رشد برهان

۶۸

مجله‌ی ریاضی

دوره ی آموزش متوسطه

دوره‌ی بیستم/ زمستان۱۳۸۹/ شماره‌ی ۲/ ٦٤ صفحه/ ۵۰۰۰ ریال
فصلنامه‌ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
www.roshdmag.ir

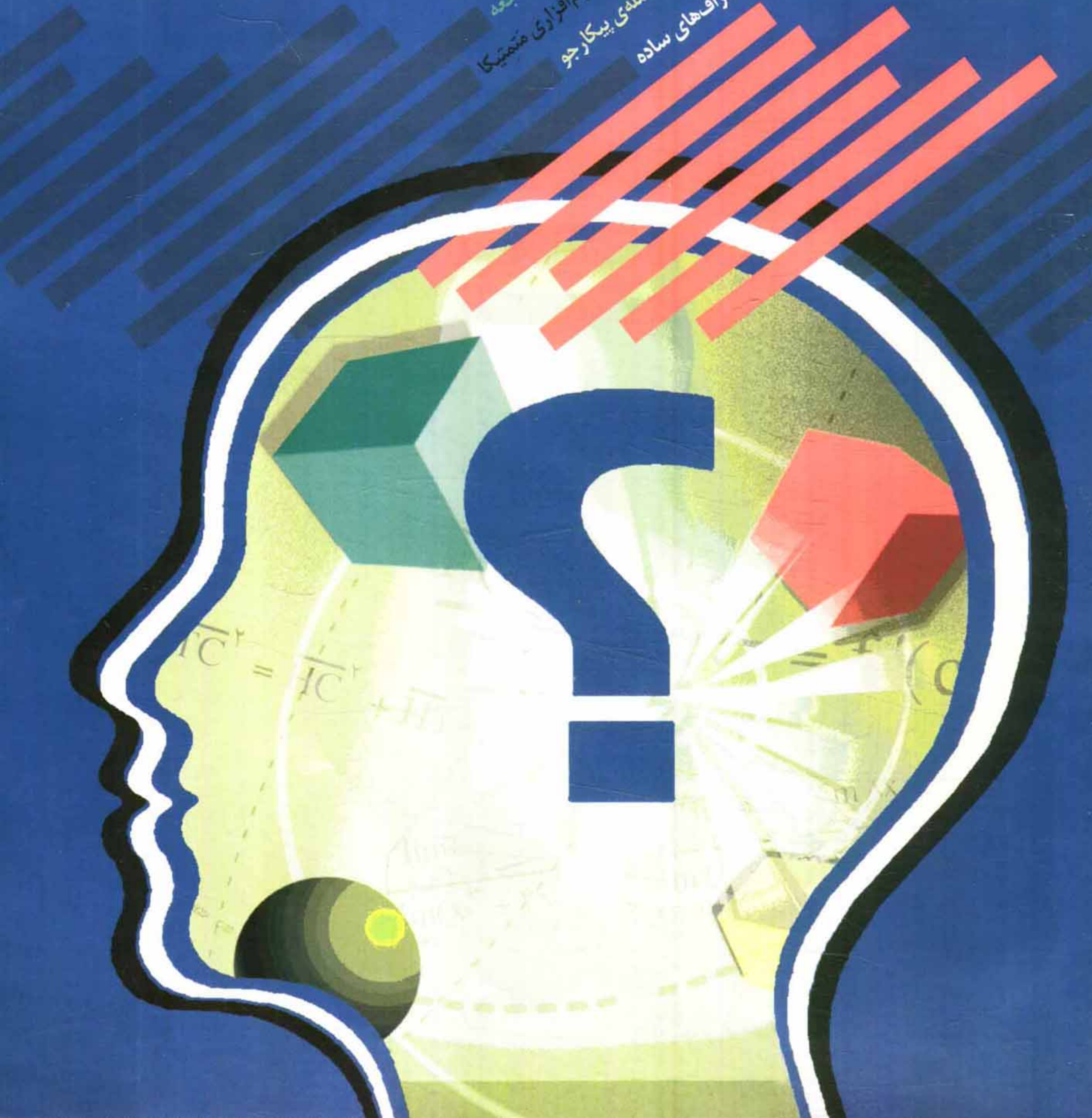
وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک‌آموزشی

نظریه‌ی هفت فاجعه

آشنایی با بسته نرم‌افزاری متمتیکا

چند مسئله‌ی پیکارجو

ماتریس مجاورت گراف‌های ساده



ISSN: 1735-4951

فراخوان

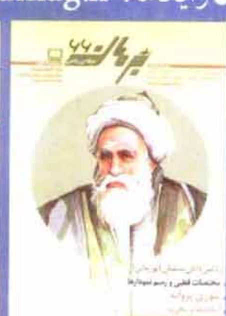
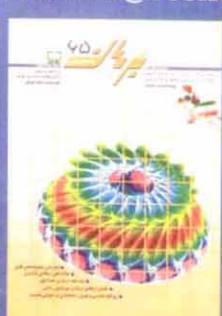
فرا رسیدن بیستمین سالگرد
انتشار مجله‌ی ریاضی رشد برهان متوسطه




به یاری خداوند متعال؛ با انتشار شماره ی ۷۰ مجله‌ ی ریاضی رشد برهان متوسطه در تابستان ۱۳۹۰ هـ.ش، بیستمین سالگرد تولد این مجله را پشت سر می‌گذاریم. در این مدت، همیشه از همکاری و همراهی شما دوستان بهره‌مند بوده‌ایم و تلاش داشته‌ایم تا به نوعی قدردان همراهی‌تان باشیم.

باپیشنهاد هیئت تحریریه‌ی مجله و تأیید مسئولین دفتر انتشارات کمک‌آموزشی بر آن شدیم که به‌منظور یادآوری تلاش‌ها و زحمات همه‌ی دوستان، در گذر این زمان "ویژه‌نامه‌ای" را منتشر کنیم و در آن، به ثبت خاطرات و نوشته‌های شما پردازیم. تک‌نگاشت‌های ارسالی شما که به نحوی آشنایی، میزان مطالعه، استفاده در محیط درس و کلاس و هر آن‌چه که می‌تواند جوانان امروز را به تجربه‌های ناب شما پیوند دهد، به غنای این ویژه‌نامه می‌افزاید.

- مهلت ارسال مقالات؛ حداکثر تا ۸۹/۱۰/۳۰
- رایانامه: Borhanm@roshdmag.ir


بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت آموزش‌وپرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

رشد برهان ۶۸
مجله‌ی ریاضی
دوره‌ی آموزش متوسطه

فصلنامه‌ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
دوره‌ی بیستم/ شماره‌ی ۲/ زمستان ۱۳۸۹

سال همت مضاعف، کار مضاعف

● مدیر مسئول: **محمد ناصری** ● سردبیر: **حمیدرضا امیری**

● مدیر داخلی: **میرشهرام صدر** ● طراح گرافیک: **جعفر وافی**

● هیئت تحریریه: **حمیدرضا امیری، محمد هاشم رستمی،**
احمد قندهاری، میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی،
سید محمدرضا هاشمی موسوی، غلامرضا یاسی‌پور
و با تشکر از همکاری ارزنده‌ی **استاد پرویز شهریاری**

● ویراستار ادبی: **لعیا عروجی**

● **وبگاه:** www.roshdmag.ir

● **رایانامه:** Borhanm@roshdmag.ir

● **پیام‌گیر نشریات رشد:** ۸۸۳۰۱۴۸۲ ـ ۰۲۱

نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵

● **تلفن دفتر مجله:** ۸۸۳۰۵۸۶۲ـ۰۲۱

● **تلفن امور مشترکین:** ۷۷۳۳۶۶۵۶ ـ ۷۷۳۳۶۶۵۵ـ۰۲۱

● **شمارگان:** ۱۲۰۰۰ نسخه

● **چاپ:** شرکت افست (سهامی عام)

رشد برهان متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر به همکاری دعوت می‌کند:

● نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی دوره‌ی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)

● طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)

● طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)

● طرح معماهای ریاضی

● نگارش یا ترجمه‌ی مقاله‌های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه‌ی علمی و اجتماعی ریاضی دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش رایانه و...)

حرف اول

واژه‌ی زمستان چه تصاویر، معانی و برداشت‌هایی را به ذهن شما می‌آورد؟

سرما؟ برف؟ درخت؟ صف‌های طولانی؟ تظاهرات؟ کاپشن؟ امام؟ شهید؟ انقلاب؟ امتحان؟ بخاری؟ پیروزی؟ همدلی؟ وحدت؟ ایمان؟ و...

برای بسیاری از ماها، در بین این کلمات شاید کلماتی چون امام، انقلاب، پیروزی و شهید بیشتر با واژه‌ی زمستان همخوانی داشته باشند و حتی به نوعی درهم تنیده شده باشند. می‌دانید چرا؟

دلیل آن را باید شما در کتاب‌ها خوانده باشید، و یا ممکن است پدر و مادرتان برایتان تعریف کرده باشند: بلی؛ انقلاب اسلامی در زمستان ۱۳۵۷ به پیروزی رسید!

ای کاش در زمستان آن سال حضور داشتید تا گرمای وجود امام را که پس از ۱۵ سال دوری از وطن به ایران بازگشت لمس می‌کردید. واقعاً جای همه‌ی شما خالی بود!

ای کاش بودید و آن همه وحدت و همدلی را می‌دیدید، و ای کاش شهیدانِ به خون خفته‌ی انقلاب نیز حضور داشتند تا پیروزی انقلاب را به امام تبریک می‌گفتند.

وقتی امام آمد،دیگر سرما معنا نداشت، چه، گرمای وجود و حضور ایشان چنان انرژی و ایمانِ مضاعفی به همه‌ی اقشار جامعه بخشیده بود که به فاصله‌ی ده روز [دهه فجر] یزید و یزیدیان شکست کامل خوردند و انقلاب اسلامی به پیروزی رسید.

آن روزها من نیز مانند دیگر دانش‌آموزان دبیرستانی، درس و کلاس را به میدان نبرد میان حق و باطل و صفِ تظاهرات علیه طاغوت برده بودیم و خیابان‌ها و میدان‌ها، حیاط مدرسه‌مان شده بود. ای کاش می‌توانستم احساس آن سرِکلاس درس حاضر شدن‌ها را که سرشار از احساس غرور و سربلندی و امید به آینده بود برای شما عزیزانم بازگو کنم.

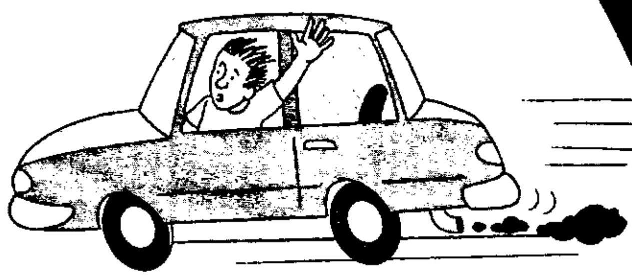
عزیزانِ من! سنگر آن روزِ ما دانش‌آموزان خیابان‌ها و کوچه‌های شهرمان بود و اسلحه‌ی ما مشت‌های گره کرده‌مان و ایمان به راه امام؛ اما امروز! سنگر شما حضور با نشاط و پویا در مدارس برای تهذیب نفس، تولید علم و پیشرفت علمی کشور و اسلحه‌ی شما قلم، کاغذ، کتاب و توجه کامل به رهنمودهای رهبر فرهیخته و عزیزمان است. ان‌شاءا... راه شهیدان همواره ادامه یابد و پاسدار خون آن‌ها باشیم.

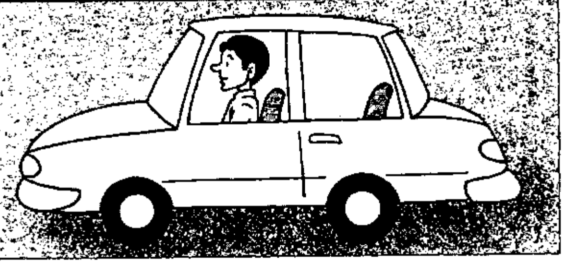
سردبیر

۷ نظریه‌ی فاجعه

قسمت اول

ترجمه‌ی پرویز شهریاری





تولد ستاره‌ی جدید، باز شدن گل یا به وجود آمدن شهر، پیشامدهایی عادی هستند، ولی در واقع، هر یک از آن‌ها تعادلی را که قبلا برقرار بوده است، به صورتی ناگهانی به هم می‌زنند. تمامی عالم افلاکی در حرکت تکاملی خود، دم به دم با جهش‌هایی از یک حالت تعادلی به حالت تعادلی دیگر منتقل می‌شود. کارهای پروفسور رنه‌توم، ریاضی‌دان فرانسوی، می‌تواند در درک این جهش‌ها به ما کمک کند.

«نظریه‌ی ویژگی‌های نگاشت‌های قابل دیفرانسیل گیری» را، اگر در اصطلاح‌ها تجربه‌ی کافی نداشته باشیم، می‌توان به ترتیب دیگری هم بیان کرد، مثلا برای امان دادن به گوش، که ناچار به شنیدن اصطلاحی به این دور و درازی نباشد، می‌توان از اصطلاح کوتاه «نظریه‌ی فاجعه‌ها» استفاده کرد.

بیان آسان‌تر می‌شود، ولی معنا و مفهوم آن چیست؟ چه بسا که این کوتاه کردن اصطلاح، خواننده را به گمراهی و ذهن او را به طرف زلزله یا آتش‌سوزی، سقوط هواپیما یا ورشکستگی مالی بکشاند. ولی در این مقاله، به هیچ موضوعی از این قبیل، برخورد نخواهید کرد. در این‌جا درباره‌ی گلوله‌ای که در یک شیار خمیده می‌غلتد و قرصی که به کمک نیروهای وارد بر آن در حال تعادل است و با به هم خوردن و ناپایداری تعادل، حالت خود را از دست می‌دهد و ... صحبت می‌شود.

در این نظریه، به هر وضعی که موجب دگرگونی تندی در حالت یک دستگاه بشود و هر به هم خوردگی ناگهانی که در تداوم جریان یک روند به وجود آید، فاجعه گفته می‌شود.

پرفسور رنه‌توم به خصوص به مفهوم کلی و انتزاعی خود، روی نظریه‌ی فاجعه‌ها کار کرده است. نظریه‌ی فاجعه‌ها، شاخه‌ای از آنالیز ریاضی است.

این‌جا با رسم سروکار داریم، نه با ریاضیات

در این مقاله، کاری با دستگاه‌های پیچیده‌ی ریاضی نداریم، و اگر در بعضی موارد به مفهوم‌هایی از ریاضیات متوسل می‌شویم، می‌توان آن را نوعی سرگرمی در ترسیم به شمار آورد.

یکی از این مفهوم‌ها، مفهوم تابع است. برای خواننده‌ای که در کارخود از دستگاه‌های ریاضی استفاده نمی‌کند، با شنیدن این اصطلاح بلافاصله متوجه یک شکل می‌شود: دو محور مختصات و یک منحنی، که نماینده‌ی نمایش تغییرات یک تابع است.

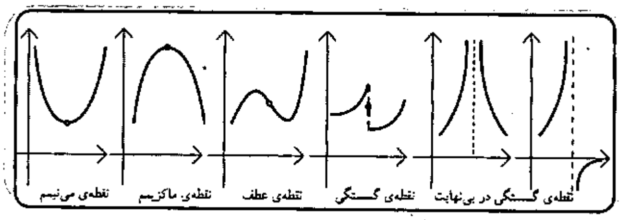
این تصور به طور کلی درست است، با وجود این، باید آن را دقیق‌تر کرد. وقتی که ریاضی‌دانان واژه‌ی «تابع» را به کار می‌برند، مقصودشان هرگونه تناظری است که بین کمیت‌های متغیر برقرار باشد، وقتی که یکی از آن‌ها (که آن را متغیر مستقل، یا آوند یا آرگومان تابع می‌نامند و به x نمایش می‌دهند) متناظر با دیگری (که آن را متغیر تابع یا مقدار تابع می‌نامندو به y نشان می‌دهند) باشد.

مقداری از آوند را انتخاب و جای آن را روی محور افقی دستگاه مختصات معین می‌کنیم. سپس مقداری از تابع را که متناظر با این مقدار آوند است، روی محور قائم مشخص می‌کنیم. روی صفحه‌ی مختصات، نقطه‌ای را با این مختصات نشانه می‌گذاریم. اگر پشت سر

هم، مقادیر تازه و تازه‌تری از آوند را در نظر بگیریم، روی صفحه‌ی مختصات، یک منحنی به دست می‌آوریم که معرف تابع به صورت عینی آن است، یعنی قانون تناظر بین متغیرهای مستقل و تابع را به صورتی قابل رؤیت نشان می‌دهد.

منحنی یک تابع، ممکن است شامل نقطه‌های خاصی باشد. ممکن است منحنی در ابتدا رو به پایین و سپس رو به بالا حرکت کند. دو قسمت انتهای سقوط و ابتدای رشد، در نقطه‌ی مینیمم به هم می‌رسند. برعکس هم می‌تواند باشد؛ منحنی ابتدا اوج بگیرد و سپس رو به حضیض رود. نقطه‌ی برخورد آخرین قسمت رو به اوج با نخستین قسمت رو به حضیض را ماکزیمم گویند. ممکن است خمیدگی منحنی ابتدا به طرفی و سپس به طرف دیگر باشد. جایی را که منحنی در آن جهت خمیدگی خود را تغییر می‌دهد، نقطه‌ی عطف گویند.

بالاخره، منحنی یک تابع ممکن است دچار گسستگی‌هایی بشود. برای مثال، منحنی در ارتفاعی پاره می‌شود و به صورت



نقطه‌های خاص در توابع یک متغیره

جهشی، حرکت خود را از نقطه‌ی پایین‌تر یا بالاتری ادامه می‌دهد. یا همان‌طور که آوند به مقداری نزدیک می‌شود، منحنی تابع به سمت بی‌نهایت (در جهت مثبت یا منفی) می‌رود و به ازای این مقدار آوند، پاره می‌شود و ما شاهد آن هستیم که چگونه منحنی از بی‌نهایت (گاه بی‌نهایت مثبت و گاه بی‌نهایت منفی) بازمی‌گردد.

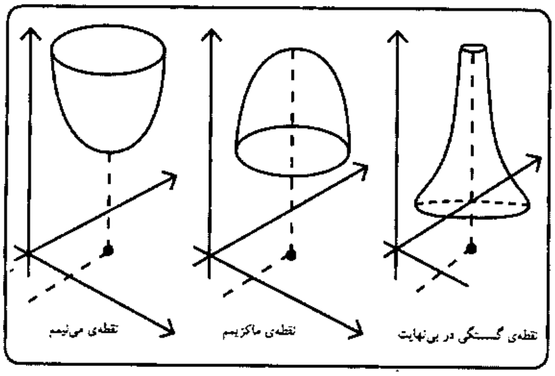
بازهم اندکی رسم

برای نمایش هر یک از تابع‌هایی که تا این‌جا بررسی کردیم، هر بار، تنها دو محور مختصات را در نظر داشتیم: یکی برای مقادیر آوند، و دیگری برای مقادیر تابع.

ولی در ریاضیات به تابع‌هایی هم می‌پردازند که شامل چند و مثلاً دو آوند هستند. در این مورد، برای نشان دادن مقادیر آوندها به دو محور نیاز داریم. در این حالت، هر جفت مقدار آوندها، متناظر است با مقدار معینی از تابع.

برای روشن شدن وضع، محور سومی به این دو محور اضافه و مقادیر تابع را روی آن جدا می‌کنیم. سه مختص (دو آوند و یک مقدار تابع)، نقطه‌ای از فضا را مشخص می‌کنند. با انتخاب انواع ممکن ترکیب‌های دو آوند، و پیدا کردن نقطه‌ی متناظر آن‌ها در فضا، سطحی به دست می‌آید که همان شکل عینی تابع دو متغیری است.

روی این سطح‌ها هم ممکن است به نقطه‌های خاص برخورد کنیم. نقطه‌ی مینیمم، نقطه‌ی ماکزیمم و گسستگی در بی‌نهایت.



نقطه‌های خاص در توابع دو متغیره

تصویرهای بالا معنای این اصطلاح‌ها را روشن می‌کند.

احتیاط کنید! یخ‌بندان است

می‌توان با انتخاب سطح‌های عجیب و غریبی از تابع‌های دو متغیری، مجموعه‌ی بزرگی از دیدنی‌های نادر را تشکیل داد.

برای مثال، این یکی از نمونه‌های بسیار جالب است: آیا موجی را دیده‌اید که به شیب ملایم ساحل برخورد می‌کند؟ نام دقیق این «موج‌ها» «مجموعه‌ی تابع‌های بسل» است. یا این کنده‌ی کج و کوله‌ی درخت را در نظر بگیرید که سطح مدول تابع گامای اولر است.

اگر در هر شکلی، تصویری هندسی از یک تابع چند متغیری می‌بینید و اگر با دیدن هر تابع، متوجه پدیده‌ای فیزیکی می‌شوید که به وسیله‌ی این تابع شرح داده می‌شود، در این صورت طبیعی است که هر ویژگی شکل، انعکاسی از ویژگی جریان پدیده‌ای باشد و برعکس: هر جریان نامتعارف و غیرعادی یک پدیده در تصویری عجیب و غریب منعکس شود که نماینده‌ی یک تابع است. در حالت خاصی که پدیده‌ی مفروض با یک متغیر شرح داده می‌شود، به نقطه‌های خاص منحنی نمایش تغییرات تابع برمی‌خوریم.

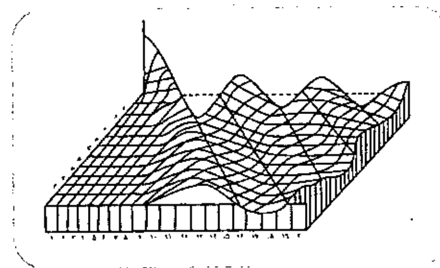
برای مثال، ترمز کردن اتومبیل را در نظر می‌گیریم. منحنی حرکت آن را رسم می‌کنیم. زمان را روی محور افقی و فاصله‌ی متناظری را که اتومبیل طی کرده است، روی محور قائم نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر، مسافت را تابعی از زمان در نظر می‌گیریم. روشن است که منحنی به سمت یک خط افقی می‌رود.

اتومبیل بعد از پیمودن مسافت معینی می‌ایستد.

مسافتی که بعد از ترمز کردن طی شده است، تا حد زیادی به ناهمواری جاده بستگی دارد. هر چه این ناهمواری بیشتر باشد، این مسافت کمتر است. همان‌طور که دیده می‌شود، ناهمواری جاده برای

روند مورد نظر ما، یک متغیر واقعی است. در نتیجه، آن را هم به عنوان آوندی از تابع خود (فاصله‌ای که اتومبیل طی کند) در نظر می‌گیریم.

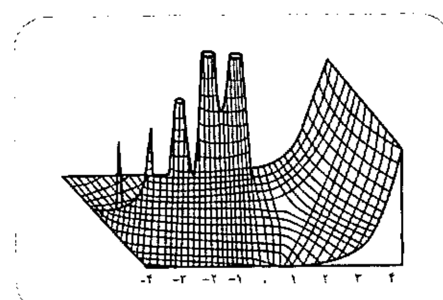
بنابراین، تغییرات تابع را باید در یک دستگاه مختصات سه بعدی نمایش دهیم. روی یکی از محورها، زمان را قرار می‌دهیم، روی دیگری، ناهمواری جاده و روی سومی، فاصله‌ای را که در زمان معین و با ناهمواری معین جاده پیموده می‌شود (سرعت اولیه‌ی اتومبیل را در همه‌ی حالت‌ها، یکسان گرفته‌ایم).



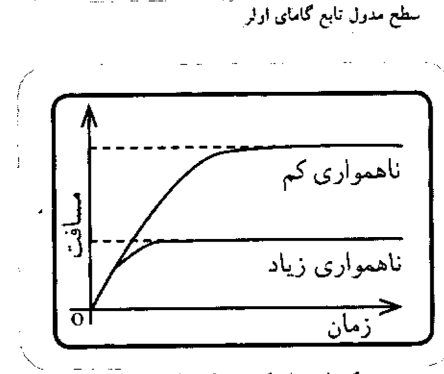
مجموعه‌ی تابع‌های بسل

به سطحی که نمایش این تابع دو متغیری است، با دقت نگاه کنید. می‌بینید که وقتی ناهمواری را صفر بگیریم، اتومبیل هیچ تمایلی به ایستادن، یا حتی کند شدن ندارد. مثل این که حدی برای حرکت خیالی آن وجود ندارد و مقطع سطح ما بالا و بالاتر می‌رود (اتومبیل ما با سرعتی ثابت پیوسته به پیش می‌رود).

بوی فاجعه به روشنی در این جا به مشام می‌رسد! رانندگی با اتومبیلی که روی چهار چرخ خود می‌لغزد، ممکن نیست!

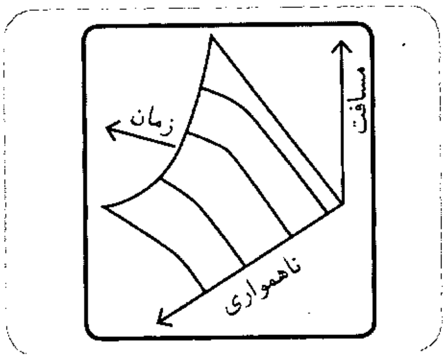


سطح مدول تابع گامای اولر



منحنی حرکت اتومبیلی که ترمز کرده است، به ناهمواری جاده بستگی دارد.

اگر ناهمواری جاده در تمامی طول مسیر ناهمسان باشد، سطح ما پیچیده‌تر به نظر می‌آید. تغییر اساسی وقتی پیش می‌آید که مثلاً



در اینجا مسافتی را که اتومبیل در حال ترمز پیموده است، به صورت تابعی از دو متغیر زمان و ناهمواری جاده نشان داده‌ایم.

اتومبیل به قسمتی از جاده برخورد کند که یخ‌بندان باشد، زیرا بلافاصله حالت ترمز به حالت لغزیدن تبدیل می‌شود. در سطحی که مسافت پیموده شده به وسیله‌ی اتومبیل، سرعت و شتاب آن را نشان می‌دهد، شکستگی و انقطاع پیش می‌آید، یعنی همان ویژگی‌هایی که پیش‌تر درباره‌ی آن‌ها صحبت کردیم.

پدیده‌ای در برابر ماست که می‌تواند به فاجعه به معنای طبیعی و عادی آن بینجامد و در عین حال، مثالی از فاجعه به معنای ریاضی آن است. واقعیت این است که نظریه‌ی فاجعه‌ها (اگر بخواهیم آن را به صورت‌های عینی توضیح دهیم) تعمیمی از نظریه‌ی ویژگی‌های تابع، به خصوص ویژگی‌های پیچیده‌ای مثل شکستگی و ناپیوستگی منحنی‌ها و سطح‌هایی است که معرف رفتار تابع هستند.

آزمایشی با نیروسنج

در نقطه‌های دور افتاده‌ی آنالیز ریاضی فرونمی‌رویم و خود را به شاخه‌ی عینی‌تری از ریاضیات، یعنی نظریه‌ی کنترل، محدود می‌کنیم.

برای شروع به آزمایشی می‌پردازیم. موضوع آزمایش، یک نیروسنج معمولی است. قلاب نیروسنج را می‌گیرید و آن را با نیرویی می‌کشید، عقربه‌ی آن روی نشانه‌ای که متناظر با تغییر طول فنر است، می‌ایستد.

مقدار نیرویی که بر قلاب وارد می‌کنید و آن را می‌کشید، معرف تأثیری بیرونی بر یک چیز و طول فنر، معرف حالت درونی آن چیز است.

در نظریه‌ی کنترل، معمولاً از کمیت‌های متغیر درونی که حالت یک چیز را نشان می‌دهند و متغیرهای بیرونی یا کنترل کننده، یعنی کمیت‌هایی که حالت یک چیز به آن‌ها بستگی دارد، صحبت می‌کنند.

حالا نیروی وارد بر قلاب را کمی بیشتر کنید، عقربه‌ی نیروسنج کمی پایین‌تر می‌آید.

آیا درستی این حکم، طبیعی به نظر نمی‌رسد که: تغییر کوچک کمیت‌های متغیر بیرونی، موجب تغییر کوچکی در کمیت‌های درونی می‌شود؟ ولی واقعیت این است که این حکم همیشه درست نیست!

ادامه دارد

نکاتی درباره‌ی معادلات درجه‌ی دوم به بالا

احمد قندهاری

نکته‌ی ۱

در هر معادله‌ی درجه‌ی سوم که به صورت $x^3 + px + q = 0$ باشد، داریم.

$\Delta = 4p^3 + 27q^2$

الف) $\Delta > 0$ یا $p > 0$

درنتیجه معادله یک ریشه‌ی حقیقی مخالف علامت q دارد.

ب) $\Delta < 0$

درنتیجه معادله یک ریشه‌ی حقیقی مخالف علامت q و دو ریشه‌ی حقیقی موافق علامت q دارد.

ج) $\Delta = 0$

درنتیجه معادله یک ریشه‌ی ساده‌ی مخالف علامت q و یک ریشه‌ی مضاعف موافق علامت q دارد.

ریشه‌ی مضاعف $= \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$

ریشه‌ی ساده $= -2\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$

مسئله‌ی ۱: در معادله‌ی $x^3 - 3x + (m-2) = 0$، حدود m را چنان بیابید که معادله سه ریشه‌ی حقیقی داشته باشد.

حلّ:

$$x^3 - 3x + (m-2) = 0$$

$$p = -3 \quad q = m-2$$

باید $\Delta < 0 \Rightarrow 4p^3 + 27q^2 < 0$

$$\Rightarrow 4(-27) + 27(m-2)^2 < 0$$

$$\Rightarrow -4 + (m-2)^2 < 0$$

$$\Rightarrow (m-2)^2 < 4 \Rightarrow -2 < m-2 < 2$$

$$\Rightarrow 0 < m < 4$$

مسئله‌ی ۲: به ازای چه مقادیر m، معادله‌ی زیر یک ریشه‌ی حقیقی مثبت و دو ریشه‌ی حقیقی منفی دارد.

$$x^3 - 3x + (m-5) = 0$$

حل: باید

$$q < 0, \Delta < 0$$

$$p = -3, q = m-5$$

$$\begin{cases}\Delta < 0\\ q < 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}4p^3 + 27q^2 < 0\\ q < 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}4(-27) + 27(m-5)^2 < 0\\ m-5 < 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}(m-5)^2 < 4 \Rightarrow \\ m < 5\end{cases} \begin{cases}-2 < m-5 < 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow m < 5\end{cases}$$

$$\begin{cases}3 < m < 7 \\ m < 5\end{cases} \Rightarrow 3 < m < 5$$

روابط بین ضرایب و ریشه‌ها در معادله‌ی $ax^3+bx^2+cx+d=0$

اگر α,β,γ ریشه‌های این معادله باشند، داریم:

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a} \\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=\frac{c}{a} \\ \alpha.\beta.\gamma=-\frac{d}{a} \\ \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=-\frac{c}{d}\end{cases}$$

مسئله‌ی ۳: اگر ریشه‌های معادله‌ی $x^3-9x^2+mx-15=0$ تصاعد عددی بسازند، مقدار m را بیابید.

حل:

α,β,γ تصاعد عددی بسازند $\Rightarrow 2\beta=\alpha+\gamma$

داریم: $\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$

$$2\beta+\beta=9 \Rightarrow 3\beta=9 \Rightarrow \beta=3$$
$$\beta=3 \Rightarrow 27-81+3m-15=0$$
$$3m=69 \Rightarrow m=23$$

مسئله‌ی ۴: اگر ریشه‌های معادله‌ی زیر تصاعد هندسی بسازند، مقدار m را بیابید.

$$x^3-7x^2+(m-1)x-8=0$$

حل: α,β,γ تصاعد هندسی بسازند؛ $\beta^2=\alpha.\gamma$

داریم: $\alpha.\beta.\gamma=-\frac{d}{a} \Rightarrow \beta^2.\beta=8 \Rightarrow \beta^3=8 \Rightarrow \beta=2$

$$\beta=2 \Rightarrow 8-28+2(m-1)-8=0$$
$$2(m-1)=28 \Rightarrow m-1=14 \Rightarrow m=15$$

مسئله‌ی ۵: اگر α,β,γ ریشه‌های معادله‌ی زیر باشند و داشته باشیم $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-2$، آن‌گاه مقدار m را بیابید.

$$x^3+(m-1)x^2+1=0$$

حل: داریم: $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=-\frac{c}{d}\ ,\ c=0$

$$-\gamma+\frac{1}{\gamma}=0 \Rightarrow \frac{-\gamma^2+1}{\gamma}=0 \Rightarrow \gamma^2=1 \Rightarrow \gamma=\pm 1$$
$$\gamma=1 \longrightarrow 1+m-1+1=0 \Rightarrow m=-1$$
$$\gamma=-1 \longrightarrow -1+m-1+1=0 \Rightarrow m=1$$

توجه $m=1$ غیرقابل قبول است، زیرا اگر $m=1$ آن‌گاه معادله به صورت $x^3+1=0$ است. در این صورت $x=-1$ یعنی معادله فقط یک ریشه دارد.

مسئله‌ی ۶: اگر α,β,γ ریشه‌های معادله‌ی زیر باشند و داشته باشیم $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=35$، آن‌گاه مقدار m را بیابید.

$$x^3-9x^2+(m-1)x-15=0$$

حل: $\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}=9$; دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم، داریم:

$$\underbrace{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}_{35}+2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)=81$$

$$35+2(\frac{c}{a})=81 \Rightarrow 35+2(m-1)=81$$
$$2(m-1)=46 \Rightarrow m-1=23 \Rightarrow m=24$$

مسئله‌ی ۷: اگر α,β,γ ریشه‌های معادله‌ی زیر باشند و داشته باشیم $\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}+\frac{1}{\gamma^3}=-\frac{3}{2}$، آن‌گاه مقدار m را بیابید.

$$x^3-5x^2+(m-1)=0$$

حل: $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=-\frac{c}{a}=0$; داریم:

بنا به اتحاد اولر : $\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}+\frac{1}{\gamma^3}=3(\frac{1}{\alpha})(\frac{1}{\beta})(\frac{1}{\gamma})$

$$-\frac{3}{2}=3(\frac{1}{\alpha.\beta.\gamma}) \Rightarrow -\frac{1}{2}=(\frac{1}{-\frac{d}{a}}) \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{m-1}$$
$$\Rightarrow m-1=2 \Rightarrow m=3$$

مسئله‌ی ۸: اگر α,β,γ ریشه‌های معادله‌ی زیر باشند و $k=\frac{\alpha+\beta}{\gamma}+\frac{\beta+\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma+\alpha}{\beta}$، آن‌گاه مقدار k را بیابید.

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

حل:

$$k=\frac{\alpha+\beta}{\gamma}+\frac{\beta+\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma+\alpha}{\beta}$$

$$k+3=\frac{\alpha+\beta}{\gamma}+1+\frac{\beta+\gamma}{\alpha}+1+\frac{\gamma+\alpha}{\beta}+1$$
$$k+3=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\gamma}+\frac{\beta+\gamma+\alpha}{\alpha}+\frac{\gamma+\alpha+\beta}{\beta}$$

$$k+3=(\alpha+\beta+\gamma)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)$$

$$k+3=\left(-\frac{b}{a}\right)\left(-\frac{c}{d}\right)\Rightarrow k+3=\frac{bc}{ad}\Rightarrow k=\frac{bc}{ad}-3$$

مسئله‌ی ۹: اگر α, β, γ ریشه‌های معادله‌ی $x^3+px+q=0$ باشند، حاصل $k=\frac{\alpha^2}{\beta\gamma}+\frac{\beta^2}{\alpha\gamma}+\frac{\gamma^2}{\alpha\beta}$ را بیابید.

حل: $\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}=0$

رابطه‌ی (۱) بنا به اتحاد اولر: $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$

بنابه رابطه‌ی (۱) $k=\frac{\alpha^2}{\beta\gamma}+\frac{\beta^2}{\alpha\gamma}+\frac{\gamma^2}{\alpha\beta}=\frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{\alpha\beta\gamma}$

$$k=\frac{3\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma}\Rightarrow k=3$$

نکته‌ی ۲

هر معادله که به صورت $ax^{2n}+bx^n+c=0$، $n\in N$ باشد، با فرض $x^n=y$، تعداد و علامت ریشه‌های معادله‌ی اصلی قابل بررسی است.

مسئله‌ی ۱۰: معادله‌ی $x^6-3x^2+1=0$ چند ریشه با چه علامت‌هایی دارد؟

حل: $x^2=y$ و $x^6-3x^2+1=0\Rightarrow y^3-3y+1=0$

$$p=-3\ ,\ q=1$$

$$\Delta=4p^3+27q^2=4(-27)+27(1)=-81<0$$

پس معادله‌ی y سه ریشه دارد. چون $q=1$ پس یک ریشه منفی و دو ریشه مثبت‌اند. یعنی ریشه‌های این معادله چنین است:

$$y_1<0<y_2<y_3$$

$$x^2=y\begin{cases}x^2=y_1 & \text{غ‌ق‌ق}\\ x^2=y_2\Rightarrow x=\pm\sqrt{y_2}\\ x^2=y_3\Rightarrow x=\pm\sqrt{y_3}\end{cases}$$ داریم:

پس معادله‌ی اصلی چهار ریشه‌ی اصلی متمایز دارد.

نکته‌ی ۳

هر معادله که به صورت $ax^{2n}+bx^2+c=0, n\in N$ باشد، با فرض $x^n=y$ به معادله‌ی درجه‌ی دوم تبدیل می‌شود که قابل حل است.

مسئله‌ی ۱۱: معادله‌ی $x^{16}-97x^8+1296=0$ را حل کنید.

حل: $x^8=y$ فرض می‌شود.

$$x^{16}-97x^8+1296=0\quad ,\quad x^8=y$$

$$\Rightarrow y^2-97y+1296=0$$

$$\Rightarrow y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{97\pm\sqrt{9409-5184}}{2}$$

$$y=\frac{97\pm\sqrt{4225}}{2}=\frac{97\pm 65}{2}\Rightarrow\begin{cases}y_1=\frac{97+65}{2}=81\\ y_2=\frac{97-65}{2}=16\end{cases}$$

$$x^8=y\Rightarrow\begin{cases}x^8=81\Rightarrow x=\pm\sqrt[8]{81}=\pm\sqrt[8]{3^4}=\pm\sqrt{3}\\ x^8=16\Rightarrow x=\pm\sqrt[8]{16}=\pm\sqrt[8]{2^4}=\pm\sqrt{2}\end{cases}$$

نکته‌ی ۴

اگر در معادله‌ای مجموع ضرایب صفر باشد، آن معادله بر $(x-1)$ بخش‌پذیر است.

در حالت کلّی اگر $x=a$ یک ریشه‌ی معادله‌ای باشد، آن معادله بر $(x-a)$ بخش‌پذیر است.

مسئله‌ی ۱۲: معادله‌ی $x^3-10x^2+mx-14=0$ مفروض است. اگر $x=2$ یکی از ریشه‌های معادله باشد، معادله را حل کنید.

حل: چون $x=2$ یکی از ریشه‌های معادله است، پس $x=2$ در معادله صدق می‌کند.

توجه:

$$x=2\longrightarrow 8-40+2m-14=0$$

$$\Rightarrow 2m=46\Rightarrow m=23$$

$$m=23\ ;\ x^3-10x^2+23x-14=0$$

چون $x=2$ یکی از ریشه‌های این معادله است، معادله را بر $(x-2)$ تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{array}{l|l} x^3-10x^2+23x-14 & x-2 \\ \hline 0 & x^2-8x+7\end{array}$$

$$x^3-10x^2+23x-14=(x-2)(x^2-8x+7)=0$$

$$x=2,\ x^2-8x+7=0\Rightarrow x=1, x=7$$

نکته‌ی ۵

اگر در معادله‌ی زیر مجموع ضرایب توان‌های فرد x مساوی مجموع ضرایب توان‌های زوج x به اضافه‌ی عدد ثابت باشد، آن‌گاه یک ریشه‌ی معادله (۱-) و معادله بر $(x+1)$ بخش‌پذیر است.

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + k = 0, n \in N$$

مسئله‌ی ۱۳: معادله‌ی $x^3 - 8x^2 + 11x + 20 = 0$ را حل کنید.

حل:

عدد ثابت + مجموع ضرایب توان‌های زوج x = مجموع ضرایب توان‌های فرد x

$$1 + 11 = -8 + 12 \Rightarrow 12 = 12$$

پس عبارت معادله بر $(x+1)$ بخش‌پذیر است.

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 8x^2 + 11x + 20 & x + 1 \\ \hline 0 & x^2 - 9x + 20 \end{array}$$

$$x^3 - 8x^2 + 11x + 20 = 0 \Rightarrow (x+1)(x^2 - 9x + 20) = 0$$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$$

$$x^2 - 9x + 20 = 0 \Rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 80}}{2} = \frac{9 \pm 1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{9+1}{2} = 5 \\ x_3 = \frac{9-1}{2} = 4 \end{cases}$$

نکته‌ی ۶

اگر ریشه‌های معادله‌ی زیر، عضو Z باشند، آن‌گاه عدد k بر هر یک از ریشه‌ها بخش‌پذیر است. به عبارت دیگر، ریشه‌های معادله عضو مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های جبری (k) است.

$$x^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + k = 0 \quad (n \in N)$$

مسئله‌ی ۱۴: اگر ریشه‌های معادله‌ی $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$، عضو Z باشند، معادله را حل کنید.

حل: بنا به درس ریشه‌های معادله عضو مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های جبری عدد (۱۲) است.

$\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$ = مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های عدد ۱۲

نکات ۴ و ۵ درس در این معادله برقرار نیست، پس (± 1) ریشه‌های معادله نیست.

از $x = 2$ شروع می‌کنیم.

$$x = 2; \quad 8 - 12 - 8 + 12 = 0$$

پس $x = 2$ یکی از ریشه‌های معادله است. عبارت معادله را بر $(x-2)$ تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 3x^2 - 4x + 12 & x - 2 \\ \hline 0 & x^2 - x - 6 \end{array}$$

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = (x-2)(x^2 - x - 6) = 0$$

$$x_1 = 2, \quad x^2 - x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = 3 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

نکته‌ی ۷

اگر ریشه‌های معادله‌ی زیر به صورت $\frac{p}{q}$، $q \neq 0$ باشد، (p و q عضو Zاند)، آن‌گاه p یکی از مقسوم‌علیه‌های (k) و q یکی از مقسوم‌علیه‌های عدد (a) است.

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + k = 0$$

مسئله‌ی ۱۵: اگر ریشه‌های معادله $8x^3 - 36x^2 + 46x - 15 = 0$ عضو مجموعه‌ی Q، یعنی به صورت $\frac{p}{q}$ باشند، معادله را حل کنید.

حل: عدد ۱۵ بر $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$ و عدد ۸ بر $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$ بخش‌پذیر است.

$$x = \frac{3}{2} \longrightarrow 27 - 81 + 69 - 15 = 0$$

پس یک ریشه‌ی معادله $x = \frac{3}{2}$ است. در نتیجه، عبارت معادله بر $(x - \frac{3}{2})$ بخش‌پذیر است.

$$\begin{array}{r|l} A = 8x^3 - 36x^2 + 46x - 15 & x - \frac{3}{2} \\ \hline 0 & 8x^2 - 24x + 10 \end{array}$$

$$A = (x - \frac{3}{2})(8x^2 - 24x + 10) = 0$$

$$x - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2}$$

$$8x^2 - 24x + 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 80}}{8} = \frac{12 \pm 8}{8}$$

$$\begin{cases} x_2 = \frac{12+8}{8} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2} \\ x_3 = \frac{12-8}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

پس $\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}$ ریشه‌های این معادله‌اند.

نکته‌ی ۸

اگر مشتق معادله‌ای همواره مثبت یا همواره منفی باشد، آن معادله یک ریشه‌ی حقیقی دارد که علامت آن مخالف علامت عدد ثابت معادله است.

مسئله‌ی ۱۶: معادله‌ی $x^5+2x^3+\sqrt{3}x+\sqrt{5}=0$ چند ریشه با چه علامتی دارد؟

حل:

$$f(x)=x^5+2x^3+\sqrt{3}x+\sqrt{5}$$

$$f'(x)=5x^4+6x^2+\sqrt{3}>0\Rightarrow$$

معادله یک ریشه‌ی حقیقی دارد.

عدد ثابت معادله، $\sqrt{5}$ است، پس معادله یک ریشه‌ی حقیقی منفی دارد.

نکته‌ی ۹

به کمک فاکتورگیری از راه دسته‌بندی، بعضی از معادله‌ها قابل حلّ‌اند.

مسئله‌ی ۱۷: معادله‌ی $x^5-3x^4-16x+48=0$ را حل کنید.

حل:

$$x^5-3x^4-16x+48=0$$

$$x^4(x-3)-16(x-3)=0$$

$$(x-3)(x^4-16)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-3=0\Rightarrow x=3\\ x^4-16=0\Rightarrow x^4=16\Rightarrow x=\pm 2\end{cases}$$

نکته‌ی ۱۰

به کمک اتحاد اولر، برخی از معادله‌ها قابل حل‌اند.

مسئله‌ی ۱۸: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$(x^2-2)^3+(2x^2-5)^3+(7-3x^2)^3=0$$

حل:

$$a=x^2-2,b=2x^2-5,c=7-3x^2$$

$$a+b+c=x^2-2+2x^2-5+7-3x^2=0$$

$$\Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$$

پس با فرض $A=(x^2-2)^3+(2x^2-5)^3+(7-3x^2)$ داریم:

$$A=3(x^2-2)(2x^2-5)(7-3x^2)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x^2-2=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}\\ 2x^2-5=0\Rightarrow x^2=\frac{5}{2}\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}\\ 7-3x^2=0\Rightarrow x^2=\frac{7}{3}\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{7}{3}}\end{cases}$$

نکته‌ی ۱۱

پرانتزهایی که توان زوج دارند، مثبت یا صفرند.

مسئله‌ی ۱۹: معادله‌ی زیر چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

$$(x^2-4x+3)^{10}+5(x^2-3x+2)^4+(x^2-1)^2=0$$

حل:

$$\begin{matrix}x^2-4x+3=0\Rightarrow\\ x^2-3x+2=0\Rightarrow\\ x^2-1=0\quad\Rightarrow\end{matrix}\begin{cases}x=1,x=3\\ x=1,x=2\\ x=1,x=-1\end{cases}\Rightarrow x=1$$

پس این معادله یک ریشه‌ی حقیقی دارد.

نکته‌ی ۱۲

اگر معادله‌ای دارای ریشه‌ی مضاعف $x=a$ باشد، آن‌گاه $x=a$ یکی از ریشه‌های ساده‌ی مشتق آن است.

مسئله‌ی ۲۰: به ازای چه مقادیر m، معادله‌ی زیر ریشه‌ی مضاعف دارد؟

$$x^7-7x+(m-2)=0$$

حل: مشتق معادله: $7x^6-7=0\Rightarrow x^6=1$

$$x=1,x=-1$$

$$x=1\longrightarrow 1-7+m-2=0$$

$$\Rightarrow m=8$$

$$x=-1\longrightarrow -1+7+m-2=0$$

$$\Rightarrow m=-4$$

نکته‌ی ۱۳

اگر ریشه‌های معادله‌ی $ax^4+bx^2+c=0$ تصاعد عددی بسازند، داریم $9b^2=100ac$.

مسئله‌ی ۲۱: m را چنان بیابید تا ریشه‌های معادله‌ی $mx^4 - 10x^2 + m = 0$ تصاعد عددی بسازند.

حل:
$$9b^2 = 100ac \Rightarrow 9(100) = 100m^2$$
$$\Rightarrow m^2 = 9 \Rightarrow m = \pm 3$$

نکته‌ی ۱۴

در حل بعضی از معادله‌ها، قسمتی از عبارت معادله را y فرض می‌کنیم. پس از حل معادله برحسب y، ریشه‌های اصلی معادله قابل بررسی‌اند.

مسئله‌ی ۲۲: معادله‌ی $(2x^2 - 3x - 5)(2x^2 - 3x - 2) = 6$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

حل: فرض می‌کنیم $2x^2 - 3x = y$

$$(\underbrace{2x^2 - 3x}_{y} - 5)(\underbrace{2x^2 - 3x}_{y} - 2) = 4$$
$$(y-5)(y-2) = 4 \Rightarrow y^2 - 7y + 10 = 4$$
$$\Rightarrow y^2 - 7y + 6 = 0$$
$$\text{مجموع ضرایب صفر است.} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 6 \end{cases}$$

الف) $2x^2 - 3x = y_1 \Rightarrow 2x^2 - 3x = 1$

$\Rightarrow 2x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta > 0$ دو ریشه‌ی حقیقی دارد

ب) $2x^2 - 3x = y_2 \Rightarrow 2x^2 - 3x = 6$

$2x^2 - 3x - 6 = 0 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow$ دو ریشه‌ی حقیقی

پس این معادله چهار ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد.

نکته‌ی ۱۵

معادلاتی که به یکی از صورت‌های زیر باشند، بی‌شمار ریشه دارند.

$$[p] + [-p] = -1 \qquad [p] + [-p] = 0$$

برای مثال، معادله‌های $[x^2 - 2x] + [-x^2 + 2x] = 0$ بی‌شمار ریشه دارند.

زیرا: اگر $x \in Z \Rightarrow (x^2 - 2x) \in Z$
$$\Rightarrow [(x^2 - 2x)] + [-(x^2 - 2x)] = 0$$

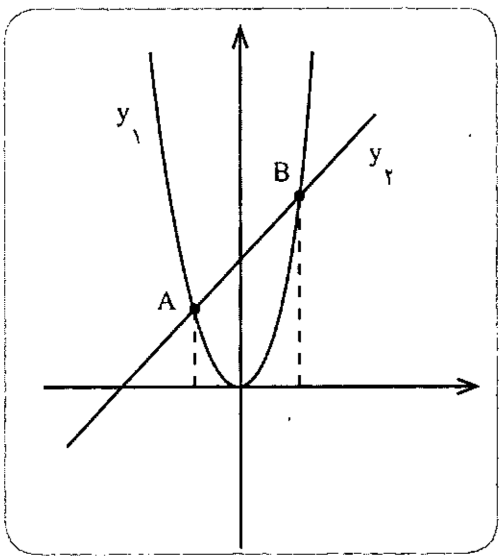
نکته‌ی ۱۶

در بررسی تعداد ریشه‌های برخی از معادله‌ها، قسمتی از معادله را y_1 و بقیه را با علامت مخالف y_2 می‌نامیم. تعداد نقاط برخورد نمودارهای دو تابع y_1 و y_2 برابر تعداد ریشه‌های معادله‌ی اصلی است.

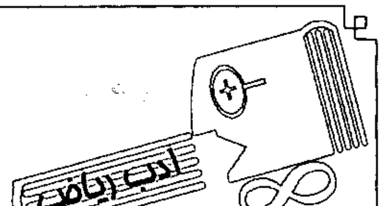
مسئله‌ی ۲۳: معادله‌ی $x^{20} - x - 2 = 0$ چند ریشه دارد؟

حل: فرض می‌کنیم $y_2 = x + 2, y_1 = x^{20}$

به طوری که شکل نشان می‌دهد، نمودارهای y_1 و y_2 یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند. پس معادله‌ی $x^{20} - x - 2 = 0$، دو ریشه‌ی حقیقی دارد که عبارت‌اند از x_A و x_B.



***

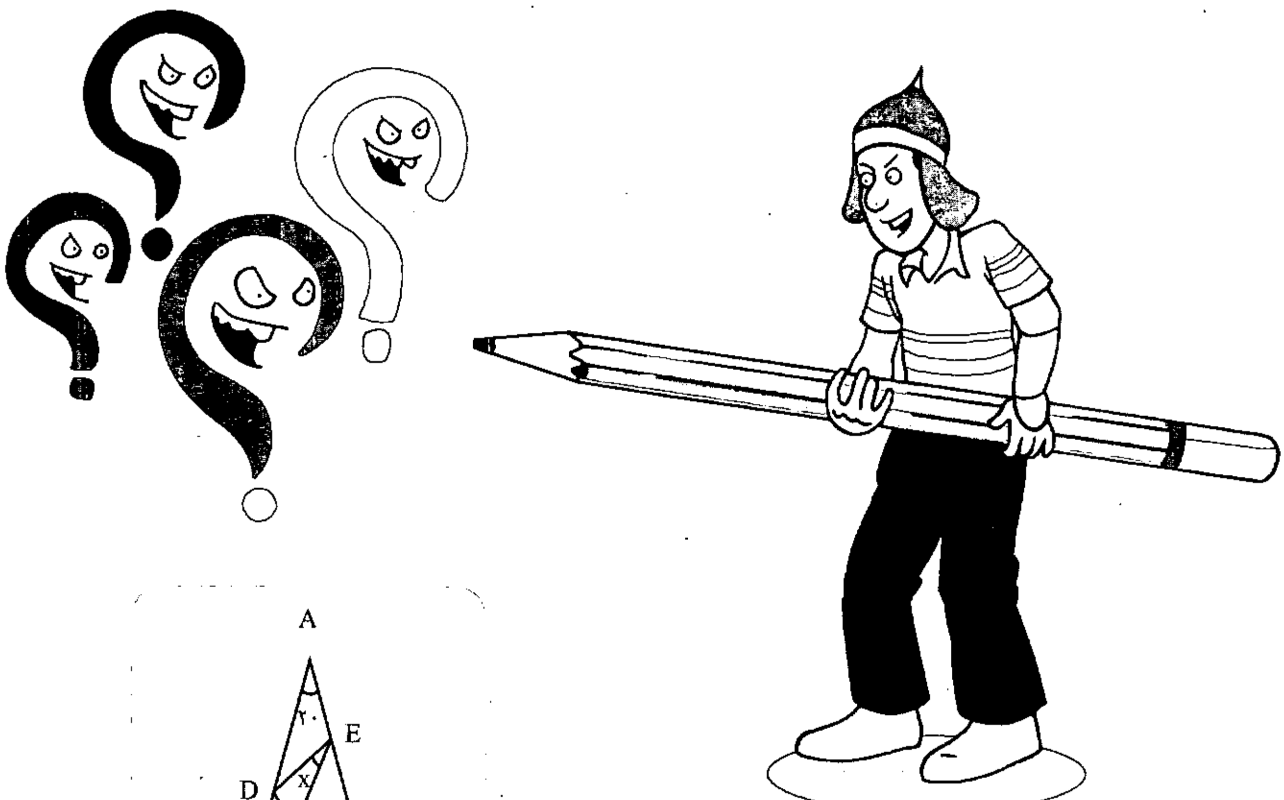


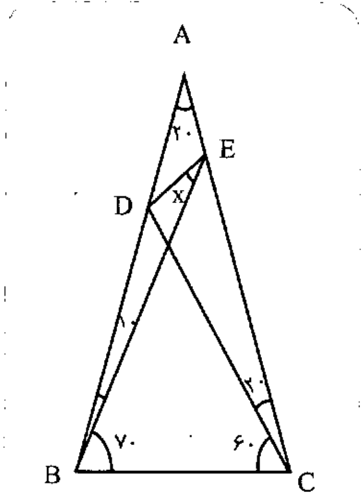
باید طبیعت ریاضیات را آشکار و مطرح کنیم؛ ریاضی علمی محض و علمی کاربردی، نظامی از ابزارهای مختلف برای اعمال و تصمیم‌گیری‌هاست، همچنین باید حوزه‌ی زیبایی‌شناسی آن را بنمایانیم و سرانجام، آن را به‌عنوان یکی از عمده‌ترین موضوع‌های تدریس و یادگیری در عصر جدید بشناسانیم.

چند مسئله‌ی پیکارجو

درباره‌ی تعیین زوایا در شکل‌های هندسی و ارائه‌ی راه حل‌هایی برای آن‌ها

هوشنگ شرقی





اشاره

چند روز پیش، آقای امیری سردبیر مجله، حل مسئله‌ای را از من خواست. قبلاً هم سابقه‌ی این کار را داشت و یک بار مسئله‌ای از نظریه‌ی اعداد و نظریه‌ی احتمال را به من داد که حل آن در نهایت به نگارش چند مقاله در مجله‌ی برهان انجامید. این بار مسئله‌ی او مسئله‌ای از هندسه به این صورت بود: در شکل مقابل ABC مثلث متساوی‌الساقین است و زاویه‌ی رأس آن ۲۰° است و در نتیجه:

$$\hat{B} = \hat{C} = ۸۰^\circ$$

پاره‌خط‌های BE , CD چنان رسم شده‌اند که:

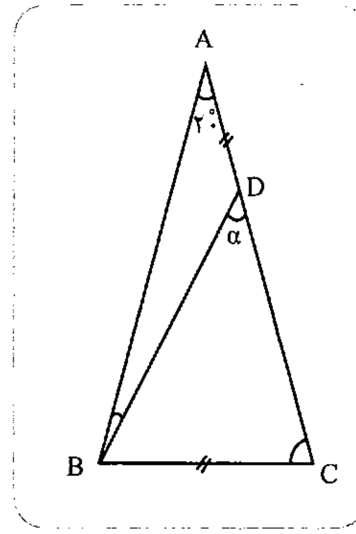
$$D\hat{C}E = ۲۰^\circ, D\hat{B}E = ۱۰^\circ$$

اندازه‌ی زاویه‌ی $D\hat{E}B = x$ را به دست آورید.

من با مسائلی از این دست قبلاً هم در منابع گوناگونی روبه‌رو شده بودم. بنابراین نخستین کاری که کردم مراجعه به این منابع و دیدن مسائل مشابه بود. در کتاب بازآموزی و بازشناخت هندسه (از انتشارات مدرسه) ترجمه‌ی عبدالحسین مصحفی مسئله‌ای شبیه این هست. منتها در آن‌جا دو زاویه‌ی کناری مجاور به دو ساق مثلث، به جای ۱۰ و ۲۰ درجه، ۲۰ و ۳۰ درجه هستند. خواستم راه حل آن را در این مورد هم به کار ببندم، ولی خیلی توفیقی به دست نیاوردم. ناچار مسئله را به روش مثلثاتی حل کردم و جواب را به دست آوردم که شرح آن را خواهم داد. $x = ۲۰^\circ$ به دست آمد، ولی خیلی مایل بودم که روشی کاملاً هندسی برای آن به دست آورم. پس از مدتی تفحص روی مسئله به مسئله‌ای مشابه که آن را قبلاً دیده بودم برخوردم. بین این مسئله و مسئله‌ی معروف‌تر مقابل ارتباطی دوسویه

وجود داشت:

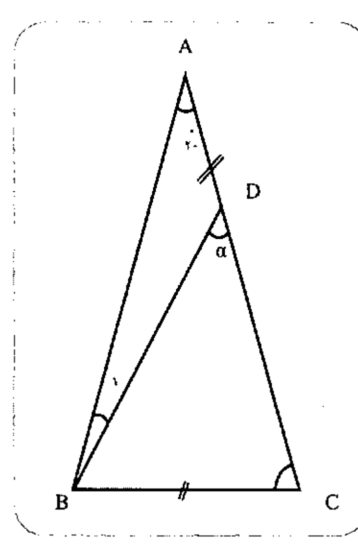
در شکل زیر $AB = AC$ و $\hat{A} = ۲۰^\circ$ و $AD = BC$ اندازه‌ی زاویه‌ی α چیست؟



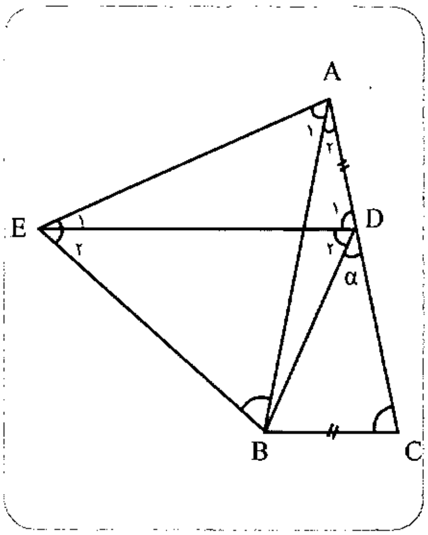
البته راه حل این مسئله را قبلاً دیده بودم و می‌دانستم ولی آنچه با آن سروکار داشتم عکس این مسئله بود و نه خود آن و این کار را کمی دشوارتر می‌کرد. با راهنمایی همکار پیشکسوت در درس هندسه، آقای میرحبیب‌اللّهی، که به راستی از نخبگان این رشته هستند، این قسمت هم حل و کار تمام شد. این جدال دو سه روزه با این مسئله به من انگیزه‌ی نگارش این مقاله را داد که در آن هم به این دو مسئله و ارتباط آن‌ها با یکدیگر بپردازم و هم چند مسئله‌ی مشابه را مطرح کنم که این مسئله‌ها دسته‌ی بسیار خوبی از مسائل پیکارجوی هندسه را تشکیل می‌دهند.

مسئله‌ی ۱: در شکل زیر $AB = AC$ و $\hat{A} = ۲۰^\circ$ و $AD = BC$. اندازه‌ی زاویه‌ی $B\hat{D}C = \alpha$ را به دست آورید.

حل:



روش اول: مثلث ADE را هم‌نهشت با مثلث ABC به‌صورت زیر رسم و E را به B وصل می‌کنیم. مطابق شکل می‌توان نوشت:



$$\hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ = \hat{D}_۱ = \hat{B} = \hat{C} = ۸۰^\circ, \hat{A}_۲ = ۲۰^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A}_۱ = ۶۰^\circ, AE = AB$$

بنابراین، مثلث ABE متساوی‌الساقین است و چون یک زاویه‌ی ۶۰° دارد، پس متساوی‌الاضلاع است و لذا داریم:

$$EB = AE = DE, \quad \hat{E}_۱ + \hat{E}_۲ = ۶۰^\circ, \quad \hat{E}_۱ = \hat{A}_۲ = ۲۰^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{E}_۲ = ۴۰^\circ$$

پس مثلث EBD متساوی‌الساقین است و زاویه‌ی رأس آن ۴۰° است و بنابراین:

$$E\hat{D}B = E\hat{B}D = \frac{۱۸۰^\circ - ۴۰^\circ}{۲} = ۷۰^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{D}_۲ = ۷۰^\circ, \hat{D}_۱ = ۸۰^\circ,$$

$$\alpha = ۱۸۰^\circ - (۸۰^\circ + ۷۰^\circ) = ۳۰^\circ$$

روش دوم: مطابق شکل، نیمساز زاویه‌ی $\hat{A}$ را رسم و روی BC مثلث متساوی‌الاضلاع EBC را بنا می‌کنیم. می‌توان نوشت:

$$\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ = ۱۰^\circ, \hat{C}_۱ = ۸۰^\circ - \hat{C}_۲ = ۲۰^\circ$$

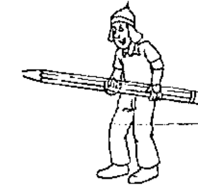
$$EC = BC = AD, AC = AB$$

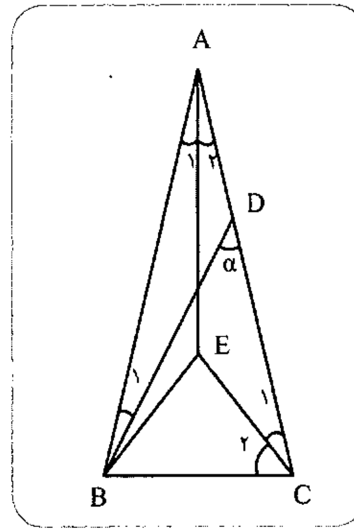
$$\Rightarrow \Delta ABD \cong \Delta AEC \text{ (ض‌زض)} \Rightarrow \hat{B}_۱ = \hat{A}_۲ = ۱۰^\circ$$

$$\hat{\alpha} = \hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ + \hat{B}_۱ = ۳۰^\circ$$

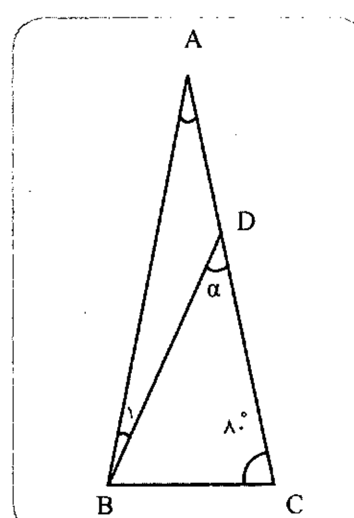
روش سوم (روش مثلثاتی):

راه حل مثلثاتی، یک راه حل قابل اطمینان در تمام این‌گونه





مسائل است. در این روش معمولاً به کمک قضیه‌ی سینوس‌ها (در هر مثلث نسبت هر ضلع به سینوس زاویه‌ی مقابل مقداری ثابت است: $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$) و اطلاعات مسئله سعی می‌کنیم با حذف ضلع‌ها از معادله‌های نوشته شده، به یک معادله‌ی مثلثاتی برسیم و از آن‌جا زاویه‌ی مجهول را به دست آوریم. یادآور می‌شویم که در این روش، آشنایی با اتحادهای مثلثاتی و روش‌های مختلف ساده کردن عبارت‌های مثلثاتی الزامی است. برای مثال در همین مسئله، ابتدا قضیه‌ی سینوس‌ها را در دو مثلث ABD و BDC می‌نویسیم:



$$\Delta ABD: \frac{AD}{\sin B_1}=\frac{BD}{\sin 20}, \alpha=\hat{B}_1+20^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{B}_1=\alpha-20^\circ \Rightarrow \frac{AD}{\sin(\alpha-20)}=\frac{BD}{\sin 20}$$

$$\frac{AD}{BD}=\frac{\sin(\alpha-20)}{\sin 20} (1)$$

$$\Delta BDC: \frac{BC}{\sin\alpha}=\frac{BD}{\sin 80},$$

$$BC=AD \Rightarrow \frac{AD}{BD}=\frac{\sin\alpha}{\sin 80} (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \frac{\sin(\alpha-20)}{\sin 20}=\frac{\sin\alpha}{\sin 80}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(\alpha-20)}{\sin\alpha}=\frac{\sin 20}{\sin 80}, \sin 80=\cos 10,$$

$$\sin 20 = 2\sin 10\cos 10$$

$$\Rightarrow \frac{\sin 20}{\sin 80}=\frac{\sin 20}{\cos 10}=2\sin 10$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(\alpha-20)}{\sin\alpha}=2\sin 10, \frac{\sin(\alpha-20)+\sin\alpha}{\sin(\alpha-20)}$$

$$=\frac{2\sin 10+1}{2\sin 10-1}=\frac{\sin 10+\frac{1}{2}}{\sin 10-\frac{1}{2}}=\frac{\sin 10+\sin 30}{\sin 10-\sin 30}$$

و به کمک دستورهای تبدیل عبارت‌های مثلثاتی از جمع به ضرب در دو طرف تساوی، خواهیم داشت:

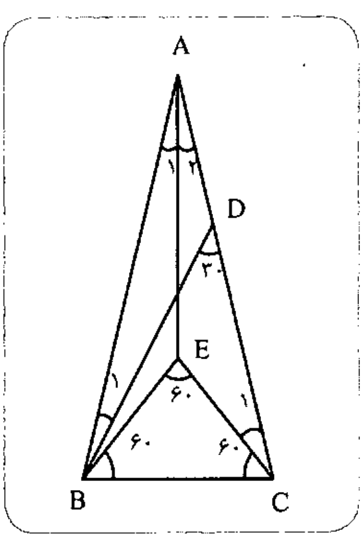
$$\frac{2\sin(\alpha-10)\cos(-10)}{2\sin(-10)\cos(\alpha-10)}=\frac{2\sin 20\cos(-10)}{2\sin(-10)\cos 20}$$

$$\Rightarrow tg(\alpha-10)=tg20 \Rightarrow \alpha-10=20$$

$$\Rightarrow \alpha=30^\circ$$

مسئله‌ی ۲ (عکس مسئله‌ی ۱): در شکل زیر می‌دانیم $AB=AC$ و $\hat{A}=20^\circ$ و $B\hat{D}C=30^\circ$ ثابت کنید: $AD=BC$

اثبات:



روش اول (روش مثلثاتی):

$$\Delta ABD: \frac{AD}{\sin B_1}=\frac{BD}{\sin A}, B\hat{D}C=\hat{A}+\hat{B}_1$$

$$\Rightarrow \hat{B}_1 = 10 \Rightarrow \frac{AD}{\sin 10^\circ} = \frac{BD}{\sin 20^\circ}$$

$$\Rightarrow AD = \frac{BD.\sin 10}{\sin 20} = \frac{BD.\sin 10}{2\sin 10\cos 10} = \frac{BD}{2\cos 10}(1)$$

$$\Delta BDC: \frac{BC}{\sin D_1} = \frac{BD}{\sin C} \Rightarrow \frac{BC}{\sin 30^\circ} = \frac{BD}{\sin 80}$$

$$\Rightarrow BC = \frac{BD\sin 30}{\sin 80^\circ} = \frac{BD\times\frac{1}{2}}{\cos 10} = \frac{BD}{2\cos 10}(2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow AD = BC$$

روش دوم (روش هندسی):

نیمساز زاویه‌ی $\hat{A}$ را رسم و مثلث متساوی‌الاضلاع BEC را روی BC بنا می‌کنیم.

$$B\hat{D}C = \hat{A} + \hat{B}_1 \Rightarrow \hat{B}_1 = 10^\circ, \hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 10^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B}_1, \hat{C}_1 = \hat{A} = 20^\circ, AC = AB$$

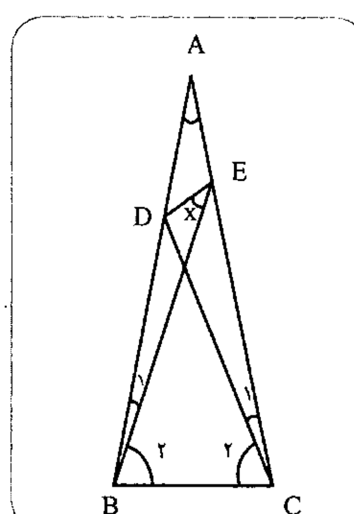
$\Rightarrow \Delta ACE \cong ABD$ (زضز) $\Rightarrow CE = AD,$

$$BE = CE = BC \Rightarrow AD = BC$$

مسئله‌ی ۳ (مسئله‌ی اصلی): در شکل زیر $AB = AC$ و $\hat{B}_1 = 10^\circ$ و $\hat{C}_1 = 20^\circ$ و $\hat{A} = 20^\circ$؛ مطلوب است تعیین اندازه‌ی زاویه‌ی $D\hat{E}B = x$.

حل: روش اول (روش مثلثاتی):

قضیه‌ی سینوس‌ها را در مثلث‌های BDE، CDE و BCD می‌نویسیم:



$$\Delta BDE: \frac{BD}{\sin x} = \frac{DE}{\sin 10}(1)$$

$$\Delta BDC: \frac{BD}{\sin 60} = \frac{CD}{\sin 80}(2)$$

$$\Delta CDE: \frac{DE}{\sin 20} = \frac{CD}{\sin(x+30)}(3)$$

$$(\Delta CBE: B_2 = 70^\circ, \hat{C} = 80^\circ, \hat{E} = 30^\circ)$$

از تلفیق روابط فوق خواهیم داشت:

$$(1),(2) \Rightarrow \frac{BD}{DE}\times\frac{CD}{BD} = \frac{\sin x}{\sin 10}\times\frac{\sin 80}{\sin 60}$$

$$\Rightarrow \frac{CD}{DE} = \frac{\sin x\sin 80}{\sin 10\sin 60}, \frac{CD}{DE} = \frac{\sin(x+30)}{\sin 20}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x\sin 80}{\sin 10\sin 60} = \frac{\sin(x+30)}{\sin 20} \Rightarrow \frac{\sin(x+30)}{\sin x}$$

$$= \frac{\sin 80\sin 20}{\sin 10\sin 60} = \frac{\overbrace{(2\sin 10\cos 10)}^{\sin 20}\overbrace{(\cos 10)}^{\sin 80}}{\sin 10\sin 60} = \frac{2\cos^2 10}{\sin 60}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x\cos 30 + \cos x\sin 30}{\sin x} = \frac{4\cos^2 10}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \cos 30 + \frac{1}{2}\cot g x = 4\frac{\cos^2 10}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cot g x = \frac{4\cos^2 10}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cot g x = 4\cos^2 10$$

$$\Rightarrow \cot g x = \frac{8\cos^2 10 - 3}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \cot g x = \frac{8(\frac{1+\cos 20}{2}) - 3}{\sqrt{3}} = \frac{4\cos 20 + 1}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{3}\cos 20 = tg 30 + 4 tg 30\cos 20$$

$$= \frac{\sin 30 + 4\sin 30\cos 20}{\cos 30}$$

$$= \frac{\sin 30 + 4\times\frac{1}{2}(\sin 50 + \sin 10)}{\cos 30}$$

$$= \frac{\sin 30 + 2\sin 50 + 2\sin 10}{\cos 30}$$

$$= \frac{\sin 30 + \sin 10 + \sin 50 + \sin 10 + \sin 50}{\cos 30}$$

$$= \frac{2\sin 20\cos 10 + 2\sin 30\cos 20 + \sin 50}{\cos 30}$$

$$= \frac{2\sin 20\cos 10 + 2\times\frac{1}{2}\times\sin 70 + \sin 50}{\cos 30}$$

$$= \frac{۲\sin ۲۰ \cos ۱۰ + \sin ۷۰ + \sin ۵۰}{\cos ۳۰}$$

$$= \frac{۲\sin ۲۰ \cos ۱۰ + ۲\sin ۶۰ \cos ۱۰}{\cos ۳۰}$$

$$= \frac{۲\cos ۱۰ (\sin ۶۰ + \sin ۲۰)}{\cos ۳۰}$$

$$= \frac{۲\cos ۱۰ \times ۲\sin ۴۰ \cos ۲۰}{\cos ۳۰}$$

$$= \frac{۴\cos ۱۰ \cos ۵۰ \cos ۲۰}{\cos ۳۰}$$

حال با توجه به اتحاد مثلثاتی زیر:

$$\cos ۳\alpha = ۴\cos\alpha \cos(۶۰ - \alpha)\cos(۶۰ + \alpha)$$

و با ضرب صورت و مخرج کسر در $\cos ۷۰$ خواهیم داشت:

$$\cot g x = \frac{۴\cos ۱۰ \cos ۵۰ \cos ۷۰ \cos ۲۰}{\cos ۳۰ \cos ۷۰}$$

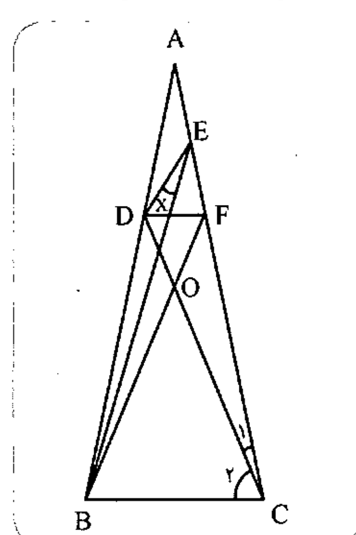
$$= \frac{\cos ۳۰ \cos ۲۰}{\cos ۳۰ \cos ۷۰} = \frac{\cos ۲۰}{\cos ۷۰} = \frac{\cos ۲۰}{\sin ۲۰} = \cot g ۲۰$$

$$\Rightarrow x = ۲۰^\circ$$

ملاحظه می‌شود که این راه حل قدری طولانی و دور از ذهن است. راه حل بهتر، روش هندسی است که در زیر ارائه می‌شود. گفتنی است که باید از نتیجه‌ی مسئله‌ی ۲ استفاده شود.

روش دوم (روش هندسی):

از نقطه‌ی D خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا AC را در F قطع کند و F را به B وصل می‌کنیم. روشن است که DFCB ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین است و در نتیجه قطرهای آن با هم برابرند و $OC = OB$ و $OD = OF$ و چون $\hat{C}_1 = ۲۰^\circ$ و $\hat{C}_2 = ۶۰^\circ$، پس مثلث OBC و نیز مثلث OFD هر دو متساوی‌الاضلاع هستند.



در نتیجه: $OB = OC = BC$ و $OF = OD = DF$ و نیز با توجه به برابری $\hat{A} = F\hat{B}D = ۲۰^\circ$ نتیجه می‌شود: $AF = BF$ و چون داریم: $\Delta BEC: B\hat{E}C = ۱۸۰^\circ - (\hat{C} + E\hat{B}C) = ۳۰^\circ$ پس طبق نتیجه‌ی مسئله‌ی ۲ داریم: $AE = BC$. اکنون با توجه به این نابرابرها می‌توان نوشت:

$$EF = AF - AE = BF - BC = BF - OB$$
$$= OF = DF$$

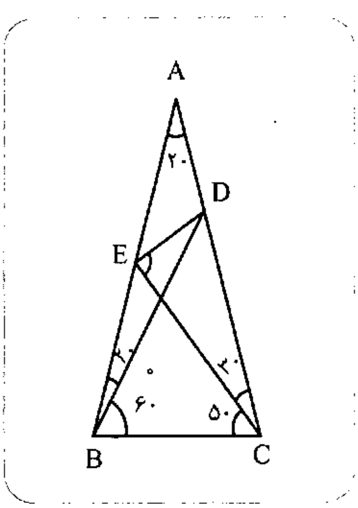
و با توجه به برابری $EF = DF$ نتیجه می‌شود که مثلث EFD در رأس F متساوی‌الساقین است و در نتیجه:

$$F\hat{E}D = E\hat{D}F = \frac{۱۸۰ - ۸۰}{۲} = ۵۰^\circ \Rightarrow x = ۲۰^\circ$$

حال به چند مسئله‌ی مشابه دیگر می‌پردازیم:

مسئله‌ی ۴: در شکل زیر مثلث ABC در رأس A متساوی‌الساقین است و $\hat{A} = ۲۰^\circ$ و مطابق شکل $D\hat{B}E = ۲۰^\circ$ و $D\hat{C}E = ۳۰^\circ$. مطلوب است تعیین اندازه‌ی زاویه‌ی $D\hat{E}C$.

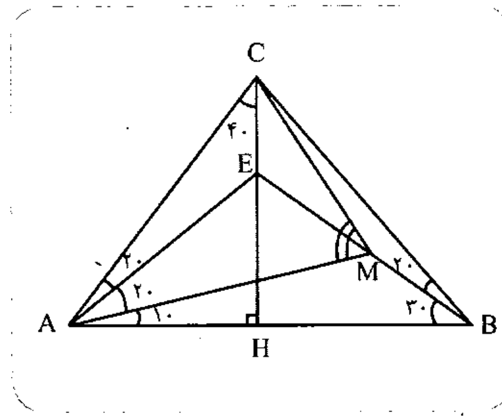
این مسئله شباهت زیادی به مسئله‌ی ۳ دارد و راه حل‌های هندسی و مثلثاتی آن نیز بسیار شبیه به آن است. بنابراین، هر دو راه حل را به عنوان تمرین به خوانندگان واگذار می‌کنیم (پاسخ: ۸۰°)



مسئله‌ی ۵: در درون مثلث ABC، نقطه‌ی M را در نظر گرفته‌ایم و برای آن داریم: $M\hat{B}A = ۳۰^\circ$ و $M\hat{A}B = ۱۰^\circ$. به شرط $A\hat{C}B = ۸۰^\circ$ و $AC = BC$ مقدار زاویه‌ی $A\hat{M}C$ را پیدا کنید. (المپیاد ریاضی یوگسلاوی، ۱۹۸۳)

حل: محل برخورد ارتفاع CH از مثلث متساوی‌الساقین ABC را با امتداد خط راست BM، نقطه‌ی E می‌گیریم. می‌توان نوشت:

$$\Delta ACE \cong \Delta BCE$$
$$\Rightarrow E\hat{B}C = E\hat{A}C = ۵۰ - ۳۰ = ۲۰^\circ,$$
$$EA = EB \Rightarrow E\hat{A}B = E\hat{B}A = ۳۰^\circ$$



$$\Rightarrow E\hat{A}M = 20^\circ, ACE = \frac{1}{2}A\hat{C}B = 40^\circ$$

$$A\hat{M}E = M\hat{A}B + M\hat{B}A = 10^\circ + 30^\circ = 40^\circ$$

یعنی مثلث‌های AME و ACE به حالت دو زاویه و ضلع بین هم‌نهشت‌اند و در نتیجه داریم:

$$AM = AC \Rightarrow A\hat{M}C = M\hat{C}A = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$$

تمرین: مسئله را به روش مثلثاتی حل کنید (راهنمایی: به معادله‌ی مثلثاتی $\frac{\sin\alpha}{\sin 40} = \frac{\sin(220-\alpha)}{\sin 20}$ برسید).

مسئله‌ی ۶: نقطه‌ی p را روی ضلع BC از مثلث ABC طوری انتخاب کرده‌ایم که $PC = 2PB$. اگر $A\hat{P}C = 60^\circ$ و $A\hat{B}C = 45^\circ$ باشد، اندازه‌ی $A\hat{C}B$ را به دست آورید. (المپیاد ریاضی آلمان شرقی ۱۹۶۴)

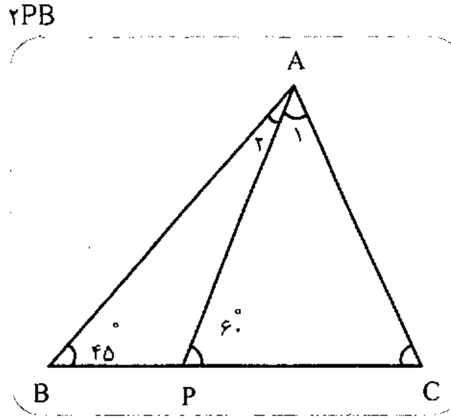
حلّ (روش مثلثاتی):

$$\Delta APC: \frac{AC}{\sin 60^\circ} = \frac{AP}{\sin C} = \frac{PC}{\sin A_1}$$

$$\Delta APB: \frac{AB}{\sin 120^\circ} = \frac{AP}{\sin 45} = \frac{PB}{\sin A_2}$$

$$\Rightarrow \frac{PC}{\sin(120 - C)} = \frac{AP}{\sin C}, \frac{PB}{\sin 15^\circ} = \frac{AP}{\sin 45},$$

$$PC = 2PB$$



$$\Rightarrow \frac{\sin(120 - C)\sin 45^\circ}{\sin C.\sin 15^\circ} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(120 - C)}{\sin C} = \frac{2\sin 15}{\sin 45}$$

$$= \frac{2\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{3} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(120 - C) + \sin C}{\sin(120 - C) - \sin C} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 2}$$

$$\Rightarrow \frac{2\sin 60\cos(60 - C)}{2\sin(60 - C)\cos 60} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 2}$$

$$\Rightarrow tg60\, cotg(60 - C) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 2}$$

$$\Rightarrow cotg(60 - C) = \frac{1}{\sqrt{3} - 2} = -(2 + \sqrt{3})$$

$$\Rightarrow cotg(C - 60) = 2 + \sqrt{3} = cotg15^\circ$$

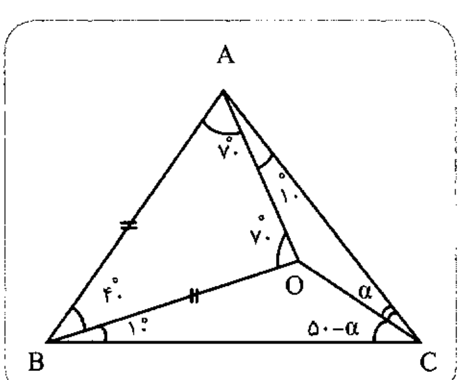
$$\Rightarrow C - 60^\circ = 15^\circ \Rightarrow \hat{C} = 75^\circ$$

تمرین: مسئله را به روش هندسی حل کنید (راهنمایی: قرینه‌ی C نسبت به AP را C_1 بنامید و C_1 را به A و B وصل کنید و نشان دهید مثلث BC_1P قائم‌الزاویه است).

مسئله‌ی ۷: در مثلث متساوی‌الساقین ABC به رأس A، $\hat{A} = 80^\circ$ نقطه‌ی O را داخل مثلث طوری در نظر گرفته‌ایم که $AB = OB$ و $O\hat{B}C = 10^\circ$ باشد. اندازه‌ی زاویه‌ی $O\hat{C}A$ را به دست آورید.

حلّ: مطابق شکل روشن است که چون $O\hat{B}C = 10^\circ$ پس $O\hat{B}A = 40^\circ$ و چون $OB = AB$ پس $O\hat{A}B = B\hat{O}A = \frac{180 - 40}{2} = 70^\circ$ و در نتیجه $O\hat{A}C = 10^\circ$.

حال، قضیه‌ی سینوس‌ها را در مثلث‌های OBC و OAC و OAB می‌نویسیم:



$$\frac{OC}{\sin 10}=\frac{OB}{\sin(50-\alpha)},\ \frac{OC}{\sin 10}=\frac{OA}{\sin\alpha},$$

$$OB=AB=AC,\ \frac{OB}{\sin 70}=\frac{OA}{\sin 40}\Rightarrow$$

$$\frac{\sin(50-\alpha)}{\sin\alpha}=\frac{\sin 70}{\sin 40}=\frac{\cos 20}{2\sin 20\cos 20}=\frac{1}{2\sin 20}$$

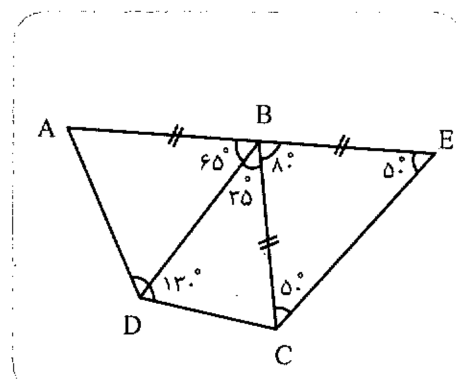
اکنون می‌توان دید که $\alpha = 20^\circ$ در برابری فوق صدق می‌کند (امتحان کنید) و در نتیجه پاسخ مساوی 20° است.

مسئله‌ی ۸: در چهارضلعی محدب ABCD می‌دانیم که $A\hat{B}D = 65^\circ$ و $C\hat{B}D = 35^\circ$ و $A\hat{D}C = 130^\circ$ و $AB = BC$. اندازه‌ی زاویه‌ی $B\hat{A}D$ را به دست آورید.

حل: مطابق شکل زیر و در امتداد AB، BE را مساوی AB و BC جدا می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$C\hat{B}E = 180^\circ - (65^\circ + 35^\circ) = 80^\circ, CB = BE$$

$$\Rightarrow B\hat{E}C = B\hat{C}E = 50^\circ$$



لذا چون دو زاویه‌ی روبه‌روی $A\hat{D}C$ و $A\hat{E}C$ مکمل هم هستند، پس چهارضلعی AECD محاطی است و از A و E و C و D یک دایره می‌گذرد و چون دایره‌ای به مرکز B و به شعاع AB نیز از A و C و E می‌گذرد و از هر سه نقطه‌ی غیرواقع بر یک خط راست، یک و تنها یک دایره می‌گذرد، پس دایره‌ی محیطی چهارضلعی AECD همین دایره و به مرکز B است. بنابراین $BD = AB = BC = BE$ و مثلث ABD در رأس B متساوی‌الساقین است و در نتیجه:

$$A\hat{D}B = B\hat{A}D = \frac{180-65}{2} = 57/5^\circ$$

تمرین

۱- در مثلث ABC، طول میانه‌ی رأس B و ارتفاع رأس C با هم برابرند. زاویه‌ی حاده‌ی بین این میانه و ارتفاع را به دست آورید. (جواب: 60°)

۲- در مثلث ABC، اندازه‌ی زاویه‌ی A مساوی 75° و طول ارتفاع CH نصف طول ضلع AB است. زاویه‌ی B چند درجه است؟ (جواب: 30°)

۳- در مثلث ABC، $AB>AC$ و M وسط BC است و دو زاویه‌ی $\hat{B}$ و $M\hat{A}C$ متمم یکدیگرند. اندازه‌ی $\hat{A}$ را به دست آورید. (جواب: 90°)

۴- زاویه‌ی رأس مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$ مساوی100° است. در امتداد AB و از طرف B، AM را مساوی BC جدا می‌کنیم. زاویه‌ی $B\hat{C}M$ چند درجه است؟ (جواب: 10°)

۵- در مثلث متساوی‌الساقین طول نیمساز زاویه‌ی رأس مساوی نصف طول هر یک از نیمسازهای زوایای مجاور به دو ساق است. اندازه‌ی زاویه‌ی رأس را به دست آورید. (جواب: 108°)

۶- مثلث ABC در رأس A متساوی‌الساقین است و $\hat{A} = 80^\circ$ و نقطه‌های D و E را روی BC و AC طوری در نظر گرفته‌ایم که: $B\hat{A}D = 50^\circ$ و $A\hat{B}E = 30^\circ$. مقدار زاویه‌ی $B\hat{E}D$ را به دست آورید. (جواب: 40°)

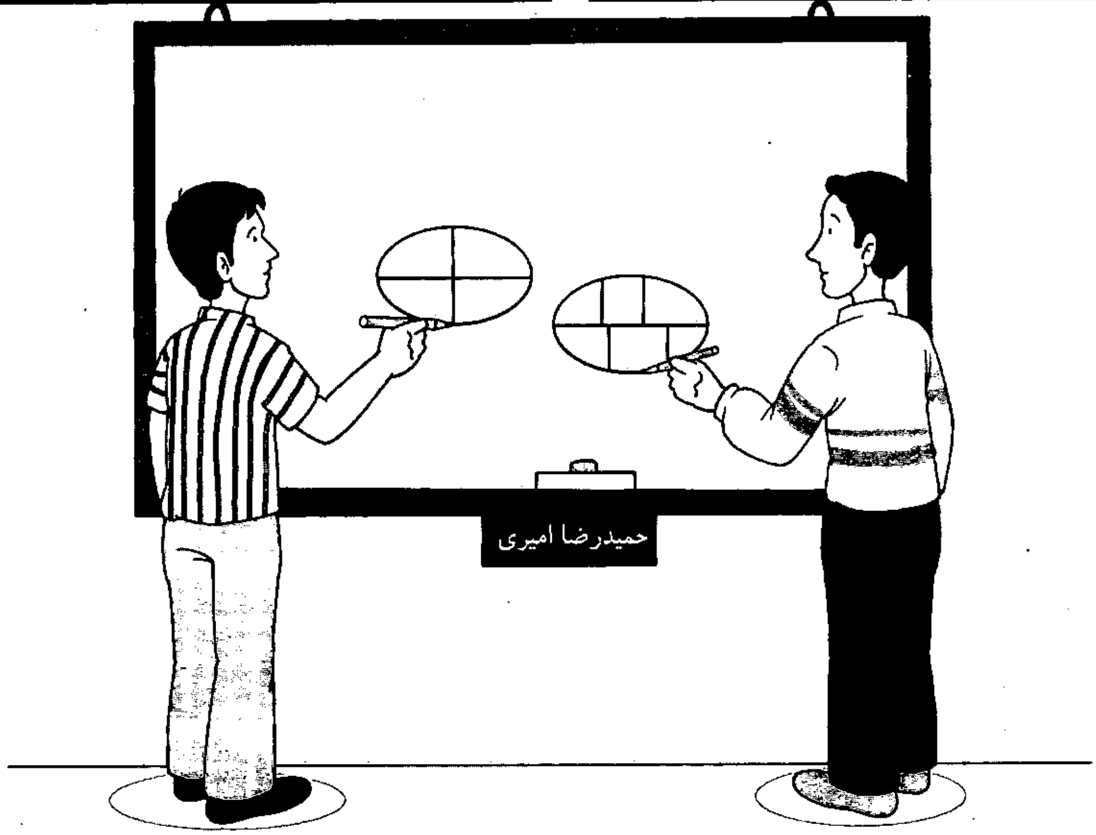
(المپیاد ریاضی انگلستان-۱۹۷۰)

ادب ریاضی

«ابوالحسن احمدبن ابراهیم اقلیدسی» ریاضیدان قرن چهارم هجری است. وی حدود پنج قرن پیش از کاشانی، کسرهای اعشاری را در کتاب خود به‌کار برده و اعمال اصلی را درباره‌ی آن‌ها انجام داده است. با این حال، مثل این‌که این کسرها را از پیشینیان خود اخذ کرده باشد، به آن‌ها توجه خاصی نداشته و به اهمیت آن‌ها پی‌نبرده؛ بلکه آن‌ها را در ردیف کسرهای متعارف و کسرهای شصتگانی به‌کار گرفته است و پس از وی، حدود پنج قرن، کسی از کار او اطلاعی کسب نکرده است. بنابراین کتاب او در استعمال این کسرها توسط دیگران تأثیری نداشته است. اما کاشانی به قول خودش، کسرهای اعشاری را به قیاس با کسرهای شصتگانی اختراع کرده و نام کسر اعشاری را بر این کسرها نهاده و آگاهانه و به‌طور اصولی قاعده‌های عمل با آن‌ها را شرح داده است و آن‌ها را به وجهی پیگیر، در محاسبات به‌کار برده و استعمال آن‌ها را به دیگران توصیه کرده است. کتاب «مفتاح‌الحساب» او در بسط این کسرها ـ بعد از خودش ـ مؤثر بوده است.

در قدیم، عنوان اقلیدسی به کسانی داده می‌شد که کتاب اصول اقلیدس را برای فروش رونویسی می‌کردند.

رابطه‌های هم‌ارزی
کلاس‌های هم‌ارزی



حمیدرضا امیری

رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی ناتهی A می‌تواند دارای خواص بازتابی (انعکاسی)، تقارنی، پادتقارنی و تعدّی (تراگذاری) باشد. برای مثال، اگر $A = \{a,b,c,d\}$ و رابطه‌ی R را به صورت: $R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,a)\}$ تعریف کنیم، مشاهده می‌شود که رابطه‌ی R سه خاصیت انعکاسی، تقارنی و تعدّی را دارد. در حالت کلی، به چنین رابطه‌هایی که هر سه خاصیت انعکاسی،تقارنی و تعدّی را با هم داشته باشند، یک رابطه‌ی هم‌ارزی می‌گویند. لازم است یادآوری کنیم که اگر رابطه‌ی R سه خاصیت فوق و علاوه بر آن خاصیت دیگری را نیز داشته باشد، باز هم یک رابطه‌ی هم‌ارزی نامیده می‌شود.

مثال: رابطه‌ی R روی $\mathbb{Z}$، به صورت زیر تعریف می‌شود. ثابت کنید که این رابطه، یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. (m عددی صحیح و ثابت است.)

$$xRy \Leftrightarrow x - y = mk \quad (k \in \mathbb{Z})$$

حل: می‌دانیم صفر مضرب هر عدد است، به خصوص $m \times 0 = 0$؛ پس:

$$۱)\ x - x = 0 = m \times 0 \Leftrightarrow xRx$$

$$۲)\ xRy \Rightarrow x - y = mk_1$$
$$\Rightarrow y - x = m\underbrace{(-k_1)}_{k_2 \in Z}$$
$$\Rightarrow y - x = mk_2 \Rightarrow yRx$$

یعنی، با فرض این که xRy، ثابت کردیم که yRx، پس خاصیت تقارنی نیز برقرار است.

$$۳)\ xRy \ ,\ yRz \Rightarrow x - y = mk_1 \ ,\ y - z = mk_2$$

$$\Rightarrow x - z = m\underbrace{(k_1 + k_2)}_{k_3 \in \mathbb{Z}}$$

$$\Rightarrow x - z = mk_3 \Rightarrow xRz$$ (خاصیت تعدّی دارد)

بنابراین رابطه‌ی R، یک رابطه‌ی هم ارزی است.

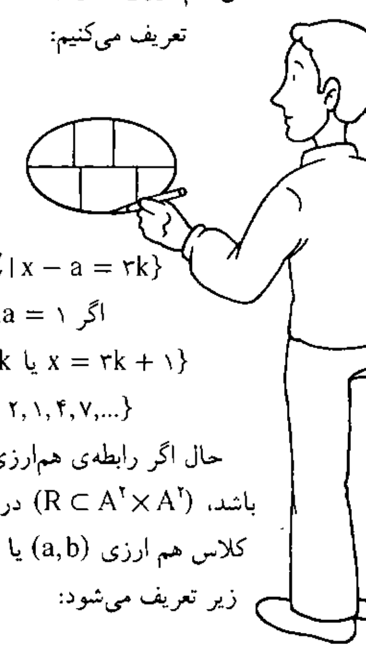
(لازم است توضیح دهیم که رابطه‌ی R در مثال قبل به رابطه‌ی هم نهشتی به پیمانه‌ی m معروف است.)

خواص انعکاسی، تقارنی و تعدّی در یک رابطه‌ی هم ارزی مانند R که روی مجموعه‌ی A تعریف شده است و ارتباط بین این سه خاصیت می‌تواند بین اعضایی از A که با هم رابطه‌ی R داشته باشند، ارتباطی خاصی برقرار کند. برای مثال، اگر در مثال قبل قرار دهیم $m = ۳$، داریم:

$$xRy \Leftrightarrow x - y = ۳k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

در حقیقت، اعدادی از $\mathbb{Z}$ با هم رابطه‌ی R دارند که تفاضل آن‌ها مضرب ۳ باشد. برای مثال، ۶R۱۵، زیرا $۶ - ۱۵ = -۹$ یا $۶ - ۱۵ = ۳ \times (-۳)$. حال اگر a عضوی از $\mathbb{Z}$ باشد و همه‌ی اعداد صحیح که با a رابطه‌ی R دارند (تفاضل هر یک از آن‌ها با a مضرب ۳ باشد) را در نظر بگیریم، مجموعه‌ای حاصل می‌شود که آن را کلاس هم ارزی a می‌نامند و با نماد [a] نمایش می‌دهند. در حالت کلی داریم:

اگر R یک رابطه‌ی هم ارزی روی مجموعه‌ی A باشد و $a \in A$، کلاس هم ارزی a را با نماد [a] نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:



$$[a] = \{x \in A \mid xRa\}$$

به عبارت دیگر: $x \in [a] \Leftrightarrow xRa$

برای مثال، در رابطه‌ی زیر داریم:

$$xRy \Leftrightarrow x - y = ۳k$$

$$[a] = \{x \in \mathbb{Z} \mid xRa\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - a = ۳k\}$$

اگر $a = ۱$، در این صورت داریم:

$$[۱] = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - ۱ = ۳k \text{ یا } x = ۳k + ۱\}$$

$$\Rightarrow [۱] = \{\dots, -۵, -۲, ۱, ۴, ۷, \dots\}$$

حال اگر رابطه‌ی هم‌ارزی R روی مجموعه‌ی $A^۲$ تعریف شده باشد، $(R \subset A^۲ \times A^۲)$ در این صورت، برای هر $(a,b) \in A^۲$ کلاس هم ارزی (a,b) یا $[(a,b)]$ مطابق تعریف اصلی به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$[(a,b)] = \{(x,y) \in A^۲ \mid (x,y)R(a,b)\}$$

مثال: رابطه‌ی هم ارزی R روی $\mathbb{R}^۲$ به صورت زیر تعریف شده است. اولاً، نوع نمودار کلاس‌های هم ارزی را مشخص کنید. ثانیاً، $[(۱,\sqrt{۲})]$ را به صورت مجموعه‌ای تشکیل دهید.

$$(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow a + d = b + c$$

حل: با نوشتن یک کلاس هم ارزی دلخواه مانند $[(a,b)]$، نمودار هر کلاس هم ارزی مشخص می‌شود:

$$\begin{aligned}[(a,b)] &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \mid (x,y)R(a,b)\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \mid x + b = y + a\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \mid y = x + (b - a)\}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow [(۱,\sqrt{۲})] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \mid y = x + (\sqrt{۲} - ۱)\}$$

و همان‌طور که مشاهده می‌شود، نمودار دسته‌های هم ارزی این رابطه، خط‌هایی به شکل $y = x + (b - a)$ است که می‌بینیم a و b تأثیری در ضریب زاویه‌ی این خط‌ها ندارند و فقط عرض از مبدأ را تعیین می‌کنند؛ یعنی، نمودار همه‌ی کلاس‌های هم‌ارزی، خط‌هایی موازی با هم هستند.

مثال: رابطه‌ی R را روی مجموعه‌ی $A = \{۲,۴,۶,۸\}$ به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$R = \{(۲,۲),(۴,۴),(۶,۶),(۸,۸),(۴,۶),(۶,۴)\}$$

واضح است که رابطه‌ی R، یک رابطه‌ی هم ارزی است. حال کلاس‌های هم ارزی این رابطه را تشکیل می‌دهیم:

$$[۲] = \{x \in A \mid xR۲\} = \{۲\}$$

$$[۴] = \{x \in A \mid xR۴\} = \{۴,۶\}$$

$$[۶] = \{x \in A \mid xR۶\} = \{۶,۴\}$$

$$[۸] = \{x \in A \mid xR۸\} = \{۸\}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، اوّلاً هیچ کدام از کلاس‌های هم‌ارزی این رابطه‌ی هم‌ارزی، تهی نیست، ثانیاً کلاس‌های هم ارزی، یا از هم جدا هستند و عضو مشترکی ندارند یا برابرند $([۴] = [۶])$ ثالثاً اجتماع کلاس‌های هم ارزی رابطه‌ی R، برابر با مجموعه‌ی A است؛ یعنی:

$$[۲] \cup [۴] \cup [۸] = \{۲\} \cup \{۴,۶\} \cup \{۸\} = \{۲,۴,۶,۸\} = A$$

در این جا، خواصی را که درباره‌ی کلاس‌های هم ارزی در مثال قبل مشاهده کردید، در حالت کلّی و به عنوان یک قضیه، مطرح و اثبات می‌کنیم.

قضیه: اگر رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی ناتهی A یک رابطه‌ی هم ارزی باشد، در این صورت داریم:

الف) کلاس‌های هم ارزی رابطه‌ی R، ناتهی‌اند.

ب) اگر $b \in [a]$، آن‌گاه $[a] = [b]$.

ج) اجتماع همه‌ی کلاس‌های هم‌ارزی رابطه‌ی R، برابر با مجموعه‌ی A است.

اثبات: الف) فرض کنیم [a] یک کلاس هم ارزی دلخواه باشد. چون رابطه‌ی R هم ارزی است، پس خاصیت انعکاسی دارد، لذا aRa. بنابراین طبق تعریف کلاس‌های هم ارزی $a \in [a]$، پس: $[a] \neq \varnothing$.

ب) برای این که ثابت کنیم $[a] = [b]$، (با فرض $b \in [a]$)

کافی است ثابت کنیم $[a]\subset[b]$ و $[b]\subset[a]$.

فرض کنیم:

$$x\in[a]\Rightarrow xRa; b\in[a]\Rightarrow aRb$$

و داریم:

$$aRb \xrightarrow{xRa} xRb \Rightarrow x\in[b]\Rightarrow [a]\subset[b] \quad (1)$$

حال اگر:

$$x\in[b]\Rightarrow xRb; b\in[a]\Rightarrow bRa$$

و داریم:

$$bRa \xrightarrow{xRb} x\in[a]\Rightarrow [b]\subset[a] \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow [a]=[b]$$

تذکر: قسمت (ب) نشان می‌دهد که هر دو کلاس هم ارزی، یا مساوی یکدیگرند یا هیچ اشتراکی با هم ندارند.

ج) اجتماع همه‌ی کلاس‌های هم ارزی را با E نشان می‌دهیم، چون طبق تعریف کلاس‌های هم ارزی، هر کلاس هم ارزی زیر مجموعه‌ی A است، پس اجتماع این کلاس‌های هم ارزی، یعنی E نیز زیرمجموعه‌ی A است؛ بنابراین $E\subseteq A$. حال اگر فرض کنیم $x\in A$ واضح است که $x\in[x]$. پس هر عضو از A، در یکی از کلاس‌های هم ارزی رابطه‌ی R وجود دارد و بنابراین در اجتماع کلاس‌ها، یعنی E وجود خواهد داشت؛ یعنی $A\subseteq E$ و در کل ثابت شد $A=E$.

مثال: مجموعه‌ی $A=\{x\in\mathbb{R}\mid 0\le x\le 1\}$ را در نظر می‌گیریم و رابطه‌ی R را روی A^2 به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$(x,y)R(z,t)\Leftrightarrow y=t$

که: $A^2=A\times A=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$

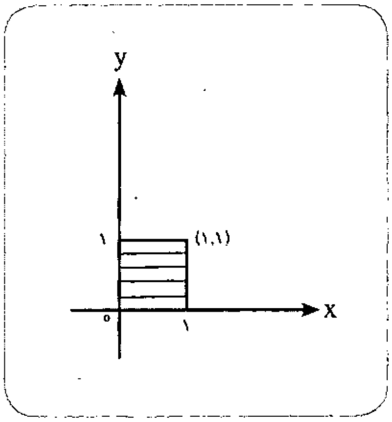
(مجموعه‌ی $A=\{x\in\mathbb{R}\mid 0\le x\le 1\}$ را به شکل $A=[0,1]$ نیز نشان می‌دهند.)

اوّلاً، به راحتی می‌توان ثابت کرد که رابطه‌ی R یک رابطه‌ی هم ارزی است (اثبات به عهده‌ی خواننده).

ثانیاً، همان‌طور که مشاهده می‌کنید، مجموعه‌ی A^2، یعنی $[0,1]\times[0,1]$، سطح مربع واحد را نشان می‌دهد و اگر بخواهیم نمودار هر کلاس هم ارزی این رابطه را بشناسیم، داریم:

$$\begin{aligned}[(a,b)] &= \{(x,y)\in A^2 \mid (x,y)R(a,b)\}\\ &= \{(x,y)\in A^2 \mid y=b\}\end{aligned}$$

یعنی نمودار هر کلاس هم ارزی، پاره خطی است داخل سطح مربع واحد و موازی با محور xها، که هیچ کدام از این پاره خط‌ها یکدیگر را قطع نمی‌کنند. زیرا هر یک از این پاره‌خط‌ها به یک کلاس هم ارزی تعلق دارد و می‌دانیم که (ثابت شده) که کلاس‌های هم ارزی، عضو مشترک ندارند.



مثال: رابطه‌ی R را روی $\mathbb{R}^2$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$(x,y)R(z,t)\Leftrightarrow y-x^2=t-z^2$

الف) ثابت کنید که R رابطه‌ی هم ارزی است.

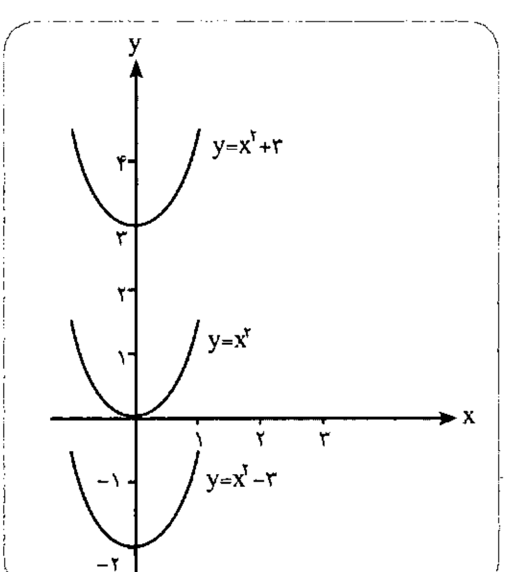
ب) نمودار هر کلاس هم ارزی در این رابطه، چه شکلی را در صفحه‌ی مختصات معین می‌کند؟

اثبات: اثبات قسمت (الف) به عهده‌ی خواننده.

ب) برای مشخص کردن نمودار هر کلاس هم ارزی، یک کلاس هم ارزی دلخواه مانند $[(a,b)]$ را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}[(a,b)] &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x,y)R(a,b)\}\\ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y-x^2=b-a^2\}\\ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=x^2+(b-a^2)\}\end{aligned}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، نمودارهای کلاس‌های هم ارزی این رابطه، سهمی‌هایی به شکل $y=x^2+(b-a^2)$ هستند. برای مثال، نمودار $[(1,2)]$، سهمی $y=x^2+1$ است.



$[(۱,۱)] \to y = x^۲$

$[(۰,۲)] \to y = x^۲ + ۲$

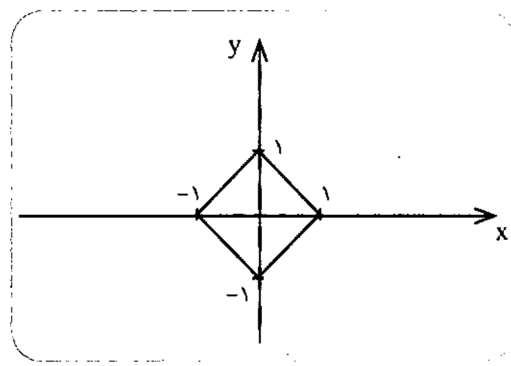
$[(-۱,-۱)] \to y = x^۲ - ۲$

مثال: رابطه‌ی هم‌ارزی R روی $\mathbb{R}^۲$ به صورت زیر تعریف می‌شود، شکل کلاسی هم‌ارزی [(۱و۰)] را مشخص کرده و نحوه‌ی افراز $\mathbb{R}^۲$ را توسط کلاس‌های هم‌ارزی این رابطه توضیح دهید.

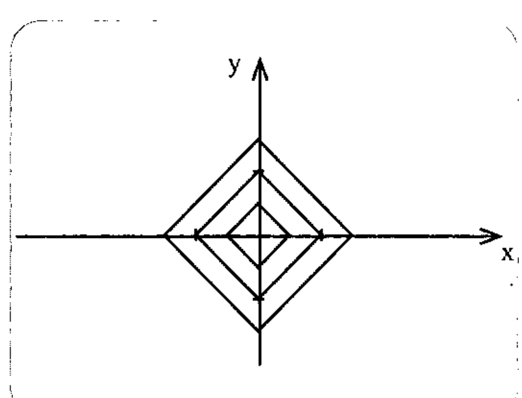
$$(x,y)R(z,t) \Leftrightarrow |x|+|y|=|z|+|t|$$

حل:

$$[(۰,۱)] = \{(x,y \in \mathbb{R}^۲ \,|\, |x|+|y| = |۰|+|۱|\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \,|\, |x|+|y| = ۱\}$$



همان‌طور که مشاهده می‌شود نمودار هر کلاس هم‌ارزی مانند [(a,b)] یک مربع است که چهار رأس آن روی محورهای مختصات قرار دارد و مرکز همه‌ی این مربع‌ها (با طول اضلاع متمایز) مبدأ مختصات است و بنابراین هیچ‌کدام دیگری را قطع نمی‌کند در واقع $\mathbb{R}^۲$ توسط این مربع‌های هم مرکز افراز می‌شود.



تمرین: رابطه‌ی هم‌ارزیِ زیر روی $\mathbb{R}^۲$ تعریف شده این رابطه، مجموعه‌ی $\mathbb{R}^۲$ را توسط چه نمودارهایی افراز می‌کند؟

$$(x,y)R(z,t) \Leftrightarrow x^۲ + y^۲ = z^۲ + t^۲$$

تعریف افراز یک مجموعه: هرگاه A یک مجموعه‌ی ناتهی باشد و بتوانیم تعدادی متناهی از زیرمجموعه‌های متمایز A مانند $A_۱, A_۲, ..., A_n$ بیابیم، به قسمی که اوّلاً هر یک از زیرمجموعه‌ها ناتهی باشند، ثانیاً هیچ دوتایی از آن‌ها با هم اشتراکی نداشته باشند (دو به دو از هم جدا باشند) و ثالثاً اجتماع این زیرمجموعه‌های برابر با مجموعه‌ی A شود، در این صورت می‌گوییم که مجموعه‌های $A_۱$، $A_۲$، ... و A_n مجموعه‌های افراز کننده‌ی مجموعه‌ی A هستند و مجموعه‌ی $E = \{A_۱, A_۲, ..., A_n\}$ یک افراز n عضوی از مجموعه‌ی A است.

تبصره- در حالتی که $n = ۱$، یعنی E یک افراز یک عضوی از مجموعه‌ی A باشد، داریم: $E = \{A\}$. حال اگر بخواهیم تعریف افراز یک مجموعه را توسط نمادهای ریاضی یا به زبان ریاضی بیان کنیم، می‌گوییم:

مجموعه‌ی $E = \{A_۱, A_۲, ..., A_n\}$ یک افراز n عضوی برای مجموعه‌ی ناتهی A است، هرگاه:

۱) برای هر $۱ \le i \le n$: $A_i \neq \emptyset$

۲) برای هر j و i که $۱ \le i$ و $j \le n$ و $i \neq j$، $A_i \cap A_j = \emptyset$

۳) $A_۱ \cup A_۲ \cup ... \cup A_n = \bigcup_{i=۱}^{n} A_i = A$.

مثال: یک افراز ۴ عضوی، یک افراز ۳ عضوی و یک افراز ۲ عضوی برای مجموعه‌ی $A = \{۱,۲,۳,۴\}$ بنویسید.

حل: ۱- اگر فرض کنیم که $A_۱ = \{۱\}$ و $A_۲ = \{۲\}$ و $A_۳ = \{۳\}$ و $A_۴ = \{۴\}$، در این صورت $E_۱ = \{A_۱, A_۲, A_۳, A_۴\}$ یک افراز ۴ عضوی برای A است.

۲- اگر فرض کنیم که $B_۱ = \{۱,۴\}$ و $B_۲ = \{۲\}$ و $B_۳ = \{۳\}$، در این صورت $E_۲ = \{B_۱, B_۲, B_۳\}$ یک افراز ۳ عضوی برای A است.

۳- و بالاخره اگر فرض کنیم که $C_۱ = \{۱,۲\}$ و $C_۲ = \{۳,۴\}$، در این صورت $E_۳ = \{C_۱, C_۲\}$ یک افراز ۲ عضوی از A است.

مثال: برای مجموعه‌ی اعداد حقیقی، می‌توان به صورت $E = \{\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-, \{۰\}\}$ یک افراز ۳ عضوی نوشت.

مثال: اگر مجموعه‌ی اعداد صحیح زوج را با $\mathbb{Z}_E$ و مجموعه‌ی اعداد صحیح فرد را با $\mathbb{Z}_O$ نمایش دهیم، در این صورت، $E = \{\mathbb{Z}_E, \mathbb{Z}_O\}$ یک افراز ۲ عضوی برای $\mathbb{Z}$ است.

حال با توجه به قضیه‌ای که درباره‌ی کلاس‌های هم ارزی یک رابطه‌ی هم ارزی مانند R اثبات شد و با توجه به تعریف افراز، بدیهی است که:

اگر R رابطه‌ی هم ارزی روی مجموعه‌ی ناتهی A باشد، مجموعه‌ی کلاس‌های هم ارزی رابطه‌ی R، یک افراز برای مجموعه‌ی

A است. (طبق قضیه‌ی کلاس‌های هم ارزی، هر سه خاصیت افراز را دارند.)

مثال: دیدیم که رابطه‌ی $xRy \Leftrightarrow x - y = ۳k$ یک رابطه‌ی هم ارزی روی $\mathbb{Z}$ است و کلاس‌های هم ارزی این رابطه به قرار زیرند:

$$[۰] = \{\ldots, -۶, -۳, ۰, ۳, ۶, \ldots\}$$
$$[۱] = \{\ldots, -۵, -۲, ۱, ۴, ۷, \ldots\}$$
$$[۲] = \{\ldots, -۴, -۱, ۲, ۵, ۸, \ldots\}$$

و واضح است که $\mathbb{Z} = [۰] \cup [۱] \cup [۲]$؛ یعنی: $E = \{[۰],[۱],[۲]\}$ یک افراز $\mathbb{Z}$ است.

مثال: رابطه‌ی هم ارزی R روی $\mathbb{R}^۲$ به صورت زیر تعریف می‌شود، شکل کلاس هم ارزی $[(۰,۱)]$ را مشخص کرده و نحوه‌ی افراز $\mathbb{R}^۲$ را توسط کلاس‌های هم ارزیِ این رابطه توضیح دهید.

$$(x,y)R(z,t) \Leftrightarrow |x|+|y| = |z|+|t|$$

حل:

$$[(۰,۱)] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \mid |x|+|y| = |۰|+|۱|\}$$
$$= [(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \mid |x|+|y| = ۱]$$

همان طور که مشاهده می‌شود نمودار هر کلاس هم ارزی مانند $[(a,b)]$ یک مربع است که چهار رأس آن روی محورهای مختصات قرار دارد و مرکز همه‌ی این مربع‌ها (با طول اضلاع متمایز) مبدأ مختصات است و بنابراین هیچ‌کدام دیگری را قطع نمی‌کند در واقع $\mathbb{R}^۲$ توسط این مربع‌های هم مرکز افراز می‌شود.

تمرین: رابطه‌ی هم ارزیِ زیر روی $\mathbb{R}^۲$ تعریف شده این رابطه، مجموعه‌ی $\mathbb{R}^۲$ را توسط چه نمودارهایی افراز می‌کند؟

$$(x,y)R(z,t) \Leftrightarrow x^۲ + y^۲ = z^۲ + t^۲$$

مشاهده کردید که کلاس‌های هم ارزی هر رابطه‌ی هم ارزی مانند R روی مجموعه‌ی A، یک افراز برای A است. حال این سؤال پیش می‌آید که آیا عکس مطلب فوق نیز برقرار است؟ یعنی آیا به ازای هر افراز برای A، رابطه‌ای هم ارزی روی A می‌توان تعریف کرد که این افراز، همان کلاس‌های هم ارزی آن رابطه باشند؟ جواب مثبت است و برای به دست آوردن آن رابطه‌ی هم ارزی کافی است هر یک از مجموعه‌های افراز کننده را در خودش ضرب دکارتی کرده و اجتماع همه‌ی آن‌ها، همان رابطه هم ارزی است.

معرفی سایت‌های ریاضی جهان

احسان یارمحمدی

www.combinatorics.org

این سایت به معرفی یک مجله‌ی الکترونیکی ریاضی در زمینه‌ی ریاضیات گسسته می‌پردازد که دربرگیرنده‌ی موضوعات متنوع ریاضیات گسسته شامل مباحث نظریه‌ی گراف‌ها، ترکیبیات و... است.

در سمت چپ صفحه‌ی اصلی این سایت می‌توانید با اعضای دست‌اندرکار در این مجله‌ی الکترونیکی به شرح زیر آشنا شوید.

ویراستار افتخاری (Honorary Editor)

مدیران مسئول (Editors- in- Chief)

کمک ویراستاران (Associate Editors)

مدیر مسئول (Managing Editors)

هیئت تحریریه (Editorial Board)

صفحه‌ی اصلی این سایت نیز دربرگیرنده‌ی عناوین زیر است که هر یک از آن‌ها حاوی زیرعنوان‌ها و مطالب متنوع، جالب توجه و پیشرفته درباره‌ی مباحث ریاضیات گسسته است.

نمایی کلی از مجله (View the Journal)

مجلدهای فعلی و اخیر (Current and Recent Volumes)

تمام مجلدها (All Volumes)

ضمیمه‌ی نویسندگان (Index of Authors)

بازدیدهای پویا (Dynamic Surveys)

درباره‌ی مجله (About the Journal)

هدف مجله (The Purpose of the Journal)

هیئت تحریریه (Editorial Board)

اطلاعات برای نویسندگان (Information for Authors)

سایت‌های کپی برابر اصل[۱] (Mirror Sites)

ثبت نام برای دریافت اطلاعات از راه پست الکترونیک.
(Sign up to Receive Abstract Via E- mail)

نسخه‌ی چاپی از مجله (The Print Version of the Journal)

سپاس‌گزاری (Thanks)

تبادل ترکیبیات جهانی
(The World Combinatorics Exchange)

بقیه در صفحه‌ی ۲۷


یکان

دورهٔ سوم ـ شمارهٔ ۹

شمارهٔ مسلسل ۳۴

فروردین ـ اردیبهشت ۱۳۴۶

در این شماره :

اطلاعاتی از کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان
ماتریس
مراحل مهم علم نجوم
مسائل حل نشدهٔ ریاضی
چگونه مسئله‌ای را حل کنیم
راهنمای حل مسائل هندسه
اصطلاحات فیزیکی و معادل انگلیسی آنها
سرگرمیهای ریاضی
مسائلی از ریاضیات جدید
مسائل امتحانات متفرقه کلاسهای چهارم و پنجم
مسائل امتحانات داخلی دبیرستانها
مسائل برای حل
حل مسائل یکان شمارهٔ ۳۲
آگهی دانشگاه صنعتی آریامهر

بها : بیست ریال

۱
تاریخچه‌ی مجله‌های ریاضی ایران

غلامرضا یاسی‌پور

در شماره‌ی ۳۴ مجله‌ی یکان در مقاله‌ای با عنوان «مسائل حل نشده‌ی ریاضی» به این پارادوکس برخورد می‌کنیم:

مدیر مدرسه‌ای به شاگردان اطلاع می‌دهد که بعد از ظهر یکی از روزهای شنبه تا پنجشنبه‌ی هفته‌ی آینده، یک امتحان از آن‌ها به عمل خواهد آورد. این امتحان کاملاً غیرمترقبه خواهد بود. چنانچه صبح روزی که قرار است بعد از ظهر آن امتحان انجام گیرد، یکی از دانش‌آموزان برای مدیر شرح دهد که آن روز بعد از ظهر امتحان به عمل خواهد آمد و دلیلش را هم بگوید از انجام امتحان منصرف خواهد شد.

در تعطیلی روز جمعه، دانش‌آموزان نتیجه‌ی عجیبی به دست آوردند و صبح شنبه اول وقت، نماینده‌ی خود را نزد مدیر فرستادند. این گفت‌گویی است که بین مدیر و نماینده‌ی دانش‌آموزان انجام گرفته است:

نماینده: آقای مدیر، اجازه می‌خواهم یک موضوع را به اطلاعتان برسانم. شما اصلاً امتحان را به عمل نخواهید آورد.

مدیر: چرا؟

نماینده: اگر در نظر بگیریم که هفته‌ی آینده تا آخر روز چهارشنبه سپری شود و شما امتحان را به عمل نیاورید، در این صورت فقط یک روز پنجشنبه باقی مانده است و صبح پنجشنبه یکی از دانش‌آموزان به شما اطلاع خواهد داد که امتحان در آن روز انجام خواهد گرفت، زیرا غیر از آن روزی از هفته باقی نمانده است و شما هم بنا به قولی که داده‌اید مجبورید که در آن روز امتحان نگیرید.

مدیر: بسیار خوب، پنجشنبه را کنار می‌گذاریم. امتحان در روزی غیر از پنجشنبه انجام خواهد گرفت.

نماینده: روز چهارشنبه را هم باید کنار بگذارید، زیرا اگر تا روز سه شنبه امتحان انجام نگرفت، چون پنجشنبه را هم کنار

گذاشته‌ایم، بنابراین مسلم می‌شود که امتحان در روز چهارشنبه انجام می‌گیرد و یکی از دانش‌آموزان صبح چهارشنبه این موضوع را به شما اطلاع می‌دهد و شما هم از انجام امتحان صرف نظر می‌کنید.

مدیر: درست می‌گویید. روز چهارشنبه را هم باید کنار بگذاریم.

در اینجا مدیر کمی مکث کرد و بعد خطاب به نماینده‌ی دانش‌آموزان اظهار داشت که: شما به همین ترتیب به استدلال خود ادامه می‌دهید و نتیجه می‌گیرید که در هیچ یک از روزهای هفته امتحان انجام نخواهد گرفت. استدلال شما کاملاً صحیح است و ما نمی‌توانیم امتحانی به عمل آوریم که کاملاً غیرمترقبه باشد.

نماینده‌ی دانش‌آموزان شادی‌کنان نزد آنان آمد و موضوع را به ایشان اطلاع داد.

هرچند که مدیر مدرسه قبول کرد که نمی‌تواند در هفته‌ی معین امتحانی غیرمترقبه از دانش‌آموزان به عمل آورد و با وجود این که استدلال بالا کاملاً منطقی به نظر می‌رسد، اما عملاً چه چیزی مدیر را از انجام امتحان در یک روز هفته، مثلاً روز یکشنبه، بازخواهد داشت؟ و یک محصل از کجا بفهمد که امتحان عصر روز یکشنبه انجام خواهد گرفت؟

تناقضی وجود دارد که تاکنون درباره‌ی آن کاغذها سیاه شده است، اما هنوز پاسخ قانع‌کننده‌ای برای آن به دست نیامده است.

در این شماره از مقالات جالب شماره‌های اولیه خبری نیست و بیش‌تر مسائل امتحانات دبیرستان‌ها در آن آمده است. در شماره‌ی ۳۵ مجله به این مسئله برمی‌خوریم:

من به فرامرز گفتم که جواد می‌گفت یک بشقاب پرنده دیده است. فرامرز جواب داد که: یک کلمه از حرف‌های جواد را باور مکن.
من در جواب فرامرز گفتم: عجیب است، جواد درباره‌ی تو درست برعکس تو عقیده داشت و من به فرامرز حقیقت را گفته بودم.
احتمال این‌که جواد بشقاب پرنده را دیده باشد تا چه حد است؟
ترجمه‌ی داود مصحفی

و در شماره‌ی ۳۷ در مقاله‌ای با عنوان «مراحل مهم علم نجوم» در شرح حال پوانکاره چنین آمده است:

ترجمه‌ی فصلی از کتاب "L'Astronomie modern"
تالیف: TOCQUET

ژول هانری پوانکاره[1] (۱۸۵۴-۱۹۱۲) در ۲۹ آوریل ۱۸۵۴ در نانسی متولد شد. پسر عمویش ریموند پوانکاره از ۱۹۱۳ تا ۱۹۲۰ رئیس جمهور فرانسه بود. اولین بار در ۱۸۷۳ وارد مدرسه‌ی پلی‌تکنیک شد. دوره‌ی این مدرسه را با چنان درخشندگی گذراند که به افسانه بیش‌تر شباهت دارد. در ۱۸۷۸ بعد از خروج از مدرسه‌ی معادن در دانشکده‌ی کان با سمت دانشیاری شروع به آموزش آنالیز ریاضی کرد. در ۱۸۸۱ به سوربن فراخوانده شد تا تصدی کرسی مکانیک فیزیک و تجربی را بر عهده گیرد. بعداً استاد کرسی فیزیک ریاضی شد. بعد از درگذشت **تیسران** کرسی مکانیک سماوی بر عهده‌ی وی گذاشته شد. در ۱۸۸۷ به عضویت **آکادمی علوم** و در ۱۹۰۹ به عضویت **آکادمی فرانسه** برگزیده شد. غیر از آن، در بسیاری از آکادمی‌های علمی جهان عضویت داشت.

آثار هانری پوانکاره بسیار است و همه‌ی شاخه‌های ریاضی و فیزیک را دربرمی‌گیرد: آنالیز عالی، هندسه‌های غیراقلیدسی، توپولوژی، مکانیک، نجوم و فیزیک ریاضی. لوئی دوبرگلی می‌نویسد: «در ۵۸ سالگی از دنیا رفت درحالی‌که آثاری از خود باقی گذاشت که از نظر وسعت شگفت‌انگیز است و تقریباً غیرممکن به نظر می‌رسد که در طول عمر چنین کوتاهی این‌همه کارهای مختلف و پرارزش انجام گرفته باشد.»

در تاریخ ریاضیات، ریاضی‌دانان انگشت شماری مثل هانری پوانکاره توانسته‌اند در نظام اساسی ریاضیات تا این حد «حد اعلای امکان» تحول پدید آورند. در ریاضیات محض، قوه‌ی ابداع او اعجاب آور است. در فراهم آوردن بهترین راه‌های ابتکاری برای حل همه‌ی مسائلی که با آن‌ها مواجه می‌شد، چنان استادی و شایستگی از خود بروز داده است که همه را متحیر می‌سازد. قابلیت فوق العاده‌ای که در خلق همه نوع راه‌های تحلیلی برای بررسی مسائل داشته، نشان‌دهنده‌ی نبوغ اوست. به علاوه، استعداد شگرفی داشته که همه‌ی موضوع‌ها را در همان نظر اول در حالت کلی و عمومی در نظر می‌گرفته است. کارهای گذشتگان را به ندرت بررسی کرده است، مگر این که حداکثر بر چندتا از آن‌ها نظری سطحی افکنده باشد. برای درک کلیه‌ی قسمت‌های نظریه‌ای، مختصر اطلاعی از آن برای وی کفایت داشته است.

مثال خوبی از اساسی بودن مشاهدات وی موضوع کشف توابع فوشین است که تقریباً مربوط به اوایل زندگی علمی وی بوده و نام او را به بلندآوازه ساخته است. وقتی که پوانکاره مطالعات خود را در این باره شروع کرد و حالت کلی موضوع را در نظر گرفت، بعضی حالات خاص آن توسط ژاکوبی، هرمت و دیگر ریاضی‌دان‌ها تحت بررسی بود، اما پوانکاره از این موضوع

اطلاعی نداشت. مرحله‌ی شروع مسئله عبارت بود از پوشاندن صفحه‌ی مستوی با آجرهای به شکل متوازی الاضلاع‌های برابر. پوانکاره به مطالعه‌ی حالت کلی پرداخت و مسئله را به صورت پوشاندن یک نیم‌صفحه با مجموعه‌ای از چندضلعی‌های منحنی الخط مطرح کرد. آنچه وی را در نیل به هدف رهبری کرد و به یک نتیجه گیری عالی ختم شد تصویر سری‌های کاملا تازه بود (*توابع تتافوشین*).

در قسمت فیزیک، بیست موضوع که به هنگام تصدی کرسی فیزیک ریاضی دانشگاه سوربن عرضه کرد، همه را به حیرت افکند. او درباره‌ی موضوع‌های مختلف و متغیری بحث کرده است از قبیل: نیروی ارتجاع، نیروی مایعات، نظریه‌ی حرارت، ترمودینامیک، قوای شعریه، نور و الکتریسیته. وی همچون مخرج مشترک بین چند کسر به نظر می‌رسد و برهنه ساختن نظام‌های اساسی که با عنوان‌های مختلف در فیزیک ریاضی عرض وجود می‌کنند برای او همچون یک بازی بوده است.

درباره‌ی نجوم، تقریباً همه‌ی کارهای او به مکانیک سماوی مربوط می‌شود، اما هرچه کرده کاملاً تازگی داشته و هنوز به منبعی می‌ماند که استفاده از آن با همان سبکی که وی ابداع کرده، میسر است.

اولین تذکاریه‌ی وی درباره‌ی مکانیک سماوی مربوط به بررسی معادلات علم القوی است و در آن درباره‌ی مسئله‌ی مشهور «سه جسم» به بحث پرداخته است: بعد از آن آثاری درباره‌ی نظریه‌ی جزر و مد و روش‌های جدید در مکانیک سماوی منتشر کرده است. آخرین کتابش که به فرضیات آفرینش جهان اختصاص دارد و چند سال قبل از مرگش انتشار یافت، یک شاهکار علمی بی‌نظیر است. در این اثر، کلیه‌ی فرضیات مربوط به تشکیل منظومه‌ی شمسی که بعد از کانت و لاپلاس عنوان شده مجدداً مورد بحث قرار گرفته است، اما روش بررسی آن‌ها کاملاً تازه و اساسی است، وانگهی به منظومه‌ی شمس محدود نمی‌شود. او نظریه‌ی خود را تا ستارگان و سحابی‌ها گسترش داده است. **نظریه‌ی آرنیوس** (Arrhenius) را درباره‌ی امکان این که جهان به مرگ حرارتی می‌افتد با یک نظر انتقادی مؤثر و دلنشین بررسی کرده است و می‌توان **اصل کارنو** (Carnot) را به وی نسبت داد. این اثر از جهات دیگر هم پر از نظریات عالی است و از کتاب‌هایی است که باید از دیدگاهی عالی مورد قضاوت واقع شود و می‌توان آن را چکامه‌ای در علوم دانست.

نکته‌ی مهمی که از این اثر به دست می‌آید آن است که برای اولین دفعه و قبل از اینشتین، نظریه‌ی نسبیت از سوی هانری پوانکاره مطرح شده است و باید افتخار این کشف بزرگ نصیب علوم فرانسه باشد.

وی در کتاب دانش و مردم (صفحه‌ی ۲۴۰) آنجا که نتایج همه‌ی تجربیاتش را درباره‌ی مسئله بیان می‌کند چنین می‌نویسد: «ممکن است که این باشد و غیرممکن است که از این تأثیر برکنار بود. اساس نسبیت یک قانون عمومی طبیعت است. هیچ گاه و با هیچ وسیله‌ی خیالی سرعت‌ها را نمی‌توان مسلم و قطعی دانست، همه نسبی هستند و با آن وسیله سرعت‌ها را نسبت به اثر حس نمی‌کنیم، بلکه آن چه به دست می‌آوریم عبارت است از سرعت‌هایی که اجسام نسبت به یکدیگر دارند. بسیاری از آزمایش‌های مختلف نتایج یکسان داده‌اند برای این که نخواسته‌اند برای نسبیت همان ارزشی را قائل شوند که مثلاً برای قانون تعادل قائل‌اند. لازم است که در همه‌ی حالات، نوع مشاهده‌ای را که ما را به اخذ نتایج رهبری می‌کند امتحان کنیم و بالاخره بعد از کنترل آزمایش این نتایج را قبول داشته باشیم.»

نتیجه آن که در ۱۹۰۴ زمانی که اینشتین تازه کارهای قطعی خود را آغاز می‌کرده، پوانکاره بر کلیه‌ی جزئیات نظریه‌ی نسبیت احاطه داشته است. وی تمام اشکالات الکترودینامیک اجسام در حال حرکت را مطرح کرده و تمام ریزه‌کاری‌های آن را آشکارا مشخص ساخته است. عناوینی که وی بررسی کرده، عبارت‌اند از: زمان محلی لورنتز، انقباض فیتز جرالد، طرح ثابت‌های معادلات الکترومغناطیس و نتایج آزمایش **مایکلسن**.

لوئی بروگلی چنین می‌نویسد: «در این باره، پوانکاره گام قطعی را برنداشته و افتخار مشاهده‌ی همه‌ی نتایج نظریه‌ی نسبیت را به اینشتین واگذار کرده است، به خصوص تحقیق دقیق اندازه‌های طول و زمان و درک حقیقت فیزیکی مشخص ارتباطی که اساس نسبیت بین فضا و زمان مستقر می‌سازد. چرا پوانکاره بعد از اولین قدم، قدمی فراتر ننهاده است؟ وی مانند یک ریاضی‌دان محض فکر می‌کرده و به علاوه دارای اندیشه‌ی انتقادی مفرطی بوده است و در مواجهه با نظریه‌های فیزیکی رفتاری شکاک داشته است. تصورات نامحدود مختلفی وجود دارد که از لحاظ منطقی هم ارزند و دانشمندان از بین آن‌ها، مواردی را انتخاب می‌کنند که دلایل آسان‌تری را لازم داشته

باشند. به نظر می‌رسد یک چنین وضعی موجب شده است تا وی به نظریاتی که به حقیقت فیزیکی بسیار نزدیک اند و فیزیکدان‌ها در مشاهدات خود در هر حال آن‌ها را می‌پذیرند توجه نداشته باشد. از این جهت است که اینشتین، جوانی که تازه ۲۵ سال داشت و اطلاعات ریاضی او در برابر معلومات عمیق و داهیانه‌ی دانشمند فرانسوی کاملاً مقدماتی بود، موفق شد همه‌ی تجربیات جزئی سلف خود را به کار برد و به مرحله‌ای برسد که کلیه‌ی اشکالات کار را با قاطعیت استخراج کند. اندیشه‌ای قوی، کار ماهرانه‌ای را که با مشاهده‌ی عمیق حقایق فیزیکی رهبری می‌شد، به ثمر رساند.» اما به هر حال خیره‌کنندگی و شایستگی موفقیت اینشتین نباید موجب آن شود که فراموش کنیم مسئله‌ی نسبیت قبل از وی با اندیشه‌ی درخشان پوانکاره عمیقاً تجزیه و تحلیل شده است.

قبل از آن که صحبت از پوانکاره را قطع کنیم مناسب است راجع به فلسفه‌ی وی هم چند کلمه‌ای صحبت کنیم. روی هم رفته وی متفکری مستقل و نسبت به هر مکتبی بیگانه بوده و هیچ‌گاه هم مانند رنوویه، برگسون یا **ویلیام جمز** در صدد تأسیس مکتب خاصی برنیامده است. پای‌بند هیچ آیینی نبوده و از خود هم هیچ نوع آیینی اظهار نکرده است. اگر بخواهیم نوع تفکر وی را در یک کلمه خلاصه کنیم، شاید مناسب‌ترین کلمه «طرفداری سهولت عمل» باشد. وانگهی در نوشته‌هایش کلمه‌ی «سهل» پیوسته تکرار می‌شود و توضیحاتش نیز همیشه با این کلمه پایان می‌یابد.

شاید بتوان پوانکاره را جانب‌دار **فلسفه‌ی پراگماتیسم** دانست، اما کلمه‌ی «سهولت» نزد او معنای ذهنی‌تری دارد و غیر از دکترین **ویلیام جمز** است. درست است که معنا آسان را می‌رساند، اما در عین حال با بعضی داده‌های تجربی هم متناظر است.

پوانکاره یک ایده‌آلیست بوده است و همین طرز تفکر ایده‌آلی در تنظیم آثاری که همچون یک شعر قابل تحسین در ادبیات فرانسه جاودانی خواهد بود، الهام بخش وی بوده است. آخرین صفحه‌ی کتاب وی درباره‌ی ارزش دانش با این کلمات آغاز می‌شود: «چیزی که درباره‌ی آن نشود فکر کرد وجود ندارد»، یا جای دیگر در قسمتی از کتابش با حالتی کاملاً جدی، اندیشه را چنین توصیف می‌کند: «آذرخشی در نیمه‌شبی طولانی.»

پی‌نوشت

1. Jules-Henri Poincare

ادامه‌ی مطلب صفحه‌ی ۲۳

پایگاه داده‌های بسیار مدرن و توسعه‌یافته[۲]

(Databases of the State-of-the-Art)

نرم‌افزار، کتاب‌ها، یادداشت‌های سخنرانی‌ها، و... جالب توجه برای ترکیبی‌دانان

(Software, Books , Lecture Notes , ete of interest to Combinatorialists)

صفحه‌های اصلی از افراد و گروه‌های ترکیباتی

(Home Page of Combinatorial People and Groups)

مواردی دیگر از مجله‌های ریاضی رایگان در اینترنت

(Some Other Free Mathematics Journals on the Internet)

همایش‌هایی دز ترکیبیات و رشته‌های مرتبط

(Conferences in Combinatorecs and Related Fields)

صفحات جالب توجه دیگر برای ترکیبی‌دانان

(Other Pages of Internet to Combinatorialists)

پی‌نوشت

۱. در فرهنگ لغت انگلیسی به انگلیسی longman برای عبارت Mirror site آورده شده است:

A website that is an exact copy of another one, but which is in a different place on the internet

و برگردان این عبارت به فارسی چنین است: یک وب‌سایت که دقیقاً یک کپی از دیگری است، اما در یک مکان متفاوت در اینترنت قرار دارد.

۲. در فرهنگ لغت انگلیسی به انگلیسی Longman برای عبارت State-of-the-Art چنین آورده شده است:

State-of-the-Art: Using the most modern and recently developed methods, materials of knowledge.

و برگردان آن به فارسی این است: استفاده از روش‌های بسیار مدرن و توسعه‌یافته‌ی جدید، مواد یا دانش

رویکرد هندسی و رویکرد جبری در آموزش هندسه (۱۳)

محمد هاشم رستمی

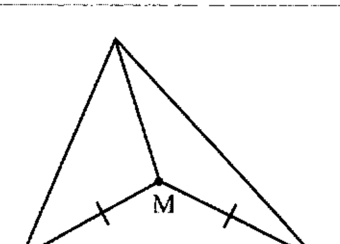
اشاره

به‌منظوراستفاده‌ی بیشتر دانش‌آموزان ارجمند از این مقاله، از شماره‌ی قبل به حل مسئله‌های هندسه در صفحه (هندسه‌ی مسطحه) پرداختیم. در این شماره ادامه‌ی این مطالب را پی می‌گیریم.

مثال ۳: سه نقطه‌ی A، B و C داده شده‌اند. نقطه‌ای در صفحه‌ی گذرنده بر این سه نقطه بیابید که از این سه نقطه به یک فاصله باشد. آیا این نقطه یکتاست؟

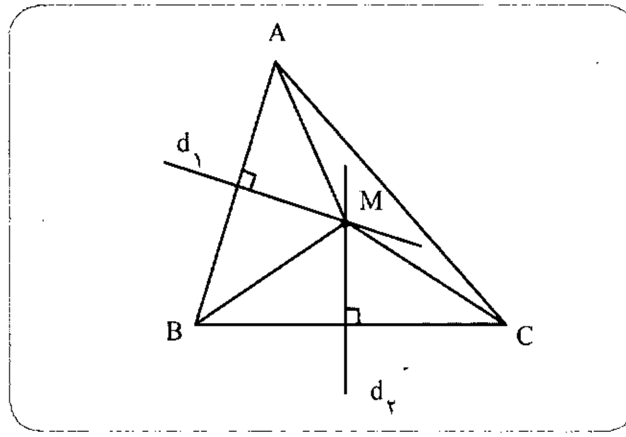
الف) حل با روش هندسی

فرض می‌کنیم مسئله حل شده باشد و نقطه‌ی M جواب مسئله باشد یعنی نقطه‌ای باشد که از سه نقطه‌ی A، B و C به یک فاصله است، یعنی داریم $MA = MB = MC$. چون $MA = MB$ است، پس نقطه‌ی M از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله است.

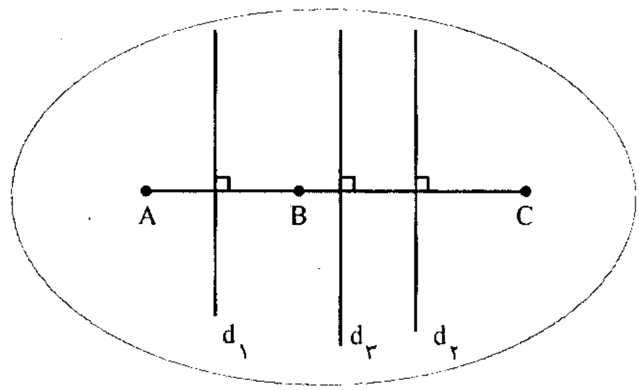


بنابراین نقطه‌ی M روی عمودمنصف پاره خط AB است. هم‌چنین $MB = MC$ است پس نقطه‌ی M از دو نقطه‌ی B و C به یک فاصله است، یعنی نقطه‌ی M روی عمودمنصف پاره خط BC است و هم‌چنین $MA = MC$ است، پس نقطه‌ی M روی عمودمنصف پاره‌خط AC قرار دارد. در نتیجه نقطه‌ی M محل برخورد عمود منصف‌های سه پاره خط AB، BC و AC است. از این جا راه حل مسئله به این صورت مشخص می‌شود:

عمودمنصف دو پاره خط از سه پاره خط AB، BC و AC را رسم می‌کنیم. برای مثال عمودمنصف پاره خط AB را رسم می‌کنیم و خط d_1 می‌نامیم. هم‌چنین عمودمنصف پاره خط BC را رسم می‌کنیم و خط d_2 می‌نامیم. نقطه‌ی برخورد این دو خط، نقطه‌ی M جواب مسئله است.

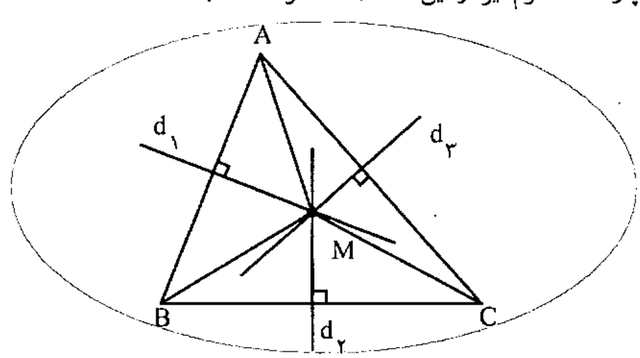


نکته‌ی ۱. خط‌های d_1 و d_2 در صورتی یکدیگر را قطع می‌کنند که سه نقطه‌ی A، B و C روی یک خط راست نباشد، زیرا اگر سه نقطه‌ی A، B و C روی یک خط راست قرار داشته باشد خط‌های d_1، d_2 و d_3 که به ترتیب عمودمنصف پاره خط‌های AB، BC و AC هستند. با هم موازی خواهند بود (شکل). چرا؟



راهنمایی. از هر نقطه یک و تنها یک خط موازی خط مفروض می‌توان رسم کرد.

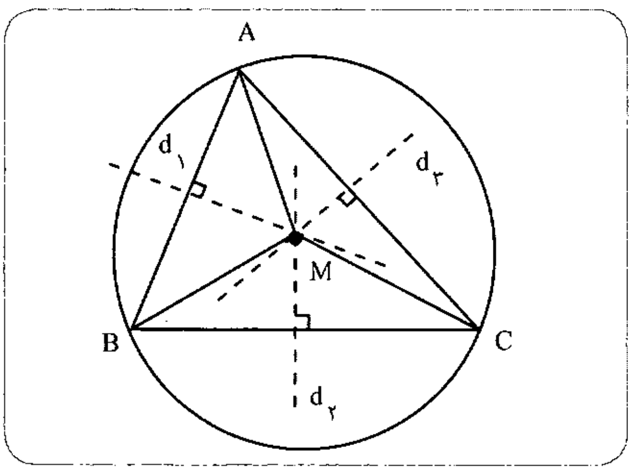
نکته‌ی ۲. هنگامی که سه نقطه‌ی A، B و C روی یک خط راست نباشد، خط‌های d_1، d_2 و d_3، یعنی همان عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های AB، BC و AC از یک نقطه می‌گذرند (همرس‌اند). بنابراین برای تعیین نقطه‌ی M، یعنی جواب مسئله، کافی است عمودمنصف دو تا از پاره‌خط‌های AB، BC و AC، یعنی دو خط از سه خط d_1، d_2 و d_3 را رسم کنیم تا نقطه‌ی برخورد آن‌ها M به دست آید. عمودمنصف پاره خط سوم نیز از این نقطه (M) خواهد گذشت.



نکته‌ی ۳. نقطه‌ی M که از سه نقطه‌ی غیرواقع بر یک خط راست A، B و C به یک فاصله است؛ یعنی برای آن نقطه داریم $MA = MB = MC$، مرکز دایره‌ای است که بر سه نقطه‌ی A، B و C می‌گذرد. این دایره را دایره‌ی محیطی مثلث ABC می‌نامند که دایره‌ای یکتاست، یعنی بر هر سه نقطه‌ی غیر هم‌خط A، B و C تنها و تنها یک دایره می‌گذرد که مرکز آن، محل برخورد عمودمنصف‌های ضلع‌های مثلث ABC است. وجود این نقطه را دیدیم؛ یکتایی آن را هم می‌توان به سادگی ثابت کرد. بدین ترتیب که فرض می‌کنیم نقطه‌ی دیگری مانند 'M وجود داشته باشد که از سه نقطه‌ی A، B و C به یک فاصله باشد؛ یعنی داشته باشیم $M'A = M'B = M'C$.

حال باید ثابت کنیم که این نقطه بر نقطه‌ی M منطبق است. از $M'A = M'B$ نتیجه می‌شود که نقطه‌ی 'M روی عمودمنصف پاره خط AB، یعنی روی خط d_1 است و از $M'B = M'C$ نتیجه می‌شود که نقطه‌ی 'M روی عمودمنصف پاره خط BC، یعنی روی خط d_2، است، پس 'M نقطه‌ی برخورد d_1 و d_2، یعنی همان نقطه‌ی M است. به بیان دیگر، 'M بر M منطبق است، پس M نقطه‌ای یکتاست.

نقطه‌ی M مرکز دایره‌ی محیطی مثلث را با حروف دیگر مانند



O، ... نیز نمایش می‌دهند.

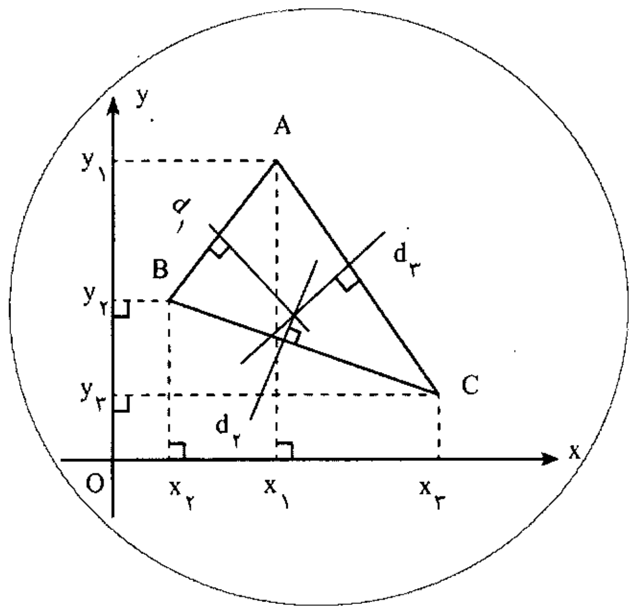
ب) اثبات با رویکرد جبری - مختصاتی

مسئله را بار دیگر بیان می‌کنیم:

سه نقطه‌ی A، B و C داده شده‌اند. نقطه‌ای در صفحه‌ی گذرنده بر این سه نقطه بیابید که از این سه نقطه به یک فاصله باشد. آیا این نقطه یکتاست؟

دستگاه مختصات قائم xoy را در صفحه‌ی گذرنده بر این سه نقطه در نظر می‌گیریم. اگر ویژگی خاصی را برای چگونگی در نظر گرفتن این دستگاه مختصات قائم در نظر نگیریم، مختصات نقطه‌های A، B و C در این دستگاه مختصات، به صورت کلی $A = (x_1, y_1)$، $B = (x_2, y_2)$ و $C = (x_3, y_3)$ خواهد بود. اکنون باید معادله‌ی

عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های AB، BC و AC را بنویسیم و در صورتی که سه نقطه‌ی A، B و C هم‌خط نباشند، ثابت کنیم که این سه عمودمنصف همرس‌اند. نوشتن معادله‌ی عمودمنصف‌ها و اثبات همرسی آن‌ها در این دستگاه مختصات طولانی و دشوار است، بنابراین دستگاه مختصات قائم را به گونه‌ای دیگر انتخاب می‌کنیم تا محاسبات ساده‌تر شود. برای این کار روش‌های مختلفی وجود دارد.



برای مثال می‌توانیم محور xها را روی خط BC و محور yها را روی ارتفاع AH (خطی که از A بر BC عمود می‌شود) اختیار کنیم. در این صورت نقطه‌ی H مبدأ مختصات خواهد شد؛ در این دستگاه مختصات، مختصات نقطه‌های A، B و C به صورت زیر خواهد بود:

$A = (۰, y_۱), B = (x_۲, ۰), C = (x_۳, ۰)$

اکنون عمودمنصف‌های ضلع‌های AB، BC و AC را که به ترتیب آن‌ها را $d_۱$، $d_۲$ و $d_۳$ می‌نامیم می‌نویسیم و نقطه‌ی برخورد آن‌هارا به دست می‌آوریم. داریم:

$$H' \text{ وسط پاره خط AB} \left| \begin{array}{l} x_{H'} = \dfrac{x_A + x_B}{۲} = \dfrac{۰ + x_۲}{۲} = \dfrac{x_۲}{۲} \\ y_{H'} = \dfrac{y_A + y_B}{۲} = \dfrac{y_۱ + ۰}{۲} = \dfrac{y_۱}{۲} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow H' = (\frac{x_۲}{۲}, \frac{y_۱}{۲}), m/AB = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{۰ - y_۱}{x_۲ - ۰}$$

$$= \frac{-y_۱}{x_۲} \Rightarrow m/d_۱ = \frac{x_۲}{y_۱}$$

$$\Rightarrow AH': y - \frac{y_۱}{۲} = \frac{x_۲}{y_۱}(x - \frac{x_۲}{۲}) \quad \Rightarrow d_۱: y = \frac{x_۲}{y_۱}x - \frac{x_۲^۲}{۲y_۱} + \frac{y_۱}{۲}$$

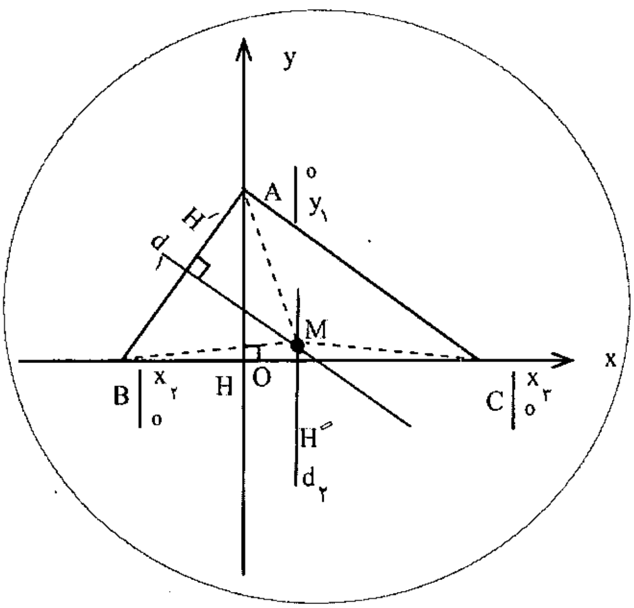
$$H'' = (\frac{x_۲ + x_۳}{۲}, ۰), \text{ وسط پاره خط BC}$$

$$m/AB = \frac{۰ - ۰}{x_۳ - x_۲} = ۰ \Rightarrow m/d_۲ \to \infty$$

$$\Rightarrow d_۲: x = \frac{x_۲ + x_۳}{۲}$$

$$\begin{cases} d_۱: & y = \dfrac{x_۲}{y_۱}x - \dfrac{x_۲^۲}{۲y_۱} + \dfrac{y_۱}{۲} \Rightarrow y = \dfrac{x_۲}{y_۱}(\dfrac{x_۲ + x_۳}{۲}) - \dfrac{x_۲^۲}{۲} + \dfrac{y_۱}{۲} \\ d_۲: & x = \dfrac{x_۲ + x_۳}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M = (\frac{x_۲ + x_۳}{۲}, \frac{x_۲^۲ + x_۲x_۳ - x_۲^۲y_۱ + y_۱^۲}{۲y_۱})$$



در صورتی که معادله‌ی عمودمنصف ضلع AC که آن را $d_۳$ می‌نامیم نیز بنویسیم، خواهیم دید که مختصات نقطه‌ی M در معادله‌ی $d_۳$ صدق می‌کند، یعنی عمودمنصف‌های سه ضلع AB، BC و AC از مثلث ABC از یک نقطه می‌گذرند که این نقطه همان مرکز دایره‌ی محیطی مثلث ABC است.

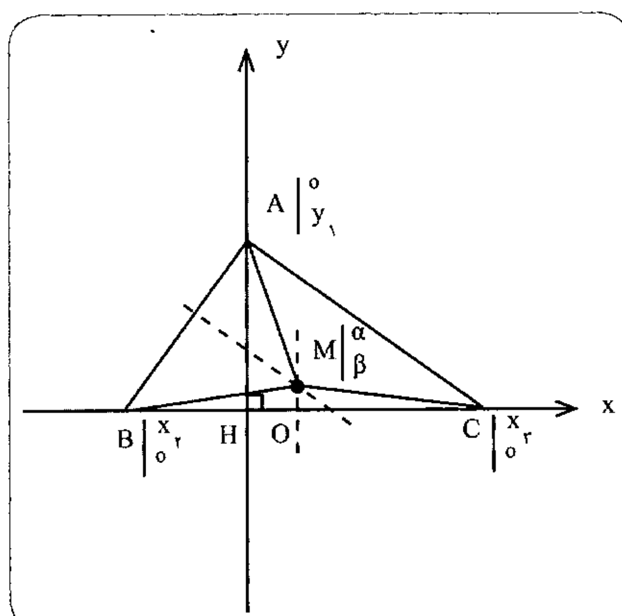
نکته‌ی مهم ۱. می‌توانیم دستگاه مختصات قائم xoy را چنان اختیار کنیم که محور xها روی خط BC و محور yها عمودمنصف پاره خط BC باشد. در این دستگاه مختصات $A = (x_۱, y_۱)$، $B = (x_۲, ۰)$ و $C = (-x_۲, ۰)$ خواهد بود. معادله‌ی عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های AB، BC و AC را مانند روش بالا می‌نویسیم و نقطه‌ی برخورد آن‌ها یعنی مختصات خط‌های M را به دست می‌آوریم. محاسبه را خودتان انجام دهید.

نکته‌ی مهم ۲. پس از انتخاب دستگاه مختصات قائم مناسب، همانند

روش هندسی می‌توانیم مسئله را حل شده فرض کنیم، یعنی فرض کنیم $M = (\alpha, \beta)$ نقطه‌ی جواب مسئله است، یعنی نقطه‌ای است که برای آن داریم $MA = MB = MC$. در این صورت ثابت می‌کنیم که این نقطه روی عمودمنصف‌های پاره خط‌های AB، BC و AC (ضلع‌های مثلث ABC) قرار دارد. برای این کار اگر BC محور xها، و ارتفاع AH محور yها اختیار شده باشند، یعنی $A = (\circ, y_1)$، $B = (x_2, \circ)$ و $C = (x_3, \circ)$ باشند، داریم:

$$MA = MB \Rightarrow MA^2 = MB^2$$
$$\Rightarrow (\circ - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2 = -(x_2 - \alpha)^2 + (\circ - \beta)^2$$
$$\Rightarrow \alpha^2 + y_1^2 + \beta^2 - 2\beta y_1 = x_2^2 + \alpha^2 - 2\alpha x_2 + \beta^2$$
$$\Rightarrow 2\alpha x_2 - 2\beta y_1 + y_1^2 - x_2^2 = \circ$$

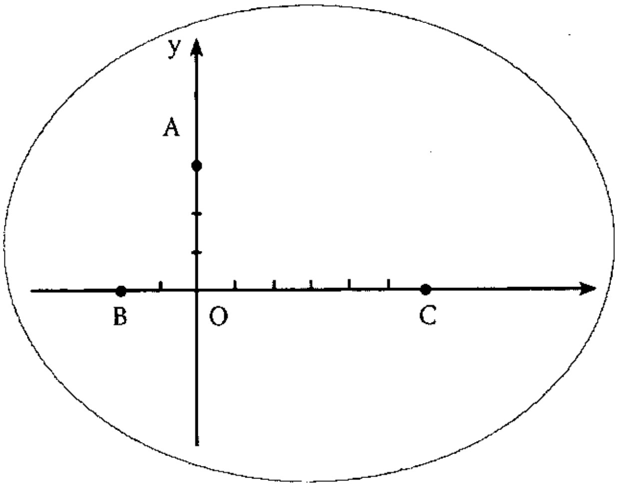
این معادله، معادله‌ی عمودمنصف پاره خط AB است $(\beta = y ، \alpha = x)$. به همین ترتیب از $MB = MC$ و جایگذاری برحسب مختصات نقطه‌ها معادله‌ی عمود منصف پاره خط BC به دست می‌آید. هم‌چنین معادله‌ی عمودمنصف پاره خط AC را از $MA = MC$ می‌توان به دست آورد. این سه عمودمنصف از یک نقطه می‌گذرند. از آن جا راه حل مسئله همانند روش جبری مشخص می‌شود، یعنی مشخص می‌شود که برای تعیین مختصات نقطه‌ی M کافی است معادله‌ی عمودمنصف‌های دو پاره خط از پاره‌خط‌های AB، BC و AC را بنویسیم و نقطه‌ی برخورد آن‌ها را به دست آوریم. (مختصات نقطه‌ی M جواب مسئله)



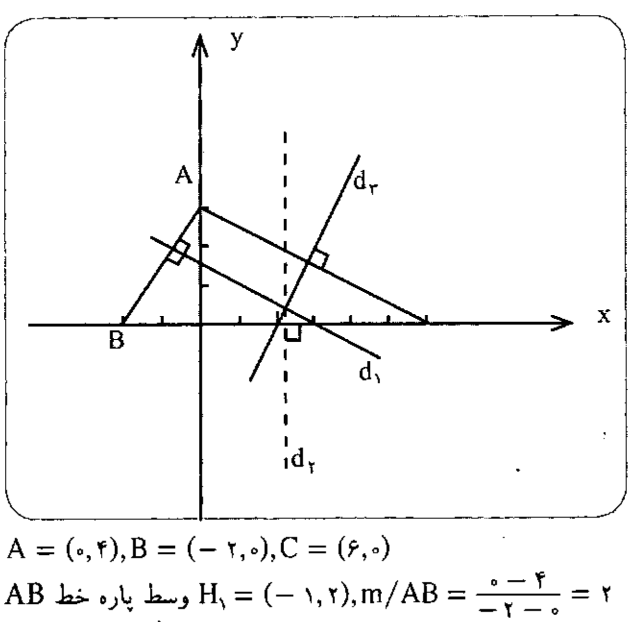
نکته‌ی مهم ۳. اگر سه نقطه‌ی A، B و C هم‌خط باشند به سادگی با نوشتن معادله‌ی عمودمنصف‌های پاره خط‌های AB، BC و AC دیده می‌شود که این سه عمودمنصف موازی‌اند.

اینک به چند مثال از رویکرد جبری مختصاتی توجه کنید.

مثال ۱: سه نقطه‌ی $A = (\circ, 4)$، $B = (-2, \circ)$ و $C = (6, \circ)$ در دستگاه مختصات قائم xoy داده شده‌اند. نقطه‌ی M را در این صفحه‌ی مختصات چنان بیابید که از سه نقطه‌ی A، B و C به یک فاصله باشند.



حل: سه نقطه‌ی A، B و C را دو به دو به هم وصل می‌کنیم. عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های AB، BC و AC را به ترتیب d_1، d_2 و d_3 می‌نامیم. می‌دانیم d_1 مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه‌ی مختصات است که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله و d_2 مکان هندسی نقطه‌ی از صفحه‌ی مختصات است که از B و C به یک فاصله است، هم‌چنین d_3 مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه‌ی مختصات است که از A و C به یک فاصله است. پس نقطه‌ی M محل برخورد این سه عمودمنصف است. که همرس‌اند، زیرا سه نقطه‌ی داده‌شده‌ی A، B و C هم‌خط نیستند (روی یک خط راست قرار ندارند). بنابراین معادله‌ی دو خط از سه خط d_1، d_2 و d_3 را می‌نویسیم و مختصات نقطه‌ی برخورد آن‌ها را که همان نقطه‌ی M است به دست می‌آوریم:



$A = (\circ, 4), B = (-2, \circ), C = (6, \circ)$

وسط پاره خط AB $H_1 = (-1, 2), m/AB = \frac{\circ - 4}{-2 - \circ} = 2$

$\Rightarrow m/d_1 = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow d_۱: y - ۲ = -\frac{۱}{۲}(x + ۱) \Rightarrow d_۱: y = -\frac{۱}{۲}x + \frac{۳}{۲}$

$H_۲ = (۲,۰), m/BC = ۰$ وسط پاره خط BC

$\Rightarrow m/d_۲ \to \infty \Rightarrow d_۲: x = ۲$

$$\begin{cases} d_۱: y = -\frac{۱}{۲}x + \frac{۳}{۲} \\ d_۲: x = ۲ \end{cases} \Rightarrow M = (۲, \frac{۱}{۲})$$ نقطه‌ی جواب مسئله

نکته‌ی ۱: اگر بخواهیم، می‌توانیم درستی جواب را با محاسبه‌ی اندازه‌ی پاره‌خط‌های MA، MB و MC امتحان کنیم.

$$MA = \sqrt{(۰-۲)^۲ + (۴-\frac{۱}{۲})^۲} = \frac{\sqrt{۶۵}}{۲}$$

$$MB = \sqrt{(-۲-۲)^۲ + (۰-\frac{۱}{۲})^۲} = \frac{\sqrt{۶۵}}{۲}$$

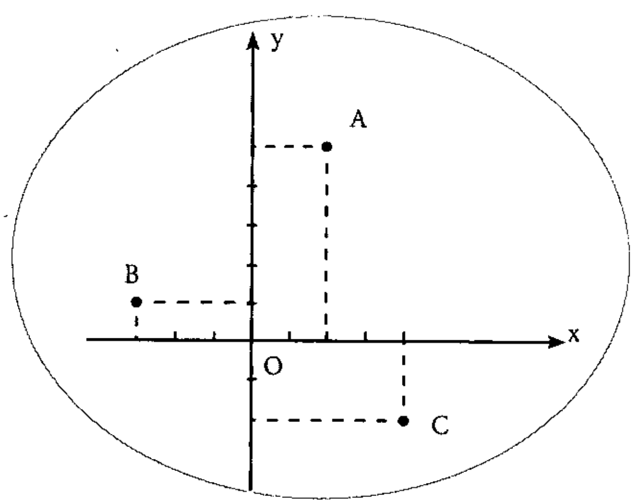
$$MC = \sqrt{(۶-۲)^۲ + (۰-\frac{۱}{۲})^۲} = \frac{\sqrt{۶۵}}{۲}$$

$$\Rightarrow MA = MB = MC = \frac{\sqrt{۶۵}}{۲}$$

پس محاسبه‌ها درست بوده است.

نکته‌ی ۲: مختصات نقطه‌های A، B و C نشان می‌دهند که پاره خط BC روی محور xها و رأس A روی محور yها که در این‌جا، ارتفاع نظیر رأس A است، قرار دارد. به همین علت محاسبه‌ها ساده‌تر از حالتی است که نقطه‌ها روی محورها نباشند.

مثال ۲: سه نقطه‌ی $A = (۲,۵)$، $B = (-۳,۱)$ و $C = (۴,-۲)$ در دستگاه مختصات قائم xoy داده شده‌اند. نقطه‌ی M را در صفحه‌ی این دستگاه مختصات چنان بیابید که از سه نقطه‌ی A، B و C به یک فاصله باشند.



حل: سه نقطه‌ی A، B و C را دو به دو به هم وصل می‌کنیم و عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های AB، BC و AC را به ترتیب $d_۱$، $d_۲$ و $d_۳$ می‌نامیم. می‌دانیم که نقطه‌ی جواب مسئله که آن را M می‌نامیم، محل برخورد یا نقطه‌ی همرسی این سه خط است، پس معادله‌ی دو خط از این سه خط را می‌نویسیم و مختصات نقطه‌ی M محل برخورد آن‌ها را به دست می‌آوریم. داریم:

$A = (۲,۵), B = (-۳,۱), C = (۴,-۲)$

$H' = (-\frac{۱}{۲}, ۳)$, وسط پاره خط AB

$$m/AB = \frac{۱-۵}{-۳-۲} = \frac{۴}{۵}$$

$$\Rightarrow m/d_۱ = -\frac{۵}{۴} \Rightarrow d_۱: y - ۳ = -\frac{۵}{۴}(x + \frac{۱}{۲})$$

$$\Rightarrow d_۱: y = -\frac{۵}{۴}x + \frac{۹۹}{۸}$$

$H'' = (\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۲})$, وسط پاره‌خط BC

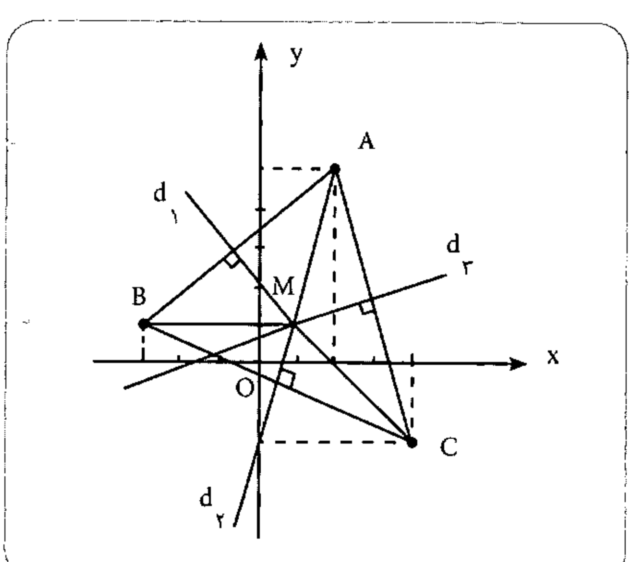
$$m/BC = \frac{-۲-۱}{۴+۳} = \frac{-۳}{۷} \Rightarrow m/d_۲ = \frac{۷}{۳}$$

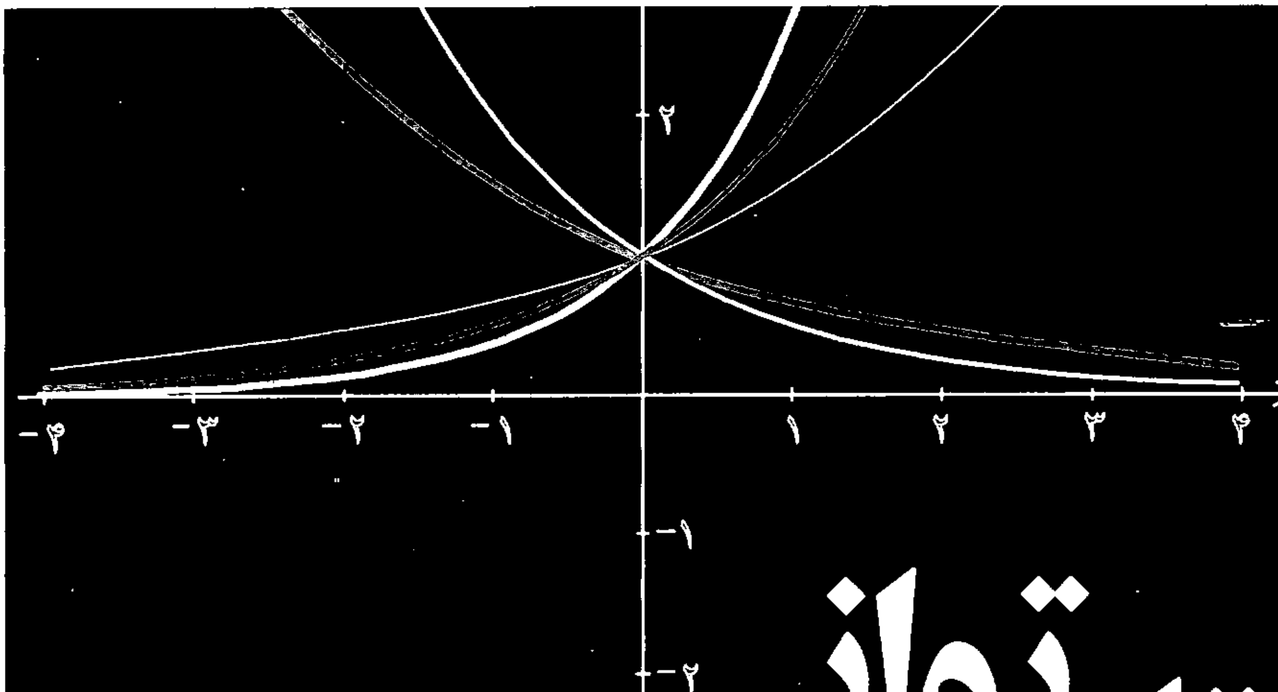
$$\Rightarrow d_۲: y + \frac{۱}{۲} = -\frac{۷}{۳}(x - \frac{۱}{۲}) \Rightarrow d_۲: y = \frac{۷}{۳}x - \frac{۵}{۳}$$

$$\begin{cases} d_۱: y = -\frac{۵}{۴}x + \frac{۱۹}{۸} \\ d_۲: y = \frac{۷}{۳}x - \frac{۵}{۳} \end{cases} \Rightarrow -\frac{۵}{۴}x + \frac{۱۹}{۸} = \frac{۷}{۳}x - \frac{۵}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{۴۳}{۱۲}x = \frac{۹۷}{۱۲} \Rightarrow x = \frac{۹۷}{۸۶} \Rightarrow y = \frac{۷}{۳} \times \frac{۹۷}{۸۶} - \frac{۵}{۳}$$

$$\Rightarrow y = \frac{۸۳}{۸۶} \Rightarrow M = (\frac{۹۷}{۸۶}, \frac{۸۳}{۸۶})$$





تابع توانی

میرشهرام صدر

(سال دوم متوسطه)

اشاره: در این مقاله ابتدا به معرفی توان حقیقی اعداد می‌پردازیم، سپس تابع توانی را معرفی می‌کنیم و رسم نموداری این تابع را با ضابطه‌های مختلف با حل چند مسئله توضیح خواهیم داد.

توان حقیقی

فرض کنیم a عددی حقیقی و مثبت و x یک عدد حقیقی دلخواه باشد. برای محاسبه‌ی a^x سه حالت در نظر می‌گیریم.

حالت اول: $x \in \mathbb{Z}$

در صورتی که x عددی صحیح و مثبت باشد، داریم:

$$a^x = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{x \text{ مرتبه}}$$

چنان‌چه $x = ۰$ داریم: $a^x = ۰$

و در حالتی که x عددی صحیح و منفی باشد، داریم:

$$x \in \mathbb{Z}^- \Rightarrow -x \in \mathbb{Z}^+$$

$$a^x = \frac{۱}{a^{-x}} = \underbrace{\frac{۱}{a} \times \frac{۱}{a} \times \ldots \times \frac{۱}{a}}_{-x \text{ مرتبه}}$$

برای مثال:

$$۲^{-۵} = \frac{۱}{۲^{-(-۵)}} = \frac{۱}{۲^۵} = \underbrace{\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \ldots \times \frac{۱}{۲}}_{-(-۵) \text{ مرتبه}}$$

حالت دوم: $x \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$

چنان‌چه x عددی گویا و ناصحیح باشد، در این صورت $x = \frac{m}{n}$ که در آن $n \neq ۰$ و $m,n \in \mathbb{Z}$ داریم:

$$a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad (\frac{m}{n} > ۰)$$

برای مثال:

$$۲^{\frac{۳}{۵}} = \sqrt[۵]{۲^۳} = \sqrt[۵]{۸}$$

$$۲^{-\frac{۳}{۵}} = \frac{۱}{۲^{\frac{۳}{۵}}} = \frac{۱}{\sqrt[۵]{۸}} \times \frac{\sqrt[۵]{۸^۴}}{\sqrt[۵]{۸^۴}} = \frac{\sqrt[۵]{۸^۴}}{۸}$$

حالت سوم: $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

حال به توان اصم اعداد می‌پردازیم. برای تعریف دقیق توان اصم اعداد، نیاز به ذکر مباحثی از دنباله‌ها و سایر مطالب ریاضی داریم که از ورود به آن پرهیز می‌کنیم. با این حال می‌کوشیم به قسمی این قبیل توان‌ها را معرفی کنیم. برای مثال، عددی به صورت $۳^{\sqrt{۲}}$ را در نظر می‌گیریم. این توان باید به گونه‌ای تعریف شود که در قوانین عمومی توان که قبلاً یادآوری کردیم، صدق کند. می‌دانیم $\sqrt{۲}$ تقریباً برابر ۱/۴۱۴۲۱۳۵۶۲ است. بنابراین $\sqrt{۲}$ بین ۱ و ۱/۵ است. پس $۳^{\sqrt{۲}}$ نیز باید بین $۳^۱$ و $۳^{۱/۵}$ باشد. بنابراین $۳^{\sqrt{۲}}$ عددی بین ۳ و ۵/۱۹۶۱۵ خواهد بود.

$$۳ < ۳^{\sqrt{۲}} < ۵/۱۹۶۱۵$$

اما فاصله از ۳ تا ۵/۱۹۶۱۵ خیلی زیاد است و باید با تقریب‌های

بهتری از $\sqrt{۲}$ این فاصله را کم‌تر کنیم. این بار $\sqrt{۲}$ را بین ۱/۴ و ۱/۴۲ مورد توجه قرار می‌دهیم. پس $۳^{\sqrt{۲}}$ نیز عددی بین $۳^{۱/۴}$ و $۳^{۱/۴۲}$ خواهد بود. با محاسبه‌ی این دو عدد با ماشین حساب، به تقریب بهتر زیر برای $۳^{\sqrt{۲}}$ می‌رسیم:

$$۳^{۱/۴۲} \cong ۴/۷۵۸۹ \qquad ۳^{۱/۴} = ۴/۶۵۵۵۳$$

بنابراین $۳^{\sqrt{۲}}$ عددی بین ۴/۶۵۵۵۳ و ۴/۷۵۸۹ است. فاصله‌ای که در این حالت به دست آوردیم، خیلی کوتاه‌تر از فاصله‌ی به دست آمده در حالت قبلی است. اگر بخواهیم این تقریب را بهتر کنیم و فاصله‌ای کوتاه‌تر به دست آوریم، باید از تقریب‌های بهتر $\sqrt{۲}$ استفاده کنیم. برای مثال:

$$۱/۴۱۴ < \sqrt{۲} < ۱/۴۱۴۳$$

در این حالت داریم:

$$۴/۷۲۷۶ \simeq ۳^{۱/۴۱۴} < ۳^{\sqrt{۲}} < ۳^{۱/۴۱۴۳} \simeq ۴/۷۲۹۲۵$$

در این تقریب دیده می‌شود که تا دو رقم اعشار، می‌توان $۳^{\sqrt{۲}}$ را برابر ۴/۷۲ در نظر گرفت. به هر حال از آن‌جا که بسط $\sqrt{۲}$ نامختوم است، می‌توانیم $\sqrt{۲}$ را بین دو عددی که خیلی به هم نزدیک باشند قرار دهیم و بدین ترتیب $۳^{\sqrt{۲}}$ را با تقریب بسیار خوبی محاسبه کنیم. اگر بتوانیم اختلاف دو عدد گویایی را که برای تقریب $\sqrt{۲}$ به کار می‌بریم، به ۰ نزدیک کنیم. مقادیر تقریبی برای $۳^{\sqrt{۲}}$ به حدی میل خواهد کرد که آن حد، مقدار $۳^{\sqrt{۲}}$ است.

گاه این سؤال مطرح می‌شود که $۳^{\sqrt{۲}}$ چه‌قدر است؟ این سؤال وارد نیست، زیرا $۳^{\sqrt{۲}}$ برای خود عددی است که به مقدار آن از طریق حد نزدیک می‌شویم. مقادیر تقریبی آن را نیز قبلاً به دست آوردیم. توان‌های اصم نیز در همان قوانین عمومی توان صدق می‌کنند. فقط به یاد داشته باشید برای آن‌که توانی به صورت a^x (x یک عدد اصم است) قابل تعریف باشد، لازم است $a > ۰$. پس a باید مثبت باشد، زیرا برای تعریف a^x باید a را به توان اعداد گویایی که به x نزدیک می‌شوند، برسانیم و چون ممکن است هر عدد گویایی به جای x قرار گیرد، باید a هم به گونه‌ای باشد که جمله‌ی بی‌معنا به دست نیاید. ساده‌ترین شرطی که می‌توان برای این منظور اعمال کرد، همان مثبت بودن a است.

تابع توانی

تعریف: عدد حقیقی و مثبت a (به طوری که $a \neq ۱$) را در نظر بگیرید. تابع با ضابطه‌ی زیر را تابع نمایی می‌گوییم.

$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \to (۰, \infty) \\ f(x) = a^x \quad (a > ۰, a \neq ۱) \end{cases}$$

مسئله‌ی ۱: در تابع نمایی فرض کنید $۰ < a < ۱$. در این صورت a بزرگ‌تر است یا $a^۲$؛ $a^۵$ بزرگ‌تر است یا $a^۶$؛ به طور کلی با بزرگ و بزرگ‌تر شدن x، مقدار $f(x) = a^x$ چه تغییری می‌کند؟

حل: هرگاه عددی بزرگ‌تر از ۱ باشد؛ مربعش از آن عدد بزرگ‌تر است، یعنی $x > ۱ \Rightarrow x^۲ > x$. بنابراین داریم:

$$۰ < a < ۱ \Rightarrow \frac{۱}{a} > ۱ \Rightarrow (\frac{۱}{a})^۲ > \frac{۱}{a} \Rightarrow \frac{۱}{a^۲} > \frac{۱}{a}$$
$$\Rightarrow a^۲ < a$$

$$۰ < a < ۱ \Rightarrow \frac{۱}{a} > ۱ \Rightarrow (\frac{۱}{a})^۶ > (\frac{۱}{a})^۵ \Rightarrow \frac{۱}{a^۶} > \frac{۱}{a^۵}$$
$$\Rightarrow a^۶ < a^۵$$

با بزرگ و بزرگ‌تر شدن مقدار x حاصل $f(x) = a^x$ کوچک و کوچک‌تر می‌شود، زیرا فرض کنیم m و n دو عدد طبیعی باشند به طوری که $n>m$؛ در این صورت داریم:

$$۰ < a < ۱ \Rightarrow \frac{۱}{a} > ۱ \Rightarrow (\frac{۱}{a})^n > (\frac{۱}{a})^m \Rightarrow \frac{۱}{a^n} > \frac{۱}{a^m}$$
$$\Rightarrow a^n < a^m$$

برای روشن‌تر شدن مطلب، فرض کنیم $۰ < a = \frac{۱}{۳} < ۱$. در این صورت با توجه به جدول زیر ملاحظه می‌کنید که با بزرگ‌تر شدن مقدار x، حاصل $f(x) = (\frac{۱}{۳})^x$ کوچک‌تر می‌شود.

$$f(-۱) = (\frac{۱}{۳})^{-۱} = (۳^{-۱})^{-۱} = ۳$$

$$f(-۲) = (\frac{۱}{۳})^{-۲} = (۳^{-۱})^{-۲} = ۳^۲ = ۹$$

$$f(-۳) = (\frac{۱}{۳})^{-۳} = (۳^{-۱})^{-۳} = ۳^۳ = ۲۷$$

x	...	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳	٤	...
$f(x) = (\frac{۱}{۳})^x$	...	۲۷	۹	۳	۱	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۹}$	$\frac{۱}{۲۷}$	$\frac{۱}{۸۱}$	...

هم‌چنین با دقت در این جدول ملاحظه می‌کنیم که هر چه مقدار x کوچک‌تر می‌شود، حاصل $f(x) = (\frac{۱}{۳})^x$ بزرگ‌تر خواهد شد.

مثال: نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = (\frac{۱}{۲})^x$ را رسم کنید.

حل: نمودار این تابع را به کمک نقطه‌یابی و با استفاده از جدول ذیل رسم می‌کنیم.

$$x = ۱ \Rightarrow f(۱) = (\frac{۱}{۲})^۱ = \frac{۱}{۲};$$

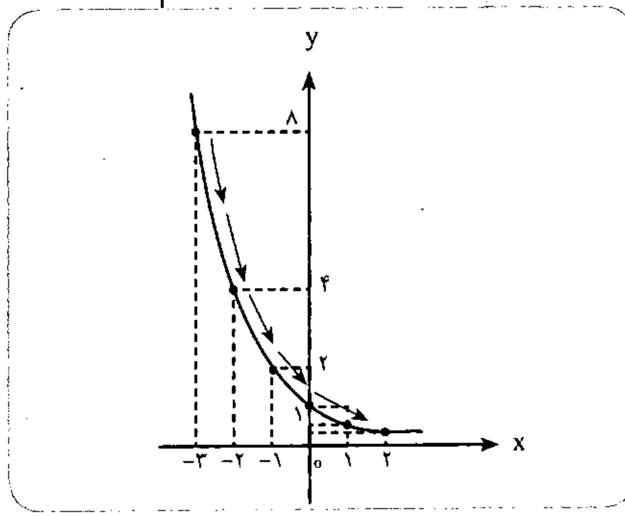
$$x = ۲ \Rightarrow f(۲) = (\frac{۱}{۲})^۲ = \frac{۱}{۴};$$

$$x = ۰ \Rightarrow f(۰) = (\frac{۱}{۲})^۰ = ۱;$$

$$x = -۲ \Rightarrow f(-۲) = (\frac{۱}{۲})^{-۲} = (۲^{-۱})^{-۲} = ۴;$$

$$x = -۳ \Rightarrow f(-۳) = (\frac{۱}{۲})^{-۳} = (۲^{-۱})^{-۳} = ۸$$

x	۳-	۲-	۱-	۰	۱	۲
$f(x) = (\frac{۱}{۲})^x$	۸	۴	۲	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$

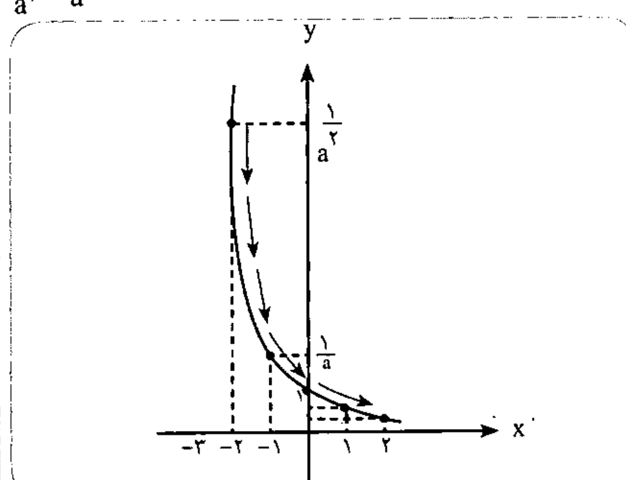


توجه: نمودار تابع $f(x) = a^x$ برای $۰ < a < ۱$ شبیه به نمودار تابع $y = (\frac{۱}{۲})^x$ است، زیرا در این تابع با افزایش x مقدار $f(x) = a^x$ کاهش می‌یابد.

	x	۲-	۱-	۰	۱	۲
$(۰ < a < ۱)$	$f(x) = a^x$	$\frac{۱}{a^۲}$	$\frac{۱}{a}$	۱	a	$a^۲$

چون $۰ < a < ۱$، پس طبق مسئله‌ی ۱ داریم:

$$\frac{۱}{a^۲} > \frac{۱}{a} > ۱ > a > a^۲$$



مسئله‌ی ۲: در تابع نمایی فرض کنید $a > ۱$، در این صورت a بزرگ‌تر است یا $a^۲$؛ $a^۵$ بزرگ‌تر است یا $a^۶$؛ به طور کلی با بزرگ و بزرگ‌تر شدن x، حاصل $f(x) = a^x$ چه تغییری می‌کند؟

حل: اگر دو طرف نابرابری $a>b$ را در عدد مثبت $c > ۰$ ضرب کنیم، داریم $ac>bc$. بنابراین خواهیم داشت:

$$a > ۱ \xrightarrow{(a > ۰)} a \times a > ۱ \times a \Rightarrow a^۲ > a$$

(می‌دانید که چرا $a > ۰$؟ زیرا $a > ۱$ و $۱ > ۰$ پس $a > ۰$)

اکنون اگر دو طرف رابطه‌ی $a^۲ > a$ را در $a^۴ > ۰$ ضرب کنیم، داریم:

$$a^۲ \times a^۴ > a \times a^۴ \Rightarrow a^۶ > a^۵$$

با بزرگ و بزرگ‌تر شدن مقدار x، حاصل $f(x) = a^x$ بزرگ و بزرگ‌تر می‌شود.

برای روشن‌تر شدن مطلب فرض کنیم $a = ۳ > ۱$، در این صورت با توجه به جدول زیر ملاحظه می‌کنیم که با بزرگ‌تر شدن مقدار x، حاصل $f(x) = ۳^x$ بزرگ‌تر می‌شود.

$$f(-۱) = ۳^{-۱} = \frac{۱}{۳}; f(-۲) = ۳^{-۲} = \frac{۱}{۳^۲} = \frac{۱}{۹};$$
$$f(-۳) = ۳^{-۳} = \frac{۱}{۳^۳} = \frac{۱}{۲۷}$$

x	۳-	۲-	۱-	۰	۱	۲
$f(x) = ۳^x$	$\frac{۱}{۲۷}$	$\frac{۱}{۹}$	$\frac{۱}{۳}$	۱	۳	۹

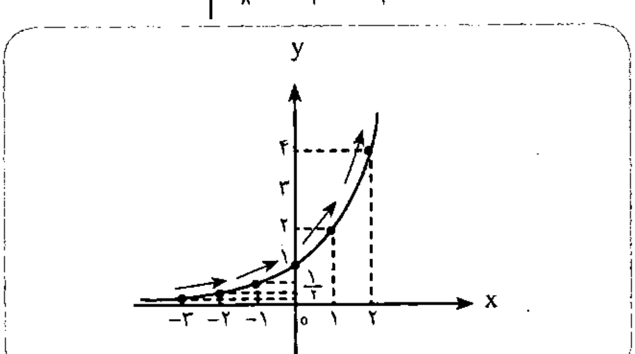
هم‌چنین با دقت در این جدول ملاحظه می‌کنیم که هر چه مقدار x کوچک‌تر شود، حاصل $f(x) = ۳^x$ کوچک‌تر خواهد شد.

مثال: نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = ۲^x$ را رسم کنید.

حل: نمودار تابع را با استفاده از نقطه‌یابی و به کمک جدول ذیل رسم می‌کنیم:

$$x = ۱ \Rightarrow f(۱) = ۲^۱ = ۲; x = ۲ \Rightarrow f(۲) = ۲^۲ = ۴;$$
$$x = ۰ \Rightarrow f(۰) = ۲^۰ = ۱; x = -۱ \Rightarrow f(-۱) = ۲^{-۱} = \frac{۱}{۲};$$
$$x = -۲ \Rightarrow f(-۲) = ۲^{-۲} = \frac{۱}{۲^۲} = \frac{۱}{۴};$$
$$x = -۳ \Rightarrow f(-۳) = ۲^{-۳} = \frac{۱}{۲^۳} = \frac{۱}{۸}$$

x	۳-	۲-	۱-	۰	۱	۲
$f(x) = ۲^x$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	۴

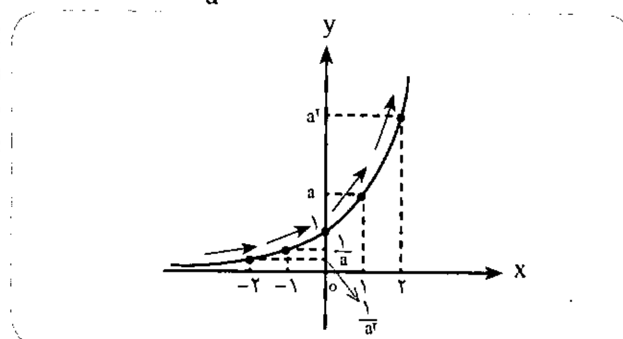


توجه: نمودار تابع $f(x) = a^x$ برای $a > 1$، شبیه به نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = 2^x$ است، زیرا در این تابع با افزایش x، مقدار $f(x) = a^x$ افزایش می‌یابد.

x	-2	-1	0	1	2
$(a>1)\ \ f(x) = a^x$	$\frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a}$	1	a	a^2

چون $a > 1$، پس طبق مسئله‌ی ۲ داریم:

$$a^2 > a > 1 > \frac{1}{a} > \frac{1}{a^2}$$



مسئله‌ی ۳: آیا تابع نمایی با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \mathbb{R} \to (0,\infty) \\ f(x) = a^x \end{cases}$ یک به یک و پوشاست.

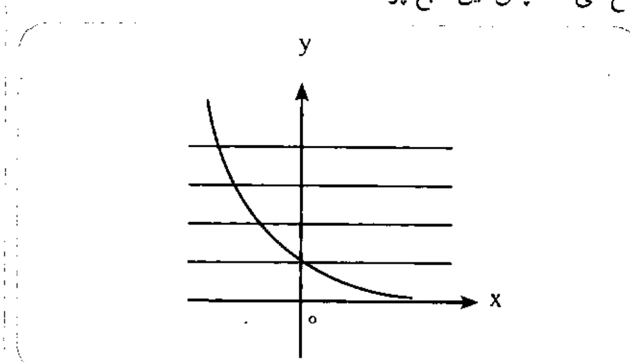
حل: مسئله را در دو حالت $0 < a < 1$، $a > 1$ بررسی می‌کنیم.

حالت اول) $0 < a < 1$، در این صورت با توجه به نمودار این تابع ملاحظه می‌کنیم که هر خط افقی نمودار تابع را در یک نقطه قطع می کند، پس تابع یک به یک است، از طرفی به کمک تعریف ریاضی تابع یک به یک داریم:

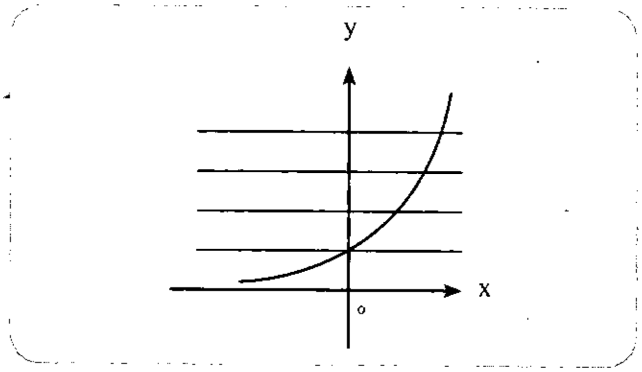
$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

در نتیجه $f(x) = a^x$ یک به یک است.

وقتی بازه‌ی $(0,\infty)$ را روی محور yها مشخص و از هر نقطه‌ی این بازه خطی موازی محور xها رسم کنیم، این خط نمودار تابع را قطع می‌کند. پس این تابع پوشاست.

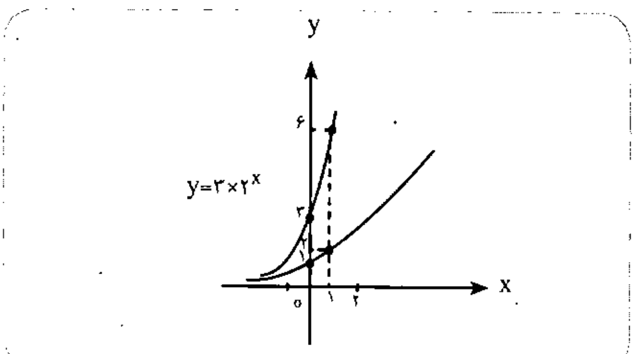


حالت دوم) $a > 1$، در این صورت با توجه به نمودار این تابع ملاحظه می‌کنیم که هر خط افقی نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند. پس تابع یک به یک است، هم‌چنین وقتی بازه‌ی $(0,\infty)$ را روی محور yها مشخص و از هر نقطه‌ی آن خطی موازی محور xها رسم کنیم، این خط نمودار تابع را قطع می‌کند، پس در این حالت نیز تابع پوشاست.



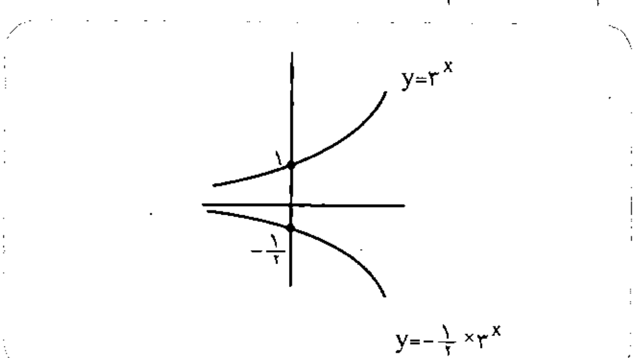
مسئله‌ی ۴: نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = 3 \times 2^x$ را رسم کنید.

حل: کافی است به ازای هر x مقدار 2^x را که روی منحنی $y = 2^x$ قرار دارد، در ۳ ضرب کنیم تا نقطه‌ی مربوط به همان x روی منحنی $y = 3 \times 2^x$ به دست آید.



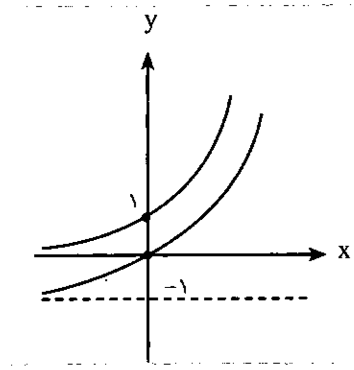
مسئله‌ی ۵: نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = \frac{-1}{2} \times 3^x$ را رسم کنید.

حل: کافی است نقاط روی نمودار $y = 3^x$ را در $\frac{-1}{2}$ ضرب کنیم. در نتیجه داریم:



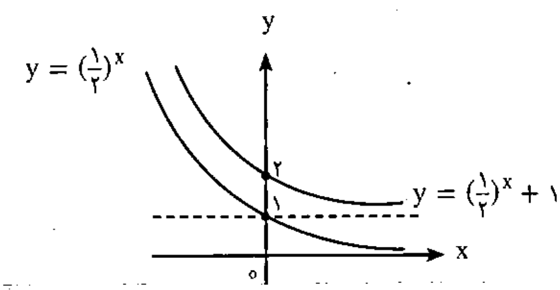
مسئله‌ی ۶: نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = 2^x - 1$ را رسم کنید.

حل: کافی است نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = 2^x$ را ۱ واحد در امتداد محور yها و به سمت پایین انتقال دهیم.



مسئله‌ی ۷: نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = (\frac{1}{2})^x + 1$ را رسم کنید.

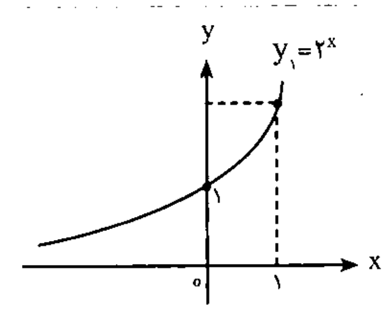
حل: کافی است نمودار تابع ضابطه‌ی $y = (\frac{1}{2})^x$ را در امتداد محور yها، ۱ واحد به سمت بالا انتقال دهیم.



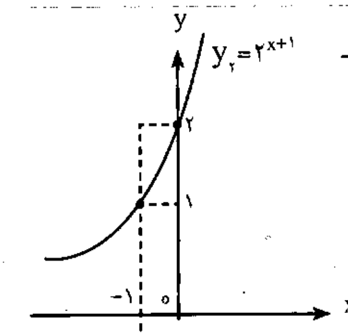
مسئله‌ی ۸: نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = \frac{1}{3}2^{x+1} - 1$ را رسم کنید.

حل: نمودارهای زیر مراحل شکل‌گیری نمودار تابع بالا را نشان می‌دهند.

مرحله‌ی اول

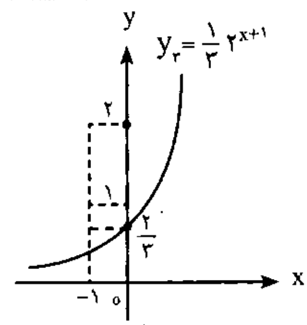


مرحله‌ی دوم

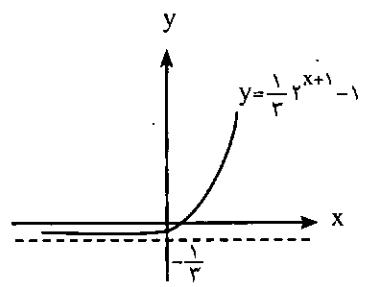


نمودار $y_1 = 2^x$ را در امتداد محور xها، ۱ واحد به سمت چپ انتقال دادیم.

مرحله‌ی سوم



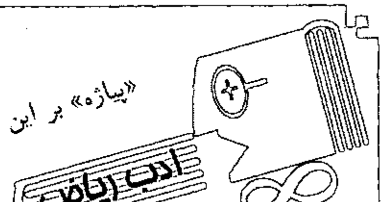
عرض هر نقطه‌ی نمودار $y_2 = 2^{x+1}$ را در $\frac{1}{3}$ ضرب کردیم.



نمودار y_3 را در امتداد محور yها، ۱ واحد به طرف پایین انتقال دادیم.

نتیجه: با ترکیب مطالبی که تا به حال خوانده‌ایم، می‌توانیم نمودار توابعی به صورت $y = a \times b^{x+c}$ را رسم کنیم. برای رسم نمودار این قبیل توابع کافی است ابتدا نمودار تابع $y = b^x$ را رسم کنیم، سپس با انتقال c- واحد در امتداد محور xها، نمودار تابع $y = b^{x+c}$ را به دست آوریم و سرانجام با ضرب عرض نقاط در مقدار a به نمودار $y = a \times b^{x+c}$ برسیم.

***



«پیاژه» بر این باور است که تصورها و اعمال منطقی ذهن و به‌طور کلی، هوش انسان، زاییده‌ی درونی‌شدن اعمال او است. به‌عقیده‌ی پیاژه، تشریح حقایق و مفاهیم ریاضی، به‌صورتی که در روش تدریس زبان معمول است، برای دانش‌آموز کافی نیست. برای آن‌که تصورهای حاصله، دقیق و مفاهیم مورد نظر روشن باشند، دانش‌آموز باید شخصاً به تجربه و آزمایش بپردازد و اشیا را از نزدیک دستکاری کند.

آشنایی با بسته‌ی نرم‌افزاری مَتِمَتیکا (۲)

Mathematica

دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی
عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه
آزاد اسلامی، واحد تهران مرکزی

کلید واژه‌ها: دستورالعمل‌های Simplify، Expand، Factor، Coefficient، Roots، Solve، List

مقدمه

در کتاب ریاضیات ۱، سال اول متوسطه دانش‌آموزان با اعمال ریاضی روی عبارت‌های جبری، ساده‌کردن عبارت‌ها و تجزیه‌کردن آن‌ها به حاصل‌ضرب عوامل اول و هم‌چنین اتحادهای جبری آشنا می‌شوند. این‌گونه عملیات که به صورت دستی انجام می‌شوند و در اکثر موارد نیاز به ابتکار عمل و تفکر زیادی دارند، در بسته‌ی نرم‌افزاری مَتمتیکا به سادگی انجام می‌گیرد. در این قسمت به معرفی دستورالعمل‌های اصلی در این بسته‌ی نرم‌افزاری که مربوط به محاسبات روی عبارت‌های جبری است، می‌پردازیم. مجدداً توصیه می‌شود خوانندگان گرامی هم‌زمان با مطالعه‌ی این سری از مقالات دستورالعمل‌های معرفی شده را روی رایانه‌ی خود در

محیط مَتمتیکا اجرا کنند تا بهتر با عملکرد این دستورها آشنا شوند. بیش‌تر مسائل داخل کتاب درسی را می‌توانید به عنوان تمرین با به‌کارگیری این دستورالعمل‌ها حل کنید و پاسخ نهایی را در اختیار داشته باشید.

در قسمت قبلی شما را با چند عمل مقدماتی و هم‌چنین محیط بسته‌ی نرم‌افزاری مَتمتیکا آشنا کردیم. در پنجره Basic Math Input که در صفحه‌ی اصلی متمتیکا قابل نمایش است، نمادهای بسیاری از اعمال مهم ریاضی از جمله توان‌رسانی، ریشه‌گیری، کسر و... مشخص شده‌اند. نمادهای دیگر این پنجره در قسمت‌های بعدی معرفی خواهند شد. یادآوری می‌شود که برای محاسبه‌ی هر سلول به‌طور هم‌زمان، باید دکمه‌های shift+Enter را فشار دهیم.

ابتدا چند دستورالعمل مقدماتی را معرفی می‌کنیم.

۱. دستور [عبارت] Simplify عبارت داخل کروشه را به ساده‌ترین صورت ممکن ساده می‌کند.

مثال:

$$\mathbf{Simplify}\left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3(1+x)}}-\frac{\mathbf{-1+2x}}{\mathbf{6(1-x+x^2)}}+\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3(1+\frac{1}{3}(-1+2x)^2}}\right]$$

$$\frac{1}{1+x^3}$$

$$\mathbf{Simplify[x^4+4x^3y-15y^3x-6x^3y+4xy^3+7x^4]}$$

$$8x^4+4xy^3-2x^3y-15xy^3$$

۲. دستور [فرض، عبارت] Simplify تحت فرض داده شده در داخل کروشه، عبارت موردنظر را ساده می‌کند.

مثال:

Simplify[Sqrt[x ^ 2], x > 0]

x

Simplify[Sqrt[x ^ 2], x < 0]

−x

۳. دستور [عبارت] Expand حاصل عبارت داخل کروشه را گسترش می‌دهد.

مثال:

Expand[(a + b) ^ 6]

$$a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^2+6ab^5+b^6$$

Expand[(1 + x + y)(2 - x) ^ 3]

$$8-4x-6x^2+5x^3-x^4+8y-12xy+6x^2y-x^3y$$

$$\mathbf{Expand[(1+\sqrt{x})\wedge 6]}$$

$$1+6\sqrt{x}+15x+20x^{3/2}+15x^2+6x^{5/2}+x^3$$

توجه شود که علامت «^» به معنای توان‌رسانی است و (a+b)^6 همان $(a+b)^6$ است.

۴. دستور [عبارت] Factor عبارت داخل کروشه را به شکل حاصل‌ضربی از عوامل اول تجزیه می‌کند. در این حالت اگر عبارت داخل کروشه تجزیه‌ناپذیر باشد، خود عبارت در خروجی مشخص می‌شود.

مثال:

Factor[x ^ 5 - y ^ 5]

$$(x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)$$

Factor[Power[a,4] + Power[b,4]]

$$a^4+b^4$$

Factor[2x ^ 6 - 8y ^ 10]

$$2(x^3-2y^5)(x^3+2y^5)$$

$$\mathbf{Factor[x^2+xy-6y^2+x+13y-6]}$$

$$-6+x+x^2+xy+13y-6y^2$$

۵. دستور [جمله، عبارت] Coefficient ضریب جمله‌ی بیان‌شده‌ی داخل کروشه را در عبارت مفروض مشخص می‌کند. هم‌چنین دستور [n جمله، عبارت] Coefficient ضریب $(\text{جمله})^n$ را در عبارت داخل کروشه مشخص می‌کند.

مثال: فرض کنید می‌خواهیم ضریب x^2y^4 را در عبارت $(2x+3y)^6$ بدانیم. برای این‌کار از دستور فوق به صورت زیر استفاده می‌کنیم و با اجرای آن ضریب این جمله را به دست می‌آوریم:

Coefficient[(2x + 3y) ^ 6, x ^ 2y ^ 4]

4860

حال فرض کنید می‌خواهیم ضریب جمله‌ی a^3 را در عبارت $(a-2)^{10}$ بدانیم. در این حالت به صورت زیر از دستور فوق استفاده می‌کنیم:

Coefficient[(a - 2) ^ 10, a, 3]

-15360

با استفاده از این دستور می‌توانید هر یک از ضرایب بسط دو جمله‌ای نیوتن به صورت کلی $(a+b)^n$ را به دست آورید. مجدداً یادآوری می‌شود برای به‌کارگیری عمل توان‌رسانی هم می‌توانید از پنجره‌ی Basic Math Input و نماد $\blacksquare^{\square}$ استفاده کنید و هم

می‌توانید از نماد «^» یا دستورالعمل Power که قبلاً معرفی شد، بهره گیرید.

۶. دستور [جمله، عبارت] Exponent توان جمله‌ی مذکور در داخل کروشه را در عبارت مفروض بیان می‌کند.

مثال:

$$\textbf{Exponent}[(1+x^{\wedge}2)^3 - (y+x^{\wedge}2+ax^{\wedge}3)^{\wedge}2, x]$$

$$6$$

$$\textbf{Exponent}[6a^3 - 24ab^2 - 4a^2b + 5b^3, ab^2]$$

$$1$$

۷. دستور [متغیر و عبارت] Collect
جملاتی را که در عبارت داده شده دارای توان یکسانی نسبت به متغیر مفروض هستند، دسته‌بندی می‌کند.

مثال:

$$\textbf{Collect}[ax+by+cx, x]$$

$$(a+c)x+by$$

$$\textbf{Collect}[(1+a+x)^{\wedge}4, x]$$

$$1+4a+6a^2+4a^3+a^4+(4+12a+12a^2+4a^3)x$$
$$+(6+12a+6a^2)x^2+(4+4a)x^3+x^4$$

۸ دستور [عبارت] Together عبارت داخل کروشه را به شکل یک کسر نمایش می‌دهد.

مثال:

$$\textbf{Together}[\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^2-1}]$$

$$\frac{1}{-1+x}$$

مثال: برای نمایش عبارت $\frac{x^2}{x^2-1}+\frac{x}{x^2-1}$ به شکل یک کسر به صورت زیر از این دستور استفاده می‌شود. این دستور نتیجه را به صورت یک کسر ساده شده اعلام می‌کند. توجه کنید که می‌توان برای ورود کسرها هم از نماد/ و هم از نماد $\frac{\blacksquare}{\square}$ در پنجره‌ی Basic Math Input استفاده کرد.

$$\textbf{Together}[x^{\wedge}2/(x^{\wedge}2-1)+x/(x^{\wedge}2-1)]$$

$$\frac{x}{-1+x}$$

هم‌چنین به مثال‌های زیر نیز توجه کنید:

$$\textbf{Together}[\frac{x^3-2x^2}{x^2-25}\times\frac{5x+10}{x^2-2x}]$$

$$\frac{5x(2+x)}{-25+x^2}$$

$$\textbf{Together}[\frac{4}{x^2+x}+\frac{1}{x^2+3x+2}]$$

$$\frac{8+5x}{x(1+x)(2+x)}$$

۹. دستور [عبارت] Apart، عبارت داخل کروشه را به شکل مجموعی از کسرهای جزئی تجزیه می‌کند.

$$\textbf{Apart}[1/((1+x)(5+x))]$$

$$\frac{1}{4(1+x)}-\frac{1}{4(5+x)}$$

$$\textbf{Apart}[\frac{x}{x^3-1}]$$

$$\frac{1}{3(-1+x)}+\frac{1-x}{3(1+x+x^2)}$$

۱۰. دستور [عبارت] Cancel عوامل مشترک در صورت و مخرج عبارت داخل کروشه را حذف می‌کند.

مثال:

$$\textbf{Cancel}[\frac{x^2-5x+6}{5x-10}]$$

$$\frac{1}{5}(-3+x)$$

البته از دستور Simplify نیز می‌توان استفاده کرد.

مثال:

$$\textbf{Cancel}[\frac{x^2+5x+6}{x^2+3x+2}]$$

$$\frac{3+x}{1+x}$$

در ادامه، چند دستورالعمل تکمیلی دیگر را معرفی می‌کنیم:
به منظور ورود یک عبارت برای استفاده از هر کدام از دستورالعمل‌های فوق به جای تایپ عبارت در داخل کروشه، می‌توان نامی برای عبارت در نظر گرفت و سپس با استفاده از این نام در داخل کروشه به جای کل عبارت فقط نام آن را تایپ کرد. در این حالت، باید بعد از تایپ عبارت علامت ; را تایپ کرد.

مثال:

$$\mathbf{p = x^8 - 41x^4 + 400;}$$

$$\textbf{Factor}[p]$$

$$(-2+x)(2+x)(-5+x^2)(4+x^2)(5+x^2)$$

در مثال زیر یک چندجمله‌ای با دو متغیر به نام poly معرفی شده و با استفاده از دستور Collect یک بار نسبت به متغیر x و یک بار نسبت به متغیر y دسته‌بندی شده است.

$$poly = 1+2x+3y+4xy+5x^2y+6xy^2+7x^2y^2;$$

$$\textbf{Collect}[poly, x]$$

$$1+3y+x(2+4y+6y^2)+x^2(5y+7y^2)$$

Collect[poly,y]

$1+2x+(3+4x+5x^2)y+(6x+7x^2)y^2$

۱۱. دستورالعمل‌های Polynomial GCD [P1, P2, ...] و Polynomial LCM [P1, P2, ...] به ترتیب بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک عبارت‌های داخل کروشه را مشخص می‌کنند. توجه شود هنگام استفاده از این دستورها حروفی که به صورت بزرگ در دستور آمده‌اند به همین شکل تایپ شوند.

مثال:

PolynomialGCD[x ^ 2 - 1, x ^ 3 - 1, x ^ 2 + x - 2]

$-1+x$

در مثال زیر، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عبارت $(x-y)^3(x+y)$ و $(x^2-y^2)^2(3x^2)$ به دست آمده‌اند.

PolinomialGCD[(x - y) ^ 3(x + y), (x ^ 2 - y ^ 2) ^ 2(3x ^ 2)]

$(-x+y)^2(x+y)$

PolynomialLCM[(x - y) ^ 3(x + y), (x ^ 2 - y ^ 2) ^ 2(3x ^ 2)]

$3x^2(x-y)^3(x+y)^2$

در دو مثال زیر ابتدا دو چندجمله‌ای p و q معرفی و سپس بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک آن‌ها با به‌کارگیری دو دستور فوق محاسبه شده‌اند.

$\mathbf{p = 2x^4 - 15x^3 + 39x^2 - 40x + 12;}$

$\mathbf{q = 4x^4 - 24x^3 + 45x^2 - 29x + 6;}$

a = PolinomialGCD[p,q]

$-6+17x-11x^2+2x^3$

b = PolynomialLCM[p,q]

$(-2+x)(6-29x+45x^2-24x^3+4x^4)$

$\mathbf{p = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3;}$

$\mathbf{q = (x-1)^2(x-2)(x-3)^4;}$

PolynomialGCD[p,q]

$(-3+x)^3(-2+x)(-1+x)$

PolynomialLCM[p,q]

$(-3+x)^4(-2+x)^2(-1+x)^2$

۱۲. دستور [متغیر و عبارت] CoefficientList فهرستی از تمام ضرایب توان‌های متغیر مفروض را در عبارت داخل کروشه مشخص می‌کند.

مثال:

CoefficientList[(x + 1)^{10}, x]

{1,10,45,120,210,252,210,120,45,10,1}

۱۳. دستور [متغیر و معادله] Roots ریشه‌های معادله‌ی مفروض را نسبت به متغیر مربوط مشخص می‌کند. در این حالت باید هنگام ورود معادله از دو تساوی متوالی استفاده کرد. برای مثال:

$x^۲+x-۱==۰$

در خروجی، کلیه ریشه‌های معادله برای متغیر x مشخص و بین ریشه‌ها علامت || درج می‌شود.

مثال:

Roots[x^2 + x - 1 == 0, x]

$x == \frac{1}{2}(-1-\sqrt{5}) \,||\, x == \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$

Roots[x ^ 3 - x ^ 2 - x + 1 == 0, x]

$x == -1 \,||\, x == 1 \,||\, x == 1$

Roots[(x^2 - 5)(x + 2)^3 == 0, x]

$x == -2 \,||\, x == -2 \,||\, x == -2 \,||\, x == \sqrt{5} \,||\, x == -\sqrt{5}$

Roots[x^4 + x^3 - 8x^2 - 5x + 15 == 0, x]

$x == \frac{1}{2}(-1-\sqrt{13}) \,||\, x == \frac{1}{2}(-1+\sqrt{13}) \,||\, x == \sqrt{5} \,||\, x == -\sqrt{5}$

۱۴. دستور [متغیر، معادله] Solve، معادله‌ی داخل کروشه را نسبت به متغیر مفروض حل می‌کند. اگر معادله برحسب x و حاصل a باشد، خروجی به صورت {{x → a}} مشخص می‌شود. توجه شود مشابه دستور قبلی باید برای ورود معادله به جای = از == استفاده کرد. اگر معادله فقط دارای یک متغیر باشد نیازی به معرفی متغیر نیست، ولی اگر در معادله بیش از یک متغیر وجود داشته باشد، لازم است که نام متغیر مشخص شود.

Solve[4x + 5 == -6x + 7]

$\{\{x \to \frac{1}{5}\}\}$

Solve[2xy == 3a + y, a]

$\{\{a \to \frac{1}{3}(2xy - y)\}\}$

از دستور Solve برای حل دستگاه معادلات هم می‌توان استفاده کرد. به مثال‌های زیر توجه کنید:

مثال: می‌خواهیم دستگاه دو معادله دو مجهولی $\begin{cases} \mathbf{2x - 3y = 4} \\ \mathbf{-x + y = 5} \end{cases}$ را حل کنیم. برای این کار معادلات را داخل کروشه تایپ و بین آن‌ها علامت && را قرار می‌دهیم. پس از اجرا، جواب‌های دستگاه مشخص می‌شوند.

Solve[2x - 3y == 4 && -x + y == 5]

$\{\{x \to -19, y \to -14\}\}$

مثال: می‌خواهیم دستگاه سه معادله سه مجهولی ذیل را حل کنیم:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x + 4y - 3z = -1 \\ 7x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

با استفاده از دستور Solve، درون کروشه هر سه معادله را تایپ و بین آن‌ها علامت && را قرار می‌دهیم. پس از اجرا جواب‌های دستگاه به دست می‌آیند:

Solve[2x + y - z == 3 && x + 4y - 3z == -1 && 7x - 2y - z == 0]

$$\{\{x \to \frac{33}{10}, y \to \frac{13}{2}, z \to \frac{101}{10}\}\}$$

۱۵. دستورالعمل‌های PolynomialQuotient[P,S,x] و PolynomialRemainder[P,S,x] به ترتیب خارج‌قسمت و باقی‌مانده‌ی تقسیم چند جمله‌ای P را بر چند جمله‌ای S نسبت به متغیر x مشخص می‌کنند.

مثال: می‌خواهیم خارج‌قسمت و باقی‌مانده‌ی تقسیم $P = x^۵ - ۷x^۴ + ۳x^۲ - ۵x + ۹$ را بر $S = x^۲ + ۱$ به دست آوریم. با تایپ‌کردن این دو چندجمله‌ای و به‌کارگیری دو دستور فوق، نتیجه به صورت زیر حاصل می‌شود. توجه کنید که باید بعد از معرفی هر چندجمله‌ای نماد ; را تایپ کنید.

p = x^5 - 7x^4 + 3x^2 - 5x + 9;
s = x^2 + 1;
q = PolynomialQuotient[p,s,x]
$10 - x - 7x^2 + x^3$
r = PolynomialRemainder[p,s,x]
$-1 - 4x$

۱۶. دستور [عناصر] List فهرستی از اشیا را نمایش می‌دهد که می‌توان شامل اعداد یا حروف باشد. مزیت این دستور آن است که هر نوع عمل ریاضی را به راحتی می‌توان روی آن انجام داد. برای مثال، دستور $\frac{1}{\text{List}}$ تمام عناصر موجود در داخل کروشه را معکوس می‌کند یا دستور $\sqrt{\text{List}}$ جذر تمام عناصر موجود در List را می‌گیرد. هم‌چنین می‌توان بین دو فهرست یک عمل حسابی چون جمع را نیز انجام داد. در این حالت عناصر دو فهرست نظیر به نظیر با هم جمع می‌شوند.

مثال:

List = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}
{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}
1 / List
$$\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}\}$$
List²
{1,4,9,16,25,36,49,64,81,100}
√List
$$\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{9}, \sqrt{10}\}$$
List1 = {1,2,3,4,5};
List2 = {2,3,2,3,2};
List1 + List2
{3,5,5,7,7}

در قسمت بعد به معرفی توابع اصلی در مَتمتیکا و رسم نمودار توابع می‌پردازیم.

تمرین

پاسخ تمرینات زیر را در محیط بسته‌ی نرم‌افزاری مَتمتیکا به دست آورید:

۱. سه عبارت $p = \frac{۲x + ۳}{۵x - ۷}$، $q = \frac{۷x - ۲}{۳x + ۱}$ و $r = \frac{x^۲}{x^۲ + ۱}$ را با هم جمع و نتیجه را در یک کسر بیان کنید.

۲. حاصل $(x + y + z)^۳$ را به دست آورید.

۳. بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک عبارت‌های زیر را به دست آورید:
$a^۳ - b^۳ \;,\; (a - b)^۳ \;,\; (a^۲ - b^۲)(a + b)$

۴. ریشه‌های معادله‌ی $x^۵ - ۴x^۳ + x^۲ - ۴ = ۰$ را بیابید. هم‌چنین عبارت $p = x^۵ - ۴x^۳ + x^۲ - ۴$ را به صورت حاصل‌ضرب عوامل اول بنویسید.

۵. فهرست $\text{List} = \{۱, ۲, ۳, ..., ۱۰\}$ مفروض است حاصل $\text{List}^۳ + ۲^{\text{List}}$ را به دست آورید.

۶. مقدار تقریبی عدد پی را تا ۱۵ رقم اعشار بیابید.

پی‌نوشت

1. Mathematica

منابع

۱. کتاب درسی ریاضیات ۱ سال اول متوسطه، ۱۳۸۹

2. Mathematica, second edition, Eugene Don, ph.D., Schaum's Outline Series, McGrowHill, 2009

ماتریس مجاورت گراف‌های ساده

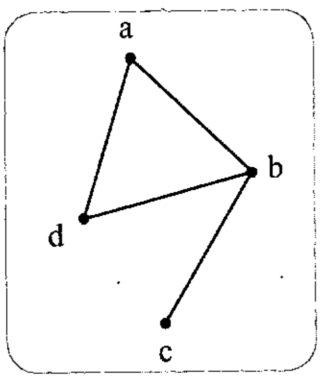
حمیدرضا امیری

اگر G گرافی ساده با مجموعه‌ی رئوس زیر باشد:

$$V = \{V_1, V_2, \cdots, V_i, \cdots, V_j, \cdots, V_P\}$$

ماتریس مربعی M از مرتبه‌ی P را طوری تعریف کنیم که هر سطر آن متناظر با یک رأس G و نیز هر ستون آن متناظر با یک رأس G (سطر iام و ستون iام متناظر با رأس V_i) تعریف شود و درایه‌ی m_{ij} را ۱ در نظر بگیریم هرگاه دو رأس V_i و V_j مجاور باشند و صفر در نظر بگیریم هرگاه این دو رأس مجاور نباشند، در این صورت ماتریس M ماتریس مجاورت گراف G نامیده می‌شود.

مثال: ماتریس مجاورت گراف ساده‌ی زیر را تعریف کنید.



$$M = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

ویژگی‌های ماتریس مجاورت گراف‌های ساده

۱. ماتریس مجاورت هر گراف ساده‌ی ماتریسی متقارن است (درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی، نسبت به قطر قرینه‌اند).

۲. تمام درایه‌های روی قطر اصلیِ هر ماتریس مجاورت صفر می‌باشند.

۳. تعداد یک‌های موجود روی هر سطر (یا ستون) با درجه‌ی رأس متناظر با آن سطر (یا ستون) برابر است.

۴. تعداد کل یک‌های موجود در ماتریس مجاورت گراف ساده‌ی G برابر است با مجموع درجات رئوس گراف G و برابر است با ۲q.

۵. اگر گراف G رأس ایزوله داشته باشد به‌ازای آن رأس ایزوله، یک سطر و ستون نظیر آن صفر است.

۶. اگر ماتریس M متناظر با گراف کامل K_p باشد تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی M یک می‌باشند.

۷. تعداد یک‌های واقع بر ماتریس مجاورت متناظر با گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q، برابر است با ۲q و تعداد صفرهای آن (p^2-2q) است.

۸. تعداد صفرهای ماتریس مجاورت M متناظر با درخت T از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q، برابر است با (q^2+1).

ویژگی‌های مربع ماتریس‌های مجاورت

اگر M ماتریس مجاورت متناظر با گراف ساده‌ی G باشد و $M \times M = M^2$ مربع این ماتریس، در این صورت داریم:

۱. هر درایه‌ی واقع بر قطر اصلی M^2 با درجه‌ی رأس متناظر با سطر (یا ستون) آن درایه برابر است.

۲. مجموع درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس M^2 همان مجموع درجات رئوس G بوده و برابر است با ۲q.

۳. اگر m_{ij}^2 درایه‌ی غیرواقع بر قطر اصلی ماتریس M^2 باشد $(i \neq j)$ در این صورت m_{ij}^2 برابر است با تعداد مسیرهای به‌طول ۲ از رأس V_i به رأس V_j.

۴. اگر $G=K_p$ در این صورت هر درایه‌ی روی قطر اصلی M^2، برابر است با $(P-1)$ و هر درایه‌ی غیرواقع بر قطر اصلی M^2، برابر است با $(P-2)$.

۵. اگر $G=K_p$ در این صورت مجموع درایه‌های ماتریس M^2، برابر است با $p(p-1)^2$.

آزمون ۱. اگر M ماتریس مجاورت درخت T_p بوده و مجموع درایه‌های روی قطر اصلی M^2 برابر با ۱۸ باشد ماتریس M چند درایه‌ی صفر دارد؟

۱) ۵۰ ۲) ۳۷

۳) ۶۵ ۴) ۸۲

حل: گزینه‌ی (۴) زیرا،

$82 = q^2 + 1 =$ تعداد صفرهای $M \Rightarrow q = 9 \Rightarrow 18 = 2q$

آزمون ۲. کدام نمی‌تواند قطر اصلی مربع ماتریس مجاورت گراف ساده‌ی G باشد؟

۱) $\begin{bmatrix} 3 & & & \\ & 3 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 3 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 3 & & & \\ & 3 & & \\ & & 2 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$

حل: گزینه‌ی (۴) زیرا، درایه‌های قطر اصلی M^2 همان درجات رئوس ماتریس G می‌باشند و دنباله‌ی $S: 3,3,2,1$ گرافیکال نیست. (دو رأس ماکزیمم دارد و حداقل درجه‌ی هر رأس باید ۲ باشد).

مثال ۱: اگر M ماتریس مجاورت گراف کامل K_p باشد و درایه‌ی واقع بر سطر دوم و ستون سوم ماتریس M^2، برابر با ۵ باشد مطلوب است:

الف) تعداد یال‌های این گراف

ب) مجموع درایه‌های ماتریس M^2

حل: چون ۵ درایه‌ی غیرواقع بر قطر اصلی است پس باید $p-2=5$ یا $p=7$ و داریم:

الف) $q = \dfrac{p(p-1)}{2} = 21$

ب) M^2 مجموع درایه‌های $= p(p-1)^2 = 7 \times 6^2 = 252$

آزمون ۳. اگر ماتریس M دارای ۶ سطر و ۱۱ درایه‌ی صفر باشد در این صورت مقدار Δ (ماکزیمم درجه‌ی گراف) کدام عدد می‌تواند باشد.

۱) ۶ ۲) ۵

۳) ۴ ۴) ۳

حل: گزینه‌ی (۲) زیرا، از ۱۱ درایه‌ی صفر، ۶ درایه روی قطر اصلی قرار دارد، حال اگر ۵ صفر باقی‌مانده را بخواهیم روی ۶ سطر ماتریس M قرار دهیم به حداقل یکی از سطرها صفری تعلق نمی‌گیرد و آن سطر دارای ۵ درایه‌ی یک بوده و بنابراین $\Delta = 5$ خواهد شد.

آزمون ۴. اگر M ماتریس مجاورت درخت T_p باشد، حداکثر مقدار برای هر درایه‌ی غیرواقع بر قطر اصلی M^2 کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) صفر ۴) حداقل ۲

حل: گزینه‌ی (۱) زیرا، تعداد مسیرهای از هر رأس به هر رأس در یک درخت ۱ است و چون تعداد مسیرهای به طول ۲ از رأس V_i به رأس V_j $(i \neq j)$ ۱ می‌باشد، طبق نکته‌ی ذکر شده در ویژگی‌های ماتریس M^2 حداکثر مقدار برای این درایه‌ها ۱ می‌باشد.

آزمون ۵: اگر $M = \begin{bmatrix} x & z & y & t \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ y & 1 & 0 & 1 \\ u & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ماتریس مجاورت گراف همیلتنی G باشد حاصل $(x+y+z+t+u)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳

۳) ۲ ۴) ۵

حل: گزینه‌ی (۲) زیرا با توجه به این‌که درایه‌های قطر اصلی M باید همگی صفر باشد لذا $x=0$ و چون M متقارن است $z=0$ و چون در هر گراف همیلتنی حداقل درجه‌ی هر رأس باید ۲ باشد پس $y=t=1$ و لذا $u=1$ بنابراین:

$x+y+z+t+u = 3$

آزمون ۶. اگر M ماتریس مجاورت درخت T_p باشد و درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس M^2 به‌صورت $1,\cdots,1,1,2,3,4,4,5,5$ مرتب شده باشند ماتریس M چند ستون دارد؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۸

۳) ۱۹ ۴) ۱۷

حل: گزینه‌ی (۳)، می‌دانیم هر درایه‌ی روی قطر اصلی ماتریس M^2 درجه‌ی یک رأس درخت T_p است لذا اگر تعداد یک‌ها مشخص شود، تعداد رئوس درخت مورد نظر و درنتیجه تعداد ستون‌ها مشخص می‌شود:

$\sum_{\deg v_i \geq 2} (\deg v_i - 2) + 2 =$ تعداد رأس‌های درجه‌ی ۱ در درخت

$(3-2)+(4-2)+(4-2)+(5-2)+(5-2)+2=13$ = تعداد رأس‌های درجه‌ی ۱

پس تعداد رأس‌های این درخت یعنی p، برابر است با $13+1+1+2+2=19$ پس M ماتریس 19×19 است.

آزمون ۷. اگر M ماتریس مجاورت گراف ساده‌ی G باشد کدام عدد نمی‌تواند حاصل ضرب درایه‌های قطر اصلی M^2 باشد؟

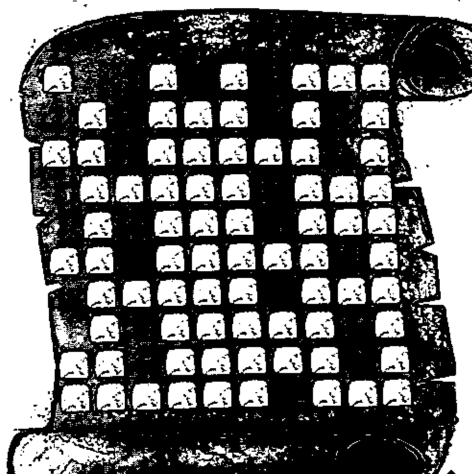
۱) ۸۱ ۲) ۱۲

۳) ۳۶ ۴) ۱۸

حل: گزینه‌ی (۴) زیرا:

$18 = 3 \times 3 \times 2 \times 1$ یا $18 = 3^2 \times 2$

و دنباله‌ی $S: 3,3,2,1$ گرافیکال نیست.



اعداد اول

غلامرضا یاسی‌پور

ریاضیات، آن‌چنان موضوع وسیع و مداخله‌گری در کار و بار آدمیان است که می‌تواند گه‌گاه توفنده به نظر آید و در مورد آن گاهی باید به مبناها بازگردیم. این وضعیت همواره به معنای بازگشت به اعداد شمارش، یعنی ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ... است. در واقع مگر می‌توان مبنایی اساسی‌تر از آن به دست آورد؟

بسیار خوب، داریم ۲×۲ = ۴ و بنابراین می‌توانیم آن را به مؤلفه‌های اوّل[1] تقسیم کنیم. امّا آیا می‌توانیم هر عدد دیگر را این چنین تقسیم کنیم؟ در واقع، اعداد دیگری برای این کار موجودند:

۶ = ۲×۳ و ۸ = ۲×۲×۲ و ۹ = ۳×۳ و

۱۰ = ۲×۵ و ۱۲ = ۲×۲×۳

این اعداد، عددهایی مرکّب‌اند، زیرا از اعداد بسیار اساسی ۲، ۳، ۵، ۷، ... تشکیل شده‌اند. اعداد تقسیم‌نشدنی[2] عبارت‌اند از اعداد ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ... این اعداد، عددهای اوّل یا به طور ساده، اوّل‌ها هستند. عدد اول، عددی است که تنها بر یک و خودش تقسیم‌پذیر است. در این صورت، ممکن است به این پرسش برسیم که خود ۱ اول است یا خیر. بنا به این تعریف، باید باشد. در گذشته، بسیاری از ریاضی‌دان‌های برجسته، آن را عدد اول در نظر گرفته‌اند، اما ریاضی‌دان‌های جدید، اول‌های خود را با ۲ آغاز می‌کنند. این کار به قضایا این توان را می‌دهد که به ظرافت و زیبایی بیان شوند. برای ما نیز، عدد ۲ نخستین اول است.

در مورد چند عدد شمارش اولیه، می‌توانیم زیر اول‌ها خط بکشیم: ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ... بررسی اعداد اول، ما را به مبناهای واقعی می‌کشاند، اما این اعداد از این لحاظ اهمیت دارند که اتم‌ها[3]ی ریاضیات‌اند. اعداد اول نیز مانند عناصر اساسی شیمی، که جمع ترکیبات شیمیایی از آن‌ها مشتق می‌شوند، می‌توانند برای ساختن ترکیبات ریاضی به کار روند.

دستاورد ریاضی‌ای که همه‌ی این موارد را تحکیم می‌بخشد، به نام شکوهمند «قضیه‌ی تجزیه به اعداد اول» موسوم است. این قضیه بیان

می‌کند که هر عدد تمام بزرگ‌تر از ۱ را می‌توان دقیقاً به یک طریق به صورت حاصل ضرب اعداد اول نوشت. ملاحظه کردیم که $۲\times۲\times۳ = ۱۲$ و هیچ طریق دیگری برای انجام این کار با مؤلفه‌های اول وجود ندارد. این عبارت اغلب به نمادنویسی توانی نوشته می‌شود: $۳ \times ۲^۲ = ۱۲$. برای مثال، ۶,۵۴۵,۴۴۸ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$۲^۳ \times ۳^۵ \times ۷ \times ۱۳ \times ۳۷$$

کشف اول‌ها

متأسفانه فرمولی برای مشخص کردن اول‌ها موجود نیست و به نظر می‌رسد که الگویی در مورد ظهورشان در میان اعداد تمام در دست نباشد. یکی از نخستین روش‌های یافتن آن‌ها را اراتُستن سیرنه‌ای[4] معاصر جوان‌تر ارشمیدس، مطرح کرد که بیشتر حیات خود را در آتن گذراند. گرچه محاسبه‌ی دقیق طول خط استوای وی در روزگار او از تحسین بیشتری برخوردار شد، اما امروزه وی به دلیل غربالش برای یافتن اعداد اول، مشهور است. اراتستن تصور کرد که اعداد شمارش در مقابلش قرار گرفته‌اند. وی ابتدا زیر ۲ خط کشید و تمام مضرب‌های ۲ را کنار زد. سپس به ۳ پرداخت و زیر آن خط کشید و تمام مضارب آن را کنار زد. و با ادامه‌ی این کار، جمیع مرکب‌ها را غربال کرد. در این صورت، اعدادی که زیرشان خط کشیده شده بود و در غربال باقی مانده بودند، اول بودند.

به این ترتیب، می‌توان اول‌ها را پیش‌گویی کرد، اما چگونه می‌توان گفت عدد مفروضی اول است یا خیر؟ برای مثال در مورد ۱۹,۰۷۱ یا ۱۹,۰۷۳ چه می‌توان گفت؟ هر عدد اول، غیر از اول‌های ۲ و ۵، باید به ۱، ۳، ۷ یا ۹ ختم شود، اما این شرط برای این که عددی را اول کند کافی نیست. بدون بررسی عامل‌های ممکن، دانستن این که یک عدد بزرگ مختوم به ۱، ۳، ۷ یا ۹ اول است یا نه، مشکل به نظر می‌رسد. در ضمن $۱۶۳ \times ۱۳ \times ۳^۲ = ۱۹,۰۷۱$ اول نیست، در حالی که ۱۹,۰۷۳ اول است.

پیکار دیگر، کشف الگویی در توزیع اول‌ها بوده است. بگذارید بررسی کنیم در هر قطعه‌ی ۱۰۰ عددی بین ۱ و ۱۰۰۰، چند اول موجود است. (جدول ۱)

در سال ۱۷۹۲، کارل فردریش گاوس[5]، زمانی که ۱۵ ساله بود، فرمول $P(n)$ی را برای تخمین تعداد اعداد اول کمتر از عدد مفروض n، به دست داد (این فرمول امروزه به قضیه‌ی اعداد اول موسوم است). فرمول مزبور به ازای $n = ۱۰۰۰$ مقدار تقریبی ۱۷۲ را به دست می‌دهد. تعداد واقعی اول‌ها در این فاصله، یعنی ۱۶۸، کوچک‌تر از این تخمین است. همواره فرض بر این بوده که این وضع در مورد هر مقدار n برقرار است، اما اول‌ها اغلب شگفتی‌هایی در آستین دارند، زیرا نشان داده شده است که به ازای $n = ۱۰^{۳۷۱}$ (عددی عظیم که به صورت دست خطی مرکب از ۱ و دنباله‌ای با ۳۷۱ صفر نوشته می‌شود) تعداد واقعی اعداد اول از تخمین مزبور تجاوز می‌کند. در واقع، در بعضی از نواحی اعداد شمارش، تفاضل بین تخمین و تعداد واقعی بین کم‌تر و زیادتر نوسان می‌کند.

چند تا؟

بی‌نهایت عدد اول موجود است. اقلیدس در کتاب مقدمات خود (کتاب ۹، قضیه‌ی ۲۰) بیان می‌کند که «تعداد اعداد اول، از هر تعداد اول مشخص شده بیش‌تر است». اثبات زیبای اقلیدس به طریق زیر است:

فرض می‌کنیم P بزرگ‌ترین عدد اول باشد و عدد زیر را در نظر می‌گیریم $N = (۲ \times ۳ \times ۵ \times ... \times P) + ۱$. N که یا اول است یا نیست. اگر اول باشد اولی بزرگ‌تر از P به دست داده‌ایم که نقیض فرضمان است و اگر اول نباشد، باید بر اولی، مثلاً p، که یکی از موارد ۲، ۳، ۵، ... P است، بخش‌پذیر باشد. این بدان معناست که p عدد $N - (۲ \times ۳ \times ۵ \times ... \times P)$ را می‌شمارد. اما این عدد برابر ۱ است و بنابراین p عدد ۱ را می‌شمارد. اما نمی‌تواند چنین باشد، زیرا جمیع اول‌ها بزرگ‌تر از ۱ هستند. به این ترتیب، نوع N هرچه باشد، به تناقض می‌رسیم. بنابراین، فرض اولیه‌مان در مورد بزرگ‌ترین اول بودن P ناراست است. نتیجه: تعداد اول‌ها نامحدود است.

اگرچه اول‌ها تا نامتناهی ادامه دارند، این واقعیت مانع اشخاص از یافتن بزرگ‌ترین اول شناخته شده، نشده است. موردی که اخیراً رکورددار شده، اول عظیم مِرسِن[6] $۲^{۲۴۰۳۶۵۸۳} - ۱$ است که تقریباً $۱۰^{۷۲۳۵۷۳۲}$ یا عددی است که با ۱ آغاز می‌شود و پس از آن ۷,۲۳۵,۷۳۲ صفر قرار می‌گیرد.

ناشناخته‌ها

دو ناحیه از نواحی کشف نشده‌ی معروف مربوط به اعداد اول «مسئله‌ی اول‌های توأمان یا دوقلو[7]» و «حدس مشهور گلدباخ[8]» است.

اول‌های توأمان، جفت‌هایی از اول‌های متوالی‌اند که تنها با یک عدد زوج از هم جدا شده‌اند. ده اول توأمان در برد ۱ تا ۱۰۰ عبارت‌اند از:

۳,۵;۵,۷;۱۱,۱۳;۱۷,۱۹;۲۹,۳۱;۴۱,۴۳;۵۹,۶۱;۷۱,۷۳

مشخص شده است که در زمینه‌ی شمارش، ۲۷,۴۱۲,۶۷۹

برد	۱-۱۰۰	۱۰۱-۲۰۰	۲۰۱-۳۰۰	۳۰۱-۴۰۰	۴۰۱-۵۰۰	۵۰۱-۶۰۰	۶۰۱-۷۰۰	۷۰۱-۸۰۰	۸۰۱-۹۰۰	۹۰۱-۱۰۰۰	۱-۱۰۰۰
تعداد اول‌ها	۲۵	۲۱	۱۶	۱۶	۱۷	۱۴	۱۶	۱۴	۱۵	۱۴	۱۶۸

(جدول ۱)

توأمان کوچک تر از $۱۰^{۱۵}$ موجود است. این مطلب بدان معناست که اعداد زوج توأمان‌دار، مانند ۱۲ (که توأمان‌های ۱۱، ۱۳ را دارد) تنها ۰/۲۷۴ درصد اعداد واقع در این برد را تشکیل می‌دهند. اما آیا تعداد اول‌های توأمان نامتناهی است؟ اگر نباشد تعجب‌آور است، اما تا کنون کسی نتوانسته است اثباتی در این مورد ارائه دهد.

کریستیان گلدباخ[9] حدس زد که :

هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ مجموع دو عدد اول است.

برای نمونه، ۴۲ عددی زوج است و می‌توان آن را به صورت ۳۷ + ۵ نوشت. این واقعیت که آن را می‌توان به صورت ۱۱ + ۳۱ و ۱۳ + ۲۹ یا ۱۹+ ۲۳ نیز نوشت، موضوعی دیگر است. تمام آن‌چه در این مورد نیاز داریم یک *طریق است.* این حدس در مورد برد عظیمی از اعداد صادق است،اما هرگز در حالت کلی به اثبات نرسیده است؛ گرچه در این مورد به پیشرفت‌هایی رسیده‌اند و پاره‌ای بر این باورند که اثبات مزبور دور از دسترس نیست. چن جینگ‌رون[10] ریاضی‌دان چینی، گام مهمی در این باره برداشته است. قضیه‌ی وی می‌خواهد ثابت کند که هر عدد به قدر کافی بزرگ زوج را می‌توان به صورت مجموع دو اول یا مجموع یک اول و یک نیمه-اول[11] (عددی که حاصل ضرب دو اول است) نوشت.

پی‌یر دوفرما[12] نظریه‌پرداز بزرگ نظریه‌ی اعداد به اثبات رساند که اول‌های به صورت $۴k + ۱$ را می‌توان به صورت مجموع دو مربع و دقیقاً به یک طریق بیان کرد (برای مثال، $۱۷ = ۱^۲ + ۴^۲$)، در حالی که اول‌های به صورت $۴k + ۳$ (مثل ۱۹) را به هیچ وجه نمی‌توان به صورت مجموع دو مربع نوشت. ژوزف لاگرانژ[13] نیز قضیه‌ی ریاضی معروفی را در مورد توان‌های مربع اثبات کرد: «هر عدد تمام مثبت، مجموع چهار مربع است.» برای نمونه، $۱۹ = ۱^۲ + ۱^۲ + ۱^۲ + ۴^۲$. در این مورد، توان‌های بالاتر نیز مورد بررسی قرار گرفته‌اند و کتاب‌ها را پر از قضایا کرده‌اند، اما بسیاری از مسائل هنوز اثبات نشده باقی‌مانده‌اند.

اعداد اول را به صورت «اتم‌های ریاضیات» توصیف کردیم. اما، «مطمئناً» می‌توان گفت «فیزیک‌دان‌ها در ماورای اتم‌ها به سراغ واحدهای حتی بنیادی‌تر از قبیل کوارک‌ها (ذرات بنیادی)[14] نیز رفته‌اند. در این صورت، آیا ریاضیات توقف کرده است؟» اگر کارمان را محدود به اعداد شمارش کنیم، ۵ عددی اول است، و همواره نیز چنین خواهد بود. اما گاوس به کشف دامنه‌داری نائل شد که به ازای بعضی اول‌ها، مانند ۵، $۵ = (۱ - ۲i) \times (۱ + ۲i)$، که در آن $i = \sqrt{-۱}$ از دستگاه اعداد موهومی است. در این صورت ۵ به عنوان حاصل ضرب دو عدد صحیح گاوسی و اعدادی مانند آن، آن‌گونه که فرض کرده بودیم تقسیم نشدنی نیستند.

عدد عدد- رمزان

یکی از پیکارجوترین زمینه‌های نظریه‌ی اعداد، مورد «مسئله‌ی وارینگ[15]» است. به سال ۱۷۷۰، ادوارد وارینگ[16] استاد کمبریج، مسائلی شامل نوشتن اعداد تمام به صورت جمع توان‌ها مطرح کرد. در این تنظیم و چینش، هنرهای جادویی عدد-رمزی، با دانش خشک و کلینیکی ریاضیات، به شکل اول‌ها، مجموع‌های مربع‌ها و مجموع‌های مکعب‌ها تلاقی می‌کند. در عدد-رمزی، عدد آیینی بی‌رقیب ۶۶۶ «عدد شیطان»[17] در فصل مکاشفه‌ی کتاب مقدس را در نظر می‌گیریم که دارای بعضی ویژگی‌های غیرمنتظره است. این عدد مجموع مربعات ۷ اول نخستین است:

$$۶۶۶ = ۲^۲ + ۳^۲ + ۵^۲ + ۷^۲ + ۱۱^۲ + ۱۳^۲ + ۱۷^۲$$

عدد-رمزان به این نیز مشتاق‌اند که خاطرنشان کنند این عدد، مجموع مکعب‌های ۶ عدد طبیعی نخست و مقلوب مستوی آن‌هاست، و اگر این نیز کافی نیست، عدد محوری $۶^۳$ واقع در مرکز این مجموع، اختصار $۶ \times ۶ \times ۶$ است.

$$۶۶۶ = ۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + ۴^۳ + ۵^۳ + ۶^۳ + ۵^۳ + ۴^۳ + ۳^۳ + ۲^۳ + ۱^۳$$

عدد ۶۶۶ به درستی (عدد عدد-رمزان)[18] است.

تاریخ شمار چند رخداد مهم ریاضی

۳۰۰ قبل از میلاد: [illegible] نامتناهی بودن تعداد اعداد اول [illegible] می‌دهد.

۲۳۰ قبل از میلاد: اراتستن سیرنه‌ای، روش غربال کردن اعداد اول را از اعداد تمام به دست می‌دهد.

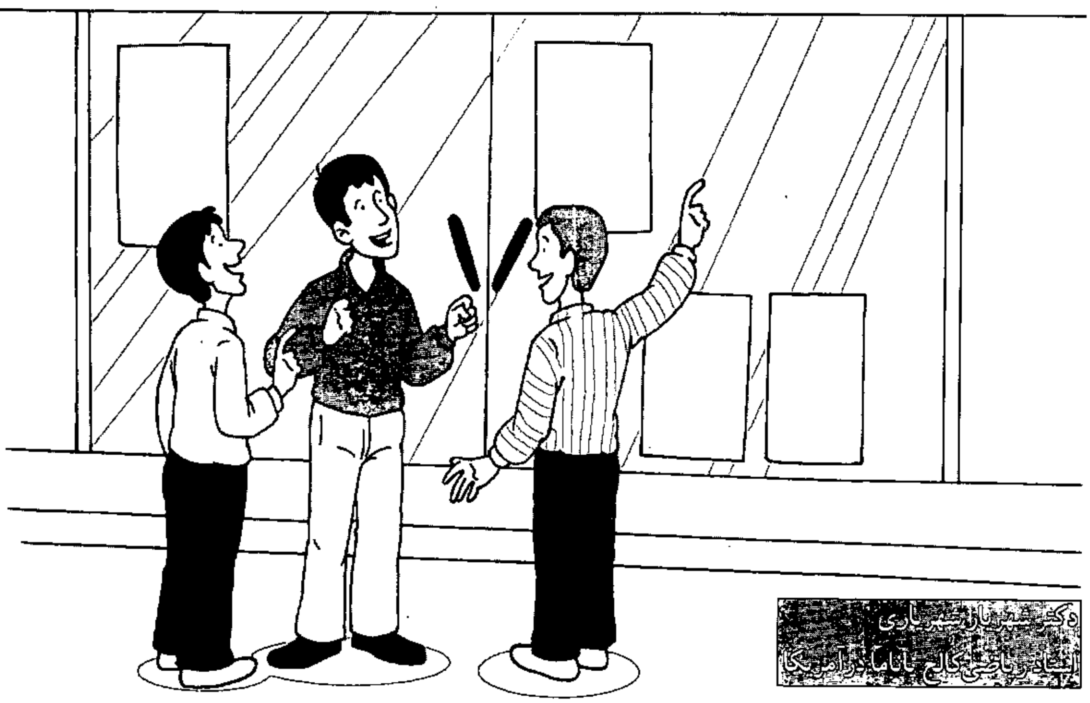
۱۷۴۲ میلادی: گلدباخ حدس زد که هر عدد زوج (بزرگ‌تر از ۲) مجموع دو عدد اول است.

۱۸۹۶ میلادی: قضیه‌ی اعداد اول در مورد توزیع اول‌ها به اثبات رسید.

۱۹۶۶ میلادی: چن جینگ‌رون تقریباً حدس گلدباخ را تأیید کرد.

پی‌نوشت

1. Primary components
2. Unbreakable numbers
3. Atoms
4. Erastosthenes of Cyrene
5. Carl Friedrich Gauss
6. Mersenne
7. Twin primes problem
8. Goldbach conjecture
9. Christian Goldbach
10. Chen Jingrun
11. Semi-Prime
12. Pierre de Fermat
13. Joseph Lagrange
14. quarks
15. Waring's problem
16. Edward Waring
17. Number of the beast
18. Number of the numerologist



دکتر شهریار شهریاری
استاد ریاضی کالج پامونا در آمریکا

مقدمه

بسیار اتفاق می‌افتد که جمعی می‌خواهد بر اساس خواست‌های اعضایش تصمیم بگیرد. چند مثال بیاوریم: چند دوست می‌خواهند به سینما بروند و هر کدام علاقه‌های متفاوتی نسبت به فیلم‌های سینماها دارند. واضح است که یک فیلم بیشتر نمی‌توانند انتخاب کنند. چه‌طور این کار را انجام دهند؟ دولت می‌خواهد برای ساختن وسایل مصرفی اولویت‌هایی قائل شود. چگونه خواست‌های تک‌تک افراد را جمع‌بندی کند؟ اعضای شورای مدیریت یک واحد تولیدی می‌خواهند تکنولوژی‌های مختلف را طبقه‌بندی کنند و ترتیبی از نظر مفید بودن برای آن‌ها قائل شوند. نظرات متفاوت اعضای شورا چگونه جمع‌بندی شود؟ هیئت تحریریه‌ی یک مجله می‌خواهد ترتیبی برای درج مقالات رسیده پیدا کند، ولی اعضا درباره‌ی زودتر و دیرتر چاپ شدن مقالات اختلاف دارند. این اختلاف چگونه حل شود؟

واضح است که جواب هر یک از این سؤال‌ها با هم متفاوت است. هیچ راه حل یکسانی برای این مشکلات نمی‌توان یافت. گاهی باید به نظریات همه به یکسان احترام گذاشت، در حالی که گاهی به حرف‌های برخی از آن‌ها نباید توجه کرد. گاهی باید بکوشند همدیگر را متقاعد کنند و گاه بعد از تبادل نظرها عقیده‌ی یک نفر باید تعیین کننده باشد. در هر صورت، در مورد هر یک از این سؤال‌ها و امثال آن‌ها باید شرایط مشخص را بررسی کنیم تا راه حلی عاقلانه بیابیم.

در این مورد، ریاضیات چه کمکی می‌تواند بکند. در برخی موارد مانند برنامه‌ریزی اقتصادی، نقش ریاضیات را نمی‌توان انکار کرد و در برخی دیگر هنوز نقشی برای ریاضیات پیدا نشده است. ولی ریاضیات علم انتزاع است. آیا می‌تواند به طور انتزاعی درباره‌ی روش‌های جمع‌بندی نظریات چیزی به افراد بگوید؟

فقط می‌شود گفت که کارهایی در این زمینه انجام گرفته است. آن‌چه در این چند مقاله می‌آوریم، نشان دادن روشی برای طرح این سؤالات به زبان ریاضی است. البته این تنها روش نیست و کار ریاضی‌دانان جهان از این حد، فرسنگ‌ها جلوتر رفته است. هدف ما فقط آشنایی بسیار مختصر با این شاخه‌ی ریاضیات است. نباید انتظار داشته باشیم که ریاضیات به تنهایی جوابی برای مشکل جمع‌بندی

ریاضیات و تصمیم گیری جمعی

نظریات افراد و به دست آوردن تصمیم گیری جمعی از روی آن‌ها به‌دست دهد. جواب واقعی برای این سؤال نه در محدوده‌ی ریاضیات، بلکه برای هر مورد مشخص، در علوم دیگر است. ریاضیات فقط می‌تواند در برخی موارد چهارچوبی برای ارائه نظرات به دست دهد و ممکن است کمکی در جهت منطقی بودن بحث‌های ما باشد. در این جا کوشش می‌کنیم روشی پیدا کنیم که بتواند اولویت‌ها را مرتب کند.

فرمول بندی مسئله از نظر ریاضی

۱) $X = \{x,y,\dots,z\}$ مجموعه‌ی انتخاب‌های ممکن است. تعداد عضوهای X مساوی یا بیشتر از ۳ است.

۲) V مجموعه‌ی محدودی از افراد تصمیم گیرنده است. عضوهای آن را با ۱، ۲، ...، i ، ...،n نشان می‌دهیم.

۳) برای هر فردی مثلاً i و هر دو انتخاب مثلاً u و v یکی و فقط یکی از سه حالت زیر برقرار است:

الف) i، «u را به v ترجیح می‌دهد» که آن را به صورت uP_iv می‌نویسیم.

ب) i، (v را به u ترجیح می‌دهد» که آن را به صورت vP_iu می‌نویسیم.

ج) i، (بین u و v بی‌تفاوت است» که آن را به صورت uI_iv می‌نویسیم.

همچنین، اگر i «v را به u ترجیح ندهد» یعنی داشته باشیم $\sim vP_iu$ آن‌گاه می‌نویسیم uR_iv که معادل با این است که بگوییم. i، یا u را به v ترجیح می‌دهد یا بین u و v بی‌تفاوت است.

حال بعضی شرط‌ها را برای P، R و I تعیین می‌کنیم. در این‌جا هدف، غیرمتناقض بودن ارجحیت‌های هر فرد است. در نتیجه شرط می‌کنیم که P یک رابطه‌ی ترتیبی ضعیف باشد، یعنی:

۱) نابرگشتی: $\sim yPx \Leftarrow xPy$ (یعنی xRy)

۲) سرایت پذیری منفی: $\sim xPy$ و $\sim xPz \Leftarrow \sim yPz$

تعریف: ما رابطه‌های R و I را بدین ترتیب با استفاده از P تعریف می‌کنیم.

الف) $\sim yPx \Longleftrightarrow xRy$

ب) xRy و $yRx \Longleftrightarrow xIy$

حال با استفاده از خصوصیات فرض شده‌ی P و تعاریف R و I می‌توانیم خواص منطقی زیر را برای انتخاب‌های فردی ثابت کنیم.

قضیه: اگر x، y و z عضوهای X باشند، آن‌گاه:

الف) xRy یا yRx یا هر دو

ب) xRy و $xRz \Leftarrow yRx$ (سرایت پذیری)

ج) xRx (انعکاس)

د) $xRy \Leftarrow xPy$

ه) xPy و $xPz \Leftarrow yPz$

و) xIy و $xIz \Leftarrow yIz$

ز) xRy یا yPx

ح) xPy و $xPz \Leftarrow yRz$

اثبات:

الف) اگر $xRy \Longleftrightarrow \sim yPx \Leftarrow xPy$

اگر $yRx \Longleftrightarrow \sim xPy \Leftarrow yPx$

اگر yRx و $xRy \Longleftrightarrow xIy$

ب) xRy و $yRz \Longleftrightarrow \sim yPx$ و $xRz \Longleftrightarrow \sim zPx \Leftarrow \sim zPy$

ج) اگر $\sim xPx \Leftarrow xPx$ و این یک تناقض است و لذا داریم: $xRx \Longleftrightarrow \sim xPx$.

د) $xRy \Longleftrightarrow \sim yPx \Leftarrow xPy$

اثبات بقیه‌ی قسمت‌ها را به‌عهده‌ی خواننده می‌گذاریم.

پس ما مجموعه‌ای $X = \{x,y,\dots,z\}$ از انتخاب‌های ممکن و مجموعه‌ی $V = \{۱,۲,\dots,n\}$ از افراد داریم. نظرات هر شخص درباره‌ی انتخاب‌های مختلف یک ترتیب ضعیف بر روی X است (یعنی دارای خواصی است که برشمردیم). مجموعه‌ی همه‌ی این گونه نظرات راجع به X را ω می‌خوانیم.

پس:

$\omega =$ مجموعه‌ی تمام ترتیب‌های ضعیف روی X

وقتی نظرات تمام اشخاص دانسته شد، آن‌گاه این به معنای داشتن تابع f است: $f: V \to \omega$

یعنی f برای هر فرد عضو V یک ترتیب ارجحیت، یعنی یک عضو ω را معین می‌کند. حال بگذارید $F = \{f \mid f: V \to \omega\}$. یعنی F مجموعه‌ی همه‌ی توابع از V به ω است. F مجموعه‌ی همه‌ی

روش‌های ممکن در انتخاب ارجحیت‌ها برای افراد است. حال ما می‌خواهیم با دانستن ارجحیت‌های اشخاص به یک جمع‌بندی برای کل گروه برسیم. یعنی با داشتن یک $f \in F$ می‌خواهیم یک ترتیب ارجحیت (یعنی عضوی از ω) برای کل گروه بیابیم. در زبان ریاضی ما خواهان تابعی به شکل زیر هستیم.

$$\sigma : F \to \omega$$

تابع σ را مدل جمع‌بندی می‌خوانیم.

پس در هر مورد خاص، کل نظریات اشخاص را تابع f، که عضوی از F است، معین می‌کند و $\sigma(F)$، که عضوی از ω است، جمع‌بندی را نشان می‌دهد. لذا، $X\sigma(f)y$، یعنی در جمع‌بندی x به y ترجیح داده شده است. منظور از $xf(V)y$ آن است که در مجموعه‌ی ارجحیت‌های فردی که به وسیله‌ی f داده شده است، شخص V، x را به y ترجیح می‌دهد.

حال، می‌خواهیم ببینیم که این مدل جمع‌بندی‌مان، یعنی σ، چه شرایطی باید داشته باشد. البته این شرایط جدا از بعضی ارزش‌ها نیستند و همان‌طور که در مقدمه گفته شد، در موارد خاص شرایط مختلفی لازم است. در این‌جا ما چهار شرط را که به نظر عاقلانه می‌آیند، می‌آوریم و بعد قضیه‌ای راجع به آن‌ها متذکر می‌شویم.

شرط ۱ (حوزه‌ی نامحدود)

الف) تعداد عضوهای X برابر یا بیشتر از سه است.

ب) مدل جمع‌بندی σ برای تمام $f \in F$ تعریف شده باشد.

ج) تعداد افراد حداقل ۲، ولی در هر صورت محدود باشد.

توجه: بخش (ب) این شرط به این معناست که اختلاف در آرای اشخاص هرچه باشد، باید بتوان به یک جمع‌بندی رسید.

شرط ۲ (اصل برتر)

اگر x و y دو انتخاب ممکن در X باشند و همه‌ی اشخاص در V، x را به y ترجیح بدهند، آن‌گاه در ترتیب گروهی هم x به y ترجیح داده شود، یعنی $x\sigma(f)y$.

شرط ۳ (استقلال انتخاب‌های غیرمربوط)

دو مجموعه‌ی ترتیب‌های ارجحیت‌های شخصی را در نظر می‌گیریم (یعنی $f,g \in F$). همچنین x و y دو انتخاب ممکن را در نظر می‌گیریم. حال اگر برای همه‌ی افراد، مقایسه‌ی بین x و y در f و در g یکسان باشد، آن‌گاه برای $\{x,y\}$ باید داشته باشیم $\sigma(f) = \sigma(g)$. مثلاً ۳ نفر را در نظر می‌گیریم. روز اول xP_1y و xP_2y و yP_3x و روز دوم هم دقیقاً به همین ترتیب. حال این شرط می‌گوید که مدل جمع‌بندی ما باید در روز اول و دوم یک نوع ترتیب بین x و y به دست دهد. یعنی اگر روز اول داریم $x\sigma(f)y$ روز دوم هم باید همین را داشته باشیم. گو این‌که در روز دوم ممکن است ارجحیت‌های افراد برای انتخاب‌های ممکن دیگر مثل z و غیره فرق کرده باشد.

شرط ۴ (همفکری کنید!)

شخصی وجود نداشته باشد که هرگاه او انتخابی را بر انتخاب دیگر ترجیح داد، آن‌گاه کل گروه هم همین کار را بکند.

یعنی $v \in V$ وجود ندارد به نحوی که اگر $x,y \in X$ و $f \in F$ باشد داشته باشیم. $xf(V)y \Rightarrow x\sigma(f)y$.

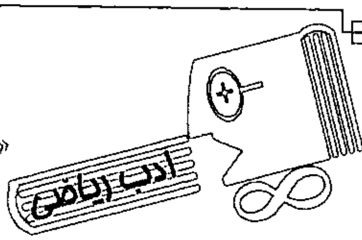
پس ما یک جمع را در نظر می‌گیریم. این جمع باید بر اساس تمایلات افراد ترتیبی برای انتخاب‌های ممکن اتخاذ کند، یعنی معین کند که مثلاً x به y ترجیح دارد، بین y و z بی‌تفاوت است و غیره. نام روش جمع‌بندی یا مدل جمع‌بندی را σ گذاشتیم و برایش چهار شرط که زیاد هم غیرمنطقی به نظر نمی‌رسند آوردیم. خوب است در این‌جا به قضیه‌ای که کنت. جی. ارووِ ثابت کرده است اشاره‌ای داشته باشیم.

قضیه: شرایط ۴-۱ متناقض‌اند.

یعنی مدل یک جمع‌بندی که دارای هر چهار شرط بالا باشد، وجود ندارد! برای مطالعه‌ی بیشتر به کتاب زیر مراجعه کنید.

Kenneth J. Arrow: Social Choice and Individual values

❊❊❊



«ابوعلی حسن‌بن حسن‌بن هیثم»، فیزیکدان و ریاضیدان بَصری مصری، در حدود ۳۵۴ هجری در بصره به‌دنیا آمد و به سال ۴۳۰ وفات یافت. بیشتر آثار ابن‌هیثم- که از صد متجاوزند- درباره‌ی ریاضیات و فیزیک است؛ البته به مباحث فلسفی و طبی نیز پرداخته است. نبوغ ریاضی ابن‌هیثم در مقاله‌ی پنجم کتاب «فی‌المناظر» به اوج می‌رسد.

رابطه‌ی بین مجذور اعداد و مجذور مقلوب آن‌ها

هادی خانی
دانش‌آموز دبیرستان شهید مفتح،
شهرستان خدابنده

اشاره

نظریه‌ی اعداد شاخه‌ای از ریاضی است که به مطالعه‌ی اعداد و روابط بین آن‌ها می‌پردازد و در این میان، شگفتی‌های زیادی از زیبایی‌های روابط و قاعده‌های جاری میان اعداد حاصل می‌شود.

مطالعه و پژوهش در زمینه‌ی اعداد به کشف این روابط قوی و بنیادی می‌انجامد که یکی از نتایج مهم آن، سرعت بخشیدن به محاسبات عظیمی است که امروزه در جوامع صنعتی و دانشگاهی و حتی امور روزانه‌ی سازمان‌ها و کارهای شخصی وجود دارد. در این مجال به معرفی یک رابطه‌ی جالب ریاضی میان مجذور یک عدد و مجذور مقلوب آن عدد می‌پردازیم.

فرض کنیم $\overline{xy}$ نماد یک عدد دو رقمی باشد که در این صورت مقلوب آن $\overline{yx}$ خواهد بود.

حال قصد داریم $(\overline{yx})^2$ را از روی $(\overline{xy})^2$ به دست آوریم. ادعا می‌کنیم که:

$$(\overline{yx})^2 = 99(y^2 - x^2) - (\overline{xy})^2 \qquad (1)$$

یعنی مربع عدد مقلوب برابر است با:

۲(عدد داده شده) + (مجذور رقم یکان − مجذور رقم دهگان) × ۹۹

اثبات:

$$(\overline{yx})^2 = (10y + x)^2 = 100y^2 + 20xy + x^2$$
$$= 99y^2 - 99x^2 + 100x^2 + 20xy + y^2$$
$$= 99(y^2 - x^2) + (10x + y)^2$$
$$= 99(y^2 - x^2) + (\overline{xy})^2$$

مثال: می‌دانیم که $169 = (13)^2$ می‌باشد حال می‌خواهیم $(31)^2$ را به دست آوریم:

$$(31)^2 = 99\{(3)^2 - (1)^2\} + 169$$
$$= 99(9 - 1) + 169 = 99 \times 8 + 169$$
$$= 792 + 169 = 961$$

که همان مجذور عدد ۳۱ است و در این محاسبه از مجذور ۱۳ (مقلوب آن ۳۱) استفاده شده است. این قاعده در مورد اعداد سه رقمی نیز به شکل مشابه برقرار است:

مقلوب عدد سه رقمی $(\overline{xyz})$ عدد $(\overline{zyx})$ است. حال قصد داریم $(\overline{zyx})^2$ را از روی $(\overline{xyz})^2$ به دست آوریم. رابطه‌ی زیر را ادعا و اثبات می‌کنیم.

$$(\overline{zyx})^2 = 9999\{(z)^2 - (x)^2\} + 1980y(z - x) + (\overline{xyz})^2 \qquad (2)$$

اثبات: طرف چپ رابطه‌ی (۲) برابر است با:

$$(\overline{zyx})^2 = (100z + 10y + x)^2$$
$$(\overline{zyx})^2 = 10000z^2 + 2000zy + 100y^2 + x^2 + 200xz + 20xy$$

طرف راست رابطه‌ی (۲) = $9999z^2 - 9999x^2 + 1980zy$

$$1980xy + (100x + 10y + x)^2$$
$$= 9999z^2 - 9999x^2 + 1980yz - 1980xy + 10000x^2$$
$$+ 100y^2 + z^2 + 2000xy + 200xz + 20yz$$
$$= 10000z^2 + 2000yz + 100y^2 + x^2 + 200xz + 20yz$$

می‌بینیم که دو طرف رابطه‌ی داده شده با هم برابرند.

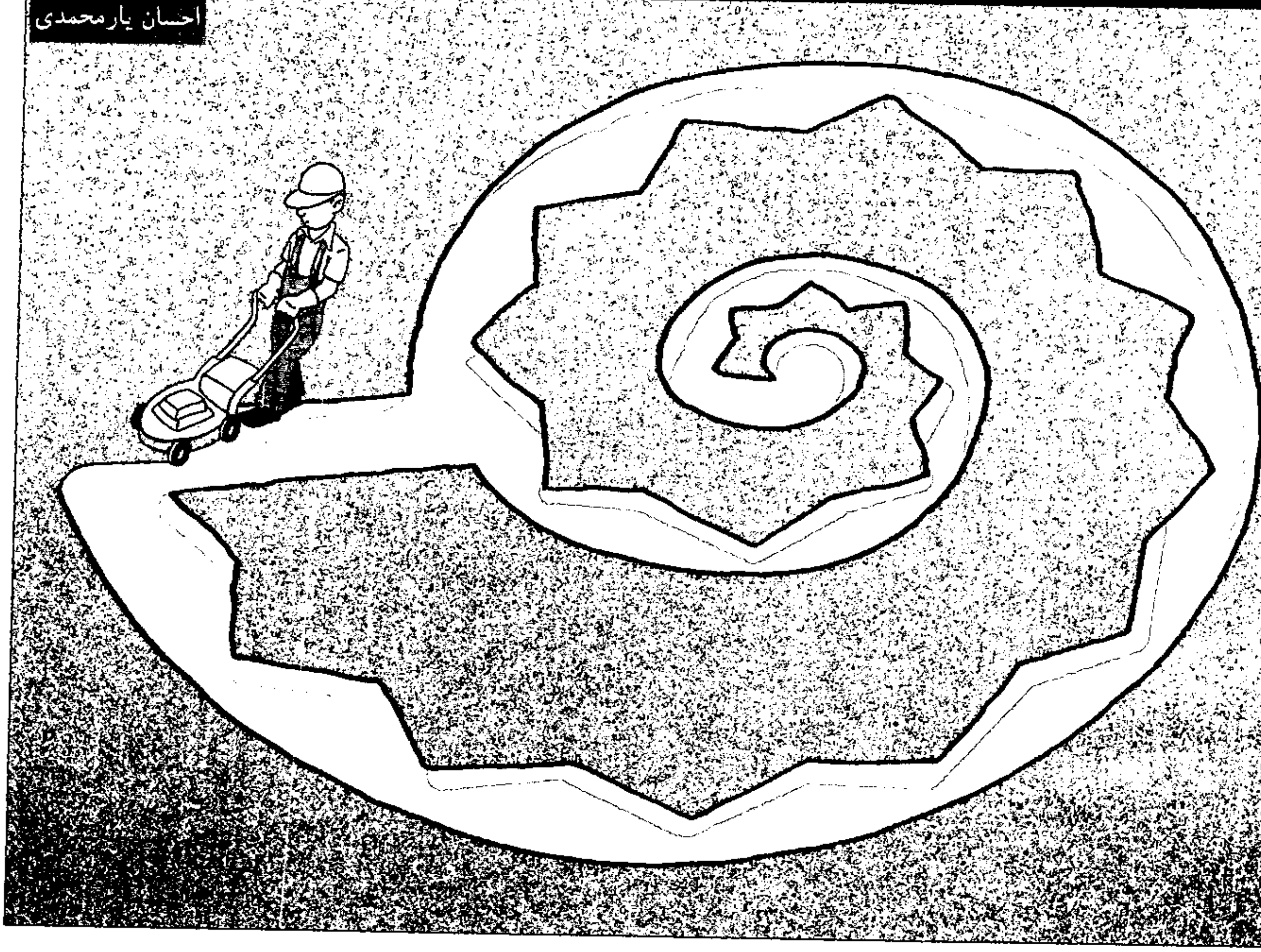
مثال: می‌دانیم که $84681 = (291)^2$ است. حال قصد داریم حاصل $(192)^2$ را از روی مجذور (۲۹۱) به دست آوریم.

$$(192)^2 = 9999(4 - 1) + 1980 \times 9 \times (1 - 2) + (291)^2$$
$$= (-29997) - (17820) + (84681) = 36864$$

خاطر نشان می‌شود که با توجه به الگوریتم محاسبه‌ی چنین روابطی می‌توان روابط مشابه را برای اعداد n رقمی به دست آورد.

سری هندسی مثلثاتی

احسان یارمحمدی



روزی با عده‌ای از دانشجویان و دانش‌پژوهان ریاضی بحثی پیرامون وضعیت همگرایی و واگرایی سری‌هایی که جمله‌ی عمومی آن‌ها شامل عبارت‌های مثلثاتی مانند $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+\cos(n)}{n^2}$، $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\sin(n)+\frac{1}{2}}{n(\ln(n))^2}$ و ... است داشتیم که در این بین من سری‌هایی به فرم $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(\frac{n\pi}{2})\cos(\frac{n\pi}{2})}{4^n}$، $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(\frac{n\pi}{4})\cos(\frac{n\pi}{4})}{2^n}$، $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\cos(\frac{n\pi}{4})}{5^n}$ و ... را مطرح کردم و نظر ایشان را جویا شدم. نظرات متفاوت و گوناگونی ارائه شد، اما جالب این بود که هیچ نظری راجع به این‌که می‌توان مقدار این سری‌ها را محاسبه کرد، بیان نشد. این موضوع باعث شد تا به نگارش این مقاله و به بیان بهتر، معرفی گروه متفاوتی از سری‌های هندسی. با آن‌چه از سری‌های هندسی متعارف وجود دارد، بپردازم.

نخست به ارائه‌ی تعریف و شرایط همگرایی و واگرایی سری هندسی و سپس به معرفی چندین دنباله‌ی مثلثاتی می‌پردازم که هر یک از آن‌ها کمک ارزنده و شایان توجهی را در درک بهتر این مقاله ایفا می‌کنند.

اگر $a \neq 0$، هر سری به فرم زیر:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots$$

یک سری هندسی با جمله‌ی اول a و قدر نسبت r می‌نامیم و مجموع جزئی آن را به صورت زیر بیان می‌کنیم.

$$a+ar+ar^2+ar^3+\dots+ar^{n-1}$$
$$=a(1+r+r^2+r^3+\dots+r^{n-1})$$
$$=\begin{cases} a\times\frac{1-r^n}{1-r}\ , r\neq 1\\ a(n+1)\ , r=1\end{cases}$$

البته برای سری هندسی $\sum_{n=0}^{+\infty}ar^n$ برحسب مقادیر مختلف r می‌توان درمورد همگرایی یا واگرایی سری مزبور به شرح زیر بحث کرد:

۱. اگر $-1<r<1$ آنگاه سری $\sum_{n=0}^{+\infty}ar^n$ همگراست و مقدار آن هنگامی که $n\to+\infty$ برابر با $\frac{a}{1-r}$ است.

۲. اگر $r>1$ آن‌گاه سری $\sum_{n=0}^{+\infty}ar^n$ واگراست. چون S_n به این علت که r^n آن هنگامی که $n\to+\infty$ برابر است با ∞ است، واگرا خواهد بود.

۳. اگر $r=1$ آن‌گاه سری $\sum_{n=0}^{+\infty}ar^n$ واگراست، چون $S_n=a(n+1)$ آن واگراست.

۴. اگر $r=-1$ آنگاه سری $\sum_{n=0}^{+\infty}ar^n$ واگراست، چون $S_n=\frac{a(1-(-1)^n)}{2}$ آن واگراست.

۵. اگر $r<1$ آنگاه سری $\sum_{n=0}^{+\infty}ar^n$ واگراست، چون S_n آن به این علت واگراست که r^n آن هنگامی که $n\to+\infty$ برابر با $\pm\infty$ است.

مثال ۱. کدام یک از گزینه‌های زیر درباره‌ی سری $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n+4^n+8^n}{16^n}$ صحیح است؟

۱) همگرا به $-\frac{41}{42}$ ۲) همگرا به $\frac{41}{42}$
۳) همگرا به صفر ۴) واگرا

پاسخ: گزینه‌ی ۲ صحیح است. سری مفروض شرط لازم همگرایی را دارد (چرا؟) و چون:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+4^n+8^n}{16^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{2}{16}\right)^n+\left(\frac{4}{16}\right)^n+\left(\frac{8}{16}\right)^n\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^n+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$=\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{8}}+\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}+\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{7}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{41}{42}$$

مثال ۲. کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد سری $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n+n^2+n}{2^{n+1}n(n+1)}$ صحیح است؟

۱) همگرا به ۲ ۲) همگرا به ۱
۳) همگرا به صفر ۴) واگرا

پاسخ: گزینه‌ی ۲ صحیح است. سری مفروض شرط لازم همگرایی را دارد (چرا؟) و چون:

$$\frac{2^n+n^2+n}{2^{n+1}n(n+1)}=\frac{2^n}{2^{n+1}n(n+1)}+\frac{n^2+n}{2^{n+1}n(n+1)}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2^n}$$

بنابراین:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n+n^2+n}{2^{n+1}n(n+1)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2^n}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}\times 1=1$$

در ادامه، تعدادی از دنباله‌های مثلثاتی را که کاربردی مؤثر در این مقاله دارند، ارائه می‌کنیم.

$$\{\sin(n\pi)\}_{n=1}^{+\infty}=\{\underbrace{0,0,0,0,0,0,0,0}_{n=1,2,3,4,5,6,7,8},\dots\}$$

$$\{\cos(n\pi)\}_{n=1}^{+\infty}=\{(-1)^n\}_{n=1}^{+\infty}$$
$$=\{\underbrace{-1,1,-1,1,-1,1,-1,1}_{n=1,2,3,4,5,6,7,8},\dots\}$$

$$\left\{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\}_{n=1}^{+\infty}=\{\underbrace{1,0,-1,0}_{n=1,2,3,4},\underbrace{1,0,-1,0}_{n=5,6,7,8},\dots\}$$

$$\left\{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\}_{n=1}^{+\infty}=\{\underbrace{0,-1,0,1}_{n=1,2,3,4},\underbrace{0,-1,0,1}_{n=5,6,7,8},\dots\}$$

$$\left\{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right\}_{n=1}^{+\infty}=$$
$$\left\{\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2},1,\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2},-1,-\frac{\sqrt{2}}{2},0}_{n=1,2,3,4,5,6,7,8},\dots\right\}$$

$$\left\{\cos(\frac{n\pi}{۴})\right\}_{n=۱}^{+\infty}=$$
$$\left\{\underbrace{\frac{\sqrt{۲}}{۲},۰,-\frac{\sqrt{۲}}{۲},-۱,-\frac{\sqrt{۲}}{۲},۰,\frac{\sqrt{۲}}{۲},۱}_{n=۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸},...\right\}$$

اکنون با بهره‌گیری از عمل جبری ضرب می‌توانیم دنباله‌های مثلثاتی جدیدی را از دنباله‌های مثلثاتی بالا به دست آوریم. بنابراین داریم:

$$\left\{\sin(\frac{n\pi}{۲})\cos(\frac{n\pi}{۲})\right\}_{n=۱}^{+\infty}=\{۰,۰,۰,۰,۰,۰,۰,...\}$$

$$\left\{\cos(n\pi)\sin(\frac{n\pi}{۲})\right\}_{n=۱}^{+\infty}=\{-۱,۰,۱,۰,-۱,۰,۱,۰,...\}$$

$$\left\{\cos(n\pi)\cos(\frac{n\pi}{۲})\right\}_{n=۱}^{+\infty}=\{۰,-۱,۰,۱,۰,-۱,۰,۱,...\}$$

$$\left\{\sin(\frac{n\pi}{۴})\cos(\frac{n\pi}{۴})\right\}_{n=۱}^{+\infty}=\left\{\frac{۱}{۲},۰,\frac{-۱}{۲},۰,\frac{۱}{۲},۰,\frac{-۱}{۲},۰,...\right\}$$

$$\left\{\cos(n\pi)\sin(\frac{n\pi}{۴})\cos(\frac{n\pi}{۴})\right\}_{n=۱}^{+\infty}=$$
$$\left\{-\frac{۱}{۲},۰,\frac{۱}{۲},۰,-\frac{۱}{۲},۰,\frac{۱}{۲},۰,...\right\}$$

$$\left\{\cos(n\pi)\sin(\frac{n\pi}{۲})\cos(\frac{n\pi}{۴})\sin(\frac{n\pi}{۴})\right\}_{n=۱}^{+\infty}=$$
$$\left\{-\frac{۱}{۲},۰,-\frac{۱}{۲},۰,-\frac{۱}{۲},۰,-\frac{۱}{۲},۰,...\right\}$$

$$\left\{\sin(\frac{n\pi}{۲})\cos(\frac{n\pi}{۴})\sin(\frac{n\pi}{۴})\right\}_{n=۱}^{+\infty}=\left\{\frac{۱}{۲},۰,\frac{۱}{۲},۰,\frac{۱}{۲},۰,\frac{۱}{۲},۰,...\right\}$$

$$\left\{\cos(\frac{n\pi}{۲})\sin(\frac{n\pi}{۴})\cos(\frac{n\pi}{۴})\right\}_{n=۱}^{+\infty}=\{۰,۰,۰,۰,۰,۰,۰,...\}$$

در این قسمت به ارائه‌ی مثال‌هایی درباره‌ی محاسبه‌ی مقدار سری‌های هندسی می‌پردازیم که جمله‌ی عمومی آن‌ها دربرگیرنده‌ی دنباله‌های مثلثاتی است.

مثال ۳. کدام گزینه در مورد سری $\sum_{n=۱}^{+\infty}(-۱)^n\frac{\sin(\frac{n\pi}{۲})}{۴^n}$ صحیح است؟

۱) همگرا به $-\frac{۴}{۱۵}$ ۲) همگرا به $-\frac{۴}{۱۷}$

۳) همگرا به $\frac{۱}{۳}$ ۴) واگرا

پاسخ: گزینه‌ی ۲ صحیح است. سری مفروض شرط لازم همگرایی را دارد (چرا؟) و چون می‌دانیم:

$$\left\{(-۱)^n\sin(\frac{n\pi}{۲})\right\}_{n=۱}^{+\infty}=\left\{\cos(n\pi)\sin(\frac{n\pi}{۲})\right\}_{n=۱}^{+\infty}$$
$$=\{-۱,۰,۱,۰,-۱,۰,۱,۰,...\}$$

بنابراین:

$$\sum_{n=۱}^{+\infty}(-۱)^n\frac{\sin(\frac{n\pi}{۲})}{۴^n}=\sum_{n=۱}^{+\infty}\frac{\cos(n\pi)\sin(\frac{n\pi}{۲})}{۴^n}$$

$$\left(\frac{-۱}{۴^۱}\right)+\left(\frac{۰}{۴^۲}\right)+\left(\frac{۱}{۴^۳}\right)+\left(\frac{۰}{۴^۴}\right)+\left(\frac{-۱}{۴^۵}\right)+\left(\frac{۰}{۴^۶}\right)$$
$$+\left(\frac{۱}{۴^۷}\right)+\left(\frac{۰}{۴^۸}\right)+...$$
$$=\left(\frac{-۱}{۴^۱}\right)+\left(\frac{۱}{۴^۳}\right)+\left(\frac{-۱}{۴^۵}\right)+\left(\frac{۱}{۴^۷}\right)+...$$
$$=\frac{\frac{-۱}{۴}}{۱-(-\frac{۱}{۴^۲})}=-\frac{۴}{۱۷}$$

مثال ۴. کدام گزینه در مورد سری $\sum_{n=۱}^{+\infty}\frac{\sin(\frac{n\pi}{۴})\cos(\frac{n\pi}{۴})}{\cos(n\pi)\times ۵^n}$ صحیح است؟

۱) همگرا به $-\frac{۵}{۴۸}$ ۲) همگرا به $-\frac{۵}{۵۲}$

۳) همگرا به $\frac{۵}{۴۹}$ ۴) واگرا

پاسخ: گزینه‌ی ۲ صحیح است. سری مزبور شرط لازم همگرایی را دارد (چرا؟) و چون می‌دانیم:

$$\left\{\sin(\frac{n\pi}{۴})\cos(\frac{n\pi}{۴})\right\}_{n=۱}^{+\infty}=\left\{\frac{۱}{۲},۰,-\frac{۱}{۲},۰,\frac{۱}{۲},۰,-\frac{۱}{۲},۰,...\right\}$$

بنابراین:

$$\sum_{n=۱}^{+\infty}\frac{\sin(\frac{n\pi}{۴})\cos(\frac{n\pi}{۴})}{\cos(n\pi)\times ۵^n}=\sum_{n=۱}^{+\infty}\frac{\sin(\frac{n\pi}{۴})\cos(\frac{n\pi}{۴})}{(-۱)^n\times ۵^n}$$
$$=\sum_{n=۱}^{+\infty}\frac{\sin(\frac{n\pi}{۴})\cos(\frac{n\pi}{۴})}{(-۵)^n}$$

$$=\left(\frac{\frac{۱}{۲}}{(-۵)^۱}\right)+\left(\frac{۰}{(-۵)^۲}\right)+\left(\frac{-\frac{۱}{۲}}{(-۵)^۳}\right)+\left(\frac{۰}{(-۵)^۴}\right)$$

$$+\left(\frac{\frac{1}{2}}{(-5)^5}\right)+\left(\frac{0}{(-5)^6}\right)+\left(\frac{-\frac{1}{2}}{(-5)^7}\right)+\left(\frac{0}{(-5)^8}\right)+\dots$$

$$=\left(\frac{\frac{1}{2}}{(-5)^1}\right)+\left(\frac{-\frac{1}{2}}{(-5)^3}\right)+\left(\frac{\frac{1}{2}}{(-5)^5}\right)+\left(\frac{-\frac{1}{2}}{(-5)^7}\right)+\dots$$

$$=\frac{\frac{\frac{1}{2}}{(-5)^1}}{1-\left(-\frac{1}{(-5)^2}\right)}=-\frac{5}{52}$$

مثال ۵. کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد سری $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(\frac{n\pi}{4})\cos(\frac{n\pi}{4})\sin(\frac{n\pi}{2})}{(-1)^n\times 2^n\times 4^n}$ صحیح است؟

۱) همگرا به $-\frac{4}{65}$ ۲) همگرا به $-\frac{8}{127}$

۳) همگرا به $-\frac{4}{63}$ ۴) واگرا

پاسخ: گزینه‌ی ۳ صحیح است. سری بالا شرط لازم همگرایی را دارد (چرا؟) و چون می‌دانیم:

$$\left\{\sin(\frac{n\pi}{4})\cos(\frac{n\pi}{4})\sin(\frac{n\pi}{2})\right\}_{n=1}^{+\infty}=\left\{\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0,\dots\right\}$$

بنابراین:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(\frac{n\pi}{4})\cos(\frac{n\pi}{4})\sin(\frac{n\pi}{2})}{(-1)^n\times 2^n\times 4^n}$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(\frac{n\pi}{4})\cos(\frac{n\pi}{4})\sin(\frac{n\pi}{2})}{(-8)^n}$$

$$=\left(\frac{\frac{1}{2}}{(-8)^1}\right)+\left(\frac{0}{(-8)^2}\right)+\left(\frac{\frac{1}{2}}{(-8)^3}\right)+\left(\frac{0}{(-8)^4}\right)+$$

$$\left(\frac{\frac{1}{2}}{(-8)^5}\right)+\left(\frac{0}{(-8)^6}\right)+\left(\frac{\frac{1}{2}}{(-8)^7}\right)+\left(\frac{0}{(-8)^8}\right)+\dots$$

$$=\left(\frac{\frac{1}{2}}{(-8)^1}\right)+\left(\frac{\frac{1}{2}}{(-8)^3}\right)+\left(\frac{\frac{1}{2}}{(-8)^5}\right)+\left(\frac{\frac{1}{2}}{(-8)^7}\right)+\dots$$

$$=\frac{\frac{\frac{1}{2}}{(-8)^1}}{1-\left(\frac{1}{(-8)^2}\right)}=-\frac{4}{63}$$

مثال ۶. کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد سری $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(\frac{n\pi}{2})+\cos(\frac{n\pi}{2})}{2^n\times 3^n}$ صحیح است؟

۱) همگرا به $-\frac{1}{37}$ ۲) همگرا به $\frac{5}{37}$

۳) همگرا به $\frac{6}{37}$ ۴) واگرا

پاسخ: گزینه‌ی ۲ صحیح است. سری بالا شرط لازم همگرایی را دارد (چرا؟) و چون می‌دانیم:

$$\left\{\sin(\frac{n\pi}{2})\right\}_{n=1}^{+\infty}=\{1,0,-1,0,1,0,-1,0,\dots\}$$

$$\left\{\cos(\frac{n\pi}{2})\right\}_{n=1}^{+\infty}=\{0,-1,0,1,0,-1,0,1,\dots\}$$

بنابراین:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(\frac{n\pi}{2})+\cos(\frac{n\pi}{2})}{2^n\times 3^n}$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{6^n}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(\frac{n\pi}{2})}{6^n}$$

$$=\left[\left(\frac{1}{6^1}\right)+\left(\frac{0}{6^2}\right)+\left(\frac{-1}{6^3}\right)+\left(\frac{0}{6^4}\right)+\dots\right]$$

$$+\left[\left(\frac{0}{6^1}\right)+\left(\frac{-1}{6^2}\right)+\left(\frac{0}{6^3}\right)+\left(\frac{1}{6^4}\right)+\dots\right]$$

$$=\left[\left(\frac{1}{6^1}\right)+\left(\frac{-1}{6^3}\right)+\dots\right]+\left[\left(\frac{-1}{6^2}\right)+\left(\frac{1}{6^4}\right)+\dots\right]$$

$$\frac{\frac{1}{6}}{1-(-\frac{1}{6^2})}+\frac{\frac{-1}{6^2}}{1-(-\frac{1}{6^2})}=\frac{6}{37}-\frac{1}{37}=\frac{5}{37}$$

تمرین

۱. در این مورد که با بهره‌گیری از اعمال جبری جمع، تفریق و تقسیم برای دنباله‌های مثلثاتی ارائه شده در متن، نمونه‌هایی را تعیین کنید که جملات آن‌ها مشابه با آنچه به دست آورده‌ایم، از نظم و ترتیب مشخصی پیروی کنند، تحقیق و بررسی کنید.

۲. در این مورد تحقیق و بررسی کنید که دنباله‌های مثلثاتی دیگری مطابق با آن‌چه در متن ارائه شده‌اند، تعیین کنید که به واسطه‌ی آن‌ها بتوان با استفاده از عمل جبری ضرب دنباله‌های مثلثاتی دیگری به وجود آورد که جملات آن‌ها مشابه با آن‌چه در متن به دست آورده‌ایم، از نظم و ترتیب مشخصی پیروی کنند.

۳. همگرایی یا واگرایی سری زیر را با محاسبه‌ی حد مجموع جزئی آن تعیین کنید.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3 + 4^n - n}{n4^{n-1}(n^2-1)}$$

۴. همگرایی یا واگرایی سری زیر را با محاسبه‌ی حد مجموع جزئی آن به دست آورید.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin(\frac{n\pi}{2}) - (-1)^n \cos(\frac{n\pi}{2})}{3^n \times 4^n}$$

۵. همگرایی یا واگرایی سری زیر را با محاسبه‌ی حد مجموع جزئی آن مشخص کنید.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin(\frac{n\pi}{4})\cos(\frac{n\pi}{4})}{2^n \times 4^n}$$

۶. همگرایی یا واگرایی سری زیر را با محاسبه‌ی حد مجموع جزئی آن تعیین کنید.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n\pi) \frac{2^n + 3^n + 4^n}{12^n}$$

۷. همگرایی یا واگرایی سری زیر را با محاسبه‌ی حد مجموع جزئی آن بررسی کنید.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin(\frac{n\pi}{2})\cos(\frac{n\pi}{4})\sin(\frac{n\pi}{4})}{5^n \times 6^n}$$

منابع

۱. حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره‌ی پیش‌دانشگاهی رشته‌ی علوم ریاضی، شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران، ۱۳۸۹.

۲. حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه‌ی تحلیلی، جورج توماس و راس فینی، ترجمه‌ی مهدی بهزاد، سیامک کاظمی و علی کافی، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۷۵.

تفاضل مربع‌های دو عدد

یک الگوی ریاضی

با سلام خدمت دست‌اندرکاران مجله‌ی ریاضی برهان، اینجانب فرهاد محمدی خجسته‌نژاد دانش‌آموز سال اول دبیرستان خاتم منطقه‌ی ۶ تهران، الگوی زیر را درباره‌ی عددهای طبیعی a و b ($a > b$) کشف کرده و با کمک دبیر ریاضی خود درستی آن را اثبات نموده‌ام تا در صورتی که صلاح می‌دانید آن را در مجله‌تان مطرح نمایید. برای محاسبه‌ی تفاضل مربع‌های دو عدد a و b یعنی $a^2 - b^2$، می‌توان دو عدد a و b را با دو برابرهای عددهای طبیعی بین a و b جمع کرد، برای مثال:

$$7^2 - 3^2 = 7 + 2\times4 + 2\times5 + 2\times6 + 3;$$
$$8^2 - 5^2 = 8 + 2\times6 + 2\times7 + 5$$

یعنی در حالت کلی داریم:

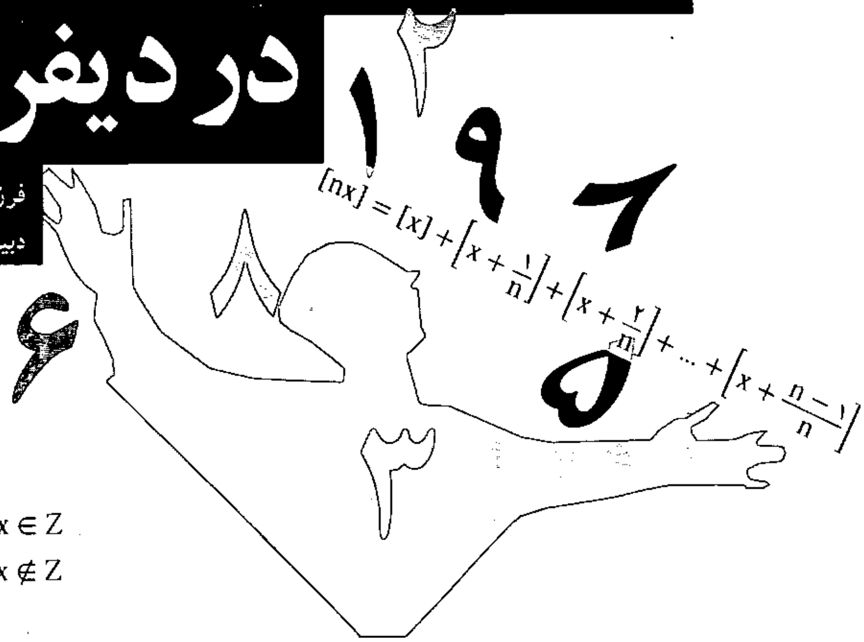
$$a^2 - b^2 = a + 2(a-1) + 2(a-2) + \dots + 2(b+1) + b$$

برای اثبات این دستور از سمت راست ساده می‌کنیم و از دستور $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ نیز استفاده می‌کنیم:

$$\text{سمت راست} = (a+b) + 2(a-1+a-2+\dots+b+1)$$
$$= (a+b) + 2[(1+2+3+\dots+b+b+1+\dots+a-1) - (1+2+\dots+b)]$$
$$= (a+b) + 2[\frac{a(a-1)}{2} - \frac{b(b+1)}{2}] = a+b+(a^2-a-b^2-b)$$
$$= a^2 - b^2$$

اثبات فرمولی کاربردی در دیفرانسیل

فرزاد حمزه‌پور- محمد قناعت
دبیران ریاضی شهرستان بانه



تابع جزء صحیح

تعریف: کوچک‌ترین عدد صحیح نابیشتر x را جزء صحیح x می‌نامند و داریم:

$$n \le x < n+۱ \Leftrightarrow [x]=n \, (n\in z)$$

نکته: جزء صحیح را می‌توان به صورت تابعی از R به توی Z با ضابطه‌ی $[x]=\max\{n\in Z: n\le x\}$ تعریف کرد.

مثال:

$$[۲/۷۵]=۲; [-۴.۳]=-۵; [۲۳]=۲۳$$

$$[۲/۷۵]=\max\{n\in Z: n\le ۲/۷۵\}$$
$$=\max\{۲,۱,۰,-۱,-۲,\dots\}=۲$$

باتوجه به تعریف، داریم:

$$[x]\le x<[x]+۱$$
$$۰\le x-[x]<۱$$
$$x-۱<[x]\le x$$
$$[x+k]=[x]+k \, (k\in Z)$$

$$[x]+[-x]=\begin{cases}۰ & x\in Z\\ -۱ & x\notin Z\end{cases}$$

$$[x+y]\ge[x]+[y]$$

$$[nx]=[x]+\left[x+\frac{۱}{n}\right]+\left[x+\frac{۲}{n}\right]+\dots\left[x+\frac{n-۱}{n}\right]$$

اثبات برابری زیر:

$$[nx]=[x]+\left[x+\frac{۱}{n}\right]+\left[x+\frac{۲}{n}\right]+\dots+\left[x+\frac{n-۱}{n}\right]$$
$$[x]=m$$
$$x=[x]+p \quad , \; ۰\le p<۱$$
$$x=k+p \quad , \; ۰\le p<۱$$
$$[nx]=[n(k+p)]=nk+[np] \quad ; \quad ۰\le np<n$$

$$۰\le p<۱\Rightarrow\begin{cases}۰\le p<\frac{۱}{n}\\ \frac{۱}{n}\le p<\frac{۲}{n}\\ \vdots\\ \frac{i}{n}\le p<\frac{i+۱}{n}\\ \vdots\\ \frac{n-۱}{n}\le p<\frac{n}{n}=۱\end{cases}$$

در هر حالت، باید ثابت کنیم که معادله برقرار است.

برای فهم بهتر، یکی دو مورد را اثبات می‌کنیم و پس از ایده گرفتن، قضیه را در حالت کلی ثابت می‌کنیم.

$$\circ \le p < \frac{۱}{n} \Rightarrow \circ \le np < ۱ \Rightarrow [np] = \circ$$
$$\Rightarrow [nx] = [nk + np] = nk + \circ = nk$$
$$[x] + \left[x + \frac{۱}{n}\right] + \left[x + \frac{۲}{n}\right] + \dots + \left[x + \frac{n-۱}{n}\right]$$
$$= k + \left[k + p + \frac{۱}{n}\right] + \left[k + p + \frac{۲}{n}\right] + \dots + \left[k + p + \frac{n-۱}{n}\right]$$
$$= nk + \left[p + \frac{۱}{n}\right] + \left[p + \frac{۲}{n}\right] + \dots + \left[p + \frac{n-۱}{n}\right]$$
$$= nk + \circ + \circ + \dots + \circ = nk$$

زیرا هر یک از جزء صحیح‌ها صفر است.

ببینید:

$$\circ \le p < \frac{۱}{n} \Rightarrow \begin{cases} \frac{۱}{n} \le p + \frac{۱}{n} < \frac{۲}{n} \Rightarrow \left[p + \frac{۱}{n}\right] = \circ \\ \frac{۲}{n} \le p + \frac{۲}{n} < \frac{۳}{n} \Rightarrow \left[p + \frac{۲}{n}\right] = \circ \\ \vdots \\ \frac{n-۱}{n} \le p + \frac{n-۱}{n} < \frac{n}{n} = ۱ \Rightarrow \left[p + \frac{n-۱}{n}\right] = \circ \end{cases}$$

$$\frac{۱}{n} \le p < \frac{۲}{n} \Rightarrow ۱ \le np < ۲ \Rightarrow [np] = ۱$$
$$\Rightarrow [nx] = [nk + np] = nk + ۱$$
$$[x] + \left[x + \frac{۱}{n}\right] + \left[x + \frac{۲}{n}\right] + \dots + \left[x + \frac{n-۱}{n}\right]$$
$$= k + \left[k + p + \frac{۱}{n}\right] + \left[k + p + \frac{۲}{n}\right] + \dots + \left[k + p + \frac{n-۱}{n}\right]$$
$$= nk + \left[p + \frac{۱}{n}\right] + \left[p + \frac{۲}{n}\right] + \dots + \left[p + \frac{n-۱}{n}\right]$$
$$= nk + \circ + \circ + \dots + \circ = nk + ۱$$

باز هم، همه به جز یکی از جزء صحیح‌ها، صفر و آخری یک است.

$$\frac{۱}{n} \le p < \frac{۲}{n} \Rightarrow \begin{cases} \frac{۲}{n} \le p + \frac{۱}{n} < \frac{۳}{n} \Rightarrow \left[p + \frac{۱}{n}\right] = \circ \\ \frac{۳}{n} \le p + \frac{۲}{n} < \frac{۴}{n} \Rightarrow \left[p + \frac{۲}{n}\right] = \circ \\ \vdots \\ ۱ = \frac{n}{n} \le p + \frac{n-۱}{n} < \frac{n+۱}{n} = ۱/۱ \\ \qquad \Rightarrow \left[p + \frac{n-۱}{n}\right] = ۱ \end{cases}$$

در حالت کلی، یعنی برای $i = \circ, ۱, ۲, ۳, \dots, n-۱$ و $\frac{i}{n} \le p < \frac{i+۱}{n}$ نشان می‌دهیم که رابطه برقرار است:

$$\frac{i}{n} \le p < \frac{i+۱}{n} \Rightarrow i \le np < i + ۱ \Rightarrow [np] = i$$
$$\Rightarrow [nx] = [nk + np] = nk + i$$
$$[x] + \left[x + \frac{۱}{n}\right] + \left[x + \frac{۲}{n}\right] + \dots + \left[x + \frac{n-۱}{n}\right]$$
$$= k + \left[k + p + \frac{۱}{n}\right] + \left[k + p + \frac{۲}{n}\right] + \dots + \left[k + p + \frac{n-i-۱}{n}\right]$$
$$+ \underbrace{\left[k + p + \frac{n-i}{n}\right] + \dots + \left[k + p + \frac{n-۲}{n}\right] + \left[k + p + \frac{n-۱}{n}\right]}_{i}$$
$$= nk + \underbrace{\left[p + \frac{۱}{n}\right] + \left[p + \frac{۲}{n}\right] + \dots + \left[p + \frac{n-i-۱}{n}\right]}_{(n-i)\times\circ}$$
$$+ \underbrace{\left[p + \frac{n-i}{n}\right] + \dots + \left[p + \frac{n-۲}{n}\right] + \left[p + \frac{n-۱}{n}\right]}_{i\times ۱}$$
$$= nk + \underbrace{\circ + \circ + \dots + \circ}_{(n-i)} + \underbrace{۱ + ۱ + \dots + ۱}_{i} = nk + i$$

$$\frac{i}{n} \le p < \frac{i+۱}{n} \Rightarrow \left[p + \frac{n-i}{n}\right] = ۱$$
$$\frac{i}{n} \le p < \frac{i+۱}{n} \Rightarrow \frac{i}{n} + \frac{n-i}{n} \le p + \frac{n-i}{n} < \frac{i+۱}{n} + \frac{n-i}{n}$$
$$\Rightarrow ۱ \le p + \frac{n-i}{n} < \frac{n+۱}{n} = ۱ + \delta$$
$$\Rightarrow \left[p + \frac{n-i}{n}\right] = ۱$$

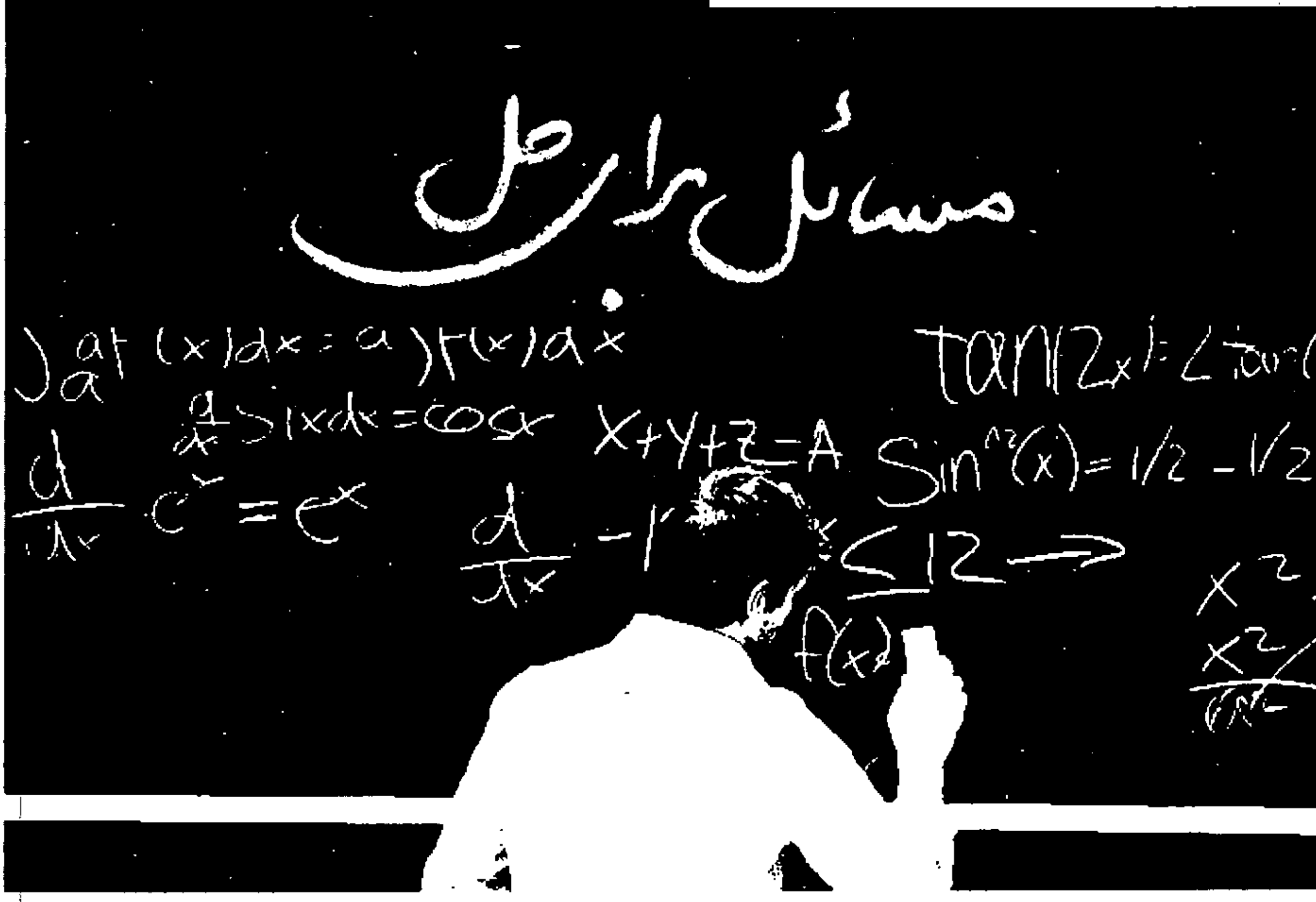
به همین ترتیب داریم:

$$\left[p + \frac{n-i-۱}{n}\right] = \circ$$

زیرا:

$$\frac{i}{n} \le p < \frac{i+۱}{n} \Rightarrow \left[p + \frac{n-i-۱}{n}\right] = \circ$$
$$\frac{i}{n} \le p < \frac{i+۱}{n} \Rightarrow \frac{i}{n} + \frac{n-i-۱}{n} \le p + \frac{n-i-۱}{n}$$
$$< \frac{i+۱}{n} + \frac{n-i-۱}{n} \Rightarrow \frac{n-۱}{n} \le p + \frac{n-i-۱}{n} < \frac{n}{n} = ۱$$
$$\Rightarrow \left[p + \frac{n-i-۱}{n}\right] = \circ$$

پاسخ تشریحی مسائل، در شماره‌ی آینده



مسائل ریاضیات ۱

فرخ فرشیان

۱- طول وتر یک مثلث قائم‌الزاویه $5\sqrt{2}$ و طول دو ضلع زاویه‌ی قائمه دو عدد طبیعی است. اندازه‌ی همه‌ی ضلع‌های این مثلث را پیدا کنید. در کدام یک از جواب‌های ممکن مسئله، محیط مثلث کمتر است.

۲- کدام کسر بزرگ‌تر است؟ $\frac{101}{1001}$ و $\frac{1001}{10001}$

۳- اگر بخواهیم صد عدد بنویسیم که بین دو عدد $\frac{42}{43}$ و $\frac{41}{43}$ باشند، چگونه عمل کنیم؟

۴- حاصل $\frac{\left||\sqrt{3}-\sqrt{5}|-|\sqrt{5}-2|-2\times(3-4)\right|}{\left||\sqrt{3}-2|-|-\sqrt{3}|\right|+2}$ را به دست آورید.

۵- هر یک از مجموعه‌های زیر را با نوشتن عضوهایش مشخص کنید.

الف) $A=\left\{\frac{2^x+1}{2^x-1} \middle| x\in Z, -3\le x\le 0\right\}$

ب) $B=\left\{2^x-3^y \mid x,y\in Z, xy=4\right\}$

۶- اگر $A\cap B=\{1,2\}$ و $A-B=\{3,4\}$ و $B-A=\{5,6\}$ باشند مجموعه‌ی $A\cup B$ را با نوشتن عضوها مشخص کنید.

۷- به جای X در رابطه‌ی $\{3\}\subset X\subset\{1,2,3\}$ چند مجموعه می‌توان نوشت؟ آن مجموعه‌ها را مشخص کنید.

۸- اگر $n^n=a$ باشد، حاصل عبارت $n^{n^{n+1}}$ را برحسب a به‌دست آورید.

۹- حاصل عبارات زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$\underbrace{11^{13}+11^{13}+\dots+11^{13}}_{\text{۱۱ تا}}+\underbrace{11^{14}+11^{14}+\dots+11^{14}}_{\text{۱۲۰ تا}}+\underbrace{11^{15}+11^{15}+\dots+11^{15}}_{\text{۱۳۲۰ تا}}$$

ب) $\left[\left(\frac{1}{7}\right)^{\left(\frac{1}{7}\right)^{\left(\frac{1}{7}\right)}}\times\left(-\frac{1}{7}\right)^{\left(\frac{1}{7}\right)^{\left(\frac{1}{7}\right)}}\right]^{\left(\frac{1}{7}\right)^{\left(-\frac{1}{7}\right)}}$

۱۰- عبارت $-\sqrt{-xy^2}-\sqrt{-yx^2}$ را ساده کنید.

۱۱- ابتدا مخرج کسر زیر را ساده و سپس گویا کنید.

$$\frac{1}{\sqrt[4]{405}+3\sqrt[8]{25}+7\sqrt[16]{625}+5\sqrt[8]{25}-16\sqrt[4]{5}}$$

۱۲- حاصل عبارت ذیل را به دست آورید.

$-x\{-x[-x(3-x)-2]-5\}+1-x^3(x-3)+2x^2$

۱۳- اگر $A=4(x^2+3)-2(x-2)(2x-3)$ و $B=14(2x-\frac{1}{7})(7x+\frac{1}{2})$ باشد، حاصل $(B-A^2)^{2010}$ را به‌دست آورید.

۱۴- حاصل عبارت‌های زیر را به کمک اتحادها به دست آورید.

الف) $(ab-a)^2(b+1)^2(b^2+1)^2a^{-2}$

ب) $19^2+19\times18+18^2+18^3$

۱۵- اگر $x+\frac{1}{x}=3$ باشد، حاصل عبارت $\left(\frac{x^2+1}{2x}\right)^2-2x^2+6x$ را به دست آورید.

۱۶- چندجمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

الف) $a^6x^2-729x^8$

ب) $(a+b)^2+1-2a-2b$

ج) $x^2+y^2-2x+2xy-2y+1$

د) $3x^3-7x^2+4$

۱۷- فاصله‌ی دو شهر ۱۰ کیلومتر بیشتر از یک سوم فاصله‌ی همان دو شهر است. فاصله‌ی این دو شهر را پیدا کنید.

۱۸- نقطه‌ی A را روی محور طول‌ها چنان تعیین کنید که از دو نقطه‌ی $B=(4,1)$ و $C=(2,1)$ به یک فاصله باشد.

مسائل ریاضیات ۲

میرشهرام صدر

۱- در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ($\angle A=90^\circ$)، اگر ضلع‌ها را a، b و c بنامیم (وتر = a)، ثابت کنید در صورتی که ضلع‌های مثلث با یکدیگر تصاعد عددی بسازند، ضلع وسطی ۴ برابر قدر نسبت است.

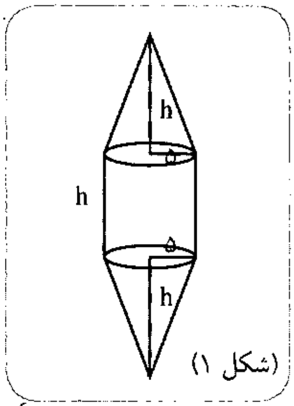
۲- اگر جملات چهارم، ششم و دوازدهم یک دنباله‌ی عددی به ترتیب، سه جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی باشند، قدر نسبت دنباله‌ی هندسی را بیابید.

۳- اگر دو تابع $f=\{(1,2a+b),(a,3)\}$ و $g=\{(1,a+3b),(2,4b+c)\}$ با هم برابر باشند، آن‌گاه مقدار عددی $5a+2b+c$ را به دست آورید.

۴- اگر دو نقطه‌ی $A(2n+2m,n-m)$ و $B(2n-1,\frac{n}{2}+1)$ نسبت به خط به معادله‌ی $y=x$ قرینه‌ی یکدیگر باشند، مقادیر m و n را بیابید.

۵- تابع $f=\{(1,-3),(2,5),(-3,2)\}$ را در نظر بگیرید. در این صورت حاصل $f(f(f(1)))$ را بیابید.

۶- مخزنی از یک استوانه و دو مخروط به شعاع مقطع ۵ در دو انتهای استوانه تشکیل شده است (شکل ۱). اگر ارتفاع استوانه و مخروط‌ها h باشد. حجم این مخزن را برحسب تابعی از h بنویسید.



(شکل ۱)

۷- هرگاه داشته باشیم $f(x)=\begin{cases}2x-1 & x>2\\ 4 & x=2\\ x^2+1 & x<2\end{cases}$، در این صورت $f(k-1)$ را به دست آورید.

۸- حدود a را چنان تعیین کنید که به ازای جمیع مقادیر x داشته باشیم:

$$\frac{ax^2+2x+a-2}{2x^2+3x+2}>0$$

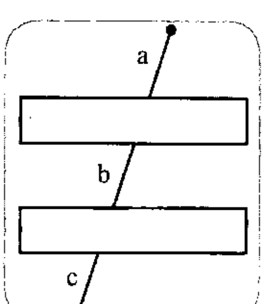
۹- دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{2\sqrt{16-x^2}}{\sqrt{-x^2-x+30}}$ را به دست آورید.

۱۰- نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=2\times(\frac{3}{2})^{x-1}$ را رسم کنید.

مسائل هندسه‌ی ۱

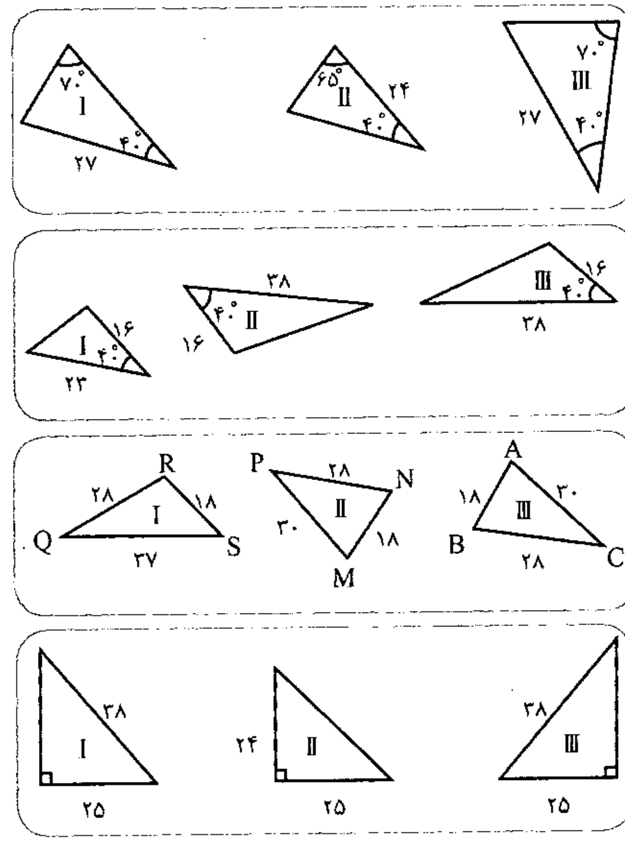
محمدهاشم رستمی

۱. در شکل زیر، آیا سه پاره خط a، b و c بر یک استقامت‌اند یا متوازی و متمایزند؟

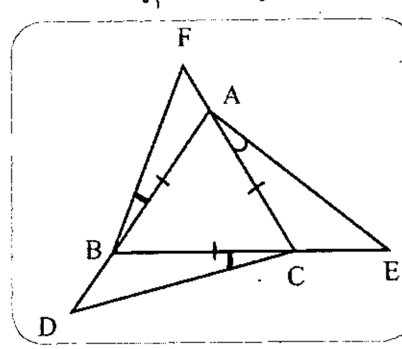


۲. دو زاویه متمم یکدیگرند. اگر یکی از آن‌ها ۶ درجه از ۳ برابر دیگری کم‌تر باشد، اندازه‌ی هر یک از این دو زاویه را تعیین کنید.

۳. در هر دسته از شکل‌های ذیل، مثلث‌های همنهشت را تعیین و حالت همنهشتی آن‌ها را مشخص کنید.

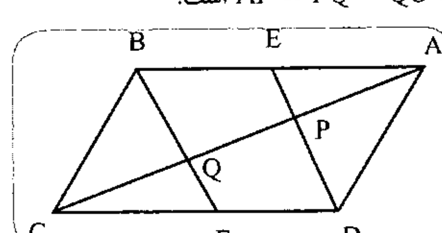


۴. ضلع‌های مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را چنان امتداد می‌دهیم که $A\hat{B}F = B\hat{C}D = C\hat{A}E$ باشد (شکل زیر). ثابت کنید که مثلث‌های ABF، BCD و CAE هم‌نهشت‌اند.



۵. تعداد قطرهای یک ۱۷ ضلعی چه‌قدر بیش‌تر از تعداد ضلع‌های آن است؟

۶. در متوازی‌الاضلاع ABCD، نقطه‌ی E وسط ضلع AB و نقطه‌ی F وسط ضلع CD است. پاره‌خط‌های DE و BF قطر AC از این متوازی‌الاضلاع را به ترتیب در نقطه‌های P و Q قطع کرده‌اند. ثابت کنید که $AP = PQ = QC$ است.



۷. مساحت مستطیلی را بیابید که:

الف) محیط آن ۶۸ سانتی‌متر و نسبت دو ضلع مجاورش $\frac{۸}{۹}$ باشد.

ب) قطر آن ۵۰ سانتی‌متر و یک زاویه‌ی بین دو قطرش ۶۰° باشد.

۸. اندازه‌ی ارتفاع متوازی‌الاضلاعی را بیابید که:

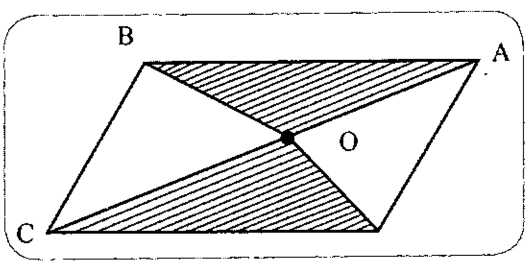
الف) مساحت آن ۵۷۶ و ضلع نظیر این ارتفاع ۲۴ باشد.

ب) مساحت آن ۴۸۰ و نسبت این ارتفاع به ضلع نظیرش مساوی $\frac{۵}{۶}$ باشد.

پ) مساحت آن ۱۱۷ سانتی‌متر مربع و ضلع نظیر این ارتفاع ۴ واحد بیش‌تر از ارتفاع آن باشد.

۹. نقطه‌ی O واقع در درون متوازی‌الاضلاع ABCD را به رأس‌های این متوازی‌الاضلاع وصل می‌کنیم (شکل زیر). ثابت کنید که داریم:

$$S_{OAB} + S_{OCD} = \frac{۱}{۲}S_{ABCD}$$

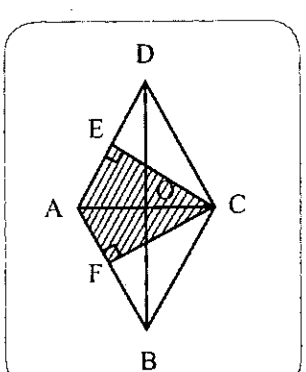


(راهنمایی: ارتفاع‌های رأس O از دو مثلث OAB و OCD را رسم کنید.)

۱۰. مساحت یک شش ضلعی منتظم $۵۴\sqrt{۳}$ سانتی‌متر مربع است. اندازه‌ی ضلع و اندازه‌ی سهم آن را بیابید.

راهنمایی: مساحت شش ضلعی منتظم به ضلع a مساوی با $\frac{۳\sqrt{۳}a^۲}{۲}$ است.

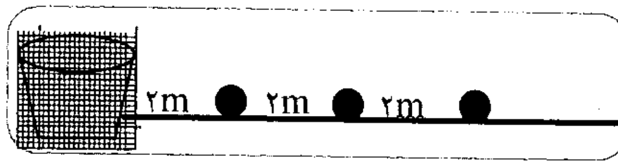
۱۱. در لوزی ABCD، اندازه قطرهای $AC = ۱۲$ و $BD = ۱۶$ است. از رأس C عمودهای CE و CF وارد بر دو ضلع AD و AB را رسم کرده‌ایم. مساحت چهارضلعی AECF را تعیین کنید.



مسائل حسابان

مجتبی رفیعی

۱- تعدادی توپ روی یک خط مستقیم و به فاصله‌ی دو متر از هم قرار دارند. فاصله‌ی توپ اول تا یک سبد ۲ متر است (شکل زیر). دونده‌ای باید از کنار سبد شروع کند، هر توپ را بردارد و به سبد بیندازد و دوباره به طرف توپ بعدی بدود و آن را تا سبد حمل کند و داخل آن بیندازد. اگر این دونده در مجموع ۴۸۰ متر دویده باشد، معین کنید او چند توپ در سبد انداخته است؟



۲- اگر a، b، c و d جمله‌های متوالی یک تصاعد هندسی باشند، درستی رابطه‌ی زیر را ثابت کنید.

$$(b-c)^2 = ac + bd - 2ab$$

۳- خارج قسمت و باقی‌مانده‌ی تقسیم $x^n \pm a^n$ را بر $x \pm a$ حساب کنید ($n \in \mathbb{N}$).

۴- اگر در بسط دو جمله‌ای $(x+y)^{2m+1}$ جمله‌ی نهم دارای بزرگ‌ترین ضریب عددی باشد، m را بیابید.

۵- فرض کنید x_1 و x_2 اعداد حقیقی باشند و $x_1^2 + x_2^2 = 5, 3(x_1^5 + x_2^5) = 11(x_1^3 + x_2^3)$؛ معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که ریشه‌هایش x_1 و x_2 باشند.

۶- حاصل عبارت زیر را به دست آورید:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}} \cdot \left(1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) \div \frac{a+b+c}{2bc}$$

۷- معادله‌ی اصمّ زیر را حل کنید.

$$\sqrt{2x+3} + \sqrt{5x+1} = \sqrt{12x+13}$$

۸- برد تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$ را به دست آورید.

۹- نمودار تابع $f:[-5,5] \to R$ با ضابطه‌ی $f(x) = |||x|-1|-1|$ را رسم و وضعیت تابع را از نظر زوج یا فرد بودن مشخص کنید.

۱۰- فرض کنید تابع‌های $f,g:R \to R$ صعودی (اکید) باشند.

الف) ثابت کنید $f+g$ هم صعودی (اکید) است.

ب) آیا ممکن است $f-g$ صعودی (اکید) نباشد؟

۱۱- فرض کنید f تابعی یک به یک و فرد باشد. ثابت کنید که تابع f^{-1} هم فرد است.

۱۲- ثابت کنید تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x + [x]$ معکوس‌پذیر است و معکوس آن را به دست آورید.

۱۳- نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \left[\frac{[x]+1}{2}\right]$ را در فاصله‌ی $x \in [0,10]$ رسم کنید.

۱۴- معادله‌ی $[\sin^2 x] + \left[\frac{x}{2}\right] = -1$ را حل کنید ([ ] تابع جزء صحیح است).

۱۵- معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\sin 2x + \sqrt{3} - 2\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$$

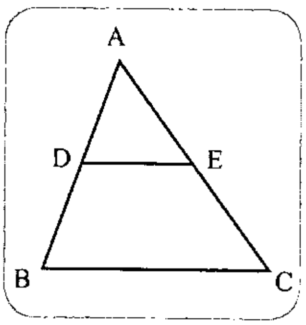
۱۶- ثابت کنید:

$$2\mathrm{Arctan}\frac{1}{2} + \mathrm{Arctan}\frac{1}{3} = \mathrm{Arctan}\,3$$

مسائل هندسه‌ی ۲

محمد هاشم رستمی

۱. مثلث ABC را در نظر می‌گیریم و خطی موازی ضلع BC رسم می‌کنیم تا ضلع‌های AB و AC را در نقطه‌های D و E قطع کند.



الف) پاره‌خط‌های AB، DB، AE و EC را با خط‌کش اندازه بگیرید.

ب) نسبت‌های $\frac{AD}{DB}$ و $\frac{AE}{EC}$ را محاسبه کنید. آیا این دو نسبت مساوی‌اند؟

پ) خط دیگری موازی ضلع BC رسم کنید تا ضلع‌های AB و AC را به ترتیب در نقطه‌های M و N قطع کند.

ت) اندازه‌ی پاره‌خط‌های AM، MB، AN و NC و نسبت‌های $\frac{AM}{MB}$ و $\frac{AN}{NC}$ را تعیین کنید. آیا این دو نسبت مساوی‌اند؟

ث) از قسمت‌های (ب) و (ت) چه حدسی می‌زنید؟

۲. کدام یک از عبارت‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟ در صورت نادرست بودن، یک مثال نقض بزنید.

الف) هر زاویه‌ی خارجی یک مثلث مساوی مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیرمجاور آن مثلث است.

ب) در مثلث ABC، $AB = 8$ و $BC = 9$ است، پس $\hat{A} < \hat{C}$ است.

پ) اگر موربی دو خط راست را چنان قطع کند که چهار زاویه‌ی حاده‌ی هم‌نهشت و چهار زاویه‌ی منفرجه‌ی هم‌نهشت به وجود آید، آن دو خط با هم موازی‌اند.

۳. سه پاره خط به طول‌های x، $x-1$ و $2x-3$ داده شده‌اند. اگر این سه پاره خط ضلع‌های یک مثلث به محیط ۴۰ باشند، ضلع‌های

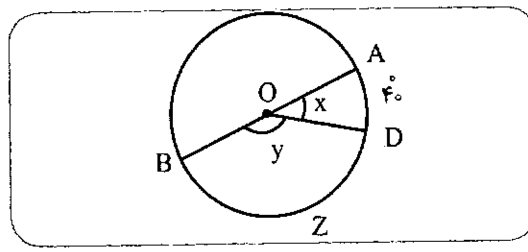
این مثلث را تعیین کنید.

۴. طول مستطیلی ۲ برابر عرض آن است. از برخورد نیمسازهای زاویه‌های درونی این مستطیل، مربعی به ضلع ۸ سانتی‌متر ایجاد شده است. اندازه‌ی ضلع‌های این مستطیل را تعیین کنید.

۵. سه نقطه‌ی A، B و C در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از دو نقطه‌ی B و C به یک فاصله باشد و از نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۶ قرار گیرد.

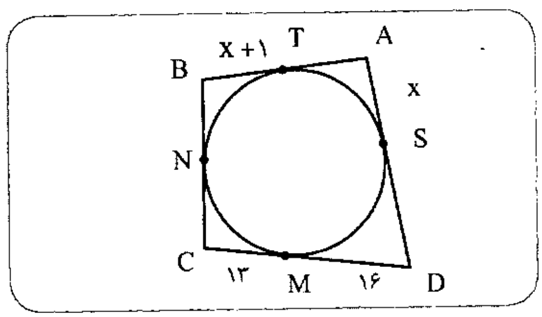
۶. از مثلث ABC، اندازه‌ی زاویه‌های $\hat{B} = \alpha$ و $\hat{C} = \beta$ و محیط مثلث $AB + AC + BC = 2P$ داده شده است. این مثلث را رسم کنید

۷. در شکل داده شده، نقطه‌ی O مرکز دایره است. اندازه‌ی x و y را با توجه به شکل بیابید.

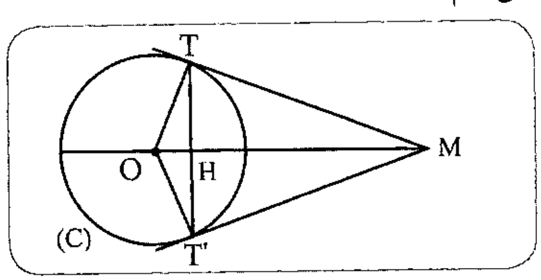


۸. در دایره‌ی $C(O,10)$ دو وتر AB و CD به طول‌های ۱۲ و ۱۸ داده شده‌اند. کدام وتر به مرکز دایره نزدیک‌تر است؟

۹. چهار ضلعی ABCD بر دایره‌ی (O) محیط است. با توجه به شکل اندازه‌ی x را چنان بیابید که محیط این چهار ضلعی مساوی ۱۲۰ باشد (M، N، T و S نقطه‌های تماس ضلع‌های چهارضلعی با دایره‌اند).



۱۰. از نقطه‌ی M واقع در خارج دایره‌ی $C(O,R)$ دو مماس MT و MT' را بر این دایره رسم می‌کنیم. از O به T و T' و هم‌چنین از M به O وصل می‌کنیم و نقطه‌ی برخورد TT' و OM را H می‌نامیم.



الف) اگر $T\hat{M}T' = 60^\circ$ و $R = 15cm$ باشد، اندازه‌ی MT، TH، OH و MH را تعیین کنید.

ب) اگر $MO = 30cm$ و $TH = 15cm$ باشد، اندازه‌ی MH، OH، TT'، MT و OT را تعیین کنید.

مسائل جبر و احتمال

هوشنگ شرقی

۱- به کمک قضیه‌ی استقرای ریاضی ثابت کنید:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}\le 2-\frac{1}{n}$$

۲- به کمک استدلال استنتاجی ثابت کنید که اگر عددی طبیعی بر سه بخش‌پذیر نباشد، مربع آن در تقسیم بر سه همواره باقی مانده‌ی ۱ دارد.

۳- به کمک برهان خلف ثابت کنید با فرض گنگ بودن $\sqrt{5}$، عدد $\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt[3]{2}}$ نیز گنگ است.

۴- به کمک استدلال بازگشتی، درستی نابرابری زیر را برای عددهای حقیقی و مثبت a و b اثبات کنید:

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{a}\ge a^2+b^2$$

۵- درستی هر یک از احکام درست زیر را اثبات کنید و نادرستی احکام نادرست را با یک مثال نقض نشان دهید.

الف) مکعب هر عدد گنگ، عددی گنگ است.

ب) مکعب هر عدد گنگ، عددی گویاست.

ج) مکعب هر عدد گویا، عددی گویاست.

۶- پانزده نقطه به تصادف درون شش ضلعی منتظمی به ضلع واحد اختیار می‌کنیم. ثابت کنید دست کم سه تا از این نقاط رئوس مثلثی هستند که مساحت آن از $\frac{\sqrt{3}}{4}$ واحد سطح کمتر است.

۷- مجموعه‌های A و B به صورت زیر معرفی شده‌اند:

$$A=\{x\in\mathbb{Z}\mid x(x-1)\le 2\},$$
$$B=\{x\in W\mid x!\le 30\}$$

مجموعه‌ی $A\Delta B$ را با اعضای آن مشخص کنید.

۸- مجموعه‌های زیر را با نماد ریاضی نمایش دهید:

$$A=\left\{\frac{1}{2},\frac{-1}{6},\frac{1}{12},\frac{-1}{20},\dots\right\}\qquad B=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{5}\right\}$$

۹- درستی روابط زیر را با کمک قوانین جبر مجموعه‌ها اثبات کنید:

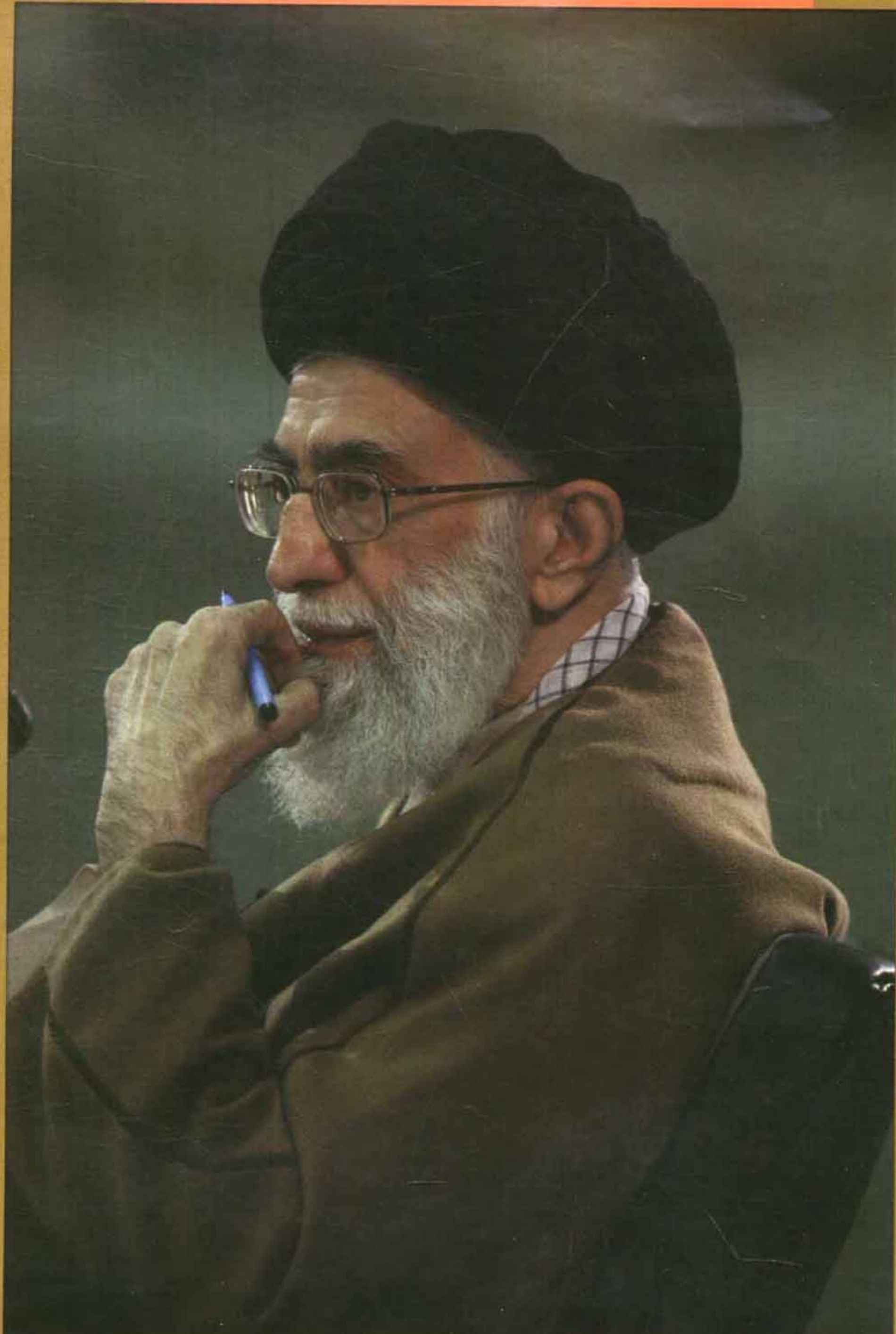
الف) $A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cap C)$

ب) $A\subset B, A'\subset B\Rightarrow B=U$

ج) $A-B=A\Rightarrow B-A=B$

در انتظار بهار

عکاس: خانم نسرین حیدری/چهارمحال و بختیاری



مقام معظم رهبری: من از جوان سه چیز می خواهم:
تحصیل،
تهذیب و
ورزش