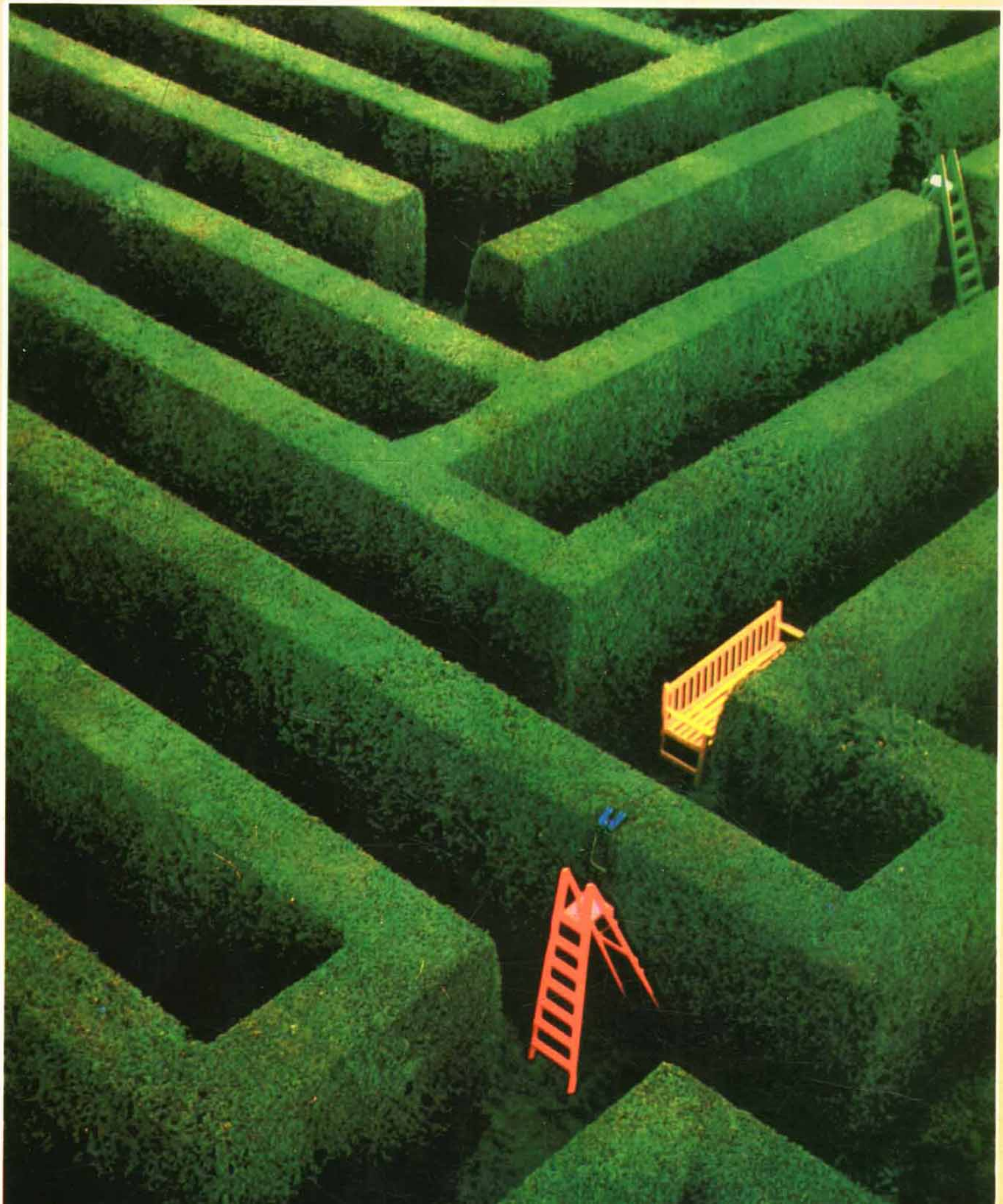
مجله ریاضی

برهان

برای دانش آموزان دبیرستان

۱۹

سال ششم، زمستان ۱۳۷۵ شمارهٔ دوم، بهاء ۲۰۰۰ ریال



بسم الله الرحمن الرحیم

انتشارات مدرسه وابسته به وزارت آموزش و پرورش

❑ صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه ❑ مدیر مسئول: محمود ابراهیمی

❑ سردبیر: حمیدرضا امیری ❑ مدیر داخلی: سیدمحمّدرضا هاشمی موسوی

❑ اعضای هیئت تحریریه: آقایان: ❑ حمیدرضا امیری ❑ محمدهاشم رستمی ❑ احمد قندهاری ❑ سیدمحمدرضا هاشمی موسوی ❑ غلامرضا یاسی‌پور (با تشکر از همکاری ارزندهٔ آقای پرویز شهریاری و با تشکر از آقای حسین ابراهیم‌زاده قُلزم در بخش کامپیوتر مجله)

❑ مدیر فنی: هوشنگ آشتیانی ❑ طراح و صفحه‌آرا: احمد پیرحسینلو ❑ رسّام: سیّدجعفر طرازانی ❑ چاپ و صحافی: چاپخانه مدرسه

مطالب این شماره

■ سال ششم، زمستان ۱۳۷۵ شمارهٔ دوم.

برهان تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

۱ـ نگارش مقالات کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتب ریاضی راهنمایی) ۲ـ طرح مسائل کلیدی (برای دانش‌آموزان) به‌همراه‌حل آن ۳ـ طرح مسائل‌مسابقه‌ای (برای‌دانش‌آموزان) به‌همراه حل آن ۴ـ طرح‌معماهای‌ریاضی ۵ـ نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

■ **هیئت تحریریه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافهٔ مقالات آزاد است.** ■ **مقالات مجله با رسم‌الخطِ انتشارات مدرسه به چاپ خواهد رسید.**

■ **مقالات وارده باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.** ■ **مقالات رسیده مسترد نمی‌شود.**

برهان هر ۳ ماه یک شماره منتشر می‌شود.

نشانی: تهران، خیابان سپهبد قرنی، پل کریمخان زند، کوچه شهید محمود حقیقت طلب، پلاک ۳۶

تلفن: ۹ـ ۸۸۱۰۳۲۵، ۸۹۳۸۰۹ فاکس: ۸۸۲۰۵۹۹

صندوق پستی: ۱۴۱۵۵/۱۹۴۹

کد ۴۴۷/۱

حرف اوّل

فزت و ربّ‌الکعبه!

قسم به خدای کعبه که رستگار شدم.

در آستانهٔ ورود به ماه مبارکِ رمضان هستیم، ماهِ میهمانی خدا، ماه بندگانِ صالح او و ماه رستگاری امام‌علی(ع).

به راستی رستگاری در چیست و در کجا باید به دنبالِ آن گشت؟ این سؤالی نیست که جوابی واحد داشته باشد. هرکس فراخور حالِ خویش و به نسبت مرتبهٔ شناخت و معرفتش جوابی برای آن دارد، برای یک نفر رستگاری در آن است که همهٔ نمازهای واجب خود را در اول وقت به‌جای آورد و نوافل هریک از آنها را نیز ادا نماید. دیگری معتقد است اگر ماه مبارک رمضان را بتواند به معنای واقعی روزه بگیرد یعنی علاوه بر نخوردن و نیاشامیدن بتواند چشم و زبان و گوش و دست و پا و خلاصه همهٔ جوارح خود را از گناه دور نگهدارد، رستگار شده است. شاید شخصی دیگر، رستگاری را در کمک به محرومین و نیازمندان و خدمت به خلق بداند، و عده‌ای نیز رستگاری را از دریچهٔ دنیا نگاه می‌کنند و می‌پندارند رستگاری موفقیت در شغل و کار و رسیدن به مراتب و درجات بالای علمی یا اجتماعی است.

امّا رستگاری از دیدگاه امام‌علی(ع)، بریدن کامل از این دنیا و رسیدن به حضرت حق است و این به آن معنا نیست که دیدگاههای قبل، رستگاری محسوب نمی‌شوند، چرا که امامان ما علیهم‌السلام تمام آنچه را که از نظر هر مسلمان مؤمنی، رستگاری به حساب می‌آید؛ در حد عالی‌ترین درجات خود به انجام رسانده‌اند و مجری و مُبَلّغ آن بوده‌اند و به همین دلیل رستگاری واقعی را در نهایت، قرارگرفتن در جوارِ دوست دانسته و به راستی که عالی‌ترین درجات رستگاری، شهادت در راه خدا است که امام‌علی(ع) به آن نائل گردید و به زیبایی مفهوم واژهٔ رستگاری را برای ما و تمامی شیعیان واقعی خود معنی کردند.

والسلام ـ سردبیر

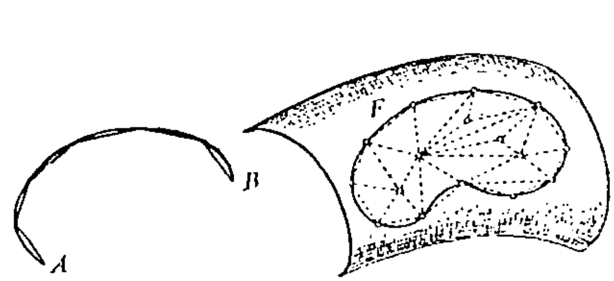
شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۱۹)

○ پرویز شهریاری

مفهوم حد و عدم دقت در کاربرد آن، می‌تواند موجب نتیجه‌گیریهای نادرست بشود. پیش از این هم، با مثالهایی، به برخی جنبه‌های این مفهوم و اشتباه‌های ناشی از درک «نادرست» یا «ساده اندیشانه» از آن اشاره کرده‌ایم. اکنون، دو مثال از کتاب «اشتباه استدلال‌های هندسی» می‌آوریم که به شکل‌های فضایی مربوط‌اند و اشتباه نتیجه‌گیری، در آنها، به کاربرد نادرست مفهوم حد بستگی پیدا می‌کند.

استوانهٔ شوارتز

وقتی می‌خواهند، کمان AB از یک منحنی را اندازه بگیرند، یعنی طول آن را محاسبه کنند (شکل ۱، سمت چپ)،



شکل (۱)

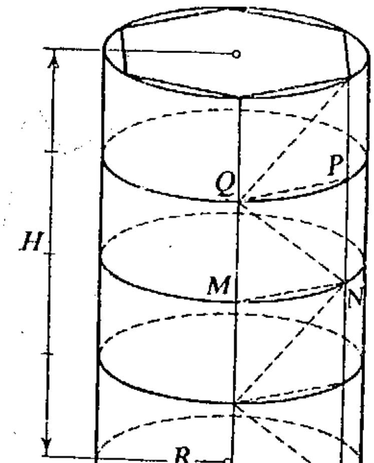
خط شکسته‌ای در آن محاط می‌کنند (لازم نیست، این خط شکسته منتظم باشد، زیرا برای برخی از کمانها، نمی‌توان این شرط را رعایت کرد) : سپس دنباله‌ای نامتناهی از این‌گونه خطهای شکسته در نظر می‌گیرند، به نحوی که رأسهای مجاور، به طور مرتب، به هم نزدیک و نزدیکتر شوند و، طول هر ضلع این خط شکسته، به سمت صفر میل کند. دنبالهٔ طولهای این خطهای شکسته، دارای حدی است که برابر طول کمان مورد نظر ماست.

اکنون به فضای دو بُعدی می‌رویم و کوشش می‌کنیم، طرحی شبیه طرح بالا، برای محاسبهٔ مساحت شکل F، که روی یک سطح منحنی قرار دارد، پیدا کنیم (شکل ۱، سمت راست). طبیعی است که شبیه حالت مربوط به کمان، به این ترتیب عمل کنیم : در شکل F، چند وجهی‌هایی محاط می‌کنیم [چندوجهی را، وقتی محاط در یک سطح منحنی گوییم که، رأسهای آن، روی این سطح باشند] و، سپس چندوجهی‌های دیگری که مساحتهای وجه‌های آنها، به ترتیب، کوچک و کوچکتر شود. در این صورت، مساحت شکل F، حد مساحتهای این چندوجهی‌ها خواهد بود، وقتی که مساحت بزرگترین وجه، به سمت صفر میل کند. اندکی دقیقتر صحبت کنیم : درون شکل F و روی سطح آن، مجموعه‌ای از نقطه‌ها انتخاب می‌کنیم و آنها را سه به سه به هم می‌پیوندیم تا یک سطح چندوجهی با وجه‌های مثلثی شکل تشکیل شود، به نحوی که هیچ دو مثلثی

دارای نقطه‌های مشترک درونی، و هیچ دارای یال مشترک نباشند. دنبالهٔ نامتناهی سطحهای چندوجهی‌های F_1 ، F_2 ، ... ، F_n ، ... را، محاط در شکل F ، چنان در نظر می‌گیریم که طول بزرگترین یال در F_n (یعنی طول بزرگترین ضلع در بین همهٔ مثلثها)، وقتی n به سمت بی‌نهایت میل کند، به سمت صفر برود و هر نقطه از شکل F ، حد دنبالهٔ نقطه‌هایی باشد که، به ترتیب، روی F_1 ، F_2 ، ... ، F_n ، ... انتخاب شده است (و این، از این جهت ممکن است که، وجه سطح چندوجهی، همیشه در سطح شکل F محاط است). کم و بیش روشن است که، دنبالهٔ مساحتهای چندوجهی‌های F_1 ، F_2 ، ... ، F_n ، ... دارای حدی برابر مساحت F است، زیرا بین سطح منحنی و چندوجهی محاط در آن، وقتی وجه‌های چندوجهی خیلی کوچک شده باشند، در عمل، اختلافی وجود ندارد.

ولی در سالهای پایانی سدهٔ نوزدهم، شوارتز Schwarz ریاضیدان آلمانی [هرمان آماندوس شوارتز در سالهای ۱۸۴۳ تا ۱۹۲۱ زندگی می‌کرد و از سال ۱۸۹۳ میلادی عضو فرهنگستان علوم برلن بود]، با مثال ساده‌ای، ثابت کرد که، این روشنی ظاهری و این «شبیه‌سازی» با حالت کمان، ما را فریب داده است. مثال شوارتز را در این‌جا می‌آوریم.

استوانهٔ دوار قایمی با شعاع قاعدهٔ برابر R و ارتفاع برابر H در نظر می‌گیریم (شکل ۲). سطح جانبی استوانه را با روشی



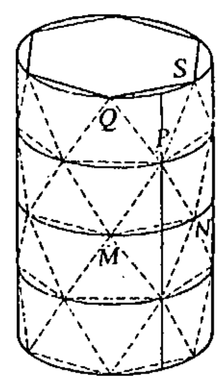
شکل (۲)

که در بالا آوردیم، پیدا می‌کنیم. برای این منظور، ارتفاع را به n بخش برابر تقسیم می‌کنیم و از هر نقطه، صفحه‌ای موازی قاعدهٔ استوانه رسم می‌کنیم. از برخورد این صفحه‌ها با سطح جانبی استوانه، $(n-1)$ دایره به دست می‌آید که، با توجه به دو قاعده، سطح جانبی را به n کمربند استوانه‌ای تقسیم می‌کنند. در یکی از این دایره‌ها، یک m ضلعی منتظم محاط می‌کنیم. مولدهایی که از رأسهای این m ضلعی می‌گذرند، هر یک از دایره های دیگر را، به m بخش برابر تقسیم می‌کنند. این نقطه‌های برخورد، رأسهای m ضلعیهای منتظم را، در هر یک از دایره ها تشکیل می‌دهند. پاره‌خطهای راستی که روی مولدها به وجود می‌آید، با ضلعهای چندضلعیهای منتظم محاطی، روی هم به تعداد mn مستطیل یکسان تشکیل می‌دهند (که یکی از آنها MNPQ در شکل ۲ است). رأس‌های این مستطیلها، روی سطح جانبی استوانه قرار دارند. اکنون، اگر هر یک از این مستطیلها را، با رسم قطر، به دو مثلث تقسیم کنیم، یک سطح چندوجهی به دست می‌آید که در سطح جانبی استوانه محاط شده است و وجه‌های آن را، ۲mn مثلث یکسان تشکیل می‌دهند. وقتی عددهای m و n ، هر دو به‌طور نامحدود بزرگ شوند، ضلعهای این مثلثها، و همراه با آنها، فاصلهٔ هر نقطهٔ واقع بر سطح این چندوجهی تا سطح جانبی استوانه، به سمت صفر میل می‌کند.

هر چندوجهی محاطی به وسیلهٔ دو عدد m و n معین می‌شود؛ ولی با بی‌نهایت روش می‌توان دنبالهٔ این چند. وجهی‌ها را ادامه داد؛ به این ترتیب که، یکی از این دو عدد را تابعی دلخواه از دیگری بگیریم (توجه کنید: هر دو عدد m و n طبیعی‌اند و با هم به سمت بی‌نهایت میل می‌کنند). به عنوان نمونه، می‌توان $m = n$ یا $m = 3n$ یا $m = n^2$ و غیره فرض کرد. به احتمالی، خواننده به این نکته توجه کرده باشد که، سطح چندوجهی ما، در واقع، سطح جانبی یک منشور m وجهی محاط در استوانه را تشکیل می‌دهد که، با تقسیم هر یک از m مستطیل جانبی به ۲n مثلث، به همان هدفی می‌رسیم که در شکل ۱ دنبال کردیم. به این ترتیب، باید با این روش، به محاسبهٔ سطح جانبی استوانه برسیم که، به یاری سطح جانبی منشور و با

عبور حدی، به دست می‌آید. در ضمن، روشن است که، در این استدلال، هیچ سفسطه یا ابهامی وجود ندارد.

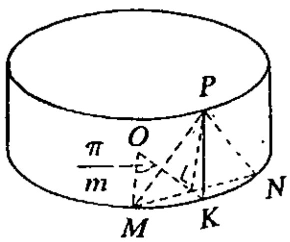
اکنون، در روش محاط کردن چندوجهی، تغییرهایی می‌دهیم. در آغاز، ارتفاع H را به n بخش برابر تقسیم می‌کنیم، $(n-1)$ مقطع دایره‌ای به دست می‌آید که، با دو قاعدهٔ استوانه، روی هم $(n+1)$ دایره می‌شود. در هر یک از این دایره‌ها، یک m ضلعی منتظم محاط می‌کنیم؛ تنها ترتیب رأسهای این m ضلعیها را چنان انتخاب می‌کنیم که، هر مولدی که از یک رأس یک m ضلعی محاطی می‌گذرد، کمان‌های مربوط به ضلعهای m ضلعیهای دایره‌های مجاور را نصف کند. در شکل ۳، مولدی که از رأس P می‌گذرد، کمانهای $\overset{\frown}{MN}$ و $\overset{\frown}{QS}$ را نصف می‌کند. البته، خطهای راست QM و SN (که



شکل (۳)

در شکل ۳ رسم نشده‌اند) نیز، مولدهایی از استوانه خواهند بود. به زبان دیگر، در این جا هم، مثل قبل، هر چندضلعی محاط در دایره، از انتقال چندضلعی محاط در دایره مجاور به‌اندازه $\frac{H}{n}$ به دست می‌آید؛ تنها باید بعد از انتقال، چند ضلعی را به اندازهٔ نصف زاویهٔ مرکزی هر ضلع، یعنی $\frac{\pi}{n}$، دور مرکز آن دوران دهیم. اکنون، با چندضلعیهای منتظم محاطی، که به این ترتیب به دست آمده‌اند، یک چندوجهی با وجه‌های مثلثی می‌سازیم؛ به این ترتیب که هر رأس را به دو رأس نزدیک خود در دایره‌های مجاور وصل می‌کنیم. این سطح چندوجهی (که می‌توان آن را به صورت یک فانوس کاغذی با مرزهای تا شده در نظر گرفت)، که از تعداد ۲mn مثلث متساوی‌الساقین برابر تشکیل شده است (n لایه و در هر لایه ۲m مثلث)، برای سطح منحنی استوانه، یک چندوجهی محاطی را، به مفهوم واقعی خود، مشخص می‌کند.

روشن است، برای محاسبهٔ مساحت این چند وجهی، باید



شکل (۴)

مساحت یکی از وجه‌های آن را، مثل وجه MNP، به دست آورد. این وجه، در شکل ۲ نشان داده شده است و در شکل ۳، به طور جداگانه، آمده است و، در آن MN، عبارت است از ضلع m ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ مقطع به مرکز O. K و L، به ترتیب، وسط کمان $\overset{\frown}{MN}$ و وتر MN در نظر گرفته شده و PK پاره‌خط راستی از مولد استوانه است. مثلث MNP متساوی‌الساقین است ($|PM|=|PN|$، زیرا این پاره‌خطهای راست، روی صفحه دایرهٔ O، تصویرهای برابر KM و KN را دارند)؛ طول PL، ارتفاع این مثلث را می‌توان از مثلث PKL به‌دست آورد که در آن داریم:

$$|PK|=\frac{H}{n} \quad , \quad \hat{K}=۹۰^\circ \quad ,$$

$$|KL|=R-|OL|=R-R\cos\frac{\pi}{m}=۲R\sin^۲\frac{\pi}{۲m}$$

از آنجا

$$|PL|=\sqrt{\left(\frac{H}{n}\right)^۲+۴R^۲\sin^۴\frac{\pi}{۲m}}$$

و چون داریم:

$$\frac{۱}{۲}|MN|=R\sin\frac{\pi}{m}$$

به‌دست می‌آید:

$$S_{MNP}=R\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{\frac{H^۲}{n^۲}+۴R^۲\sin^۴\frac{\pi}{۲m}}$$

مساحت سطح تمام چندوجهی را S_{mn} می‌نامیم (که از تقسیم هر دایره به m بخش برابر و تقسیم ارتفاع استوانه به n بخش برابر، به دست آمده است). در این صورت

$$S_{mn}=۲mnR\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{\frac{H^۲}{n^۲}+۴R^۲\sin^۴\frac{\pi}{۲m}}$$

$$= 2mR\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{H^2+4n^2R^2\sin^4\frac{\pi}{2m}}$$

پیش از این هم دیدیم که، از مجموعهٔ عددهای S_{mn}، می‌توان با بی‌نهایت روش، یک دنباله جدا کرد؛ این روشها، به نوع رابطه‌ای بستگی دارند که بین m و n وجود دارد. دو نمونه از این حالتها را در نظر می‌گیریم:

الف) $n = m^2$، یعنی وقتی که، به ترتیب، هر دایره را به ۳، ۴، ۵، ... بخش برابر و ارتفاع استوانه را به ۹، ۱۶، ۲۵، ... بخش برابر تقسیم کرده باشیم. اکنون دیگر، مساحت سطح چندوجهی را با S_{mn} نشان می‌دهیم، زیرا این مساحت تنها به m بستگی دارد. دستور مساحت چنین می‌شود:

$$S_m = 2mR\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{H^2+4m^4R^2\sin^4\frac{\pi}{2m}}$$

اکنون باید حد مقدار S_{mn} را، وقتی m به سمت بی‌نهایت میل کند، پیدا کنیم. با میل m به سمت بی‌نهایت، مقدارهای $\sin\frac{\pi}{m}$ و $\sin\frac{2\pi}{m}$ به سمت صفر میل می‌کنند و عبارت S_{mn} را می‌توان این‌طور نوشت:

$$S_m = 2\pi R\,\frac{\sin\frac{\pi}{m}}{\frac{\pi}{m}}\sqrt{H^2+\frac{1}{4}\pi^4R^2\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2m}}{\frac{\pi}{2m}}\right)^4}$$

که درنتیجه، به‌دست می‌آید:

$$\lim_{m\to\infty} S_m = 2\pi R\sqrt{H^2+\frac{1}{4}\pi^4R^2}$$

و روشن است که، این مقدار، از $2\pi RH$، یعنی سطح جانبی استوانه، بزرگتر است.

اگر $n = km^2$ بگیریم ($k\in N$)، می‌توان این مساحت را به هر اندازه که بخواهیم، بزرگتر کرد، زیرا در این حالت داریم:

$$\lim_{m\to\infty} S_m = 2\pi R\sqrt{H^2+\frac{K^2}{4}\pi^4R^2}$$

ب) $n = m^3$. در اینجا تعداد بخشهای ارتفاع، نسبت به حالت قبل، خیلی سریعتر از تعداد بخشهای محیط دایره، زیاد می‌شود. در این حالت، بسادگی می‌توان به این نتیجه رسید که، وقتی m به سمت بی‌نهایت میل کند، S_m هم به سمت بی‌نهایت میل می‌کند؛ یعنی می‌توان چندوجهی‌های محاطی را طوری در نظر گرفت که، مجموع مساحتهای آنها، به سمت حد معینی میل نکند و تا بی‌نهایت، صعودی باشد؛ و این، به معنای آن است که، سطح جانبی استوانه، مساحت معینی ندارد.

اکنون ببینیم، در استدلال ما، چه اشتباهی وجود دارد؟ در کجا سفسطه کرده‌ایم؟ در پاسخ باید گفت: درست است که سطح چندوجهی، مرتب، به سطح استوانه‌ای نزدیک می‌شود، ولی از اینجا نمی‌توان نتیجه گرفت که، مساحت سطح چندوجهی، به‌طور نامحدود، به مساحت سطح استوانه‌ای نزدیک می‌شود. برای این‌که بستگی بین این دو گونه نزدیکی را روشن‌تر کنیم، یادآوری می‌کنیم: با همان روشی که در شکل ۳ نشان دادیم، می‌توان یک چندوجهی محاطی، برای سطح جانبی استوانه به دست آورد که، به یاری آن بتوان، سطح جانبی استوانه را محاسبه کرد. به عنوان نمونه، اگر فرض کنیم $n = m$ یا $n = 10m$ و یا، به طورکلی، اگر تعداد بخشهای ارتفاع و تعداد بخشهای محیط دایره، نسبت به هم، به‌طور متناسب تغییر کنند، مثلاً در حالت $n = 10m$ به دست می‌آید:

$$S_m = 2mR\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{H^2+400m^2R^2\sin^4\frac{\pi}{2m}}$$

$$= 2mR\,\frac{\sin\frac{\pi}{m}}{\frac{\pi}{m}}\sqrt{H^2+\frac{25\pi^2R^2}{m^2}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2m}}{\frac{\pi}{2m}}\right)^4}$$

که وقتی n به سمت بی‌نهایت میل کند، به دست می‌آید:

$$\lim_{m\to\infty} S_m = 2\pi RH$$

که همان سطح جانبی استوانه است.

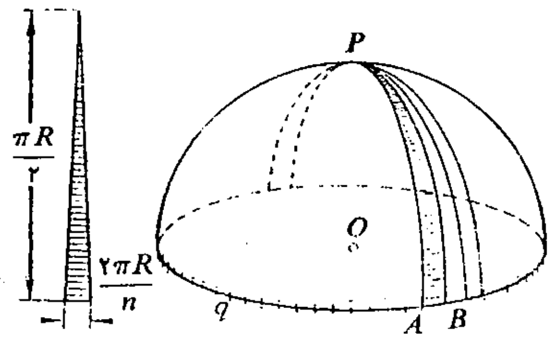
چرا وقتی با قانون دیگری، و مثلاً رابطهٔ $n = m^2$، مساحت چندوجهی را محاسبه کنیم، S_m به سمت حدی میل می‌کند که از $2\pi RH$ بزرگتر است و چرا با رابطهٔ $n = m^3$، این سطح به سمت بی‌نهایت میل می‌کند؟ برای پاسخ به این

پرسش‌ها، وارد بحث دقیق ریاضی نمی‌شویم و تنها به درک شهودی مطلب اکتفا می‌کنیم (و البته، همین دید ظاهری و معرفت شهودی است که می‌تواند ما را به سمت استدلال دقیق ریاضی راهنما باشد). در حالت $n = m$ یا $n = 10m$، انبوهی و فشردگی تقسیمهای محیط دایره و ارتفاع، با سرعتی یکنواخت رو به افزایش هستند و، در نتیجه، سطح چندوجهی غیر مقعر می‌ماند و همهٔ وجه‌های آن، به تقریب، به صورت قایم درمی‌آیند، البته به شرطی که استوانه را قایم در نظر بگیریم (شما با استفاده از شکل ۴، می‌توانید ثابت کنید، وجه MNP، با صفحهٔ افقی، زاویهٔ MKN را می‌سازد که، با میل m به سمت بی‌نهایت، به سمت $\frac{\pi}{2}$ میل می‌کند). بنابراین، سطح چندوجهی، نه تنها از لحاظ فاصله، بلکه در ضمن از نظر جهت هم، به سطح جانبی استوانه نزدیک می‌شود. در حالی که وقتی داشته باشیم $n = m^2$ یا $n = m^3$، وضع دیگری پیش می‌آید : در اینجا، تقسیمهای ارتفاع، با سرعتی بسیار بیشتر از تقسیمهای محیط دایره رو به افزایش می‌رود. درنتیجه، سطح چندوجهی، به طور محسوس، «دندانه‌ای» می‌شود که، با محاسبهٔ سطح استوانه، مقداری از سطح این چندوجهی به حساب نمی‌آید. در این حالت، وجه‌های مثلثی شکل، به صورت قایم در نمی‌آیند و می‌توان ثابت کرد، با شرط $n = m^2$، زاویهٔ PLK (شکل ۴) به سمت یک زاویهٔ حاده میل می‌کند و، در حالت $n = m^3$، این زاویه به سمت صفر میل می‌کند (یعنی در این حالت، وقتی m به سمت بی‌نهایت میل کند، چندوجهی به صورت افقی درمی‌آید).

به‌طور طبیعی، پرسشی پیش می‌آید : سرچشمهٔ عدم شباهت بین خط شکستهٔ محاط در یک منحنی و سطح چندوجهی محاط در یک سطح منحنی، در کجاست؟ چرا در حالت اول، با نزدیک شدن رأس‌ها به یکدیگر، خط شکسته، نه تنها از نظر فاصله، بلکه از نظر جهت هم به خط منحنی نزدیک می‌شود، در حالی که در حالت دوم، وقتی چند وجهی از لحاظ فاصله به سطح منحنی نزدیک می‌شود، ممکن است از لحاظ جهت به آن نزدیک نشود. بدون این که، به تفصیل، وارد این بحث شویم، تنها به یک واقعیت اشاره می‌کنیم. اگر روی یک منحنی، دو نقطه را در نظر بگیریم، به نحوی که یکی از آنها بی‌حرکت باشد، وقتی نقطهٔ متحرک به سمت نقطهٔ ثابت میل می‌کند، پاره‌خط راستی که آنها را به هم وصل می‌کند، درحد، به سمت مماس بر منحنی در نقطهٔ ثابت، نزدیک می‌شود. ولی اگر سه نقطه بر روی یک سطح منحنی در نظر بگیریم و از این سه نقطه، یکی را ثابت فرض کنیم (فرض می‌کنیم، سه نقطه روی یک خط راست نباشند)، وقتی دو نقطهٔ دیگر، به سمت نقطهٔ ثابت نزدیک شوند، صفحه‌ای که از این سه نقطه می‌گذرد، همیشه به سمت صفحهٔ مماس بر سطح در نقطهٔ ثابت میل نمی‌کند. روی سطح یک کره، یک مقطع دایره‌ای در نظر بگیرید و سه نقطه روی محیط این دایره انتخاب کنید (یک نقطهٔ ثابت و دو نقطهٔ متغیر) ؛ وقتی دو نقطهٔ متغیر به سمت نقطهٔ ثابت میل کنند، در هر حال، صفحه‌ای که از سه نقطه می‌گذرد، همان صفحهٔ مقطع است.

آیا مساحت سطح کرهٔ به شعاع R، برابر است با $\pi^2 R^2$ ؟

نیم کرهٔ به مرکز O را در نظر می‌گیریم (شکل ۵)، q را «استوا» و نقطه P را «قطب» نیم‌کره فرض می‌کنیم (یعنی شعاع OP، بر صفحهٔ استوای q که از O می‌گذرد، عمود است). محیط دایرهٔ q را به n بخش برابر تقسیم می‌کنیم (n، عددی است طبیعی و به اندازهٔ کافی بزرگ) ؛ نقطهٔ P را بوسیلهٔ کمانهایی از دایرهٔ عظیمه ، به همهٔ نقطه‌های تقسیم می‌پیوندیم (هر یک از این کمانها، طولی برابر $\frac{1}{4}$ طول «نصف‌النهار» دارد). در این صورت، نیم‌کره، به n مثلث کروی خیلی باریک تقسیم می‌شود، به نحوی که، هر مثلث، محدود است به کمان بسیار کوچکی از استوا و دو کمان نصف‌النهار (چند تا از این مثلثها در شکل ۵ داده شده و، یکی از آنها، مثلث PAB، با هاشور مشخص شده است). با بزرگ کردن عدد n، می‌توان این مثلثهای کروی را به دلخواه کوچک کرد (به صورت تارهای نازک). با باز کردن هر یک از این مثلثها، می‌توان آنها را، با حفظ تمام اندازه‌ها (یعنی طول، زاویه و مساحت)، بر یک صفحه قرار داد. در این صورت، مثلثهای متساوی‌الساقینی به دست می‌آید که قاعدهٔ هر یک از آنها، کمانی به طول $\frac{2\pi R}{n}$ و ارتفاع



شکل (۵)

هر یک، کمانی برابر $\frac{1}{4}$ محیط دایره، یعنی به طول $\frac{1}{2}\pi R$ است (شکل ۵، سمت چپ را ببینید). مساحت چنین مثلثی، برابر است با :

$$\frac{1}{2}\times\frac{2\pi R}{n}\times\frac{\pi R}{2}=\frac{1}{2n}\pi^2R^2$$

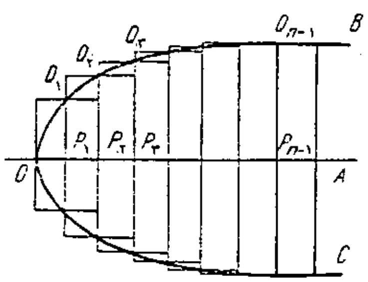
تمام n مثلث، که نیم کره را پوشانده‌اند، مساحتی برابر $\frac{1}{2}\pi^2R^2$ پیدا می‌کند؛ و مساحت سطح تمامی کره برابر π^2R^2 می‌شود. و روشن است که، این نتیجه، با دستوری که برای محاسبهٔ مساحت سطح کره می‌شناسیم (یعنی $4\pi R^2$) یکی نیست، زیرا $\pi \neq 4$.

خوب، فکر می‌کنید، در کجا اشتباه کرده‌ایم؟ حقیقت این است که جمله‌هایی از گونه «عدد بسیار بزرگ»، «مثلث خیلی کوچک»، «کمان کوچک» و «مثلث بی‌اندازه باریک»، مفهوم ریاضی ندارند. از این جمله‌ها می‌توان برای توصیف شکلهای هندسی استفاده کرد، ولی مجاز نیستیم از آنها به عنوان استدلال ریاضی، برای به دست آوردن رابطه یا دستور استفاده کنیم. اشتباه اصلی در آن جاست که استدلال کرده‌ایم، وقتی یک مثلث کروی خیلی باریک باشد، می‌توان آن را روی یک صفحه باز کرد، یعنی یک مثلث کروی را به یک مثلث مسطحه، با همان طولها، زاویه‌ها و مساحت تبدیل کرد. در واقع، یک مثلث کروی را (هر قدر کوچک باشد)، نمی‌توان به مفهومی که گفتیم، روی یک صفحه گسترد. این مطلب، از این‌جا هم روشن می‌شود که، مجموع زاویه‌های هر مثلث واقع بر صفحه، برابر ۱۸۰ درجه است، در حالی که مجموع زاویه‌های یک مثلث کروی، همیشه از ۱۸۰ درجه بیشتر است. در مثال ما، در مثلث کروی PAB (شکل ۵، سمت راست)، زاویه‌های به رأسهای A و B، قایمه‌اند و اگر بتوان چنین مثلثی را روی صفحه پهن کرد، مثلث متساوی الساقینی در روی صفحه به دست می‌آید (شکل ۵، سمت چپ) که دو زاویهٔ مجاور به قاعدهٔ آن قایمه است.

□

نخستین کسی که از مقدارهای بسیار کوچک و حد مجموع آنها استفاده کرد، ارشمیدس بود. او با روش ابداعی خود توانست راهی برای محاسبه مساحت قطعه‌ای از سهمی و، همچنین، محاسبهٔ حجم سهموی (پارابولوئید)، یعنی حجم جسمی که از دوران یک سهمی دور محور خود به دست می‌آید، پیدا کند (امروز، این محاسبه‌ها را به یاری انتگرال‌گیری انجام می‌دهند؛ به همین مناسبت، ارشمیدس را باید پیشگام در راه کشف محاسبهٔ انتگرالی دانست). در اینجا طرحی از روش او را برای محاسبه حجم سهموی می‌آوریم.

فرض کنیم، قطعه سهمی BOC، دور محور خود OA، دوران کرده باشد (شکل ۶).



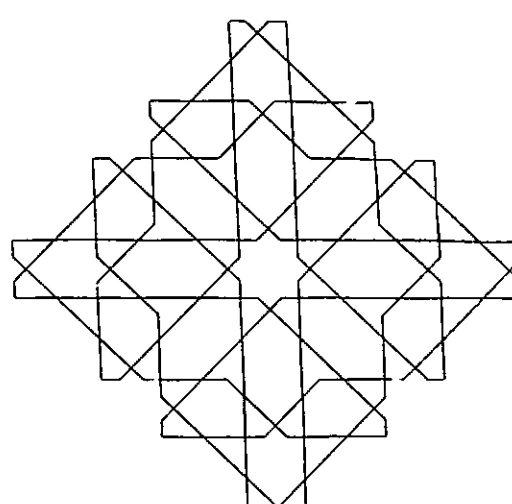
شکل (۶)

ارشمیدس، ارتفاع قطعه سهمی، یعنی OA را به n بخش برابر OP_1، P_1P_2، P_2P_3، ...، $P_{n-1}A$ تقسیم کرد؛ سپس، از نقطه‌های تقسیم، عمودهای P_1Q_1، P_2Q_2، P_3Q_3، ...، $P_{n-1}Q_{n-1}$ را بر محور سهمی رسم کرد و روی آنها، مستطیلهای محیطی و محاطی را ساخت. با دوران تمامی شکل، دور محور OA، دو جسم پله‌ای به دست آورد که از استوانه‌های محیط بر سهموی دوار و محاط در آن، به دست آمده بودند. حجم جسم بیرونی بیشتر از حجم سهموی و حجم جسم درونی کمتر از حجم سهموی است. ارشمیدس با آغاز از حجم این دو جسم، و با افزایش تعداد بخشهای OA، توانست

حجم سهموی دوار را پیدا کند. و ارشمیدس، با این روش، نتیجه گرفت، اگر قطعه سهمی، ارتفاعی برابر OA و قاعده‌ای برابر BC داشته باشد، حجم سهموی ناشی از دوران این قطعه سهمی دور OA ، برابر است با نصف حجم استوانه‌ای که ارتفاعی برابر OA و قاعده‌ای به قطر BC داشته باشد.

روش ارشمیدس، نزدیک به دو هزار سال، به فراموشی سپرده شد و، اگرچه ریاضیدانان ایرانی اندک توجهی به آن داشتند، هیچ پیشرفتی نکرد تا این که در پایان سدهٔ شانزدهم و آغاز سدهٔ هفدهم میلادی، به وسیلهٔ یوهان کپلر احیا شد. روش کپلر، مورد پسند ریاضی‌دانان زمان او نبود، چرا که آنها با روشهای رسمی خو گرفته بودند و تصور می‌کردند، روش ارشمیدس و کپلر، بدعتی است که مخرب «استدلال دقیق و منطقی» ریاضیات است. ولی کپلر راه خود را ادامه داد؛ او معتقد بود، برای حل یک مسأله، باید از هر روشی سود جست «ولو این که راه خاردار مطالعهٔ کتاب ارشمیدس» باشد. کپلر، در بررسیهای اخترشناسی و برای محاسبهٔ مساحت قطاع از یک منحنی غیرمشخص، روش ارشمیدس را انتخاب کرد. بعد از کپلر، ریاضیدانانی چون کاوالیری، فرما، روبروال، توریچلی، پاسکال و باروی همین راه را ادامه دادند تا، سرانجام، محاسبهٔ دیفرانسیلی و انتگرالی به وسیلهٔ نیوتون و لایب نیتس پایه‌گذاری شد و دانشمندانی چون برنولی، اولر، هوپیتال، تیلور و کلرو این شاخه از دانش ریاضی را به اوج خود رساندند.

تا بعد



تفریح اندیشهٔ ۱

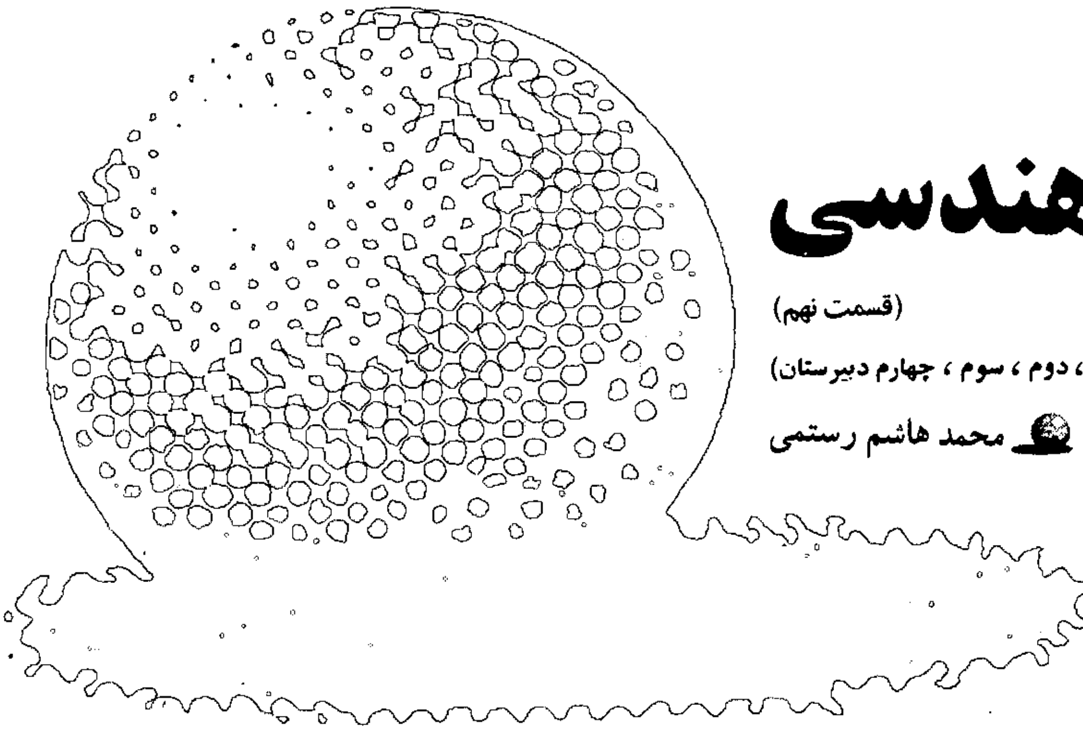
محل اقامت چند گانه

خانواده‌های B، C، F، M، و S در طبقه‌های مختلف ساختمانی زندگی می‌کنند که تنها پنج طبقه دارد.

با در دست داشتن اطلاعات زیر می‌توانید بگویید هر یک در کدام طبقه زندگی می‌کند؟

۱. B در طبقهٔ آخر زندگی نمی‌کند.
۲. C در طبقهٔ اول زندگی نمی‌کند.
۳. F در طبقهٔ آخر یا طبقهٔ اول زندگی نمی‌کند.
۴. M در طبقهٔ بالاتر از طبقهٔ C زندگی می‌کند.
۵. S در طبقه‌ای مجاور (بلافاصله بالا یا زیر) طبقهٔ F زندگی نمی‌کند.
۶. F در طبقه‌ای مجاور طبقهٔ C زندگی نمی‌کند

جواب در صفحه ۸٦



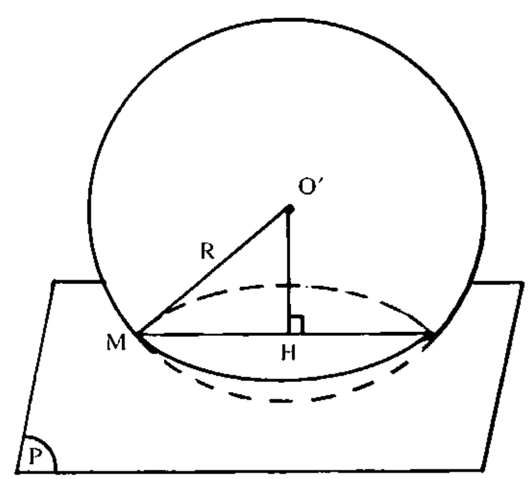
مکان هندسی

(قسمت نهم)

(اوّل ، دوم ، سوم ، چهارم دبیرستان)

محمد هاشم رستمی

مثال ۶ــ معادلهٔ کره‌ای را بنویسید‌که مرکزش نقطهٔ$O'(-۲,۱,۳)$ وفصل مشترکش با صفحهٔ P به معادلهٔ $x-۲y+۲z+۳=۰$ دایره‌ای به شعاع ۴ است.



حل ــ از نقطهٔ O' عمود $O'H$ را برصفحهٔ P فرود می‌آوریم اگر HM یک شعاع ازدایرهٔ فصل مشترک صفحهٔ P و کرهٔ به مرکز O' باشد، $O'M$ برابر شعاع کره است. بنابراین داریم :

$$O'(-۲,۱,۳), P: x-۲y+۲z+۳=۰ \Rightarrow$$

$$O'H = d = \frac{|-۲-۲+۶+۳|}{\sqrt{۱+۴+۴}} = \frac{۹}{۳} = ۳$$

$$HM = r = ۴ \Rightarrow R = O'M = \sqrt{r^۲+d^۲} = \sqrt{۱۶+۹} = ۵$$

شعاع کره

$$(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲+(z-\gamma)^۲ = R^۲ \Rightarrow$$

معادلهٔ کرهٔ جواب مسأله. $(x+۲)^۲+(y-۱)^۲+(z-۳)^۲ = ۲۵$

مثال ۷ــ نقطهٔ $O'(-۱,۳,۰)$ مرکز کره‌ای است که برصفحهٔ $P: x-۲y-۲z+۱=۰$ مماس است. معادلهٔ این کره را بنویسید.

حل ــ فاصلهٔ نقطهٔ O' از صفحهٔ P برابرشعاع کره است. پس داریم :

$$R = O'H = \frac{|ax_۱+by_۱+cz_۱+d|}{\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}} =$$

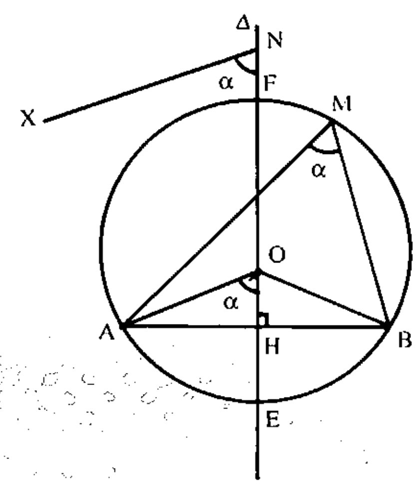
$$\frac{|-1-6-0+1|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{6}{3}=2\Rightarrow R=2$$

و از آنجا معادلهٔ کره به صورت زیر است :

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2\Rightarrow$$

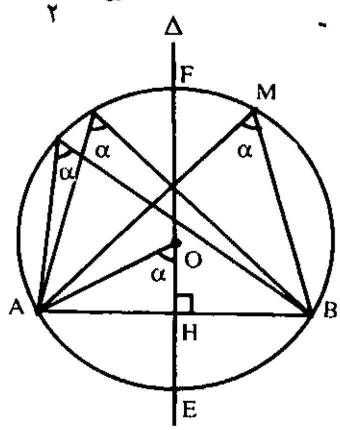
معادله کره $(x+1)^2+(y-3)^2+z^2=4$

۳ ــ کمان درخور یا کمان حاوی یک زاویه ــ مکان هندسی نقطه‌ای مانند M از یک صفحه که از وصل کردن آن نقطه به دونقطه ثابت A و B ازآن صفحه زاویهٔ $A\hat{M}B=\alpha$ پدید می‌آید، کمانهایی از دو دایرهٔ متساوی است که بردونقطهٔ A و B می‌گذرند و زاویهٔ مرکزی مقابل به وتر مشترکشان برابر 2α است، که این کمانها را کمان درخور یا کمان حاوی زاویهٔ α وابسته به پاره خط AB می‌نامند.



اثبات به روش هندسی ــ دونقطهٔ ثابت A و B را دریک صفحه در نظر می‌گیریم. وسط پاره خط AB را نقطهٔ H می‌نامیم و خط Δ عمود منصف پاره خط AB را رسم می‌کنیم. از نقطهٔ دلخواه N واقع بر Δ نیم خط Nx را چنان رسم می‌کنیم که $H\hat{N}X=\alpha$ باشد. از یکی ازدونقطهٔ A و B مثلاً از نقطهٔ A خطی به موازات Nx رسم می‌کنیم تا خط Δ عمودمنصف پاره خط AB را درنقطهٔ O قطع کند. از O به نقاط A و B وصل کرده به مرکز O و به شعاع OA دایره‌ای رسم می‌کنیم. این دایره از نقطهٔ B نیز می‌گذرد و اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{AEB}$ برابر 2α است. زیرا، $A\hat{O}H=\alpha$ است پس زاویهٔ مرکزی $A\hat{O}B=2\alpha$ است. کمان $\overset{\frown}{AFB}$ مکان هندسی نقطهٔ مورد نظر یعنی مکان هندسی نقطه‌ای مانند M است که از وصل کردن آن به دو نقطهٔ A و B زاویهٔ $A\hat{M}B=\alpha$ پدید می‌آید، زیرا :

اولاً ــ هر نقطه مانند M که روی این کمان قرارداشته باشد و ازاین نقطه به دونقطهٔ A و B وصل کنیم، اندازهٔ زاویهٔ $A\hat{M}B$ برابر α است. زیرا : $A\hat{M}B=\frac{\overset{\frown}{AEB}}{2}=\frac{2\alpha}{2}=\alpha$

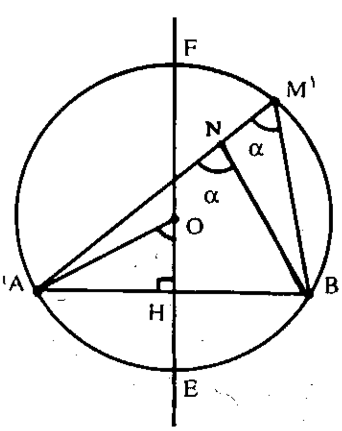


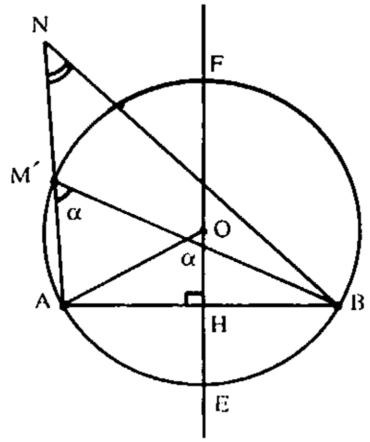
ثانیاً ــ نقطهٔ N رأس هر زاویه مانند $A\hat{N}B=\alpha$ که اضلاعش از دو نقطهٔ ثابت A و B می‌گذرد ودرطرف کمان $\overset{\frown}{AFB}$ واقع است، روی کمان $\overset{\frown}{AFB}$ قرار دارد. زیرا اگر نقطهٔ N روی کمان $\overset{\frown}{AFB}$ نباشد، یاداخل دایرهٔ (O,OA) واقع است که دراین صورت $A\hat{N}B>\alpha$ خواهد بود و یا نقطهٔ N خارج دایره فوق قراردارد که در این صورت $A\hat{N}B<\alpha$ است، زیرا در حالت نخست، اگر نقطهٔ برخورد امتداد AN با دایره را M′ بنامیم و از M′ به نقطهٔ B وصل کنیم داریم :

$$A\hat{N}B=A\hat{M'}B+M'\hat{B}N=\alpha+M'\hat{B}N\Rightarrow A\hat{N}B>\alpha$$

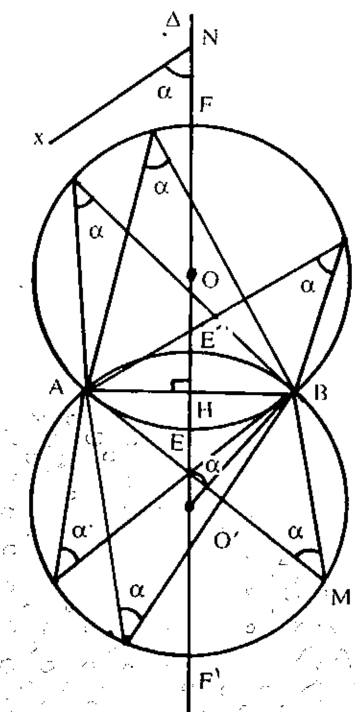
و درحالت دوم، اگر نقطهٔ برخورد AN با دایره را M′ بنامیم داریم :

$$A\hat{N}B=A\hat{M'}B-M'\hat{B}N=\alpha-M'\hat{B}N\Rightarrow A\hat{N}B<\alpha$$





کمان $\overset{\frown}{AFB}$ را کمان حاوی یا کمان درخور زاویهٔ α وابسته به پاره خط AB یا مقابل به پاره خط AB می‌نامند.



درصورتی که از نقطهٔ B خطی موازی Nx رسم کنیم تا عمود منصف پاره خط AB را در نقطهٔ O′ قطع کند ودایرهٔ به مرکز O′ و به شعاع $O'B = O'A$ را رسم کنیم تا عمود منصف پاره خط AB رادر نقاط E′ و F′ قطع کند، کمان $\overset{\frown}{AF'B}$ نیز کمان درخور زاویهٔ α وابسته به پاره خط AB است. بنابراین می‌توان گفت:

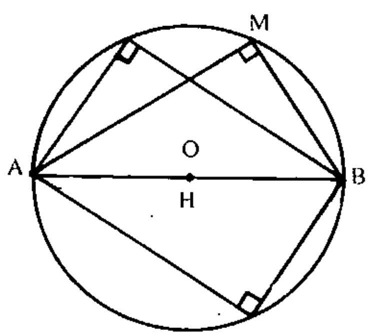
مکان هندسی نقطه‌ای مانند M از یک صفحه که از وصل کردن آن نقطه به دونقطهٔ ثابت A و B از آن صفحه زاویهٔ $A\hat{M}B = \alpha$ پدیدمی‌آید. کمانهایی از دودایرهٔ متساوی درآن صفحه است که بر دونقطهٔ مزبور می‌گذرند و زاویهٔ مرکزی مقابل به وتر مشترکشان برابر 2α است.

تبصره ۱ــ کمان درخور زاویهٔ α وابسته به پاره خط AB رامکان هندسی نقطه‌ای که از آن نقطه پاره خط AB به زاویهٔ α رؤیت می‌شود نیز می‌نامند.

تبصره ۲ــ کمانهای $\overset{\frown}{AEB}$ و $\overset{\frown}{AE'B}$ از دودایره، کمان در خور زاویهٔ $180-\alpha$ وابسته به پاره خط AB است، زیرا:

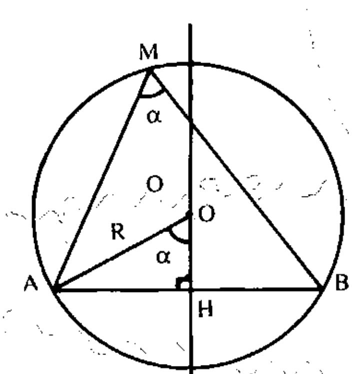
$\overset{\frown}{AEB} = \overset{\frown}{AE'B} = 2\alpha \Rightarrow \overset{\frown}{AFB} = \overset{\frown}{AF'B} =$
$360 - 2\alpha \Rightarrow A\hat{M}_1B = 180 - \alpha$

تبصره ۳ــ کمان در خور زاویهٔ $90°$ وابسته به پاره خط AB دایرهٔ به قطر AB است. زیرا در این حالت دودایرهٔ (O,OA) و $(O',O'A)$ بر هم منطبق شده، مرکز مشترکشان نقطهٔ H وسط پاره خط AB است.



تبصره ۴ــ شعاع دایره‌ای که کمان درخور زاویهٔ α وابسته به پاره خط AB به طول a بخشی از آن است، برابراست با: $R = \frac{a}{2\sin\alpha}$ و فاصلهٔ مرکز این دایره از وتر AB برابر است با:

$OH = |R\cos\alpha| = \frac{a}{2|\operatorname{tg}\alpha|}$



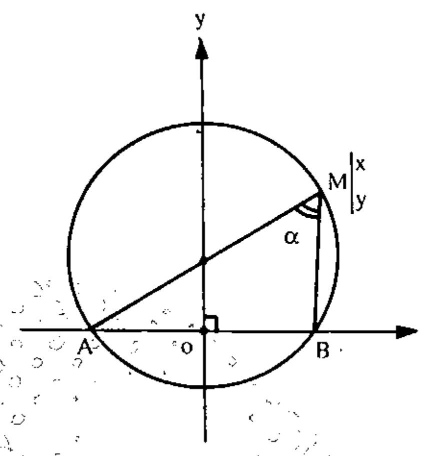
به عنوان مثال اگر طول پاره خط AB برابر ۴ سانتی‌متر باشد و کمان در خور زاویهٔ ۳۰° وابسته به این پاره خط را رسم کنیم، شعاع دایرهٔ مربوط به این کمان درخور برابر است با :

$$R=\frac{4}{2\sin 30}=\frac{4}{2\times\frac{1}{2}}=\frac{4}{1}=4cm$$

و فاصلهٔ مرکزدایره از پاره خط AB برابراست با :

$$OH=|R\cos\alpha|=|4\cos 30|=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$$

اثبات به روش تحلیلی ــ پاره خط AB به طول a را در نظر می‌گیریم. محور x ها را روی خط AB ومحور y ها را عمود منصف پاره خط AB اختیار می‌کنیم.



در این صورت $A(\frac{-a}{2},0)$ و $B(\frac{a}{2},0)$ است. اگر $M(x,y)$ یک نقطه از مکان هندسی مورد نظر، یعنی نقطه‌ای باشد که از وصل کردن آن به دو نقطهٔ A و B زاویهٔ $\hat{AMB}=\alpha$ گردد، داریم :

$$M\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.,\ A\left|\begin{matrix}-\frac{a}{2}\\0\end{matrix}\right.,\ B\left|\begin{matrix}\frac{a}{2}\\0\end{matrix}\right.,\ A\hat{M}B=\alpha\Rightarrow$$

$$m_{MA}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y-0}{x+\frac{a}{2}}=\frac{y}{x+\frac{a}{2}}$$

$$m_{MB}=\frac{y-0}{x-\frac{a}{2}}=\frac{y}{x+\frac{a}{2}}$$

$$tg\alpha=\pm\frac{m-m'}{1+mm'}\Rightarrow tg\alpha=\pm\frac{\frac{y}{x+\frac{a}{2}}-\frac{y}{x-\frac{a}{2}}}{1+\frac{y}{x-\frac{a}{2}}\times\frac{y}{x+\frac{a}{2}}}$$

$$\Rightarrow tg\alpha=\pm\frac{-ay}{x^2+y^2-\frac{a^2}{4}}\Rightarrow$$

$$x^2+y^2-\frac{a^2}{4}=\pm\frac{a}{tg\alpha}y\Rightarrow$$

$$C_1: x^2+y^2-\frac{a}{tg\alpha}y-\frac{a^2}{4}=0 \qquad (1)$$

$$C_2: x^2+y^2+\frac{a}{tg\alpha}y-\frac{a^2}{4}=0 \qquad (2)$$

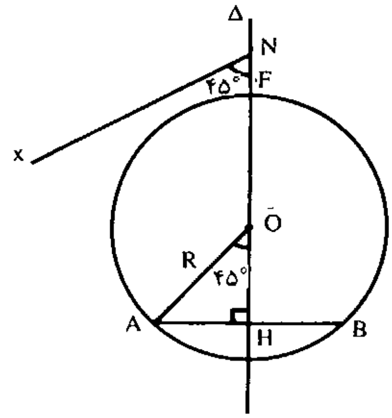
(۱) معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $O_1(0,\frac{a}{2tg\alpha})$ و به شعاع $R_1=\frac{a}{2\sin\alpha}$ و (۲) معادله دایره‌ای به مرکز $O_2(0,-\frac{a}{2tg\alpha})$ و به شعاع $R_2=\frac{a}{2\sin\alpha}$ است. که بخشی از این دو دایرهٔ متساوی مکان هندسی موردنظر است.

واضح است هر نقطه مانند M که مختصاتش در یکی از معادله های (۱) یا (۲) صدق کند و متعلق به بخش کمان در خور زاویهٔ α باشد، از وصل کردن آن به نقاط A و B زاویهٔ $A\hat{M}B=\alpha$ پدید می‌آید. بنابراین :

مکان هندسی نقطه‌ای مانند M از یک صفحه که از وصل کردن آن به دو نقطهٔ ثابت A و B از آن صفحه، زاویهٔ $A\hat{M}B=\alpha$ پدید می‌آید، کمانهایی از دو دایره متساوی از آن صفحه است که بر دونقطهٔ A و B می‌گذرند و زاویهٔ مرکزی مقابل به وترمشترکشان برابر 2α است.

مثال ۱ــ پاره خط AB به طول ۴ سانتی‌متر مفروض است. کمان در خور زاویهٔ ۴۵° وابسته به این پاره خط را رسم کنید. شعاع دایره‌ای که کمان درخور بخشی از آن است و فاصلهٔ مرکز این دایره از پاره خط AB را محاسبه کنید.

حل ــ پاره خط AB را به طول ۴ سانتی‌متر رسم می‌کنیم. سپس خط Δ عمود منصف این پاره خط را رسم می‌کنیم و از نقطهٔ دلخواه N واقع بر Δ نیم خط N_x را چنان رسم می‌کنیم که با Δ زاویهٔ ۴۵° تشکیل دهد. ازنقطهٔ A خطی موازی N_x رسم می‌کنیم تا Δ را در نقطهٔ O قطع کند. به مرکز O و به شعاع OA دایره‌ای رسم می‌کنیم کمان $\overset{\frown}{AFB}$



از این دایره مکان هندسی مورد نظر یعنی کمان درخور زاویهٔ °۴۵ وابسته به پاره خط AB است. اگر H وسط پاره خط AB و R شعاع دایره باشد داریم :

$$R=\frac{a}{۲\sin\alpha}=\frac{۴}{۲\sin ۴۵^\circ}=\frac{۴}{۲\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{۴}{\sqrt{۲}}=۲\sqrt{۲}$$

$$OH=|R\cos\alpha|=۲\sqrt{۲}.\cos ۴۵^\circ=۲\sqrt{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۲$$

مثال ۲ــ پاره خط AB به طول $۱۲\sqrt{۳}$ سانتی‌متر مفروض است. در صورتی که شعاع دایرهٔ کمان درخور زاویهٔ حادهٔ α وابسته به پاره خط AB برابر ۱۲ سانتی‌متر باشد، اندازهٔ زاویهٔ α را تعیین کنید.

حل ــ داریم :

$$R=\frac{a}{۲\sin\alpha}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{a}{۲R}=\frac{۱۲\sqrt{۳}}{۲۴}$$

$$=\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\sin\frac{\pi}{۳}\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{۳}$$

نکته : در صورتی که زاویهٔ α منفرجه باشد، $\alpha=\frac{۲\pi}{۳}$ جواب است.

مثال ۳ــ کمان درخور زاویهٔ °۶۰ وابسته به پاره خط AB را رسم کرده‌ایم. در صورتی که فاصلهٔ مرکز دایرهٔ شامل کمان در خور، از پاره خط AB برابر $۲\sqrt{۳}$ باشد. اندازهٔ پاره خط AB را تعیین کنید.

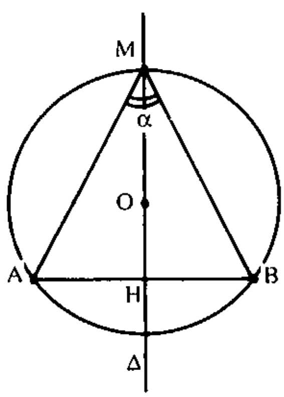
حل: با توجه به داده‌های مسأله داریم :

$$OH=\frac{a}{۲|tg\alpha|}\Rightarrow a=۲OH.|tg\alpha|=۲\times۲\sqrt{۳}$$

طول پاره خط AB $\times tg\frac{\pi}{۳}=۴\sqrt{۳}\times\sqrt{۳}=۱۲\Rightarrow a=۱۲$

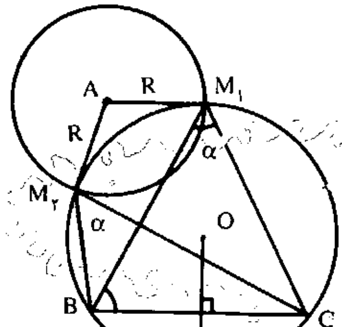
مثال ۴ــ پاره خط AB دریک صفحه مفروض است. نقطه‌ای مانند M از این صفحه را بیابید که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد و از وصل کردن این نقطه به دو نقطهٔ A و B زاویهٔ $A\hat{M}B$ برابر α پدید آید.

حل ــ می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که از دو نقطهٔ ثابت A و B به یک فاصله است عمود منصف پاره خط AB است. پس خط Δ عمود منصف پاره خط AB را رسم می‌کنیم. از طرفی مکان هندسی نقطه‌ای که از آن نقطه پاره خط AB به زاویهٔ α دیده می‌شود، کمان در خور زاویهٔ α وابسته به پاره خط AB است. بنابراین دومکان هندسی را رسم می‌کنیم. نقطهٔ تقاطع آنها، نقطهٔ M جواب مسأله است و به تعداد نقاط تلاقی، مساله دارای جواب است.



مثال ۵ــ سه نقطهٔ A و B و C دریک صفحه مفروضند. نقطه‌ای از این صفحه را تعیین کنید که از نقطهٔ A به فاصلهٔ معلوم R باشد و از این نقطه پاره خط BC به زاویهٔ α رؤیت شود.

حل ــ مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که از نقطهٔ A به



فاصلهٔ R باشد، دایره‌ای به مرکز A و به شعاع R است. این دایره را رسم می کنیم. از طرفی مکان هندسی نقطه‌ای که از آن نقطه پاره خط BC به زاویهٔ α دیده می‌شود، کمان در خور زاویهٔ α وابسته به پاره خط BC است که این کمان در خور را نیز رسم می‌نماییم. نقطهٔ تقاطع این دو، جواب مسأله است.

مثال ۶ـ دو نقطهٔ $A(۳,-۲)$ و $B(۱,۰)$ مفروضند. معادلهٔ کمان حاوی زاویهٔ ۹۰° وابسته به پاره خط AB را به دست آورید.

حل ـ می‌دانیم که کمان درخور زاویهٔ ۹۰° مقابل به هر پاره خط دایره‌ای به قطر آن پاره خط است، بنابراین معادلهٔ دایرهٔ به قطر پاره خط AB را باید به دست‌آوریم. داریم:

$$O'\left|\begin{array}{l}\alpha=\dfrac{x_A+x_B}{۲}=\dfrac{۳+۱}{۲}=۲\\ \beta=\dfrac{y_A+y_B}{۲}=\dfrac{-۲+۰}{۲}=-۱\end{array}\right.\Rightarrow O'(۲,-۱)$$

O' مرکز دایره،وسط پاره‌خط AB است.

$$R=O'A=\sqrt{(۳-۲)^۲+(-۲+۱)^۲}$$
$$=\sqrt{۱+۱}=\sqrt{۲}\Rightarrow R=\sqrt{۲}$$
$$(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲\Rightarrow(x-۲)^۲+(y+۱)^۲=۲$$

معادلهٔ مورد نظر

مثال ۷ ـ دو نقطهٔ $A(-۱,۲)$ و $B(۳,۰)$ در دستگاه مختصات xoy مفروضند. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از این صفحهٔ مختصات را تعیین کنید که از وصل کردن به دو نقطهٔ A و B زاویهٔ ۴۵° پدید آید.

(پاره خط AB از آن نقطه به زاویهٔ ۴۵° رؤیت شود.)

حل ـ فرض می کنیم $M(x,y)$ یک نقطه از این مکان هندسی باشد، در این صورت داریم:

$$M\left|\begin{array}{l}x\\y\end{array}\right.,A\left|\begin{array}{l}-۱\\۲\end{array}\right.,B\left|\begin{array}{l}۳\\۰\end{array}\right.\Rightarrow m_{MA}=\frac{y-۲}{x+۱},\ m_{MB}=\frac{y}{x-۳}$$

$$\alpha=۴۵^\circ\ ,\ tg\alpha=\pm\frac{m-m'}{۱+mm'}\Rightarrow$$

$$tg۴۵^\circ=\pm\frac{\dfrac{y-۲}{x+۱}-\dfrac{y}{x-۳}}{۱+\dfrac{(y-۲)y}{(x+۱)(x+۳)}}\Rightarrow$$

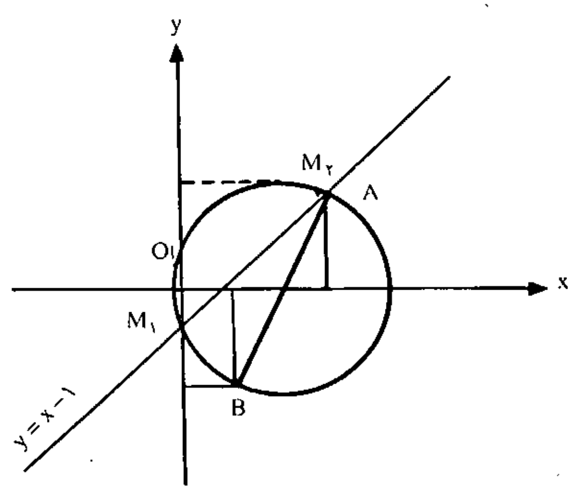
$$۱=\pm\frac{-۴y-۲x+۶}{x^۲+y^۲-۲x-۲y-۳}\Rightarrow C_۱:x^۲+y^۲+۲y-۹=۰$$

$$C_۲:x^۲+y^۲-۴x-۶y+۳=۰$$

معادله دایره هایی که بخشی از آنها کمان در خور زاویهٔ ۴۵° وابسته به پاره خط AB است.

مثال ۸ـ خط D به معادلهٔ $y=x-۱$ و دو نقطهٔ $A(۳,۲)$ و $B(۱,-۲)$ مفروضند. روی منحنی (C) نقطه‌ای تعیین کنیدکه از آن نقطه پاره خط AB به زاویهٔ ۹۰° دیده شود.

حل ـ نقطهٔ تقاطع کمان درخور زاویهٔ ۹۰° وابسته به پاره خط AB با منحنی (C) جواب مسأله است. اما می‌دانیم که این کمان درخور دایره‌ای به قطر پاره خط AB است.



بنابراین معادله دایرهٔ به قطر AB را نوشته با معادلهٔ منحنی (C) قطع می‌دهیم. خواهیم داشت:

$$A(۳,۲)\ ,B(۱,-۲)\Rightarrow$$

AB وسط $O'(۲,۰)\ ,R=O'A=\sqrt{۵}$

$$(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲\Rightarrow(x-۲)^۲+y^۲=۵$$

معادلهٔ دایرهٔ به قطر AB

$$\begin{cases}y=x-۱\\(x-۲)^۲+y^۲=۵\end{cases}\Rightarrow(x-۲)^۲+(x-۱)^۲=۵\Rightarrow$$

$$۲x^۲-۶x=۰\Rightarrow x=۰\ ,\ x=۳\Rightarrow$$

$$M_۱(۰,-۱)\ ,\ M_۲(۳,۲)$$

نقطهٔ $M_۲$ بر نقطهٔ A منطبق است و جواب مسأله نیست. پس تنها نقطهٔ جواب مسأله نقطهٔ $M_۱$ است.

در حاشیهٔ تابع و مفهوم تابع

(قسمت اول)

(ریاضی (۳) نظام جدید و حسابان ۱)

◄ حمیدرضا امیری

می‌خواهیم راجع به یکی از مهمترین مفاهیم ریاضی یعنی **تابع** صحبت کنیم، مفهومی که ریاضیات بدون آن تقریباً هیچ است! مفهومی که حد و پیوستگیِ آن، مشتق و انتگرال گیری از آن، رسمِ آن، انواع مختلف آن و خواص آن، کتابهای ریاضیِ ما را اشباع کرده و ریاضی دانان بسیاری را به خود مشغول داشته است. مفهومی که توانسته در علوم دیگر همچون فیزیک، مکانیک و کلیه رشته‌های فنی نقشهای مهّم ایفا کند.

درشاخه‌های مختلف ریاضیات برای معرفی تابع و تعریفِ آن شیوه‌های مختلفی به کار می‌رود که البته همگی معنی واحدی می‌دهند وفقط نوع گفتار و یاابزارهای معرفیِ تابع فرق می‌کند، امّا آنچه اهمیت دارد این است که مفهوم تابع با مفهوم مجموعه‌ها، همواره درهم آمیخته به طوری که حتی می‌توان برای شروع **تابع** را مجموعه‌ای از **زوجهای مرتب** تعریف کرد که درآن هیچ دو زوج مرتبِ متمایزی با مؤلفه‌های اولِ برابر یافت نشود.

به عنوان مثال $f=\{(۲,۳),(۳,۴),(۴,۵),(۵,۶)\}$ یک تابع است.

امّا $g=\{(۲,۴),(۱,۱),(۱,-۱),(۴,۸)\}$ تابع نیست، زیرا $(۱,۱)\in g$ و $(۱,-۱)\in g$ و این با تعریف فوق تناقض دارد.

همان‌طور که مشاهده می‌کنید f مجموعه‌ای است از زوجهای مرتب و می‌دانیم هر مجموعه از زوجهای مرتب حاصلِ عمل ضرب دکارتی بینِ دو **مجموعه** است. درواقع، می‌توان مجموعه‌ای از مؤلفه‌های اول زوج مرتبهای f و مجموعه‌ای از مؤلفه‌های دوم آنها، تشکیل داد که اگر مجموعهٔ اول را دامنهٔ f بنامیم و مجموعهٔ دوم را بُرد f و به ترتیب با نمادهای D_f و R_f نمایش دهیم در این صورت، $f\subseteq D_f\times R_f$.

درمثال فوق $D_f=\{۲,۳,۴,۵\}$ و $R_f=\{۳,۴,۵,۶\}$

تعریفی که به صورت فوق برای تابع آوردیم تعریفی بسیار **محض** بوده و این تعریف در عین حال که حالت کلّی و عمومی دارد از نظر کاربردی احتیاجات همهٔ شاخه‌های ریاضیات را برآورده نمی‌سازد و به همین دلیل این تعریف را به نوعی دیگر امّا با رعایت همان کلیات، می‌توان بیان کرد.

در مثال قبل تابع f به صورتِ $f=\{(۲,۳),(۳,۴),(۴,۵),(۵,۶)\}$ رادرنظر داشته باشید، اگر کمی دقت کنید، ارتباط خاصّی بین مؤلفه‌های اول و دومِ تمام زوجهای مرتبِ (بین اعضای دامنه و بُرد) f ، می‌یابید. در این مجموعه زوج مرتبها دارای این ویژگی هستند که، مؤلفه‌های دوم آنها یک واحد از مؤلفهٔ اول بیشتر است پس می‌توان نوشت $f=\{(x,y)|y=x+۱\}$ که $x\in\{۲,۳,۴,۵\}$ یا می‌توانیم بنویسیم $f=\{(x,x+۱)|x\in D\}$ و $D=\{۲,۳,۴,۵\}$. حال اگر تابع f را به عنوان قاعده یا قانونی که هر x از D_f را به $(x+۱)$ مربوط می‌سازد، معرفی کنیم در واقع به نوعی دیگر تابع را تعریف کرده‌ایم، توجه دارید که دراین تعریف تابع f به عنوان یک قاعده و یا در حالت کلّی‌تر به عنوان یک **عملگر**، معرفی

می‌گردد که با قاعدهٔ خاصی روی اعضای دامنه‌اش عمل می‌کند یا اثر می‌کند و اعضای بُرد را تولید می‌کند، در این تعبیر نکتهٔ دیگری که قابل توجه می‌باشد، آن است که همواره قاعدهٔ f روی هر x از D_f اثر می‌کند و با تغییر x ، اعضای جدیدی از R_f به دست می‌آید و مشاهده کردید که در تعریف f به صورت $f=\{(x,y)|y=x+1\}$ مجموعه‌ای برای x ها به شکل $D=\{2,3,4,5\}$ معرفی کردیم واین بدان معنی است که y ها، **تابع تغییرات x ها** هستند و یا« **y تابع x است**» بنابراین برای مشخص کردن تابع f کافی است دو ویژگی از f برای ما مشخص باشد،یکی D_f و دیگری قاعدهٔ تأثیر f روی اعضای D_f .

معمولاً قاعدهٔ تأثیر f یا چگونگی اثرتابع f روی اعضای D_f رابا نماد $f(x)$ نمایش می‌دهند.

مثال: هر گاه $D_f=\{3,6,8,-1,0\}$ و $f(x)=2x+2$ ، دراین صورت تابع f رابه شکل مجموعه‌ای از زوجهای مرتب و همچنین، بُرد f (R_f) را تعیین کنید :

$$f(x)=2x+2\Rightarrow\begin{cases}f(3)=2\times3+2=8\\f(6)=2\times6+2=14\\f(8)=2\times8+2=18\\f(-1)=2\times(-1)+2=0\\f(0)=2\times0+2=2\end{cases}$$

$$\Rightarrow R_f=\{8,14,18,0,2\}$$

و $f=\{(3,8),(6,14),(8,18),(-1,0),(0,2)\}$

حال با توجه به تعبیری که برای تابع و براساس تعریف کلّی آن ذکر کردیم، می‌توانیم تابع رابه شکل زیرنیز تعریف کنیم :

تعریف : تابع f قاعده‌ای است که به هر عضو مانند x از مجموعهٔ D (دامنه) عضو **منحصر بفردی** به نام $f(x)$ از مجموعهٔ R (بُرد) را نسبت می دهد.

توجه دارید در تعریف فوق صفت **منحصربفرد** به این منظور به کار رفته که تعریف کلّی تابع، خدشه دار نشود یعنی اگر f به x_1 عضو y_1 از بُرد را نسبت دهد وبه همان x_1 عضو y_2 رانیز نسبت دهد و $y_1\neq y_2$ دراین صورت f به هر عضو D_f عضو منحصربفردی نسبت نداده واگر کمی دقت کنیم مشاهده می شود که $(\underline{x}_1,y_1)\in f$ و $(\underline{x}_1,y_2)\in f$ و این با تعریف تابع که درابتدا آمد، تناقض دارد.

دراین قسمت در نظر داریم اندکی بیشتر راجع به D_f بحث کنیم در واقع این سوأل را مطرح می‌کنیم که آیا فقط با داشتن ضابطهٔ تعریف تابع f می‌توان تابع را مشخص کرد یا خیر؟ یعنی مثلاً اگر فقط این اطلاعات در دست باشد که f تابعی است حقیقی (تابع حقیقی تابعی است که $D_f\subset\mathbb{R}$) و قاعدهٔ تأثیر f روی اعضای D_f به صورت $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$ تعریف شده است. آیا می‌توان تابع f را مشخص کرد؟ (آیا می‌توانیم D_f و R_f را تعیین کنیم؟)

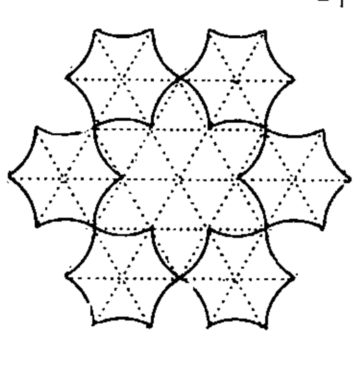
به مثال زیر توجه کنید :

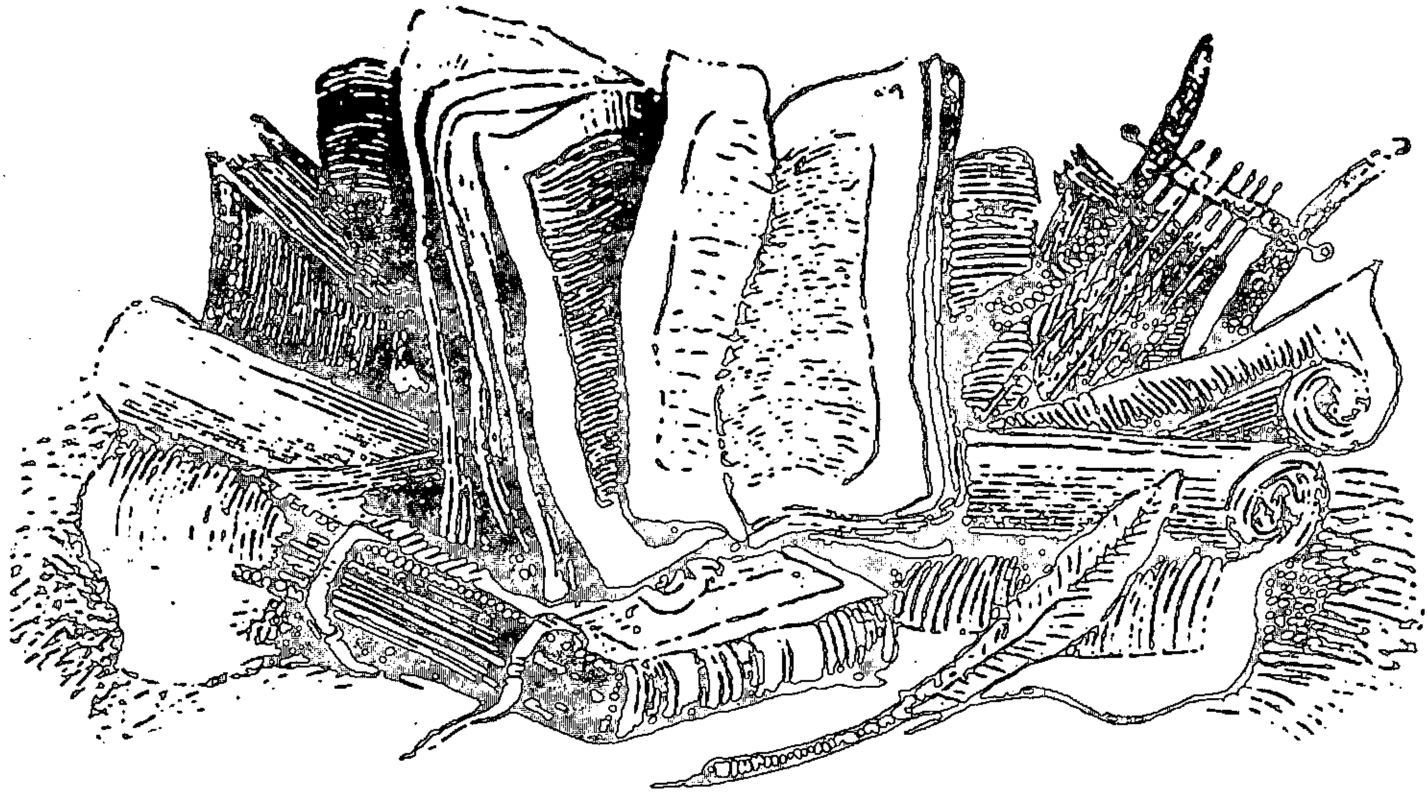
اگر $A=\{-1,2,3,4\}$ و ضابطهٔ تابع f به صورت $f(x)=\sqrt{x-1}$ تعریف شده باشد و بخواهیم تأثیر f را روی اعضای A تعیین کنیم، برای (۱-) که عضوی است از A دچار مشکل خواهیم شد زیرا $f(-1)=\sqrt{-1-1}$ و می‌دانیم $\sqrt{-2}$ درحوزهٔ اعداد حقیقی **تعریف نشده** است پس تابع f با توجه به ضابطه‌اش نمی تواند روی (۱-) اثر کند، بنابراین اگر بخواهیم D_f را معین کنیم به شکل $D_f=\{2,3,4\}$ معرفی می‌شود و با توجه به D_f و ضابطهٔ f ، $R_f=\{1,\sqrt{2},\sqrt{3}\}$ خواهد بود. پس می‌توان گفت :

«**دامنهٔ تعریف تابع f** مجموعهٔ همه مقادیری است که تابع f با توجه به ضابطه‌اش **می‌تواند** روی آنها اثرکند» بنابراین جواب سوأل قبل مثبت است، یعنی همواره فقط با در دست داشتن ضابطهٔ تعریف تابع f می‌توان D_f و R_f ودرنتیجه تابع f را مشخص کرد.

مثال : تابع حقیقی f با ضابطه $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$ مفروض است، D_f را برای این تابع مشخص کنید :

می‌دانیم تابع f فقط روی اعداد حقیقی، که باعث صفر شدن مخرج می‌شوند نمی‌تواند اثرکند پس اگر قرار دهیم $x^2-1=0$ خواهیم داشت : $x=\pm1$ بنابراین $D_f=\mathbb{R}-\{-1,1\}$.





تاریخچهٔ مجلات ریاضی در ایران (۱۸)

در شمارهٔ ۲۰ مجلهٔ یکان در مقالهٔ «جبر در دنیای امروز» چنین می‌خوانیم:

تاریخ رشتهٔ جبر از ریاضیات را می‌توان به دو دورهٔ اصلی تقسیم کرد. اول دوره‌ای که از زمان تمدن **مصر** و **بابل** شروع و تا حدود هزارو هشتصد سال پس از میلاد مسیح ادامه داشته است و دوم دوره‌ای که از سال هزارو هشتصد میلادی تا زمان حاضر را در برمی‌گیرد. در دورهٔ اول در هر رشته از ریاضیات منحصراً دربارهٔ مطالبی بحث می‌شد که به آن رشته مربوط می‌گشت: در هندسه از خواص اشکال، در حساب، عملیات مربوط به اعداد و در جبر روابط و خواص اعداد به طور کلی با به کاربردن علامات و حروف بجای اعداد مورد مطالعه قرار می‌گرفت. برای مثلثات و هندسهٔ تحلیلی در این تقسیم‌بندی جایی وجود نداشت چه اولی حساب و جبر را برای حل مسایل هندسی به‌کار می‌برد و دومی هندسه را شاخه‌ای از جبر قرار می‌داد. با این وصف نقش جبر در این دوره کم و بیش روشن بود و آن این که x همواره بجای یک عدد به کار می‌رفت.

جبر قدیم وسیله‌ای برای حل بسیاری از مسایل عملی و علمی بود. آثار مکشوفه به وسیلهٔ باستان‌شناسان دلالت دارد بر اینکه در مصر قدیم فرمولهای جبری برای یافتن حجم استوانه و کره به منظور محاسبهٔ مقدار مالیات غلات که رعایا به دولت مرکزی بدهکار بودند به کار می‌رفته است. پیش از آن‌که حساب جامعه و فاضله و مکانیک سماوی در اواخر قرن هفدهم به‌وجود آید جبر و هندسه دو رکن اساسی محاسبات نجومی بودند. عملیات اساسی جبر قدیم برای هر فردی که به دورهٔ دوم دبیرستان رسیده باشد شناخته شده است، در حقیقت شخصی که در دبیرستان جبر مقدماتی و هندسه را خوانده باشد بدون زحمت زیاد می‌تواند بیشتر ریاضیاتی را که تا قبل از سال ۱۸۰۰ کشف شده فراگیرد زیرا ریاضیات تا آن موقع بیشتر به دو موضوع عدد و شکل مربوط می‌شد. اوایل قرن نوزدهم نمای ریاضیات شروع به تغییر کرد. دو نظر جدید پیدا شد که دامنهٔ ریاضیات را وسعت بسیار بخشید. نخست این‌که الزامی ندارد ریاضیات منحصر به اعداد و اشکال باشد. ریاضیات می‌تواند همه چیز باشد، اما این همه چیز اغلب به طریقی به اعداد و اشکال ارتباط داده می‌شدند. دوم عمل تجرد را یک قدم پیشتر برده و ریاضیات را در موقعیتی قرار داد که می‌توانست صرفاً یک عمل منطقی باشد که به هیچ چیز بخصوصی بستگی نداشته باشد. دانشمندان علوم

تجربی که از ریاضیدانان، متمایزند نظر اول را می‌پذیرند: بر طبق این نظر موارد استعمال ریاضیات بیش از آن می‌باشد که در دورهٔ اول تصور می‌رفت. نظر دوم در میان دانشمندان ریاضیات محض که ریاضیات را به‌سادگی به عنوان مطالعهٔ مدلهای زیبا در مد نظر قرار می‌دهند طرفدار دارد. اما باید دانست که بین این دو نظر نزاعی نیست. یک نمونهٔ ریاضی که مورد توجه یک دانشمند ریاضی قرار می‌گیرد، ثابت می‌شود که با برخی از جنبه‌های جهان فیزیکی مطابقت می‌نماید و برعکس بعضی از نمونه‌های ریاضی که به وسیلهٔ دانشمندان در طبیعت کشف شده به‌طور جالب توجهی زیبا بوده است.

در شمارهٔ ۲۱ این مجله در مقاله‌ای تحت عنوان «اعداد» این چنین آمده است که:

عموماً، در نظر مردم، ریاضیدان شخصی است که در حساب ورزیده باشد. ولی خود ریاضیدانان این تعریف را قبول ندارند. ریاضیدانان می‌گویند که خودشان به اندازهٔ اشخاص دیگر در محاسبات روزانه و در بررسی صورتحسابهای بانکی خویش اشکال دارند و به داستانهایی که دربارهٔ ریاضیدانان معروف گفته می‌شود استناد می‌جویند. مثلاً می‌گویند که نیوتن به هنگامی که رئیس ضرابخانه بود شخصی را استخدام کرد تا محاسباتش را انجام دهد. اختراع و تکمیل خط کشهای محاسبه و ماشینهای حساب الکترونیکی نیز به‌منظور کمک به ریاضیدانان انجام گرفته است.

بدیهی است که مطالب فوق، زیاد مستدل نیست. اگر ریاضیدانان را کنار بگذاریم از کدام شخص حفاظت اعداد فرد و زوج و مربع و سر راست را انتظار داشته باشیم؟ برای کسب اطلاع از اعداد **فیبوناچی** و اعداد **لیوویل** و اعداد **فوق مختلط** و اعداد لایتناهی به چه مقامی مراجعه نماییم؟ پس باید دانست که ریاضیات در حد اعلای خود همیشه به بازی با اعداد مربوط می‌شود. **برخف** دانشمند معروف آمریکا وقتی خاطرنشان می‌ساخت که معماهای ساده‌ای که دربارهٔ اعداد صحیح ظاهر شده است در طی قرون متمادی سرچشمهٔ تجدید حیات ریاضیات بوده است.

اعداد، ابزاری لازم و ضروری برای تمدن بشری است و پیوسته فعالیتهای بشر را به سوی نوعی نظم و ترتیب سوق داده است. ابتدایی‌ترین کاربرد اعداد، مشخص و متمایز کردن چیزهایی مثل شمارهٔ تلفن و شمارهٔ پروانهٔ اتومبیل می‌باشد. در این مرحله، فقط یک عدد با عدد دیگر مقایسه می‌شود و عملیات حساب بر روی آنها انجام نمی‌گیرد. فی‌المثل جمع شمارهٔ تلفن شما و شمارهٔ تلفن دوست شما چیزی را مشخص نمی‌سازد. در مرحله‌ای بالاتر، ترتیب طبیعی اعداد صحیح مثبت، برای نوبت گرفتن و ترتیب تقدم و تنظیم لیست افرادی که در یک مسابقه مقام اول و دوم و سوم را احراز نموده‌اند به کار می‌رود. در این مرحله نیز احتیاجی به عمل جمع و تفریق و سایر عملیات حساب بر روی اعداد نیست و تنها مطلب مورد نظر این است که یک عدد از دیگری بزرگتر است یا کوچکتر. حساب به معنای کامل موقعی ظاهر می‌شود که با عملیاتی از قبیل جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، جذر و سایر عملیات حساب مواجه شویم.

***

بسط و پیچیدگی تمدن یک جامعه را می‌توان از بسط و پیچیدگی اعدادی که در آن جامعه به‌کار می‌رود دریافت. بیست و پنج قرن پیش **بابلیها** اعداد صحیح ساده را برای شمارش چند گوسفندی که مالک بودند و حساب ساده‌ای برای ضبط حرکات سیارات استعمال می‌کردند. اما امروز در اقتصاد ریاضی، **جبر ماتریسها** برای تشریح بستگی متقابلی که صدها صنایع مختلف با یکدیگر دارند به‌کار می‌رود. در فیزیک، تبدیلات در «**فضاهای هیلبرت**» را برای پیشگویی پدیده‌های کوانتوم استعمال می‌کنند. اعدادی که در این تبدیلات به‌کار می‌رود دارای مفهومی است که از مفهوم مجرد اعداد صحیح مثبت هفت مرحله مجردتر می‌باشد.

دستگاههای اعداد که در ریاضیات به کار می‌رود می‌تواند به پنج پایهٔ اصلی تقسیم گردد که به ترتیب از ساده ترین به پیچیده‌ترین آنها عبارت‌اند از:

۱ــ دستگاهی که فقط شامل اعداد صحیح مثبت باشد.

۲ــ دستگاهی که شامل اعداد صحیح مثبت و منفی و صفر باشد.

۳ــ دستگاه اعداد گویا که شامل کسرها نیز می‌شود.

۴ــ دستگاه اعداد حقیقی که شامل اعدادی از قبیل $\sqrt{2}$ و π نیز می‌شود.

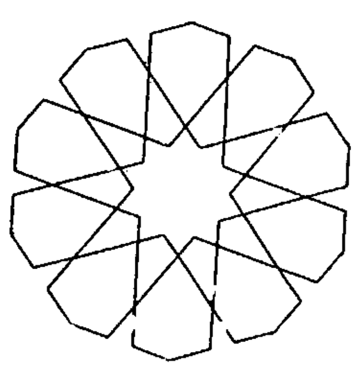
۵ ــ اعداد مختلط که عدد موهومی $\sqrt{-1}$ را دخالت می‌دهد.

اعداد مثبت صحیح، اعدادی هستند که طفل در هنگام شمارش فرا می‌گیرد و به‌صورت ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ... نوشته

می‌شود. این اعداد ممکن است به طرق مختلف نوشته شوند. رومیها این اعداد را به‌صورت I و II و III و IV و ... یونانیها به شکل α و β و γ و δ و... می‌نوشتند و در دستگاهی به مبنای ۲ که فقط ارقام ۰ و ۱ به کار می‌رود این اعداد به صورت ۱ و ۱۰ و ۱۱ و ۱۰۰ و ... نوشته می‌شوند. تمام این علامات یک منظور را مشخص می‌سازند و آن منظور این که علامات مختلف برای کمیّات مختلف که معنی و ترتیب آنها به‌طور یکنواخت درک می‌شود به کار می‌رود.

بشر اولیه، فقط به چند عدد صحیح اولیه احتیاج داشت، اما با بسط تمدن مجبور شد که اعداد بزرگتری اختراع نماید. این پیشرفت یک مرتبه انجام نگرفت. چنان که **برنارد شاو** می‌نویسد: «برای انسانی که از تمدن بی‌بهره است و نمی‌تواند بیش از انگشتان دست خود را بشمارد، عدد یازده شمارش‌ناپذیر است.» به نظر می‌رسد تا قرن سوم پیش از میلاد، روشی اساسی برای شمارش اعداد بزرگ وجود نداشته است. **ارشمیدس** روشی خسته‌کننده برای نامیدن اعداد بزرگ ارائه نمود.

با این وجود درحالی که ریاضیدانان یونان برای نام اعداد بزرگ در تلاش بودند جهشی از اعداد محدود به بینهایت انجام گرفت. این جهش با سه نقطهٔ کوچک که بعد از عدد ۴ از رشته اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ... واقع می‌شد مشخص می‌گردید. آنها می‌گفتند که بعد از ۴ عددی وجود دارد و پس از عدد بعد از ۴ نیز عدد دیگری وجود دارد و به همین ترتیب تعداد نامحدودی از اعداد صحیح به دست می‌آید. برای آنان این مفهوم یک مرحلهٔ عالی تصور بشر بود زیرا مخالف تمام تجارب فیزیک و مخالف عقیدهٔ فلسفی آن روزی که عالم باید محدود باشد می‌گردید. قبول مفهوم بینهایت امکانات وسیعی برای ریاضیات فراهم ساخت و در مقابل تناقضاتی نیز به‌وجود آورد که تا به امروز معنی و مفهوم آن به‌طور کامل درک نگردیده است.



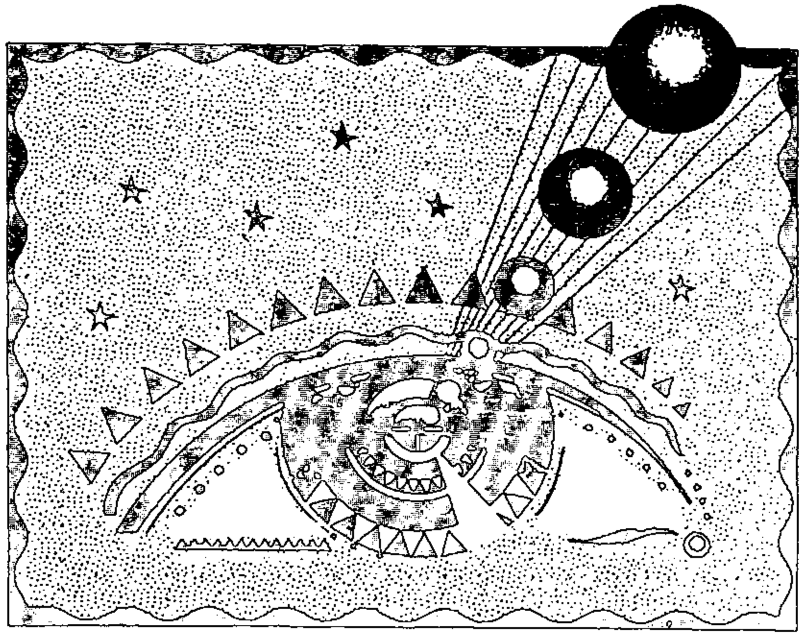
ادب ریاضی

من همواره به اقتضای ذوق خویش به مطالعه در ریاضیات پرداخته‌ام و نه به علّت تمایل به شهرتهای بی‌حاصل که اصلاً توجهی به آنها ندارم. بزرگترین تفریح من آن است که خط سیر مخترعان را تعقیب کنم و نبوغ آنان را هنگام مواجهه با موانع مشاهده نمایم و موانعی که آنان در سر راه خویش دیدند و توانستند از آنها بگذرند در نظر آورم.

در چنین موردی سعی می‌کنم خویشتن را به جای ایشان قرار دهم و این مسأله را مطرح سازم که در چنین مقامی من خود برای عبور از این موانع چه می‌کرده‌ام و با وجود آن که در غالب موارد این جانشینی موجب توقف من می‌گردد و برای من حسرت و خفت ایجاد می‌کند ولی بر عزت نفس خود غلبه می‌کنم و این مختصر خفت را با لذت استفاده از توفیق آنان با شایسته‌ترین وضع جبران می‌سازم. در موارد معدودی که اقبال با من یاری می‌کند و موفق می‌شوم که چیزی بر آثار آنان بیفزایم همهٔ لیاقت این توفیق را به اولین کوششهای آنها نسبت می‌دهم و خویشتن را قانع می‌سازم که اگر آنان در وضع من قرار داشتند خیلی بیشتر از آن می‌رفتند که من رفته‌ام.

نامهٔ لاپلاس در ۲۸ سالگی به دالامبر

از کتاب ریاضی‌دانانِ نامی، ترجمهٔ حسن صفاری



از کتاب:
A first course in
Number theory

دانش آموزان دبیرستان نظام قدیم و جدید

آموزش ترجمه متون ریاضی (۱۵)

حمیدرضا امیری

Theorem 3.1.2: Assume that all symbols used are integers and that $m > 1$.

1. If $b \equiv c \pmod{m}$ and $d \equiv e \pmod{m}$, then $b + d \equiv c + e \pmod{m}$.
2. If $b \equiv c \pmod{m}$ and $d \equiv e \pmod{m}$, then $b - d \equiv c - e \pmod{m}$.
3. If $b \equiv c \pmod{m}$ and $d \equiv e \pmod{m}$, then $bd \equiv ce \pmod{m}$.
4. If $kb \equiv kc \pmod{m}$, then $b \equiv c \pmod{m/(k, m)}$.

قضیهٔ ۳.۱.۲: با فرض این که تمامی نمادهای استفاده شده (در زیر) اعداد صحیح بوده و $m>1$.

۱. اگر $b\overset{m}{\equiv}c$ و $d\overset{m}{\equiv}e$ آنگاه، $b+d\overset{m}{\equiv}c+e$.

۲. اگر $b\overset{m}{\equiv}c$ و $d\overset{m}{\equiv}e$ آنگاه، $b-d\overset{m}{\equiv}c-e$.

۳. اگر $b\overset{m}{\equiv}c$ و $d\overset{m}{\equiv}e$ آنگاه $bd\overset{m}{\equiv}ce$.

۴. اگر $kb\overset{m}{\equiv}kc$، آنگاه $b\overset{\frac{m}{(k,m)}}{\equiv}c$.

Proof of Part 3: As in the proof of part 3 of Theorem 3.1.1 (and for the same reason), we immediately convert our congruence problem into the corresponding divisibility problem; i.e., if $m|(b - c)$ and $m|(d - e)$, then we need to conclude that $m|(bd - ce)$. The quantity bd appears in the statement of the conclusion we want, so at some point in our argument we have to get bd into the act. The quantity b appears in the assumption $m|(b - c)$, so we can claim that $m|d(b - c) = (bd - cd)$, using the appropriate property of the divisibility symbol; and now $m|(bd - cd)$ involves the quantity bd. Similarly, we deduce that $m|c(d - e) = cd - ce$ from the assumption $m|(d - e)$. We now have $m|(bd - cd)$ and $m|(cd - ce)$, and so $m|(bd - ce)$ (why?) as required.

اثبات قسمت ۳.

با توجه به اثبات قسمت ۳ از قضیهٔ ۳.۱.۱ (و با دلیل مشابه)، ما بلافاصله مسائل هم‌نهشتی‌مان را متناظراً به مسائل بخش‌پذیری تبدیل می‌کنیم، یعنی: اگر $m|(b-c)$ و $m|(d-e)$ ، آنگاه نیاز داریم نتیجه بگیریم که $m|(bd-ce)$. در این گزاره مقدار bd ، حکمی را که ما نیاز داریم آشکار می‌سازد، بنابراین ما می‌بایست bd را بدست آورده و در بعضی از قسمتهای برهانمان اثر دهیم. مقدار b در فرض $m|(b-c)$ مشخص است، بنابراین می‌توان ادعا کرد که $m|d(b-c)=(bd-cd)$ (کاربرد خاصیت ویژه‌ای از نماد بخش‌پذیری) و حالا داریم، $m|(bd-cd)$ که مقدار bd را نیز در بردارد. (به آنچه مورد نظرمان بود رسیدیم) و به طریق مشابه،

از فرض $m|(d-e)$ می‌توانیم نتیجه بگیریم که $m|c(d-e)=(cd-ce)$. اکنون داریم، $m|(bd-cd)$ و $m|(cd-ce)$، و بنابراین ایجاب می‌شود که $m|(bd-ce)$، (چرا؟)

Proof of Part 4: We are assuming that $m|(kb-kc)=k(b-c)$ or, equivalently, $m/(k,m)|k(b-c)/(k,m)=(k/(k,m))(b-c)$. (Give a reason justifying this last step.) Now $(m/(k,m), k/(k,m))=1$, so Theorem 1.2.1 on page 10 allows us to conclude that $m/(k,m)|(b-c)$. In congruence notation, $m/(k,m)|(b-c)$ is $b\equiv c \pmod{m/(k,m)}$, and so we are done.

اثبات قسمت ۴.

فرض کرده‌ایم که $m|(kb-kc)=k(b-c)$ یا، به عبارت دیگر، (معادل با آن) $\frac{m}{(k,m)}\Big|\frac{k(b-c)}{(k,m)}=\frac{k}{(k,m)}(b-c)$. (یک دلیل توجیهی برای این مرحلهٔ آخر بیاورید). حال (می‌دانیم) $\left(\frac{m}{(k,m)},\frac{k}{(k,m)}\right)=1$، بنابراین قضیهٔ ۱.۲.۱ در صفحهٔ ۱۰ امکان این نتیجه را به ما می‌دهد که $\frac{m}{(k,m)}|(b-c)$. در نماد گذاری هم‌نهشتی $\frac{m}{(k,m)}|(b-c)$، یعنی $b\overset{\frac{m}{(k,m)}}{\equiv}c$، و بنابراین ما توانستیم (اثبات را) تمام کنیم.

Remarks

1. An informal way of expressing the first three parts of the theorem just proved is to say that congruences can be added, subtracted, and multiplied together. Please notice, however, that the moduli of the two input congruences don't get added, subtracted, or multiplied together! The modulus of the output congruence is the same as the modulus of each of the two input congruences.
2. Part 4 of the theorem just proved is by way of a warning that the procedure of division in a congruence isn't as straightforward as are addition, subtraction, and multiplication. For instance, it may be tempting (?) to conclude, on the basis of the assumption $kb\equiv kc \pmod m$, that $b\equiv c \pmod m$, but this conclusion cannot in general be drawn (proof?).

تبصره‌ها (ملاحظات)

۱ ــ یک راه غیررسمی برای نشان دادن سه قسمت اول قضیه‌ای که ثابت شد، بیان قضیه به این شکل است که، هم‌نهشتی‌ها می‌توانند با هم جمع شوند، از هم کم شوند، و در هم ضرب شوند. لطفاً توجه کنید، مادامی که، سنج دو هم‌نهشتی یکسان نباشد (هم‌نهشتی‌هایی با دو سنج متمایز) نمی‌توانند با یکدیگر، جمع، تفریق، یا درهم ضرب شوند! سنج هم‌نهشتی‌های حاصل همان سنج دو هم‌نهشتی اولیه است.

۲ ــ قسمت چهارم قضیهٔ اثبات شدهٔ فوق این اخطار را می‌دهد که روش تقسیم در یک نهشتی به همان سادگی که برای جمع، تفریق و ضرب به کار رفت، برقرار نمی‌باشد. مثلاً ممکن است برای این نتیجه‌گیری اساسی وسوسه شویم که از فرض $kb\overset{m}{\equiv}kc$ می‌توان $b\overset{m}{\equiv}c$ را استنتاج کرد، امّا این نتیجه‌گیری نمی‌تواند در حالت کلّی استنباط شود. (ثابت کنید)

تفریح اندیشهٔ ۲

از میان ۳۴ دانش‌آموزی که مورد بررسی قرار گرفته‌اند، ۲۸ نفر در شنا، ۱۹ نفر در اسکی روی آب، ۱۱ نفر در پرش ارتفاع و ۱۷ نفر در دوچرخه‌سواری شرکت دارند. چنانچه همهٔ دانش‌آموزان حداقل در یک فعالیت شرکت کرده باشند، و ۱۲ نفر فقط در یک فعالیت، ۸ نفر دقیقاً در دو فعالیت و ۹ نفر دقیقاً در سه فعالیت ورزشی سهیم باشند، چه تعدادی در هر چهار فعالیت شرکت کرده‌اند؟

جواب در صفحه ۸۶

حل یک مسئله آنالیز با هندسه

○ دکتر احمدشرف‌الدین

مسئله: عبارت زیر را در نظر می‌گیریم :

$$*\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}}} \quad ,a>0$$

که درآن تعداد رادیکالها را n فرض می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که اگر n به سوی بی‌نهایت میل کند عبارت بالا دارای حد است و سپس آن حد را حساب کنیم.

حل. نیم سهمی P به معادله

$$(۱) \quad y=\sqrt{x}$$

رادر نظر می‌گیریم. نقطه $A(0,a)$ را در دستگاه مختصات xoy تعیین می‌کنیم. نیم سهمی P را به اندازه بردار $\overrightarrow{OA}$ انتقال می‌دهیم تا نیم سهمی P' به رأس A به دست آید. معادله نیم سهمی P' چنین است :

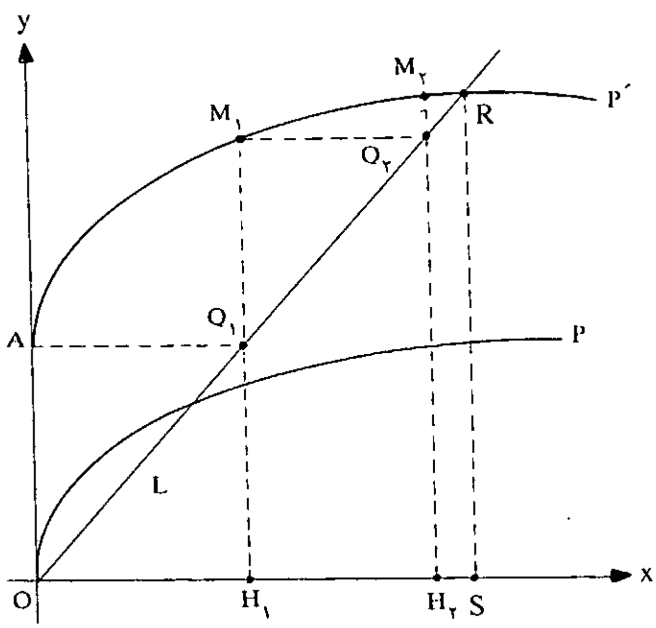
$$(۲) \quad y=a+\sqrt{x}$$

نقطه برخورد خط OL نیمساز xoy و نیم سهمی P' را R می‌نامیم. تصویر نقطه R بر خط ox را S می‌نامیم. طول نقطه S برابر طول نقطه R است. از حل دستگاه معادلات

$$\begin{cases} y=a+\sqrt{x} \\ y=x \end{cases}$$

طول نقطه S حاصل می‌شود :

$$(۳) \quad x_S=\frac{1+2a+\sqrt{1+4a}}{2}$$



نقطه H_1 را برمحور ox باطول a اختیار می‌کنیم وسپس عمود H_1M_1 را بر خط ox وارد می‌کنیم و نقطه برخورد این خط عمود با نیم‌سهمی P' را M_1 می‌نامیم. از رابطه (۲) نتیجه می‌شود :

$$(۴) \quad y_{M_1}=a+\sqrt{a}$$

از نقطه M_1 خط M_1Q_2 را موازی محور ox رسم می‌کنیم و نقطه تقاطع آن را با خط OL با Q_2 نشان می‌دهیم. از نقطه Q_2 عمود Q_2H_2 را بر خط ox وارد می‌کنیم و نقطه

برخورد این عمود را با نیم سهمی P' ، با M_2 نشان می‌دهیم.
چون چهار ضلعی $H_1M_1Q_2H_2$ مستطیل است پس

$$(۵) \quad H_2Q_2 = H_1M_1$$

و چون مثلث OH_2Q_2 قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است پس

$$(۶) \quad H_2Q_2 + OH_2$$

از (۵) و (۶) نتیجه می‌شود

$$(۷) \quad OH_2 = H_1M_1$$

یعنی

$$(۷)' \quad x_{Q_2} = y_{M_1}$$

از (۴) و (۷) نتیجه می‌شود :

$$(۸) \quad x_{Q_2} = a + \sqrt{a}$$

برای محاسبه عرض نقطه M_2 ، مقدار اخیرالذکر را در معادله (۲) می‌بریم حاصل می‌شود

$$(۹) \quad y_{M_2} = a + \sqrt{a + \sqrt{a}}$$

اکنون از نقطه M_2 خط M_2Q_3 را موازی خط ox رسم می‌کنیم. (در شکل نموده نشده‌است) و نقطه برخورد آن را با خط OL با Q_3 نشان می‌دهیم. از نقطه Q_3 خط Q_3H_3 را عمود بر خط ox رسم می‌کنیم و محل برخورد این خط عمود را با نیم‌سهمی P' با M_3 نشان می‌دهیم. با همان شیوه استدلال قبل نتیجه می‌شود :

$$(۱۰) \quad y_{M_3} = a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}$$

این عمل ترسیم را درذهن خود ادامه می‌دهیم، برروی منحنی P' نقاط M_4 ، M_5 ، ... ، M_n ، ... و بر روی محور ox نقاط H_4 ، H_5 ، ... ، H_n ، ... حاصل می‌شود.

هنگامی‌که n به سوی بی‌نهایت میل کند نقطه M_n به سوی نقطه R و نقطه H_n به سوی نقطه S میل می‌کند. پس چنین داریم :

$$(۱۱) \quad \lim_{n\to+\infty} y_{m_n} = y_r = x_s$$

و نیزمی‌دانیم که

$$(۱۲) \quad y_{m_n} = a + \sqrt{a + \sqrt{a + \ldots + \sqrt{a}}}$$

تعداد رادیکالها برابر n است.
از رابطه‌های (۳) و (۱۱) نتیجه می‌شود

$$\lim_{n\to+\infty} y_{m_n} = \frac{1 + 2a + \sqrt{1 + 4a}}{2}$$

برای محاسبه حد عبارت (*)، a را از عبارت سمت راست تساوی بالا کم می‌کنیم (به رابطه ۱۲ توجه کنید).

مقدار حد چنین است : $1 + \frac{\sqrt{1 + 4a}}{2}$

ادب ریاضی

جهل مرکّب

صفت اوّل، جهل مرکّب است، که عبارت است از آنکه کسی چیزی را نداند و نداندکه نداند، واز بدترین رذایل است و دفع آن در غایت صعوبت است و باعث آن اعوجاج سلیقه و کجی ذهن است و کیفیّت شناخت آن، آن است که آدمی بعضی از مطالب و استدلالات خود را بر جمعی که ناصحین و معروفین به استقامت سلیقه‌اند عرضه نماید، اگر ایشان او را تصویب نمودند از این مرض بَری است و اگر تخطئه نمودند به آن مبتلاست و بهترین معالجات از برای او خواندن علوم ریاضیّه از هندسه و حساب است که موجب استقامت ذهن و پیمودن راه صواب است.

مقامات العلیّة

(مختصر معراج‌السعادة / علامه احمد نراقی(ره)

علامه حاج شیخ عباس قمی

رادیکال

(قسمت سوم)

● سید محمدرضا هاشمی موسوی

توان رساندن عددها و عبارتهای رادیکالی

بنا به تعریف توان می‌توانیم بنویسیم :

$$۱)\ (\sqrt[۵]{۳})^۴ = \sqrt[۵]{۳}\times\sqrt[۵]{۳}\times\sqrt[۵]{۳}\times\sqrt[۵]{۳} = \sqrt[۵]{۳\times۳\times۳\times۳}$$
$$= \sqrt[۵]{۳^۴}$$

$$۲)\ (\sqrt[۴]{۵})^۳ = \sqrt[۴]{۵}\times\sqrt[۴]{۵}\times\sqrt[۴]{۵} = \sqrt[۴]{۵\times۵\times۵} = \sqrt[۴]{۵^۳}$$

به طور کلی :

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \qquad (۴)$$

m عدد صحیح و n عدد طبیعی بزرگتر یا مساوی ۲ $(n \geq ۲)$ و a عدد حقیقی $(a \in \mathbb{R})$ می‌باشد. اگر n زوج باشد، باید a بزرگتر یا مساوی صفر $(a \geq ۰)$ باشد :

$$(\sqrt[n]{|a|})^m = \sqrt[n]{|a|^m}$$

مثال ۱۴ : حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید.

۱) $(\sqrt[۳]{۵})^۶$

۲) $(-\sqrt{۲})^۴$

۳) $(\sqrt[۵]{۳})^۷$

۴) $(\sqrt[۳]{-۳})^۲$

۵) $(\sqrt[۳]{-۴})^۵$

۶) $(\sqrt{۶}-\sqrt{۳})^۲$

۷) $(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^۲+(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})^۲$

۸) $(\sqrt[۳]{-a^۲})^۴$

۹) $(\sqrt[۵]{a^۳b^۲})^۳$

۱۰) $(-\sqrt[۷]{a^۴})^۶$

حل :

$$۱)\ (\sqrt[۳]{۵})^۶ = \sqrt[۳]{۵^۶} = \sqrt[۳]{(۵^۲)^۳} = ۵^۲ = ۲۵$$

$$۲)\ (-\sqrt{۲})^۴ = (\sqrt{۲})^۴ = \sqrt{۲^۴} = \sqrt{(۲^۲)^۲} = ۲^۲ = ۴$$

$$۳)\ (\sqrt[۵]{۳})^۷ = \sqrt[۵]{۳^۷} = \sqrt[۵]{۳^۵\times۳^۲} = ۳\sqrt[۵]{۳^۲} = ۳\sqrt[۵]{۹}$$

$$۴)\ (\sqrt[۳]{-۳})^۲ = \sqrt[۳]{(-۳)^۲} = \sqrt[۳]{۹}$$

$$۵)\ (\sqrt[۳]{-۴})^۵ = \sqrt[۳]{(-۴)^۵} = \sqrt[۳]{-۴^۵} = -\sqrt[۳]{(۲^۲)^۵} = -\sqrt[۳]{۲^{۱۰}}$$
$$= -\sqrt[۳]{۲^۹\times۲} = -\sqrt[۳]{(۲^۳)^۳\times۲} = -۲^۳\sqrt[۳]{۲} = -۸\sqrt[۳]{۲}$$

$$۶)\ (\sqrt{۶}-\sqrt{۳})^۲ = (\sqrt{۶})^۲ - ۲(\sqrt{۶})(\sqrt{۳}) + (-\sqrt{۳})^۲$$
$$= \sqrt{۶^۲} - ۲\sqrt{۶\times۳} + \sqrt{۳^۲} = ۶ - ۲\sqrt{۲\times۳^۲} + ۳$$
$$= ۹ - ۲\times۳\sqrt{۲} = ۹ - ۶\sqrt{۲}$$

$$۷)\ (\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^۲ + (\sqrt{۳}+\sqrt{۲})^۲ = (\sqrt{۳})^۲ - ۲(\sqrt{۳})(\sqrt{۲}) +$$
$$(-\sqrt{۲})^۲ + (\sqrt{۳})^۲ + ۲(\sqrt{۳})(\sqrt{۲}) + (\sqrt{۲})^۲$$

$$= \sqrt{۳^۲} - ۲\sqrt{۶} + \sqrt{۲^۲} + \sqrt{۳^۲} + ۲\sqrt{۶} + \sqrt{۲^۲}$$

$$= ۳+۲+۳+۲=۱۰$$

$۸)\ (\sqrt[۳]{-a^۲})^۴ = \sqrt[۳]{(-a^۲)^۴} = \sqrt[۳]{a^۸} = \sqrt[۳]{a^۶.a^۲}$

$= \sqrt[۳]{(a^۲)^۳.a^۲} = a^۲\sqrt[۳]{a^۲}$

$۹)\ (\sqrt[۵]{a^۳b^۲})^۳ = \sqrt[۵]{(a^۳b^۲)^۳} = \sqrt[۵]{a^۹b^۶} = \sqrt[۵]{a^۵.\ a^۴.\ b^۵.\ b}$

$= ab\sqrt[۵]{a^۴b}$

$۱۰)\ (-\sqrt[۷]{a^۴})^۶ = \sqrt[۷]{(a^۴)^۶} = \sqrt[۷]{a^{۲۴}} = \sqrt[۷]{a^{۲۱}.a^۳}$

$= \sqrt[۷]{(a^۳)^۷.a^۳} = a^۳\sqrt[۷]{a^۳}$

توجه داشته باشید که عبارتهایی نظیر : $(\sqrt{-۴})^۲$ و $(-\sqrt[۴]{-۳})^۲$ و $(\sqrt[۶]{-۵})^۳$ و $(\sqrt[۸]{-۲})^۸$ و $(\sqrt[۲]{\sqrt[۴]{-۲}})^۴$ در مجموعهٔ اعداد حقیقی بی‌معنی است، زیرا $\sqrt{-۴}$ و $\sqrt[۴]{-۳}$ و $\sqrt[۶]{-۵}$ و $\sqrt[۸]{-۲}$ و $\sqrt[۴]{-۲}$ عددهای حقیقی نیستند.

حالت خاص ــ به مثالهای زیر توجه کنید :

$۱)\ (\sqrt{۲})^۲ = \sqrt{۲^۲} = ۲$

$۲)\ (\sqrt[۵]{۷})^۵ = \sqrt[۵]{۷^۵} = ۷$

$۳)\ (\sqrt[۳]{۴})^۳ = \sqrt[۳]{۴^۳} = ۴$

$۴)\ (\sqrt[۴]{۳})^۴ = \sqrt[۴]{۳^۴} = ۳$

بطورکلی : برای عدد حقیقی a و عدد طبیعی n بزرگتر یا مساوی ۲ $(n \geq ۲)$، اگر n عددی فرد باشد :

$$\sqrt[n]{a^n} = a \qquad (۵)$$

و اگر n عددی زوج باشد :

$$\sqrt[n]{a^n} = |a| \quad \text{و} \quad (\sqrt[n]{|a|})^n = |a|$$

ریشهٔ یک عدد و یا عبارت رادیکالی

به مثالهای زیر توجه کنید :

$۱)\ \sqrt[۲]{\sqrt[۲]{۸۱}} = \sqrt[۲]{۹} = ۳$

$\sqrt[۴]{۸۱} = \sqrt[۴]{۳^۴} = ۳$

و

بنابراین :

$\sqrt[۲]{\sqrt[۲]{۸۱}} = \sqrt[۴]{۸۱}$

همچنین

$۲)\ \sqrt[۳]{\sqrt[۲]{۶۴}} = \sqrt[۳]{۸} = ۲$

و

$\sqrt[۶]{۶۴} = \sqrt[۶]{۲^۶} = ۲$

بنابراین :

$\sqrt[۳]{\sqrt[۲]{۶۴}} = \sqrt[۶]{۶۴}$

در مثال ۱ ملاحظه می‌شود که ریشهٔ دوم مثبت $\sqrt{۸۱}$ مساوی با ریشهٔ چهارم مثبت ۸۱ است.

در مثال ۲ مشاهده می‌کنید که ریشهٔ سوم $\sqrt{۶۴}$ مساوی با ریشهٔ ششم مثبت ۶۴ است.

به طور کلی :

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \qquad (۶)$$

ریشهٔ mام مثبت $\sqrt[n]{a}$، مساوی با ریشهٔ mnام مثبت a است.

m و n عددهای طبیعی و $m \geq ۲$ و $n \geq ۲$ می‌باشند ؛ و $a \in \mathbb{R}$ است.

اگر m یا n و یا هر دو زوج باشند ؛ a نمی‌تواند منفی باشد.

مثال ۱۵ : حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید.

$۱)\ (\sqrt{\sqrt{\sqrt{۴}}})^۴$

$۲)\ (\sqrt[۳]{\sqrt{۲\sqrt{۲}}})^{۱۲}$

$۳)\ (\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲\sqrt[۴]{۴}}})^{۲۴}$

$۴)\ \sqrt[۳]{(\sqrt{۵\sqrt{۲}})^۴}$

$۵)\ \sqrt[۵]{\sqrt[۴]{\sqrt[۳]{\sqrt{۴^{۶۰}}}}}$

$۶)\ (\sqrt{۲\sqrt{۲\sqrt{۲\sqrt{۲\sqrt{۲}}}}})^{۳۲}$

$۷)\ (\sqrt[۳]{a\sqrt[۵]{a}})^{۱۵}$

۸) $\sqrt[7]{(\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{a^7}}})^{45}}$

حل :

۱) $(\sqrt{\sqrt{\sqrt{4}}})^4 = (\sqrt{\sqrt[4]{4}})^4 = \sqrt{(\sqrt[4]{4})^4} = \sqrt{4} = 2$

۲) $(\sqrt[3]{\sqrt{2\sqrt{2}}})^{12} = (\sqrt[6]{\sqrt{2^2\times 2}})^{12} = (\sqrt[12]{8})^{12} = 8$

۳) $(\sqrt[3]{2\sqrt{2\sqrt[4]{4}}})^{24} = (\sqrt[3]{\sqrt{2^2\times 2\sqrt[4]{4}}})^{24}$

$= (\sqrt[6]{\sqrt[4]{(2^3)^4\times 4}})^{24} = (\sqrt[24]{2^{12}\times 4})^{24}$

$= 2^{12}\times 4 = 12^{12}\times 2^2 = 2^{14}$

۴) $\sqrt[3]{(\sqrt{5\sqrt{2}})^4} = \sqrt[3]{(\sqrt{\sqrt{5^2\times 2}})^4} = \sqrt[3]{(\sqrt[4]{50})^4} = \sqrt[3]{50}$

۵) $\sqrt[5]{\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{4^{60}}}}} = \sqrt[20]{\sqrt[3]{\sqrt{4^{60}}}} = \sqrt[60]{\sqrt{4^{60}}}$

$= \sqrt[60]{(\sqrt{4})^{60}} = \sqrt{4} = 2$

۶) $\left(\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}}\right)^{32} = \left(\sqrt{\sqrt{2^2\times 2\sqrt{\sqrt{2^2\times 2\sqrt{2}}}}}\right)^{32}$

$= \left(\sqrt[4]{8\sqrt[4]{8\sqrt{2}}}\right)^{32} = \left(\sqrt[4]{\sqrt[4]{8^4\times 8\sqrt{2}}}\right)^{32}$

$= \left(\sqrt[16]{\sqrt{(8^5)^2\times 2}}\right)^{32} = \left(\sqrt[32]{8^{10}\times 2}\right)^{32} = 8^{10}\times 2$

$= (2^3)^{10}\times 2 = 2^{30}\times 2 = 2^{31}$

در حالت کلی اگر $a \geq 0$ و تعداد رادیکالها n باشد داریم :

$$\underbrace{\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\ldots\sqrt{a}}}}}_{n \text{ مرتبه}} = \sqrt[2^n]{a^{2^n-1}} \qquad (a \geq 0)$$

برای مثال داریم :

$$\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}}}} = \sqrt[2^6]{3^{2^6-1}} = \sqrt[64]{3^{63}}$$

۷) $(\sqrt[3]{a\sqrt[5]{a}})^{15} = (\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^5 . a}})^{15} = (\sqrt[15]{a^6})^{15} = a^6$

۸) $\sqrt[7]{(\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{a^7}}})^{45}} = \sqrt[7]{(\sqrt[15]{\sqrt[3]{a^7}})^{45}} = \sqrt[7]{(\sqrt[45]{a^7})^{45}}$

$= \sqrt[7]{a^7} = a$

با توجه به مثالهای اخیر، در حالت کلی خواهیم داشت :

$$\sqrt[k]{\sqrt[p]{\sqrt[q]{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}}}} = \sqrt[kpqmn]{a}$$

n و m و p و q و k عددهای طبیعی بزرگتر یا مساوی ۲ می‌باشند ؛ که اگر لااقل یکی از آنها زوج باشد، a نمی‌تواند منفی باشد.

برای مثال داریم :

$\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt[5]{\sqrt[4]{\sqrt[3]{75}}}}} = \sqrt[1800]{75}$ و $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[5]{\sqrt[4]{\sqrt{2}}}}} = \sqrt[120]{2}$

توجه : می‌دانیم $2 = \sqrt{4^1}$ و $2 = \sqrt[4]{2^4} = \sqrt[4]{4^2} = \sqrt[2\times 2]{4^{1\times 2}}$ ،
بنابراین :

$\sqrt{4} = \sqrt[2\times 2]{4^{1\times 2}}$

همچنین $\sqrt[5]{a^5} = a$ و $a = \sqrt[15]{a^{15}} = \sqrt[5\times 3]{(a^5)^3}$ ،
بنابراین :

$\sqrt[5]{a^5} = \sqrt[5\times 3]{a^{5\times 3}}$

به‌طور کلی :

برای عدد حقیقی a و عدد طبیعی n بزرگتر یا مساوی ۲ $(n \geq 2)$ ، اگر p عددی فرد باشد :

$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$ (۷)

اگر n زوج باشد، a^m نمی‌تواند منفی باشد.

و اگر p عددی زوج باشد :

$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{|a|^m}$

یعنی : عدد فرجه رادیکال و توان عبارت زیر رادیکال را می‌توانیم در یک عدد طبیعی ضرب و یا بر یک عدد طبیعی تقسیم کنیم.

مثال :

۱) $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[7\times 3]{2^{7\times 2}} = \sqrt[21]{2^{14}}$

2) $\sqrt[4]{2x^2} = \sqrt[2\times 4]{(2x^2)^2} = \sqrt[8]{4x^4}$

3) $\sqrt[12]{3^4} = \sqrt[3\times 4]{3^4} = \sqrt[3]{3}$

4) $\sqrt[15]{\sqrt[3]{a^9}} = \sqrt[45]{a^9} = \sqrt[9\times 5]{a^9} = \sqrt[5]{a}$

نکته مهم

در مورد تقسیم فرجه رادیکال و توان عبارت زیر رادیکال بر یک عدد زوج و یا ضرب فرجه رادیکال و توان عدد زیر رادیکال در یک عدد زوج توجه به علامت عدد زیر رادیکال بسیار ضروری است :

مثال :

1) $\sqrt[4]{(-9)^2} = \sqrt[4]{81} = 3$ یا $\sqrt[4]{(-9)^2} = \sqrt{|-9|} = \sqrt{9} = 3$

یعنی $\sqrt[4]{(-9)^2} \neq \sqrt[2]{-9}$

2) $\sqrt[3]{-27} = -3$

همچنین $\sqrt[3]{-27} \neq \sqrt[3\times 2]{(-27)^2}$

از خاصیتهای اخیر برای ضرب یا تقسیم عبارتهای رادیکالی با فرجه‌های نامساوی استفاده می‌کنیم، بدین ترتیب که ابتدا فرجه‌های رادیکالها را به فرجه مشترک تبدیل کرده و سپس عمل ضرب یا تقسیم را انجام می‌دهیم.

مثال :

1) $\sqrt[4]{2}\times\sqrt{2} = \sqrt[4]{2}\times\sqrt[2\times 2]{2^2} = \sqrt[4]{2}\times\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2\times 4} = \sqrt[4]{8}$

2) $2\sqrt[3]{-4}\times 3\sqrt{2} = -2\sqrt[3]{4}\times 3\sqrt{2} = -2\sqrt[3\times 2]{4^2}\times 3\sqrt[2\times 3]{2^3}$

$= -2\sqrt[6]{4^2}\times 3\sqrt[6]{2^3} = -6\sqrt[6]{4^2\times 2^3} = -6\sqrt[6]{2^4\times 2^3}$

$= -6\sqrt[6]{2^7} = -6\sqrt[6]{2^6\times 2} = -6\times 2\sqrt[6]{2} = -12\sqrt[6]{2}$

3) $\sqrt[3]{4}\div\sqrt[5]{8} = \sqrt[3\times 5]{4^5}\div\sqrt[5\times 3]{8^3} = \sqrt[15]{4^5}\div\sqrt[15]{8^3}$

$= \sqrt[15]{4^5\div 8^3} = \sqrt[15]{2^{10}\div 2^9} = \sqrt[15]{2^{10-9}} = \sqrt[15]{2}$

4) $\sqrt[4]{36}\div\sqrt{3} = \sqrt[4]{36}\div\sqrt[2\times 2]{3^2} = \sqrt[4]{36}\div\sqrt[4]{9}$

$= \sqrt[4]{36\div 9} = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$

مثال ۱۶ : حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید.

1) $\sqrt[3]{4}\times\sqrt{2}$

2) $5\sqrt{2}\times 2\sqrt[3]{-2}$

3) $\sqrt[5]{8}\times\sqrt[3]{4}\times\sqrt{2}$

4) $5\sqrt[3]{25}\times 2\sqrt{3\sqrt{4}}$

5) $\sqrt{15}\div\sqrt[3]{5}$

6) $\sqrt[4]{225}\div\sqrt{25}$

7) $\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}}\times\sqrt[3]{a^2\sqrt[5]{a}}$

8) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}\div\sqrt[7]{a^3}}{\sqrt[21]{a^{12}}}$

9) $\dfrac{\sqrt[5]{a^3}\times\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[7]{a^{12}}\div\sqrt[5]{a^2}}$

حل :

1) $\sqrt[3]{4}\times\sqrt{2} = \sqrt[3\times 2]{4^2}\times\sqrt[2\times 3]{2^3} = \sqrt[6]{4^2}\times\sqrt[6]{2^3}$

$= \sqrt[6]{4^2\times 2^3} = \sqrt[6]{2^4\times 2^3} = \sqrt[6]{2^7} = \sqrt[6]{2^6\times 2} = 2\sqrt[6]{2}$

2) $5\sqrt{2}\times 2\sqrt[3]{-2} = -5\sqrt{2}\times 2\sqrt[3]{2} = -5\sqrt[6]{2^3}\times 2\sqrt[6]{2^2}$

$= -10\sqrt[6]{2^3\times 2^2} = -10\sqrt[6]{2^5} = -10\sqrt[6]{32}$

3) $\sqrt[5]{8}\times\sqrt[3]{4}\times\sqrt{2} = \sqrt[30]{8^6}\times\sqrt[30]{4^{10}}\times\sqrt[30]{2^{15}}$

$= \sqrt[30]{8^6\times 4^{10}\times 2^{15}} = \sqrt[30]{2^{18}\times 2^{20}\times 2^{15}} = \sqrt[30]{2^{53}}$

$= \sqrt[30]{2^{30}\times 2^{23}} = 2\sqrt[30]{2^{23}}$

4) $5\sqrt[3]{25}\times 2\sqrt{3\sqrt{4}} = 5\sqrt[3]{25}\times 2\sqrt{3\times 2} = 5\sqrt[3]{25}\times 2\sqrt{6}$

$= 5\sqrt[6]{25^2}\times 2\sqrt[6]{6^3} = 10\sqrt[6]{25^2\times 6^3} = 10\sqrt[6]{135000}$

5) $\sqrt{15}\div\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{15^3}\div\sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{15^3\div 5^2}$

$= \sqrt[6]{\frac{5^3\times 3^3}{5^2}} = \sqrt[6]{5\times 3^3} = \sqrt[6]{5\times 27} = \sqrt[6]{135}$

6) $\sqrt[4]{225}\div\sqrt{25} = \sqrt[4]{225}\div\sqrt[4]{25^2} = \sqrt[4]{225\div 25^2}$

$= \sqrt[4]{\frac{5^2\times 3^2}{5^4}} = \sqrt[4]{\frac{3^2}{5^2}} = \sqrt[4]{(\frac{3}{5})^2} = \sqrt{\frac{3}{5}} = \sqrt{0/6}$

7) $\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}}\times\sqrt[3]{a^2\sqrt[5]{a}} = \sqrt[3]{a^3\sqrt[3]{a}\times\sqrt[5]{a}} = a\sqrt[3]{\sqrt[15]{a^5}\times\sqrt[15]{a^3}}$

$= a\sqrt[3]{\sqrt[15]{a^5.a^3}} = a\sqrt[3]{\sqrt[15]{a^8}} = a\sqrt[45]{a^8}$

$$8)\ \frac{\sqrt[3]{a^2}\div\sqrt[7]{a^3}}{\sqrt[21]{a^{12}}}=\frac{\sqrt[21]{(a^2)^7}\div\sqrt[21]{(a^3)^3}}{\sqrt[21]{a^{12}}}=\sqrt[21]{\frac{a^{14}\div a^9}{a^{12}}}$$

$$=\sqrt[21]{\frac{a^5}{a^{12}}}=\sqrt[21]{\frac{1}{a^7}}=\sqrt[21]{\left(\frac{1}{a}\right)^7}=\sqrt[3]{\frac{1}{a}}$$

$$9)\ \frac{\sqrt[5]{a^3}\times\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[7]{a^{12}}\div\sqrt[5]{a^2}}=\frac{\sqrt[5]{a^3}\times\sqrt[3]{a^2}}{\frac{\sqrt[7]{a^{12}}}{\sqrt[5]{a^2}}}=\frac{\sqrt[5]{a^2}\times\sqrt[5]{a^3}\times\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[7]{a^{12}}}$$

$$=\frac{\sqrt[5]{a^2.a^3}\times\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[7]{a^{12}}}=\frac{\sqrt[5]{a^5}\times\sqrt[21]{(a^2)^7}}{\sqrt[21]{(a^{12})^3}}=\frac{a\sqrt[21]{a^{14}}}{\sqrt[21]{a^{36}}}$$

$$=a\sqrt[21]{\frac{a^{14}}{a^{36}}}=a\sqrt[21]{\frac{1}{a^{22}}}=\sqrt[21]{\frac{a^{21}}{a^{22}}}=\sqrt[21]{\frac{1}{a}}$$

توانهای کسری (گویا)

قبلاً توانهای صحیح (مثبت و منفی و صفر) و اعمال مربوط به آنها را مطالعه کردیم؛ در اینجا توانهای کسری اعداد را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

رابطهٔ $2^x\times2^x=2^1$ را در نظر می‌گیریم؛ اگر دستور ضرب توانهای صحیح را به کار بریم خواهیم داشت:

$$2^{x+x}=2^1\Rightarrow2^{2x}=2^1\Rightarrow2x=1$$

در این صورت x نمی‌تواند عدد صحیح باشد و اگر فرض کنیم این دستور در این مورد نیز درست است $x=\frac{1}{2}$ خواهد شد و در نتیجه:

$$2^{\frac12}\times2^{\frac12}=2^1 \qquad (1)$$

از طرف دیگر:

$$\sqrt2\times\sqrt2=2 \qquad (2)$$

با مقایسهٔ (۱) و (۲) می‌توانیم بنویسیم:

$$2^{\frac12}=\sqrt2$$

و همچنین داریم:

$$(2^{\frac12})^2=2^{\frac12\times2}=2^1=2$$

به طور کلی:
اگر a برابر عدد مثبتی، و یا صفر باشد؛ بنابه تعریف می‌توان نوشت:

$$a^{\frac12}=\sqrt a \qquad (a\ge0)$$

مثال:

$$\sqrt{49}=\sqrt{7^2}=(7^2)^{\frac12}=7\ ,\quad \sqrt3=3^{\frac12}\ ,\quad 5^{\frac12}=\sqrt5$$

به طریق مشابه می‌توانیم $a^{\frac1n}$ (n عدد طبیعی و $n\ge2$) را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$a^{\frac1n}=\sqrt[n]{a}$$

اگر n زوج باشد، a نمی‌تواند منفی باشد.

مثال:

$$5^{\frac13}=\sqrt[3]{5}\ ,$$
$$\sqrt[3]{125}=\sqrt[3]{5^3}=(5^3)^{\frac13}=5\ ,$$
$$\sqrt[5]{32}=\sqrt[5]{2^5}=(2^5)^{\frac15}=2\ ,$$
$$\sqrt[7]{3}=3^{\frac17}$$
$$\sqrt[4]{9}=(3^2)^{\frac14}=3^{\frac12}$$

می‌دانیم $\sqrt[4]{3}=3^{\frac14}$، اگر دو طرف این تساوی را به توان ۵ برسانیم، خواهیم داشت:

$$(3^{\frac14})^5=(\sqrt[4]{3})^5$$

و یا

$$3^{\frac54}=\sqrt[4]{3^5}$$

به طور کلی:
اگر m و n اعداد طبیعی و $n\ge2$ باشد، بنابه تعریف می‌توان نوشت:

$$a^{\frac mn}=\sqrt[n]{a^m} \qquad (8)$$

اگر n زوج باشد؛ a^m نمی‌تواند منفی باشد.

مثال:

$$7^{\frac45}=\sqrt[5]{7^4}$$
$$2\times5^{\frac23}=2\sqrt[3]{5^2}=2\sqrt[3]{25}$$
$$9\sqrt[4]{27}=3^2\times\sqrt[4]{3^3}=3^2\times3^{\frac34}=3^{2+\frac34}=3^{\frac{11}{4}}=\sqrt[4]{3^{11}}$$
$$\sqrt[3]{4}\times\sqrt[5]{8}=\sqrt[3]{2^2}\times\sqrt[5]{2^3}=2^{\frac23}\times2^{\frac35}=2^{\frac23+\frac35}=2^{\frac{19}{15}}$$
$$=2^{\frac{15+4}{15}}=2^{1+\frac{4}{15}}=2^1\times2^{\frac{4}{15}}=2\sqrt[15]{2^4}=2\sqrt[15]{16}$$

با توجه به مطالب اخیر می‌توان نتیجه گرفت که دستورهای عملیات توان در مورد توانهای صحیح می‌تواند در مورد توانهای کسری (گویا) نیز به کار رود ؛ بنابراین اگر m و n عددهایی گویا باشند و a عدد حقیقی باشد :

$$a^m . a^n = a^{m+n} \quad (m,n\in Q \; , \; a\in \mathbb{R})$$
$$a^m : a^n = a^{m-n} \quad (a\neq 0)$$

مثال :

1) $a^{\frac{3}{4}}\times a^{\frac{5}{2}} = a^{\frac34+\frac52} = a^{\frac{13}{4}}$

2) $b^{\frac53}\times b^{-\frac49} = b^{\frac53-\frac49} = b^{\frac{11}{9}}$

3) $b^{\frac74}:b^{\frac73} = b^{\frac74-\frac73} = b^{\frac{-7}{12}}$

4) $a^{\frac23}:a^{-\frac12} = a^{\frac23-(-\frac12)} = a^{\frac23+\frac12} = a^{\frac76}$

5) $7^{\frac34}\times 7^{-\frac43} = 7^{\frac34-\frac43} = 7^{-\frac{7}{12}}$

6) $3^{\frac14}:3^{\frac23} = 3^{\frac14-\frac23} = 3^{-\frac{5}{12}}$

در اینجا عبارت $7^{-\frac{7}{12}}$ را می‌توان به شکل زیر نوشت :

$$7^{-\frac{7}{12}} = (7^{\frac{7}{12}})^{-1} = \frac{1}{7^{\frac{7}{12}}} = \frac{1}{\sqrt[12]{7^7}}$$

به همین ترتیب عبارت $3^{-\frac{5}{12}}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$3^{-\frac{5}{12}} = (3^{\frac{5}{12}})^{-1} = \frac{1}{3^{\frac{5}{12}}} = \frac{1}{\sqrt[12]{3^5}}$$

به طور کلی :

اگر $a\neq 0$ و m و n اعداد طبیعی و $n\geq 2$ باشد، بنا به تعریف می‌توان نوشت :

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \qquad (9)$$

اگر n زوج باشد ؛ a^m نمی‌تواند منفی باشد.

مثال :

1) $5^{-\frac23} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{25}}$

2) $a^{-\frac45} = \frac{1}{\sqrt[5]{a^4}}$

3) $2^{-\frac97} = \frac{1}{\sqrt[7]{2^9}} = \frac{1}{\sqrt[7]{2^7\times 2^2}} = \frac{1}{2\sqrt[7]{4}}$

مثال ۱۷ : حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید.

1) $\sqrt[5]{8}\times 2^{-\frac15}\times\sqrt[5]{16}\times 2^{-\frac75}\times 2^{\frac35}\times 2^{-\frac25}$

2) $\sqrt[3]{4}\times 2^{-\frac53}\times\sqrt[3]{2}\times 2^{-\frac23}$

3) $2^{-2/5}\times\frac{1}{\sqrt[5]{4^{-10}}}\times 2^{1/5}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\sqrt[10]{(\frac12)^5}$

4) $\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\times\frac{1}{\sqrt[8]{3}}\times 3^{-\frac{1}{16}}$

5) $a^{-\frac43}\times a^{\frac59}\times\sqrt[3]{a^{-2}}\times a^{-\frac49}\times\sqrt[9]{a^2}$

6) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\times b^{-\frac23}\times a^{\frac23}\times\sqrt[3]{a^{-8}}\times\frac{\sqrt[9]{b^3}}{\sqrt[3]{a^4}}$

حل :

1) $\sqrt[5]{2^3}\times 2^{-\frac15}\times\sqrt[5]{2^4}\times 2^{-\frac75}\times 2^{\frac35}\times 2^{-\frac25}$

$= 2^{\frac35-\frac15+\frac45-\frac75+\frac35-\frac25} = 2^{\frac05} = 2^0 = 1$

2) $\sqrt[3]{2^2}\times 2^{-\frac53}\times\sqrt[3]{2}\times 2^{-\frac23} = 2^{\frac23}\times 2^{-\frac53}\times 2^{\frac13}\times 2^{-\frac23}$

$= 2^{\frac23-\frac53+\frac13-\frac23} = 2^{-\frac43} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$

2) $2^{-2/5}\times\frac{1}{\sqrt[5]{2^{-20}}}\times 2^{1/5}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\sqrt[10]{(\frac12)^5}$

$= 2^{-2/5}\times 2^{-(\frac{-20}{5})}\times 2^{1/5}\times 2^{-\frac12}\times 2^{-\frac{5}{10}}$

$= 2^{-2/5+4+1/5-0/5-0/5} = 2^2 = 4$

4) $3^{-\frac12}\times 3^{-\frac14}\times 3^{-\frac18}\times 3^{-\frac{1}{16}} = 3^{-\frac12-\frac14-\frac18-\frac{1}{16}} = 3^{-\frac{15}{16}}$

$= \frac{1}{3^{\frac{15}{16}}} = \frac{1}{\sqrt[16]{3^{15}}}$

۵) $a^{-\frac{4}{3}}\times a^{\frac{5}{9}}\times\sqrt[3]{a^{-2}}\times a^{-\frac{4}{9}}\times\sqrt[9]{a^{2}}$

$$=a^{-\frac{4}{3}}\times a^{\frac{5}{9}}\times a^{-\frac{2}{3}}\times a^{-\frac{4}{9}}\times a^{\frac{2}{9}}$$

$$=a^{-\frac{4}{3}+\frac{5}{9}-\frac{2}{3}-\frac{4}{9}+\frac{2}{9}}=a^{-\frac{15}{9}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt[9]{a^{15}}}=\frac{1}{\sqrt[9]{a^{9}\times a^{6}}}=\frac{1}{a\sqrt[9]{a^{6}}}$$

۶) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\times b^{-\frac{2}{3}}\times a^{\frac{2}{3}}\times\sqrt[3]{a^{-8}}\times\frac{\sqrt[9]{b^{3}}}{\sqrt[3]{a^{4}}}$

$$=a^{-\frac{1}{3}}\times b^{-\frac{2}{3}}\times a^{\frac{2}{3}}\times a^{-\frac{8}{3}}\times b^{\frac{3}{9}}\times a^{-\frac{4}{3}}$$

$$=a^{-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-\frac{8}{3}-\frac{4}{3}}\times b^{-\frac{2}{3}+\frac{3}{9}}=a^{-\frac{11}{3}}\times b^{-\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{a^{11}}}\times\frac{1}{\sqrt[3]{b}}=\frac{1}{\sqrt[3]{a^{9}\times a^{2}}}\times\frac{1}{\sqrt[3]{b}}=\frac{1}{a^{3}\sqrt[3]{a^{2}b}}$$

نکته : با فرض $a\geq 0$ ، برابری $\sqrt[x]{a}=a^{\frac{1}{x}}$ وقتی برقرار است که دامنهٔ متغیر x مجموعهٔ عددهای طبیعی باشد($x\in\mathbb{N}$) .

تفریح اندیشهٔ ۳

معمای برج آب

مسأله زیر مسأله‌ای حسابی است که بسیاری از خوانندگان را گیج می‌کند. اما در صورتی که با شکیبایی توضیح داده شود کودکی نیز آن را درک می‌کند.

از مخزن آبی، آب به طور دائم، با نرخ ثابت ۱۰۰۰ گالن در ساعت، به شهری وارد می‌شود.

از آنجا که مصرف آب در شبانه‌روز تغییر می‌کند، اضافهٔ آن، هنگامی که ورود آب از مصرف آن افزون می‌شود، در برجی، برای زمانی که مصرف آن از ورود آن فزونی می‌گیرد، ذخیره می‌شود.

تعداد گالنهای مصرف شده طی هشت دورهٔ سه‌ساعتی متوالی به طریق زیر است : ۲۰۰۰، ۵۰۰۰، ۴۵۰۰، ۲۵۰۰، ۴۰۰۰، ۵۰۰، ۴۰۰۰، و ۱۵۰۰ گالن.

با این فرض که آب در هر دورهٔ سه ساعتی با نرخ ثابتی مصرف می‌شود، ظرفیت برج چقدر باشد تا همواره جوابگوی وضعیت حاصل باشد؟

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

جواب در صفحه ۸٦

(سوّم ریاضی نظام جدید و قدیم)

استفاده از مکمل ۲ برای تفاضل اعداد و نمایش اعداد اعشاری در حافظهٔ کامپیوتر

□ حسین ابراهیم‌زادهٔ قُلزم

با توجه به تأکیدی که بر روی مکمل ۱ و مکمل ۲ اعداد داشته‌ایم، توجه خوانندگان را به این نکته جلب می کنم که برای چهار عمل اصلی ریاضی، در کامپیوتر فقط مدار جمع وجود دارد به همین خاطر مجبوریم تمام عملیات ریاضی را با استفاده از عمل جمع انجام دهیم و برای عملیات ضرب و تقسیم و تفریق، هیچ‌گونه مداری پیش‌بینی نشده است و تمام این عملیات فقط با استفاده از مدار جمع‌کننده یا جمع انجام می‌شود. برای ضرب و تقسیم عمل دیگری به نام جابجایی بیتها (shift) نیز درنظر گرفته شده است که بحث آن در محدودهٔ این درس قرار ندارد. از ریاضیات می‌دانید که ضرب برابر جمعهای متوالی و تقسیم برابر تفریقهای متوالی است و چون در کامپیوتر عمل تفریق نیز از طریق مدار جمع‌کننده انجام می‌شود درنتیجه می‌توان چهار عمل اصلی را با جمع یا جمعهای متوالی انجام داد. اما چرا ضرب، جمعهای متوالی و تقسیم، تفریقهای متوالی است؟ با مثال آن را توضیح می‌دهیم.

مثال: حاصل‌ضرب ۵×۷ را با استفاده از عمل جمع متوالی به‌دست آورید.

حل: می‌دانیم : ۵+۵+۵+۵+۵+۵+۵ = ۵×۷

بدین ترتیب عمل ۵×۷ با هفت عمل جمع متوالی عدد ۵ به‌دست می‌آید. به این صورت :

(۱)	۵ = ۰ + ۵
(۲)	۱۰ = ۵ + ۵
(۳)	۱۵ = ۵ + ۱۰
(۴)	۲۰ = ۵ + ۱۵
(۵)	۲۵ = ۵ + ۲۰
(۶)	۳۰ = ۵ + ۲۵
(۷)	۳۵ = ۵ + ۳۰

از آنجا که هفت بار عمل جمع انجام شده است و نتیجهٔ عمل جمع هم ۳۵ به‌دست آمد بنابراین ۵×۷ برابر ۳۵ است.

مثال: حاصل تقسیم ۱۲:۴ را با استفاده از عمل تفریقهای متوالی به‌دست آورید.

حل: در این روش عمل تفریق تا آنجا انجام می‌شود که حاصل آخرین تفریق کمتر از عنصر دوم عمل تفریق شود. تعداد دفعات انجام عمل تفریق، خارج قسمت تقسیم و مقدار آخرین عمل تفریق، باقیماندهٔ تقسیم خواهد بود. برای تقسیم ۱۲ بر ۴، به‌طور متوالی ۴ را از ۱۲ و حاصل تفاضلها کم می کنیم و تعداد دفعاتی را که عمل تفریق انجام شده است می‌شماریم.

(۱) $۱۲-۴=۸$

(۲) $۸-۴=۴$

(۳) $۴-۴=۰<۴$

از آنجا که ۳ بار عمل تفریق انجام شده است و حاصل آخرین عمل تفریق یعنی صفر کمتر از ۴ است ۴>۰، بنابراین خارج قسمت تقسیم برابر ۳ و باقیمانده صفر است.

مثال: حاصل تقسیم ۲۳:۵ را با استفاده از تفریقهای متوالی به‌دست آورید.

حل:

(۱) $۲۳-۵=۱۸$

(۲) $۱۸-۵=۱۳$

(۳) $۱۳-۵=۸$

(۴) $۸-۵=۳<۵$

از آنجا که چهار بار عمل تفریق انجام شده است، پس خارج قسمت تقسیم ۲۳ بر ۵ برابر ۴ است و چون حاصل آخرین عمل تفریق یعنی ۳ کمتر از ۵ است ۵>۳ پس باقیماندهٔ این تقسیم برابر ۳ است.

۲۳|۵
۴ ← خارج قسمت
۳ ← باقیمانده

گفته شد که عمل جمع در کامپیوتر براحتی انجام می‌شود. عمل تفریق را نیز می توان با عمل جمع انجام داد مثلاً :

$۲۷-۱۱=۲۷+(-۱۱)$

به این ترتیب اگر بتوانیم منفی عدد ۱۱ یا (۱۱−) را در کامپیوتر نمایش دهیم و سپس آن را با نمایش عدد ۲۷ در حافظه جمع کنیم تفاضل ۱۱−۲۷ به دست می‌آید.

در مقالات شماره‌های گذشته برهان گفتیم که اعداد منفی چگونه با استفاده از مکمل ۱ و مکمل ۲ در کامپیوتر نمایش داده می‌شوند. ذخیره اعداد منفی با استفاده از روش مکمل ۲، در اکثر کامپیوترهای موجود دنیا نظیر کامپیوترهای خانوادهٔ IBM و هیولت پاکارد HP انجام می‌شود. برای یادآوری دو مثال ارائه می‌دهیم :

مثال: عدد ۱۱− را با استفاده از مکمل ۲ در حافظهٔ کامپیوتر نمایش دهید.

حل: از آنجا که اعداد صحیح در دو بایت حافظه ذخیره می‌شوند، بنابراین ۱۱− را باید در یک کلمهٔ کامپیوتر به طول ۱۶ بیت ذخیره کنیم. مکمل ۲ هر عدد قرینهٔ آن عدد است.

$(۱۱)_{۱۰}=(۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۰۱۱)_۲$

مکمل یک $(۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۰۱۱)_۲$

$=(۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۰۱۰۰)_۲$

مکمل دو = مکمل یک +۱ $=(۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۰۱۰۰)_۲+۱$

$=(۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۰۱۰۱)_۲$

درنتیجه : $(-۱۱)_{۱۰}=(۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۰۱۰۱)_۲$

تمرین : می‌دانیم $(۱۱)+(-۱۱)=۰$ تحقیق کنید :

$(۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۰۱۱)_۲+(۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۰۱۰۱)_۲=۰$

مثال: عدد ۲۱− را با استفاده از مکمل ۲ در حافظهٔ کامپیوتر نمایش دهید.

حل: $(۲۱)_{۱۰}=(۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۰۱۰۱)_۲$

مکمل یک $(۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۰۱۰۱)_۲$

$=(۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۰۱۰۱۰)_۲$

مکمل دو = مکمل یک +۱ $=(۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۰۱۰۱۰)_۲+۱$

$=(۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۰۱۰۱۱)_۲$

درنتیجه : $(-۲۱)_{۱۰}=(۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۰۱۰۱۱)_۲$

تمرین : می‌دانیم $۲۱+(-۲۱)=۰$ ، تحقیق کنید :

$(۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۰۱۰۱)_۲+(۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۰۱۰۱۱)_۲=۰$

مثال: تفاضل دو عدد ۲۰ و ۹ را با استفاده از مکمل ۲ به‌دست آورید.

حل: ابتدا معادل دودویی هریک ازاین اعداد را می‌نویسیم :

$۲۰-۹=(?)_{۱۰}$

$(۲۰)_{۱۰}=(۱۰۱۰۰)_۲$

$(۹)_{۱۰}=(۱۰۰۱)_۲=(۰۱۰۰۱)_۲$

از آنجا که ۹− یک عدد منفی است، این عدد را به کمک

مکمل ۲ محاسبه می‌کنیم.

مکمل یک $(01001)_2 = (10110)_2$

خوانندگان توجه داشته باشند که قبل از محاسبهٔ مکمل ۲ی عنصر دوم عمل تفریق، تعداد بیتهای آن باید با تعداد بیتهای عنصر اول عمل تفریق برابر باشد. در صورت مساوی نبودن تعداد بیتهای عنصر دوم با تعداد بیتهای عنصر اول تفریق، سمت چپ نمایش مبنای ۲ عنصر دوم را با صفر پر می کنیم تا تعداد بیتها برابر شود.

مکمل دو = مکمل یک + ۱ = $(10110)_2 + 1 = (10111)_2$

درنتیجه: $(-9) = (10111)_2$

$20 - 9 = 20 + (-9) = (10100)_2 + (10111)_2$
$= (101011)_2$

از آنجا که مفروق و مفروق‌منه هریک ۵ بیتی و حاصل تفریق یک عدد ۶ بیتی $(101011)_2$ است، از این‌رو بیت اضافی را از سمت چپ آن حذف می کنیم تا ۵ بیتی شود. درنتیجه:

$20 - 9 = (01011)_2 \equiv (1011)_2 = (11)_{10} = 11$

مثال: حاصل تفریق $105 - 30$ را با استفاده از مکمل ۲ به‌دست آورید.

حل: ابتدا معادل دودویی هریک از این اعداد را می‌نویسیم:

$(105)_{10} = (1101001)_2$

$(30)_{10} = (11110)_2$

از آنجا که معادل دودویی ۱۰۵ یک عدد ۷ بیتی است، از این‌رو معادل دودویی عدد ۳۰ را باید با ۷ بیت نمایش دهیم:

$(30)_{10} = (0011110)_2$

مکمل یک $(0011110)_2 = (1100001)_2$

مکمل دو = مکمل ۱ + ۱ = $(1100001)_2 + 1 = (1100010)_2$

درنتیجه: $(-30) = (1100010)_2$

بنابراین:

$105 - 30 = 105 + (-30) =$
$(1101001)_2 + (1100010)_2 = (11001011)_2$

از آنجا که مفروق و مفروق‌منه هریک ۷ بیتی و حاصل تفریق یک عدد ۸ بیتی $(11001011)_2$ است، از این‌رو بیت اضافی را از سمت چپ این عدد حذف می‌کنیم تا ۷ بیتی شود.

درنتیجه:

$105 - 30 = (1001011)_2 = (75)_{10} = 75$

مثال: حاصل تفریق $74 - 26$ را با استفاده از مکمل ۲ به‌دست آورید.

حل: ابتدا معادل دودویی هریک از این اعداد را می‌نویسیم:

$(74)_{10} = (1001010)_2$

$(26)_{10} = (11010)_2$

از آنجا که معادل دودویی عدد ۷۴ یک عدد ۷ بیتی است، از این‌رو معادل دودویی عدد ۲۶ را باید با ۷ بیت نمایش دهیم:

$(26)_{10} = (0011010)_2$

مکمل یک $(0011010)_2 = (1100101)_2$

مکمل دو = مکمل یک + ۱ = $(1100101)_2 + 1 = (1100110)_2$

درنتیجه: $(-26)_{10} = (1100110)_2$

بنابراین:

$74 - 26 = 74 + (-26) = (1001010)_2 + (1100110)_2$
$= (10110000)_2$

از آنجا که مفروق و مفروق‌منه، هریک ۷ بیتی و حاصل تفریق یک عدد ۸ بیتی $(10110000)_2$ است، از این‌رو بیت اضافی را از سمت چپ این عدد حذف می‌کنیم تا ۷ بیتی شود.

درنتیجه:

$74 - 26 = (0110000)_2 = (110000)_2 = (48)_{10} = 48$

مثال: حاصل تفریق $251 - 18$ را با استفاده از مکمل ۲ به‌دست آورید.

حل: ابتدا معادل دودویی هریک از این اعداد را می‌نویسیم:

$(251)_{10} = (11111011)_2$

$(18)_{10} = (10010)_2 = (00010010)_2$

مکمل یک $(00010010)_2 = (11101101)_2$

مکمل دو = مکمل یک + ۱ = $(11101101)_2 + 1$
$= (11101110)_2$

درنتیجه: $(-18)_{10} = (11101110)_2$

بنابراین:

$251 - 18 = 251 + (-18) =$
$(11111011)_2 + (11101110)_2 = (111101001)_2$

از آنجا که مفروق و مفروق منه، هریک ۸ بیتی و حاصل تفریق یک عدد ۹ بیتی $(111101001)_2$ است، از این‌رو بیت اضافی را از سمت چپ این عدد حذف می‌کنیم تا به‌صورت ۸ بیتی درآید. درنتیجه:

$251 - 18 = (11101001)_2 = (233)_{10} = 233$

تمرین: حاصل تفریق ۳۰ − ۷۰ را با استفاده ازمکمل ۲ به‌دست آورید.

تمرین: حاصل تفریق ۳۶ − ۱۷۰ را با استفاده از مکمل ۲ به‌دست آورید.

مثال: حاصل تفریق ۹۰ − ۹۶ را با استفاده از مکمل ۲ به‌دست آورید.

حل: ابتدا معادل دودویی هریک از این اعداد را می‌نویسیم :

$(96)_{10} = (1100000)_2$

$(90)_2 = (1011010)_2$

$(1011010)_2 = (0100101)_2$ مکمل یک

مکمل دو = مکمل یک +۱ $= (0100101)_2 + 1$

$= (0100110)_2$

درنتیجه : $(-90)_{10} = (0100110)_2$

$96 - 90 = (1100000)_2 + (0100110)_2 = (10000110)_2$

از آنجا که مفروق و مفروق منه، هریک ۷ بیتی و حاصل تفریق یک عدد ۸ بیتی است، از این‌رو بیت اضافی را از سمت چپ این عدد حذف می‌کنیم تا به‌صورت ۷ بیتی درآید.

درنتیجه :

$96 - 90 = (0000110)_2 = (110)_2 = (6)_{10} = 6$

نمایش اعداد اعشاری در حافظهٔ کامپیوتر

گفتیم در علم کامپیوتر به مجموعه اعدادی که در آنها نقطهٔ اعشار وجود داشته باشد **اعداد اعشاری** می‌گویند. تمام اعداد اعشاری چه مثبت و چه منفی، به‌صورت **ممیز سیار یا ممیز شناور** Floating Point در حافظه کامپیوتر نمایش داده می‌شوند. منظور از ممیز سیار، نمایش اعداد اعشاری به‌صورت توانهای مختلف ۱۰ است که بالاجبار با کم یا زیاد شدن توان ۱۰ عدد، جای ممیز نیز تغییر می‌کند. از این‌رو به این نحوهٔ نمایش عدد اعشاری (**ممیزشناور**) یا **ممیز سیار** می‌گویند. به‌عنوان مثال عدد ۱۲۳/۴ را می‌توان به روشهای مختلف زیر نمایش داد :

$123/4 = 1234 \times 10^{-1}$

$123/4 = 123/4 \times 10^{0}$

$123/4 = 12/34 \times 10^{1}$

$123/4 = 1/234 \times 10^{2}$

$123/4 = 0/1234 \times 10^{3}$

$123/4 = 0/01234 \times 10^{4}$

همانگونه که در بالا ملاحظه می‌کنید تمام عبارتهای سمت راست، نمایش عدد ۱۲۳/۴ هستند و مشاهده می‌کنید که در اعداد سمت راست، نقطهٔ اعشار (یا اعشار) Decimal Pointجای ثابتی ندارد و حالت سیار یا شناور floating دارد. به همین دلیل به این نحوه ازنمایش اعداد اعشاری، **نمایش اعداد اعشاری با نقطه (ممیز) شناور** می‌گویند. آنچه که در روش نمایش اعداد اعشاری به طریقه ممیز شناور مورد توجه ماست، حالتی از این‌گونه نمایشهاست که ارزش عدد بدون درنظرگرفتن توان ۱۰، کمتر از یک باشد. ما در نمایش اعداد اعشاری در حافظهٔ کامپیوتر، به فرم **نرمال‌سازی شدهٔ** عدد ممیزدار در مبنای ۲ احتیاج داریم. اما قبلاً لازم است تعریفی از فرم نرمال‌سازی شدهٔ اعداد اعشاری در مبنای ۱۰ ارائه دهیم و اعداد اعشاری را به فرم نرمال‌سازی شدهٔ مبنای ۱۰ نمایش داده، به کمک آن فرم نرمال‌سازی شدهٔ دودویی اعداد ممیزدار مبنای ۲ را تعریف کرده و نمایش می‌دهیم.

تعریف فرم نرمال‌سازی شدهٔ عدد اعشاری: فرم نرمال‌سازی شدهٔ اعداد اعشاری به حالتی از نمایش عدد اعشاری به‌صورت ممیز شناور گفته می‌شود که اولین رقم بعد از ممیز مخالف صفر و قبل از ممیز نیز فقط صفر باشد.

مثال: عدد اعشاری ۱۲۳/۴ را به فرم نرمال‌سازی شده در مبنای ۱۰ بنویسید.

حل: $123/4 = 0/1234 \times 10^{3}$

مثال: عدد اعشاری ۰/۰۰۱۲۳۴ را به فرم نرمال‌سازی شده در مبنای ۱۰ بنویسید.

حل: $0/001234 = 0/1234 \times 10^{-2}$

مثال: عدد اعشاری ۱۲/۳۴۵− را به فرم نرمال‌سازی شده در مبنای ۱۰ بنویسید.

حل: $-12/345 = -0/12345 \times 10^{2}$

به‌طورکلی هر عدد به‌صورت $f \times 10^{p}$ ، را در مبنای ۱۰ فرم نرمال‌سازی شده می‌گویند هرگاه $0/1 \le |f| < 1$ باشد. به عدد اعشاری f، مانتیس یا جزء کسری عدد fractional و به p نما یا توان عدد power می‌گویند. حال به این پرسش که فرم نرمال‌سازی شدهٔ اعداد ممیزدار در مبنای ۲ چگونه به‌دست می‌آید پاسخ می‌دهیم :

تعریف فرم نرمال‌سازی شدهٔ عدد ممیزدار مبنای ۲: فرم نرمال سازی شدهٔ عدد ممیزدار مبنای ۲، به حالتی از نمایش عدد

ممیزدار مبنای ۲ به‌صورت ممیز شناور گفته می‌شود که اولین رقم بعد از ممیز یک و قبل از ممیز فقط صفر باشد.

مثال: عدد ممیزدار $(1011/110)_2$ را به‌صورت نرمال‌سازی شده نشان دهید.

حل: $(1011/110)_2 = (0/1011110)_2 \times 2^4 = (0/1011110)_2 \times 2^{(100)_2}$

مثال: عدد ممیزدار $(11011/011)_2$ را به‌صورت نرمال‌سازی شده نشان دهید.

حل: $(11011/011)_2 = (0/11011011)_2 \times 2^5 = (0/11011011)_2 \times 2^{(101)_2}$

مثال: عدد ممیزدار $(10/00101)_2$ را به‌صورت نرمال‌سازی شده نشان دهید.

حل: $(10/00101)_2 = (0/1000101)_2 \times 2^2 = (0/1000101)_2 \times 2^{(10)_2}$

مثال: عدد ممیزدار $(0/0010101)_2$ را به‌صورت نرمال‌سازی شده نشان دهید.

حل: $(0/0010101)_2 = (0/10101)_2 \times 2^{-2} = (0/10101)_2 \times 2^{-(10)_2}$

مثال: عدد ممیزدار $(0/00001010)_2$ را به‌صورت نرمال‌سازی شده نشان دهید.

حل: $(0/00001010)_2 = (0/1010)_2 \times 2^{-4} = (0/1010)_2 \times 2^{-(100)_2}$

مثال: عدد ممیزدار $(0/011101)_2$ را به‌صورت نرمال‌سازی شده نشان دهید.

حل: $(0/011101)_2 = (0/11101)_2 \times 2^{-1} = (0/11101)_2 \times 2^{-(1)_2}$

مثال: عدد ممیزدار $(110111/00101)_2$ را به‌صورت نرمال‌سازی شده نشان دهید.

حل:

$$(110111/00101)_2 = (0/11011100101)_2 \times 2^6 = (0/11011100101)_2 \times 2^{(110)_2}$$

آنچه که در این نمایش نیاز به کمی دقت دارد تعیین توان ۲ است، در اعداد ممیزدار مبنای ۲، جای ممیز یا نقطهٔ دودویی Binary Point در دو حالت زیر اتفاق می‌افتد :

۱ــ قبل از نقطهٔ دودویی حداقل یک رقم مخالف صفر وجود دارد.

۲ــ قبل از نقطهٔ دودویی فقط یک صفر وجود دارد.

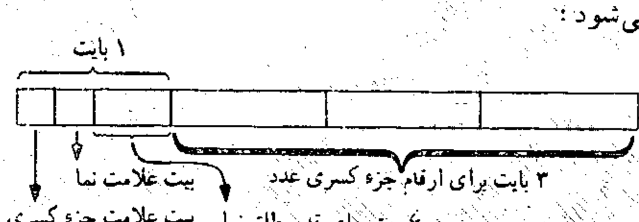
درحالتی که قبل از نقطهٔ دودویی یک یا چند رقم وجود دارد، توان ۲ی شکل نرمال‌سازی شده برابر تعداد ارقام قبل از نقطه دودویی است، مثلاً در عدد دودویی (۱۱۰۱۱/۰۰۱)، تعداد ارقام قبل از نقطهٔ دودویی برابر ۵ است. درنتیجه فرم نرمال‌سازی شدهٔ عدد $(11011/001)_2$ به‌صورت زیر است :

$$(11011/001)_2 = (0/11011001)_2 \times 2^5 = (0/11011001)_2 \times 2^{(101)_2}$$

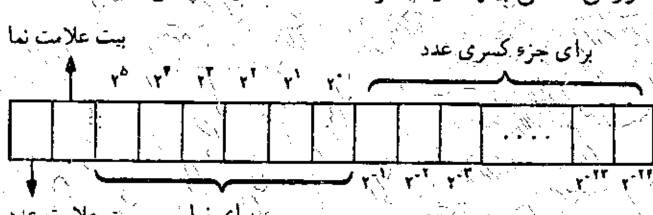
از آنجا که در نمایش اعداد نرمال‌سازی شده دودویی به مانتیس و توان در مبنای ۲ احتیاج است، به همین خاطر توان را از نمایش اعشاری به‌صورت دودویی تبدیل می کنیم. درحالتی که قبل از نقطهٔ دودویی فقط یک صفر وجود دارد مانند عدد ۰/۰۱۱۰۱، توان ۲ی شکل نرمال‌سازی شده برابر منفی تعداد صفرهای بعد از نقطهٔ دودویی است که قبل از اولین یک قرار دارند. مثلاً در عدد دودویی $(0/001101)_2$، تعداد صفرهای بعد از نقطهٔ دودویی قبل از اولین یک برابر ۲ است که منفی آن ۲- می‌شود. درنتیجه فرم نرمال‌سازی شدهٔ عدد $(0/001101)_2$ به‌صورت زیر است :

$$(0/001101)_2 = (0/1101)_2 \times 2^{-2} = (0/1101)_2 \times 2^{-(10)_2}$$

در نهایت، توان از مبنای ۱۰ به مبنای ۲ تبدیل می‌شود. هر عدد اعشاری به‌صورت زیر در حافظهٔ کامپیوتر نمایش داده می‌شود :

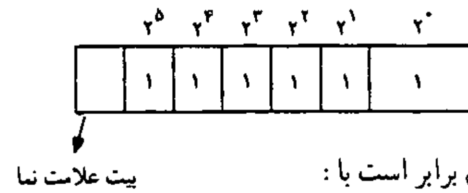


توجه دارید که قدرمطلق نما و ارقام جزء کسری عدد به‌صورت مبنای ۲ در حافظه ذخیره می‌شود. در حالت کلی ارزش مکانی بیتها در ذخیرهٔ اعداد اعشاری چنین است :



با توجه به نمایش بالا، ملاحظه می کنید برای ذخیرهٔ یک عدد اعشاری، به ۴ بایت حافظه احتیاج است که بایت سمت

چپ به علامت عدد، علامت نما و توان اختصاص دارد و ۳ بایت دیگر برای قدرمطلق جزء کسری عدد درنظر گرفته شده است. بیت علامت عدد و توان از همان قاعدهٔ علامت و قدرمطلق عدد پیروی می‌کند. اگر علامت عدد مثبت باشد در بیت علامت ۰ ذخیره می‌شود و اگر علامت عدد منفی باشد در بیت علامت ۱ ذخیره می‌شود. دریافته‌اید که برای ذخیرهٔ یک عدد اعشاری در حافظهٔ کامپیوتر به ۱ــ علامت عدد ۲ــ علامت نما ۳ــ قدرمطلق نما ۴ــ قدرمطلق جزء کسری عدد احتیاج است. در نمایش عدد اعشاری به‌صورت بالا، بزرگترین و کوچکترین مقدار نما، ۶۳+ و ۶۳- است زیرا بیتهای نما در حافظه به صورت زیر است:



که ارزش آن برابر است با:

$(۱\times ۲^{۰}+۱\times ۲^{۱}+۱\times ۲^{۲}+۱\times ۲^{۳}+۱\times ۲^{۴}+۱\times ۲^{۵})$ علامت نما

$$=\pm(۲^{۵}+۲^{۴}+۲^{۳}+۲^{۲}+۲^{۱}+۱)=\pm ۶۳$$

مثال: عدد ۱۲۱/۳۷۵ را در حافظهٔ کامپیوتر نمایش دهید.

حل: ابتدا معادل دودویی عدد $(۱۲۱/۳۷۵)_{۱۰}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$(۱۲۱)_{۱۰}=(۱۱۱۱۰۰۱)_{۲}$$

برای قسمت اعشاری داریم: $(۰/۳۷۵)_{۱۰}=(?)_{۲}$

$$\begin{cases}۰/۳۷۵\times ۲=۰/۷۵۰\\ ۰/۷۵۰\times ۲=۱/۵۰۰\\ ۰/۵۰۰\times ۲=۱/۰۰۰\end{cases}\Rightarrow (۰/۳۷۵)_{۱۰}=(۰/۱۱)_{۲}$$

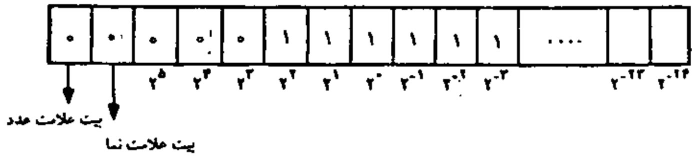
درنتیجه:

$$(۱۲۱/۳۷۵)_{۱۰}=(۱۱۱۱۰۰۱/۰۱۱)_{۲}$$

حال عدد $(۱۱۱۱۰۰۱/۰۱۱)_{۲}$ را به‌صورت نرمال‌سازی شده تبدیل می‌کنیم:

$$(۱۱۱۱۰۰۱/۰۱۱)_{۲}=۰/۱۱۱۱۰۰۱۰۱۱\times ۲^{۷}$$
$$=۰/۱۱۱۱۰۰۱۰۱۱\times ۲^{(۱۱۱)_{۲}}$$

عدد داده شده مثبت و توان نیز مثبت است پس بیت علامت آنها با صفر پر می‌شود.



مثال: عدد $(-۱۰۰/۱۲۵)_{۱۰}$ را در حافظهٔ کامپیوتر نمایش دهید.

حل: ابتدا معادل دودویی عدد $(-۱۰۰/۱۲۵)_{۱۰}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$(-۱۰۰/۱۲۵)_{۱۰}=-[(۱۰۰)_{۱۰}+(۰/۱۲۵)_{۱۰}]$$

بنابراین:

$$(۱۰۰)_{۱۰}=(۱۱۰۰۱۰۰)_{۲}$$

برای قسمت اعشاری داریم:

$$\begin{cases}(۰/۱۲۵)_{۱۰}=(?)_{۲}\\ ۰/۱۲۵\times ۲=۰/۲۵۰\\ ۰/۲۵۰\times ۲=۰/۵۰۰\\ ۰/۵۰۰\times ۲=۱/۰۰۰\end{cases}\Rightarrow (۰/۱۲۵)_{۱۰}=(۰/۰۰۱)_{۲}$$

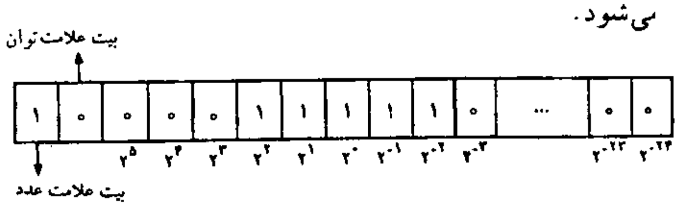
درنتیجه:

$$-(۱۰۰/۱۲۵)_{۱۰}=-(۱۱۰۰۱۰۰/۰۰۱)_{۲}$$

حال عدد $-(۱۱۰۰۱۰۰/۰۰۱)_{۲}$ را به‌صورت نرمال‌سازی شده تبدیل می‌کنیم:

$$-(۱۱۰۰۱۰۰/۰۰۱)_{۲}=-۰/۱۱۰۰۱۰۰۰۰۱\times ۲^{۷}$$
$$=-۰/۱۱۰۰۱۰۰۰۰۱\times ۲^{(۱۱۱)_{۲}}$$

جزء کسری این عدد منفی است پس بیت علامت عدد با ۱ پر می‌شود. توان مثبت است پس بیت علامت آن با صفر پر می‌شود.



مثال: عدد $(-۰/۰۴۷۸۵۱۵۶۲)_{۱۰}$ را در حافظهٔ کامپیوتر نمایش دهید.

حل: ابتدا معادل دودویی عدد $(-۰/۰۴۷۸۵۱۵۶۲)$ را به‌دست می‌آوریم.

$$۰/۰۴۷۸۵۱۵۶۲\times ۲=۰/۰۹۵۷۰۳۱۲۵$$
$$۰/۰۹۵۷۰۳۱۲۵\times ۲=۰/۱۹۱۴۰۶۲۵$$
$$۰/۱۹۱۴۰۶۲۵\times ۲=۰/۳۸۲۵۱۲۵$$
$$۰/۳۸۲۵۱۲۵\times ۲=۰/۷۶۵۶۲۵$$

$۰/۷۶۵۶۲۵\times ۲=۱/۵۳۱۲۵$

$۰/۵۳۱۲۵\times ۲=۱/۰۶۲۵$

$۰/۰۶۲۵\times ۲=۰/۱۲۵$

$۰/۱۲۵\times ۲=۰/۲۵۰$

$۰/۲۵۰\times ۲=۰/۵۰۰$

$۰/۵۰۰\times ۲=۱/۰۰۰$

$۰/۰۰۰\times ۲=۰/۰۰۰$

درنتیجه :

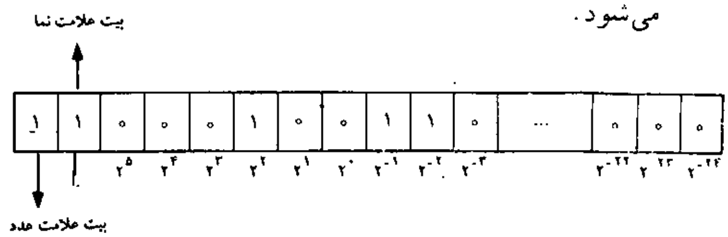
$-۰/۰۴۷۸۵۱۵۶۲=-(۰/۰۰۰۰۱۱۰۰۰۱)_۲$

حال عدد $(۰/۰۰۰۰۱۱۰۰۰۱)_۲-$ را به‌صورت نرمال‌سازی شده تبدیل می کنیم :

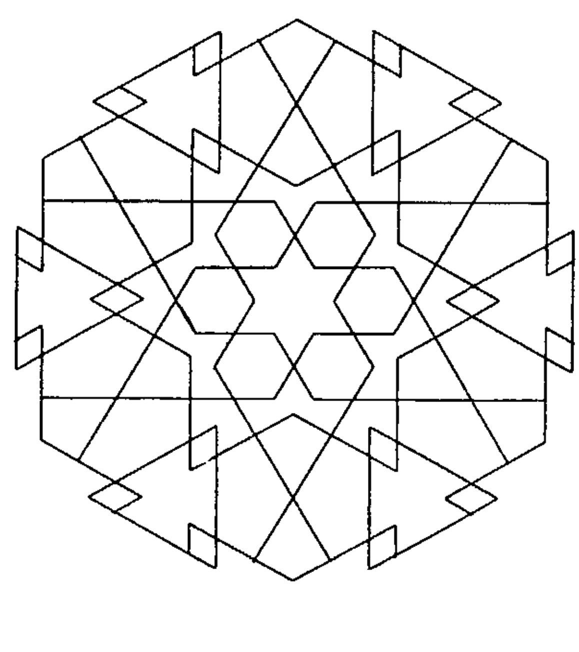
$-(۰/۰۰۰۰۱۱۰۰۱)_۲=-۰/۱۱۰۰۱\times ۲^{-۴}$

$=-۰/۱۱۰۰۱\times ۲^{-(۱۰۰)_۲}$

جزء کسری این عدد منفی است پس بیت علامت عدد با ۱ پر می‌شود. توان نیز منفی است پس بیت علامت آن نیز با ۱ پر می‌شود.



تمرین : عدد ۳۲/۷۵- را در حافظهٔ کامپیوتر نمایش دهید.



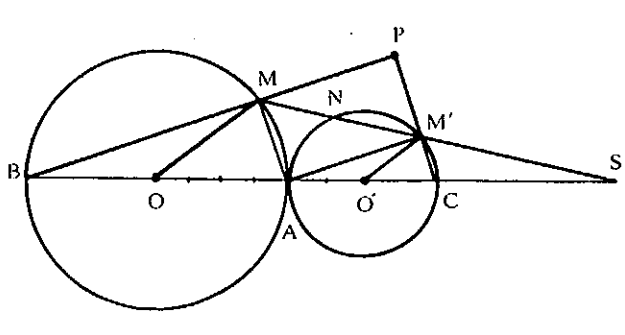
دو دایره (O) و (O′) به شعاعهای R=۴cm و R′=۲cm در نقطهٔ A مماس برون هستند. دو شعاع موازی و همجهت OM و O′M′ را در دو دایره رسم می‌کنیم. اگر S نقطهٔ برخورد MM′ با خط‌المرکزین OO′ باشد:

۱ـ طول پاره‌خط SO را تعیین کنید. در صورتی‌که شعاعهای OM و O′M′ به ترتیب حول نقطه‌های O و O′ به موازات یکدیگر دوران کنند، در مورد نقطهٔ S چه می‌توان گفت؟

۲ـ چهارضلعی AMPM′ که در آن P نقطهٔ تقاطع BM و CM′ (B و C به ترتیب انتهای دیگر قطرهایی از دو دایرهٔ (O) و (O′) می‌باشند که از نقطهٔ A می‌گذرند) است، چگونه است؟

۳ـ مکان هندسی نقطهٔ P ، همچنین مکان هندسی نقطهٔ N وسط پاره‌خط MM′ را وقتی دو شعاع OM و O′M′ به ترتیب حول نقطه‌های O و O′ و به موازات هم‌دوران کنند، تعیین کنید.

۴ـ اندازهٔ قطرهای چهارضلعی AMPM′ را در صورتی که $A\hat{O}M=۶۰^\circ$ باشد، همچنین مساحت این چهارضلعی را تعیین کنید.



● محمد هاشم رستمی

بی‌نهایت

● پرویز شهریاری

«بی‌نهایت»، به معنای سادهٔ خود در ریاضیات، یعنی بزرگتر از هر عددی؛ ولی خود بی‌نهایت، یک عدد نیست، یک مفهوم است و بیشتر، معرف یک کیفیت است تا کمیتی مشخص. به همین دلیل است که، تا مدتها، ریاضی‌دانان وارد در چند و چون بی‌نهایت نمی‌شدند و از کنار آن می‌گذشتند. وقتی زنون، ریاضی‌دان یونانی، برای اثبات یکپارچگی جهان و نبودن حرکت در آن، با درکی ساده‌اندیشانه از «بی‌نهایت» استفاده کرد، هراس ریاضی‌دانان یونانی را از بی‌نهایت، بیشتر کرد، چرا که می‌دیدند، با سوءاستفاده از آن، می‌توان حقیقت را وارونه جلوه داد.

تنها ریاضی‌دان دنیای کهن، که، برخلاف تفکر رایج زمان خود بی‌نهایت را، به مفهوم ریاضی آن (چه بی‌نهایت کوچک و چه بی‌نهایت بزرگ) بررسی کرد ارشمیدس بود. ارشمیدس، در نوشته‌های خود، از روشی استفاده می‌کند که، دو هزار سال بعد از او، منجر به کشف محاسبهٔ انتگرالی شد.

ساده‌ترین کاربرد این روش را در رسالهٔ «دربارهٔ اندازه‌گیری دایره» می‌بینیم. ارشمیدس در این رساله، برای نخستین بار در تاریخ ریاضیات، مسألهٔ اندازه‌گیری طول محیط دایره و تعیین مقدار تقریبی عدد پی (π) را مطرح می‌کند و، در ضمن، میزان خطای موجود را، در هر مرحله از محاسبه، به دست می‌دهد.

ارشمیدس، با محاسبهٔ محیط چند ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی، از دو سمت به محیط دایره نزدیک می‌شود. او از مثلث متساوی‌الاضلاع محاطی و محیطی آغاز می‌کند و، سپس، با دو برابر کردنهای متوالی تعداد ضلعها، خود را به ۹۶ ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی می‌رساند. قطر دایره را برابر واحد می‌گیرد و ثابت می‌کند، در این حالت، محیط ۹۶ ضلعی محاطی بیشتر از $۳\frac{۱۰}{۷۱}$ و محیط ۹۶ ضلعی محیطی کمتر از $۳\frac{۱}{۷}$ است، یعنی

$$۳\frac{۱۰}{۷۱} < \pi < ۳\frac{۱}{۷}$$

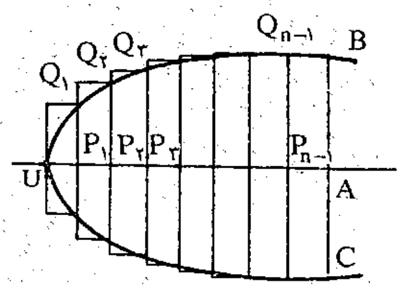
به این ترتیب، عدد $\frac{۲۲}{۷}$ را، به عنوان تقریب خوبی برای عدد π می‌پذیرد.

ارشمیدس که در رسالهٔ «دربارهٔ اندازه‌گیری دایره»، به محاسبهٔ محیط و مساحت دایره پرداخته است، در رسالهٔ دیگر خود به نام «دربارهٔ کره و استوانه»، به حالت فضایی، یعنی سطح و حجم کره توجه می‌کند و، با استفاده از همان روش خود، ثابت می‌کند: سطح کره برابر است با چهار برابر سطح دایرهٔ عظیمه و حجم کره، برابر است با چهار برابر حجم مخروطی که قاعدهٔ آن، دایرهٔ عظیمه‌ای از کره و ارتفاع آن برابر طول شعاع کره باشد.

ارشمیدس، در همین رساله، نتیجه‌های مهم و جالب دیگری هم به دست آورده است. به طور مثال ثابت می‌کند، اگر در یک استوانهٔ متساوی‌الساقین (استوانه‌ای که، در آن، طول ارتفاع با طول قطر قاعده برابر باشد)، کره‌ای محاط کنیم، سطح کل و حجم استوانه، برابر $\frac{۳}{۲}$ سطح و حجم کره می‌شود.

ارشمیدس در رسالهٔ «دربارهٔ کونوئیدها و سفه روئیدها»، از روشی استفاده می‌کند که خیلی نزدیک به روش انتگرال‌گیری

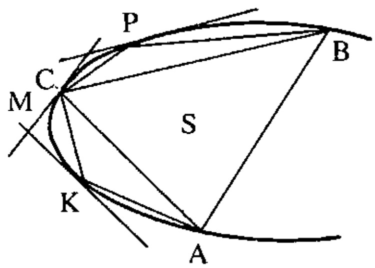
است. او به جسم‌هایی «کونوئید» می‌گفت که از دوران یک قطعه سهمی، دور محور خود به دست آیند، یعنی همان چیزی که امروز سهموی (پارابولوئید) نامیده می‌شود. باید گفت که، نامگذاری ارشمیدس از نامگذاری امروز ما بهتر است، زیرا «پارابولوئید» یعنی «شبه سهمی»، در حالی که یک حجم را نمی‌توان شبیه یک شکل مسطح دانست؛ ولی «کونوئید» یعنی «شبه مخروط». در واقع هم، جسم حاصل، به مخروط شباهت دارد.



(شکل ۱)

روش ارشمیدس را، برای پیدا کردن حجم کونوئیدی که، از دوران قطعه سهمی BOC دور محور OA، به دست می‌آید، می‌توان به این ترتیب شرح داد (شکل ۱) ارتفاع قطعه سهمی، یعنی OA را به بخش‌های برابر OP_1، P_1P_2، P_2P_3، ....، $P_{n-1}A$ تقسیم می‌کنیم. از نقطه‌های تقسیم، که تعداد آن‌ها برابر n است، عمودهای P_1Q_1، P_2Q_2، P_3Q_3، ....، $P_{n-1}Q_{n-1}$ را رسم می‌کنیم و آن طور که در شکل دیده می‌شود، مستطیل های محاطی و محیطی را می‌سازیم. اگر شکل را دور OA دوران دهیم، دوجسم پله‌ای به دست می‌آید که از استوانه‌های محاط در کونوئید و محیط بر آن به دست آمده‌اند. حجم جسم بیرونی بیشتر از حجم کونوئید و حجم جسم درونی کمتر از حجم کونوئید است، ارشمیدس، با آغاز از حجم این دو جسم، حجم کونوئید را به دست می‌آورد و، با زیاد کردن تعداد تقسیم‌ها (یعنی با میل n به سمت بی‌نهایت)، ثابت می‌کند، این حجم، برابر است با نصف حجم استوانه‌ای که ارتفاع آن برابر OA و شعاع قاعدهٔ آن برابر AB باشد.

ارشمیدس، در رسالهٔ «تربیع سهمی» (ساختن مربعی که مساحت آن، برابر با مساحت سهمی مفروض باشد)، از همین روش استفاده می‌کند. این رساله، به محاسبهٔ یک قطعه سهمی اختصاص دارد. فرض کنید، بخواهیم مساحت قطعه سهمی AMB را، که به وسیلهٔ وتر AB از سهمی جدا شده است، محاسبه کنیم (شکل ۲).



(شکل ۲)

استدلال ارشمیدس چنین است. مماسی موازی وتر AB بر سهمی رسم و نقطهٔ تماس C را به نقطه‌های A و B وصل می‌کنیم. مساحت مثلث ABC، از نصف مساحت قطعه سهمی AMB بیشتر است. در قطعه‌های تازهٔ AKC و CPB، شبیه آن‌چه دربارهٔ قطعه AMB انجام دادیم، عمل می‌کنیم، یعنی مثلث‌های AKC و CPB را می‌سازیم. شکل محاطی AKCPB به دست می‌آید. این روش ساختمان مثلث‌ها را ادامه می‌دهیم، چندضلعی محاطی، همراه با مساحت آن، مرتب بزرگتر و، مساحت آن، به مساحت قطعه سهمی نزدیکتر می‌شود. ارشمیدس ثابت کرد، مساحت مثلث ACB، چهار برابر مجموع مساحتهای دو مثلث AKC و CPB است و از آن جا که، همین وضع، برای مثلث‌های بعدی پیش می‌آید، و با توجه به این که، مجموع مساحت‌های همهٔ این مثلث‌ها، به مساحت قطعه سهمی نزدیک است، اگر مساحت مثلث ACB را S بنامیم، مساحت قطعه سهمی چنین می‌شود:

$$S+\frac{1}{4}S+\frac{1}{16}S+\frac{1}{64}S+\dots$$

ارشمیدس از «روح زمان» پیروی نکرد و سنتها را درهم شکست و راه درست بررسی را در محاسبهٔ مجموع جمله‌های یک «رشتهٔ بی‌پایان» نشان داد. در واقع ارشمیدس، از همان رهنمودی پیروی می‌کرد که سده‌های بعد، به وسیلهٔ دکارت تنظیم شد:

«وقتی می‌خواهیم موضوعی را بررسی کنیم، نباید در جست‌وجوی چیزی باشیم که دیگران می‌اندیشند و یا در گمان خودمان وجود دارد. باید چیزی را جست‌وجو کنیم که یا آشکارا و به روشنی دیده می‌شود و یا با استدلال قیاسی قابل اثبات است، چرا که دانش، از راه دیگری به دست نمی‌آید.»

نزدیک به دو هزار سال طول کشید تا ریاضی‌دانان توانستند راه ارشیمدس را دنبال کنند: «بی‌نهایت» را به رسمیت بشناسند

و، به جای فرار از آن، آن را به خدمت دانش درآورند. فرانسوا ویت، ریاضی‌دان فرانسوی سدهٔ شانزدهم، حاصل ضرب بی‌پایان زیر را، برای محاسبهٔ عدد π پیشنهاد کرد:

$$\sqrt{\frac{۱}{۲}} \times \sqrt{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۱}{۲}}} \times \ldots = \frac{۲}{\pi}$$

و والیس، ریاضی‌دان انگلیسی سدهٔ هفدهم، این ضرب بی‌پایان را:

$$\frac{۲}{۱}\times\frac{۲}{۳}\times\frac{۴}{۳}\times\frac{۴}{۵}\times\frac{۶}{۵}\times\frac{۶}{۷}\times\ldots=\frac{\pi}{۲}$$

در رابطهٔ والیس، به این نکتهٔ جالب توجه کنید که از ضرب عددهای گویا، وقتی تعداد آن‌ها بی‌نهایت است، ممکن است عدد گنگ (و در این جا «غیر جبری») به دست آید، چیزی که هرگز برای ضرب تعداد محدودی عدد گویا، پیش نمی‌آید.

سرانجام، نیوتون و لایب نیتس، با کشف محاسبهٔ دیفرانسیلی و انتگرالی و به خدمت گرفتن «بی‌نهایت کوچک‌ها» و «بی‌نهایت بزرگ‌ها»، دگرگونی عظیمی در پیشرفت ریاضیات، و به دنبال آن در همهٔ دانشها، به وجود آوردند.

این را هم نگفته نگذاریم که هگل، فیلسوف آلمانی، برای نخستین بار، مفهوم فلسفی بی‌نهایت را مورد تجزیه و تحلیل قرار داد و بستگی ذاتی «بی‌نهایت» را با «نهایت» و «نامحدود» را با «محدود» نشان داد.

□

بی‌نهایت، یکی از ویژگی‌های فضا و زمان است و می‌توان آن را به یاری ریاضیات و کیهان‌شناسی مورد بررسی قرار داد. تا آن‌جا که دانش امروز نشان می‌دهد، جهان مادی، که به عنوان پراکندگی جرم در فضا و زمان شناخته می‌شود، نامحدود است. البته، بسته به دستگاهی که برای محاسبه انتخاب می‌شود، می‌توان «فضا ــ زمان» را متناهی یا نامتناهی در نظر گرفت. بی‌نهایت، بازتابی از واقعیت است و، بنابراین، با تکیه بر واقعیت، می‌توان آن را درک و تحلیل کرد.

مفهوم «بی‌نهایت» ریاضی، تنها وقتی قابل درک است که آن را، در وحدت منطقی با «نهایت» مورد بررسی قرار دهیم. بنابراین، «بی‌نهایت» در ذات خود متضاد است و از بین بردن این تضاد، یعنی نفی بی‌نهایت. ولی، از طرف دیگر، می‌دانیم، در هر نظریهٔ ریاضی، بی‌تناقضی در رابطه‌های صوری مربوط به آن، از ضروریات است. چگونه می‌توان، ضرورت بی‌تناقضی را با ویژگی متناقض بی‌نهایت آشتی داد؟ در واقع، وقتی مثلاً در نظریهٔ حد، از حد بی‌نهایت ($a_n = \infty$ حد) و یا در نظریهٔ مجموعه‌ها از توان بی‌نهایت صحبت می‌کنیم، تنها به این دلیل، دچار تناقض نمی‌شویم که، این‌ها، تنها صورت‌های ویژهٔ کاملاً ساده شده‌ای از مفهوم بی‌نهایت‌اند و تنها طرحی، تصویری و جنبه‌ای از مفهوم بی‌نهایت جهان واقعی را بازتاب می‌دهند.

□

بی‌نهایت، یعنی بزرگتر از هر عدد دلخواه و، بنابراین، در همان حال که با مفهوم «کمیت» و «عدد» بستگی دارد، نمی‌توان آن را یک عدد به حساب آورد. از همین جاست که قانون‌های مربوط به عمل، در حالتی که با مجموع یا حاصل ضرب بی‌نهایت جمله سر و کار داریم، همیشه با قانون‌های دربارهٔ جمع و ضرب عادی تطبیق نمی‌کند. قانون‌های عمل، در قلمرو بی‌نهایت‌ها، در همان حال که با استدلال‌های قیاسی به دست می‌آیند، باید با تجربه و با قانونمندی‌های حاکم بر طبیعت هم سازگار باشند. به این دو مثال توجه کنید:

دو متحرک A و B را در نظر می‌گیریم که به فاصلهٔ a متر از یکدیگر قرار دارند و هر دو، در یک لحظه، به طرف یکدیگر حرکت می‌کنند: A با سرعت ۳ متر در ثانیه و B با سرعت ۱ متر در ثانیه. هر بار که A و B به هم می‌رسند، A بلافاصله به طرف مبدأ حرکت خود برمی‌گردد و با رسیدن به آن، دوباره به طرف B می‌رود. این گونه رفت و آمد A، آن قدر ادامه پیدا می‌کند تا B، تمامی فاصلهٔ a متر را بپیماید. می‌خواهیم بدانیم، A چند متر راه رفته است.

راه حل بسیار ساده است. سرعت A سه برابر سرعت B است و، بنابراین، اگر در تمام مدت حرکت B، در راه باشد، مسافتی به اندازهٔ سه برابر B می‌پیماید. B، به اندازهٔ a متر راه رفته است. در نتیجه، مسافتی که A پیموده، برابر است با ۳a متر.

ولی اگر مسأله را، مرحله به مرحله حل کنیم و ببینیم، متحرک A در هر رفت و برگشت چند متر پیموده است و، از مجموع آن‌ها، مسافتی را پیدا کنیم که A پیموده است، به مجموع بی‌پایان زیر می‌رسیم:

$$\left(\frac{۳a}{۴}+\frac{۳a}{۴}\right)+\left(\frac{۳a}{۸}+\frac{۳a}{۸}\right)+\left(\frac{۳a}{۱۶}+\frac{۳a}{۱۶}\right)+\ldots=$$

$$=۲\left(\frac{۳a}{۴}+\frac{۳a}{۸}+\frac{۳a}{۱۶}+\cdots\right)=$$

$$=\frac{۳a}{۲}\left(۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+...\right)=\frac{۳a}{۲}\times ۲=۳a$$

و این، همان پاسخی است که در آغاز و به سادگی به دست آورده بودیم. واقعیت و عمل، درستی حد مجموع جمله‌های تصاعد هندسی نزولی بی‌پایان را تأیید می‌کند :

$$۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+...=۲$$

مثال دوم : قیمت هر چهار بطری خالی شیر را، برابر با قیمت یک بطری پر از شیر فرض می‌کنیم. می‌خواهیم بدانیم، با پولی که برای ۱۲ بطری پر از شیر می‌پردازیم، چقدر شیر (بدون بطری) می‌توانیم داشته باشیم؟

۱۲ بطری شیر را در ظرفی خالی می‌کنیم، شیشه‌های خالی را به فروشگاه می‌دهیم و ۳ بطری پر از شیر می‌گیریم. اگر ۳ بطری خالی را پس بدهید، باید $\frac{۳}{۴}$ بطری پر به شما بدهند (فرض را بر عملی بودن این دادوستد می‌گیریم). با پس دادن $\frac{۳}{۴}$ بطری خالی، $\frac{۳}{۱۶}$ بطری پر می‌گیرید و غیره. اگر واحد اندازه‌گیری مقدار شیری را که در اختیار شماست، یک بطری بگیریم، مقدار آن چنین خواهد شد :

$$۱۲+۳+\frac{۳}{۴}+\frac{۳}{۱۶}+\frac{۳}{۶۴}+...=$$
$$=۱۵+۳\left(\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۶۴}+...\right)=$$
$$=۱۵+۳\times\frac{۱}{۳}=۱۵+۱=۱۶$$

ولی شما می‌توانستید به ترتیب دیگری استدلال و مسأله را، به صورتی حل کنید که، در عمل، ممکن است : در مرحلهٔ اول ۱۲ بطری خالی را با سه بطری پر عوض می‌کنید. در مرحلهٔ دوم، یک بطری پر از فروشگاه به امانت می‌گیرید، آن را در ظرف خود خالی می‌کنید و همراه با سه بطری خالی قبلی (که اکنون روی هم ۴ بطری خالی شده‌اند)، وام خود را به فروشگاه می‌پردازید (ارزش ۴ بطری خالی، با ارزش یک بطری پر برابر است). به این ترتیب، شما به اندازهٔ

$$۱۲+۳+۱=۱۶$$

بطری شیر در اختیار دارید. و این، همان پاسخ قبلی است. باز هم واقعیت و عمل، نظریهٔ ریاضی را تأیید کرد.

□

اقلیدس، در «مقدمات» مشهور خود، این اصل را، به عنوان حکمی بدیهی پذیرفته است :« کل از هر جزء خود بزرگتر است». در منطق ارسطویی که هنوز هم بر منطق کلاسیک حکومت می‌کند، کل و جزء را این طور تعریف می‌کنند :

«کل آن است که شامل همهٔ جزء‌های خود باشد».

«جزء آن است که بخشی از کل را شامل شود».

ولی ژرژ کانتور، مبتکر نظریهٔ مجموعه‌ها، روشن کرد که اصل اقلیدس، در قلمرو بی‌نهایت‌ها، همیشه و همه جا درست نیست. به عنوان نمونه، مجموعهٔ عددهای طبیعی و مجموعهٔ عددهای فرد طبیعی را در نظر می‌گیریم. روشن است که عددهای فرد طبیعی، بخشی (یا به زبان ریاضی : زیرمجموعه‌ای) از مجموعهٔ عددهای طبیعی است. ولی آیا تعداد عددهای فرد طبیعی، از تعداد همهٔ عددهای طبیعی، کمتر است؟ عددهای فرد طبیعی را در یک سطر و عددهای طبیعی را زیر آن‌ها می‌نویسیم :

$$\begin{array}{cccccccc} ۱ & ۳ & ۵ & ۷ & ۹ & \cdots & ۲n+۱ & \cdots \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & \cdots & n+۱ & \cdots \end{array}$$

در برابر هر عدد فرد، یک عدد طبیعی و در برابر هر عدد طبیعی یک عدد فرد وجود دارد و، اگر به زبان کانتور بگوییم، بین عددهای فرد طبیعی و همهٔ عددهای طبیعی، تناظر یک به یک برقرار است. به طور مثال عدد فرد ۱۳۷۵، متناظر با عدد طبیعی ۶۸۷ و عدد طبیعی ۹۹۸ متناظر با عدد فرد ۱۹۹۷ است. به این ترتیب، تعداد عددهای فرد، نه کمتر از تعداد عددهای طبیعی است و نه بیشتر از آن. کل با جزء خود برابر شد. می‌بینیم، وقتی گام به قلمرو بی‌نهایت‌ها می‌گذاریم، یک «اصل بدیهی» هم می‌تواند قدرت قانونی خود را از دست بدهد. شاید بتوان، این اصل را، به صورت زیر کامل کرد :« کل محدود، از هر جزء خود بزرگتر است» و، البته، اگر با کل نامحدود سر و کار داشته باشیم، ممکن است از جزء خود بزرگتر نباشد.

در جمع عددهای گویا، به شرطی که هم جمله‌های جمع و هم مجموع آنها را، کسرهای ساده نشدنی در نظر بگیریم، در مخرج کسر حاصل جمع، نمی‌تواند عاملی تازه، غیر از عامل‌هایی که در مخرج جمله‌های جمع وجود دارد، پدیدار شود. برای مثال از جمع $\frac{۱}{۳}$ با $\frac{۱}{۵}$، نمی‌توان به کسری ساده نشدنی رسید که، در مخرج آن، عاملی غیر از ۳ و ۵ وجود داشته باشد. ولی به این مجموع بی‌پایان توجه کنید :

$$\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۲۵}+\frac{۱}{۱۲۵}+...=\frac{۱}{۴}$$

در مخرجهای جمله‌های جمع، تنها عامل ۵ وجود دارد، درحالی که در مخرج کسر حاصل جمع، عامل ۲ ظاهر شده

است.

در مجموع‌های محدود، با تغییر گروه‌بندی عددها، تغییری در حاصل جمع پدید نمی‌آید. برای مثال

$$1+2+3+5=1+(2+3+5)=(1+2)+(3+5)=11$$

در حالی که، در مجموع‌های بی‌پایان، ممکن است تغییر گروه‌بندی جمله‌ها، منجر به تغییر مقدار مجموع شود. مجموع

$$S=1-1+1-1+1....$$

را در ریاضیات نامعین می‌دانند (به اصطلاح ریاضی، رشته‌ای واگرا یا متباعد است، یعنی مجموع جمله‌های آن، به سمت هیچ عدد مشخصی نزدیک نمی‌شود). ولی اگر از قانون‌های عادی استفاده کنیم، می‌توانیم این طور بنویسیم:

$$S=(1-1)+(1-1)+(1-1)+...=0$$

و یا این‌طور

$$S=1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-...=1$$

و یا سرانجام

$$S=1-(1-1+1-1+...)=1-S$$

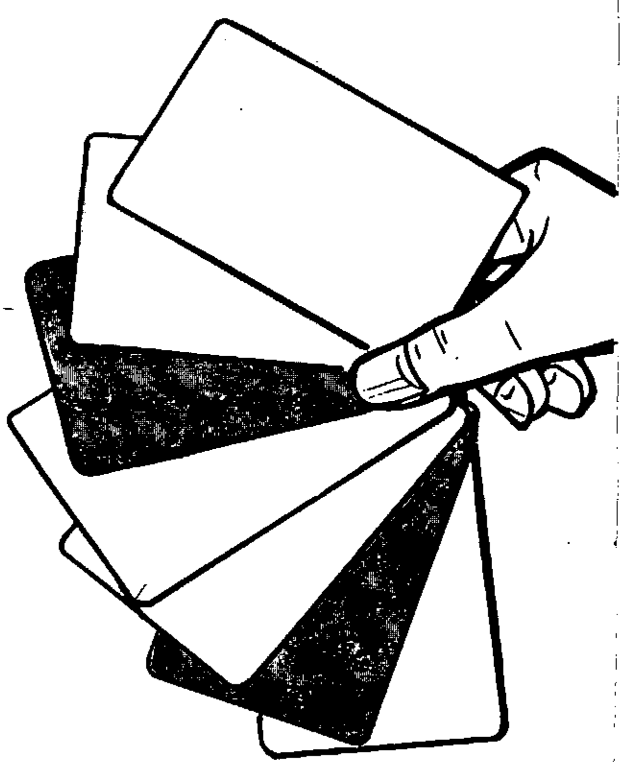
که از آن‌جا به دست می‌آید: $S=\frac{1}{2}$ (شگفتا! از مجموع عددهای درست، عددی کسری حاصل می‌شود).

در این‌جا، برخی از ساده‌ترین جنبه‌های مربوط به «بی‌نهایت» را، در مرزهایی که از ساده‌ترین و مقدماتی‌ترین روش‌های ریاضی خارج نشویم، فهرست‌وار بررسی کردیم. والا، «بحث مربوط به بی‌نهایت»، همچون خود «بی‌نهایت» پایانی ندارد.

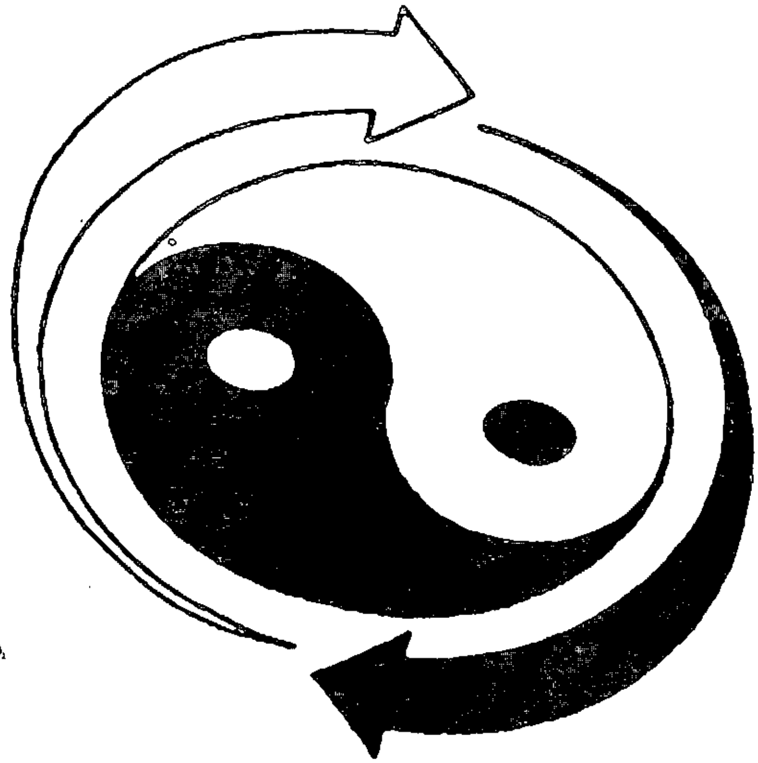
نماد «∞» برای «بی‌نهایت»، برای نخستین بار در سال ۱۶۵۵ میلادی در نوشته‌های جون والیس (۱۶۱۶ ـ ۱۷۰۳ میلادی)، ریاضی‌دان انگلیسی و به ویژه در کتاب «حساب بی‌نهایت» او به کار رفت و از آن پس به تدریج همگانی شد.

تفریح اندیشهٔ ۴

علی تعداد زیادی کارت رنگی در اختیار دارد. هر رنگ با شماره‌ای مشخص می‌شود، بدین ترتیب که: رنگ زرد، ۲؛ رنگ آبی، ۵؛ رنگ سرخ، ۳؛ رنگ بنفش، ۷. سعید مقداری از کارتها را جدا کرد. حاصلضرب شمارهٔ کارتها ۷۰۵۶۰ شد. از هر رنگ به چه تعداد انتخاب کرده است؟



جواب در صفحه ۸۶



ماکزیمم و مینیمم

● امیرمنصور خان محمّد و مجید اعتماد سعید
(دبیرستان سروش)

بحث ماکزیمم و مینیمم یکی از جالب‌ترین و کارامدترین مباحث ریاضی است که در تمامی شاخه‌های ریاضی چون هندسه، جبر و ... کارآمد است و به کمک آن می‌توان مسایل متعددی در زمینه‌های مختلف ریاضی حل کرده و به نتایج جالبی دست یافت.

◄ تعریف:

گویند تابع به معادله $y=f(x)$ به ازای $x=a$ ماکزیمم نسبی است به شرطی که برای مقادیر بسیار کوچک α داشته باشیم:

$$f(a+\alpha)<f(a)\ ,\ \ f(a-\alpha)<f(a)$$

در واقع در منحنی نمایش تغییرات $y=f(x)$ عرض نقطه‌ای که به ازای $x=a$ به‌دست آمده است از نقاط مجاور بیشتر است. همچنین تابع به معادله $y=f(x)$ به ازای $x=b$ مینیمم نسبی است وقتی که برای مقادیر بسیار کوچک α داشته باشیم:

$$f(b+\alpha)>f(b)\ ,\ \ f(b-\alpha)>f(b)$$

وقتی که می‌گوییم تابع $y=f(x)$ در فاصلهٔ $a\le x\le b$ به ازای $x=m$ ماکزیمم مطلق یا مینیمم مطلق است به این معناست که به ازای $x=m$ حداکثر یا حداقل مقدار برای y به دست می‌آید.

به زبان ساده‌تر اگر عبارت جبری $P(x,y,\cdots,z)$ و مقدار معین m وجود داشته باشد که نابرابری $P\le m$ به ازای هر مقدار دلخواه متغیرها برقرار باشد در این صورت مقدار m را ماکزیمم مطلق عبارت P گویند. و اگر نابرابری $P\ge m$ برقرار شود m را مینیمم مطلق عبارت P نامند.

◄ قضایای ماکزیمم حاصلضرب:

برای حل ماکزیمم و مینیمم معمولاً به قضایایی رجوع می‌شود که در این باره ارائه شده‌اند. اکنون به ذکر و اثبات آنها می‌پردازیم:

۱ــ اگر مجموع چند متغیر مقدار ثابت باشد حاصلضرب آنها وقتی ماکزیمم است که آن متغیرها با هم برابر باشند.

اثبات اوّل: فرض کنیم n متغیر مثبت x ، y ، z ، ...، و t مجموع ثابتی داشته باشند:

$$x+y+z+\cdots+t=na$$

همان متغیرها را به‌صورت حاصل‌ضرب در نظر می‌گیریم:

$$P=xyz\cdots t$$

چون مجموع را na گرفته‌ایم وقتی که این متغیرها برابر نباشند لااقل یکی از آنها از a بزرگتر و یکی دیگر از a کوچکتر است. اگر $x>a$ و $y<a$ باشد و فرض کنیم $x=a+\alpha$ حاصلضرب:

$$P_1=a(y+\alpha)z\ldots t$$

همان مجموع na را داراست یعنی باز هم مجموع آنها مقدار ثابتی است. (چون از x به اندازهٔ α کم کرده‌ایم و به y به همان اندازه افزوده‌ایم.)

حال عبارت $P_1 - P$ را تشکیل می‌دهیم:

$$P_1 - P = Z \ldots t[a(y+\alpha) - (a+\alpha)y]$$

$$P_1 - P = Z \ldots t[(a-y)\alpha]$$

مقدار داخل کروشه مثبت است زیرا فرض کردیم $y < a$ باشد بنابراین داریم:

$$P_1 - P > 0 \Rightarrow P_1 > P$$

معلوم شد که اگر یکی از متغیرها برابر a شود حاصل‌ضرب بزرگ می‌شود. با این استدلال درمی‌یابیم که اگر همهٔ متغیرها برابر با a شوند حاصل‌ضرب حداکثر خواهد بود.

۲ـ اگر x ، y ، z ، ... و t متغیرهای مثبت به مجموع ثابت باشند حاصلضرب

$$x^m . y^n . z^p . \ldots . t^q$$

وقتی ماکزیمم است که داشته باشیم:

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p} = \cdots = \frac{t}{q}$$

(این قضیه در حقیقت تعمیم‌یافته ای از قضیهٔ قبل است.)

اثبات دوم: مقادیری از x ، y ، z ، ... و t که عبارت $x^m . y^n . z^p . \ldots . t^q$ را ماکزیمم کنند عبارت $\frac{x^m}{m^m} . \frac{y^n}{n^n} . \frac{z^p}{p^p} \ldots \frac{t^q}{q^q}$ را هم ماکزیمم خواهند کرد، ولی عبارت اخیر را می توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\left(\frac{x}{m}.\frac{x}{m}\ldots\frac{x}{m}\right)\left(\frac{y}{n}.\frac{y}{n}\ldots\frac{y}{n}\right)\left(\frac{z}{p}.\frac{z}{p}\ldots\frac{z}{p}\right)\ldots\left(\frac{t}{q}.\frac{t}{q}\ldots\frac{t}{q}\right)$$

این عبارت شامل $m+n+p+\cdots+q$ جملهٔ مثبت است که شامل m جملهٔ شامل $\frac{x}{m}$، n جملهٔ شامل $\frac{y}{n}$، p جملهٔ شامل $\frac{z}{p}$، ... و q جملهٔ شامل $\frac{t}{q}$ است و بنابراین مجموع آنها برابر است با:

$$m \times \frac{x}{m} + n \times \frac{y}{n} + p \times \frac{z}{p} + \cdots + q \times \frac{t}{q} = x + y + z + \cdots + t$$

که این مقدار ثابت است. پس بر طبق قضیهٔ ۱ وقتی ماکزیمم است که:

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p} = \cdots = \frac{t}{q}$$

مثال:

۱ـ اگر α ، β ، θ سه زاویهٔ حاده و مثبت به مجموع $\frac{\pi}{2}$ باشند، ماکزیمم عبارت $y = tg\alpha tg\beta tg\theta$ را به‌دست آورید.

حل:

$$\alpha + \beta + \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow tg\alpha tg\beta + tg\beta tg\theta + tg\theta tg\alpha = 1$$

این حاصل جمع سه عامل برابر مقدار ثابت ۱ است پس حاصل‌ضرب آنها وقتی ماکزیمم است که

$$tg\alpha tg\beta = tg\beta tg\theta = tg\theta tg\alpha$$

که درنتیجه حاصل می‌شود:

$$\alpha = \beta = \theta = \frac{\pi}{6}$$

به ازای این مقادیر عبارت $tg^2\alpha tg^2\beta tg^2\theta$ ماکزیمم خواهد بود و چون $tg\alpha$ و $tg\beta$ و $tg\theta$ مثبت هستند هنگامی که این عبارت ماکزیمم باشد عبارت زیر هم ماکزیمم است.

$$y = tg\alpha, tg\beta, tg\theta$$

$$Max(y) = (tg^3 \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

۲ـ پاره‌خط $AB = a$ را به سه قسمت چنان تقسیم کنید که حاصل‌ضرب قطعهٔ اوّل در مربع قطعهٔ دوّم در مکعب قطعه سوّم ماکزیمم باشد.

حل: اگر سه قطعه را x ، y ، z فرض کنیم مطلوبست ماکزیمم xy^2x^3 و چون $x+y+z=a$ مقداری است ثابت، بنابراین، ماکزیمم وقتی حاصل می‌شود که داشته باشیم:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

یعنی باید پاره خط را به نسبتهای ۱ و ۲ و ۳ تقسیم کنیم در این صورت مقادیر قطعه ها از دستگاه زیر به‌دست می‌آید.

$$\begin{cases} \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \\ x+y+z=a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{6} \\ y = \frac{a}{3} \\ z = \frac{a}{2} \end{cases}$$

و مقدار ماکزیمم مساوی $\frac{a^6}{432}$ خواهد بود.

قضایای مینیمم مجموع:

۳ـ اگر حاصل‌ضرب چند متغیر مثبت مقدار ثابتی باشد مجموع آنها وقتی مینیمم است که این متغیرها با هم برابر باشند.

اثبات سوم: فرض می‌کنیم که داشته باشیم :

$x.y.z.\ldots.t = a^n$

اگر همهٔ متغیرها برابر a نباشند لااقل یکی از آنها از a بزرگتر و دیگری از a کوچکتر است. با شرط $(q>1)$ و این‌که $x = aq$

$x > a$ و $y < a$، می‌توان داشت :

در این صورت اگر مجموع متغیرها را S بگیریم داریم :

$S = aq + y + z + \ldots + t$

اولین جمله را مساوی a می‌گیریم و برای این‌که حاصل‌ضرب متغیرها تغییر نکند بجای جملهٔ دوم $\frac{y}{q}$ می‌گیریم :

$$S' = a + \frac{y}{q} + z + \cdots + t$$

در این صورت داریم :

$$S - S' = a(q-1) + y(1 - \frac{1}{q})$$

که با توجه به این‌که $q > 1$ فرض شد $S - S' > 0$ و درنتیجه $S > S'$ می‌شود.

به این ترتیب اگر یکی از متغیرها را برابر a بگیریم مجموع کوچک می‌شود و اگر این استدلال را ادامه دهیم درحالتی که همهٔ متغیرها برابر a باشند مینیمم مجموع به‌دست می‌آید.

۴ـ اگر برای متغیرهای مثبت x، y، z، ... و t حاصلضرب $x^{\alpha}.y^{\beta}.z^{\gamma}.\ldots.t^{\lambda}$ مقدار ثابتی باشد، مجموع آنها وقتی مینیمم است که داشته باشیم :

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \cdots = \frac{t}{\lambda}$$

اثبات چهارم[1] : وقتی که حاصلضرب $x^{\alpha}.y^{\beta}.z^{\gamma}.\ldots.t^{\lambda}$ ثابت باشد حاصلضرب

$$(\frac{x}{\alpha})^{\alpha}.(\frac{y}{\beta})^{\beta}.(\frac{z}{\gamma})^{\gamma}.\ldots.(\frac{t}{\lambda})^{\lambda}$$

نیز ثابت خواهد بود. در عبارت اخیر $(\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda)$ عامل وجود دارد.

α عامل مساوی $\frac{x}{\alpha}$، β عامل مساوی $\frac{y}{\beta}$، ...، λ عامل مساوی $\frac{t}{\lambda}$. پس مجموع آنها برابر است با :

$$\alpha.\frac{x}{\alpha} + \beta.\frac{y}{\beta} + \gamma.\frac{z}{\gamma} + \cdots + \lambda.\frac{t}{\lambda} =$$

$$x + y + z + \ldots + t$$

که در حالت تساوی آنها مینیمم می‌شود یعنی :

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \cdots = \frac{t}{\lambda}$$

مثال:

۳ـ از بین چهارضلعی‌های محاطی با سطح ثابت، محیط کدامیک مینیمم است؟

حل:

اگر اضلاع چهارضلعی را a، b، c، d و محیط آن‌را 2P فرض کنیم باید مینیمم عبارت زیر را پیدا کنیم :

$$2P = a + b + c + d =$$

$$(p-a) + (p-b) + (p-c) + (p-d)$$

ولی می‌دانیم :

$$S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$$

پس چهار متغیر مثبت دارای حاصل‌ضرب ثابت هستند پس حاصل جمع وقتی مینیمم است که داشته باشیم :

$$p-a = p-b = p-c = p-d \Rightarrow a = b = c = d$$

پس چهارضلعی جواب مربع است.

۱ـ این قضایا به ویژه قضایای ۱ و ۳ از راههای مختلفی اثبات می‌شوند. از جمله با استفاده از اتحادها، نابرابریها، جبر تحلیلی، ... .
در اینجا یکی از اثباتها را که به کمک نابرابری واسطه های حسابی و هندسی ارائه شده است می‌آوریم :

اثبات : بر طبق نابرابری فوق برای هر چند متغیر مثبت داریم :

$x_1.x_2.x_3.\ldots.x_n = a \Leftrightarrow$

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}$$

قضیهٔ ۱: $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = a \Leftrightarrow x_1.x_2.\ldots.x_n \leq (\frac{a}{n})^n$ و $x_i > 0$ و چون برابری (یعنی حداکثر مقدار) وقتی به‌وقوع می‌پیوندد که متغیرها برابر باشند قضیه ثابت است.

قضیهٔ ۲: $x_1.x_2.\ldots.x_n = b \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n \geq n\sqrt[n]{b}$ و $x_i > 0$ تذکر این‌که این نابرابری به کمک روش استقرای ریاضی قابل استفاده و اثبات است.

۴ــ بدون استفاده از مشتق معلوم کنید که تابع $y=\frac{x^m+a}{x^n}$ به فرض $m>n$ به ازای چه مقدار از x ماکزیمم یا مینیمم است و مقدار این ماکزیمم یا مینیمم را به‌دست آورید.

حل: برای حل، تابع را به‌صورت $y=x^{m-n}+\frac{a}{x^n}$ می‌نویسیم و چون حاصلضرب

$$(x^{m-n})^n\times(\frac{a}{x^n})^{m-n}=a^{m-n}$$

مقدار ثابت است پس مجموع دو عامل x^{m-n} و $\frac{a}{x^n}$ یعنی y وقتی مینیمم است که:

$$\frac{x^{m-n}}{n}=\frac{\frac{a}{x^n}}{m-n}\Rightarrow x=\sqrt[m]{\frac{an}{m-n}}$$

و با توجه به این مقدار از x، مینیمم y مشخص می‌شود:

$$y=\frac{m}{n}\sqrt[m]{\frac{(an)^{m-n}}{(m-n)^{m-n}}}$$

تذکر: این مسایل حالت کلی مسایل مختلفی است که با این روش حل می‌شوند. از این‌رو از آن مانند بسیاری از حالات کلی حل مسایل به عنوان فرمول ذکر می شود.

◀ ماکزیمم و مینیمم در هندسه:

برخلاف آنچه که در ابتدا به نظر می رسد، ماکزیمم و مینیمم تنها در تابع و بدست آوردن مقدار عددی کاربرد ندارند بلکه همانطور که در ابتدا ذکر شد در موارد زیادی وارد می‌شوند. از آنجا که از این موارد هندسه بیش از همه نقش دارد و مسایل مطرح در این زمینه بسیار زیاد است، این بخش نیز به مقاله اضافه شد.

طبق سنت کهن هندسه ابتدا مسایل مهمی از آن، که برخورد زیادی با آنها خواهیم داشت را به‌عنوان قضیه مطرح می کنیم:

۱ــ مساحت مثلث قایم‌الزاویه با وتر مفروض، وقتی به حداکثر مقدار خود می‌رسد که مثلث متساوی‌الساقین باشد.

اثبات:

a را طول وتر، x را طول یک ضلع و y را طول ضلع دیگر فرض می کنیم. معلوم است که:

$$a^2=x^2+y^2$$

پس مجموع دو متغیر x^2 و y^2 مقدار ثابت a^2 است.

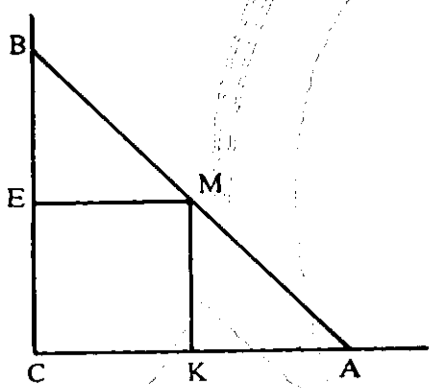
$$S=\frac{1}{2}xy\Rightarrow 4s^2=x^2y^2$$

مشخص است که ماکزیمم S با ماکزیمم $4S^2$ همراه است و $4S^2$ وقتی ماکزیمم است که:

$$x^2=y^2\Rightarrow x=y$$

پس مثلث مورد سؤال مثلث قایم‌الزاویه‌ای است که متساوی‌الساقین است.

۲ــ از رأس M در مربع CEMK خط راستی بگذرانید که خط‌های راست CK و CE را در نقطه‌های A و B قطع کند و مساحت مثلث ABC حداقل مقدار ممکن باشد.



اثبات:

ضلع مربع مفروض را واحد می‌گیریم. طول پاره‌خط AK را x می‌گیریم. چون مثلثهای ΔAMK و ΔBEM متشابهند، پس داریم $BE=\frac{1}{x}$. واضح است که:

$$S(A\hat{B}C)=\frac{1}{2}BC.AC$$

$$=\frac{1}{2}(x+1)(1+\frac{1}{x})=1+\frac{1}{2}(x+\frac{1}{x})$$

با توجه به رابطه، مینیمم $S(A\hat{B}C)$ همراه با مینیمم $x+\frac{1}{x}$ است. چون حاصلضرب این دو مساوی مقدار ثابت ۱ است پس حاصل جمع وقتی مینیمم است که $x=\frac{1}{x}$ باشد که درنتیجه داریم: $x=1$

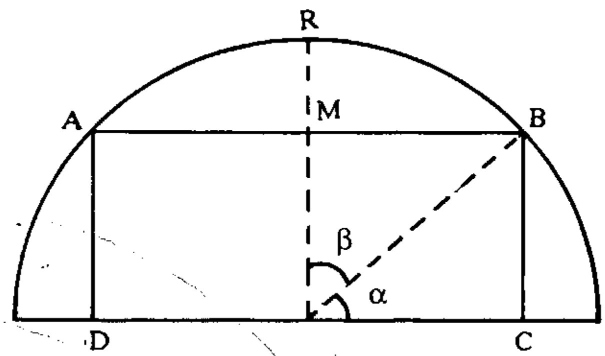
پس باید مثلث ABC متساوی‌الساقین باشد.

۳ــ در نیم‌دایرهٔ مفروض، مستطیل ABCD را با حداکثر مساحت محاط کنید.

اثبات:

واضح است که مستطیل مذکور نسبت به قطر عمود متقارن است. پس در هر ربع دایره مستطیلهای دیگری پدید

می‌آید که ما دنبال ماکزیمم آنها نیز هستیم. اگر از B به O وصل کنیم زوایای α و β حاصل می‌شود.



اگر γ شعاع دایره باشند واضح است که:

$$\left.\begin{array}{l} BC=\gamma\sin\alpha \\ BM=\gamma\sin\beta \\ \beta=\frac{\pi}{۲}-\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow BC^{۲}+OC^{۲}=\gamma^{۲}$$

پس مجموع این دو متغیر مقدار ثابت است.

$$S(OCBM)=OC.BC$$

مشخص است که ماکزیمم $OC.BC$ با ماکزیمم $OC^{۲}.OB^{۲}$ همراه است. بر طبق قضیه چون حاصل جمع آن دو ثابت است حاصلضرب وقتی ماکزیمم است که برابر باشند:

$$BC=OC \Rightarrow \frac{AB}{BC}=۲$$

◀ ماکزیمم و مینیمم در فیزیک:

ماکزیمم و مینیمم در فیزیک و به‌خصوص در مکانیک نقش بسیاری بازی می‌کند. این قسمت حتی می‌تواند به ما نشان دهد که این بحث درزندگی روزمره نیز کاراست. در اینجا به حل مسأله‌ای جالب از این دست می‌پردازیم:

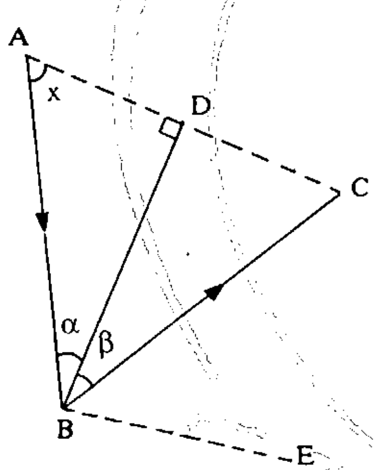
◀ مقابله با باد مخالف:

برای اینکه یک قایق بادبانی، با حداکثر سرعت به سمت شمال حرکت کند، چگونه باید با باد شمال مقابله کند؟

در اینجا به حل این مسأله می‌پردازیم ونشان می‌دهیم که مقابله با باد مخالف یعنی چه و یک قایق بادبانی چگونه در جهت مخالف باد حرکت می‌کند؟

(برای روشن بودن موقعیت فرض می‌کنیم که باد به‌طور مداوم از شمال بوزد:) در شکل جهت حرکت باد را با بردار $\vec{AB}$ و جهت حرکت قایق را با بردار $\vec{BC}$ نشان داده‌ایم. $\vec{BC}$ مسیر قایق را مشخص می کند. قایقران می‌تواند با استفاده از سکان و دیرک کف قایق آن را در این مسیر نگه دارد. برای این که نیروی باد از طریق بادبان به قایق منتقل شود و آن را در جهت BC به حرکت درآورد بادبان را در راستای BD در نظر گرفته‌ایم. جهت بادبان هم بوسیلهٔ قایقران کنترل می‌شود. مسأله این است: جهت‌های BD و BC برای بادبان و مسیر قایق چگونه باشند تا قایق با حداکثر سرعت ممکن به سمت شمال حرکت کند؟

(هر خواننده‌ای که با قایق‌رانی آشنایی داشته باشد متوجه می‌شود که ما در اینجا مسأله را ساده کرده‌ایم و بسیاری از جنبه‌های آن‌را کنار گذاشته‌ایم. درواقع با این ساده کردن خواسته‌ایم به نخستین مرحله از حل مسأله نزدیک شویم.)

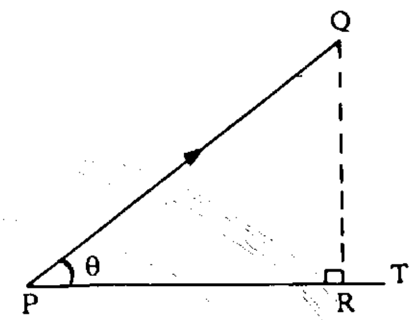


نکتهٔ مهم در اینجا داشتن تصور دوستی از مؤلفه‌های نیرو وسرعت است. اگر نیروی F را با بردار $\vec{PQ}$ نشان دهیم آن‌وقت مؤلفهٔ این نیرو در راستای PT با تصویر PQ بر PT نشان داده می‌شود ($\vec{PR}$). اندازهٔ این مؤلفه به زبان سادهٔ مثلثاتی برابر است با $F.\cos\theta$ که در آن θ برابر است با زاویهٔ بین نیرو و مؤلفه. مؤلفهٔ سرعت را هم می‌توان به همان طریق تقسیم کرد. در شکل اول زاویه های $A\hat{B}D$ و $D\hat{B}C$ را به ترتیب α و β می‌نامیم. اگر نیروی باد را با f نشان دهیم ضربهٔ باد بر بادبان عبارت است از مؤلفهٔ F در راستای AD، عمود بر بادبان. این مؤلفه برابر است با:

$$f.\cos\lambda = f.\cos(۹۰^\circ-\alpha)=f.\sin\alpha$$

نیروی $F.\sin\alpha$ جز این که قایق را در جهت BC به حرکت درآورد اثر دیگری ندارد. بنابراین باید مؤلفهٔ $F.\sin\alpha$ را در راستای BC پیدا کنیم. زاویه بین AD (امتداد $F.\sin\alpha$) و BC(امتداد مسیر قایق) برابر است با $90^\circ - \beta$. بنابراین برای پیدا کردن مؤلفهٔ $F.\sin\alpha$ در راستای BC باید $F.\sin\alpha$ را در $\cos(90^\circ - \beta)$ ضرب کرد:

$$f.\sin\alpha.\cos(90^\circ - \beta) = f\sin\alpha\sin\beta$$



و این همان نیروی مؤثر باد بر قایق است که از طریق بادبان منتقل می‌شود و سرعت قایق در طول مسیر خود متناسب با همین نیروی مؤثر است. اگر شدت حرکت باد را ثابت بگیریم F مقداری ثابت می‌شود که درنتیجه سرعت حرکت قایق در مسیر BC متناسب با $\sin\alpha\sin\beta$ خواهد بود. این استدلال نشان می‌دهد که قایق بادبانی می‌تواند برخلاف جهت باد حرکت کند اگرچه این حرکت بطورمستقیم در جهت مخالف حرکت باد نیست. برای حل مسئله نباید به دنبال حداکثر مقدار $\sin\alpha\sin\beta$ برویم زیرا هدف ما افزایش مؤلفهٔ سرعت قایق در راستای شمال است. حرکت روی مسیر BC انجام می‌گیرد و زاویهٔ $A\hat{B}C$ برابر $\alpha + \beta$ است. بنابراین مؤلفهٔ سرعت در راستای شمال با $\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha\sin\beta$ متناسب است. اگر فرض کنیم $\gamma = 90^\circ - \alpha - \beta$ آنگاه مسئله این‌طور می شود که: α و β و γ را طوری انتخاب کنیم که $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ ماکزیمم باشد. و این درحالی است که می‌دانیم $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$. پس با توجه به آنچه گفته شده ماکزیمم وقتی حاصل می‌شود که $\alpha = \beta = \gamma = 30^\circ$ باشد. (اثبات بر عهدهٔ خواننده)

به این ترتیب برای اینکه حرکت قایق به طرف شمال با حداکثر سرعت ممکن انجام گیرد باید مسیری برای آن انتخاب کرد که با سمت شمال زاویهٔ 60° بسازد (چه در طرف شمال باختری و چه در طرف شمال خاوری) و بادبان را بین جهت باد و جهت حرکت قایق تنظیم کرد.

ماکزیمم و مینیمم در مثلثات

برای مشخص شدن نقش ماکزیمم و مینیمم در مثلثات در مورد دو تا از اتحادهای مثلثاتی (که به کمک ماکزیمم و مینیمم و این اتحادها بسیاری از مسایل قابل حل است) بررسی می کنیم.

اتحادهای مثلثاتی زیر واضح است:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad , \quad tg\alpha.\cot g\alpha = 1$$

در اولی مجموع دو متغیر برابر مقدار ثابت یک است و در دومی حاصل ضرب دو متغیر، در هر دو اتحاد برای بدست آوردن ماکزیمم و مینیمم می‌توان به سرعت به قضایا رجوع کرد. به طور مثال برای اتحاد اولی می‌توان به قضایای ۱ و ۲ و برای دومی به قضایای ۳ و ۴ که در آنها به ترتیب مجموع ثابت فرض شده و حاصل ضرب ثابت فرض شده رجوع کرد. البته این بدان معنا نیست که ماکزیمم و مینیمم در مسایل نامربوط به این دو اتحاد کارآیی نداشته باشد. بلکه در آنها نیز بسته به نوع مسأله می‌توان تدابیری برگزید. در اینجا مسأله‌ای را در حالت کلی حل می کنیم که خود راه حل تمام مسایل مشابه است:

مسئله: مطلوبست ماکزیمم و مینیمم عبارت:

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha$$

حل: می‌خواهیم ثابت کنیم ماکزیمم عبارت فوق برابر $\sqrt{a^2+b^2}$ و مینیمم آن برابر $-\sqrt{a^2+b^2}$ می‌باشد. برای حل آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha\right)$$

برای هر عدد حقیقی a و b از آنجا که می‌دانیم

$$-1 \le \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \le 1 \; , \; -1 \le \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \le 1$$

پس فرض می کنیم:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\beta \; , \; \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\beta$$

بنابراین رابطهٔ ذکر شده به صورت زیر در می‌آید:

$$\sqrt{a^2+b^2}(\cos\beta\sin\alpha + \sin\beta\cos\alpha) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\beta)$$

برای این که این عبارت به حداکثر مقدار خود برسد لازم

است-که $\sin(\alpha+\beta)=1$ باشد که در این صورت داریم:

$$\mathrm{Max}(a\sin\alpha+b\cos\alpha)=\sqrt{a^2+b^2}$$

و به‌دلیل مشابه داریم:

$$\mathrm{Min}(a\sin\alpha+b\cos\alpha)=-\sqrt{a^2+b^2}$$

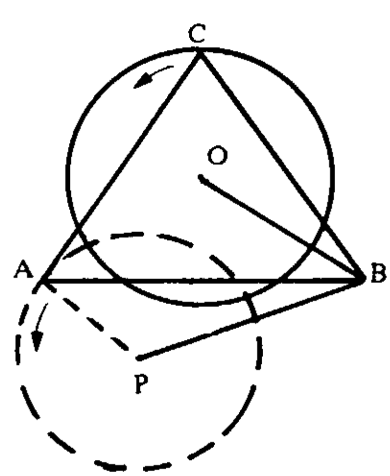
ماکزیمم و مینیمم در المپیادهای ریاضی:

ما در این قسمت به بحث و بررسی مسایل ماکزیمم و مینیممی می‌پردازیم که در المپیادهای ریاضی معتبر در دنیا مطرح گردیده است. در ابتدا به المپیادهای ریاضی شوروی از سال ۱۹۶۱ تا سال ۱۹۷۹ رفته و به بحث و بررسی مسایل مورد نظر می‌پردازیم:

المپیادهای ریاضی شوروی:

سال ۱۹۶۱ (مسکو)؛ سؤال b۶ : فاصلهٔ نقطه ثابت P واقع در صفحهٔ مثلث ABC، تا دو رأس A و B از این مثلث برابر است با $AP=2$ و $BP=3$. حداکثر مقدار فاصلهٔ CP چقدر است؟

حل: نقطهٔ B را به فاصلهٔ ۳ از P تثبیت می‌کنیم. ضمن حرکت A روی محیط دایرهٔ به شعاع ۲ و به مرکز P رأس C روی محیط دایرهٔ به شعاع ۲، که مرکز آن به فاصلهٔ $OP=3$ از P قرار دارد، حرکت می‌کند (مثلث OPB متساوی الاضلاع است). دورترین نقطهٔ محیط این دایره از P به فاصلهٔ $OC+OP$ یعنی ۵، قرار دارد، در نابرابری $PC \le AP+PB$ هم (برای هر مثلث متساوی الاضلاع ABC و هر نقطه P)، وقتی به برابری می‌رسیم که نقطهٔ P روی کمان AB از دایره محیطی مثلث ABC (کمانی که شامل رأس C نیست) باشد.



سال ۱۹۶۲ (مسکو)؛ سؤال ۸: پنج ضلعی منتظمی داده شده است. M ، نقطهٔ دلخواهی واقع در درون یا روی محیط این پنج ضلعی است. فاصله‌های نقطهٔ M را از ضلع‌های پنج ضلعی (و یا امتداد آنها) به ترتیب مقدارهای صعودی آنها شماره‌گذاری می‌کنیم:

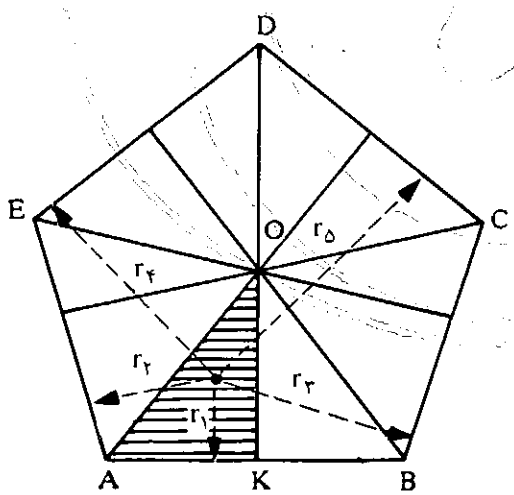
$$r_1 \le r_2 \le r_3 \le r_4 \le r_5$$

* همهٔ موضع‌های نقطهٔ M را پیدا کنید که، به ازای آنها، r_3 مینیمم مقدار ممکن را قبول کند.

* همهٔ موضع‌های نقطهٔ M را پیدا کنید که، برای آنها، r_3 ماکزیمم مقدار ممکن را قبول کند.

حل: پنج ضلعی منتظم ABCDE را به وسیلهٔ محورهای تقارن آن، به ۱۰ مثلث تقسیم می‌کنیم. کافی است نقطهٔ M را تنها در درون یکی از این مثلث‌ها، و به طور مثال مثلث AOK مورد بررسی قرار دهیم. برای این که فاصلهٔ نقطهٔ M واقع در درون زاویه‌ای را تا ضلع‌های آن با هم مقایسه کنیم کافی است روشن کنیم که، نقطهٔ M در کدام طرف نیمساز این زاویه قرار دارد. با توجه به این نکته، قانع می‌شویم که فاصلهٔ نقطهٔ M ، تا ضلع‌های پنج ضلعی : AB، AE، BC، DE و CD به ترتیب صعودی است:

$$r_1 \le r_2 \le r_3 \le r_4 \le r_5$$



اکنون دیگر روشن است که فاصلهٔ r_3 وقتی به حداکثر خود می‌رسد که نقطهٔ M روی رأس A قرار گیرد، و وقتی به حداقل خود می‌رسد که نقطهٔ M روی نقطه K قرار گیرد.

سال ۱۹۶۲ (مسکو)؛ سؤال ۱۱ : حداکثر مساحت مثلثی

را پیدا کنید که برای ضلعهای آن a، b و c، داشته باشیم:
$0 \le a \le 1 \le b \le 2 \le c \le 3$

(حل بر عهدهٔ دانش‌آموزان)

سال ۱۹۶۳ (مسکو) : سؤال ۶ : مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع واحد مفروض است. حداقل مقدار d را پیدا کنید که، به ازای آن، پاره خط راست به طول d، در حالی که دو انتهای آن، روی ضلعهای مثلث است بتواند تمامی سطح مثلث را جارو کند.

(حل بر عهدهٔ دانش‌آموزان)

سال ۱۹۶۵ (مسکو) : سؤال ۱ (a: هر یک از عددهای x_1، x_2، ....، x_n، می‌تواند بدون ارتباط با بقیه، مقدار ۱ و ۰ یا ۱− را قبول کند. حداقل مجموع حاصلضربهای دو به دوی این n عدد، چقدر می‌تواند باشد؟

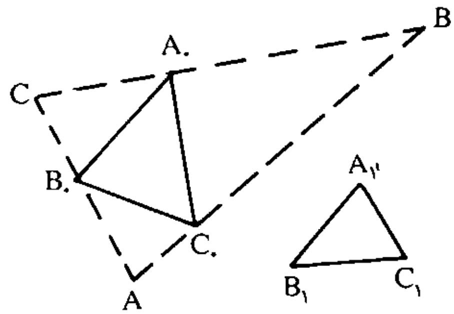
b) حداقل مقدار مجموع همهٔ حاصلضربهای دو به دوی x عدد x_1، x_2، ....، x_n چقدر است، به شرطی که قدرمطلق هیچ کدام از این عددها، از واحد تجاوز نکند؟

(حل بر عهدهٔ دانش‌آموزان)

◀ المپیادهای بین‌المللی ریاضی:

سال ۱۹۶۷ (نهمین دوره) : سؤال ۴ : فرض می‌کنیم $A_0\overset{\Delta}{B_0}C_0$ و $A_1\overset{\Delta}{B_1}C_1$ دو مثلث حاده الزوایا باشند. تمام مثلث‌های ABC را که مشابه $A_1\overset{\Delta}{B_1}C_1$ (چنانکه رئوس A_1 و B_1 و C_1 به ترتیب با رئوس A و B و C متناظر باشند) و محیط بر مثلث $A_0B_0C_0$ (به طوری که A_0 بر BC و B_0 بر CA و C_0 بر AB واقع باشد) می‌باشند در نظر می‌گیریم. از بین چنین مثلث‌های ممکنی، مثلث با مساحت ماکزیمم را معین و آن را رسم کنید.

حل: از A_0 و B_0 و C_0 خطوطی به ترتیب موازی B_1C_1 و C_1A_1 و A_1B_1 رسم می‌کنیم: این کار اضلاع BC و AC و AB از $A\overset{\Delta}{B}C$ را که مشابه مثلث $A_1\overset{\Delta}{B_1}C_1$ است تشکیل می‌دهد. اکنون فرض می‌کنیم هر یک از خطوطی را که به این ترتیب رسم کرده‌ایم به ترتیب حول A_0 و B_0 و C_0 و با یک اندازه دوران بدهیم. در این صورت آنها با همان زوایای قبلی با

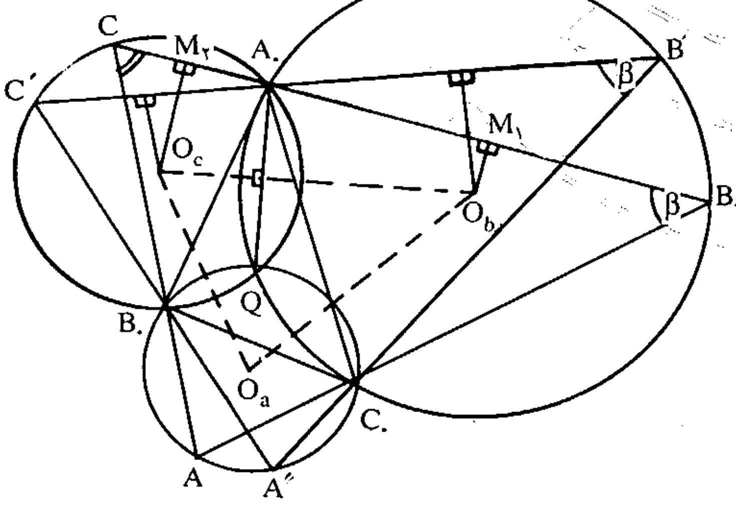


یکدیگر تلاقی می‌کنند و مثلث‌هایی مشابه با $A_1\overset{\Delta}{B_1}C_1$ می‌سازند و در میان آنها مثلث به مساحت ماکزیمم مثلثی است که اضلاع ماکزیمم داشته باشد. برای یافتن این مثلث بخاطر می‌آوریم که مکان هندسی تمام نقاط مانند B که در آنها $A_0\hat{B}C_0$ دارای مقدار معلوم β است کمانی از دایره‌ای با وتر A_0C_0 می‌باشد.

این مطلب مطرح می‌کند که دوایر محیطی مثلث‌های $A_0\overset{\Delta}{B}C_0$ و $A\overset{\Delta}{B_0}C_0$ و $A_0\overset{\Delta}{B_0}C$ را رسم کنیم. مراکز این دوایر را به ترتیب O_b و O_a و O_c نشان می‌دهیم. اثبات اینکه این دوایر محیطی دارای نقطهٔ مشترک Q می‌باشند آسان است.*

حال نشان می‌دهیم $\hat{C} = \frac{1}{2}A_0\hat{Q}B_0$ و $O_a\hat{O}_cO_b = \frac{1}{2}\widehat{A_0Q} + \frac{1}{2}\widehat{QB_0}$ زیرا O_cO_a و O_cO_b به ترتیب کمانهای A_0Q و B_0Q را نصف می‌کنند. بنابراین $\hat{C} = O_a\hat{O}_cO_b$ می‌شود. به همین ترتیب ثابت می‌شود $\hat{B} = O_a\hat{O}_bO_c$ و $\hat{A} = O_b\hat{O}_aO_c$ بنابراین:

$$O_a\overset{\Delta}{O_b}O_c \sim A\overset{\Delta}{B}C \sim A_1\overset{\Delta}{B_1}C_1$$



* اثبات در کتاب بازآموزی و بازشناخت هندسه ـ مثلثهای ناپلئون

سرانجام نشان می‌دهیم که بزرگترین مثلث ABC ی گذرنده از نقاط .A و .B و .C مثلثی است که اضلاعش موازی اضلاع $O_a\overset{\Delta}{O_b}O_c$ باشد.

اثبات: از آنجا که عمودهای از O_b و O_c وترهای .BA و .CA را در M_1 و M_2 نصف می‌کنند داریم: $M_1M_2=\frac{1}{2}BC$ اما M_1M_2 تصویر قایم O_bO_c بر BC است و زمانی ماکزیمم است که $BC \parallel O_bO_c$ باشد. از آنجا که $O_a\overset{\Delta}{O_b}O_c \sim A\overset{\Delta}{B}C$ است، جمیع اضلاع مثلث به مساحت ماکزیمم یا بزرگترین مورد بحث، موازی اضلاع نظیرشان از $O_a\overset{\Delta}{O_b}O_c$ هستند.

به این ترتیب برای رسم مثلث بزرگترین مذکور ابتدا از .A و .B و .C مثلثی متشابه با $A_1\overset{\Delta}{B_1}C_1$ رسم می‌کنیم. بعد O_a و O_b و O_c مراکز دوایر محیطی مثلث‌های $A\overset{\Delta}{B}.C.$ و $A.\overset{\Delta}{B}.C$ و $A.\overset{\Delta}{B}\,C.$ را رسم می‌کنیم و سرانجام از .A و .B و .C به ترتیب خطوطی موازی O_bO_c و O_aO_c و O_aO_b می‌کشیم. این خطوط اضلاع BC و AC و AB از مثلث بزرگترین مطلوب را تشکیل می‌دهند.

سال ۱۹۷۴ (پانزدهمین دوره): سؤال ۳: فرض می‌کنیم a و b اعدادی حقیقی باشند که به ازای آنها معادلهٔ:

$$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$$

حداقل یک جواب حقیقی داشته باشد. به ازای جمیع ازواج (b و a)، مینیمم مقدار a^2+b^2 را بیابید.

حل: ابتدا معادلهٔ $x+\frac{1}{x}=y$ به ازای y حقیقی را در نظر می‌گیریم. این معادله معادل $x^2-yx+1=0$ است که معادلهٔ درجه دومی بر حسب x است که دارای ریشه‌های حقیقی است اگر و فقط اگر مبین آن y^2-4 بزرگتر یا مساوی با صفر باشد. یعنی اگر و فقط اگر $|y|\ge 2$ باشد. اکنون برای حل:

$$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$$

آن را بر x^2 تقسیم می‌کنیم و سپس y را مساوی $x+\frac{1}{x}$ قرار می‌دهیم. خواهیم داشت:

$$y^2+ay+(b-2)=0$$

ریشه‌های این معادلهٔ درجه دوم عبارتند از:

$$y=x+\frac{1}{x}=\frac{-a\mp\sqrt{a^2-4(b-2)}}{2}$$

و در این صورت این شرط که قدرمطلق حداقل یکی از آنها بزرگتر از یا مساوی با ۲ باشد این است که:

$$|a|+\sqrt{a^2-4(b-2)}\ge 4$$

این شرط معادل:

$$\sqrt{a^2-4(b-2)}\ge 4-|a|$$

است. پس از مربع کردن دو طرف و تفریق a^2:

$$8|a|\ge 4b+8$$

را خواهیم داشت. تقسیم این نامساوی بر ۴ و مربع کردن آن:

$$4a^2\ge b^2+4b+4$$

را به دست می‌دهد که با افزودن $4b^2$ به دو طرف آن:

$$4a^2+4b^2\ge 5b^2+4b+4$$

و بنابراین:

$$a^2+b^2\ge\frac{5}{4}\left(b^2+\frac{4}{5}b+\frac{4}{5}\right)$$

و به دنبال آن:

$$a^2+b^2\ge\frac{5}{4}\left(b+\frac{2}{5}\right)^2+\frac{4}{5}$$

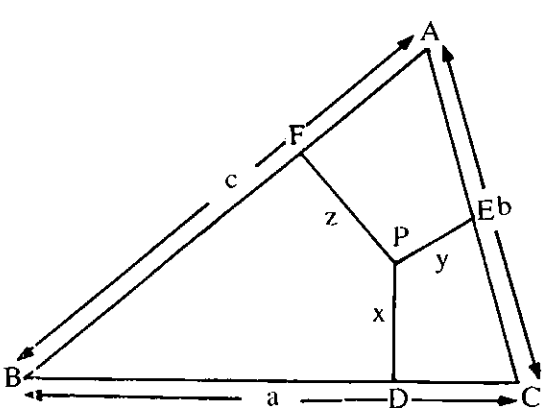
را خواهیم داشت. کمترین مقدار عضو سمت راست این نامساوی وقتی $b=-\frac{2}{5}$ باشد رخ می‌دهد و برابر $\frac{4}{5}$ است. بنابراین کمترین مقدار a^2+b^2 برابر $\frac{4}{5}$ است.

سال ۱۹۸۱ (بیست و دومین دوره): سؤال ۱: P نقطه‌ای واقع در داخل مثلث مفروض $A\overset{\Delta}{B}C$ است. D و E و F به ترتیب پاهای عمودهای مرسوم از P به خطوط BC و AC و AB هستند. تمام Pهایی را که به ازای آنها:

$$\frac{BC}{PD}+\frac{AC}{PE}+\frac{AB}{PF}$$

مینیمم است را بیابید.

حل: طول اضلاع مقابل به A و B و C را به ترتیب a و b و c و از آن پاره‌خط‌های PD و PE و PF را با x و y و z نمایش می‌دهیم.



k مساحت مثلث در رابطهٔ :

$$2k = ax + by + cz \qquad (۱)$$

صدق می کند. می‌خواهیم کمترین مقدار :

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z} \qquad (۲)$$

را تحت قید (۱) به دست آوریم. این کار را به چند طریق می‌توانیم انجام دهیم. ساده‌ترین راه احتمالاً استفاده از نامساوی کوشی[1] است :

$$(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)^2 \le (u_1^2+u_2^2+u_3^2)(v_1^2+v_2^2+v_3^2)$$

با $\sqrt{ax}$ و $\sqrt{by}$ و $\sqrt{cz}$ به جای u ها و $\sqrt{\frac{a}{x}}$ و $\sqrt{\frac{b}{y}}$ و $\sqrt{\frac{c}{z}}$ به جای v ها از نابرابری فوق استفاده می کنیم :

$$(a+b+c)^2 \le (ax+by+cz)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)$$

$$= 2k\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)$$

و یا :

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z} \ge \frac{(a+b+c)^2}{2k}$$

تساوی اگر و فقط اگر سه‌تایی‌های $(\frac{a}{x},\frac{b}{y},\frac{c}{z})$ و (ax,by,cz) متناسب باشند یعنی اگر و فقط اگر : $x=y=z$ باشد برقرار است. بنابراین کمترین مقدار (۲) وقتی رخ می‌دهد که P مرکز دایرهٔ محاطی داخلی $\overset{\Delta}{ABC}$ باشد.

سال ۱۹۸۵ (بیست و ششمین دوره) : مسألهٔ تمرینی برای آمادگی : به ازای هر نقطهٔ P واقع در داخل مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ فرض می‌کنیم. D و E و F به ترتیب نقاط تقاطع خطوط AP و BP و CP به اضلاع مقابل A و B و C باشند. P را به طریقی تعیین کنید که مساحت مثلث $\overset{\Delta}{DEF}$ ماکزیمم مقدار ممکن باشد.

حل: واضح است که :

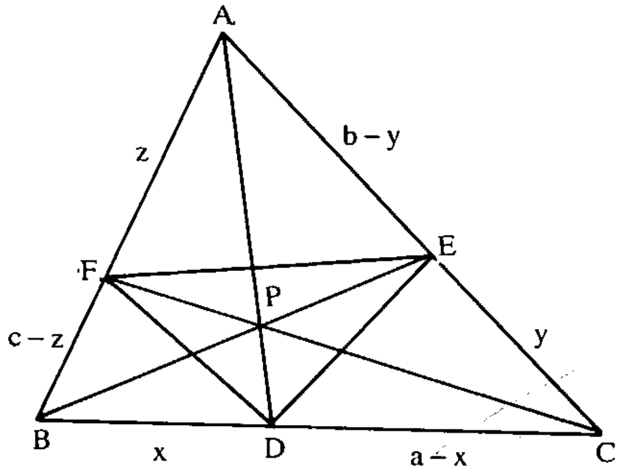
$$S(\overset{\Delta}{DEF}) = S(\overset{\Delta}{ABC}) - S(\overset{\Delta}{AFE}) - S(\overset{\Delta}{BDF}) - S(\overset{\Delta}{CED})$$

همچنین اثبات می‌شود :

$$S(\overset{\Delta}{ABC}) = \frac{1}{2}ac\sin B$$

است پس داریم :

$$\frac{1}{2}\sin B = \frac{S(\overset{\Delta}{ABC})}{ac}$$



در نتیجه :

$$S(\overset{\Delta}{BDF}) = \frac{1}{2}x(c-z)\sin B = \frac{S(\overset{\Delta}{ABC})x(c-z)}{ac}$$

عبارات مشابهی برای مثلثهای دیگر به دست می‌آید. با قرار دادن این روابط در رابطهٔ اصلی داریم :

$$S(\overset{\Delta}{BDF}) = S(\overset{\Delta}{ABC})\left[1-\frac{x(c-z)}{ac}-\frac{y(a-x)}{ab}-\frac{z(b-y)}{bc}\right]$$

$$= S(\overset{\Delta}{ABC})\,[1-u(1-w)-v(1-u)-w(1-v)]$$

که در آن $u=\frac{x}{a}$ و $v=\frac{y}{b}$ و $w=\frac{z}{c}$ است. می‌خواهیم عامل سمت راست را که می‌توان به صورت زیر نوشت ماکزیمم کنیم :

$$F = (1-u)(1-v)(1-w) + uvw$$

بنا به قضیه سوا[2] u و v و w در رابطهٔ :

$$uvw = (1-u)(1-v)(1-w)$$

صدق می‌کنند. اگر $G=uwv$ باشد بنا به رابطهٔ قبل $F=2G$ و F وقتی به ماکزیمم خود می‌رسد که G برسد. و G وقتی ماکزیمم می‌شود که G^2 باشد یعنی :

$$G^2 = u(1-u)v(1-v)w(1-w)$$

ماکزیمم شود. ملاحظهٔ ماکزیمم G^2 از این حقیقت که $s(1-s) \le \frac{1}{4}$ است، یا از نامساوی تصاعد حسابی و هندسی که قبلاً گفته ($G^{\frac{2}{3}} \le \frac{1}{4}$) حاصل می‌شود و وقتی تساوی به وجود می‌آید که :

$$u = v = w = \frac{1}{2}$$

۱ ــ اثبات در کتاب عبارتهای جبری ــ بخش نابرابریهای معروف

۲ـ اثبات در کتاب بازآموزی و بازشناخت هندسه

بنابراین :

$$\text{Max}\ S\left[\overset{\Delta}{DEF}\right]=\frac{1}{2}S\left[\overset{\Delta}{ABC}\right]$$

و این نتیجه وقتی به وجود می‌آید که P مرکز ثقل مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ باشد.

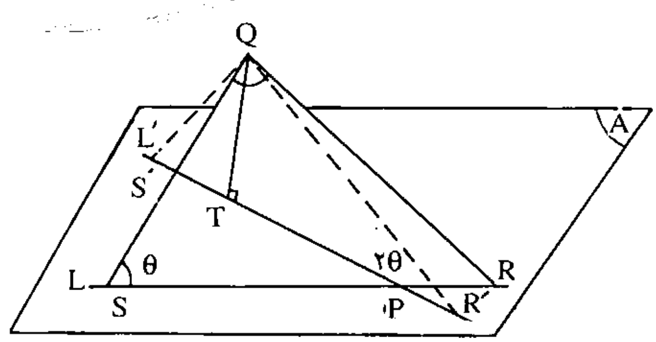
سال ۱۹۷۹ (بیست و یکمین دوره) : سؤال ۴ : صفحهٔ A، نقطه P در این صفحه و نقطهٔ Q غیر واقع در A مفروضند. جمیع نقاط R در A را چنانکه نسبت $\frac{QP+PR}{QR}$ ماکزیمم باشد، بیابید.

حل: در مورد هر نقطهٔ R (که باید تعیین شود) خط گذرنده از R و P را با L نمایش و $Q\hat{P}R$ را با 2θ نمایش می دهیم. اکنون همانطور که در شکل نشان داده شده نقطهٔ S را روی L چنان مشخص می کنیم که $QP=SP$ باشد، در این صورت: $SR=QP+PR$ و بنا به قانون سینوسها در مثلث $\overset{\Delta}{SQR}$ داریم:

$$\alpha=\frac{SR}{aR}=\frac{\sin S\hat{Q}R}{\sin\theta}=\frac{QP+PR}{QR}$$

α به ازای جمیع نقاط R واقع بر L چون $S\hat{Q}R=90°$ باشد ماکزیمم می‌شود. اکنون باقی می‌ماند که ماکزیمم $\frac{1}{\sin\theta}$ را مشخص کنیم و به این منظور وقتی نائل می‌شود که 2θ مینیمم باشد و این هنگامی که L از P و T (پای عمود از Q بر صفحهٔ A) بگذرد رخ می‌دهد.

اگر T و P نقاط متمایزی باشند در این صورت R به طور منحصر به فرد معین می‌شود و اگر نباشد R می‌تواند هر نقطهٔ واقع بر دایرهٔ به شعاع OP و به مرکز P باشد.



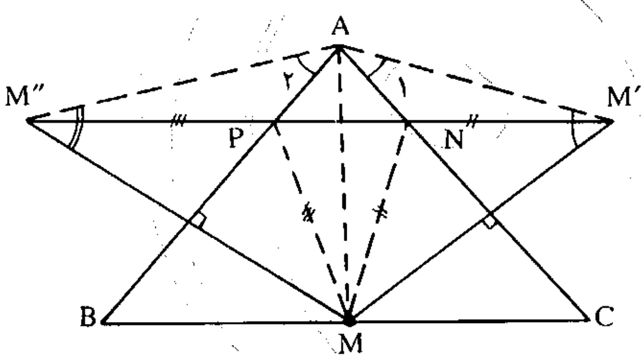
◄ المپیادهای کشوری:

سال ۱۳۶۵ (جلسهٔ بعدازظهر) : سؤال ۱ : مثلث ABC مفروض است. مثلثی در آن محاط کنید که محیطش مینیمم باشد.

حل: اگر نقطهٔ دلخواه M را روی BC انتخاب کنیم از بین مثلث‌هایی به رأس M که دو رأس دیگر آن روی دو ضلع دیگر مثلث باشند محیط مثلثی مینیمم است که به شرح زیر حاصل شود :

(توجه : $\hat{A}=B\hat{A}C$) .

$$\hat{M}+\hat{A}=\pi\rightarrow(\hat{M}'+\hat{M}'')+\hat{A}=\pi$$
$$\Rightarrow(\frac{\pi}{2}-\hat{A}_1)+(\frac{\pi}{2}-\hat{A}_2)+\hat{A}=\pi$$
$$\rightarrow\hat{A}_1+\hat{A}_2=\hat{A}$$
$$\rightarrow M''\hat{A}M'=2\hat{A}$$



قرینه‌های نقطهٔ M را نسبت به اضلاع AC و AB به ترتیب M′ و M″ می‌نامیم. خط M′M″ دو ضلع AC و AB را به ترتیب در نقاط N و P قطع می‌کند. مثلث $\overset{\Delta}{MNP}$ با محیط M′M″ جواب این قسمت از مسئله است اما مثلث $\overset{\Delta}{AM'M''}$ متساوی‌الساقین به زاویه رأس $M'\hat{A}M''=2\hat{A}$ است. حال مسئله به تعیین نقطه M به طوری که قاعده مثلث حاصل (M′M″) مینیمم شود تبدیل می‌شود.

چون مثلثهای حاصل ($\overset{\Delta}{AM'M''}$) متساوی‌الساقین با زاویهٔ رأس $2\hat{A}$ می‌باشند پس قاعده M′M″ در مثلثی مینیمم است که ساق آن مینیمم باشد. از طرفی $AM=AM'=AM''$ پس باید AM مینیمم باشد یعنی M پای ارتفاع از رأس A باشد. با تعویض M با نقاطی روی اضلاع AC و BC مثلث مورد نظر مثلث ارتفاعیه محاط در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ خواهد بود.

تمرین برای شما

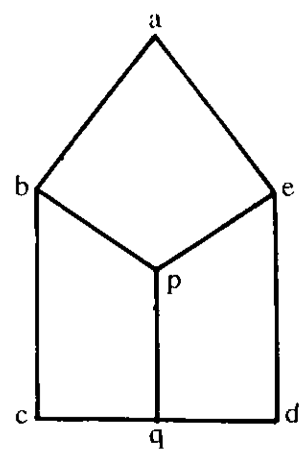
۱ ــ اگر a، b، c، ... ، l و x، y، z، ... ، t اعدادی مثبت

و $ax + by + cz + \dots + lt = k$ ثابت باشد. ثابت کنید حاصل ضرب $p = xyz\dots t$ وقتی ماکزیمم است که:

$$ax = by = cz = \dots = lt$$

۲ ــ ثابت کنید یک چهارضلعی با ضلعهای مفروض وقتی دارای ماکزیمم مساحت است که قابل محاط شدن در یک دایره باشد.

۳ ــ در شکل مقابل abcde نمای قایم خانه‌ای را نشان می‌دهد (دو نقطهٔ b و e ارتفاعهای برابر دارند). سازندهٔ خانه در نظر دارد مجرایی برای آبهای باران متشکل از سه ناودان مستقیم‌الخط bp و ep و pq ایجاد کند که مسیر از p به پایین قایم باشد. مکان نقطهٔ p کجا باشد تا طول کل ناودانها مینیمم باشد.



۴ ــ از میان همهٔ مثلثهای محاط در یک دایرهٔ مفروض کدام، یک ماکزیمم مساحت و کدام یک ماکزیمم محیط را داراست؟

۵ ــ ثابت کنید عبارت

$$(x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \dots + (x - x_n)^2$$

هرگاه $x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ باشد مینیمم است.

مأخذ:

۱ ــ روشهای جبر ــ پرویز شهریاری
۲ ــ عبارتهای جبری ــ عبدالحسین مصحفی
۳ ــ آشنایی با ریاضیات (جلد ۲۸) ــ پرویز شهریاری
۴ ــ مسائل جبر و آنالیز ــ علی حسن‌زاده ماکویی
۵ ــ بازآموزی و بازشناخت هندسه ــ عبدالحسین مصحفی
۶ ــ ماکزیمم و مینیمم بدون مشتق ــ ایوان نیون
۷ ــ نابرابری هندسی ــ محمد حسین بیژن‌زاده
۸ ــ المپیادهای ریاضی بین‌المللی ــ پرویز شهریاری
۹ ــ المپیادهای ریاضی کشوری ــ آرمان تقیان
۱۰ ــ المپیادهای ریاضی بلژیک ــ عبدالحسین مصحفی
۱۱ ــ المپیادهای ریاضی مجارستان ــ یوژف کورشاک
۱۲ ــ المپیادهای ریاضی شوروی ــ نیکلای یوری سوویچ واسیلیف، آندره آلکساندرویچ یه گوروف

ادب ریاضی

«چنانکه ملاحظه می‌شود ... حساب احتمالات به واقع چیزی جز عقل سلیم نیست که به محاسبه درآمده است. این حساب، چیزی راکه صاحبان فکر درست بدون آنکه متوجه باشند به غریزه درمی‌یابند با دقت و صحت بیان می‌دارد.

... این نکته درخور توجه است که این علم که با ملاحظات مربوط به بازیهای قمار و تصادف به وجود آمد، به درجه‌ای اهمیت یافته است که از مهمترین مسایل معرفت آدمی می‌باشد.»

پی‌یر سیمون لاپلاس

مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان (۱۶)

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

اعداد اول، تجزیه و رمزهای مخفی

(قسمت دوم)

یکی از مشهورترین سؤالهای بی‌پاسخ مربوط به اعداد اول *حدس گلدباخ*[۱] است. *کریستین گلدباخ*[۲] در نامه‌ای به *لئونهارد اویلر*[۳]، نوشته شده در ۱۷۴۲، حدس زد که هر عدد زوج بزرگتر از ۲ مجموع دو عدد اول است. به عنوان نمونه،

۴=۲+۲

۶=۳+۳

۸=۳+۵

۱۰=۵+۵

۱۲=۵+۷

تحقیقات کامپیوتری حدس *گلدباخ* را به ازای جمیع اعداد زوج تا ۱۰۰۰۰۰۰۰۰ محقق کرده است، اما اثبات یا عدم اثبات کلی آن تا به امروز مشخص نشده است.

آزمون اول بودن

گرچه اغلب مسأله‌های کلاسیک مربوط به اعداد اول حل نشده باقی مانده‌اند، سالهای اخیر با گسترشهای عظیمی در روشهایی مواجه بوده‌اند که به کمک آنها می‌توان اول بودن یا نبودن اعداد را آزمود. ممکن است گفته شود «روشهای آزمون اول بودن؟ ولی این که خیلی واضح است.» و در واقع، طریق کاملاً طبیعی و ساده‌ای برای ملاحظهٔ اول بودن یا نبودن یک عدد موجود است.

با معلوم بودن عددمان، مثلاً n، ابتدا ملاحظه می‌کنیم ۲ آن را می‌شمارد یا نه. اگر بشمارد، در این صورت n اول نیست و غائله ختم شده است. سپس ۳ را آزمایش می‌کنیم. اگر ۳، n را بشمارد در این صورت n اول نیست و باز هم کار تمام است. پس بخشپذیری n را بر ۵ در نظر می‌گیریم. (از ۴ می‌توان صرفنظر کرد: از آنجا که ۲، n را نمی‌شمارد اگر جلوتر برویم، ۴ نیز نمی‌تواند n را بشمارد.)

اگر ۵ از شمردن n بازماند، ۷ را آزمایش می‌کنیم. (باز هم، می‌توان از ۶ صرفنظر کرد زیرا ۲ و ۳، n را نمی‌شمرند.) و همین طور الی آخر. اگر بدون یافتن عددی که n را بشمرد تا $\sqrt{n}$ پیش برویم، آنگاه خواهیم دانست که n باید اول باشد. (برای این که در صورتی n اول نباشد حاصل ضرب دو عدد u و v ی بین ۱ و n خواهد بود، و البته یکی از دو مورد u یا v بزرگتر از $\sqrt{n}$ است.)

فرایند فوق به *تقسیم آزمایشی*[۴] معروف است، و با وجود این که در مورد اعداد به نسبت کوچک به کفایت کاراست، برای عددهای بسیار بزرگ فاقد کارایی است. برای ملاحظهٔ غیرعملی بودن آن، فرض می‌کنیم بخواهیم برنامه‌ای با کارایی بالایی برای اجرای تقسیم آزمایشی مورد بحث بر سریعترین کامپیوتر در دسترس (که در ابتدای این فصل به آن اشاره شد) بنویسیم. برنامهٔ مورد نظر در مورد عددی ۱۰ رقمی فوراً اجرا می‌شود ــ پاسخ بلافاصله آشکار می‌شود. در مورد عددی ۲۰ رقمی اندکی زحمت می‌برد و دو ساعت به درازا می‌انجامد. در مورد عددی ۵۰ رقمی به مدت گیج کنندهٔ ده میلیارد سال نیاز دارد. عددی ۱۰۰ رقمی به

۱ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰

(در این عدد سی و شش صفر وجود دارد) نیازمند است. این موضوع، تنها، محاسبه‌ای معمولی برای عددی بسیار بزرگ نیست، و همانگونه که بعداً در این فصل توضیح خواهیم داد، برای یکی از امن‌ترین دستگاههای رمزگذاری سری مورد استفادهٔ امروزه به اولهایی با ارقامی بین ۶۰ و ۱۰۰ نیاز است.

بنابراین برای تشخیص اول بودن یا نبودن یک عدد ۱۰۰ رقمی چه کاری باید انجام داد؟ در حال حاضر بهترین روش در دسترس روش بسیار پیچیده‌ای است که در حدود ۱۹۸۰ توسط ریاضیدانان *آدلمن*[۵]، *روملی*[۶]، *کوهن*[۷]، و *لنسترا*[۸] مطرح شده است، و اغلب به آن، با استفاده از حروف اول نامهایشان، به عنوان آزمون ARCL اشاره می‌شود.

زمانهای لازم برای آزمون ARCL، بر کامپیوتر یاد شده، عبارتند از، برای عددی ۲۰ رقمی، ۱۰ ثانیه؛ برای عددی ۵۰ رقمی، ۱۵ ثانیه؛ برای عددی ۱۰۰ رقمی، ۴۰ ثانیه. کامپیوتر مزبور حتی عددی ۱۰۰۰ رقمی را، در صورتی یک هفته به آن مهلت داده شود، مشخص می‌کند.

اما آزمون مورد بحث چگونه به کار می‌رود؟ این عمل بستگی به مبالغ قابل ملاحظه‌ای ریاضیاتی بسیار پیچیده دارد ــ روشی ریاضی خارج از ریاضیات معمول دورهٔ کارشناسی ــ بنابراین به دست دادن پاسخ کامل در این مرحله ممکن نیست. اما توضیح ایدهٔ اصلی روش مذکور مشکل نیست. ایدهٔ مزبور قسمت ساده‌ای از ریاضیات (گرچه بسیار هوشمندانه) از ریاضیدان بزرگ فرانسوی *پیردوفرما*[۹] (۱۶۰۱ ــ ۱۶۶۵) است.

فرما گرچه ریاضیدانی «آماتور» بود (وی حقوقدان بود) بعضی از هوشمندانه‌ترین دستاوردهای ریاضی‌ای را، که تاکنون دیده شده‌اند، مطرح کرد. یکی از ملاحظاتش این بود که اگر P عددی اول باشد، در این صورت به ازای هر عدد a ی کمتر از P، عدد $a^{P-1}-۱$ بر P بخشپذیر است. به عنوان نمونه، فرض می‌کنیم $P=۷$ و $a=۲$ را در نظر بگیریم. در این صورت

$$a^{P-1}-۱=۲^{۶}-۱=۶۴-۱=۶۳$$

و در واقع ۶۳ بر ۷ بخشپذیر است. قضیه را خودتان به ازای هر مقدار (اول) P و هر مقدار (کمتر از P ی) a امتحان کنید. نتیجه همواره یکسان است.

بنابراین در اینجا روشی ممکن برای آزمون اول بودن یا نبودن n وجود دارد. عدد $۲^{n-1}-۱$ را محاسبه و ملاحظه می‌کنیم n آن را می‌شمارد یا خیر. اگر نشمارد، در این صورت n نمی‌تواند اول باشد. (زیرا اگر n اول بود، آنگاه بنا به ملاحظهٔ فرما بخشپذیری $۲^{n-1}-۱$ بر n را داشتیم.)

اما در صورتی که دریابیم n عدد $۲^{n-1}-۱$ را نمی‌شمارد چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟ متأسفانه نمی‌توانیم نتیجه بگیریم n باید اول باشد. (گر چه کاملاً احتمال دارد که چنین باشد.) مشکل در اینجاست که، در حالی که دستاورد فرما این را بیان می‌کند که هرگاه n اول باشد $۲^{n-1}-۱$ را می‌شمارد، بر این نیست که اعداد مرکبی با این ویژگی وجود ندارند. (این مطلب مانند این است که گفته شود تمام اتومبیلها چرخ دارند؛ و این از چرخ داشتن سایر چیزها ــ به طور مثال، دوچرخه‌ها ــ جلوگیری نمی‌کند.) و در واقع عددهای غیر اولی موجودند که دارای ویژگی فرما هستند. کوچکترین آنها ۳۴۱ است، که از آنجا که حاصل ضرب ۱۱ و ۳۱ است، اول نیست. اما اگر (بر کامپیوتری) آزمایش کنید درخواهید یافت ۳۴۱ عدد $۲^{۳۴۰}-۱$ را می‌شمارد. (بزودی ملاحظه خواهیم کرد که برای انجام این آزمایش نیاز به محاسبهٔ $۲^{۳۴۰}$ نیست.)

اعداد مرکبی که با عنایت به ویژگی فرما شبیه عددهای مرکب عمل می‌کنند به *شبه اول*[۱۰] موسومند. بنابراین اگر، هنگامی که با استفاده از دستاورد فرما، به آزمون اول‌بودن پرداخته‌اید، کشف کنید که n عدد $۲^{n-1}-۱$ را می‌شمارد، تمام چیزی که می‌توانید نتیجه بگیرید این است که n یا اول‌است یا شبه اول. (در این حالت شانس به صورت بسیار بالایی به نفع اول بودن n است. زیرا گرچه در واقع بینهایت عدد شبه اول وجود دارند، با فراوانی بسیار کمتری از اولهای حقیقی رخ می‌دهند. به عنوان

نمونه تنها دو چنین عدد کمتر از ۱۰۰۰ی موجودند، و تنها ۲۴۵ مورد زیر یک میلیون.)

در ضمن در صورتی که، در آزمون ویژگی فرما، به جای ۲ از عدد دیگری، مثلاً ۳ یا ۵، استفاده کنیم تفاوت چندانی نمی‌کند. هر عددی که به کار برید اعداد شبه اولی موجود می‌شوند که از به دست آوردن پاسخی مطلق به مسألهٔ اول بودن یا نبودن ممانعت به عمل می‌آورد.

در کاربرد این آزمون، لزومی به محاسبهٔ عدد 2^{n-1}، عددی که ملاحظه کردید که حتی به ازای اعداد کاملاً کوچک n بسیار بزرگ است، نیست. در این مورد تمام کاری که نیاز به انجام دادن آن داریم یافتن این مطلب است که n عدد $2^{n-1}-1$ را می‌شمارد یا خیر. و این بدان معنی است که می‌توان از مضربهای n در **هر مرحلهٔ محاسبه** صرفنظر کرد. به عبارت دیگر، آنچه که باید محاسبه شود باقیمانده‌ای است که در صورت تقسیم $2^{n-1}-1$ بر n به جا می‌ماند. و هدف ملاحظهٔ این موضوع است که باقیماندهٔ مزبور صفر است یا خیر، اما از آنجا که مضربهای n آشکارا در باقیمانده تأثیر نمی‌گذارند، می‌توان از آنها چشم پوشید. ریاضیدانها (و برنامه‌نویسهای کامپیوتر) برای نمایش باقیمانده‌ها طریقی استاندارد دارند: باقیماندهٔ تقسیم A بر B را به صورت زیر می‌نویسند:

$$A \bmod B$$

به این ترتیب، به‌طور مثال، $5 \bmod 2$ برابر ۱ است، $7 \bmod 4$ برابر ۳، و $8 \bmod 4$ برابر ۰.

از این طریق برای آزمون اول بودن عدد ۶۱، به عنوان مثالی از آزمون فرما، استفاده می‌کنیم. در این صورت نیاز به محاسبهٔ عدد:

$$(2^{60}-1) \bmod 61$$

داریم. ۶۱، در صورتی که این باقیمانده صفر نباشد، اول نیست. اگر صفر باشد، در این صورت ۶۱ یا اول است یا شبه‌اول (و در حقیقت، همان طور که می‌دانیم، اولی خالص). در این مورد سعی می‌کنیم از محاسبهٔ عدد بزرگ 2^{60} خودداری کنیم. کار را با ملاحظهٔ این مطلب آغاز می‌کنیم که

$2^6 = 64$، و در نتیجه

$$2^6 \bmod 61 = 3$$

در این صورت، از آنجا که $(2^6)^5 = 2^{30}$، به دست می‌آوریم

$$2^{30} \bmod 61 = (2^6 \bmod 61)^5 \bmod 61 = 3^5 \bmod 61$$

$$= 243 \bmod 61 = 60$$

بنابراین،

$$2^{60} \bmod 61 = (2^{30})^2 \bmod 61 = (2^{30} \bmod 61)^2 \bmod 61$$

$$= 60^2 \bmod 61 = 3600 \bmod 61 = 1$$

به این ترتیب،

$$(2^{60}-1) \bmod 61 = 0$$

از آنجا که پاسخ ۰ است، نتیجه این است که، همان طور که پیش‌بینی شد، ۶۱ یا اول است یا شبه اول.

در این مرحله ممکن است مایل باشید خود محاسبه‌ای انجام دهید. در این صورت، تحقیق کنید که

$$2^{10} \bmod 341 = 1$$

سپس با استفاده از این واقعیت نشان دهید که

$$2^{340} \bmod 341 = 1$$

این نتیجه بر این است که عدد ۳۴۱ یا اول است یا شبه اول. (در این حالت، همانگونه که قبلاً متذکر شدیم، ۳۴۱ در واقع شبه‌اول است.)

آزمون ARCL با استفاده از تغییر آزمون *فرما*، چنان که نتواند توسط شبه اولی به اشتباه بیفتد، عمل می‌کند، و این تغییر است که به ریاضیاتی بسیار عمیق نیاز دارد. (در صورتی که *واقعاً* مایل به ملاحظهٔ این مطلب هستید به مقالهٔ

Primdity testing and Jacobi sums

نوشتهٔ Cohen و Lenstra در مجلهٔ تحقیق ریاضی زیر رجوع کنید.

Mathematics of Computation, Volume 42 (1984). PP. 297_330)

اولهای مرسن

آزمون ARCL سریعترین آزمون عام اول بودنی است که در حال حاضر در دسترس است. عبارت «عام» در اینجا بدان معنی است که آزمون مزبور در مورد هر عدد مفروض n به کار می‌رود. اما در مورد عددهایی با ساختارهای مخصوص اغلب روشهای دیگری موجودند که با سرعت بخشیدن به فرایند مزبور با بهره گرفتن از ساختار مخصوص عدد مورد نظر بسیار سریعتر انجام می‌گیرند. چشمگیرترین مثال در این مورد در رابطه با اعدادی به صورت $2^n - 1$ است. این عددها را امروزه به نام *مارتین مرسن*[11]، راهب فرانسوی قرن هفدهم، *اعداد مرسن*[12] می‌نامند.

مرسن در مقدمهٔ کتابش – Cogitata Physica Mathematica، انتشار یافته در ۱۶۴۴، اظهار کرد که عدد

$M_n = ۲^n - ۱$

به ازای

$n = ۲, ۳, ۵, ۷, ۱۳, ۱۷, ۱۹, ۳۱, ۶۷, ۱۲۷, ۲۵۷$

اول، و به ازای جمیع مقادیر کوچکتر از ۲۵۷ دیگر n مرکب است. چگونه این موضوع را دانست؟ کسی نمی‌داند. اما به هر تقدیر به نحوی شگفت‌آور با حقیقت نزدیک بود. سرانجام تنها در ۱۹۴۷، هنگامی که ماشینهای حساب رومیزی در دسترس قرار گرفتند، بررسی ادعای وی امکانپذیر شد. وی تنها مرتکب پنج اشتباه شده بود: $M_{۶۷}$ و $M_{۲۵۷}$ اول نیستند، و $M_{۶۱}$، $M_{۸۹}$، و $M_{۱۰۷}$ اولند.

اعداد مرسن روشی عالی برای به دست آوردن عددهای اول بسیار بزرگ مطرح می‌کنند. رشد سریع تابع ۲^n هنگامی که n بزرگ شود تضمین می‌کند که اعداد مرسن M_n بزودی بسیار بزرگ شوند، و بنابراین ایدهٔ روش مورد بحث جستجوی مقادیر nی است که به ازای آنها M_n اول است. چنین اولهایی را ***اولهای مرسن*** می‌نامند.

مختصری جبر مقدماتی مشخص می‌کند M_n اول نخواهد بود مگر این که خود n اول باشد، بنابراین تنها لازم است که به مقادیر اول n نظر داشته باشیم. ولی حتی اغلب اولهای n نیز به عدد **مرسن** مرکب M_n ی منجر می‌شوند، بنابراین جستجوی مقادیر مناسب n آسان نیست ــ گر چه این مطلب به هیچ وجه از چند حالت اولیه آشکار نیست، زیرا

$M_۲ = ۲^۲ - ۱ = ۳$

$M_۳ = ۲^۳ - ۱ = ۷$

$M_۵ = ۲^۵ - ۱ = ۳۱$

$M_۷ = ۲^۷ - ۱ = ۱۲۷$

جمیعاً اولند. اما پس از این مرحله الگوی مزبور، با

$M_{۱۱} = ۲۰۴۷ = ۲۳ \times ۸۹$

تغییر جهت می‌دهد. سپس سه مقدار اول دیگر می‌آیند:

$M_{۱۳} = ۸۱۹۱,\ M_{۱۷} = ۱۳۱۰۷۱,\ M_{۱۹} = ۵۲۴۲۸۷$

پس از آن یافتن اعداد مرسن سخت‌تر می‌شود. پنج مقدار بعدی nی که M_n به ازای آنها اول است عبارت است از

۳۱، ۶۱، ۸۹، ۱۰۷، ۱۲۷

اغلب مردم، هنگامی که برای اولین بار مقادیر فوق را ملاحظه می‌کنند، این نتیجهٔ عجولانه را می‌گیرند که اگر P خود اولی **مرسن** باشد، آنگاه M_p نیز اول است. این نتیجه محققاً در آغاز کاراست: ۳ اولی **مرسن** است و $M_۳$ نیز؛ ۷ اولی **مرسن** است و $M_۷$ نیز؛ ۳۱ اولی **مرسن** است و $M_{۳۱}$ نیز؛ به همین ترتیب است مورد ۱۲۷ و $M_{۱۲۷}$. اما در اینجا الگو توقف می‌کند، و هر چند ۸۱۹۱ (با $M_{۱۳}$ بودن) اولی **مرسن** است، $M_{۸۱۹۱}$ (که دارای ۲۴۶۶ رقم است) مرکب است. این موضوع در سال ۱۹۵۳ با استفاده از کامپیوتری اولیه کشف شد. (بعداً در این فصل، بخش مربوط به اعداد تام را ملاحظه کنید.)

در واقع تا این تاریخ تنها سی اول **مرسن** شناخته شده موجودند. دوازده مقدار n که در فوق فهرست کردیم و به ازای آنها M_n اول است جمیعاً در سالهای اولیهٔ این قرن شناخته شده بودند. هفت مورد بعدی تماماً در ۱۹۵۲ توسط ***رافائل روبینسون***[۱۳] با استفاده از کامپیوتر SWAC یافت شدند. مقدار n = ۳۲۱۷ در ۱۹۵۷ توسط ***هنس ریزل***[۱۴] با استفاده از کامپیوتر BESK کشف شد. ***الکساندر هارویتس***[۱۵] برای به‌دست آوردن مقادیر n = ۴۲۵۳ و ۴۴۲۳ از کامپیوتر IBM۷۰۹۰ بهره گرفت، و در ۱۹۶۳ ***دونالد جیلیس***[۱۶] و ILLIAC – II مقادیر n = ۹۶۸۹، ۹۹۴۱، و ۱۱۲۱۳ را یافتند. IBM.360 – 91 ***براینت توکرمن***[۱۷] در ۱۹۷۱ مقدار n = ۱۹۹۳۷ را آشکار کرد.

با کشف بعدی، در ۱۹۷۸، سابقهٔ اعداد اول در صفحات اول اخبار با این خبر مطرح شد که پس از سه سال کار شامل ۳۵۰ ساعت وقت کامپیوتری بر CYBER 174 در دانشگاه ایالتی ***کالیفرنیا***[۱۸] در ***هیوارد***[۱۹]، دو دانش‌آموز ۱۸ سالهٔ دبیرستانی، ***لورانیکل***[۲۰] و ***کورت نول***[۲۱]، عدد اول مرسن ۶۵۳۳ رقمی $M_{۲۱۷۰۱}$ را یافته‌اند.

یک سال بعد، **نول** رکورد مزبور را با اول ۶۹۸۷ رقمی $M_{۲۳۲۰۹}$ بهبود بخشید. بعداً در همین سال رکورد مزبور بار دیگر شکست، و این بار توسط ***دیوید اسلووینسکی***[۲۲]، برنامه‌نویس جوانی که برای تحقیقات کری[۲۳] در Chippewa Falls ***ویسکانسین***[۲۴] کار می‌کرد. وی با استفاده از کامپیوتر بسیار قدرتمند CRAY – ۱ اول ۱۳۳۹۵ رقمی $M_{۴۴۴۹۷}$ را پیدا کرد.

در ۱۹۸۲ همین ترکیب ماشینی نشان داد که $M_{۸۶۲۴۳}$ (عددی ۲۵۹۶۲ رقمی) اول است. سپس، ***اسلووینسکی***، با کار بر کامپیوتر حتی قدرتمندتر CRAY – XMP، با اول

۳۹۷۵۱ رقمی $M_{۱۳۲۰۴۹}$ از این هم فراتر رفت.

سرانجام (تا این زمان)، در سپتامبر ۱۹۸۵، در **هوستون، تکزاس**، CRAY – XMP از آن Chevron Geosciences، عدد ۶۵۰۵۰ رقمی $M_{۲۱۶۰۹۱}$، رکورد نگهدار فعلی، را به دست آورد. (از آنجا که Chevron برنامهٔ اول یاب *اسلووینسکی* را اجرا می‌کرد، اعتبار این کشف در واقع از آن اوست. شرکت مزبور برنامهٔ مزبور را به این علت اجرا می‌کرد که روشی نیکو برای نشان دادن اشتباهات دستگاههای کامپیوتر به دست می‌داد.)

اما آیا این پایان داستان است؟ احتمالاً خیر. حدس بر این است که اولهای **مرسن** را پایانی نیست ــ یعنی بینهایت عدد از آنها موجودند. اما این موضوع به اثبات نرسیده است، و تمام آنچه که **به تحقیق** می‌توان دانست این است که حداقل سی عدد از آنها وجود دارند (یعنی، آنهایی که شناخته شده‌اند.)

روش به کار رفته در برزسی اول بودن اعداد **مرسن** بسیار ساده است (گرچه ریاضیات پشتوانهٔ آن چنین نیست). این روش به یاد *ادوارد لوکاس*[۲۵] (که ایدهٔ اصلی آن را در ۱۸۷۶ کشف کرد) و **دریک لمر**[۲۶] (که آن را در ۱۹۳۰ مهذب کرد) به عنوان *آزمون لوکاس ــ لمر*[۲۷] معروف است. برای آزمون اول بودن عدد مرسن M_n (با فرض اول بودن n)، اعداد $U(۰)$، $U(۱)$، ...، $U(n-۲)$ را با استفاده از قاعده‌های زیر محاسبه می‌کنیم:

$$U(۰) = ۴$$
$$U(K+۱) = \left[U(K)^۲ - ۲\right] \bmod M_n$$

اگر در پایان کار دریابیم که $U(n-۲) = ۰$، آنگاه M_n اول است. اگر $U(n-۲) \neq ۰$ آنگاه M_n اول نیست.

به عنوان مثال، فرض می‌کنیم می‌خواهیم از آزمون لوکاس‌ــلمر برای ملاحظهٔ اول بودن $M_۵$ استفاده کنیم. (البته، از آنجا که $M_۵ = ۲^۵ - ۱ = ۳۱$، می‌دانیم در این حالت ساده عدد مورد بحث اول است، اما این موضوع را با روش مورد نظر روشن می‌کنیم.) در این صورت محاسبهٔ زیر را انجام می‌دهیم:

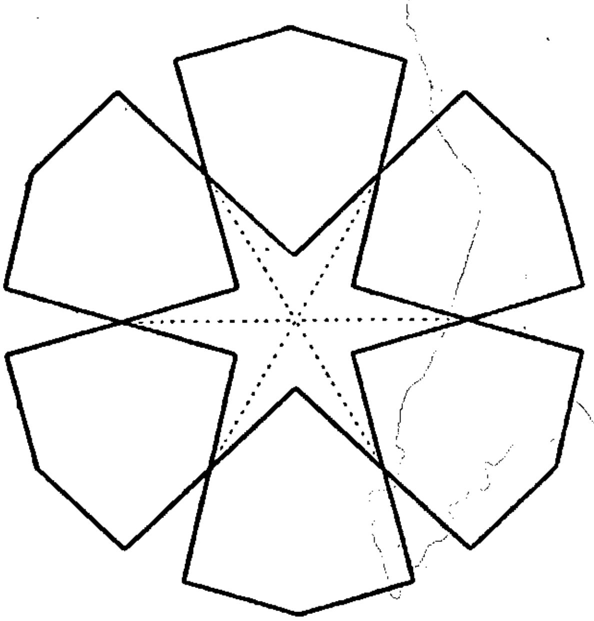
$$U(۰) = ۴$$
$$U(۱) = (۴^۲ - ۲) \bmod ۳۱ = ۱۴ \bmod ۳۱ = ۱۴$$
$$U(۲) = (۱۴^۲ - ۲) \bmod ۳۱ = ۱۹۴ \bmod ۳۱ = ۸$$
$$U(۳) = (۸^۲ - ۲) \bmod ۳۱ = ۶۲ \bmod ۳۱ = ۰$$

از آنجا که $U(۳) = ۰$، $M_۵$ باید اول باشد.

می‌توانید خودتان این روش را با استفاده از دو عدد $M_۷ = ۱۲۷$ (که اول است) و $M_{۱۱} = ۲۰۴۷$ (که اول نیست ــ پیشین را ملاحظه کنید) به کار برید.

یادداشتها:

۱ـ Goldbach's Conjecture
۲ـ Christian Goldbach
۳ـ Leonhard Euler
۴ـ Trial division
۵ـ Adleman
۶ـ Rumely
۷ـ Cohen
۸ـ Lenstra
۹ـ Pierre de Fermat
۱۰ـ Pseudo primes
۱۱ـ Martin Mersenne
۱۲ـ Mersenne numbers
۱۳ـ Rafael Robinson
۱۴ـ Hans Riesel
۱۵ـ Alexander Hurwitz
۱۶ـ Donald Gillies
۱۷ـ Bryant Tuckerman
۱۸ـ California State University
۱۹ـ Hayward
۲۰ـ Laura Nickel
۲۱ـ Curt Noll
۲۲ـ David Slowinski
۲۳ـ Cray Research
۲۴ـ Wisconsin
۲۵ـ Edovard Lucas
۲۶ـ Derrick Lehmer
۲۷ـ Lucas - Lehmer test



دسته خط

● سیامک جعفری

تعریف: مجموعه خطوط مستقیم همرس در نقطه A را دسته خط به مرکز A تعریف می‌کنند.

اگـــــر مـــــعـــــادلات $A_1x+B_1y+C_1=0$ و $A_2x+B_2y+C_2=0$ دو خط از دستـه خط بالا باشند آنگاه معادله

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0$$

که در آن α و β با هم صفر نیستند، خطی متعلق به دسته خط مذکور است و از A می‌گذرد. توجه کنید: اگر $\alpha\neq 0$ و $\lambda=\frac{\beta}{\alpha}$ فرض کنیم معادله بالا را می‌توان به این صورت نوشت:

$$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$$

که شامل تمام حالتهای دسته خط هست به جز وقتی $A_2x+B_2y+C_2=0$ باشد.

تذکر: با توجه به مطالب کلاسیک درباره خطوط موازی و منطبق، اگر دو معادله مفروض $A_1x+B_1y+C_1=0$ و $A_2x+B_2y+C_2=0$ طوری باشند که

دو خط موازی $\Leftarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$

$\Leftarrow$ دسته‌خط مرکز نخواهد داشت.

دو خط منطبق $\Leftarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$

$\Leftarrow$ دسته خط بی‌نهایت مرکز دارد.

شیب و عرض از مبدأ دسته خط:

اگر معادله را مرتب کنیم.

$$(A_1+\lambda A_2)x+(B_1+\lambda B_2)y+C_1+\lambda C_2=0$$

شیب دسته خط $m=-\frac{A_1+\lambda A_2}{B_1+\lambda B_2}$

عرض از مبدأ دسته خط $y_0=-\frac{C_1+\lambda C_2}{B_1+\lambda B_2}$

مثال: معادله خطی را بنویسید که با خط $6x+5y+13=0$ موازی باشد و از محل تلاقی دو خط $11x+17y-19=0$ و $5x+12y-2=0$ بگذرد.

حل:

شیب دسته $m=-\frac{11+5\lambda}{17+12\lambda}$

$$\longrightarrow\!\!\longrightarrow\!\!\longrightarrow -\frac{11+5\lambda}{17+12\lambda}=-\frac{6}{5}\Rightarrow\lambda=-1$$

شیب خط اول $m'=-\frac{6}{5}$

اگر این مقدار λ را در معادله دسته خط بگذاریم خط مورد نظر بدست می‌آید.

$$(11x+17y-19)-1(5x+12y-2)=0$$

خواهد شد. $6x+5y-17=0$

توجه: اگر می‌خواستیم بدون استفاده از دسته خط مسأله

را حل کنیم باید ابتدا دستگاه زیر را حل کرده سپس معادله خطی را بنویسیم که از یک نقطه می‌گذرد و شیب معلوم دارد.

$$\begin{cases} 5x+12y-2=0 \\ 11x+17y-19=0 \end{cases}$$

مثال: دسته خط به معادلهٔ $\alpha(x-4)+\beta(x-y+4)=0$ مفروض است. مرکز این دسته خط کدام نقطه است.

a) $(8,-4)$ b) $(4,-8)$

c) $(8,4)$ d) $(4,8)$

حل:

$$\begin{cases} x-4=0 & \Rightarrow x=4 \\ x-y+4=0 & \xrightarrow{\downarrow} y=8 \end{cases}$$

جواب d

* می‌توان نشان داد معادله خطی که از محل تلاقی دو خط $A_1x+B_1y+C_1=0$ و $A_2x+B_2y+C_2=0$ گذشته و عمود برخط $A_3x+B_3y+C_3=0$ است خواهد شد.

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{A_2x+B_2y+C_2}=\frac{A_1A_3+B_1B_3}{A_2A_3+B_2B_3}$$

اثبات: معادلهٔ دسته خط را به دست آورده و شرط عمود بودن را اعمال می‌کنیم.

$$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$$

$$\Rightarrow m=-\frac{A_1+\lambda A_2}{B_1+\lambda B_2}$$

$$L_3 \text{ شیب خط } m'=-\frac{A_3}{B_3}$$

$$-\frac{A_1+A_2\lambda}{B_1+B_2\lambda}\times\left(-\frac{A_3}{B_3}\right)=-1$$

$$\Rightarrow \lambda=-\frac{A_1A_3+B_1B_3}{A_2A_3+B_2B_3}$$

که معادله خط به دست می‌آید.

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{A_2x+B_2y+C_2}=\frac{A_1A_3+B_1B_3}{A_2A_3+B_2B_3}$$

** اکنون معادله خطی را به دست می‌آوریم که متعلق به یک دسته خط باشد و با خط سومی موازی است.

$$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$$

شرط توازی را اعمال خواهیم کرد.

$$\begin{cases} \text{شیب دسته} = -\dfrac{A_1+\lambda A_2}{B_1+\lambda B_2} \\ \qquad\qquad \Rightarrow -\dfrac{A_1+\lambda A_2}{B_1+\lambda B_2}=-\dfrac{A_3}{B_3} \\ L_3 \text{ شیب خط} = -\dfrac{A_3}{B_3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda=\frac{A_1B_3-B_1A_3}{A_3B_2-B_2A_3}$$

خط مورد نظر خواهد شد.

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{A_2x+B_2y+C_2}=\frac{A_1B_3-A_3B_1}{A_3B_2-A_2B_3}$$

*** اگر معادلهٔ $Ax+By+C=0$ را به صورت $f(x,y)=0$ نمایش دهیم، آنگاه معادله دسته خط شامل دو خط $f(x,y)=0$ و $g(x,y)=0$ خواهد شد.

$$f(x,y)+\lambda g(x,y)=0$$

می‌توان نشان داد معادله خطی از دسته خط بالا که از نقطه (x_1,y_1) گذشته است به صورت زیر به دست می‌آید.

$$f(x_1,y_1)+\lambda g(x_1,y_1)=0$$

نقطه در خط صدق می‌کند.

$$\lambda=-\frac{f(x_1,y_1)}{g(x_1,y_1)}$$

خط خواهد شد.

$$\frac{f(x,y)}{g(x,y)}=\frac{f(x_1,y_1)}{g(x_1,y_1)}$$

که اگر بخواهیم روابط را باز شده بنویسیم خواهیم داشت.

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{A_2x+B_2y+C_2}=\frac{A_1x_1+B_1y_1+C_1}{A_2x_1+B_2y_1+C_2}$$

******دسته خط مزدوج (قایم)**

اگر $A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$ یک دسته خط باشد. و نقطه‌ای مانند $\Big|\begin{smallmatrix}x_2\\y_2\end{smallmatrix}$ باشد، معادله خطی که از این نقطه گذشته و برخطی از دسته خط بالا عمود است چنین به

دست می‌آید.

$$\begin{cases} \text{شیب دسته} = -\dfrac{A_1+\lambda A_2}{B_1+\lambda B_2} \\ \text{شیب خط} = -\dfrac{A}{B} \end{cases} \quad \xRightarrow{\text{شرط عمود}} -\frac{A}{B} = \frac{B_1+\lambda B_2}{A_1+\lambda A_2}$$

و خط مورد نظر خواهد شد.

$(B_1+\lambda B_2)x-(A_1+\lambda A_2)y-$

$(B_1+\lambda B_2)x_2+(A_1+\lambda A_2)y_2=0$

از آنجا که (x_1,y_1) مرکز دسته خط در معادلات خطوط اول و دوم صدق می‌کند معادله دسته خط را می‌توان چنین تبدیل کرد:

$(A_1+\lambda A_2)x+(B_1+\lambda B_2)y-(A_1+\lambda A_2)x_1-$

$(B_1+\lambda B_2)y_1=0$

با تبدیلات $A_1+\lambda A_2=a$ و $B_1+\lambda B_2=b$ خواهیم داشت.

$$\begin{cases} ax+by-ax_1-by_1=0 \\ bx-ay-bx_2+ay_2=0 \end{cases}$$

معادله $bx-ay-bx_2+ay_2=0$ یا $bx-ay+C'=0$ را دسته خط مزدوج می‌گوییم.

مثال: اگر d_2 فاصله نقطه (x_1,y_1) از خط مزدوجش، و d_1 فاصله نقطه (x_2,y_2) از دسته خط اصلی باشد ثابت کنید.

$bd_1+ad_2=\sqrt{a^2+b^2}(y_2-y_1)$

$ad_1-bd_2=\sqrt{a^2+b^2}(x_2-x_1)$

حل: اثبات این مسأله با نوشتن فرمولهای فاصله و جمع مناسب به سادگی به دست می‌آید.

مثال: دسته خط $f(x,y)+\lambda g(x,y)=0$ را در نظر بگیرید و خطی را به دست آورید که از نقطه $\begin{vmatrix}x_1\\y_1\end{vmatrix}$ گذشته و با این خط از دسته خط بالا موازی باشد. و آنرا دسته خط موازی بنامید.

حتماً تاکنون متوجه شده‌اید که این دو نقطه (x_1,y_1)، (x_2,y_2) در واقع می‌توانند دو سر قطر یک دایره باشند. خطی که (قطر دایره) دو نقطه را به هم وصل می‌کند، مزدوج ندارد.

مثال: معادله خطی را بنویسید که از دسته خطوط متعلق به معادلات $3x-2y+5=0$ و $4x+3y-1=0$ بوده و به علاوه محور عرضها را به عرض ۳- قطع کند.

حل:

$$\text{عرض از مبدأ} = -\frac{C_1+\lambda C_2}{B_1+\lambda B_2}=-3 \Rightarrow -\frac{-1+5\lambda}{3-2\lambda}=-3$$

$$\Rightarrow \lambda=\frac{10}{11}$$

معادله خط $\quad 4x+3y-1+\frac{10}{11}(3x-2y+5)=0$

مثال: α را طوری تعیین کنید که خط $\alpha x+5y+9=0$ متعلق به دسته خط زیر باشد.

$\alpha(5x+3y-7)+\beta(3x+10y+4)=0$

حل: دسته خط را مرتب می‌کنیم.

$(5\alpha+3\beta)x+(3\alpha+10\beta)y-7\alpha+4\beta=0$

با مقایسه با خط مورد نظر:

$$\begin{cases} 5\alpha+3\beta=\alpha \\ 3\alpha+10\beta=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\alpha+3\beta=0 \\ 3\alpha+10\beta=5 \end{cases} \Rightarrow \alpha=\frac{15}{31}$$

***

این موضوع دسته خط را می‌توان برای سه خط هم بسط داد. سه خط به معادلات

$f(x,y)=A_1x+B_1y+C_1=0$

$g(x,y)=A_2x+B_2y+C_2=0$

$h(x,y)=A_3x+B_3y+C_3=0$

در یک نقطه همرسند، اگر و تنها اگر، بتوان سه عدد ثابت λ_1، λ_2 و λ_3 پیدا کرد (که همه آنها صفر نباشند) به طوری که

$\lambda_1 f(x,y)+\lambda_2 g(x,y)+\lambda_3 h(x,y)=0$

اثبات: اگر $f(x,y)=0$ و $g(x,y)=0$ و $h(x,y)=0$ همرس باشند، هرکدام از آنها، مثلاً $f(x,y)=0$ را می‌توان یک خط از دسته خط $\alpha g(x,y)+\beta h(x,y)=0$ فرض کرد. یعنی:

$f(x,y)=\alpha g(x,y)+\beta h(x,y) \Rightarrow f-\alpha g-\beta h=0$

که همان شکل $\lambda_1 f+\lambda_2 g+\lambda_3 h=0$ است.

از طرف دیگر، اگر ثوابتی مانند λ_1، λ_2 و λ_3 باشد به گونه‌ای که $\lambda_1 f+\lambda_2 g+\lambda_3 h=0$ آنگاه $f=-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}g-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}h$

که نشان می‌دهد $f(x,y)=0$ از نقطه تقاطع $g(x,y)=0$ و $h(x,y)=0$ می‌گذرد درنتیجه هر سه خط همرس می‌شوند.

مثال: ثابت کنید ارتفاعهای یک مثلث همرسند.

حل: اگر BC و CA و AB اضلاع مثلثی به معادلات $h(x,y)=0$ و $g(x,y)=0$ و $f(x,y)=0$ باشند. آنگاه $g(x,y)+\lambda h(x,y)=0$ معادله خطی است به ضریب زاویه $-\frac{A_2+\lambda A_3}{B_2+\lambda B_3}$ که از رأس A می‌گذرد. اگر این خط بر $f(x,y)=0$ عمود باشد داریم.

$$\left(-\frac{A_2+\lambda A_3}{B_2+\lambda B_3}\right)\times\left(-\frac{A_1}{B_1}\right)=-1\Rightarrow\lambda=-\frac{A_1A_2+B_1B_2}{A_3A_1+B_3B_1}$$

معادله ارتفاع AH خواهد شد.

$$g(x,y)-\frac{A_1A_2+B_1B_2}{A_3A_1+B_3B_1}.h(x,y)=0$$

به عبارت دیگر

ارتفاع AH: $k(x,y)\equiv(A_3A_1+B_3B_1)g(x,y)-(A_1A_2+B_1B_2)h(x,y)=0$.

ارتفاع BH′: $k'(x,y)\equiv(A_1A_2+B_1B_2)h(x,y)-(A_2A_3+B_2B_3)f(x,y)=0$

ارتفاع CH″: $k''(x,y)\equiv(A_2A_3+B_2B_3)f(x,y)-(A_3A_1+B_3B_1)g(x,y)=0$

به سادگی مشخص است که

$$k(x,y)+k'(x,y)+k''(x,y)=0$$

که نشان می‌دهد ارتفاع‌های مثلث همرس هستند.

مثال: دو دسته خط به معادلات زیر مفروض‌اند. بدون پیدا کردن مراکز آنها معادله خطی را پیدا کنید که از مراکز هر دو دسته خط بگذرد (خطی که به هر دو دسته متعلق باشد).

$5x+3y-2+\lambda(3x-y-4)=0$

$x-y+1+\lambda'(2x-y-2)=0$

حل: بر عهدهٔ دانش‌آموزان عزیز.

مسایل:

۱) مقدار λ را طوری تعیین کنید که دو خط $\Delta:\lambda x+2y-4=0$ و $\Delta':3x-y=6$ روی محور طولها متقاطع باشند.

۲) مختصات نقطه ثابتی را که دسته خط (مرکز دسته خط) به معادله زیر از آن می‌گذرد را به دست آورید.

$(m+1)x+(m-1)y-5=0$

۳) α را طوری تعیین کنید که نقطه تلاقی دو خط $y+5x-1=0$ و $y=2x-1$ روی خط $\alpha x+(2\alpha-1)y-2=0$ قرار داشته باشد.

۴ ـ ثابت کنید که سه خط به معادلات زیر در یک نقطه همرسند. $\Delta'':y-\frac{5}{2}x=-2$ ، $\Delta':y=-2x+7$ و $\Delta:y-2x+1=0$.

۵ ـ اگر $(\alpha-1,\alpha+1)$ مرکز دسته خط $mx+(m-1)y-2=0$ باشد مختصات مرکز دسته خط را پیدا کنید.

منابع

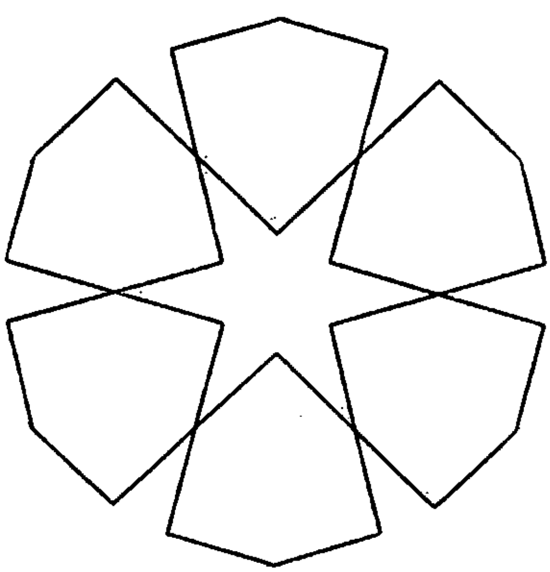
۱ ـ جبر تحلیلی — غلامرضا عسجدی

۲ ـ هندسه تحلیلی — ترجمه حسین ابراهیم زاده قلزم

۳ ـ مسایل هندسه تحلیلی

۴ ـ حساب — جورج. ب. توماس

5. Problems in analytical geometry D. KLETENIK



طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روشهای مقدماتی (۱۷)

از : 100 Great Problems of Elementary Mathematics

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

مسأله پرگار ماچرونی

اثبات این که هر شکلی را که بتوان با پرگار و خط‌کش نامدرج رسم کرد می‌توان با پرگار تنها نیز رسم کرد.

ماچرونی «L.Mascheroni» (۱۷۵۰ ــ ۱۸۰۰) ریاضیدان ایتالیایی مسألهٔ ترسیمهای هندسی تنها با استفاده از پرگار (بدون استفاده از خط‌کش نامدرج) را مطرح و آن را در کتاب *Lageometria del compasso*، که در ۱۷۹۷ در پاویا «Pavia» به چاپ رسید، به طریقی ماهرانه حل کرد.

در صورتی که مرحله‌های جداگانه‌ای را که ترسیمهای دایره و خط مستقیم انجام می‌دهند در نظر بگیریم، ملاحظه می‌کنیم هر مرحله شامل یکی از سه ترسیم اساسی زیر است :

I . یافتن نقطهٔ تقاطع دو خط مستقیم ؛

II . یافتن نقطهٔ تقاطع یک خط مستقیم و یک دایره ؛

III . یافتن نقطهٔ تقاطع دو دایره.

درنتیجه، تنها نیاز به نشان دادن این است که دو ترسیم اساسی I و II را می‌توان تنها با پرگار انجام داد. (طبیعی است که در هندسهٔ پرگاری ماچرونی ، خط مستقیم، در صورتی که دو نقطه‌اش مشخص باشد، مفروض یا معلوم در نظر گرفته می‌شود.)

ابتدا باید دو مسألهٔ مقدماتی زیر را حل کنیم.

مسألهٔ مقدماتی ۱. رسم *مجموع یا تفاضل دو پاره‌خط معلوم* a و b .

به عبارت دیگر : قطعهٔ $QX = b$ را به قطعهٔ معلوم $PQ = a$ افزودن یا از آن کم کردن.

حل: ۱. کمان $Q|b$ (این کمان به معنی کمان دایره‌ای است که نقطهٔ وسطش Q و شعاعش b است) را رسم می‌کنیم، نقطهٔ دلخواه H را روی این کمان در نظر گرفته، H' قرینهٔ H را نسبت به خط g ، که توسط نقطه‌های P و Q مشخص شده است، رسم می‌کنیم، و قطعهٔ HH' را با h نمایش می‌دهیم.

۲. ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $KHH'K'$ را، که ساقهای KH و $K'H'$ آن برابر b اند و قاعدهٔ KK' آن برابر ۲h است، رسم می‌کنیم. (K نقطهٔ تقاطع کمانهای $Q|h$ و $H|h$، K' قرینهٔ K نسبت به g است.) قطر $KH' = HK'$ این ذوزنقه را d می‌نامیم. از آنجا که ذوزنقهٔ مورد بحث چهار ضلعی‌ای قابل محاط شدن در دایره است، طبق قضیهٔ بطلمیوس (که در هر چهارضلعی محاطی مجموع حاصلضربهای اضلاع روبرو برابر حاصلضرب دو قطر است) رابطهٔ زیر برقرار است :

$$d^{۲} = b^{۲} + ۲h^{۲}$$

از طرف دیگر، از مثلث قایم‌الزاویهٔ $QK'X$ ، که در آن $K'X$ به صورت x در نظر گرفته شده است، نتیجه می‌شود که

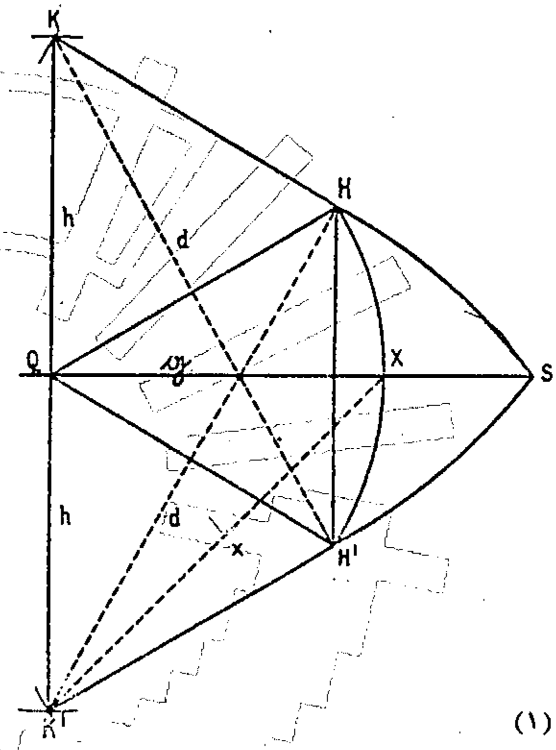
$$x^{۲} = b^{۲} + h^{۲}$$

از این دو رابطه نتیجه می‌گیریم که

$$d^2 = x^2 + h^2$$

بنابراین x یکی از ساقهای مثلث قایم‌الزاویه‌ای است که وتر آن d و ساق دیگرش h است. در این صورت اگر s نقطهٔ تقاطع کمانهای K|d و K′|d را بر خط مستقیم g بیابیم، QS = S.

۳. نقطهٔ تقاطع کمانهای K|x و K′|x را رسم می‌کنیم؛ یعنی نقطهٔ X را که سعی در یافتنش داشتیم.



شکل (۱)

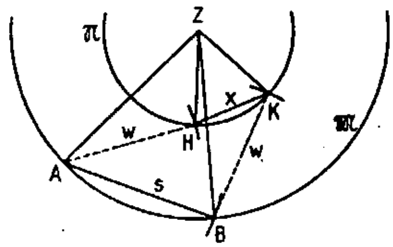
مسألهٔ مقدماتی ۲. یافتن چهارمین قطعهٔ xی که متناسب با سه قطعهٔ معلوم m، n، s است (یافتن چهارمین جزء تناسب).

به عبارت دیگر، قطعهٔ

$$x = \frac{n}{m} s$$

را رسم می‌کنیم. راه‌حلی که ماچرونی برای این مسألهٔ اساسی به دست آورد به خاطر کوتاهی و سادگیش قابل توجه است.

دوایر هم مرکز DR = Z|m و R = Z|n را رسم کنید، وتر AB = s را در DR بکشید، با پرگار از A و B طول دلخواه w را روی R جدا کنید، و از فاصلهٔ بین H و K، نقاط تقاطع حاصل، قطعهٔ مطلوب x را به دست آورید.



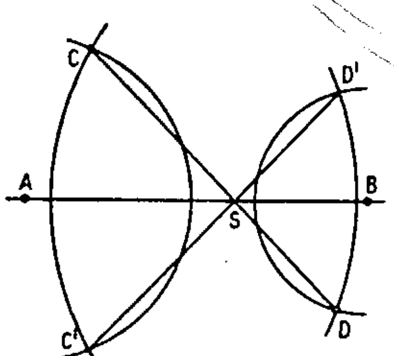
شکل (۲)

در این ترسیم فرض بر این است که s داخل دایرهٔ DR قرار می‌گیرد. اما اگر چنین نباشد، ابتدا کسر n / m را به N / M تبدیل می‌کنیم، که در آن N و M، به ترتیب، ضریبهای درست و به قدر کافی بزرگی از n و m و چنان‌اند که می‌توانند طبق مسألهٔ مقدماتی اول رسم شوند. (یک روش نسبتاً ساده دو برابر کردن نتیجه است، به عنوان مثال، هنگامی که PQ = m، و m شعاع دایرهٔ P|PQ سه بار متوالی از Q اندازه گرفته شده باشد. نقطهٔ انتهایی بعد از این اندازه گرفتن به اندازهٔ ۲m از Q فاصله دارد.)

پس از حل مسأله‌های مقدماتی مورد بحث، به حل دو مسألهٔ مهم می‌پردازیم.

′I. یافتن S، نقطهٔ تقاطع دو خط مستقیم AB و CD (که هر یک از آنها با دو نقطه داده شده است)، با پرگار تنها.

′II. تعیین S، نقطهٔ تقاطع دایرهٔ مفروض R و خط مستقیم مفروض AB با پرگار تنها.



شکل (۳)

حل ′I. ′C و ′D قرینه‌های C و D را نسبت به AB رسم می‌کنیم. در این صورت S، نقطهٔ تقاطع مطلوب نیز بر

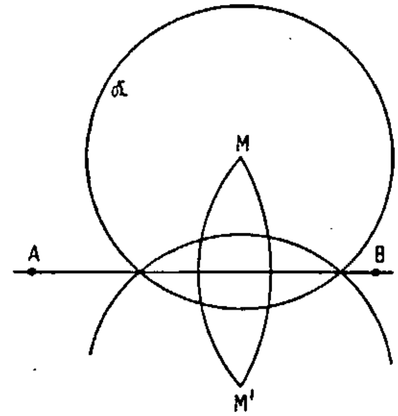
C′D′ قرار دارد. طبق قضیهٔ پرتوی نتیجه می‌شود

$$CS / SD = CC' / DD'$$

یعنی، اگر قطعه‌های CS، CD، CC′، DD′ را، به ترتیب، به صورت x، e، c، d نمایش بدهیم، $x/(e-x)=c/d$ یا

$$x=\frac{c}{c+d}.e$$

اکنون کار را با رسم H) $CH = c + d$ به عنوان نقطهٔ تقاطع کمانهای C′|d و D|e) آغاز می‌کنیم؛ در این صورت قطعهٔ x را طبق مسألهٔ مقدماتی ۲ رسم می‌کنیم؛ و سرانجام S، نقطهٔ تقاطع مطلوب، را به عنوان تقاطع کمانهای C|x و C′|x رسم می‌کنیم.



شکل (۴)

حل II′. فرض می‌کنیم مرکز دایرهٔ مفروض به صورت M و شعاع آن به صورت r مشخص شده باشد. M′ قرینهٔ M را نسبت به خط مستقیم AB رسم می‌کنیم و پرگاری که به اندازهٔ شعاع r باز باشد r را روی R از M′ جدا می‌کنیم. نقطه‌های تقاطع نتیجه نقطه‌های تقاطع خط مستقیم AB با دایرهٔ مفروض R اند.

ترسیم در صورتی که خط مستقیم AB از M بگذرد انجام‌پذیر نیست. در این حالت استثنایی قطعهٔ AM را به اندازهٔ r، طبق مسألهٔ مقدماتی ۱، امتداد می‌دهیم یا کوتاه می‌کنیم. نقطه‌های انتهایی قطعه‌های امتداد یافته یا کوتاه شده نقطه‌های تقاطع R و AB اند.

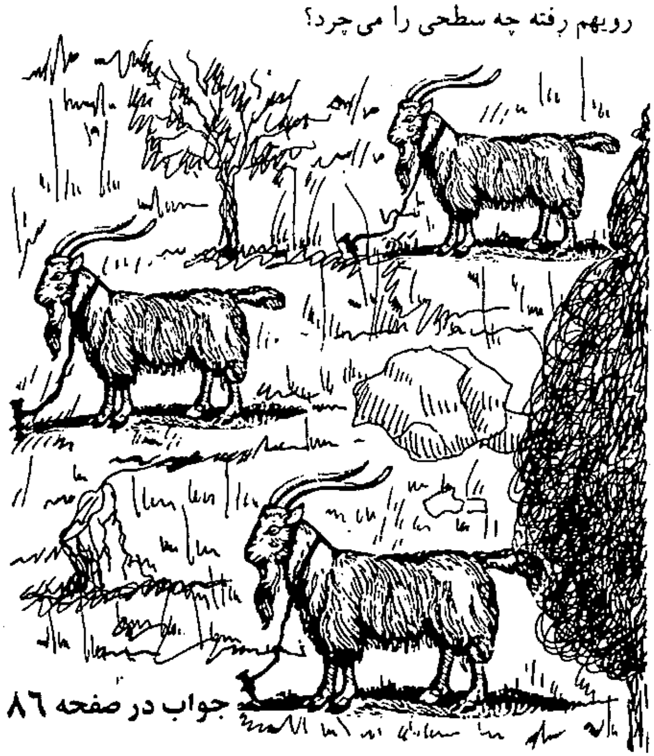
بدین ترتیب حل مسألهٔ ماچرونی تکمیل می‌شود.

تفریح اندیشهٔ ۵

مرا محصور مکن

سه بز، چمنی محصور به مساحت ۱۲۰ متر مربع و به شکل مثلثی متساوی‌الاضلاع را می‌چرند. هر یک از بزها با طناب به گوشه‌ای متفاوت از چمن بسته شده و طول طنابها چنان است که هر بز می‌تواند به وسط حصار مقابل برسد.

اگر در نظر بگیریم که هر بز تمام سطحی را که به تنهایی می‌تواند به آن برسد، نیمی از سطحی را که دو بز در آن شریکند، و یک سوم سطحی را که هر سه بز در آن مشترکند، می‌چرد، رویهم رفته چه سطحی را می‌چرد؟

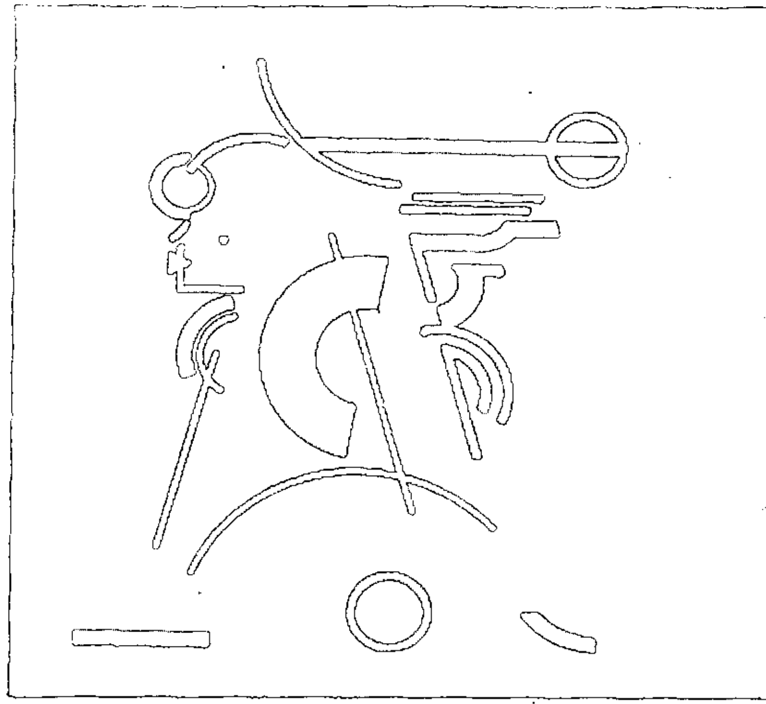


جواب در صفحه ۸٦

ریاضیات گسسته

(قسمت چهارم)

اصول منطق



(سوّم ریاضی و پیش‌دانشگاهی)
ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

در فصل اول و در مثال ۱ ــ ۳۵ (بخش ۴.۱) فرمولی مجموع‌یابی استخراج کردیم. فرمول مزبور را، با شمارش یک گردایه ازاشیاء (تعداد دفعاتی را که یک گزاره در قطعه برنامهٔ معینی به کار می‌رود) به دو طریق متفاوت و سپس مساوی قرار دادن نتایج حاصل، به دست آوردیم، در نتیجه چنین می‌گوییم که نتیجهٔ مزبور را با استفاده از اثباتی ترکیباتی[1] محقق کردیم. این روش یکی از روشهای متفاوت بسیاری است که برای رسیدن به اثبات در سراسر این کتاب با آنها سر و کار خواهیم داشت.

در این فصل نگاه دقیق‌تری به آنچه که اثبات قراردادی‌تر یا استدلال درست را تشکیل می‌دهد می‌اندازیم. زمانی که ریاضیدانی مایل به اقامهٔ اثبات وضعیتی مفروض است، باید از دستگاه منطق استفاده کند. این موضوع زمانی که یک دانشمند کامپیوتر الگوریتمهای لازم برای برنامه یا دستگاهی از برنامه‌ها را طرح می‌کند، نیز صادق است. منطق ریاضیات برای مشخص کردن این که گزاره‌ای از یک یا بیش از یک گزاره نتیجه می‌شود، یا نتیجهٔ منطقی آنهاست، به کار می‌رود.

بعضی از قواعد حاکم بر این فرآیند را در این فصل مشخص کرده‌ایم. سپس، در سراسر فصول آتی، از قواعد مزبور در اثباتها(ی آمده در متن) استفاده خواهیم برد. اما، در هیچ زمانی نمی‌توان امیدوار بود که به مرحله‌ای برسیم که در آن بتوانیم قواعد مورد بحث را به گونه‌ای خودکار به کار بریم. و باید، چون در کاربرد مفاهیم شمارش مورد بحث فصل ۱، همواره برای درک وضعیت مفروض تحلیل و جستجو کنیم. و این کار غالباً به صفاتی، چون بصیرت و خلاقیت، که نمی‌توان آنها را در کتابها آموخت، نیازمند است، و صرف کوشش در به کاربردن فرمولها یا کمک گرفتن از قواعد فایدهٔ چندانی در اثبات نتایج(ی چون قضایا) یا حل مسایل شمارش ندارد.

رابطهای مبنایی و جداول ارزش

در گسترش هر نظریهٔ ریاضی، اظهارات را به صورت جمله‌ها مطرح می‌کنیم. اظهارات کتبی یا لفظی‌ای چنین، که به ***گزاره***[2] یا ***قضیه***[3] موسوم‌اند، جمله‌هایی خبری‌اند که یا راست یا دروغ‌اند، برای مثال، موارد زیر گزاره‌اند.

a) p : ترکیبیات یکی از دوره‌های لازم است.

b) q : من متخصص کامپیوترم.

c) r : دستگاه رسّام امروز خراب است.

قضایا را می‌توان به عنوان ***گزاره‌های ساده***[4] در نظر گرفت، زیرا به واقع راهی برای تجزیهٔ آنها به موردی ساده‌تر وجود ندارد. گزاره‌های ساده همراه با ***رابطهای منطقی***[5] در ساختن ***گزاره‌های مرکب***[6] به کار می‌روند.

به طریق زیر می‌توان گزاره‌ای را نقض یا دو گزاره را ترکیب کرد.

۱. **نقیض:** ***نقیض***[۷] گزارهٔ p با p~ نمایش داده و به صورت «نه p» خوانده می‌شود. در مورد p ی فوق، p~ گزارهٔ زیر است «ترکیبیات یکی از دوره‌های لازم نیست.»

۲. **ترکیب عطفی:** ***ترکیب عطفی***[۸] p و q را با $p \wedge q$ نمایش می‌دهیم و «p و q» می‌خوانیم. در مثال‌مان، گزارهٔ $p \wedge q$ به صورت زیر است «ترکیبیات یکی از دوره‌های لازم است، و من متخصص کامپیوترم».

۳. **ترکیب فصلی:** عبارت $p \vee q$ ***ترکیب فصلی***[۹] p ، q را نمایش می‌دهد، و «p یا q» خوانده می‌شود، در نتیجه «ترکیبیات یکی از دوره‌های لازم است، **یا** من متخصص کامپیوترم» ترجمهٔ لفظی $p \vee q$ است. در این مرحله کلمهٔ «یا» را به معنی «***جامع***[۱۰]» به کار می‌بریم. در نتیجه، $p \vee q$ راست است اگر یکی از دو گزارهٔ p ، q، یا **هر دو** آنها راست باشند. در زبان فارسی گاهی برای خاطر نشان کردن این مطلب «و/یا» می‌نویسیم. «یا»ی مانع[۱۱] را با «$p \veebar q$» نمایش می‌دهیم. گزارهٔ مرکب $p \veebar q$ راست است اگر یکی از دو گزارهٔ p ، q ، **اما نه هر دو**، راست باشد. در مثال فوق، یکی از راههای بیان $p \veebar q$ عبارت از «ترکیبیات یکی از دوره‌های لازم است، یا من متخصص کامپیوترم، اما نه هردو.»

۴. **استلزام:** برای مشخص کردن ***استلزام***[۱۲] q توسط p، می‌گوییم «p مستلزم q است» و می‌نویسیم $p \to q$. به طریق دیگر، می‌توان گفت (a) اگر p، آنگاه q ؛ (b) p کافی برای q است ؛ (c) p تنها اگر q ؛ و (d) q لازم برای p است. در این مثال، یکی از ترجمه‌های لفظی $p \to q$ عبارت است از «اگر ترکیبیات یکی از دوره‌های لازم باشد، آنگاه من متخصص کامپیوترم.» گزارهٔ p به ***فرض***(مقدم[۱۳]) استلزام، و q به ***نتیجهٔ*** (تالی[۱۴]) آن موسوم است. هنگامی که گزاره‌ها را به این شیوه ترکیب می‌کنیم، لازم به وجود رابطه‌ای تصادفی بین آنها نیست، و چه p و q به هم بستگی داشته باشند چه نه، به طور ساده و با توجه به تعریف پیشین استلزام، $p \to q$ را می‌نویسیم.

۵. **هم‌ارزی:** سرانجام، ***هم‌ارزی***[۱۵] دو گزاره p ، q را با $p \leftrightarrow q$ نمایش می‌دهیم و «p هم ارز q است»، «p اگر و تنها اگر q »، یا «p لازم و کافی برای q است» می‌خوانیم. در مثال p ، q مان «ترکیبیات یکی از دوره‌های لازم است اگر و تنها اگر من متخصص کامپیوتر باشم» معنی $p \leftrightarrow q$ را انتقال می‌دهد. گاهی «p اگر و تنها اگر q» را به صورت «p iff q» مختصر می‌کنیم.

در سراسر بحث مربوط به منطقمان، از گزاره شمردن بعضی از انواع جمله‌های خبری، چون آنهایی که به نظر شخصی نیاز دارند یا به زمان جاری وابسته‌اند، و در نتیجه نه راست نه دروغ‌اند، خودداری می‌کنیم، علاوه بر این، باید دریابیم که جمله‌ای چون عدد x عددی صحیح است.

گزاره **نیست** زیرا ***ارزش راستی***[۱۶] (راست یا دزوغ)اش را نمی‌توان تا زمانی که مقداری عددی به x نسبت نداده‌ایم مشخص کرد. اگر به x مقدار ۷ را تخصیص دهیم، نتیجهٔ کار گزاره‌ای راست است. درحالی که تخصیص مقادیری چون ۱/۲، $\sqrt{۲}$ ، یا π به x گزاره را دروغ می‌سازد.

حضور متغیر یا مقداری مجهول در یک جمله، خود به خود به مفهوم گزاره نبودن جمله نیست. برای مثال، جمله

اگر $x = ۳$ ، آنگاه $x^{۲} = ۹$

گزاره‌ای راست است، در حالی که گزارهٔ

اگر $x = ۳$ ، آنگاه $x + ۲ = ۶$

گزاره‌ای دروغ است.

در بحث پیشین، وضعیاتی را ذکر کردیم که طبق آنها گزاره‌های $p \vee q$ ، $p \veebar q$ بر مبنای راستی مؤلفه‌های سادهٔ p ، q راست در نظر گرفته می‌شدند. ارزش دارد که به بررسی بیشتر این مطلب که صدق یا کذب گزاره‌ای مرکب تابعی از ارزشهای راستی مؤلفه‌های ساده آن است، بپردازیم. جداول ۱.۲ و ۲.۲ صدق و کذب نقیض و گزاره‌های مرکب دیگر را بر مبنای ارزشهای راستی مؤلفه‌های اولیه‌شان خلاصه می‌کنند. در تشکیل چنین ***جداول ارزشی***[۱۷] به جای دروغ ۰ و به جای راست ۱ می‌نویسیم.

◄ **جدول ۱**

p	$\bar{p}$
۰	۱
۱	۰

▶ جدول ۲

p	q	$p\wedge q$	$p\vee q$	$p\veebar q$	$p\to q$	$p\leftrightarrow q$
۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱
۰	۱	۰	۱	۱	۱	۰
۱	۰	۰	۱	۱	۰	۰
۱	۱	۱	۱	۰	۱	۱

چهار تخصیص راستی ممکن p و q را می‌توان در هر ترتیب فهرست کرد. اما برای کارهای بعدی، فهرست ارائه شده در فوق سودمندتر است.

ملاحظه می‌کنیم که ستونهای ارزشهای راستی p، $\bar{p}$ مقابل یکدیگرند. گزارهٔ $p\wedge q$ تا وقتی که p، q هر دو راست باشند، راست است، در حالی که $p\vee q$ تنها وقتی که هر دو گزارهٔ ساده آن دروغ باشند، دروغ است. همان گونه که قبلاً توجه کردیم، $p\veebar q$ زمانی که دقیقاً یکی از موارد p، q راست باشد، راست است.

نتیجهٔ استلزام $p\to q$ در جمیع حالات، جز حالتی که p راست و q دروغ باشد، راست است. مایل نیستیم که گزاره‌ای راست به پذیرش مطلبی که دروغ است منجر شود. اما، گزاره‌ای چون «اگر ۶ = ۳ + ۲، آنگاه ۷ = ۴ + ۲» را، با وجود این که هر دو گزارهٔ «۶ = ۳ + ۲» و «۷ = ۴ + ۲» دروغ‌اند، راست می‌پنداریم.

سرانجام، گزارهٔ $p\leftrightarrow q$، زمانی که گزاره‌های سادهٔ آن ارزش راستی یکسان داشته باشند، راست است.

معمولاً اشخاص در برخورد اولشان با جدول ارزش استلزام ($p\to q$)، چنان‌که در جدول ۲.۲ آمده، مخصوصاً نتایج واقع در دو سطر اول، آن را (که p ارزش راستی ۰ دارد) به سختی می‌پذیرند. مثال زیر به دریافت آسانتر تخصیصات ارزش راستی مزبور مدد می‌رساند.

▶ مثال ۲.۱:

سناریوی زیر را در نظر بگیرید. تقریباً یک هفته پیش از کریسمس است و پنی در آن هفته در چند مهمانی شرکت خواهد کرد. او، نگران از اضافه وزنش، قرار می‌گذارد تا روز بعد از کریسمس خود را وزن نکند. با در نظر آوردن این که مهمانیهای مزبور چه بلایی سر قطرشکمش می‌آورند، تصمیم زیر را برای ۲۶ دسامبر می‌گیرد: «اگر وزنم از ۱۲۰ پوند بیشتر شود، در کلاس بدنسازی نام‌نویسی خواهم کرد.»

فرض می‌کنیم p و q گزاره‌های (سادهٔ) زیر را نمایش دهند.

p : وزنم از ۱۲۰ پوند بیشتر است.

q : در کلاس بدنسازی نام‌نویسی خواهم کرد.

در این صورت گزارهٔ (استلزام) پنی با $p\to q$ داده می‌شود.

ارزشهای راستی مثال خاص $p\to q$ ی فوق را در سطرهای جدول ۲.۲ بررسی می‌کنیم، و ابتدا حالات ساده‌تر سطرهای ۴ و ۳ را در نظر می‌گیریم.

● سطر ۴ : هم p هم q دارای ارزش راستی ۱ اند. در ۲۶ دسامبر پنی درمی‌یابد که وزنش بیش از ۱۲۰ پوند است و بلافاصله همانگونه که عهد کرده، در کلاس بدنسازی نام نویسی می‌کند. در این حالت $p\to q$ را راست در نظر می‌گیریم و ارزش راستی ۱ را به آن تخصیص می‌دهیم.

● سطر ۳ : p دارای ارزش راستی ۱ و q دارای ارزش راستی ۰ است. ۲۶ دسامبر فرا می‌رسد، پنی وزنش را بیش از ۱۲۰ پوند می‌بیند، اما کوششی در نوشتن نام خود در کلاس بدنسازی به عمل نمی‌آورد. در این حالت احساس می‌کنیم که پنی عهدش را شکسته است ــ به عبارت دیگر، استلزام $p\to q$ دروغ است (و ارزش راستی ۰ دارد).

امکان دارد که حالات سطرهای ۱ و ۲ بی‌درنگ با شهودمان نخواند، اما مثال فوق می‌تواند قبول این نتایج را آسانتر کند.

● سطر ۱ : هم p، هم q دارای ارزش راستی ۰ اند. در این حالت پنی در ۲۶ دسامبر درمی‌یابد که وزنش ۱۲۰ پوند یا کمتر از آن است و در کلاس بدنسازی نام نمی‌نویسد. در این صورت برخلاف پیمانش عمل نکرده است؛ و بنابراین گزارهٔ $p\to q$ اش را راست می‌گیریم و ارزش راستی ۱ را به آن تخصیص می‌دهیم.

● سطر ۲ : p دارای ارزش راستی ۰ و q دارای ارزش راستی ۱ است. پنی، در این حالت آخر، در ۲۶ دسامبر وزنش را ۱۲۰ پوند یا کمتر از آن می‌بیند و با این همه در کلاس بدنسازی نام‌نویسی می‌کند. شاید وزنش ۱۱۹ یا ۱۲۰ پوند باشد و احساس می‌کند که این مقدار هم چنان زیاد است. یا شاید به

کلاس بدنسازی رفتنش به این علت است که تصور می‌کند که این کار برای تندرستیش سودمند است. در این صورت بدون این که دلیل این کارش مهم باشد، عهد $p \to q$ اش نقض نکرده است. بار دیگر، گزارهٔ مرکب مزبور را راست می‌پذیریم، و ارزش راستی ۱ را به آن تخصیص می‌دهیم.

□

مثال بعدیمان به بحث مفهومی مرتبط، یعنی، ساختار **تصمیم‌گیری**[18] یا *(انتخاب)*[19] در برنامه‌نویسی کامپیوتری، می‌پردازد.

◀ مثال ۲.۲

در علوم کامپیوتری ساختارهای تصمیم‌گیری If-Then، If-Then-Else در زبانهایی چون **بیسیک** و **پاسکال** رخ می‌دهند. فرض p غالباً عبارتی رابطه‌ای[20] چون $x > 2$ است. در این صورت عبارت مزبور به گزاره‌ای (منطقی) تبدیل می‌شود که بسته به مقدار متغیر x در آن مرحله در برنامه، ارزش راستی ۰ و ۱ دارد. نتیجهٔ q ممکن است حکمی اجراپذیر هدایت‌کنندهٔ برنامه به سطری دیگر باشد، یا موجب نتیجه‌ای برای چاپ شدن شود. (در نتیجه، q به عنوان «حکمی اجراپذیر» یکی از گزاره‌ها یا قضایایی که در بحثشان بودیم، نیست.) در این زمینه، کامپیوتر، هنگامی که با «اگر p آنگاه q» سروکار داریم، q را تنها با این شرط که p راست باشد اجرا می‌کند. و به ازای p دروغ به سطر (احتمالاً شماره‌دار) بعدی واقع در دنبالهٔ برنامه می‌رود. در ساختار تصمیم‌گیری «اگر p آنگاه q جز این r»، q هنگامی که p راست باشد اجرا می‌شود و r زمانی که p دروغ باشد.

پیش از ادامهٔ مطلب، کلمه‌ای در باب احتیاط می‌آوریم. هنگام به کار بردن نمادهای $\to$ و $\leftrightarrow$ محتاط باشید. استلزام و هم‌ارزی، همانگونه که از دو ستون آخر جدول ۲.۲ آشکار است، یکی نیستند.

اما، در **تعریف**، دو مفهوم فوق همراه یکدیگر می‌آیند. برای مثال در تعریف مثلث متساوی‌الساقین می‌توان نوشت: «اگر دو ضلع مثلثی به طولهای برابر باشند، مثلث را متساوی‌الساقین می‌نامیم.» اما باید این برداشت را نیز داشته باشیم که هرگاه مثلثی را به عنوان متساوی الساقین تعریف کرده باشیم، دارای دو ضلع به طول برابر است. در نتیجه، هنگامی که تعریفی به صورت $p \to q$ داده شده باشد، در می‌یابیم که منظور واقعی آن $p \leftrightarrow q$ است.

اما، آنچه که در حالت تعاریف رخ می‌دهد در گزاره‌های استلزامی در حالت عمومی روی نمی‌نماید. بررسی بیشتر این نکته را برای مثال ۱۳.۲ می‌گذاریم.

نتایج جدولهای ۱.۲ و ۲.۲ گرچه برای گزاره‌های سادهٔ p و q داده شده‌اند، چون به جای نمادهای p و q گزاره‌های مرکبی بنشانیم همچنان در کارند. مثالهای ۳.۲ تا ۵.۲ در توضیح این مطلب‌اند.

◀ مثال ۳.۲

به بررسی جدول ارزش گزارهٔ مرکب زیر می‌پردازیم: «من متخصص کامپیوترم، و اگر دستگاه رسام امروز خراب نباشد، ترکیبیات یکی از دوره‌های لازم است.» این گزاره در زبان نمادها عبارت است از $q \wedge (\bar{r} \to p)$، که p، q و r آن قضایای نمایش داده شده در آغاز این بخش‌اند. آخرین ستون جدول ۳.۲ حاوی ارزشهای راستی این مطلب است. ستونهای قبل آن چگونگی تشکیل جدول ارزش را با در نظر گرفتن اجزای کوچکتر گزارهٔ مرکب مورد بحث و استفاده از نتایج جدولهای ۱.۲ و ۲.۲ نشان می‌دهند.

◀ جدول ۳

p	q	r	$\bar{r}$	$\bar{r} \to p$	$q \wedge (\bar{r} \to p)$
۰	۰	۰	۱	۰	۰
۰	۰	۱	۰	۱	۰
۰	۱	۰	۱	۰	۰
۰	۱	۱	۰	۱	۱
۱	۰	۰	۱	۱	۰
۱	۰	۱	۰	۱	۰
۱	۱	۰	۱	۱	۱
۱	۱	۱	۰	۱	۱

◀ مثال ۴.۲

در جدول ۴.۲ جداول ارزش گزاره‌های مرکب $p \vee (q \wedge r)$ (ستون ۵) و $(p \vee q) \wedge r$ (ستون ۷) را مطرح کرده‌ایم.

◄ جدول ۴

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$[p \vee q] \wedge r$
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰
۰	۱	۰	۰	۰	۱	۰
۰	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۰	۱	۱	۰
۱	۰	۱	۰	۱	۱	۱
۱	۱	۰	۰	۱	۱	۰
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

به علت متفاوت بودن ارزشهای راستی ستونهای ۵ و ۷ (در سطرهای ۵ و ۷)، بایدازنوشتن گزارهٔ مرکبی چون $p \vee q \wedge r$ خودداری کنیم، چه بدون پرانتزهایی که مشخص کنند که کدام‌یک از رابطهای $\wedge$ و $\vee$ را باید ابتدا به‌کار برد، ایده‌ای دربارهٔ این که با $p \vee (q \wedge r)$ سروکار داریم یا با $(p \vee q) \wedge r$، نخواهیم داشت.

□

آخرین مثال این بخش به توضیح دو نوع خاص از قضایا می‌پردازد.

◄ مثال ۵.۲

نتایج ستونهای ۴ و ۶ جدول ۵.۲ آشکار می‌کنند که گزارهٔ $p \rightarrow (p \vee q)$ همواره راست است، در حالی که گزارهٔ $p \wedge (\overline{p} \wedge q)$ همواره دروغ است.

□

◄ جدول ۵

p	q	$p \vee q$	$p \rightarrow (p \vee q)$	$[\overline{p} \wedge q]$	$p \wedge [\overline{p} \wedge q]$
۰	۰	۰	۱	۰	۰
۰	۱	۱	۱	۱	۰
۱	۰	۱	۱	۰	۰
۱	۱	۱	۱	۰	۰

تعریف ۱.۲

گزارهٔ همواره راست را ***صادق*** (راستگو)[۲۱] و گزارهٔ همیشه دروغ را کاذب[۲۲] می‌نامیم.

در سراسر این بخش نماد .T را برای نمایش هر صادق و نماد .F را برای نمایش هر کاذب به کار می‌بریم.

می‌توانیم از مفاهیم صادق و استلزام در توصیف مقصودی که از قضیه داریم استفاده کنیم. در حالت عمومی، **قضیه**[۲۳] گزاره‌ای است ریاضی که می‌توان (به کمک اثبات) راستی آن را نشان داد. خواننده بی‌شک با قضایا و اثباتهای آن در جبر و هندسهٔ دبیرستان برخورد کرده است.

بسیاری از قضایا را می‌توان به صورت زیر داد. اگر گزاره‌های p_1، p_2، p_3، ...، p_n فرضهای یک استلزام را نمایش دهند و q نتیجهٔ آن باشد، آنگاه چنین می‌گوییم که استلزام $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n)^* \rightarrow q$

هنگامی که راستی $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ منجر به راستی qشود، قضیه است. (بنابراین اگر هر یک از $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ دارای ارزش راستی ۱ باشد، qنیز هست.)

اگر هر یک از $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ دروغ باشد، آنگاه $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n$ دروغ می‌شود. و استلزام $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q$، بی‌توجه به ارزش راستی q، راست است. در نتیجه، استلزام $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q$ با توجه به وضعیاتی که در این مرحله به توصیفشان پرداختیم، به شرطی که ارزش راستی q، هنگامی که هر p_i، $1 \leq i \leq n$، دارای ارزش راستی ۱ است، ۱ باشد، قضیه (و صادق) است.

در بخش ۳.۲ مطالب بیشتری دربارهٔ قضایایی از این دست و چگونگی اثباتشان خواهیم آورد.

* تا این مرحله تنها با ترکیب عطفی دو گزاره سر و کار داشته‌ایم، بنابراین باید خاطر نشان کنیم که ترکیب عطفی n گزاره‌ای $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n$ تنها وقتی راست است که هر p_i، $1 \leq i \leq n$ راست باشد. در مثال ۸.۴ بخش ۱.۴، با تفصیل بیشتری به ترکیب عطفی تعمیم یافتهٔ فوق خواهیم پرداخت.

□ یادداشتها:

1. combinatorial proof
2. statement
3. proposition
4. primitive
5. logical connectives
6. compound
7. negation
8. conjunction
9. disjunction
10. inclusive
11. exclusive
12. implication
13. hypothesis
14. conclusion
15. equivalence
16. truth value
17. truth tables
18. decision
19. solection
20. relational expression
21. Tautology
22. contradiction
23. theorem

تفریح اندیشهٔ ٦

تقاطع جاده و راه‌آهن

در حالی که از ویلای دوستمان به دهکدهٔ مجاور اتومبیل می‌راندیم، مجبور شدیم در مقابل تقاطع جاده و راه‌آهن سر راه توقف کنیم. هنگامی که منتظر برداشته شدن میله بعد از گذشتن قطار بودیم، میزبانم به طرف من برگشت و گفت: «چیز عجیبی است.»

پرسیدم: «چه چیز؟»

«خوب، به نظر می‌رسد در اغلب مواردی که من در این تقاطع توقف می‌کنم قطار، درست مثل حالا، از غرب به شرق می‌رود.»

پاسخ دادم: «تا آنجا که می‌شود ملاحظه کرد، مطلب غریبی در این موضوع نیست.»

در حالی که می راندیم دوستم گفت: «اما، نگاه کن، این خط تنها یک خط فرعی است و بین دهکده و ترمینال خط اصلی رفت و آمد می‌کند. برنامهٔ حرکت قطارها را نیز چک کرده‌ام. قطار بیست و چهار ساعته حرکت می‌کند و مسافرت در هر طرف نیم‌ساعت طول می‌کشد.»

در حالی که تنها در مورد آن خط از دیگران چیزهایی شنیده بودم، گفتم «در مورد تأخیرها چه؟»

«حرفش را هم نزن، قطار در هیچ یک از دو ترمینال بیش از دیگری نمی‌ایستد.»

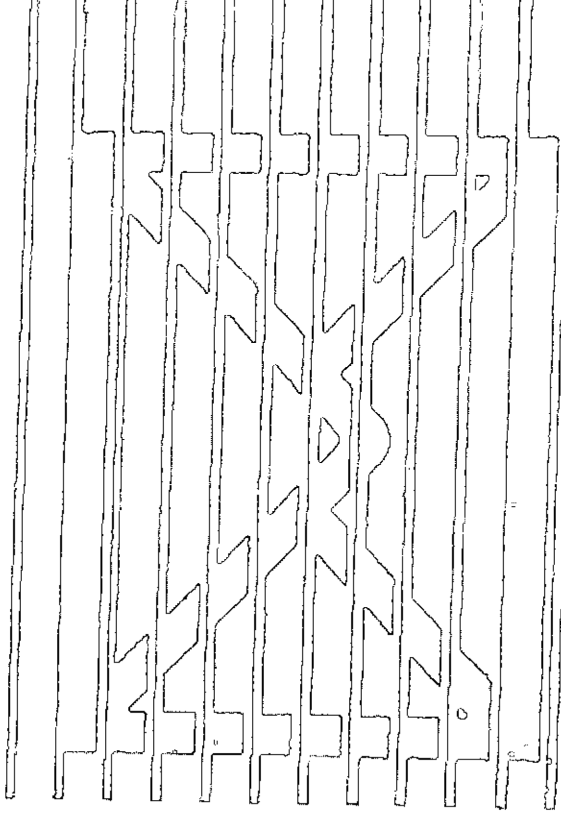
با قیافه‌ای از خود راضی گفتم: «در این صورت یا خیالات برت داشته یا اتفاق محض است، چه برداشتم از حرفهایت این است که قطار هر ساعت یک‌بار از این تقاطع از غرب به شرق می‌رود، و یکبار در جهت مخالف، و واضحاً، احتمال توقف کردنت مقابل قطار در جهت غرب درست برابر احتمال آن در جهت شرق است.»

دوستم گفت: «نه، نمی‌تواند اتفاقی باشد. من صدها بار در ساعات شب و روز در دو جهت این جاده رانندگی کرده‌ام و الگویی برای دفعاتی که در این تقاطع ایستاده‌ام موجود نیست.»

دوستم، هنگامی که به مقصدمان رسیدیم، بازیرکی گفت: «خیالات هم برم نداشته است، در این مورد باید توضیحی عقلایی موجود باشد.»

این توضیح چیست؟

جواب در صفحه ۸٦



جواب نامه‌ها

آقای علی‌احمد هروی (مشهد)

از مقاله ارسالی شما متشکریم. برای مطالعهٔ خوانندگان، در اینجا خلاصه‌ای از آن را با کمی اصلاح می‌آوریم:

روش به‌دست آوردن مربع اعداد . اگر a و b دو رقم یک عدد دو رقمی باشند، مربع این اعداد را می‌توان به‌روش زیر محاسبه کرد:

$$(\overline{ab})^۲=\overline{\overline{a^۲}\ \overline{۲ab}\ \overline{b^۲}}$$

برهان: درصورتی که $\overline{ab}$ یک عدد دو رقمی باشد می‌توان نوشت:

$$(\overline{ab})^۲=(۱۰a+b)^۲=۱۰۰a^۲+۲۰ab+b^۲$$

و باتوجه به‌مرتبهٔ یکان و دهگان و ... خواهیم داشت:

$$(\overline{ab})^۲=\overline{\overline{a^۲}\ \overline{۲ab}\ \overline{b^۲}}$$

مثال: مربع اعداد ۳۴ و ۴۱ را محاسبه کنید.

$$(۳۴)^۲=\overline{\overline{۳^۲}\ \overline{۲\times۳\times۴}\ \overline{۴^۲}}=\overline{\overline{۹}\ \overline{۲۴}\ \overline{۱۶}}=\overline{\overline{۹}\ \overline{۲۵}\ \overline{۶}}$$

$$=\overline{\overline{۱۱}\ \overline{۵}\ \overline{۶}}=۱۱۵۶$$

روش به‌دست آوردن مکعب، توان چهارم و توان پنجم و ... نیز به‌طریق مشابه می‌باشد:

$$(\overline{ab})^۳=\overline{\overline{a^۳}\ \overline{۳a^۲b}\ \overline{۳ab^۲}\ \overline{b^۳}}$$

$$(\overline{ab})^۴=\overline{\overline{a^۴}\ \overline{۴a^۳b}\ \overline{۶a^۲b^۲}\ \overline{۴ab^۳}\ \overline{b^۴}}$$

. . . .

$$(\overline{ab})^n=\overline{\overline{a^n}\ \overline{\frac{n}{۱!}a^{n-۱}b}\ \overline{\frac{n(n-۱)}{۲!}a^{n-۲}b^۲}\ \dots\overline{b^n}}$$

مربع اعداد سه رقمی را نیز می‌توان از طریق زیر محاسبه کرد:

$$(\overline{abc})^۲=\overline{\overline{a^۲}\ \overline{۲ab}\ \overline{۲ac+b^۲}\ \overline{۲bc}\ \overline{c^۲}}$$

مربع اعداد چهار رقمی:

$$(\overline{abcd})^۲=\overline{\overline{a^۲}\ \overline{۲ab}\ \overline{۲ac+b^۲}\ \overline{۲bc+۲bd}\ \overline{۲ad+c}\ \overline{۲cd}\ \overline{d^۲}}$$

آقای احسان کامرانی، دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (پل‌دختر)

ضمن تشکر از ارسال مسایلی همراه با حل و راه‌حلی برای دستگاه منسوب به‌خیام به‌عرض می‌رسانیم که در صورت لزوم از مسایل شما در شماره‌های آینده استفاده خواهیم کرد.

آقای امیر توانبخش دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (تهران)

از ارسال «جدولهای متقاطع اعداد» شما متشکریم. در صورت لزوم و در جای مناسب از آنان استفاده خواهیم کرد.

آقای یاسر علمی (مشهد)

از ارسال مطلبی در رابطه با محاسبهٔ $f^{(n)}(x)$ (مشتق nام $F(x)$) با

استفاده از تعریف مشتق متشکریم. اکنون برای مطالعهٔ خوانندگان این روش محاسبه را عیناً می‌آوریم.

طبق تعریف مشتق داریم:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right)$$

حال اگر $f'(x)$ را با $g(x)$ نمایش داده از $g(x)$ مشتق بگیریم، مشتق دوم عبارت $F(x)$ به‌دست می‌آید:

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\overbrace{(f(x+2\Delta x) - f(x+\Delta x))}^{g(x+\Delta x)} - (f(x+\Delta x) - f(x))}{(\Delta x)^2} \right)$$

پس از اختصار لازم داریم:

$$g'(x) = f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)}{(\Delta x)^2} \right)$$

مثال: اگر $F(x)=x^2$، آنگاه $f''(x)$ طبق تعریف چنین است:

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{(x+2\Delta x)^2 - 2(x+\Delta x)^2 + x^2}{(\Delta x)^2} \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2} = 2$$

حال اگر از مشتق دوم $F(x)$ مشتق بگیریم، خواهیم داشت:

$$f'''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x+3\Delta x) - 3f(x+2\Delta x) + 3f(x+\Delta x) - f(x)}{(\Delta x)^3} \right)$$

و مشتق چهارم $F(x)$ به‌صورت زیر است:

$$f^{(4)}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x+4\Delta x) - 4f(x+3\Delta x) + 6f(x+2\Delta x) - 4f(x+\Delta x) + f(x)}{(\Delta x)^4} \right)$$

توجه: ضرایب fها همان ضرایب بسط دوجمله‌ای است.

به‌همین طریق می‌توان رابطهٔ زیر را حدس زد و به‌روش استقراء آن را ثابت کرد:

$$f^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i f(x+(n-i)\Delta x)}{(\Delta x)^n} \right)$$

توجه: منظور از $f^{(n)}(x)$ مشتق nام $F(x)$ می‌باشد، و داریم:

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

آقای احمد فضلی دانشجوی رشته مهندسی مکانیک (شیراز)

ضمن تشکر از ارسال مطلب ارسالی شما تحت عنوان «راههای محاسبهٔ فاصلهٔ یک نقطه از خط» و حل یک مسأله به‌عرض می‌رسانیم که در شماره‌های آینده مجله در جای مناسب از آن استفاده خواهیم کرد.

شهرزاد توفیقیان، دانش‌آموز رشته ریاضی (تهران)

از مسایل حل شده ارسالی شما متشکریم. برای شماره‌های آینده مجله از آنان استفاده خواهیم کرد.

خانم لالهٔ تراب‌نژاد دانش‌آموز رشته ریاضی (تبریز)

از مسایل حل‌شدهٔ ارسالی شما متشکریم. از آنها در شماره‌های آینده استفاده خواهیم کرد.

آقای حمیدرضا محمدی دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (اراک)

از مسایل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. در شماره‌های آینده از آنان استفاده خواهیم کرد.

آقای سیدامیر موسوی، دانش‌آموز رشته ریاضی (قائمشهر)

ضمن تشکر از مسایل حل شدهٔ ارسالی شما به‌عرض می‌رسانیم که در صورت لزوم و در جای مناسب از آنان استفاده خواهیم کرد. آدرس مجلهٔ انگلیسی SPECTRUM برای ارسال مقالات چنین است:

MATHEMATICAL SPECTRUM HICKS BUILDING, THE UNIVERSITY SHEFFIELD S3 7RH, U.K.

حل مسائل مسابقه‌ای برهان ۱۷

حل مسألهٔ ۱ :

می‌خواهیم ثابت کنیم $\sqrt{n}$ گنگ است. (n عددی طبیعی و مربع کامل نیست.)

توضیح: بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد صحیح a و b را با نماد (a,b) نمایش می‌دهند و ثابت می‌شود، اگر ۱ = (a,b) آنگاه ۱ = (a^n,b^n) و نیز اگر $a|b$ آنگاه $(a,b)=|a|$ حال به حل مسأله برمی‌گردیم:

فرض کنیم $\sqrt{n}$ گنگ نباشد (فرض خلف) و مثلاً $\sqrt{n}=\frac{p}{q}$ که ۱ = (p,q) در این صورت داریم،

(۱) $$n=\frac{p^2}{q^2}\Rightarrow nq^2=p^2\Rightarrow q^2|p^2\Rightarrow (p^2,q^2)=q^2$$

(۲) از طرفی طبق فرض : $(p,q)=1\Rightarrow (p^2,q^2)=1$

(۱) و (۲) $\Rightarrow q^2=1\Rightarrow q=1$

و ۱ = q تناقض است زیرا در این صورت $n=p^2$ و در صورت مسأله n مربع کامل نبوده، پس $\sqrt{n}$ گنگ است.

حل مسألهٔ ۲ :

بدیهی است که $\sum_{k=1}^{n}(a_kx+b_k)^2\geq 0$ بنابراین اگر قرار دهیم،

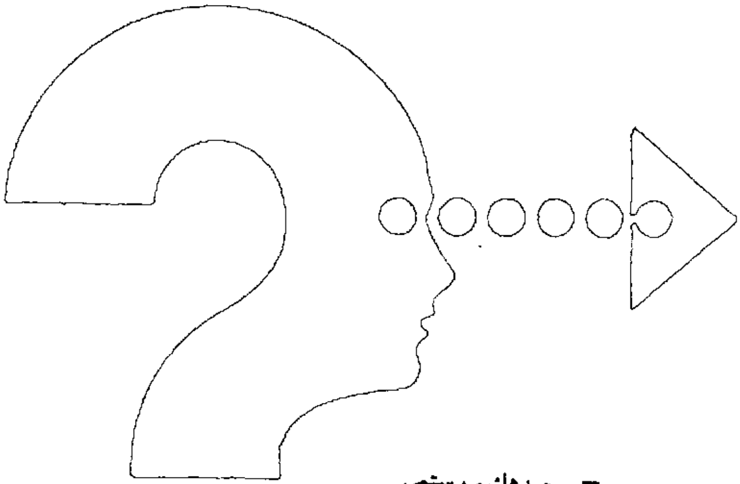
$$\sum_{k=1}^{n}(a_k)^2=A\quad,\quad\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=B\ ,\ \sum_{k=1}^{n}(b_k)^2=C$$

در این صورت داریم:

$$0\leq\sum(a_kx+b_k)^2=Ax^2+2Bx+C$$

از طرفی همواره $A\geq 0$ بنابراین برای برقراری نامساوی $Ax^2+2Bx+C\geq 0$ باید $\Delta<0$ باشد یعنی باید $4B^2-4AC<0$ یا $B^2<AC$ که همان نامساوی مطلوب است. (در حالت $A=0$ اثبات نامساوی کاری است بسیار ساده)

(حل هر دو مسأله از آقای هانی اسکندری، دبیرستان نمونه مردمی، بابل)



مسائل برای حل

■ محمدهاشم رستمی
■ احمد قندهاری
■ سیدمحمدرضا هاشمی موسوی
■ حمیدرضا امیری
■ حسین ابراهیم‌زادهٔ قلزم

مسائل ریاضیات ۲ (نظام جدید)

۱ ــ معادلات دو قطر مربعی به صورت $y=-2x-1$ و $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ می‌باشند، فاصلهٔ مرکز مربع از مبدأ مختصات را حساب کنید.

۲ ــ فاصلهٔ نقطهٔ $A(-1\,,2)$ از خط $y=2x+h$ برابر $\frac{\sqrt{5}}{h}$ است، مقدار مثبت h را حساب کنید.

۳ ــ خطی از دو نقطهٔ $A(-1\,,1)$ و $B(2\,,2)$ می‌گذرد. اگر این خط از نقطهٔ $C(m,\frac{1}{3})$ نیز بگذرد، مقدار m را حساب کنید.

۴ ــ نقاط A و B به ترتیب به طولهای ۳- و ۴ و نقطهٔ M روی یک محور مفروضند، اگر $\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}}=\frac{-5}{6}$ باشد، طول نقطهٔ M را به دست آورید.

۵ ــ مخرج کسر زیر را گویا کنید :

$$\frac{2\sqrt[6]{16}}{5\sqrt[3]{16}-7\sqrt[6]{4}+\sqrt[6]{4}+2\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{2}}$$

۶ ــ الف) معادلهٔ $m^3x=\frac{m^2}{3}+9x$ به ازای چه مقداری از m جواب ندارد؟

ب) معادلهٔ $m^2x+2(x+m)-3mx+1=0$ به ازای چه مقادیری از m ریشهٔ حقیقی ندارد؟

۷ ــ اگر $0<x<\frac{\pi}{2}$ باشد، آنگاه حاصل عبارت زیر را به دست آورید :

$$\sqrt{1-\sin^2 x}\left[\frac{\cos x}{1+\sin x}+\frac{1+\sin x}{\cos x}\right]$$

۸ ــ درستی اتحاد زیر را تحقیق کنید.

$$(y-x)^2\sin^2 150^\circ-(x+y)^2\cos^2 120^\circ+xy=0$$

۹ ــ در سهمی به معادلهٔ $y=x^2-mx$ مقدار m را چنان تعیین کنید که خط $x=2$ محور تقارن آن باشد.

مسائل ریاضیات ۴

۱ ــ مجموعهٔ جوابهای مشترک دو نامعادلهٔ :

$$-3x^2-4x<1 \quad \text{و} \quad 2x^2-6x>0$$

را با شرط $x^2>\frac{1}{16}$، بیابید.

۲ ــ عبارت زیر به ازای چه مقادیری از x تعریف شده است؟

$$P=\frac{x\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt[3]{x-\sqrt{x}}}$$

۳ ــ عبارت زیر را تعیین علامت کنید :

$$P=\frac{(-x^2+3x-2)x}{(x^4+1)(x^2-1)(x^3+1)}$$

۴ ــ نامعادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\frac{|x-1|}{x+2}<1$$

۵ ــ ثابت کنید :

$$\forall a,b,c \in \mathbb{R} \;:\; a^۲+b^۲+c^۲ \ge ab+bc+ac$$

۶ ــ ثابت کنید :

$$tg\frac{x}{۲}=\frac{\sin x}{۱+\cos x}$$

۷ ــ اگر $\bar{x}$ و $S^۲$ و S به ترتیب میانگین، واریانس و انحراف معیار داده‌های آماری $x_۱، x_۲، \dots، x_n$ باشند ثابت کنید میانگین، واریانس و انحراف معیار داده‌های آماری $kx_۱+b، kx_۲+b، \dots، kx_n+b$ به ترتیب عبارت است از $(k\bar{x}+b)$ و $k^۲S^۲$ و kS.

۸ ــ اگر A و B ماتریس‌هایی ۲×۲ بوده به‌طوری که حاصل جمع درآیه‌های روی هر ستون آنها مساوی با ۳ باشد، ثابت کنید $A\times B$ ماتریسی است که حاصل جمع درآیه‌های روی هر ستون آن ۹ است.

۹ ــ دستگاه معادلات زیر را با روش ماتریسی حل کنید.

$$\begin{cases}۴x-۵y=۳\\ ۳x+۲y=۴\end{cases}$$

۱۰ ــ حدود m را چنان تعیین کنید که دستگاه‌های معادلات زیر فاقد جواب باشند.

$$\begin{cases}۲x-my=۱\\ ۲mx+y=۲\end{cases} \qquad \begin{cases}-mx+y=۴\\ ۲x-my=۲\end{cases}$$

۱۱ ــ معادلهٔ ماتریسی زیر را حل کرده و در صورت وجود x را بیابید.

$$\begin{bmatrix}۱ & ۲ & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & -۱ & -۳\\ ۰ & ۱ & ۲\\ ۱ & x & x^۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲\\ ۱\\ ۰\end{bmatrix}=۶$$

۱۲ ــ به روش برداری ثابت کنید در هر مثلث اگر از وسط یک ضلع به وسط ضلع دیگر وصل کنیم پاره‌خط حاصل موازی و مساوی با نصف ضلع سوم است.

۱۳ ــ با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ چند عدد ۵ رقمی :

الف) زوج می‌توان نوشت؟

ب) بزرگتر از سی هزار می‌توان نوشت؟

ج) مضرب ۵ و فرد می‌توان نوشت؟

۱۴ ــ از بین سه دانش‌آموز سال اول و چهار دانش‌آموز سال دوم سه نفر به تصادف انتخاب می‌کنیم. مطلوب است :

الف) احتمال آن که سه نفر همکلاسی باشند.

ب) فقط ۲ نفر از کلاس دوم باشند.

ج) لااقل ۱ نفر از کلاس اول باشد.

د) حداکثر ۲ نفر از کلاس دوم باشند.

مسائل کامپیوتر سال سوم نظام جدید

۱ـ الگوریتمی بنویسید که میانگین هندسی دو عدد مثبت مفروض را حساب کند. (میانگین هندسی دو عدد مثبت جذر حاصلضرب آنهاست. نمودار گردشی آن را رسم کنید.)

۲ـ الگوریتمی بنویسید که ماکسیمم سه عدد مفروض را بیابد. (راهنمایی: الگوریتم ماکسیمم یا الگوریتم MAX را تعمیم دهید. تعمیم کدام الگوریتم ساده‌تر است؟) نمودار گردشی آن را رسم کنید.

مسائل حسابان (۲)

۱ ــ تابع f به معادله $f(x)=\begin{cases}ax^۲+bx & x\ge ۲\\ bx+۴ & x<۲\end{cases}$ مفروض است. اگر تابع f در $x_۰=۲$ مشتق‌پذیر باشد ($f'(۲)$ وجود داشته باشد) a و b را بیابید.

۲ ــ سوی تقعر و نقاط عطف منحنی تابع به معادله $y=\sqrt[۳]{۱-x^۲}$ را بیابید.

۳ ــ تناوب اصلی تابع f به معادله $f(x)=nx-[nx]$ را به کمک تعریف تابع متناوب بیابید. $n\in N$ و نماد [ ] نماد جزء صحیح است.

۴ ــ مطلوبست رسم جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع به معادله $y=\cos^۲x-\cos x$ وقتی $۰\le x\le ۲\pi$.

۵ ــ مطلوبست محاسبه

$$\lim_{x\to ۱}(۲-x)^{tg\frac{\pi x}{۲}}$$

۶ ــ مطلوبست رسم جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع به معادله $y=x^۲e^x$.

۷ ــ مشتق تابع به معادله $y=e^{\frac{x}{Lnx}}$ را نسبت به x بیابید.

۸ ـ جدول تغییرات تابع به معادله $y=\log\frac{x}{x-1}$ را رسم کنید.

۹ ـ مطلوبست رسم هذلولی به معادله $4x^2-y^2-8x-2y-1=0$ و تعیین معادلات مجانبها و تعیین مختصات کانونها.

۱۰ ـ مطلوبست محاسبه انتگرالهای زیر

$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{8dx}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad$ $\int_0^2\frac{dx}{4+x^2}$

مسائل حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲)

۱ ـ تابع f به معادله $f(x)=|x-1|-1$ در شرایط $f(2)=f(0)=0$ صدق می‌کند. آیا $f'(1)$ وجود دارد. چرا؟ آیا این مسأله با قضیه رول متناقض است چرا؟

۲ ـ تابع به معادله $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$ را دربازه $[0,2]$ در نظر بگیرید. نقطه‌ای به طول c، $0<c<2$ را با استفاده از قضیه مقدار میانگین بیابید.

۳ ـ تابع f به معادله $f(x)=x^3(x-2)^2$ را دربازه $[-1,3]$ در نظر بگیرید. نقاط بحرانی و اکسترمم‌های نسبی و مطلق این تابع را دربازه $[-1,3]$ بیابید.

۴ ـ ثابت کنید هرگاه حاصلضرب دو عدد مثبت مقدار ثابتی باشد، مجموع آنها وقتی می‌نیمم است که دو عدد با هم مساوی باشند.

۵ ـ جدول رفتار و نمودار تابع به معادله $f(x)=\frac{x-1}{x^2+2x}$ را رسم کنید.

۶ ـ با استفاده از قاعده هوپیتال

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x-\frac{x^3}{6}}{x^5}$$

را بیابید.

۷ ـ بدون استفاده از محاسبه انتگرال، کران بالا و کران پایینی برای $\int_{\frac{1}{4}}^{3}(x^3+6x^2-15x+1)dx$ بدست آورید.

۸ ـ انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int x^{18}(x^2+2x)^{10}(4x^5+6x^4)dx$

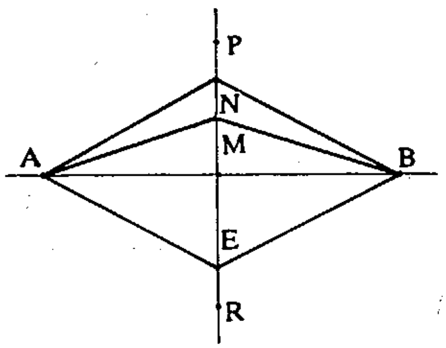
ب) $\int\frac{e^{tgx}}{\cos^2 x\left(e^{tgx}+e^2\right)}$

ج) $\int\frac{4x^2+2x+2}{(x+1)(x^2+1)}dx$

د) $\int Arctgx\ dx$

سؤالات امتحان درس هندسه یک نظام جدید خرداد ماه ۷۵ (بعدازظهر)

۱ ـ نقطه‌های N، M و E بر روی عمودمنصف پاره‌خط AB واقع و از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله هستند.

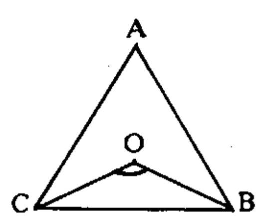


الف) نقاط P و R را برروی این عمودمنصف انتخاب می‌کنیم، حدس شما درباره فاصلهٔ P و R از دو سر خط پاره‌خط AB چیست؟

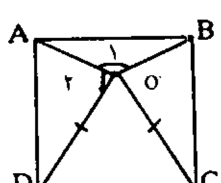
ب) براساس چه نوع استدلالی این حدس را زدید؟

پ) با استفاده از چه نوع استدلالی می‌توانیم با اطمینان بگوییم که فاصله هر نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط از دو سر آن به یک فاصله است؟

۲ ـ مثلث ABC متساوی‌الاضلاع و OB و OC نیمسازهای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ هستند. اندازهٔ زاویه $\hat{O}$ را پیدا کنید.

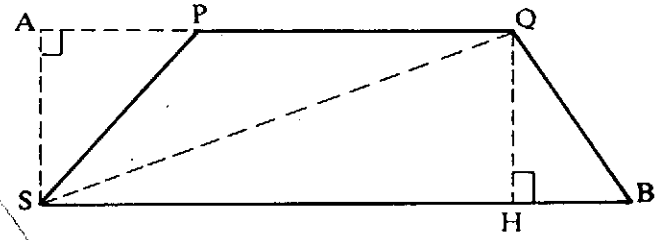


۳ ـ در شکل زیر، ABCD مربع است. اندازهٔ $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_2$ را به دست آورید.



۴ ــ ثابت کنید اگر قطرهای یک چهارضلعی برهم عمود باشند مساحت چهارضلعی برابر نصف حاصل‌ضرب اندازهٔ قطرها خواهد بود.

۵ ــ در شکل زیر، $AS = h$ ، $PQ = a$ و $SB = b$ است. مساحت ذوزنقهٔ SPQB را حساب کنید. (با دلیل)

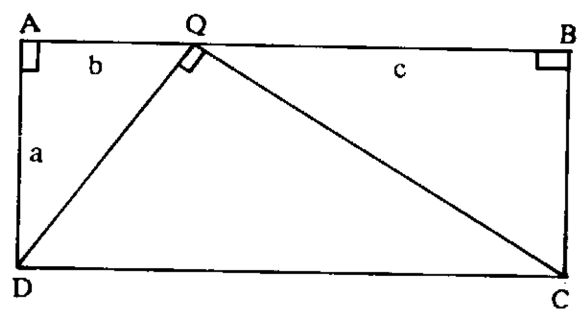


۶ ــ با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس، مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع a را حساب کنید.

۷ ــ مستطیل ABCD و مثلث قائم‌الزاویهٔ DQC در آن را در نظر بگیرید. اگر $AD = a$ ، $AQ = b$ و $QB = c$ ، ثابت کنید :

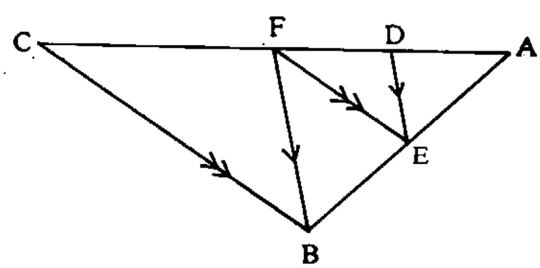
الف) $DC = \sqrt{2a^2 + b^2 + c^2}$

ب) a میانگین هندسی بین b و c است.

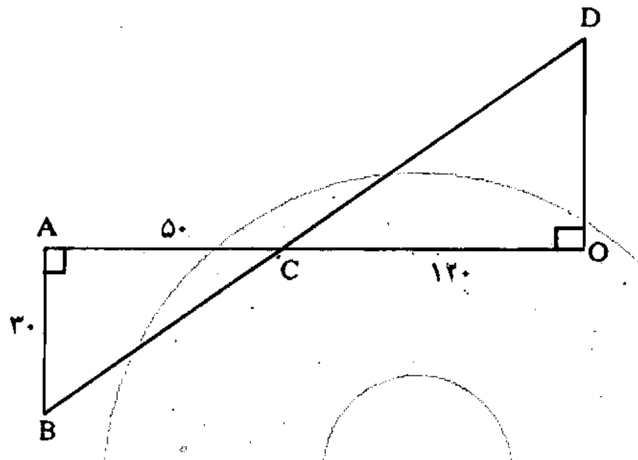


۸ ــ در مثلث ABC ، پاره‌خط DE موازی FB و پاره‌خط EF موازی BC است. با استفاده از قضیهٔ تالس، ثابت کنید :

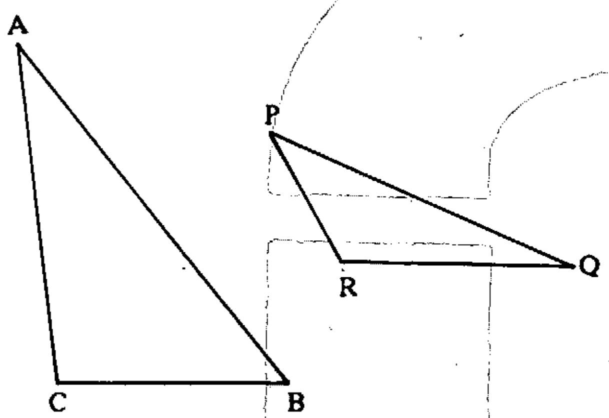
$$\frac{AD}{DF} = \frac{AF}{FC}$$



۹ ــ شکل زیر توسط یک نقشه بردار برای محاسبهٔ عرض یک رودخانه رسم شده است. به کمک اندازه‌های مشخص شده در شکل، عرض رودخانه یعنی اندازهٔ OD را محاسبه کنید.



۱۰ ــ طول ضلع‌های مثلث ABC ، ۱۰/۵ ، ۱۳/۵ سانتی‌متر، سانتی‌متر و ۲۱ سانتی‌متر است. مثلث PQR با مثلث ABC متشابه است و طول کوچکترین ضلع آن ۷ سانتی‌متر است. محیط مثلث PQR را به دست آورید.



۱۱ ــ قطر مکعب مستطیلی به ابعاد ۳ و ۴ و ۵ را به دست آورید.

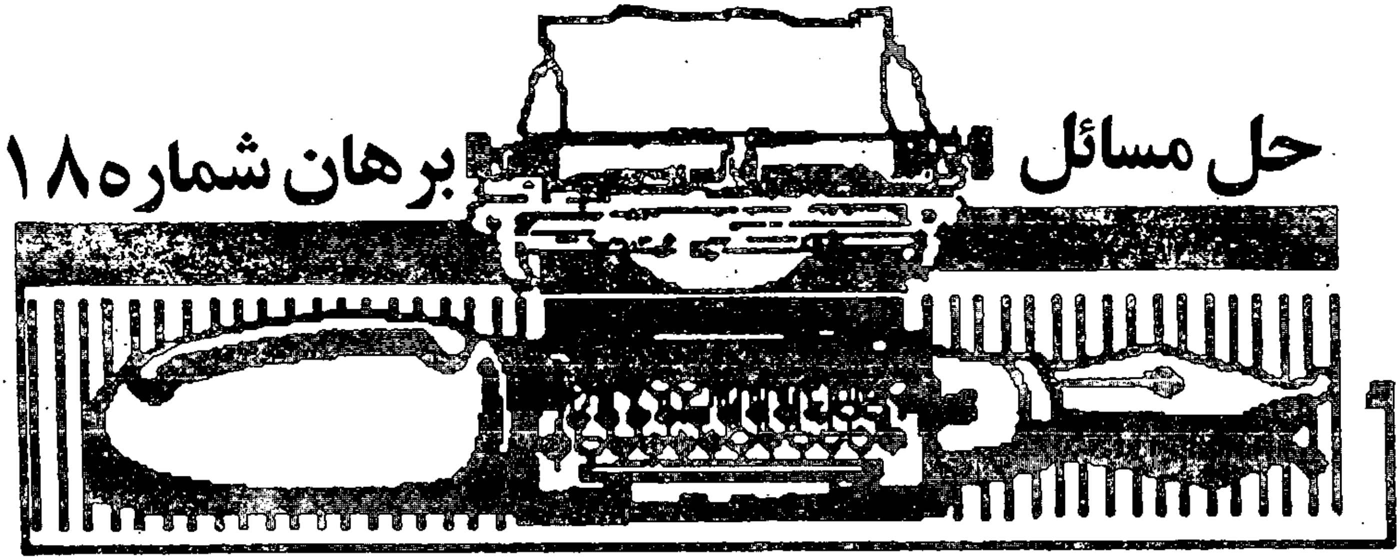
۱۲ ــ اصل کاوالیری را دربارهٔ مساحت‌ها بنویسید.

۱۳ ــ اگر ارتفاع و شعاع قاعدهٔ مخروطی به ترتیب ۲ و ۳ برابر شوند، حجم مخروط چند برابر می‌شود؟

۱۴ ــ مساحت سطح یک کره ۱۱۳/۰۴ سانتی‌متر مربع است.

الف) شعاع این کره را به دست آورید.

ب) حجم این کره را محاسبه کنید.



حل مسائل برهان شماره ۱۸

حل مسائل ریاضیات ۱ نظام جدید و ریاضیات جدید و جبر سال اول نظام قدیم

۱ ـ طبق قضیه‌های اصلی اجتماع و اشتراک داریم:

$$A \subseteq B \Rightarrow \begin{cases} A \cup B = B & (1) \\ A \cap B = A & (2) \end{cases}$$

از طرفی: $(A \cap B) \subseteq A \overset{\text{بنابر ۱}}{\Rightarrow} (A \cap B) \cup A = A$

و نیز داریم: $A \subseteq (A \cup B) \overset{\text{بنابر ۲}}{\Rightarrow} (A \cup B) \cap A = A$

۲ ـ طبق فرض $U = \{1, 2, \dots, k\}$ مجموعهٔ مرجع و $A = \{2, 3, \dots, (k-4)\}$ و $B = \{1, 2, \dots, (k-6)\}$ و $k \geq 10$ بنابراین

$$A' = U - A = \{1, (k-3), (k-2), (k-1), k\}$$
$$B' = U - B = \{(k-5), (k-4), \dots, k\}$$
$$(A - B) = A \cap B' = \{(k-5), (k-4)\}$$
$$(B - A) = (B \cap A') = \{1\}$$

۳ ـ داریم:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 = 2a + 2b + 2c$$
$$\Rightarrow (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) + (c^2 - 2c + 1) = 0$$
$$\Rightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 = 0$$

طرف اول همواره نامنفی است. پس تساوی وقتی برقرار است که هر یک از عبارتها برابر صفر باشد:

$$(a-1)^2 = 0 \quad , \quad (b-1)^2 = 0 \quad , \quad (c-1)^2 = 0$$
$$\Rightarrow a = 1 \quad , \quad b = 1 \quad , \quad c = 1 \quad \Rightarrow \boxed{a = b = c = 1}$$

۴ ـ می‌دانیم $a^2 \geq 0$ و $b^2 \geq 0$ پس:

$$a^2 + b^2 \geq 0 \qquad (1)$$

از طرفی می‌دانیم:

$$(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \qquad (2)$$

از جمع رابطه‌های (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$2a^2 + 2b^2 - 2ab \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 - ab \geq 0$$
$$\Rightarrow \boxed{a^2 + b^2 \geq ab}$$

۵ ـ

$$\begin{cases} x^2yz = 48 \\ xy^2z = 72 \\ xyz^2 = 96 \end{cases}$$

معادلات دستگاه را در هم ضرب می‌کنیم:

$$(x^2yz)(xy^2z)(xyz^2) = 48 \times 72 \times 96$$
$$\Rightarrow x^4y^4z^4 = 2^4 \times 3 \times 2^3 \times 3^2 \times 2^5 \times 3 = 2^{12} \times 3^4$$
$$\Rightarrow x^4y^4z^4 = 2^{12} \times 3^4 \Rightarrow (xyz)^4 = (2^3 \times 3)^4$$
$$\Rightarrow xyz = \pm 24 \qquad (1)$$

در این جا هر یک از معادلات دستگاه را به معادله (۱) تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{x^2yz}{xyz} = \frac{48}{\pm 24} \Rightarrow x = \pm 2 \quad ,$$
$$\frac{xy^2z}{xyz} = \frac{72}{\pm 24} \Rightarrow y = \pm 3 \quad ,$$
$$\frac{xyz^2}{xyz} = \frac{96}{\pm 24} \Rightarrow z = \pm 4$$

با توجه به مثبت بودن x و y و z داریم:

$$x = 2 \quad , \quad y = 3 \quad , \quad z = 4$$

۶ ـ ابتدا مخرج کسرها را گویا می‌کنیم:

$$A = 3\left(\frac{2}{\sqrt{10}+5} \times \frac{\sqrt{10}-5}{\sqrt{10}-5} + \frac{5}{\sqrt{10}-2} \times \frac{\sqrt{10}+2}{\sqrt{10}+2} - \frac{7\sqrt{10}}{10}\right)$$
$$= 3\left(\frac{2\sqrt{10}-10}{-15} + \frac{5\sqrt{10}+10}{6} - \frac{7\sqrt{10}}{10}\right)$$
$$= \frac{10-2\sqrt{10}}{5} + \frac{5\sqrt{10}+10}{2} - \frac{21\sqrt{10}}{10}$$
$$= \frac{20-4\sqrt{10}+25\sqrt{10}+50-21\sqrt{10}}{10} = \frac{70}{10} =$$
$$7 \Rightarrow \boxed{A = 7}$$

۷ ـ داریم:

$$3^{6x} = 81^{x+1} \Rightarrow 3^{6x} = 3^{4(x+1)}$$
$$\Rightarrow 6x = 4(x+1) \Rightarrow 6x = 4x + 4$$
$$\Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

۸ ـ

$$A = \frac{x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7}{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^7} + \frac{1}{x^8} + \frac{1}{x^9}} (x \neq 0)$$
$$= \frac{x^7\left(\frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1\right)}{\frac{1}{x^3}\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^6}\right)}$$
$$= \frac{x^7}{\frac{1}{x^3}} = x^{10} \Rightarrow \boxed{A = x^{10}}$$

۹ ـ با فرض $a = b + 1$ یا $a - b = 1$ خواهیم داشت:

$$A = 1 \times (a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)$$
$$= (a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)$$
$$= (a^2-b^2)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)$$
$$= (a^4-b^4)(a^4+b^4)(a^8+b^8)$$
$$= (a^8-b^8)(a^8+b^8) = a^{16} - b^{16}$$
$$\Rightarrow \boxed{A = a^{16} - b^{16}}$$

۱۰ ـ داریم:

$$n^4 - 2n^2 + 49 = n^4 + 14n^2 - 16n^2 + 49$$
$$= (n^4 + 14n^2 + 49) - 16n^2$$
$$= (n^2 + 7)^2 - 16n^2$$
$$= (n^2 + 7 - 4n)(n^2 + 7 + 4n)$$
$$= (n^2 + 4n + 7)(n^2 - 4n + 7)$$

حل مسائل ریاضیات ۳ (نظام جدید)

۱ ـ داریم:

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m - 2 = n - 1 \\ 1 + 2 = m + n \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} m - n = 1 \\ m + n = 3 \end{cases} \Rightarrow 2m = 4 \Rightarrow m = 2 \quad , \quad n = 1$$
$$B(1,2) \ , \ D(-1,1) \Rightarrow BD = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$
$$\Rightarrow \boxed{BD = \sqrt{5}}$$

۲ ـ نقاط M و N نسبت به نیمساز ربع اول و سوم $(y = x)$ قرینه‌اند، پس:

$$\begin{cases} y_M = x_N \\ y_N = x_M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n - 1 = 3m - 1 \\ 2n = m + 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} n=3m \\ n=\dfrac{m+1}{2}\end{cases} \Rightarrow 3m=\frac{m+1}{2}$$

$$\Rightarrow 6m=m+1 \Rightarrow 5m=1 \Rightarrow \boxed{m=\frac{1}{5}}\ .$$

$$n=3m=3\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{3}{5}\Rightarrow \boxed{n=\frac{3}{5}}$$

۳ ــ با توجه به رابطهٔ $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$ و تساوی $\overline{AB}=-\overline{BA}$، داریم:

$$\frac{\overline{BC}+\overline{AB}-\overline{CA}-\overline{AC}}{\overline{CB}-\overline{CA}+\overline{BA}-\overline{AC}}=\frac{(\overline{AB}+\overline{BC})+\overline{AC}-\overline{AC}}{-\overline{BC}-\overline{AB}+\overline{AC}-\overline{AC}}$$

$$=\frac{\overline{AC}}{-(\overline{AB}+\overline{BC})}=\frac{\overline{AC}}{-\overline{AC}}=-1$$

(نقاط A و B و C متمایزند، بنابراین: $\overline{AC}\neq 0$)

۴ ــ قرینهٔ نقطهٔ $M(x,y)$ نسبت به مبدأ مختصات $M'(-x,-y)$ است. بنابراین اگر در معادلهٔ خط مورد نظر x را به $-x$ و y را به $-y$ تبدیل کنیم، قرینهٔ تمام نقاط خط نسبت به مبدأ مشخص می‌شوند:

$$13x-7y-5=0\Rightarrow\begin{cases}x\to -x\\ y\to -y\end{cases}$$

$$\Rightarrow 13(-x)-7(-y)-5=0$$

$$\Rightarrow -13x+7y-5=0 \quad \text{یا} \quad \boxed{13x-7y+5=0}$$

۵ ــ داریم:

$$\sqrt[5]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}=\sqrt[5]{\sqrt[3]{2^3\times 2\sqrt{2}}}=\sqrt[15]{\sqrt{2^8\times 2}}=$$

$$\sqrt[30]{2^9}=2^{\frac{9}{30}}=2^{0/3}$$

$$\left(\sqrt[20]{8}\right)^2=\sqrt[20]{8^2}=\sqrt[20]{2^6}=2^{\frac{6}{20}}=2^{0/3}$$

بنابراین:

$$\frac{4}{\sqrt[3]{2}+2^{0/3}-2^{0/3}}=\frac{4}{\sqrt[3]{2}}\times\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}}=$$

$$\frac{4\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}}=\frac{4\sqrt[3]{4}}{2}=2\sqrt[3]{4}$$

۶ ــ دامنهٔ متغیر x از حل دستگاه نامعادلات:

$$\begin{cases}4x-1\geq 0\\ 4x-2\sqrt{4x-1}\geq 0\\ 4x+2\sqrt{4x-1}\geq 0\end{cases}$$

به دست می‌آید: $x\geq\frac{1}{4}$

همچنین با مجذور کردن دو طرف معادله خواهیم داشت:

$$4x+2\sqrt{4x-1}+4x-2\sqrt{4x-1}+$$

$$2\sqrt{16x^2-4(4x-1)}=4$$

$$\Rightarrow 8x+2\sqrt{16x^2-16x+4}=4$$

$$\Rightarrow 8x+2\sqrt{(4x-2)^2}=4$$

$$\Rightarrow 8x+2|4x-2|=4\Rightarrow 8x+4|2x-1|=4$$

$$\Rightarrow 2x+|2x-1|=1$$

$$x\geq\frac{1}{2}:\ 2x+2x-1=1\Rightarrow 4x=2\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4}\leq x\leq\frac{1}{2}:\ 2x-(2x-1)=1\Rightarrow 1=1$$

بنابراین هر عدد حقیقی که در شرط $\frac{1}{4}\leq x\leq\frac{1}{2}$ صدق کند، جواب معادله است، یعنی مجموعه جواب معادله چنین است:

$$\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\frac{1}{4}\leq x\leq\frac{1}{2}\right\}=\text{مجموعه جواب معادله}$$

۷ ــ با توجه به شرط یک‌به‌یک بودن تابع f:

$$D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{d}{c}\right\}$$

$$\forall x_1\,,\ x_2\in D_f\ :\ f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$$

$$\forall x_1\,,\ x_2\in D_f\ :\ \frac{ax_1+b}{cx_1+d}=\frac{ax_2+b}{cx_2+d}$$

$$\Rightarrow (ax_1+b)(cx_2+d)=(ax_2+b)(cx_1+d)$$

$$\Rightarrow \cancel{acx_1x_2}+adx_1+bcx_2+\cancel{bd}=$$

$$\cancel{acx_1x_2}+adx_2+bcx_1+\cancel{bd}$$

$$\Rightarrow (ad-bc)x_1-(ad-bc)x_2=0$$

$$\Rightarrow (ad-bc)(x_1-x_2)=0$$

بنابراین با شرط $ad-bc\neq 0$ یا $ad\neq bc$ خواهیم داشت: $x_1=x_2$

یعنی تابع f در $\mathbb{R}-\left\{-\frac{d}{c}\right\}$ با شرط $ad\neq bc$ یک به یک است.

۸ ــ می‌دانیم رأس سهمی به معادلهٔ $y=ax^2+bx+c$ چنین است:

$$S\left(-\frac{b}{2a}\,,\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$$

بنابراین رأس سهمی به معادله $y=x^2+px+q$ چنین است:

$$S\left(-\frac{p}{2}\,,\ \frac{4q-p^2}{4}\right)\ ,\quad S(2\,,\,-3)$$

پس:

$$\begin{cases}-\dfrac{p}{2}=2\\ \dfrac{4q-p^2}{4}=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p=-4\\ q=\dfrac{p^2-12}{4}\end{cases}\Rightarrow\boxed{p=-4}\ ,\ \boxed{q=1}$$

۹ ــ داریم:

الف) $4^{3+6+9+\dots+3n}=4^{3(1+2+3+\dots+n)}$

می‌دانیم:

$$1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

پس:

$$3\times 4^{3\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]}=3\times 64\Rightarrow 2^{3n(n+1)}=2^6$$

$$\Rightarrow 3n(n+1)=6\Rightarrow n(n+1)=2\Rightarrow n^2+n-2=0$$

$$\Rightarrow (n-1)(n+2)=0\Rightarrow n=1 \ \text{یا}\ \ n=-2\ ,$$

$$n\in\mathbb{N}\Rightarrow\boxed{n=1}$$

ب) با فرض $a>0$ و $x>0$:

$$a^{\log x}=x^{\log a}$$

بنابراین:

$$x^{\log 3}+3^{\log 10x}=3^{\log x}+3^{\log 10+\log x}$$

$$=3^{\log x}+3\times 3^{\log x}=4\times 3^{\log x}=36$$

$$\Rightarrow 3^{\log x}=9\Rightarrow 3^{\log x}=3^2\Rightarrow \log x=2\Rightarrow\boxed{x=100}$$

۱۰ ــ داریم:

$$a_{10}+a_{17}=5m+3n\quad ,$$

$$a_k+a_s=3m+2n+2m+n=5m+3n$$

$$(a_s=2m+n\ ,\ a_k=3m+2n)\ ,\ a_{10}+a_{17}=a_k+a_s$$

پس:

$$\begin{cases}a_k=a_{10}\\ a_s=a_{17}\end{cases}\ \text{یا}\ \begin{cases}a_k=a_{17}\\ a_s=a_{10}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3m+2n=10\\ 2m+n=17\end{cases}\quad\text{یا}$$

$$\begin{cases}3m+2n=17\\ 2m+n=10\end{cases}\Rightarrow\left|\begin{array}{l}m=3\ ,\ \ n=4\\ \text{یا}\\ m=-31\ ,\ \ n=24\end{array}\right.$$

حل مسائل جبر و احتمال (سال‌سوم ریاضی نظام جدید)

۱ ــ فرض کنیم $A\times\varnothing\neq\varnothing$ پس باید (x,y)ای در $A\times\varnothing$ وجود داشته باشد و طبق تعریف ضرب دکارتی باید $x\in A$ و $y\in\varnothing$، که $y\in\varnothing$ امکان ندارد. پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است یعنی $A\times\varnothing=\varnothing$.

۲ ــ می‌دانیم باقی‌ماندهٔ هر عدد صحیح بر k یکی از عدد ۰ یا ۱ یا ۲ ... یا $(k-1)$ می‌تواند باشد مثلاً باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد صحیح بر ۵ یکی از اعداد ۰ یا ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ می‌تواند باشد حال اگر $(k+1)$ عدد صحیح داشته باشیم آنها را کبوترهایی فرض کنیم و k عدد صفر تا $(k-1)$ را لانه‌های کبوتر در نظر بگیریم، طبق اصل لانه کبوتری لااقل در یکی از لانه‌ها می‌بایست بیش از یک کبوتر جای بگیرد یعنی لااقل دو عدد از این $(k+1)$ عدد باقی مانده تقسیمشان بر k، مساوی یکدیگر است.

۳ ــ می‌خواهیم به استقراء ثابت کنیم تعداد زیر مجموعه‌های یکی مجموعهٔ n عضوی مانند A برابر است با 2^n. اگر $n=1$ در این صورت A تک عضوی است و زیرمجموعه‌های آن عبارتند از A و $\varnothing$ که $2=2^1$ نیز همین عدد را نشان می‌دهد.

حال فرض کنیم تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ k عضوی 2^k باشد (فرض استقراء). ثابت می‌کنیم تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ $(k+1)$ عضوی، 2^{k+1} است. از طرفی اگر یک عضو به اعضای یک مجموعه اضافه کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۲ برابر می‌شود زیرا با اضافه کردن همان یک عضو به هر یک از زیرمجموعه‌های قبلی به همان تعداد زیرمجموعهٔ جدید ساخته می‌شود پس:

= تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $(k+1)$ عضوی

$\times 2=2^k\times 2=2^{k+1}$ تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی

۴ ــ طبق فرض داریم:

$$(a,b)R(c,d)\Leftrightarrow(b-d)=5(a-c)$$

انعکاسی ۱) $\overbrace{(b-b)}^{0}=5\overbrace{(a-a)}^{0}\Rightarrow(a,b)R(a,b)$

تقارنی ۲) فرض کنیم $(a,b)R(c,d)\Rightarrow(b-d)=5(a-c)$

$$\Rightarrow(d-b)=5(c-a)\Rightarrow(c,d)R(a,b)$$

۳) فرض کنیم $(a,b)R(c,d)$ و $(c,d)R(e,f)$

$$\Rightarrow(b-d)=5(a-c)\ \text{و}\ (d-f)=5(c-e)$$

$$\xRightarrow{\text{جمع طرفین تساوی‌ها}}(b-\cancel{d}+\cancel{d}-f)=(5a-\cancel{5c}+\cancel{5c}-5e)$$

تعدی $\Rightarrow(b-f)=5(a-e)\Rightarrow(a,b)R(e,f)$

۵ ــ کافی است سه دایره به شعاع ۱ و به مرکز هر یک از سه رأس مثلث رسم کنیم. مطابق شکل اگر نقطه در داخل مثلث و خارج هر یک از سه دایره انتخاب شود فاصله‌اش از هر یک

از سه رأس از ۱ بیشتر است و احتمال آن برابر است با مساحت قسمت ذکر شده به مساحت کل مثلث، و برای محاسبهٔ قسمت هاشور خورده کافی است مساحت سه قطاع را محاسبه و حاصل جمع آنها را از مساحت کل مثلث کم کنیم:

$$\text{مساحت هر قطاع} = \frac{60}{360}\times\pi\times 1^2 = \frac{1}{6}\pi$$

$$\text{مساحت سه قطاع} = 3\times\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}\pi$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2}\times 3\times\sqrt{3^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}\times\sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{9}{4}\sqrt{3}$$

$$\text{مساحت قسمت هاشور خورده} = \left(\frac{9}{4}\sqrt{3}\right)-\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \frac{9\sqrt{3}-2\pi}{4}$$

$$P(A) = \frac{\frac{9\sqrt{3}-2\pi}{4}}{\frac{9}{4}\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}-2\pi}{9\sqrt{3}} = 1-\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$$

۶ ــ دو پیشامد داده شده مستقل از هم بوده و می‌توان از اصل ضرب احتمالات در پیشامدهای مستقل از هم استفاده کرد و خواهیم داشت:

$$P(A) = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\right)}_{\text{هردو آبی}}+\underbrace{\left(\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}\right)}_{\text{هردو قرمز}}+\underbrace{\left(\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}\right)}_{\text{هردو سفید}}+\underbrace{\left(\frac{1}{4}\times 0\right)}_{\text{هردو سبز}}$$

۷ ــ

الف) $A-(B\cup C) = A\cap(B\cup C)' = (A\cap A)\cap(B'\cap C')$

$$\overset{\text{جابجایی و شرکت‌پذیری}}{=} (A\cap B')\cap(A\cap C') = (A-B)\cap(A-C)$$

ب) $A-(B\cap C) = A\cap(B\cap C)' = A\cap(B'\cup C')$

$$\overset{\text{توزیع‌پذیری}}{=} (A\cap B')\cup(A\cap C') = (A-B)\cup(A-C)$$

۸ ــ اگر بخواهیم عدد کوچکتر از ۴ باشد باید به مجموعهٔ $\{1,2,3\}$ تعلق داشته باشد از طرفی طبق فرض احتمال آمدن هر عدد زوج ۳ برابر احتمال آمدن هر عدد فرد است پس بنابراین قوانین احتمالات و قانون تخصیص احتمال مقبول داریم:

$$\left.\begin{matrix}P(1)=P(3)=P(5)\\P(2)=P(4)=P(6)\end{matrix}\right\}\ ,\quad P(2)=3P(1)$$

$$\Rightarrow P(1)+P(2)+\dots+P(6)=1$$
$$\Rightarrow P(1)+3P(1)+P(1)+3P(1)+P(1)+3P(1)=1$$
$$\Rightarrow P(1)=\frac{1}{12}$$
$$P(1)=\frac{1}{12}\Rightarrow P(2)=\frac{3}{12}\ ,\ P(3)=\frac{1}{12}$$
$$\Rightarrow P(A)=P(1)+P(2)+P(3)=\frac{1}{12}+\frac{3}{12}+\frac{1}{12}=\frac{5}{12}$$

۹ ــ برای پیدا کردن باقی‌مانده تقسیم

$$A = 1^{1375}+3^{1375}+7^{1375}+5^{1375}$$

بر ۵ از هم نهشتی به پیمانهٔ ۵ کمک می‌گیریم:

$$\text{I)}\ 1^{1375}=1\overset{5}{\equiv}1$$

$$\text{II)}\ 3^2=9\overset{5}{\equiv}-1\Rightarrow(3^2)^{687}\overset{5}{\equiv}(-1)^{687}\Rightarrow 3^{1374}\overset{5}{\equiv}-1$$

$$\Rightarrow 3^{1374}\times 3\overset{5}{\equiv}(-1)\times 3=-3\ ,\ -3\overset{5}{\equiv}2\Rightarrow 3^{1375}\overset{5}{\equiv}2$$

$$\text{III)}\ 7^2=49\overset{5}{\equiv}-1\Rightarrow(7^2)^{687}\overset{5}{\equiv}-1\Rightarrow 7^{1374}\times 7\overset{5}{\equiv}-1\times 7$$

$$\Rightarrow 7^{1375}\overset{5}{\equiv}-7\ ,\ -7\overset{5}{\equiv}3\Rightarrow 7^{1375}\overset{5}{\equiv}3$$

$$\text{IV)}\ 5\overset{5}{\equiv}0\Rightarrow 5^{1375}\overset{5}{\equiv}0$$

$$\Rightarrow A\overset{5}{\equiv}1+2+3+0=6\Rightarrow A\overset{5}{\equiv}6\ ,\ 6\overset{5}{\equiv}1\Rightarrow A\overset{5}{\equiv}1$$

۱۰ ــ چون طبق فرض $z_1=1+i$ پس $\operatorname{tg}\theta=\frac{x}{y}=1$ بنابراین $\theta=\frac{\pi}{4}$

$$z_1=\cos\theta+i\sin\theta\Rightarrow z_1=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$$

اگر $z_0=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\Rightarrow$

$$z_0^{1375}=\cos\left(1375\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(1375\frac{\pi}{3}\right)$$

از طرفی $1375\frac{\pi}{3}=458\pi+\frac{\pi}{3}$

$$\Rightarrow z_0^{1375}=\cos\left(458\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(458\pi+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow z_0^{1375}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=z_0$$

حل مسائل حسابان (۱)

۱ ــ حل اولاً: برد دو تابع f و g هر دو $[-1,1]$ است و تابع gof وقتی قابل تشکیل است که اشتراک R_f و D_g تهی نباشد. چون $R_f=[-1,1]$ و $D_g=R$ درنتیجه $R\cap[-1,1]=[-1,1]$ پس تابع gof قابل تشکیل است.

حل ثانیاً:

$$D_{gof}=\{x\,|\,x\in D_f\wedge f(x)\in D_g\}$$
$$(1):\ x\in D_f\Rightarrow x\in R$$
$$(2):\ f(x)\in D_g\Rightarrow \sin x\in R$$

همواره برقرار است $\Rightarrow D_{gof}=R$

۲ ــ

$$f(x)=mx^3+(m-1)x^2+(n-2)x+(n+1)$$
$$f(-x)=-mx^3+(m-1)x^2-(n-2)x+(n+1)$$

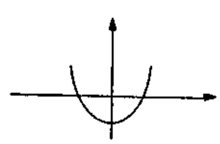
اگر f فرد باشد باید ضریب x^2 و $(n+1)$ صفر باشند یعنی $m=1$ و $n=-1$ زیرا:

$$\Rightarrow f(x)=x^3-3x$$
$$\Rightarrow f(-x)=-x^3+3x=-(x^3-3x)=-f(x)$$

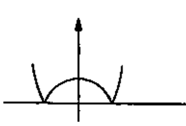
اگر f زوج باشد باید ضریب x^3 و ضریب x صفر باشند. یعنی $m=0$ و $n=2$ زیرا

$$\Rightarrow f(x)=-x^2+3\Rightarrow f(-x)=-x^2+3=f(x)$$

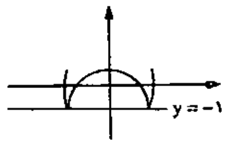
۳ ــ ابتدا نمودار تابع $y_1=x^2-2$ را رسم می‌کنیم.



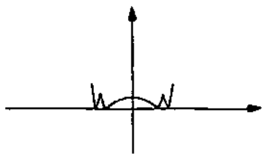
سپس نمودار تابع $y_2=|x^2-2|$ را رسم می‌کنیم.



آنگاه نمودار تابع $y_3=\big||x^2-2|-1\big|$ را رسم می‌کنیم.



حال نمودار تابع $y=\Big|\big||x^2-2|-1\big|\Big|$ را رسم می‌کنیم.



۴ ــ

$$\left\{\underset{x\to 0}{\text{حد}}\frac{1-\cos 4x}{\sin x^2}=\underset{x\to 0}{\text{حد}}\frac{2\sin^2 2x}{\sin x^2}\sim\underset{x\to 0}{\text{حد}}\frac{2(2x)^2}{x^2}=8\right.$$

$$\left\{\underset{x\to 0}{\text{حد}}\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\times\right.$$

$$\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}=$$

$$\underset{x\to 0}{\text{حد}}\frac{\operatorname{tg}x\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)}{1+\sin x-1+\sin x}$$

$$=\underset{x\to 0}{\text{حد}}\frac{\operatorname{tg}x\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)}{2\sin x}\sim$$

$$\underset{x\to 0}{\text{حد}}\frac{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{2x}=$$

$$\underset{x\to 0}{\text{حد}}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2}=\frac{2}{2}=1$$

۵ ــ

$$y=\frac{1}{(x-a)^2}\Rightarrow y'=\frac{-2}{(x-a)^3}\Rightarrow y''=\frac{-6}{(x-a)^4}$$

$$y''=-\frac{6}{(x-a)^4}=-3\times\frac{-2}{(x-a)^3}\times(x-a)\times\frac{1}{(x-a)^2}$$

$$\Rightarrow y''=-3y'(x-a)y\Rightarrow y''+3y'y(x-a)=0$$

۶ ــ

$$x\to\frac{\pi^-}{6}\Rightarrow$$

حد چپ $\quad \text{حد}\,f(x)=\left[\frac{1^-}{2}-\frac{1}{2}\right]+a=[0^-]+a=-1+a$

$$x\to\frac{\pi^+}{6}\Rightarrow$$

حد راست $\quad \text{حد}\,f(x)=\left[\frac{1^+}{2}+\frac{1}{2}\right]+b=[1^+]+b=1+b$

$$x=\frac{\pi}{6}\Rightarrow f(\frac{\pi}{6})=\left[-\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\right)\right]=\left[-\left(\frac{3/14}{6}+0/5\right)\right]=$$

مقدار تابع $\quad [-(0/52+50)]=[-1/02]=-2$

$-1+a=-2\Rightarrow\boxed{a=-1}$,

$1+b=-2\Rightarrow\boxed{b=-3}$

۷ ـ فرض می‌شود

$\frac{a}{c}=m$, $\frac{b}{c}=n$, $\frac{d}{c}=k$

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{\frac{a}{c}x+\frac{b}{c}}{x+\frac{d}{c}}$$

$$\Rightarrow y=\frac{mx+n}{x+k}\qquad o\Big|\begin{matrix}2=\text{مجانب قائم}\\1=\text{مجانب افقی}\end{matrix}$$

مجانب قائم : $x=-k=2\Rightarrow\boxed{k=-2}$,

مجانب افقی : $y=m=1\Rightarrow\boxed{m=1}$

$$A\Big|_{-1}^{0}\xrightarrow{\text{در معادله تابع}}-1=\frac{0+n}{0+k}\Rightarrow-1=\frac{n}{-2}\Rightarrow\boxed{n=2}$$

$$\Rightarrow y=\frac{x+2}{x-2}$$

۸ ـ

$S=80t-20t^2$

$$V=\frac{ds}{dt}=80-40t=0\Rightarrow\begin{cases}t=2\\V=0\end{cases}$$

یعنی پس از (۲) ثانیه قطار متوقف می‌شود.

$t=2\Rightarrow S=80(2)-20\times4=160-80=80$ متر

حل مسائل انتگرال دیفرانسیل(۱)

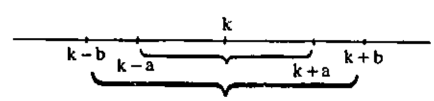
۱ ـ فرض می‌کنیم $a,b,k\in R$ و k عدد مورد نظر باشد. N و N' دو همسایگی متقارن عدد k باشند.

$N(k,a)=(k-a,k+a)$

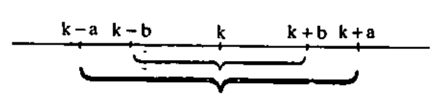
و

$N'(k,b)=(k-b,k+b)$

اگر $b>a$ $\quad(k-a,k+a)\cap(k-b,k+b)=(k-a,k+a)$



اگر $a>b$ $\quad(k-a,k+a)\cap(k-b,k+b)=(k-b,k+b)$



۲ ـ می‌دانیم

$$\forall x\in[1,+\infty)\Rightarrow\begin{cases}[x]=n\quad\text{یک عدد فرد}\\\text{یا}\\ [x]=n\quad\text{یک عدد زوج}\end{cases}$$

درنتیجه دنباله $\{(-1)^{[x]}\}$ وقتی، عدد فرد $n=[x]$ برابر (−۱) و وقتی عدد زوج $n=[x]$ برابر (+۱) است. حال ثابت می‌کنیم جملات این دنباله نمی‌تواند در ε همسایگی هیچ عددی قرار گیرد. فرض می‌کنیم این دنباله همگرا و حدّ آن عدد L باشد.

$$n>M\Rightarrow\left|(-1)^{[x]}-L\right|<\varepsilon$$

$$\text{(الف}\begin{cases}n>M\Rightarrow|-1-L|<\varepsilon\Rightarrow|L+1|<\varepsilon\Rightarrow-\varepsilon<L+1<\varepsilon\\ n\ \text{فرد باشد}\\ \Rightarrow-1-\varepsilon<L<-1+\varepsilon\end{cases}$$

$$\text{(ب}\begin{cases}n>M\Rightarrow|+1-L|<\varepsilon\Rightarrow|L-1|<\varepsilon\Rightarrow-\varepsilon<L-1<\varepsilon\\ n\ \text{زوج باشد}\\ \Rightarrow1-\varepsilon<L<1+\varepsilon\end{cases}$$

حال اگر $\varepsilon=\frac{1}{4}$ فرض شود از یک طرف $-\frac{5}{4}<L<-\frac{3}{4}$ و از طرفی $\frac{3}{4}<L<\frac{5}{4}$ و قرار گرفتن L در آن واحد در این دو نامساوی غیرممکن است پس دنباله فوق همگرا نیست.

۳ ـ می‌خواهیم نشان دهیم سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3n+2}$ همگرا است.

می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{n^2+3n+2}=\frac{1}{(n+2)(n+1)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$$

$$S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3n+2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\left(\frac12-\cancel{\frac13}\right)+\left(\cancel{\frac13}-\cancel{\frac14}\right)+\left(\cancel{\frac14}-\cancel{\frac15}\right)+\dots+\left(\cancel{\frac{1}{n+1}}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac12-\frac{1}{n+2}$$

$$\Rightarrow\ \underset{n\to\infty}{\text{حد}}\,S_n=\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left(\frac12-\frac{1}{n+2}\right)=$$

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left(\frac12\right)-\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\frac{1}{n+2}=1$$

پس سری فوق به عدد (۱) همگرا است.

۴ ـ

$$\left\{\underset{x\to+\infty}{\text{حد}}\frac{4x^2-1}{4x^2+1}=1\right.$$

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists M\in N\ :\ x>M\in N\Rightarrow\left|\frac{4x^2-1}{4x^2+1}-1\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{4x^2-1}{4x^2+1}-1\right|<\varepsilon\Rightarrow\left|\frac{-2}{4x^2+1}\right|<\varepsilon\Rightarrow\frac{2}{4x^2+1}<\varepsilon$$

توجه: $|-2|=2$ و $|4x^2+1|=4x^2+1$

هرگاه طرفین این نامساوی را معکوس کنیم جهت عوض می‌شود:

$$\Rightarrow\frac{4x^2+1}{2}>\frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow4x^2+1>\frac{2}{\varepsilon}\Rightarrow4x^2>\frac{2}{\varepsilon}-1\Rightarrow x^2>\frac{2-\varepsilon}{4\varepsilon}$$

$$\Rightarrow|x|>\sqrt{\frac{2-\varepsilon}{4\varepsilon}}\qquad\text{داریم :}\ \begin{cases}|x|=x\\x\to+\infty\end{cases}$$

$$\Rightarrow x>\sqrt{\frac{2-\varepsilon}{4\varepsilon}}$$

اگر $M\ge\left[\sqrt{\frac{2-\varepsilon}{4\varepsilon}}\right]+1$ آنگاه استلزام فوق درست است.

۵ ـ

$$\underset{x\to1^+}{\text{حد}}\left(\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}+x^2\right)=3\qquad\text{یا}$$

$$\underset{x\to1^+}{\text{حد}}\left(x^2+x+1\right)=3$$

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ :\ 0<x-1<\delta\Rightarrow\left|x^2+x+1-3\right|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow\left|x^2+x-2\right|<\varepsilon\Rightarrow|(x-1)(x+2)|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow|x-1|\times|x+2|<\varepsilon$$

حال یک همسایگی به مرکز ۱ و شعاع ۱ در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases}x\to1^+\\R=1\end{cases}\Rightarrow1<x<2$$

$$\Rightarrow3<x+2<4$$

عدد (۴) کران بالای $|x+2|$ است.

اگر $|x-1|\times4<\varepsilon\Rightarrow|x-1||x+2|<\varepsilon$

$$\Rightarrow\underset{x\to1^+}{|x-1|}<\frac{\varepsilon}{4}\Rightarrow0<x-1<\frac{\varepsilon}{4}\ ,$$

$$\delta=\text{Min}\left\{1,\frac{\varepsilon}{4}\right\}$$

۶ ـ می‌دانیم

$$\underset{x\to0}{\text{حد}}\frac{\sin x}{x}=1\ ,\qquad\underset{x\to0}{\text{حد}}(1-\cos x)=0$$

$$\underset{x\to0}{\text{حد}}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\underset{x\to0}{\text{حد}}\frac{\frac{1-\cos x}{x}}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{0}{1}=0$$

۷ ـ منحنی این تابع می‌تواند یک مجانب افقی و حداکثر دو مجانب قائم داشته باشد.

الف:

$$\Delta<0\Rightarrow m^2-12<0\Rightarrow m^2<12\Rightarrow-2\sqrt3<m<2\sqrt3$$

ب:

$$\Delta=0\Rightarrow m^2-12=0\Rightarrow m^2=12\Rightarrow m=\pm2\sqrt3$$

ج:

$$\Delta>0\Rightarrow m^2-12>0\Rightarrow m^2>12\Rightarrow\begin{cases}m>2\sqrt3\\\text{یا}\\m<-2\sqrt3\end{cases}$$

۸ ـ یک فرمول از مشتق $k,n\in R$

اگر $y=\frac{k}{(x-a)^n}\Rightarrow y'=\frac{-kn}{(x-a)^{n+1}}$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{(x-1)^3}\Rightarrow y'=\frac{-3}{(x-1)^4}\ ,\ y''=\frac{12}{(x-1)^5}$$

$$\Rightarrow y''=\frac{12}{(x-1)^5}=-4\times\frac{-3}{(x-1)^4}\times\frac{1}{(x-1)^3}(x-1)^2$$

$$\Rightarrow y''=-4y'y(x-1)^2\Rightarrow y''+4y'y(x-1)^2=0$$

۹ ـ

$$y=\sqrt[3]{x^2}\Rightarrow y'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$x=8\Rightarrow y=\sqrt[3]{8^2}=\sqrt[3]{64}=4$$

$$m_{\text{مماس}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{8}}=\frac{2}{3\times2}=\frac13\Rightarrow m_{\text{قائم}}=-3\Rightarrow A\Big|_{4}^{8}\ ,\ m_{\text{قائم}}=-3$$

$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 4 = -3(x - 8)$
قائم

$\Rightarrow y = -3x + 28$ معادله خط قائم

$\begin{cases} y = -3x + 28 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x = -3x + 28 \Rightarrow 4x = 28$

$\Rightarrow x = 7 \Rightarrow M\begin{vmatrix} 7 \\ 7 \end{vmatrix}$

نقطه تقاطع خط قائم با خط نیمساز ربع اول

۱۰ ــ متر بر ثانیه ۱۳ $= x'_1$ و $S^2 - x^2 = (50)^2$

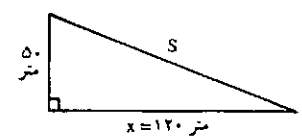
نسبت به t مشتق می‌گیریم $2SS'_1 - 2xx'_1 = 0$

داریم $S^2 - x^2 = 50^2 \Rightarrow S^2 - (120)^2 = (50)^2$

$\Rightarrow S^2 = 14400 + 2500 = 16900 \Rightarrow S = 130$

$2SS'_1 - 2xx'_1 = 0 \Rightarrow SS'_1 = xx'_1 \Rightarrow 130 S'_1 = 120(13)$

$\Rightarrow S'_1 = 12$ متر بر ثانیه



پس قایق با سرعت ۱۲ متر بر ثانیه به ناظر نزدیک می‌شود

حل مسائل کامپیوتر سال سوم نظام جدید

۱ـ حل:

۰ـ شروع کن

۱ـ سه عدد را بگیرید و آنها را به ترتیب A، B و C بنامید.

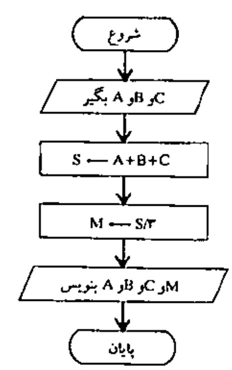
۲ـ مقدار A+B+C را در S جایگزین کنید A+B+C ⟵ S.

۳ـ خارج قسمت S/۳ را در M جایگزین کنید S/۳ ⟵ M

۴ـ مقادیر A، B، C و M را چاپ کنید.

۵ـ پایان

نمودار گردشی آن به صورت زیر است:



۲ـ حل:

۰ـ شروع کن

۱ـ سه عدد مثبت را بگیرید و آنها را به ترتیب A، B و C بنامید.

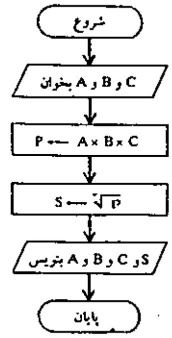
۲ـ مقدار A×B×C ⟵ P را به دست آورید.

۳ـ حاصل $\sqrt[3]{P}$ را S بنامید. $S \longleftarrow \sqrt[3]{P}$

۴ـ A، B، C و S را چاپ کنید.

۵ـ پایان

نمودار گردشی آن به صورت زیر است:



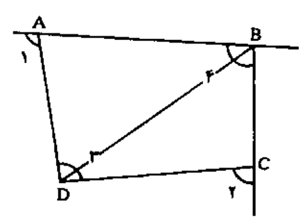
پاسخ سؤالهای امتحان درس هندسهٔ یک نظام جدید متوسطه رشته عمومی در خرداد ماه ۱۳۷۵ نوبت صبح

۱ ــ الف) هر یک از این دو نقطه از دو ضلع زاویه به یک فاصله‌اند.

ب) استقرایی

پ) استنتاجی

۲ ــ چهار ضلعی حاصل را ABCD می‌نامیم و قطر BD را رسم می‌کنیم. زاویهٔ ۱، زاویهٔ خارجی مثلث ABD و زاویهٔ ۲ زاویهٔ خارجی مثلث BCD است پس داریم:



$\hat{1} = A\hat{B}D + A\hat{D}B$ (۱)

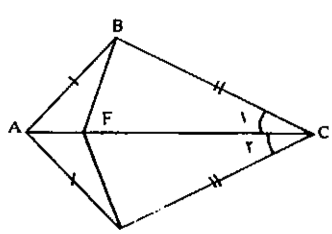
$\hat{2} = C\hat{B}D + C\hat{D}B$ (۲)

از جمع کردن عضوهای نظیر این دو رابطه نتیجه می‌شود:

$\hat{1} + \hat{2} = (A\hat{B}D + C\hat{B}D) + (A\hat{D}B + C\hat{D}B)$

و از آنجا داریم: $\hat{1} + \hat{2} = \hat{3} + \hat{4}$

۳ ــ دو مثلث ABC و ACD به دلیل تساوی سه ضلع



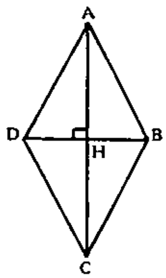
نظیر همنهشتند، زیرا:

$AB = AD \ , \ BC = CD \ , \ AC = AC$

در نتیجه $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$، و از آنجا مثلثهای BCF و DCF به دلیل برابری دو ضلع و زاویهٔ بین آن دو ضلع همنهشت هستند زیرا: $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ و $CF = CF$ ،$BC = CD$ بنابراین $BF = DF$ است.

۴ ــ در لوزی ABCD داریم:

$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD}$



با توجه به اینکه قطرهای لوزی عمودمنصف یکدیگرند، اگر نقطهٔ برخورد دو قطر لوزی را H بنامیم، خواهیم داشت:

$S_{ABD} = \frac{1}{2} DB.AH \ , \ S_{BCD} = \frac{1}{2} DB.CH$

از آنجا:

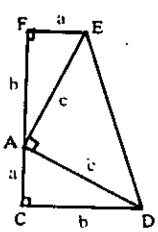
$S_{ABCD} = \frac{1}{2} DB.AH + \frac{1}{2} DB.CH$

$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2} DB(AH + CH) = \frac{1}{2} DB.AC$

$\Rightarrow \boxed{S_{ABCD} = \frac{1}{2} DB.AC}$

۵ ــ الف) $S_{CDEF} = \frac{1}{2}(a+b)(a+b)$

$S_{CDEF} = \frac{1}{2}(a+b)^2$



ب) $S_{ACD} = \frac{1}{2} ab \ , \ S_{AEF} = \frac{1}{2} ab$

$S_{ADE} = \frac{1}{2} AE.AD = \frac{1}{2} C.C = \frac{1}{2} C^2$

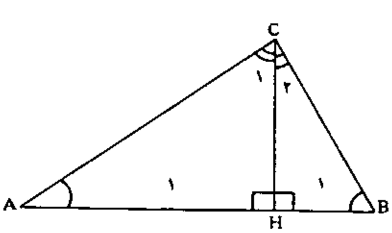
پ) $S_{CDEF} = S_{ACD} + S_{AFE} + S_{ADE}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(a+b)^2 = \frac{1}{2} ab + \frac{1}{2} ab + \frac{1}{2} c^2$

$\Rightarrow (a+b)^2 = 2ab + c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab = 2ab + c^2$

$\Rightarrow \boxed{c^2 = a^2 + b^2}$

۶ ــ دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ACH و BCH متشابه‌اند زیرا $\hat{B} = \hat{A}_1$ و $\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90°$ زیرا هر دو متمم زاویهٔ A هستند.



از تشابه این مثلث نتیجه می‌شود :

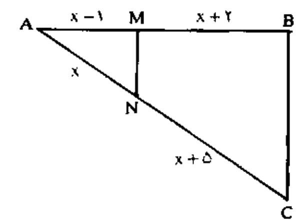
$\frac{CH}{AH}=\frac{HB}{CH}\Rightarrow CH^2=AH.HB$

۷ ـ

$C=\sqrt{4\times 25}=\sqrt{100}=10$

۸ ـ بنابر قضیهٔ تالس داریم :

$MN\parallel BC\Rightarrow \frac{AN}{NC}=\frac{AM}{MB}\Rightarrow$



$\frac{x}{x+5}=\frac{x-1}{x+2}\Rightarrow x^2+2x=x^2+4x-5$

$\Rightarrow 2x=5\Rightarrow x=\frac{5}{2}$

۹ ـ از تشابه دو مثلث قائم الزاویهٔ ABE و ACD داریم :

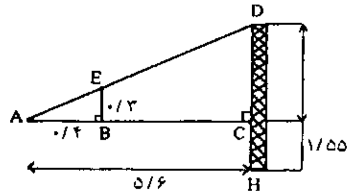
$\frac{AB}{AC}=\frac{BE}{CD}\Rightarrow \frac{0/4}{5/6}=\frac{0/3}{CD}$

$\Rightarrow CD=4/2m$

از طرفی

از آنجا خواهیم داشت :

$DH=CH+CD=1/55+4/2=5/75m$



۱۰ ـ نسبت ضلعهای متناظر این دو مثلث را می‌نویسیم

داریم :

الف) $\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{A'C'}{AC}\Rightarrow \frac{y}{AB}=\frac{2/5}{7/5}=\frac{2}{x}$

اگر $AB=3$ آنگاه $y=1$ می‌باشند. $\Rightarrow x=6\Rightarrow y=1$

ب) نسبت محیطهای مثلث برابر نسبت تشابه دو مثلث است یعنی $\frac{2P'}{2P}=\frac{1}{3}$ محاسبهٔ محیطها نیز این مطلب را نشان می‌دهد زیرا

$2P'=2+2/5+1=5/5$

$2P=6+7/5+3=16/5$

$\frac{2P'}{2P}=\frac{5/5}{16/5}=\frac{1}{3}$

پ) نسبت ارتفاعهای متناظر نیز برابر نسبت تشابه دو مثلث است یعنی $\frac{C'H'}{CH}=\frac{1}{3}$ از تشابه مثلثهای قائم‌الزاویه A'H'C' و AHC نیز ثابت می‌شود که نسبت ارتفاعهای متناظر برابر $\frac{1}{3}$ است.

۱۱ ـ دو برابر می‌شود زیرا :

طول یال $=a\Rightarrow$ طول قطر مکعب $=a\sqrt{3}$

طول یال $=2a\Rightarrow$ طول قطر مکعب $=2a\sqrt{3}$

۱۲ ـ دو شکل فضایی و صفحه‌ای را که قاعده‌های دو شکل در آن قرار گرفته باشند در نظر می‌گیریم. اگر هر صفحه‌ای موازی با این صفحه که یکی از این دو شکل را قطع می‌کند، دیگری را نیز قطع کند و سطح مقطعهای حاصل دارای مساحتهای برابر باشند، آنگاه حجم این دو شکل برابر است.

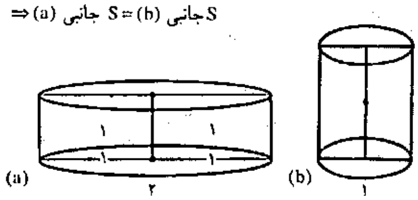
۱۳ ـ

الف) ارتفاع × محیط قاعده = S جانبی استوانه قائم

(a) جانبی $S=2\pi\times 2\times 1=4\pi cm^2$

(b) جانبی $S=2\pi\times 1\times 2=4\pi cm^2$

$\Rightarrow$ (a) جانبی S = (b) جانبی S



ب) πR^2h = ارتفاع × سطح قاعده = حجم استوانه

(a) حجم $=\pi(2)^2\times 1=4\pi cm^3$

(b) حجم $=\pi(1)^2\times 2=2\pi cm^3$

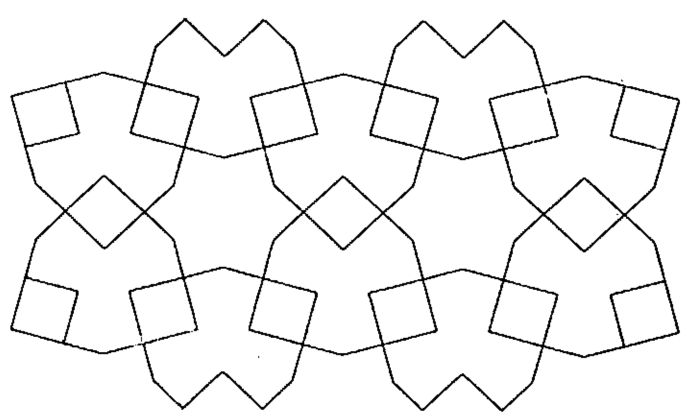
$\Rightarrow$ (a) حجم $=2\times$(b)حجم

۱۴ ـ داریم :

سطح کره $=4\pi R^2\Rightarrow$ سطح توپ $=4\pi\times 100=400\pi cm^2$

حجم کره $=\frac{4}{3}\pi R^3\Rightarrow$ حجم توپ $=\frac{4}{3}\pi\times 10^3$

$=\frac{4000}{3}\pi cm^3$



جوابهای تفریح اندیشه

جواب ۱: M، F، B، C، و S در طبقه‌های اول تا پنجم زندگی می‌کنند.

روش معقول حل معماهایی از این دست استفاده از جدولی ساده (ایتالیک) است.

		طبقه				
		۱	۲	۳	۴	۵
خانوادهٔ B	A					×
خانوادهٔ C	B	×		×		×
خانوادهٔ F	C	×		×		×
خانوادهٔ M	D	×	×			
خانوادهٔ S	E			×		

هر محل واقع در ماتریس فوق مکانی ممکن برای یک خانواده است. هنگامی که تمام محلهای واقع در یک سطر یا یک ستون، جز یکی، حذف شود، جای باقیمانده محلی صریح و مشخص است.

شرط ۱، A ۵ را حذف می‌کنند. شرط دوم B۱ را حذف می‌کند. C ۱ و C ۵ توسط شرط سوم حذف می‌شوند؛ D ۱، D ۲، و B ۵ توسط شرط چهارم؛ و E ۳ توسط شرط پنجم. مکانهای B ۳ و C ۳ توسط شرط ۶ حذف می‌شوند.

در این مرحله ضروری است که با روش آزمایش کردن اقدام شود. به عنوان مثال، فرض می‌کنیم B در طبقهٔ ۱ زندگی می‌کند. این فرض A۲، A۳، A۴، و E۱ را حذف کرده M را تنها برای طبقهٔ سوم و در این صورت S را تنها برای طبقهٔ پنجم باقی می‌گذارد. اکنون C وF نمی‌توانند، بدون به هم زدن شرط ۴ یا ۵، در محلهای باقیمانده قرار گیرند: ×ی در محل A۱ قرار داده به کار خود ادامه بدهید.

جواب ۲: $(۹+۸+۱۲)-۳۴$

جواب ۳: کمبود ایجاد شده (−) یا افزایش حاصل (+) طی هر دورهٔ ۳ ساعتی برابر ۳۰۰۰ گالن ورودی منهای تعداد مصرف در آن دوره است. جریانهای خالص مزبور به ترتیب متوالی عبارت‌اند از ۱۰۰۰+، ۲۰۰۰ −، ۱۵۰۰−، ۵۰۰+، ۱۰۰۰−، ۲۰۰۰+، ۱۰۰۰− و ۱۵۰۰+ گالن.

از آنجا که جریان آب در شبانه‌روز پیوسته است، ساعت آغاز مهم نیست، و تنها رعایت ترتیب اهمیت دارد.

فرض می‌کنیم Q مقدار آب واقع در برج در آغاز دورهٔ اول باشد، مقدار آب در پایین دورهٔ اول Q+۱۰۰۰ ؛ در پایان دورهٔ دوم

$(Q+۱۰۰۰)-۲۰۰۰=Q-۱۰۰۰$

در پایان دورهٔ سوم تا هشتم، Q−۲۵۰۰، Q−۲۰۰۰، Q−۳۰۰۰، Q−۵۰۰، Q−۱۵۰۰، و Q گالن خواهد بود.

Q باید حداقل ۳۰۰۰ گالن باشد، وگرنه شهر طی دورهٔ پنجم بی‌آب می‌ماند. بیشترین مقدار آب در هر زمان Q+۱۰۰۰ گالن در پایان دورهٔ اول است. بنابراین کمترین ظرفیت برج باید

$۳۰۰۰+۱۰۰۰=۴۰۰۰$

گالن باشد.

جواب ۴: پنج تا زرد. دو تا سرخ. یک آبی و دو تا بنفش. به عوامل اول تجزیه کنید.

جواب ۵: همانگونه که هر دهقان می‌تواند بگوید، از آنجا که کل چمن چریده شده است و هر بز به اندازهٔ بز دیگر می‌تواند بچرد، هر بز $\frac{۱}{۳}$ از ۱۲۰ متر مربع، یا ۴۰ مترمربع را چریده است.

جواب ٦: در واقع برای این معما توضیحی عقلایی موجود است: تقاطع مزبور باید به ترمینال شرقی نزدیکتر از ترمینال غربی باشد. در این صورت، در هر زمان مفروض احتمال بودن قطار در غرب تقاطع بیشتر از بودن آن در شرق آن است، زیرا قسمت بیشتر خط در این جهت قرار دارد و قطار قسمت بیشتری از مسافرت دوسرهٔ یک ساعته را در آن صرف می‌کند. قطار، هنگامی که در غرب تقاطع است، چه متوجه مشرق باشد، چه به جانب مغرب، بعد در حالی که از مغرب به مشرق می‌رود از تقاطع عبور می‌کند.

اشتباه از اینجا ناشی می‌شود که تعداد عبورهای برگشت غربی قطار به طور منظم برابر تعداد عبورهای برگشت شرقی آن است. مهندسان برق بی‌شک این پدیده را به عنوان اشتباه فرکانس یا فاز می‌شناسند، اما نداشتن تخصص برای حل نکردن این معما پذیرفتنی نیست.

باسمه تعالی

قابل توجه واحدهای آموزشی ـ معلمان ـ دانش‌آموزان

شما علاقه‌مندان گرامی می‌توانید کتب ریاضی درخواستی خود را پس از انتخاب و محاسبه وجه آن (بعلاوه به‌ازای هر جلد کتاب ۲۵۰ ریال بابت هزینه ارسال) به حساب شماره ۷۹۱۰/۵ بانک ملت شعبه کریمخان‌زند واریز و اصل فیش را همراه تقاضای درخواستی خود براساس فرم ذیل به نشانی انتشارات مدرسه ارسال نمائید.

نام کتاب	قیمت (ریال)	نام کتاب	قیمت (ریال)
● دورهٔ راهنمایی:		جبر پایه ۲ سال چهارم دبیرستان	۱۱۰۰۰
ریاضیات پایه ۴	۳۵۰۰	جبر و آنالیز	۱۰۰۰۰
ریاضیات پایه ۵	۲۸۰۰	دایرةالمعارف هندسه	۸۰۰۰
ریاضیات پایه ۶	۳۵۰۰	هندسه تحلیلی چندمحوری	۶۳۰۰
● دورهٔ دبیرستان:		هندسه ساده	۴۵۰۰
آشنایی با ماتریسها	۷۴۰۰	هندسه‌های جدید	۹۰۰۰
بازآموزی و بازشناخت هندسه	۴۵۰۰	جبر، حساب و آنالیز	۱۲۰۰۰
بحث ریاضی با دانش‌آموز	۳۰۰	**● کتابهای کوچک‌ریاضی دورهٔ دبیرستان:**	
تست جبر و احتمال	۸۵۰	روشهایی از جبر	۲۷۰۰
تست حسابان ۱ـ۲	۱۱۰۰	بخش‌پذیری در جبر	۲۵۰۰
تست ریاضی ۵	۸۵۰	مجانبها و رسم منحنی	۴۰۰۰
تست ریاضیات عمومی ۱ـ۲	۱۸۰۰	حد، مفهوم، تعریف	۳۵۰۰
تست ریاضی پایه علوم‌انسانی	۹۰۰	مبانی ریاضیات	۳۰۰۰
جبر پایه ۱ سال سوم دبیرستان	۹۰۰۰	تعیین دامنه و برد توابع	۳۰۰۰

نام متقاضی:

نشانی کامل پستی: کدپستی:

ردیف	نام کتاب	تعداددرخواستی	قیمت واحد	قیمت کل

قیمت کل کتاب	
هزینه پستی	
جمع کل	

خواهشمند است حتماً از فرم درخواستی و فیش واریزی برای خود فتوکپی تهیه نمایید تا در مقابل هر مشکلی مجدداً قابل پیگیری باشد.

نشانی: خیابان سپهبد قرنی، نرسیده به پل کریمخان‌زند، کوچه شهید محمود حقیقت‌طلب، پلاک ۳۶،
صندوق‌پستی ۱۴۱۵۵/۱۹۴۹ تلفن: ۹ـ۸۸۱۰۳۲۵، ۸۹۳۸۰۹ نمابر (فاکس): ۸۸۲۰۵۹۹

فرم نظرخواهی

از همهٔ شما دانش‌آموزان، دانش‌جویان و دبیران محترم درخواست می‌کنیم در جهت، پربارتر شدن و رفع هرگونه نقص احتمالی در مجله خودتان، فرم نظرخواهیِ زیر را به دقت مطالعه و به سؤالات پاسخ دهید و برای ما ارسال کنید. قبلاً از همکاری و دلسوزی شما تشکر می‌کنیم.

۱ـ مجله برهان را به چه صورت تهیه می‌کنید؟

مشترک هستم ☐ به طور آزاد تهیه می‌کنم ☐ از کتابخانه مدرسه استفاده می‌کنم ☐

۲ـ آیا مجله مرتب به دست شما می‌رسد؟ بلی ☐ خیر ☐

چه مشکلاتی در تهیهٔ مجله دارید؟ ....

....

۳ـ چه شماره‌هایی از مجله را در اختیار داشته و چه شماره‌هایی از آن را خواهانید؟

....

۴ـ اگر مقاله‌های موجود در مجله را به چهار دستهٔ عمومی، درسی، تخصصیِ کمک‌درسی و مجموعهٔ مسائل، تقسیم کنیم شما کدام‌یک از مقاله‌های ذکر شده را بیشتر مورد مطالعه و استفاده قرار می‌دهید. (به ترتیب اولویت شماره بزنید.)

عمومی ☐ درسی ☐ تخصصی کمک درسی ☐ مسائل ☐

۵ـ در بین مقاله‌های باعنوان ثابت که در زیر مشخص شده‌اند کدام مقاله بیشتر مورد استفاده شما است؟ (به ترتیب اولویت شماره گذاری کنید)

تاریخچه مجلات ☐ آموزش ترجمه متون ریاضی ☐ حرف اول ☐

شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید ☐ مقالات کوتاه ار مجلات معتبر جهان ☐

طرح و حل مسائل اساسی به روشهای مقدماتی ☐ مکان هندسی ☐

ریاضیات گسسته ☐ مسائل برای حل ☐

۶ـ نظر خود را راجع به مقالات درسی و درصد کمک آنها به شما در جهت فهم مطالب درسی و ارتباط آنها با کتاب درسی، بنویسید. (اگر پیشنهادی دارید مطرح فرمایید) ....

....

۷ـ به نظر شما جای چه نوع مطالب یا مقالاتی در مجله خالی است؟ ....

....

۸ـ به نظر شما کدام‌یک از مقالات مجله را می‌توان حذف کرد و در این صورت چه مقالاتی را جایگزین آنها کنیم؟

آیا با وجود تست در مجله موافق هستید؟ ....

....

۹ـ آیا مایلید برای ما مقاله یا مسأله (با حل) ارسال کنید؟

۱۰ـ آیا دبیران ریاضیِ شما از این مجله در کلاس استفاده کرده و آن را به شما توصیه می‌کنند؟

۱۱-در بین مؤلفین و مترجمین مجله که تاکنون مقالاتی را از آنها خوانده‌اید کدام‌یک از آنها به زبان بهتری با شما ارتباط برقرار کرده و مقالاتشان را بهتر درک کرده‌اید؟ (به ترتیب اولویت بنویسید) ....

....

۱۲-هر پیشنهاد، انتقاد و یا نظری دارید، بنویسید...

....

با تشکر: هیأت تحریریه

مشخصات تکمیل‌کننده پرسشنامه

دانش‌آموز ☐ کلاس : .... ساکن شهر: ....

دانشجو ☐ سال: .... رشته: .... دانشگاه: ....

دبیر ☐ سابقهٔ تدریس: .... ساکن شهر : ....

Borhan

Vol. 6 No. 2

Serial numbers: 19 Winter 1997

In the name of God

Borhan is a mathematics journal published four times a year by Madrasse Publications. Each issue includes articles related to mathematics and its various topics specifically those concerning highschool education in Iran.

All communications should be sent to the editor at the following address:

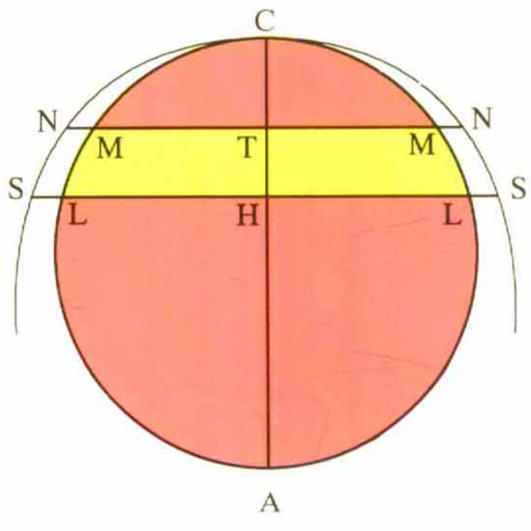
Madrasse Publication - No. 36. Haghighat talab Street, Sepahbod gharany Ave, Tehran, Iran

Post code: 14155/1949

Contents:

روش ابوالوفای بوزجانی ریاضیدان و منجم مسلمان (۳۲۸ـ۳۸۷ ه.ق)، در ساختن آیینهٔ سوزان* در کتاب اعمال هندسی

آیینهٔ سوزان آیینه‌ای است که اگر آن را مقابل شعاع آفتاب نگاه داریم، جسمی را که در فاصلهٔ معینی واقع است بسوزاند. [خاطرنشان می‌کنیم که جسم باید در کانون آیینهٔ مقعر (کاو) قرار گیرد.]
روش تهیهٔ طرح سطح آیینهٔ سوزان: دایره‌ای به قطر AC رسم می‌کنیم که شعاع آن دو برابر فاصله‌ای باشد که می‌خواهیم جسم را در آن فاصله از مرکز آیینه قرار دهیم. روی قطر AC از آن دایره پاره‌خطهای متساوی CT و TH و مانند آنها را جدا می‌کنیم. هر چه این پاره‌خطها کوچکتر باشند، سطح آیینه دقیقتر و بهتر از کار درمی‌آید. از نقاط T و H و غیره عمودهایی بر قطر AC رسم می‌کنیم. این عمودها دایره را از دو طرف در نقاطی مانند M و L و نظایر آنها قطع می‌کنند. پاره‌خطهای CM و CL و مانند آنها را از دو طرف رسم کرده پاره‌خطهای TN=CM و HS=CL و غیره را مطابق با شکل مشخص می‌کنیم. سپس نقاط C و N و S و مانند آنها را به هم وصل می‌کنیم. از وصل‌کردن این نقاط طرح سطح آیینهٔ سوزان معین می‌شود.



* نقل از کتاب بوزجانی نامه، ابوالقاسم قربانی و محمدعلی شیخان.