا کافی است که $\frac{x-1}{x+1}$ منفی باشد. با تعیین علامت کسر فوق، محدوده‌ای از x را که در آن، این کسر منفی می‌شود، تعیین می‌کنیم :

x	$-\infty$ -1	-1 1	1 $+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$\frac{x-1}{x+1}$	$+$	$+$	$+$

$$\Rightarrow -1<x<1$$

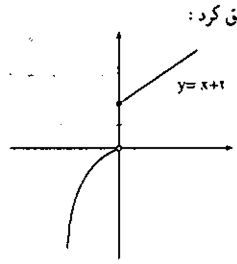
بنابراین، به‌ازای هر x در بازهٔ $(-1,1)$ کسر فوق منفی می‌شود و بنابراین $(-1,\frac{1}{2})$ نیز که زیرمجموعهٔ بازهٔ فوق است، می‌تواند پاسخ مسأله باشد.

۵. پاسخ صحیح، گزینهٔ (۱) است. برای آن‌که سه‌جمله‌ای مزبور، همواره منفی باشد، باید $\Delta<0$ و $a<0$ باشد ؛ یعنی مبین سه‌جمله‌ای منفی و ضریب x^2 هم منفی باشد (می‌دانیم اگر مبین یک سه‌جمله‌ای منفی باشد، علامت آن همواره موافق علامت ضریب x^2 است) :

$$(2-m)x^2+2(m-2)x-m=0$$
$$\Delta=4(m-2)^2-4(2-m)(-m)<0$$
$$\Rightarrow (m-2)(4-8-4m)<0$$
$$\Rightarrow -8(m-2)<0 \Rightarrow m-2>0 \Rightarrow m>2$$
$$a=2-m<0 \Rightarrow m>2$$

لذا کافی است $m>2$ باشد تا سه‌جمله‌ای فوق، همواره منفی باشد.

۶. با رسم نمودار تابع، می‌توان یک به یک و پوشایی تابع فوق را بسادگی تحقیق کرد :



همان‌گونه که از روی نمودار پیدا است، تابع فوق یک به یک بوده و پوشش نیست و پاسخ صحیح، گزینهٔ (۲) است.

۷. پاسخ صحیح، گزینهٔ (۴) است :

$$y=2^{x-1}-1 \Rightarrow x=2^{y-1}-1 \Rightarrow y-1=\log_2^{x+1}$$
$$\Rightarrow y=\log_2^{x+1}+1=\log_2^{x+1}+\log_2^2=\log_2^{2(x+1)}=\log_2^{2x+2}$$
$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\log_2^{2x+2}$$

۸. پاسخ صحیح، گزینهٔ (۴) است. می‌دانیم که اگر $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$: بنابراین می‌توان نوشت :

$$A^{-1}=\frac{1}{10-12}\begin{bmatrix}5 & -3\\ -4 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{5}{2} & \frac{3}{2}\\ 2 & -1\end{bmatrix}$$

و از آن‌جا به‌دست می‌آید :

$$A+A^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{5}{2} & \frac{3}{2}\\ 2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{9}{2}\\ 6 & 4\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \left|A+A^{-1}\right|=-2-27=-29$$

۹. پاسخ صحیح، گزینهٔ (۳) است. از دستور کرامر استفاده می‌کنیم. می‌دانیم برای آن‌که دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی، دارای جواب یکتا باشد، لازم و کافی است دترمینان مخرج کسرهایی که مساوی x و y هستند ـ یعنی دترمینان ضرایب ـ مخالف صفر باشد.

$$\begin{cases}ax+by=c\\ a'x+b'y=c'\end{cases} \Rightarrow x=\frac{\begin{vmatrix}c & b\\ c' & b'\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a & b\\ a' & b'\end{vmatrix}}\ ,\ y=\frac{\begin{vmatrix}a & c\\ a' & c'\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a & b\\ a' & b'\end{vmatrix}}$$
$$\Rightarrow \begin{vmatrix}a & b\\ a' & b'\end{vmatrix}\ne 0 \Rightarrow \begin{vmatrix}m-1 & 4\\ 3 & m+3\end{vmatrix}\ne 0$$
$$\Rightarrow (m+3)(m-1)-12\ne 0$$
$$\Rightarrow m^2+2m-15\ne 0 \Rightarrow (m+5)(m-3)\ne 0$$
$$\Rightarrow m\ne 3\ ,\ m\ne -5$$

۱۰. پاسخ صحیح، گزینهٔ (۳) است.

به کمک قضیهٔ $\log_{a^n}^x=\frac{1}{n}\log_a^x$ همهٔ لگاریتمها را همپایه نموده و معادله را حل می‌کنیم :

$$\log_3^x+\log_{3^{\frac{1}{2}}}^x+\log_{3^{-1}}^x=6$$
$$\Rightarrow \log_3^x+\frac{1}{\frac{1}{2}}\log_3^x+\frac{1}{-1}\log_3^x=6$$
$$\Rightarrow \log_3^x+2\log_3^x-\log_3^x=6$$
$$\Rightarrow 2\log_3^x=6 \Rightarrow \log_3^x=3 \Rightarrow x=3^3=27$$

هندسهٔ ۱

۱. گزینهٔ (۳) صحیح است. مثلثهای ADE، ABD و BCD متساوی‌الساقین و $D\hat{A}B=D\hat{B}A=50^\circ$ است ؛ زیرا $E\hat{A}B=90^\circ$ و $D\hat{A}E=A\hat{D}E=40^\circ$ می‌باشد. بنابراین :
$A\hat{E}D=x=180^\circ-2\times 40^\circ=100^\circ$ و
$y=B\hat{C}D=\frac{1}{2}D\hat{B}A=25^\circ$
است. پس :

$$x+y=100^\circ+25^\circ=125^\circ$$

۲. گزینهٔ (۱) صحیح است ؛ زیرا داریم :

$2/4k =$ طول و $k =$ عرض $\Rightarrow$
$2/4k^2=240 \Rightarrow$ مساحت $= S =$
$k^2=100 \Rightarrow k=10 \Rightarrow$ عرض $=10$ و طول $=24 \Rightarrow$
$\sqrt{10^2+24^2}=26$ = طول قطر و $2(10+24)=68$ = محیط مستطیل

$$\Rightarrow \frac{\text{اندازه محیط}}{\text{طول قطر}}=\frac{68}{26}=\frac{34}{13}$$

۳. گزینهٔ (۳) صحیح است. اگر طول ضلع بزرگترین مربع را a فرض کنیم، طول ضلع مربعی که از وصل کردن وسطهای ضلعهای آن پدید می‌آید، $\frac{a}{\sqrt{2}}$ و طول ضلع مربعی که از وصل کردن وسطهای ضلعهای این مربع جدید به‌وجود می‌آید، $\frac{a}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{a}{2}$ و طول ضلع مربع آخری، $\frac{a}{2\sqrt{2}}=\frac{a}{2\times\sqrt{2}}$ است. بنابراین :

مساحت بزرگترین مربع / مساحت کوچکترین مربع

$$=(\frac{a}{2\sqrt{2}})^2/a^2=\frac{1}{8}$$

۴. گزینهٔ (۴) صحیح است. ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع را a فرض می‌کنیم. با توجه به این که مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a، برابر $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ است، داریم :

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=9\sqrt{3} \Rightarrow a^2=36 \Rightarrow a=6$$
$$h_a=\frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h_a=\frac{6\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$$

۵. گزینهٔ (۲) صحیح است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ MNP داریم :

$$MN^2=NQ.NP \Rightarrow 64=NQ(NQ+3/6) \Rightarrow$$
$$NQ^2+3/6NQ-64=0 \Rightarrow NQ=\frac{-1/8\pm\sqrt{3/24+64}}{1}$$
$$=-1/8\pm 8/2$$
$$\Rightarrow NQ=6/4 \Rightarrow NP=6/4+3/6=10 \Rightarrow$$
$$MP^2=\sqrt{NP^2-MN^2}=\sqrt{100-64}=\sqrt{36}=6$$

۶. گزینهٔ (۱) صحیح است ؛ زیرا $MN\|BC$ و مثلث AMN با مثلث ABC متشابه و نسبت مساحتشان برابر $\frac{1}{4}$ است. بنابراین :

$$S_{AMN}/S_{ABC}=\frac{1}{4} \Rightarrow S_{MNCB}/S_{ABC}=\frac{3}{4}$$
$$\Rightarrow S_{MNCB}/S_{AMN}=\frac{3}{4}/\frac{1}{4}=3$$

۷. گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ زیرا با استفاده از قضیهٔ تالس داریم :

$$\frac{x+4}{x}=\frac{10}{5}=\frac{y}{3} \Rightarrow x=4\ ,\ y=6 \Rightarrow 2x-y=2$$

۸. گزینهٔ (۴) صحیح است. سهم شش‌ضلعی منتظم برابر $10\times\frac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$ است. از آن‌جا :

$\frac{1}{2}\times 6\times 10\times 5\sqrt{3}=150\sqrt{3}$ = مساحت شش ضلعی منتظم

$\Rightarrow$ مساحت دو قاعده $=300\sqrt{3}$

مساحت جانبی $=6\times 10\times 18=1080$

مساحت کل $=1080+300\sqrt{3}=60(18+5\sqrt{3})$

۹. گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ زیرا داریم :

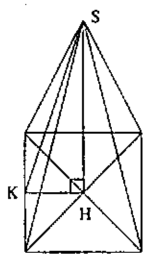
= حجم مخروط اولی / حجم مخروط جدید

$\frac{1}{3}\pi(2R)^2\times\frac{h}{2}\Big/\frac{1}{3}\pi R^2h=2$

۱۰. گزینهٔ (۳) صحیح است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ SHK $(\hat{H}=90^\circ)$ داریم :

نصف ضلع مربع $HK=\sqrt{SK^2-SH^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$

$\Rightarrow$ ضلع مربع $=2\times 6=12$



● ریاضی ۵

۱. گزینهٔ (۳) صحیح است. از تعریف اشتراک دو مجموعه نتیجه می‌شود.

۲. گزینهٔ (۱) صحیح است ؛ زیرا داریم :

$3-\sqrt{3}=3-1/7=1/3>1\Rightarrow f(3-\sqrt{3})$

$=\sqrt{3}+3-\sqrt{3}=3$

$\sqrt{3}-1=1/7-1=0/7<1$

$\Rightarrow f(\sqrt{3}-1)=\sqrt{3}-(\sqrt{3}-1)=1$

$\Rightarrow f(3-\sqrt{3}).f(\sqrt{3}-1)=3\times 1=3$

۳. گزینهٔ (۴) صحیح است. با توجه به تعریف لگاریتم، جواب دستگاه نامعادلهٔ $\begin{cases}16-x^2>0\\ x>0\\ x\neq 1\end{cases}$ را باید به‌دست آوریم. داریم :

$16-x^2>0\Rightarrow -4<x<4\Rightarrow 0<x<4\ ,\ x\neq 1$

۴. گزینهٔ (۲) صحیح است. با توجه به تعریف ترکیب تابعها، داریم :

$(gof)(x)=g(f(x))=(x+4)-4=x$

$(fog)(x)=f(g(x))=(x-4)+4=x$

$\Rightarrow (gof)(x)-(fog)(x)=x-x=0$

۵. گزینهٔ (۱) صحیح است. شرط پیوسته بودن تابع در $x=2$ آن است که $\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^-}f(x)=f(2)$ باشد. بنابراین داریم :

$2a+1=11\Rightarrow a=5(1)$ و $4a+2b-1=11\Rightarrow$

$2a+b=6(2)\Rightarrow b=-4\Rightarrow 2a+b=6$

نکته. در این تست، رابطهٔ (۲) جواب مسأله را مشخص می‌کند. بنابراین بدون محاسبهٔ b می‌توان گزینهٔ جواب را تعیین کرد.

۶. گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ زیرا داریم :

$y=\frac{2x+1}{\sqrt{2x+1}}=\sqrt{2x+1}\Rightarrow y'=\frac{2}{2\sqrt{2x+1}}=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

نکته. اگر از تابع $y=\frac{2x+1}{\sqrt{2x+1}}$ (بدون تبدیل کردن آن) مشتق بگیریم، پس از ساده‌کردن جواب به‌دست آمده، همان نتیجهٔ بالا حاصل می‌شود.

۷. گزینهٔ (۳) صحیح است ؛ زیرا داریم :

$y=\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}=\frac{(\cos x+\sin x)^2}{\cos^2x-\sin^2x}=\frac{1+\sin 2x}{\cos 2x}\Rightarrow$

$y'=\frac{2\cos^2 2x+2\sin 2x(1+\sin 2x)}{\cos^2 2x}=\frac{2+2\sin 2x}{\cos^2 2x}$

$\Rightarrow f'(\frac{\pi}{6})=\frac{2+\sqrt{3}}{\frac{1}{4}}=4(2+\sqrt{3})$

نکته. اگر بدون تبدیل نمودن تابع، مشتق بگیریم، داریم :

$y'=\frac{(\cos x-\sin x)^2+(\cos x+\sin x)^2}{(\cos x-\sin x)^2}=\frac{2}{(\cos x-\sin x)^2}$

$\Rightarrow f'(\frac{\pi}{6})=\frac{2}{(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2})^2}=\frac{8}{4-2\sqrt{3}}$

$=\frac{4}{2-\sqrt{3}}=4(2+\sqrt{3})$

۸. گزینهٔ (۱) صحیح است ؛ اولاً. مختصات نقطهٔ عطف در معادلهٔ منحنی صدق می‌کند، بنابراین داریم :

$(-1,2)\xrightarrow{\text{در تابع}}2=-1+a-b+2\Rightarrow a-b=1\quad(1)$

ثانیاً. طول نقطهٔ عطف منحنی، ریشهٔ مشتق دوم تابع است ؛ پس :

$y'=3x^2+2ax+b\Rightarrow y''=6x+2a\Rightarrow 0=6(-1)+2a$

$\Rightarrow a=3\ (2)$ و $(1),(2)\Rightarrow b=2$

درنتیجه خواهیم داشت :

$a+2b=3+4=7$

۹. گزینهٔ (۴) صحیح است. نمودار تغییرات این تابع، از ربع دوم دستگاه مختصات شروع و به ربع چهارم ختم می‌شود ؛ زیرا :

$\begin{vmatrix}x\to+\infty\\ y\to-\infty\end{vmatrix}$ و $\begin{vmatrix}x\to-\infty\\ y\to+\infty\end{vmatrix}$

از طرفی، نقطه‌های $(-1,-2)$ و $(1,2)$ نقطه‌های می‌نیمم و ماکزیمم آن هستند.

۱۰. گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ زیرا داریم :

$x=1\xrightarrow{\text{در تابع}}y=0\Rightarrow N(1,0)$ پای قائم

$y=\frac{1}{x^2}-x\Rightarrow y'=\frac{-2}{x^3}-1\Rightarrow$ مماس $m=\frac{-2}{(1)^3}-1=-3$

$\Rightarrow$ قائم $m=\frac{1}{3}\Rightarrow y-y_1=m(x-x_1)$

$\Rightarrow y-0=\frac{1}{3}(x-1)\Rightarrow y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$

$\Rightarrow 3y-x+1=0$ معادلهٔ خط قائم

● حسابان ۱

۱. گزینهٔ (۴)

$0\le\frac{x^2}{x^2+1}<1\Rightarrow\left\lfloor\frac{x^2}{x^2+1}\right\rfloor=0\qquad g(x)=\left\lfloor\frac{x^2}{x^2+1}\right\rfloor$

$\begin{cases}f(x)=0\\ g(x)=0\end{cases}\ D_f=D_g=R\ ,\ f(x)=g(x)$

۲. گزینهٔ (۴)

$f(x)=\sqrt{4-x}\quad D_f: x\le 4$

$g(x)=\sqrt{x-2}\quad D_g: x\ge 2$

$D_{fog}=\{x|x\in D_g, g(x)\in D_f\}$

$x\in D_g\Rightarrow x\ge 2$

$g(x)\in D_f\Rightarrow\sqrt{x-2}\le 4\Rightarrow x-2\le 16\Rightarrow x\le 18$

$D_{fog}=[2,18]$

۳. گزینهٔ (۱)

$f(x)=\log(\sqrt{1+x^2}-x)$

$f(-x)=\log(\sqrt{1+x^2}+x)$

$f(x)+f(-x)=\log(\sqrt{1+x^2}-x)+\log(\sqrt{1+x^2}+x)$

$f(x)+f(-x)=\log(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)$

$=\log(1+x^2-x^2)=\log 1=0$

$f(-x)=-f(x)$ f تابعی فرد است

۴. گزینهٔ (۱)

$x^2+(m-1)x-8=0$

دوطرف تساوی را در x'' ضرب می‌کنیم $x'=x''^2$

$x'\cdot x''=x''^3\Rightarrow\frac{c}{a}=x''^3\Rightarrow -8=x''^3\Rightarrow x''=-2$

$x''=-2$ در معادله : $4+(m-1)(-2)-8=0\Rightarrow$

$4-2m+2-8=0\Rightarrow -2m-2=0\Rightarrow m=-1$

۵. گزینهٔ (۳)

$f(x)=2x^3+ax+b$

$f(-1)=-2\Rightarrow -2-a+b=-2\Rightarrow b=a$

$g(x)=5x^2+2ax+2b$

$g(-1)=5-2a+2b=5$

۶. گزینهٔ (۱). درتابع با ضابطهٔ $y=\frac{ax+b}{cx+d}$، اگر $a+d=0$ آن‌گاه نمودار f بر نمودار f^{-1} منطبق است ؛ پس :

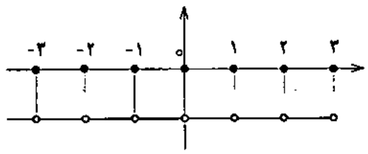
$y=\frac{(m-1)x+4}{2x-2m}$

$a+d=0\Rightarrow m-1-2m=0\Rightarrow m=-1$

۷. گزینهٔ (۱)

$f(x)=\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor\Rightarrow f(x)=\begin{cases}0 & x\in Z\\ -1 & x\notin Z\end{cases}$

اگرنمودار این تابع را رسم کنیم، ملاحظه می‌کنیم که این تابع در تمام نقاط $\mathbb{R}$ حد دارد و حدّ آن برابر ۱- است.



۸. گزینهٔ (۲)

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-\cos2x}}{\sin2x}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2\sin^2x}}{\sin2x}\sim\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2x^2}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{-x\sqrt2}{2x}=-\frac{\sqrt2}{2}$$

۹. گزینهٔ (۴)

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2-2}}{x-1}$$

مجانب قائم $x=1$ است که چون داخل رادیکال را به عدد منفی تبدیل می‌کند، قابل قبول نیست.

$$x\to\pm\infty\Rightarrow\lim\frac{\sqrt{x^2-2}}{x-1}=\lim\frac{\pm x}{x}=\pm1$$

پس $y=\pm1$، معادلهٔ مجانب افقی است.

۱۰. گزینهٔ (۲)

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt2\sin x}{\sqrt{1-\cos2x}}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt2x}{\sqrt{2x^2}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt2x}{\sqrt2x}=1$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=[0^-]+b=-1+b$$

$$f(0)=a([0]+1)=a$$

$$-1+b=1\Rightarrow b=2\ ,\ a=1\ ,\ a+b=3$$

۱۱. گزینهٔ (۳)

$$\begin{cases}y=(\sqrt{4+x^2}-x)^{10}\\ z=(\sqrt{4+x^2}+x)^{10}\end{cases}\Rightarrow y.z=(4+x^2-x^2)^{10}$$

از دو طرف تساوی نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$y.z=4^{10}$$

$$y'_x.z+z'_x.y=0$$

۱۲. گزینهٔ (۴) $f(x)=(x-4)\underbrace{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)}_{u(x)\ \text{فرض می‌شود}}$

$$f(x)=(x-4)u(x)\Rightarrow f'(x)=u(x)+u'(x)(x-4)$$

$$f'(4)=u(4)=4(3)(2)(1)(-1)=-24$$

● ریاضیات گسسته

۱. گزینهٔ (۲) صحیح است: زیرا در هر درخت، رابطهٔ $p=q+1$ بین تعداد رأسها (p) و تعداد یالها (q) برقرار است و چون $p|7^{11}$، پس باید $p|7$؛ یعنی $p=1$ یا $p=7$، که طبق فرض p اوّل است: بنابراین $p=7$ و در نتیجه $q=6$ و $\sum \deg V_i=2q=12$.

۲. گزینهٔ (۴) صحیح است: زیرا p و q هر دو عدد اوّل و در هر درخت داریم $p-q=1$ و تنها دو عدد اولی که متوالی هستند، ۳ و ۲ می‌باشند: یعنی $p=3$ و $q=2$ و در نتیجه:

$$p^2+q^2=9+4=13$$

۳. گزینهٔ (۱) صحیح است: زیرا p و q در رابطهٔ $p-q=1$ صدق می‌کنند؛ بنابراین p و q دو عدد صحیح و متوالی بوده و همواره $(p,q)=1$ و داریم:

$$(p,q)=1\Rightarrow(p^2,q^2)=1\Rightarrow(p^2q^2,p^2\pm q^2)=1$$

(اگر دو عدد نسبت به هم اوّل باشند، حاصلضرب و مجموع (و تفاضل) آن دو عدد نیز نسبت به هم اوّلند.)

۴. گزینهٔ (۱) صحیح است: زیرا تعداد عاملهای عدد اوّل p در $n!$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\dots+\left[\frac{n}{p^k}\right]+\dots+0+0+0+\dots$$

([ ] نماد جزء صحیح است.)

بنابراین k به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$k=\left[\frac{50}{7}\right]+\left[\frac{50}{49}\right]+0+0+0\dots=7+1=8$$

$$\Rightarrow p\ (\text{مجموع دوتاس ۸ باشد})=\frac{5}{36}$$

$$(A=\{(5,3)(3,5),(2,6)(6,2),(4,4)\})$$

۵. گزینهٔ (۴) صحیح است: زیرا باقیماندهٔ تقسیم $(14)^{1802}$ بر عدد ۱۹ به شکل زیر محاسبه می شود:

$$(14,19)=1\overset{\text{فرما}}{\Rightarrow}14^{18}\overset{19}{\equiv}1\Rightarrow(14^{18})^{100}\times14^2\overset{19}{\equiv}1^{100}\times14^2$$

$$\Rightarrow14^{1802}\overset{19}{\equiv}196\overset{19}{\equiv}6\Rightarrow r=6$$

و تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادلهٔ $(x_1+x_2+x_3=6)$، برابر است با $\binom{8}{2}$، که $\binom{8}{2}=28$.

۶. گزینهٔ (۲) صحیح است: زیرا باید تعداد اعداد بین ۱ تا ۲۱۰۰ را که بر ۵ و بر ۳ بخش‌پذیر نیستند، محاسبه کرده و بر تعداد کل اعداد تقسیم کنیم، تا احتمال موردنظر محاسبه شود و طبق اصل رد و شمول، تعداد این اعداد، به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$A_1=\text{مضارب۳}\Rightarrow|A_1|=\frac{2100}{3}=700$$

$$A_2=\text{مضارب ۵}\Rightarrow|A_2|=\frac{2100}{5}=420$$

$$\Rightarrow|A_1\cap A_2|=\frac{2100}{[5,3]}=\frac{2100}{15}=140$$

$$\Rightarrow|\overline{A_1\cup A_2}|=2100-|A_1\cup A_2|$$

$$=2100-(700+420-140)=1120$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{1120}{2100}=\frac{56}{105}$$

۷. گزینهٔ (۲) صحیح است: زیرا:

$$42=2\times3\times7\Rightarrow\varphi(42)=42\times(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{7})$$

$$\Rightarrow\varphi(42)=42\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{6}{7}=12$$

بنابراین $32=12+20$، رابطه طبق فرض روی A تعریف می‌شود که هم تقارنی و هم پادتقارنی هستند، که البته اگر رابطه‌ای هر دو خاصیت تقارنی و پادتقارنی را دارا باشد، باید زیرمجموعهٔ رابطهٔ همانی، یعنی I باشد: یعنی به تعداد زیرمجموعه‌های I می‌توان چنین رابطه‌هایی تعریف کرد و چون تعداد این زیرمجموعه‌ها $32=2^5$ است، پس I دارای ۵ عضو است و اعضای I نیز با اعضای A برابرند!

$$(A=\{2,4,6\}\Rightarrow I=\{(2,2),(4,4),(6,6)\})$$

۸. گزینهٔ (۱) صحیح است: زیرا با توجه به تعریف رابطهٔ (≫) در مجموعهٔ ماتریسهای مجاورت، (درآیه‌ها صفر و یک هستند) تعداد جوابهای معادلهٔ $X\gg A$ که A ماتریس مفروضی باشد، برابر است با $2^{(\text{تعداد صفرهای A})}$، که در این تست، این تعداد برابر است با $64=2^6$، که در بین همهٔ این ۳۲ ماتریس، فقط یک ماتریس مساوی با I_3 وجود دارد، پس احتمال موردنظر برابر است با $\frac{1}{64}$.

(در معادلهٔ $X\gg A$ درآیه‌های متناظر با هر درآیهٔ یک در A برای ماتریس X باید ۱ باشند و به ازای صفرهای A برای هر درآیهٔ متناظر در X، دو حالت ۰ یا ۱ وجود دارد.)

۹. گزینهٔ (۴) صحیح است: زیرا طبق فرض $sp-rq=1$، پس $(p,q)=1$ و چون $pq=40$، پس $p=5$ و $q=8$ و مجموع درجه‌های رأسهای گراف G، برابر است با، $2q=2\times8=16$.

● حساب دیفرانسیل و انتگرال

۱. گزینهٔ (۴)

$$0<\frac{2^n}{n!}=\frac{\overbrace{2\times2\times2\times\dots\times2}^{n\ \text{مرتبه}}}{1\times2\times3\times\dots\times n}<\frac{2}{1}\times\frac{2}{2}\times1\times1\times\dots\times\frac{2}{n}$$

$$0<\frac{2^n}{n!}<\frac{4}{n},\lim_{n\to\infty}(0)<\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}<\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\Rightarrow0<\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}<0$$

پس:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$$

۲. گزینهٔ (۱)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}-\frac{(-1)^k}{k}\right),\ S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}-\frac{(-1)^k}{k}\right)$$

$$f(k)=\frac{(-1)^k}{k}\ \text{با فرض}\ ,\ S_n=f(n+1)-f(1)=\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}+1$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=1$$

۳. گزینهٔ (۴)

$$x^2-2x>N\Rightarrow(x-1)^2>N+1\Rightarrow\underset{x\to+\infty\Rightarrow|x-1|=x-1}{|x-1|>\sqrt{N+1}}$$

$$x-1>\sqrt{N+1}\Rightarrow x>\sqrt{N+1}+1\qquad M\geq\sqrt{N+1}+1$$

۴. گزینهٔ (۴). $(2n-1)$ عددی است فرد. معادله با درجهٔ $(2n-1)$، حداکثر $(2n-1)$ ریشهٔ حقیقی و حداقل یک ریشهٔ حقیقی دارد.

۵. گزینهٔ (۲)

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{7x^2-1}{x^2+1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{7(x^2+1)-8}{x^2+1}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(7+\left\lfloor \frac{-8}{x^2+1} \right\rfloor\right)$$

$$=7+\lfloor 0^- \rfloor = 7-1=6$$

۶. گزینهٔ (۳)

$$x\to 0 \Rightarrow \sin x \sim x ,\ \lim_{x\to0^+}(\sin x)^{x^2} = \lim_{x\to0^+}(x)^{x^2}$$

$$y=x^{x^2} \Rightarrow Lny = x^2 Lnx = \frac{Lnx}{\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{Lnx}{\frac{1}{x^2}} = \frac{\infty}{\infty}\ ,\ H:\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x\to0^+}-\frac{x^2}{2} = 0$$

$$Lny = 0 \Rightarrow y = e$$

۷. گزینهٔ (۲)

$$\lim_{x\to2^+} f(x) = 2+a$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x)=1+2b$$

$$f(2)=0 \begin{cases} a+2=0 \Rightarrow a=-2 \\ 1+2b=0 \Rightarrow b=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow a+b=-\frac{5}{2}$$

۸. گزینهٔ (۳)

$$f(x)=\sqrt[3]{\frac{x^3-6}{x-2}}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3-6 & x-2 \\ \hline 2 & x^2+2x+4 \end{array}$$

$$f(x)=\sqrt{x^2+2x+4+\frac{2}{x-2}}_{x\to\pm\infty} = \pm(x+1)$$ یا $$y=\pm(x+1)$$

۹. گزینهٔ (۲). حدّ این کسر برابر $f''(\frac{\pi}{4})$

$$f'(x)=2\cos2x \Rightarrow f''(x)=-4\sin2x \Rightarrow f''(\frac{\pi}{4})$$

$$=-4\sin\frac{\pi}{2}=-4$$

۱۰. گزینهٔ (۳). منحنی f' محور xها را در یک نقطه قطع کرده است، پس تابع f یک اکسترمم نسبی دارد. پیش از نقطهٔ A، مشتق منفی و بعد از نقطهٔ A، مشتق مثبت است؛ پس نقطهٔ A مربوط به نقطهٔ می‌نیمم نسبی تابع f است.

۱۱. گزینهٔ (۳). داریم: $(f^{-1})'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}$

$$f'(x)=f(x)$$

$$(f^{-1})'(f(x))=\frac{1}{f(x)} \Rightarrow (f^{-1})'(2x)=\frac{1}{2x}$$

۱۲. گزینهٔ (۲)

$$2y^2-3y-x^2+4x=5 \qquad \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ x'_t=\frac{2}{10} \end{cases}$$

$$y'_t = -\frac{(-2x+4)x'_t}{4y-3}$$

$$y'_t = -\frac{(-2+4)\frac{2}{10}}{8-3} = -\frac{\frac{4}{10}}{5} = -\frac{2}{25}$$

● ریاضی عمومی ۱

۱. گزینهٔ (۲) صحیح است؛ زیرا رابطهٔ بین درجهٔ حرارت برحسب سانتیگراد و فارنهایت، به‌صورت $F = 1/8C + 32$ است. بنابراین، طبق دستور $\delta^2_{ax+b}=a^2\delta^2x$ خواهیم داشت:

$$\delta_F^2 = \delta^2_{1/8C+32} = (1/8)^2\delta^2C = (1/8)^2\times5^2$$

$$\Rightarrow \delta_F = 1/8\times5 = 9$$

۲. گزینهٔ (۴) صحیح است؛ زیرا اگر قرار باشد اوّلین مهرهٔ سبز، سوّمین مهره باشد، پس مهره‌های اوّل و دوم سفید هستند؛ بنابراین:

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)=\frac{5}{14}\times\frac{5}{14}\times\frac{9}{14}=\frac{225}{14^3}$$

۳. گزینهٔ (۳) صحیح است؛ زیرا:

$$P(\bar A|\bar B)=\frac{P(\bar A\cap\bar B)}{P(\bar B)}=\frac{P(\overline{A\cup B})}{P(\bar B)}=\frac{1-P(A\cup B)}{1-P(B)}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$$

$$P(\bar A|\bar B)=\frac{1-\frac{7}{12}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{5}{12}}{\frac{2}{3}}=\frac{5}{8}$$

۴. گزینهٔ (۱) صحیح است؛ زیرا:

$$\begin{cases} a+1=0 \Rightarrow a=-1 \\ b-1=0 \Rightarrow b=1 \end{cases} \Rightarrow -a=b=1$$

۵. گزینهٔ (۱) صحیح است؛ زیرا:

$$t_k = (-1)^{k+1}\times\binom{4}{k-1}(2x)^{4-k+1}(3x^2)^{k-1}$$

$$ax^6 = (-1)^{k+1}\binom{4}{k-1}\times(2)^{5-k}\times(3)^{k-1}\times x^{k+3}$$

$$\Rightarrow k+3=6 \Rightarrow k=3\ ;$$

(ضریب x^6) $a=(-1)^{3+1}\binom{4}{3-1}\times(2)^{5-3}\times(3)^{3-1}$

$$=\binom{4}{2}\times2^2\times3^2=216$$

۶. گزینهٔ (۲) صحیح است؛ زیرا در یک تابع، مجانب افقی در صورتی به‌دست می‌آید که حاصل $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ یک عدد حقیقی باشد:

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{-x+2}-3 = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{e^{x-2}}-3=-3 \Rightarrow y=-3$$ مجانب افقی

۷. گزینهٔ (۲) صحیح است؛ زیرا:

$$\lim_{x\to+\infty}(1-\frac{3}{x})^x = \lim_{x\to+\infty}\left(\left[1+(-\frac{3}{x})\right]^{\frac{x}{-3}}\right)^{-3} = e^{-3}$$

۸. گزینهٔ (۲)صحیح است؛ زیرا:

$$u_n=\frac{n^2+3}{n^2+1}=\frac{(n^2+1)+2}{n^2+1}=1+\frac{2}{n^2+1}>1$$

$$\Rightarrow u_n>1\ (n\in N)$$

۹. گزینهٔ (۳) صحیح است؛ زیرا:

$$y=x^{e^x}\Rightarrow \ln y=\ln x^{e^x}\Rightarrow \ln y = e^x\ln x \Rightarrow y=e^{e^x\ln x}$$

$$y'=(e^x\ln x)'e^{e^xLnx}=(e^x\ln x+\frac{e^x}{x})x^{e^x}$$

$$y'(1)=(e\ln1+e)=e$$

۱۰. گزینهٔ (۳) صحیح است؛ زیرا ابتدا خط و منحنی را قطع داده (yها را مساوی قرار می‌دهیم)، سپس دلتای معادلهٔ درجهٔ دو حاصل را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} y=x+m \\ y=x^2-x \end{cases} \Rightarrow x^2-x=x+m \Rightarrow x^2-2x-m=0$$

$$\Delta=(-2)^2-4(1)(-m)=0 \Rightarrow 4+4m=0 \Rightarrow m=-1$$

جوابهای تفریح اندیشه

پاسخ ۱:

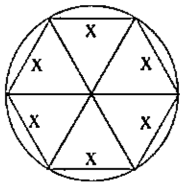
جواب : ۱

حل: قطر چرخ عقب (۲۵)۲:۱۲۵ یا $\frac{۵}{۲}$ قطر چرخ جلو است.

در نتیجه، $\frac{۲}{۵}$ تعداد دورهای هر ثانیه را تشکیل می‌دهد، و :

$$\left(\frac{۲}{۵}\right)\left(\frac{۵}{۲}\right)=۱$$

پاسخ ۲:



جواب : ۴ متر

حل: با استفاده از نقطه‌ای در مرکز دایره، شش‌ضلعی موردبحث دقیقاً به شش‌مثلث متساوی‌الاضلاع برابر تقسیم می‌شود. در صورتی که طول ضلع یکی از این مثلثها x باشد، ارتفاع آن $(x/۲)\sqrt{۳}$ یا $x\sqrt{۳}/۲$ متر است. بنابراین، مساحت چمن توسط رابطهٔ مقابل به‌دست آمده است :

$$۶(\frac{۱}{۲})(x)(\frac{x\sqrt{۳}}{۲})=\sqrt{۱۰۸}$$

$$\frac{۳\sqrt{۳}x^۲}{۲}=\sqrt{۱۰۸}=۶\sqrt{۳}$$

$$۳x^۲=۱۲$$

و از آن‌جا که $x>۰$ ، $x=۲$. قطر باغ $۲x$ یا ۴ متر است.

پاسخ ۳:

جواب: ۸، ۵۳ و ۵۴.

حل: بر هر ورق، چهار صفحه موجود است. با شروع از ابتدا و انتها، صفحه‌های ۱ و ۲ با ۵۹ و ۶۰ یک ورق را تشکیل می‌دهند. همین‌طور ۳ و ۴ با ۵۷ و ۵۸، ۵ و ۶ با ۵۵ و ۵۶، ۷ و ۸ با ۵۳ و ۵۴. در نتیجه، صفحه‌های ۷ و ۸ و ۵۳ و ۵۴ سفیدند.

معرفی کتابهای ریاضی انتشارات مدرسه

تقارن جبری و ضریبهای نامعین

مؤلف: پرویز شهریاری/ ناشر: انتشارات مدرسه

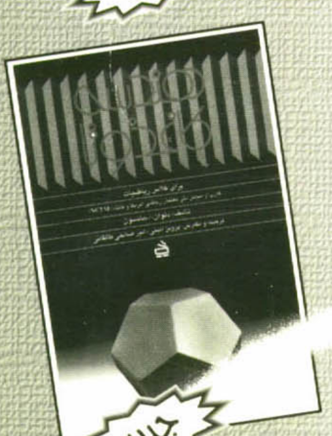
کتاب تقارن جبری و ضرایب نامعین بیست و دومین کتاب از سری کتابهای کوچک ریاضی است. در این کتاب تنها به جنبهٔ ناچیزی از مفهوم تقارن پرداخته است. «تقارن در عبارتهای جبری» ولی حتی این جنبهٔ ناچیز هم گسترده تر از آن است که بتوان در بخشی از یک کتاب به آن پرداخت. به همین جهت، تلاش شده است چه در متن و چه ضمن حل تمرینها، اساسی ترین ویژگیهای عبارتهای متقارن و روشهای استفاده از آنها برای حل مسأله های محاسبه ای، بیاید. تسلط بر ویژگیهای عبارتهای متقارن، در بسیاری حالتها، نیروی لازم را برای حل مسأله در اختیار ما می گذارد. مطالعهٔ این کتاب را به همهٔ دانش آموزان و دانشجویان تربیت معلم و دبیران توصیه می کنیم.

استقرای ریاضی

مؤلف: پرویز شهریاری/ ناشر: انتشارات مدرسه

کتاب استقرای ریاضی بیست و یکمین کتاب از سری کتابهای کوچک ریاضی است. یکی از انواع استدلالهای ریاضی، استقرای ریاضی است؛ با این نوع استدلال بسیاری از مسائل پیچیده ریاضی را می توان به سادگی حل کرد. در این کتاب، مؤلف محترم با شیوه ای روان، کاربرد این نوع استدلال را در حل مسائل به کار برده است.

مطالعهٔ این کتاب را به همه دانش آموزان و دبیران و علاقه مندان به ریاضی توصیه می کنیم.



هندسه کاغذ و تا

مؤلف: دنوان. ا. جانسون/ ترجمه و نگارش: پرویز امینی ـ امیر صالحی طالقانی/ ناشر: انتشارات مدرسه

این کتاب برای استفاده معلمان و دانشجویان پویا و کوشای تربیت معلم که به دنبال راه های جدیدی در آموزش مفاهیم ریاضی هستند در نظر گرفته شده است. اما دانش آموزان دوره دبیرستان و علاقه مندان دوره راهنمایی نیز می توانند از این کتاب بهره مند شوند. در بیان مطالب این کتاب از یک یا چند شکل استفاده شده است. یک برگ کاغذ و مداد تنها ابزاری هستند که برای فعالیتهای این کتاب نیاز دارید. فعالیتهای این کتاب برای دانش آموزان درس هندسه بسیار جالب خواهد بود.

ابونصر عراق (ابونصر جَعدی)*

ابونصر منصور بن علی بن عراق جیلانی

ریاضیدان و منجم معروف ایرانی (؟ - بین ۴۰۸ و ۴۲۷)

از خاندان آل عراق و از مشاهیر ریاضیدانان و منجم عصر خود و استاد ابوریحان بیرونی بود. در نیمهٔ دوم سدهٔ چهارم و اوایل سدهٔ پنجم در «خوارزم» می زیست و نوشته اند که در نقاشی مهارت داشته است.

در چند مأخذ و از جمله در *دایرة المعارف اسلام*، نسبت جیلانی (= گیلانی) برای او ذکر شده است؛ ولی در «*طبقات الشافعیة*»، به جای «جیلانی» نسبت «الجعدی» نوشته شده است. ظاهراً «جعدی» لقب ابونصر عراق بوده است.

ابونصر عراق با «ابوعلی سینا» معاصر بود و مدتی با او در دربار مامونیان می زیست. بین کسانی که مدّعی کشف «شکل مغنی» (= قضیهٔ سینوسها در مثلث کروی و مسطح) بوده اند، به قول بیرونی، حقّ تقدم با ابونصر عراق بوده است.

این که بعض مؤلّفان، ابوالوفای بوزجانی را استاد ابونصر عراق دانسته اند، درست نیست. مأخذ این اظهارنظر، ظاهراً این بوده که ابونصر عراق در مقدمهٔ رسالهٔ «*القسی الفلکیه*» از بوزجانی با عنوان «شیخنا» نام برده است. اما بیرونی در کتاب *مقالید «علم الهیئة»* نوشته است که ابونصر عراق، گاهی حتی کسانی را که در مرتبهٔ علمی از او پایین تر هستند، استاد خود می نامد. بنابراین، ذکر عنوان «شیخنا» که ابونصر همراه نام بوزجانی ذکر کرده است، دلیل این نمی تواند بود که بوزجانی معلم ابونصر بوده است. گذشته از این، می دانیم که بوزجانی در سنّ بیست سالگی به بغداد رفته و ابونصر عراق ظاهراً هرگز به بغداد مسافرت نکرده است.

ابونصر عراق در ریاضیات و نجوم دارای تالیفات نفیسی است که چند کتاب از آنها باقی است و متأسفانه تعدادی از آنها از بین رفته است، که از آن جمله است *تهذیب التعالیم* و *مجسطی شاهی*. آثار ریاضی و نجومی او همواره مورد استفادهٔ دانشمندان بوده است.

«حکیم عمر خیّام» در یکی از رسایل خود ابونصر عراق را در جزو ردیف اوّل و طبقهٔ عالی علمای ریاضی برشمرده است.

بعضی از آثار ریاضی موجود وی

۱ - *رسالة فی حل شبهة عرضت له فی المقالة الثالثة عشر من کتاب الاصول*

این رساله را ابونصر عراق، در جواب شاگرد خود بیرونی نوشته است و موضوع آن رفع شبهه ای است که دربارهٔ مقالهٔ سیزدهم کتاب *اصول اقلیدس* روی داده بوده است.

۲ - *اصلاح کتاب مانالاوس فی الاشکال الکریة*

این کتاب را ابونصر عراق در سال ۳۹۸ به پایان رسانیده. در سال ۱۹۳۶ میلادی «ماکس کراوزه» متن عربی این کتاب را با ترجمه و تفسیر آن و با مقدمه ای جامع و محققانه به زبان آلمانی منتشر کرد.

۳ - *رسالة فی معرفة القسی الفلکیة بعضها من بعض بطریق غیر طریق معرفتها بشکل القطاع و النسبة المؤلفة*

موضوع این رساله، اثبات «شکل مغنی» یعنی رابطهٔ سینوسها در مثلث کروی و مثلث مسطح است.

۴ - *رسالة فی الجواب عن بعض مسائل الهندسة*

این رساله را نیز ابونصر عراق در جواب بیرونی نوشته است و مشتمل بر پانزده مسالهٔ هندسی مختلف و حلّ آنهاست.

کد ۸۳۱/۱

m. Dabbagh
۳۱
511384

* برگرفته از کتاب زندگی نامه ریاضیدانان دورهٔ اسلامی / ابوالقاسم قربانی / نشر دانشگاهی