وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش وبرنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

ISSN:1735-4951
www.roshdmag.ir

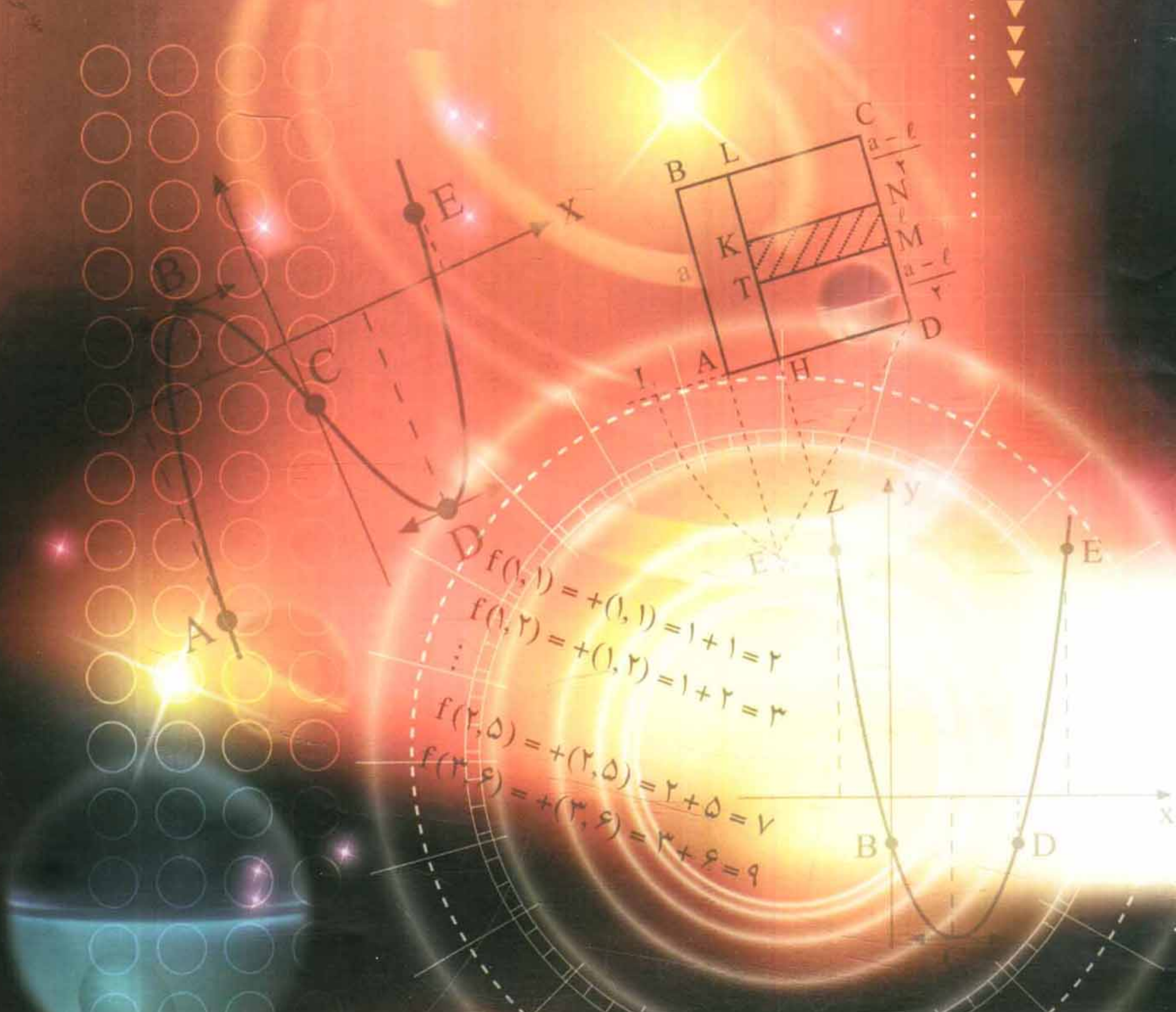
رشد برهان ۵۹

مجله ی ریاضی

دوره ی متوسطه

فصلنامه ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

• دوره‌ی هجدهم • شماره‌ی ۱ • پاییز ۱۳۸۷ • بها: ۴۰۰۰ ریال



ابوعبدالله محمد بن عیسی ماهانی

ریاضی‌دان و منجم معروف ایرانی (۲۱۰ - در حدود ۲۷۵)

از مردم ماهان کرمان، از افاضل علمای عدد و مهندسی عالی قدر و منجمی زبردست بود که در بغداد می‌زیست. تاریخ تولد و وفات وی به‌طور دقیق معلوم نیست، ولی با مراجعه به مدارک موجود می‌توان حدس زد، وی در حدود سال ۲۱۰ هـ. ق در ماهان کرمان به دنیا آمده و در حدود سال ۲۷۵ درگذشته است.

ابن یونس، در زیج کبیر حاکمی، از رصدهای زیر که ماهانی از سال ۲۳۹ تا سال ۲۵۲ هـ. ق انجام داده نام برده و آن‌ها را مورد استفاده قرار داده است:

- رصد خسوف سال ۲۳۹
- رصد خسوف سال ۲۴۰
- رصد خسوف سال ۲۵۲
- رصد کسوف سال ۲۵۲
- رصد قران زهره و زحل سال ۲۴۴
- رصد قران زهره و عطارد سال ۲۴۴
- رصد قران زهره و مریخ در سال ۲۵۰

خیام در کتاب «جبر و مقابله»، از ماهانی نام برده و نوشته است:

«و در این فن، اصنافی [از معادلات] هست که در حل آن ها یک رشته مقدمات بسیار دشوار محتاج الیه می‌باشد و به این جهت، از پیشینیان سخنی در این باب به ما نرسیده است. شاید در حل این اصناف جست‌وجو و مطالعه کرده‌اند، ولی چیزی درنیافته‌اند، یا در تحقیقات خود نیازمند به امعان نظر در آن‌ها نشده‌اند، و یا بالاخره، شاید آثارشان در این باب به زبان ما ترجمه نشده است. و اما از متأخران، یکی از ایشان به نام ماهانی مهندسی، در صدد تحلیل جبری مقدمه‌ای برآمد که ارشمیدس در شکل چهارم از مقاله‌ی دوم کتاب خود موسوم به **کره و استوانه** به کار برده است، و این امر منجر شد به معادله‌ای بین کعب‌ها و مال‌ها و اعداد، و وی بعد از تفکر زیاد از حل آن عاجز ماند و لهذا حکم به امتناع آن کرد. بعد **ابوجعفر خازن** پیدا شد و آن را به وسیله‌ی قطوع مخروطی حل کرد.»

مقصود از معادله‌ای که خیام به آن اشاره کرده، معادله‌ی زیر است:

$$x^3 + a = cx^2$$

بقیه در صفحه ی ۳ جلد

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد برهان ۵۹

مجله ی ریاضی

فصلنامه ی آموزشی، تحلیلی واطلاع رسانی

دوره‌ی هجدهم /شماره‌ی ۱/ پاییز ۱۳۸۷/شمارگان: ۱۵۰۰۰ نسخه

- مدیر مسئول : علیرضا حاجیان زاده
- سردبیر : حمیدرضا امیری
- مدیر داخلی : میرشهرام صدر
- طراح گرافیک : آزیتا کوثری
- اعضای هیأت تحریریه : حمیدرضا امیری، محمد هاشم رستمی، احمد قندهاری، میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی، سید محمدرضا هاشمی موسوی، غلامرضا یاسی‌پور و با تشکر از همکاری ارزنده‌ی استاد پرویز شهریاری
- ویراستار ادبی : کبری محمودی
- چاپ و صحافی : شرکت افست (سهامی عام)

ISSN 1735 - 4951 www.roshdmag.ir

صندوق الکترونیکی سردبیر : Borhanm@roshdmag.ir

پیام‌گیر نشریات رشد: ۸۸۳۰۱۴۸۲-۸۸۸۳۹۲۳۲

- نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵ تلفن دفتر مجله: ۹-۸۸۸۳۱۱۶۰ داخلی ۳۹۷

تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ - ۷۷۳۳۵۱۱۰.

رشد برهان متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر به همکاری دعوت می کند:

- نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی دوره‌ی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمه‌ی مقاله‌های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه‌ی علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش کامپیوتر و ...)

رشد برهان متوسطه هر سه ماه، یکبار منتشر می‌شود.

مجلّه در حکّ، اصلاح، حذف و اضافه‌ی مقاله‌ها آزاد است.

مقاله‌های وارده ،باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.

مقاله‌های رسیده مسترد نمی‌شود.

یادداشت سردبیر

H66Amiri@yahoo.com

سال تحصیلی ۸۸-۱۳۸۷ هم آغاز شد و یک سال بزرگ‌تر شدید! به کلاس بالاتر آمدید و امسال مطالبی در کتاب‌های ریاضی خود یاد می‌گیرید که برای شما جدیدند. بسته به این‌که در چه سالی (اول، دوم، سوم یا پیش‌دانشگاهی) و چه رشته‌ای (تجربی، ریاضی، انسانی و...) درس می‌خوانید، یک یا چند کتاب ریاضی را باید یاد بگیرید و مطالب آن‌ها را به دقت مطالعه کنید تا برای امتحانات در طول سال تحصیلی آماده شوید. برای یادگیری هرچه بهتر مطالب درسی، توصیه‌ی همیشگی ما به شما دانش‌آموزان عزیز از این قرار است:

۱) حضور فعال و بانشاط در کلاس درس و دقت و توجه لازم به درس و سخنان معلم؛

۲) استمرار در انجام تکالیف و عمل به توصیه‌های معلم بعد از تدریس؛

۳) مطالعه‌ی مطالب تدریس‌شده و نیز استفاده از منابع کمک‌درسی و تکمیلی استاندارد؛

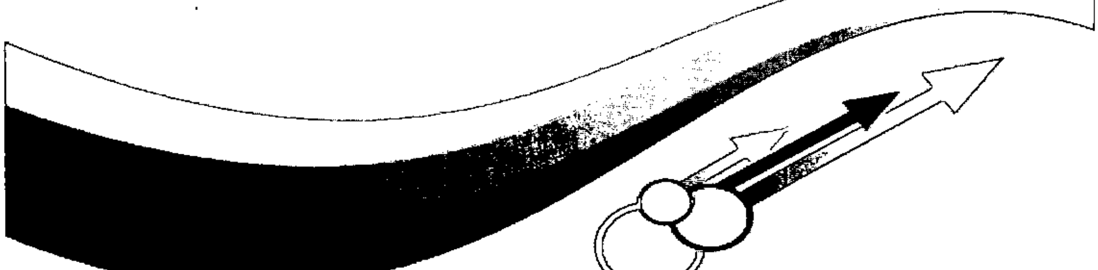
۴) مطالعه و مرور مطالب قبل از حضور در کلاس درس، رفع اشکال مطالب قبلی در کلاس درس، و تا حد امکان انجام کار گروهی با هم‌کلاسی‌هایتان.

در مورد هرکدام از چهار توصیه‌ی بالا مطالب و نکات فراوانی می‌توان ذکر کرد که در این شماره روی بخشی از توصیه‌ی چهارم، یعنی «کار گروهی» اندکی تأمل می‌کنیم. کار گروهی به صورت‌های متفاوت و متنوعی انجام‌پذیر است که حداقل آن، یاد دادن یک موضوع یا مسئله‌ی ریاضی به یکی از هم‌کلاسی‌ها و یا یادگیری از اوست؛ یعنی یک گروه دو نفره! باور کنید کار گروهی نتایج اعجاب‌آوری به دنبال دارد.

اگر شما مدعی هستید که مطلبی را یاد گرفته‌اید، زمانی می‌توانید به ادعای خود اطمینان داشته باشید که بتوانید آن را به هم‌کلاسی خود یاد بدهید. چه‌بسا دانش‌آموزانی که فکر می‌کرده‌اند، مطلبی را خوب یاد گرفته‌اند. ولی وقتی آن را برای هم‌کلاسی خود توضیح داده‌اند، به مشکلی رسیده‌اند و متوجه شده‌اند، بخش‌هایی از آن مطلب را خوب فرانگرفته‌اند. یا دوستشان سؤالی پرسیده که در جواب به آن ناتوان بوده‌اند و دو نفری برای اطلاع از پاسخ صحیح به معلم مراجعه کرده‌اند. و این همان اتفاقی است که آموزش و فرایند یاددهی-یادگیری به‌دنبال آن است. آری دوست عزیز، تو با کار گروهی و یاد دادن مطالب ریاضی به هم‌کلاسی‌ات، هم زکات علمت را می‌دهی و هم به یادگیری خود عمق می‌بخشی و مطالب برایت جا می‌افتند.

اگر بگوییم، بهترین شیوه‌ی یادگیری، بحث و تجزیه و تحلیل مطالب تدریس‌شده در گروه‌های دو نفره به بالاست، کاملاً درست گفته‌ایم. شما می‌توانید سال تحصیلی جدید را با توجه به این‌که در سال «نوآوری و شکوفایی» هستیم، با کار گروهی آغاز کنید و واقعاً تأثیر کار گروهی را در شکوفایی استعدادهای خودتان مشاهده کنید؛ ان‌شاءالله.

سردبیر



ریاضیات در ایران

● پرویز شهریاری

فردریک انگلس، در کتاب معروف خود «آنتی دورنیگ» (یعنی ضددورنیگ) می‌نویسد: «درست نیست اگر بگوییم که ریاضیات محض، روی آن‌چه که خود فرض و خلق کرده است، عمل می‌کند. مفهوم‌های عدد و شکل از جایی در جهان خارج به‌دست آمده‌اند. انسان، شمردن را به وسیله‌ی ده انگشت یاد گرفت و نخستین عمل‌های ریاضی را انجام داد. مفهوم عدد همه چیز هست، به جز مخلوق فکر و ذهن. مفهوم شکل نیز مانند مفهوم عدد، از جهان خارج گرفته شده است و در ذهن به صورت مفهوم خالص و به طور ناگهانی بروز نکرده است.»

لواسوی، دانشمند فرانسوی (۱۷۸۱ - ۱۸۴۰) در جایی از نوشته‌های خود می‌گوید: «زندگی تنها به این درد می‌خورد که انسان به دو کار بپردازد: اول ریاضیات بخواند و دوم ریاضیات درس بدهد.»

آریستارک[1] که در سال ۳۱۰ پیش از میلاد در «سادرس» متولد شد و در سال ۲۳۰ پیش از میلاد از دنیا رفت، بسیار پیش‌تر از کپلر اعلام کرد: «زمین به دور خورشید می‌چرخد و نه وارون آن؛ و بر ضد او فریاد برآوردند: چه طور! آتش مقدس را از اجاق خدایان برباییـد، چه جسارت بزرگی!» و او را سخت تکفیر کردند.

به ایران پیش از سده‌ی ششم میلادی، یعنی دوران ساسانی، اشکانی و هخامنشی، نمی‌پردازیم. در این دوره‌های کهن هم بسیاری از مقدمه‌های مثلثات و هندسه و عدد مورد توجه بوده‌اند که به بحثی طولانی نیاز دارد. می گذاریم برای بعد که اگر فرصتی شد بتوانیم ریشه‌های عمل آن‌ها را بازگو کنیم.

❐

بعد از فرو پاشی امپراطوری ساسانی ورود به سرزمین ایران، تا چند سده تنها جدل‌های سیاسی و جنگی مطرح بوده‌اند و ایرانیان فرصتی برای اظهارنظرهای علمی نداشتند. مردم ایران از خیلی قبل که به دوران هخامنشی می‌رسد، آماده‌ی یادگیری‌های علمی بودند و آن‌هایی که علاقه‌مند به دانش بودند، خیلی از وقت خود را صرف یادگیری دانش می‌کردند و در این راه، از همه‌ی دانسته‌های خود بهره می‌بردند. ایرانی‌ها برای نخستین‌بار «قنات» را کشف کردند. برای قنات، اول باید جایی پیدا کرد که آب زیر آن باشد. بعد هم از کروی بودن زمین استفاده کرد و آب را از عمق بسیار در زیرزمین، به سمت دشت روانه کرد و این یعنی کروی‌بودن زمین را حدس زده بودند. این شیوه‌ی آبیاری هنوز هم برای آبیاری سرزمین‌های جنوبی و مرکزی ایران، یعنی جاهایی که آب برای کشاورزی کم است، به کار می‌رود. از این نمونه‌ها بسیار است و سرانجام باید در این باره تحقیقی درست انجام شود.

در زمان حکومت پارت‌ها، گروهی از اهالی سیستان به هند رفتند و سنت‌های ریاضی و اخترشناسی هند را پایه گذاشتند و به «مغ-برهمن» مشهور شدند. به ظاهر **براهما گوپتا**، ریاضی‌دان بزرگ هندی سده‌ی هفتم میلادی، از بازماندگان همین مغ‌های ایرانی بوده است. درباره‌ی دانش‌هایی که پیش از سده‌ی

هفتم میلادی در ایران رواج داشته‌اند، به چند نکته اشاره می‌کنیم:

● در یکی از پاپیروس‌های مصری که نویسنده‌ی آن پزشکی مصری بوده است، می‌خوانیم:

«من از **سائیس** بیرون آمده‌ام». یعنی درس پزشکی خود را در سائیس خوانده‌ام و این مرکز آموزش پزشکی، در زمان **داریوش** هم برپا بوده است. بخش‌هایی از نوشته‌ای که روی مجسمه‌ی **اوجا هورسن**، پزشک مصری مانده است، می‌گوید: «داریوش به من فرمان داد به مصر بازگردم... مأموریت من این بود که ساختمان **بران‌خا**، بخشی از معبد **دنیت** را که ویران شده بود بسازم... به کتاب‌خانه‌ها کتاب دادم. جوانان را وارد آن‌ها کردم و آن‌ها را به مردان آزموده سپردم. برای هرکدام چیزهایی سودمند و ابزارهای لازم که در کتاب‌هایشان آمده بود، ساختم و فراهم کردم...».

● **هرودوت** تاریخ‌نویس یونانی می‌نویسد: «**کوروش** از **آمازیس**، فرعون مصر خواست تا چشم‌پزشکی به دربار او بفرستد و آمازیس چنین کرد.»

● **بلوتارک**، تاریخ‌نویس دیگر یونانی می‌نویسد که خود او یک مدرسه‌ی علمی ایرانی را دیده است که در آن حکمت، اخترشناسی، پزشکی و جغرافیا درس می‌داده‌اند و نزدیک به ۱۰۰ شاگرد داشته است.

● **پولینوس**، تاریخ‌نویس سده‌ی اول میلادی می‌گوید: «**هریلیوس**، برای شرح و تفسیر اندیشه‌های **زرتشت**، از کتاب او که شامل ۲۰ جلد و هرکدام شامل صد هزار سفر بود، استفاده می‌کند.»

● باز نقل می‌کند که **اکدی‌نو**، اخترشناس بابلی که در ایران دوران هخامنشی زندگی می‌کرد، انحنای زمین را محاسبه کرد.

داستان سائیس نزدیک به هزار سال بعد تکرار شد و دانشگاه گندی‌شاپور، به مرکز دانش و به‌ویژه پزشکی جهان تبدیل شد. این مرکز تا بیش از دو سده بعد از شکست ساسانیان، هم‌چنان برپا بود و با جاذبه‌ی خود، همه‌ی دانشوران را به سمت خود می‌کشید. از **جورجیس** خبر داریم که وقتی **ابوجعفر منصور دوانقی**، خلیفه‌ی دوم عباسی، به درد معده دچار شد، از جورجیس، پسر **بخت‌شیوع**، رئیس پزشکی بخش گندی‌شاپور، خواست به بغداد برود.

❐

تزویج ریاضیات چند سود عمده دارد:

۱. به معلم و شاگرد یاری می‌رساند تا ریاضیات را بهتر بفهمند،

۲. یاری می‌رساند تا جهانی بیندیشیم،

۳. تاریخ ریاضیات، دانش را از شبه‌دانش جدا می‌کند،

۴. نسبت به خود اعتماد بیشتری پیدا می‌کنیم،

۵. یاد می‌گیریم تا مثل **ابونصر فارابی**، **ابوریحان بیرونی**، **جمشید کاشانی**، تمامی وقت خود را صرف یادگرفتن و یاددادن کنیم.

موریس کلاین، ریاضی‌دان آلمانی، کمتر از یک سده‌ی پیش می‌گفت:

«ریاضیات علمی‌ترین دستاورد اندیشه و اصیل‌ترین زاده‌ی ذهن آدمی است. موسیقی روح را نوازش می‌دهد. نقاشی چشم را می‌نوازد، شعر موجب برانگیختن عاطفه می‌شود، فلسفه ذهن را قانع می‌کند و مهندسی، زندگی را بهتر می‌سازد. ولی ریاضیات دارای مجموعه‌ی همه‌ی این ارزش‌هاست.»

و **هیوم** که از ۱۷۱۱ تا ۱۷۷۰ زندگی می‌کرد و فیلسوف شناخته‌شده‌ای است، می‌گوید: «کتابی که می‌خوانید، با عدد سروکار دارد؟ آیا با تجربه همراه است؟ اگر هیچ کدام از این دو نیست، باید کنار گذاشته شود.»

❐

گفته‌اند و هنوز هم می‌گویند که همه‌ی دانش‌ها و هنرها «یک‌باره» در یونان پدید آمد و به اوج خود رسید و سپس در دوره‌های تاریک سده‌های میانه که جهل بر اروپای غربی و مرکزی حاکم بود و دادگاه‌های تفتیش عقیده‌ها، دستور به آتش‌افکندن خاص و عام را می‌دادند، خاور میانه و نزدیک، تنها نقش نگه‌داری بخشی از یونان را به‌عهده گرفت و بی‌آن‌که خود چیزی به آن بیفزاید، امانتی را که به او سپرده شده بود، به اهل آن یعنی اروپاییان برگرداند و خود کنار رفت.

تازه این نکته که دارندگان دانش یونانی هم «عرب» بودند، عرب‌هایی همچون **محمد فرزند خوارزمی**، **ابوالوفای بوزجانی** (بوزجان در نزدیکی مرز ایران و افغانستان و در درون خاک ایران است)، ابوریحان بیرونی، محمد کرجی، قیام نیشابوری، نصیرالدین توسی، جمشید کاشانی و دیگران.

از سمت دیگر، خود آن‌ها گفته‌اند و می‌گویند که **فیثاغورث** در بابل به دانش مغان دست یافت و بعد به ایران سفر کرد. **افلاطون** دوره‌ای طولانی را در نزدیکی‌های ایران گذراند.

اراتوستن به ایران و هند رفت، **دموکلاس** سال‌ها در دربار ایران بود. **دموکرس** به ایران و مصر سفر کرد. و **ارسطو** خواهرزاده‌ی خود را با شاگردش به ایران فرستاد تا هرچه از کتاب‌های علمی و فلسفی در ایران می‌یابد، برای او ببرد.

و می‌دانیم آن زمان که هومر، شاعر یونانی، زمین را مسطح می‌پنداشت و معتقد بود، آتن مرکز زمین است و شاعرانه خانه‌ی دلدار خود را در مرکز آتن قرار می‌داد و نتیجه می‌گرفت که خورشید و ماه و همه‌ی ستارگان به دور خانه‌ی دلدار او می‌چرخند، کهن‌ترین اثرهای ایرانی از کروی بودن زمین یاد می‌کنند (آبان پشت قطعه‌ی ۳۸، مهر پشت قطعه‌ی ۱۵، فروردین پشت قطعه‌ی ۲) و فیثاغورث که دانش مغان را آموخته بود، به حرکت زمین به دور خورشید رأی می‌داد. و افلاطون زیربنای فلسفه‌ی خود را بر آموزش‌های «زرتشت» می‌گذاشت و آکادمی خود را به تقلید از «انجمن‌های دانش» دوران هخامنشی بنیان می‌گذاشت.

1. Aristarque

انتگرال مرزدار و انتگرال بی مرز

● دکتر احمد شرف‌الدین

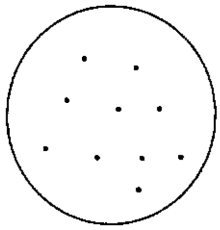
چکیده :
در کتاب‌های ریاضی که به زبان فارسی نوشته شده‌اند، در برابر اصطلاح «DEFINITE INTEGRAL» ، عبارت «انتگرال معین» و در برابر اصطلاح «INDEFINITE INTEGRAL» عبارت «انتگرال نامعین» به کار برده شده است . در برابر این دو اصطلاح ، به ترتیب دو اصطلاح «انتگرال مرزدار» و «انتگرال بی مرز» را پیشنهاد می کنم و دو اصطلاح انتگرال معین و انتگرال نامعین را مناسب نمی‌دانم . در ادامه در این باره توضیح می دهم .

معنی واژه‌ی DEFINITION

در واژه‌ی DEFINITION به معنی تعریف، کلمه‌ی FINIS به‌کار آمده است . کلمه‌ی اخیر لاتینی و به معنی «انتها، مرز و کناره» است . وقتی چیزی را تعریف می کنیم، مرز و حدی را دور آن می گذاریم تا آن چیز مشخص شود .

در حساب دیفرانسیل و انتگرال، «DEFINITE INTEGRAL» دارای دو حد به صورت دو عدد است که آن‌ها را حد پایین و حد بالای انتگرال می‌نامند، اما «INDEFINITE INTEGRAL» حد پایین (مرز پایین) و حد بالا (مرز بالا) ندارد .

در منطق گفته می‌شود: تعریف باید جامع و مانع باشد . یعنی باید به‌نحوی باشد که تمام افراد مورد تعریف در آن بگنجند و هیچ فرد دیگری داخل نشود . به عبارت دیگر، حد و مرز مجموعه‌ای که شامل افراد مورد نظر است، مشخص باشد؛ به بیانی که در تداول همگان است : «در و پیکرش معلوم باشد .» دیاگرام ون، نمایش هندسی تعریف است . در شکل زیر که دیاگرام‌ون است، تمام افراد مورد تعریف در داخل دایره‌اند و هیچ فرد دیگری داخل دایره نیست .



اندکی توضیح درباره‌ی خط و مرز

واژه‌ی کشور از دو لفظ «کش» و «ور» تشکیل شده است کش و کشه، در زبان ایران باستان به معنی «خط» است . لفظ «ور» پسوندی به معنی دارنده است . کشور به معنی دارنده‌ی مرز است . مملکت از نظر جغرافیایی با مرزها مشخص می‌شود . به عبارت دیگر، خط‌ها هستند که مرز را تعریف می‌کنند . ریشه‌شناسی واژه‌ی کشور که بیان شد، نظر نگارنده است و ممکن است صحیح باشد . در زبان عربی، کلمه‌ی «خطّه» که از کلمه خط گرفته شده است به معنی پاره‌ای از زمین، زمینی که برای عمارت دور آن خط کشیده باشند، زمین محدود، ناحیه و کشور است .

یک فیلم مستند کرگدنی را نشان می‌داد که در محوطه‌ای مستقر بود و کرگدن دیگری، به اصطلاح بیگانه، به طرف آن منطقه آمد . کرگدن اول با شاخ خود خطی روی زمین کشید (گردن خود را خم کرد و چرخاند و شاخ خود را روی زمین کشید و با شیار حاصل، خط رسم کرد) و به کرگدن دوم فهماند که این خط، مرز زمین من است و

کرگدن دوم جلوتر نیامد.

خط و مرز وسیله‌ای برای تعریف است.

نام‌گذاری انتگرال $\int_a^b f(x)dx$

انتگرال $\int_a^b f(x)dx$، ابتدا برای محاسبه‌ی اندازه‌ی سطح زیر منحنی به‌کار رفته است. برای محاسبه‌ی اندازه‌ی سطح محصور به منحنی نمایشگر معادله‌ی $y = f(x)$، محور xها و دو خط به معادله‌های $x = a$ و $x = b$، انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ را به‌کار می‌برند. دو خط $x = a$ و $x = b$، دو مرز از شکلی است که محاسبه‌ی سطح آن مورد نظر است.

انتگرال $\int_2^9 \frac{dx}{(x-4)^2}$ دارای معنی نیست، معین نیست و مقدار انتگرال بی‌نهایت است. آیا صحیح است که چون این انتگرال دارای حد پایین و بالاست، آن را انتگرال معین بنامیم؟

با توجه به مطالب یاد شده، به‌عنوان برابر «DEFINITE INTEGRAL»، اصطلاح «انتگرال مرزدار»، و برابر «INDEFINITE INTEGRAL»، اصطلاح «انتگرال بی‌مرز» را پیشنهاد می‌کنم.

اگر در حل یک معادله‌ی دیفرانسیل*، پس از انتگرال‌گیری مورد لزوم $\int f(x)dx$ مقدار ثابت کلی اضافه نکنیم، آن‌گاه جواب معادله‌ی دیفرانسیل کلی نخواهد بود، بلکه یک جواب خصوصی معادله حاصل خواهد شد (زیرا مقدار ثابت انتگرال را صفر گرفته‌ایم). جواب هر معادله‌ی دیفرانسیل یک قانون است. جواب خصوصی معادله‌ی دیفرانسیل قانون نیست، بلکه فقط یک مقطع است. به عبارت دیگر، وقتی در انتگرال‌گیری مقدار ثابت کلی اضافه نکنیم، جواب معادله‌ی دیفرانسیل نامعین است (زیرا قانون به دست نیامده و فقط یک مقطع از یک تحول به‌دست آمده است). نامعین بودن جوابی که برای معادله‌ی دیفرانسیل حاصل شده است، از این جهت است که در انتگرال‌گیری مقدار ثابت کلی اضافه نکرده‌ایم. پس سزاست بگوییم که در انتگرال $\int f(x)dx$، اگر مقدار ثابت کلی اضافه نکنیم، آن‌گاه انتگرال حاصل برای حل معادله‌ی دیفرانسیل، نامعین است نه آن‌که وقتی مقدار ثابت اضافه کنیم، انتگرال را انتگرال نامعین بنامیم.

* **تعریف معادله‌ی دیفرانسیل**: هر معادله که در آن تابع و مشتق تابع یا مشتق‌های تابع وجود داشته باشد، معادله‌ی دیفرانسیل نامیده می‌شود.

مثال ۱. معادله‌ی $y' = 2x$ یک معادله‌ی دیفرانسیل است و تابع y چنین است: $y = x^2 + a$. a مقدار ثابت کلی است. تابع $y = x^2 + a$ جواب معادله‌ی $y' = 2x$ نامیده می‌شود.

مثال ۲. معادله‌ی $y'' = \cos x$ یک معادله‌ی دیفرانسیل است و چنین داریم: $y' = \sin x + a$. a مقدار ثابت کلی است. از معادله‌ی اخیر نتیجه می‌شود: $y = -\cos x + ax + b$، b یک مقدار ثابت کلی است. تابع $y = \cos x + ax + b$ جواب معادله‌ی $y'' = \cos x$ نامیده می‌شود.

The Math Forum @ Drexel

معرفی سایت‌های ریاضی جهان

● احسان یارمحمدی

آدرس اینترنتی:

http://mathforum.org/dr.math

این سایت دارای سه قسمت اصلی و جالب‌توجه زیر است:

الف) درباره‌ی دکتر ریاضی (About Dr.Math)

ب) جوایز دکتر ریاضی (Dr.Math's Awards)

پ) کمک دکتر ریاضی (Dr.Math Help)

اگر به قسمت درباره‌ی دکتر ریاضی مراجعه کنیم، درمی‌یابیم که قسمت «Ask Dr.math» این سایت در واقع یک سرویس خدماتی ارائه کننده‌ی پرسش و پاسخ برای دانش‌آموزان و معلمان آن‌هاست که در قالب یک آرشیو و بایگانی قابل جست‌وجو و دارای توانایی ارزنده‌ای در زمینه‌ی ریاضیات در سطوح دبستان، راهنمایی و دبیرستان با موضوع‌های متنوع ریاضی، ارائه شده است. هم چنین، بیشتر اوقات Ask Dr.math قادر به پاسخ‌گویی به پرسش‌ها و سؤالات ریاضی است. به این منظور، تنها کافی است روی بخش «FAQ» که مخفف «Frequently Asked Questions» است، کلیک کنیم.

به طور کلی، قسمت درباره‌ی دکتر ریاضی چهار بخش عمده دارد:

۱. پرسش‌ها، پاسخ‌ها و بایگانی

(Questions, Answers, and Archives)

در این قسمت، دانش‌آموزان پرسش‌های خود را از طریق Web form برای Dr.Math ارسال می‌کنند. پاسخ‌ها بعداً از طریق آدرس الکترونیکی (E-mail) شخصی دانش‌آموزان برای آن‌ها ارسال می‌شود. سپس Dr.Math بهترین پرسش‌ها و پاسخ‌ها را گردآوری و در آرشیو قابل جست‌وجو و دست‌رس که به تفکیک ریاضیات دبستان، راهنمایی و دبیرستان سازمان‌دهی شده است، بایگانی می‌کند.

به شما پیشنهاد می‌کنیم، برای پیدا کردن آن‌چه که دنبال می‌کنید، با در دست داشتن کلمات کلیدی پیرامون آن مطلب (برای مثال اگر به دنبال فیبوناچی، گراف اویلری یا اثبات هستید، به ترتیب می‌توانید، کلمات Fibonacci، Eulerian Graph یا Proof را بنویسید) به جست‌وجوگر دکتر ریاضی (the Dr.Math Searcher) مراجعه کنید و به جست‌وجو بپردازید.

۲. جست‌وجوی یک مسئله‌ی جالب

(Looking for an Intersting problem)

ادامه در صفحه‌ی ۲۶.

هم‌شانس‌سازی فضاهای نمونه‌ای، چرا قانون بیز؟

● حمیدرضا امیری

گاهی اوقات محاسبه‌ی احتمال رخداد پیشامد A به شرط رخداد پیشامد B، یعنی $P(A|B)$، به دلیل عدم ارتباط کافی بین B و A مشکل است، ولی با تعویض شرط و مشروط، یعنی عوض کردن جای دو پیشامد A و B مشاهده می‌شود، محاسبه‌ی $P(B|A)$ به سادگی صورت می‌پذیرد. «قانون بیز» با استفاده از همین نکته، مسائلی از این نوع را به راحتی به جواب می‌رساند. زیرا طبق قانون بیز داریم:

$$P(A|B)=\frac{P(A)}{P(B)}\times P(B|A)$$

برای مثال فرض کنیم، در هر یک از جعبه‌های $A_۱$ و $A_۲$، به ترتیب ۴ مهره‌ی قرمز و ۳ مهره‌ی آبی، و ۲ مهره‌ی قرمز و ۵ مهره‌ی آبی وجود دارد. یکی از دو جعبه به تصادف انتخاب و یک مهره از آن خارج شده است. مشاهده می‌شود که این مهره قرمز است. می‌خواهیم محاسبه کنیم احتمال آن‌را که این مهره از جعبه‌ی $A_۱$ باشد. در واقع، با فرض این‌که مهره‌ی خارج شده قرمز است، احتمال آن که مهره از $A_۱$ باشد، موردنظر است. آیا علم به این‌که مهره قرمز است، کمکی می‌کند که احتمال مهره از $A_۱$ بودن را محاسبه کنیم؟ ولی اگر جای A و B عوض شود، یعنی احتمال قرمز بودن مهره را بخواهیم، به شرط آن‌که بدانیم مهره از $A_۱$ است، محاسبه‌ی این احتمال کاری ساده خواهد بود. زیرا اگر بدانیم مهره از جعبه‌ی $A_۱$ خارج شده، احتمال قرمز بودن آن $\frac{۴}{۷}$ است!

از طرف دیگر، محاسبه‌ی $P(A)$ و $P(B)$ نیز به تنهایی آسان است. قانون بیز مسئله را به این شکل حل می‌کند:

پیشامد آن که مهره از $A_۱$ باشد = A

پیشامد آن که مهره قرمز باشد = B

$$P(A|B)=\frac{P(A)}{P(B)}\times P(B|A)=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۷}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۷}}\times\frac{۴}{۷}$$

$$\Rightarrow\ P(A|B)=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۲}\left(\frac{۴}{۷}+\frac{۲}{۷}\right)}\times\frac{۴}{۷}=\frac{\frac{۴}{۷}}{\frac{۶}{۷}}=\frac{۴}{۶}$$

اگر بخواهیم از زاویه‌ای دیگر به این نوع مثال‌ها نگاه کنیم، شاید راحت‌تر و در مدت زمان کوتاه‌تری بتوانیم مسئله را به جواب برسانیم. در مثال قبل، وقتی شرط قرمز بودن مهره پذیرفته می‌شود، در واقع فضای نمونه‌ای محدود شده است. اگر فرض کنیم کلِ مهره‌های قرمز موجود به دو جعبه‌ی فضای نمونه‌ایِ محدود شده باشد، ملاحظه می‌کنیم که دو جعبه روی هم ۶ مهره‌ی قرمز دارند. پس احتمال آن که مهره‌ی مورد نظر از جعبه‌ی $A_۱$ باشد، برابر است با تعداد قرمزهای $A_۱$ به تعداد کل قرمزها؛ یعنی $\frac{۴}{۶}$ که با جواب مسئله از طریق قانون بیز مطابقت دارد!

حال این سؤال پیش می‌آید که آیا این مطابقت اتفاقی است یا همیشه برقرار است؟ آیا حالت خاصی است و امکان دارد در مواردی نتوانیم از این روش استفاده کنیم؟ اصولاً یکی کردن و روی هم در نظرگرفتنِ مهره‌های قرمز، مبنای صحیح علمی (از نظر علم احتمال) دارد یا خیر؟

شاید حدس زده باشید که مسئله به تعداد کل مهره‌ها در هر یک از جعبه‌ها مربوط می‌شود. درست است. در این مثال، هر دو جعبه دارای ۷ مهره‌اند و در واقع، برای هر جعبه شانس برداشت هر مهره (به شرط این که شماره‌های ۱ تا ۷ روی آن‌ها حک شده باشد) برابر است با $\frac{۱}{۷}$. یعنی احتمال برداشت قرمز شماره‌ی یک از جعبه $A_۱$، برابر با احتمال برداشت قرمز شماره‌ی یک از جعبه‌ی $A_۲$ و برابر است با $\frac{۱}{۷}$. دقیقاً به همین دلیل، در محاسبه‌ی احتمال شرطیِ $P(A|B)$ می‌توان از رابطه‌ی $P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$ استفاده کرد.

این مسئله را در حالت کلی نیز می‌توان به شکل زیر به اثبات رساند:

فرض کنیم در جعبه‌ی $A_۱$، $m_۱$ مهره‌ی قرمز و $n_۱$ مهره‌ی آبی و در جعبه‌ی $A_۲$، $m_۲$ مهره‌ی قرمز و $n_۲$ مهره‌ی آبی وجود دارد و $m_۱+n_۱=m_۲+n_۲=K$. حال اگر یکی از دو جعبه را به تصادف

انتخاب و مهره‌ای از آن خارج کنیم و ببینیم که قرمز است، چه‌قدر احتمال دارد این مهره متعلق به جعبه‌ی A_1 باشد؟

$A =$ پیشامد آن که مهره از A_1 باشد

$B =$ پیشامد آن که مهره قرمز باشد

$$P(A|B)=\frac{P(A)}{P(B)}\times P(B|A)=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\left(\frac{m_1}{K}+\frac{m_2}{K}\right)}\times\frac{m_1}{K}$$

$$=\frac{\frac{m_1}{K}}{\frac{m_1+m_2}{K}}=\frac{m_1}{m_1+m_2}$$

$$\xrightarrow{m_1+m_2} P(A|B)=\frac{m_1}{m_1+m_2}=\frac{\text{تعداد قرمزهای جعبه‌ی } A_1}{\text{مجموع قرمزهای دو جعبه}}$$

حال مسئله را در حالتی بررسی می‌کنیم که تعداد کل مهره‌ها در هر یک از جعبه‌ها با هم برابر نباشند. به مسئله‌ی زیر دقت کنید:

در جعبه‌ی A_1، ۴ مهره قرمز و ۲ مهره‌ی آبی و در جعبه‌ی A_2، ۳ مهره‌ی قرمز و ۵ مهره‌ی آبی وجود دارد. یکی از این دو جعبه را به تصادف انتخاب و مهره‌ای از آن خارج می‌کنیم. مهره قرمز است. چه‌قدر احتمال دارد این مهره از جعبه‌ی A_2 باشد؟

$A =$ مهره از جعبه‌ی A_2 باشد

$B =$ مهره قرمز باشد

$$P(A|B)=\frac{P(A)}{P(B)}\times P(B|A)=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\times\left(\frac{4}{6}+\frac{3}{8}\right)}\times\frac{3}{8}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{25}{24}}=\frac{9}{25}$$

حال اگر بخواهیم، کل مهره‌های قرمز در دو جعبه را فضای نمونه‌ای محدود شده در نظر بگیریم و تعداد مهره‌های قرمز در جعبه‌ی A_2 را بر آن تقسیم کنیم، به عدد $\frac{3}{4+3}$ یا $\frac{3}{7}$ می‌رسیم که با عدد حاصل از استفاده از قانون بیز مطابقت ندارد!

فکر می‌کنید چه عاملی باعث شده است تا دو جواب با هم برابر نباشند؟ البته جوابی که با استفاده از قانون بیز به دست آورده‌ایم، یعنی $\frac{9}{25}$، همواره درست است.

با کمی دقت ملاحظه می‌کنیم که تفاوت این مسئله با مثال قبل در این است که در جعبه‌ی A_1، ۶ مهره و در A_2، ۸ مهره وجود دارد. بنابراین احتمال برداشت هر مهره از A_1 برابر است با $\frac{1}{6}$. در صورتی که در A_2 این احتمال $\frac{1}{8}$ است.

یعنی فضاهای نمونه‌ای در این دو جعبه هم‌شانس نیستند و بنابراین نمی‌توان در فضاهای غیر هم‌شانس، از رابطه‌ی $P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$ استفاده کرد. ولی شاید این سؤال به ذهن شما برسد که آیا می‌توان فضاها را هم‌شانس کرد و از همان روش ساده برای محاسبه‌ی احتمال شرطی استفاده کرد؟

پاسخ به این سؤال مثبت است. ما این کار را انجام می‌دهیم و شما ملاحظه خواهید کرد که به روشی بسیار ساده، این عمل (هم‌شانس سازی فضاها) انجام می‌پذیرد. برای هم‌شانس‌سازی فضاها کافی است، کوچک‌ترین مضرب مشترک تعداد مهره‌ها در دو جعبه، یعنی ک م م دو عدد ۶ و ۸ را به دست آوریم و مهره‌های هر جعبه را در عددی ضرب کنیم تا تعداد آن‌ها به ک م م برسد. یعنی در همین مسئله‌ی قبل، چون ۲۴ = [۸ , ۶]، باید مهره‌های جعبه‌ی A_1 را (هم مهره‌های قرمز و هم مهره‌های آبی) در $\frac{24}{6}=4$ و مهره‌های جعبه‌ی A_2 را در $\frac{24}{8}=3$ ضرب کنیم. در این صورت دو جعبه‌ی جدید به صورت زیر خواهیم داشت که در هر کدام ۲۴ مهره وجود دارد و فضاهای آن‌ها هم شانس است.

A_1 [۴ قرمز و ۲ آبی] $\xrightarrow{\times 4}$ [۱۶ قرمز و ۸ آبی] B_1

A_2 [۳ قرمز و ۵ آبی] $\xrightarrow{\times 3}$ [۹ قرمز و ۱۵ آبی] B_2

حال یکی از دو جعبه‌ی B_1 و B_2 را به تصادف انتخاب و ۱ مهره از آن خارج و مشاهده می‌کنیم که قرمز است. چه‌قدر احتمال دارد از B_2 باشد؟

چون در هر جعبه ۲۴ مهره وجود دارد، لذا می‌توان فضای نمونه‌ای را، تعداد کل مهره‌های قرمز در دو جعبه‌ی B_1 و B_2 در نظر گرفت که تعدادشان ۲۵ است. تعداد مهره‌های قرمز در B_2، ۹ است که با تقسیم ۹ بر ۲۵، به همان عدد $\frac{9}{25}$ که با روش قاعده‌ی بیز به دست آورده‌ایم، می‌رسیم!

شما به عنوان تمرین مسئله‌ی زیر را حل کنید (از روش هم‌شانس‌سازی):

در جعبه‌ی A_1، ۲ مهره‌ی قرمز، ۳ مهره‌ی آبی و ۱ مهره‌ی سبز، در جعبه‌ی A_2، ۳ مهره‌ی قرمز، ۲ مهره‌ی آبی و ۳ مهره‌ی سبز، و در جعبه‌ی A_3، ۳ مهره‌ی قرمز، ۳ مهره‌ی آبی و ۴ مهره‌ی سبز وجود دارد. یکی از این سه جعبه را به تصادف انتخاب و مهره‌ای از آن خارج می‌کنیم. مهره سبز است. چه‌قدر احتمال دارد این مهره از جعبه‌ی A_2 باشد؟

جواب: $\frac{45}{48+45+20}=\frac{45}{113}$

تجزیه

احمد قندهاری

تجزیه‌ی یک عبارت جبری، یعنی تبدیل آن عبارت به حاصل‌ضرب چند عامل نسبت به هم اول. این عمل به‌کمک فاکتورگیری و اتحادها صورت می‌گیرد. به مثال‌های زیر توجه فرمایید.

مثال۱. عبارت $A = x^4 - 81y^4$ را تجزیه کنید.

حل: بنابر اتحاد مزدوج می‌توان نوشت:

$$A = x^4 - 81y^4 = (x^2)^2 - (9y^2)^2$$

$$A = \underbrace{(x^2 - 9y^2)}_{\text{اتحاد مزدوج}}(x^2 + 9y^2) \Rightarrow A = (x - 3y)(x + 3y)(x^2 + 9y^2)$$

مثال۲. عبارت $A = y^2 - x^2 - 4(y - 1)$ را تجزیه کنید.

حل:

$$A = y^2 - x^2 - 4y + 4 \Rightarrow \underbrace{y^2 - 4y + 4} - x^2$$

$$A = \underbrace{(y - 2)^2 - x^2}_{\text{اتحاد مزدوج}} = (y - 2 - x)(y - 2 + x)$$

مثال۳. عبارت $A = m^4 + 4$ را تجزیه کنید.

حل: در اتحادها داریم: $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$. پس:

$$A = (m^2)^2 + (2)^2 = (m^2 + 2)^2 - 4m^2$$

با استفاده از اتحاد مزدوج: $A = (m^2 + 2 - 2m)(m^2 + 2 + 2m)$

مثال۴. عبارت $A = y^2 + 7y + 10$ را تجزیه کنید.

حل:

با استفاده از اتحاد $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$، برای تجزیه‌ی عبارت A، دو عدد هم‌علامت می‌یابیم که مجموع آن‌ها ۷ و حاصل‌ضرب آن‌ها ۱۲ باشد. به سادگی می‌توان گفت که این دو عدد ۳ و ۴ هستند.

$$A = y^2 + 7y + 10 = (y + 3)(y + 4)$$

مثال۵. عبارت $A = 2x^2 + 11x + 12$ را تجزیه کنید.

حل:

$$2A = 4x^2 + 11(2x) + 24 = (2x)^2 + 11(2x) + 24$$

فرض می‌شود: $2x = y$. پس داریم:

$$2A = y^2 + 11y + 24$$

حال بنابر اتحاد مثال (۴)، دو عدد هم‌علامت می‌یابیم که مجموع آن‌ها ۱۱ و حاصل‌ضرب آن‌ها ۲۴ باشد. به‌سادگی می‌توان دریافت که این دو عدد ۳ و ۸ هستند. پس:

$$2A = y^2 + 11y + 24 = (y + 8)(y + 3)\ ,\ \ y = 2x$$

$$2A = (2x + 8)(2x + 3) \Rightarrow 2A = 2(x + 4)(2x + 3)$$

$$\Rightarrow A = (x + 4)(2x + 3)$$

مثال۶. عبارت $A = 6x^2 + 13x - 5$ را تجزیه کنید.

حل:

$$6A = 36x^2 + 13(6x) - 30$$

$$6A = (6x)^2 + 13(6x) - 30$$

فرض می‌شود: $6x = y$. پس داریم:

$$6A = y^2 + 13y - 30$$

حال دو عدد مختلف‌العلامت می‌یابیم که مجموع آن‌ها ۱۳ و حاصل‌ضرب آن‌ها ۳۰- باشد. این دو عدد ۱۵ و ۲- هستند. پس:

$$6A = y^2 + 13y - 30 = (y + 15)(y - 2)\ ,\ \ y = 6x$$

$$6A = (6x + 15)(6x - 2) = 3(2x + 5)(2)(3x - 1)$$

$$6A = 6(2x + 5)(3x - 1) \Rightarrow A = (2x + 5)(3x - 1)$$

مثال۷. عبارت $A = n^4 + 4n^2 - 32$ را تجزیه کنید.

حل:

$$A = n^4 + 4n^2 - 32$$

فرض می‌شود: $n^2 = y$. پس داریم:

$$A = y^2 + 4y - 32$$

حال دو عدد مختلف‌العلامت می‌یابیم که مجموع آن‌ها ۴ و حاصل‌ضرب آن‌ها ۳۲- باشد. این دو عدد ۸ و ۴- هستند. پس:

$$A = y^2 + 4y - 32 = (y - 4)(y + 8)\ ,\ \ n^2 = y$$

$$A = (n^2 - 4)(n^2 + 8) \Rightarrow A = (n - 2)(n + 2)(n^2 + 8)$$

مثال۸. عبارت $A = x^4 - 13x^2 + 36$ را تجزیه کنید.

حل:

$$A = x^4 - 13x^2 + 36$$

فرض می‌شود: $y = x^2$. پس داریم:

$$A = y^2 - 13y + 36$$

حال دو عدد هم‌علامت می‌یابیم که مجموع آن‌ها ۱۳- و حاصل‌ضرب آن‌ها ۳۶ باشد. این دو عدد ۴- و ۹- هستند. پس:

$$A = y^2 - 13y + 36 = (y-9)(y-4) \ , \ y = x^2$$

$$A = (x^2-9)(x^2-4) = (x-3)(x+3)(x-2)(x+2)$$

مثال۹. عبارت $A = x^6 - 9x^3 + 8$ را تجزیه کنید.

حل:

$$A = x^6 - 9x^3 + 8$$

فرض می‌شود: $y = x^3$. پس داریم:

$$A = y^2 - 9y + 8$$

حال دو عدد مختلف‌العلامت می‌یابیم که مجموع آن‌ها ۹- و حاصل‌ضرب آن‌ها ۸ باشد. این دو عدد ۱- و ۸ هستند. پس:

$$A = y^2 - 9y + 8 = (y-1)(y-8) \ , \ y = x^3$$

$$A = (x^3-1)(x^3-8)$$

بنابر اتحاد $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ می‌توان نوشت:

$$A = (x-1)(x^2+x+1)(x-2)(x^2+2x+4)$$

مثال۱۰. عبارت $A = (a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3$ را تجزیه کنید.

حل: فرض می‌کنیم:

$$(c-a) = z \ , \ (b-c) = y \ , \ (a-b) = x$$

$$x + y + z = a - b + b - c + c - a = 0$$

دو طرف را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$\Rightarrow x+y+z = 0 \Rightarrow x+y = -z$$

$$\Rightarrow (x+y)^3 = (-z)^3$$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 + 3xy(x+y) = -z^3 \ , \ x+y = -z$$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 + 3xy(-z) = -z^3 \Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$$

$$\Rightarrow A = (a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 = 3(a-b)(b-c)(c-a)$$

مثال۱۱. عبارت $A = (x^2-1)^2 - 11x^2 + 35$ را تجزیه کنید.

حل:

$$A = (x^2-1)^2 - 11(x^2-1+1) + 35$$

$y = (x^2-1)$ فرض می‌شود:

$$A = y^2 - 11(y+1) + 35$$

$$\Rightarrow A = y^2 - 11y + 24$$

حال دو عدد مختلف‌العلامت می‌یابیم که مجموع آن‌ها ۱۱- و حاصل‌ضرب آن‌ها ۲۴ باشد. این دو عدد ۳- و ۸- هستند. پس:

$$A = y^2 - 11y + 24 = (y-3)(y-8) \ , \ y = x^2 - 1$$

$$A = (x^2-1-3)(x^2-1-8) = (x^2-4)(x^2-9)$$

$$\Rightarrow A = (x-2)(x+2)(x-3)(x+3)$$

مثال۱۲. عبارت زیر را تجزیه کنید.

$$A = (x+1)(x+3)(x+5)(x+7) + 15$$

حل:

$$A = \underbrace{(x+1)(x+7)}\underbrace{(x+3)(x+5)} + 15$$

(فرض می‌شود) $x^2 + 8 = y$ و

$$A = (x^2+8x+7)(x^2+8x+15) + 15$$

$$A = (y+7)(y+15) + 15 \Rightarrow A = y^2 + 22y + 105 + 15$$

$$A = y^2 + 22y + 120$$

حال دو عدد هم‌علامت می‌یابیم که مجموع آن‌ها ۲۲ و حاصل‌ضرب آن‌ها ۱۲۰ باشد. این دو عدد ۱۰ و ۱۲ هستند.

$$A = y^2 + 22y + 120 = (y+10)(y+12) \text{ و } y = x^2 + 8x$$

$$A = (x^2+8x+10)(x^2+8x+12)$$

$$A = (x^2+8x+10)(x+6)(x+2)$$

مثال۱۳. عبارت $A = x^3(x^2-7)^2 - 36x$ را تجزیه کنید.

حل:

$$A = x\left[\underbrace{x^2(x^2-7)^2 - 36}_{\text{اتحاد مزدوج}}\right]$$

$$A = x\left[x(x^2-7)-6\right]\left[x(x^2-7)+6\right]$$

$$A = x\left[x^3-7x-6\right]\left[x^3-7x+6\right]$$

$$A = x\left[x^3-x-6x-6\right]\left[x^3-x-6x+6\right]$$

$$A = x\left[x(x^2-1)-6(x+1)\right]\left[x(x^2-1)-6(x-1)\right]$$

$$A = x[x(x-1)(x+1)-6(x+1)][x(x-1)(x+1)-6(x-1)]$$

$$A = x(x+1)\left[x^2-x-6\right](x-1)\left[x^2+x-6\right]$$

$$A = x(x+1)(x-1)[(x-3)(x+2)][(x+3)(x-2)]$$

$$A = x(x+1)(x-1)(x-3)(x+2)(x+3)(x-2)$$

مثال۱۴. کسر $A = \dfrac{(a^2+b^2-c^2)^2 - (a^2-b^2+c^2)^2}{4ab^2 + 4abc}$ را ساده کنید.

حل: در صورت کسر از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم:

$$A = \frac{(a^2+b^2-c^2-a^2+b^2-c^2)(a^2+b^2-c^2+a^2-b^2+c^2)}{4ab(b+c)}$$

$$A=\frac{(2b^2-2c^2)(2a^2)}{4ab(b+c)}=\frac{2(b^2-c^2)(2a^2)}{4ab(b+c)}$$
$$=\frac{2(b-c)(b+c)(2a^2)}{4ab(b+c)}$$

$$A=\frac{4a^2(b-c)(b+c)}{4ab(b+c)},\ b+c\neq 0,\ a\neq 0\Rightarrow A=\frac{a(b-c)}{b}$$

مثال۱۵ . کسر $A=\dfrac{x^5-ax^4-a^4x+a^5}{x^4-ax^3-a^2x^2+a^3x}$ را ساده کنید.

حل:

$$A=\frac{x^4(x-a)-a^4(x-a)}{x^3(x-a)-a^2x(x-a)}=\frac{(x-a)(x^4-a^4)}{x(x-a)(x^2-a^2)}$$

$$x\neq \pm a,\quad A=\frac{x^4-a^4}{x(x^2-a^2)}=\frac{(x^2-a^2)(x^2+a^2)}{x(x^2-a^2)}$$

$$\Rightarrow A=\frac{x^2+a^2}{x}$$

تجزیه‌ی رادیکال‌ها

تبدیل عبارت داخل یک رادیکال به عبارت ساده‌تر را تجزیه رادیکال‌ها گویند. فرض کنید می‌خواهیم عبارت $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$ را به عبارت‌های ساده‌تر تبدیل کنیم. فرض می‌کنیم این عبارت را به‌صورت $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$ درآوردیم.

می‌توان نوشت: $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$

دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$A\pm\sqrt{B}=x+y\pm 2\sqrt{xy}\Rightarrow\begin{cases}A=x+y\\ \sqrt{B}=2\sqrt{xy}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=A\\ 4xy=B\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x+y=A=S\\ xy=\dfrac{B}{4}=P\end{cases}$$

حال معادله‌ی درجه‌ی دومی تشکیل می‌دهیم که مجموع دو ریشه‌ی آن A و حاصل‌ضرب دو ریشه‌ی آن $\frac{B}{4}$ باشد. از حل معادله‌ی حاصل x و y به‌دست می‌آید.

$$Z^2-SZ+P=0\Rightarrow Z^2-AZ+\frac{B}{4}=0$$

$$Z=\frac{A\pm\sqrt{A^2-B}}{2}$$

فرض می‌کنیم: $\sqrt{A^2-B}=C$. داریم:

$$\Rightarrow Z=\frac{A\pm C}{2}\ \text{یا}\ x=\frac{A+C}{2}\ \text{و}\ y=\frac{A-C}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+C}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-C}{2}},\ C=\sqrt{A^2-B}}$$

فرمول تجزیه‌ی رادیکال‌ها

مثال۱ . عبارت $P=\sqrt{30-12\sqrt{6}}$ را به رادیکال‌های ساده‌تر تبدیل کنید.

حل:

$$P=\sqrt{30-12\sqrt{6}}=\sqrt{30-\sqrt{12^2\times 6}}=\sqrt{30-\sqrt{864}}$$

$$\begin{cases}A=30\\ B=864\end{cases}\quad C=\sqrt{A^2-B}=\sqrt{900-864}=\sqrt{36}=6$$

$$\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+C}{2}}-\sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

$$\sqrt{30-\sqrt{864}}=\sqrt{\frac{30+6}{2}}-\sqrt{\frac{30-6}{2}}=\sqrt{18}-\sqrt{12}$$
$$=3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$$

پس: $P=\sqrt{30-12\sqrt{6}}=3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$

مثال۲ . رادیکال $\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}$ را تجزیه کنید.

حل: ابتدا $\sqrt{17+12\sqrt{2}}$ را تجزیه می‌کنیم. یعنی در واقع عبارت اصلی را به‌صورت $\sqrt{\sqrt{17+12\sqrt{2}}}$ می‌نویسیم. سپس جواب‌ها را داخل رادیکال اولی قرار می‌دهیم.

$$\sqrt{17+12\sqrt{2}}=\sqrt{17+\sqrt{144\times 2}}=\sqrt{17+\sqrt{288}}$$

$$\begin{cases}A=17\\ B=288\end{cases}\quad C=\sqrt{A^2-B}=\sqrt{289-288}=\sqrt{1}=1$$

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+C}{2}}+\sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

$$\sqrt{17+\sqrt{288}}=\sqrt{\frac{17+1}{2}}+\sqrt{\frac{17-1}{2}}=\sqrt{9}+\sqrt{8}=3+\sqrt{8}$$

$$\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}=\sqrt{\sqrt{17+\sqrt{288}}}=\sqrt{3+\sqrt{8}}\quad\begin{cases}A=3\\ B=8\end{cases}$$

$$C=\sqrt{A^2-B}=\sqrt{9-8}=1$$

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+C}{2}}+\sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

$$\sqrt{3+\sqrt{8}}=\sqrt{\frac{3+1}{2}}+\sqrt{\frac{3-1}{2}}=\sqrt{2}+\sqrt{1}=\sqrt{2}+1$$

$$\Rightarrow\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1$$

مقدمه‌ای بر نظریه‌ی مجموعه‌های فازی

● دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی
عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی

اشاره

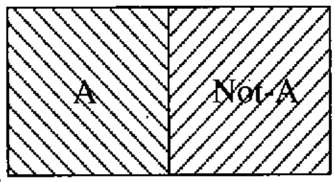
یکی از شاخه‌های ریاضیات کاربردی در سطح عالی، گرایش منطق فازی است. از آن‌جا که در دو دهه‌ی اخیر کاربرد فراوانی از این رشته را در صنعت داشته‌ایم و با توجه به این که مؤلف محترم مقاله، چند سالی است که در این زمینه تحقیق می‌کنند، به پیشنهاد دست‌اندرکاران مجله، ایشان به نگارش مجموعه مقالاتی در این زمینه پرداخته‌اند. ان‌شاءا... مورد استفاده خوانندگان مجله قرار گیرد.

تا قبل از پیدایش منطق فازی در سال ۱۹۶۵، قوانین حاکم بر علومی چون ریاضیات، بر پایه‌ی منطق دوارزشی یا منطق ارسطویی استوار بود. **ارسطو** معتقد بود، هر شیء، یا هست یا نیست و تفکری سیاه و سفید داشت. در حدود دو قرن قبل از او، **بودا** در هندوستان بیان داشت که جهان سراسر تناقض است و لذا در جهان مفهومی به صورت هم A و هم نه A را داریم. در واقع تفکر خاکستری (نه فقط سیاه و سفید)، مدت‌ها قبل از ارسطو وجود داشت.

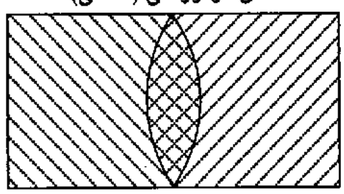
آلبرت اینشتین نیز دیدگاهی شبیه بودا داشت. به‌عقیده‌ی وی، جهان خاکستری است، ولی علم سیاه و سفید است و حقیقت چیزی بین صفر و یک است. به عبارت دیگر، حقایق چندارزشی هستند،

نه دوارزشی. جهانی که ما در آن زندگی می‌کنیم، فازی است، ولی ما توصیفی غیر فازی از آن داریم. اینشتین می‌گفت، جایی که قوانین ریاضیات به واقعیات مربوط می‌شوند، مطمئن نیستند و آن‌جا که مطمئن هستند، نمی‌توانند به واقعیت اشاره داشته باشند.

به این ترتیب ما با دو منطق مواجه هستیم: یکی منطق دوارزشی یا «قطعی»[1] که همان منطق ارسطویی است و بیان می‌دارد که هر چیزی یا هست یا نیست، چه در حال و چه در آینده، و دیگری منطق چندارزشی یا «فازی»[2] به معنای مبهم یا نامطمئن که بیان می‌دارد، هر چیزی دارای درجه‌ای از ابهام است. **برتراندراسل** نیز معتقد بود، همه چیز شامل این قاعده‌ی ثابت که آن چیز درست یا غلط است نمی‌شود و نباید برای روشن‌شدن این موضوع سعی کنیم. **ماکس بلک**[3] نیز به این اصل اعتقاد داشت که هر چیزی تا حدودی A و تا حدودی Not-A است.



منطق دو ارزشی (قطعی)



منطق چندارزشی (فازی)

«نظریه‌ی مجموعه‌های فازی» در سال ۱۹۶۵ توسط پروفسور **لطفی عسگرزاده** در آمریکا ارائه شد. وی با چاپ اولین مقاله‌ی خود در مجله‌ی «اطلاعات و کنترل»، دنیای علم را وارد این مقوله کرد که چگونه می‌توان تفکر دوارزشی را به چندارزشی تعمیم داد. ایشان در سال ۱۹۲۱ در شهر باکو متولد شد و تحصیلات دوره‌ی کارشناسی خود را در رشته‌ی مهندسی برق در سال ۱۹۴۲ در دانشگاه تهران به پایان رساند. سپس برای ادامه‌ی تحصیل به آمریکا رفت و در سال ۱۹۴۶، کارشناسی ارشد مهندسی برق را از دانشگاه MIT و در سال ۱۹۵۱، دکترای مهندسی برق را از دانشگاه کلمبیا اخذ کرد. وی در سال ۱۹۶۳، ریاست گروه مهندس برق دانشگاه UC برکلی کالیفرنیا را برعهده گرفت.

دیدگاه‌های این دانشمند ایرانی‌الاصل درخصوص منطقی که بنیان‌گذار آن بود، چنین است که برای توصیف ابهام از اعداد بین صفر و یک استفاده می‌کنیم. اصولاً تفکر و استدلال انسان فازی است، لذا باید ماشین‌هایی را ساخت که به قدرت استدلال انسان نزدیک‌تر باشند. حالت دوارزشی، ساده ولی کم‌دقت است و افزایش دقت به معنای افزایش فازی است. منطق فازی موجب هوشمندی ماشین‌ها می‌شود.

مخالفان نظریه‌ی عسگرزاده، در بدو ارائه‌ی نظریه‌ی وی اعلام کردند که این نظریه کاربردی ندارد و هیچ ماشینی با منطق فازی کار نمی‌کند. آن‌ها حذف منطق دوارزشی را ناممکن و علم دوارزشی را حقیقت و علم فازی را غیر علم می‌دانستند.

درحالی که واقعیت خاکستری است. مفاهیمی چون درست‌کاری، جوانی، خوش‌حالی، خوش‌بختی، سلامتی و... برای هر شخصی متفاوت است و نمی‌توان تنها با دو حالت ۰ و ۱ آن‌ها را توصیف کرد. حتی زندگی و مرگ هم مفاهیمی فازی دارند و باید به آن‌ها درجه داد. برای مثال، بیمارستانی را در نظر بگیرید که در آن شش مریض با امراض به‌ترتیب ناراحتی دستگاه گوارش، شکستگی استخوان پا، مسمومیت غذایی، عفونت ریه، سکته‌ی قلبی و مرگ مغزی در آن‌جا بستری هستند. اگر مفهوم زندگی را برای این افراد در نظر بگیریم، واضح است که زندگی آن‌ها توأم با نوعی ابهام و عدم‌اطمینان است و می‌توانیم درجات متفاوتی را برای آن منظور کنیم. یعنی بسته به آن‌که شدت مریضی چه‌قدر باشد، می‌توانیم مقادیر بین ۰ و ۱ را به زندگی آن فرد نسبت دهیم. به این ترتیب، نمونه‌ای از توصیف زندگی کردن برای این مجموعه از افراد به صورت زیر است:

{(۱,۰/۸),(۲,۰/۷),(۳,۰/۷),(۴,۰/۶),(۵,۰/۳),(۶,۰/۱)}

که در آن، مؤلفه‌ی اول شماره‌ی مریض و مؤلفه‌ی دوم درجه‌ای است که به زندگی کردن وی نظیر کرده‌ایم. هرقدر نوع مریضی خطر بیشتری داشته است، درجه‌ی زندگی فرد را ضعیف‌تر منظور کرده‌ایم. البته این درجات بسته به نظر افراد گوناگون می‌تواند متفاوت باشد. به عنوان مثالی دیگر، لامپی را در نظر بگیرید که سوسو می‌کند. اگر مفهوم سالم بودن مورد نظر باشد، نمی‌توان گفت این لامپ صددرصد سالم یا صددرصد خراب است و باید درجه‌ای به سالم بودن لامپ داد و مثلاً گفت: این لامپ با درجه‌ی ۰/۴ سالم است.

برخلاف نظر مخالفان منطق فازی که معتقد بودند، برای این منطق کاربردی وجود ندارد، کمتر از ده سال پس از ارائه‌ی این منطق توسط عسگرزاده در سال ۱۹۷۴، برای اولین‌بار منطق فازی در زمینه‌ی کنترل یک موتور بخار ساده در انگلستان توسط **ابراهیم محمدانی** به‌کار گرفته شد. پس از آن در دهه‌ی ۱۹۸۰، منطق فازی در کنترل اتوماتیک قطارهای زیرزمینی (مترو)، کنترل فرایند تصفیه‌ی آب و غیره به‌کار رفت. در سال ۱۹۸۴، «انجمن بین‌المللی سیستم‌های فازی» تأسیس شد. هم‌چنین، **سوگنو**[5] در ژاپن در سال ۱۹۷۲ از نظریات عسگرزاده برای ارائه‌ی مفاهیم اندازه و انتگرال فازی استفاده کرد. در سال ۱۹۹۰، منطق فازی در ساخت محصولات الکتریکی خانگی و برخی محصولات دیگر مورد بهره‌برداری قرار گرفت؛ از جمله در: ماشین لباس‌شویی، دوربین‌های عکاسی و فیلم‌برداری، مایکروویو، تلویزیون، بالگرد، تهویه‌ی مطبوع و قطار فازی.

در نظریه‌ی مجموعه‌های کلاسیک، یک مجموعه با یک ویژگی

کاملاً معین و قطعی مشخص می‌شود، لذا یک شیء، یا عضو یک مجموعه هست یا نیست. برای یک مجموعه‌ی قطعی چون A، تابع مشخصه‌ای به نام χ_A به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\chi_A(x)=\begin{cases} ۱ & x\in A \\ ۰ & x\notin A \end{cases}$$

به این ترتیب، یک مجموعه‌ی قطعی با تابع مشخصه‌ی خود شناسایی می‌شود. در این حالت χ_A تابعی از X به $\{۰,۱\}$ است. حال به تعریف یک مجموعه‌ی فازی می‌پردازیم:

تعریف: گیریم X مجموعه‌ی مرجع باشد. مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ در X را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{A}=\left\{(x,\mu_{\tilde{A}}(x))\middle| x\in X\right\}$$

که در آن، $\mu_{\tilde{A}}:X\to[۰,۱]$ تابع عضویت مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ نام درد. در این حالت، عدد $۱\le\mu_{\tilde{A}}(x)\le ۰$ درجه‌ی عضویت x در $\tilde{A}$ نامیده می‌شود. یک مجموعه‌ی فازی، منحصراً با تابع عضویت خودش مشخص می‌شود.

نمونه‌هایی از مجموعه‌های فازی عبارت‌اند از: اعداد تقریباً صفر، اعداد تقریباً بین ۲ و ۵، اعداد نزدیک ۱، اعداد خیلی کوچک، مردان بلند قد، اعداد خیلی بزرگ‌تر از ۱۰، اعداد بزرگ و... در هریک از این مجموعه‌ها، ابهام درخصوص معلوم نبودن عضویت یا عدم عضویت یک شیء در مجموعه وجود دارد. می‌توان گفت، مجموعه‌ی فازی حاصل توسعه‌ی مجموعه‌ی معمولی یا قطعی است؛ همان‌طوری که منطق فازی حاصل توسعه‌ی منطق چندارزشی است. برای مثال، مجموعه‌ی فازی کوچک بودن را روی مجموعه‌ی مرجع $X=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ در نظر می‌گیریم. تابع عضویت این مجموعه‌ی فازی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases} ۱ & x=۱ \\ ۰/۶ & x=۲ \\ ۰/۳ & x=۳ \\ ۰/۱ & x=۴ \\ ۰ & x=۵ \end{cases}$$

لذا $\tilde{A}$ به این صورت قابل بیان است:

$$\tilde{A}=\{(۱,۱),(۲,۰/۶),(۳,۰/۳),(۴,۰/۱),(۵,۰)\}$$

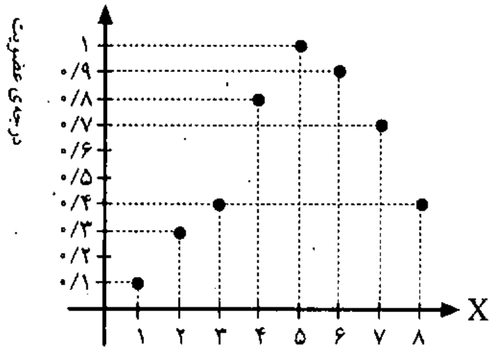
$\tilde{A}$ را به صورت زیر می‌نویسند:

$$\tilde{A}=\left\{\frac{۱}{۱},\frac{۰/۶}{۲},\frac{۰/۳}{۳},\frac{۰/۱}{۴},\frac{۰}{۵}\right\}$$

در این روش نمایش، علامت ــــ فقط یک نماد است و به معنای تقسیم نیست. در بالای این نماد مقدار درجه‌ی عضویت و زیر آن نام عضو مربوطه قرار می‌گیرد. هرقدر عدد کوچک‌تر باشد، درجه‌ی عضویت متناظر آن را بزرگ‌تر و هرقدر عدد بزرگ‌تر باشد، این درجه را کوچک‌تر در نظر می‌گیریم. به‌عنوان مثالی دیگر، مجموعه‌ی فازی تقریباً پنج را در نظر می‌گیریم. اگر $X=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸\}$ باشد، مجموعه‌ی $\tilde{B}$ در زیر توصیفی از این مجموعه‌ی فازی است:

$$\tilde{B}=\{(۱,۰/۱),(۲,۰/۳),(۳,۰/۴),(۴,۰/۸),(۵,۱),(۶,۰/۹),(۷,۰/۷),(۸,۰/۴)\}$$

نمودار زیر نیز این مجموعه را به نمایش درمی‌آورد:



مثلاً می‌گوییم ۴ با درجه‌ی عضویت ۸/۰ عضو $\tilde{B}$ است. در این حالت، هرقدر از ۵ دور می‌شویم، میزان عضویت عدد در این مجموعه کاهش می‌یابد. لازم به ذکر است، مقادیر درجه‌ی عضویت کاملاً سلیقه‌ای هستند و بسته به نظر افراد، می‌توانند مقادیر دیگری نیز باشند.

نظریه‌ی منطق فازی تاکنون گسترش زیادی یافته و با وجود آن‌که حدود چهار دهه از قدمت آن می‌گذرد، هم‌چنان در زمینه‌های گوناگون علمی مورد استفاده قرار می‌گیرد. نظریه‌ی مجموعه‌های فازی قادر است، بسیاری از مفاهیم مبهم را به صورت ریاضی مورد تحلیل قرار دهد و زمینه را برای استدلال و تصمیم‌گیری در شرایط عدم قطعیت فراهم آورد. در قسمت بعدی خوانندگان محترم را با اطلاعات بیشتری درخصوص منطق و مجموعه‌های فازی آشنا خواهیم کرد.

---

1. Crisp 2. Fuzzy 3. Black
4. Degrees-Grades 5. Sugeno

---

۱. تفکر فازی. بارت کاسکو. ترجمه‌ی دکتر علی غفاری و همکاران. دانشگاه خواجه نصیر طوسی. ۱۳۷۷.

۲. آشنایی با نظریه مجموعه‌های فازی. دکتر سیدمحمد طاهری. جهاد دانشگاهی. ۱۳۷۵.

۳. مقدمه‌ای بر منطق فازی برای کاربردهای عملی آن. کازوناناکا. ترجمه‌ی دکتر علی وحیدیان کام‌یاد و دکتر حامد رضا طارقیان. دانشگاه فردوسی. مشهد. ۱۳۸۱.

هیچ مربعی منفی نیست

در این بخش، بعضی از کاربردهای ساده‌ترین نابرابری موجود در جبر، یعنی:

$$x^{2} \geq 0$$

را بررسی می‌کنیم؛ رابطه‌ای که در آن برابری اگر و تنها اگر عدد حقیقی $x = 0$ باشد، برقرار است. اینک اولین مثال:

● فرض می‌کنیم a عددی حقیقی باشد. ثابت کنید:

$$4a - a^{4} \leq 3$$

حل: این مسئله برای دانش‌آموزانی طرح شده بود که کتاب جامع و فاضل یا دیفرانسیل و انتگرال را، حتی ورق هم نزده بودند. نابرابری مورد بحث هم‌ارز

$$(a^{2}-1)^{2} + 2(a-1)^{2} \geq 0$$

است که به‌طور واضح برقرار است.

مثال دوم از المپیادهای ریاضی رومانیایی ۱۹۸۱ است که توسط آندریسکو[1] طرح شده است.

● معین کنید، تابع یک به یک $f = R \to R$ با این ویژگی که به ازای هر x،

$$f(x^{2}) - f^{2}(x) \geq \frac{1}{4}$$

موجود است یا خیر.

حل: نشان می‌دهیم چنین تابعی موجود نیست. روش کار بسیار ساده است. به دو عددی می‌نگریم که با مربعاتشان برابرند؛ یعنی، $x = 0$ و $x = 1$، که در مورد آن‌ها $f(x)$ و $f(x^{2})$ برابرند. با قرار دادن $x = 0$ در رابطه‌ی مفروض، به‌دست می‌آوریم:

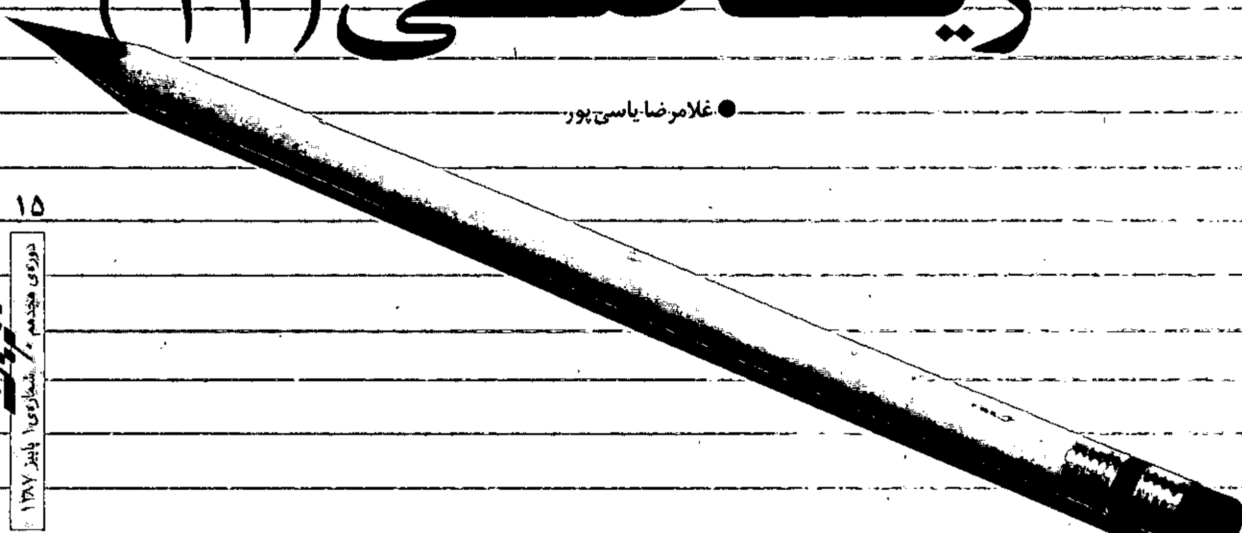
$$f(0) - f^{2}(0) \geq \frac{1}{4}$$

با بردن تمام عبارات به سمت راست، خواهیم داشت:

$$0 \geq \left(f(0) - \frac{1}{2}\right)^{2}$$

این رابطه مستلزم آن است که $f(0) = \frac{1}{2}$. به همین ترتیب، اگر

با راهیان المپیادهای ریاضی (۱۱)



● غلامرضا یاسی‌پور

$x = 1$ را قرار دهیم، به دست می‌آوریم $f(1) = \frac{1}{2}$ که مانند $f(0)$ است. به این ترتیب f نمی‌تواند یک به یک باشد.

در ادامه مسائلی را آورده‌ایم که می‌توان آن‌ها را با همین روش حل کرد.

۱. فرض می‌کنیم a، b، c و d اعدادی حقیقی باشند. ثابت کنید تمام اعداد $a-b^2$، $b-c^2$، $c-d^2$ و $d-a^2$ نمی‌توانند بزرگ‌تر از $\frac{1}{4}$ باشند.

۲. جمیع جواب‌های حقیقی دستگاه معادلات زیر را بیابید.

$$x+y=\sqrt{4z-1}$$
$$y+z=\sqrt{4x-1}$$
$$z+x=\sqrt{4y-1}$$

۳. فرض می‌کنیم، x و y اعدادی در بازه‌ی $(0,1)$ با این ویژگی باشند که عدد مثبت a ای متفاوت از آن چنان موجود باشد که:

$$\log_x a + \log_y a = 4\log_{xy} a$$

ثابت کنید: $x = y$.

۴. جمیع سه‌تایی‌های حقیقی (x, y, z) را بیابید که در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند:

$$x^4+y^4+z^4-4xyz=-1$$

۵. جمیع سه‌تایی‌های اعداد حقیقی x، y و z صادق در:

$$2xy-z^2 \geq 1$$
$$z-|x+y| \geq -1$$

را بیابید.

۶. فرض می‌کنیم a، b و c اعدادی حقیقی و چنان باشند که:

$$a^2+c^2 \leq 4b$$

ثابت کنید به ازای هر $x \in R$:

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+1 \geq 0$$

۷. ثابت کنید به ازای جمیع اعداد حقیقی x، y و z، نابرابری زیر برقرار است:

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz \geq \frac{3}{4}(x-y)^2$$

۸. اعداد حقیقی x_1، x_2، ...، x_n صادق در رابطه‌ی زیر را بیابید.

$$\sqrt{x_1-1^2}+2\sqrt{x_2-2^2}+\cdots+n\sqrt{x_n-n^2} = \frac{1}{2}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$$

۹. الف) فرض می‌کنیم a، b و c اعدادی حقیقی و نامنفی باشند. ثابت کنید:

$$ab+bc+ca \geq \sqrt{3abc(a+b+c)}$$

ب) فرض می‌کنیم a، b و c اعدادی حقیقی و نامنفی چنان باشند که: $a+b+c=1$. ثابت کنید:

$$a^2+b^2+c^2+\sqrt{12abc} \leq 1$$

۱۰. $f: N \to R$ را چنان معین کنید که به ازای هر k، m و n:

$$f(km)+f(kn)-f(k)f(mn) \geq 1$$

۱۱. فرض می‌کنیم a، b و c طول‌های یال‌های یک متوازی‌السطوح قائم و d طول قطر آن باشد. ثابت کنید:

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geq abcd\sqrt{3}$$

۱۲. ثابت کنید در مثلث ABC نابرابری زیر برقرار است:

$$\cos A\cos B\cos C \leq \frac{1}{8}$$

۱۳. اگر a_1، a_2، ...، a_n اعدادی حقیقی باشند، نشان دهید:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij\cos(a_i-a_j) \geq 0$$

حل مسائل

۱. اگر نابرابری‌های

$$a-b^2 > \frac{1}{4} \text{ و } b-c^2 > \frac{1}{4} \text{ و } c-d^2 > \frac{1}{4} \text{ و } d-a^2 > \frac{1}{4}$$

به طور هم‌زمان برقرار باشند، با جمع کردن آن‌ها نابرابری زیر را به دست می‌آوریم:

$$a+b+c+d-(a^2+b^2+c^2+d^2) > 1$$

با بردن جمیع مقادیر به سمت راست و تکمیل مربع‌ها داریم:

$$(\frac{1}{2}-a)^2+(\frac{1}{2}-b)^2+(\frac{1}{2}-c)^2+(\frac{1}{2}-d)^2 < 0$$

که تناقض است.

(Revista Matematică din Timisoara (Timisoara Mathematics Reviews), proposed by T. Andreescu)

۲. مانند مسئله‌ی قبل، سه نابرابری را جمع می‌کنیم و عبارت را به صورت مجموع مربعات بازنویسی می‌کنیم. با جمع و بردن جمیع مقادیر به سمت چپ، به دست می‌آوریم:

$$2x+2y+2z+\sqrt{4x-1}+\sqrt{4y-1}+\sqrt{4z-1}=0$$

می‌خواهیم این عبارت را به صورت مجموع سه مربع، یکی تنها وابسته به x، یکی تنها وابسته به y، و یکی تنها وابسته به z، بنویسیم. طرفین آن را بر ۲ تقسیم و به $x+\sqrt{x-\frac{1}{4}}$ توجه می‌کنیم. حضور $\frac{1}{4}$ زیر ریشه‌ی دوم، جمع و تفریق $\frac{1}{4}$ را مطرح می‌کند. در این صورت داریم:

$$x-\frac{1}{4}+\sqrt{x-\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}=\left(\sqrt{x-\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\right)^2$$

با بازگشت به مسئله‌ی اصلی داریم:

$$\left(\sqrt{x-\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{y-\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{z-\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\right)^2=0$$

بنابراین، هریک از این مربعات باید برابر ۰ باشد و نتیجه می‌گیریم:

$$x=y=z=\frac{1}{2}$$

تنها جواب دستگاه مفروض است.

(مسابقه‌ی ریاضی رومانی، طرح از T. Andreescu)

۳. از آن‌جا که $a>0$ و $a\neq 1$، نابرابری را می‌توان به صورت:

$$\frac{1}{\log_a x}+\frac{1}{\log_a y}=\frac{4}{\log_a xy}$$

بازنویسی کرد که هم‌ارز:

$$\frac{\log_a x+\log_a y}{\log_a x\log_a y}=\frac{4}{\log_a x+\log_a y}$$

است. با حذف مخرج‌ها به دست می‌آوریم:

$$(\log_a x+\log_a y)^2=4\log_a x\log_a y$$

که مستلزم:

$$(\log_a x-\log_a y)^2=0$$

است. پس رابطه، تنها اگر $x=y$، می‌تواند برقرار باشد.

(مسابقه‌ی ریاضی رومانی، طرح از T. Andreescu)

۴. اگر بکوشیم، مربع شامل دو جمله‌ی اول سمت چپ را کامل کنیم، عبارت زیر را به دست می‌آوریم:

$$(x^2-y^2)^2+2x^2y^2+z^4-4xyz$$

حضور $2x^2y^2$ و $-4xyz$، امکان افزودن $2z^2$ و سپس تکمیل مربعی دیگر را مطرح می‌کند. در این مرحله، ملاحظه‌ی این مطلب مشکل نیست که معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(x^2-y^2)^2+(z^2-1)^2+2(xy-z)^2=0$$

این معادله تنها اگر جمیع سه مربع برابر صفر باشند، می‌تواند برقرار باشد. از:

$$z^2-1=0$$

داریم: $z=\pm1$. پس از تحلیلی سریع نتیجه می‌گیریم که جواب‌ها عبارت‌اند از:

$(1,1,1)$ و $(-1,1,-1)$ و $(1,-1,-1)$

(Revista Matematică din Timisoara (Timisoara Mathematics Reviews), proposed by T. Andreescu)

۵. از نابرابری دوم به دست می‌آوریم:

$$z\geq|x+y|-1$$

از استفاده از آن در نابرابری اول حاصل می‌شود:

$$2xy-(1-|x+y|)^2\geq 1$$

به ازای انتخابی از علامت‌های بعلاوه و منها داریم:

$$2xy-(1+|x+y|)^2=2xy-|x+y|^2+2|x+y|-1$$
$$=2xy-x^2-y^2-2xy+2(\pm x\pm y)-1$$
$$=-x^2-y^2+2(\pm x\pm y)-1$$

از نابرابری تحویل‌یافته‌ی فوق نتیجه می‌گیریم:

$$0\geq x^2+y^2-2(\pm x\pm y)+1+1=(1\pm x)^2+(1\pm y)^2$$

هر دو مربع حاصل باید برابر صفر باشند. درنتیجه، x و y، می‌توانند تنها مقادیر ۱ یا ۱− را داشته باشند. گذشته از این، در فوق ملاحظه می‌کنیم که xy مثبت است، بنابراین باید x و y علامت یکسان داشته باشند. به ازای $x=y=1$ یا $x=y=-1$ دو مورد:

$2-z^2\geq 1$ و $z-2\geq -1$

را به دست می‌آوریم و درنتیجه: $z^2\leq 1$ و $z\geq 1$.

تنها z صادق در دو نابرابری، $z=1$ است. درنتیجه، برای مسئله‌ی ما دو جواب:

$$x=y=z=1$$

و:

$x=y=-1$ و $z=1$

موجود است.

(T. Andreescu)

۶. با تکمیل مربع‌ها به دست می‌آوریم:

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+1$$
$$=(x^2+\frac{a}{2}x)^2+(b-\frac{a^2+c^2}{4})x^2+(x+1)^2$$

در این صورت، نابرابری از این مطلب نتیجه می‌شود که:

$$b\geq(a^2+c^2)/4$$

(Revista Matematică din Timisoara (Timisoara Mathematics Reviews), proposed by T. Andreescu)

۷. نابرابری مطلوب، هم‌ارز با نابرابری زیر است:

$$\frac{1}{2}\left[(x-y)^2+(x-z)^2+(z-x)^2\right]\geq\frac{3}{4}(x-y)^2$$

یا:

$$3\left[(x-z)^2+(z-x)^2\right]\geq(x-y)^2$$

این نابرابری، با قرار دادن $a=y-z$ و $b=z-x$ به صورت:

$$2(a^2+b^2)\geq(a+b)^2$$

در می‌آید، که به $(a-b)^2\geq 0$ تحویل می‌شود.

۸. سعی می‌کنیم، معادله را به مجموع دو مربع برابر با صفر تبدیل کنیم. به این منظور، برابری را در ۲ ضرب می‌کنیم، مقادیر

را به سمت راست می‌بریم و مربع‌ها را کامل می‌کنیم. در این صورت داریم:

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)-2\sqrt{x_1-1}-4\sqrt{x_2-2^2}-\cdots-2n\sqrt{x_n-n^2}$$
$$=(x_1-1-2\sqrt{x_1-1}+1)+(x_2-2^2-4\sqrt{x_2-2^2}+2^2)+\cdots$$
$$+(x_n-n^2-2n\sqrt{x_n-n^2}+n^2)=(\sqrt{x_1-1}-1)^2$$
$$+(\sqrt{x_2-2^2}-2)+\cdots+(\sqrt{x_n-n^2}-n)^2$$

مجموع این مربع‌ها، بنا به فرض، باید برابر ۰ باشد. درنتیجه جمیع مربع‌ها برابر ۰ هستند. به این ترتیب:

$$\sqrt{x_1-1}=1,\ \sqrt{x_2-2^2}=2,\dots,\ \sqrt{x_n-n^2}=n$$

پاسخ منحصر به فرد معادله عبارت است از:

$$x_1=2,\ x_2=8,\ \dots,\ x_n=2n^2$$

(Gazeta Matematică (Mathematics Gazette, Bucharest), proposed by T. Andreescu)

۹. الف) با مربع کردن دو طرف به دست می‌آوریم:

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)\ge 3abc(a+b+c)$$

که هم‌ارز با نابرابری زیر است:

$$\frac{1}{2}\left[(ab-bc)^2+(bc-ca)^2+(ca-ab)^2\right]\ge 0$$

ب) نابرابری هم‌ارز با نابرابری زیر است:

$$\sqrt{12abc}\le(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)$$

که با نابرابری زیر همسان است:

$$\sqrt{12(a+b+c)abc}\le 2(ab+bc+ca)$$

و به نابرابری پیشین تحویل می‌شود.

(قسمت ب در المپیاد ریاضی اتریش ۱۹۸۴ آمده است.)

۱۰. هم‌چون مثال مقدمه، مقادیر خاصی برای m، n و k در معادله‌ی مفروض وارد می‌کنیم. با فرض:

$$m=n=k=0$$

نابرابری:

$$2f(0)-f^2(0)\ge 1$$

را به دست می‌آوریم. درنتیجه:

$$0\ge(f(0)-1)^2$$

که مستلزم $f(0)=1$ است. به ازای:

$$m=n=k=1$$

همین استدلال نشان می‌دهد که: $f(1)=1$. به ازای:

$$m=n=0$$

نابرابری زیر را به دست می‌آوریم:

$$2-f(k)\ge 1$$

درنتیجه، به ازای هر k، $f(k)\le 1$. و نیز، به‌ازای $k=1$ و $m=0$ نابرابری:

$$1+f(n)-1\ge 1$$

را به دست می‌آوریم که مستلزم $f(n)\ge 1$، به ازای جمیع مقادیر n است. در این صورت، نتیجه می‌گیریم که به ازای هر n: $f(n)=1$.

(D. M. Bătinetu)

۱۱. از آن‌جا که در متوازی‌السطوح قائم، قطر توسط فرمول:

$$d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

مشخص می‌شود، نابرابری مورد بحث با نابرابری زیر هم‌ارز است:

$$(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)^2\ge 3a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2)$$

این نابرابری، پس از تجدید دسته‌بندی جملات، به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{c^4}{2}(a^2-b^2)^2+\frac{a^4}{2}(b^2-c^2)^2+\frac{b^4}{2}(c^2-a^2)^2\ge 0$$

توجه داشته باشید که برابری، اگر و تنها اگر $a=b=c$، برقرار است؛ یعنی اگر متوازی‌السطوح مورد بحث مکعب باشد.

(Pîrsan, L., Lazanu, C. G., Probleme de algebră si trigonometrie (Problems in algebra and trigonometry), Facla, Timisoara, 1983)

۱۲. باید نشان دهیم که:

$$1-8\cos A\cos B\cos C\ge 0$$

سمت چپ را با استفاده از اتحادهای مثلثاتی به مجموع مربع‌ها تبدیل می‌کنیم. فرمول ضرب به جمع حاصل‌ضرب کسینوس‌ها می‌دهد:

$$1-8\cos A\cos B\cos C=1-4\cos A(\cos(B-C)$$
$$+\cos(B+C))$$

توجه داشته باشید:

$$\cos(B+C)=-\cos(\pi-B-C)=-\cos A$$

و:

$$\sin^2(B-C)+\cos^2(B-C)=1$$

عبارت فوق برابر است با:

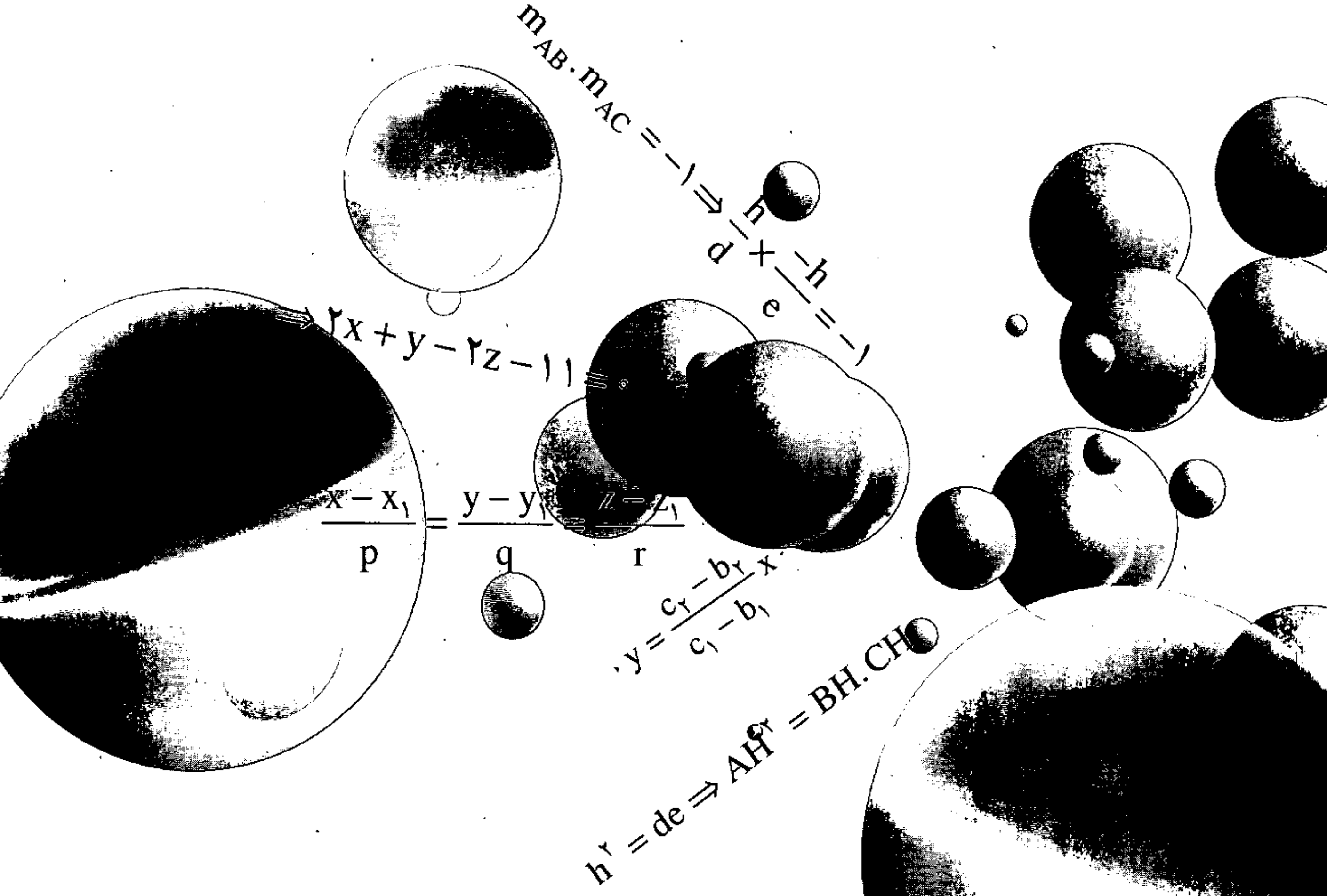
$$\sin^2(B-C)+\cos^2(B-C)-4\cos A\cos(B-C)$$
$$+4\cos^2 A=(\sin(B-C))^2+(\cos(B-C)-2\cos A)^2$$

و مورد اخیر، به طور واضح نامنفی است.

۱۳. با استفاده از فرمول جمع کسینوس به دست می‌آوریم:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij\cos(a_i-a_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(ij\cos a_i\cos a_j+ij\sin a_i\sin a_j)$$
$$=\sum_{i=1}^{n} i\cos a_i\sum_{j=1}^{n} j\cos a_j+\sum_{i=1}^{n} i\sin a_i\sum_{j=1}^{n} j\sin a_j$$
$$=(\sum_{i=1}^{n} i\cos a_i)^2+(\sum_{i=1}^{n} i\sin a_i)^2\ge 0$$

1. Andreescu



رویکرد هندسی- رویکرد جبری در آموزش هندسه (۴)

● محمدهاشم رستمی

اشاره

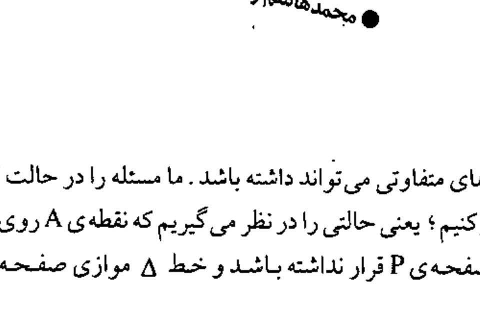
در شماره های قبل راجع به رویکرد هندسی و رویکرد جبری در آموزش هندسه بحث شد و مسائلی با هر دو رویکرد در فضاهای دو بعدی و سه بعدی اقلیدوس حل شده، اینک در ادامه به حل مسائلی در فضای سه بعدی با هردو رویکرد خواهیم پرداخت.

مثال۳. نقطه‌ی A، خط Δ و صفحه‌ی P داده شده‌اند. از نقطه‌ی A خطی رسم کنید که با صفحه‌ی P موازی باشد و خط Δ را قطع کند.

حل:

الف) روش هندسی

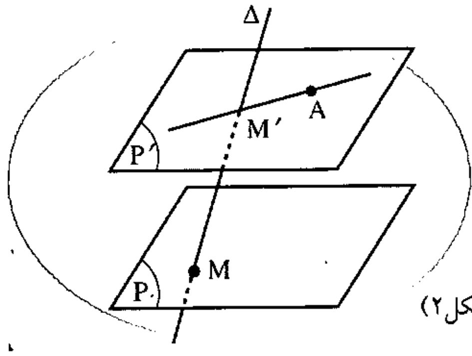
چون در صورت مسئله برای وضع نقطه‌ی A، خط Δ و صفحه‌ی P نسبت به هم، شرطی در نظر گرفته نشده است، پس مسئله حالت‌های متفاوتی می‌تواند داشته باشد. ما مسئله را در حالت کلی حل می‌کنیم؛ یعنی حالتی را در نظر می‌گیریم که نقطه‌ی A روی خط Δ و صفحه‌ی P قرار نداشته باشد و خط Δ موازی صفحه‌ی P نباشد.



(شکل۱)

در این صورت، خط Δ صفحه‌ی P را در نقطه‌ای مانند M قطع خواهد کرد (شکل۱).

برای حل مسئله در این حالت، از این راهبرد (استراتژی) استفاده می‌کنیم که مسئله را حل شده در نظر می‌گیریم.



(شکل۲)

فرض می‌کنیم، مسئله حل شده و خط AM' جواب مسئله است؛ یعنی خطی است که از نقطه‌ی A گذشته، با صفحه‌ی P موازی است و خط Δ را در نقطه‌ی M' قطع کرده است. چون تمام خط‌هایی که از یک نقطه مانند A موازی صفحه‌ی P رسم می‌شوند، در یک صفحه مانند P' قرار دارند که از نقطه‌ی A موازی صفحه‌ی P رسم می‌شود، پس خط AM' نیز خطی متعلق به این صفحه است. از طرف دیگر، نقطه‌ی M' که محل برخورد خط Δ با خط AM' است، روی صفحه‌ی P' قرار دارد. یعنی در واقع نقطه‌ی M' محل برخورد صفحه‌ی P' با خط Δ است. بنابراین برای حل مسئله چنین عمل می‌کنیم:

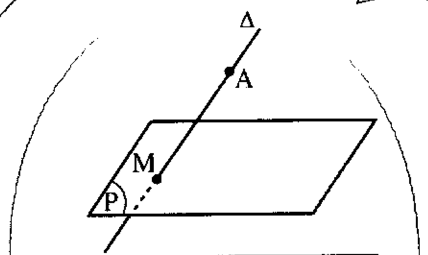
ـ صفحه‌ی P'، یعنی مکان هندسی خط‌هایی را که از نقطه‌ی A موازی صفحه‌ی P رسم می‌شوند، رسم می‌کنیم.

ـ نقطه‌ی برخورد خط Δ با صفحه‌ی P' را M' می‌نامیم (در این حالت که در نظر گرفته‌ایم، خط Δ حتماً صفحه‌ی P' را قطع می‌کند. زیرا می‌دانیم که اگر دو صفحه موازی باشند و خطی یکی از این دو صفحه را قطع کند، دیگری را نیز قطع خواهد کرد).

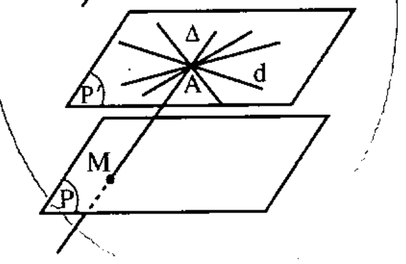
ـ از نقطه‌ی A به نقطه‌ی M' وصل می‌کنیم. خط منحصر به فرد AM' جواب مسئله است. زیرا خطی است که از نقطه‌ی A گذشته است، خط Δ را در نقطه‌ی M' قطع کرده است و موازی صفحه‌ی P نیز می‌باشد (اگر دو صفحه موازی باشند، هر خط واقع در یک صفحه با صفحه‌ی دیگر موازی است).

بحث:

۱. اگر نقطه‌ی A روی خط Δ باشد و خط Δ موازی صفحه‌ی P نباشد (شکل۳)، صفحه‌ی P' که از نقطه‌ی A موازی صفحه‌ی P رسم می‌شود، خط Δ را در همان نقطه‌ی A قطع می‌کند. در این حالت، هر خطی مانند d که از نقطه‌ی A در صفحه‌ی P' رسم شود، جواب مسئله است؛ یعنی بی‌شمار خط جواب مسئله است (شکل۴).

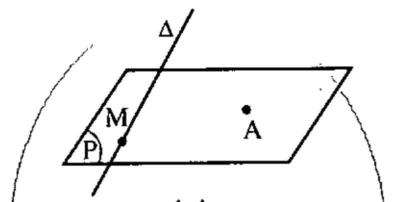


(شکل۳)

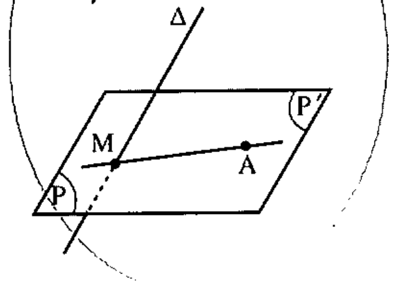


(شکل۴)

۲. اگر نقطه‌ی A فقط روی صفحه‌ی P باشد و خط Δ موازی صفحه‌ی P نباشد (شکل۵)، صفحه‌ی P' بر صفحه‌ی P منطبق خواهد شد. پس اگر نقطه‌ی برخورد خط Δ با صفحه‌ی P را M بنامیم، خط AM جواب مسئله است، زیرا: از نقطه‌ی A می‌گذرد، خط Δ را در نقطه‌ی M قطع کرده و موازی صفحه‌ی P است؛ چون روی این صفحه است. این جواب منحصر به فرد است (شکل۶).

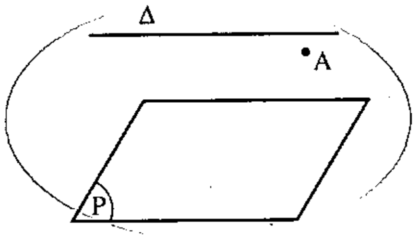


(شکل۵)



(شکل۶)

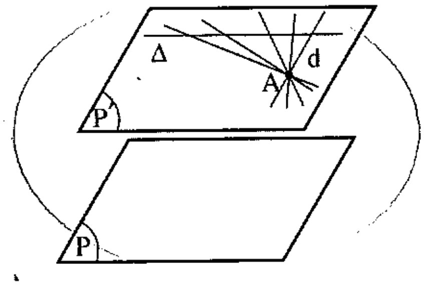
۳. اگر نقطه‌ی A روی صفحه‌ی P و خط Δ نباشد، اما خط Δ موازی صفحه‌ی P باشد (شکل۷)، در این حالت صفحه‌ی P' که از نقطه‌ی A موازی صفحه‌ی P رسم می‌شود، نسبت به خط Δ دو حالت می‌تواند پیدا کند:



(شکل۷)

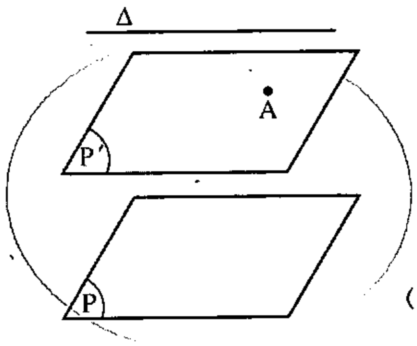
الف) خط Δ روی صفحه‌ی P' قرار گیرد (شکل۸). در این صورت، هر خطی مانند d که از نقطه‌ی A در صفحه‌ی P'

رسم شود و خط Δ را قطع کند، جواب مسئله است و مسئله بی‌شمار جواب دارد.



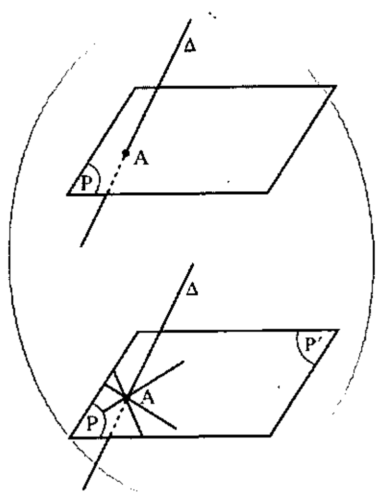
(شکل۸)

ب) خط Δ روی صفحه‌ی P′ قرار نگیرد. در این صورت، خط Δ موازی صفحه‌ی P′ خواهد بود و در این حالت مسئله جواب ندارد. یعنی هیچ خطی وجود ندارد که از نقطه‌ی A بگذرد، موازی صفحه‌ی P باشد و خط Δ را قطع کند (شکل۹).



(شکل۹)

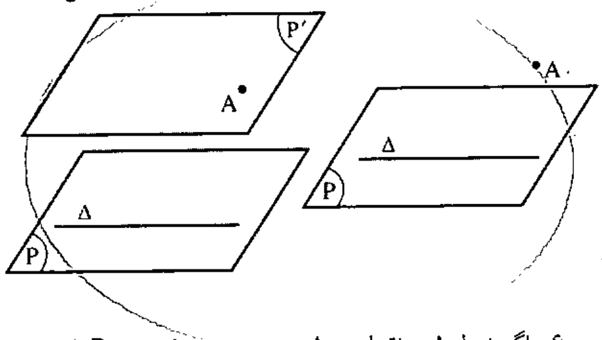
۴. اگر خط Δ با صفحه‌ی P متقاطع باشد و نقطه‌ی برخورد آن‌ها همان نقطه‌ی A باشد (شکل۱۰)، صفحه‌ی P′ که از نقطه‌ی A موازی صفحه‌ی P رسم می‌شود، بر صفحه‌ی P منطبق است و در این حالت هر خطی که از نقطه‌ی A در صفحه‌ی P رسم شود، جواب مسئله است و مسئله بی‌شمار جواب دارد (شکل۱۱).



(شکل۱۰)

(شکل۱۱)

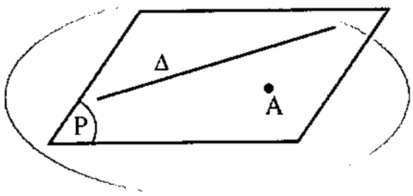
۵. اگر خط Δ روی صفحه‌ی P باشد و نقطه‌ی A روی صفحه‌ی P نباشد (شکل۱۲)، در این صورت صفحه‌ی P′ که از نقطه‌ی A موازی صفحه‌ی P رسم شده است، با خط Δ موازی خواهد بود و هر خطی که از این نقطه در صفحه‌ی P′ رسم شود، خط Δ را قطع نخواهد کرد. پس مسئله دارای جواب نیست.



(شکل۱۲)

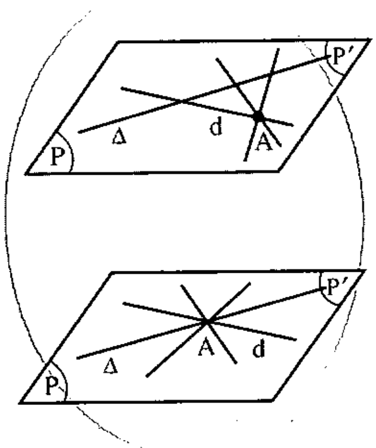
(شکل۱۳)

۶. اگر خط Δ و نقطه‌ی A هر دو روی صفحه‌ی P باشند (شکل۱۴)، صفحه‌ی P′ بر صفحه‌ی P منطبق خواهد بود. در این حالت هر خطی مانند d از صفحه‌ی P که از نقطه‌ی A بگذرد و خط Δ را قطع کند، جواب مسئله است و مسئله در این حالت بی‌شمار جواب دارد.



(شکل۱۴)

در این حالت نقطه‌ی A می‌تواند روی خط Δ باشد که در این صورت، همه‌ی خط‌هایی از صفحه‌ی P که از نقطه‌ی A متقاطع با خط Δ رسم می‌شوند، جواب مسئله هستند.



(شکل۱۵)

(شکل۱۶)

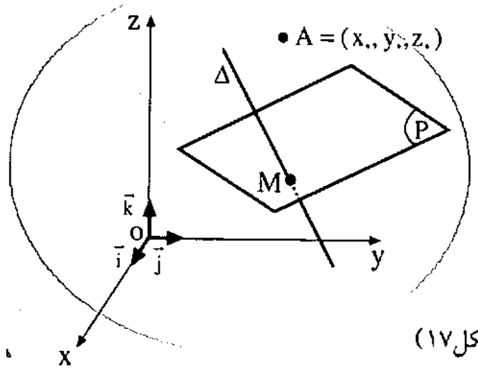
بدیهی است که مسئله بی‌شمار جواب دارد (شکل۱۶).

سؤال: آیا مسئله حالت دیگری نیز می‌تواند داشته باشد؟

ب) روش جبری

دستگاه مختصات قائم o-xyz را که از سه محور دو به دو عمود برهم $x'ox$، $y'oy$ و $z'oz$ به ترتیب با بردارهای یکه‌ی $\vec{i}$، $\vec{j}$ و

$\vec{k}$ تشکیل شده است، در نظر می‌گیریم. در این صورت:



(شکل۱۷)

- نقطه‌ی A به مختصات $A=(x_0,y_0,z_0)$؛
- صفحه‌ی P به معادله‌ی $ax+by+cz+d=0$؛
- خط Δ به معادله‌ی $\dfrac{x-x_1}{p}=\dfrac{y-y_1}{q}=\dfrac{z-z_1}{r}$،

خواهند بود.

اکنون می‌خواهیم معادله‌ی خطی را بنویسیم که از نقطه‌ی $A=(x_0,y_0,z_0)$ می‌گذرد، با صفحه‌ی $P:ax+by+cz+d=0$ موازی است و خط $D:\dfrac{x-x_1}{p}=\dfrac{y-y_1}{q}=\dfrac{z-z_1}{r}$ را قطع می‌کند.

با توجه به این‌که مکان هندسی خط‌هایی که از یک نقطه موازی یک صفحه رسم می‌شوند، صفحه‌ای است که از آن نقطه موازی آن صفحه رسم می‌شود، باید معادله‌ی صفحه‌ی P' را که از نقطه‌ی A موازی صفحه‌ی P رسم می‌شود، بنویسیم. می‌دانیم معادله‌ی تمامی صفحه‌هایی که موازی صفحه‌ی $P:ax+by+cz+d=0$ هستند، به‌صورت $ax+by+cz+d'=0$ است. برای این‌که این صفحه از نقطه‌ی $A=(x_0,y_0,z_0)$ بگذرد، باید مختصات این نقطه در معادله‌ی آن صدق کند؛ یعنی داشته باشیم:

$$ax_0+by_0+cz_0+d'=0 \Rightarrow d'=-(ax_0+by_0+cz_0)$$

پس صفحه‌ی P' به معادله‌ی زیر است:

$$P':ax+by+cz-(ax_0+by_0+cz_0)=0$$

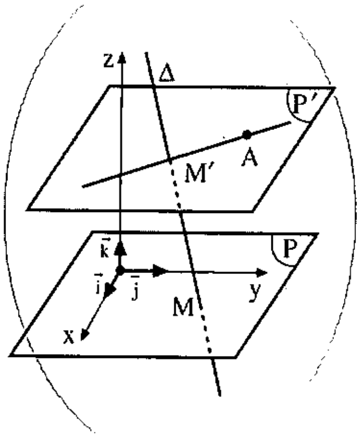
اکنون مختصات نقطه‌ی M'، محل برخورد صفحه‌ی P' با خط Δ را، با حل دستگاه سه معادله‌ی سه مجهولی زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{matrix}P':\\ \Delta\end{matrix}\begin{cases}ax+by+cz-(ax_0+by_0+cz_0)=0\\ \dfrac{x-x_1}{p}=\dfrac{y-y_1}{q}=\dfrac{z-z_1}{r}=t\end{cases}\Rightarrow M'=(x_2,y_2,z_2)$$

با داشتن مختصات دو نقطه‌ی $A=(x_0,y_0,z_0)$ و $M'=(x_2,y_2,z_2)$، معادله‌ی خط AM' را به این صورت می‌نویسیم:

$$AM':\frac{x-x_0}{x_2-x_0}=\frac{y-y_0}{y_2-y_0}=\frac{z-z_0}{z_2-z_0}$$

نکته‌ی مهم۱. بحث در وجود جواب برای مسئله و تعداد جواب‌های مسئله (در صورت وجود) در رویکرد جبری برای حل مسئله، همانند راه‌حل هندسی آن است. شما خود می‌توانید آن‌ها را بررسی کنید.



(شکل۱۸)

نکته‌ی مهم۲. برای حل مسئله به روش جبری- مختصاتی، ما می‌توانیم دستگاه مختصات قائم o-xyz را چنان اختیار کنیم که صفحه‌ی xoy همان صفحه‌ی P باشد. در این صورت خواهیم داشت:

- صفحه‌ی P به معادله‌ی $z=0$
- نقطه‌ی A به مختصات $A=(x_0,y_0,z_0)$
- خط Δ به معادله‌ی $\dfrac{x-x_1}{p}=\dfrac{y-y_1}{q}=\dfrac{z-z_1}{r}$

در این دستگاه مختصات، صفحه‌ی P' به معادله‌ی $z=z_0$ خواهد بود و مختصات نقطه‌ی M' از دستگاه سه معادله‌ی سه‌مجهولی:

$$\begin{matrix}P':\\ \Delta:\end{matrix}\begin{cases}z=z_0\\ \dfrac{x-x_1}{p}=\dfrac{y-y_1}{q}=\dfrac{z-z_1}{r}\end{cases}$$

به‌صورت:

$$M'\begin{cases}x=p(\dfrac{z_0-z_1}{r})+x_1\\ y=q(\dfrac{z_0-z_1}{r})+y_1\\ z=z_0\end{cases}$$

محاسبه می‌شود که پس از آن، با داشتن مختصات دو نقطه‌ی A

و M'، معادله‌ی خط AM' را می‌توان نوشت.

نکته‌ی مهم۳. همان‌طور که قبلاً هم ذکر شد، هر مسئله یا قضیه‌ی هندسه را می‌توان با رویکردهای هندسی و جبری-مختصاتی حل کرد، اما باید توجه کنیم که کدام روش ساده‌تر است. در انتخاب رویکرد جبری-مختصاتی، نکته‌ی مهمی که حتماً باید به آن توجه داشته باشیم، چگونگی انتخاب دستگاه مختصات است.

اینک چند مثال از رویکرد جبری-مختصاتی مسئله‌ی داده شده را می‌بینیم:

مثال اول. نقطه‌ی $A=(2,5,-1)$ و خط $\Delta: \frac{x}{4}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+2}{3}$ و صفحه‌ی P به معادله‌ی $2x+y-2z-3=0$ داده شده است. معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی A می‌گذرد، با صفحه‌ی P موازی است و خط Δ را قطع می‌کند.

حل: نخست می‌توانیم وضع نقطه‌ی A، خط Δ و صفحه‌ی P را نسبت به هم مشخص کنیم، اما نیازی به این کار نیست. ما راه‌حل کلی را که برای روش جبری-مختصاتی بیان کردیم، به‌کار می‌بریم. به این ترتیب که نخست معادله‌ی صفحه‌ی P' را که از نقطه‌ی A موازی صفحه‌ی P رسم می‌شود، می‌نویسیم. سپس نقطه‌ی برخورد P' با خط Δ را به‌دست می‌آوریم و M' می‌نامیم. آن‌گاه معادله‌ی خط AM'، یعنی خط خواسته شده را می‌نویسیم. داریم:

معادله‌ی کلی صفحه‌های موازی صفحه‌ی P $\quad 2x+y-2z+d=0$

$$A=(2,5,-1)\xrightarrow{\text{در معادله‌ی بالا}}2(2)+(5)-2(-1)+d=0\Rightarrow d=-11$$

$$\Rightarrow 2x+y-2z-11=0 \qquad \text{معادله‌ی صفحه‌ی } P'$$

$$\begin{cases} P': 2x+y-2z-11=0 \\ \Delta: \frac{x}{4}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+2}{3}=t \end{cases} \Rightarrow x=4t,\ y=-t-1,\ z=3t-2$$

$$\Rightarrow 2(4t)+(-t-1)-2(3t-2)-11=0\Rightarrow t=8$$

$$\Rightarrow M'=(32,-9,22)\ ,\ \ A=(2,5,-1)$$

$$\Rightarrow AM': \frac{x-2}{32-2}=\frac{y-5}{-9-5}=\frac{y+1}{22+1}\Rightarrow\frac{x-2}{30}=\frac{y-5}{-14}=\frac{y+1}{23}$$

معادله‌ی خط AM'

نکته: معادله‌ی صفحه‌ی p' نشان می‌دهد که نقطه‌ی A روی صفحه‌ی P نیست. زیرا اگر نقطه‌ی A روی صفحه‌ی P قرار داشت، معادله‌ی صفحه‌ی p' همان معادله‌ی صفحه‌ی P به دست می‌آمد. به‌علاوه، نقطه‌ی A روی خط Δ نیست. زیرا اگر چنین بود، مختصات نقطه‌ی M' همان مختصات نقطه‌ی A به دست می‌آمد. و این نشان می‌دهد که نیازی به بررسی وضع نقطه‌ی A، خط Δ و صفحه‌ی P نسبت به هم نیست.

مثال دوم. معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $A=(2,-1,1)$ می‌گذرد، با صفحه‌ی $P: x+y+2z+1=0$ موازی است و خط $P: \frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$ را قطع می‌کند.

حل: داریم:

معادله‌ی کلی صفحه‌ی موازی صفحه‌ی P

$$x+y+2z+d=0$$

$$A=(2,-1,1)\xrightarrow{\text{در معادله‌ی بالا}}2-1+2+d=0\Rightarrow d=-3$$

$$\Rightarrow x+y+2z-3=0 \qquad \text{معادله‌ی صفحه‌ی } P'$$

$$\begin{cases} x+y+2z-3=0 \\ \frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}=t\Rightarrow x=3t-1,\ y=2t-3,\ z=t \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3t-1+2t-3+2t-3=0\Rightarrow t=1$$

$$\Rightarrow M^1=(2,-1,1)=A$$

معادله‌ی صفحه‌ی P' نشان می‌دهد که نقطه‌ی A روی صفحه‌ی P نیست، اما مختصات نقطه‌ی M' همان مختصات نقطه‌ی A است. پس نقطه‌ی A بر خط Δ قرار دارد. بنابراین، هر خطی که از نقطه‌ی A یا همان M' در صفحه‌ی P' رسم شود، جواب مسئله است. برای نوشتن معادله‌ی هریک از این خط‌ها کافی است، یک نقطه‌ی دل‌خواه از P' را به‌دست آوریم و معادله‌ی خط گذرنده از این نقطه و نقطه‌ی A را بنویسیم. مثلاً داریم:

$$x=0, y=0\xrightarrow{\text{در معادله‌ی } P'}0+0+2z-3=0\Rightarrow z=\frac{3}{2}$$

$$B=(0,0,\frac{3}{2})\in P'$$

$$\Rightarrow AB: \frac{x-0}{2-0}=\frac{y-0}{-1-0}=\frac{z-\frac{3}{2}}{1-\frac{3}{2}}\Rightarrow\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}$$

معادله‌ی یکی از خط‌های جواب مسئله

$$x=0, z=0\xrightarrow{\text{در معادله‌ی } P'}0+y+0-3=0\Rightarrow y=3$$

$$\Rightarrow C=(0,3,0) \qquad \text{نقطه‌ی دیگری از صفحه‌ی } P'$$

$$AC: \frac{x-0}{2-0}=\frac{y-3}{-1-3}=\frac{z-0}{1-0}\Rightarrow\frac{x}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z}{1}$$

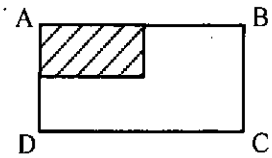
یک خط دیگر جواب مسئله

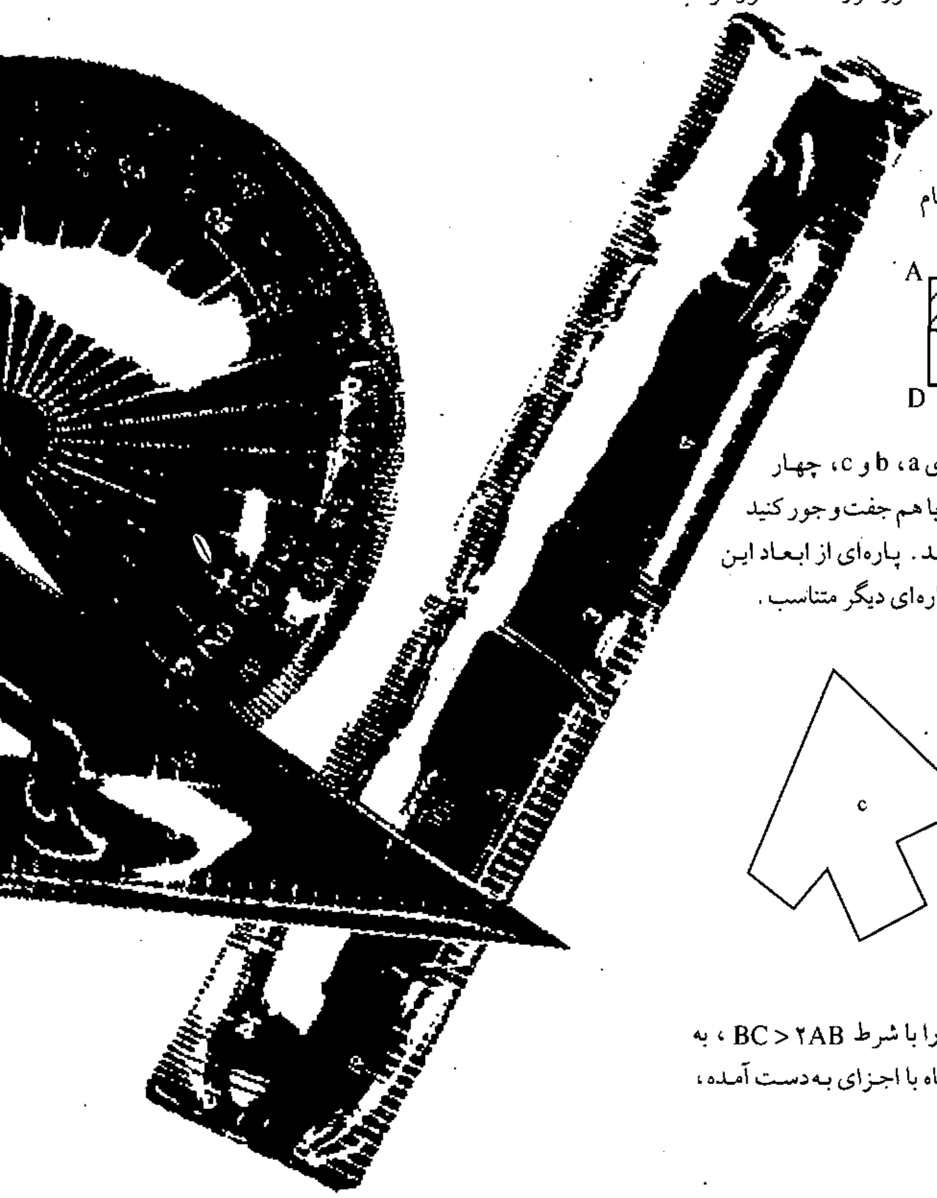
هندسی فکر کنیم

در مجله‌ی «برهان» به شماره‌ی ۵۱، پاییز سال ۱۳۸۵، در سرفصل مطلبی به نام «هندسی فکر کنیم»، گرافیست خوش‌ذوق مجله برای موضوع سؤال، چاهی در زمین چهارگوشی رسم کرده بود که دو نفر در طرفین آن به فکر نشسته بودند تا درخصوص تقسیم زمین مثلث‌شکلی بین سه نفر به قسمت‌های معادل، چاره‌ای بیندیشند و طوری عمل کنند که چاه در مرز مشترک صاحبان زمین قرار گیرد، تا هریک از آنان بتواند، در زمین سهمیه‌ی خود از آب چاه استفاده کند. این ذوق و سلیقه‌ی تحسین‌برانگیز رسام شما بنده را بر آن داشت تا در مورد این زمین چهارگوش هم مسئله‌ای مشابه را مطرح کنم.

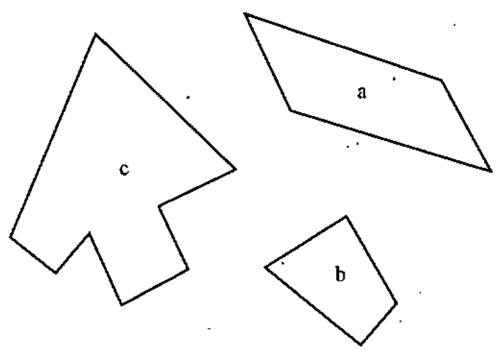
اینک آن سؤال: در زمین چهارگوش محدّب دلخواهی، چاه در نقطه‌ای حفر شده است که چون از آن نقطه دو خط به موازات قطرهای چهارضلعی رسم کنند، هریک از آن خط‌ها از وسط یک قطر آن چهارضلعی می‌گذرد. آیا می‌توانید این زمین را بین چهار نفر به قسمت‌های معادل چنان تقسیم کنید که چاه در نقطه‌ی مشترک مرزها قرار گیرد و هرکس در زمین خود به آب چاه دست‌رسی داشته باشد؟

سؤال دیگر: زمینی است به شکل مربع مستطیل ABCD. صاحب زمین، $\frac{1}{4}$ این زمین را (قسمت هاشورخورده) محصور کرد و بقیه را به چهار فرزندش سپرد تا بین خود به طور مساوی تقسیم کنند؛ آن‌طور که حدود زمین‌ها موازی ابعاد مستطیل باشد. این تقسیم را چگونه انجام می‌دهید؟

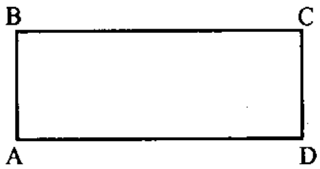




سؤال سوم: از هریک از شکل‌های a، b و c، چهار نمونه‌ی مشابه انتخاب و آن‌ها را طوری با هم جفت‌وجور کنید که یک هشت‌ضلعی منتظم به‌دست آید. پاره‌ای از ابعاد این شکل‌ها در مقایسه با هم مساوی‌اند و پاره‌ای دیگر متناسب.



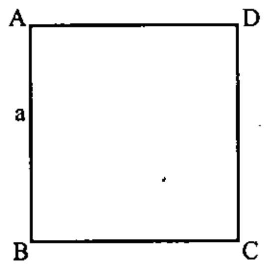
سؤال چهارم: مستطیل ABCD را با شرط BC > ۲AB، به اجزایی چند تجزیه و تقسیم کنید و آن‌گاه با اجزای به‌دست آمده، مربعی معادل با آن بسازید.



این سؤال از مونتو کلا[1] (۱۷۷۸ م) است که آن را در جلد نوزدهم «آشنایی با ریاضیات» (خردادماه ۱۳۶۷) به سردبیری آقای **شهریاری** هم به‌چاپ رسانده‌ام.

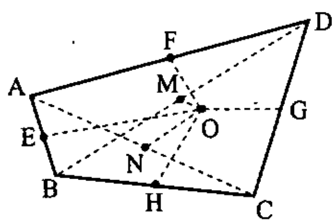
سؤال پنجم: سطح مربع ABCD به ضلع a را به سه قسمت متعادل تقسیم کنید، به‌نحوی که جاده‌ای به عرض l از بین دو قسمت متعادل بگذرد و سه قسمت را به هم مرتبط سازد.

این سؤال از **ابوالوفا بوزجانی** است که راه‌حلی هم برای آن ارائه داده است.



راهنمایی در مورد سؤال اول:

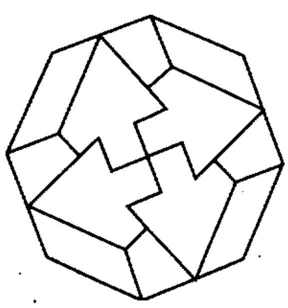
کافی است از O محل حفر چاه، خطوطی به وسط اضلاع چهارضلعی وصل شود.

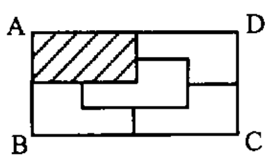


استدلال معادل بودن شکل‌های حاصل را به‌عهده‌ی دانش‌آموز می‌گذارم؛ مثلاً:

$$S_{OEAF} = \frac{۱}{۴} S_{BADC}$$

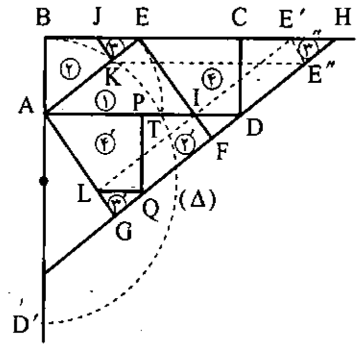
در مورد سؤال‌های دوم و سوم، فقط به رسم شکل اکتفا می‌کنم.





حل سؤال چهارم: یک حالت از شکل را در انطباق با شرط مسئله در این‌جا نشان داده‌ام. می‌توان با شرایط دیگری نیز مسئله را حل کرد. هم‌چنین به توضیح شکل و راهنمایی بسنده کرده‌ام. ارائه‌ی

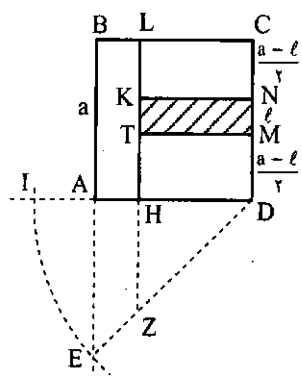
دلیل و استنتاج ساده است.



$AD' = BC$ در امتداد BA است و AT واسطه‌ی هندسی بین BA و BC. نقطه‌ی T با دوران به مرکز A و به شعاع AT، به نقطه‌ی E روی BC منتقل شده است. مربعی که روی AE ساخته شده، یعنی AEFG، جواب سؤال است و پیداست که ترکیبی از اجزای مستطیل است.

اما برای تجزیه‌ی مستطیل، خط (Δ) از رأس D را موازی AE رسم می‌کنیم. EF عمود بر Δ، ضلع AD را در I بین A و D قطع می‌کند. نقطه‌ی E را روی BC و امتدادش به اندازه‌ی AI در جهت B به C، هر چندتا که ممکن است، انتقال می‌دهیم؛ به طوری که از H (محل تلاقی Δ با BC) نگذرد (در این شکل این کار فقط یک بار میسر است و E′ به دست می‌آید). پس $EE' = AI$. از E′ آخرین نقطه‌ی انتقال‌یافته، عمود E′E″ را بر Δ رسم می‌کنیم. $EK = HE''$ و KJ عمود بر AE است. اجزای مستطیل در شکل با شماره‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ نموده شده‌اند. همین اجزا در ترکیب مربع نیز مشخص‌اند (قطعه‌ی ۲′ = ۲ و قطعه‌ی ۳′ = ۳ و...).

حل سؤال پنجم[1]: روی ضلع CD، دو طول NC و DM را مساوی $\frac{a-1}{۲}$ انتخاب می‌کنیم؛ پس: $MN = 1$. ضلع DA را تا I به اندازه‌ی $AI = DM$ امتداد می‌دهیم. قوسی به مرکز D و به شعاع DI امتداد ضلع BA را در E قطع می‌کند. EZ را مساوی DM روی DE جدا می‌کنیم و خط ZHL را موازی AB می‌کشیم. با توجه به موازی‌های NK و MT، سه قطعه‌ی مطلوب و معادل، KLCN و HTMD و ABLH هستند و جاده‌ی مورد نظر قسمت هاشورخورده است (محاسبه کنید).



1. Montucla

The Math Forum
@ Drexel

معرفی سایت‌های ریاضی جهان

● احسان یارمحمدی

ادامه‌ی مطالب صفحه ۶

۳. مسائل هفتگی مجله‌ی ریاضی (Math Forum Problems of the Week) این بخش شامل مسائل ریاضیاتی است که در موضوعات زیر دسته‌بندی شده‌اند و هر هفته ارائه می‌گردند:

۱. مبانی ریاضی (Math Fundamentals)
۲. جبر مقدماتی (Pre-Algebra)
۳. جبر (Algebra)
۴. هندسه (Geometry)

۴. مسائل بیشتر و معماها
(More problems and Puzzles)

تعدادی از عنوان‌های ارائه شده در این قسمت عبارت‌اند از:

۱. مسئله‌ی هفتگی مقدماتی
(Elementary problem of the Week)

۲. مسئله‌ی هفتگی دوره‌ی راهنمایی
(Middle School Problem of the Week)

۳. مسئله‌ی هفتگی مثلثات و حساب دیفرانسیل و انتگرال
(Trigonometry & Calculus of the Week)

۴. مسئله‌ی هفتگی ریاضیات گسسته
(Discrete Math problem of the Wee)

۵. پروژه‌ی ماهیانه ی هندسه
(Geometry Project of the Month)

۶. مسئله‌ی هفتگی کالج مک‌آلیستر
(Macalester College Problem of the Week)

۷. مسائل هفتگی تهیه شده به وسیله‌ی دیگران
(Problems of the Week Administerd by Others)

صفحه‌ی اصلی سایت The Math Forum @Drexel نیز دارای قسمتی با عنوان مشاهده‌ی بایگانی (Browse the Archive) است، شال موضوعات زیر:

۱. اغلب پرسش‌های پاسخ داده شده
(FAQ که مخفف Frequently Asked Questions است.)
۲. فرمول‌ها (Formulas)
۳. پاسخ‌های انتخاب شده (Selected Answers)
۴. دوره‌ی ابتدایی (Elementary School)
۵. دوره‌ی راهنمایی (Midlle School)
۶. دوره‌ی متوسطه(High School)
۷. کالج و بالاتر (College & Beyond)

جمع چیست؟

● میر شهرام صدر

اشاره

از هر کسی سؤال کنید: حاصل ۳+۲ چند می‌شود، بلافاصله می‌گوید: ۵. اگر دوباره از همان شخص بپرسید: آیا می‌توان به جای عمل جمع، بین دو عدد ۲ و ۳ عمل دیگری انجام داد و در این صورت، حاصل چه می‌شود، با کمی تأمل پاسخ می‌دهد، به جای عمل جمع، می‌توان عمل ضرب را بین دو عدد قرار داد و آن را به صورت ۳×۲ نوشت که حاصل آن برابر با ۶ می‌شود.

اگر این سؤال را دوباره تکرار کنید، ممکن است بگویند، عمل‌های تفریق و تقسیم را هم می‌توان بین این دو عدد انجام داد. درنتیجه خواهیم داشت:

۲-۳=-۱

$$۲ \div ۳ = \frac{۲}{۳}$$

حال اگر همان سؤال قبلی را دوباره تکرار کنیم که: آیا می‌توان بین ۲ و ۳ عمل دیگری را انجام داد؟ ناگهان طرف مقابل پاسخ خواهد داد که: «**ما فقط چهار عمل اصلی را روی اعداد به کار می‌بریم و عمل دیگری را نمی‌شناسیم!**»

حق با اوست. در این مقاله سعی خواهیم کرد که مفهوم عمل بین دو عدد (یا دو عضو یک مجموعه) را بیان کنیم. سپس به غیر از چهار عمل اصلی، عمل‌های دیگری را بین دو عضو یک مجموعه تعریف می‌کنیم تا شما نیز بتوانید، خودتان عملیات دیگری را بین اعضای یک مجموعه تعریف کنید.

قبل از این‌که وارد بحث اصلی شویم، سؤالی دیگر را مطرح می‌کنیم که انگیزه‌ی اصلی از نگارش این مقاله است. معمولاً وقتی این سؤال را در کلاس درس از دانش‌آموزان می‌پرسیم، نسبت به آن اظهار بی‌اطلاعی می‌کنند. قبل از پاسخ به این سؤال، ابتدا باید چند مفهوم را برایشان شرح دهیم تا دید دانش‌آموزان نسبت به عمل بین دو عضو یک مجموعه، باز شود. حال این شما و این هم سؤال!

جمع یعنی چه؟

یعنی این عمل جمع که بین ۲ و ۳ انجام دادیم و گفتیم حاصل آن ۵ می‌شود. چه معنی دارد؟ برای پاسخ‌گویی به این سؤال، ابتدا مفهوم تابع را بیان می‌کنیم.

مفهوم تابع

تکامل مفهوم تابع حدود دو قرن به طول انجامید. **دیریکله**، ریاضی‌دان آلمانی (۱۸۵۹-۱۸۰۵ م) در اواسط قرن نوزدهم، تعریف امروزی تابع را به صورتی روشن بیان کرد و گفت: «y تابعی از متغیر x در بازه‌ی $a < x < b$ است؛ به شرطی که هر مقدار x از این بازه، با مقدار معین و مشخص از y متناظر باشد؛ البته این تناظر می‌تواند به هر ترتیب دل‌خواهی باشد.»

پیش از این تعریف، برای نخستین بار، مقدار متغیر (تابع) در قرن هفدهم و در نوشته‌های هندسی فرما (۱۶۵۵-۱۶۰۱ م) و دکارت، ریاضی‌دان فرانسوی، مطرح شد.

برای مثال، دکارت در کتاب هندسه‌ی خود، مفهوم تابع را به عنوان «تغییر عرض درنتیجه‌ی تغییر طول» بررسی می‌کند.

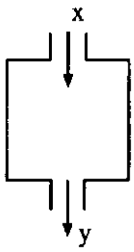
در قرن هجدهم، یوهان برنولی (۱۷۴۸-۱۶۶۷ م) دیدگاه جدیدی را نسبت به تابع مطرح می‌کند. او می‌گوید: «تابع دستوری است که مقدار یک متغیر را با مقدار متغیر دیگر درنظر می‌گیرد.»

در سال ۱۷۴۸، **لئوناردا ویلر، شاگرد یوهان برنولی**، نماد f (Function) را برای تابع درنظر گرفت و آن را از دیدگاه تحلیلی به این صورت مطرح کرد:

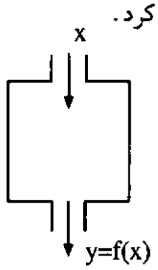
«تابع یک متغیر عبارت است از یک عبارت تحلیلی که به نحوی از این مقدار متغیر و از عددها یا مقدارهای ثابت تشکیل شده است.»

همان‌طور که ملاحظه کردید، تعریف تابع به صورت امروزی بین ریاضی‌دانان رایج نبود، بلکه همه‌ی آنان تصویر ذهنی مشترکی از این مفهوم داشتند. بهتر است برای بیان مفهوم تابع، از آن تصور ذهنی استفاده کنیم و مانند آن‌ها با مفهوم تابع درگیر شویم.

این تصور چنین بود که تابع مانند یک ماشین عمل می‌کند؛ به طوری که یک x را از ورودی می‌گیرد و تنها یک مقدار y از خروجی بیرون می‌دهد. پس می‌توان ابتدا از مدل زیر برای بیان مفهوم تابع استفاده کرد:



چون ماشین f عملی را روی x انجام می‌دهد، می‌توان عمل انجام‌شده روی x را با f(x) نمایش داد. بنابراین می‌توان در خروجی به جای y از نماد f(x) استفاده کرد.

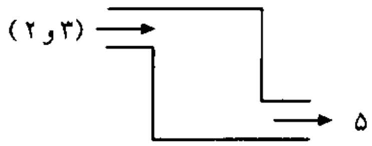


اکنون به این سؤال پاسخ می‌دهیم که جمع یعنی چه؟

تابعی مانند ماشین زیر را درنظر بگیرید؛ به طوری که از ورودی آن دو عدد x_1 و x_2 وارد ماشین می‌شوند. سپس ماشین عملی به نام جمع را روی x_1 و x_2 انجام می‌دهد. عمل انجام شده روی x_1 و x_2 را با نماد $f(x_1,x_2)$ یا $+(x_1,x_2)$ نمایش می‌دهیم.

از خروجی ماشین عددی بیرون می‌آید که حاصل جمع $x_1 + x_2$ است.

برای مثال، اگر دو عدد ۲ و ۳ را وارد ماشین کنیم، در خروجی عدد ۵ را ملاحظه خواهیم کرد.

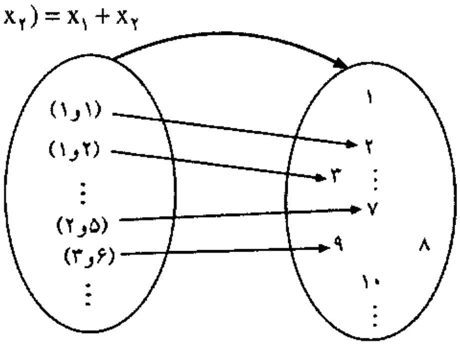


$$f(2,3) = +(2,3) = 2+3 = 5$$

این ماشین را تابع جمع یا ماشین جمع می‌نامیم.

مجموعه‌ی اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ را درنظر بگیرید. اگر هر دو عدد طبیعی x_1 و x_2 وارد ماشین جمع شوند، آن‌گاه از خروجی یک عدد طبیعی بیرون می‌آید که برابر با $x_1 + x_2$ است. درنتیجه، عمل جمع روی مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ یک تابع است. یعنی برای هر $(x_1 x_2) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$، یک عدد طبیعی به صورت $(x_1 + x_2) \in \mathbb{N}$ وجود دارد که متناظر با آن است. بنابراین، تابع جمع را روی $\mathbb{N}$ می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} +:\mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ +(x_1,x_2) = x_1 + x_2 \end{cases}$$



$$f(1,1) = +(1,1) = 1+1 = 2$$
$$f(1,2) = +(1,2) = 1+2 = 3$$
$$\vdots$$
$$f(2,5) = +(2,5) = 2+5 = 7$$
$$f(3,6) = +(3,6) = 3+6 = 9$$
$$\vdots$$

به طور کلی، تابع جمع را روی مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ یک عمل دوتایی می‌نامیم. عمل دوتایی در مجموعه‌ی A، به ازای هر زوج مرتب از مجموعه‌ی $A \times A$، طبق دستور (ضابطه‌ی تابع) عضوی منحصر به فرد از A را مشخص می‌کند.

عمل دوتایی

تعریف: هر تابع $f: A \times A \to A$ را یک عمل دوتایی روی A می‌گوییم. یعنی عمل دوتایی f روی A، به هر زوج مرتب (x,y) از $A \times A$، عضو منحصربه‌فرد $z = f(x,y)$ از A را نسبت می‌دهد.

مثال: مجموعه‌ی $A = \{-1,0,1\}$ را درنظر بگیرید:

الف) آیا عمل ضرب معمولی روی A یک عمل دوتایی است؟

ب) آیا عمل جمع معمولی روی A یک عمل دوتایی است؟

حل:

الف) ابتدا $A \times A$ را تشکیل می‌دهیم:

$$A \times A = \{-1,0,1\} \times \{-1,0,1\}$$
$$= \{(-1,-1),(-1,0),(-1,1),(0,-1),(0,0),(0,1),(1,-1),(1,0),(1,1)\}$$

اکنون عمل ضرب معمولی را روی هر زوج مرتب (x,y) از $A \times A$ اعمال می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$\times(-1,-1) = (-1)\times(-1) = 1 \in A$$
$$\times(-1,0) = (-1)\times 0 = 0 \in A$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\times(1,1) = 1\times 1 = 1 \in A$$

ملاحظه می‌کنیم که برای هر (x,y) از $A \times A$، داریم:

$$\times(x,y) = x \times y = z \in A$$

در نتیجه، عمل ضرب معمولی روی A یک عمل دوتایی است، یا مجموعه‌ی A نسبت به عمل ضرب معمولی بسته است.

تذکر: اگر عملی روی مجموعه‌ی A یک عمل دوتایی باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی A نسبت به آن عمل دوتایی بسته است.

ب) برای این منظور، عمل جمع معمولی را روی هر زوج مرتب (x,y) از $A \times A$ اعمال می‌کنیم:

$$+(-1,-1) = (-1)+(-1) = -2 \notin A$$

چون به یک مثال نقض رسیدیم، پس عمل جمع معمولی روی A یک عمل دوتایی نیست. به عبارت دیگر، مجموعه‌ی A نسبت به عمل جمع بسته نیست.

خلاصه

برای این که نشان دهیم، تابع f روی مجموعه‌ی A یک عمل دوتایی است، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

مرحله‌ی اول: مجموعه‌ی $A \times A$ را تشکیل می‌دهیم.

مرحله‌ی دوم: تابع f را روی هر زوج مرتب $(x,y) \in A \times A$ اعمال می‌کنیم. در صورتی که همواره حاصل $z = f(x,y)$ عضوی از A باشد، آن‌گاه f روی A یک عمل دوتایی است.

تذکر: اگر حتی یک مثال نقض پیدا شود که $z = f(x,y)$ عضوی از A نباشد، آن‌گاه f روی A یک عمل دوتایی نیست.

مثال: آیا عمل تفریق و عمل تقسیم روی مجموعه‌ی اعداد صحیح یک عمل دوتایی است؟

عمل تفریق روی Z یک عمل دوتایی است، زیرا برای هر زوج مرتب $(x,y) \in Z \times Z$ داریم:

$$f(x,y) = -(x,y) = x - y \in Z$$

اما عمل تقسیم روی Z یک عمل دوتایی نیست، زیرا: $(2,3) \in Z \times Z$؛ در حالی که:

$$f(2,3) = \div(2,3) = \frac{2}{3} \notin Z$$

همان‌طور که گفتیم ذکر یک مثال نقض برای رد کردن دوتایی بودن عمل تقسیم کافی است.

سؤال: به نظر شما عمل تقسیم روی چه مجموعه‌ای عمل دوتایی است؟

فعالیت ۱. مجموعه‌ی $A = \{1,2,3\}$ را درنظر بگیرید. یک عمل روی A تعریف کنید.

مرحله‌ی اول: مجموعه‌ی $A \times A$ را تشکیل دهید.

$$A \times A = \{(1,1),(1,2),\cdots,(3,3)\}$$

مرحله‌ی دوم: تابعی از $A \times A$ در A تعریف کنید؛ برای مثال:

$$(1,1) \xrightarrow{f} 1$$
$$(1,2) \xrightarrow{f} 1$$
$$(1,3) \xrightarrow{f} 1$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$(3,2) \xrightarrow{f} 3$$
$$(3,3) \xrightarrow{f} 3$$

ضابطه‌ی این تابع را می‌توان به صورت $f(x,y) = x$ درنظر گرفت. درنتیجه، تابع با ضابطه‌ی $f(x,y) = x$ یک عمل دوتایی روی A است.

سؤال: آیا شما می‌توانید عمل‌های دوتایی دیگری را روی A تعریف کنید؟

دیدیم که عمل‌های جمع معمولی و ضرب معمولی روی $\mathbb{N}$ عمل‌های دوتایی هستند. اعمال دوتایی دیگری را می‌توان روی $\mathbb{N}$ تعریف کرد که معمولاً آن‌ها را با علامت‌های $*$، $\circ$، $\oplus$، $\otimes$ و نظایر آن نمایش می‌دهیم. در این صورت به جای $f(x,y)$ می‌توان $*(x,y)$ یا $x*y$ را نوشت.

برای مثال عمل $x*y = 2x + y + 1$ روی مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ یک عمل دوتایی است، زیرا برای هر زوج مرتب $(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$، وقتی عمل $*$ روی (x,y) اثر می‌کند، حاصل آن یعنی $2x + y + 1$ یک عدد طبیعی است.

اما عمل $x \oplus y = x - y + 1$ روی $\mathbb{N}$ یک عمل دوتایی نیست؛ زیرا برای زوج مرتب $(2,3) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ طبق عمل $\oplus$ می‌توان نوشت:

$$\oplus(2,3) = 2 \oplus 3 = 2 - 3 + 1 = 0 \notin \mathbb{N}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید $(2,3) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$، اما: $\oplus(2,3) \notin \mathbb{N}$. پس عمل $\oplus$ روی $\mathbb{N}$ یک عمل دوتایی نیست یا مجموعه‌ی اعداد طبیعی نسبت به عمل $\oplus$ بسته نیست.

مثال: عمل $*$ را روی مجموعه‌ی اعداد طبیعی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} *: \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ *(x,y) = [x,y] \end{cases}$$

منظور از $[x,y]$ همان ک.م.م دو عدد y و x است. آیا $*$

روی $\mathbb{N}$ یک عمل دوتایی است؟

حل: بله، زیرا برای هر $(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ داریم:

$$*(x,y)=[x,y]\in\mathbb{N}$$

برای مثال می‌توان نوشت:

$$*(15,6)=30\in\mathbb{N}$$
$$*(2,3)=6\in\mathbb{N}$$
$$*(a,a)=a\in\mathbb{N}$$

مثال: مجموعه‌ی اعداد گنگ نسبت به عمل جمع و ضرب معمولی بسته نیست، زیرا برای مثال:

$$(1-\sqrt{2},1+\sqrt{2})\cup Q^c\times Q^c$$

این در حالی است که:

$$(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=2\notin Q^c$$
$$(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=1-2=-1\notin Q^c$$

فعالیت ۲. آیا جمع و ضرب معمولی روی هر یک از مجموعه‌های Z، Q و $\mathbb{R}$ عمل‌های دوتایی هستند؟

مثال: فرض کنیم: $A=\{1,2\}$. آیا دو عمل اجتماع و اشتراک روی مجموعه‌ی توانی A (مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های A که آن را با نماد $P(A)$ نمایش می‌دهیم)، عمل‌های دوتایی هستند؟

حل: واضح است که:

$$P(A)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$$

مرحله‌ی اول: $P(A)\times P(A)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$P(A)\times P(A)=\{(\varnothing,\varnothing),(\varnothing,\{1\}),(\varnothing,\{2\}),(\varnothing,\{1,2\})$$
$$(\{1\},\varnothing),(\{1\},\{1\}),(\{1\},\{2\}),(\{1\},\{1,2\})$$
$$(\{2\},\varnothing),(\{2\},\{1\}),(\{2\},\{2\}),(\{2\},\{1,2\})$$
$$(\{1,2\},\varnothing),(\{1,2\},\{1\}),(\{1,2\},\{2\}),(\{1,2\},\{1,2\})\}$$

مرحله‌ی دوم: اکنون اگر هریک از عمل‌های اجتماع یا اشتراک را در هریک از زوج‌های مرتب مجموعه‌ی $P(A)\times P(A)$ اعمال کنیم، ملاحظه خواهید کرد که حاصل آن در مجموعه‌ی $P(A)$ قرار دارد. بنابراین مجموعه‌ی $P(A)$ نسبت به عمل‌های اشتراک و اجتماع بسته است.

برای مثال:

$$\cup(\{1\},\{2\})=\{1\}\cup\{2\}=\{1,2\}\in P(A)$$
$$\cup(\varnothing,\{1\})=\varnothing\cup\{1\}=\{1\}\in P(A)$$
$$\cap(\{2\},\{1,2\})=\{2\}\cap\{1,2\}=\{2\}\in P(A)$$
$$\cap(\{1\},\{2\})=\{1\}\cap\{2\}=\varnothing\in P(A)$$

فعالیت ۳: عمل‌های اجتماع و اشتراک را روی بقیه‌ی زوج‌های مرتب مجموعه‌ی $P(A)\times P(A)$ اعمال کنید.

نکته: فرض کنیم A مجموعه‌ی ناتهی و $P(A)$ مجموعه‌ی توانی A باشد. در این صورت، عمل‌های اجتماع و اشتراک روی $P(A)$ عمل‌هایی دوتایی هستند.

مثال: در هر یک از حالت‌های زیر مشخص کنید، آیا عمل داده شده روی مجموعه‌ی مفروض دوتایی است یا خیر؟

الف) $S=Z;\ a\oplus b=a+b^2$

ب) $S=Z;\ aOb=\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a-b}$

ج) $S=\{1,-2,3,2,-4\};\ a\otimes b=|b|$

حل:

الف)
$$\begin{cases}\oplus: Z\times Z\to Z\\ \oplus\ (a,b)=a+b^2\end{cases}$$

برای هر $(a,b)\in Z\times Z$ ملاحظه خواهیم کرد:

$$\oplus\ (a,b)=a\oplus b=(\underset{\in Z}{a}+\underset{\in Z}{b^2})\in Z$$

درنتیجه عمل $\oplus$ روی Z دوتایی است.

ب)
$$\begin{cases}O: Z\times Z\to Z\\ O\ (a,b)=\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a-b}\end{cases}$$

برای $(-3,5)\in Z\times Z$ ملاحظه خواهیم کرد:

$$O\ (-3,5)=-3O5=\frac{(-3)^2+2(-3)(5)+5^2}{-3-5}$$
$$=\frac{4}{-8}=-\frac{1}{2}\notin Z$$

بنابراین، عمل O روی Z دوتایی نیست.

ج)
$$\begin{cases}*: S\times S\to S\\ *\ (a,b)=|b|\end{cases}$$

برای $(2,-4)\in S\times S$، داریم:

$$*(2,-4)=2*(-4)=|-4|$$
$$=4\notin S$$

لذا عمل $*$ روی S دوتایی نیست.

فعالیت ۴. فرض کنیم $M_{2\times2}$ مجموعه‌ی ماتریس‌های مربعی 2×2 با درایه‌های حقیقی باشند. بررسی کنید آیا عمل‌های جمع و ضرب ماتریس‌ها روی $M_{2\times2}$ عمل‌های دوتایی هستند یا خیر؟

راهنمایی:

$$M_{2\times2}=\left\{\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\middle| a,b,c,d\in R\right\}$$

نشان دهید:

$$\left(\begin{bmatrix}a_1&b_1\\c_1&d_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a_2&b_2\\c_2&d_2\end{bmatrix}\right)\in M_{2\times2}$$

$$\left(\begin{bmatrix}a_1&b_1\\c_1&d_1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}a_2&b_2\\c_2&d_2\end{bmatrix}\right)\in M_{2\times2}$$

تا این‌جا متوجه شدیم که به جز چهار عمل اصلی روی اعداد، می‌توان عمل‌های دوتایی دیگری را تعریف کرد. اکنون لازم می‌دانیم شما را با مفهومی دیگر آشنا کنیم. می‌دانید که عدد صفر عضو بی‌اثر عمل جمع اعداد است؛ یعنی: $a+0=0+a=a$.

هم‌چنین واضح است که عدد ۱ عضو بی‌اثر عمل ضرب معمولی اعداد است؛ به‌طوری که: $a\times 1=1\times a=a$.

اکنون این سؤال پیش می‌آید که عضو بی‌اثر عمل دوتایی زیر چیست؟

$$\begin{cases}\oplus Z\times Z\to Z\\ \oplus(a,b)=a+b-1\end{cases}$$

برای این منظور، عضو بی‌اثر یک عمل دوتایی را روی مجموعه‌ی مفروض A به صورت زیر بیان می‌کنیم.

عضو بی‌اثر

فرض کنیم که * روی مجموعه‌ی A یک عمل دوتایی باشد. اگر برای هر $a\in A$، عضو منحصر به فردی مانند $e\in A$ موجود باشد، به‌طوری که:

$$a*e=e*a=a$$

در این صورت e را عضو بی‌اثر عمل دوتایی * روی مجموعه‌ی A می‌گوییم.

قضیه: عمل دوتایی * را روی مجموعه‌ی A در نظر بگیرید. ثابت کنید عضو بی‌اثر این عمل دوتایی منحصربه‌فرد است.

اثبات (برهان خلف): فرض کنیم e_1 و e_2 هر دو عضو بی‌اثر عمل * روی مجموعه‌ی A باشند (فرض خلف). در این صورت چون e_1 عضو بی‌اثر عمل * است، داریم:

$$e_2*e_1=e_1*e_2=e_2 \qquad (1)$$

از طرفی e_2 هم عضو بی‌اثر عمل * است. پس داریم:

$$e_1*e_2=e_2*e_1=e_1 \qquad (2)$$

از رابطه‌های ۱ و ۲ نتیجه می‌گیریم که: $e_1=e_2$. درنتیجه، فرض خلف باطل و عضو بی‌اثر عمل * روی A منحصربه‌فرد است.

مثال: عضو بی‌اثر عمل دوتایی زیر چیست؟

$$\begin{cases}\oplus Z\times Z\to Z\\ \oplus(a,b)=a+b-1\end{cases}$$

حل: فرض کنیم $e\in Z$ عضو بی‌اثر این عمل دوتایی باشد. بنابراین داریم:

$$\oplus(a,e)=\oplus(e,a)=a$$

$$\oplus(a,e)=a\Rightarrow a\oplus e=a$$

$$\Rightarrow a+e-1=a\Rightarrow e=1\in Z \qquad (1)$$

از طرف دیگر:

$$(2)\quad \oplus(e,a)=a\Rightarrow e\oplus a=a\Rightarrow e+a-1=a\Rightarrow e=1\in Z$$

با توجه به روابط ۱ و ۲ ملاحظه می‌کنیم که $e=1$ منحصربه‌فرد است. پس e عضو بی‌اثر این عمل دوتایی روی Z است. برای مثال ملاحظه می‌کنیم:

$$4\oplus 1=4+1-1=4\Rightarrow 4\oplus 1=4$$

$$-7\oplus 1=-7+1-1=-7\Rightarrow -7\oplus 1=-7$$

مثال: آیا عمل تقسیم روی مجموعه‌ی اعداد Q^+ عضو بی‌اثر دارد؟

حل: اگر $e\in Q^+$ عضو بی‌اثر عمل تقسیم روی Q^+ باشد، آن‌گاه داریم:

$$\div(a,e)=\div(e,a)=a$$

$$\div(a,e)=a\Rightarrow a\div e=a\Rightarrow \frac{a}{e}=a\Rightarrow e=1 \qquad (1)$$

از طرف دیگر:

$$\div(e,a)=a\Rightarrow e\div a=a\Rightarrow \frac{e}{a}=a\Rightarrow e=a^2 \qquad (2)$$

با توجه به روابط ۱ و ۲ ملاحظه می‌کنیم که عضو بی‌اثر منحصربه‌فرد نیست، پس عمل تقسیم روی Q^+ عضو بی‌اثر ندارد.

مثال: عضو بی‌اثر عمل دوتایی زیر چیست؟

$$\begin{cases}*Q^+\times Q^+\to Q^+\\ *(a,b)=\dfrac{ab}{2}\end{cases}$$

حل: فرض کنیم $e\in Q^+$ عضو بی‌اثر این عمل دوتایی باشد. بنابراین داریم:

$$*(a,e)=*(e,a)=a$$

$$*(a,e)=a\Rightarrow \frac{ae}{2}=a\Rightarrow e=2 \qquad (1)$$

از طرف دیگر:

$$*(e,a)=a\Rightarrow \frac{ea}{2}=a\Rightarrow e=2 \qquad (2)$$

با توجه به روابط ۱ و ۲ ملاحظه می‌کنیم، $e=2$ منحصربه‌فرد و عضو بی‌اثر عمل * روی Q^+ است.

مثال: عمل دوتایی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases}*:(Z-\{1\})\times(Z-\{1\})\to(Z-\{1\})\\ *(m,n)=m+n-mn\end{cases}$$

الف) عضو بی‌اثر این عمل را بیابید.

ب) معادله‌ی $2*(3*x)=5$ را حل کنید.

حل:

الف) فرض کنیم $e\in(Z-\{1\})$، عضو بی‌اثر این عمل دوتایی باشد. بنابراین داریم:

$$*(a,e)=*(e,a)=a$$

$$*(a,e)=a\Rightarrow a*e=a$$

$$\Rightarrow a+e-ae=a$$

$$\Rightarrow e(1-a)=0\xrightarrow{a\neq 1}e=0 \qquad (1)$$

از طرف دیگر:

$$*(e,a)=a\Rightarrow e*a=a$$

$$\Rightarrow e+a-ea=a\Rightarrow e=0 \qquad (2)$$

از روابط ۱ و ۲ نتیجه می‌گیریم که $e=0$ منحصربه‌فرد است. پس عضو بی‌اثر این عمل دوتایی است.

ب) $2*(3*x)=5$

$$\Rightarrow 2*(3+x-3x)=5 \Rightarrow 2*(3-2x)=5$$
$$\Rightarrow 2+(3-2x)-2(3-2x)=5$$
$$\Rightarrow 5-2x-6+4x=5 \Rightarrow x=3$$

فعالیت ۵. آیا عمل تفاضل (تفریق) روی مجموعه‌ی Z دارای عضو بی‌اثر است؟

فعالیت ۶. عضو بی‌اثر هریک از عمل‌های دوتایی زیر را روی مجموعه‌ی مفروض بیابید.

الف) مجموعه‌ی ماتریس‌های ۲×۲ ($M_{2\times 2}$) با عمل دوتایی جمع ماتریس‌ها.

راهنمایی: فرض کنید $A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$، در صورتی که $E=\begin{bmatrix} e_1 & e_2 \\ e_3 & e_4 \end{bmatrix}$ عضو بی‌اثر عمل جمع ماتریس‌ها باشد، داریم:

$$A+E=E+A=A$$

ب) مجموعه‌ی ماتریس‌های ۲×۲ با عمل دوتایی ضرب ماتریس‌ها.

راهنمایی: از رابطه‌ی زیر ماتریس E را پیدا کنید.

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e_1 & e_2 \\ e_3 & e_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$$

ج) هرگاه A یک مجموعه باشد، مجموعه‌ی توانی A با عمل اشتراک.

راهنمایی: اگر $E \in P(A)$ عضو بی‌اثر عمل اشتراک باشد، برای هر $B \in P(A)$، باید داشته باشیم: $B \cap E = E \cap B = B$.

اجازه بدهید در این قسمت شما را با مفهومی دیگر آشنا کنیم. می‌دانید که اگر a یک عدد حقیقی باشد، $-a$ عضو متقابل (قرینه‌ی) a نسبت به عمل جمع اعداد است؛ به‌طوری‌که:

$$a+(-a)=-a+a=0$$

هم‌چنین واضح است که با شرط $a \neq 0$، عدد $\frac{1}{a}$ عضو متقابل (معکوس) عدد حقیقی a نسبت به عمل ضرب معمولی اعداد است؛ یعنی:

$$a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a = 1 \quad (a \neq 0)$$

اکنون این سؤال پیش می‌آید که عضو متقابل عمل دوتایی زیر چیست؟

$$\begin{cases} \oplus\, Z \times Z \to Z \\ \oplus(a,b)=a+b-1 \end{cases}$$

برای این منظور مفهوم عضو متقابل را به این صورت بیان می‌کنیم.

عضو متقابل

فرض کنیم * روی مجموعه‌ی A یک عمل دوتایی با عضو بی‌اثر e باشد. اگر برای هر $a \in A$، عضو منحصربه‌فردی مانند $a' \in A$ موجود باشد، به‌طوری‌که:

$$a*a'=a'*a=e$$

در این صورت a' را عضو متقابل a نسبت به عمل دوتایی * روی مجموعه‌ی A می‌گوییم.

مثال: عمل دوتایی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} *: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ *(a,b)=a+b+2 \end{cases}$$

الف) عضو بی‌اثر این عمل را بیابید.

ب) عضو متقابل هر عضو مانند $a \in \mathbb{R}$ را بیابید.

ج) معادله‌ی $x*(3*2)'=3$ را حل کنید.

حل:

الف) اگر e عضو بی‌اثر این عمل باشد، داریم:

$$a*e=e*a=a$$
$$a*e=a \Rightarrow a+e+2=a \Rightarrow e=-2 \qquad (1)$$

از طرف دیگر:

$$e*a=a \Rightarrow e=-2 \qquad (2)$$

با توجه به روابط ۱ و ۲ ملاحظه می‌کنیم، $e=-2$ منحصربه‌فرد و عضو بی‌اثر این عمل دوتایی است.

ب) اگر a' عضو متقابل عدد $a \in R$ باشد، داریم:

$$a*a'=a'*a=e$$
$$a*a'=e \Rightarrow a+a'+2=-2 \Rightarrow a'=-4-a \qquad (1)$$

از طرف دیگر:

$$a'*a=e \Rightarrow a'+a+2=-2 \Rightarrow a'=-4-a \qquad (2)$$

با توجه به روابط ۱ و ۲ ملاحظه می‌کنیم، $a'=-4-a$ منحصربه‌فرد و عضو متقابل عدد $a \in R$ نسبت‌به عمل دوتایی * است.

ج)

$$x*(3*2)'=3 \Rightarrow x*(3+2-2)'=3$$
$$\Rightarrow x*(3)'=3$$

چون $a'=-4-a$، پس $(3)'=-4-3=-7$. درنتیجه داریم:

$$x*(3)'=3 \Rightarrow x*(-7)=3 \Rightarrow x+(-7)+2=3 \Rightarrow x=8$$

تمرین: در هر یک از حالت‌های زیر مشخص کنید، آیا عمل داده شده روی مجموعه‌ی مفروض دوتایی است یا خیر؟ در صورتی که عمل دوتایی باشد، عضو بی‌اثر و متقابل هر عضو مانند a را به‌دست آورید.

الف) $S=Z;\ a*b=ab^2$

ب) $S=Z;\ a*b=\frac{a}{a^2+b^2}$

ج) $S=Z;\ a*b=a+b-ab$

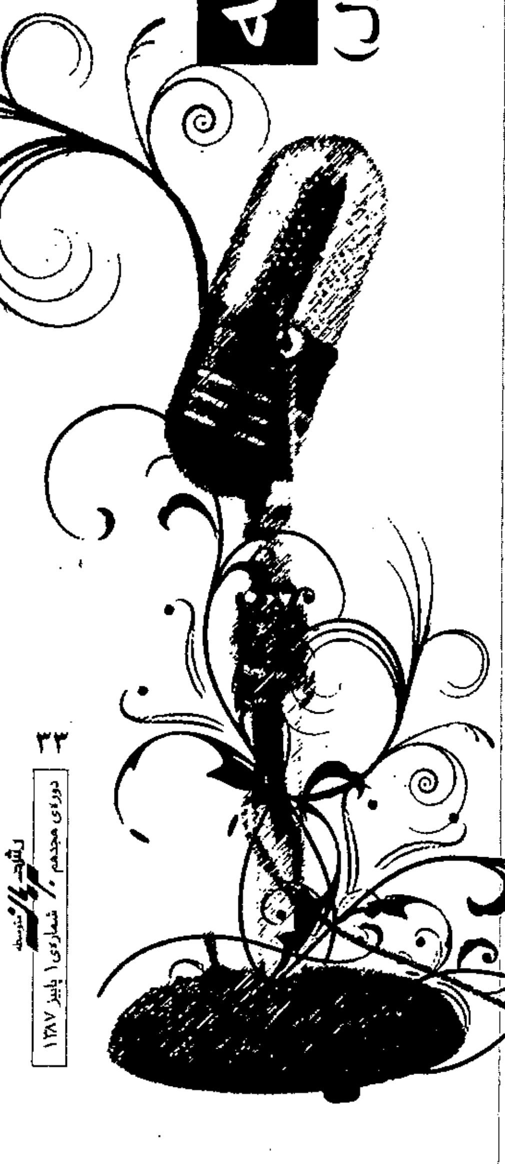
د) $S=R;\ a*b=\sqrt{a}$

۱. نخستین درس در جبر مجرد. ترجمه‌ی دکتر مسعود فرزان. مرکز نشر دانشگاهی.

۲. مباحثی در جبر. ترجمه‌ی دکتر علی‌اکبر عالم‌زاده. مؤسسه‌ی نشر علوم نوین.

3. Abstract Algebra, Afirst Course/ Dan Saracino

تولد یک مجله
(قسمت اول)



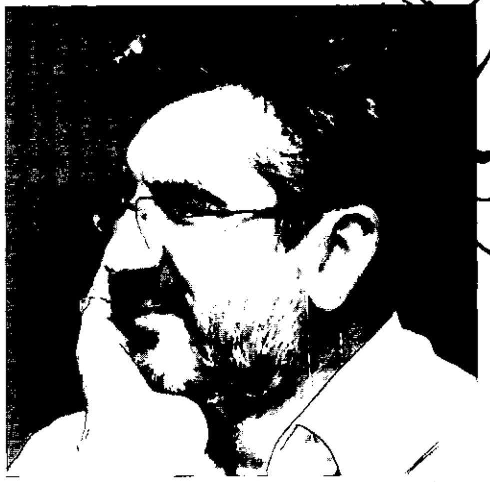
بسم‌الله الرحمن الرحیم: خدمت جناب آقای امیری هستیم، سردبیر محترم مجله‌ی رشد برهان متوسطه

آقای امیری با سلام و خسته‌نباشید خدمت شما و هم‌چنین آقای صدر که زحمت کشیدند و تشریف آوردند. اولین سؤالی که معمولاً در این‌گونه مصاحبه‌ها مطرح می‌کنند این است که محل تولد، سن و خانواده پدری شما چیست؟

■ بسم‌الله‌الرحمن الرحیم. خیلی خوش حالم که خدمت شما هستم و این فرصت دست داد که در خدمت دوستان باشیم. من سال ۱۳۴۲ در تهران متولد شدم. اصلیتم - پدر و مادرم- از استان مرکزی دهستان خورهه، از توابع شهرستان همیشه‌گل محلات هستند.

● دوره‌های دبستان، دبیرستان و دانشگاه را در تهران گذرانده‌اید؟

■ بله، دبستان دماوند، «خیابان جیهون، مدرسه راهنمایی «باربد»، خیابان هاشمی چهارراه‌کارون، در واقع غرب تهران، دبیرستان «دکتر هشترودی» منطقه‌ی ۶ که الآن شهید مطهری است. همان دبیرستانی که دو سال (اول و دوم) در میدان فلسطین بود و دو سال هم خیابان طالقانی جای دبستان فردوسی سابق. دیپلم را خرداد ۱۳۶۰ از آن‌جا گرفتم. سالی که انقلاب فرهنگی شده بود و دانشگاه‌ها تعطیل بودند و چون جنگ شروع شده بود، به خدمت سربازی اعزام شدیم. سالی که کنکور برگزار شد، چون من در خدمت سربازی بودم، مجاز نبودم امتحان بدهم. مثل الآن نبود. سال ۱۳۶۴ اولین سالی بود که می‌توانستم کنکور بدهم. من بهمن ۶۳ از خدمت سربازی مرخص شدم. همان سال کلاس کنکور هم می‌رفتم. یادم می‌آید اوایل که کلاس کنکور می‌رفتم. چون چند سالی می‌شد که از درس دور بودیم. هیچ چیز یادم نبود. یکی از دبیرهای ما وقتی می‌نوشت $y = x^{2}$ و بعد مشتق می‌گرفت و می‌نوشت $y' = 2x$ من فکر می‌کردم که فرمول جدیدی وارد ریاضی شده است؛ یعنی اصلاً هیچ سابقه‌ی ذهنی نسبت به آن نداشتم. چون این چهار سال، واقعاً از درس دور بودیم و در اوج جنگ و کار و... ولی من چون ناچار بودم خودم را به این قافله برسانم. از بهمن ۶۳ تقریباً چهارماه وقت داشتم که درس چهار سال دبیرستان را پس از چهار سال دوری از درس بخوانم به‌طور متوسط روزی ۱۸ ساعت درس خواندم. همان سال چون به ریاضی علاقه داشتم، رشته‌ی ریاضی را انتخاب کردم. اگرچه با رتبه‌هایی که آورده بودم، در تهران هر رشته مهندسی که می‌خواستم قبول می‌شدم. ولی به‌دلیل این‌که دوست داشتم نزدیک پدر و مادرم باشم،



رشته‌ی ریاضی دانشگاه اراک را انتخاب کردم. چهار سال آن‌جا بودم. بعد کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد واحد تهران شمال تهران قبول شدم. سال ۷۱، بعد از آن هم به دلایل و مشکلات مالی تقریباً نزدیک به اواخر تحصیل، آن را رها کردم.

● کی تشکیل خانواده دادید؟

■ سال ۶۶ که دانشجوی سال دوم بودم، ازدواج کردم و با همسرم در اراک مقیم شدیم. یادم نمی‌رود که ما آن موقع سه‌هزار تومان در اراک کرایه‌ی خانه می‌دادیم؛ خانه‌ای خیلی خوب بود که همه‌ی امکانات را داشت. از این سه‌هزار تومان، دوهزاروهشتصد تومان را کمک هزینه‌ی دانشجویی می‌گرفتم و برای تأمین دویست‌تومان دیگر با همه‌ی استادهایم صحبت کرده بودم و هر امتحان داخلی آخر ترم و میان‌ترم می‌گرفتند، ورقه‌هایشان را من صحیح می‌کردم. ورقه‌ای فکر می‌کنم دوتومان می‌گرفتم. البته پدرومادرم و پدرومادر همسرم خیلی کمک می‌کردند و امورات می‌گذشت. الآن که نگاه می‌کنم، ساده‌تر از الآن هم می‌گذشت! سال ۱۳۶۸ فارغ‌التحصیل شدم و به تهران آمدم.

همان سال شروع به تدریس کردم و در دبیرستان امام صادق(ع) در سه‌راه آذری درس می‌دادم. بعد هم آموزشگاه‌ها و دبیرستان‌های دیگر؛ دبیرستان البرز و دبیرستان علامه حلی (تیزهوشان) که سال‌های ۶۹ و ۷۰ آن‌جا درس می‌دادم. سال ۶۹ توسط معاون آموزشی دبیرستان تیزهوشان آقای محمدی که معاون انتشارات مدرسه شده بود با انتشارات مدرسه آشنا شدم و من را به همکاری دعوت کردند و عملاً اوایل سال ۶۹ در انتشارات مدرسه، مسئولیت گروه ریاضی را به عهده گرفتم.

● آغاز دبیری‌تان را هم می‌خواستیم بپرسیم که شما خودتان گفتید.

■ البته، من از سال ۶۵، یعنی در دوران دانشجویی، تدریس می‌کردم.

● تعداد آثارتان را بفرمائید.

■ اولین کتابم را سال ۷۰ در انتشارات رزمندگان به‌چاپ رساندم. کتابی با عنوان ریاضیات جدید. این کتاب شامل همه‌ی مباحث ریاضیات جدید چهار سال دبیرستان می‌شد. بعد از آن کتابی ترجمه کردم به نام «روش‌هایی از جبر»، که خود جناب عالی خیلی کمک کردید، و این کتاب اولین کتاب کوچک ریاضی بود.

● شما بنیان‌گذار کتاب‌های کوچک ریاضی هستید؟

■ بله، فکر اولیه‌اش از همین کتاب شروع شد و من به فکر افتادم، کتاب‌هایی موضوعی چاپ کنیم. این کار چهار ویژگی مثبت داشت. یکی این‌که اگر کسی در موضوعی اشکال داشت، نیاز نبود یک کتاب قطور بخرد که مثلاً یک فصلش ماتریس باشد. کتاب ماتریس را می‌خرید. دوم این‌که خواننده پول کمتری می‌پرداخت و سوم این‌که من به‌عنوان مؤلف دستم خیلی بازتر بود، به‌جای این‌که یک فصل از یک کتاب را به ماتریس اختصاص بدهم، یک کتاب ۱۲۰ صفحه‌ای درباره‌ی ماتریس می‌نوشتم حق کلام ادا و تمام اشکال‌ها برطرف می‌شد. این ویژگی را هم داشت که پیش‌نیاز لازم نداشت، یعنی با این ساختار، کاری نداشتیم که موضوع تابع در کتاب دوم هست یا سوم یا پیش‌دانشگاهی. ما همه‌ی مفهوم تابع را از ابتدا تا انتها در یک کتاب می‌گفتیم. بنابراین مخاطبان وسیع‌تری را پوشش می‌داد، اولین کتاب از این مجموعه، همان ترجمه‌ی کتاب «روش‌هایی از جبر» بود و تا الآن که چهلمین کتابم به اسم ریاضیات گسسته و جبر و احتمال توسط انتشارات محراب قلم به چاپ رسید.

● مجله‌ی ریاضی برهان که شما سردبیرش هستید، از کی آغاز شد، و هسته‌ی اولیه آن را چه کسانی تشکیل دادند و تا حالا سرنوشتش به کجا کشیده شده است؟

■ خب وقتی من می‌خواهم از برهان صحبت کنم، دقیقاً مثل این است که می‌خواهم راجع به بچه‌ی خودم حرف بزنم...

● از بچه‌هایتان صحبت نکردید. تعداد بچه‌هایتان را نمی‌گویید؟

■ سه فرزند دارم. فرزند بزرگم، دختر است و امسال دوره‌ی پیش‌دانشگاهی را در رشته‌ی ریاضی می‌گذراند. و ان‌شاءا... تا این مصاحبه چاپ شود دانشجوی رشته‌ی ریاضی است.

می‌خواهد در دانشگاه هم رشته‌ی ریاضی بخواند. پسرم کلاس اول راهنمایی است و دختر کوچکم به کلاس چهارم می‌رود. بله برهان، هم در واقع فرزند من است. چون واقعاً به آن علاقه دارم و به آن وابسته هستم. سالی که من دیپلم گرفتم و قبل از آن، همیشه این خلأ را احساس می‌کردم. چون اگر یادتان باشد، مجله‌ی ریاضی یکان حدوداً سال‌های قبل از انقلاب تعطیل شد.

● بله، قبل از انقلاب تعطیل شد.

■ یعنی سالی که ما دانش‌آموز بودیم، سال‌های ۵۶ و ۵۷، اصلاً مجله‌ی ریاضی وجود نداشت. از زمان دانش‌آموزی من همیشه از این موضوع رنج می‌بردم که هیچ منبعی نداشتیم. در سال ۶۹ که مسئولیت گروه ریاضی انتشارات مدرسه را به‌عهده گرفتم، به فکر انتشار مجله افتادم. مجله یکان را می‌شناختم. با این که زمان ما نبود، ولی دست معلمانم آن را دیده بودم. بعد پی‌گیری کردم و یکی دو شماره‌اش را از این طرف و آن طرف گرفتم. هنوز هم آن دو شماره را دارم و به این فکر افتادم که مجله‌ای شبیه به مجله‌ی یکان داشته باشیم. به حاج آقا

فریدون که آن موقع مدیرعامل انتشارات مدرسه بودند و الآن مدیرعامل انتشارات محراب قلم هستند، پیشنهاد کردم، ایشان گفتند کار سختی است و امکانات ما کم است آن موقع، کل کارکنان انتشارات مدرسه ده نفر بودند. گفتند که باید با حاج آقا چینی‌فروشان، صحبت کنیم. بعد از این که حاج آقا فریدون با ایشان که الان مدیر کانون پرورش فکری است صحبت کرد، ایشان بنده را خواست و گفت می‌خواهی چه کار کنی؟ کار را شرح دادم و ایشان گفت: من صددرصد این کار و طرح را قبول دارم و حتماً تو را پشتیبانی می‌کنم. رشته‌ی تحصیلی ایشان هم ریاضی بود. خیلی به ریاضی علاقه داشت و توجه آقای چینی‌فروشان واقعاً جای تشکر دارد. یعنی اگر ایشان آن زمان پشتیبانی نمی‌کرد مجله‌ی برهان پا نمی‌گرفت.

منتها آن زمان من دست تنها بودم. نه مدیر داخلی داشتیم نه حروف‌چین. شما خاطرتان هست سال‌های ۶۹ و ۷۰ حروف‌چینی رایانه‌ای نبود و دستی بود. لی‌آت و صفحه‌آرایی هم دستی بود. می‌بریدند و می‌چسباندند و خیلی مکافات داشت. من که اصلاً سابقه‌ی این کار را نداشتم. یعنی واقعاً با توکل به خدا این کار را شروع کردیم، بلافاصله به دنبال اعضای هیئت تحریریه بودم.

● یعنی فکر تأسیس مجله‌ی برهان از خود شما بود. خود شما پیشنهاد کردید و آن‌ها هم گفتند به شرط این که خودتان این کار را انجام بدهید، ما پشتیبانی می‌کنیم، منتها حرفی. چون اغلب کارها را شما خودتان انجام می‌دادید. بعد رفتید دنبال هیئت تحریریه. سال ۱۳۶۹ بود؟

■ بله، فکر می‌کنم آبان ۶۹ این کار شروع شد.

● در سن ۲۷ سالگی؟

■ بله، ۲۷ سالگی.

● این طور که شما فرمودید، شما خیلی جوان بودید.

■ من به دلیل همان سه چهار ماه حضورم در انتشارات مدرسه، با یک گروهی از مؤلفان آشنایی داشتم. آقای رستمی را می‌شناختم. همین طور خود شما را، ما افتخار داشتیم که خدمتتان باشیم.

آموزشگاهی درس می‌دادم به نام علامه، روبه‌روی دبیرستان البرز، در خیابان انقلاب. آن جا با آقای قندهاری آشنا شدم. البته در زمان دانش‌آموزی‌ام کتاب‌های ایشان را خوانده بودم و با ایشان آشنا بودم. همین طور آقای سید موسوی را از علامه حلی می‌شناختم.

آقای شهریاری را هم که کتاب‌هایشان را می‌خواندیم و با ایشان آشنایی داشتیم.

فکر می‌کنم که خود شما بعد از این سه نفر تشریف آوردید. از همان اول اعتقاد داشتم کسانی باید به هیئت تحریریه‌ی مجله‌ی ریاضی برهان بیایند که به مجله اعتبار بدهند، نه این که از مجله اعتبار بگیرند، کسانی که دیگر نیاز نباشد به خاطر شهرت، به خاطر پول، به خاطر این که اسمشان مشخص بشود، مقاله بنویسند. این‌ها همه کسانی بودند که همه‌ی ایران می‌شناختند و الحمدا... این جریان پا گرفت. اولین جلسه‌ای که گذاشتیم سه نفر بودیم؛ من و آقای شهریاری و آقای رستمی. وقتی به آقای شهریاری گفتم که می‌خواهم چنین مجله‌ای را شروع کنم، و گفتم مجله‌ای نداریم، گفتند که یک مجله چاپ می‌شود. اما دانش‌آموزی نیست. پرسیدیم چه مجله‌ای؟ گفتند «آشنایی با ریاضیات» که خود ایشان سردبیرش بود. ایشان گفت: اگر این مجله که شما می‌گویید، شروع به کار بکند و کارش را ادامه دهد، من مجله‌ام را تعطیل می‌کنم. چون این مجله همه‌ی آن اهداف را می‌تواند داشته باشد. یکی دو شماره از برهان هم که چاپ شد، ایشان دیگر مجله‌اش را تعطیل کرد و ادامه‌ی آن برایش سخت بود، چون با پول شخصی خودش آن را منتشر می‌کرد و دست تنها هم بود. برای اسم مجله هم چند پیشنهاد دادیم که آقای شهریاری پیشنهاد برهان را دادند، برهان خیلی به دل من نشست، چون هم وجهه ریاضی دارد و هم وجهه مذهبی. برهان اصلاً کلمه قرآنی است و در قرآن چند بار آمده است. و ما موافقت کردیم و اولین شماره در زمستان ۱۳۷۰ چاپ شد. آن موقع اعضای

هیئت تحریریه عبارت بودند از آقای رستمی - آقای سید موسوی - آقای هاشمی موسوی - بنده و خود شما. تا دو شماره هم آقای سید موسوی بودند ولی به دلایل شخصی کناره گیری کردند و ما از دوستان دیگر برای هیئت تحریریه استفاده کردیم. می‌توان گفت، هسته‌ی مرکزی هیئت تحریریه ما غیر از آقای سید موسوی که خواست از جمع ما خارج شود، تا این لحظه هیچ تغییری نکرده است، فقط یکی دو نفر به آن اضافه شده‌اند، یکی آقای صدر که الآن مدیر داخلی مجله هم هستند و یکی هم آقای شرقی.

● افراد جوان‌تر را به گروه تزریق کردید، چون به هرحال هیئت تحریریه داشتند پیر می‌شدند و...

■ نه، به هر صورت ما در کنار تجربه و علم بقیه، دوست داشتیم از نیروهای جوان هم استفاده کنیم.

● واقعاً انتخاب شایسته‌ای کرده‌اید. هم آقای صدر و هم آقای شرقی، هر دو افراد فاضلی هستند.

■ در شماره‌ی ۱۵ مجله، آقای صدر مقاله‌ای چاپ کردند که ما از ایشان خواهش کردیم به کمک ما بیایند. البته حساب کنید تا چند شماره این مجله را دنبالش بودیم که شماره ۱۵ شما چاپش کردید.

ایشان برای شماره‌ی ۹ یا ۱۰ مقاله‌ای به مجله دادند که ما آن را تغییراتی دادیم. بالاخره مقاله‌ای نوشتند که در شماره ۱۵ به چاپ رسید و از همان جا همکاری ما با ایشان بیشتر شد.

● موضوع بعدی در رابطه با چاپ مجله‌ی برهان است. یادم می‌آید گاهی شمارگان این مجله خیلی زیاد بود. بفرمایید بیشترین تعدادش چه قدر بوده و بعد هم تأثیر آن در آموزش ریاضی دبیرستان و پیش‌دانشگاهی چه قدر است.

■ خب مجله‌ی ریاضی برهان وقتی پا به عرصه‌ی وجود گذاشت، بی‌رقیب بود. حتی مجله‌ای هم که آقای شهریاری چاپ می‌کردند، تعطیل شد. بنابراین آن موقع با اقبال خوبی روبه‌رو شد.

یادم می‌آید، شماره‌های دوم و سوم مجله‌ی ما پنج بار چاپ شد. گاهی شمارگان مجله به ۵۰ یا ۶۰ هزار هم می‌رسید. بعد با مشکل کاغذ روبه‌روشدیم. یکی دیگر از مشکلات ما این بود که مجله را انتشارات مدرسه چاپ می‌کرد و سیستم انتشارات مدرسه طوری بود که به مجله تقریباً به چشم کتاب نگاه می‌کرد.

● برایشان صرف نمی‌کرد، ۵۰ هزار نسخه مجله چاپ کنند. به جای آن می‌توانستند ۱۰ عنوان کتاب چاپ کنند.

■ بله چون سیستم آن‌ها مجله‌ای نبود، دیر و زود هم می‌شد. یعنی تاریخ انتشار مجله تاریخی نمی‌شد که ما می‌خواستیم. فصل‌نامه باید حداقل ۲۰ روز قبل از آغاز فصل به بازار بیاید تا پخش شود. ولی ما معمولاً یا آخر فصل می‌رسیدیم یا مجبور می‌شدیم دو شماره یکی کنیم. این مشکل روی شمارگان مجله تأثیر می‌گذاشت. به خصوص این که بعضی از مقالاتمان دنباله‌دار بود یا جواب مسئله‌های این شماره، در شماره‌ی بعدی قرار می‌گرفت. مخاطب هرچه می‌نشست می‌دید بعدی در کار نیست و همان‌جا ناامید می‌شد. عده‌ای از دوستان کوشیدند این مشکل را با جابه‌جایی چاپ مجله از انتشارات مدرسه به دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، همین دفتری که الآن مجلات رشد را چاپ می‌کند تا اندازه‌ای حل کنند. منتهی هنوز هم ما در دفتر مشکل داریم. مجله‌ی ما مجله‌ای تخصصی حساب می‌شود. مجلات تخصصی مثل رشد آموزش ریاضی یا رشد آموزش فیزیک است، اما مجله‌ی ما تخصصی نیست. از نظر مبحث و موضوع تخصصی هستیم، اما از نظر مخاطب تخصصی نیستیم. مخاطب ما دانش‌آموز است. در دفتر تمام مجلات دانش‌آموزی، مجلات عمومی نامیده می‌شوند؛ مثل رشد جوان، رشد نوجوان، و این‌ها شمارگان بالای ۲۰۰ هزار دارند. اما به دلیل این که مجله ما تخصصی محسوب می‌شود، شمارگان آن فعلاً پایین است. هنوز خیلی‌ها آشنا نیستند و شناخت کافی روی آن ندارند. به خصوص این که مثلاً مخاطبان مجله‌ی رشد ریاضی معلمان هستند. معلمین ثابت‌اند، اگر کسی یک بار مجله‌ی رشد ریاضی را بخرد و بخواند و خوشش بیاید، همیشه آن را می‌خرد، اما مخاطبان ما متغیرند. یعنی دانش‌آموزی است که دانشجو می‌شود. بعد دانش‌آموزان جدیدی می‌آیند که برهان را نمی‌شناسند. الآن فکر می‌کنم که تیراژ متوسط مجله ۲۵ هزار باشد که امیدواریم به صدهزار برسد.

در مورد تأثیر مجله هم دیگران باید نظر بدهند. در حدی که خودم اطلاع دارم و نامه‌هایی که به دستمان می‌رسد، آن زمان که مجله در انتشارات مدرسه چاپ می‌شد، بچه‌ها می‌آمدند نمایشگاه و می‌گفتند، انتشارات برهان. یعنی ناشر را به نام مجله‌ی ما می‌شناختند. وقتی هم می‌خواستند آن را به ثبت برسانند، اسمش شد انتشارات مدرسه برهان! این تأثیر به‌نظر من بسیار زیاد بوده است. چون هنوز همکارانی که جدیداً وارد شغل معلمی می‌شوند، بدون استثنا همه مجله‌ی برهان را می‌شناسند. ما خوانندگانی داشتیم که دانش‌آموز بودند و برایمان مقاله می‌فرستادند و هنوز هم که هنوز است، برایمان مقاله می‌فرستند. نامه‌هایی که به دست ما می‌رسند و رسیده‌اند، از تأثیر بسیار خوب برهان، هم بین دانش‌آموزان، هم در جامعه‌ی معلمان حکایت دارند تقریباً همه‌ی معلمان ریاضی با مجله ریاضی برهان آشنا هستند.

چون ما سعی کرده‌ایم همه‌ی مقالات از دو وجه برخوردار باشند: یک وجه این که دانش‌آموز از آن استفاده کند. وجه دیگر این که برای دبیران محترم ریاضی نیز مفید باشد. کسی که این مقاله را می‌نویسد، در واقع دارد روش تدریس خود را ارائه می‌دهد. این نوعی انتقال تجربه است و روش تدریس به درد معلم هم می‌خورد و استفاده می‌کنند.

ادامه دارد...

هم‌نهشتی و کاربردهای آن

۲ ۳ ۵ ۷ ۱۱ ۱۳ ۱۷ ۱۹ ۲۳ ۲۹ ۳۱ ۳۷ ۴۱ ۴۳... ۲۰۰۳...

قسمت ۴

● سید محمدرضا هاشمی موسوی

hashemi – moosavi@yahoo.com

اشاره

در سه قسمت قبل، با مفهوم و تعریف و قوانین محاسبات هم‌نهشتی و هم‌چنین، با قضیه‌های اساسی و مهم هم‌نهشتی که در حل مسئله‌های متفاوت نقش بسیار مهمی را برعهده دارند، آشنا شدید. اینک در این شماره و شماره‌های آتی مجله، به برخی از کاربردهای مهم و اساسی هم‌نهشتی، مانند قواعد تعیین باقی مانده‌ها در تقسیم، محاسبه‌ی رقم یکان و باقی‌مانده‌های تقسیم اعداد توانی و اعداد شامل فاکتوریل، حل معادله‌ها و دستگاه‌های هم‌نهشتی، حل معادله‌های سیاله‌ی خطی، غیرخطی و درجه‌ی n ام k مجهولی به توسط قضیه‌ی کوچک فرما، اویلر و ویلسن و حل دیگر مسائل به کمک این قضایای کاربردی و مهم می‌پردازیم که خلاقیت و ابتکار عمل زیادی را طلب می‌کند.

در آخر هر مبحث و مقاله، تعدادی تمرین مطابق مثال‌های متن آورده می‌شود که می‌توانید با مراجعه به هر مثال، تمرین نظیر آن را حل کنید.

قواعد تعیین باقی‌مانده‌ی تقسیم بر ۲، ۵، ۴، ۲۵، ۸ و ۱۲۵

۱. باقی‌مانده‌ی تقسیم هر عدد بر ۲ (یا ۵) برابر با باقی‌مانده‌ی

تقسیم رقم یکان عدد مفروض بر ۲(یا۵) است؛ زیرا:

$$\overline{a_na_{n-1}\cdots a_2a_1a_0} = 10(\overline{a_na_{n-1}\cdots a_2a_1}) + a_0 \overset{2\text{(یا 5)}}{\equiv} 0 + a_0 = a_0$$

واضح است که باقی‌مانده‌ی هر عدد بر ۲ (یا۵)، معادل باقی‌مانده‌ی یکان آن عدد بر ۲(یا۵) است.

۲. باقی‌مانده‌ی تقسیم هر عدد بر ۴ (یا۲۵) برابر با باقی‌مانده‌ی تقسیم دو رقم سمت راست عدد مفروض بر ۴ (یا۲۵) است؛ زیرا:

$$\overline{a_na_{n-1}\cdots a_2a_1a_0} = \overline{a_na_{n-1}\cdots a_2}\times 100 + \overline{a_1a_0} \overset{4\text{(یا 25)}}{\equiv} 0 + \overline{a_1a_0} = \overline{a_1a_0}$$

۳. باقی‌مانده‌ی تقسیم هر عدد بر ۸ (یا۱۲۵) برابر با باقی‌مانده‌ی تقسیم سه رقم سمت راست عدد مفروض بر ۸(یا۱۲۵) است؛ زیرا:

$$\overline{a_na_{n-1}\cdots a_3a_2a_1a_0} = \overline{a_na_{n-1}\cdots a_3}\times 1000 + \overline{a_2a_1a_0} \overset{8\text{(یا 125)}}{\equiv} \overline{a_2a_1a_0}$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد ۲۰۰۸۱۳۸۷ را بر ۲، ۵، ۴، ۲۵، ۸ و۱۲۵ تعیین کنید.

حل: با توجه به قاعده‌ی ۱، باقی‌مانده‌ی عدد مفروض بر ۲و۵ به ترتیب ۱و۲ می‌شود. با توجه به قاعده‌ی ۲، باقی‌مانده‌ی عدد مفروض بر۴و۲۵ به ترتیب معادل باقی‌مانده‌ی عدد ۸۷ بر ۴ و ۲۵، یعنی ۳ و ۱۲ است.

با توجه به قاعده‌ی ۳، باقی‌مانده‌ی عدد مفروض بر ۸ و ۱۲۵ به ترتیب معادل باقی‌مانده‌ی عدد ۳۸۷ بر ۸ و ۱۲۵، یعنی ۳و۱۲ است.

قاعده‌ی تعیین باقی‌مانده‌ی تقسیم بر ۳و۹

۴. باقی‌مانده‌ی تقسیم هر عدد بر ۳ (یا۹) برابر با باقی‌مانده‌ی تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۳(یا۹) است؛ زیرا:

$$\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0} = a_0 + 10a_1+\cdots+10^n a_n \overset{3\text{(یا 9)}}{\equiv} a_0+a_1+\cdots+a_n$$

مثال: اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد مفروض $\overline{200n13n7}$ بر ۳(یا۹) برابر ۲ باشد، n را بیابید.

حل: با توجه به قاعده‌ی ۴ کافی است مجموع ارقام عدد مفروض را بر ۳(یا۹) تقسیم و باقی‌مانده را تعیین کنیم.

$$7+n+3+1+n+0+0+2 \overset{3\text{(یا 9)}}{\equiv} 2 \;;\; 2n+13 \overset{3\text{(یا 9)}}{\equiv} 2$$

$$2n \overset{3\text{(یا 9)}}{\equiv} -11 \;;\; 2n \overset{3\text{(یا 9)}}{\equiv} -9-2 \;;$$

$$2n \overset{3\text{(یا 9)}}{\equiv} -2 \;;\; n \overset{3\text{(یا 9)}}{\equiv} -1$$

در این جا دو حالت را در نظر می‌گیریم:

$$n\overset{3}{\equiv}-1 \;;\; n\overset{3}{\equiv}-1+3 \;;\; n\overset{3}{\equiv}2$$

$$n\overset{9}{\equiv}-1 \;;\; n\overset{9}{\equiv}9-1 \;;\; n\overset{9}{\equiv}8$$

بنابراین، عدد مفروض به پیمانه‌ی ۳برابر ۲۰۰۲۱۳۲۷ و به پیمانه‌ی ۹برابر ۲۰۰۸۱۳۸۷ است.

قاعده‌ی تعیین باقی‌مانده‌ی تقسیم بر ۲۷ و ۳۷

۵. باقی‌مانده‌ی تقسیم هر عدد بر ۲۷(یا۳۷) برابر با باقی‌مانده‌ی عددی است که از سمت راست عدد مفروض، سه‌رقم سه‌رقم جدا و باهم جمع کرده‌ایم؛ زیرا با توجه به هم‌نهشتی $1 \overset{27(37)}{\equiv} (1000)^n$ می‌توان نوشت:

$$\overline{a_na_{n-1}a_{n-2}\cdots a_5a_4a_3a_2a_1a_0} = \overline{a_2a_1a_0} + \overline{a_5a_4a_3}(1000) +$$

$$\overline{a_8a_7a_6}(1000)^2 + \overline{a_{11}a_{10}a_9}(1000)^3+\cdots \overset{27\text{(یا 37)}}{\equiv} \overline{a_2a_1a_0} +$$

$$\overline{a_5a_4a_3} + \overline{a_8a_7a_6} + \overline{a_{11}a_{10}a_9}+\cdots = N \overset{27\text{(یا 37)}}{\equiv} ?$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد ۲۰۰۸۱۳۸۷۸ را بر ۲۷و۳۷ تعیین کنید.

حل: از سمت راست عدد مفروض را سه‌رقم سه‌رقم جدا و اعداد جدا شده را با هم جمع می‌کنیم:

$$200813878 \overset{27\text{(یا 37)}}{\equiv} 878+813+200=1891$$

$$1891\overset{27}{\equiv}891+1=892\overset{27}{\equiv}1 \;;\; 1891\overset{37}{\equiv}891+1=892\overset{37}{\equiv}4$$

بنابراین، باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد مفروض بر ۲۷برابر ۱ و بر ۳۷ برابر ۴ است.

قاعده‌ی تعیین باقی‌مانده‌ی تقسیم بر ۷، ۱۱ و۱۳

۶. با توجه به هم‌نهشتی $-1 \overset{7\text{(یا 11 یا 13)}}{\equiv} (1000)$ و با توجه به قاعده‌ی ۵ برای تعیین باقی‌مانده‌ی تقسیم یک عدد بر ۷(یا۱۱یا۱۳)،

از سمت راست عدد را سه رقم سه رقم جدا و اعداد جدا شده را جمع جبری می‌کنیم. سپس باقی‌مانده‌ی عدد حاصل را بر ۷(یا ۱۱ یا ۱۳) به دست می‌آوریم.

$$\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2}\cdots a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0} = \overline{a_2 a_1 a_0} + \overline{a_5 a_4 a_3}(۱۰۰۰) +$$

$$\overset{۷(\text{یا ۱۱ یا ۱۳})}{\equiv} \overline{a_2 a_1 a_0} - \overline{a_5 a_4 a_3} + \cdots = N \overset{۷(\text{یا ۱۱ یا ۱۳})}{\equiv} ?$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد ۲۰۰۸۱۳۸۷۸ را بر ۷، ۱۱ و ۱۳ تعیین کنید.

حل: از سمت راست عدد مفروض را سه رقم سه رقم جدا و اعداد جدا شده را باهم جمع جبری می‌کنیم:

$$۲۰۰۸۱۳۸۷۸ \overset{۷(\text{یا ۱۱ یا ۱۳})}{\equiv} ۸۷۸ - ۸۱۳ + ۲۰۰ = ۲۶۵$$

$$۲۶۵ \overset{۷}{\equiv} ۶\ ,\ ۲۶۵ \overset{۱۱}{\equiv} ۱\ ,\ ۲۶۵ \overset{۱۳}{\equiv} ۵$$

تبصره: باقی‌مانده‌ی تقسیم بر ۱۱ را به صورت ساده‌تری نیز می‌توان به دست آورد. ($۱۰^n \overset{۱۱}{\equiv} (-۱)^n$):

$$\overline{a_n \cdots a_1 a_0} = a_0 + ۱۰a_1 + ۱۰^۲ a_2 + \cdots + ۱۰^n a_n \overset{۱۱}{\equiv} a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-۱)^n a_n$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم $۱۳۸۷^{۲۰۰۸}$ بر ۱۱ را بیابید.

حل: (باقی‌مانده‌ی تقسیم)

$$۱۳۸۷^{۲۰۰۸} \overset{۱۱}{\equiv} (۷ - ۸ + ۳ - ۱)^{۲۰۰۸} \overset{۱۱}{\equiv} (۱)^{۲۰۰۸} = ۱$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد N را بر ۷ بیابید.

$$N = (۲۰۰۳)^{۱۳۸۳}.(۳۰۰۴)^{۱۳۸۴}.(۴۰۰۵)^{۱۳۸۵}.(۷۰۰۶)^{۱۳۸۷}.(۸۰۰۷)^{۱۳۸۷}.(۹۰۰۸)^{۱۳۸۹}$$

حل: باقی‌مانده‌ی هر عامل را بر ۷ تعیین می‌کنیم:

$$(۲۰۰۳)^{۱۳۸۳} \overset{۷}{\equiv} (۳ - ۲)^{۱۳۸۳} = ۱\ ,\ (۳۰۰۴)^{۱۳۸۴} \overset{۷}{\equiv} (۴ - ۳)^{۱۳۸۴} = ۱$$

$$(۴۰۰۵)^{۱۳۸۵} \overset{۷}{\equiv} (۵ - ۴)^{۱۳۸۵} = ۱$$

$$(۷۰۰۶)^{۱۳۸۷} \overset{۷}{\equiv} (۶ - ۷)^{۱۳۸۷} = -۱ \overset{۷}{\equiv} ۶$$

$$(۸۰۰۷)^{۱۳۸۷} \overset{۷}{\equiv} (۷ - ۸)^{۱۳۸۷} = -۱ \overset{۷}{\equiv} ۶$$

$$(۹۰۰۸)^{۱۳۸۹} \overset{۷}{\equiv} (۸ - ۹)^{۱۳۸۹} = -۱ \overset{۷}{\equiv} ۶$$

پس:

$$N \overset{۷}{\equiv} (۱)(۱)(۱)(۶)(۶)(۶) = ۶^۳ \overset{۷}{\equiv} (-۱)^۳ = -۱ \overset{۷}{\equiv} ۶ \ (\text{باقی‌مانده})$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم $(۹۸۷۶۵۴۳۲۱)^{۲۰۰۸}$ را بر ۱۳ بیابید.

حل:

$$(۹۸۷۶۵۴۳۲۱)^{۲۰۰۸} \overset{۱۳}{\equiv} (۳۲۱ - ۶۵۴ + ۹۸۷)^{۲۰۰۸} \overset{۱۳}{\equiv} (۶۵۴)^{۲۰۰۸} \ (\text{باقی‌مانده})$$

$$(۶۵۴)^{۲۰۰۸} \overset{۱۳}{\equiv} ۴^{۲۰۰۸} = \left(۴^۳\right)^{۱۳۳۶} = ۶۴^{۱۳۳۶} \overset{۱۳}{\equiv} (-۱)^{۱۳۳۶} = ۱$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد N را بر ۳۷ بیابید.

$$N = (۱۰۳۵)^{۲۰۰۳}.(۳۰۰۳)^{۲۰۰۴}.(۱۰۰۵)^{۲۰۰۴}.(۴۳۶۵)^{۲۰۰۶}.(۲۰۰۴)^{۲۰۰۸}$$

حل: باقی‌مانده‌ی هر عامل را بر ۳۷ تعیین می‌کنیم:

$$(N \overset{۳۷}{\equiv} (-۱)(۱)(۱)(۱)(۱)(۱) = -۱ \overset{۳۷}{\equiv} ۳۶)$$

$$(۱۰۳۵)^{۲۰۰۳} \overset{۳۷}{\equiv} (۰۳۵ + ۱)^{۲۰۰۳} = ۳۶^{۲۰۰۳} \overset{۳۷}{\equiv} (-۱)^{۲۰۰۳} = -۱\ ,$$

$$(۳۰۰۳)^{۲۰۰۴} \overset{۳۷}{\equiv} (۰۰۳ + ۳)^{۲۰۰۴} = ۶^{۲۰۰۴}$$

$$۶^{۲۰۰۴} = ۳۶^{۱۰۰۲} \overset{۳۷}{\equiv} (-۱)^{۱۰۰۲} = ۱\ ,$$

$$(۱۰۰۵)^{۲۰۰۴} \overset{۳۷}{\equiv} (۰۰۵ + ۱)^{۲۰۰۴} = ۶^{۲۰۰۴} \overset{۳۷}{\equiv} ۱$$

$$(۴۳۶۵)^{۲۰۰۶} \overset{۳۷}{\equiv} (۳۶۵ + ۴)^{۲۰۰۶} = ۳۶۹^{۲۰۰۶} \overset{۳۷}{\equiv} (-۱)^{۲۰۰۶} = ۱\ ,$$

$$(۲۰۰۴)^{۲۰۰۸} \overset{۳۷}{\equiv} (۰۰۴ + ۲)^{۲۰۰۸} = ۳۶^{۱۰۰۴} \overset{۳۷}{\equiv} ۱$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم $N = (۱۳۸۷)^{۲۰۰۸}.(۲۰۰۸)^{۱۳۸۷}$ را بر ۹ بیابید.

حل:

$$(۲۰۰۸)^{۱۳۸۷} \overset{۹}{\equiv} (۸ + ۰ + ۰ + ۲)^{۱۳۸۷} = ۱۰^{۱۳۸۷} \overset{۹}{\equiv} ۱$$

$$(۱۳۸۷)^{۲۰۰۸} \overset{۹}{\equiv} (۷ + ۸ + ۳ + ۱)^{۲۰۰۸} = ۱۹^{۲۰۰۸} \overset{۹}{\equiv} ۱\ ;\ N \overset{۹}{\equiv} ۱ \times ۱ = ۱$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم $N = ۳^{۳۱} + ۳^{۳۲} + ۳^{۳۳} + ۳^{۳۴}$ را بر ۱۳ بیابید.

حل:

$$N = ۳^{۳۰} \times ۳ + ۳^{۳۰} \times ۳^۲ + ۳^۳(۳^{۳۰} + ۳ \times ۳^{۳۰})$$

$$۳^{۳۰} = (۳^۳)^{۱۰} = (۲۷)^{۱۰} \overset{۱۳}{\equiv} (۱)^{۱۰} = ۱\ ;\ ۳^{۳۰} \overset{۱۳}{\equiv} ۱$$

$$N \overset{۱۳}{\equiv} (۱)(۳) + (۱)(۹) + (۱)(۱ + (۳)(۱)) = ۳ + ۹ + ۱ + ۳ = ۱۶ \overset{۱۳}{\equiv} ۳$$

(باقی مانده)

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم بر N را بر ۲۵ بیابید.

$$N = ۷^۲ + ۷^n + ۷^{n+۱} + ۷^{n+۲} + ۷^{n+۳}$$

حل: $N = ۴۹ + ۷^n(۱+۷+۷^۲+۷^۳) = ۴۹ + ۷^n(۴۰۰)$

$$N = ۴۹ + ۷^n(۴۰۰) \overset{۲۵}{\equiv} ۴۹ + ۷^n(۱۶ \times ۲۵) \overset{۲۵}{\equiv} ۴۹ \overset{۲۵}{\equiv} -۱ \overset{۲۵}{\equiv} ۲۴$$

(باقی مانده)

مثال: اگر x، y و z مضرب ۶ باشند، باقی‌مانده‌ی تقسیم $N = (x^۳ + y^۳ + z^۳ + x^۳y^۳z^۳ - ۱)^{۱۳۸۷}$ را بر عدد ۷۲ بیابید.

حل:

$$۶|x \; ; \; ۲ \times ۳|x; \; ۲^۳ \times ۳^۳|x^۳; \; ۲^۳ \times ۳^۲|x^۳; ۷۲|x^۳;$$

$$x^۳ \overset{۷۲}{\equiv} ۰ , \; y^۳ \overset{۷۲}{\equiv} ۰ , \; z^۳ \overset{۷۲}{\equiv} ۰ , \; \begin{cases} x^۳ + y^۳ + z^۳ \overset{۷۲}{\equiv} ۰ \\ x^۳y^۳z^۳ \overset{۷۲}{\equiv} ۰ \end{cases}$$

$$N = (x^۳ + y^۳ + z^۳ + x^۳y^۳z^۳ - ۱)^{۱۳۸۷} \overset{۷۲}{\equiv} (۰ + ۰ - ۱)^{۱۳۸۷}$$

$= -۱ \overset{۷۲}{\equiv} ۷۱$ (باقی مانده)

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم $N = ۱! + ۲! + ۳! + \cdots + n!$ را بر عدد ۲۴ بیابید.

حل: با توجه به برابری‌های $۱! = ۱$، $۲! = ۲$، $۳! = ۶$، $۴! = ۲۴$، $۵! = ۵(۴!)$ و...

(برای $n \geq ۴$ داریم: $n! \overset{۲۴}{\equiv} ۰$):

$$N = ۱! + ۲! + ۳! + ۴! + \cdots + n! \overset{۲۴}{\equiv} ۱ + ۲ + ۶ + ۰ + ۰ + \cdots + ۰ = ۹$$

(باقی مانده)

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $۲^{۹^{۲۵}}$ را بر عدد ۱۵ بیابید.

حل: $۹ \overset{۴}{\equiv} ۱ \; ; \; ۹^{۲۵} \overset{۴}{\equiv} ۱ \; ; \; ۹^{۲۵} - ۱ \equiv ۴q \; ; \; ۹^{۲۵} = ۴q + ۱$

$$۲^{۹^{۲۵}} = ۲^{۴q+۱} = (۲^۴)^q \times ۲^۱ = ۱۶^q \times ۲ \overset{۱۵}{\equiv} (۱)^q \times ۲ = ۲$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم $۷^{۹^{۱۳۸۷}}$ را بر عدد ۱۲ بیابید.

حل: (۹ به هر توانی برسد، عددی فرد است)

$$۹^{۱۳۸۷} \overset{۲}{\equiv} ۱^{۱۳۸۷} = ۱ \; ; \; ۹^{۱۳۸۷} = ۲q + ۱$$

$$۷^{۹^{۱۳۸۷}} = ۷^{۲q+۱} = (۷^۲)^q \times ۷ = (۴۹)^q \times ۷ \overset{۱۲}{\equiv} (۱)^q \times ۷ = ۷$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $N = (۶۴ \times ۶۵ \times ۶۶)^{۱۳۸۷}$ را بر ۱۳ بیابید.

حل: $۶۴ \overset{۱۳}{\equiv} -۱ \; , \; ۶۵ \overset{۱۳}{\equiv} ۰ \; , \; ۶۶ \overset{۱۳}{\equiv} ۱$

$$N = (۶۴ \times ۶۵ \times ۶۶)^{۱۳۸۷} \overset{۱۳}{\equiv} ((-۱)(۰)(۱))^{۱۳۸۷} = (۰)^{۱۳۸۷} = ۰$$

مثال: اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم A بر ۷ برابر ۳ باشد و داشته باشیم:

$$(A \overset{۷}{\equiv} ۳) \qquad B = A^۳ + ۳A^۲ + ۴A + ۷$$

باقی‌مانده‌ی B را بر ۷ بیابید.

حل: $B = A^۳ + ۳A^۲ + ۳A + ۱ + A + ۶$

$$= (A+۱)^۳ + A + ۶ \overset{۷}{\equiv} ۴^۳ + ۳ + ۶$$

$$B \overset{۷}{\equiv} ۷۳ \overset{۷}{\equiv} ۳ \; , \; B \overset{۷}{\equiv} ۳$$

پس A و B هم باقی‌مانده به ۷ هستند.

مثال: اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم k بر ۷ و ۸ به ترتیب برابر ۴ و ۳ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم k بر ۵۶ را بیابید.

حل:

$$\begin{cases} k \overset{۷}{\equiv} ۴ \; ; \; ۸k \overset{۸ \times ۷}{\equiv} ۸ \times ۴ \; ; \; ۸k \overset{۵۶}{\equiv} ۳۲ \\ k \overset{۸}{\equiv} ۳ \; ; \; ۷k \overset{۸ \times ۷}{\equiv} ۷ \times ۳ \; ; \; ۷k \overset{۵۶}{\equiv} ۲۱ \end{cases}$$

$$۸k - ۷k \overset{۵۶}{\equiv} ۳۲ - ۲۱ \; ; \; k \overset{۵۶}{\equiv} ۱۱ \Rightarrow r = ۱۱$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم $۷^{۱۳۸۷}$ را بر عدد ۱۹ بیابید.

حل: $۷^{۱۳۸۷} = (۷^۳)^{۴۶۲} \times ۷ = ۳۴۳^{۴۶۲} \times ۷ \overset{۱۹}{\equiv} (۱)^{۴۶۲} \times ۷ = ۷$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم $۱۱^{۱۳۸۷}$ را بر عدد ۶۱ بیابید.

حل:

$$۱۱^{۱۳۸۷} = (۱۱^۲)^{۶۹۳} \times ۱۱ = (۱۲۱)^{۶۹۳} \times ۱۱ \overset{۶۱}{\equiv} (-۱)^{۶۹۳} \times ۱۱$$

$$= -۱۱ \overset{۶۱}{\equiv} ۵۰$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $N = (۱۳^{۷۵} + ۱۹^{۵۷})^۴$ را بر ۱۷ بیابید.

حل:

$$k = ۱۳^{۷۵} + ۱۹^{۵۷} \overset{۱۷}{\equiv} (-۴)^{۷۵} + ۲^{۵۷} = (-۴)(-۴)^{۷۴} + (۲^۴)^{۱۴}(۲)$$

$$k = (-۴)(۱۶)^{۳۷} + (۱۶)^{۱۴}(۲) \equiv (-۴)(-۱)^{۳۷}$$

$$+ (-۱)^{۱۴}(۲) \overset{۱۷}{\equiv} ۴ + ۲ = ۶$$

$$N \overset{۱۷}{\equiv} k^۴ \overset{۱۷}{\equiv} ۶^۴ = ۱۲۹۶ \overset{۱۷}{\equiv} ۴ \; ; \; N \overset{۱۷}{\equiv} ۴$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم $۶^{۱۳۸۷}$ را بر عدد ۴۸ (یا ۵۴) بیابید.

حل:

$$\begin{cases}6=2\times 3\\ 48=3\times 2^4\\ 54=2\times 3^3\end{cases};\quad \left.\begin{cases}6^4=2^4\times 3^4\\ 48=2^4\times 3\end{cases}\right\};\ 48|6^4\ ;\ 6^4\overset{48}{\equiv}0$$

$$\left.\begin{cases}54=2\times 3^3\\ 6^3=2^3\times 3^3\end{cases}\right\};\ 54|6^3\ ;\ 6^3\overset{54}{\equiv}0$$

پس:

$$6^4\times 6^{1383}\overset{48}{\equiv}0\ ;\ 6^{1387}\overset{48}{\equiv}0\ ,\ 6^3\times 6^{1384}\overset{54}{\equiv}0\ ;\ 6^{1387}\overset{54}{\equiv}0$$

توجه: باقی‌مانده‌ی عدد مفروض در تقسیم بر ۴۸ (یا ۵۴) برابر صفر است (اگر $a^n\overset{m}{\equiv}0$ ، $k>n$ ، آن‌گاه $a^k\overset{m}{\equiv}0$).

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $N=(1+2+3+\cdots+1382)^{1382}$ را بر ۱۳۸۲ بیابید:

حل: با توجه به این‌که ۱۳۸۲ بر ۴ باقی‌مانده‌ی ۲ می‌دهد:

$$(1+2+3+\cdots+1382)^{1382}\overset{1382}{\equiv}\frac{1382}{2}=691$$

مثال: باقی‌مانده‌ی $7a$ بر ۴۳ برابر ۶ است، باقی‌مانده‌ی $3a^4$ را بر ۴۳ بیابید.

حل:

$$7a\overset{43}{\equiv}6\ ;\ 7a\overset{43}{\equiv}6+43\ ;\ 7a\overset{43}{\equiv}49\ ;\ a\overset{43}{\equiv}7$$

$$a^4\overset{43}{\equiv}7^4\ ;\ 3a^4\overset{43}{\equiv}3\times 49\times 49\overset{43}{\equiv}3\times 6\times 6=108\overset{43}{\equiv}22$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم 3^{4439} را بر ۷۳ بیابید.

حل:

$$3^6=729\overset{73}{\equiv}-1\ ;\ (3^6)^{740}\overset{73}{\equiv}(-1)^{740}=1\ ;\ 3^{4440}\overset{73}{\equiv}1\ ;$$

$$3^{4440}\overset{73}{\equiv}1-73=-72\ ;\ (3,73)=1$$

(دو طرف هم‌نهشتی را به ۳ ساده می‌کنیم)

$$3^{4439}\overset{73}{\equiv}-24\ ;\ 3^{4439}\overset{73}{\equiv}-24+73=49$$

توجه: در این دو مثال، از قاعده‌ی زیر استفاده شد:

$$ac\overset{m}{\equiv}bc\ ;\ a\overset{\frac{m}{(m,c)}}{\equiv}b\ ,\ \begin{cases}ac\overset{m}{\equiv}bc\\ (m,c)=1\end{cases};\ a\overset{m}{\equiv}b$$

مثال: از هم‌نهشتی زیر نتیجه بگیرید که y مضرب ۳ است:

$$(1+2+3+\cdots+1386)x\overset{4161}{\equiv}(1+2+3+\cdots+1387)y$$

حل: با توجه به برابری $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ ، خواهیم داشت:

$$\frac{1386\times 1387}{2}x\overset{3\times 1387}{\equiv}\frac{1387\times 1388}{2}y\ ;\ 693x\overset{3}{\equiv}694y$$

$$(693\overset{3}{\equiv}0)\quad 693x\overset{3}{\equiv}(693+1)y\ ;\ y\overset{3}{\equiv}0\ ;\ y=3k$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد N را بر عدد ۴ تعیین کنید (با فرض این‌که $n\ge 100$):

$$N=(87-n)^{1387}+(86-n)^{1387}+(85-n)^{1387}+(84-n)^{1387}$$

حل: باتوجه به این‌نکته که k عدد متوالی در تقسیم بر k، به تعداد k باقی‌مانده‌ی متمایز به صورت $((k-1),\cdots,0,1,2,3)$ را خواهند داد (البته نه صرفاً با همین ترتیب)، خواهیم داشت:

$$N=(87-n)^{1387}+(86-n)^{1387}+(85-n)^{1387}$$
$$+(84-n)^{1387}\overset{4}{\equiv}(0)^{1387}+(1)^{1387}+(2)^{1387}+(3)^{1387}$$
$$N\overset{4}{\equiv}1+2^{1387}+(-1)^{1387}=1+2^{1387}-1=2^{1387}$$
$$=2^2\times 2^{1385}=4\times 2^{1385}\overset{4}{\equiv}0$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد M را بر عدد ۶ تعیین کنید:

$$M=(m+1381)^3+(m+1382)^3+\cdots+(m+1386)^3$$

حل: از تقسیم k عدد متوالی بر k، k باقی‌مانده‌ی متمایز $(k-1,\cdots,0,1,2)$ حاصل می‌شود. بنابراین، از تقسیم ۶عدد متوالی سمت راست بر ۶، باقی‌مانده‌ها حاصل می‌شوند؛ پس:

$$M\overset{6}{\equiv}(0)^3+(1)^3+(2)^3+(3)^3+(4)^3+(5)^3$$
$$=\left(\frac{5(5+1)}{2}\right)^2=225\overset{6}{\equiv}3$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم $N=3^{1387}+4^{1387}+5^{1387}+6^{1387}$ را بر ۱۲ بیابید.

حل:

$$N=3^{1387}+4^{1387}+5^{1387}+6^{1387}\overset{3}{\equiv}(0)^{1387}$$
$$+(1)^{1387}+(-1)^{1387}+(0)^{1387}=0$$
$$N=3^{1387}+4^{1387}+5^{1387}+6^{1387}\overset{4}{\equiv}(-1)^{1387}+(0)^{1387}$$
$$+(1)^{1387}+(0)^{1387}=0$$

با توجه به $(3,4)=1$ و $N\overset{3}{\equiv}0$ ، $N\overset{4}{\equiv}0$ ، خواهیم داشت:

$$N=3^{1387}+4^{1387}+5^{1387}+6^{1387}\overset{12}{\equiv}0$$

پس N بر ۱۲ بخش‌پذیر است؛ زیرا: $N\overset{12}{\equiv}0$.

تمرین

۱ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد ۱۲۳۴۵۶۷۸۹ را بر ۳ ، ۵ ، ۴ ، ۲۵ ، ۸و۱۲۵ بیابید (بدون عمل تقسیم).

۲ . اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد مفروض $\overline{13n7200n}$ بر ۳(یا۹) برابر ۲ باشد، n را بیابید.

۳ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد ۱۳۸۷۲۰۰۸ را بر ۲۷ و ۳۷ بیابید (بدون عمل تقسیم).

۴ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد ۲۰۰۸۱۳۸۷۱۳۸۷ را بر ۷ ، ۱۱و۱۳ بیابید (بدون عمل تقسیم).

۵ . باقی‌مانده‌ی تقسیم 2008^{1387} را بر ۱۱ بیابید.

۶ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد N را بر ۷ بیابید.

$$N=(3002)^{1382}(4003)^{1383}(5004)^{1384}(6005)^{1385}(7006)^{1386}(8007)^{1387}$$

۷ . باقی‌مانده‌ی تقسیم $(123456789999)^{20}$ را بر ۱۳ بیابید.

۸ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد M را بر ۳۷ بیابید.

$$M=(2004)^{1387}(4365)^{1388}(1005)^{1389}(3003)^{1390}(1035)^{1391}$$

۹ . باقی‌مانده‌ی تقسیم $N=(2008)^{2008}.(1387)^{1387}$ را بر ۹ بیابید.

۱۰ . باقی‌مانده‌ی تقسیم $M=(3^{32}+3^{33}+3^{34})^{1388}$ را بر ۱۳ بیابید.

۱۱ . باقی‌مانده‌ی تقسیم Nرا بر ۲۵ بیابید.

$$N=(7^8+7^{n+3}+7^{n+2}+7^{n+1}+7^n)^{2009}$$

۱۲ . اگر x ، y وz مضرب ۶ باشند، باقی‌مانده‌ی تقسیم $M=(x^3+y^3+z^3+x^3y^3z^3-6665)^{2009}$ را بر عدد ۷۲ بیابید.

۱۳ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $N=(1^3+2^3+3^3+...+n^3)^n$ را بر n بیابید.

۱۴ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $M=(1!+2!+3!+...+n!+230)^{1388}$ را بر ۲۴ بیابید.

۱۵ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $N=2^{9^{2009}}+2^{9^{1389}}$ را بر ۱۵ بیابید.

۱۶ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $M=7^{9^{2009}}+1728^{2009^{1388}}$ را بر ۱۲ بیابید.

۱۷ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $N=(4160)^{1387}+(4224)^{1388}+(4290)^{1389}$ را بر ۱۳ بیابید.

۱۸ . باقی‌مانده‌ی تقسیم A بر ۷برابر ۵ است. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد B را بر ۷ بیابید.

$$B=(A^3+3A^2+4A+12)^4$$

۱۹ . اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم k بر ۷و۸ به ترتیب ۵و۶ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم k بر ۵۶ را بیابید.

۲۰ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد 7^{2008} را بر ۱۹ بیابید.

۲۱ . باقی‌مانده‌ی تقسیم 11^{2009} را بر ۶۱ بیابید.

۲۲ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $M=(13^{87}+19^{89})^{2008}$ را بر ۱۷ بیابید.

۲۳ . باقی‌مانده‌ی تقسیم 6^{2009} را بر عدد ۴۸ (یا۵۴) بیابید.

۲۴ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $N=(1^3+2^3+...+1382^3)^{1382}$ را بر ۱۳۸۲ بیابید.

۲۵ . باقی‌مانده‌ی تقسیم $M=3^{1388}+3^{2009}$ را بر ۷۳ بیابید.

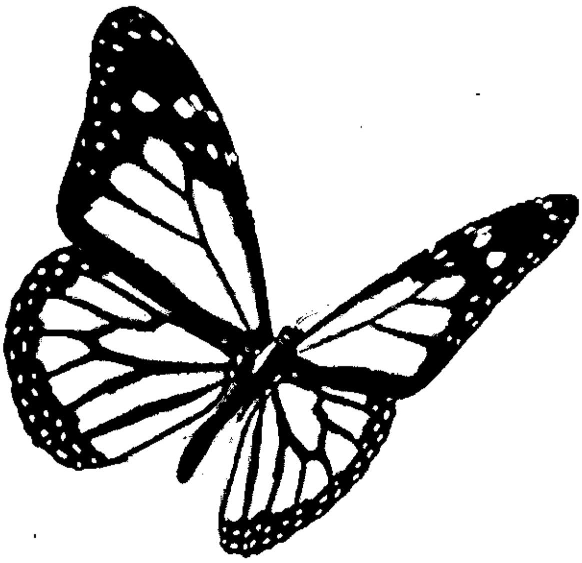
۲۶ . از هم‌نهشتی زیر نتیجه بگیرید که y مضربی از ۳ است:

$$(1^3+2^3+3^3+...+1386)^3x \overset{3(1387)^2}{\equiv} (1^3+2^3+3^3+...+1387^3)y$$

۲۷ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد N را بر عدد ۶ بیابید.

$$N=(m+2004)^3+(m+2005)^3+...+(m+2009)^3$$

۲۸ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $M=3^{2009}+4^{2009}+5^{2009}+6^{2009}$ را بر ۱۲ بیابید.



روش یافتن جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی خاص با استفاده از «تفاضلات تقسیم شده» و «تفاضلات پیشرو»

●گردآورنده: سیمین اکبری‌زاده،
دبیر ریاضی اراک

اشاره

به‌نام خدایی که مجموعه‌ی نعمت‌هایش ناشمار است و آن‌چه نصیب آفریده‌هایش می‌کند، دنباله‌ای است صعودی و بی‌پایان. در این مقاله بیان شده است که با در دست داشتن چند جمله از جملات یک دنباله و با فرض آن که ضابطه‌ی دنباله یک چند جمله‌ای باشد، می‌توانیم جمله‌ی عمومی دنباله را بیابیم. به این منظور دو روش بیان شده است:

روش اول: استفاده از تفاضلات پیشرو. این روش هنگامی قابل استفاده است که چند جمله‌ی دنباله را به ترتیب، یک در میان، دو در میان و... و j در میان داشته باشیم.

روش دوم: استفاده از تفاضلات تقسیم شده. این روش همیشه و به خصوص هنگامی قابل استفاده است که فاصله‌ی بین اندیس جملات داده شده برابر نباشد.

تعریف: اگر $\{a_n\}_{n\geq j}$ دنباله‌ای باشد که فاصله‌ی هر دو اندیس متوالی آن h باشد، یعنی: $\{a_n\}_{n\geq j}: a_j, a_{j+h}, a_{j+2h}, \dots$ آن‌گاه:

$$\begin{cases} a_i \quad \text{تفاضل پیشرو مرتبه‌ی صفرم}: \Delta^0 a_i = a_i \\ a_i \quad \text{تفاضل پیشرو مرتبه‌ی nام}: \Delta^n a_i = \Delta^{n-1} a_{i+h} - \Delta^{n-1} a_i \quad , \quad i = j, j+h, j+2h \end{cases}$$

در حالت خاص، اگر $\{a_n\}_{n\geq 0}$ یک دنباله باشد با جملات $a_0, a_1, a_2, \dots (j=0 \ , \ h=1)$، آن‌گاه:

$$\begin{cases} a_i \quad \text{تفاضل پیشرو مرتبه‌ی صفرم}: \Delta^0 a_i = a_i \\ a_i \quad \text{تفاضل پیشرو مرتبه‌ی nام}: \Delta^n a_i = \Delta^{n-1} a_{i+1} - \Delta^{n-1} a_i \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

مثال۱. جدول۱، جدول تفاضلات پیشروی دنباله ...و۱۰و۵و۲و۱و۲ است، با فرض آن‌که جملات با $a_0, a_1, a_2, \dots$ نام‌گذاری شده باشند.

i	a_i	$\Delta^1 a_i$	$\Delta^2 a_i$	$\Delta^3 a_i$
۰	۲	۱-	۲	۰
۱	۱	۱	۲	۰
۲	۲	۳	۲	
۳	۵	۵		
۴	۱۰			

جدول ۱

نتیجه: در مثال۱، تفاضلات پیشروی مرتبه‌ی دوم دنباله، ثابت و تفاضلات مرتبه‌ی سوم به بعد آن صفر است.

روش اول: استفاده از تفاضلات پیشرو

اگر در دنباله‌ی $\{a_n\}_{n\ge j}$، (برای $k>p$) $\Delta^k a_j=0, \Delta^p a_j\ne 0$ (به‌عبارت دیگر تفاضلات پیشروی مرتبه‌ی pام دنباله ثابت باشد)، آن‌گاه جمله‌ی عمومی دنباله $\{a_n\}$، یک جمله‌ای درجه‌ی p به‌صورت زیر است:

فرمول(۱)

$$a_n=a_j+\Delta a_j\binom{\theta}{1}+\Delta^2 a_j\binom{\theta}{2}+\cdots+\Delta^p a_j\binom{\theta}{p} \qquad \theta=\frac{n-j}{h}$$

در این فرمول $\binom{\theta}{p}=\frac{\theta(\theta-1)(\theta-2)\cdots(\theta-p+1)}{p!}$ است. در ضمن فرض بر این است که فاصله‌ی اندیس‌های هر دو جمله‌ی متوالی دنباله برابر و h باشد و اندیس جمله‌ی اول دنباله‌ی j باشد.

در حالت خاص، اگر جملات دنباله‌ی $\{a_n\}$ را با $a_0,a_1,a_2,\ldots$ نمایش دهیم، داریم: $h=1$, $j=0$. لذا: $\theta=n$.

پس:

فرمول(۲)

$$a_n=a_0+\Delta a_0\binom{n}{1}+\Delta^2 a_0\binom{n}{2}+\cdots+\Delta^p a_0\binom{n}{p}$$

مثال۲. جمله‌ی عمومی دنباله‌ای با جملات ۲و۵و۸و۱۱... با توجه به جدول۲ و ثابت بودن تفاضلات پیشروی مرتبه‌ی اول آن $a_n=a_0+\Delta a_0\binom{n}{1}=2+3n\,(n\ge 0)$ خواهد بود.

i	a_i	$\Delta^1 a_i$	$\Delta^2 a_i$
۰	<u>۲</u>	<u>۳</u>	۰
۱	۵	۳	۰
۲	۸	۳	۰
۳	۱۱		

جدول ۲

مثال۳. جمله‌ی عمومی دنباله‌ای با جملات ۲و۱و۲و۵و۱۰و... . با فرض آن‌که جملات با $a_0,a_1,a_2,\ldots$ نام‌گذاری شده باشند، با توجه به جدول۱ و فرمول ۲ به شکل زیر به‌دست خواهد آمد:

$$a_0=2,\Delta a_0=-1,\Delta^2 a_0=2\Rightarrow a_n=2-1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}\Rightarrow$$

$$a_n=n^2-2n+2\,(n\ge 0)$$

طبق ضابطه به‌دست آمده:

$$a_0=2,a_1=1,a_2=2,a_3=5,a_4=10$$

مثال۴. جمله‌ی عمومی دنباله‌ای با جملات ۲و۱و۲و۵و۱۰و...، با فرض آن‌که جملات با $a_1,a_2,\ldots$ نام‌گذاری شده باشند، با توجه به جدول ۱ و فرمول۱ به شکل زیر به‌دست خواهد آمد. داریم: $h=1$, $j=1$. لذا در فرمول ۱ به‌جای θ، $n-1$ قرار می دهیم. خواهیم داشت:

$$a_n=a_1+\Delta a_1\binom{n-1}{1}+\Delta^2 a_1\binom{n-1}{2}\Rightarrow a_n=2-1\binom{n-1}{1}+2\binom{n-1}{2}=n^2-4n+5\quad(n\ge 1)$$

مثال۵. جمله‌ی عمومی دنباله‌ی

□و۲و□و□و۱و□و□و۲و□و□و۵و□و□و۱۰و...

را به‌دست می‌آوریم. در واقع می‌خواهیم جمله‌ی عمومی دنباله‌ای را به‌دست آوریم که جملات آن را دو در میان می‌دانیم و:

$$a_2=2,a_5=1,a_8=2,a_{11}=5,a_{14}=10,\ldots$$

پس جملات دنباله‌ی ۲و۱و۲و۵و۱۰و... را با $a_2,a_5,a_8,a_{11},a_{14},\ldots$ نام‌گذاری می‌کنیم. اگر بخواهیم مستقیماً از فرمول۱ استفاده می‌کنیم، با توجه به آن‌که $h=3$ و $j=2$، داریم: $\theta=\frac{n-2}{3}$. لذا:

$$a_n=a_2+\Delta a_2\binom{\frac{n-2}{3}}{1}+\Delta^2 a_2\binom{\frac{n-2}{3}}{2}\Rightarrow$$

$$a_n=2-\frac{n-2}{3}+2\times\frac{\left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-2}{3}-1\right)}{2!}=$$

$$a_n=\frac{n^2}{9}-\frac{10}{9}n+\frac{34}{9}$$

در غیر این صورت، با توجه به قاعده‌ی لغزاندن حدود کافی است، در فرمول به‌دست آمده در مثال۳، به‌جای n، $\frac{n-2}{3}$ قرار دهیم.

اینک ببینیم اگر فاصله‌ی اندیس‌های جملات دنباله برابر نباشد، چگونه می‌توان جمله‌ی عمومی دنباله را یافت.

تعریف: اگر $\{a(l_n)\}:a(l_0),a(l_1),\ldots,a(l_n),\ldots$ یک دنباله باشد،

$$\begin{cases} a(l_i) & R_i^0 = a(l_i) : \text{تفاضل تقسیم‌شده‌ی مرتبه‌ی صفرم} \\ a(l_i) & R_i^n = \dfrac{R_{i+1}^{n-1} - R_i^{n-1}}{L_{i+n} - L_i} : \text{تفاضل تقسیم شده مرتبه nام} \end{cases}$$

نکته‌ی قابل توجه آن است که چون امکان دارد اندیس‌های جملات هم فاصله نباشند، به‌جای آن‌که آن‌ها را با i نمایش دهیم، با L_i نمایش داده‌ایم.

در حالت خاص، اگر $\{a_n\}_{n\geq 0}$ یک دنباله باشد، با جملات $a_0, a_1, a_2, \dots$

$$\begin{cases} a_i & R_i^0 = a_i : \text{تفاضل تقسیم شده مرتبه صفرم} \\ a_i & R_i^n = \dfrac{R_{i+1}^{n-1} - R_i^{n-1}}{n} : \text{تفاضل تقسیم شده مرتبه nام} \end{cases}$$

مثال۶. جدول ۳، جدول تفاضلات تقسیم دنباله ...و۱۰و۵و۲و۱و۲ است، با فرض آن‌که جملات با $a_0, a_1, a_2, \dots$ نام‌گذاری شوند.

i	L_i	$a(L_i) = a_i = R_i^0$	R_i^1	R_i^2	R_i^3
۰	۰	۲	(۱-۲)/۱=-۱	(۱-(-۱))/۲=۱	۰
۱	۱	۱	(۲-۱)/۱=۱	(۳-۱)/۲=۱	۰
۲	۲	۲	(۵-۲)/۱=۳	(۵-۳)/۲=۱	
۳	۳	۵	(۱۰-۵)/۱=۵		
۴	۴	۱۰			

جدول۳

در این مثال، اندیس L_i همان i است، زیرا طبق نام‌گذاری: $L_0 = 0,\ L_1 = 1,\ L_2 = 2, \cdots$.

نتیجه: در مثال۶، تفاضلات تقسیم‌شده‌ی مرتبه‌ی دوم دنباله ثابت است.

مثال۷. جدول۴، جدول تفاضلات تقسیم شده‌ی دنباله‌ی ...و۵و۲و۱و۲ است، با فرض آن‌که جملات با $a_1, a_5, a_7, a_8, \cdots$ نام‌گذاری شوند.

i	L_i	$a(L_i) = R_i^0$	$R_i^1 = \frac{R_{i+1}^0 - R_i^0}{L_{i+1} - L_i}$	$R_i^2 = \frac{R_{i+1}^1 - R_i^1}{L_{i+2} - L_i}$	$R_i^3 = \frac{R_{i+1}^2 - R_i^2}{L_{i+3} - L_i}$
۰	۱	۲	$\frac{1-2}{5-1} = -\frac{1}{4}$	$\frac{\frac{1}{2} - (-\frac{1}{4})}{7-1} = \frac{1}{8}$	$\frac{\frac{5}{6} - \frac{1}{8}}{8-1} = \frac{17}{168}$
۱	۵	۱	$\frac{2-1}{7-5} = \frac{1}{2}$	$\frac{3-\frac{1}{2}}{8-5} = \frac{5}{6}$	
۲	۷	۲	$\frac{5-2}{8-7} = 3$		
۳	۸	۵			

جدول ۴

نتیجه: در مثال۷ هیچ‌یک از تفاضلات تقسیم شده‌ی مرتبه‌ی اول و دوم ثابت نیست، ولی می‌توان جملات بعد را چنان انتخاب کرد که تفاضلات تقسیم‌شده‌ی مرتبه‌ی سوم ثابت باشد.

روش دوم: استفاده از تفاضلات تقسیم شده

اگر در دنباله‌ی

$$R_0^P \neq 0,\ \ R_0^K = 0 (K > P).\ a(L_0), a(L_1), a(L_2), \cdots$$

(به‌عبارت دیگر، تفاضلات تقسیم شده مرتبه‌ی pام دنباله‌ی ثابت باشد)، آن‌گاه جمله‌ی عمومی دنباله‌ی $\{a_n\}$، یک چند جمله‌ای درجه‌ی p به صورت زیر است:

فرمول۳

$$a_n = a(L_0) + R_0^1(n - L_0) + R_0^2(n - L_0)(n - L_1) + \cdots + R_0^P(n - L_0)(n - L_1)\cdots(n - L_{p-1})$$

مثال۸. جمله‌ی عمومی دنباله‌ی ۱۰و۵و۲و۱و۲، با فرض آن‌که جملات با $a_0, a_1, a_2, \cdots$ نام‌گذاری شده باشند، با توجه به جدول۳ به شکل زیر است:

داریم:

$$L_0 = 0,\ L_1 = 1,\ L_2 = 2,\ a(L_0) = 2,\ R_0^1 = -1,\ R_0^2 = 1$$

پس:

$$a_n = 2 - 1(n - 0) + 1(n - 0)(n - 1) = n^2 - 2n + 2 \quad n \geq 0$$

که همان جواب به‌دست آمده در مثال۳ است.

مثال۹. جمله‌ی عمومی دنباله‌ی ...و۵و۲و□و۱و□و□و□و۲ را به‌دست می‌آوریم. در واقع می‌خواهیم ضابطه‌ی دنباله‌ای را به‌دست آوریم که: $a_1 = 2,\ a_5 = 1,\ a_7 = 2,\ a_8 = 5$. در این مثال، چون اندیس‌ها هم فاصله نیستند، نمی‌توان از فرمول۱ استفاده کرد و باید از فرمول۳ بهره گرفت. با توجه به جدول۴ و با فرض ثابت بودن تفاضلات تقسیم‌شده‌ی مرتبه‌ی سوم دنباله، a_n یک چند جمله‌ای درجه‌ی ۳ است که:

$$L_0 = 1,\ L_1 = 5,\ L_2 = 7,\ L_3 = 8,\ a(L_0) = 2,$$
$$R_0^1 = \frac{-1}{4},\ R_0^2 = \frac{1}{8},\ R_0^3 = \frac{17}{168}$$

پس:

$$a_n = 2 - \frac{1}{4}(n-1) + \frac{1}{8}(n-1)(n-5) + \frac{17}{168}(n-1)(n-5)(n-7)$$

نتیجه: با فرض آن‌که ضابطه‌ی یک دنباله چند جمله‌ای باشد و

با در دست داشتن r تا از جملات، می‌توان جمله‌ی عمومی دنباله را بر حسب n با حداکثر درجه‌ی r-۱ به‌دست آورد. بدین‌منظور، در صورتی‌که فاصله‌ی اندیس جملات برابر باشد، از روش تفاضلات پیشرو و در غیراین صورت، از روش تفاضلات تقسیم شده استفاده می‌کنیم و حداکثر تا تفاضل مرتبه‌ی r-۱ پیش می‌رویم. اگر تفاضل مرتبه‌ی pام ($1 \le p \le r-2$) ثابت باشد، آن‌گاه جمله‌ی عمومی دنباله، چند جمله‌ای درجه‌ی p است. و در غیر این صورت، با فرض ثابت بودن تفاضل مرتبه‌ی r-۱ام، جمله‌ی عمومی دنباله، چند جمله‌ای درجه‌ی r-۱ خواهد بود.

تمرین

۱. ضابطه‌ی دنباله‌ای را بیابید که به ترتیب، جمله‌ی اول، دوم، سوم و چهارم آن ۲ , ۱۰ ، ۸ و ۴- باشد.

حل: Δ^2 ثابت است و:

$$a_1 = 2,\ \Delta a_1 = 8,\ \Delta^2 a_1 = -10 \Rightarrow a_n = 2 + 8\binom{n-1}{1} - 10\binom{n-1}{2} \Rightarrow a_n = -5n^2 + 23n - 16\ (n \ge 1)$$

۲. ضابطه‌ی دنباله‌ای را بیابید که به ترتیب، جمله‌ی سوم، پنجم، هفتم و نهم آن ۲ ، ۱۰ ، ۸ و ۴-باشد.

$$j = 3,\ h = 2 \Rightarrow \theta = \frac{n-3}{2}$$

$$a_n = 2 + 8\binom{\frac{n-3}{2}}{1} - 10\binom{\frac{n-3}{2}}{2}$$

$$= 2 + 8\left(\frac{n-3}{2}\right) - 5\left(\frac{n-3}{2}\right)\left(\frac{n-5}{2}\right)$$

۳. ضابطه‌ی دنباله‌ای را بیابید که به ترتیب جمله‌ی سوم، پنجم، ششم و دهم آن ۲ ، ۱۰ ، ۸ و ۴- باشد.

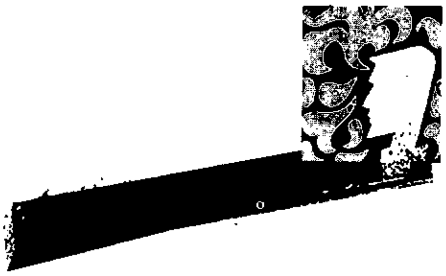
حل: داریم:

$$L_0 = 3,\ L_1 = 5,\ L_2 = 6,\ L_3 = 10,\ a(L_0) = 2,$$

$$R_0^1 = 4,\ R_0^2 = -2,\ R_0^3 = \frac{9}{35}$$

و با فرض ثابت بودن R^3 داریم:

$$a_n = 2 - 4(n-3) - 2(n-3)(n-5) + \frac{9}{35}(n-3)(n-5)(n-6)$$



اعداد جالب ریاضی

درست به این اعمال ضرب توجه کنید.

۲۱×۲۴=۵۰۴
۱۲×۴۲=۵۰۴

۶۳×۱۲=۷۵۶
۳۶×۲۱=۷۵۶

۱۳×۱۳=۱۶۹
۳۱×۳۱=۹۶۱

۶۲×۱۳=۸۰۶
۲۶×۳۱=۸۰۶

۹۶×۲۳=۲۲۰۸
۶۹×۳۲=۲۲۰۸

۸۴×۱۲=۱۰۰۸
۴۸×۲۱=۱۰۰۸

۳۶×۸۴=۳۰۲۴
۶۳×۴۸=۳۰۲۴

۴۲×۳۶=۱۵۱۲
۲۴×۶۳=۱۵۱۲

۸۴×۲۴=۲۰۱۶
۴۸×۴۲=۲۰۱۶

۹۳×۲۶=۲۴۱۸
۳۹×۶۲=۲۴۱۸

۹۶×۴۶=۴۴۱۶
۶۹×۶۴=۴۴۱۶

مسابقه‌های ریاضی در کشورهای گوناگون دنیا(۱۰)

مسابقه‌ی ریاضی آمریکا ـ ۱۹۸۳

● ترجمه و تالیف: هوشنگ شرقی

اشاره

همان گونه که در یکی از شماره‌های پیشین مجله‌ی برهان متذکر شدیم، مسابقات ریاضی مدارس آمریکا در دو سطح متفاوت مقدماتی (AHSME) و پیشرفته (AIME) برگزار می‌شود. برگزیدگان مسابقه‌ی AIME به مرحله‌ی المپیاد ریاضی دعوت می‌شوند. در این شماره و شماره‌ی آینده، سؤالات مسابقه‌ی ریاضی AIME سال ۱۹۸۳ آمریکا همراه با راه‌حل آن‌ها را ارائه می‌دهیم. تعداد سؤالات آزمون ۱۵ سؤال بوده است.

صورت مسائل

۱. فرض کنید x و y و z بزرگ‌تر از ۱، و w عددی مثبت باشد،

به‌طوری که:

$\log_x^w = 24$ و $\log_y^w = 40$ و $\log_{xyz}^w = 12$

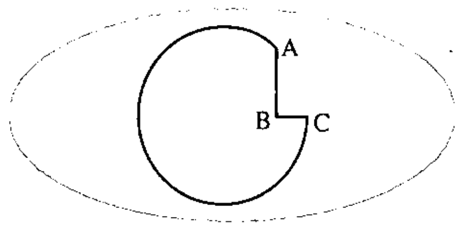
مقدار $\log_z^w$ را به‌دست آورید.

۲. فرض کنید: $f(x) = |x-p| + |x-15| + |x-p-15|$، به‌طوری که $0 < p < 15$. مینی‌مم مقدار $f(x)$ را به ازای $p \le x \le 15$ به‌دست آورید.

۳. حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ی زیر را به‌دست آورید:

$$x^2 + 18x + 30 = 2\sqrt{x^2 + 18x + 45}$$

۴. یک ماشین‌افزار به شکلی شبیه یک دایره‌ی برش‌خورده به‌صورت زیر است. شعاع دایره $\sqrt{50}$ سانتی‌متر، AB، ۶ سانتی‌متر، BC، ۲ سانتی‌متر و زاویه‌ی ABC قائمه است. مربع فاصله‌ی B تا مرکز دایره را (با واحد سانتی‌متر) به‌دست آورید.



۵. فرض کنید مجموع مربعات دو عدد مختلط مساوی ۷ و مجموع مکعبات آن‌ها ۱۰ باشد. بیشترین مقدار حقیقی $x + y$ چیست؟

۶. فرض کنید $a_n = 6^n + 8^n$. باقی‌مانده‌ی تقسیم a_{83} را بر ۴۹ به‌دست آورید.

۷. ۲۵ نفر از شوالیه‌های آرتورشاه دور میزگرد همیشگی خودشان نشسته‌اند.[۱] ۳ نفر از آن‌ها انتخاب شده‌اند ـ شانس هر ۳ نفر از این جمع برای انتخاب یکسان بوده است ـ تا برای به قتل رساندن یک اژدهای مزاحم اعزام شوند. فرض کنید p احتمال آن باشد که لااقل ۲ نفر از این ۳ نفر، کنار هم نشسته باشند. هرگاه p به‌صورت یک کسر تحویل‌ناپذیر نوشته شود، مجموع صورت و مخرج آن چیست؟

۸. بزرگ‌ترین عامل اول دو رقمی عدد صحیح $n = \binom{200}{100}$ چیست؟

حل مسائل

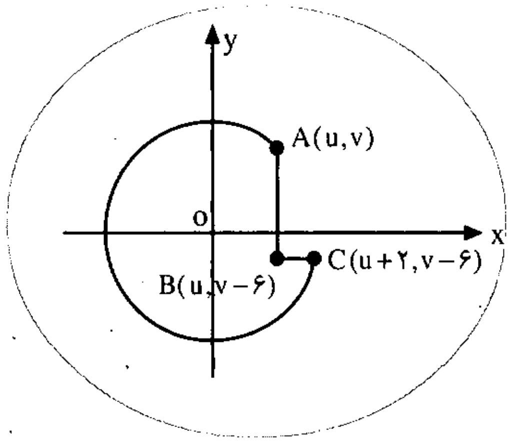
۱. از قضیه‌ی $\log_b^a = \dfrac{1}{\log_a^b}$ استفاده می‌کنیم:

$$\log_w^x = \frac{1}{24} \ , \quad \log_w^y = \frac{1}{40} \ , \quad \log_w^{xyz} = \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow \log_w^x + \log_w^y + \log_w^z = \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{1}{24} + \frac{1}{40} + \log_w^z = \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow \log_w^z = \frac{1}{60} \Rightarrow \log_z^w = 60$$

۲. به سادگی روشن است که $x - p \ge 0$ و درنتیجه:



$|x-p| = x-p$ و $x-15 \le 0$ و $|x-15| = 15-x$ و $x < 15+p$. بنابراین: $x-p-15 \le 0$ و $|x-p-15| = 15+p-x$. از آن‌جا:

$$f(x) = x-p+15-x+15+p-x = 30-x$$

و مینیمم $f(x)$ به ازای ماکزیمم x به‌دست می‌آید:

$$\min f = 30-15 = 15$$

۳. $x^2 + 18x + 30 = t$

$$\Rightarrow t = 2\sqrt{t+15} \Rightarrow t^2 = 4t+60 \Rightarrow t^2 - 4t - 60 = 0$$

$\Rightarrow (t-10)(t+6) = 0 \Rightarrow t = 10$ یا $t = -6$ غیرقابل قبول (چرا؟)

$$\Rightarrow x^2 + 18x + 30 = 10$$

$$\Rightarrow x^2 + 18x + 20 = 0$$

و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ی اخیر مساوی ۲۰ است.

۴. مسئله را به روش تحمیلی حل می‌کنیم. دایره را مطابق شکل در یک دستگاه مختصات قرار می‌دهیم، به‌طوری که مرکز آن در مبدأ مختصات باشد. فرض می‌کنیم $A(u,v)$ باشد. با توجه به اطلاعات مسئله، $B(u, v-6)$ و $C(u+2, v-6)$ است و معادله‌ی دایره به‌صورت $x^2 + y^2 = 50$ خواهد بود. چون C و A روی دایره هستند، بنابراین: $u^2 + v^2 = 50$ و $(u+2)^2 + (v-6)^2 = 50$ و از این دو معادله مقادیر u و v را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} u^2+v^2=50 \\ u^2+v^2+4u-12v=10 \Rightarrow 4u-12v=-40 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u-3v+10=0 \Rightarrow u=3v-10 \Rightarrow v^2+(3v-10)^2=50$$

$\Rightarrow v^2-6v+5=0 \Rightarrow v=1$ یا $v=5$

$\Rightarrow (u,v)=(-7,1)$ یا $(5,5)$

و چون A در ناحیه‌ی اول مختصات است، پس $A(5,5)$ و $B(5,-1)$ و مربع فاصله‌ی B از مرکز دایره برابر است با:

$$oB^2=26$$

۵. دو عدد را x و y فرض می‌کنیم. طبق مفروضات مسئله داریم:

$$x^2+y^2=7\ ,\ x^3+y^3=10$$

با فرض $x+y=s$ و $xy=p$ خواهیم داشت:

$s^2-2p=7$ و $s^3-3sp=10$ و $p=\frac{s^2-7}{2}$

$$\Rightarrow s^3-3s\left(\frac{s^2-7}{2}\right)=10 \Rightarrow s^3-21s+20=0$$

$$\Rightarrow s^3-s-20s+20=0 \Rightarrow s(s-1)(s+1)-20(s-1)=0$$

$$\Rightarrow (s-1)(s^2+s-20)=0 \Rightarrow (s-1)(s-4)(s+5)=0$$

$\Rightarrow s=1$ یا $s=4$ یا $s=-5$ و $\mathrm{Max}(s)=4$

۶. از بسط دوجمله‌ای نیوتون استفاده می‌کنیم:

$$a_{83}=6^{83}+8^{83}=(7-1)^{83}+(7+1)^{83}$$

$$=7^{83}-\binom{83}{1}7^{82}+\binom{83}{2}7^{81}-\dots+\binom{83}{82}7-1+$$

$$7^{83}+\binom{83}{1}7^{82}+\binom{83}{2}7^{81}+\dots+\binom{83}{82}7+1$$

$$=2\left(7^{83}+\binom{83}{2}7^{81}+\dots+\binom{83}{82}7\right)$$

$$=2\times49\left(7^{81}+\binom{83}{2}7^{79}+\dots+\binom{83}{80}\right)+14\times83$$

$$\Rightarrow a_{83}=49k+1162 \Rightarrow a_{83}\overset{49}{\equiv}1162\overset{49}{\equiv}35$$

۷. بهتر است مسئله را در حالت کلی که n شوالیه دور میزگرد باشند، حل کنیم. ابتدا توجه می‌کنیم که n سه‌تایی می‌توان انتخاب کرد که هر سه نفر کنار هم نشسته باشند (کافی است هر نفر را درنظر بگیریم و در جهت حرکت عقربه‌های ساعت، او و دو نفر مجاورش را یک سه‌تایی فرض کنیم. در این صورت n سه‌تایی خواهیم داشت که هر سه کنار هم باشند). سپس باید سه‌تایی‌هایی را بشماریم که فقط دو نفر آن‌ها همسایه‌ی هم باشند. به این منظور فرض می‌کنیم، A و B دو شوالیه‌ی مجاور باشند. اگر C و D دو نفر کناری دیگر آن‌ها باشند، تمام سه‌تایی‌هایی را می‌خواهیم که شامل A و B باشند و شامل هیچ‌یک از C و D نباشند. بنابراین $n-4$ سه‌تایی می‌توان به این صورت تشکیل داد. با درنظر گرفتن همه‌ی دوتایی‌های به‌همین شکل، نتیجه می‌گیریم که $n(n-4)$ سه‌تایی هم به این صورت وجود دارد. بنابراین: $n(A)=n+n(n-4)=n(n-3)$ و بدیهی است که: $n(s)=\binom{n}{3}$. لذا:

$$p(A)=\frac{x(A)}{x(s)}=\frac{x(n-3)}{\binom{n}{3}}=\frac{6(8-3)}{(x-1)(x-2)}$$

و در این حالت خاص:

$$p=\frac{6\times22}{24\times23}=\frac{11}{46}\Rightarrow 11+46=57$$

۸. می‌توانیم بنویسیم:

$$\binom{200}{100}=\frac{200!}{(100!)^2}=\frac{101\times102\times103\times\dots\times200}{1\times2\times3\times\dots\times100}$$

$$=\frac{101\times103\times105\times\dots\times199}{1\times2\times3\times\dots\times50}\times2^{50}$$

حال باکمی دقت درمی‌یابیم که صورت این کسر بر مخرج آن بخش‌پذیر و برابر با یک عدد صحیح است. ولی با شرط $A=\frac{101\times103\times105\times\dots\times199}{1\times2\times3\times\dots\times50}$ واضح است که صورت A شامل هیچ عدد زوجی نیست و لذا در صورت این کسر نمی‌توان دو برابر یک عدد اول دو رقمی را داشت. پس به دنبال سه برابر یک عدد اول دو رقمی می‌گردیم؛ یعنی $3p\le200$. درنتیجه $p<\frac{200}{3}$ و بزرگ‌ترین عدد اولی که در این شرط صدق می‌کند، $p=61$ است. در واقع: $61\times3=183$ و لذا بزرگ‌ترین عامل اول دو رقمی این عدد، ۶۱ است.

۱. اشاره به کتاب معروف «آرتورشاه و شوالیه‌های میزگرد».

همرسی سه میانه‌ی مثلث

● دکتر احمد شرف‌الدین

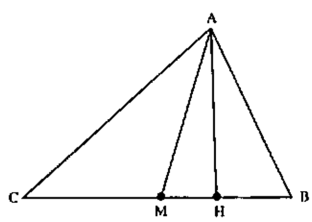
چکیده:

در مقاله‌ی حاضر، پنج برهان برای «قضیه‌ی همرسی سه میانه‌ی مثلث» می‌نویسیم. مطالعه‌ی این مقاله برای دانش‌آموزان سودمند است. برهان‌های اول، دوم و سوم اثر نگارنده است. برهان‌های چهارم و پنجم را از کتاب‌های هندسه نقل می‌کنم.

قضیه: سه میانه‌ی هر مثلث از یک نقطه می‌گذرند (به عبارت دیگر همرس‌اند).

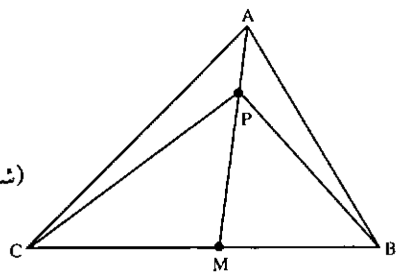
برهان اول:

الف) مثلث ABC و میانه‌ی AM را که رأس A را به نقطه‌ی M وسط ضلع BC وصل می‌کند، درنظر می‌گیریم. می‌گوییم مساحت‌های دو مثلث AMB و AMC برابرند، زیرا MB=MC و به‌علاوه، دو مثلث یاد شده یک ارتفاع AH دارند.



(شکل۱)

ب) روی میانه‌ی AM نقطه‌ی دل‌خواه P را در نظر می‌گیریم. می‌گوییم مساحت‌های دو مثلث PMB و PMC برابرند (بنابر حکم الف). پس مساحت‌های دو مثلث PAB و PAC برابرند.



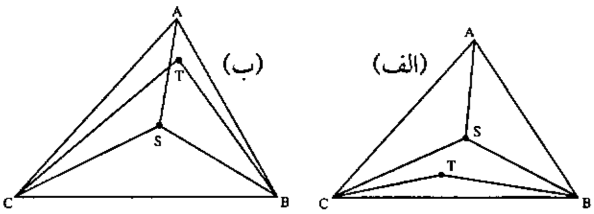
(شکل۲)

پ) اکنون نقطه‌ی P را روی میانه‌ی AM، بسیار نزدیک به نقطه‌ی A می‌گیریم. در این وضع نقطه‌ی P، مساحت دو مثلث PAB و PAC بسیار به صفر نزدیک است. نقطه‌ی P را روی میانه‌ی AM به سوی نقطه‌ی M حرکت می‌دهیم. با حرکت نقطه‌ی P به سوی نقطه‌ی M، مساحت‌های دو مثلث PAB و PAC به تدریج زیاد می‌شوند. وقتی نقطه‌ی P به نقطه M می‌رسد، مساحت‌های دو مثلث یاد شده برابر نصف مساحت مثلث ABC می‌شوند. پس

روی میانه‌ی AM نقطه‌ای چون A' وجود دارد، به طوری که:
مساحت مثلث $A'AB$ = مساحت مثلث $A'CA$ = مساحت مثلث $A'BC$

ت) اکنون می‌گوییم که داخل مثلث ABC فقط یک نقطه وجود دارد، به طوری که مساحت‌های سه مثلث SAB، SBC و SCA مساوی باشند.

برای اثبات چنین می‌گوییم: داخل مثلث ABC، نقطه‌ی S را درنظر می‌گیریم، به طوری که مساحت سه مثلث SAB، SBC و SCA مساوی باشند (بنابر آن‌چه در سطرهای پیشین گفتیم، چنین نقطه‌ای وجود دارد). اگر نقطه‌ی $T \neq S$، نقطه‌ای داخل مثلث ABC باشد، آن‌گاه مساحت‌های سه مثلث TAB، TBC و TCA نمی‌توانند مساوی باشند، زیرا مساحت یکی از این مثلث‌ها یا دو تا از آن‌ها از یک سوم مساحت مثلث ABC کمتر می‌شود (در دو مثلث الف و ب در شکل۳ این مطلب به وضوح معلوم است).



(شکل۳)

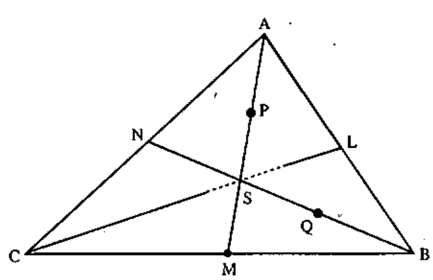
از مطالب یاد شده نتیجه می‌شود، سه میانه‌ی مثلث بر یک نقطه می‌گذرند و جای نقطه‌ی برخورد سه میانه چنان است که اگر از آن نقطه به سه رأس مثلث وصل کنیم، سه مثلث هم‌مساحت به‌دست می‌آید.

برهان دوم: مثلث ABC و میانه‌ی AM را درنظر می‌گیریم. می‌گوییم خط AM مکان هندسی نقاطی چون P است، به طوری که:

مساحت مثلث PAC = مساحت مثلث PAB   (۱)

(این حکم در اوایل برهان اول ثابت شده است). میانه‌ی مربوط به ضلع AC را BN می‌نامیم. می‌گوییم خط BN مکان هندسی نقاطی چون Q است، به طوری که:

مساحت مثلث QBC = مساحت مثلث QAB   (۲)



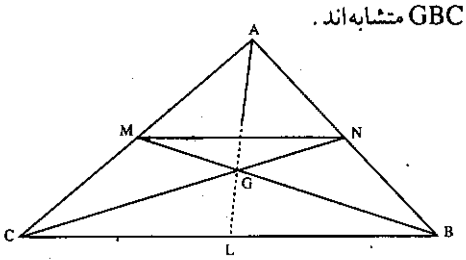
محل برخورد دو میانه‌ی AM و BN را با S نشان می‌دهیم. از دو رابطه‌ی (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

مساحت مثلث SBC = مساحت مثلث SAC   (۳)

از رابطه‌ی ۳ نتیجه می‌شود که نقطه‌ی S روی میانه‌ی CL قرار دارد.

برهان سوم: این برهان در کتاب «هندسه‌ی تحلیلی چندمحوری»، اثر نگارنده، آمده است (صفحه‌های ۶۸ و ۶۹).

برهان چهارم: این برهان در کتاب‌های هندسه چنین بیان شده است: مثلث ABC و دو میانه‌ی BM و CN را در نظر می‌گیریم و نقطه‌ی برخورد آن‌ها را G می‌نامیم. خط MN وسط‌های دو ضلع AB و AC را به هم وصل می‌کند، پس موازی ضلع BC است و طول پاره‌خط BC دو برابر طول پاره‌خط MN است. پس دو مثلث GMN و GBC متشابه‌اند.



از تشابه دو مثلث یاد شده نتیجه می‌شود:

$$\frac{GC}{GN}=\frac{GB}{GM}=\frac{BC}{MN}$$

و چون $BC = 2MN$، پس: $GC = 2GN$ و $GB = 2GM$.
نقطه‌ی برخورد میانه‌ی AL و میانه‌ی BM را k می‌نامیم. بنابر برهانی که هم‌اکنون یاد کردیم، تساوی زیر محقق است:

$$kB = 2kM$$

از تساوی اخیر نتیجه می‌شود که نقطه‌ی k بر نقطه‌ی G منطبق است. پس سه میانه‌ی هر مثلث از یک نقطه می‌گذرند.

برهان پنجم: قضیه‌ی «سوا» را به‌کار می‌بریم.

قضیه‌ی سوا: اگر سه نقطه‌ی M و N و P به ترتیب بر اضلاع BC، AC و AB مثلث ABC طوری قرار داشته باشند که رابطه‌ی زیر برقرار باشد، آن‌گاه سه خط AM، BN و CP همرس‌اند و برعکس.

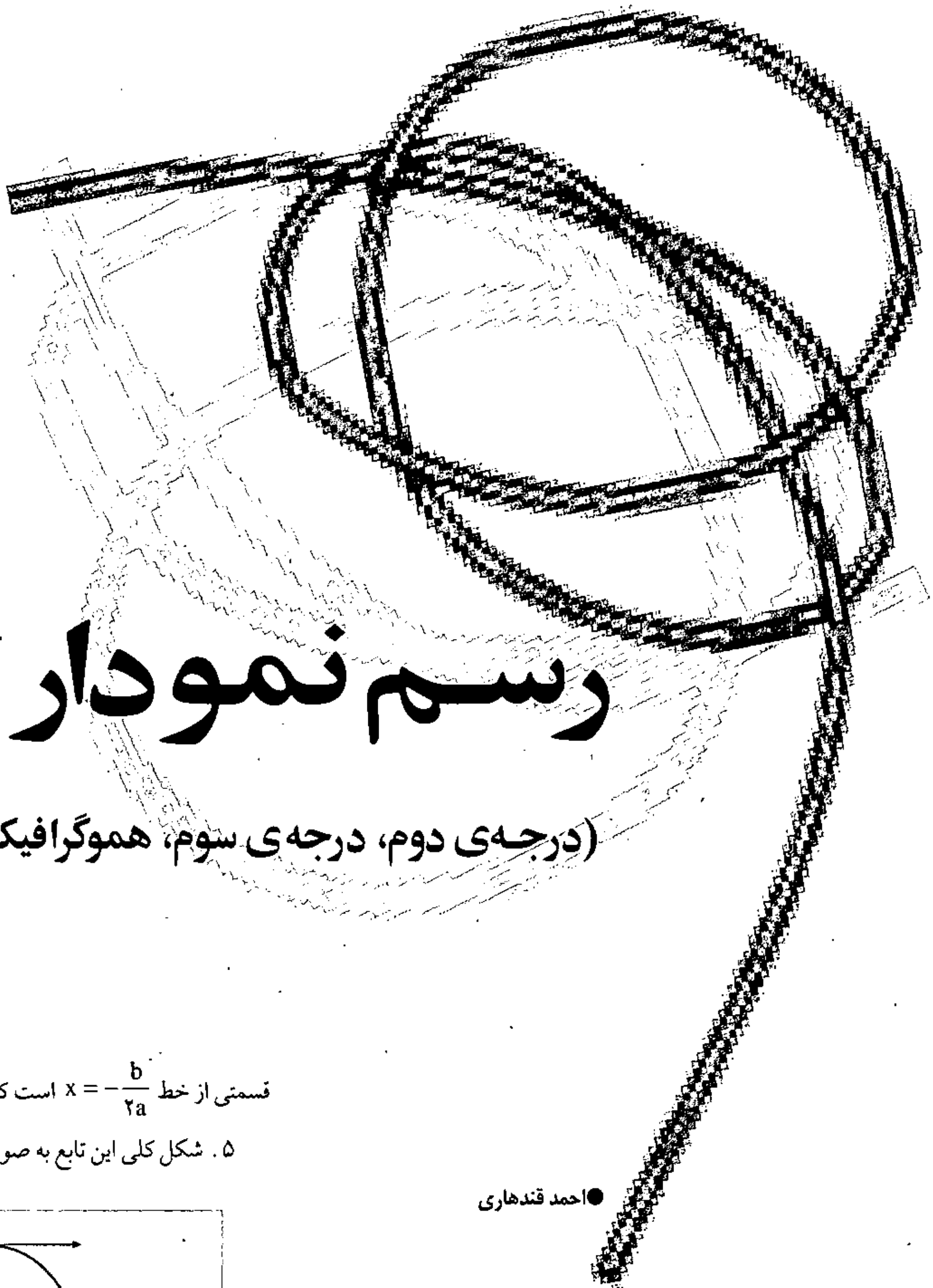
$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\cdot\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}\cdot\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=-1$$

($\overline{MB}$ و $\overline{MC}$ اندازه‌های جبری بردارهای $\overrightarrow{MB}$ و $\overrightarrow{MC}$ روی محوری منطبق بر خط BC هستند. جهت این محور دل‌خواه است، زیرا مقدار نسبت $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}$ به جهت محور منطبق بر خط BC بستگی ندارد. بر دو خط CA و AB محورهایی اختیار و توضیحات اخیر را تکرار می‌کنیم.)

اگر AM، BN و CP میانه‌های مثلث ABC باشند، چنین داریم:

$$\overline{MB}=-\overline{MC} \quad و \quad \overline{NC}=-\overline{NA} \quad و \quad \overline{PA}=-\overline{PB}$$

اندازه‌های شش مقدار اخیر در رابطه (۱) صدق می‌کنند، پس سه میانه‌ی هر مثلث همرس‌اند.



رسم نمودار تابع

(درجه‌ی دوم، درجه‌ی سوم، هموگرافیک و مثلثاتی)

● احمد قندهاری

ضابطه‌ی تابع درجه‌ی دوم در حالت کلی به صورت $y = ax^2 + bx + c$ است.

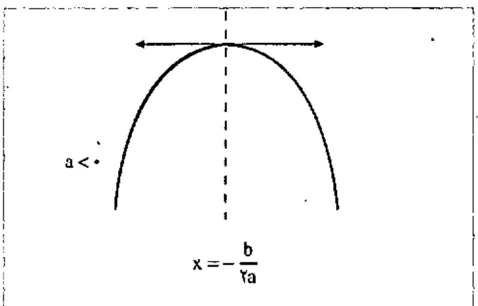
۱. اگر $a > 0$، آن‌گاه نمودار تابع یک مینی‌مم نسبی، و اگر $a < 0$، نمودار تابع یک ماکزی‌مم نسبی دارد.

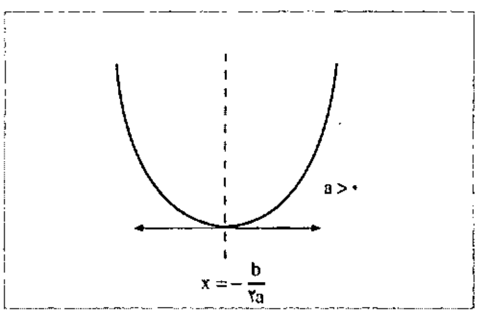
۲. $x = -\frac{b}{2a}$ طول اکسترمم نسبی و $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$ عرض اکسترمم نسبی است.

۳. خط به معادله‌ی $x = -\frac{b}{2a}$ معادله‌ی محور تقارن نمودار تابع است.

۴. اگر خط $y=m$ نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = ax^2 + bx + c$ را در نقاط A و B قطع کند، مکان هندسی نقطه‌ی C وسط AB، قسمتی از خط $x = -\frac{b}{2a}$ است که درون کاسه‌ی منحنی است.

۵. شکل کلی این تابع به صورت‌های زیر است:





برای رسم نمودار تابع چنین عمل می‌کنیم:

الف) ریشه‌ی معادله‌ی $y'_x = ۰$ را محاسبه می‌کنیم.

ب) به x صفر می‌دهیم و y را محاسبه می‌کنیم و به y صفر می‌دهیم، xها را محاسبه می‌کنیم.

چنان‌چه معادله‌ی $y = ۰$، ریشه‌های حقیقی نداشته باشد یا ریشه‌های آن کسری یا رادیکالی باشد، از نقاط کمکی برای رسم استفاده می‌کنیم.

ج) جدول تغییرات تابع را تشکیل می‌دهیم. در سطر اول xها را می‌نویسیم و در سطر دوم y'_x را تعیین علامت می‌کنیم. سپس جدول را کامل می‌کنیم. به کمک جدول و مطالب فوق، نمودار تابع را رسم می‌کنیم.

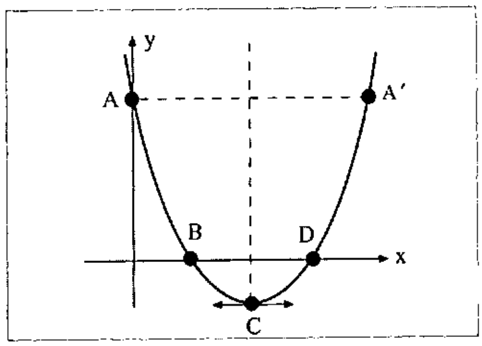
مسئله‌ی ۱. مطلوب است رسم جدول و نمودار هریک از تابع‌های به معادله‌های زیر:

۱) $y = x^۲ - ۴x + ۳$

$y'_x = ۲x - ۴ = ۰ \Rightarrow x = ۲$ طول نقطه‌ی مینی‌مم نسبی

$x = ۰ \Rightarrow y = ۳\ ,\ y = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۴x + ۳ = ۰ \Rightarrow x = ۱\ ,\ x = ۳$

$x \to \pm\infty \Rightarrow y \to +\infty\ ,\ x = ۲ \Rightarrow y = ۴ - ۸ + ۳ = -۱$



x	$-\infty$		۰		۱		۲		۳		$+\infty$
y'_x		−		−		−	۰	+		+	
y	$+\infty$	↘	۳	↘	۰	↘	-۱	↗	۰	↗	$+\infty$
			A		B		C		D		

۲) $y = ۲x^۲ - ۴x - ۱$

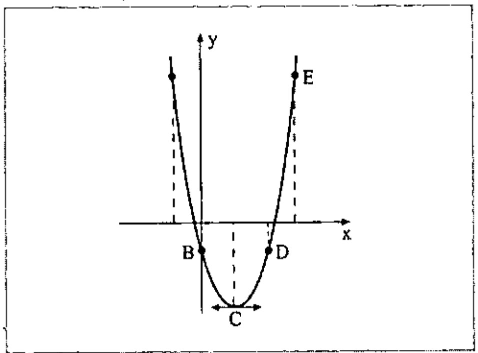
$y'_x = ۴x - ۴ = ۰ \Rightarrow x = ۱$ طول مینی‌مم نسبی

$x = ۰ \Rightarrow y = ۱$

از حل معادله‌ی $y = ۰$ صرف‌نظر می‌کنیم، زیرا جواب‌های معادله‌ی $y' = ۰$ رادیکالی است. برای بهتر رسم کردن منحنی، دو عدد ۲ و ۳ در سمت راست جواب مشتق و دو عدد ۰ و ۱- در سمت چپ جواب مشتق به‌عنوان xهای کمکی می‌نویسیم.

$x \to \pm\infty \Rightarrow y \to +\infty$

		کمکی					کمکی		
x	$-\infty$	-۱		۰	۱	۲		۳	$+\infty$
y'_x	−		−		− ۰ +		+		+
y	$+\infty$ ↘	۵	↘	-۱ ↘	-۳	↗ -۱	↗	۵	↗ $+\infty$
		A		B	C	D		E	



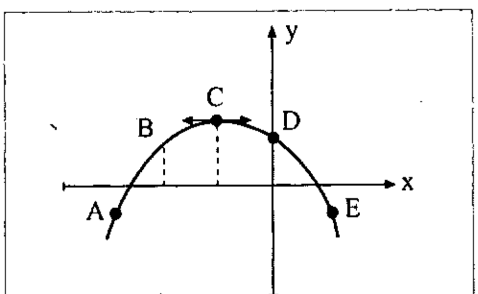
۳) $y = -\dfrac{x^۲}{۲} - x + ۱$

$y'_x = -x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱$ طول نقطه‌ی ماکزی‌مم نسبی

$x = ۰ \Rightarrow y = ۱$

$x \to \pm\infty \Rightarrow y \to -\infty$

		کمکی				کمکی		
x	$-\infty$	-۳	-۲	-۱	۰	۱	$+\infty$
y'_x	+	+	+	۰ −	−	−	
y	$-\infty$ ↗	$-\frac{۱}{۲}$ ↗	۱ ↗	$\frac{۳}{۲}$ ↘	۱ ↘	$-\frac{۱}{۲}$ ↘	$-\infty$
		A	B	C	D	E	



مسئله‌ی ۲. در تابع با ضابطه‌ی $y = ax^۲ + bx + c$، a، b و c را چنان بیابید که نمودار تابع، محور yها را در نقطه‌ای به عرض (۱) قطع کند و نقطه‌ی (۱- و ۱) اکسترمم نسبی تابع باشد.

حل: نقطه‌ی تقاطع منحنی با محور yها $A(۰,۱)$

نقطه‌ی اکسترمم نسبی $M(۱,-۱)$

$A(۰,۱) \xrightarrow{\text{در معادله‌ی تابع}} ۱ = ۰ + ۰ + c \Rightarrow c = ۱$

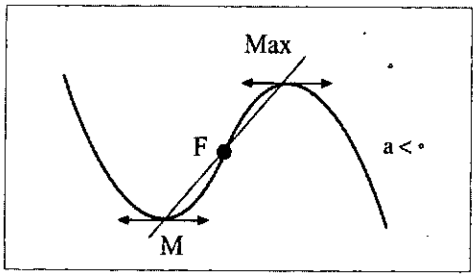
$x = -\dfrac{b}{۲a} = ۱ \Rightarrow b = -۲a$

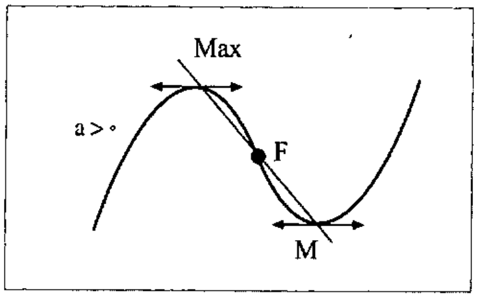
$$y=\frac{4ac-b^2}{4a}=-1 \Rightarrow \frac{4a-b^2}{4a}=-1 \Rightarrow -4a=4a-b^2$$
$$\Rightarrow b^2-8a=0 \Rightarrow 4a^2-8a=0 \Rightarrow 4a(a-2)=0 \ , \ a\neq 0$$
$$\Rightarrow a-2=0 \Rightarrow a=2 \ , \ b=-2a \Rightarrow b=-4$$

رسم نمودار تابع درجه‌ی سوم

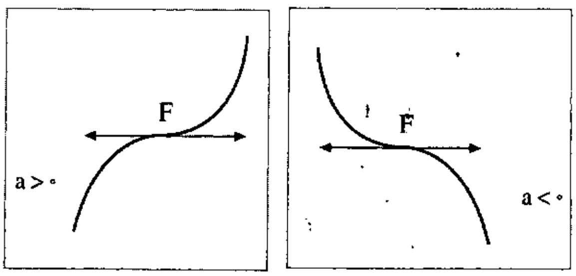
این تابع در حالت کلی به‌صورت $y=ax^3+bx^2+cx+d$ است.

۱. اگر معادله‌ی $y'_x=0$ دو ریشه‌ی حقیقی متمایز داشته باشد، نمودار تابع یک ماکزی‌مم نسبی و یک مینی‌مم نسبی دارد که نقطه‌ی عطف به‌طول $x=-\frac{b}{3a}$ در وسط آن‌ها قرار دارد و مرکز تقارن نمودار تابع است.

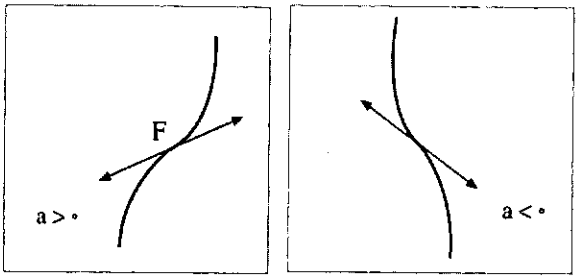




۲. اگر معادله‌ی $y'_x=0$ ریشه‌ی حقیقی مضاعف داشته باشد، آن ریشه طول نقطه‌ی عطف است و نمودار تابع، نقاط اکسترمم نسبی ندارد.



۳. اگر معادله‌ی $y'_x=0$ ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد، باز هم منحنی تابع نقاط اکسترمم نسبی دارد.



برای رسم نمودار تابع درجه‌ی سوم، ابتدا معادله‌ی $y'_x=0$ را حل و ریشه‌های آن را محاسبه می‌کنیم. چنان‌چه معادله‌ی $y'_x=0$ ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد، از ریشه‌ی $y''=0$ به‌عنوان نقطه‌ی اصلی منحنی استفاده می‌کنیم. البته ریشه‌ی $y''=0$ طول نقطه‌ی عطف است. سپس مانند تابع درجه‌ی دوم حل را ادامه می‌دهیم.

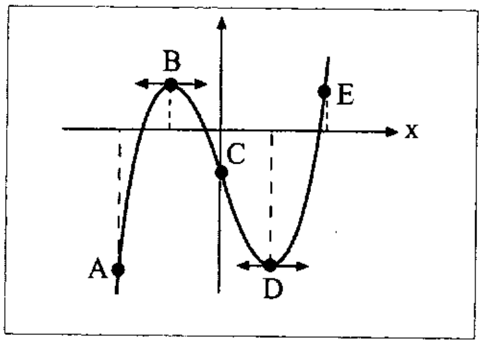
مسئله: مطلوب است رسم جدول و منحنی نمایش تغییرات هر یک از تابع‌های به معادله‌های زیر:

۱) $y=x^3-3x-1$

طول‌های اکسترمم نسبی

$$y'_x=3x^2-3=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$$
$$x=0 \Rightarrow y=-1 \ , \ x\to\pm\infty \Rightarrow y\to\pm\infty$$

x	$-\infty$	-2		-1		0		1		2	$+\infty$
y'_x	+		+	0	−		−	0	+		+
y	$-\infty$ ↗	-3	↗	1	↘	-1	↘	-3	↗	1	↗ $+\infty$
		A		B		C		D		E	

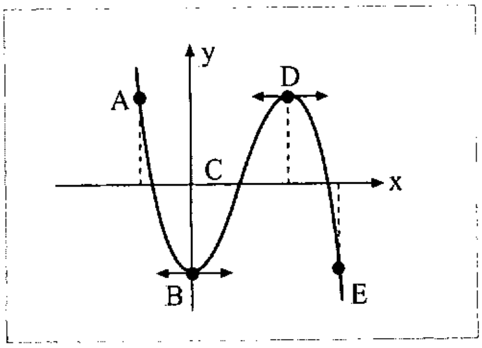


۲) $y=-x^3+3x^2-2$

طول‌های اکسترمم نسبی

$$y'_x=-3x^2+6x=0 \Rightarrow -3x(x-2)=0 \Rightarrow x=0 \ , \ x=2$$
$$x\to\pm\infty \Rightarrow y\to\mp\infty$$
$$x=0 \Rightarrow y=-2$$

x	-∞		-۱		۰		۱		۲		۳		+∞
y'_x		-		-	۰	+		+	۰	-		-	
y	+∞	↘	۲	↘	-۲	↗	۰	↗	۲	↘	-۲	↘	-∞
			A		B		C		D		E		

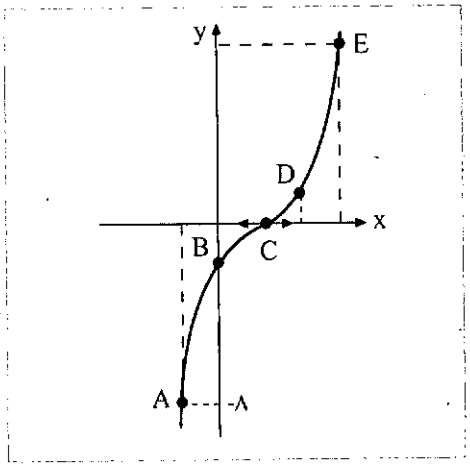


معادله ریشه‌ی مضاعف دارد، پس $x=1$ طول نقطه‌ی عطف است.

۳) $y=(x-1)^3$

$y'_x=3(x-1)^2=0 \Rightarrow x=1$

$x\to\pm\infty \Rightarrow y\to\pm\infty$



x	-∞		-۱		۰		۱		۲		۳		+∞
y'_x		+		+		+	۰	+		+		+	
y	-∞	↗	-۸	↗	-۱	↗	۰	↗	۱	↗	۸	↗	+∞
			A		B		C		D		E		

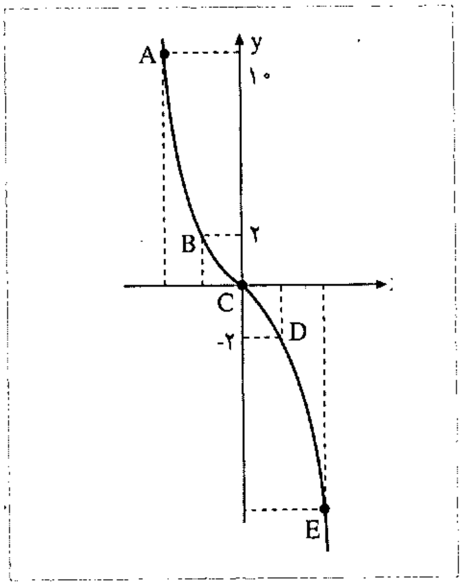
معادله‌ی $y'_x=0$ ریشه‌های حقیقی ندارد.

۴) $y=-x^3-x$

$y'_x=-3x^2-1=0 \Rightarrow x^2=-\frac{1}{3}$

$y''_x=-6x=0 \Rightarrow x=0$

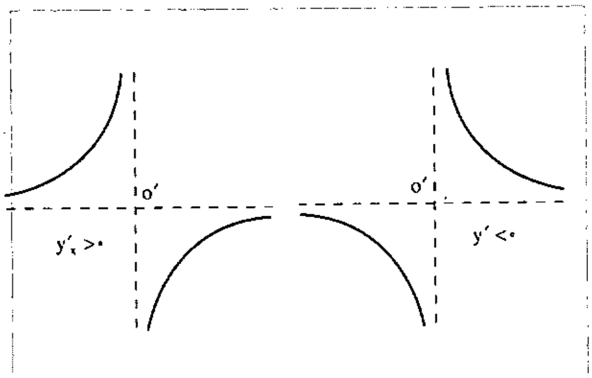
$x\to\pm\infty \Rightarrow y\to\mp\infty$



x	-∞		-۲		-۱		۰		۱		۲		+∞
y'_x		-		-		-		-		-		-	
y	+∞	↘	۱۰	↘	۲	↘	۰	↘	-۲	↘	-۱۰	↘	-∞
			A		B		C		D		E		

رسم نمودار تابع هموگرافیک

ضابطه‌ی تابع هموگرافیک در حالت کلی به صورت $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ ، $c\neq 0$ است. نمودار این تابع یک مجانب قائم به معادله‌ی $x=-\frac{d}{c}$ و یک مجانب افقی به معادله‌ی $y=\frac{a}{c}$ دارد. اگر $y'_x>0$ ، تابع اکیداً صعودی و اگر $y'_x<0$ ، تابع اکیداً نزولی است.



محل تلاقی مجانب‌ها یعنی نقطه‌ی $O'(-\frac{d}{c},\frac{a}{c})$ مرکز تقارن منحنی است. برای رسم جدول تغییرات و نمودار تابع، ابتدا معادله‌های مجانب‌های قائم و افقی را به‌دست می‌آوریم و سپس y'_x را محاسبه می‌کنیم. برای رسم دقیق نمودار، در دست داشتن

یک نقطه از منحنی کافی است. زیرا محل تلاقی مجانب‌ها مرکز تقارن منحنی است. جدول تغییرات را تشکیل می‌دهیم و پس از آن نمودار تابع را رسم می‌کنیم.

مسئله‌ی ۱. جدول تغییرات و نمودار هریک از تابع‌های باضابطه‌ی زیر را بیابید.

$$۱)\quad y=\frac{۲x+۱}{۲x-۱}$$

معادله‌ی مجانب قائم

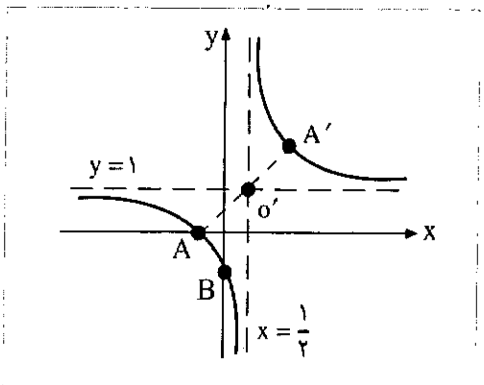
$$\text{مجانب قائم}:\ y\to\pm\infty \Rightarrow ۲x-۱=\circ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

معادله‌ی مجانب افقی

$$\text{مجانب افقی}:\ x\to\pm\infty \Rightarrow y=\frac{۲}{۲}\Rightarrow y=۱$$

$$x=\circ\Rightarrow y=-۱ \text{ و } y=\circ\Rightarrow ۲x+۱=\circ\Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}$$

$$y'_x=\frac{-۴}{(۲x-۱)^۲}<\circ$$



x	$-\infty$		$-\frac{۱}{۲}$		$\circ$		$\frac{۱}{۲}$		$+\infty$
y'_x		−		−		−	‖	−	
y	۱	↘	$\circ$ (A)	↘	-۱ (B)	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	۱

$$۲)\quad y=\frac{\sqrt{۲}x}{x+۱}$$

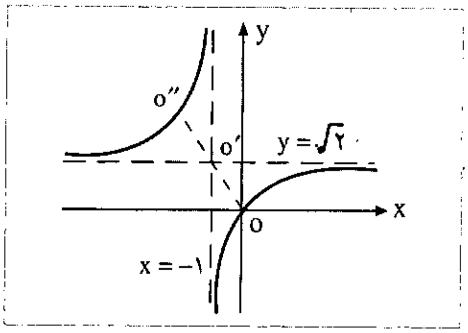
معادله‌ی مجانب قائم

$$\text{مجانب قائم}:\ y\to\pm\infty\Rightarrow x+۱=\circ\Rightarrow x=-۱$$

معادله‌ی مجانب افقی

$$\text{مجانب افقی}:\ x\to\pm\infty\Rightarrow y=\frac{\sqrt{۲}}{۱}\Rightarrow y=\sqrt{۲}$$

$$x=\circ\Rightarrow y=\circ \text{ و } y'_x=\frac{\sqrt{۲}}{(x+۱)^۲}>\circ$$



x	$-\infty$		-۱		$\circ$		$+\infty$
y'_x		+	‖	+		+	
y	$\sqrt{۲}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\circ$	↗	$\sqrt{۲}$

مسئله‌ی ۲. در تابع با ضابطه‌ی $y=\frac{ax+b}{cx+d}$، اگر نمودار تابع از مبدأ مختصات بگذرد و نقطه‌ی $O'(۱,۲)$ مرکز تقارن نمودار تابع باشد، معادله‌ی تابع را بیابید.

حل:

$$O(\circ,\circ)\xrightarrow{\text{در معادله‌ی تابع}}\circ=\frac{b}{d}\Rightarrow b=\circ$$

$$\text{مجانب افقی و}:\ y=\frac{a}{c}=۲\Rightarrow a=۲c$$

$$\text{مجانب قائم}:\ x=-\frac{d}{c}=۱\Rightarrow d=-c$$

$$c\neq\circ\Rightarrow y=\frac{۲x}{x-۱} \text{ و}$$

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow y=\frac{۲cx+\circ}{cx-c}\Rightarrow y=\frac{۲cx}{c(x-۱)}$$

رسم نمودار تابع‌های باضابطه‌ی مثلثاتی

الف) معادله‌ی $y'_x=\circ$ را حل می‌کنیم و جواب‌های آن را در بازه‌ی داده شده محاسبه می‌کنیم.

ب) مختصات نقاط تقاطع نمودار تابع را با محورهای مختصات به‌دست می‌آوریم.

ج) جدول تغییرات تابع را تشکیل می‌دهیم و پس از تکمیل آن، نمودار تابع را در بازه‌ی داده شده رسم می‌کنیم.

مسئله: مطلوب است رسم جدول و نمودار هریک از تابع‌های به معادله‌های زیر:

$$۱)\quad y=\sin^۲x-\sin x \qquad \circ\le x\le ۲\pi$$

$$y'_x=۲\cos x\sin x-\cos x=\circ\Rightarrow \cos x(۲\sin x-۱)=\circ$$

$$\cos x=\circ\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}$$

$$۲\sin x-۱=\circ\Rightarrow \sin x=\frac{۱}{۲}=\sin\frac{\pi}{۶}$$

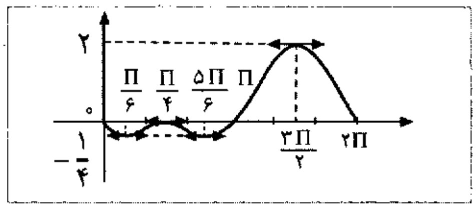
$$\Rightarrow \begin{cases} x=2k\pi+\frac{\pi}{6} \Rightarrow x=\frac{\pi}{6} \\ x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=\frac{5\pi}{6}\end{cases}$$

$x=0$ یا $2\pi \Rightarrow y=\sin^2 0-\sin=0$

$y=0\Rightarrow \sin^2 x-\sin x=0\Rightarrow \sin x(\sin x-1)=0$
$\Rightarrow \sin x=0 \Rightarrow x=k\pi$

$\Rightarrow x=0,\pi,2\pi,\ \sin=1\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
y'_x		−	0	+	0	−	0	+		+	0	−	
y	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	0	↗	2	↘	0



۲) $y=\cos^2 x+\cos x-2 \qquad 0\le x\le 2\pi$

$y'_x=-2\sin x\cos x-\sin x=0\Rightarrow -\sin x(2\cos x+1)=0$

$\sin x=0\Rightarrow x=k\pi\Rightarrow x=0,\pi,2\pi,$

$2\cos x+1=0\Rightarrow \cos x=-\frac{1}{2}$

$\cos x=\cos\frac{2\pi}{3}\Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}$

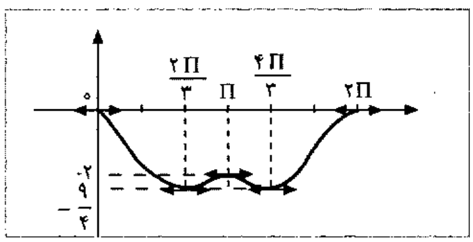
$x=0$ یا $2\pi\Rightarrow y=\cos^2 0+\cos 0-2=1+1-2=0$

$y=0\Rightarrow \cos^2 x+\cos x-2=0$ مجموع ضرائب صفر است

$\Rightarrow\begin{cases}\cos x=1\\ \cos x=-2 \ \text{غیرممکن}\end{cases}$

$\cos x=1\Rightarrow x=2k\pi\Rightarrow x=0,2\pi$

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π		$\frac{4\pi}{3}$		2π
y'_x	0	−	0	+	0	−	0	+	0
y	0	↘	$-\frac{9}{4}$	↗	−2	↘	$-\frac{9}{4}$	↗	0



اعداد جالب ریاضی

$102\times102=10404$
$201\times201=40401$

$103\times103=10609$
$301\times301=90601$

به مربع اعداد هم توجه کنید.

$103^2=10609$
$301^2=90601$

$112^2=12544$
$211^2=44521$

$13^2=169$
$14^2=196$

$113^2=12769$
$311^2=96721$

$122^2=14884$
$221^2=48841$

$157^2=24649$
$158^2=24964$

$913^2=833569$
$914^2=835396$

$1^3+5^3+3^3=153$
$3^3+7^3+0^3=370$
$3^3+7^3+1^3=371$
$4^3+0^3+7^3=407$
$48^2+53^2+62^2=84^2+35^2+26^2$

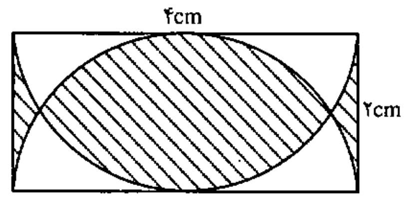
یک مسئله و چند راه حل

● مهدی منیری بیدگلی
دبیر ریاضی شهرستان چادگان

مسئله‌ها قلب ریاضیات هستند و حل مسئله، قلب یادگیری ریاضی است. فایده‌ی حل یک مسئله از چندراه متفاوت چیست؟ می‌دانیم حل یک مسئله از چند راه متفاوت، نوعی مطالعه‌ی ریاضیات است و مطالعه‌ی ریاضیات، دستگاه ذهن را توسعه می‌دهد. پس حل یک مسئله با چند روش، ذهن را فعال می‌کند و باعث بروز ابتکار و خلاقیت می‌شود.

چندی پیش، یکی از دانش‌آموزان مسئله‌ای را مطرح کرد که با روش‌ها و ابزارهای متفاوت قابل حل است و لذا می‌توان آن را در پایه‌های گوناگون تحصیلی مطرح کرد. در مقاله‌ی حاضر، چند راه‌حل متفاوت برای این مسئله ارائه شده است. شما نیز بکوشید راه‌های دیگری برای حل آن بیابید.

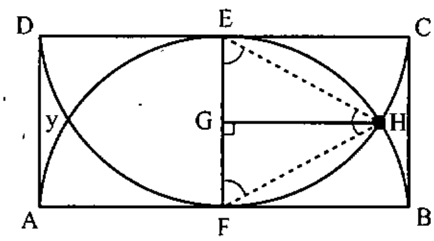
مسئله: در شکل (۱)، مساحت قسمت هاشور خورده را بیابید.



(شکل ۱)

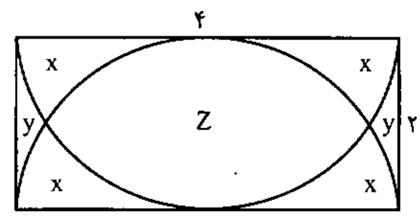
روش اول

با توجه به تقارن موجود در شکل ۱، مسئله را حل می‌کنیم. ابتدا قسمت‌های گوناگون شکل را نامگذاری می‌کنیم. بنابراین داریم:



(شکل ۲)

در مورد کل مساحت شکل، رابطه‌ی $4x + 2y + z = 8$ و در مورد نیم‌دایره‌ها، رابطه‌ی $2x + z = 2\pi$ را می‌توان نوشت. حال از خواص قطاع دایره و مساحت آن استفاده می‌کنیم. قطاع EFH را از نیم‌دایره‌ی AEB در نظر می‌گیریم (شکل ۳).



(شکل ۳)

اگر مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ی GHF را از مساحت قطاع EFH کم کنیم، مساحت $\frac{1}{4}z$ به‌دست می‌آید که راهگشای حل مسئله است.

می‌دانیم مثلث EFH متساوی‌الاضلاع است (چرا؟). لذا اندازه‌ی هر زاویه‌ی آن ۶۰ درجه است. چون مساحت قطاع مورد نظر برابر با $\frac{1}{2}R^2\theta$ است که در آن θ برحسب رادیان است، لذا داریم:

$$\text{مساحت قطاع} = \frac{1}{2} \times 2^2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ی FHG برابر است با:

$$\frac{1}{2}GH \times FG$$

می‌دانیم $FG = 1$ و $FH = 2$. پس از رابطه‌ی فیثاغورس داریم: $GH = \sqrt{3}$

بنابراین مساحت مثلث FHG برابر است با $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

در این صورت مساحت $\frac{1}{4}z$ به‌دست می‌آید: $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$. و از آن‌جا مساحت z برابر است با $\frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}$.

حال دستگاه مقابل را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} 4x + 2y + z = 8 \\ 2x + z = 2\pi \\ z = \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3} \end{cases}$$

پس از حل دستگاه، مقادیر زیر برای x و y به‌دست می‌آیند:

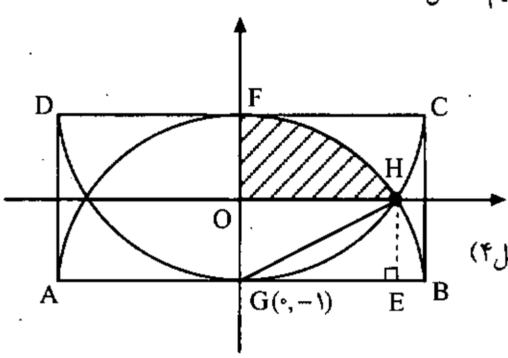
$$x = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \quad \text{و} \quad y = 4 - \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}$$

پس، مساحت قسمت هاشورخورده برابر است با:

$$2y + z = 8 + \frac{4\pi}{3} - 4\sqrt{3}$$

روش دوم

در این روش، مبدأ مختصات را منطبق بر مرکز مستطیل قرار می‌دهیم (شکل ۴).



(شکل ۴)

سطح محصور بین محورهای مختصات، با مساحت $\frac{1}{4}z$ برابر است و به‌منظور محاسبه‌ی آن، طبق قضیه‌ی فیثاغورس داریم:

$$GE = \sqrt{GH^2 - EH^2} = \sqrt{3} \Rightarrow a = x_H = \sqrt{3}$$

هم‌چنین معادله‌ی منحنی FH را می‌نویسیم. مرکز این دایره نقطه‌ی $G(0,-1)$ و شعاع ۲ است. پس خواهیم داشت:

$$(x-0)^2+(y+1)^2=4 \Rightarrow y=\sqrt{4-x^2}-1$$

با استفاده از انتگرال داریم:

$$S_z=\int_0^a y\,dx=4\int_0^a(-1+\sqrt{4-x^2})dx$$

$$=4\int_0^a -1dx+4\int_0^a\sqrt{4-x^2}\,dx$$

$$=-4a+4\int_0^a\sqrt{4-x^2}\,dx \qquad (1)$$

با تغییر متغیر $x=2\sin\theta$ انتگرال اخیر را محاسبه می‌کنیم:

$$\int_0^a\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}4\cos^2\theta\,d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos2\theta)d\theta$$

$$=\frac{2\pi}{3}+\sin2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

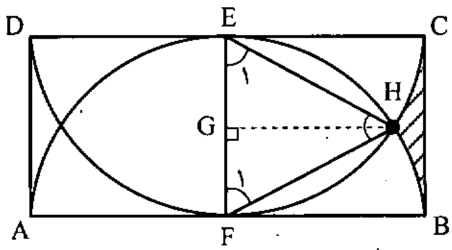
حال با جای‌گذاری در رابطه‌ی ۱ داریم:

$$S_Z=-4\sqrt{3}+4\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{8\pi}{3}-2\sqrt{3}$$

در ادامه، همانند روش اول، دستگاه معادلات را حل می‌کنیم و مقدار $2y+z=8+\frac{4\pi}{3}-4\sqrt{3}$ را می‌یابیم.

روش سوم

از تقارن موجود در شکل استفاده می‌کنیم و می‌دانیم مجموع مساحت قطاع‌های EHC و FHB، به‌علاوه‌ی مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع EFH برابر است با $4-y$ (مقدار y همان مساحت قسمت هاشورخورده در شکل ۵ است).



(شکل۵)

چون مثلث FEH متساوی‌الاضلاع است، پس اندازه‌ی هر زاویه‌ی آن ۶۰ درجه است. در این صورت، متمم‌های زاویه‌های F_1 و E_1 برابر ۳۰ درجه هستند. پس مساحت قطاع‌های نام‌برده را می‌یابیم:

$$S_{FBH}=S_{EHC}=\frac{\pi}{3}$$

چون طبق قضیه‌ی فیثاغورس $GH=\sqrt{3}$ است، مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع EFH نیز برابر است با $\sqrt{3}$. بنابراین:

$$4-y=\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3} \Rightarrow y=4-\frac{2\pi}{3}-\sqrt{3}$$

حال طبق شکل ۱ می‌توان نوشت:

$$y+x=4-\pi \Rightarrow x=-\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}$$

و در نهایت مساحت z به‌دست می‌آید که برابر است با:

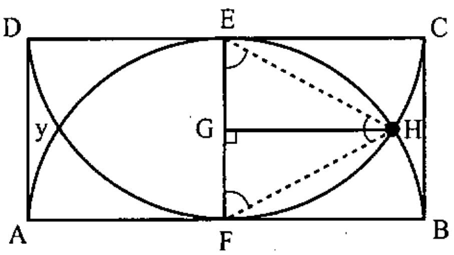
$$\frac{8\pi}{3}-2\sqrt{3}$$

با تمام این یافته‌ها، مساحت قسمت هاشورخورده در شکل ۱ به‌دست می‌آید:

$$2y+z=8+\frac{4\pi}{3}-4\sqrt{3}$$

روش چهارم

از تقارن موجود در شکل استفاده می‌کنیم و می‌دانیم مانند شکل ۶، مساحت قسمت z تشکیل شده است از مساحت یک لوزی و مساحت چهار قطاع اطراف آن (شکل ۶). برای یافتن مساحت لوزی، ابتدا از مثلث قائم‌الزاویه‌ی EGH که مساحتش ربع مساحت لوزی است، داریم:



(شکل۶)

چون EH شعاع دایره است، پس $EH=2$ و لذا از قضیه‌ی فیثاغورس به‌دست می‌آوریم:

$$GH^2=EH^2-EG^2=4-1=3 \Rightarrow GH=\sqrt{3}$$

پس نصف قطر بزرگ لوزی به‌دست می‌آید. در این صورت

$$KH=2GH=2\sqrt{3} \qquad (1)$$

بنابراین، مساحت قطاع EFH به مرکز F $= \frac{۱}{۲}\times ۴\times \frac{\pi}{۳} = \frac{۲\pi}{۳}$

مساحت قطاع EH که یکی از چهار قطاع اطراف لوزی است، برابر است با:

$$S_{EH} = \frac{۲\pi}{۳} - S_{\overset{\triangle}{EFH}} = \frac{۲\pi}{۳} - \sqrt{۳} \qquad (۲)$$

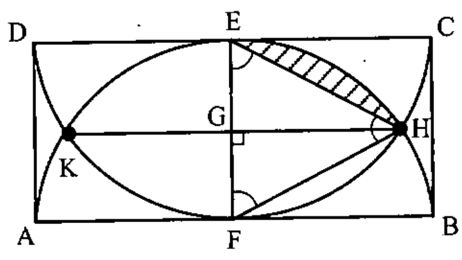
با توجه به روابط ۱ و ۲، مساحت قسمت z به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$z = \text{مساحت لوزی} + ۴S_{EH} = ۲\sqrt{۳} + ۴\left(\frac{۲\pi}{۳} - \sqrt{۳}\right)$$

پس $z = \frac{۸\pi}{۳} - ۲\sqrt{۳}$. حال می‌توانیم از روابط موجود در روش اول، نسبت به محاسبه‌ی مقادیر x و y اقدام کنیم. بعد از محاسبه، مقدار مساحت قسمت هاشورخورده برابر با $۲y + z = ۸ + \frac{۴\pi}{۳} - ۴\sqrt{۳}$ به دست خواهد آمد.

روش پنجم

در این روش نیز مانند روش‌های قبل، تمام مسئله، یافتن مقدار z است. یک راه دیگر برای یافتن مقدار z به این صورت است که: مساحت ربع دایره به مرکز E که در شکل زیر ECF نام‌گذاری شده است را بیابیم و مساحت‌های قطاع EHC و مثلث EGH و سطح GFH را از آن کم کنیم.



(شکل۷)

برای این منظور داریم:

(مساحت قطاع EHC + مساحت مثلث EGH) − مساحت ربع دایره = مساحت سطح GFH

پس:

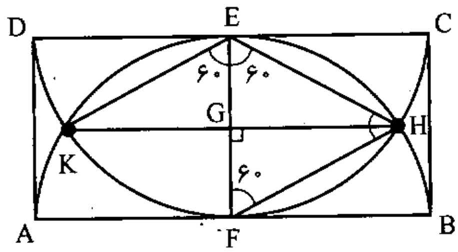
$$S_{GFH} = \pi - \left(\frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{\pi}{۳}\right) = \frac{۲\pi}{۳} - \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$ بنابراین:

$$\frac{۱}{۴}z = \frac{۲\pi}{۳} - \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow z = \frac{۸\pi}{۳} - ۲\sqrt{۳}$$

حال مانند روش اول، مقادیر x و y را محاسبه می‌کنیم. بعد از محاسبه، مقدار مساحت قسمت هاشورخورده برابر با $۲y + z = ۸ + \frac{۴\pi}{۳} - ۴\sqrt{۳}$ به دست خواهد آمد.

روش ششم

می‌توانیم برای محاسبه‌ی مقدار z از قضیه‌ی کسینوس‌ها استفاده کنیم. در شکل ۸، مثلث KEH را در نظر بگیرید. می‌خواهیم مانند روش چهارم، از مساحت لوزی و چهار قطاع اطراف آن استفاده کنیم. ولی این‌بار برای پیدا کردن قطر بزرگ لوزی، به قضیه‌ی کسینوس‌ها متوسل می‌شویم. مثلث EFH متساوی‌الاضلاع است و طبق تقارنی که در مسئله وجود دارد، زاویه‌ی KEH برابر ۱۲۰ درجه خواهد بود.



(شکل۸)

حال داریم: $KH^۲ = EK^۲ + EH^۲ - ۲EK.EH.\cos ۱۲۰^\circ$ و

$$KH^۲ = ۴ + ۴ - ۲\times ۲\times ۲\times \frac{۱}{۲} = ۱۲ \Rightarrow KH = ۲\sqrt{۳}$$

هم‌چنین مساحت قطاع EH که یکی از چهار قطاع اطراف لوزی است، به روش زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{مساحت قطعه‌ی } EH = \frac{۱}{۲}R^۲(\alpha - \sin\alpha) = \frac{۱}{۲}\times ۴\times\left(\frac{\pi}{۳} - \sin\frac{\pi}{۳}\right) = \frac{۲\pi}{۳} - \sqrt{۳}$$

بنابراین مساحت لوزی برابر با $۲\sqrt{۳}$ و مساحت تمام قسمت z برابر با $z = \text{مساحت لوزی} + ۴S_{EH} = ۲\sqrt{۳} + ۴\left(\frac{۲\pi}{۳} - \sqrt{۳}\right)$ خواهد شد. حال می‌توانیم مانند قسمت‌های قبل به محاسبه‌ی مقادیر x و y بپردازیم و بعد از محاسبه‌ی این مقادیر، مساحت قسمت هاشورخورده مساوی $۲y + z = ۸ + \frac{۴\pi}{۳} - ۴\sqrt{۳}$ به‌دست می‌آید.

---

۱. برگزیده مسائل هندسه، گروهی از ریاضی‌دانان شوروی. ترجمه‌ی عادل ارشقی. انتشارات رسا.

۲. رشد آموزش ریاضی.

یک نامساوی ساده

• حمیدرضا کریمی

ثابت می‌کنیم وقتی که $n \to \infty$، آن‌گاه $n^{\frac{1}{n}} \to 1$. این اثباتی ساده و نسبتاً جدید است. برای $x \geq 0$ و $0 < a < 1$، $f(x)$ را طوری تعریف کنید که $f'(x) = a - ax^{a-1}$ و $f''(x) = a(1-a)x^{a-2}$ باشد. ملاحظه می‌کنیم که $f(x)$ در $x = 1$ مقدار می‌نیمم خود را به‌دست می‌آورد. بنابراین داریم:

$$x^a \leq ax + (1-a) \qquad (1)$$

هرگاه: $x = \sqrt{n}$ و $a = \frac{1}{n}$، در صورتی که $n \to \infty$ خواهیم داشت:

$$(\sqrt{n})^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} + 1 - \frac{1}{n} \to 1$$

اما $(\sqrt{n})^{\frac{1}{n}} > 1$، هر گاه $n > 1$ باشد. بنابراین وقتی $n \to \infty$ داریم:

$$(\sqrt{n})^{\frac{1}{n}} \to 1$$

چون $(\sqrt{n})^{\frac{1}{n}} = \sqrt{n^{\frac{1}{n}}}$، پس:

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$$

برای مشاهده‌ی کاربردهای دیگر نامساوی (۱)، x را مساوی $\frac{a}{b}$ قرار دهید و دو طرف نامساوی (۱) را در b ضرب کنید تا نامساوی میانگین حسابی ـ هندسی برای دو متغیر به‌دست آید. اگر a و b و α و β مثبت باشند و $\alpha + \beta = 1$ باشد، آن‌گاه:

$$a^{\alpha}b^{\beta} \leq \alpha a + \beta b \qquad (2)$$

و تساوی برقرار است، اگر و فقط اگر $a = b$ باشد.

فرض کنید که a_i و b_i اعداد مثبت $(1 \leq i \leq n)$، $\sum a_i = 1$ و $\sum b_i = 1$ باشد. اگر نامساوی (۲) را n مرتبه بنویسیم و آن‌ها را جمع کنیم:

$$\sum a_i^{\alpha} b_i^{\beta} \leq \alpha \sum a_i + \beta \sum b_i = \alpha + \beta = 1$$

اگر x_i و y_i اعداد مثبت باشند، می‌توان نوشت:

$$a_i = \frac{x_i^{\frac{1}{\alpha}}}{x_1^{\frac{1}{\alpha}} + \cdots + x_n^{\frac{1}{\alpha}}} \quad , \quad b_i = \frac{y_i^{\frac{1}{\beta}}}{y_1^{\frac{1}{\beta}} + \cdots + y_n^{\frac{1}{\beta}}}$$

و خواهیم داشت:

$$\sum x_i y_i \leq (\sum x_i^{\frac{1}{\alpha}})^{\alpha} + (\sum y_i^{\frac{1}{\beta}})^{\beta}$$

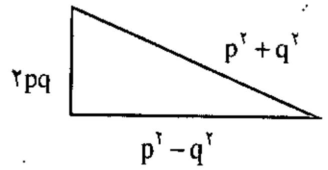
ALAN BEHRDON Department of Pure Mathematics, University of Cambridge.

یک خاصیت مساحت در مثلث قائم‌الزاویه

در بررسی خواص سه‌گانه‌ی فیثاغورث، فرمول زیر را برای سطح A از یک مثلث قائم‌الزاویه کشف کردم. هرگاه نصف محیط s و ارتفاع a داده شده باشد، داریم:

$$A = s(s-a) \qquad (1)$$

هر یک از خواص سه‌گانه‌ی فیثاغورث را می‌توان به صورت p^2+q^2، $2pq$ و p^2-q^2 نوشت. در این صورت، $a = p^2+q^2$ برابر است با ارتفاع یک مثلث قائم‌الزاویه، هرگاه اضلاع آن p^2-q^2 و $2pq$ باشند.



(شکل ۱)

نصف محیط از فرمول $s = \frac{1}{2}\left[(p^2+q^2)+(p^2-q^2)+2pq\right]$ به‌دست می‌آید که پس از ساده شدن به این صورت درمی‌آید:

$$s = p(p+q) \qquad (2)$$

هم‌چنین:

$$s - a = p^2 + pq - (p^2+q^2) = q(p-q) \qquad (3)$$

از ترکیب رابطه‌های (۲) و (۳) فرمول زیر نتیجه می‌شود:

$$s(s-a) = p(p+q) \times q(p-q) = pq(p^2-q^2) \qquad (4)$$

فرمول متداول برای به‌دست آوردن مساحت مثلث عبارت است از:

$$\text{مساحت} = \frac{1}{2} \text{ قاعده} \times \text{ارتفاع}$$

با استفاده از فرمول فوق و رابطه‌ی (۴) خواهیم داشت:

$$A = \frac{1}{2}(p^2-q^2) \times 2pq = pq(p^2-q^2) = s(s-a)$$

سپس متوجه شدم، در صورتی که اضلاع اعداد صحیح باشند، نیازی به استفاده از اجزای سه‌گانه فیثاغورث نیست، بلکه تنها به قضیه‌ی فیثاغورث نیاز است. در حقیقت فرمول (۱) عملی است، اگر و تنها اگر مثلث قائم‌الزاویه باشد.

اگر فرمول (۱) برقرار باشد، می‌توان با استفاده از «فرمول هرون» برای به‌دست آوردن مساحت مثلثی با اضلاع a، b و c چنین نوشت:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

داریم:

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = s(s-a)$$

از به توان ۲ رساندن دو طرف و تقسیم آن بر $s(s-a)$ خواهیم داشت:

$$(s-b)(s-c) = s(s-a)$$

پس از ضرب و جابه‌جایی عوامل خواهیم داشت:

$$bc = s(b+c-a)$$

هرگاه $2s = a+b+c$ باشد، داریم:

$$2bc = (b+c+a)(b+c-a)$$

که به صورت زیر ساده می‌شود:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

با استفاده از عکس قضیه‌ی فیثاغورث، این مثلث قائم‌الزاویه است.

Rajeev George Mathew, Pupil at Marthoma Residential School Kerala, India.

فرمانروای شمشه

امیر ابن الخوض، فرمانروای توانمند کشور قضیعبیه در خزانه‌ی خود نشسته بود و شادان و خندان دوازده جعبه‌ی در بسته را که در گوشه‌ای ردیف شده بودند، تماشا می‌کرد؛ جعبه‌های پر از شمش‌های زر، حاوی مالیات‌هایی که دوازده نماینده‌ی ویژه از دوازده استان کشور گردآوری کرده بودند. روی هر جعبه، نام استان و نام نماینده‌ی ویژه یادداشت شده بود. هر شمش یک کیلوگرم وزن داشت و جعبه‌ها که بیشتر آن‌ها پر بودند، مبلغ هنگفتی را نشان می‌دادند.

در این بین، دربانان امیر؛ مرد ژنده‌پوشی را به درون آوردند. مرد با دیدن امیر، خود را پیش پای وی انداخت، دست‌های خود را بلند کرد. فریادی از شادی برآورد و گفت:

ـ ای امیر، آمده‌ام تا موضوع مهمی را به اطلاعت برسانم.

ـ گوش می‌کنم، بگو.

ـ من کارگر یکی از نمایندگان تو بوده‌ام. آمده‌ام تا تو را از خیانت بزرگی که این نماینده نسبت به تو روا داشته است، آگاه کنم. او از هریک از شمش‌هایی که برای تو آورده، از راه ساییدن آن‌ها، مقداری را کم کرده است. من یکی از کارگرانی بودم که می‌بایست با کهنه پارچه‌های مویین زبر، هر شمش را بساییم تا از آن چیزی نزدیک به سی گرم زر به‌دست آید. ما اغفال شده بودیم. بعد که فهمیدم، نزد تو آمدم تا حقیقت را بگویم.

امیر، خشمناک و غران پرسید:

ـ کی تو را به این کار واداشته بود؟ سوگند به خدا که سر از تنش جدا خواهد شد و تو هم پاداش گرانبهایی دریافت خواهی کرد.

ـ فرستاده‌ی تو به استان...

مرد ژنده‌پوش بیش از این نتوانست چیزی بگوید. کاردی که کسی ناشناس پرتاب کرده بود، در پشت او فرو رُفت. مرد نقش بر زمین شد و جان به جان‌آفرین تسلیم کرد.

امیر ابن الخوض ریاضیات و بویژه مسأله‌های سرگرم‌کننده و اندیشه‌برانگیز ریاضی را دوست می‌داشت. از پیشامدهایی که با آن‌ها روبه‌رو می‌شد، یک مسأله می‌ساخت و از فرزند بزرگش می‌خواست تا درباره‌اش بیندیشد و آن را حل کند. از این راه، هم او را با شیوه‌ی کشورداری آشنا می‌کرد و هم اندیشه‌اش را پرورش می‌داد. در این باره هم به فرزندش چنین گفت:

ـ فرزندم، آنچه را گذشت، دیدی، اکنون برای شناسایی نماینده‌ی خیانت‌کار چه راهی را پیشنهاد می‌کنی؟

ـ موضوع خیلی ساده است. هر جعبه یک برچسب دارد که روی آن، هم نام استان و هم نام نماینده‌ی ویژه‌ی آن، یادداشت شده است. کافی است که از هر جعبه یک شمش را بیرون آورده و وزن کرد تا معلوم شود در کدام جعبه شمش‌ها سبک‌ترند. شاید هم شمش‌های چند جعبه دست‌کاری شده باشند. با این شیوه همه‌ی آن‌ها شناخته می‌شوند.

ـ بر آن‌چه گفتی، ایرادی وارد نیست، اما فرض را بر این می‌گذاریم که در یازده جعبه شمش‌ها همه سالم و یک کیلوگرمی‌اند و تنها در یک

جعبه، هر یک از شمش‌ها به اندازه‌ی ۳۰ گرم سبک‌تر از یک کیلوگرم است. حال فرزندم، بگو ببینم که چگونه می‌شود تنها با یک‌بار وزن کردن، جعبه‌ی شمش‌های سبک‌تر را شناسایی کرد؟

فرزند امیر به فکر فرو رفت. دیگران هم که حاضر بودند، سکوت کرده بودند و هر کس در ذهن خودش راه‌حلی را بررسی می‌کرد. سرانجام وزیر بزرگ از امیر خواست تا همه‌ی حاضران را از راه‌حل مسأله آگاه سازد و امیر چنین توضیح داد:

❁ ❁ ❁

(خواننده گرامی، در این هنگام باید مجله را ببندید و برای حل مسأله اندیشه‌ی خود را به کار اندازید.)

اگر شمش‌های همه‌ی جعبه‌ها هم‌وزن باشند، یعنی هر کدام یک کیلوگرم باشد، هر تعداد از آن‌ها را به هر جور که در کفه‌ی ترازو بگذارند، وزن حاصل چند کیلوگرم کامل خواهد بود؛ اما اگر یکی از شمش‌ها سبک‌تر باشد، مثلاً ۹۷۰ گرم وزن داشته باشد، وزنی که ترازو نشان خواهد داد، به اندازه‌ی ۳۰ گرم کمتر از چند کیلوگرم کامل خواهد بود، و چنان‌چه در بین شمش‌ها دو شمش سبک‌تر، ۹۷۰ گرمی، سه شمش سبک‌تر، ... یا این‌که دوازده شمش سبک‌تر وجود داشته باشد، وزنی که ترازو نشان خواهد داد، به اندازه‌ی ۶۰ گرم، ۹۰ گرم، ...، یا ۳۶۰ گرم از چند کیلوگرم کامل کمتر خواهد بود. از جعبه‌ی یکم یک شمش، از جعبه‌ی دوم دو شمش، از جعبه‌ی سوم سه شمش، ...، و سرانجام از جعبه‌ی دوازدهم، دوازده شمش برمی‌داریم و همه را با هم در کفه‌ی ترازو می‌گذاریم و معلوم می‌کنیم وزن آن‌ها روی هم از چند کیلوگرم کامل چند گرم کمتر است. این چند گرم که بر ۳۰ بخش شود، شماره‌ی جعبه‌ی با شمش‌های سبک‌تر به دست خواهد آمد.

دستور امیر را عمل کردند. شمش‌هایی که در ترازو گذاشته بودند ۷۷ کیلوگرم و ۷۹۰ گرم وزن داشتند که ۲۱۰ گرم می‌خواست تا چند کیلوگرم کامل شود. از تقسیم ۲۱۰ بر عدد ۳۰ عدد ۷ به دست آمد. روی جعبه‌ی هفتم نام فاروق بن‌خشیب به چشم می‌خورد. فردای آن روز، سر از تن جدا شده‌ی فاروق‌بن خشیب بر بالای دروازه‌ی شهر آویزان بود.

یادداشت مترجم: در حالت کلی اگر n مجموعه از چیزهای همانند، مثلاً n جعبه شامل گلوله‌های هم‌سان داشته باشیم که در $n-1$ جعبه هر گلوله به وزن a و در یک جعبه‌ی دیگر هر گلوله به وزن b و b کمی کمتر از a باشد، تنها با یک‌بار وزن کردن می‌توان جعبه‌ی شامل گلوله‌های سبک‌تر را شناسایی کرد: جعبه‌ها به‌ترتیب، از ۱ تا n شماره‌گذاری می‌شوند. از جعبه‌ی یکم یک گلوله، از جعبه‌ی دوم دو گلوله، از جعبه‌ی سوم سه گلوله، ... و سرانجام از جعبه‌ی nام، n گلوله برمی‌داریم و همه‌ی گلوله‌های برداشته شده را با هم وزن می‌کنیم. با توجه به فرمول

$$۱+۲+۳+۴+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

وزن گلوله‌های برداشته شده برابر خواهد شد با:

$$\frac{n(n+۱)a}{۲}-k$$

که k مضربی از b است و اگر q خارج قسمت تقسیم k بر b باشد، جعبه‌ی شماره‌ی q همان جعبه‌ی با گلوله‌های سبک‌تر خواهد بود.

برگرفته از کتاب داستانواره‌های ریاضی. مترجم: عبدالحسین مصحفی. انتشارات مدرسه. چاپ اول ۱۳۷۸

برگ اشتراک مجله‌های رشد

شرایط:

۱. واریز مبلغ ۳۰/۰۰۰ ریال به ازای هر عنوان مجله درخواستی، به صورت علی‌الحساب به حساب شماره‌ی ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت شعبه سه راه آزمایش (سرخه حصار) کد ۳۹۵ در وجه شرکت افست

۲. ارسال اصل رسید بانکی به همراه برگ تکمیل شده اشتراک

- **نام مجله:** ....
- **نام و نام خانوادگی:** ....
- **تاریخ تولد:** ....
- **میزان تحصیلات:** ....
- **تلفن:** ....
- **نشانی کامل پستی:**

استان: .... شهرستان: ....

خیابان: ....

....

پلاک: .... کدپستی: ....

- **مبلغ واریز شده:** ....
- **شماره و تاریخ رسید بانکی:** ....
- **آیا مایل به دریافت مجله درخواستی به صورت پست پیشتاز هستید؟** بله ☐ خیر ☐

امضا:

نشانی: تهران ـ صندوق پستی ۱۶۵۹۵/۱۱۱

نشانی اینترنتی: www.roshdmag.ir

پست الکترونیک: Email:info@roshdmag.ir

☎ **امور مشترکین:** ۷۷۳۳۶۶۵۶ـ۷۷۳۳۵۱۱۰

☎ **پیام‌گیر مجلات رشد:** ۸۸۳۰۱۴۸۲ـ۸۸۸۳۹۲۳۲

یادآوری:

- هزینه برگشت مجله در صورت خوانا و کامل نبودن نشانی، بر عهده مشترک است.
- مبنای شروع اشتراک مجله از زمان وصول برگ اشتراک می‌باشد.
- برای هر عنوان مجله برگ اشتراک جداگانه تکمیل و ارسال کنید (تصویر برگ اشتراک نیز مورد قبول است)

که بین ریاضی دانان دوره ی اسلامی به معادله ی ماهانی موسوم بوده است .

ماهانی در رساله ای که در تفسیر مقاله ی دوم از کتاب **ارشمیدس** درباره ی کره و استوانه نوشته ، متذکر شده است که از نه مسئله ی این مقاله ، هشت مسئله را حل کرده ، ولی موفق به حل مسئله ی چهارم آن نشده است . این مسئله عبارت است از : «تقسیم کردن کره به وسیله ی یک صفحه به دو قطعه ، به وجهی که نسبت به حجم آن ها مساوی با عدد معلومی باشد . » ماهانی کوشیده بود که این مسئله را به وسیله ی جبر و مقابله حل کند و معادله ی مذکور را به دست آورده بود .

آثار ریاضی موجود وی

۱ . رساله فی المشکل من النسبة کتاب النسبه فی النسبه

چند نسخه ی خطی از این رساله موجود است که از آن جمله است ، نسخه های شماره ی ۵۹۷ و ۶۹۰ مدرسه ی عالی سپهسالار تهران که در سال ۷۸۴هـ . ق کتابت شده و عنوان آن «المشکل من امر النسبه» است . به عقیده ی **سوتر** ممکن است این رساله تمام یا قسمتی از «شرح مقاله ی پنجم کتاب اصول» تألیف ماهانی باشد که از بین رفته است .

نکته ی مختصری از رساله ی «النسبة» در فرهنگ زندگی نامه ی علمی (جلد۹ ، صفحه ی ۲۱) آمده است .

۲ . تفسیر المقالة العاشره من کتاب اقلیدس

نسخه ی خطی این رساله در کتاب خانه ی ملی پاریس به شماره ی ۲۴۵۷/۳۹ موجود است . مطلب مختصری از این رساله در مجله ی «تاریخ علوم عربی» (جلد ۲ ، سال ۱۹۷۸ ، صفحه ی ۷۹) آمده است .

آثار ریاضی مفقود ماهانی

۳ . شرح مقاله ی پنجم کتاب اصول اقلیدس

نام این کتاب در «الفهرست» و «کشف الظنون» آمده است ، اما نسخه ای از آن در دست نیست . چنان که قبلاً اشاره شد ، به عقیده ی سوتر ممکن است «رساله فی امر النسبه» تمام یا قسمتی از این کتاب باشد .

۴ . شرح مقاله ی دوم کتاب کره و استوانه ی ارشمیدس

خیام در کتاب جبر و مقابله ی خود ، آن جا که از ماهانی نام برده ، به این شرح اشاره کرده است ، ولی نسخه ای از آن در دست نیست . شخصی که نام وی مجهول است و احیاناً **ابوسهل کوهی** است ، توضیحی بر شکل چهارم این شرح نوشته است . **ویکه** این توضیح را از روی نسخه ی خطی موجود در لیدن (به شماره ی ۹۹۱) به زبان فرانسوی ترجمه کرده است .

۵ . کتاب فی ستّ و عشرین شکلا من المقاله الاولی من اقلیدس التی لایحتاج فی شیء منها الی الخلف

یعنی : کتاب درباره ی بیست وشش قضیه از مقاله ی اول اقلیدس که بدون احتیاج داشتن به برهان خلف می توان آن ها را ثابت کرد . نام این کتاب در الفهرست آمده است ، ولی نسخه ای از آن در دست نیست . به عقیده ی ویکه ، این بیست وشش قضیه عبارت اند از : قضایای ۵ ، ۸ ، ۹ ، ۱۳ ، ۱۵ تا ۱۸ و ۲۰ ، ۲۱ ، ۲۴ ، ۲۸ ، ۳۰ ، ۳۲ تا ۳۸ و ۴۱ تا ۴۴ و ۴۷و۴۸ کتاب اصول اقلیدس .

۶ . اصلاح کتاب مانالاوس فی الاشکال الکریه

کتاب أُکر **مانالاوس** را **اسحاق بن حنین** به عربی ترجمه کرده بود و ماهانی آن ترجمه را فقط تا شکل دهم از مقاله ی دوم اصلاح کرد . زیرا در نسخه ی خطی کتاب اصلاح کتاب «مانالاوس فی الاشکال الکریه تألیف ابوالفضل هروی» (نسخه ی خطی شماره ی ۹۸۸ لیدن ، پشت برگ ۹۸) آمده است : «والشکل العاشر من هذه المقاله هوالذی انتهی الیه الماهانی ولم یتجاوزه...»

نصیرالدین طوسی ، نسخه ای از این کتاب را در اختیار داشته و در مقدمه ی تحریر اکر مانالاوس از آن نام برده است . در هر صورت ، فعلاً نسخه ای از این کتاب در دست نیست .

۷ . زیج

محمدبن ابوبکر فارسی در «زیج ممتحن مظفری» که نسخه ی آن در کمبریج موجود است ، تألیف زیجی را به ماهانی نسبت داده است ، ولی نسخه ای از این زیج در دست نیست .

منبع : زندگی نامه ریاضی دانان دوره ی اسلامی/ ابولقاسم قربانی/ مرکز نشر دانشگاهی

روش «طبری» برای ضرب اعداد
(روش شبکه‌ای)

	۷	۰	۸	۶	
۱	۱ / ۴	۰ / ۰	۱ / ۶	۱ / ۲	۲
۷	۳ / ۵	۰ / ۰	۴ / ۰	۳ / ۰	۵
۹	۲ / ۸	۰ / ۰	۳ / ۲	۲ / ۴	۴
	۹	۸	۴	۴	

۷۰۸۶×۲۵۴=۱۷۹۹۸۴۴

این روش ضرب را از کتاب «شمار نامه»، تألیف محمد فرزند ایوب معروف به طبری برداشته‌ایم. طبری در سال‌های آخر سده‌ی چهارم و نیمه‌ی اول سده‌ی پنجم هجری قمری در منطقه آمل مازندران و در دوران حکومت ایرانی «آل بویه» می‌زیست. او ریاضی‌دان و اخترشناس مسلمان ایرانی بود و از نخستین کسانی است که به زبان فارسی کتاب علمی نوشته‌اند. در شمار نامه با این‌که واژه‌ها و اصطلاح های فراوان عربی دیده می‌شود، از واژه‌های فارسی بسیاری (که باید ابتکار خود مؤلف باشد) مثل «افزودن»، «زدن»، «کاستن و کاهانیدن»، «سه یک»، «چهار یک»، «به دو نیم کردن» و... استفاده شده است. طبری واژه‌ی شمار نامه را به جای «حساب» به‌کار برده است. شیوه‌ی ضرب عددها، با این روش، در جدول بالا مشاهده می‌شود.