مجله ریاضی

رشد

برهان

۵۰

www.roshdmag.org

آموزشی، تحلیلی، اطلاع‌رسانی

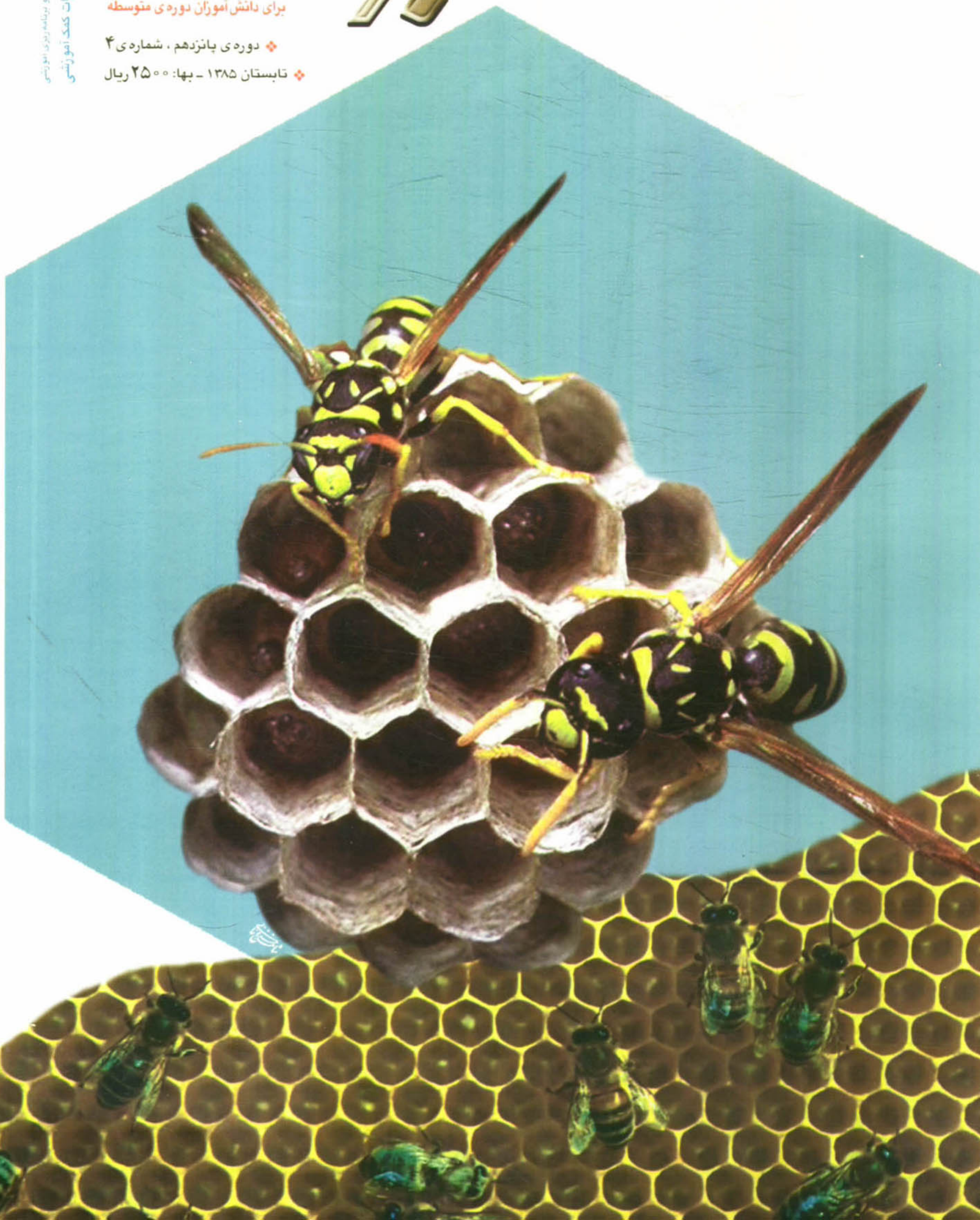
برای دانش‌آموزان دوره‌ی متوسطه

دوره‌ی پانزدهم، شماره‌ی ۴

تابستان ۱۳۸۵ ـ بها: ۲۵۰۰ ریال

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

دفتر انتشارات کمک آموزشی



ریاضیدان و منجم ایرانی

(نیمهٔ دوم سدهٔ سوم و اوایل سدهٔ چهارم)

نیریزی

ابوالعباس فضل بن حاتم نیریزی

از اهل نیریز فارس و یکی از افاضل ریاضی دانان و منجمان دوره ی اسلامی و به قول ابن ندیم در علم نجوم و به ویژه در علم هیأت انگشت نما بود. مترجمان لاتینی او را اناریتیوس[1] می نامیدند. وی در نیمه ی دوم سده ی سوم و احیاناً در اوایل سده ی چهارم فعالیت علمی داشت و معاصر باالمعتضد خلیفه ی عباسی بود و برخی از تألیفات خود را به نام وی و یا وزرای وی نوشته است. برای مثال رساله ی «فی احداث الجو» را به نام المعتضد و کتاب فی معرفة آلات یعرف بها ابعاد الاشیاء را به نام یکی از وزرای او تألیف کرده است.

متأسفانه از زندگی نیریزی اطلاعی در دست نیست جز آن چه جسته و گریخته در آثار ریاضی دانان دیگر درباره ی تألیفات وی دیده می شود. امّا مسلّم است که آثارش همواره مورد مراجعه و اعتماد ریاضی دانان و منجمان بزرگ بوده است. محققان اروپایی وفات نیریزی را در حدود سال ۳۱۰ دانسته اند.

بیرونی در چندین موضع از قانون مسعودی و آثار الباقیه و افرادالمقال فی امر الظلال از نیریزی نام برده و مسائل و مطالبی از وی نقل کرده و به آرای او استناد نموده است. **عمرخیام** نیز در چند موضع از رساله ی «مصادرات» خود از نیریزی یاد کرده است و **نصیرالدین طوسی** در کتاب شکل القطاع استدلالی از قول نیریزی نقل نموده است. **کمال الدین فارسی** در کتاب تنقیح المناظر نوشته است که در زمان بعضی از خلفا(ظاهراً: المعتضد) قوس قُزَحی دیده شد که طبقه ی سیاهی در آن نمودار بود و این امر خلیفه و اطرافیان او را به وحشت انداخت. پس به ابوالعباس فضل بن حاتم نیریزی شارح مجسطی رجوع کردند و او علّت این امر را بیان کرد.

سارتن نوشته است که نیریزی اصطلاح «ظل معکوس»[2] را که معادل با اصطلاح تانژانت است به عنوان یک خط مثلثاتی مستقل به کار برده است(امّا پیش از وی حبش حاسب نیز این اصطلاح را به کار برده بود) و نیز سارتن رساله ی «اسطرلاب کروی» تألیف نیریزی را اثری استادانه و بهترین کتابی معرفی کرده است که مسلمانان درباره ی اسطرلاب نوشته اند.

ادامه در صفحه ی ۳ جلد

مجله ریاضی
رشد برهان متوسطه ۵

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی
www.roshdmag.org
آموزشی، تحلیلی، اطلاع رسانی

● دوره‌ی پانزدهم ● شماره‌ی ۴ ● تابستان ۱۳۸۵ ● شمارگان: ۱۰۰۰۰ نسخه ● مجله ریاضی، برای دانش‌آموزان دوره‌ی متوسطه

ISSN 1735 - 4951

رشد برهان متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

- نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمه‌ی مقاله‌های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه‌ی علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش کامپیوتر و ...)

این شماره:

۲ یاداشت سردبیر
۳ یادهای آموزشی (۴) — پرویز شهریاری
۶ ضرب ماتریس‌ها و خواص عمل ضرب ماتریس — حمیدرضا امیری
۱۴ با راهیان المپیادهای ریاضی — غلامرضا یاسی‌پور
۲۰ معادله‌ی درجه‌ی دوم — احمد قندهاری
۲۴ روش مگس در حل مسائل ریاضی — مرتضی بیات و زهرا خاتمی
۲۸ حل مسائل مسابقه‌ای برهان ۴۷
۳۲ حل معادله‌های غیر ساده مثلثاتی — محمدهاشم رستمی
۳۴ محاسبه فاصله‌ی پای عمود منصف... — حسن جوشن
۳۷ مسأله مسابقه‌ای — پروانه محمدی
۳۸ شگفتی‌های آفرینش — محمد علی شیخان
۴۶ کاربرد مشتق در امور فنی (مسائل بهینه سازی) — میرشهرام صدر
۵۴ مسابقه‌های ریاضی در کشورها — هوشنگ شرقی
۵۹ آلبرت اینشتین — احمد قندهاری
۶۲ بزرگ‌ترین توان m در n! — سید محمدرضا هاشمی موسوی

رشد برهان متوسطه هر سه ماه، یکبار منتشر می‌شود.

- مجلّه در حک و اصلاح و حذف و اضافه مقاله‌ها آزاد است.
- مقاله‌های وارده، باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.
- مقاله‌های رسیده مسترد نمی‌شود.
- استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر با ذکر دقیق ماخذ بلامانع است.

نشانی دفتر مجلّه: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله: ۹-۸۸۸۲۱۱۶۰ داخلی ۲۷۰
تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ - ۷۷۳۳۵۱۱۰

یادداشت سردبیر

از خلاقیت چه می‌دانید؟ آیا شما آدم خلاقی هستید؟ به نظر شما انسان‌های خلاق چگونه‌اند؟ چه شخصیتی دارند؟ شما چه تفاوتی بین هوش و خلاقیت احساس می‌کنید؟ نظرتان راجع به پیشرفت تحصیلی و ارتباط آن با خلاقیت چیست؟ تمامی این سؤال‌ها و جواب‌هایی که به آنها می‌توان داد به برداشت و تعریف من و شما از هوش، خلاقیت و... بستگی دارد. در اینجا سعی می‌کنیم، اگرچه به طور اجمال، راجع به این مفاهیم اطلاعاتی در اختیار شما قرار دهیم، چه بسا پس از مطالعه‌ی این نوشته شما به این نتیجه برسید که شما انسان خلاقی هستید و یا می‌توانید باشید!

۱. فرد خلاق معمولاً کارهایی را انجام می‌دهد که تا پیش از آن هرگز انجام نداده است؛ و یا از دریچه‌ای نگاه می‌کند که تاکنون از آن دریچه نگاه نشده است. لذا جنبه‌هایی از خلاقیت مهم است که به اکتساب نظریه یا دانش جدید، ابداعی در فناوری، به دست آوردن یک فرمول ریاضی جدید و کاربردی یا تحلیل یک موقعیت (مثلاً در فلسفه یا تاریخ) را به گونه‌ای نوین دربرمی‌گیرد.

۲. بین صفات و ویژگی‌هایی همچون هوش، خلاقیت و پیشرفت تحصیلی باید تفاوت قائل شد به این صورت که: هوش، عبارت است از توانایی یادگیری و توانایی تفکر. خلاقیت، توانایی تولید دانش جدید و اشیاء و پدیده‌های جدید است. پیشرفت تحصیلی، فرآیندی است که فرد پس از سال‌ها تحصیل در کلاس‌های مختلف و امتحانات گوناگون و گذراندن پیش‌نیازها در یک رشته به آن دست پیدا می‌کند. حال اگر این صفات را بخواهیم با هم مقایسه کنید به نتایج زیر می‌رسیم:

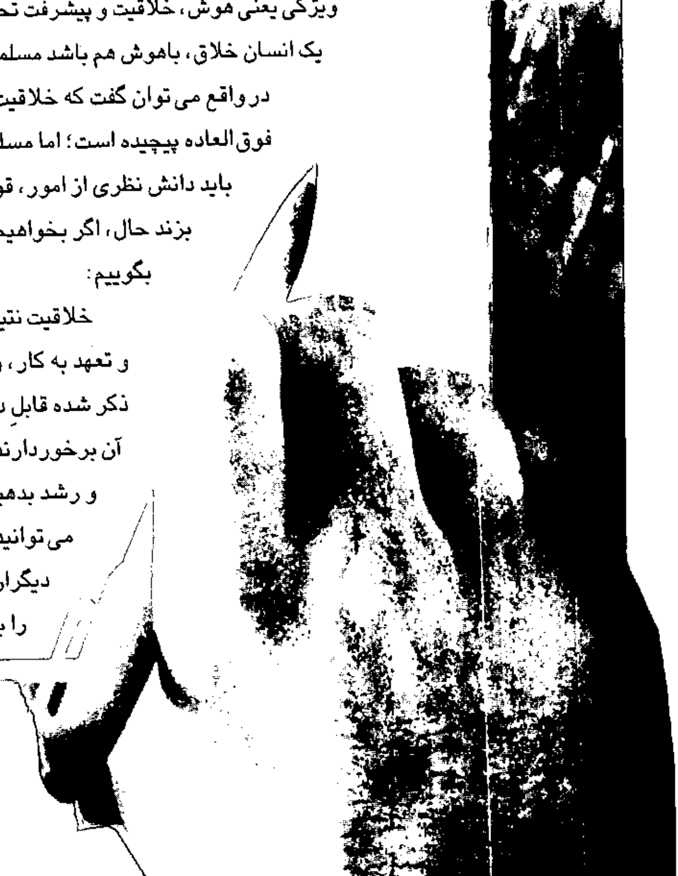
○ اکثر کسانی که پدیده‌های مهم را خلق می‌کنند، باهوش‌اند؛

○ افراد زیادی، حتی با درجه‌ی دکتری، هستند که هیچ ایده‌ی خلاقی در ذهن خود ندارند. آنها باهوش هستند و مهارت نیز دارند اما فرد دیگری باید برای آنها مسأله را فرمول‌بندی کند تا آنها بتوانند به راه حل برسند. پس هوش و پیشرفت تحصیلی، به تنهایی، نشانه‌ای از خلاقیت نیست.

○ دانش‌آموزانی که هم باهوش‌اند و هم خلاق، اغلب نمرات متوسط می‌گیرند. به طور خلاصه می‌توان نتیجه گرفت که این سه ویژگی یعنی هوش، خلاقیت و پیشرفت تحصیلی در عین حال که متفاوتند ولی می‌توانند روی یکدیگر تأثیرگذار باشند. مثلاً اگر یک انسان خلاق، باهوش هم باشد مسلماً هوش او در خلاقیت او تأثیر مثبت و بسزایی خواهد داشت.

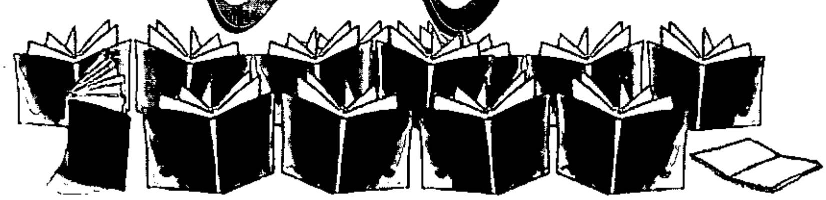
در واقع می‌توان گفت که خلاقیت آمیزه و ترکیبی از چند نوع هوش و صفات شخصیتی است، و البته موضوعی فوق‌العاده پیچیده است؛ اما مسلم است که پیش از این‌که فردی بتواند کار خلاقی در علم و مهندسی انجام دهد، باید دانش نظری از امور، قواعد و روش‌های داشته باشد و نیز باید انگیزه و تعهد نسبت به آن علم در او موج بزند حال، اگر بخواهیم در یک جمع‌بندی کوتاه از مطالب ذکر شده خلاقیت را به تصویر بکشیم باید بگوییم:

خلاقیت نتیجه و اشتراک سه فرایند مهم است، اول دانش و علم لازم برای حرکت، دوم انگیزه و تعهد به کار، و سوم مهارت‌های خلاقیت. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید هریک از سه فرآیند ذکر شده قابلِ دسترسی و قابل رشد است، یعنی در واقع خلاقیت نعمتی است که همه‌ی افراد از آن برخوردارند فقط می‌بایست این عواملی را که روی بروز و شکوفایی آن اثر دارد تقویت کرده و رشد بدهیم، یعنی همواره می‌توان خلاقیت را پرورش داد. حالا به نظر شما، آیا شما می‌توانید خلاق باشید؟ چه ویژگی‌های شخصیتی در وجود خود می‌بینید که شما را از دیگران متمایز می‌کند؟ در این باره در آینده بیشتر خواهیم نوشت. شما هم نظرات خود را برای ما ارسال کنید.



یادهای آموزشی ۳

پرویز شهریاری



افلاطون که او را به یونانی **پلاتون**[1] می‌گویند، فیلسوف و شاگرد **سقراط** بود و در فاصله‌ی سال‌های ۴۲۷ تا ۳۴۷ پیش از میلاد می‌زیست. وی اعتقاد دارد: «بیش‌تر بیماری‌های اجتماعی و سیاسی که از آن‌ها رنج می‌بری، در اختیار خود توست. تنها اراده و نیرویی برای تغییر آن‌ها لازم است. می‌توانی با شیوه‌ای دیگر و با روش خردمندانه‌تری زندگی کنی، به شرطی که در این‌باره بیندیشی و اندیشه‌ی خود را به کارگیری».

جرج سارتون (۱۸۸۴ـ۱۹۵۶)، اهل بلژیک که یورش آلمانی‌ها موجب آوارگی او شد و سرانجام در آمریکا به پژوهش‌های خود در زمینه‌ی تاریخ دانش ادامه داد، در کتاب «سر گذشت دانش» می‌نویسد: «همه‌ی کسانی که در راه راستی تا سرحد فداکاری گام برداشته‌اند، همیشه و در راه خود به کسانی برخورده‌اند که برای آن‌ها زحمت ایجاد کرده‌اند. اعترافی می‌کنیم که اگر برای ما موجب سرافکندگی است، دست‌کم خاطر ما را آرامش می‌بخشد و آن این است که: هر رادمردی که در راه راستی و درستی مبارزه کرد و با شجاعت با اندیشه‌های نادرست که بر سر راه او بود جنگید، سرانجام در برابر مانعی که نمی‌توانست بر آن غلبه کند و یکی از عقیده‌هایی که جرأت و جسارت مبارزه با آن دست نداد از پای درآمد...».

۱.

گفت: از نیروی تخیل خودت راضی هستی؟

گفتم: نه چندان.

گفت: از قدرت تشخیص و استدلالت برای جدا کردن سره از ناسره و صالح از ناصالح چه طور؟

گفتم: بسیار بد است.

گفت: می‌دانستم. مثل همه‌ی آدم‌های عامی سرت را پائین انداخته‌ای و همه را خوب و همه چیز را رو به راه می‌بینی... ریاضیات خوانده‌ای، ولی از استدلال و به‌ویژه نتیجه‌گیری، بهره‌ای نبرده‌ای. دلم برایت می‌سوزد. لابد در زندگی روزانه هم درمانده‌ای.

گفتم: بله درست است درمانده‌ام، ولی...

حرفم را برید و گفت: ولی ندارد... با آن‌که امیدی ندارم، می‌خواهم یک بار دیگر تو را آزمایش کنم. حاضری؟!

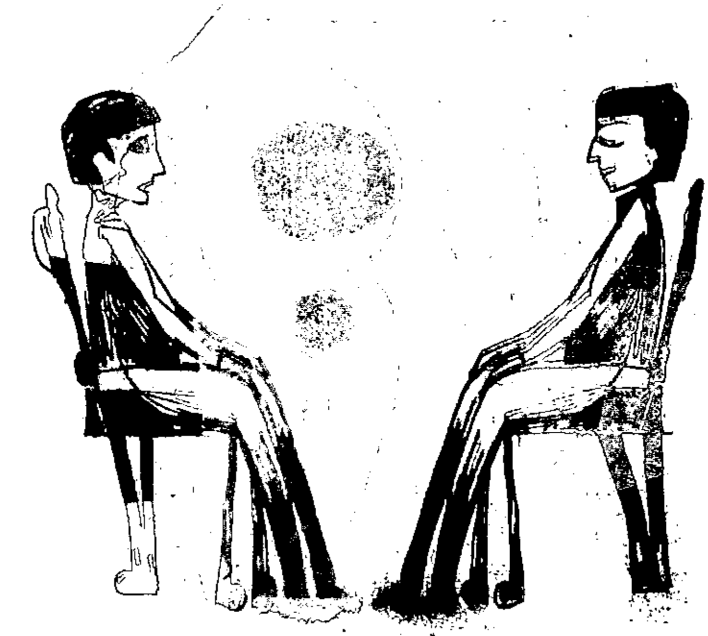
گفتم: همیشه و در تمامی طول زندگی خود، مورد آزمایش بوده‌ام. حتی گاهی همچون یک وسیله‌ی آزمایشگاهی!... اکنون هم حاضرم. ژستی عالمانه به خود گرفت، به چشمانم خیره شد و گفت: چشمانت را ببند!

گفتم: چرا؟ مگر برنامه‌ای برای هیپنوتیزم داری؟

گفت: نه. می‌خواهم به تو یاری کنم تا نیروی تخیلت را بیدار کنم... چشمانت را ببند و برای چند لحظه فرض کن، همه‌ی اندیشمندان، دانش‌پژوهان، شاعران، نویسندگان و فیلسوفان، سخن کوتاه، همه‌ی بزرگان فرهنگ گذشته‌ی این سرزمین، از خاک برخاسته‌اند و زنده و سرحال در سالن بزرگی جمع شده‌اند و می‌خواهند اتحادیه‌ای تشکیل دهند؛ البته برای دفاع از حقوق صنفی خود. برای ورود به این اتحادیه، تنها یک شرط وجود دارد: کسی می‌تواند به عضویت اتحادیه درآید که «صالح» باشد و هیچ ریب و ریایی به او نچسبد. خوب، به نظر تو چه کسانی خواهند توانست کارت عضویت اتحادیه را به دست آورند؟

گفتم: این که خیلی ساده است. گذشته‌ی فرهنگی کشور ما بسیار غنی و پرافتخار است و اگر در طول تاریخ، به‌ندرت حکام دلسوز و لایقی داشته‌ایم، در عوض غنای فرهنگی سرزمین ما، زبانزد خاص و عام است... برای نمونه، در سده‌های میانه که مردم مغرب زمین به بحث‌های بی‌سرانجام خود مشغول بودند و هیچ دانش و دانشمندی را به جهان عرضه نکردند، در سرزمین ایران اندیشمندانی می‌زیسته‌اند که...

برای بار دوم حرفم را برید و گفت: مثل همیشه کلی‌بافی می‌کنی... من که تو را برای سخن‌رانی نیاورده‌ام! نام ببر. از بین این همه



اندیشمندانی که سراغ داری، چه کسانی صلاحیت عضویت در اتحادیه را دارند؟

چند نفر را که فوری به ذهنم رسید نام بردم: **محمدفرزند موسی خوارزمی، زکریای رازی، پورسینا، خیام، ناصرخسرو، خواجه نصیرتوسی، سهروردی مشهور به «شیخ اشراق»، حلاج، ملاصدرای شیرازی مشهور به «صدرالمتالهین» عین‌القضات همدانی...**

توی حرفم دوید و گفت: کافی است... قرار بود کسانی را که نام می‌بری صالح باشند؛ یعنی نه در زمان زندگیشان و نه بعد از مرگشان، کسی آن‌ها را به ناصالح بودن متهم نکرده باشد.

گفتم: خوب، مگر این‌ها که نام بردم...

گفت: عجله نکن. به یک‌یک پرونده‌ها می‌رسیم. از محمد خوارزمی که چیزی نمی‌دانیم، جز این‌که عنوان مجوسی داشته است. زکریای رازی که به دهری بودن شهرت داشته است. پورسینا را هم کسانی متهم به کفر کرده بودند؛ مگر شعر معروف او را به یاد نداری: «درد هر چو من یکی و آن هم کافر ـ پس در همه دهر یک مسلمان نبود». درباره‌ی خیام که نباید بحث کرد؛ با رباعی‌های آن چنانی‌اش. ناصرخسرو که همیشه فراری و دربه‌در بود؛ سفرنامه‌اش را بخوان تا بدانی از دست روزگار چه‌ها که نکشیده است. اما خواجه نصیرتوسی، به دانش و اندیشه‌اش نگاه نکن، او وزیر دربار مغولان بود وبه آن‌ها خدمت می‌کرد. مگر خونریزتر از قوم مغول، طایفه‌ای سراغ داری؟ سهروردی و حلاج و عین‌القضات هم که تکلیفشان معلوم است؛ لابد دلیلی داشته که اعدامشان کرده‌اند. درباره‌ی ملاصدرا تنها تو را راهنمایی می‌کنم، جزوه‌ی کوچکی را که به زبان فارسی درباره‌ی مخالفان خود نوشته است، بخوانی.

گیج شده بودم، با وجود این گفتم: پس تکلیف آدم‌هایی مثل **انوری، عنصری و منوچهری** روشن است... آیا درباره‌ی کسانی چون **عبیدزاکانی، شیخ بهایی، جمشید کاشانی و محمد غزالی** هم حرفی داری؟

گفت: نه تنها درباره‌ی این‌ها... اگر بخواهی، حاضرم به پرونده‌ی **رودکی، سعدی، حافظ و فردوسی** هم برسم.

گفتم: پس به این ترتیب، این اتحادیه یک «مجموعه‌ی تهی» از آب درمی‌آید.

گفت: اگر دلیلی برای رد کردن حرف‌های من داری، بگو.

وقتی به کلی کلافه شده بودم، چشمانم را باز کردم. دیدم داستان من شبیه داستان آن طلبکار است که وقتی به بدهکار خود برای گرفتن پولش مراجعه کرد، بدهکار به او گفت: «بیا حساب کنیم.» طلبکار گفت: «چه حسابی؟! من آمده‌ام پولم را بگیرم.» و بدهکار گفت: «مگر با حساب کردن مخالفی؟ گوش کن تو پولی از من می‌خواهی، درست است؟ خب، در عوض من هم همان مبلغ را به تو بدهکارم. این به آن در.» طلبکار ساده‌دل رفت، ولی پیش خود اندیشید: «حساب درست بود، ولی پول من چه شد؟...» برگشت و به بدهکار خود گفت: «من حساب نمی‌خواهم، پولم را بده.»

به دوستم گفتم: استدلال تو به ظاهر درست، ولی من استدلال نمی‌خواهم، تنها فرهنگ و دانش والای کشورم را به من بازگردان.

۲-

پیروان راستی، اگر نادار هم باشند گرامی‌اند، ولی هواخواهان دروغ، اگر دارا و پرتوان هم باشند، تبهکارند.

گاتاها، یسنای ۴۷، بند ۴

با خشم رو به من کرد و گفت: آمدند و هر چه ناسزا بود، بار تو و دیگران کردند و تو همچنان به کار خودت مشغولی؟

با لحنی آشتی‌جویانه سفارش سعدی را یادآور شدم که:

دو چیز طیره عقل است: دم فرو بستن
به وقت گفتن و گفتن به وقت خاموشی.

او پرسید: زمان گفتن و خاموشی را چگونه انتخاب می‌کنی؟

گفتم: سفارش پورسینا را پذیرفته‌ام که: حقیقت را با کسانی که به‌خاطر باور بی‌اندازه به خود، حتی روشنی روز را منکر می‌شوند، در میان نگذار.

گفت: یعنی گمان می‌کنی همه‌ی حقیقت نزد توست؟

گفتم: اگر کسی گمان کند از همه چیز آگاه است و به تمامی حقیقت دست یافته است، او را رها کن؛ چرا که همین باور نشانه‌ی نادانی اوست. جمله‌ی زیبایی از بزرگمهر نقل

کرده‌اند: «همه چیز را همگان دانند و همگان هنوز از مادر نزاده‌اند.» و از این زیباتر، سخن عین‌القضات همدانی است که می‌گوید: «... چندین هزار جنازه به گورستان برند، یکی از اینان به شک نرسیده بود و از چندین هزار به شک رسیده، یکی را گرفتاری طلب نبود، و چندین هزار را درد طلب بگیرد و یکی به راه راست نیفتد...»

و سنایی، شاعر حقیقت طلب سده‌ی ششم هجری، چه درد و رنجی را تحمل می‌کرد که به ما می‌گوید:

هر خسی از رنگِ گفتاری به این ره کی رسد؟
درد باید پرده‌سوز و مرد باید گام‌زن
روزها باید که تا یک مشت پشم از پشت میش
زاهدی را خرقه گردد یا حماری را رسن
ماه‌ها باید که تا یک پنبه‌دانه زآفتاب
زاهدی را حلّه گردد یا شهیدی را کفن
سال‌ها باید که تا یک سنگ اصلی ز آفتاب
لعل گردد در بدخشان یا عقیق اندریمن
عمرها باید که تا یک کودکی از روی طبع
عالمی گردد نکو یا شاعری شیرین سخن
قرن‌ها باید که تا از پشت آدم نطفه‌ای
زاهدی در کعبه گردد یا اویسی در قَرَن

تازه این درد امروز و دیروز نیست. ببینید خیام، ریاضیدان و اخترشناس بزرگ، نزدیک به هزار سال با چه اندوهی می‌گوید:

ناآمدگان اگر بدانند که ما
از دهر چه می‌کشیم، نایند دگر

و در پیش‌گفتار کتاب مشهور و پر مضمون «جبر» خود، چگونه از روزگار خود گله می‌کند: «... دچار زمانه‌ای شده‌ایم که اهل دانش از کار افتاده و جز اندکی، کسی نمانده است تا از فرصت برای بحث و پژوهش علمی استفاده کند. بر عکس حکیم‌نمایان دوره‌ی ما، همه دست‌اندکارند تا حق را با باطل بیامیزند، جز ریا و تزویر کاری ندارند، اگر دانش و معرفتی هم دارند، صرف غرض‌های پست جسمی می‌کنند و اگر با کسی روبه‌رو شوند که در جست‌وجوی حقیقت راستین است و روی از باطل و زور می‌گرداند، او را استهزا و تحقیر می‌کنند...»

سخن مرا برید و گفت: پر حرفی کردی! می‌خواهی بگویی نه حقیقتی وجود دارد که بتوان به آن رسید و نه راهی برای دست یافتن به زندگی انسانی...

گفتم: من چنین باوری ندارم. هم می‌توان به حقیقت نزدیک شد و هم می‌توان در راهی تلاش کرد که جامعه‌ی انسانی را گام به گام به زندگی آزادتر، عادلانه‌تر و انسانی‌تر نزدیک کند.

پرسید: چه طور و از چه راهی؟

گفتم: این را باید از اندیشمندان و خردمندان پرسید. به قول **زرتشت**: «به بهترین سخنان گوش فرا دهید و آن را با اندیشه‌ی روشن بسنجید. آن‌گاه هر کس می‌تواند راه خود را آزادانه برگزیند [گاتاها، یسنای ۳۰، بند ۲].

شاید این سفارش **ابونصر فارابی** که بیش‌تر از هزار سال پیش گفته است، بتواند اندکی روشنگر باشد. بحث فارابی به پژوهش‌های علمی مربوط می‌شود، ولی مگر جامعه شناسی یا تلاش برای نزدیک‌تر شدن به حقیقت، علم نیست؟

«... برای این‌که اندیشمند خوبی برای تنظیم نظریه‌ها باشیم، بدون این‌که ربطی با دانش ویژه‌ای داشته باشد، باید سه شرط را داشته باشیم: «۱. همه‌ی قانون‌ها را به خوبی بشناسیم؛ ۲. توانایی به نتیجه‌گیری‌های لازم را از این قانون‌ها و از داده‌هایی که در این دانش وجود دارد، داشته باشیم؛ ۳. توانایی پاسخگویی به نظرهای نادرست را داشته باشیم و بتوانیم اندیشه‌ها و دیدگاه‌های دیگران را تجزیه و تحلیل کنیم، درست را از نادرست جدا کنیم و اشتباه را بر طرف سازیم...»

دو تکه، یکی از **بودا** (به سانسکریت یعنی روشن و آگاه) که به تقریب از ۵۶۳ تا ۴۸۳ پیش از میلاد زندگی می‌کرد، دیگری از **رنه دکارت** (۱۵۹۶ ـ ۱۶۵۰ میلادی) می‌آورم. بودا، روحانی و حکیمی از شرق، و دکارت فیلسوف و ریاضیدانی از غرب است. فاصله‌ی زمانی بین آن‌ها هم کوتاه نیست. بودا در سده‌ی ششم پیش از میلاد می‌زیست و دکارت در سده‌ی هفدهم بعد از میلاد؛ یعنی زمانی نزدیک به ۲۳۰۰ سال، آن‌ها را از هم جدا می‌کند. با وجود این، سفارش‌های آن‌ها، چنان به هم شباهت دارد که به نظر می‌رسد، دو مترجم جداگانه، متن واحدی را ترجمه کرده‌اند. در آغاز سخن بودا را بیاوریم:

«ما نباید گفته‌ای را تنها به این دلیل که دیگران گفته‌اند، باور کنیم. ما نباید خبرهای دیگران را، تنها به این خاطر که از قدیم به ما رسیده‌اند، بپذیریم. نباید بدون اندیشه به گفته و نوشته‌ی دانشمندان و خردمندان، تنها به این دلیل که گفته و نوشته‌ی دانشمندان و خردمندان است، تسلیم شویم. نباید به استدلال‌های خودمان اطمینان داشته باشیم. نباید تنها به ملاحظه‌ی شباهت و قیاس چیزی را بپذیریم. نباید کلام استاد را، چون کلامی از استاد است، قبول کنیم. ما باید تنها آنچه را که با خرد و فهم و درک خودمان، به درستی آن اعتقاد پیدا کرده‌ایم، قبول کنیم؛ خواه کلام باشد یا نوشته یا چیز دیگری.»

و سخن رنه دکارت:

«... وقتی موضوعی را بررسی می‌کنیم، نباید چیزی را جست‌وجو کنیم که دیگران فکر می‌کنند یا خودمان تصور می‌کنیم. بلکه باید در جست‌وجوی چیزی باشیم که یا آشکارا و به روشنی دیده می‌شود و شروط یا استدلال قیاسی قابل اثبات است؛ زیرا دانش به صورت دیگری به دست نمی‌آید...» خودم را آماده کرده بودم تا درباره‌ی جامعه‌ی عادلانه و انسانی صحبت کنم که متوجه شدم، دوست من بی‌خداحافظی رفته است.

زیرنویس ....

1. Plato

ضرب ماتریس‌ها و خواص عمل ضرب ماتریسی

عمل ضرب ماتریس‌ها جزو اعمال بسیار مهم بین ماتریس‌هاست که در کتاب ریاضی سال دوم شروع و در کتاب «هندسه تحلیلی و جبر خطی پیش دانشگاهی» همراه با بعضی از ویژگی‌های عمل ضرب، کامل شده است. در این مقاله بیش‌تر کوشیده‌ایم، خواص عمل ضرب بررسی شود.

ضرب یک ماتریس سطری در یک ماتریس ستونی

اگر A یک ماتریس سطری با p ستون و B یک ماتریس ستونی با p سطر باشد، در این صورت حاصل ضرب $A \times B$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A \times B = \begin{bmatrix} a_{11} a_{12} \cdots a_{1p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{1p} \end{bmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1p}b_{1p}$$

$$\Rightarrow A_{1\times p} \times B_{p\times 1} = \sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{k1}$$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$، در این صورت، حاصل $A \times B$ را به‌دست آورید.

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = 2\times 0 + 1\times(-2) + 3\times 1 + (-2)\times 4 = -7$$

حال اگر A ماتریسی $m \times p$ و B ماتریسی $p \times n$ باشد، در این صورت، حاصل ضرب ماتریس A در B، یعنی $A \times B$، ماتریسی است از مرتبه‌ی $m \times n$ (مرتبه‌ی ماتریس حاصل، از حذف ستون و سطر مشترک به دست می‌آید) که در حالت کلی درایه‌ی روی سطر i ام و ستون j ام در این ماتریس از ضرب سطر i ام A در ستون j ام B به دست می‌آید. به عبارت دیگر، اگر فرض کنیم $A_{mp} \times B_{pn} = C_{mn}$ و $C = \begin{bmatrix} c_{ij} \end{bmatrix}_{mn}$، در این صورت:

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} a_{i1} a_{i2} \cdots a_{ip} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{bmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$$

$$\Rightarrow A \times B = C = \begin{bmatrix} c_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} \end{bmatrix}$$

مثال: فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. در این صورت، اگر $A \times B = C = \begin{bmatrix} c_{ij} \end{bmatrix}$ و $B \times A = D = \begin{bmatrix} d_{ij} \end{bmatrix}$، آن گاه: اولاً درایه‌های

حمیدرضا امیری

c_{23} و d_{34} را به دست آورید. ثانیاً دو ماتریس C و D را بیابید.

$$c_{23}=\begin{bmatrix}2 & 0 & -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\2\\1\\0\end{bmatrix}=-4+0-3+0=7$$

(سطر دوم A در ستون سوم B ضرب شده است.)

$$d_{34}=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\\-1\end{bmatrix}=-2+0-1=-3$$

(سطر سوم A در ستون چهارم B ضرب شده است.)

$$A_{3\times4}\times B_{4\times3}=C_{3\times3}$$

$$C=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & -1\\2 & 0 & -3 & 1\\4 & 0 & 2 & -1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3 & 5 & -2\\1 & 4 & 2\\2 & 0 & 1\\-1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}12 & 12 & 5\\ -1 & 11 & -7\\ 17 & 19 & -6\end{bmatrix}$$

$$B\times A=\begin{bmatrix}3 & 5 & -2\\ 1 & 4 & 2\\ 2 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & -1\\ 2 & 0 & -3 & 1\\ 4 & 0 & 2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 6 & -10 & 5\\ 17 & 2 & -5 & 1\\ 6 & 4 & 8 & -3\\ 1 & -2 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

آزمون: اگر $A=[1\ 2\ -3]$ و $B=\begin{bmatrix}-2\\ -1\\ 3\end{bmatrix}$، در این صورت مجموع درایه‌های ماتریس BA کدام است؟

الف) ۱ ب) ۳ ج) ۸- د) صفر

حل: گزینه‌ی (د) صحیح است.

$$B\times A=\begin{bmatrix}-2\\ -1\\ 3\end{bmatrix}[1\ 2\ -3]=\begin{bmatrix}-2 & -4 & 6\\ -1 & -2 & 3\\ 3 & 6 & -9\end{bmatrix}$$

(سطر اول B، یعنی [۲-] در ستون اول A، یعنی [۱] و همچنین در ستون دوم A، یعنی [۲] و... ضرب می‌شود.)

مجموع درایه‌ها $=-2-4+6-1-2+3+3+6-9=0$

تعریف توان برای ماتریس: اگر A یک ماتریس مربعی باشد، در این صورت، $A^0=I$ و $A^2=A\times A$ و $A^3=A\times A^2$ و... و $A^n=A\times A^{n-1}$.

ویژگی‌های عمل ضرب ماتریس‌ها

ویژگی ۱. اگر r و s دو عدد حقیقی و A و B دو ماتریس باشند به طوری که $A\times B$ قابل تعریف باشد، در این صورت داریم:

$(rA)\times(sB)=(rs)A\times B$

الف) $(rA)\times B=A\times(rB)=r(A\times B)$

ب) $(-A)\times(-B)=A\times B$

ج) $A\times(-B)=-(A\times B)$

د) $(-A)\times B=-(A\times B)$

اثبات ویژگی ۱. فرض کنیم A ماتریسی $m\times p$ و B ماتریسی $p\times n$ باشد و فرض کنیم $A\times B=C=[c_{ij}]$. در این صورت:

درایه‌ی سطر iام و ستون jام ماتریس $(rA)\times(sB)=$

$=$ (سطر iام ماتریس rA) × (ستون jام ماتریس sB) $=$

$$=\sum_{k=1}^{p}(ra_{ik})(sb_{kj})=(rs)\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}$$

$=(rs)\times C$ درایه‌ی سطر iام ستون jام

ویژگی ۲. ضرب ماتریس‌ها دارای خاصیت توزیع‌پذیری نسبت به جمع است؛ یعنی:

$A_{ml}\times(B_{lp}+C_{pn})=A\times B+A\times C$

ویژگی ۳. ضرب ماتریس‌ها دارای خاصیت شرکت‌پذیری است؛ یعنی:

$(A\times B)\times C=A\times(B\times C)$

(اثبات دو ویژگی اخیر در کتاب درسی وجود دارد.)

ویژگی ۴. اگر A ماتریس مربعی از مرتبه‌ی n و I_n ماتریس واحد (همانی) هم‌مرتبه با A باشد، در این صورت داریم:

$A\times I_n=I_n\times A=A$

(I_n عضو خنثی نسبت به عمل ضرب است.)

ویژگی ۵. اگر A و B دو ماتریس باشند و $A\times B$ تعریف شود و سطر iام ماتریس A صفر باشد، آن‌گاه سطر iام ماتریس $A\times B$ صفر است.

ویژگی ۶. اگر A و B دو ماتریس باشند و $A\times B$ تعریف شود و ستون jام ماتریس B صفر باشد، در این صورت، ستون

زام ماتریس $A \times B$ صفر است.

ویژگی ۷. اگر A ماتریسی قطری و B مربعی و هم‌مرتبه با A باشد، در این صورت:

الف) برای محاسبه‌ی $(A \times B)$ کافی است هر درایه‌ی روی قطر اصلیA را در سطر نظیرش در ماتریس B ضرب کنیم. به مثال زیر دقت کنید:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

(در سطر اول B، عدد ۲ و در سطر دوم عدد (۱−) و در سطر سوم عدد ۳ را ضرب کرده‌ایم.)

ب) برای محاسبه‌ی $B \times A$، کافی است هر درایه‌ی روی قطر اصلیِ A را در ستون نظیرش در ماتریس B ضرب کنیم. به مثال زیر توجه کنید:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 9 \\ -2 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

تذکر مهم: ضرب ماتریس‌ها در حالت کلی، خاصیت جابه‌جایی ندارد (حتی در حالتی که A و B هر دو مربعی و هم‌مرتبه باشند، ممکن است: $AB \neq BA$)

ویژگی ۸. اگر A و B دو ماتریس قطری و هم‌مرتبه باشند، در این صورت همواره داریم:

$A \times B = B \times A$

(مجموعه‌ی ماتریس‌های قطری و هم‌مرتبه نسبت به عمل ضرب خاصیت جابه‌جایی دارد.)

ویژگی ۹. اگر A ماتریسی اسکالر و B ماتریسی هم‌مرتبه با A و دلخواه باشد، همواره داریم:

$A \times B = B \times A$

تذکر: اثبات هریک از ویژگی‌های ۸ و ۹، با توجه به ویژگی ۷، به‌راحتی امکانپذیر است.

ویژگی ۱۰. (در ماتریس‌های 2×2) اگر فرض کنیم $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \middle| a, b \in IR \right\}$ و $H = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \middle| a, b \in IR \right\}$، در این صورت، هر دو مجموعه‌ی M و H نسبت به عمل ضرب ماتریسی خاصیت جابه‌جایی دارند. به عبارت دیگر، اگر فرض کنیم: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix}$، $(A, B \in M)$ و $C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ و $D = \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}$، $(C, D \in H)$، در این صورت همواره داریم:

$A \times B = B \times A$ یا $C \times D = D \times C$

تذکر: هر عضو M (یا H) فقط با ماتریسی به فرم خودش، یعنی ماتریسی از M (یا از H) تعویض‌پذیر است. به عبارت دیگر، اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ و $AB=BA$، در این صورت باید داشته باشیم: $x=t$ و $y=z$.

ویژگی ۱۱. اگر دو ماتریس مربعی و هم‌مرتبه‌ی A و B تعویض‌پذیر باشند $(A \times B = B \times A)$، در این صورت تمام اتحادهای جبری برای آن‌ها برقرار است. برای مثال:

$$AB = BA \Leftrightarrow (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$AB = BA \Leftrightarrow (A-B)(A+B) = A^2 - B^2$$

نتیجه: چون ماتریس همانی یا وحد (I) با هر ماتریس هم‌مرتبه‌ی خود تعویض‌پذیر است، تمام اتحادهای جبری برایI و هر ماتریس هم‌مرتبه با آن برقرار است. برای مثال:

$$(A^3 - I^3) = (A - I)(A^2 + AI + I^2)$$

ویژگی ۱۲. اگر دو ماتریس مربعی و هم‌مرتبه‌ی A و B تعویض‌پذیر باشند $(A \times B = B \times A)$، در این صورت برای هر $m, n \in IN$ داریم:

$$A^m \times B^n = B^n \times A^m$$

اثبات: ابتدا برای هر $n \in \mathbb{N}$ با استفاده از استقرا ثابت می‌کنیم: $A \times B^n = B^n \times A$.

$n = 1 : (A \times B) = (B \times A)$

فرض استقرا:

$n = k : A \times B^k = B^k \times A$

حکم استقرا:

$n = k+1 : A \times B^{k+1} = B^{k+1} \times A$

$$
\begin{aligned}
& A \times B^k = B^k \times A \\
& \Rightarrow (A \times B^k) \times B = (B^k \times A) \times B \\
& \Rightarrow A \times (B^k \times B) = B^k \times (A \times B) \\
& \Rightarrow A \times B^{k+1} = B^k \times (B \times A) = (B^k \times B) \times A \\
& \Rightarrow A \times B^{k+1} = B^{k+1} \times A
\end{aligned}
$$

(که در این صورت حکم ثابت شده است.)

حال اگر فرض کنیم $B^n = C$ ، در این صورت قبلاً ثابت باشد که: $A \times C = C \times A$ یا $C \times A = A \times C$ ، و با استفاده از حکم قبل می‌توان برای هر $m \in \mathbb{N}$ نوشت: $C \times A^m = A^m \times C$ یا $B^n \times A^m = A^m \times B^n$ که ویژگی ۱۲ به اثبات می‌رسد.

تذکر: در تعریف توان‌های طبیعی یک ماتریس مربعی، به استقرا ثابت می‌شود:

$$A^n = A \times A^{n-1} = A^{n-1} \times A$$

ویژگی ۱۳. اگر A یک ماتریس قطری باشد، برای محاسبه‌ی A^n کافی است درایه‌های روی قطر اصلی را به توان n برسانیم. به مثال زیر توجه کنید:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^4 = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{bmatrix}$$

نتیجه: اگر A ماتریسی اسکالر و $a_{11} = k$ باشد، در این صورت داریم:

$$A^n = \begin{bmatrix} k^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k^n & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k^n \end{bmatrix} = k^n \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = k^n I$$

ویژگی ۱۴. (در ماتریس‌های ۲×۲) اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$ ماتریسی شبه‌مثلثی باشد، در این صورت همواره داریم:

$$\text{I) } n \text{ زوج}: \ A^n = \begin{bmatrix} (ab)^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & (ab)^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix}$$

$$\text{II) } n \text{ فرد}: \ A^n = \begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}} \\ a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

(اثبات هر دو قسمت (I) و (II)، به استقرا روی n امکان‌پذیر است.)

تذکر مهم: قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها، در حالت کلّی برقرار نیست؛ یعنی در حالت کلی از $A \times B = A \times C$ نمی‌توان نتیجه گرفت که: $B = C$. به مثال زیر توجه کنید:

مثال: فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ ، در این صورت داریم:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A \times C = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

درواقع، با این که می‌بینید $A \times B = A \times C$ ، ولی $B \neq C$.

نتیجه‌ی مهم: در ماتریس‌ها از تساوی $A \times B = \bar{o}$ ، در حالت کلّی، نمی‌توان نتیجه گرفت که $B = \bar{o}$ یا $A = \bar{o}$. به

این مثال توجه کنید:

مثال: فرض کنیم $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$، در این صورت داریم:

$$A\times B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

در صورتی که $A\neq\bar{o}$ و $B\neq\bar{o}$.

ویژگی ۱۵. اگر A و B دو ماتریس مربعی و تعویض‌پذیر باشند $(A\times B=B\times A)$، در این صورت داریم:

$$(A\times B)^n=A^n\times B^n$$

اثبات: به استقرا روی n، فرض کنیم $A\times B=B\times A$.
در این صورت داریم:

$$n=1\Rightarrow A\times B=A\times B$$

فرض استقرا: $n=k\Rightarrow (A\times B)^k=A^k\times B^k$

حکم استقرا: $n=k+1\Rightarrow (A\times B)^{k+1}=A^{k+1}\times B^{k+1}$

$$(A\times B)^{k+1}=(A\times B)\times(A\times B)^k$$
$$=(A\times B)\times(A^k\times B^k)$$

$$(A\times B)^{K+1}=A\times(B\times A^k)\times B^k \overset{\text{ویژگی ۱۲}}{=} A\times(A^k\times B)\times B^k$$
$$=(A\times A^k)\times(B\times B^k)=A^{k+1}\times B^{k+1}$$

ویژگی ۱۶. اگر A و B دو ماتریس مربعی و هم‌مرتبه باشند، در این صورت همواره داریم:

$$\mathrm{trace}(A\times B)=\mathrm{trace}(B\times A)$$

آزمون: اگر A و B ماتریس‌هایی ۲×۲ و $A\times B=\begin{bmatrix}10 & 3\\ 8 & 8\end{bmatrix}$ در این صورت $(B\times A)$ کدام است؟

الف) $\begin{bmatrix}2 & -1\\ 12 & 15\end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix}4 & 1\\ 0 & 14\end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix}3 & 4\\ 4 & 13\end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix}5 & 1\\ -4 & 8\end{bmatrix}$

حل: گزینه‌ی (ب) صحیح است؛ زیرا در گزینه‌ها فقط گزینه‌ی (ب) ماتریسی را معرفی می‌کند که حاصل جمع درایه‌های روی قطر اصلی آن یا $\mathrm{trace}(A\times B)$ یعنی ۱۸ برابر است.

نتیجه: اگر A، B و C سه ماتریس مربعی و هم‌مرتبه باشند، داریم:

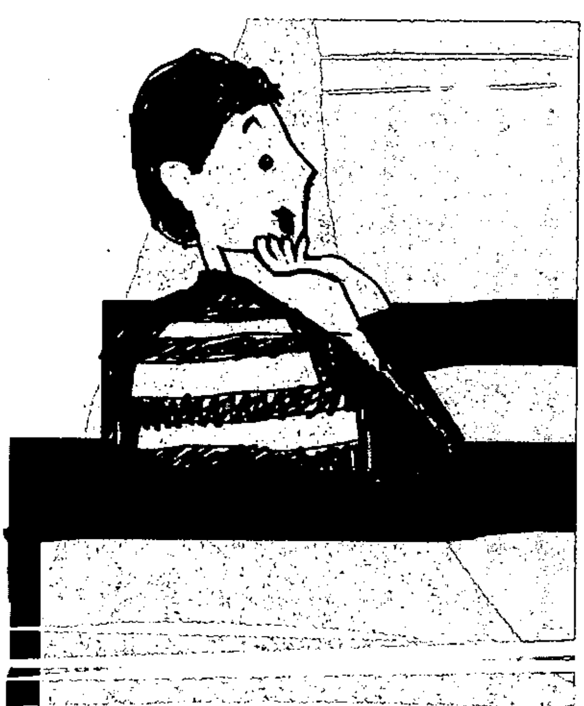
$$\mathrm{trace}(A\times B\times C)=\mathrm{trace}(B\times C\times A)$$

اثبات:

$$\mathrm{trace}(A\times B\times C)=\mathrm{trace}[A\times(B\times C)]=\mathrm{trace}[(B\times C)\times A]$$
$$=\mathrm{trace}(B\times C\times A)$$

ویژگی ۱۷. مجموعه‌ی ماتریس‌های بالا مثلثی از مرتبه‌ی n (پائین مثلثی از مرتبه‌ی n) نسبت به عمل ضرب بسته است. درواقع، ضرب دو ماتریس بالا مثلثی (پائین مثلثی) و هم‌مرتبه ماتریسی است بالا مثلثی (پائین مثلثی).

نتیجه: حاصل‌ضرب دو ماتریس قطری و هم‌مرتبه،



ماتریسی قطری از همان مرتبه است.

تعریف ماتریس خودتوان: ماتریس مربعی A را **خودتوان** می‌نامیم، هرگاه:

$$A^2 = A$$

مثال: ماتریس $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ ماتریسی خودتوان است، زیرا:

$$A^2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = A$$

تمرین: نشان دهید، ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ ماتریسی خودتوان است.

نتیجه: اگر A ماتریسی خودتوان باشد، در این صورت برای هر $n \in IN$ داریم:

$$A^n = A$$

اثبات به عهده‌ی شما (با فرض $A^2 = A$ و با کمک استقرا، به‌راحتی حکم ثابت می‌شود).

تعریف ماتریس پوچ‌توان: ماتریس مربعی A را **پوچ‌توان** از مرتبه‌ی m می‌نامیم، هرگاه m کوچک‌ترین توانی باشد که $A^m = \bar{o}$.

واضح است که برای هر $n > m$ همواره $A^n = \bar{o}$ و برای هر $k < m$، $A^k \neq \bar{o}$ است.

مسأله: نشان دهید هر ماتریس به شکل $A = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$، پوچ‌توان از مرتبه‌ی ۳ است.

حل: ثابت می‌کنیم $A^2 \neq \bar{o}$ و $A^3 = \bar{o}$.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_1a_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A \times A^2 \begin{bmatrix} 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_1a_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{o}$$

نتیجه: اگر A ماتریسی پوچ‌توان از مرتبه‌ی m و α یک عدد حقیقی باشد، در این صورت (αA) نیز پوچ‌توان از مرتبه‌ی m است.

اثبات: $(\alpha A)^m = \alpha^m A^m = \alpha^m \bar{o} = \bar{o}$

نتیجه: حاصل ضرب دو ماتریس تعویض‌پذیر مانند A و B که یکی از آن‌ها مثلاً A پوچ‌توان از مرتبه‌ی m باشد، ماتریسی پوچ‌توان از مرتبه‌ی m است.

اثبات: فرض کنیم $AB = BA$ و $A^m = \bar{o}$، در این صورت داریم:

$$(AB)^m = A^m B^m = \bar{o}B^m = \bar{o}$$

نتیجه: اگر A ماتریسی ناصفر و خودتوان باشد، آن‌گاه پوچ‌توان نیست؛ زیرا برای هر $n \in IN$ همواره داریم: $A^n = A \neq \bar{o}$. پس A پوچ‌توان نیست.

مسأله: اگر $AB=A$ و $BA=B$، ثابت کنید A و B خودتوان هستند.

حل: $AB = A \Rightarron (AB)A = AA$

(A خودتوان است.)

$$\Rightarrow A(BA) = A^2 \Rightarrow A(B) = A^2 \Rightarrow A = A^2$$

(به همین ترتیب ثابت می‌شود که: $B^2 = B$. شما ثابت کنید.)

طرح و حل چند مسأله‌ی مهم

مسأله‌ی ۱. اگر A، B و C ماتریس‌هایی مربعی از مرتبه‌ی n باشند و داشته باشیم: AC=CA و BC=CB ، ثابت کنید که ماتریس (AB) با C تعویض‌پذیر است.

حل:

$$(A\times B)\times C = A\times(B\times C) = A\times(C\times B) = (A\times C)\times B$$
$$(C\times A)\times B = C\times(A\times B)$$

مسأله‌ی ۲. اگر A و B دو ماتریس $n\times n$ باشند، ثابت کنید:

$$\operatorname{trace}(A\pm B) = \operatorname{trace}(A)\pm\operatorname{trace}(B)$$

حل: فرض کنیم $A=[a_{ij}]$ و $B=[b_{ij}]$. در این صورت داریم:

مجموع درایه‌های روی قطر اصلی $(A\pm B) = \operatorname{trace}(A\pm B)$

$$=\sum_{i=1}^{n}(a_{ii}\pm b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n}(a_{ii})\pm\sum_{i=1}^{n}(b_{ii})$$
$$=\operatorname{trace}(A)\pm\operatorname{trace}(B)$$

مسأله‌ی ۳. اگر A ماتریسی $n\times n$ و α یک عدد حقیقی باشد، ثابت کنید:

$$\operatorname{trace}(\alpha A) = \alpha\operatorname{trace}(A)$$

حل: فرض کنیم $A=[a_{ij}]$ ، $\operatorname{trace}(\alpha A) = \alpha\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$

$$=\alpha\sum_{i=1}^{n}a_{ii} = \alpha\operatorname{trace}(A)$$

مسأله‌ی ۴. ثابت کنید، هیچ دو ماتریس $n\times n$ مانند A و B یافت نمی‌شوند که در رابطه‌ی AB-BA=I صدق کنند.

حل: فرض کنیم چنین ماتریس‌هایی وجود داشته باشند (فرض خلف)، آن‌گاه:

$$AB-BA=I \Rightarrow \operatorname{trace}(AB-BA)=\operatorname{trace}(I)$$
$$\Rightarrow \operatorname{trace}(AB)-\operatorname{trace}(BA)=n \Rightarrow 0=n \quad (\text{تناقض})$$

و تناقض حاصل یعنی $n=0$ فرض خلف را باطل می‌کند و حکم برقرار خواهد بود.

مسأله‌ی ۵. اگر A ماتریسی مربعی از مرتبه‌ی n و $A^2=I$ ، ثابت کنید ماتریس $\frac{1}{2}(I-A)$ خودتوان است.

حل:

$$\left[\frac{1}{2}(I-A)\right]^2 = \frac{1}{4}(I-A)^2 = \frac{1}{4}(I^2-2IA+A^2)$$
$$=\frac{1}{4}(I-2A+I) = \frac{1}{4}(2I-2A)$$
$$=\frac{1}{2}(I-A)$$

مسأله‌ی ۶. اگر $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ ، ثابت کنید:

$$A^n=\begin{bmatrix}2^n & 3(2^n-1)\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

حل: اثبات به استقرا روی n:

$$n=1\rightarrow A^1=\begin{bmatrix}2^1 & 3(2^1-1)\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$n=k\rightarrow A^K=\begin{bmatrix}2^K & 3(2^K-1)\\ 0 & 1\end{bmatrix} \text{ فرض استقرا}$$

$$A^{K+1}=\begin{bmatrix}2^{K+1} & 3(2^{K+1}-1)\\ 0 & 1\end{bmatrix} \text{ حکم استقرا}$$

$$A^{K+1}=A^K\times A=\begin{bmatrix}2^K & 3(2^K-1)\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}2^{K+1} & 2^K\times 3+3(2^K-1)\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}2^{K+1} & 3[(2^K+2^K)-1]\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^{K+1} & 3(2^{K+1}-1)\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

با راهیان المپیادهای ریاضی ۳

غلامرضا یاسی پور

اشاره: در شماره های قبل، مسائلی را درباره ی قوت نقطه مطرح و ۴ مساله ی آن را حل کردیم، اینک در پی، حل ادامه ی آن مسائل را می آوریم.

مسائل قوت نقطه

۵. فرض می‌کنیم ABC یک مثلث، و A'، B' و C'، به ترتیب، نقاطی بر اضلاع BC، CA و AB باشند. نقطه‌ی تقاطع دوم دایره‌های ABA' و $A'B'C'$ را با M، و نقطه‌ی تقاطع دوم دایره‌های ABB' و $A'B'C'$ را با N نمایش می‌دهیم. به همین شیوه، نقاط P، Q، R و S را، به ترتیب، تعریف می‌کنیم. ثابت کنید که:

الف) دست کم یکی از موارد زیر رخ می‌دهد:

۱. خط‌های سه‌گانه‌ی $(AB, A'M, B'N)$، $(BC, B'P, C'Q)$، $(CA, C'R, A'S)$، به ترتیب، در C''، A''، و B'' متقاربند.

۲. $A'M$ و $B'N$ موازی AB، یا $B'P$ و $C'Q$ موازی BC، یا $C'R$ و $A'S$ موازی CA هستند.

ب) وقتی که حالت (۱) رخ می‌دهد، نقاط A''، B'' و C'' بر یک استقامتند.

۶. در میان نقاط A، B، C و D هیچ سه نقطه‌ای بر یک استقامت نیستند. خطوط AB و CD در E، و BC و DA در F متقاطعند. ثابت کنید یا دوایر با اقطار AC، BD و EF از نقطه‌ای مشترک می‌گذرند، یا هیچ دو دایره‌ای از آن‌ها نقطه‌ی مشترکی ندارند.

۷. فرض می‌کنیم C_1 و C_2 دایره‌های هم‌مرکز باشند و C_2 درون C_1 قرار داشته باشد. از نقطه‌ی A بر C_1، مماس AB را بر C_2 رسم می‌کنیم ($B \in C_2$). فرض می‌کنیم، C دومین نقطه‌ی تقاطع AB و C_1، و D وسط AB باشد. خط گذرنده از A دایره‌ی C_2 را در E و F چنان قطع می‌کند که عمودمنصف‌های DE و CF در نقطه‌ی M‌ی واقع بر AB متقاطع می‌شوند. نسبت $\frac{AM}{MC}$ را با دلیل به‌دست آورید.

۸. فرض می‌کنیم، ABC مثلثی حادالزّوایا باشد. نقاط M و N را به ترتیب بر اضلاع AB و AC درنظر می‌گیریم. دایره‌های به قطرهای BN و CM در نقاط P و Q تقاطع می‌کنند. ثابت کنید P، Q، و H، محل تلاقی ارتفاعات مثلث، واقع بر یک استقامت هستند.

۹. فرض می‌کنیم ABCD یک چهارضلعی محدب و محاط در نیم‌دایره‌ی s به قطر AB باشد. خطوط AC و BD در E، و خطوط AD و BC در F تقاطع می‌کنند. خط EF نیم‌دایره‌ی s را در G و خط AB را در H قطع می‌کند. ثابت کنید، E وسط پاره‌خط GH است، اگر و تنها اگر G وسط پاره‌خط FH باشد.

۱۰. فرض می‌کنیم، ABC یک مثلث و D و E، به ترتیب، بر اضلاع AB و AC چنان باشند که DE موازی BC باشد. و فرض می‌کنیم، P نقطه‌ای درون مثلث ADE و F و G، به ترتیب تقاطعات DE با خطوط BP و CP باشند. نیز فرض می‌کنیم، Q تقاطع دوم دایره‌های محیطی مثلث‌های PDG و PFE باشد. ثابت کنید نقاط A، P، و Q بر یک خط مستقیم قرار دارند.

۱۱. فرض می‌کنیم A، B، C و D چهار نقطه‌ی متمایز واقع بر یک خط باشند. دایره‌های به قطرهای AC و BD در X و Y متقاطعند. خط XY با BC در Z تلاقی می‌کند. فرض می‌کنیم، P نقطه‌ای بر خط XY، غیر از Z، باشد. خط CP دایره‌ی به قطر AC را در C و M، و خط BP دایره‌ی به قطر BD را در B و N قطع می‌کند. ثابت کنید، خطوط AM، DN، و XY متقاربند.

۱۲. نیم‌دایره‌ای به مرکز O و قطر AB را درنظر می‌گیریم. خطی AB را در M و نیم‌دایره را در C و D چنان قطع می‌کند که MB<MA و MD<MC. دوایر محیطی مثلث‌های AOC و DOB بار دیگر در نقطهٔ K متقاطع می‌شوند. نشان دهید MK و KO متعامدند.

حل مسائل قوت نقطه

۵. خط‌های AB، $A'M$ و $B'N$ محورهای اصلی سه جفت دایره‌ی حاصل از ABA'، ABB'، و $A'B'C'$ هستند. این خطوط یا موازی‌اند یا در مرکز اصلی سه دایره متقاطع می‌شوند.

به همین ترتیب، BC، $B'P$، و $C'Q$ سه محور اصلی دایره‌های BCB'، BCC' و $A'B'C'$، و CA، $C'R$، و $A'S$ سه محور اصلی دایره‌های ACC' و ACA'، و $A'B'C'$ هستند. بنابراین، یا حالت (۲) رخ می‌دهد، یا این خطوط به ترتیب، در سه نقطه‌ی A''، B''، و C'' متقاطع می‌شوند.

این موضوع، قسمت اول مسأله را به اثبات می‌رساند.

نقطه‌ی A'' دارای قوت یکسان نسبت به دایره‌های ABB' ، ABA' ، و $A'B'C'$ است؛ یعنی:

$A''A\cdot A''B = A''M\cdot A''A' = A''N\cdot A''B'$

نتیجه می‌شود که A'' دارای قوت یکسان نسبت به دایره‌های ABC و $A'B'C'$ است؛ در نتیجه بر محور اصلی آن دو قرار دارد. به همین ترتیب، B'' و C'' بر محور اصلی دایره‌ی ABC و $A'B'C'$ قرار دارند، بنابراین، سه نقطه‌ی مورد بحث بر یک خط راست واقع هستند. (امتحان انتخابی IMO رومانی، ۱۹۸۵).

۶. ثابت می‌کنیم، دایره‌های مورد بحث «هم‌محور» (دارای محور اصلی مشترک) هستند که در این صورت، ادعای مورد بحث به اثبات می‌رسد: اگر دو دایره تلاقی کنند، آن‌گاه محور اصلی آن‌ها از تقاطعشان می‌گذرد؛ در نتیجه دایره‌ی سوم نیز از تقاطع آن‌ها می‌گذرد.

فرض می‌کنیم H محل تلاقی ارتفاعات مثلث ADE باشد. همان‌طور که از راه‌حل مسأله‌ی ۴ ملاحظه می‌شود، قرینه‌ی H نسبت به هر ضلع، بر دایره‌ی محیطی مثلث واقع می‌شود. اگر A' ، D' ، و E' ، به ترتیب، پاهای ارتفاعات از A ، D ، و E باشند، این مطلب بدین معنی است که $AH\cdot A'H$ برابر نصف قوت H نسبت به دایره‌ی محیطی است، و همین ترتیب برای سایر ارتفاعات برقرار است. در این صورت:

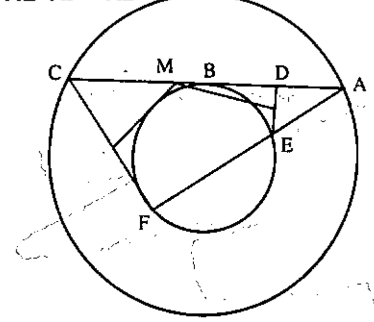
$AH\cdot A'H = DH\cdot D'H = EH\cdot E'H$

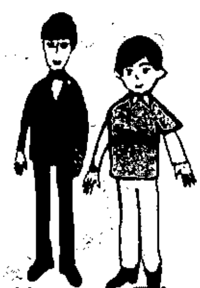
اما در مورد قوت نقطه‌ی H نسبت به دایره‌ی به قطر AC چه می‌توان گفت؟ از آن‌جا که A' بر این دایره قرار دارد، این قوت نیز $AH\cdot A'H$ است. با استفاده از استدلالی مشابه و برابری فوق، H دارای قوتی یکسان نسبت به دایره‌ای به قطرهای AC ، BD ، و EF است.

از طرف دیگر، همین مطلب باید در مورد محل تلاقی ارتفاعات سه مثلث دیگر حاصل از هر سه خط از چهار خط AB ، BC ، CD ، DA برقرار باشد. از آن‌جا که جمیع این خطوط منطبق بر هم نیستند، سه دایره‌ی مورد بحث باید محور اصلی مشترک داشته باشند. (المپیاد ریاضی مجارستان، ۱۹۹۵).

۷. با نوشتن قوت نقطه‌ی A نسبت به C_2 ، حاصل می‌کنیم (شکل ۵):

$AE\cdot AF = AB^2$





شکل ۵

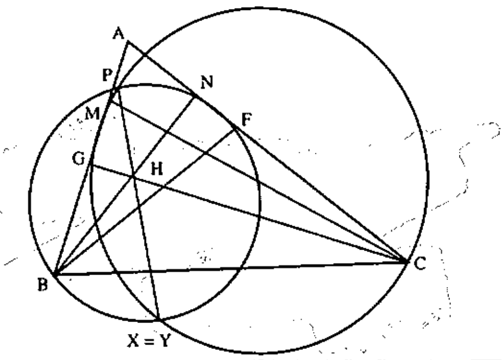
از طرف دیگر: $AD\cdot AC=(AB/2).2AB=AB^2$

در نتیجه: $AE\cdot AF=AD\cdot AC$

این رابطه نشان می‌دهد که مثلث‌های ADE و AFC (با زاویه‌ی مشترک در A) مشابهند؛ به این ترتیب: $\angle AED = \angle ACF$. بنابراین DEFC دوری است.

از آن‌جا که M تقاطع عمود منصف‌های DE و CF است، باید مرکز دایره‌ی محیطی DEFC باشد. در نتیجه، M نیز بر عمود منصف CD قرار دارد. و از آن‌جا که M بر AC است، باید وسط CD باشد. در نتیجه: $AM / MC = \frac{5}{3}$ (طرح از: R. Gelca؛ ۱۹۹۸، USAMO).

۸. فرض می‌کنیم F و G، به ترتیب پاهای ارتفاعات از B و C باشند (شکل ۶ را ملاحظه کنید). نقاط F و G بر دو دایره قرار دارند، زیرا زاویه‌های BFN و MGC قائمه‌اند.



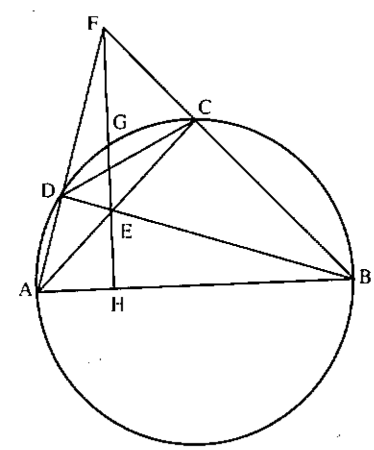
شکل ۶

فرض می‌کنیم X و Y تقاطع PH با این دایره‌ها باشند. مسأله خواهان این است که اثبات کنیم: X=Y. با نوشتن قوت نقطه‌ی H نسبت به دایره‌های به قطرهای BN، CM و BC، رابطه‌های زیر را حاصل می‌کنیم:

PH·HX=CH·HG=BH·HN=PH·HY

یعنی: HX=HY، و در نتیجه: X=Y، و کار انجام می‌شود (المپیاد ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۸).

۹. از آن‌جا که AC و BD ارتفاعات مثلث ABF هستند (شکل ۷ را ملاحظه کنید.)



شکل ۷

E محل تلاقی ارتفاعات این مثلث است. بنابراین FE بر AB عمود است. مثلث‌های HEB و HAF مشابهند، بنابراین HE/HA=HB/HF. در نتیجه:

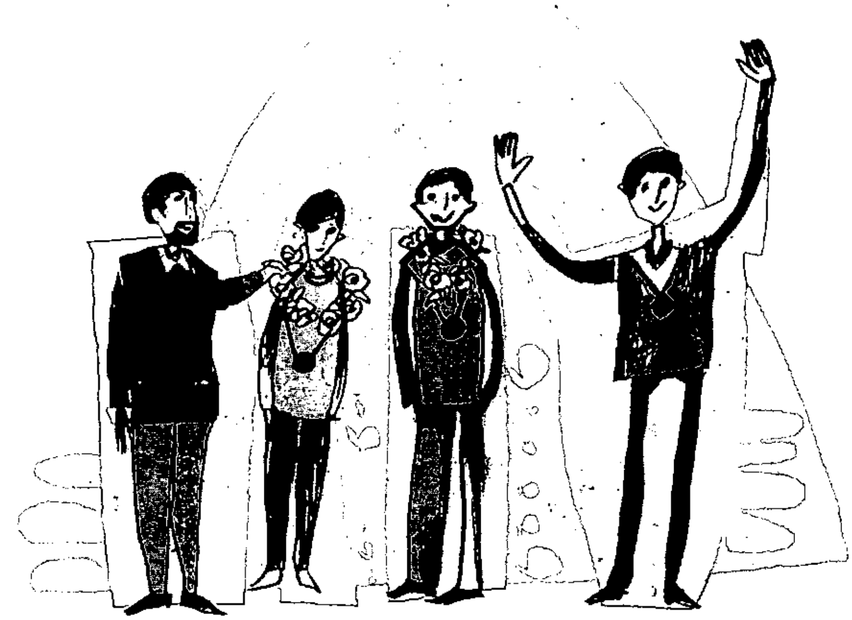
HE·HF=HA·HB

که برابر HG^2 است (قوت نقطه‌ی H نسبت به این دایره)، و هم‌ارزی مورد بحث اکنون واضح است (پیشنهادی ایالات متحده برای IMO، ۱۹۹۷، طرح T.Andreescu).

۱۰. کافی است نشان دهیم، A بر محور اصلی دایره‌های محیطی مثلث‌های DPG و FPE است؛ یعنی A دارای قوت‌های یکسان نسبت به این دو دایره است. بنابراین می‌کوشیم، این دو قوت را محاسبه کنیم.

نقطه‌ی تقاطع دیگر AB را با دایره‌ی محیطی مثلث DPG با M، و نقطه‌ی تقاطع دیگر AC را با دایره‌ی محیطی مثلث FPE، با N نمایش می‌دهیم. در این صورت، دو قوت مورد بحث AD·AM و AE·AN هستند. برای اثبات این که این دو برابرند، کافی است نشان دهیم که نقاط M، N، D، E بر یک دایره واقعند.

اگر D بین A و M باشد، آن‌گاه از آن‌جا که MDPG دوری است:



$\angle DMP = \angle DGP$

نیز، DG و BC موازی‌اند، بنابراین زاویه‌ی اخیر برابر با $\angle BCP$ است. در نتیجه M، B، C و P دوری هستند.

اگر M بین A و D باشد، آن‌گاه $\angle DMP$ و $\angle BCP$ مکملند، و این مطلب بار دیگر مستلزم آن است که M، B، C و P دوری هستند.

به همین ترتیب، N، B، C، P و همچنین M، N، B، C، دوری‌اند. از آن‌جا که DE موازی BC است، M، N، D و E دوری‌اند، و اثبات کامل می‌شود (امتحان انتخابی IMO هند، ۱۹۹۵).

۱۱. با نوشتن قوت نقطه‌ی P نسبت به دو دایره، حاصل می‌کنیم (شکل ۸):

$BP \cdot PN = XP \cdot PY = CP \cdot PM$

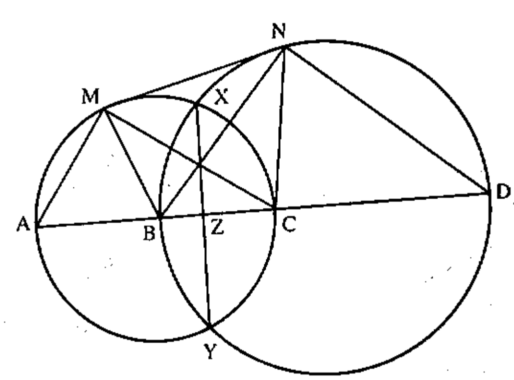
یعنی چهار ضلعی MBCN دوری است، و بنابراین:

$\angle MNB = \angle MCB$.

دو مثلث MAC و BND قائم‌الزاویه‌اند، زیرا AC و BD قطرند؛ در نتیجه:

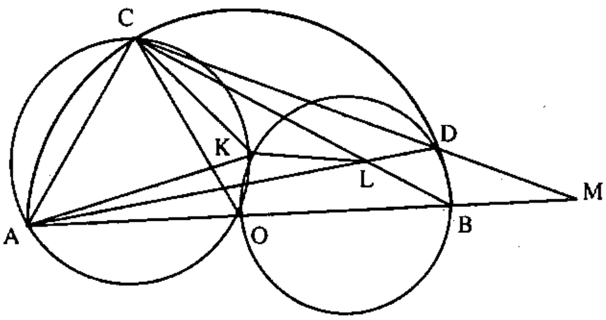
$\angle A = ۹۰^\circ - \angle MCA = ۱۸۰^\circ - \angle MND$

نتیجه می‌شود که چهار ضلعی AMND دوری است. خط‌های XY، AM و DN محورهای اصلی دایره‌های به قطرهای AC، BD و دایره‌ی محیطی AMND هستند. در نتیجه، در مرکز اصلی این دایره‌ها همرس هستند. (سی و ششمین IMO، ۱۹۹۵؛ طرح از Bulgaria).



شکل ۸

۱۲. فرض می‌کنیم L تقاطع AD و CB باشد. کار را با اثبات این مطلب آغاز می‌کنیم که K، L، و M بر یک استقامتند (شکل ۸). در چهار ضلعی دوری AOKC داریم:



شکل ۹

$\angle AKO = \angle ACO$

به همین ترتیب، در چهار ضلعی دوری BOKD:

$\angle BKO = \angle BDO$

در دایره‌ی به قطر AB:

$\angle ACO = ۹۰^\circ - \angle COA / ۲$

$\angle BDO = ۹۰^\circ - \angle BOD / ۲$

بامرتبط کردن زاویه‌ها باکمان‌های نیم‌دایره، حاصل می‌کنیم:

$$\angle AKB = \angle AKO + \angle OKB = ۱۸۰^\circ - (\frac{\angle COA}{۲} + \frac{\angle BOD}{۲})$$
$$= ۱۸۰^\circ - (\frac{\overset{\frown}{CA}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{BD}}{۲}) = ۱۸۰^\circ - \angle CLA = \angle ALB$$

بنابراین، $\angle AKB = \angle ALB$، و بنابراین چهار ضلعی AKLB دوری است.

به عنوان نتیجه به دست می‌آوریم:

$$\angle CKL = ۳۶۰^\circ - \angle AKL - \angle CKA$$
$$= (۱۸۰^\circ - \angle AKL) + (۱۸۰^\circ - \angle CKA)$$
$$= \angle LBA - (۱۸۰^\circ - \angle COA)$$

با ارجاع به کمان‌های واقع بر نیم‌دایره‌ی مفروض، حاصل می‌کنیم:

$$۱۸۰^\circ - \angle COA = ۱۸۰^\circ - \overset{\frown}{AC} / ۲, \angle LBA = \overset{\frown}{AC} / ۲,$$
$$\angle CAD = \overset{\frown}{CD} / ۲$$

با جمع این سه، و استفاده از برابری فوق، رابطه‌ی زیر را به دست می‌آوریم:

$$\angle CKL + \angle CDL = ۱۸۰^\circ$$

در نتیجه، چهار ضلعی AKLD دوری است. سه محور اصلی دایره‌های محیطی AKLB، CKLD، و ABCD در مرکز اصلی متقاطع می‌شوند.

محورهای اصلی مزبور عبارتند از CD، AB، و KL. در نتیجه، M، تقاطع دو مورد اول، بر سومی قرار می‌گیرد.

بنابراین مسأله را به اثبات این مطلب تحویل کرده‌ایم که LK عمود بر KO است.

از آن‌جا که مجموع زوایای AKL و ABL ۱۸۰° است، کافی است ثابت کنیم:

$$\angle AKO + \angle ABL = ۹۰^\circ$$

با استفاده از چهار ضلعی دوری ACKO می‌نویسیم:

$$\angle AKO + \angle ABL = \angle ACO + \angle CBA = \frac{۱۸۰^\circ - \angle COA}{۲} + \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}$$
$$= ۹۰^\circ - \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} = ۹۰^\circ$$

و به این ترتیب مسأله حل می‌شود (المپیاد ریاضی بالکان، ۱۹۹۶).

معماهای فکری و منطقی

در ملاقاتی که با خانم A داشتم، به سه فرزند او معرفی، و سن‌شان را جویا شدم. میزبانم با لبخند گفت: «دقیقاً به خاطر نمی‌آورم، چون رابطه‌ام با عدد و رقم خوب نیست. اما اگر B کوچک‌ترین نباشد، فکر می‌کنم A هست، و اگر C کوچک‌ترین نباشد، آنوقت A بزرگترین است. این اطلاعات کافی هستند؟»

جواب دادم البته که کافی هستند؛ گر چه اصلاً چنین نبود. تا این‌که روزها بعد، ناگهان به خاطرم خطور کرد گر چه نتوانسته بود سن بچه‌هایش را به من بگوید، دست کم می‌توانستم بر اساس راهنمایی‌های عجیب و غریبیش بگویم کدام بزرگ‌ترین، کدام وسطی و کدام کوچک‌ترین است.

***

سن نسبی سه کودک مزبور چیست؟

معادله‌ی درجه‌ی دوم (۳)

احمد قندهاری

اشاره

در قسمت اول این مقاله، حالت‌های ناقص معادله درجه دوم بررسی شد و فرمول‌های حل معادله اثبات شد و چند نکته مفید با ذکر مثال‌های متنوع مطرح شد.

در شماره‌ی قبل تجزیه‌ی معادله‌ی درجه دوم به حاصل ضرب عوامل اول، تعیین علامت سه جمله‌ای درجه دوم و بحث در تعداد و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم بیان شد. اینک در ادامه، روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله‌های درجه دوم را در پی می‌آوریم.

روابط بین ضرایب و ریشه‌ها، در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$ با فرض این‌که x' و x'' ریشه‌های این معادله باشند رابطه‌های بین a، b، c و x' و x'' از این قرارند:

۱. $x'+x''=-\dfrac{b}{a}=S$

۲. $x'.x''=\dfrac{c}{a}=P$

۳. $|x'-x''|=\left|\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}-\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right|=\left|\dfrac{\sqrt{\Delta}}{a}\right|=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

۴. $x'^2+x''^2=(x'+x'')^2-2x'x''=S^2-2P$

۵. $\dfrac{1}{x'^2}+\dfrac{1}{x''^2}=\dfrac{x''^2+x'^2}{x'^2.x''^2}=\dfrac{S^2-2P}{P^2}$

۶. $\left|x'^2-x''^2\right|=\left|(x'-x'')(x'+x'')\right|=\left|\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}\times S\right|=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}\times|S|$

۷. $x'^3+x''^3=(x'+x'')(x'^2+x''^2-x'x'')$

$$=S(S^2-2P-P)=S(S^2-3P)$$

$$\Rightarrow x'^3+x''^3=S^3-3PS$$

۸. $\dfrac{1}{x'^3}+\dfrac{1}{x''^3}=\dfrac{x''^3+x'^3}{x'^3.x''^3}=\dfrac{S^3-3PS}{P^3}$

۹. $\left|x'^3-x''^3\right|=\left|(x'-x'')(x'^2+x''^2+x'.x'')\right|$

$$=\left|\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}(S^2-2P+P)\right|$$

$$\Rightarrow\left|x'^3-x''^3\right|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}\left|S^2-P\right|$$

۱۰. $x'^4+x''^4=(x'^2+x''^2)^2-2x'^2.x''^2=(S^2-2P)^2-2P^2$

۱۱. $\dfrac{1}{x'^4}+\dfrac{1}{x''^4}=\dfrac{x''^4+x'^4}{x'^4.x''^4}=\dfrac{(S^2-2P)^2-2P^2}{P^4}$

۱۲. $\left|x'^4-x''^4\right|=\left|(x'^2-x''^2)(x'^2+x''^2)\right|$

$$=(x'^2+x''^2)\left|x'^2-x''^2\right|=(S^2-2P)\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}.|S|$$

فرض می‌کنیم: $x'>0$, $x''>0$ درنتیجه داریم:

۱۳. $\sqrt{x'}+\sqrt{x''}=\sqrt{(\sqrt{x'}+\sqrt{x''})^2}=\sqrt{x'+x''+2\sqrt{x'x''}}$

$$=\sqrt{S+2\sqrt{P}}$$

۱۴. $\left|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}\right|=\sqrt{(\sqrt{x'}-\sqrt{x''})^2}=\sqrt{x'+x''-2\sqrt{x'x''}}$

$$=\sqrt{S-2\sqrt{P}}$$

$$۱۵.\ \frac{\sqrt{x'}}{\sqrt{x''}} + \frac{\sqrt{x''}}{\sqrt{x'}} = \frac{x'+x''}{\sqrt{x'x''}} = \frac{S}{\sqrt{P}}$$

مسأله‌ی ۱. در معادله‌ی $x^۲ - ۳x + ۱ = ۰$، اگر x' و x'' ریشه‌های حقیقی معادله باشند، موارد ۱۵ گانه‌ی روابط بین ضرایب و ریشه‌ها را محاسبه کنید.

حل: در این معادله داریم: $\Delta = ۹ - ۴ = ۵ > ۰$ و $\frac{c}{a} = ۱ > ۰$ و $-\frac{b}{a} = ۳ > ۰$ پس دو ریشه‌ی معادله، یعنی x' و x'' مثبت هستند.

$a = ۱$ و $b = -۳$ و $c = ۱$

$$S = -\frac{b}{a} = ۳ \Rightarrow S = ۳$$

$$P = \frac{c}{a} = ۱ \Rightarrow P = ۱$$

$$۱.\ x' + x'' = S = ۳$$

$$۲.\ x'.x'' = P = ۱$$

$$۳.\ |x' - x''| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{۵}}{۱} = \sqrt{۵}$$

$$۴.\ x'^۲ + x''^۲ = S^۲ - ۲P = ۹ - ۲ = ۷$$

$$۵.\ \frac{۱}{x'^۲} + \frac{۱}{x''^۲} = \frac{S^۲ - ۲P}{P^۲} = \frac{۷}{۱} = ۷$$

$$۶.\ |x'^۲ - x''^۲| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}.|S| = \frac{\sqrt{۵}}{۱} \times ۳ = ۳\sqrt{۵}$$

$$۷\ x'^۳ + x''^۳ = S^۳ - ۳PS = (۳)^۳ - ۳(۱)(۳) = ۲۷ - ۹ = ۱۸$$

$$۸.\ \frac{۱}{x'^۳} + \frac{۱}{x''^۳} = \frac{S^۳ - ۳PS}{P^۳} = \frac{۱۸}{۱} = ۱۸$$

$$۹.\ |x'^۳ - x''^۳| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}.|S^۲ - P| = \frac{\sqrt{۵}}{۱}|۹ - ۱| = ۸\sqrt{۵}$$

$$۱۰.\ x'^۴ + x''^۴ = (S^۲ - ۲P)^۲ - ۲P^۲ = (۹ - ۲)^۲ - ۲ = ۴۷$$

$$۱۱.\ \frac{۱}{x'^۴} + \frac{۱}{x''^۴} = \frac{(S^۲ - ۲P)^۲ - ۲P^۲}{P^۴} = \frac{۴۷}{۱} = ۴۷$$

$$۱۲.\ |x'^۴ - x''^۴| = (S^۲ - ۲P)\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}.|S| = (۷)\frac{\sqrt{۵}}{۱}(۳) = ۲۱\sqrt{۵}$$

$$۱۳.\ \sqrt{x'} + \sqrt{x''} = \sqrt{S + ۲\sqrt{P}} = \sqrt{۳ + ۲\sqrt{۱}} = \sqrt{۳ + ۲} = \sqrt{۵}$$

$$۱۴.\ |\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| = \sqrt{S - ۲\sqrt{P}} = \sqrt{۳ - ۲\sqrt{۱}} = \sqrt{۳ - ۲} = ۱$$

$$۱۵.\ \frac{\sqrt{x'}}{\sqrt{x''}} + \frac{\sqrt{x''}}{\sqrt{x'}} = \frac{S}{\sqrt{P}} = \frac{۳}{\sqrt{۱}} = \frac{۳}{۱} = ۳$$

مسأله‌ی ۲. اگر در معادله‌ی $x^۲ - ۵x + (m - ۲) = ۰$، x' و x'' ریشه‌های حقیقی معادله باشند و داشته باشیم: $x'^۳ + x''^۳ = ۶۵$، آن‌گاه مقدار m را بیابید.

حل: $S = ۵$ و $P = m - ۲$ $\qquad x'^۳ + x''^۳ = ۶۵$

$$S^۳ - ۳PS = ۶۵$$

$$(۵)^۳ - ۳(m - ۲)(۵) = ۶۵$$

$$۱۲۵ - ۱۵(m - ۲) = ۶۵$$

$$۶۰ = ۱۵(m - ۲) \Rightarrow ۴ = m - ۲ \Rightarrow \boxed{m = ۶}$$

مسأله‌ی ۳. در معادله‌ی $x^۲ + (m - ۲)x + (k + ۱) = ۰$ اگر x' و x'' ریشه‌های حقیقی معادله باشند و داشته باشیم: $x'^۴ - \frac{۱}{x'^۴} + x''^۴ - \frac{۱}{x''^۴} = ۰$ و $x'^۲ + x''^۲ = ۴۷$، آن‌گاه مقدار k و m را بیابید (x' و x'' مخالف صفرند).

حل:

$$x'^۴ - \frac{۱}{x'^۴} + x''^۴ - \frac{۱}{x''^۴} = ۰$$

$$\Rightarrow x'^۴ + x''^۴ = \frac{۱}{x'^۴} + \frac{۱}{x''^۴} \Rightarrow x'^۴ + x''^۴ = \frac{x'^۴ + x''^۴}{x'^۴.x''^۴}$$

$$\Rightarrow ۱ = \frac{۱}{x'^۴.x''^۴} \Rightarrow (x'x'')^۴ = ۱ \Rightarrow (\frac{c}{a})^۴ = ۱$$

$$\Rightarrow \frac{c}{a} = \pm ۱ \Rightarrow \frac{k + ۱}{۱} = \pm ۱ \Rightarrow k = -۱ \pm ۱$$

$$\Rightarrow \boxed{k = ۰ \text{ یا } -۲}$$

$$x'^2 + x''^2 = 47 \Rightarrow S^2 - 2P = 47 \begin{cases} S = -(m-2) \\ P = k+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (m-2)^2 - 2(k+1) = 47$$

الف) $k = 0 \;;\; (m-2)^2 - 2 = 47 \Rightarrow (m-2)^2 = 49$

$$\Rightarrow m - 2 = \pm 7 \Rightarrow m = 2 \pm 7 \Rightarrow \boxed{m = 9 \text{ یا } -5}$$

ب) $k = -2 \;;\; (m-2)^2 + 2 = 47 \Rightarrow (m-2)^2 = 45$

$$\Rightarrow m - 2 = \pm\sqrt{45} \Rightarrow m = 2 \pm \sqrt{45} \Rightarrow \boxed{m = 2 \pm 3\sqrt{5}}$$

تشکیل معادله

۱. تشکیل معادله با حاصل جمع و حاصل ضرب دو عدد

اگر مجموع دو عدد یعنی S و حاصل ضرب همان دو عدد یعنی P، معلوم باشند و بخواهیم آن دو عدد را پیدا کنیم، معادله‌ی درجه دومی تشکیل می‌دهیم که ریشه‌هایش آن دو عدد باشند.

معادله‌ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ را درنظر می‌گیریم و دو طرف آن را بر $a \neq 0$ تقسیم می‌کنیم.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

می‌دانیم: $\begin{cases} S = -\dfrac{b}{a} \\ P = \dfrac{c}{a} \end{cases}$

$$x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0$$

در معادله‌ی $x^2 - Sx + P = 0$، مقادیر عددی S و P را قرار می‌دهیم و آن‌گاه معادله‌ی حاصل را حل می‌کنیم، از حل معادله آن دو عدد به‌دست می‌آیند.

مثال: دو عدد چنان بیابید که مجموع آن‌ها ۴ و حاصل‌ضرب آن‌ها ۲ باشد.

حل: $x^2 - Sx + P = 0 \quad ; \quad S = 4$ و $P = 2$

$$x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-2}}{1} = 2 \pm \sqrt{2}$$

پس آن دو عدد $2 + \sqrt{2}$ و $2 - \sqrt{2}$ هستند.

۲. تشکیل معادله‌ای که یک ریشه‌ی آن معلوم است

ریشه‌ی معلوم را مساوی x قرار می‌دهیم. سپس دو طرف این رابطه را به توان درجه‌ی معادله‌ی موردنظر می‌رسانیم.

مثال: معادله‌ی درجه دومی با ضرایب گویا تشکیل دهید که یک ریشه‌ی آن $3 - \sqrt{2}$ باشد.

روش اول: $x = 3 - \sqrt{2}$

دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم: $x - 3 = -\sqrt{2}$

$$x^2 - 6x + 9 = 2 \Rightarrow x^2 - 6x + 7 = 0$$

روش دوم: اگر بخواهیم معادله‌ی درجه دومی با ضرایب گویا بسازیم که یک ریشه‌ی آن $3 - \sqrt{2}$ باشد، باید ریشه‌ی دیگر $3 + \sqrt{2}$ باشد تا مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها اعداد گویا باشند. پس:

$$S = 3 - \sqrt{2} + 3 + \sqrt{2} = 6$$

$$P = (3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2}) = 9 - 2 = 7$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 7 = 0$$

توجه: روش اول کاراتر است.

مثال۲: معادله‌ی درجه سومی با ضرایب گویا بسازید که یک ریشه‌ی آن $\sqrt[3]{5} - 2$ باشد.

حل: $x = \sqrt[3]{5} - 2$

دو طرف را به توان ۳ می‌رسانیم: $x + 2 = \sqrt[3]{5}$

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 5 \Rightarrow x^3 + 6x^2 + 12x + 3 = 0$$

تشکیل معادله‌ی درجه دوم جدید از روی معادله‌ی مفروض تحت شرایط خاص

ریشه معادله‌ی مفروض را x و ریشه‌ی معادله‌ی جدید را y فرض می‌کنیم. سپس خواسته‌ی مسأله را به یک رابطه‌ی ریاضی بین x و y تبدیل می‌کنیم. آن‌گاه x را از آن رابطه محاسبه می‌کنیم و در معادله‌ی مفروض قرار می‌دهیم. باید توجه داشته باشیم که در انتهای کار، یک معادله‌ی درجه دوم حاصل شود.

مسأله‌ی۱. معادله‌ی $x^2 - 5x + 3 = 0$ مفروض است. معادله‌ی درجه دوم جدیدی تشکیل دهید که:

الف) ریشه‌های آن از ثلث ریشه‌های معادله‌ی مفروض ۲ واحد کم‌تر باشد.

ب) ریشه‌های آن از دو برابر ریشه‌های معادله‌ی مفروض ۳ واحد بیش‌تر باشد.

ج) ریشه‌های آن، مربع ریشه‌های معادله‌ی مفروض باشد.

د) ریشه‌های آن مکعب ریشه‌های معادله‌ی مفروض باشد.

حل:

الف)
$$\begin{cases} x = \text{ریشه‌ی معادله‌ی مفروض} \\ y = \text{ریشه‌ی معادله‌ی جدید} \end{cases}$$

$$y = \frac{x}{3} - 2 \Rightarrow \frac{x}{3} = y + 2 \Rightarrow x = 3y + 6$$

در معادله‌ی مفروض به جای x، $3y+6$ را قرار می‌دهیم:

$$x^2 - 5x + 3 = 0 \Rightarrow (3y+6)^2 - 5(3y+6) + 3 = 0$$
$$\Rightarrow 9y^2 + 36y + 36 - 15y - 30 + 3 = 0$$
$$\Rightarrow 9y^2 + 21y + 9 = 0 \Rightarrow 3y^2 + 7y + 3 = 0$$

ب)
$$y = 2x + 3 \Rightarrow 2x = y - 3 \Rightarrow x = \frac{y-3}{2}$$

در معادله‌ی مفروض به جای x، $\frac{y-3}{2}$ را قرار می‌دهیم:

$$x^2 - 5x + 3 = 0 \Rightarrow \frac{(y-3)^2}{4} - \frac{5(y-3)}{2} + 3 = 0$$

$$(y-3)^2 - 10(y-3) + 12 = 0 \Rightarrow y^2 - 6y + 9 - 10y + 30 + 12 = 0$$
$$\Rightarrow y^2 - 16y + 51 = 0$$

ج)
$$y = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y}$$

در معادله‌ی درجه دوم مفروض به جای x، $\pm\sqrt{y}$ را قرار می‌دهیم:

$$x^2 - 5x + 3 = 0 \Rightarrow (\pm\sqrt{y})^2 - 5(\pm\sqrt{y}) + 3 = 0$$

دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم

$$y - 5(\pm\sqrt{y}) + 3 = 0 \Rightarrow y + 3 = 5(\pm\sqrt{y})$$
$$y^2 + 6y + 9 = 25y \Rightarrow y^2 - 19y + 9 = 0$$

د)
$$y = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y}$$

در معادله‌ی مفروض به جای x، $\sqrt[3]{y}$ را قرار می‌دهیم:

$$x^2 - 5x + 3 = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{y^2} - 5\sqrt[3]{y} + 3 = 0$$

روش اول:
$$\sqrt[3]{y^2} - 5\sqrt[3]{y} = -3$$

$$a = \sqrt[3]{y^2} \text{ و } b = 5\sqrt[3]{y}$$

$a - b = -3$ دو طرف را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$a^3 - b^3 - 3ab(a-b) = -27$$
$$y^2 - 125y - 3(\sqrt[3]{y^2})(5\sqrt[3]{y})(-3) = -27$$
$$y^2 - 125y + 45y = -27 \Rightarrow y^2 - 80y + 27 = 0$$

روش دوم: استفاده از اتحاد اولر

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ \text{یا} \\ a = b = c \end{cases} \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

$$\sqrt[3]{y^2} - 5\sqrt[3]{y} + 3 = 0$$

$$a = \sqrt[3]{y^2},\ b = -5\sqrt[3]{y},\ c = 3$$

$$a + b + c = 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

$$\sqrt[3]{y^2} - 5\sqrt[3]{y} + 3 = 0 \Rightarrow y^2 - 125y + 27 = 3(\sqrt[3]{y^2})(-5\sqrt[3]{y})(3) \Rightarrow$$
$$y^2 - 125y + 27 = -45y \Rightarrow y^2 - 80y + 27 = 0$$

مسأله‌ی ۲. معادله‌ی $x^2 - 3x - 1 = 0$ مفروض است. اگر x' و x'' ریشه‌های حقیقی معادله باشند، معادله‌ی درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش $2x' + 3x'' - 4$ و $2x'' + 3x' - 4$ باشند.

حل: یکی از روابط را مساوی y قرار می‌دهیم:

$$y = 2x' + 3x'' - 4 \Rightarrow y = 2x' + 2x'' + x'' - 4 \Rightarrow$$
$$y = 2(x' + x'') + x'' - 4 \Rightarrow y = 2(3) + x'' - 4 \Rightarrow$$
$$y = 6 + x'' - 4 \Rightarrow x'' = y - 2 \text{ و } x = y - 2$$

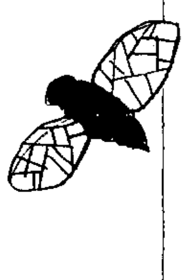
در معادله‌ی مفروض به جای x، $y - 2$ را قرار می‌دهیم.

روش مگس
در حل مسائل ریاضی

مرتضی بیات و زهرا خاتمی
مرکز تحصیلات تکمیلی در علوم پایه‌ی زنجان
Bayat @iasbs.ac.ir

چکیده

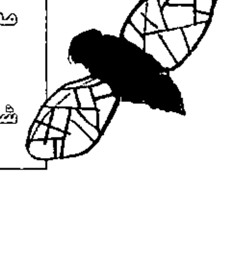
ژورژ پولیا می‌گوید: «اگر یک مسأله یا یک قضیه چندین بار به کار رود، به یک روش تبدیل می‌شود.»



در ابتدای این مقاله، چندین روش قدیمی حل مسأله‌ی ریاضی همانند «برهان خلف» و «روش نزول نامتناهی فرما» و نیز «استقرای ریاضی» را بررسی می‌کنیم. در ادامه، با استفاده از روش برهان خلف، راه‌حلی ساده برای مسأله‌ی قدیمی اشتینر-لموس در هندسه‌ی مقدماتی ارائه می‌دهیم و نیز به تعمیمی از استقرا برای اعداد حقیقی و کاربرد آن در آنالیز ریاضی اشاره می‌کنیم.

هدف اصلی این مقاله، معرفی روش جدیدی به نام «تغییر بُعد» یا «روش مگس» و چگونگی پیدایش آن است. روش مگس، در درک و فهم ساده‌ی مسائل و ارائه‌ی توجیه شهودی برای آن‌ها و نیز حدس و تعمیم مسائل و قضایا، روشی کارا است. لازم به ذکر است، این روش به صورت پنهان در اکثر کارهای ریاضیدانان بزرگ دیده می‌شود، اما متأسفانه تا به حال به عنوان روشی کارامد معرفی نشده است.

در پایان این مقاله، به بخشی از مسائلی می‌پردازیم که با روش مگس حل شده‌اند.

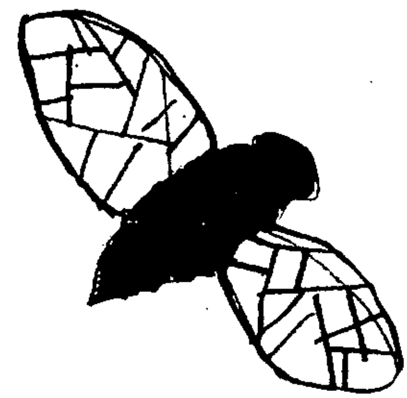


مقدمه

همان‌گونه که می‌دانیم، مسائل ریاضی با روش‌های متفاوت حل می‌شوند که بعضی از آن‌ها قدمت بسیار دارند. برای مثال، روش کلیدی «**برهان خلف**»[1] که در حل اکثر مسائل ریاضی جایگاه ویژه‌ای دارد، به زمان **اقلیدس** برمی‌گردد.

چنان‌که ریاضیدان بزرگ انگلیسی، **هاردی**[2] در این‌باره گفته است:

«برهان خلف، این عزیز دردانه‌ی اقلیدس، یکی از برّنده‌ترین سلاح‌های ریاضیدانان است. در بازی شطرنج، وقتی حرکتی انجام می‌گیرد، دیری نمی‌پاید که ارزش آن



معین می‌شود. بازیکن ممکن است خطر از دست دادن یک پیاده یا مهره‌ی دیگر را بپذیرد؛ امّا برای او کل بازی مطرح است.»

در این‌جا اثبات جدیدی از قضیه‌ی «اشتینر ـ لموس» [۵] را می‌آوریم که به وسیله‌ی برهان خلف ارائه شده است. در این راه حل، فقط از مقاله‌ی اول اقلیدس استفاده شده است.

قضیه‌ی اشتینر ـ لموس: اگر دو نیمساز داخلی مثلثی با هم برابر باشند، آن‌گاه مثلث متساوی‌الساقین خواهد بود.

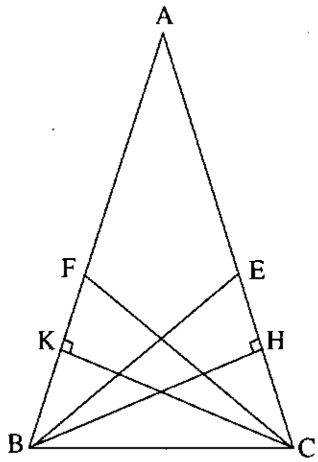
برهان: مثلث مفروض ABC با دو نیمساز برابر BE و CF را در نظر می‌گیریم (شکل ۱). ابتدا دو ارتفاع BH و CK را رسم می‌کنیم. فرض خلفی را بنا می‌کنیم مبنی بر این‌که مثلث مفروض متساوی‌الساقین نباشد، پس $BH \neq CK$. حال فرض کنیم: $CK<BH$. دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی BHE و CKF وتری یکسان دارند (BE=CF)، پس $K\hat{F}C < B\hat{E}H$ (*).

حال در دو مثلث قائم‌الزاویه BHC و BKC وتر BC مشترک است و چون $CK< BH$ است، پس $\hat{B} < \hat{C}$. در نتیجه: $\hat{B}/۲ < \hat{C}/۲$. آن‌گاه داریم:

$E\hat{B}F < F\hat{C}E$.

سپس خواهیم داشت: $K\hat{F}C > B\hat{E}H$ که مخالف نامساوی (*) و فرض اختیاری ماست. در حالت $CK >BH$ نیز به‌طور مشابه دچار تناقض می‌شویم. پس باید $CK=BH$ و مثلث متساوی‌الساقین باشد.

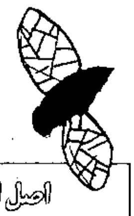
روش قدیمی دیگر، **روش استقرای ریاضی** است که



شکل ۱

گرچه با اصول **پئانو** (۱۸۸۹) رسمیت یافت، ولی قبل از آن هم توسط **ددکیند** به کار برده شده بود. باید اقرار کرد که همان **روش نزول نامتناهی فرما**[۳] شروع کننده استقرا است. روش نزول نامتناهی، به وسیله‌ی **پیردوفرما** (۱۶۶۵ـ۱۶۰۱) در اثبات عدم وجود جواب‌های معادله‌ی سیال به کار برده شده است و به نظر می‌رسد، این تنها ابزار فرما برای حل معادلات سیال بوده است. فرما قصد داشت که روش خودش را در مورد عدم وجود جواب غیر بدیهی معادله‌ی $X^n + Y^n = Z^n$ برای $n \geq ۳$ به کار ببرد، ولی این روش در مورد $n \geq ۵$ دچار مشکل شد.

امروزه جمله‌ی «طبق فرض استقرا» بیش‌ترین تکرار را در نوشته‌های ریاضی دارد. لازم به ذکر است، روش استقرا برای اعداد حقیقی نیز درست است. این موضوع را **بلمبورگ** در سال ۱۹۳۰ در شیکاگو، در یک سخنرانی ارائه کرد که بعدها در "Bull. AMS" به چاپ رسید. البته موضوع سخنرانی چیز دیگری بود و او به استقرا برای اعداد حقیقی، تنها اشاره‌ی کوتاهی کرد. ظاهراً هیچ‌کس بعدها به این استقرا اشاره‌ای نکرده است تا این که در سال ۱۹۸۹ یک چینی به نام **ژانگ چینگ ژونگ**، در گزارش‌هایی فنی که در تریست ایتالیا (IC/89/157) به چاپ رساند، این روش اثبات را به‌طور کامل بیان کرد. البته ظاهراً او از کار بلمبورگ بی‌خبر بوده است. ژانگ اکثر قضایای آنالیز مقدماتی را با این روش اثبات کرد. با توجه به این‌که روش استقرا از همان ابتدا به همه معرفی می‌شود، این روش شاید در آنالیز کارایی بهتری از روش



دِدکنید داشته باشد. حال بهتر است، به‌طور خلاصه اصل استقرای پیوسته را در جدول معرفی کنیم.

اصل استقرای اعداد طبیعی	اصل استقرای اعداد حقیقی
فرض کنید $P(n)$ یک گزاره روی اعداد طبیعی n باشد؛ به طوری که: ۱. یک عدد طبیعی n_0 وجود دارد، به طوری که $P(n)$ برای $n<n_0$ درست است. ۲. اگر $P(n)$ برای $n<m$ درست باشد، آن‌گاه $P(n)$ برای $n<m+1$ درست است. در این صورت $P(n)$ برای تمام اعداد طبیعی درست است.	فرض کنید $P(x)$ یک گزاره‌نما روی عدد حقیقی x باشد، به طوری‌که: ۱. یک عدد حقیقی x_0 وجود دارد، به طوری که $P(x)$ برای $x<x_0$ درست است. ۲. اگر $P(x)$ برای $x<y$ درست باشد، آن‌گاه یک $\delta_y > 0$ وجود دارد که $P(x)$ برای $x < y + \delta_y$ نیز درست است. در این صورت $P(x)$ برای تمام اعداد حقیقی درست است.

روش مگس

در این‌جا به روش جدیدی در حل مسائل ریاضی به نام روش تغییر بُعد یا روش مگس می‌پردازیم. لازم به ذکر است، این روش بدون اطلاع مؤلفان دو مقاله‌ی [۱] و [۶] در فهرست منابع، و به‌طور مستقل از هم کشف شده است. **الکساندر شن**[۴] در مقاله‌ی [۱] با عنوان «حل مسائل سه بُعدی برای مسائل دو بُعدی»، تنها این روش را برای حل مسائل هندسی به کار برده است. در مقاله‌ی [۶] با عنوان «روش‌ها و نتایج کلیدی در ریاضیات» که به زبان فارسی نوشته شده است، دکتر امید علی شهنی کرمزاده، این روش را علاوه بر مسائل هندسی، به مسائل گوناگون ریاضی گسترش داده و تعدادی مسائل غیر هندسی را نیز به کمک آن حل کرده است. دکتر کرمزاده این روش را با عنوان روش تغییر بُعد (روش مگس) نامگذاری کرده و سپس دلیل این نامگذاری را به این صورت نقل کرده است: «علت نامیدن این روش به نام مگس، حکایت زیر است:

درست در سال ۱۳۴۸ خورشیدی (۱۹۷۸ میلادی) در دانشگاه تهران، در بخش ریاضی با دکتر **محسن هشترودی** کلاس داشتیم. ایشان طبق معمول از هر فرصتی استفاده می‌کرد و راجع به موضوعات علمی که خیلی هم در دانشجویان انگیزه ایجاد می‌کرد، صحبت می‌کرد [ایشان به واقع به این گفته‌ی آلبرت اینشتین که «تخیل بالاتر از علم است»، ایمان کامل داشت]. آن روز موضوع مفهوم بُعد فضا و ناتوانی انسان به عنوان موجودی که نمی‌تواند به‌طور فیزیکی از همه‌ی ابعادش استفاده کند، بود. او گفت: مثلاً ورق کاغذی را در نظر بگیرید که به شکلی در فضا نگه داشته شده است و روی آن سه موجود مثلاً یک عقرب و یک سوسک و یک مگس قرار دهید و بعد این ورق را آتش بزنید. مگس پرواز می‌کند، ولی دو موجود دیگر که ظاهراً قوی‌تر از مگس هستند، کشته می‌شوند. یعنی یک حادثه، ظاهراً در یک فضای دو بعدی برای سه موجود سه بُعدی اتفاق می‌افتد، ولی فقط یکی از آن‌ها جان سالم به در می‌برد. و البته بحث می‌کرد که اگر سوسک و عقرب فکر داشتند نیز می‌توانستند خود را نجات دهند. به هر حال، این مثال روی من خیلی تأثیر گذاشت و نتیجه‌گیری‌های غیر ریاضی هم برای من داشت که در این‌جا به آن‌ها اشاره‌ای نمی‌کنم. ولی در مورد تأثیرش در فکر ریاضی‌ام باید بگویم، پیش خود فکر کردم، پس اگر ما هم یک مشکلی در صفحه داشتیم (مثل حل یک مسأله‌ی ریاضی)، باید بتوانیم بعضی اوقات با رفتن به فضا یا بالعکس این مشکل را ساده‌تر کنیم. بعدها دیدم، در عمل این طرز فکر کاملاً ریاضی است و کاربردهای فراوان دارد. از آن‌رو آن را روش مگس نامیدم.»

دکتر محسن هشترودی (۲۲ دی ۱۲۸۶ در تبریز ـ ۱۳ شهریور ۱۳۵۵ در تهران)، ریاضیدان و هنرشناس ایرانی است. در سال ۱۳۰۴ دارالفنون را تمام کرد، چند سال پزشکی خواند و بعد وارد دانش‌سرای عالی (تربیت معلم) و رشته‌ی ریاضی شد. سپس به فرانسه رفت، از دانشکده‌ی علوم پاریس لیسانس و از دانشگاه سوربون دکترای ریاضی گرفت (۱۹۱۷ میلادی). بعد به تهران آمد و به تدریس ریاضی در دانشکده‌ی علوم دانشگاه تهران مشغول شد. در سال ۱۳۲۰ به مرتبه‌ی استادی رسید و از سال ۱۳۳۶ ریاست

دانشکده‌ی علوم دانشگاه تهران را به عهده داشت. رساله‌ی دکترای هشترودی «فضاهای تصویری ـ نقطه، خط، صفحه ـ با اتصال‌های نرمال» بود. در این زمینه، **الی کارتان** را استاد راهنما انتخاب کرده بود. هشترودی، به قول دکتر **علی افضلی‌پور**، استاد ریاضیات «دانشمند، استاد و انسان» بود. بی‌هیچ پروا عقیده‌اش را بیان می‌کرد و در دانشگاه همیشه جانبدار دانشجویان بود. هشترودی را در ضمن باید یک مربی بزرگ به شمار آورد. از او دو کتاب ریاضی به زبان فرانسوی «از انتشارات دانشگاه تهران» مجموعه‌ای از مقاله‌ها با عنوان‌های «دانش و هنر»، «تمرین‌های ریاضیات مقدماتی»، مجموعه‌ی شعری با عنوان «سایه‌ها» و تعداد زیادی مقاله در «نشریه‌ی داخل و خارج از کشور» باقی مانده است.

بیان لطیف و پر معنای زیر، در رابطه با علم و هنر، از این استاد فقید است:

«... تصور نکنید وقتی دانشمندی چیزی را تحقیق می‌کند، کاملاً مجرد فکر می‌کند. این هم مثل آن هنرمند، با ضمیر خود در کشمکش است. گاهی به قدری امر علمی نزدیک به هنر و آفرینش هنری می‌شود که اصلاً موجب اعجاز می‌شود. اگر احترامی به دانشمندانی چون نیوتن و اینشتین یا دانشمندان بزرگ دیگر می‌گذاریم، در آن لحظاتی از آفرینش علمی آنان است که به هنر نزدیک شده‌اند.» [به نقل از گفت‌وگوی رادیویی با عنوان «مرزهای علم»].

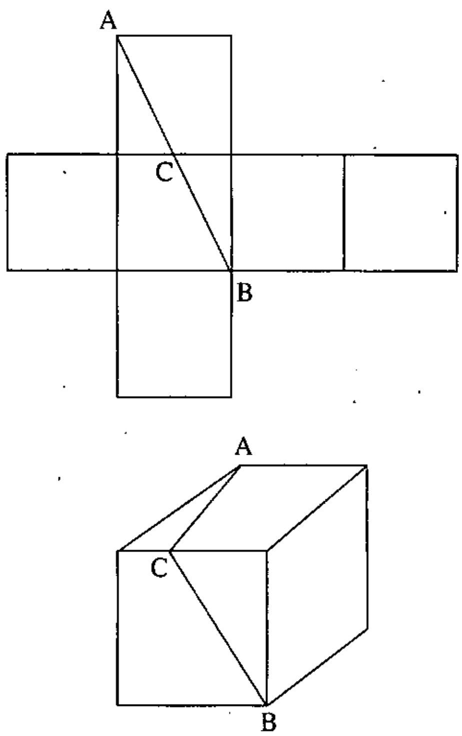
چند کاربرد از روش مگس

در این بخش به تعدادی از مسائل هندسی که به روش مگس حل شده‌اند، می‌پردازیم. تعدادی از این راه‌حل‌ها در مقاله‌های [۱] و [۶] فهرست منابع آمده‌اند.

مثال ۱ (کوتاه‌ترین مسیر حرکت مگس): مکعبی با ابعاد واحد داده شده است. مگسی از رأس A بدون آن‌که پرواز کند، روی سطوح این مکعب حرکت می‌کند و به B می‌رسد. کوتاه‌ترین مسیر حرکت این مگس را تعیین کنید.

حل: این مسأله به وسیله‌ی حساب دیفرانسیل با ساختن یک تابع یک بُعدی مناسب قابل حل است. اما به وسیله‌ی روش مگس می‌توان راه‌حل بسیار ساده و زیبایی برای آن ارائه کرد. به این منظور مکعب را به صورت شکل ۲ باز می‌کنیم. پاره‌خط AB کوتاه‌ترین مسیر از A به B است.

حال اگر شکل گسترده شده را به وضعیت اول برگردانیم، مسیر AC+CB که در آن C وسط یک ضلع مکعب است، جواب مسأله خواهد بود.



شکل ۲ ـ مسیر حرکت مگس روی سطوح مکعب

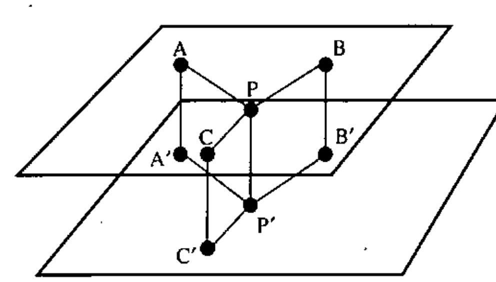
اگر در مثال بالا، به جای مکعب یک استوانه و دو نقطه روی سطح جانبی آن در نظر بگیریم، به طریق کاملاً مشابه، به کوتاه‌ترین مسیر روی سطح جانبی دست پیدا خواهیم کرد.

مثال بعدی در مورد «مسأله‌ی اشتاینر» است. **یاکوب اشتاینر**، هندسه‌دان معروف دانشگاه برلین در اوایل قرن نوزدهم، مسأله‌ی بسیار ساده، ولی آموزنده‌ی زیر را بررسی و حل کرد.

مثال ۲ (مسأله‌ی اشتاینر): سه نقطه‌ی A، B و C در یک صفحه مفروضند. در جست‌وجوی نقطه‌ی چهارم Pای در صفحه هستیم، به طوری که a+b+c می‌نیمم باشد. a، b و c به ترتیب نشان‌دهنده‌ی فاصله‌های P از A، B و C هستند.

حل: به علت پدیده‌ی کشش سطحی، لایه‌ای از محلول صابون، فقط وقتی در حالت تعادل است که مساحتش می‌نیمم باشد. این موضوع منبع زوال‌ناپذیری از آزمایش‌های مهم از لحاظ ریاضی است. دو صفحه‌ی شیشه‌ای یا ورقه‌ی پلاستیکی شفاف و موازی را به وسیله‌ی دو یا سه میله‌ی عمودی به هم وصل می‌کنیم. اگر شیء حاصل را در محلول صابون فرو بریم و درآوریم، لایه‌ی صابون، دستگاهی مرکب از چند صفحه‌ی قائم بین دو صفحه‌ی شفاف به وجود می‌آورد که میله‌های ثابت را به هم وصل می‌کنند. تصویری که روی صفحات شیشه‌ای ظاهر می‌شود، جواب مسأله‌ی مورد بحث است (شکل ۳).

بنابراین، اگر در مثلث ABC همه‌ی زاویه‌ها کم‌تر از ۱۲۰ درجه باشند، آن‌گاه P نقطه‌ای است که هر سه ضلع AB، BC و CA از آن نقطه به زاویه‌ی ۱۲۰ درجه دیده می‌شوند. ولی اگر زاویه‌ای از ABC، مثلاً زاویه‌ی رأس C، برابر با ۱۲۰ یا بزرگ‌تر از آن باشد، آن‌گاه نقطه‌ی P بر رأس C منطبق است.



شکل ۳

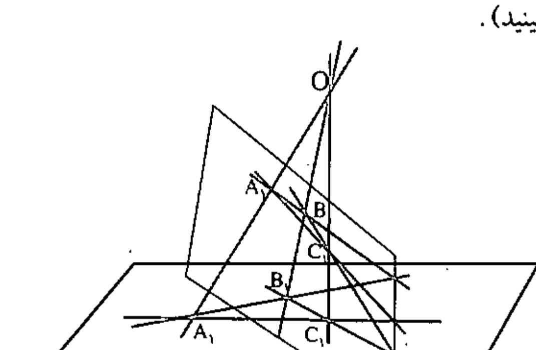
تعمیمی از مسأله‌ی اشتاینر برای n نقطه به صورت زیر بیان می‌شود:

«n نقطه‌ی A_1، A_2، ...، A_n داده شده‌اند. شبکه‌ی به هم پیوسته‌ای از پاره‌خط‌ها را با کم‌ترین طول کل ممکن پیدا کنید، به طوری که دو تا از نقطه‌ها را بتوان با یک خط شکسته‌ی مرکب از پاره‌خط‌هایی از شبکه، به هم وصل کرد. البته، شکل جواب بستگی به آرایش نقطه‌های مفروض دارد.»

به‌ازای n نقطه‌ی مفروض، حداکثر (n−2) تقاطع چندگانه وجود دارد که در هر یک از آن‌ها سه پاره‌خط یکدیگر را به زاویه‌های ۱۲۰ درجه قطع می‌کنند. لازم به ذکر است، جواب مسأله همواره به‌طور یکتا معین نمی‌شود ([۱۰] ببینید).

مثال ۳ (قضیه‌ی دزارگ): دو مثلث $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید خط‌های مستقیم A_1A_2 و B_1B_2 از نقطه‌ی O عبور می‌کنند. در این صورت، سه نقطه‌ی اشتراک اضلاع متناظر A_1B_1 و A_2B_2 و نیز B_1C_1 و B_2C_2 و همچنین A_1C_1 و A_2C_2 روی یک خط مستقیم قرار دارند.

اثبات: فرض کنید که قضیه حل شده باشد. مثلث $A_1B_1C_1$ را روی یک صفحه‌ی شفاف، و مثلث $A_2B_2C_2$ را روی یک سطح افقی رسم کنید. با به‌کارگیری یک لامپ بالای صفحه‌ی شفاف، در نقطه‌ی O، صفحه‌ی شفاف را در یک سطح افقی، به گونه‌ای متمایل کنید که سایه‌ای از مثلث $A_1B_1C_1$ در صفحه‌ی افقی روی مثلث $A_2B_2C_2$ قرار بگیرید (این یک اصل کلی است: هر دو مثلث می‌توانند به این طریق به هم مربوط شوند). محل تقاطع دو صفحه‌ی شفاف و صفحه‌ی افقی، همان خط مورد نظر قضیه است (شکل ۴ را ببینید).



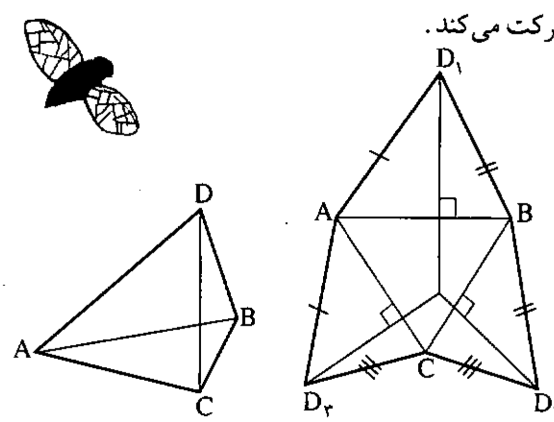
شکل ۴

مثال ۴: مثلث ABC و سه مثلث دیگر ABD_1، BCD_2 و ACD_3 را در نظر می‌گیریم که ضلع مشترکی با آن دارند. فرض کنید، اضلاع مجاور با هر یک از رأس‌های مثلث ABC برابر

باشند (یعنی: $AD_1=AD_3$ ، $BD_1= BD_2$ و $CD_2=CD_3$).
ارتفاع‌های نظیر سه رأس D_1 ، D_2 و D_3 از سه مثلث را بر اضلاع مثلث ABC رسم کنید. در این صورت، امتداد این ارتفاع‌ها از یک نقطه عبور می‌کند.

اثبات: یک چهار وجهی کاغذی ABCD، با وجه افقی ABC را در نظر بگیرید (شکل ۵). فرض کنید، چهار وجهی را در امتداد خطوط AD، BD و CD بریده‌ایم و وجوه را طوری باز می‌کنیم که یال‌های چهاروجهی روی یک صفحه‌ی افقی قرار گیرند. با این روش، شش ضلعی مسطح $AD_1BD_2CD_3$ را به دست خواهیم آورد که رأس‌های آن به وسیله‌ی سه کپی D_1 ، D_2 و D_3 از رأس D به دست آمده‌اند.

در زیر با حرکت دادن سه کپی از وجوه ABD، BCD و ACD، مثلث‌های جانبی ABD_1 ، BCD_2 و ACD_3 را به دست خواهیم آورد. هر کپی در امتداد یک دایره حرکت می‌کند که بر صفحه‌ی افقی عمود است و در یک طرف مثلث ABC می‌باشد. بنابراین، در نگاهی به رأس، رأس‌های D_1 ، D_2 و D_3 در امتداد یک خط مستقیم عمود بر یک طرف مثلث ABC حرکت می‌کند.



شکل ۵

مثال بعدی به «مسأله‌ی سیلوستر» معروف است. این مسأله به مدت چهل سال (۱۸۹۲ تا ۱۹۳۳) بدون جواب مانده است. در آن سال‌ها، ریاضیدانانی چون هیلبرت، **هاردی**، **کلاین**، **مینکوفسکی**، **وبلن**، **آرتین**، **نویتر**، **یورسیون**، و ده‌ها تن دیگر که فعالانه کار می‌کردند، هیچ کدام جوابی به این مسأله ندادند. در این جا به روش مگس، برای این مسأله اثبات جدیدی می‌آوریم ([۷] ببینید).

ابتدا لم ساده‌ی زیر را که با فرمول **اویلر** (اگر G یک گراف مسطح هم‌بند با n رأس، e یال و f وجه باشد، آن‌گاه n-e+f=۲) ثابت می‌شود، می‌آوریم.

لم: فرض کنید G گراف مسطح ساده‌ی ناتهی هم‌بند باشد. در این صورت، G رأس با درجه‌ی حداکثر ۵ دارد.

اثبات: هر وجه G، دست کم ۳ ضلع دارد (زیرا G ساده است). پس خواهیم داشت:

$$f = f_3+f_4+f_5+\dots$$
$$2e = 3f_3+4f_4+5f_5+\dots$$

بنابراین: $2e - 3F \geq 0$.

حال اگر هر رأس درجه‌ای حداقل برابر ۶ داشته باشد، مشابه بالا داریم:

$$n = n_6 + n_7 + n_8+\dots$$
$$2e = 6f_6 + 7f_7 + 8f_8+\dots$$

بنابراین: $2e - 6n \geq 0$ و:

$$6(e - n - f) = (2e - 6n) + 2(2e - 3f) \geq 0$$

و بنابراین: $e \geq n + f$ که با فرمول اویلر مغایر است.

مثال ۵ (قضیه‌ی سیلوستر): می‌دانیم که اگر n نقطه در صفحه داشته باشیم که روی یک خط نباشند، آن‌گاه یک خط وجود دارد که دقیقاً از دو نقطه از این نقاط می‌گذرد.

اثبات: اگر صفحه‌ی حاوی نقاط را نزدیک کره‌ای قرار دهیم، آن‌گاه هر نقطه در صفحه با یک نقطه متقاطر (هم قطر) روی کره است، و خط‌های صفحه، متناظر با دایره‌های عظیمه‌ی روی کره هستند. پس قضیه را به صورت زیر بازسازی می‌کنیم:

«اگر مجموعه‌ای مرکب از $n \geq 3$ جفت نقطه و متقاطر روی کره داده شده باشد که همگی روی یک دایره‌ی عظیمه نباشند، همواره دایره‌ی عظیمه‌ای وجود دارد که شامل دقیقاً دو تا از جفت‌های متقاطر است.»

حال دوباره این صورت از قضیه را می‌نویسیم. به این منظور، به جای هر جفت نقطه‌ی متقاطر، دایره‌ی عظیمه‌ی متناظر روی کره را قرار می‌دهیم. در این صورت، قضیه

سیلوستر از ما می‌خواهد که ثابت کنیم:

«اگر مجموعه‌ای مرکب از $n \geq 3$ دایره‌ی عظیمه روی کره داده باشند که همه‌ی آن‌ها از یک نقطه نگذرد، همواره نقطه‌ای وجود دارد که روی دقیقاً دوتا از دایره‌های عظیمه است.»

اما آرایش دایره‌های عظیمه، گراف مسطح ساده‌ای روی کره به دست می‌دهد که رأس‌هایش نقاط تقاطع دو تا از دایره‌های عظیمه‌اند که دایره‌های عظیمه را به یال‌هایی تجزیه می‌کنند. همه‌ی درجه‌های رأس‌ها زوجند و بنا به طرز ساختن گراف، دست کم چهار عدد هستند. حال لم قبل نشان می‌دهد که رأسی از درجه‌ی ۴ وجود دارد و این اثبات را تمام می‌کند.

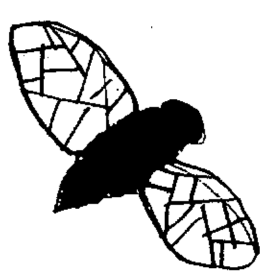
حال اگر بخواهیم تعمیم آن را در فضا بگوییم، باید بگوییم، اگر n نقطه در فضا داشته باشیم که روی یک صفحه نباشند، آن‌گاه یک صفحه وجود دارد که دقیقاً از سه نقطه از این نقاط می‌گذرد. اما متأسفانه این نتیجه غلط است، زیرا کافی است دو خط متنافر در نظر بگیریم و روی هر خط چهار نقطه قرار دهیم.

حال با توجه به این‌که خط قضیه‌ی سیلوستر را می‌توان دایره‌ای به شعاع بی‌نهایت در نظر گرفت، تعمیم زیر را ارائه می‌دهیم که آن را مدیون روش مگس هستیم.

مثال ۶ (تعمیم قضیه‌ی سیلوستر): اگر n نقطه در فضا داشته باشیم که روی یک صفحه نباشند، آن‌گاه دایره‌ای وجود دارد که دقیقاً از سه نقطه از این نقاط می‌گذرد.

اثبات: از چهار نقطه از این نقاط یک کره می‌گذرانیم. بعد یکی از این نقاط، مثلاً A را به عنوان مرکز انعکاس در نظر می‌گیریم و کره را منعکس می‌کنیم (یعنی همان تصویر گنج‌نگاری) تا به صفحه‌ی مماس منعکس شود. می‌دانیم، دایره‌ای که روی کره از A بگذرد، به خط تبدیل می‌شود و اگر از A نگذرد، به یک دایره تبدیل می‌شود. در این تبدیل، آن تعداد از n نقطه که روی کره قرار دارند، به نقاطی در صفحه می‌روند که روی یک خط نیستند. اکنون طبق قضیه‌ی سیلوستر، یک خط d وجود دارد که دقیقاً از دو نقطه از این نقاط روی صفحه می‌گذرد و آشکارا تصویر آن روی کره دایره است. این دایره دقیقاً از سه نقطه که یکی از آن‌ها نقطه‌ی A است، می‌گذرد. در حقیقت ما ثابت کرده‌ایم، دایره‌ای وجود دارد که دقیقاً از سه نقطه از این n نقطه می‌گذرد؛ به طوری که یکی از این نقاط را همواره می‌توان از قبل انتخاب کرد.

در این جا دیدیم، برای این‌که قضیه‌ی سیلوستر را تعمیم دهیم، اول به فضا رفتیم، بیان گزاره را حدس زدیم و بعد برای اثبات آن به صفحه برگشتیم؛ یعنی دوباره تغییر بُعد دادیم.



منابع

1. Shen, Alexander. "Three-Dimensional Solutions for Two-Dimensional Problem". The Mathematical Intelligencer. 19 (1937)44-47.
2. Hachtroudi, M.Les espaces d´e´le´ments á prosective normale. Hermann. Paris. (1937).
3. Chern, Shiing-Shen& Nji, Shany. Projective Geometry and Piemenn's Mapping Problem. Math. An **302** (1995) 582-600.
4. Aigner, M. and Ziegler, G.M. Proofs From THE BOOk. Springer. Berlin. 1998.

۵. کاری مجیدآبادی، عباس. «برهانی بر قضیه‌ی لموس-اشتینر». رشد آموزش ریاضی. شماره‌ی ۵۱. بهار ۱۳۷۷.

۶. شهنی کرمزاده، امیدعلی. نتایج باورنکردنی در ریاضیات. انتشارات دانشگاه شهید چمران اهواز. ۱۳۸۰.

۷. کاظمی، سیامک. کتاب اثبات. انتشارات پژوهشگاه دانش‌های بنیادی. ۱۳۷۹. (این کتاب ترجمه کتاب [۲] است).

۸. علی مرضعی، علی. «حل‌های سه بعدی برای مسائل دو بعدی». گزارش سومین کنفرانس آموزش ریاضی کرمان-ایران. ۱۳۷۷. (این مقاله ترجمه‌ی بخشی از مقاله‌ی [۱] است).

۹. شهریاری، پرویز. گاهنامه‌ی ریاضیدانان ۱۳۸۰. انتشارات مهاجر. ۱۳۸۰.

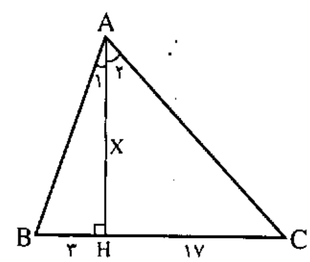
۱۰. کورانت، ریچارد و رابینز، هربرت. ریاضیات چیست؟. ترجمه‌ی: سیامک کاظمی. انتشارات نشر نی. ۱۳۷۹.

زیرنویس

1. Reductio and Absudum
2. G.H. Hardy
3. Infinite Descent
4. Alexander Shen

۴۷
حل مسائل مسابقه‌ی برهان

۱ . مطابق شکل، اگر طول ارتفاع رأس A، یعنی AH را مساوی x فرض کنیم، خواهیم داشت:



$$tgA = tg(A_۱ + A_۲) = \frac{tgA_۱ + tgA_۲}{۱ - tgA_۱ tgA_۲} = \frac{\frac{۳}{x} + \frac{۱۷}{x}}{۱ - \frac{۳}{x} \times \frac{۱۷}{x}} = \frac{۲۲}{۷}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{۲۰}{x}}{\frac{x^۲ - ۵۱}{x^۲}} = \frac{۲۲}{۷} \Rightarrow \frac{۲۰x}{x^۲ - ۵۱} = \frac{۲۲}{۷} \Rightarrow ۲۲x^۲ - ۱۱۲۲ = ۱۴۰x$$

$$\Rightarrow ۱۱x^۲ - ۷۰x - ۵۶۱ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۴۹۰۰ + ۲۴۶۸۴$$

$$\Delta = ۲۹۵۸۴ = (۱۷۲)^۲ \Rightarrow x = \frac{۷۰ \pm ۱۷۲}{۲۲},\ x > ۰ \Rightarrow x = ۱۱$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{۱}{۲} AH \times BC = \frac{۱}{۲} \times ۱۱ \times ۲۰ = ۱۱۰$$

۲ . از قضیه‌ی اصلی تقسیم که در کتاب حسابان آمده است، استفاده می‌کنیم:

$$x^۲ - x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۱ \pm \sqrt{۵}}{۲}$$

حال اگر فرض کنیم: $f(x) = ax^{۱۷} + bx^{۱۶} + ۱$ باید $f(\frac{۱ \pm \sqrt{۵}}{۲}) = ۰$ با فرض $p = \frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲}$ و $q = \frac{۱ - \sqrt{۵}}{۲}$ خواهیم داشت:

$$f(p) = ap^{۱۷} + bp^{۱۶} + ۱ = ۰$$

$$f(q) = aq^{۱۷} + bq^{۱۶} + ۱ = ۰$$

و از حذف b در این دستگاه خواهیم داشت:

$$\begin{cases} ap^{۱۷} + bp^{۱۶} + ۱ = ۰ \Rightarrow b = \dfrac{-۱ - ap^{۱۷}}{p^{۱۶}} = \dfrac{-۱}{p^{۱۶}} - pa \\ aq^{۱۷} + bq^{۱۶} + ۱ = ۰ \Rightarrow aq^{۱۷} + (-\dfrac{۱}{p^{۱۶}} - pa)q^{۱۶} + ۱ = ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow aq^{۱۷} - \frac{q^{۱۶}}{p^{۱۶}} - paq^{۱۶} + ۱ = ۰ \Rightarrow a(q^{۱۷} - pq^{۱۶}) = \frac{q^{۱۶}}{p^{۱۶}} - ۱$$

$$\Rightarrow aq^{۱۶}(q - p) = \frac{q^{۱۶} - p^{۱۶}}{p^{۱۶}} \Rightarrow a = \frac{q^{۱۶} - p^{۱۶}}{p^{۱۶}q^{۱۶}(q - p)}$$

و با توجه به این که $pq = -۱$ است، داریم:

$$a = \frac{q^{۱۶} - p^{۱۶}}{p - q} = (q + p)(q^۲ + p^۲)(q^۴ + p^۴)(q^۸ + p^۸)$$

همچنین داریم: $p + q = ۱$. بنابراین می‌توان نوشت:

$$q^۲ + p^۲ = (p + q)^۲ - ۲pq = ۳$$

$$q^۴ + p^۴ = (q^۲ + p^۲)^۲ - ۲(pq)^۲ = ۹ - ۲ = ۷$$

$$q^۸ + p^۸ = (q^۴ + p^۴)^۲ - ۲(pq)^۴ = ۴۹ - ۲ = ۴۷$$

$$\Rightarrow q = ۱ \times ۳ \times ۷ \times ۴۷ = ۹۸۷$$

۱۲

معادله‌های مثلثاتی

برای دانش‌آموزان سال دوم و سوم متوسطه

محمدهاشم رستمی

حل معادله‌های غیر ساده مثلثاتی

اشاره

در شماره‌های قبل راجع به حل معادله‌ی کلاسیک نوع اول بحث کردیم، اینک در ادامه راه‌حل‌های دیگر این‌گونه معادله‌ها را در پی می‌آوریم.

راه دوم حل معادله‌ی کلاسیک نوع اول

معادله‌ی کلاسیک نوع اول $a\sin X+b\cos X=c$ را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم که $\sin X=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{X}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{X}{2}}$ و $\cos X=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{X}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{X}{2}}$ است. در معادله‌ی بالا، به جای $\sin X$ و $\cos X$ بر حسب $\operatorname{tg}\frac{X}{2}$ معادل‌های آن‌ها را قرار می‌دهیم. خواهیم داشت:

$$a\left(\frac{2\operatorname{tg}\frac{X}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{X}{2}}\right)+b\left(\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{X}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{X}{2}}\right)=c\Rightarrow\frac{2a\operatorname{tg}\frac{X}{2}+b(1-\operatorname{tg}^2\frac{X}{2})}{1+\operatorname{tg}^2\frac{X}{2}}=c$$

$$\Rightarrow 2a\operatorname{tg}\frac{X}{2}+b(1-\operatorname{tg}^2\frac{X}{2})=c(1+\operatorname{tg}^2\frac{X}{2})$$

$$\Rightarrow (c+b)\operatorname{tg}^2\frac{X}{2}-2a\operatorname{tg}\frac{X}{2}+c-b=0 \qquad (1)$$

به طوری که دیده می‌شود، معادله‌ی به دست آمده، یعنی معادله‌ی (۱)، معادله‌ای درجه‌ی دوم بر حسب $\operatorname{tg}\frac{X}{2}$ است

که با حل آن، مقدار $tg\frac{X}{2}$ و از روی آن، با حل معادله یا معادله‌های ساده‌ی مثلثاتی، مقدار X جواب معادله محاسبه می‌شود.

تبصره: اگر در معادله‌ی (۱)، $c+b=0$ باشد، یکی از جواب‌های این معادله به ∞ میل می‌کند و داریم:

$$tg\frac{X}{2}\to\infty\Rightarrow tg\frac{X}{2}=tg\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{X}{2}=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow X=2k\pi+\pi$$

پس در این حالت، این جواب را نیز باید جزو جواب‌های معادله منظور کنیم.

نکته‌ی ۱. شرط وجود جواب معادله‌ی کلاسیک نوع اول را با استفاده از معادله‌ی (۱) نیز می‌توان به دست آورد؛ زیرا معادله‌ی کلاسیک نوع اول وقتی جواب دارد که معادله‌ی (۱) جواب داشته باشد و این معادله نیز در صورتی دارای جواب است که مبیّن آن، بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد؛ یعنی داشته باشیم:

$$\Delta'=b'^2-ac\ge0\Rightarrow(a)^2-(c+b)(c-b)\ge0\Rightarrow$$
$$a^2-(c^2-b^2)\ge0\Rightarrow a^2-c^2+b^2\ge0\Rightarrow\boxed{a^2+b^2\ge c^2}$$

و این همان شرطی است که قبلاً به دست آوردیم.

نکته‌ی ۲. معمولاً وقتی از روش دوم حل معادله‌ی کلاسیک نوع اول استفاده می‌کنیم که $\frac{b}{a}$، تانژانت زاویه‌ی مشخصی نباشد و یا ضریب‌های a، b و c یکی، یا همگی آن‌ها پارامتری باشند.

مثال ۱. معادله‌ی $\sin x+2\cos x=\frac{3}{\sqrt{2}}$ را حل کنید.

حل: در این معادله $a=1$، $b=2$، و $c=\frac{3}{\sqrt{2}}$، و $a^2+b^2>c^2$ است؛ زیرا $(1)^2+(2)^2>(\frac{3}{\sqrt{2}})^2$ یا $5>\frac{9}{2}$ پس این معادله دو ریشه‌ی متمایز دارد. از آن‌جا خواهیم داشت:

$$(c+b)tg^2\frac{x}{2}-2a\,tgx+c-b=0$$
$$\Rightarrow(\frac{3}{\sqrt{2}}+2)tg^2\frac{x}{2}-2\times1\times tg\frac{x}{2}+\frac{3}{\sqrt{2}}-2=0$$
$$\Rightarrow(\frac{3\sqrt{2}}{2}+2)tg^2\frac{x}{2}-2tg\frac{x}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}-2=0$$
$$\Rightarrow tg\frac{x}{2}=\frac{1\pm\sqrt{1-(\frac{3\sqrt{2}}{2}+2)(\frac{3\sqrt{2}}{2}-2)}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}+2}=\frac{1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}+2}$$
$$\Rightarrow tg\frac{x}{2}=\sqrt{2}-1,\quad tg\frac{x}{2}=5\sqrt{2}-7$$
$$tg\frac{x}{2}=\sqrt{2}-1=tg\frac{\pi}{8}\Rightarrow\frac{x}{2}=k\pi+\frac{\pi}{8}\Rightarrow\boxed{x=2k\pi+\frac{\pi}{4}}$$
$$tg\frac{x}{2}=5\sqrt{2}-7=tg\alpha\Rightarrow\frac{x}{2}=k\pi+\alpha\Rightarrow\boxed{x=2k\pi+2\alpha}$$

مثال ۲. معادله‌ی $\sin2x+\sqrt{3}\cos2x=2$ را حل کنید.

حل: داریم:

$$a=1,b=\sqrt{3},c=2,(c+b)tg^2x-2a\,tgx+c-b=0$$
$$\Rightarrow(2+\sqrt{3})tg^2x-2\times1\times tgx+2-\sqrt{3}=0$$
$$\Rightarrow(2+\sqrt{3})tg^2x-2tgx+2-\sqrt{3}=0$$
$$\Rightarrow tgx=\frac{1\pm\sqrt{1-(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}}{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$$
$$\Rightarrow tgx=2-\sqrt{3}=tg\frac{\pi}{12}\Rightarrow\boxed{x=k\pi+\frac{\pi}{12}}$$

نکته: در این معادله $a^2+b^2=c^2$ است، زیرا $(2)^2=(\sqrt{3})^2+(1)^2$ یا $4=4$ است.

بنابراین، مشخص است که این معادله ریشه‌ی مضاعف دارد.

مثال ۳. معادله‌ی $\sin4x-\sqrt{2}\cos4x=\sqrt{2}$ را حل کنید.

حل: داریم:

$$a=1,\ b=-\sqrt{2},\ c=\sqrt{2}$$
$$(c+b)\operatorname{tg}^2 2x-2a\operatorname{tg}2x+c-b=0$$
$$\Rightarrow(\sqrt{2}-\sqrt{2})\operatorname{tg}^2 2x-2\times 1\operatorname{tg}2x+\sqrt{2}+\sqrt{2}=0\Rightarrow$$
$$0\times\operatorname{tg}^2 2x-2\operatorname{tg}2x+2\sqrt{2}=0$$
$$\Rightarrow \operatorname{tg}2x\to\infty,\ -2\operatorname{tg}2x+2\sqrt{2}=0\Rightarrow \operatorname{tg}2x=\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow \operatorname{tg}2x=\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\Rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow \boxed{x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}}$$
$$,\operatorname{tg}2x=\sqrt{2}=\operatorname{tg}\alpha\Rightarrow 2x=k\pi+\alpha\Rightarrow \boxed{x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}}$$

نکته: در این معادله، چون $c+b=\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$ است، از ابتدا می‌دانیم که $\operatorname{tg}2x\to\infty$؛ یعنی $\operatorname{tg}2x=\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ و در نتیجه: $2x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ یا $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ است، و ریشه‌ی دیگر معادله از $-2a\operatorname{tg}2x+c-b=0$، یعنی از معادله‌ی $-2\operatorname{tg}2x+2\sqrt{2}=0$ به دست می‌آید.

مثال ۴. معادله‌ی $(m-1)\sin\frac{x}{2}+m\cos\frac{x}{2}=m-1$ را حل کنید.

حل: داریم:

$$a=m-1,\ b=m,\ c=m-1,\ (c+b)\operatorname{tg}^2\frac{x}{4}-2a\operatorname{tg}\frac{x}{4}+c-b=0$$
$$\Rightarrow(m-1+m)\operatorname{tg}^2\frac{x}{4}-2(m-1)\operatorname{tg}\frac{x}{4}+m-1-m=0$$
$$\Rightarrow(2m-1)\operatorname{tg}^2\frac{x}{4}-2(m-1)\operatorname{tg}\frac{x}{4}-1=0$$
$$\Rightarrow \operatorname{tg}\frac{x}{4}=\frac{(m-1)\pm\sqrt{(m-1)^2+1(2m-1)}}{2m-1}=\frac{m-1\pm m}{2m-1}$$
$$\Rightarrow \operatorname{tg}\frac{x}{4}=\frac{2m-1}{2m-1}=1,\ \operatorname{tg}\frac{x}{4}=\frac{-1}{2m-1}=\frac{1}{1-2m}$$
$$\Rightarrow \operatorname{tg}\frac{x}{4}=1=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\Rightarrow\frac{x}{4}=k\pi+\frac{\pi}{4}\Rightarrow\boxed{x=4k\pi+\pi}$$
$$,\operatorname{tg}\frac{x}{4}=\frac{1}{1-2m}=\operatorname{tg}\alpha\Rightarrow\frac{x}{4}=k\pi+\alpha\Rightarrow\boxed{x=4k\pi+4\alpha}$$

مثال ۵. معادله‌ی $(2m+3)\sin x+\cos x=m+4$ داده شده است:

۱. حدود m را چنان تعیین کنید که این معادله دارای جواب باشد.

۲. مقدار m را چنان تعیین کنید که یکی از جواب‌های این معادله $x=\frac{\pi}{3}$ باشد.

۳. مقدار m را چنان بیابید که $\operatorname{tg}\frac{x}{2}\to\infty$.

۴. مقدار m را چنان بیابید که $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=2$ باشد.

حل: در این معادله، $a=2m+3$، $b=1$ و $c=m+4$ است و داریم: $a^2+b^2\ge c^2$

۱. شرط وجود جواب معادله:

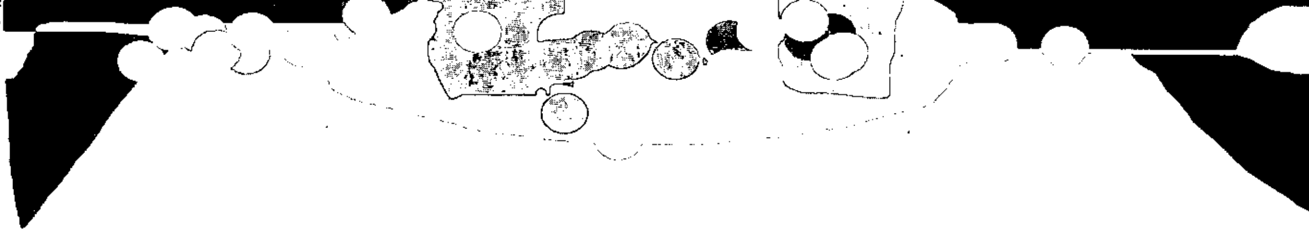
$$\Rightarrow(2m+3)^2+(1)^2\ge(m+4)^2\Rightarrow 3m^2+4m-6\ge 0$$
$$\Rightarrow 3m^2+4m-6=0\Rightarrow m=\frac{-2\pm\sqrt{4+18}}{3}=\frac{-2\pm\sqrt{22}}{3}$$

m	$-\infty$		$\frac{-2+\sqrt{22}}{3}$		$\frac{-2+\sqrt{22}}{3}$		$+\infty$
$3m^2+4m-6$		+	0	−	0	+	
معادله		ریشه دارد	ریشه دارد	ریشه ندارد	ریشه دارد	ریشه دارد	

پس به ازای $m\le\frac{-2-\sqrt{22}}{3}$ و $m\ge\frac{-2+\sqrt{22}}{3}$ معادله دارای جواب است.

۲. شرط آن که $x=\frac{\pi}{3}$ ریشه‌ی این معادله باشد، آن است که در این معادله صدق کند؛ یعنی داشته باشیم:

$$x=\frac{\pi}{3}\xrightarrow{\text{در معادله}}(2m+3)\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{3}=m+4$$
$$\Rightarrow(2m+3)\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}=m+4\Rightarrow(\sqrt{3}-1)m=\frac{7-3\sqrt{3}}{2}$$
$$\Rightarrow m=\frac{7-3\sqrt{2}}{2(\sqrt{3}-1)}=\frac{(7-3\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)}{2(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}\Rightarrow\boxed{m=\frac{2\sqrt{3}-1}{2}}$$



۳. برای آن‌که $tg\frac{x}{2}\to\infty$ باید c+b=۰ باشد؛ یعنی داشته باشیم:

$$(m+4)+1=0 \Rightarrow m+5=0 \Rightarrow \boxed{m=-5}$$

۴. معادله‌ی درجه‌ی دوم بر حسب $tg\frac{x}{2}$ را تشکیل می‌دهیم. یک ریشه‌ی آن باید $tg\frac{x}{2}=2$ باشد. داریم:

$$c+b)tg^2\frac{x}{2}-2a\,tg\frac{x}{2}+c-b=0\Rightarrow$$
$$(m+4+1)tg^2\frac{x}{2}-2(2m+3)tg\frac{x}{2}+m+4-1=0$$
$$\Rightarrow(m+5)tg^2\frac{x}{2}-2(2m+3)tg\frac{x}{2}+m+3=0$$

در این معادله قرار می‌دهیم؛ $tg\frac{x}{2}=2$

$$(m+5)(2)^2-2(2m+3)(2)+m+3=0$$
$$4m+20-8m-12+m+3=0\Rightarrow -3m=-11\Rightarrow \boxed{m=\frac{11}{3}}$$

راه سوم حل معادله‌ی کلاسیک نوع اول

در این روش، معادله‌ی کلاسیک نوع اول asinX+bcosX=c را به معادله‌ای درجه‌ی دوم بر حسب cosX (یا sinX) تبدیل می‌کنیم و با حل این معادله‌ی درجه‌ی دوم، cosX (یا sinX) و با استفاده از آن، مقدار X، جواب معادله‌ی داده شده را محاسبه می‌کنیم. برای این کار به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$a\sin X+b\cos X=c\Rightarrow a\sin X=-b\cos X+c$$

دو طرف این معادله را مجذور می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$\Rightarrow(a\sin X)^2=(-b\cos X+c)^2$$
$$\Rightarrow a^2\sin^2X=b^2\cos^2X+c^2-2bc\cos X$$

اما $\sin^2X=1-\cos^2X$ است. پس داریم:

$$a^2(1-\cos^2X)=b^2\cos^2X+c^2-2bc\cos X$$
$$\Rightarrow(a^2+b^2)\cos^2X-2bc\cos X+c^2-a^2=0$$

از این معادله، مقدار cosX و از روی آن، Xهای جواب مسأله محاسبه می‌شوند.

نکته‌ی مهم: چون طرفین معادله‌ی $a\sin X=-b\cos X+c$ را به توان ۲ رسانده‌ایم، پس حتماً باید جواب‌های به دست آمده برای X را در معادله‌ی اصلی، یعنی در معادله‌ی asinX+bcosX=c امتحان کنیم، تا جواب‌های خارجی به دست آمده (در صورت وجود)، مشخص شوند. به مثال‌های زیر توجه کنید:

مثال ۱. معادله‌ی $\sin x+2\cos x=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ را حل کنید.

حل: مقدارهای a=۱، b=۲ و $c=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ را در معادله‌ی زیر قرار می‌دهیم.

$$(a^2+b^2)\cos^2x-2bc\cos x+c^2-a^2=0$$
$$(1+4)\cos^2x-2\times2\times\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{9}{2}-1=0$$
$$5\cos^2x-6\sqrt{2}\cos+\frac{7}{2}=0\Rightarrow\cos x=\frac{+3\sqrt{2}\pm\sqrt{18-\frac{35}{2}}}{5}$$
$$\Rightarrow\cos x=\frac{+3\sqrt{2}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}}{5}\Rightarrow\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2},\cos x=\frac{7\sqrt{2}}{10}$$
$$\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{4},x=2k\pi-\frac{\pi}{4}$$

k	x
۰	$+\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{4}$
۱	$2\pi+\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$

$$x=\frac{\pi}{4}\xrightarrow{\text{در معادله}}\sin\frac{\pi}{4}+2\cos\frac{\pi}{4}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$
$$\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

پس $x=2k\pi+\frac{\pi}{4}$ جواب است.

در معادله

$$x=-\frac{\pi}{4}\xrightarrow{\text{در معادله}}\sin(-\frac{\pi}{4})+2\cos(-\frac{\pi}{4})=\frac{3\sqrt{2}}{2}\Rightarrow$$

$$\frac{-\sqrt{2}}{2}+\frac{2\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$\frac{+\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\Rightarrow$ جواب نیست $x=2k\pi-\frac{\pi}{4}$ پس $\Rightarrow x\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$$\cos x=\frac{7\sqrt{2}}{10}\Rightarrow \sin x=\sqrt{1-\frac{98}{100}}=\sqrt{\frac{1}{50}}=\frac{\sqrt{2}}{10}$$

$$\cos x=\frac{7\sqrt{2}}{10},\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\xrightarrow{\text{در معاله}}\frac{\sqrt{2}}{10}+2\times\frac{7\sqrt{2}}{10}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$\Rightarrow\frac{15\sqrt{2}}{10}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\Rightarrow$ جواب است

$$\cos x=\frac{7\sqrt{2}}{10}\Rightarrow\cos x=\frac{7\sqrt{2}}{10}=\cos\alpha\Rightarrow\boxed{x=2k\pi\pm\alpha}$$

نکته: همین جواب‌ها را در روش دوم حل معادله‌ی کلاسیک نوع اول به دست آوردیم.

مثال ۲. معادله‌ی $\sin 2x-\cos 2x=1$ را حل کنید.

حل: در این معادله $a=1$، $b=-1$ و $c=1$ است، بنابراین برای حل این معادله می‌توانیم مانند مثال قبل عمل کنیم؛ یعنی در معادله‌ی $(a^2+b^2)\cos^2 X-2b\cos X+c^2-a^2=0$ به جای a، b و c مقدارهای بالا و به جای X مقدار 2x را قرار دهیم و معادله را حل کنیم. اما این معادله را به طور مستقیم به صورت زیر حل می‌کنیم.

$$\sin 2x-\cos 2x=1\Rightarrow\sin 2x=1+\cos 2x\Rightarrow\sin^2 2x=(1+\cos 2x)^2$$

$$\Rightarrow 1-\cos^2 2x=1+\cos^2 2x+2\cos 2x\Rightarrow 2\cos^2 2x+2\cos 2x=0$$

$$\Rightarrow 2\cos 2x(\cos 2x+1)=0\Rightarrow 2\cos 2x=0\Rightarrow\cos 2x=0\Rightarrow$$

$$2x=2k\pi\pm\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4},x=k\pi-\frac{\pi}{4}$$

$$2x=2k\pi\pm\pi\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2},x=k\pi-\frac{\pi}{2}$$

اکنون این جواب‌ها را در معادله قرار می‌دهیم تا جواب‌های خارجی، در صورت وجود، مشخص شوند. داریم:

$$x=k\pi+\frac{\pi}{4}\xrightarrow{\text{در معادله}}\sin(2k\pi+\frac{\pi}{2})-\cos(2k\pi+\frac{\pi}{2})=1$$

$\sin\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2}=1\Rightarrow 1-0=1\Rightarrow 1=1\Rightarrow$ جواب است $x=k\pi+\frac{\pi}{4}$

$$x=k\pi-\frac{\pi}{4}\xrightarrow{\text{در معادله}}\sin(2k\pi-\frac{\pi}{2})-\cos(2k\pi-\frac{\pi}{2})=1$$

$$\Rightarrow\sin(-\frac{\pi}{2})-\cos(-\frac{\pi}{2})=1\Rightarrow -1-0=1\Rightarrow -1=1\Rightarrow$$

$x=k\pi-\frac{\pi}{4}$ جواب معادله نیست.

$$x=k\pi+\frac{\pi}{2}\xrightarrow{\text{در معادله}}\sin(2k\pi+\pi)-\cos(2k\pi+\pi)=1$$

$$\Rightarrow\sin\pi-\cos\pi=1\Rightarrow 0-(-1)=1\Rightarrow 1=1\Rightarrow$$

$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ جواب است.

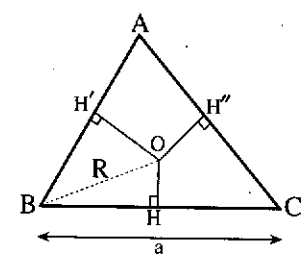
به همین ترتیب ثابت می‌شود که $x=k\pi-\frac{\pi}{2}$ نیز جواب است.

نکته: همانند مثال قبل، می‌توانستیم برای بررسی قابل قبول بودن جواب‌های به دست آمده، جواب‌های خصوصی موجود در بازه‌ی $[0,2\pi]$، یعنی $x=\frac{\pi}{4}$، $x=\frac{3\pi}{4}$ و $x=\frac{\pi}{2}$ را در معادله‌ی کلاسیک داده شده امتحان کنیم. اما در این مثال، خواستیم نشان دهیم که می‌توانیم جواب‌های کلی به دست آمده را نیز در معادله‌ی اصلی امتحان کنیم. بدیهی است، استفاده از جواب‌های خصوصی، محاسبه را ساده‌تر می‌کند.

محاسبه فاصله‌ی پای عمود منصف هر ضلع مثلث از مرکز دایره محیطی

● حسن جوشن
دبیر ریاضی منطقه‌ی میان جلگه نیشابور

در این مقاله به محاسبه فاصله پای عمودمنصف هر ضلع مثلث از مرکز دایره محیطی می‌پردازیم، برای این منظور شکل زیر را درنظر می‌گیریم:



در مثلث OBH داریم: $OH^2 = R^2 - \frac{a^2}{4}$

از طرفی بنا به قانون سینوس‌ها داریم: $2R = \frac{a}{\sin A}$.

درنتیجه داریم:

$$OH^2 = \frac{a^2}{4\sin^2 A} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2 - a^2\sin^2 A}{4\sin^2 A} = \frac{a^2\cos^2 A}{4\sin^2 A}$$
$$\Rightarrow OH^2 = \left(\frac{a\cos A}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{OH = \frac{a\cot gA}{2}}$$

و یا می‌توان نوشت:

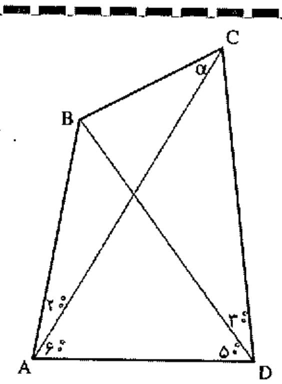
$$OH^2 = \frac{a^2\cos^2 A}{4\sin^2 A} \Rightarrow OH^2 = 4R^2.\frac{\cos^2 A}{4} = R^2\cos^2 A$$
$$\Rightarrow \boxed{OH = R\cos A}$$

از مطالب فوق می‌توان نتیجه گرفت که:

$$OH + OH' + OH'' = \frac{a\cot gA + b\cot gB + c\cot gC}{2}$$
$$OH + OH' + OH'' = R(\cos A + \cos B + \cos C)$$

مسئله مسابقه‌ای

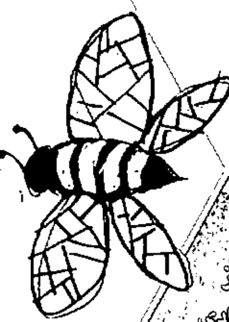
زاویه مشخص شده‌ی α در این شکل را پیدا کنید؟



انتخاب: خانم پروانه محمدی
دبیر ریاضی شهرستان خمین

منبع ....
www.mathpages.com

شگفتی‌های آفرینش



پیش گفتار

راجع به زنبور عسل و حقیقت زندگی این حشره، از سوی دانشمندان و پژوهشگران مطالعات و تحقیقات زیادی صورت گرفته و اظهارنظرهای متفاوتی عنوان شده‌اند. ریشه‌ی این تحقیق را می‌توان در قرن‌ها و عصرهای باستان نیز مشاهده کرد. پاره‌ای از این گفته‌ها و نوشته‌ها، بدون توجه کافی به حقایق زندگی این حشره، از تصورات و برداشت‌های شخصی ناشی شده‌اند.

مطالعه‌ی واقعی درباره‌ی طرز زندگی زنبور عسل، از قرن هفدهم شروع شد و اندیشمندان زیادی که نام عده‌ای از آن‌ها در این مقاله آمده است، توانستند با پیشرفت علم و تکنیک و انتخاب ابزارهای مناسب، تحقیقات بهتری صورت دهند و مطالب دقیق‌تری از وضع زندگی این حشره و هوش ذکاوتش منتشر کنند.

مقاله‌ی حاضر که از کتابی به نام «شگفتی‌های هندسی»[1] انتخاب و مفهوم آن ترجمه شده است، نمونه‌ای از تحقیقی شگفت و ظریف از سوی پژوهشگران در قرن‌های گذشته می‌باشد که درباره‌ی هوش و ذکاوت زنبور به عمل آمده است. بدیهی است، در برگردان متن بیش‌ترین توجه روی نمایاندن این هوش و ذکاوت حشره در ارتباط با ساختمان سلول‌ها از لحاظ هندسی متمرکز بوده است.

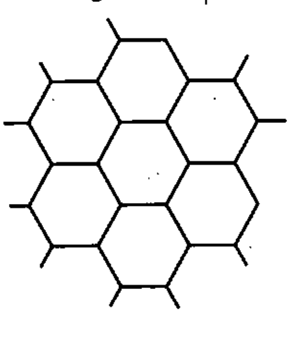
ضمناً، هر جا به توضیحات حاشیه‌ای احتیاج بوده، به آن‌ها اشاره شده و از ترجمه‌ی تفصیلی سایر نظریه‌های پژوهشگران درباره‌ی زندگی این حشره که در کتاب‌های دیگر هم آمده، صرف نظر شده است. امید است، مورد توجه خوانندگان محترم قرار گیرد.

❂ محمد علی شیخان

سلول‌های «کندوی» زنبور عسل

الف) شکل و ترتیب چیدن

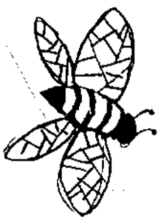
هر گاه یک (شان) از موم را که زنبور عسل به منظور ذخیره‌سازی عسل می‌سازد، مورد بررسی قرار دهیم، معلوم می‌شود از سلول‌های کنار هم چیده شده‌ای ساخته شده است. که هر یک محوری افقی و دهانه یا منفذی به شکل شش ضلعی منتظم دارد (شکل ۱).

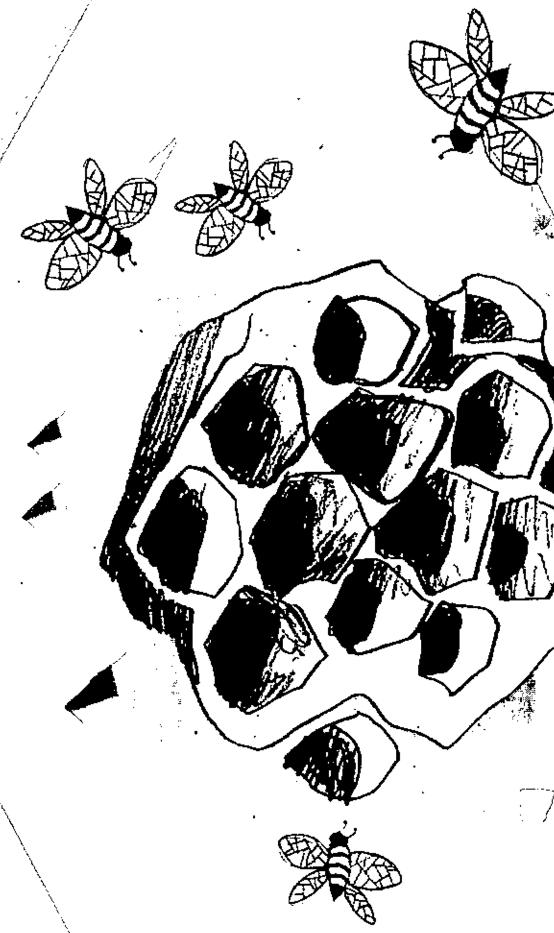


شکل ۱

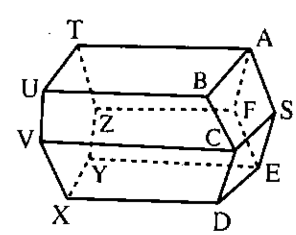
دو ردیف از این سلول‌ها موجود است که از ته (یا پایه) در وسط (شان) به هم متصل هستند و دهانه‌های آن‌ها در دو وجه مقابل (شان) قرار گرفته است یعنی هر سلول یک منشور قائم شش پهلو است.

پایه‌ی سلول مسطح نیست، بلکه سطحی است مقعر (گود)، متشکل از سه لوزی متساوی SABC و SCDE و SEFA به رأس مشترک S (شکل ۲). به این ترتیب، به هر سلول (از یک طرف) سه سلول از مجموعه سلول‌های طرف دیگر متکی است که هر یک با اولی در یک لوزی مشترک است (شکل‌های ۳ و ۴).

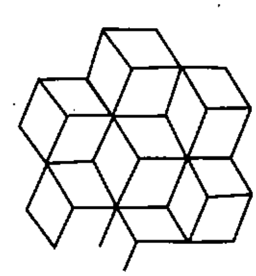




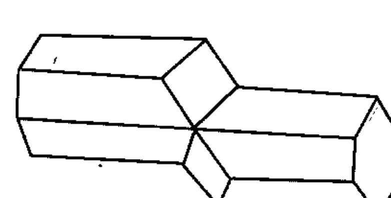
اندازه‌ی زاویه‌های ABC و SCB به ترتیب مساوی است با ۱۰۹°,۲۸′ و ۷۰°,۳۲′، و اندازه‌ی ضلع شش ضلعی به‌طور متوسط $1\frac{1}{5}$ ligne[2] (یا ۲/۷۱ mm) و عمق سلول مساوی ۵lignes (یا ۱۱/۳ mm) و $\frac{AT}{TU}=\frac{۲۵}{۶}$ است. اما ضخامت دیواره‌ها و پایه سلول به زحمت به $\frac{۱}{۳}$ کلفتی برگی از کاغذ معمولی می‌رسد. وانگهی دهانه (یا منفذ) هر سلول با حاشیه‌ای (یا مغزی) از موم استحکام یافته است. بالاخره همین دهانه، برای جلوگیری از ریزش عسل، با ورقه‌ی شش ضلعی شکلی از جنس موم، بسته شده است.



شکل ۲



شکل ۳



شکل ۴

مزیت این تدارکات

موضوع پوشاندن صفحه‌ای به‌وسیله‌ی چند ضلعی‌های منتظم محدب، به‌طوری‌که هر دو چند ضلعی مجاور هم، در یک ضلع و رأس‌های مربوط به آن ضلع مشترک باشند، تداخلی بین چند ضلعی‌ها صورت نگیرد و جای خالی حول وحوش هیچ رأسی باقی نماند، خود بحثی است جداگانه و از دو نظر می‌تواند، مورد مطالعه قرار گیرد: یکی پوشاندن صفحه چند ضلعی‌های منتظم محدب **هم‌نوع**، و دیگری پوشاندن صفحه با **انواع متفاوت** چندضلعی‌های منتظم. در مورد اول، تنها می‌توان با انتخاب مثلث متساوی‌الاضلاع، مربع و یا شش ضلعی منتظم محدب، به این کار موفق شد.[3]

با توجه به این موضوع به نظر می‌رسد، دو نوع اول چندضلعی‌ها که محوطه‌های زاویه‌دار زیادی را پدید می‌آورند، برای لاروها (یعنی بچه زنبورها و در نتیجه زنبورها) غیر قابل استفاده‌اند، و برعکس، شش ضلعی منتظم به سبب آن‌که بیش‌تر با دایره مقایسه می‌شود و شبیه آن است

مناسب‌تر اند.

اما به‌ویژه آشکار است، هدف زنبور عسل یافتن راهی است تا موم را که محصولی ناپیدا و از دست رفته برای جانور است، تلف نکند. به‌عبارت دیگر، جانب اقتصاد را از نظر صرف موم برای ساختن سلول‌های کندو، مراعات کند.

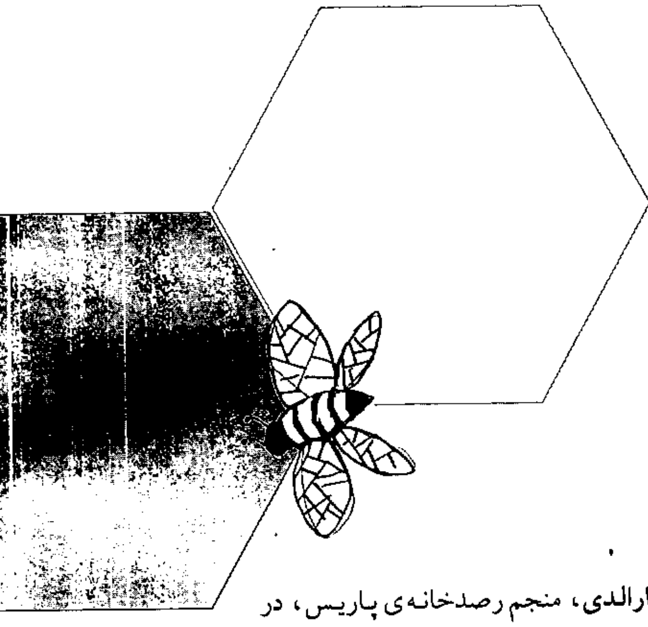
اتکا (یا اتصال) سلول‌ها از پایه به‌هم که باعث حذف یکی از پایه‌های سلول‌های یکی از دو طرف (شان) می‌شود نیز به‌همین منظور است. به‌علاوه، همان‌طور که اشاره شد، شش ضلعی منتظم یکی از سه نوع چندضلعی‌های منتظم محدبی است که می‌توان بدون جا خالی آن‌ها را کنار هم چید. به‌زودی ثابت خواهیم کرد که برای یک سطح معلوم، شش ضلعی منتظم کوچک‌ترین محیط را دارد و در نتیجه، با استفاده از آن، برای ساختن بدنه‌ی سلول به موم کم‌تری نیاز است. همان‌طور که در ادامه خواهیم دید، مقطع مشترک لوزی شکلی که زنبور عسل برای پایه‌ی سلولی انتخاب می‌کند، متناسب است با کامل‌ترین سطح کوچکی که برای ساختن آن، موم کمی احتیاج است. **این قوه‌ی درک و شعور زنبورهاست** که آن‌ها را هدایت می‌کند تا در این دو مورد چنین تصمیمی بگیرند.

یک مطلب تاریخی

در روزگاران قدیم، به شکل شش پهلو بودن سلول‌های کندوی زنبور عسل پی برده بودند. **ارسطو** (قرن چهارم قبل از میلاد) در کتاب «تاریخ حیوانات» خود (مقاله‌ی نهم، فصل ۲۷) و **پلین لانسین**[۴] (قرن اول) در کتاب «تاریخ طبیعی»اش (مقاله‌ی ۱۱، فصل ۱۲)، از آن نام می‌برند.

به‌نظر می‌رسد اول بار **پاپوس**[۵] (قرن چهارم) این موضوع را به‌طریق هندسی شرح داد.

او در آغاز مقاله‌ی پنجم از مجموعه‌ی نوشته‌های خود، به این شکل از مقطع سلول‌های کندو توجه کرد و انگیزه‌ی انتخاب آن را برای پوشش صفحه با دو شرط مربوط به محیط مینیمم برای یک سطح معلوم بیان داشت. ولی قابل ذکر است که به لوزی شکل بودن پایه‌ی سلول‌های کندو تا قبل از قرن هیجدهم توجهی نشده بود. برادرزاده‌ای از **کاسینی‌ها**[۶] به‌نام



مارالدی، منجم رصدخانه‌ی پاریس، در سال ۱۷۱۲ از طریق تجربه و با دقت، زوایای لوزی‌ها را معین کرد و مقادیر (۱۰۹°,۲۸´) و (۷۰°,۳۲´) را برای این زوایا پیدا کرد.

رئومور[۷] (محققی که درباره‌ی حشرات به تحقیق پرداخته و کتاب‌هایی در سال‌های ۱۷۴۰ و ۱۷۴۲ در پاریس منتشر کرده است)، بدگمان از این‌که نیت صرفه‌جویی، زنبورها را به ساختن سلول‌هایی با چنان پایه‌هایی وادار کرده باشد، به مهندسی آلمانی به‌نام **کونیگ**[۸]، بدون آن‌که نتایج به‌دست آمده‌ی قبلی مارالدی را با وی در میان گذارد، پیشنهاد کرد این مسأله را حل کند: «بین تمام سلول‌های شش پهلو با پایه‌ی مرکب از سه لوزی متساوی، آن را معین کنید که بتوان با کم‌ترین ماده ساخت.»

کونیگ، در سال ۱۷۳۹ مسأله را با حساب دیفرانسیل حل کرد و دریافت که باید زوایای لوزی‌های سلول، دست کم مساوی (۱۰۹°,۲۶´) و (۷۰°,۳۴´) باشند. مطابقت این مقادیر با اندازه‌هایی که مارالدی به‌دست آورده بود، شگفت‌آور بود. **ماک‌لورن**[۹] در سال ۱۷۴۳ ثابت کرد که **کونیگ** در محاسباتش مرتکب خطا شده و مقادیر درست زوایا دقیقاً همان است که **مارالدی** معین کرده است؛ یعنی: (۱۰۹°,۲۸´) و (۷۰°,۳۲´).

چندی بعد، همین مسأله از نقطه نظر هندسی به وسیله‌ی ریاضیدانان دیگری بررسی شد، و از بین آنان، **لویی لیه**[۱۰] (۱۷۸۱)، **لالان**[۱۱] (۱۸۴۰)، **بروگام**[۱۲] (۱۸۵۸) و **هنسی**[۱۳] (۸۶ـ۱۸۸۵) همان نتایج پیشین را تأیید یا کامل کرده‌اند.

ب) خواص هندسی

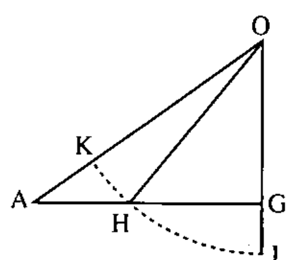
مقطع قائم سلول

۱. شش ضلعی منتظم با کنار هم چیده شدن می‌توانند، صفحه‌ای را به طور نامحدود بپوشاند. در واقع، اطلاع پیدا کردیم که در این رابطه، از شش ضلعی منتظم، مثلث متساوی‌الاضلاع و مربع، یکسان می‌توان استفاده کرد.

۲. از بین تمامی این گونه چندضلعی که می‌توانند با کنار هم چیده شدن، صفحه‌ای را بپوشانند، آن که کم‌ترین محیط را برای یک سطح معلوم نشان می‌دهد، شش‌ضلعی منتظم است (پاپوس، قرن چهارم میلادی).

در ادامه، اثبات نظریه‌ی فوق خواهد آمد، اما چون **کاماندین**[14] در قرن شانزدهم این اثبات را بازسازی و کامل کرده است، ابتدا لم زیر را که اشاره به همین مطلب است، ثابت می‌کنیم.

لم: اگر OG و AG دو خط عمود بر هم باشند و OH و OA دو مایل نسبت به AG، خواهیم داشت: $\frac{AG}{HG} > \frac{\angle AOG}{\angle HOG}$ (شکل۵).



شکل ۵

زیرا اگر به مرکز O و به شعاع OH قوسی رسم کنیم تا OA را در K و امتداد OG را در J قطع کند، واضح است داریم: (مساحت قطاع OKH) < (مساحت مثلث OAH) و (مساحت قطاع OHJ) > (مساحت مثلث OHG)

از آن‌جا:

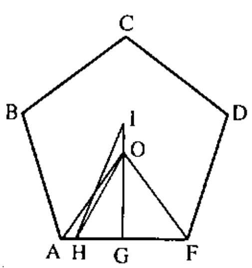
$$\frac{\text{م. مثلث OAH}}{\text{م. مثلث OHG}} > \frac{\text{م. قطاع OKH}}{\text{م. قطاع OHJ}}$$

حال اگر در دو طرف این نامساوی، عضو به عضو نسبت‌های مساوی‌شان را قرار دهیم نتیجه می‌شود:

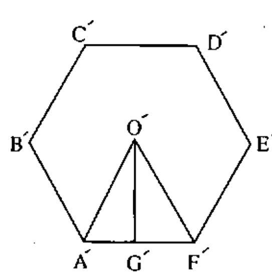
$$\frac{AH}{HG} > \frac{\angle AOH}{\angle HOG}$$

پس از ترکیب نسبت‌ها در صورت و خلاصه کردن، با توجه به شکل داریم: $\frac{AG}{HG} > \frac{\angle AOG}{\angle HOG}$

حال برای رسیدن به مطلبی که از آن صحبت شد، استدلال پاپوس را دنبال و ثابت می‌کنیم، اگر تعداد اضلاع دو چندضلعی منتظم O و O′ (چندضلعی بر اساس مراکزشان نامیده شده‌اند) متفاوت، ولی محیط‌های آن‌ها مساوی باشند، مثلاً اگر تعداد اضلاع O′ بیش‌تر باشد، مساحتش نیز بیش‌تر خواهد بود (شکل ۶ و ۷).



شکل ۶



شکل ۷

در حقیقت، اگر G و G′ به ترتیب اوساط اضلاع AF و A′F′ از چندضلعی‌های O و O′ باشند، در صورتی‌که: $AF > A'F'$، در نتیجه: $AG > A'G'$. آن‌گاه می‌توان GH را روی AG مساوی G′A′ جدا کرد و با وصل H به O داریم:

$\frac{AF}{P} = \frac{\angle AOF}{۴\ \text{قائمه}}$ و $\frac{A'F'}{P} = \frac{\angle A'O'F'}{۴\ \text{قائمه}}$ (P محیط)

چندضلعی‌ها است) از آن‌جا داریم: $\frac{AF}{A'F'} = \frac{\angle AOF}{\angle A'O'F'}$ که نتیجه می‌شود:

$$\frac{AG}{HG} = \frac{\angle AOG}{\angle A'O'G'}$$

ولی بنا به لم بالا: $\frac{AG}{HG} > \frac{\angle AOG}{\angle HOG}$. پس:

$\frac{\angle AOG}{\angle A'O'G'} > \frac{\angle AOG}{\angle HOG}$ ، و در نتیجه داریم:

$\angle A'O'G' < \angle HOG$ و $\angle G'A'O' > \angle GHO$.

حال: اگر $\angle GHI$ را مساوی $\angle G'A'O'$ بگیریم، I روی امتداد GO قرار می‌گیرد. پس $IG > OG$ یا $O'G' > OG$.

از طرف دیگر، مساحت کثیرالاضلاع O مساوی است با: $\frac{P\times OG}{2}$ و مساحت کثیرالاضلاع O' مساوی است با: $\frac{P\times O'G'}{2}$.

در نتیجه:

مساحت کثیرالاضلاع O > مساحت کثیرالاضلاع O' .

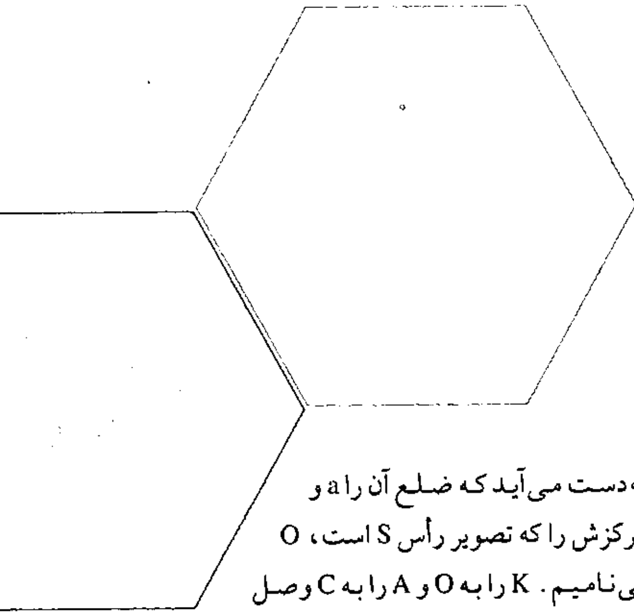
برعکس، اگر مساحت‌های کثیرالاضلاع‌های O و O' مساوی باشند، محیط O' کم‌تر از محیط O خواهد شد.

پس: محیط شش‌ضلعی منتظم برای یک سطح معلوم، کوچک‌تر است از محیط مربع و یا محیط یک مثلث متساوی‌الاضلاع که دارای همان مساحت باشد.

پایه سلول

۳. مساحت کل سلولی با مقطع و ارتفاع معین، وقتی کم‌ترین است که پایه‌ی آن لوزی شکل و از لوزی‌های متساوی تشکیل شده باشد.

در این‌جا روش **ماک‌لورن** را که برگرفته از کتاب هندسه‌ای باستانی است، به‌کار خواهیم برد. زیرا در زمره‌ی نمونه کارهای قابل توجه است. فرض می‌کنیم سلولی با پایه‌ای از لوزی‌های متساوی SABC، SCDE و... به ضلع c تشکیل شده باشد (شکل ۸). مقطع قائم مار بر رأس A را رسم می‌کنیم. در شکل، شش‌ضلعی منتظم... AKCL

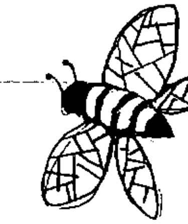


به‌دست می‌آید که ضلع آن را a و مرکزش را که تصویر رأس S است، O می‌نامیم. K را به O و A را به C وصل می‌کنیم (شکل ۸) و از AC صفحه‌ی دلخواهی می‌گذرانیم که فصل مشترک آن با صفحات TABU، UBCV، ASO و CSO، لوزی AG'CG را نتیجه می‌دهد. بالاخره، یال AT را با l و نیم‌قطر AP را با d نشان می‌دهیم. در حالی که فقط $\frac{1}{3}$ سلول را مشخص کرده‌ایم، باید صفحه‌ی AG'CG را چنان رسم کنیم تا مساحت‌های حاصل از ذوزنقه‌های TAGU و UGCV و لوزی AG'CG مینیمم شود؛ یعنی: $(l+GU)a+2d.GP$ می‌نیمم باشد. عبارت فوق را می‌شود چنین نوشت: $(l+l-Gk)a+2d.GP$ یا $2la-a.Gk+2d.GP$.

اما حاصل ضرب $2.l.a$ مقدار ثابتی است. پس مسأله به تعیین مینیمم عبارت $2d.GP-a.Gk$ (۱) منجر خواهد شد.

فرض می‌کنیم، B روی UK طوری انتخاب شده باشد که: $\frac{BK}{BP}=\frac{a}{2d}$ (۲). به مرکز P و به شعاع PG در صفحه BKP قوسی رسم می‌کنیم تا BP یا امتداد آن را در J قطع کند. KH و GI را عمود بر PB رسم می‌کنیم. از تشابه مثلث‌های قائم‌الزاویه GIB، KHB و PKB و نیز با توجه به رابطه‌ی (۲) می‌توان نوشت: $\frac{BI}{BG}=\frac{BH}{BK}=\frac{BK}{BP}=\frac{a}{2d}$ یا: $\frac{BH-BI}{BK-BG}=\frac{IH}{GK}=\frac{a}{2d}$ از آن‌جا: $a.GK=2d.HI$. آن‌گاه عبارت (۱) را می‌توان چنین نوشت:

$$2d.GP-a.GK=2d.GP-2d.HI=2d(GP-HI)$$
$$=2d(JI+HP)$$



اما d و HP مقداری است ثابت. پس تحقیق می‌کنیم، چه وقت مقدار JI مینیمم است. پیدا است، این هم درازای JI=۰ می‌نیمم خواهد بود؛ یعنی موقعی که نقاط J و I بر هم منطبق شوند یا موقعی که G روی B قرار گیرد. بنابراین، مینیمم مطلوب زمانی حاصل می‌شود که صفحه‌ی قاطع از B که به‌وسیله‌ی رابطه‌ی (۲) مشخص شده است، بگذرد. این وضع از صفحه‌ی قاطع، دقیقاً همان چیزی است که در سلول‌ها وجود دارد.

تبصره: اولاً، آنچه که گفته شد بدون در نظر گرفتن ورقه‌ی شش‌ضلعی دهانه‌ی سلول بود، ولی چون سطح این ورقه ثابت است، نتیجه‌ای که در بالا به‌دست آورده‌ایم، تغییر نمی‌کند.

ثانیاً، منشور قائمی که به‌قاعده‌ی شش‌ضلعی... AKCL است و خود سلول، ظرفیت (حجم) مساوی دارند، زیرا در حالی که فقط $\frac{1}{3}$ حجم آن‌ها مشخص شده است، دیده شد که هرم‌های BAKC و SAOC مساوی‌اند. ولی دیدیم و ثابت شد که مساحت‌های آن‌ها مساوی نیستند.

۴. زوایای لوزی متقابلاً مساوی‌اند با: $(109^\circ, 28', 16'')$ و $(70^\circ, 31', 44'')$.

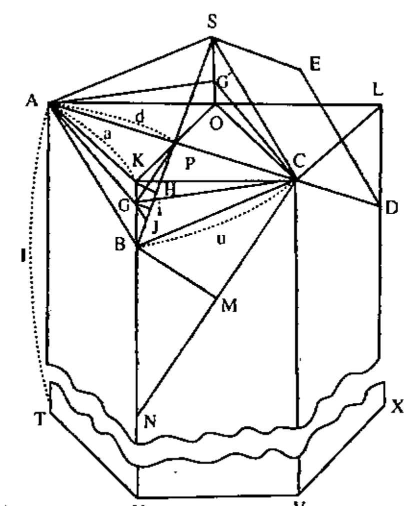
از مثلث قائم‌الزاویه‌ی BKP داریم:

$$\overline{BP}^2 = \overline{BK}^2 + \overline{KP}^2$$

به‌جای BK مقدار مساوی‌اش $BP.\frac{a}{2d}$ را قرار می‌دهیم (رابطه‌ی ۲)، و نیز به‌جای KP مقدار $\frac{a}{2}$ را. نتیجه می‌شود: $BP = \frac{ad}{\sqrt{4d^2 - a^2}}$. و چون: AP=d، پس: $\frac{AP}{BP} = \frac{\sqrt{4d^2 - a^2}}{a}$. ولی d نصف ضلع AC از مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در دایره‌ی به شعاع a، و مقدارش مساوی $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ است. پس: $\frac{AP}{BP} = \sqrt{2}$.

از این قرار، اندازه‌ی قطر بزرگ‌تر یکی از لوزی‌های پایه، مساوی با قطر مربعی است که به‌ضلع قطر کوچک‌تر ساخته می‌شود. به‌علاوه، قطر کوچک‌تر، یعنی BS، مساوی $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ است. از طرف دیگر می‌دانیم: $tg\, A\hat{B}P = \frac{AP}{PB}$ و به کمک جدول، مقدار تانژانت هر زاویه را می‌توان به‌دست آورد و برعکس.

چون: $\sqrt{2} = tg54^\circ, 44', 8''$ و در نتیجه: $A\hat{B}C = 109^\circ, 28', 16''$، زاویه‌ی BCS که مکمل آن است، مساوی است با: $70^\circ, 31', 44''$ (شکل ۸).



شکل ۸

۵. اندازه‌ی یک ضلع لوزی، سه برابر طول BK یا SO است. از مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی BPC و BKP داریم: $\overline{BC}^2 = \overline{BP}^2 + \overline{PC}^2$ یا $\overline{BC}^2 = \frac{d^2}{2} + d^2$ یا $\overline{BC}^2 = \frac{9a^2}{8}$.

از آن‌جا: $BC = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$ و $\overline{BK}^2 = \overline{BP}^2 - \overline{KP}^2 = \frac{d^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{8}$ یا: $BK = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ و در نتیجه: $BC = 3BK$ (شکل ۸).

به‌علاوه دیده می‌شود که BK مساوی $\frac{1}{4}$ ضلع مربع محاط در دایره‌ی به شعاع a است.

تبصره ۵: مربع اندازه‌ی هر یک از پاره‌خط‌های مستقیم‌الخط زیر با توجه به شکل ۸، یعنی AB، AK، AP، BP، KP و BK به ترتیب مساوی‌اند با: $\frac{9a^2}{8}, a^2, \frac{3a^2}{4}, \frac{3a^2}{8}, \frac{a^2}{4}, \frac{a^2}{8}$. و یا اگر $\overline{BK}^2$ را واحد اختیار کنیم، مساوی‌اند با: ۹، ۸، ۶، ۳، ۲ و ۱.

۶. **زوایای حول هر کنج مانند A، B، C، D و ... با هم مساوی‌اند.**

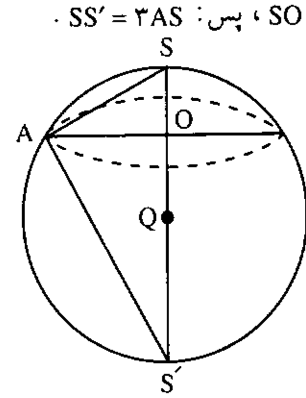
زیرا اگر روی BU طول BN را مساوی BC بگیریم و BM را عمود بر CN رسم کنیم، از مثلث قائم‌الزاویه‌ی NKC با توجه به این‌که: $NK = 4BK = a\sqrt{2}$ نتیجه می‌شود:

$\overline{CN}^2 = \overline{NK}^2 + \overline{KC}^2 = 3a^2$ یا $CN = a\sqrt{3} = AC$

پس دو مثلث NBC و ABC به حالت تساوی سه ضلع مساوی هستند و در نتیجه: $N\hat{B}C = A\hat{B}C$. به همین ترتیب: $N\hat{B}A = A\hat{B}C$. وجوه کنج C نیز مساوی‌اند، چون مکمل زاویه‌ی سه وجهی B هستند. و...

۷. **هرم مثلث القاعده‌ی SACE** که سلول «کندو» مختوم به آن است، قابل محاط در کره‌ای است که قطر آن سه برابر ضلع لوزی است.

قاعده‌ی این هرم، مثلث متساوی‌الاضلاع ACE است (شکل ۸) که می‌توان آن را در دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OA=a محاط کرد. حال می‌توانیم ثابت کنیم این دایره، دایره‌ی صغیره‌ای است به قطب S متعلق به کره‌ای به مرکز Q واقع روی SO (شکل ۹). از مثلث قائم‌الزاویه‌ی ASS' نتیجه می‌شود: $\overline{AS}^2 = SS'.SO$. از این‌جا: $SS' = \frac{\overline{AS}^2}{SO}$. چون: $SO = \frac{AS}{3}$، پس: $SS' = 3AS$.



شکل ۹

مقایسه سلول کندو با سلولی دارای پایه‌ی صاف

دیدیم (شماره‌ی ۳، تبصره، ثانیاً) که سلول کندو و یک سلول دارای پایه‌ی صاف که اندازه‌ی ضلع مقطعشان با هم و طول یال‌های آن‌ها نیز با هم مساوی باشند، دارای حجم‌های معادلند. ولی گفته شد که مساحت‌های آن‌ها یکی نیست و مساحت سلول کندو مینیمم است. اکنون بررسی می‌کنیم ارزش اقتصادی سطحی را که به وسیله‌ی زنبور عسل انتخاب شده است.

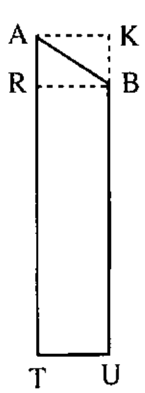
ضلع مقطع قائم دو قسم سلول را با a نشان می‌دهیم و می‌دانیم که طول یال مساوی $\frac{25a}{6}$ است. یک محاسبه‌ی ساده و اندکی جالب نشان می‌دهد که مساحت کل سلول کندو و سلول دارای پایه‌ی صاف به ترتیب مساوی‌اند با دو مقدار $\frac{a^2}{2}(50 + 3\sqrt{2})$ و $\frac{a^2}{2}(50 + 3\sqrt{3})$ (همیشه محاسبه منفک از ورقه‌ی منفذ سلول انجام می‌شود). پس مساحت اولی به دومی، مثل $3\sqrt{2} + 50$ است به $3\sqrt{3} + 50$؛ یا کمی نزدیک به ۵۴ است به ۵۵.

از این قرار، زنبورها با به کار بردن پایه‌ی لوزی شکل برای سلول کندو در مصرف موم صرفه‌جویی می‌کنند.

ج) ساختمان یک سلول

ذوزنقه‌های جانبی

اگر TU ضلع شش‌ضلعی مقطع قائم باشد (شکل ۱۰)، اندازه‌ی طول ضلع (یا قاعده‌ی) AT ذوزنقه مساوی است با: $\frac{25}{6}TU$ (بند الف). اختلاف دو قاعده‌ی ذوزنقه ABUT، یعنی AR=BK، مساوی است با: $\frac{\sqrt{2}}{4}TU$ (شماره‌ی ۵). از آن‌جا به وسیله‌ی رسم یا به کمک محاسبه، قاعده‌ی دیگر و وضع نقطه‌ی B مشخص می‌شود.

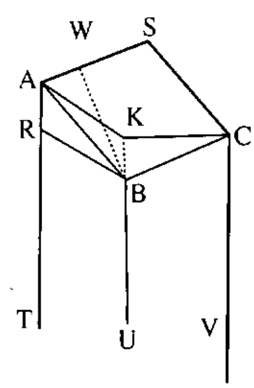


شکل ۱۰

اگر یکی از اضلاع لوزی‌های پایه مثلاً AB را بشناسیم، چنانچه طرز تعیین آن را بعد از این خواهیم دید، لازم نیست مقدار AR را به‌کار بریم. کافی است به‌مرکز A و به شعاع AB قوسی رسم کنیم تا UK را در B قطع کند.

لوزی‌های پایه

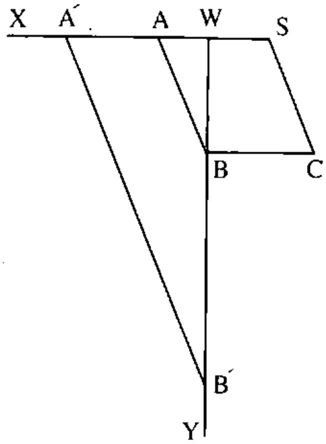
اگر قبلاً یکی از ذوزنقه‌های جانبی ساخته شده باشد، طول AB یکی از اضلاع لوزی است. به‌کمک زاویه‌یاب با توجه به این‌که مقدار یکی از زوایای لوزی مساوی ´۱۰۹°,۲۸ است، رسم کامل لوزی به آسانی صورت می‌گیرد. حال فرض می‌کنیم، می‌خواهیم یکی از لوزی‌ها، مثلاً SABC را مستقل از رسم قبلی (یعنی بدون در نظر گرفتن رسم یکی از ذوزنقه‌های جانبی) بسازیم، در حالی که فقط اندازه‌ی a طول ضلع شش‌ضلعی مقطع قائم را می‌شناسیم. فاصله‌ی B از AS، یعنی BW، مساوی



شکل ۱۱

AK=a است؛ زیرا اگر BR را موازی AK رسم کنیم، دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی AWB و ARB مساوی‌اند، چون وتر مشترک دارند و زوایای A در آن‌ها مساوی است (بند ب، شماره‌ی ۶). این را هم می‌دانیم که: $AW = AR = BK = \frac{AB}{۳}$ (بند ب، شماره‌ی۵).

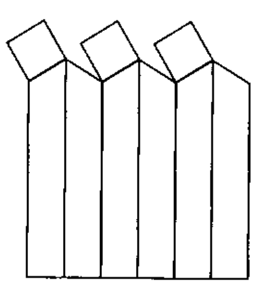
حال ببینیم چگونه می‌توان لوزی را ساخت. اگر WX و WY و خط عمود بر هم باشند، روی اولی طولی دلخواه 'WA را انتخاب، و به‌مرکز 'A و به‌شعاع '۳WA، دایره‌ای رسم کنیم تا wy را در 'B قطع کند (شکل ۱۲). آن‌گاه اگر روی 'WB طول BW را مساوی AK=a جدا کنیم و BA را موازی 'B'A بکشیم، BA و زاویه‌ی BAW به‌ترتیب یک ضلع و یک زاویه‌ی لوزی مطلوب است. ساختمان را به آسانی کامل می‌کنیم.



شکل ۱۲

گسترش یک سلول

دو طریقه‌ی رسم قبلی امکان می‌دهد که گسترش یک سلول کندو را به‌دست آوریم. شکل ۱۳، این گستردگی را با مقیاس $\frac{۵}{۲}$ نشان می‌دهد. خوانندگان می‌توانند باکاغذ یا مقوا به سادگی این شبکه و از آن‌جا یک سلول را بسازند.



شکل ۱۳

زیرنویس

1. CURIOSI TÉS GÉOMÉTRIQUWS/E.FOURREY

۲. واحد اندازه‌گیری طول در قدیم.

۳. برای مطالعه‌ی بیش‌تر و بهتر در این مورد، به مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، شماره‌ی ۳۰ مقاله‌ای با عنوان «خانه‌بندی صفحه» مراجعه کنید.

4. Pline L'ancien

5. Pappus

۶. CASSiNiS. برای اطلاعات بیش‌تر به کتاب: آشنایی با تاریخ ریاضیات، جلد دوم، یا به کتاب: دایرةالمعارف دانشمندان علم و صنعت، ترجمه‌ی دکتر مصاحب مراجعه کنید.

7. REAUMUR
8. KOENiG
9. MAC LAURiN
10. LHUILLIER
11. LALANNE
12. BROUGHAM
13. HENNESSY
14. COMMANDIN

برای دانش‌آموزان سال سوم و پیش‌دانشگاهی

میرشهرام صدر
mir_sadr@yahoo.com

کاربرد مشتق در امور فنی (مسائل بهینه‌سازی)

در زندگی روزمره با مسائلی روبه‌رو می‌شویم که می‌خواهیم از حداقل امکانات حداکثر استفاده را ببریم، برای آشنایی بیشتر به این مثال توجه کنید:

«دو عدد صحیح مثبت چنان بیابید که حاصل جمع آن‌ها ۲۰ و حاصل ضربشان بیشترین مقدار ممکن باشد».

برای حل این مثال، ابتدا با استفاده از شهود، سعی کرده جفت عددهای صحیح و مثبتی را پیدا کنیم که حاصل جمع آن‌ها برابر با ۲۰ باشد، سپس حاصل ضرب هر کدام از آن‌ها را پیدا می‌کنیم. از بین این حاصل ضرب‌ها، هر کدام که از بقیه بیشتر باشد دو عدد موردنظر مسأله را می‌دهد:

۱+۱۹=۲۰;۱×۱۹=۱۹	۶+۱۴=۲۰;۶×۱۴=۸۴
۲+۱۸=۲۰;۲×۱۸=۳۶	۷+۱۳=۲۰;۷×۱۳=۹۱
۳+۱۷=۲۰;۳×۱۷=۵۱	۸+۱۲=۲۰;۸×۱۲=۹۶
۴+۱۶=۲۰;۴×۱۶=۶۴	۹+۱۱=۲۰;۹×۱۱=۹۹
۵+۱۵=۲۰;۵×۱۵=۷۵	۱۰+۱۰=۲۰;۱۰×۱۰=۱۰۰

با توجه به حاصل جمع و حاصل ضرب‌های بالا ملاحظه می‌کنیم که هرچه اختلاف دو عدد کمتر می‌شود، حاصل ضربشان بیشتر می‌شود تا آن‌جا که وقتی هر دو عدد برابر با ۱۰ باشند، حاصل ضربشان بیشترین مقدار را دارد. بنابراین به روش شهودی به این حدس کلی می‌رسیم:

«دو عدد حقیقی x و y که حاصل جمعشان برابر با a ولی حاصل ضربشان بیشترین مقدار ممکن را داشته باشند، برابرند با: $x=y=\frac{a}{2}$»

می‌توان حدس بالا به طور دقیق به صورت زیر ثابت کرد:

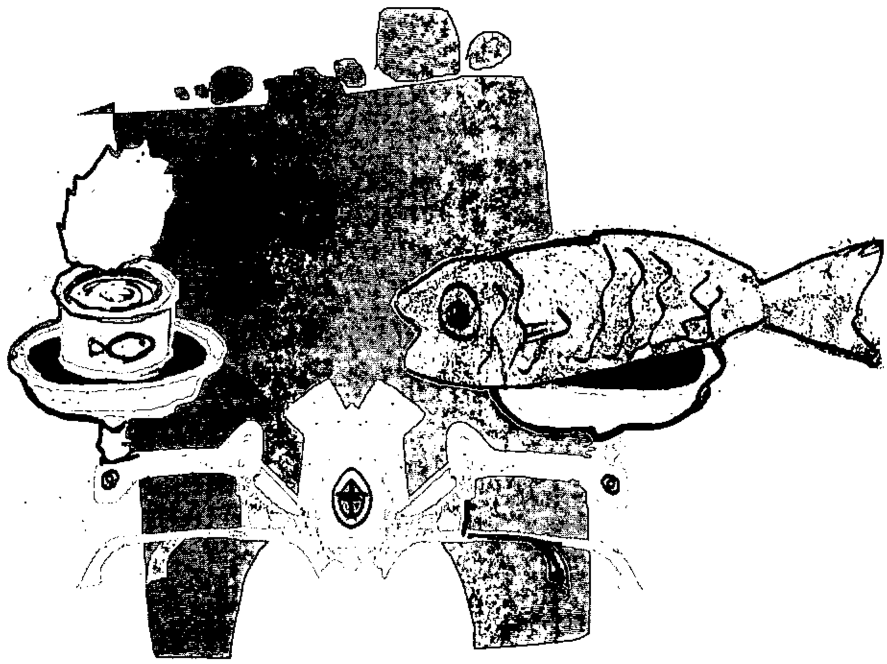
$$\begin{cases} x+y=a \Rightarrow y=a-x \\ P=xy \end{cases} \Rightarrow P=x(a-x)$$

$$\Rightarrow P=x(a-x)=-x^2+ax=-(x^2-ax)$$
$$=-(x^2-ax+\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4})=\frac{a^2}{4}-(x-\frac{a^2}{2})$$

در نتیجه داریم:

$$P=\frac{a^2}{4}-(x-\frac{a}{2})^2 \quad (1)$$

با توجه به رابطه‌ی (۱) درمی‌یابیم که بیشترین مقدار P



وقتی به دست می‌آید که: $(x-\frac{a}{2})^2=0$ بنابراین داریم:

$$x-\frac{a}{2}=0 \Rightarrow x=\frac{a}{2} \quad (2)$$

از طرفی $x+y=a$، پس با توجه به رابطه (۲) ملاحظه می‌کنیم که $y=\frac{a}{2}$، در نتیجه وقتی P بیشترین مقدار ممکن را دارد که داشته باشیم:

$$x=y=\frac{a}{2}$$

اکنون می‌خواهیم که این مثال یا مسائل مشابه با آن را با استفاده از کاربرد مشتق حل کنیم.

در بحث کاربرد مشتق در امور فنی، معمولاً مسائلی مطرح می‌شوند که به دنبال یافتن بیش‌ترین یا کم‌ترین مقدار یک کمیت در شرایط مشخصی هستند. برای استفاده از مشتق در حل این‌گونه مسائل، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱. شکل مناسبی (در صورت امکان) برای مسأله رسم می‌کنیم.

۲. با توجه به مسأله، عددها و متغیرهایی را به هر یک از مقدارهای شکل نسبت می‌دهیم.

۳. با توجه به صورت مسأله، برای کمیتی که باید ماکزیمم یا مینیمم شود، معادله‌ای می‌نویسیم و آن را «معادله‌ی اولیه» می‌نامیم.

۴. معمولاً در معادله‌ی اولیه، بیش از یک متغیر وجود دارد. با توجه به مسأله یا شکلی که برای آن رسم می‌کنیم، رابطه‌ای بین متغیرها وجود دارد که به آن «معادله‌ی ثانویه» می‌گوییم.

۵. معادله‌ی اولیه را به یک متغیر وابسته می‌کنیم. برای این کار از معادله‌ی ثانویه استفاده می‌کنیم.

۶. دامنه‌ی معادله‌ی اولیه را مشخص می‌کنیم.

۷. نقاط بحرانی معادله‌ی اولیه را به دست می‌آوریم و جدول تغییرات آن را رسم می‌کنیم تا طول نقاط اکسترمم نسبی به دست آید. سپس طول نقاط اکسترمم را در معادله‌ی اولیه قرار می‌دهیم و مقدار ماکزیمم یا مینیمم کمیت موردنظر را به دست می‌آوریم.

مثال: مجموع دو عدد مثبت برابر ۲۰ است. ماکزیمم حاصل ضرب آن‌ها چه قدر است.

حل: فرض کنیم آن دو عدد x و y باشند. چون هر دو عدد مثبت هستند، بنابراین: $y>0, x>0$

$A=xy$: معادله‌ی اولیه

$x+y=20 \to y=20-x$: معادله‌ی ثانویه

اکنون اگر $y=20-x$ را در معادله‌ی اولیه قرار دهیم، آن را به یک متغیر وابسته کرده‌ایم:

$$A=x(20-x)=-x^2+20x$$

نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^2+20x$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(x)=-2x+20=0 \Rightarrow x=10$$

x	$-\infty$		10		$+\infty$
f′(x)		+	0	−	
f(x)	$-\infty$	↗	100	↘	$-\infty$

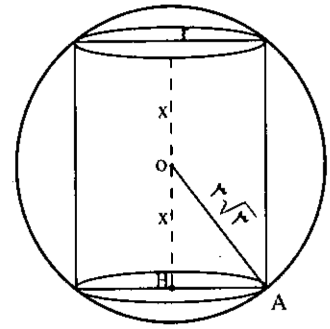
با توجه به جدول بالا ملاحظه می‌کنیم که تابع f در $x=10$، دارای ماکزیمم نسبی است. بنابراین داریم:

$$x=10, y=20-x=20-10=10$$

در نتیجه، دو عدد موردنظر $x=10$ و $y=10$ هستند.

مثال: در کره‌ای به شعاع $3\sqrt{3}$، استوانه‌ای به حجم ماکزیمم محاط کرده‌ایم. مقدار عددی این حجم را بیابید.

حل: در شکل زیر فرض می‌کنیم، ارتفاع استوانه $h=2x$، و شعاع قاعده‌ی استوانه برابر r باشد.



می‌خواهیم حجم استوانه ماکزیمم باشد، بنابراین:

$V=\pi r^2h=2\pi r^2x$: معادله‌ی اولیه

با توجه به شکل در مثلث قائم‌الزاویه OAH داریم:

$OH^2+HA^2=OA^2 \Rightarrow x^2+r^2=(3\sqrt{3})^2$: معادله‌ی ثانویه

$$\Rightarrow r^2=27-x^2$$

اکنون اگر $r^2=27-x^2$ را در معادله‌ی اولیه قرار دهیم، آن را به یک متغیر وابسته کرده‌ایم:

$$V=2\pi(27-x^2)x=-2\pi x^3+54\pi x$$

نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x)=-2\pi x^3+54\pi x$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(x)=-6\pi x^2+54\pi=0 \to x=-3, x=3$$

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
f′(x)		−	0	+	0	−	
f(x)	$+\infty$	↘	-108	↗	108	↘	$-\infty$

با توجه به جدول بالا ملاحظه می‌کنیم که تابع f در $x=-3$ دارای مینیمم نسبی و در $x=3$ دارای ماکزیمم نسبی است. بنابراین داریم:

$$x=3; r^2=27-x^2 \Rightarrow r^2=27-9=18 \Rightarrow r=3\sqrt{2}$$

در نتیجه، حجم ماکزیمم برابر است با:

$$V=2\pi r^2x=2\pi\times 18\times 3=108\pi$$

تمرین‌های حل شده

۱. دو عدد مثبت چنان بیابید که حاصل ضرب آن‌ها برابر ۱۹۲ و حاصل جمع عدد اول با ۳ برابر عدد دوم مینیمم باشد.

حل: فرض کنیم عدد اول $x>0$ و عدد دوم $y>0$ باشند. داریم:

$A=x+3y$: معادله‌ی اولیه

$xy=192=y=\frac{192}{x}$: معادله‌ی ثانویه

اگر $y=\frac{192}{x}$ را در معادله‌ی اولیه قرار دهیم، آن را به یک متغیر وابسته کرده‌ایم:

$$A=x+3\times\frac{192}{x}=x+\frac{576}{x}$$

نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x+\frac{576}{x}$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(x)=1-\frac{۵۷۶}{x^۲}=۰\Rightarrow\frac{x^۲-۵۷۶}{x^۲}=۰\Rightarrow x=۲۴, x=-۲۴$$

x	$-\infty$		-۲۴		۰		۲۴		$+\infty$
$f'(x)$		+	۰	−	‖	−	۰	+	
$f(x)$		↗		↘	‖	↘		↗	

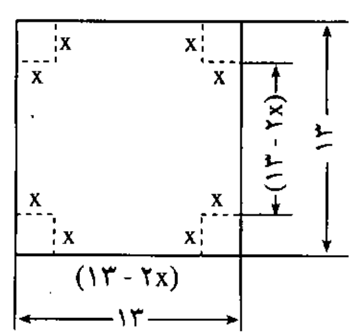
با توجه به جدول بالا ملاحظه می‌کنیم که تابع در x=۲۴ دارای مینیمم نسبی است. بنابراین داریم:

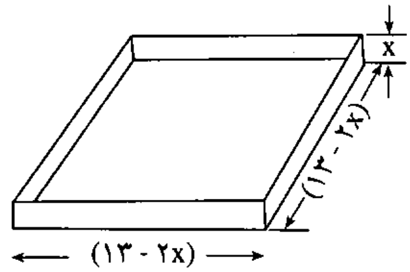
$$x=۲۴, y=\frac{۱۹۲}{x}=\frac{۱۹۲}{۲۴}=۸$$

در نتیجه دو عدد موردنظر x=۲۴ و y=۸ هستند.

۲. یک سازنده‌ی جعبه می‌خواهد از مقوایی مربع شکل به مساحت ۱۶۹ سانتی‌متر مربع، با بریدن چهار مربع برابر از چهار گوشه‌ی آن و بالا زدن جوانب آن، یک جعبه‌ی در باز بسازد. طول ضلع مربع‌هایی که باید بریده شوند، چه‌قدر باشد تا حجم جعبه بیش‌ترین مقدار ممکن را داشته باشند؟

حل: در شکل زیر فرض کنیم که طول ضلع مربع‌هایی که از چهار گوشه مقوا بریده می‌شوند، برابر x سانتی‌متر باشد. چون مساحت مقوای مربع شکل ۱۶۹ سانتی‌متر مربع است، طول هر ضلع مربع ۱۳ سانتی‌متر می‌شود.





با توجه به شکل ملاحظه می‌کنیم که ابعاد جعبه‌ی در باز برابر است با: (۱۳-۲x)، (۱۳-۲x) و x. بنابراین:

$V=(۱۳-۲x)(۱۳-۲x)x$: معادله‌ی اولیه

$$V=x(۱۳-۲x)^۲$$

چون معادله‌ی اولیه بر حسب یک متغیر است، بنابراین نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x(۱۳-۲x)^۲$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(x)=(۱۳-۲x)^۲-۴x(۱۳-۲x)=۰\ ;\ (۱۳-۲x)(۱۳-۶x)=۰$$

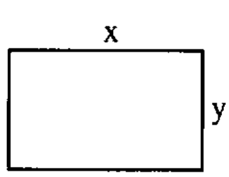
$$\Rightarrow x=\frac{۱۳}{۲}, x=\frac{۱۳}{۶}$$

x	$-\infty$		$\frac{۱۳}{۶}$		$\frac{۱۳}{۲}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	۰	−	۰	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	

با توجه به جدول بالا ملاحظه می‌کنیم که تابع f در $x=\frac{۱۳}{۶}$ دارای ماکزیمم نسبی است. بنابراین اگر طول ضلع مربع‌هایی که باید بریده شوند، $\frac{۱۳}{۶}$ باشد، جعبه‌ی در باز بیش‌ترین حجم را دارد.

۳. مطلوب است مساحت بزرگ‌ترین مستطیلی که محیط آن ۲۰۰ سانتی‌متر است.

حل: فرض کنیم طول مستطیل برابر x سانتی‌متر و عرض آن برابر y سانتی‌متر باشد. بنابراین داریم:



$A=xy$: معادله‌ی اولیه

$۲(x+y)=۲۰۰\Rightarrow x+y=۱۰۰$: معادله‌ی ثانویه

$$\Rightarrow y=۱۰۰-x$$

اکنون اگر $y=۱۰۰-x$ را در معادله‌ی اولیه قرار دهیم،

معادله‌ی اولیه را به یک متغیر وابسته کرده‌ایم:

$$A = xy \text{ و } y = 100 - x \Rightarrow A = x(100-x)$$
$$= -x^2 + 100x$$

نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = -x^2 + 100x$ را به دست می‌آوریم:

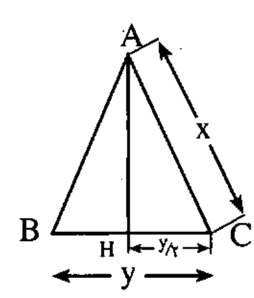
$$f'(x) = -2x + 100 = 0 \Rightarrow x = 50$$

x	$-\infty$		50		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

با توجه به جدول بالا ملاحظه می‌کنیم، تابع f در $x = 50$ دارای ماکزیمم نسبی است. بنابراین، اگر طول مستطیل را $x = 50$ سانتی‌متر درنظر بگیریم، عرض آن $y = 50$ سانتی‌متر خواهد بود و در این صورت، مساحت ماکزیمم خواهد شد.

۴. مطلوب است مساحت بزرگ‌ترین مثلث متساوی‌الساقینی که محیط آن ۱۸ متر باشد.

حل: اگر طول ساق‌های مثلث متساوی‌الساقین را x متر و قاعده‌ی آن را y متر درنظر بگیریم، خواهیم داشت:



$$A\hat{H}C: AH^2 = AC^2 - HC^2 \Rightarrow AH^2 = x^2 - \frac{y^2}{4}$$
$$\Rightarrow AH = \sqrt{x^2 - \frac{y^2}{4}}$$

معادله‌ی اولیه: $s = \frac{1}{2}(AH \times BC) = \frac{y}{2}\sqrt{x^2 - \frac{y^2}{4}}$

معادله‌ی ثانویه: $x + x + y = 18 \Rightarrow x = \frac{18-y}{2}$

اکنون اگر $x = \frac{18-y}{2}$ را در معادله‌ی اولیه قرار دهیم، معادله‌ی اولیه را به یک متغیر وابسته کرده‌ایم:

$$s = \frac{y}{2}\sqrt{\frac{(18-y)^2}{4} - \frac{y^2}{4}}$$

اگر s بیش‌ترین مقدار را بگیرد، آن‌گاه $s^2 = \frac{y^2}{4}(\frac{(18-y)^2}{4} - \frac{y^2}{4})$ نیز بیش‌ترین مقدار را خواهد گرفت. بنابراین، نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(y) = \frac{y^2}{4}(\frac{(18-y)^2}{4} - \frac{y^2}{4})$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(y) = \frac{y^2}{4}(81 - 9y) = \frac{81}{4}y^2 - \frac{9}{4}y^3$$

$$f'(y) = \frac{81}{2}y - \frac{27}{4}y^2 = 0 \Rightarrow \frac{27}{4}y(6-y) = 0$$
$$\Rightarrow y = 0 \ , y = 6$$

y	$-\infty$		0		6		$+\infty$
$f'(y)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(y)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

با توجه به جدول بالا، ملاحظه می‌کنیم که تابع f در $y = 6$ دارای ماکزیمم نسبی است. بنابراین داریم:

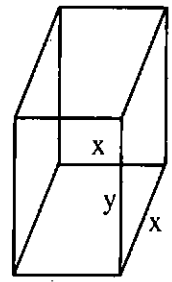
$$y = 6 \text{ و } x = \frac{18-y}{2} \Rightarrow x = 6$$

درنتیجه، بزرگ‌ترین مساحت مثلث برابر است با:

$$s = \frac{y}{2}\sqrt{x^2 - \frac{y^2}{4}} = \frac{6}{2}\sqrt{36 - \frac{36}{4}} = \frac{18\sqrt{3}}{2}$$

۵. در مکعب مستطیلی با قاعده‌ی مربع، مجموع طول و عرض و ارتفاع آن مقدار ثابت L است. ارتفاع این مکعب مستطیل چه‌قدر باشد تا حجم آن ماکزیمم شود.

حل: در صورتی که طول ضلع قاعده‌ی مکعب‌مستطیل را x و ارتفاع آن را y درنظر بگیریم، خواهیم داشت:



معادله‌ی اولیه : $V = x \times x \times y = x^{۲}y$

(حجم مکعب)

معادله‌ی ثانویه : $x + x + y = L \Rightarrow y = L - ۲x$

اکنون اگر $y = L - ۲x$ را در معادله‌ی اولیه قرار دهیم، معادله‌ی اولیه را به یک متغیر وابسته کرده‌ایم:

$$V = x^{۲}(L - ۲x) = Lx^{۲} - ۲x^{۳}$$

نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = Lx^{۲} - ۲x^{۳}$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = ۲Lx - ۶x^{۲} = ۰ \Rightarrow x = ۰ \text{ و } x = \frac{L}{۳}$$

h	$-\infty$		۰		$\frac{L}{۳}$		$+\infty$
$f'(h)$		$-$		$+$		$-$	
$f(h)$		↘		↗		↘	

با توجه به جدول بالا ملاحظه می‌کنیم که تابع f در $x = \frac{L}{۳}$ دارای ماکزیمم نسبی است. درنتیجه داریم:

$$y = L - ۲x = L - \frac{۲L}{۳} = \frac{L}{۳}$$

۶. نقاطی بر نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = ۴ - x^{۲}$ پیدا کنید که نزدیک‌ترین نقاط به نقطه‌ی (۲و۰) باشند.

حل: فرض کنیم $A\left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right.$ واقع بر نمودار این تابع و نزدیک‌ترین نقطه به نقطه‌ی (۲و۰) باشد. بنابراین داریم:

معادله‌ی اولیه : $d = \sqrt{(x-۰)^{۲} + (y-۲)^{۲}}$

معادله‌ی ثانویه : $y = ۴ - x^{۲}$

اکنون اگر $y = ۴ - x^{۲}$ را در معادله‌ی اولیه قرار دهیم، معادله‌ی اولیه را به یک متغیر وابسته کرده‌ایم:

$$d = \sqrt{x^{۲} + (۴ - x^{۲} - ۲)^{۲}} = \sqrt{x^{۲} + (۲ - x^{۲})^{۲}}$$

d وقتی کم‌ترین مقدار را می‌گیرد که عبارت زیر رادیکال کم‌ترین مقدار را داشته باشد، بنابراین نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^{۲} + (۲ - x^{۲})^{۲}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x) = ۲x - ۴x(۲ - x^{۲}) = ۰ \;; ۲x(۲x^{۲} - ۳) = ۰$$

$$\Rightarrow x = ۰ \text{ و } x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \text{ و } x = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{۳}{۲}}$		۰		$\sqrt{\frac{۳}{۲}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	
$f(x)$		↘		↗		↘		↗	

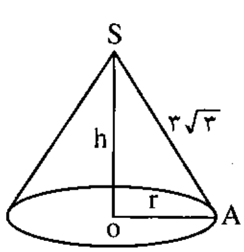
با توجه به جدول بالا، ملاحظه می‌کنیم که تابع f در $x = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ و $x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ دارای مینیمم نسبی است. درنتیجه داریم:

$$x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \text{ و } y = ۴ - x^{۲} \Rightarrow y = ۴ - \frac{۳}{۲} = \frac{۵}{۲}; \quad A\left|\begin{matrix} \sqrt{\frac{۳}{۲}} \\ \frac{۵}{۲} \end{matrix}\right.$$

$$x = -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \text{ و } y = ۴ - x^{۲} \Rightarrow y = ۴ - \frac{۳}{۲} = \frac{۵}{۲}; \quad B\left|\begin{matrix} -\sqrt{\frac{۳}{۲}} \\ \frac{۵}{۲} \end{matrix}\right.$$

پس نقاط A و B واقع بر نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = ۴ - x^{۲}$ هستند و تا نقطه‌ی (۲و۰) کم‌ترین فاصله را دارند.

۷. بین مخروط‌های به مولد ثابت $۳\sqrt{۳}$، ماکزیمم حجم را بیابید.



حل: فرض کنیم که شعاع قاعده‌ی مخروط r و ارتفاع آن h باشد. بنابراین داریم:

$$o\overset{\Delta}{S}A : oS^{۲} + oA^{۲} = SA^{۲} \Rightarrow r^{۲} + h^{۲} = ۲۷$$

معادله‌ی اولیه : $V = \frac{۱}{۳}\pi r^{۲}h$

معادله‌ی ثانویه : $r^{۲} + h^{۲} = ۲۷ \Rightarrow r^{۲} = ۲۷ - h^{۲}$

اگر $r^2 = 27 - h^2$ را در معادله‌ی اولیه قرار دهیم، معادله‌ی اولیه را به یک متغیر وابسته کرده‌ایم:

$$V = \frac{1}{3}\pi(27 - h^2)h = 9\pi h - \frac{1}{3}\pi h^3$$

نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(h) = 9\pi h - \frac{1}{3}\pi h^3$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(h) = 9\pi - \pi h^2 = 0 \Rightarrow h = 3 \text{ و } h = -3$$

n	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$f'(n)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(n)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

با توجه به جدول بالا ملاحظه می‌کنیم که تابع f در $h = 3$ دارای ماکزیمم نسبی است. بنابراین داریم:

$$h = 3 \text{ و } r^2 = 27 - h^2 \Rightarrow r^2 = 27 - 9 = 18 \Rightarrow r = 3\sqrt{2}$$

بزرگ‌ترین حجم مخروط به مولد $3\sqrt{3}$:

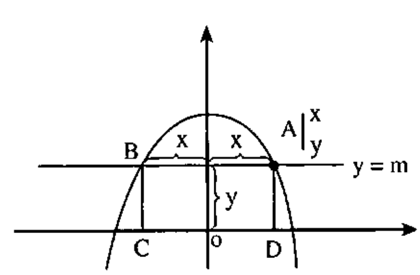
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \times 18 \times 3 = 18\pi$$

۸. خط $y = m > 0$، منحنی تابع با ضابطه‌ی $y = 12 - x^2$ را در نقاط A و B قطع می‌کند. مستطیلی می‌سازیم که یک ضلع آن پاره‌خط AB و ضلع مقابل AB روی محور xها باشد. مقدار ماکزیمم مساحت مستطیل را بیابید.

حل. فرض کنیم $A\Big|_{y}^{x}$ محل برخورد خط $y = m$ با تابع با ضابطه‌ی $y = 12 - x^2$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$S = 2xy$: معادله‌ی اولیه

$y = 12 - x^2$: معادله‌ی ثانویه



اگر $y = 12 - x^2$ را در معادله‌ی اولیه قرار دهیم، معادله‌ی اولیه را به یک متغیر وابسته کرده‌ایم:

$$S = 2x(12 - x^2) = 2x^2 + 24x$$

نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = -2x^3 + 24x$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = -6x^2 + 24 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ و } x = -2$$

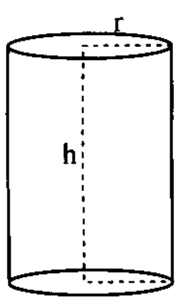
x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

با توجه به جدول بالا ملاحظه می‌کنیم که تابع f در $x = 2$ دارای ماکزیمم نسبی است. بنابراین داریم:

$$S = -2(2)^3 + 24(2) = 32$$

۹. رابطه‌ی بین r شعاع قاعده و h ارتفاع استوانه‌ای به صورت $r + h = 15$ است. شعاع قاعده چه قدر باشد تا سطح جانبی استوانه ماکزیمم شود؟

حل:



معادله‌ی اولیه:

$S = 2\pi rh$ (مساحت جانبی استوانه)

معادله‌ی ثانویه:

$r + h = 15 \Rightarrow h = 15 - r$

اگر $h = 15 - r$ را در معادله‌ی اولیه قرار دهیم، در این صورت معادله‌ی اولیه را به یک متغیر وابسته کرده‌ایم:

$$S = 2\pi r(15 - r) = -2\pi r^2 + 30\pi r$$

نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(r) = -2\pi r^2 + 30\pi r$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(r) = -4\pi r + 30\pi = 0 \Rightarrow r = \frac{15}{2}$$

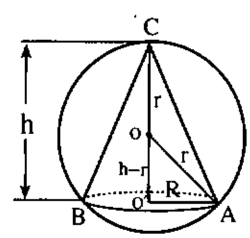
r	$-\infty$		$\frac{15}{2}$		$+\infty$
$f'(r)$		$+$	0	$-$	
$f(r)$		$\nearrow$		$\searrow$	

با توجه به جدول بالا ملاحظه می‌کنیم که تابع f در $r = \frac{15}{2}$ دارای ماکزیمم نسبی است.

۱۰. حجم بزرگ‌ترین مخروط دواری را بیابید که در درون کره‌ای به شعاع r محاط شده است.

حل: فرض کنیم، شعاع قاعده‌ی مخروط R و ارتفاع آن h، و شعاع کره r باشد. بنابراین داریم:

$$O\overset{\Delta}{O'}A : OA^2 = OO'^2 + O'A^2 \Rightarrow r^2 = (h-r)^2 + R^2$$
$$\Rightarrow R^2 = r^2 - (h-r)^2$$
$$\Rightarrow R^2 = 2rh - h^2$$



معادله‌ی اولیه: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

معادله‌ی ثانویه: $R^2 = 2rh - h^2$

اگر $R^2 = 2rh - h^2$ را در معادله‌ی اولیه قرار دهیم، معادله‌ی اولیه را به یک متغیر وابسته کرده‌ایم:

$$V = \frac{1}{3}\pi(2rh - h^2)h = \frac{2}{3}\pi rh^2 - \frac{1}{3}\pi h^3$$

نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(h) = \frac{2}{3}\pi rh^2 - \frac{1}{3}\pi h^3$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(h) = \frac{4}{3}\pi rh - \pi h^2 = 0 \Rightarrow h = 0,\ h = \frac{4}{3}r$$

h	$-\infty$		0		$\frac{4}{3}r$		$+\infty$
$f'(h)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(h)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

با توجه به جدول بالا ملاحظه می‌کنیم، تابع f در $h = \frac{4}{3}r$ دارای ماکزیمم نسبی است. درنتیجه:

$$V = \frac{2}{3}\pi r\left(\frac{4}{3}r\right)^2 - \frac{1}{3}\pi\left(\frac{4}{3}r\right)^3 = \frac{32}{81}\pi r^3$$

تمرین‌های تکمیلی

۱. مطلوب است عددی از بازه‌ی $[0,1]$ که تفاضل بین آن عدد و مربعش ماکزیمم باشد.

۲. مطلوب است مساحت بزرگ‌ترین مستطیل قابل محاط در یک دایره به شعاع r.

۳. دو عدد مثبت چنان بیابید که مجموع آن‌ها برابر ۲۲۰ و حاصل ضرب آن‌ها ماکزیمم باشد.

۴. مطلوب است، ابعاد استوانه‌ی مستدیر قائم با بیش‌ترین حجم که بتوان آن را در یک مخروط مستدیر قائم به شعاع ۵ سانتی‌متر و ارتفاع ۱۲ سانتی‌متر محاط کرد.

۵. دایره‌ای با معادله‌ی $x^2 + y^2 = 9$ مفروض است. مطلوب است: الف) کوتاه‌ترین فاصله از نقطه‌ی (۵ و ۴) تا نقطه‌ای از دایره؛ ب) بیش‌ترین فاصله از نقطه‌ی (۵ و ۴) تا نقطه‌ای از دایره.

۶. مینیمم فاصله‌ی منحنی به معادله‌ی $y = x^2 - 2x$ از خط $y = 2x - 9$ را به دست آورید.

۷. خط $y = m > 0$ منحنی تابع به معادله‌ی $y = 27 - x^2$ را در نقاط A و B قطع می‌کند (O مبدأ مختصات است). اندازه‌ی ماکزیمم مساحت OAB را به دست آورید.

۸. در بیضی به معادله‌ی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$، مستطیلی را که اضلاعش موازی محورهای مختصات است، محاط کرده‌ایم. ماکزیمم مساحت مستطیل را بیابید.

۹. یک قاعده‌ی ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقینی ۴ متر و هریک از ساق‌های آن ۲ متر است. قاعده‌ی دیگر چند متر باشد تا مساحت ذوزنقه ماکزیمم باشد؟

۱۰. در مثلث قائم‌الزاویه‌ای، مجموع اندازه‌های وتر و یک ضلع مقدار ثابت k است. اگر مساحت مثلث ماکزیمم باشد، اندازه‌ی زوایای حاده‌ی آن را تعیین کنید.

هوشنگ شرقی

مسابقه های ریاضی در کشورها

در شماره‌ی قبل مسابقه‌های آزاد ریاضی کانادا در سال ۲۰۰۰ میلادی را ملاحظه کردید و حل قسمت الف این مسائل را آوردیم، اینک در پی حل مسائل قسمت ب را ملاحظه می‌کنید:

مسائل قسمت ب

۱. مثلث ABC با رئوس (۰ و ۰)A و (۰ و ۹)B و (۶ و ۰)C داده شده است. نقاط P و Q روی ضلع AB قرار دارند، به طوری که: AP=PQ=QB. به طریق مشابه، نقاط R و S روی AC واقعند، به قسمی که: AR=RS=SC. رأس C را به نقاط P و Q همچنین، رأس B را به نقاط R و S وصل می‌کنیم.

الف) معادله‌ی خط راستی را که از نقاط R و B می‌گذرد، بنویسید.

ب) معادله‌ی خط راستی که از نقاط P و C می‌گذرد را بنویسید.

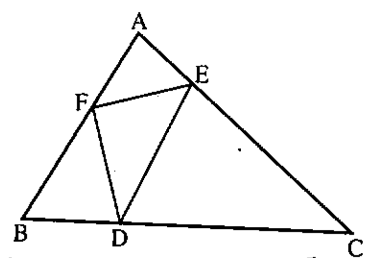
ج) پاره‌خط‌های PC و RB در نقطه‌ی X و پاره‌خط‌های QC و SB در نقطه‌ی Y متقاطع هستند. ثابت کنید، نقاط A، X و Y روی یک خط راست واقعند.

۲. در مثلث ABC، نقاط D، E و F به ترتیب روی اضلاع BC، CA و AB واقعند؛ به طوری که: $\angle AFE = \angle BFD$، $\angle BDF = \angle CDE$ و $\angle CED = \angle AEF$.

الف) ثابت کنید: $\angle BDF = \angle BAC$

مسابقه‌ی آزاد ریاضی کانادا- سال ۲۰۰۰

ب) اگر AB=۵ ، BC=۸ و CA=۷ ، طول BD را بیابید.



۳. الف) آلفونس و بریل بازی خود را از شکل هندسی مقابل شروع می‌کنند. آلفونس آغازگر بازی است و شکل اولیه را در امتداد یکی از خطوط راست

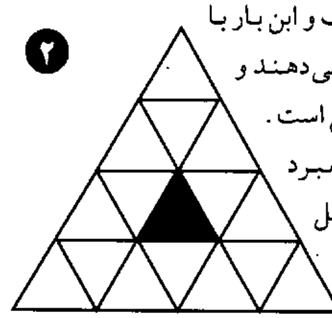
۱

برش می‌دهد. قطعه‌ای را که شامل مثلث سیاه‌رنگ است، به بریل می‌دهد و قطعه‌ی دیگر را دور می‌اندازد. سپس بریل همین کار را می‌کند و قطعه‌ی شامل مثلث سیاه‌رنگ را به آلفونس می‌دهد و قطعه‌ی دیگر را دور می‌ریزد. این عمل تا آن‌جا ادامه می‌یابد که مثلث سیاه به یک نفر برسد و او برنده‌ی مسابقه است.

همراه با استدلال، نشان دهید که همواره یک راهبرد پیروزی برای بریل وجود دارد. (بریل همواره می‌تواند برنده باشد. مترجم)

ب) آلفونس و بریل، اکنون بازی دیگری را با همان قاعده‌ی بازی الف و این بار با شکل ۲ انجام می‌دهند و آغازگر بازی بریل است. آیا باز هم یک راهبرد پیروزی برای بریل وجود دارد؟ (پاسخ خود را با استدلال دقیق ارائه دهید.)

۲



۴. دنباله‌ی $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ با n جمله و با قانون‌های $t_1=1$, $t_2=4$ و $t_k = t_{k-1} + t_{k-2}$ و k=۳و۴و... و n داده شده است. فرض کنید که T مجموعه‌ی جملات این دنباله باشد؛ یعنی $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$

الف) چند عدد صحیح مثبت وجود دارند که بتوان آن‌ها را به صورت مجموع دقیقاً دو جمله‌ی متمایز عضو T بیان کرد؟

ب) چند عدد صحیح مثبت وجود دارند که بتوان آن‌ها را به صورت مجموع دقیقاً سه جمله‌ی متمایز عضو T بیان کرد؟

حل مسائل مسابقه‌ی آزاد ریاضی کانادا (۲۰۰۰)

قسمت ت

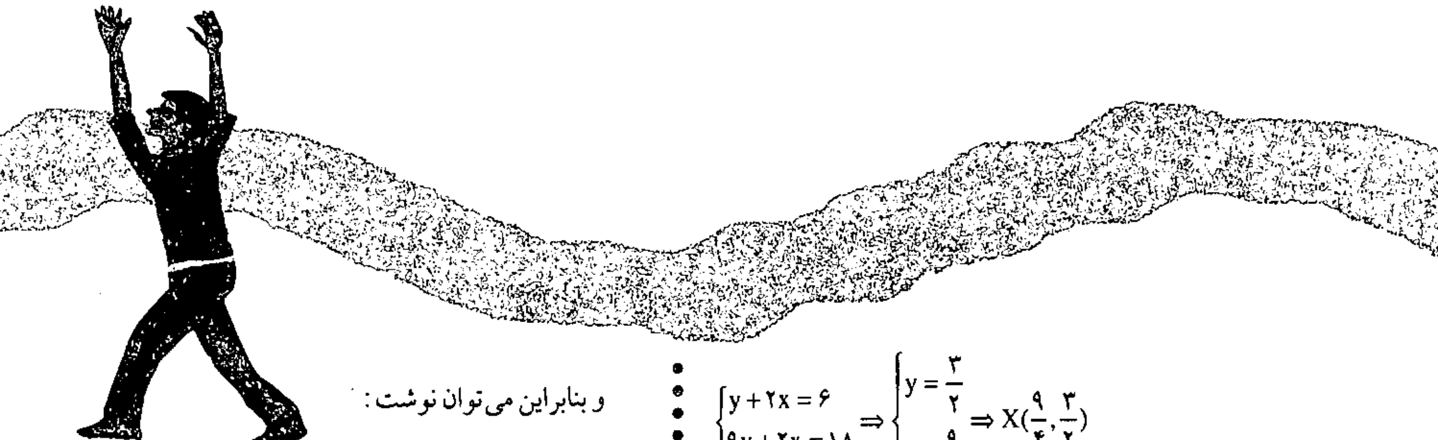
۱. با توجه به فرض مساله، روشن است که: Q(۰ و ۶) و P(۳ و ۰) و S(۰ و ۴) و R(۰ و ۲) و بنابراین به سادگی شیب خطوط موردنظر و معادله‌ی آن‌ها به دست می‌آید:

$$m_{RB} = \frac{y_B - y_R}{x_B - x_R} = \frac{0-2}{9-0} = -\frac{2}{9} \Rightarrow RB: y - 0 = -\frac{2}{9}(x-9)$$

$$\Rightarrow RB: 9y + 2x = 18$$

$$m_{pc} = \frac{y_c - y_p}{x_c - x_p} = \frac{6-0}{0-3} = -2 \Rightarrow pc: y - 0 = -2(x-3) \Rightarrow$$

$$pc: y + 2x = 6$$



$$\begin{cases} y+۲x=۶ \\ ۹y+۲x=۱۸ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{۳}{۲} \\ x=\frac{۹}{۴} \end{cases} \Rightarrow X(\frac{۹}{۴},\frac{۳}{۲})$$

$$m_{QC}=\frac{y_c-y_Q}{x_c-x_Q}=\frac{۶-۰}{۰-۶}=-۱\Rightarrow QC: y-۰=-۱(x-۶)$$

$$\Rightarrow QC: x+y=۶$$

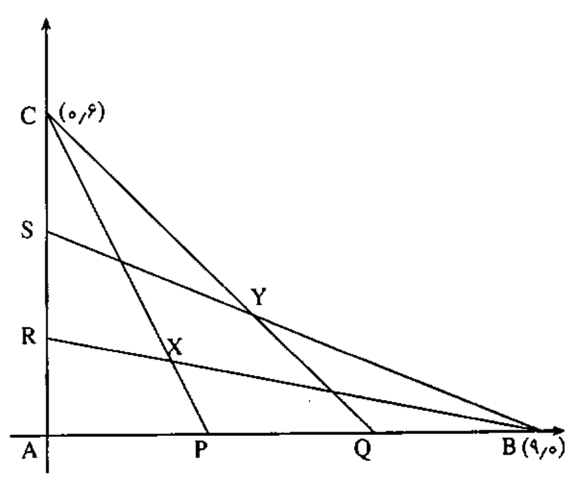
$$m_{SB}=\frac{y_B-y_S}{x_B-x_S}=\frac{۰-۴}{۹-۰}=-\frac{۴}{۹}\Rightarrow SB: y-۰=-\frac{۴}{۹}(x-۹)$$

$$\Rightarrow SB: ۹y+۴x=۳۶$$

$$\begin{cases} ۹y+۴x=۳۶ \\ x+y=۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{۱۸}{۵} \\ y=\frac{۱۲}{۵} \end{cases} \Rightarrow Y(\frac{۱۸}{۵},\frac{۱۲}{۵})\Rightarrow$$

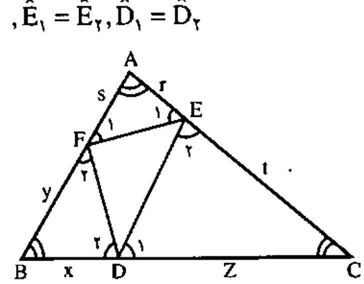
$$m_{AX}=\frac{\frac{۳}{۲}-۰}{\frac{۹}{۴}-۰}=\frac{۱۲}{۱۸}=\frac{۲}{۳}, m_{AY}=\frac{\frac{۱۲}{۵}}{\frac{۱۸}{۵}}=\frac{۱۲}{۱۸}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow$$

$m_{AY}=m_{AX}\Rightarrow$. X ، A و Y بر یک خط راست واقعند.



۲. الف در شکل داریم:

$$\hat{F}_1=\hat{F}_2 \ , \hat{E}_1=\hat{E}_2, \hat{D}_1=\hat{D}_2$$



و بنابراین می‌توان نوشت:

$$\hat{A}=۱۸۰^\circ-\hat{E}_1-\hat{F}_1=۱۸۰^\circ-\hat{E}_2-\hat{F}_2=$$
$$۱۸۰^\circ-(۱۸۰^\circ-\hat{C}-\hat{D}_1)-$$
$$(۱۸۰^\circ-\hat{B}-\hat{D}_2)=\hat{C}+\hat{D}_1+\hat{B}+\hat{D}_2-۱۸۰^\circ=$$
$$\hat{C}+\hat{B}+۲\hat{D}_2-۱۸۰^\circ=$$
$$۱۸۰^\circ-\hat{A}+۲\hat{D}_2-۱۸۰^\circ=۲\hat{D}_2-\hat{A}\Rightarrow \hat{A}=۲\hat{D}_2-\hat{A}\Rightarrow$$
$$۲\hat{A}=۲\hat{D}_2\Rightarrow \hat{A}=\hat{D}_2\Rightarrow \angle BDF=\angle BAC$$

ب) به طریق مشابه قسمت الف می‌توان نشان داد که:

$$\hat{B}=\hat{E}_1=\hat{E}_2 \ , \ \hat{C}=\hat{F}_1=\hat{F}_2\Rightarrow$$

$$\begin{cases} \hat{F}_2=\hat{C} \\ \hat{D}_2=A \end{cases}\Rightarrow \Delta BFD\sim\Delta ABC\Rightarrow \frac{BD}{AB}=\frac{BF}{BC}\Rightarrow$$

$$\frac{BD}{۵}=\frac{BF}{۸}\Rightarrow ۸BD=۵BF \quad (۱)$$

$$\begin{cases} \hat{E}_2=\hat{B} \\ \hat{D}_1=\hat{A} \end{cases}\Rightarrow \Delta CDE\sim\Delta ABC\Rightarrow \frac{CD}{AC}=\frac{CE}{BC}\Rightarrow$$

$$\frac{CD}{۷}=\frac{CE}{۸}\Rightarrow ۸CD=۷CE \quad (۲)$$

$$\begin{cases} \hat{E}_1=\hat{B} \\ \hat{F}_1=\hat{C} \end{cases}\Rightarrow \Delta AEF\sim\Delta ABC\Rightarrow \frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}\Rightarrow$$

$$\frac{AE}{۵}=\frac{AF}{۷}\Rightarrow ۷AE=۵AF \quad (۳)$$

حال با فرض BD=x ، BF=y ، CD=z ، CE=t ، AE=r و AF=s ، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} ۸x=۵y \\ ۸z=۷t \\ ۷r=۵s \\ x+z=۸ \\ y+s=۵ \\ r+t=۷ \end{cases}$$

و پس از محاسبات لازم، از دستگاه معادلات فوق به دست می‌آید:

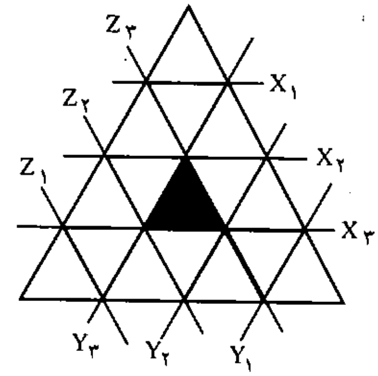
$$x=\frac{۵}{۲}, y=۴, z=\frac{۱۱}{۲}, t=\frac{۴۴}{۷}, s=۱, r=\frac{۵}{۷}$$

و در نتیجه: $BD=\frac{۵}{۲}$

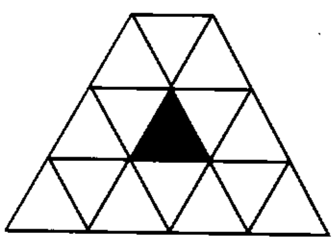
۳. الف) بدیهی است که بریل همواره می‌تواند برنده شود، زیرا اگر آلفونس برشی بزند که یک مثلث را جدا کند، در این صورت یکی از دو شکل زیر به بریل می‌رسد:  یا  و بنابراین بریل می‌تواند دو مثلث سفید را برش دهد و یکی از دو شکل  یا  را به آلفونس بدهد. حال آلفونس چاره‌ای جز این ندارد که یک مثلث سفید را ببرد و مثلث سیاه را تقدیم بریل کند!

اما اگر آلفونس در اولین برش دو مثلث سفید را جدا کند، بریل می‌تواند یک مثلث سفید را جدا کند و همان شکل بالا را به آلفونس بدهد و او را بازنده کند. نتیجه آن که: هر گاه یکی از این دو نفر شکلی نظیر شکل ۱ داشته باشد و آغازکننده‌ی بازی باشد، محکوم به باخت است.

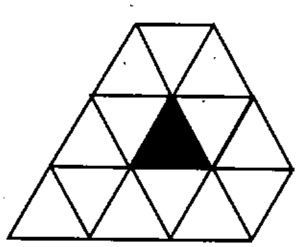
ب) دراین جا هم بریل می‌تواند برنده باشد. از نتیجه‌ی قسمت الف استفاده می‌کنیم. به شکل زیر دقت کنید:



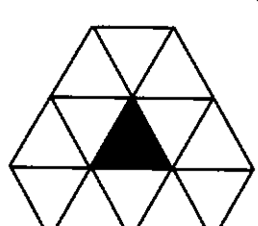
اگر بریل (که شروع کننده است) روی خط x_2 برش بزند، در این صورت آلفونس می‌تواند در نوبت خودش روی خط x_2 برش بزند و شکلی مانند شکل ۱ را به بریل بدهد. بنابراین، طبق نتیجه‌ی قسمت الف، چون بریل شروع‌کننده است، حتماً می‌بازد. به همین ترتیب، اگر بریل روی خط x_2 برش بزند، آلفونس می‌تواند روی خط x_2 برش بزند و همین وضع را ایجاد کند. پس بریل نباید روی خطوط x_2 و x_3 برش بزند. به همین ترتیب، او نباید روی خطوط y_2 و y_3 یا z_2 و z_3 برش بزند. پس او فقط می‌تواند، روی یکی از خطوط x_1 یا y_1 یا z_1 برش بزند و شکلی مانند این را به آلفونس بدهد:



با همین استدلال، در مرحله‌ی بعدی آلفونس فقط می‌تواند روی یکی از دو خط باقی مانده برش بزند و این شکل را به بریل بدهد:



بریل هم می‌تواند، روی خط سوم برش بزند و شکل زیر را به آلفونس بدهد:



و اکنون دیگر آلفونس بازنده است! (چرا؟)

۴. الف) طبق فرض داریم:

$$T=\{1,4,5,9,14,23,\dots,t_n\}$$

اعضای T به صورت صعودی مرتب شده‌اند. با کمی دقت درمی‌یابید که اگر عدد ۱ را با هر یک از اعضای T به جز ۱ و ۴، جمع کنیم، عددهای ۶، ۱۰، ۱۵ و... به دست می‌آیند. یعنی این عددها به صورت مجموع دو عضو متمایز T قابل نمایش هستند. خود اعضای T نیز (به غیر از ۱ و ۴) طبق تعریف این دنباله، به صورت مجموع دو عضو T قابل نمایش هستند. یعنی عددهای زیر قابل نمایش به صورت مجموع دو عضو متمایز T هستند:

۵ و ۶ و ۹ و ۱۰ و ۱۴ و ۱۵ و ۲۳ و ۲۴ و ... و T_n و T_n+1

که تعداد آن‌ها برابر است با: $n-2+n-2=2n-4$

با کمی دقت و امتحان به نظر می‌آید، به غیر از این عددها عدد صحیح دیگری قابل نمایش به صورت مجموع دو عضو T نباشد. یعنی برای مثال، عددهای طبیعی بین ۱۵ و ۲۳ (یعنی ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱ و ۲۲) را نمی‌توان به صورت مجموع دو عضو T نوشت. اما این موضوع را به طور دقیق هم اثبات می‌کنیم.

دو عضو متوالی T، یعنی T_{k+1} و T_k را در نظر بگیرید. واضح است که T_k را می‌توان به صورت مجموع دو عضو S (با شرط $k\ge 3$) نوشت. همچنین T_k+1 نیز مجموع T_k و ۱ است که هر دو عضو T هستند. اکنون نشان می‌دهیم که هیچ یک از عددهای متوالی $T_k+2, T_k+3,\dots,T_{k+1}-1$ را نمی‌توان به صورت مجموع دو عضو T نوشت. اگر T_k+r $(2\le r<T_{k-1}-1)$ را بتوان به صورت مجموع دو عضو T نوشت، واضح است که آن دو عضو کوچک‌تر از T_k هستند؛ یعنی: $n<k$ و m و $T_k+r=T_m+T_n$ با توجه به تعریف دنباله داریم:

$$T_{k-1}+T_{k-2}+r=T_m+T_n,\ m,n\le k-1$$

بدیهی است که برابری فوق نمی‌تواند درست باشد. (چرا؟)

ب) روش این قسمت مشابه قسمت الف است و به همان ترتیب می‌توان دید که به ازای هر $k\ge 5$، می‌توان هر T_k را به صورت مجموع سه عضو T نوشت:

$$T_k=T_{k-1}+T_{k-2}=T_{k-1}+T_{k-3}+T_{k-4}$$

همچنین، عدد بعدی آن را هم می‌توان به صورت مجموع سه عضو T نوشت:

$$T_k+1=T_{k-1}+T_{k-2}+1$$

اما با استدلالی مشابه می‌توان ثابت کرد، هیچ عدد طبیعی بین T_{k+1} و T_k+1 را نمی‌توان به صورت مجموع سه عضو متوالی T نوشت، بنابراین، تعداد همه‌ی این گونه عددها برابر است با: $n-4+n-4=2n-8$

سؤال: حدس می‌زنید تعداد عددهای طبیعی که بتوان به صورت مجموع k عضو متمایز T نمایش داد، چندتا باشند؟

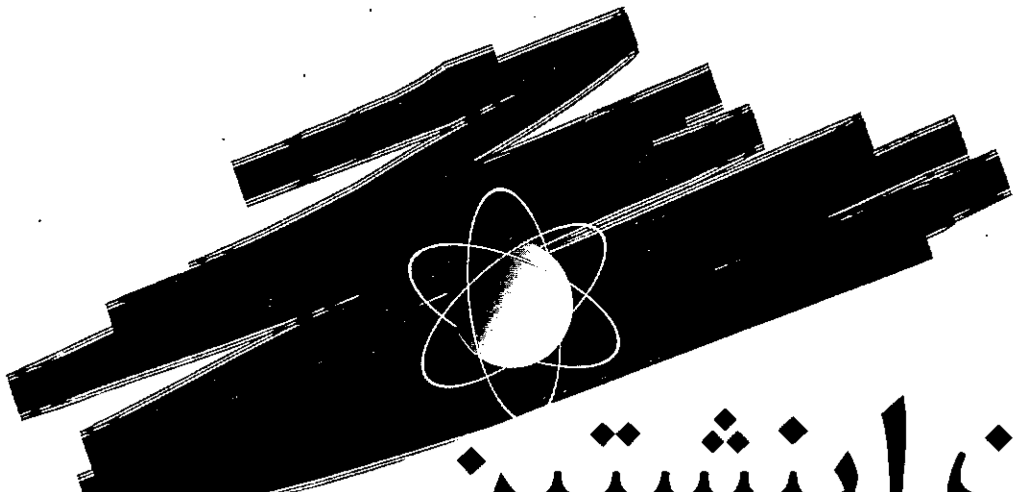
پاورقی

1. Challenging problems

معماهای فکری و منطقی

چهار گاو سیاه و سه گاو قهوه‌ای در پنج روز به اندازه‌ی سه گاو سیاه و پنج گاو قهوه‌ای در چهار روز شیر می‌دهند.

کدام نوع گاو شیر بیش‌تری می‌دهد، سیاه یا قهوه‌ای؟



آلبرت اینشتین

از کتاب (Einatein The passions of Scientiet)

❂ ترجمه: احمد قندهاری

آلبرت اینشتین[1] مردی با هیجانات گوناگون بود. بزرگ‌ترین آرزویش درک طبیعت و یافتن بنیادهای نهفته‌ی حقایق بود.

او همه‌ی عمر خود را وقف تحقیقات کرد. به دوست خود میشل بسو[2] نوشت: «اگر نتوانم کار خودم را انجام دهم، زندگی را نمی‌خواهم.» او پذیرفته بود که جان و تن خود را صرف علم کند و از این بابت هیچ تأسفی نداشت. تحقیق همه‌ی زندگی او بود و با تمام وجود، خود را وقف آن کرد. با وجود این، اینشتین علاقه‌مندی‌های دیگری هم داشت که در سرلوحه‌ی همه‌ی آن‌ها موسیقی قرار داشت. زمانی گفت: **«اگر فیزیکدان نبودم، علاقه‌مند بودم که موسیقیدان باشم.»**

او اغلب به موسیقی فکر می‌کرد و می‌گفت: «در رؤیای بیداریم با موزیک زندگی می‌کنم» و موزیک را بخشی از زندگی خود می‌دانست و از آن بسیار لذت می‌برد. یک‌بار به یک خبرنگار گفت، به‌خصوص به موتزارت علاقه‌مند است و می‌گفت: **«موسیقی موتزارت چنان ناب و زیباست که من آن را انعکاس فوق‌العاده‌ی زیبایی‌های جهان می‌دانم.»**

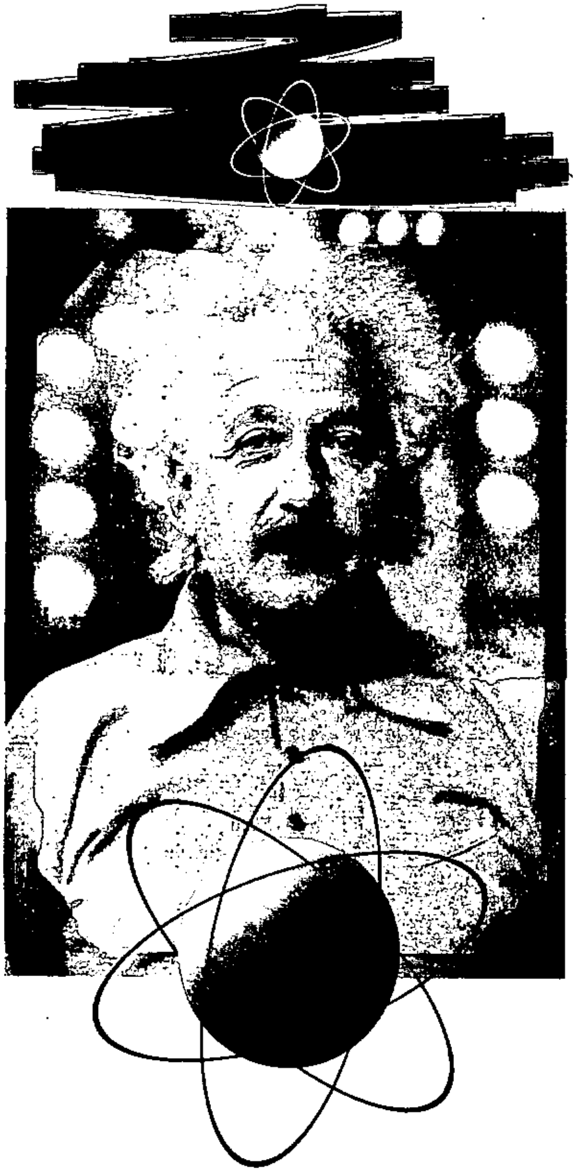
یکی از خواست‌های مهم اینشتین این بود که می‌خواست میان علوم مادی پیوند برقرار کند. او سی سال آخر عمر را صرف تحقیق مأیوس کننده‌ای برای نظریه‌ی وحدت جهان کرد؛ نظریه‌ای که می‌توانست همه‌ی علوم مادی را تعبیر و تفسیر کند. اگر چه این کوشش به نتیجه نرسید، ولی بیهوده هم نبود. هر چند در زمان حیات اینشتین عده‌ی کمی کار او را به صورت جدی دنبال کردند، اما جست‌وجو برای **«نظریه‌ی بنیاد واحد برای همه چیز»**، اینک رشته‌ی مهمی از فیزیک است؛ رشته‌ای که اکنون صدها دانشمند را در جهان به تحقیق واداشته است.

اینشتین در پیگیری علاقه‌مندی‌هایش به‌حدی شور و اشتیاق داشت که بعضی اوقات سرسخت و لجوج جلوه می‌کرد. این صفات ویژه‌ی او، هم در تحقیق برای اثبات نظریه‌ی وحدت جهان و هم در رد کردن مکانیک کوانتم مشهود بود. در مکانیک کوانتم، به جای نظریه‌ی کلاسیک «جبر علّی»، نظریه‌ی احتمال و عدم اطمینان ارائه شده بود، اینشتین این مغایرت و تباین را دریافت و آن را رد کرد. به اعتقاد او، جهان باید واقعیتی مبتنی بر جبر علّی داشته باشد. به عبارت دیگر، دانشمند باید قادر به تعیین دقیق و کامل همه‌ی خواص جهان باشد. این تنها چیزی بود که در ذهن او معنی داشت. یکی از مشهورترین عبارت‌های او این است: **«خداوند جهان را بر اساس تصادف خلق نکرده است.»**

اینشتین در نظریه‌هایش به دنبال ساده کردن بود. او در زندگی شخصی‌اش هم علاقه‌مند بود که ساده باشد. از ثروت بیزار بود و از موقعیت‌های متعدد که به او پیشنهاد می‌شد،

هیچ گاه برای اندوختن ثروت استفاده نکرد. از شهرتی که اضطراراً برایش ایجاد شده بود، ناراحت بود و حتی در میان جمع دستپاچه می‌شد. با آن همه شهرت، فروتن و بی تکلف بود؛ به خصوص سادگی او حتی در لباس پوشیدن نیز مشهود بود. لباس‌های کهنه و قدیمی را به لباس‌های نو ترجیح می‌داد و اغلب بدون جوراب بیرون می‌رفت. با وجود میلش به سادگی، مرد ساده‌ای نبود و حتی شخصیت پیچیده‌ای داشت.

افراد زیادی او را مردی آرام و شوخ می‌پنداشتند. در واقع، او مرد نجیبی بود که همه چیز را عمیقاً احساس می‌کرد و هدف‌هایش را با اشتیاق فراوان دنبال می‌کرد. برای هر چیزی که به آن عشق می‌ورزید، شالوده‌ی روانی بسیار قوی داشت. **بانش هوفمن**[۳]، در شرح حال اینشتین نوشت که او «خلاق و انقلابی» بود و به راستی این دو خصیصه، به علاوه‌ی احساس قوی او درباره‌ی جهان، از سنین اولیه در او آشکار بود. همچنین، از روش‌های آموزش نظامی که در مدرسه‌اش در مونیخ به کار گرفته می‌شد، ناراضی بود. در واقع، او از همه‌ی جنبه‌های امور نظامی بیزار بود. به همین دلیل هم، در زندگی آینده‌ی خود مردی صلح جو شد.



خانواده

اگر چه اینشتین از خانواده‌ای با محبت برخوردار بود، ولی آشفتگی‌هایی هم در دوران کودکی او وجود داشت. وقتی پدر و مادر او به میلان کوچ کردند، او برای ادامه‌ی تحصیل دبیرستان، در مونیخ ماند. دوری از خانواده باعث افسردگی او شد. به همین علت نتوانست با بسیاری از دبیران خود سازگاری کافی داشته باشد. در سال‌ها بعد، در دانشگاه نیز سرکش بود، و همین سرکشی و نافرمانی باعث شد که مطلوب استادانش نباشد.

بعد از فراغت از تحصیل، برای مدت کوتاهی، افسردگی شدیدی داشت. نمی‌توانست شغلی بیابد و از طرف دیگر، خانواده‌اش مخالف ازدواج او با هم کلاسی مورد علاقه‌اش بودند. اینشتین برای مدتی احساس پوچی می‌کرد، ولی نهایتاً تصمیم گرفت و موفق شد و واقعاً این هدف و این نیروی برانگیزنده موجب ادامه کار او شد. اگر چه وقتی جوان بود، سرکشی می‌کرد، ولی به موازات بالا رفتن سنش، طبیعت او حداقل به ظاهر تغییر کرد. وقتی جوان بود، احساس می‌کرد باید خود را به اثبات برساند؛ در این زمان آدمی از خودراضی جلوه می‌کرد. بالاخره وقتی که خود را به اثبات رساند، رفتارش آرام و متین شد، ولی زیر این ظاهر آرام، شور و جوانی و علاقه‌مندی‌هایش همیشه وجود داشتند.

برخی از ویژگی‌های شخصیتی او متأثر از رفتار مادرش با او بود. مادرش احساس عمیقی نسبت به او داشت، ولی با غرق کردن خود در عشق مادری، جلوی رشد او را نمی‌گرفت، بلکه بیش‌تر توجهش معطوف به آینده‌ی فرزندش و ترغیب او بود، برای این که متکی به خود بار بیاید. پدرش، هرمَن[۴]، کمی بی قید بود و به آسانی تحت تأثیر دیگران قرار می‌گرفت. پس

مادر به این نتیجه رسید که آلبرت نباید مثل پدرش از آب درآید. می‌خواست پسرش باشخصیتی قوی رشد یابد. هیچ تردیدی نیست که مادر بر شخصیت پسرش تأثیر فراوان داشت.

پدر اینشتین نیز روی آلبرت تأثیر داشت، اگر چه نه به اندازه‌ی مادرش. او مردی مهربان و خونگرم بود و آلبرت علاقه‌ی زیادی به او داشت. با وجود این علاقه‌مندی، وقتی متوجه شد که درآمد پدرش کافی نیست، از ادامه‌ی شغل خانوادگی که تجارت لوازم الکتریکی بود، خودداری کرد.

او از شکست‌های شغلی پدرش احساس اندوه می‌کرد و می‌دانست که در اثر فشار کار، سلامت پدر از دست می‌رود. پس پدر را تشویق می‌کرد که از کار خود دست بکشد، ولی این گفته‌ها تأثیری بر پدر نداشت.

اگر چه اینشتین از تنهایی لذت می‌برد، ولی تعدادی دوست نزدیک هم داشت. این دوستی‌ها در تمام طول زندگی‌اش ادامه یافتند. اینشتین علاقه‌ی شدیدی به چند زن داشت؛ اگر چه آن‌ها بارها مشکلاتی جدی برایش ایجاد می‌کردند. چهار زن اصلی زندگی او عبارتند از: مادرش، خواهرش **ماجا**[5] و دو همسرش **میلوا**[6] و **الزا**[7].

اینشتین از وقتی جوان بود تا زمانی که مشهور شد، به یادگیری و کتاب علاقه‌ی وافری داشت. او برای کتاب‌های علمی روز وقت زیادی صرف می‌کرد و از عهده‌ی مطالعه‌ی کتاب‌های جامع و پیشرفته نیز برمی‌آمد. از نوجوانی عادت داشت که خودش مطالعه کند، به جای این‌که مطالب را در کلاس یاد بگیرد. حتی در دانشگاه نیز وقت زیادی صرف خودآموزی می‌کرد. قدرت خلاقه‌ی او در زمان کوتاهی پس از فراغت از تحصیل بروز کرد واو را به قله رساند. با دو شاگردش، **موریس سولوین**[8] و **کزاد هبیچ**[9]، آکادمی المپیک را تشکیل داد. پس از چند سال، سه تن از شاگردانش کارهای بزرگی در علوم انجام دادند.

اینشتین، برای آن‌که ایده‌های خودش را بهتر درک کند، آن‌ها را با شاگردانش در میان می‌گذاشت و درباه‌ی آن‌ها بحث می‌کرد. یکی از ایده‌های اصلی او، ارتباط بین نور و امواج الکتریکی بود. سال ۱۹۰۵ برای او سال معجزه بود؛ زیرا طی این سال، پنج مقاله فوق‌العاده مهم در فیزیک نوشت، که یکی از آن‌ها مقاله‌ی مشهور «نسبیت خاص» بود که تصویر تازه‌ای از نقش فضا و زمان در جهان ارائه می‌داد و شامل اطلاعاتی عجیب بود.

با وجود این، اومتوجه شد که نسبیت خاص کامل نیست و فقط روی حرکت یکنواخت مستقیم‌الخط کاربرد دارد. بنابراین، خیلی زود کوشش جدیدی را آغاز کرد تا آن‌را برای هر نوع حرکتی بسط دهد.

موفقیت «نظریه‌ی نسبیت عمومی» اینشتین راخوشحال کرد. حالا ما می‌دانیم که این نظریه علاوه بر توضیح نیروی جاذبه، از چیزهای عجیب دیگری نظیر وجود سیاهچال‌ها و همچنین تشریح چگونگی پیدایش جهان و ساختمان آن خبر می‌دهد. اینشتین سرانجام احساس کرد که این مطلب ممکن است در مورد زمینه‌ی دیگری از طبیعت که رشته‌ی الکترومغناطیس خوانده می‌شود نیز، صادق باشد. اوتحت تأثیر دو کوشش دیگر در این راستا بود که اولی به‌وسیله **هرمن ویل**[10] و دومی به وسیله‌ی **تئودر کالوزا**[11] انجام شده بود، هر دو به نظر اینشتین منطقی و ابتکاری بودند و باعث ابتکار جدید در خود او شدند. اینشتین به‌سرعت وارد عمل شد. او متقاعد شده بود که هر دو کوشش، عملاً نمود یک زمینه‌ی علمی هستند. سال‌ها تلاش کرد تا نتایج آن دو کوشش را در هم بیامیزد. این شروع تلاشی علمی برای یافتن **نظریه‌ی وحدت جهان بود** که تا آخر عمرش ادامه یافت.

اینشتین در مورد یگانگی ریشه‌ی علوم باوری عمیق داشت. این نکته در این بیان او مشهود است: «**هدف عالی همه‌ی علوم این است که بیش‌ترین واقعیات تجربی را به کمک استنتاج منطقی از کم‌ترین مفروضات استخراج کند.**»

زیرنویس ....

1. Albert Eniatein
2. Michele Besso
3. Banesh Hoffman
4. Herman
5. Haja
6. Mileua
7. Elsa
8. Maurice Solovin
9. Conrad Habicht
10. Herman Weyl
11. Theodor Kaluza

بزرگ‌ترین توان* m در !n

سید محمدرضا هاشمی موسوی
hashemi-moosavi@yahoo.com

ابتدا قضیه زیر را ثابت می‌کنیم.

قضیه. اگر n عددی طبیعی باشد، در تجزیهٔ عدد !n به عوامل اوّل، عدد اوّل p به صورت توانی با نمای t خواهد بود ([ ] : قسمت درست عدد):

$$t=\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\cdots \qquad (1)$$

برهان. اعداد n و k را طبیعی و $p \le n$ را عددی اول فرض می‌کنیم. واضح است که عددهای دنبالهٔ $\{n\}$ که بر p^k قابل قسمت‌اند، باید به صورت sp^k باشند، که در آن s عددی است طبیعی و در شرط $sp^k \le n$ صدق می‌کند؛ به طوری که $s \le \frac{n}{p^k}$. بدیهی است که تعداد مقادیر s برابر $\left[\frac{n}{p^k}\right]$ است.

از طرف دیگر t (توان p) که در تجزیهٔ !n به عوامل اول ظاهر می‌شود، از مجموع عددهایی که از تعداد جمله‌های دنبالهٔ $\{n\}$ که بر p یا p^2 یا p^3 یا ... و یا p^k، بخش‌پذیرند، به دست می‌آید. بنابراین، در این‌جا برقراری رابطهٔ (1) به اثبات می‌رسد.

مثال ۱. بزرگ‌ترین توان m=۱۵ که !۶۲ را می‌شمارد، به دست آورید.

حل: با توجه به ۵×۳=۱۵ و توجه به این نکته که بزرگ‌ترین توان ۵ از بزرگ‌ترین توان ۳ که !۶۲ را می‌شمارد؛ کوچک‌تر است، کافی است بزرگ‌ترین توان ۵ که !۶۲ را می‌شمارد، تعیین کنیم:

$$t=\left[\frac{62}{5}\right]+\left[\frac{62}{5^2}\right]+\left[\frac{62}{5^3}\right]+\cdots$$

$$=\left[\frac{62}{5}\right]+\left[\frac{62}{25}\right]+0=12+2=14$$

بدیهی است که بزرگ‌ترین توان ۳ که !۶۲ را می‌شمارد، حداقل ۱۴ است. بنابراین بزرگ‌ترین توان ۱۵ که !۶۲ را می‌شمارد، 15^{14} است.

مثال۲. عدد !۱۰۰ به چند صفر ختم می‌شود؟

حل: در واقع، باید بزرگ‌ترین توان عدد ۱۰=۲×۵ را در !۱۰۰، به دست آوریم. چون بزرگ‌ترین توان ۵ از بزرگ‌ترین توان ۲ که !۱۰۰ را می‌شمارد، کوچک‌تر است، تنها بزرگ‌ترین توان ۵ که !۱۰۰ را می‌شمارد، تعیین می‌کنیم:

$$t=\left[\frac{100}{5}\right]+\left[\frac{100}{5^2}\right]+\left[\frac{100}{5^3}\right]+\cdots=20+4+0=24$$

بنابراین، !۱۰۰، به ۲۴ صفر ختم می‌شود.

مثال۳. عدد $\frac{340!}{170!}$، به چند صفر ختم می‌شود؟

حل: بزرگ‌ترین توان ۱۰ که !۳۴۰ را می‌شمارد، چنین است:

$$t=\left[\frac{340}{5}\right]+\left[\frac{340}{5^2}\right]+\left[\frac{340}{5^3}\right]+\cdots=68+13+2=83$$

همچنین بزرگ‌ترین توان ۱۰ که !۱۷۰ را می‌شمارد، چنین است:

$$t'=\left[\frac{170}{5}\right]+\left[\frac{170}{5^2}\right]+\left[\frac{170}{5^3}\right]+\cdots=34+6+1=41$$

بنابراین عدد $\frac{۳۴۰!}{۱۷۰!}$ ، به $۸۳-۴۱=۴۲$ صفر ختم می‌شود.

مثال ۴ . اعداد طبیعی n را چنان بیابید که در آن، $n!$ به ۲۰ رقم صفر ختم شود.

حل : واضح است که عدد $n!$ به ۲۰ رقم صفر ختم می‌شود؛ اگر و تنها اگر بزرگ‌ترین توان ۵ که $n!$ را می‌شمارد، برابر $۵^{۲۰}$ باشد. به عبارت دیگر می‌خواهیم n را چنان بیابیم که داشته باشیم:

$$t=\left\lfloor \frac{n}{۵} \right\rfloor+\left\lfloor \frac{n}{۵^۲} \right\rfloor+\left\lfloor \frac{n}{۵^۳} \right\rfloor+\cdots=۲۰$$

اگر $n=۱۲۵$، آن‌گاه $t=۳۱$ و اگر $n=۷۵$، آن‌گاه $t=۱۸$؛ بنابراین معلوم می‌شود که $۷۵<n<۱۲۵$.

با فرض $n=۷۵+۵k+s$، می‌توان نوشت $(k,s \in \mathbb{N})$:

$$t=\left\lfloor \frac{۷۵+۵k+s}{۵} \right\rfloor+\left\lfloor \frac{۷۵+۵k+s}{۲۵} \right\rfloor$$

$$=۱۵+k+\left\lfloor \frac{s}{۵} \right\rfloor+۳+\left\lfloor \frac{k}{۵} \right\rfloor+\left\lfloor \frac{s}{۲۵} \right\rfloor=۲۰$$

اگر $۰ \le k \le ۴$ و $۰ \le s \le ۴$، پس:

$$t=۱۵+k+۳=۲۰ \;;\; k=۲۰-۱۸=۲$$

بنابراین، به ازای $k=۲$ و $۰ \le s \le ۴$ ، مقادیر n تعیین می‌شوند:

$$k=۲ \;: n=۷۵+۵k+s=۷۵+۵(۲)+s=۸۵+s \;;$$

$$۰ \le s \le ۴ \;: n=۸۵,۸۶,۸۷,۸۸,۸۹$$ (مسأله پنج جواب دارد)

مثال ۵ . با فرض این‌که $n!$ به t_k رقم صفر ختم شود، نشان دهید که t_k برای اعداد بزرگ n، نزدیک به $\frac{n}{۴}$ است.

حل : واضح است که t_k برابر بزرگ‌ترین توان ۵ است که $n!$را می‌شمارد (بنابر قضیهٔ ۱):

$$t_k=\left\lfloor \frac{n}{۵} \right\rfloor+\left\lfloor \frac{n}{۵^۲} \right\rfloor+\left\lfloor \frac{n}{۵^۳} \right\rfloor+\cdots+\left\lfloor \frac{n}{۵^k} \right\rfloor+\cdots \qquad (۱)$$

بدیهی است که با فرض $۰ < \frac{n}{۵^k} \le ۱$ ، به دست می‌آید $k \ge \log_۵^n$ و این بدان معناست که در عبارت t_k ، بیش از $\lfloor \log_۵^n \rfloor+۱$ جمله غیر صفر وجود ندارد. در این‌جا، تصاعد هندسی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$s_k=\frac{n}{5}+\frac{n}{5^2}+\frac{n}{5^3}+\cdots+\frac{n}{5^k}+\cdots \qquad (2)$$

از مقایسهٔ جمله به جملهٔ دو مجموع (۱) و (۲) با هم، خواهیم داشت:

$$\left(\begin{array}{l}\text{در حالت خاص:}\\ n=5^k: s_k-t_k=0\end{array}\right) 0\le s_k-t_k<k$$

$$k=\left\lfloor \log_5^n\right\rfloor+1:\ 0\le s_k-t_k<1+\left\lfloor\log_5^n\right\rfloor \qquad (3)$$

حدّ مجموع بی‌نهایت جملهٔ تصاعد هندسی (۲) برابر با $s=\frac{n}{4}$ است؛ پس با جایگزین کردن این مقدار به جای s_k، به رابطهٔ زیر می‌رسیم:

(در واقع اگر n بی‌نهایت بزرگ باشد، k بی‌نهایت بزرگ است.)

$$\frac{1}{4}-\frac{1+\left\lfloor\log_5^n\right\rfloor}{n}<\frac{t_k}{n}\le\frac{1}{4} \qquad (4)$$

چون آهنگ تغییرات (رشد) تابع لگاریتمی، بسیار کندتر از n است، بنابراین خارج قسمت $\frac{t_k}{n}$ را اگر n را به اندازهٔ کافی بزرگ اختیار کنیم، می‌توانیم به $\frac{1}{4}$ نزدیک کنیم؛ در این صورت t_k به طور تقریبی برابر $\frac{n}{4}$ است.

مثال۶. نشان دهید که آیا عدد !n می‌تواند به ۴۸ رقم صفر ختم شود؟

حل: واضح است که برای حل این مسأله، کافی است بزرگ‌ترین توان ۵ که ! n را می‌شمارد، تعیین شود. برای n=۲۰۰ به دست می‌آوریم:

$$t=\left\lfloor\frac{200}{5}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{200}{5^2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{200}{5^3}\right\rfloor=40+8+1=49$$

از طرفی همین مجموع برای n=۱۹۹ برابر با ۴۷ است. بنابراین !n نمی‌تواند به ازای هیچ n طبیعی به ۴۸ صفر ختم شود.

تمرین. عدد $\binom{2n}{n}$ به چند صفر ختم می‌شود.

مرجع

www.primenumbers formula.com

تفسیری که نیریزی بر کتاب مجسطی بطلمیوس نوشته است بهترین تفسیرهای آن کتاب دانسته شده است، تا آن جا که گاهی نیریزی را به طور مطلق «شارح مجسطی» خوانده اند و با وجود آن که عده ای دیگر نیز بر مجسطی بطلمیوس شرح و تفسیر نوشته اند وقتی بدون قید نام از «شارح مجسطی» سخن به میان آید، معلوم است که مقصود نیریزی است.

شرحی که نیریزی بر کتاب اصول اقلیدس نوشته است نیز از مهمترین و مشهورترین شرح های آن کتاب است که به زبان لاتینی ترجمه شده و مورد استفاده و توجه مورخان ریاضی است.

آثار ریاضی موجود نیریزی

۱- شرح کتاب اصول اقلیدس

این شرح را نیریزی بر ترجمه ی اصول اقلیدس توسط حجاج بن یوسف بن مطر نوشته است و از نظر تاریخ ریاضیات دوره ی اسلامی و یونانی حایز اهمیت است زیرا در آن قسمت هایی از آثار ایرن(هرون) اسکندرانی[۳] و سنبلیقیوس[۴] و اغانیس[۵] نقل شده است.

نسخه ای خطی فقط از مقالات اول تا ششم و آغاز فصل هفتم متن عربی این شرح در لیدن موجود است. متن عربی این شش مقاله و ترجمه ی لاتینی آن از سال ۱۸۹۳ به بعد به تدریج در کپنهاگ به چاپ رسید. ده مقاله ی اول این شرح را جرارد کرمونی در قرن دوازدهم میلادی به لاتینی ترجمه کرده بود و این ترجمه در سال ۱۸۹۹ میلادی به چاپ رسیده است.

هیث در تاریخ ریاضیات خود نوشته است که اهمیت فعلی این شرح به علّت قسمت هایی است که از ایرن اسکندرانی و سنبلیقیوس در آن نقل شده است. هیث خود به طور مکرر در ترجمه ی سیزده مقاله ی اصول اقلیدس، آرای ایرن اسکندرانی و سنبلیقیوس را از قول نیریزی نقل کرده است.

۲- رساله فی(بیان) المصادرة المشهوره لاقلیدس

یک نسخه از این رساله در کتابخانه ی مدرسه عالی شهید مطهری و فیلم آن به شمارهٔ ۳۵۹۸ در کتابخانه ی مرکزی دانشگاه تهران موجود است و عکس آن در صفحات ۸۶ و ۸۷ کتاب «قربانی: ریاضیدانان ایرانی» به چاپ رسیده است. یک نسخه ی خطی دیگر هم از آن در برلین به شماره ی ۵۹۲۷ هست.

سوتر نوشته که ممکن است این رساله بخشی از کتاب شرح نیریزی بر اصول اقلیدس باشد.

تبصره: فهرست سایر تألیفات نیریزی را در کتاب «قربانی: ریاضیدانان ایرانی» صفحات ۷۸ تا ۸۳ خواهید یافت.

یادداشت: رساله ای موسوم به «فی استخراج کمیت الاجرام المختلفه» در کتابخانه ی گتا[۶] موجود است که مؤلف آن ابومنصور نیریزی است. معلوم نیست که آیا این ابومنصور نیریزی همان ابوالعباس نیریزی است و یا نه(بعضی از اشخاص در دوره ی اسلامی دو کنیه داشته اند).

زیرنویس:

۱. Anaritius

۲. umbra versa

۳. Heron of Alexandria ریاضی دان اسکندرانی که در حدود نیمه ی دوم سده ی اول میلادی می زیسته است.

۴. Simplicios فیلسوف یونانی از قرن ششم میلادی که شرحی بر مقاله ی اول اصول اقلیدس نوشته است.

۵. Aganius

۶. بروکلمان S_1، ص ۱۰۲۱(ش ۴۹)، سزگین G_5، ص ۲۸۵

منبع:
زندگی نامه ریاضی دانان دوره ی اسلامی/ ابوالقاسم قربانی/ مرکز نشر دانشگاهی.

مجموعه
کتاب‌های چهارده آفتاب
زیرنظرِ دفتر انتشارات کمک آموزشی
(کتاب رشد)

مجموعهٔ «چهارده آفتاب» سعی دارد با روایت شیرین و دلپذیر از زندگی چهارده معصوم علیهم السلام رازهای محبوبیت و شکوه آسمانی آنان را روشن سازد.
امید است این مجموعه با نگاه نو، گوشه هایی از زندگی چهارده انسان کامل آفرینش را بیان کند تا نوجوانان و جوانان، روح تشنه خود را با زلال وجود ایشان سیراب سازند.

علاقه‌مندان می‌توانند این کتاب‌ها را از فروشگاه‌های انتشارات مدرسهٔ تهیه نمایند.

نشانی: تهران، خیابان سپهبد قرنی، پل کریمخان‌زند، کوچه‌ی شهید محمود حقیقت طلب، شماره‌ی ۳۶.
تلفن: ۹-۰۲۱-۸۸۸۰۰۳۲۴
دورنویس: ۰۲۱-۸۸۹۰۳۸۰۹