مجله ریاضی

برهان

برای دانش‌آموزان دبیرستان

۱

ویژه‌نامه کنکور

زمستان ۱۳۷۲
بها ۱۲۵۰ ریال
چاپ دوم

توجه: ۱- اگر این پاسخنامه متعلق به شما نیست مسئول جلد را آگاه سازید.
۲- پاسخ سئوالات باید با مداد شکل زده در مقابل سئوال مربوط علامت گذاری شود.

شماره داوطلب:

نام خانوادگی و نام:

گروه آزمایشی:

(لطفاً با مستطیل بزرگ، علامتی نزنید.)

۱۵۱ ۱ ۲ ۳ ۴
۱۵۲ ۱ ۲ ۳ ۴
۱۵۳ ۱ ۲ ۳ ۴
۱۵۴ ۱ ۲ ۳ ۴
۱۵۵ ۱ ۲ ۳ ۴
۱۵۶ ۱ ۲ ۳ ۴
۱۵۷ ۱ ۲ ۳ ۴
۱۵۸ ۱ ۲ ۳ ۴
۱۵۹ ۱ ۲ ۳ ۴
۱۶۰ ۱ ۲ ۳ ۴
۱۶۱ ۱ ۲ ۳ ۴
۱۶۲ ۱ ۲ ۳ ۴

۱۹۱ ۱ ۲ ۳ ۴
۱۹۲ ۱ ۲ ۳ ۴
۱۹۳ ۱ ۲ ۳ ۴
۱۹۴ ۱ ۲ ۳ ۴
۱۹۵ ۱ ۲ ۳ ۴
۱۹۶ ۱ ۲ ۳ ۴
۱۹۷ ۱ ۲ ۳ ۴
۱۹۸ ۱ ۲ ۳ ۴
۱۹۹ ۱ ۲ ۳ ۴
۲۰۰ ۱ ۲ ۳ ۴
۲۰۱ ۱ ۲ ۳ ۴
۲۰۲ ۱ ۲ ۳ ۴
۲۰۳ ۱ ۲ ۳ ۴
۲۰۴ ۱ ۲ ۳ ۴
۲۰۵ ۱ ۲ ۳ ۴

۲۳۱ ۱ ۲ ۳ ۴
۲۳۲ ۱ ۲ ۳ ۴
۲۳۳ ۱ ۲ ۳ ۴
۲۳۴ ۱ ۲ ۳ ۴
۲۳۵ ۱ ۲ ۳ ۴
۲۳۶ ۱ ۲ ۳ ۴
۲۳۷ ۱ ۲ ۳ ۴
۲۳۸ ۱ ۲ ۳ ۴
۲۳۹ ۱ ۲ ۳ ۴
۲۴۰ ۱ ۲ ۳ ۴
۲۴۱ ۱ ۲ ۳ ۴
۲۴۲ ۱ ۲ ۳ ۴
۲۴۳ ۱ ۲ ۳ ۴
۲۴۴ ۱ ۲ ۳ ۴
۲۴۵ ۱ ۲ ۳ ۴
۲۴۶ ۱ ۲ ۳ ۴
۲۴۷ ۱ ۲ ۳ ۴

۲۷۱ ۱ ۲ ۳ ۴
۲۷۲ ۱ ۲ ۳ ۴
۲۷۳ ۱ ۲ ۳ ۴
۲۷۴ ۱ ۲ ۳ ۴
۲۷۵ ۱ ۲ ۳ ۴
۲۷۶ ۱ ۲ ۳ ۴
۲۷۷ ۱ ۲ ۳ ۴

بسم الله الرحمن الرحیم

• صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه

• مدیر مسئول: محمود ابراهیمی • سردبیر: حمیدرضا امیری

مؤلفین:

• حمیدرضا امیری • محمدهاشم رستمی

• مهدی قمصری • احمد قندهاری

• سید محمدرضا هاشمی موسوی

(با تشکر از همکاری و راهنمایی‌های ارزندهٔ آقایان:
پرویز شهریاری و غلامرضا یاسی‌پور)

• مسئول فنی: هوشنگ آشتیانی • صفحه‌آرا: مهرزاد طاهری

• رسام: فرخ نیکزاد • تیراژ: ۱۵۰۰۰ نسخه

برهان هر ۳ ماه یک شماره منتشر می‌شود.

برهان تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

۱ـ نگارش مقالات کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتب ریاضی دبیرستان)

۲ـ طرح مسائل کلیدی (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن

۳ـ طرح مسائل مسابقه‌ای (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن

۴ـ طرح معماهای ریاضی

۵ـ نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

• هیئت تحریریه درحکّ واصلاح وحذف و اضافهٔ مقالات آزاد است.

• مقالات وارده باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.

• مقالات رسیده مسترد نمی‌شود.

مطالب این شماره

• مقدمه ۱

• تستهای جبر و آنالیز / ۲
مهدی قمصری و احمد قندهاری

• تستهای مثلثات / ۸
مهدی قمصری و احمد قندهاری

• تستهای ریاضیات جدید / ۱۳
حمیدرضا امیری

• تستهای هندسه / ۲۲
محمدهاشم رستمی

• تستهای جبر و مثلثات تجربی / ۳۰
محمدرضا هاشمی

• پاسخ تشریحی تستهای جبر و آنالیز / ۴۱

• پاسخ تشریحی تستهای مثلثات / ۴۷

• پاسخ تشریحی تستهای ریاضیات جدید / ۵۲

• پاسخ تشریحی تستهای هندسه / ۶۲

• پاسخ تشریحی تستهای جبر و مثلثات تجربی / ۷۳

□ نشانی: تهران، خیابان ایرانشهرشمالی، کوچه شهید بهرام جوینی، پلاک ۱۷ تلفن: ۸۸۲۶۰۰۷، ۸۸۲۵۹۶۴، ۸۸۲۳۱۴۹، فاکس ۸۸۲۰۵۹۹

بسمه تعالی

مقدمه

مؤلفین ویژه‌نامه با اینکه موافقت چندانی با امتحان کنکور به صورتی که هم اکنون رایج است، یعنی به صورت تستهای چهارجوابی، آن هم در موضوع ریاضیات، ندارند و وجود چنین امتحاناتی را به ضرورت پذیرفته‌اند، و به این ترتیب باز هم به ضرورت، دست به تألیف ویژه‌نامه‌ای در مورد تستهای ریاضیات زده‌اند، این‌کار را با توجه به اهداف زیر به انجام رسانیده‌اند:

۱ـ سعی بر این داشته‌اند که نکات مهمّ تستهای کنکور را بیان کرده و خطاهای احتمالی آنها را بنمایانند.

۲ـ کوشیده‌اند در این زمینه سؤالاتی را مطرح کنند که بیش از آنکه به حافظه مربوط باشند به تفکر نیاز داشته‌باشند و در اصل همین گونه سؤالات را، به خصوص در زمینه ریاضیات، جایز می‌دانند و به دست‌اندرکاران سؤالات کنکور توصیه می‌کنند که حتی‌المقدور از نوع همین سؤالات مطرح کنند. (پیشنهاد می‌شود مسئولین محترم و دست‌اندرکاران طرح سؤالات و تستهای کنکور اولاً: از تستهای پنج جوابی استفاده کنند و ثانیاً: تستها را مفهومی‌تر طرح کرده و مدت پاسخگویی به هر تست را ۲/۵ الی ۳ دقیقه درنظر بگیرند که هم احتمال زدن تست به صورت شانسی کم شود و هم دانش‌آموزانی که مطالب درسی را به صورت عمیق‌تر درک کرده‌اند جوابگو باشند.)

۳ـ بر این نیت بوده‌اند که تستهای کنکور را از راههای حتی‌المقدور ساده و متفاوت با راههای مکرری که در کتب مشابه تکرار شده‌اند حل کنند و به این ترتیب غنای راههای حل یک مسأله را به دانش آموزان نشان دهند.

۴ـ در طرح سؤالات آمده در متن، با این مقصود حرکت کرده‌اند که مطالب اصلی و کلیدی ریاضیات را مطرح کنند و با سؤالاتی معدود، حداکثر بررسی معلومات را به‌عمل آورند.

به هر صورت این ویژه‌نامه شامل حدوداً ۳۷۰ تست با حل تشریحی در زمینه‌های جبر و آنالیز ـ مثلثات، ریاضیات جدید و هندسه (ریاضی و تجربی) از سالهای اول تا چهارم می‌باشد.

و اما تا چه اندازه در این اهداف توفیق یافته‌اند خدا داناتر است و خوانندگان نکته‌سنج خواهند دانست و البته تذکر خواهند داد، و به خصوص، تقاضا داریم که کاستیها را خاطر نشان کنند تا در چاپهای آینده مرتفع گردد.

والسلام خرداد ماه ۱۳۷۲

تستهای جبر و آنالیز

(سالهای اوّل، دوّم، سوّم، و چهارم ریاضی)

● مهدی قمصری و احمد قندهاری

۱ـ حاصل $\frac{۱}{\sqrt[۷]{(۳-۲\sqrt{۲})^{۲}}}$ برابر است با:

۱) $\sqrt[۷]{۱۷+۶\sqrt{۲}}$ ۲) $\sqrt[۷]{۱۷+۱۲\sqrt{۲}}$

۳) $\frac{۱}{\sqrt[۷]{(۳-\sqrt{۲})^{۵}}}$ ۴) $\sqrt[۷]{(۳-۲\sqrt{۲})^{۵}}$

۲ـ اگر x' و x'' ریشه‌های حقیقی معادله $x^{۲}+۲ax-۳a^{۲}=۰$ باشد و رابطه $(x'+x'')(x'-x'')^{۲}=۴$ برقرار باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۳ـ اگر $\begin{cases} ۵x+۳y+۷z=۱/۷ \\ ۲x+y+۳z=۰/۳ \end{cases}$ ، آنگاه $(x+y+z)$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) ۱/۳

۳) ۱/۴ ۴) ۱/۱

۴ـ اگر α و β و γ ریشه‌های حقیقی معادله $x^{۳}-۶x^{۲}-۴x+(m-۱)=۰$ باشد و داشته باشیم:

$$\frac{\alpha+\beta}{\gamma}+\frac{\beta+\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma+\alpha}{\beta}=۱$$

آنگاه مقدار m کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵

۳) ۷ ۴) ۹

۵ـ اگر در بسط $(۲x+۲y)^{n}$ ضریب جمله‌سوم مساوی ضریب جمله پنجم باشد بزرگترین ضریب بسط فوق کدام است؟

۱) ۱۲۰۰ ۲) ۱۴۸۰

۳) ۱۲۸۰ ۴) ۱۳۰۰

۶ـ جوابهای نامعادله $|x-۱|-(x-۱)^{۲}-۲<۰$ ، کدام است؟

۱) $|x|<۲$ ۲) $-۱<x<۴$

۳) $-۲<x<۳$ ۴) $-۱<x<۳$

۷ـ اگر $f(x)=x^{۲}-۳x+۲$ و $g(x)=x^{۳}-۳x$، معادله $f[g(x)]=۰$ چند ریشه حقیقی متمایز دارد؟

۱) دو ۲) چهار

۳) پنج ۴) شش

۸ـ اگر $f(x)=ax^{۷}+bx^{۵}+cx^{۳}-۷$ و $f(-۱۱)=۱۱$ ، آنگاه $f(۱۱)$ برابر است با:

۱) -۱۱ ۲) ۱۱

۳) ۲۵ ۴) -۲۵

۹- واسطه هندسی دو عدد صحیح مثبت $۴\sqrt{۳}$ و واسطه توافقی آنها ($\frac{۴۸}{۷}$) است واسطه عددی آنها کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۲}$ ۲) ۷

۳) $\frac{۱۵}{۲}$ ۴) ۹

۱۰- تابع حقیقی به معادله $f(x)=\begin{cases} ۳ & x\le ۲ \\ ۴x-۵ & x\ge ۲ \end{cases}$ را با کدام یک از ضابطه‌های زیر می‌توان نشان داد؟

۱) $f(x)=-۲x+۱+۲|x-۲|$

۲) $f(x)=۲x-۱+۲|x-۲|$

۳) $f(x)=۲x-۱-۲|x-۲|$

۴) $f(x)=۲x+۱+۲|x-۲|$

۱۱- اگر $x\ge ۱$ و $f(x)=x^۲-۲x$، زاویه بین منحنی تابع f و منحنی تابع $f^{-۱}$ کدام است؟

۱) $Arctg\frac{۱۲}{۳۵}$ ۲) ۴۵°

۳) ۶۰° ۴) $Arctg\frac{۱۵}{۸}$

۱۲- اگر دامنه تعریف رابطه $y^۲-۲xy+۴x-m=۰$، مجموعه R باشد. حدود m، کدام است؟

۱) $m<۴$ ۲) $m\le ۴$

۳) $m>۴$ ۴) $m\ge ۴$

۱۳- اگر تابع f در فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه همواره داریم:

۱) f در تمام نقاط این فاصله حدّ دارد.

۲) f در تمام نقاط این فاصله مشتق‌پذیر است.

۳) f در دو نقطه از این فاصله حدّ ندارد.

۴) f حداکثر در دو نقطه از این فاصله حدّ ندارد.

۱۴- تابع حقیقی به معادله $f(x)=||x|-۲|$ در چند نقطه مشتق‌پذیر نیست؟

۱) یک ۲) دو

۳) سه ۴) صفر

۱۵- اگر مقدار مینیمم تابع به معادله $y=\frac{x^۲+mx+۱۶}{(x+۱)^۲}$ صفر باشد، طول آن کدام است؟

۱) صفر ۲) ± ۴

۳) $\pm\frac{۱}{۴}$ ۴) ± ۸

۱۶- مینیمم فاصله منحنی به معادله $y=x^۲-۲x$ از خط $y=۲x-۹$ کدام است؟

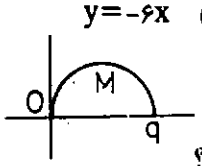
۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ ۲) $\sqrt{۵}$

۳) $۲\sqrt{۵}$ ۴) $۵\sqrt{۵}$

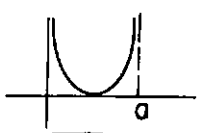
۱۷- اگر منحنی تابع به معادله $y=۳x+\sqrt{ax^۲-۱۸x-۱}$ مجانب افقی داشته باشد معادله مجانب مایل آن کدام است؟

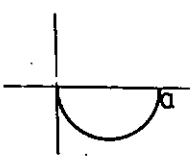
۱) $y=۶x$ ۲) $y=۶x-۳$

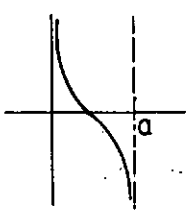
۳) $y=۶x+۳$ ۴) $y=-۶x$

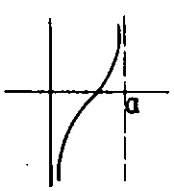
۱۸- اگر نمودار تابع f به صورت 

باشد، آنگاه نمودار تابع f' کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۱۹ـ اگر منحنی تابع به معادله $y=\frac{x^۲+mx+۱}{-\frac{m}{۲}x^۲-۸x+۵}$ و $m>۰$ محور تقارن داشته باشد، معادله محور تقارن آن کدام است؟

۱) $y=۲$ ۲) $y=-۲$

۳) $x=۲$ ۴) $x=-۲$

۲۰ـ اگر $۰<x+a<۲$ و $y=Arctg\frac{x+a}{۱-ax}$، آنگاه (dy) کدام است؟ (x متغیر مستقل و a عدد ثابت است.)

۱) $\frac{dx}{۱-x^۲}$ ۲) $\frac{dx}{۱+x^۲}$

۳) $\frac{۲dx}{۱+x^۲}$ ۴) $\frac{dx}{۱+a^۲}$

۲۱ـ اگر $f'(۲x-۱)=۴x-۱$ و منحنی f از نقطه $A\left|\begin{matrix}۱\\-۲\end{matrix}\right.$ بگذرد، آنگاه $f(۴)$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۶

۳) ۲۰ ۴) ۲۴

۲۲ـ معادله یک منحنی که قائمهای نقاط مختلفه‌اش از نقطه $A\left|\begin{matrix}۱\\۲\end{matrix}\right.$ بگذرد کدام است؟ $(k<۰)$

۱) $(x-۱)^۲+(y-۲)^۲=k$

۲) $x^۲+y^۲=k^۲$

۳) $(x+۱)^۲+(y+۲)^۲=k^۲$

۴) $(x-۱)^۲+(y-۲)^۲=k^۲$

۲۳ـ هرگاه α و β و γ ریشه‌های معادلهٔ درجه سوم $x^۳+px+q=۰$ باشند حاصل $\frac{۱}{\gamma+\alpha-۲\beta}+\frac{۱}{\beta+\gamma-۲\alpha}+\frac{۱}{\alpha+\beta-۲\gamma}$ کدام است؟

۱) $\frac{p}{q}$ ۲) $\frac{p}{۳q}$

۳) $-\frac{p}{۳q}$ ۴) $-\frac{p}{q}$

۲۴ـ برای آنکه اعداد ۲- و ۱ ریشه‌های معادلهٔ درجه دوّم $ax^۲+bx+c=۰$ باشند لازم است:

۱) $۲a+c=۰$ ۲) $۲a-c=۰$

۳) $۲c-a=۰$ ۴) $۲c+a=۰$

۲۵ـ در معادلهٔ درجه دوّم $۴x^۲-۴۱x+۴=۰$ حاصل $\sqrt{x'}+\sqrt{x''}+\sqrt{x'x''}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۲}$ ۲) $\frac{۱۱}{۲}$

۳) $\frac{۹}{۲}$ ۴) $\frac{۷}{۲}$

۲۶ـ هرگاه α و β و γ ریشه‌های معادلهٔ درجه سوم $x^۳+px+q=۰$ باشند حاصل $\frac{\alpha^۲}{\beta\gamma}+\frac{\beta^۲}{\alpha\gamma}+\frac{\gamma^۲}{\alpha\beta}$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) ۳

۳) -۲ ۴) ۲

۲۷ـ a کدام باشد تا معادلات درجه سوّم $x^۳-۵x^۲+۶x-۲a=۰$ و $x^۳-۵x^۲+۵x-a=۰$ دارای یک ریشهٔ مشترک باشند؟

۱) $a=۲$ ۲) $a=۳$

۳) $a=۴$ ۴) $a=۵$

۲۸ـ مجموع ضرایب x و $x^۲$ و $x^۳$ و ... و $x^{۳۵}$ در بسط عبارت $(۲x-۱)^{۱۵}(۳x^۲-x-۱)^{۱۰}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱

۳) -۲ ۴) -۱

۲۹ـ ضریب x در مجموع $(x+۱)+(x+۱)^۲+...+(x+۱)^۹+(x+۱)^{۱۰}$ کدام است؟

۱) ۱۷۵ ۲) ۱۶۵

۳) ۱۵۵ ۴) ۱۴۵

۳۰- جملهٔ گویا در بسط $(\sqrt[4]{۳}+\sqrt[۳]{۲})^{۱۱}$ کدام است؟

۱) ۹۹۰ ۲) ۱۹۸۰

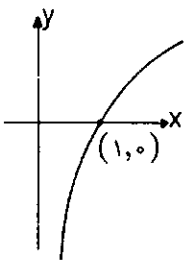
۳) ۲۹۷۰ ۴) ۳۹۶۰

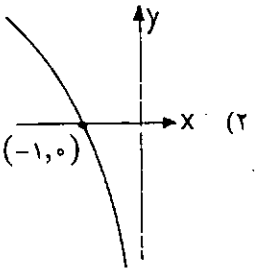
۳۱- مجموع n جملهٔ اول یک تصاعد هندسی $۲^{n+۱}-۲$ می‌باشد جمله نهم این تصاعد کدام است؟

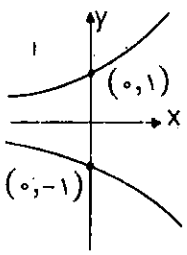
۱) ۲۰۴۸ ۲) ۱۰۲۴

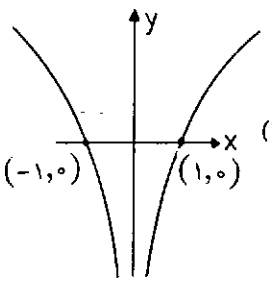
۳) ۵۱۲ ۴) ۲۵۶

۳۲- نمودار $y=\log|x|$ کدام یک از اشکال زیر است؟

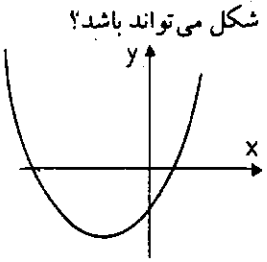
۱)


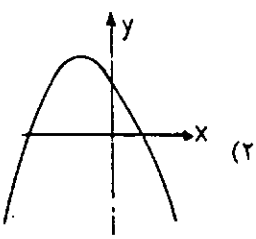
۲)


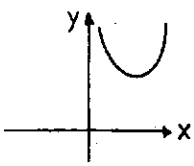
۳)


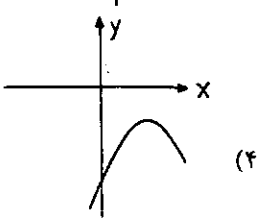
۴)


۳۳- با شرط $a<۰$ و $b^۲<ac$ نمودار $y=ax^۲+۲bx+c$ کدام شکل می‌تواند باشد؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۳۴- هرگاه تابع $y=ax^۳+(a+b)x^۲-۲x+b-۲$ فرد باشد حاصل $b-۲a$ کدام است؟

۱) ۶- ۲) ۴-

۳) ۶ ۴) ۴

۳۵- برد تابع $f(x)=\frac{\sqrt{۳}x^۲+۲x-\sqrt{۳}}{x^۲+۱}$ کدام است؟

۱) $y\geq ۲$ ۲) $۲\geq y\geq -۲$

۳) $۰\geq y\geq -۲$ ۴) $۲\geq y\geq -۱$

۳۶- $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{۴x-[x]}{x}$ برابر است با: ([ ] علامت جزء صحیح است.)

۱) ۴ ۲) ۳

۳) ۲ ۴) حد ندارد

۳۷- منحنی تابع $y=x^۴+۲x^۲+ax+b$ به‌ازاء همهٔ مقادیر a و b:

۱) دو نقطهٔ ماکسیمم و یک نقطهٔ می‌نیمم دارد.

۲) دو نقطهٔ می‌نیمم و یک نقطهٔ ماکسیمم دارد.

۳) یک نقطه می‌نیمم دارد.

۴) یک نقطه ماکسیمم دارد.

۳۸- هرگاه $f(x)=\frac{۱}{۳}tg^۳x$ باشد $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(\frac{\pi}{۴}+۲h)-f(\frac{\pi}{۴}-h)}{h}$ برابر است با:

۱) ۲ ۲) ۴

۳) ۶ ۴) ۸

۳۹- تابع $f(x)=۲x-\sin(x-۲)$ مفروض است. حاصل $f(۲)+f^{-۱}(۴)$ کدام است؟ $f^{-۱}$ تابع وارون f می‌باشد.

۱) ۲ ۲) ۴

۳) ۶ ۴) ۸

۴۰- هرگاه $x=1$ طول نقطهٔ بازگشت منحنی $y=\sqrt[3]{(x^2-2ax+a^2)x}$ باشد a کدام است؟

۱) $a=0$ ۲) $a=-1$
۳) $a=1$ ۴) $a=2$

۴۱- تابع وارون $y=2x+1-\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}$ خط مجانب مایلی به کدام یک از معادلات زیر دارد؟

۱) $y=2x+1$ ۲) $x=2y+1$
۳) $y=2x$ ۴) $x=2y$

۴۲- منحنی تابع پارامتری $y=\frac{2t-\sqrt{1+t^2}}{2t+\sqrt{1+t^2}}$ و $x=\frac{t^3}{t^2-1}$ چند مجانب افقی دارد؟

۱) ۴ ۲) ۳
۳) ۲ ۴) ۱

۴۳- توابع زیر از $R \to R$ تعریف شده‌اند کدام تابع پوشا می‌باشد؟

۱) $y=\frac{2x^3-3}{x^3+1}$ ۲) $y=\sqrt[3]{x^3+3x+1}$
۳) $y=tg^2x$ ۴) $y=x^4-4x$

۴۴- شعاع قاعده یک عرقچین کروی را به‌اندازه $\frac{1}{10\pi}$ تغییر می‌دهیم. تغییر تقریبی حجم عرقچین کدام است؟(h ارتفاع عرقچین است.)

۱) $\frac{1}{5}rh$ ۲) $\frac{1}{10}rh$
۳) $\frac{1}{15}rh$ ۴) $\frac{1}{20}rh$

۴۵- توابع $f=\{(0,3)و(2,5)و(1,2)\}$ و $g=\{(2,4)و(3,1)\}$ مفروضند. وارون تابع gof کدام است؟

۱) $\{(2,3)و(1,4)\}$ ۲) $\{(1,0)و(4,1)\}$
۳) $\{(5,1)و(0,2)\}$ ۴) $\{(1,3)و(4,2)\}$

۴۶- $\sqrt[6]{65}$ تا سه رقم اعشار کدام است؟

۱) ۲/۰۰۸ ۲) ۲/۰۰۷
۳) ۲/۰۰۶ ۴) ۲/۰۰۵

۴۷- حاصل $\int_0^1 \frac{x^2dx}{1+x^6}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi}{12}$
۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

۴۸- حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x+\cos x)[\sin x+\cos x]\,dx$ کدام است؟([ ] علامت جزء صحیح است.)

۱) ۲ ۲) ۱
۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) π

۴۹- سطح محصور بین منحنی $y=\frac{x^2}{x^2+(3-x)^2}$ و محور xها و خطوط $x=\frac{1}{2}$ و $x=\frac{5}{2}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳
۳) ۲ ۴) ۱

۵۰- حجم حادث از دوران سطح محصور بین منحنی $y=\frac{1}{\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)}$ و محور xها و خطوط $x=0$ و $x=\frac{\pi}{6}$ حول محور xها کدام است؟

۱) $\pi(\sqrt{3}-1)$ ۲) $\pi(\sqrt{3}+1)$
۳) $2\pi(\sqrt{3}-1)$ ۴) $2\pi(\sqrt{3}+1)$

۵۱- کوچکترین دورهٔ تناوب تابع $y=\cot g\frac{\pi}{۴}x-tg\frac{\pi}{۴}x+۱۲x-[۱۲x]$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

۵۲- خطی که نقاط تلاقی دو منحنی $y=\frac{۲x+۱}{x-۱}$ و $y=\frac{۳x-۲}{x+۱}$ را به‌هم وصل می‌کند زاویه حادهٔ α با محور xها می‌سازد، α کدام است؟

۱) $\alpha=Arctg۲$ ۲) $\alpha=Arctg\frac{۱}{۲}$

۳) $\alpha=Arctg۳$ ۴) $\alpha=Arctg\frac{۱}{۳}$

۵۳- هرگاه $x+y=۴$ و $x,y>۰$ باشند مینیمم $S=\frac{x^۲}{y}+\frac{y^۲}{x}$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۶

۳) ۴ ۴) ۲

۵۴- کمترین مقدار عبارت $x^۲-۳x+\sqrt{۱-x^۲}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۳

۳) -۲ ۴) ۰

۵۵- هرگاه $(\sin\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos^۲\alpha+...$ حدّ $\lim_{n\to\infty}$ $...+\sin\alpha\cos^n\alpha)=\cot g۱۰$ باشد، α کدام است؟

۱) $\alpha=۱۰^\circ$ ۲) $\alpha=۲۰^\circ$

۳) $\alpha=۴۰^\circ$ ۴) $\alpha=۸۰^\circ$

۵۶- با فرض $\log۲=۰/۳۰۱$ عدد ۱۲۵×۲^{۶۰} دارای چند رقم می‌باشد؟

۱) ۲۳ ۲) ۲۲

۳) ۲۱ ۴) ۲۰

تستهای مثلثات

(سالهای دوّم و سوّم ریاضی)

● مهدی قمصری و احمد قندهاری

۱ـ اگر $\pi<x<\frac{۳\pi}{۲}$ و $y=\sin x+\cos x$ ، آنگاه حدود y کدام است؟

۱) $-۱<y<۱$ ۲) $-۱\le y<\sqrt{۲}$

۳) $-\sqrt{۲}\le y<-۱$ ۴) $-\sqrt{۲}<y<\sqrt{۲}$

۲ـ اگر

$$\lg A = ۲\lg ۲ + \lg \sin ۱۰^\circ + \lg \cos ۲۰^\circ + \lg \sin ۵۰^\circ$$

آنگاه $\lg_۲ A$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۲-

۳) ۳- ۴) ۴-

۳ـ اگر $\cos\frac{x}{۲}-\sin\frac{x}{۲}$ ، ماکزیمم باشد، عبارت $\left(\operatorname{tg}\frac{x}{۲}+\operatorname{cotg}\frac{x}{۲}\right)$ برابر است با:

۱) ۱- ۲) ۲-

۳) $-\sqrt{۳}$ ۴) $-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۴ـ حاصل عبارت $\cos\frac{۳\pi}{۵}\cdot\cos\frac{\pi}{۵}$ برابر است با:

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۵ـ معادله $\cos^۲x=\frac{۱}{۲(۲-\sqrt{۲})}$ در فاصله $[۰\ ,\ \pi]$ چند جواب دارد؟

۱) یک ۲) دو

۳) سه ۴) صفر

۶ـ به ازای چه مقادیر a معادله

$$\sin^۲x-(۲a+۲)\sin x+۴a=۰$$

وقتی $\frac{\pi}{۶}<x<\frac{۵\pi}{۶}$ باشد دارای جواب است؟

۱) $|a|<\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۴}\le a\le\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۴}<a\le\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}<a<\frac{۱}{۲}$

۷ـ اگر $\operatorname{tg}۳a=\operatorname{tg}۲a+\operatorname{tg}a$ آنگاه حاصل $\operatorname{tg}a.\operatorname{tg}۲a.\operatorname{tg}۳a$ برابر است با:

۱) صفر ۲) $\sqrt{۳}$

۳) $۳\sqrt{۳}$ ۴) ۱

۸ـ اگر $E(-\sin x)=۱$ آنگاه $E\left(\operatorname{tg}\frac{x}{۲}\right)$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) ۱-

۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $-\sqrt{۳}$

۹- اگر در مثلث ABC، $\hat{B}=n\hat{A}$ و $n \in N$، آنگاه حدود cosA برابر است با:

۱) $(\cos\frac{\pi}{n+1}, 1)$ ۲) $(-1, 1)$

۳) $(\cos\frac{\pi}{n}, 1)$ ۴) $(0, 1)$

۱۰- در مثلث ABC، $B>C$ و $\cos\frac{B-C}{2} = 2\sin\frac{A}{2}$، آنگاه کدام نتیجه کامل‌تر است؟

۱) $A < \frac{\pi}{6}$ ۲) $A > \frac{\pi}{6}$

۳) $A < \frac{\pi}{3}$ ۴) $A > \frac{\pi}{3}$

۱۱- اگر $\sin x+\sin y=2$ آنگاه حاصل کسر $\frac{\sin^2 x+\sin^2 y+\sin x \sin y}{\sin^6 x+\sin^6 y}$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{4}$

۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۱۲- در مثلث ABC، $\hat{A}=30^\circ$ و $BC=2$، ماکزیمم مساحت مثلث کدام است؟

۱) $2+\sqrt{3}$ ۲) $2(2+\sqrt{3})$

۳) $4\sqrt{3}$ ۴) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

۱۳- در مثلث ABC، زوایا تصاعد عددی می‌سازند، حاصل $\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

۳) $\frac{3}{2}$ ۴) صفر

۱۴- اگر $\text{Arc cosx} > \text{Arc sinx}$، آنگاه حدود x کدام است؟

۱) $-1 \le x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $-1 \le x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

۳) $-1 < x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $-1 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۵- اگر $tg\alpha$ و $tg\beta$ و $tg\gamma$ ریشه‌های معادله $ax^3+bx^2+cx+b=0$ باشد آنگاه داریم:

۱) $\alpha+\beta+\gamma = (2k-1)\frac{\pi}{2}$

۲) $\alpha+\beta+\gamma = k\pi$

۳) $\alpha+\beta+\gamma = (k\pi+\frac{\pi}{4})$

۴) $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma = 1$

۱۶- در مثلث ABC، داریم $P(P-a) = \frac{3}{4}bc$ زاویه $\hat{A}$ برابر است با: (P نصف محیط مثلث است).

۱) 60° ۲) 120°

۳) 45° ۴) 30°

۱۷- نمودار $\text{Arc tgx} + \text{Arc tgy} = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

۱) دایره ۲) نقطه

۳) هذلولی ۴) دو خط راست

۱۸- با فرض $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\sin 2x < 0$ داریم:

۱) $\cos 5x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) $\cos 5x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

۳) $\cos 5x = \frac{1}{2}$ ۴) $\cos 5x = -\frac{1}{2}$

۱۹ - با فرض $t = tg\frac{x}{۲}$ و $t \in R$ کدام یک از روابط زیر به ازای جمیع مقادیر t صحیح است؟

۱) $\sin x = \frac{۲t}{۱+t^۲}$ ۲) $tgx = \frac{۲t}{۱-t^۲}$

۳) $\cot gx = \frac{۱-t^۲}{۲t}$ ۴) ۱ و ۲ و ۳ با هم

۲۰ - صورت کلی جوابهای معادله $tg۳x = tgx$ کدام است؟

۱) $x = \frac{k\pi}{۲}$ ۲) $x = ۲k\pi$

۳) $x = (۲k-۱)\pi$ ۴) $x = k\pi$

۲۱ - حاصل

$S = \cos ۲^\circ + \cos ۴^\circ + \ldots + \cos ۱۷۶^\circ + \cos ۱۷۸^\circ$

برابر است با:

۱) $S = ۱$ ۲) $S = \frac{۱}{۲}$

۳) $S = -\frac{۱}{۲}$ ۴) $S = ۰$

۲۲ - یکی از جوابهای معادله $۸x^۳ - ۶x = \sqrt{۳}$ برابر است با:

۱) $x = \sin ۲۰^\circ$ ۲) $x = \sin ۴۰^\circ$

۳) $x = \sin ۶۰^\circ$ ۴) $x = \sin ۸۰^\circ$

۲۳ - با فرض $tg\alpha$ و $-\cot g\alpha$ ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوّم $x^۲ + \frac{۲}{m}x + m = ۰$ حاصل $tg۶\alpha$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱

۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $-\sqrt{۳}$

۲۴ - معادله مثلثاتی $(\sqrt{۶}+۲)tgx + (\sqrt{۶}-۲)\cot gx = ۴$ با کدام‌یک از معادلات زیر جوابهایش یکی است؟

۱) $\sin ۲x + \cos ۲x = \frac{\sqrt{۶}}{۲}$

۲) $\sin ۲x - \cos ۲x = \frac{\sqrt{۶}}{۲}$

۳) $\sin ۲x + \cos ۲x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۴) $\sin ۲x - \cos ۲x = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۲۵ - هرگاه tgB و tgC ریشه‌های معادلهٔ درجه دوّم $x^۲ - (۲m+۲)x + ۳ = ۰$ و A و B و C زوایای یک مثلث باشند tgA کدام است؟

۱) $tgA = m - ۱$ ۲) $tgA = m + ۱$

۳) $tgA = ۲m + ۱$ ۴) $tgA = ۲m - ۱$

۲۶ - هرگاه در مثلثی $A = ۴۵^\circ$ باشد کدام‌یک از گزاره‌های زیر همواره صحیح است؟

۱) $tg^۲B\, tg^۲C = ۱$

۲) $tg^۲B\, tg^۲C = -۱$

۳) $tg^۲B + tg^۲C + tg^۲B\, tg^۲C = ۱$

۴) $tg^۲B + tg^۲C = ۰$

۲۷ - حاصل $\frac{tg\frac{\pi}{۲۴}\left(۱-tg^۲\frac{\pi}{۲۴}\right)}{\left(۱+tg^۲\frac{\pi}{۲۴}\right)^۲}$ برابر است با:

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۱۶}$

۲۸ - معادله $Arc\cos\frac{x}{۲} + Arc\cot g۲x = ۰$ چند جواب دارد؟

۱) ۰ ۲) ۱

۳) ۲ ۴) ۳

۲۹ - معادله $Arc\, tgx + Arc\, tg۲x + Arc\, tg۳x = \pi$ چند جواب دارد؟

۱) ۰ ۲) ۱
۳) ۲ ۴) ۳

۳۰- حاصل $\sin\left[2\text{Arcsin}\frac{\sqrt{2}}{2}-3\text{Arctg}(-1)+\text{Arccos}(-\frac{1}{2})+\text{Arccotg}(-1)\right]$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$
۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

۳۱- هرگاه در مثلثی $a^2=\frac{b^3+c^3+a^3}{b+c+a}$ باشد زاویه A کدام است؟

۱) $A=120^\circ$ ۲) $A=135^\circ$
۳) $A=60^\circ$ ۴) $A=45^\circ$

۳۲- هرگاه در مثلثی
$(a^2+b^2)\sin(A-B)=(a^2-b^2)\sin C$
باشد آنگاه:

۱) مثلث فقط متساوی الساقین است.
۲) مثلث فقط قائم‌الزاویه است.
۳) مثلث قائم الزاویه یا متساوی الساقین است.
۴) مثلث غیر مشخص است.

۳۳- هرگاه $3\sin x+4\cos x=5$ باشد $\text{tg}2x$ کدام است؟

۱) $\frac{7}{24}$ ۲) $\frac{24}{7}$
۳) $\frac{7}{12}$ ۴) $\frac{12}{7}$

۳۴- در صورتی‌که
$\text{Arc sin}x+\text{Arc tg}y+\text{Arc tg}z=\pi$
باشد ماکسیمم $\text{Arc sin}x\,.\,\text{Arc tg}y\,.\,\text{Arc tg}z$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi^3}{8}$ ۲) $\frac{\pi^3}{27}$
۳) $\frac{\pi^3}{9}$ ۴) $\frac{\pi^3}{4}$

۳۵- در مثلثی $a+b=4c$ می‌باشد حاصل $\text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{B}{2}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{2}{5}$
۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{4}{5}$

۳۶- هرگاه در مثلثی $bc=2(b^2+c^2-a^2)$ باشد آنگاه زاویه A:

۱) $0^\circ<A<30^\circ$ ۲) $30^\circ<A<45^\circ$
۳) $45^\circ<A<60^\circ$ ۴) $60^\circ<A<90^\circ$

۳۷- در مثلث ABC داریم $B>30^\circ$ و $S=\frac{1}{4}bc$ (S مساحت مثلث است) در این‌صورت:

۱) $A=30^\circ$ ۲) $A=45^\circ$
۳) $A=60^\circ$ ۴) $A=75^\circ$

۳۸- در مثلث ABC داریم $\sin^2A=\sin^2B+\sin^2C$ در این صورت:

۱) A حتماً حاده‌است.
۲) A یقیناً منفرجه است.
۳) A قائمه است.
۴) A یکی از زوایا منفرجه است.

۳۹- در متوازی الاضلاعی طول اقطار ۴l و l می‌باشد و زاویه بین آنها ۳۰° است. مساحت این متوازی الاضلاع کدام است؟

۱) $S = l^2$ ۲) $S = \frac{1}{2}l^2$

۳) $S = 2l^2$ ۴) $S = \frac{3}{2}l^2$

۴۰- برای آنکه معادله

$$tg\alpha \sin 2x + \sqrt{1 + 2tg^2\alpha}\cos 2x = 2tg\alpha$$

دارای جواب باشد باید پارامتر α در کدام نامساوی صدق کند؟

۱) $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$

۳) $-\frac{\pi}{4} \le \alpha < \frac{\pi}{4}$ ۴) هر چه α باشد جواب دارد

۴۱- بفرض $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$ و $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ حاصل $\sin(x - 45^\circ) + \cos(x - 15^\circ)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱

۳) ۰ ۴) $\sqrt{3}$

۴۲- دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی

$$\begin{cases} x + y = \frac{3\pi}{2} \\ \sin x + a\sin y = a + 1 \end{cases}$$

وقتی دارای جواب می‌باشد که:

۱) $a > 0$ ۲) $a \le 0$

۳) $1 \le a \le 2$ ۴) a هرچه باشد

۴۳- حاصل $\cos 87^\circ + \cos 33^\circ + \cos 27^\circ$ برابر است با:

۱) $\sin 63^\circ$ ۲) $\cos 63^\circ$

۳) $2\sin 63^\circ$ ۴) $2\cos 63^\circ$

۴۴- معادله $\sin^2 x - 2m \sin 2x + m\cos^2 x = 0$ مفروض است. m چقدر باشد تا داشته باشیم $x' + x'' = \frac{\pi}{2}$ (x' و x'' دو جواب معادله هستند.)

۱) ۱- ۲) ۱

۳) ۲- ۴) ۲

توجه:

با پوزش، در تستهای ریاضیات جدید که در صفحهٔ بعد مطالعه خواهید کرد، صورت و گزینه‌های چند تست به‌شرح زیر اصلاح می‌شود:

۱- تست ۱۱ گزینه ۲، $p \to q$ را به $q \to p$ تبدیل کنید.

۲- تست ۳۳ صورت تست به شکل $f: Z \to Z \cup \{0\}$ اصلاح شود.

۳- تست ۶۶ گزینهٔ ۱ به‌صورت $(6)_4 \times 31 \times 31 \times 21$ اصلاح شود.

۴- تست ۸۹ گزینهٔ ۲ به‌صورت $A + I$ اصلاح شود.

تستهای ریاضیات جدید

(سالهای اوّل، دوّم، سوّم و چهارم)

● حمیدرضا امیری

۱ - مجموعهٔ جواب گزاره‌نمای $x < ۱ \Rightarrow x > ۳$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\varnothing$

۳) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > ۱\}$ ۴) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq ۱\}$

۲ - عکس نقیض گزارهٔ $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ کدام است؟

۱) $(r \Rightarrow q) \Rightarrow \sim p$ ۲) $(\sim r \Rightarrow q) \Rightarrow \sim p$

۳) $(q \wedge \sim r) \Rightarrow \sim p$ ۴) $\sim(q \wedge \sim r) \Rightarrow \sim p$

۳ - اگر p گزاره‌ای درست باشد ارزش گزارهٔ

$r \Rightarrow [(q \Rightarrow \sim p) \Rightarrow (q \Rightarrow p)]$

۱) همواره نادرست است ۲) همواره درست است

۳) بستگی به ارزش p دارد ۴) بستگی به ارزش r دارد

۴ - کدام گزاره نادرست است؟

۱) $\forall x \in Z, \exists y \in Z, x < y$

۲) $\nexists x \in N, \forall y \in N, x + y = y$

۳) $\forall x \in N \nexists y \in N, x + y \neq ۲$

۴) $\exists x \in Z, \forall y \in Z, x < y$

۵ - $(\exists x \in A, p(x)) \wedge (\exists x \in A, q(x))$ چه شرطی برای $\exists x \in A, (p(x) \wedge q(x))$ می‌باشد؟

۱) لازم و کافی ۲) نه لازم و نه کافی

۳) لازم و نه کافی ۴) کافی و نه لازم

۶ - گزارهٔ $r \Leftrightarrow [s \wedge \sim(\sim s \Rightarrow \sim r)]$ هم‌ارز با کدام گزاره است؟

۱) r ۲) s

۳) $\sim s$ ۴) $\sim r$

۷ - گزاره $[(p \wedge q) \Rightarrow (\sim p \vee s)] \Rightarrow [(p \wedge s) \Rightarrow p]$ یک گزارهٔ :

۱) همیشه درست است.

۲) همیشه نادرست است.

۳) همواره درست است اگر p نادرست باشد.

۴) نادرست است اگر p درست باشد.

۸ - نقیض گزارهٔ $[q \Rightarrow (q \wedge r)] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ کدام است؟

۱) $q \vee \sim r$ ۲) $\sim q \vee r$

۳) $\sim q \wedge r$ ۴) $q \wedge \sim r$

۹ - عکس نقیض گزارهٔ $[q \Rightarrow (p \Rightarrow r)] \Rightarrow [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$ هم‌ارز کدام گزاره است؟

۱) $[(p \Rightarrow q) \wedge (p \vee q)] \Rightarrow q$

۲) $(\sim p \vee q)$

۳) $\sim[(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)]$

۴) $\sim p \wedge q \wedge r$

۱۰- اگر گزاره‌های $q \Leftrightarrow p$ و $(p \Rightarrow r) \Rightarrow q$ گزاره‌هایی درست باشند آنگاه گزارهٔ $(p \Rightarrow s) \Rightarrow (s \Rightarrow q)$

۱) هم‌ارز است با $\sim p$ ۲) هم‌ارز است با $\sim s$

۳) یک استلزام منطقی است ۴) هم‌ارز است با q

۱۱- در بحث زیر کدام گزاره را قرار دهیم تا بحث معتبر باشد؟

$p \Rightarrow (q \Rightarrow \sim s)$ $\wedge$

$s \wedge q$ $\wedge$

$\therefore$?

۱) p ۲) $\sim p$

۳) $s \Rightarrow p$ ۴) $p \Rightarrow s$

۱۲- $p \Rightarrow q$ چه نوع شرطی برای $q \Rightarrow q$ است؟

۱) لازم ۲) کافی

۳) نه لازم و نه کافی ۴) لازم و کافی

۱۳- اگر $B \subseteq A'$ کدام گزاره درست است؟

۱) $A \subseteq B'$ ۲) $A' \subseteq B'$

۳) $B' \subseteq A'$ ۴) $B' \subseteq A$

۱۴- هرگاه $A \cup B = A$ و $A \cap B = A$ کدام درست است؟

۱) $A \subseteq B'$ ۲) $B \subseteq A'$

۳) $A = B$ ۴) $A \neq B$

۱۵- هرگاه $A \subseteq B'$ کدام درست است؟

۱) $A - B = \varnothing$ ۲) $B' - A' = \varnothing$

۳) $A' - B = \varnothing$ ۴) $B - A' = \varnothing$

۱۶- مجموعهٔ $(B - C) \cap [(C - A)' \cap (A' \cap B')']$ با کدام مجموعه برابر است؟

۱) C ۲) $C - B$

۳) $C' - B'$ ۴) B'

۱۷- اگر $(A - B) \subseteq (A \cap B)$ کدام درست است؟

۱) $B - A = \varnothing$ ۲) $A - B = \varnothing$

۳) $A - B = B$ ۴) $A = B$

۱۸- هرگاه $A \cap B = \varnothing$ کدام نادرست است؟

۱) $(A - B) \cap (B - A) = \varnothing$

۲) $A \cap (A' \cup B) = \varnothing$

۳) $A - B = A$

۴) $A - B = B$

۱۹- مجموعهٔ جواب گزاره‌نمای $(x \cap x') \subseteq \varnothing$ چند عضو دارد؟

۱) ۱ عضو ۲) ۲ عضو

۳) مجموعه‌ای نامتناهی است ۴) عضوی ندارد

۲۰- تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی مجموعه‌ای ۵ واحد بیشتر از تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی آن مجموعه است، این مجموعه چند عضو دارد؟

۱) ۶ ۲) ۵

۳) ۷ ۴) ۹

۲۱- هرگاه $B - A = B'$ در این صورت $(A - B') \cup (A - B)$ کدام است؟

۱) A ۲) B

۳) $\varnothing$ ۴) B'

۲۲- متمم مجموعهٔ $(A - B) \cup (A - B')$ کدام است؟

۱) B' ۲) A'

۳) $\varnothing$ ۴) A

۲۳- اگر $A = \{a, \{a\}, \{a, b\}\}$ و $p(A)$ مجموعهٔ زیرمجموعه‌های A باشد (مجموعهٔ توانی A) در این صورت

مجموعهٔ $(p(A) - A)$ چند عضو دارد؟

۱) ۷ ۲) ۸

۳) ۵ ۴) ۶

۲۴- در صورتی که $A \times (A - B^2) = A \times (B^2 - A)$ آنگاه:

۱) $A = A \times B$ ۲) $A^2 = A \times B^2$

۳) $A^2 = A \times B$ ۴) $A^2 \times B = A$

۲۵- اگر $A \times B = B \times A$ کدام تساوی همواره درست است؟

۱) $A = B$

۲) $A \cup B = B$

۳) $(A = B) \vee n(A \times B) = 0$

۴) $A = \varnothing \vee B = \varnothing$

۲۶- اگر $\mathbb{R}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی، مجموعهٔ $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{0\})$ کدام است؟

۱) صفحهٔ محورهای مختصات بدون محور y ها

۲) صفحهٔ محورهای مختصات بدون محور x ها

۳) صفحهٔ محورهای مختصات بدون دو محور

۴) صفحهٔ محورهای مختصات بدون مبدأ

۲۷- اگر $A \cap B = \varnothing$ در این صورت $(B \times A) - (B \times B')$ کدام است؟

۱) A ۲) M (مرجع)

۳) $A \times B$ ۴) $\varnothing$

۲۸- چند رابطه روی یک مجموعهٔ ۴ عضوی می‌توان نوشت که هم تقارنی و هم پاد تقارنی باشد؟

۱) ۸ ۲) ۱۶

۳) ۳۲ ۴) ۱۵

۲۹- هرگاه رابطهٔ R تقارنی باشد در این صورت $[(R^{-1})' - R']$ رابطه‌ای:

۱) پاد تقارن است ۲) تعدی است

۳) تقارنی است ۴) هم‌ارزی است

۳۰- رابطهٔ هم‌ارزیِ f در $\mathbb{R}^2$ به صورت $(x,y)\ f(z,t) \Leftrightarrow xy = zt$ تعریف شده است. نمودار کلاس هم‌ارزی $[(0,1)]$ کدام است؟

۱) محورهای مختصات ۲) هذلولی

۳) دو خط موازی ۴) یک پاره‌خط

$$f: N^2 \longrightarrow N$$

۳۱- اگر $f(m,n) = 2^n - m$ در این صورت $f(f(2,1), f(1,2))$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) -8

۳) تعریف نمی‌شود ۴) ۳

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

۳۲- تابع f با ضابطهٔ $f(x,y) = xy$ تعریف شده است. این تابع:

۱) یک‌به‌یک است و پوشا نیست

۲) پوشا است و یک‌به‌یک نیست

۳) نه یک‌به یک و نه پوشا است

۴) یک‌به‌یک و پوشا است

$$f: N \longrightarrow Z$$

۳۳- تابع $f(x) = 2x - |x + 1|$ در دامنهٔ طبیعی خود:

۱) فقط یک‌به‌یک است

۲) فقط پوشا است

۳) نه یک‌به‌یک و نه پوشا است

۴) یک‌به‌یک و پوشا است

۳۴- کدام دستگاه گروه است؟

۱) $(Z, \times)$ ۲) $(N, \times)$

۳) $(\mathbb{R}, \times)$ ۴) $(\{1,-1\}, \times)$

۳۵- کدام رابطهٔ زیر تابع است؟

۱) $\{(x, y) \in Z^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$

۲) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$

۳) $\{(x, y) \in N^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$

۴) $\{(x, y) \in N \times Z \mid x^2 - y^2 = 1\}$

۳۶- عمل * بر مجموعهٔ Z چنین تعریف می‌شود $x * y = x - y$ این عمل:

۱) بسته نیست
۲) شرکت‌پذیر است
۳) عضو خنثی دارد
۴) جابجایی دارد

۳۷- کدام مجموعه نسبت به عمل جمع معمولی بسته است؟

۱) $\{1, -1\}$
۲) $\{0, 1\}$
۳) $\{1, 0, -1\}$
۴) $\{0\}$

۳۸- عمل * در Z به‌صورت $x*y = \min\{x, y\} + x$ تعریف شده است. حاصل $[5*(2*3)]$ کدام است؟

۱) ۸
۲) ۷
۳) ۲
۴) ۵

۳۹- در Q^+ عمل * به‌شکل $x*y = \frac{4xy}{5}$ تعریف شده است، عضو خنثی عدد

۱) ۵ است
۲) ۴ است
۳) $\frac{4}{5}$ است
۴) $\frac{5}{4}$ است

۴۰- کدام گزینه نادرست است؟

۱) در هر گروه داریم $(a*b)' = b'*a'$.

۲) هر گروه حداقل ۲ زیرگروه دارد.

۳) در هر گروه اگر وارون هر عضو خودش باشد آن گروه آبلی است.

۴) هر گروه n عضوی 2^n زیرگروه دارد.

۴۱- در گروه $(\mathbb{R} - \{1\}, *)$ داریم $x*y = x + y - xy$ در این گروه جواب معادلهٔ $x*2' = 5$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) -۳
۴) -۲

۴۲- در گروه $(Z_6, \oplus)$ عضو متقابل ۳ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۲
۳) ۶
۴) ۳

۴۳- حوزهٔ درست بودن حلقهٔ $(Z_m, \oplus, \otimes)$ شرط لازم و کافی است برای:

۱) وارون پذیر بودن همهٔ اعضای غیر صفر

۲) دارا بودن مقسوم علیه صفر

۳) برقرار بودن قاعدهٔ حذف

۴) موارد ۱ و ۳

۴۴- هرگاه I ایده‌آل حلقهٔ $\mathbb{R}$ (اعداد حقیقی) و $\sqrt{3} \in I$ در این صورت:

۱) $I = Q$
۲) $I = \mathbb{R} - Q$
۳) $I = \mathbb{R}$
۴) $I = \mathbb{R} - Z$

۴۵- تعداد وارون پذیرهای حلقهٔ $(Z_7, \oplus, \otimes)$ کدام است؟

۱) ندارد
۲) ۷
۳) ۶
۴) ۵

۴۶- تعداد مقسوم‌علیه‌های صفر در حلقهٔ $(Z_8, \oplus, \otimes)$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۳
۳) ۴
۴) ندارد

۴۷- کدام گزینه نادرست است؟

۱) هر میدان یک حوزهٔ درست است

۲) هر ایده‌آل یک زیر حلقه است

۳) هر میدان فقط ۲ ایده‌آل دارد

۴) میدان ایده‌آل ندارد

۴۸- هرگاه I ایده‌آل حلقهٔ Z باشد و $I \in 4$ در این صورت:

۱) $I = 3Z$ ۲) $I = \{2^n | n \in N\}$

۳) $I = 2Z$ ۴) $I = 6Z$

۴۹- کدام گزینه نادرست است؟

۱) مجموعهٔ $\mathbb{R}$ روی $\mathbb{R}$ یک فضای برداری است.

۲) مجموعهٔ $\mathbb{R}$ روی Q یک فضای برداری است.

۳) مجموعهٔ Q روی $\mathbb{R}$ یک فضای برداری است.

۴) مجموعهٔ Q روی Q یک فضای برداری است.

۵۰- در فضای برداری V مجموعهٔ $\{U, V, \bar{O}\}$ یک مجموعهٔ:

۱) مستقل خطی است ۲) وابسته خطی است

۳) زیر فضای V است ۴) موارد ۱ و ۳

۵۱- کدام مجموعه یک زیرفضای $\mathbb{R}^2$ است؟

۱) $\{(x,y) | 2x + y = 1\}$

۲) $\{(x,y) | x = 4y\}$

۳) $\{(x,y) | \frac{x+2}{y} = 1\}$

۴) موارد ۲ و ۳

۵۲- هرگاه بردارهای $(x,2)$ و $(y,4)$ در $\mathbb{R}^2$ مستقل خطی باشند آنگاه:

۱) $xy = 8$ ۲) $8x = y$

۳) $xy \neq 8$ ۴) $2y \neq 4x$

۵۳- عبارت بولی $a'b + ab'$ با کدام عبارت زیر برابر است؟

۱) $(a + b)(a' + b')$ ۲) $(a + b)(ab)'$

۳) $(ab)'(a'b')'$ ۴) هر ۳ مورد قبل

۵۴- متمم عبارت بولی $b'c + bc'$ کدام است؟

۱) $bc + b'c'$

۲) $(b + c)(b' + c)$

۳) $(b' + c) + (b + c')$

۴) $(b'c).(bc')$

۵۵- ساده شدهٔ عبارت بولی $(a + b).[(bc) + (a' b')']$ کدام است؟

۱) $a'b'$ ۲) $a' + b'$

۳) $(a + b)$ ۴) ab

۵۶- با توجه به جدول، شکل مدار حاصل از آن کدام است؟

x	y	T
۱	۱	۱
۱	۰	۰
۰	۱	۱
۰	۰	۱

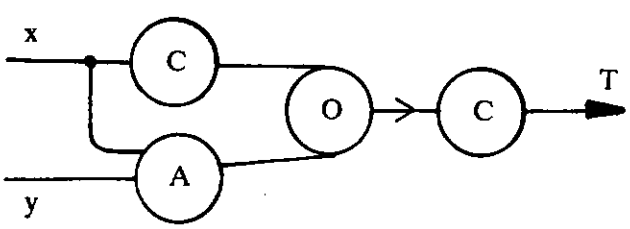
۱) y — x′ —

۲) x′ / y′

۳) x′ / y

۴) x / y

۵۷- عبارت بولی مدار منطقی زیر کدام است؟



۱) $y' + x$ ۲) $x' + y$

۳) $x'y'$ ۴) $y'x$

۵۸- به چند طریق می‌توان ۵ کلید را در یک دسته کلید دایره‌شکل قرار داد؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۲

۳) ۱۲۰ ۴) ۶۰

۵۹- به چند طریق می‌توان ۴ مداد و ۶ خودکار را در کنار هم چید به قسمی که همواره مدادها پهلوی هم باشند؟

۱) $۶! \times ۴!$ ۲) $۷! \times ۶!$

۳) $۴! \times ۷!$ ۴) $۱۰!$

۶۰- به چند طریق می‌توان ۴ مداد و ۴ خودنویس را به‌طور متناوب کنارهم چید؟

۱) $۴! \times ۴!$ ۲) $۲! \times ۴$

۳) $۴! \times ۲$ ۴) $۴! \times ۴! \times ۲$

۶۱- به چند طریق ۴ مرد و ۴ زن می‌توانند به‌صورت یک درمیان دور یک میز گرد بنشینند؟

۱) $۴! \times ۴!$ ۲) $۳! \times ۳!$

۳) $۴! \times ۳!$ ۴) $۲! \times ۴!$

۶۲- با ارقام ۲، ۸، ۸، ۶، ۶، ۶ و ۲ چند عدد ۴ رقمی می‌توان نوشت؟

۱) ۳۵ ۲) $۷!$

۳) ۸۴۰ ۴) هیچ‌کدام از ۳ مورد قبل

۶۳- به چند طریق می‌توان از یک اسباب‌بازی فروشی که ۵ نوع اسباب‌بازی دارد ۸ اسباب‌بازی خرید به قسمی که از هر نوع حداقل یکی خریداری شده باشد؟

۱) ۴۲ ۲) ۲۰

۳) ۲۱ ۴) ۴۴

۶۴- به چند طریق می‌توان ۴۰ سیب را بین ۳ نفر تقسیم کرد؟ (می‌توان به بعضیها سیب نداد.)

۱) ۶۸۱ ۲) ۳۴۰

۳) ۸۶۱ ۴) هیچ‌کدام از ۳ مورد قبل

۶۵- به چند طریق می‌توان از بین ۶ نفر گروههای ۲ تیمی ساخت که در هر تیم ۳ نفر باشند؟

۱) ۲۰ ۲) ۴۰

۳) ۱۵ ۴) ۱۰

۶۶- ۸ نفر که دو نفر آنها با هم برادر هستند به چند طریق می‌توانند روی یک نیمکت قرار بگیرند هرگاه بخواهیم دقیقاً ۳ نفر بین این دو برادر باشند؟

۱) $۲! \times ۳! \times (۶)_۴$ ۲) $\binom{۶}{۳} \times ۳! \times ۲!$

۳) $\binom{۶}{۳} \times ۳! \times ۳! \times ۲!$ ۴) $۳! \times ۳!$

۶۷- هرگاه $A = \{۱،۲،۳\}$ و $B = \{۶،۷،۸،۹\}$ چند عدد ۵ رقمی شامل ۲ رقم از A و ۳ رقم از B می‌توان ساخت؟

۱) $\binom{۳}{۲} \times \binom{۴}{۳} \times ۲! \times ۳!$

۲) $\binom{۳}{۲} \times \binom{۴}{۳} \times ۵!$

۳) $۵!$

۴) $(۳)_۲ \times (۴)_۳ \times ۵!$

۶۸- سکه‌ای را ۸ بار پرتاب می‌کنیم مطلوب است احتمال آن‌که دقیقاً ۴ بار «پشت» بیاید.

۱) $\frac{۷۰}{۲^{۱۶}}$ ۲) $\frac{۱}{۲^۴}$

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳۵}{۲^۷}$

۶۹ - در کیسه‌ای ۴ مهره قرمز و ۳ مهره سفید موجود است. ۲ مهره از این کیسه به تصادف خارج می‌کنیم احتمال آن‌که این دو مهره همرنگ نباشند:

۱) $\frac{۳}{۷}$ ۲) $\frac{۱۲}{۲۱}$

۳) $\frac{۹}{۱۱}$ ۴) $\frac{۴}{۷}$

۷۰ - دو تاس با هم ریخته می‌شوند اگر بدانیم هر دو عددی اول را نشان می‌دهند، احتمال این‌که مجموعشان کمتر از ۸ باشد عبارت است از:

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۷}$

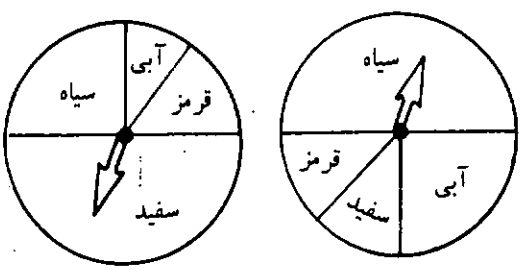
۳) $\frac{۳}{۳۶}$ ۴) $\frac{۴}{۳۶}$

۷۱ - سکه‌ای را ۴ بار پرتاب می‌کنیم در صورتی که احتمال «رو» آمدن $\frac{۲}{۳}$ باشد، احتمال این‌که ۳ بار «پشت» و ۱ بار «رو» بیاید برابر است با:

۱) $\frac{۳}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱۳}{۱۶}$

۳) $\frac{۲^۳}{۸۱}$ ۴) $\frac{۲۰}{۸۱}$

۷۲ - با توجه به شکلهای پایین، احتمال این‌که هر دو عقربه در قسمتهای همرنگ توقف کنند برابر است با:



۱) $\frac{۱۵}{۳۲}$ ۲) $\frac{۳۲}{۸۱}$

۳) $\frac{۱۵}{۶۴}$ ۴) $\frac{۵}{۲۷}$

۷۳ - هرگاه $p(A) = \frac{۱}{۴}$ و $p(B) = K$ و A و B دو پیشامد مستقل از هم باشند حدود k عبارت است از:

۱) $k \geq \frac{۱}{۴}$ ۲) $k \leq ۴$

۳) $k \geq ۴$ ۴) $k + ۱ < ۶$

۷۴ - در معدل‌گیری یک کلاس ۵۰ نفری به‌اشتباه نمره ۹ را ۱۹ در نظر گرفتیم و معدل ۱۶ به‌دست آمد، میانگین واقعی کدام است؟

۱) ۱۶/۷ ۲) ۱۵/۷

۳) ۱۶/۸ ۴) ۱۵/۸

۷۵ - در نمونه $x_{۱۵}$ ، ... ،$x_۲$ ،$x_۱$ اگر $\sum x_i = ۶۰$ و $\sum x_i^۲ = ۲۹۶$ مقدار S_x کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$

۳) ۲ ۴) $\sqrt{۵}$

۷۶ - اگر در یک مسألهٔ آماری همهٔ داده‌ها با عدد ۵ جمع شوند نسبت انحراف معیار اول به انحراف معیار ثانویه چه قدر است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۵}$

۳) ۵ ۴) صفر

۷۷ - اگر انحراف معیار داده‌های x_n ، ... ،$x_۲$ ،$x_۱$ برابر با ۶ باشد انحراف معیار $۳x_n+۲$ ، ... ،$۳x_۲+۲$ ،$۳x_۱+۲$ برابر است با:

۱) ۲۰ ۲) ۱۸

۳) ۸ ۴) ۶

۷۸ - میانگین ۶ داده آماری ۱۲ و میانگین ۸ داده دیگر ۱۸ می‌باشد میانگین این ۱۴ داده کدام است؟ (تا دو رقم اعشار)

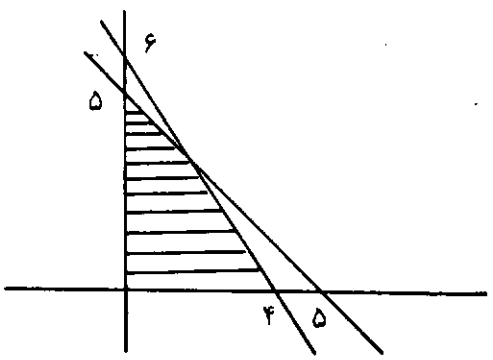
۱) ۱۴/۵۲ ۲) ۱۵/۴۲

۳) ۱۷/۴۱ ۴) ۱۳/۱۴

۷۹- کدام نقطه در دستگاه نامعادلات $\begin{cases} x+y\leq 5 \\ y\geq 3 \end{cases}$ صدق می‌کند؟

۱) (۴، ۲) ۲) (۲، ۲)
۳) (۲، ۳) ۴) (۳، ۲)

۸۰- بیشینهٔ عبارت $3x + 2y$ که در شرایط شکل زیر صدق می‌کند کدام است؟



۱) ۸ ۲) ۷
۳) ۱۴ ۴) ۱۲

۸۱- جواب معادلهٔ $3x \overset{5}{\equiv} 1$ کدام است؟

۱) $x = 5k - 2$ ۲) $x = 5k + 3$
۳) $x = 5k + 2$ ۴) $x = 5k - 3$

۸۲- باقیمانده تقسیم $13^{2n+1} + 2^{3n+1}$ بر ۷ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵
۳) ۶ ۴) ۱

۸۳- هرگاه $(a - 2b ، 3a - b) = d$ و $(b ، d) = 1$، d کدام‌یک از اعداد زیر می‌تواند باشد؟

۱) ۳ ۲) ۵
۳) ۲ ۴) ۴

۸۴- در صورتی که n مربع کامل باشد، کدام هم‌نهشتی حتماً نادرست است؟

۱) $n^2 \overset{10}{\equiv} 0$ ۲) $n^2 \overset{10}{\equiv} 4$
۳) $n^2 \overset{10}{\equiv} 6$ ۴) $n^2 \overset{10}{\equiv} 1$

۸۵- یک عدد دو رقمی ۳ برابر مجموع ارقام خود می‌باشد، حاصل‌ضرب ارقام این عدد کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۸
۳) ۲۱ ۴) ۱۴

۸۶- باقیماندهٔ تقسیم $600! + \ldots + 2! + 1!$ بر ۱۲۰ کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۳۳
۳) ۳۵ ۴) ۳۴

۸۷- رقم یکان 1372^{1373} کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۲
۳) ۴ ۴) ۸

۸۸- هرگاه $a|b$ و $a ، b \in Z$ آنگاه حاصل $([a$ و $(a$ و $b)]$ و $b)$ کدام است؟

۱) $|a|$ ۲) $(a$ و $b)$
۳) $|b|$ ۴) ab

۸۹- اگر $A^2 - A + I = \bar{0}$ وارون ماتریس A کدام است؟

۱) $A - I$ ۲) $A - I$
۳) $I - A$ ۴) $-A$

۹۰- اگر $|A| = 3$ و A ماتریسی 4×4 باشد مقدار $\det(3A^2)$ کدام است؟

۱) 3^5 ۲) 3^4
۳) 3^7 ۴) 3^6

۹۱ - اگر A ماتریس مربع ۲×۲ و $|A| > ۰$ و داشته باشیم $||A|A| = |۲A|$ مقدار $|A|$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۳
۳) $\sqrt{۲}$
۴) ۲

۹۲ - هرگاه $|A| = ۷$ و A ماتریسی ۳×۳ باشد در این صورت مقدار $|N'A|$ کدام است؟

۱) ۲۱
۲) ۳۴۴
۳) ۳۴۳
۴) ۴۳۴

۹۳ - اگر ماتریس A ماتریسی پاد متقارن و قطری باشد در این صورت ماتریس A:

۱) وارون پذیر است
۲) اسکالر است
۳) نامنفرد است
۴) متقارن نیست

۹۴ - هرگاه A ماتریسی متعامد باشد در این صورت کدام گزینه درست است؟

۱) $A = (A')^{-۱}$
۲) $A = A'$
۳) $A^{-۱} = A$
۴) $A = (A')^{۲}$

۹۵ - ضریب زاویهٔ خط $\begin{vmatrix} x & y & ۲ \\ ۰ & ۱ & -۱ \\ ۲ & ۰ & ۱ \end{vmatrix} = ۰$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $-\frac{۱}{۲}$

۹۶ - هرگاه A ماتریس انتقال نسبت به خط $y = \sqrt{۳}\, x$ باشد در این صورت لوزی ABCD را به چه شکلی تبدیل می‌کند؟

۱) مربع
۲) پاره خط
۳) یک لوزی قابل انطباق بر لوزی قبل
۴) مستطیل

۹۷ - اگر دو مقدار ویژهٔ ماتریس A به‌ترتیب ۲ و ۴ باشند، مقدار $|A + ۳I|$ کدام است؟

۱) ۱۲
۲) ۳۵
۳) ۷
۴) ۸

۹۸ - اگر ماتریس A متقارن و متعامد باشد ماتریس $A^{۲}$ کدام است؟

۱) I
۲) $\overline{۰}$
۳) A
۴) A'

۹۹ - هرگاه A ماتریسی پاد متقارن و ۳×۳ باشد تساوی $k = |A|^{۲} - |A| + ۳$

۱) برای $k = ۱$ برقرار است
۲) برای $k = ۰$ برقرار است
۳) برای $k = ۳$ برقرار است
۴) به ازای هر $k \in R$ برقرار نیست

تستهای هندسه

(سالهای اوّل، دوّم، سوّم و چهارم ریاضی ـ تجربی)

● محمدهاشم رستمی

۱ ـ اندازهٔ زاویهٔ بین نیمسازهای دو زاویهٔ مجاور ۶۵ درجه و تفاضل این دو زاویه ۳۰ درجه است. اندازهٔ زاویهٔ کوچکتر چند درجه است؟

۱) ۲۰ ۲) ۳۰

۳) ۴۰ ۴) ۵۰

۲ ـ مرکز دایرهٔ محیطی مثلثی که یک زاویهٔ منفرجه دارد، کجا واقع است؟

۱) داخل مثلث

۲) خارج مثلث

۳) روی ضلع مقابل به زاویهٔ منفرجه

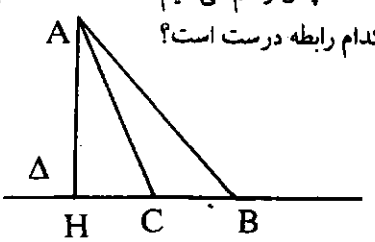
۴) روی رأس زاویهٔ منفرجه

۳ ـ در مثلث ABC، $a=۸$، $b=۴$، $c=۷$ است. کدام یک از روابط زیر بین زوایای مثلث برقرار است؟

۱) $\hat{C} < \hat{B} < \hat{A}$ ۲) $\hat{A} < \hat{C} < \hat{B}$

۳) $\hat{B} < \hat{C} < \hat{A}$ ۴) $\hat{A} < \hat{B} < \hat{C}$

۴ ـ از نقطهٔ A عمود AH و مایلهای AC و AB را در یک طرف AH نسبت به خط Δ چنان رسم می‌کنیم که $HC=CB$ باشد. در این صورت، کدام رابطه درست است؟



۱) $H\hat{A}C = C\hat{A}B$ ۲) $H\hat{A}C < C\hat{A}B$

۳) $۲H\hat{A}C = C\hat{A}B$ ۴) $H\hat{A}C > C\hat{A}B$

۵ ـ مجموع زوایای داخلی یک n ضلعی محدب ۳ برابر مجموع زوایای خارجی یک ۷ ضلعی محدب است. تعداد اقطار این n ضلعی کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۲۰

۳) ۸ ۴) ۷

۶ ـ از تقاطع نیمسازهای زوایای داخلی یک ذوزنقه متساوی الساقین چه شکلی ایجاد می‌شود؟

۱) مستطیل

۲) مربع

۳) فقط چهارضلعی محاطی

۴) چهارضلعی محاطی و محیطی

۷ ـ اگر یک قطر چهارضلعی قطر دیگر را نصف کند، آن قطر چهارضلعی را به دو مثلث چنان تقسیم می‌کند که مساحت یکی از این دو مثلث برابر است با:

۱) ۲ برابر مساحت دیگری

۲) نصف مساحت دیگری

۳) مساحت دیگری

۴) ربع مساحت دیگری

۸ـ اندازهٔ زاویهٔ بین دو وتر متقاطع AB و CD از دایره‌ای ۵۰° است و اندازهٔ دو کمان از چهار کمان ایجاد شده به وسیلهٔ این دو وتر در دایره، ۷۰° و ۱۱۰° می‌باشد. تفاضل اندازه‌های دو کمان دیگر چند درجه است؟

۱) ۱۲۰°　　۲) ۱۳۰°

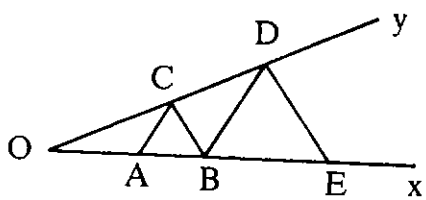
۳) ۱۴۰°　　۴) ۵۰°

۹ـ از نقطهٔ M محل تلاقی قطرهای ذوزنقه‌ای خطی موازی قاعده‌های ذوزنقه رسم می‌کنیم تا ساقهای این ذوزنقه را در نقاط E و F قطع کند. نسبت $\frac{EF}{MF}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$　　۲) ۱

۳) ۲　　۴) ۳

۱۰ـ نقاط A و E روی ضلع ox از زاویهٔ xoy چنان واقع‌اند که OA=۲ و OE=۸ است. در صورتی که نقاط C و D روی ضلع oy و BD ∥ AC و DE ∥ BC باشد، اندازهٔ پاره‌خط OB چقدر است؟



۱) ۲　　۲) ۴

۳) ۶　　۴) ۸

۱۱ـ نقاط A و B در صفحهٔ P مفروض‌اند. چند دسته خط در این صفحه وجود دارد، که نسبت فاصله‌های نقاط A و B از هر یک از خطوط این دسته خطها برابر k باشد؟ (k>۰ و k≠۰)

۱) ۰　　۲) ۱

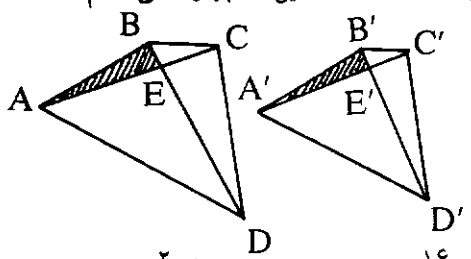
۳) ۲　　۴) بیشمار

۱۲ـ محیط مثلثی ۲۱ سانتی‌متر و اندازهٔ پاره‌خطهایی که نیمساز زاویهٔ درونی A روی ضلع BC ایجاد می‌کند ۳ سانتی‌متر و ۴ سانتی‌متر است. اندازهٔ ضلع مجاور به قطعهٔ کوچکتر ایجاد شده روی ضلع BC کدام است؟

۱) ۴ cm　　۲) ۶ cm

۳) ۸ cm　　۴) ۱۰ cm

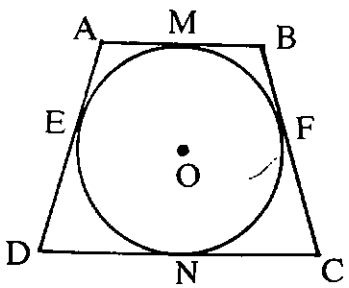
۱۳ـ نسبت مساحت دو مثلث متناظر ABE و A′B′E′ از دو چهارضلعی متشابه ABCD و A′B′C′D′ برابر $\frac{۴}{۹}$ است. نسبت اندازهٔ مساحت این دو چهارضلعی کدام است؟



۱) $\frac{۱۶}{۹}$　　۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{۸}{۹}$　　۴) $\frac{۴}{۹}$

۱۴ـ ذوزنقه متساوی‌الساقین ABCD بر دایره‌ای به شعاع ۵ سانتی‌متر مماس است در صورتی که نقطهٔ E نقطهٔ تماس ساق AD با دایره و AE=۴cm باشد، اندازه قاعده CD چند سانتی‌متر است؟



۱) ۱۰　　۲) ۱۰/۵

۳) ۱۲　　۴) ۱۲/۵

۱۵ - ارتفاع وارد بر وتر در مثلثی قائم‌الزاویه، آن مثلث را به دو مثلث هم ارز بخش می‌کند در صورتی که ارتفاع وارد بر وتر این مثلث ۲ سانتی‌متر باشد، مساحت این مثلث قائم‌الزاویه چند سانتی‌متر مربع است؟

۱) ۲ ۲) ۴
۳) ۶ ۴) ۸

۱۶ - اندازهٔ مساحت مثلث متساوی الاضلاع محیط بر دایره‌ای $۳\sqrt{۳}$ سانتی‌مترمربع است. اندازهٔ مساحت مربع محاط در این دایره چند سانتی‌مترمربع است؟

۱) ۲۴ ۲) $۲۴\sqrt{۳}$
۳) $۲۴\sqrt{۲}$ ۴) ۱۲

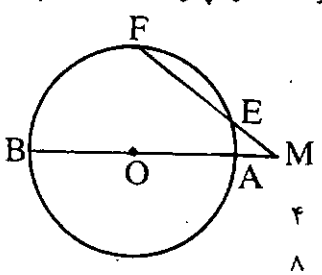
۱۷ - چند صفحه وجود دارد که شامل خط مفروض d باشد و دو نقطه مفروض A و B از آن به یک فاصله باشند در صورتی که $AB \nparallel d$ و $AB \cap d = \varnothing$ ؟

۱) ۰ ۲) ۱
۳) ۲ ۴) بیشمار

۱۸ - دو خط متنافر d و d' مفروض‌اند. چند صفحه بر این دو خط می‌گذرد که با هم موازی باشند؟

۱) ۰ ۲) ۱
۳) ۲ ۴) بیشمار

۱۹ - دایرهٔ $C(O,۶)$ مفروض است. نقطه M در امتداد قطر AB به فاصلهٔ ۸ سانتی‌متر از مرکز دایره واقع است. قاطع MEF را نسبت به دایره چنان رسم می‌کنیم که اندازهٔ وتر EF مساوی ۳ سانتی‌متر باشد. در این صورت اندازهٔ پاره خط ME چند سانتی‌متر است؟

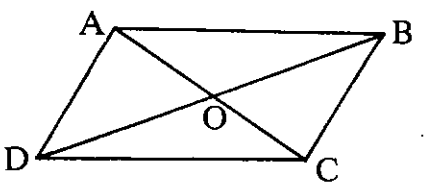


۱) ۲ ۲) ۴
۳) ۶ ۴) ۸

۲۰ - در مثلث ABC، $b=۱۰$ و $c=۲۴$ و $\hat{A}=۹۰^\circ$ است. اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی این مثلث کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲
۳) ۱۳ ۴) ۱۴

۲۱ - نقطهٔ O محل تلاقی اقطار AC و BD از متوازی الاضلاع ABCD است. در صورتی که $OA=\sqrt{۵}$ و $OD=۵$ و $AD=۲\sqrt{۶}$ باشد اندازهٔ ضلع AB کدام است؟



۱) ۲ ۲) ۴
۳) ۶ ۴) ۸

۲۲ - اندازه‌های سه ضلع مثلثی ۴ و ۵ و ۶ می‌باشند، اندازه کوچکترین میانهٔ مثلث کدام است؟

۱) $\sqrt{۴۶}$ ۲) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۴۶}$
۳) $\frac{۱}{۳}\sqrt{۴۶}$ ۴) $\frac{۱}{۴}\sqrt{۴۶}$

۲۳ - در مثلث ABC، $a=۱۰$ و $b=c=۱۳$ است. اندازهٔ شعاع دایرهٔ محاطی خارجی مماس بر ضلع a چقدر است؟

۱) ۶/۵ ۲) ۷/۵
۳) ۸/۵ ۴) ۹/۵

۲۴ - در هر مثلث، $\frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}$ همواره برابر است با:

۱) $\frac{۱}{r_a}$ ۲) $\frac{۱}{r_b}$
۳) $\frac{۱}{r_c}$ ۴) $\frac{۱}{r}$

۲۵- تصویر قائم خطی بر یک صفحه منحصر به یک نقطه است. اندازهٔ زاویهٔ این خط و صفحه چند درجه است؟

۱) ۰ ۲) ۴۵°
۳) ۹۰° ۴) ۱۸۰°

۲۶- نتیجهٔ ترکیب $R_{o_1}^{45^\circ} \bigcirc R_{o_1}^{135^\circ}$ کدام تبدیل است؟

۱) انتقال ۲) $H_{o_1}^{2}$
۳) $H_{o_1}^{+1}$ ۴) $H_{o_1}^{-1}$

۲۷- پاره‌خط $A'B'$ تبدیل یافته پاره‌خط AB به طول ۸ سانتی‌متر در دوران به مرکز O و زاویهٔ دوران 60° است و پاره‌خط $A''B''$ تبدیل یافتهٔ پاره‌خط AB در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $-\frac{1}{2}$ می‌باشد. اندازهٔ پاره‌خط $A''B''$ چند سانتی‌متر است؟

۱) ۴ ۲) ۲
۳) ۸ ۴) ۶

۲۸- اگر S_A تقارن مرکزی و H_B^K تجانس باشد، نتیجه ترکیب $S_A \bigcirc \left(H_B^K \bigcirc H_B^{-\frac{1}{K}} \right)$ کدام است؟

۱) $T_{2\overrightarrow{BA}}$ ۲) $T_{2\overrightarrow{AB}}$
۳) تقارن نسبت به AB ۴) دوران به مرکز وسط AB

کنکور سراسری ۱۳۷۰

۲۹- چند کنج منظم به رأس S می‌توان داشت که هر زاویه‌اش ۵۵ درجه باشد؟

۱) ۳ ۲) ۴
۳) ۵ ۴) ۶

۳۰- سطح یک کره 36π سانتی‌متر مربع است. حجم قاچ 90° از این کره چند سانتی‌متر مکعب است؟

۱) 72π ۲) 36π
۳) 18π ۴) 9π

۳۱- اگر $A(5, -\frac{\pi}{12})$ و $B(12, \frac{5\pi}{12})$ باشد، شعاع قطبی نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۲
۳) ۶ ۴) ۶/۵

۳۲- اگر $15x+8y+3z=20$ باشد کمترین مقدار $9x^2+4y^2+z^2$ چقدر است؟

۱) ۸ ۲) ۶
۳) ۳ ۴) ۴

۳۳- اگر $|\vec{U}|=\sqrt{2}$, $\vec{U}.\vec{V}=-1$, $|\vec{U} \wedge \vec{V}|=3$ باشد، $|\vec{V}|$ کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) $\sqrt{5}$
۳) $\sqrt{6}$ ۴) $\sqrt{7}$

۳۴- اگر $\vec{a}(1,0,-1)$ و $\vec{b}(0,2,1)$ باشند، اندازهٔ جبری تصویر بردار یکه راستای $\vec{a} \wedge \vec{b}$ روی محور yها کدام است؟

۱) $+\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{1}{3}$
۳) $\frac{2}{5}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

۳۵- وضع نقطهٔ $A(1,0,2)$ نسبت به دو صفحهٔ $P: x-2y+z-1=0$ و $P': 2x+z-1=0$ چگونه است؟

۱) نقطهٔ A درون فرجهٔ حادهٔ بین دو صفحه قرار دارد.
۲) نقطهٔ A درون فرجهٔ منفرجه بین دو صفحه واقع است.
۳) نقطهٔ A روی یکی از صفحات P یا P' واقع است.
۴) نقطهٔ A روی فصل مشترک دو صفحه است.

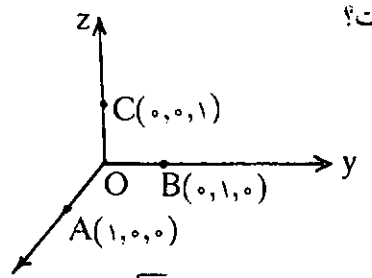
سؤالهای ۳۶ تا ۴۷ تستهای کنکور سراسری گروه ریاضی فنی، مرحلهٔ اول سال ۱۳۷۲ می‌باشند.

۳۶ـ اگر $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار غیر صفر فرض شوند $\vec{a}.(\vec{b}\wedge\vec{c})$ برابر کدام است؟

۱) $(\vec{a}.\vec{c})\wedge\vec{b}$ ۲) $\vec{a}.(\vec{c}\wedge\vec{b})$

۳) $(\vec{a}.\vec{b})\wedge\vec{c}$ ۴) $(\vec{a}\wedge\vec{b}).\vec{c}$

۳۷ـ در شکل مقابل OA و OB و OC سه یال یک مکعب هستند. فاصلهٔ مرکز مکعب از صفحهٔ گذرنده از نقاط A و B و C کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۶}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۶}$

۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۸}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۸}$

۳۸ـ معادلهٔ خط عمود بر دو محور oz و oy به کدام صورت است؟

۱) $\begin{cases} z=a \\ x+y=b \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} x=۰ \\ y=z \end{cases}$

۳) $\begin{cases} z=a \\ y=b \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} x=a \\ x+y=b \end{cases}$

۳۹ـ فاصلهٔ بین دو صفحهٔ موازی به معادلات $x-y-۲z=۶$ و $۲x-۲y-۴z=۲۴$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۶}$

۳) ۳ ۴) ۶

۴۰ـ فاصلهٔ نقاط A و B از مبدأ O به ترتیب ۴ و ۴- می‌باشد. اگر A و B مزدوج توافقی هم نسبت به C و D باشند $\overline{OC}.\overline{OD}$ چقدر است؟

۱) ۰ ۲) ۸-

۳) ۸ ۴) ۱۶

۴۱ـ بر کدام سه دایره که مراکز آنها بر یک استقامت نباشند نمی‌توان دایره‌ای عمود کرد؟

۱) دو به دو متقاطع

۲) دو به دو متخارج

۳) دو به دو متداخل

۴) دو دایره متقاطع سومی مماس خارج بر آن دو

۴۲ـ دسته دوایر $a(x^۲+y^۲-۲x)+b(x^۲+y^۲-۲y)=۰$ مفروض است. شعاع دایره‌ای از این دسته که از نقطهٔ (۲،-۲) می‌گذرد کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۰}$ ۲) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$

۳) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۴}$

۴۳ـ معادلهٔ مزدوج دسته دوایر $x^۲+y^۲-۲by-۱=۰$ کدامند؟

۱) $x^۲+y^۲+۲ay-۱=۰$ ۲) $x^۲+y^۲+۲ax-۱=۰$

۳) $x^۲+y^۲-۲ax+۱=۰$ ۴) $x^۲+y^۲-۲ay+۱=۰$

۴۴ـ در کدام حالت، مقطع صفحهٔ P با سطح مخروطی دواری که مولد آن خط D و محور آن خط Δ و رأس آن نقطهٔ S است،

یک سهمی است:

۱) P موازی D
۲) P موازی Δ
۳) P مار بر S و شامل D
۴) P مار بر S و شامل Δ

۴۵- نقطهٔ M در خارج بیضی به معادلهٔ $۳x^۲+۲y^۲-۶y=\frac{۱۵}{۲}$ نیست. بیشترین مقدار مجموع فواصل M از دو کانون کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$
۲) ۴
۳) $۲\sqrt{۶}$
۴) ۶

۴۶- در هذلولی به معادلهٔ $۴x^۲-y^۲+۲y=۹$ فاصلهٔ هر کانون از خط مجانب کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$
۲) $۲\sqrt{۲}$
۳) ۳
۴) ۴

۴۷- تمام دایره‌های به مرکز M(x,y) واقع بر سهمی $۳y=x^۲-۲x-۲$ گذرنده بر کانون آن بر کدام خط ثابت همواره مماس‌اند؟

۱) $x=\frac{۵}{۴}$
۲) $x=\frac{۳}{۴}$
۳) $y=\frac{-۱}{۴}$
۴) $y=\frac{-۷}{۴}$

۴۸- معادلهٔ دایرهٔ اصلی بیضی به معادله‌های پارامتری $\begin{cases}x=۲\cos\theta\\y=۱+\sin\theta\end{cases}$ کدام است؟

۱) $x^۲+y^۲-۲x+۱=۰$
۲) $x^۲+y^۲+۲y-۳=۰$
۳) $x^۲+y^۲-۲y-۳=۰$
۴) $x^۲+y^۲-۲y+۳=۰$

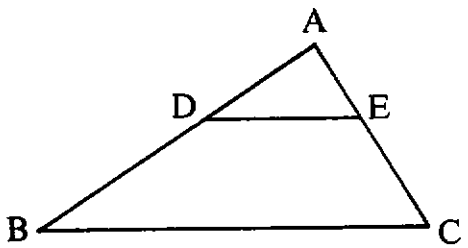
۴۹- معادلهٔ صفحه‌ای که از نقطهٔ A(-۱,۲,۰) می‌گذرد و بر خط $D: ۲x-۱=۳y+۵=-z+۷$ عمود است کدام است؟

۱) $۳x+۲y+۶z+۱=۰$
۲) $۳x+۲y-۶z-۱=۰$
۳) $۳x-۲y-۶z+۱=۰$
۴) $۳x-۲y+۶z-۱=۰$

۵۰- نقطهٔ تلاقی خط $\frac{y+۱}{-۲}=\frac{z}{۶}$ و صفحهٔ $D:x-۱$ کدام است؟ $P: ۳x-۲y-z-۶=۰$

۱) (۱,-۱,۰)
۲) (۱,-۱,-۱)
۳) (۲,-۳,۶)
۴) (۱,-۳,۳)

۵۱- در مثلث ABC، $DE \parallel BC$ و $۳DE=BC$ است. در صورتی که $DB=۱۲$ باشد، اندازهٔ AD چقدر است؟



۱) ۶
۲) ۸
۳) ۱۰
۴) ۱۲

۵۲- اندازه‌های اضلاع مثلثی ۶ و ۸ و ۱۰ سانتی‌متر است. اگر این مثلث با مثلثی به محیط ۷۲ سانتی‌متر متشابه باشد، مساحت مثلث اخیر چقدر است؟

۱) ۲۴
۲) ۴۸
۳) ۱۰۸
۴) ۲۱۶

۵۳- ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۶ سانتی‌متر و یک قطعهٔ وتر ۴/۵ سانتی‌متر است. اندازهٔ میانهٔ وارد بر وتر چقدر است؟

۱) ۶/۲۵
۲) ۷/۲۵
۳) ۸/۲۵
۴) ۹/۲۵

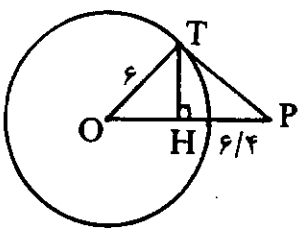
۵۴- اگر در مثلثی رابطهٔ $a^2+bc=b^2+c^2$ بین اضلاع مثلث برقرار باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) $\hat{A}=۹۰^\circ$ ۲) $\hat{A}=۱۲۰^\circ$
۳) $\hat{B}=۱۲۰^\circ$ ۴) $\hat{A}=۶۰^\circ$

۵۵- اندازهٔ اضلاع مثلثی ۱۴ و ۴۸ و ۵۰ سانتی‌متر است. بزرگترین زاویهٔ این مثلث چند درجه است؟

۱) ۹۰° ۲) ۱۲۰°
۳) ۶۰° ۴) ۷۵°

۵۶- اندازهٔ تصویر مماس PT روی قطر گذرنده از نقطهٔ P در دایره‌ای به شعاع ۶، برابر ۶/۴ است. اندازهٔ مماس PT چقدر است؟



۱) ۲ ۲) ۴
۳) ۶ ۴) ۸

۵۷- بین مساحت مثلثهای به قاعدهٔ ثابت ۶ و محاط در دایره‌ای به شعاع ۵، بیشترین مساحت کدام است؟

۱) ۲۲ ۲) ۲۵
۳) ۲۷ ۴) ۲۸

۵۸- در مثلث ABC، $\cos\hat{A}=\frac{۱۲}{۱۳}$ و $\cos\hat{C}=\frac{۵}{۱۳}$ است. اندازهٔ زاویهٔ B چند درجه است؟

۱) ۳۰ ۲) ۴۵
۳) ۶۰ ۴) ۹۰

۵۹- اندازهٔ کوچکترین وتر مرسوم از نقطهٔ M در دایرهٔ $C(O,۵cm)$ برابر ۸ سانتی‌متر است. فاصلهٔ نقطهٔ M تا مرکز دایره چند سانتی‌متر است؟

۱) ۳ ۲) ۴
۳) ۵ ۴) ۶

۶۰- خط $\Delta: ۲x-y-۴=۰$ محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می‌کند. اندازهٔ بردار مکان مرکز ثقل مثلث OAB کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}\sqrt{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۳}\sqrt{۵}$
۳) $\frac{۲}{۳}\sqrt{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۳}\sqrt{۳}$

۶۱- اگر

$$\left|\vec{V}_۱\right|=۶ \quad \text{و} \quad \left|\vec{V}_۲\right|=۴ \quad \text{و} \quad (\vec{V}_۱,\ \vec{V}_۲)=۶۰^\circ$$

باشد اندازهٔ $(-۲\vec{V}_۱).(۳\vec{V}_۲)$ چقدر است؟

۱) ۳۶ ۲) ۴۸
۳) -۷۲ ۴) ۷۲

۶۲- دو دایرهٔ متساوی به مراکز O و O´ متخارج‌اند. از نقطهٔ M وسط خط المرکزین این دو دایره، خطی رسم می‌کنیم تا دایرهٔ به مرکز O را در نقاط A و B و دایرهٔ به مرکز O´ را در نقاط A´ و B´ قطع کند. نسبت اندازهٔ وترهای AB و A´B´ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲
۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۴

۶۳- کدام یک از شکلهای هندسی زیر، هم محور تقارن، و هم مرکز تقارن دارد؟

۱) مثلث متساوی الاضلاع ۲) متوازی الاضلاع
۳) ذوزنقه متساوی الساقین ۴) مستطیل

۶۴ - بیست وجهی منتظم ۱۲ رأس دارد. تعداد یالهای آن کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۳۰
۳) ۴۰ ۴) ۵۰

۶۵ - شعاع قاعدهٔ مخروطی را دو برابر و ارتفاع آن را نصف می‌کنیم. نسبت حجم مخروط حاصل به حجم مخروط اولیه کدام است؟

۱) ۴ ۲) $\frac{۱}{۴}$
۳) ۲ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۶۶ - اندازهٔ زاویهٔ مسطحهٔ فرجهٔ یک قاچ کروی $\frac{\pi}{۳}$ است. در صورتی که شعاع کره ۳ سانتی‌متر باشد ۶ برابر اندازهٔ حجم این قاچ کروی چند سانتی‌مترمکعب است؟

۱) ۳۶π ۲) ۱۸π
۳) ۹π ۴) ۳π

۶۷ - نسبت سطح کره‌ای به شعاع R به سطح مکعب محیط بر آن کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) $\frac{\pi}{۴}$
۳) $\frac{\pi}{۶}$ ۴) $\frac{\pi}{۸}$

۶۸ - اندازهٔ ارتفاع یک چهاروجهی منتظم برابر ۲ می‌باشد. طول یال این چهاروجهی چقدر است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$
۳) $\sqrt{۵}$ ۴) $\sqrt{۶}$

۶۹ - در مثلث ABC،
$\hat{A}=۶۰^\circ$ و $\hat{B}=۱۰۵^\circ$ و $AB=۴(\sqrt{۶}-\sqrt{۲})$ است.
طول نیمساز داخلی زاویه A چقدر است؟

۱) ۶ ۲) $۲\sqrt{۳}$
۳) $۴\sqrt{۲}$ ۴) $۳\sqrt{۲}$

کنکور سراسری گروه علوم تجربی مرحلهٔ اول ۱۳۷۰

۷۰ - در مثلثی $\hat{C}=۶۰^\circ$ و $\hat{A}=۲\hat{B}$ ، نسبت $\frac{a}{b}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}\sin ۴۰^\circ$ ۲) $۲\sin ۴۰^\circ$
۳) $۲\cos ۴۰^\circ$ ۴) $\sqrt{۳}\cos ۴۰^\circ$

کنکور سراسری گروه علوم تجربی مرحله اول ۱۳۷۲

تستهای جبر و مثلثات تجربی

(سالهای دوّم، سوّم و چهارم)

● سید محمدرضا هاشمی موسوی

۱ - معادلهٔ $۳m^۳x=m^۲+۲۷x$ به ازای چه مقداری از m جواب ندارد؟

۱) ۳ ۲) $\sqrt{۳}$
۳) $\sqrt[۳]{۳}$ ۴) $\sqrt[۳]{۹}$

۲ - اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $x^۲-x-۱=۰$ باشند، مقدار عبارت $\frac{۱}{x_۱^۳}+\frac{۱}{x_۲^۳}$ معادل با کدام گزینه است؟

۱) ۱- ۲) ۲-
۳) ۳- ۴) ۴-

۳ - تعداد ریشه های حقیقی معادلهٔ

$$\frac{(x^۴-x^۲)(x^۳+۱)(x^۲-۳x+۲)}{(x^۳+۲x^۲)(x^۲-۱)^۲}=۰$$

برابر است با:

۱) ۱ ۲) ۳
۳) ۵ ۴) ۷

۴ - به ازای چه مقادیری از m معادلات $x^۳+mx^۲+x=۰$ و $x^۳+x^۲+mx=۰$ ریشه مشترک غیر صفر دارند.

۱) ۱ یا ۲ ۲) ۱ یا ۲-
۳) ۱ یا ۱- ۴) ۱ یا ۲ یا ۲-

۵ - معادلهٔ درجه دومی که ریشه‌هایش برابر توان سوم هریک از ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲-۳x+۱=۰$ باشد کدام است؟

۱) $x^۲-x-۱۸=۰$ ۲) $x^۲-۱۸x+۱=۰$
۳) $x^۲+x+۱۸=۰$ ۴) $x^۲+۱۸x-۱=۰$

۶ - به ازای چه مقادیری از m معادلهٔ:

$m^۲x+۲(m+x)+۱=۳mx$ ریشهٔ حقیقی ندارد؟

۱) ۱- یا ۲ ۲) ۱ یا ۲-
۳) ۱- یا ۲- ۴) ۱ یا ۲

۷ - معادلهٔ:

$$(x^{۶۹}-x)^{۷۰}+(x^{۷۱}-x)^{۷۲}+(x^۳+۳x^۲+۲x)^{۷۲}=۰$$

چند ریشه حقیقی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) ۴

۸ - اگر یک ریشهٔ معادله‌ای با ضرایب گویا برابر $\frac{۱}{\sqrt{۳-۲\sqrt{۲}}}$ باشد، ریشهٔ دیگر آن کدام است؟

۱) $\frac{-۱}{۱+\sqrt{۲}}$ ۲) $\sqrt{۳+۲\sqrt{۲}}$
۳) $\frac{۱}{۱+\sqrt{۲}}$ ۴) $\frac{۱}{\sqrt{۳+۲\sqrt{۲}}}$

۹- به ازای چه مقادیری از m معادله درجهٔ دوم: $(m+1)x^2-2(m-1)x+m=0$ ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) $m \geq \frac{-1}{3}$ ۲) $m \geq \frac{1}{3}$

۳) $m \leq \frac{-1}{3}$ ۴) $m \leq \frac{1}{3}$

۱۰- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $2x^2-mx+3=0$ باشند و داشته باشیم $|x_2-x_1|=\frac{5}{2}$ مقدار m برابر کدام گزینه است؟

۱) ± 3 ۲) ± 5

۳) ± 7 ۴) ± 9

۱۱- به ازای چه مقادیری از m معادلهٔ $x^2-6mx+1=0$ ریشهٔ حقیقی ندارد؟

۱) $m < \frac{1}{3}$ ۲) $m > \frac{-1}{3}$

۳) $\frac{-1}{3} < m < \frac{1}{3}$ ۴) $\frac{-1}{9} < m < \frac{1}{9}$

۱۲- اندازهٔ مجذور قطر مستطیلی برابر ۱۰۰ است، در صورتی که اندازهٔ محیط این مستطیل برابر ۲۸ باشد، قدر مطلق تفاضل طول و عرض مستطیل کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴

۳) ۶ ۴) ۸

۱۳- اگر مجموع و حاصل ضرب سه عدد طبیعی متوالی برابر باشد، مجموع مربعات آن سه عدد برابر کدام گزینه است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۴

۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۱۴- اگر $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-m^2x+1=0$ باشند، مقدار m کدام است؟ $(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$

۱) ± 1 ۲) $\pm\sqrt[3]{2}$

۳) $\pm\sqrt[3]{3}$ ۴) $\pm\sqrt[3]{4}$

۱۵- اگر $\log a$ و $\log b$ ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-\sqrt{2}x-\sqrt{5}=0$ باشند، مقدار عبارت $\log^4 a\log^4 b\log^2 ab$ معادل کدام گزینه است؟

۱) ۲۵ ۲) $25\sqrt{2}$

۳) ۵۰ ۴) $50\sqrt{2}$

۱۶- مجموعه جوابهای نامعادلهٔ $(8x^{16}-8)(16-16x^8)\geq 0$ کدام است؟

۱) $\{1$ و $-1\}$ ۲) $\{x \mid -1\leq x\leq 1\}$

۳) $\{x \mid x\geq 1\}$ ۴) $\{x \mid x\leq -1\}$

۱۷- مجموعه جوابهای مشترک دو نامعادلهٔ:
$3-12x-9x^2<0$ و $4x^2-12x>0$ با شرط $x<3>-1$ کدام است؟

۱) $\{x \mid \frac{-1}{3}<x<0\}$ ۲) $\{x \mid -1<x<0\}$

۳) $\{x \mid 0<x<3\}$ ۴) $\{x \mid -1<x<\frac{-1}{3}\}$

۱۸- اگر داشته باشیم: $\log_4(1-x^2)\geq\frac{-1}{2}$ حدود $|x|$ کدام است؟

۱) $|x|\leq\frac{1}{2}$ ۲) $|x|\leq 1$

۳) $|x|\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $|x|\leq\frac{\sqrt{2}}{4}$

۱۹- به ازای چه مقادیری از x عبارت: $\sqrt{\log\sqrt{x^2-3}}$ تعریف شده‌است؟

۱) $x>\sqrt{3}$ ۲) $x<-\sqrt{3}$
۳) $x>\sqrt{3}$ یا $x<-\sqrt{3}$
۴) $x\geq 2$ یا $x\leq -2$

۲۰- به ازای چه مقادیری از x عبارت: $\sqrt[8]{\sqrt[5]{\sqrt{x^5-32}}}$ تعریف شده است؟

۱) $x\geq 2\sqrt{2}$ ۲) $x\geq\sqrt{2}$
۳) $x\geq 2$ ۴) $x\in\mathbb{R}$

۲۱- جملهٔ عمومی یک رشته $\frac{2^{n+3}}{4^{n+1}-12}$ است، کدام جمله از این رشته مساوی $\frac{16}{61}$ است؟

۱) دوم ۲) سوم
۳) چهارم ۴) پنجم

۲۲- در یک تصاعد عددی جمله پنجم ۲۳ و جمله هشتم ۳۸ است. جملهٔ سوم آن کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۸
۳) ۱۳ ۴) ۱۸

۲۳- در یک تصاعد عددی مجموع جملات دهم و هفدهم برابر $3n+5m$ است. در صورتی که این تصاعد شامل جملاتی به شکل $2n+3m$ و $n+2m$ باشد و جملات دهم وهفدهم آن به ترتیب برابر ۱۰ و ۱۷ باشند مقدار $m+n$ کدام است؟

۱) ۳ یا ۳- ۲) ۵ یا ۵-
۳) ۷ یا ۷- ۴) ۹ یا ۹-

۲۴- مجموع جملات یک تصاعد حسابی برابر: $S_n=3\log_n\left(\frac{1}{n^3}\right)^n+6n^2$ است. جملهٔ اول تصاعد کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۹
۳) ۶ ۴) ۱۲

۲۵- جملهٔ عمومی یک تصاعد هندسی $\frac{1}{3^{n-2}}$ است، حد مجموع جملات این تصاعد کدام است؟

۱) $\frac{2}{9}$ ۲) $\frac{9}{2}$
۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۲۶- در یک تصاعد هندسی جملهٔ چهارم ۲۴ و جملهٔ هفتم ۱۹۲ است. جملهٔ دوم آن کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶
۳) ۱۲ ۴) ۱۸

۲۷- حاصل‌ضرب دو عدد فرد متوالی طبیعی ۴۸۳ است، عدد فرد متوالی بعدی کدام است؟

۱) ۱۹ ۲) ۲۱
۳) ۲۳ ۴) ۲۵

۲۸- اگر $\log 2=0/301$ باشد، $\log\sqrt[5]{5}$ کدام است؟

۱) ۰/۱۳۳ ۲) ۰/۲۳۳
۳) ۰/۱۳۹۸ ۴) ۰/۱۳۲۳

۲۹- اگر $\log 3=k$ باشد، $\log\sqrt[2k]{900}$ کدام است؟

۱) $1+\frac{1}{k}$ ۲) $\frac{k-1}{k}$
۳) $\frac{k-1}{2k}$ ۴) $\frac{k+1}{2k}$

۳۰- اگر $۳\log x^{۲}=۲\log ۳$ باشد، مقدار $|x|$ کدام است؟

۱) $\sqrt[۲]{۲}$ ۲) $\sqrt[۳]{۳}$

۳) $\sqrt[۲]{۴}$ ۴) $\sqrt[۳]{۹}$

۳۱- اگر $\log ۳=۰/۴۷۷$ باشد، $۹^{۹}$ چند رقمی است؟

۱) ۷ رقمی ۲) ۸ رقمی

۳) ۹ رقمی ۴) ۱۰ رقمی

۳۲- حاصل $\log_{۲}\sqrt{۲\sqrt{۲\sqrt{۲\sqrt{۲}}}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۹}{۳۲}$ ۲) $\frac{۷}{۸}$

۳) $\frac{۱۵}{۱۶}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۳۳- جواب معادلهٔ $۴^{۳}+۶+۹+\ldots+۳x=۶۴$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۳۴- جواب معادلهٔ $۲^{\log x}+x^{\log ۲}=۲$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۳۵- عبارت $\sqrt[۶]{\log^{۲}\sqrt[۴]{(x^{۲}-۹)^{۲}}}$ به ازای چه مقادیری از x تعریف نشده است؟

۱) $x\geq -۳$ ۲) $x\leq ۳$

۳) $x=\pm ۳$ ۴) $-۳\leq x\leq ۳$

۳۶- چه زاویه‌ای است برحسب رادیان که اگر به اندازه‌اش برحسب درجه عدد ۱۰ افزوده شود اندازهٔ آن برحسب گراد به دست می‌آید؟

۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۳}$

۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) π

۳۷- در ساعت ۶ و ۴۰ دقیقه عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه شمار چه زاویه‌ای با یکدیگر می‌سازند؟

۱) ۲۰° ۲) ۳۰°

۳) ۴۰° ۴) ۵۰°

۳۸- از تساوی زیر و شرط $۰<x<\frac{\pi}{۴}$ عبارت $\sin ۲x$ برابر کدام گزینه می‌تواند باشد؟

$$۵\left(\frac{۱+\cos ۲x}{\sin ۲x}\right)^{۵}+۳\left(\frac{\sin ۲x}{۱-\cos ۲x}\right)^{۵}=\frac{۱}{۴}$$

۱) ۴ ۲) ۱

۳) $۲+۲\cos ۲x$ ۴) $۱+\cos ۲x$

۳۹- اگر $۰<x<\frac{\pi}{۲}$ باشد آنگاه عبارت

$$\left(\sqrt{\frac{۱-\cos x}{\sin^{۲} x}}+\sqrt{\frac{۱+\cos x}{(۱+\cos x)^{۲}}}\right)\sqrt{۱+\cos x}$$

معادل کدام گزینه است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۳) $\sqrt{۲}$ ۴) ۲

۴۰- اگر $۰<x<\frac{\pi}{۲}$ باشد آنگاه عبارت

$$\left(\frac{۱+\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{۱+\sin x}\right)\sqrt{۱-\sin^{۲} x}$$

معادل کدام گزینه است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$

۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) ۲

۴۱- جواب معادلهٔ $tg^{۴}nx\ cotg^{۳}x=۱$ به ازای چه مقداری از n نامعین است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$

۳) ۳ ۴) ۴

۴۲- اگر $۰<x<\frac{\pi}{۲}$ باشد، آنگاه عبارت

$$\left(\sqrt{\frac{۱-\cos x}{۱+\cos x}}+\sqrt{\frac{۱+\cos x}{۱-\cos x}}\right)\sin x$$

معادل کدام گزینه است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) ۲

۴۳- مجموعه جواب معادلهٔ $\sin^{۷۲}x+\sqrt{\sin x}=۰$ کدام است؟

۱) $\{x|\ x=\frac{k\pi}{۲}\}$ ۲) $\{x|\ x=k\pi\}$

۳) $\{x|\ x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\}$ ۴) $\varnothing$

۴۴- از معادلهٔ $۳\cos nx+۲=۰$ مقدار $\sin nx$ کدام است؟ $(\pi<x<\frac{۳\pi}{۲})$.

۱) $\frac{-۵}{۳}$ ۲) $-\sqrt{۵}$

۳) -۳ ۴) $\frac{-\sqrt{۵}}{۳}$

۴۵- اگر

$$\cot gx=\frac{a^{۳}+ab}{۱۰b^{۲}+۱۰}\quad \text{و} \quad tgx=\frac{(b^{۲}+۱)(۵a^{۲}+۵)}{a^{۲}+b}$$

باشد، مقدار a برابر است با:

۱) ۱ ۲) $b+۱$

۳) $b^{۲}+۱$ ۴) b

۴۶- جواب معادلهٔ $۱۲\text{Arcsin}\sqrt[۵]{x}=۲\pi$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$

۳) $\frac{۱}{۱۶}$ ۴) $\frac{۱}{۳۲}$

۴۷- عبارت:

$$\frac{۵\cot g\ ۲۲۵^{\circ}+\cos ۲۴۰^{\circ}+۲\sin ۳۳۰^{\circ}+۴tg\ ۱۳۵^{\circ}}{۱۰tg\ ۲۲۵^{\circ}+\cos ۴۵۰^{\circ}-\cot g\ ۱۳۵^{\circ}+۲۰\sin ۲۱۰^{\circ}}$$

معادل با کدام گزینه است؟

۱) -۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) ۱ ۴) $\frac{-۱}{۲}$

۴۸- عبارت: $\frac{\log tg\ ۱^{\circ}\times \log tg\ ۲^{\circ}\times \cdots \times \log tg\ ۸۹^{\circ}}{tg\ ۱^{\circ}+tg\ ۲^{\circ}+\cdots+tg\ ۸۸^{\circ}+tg\ ۸۹^{\circ}}$

معادل با کدام گزینه است؟

۱) $\text{Arc}\ tg(۲\sin ۳۰^{\circ})$

۲) $\log ۲+\sin ۳۰^{\circ}$

۳) $\log ۲+\log \cos ۶۰^{\circ}$

۴) ۱

۴۹- اگر $\sin x+\cos x=m$ باشد، آنگاه عبارت $\frac{۱}{\cos x}+\frac{۱}{\sin x}$ به ازای چه مقادیری از m نامعین است؟

۱) ± ۱ ۲) $\pm\frac{۱}{۲}$

۳) $\pm\frac{۱}{۳}$ ۴) $\pm\frac{۱}{۴}$

۵۰- اگر $\sin(x-2y)+\cos(2x+y)=2$ آنگاه مقدار $x+y$ کدام است؟ $(0<x, y<2\pi)$

۱) $\frac{-\pi}{5}$ ۲) $\frac{-\pi}{4}$

۳) $\frac{-\pi}{10}$ ۴) $\frac{-\pi}{20}$

۵۱- مجموعه جواب معادله

$1+\sin^4 x+\cos^4 x = \sin^2 x-2\sin^2 x\cos^2 x+\cos^2 x$

کدام است؟

۱) $\{x \mid x=\frac{k\pi}{2}\}$

۲) $\{x \mid x=k\pi\}$

۳) $\{x \mid x=k\pi+\frac{\pi}{2}\}$

۴) $\varnothing$

۵۲- سه نقطهٔ متمایز A و B و C روی محور $x'ox$ مفروض‌اند. حاصل عبارت $\frac{\overline{AB}-\overline{CB}+\overline{AC}}{\overline{BC}-\overline{BA}}$ کدام است؟ $(x_A \neq x_C)$.

۱) $\frac{-1}{2}$ ۲) -2

۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 2

۵۳- نقاط A و B و C روی یک محور مفروض‌اند. اگر $x_A=2m+1$ و $x_B=6m-2$ و $x_C=4$ باشند، به ازای کدام مقدار m نقطه B وسط پاره‌خط AC است؟

۱) $\frac{3}{5}$ ۲) $\frac{9}{5}$

۳) $\frac{9}{10}$ ۴) $\frac{5}{9}$

۵۴- نقطهٔ $A\begin{vmatrix} 4m-1 \\ 2m-1 \end{vmatrix}$ مفروض است. به ازای چه مقداری از m نقطه A روی نیمساز ناحیه دوم و چهارم واقع است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{-1}{3}$

۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{-1}{2}$

۵۵- اگر چهار نقطهٔ $A\begin{vmatrix} a-2 \\ a-1 \end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix} 3a+1 \\ 2a-3 \end{vmatrix}$ و $C\begin{vmatrix} b-1 \\ b \end{vmatrix}$ و $D\begin{vmatrix} 2a+1 \\ b-1 \end{vmatrix}$ رئوس متوازی الاضلاع $ABCD$ باشند مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) -14

۳) ۱۴ ۴) -20

۵۶- اگر $A\begin{vmatrix} m-1 \\ 2 \end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix} 2 \\ -1 \end{vmatrix}$ و $C\begin{vmatrix} 3 \\ m-n \end{vmatrix}$ رئوس مثلث ABC و نقطهٔ $G\begin{vmatrix} -2 \\ 1 \end{vmatrix}$ مرکز ثقل این مثلث باشند مقدار $m+n$ کدام است؟

۱) -10 ۲) -12

۳) -18 ۴) -22

۵۷- اگر $A\begin{vmatrix} 2m-1 \\ 2 \end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix} 2 \\ 2m \end{vmatrix}$ باشند به ازای کدام مقدار m طول پاره‌خط $AB=5$ است؟

۱) $\frac{1}{2}$ یا -1 ۲) -1 یا -3

۳) 1 یا $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{-1}{2}$ یا 3

۵۸- نقاط $A(-۲,۷)$ و $B(۱,۳)$ دو سر قطر مربعی هستند. مساحت مربع کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۲۵}{۲}$

۳) $\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{۲۵\sqrt{۲}}{۲}$

۵۹- اگر $f(x)=\begin{cases} ۲\cos x-۱ & x>\frac{\pi}{۴} \\ ۲\sin x+۱ & x\leq\frac{\pi}{۴} \end{cases}$ باشد، مقدار $f(\frac{\pi}{۶})\,f(\frac{\pi}{۴})\,f(\frac{\pi}{۳})$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}-۲$ ۲) $۲\sqrt{۲}+۲$

۳) ۲ ۴) $۲\sqrt{۲}$

۶۰- اگر $f(x)=۲^x$ و $f(x+۲)-f(x+۱)=۳۲$ مقدار x کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴

۳) ۵ ۴) ۶

۶۱- اگر داشته باشیم $f(x)+mf(-x)=۳x$، به ازای چه مقادیری از m تابع $f(x)$ نامعین است؟

۱) ±۱ ۲) ±۲

۳) ±۳ ۴) ±۴

۶۲- دامنهٔ تعریف تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{\sqrt{x^۲-۱}}{\sqrt{x+۱}}$ کدام است؟

۱) $]-۱,+\infty[$ ۲) $]-۱,۰[$

۳) $[۱,+\infty[$ ۴) $[۱,۰[$

۶۳- دامنهٔ تعریف تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x+۱}{\sqrt{|x|-x}}+\frac{x+۱}{\sqrt{۲x-|۲x|}}$ کدام است؟

۱) $\{x|\ x<۰\}$ ۲) $\{x|\ x>-۱\}$

۳) $\{x|\ x=-۱\}$ ۴) $\varnothing$

۶۴- دامنهٔ تعریف تابع با ضابطهٔ $f(x)=\log\frac{x^۲+۱}{۱-x^۲}$ کدام است؟

۱) $\{x|\ x<۱\}$ ۲) $\{x|\ x<-۱ \text{ یا } x>۱\}$

۳) $\{x|\ -۱<x<۱\}$ ۴) $\{x|\ x<-۱\}$

۶۵- اگر $f(x)=x\sqrt[۴]{x}$ و $g(x)=۱-x^۲$ باشد، دامنهٔ تعریف $gof(x)$ کدام است؟

۱) $]-\infty,۰[$ ۲) $]۰,+\infty[$

۳) $[-۱,۱]$ ۴) $\mathbb{R}$

۶۶- اگر تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{ax+۱}{۴x+b}$ خط $y-۲x+۱=۰$ را روی محورهای مختصات قطع کند مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) -۱

۳) -۲ ۴) -۳

۶۷- اگر دو خط به معادلات $mx-y=۱$ و $۲y-x=۳$ زاویهٔ ۴۵° را بسازند مقدار m کدام است؟

۱) ۳ ۲) -۳

۳) ۱ ۴) -۱

۶۸- اگر دو خط به معادلات $nx-y+۱=۰$ و $mx-y=۱$ در نقطه‌ای به طول ۱- بر هم عمود باشند، مقدار $m+n$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) -۱

۳) -۲ ۴) ۱

۶۹- اگر حد عبارت $\frac{x^۲-x^۳}{ax^۳+۱}$ وقتی $x\to\pm\infty$ برابر $a^۲$ باشد مقدار a کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱
۳) -۲ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۷۰- اگر حد عبارت $\frac{x^n+x^۵+۷۲}{mx^{۱۵}-x^۲+۷۳}$ وقتی $x\to\pm\infty$ برابر $\frac{-۱}{۳}$ باشد مقدار $\frac{n}{m}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۳
۳) -۵ ۴) -۱۵

۷۱- حد عبارت $\frac{\sin x\ tg۲x\ \sin۳x}{۶x^۳}$ وقتی $x\to۰$ برابر است با:

۱) ۰ ۲) ۱
۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\pm\infty$

۷۲- اگر تابع دو ضابطه‌ای $f(x)=\begin{cases} ax^۲+۱ & x\geq -۱ \\ ax^۳+b & x<-۱ \end{cases}$ در نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}-۱\\ ۲\end{matrix}\right.$ پیوسته باشد مقدار عبارت $\frac{f'(-۲)f(۰)}{f''(-۳)}$ معادل کدام گزینه است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۲}{۳}$
۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۳}$

۷۳- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt[۳]{x^۳+a}$ مفروض است، در صورتی که $f'(-۱)=۱$ باشد مقادیر a کدام است؟

۱) ۲- یا ۲ ۲) ۱- یا ۲-
۳) ۰ یا ۲ ۴) ۲- یا ۱

۷۴- اگر $y=u^۳-u^۲$ و $u=\sin x+\cos۲x$ مقدار مشتق y بر حسب x در نقطه‌ای به طول $\frac{\pi}{۴}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۱\sqrt{۲}}{۲}-۴$ ۲) $\frac{۱۱\sqrt{۲}}{۴}-۲$
۳) $\frac{۱۱\sqrt{۲}}{۴}-۴$ ۴) $\frac{۱۱\sqrt{۲}}{۲}-۲$

۷۵- فاصلهٔ مرکز تقارن تابع با ضابطهٔ $y=\sin x$ از خط به معادلهٔ $y=x+h$ برابر $\sqrt{۶}$ است، مقادیر h کدام است؟

۱) $\pm۲\sqrt{۳}$ ۲) $\pm\sqrt{۳}$
۳) $\pm\sqrt{۲}$ ۴) $\pm۳\sqrt{۲}$

۷۶- x و y دو عدد حقیقی و در رابطهٔ $۲x^۲+\frac{y^۲}{۲}=۳$ صدق می‌کنند، در صورتی که عبارت xy ماکزیمم باشد مقدار $\frac{x^۳}{y^۳}$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) $\frac{۱}{۸}$
۳) ۱ ۴) -۱

۷۷- ضریب زاویهٔ خط مماس بر منحنی نمایش تابع با ضابطهٔ $f(x)=tg^۲(\sin۲x)$ در نقطه‌ای به طول $x_۰=\frac{\pi}{۲}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱
۳) -۱ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۷۸- معادلهٔ:

$$\sqrt{۶}\left(\sin(n+۱)x\cos nx-\sin nx\cos(n+۱)x\right)=\sqrt{۳}$$

در فاصلهٔ $\left[\frac{-\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}\right]$ چند جواب دارد؟

۱) n ۲) $n+۱$
۳) ۲ ۴) ۱

۷۹- عبارت $\cot g۸۰^\circ \cot g۲۰^\circ tg۵۰^\circ$ معادل کدام گزینه است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) ۱

۸۰- عبارت $\cos۴۸^\circ + \sin۱۸^\circ - \cos۱۲^\circ$ معادل کدام گزینه است؟

۱) ۰ ۲) $-۲\cos۱۲^\circ$

۳) -۲ ۴) $-۲\sin۱۲^\circ$

۸۱- حاصل عبارت:

$$\sin\left(۳Arctg(۱)-۲Arcsin(-\frac{۱}{۲})-Arccos(\frac{۱}{۲})+Arccotg(-۱)\right)$$

معادل کدام گزینه است؟

۱) ۰ ۲) $-\frac{۱}{۲}$

۳) -۱ ۴) ۱

۸۲- مقدار عبارت $۱+\cos x+\cos۲x+\cos۳x+\cos۴x$ به ازای $x=\frac{۲\pi}{۹}$ معادل کدام گزینه است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{-۱}{۲}$

۳) ۱ ۴) -۱

۸۳- مجموع جوابهای معادلهٔ:

$$\cos(\frac{\pi}{۶}-\frac{x}{۲})-\sin(\frac{۲\pi}{۳}-۲x)=۰$$

که در فاصلهٔ $[۰, \frac{\pi}{۲}]$ واقع‌اند، کدام است؟

۱) $\frac{۲\pi}{۱۵}$ ۲) $\frac{\pi}{۱۵}$

۳) $\frac{۳\pi}{۵}$ ۴) $\frac{۲\pi}{۵}$

۸۴- یک جواب عمومی معادلهٔ:

$\frac{۱}{۱۶}\cos\frac{x}{۲۴}\cos\frac{x}{۱۲}\cos\frac{x}{۶}\sin\frac{x}{۲۴}=\cos\frac{x}{۶}$ کدام است؟

۱) $x=۳k\pi+\frac{\pi}{۶}$ ۲) $x=۶k\pi+\frac{\pi}{۲}$

۳) $x=۲k\pi+\frac{\pi}{۳}$ ۴) $x=۳k\pi+\frac{\pi}{۳}$

۸۵- اگر $\cot gx=۲+\sqrt{۳}$ و $\pi<x<\frac{۳\pi}{۲}$ باشد، اندازهٔ $tg۴x$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $\sqrt{۳}$

۳) $۲-\sqrt{۳}$ ۴) ۱

۸۶- ضریب زاویهٔ خط قائم بر منحنی نمایش تابع با ضابطهٔ $f(x)=-۱۶x^۳+۴x^۲$ در نقطهٔ عطفش کدام است؟

۱) -۱۲ ۲) -۳۶

۳) -۵۴ ۴) -۶۸

۸۷- معادلهٔ مکان هندسی مرکز تقارن منحنی نمایش تابع با ضابطهٔ: $f(x)=\frac{۶mx-۱}{۲x-۳m}$ به ازای مقادیر مختلف m کدام است؟

۱) $y=۳x$ ۲) $y=\frac{۲}{۳}x$

۳) $y=۲x$ ۴) $y=\frac{۳}{۲}x$

۸۸ـ تابع با ضابطهٔ: $f(x)=2x^3-3ax^2+2x$ به ازای چه مقادیری از a همواره صعودی است؟

۱) $\frac{-\sqrt{3}}{2}<a<\frac{\sqrt{3}}{2}$

۲) $\frac{-2\sqrt{3}}{3}<a<\frac{2\sqrt{3}}{3}$

۳) $\frac{-\sqrt{2}}{3}<a<\frac{\sqrt{2}}{3}$

۴) $\frac{-2}{3}<a<\frac{2}{3}$

۸۹ـ اندازهٔ مماس مشترک داخلی دو دایره به معادلات: $(x-1)^2+(y+2)^2=9$ و $(x+2)^2+(y-2)^2=1$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۹۰ـ معادلهٔ دایرهٔ C که مرکز آن روی نیمساز ربع اول و سوم قرار داشته باشد و از مبدأ مختصات نیز بگذرد، کدام است؟

۱) $(x+\alpha)^2+(y-\alpha)^2=4\alpha^2$

۲) $(x-\alpha)^2+(y+\alpha)^2=2\alpha^2$

۳) $(x+\alpha)^2+(y+\alpha)^2=4\alpha^2$

۴) $(x-\alpha)^2+(y-\alpha)^2=2\alpha^2$

۹۱ـ معادلهٔ بیضی که مرکزش نقطهٔ $I\begin{vmatrix}-2\\-1\end{vmatrix}$ و بر محورهای مختصات مماس می‌باشد کدام است؟

۱) $\frac{(x+2)^2}{1}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$

۲) $\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{1}=1$

۳) $\frac{(x+2)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{1}=1$

۴) $\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{1}=1$

۹۲ـ معادلهٔ مکان هندسی نقاطی که از آن نقاط دو مماس عمود بر هم، بر سهمی به معادلهٔ $(y+2)^2=-4(x-1)$ می‌توان رسم نمود کدام است؟

۱) $y-2=0$ ۲) $x-2=0$

۳) $2x-1=0$ ۴) $2y-1=0$

۹۳ـ نقاط $F(2-\sqrt{6},-2)$ و $F'(2+\sqrt{6},-2)$ کانونهای یک هذلولی متساوی‌القطرین می‌باشند. معادلهٔ این هذلولی کدام است؟

۱) $x^2-y^2-3x-3y=4$ ۲) $x^2-y^2-4x-4y=3$

۳) $x^2-y^2-2x-2y=3$ ۴) $x^2-y^2-2x-2y=4$

۹۴ـ اگر منحنی نمایش تابع $y=f(x)$ در نقطه‌ای به طول $x=-1$ بر محور طولها مماس باشد و داشته باشیم: $f''(x)=12x$ مقدار $f(1)$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -4

۳) -6 ۴) -8

۹۵ـ اندازهٔ سطح محصور بین دو سهمی به معادلات: $x^2=2py$ و $y^2=2px$ برابر ۳ است، مقدار $|p|$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{4}{3}$

۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۹۶ـ مقدار $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{tg^n x}{\cos^2 x}dx$ برابر $\frac{1}{5}$ است، n کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵

۳) ۶ ۴) ۷

۹۷- به ازای چه مقادیری از m معادلهٔ $m(\cos x+\sin x)=2+3\cos x-m$ دارای جواب است؟

۱) ± 2 ۲) ± 1

۳) تمام مقادیر ۴) هیچ مقدار

۹۸- اگر در مثلثی رابطهٔ $b=2a\cos\hat{C}$ برقرار باشد، مثلث کدام است؟$(a\neq 0)$

۱) قائم‌الزاویه ۲) متساوی‌الاضلاع

۳) متساوی‌الساقین ۴) غیر مشخص

۹۹- مجموع جوابهای معادلهٔ $\tg 4x+\cotg 4x=2\sqrt{2}$ در فاصلهٔ $[\frac{\pi}{32}, \frac{3\pi}{32}]$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{16}$ ۲) $\frac{\pi}{8}$

۳) $\frac{5\pi}{16}$ ۴) $\frac{5\pi}{32}$

۱۰۰- دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ

$$y=\cos^3\frac{2\pi}{3}x+\tg^6\frac{\pi}{6}x+\sin^4\frac{\pi}{2}x$$

برابر است با:

۱) ۶ ۲) 6π

۳) ۱۲ ۴) 12π

پاسخ تشریحی تستهای جبر و آنالیز

● مهدی قمصری و احمد قندهاری

۱ - گزینه (۲)

$$\frac{1}{\sqrt[4]{(3-2\sqrt{2})^2}} \times \frac{\sqrt[4]{(3+2\sqrt{2})^2}}{\sqrt[4]{(3+2\sqrt{2})^2}} = \frac{\sqrt[4]{(3+2\sqrt{2})^2}}{\sqrt[4]{(9-8)^2}} = \sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}$$

۲ - گزینه (۴)

$$(x'+x'')(x'-x'')^2 = 4 \Rightarrow -\frac{b}{a}\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}\right)^2 = 4$$

$$-\frac{b}{a}\left(\frac{\Delta}{a^2}\right) = 4 \Rightarrow -2a(16a^2) = 4$$

$$\Rightarrow a^3 = -\frac{1}{8} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

۳ - گزینه (۴)

$$\begin{cases} 5x+3y+7z=1/7 \\ 4x+2y+6z=0/6 \end{cases} \Rightarrow x+y+z=1/1$$

۴ - گزینه (۳)

$$\frac{\alpha+\beta}{\gamma}+\frac{\beta+\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma+\alpha}{\beta}=1$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{\gamma}+1+\frac{\beta+\gamma}{\alpha}+1+\frac{\gamma+\alpha}{\beta}+1=4$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\gamma}+\frac{\beta+\gamma+\alpha}{\alpha}+\frac{\gamma+\alpha+\beta}{\beta}=4$$

$$\Rightarrow (\alpha+\beta+\gamma)\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=4$$

$$-\frac{b}{a}\left(-\frac{c}{d}\right)=4 \Rightarrow 6\left(\frac{4}{m-1}\right)=4 \Rightarrow m=7$$

۵ - گزینه (۳)

$$p+q=n+2 \Rightarrow 3+5=n+2 \Rightarrow n=6$$

جمله چهارم بزرگترین ضریب را دارد $\frac{n}{2}+1=4$

$$\text{جمله چهارم} = C_6^3 a^3 b^3 = C_6^3 (2x)^3 (2y)^3 \Rightarrow$$

$$\text{ضریب جمله چهارم} = 8\times 8\times C_6^3 = 64\times \frac{6!}{3!\times 3!} = 1280$$

۶ - گزینه (۴)

$$|x-1| = y \Rightarrow y^2-y-2<0 \Rightarrow (y+1)(y-2)<0$$

$$\Rightarrow -1<y<2 \Rightarrow -1<|x-1|<2 \Rightarrow |x-1|<2$$

$$\Rightarrow -2<x-1<2 \Rightarrow -1<x<3$$

۷ - گزینه (۳)

$$f(x) = x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$$

$$f[g(x)] = f(x^2-3x)$$

$$= (x^2-3x-1)(x^2-3x-2) = 0$$

$$x^2-3x-1=0 \Rightarrow \Delta = 4(-2)+2(4) = -8+8 = 0 \Rightarrow$$

سه ریشه حقیقی متمایز

$$x^2-3x-2=0 \Rightarrow \Delta = 4(-2)+2(4) = 0 \Rightarrow$$

دو ریشه حقیقی متمایز

۸- گزینه (۴)

$f(-۱۱) = a(-۱۱)^۷+b(-۱۱)^۵+c(-۱۱)^۳-۷$

$f(۱۱) = a(۱۱)^۷+b(۱۱)^۵+c(۱۱)^۳-۷$

$\Rightarrow f(۱۱)+f(-۱۱) = -۱۴ \Rightarrow f(۱۱)+۱۱ = -۱۴$

$\Rightarrow f(۱۱) = -۲۵$

۹- گزینه (۲)

اگر a و b دو عدد باشند، $\sqrt{ab}$ واسطهٔ هندسی و $\frac{۲ab}{a+b}$ واسطه توافقی است.

$\sqrt{ab} = ۴\sqrt{۳} \Rightarrow ab = ۴۸$

$\frac{۲ab}{a+b} = \frac{۴۸}{۷} \Rightarrow \frac{۲\times ۴۸}{a+b} = \frac{۴۸}{۷} \Rightarrow \frac{a+b}{۲} = ۷$

۱۰- گزینه (۲)

دو نقطه از تابع را پیدا می‌کنیم و در جوابها صدق می‌دهیم.

$A\left|\begin{matrix}۰\\۳\end{matrix}\right.$, $B\left|\begin{matrix}۳\\۷\end{matrix}\right.$ $\Rightarrow$ در گزینه (۲) صدق می‌کند.

۱۱- گزینه (۴)

$\begin{cases}y=x^۲-۲x\\y=x\end{cases} \Rightarrow x^۲-۳x=۰ \Rightarrow$ غ‌ق $\begin{cases}x=۰\\x=۳\end{cases}$

$y'=۲x-۲ \Rightarrow m=۶-۲=۴ \Rightarrow m'=\frac{۱}{۴}$

مماس بر منحنی $f^{-۱}$ مماس بر منحنی f

$tg\alpha = \left|\frac{m-m'}{۱+mm'}\right| = \left|\frac{۴-\frac{۱}{۴}}{۱+۱}\right| = \frac{۱۵}{۸} \Rightarrow$

$\alpha = Arctg\frac{۱۵}{۸}$

۱۲- گزینه (۴)

$y=\frac{x\pm\sqrt{x^۲-۴x+m}}{۱}$

$x^۲-۴x+m\geq ۰ \Rightarrow \Delta'\leq ۰ \Rightarrow ۴-m\leq ۰ \Rightarrow m\geq ۴$

۱۳- گزینه (۴)

بنا به تعریف پیوستگی یک تابع در فاصله $[a,b]$ تابع در $x=a$ پیوستگی راست و در $x=b$ پیوستگی چپ باید داشته باشد ممکن است تابع در $x=a$ حدّ چپ و در $x=b$ حدّ راست نداشته باشد مانند تابع به معادله $f(x)=\sqrt{۴-x^۲}$ که در فاصله $[-۲,۲]$ پیوسته است ولی در $x=۲$ و $x=-۲$ حدّ ندارد.

۱۴- گزینه (۳)

به تعداد کل جوابهای داخل قدر مطلق

$|x| = ۰ \Rightarrow x=۰$

$|x|-۲ = ۰ \Rightarrow x=\pm ۲$

به نمودار تابع توجه کنید.

۱۵- گزینه (۲)

اگر $y=b$ عرض اکسترمم یک تابع باشد، منحنی تابع بر خط $y=b$ مماس است.

$y=۰ \Rightarrow x^۲+mx+۱۶=۰ \Rightarrow \Delta=m^۲-۶۴=۰ \Rightarrow m=\pm ۸$

طول نقطه می‌نیمم $= -\frac{b}{۲a} = -\frac{m}{۲} = -\frac{\pm ۸}{۲} = \pm ۴$

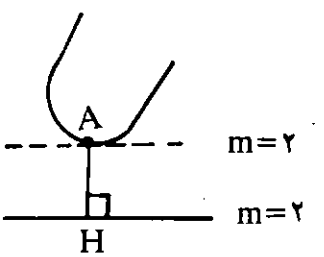
۱۶- گزینه (۲)

$y'=۲x-۲=۲ \Rightarrow x_A=۲ \Rightarrow A\left|\begin{matrix}۲\\۰\end{matrix}\right.$

$۲x-y-۹=۰$

$AH=\frac{|ax_۱+by_۱+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}} = \frac{|۴-۰-۹|}{\sqrt{۴+۱}} =$

$\frac{۵}{\sqrt{۵}} = \sqrt{۵}$



۱۷ - گزینه (۲)

اگر منحنی مجانب افقی داشته باشد $ax^۲$ پس از خروج از رادیکال باید $(-۳x)$ شود تا با $۳x$ حذف شود و منحنی مجانب افقی پیدا کند بنابراین منحنی وقتی مجانب افقی دارد که:

$$\begin{cases} a=۹ \\ x \to -\infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y=۳x+\sqrt{۹x^۲-۱۸x-۱}$$

$$x \to +\infty \Rightarrow y=۳x+۳\left(x-\frac{۱۸}{۱۸}\right) \Rightarrow y=۶x-۳$$

۱۸ - گزینه (۳)

زوایای خطوط مماس بر منحنی از O به M همواره حاده‌اند و کوچکتر می‌شوند بنابراین منحنی f' در فاصله منحنی O تا M نزولی است. همچنین خطوط مماس بر منحنی از M تا a منفرجه‌اند و همواره بزرگتر می‌شوند و تانژانت این زوایا کوچکتر می‌شوند بنابراین منحنی f' از M به a باز هم نزولی است.

۱۹ - گزینه (۳)

این تابع وقتی محور تقارن دارد که $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$

پس:

$$\frac{۱}{-\frac{m}{۲}}=\frac{m}{-۸}\neq\frac{۱}{۵} \Rightarrow m^۲=۱۶ \Rightarrow m=+۴$$

معادله محور تقارن $x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{m}{۲}=-\frac{۴}{۲}=۲ \Rightarrow x=۲$

۲۰ - گزینه (۲)

داریم:

$$\text{Arctg}\,x+\text{Arctg}\,a=\text{Arctg}\frac{x+a}{۱-ax} \qquad ۰<x+a<۲$$

$$\Rightarrow \quad d\left(\text{Arctg}\frac{x+a}{۱-ax}\right)=d(\text{Arctg}\,x)=\frac{dx}{۱+x^۲}$$

۲۱ - گزینه (۲)

$$f'(۲x-۱)=۴x-۱$$

$$۲x-۱=a \Rightarrow x=\frac{a+۱}{۲} \Rightarrow f'(a)=۲a+۱$$

$$\Rightarrow f'(x)=۲x+۱ \Rightarrow f(x)=x^۲+x+c$$

$$-۲=۱+۱+c \Rightarrow c=-۴ \Rightarrow f(x)=x^۲+x-۴$$

$$\Rightarrow f(۴)=۱۶$$

۲۲ - گزینه (۴)

فقط در منحنی دایره، قائمهای نقاط مختلفه منحنی از مرکز دایره می‌گذرد. بنابراین منحنی این تست دایره است و $A\left|\begin{matrix}۱\\۲\end{matrix}\right.$ مرکز دایره با توجه به $(k<۰)$ جواب (۴) درست است.

۲۳ - گزینه (۳)

$$\alpha+\beta-۲\gamma=y \Rightarrow \overbrace{\alpha+\beta+\gamma}-۳\gamma=y \Rightarrow y=-۳\gamma$$

$$\gamma=-\frac{y}{۳} \Rightarrow \left(-\frac{y}{۳}\right)^۳+p\left(-\frac{y}{۳}\right)+q=۰$$

$$\Rightarrow \quad y^۳-۹py-۲۷q=۰$$

$$\frac{۱}{y_۱}+\frac{۱}{y_۲}+\frac{۱}{y_۳}=\frac{-c}{d}=\frac{۹p}{-۲۷q}=\frac{-p}{۳q}$$

۲۴ - گزینه (۱)

اعداد ۲- و ۱ را در معادله صدق داده و b را بین آنها حذف می‌کنیم.

۲۵ - گزینه (۳)

$$\left(\sqrt{x'}+\sqrt{x''}\right)^۲=x'+x''+۲\sqrt{x'x''}$$

$$=\frac{۴۱}{۴}+۲=\frac{۴۹}{۴} \Rightarrow$$

$$\sqrt{x'}+\sqrt{x''}+\sqrt{x'x''}=\frac{۷}{۲}+۱=\frac{۹}{۲}$$

۲۶ - گزینه (۲)

اگر $\alpha+\beta+\gamma=۰ \Rightarrow \alpha^۳+\beta^۳+\gamma^۳=۳\alpha\beta\gamma$

$$\frac{\alpha^۲}{\beta\gamma}+\frac{\beta^۲}{\alpha\gamma}+\frac{\gamma^۲}{\alpha\beta}=\frac{\alpha^۳+\beta^۳+\gamma^۳}{\alpha\beta\gamma}=۳$$

۲۷ - گزینه (۳)

از کم کردن دو معادله نتیجه می‌شود $x=a$ که چون در یکی از معادلات ببریم حاصل می‌شود $a=۰,۱,۴$ که تنها $a=۴$ در گزینه‌ها وجود دارد.

۲۸ - گزینه (۱)

در هر کثیرالجمله $f(x)$ مجموع ضرایب متغیر با درجات مختلف می‌شود $f(۱)-f(۰)$ مثلاً در عبارت $ax^۳+bx^۲+cx+d$ مجموع ضرایب x و $x^۲$ و $x^۳$ می‌شود:

$f(۱)-f(۰)=a+b+c+d-(d)=a+b+c$

لذا داریم: $f(۱)-f(۰)= ۱-(-۱)=۲$

۲۹ - گزینه (۲)

$$(x+۱) + (x+۱)^۲ + \cdots + (x+۱)^{۱۰}$$

$$= \frac{a(q^n - ۱)}{q - ۱}$$

$$= \frac{(x+۱)\left[(x+۱)^{۱۰} - ۱\right]}{x}$$

$$= \frac{(x+۱)^{۱۱} - (x+۱)}{x}$$

کافی است در کثیرالجملهٔ صورت ضریب $x^۳$ را که در $(x+۱)^{۱۱}$ وجود دارد یا ضریب جمله چهارم $(x+۱)^{۱۱}$ را پیدا کنیم.

$$\text{جمله چهارم} = T_۴ = C_{۱۱}^۳ x^۳ = \frac{۱۱!}{۸! \times ۳!} x^۳ = ۱۶۵\, x^۳$$

۳۰ - گزینه (۳)

$$T_k = C_{(k-۱)}^{۱۱} \left(۳^{\frac{۱۲-k}{۴}} \times ۲^{\frac{k-۱}{۳}}\right)$$

برای گویا بودن این جمله باید $k-۱=۳m$ و $۱۲-k=۴n$ و $(m,n \in N)$ تنها $k=۴$ در نتیجه

$$T_۴ = C_۳^{۱۱} \times ۳^۲ \times ۲ = ۱۶۵ \times ۱۸ = ۲۹۷۰$$

۳۱ - گزینه (۲)

$$a_۹ = S_۹ - S_۸ = (۲^{۱۰} - ۲) - (۲^۹ - ۲) = ۲^۹ = ۱۰۲۴$$

۳۲ - گزینه (۴)

زیرا $y=\log|x|$ یک تابع زوج است و محور yها محور تقارن است و تنها در گزینه (۴) صدق می‌کند.

۳۳ - گزینه (۴)

زیرا $b^۲<ac$ پس، منحنی محور xها را قطع نمی‌کند و $a<۰$ دارای ماکسیمم است.

۳۴ - گزینه (۳)

$$a+b=۰ \;,\; b-۲=۰ \;\Rightarrow\; b=۲ \;,\; a=-۲ \;,\; b-۲a=۶$$

۳۵ - گزینه (۲)

$$f(x) = \frac{۲x}{۱+x^۲} - \sqrt{۳}\frac{۱-x^۲}{۱+x^۲} \quad , \quad x = tg\frac{\alpha}{۲}$$

$$f(\alpha) = \sin\alpha - \sqrt{۳}\cos\alpha$$

$$R_f = \left[-\sqrt{a^۲+b^۲}, \sqrt{a^۲+b^۲}\right] = [-۲, ۲]$$

برد تابع $y=a\sin x+b\cos x$ عبارتست از

$$R_y = \left[-\sqrt{a^۲+b^۲}, \sqrt{a^۲+b^۲}\right]$$

۳۶ - گزینه (۲)

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{۴x-[x]}{x} = ۴ - \frac{[x]}{x}\right] = ۴-۱ = ۳$$

۳۷ - گزینه (۳)

$$y = x^۴ + ۲x^۲ + ax + b$$

$$y' = ۴x^۳ + ۴x + a \;,\; y'' = ۱۲x^۲ + ۴ > ۰$$

چون تقعر منحنی همواره به طرف yهای مثبت می‌باشد لذا منحنی تابع فقط دارای یک نقطهٔ می‌نیمم است.

۳۸- گزینهٔ (۳)

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{4}+2h\right)-f\left(\frac{\pi}{4}-h\right)}{h}=3f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$f'(x)=tg^2x\,(1+tg^2x)\quad,\quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$$

$$\Rightarrow\quad 3f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=6$$

۳۹- گزینهٔ (۳)

در این تابع دو نقطه $A\begin{vmatrix}2\\4\end{vmatrix}$ و $A'\begin{vmatrix}4\\2\end{vmatrix}$ متناظراند.

$$f(x)=2x-\sin(x-2)$$

$$f(2)=4\qquad f^{-1}(4)=2\quad\Rightarrow\quad 4+2=6$$

۴۰- گزینهٔ (۳)

$$y=\sqrt[3]{(x-a)^2x}$$

چون $x=a$ طول نقطهٔ بازگشت منحنی است لذا $a=1$.

۴۱- گزینهٔ (۴)

$$\lim_{x\to\infty}\left[(2x+1)-\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}=2x+1-1=2x\right]=\infty$$

در نتیجه $y=2x$ مجانب منحنی $y=f(x)$ و $x=2y$ مجانب منحنی تابع وارون آن می‌باشد.

۴۲- گزینهٔ (۱)

$$x\to\infty\quad\Rightarrow\quad t\to\infty\ ,\ t\to 1\ ,\ t\to -1$$

که چون در $y=\dfrac{2t-\sqrt{1+t^2}}{2t+\sqrt{1+t^2}}$ ببریم برای y چهار جواب پیدا می‌شود. در حالت $t\to\infty$ دو حالت در نظر بگیرید $t\to+\infty$ و $t\to-\infty$.

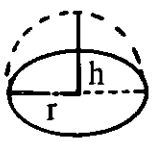
۴۳- گزینه (۲)

زیرا در تابع (۱) داریم $R_f=R-\{2\}$ و ۳ و ۴ هم که بدیهی است برد آنها R نمی‌باشد.

۴۴- گزینه (۲)

$$\text{حجم عرقچین}=V=\frac{\pi h}{6}(3r^2+h^2)$$

$$dV=\pi hrdr=\pi hr\times\frac{1}{10\pi}=\frac{1}{10}rh$$



۴۵- گزینه (۲)

$$gof=\{(1,4),(0,1)\}$$

۴۶- گزینه (۴)

$$\sqrt[n]{a^n+b}\simeq a+\frac{b}{na^{n-1}}$$

$$\sqrt[6]{65}=\sqrt[6]{2^6+1}=2+\frac{1}{6\times 2^5}\simeq 2/005$$

۴۷- گزینه (۲)

$$\int_0^1\frac{x^2dx}{1+x^6}=\left[\frac{1}{3}\text{Arctg}x^3\right]_0^1=\frac{\pi}{12}$$

۴۸- گزینه (۱)

می‌دانیم اگر $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ باشد در نتیجه

$$1<(\sin x\cos x)\le\sqrt{2}\quad,\quad[\sin x\cos x]=1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)\,dx=[-\cos x+\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=1-(-1)=2$$

۴۹- گزینه (۴)

می‌دانیم :

$$\int_a^b f(a+b-x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

که $f(x)$ پیوسته است.

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{x^2 dx}{x^2+(3-x)^2} = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{(3-x)^2 dx}{(3-x)^2+x^2}$$

$$\Rightarrow \quad 2I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} dx = 2 \quad , \quad I = 1$$

۵۰- گزینهٔ (۳)

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{6}} y^2 dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$= \pi \left[2\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right) \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = 2\pi(\sqrt{3}-1)$$

۵۱- گزینهٔ (۲)

$$y = \underbrace{\cot g\, 4\pi x - \tan 4\pi x}_{T_1 = \frac{\pi}{2a} = \frac{\pi}{8\pi} = \frac{1}{8}} + \underbrace{12x - [12x]}_{T_2 = \frac{1}{a} = \frac{1}{12}}$$

$$\Rightarrow \quad T_1 = \frac{3}{24} \quad , \quad T_2 = \frac{2}{24} \quad , \quad T_y = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

۵۲- گزینهٔ (۲)

$$\begin{cases} xy - y = 2x + 1 \\ xy + y = 3x - 2 \end{cases}$$

از حذف جمله xy بین دو معادله فوق معادلهٔ وتر مشترک حاصل می‌شود:

$$2y = x - 3$$

$$m = \frac{1}{2}, \quad \alpha = \text{Arctg}\frac{1}{2}$$

۵۳- گزینهٔ (۳)

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = \frac{x^3+y^3}{xy} = \frac{(x+y)^3 - 3xy(x+y)}{xy}$$

$$= \frac{64 - 12xy}{xy} = \frac{64}{xy} - 12$$

برای می‌نیمم بودن S باید xy ماکسیمم باشد لذا

$$\text{Max } S = \frac{4}{4} - 12 = 4$$

۵۴- گزینه (۳)

زیرا $D_f = [-1,1]$ و $\sqrt{1-x^2}$ در ازای $x=1$ کمترین مقدار و عبارت x^2-3x نیز در $x=1$ کمترین مقدار می‌شود (مشتق این عبارت یعنی $2x-3$ در فاصله $[-1,1]$ منفی است و به ازای بیشترین مقدار x کمترین مقدار برای عبارت پیدا می‌شود.)

۵۵- گزینهٔ (۲)

$$\lim_{n\to\infty}(\sin\alpha + \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos^2\alpha + \cdots + \sin\alpha\cos^n\alpha) = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$$

$$= \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \cot g\frac{\alpha}{2} = \cot g\, 10^\circ$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = 20^\circ$$

۵۶- گزینه (۳)

$$x = 125 \times 2^{60} = 10^3 \times 2^{57}$$

$$\log x = 3\log 10 + 57\log 2 = 3 + 57 \times 0/301 = 20/157$$

x عددی ۲۱ رقمی است.

پاسخ تشریحی تستهای مثلثات رشته ریاضی

● مهدی قمصری و احمد قندهاری

۱- گزینه (۳)

$$\sin x+\cos x=\sqrt{۲}\sin(x+\frac{\pi}{۴}),\ \pi+\frac{\pi}{۴}<x+\frac{\pi}{۴}<\frac{۳\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{۵\pi}{۴}<x+\frac{\pi}{۴}<\frac{۷\pi}{۴}\Rightarrow -۱\le\sin(x+\frac{\pi}{۴})<-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{۲}\le\sqrt{۲}\sin(x+\frac{\pi}{۴})<-۱\Rightarrow -\sqrt{۲}\le y<-۱$$

۲- گزینه (۱)

$$\log A=\log۴+\log\sin۱۰^\circ+\log\sin۷۰^\circ+\log\sin۵۰^\circ$$

$$\log A=\log۴\sin۱۰^\circ\sin۵۰^\circ\sin۷۰^\circ \qquad \cos۲۰^\circ=\sin۷۰^\circ$$

$$\log A=\log\sin۳۰^\circ$$

$$\sin۳a=۴\sin a\ \sin(۶۰^\circ-a)\sin(۶۰^\circ+a)$$

$$a=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \log_{۲}A=\log_{۲}\frac{۱}{۲}=-۱$$

۳- گزینه (۱)

$$\sin\frac{x}{۲}-\cos\frac{x}{۲}=\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow \sin^{۲}\frac{x}{۲}\cos^{۲}\frac{x}{۲}-۲\sin\frac{x}{۲}.\cos\frac{x}{۲}=۲$$

$$۱-\sin x=۲\Rightarrow \sin x=-۱$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{۲}+\operatorname{cotg}\frac{x}{۲}=\frac{۲}{\sin x}=\frac{۲}{-۱}=-۲$$

۴- گزینه (۲)

$$\cos\frac{۳\pi}{۵}=-\cos\frac{۲\pi}{۵}$$

$$\cos\frac{\pi}{۵}\cdot\cos\frac{۳\pi}{۵}=-\cos\frac{\pi}{۵}\cdot\cos\frac{۲\pi}{۵}=$$

$$\frac{-۴\sin\frac{\pi}{۵}\cos\frac{\pi}{۵}.\cos\frac{۲\pi}{۵}}{۴\sin\frac{\pi}{۵}}=\frac{-۲\sin\frac{۲\pi}{۵}.\cos\frac{۲\pi}{۵}}{۴\sin\frac{\pi}{۵}}=$$

$$\frac{-\sin\frac{۴\pi}{۵}}{۴\sin\frac{\pi}{۵}}=-\frac{۱}{۴}\qquad \sin\frac{۴\pi}{۵}=\sin\frac{\pi}{۵}$$

۵- گزینه (۲)

$$\cos^{۲}x=\frac{۱}{۲(۲-\sqrt{۲})}=\frac{۲(۲+\sqrt{۲})}{۲(۴-۲)}$$

$$=\frac{\sqrt{۲}+۲}{۲}\Rightarrow \cos x=\pm\sqrt{\frac{۲+\sqrt{۲}}{۲}}$$

هریک از معادلات

$$\cos x=-\sqrt{\frac{۲+\sqrt{۲}}{۲}},\quad \cos x=\sqrt{\frac{۲+\sqrt{۲}}{۲}}$$

در فاصله $[۰,\pi]$ یک جواب دارند.

۶- گزینه (۳)

$$\sin x=\frac{(a+۱)\pm\sqrt{(a+۱)^{۲}-۴a}}{۱}$$

$$=(a+۱)\pm\sqrt{(a-۱)^{۲}}$$

$$\sin x=(a۱)\pm(a-۱)\Rightarrow\begin{cases}\sin x=۲ & \text{غ ق ق}\\ \sin x=۲a\end{cases}$$

$$\frac{\pi}{۶} < x < \frac{۵\pi}{۶} \Rightarrow \frac{۱}{۲} < \sin x \leq ۱$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲} < ۲a \leq ۱ \Rightarrow \frac{۱}{۴} < a \leq \frac{۱}{۲}$$

۷- گزینه (۱)

$$tg۳a - tg۲a - tga = ۰$$

$$\Rightarrow tg۳a + tg(-۲a) + tg(-a) = ۰$$

چون مجموع سه زاویه صفر است، مجموع تانژانتها مساوی حاصل ضرب تانژانتها است.

$$\Rightarrow tg۳a.tg(-۲a).tg(-a) = ۰$$

$$\Rightarrow tg۳a.tg۲a.tga = ۰$$

۸- گزینه (۲)

$$E(-\sin x)=۱ \Rightarrow -\sin x=۱ \Rightarrow \sin x=-۱$$

$$\Rightarrow x=\frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow tg\frac{x}{۲} = tg\frac{۳\pi}{۴} = -۱$$

$$\Rightarrow E(tg\frac{x}{۲})=-۱$$

۹- گزینه (۱)

$$A+B+C=\pi \Rightarrow A+nA+C=\pi$$

$$\Rightarrow C=\pi-(n+۱)A$$

$$۰<C \Rightarrow ۰<\pi-(n+۱)A \Rightarrow (n+۱)A<\pi$$

$$\Rightarrow ۰<A<\frac{\pi}{n+۱}$$

$$\Rightarrow \cos ۰ > \cos A > \cos\frac{\pi}{n+۱}$$

$$\Rightarrow ۱ > \cos A > \cos\frac{\pi}{n+۱}$$

۱۰- گزینه (۳)

$$C<B \Rightarrow ۰<B-C \Rightarrow ۰<B-C<B+C$$

$$\Rightarrow ۰<\frac{B-C}{۲}<\frac{B+C}{۲}$$

$$\Rightarrow \cos ۰ > \cos\frac{B-C}{۲} > \cos\frac{B+C}{۲}$$

اگر $B>C$ همواره داریم:

$$\Rightarrow ۱ > \cos\frac{B-C}{۲} > \sin\frac{A}{۲}$$

$$۱ > ۲\sin\frac{A}{۲} > \sin\frac{A}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲\sin\frac{A}{۲} < ۱ \Rightarrow \sin\frac{A}{۲} < \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{۲} < ۳۰^\circ \Rightarrow A < ۶۰^\circ$$

۱۱- گزینه (۳)

$$\sin x + \sin y = ۲ \Rightarrow \begin{cases} \sin x = ۱ \\ \sin y = ۱ \end{cases}$$

$$\text{کسر} = \frac{۱+۱+۱}{۲} = \frac{۳}{۲}$$

۱۲- گزینه (۱)

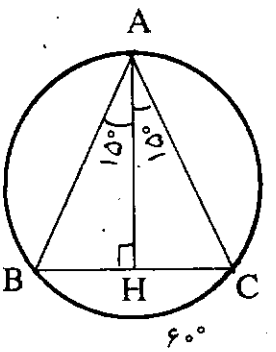
مساحت مثلث وقتی ماکزیمم است که ارتفاع ماکزیمم باشد و آن در صورتی است که متساوی‌الساقین باشد

$$\hat{B}=۷۵^\circ$$

$$tg\,۷۵^\circ = \frac{AH}{BH} = \frac{AH}{۱}$$

$$\Rightarrow AH = ۲+\sqrt{۳}$$

$$S_{ABC} = \frac{BC \times AH}{۲} = \frac{۲(۲+\sqrt{۳})}{۲} = ۲+\sqrt{۳}$$



۱۳- گزینه (۴)

$$\div A, B, C \Rightarrow ۲B = A+C$$

$$\Rightarrow A+B+C=\pi$$

$$۲B+B=\pi \Rightarrow B=\frac{\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow ۳B=\pi \Rightarrow \sin ۳B = ۰$$

$$A+C=\frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow ۳A+۳C=۲\pi$$

$$\Rightarrow ۳A=۲\pi-۳C$$

$\Rightarrow \sin 3A = \sin(2\pi - 3C)$

$\Rightarrow \sin 3A = -\sin 3C \Rightarrow \sin 3A + \sin 3C = 0$

$\Rightarrow \sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = 0$

۱۴ - گزینه (۲)

$\text{Arc}\cos x > \text{Arc}\sin x$

$\frac{\pi}{2} - \text{Arc}\sin x > \text{Arc}\sin x$

$\frac{\pi}{2} > 2\text{Arc}\sin x \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \text{Arc}\sin x < \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow -1 \leq x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۵ - گزینه (۲)

$tg\alpha + tg\beta + tg\gamma = -\frac{b}{a}$

$tg\alpha \cdot tg\beta \cdot tg\gamma = -\frac{b}{a}$

$\Rightarrow tg\alpha + tg\beta + tg\gamma = tg\alpha \cdot tg\beta \cdot tg\gamma$

$\Rightarrow (\alpha + \beta + \gamma) = k\pi$

۱۶ - گزینه (۱)

در مثلثات سال سوم داریم: $\cos^2\frac{A}{2} = \frac{p(p-a)}{bc}$

$\Rightarrow \frac{p(p-a)}{bc} = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos^2\frac{A}{2} = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \cos\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{A}{2} = 30^\circ \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ$

۱۷ - گزینه (۳)

$\text{Arctg}x + \text{Arctg}y = \frac{\pi}{4}$

$\text{Arctg}\frac{x+y}{1-xy} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{x+y}{1-xy} = tg\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \frac{x+y}{1-xy} = 1 \Rightarrow x+y = 1-xy \Rightarrow y = \frac{1-x}{1+x}$

۱۸ - گزینه (۴)

$\sin 2x = 2\sin x \cos x \Rightarrow \cos x < 0$

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = 120^\circ$

$\cos 5x = \cos 600^\circ = \cos 240^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

۱۹ - گزینه (۱)

زیرا $tgx = \frac{2t}{1-t^2}$ به‌ازای $t = \pm 1$ و $\cot gx = \frac{1-t^2}{2t}$

به‌ازای $t = 0$ تعریف شده نیستند.

۲۰ - گزینه (۴)

زیرا $tg3x = tgx \Rightarrow 3x = k\pi + x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$

لیکن به‌ازای مقادیر فرد k مقدار x جوابهای مخرج معادلات است پس باید $k = 2n$ باشد.

۲۱ - گزینه (۴)

زیرا جمله‌های متساوی‌البعد از طرفین قرینه هستند بعنوان مثال

$\cos 178^\circ = \cos(180^\circ - 2^\circ) = -\cos 2^\circ$

۲۲ - گزینه (۴)

زیرا $8x^3 - 6x = \sqrt{3} \Rightarrow 4x^3 - 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$4\cos^3 10^\circ - 3\cos 10^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 10^\circ = \sin 80^\circ$

۲۳ - گزینه (۱)

زیرا حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله

$-tg\alpha \cdot \cot g\alpha = -1 \Rightarrow m = -1$

$x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$

و مثلاً $tg\alpha = 1 + \sqrt{2} = tg\frac{3\pi}{8}$

$tg6\alpha = tg\frac{9\pi}{4} = tg(2\pi + \frac{\pi}{4}) = 1$

و هر جواب که $tg\alpha$ یا $-cotg\alpha$ فرض شود باز هم نتیجه یکی است.

۲۴- گزینه (۱)

$$\left(\sqrt{۶}+۲\right) tgx+\left(\sqrt{۶}-۲\right) cotgx=۴$$

آن را به معادله کلاسیک نوع اول تبدیل می‌کنیم.

۲۵- گزینه (۲)

$$tgA+tgB+tgC = tgA\ tgB\ tgC$$
$$tgA+(۲m+۲) = ۲tgA \Rightarrow tgA = m+۱$$

۲۶- گزینه (۳)

$$B+C=۱۳۵^\circ \Rightarrow ۳B+۳C=۴۰۵^\circ$$
$$tg(۳B+۳C)=۱ \Rightarrow tg۳B+tg۳C+tg۳Btg۳C=۱$$

۲۷- گزینه (۱)

$$\frac{tg\frac{\pi}{۲۴}}{۱+tg^۲\frac{\pi}{۲۴}}\times\frac{۱-tg^۲\frac{\pi}{۲۴}}{۱+tg^۲\frac{\pi}{۲۴}}=\frac{۱}{۲}\sin\frac{\pi}{۱۲}\cdot\cos\frac{\pi}{۱۲}$$
$$=\frac{۱}{۴}\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۸}$$

۲۸- گزینه (۱)

$$۰<Arc\ cotg۲x<\pi \quad , \quad ۰\le Arc\cos\frac{x}{۲}\le\pi$$

لذا جمع آنها ممکن نیست صفر شود.

۲۹- گزینه (۲)

هرگاه از طرفین معادله تانژانت بگیریم نتیجه خواهد شد:

$$x+۲x+۳x=۶x^۳ \Rightarrow x=۰ \text{ و } ۱ \text{ و } -۱$$

که تنها $x=۱$ در معادله صدق می‌کند.

۳۰- گزینه (۳)

$$\sin\left(۲\times\frac{\pi}{۴}+۳\times\frac{\pi}{۴}+\pi-\frac{\pi}{۳}+\pi-\frac{\pi}{۴}\right)=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۳۱- گزینه (۳)

$$b^۲+c^۳+a^۳=a^۲(b+c+a) \Rightarrow$$
$$(b+c)(b^۲+c^۲-bc)=a^۲(b+c)$$
$$b^۲+c^۲-bc=b^۲+c^۲-۲bc\ cosA \Rightarrow$$
$$cosA=\frac{۱}{۲} \Rightarrow A=۶۰^\circ$$

۳۲- گزینه (۳)

$$(a^۲+b^۲)\sin(A-B)=(a^۲-b^۲)\sin(A+B)$$
$$a^۲\left[\sin(A+B)-\sin(A-B)\right]=$$
$$b^۲\left[\sin(A+B)+\sin(A-B)\right]$$
$$۴R^۲\sin^۲A\times۲\cos A\sin B=$$
$$۴R^۲\sin^۲B\times۲\sin A\cos B \Rightarrow$$
$$\sin۲A=\sin۲B \quad یا \quad ۲A=۲B \Rightarrow A=B \quad یا$$
$$۲A+۲B=۱۸۰^\circ \Rightarrow C=۹۰^\circ$$

۳۳- گزینه (۲)

$$۳\sin x+۴\cos x=۵ \Rightarrow$$
$$۹\sin^۲x+۱۶\cos^۲x+۲۴\sin x\cos x=۲۵$$
$$۹tg^۲x+۱۶+۲۴tgx=۲۵(۱+tg^۲x)$$
$$\Rightarrow ۱۶tg^۲x-۲۴tgx+۹=۰$$
$$tgx=\frac{۲۴}{۳۲}=\frac{۳}{۴}$$
$$tg\,۲x=\frac{۲tgx}{۱-tg^۲x}=\frac{\frac{۳}{۲}}{۱-\frac{۹}{۱۶}}=\frac{۲۴}{۷}$$

۳۴- گزینه (۲)

$$Arc\ sinx+Arc\ tgy+Arc\ tgz=\pi$$

با توجه به اینکه

$$-\frac{\pi}{۲}<Arc\ tgy<\frac{\pi}{۲} \quad , \quad -\frac{\pi}{۲}\le Arc\ sinx\le\frac{\pi}{۲}$$

هیچیک از جمله‌های سمت چپ منفی نمی‌توانند باشند زیرا اگر به طرف راست رود جمع دو جمله دیگر غیر قابل قبول

است لذا جمع سه عامل مثبت مقداری ثابت است و حاصل‌ضرب آنها وقتی ماکسیمم است که همه مساوی باشند:

$\frac{\pi}{۳}+\frac{\pi}{۳}+\frac{\pi}{۳}=\pi \Rightarrow$

$\text{Arc sinx . Arc tgy . Arc tgz} = \frac{\pi^۳}{۲۷}$

۳۵- گزینه (۳)

$$\text{tg}\frac{A}{۲}\text{tg}\frac{B}{۲}=\frac{P-C}{P}=\frac{\frac{۵}{۲}C-C}{\frac{۵}{۲}C}=\frac{۳}{۵}$$

۳۶- گزینه (۴)

$bc=۲(b^۲+c^۲-a^۲)$

$bc=۲(a^۲+۲bc\cos A-a^۲) \Rightarrow \cos A=\frac{۱}{۴}$

$۰<\frac{۱}{۴}<\frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos ۹۰^\circ<\cos A<\cos ۶۰^\circ \Rightarrow$

$۹۰^\circ > A > ۶۰^\circ$

۳۷- گزینه (۱)

$S=\frac{۱}{۴}bc \Rightarrow \frac{۱}{۲}bc\sin A=\frac{۱}{۴}bc \ \sin A=\frac{۱}{۲} \ A=۳۰^\circ$

۳۸- گزینه (۱)

در مثلث قائم الزاویه

$a^۲=b^۲+c^۲ \Rightarrow a^۳=ab^۲+ac^۲ \Rightarrow$

$a^۳>b^۳+c^۳ \Rightarrow \sin^۳A>\sin^۳B+\sin^۳C$

در مثلث منفرج‌الزّاویه

$a^۲=b^۲+c^۲+kbc \Rightarrow k>۰$

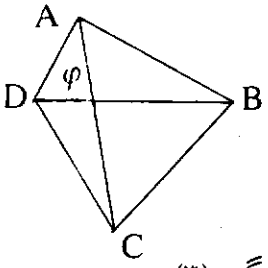
$a^۳>b^۳+c^۳ \Rightarrow \sin^۳A>\sin^۳B+\sin^۳C$

و یقیناً $a^۳=ab^۲+ac^۲+kabc$

۳۹- گزینه (۱)

مساحت هر چهار ضلعی محدب ABCD از دستور زیر محاسبه می‌شود.

$S=\frac{۱}{۲}AC.DB.\sin\varphi$



$S=\frac{۱}{۲}(۴l)(l).\sin ۳۰^\circ$

$S=l^۲$

۴۰- گزینه (۳)

$a^۲+b^۲\geq c^۲ \Rightarrow \text{tg}^۲\alpha+۱+۲\text{tg}^۲\alpha\geq ۴\text{tg}^۲\alpha \Rightarrow$

$-۱\leq \text{tg}\alpha\leq ۱ \quad , \quad -\frac{\pi}{۴}\leq\alpha\leq\frac{\pi}{۴}$

۴۱- گزینه (۲)

$\sin x\cos x=\frac{۱}{۴} \Rightarrow \sin ۲x=\frac{۱}{۲}$

$۲x=۱۵۰^\circ \Rightarrow x=۷۵^\circ$

$\sin(x-۴۵^\circ)+\cos(x-۱۵^\circ)=\sin ۳۰^\circ+\cos ۶۰^\circ=۱$

۴۲- گزینه (۲)

$$\begin{cases} x+y=\frac{۳\pi}{۲} \\ \sin x+a\sin y=a+۱ \end{cases} \Rightarrow$$

$\sin x+a\sin(\frac{۳\pi}{۲}-x)=a+۱$

$\sin x-a\cos x=a+۱$

$۱+a^۲\geq(a+۱)^۲ \Rightarrow a\leq ۰$

۴۳- گزینه (۳)

$\cos ۲۷^\circ+\cos ۳۳^\circ+\cos ۸۷^\circ=$

$\cos ۲۷^\circ+۲\cos ۶۰^\circ\cos ۲۷^\circ=۲\cos ۲۷^\circ=۲\sin ۶۳^\circ$

۴۴- گزینه (۲)

$\sin^۲x-۲m\sin ۲x+m\cos^۲x=۰ \Rightarrow$

$\frac{\sin^۲x}{\cos^۲x}-\frac{۴m\sin x\cos x}{\cos^۲x}+\frac{m\cos^۲x}{\cos^۲x}=۰$

$\text{tg}^۲x-۴m\text{tg}x+m=۰ \qquad x'=\frac{\pi}{۲}-x'' \Rightarrow$

$\text{tg}x'=\frac{۱}{\text{tg}x''} \Rightarrow \text{tg}x'\cdot\text{tg}x''=۱ \Rightarrow$

$\frac{c}{a}=۱ \quad \boxed{m=۱}$

پاسخ تشریحی تستهای ریاضیات جدید

● حمیدرضا امیری

۱ - گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا: به‌ازای هر $x\geq 1$ مقدم گزارهٔ شرطی نادرست و در نتیجه گزارهٔ شرطی ارزش درست خواهد داشت.

۲ - گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

$$p\Rightarrow(q\Rightarrow r)\equiv\sim(q\Rightarrow r)\Rightarrow\sim p\equiv(q\wedge\sim r)\Rightarrow\sim p$$

۳ - گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا:

می‌دانیم اگر تالی گزارهٔ شرطی درست باشد ارزش آن گزاره شرطی همواره درست است پس $(q\Rightarrow p)\equiv T$ و مجدداً $(q\Rightarrow\sim p)\Rightarrow(q\Rightarrow p)\equiv T$ و سپس $r\Rightarrow[(q\Rightarrow\sim p)\Rightarrow(q\Rightarrow p)]$ همواره درست است.

۴ - گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

مجموعهٔ اعداد صحیح نسبی یعنی Z از پایین کراندار نیست در صورتی که مفهوم گزارهٔ سوری در گزینهٔ (۴) از پایین کراندار بودن Z است.

۵ - گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

همواره می‌توان از $[p(x)\wedge q(x)]$ و $\exists x\in A$ گزارهٔ دیگر را نتیجه گرفت و عکس این مطلب برقرار نیست مثلاً گزارهٔ زیر درست است:

$$(\exists x\in Z, x>0)\wedge(\exists x\in Z, x<0)$$

اما گزارهٔ $\exists x\in Z, (x>0\wedge x<0)$ نادرست است.

۶ - گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$r\Leftrightarrow[s\wedge\sim(\sim s\Rightarrow\sim r)]\equiv r\Leftrightarrow\underbrace{[s\wedge(\sim s\wedge r)]}_{F}$$

$$\equiv r\Leftrightarrow F\equiv(r\Rightarrow F)\wedge\underbrace{[F\Rightarrow r]}_{T}\equiv(r\Rightarrow F)\wedge T$$

$$\equiv(r\Rightarrow F)\equiv\sim r\vee F\equiv\sim r$$

۷ - گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

تالی گزاره یعنی $[(p\wedge s)\Rightarrow p]$ یک استلزام منطقی و همیشه درست است $([(p\wedge s)\Rightarrow p]\equiv[(\sim p\vee\sim s)\vee p]\equiv T)$

بنابراین کل گزارهٔ شرطی همواره درست است.

۸ - گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$\sim[(p\Rightarrow q)\Rightarrow(q\Rightarrow(q\wedge r))]$$

$$\equiv\sim[(\sim p\vee q)\Rightarrow(\sim q\vee(q\wedge r))]$$

$$\equiv[(\sim p\vee q)\wedge\sim(\sim q\vee r)]$$

$$\equiv[(\sim p\vee q)\wedge(q\wedge\sim r)]$$

$$\equiv\underbrace{[(\sim p\vee q)\wedge q]}_{\text{جذب}}\wedge\sim r\equiv(q\wedge\sim r)$$

۹ - گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$p\Rightarrow(q\Rightarrow r)\equiv q\Rightarrow(p\Rightarrow r)$$

بنابراین گزاره شرطی حاصل از ترکیب این دو گزاره همواره درست است و لذا عکس نقیض آن باید هم‌ارز با آن و همواره درست باشد که گزینه‌های ۲ و ۳ و ۴ همواره درست نمی‌باشند.

۱۰ - گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

با توجه به فرض $p\equiv q$ از طرفی چون $[(p\Rightarrow r)\Rightarrow q]\equiv T$ گزاره‌های p و q نمی‌توانند هر دو نادرست باشند، پس باید هر دو درست باشند:

$$q\equiv T \Rightarrow (s\Rightarrow q)\equiv T \Rightarrow [(p\Rightarrow s)\Rightarrow(s\Rightarrow q)]\equiv T$$

۱۱ - گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

روش اول:

۱) $p\Rightarrow(q\Rightarrow\sim s)$

۲) $s\wedge q$

از (۱) و عطف مقدمات ۳) $(p\wedge q)\Rightarrow\sim s$

از (۳) و عکس نقیض ۴) $s\Rightarrow(\sim p\vee\sim q)$

از (۲) و حذف عاطف ۵) s

از (۴) و (۵) و انتزاع ۶) $(\sim p\vee\sim q)\equiv q\Rightarrow\sim p$

از (۳) و حذف عاطف ۷) q

از (۶) و (۷) و انتزاع ۸) $\sim p$

از (۸) و ادخال فاصل ۹) $\sim p\vee s\equiv p\Rightarrow s$

روش دوّم:

چون $s\wedge q\equiv T$ پس $q\equiv T$ و $s\equiv T$ یا $\sim s\equiv F$ بنابراین $(q\Rightarrow\sim s)\equiv F$ پس باید $p\equiv F$ یا $\sim p\equiv T$ پس $(\sim p\vee s)\equiv T$.

۱۲ - گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

گزارهٔ $(q\Rightarrow q)$ همواره درست است لذا ترکیب شرطی $(p\Rightarrow q)\Rightarrow(q\Rightarrow q)$ همواره درست است.

۱۳ - گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$A'\subseteq B \Rightarrow B'\subseteq(A')' \Rightarrow B'\subseteq A$$

۱۴ - گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$\left.\begin{array}{l} A\cup B = A \Rightarrow B\subseteq A \\ A\cap B = A \Rightarrow A\subseteq B \end{array}\right\} \Rightarrow A = B$$

۱۵ - گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$A\subseteq B' \Rightarrow A\cap B=\varnothing \Rightarrow$$
$$B\cap A=\varnothing \Rightarrow B - A' = \varnothing$$

۱۶ - گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$(B-C)\cap\left[(C-A)'\cap(A'\cap B')'\right]$$
$$=(B-C)\cap\left[(C'\cup A)\cap(A\cup B)\right]$$
$$=(B-C)\cap\left[A\cup(B\cap C')\right]$$
$$=\underbrace{(B-C)\cap\left[A\cup(B-C)\right]}_{\text{جذب}}=(B-C)=C'-B'$$

۱۷ - گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

دو مجموعهٔ $(A-B)$ و $(A\cap B)$ جدا از هم هستند و رابطهٔ $(A-B)\subseteq(A\cap B)$ ممکن نیست مگر اینکه $A-B=\varnothing$

۱۸ - گزینهٔ (۱) صحیح است زیرا:

$$(A\cap B)=\varnothing \Rightarrow \begin{cases}(A-B)=A\\(B-A)=B\end{cases}$$
$$\Rightarrow (A-B)\cap(B-A)=(A\cap B)$$
و طبق فرض $(A\cap B)=\varnothing$

۱۹ - گزینهٔ (۳) صحیح است زیرا:

X هر مجموعه‌ای باشد همواره $X\cap X'=\varnothing$ و گزارهٔ $\varnothing\subseteq\varnothing$ همواره درست است.

۲۰ - گزینهٔ (۱) صحیح است زیرا:

اگر فرض کنیم $n(A)=K$ دراین صورت:

$$\text{زیر مجموعه‌های ۳ عضوی } A = \binom{K}{۳}$$
$$=\frac{K!}{۳!(K-۳)!}=\frac{K\times(K-۱)(K-۲)}{۶}$$

۲۱ - گزینهٔ (۱) صحیح است زیرا:

$B-A=B \Rightarrow A\cap B=\varnothing$ (A و B جدا از همند)

$\Rightarrow (A-B')\cup(A-B) = \underbrace{(A\cap B)}_{\varnothing}\cup(A-B)$

$= (A-B)$

و چون A و B جدا از هم هستند پس $A-B=A$

۲۲ - گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا:

$[(A-B)\cup(A-B')]' = [(A\cap B')'\cap(A\cap B)']$

$= (A'\cup B)\cap(A'\cup B') = A'\cup(B\cap B')$

$= A'\cup\varnothing = A'$

۲۳ - گزینهٔ (۱) صحیح است زیرا:

$a\in A$ و نیز $\{a\}\in P(A)$ بنابراین فقط $\{a\}$ از $P(A)$ برداشته می‌شود بنابراین تعداد اعضای $P(A)$ برابر است با:

$۲^۳ - ۱ = ۷$

۲۴ - گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا اگر:

$A\times(A-B^۲)=A\times(B^۲-A)$

داریم:

$$\left.\begin{array}{l} A\times(A-B^۲)=A^۲-A\times B^۲ \\ A\times(B^۲-A)=A\times B^۲-A^۲ \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$A^۲-A\times B^۲=A\times B^۲-A^۲ \Rightarrow A^۲=A\times B^۲$

۲۵ - گزینهٔ (۳) صحیح است زیرا:

در ۳ حالت تساوی برقرار است:

$A=\varnothing$ یا $B=\varnothing$ یا $A=B$

که دو حالت اول $(A=\varnothing$ یا $B=\varnothing)$ نتیجه می‌دهد:

$n(A\times B)=۰$

۲۶ - گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا:

مجموعهٔ $R\times(R-\{۰\})$ مجموعهٔ شامل همهٔ زوج مرتبهایی است که مؤلفهٔ دوّم آنها صفر نمی‌تواند باشد یعنی مجموعه نقاط روی محور x ها را شامل نمی‌شود.

۲۷ - گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

$(B\times A) - (B\times B') = B\times(A-B')$

$= B\times(A\cap B) = B\times\varnothing = \varnothing$

۲۸ - گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا:

زوج مرتبهای موجود در چنین رابطه‌ای باید دارای مؤلفه‌های برابر باشند بنابراین اگر فرض کنیم $A=\{a,b,c,d\}$، هر زیر مجموعه از مجموعهٔ $R=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)\}$، جواب مسأله است که عبارتند از $۲^۴ = ۱۶$.

۲۹ - گزینهٔ (۳) صحیح است زیرا:

$R\Leftrightarrow R=R^{-۱}$ تقارنی

$\Rightarrow [R'-(R^{-۱})]'=(R'-R)'$

$= (R'\cap R')'=R\cup R=R$

۳۰ - گزینهٔ (۱) صحیح است زیرا:

$[(۰,۱)] = \{(x,y) \mid (x,y)\ f(۰,۱)\}$

$=\{(x,y)\mid xy=۰\} = \{(x,y)\mid x=۰ \vee y=۰\}$

مجموعهٔ اخیر مشخص کنندهٔ محورهای مختصات است که روی این محورها همواره $x=۰$ یا $y=۰$ است.

۳۱- گزینهٔ (۳) صحیح است زیرا:

$f(۲,۱)=۲^۱-۲=۰$, $f(۱,۲)=۲^۲-۱=۳$

$\Rightarrow f(f(۲,۱), f(۱,۲)) = f(۰,۳)$

که چون $(۰,۳)\notin N^۲$ پس $f(۰,۳)$ تعریف نمی‌شود.

۳۲- گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا:

$f(۱,۲) = ۲$
$f(۲,۱)=۲$ یک‌به‌یک نیست

$\forall y\in R\ ;\ f(۱,y) = y$ ← پوشا است زیرا

۳۳- گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

$f(x) = ۲x - |x + ۱| \overset{x\in N}{\Rightarrow} f(x) = ۲x - x - ۱$

$\Rightarrow f(x)=x- ۱$ تابعی یک‌به‌یک و پوشا است

۳۴- گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

مجموعهٔ $\{۱,-۱\}$ همراه با عمل ضرب همهٔ خواص گروه را دارا می‌باشد (در Z همهٔ اعضا متقابل ضربی ندارند در N نیز به جز عدد ۱ اعضا متقابل ضربی ندارند در IR عدد صفر متقابل ضربی ندارد).

۳۵- گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا:

$$\{(x,y)\in N^۲ \mid x^۲-y^۲=۱\}$$
$$=\left\{(x,y)\in N^۲ \mid y=+\sqrt{x^۲-۱}\right\}$$

بنابراین برای هر x فقط یک y وجود دارد (با توجه به اینکه $y\in N$)، لذا تابع است.

۳۶- گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا:

عمل تفریق را می‌توان به‌صورت $x-y=x+(-y)$ تعریف کرد که شرکت پذیر است.

۳۷- گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

در مجموعهٔ $\{۰\}$ داریم: $۰+۰=۰\in\{۰\}$

۳۸- گزینهٔ (۱) صحیح است زیرا:

$[(۲*۳)*۵]=[(\min\{۲,۳\}+۲)*۵]$

$=۴*۵=\min\{۴,۵\}+۴=۴+۴=۸$

۳۹- گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

$x*e=x \Rightarrow \frac{۴x.e}{۵}=x \Rightarrow ۴x.e=۵x \Rightarrow e=\frac{۵}{۴}$

۴۰- گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

در حالت کلّی یک گروه n عضوی نمی‌تواند ۲^n زیرگروه داشته باشد.

۴۱- گزینهٔ (۳) صحیح است زیرا:

ابتدا عضو خنثی را می‌یابیم:

$x*e=x \Rightarrow x+e-x.e=x \Rightarrow$

$e(۱-x)=۰ \overset{x\neq ۱}{\Rightarrow} e=۰$

حال ضابطهٔ عضو متقابل را پیدا می‌کنیم:

$x*x' = ۰ \Rightarrow x+x'-xx' = ۰ \Rightarrow$

$x'(۱-x) = -x \Rightarrow \boxed{x' = \frac{x}{x-۱}} \Rightarrow$

$۲' = \frac{۲}{۲-۱} = ۲$

$x*۲' = ۵ \Rightarrow x*۲ = ۵ \Rightarrow x+۲-۲x= ۵$

$\Rightarrow -x=۳ \Rightarrow \boxed{x=-۳}$

۴۲- گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

$$۳\oplus ۳ = ۰$$

و صفر عضو خنثی در $Z_۶$ است (نسبت به عمل $\oplus$)

۴۳- گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

طبق قضیه حوزهٔ درست بودن حلقهٔ Z_m شرط لازم و کافی است برای برقرار بودن قاعدهٔ حذف از طرفی اگر در Z_m «عضوی مقسوم‌علیه صفر باشد وارون پذیر نیست و بر عکس» و چون حوزه درست است پس فاقد مقسوم‌علیه صفر است لذا همهٔ اعضای مخالف صفر آن وارون پذیرند.

۴۴- گزینهٔ (۳) صحیح است زیرا:

IR میدان است و تنها ایده‌آلهای هر میدان مانند IR عبارتند از IR و $\{۰\}$ و چون $\sqrt{۳}\in I$ پس $I\neq\{۰\}$، لذا $I=IR$.

۴۵- گزینهٔ (۶) صحیح است زیرا:

در Z_m اگر a نسبت به m اول باشد وارون پذیر است از طرفی اگر عدد $n=P_۱^{\alpha_۱}\ P_۲^{\alpha_۲}\ldots P_k^{\alpha_k}$ را به‌صورت تجزیه کنیم تعداد اعداد کوچکتر از n که نسبت به n اولند از رابطهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$\varphi(n)=n(۱-\frac{۱}{p_۱})\ldots(۱-\frac{۱}{p_k})$$

$$\Rightarrow \varphi(۷)=۷(۱-\frac{۱}{۷})=۷\times\frac{۶}{۷}=۶$$

به‌طور کلی اگر p عددی اول باشد همواره $\varphi(p)=p-۱$ است.

۴۶- گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا:

در Z_m شرط لازم و کافی برای آنکه a مقسوم‌علیه صفر باشد آن است که وارون پذیر نباشد پس:

$۸=۲^۳$

تعداد وارون‌پذیرها $=\varphi(۸)=۸\times(۱-\frac{۱}{۲})=۸\times\frac{۱}{۲}=۴$

و چون صفر نیز نمی‌تواند مقسوم‌علیه صفر باشد پس در کلّ صفر به اضافهٔ ۴ عضو وارون پذیر، مقسوم‌علیه صفر نیستند لذا

تعداد مقسوم علیه‌های صفر $=۸-(۴+۱)=۳$

(تعداد مقسوم‌علیه‌های صفر Z_m $=m-\varphi(m)-۱$)

۴۷- گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

هر میدان، ایده‌آل خودش می‌باشد.

۴۸- گزینهٔ (۳) درست است زیرا:

می‌دانیم ایده‌آلهای حلقهٔ Z فقط به شکل mZ هستند و چون $۴\in I$ پس $I=۲Z$ (۴ جزء مضارب ۶ و مضارب ۳ نیست).

۴۹- گزینهٔ (۳) صحیح است زیرا:

Q روی IR نسبت به ضرب اسکالر بسته نیست

$$\sqrt{۲}\in IR\ ,\ ۲\in Q\ ,\ ۲\sqrt{۲}\notin Q$$

۵۰- گزینهٔ (۲) درست است زیرا:

هر مجموعه که شامل بردار صفر (بردار صفر وابسته خطی است) باشد وابستهٔ خطی است.

۵۱- گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا:

در حالت کلّی هر خط که از مبدأ مختصات عبور کند یک زیر فضای $IR^۲$ است.

۵۲- گزینهٔ (۳) صحیح است زیرا:

شرط لازم و کافی برای آنکه بردارهای (c,d) و (a,b) مستقل خطی باشند آن است که $ad-bc\neq۰$ یا $ad\neq bc$

پس در این مسأله باید $xy\neq۸$

۵۳- گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

$$ab'+a'b=(a+b)\left(a'+b'\right)$$

$$=(a+b)\cdot(ab)'=\left(a'\cdot b'\right)'\cdot(ab)'$$

۵۴- گزینهٔ (۱) صحیح است زیرا:

طبق تست شمارهٔ قبل داریم:

$$bc'+b'c=\left(b'c'\right)'\cdot(bc)'$$

$$\Rightarrow \left(bc'+b'c\right)' = \left[\left(b'c'\right)' \cdot (bc)'\right]'$$

$$= (b'c'+bc)$$

۵۵- گزینهٔ (۳) صحیح است زیرا:

$$(a+b)\cdot\left[(bc)+\left(a'b'\right)'\right]$$

$$= \underbrace{(a+b)\left[(bc)+(a+b)\right]}_{\text{جذب}} = (a+b)$$

۵۶- گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

$$T = xy+x'y+xy' = (x+x')y+x\,y' \qquad x \text{ — } y$$

$$= y+xy' = (y+x).(y+y') = (y+x)$$

۵۷- گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

$$\rightarrow T = (xy+x')' = (x'+y')\cdot x \quad \text{با توجه به مدار منطقی}$$

$$= \underbrace{(x'\cdot x)} + (y'x) = y'x$$

۵۸- گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا:

در حالت کلّی n شیئی به $(n-1)!$ طریق مختلف می‌توانند روی محیط یک دایره قرار بگیرند و چون در دستهٔ کلید هر حالت، ۲ حالت می‌تواند باشد (پشت و روی دسته کلید) پس در کل n کلید رابه $\frac{(n-1)!}{2}$ راه مختلف می‌توان در یک دستهٔ کلید جای داد $(\frac{(5-1)!}{2} = 12)$.

۵۹- گزینهٔ (۳) صحیح است زیرا:

۴ مداد را ۱ شیئی فرض کرده که با ۶ خودکار روی هم ۷ شیئی شده و ۷! جایگشت دارند و خود ۴ مداد در کنار هم ۴! جابجایی دارند پس در کل $۴! \times ۷!$.

۶۰- گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

چون تعداد مدادها و خودکارها برابر است لذا می‌توان با خودکار شروع شود یا با مداد.

خ م خ م خ م خ م ۴! , ۴!

م خ م خ م خ م خ ۴! , ۴!

$$۲ \times (۴! \times ۴!)$$

۶۱- گزینهٔ (۳) صحیح است زیرا:

اگر یک زن و یک مرد ابتدا روی دو صندلی قرار بگیرند ۳ جفت زن و مرد دیگر به ۳! طریق مختلف می‌توانند ۶ صندلی دیگر را پر کنند (به‌صورت یک در میان) و سپس ۴ مرد یا ۴ زن به ۴! طریق می‌توانند با هم جابجایی داشته باشند (مردها با خودشان فقط می‌توانند جابجا شوند).

$$\text{درکل} \longleftarrow ۳! \times ۴!$$

۶۲- گزینهٔ (۱) صحیح است زیرا:

اگر ارقام اصلاً تکراری نباشند (۷ رقم بدون تکرار) اعداد ۴ رقمی که با این ۷ رقم می‌توان ساخت عبارت است از $(۷)_۴$ که باید تکرارهای این ارقام به‌صورت فاکتوریل و به شکل تقسیم از کل خارج شود.

$$\text{تعداد اعداد ۴ رقمی} = \frac{(۷)_۴}{۲! \times ۳! \times ۲!} = ۳۵$$

۶۳- گزینهٔ (۳) صحیح است زیرا:

در حالت کلّی تعداد حالاتی راکه می‌توان r شیئی را در n جای خالی قرار داد برابر است با $\binom{n+r-1}{r-1}$ (به‌صورت کاملاً آزاد). در این تست چون می‌خواهیم از هر اسباب‌بازی حداقل ۱ نمونه خریداری کرده باشیم پس اول ۵ اسباب‌بازی (از هر نوع یک عدد) می‌خریم، پس ۳ اسباب‌بازی دیگر باید بخریم یا به عبارتی می‌خواهیم ۵ شیئی را در ۳ جای خالی قرار دهیم:

$$\binom{۵+۳-1}{۳-1} = \binom{۷}{۲} = ۲۱$$

۶۴ - گزینهٔ (۳) صحیح است زیرا:

با توجه به مسأله قبل داریم:

$$\text{تعداد حالات تقسیم ۴۰ سیب بین ۳ نفر} = \binom{۴۰+۳-۱}{۳-۱}$$

$$= \binom{۴۲}{۲} = ۸۶۱$$

۶۵ - گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

ابتدا حساب می‌کنیم به چند طریق می‌توان ۲ تیم ۳ نفره از بین ۶ نفر انتخاب کرد که برابر است با $\binom{۶}{۳} \times \binom{۳}{۳}$ و سپس چون هر گروه ۲ تیم دارد و جابجایی تیمها در هر گروه حالت جدید نمی‌سازد تعداد کل را بر !۲ تقسیم می‌کنیم:

$$\binom{۶}{۳} \times \binom{۳}{۳} \times \frac{۱}{۲!} = \binom{۶}{۳} \times \frac{۱}{۲!} = ۱۰$$

۶۶ - گزینهٔ (۳) صحیح است زیرا:

ابتدا ۳ نفر را از بین ۶ نفر که برادر نیستند انتخاب می‌کنیم که تعداد آن $\binom{۶}{۳}$ می‌باشد. حال دو برادر !۲ و ۳ نفر بین آنها !۳ و ۳ نفر دیگر نیز !۳ جابجایی دارند.

$$\text{تعداد حالات در کل} = \binom{۶}{۳} \times ۳! \times ۳! \times ۲!$$

۶۷ - گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا:

ابتدا دو رقم از A و سپس ۳ رقم از B انتخاب می‌کنیم و سپس آنها را به !۵ طریق می‌توان کنار هم چید. پس داریم:

$$\binom{۳}{۲} \times \binom{۴}{۳} \times ۵!$$

۶۸ - گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

اگر فضای نمونه آزمایشی که فقط ۲ نتیجه دارد، مجموعهٔ (t,s) باشد و این آزمایش را n بار تکرار کنیم، احتمال اینکه دقیقاً k بار t بیاید برابر است با $\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ که در این فرمول $p=p(t)$ و $q=p(s)$

۶۹ - گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا:

احتمال اینکه دو مهره همرنگ باشند را حساب کرده و سپس متمم آن را به دست می‌آوریم که جواب تست خواهد بود.

$$\text{احتمال اینکه همرنگ باشند} = \frac{\binom{۴}{۲} + \binom{۳}{۲}}{\binom{۷}{۲}} = \frac{۹}{۲۱}$$

$$\text{احتمال اینکه همرنگ نباشند} = ۱ - \frac{۹}{۲۱} = \frac{۱۲}{۲۱}$$

۷۰ - گزینهٔ (۱) صحیح است زیرا:

این احتمال شرطی است و پیشامد B رخ داده است یعنی

$$B = \{ (۲,۲) , (۲,۳) , (۲,۵) , (۳,۲) , (۳,۳) , (۳,۵) , (۵,۲) , (۵,۳) , (۵,۵) \}$$

که در بین این زوج مرتبها، ۶ زوج وجود دارد که مجموع کوچکتر از ۸ دارد پس:

$$\text{احتمال} = \frac{۶}{۹} = \frac{۲}{۳}$$

۷۱ - گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

$$p\ (\text{رو، پشت ، پشت ، پشت}) = p\ (\text{رو}) \times p\ (\text{پشت}) \times p\ (\text{پشت}) \times p\ (\text{پشت})$$

$$= \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۳} \times \frac{۲}{۳} = \frac{۲}{۸۱}$$

$$\text{احتمال آمدن دقیقاً ۴ بار پشت} = \binom{۸}{۴} \times \left(\frac{۱}{۲}\right)^۴ \times \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۸-۴}$$

$$= ۷۰ \times \frac{۱}{۲^۴} \times \frac{۱}{۲^۴} = \frac{۷۰}{۲^۸} = \frac{۳۵}{۲^۷}$$

۷۲- گزینهٔ (۳) صحیح است زیرا:

= احتمال اینکه هر دو در قسمت همرنگ باشند

+ احتمال هر دو آبی + احتمال هر دو سیاه

احتمال هر دو قرمز + احتمال هر دو سفید

$$= \left(\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۲}\right)+\left(\frac{۱}{۸}\times\frac{۱}{۴}\right)+\left(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۸}\right)+\left(\frac{۱}{۸}\times\frac{۱}{۸}\right)=\frac{۱۵}{۶۴}$$

۷۳- گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا:

چون A و B مستقل از هم هستند پس داریم:

$$p(A\cap B)=p(A)\times p(B) \quad ,\quad ۰\le p(A\cap B)\le ۱$$

$$\Rightarrow ۰\le \frac{۱}{۴}\times k\le ۱ \Rightarrow ۰\le k\le ۴$$

۷۴- گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

$$\frac{\sum x_i}{۵۰}=۱۶ \Rightarrow \sum x_i=۸۰۰$$

$$\text{میانگین واقعی} \Rightarrow \frac{۸۰۰-۱۰}{۵۰}=۱۵/۸ \quad ,\quad ۱۰-=-۱۹$$

۷۵- گزینهٔ (۳) صحیح است زیرا:

$$S_x^۲=\frac{n\sum x_i^۲-\left(\sum x_i\right)^۲}{n(n-۱)}$$

$$=\frac{۱۵\times ۲۹۶-۳۶۰۰}{۱۵\times ۱۴}=۴ \Rightarrow S_x=\sqrt{۴}=۲$$

۷۶- گزینهٔ (۱) صحیح است زیرا:

اگر داده‌های یک مسأله آماری همگی با عدد t جمع شوند انحراف معیار جدید نسبت به قبل تغییری نمی‌کند لذا نسبت آنها به هم ۱ است.

۷۷- گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا:

به‌طور کلی اگر داده‌های آماری $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$ را به $\underbrace{(kx_۱+t)}_{y_۱}, \underbrace{(kx_۲+t)}_{y_۲}, \cdots, \underbrace{(kx_n+t)}_{y_n}$ تبدیل کنیم در این صورت خواهیم داشت:

$$\bar{y}=k\bar{x}+t \quad ,\quad S_y=kS_x$$

$$\overset{k=۳}{\Rightarrow} S_y=۳\times S_x=۳\times ۶=۱۸$$

۷۸- گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا:

$$\frac{x_۱+x_۲+\cdots+x_۶}{۶}=۱۲ \Rightarrow x_۱+\cdots+x_۶=۷۲$$

$$\frac{x'_۱+\cdots+x'_۸}{۸}=۱۸ \Rightarrow x'_۱+\cdots+x'_۸=۱۴۴$$

$$\Rightarrow x_۱+\cdots+x_۶+x'_۱+\cdots+x'_۸=۲۱۶$$

$$\Rightarrow \text{میانگین ۱۴ داده} = \frac{۲۱۶}{۱۴}=۱۵/۴۲$$

۷۹- گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

$$۳\ge ۳ \text{ و } ۵\le ۳+۲$$

۸۰- گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

معادلهٔ دو خط مزبور با توجه به محل برخورد آنها با محورها عبارت است از $۳x+۲y=۱۲$ و $x+y=۵$ که اگر آنها را در یک دستگاه قرار دهیم محل برخوردشان که مقدار بیشینه به‌ازای آن حاصل می‌شود مشخص می‌گردد که این نقطه $A\begin{vmatrix}۲\\۳\end{vmatrix}$ می‌باشد لذا

$$۲y+۳x=۲\times ۳+۳\times ۲=۱۲$$

۸۱- گزینهٔ (۳) صحیح است زیرا:

$$۳x\overset{۵}{\equiv}۱ \Rightarrow ۳x\overset{۵}{\equiv}۱+۵ \Rightarrow ۳x\overset{۵}{\equiv}۶ \overset{(۵,۳)=۱}{\Rightarrow} x\overset{۵}{\equiv}۲$$

$$\Rightarrow ۵\mid x-۲ \Rightarrow x-۲=۵k \Rightarrow x=۵k+۲$$

۸۲- گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

$$۲^{۳}\overset{۷}{\equiv}۱ \quad , \quad ۱۳\overset{۷}{\equiv}-۱ \quad \Rightarrow$$

$$۲^{۳n+۱}+۱۳^{۲n+۱}=۲^{۳n}\times۲+۱۳^{۲n}\times۱۳\overset{۷}{\equiv}$$

$$۱\times۲+۱\times۱۳=۱۵\overset{۷}{\equiv}۱$$

پس باقیماندهٔ تقسیم ۱ است.

۸۳- گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا:

$$\begin{matrix} d\,|\,a-۲b \\ d\,|\,۳a-b \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} d\,|\,-۳a+۶b \\ d\,|\,۳a-b \end{matrix}$$

$$\Rightarrow d\,|\,۵b \xrightarrow[\text{لِم اقلیدس}]{(d,b)=۱} d\,|\,۵ \Rightarrow d=۱ \text{ یا } d=۵$$

۸۴- گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا:

اگر عددی مربع کامل باشد رقم یکان آن می‌تواند یکی از ارقام ۰، ۱، ۴، ۵، ۶، ۹ باشد با توجه به توان دوّم این ارقام اگر n مربع کامل باشد رقم یکان $n^{۲}$ می‌تواند ۰، ۱، ۶ و ۵ باشد پس $n^{۲}\overset{۱۰}{\equiv}۴$ همواره نادرست است.

۸۵- گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

$$\overline{ab}=۳(a+b) \Rightarrow ۱۰a+b=۳a+۳b \Rightarrow ۷a=۲b$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{۲}{۷} \Rightarrow a=۲\,,\ b=۷ \Rightarrow ab=۱۴$$

(۲ و ۷ نسبت به هم اولند و چون $a,b\leq ۹$ پس $(a,b)=۱$)

۸۶- گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا:

می‌دانیم $۱۲۰=!۵$ و $۰\overset{۱۲۰}{\equiv}!۵$ و نیز می‌دانیم به ازای هر $n\geq ۵$ ، $۵!\,|\,n!$ بنابراین:

$$۱!+۲!+۳!+۴!+۵!+\cdots+۶۰۰!\overset{۱۲۰}{\equiv}۱+۲+۶+۲۴+۰+\cdots+۰$$

$$\Rightarrow \quad ۱!+۲!+\cdots+۶۰۰!\overset{۱۲۰}{\equiv}۳۳$$

۸۷- گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا:

برای مشخص کردن رقم یکان هر عدد به‌توان n کافی است n را بر ۴ تقسیم کرده و رقم یکان آن عدد مزبور رابه‌توان باقیماندهٔ تقسیم بر ۴ برسانیم و رقم یکان عدد حاصل همان رقم یکان عدد اول می‌باشد.

$$۱۳۷۳=۳۴۳\times۴+۱ \Rightarrow \text{رقم یکان } =۲^{۱}=۲$$

۸۸- گزینهٔ (۳) صحیح است زیرا:

$$(a,b)\,|\,a \Rightarrow [a,(a,b)]=|a|$$

$$b\,|\,a \Rightarrow b\,||a| \Rightarrow (|a|,b)=|b| \quad \text{از طرفی:}$$

$$([a,(a,b)],b)=(|a|,b)=|b|)$$

۸۹- گزینهٔ (۳) صحیح است زیرا:

$$A^{۲}-A+I=۵ \Rightarrow A^{-۱}A^{۲}-A^{-۱}A+A^{-۱}I=A^{-۱}۵$$

$$\Rightarrow A-I+A^{-۱}=۵ \Rightarrow A^{-۱}=I-A$$

۹۰- گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

$$|\,۳A^{۲}\,|=۳^{۴}\times|\,A|^{۲}=۳^{۴}\times۳^{۲}=۳^{۶}$$

۹۱- گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

$$|\,۲A|=|\,|A|\,A| \Rightarrow ۲^{۲}|A|=|A|^{۲}|A|$$

$$\Rightarrow ۴|A|=|A|^{۳} \Rightarrow |A|\left(۴-|A|^{۲}\right)=۰$$

$$\Rightarrow |A|=۰ \quad \text{یا} \quad |A|=\pm۲$$

و چون $|A|>۰$ (طبق فرض) پس باید $|A|=۲$.

۹۲- گزینهٔ (۳) صحیح است زیرا:

می‌دانیم: $AN'=N'A=|A|\,I$

$$|N'A|=|\,|A|\,I|=|A|^{۳}|I|$$

$$=۷^{۳}\times۱=۳۴۳$$

۹۳ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا:

می‌دانیم اگر ماتریسی پاد متقارن باشد باید درایه‌های روی قطر اصلی آن همگی صفر باشند از طرفی چون قطری نیز هست پس درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی آن نیز صفر است لذا ماتریس A ماتریس صفر است که ماتریس صفر ماتریسی اسکالر است. (درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابرند و قطری نیز هست.)

۹۴ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است زیرا:

$$A \text{ متعامد} \Rightarrow A' = A^{-1} \Rightarrow (A')' = (A^{-1})'$$
$$\Rightarrow A = (A')^{-1}$$

۹۵ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است زیرا:

از بسط دترمینان برحسب ستون اول داریم:

$$x(1-0) - 0 + 2(-y-2) = 0 \Rightarrow x - 2y + 4 = 0$$
$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 2 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

۹۶ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است زیرا:

به‌طور کلّی ماتریس انتقال نسبت به خط $y = x \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ ماتریس متعامدی می‌باشد و می‌دانیم تبدیلات متعامد طول و زاویه را ثابت نگه می‌دارند پس شکل حاصل یک لوزی و قابل انطباق بر لوزی اول است.

۹۷ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا:

به‌طور کلّی اگر k یک مقدار ویژهٔ ماتریس A باشد در این صورت مقدار ویژهٔ ماتریس $A+nI$ برابر است با $(k+n)$. بنابراین دو مقدار ویژهٔ ماتریس $A+3I$ با توجه به مقادیر ویژهٔ ماتریس A یعنی ۲ و ۴ عبارتند از (۳+۲) و (۳+۴) یعنی ۵ و ۷ و می‌دانیم (با توجه به معادلهٔ سرشتنمایی) حاصلضرب مقادیر ویژهٔ هر ماتریس همان دترمینان آن ماتریس است پس

$$|A+3I| = 7 \times 5 = 35$$

۹۸ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است زیرا:

$$A \Rightarrow A\,A' = I \overset{A \text{ متقارن}}{\Rightarrow} A\,A = I \Rightarrow A^2 = I \quad \text{متعامداست} A$$

۹۹ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است زیرا:

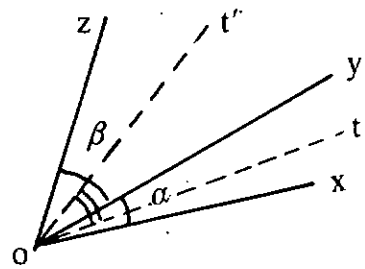
می‌دانیم دترمینان هر ماتریس پاد متقارن از مرتبهٔ فرد صفر است پس:

$$K = |A|^2 - |A| + 3 \Rightarrow K = 0 - 0 + 3 \Rightarrow K = 3$$

پاسخ تشریحی تستهای هندسه

● محمدهاشم رستمی

۱ ـ گزینهٔ (۴) درست است: زیرا اگر دو زاویهٔ α و β مجاور یکدیگر باشند، اندازهٔ زاویهٔ بین نیمسازهای این دو زاویه مساوی $\frac{\alpha+\beta}{۲}$ است.



پس داریم: $\frac{\alpha+\beta}{۲}=۶۵^\circ \Rightarrow \alpha+\beta=۱۳۰^\circ$

از آنجا:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=۱۳۰^\circ\\ \alpha-\beta=۳۰^\circ\end{cases} \Rightarrow \alpha=۸۰^\circ,\ \beta=۵۰^\circ$$

۲ ـ مرکز دایرهٔ محیطی هر مثلث محل تلاقی عمود منصفهای اضلاع آن مثلث است. و نقطهٔ برخورد عمود منصفهای اضلاع مثلثی که یک زاویه منفرجه دارد، در خارج آن مثلث واقع است. پس گزینهٔ (۲) درست است.

۳ ـ گزینهٔ (۳) درست است.

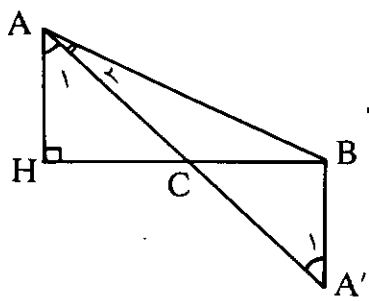
زیرا: $b=۴<c=۷<a=۸$ پس: $\hat{B}<\hat{C}<\hat{A}$

۴ ـ گزینهٔ (۴) درست است.

زیرا اگر میانهٔ AC از مثلث قائم‌الزاویهٔ AHB را به اندازهٔ خود تا نقطهٔ A' امتداد دهیم و از A' به B وصل کنیم داریم $\hat{A'}_۱=\hat{A}_۱$ و $A'B=AH$ امّا در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHB داریم: $AB>AH$.

از آنجا $AB>A'B$ پس:

$H\hat{A}C>C\hat{A}B$ یا $\hat{A}_۱>\hat{A}_۲$ و یا $\hat{A'}_۱>\hat{A}_۲$



۵ ـ گزینهٔ (۲) جواب است.

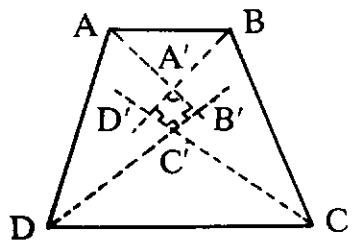
زیرا مجموع زوایای داخلی هر n ضلعی محدب $۲n-۴$ قائمه و مجموع زوایای خارجی هر n ضلعی محدب مساوی ۴ قائمه است. پس:

$۲n-۴=۳\times۴ \Rightarrow n=۸$

$\Rightarrow \frac{n(n-۳)}{۲}=\frac{۸(۸-۳)}{۲}=۲۰$

۶ ـ گزینهٔ (۴) درست است.

زیرا اگر $A'B'C'D'$ چهارضلعی حاصل از تقاطع نیمسازهای زوایای داخلی یک ذوزنقه متساوی‌الساقین باشد داریم: $\hat{B'}=\hat{D'}=۹۰^\circ \Rightarrow \hat{B'}+\hat{D'}=۱۸۰^\circ$

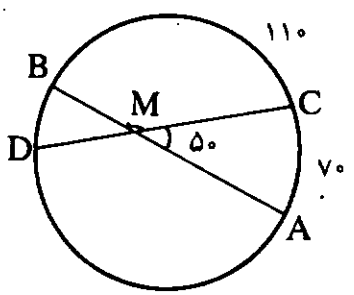


پس چهارضلعی $A'B'C'D'$ محاطی است اما مستطیل نیست زیرا از دو زاویه $\hat{A}'$ و $\hat{C}'$ یکی حاده و دیگری منفرجه است. از طرفی $A'B' = A'D'$ و $C'B' = C'D'$ می‌باشد، پس $A'B' + C'D' = A'D' + B'C'$. در نتیجه چهارضلعی $A'B'C'D'$ محیطی می‌باشد. پس این چهارضلعی هم محاطی و هم محیطی است.

۷ـ گزینهٔ (۳) درست است.

زیرا اگر یک قطر چهارضلعی قطر دیگر را نصف کند، آن قطر، چهارضلعی را به دو مثلث هم ارز (دو مثلث که مساحتشان برابر است) بخش می‌کند.

۸ـ گزینهٔ (۱) جواب است.



زیرا اگر M نقطهٔ تقاطع دو وتر AB و CD فرض شود. اولاً دو کمان ۷۰° و ۱۱۰° دو کمان مقابل ایجاد شده در این دایره نیستند، زیرا $۵۰° \neq ۹۰° = \frac{۷۰+۱۱۰}{۲}$ و $۱۳۰° \neq ۹۰°$. پس این دو کمان، دو کمان مجاور می‌باشند مثلاً $\overset{\frown}{AC} = ۷۰°$ و $\overset{\frown}{BC} = ۱۱۰°$ ثانیاً کمان ۱۱۰° جزء دو کمان مقابل به زاویه ۵۰° نیست زیرا $۱۱۰ < ۲\times۵۰$ در نتیجه اندازهٔ دو کمان دیگر برابر است با:

$$۵۰ = \frac{۷۰ + \overset{\frown}{DB}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{DB} = ۳۰°$$

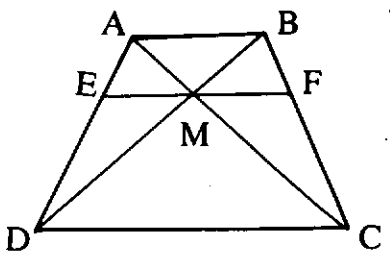
$$۱۳۰ = \frac{۱۱۰ + \overset{\frown}{AD}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = ۱۵۰°$$

و تفاضل این دو کمان برابر است با: $۱۵۰ - ۳۰ = ۱۲۰°$

۹ـ گزینهٔ (۳) جواب است.

زیرا اگر از M نقطهٔ تلاقی قطرهای ذوزنقه‌ای، خطی موازی قاعده‌های آن ذوزنقه رسم کنیم تاساقهای ذوزنقه را در نقاط E و F قطع کند، همواره داریم $ME = MF$ پس: $EF = ۲MF$.

و یا $\frac{EF}{MF} = ۲$.



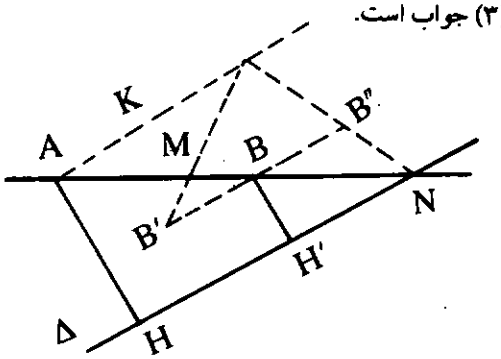
۱۰ـ گزینهٔ (۲) جواب است.

زیرا: $AC \parallel BD \Rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}$ (۱)

$$BC \parallel DE \Rightarrow \frac{OE}{OB} = \frac{OD}{OC} \quad (۲)$$

$$(۱)\times(۲) \Rightarrow OB^۲ = OA.OE$$
$$\Rightarrow OB^۲ = ۲\times۸ = ۱۶ \Rightarrow OB = ۴$$

۱۱ـ گزینهٔ (۳) جواب است.



زیرا می‌دانیم که روی خط AB همواره دو نقطه وجود دارد که پاره‌خط AB را به نسبت عدد معین k $(k>۰$ و $k\neq۰)$ تقسیم می‌کند، که اگر این دو نقطه را M و N بنامیم، داریم:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = k$$

حال اگر Δ یکی از خطهایی باشد که از یکی از نقاط M یا N بگذرد، نسبت فاصله‌های نقاط A و B از این خط برابر K می‌باشد زیرا داریم:

$$\Delta NAH \sim \Delta NBH' \Rightarrow \frac{AH}{BH'}=\frac{NA}{NB}=k$$

بنابراین دو دسته خطی که از نقاط M و N می‌گذرند جواب مسئله‌اند.

۱۲ - گزینهٔ (۲) جواب است زیرا:

$$a=۳+۴=۷\ ,\ ۲p=a+b+c=۲۱$$
$$\Rightarrow\ b+c=۲۱-۷=۱۴$$
$$DB=\frac{a.c}{b+c} \Rightarrow ۳=\frac{۷\times c}{۱۴} \Rightarrow c=۶ \Rightarrow AB=۶$$

۱۳ - گزینهٔ (۴) درست است.

زیرا هرگاه دو چند ضلعی متشابه باشند، نسبت اجزاء خطی متناظر در این دو چند ضلعی، برابر نسبت تشابه است. و نسبت مساحتهای هر دو جزء متناظر از این دو چند ضلعی، برابر مجذور نسبت تشابه می‌باشد. پس:

$$\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}}=\frac{S_{A'B'E'}}{S_{ABE}}=\frac{۴}{۹}$$

۱۴ - گزینهٔ (۴) جواب است.

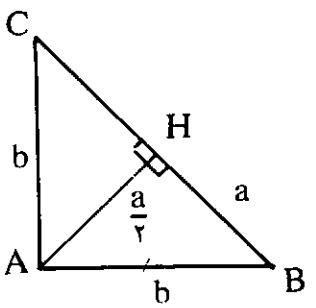
زیرا اگر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین با قاعده‌های AB و CD بر دایره‌ای به شعاع R محیط باشد همواره $AB.CD=۴R^۲$ است و در این مسئله $AB=۲AE=۲\times۴=۸cm$ است پس:

$$۸\times CD=۴(۵)^۲=۱۰۰ \Rightarrow CD=۱۲/۵cm$$

۱۵ - گزینهٔ (۲) جواب است.

زیرا اگر ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه‌ای آن مثلث را به دو مثلث هم ارز بخش نماید، آن مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است، زیرا $HB=HC$ و $AH\perp BC$ است پس داریم:

$$AH=۲ \Rightarrow AB=AC=۲\sqrt{۲}$$
$$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{۱}{۲}(۲\sqrt{۲})^۲=۴$$



نکته: در مثلث قائم‌الزاویه متساوی الساقین به ساق b و وتر a داریم:

اندازهٔ وتر: $BC=a=b\sqrt{۲}$

اندازهٔ ارتفاع وارد بر وتر: $AH=\frac{a}{۲}=\frac{b\sqrt{۲}}{۲}$

اندازهٔ مساحت مثلث: $S_{ABC}=\frac{۱}{۴}a^۲=\frac{۱}{۲}b^۲$

اندازه محیط:

$$۲P=a+۲b=a(۱+\sqrt{۲})=b(۲+\sqrt{۲})$$

۱۶ - گزینه (۱) جواب است.

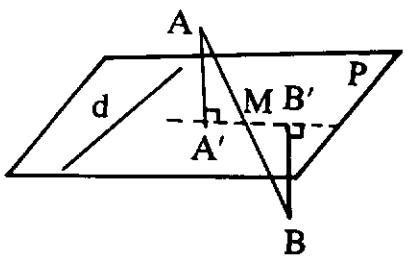
زیرا اگر شعاع دایرهٔ محاطی مثلث متساوی الاضلاع را R فرض کنیم، اندازهٔ ضلع مثلث متساوی الاضلاع محیطی $C_۴=a=۲R\sqrt{۳}$ و از آنجا داریم:

$$\text{مثلث } S=\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴} \Rightarrow ۳۶\sqrt{۳}=\frac{۱۲R^۲\times\sqrt{۳}}{۴}$$
$$\Rightarrow R^۲=۱۲ \Rightarrow R=۲\sqrt{۳}$$
$$\Rightarrow C_۴=R\sqrt{۲}=۲\sqrt{۶} \Rightarrow S=۲۴$$

مربع محاطی

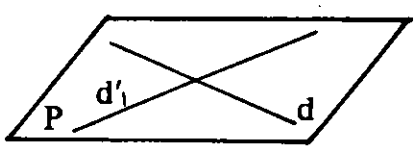
۱۷ - گزینهٔ (۳) درست است.

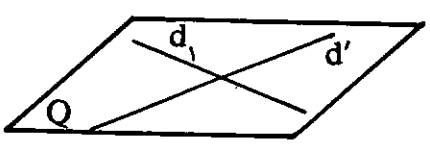
زیرا اگر AB موازی d باشد، مسئله بیشمار جواب دارد. زیرا هر صفحه‌ای که در این حالت، بر خط d بگذرد دو نقطهٔ A و B از آن صفحه به یک فاصله خواهند بود. ولی اگر خط AB موازی d نباشد فقط دو صفحه وجود دارد که بر خط d می‌گذرند و نقاط A و B از آنها به یک فاصله‌اند. یکی صفحه‌ای که بر خط d و نقطه M وسط پاره‌خط AB می‌گذرد، و دیگری صفحه‌ای که بر خط d می‌گذرد و با خط AB موازی است.



۱۸ - گزینهٔ (۳) جواب است.

زیرا اگر دو خط متنافر باشند بر هر یک از این دو خط تنها یک صفحه می‌گذرد که با خط دیگر موازی باشد.





۱۹ - گزینهٔ (۲) درست است.

زیرا اگر فرض کنیم: $ME=x$، از آنجا خواهیم داشت، $MF=x+3$، و بنا به روابط طولی در دایره یا قوّت نقطه نسبت به دایره می‌توان نوشت:

$$\overline{ME}.\overline{MF}=OM^2-OA^2=d^2-R^2$$

$$\Rightarrow\ x(x+3)=64-36$$

$$\Rightarrow\ x^2+3x-28=0\ \Rightarrow\ x=4,$$

$$x=-7\ \Rightarrow\ ME=4cm$$

۲۰ - گزینهٔ (۳) درست است.

زیرا مثلث ABC قائم‌الزاویه در رأس A است و دو ضلع آن ۱۰ و ۲۴ دو عدد از دسته عدد فیثاغورسی ۱۰ و ۲۴ و ۲۶ متناسب با دسته عدد فیثاغورسی ۵ و ۱۲ و ۱۳ می‌باشند. پس اندازهٔ وتر مثلث برابر ۲۶ است و شعاع دایرهٔ محیطی مثلث قائم‌الزاویه نیز نصف وتر است. پس:

$$R=\frac{26}{2}=13$$

۲۱ - گزینهٔ (۳) درست است.

زیرا در متوازی‌الاضلاع به اضلاع a و b و اقطار d و d' همواره داریم: $2(a^2+b^2)=d^2+d'^2$

پس در این مسئله:

$$d=AC=2OA=2\sqrt{5},\ d'=2OD=2\times5=10,$$

$$AD=b=2\sqrt{6}\ \Rightarrow 2(a^2+24)=20+100$$

$$\Rightarrow\ a^2=36\ \Rightarrow\ a=6$$

۲۲ - گزینهٔ (۲) جواب است.

زیرا کوچکترین میانهٔ هر مثلث، میانهٔ نظیر بزرگترین ضلع آن مثلث می‌باشد. پس: اگر بزرگترین ضلع مثلث را $a=6$ اختیار کنیم، داریم:

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$$

$$\Rightarrow\ m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2(25+16)-36}=\frac{1}{2}\sqrt{46}$$

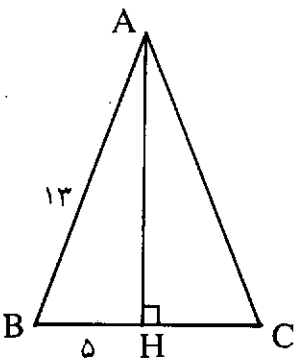
۲۳ - گزینهٔ (۲) جواب است.

زیرا اگر AH ارتفاع وارد بر قاعدهٔ BC باشد در مثلث

قائم‌الزاویهٔ ABH، $AB=۱۳$ و $BH=۵$ پس $AH=۱۲$ (یک دسته عدد فیثاغورسی).

در نتیجه: $۲p=۳۶ \Rightarrow p=۱۸$ و $S=۶۰$ مثلث

$\Rightarrow p-a=۱۸-۱۰=۸ \Rightarrow r_a=\frac{S}{p-a}=\frac{۶۰}{۸}=۷/۵$



۲۴ - گزینهٔ (۴) جواب است.

۲۵ - گزینهٔ (۳) جواب است.

زیرا وقتی تصویر قائم یک خط بر یک صفحه، منحصر به یک نقطه باشد، آن خط بر آن صفحه عمود است.

۲۶ - گزینهٔ (۴) درست است.

زیرا نتیجهٔ ترکیب دو دوران نسبت به یک مرکز دورانی است نسبت به همان مرکز که زاویهٔ دورانش مساوی مجموع زاویه‌های آن دو دوران باشد. امّا در این مسئله $۱۳۵°+۴۵°=۱۸۰°$ است. پس نتیجه ترکیب این دو دوران، تقارن مرکزی و یا تجانس به مرکز $O_۱$ و با نسبت تجانس ۱- یعنی $H_{O_۱}^{-۱}$ است.

۲۷ - گزینهٔ (۱) جواب است.

زیرا دوران یافتهٔ هر پاره‌خط با خود آن پاره‌خط هم اندازه است. یعنی طول پاره‌خط $A'B'$ برابر ۸ سانتی‌متر است. امّا در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $\frac{۱}{۲}$- داریم:

$A''B''=|K|.A'B' \Rightarrow A''B''=\frac{۱}{۲}\times ۸=۴cm$

۲۸ - گزینهٔ (۱) جواب است زیرا:

$$H_B^K o H_B^{-\frac{۱}{K}}=H_B^{-۱}=S_B \Rightarrow S_A o S_B=T_{۲\overrightarrow{BA}}$$

نکته: نتیجهٔ ترکیب دو تجانس نسبت به مرکز B و با نسبتهای k و $-\frac{۱}{k}$، تجانسی نسبت به همان مرکز B و نسبت تجانس $k(-\frac{۱}{k})=-۱$ است. که تقارن مرکزی نسبت به مرکز تقارن B است. از طرفی نتیجهٔ ترکیب دو تقارن مرکزی به مراکز A و B انتقالی است که بردار انتقالش مساوی $۲\overrightarrow{BA}$ است.

۲۹ - گزینهٔ (۲) جواب است.

زیرا مجموع زوایای رأس هر کنج کوچکتر از ۳۶۰ است و حداقل تعداد وجوه یک کنج ۳ می‌باشد. از آنجا:

$\frac{۳۶۰}{۵۵}=۶\frac{۶}{۱۱} \Rightarrow ۳\le n<۷$

$۳\le n\le ۶ \Rightarrow n=۳, n=۴, n=۵, n=۶$ یا

پس چهار کنج منتظم می‌توان داشت که هر زاویه‌اش ۵۵° باشد.

۳۰ - گزینهٔ (۴) جواب است.

زیرا: $\text{سطح کره}=S=۴\pi R^۲=۳۶\pi \Rightarrow R=۳$

$\text{حجم قاچ}۹۰°=\frac{۱}{۴}\times \text{حجم کره}=\frac{۱}{۴}\times\frac{۴}{۳}\pi R^۳=\frac{۱}{۳}\pi R^۳=$

$\frac{۱}{۳}\pi\times ۲۷=۹\pi$

۳۱ - گزینهٔ (۴) درست است.

زیرا مثلث OAB در رأس O قائم‌الزاویه است.

$\left(\frac{۵\pi}{۱۲}-(-\frac{\pi}{۱۲})=\frac{\pi}{۲}\right)$ و دو ضلع این مثلث قائم‌الزاویه ۵ و ۱۲ می‌باشند پس وتر این مثلث $AB=۱۳$ و از آنجا OM میانهٔ وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه نصف وتر است یعنی $OM=۶/۵$.

۳۲- گزینهٔ (۱) درست است زیرا:

$۱۵x+۸y+۳z=۲۰ \Rightarrow ۵\times۳x+۴\times۲y+۳\times z=۲۰$

حال اگر $\vec{U}(۵,۴,۳)$ و $\vec{V}(۳x,۲y,z)$ اختیار شود بنا به نامساوی کوشی شوارتز $|\vec{U}|.|\vec{V}| \geq |\vec{U}.\vec{V}|$ می‌توان نوشت:

$$\sqrt{۲۵+۱۶+۹}\times\sqrt{۹x^۲+۴y^۲+z^۲} \geq ۱۵x+۸y+۳z=۲۰$$

$$\Rightarrow ۵\sqrt{۲}\times\sqrt{۹x^۲+۴y^۲+z^۲} \geq ۲۰ \Rightarrow$$

$$۵۰(۹x^۲+۴y^۲+z^۲) \geq ۴۰۰ \Rightarrow ۹x^۲+۴y^۲+z^۲ \geq ۸$$

۳۳- گزینهٔ (۲) جواب است.

زیرا بنا به اتحاد لاگرانژ داریم:

$$|\vec{U}\wedge\vec{V}|^۲+|\vec{U}.\vec{V}|^۲=|\vec{U}|^۲\times|\vec{V}|^۲ \Rightarrow$$

$$۹+۱=۲\times|\vec{V}|^۲ \Rightarrow |\vec{V}|=\sqrt{۵}$$

۳۴- گزینهٔ (۳) جواب است زیرا:

$$\vec{a}(۱,۰,-۱),\ \vec{b}(۰,۲,۱) \Rightarrow \vec{a}\wedge\vec{b}(۲,-۱,۲)$$

$$\Rightarrow \beta=\frac{-۱}{\sqrt{۴+۱+۴}}=-\frac{۱}{۳}$$

۳۵- گزینهٔ (۲) جواب است.

زیرا برای اینکه مشخص سازیم که نقطهٔ A درون فرجهٔ حاده یا درون فرجهٔ منفرجهٔ حاصل از تقاطع دو صفحهٔ $P:ax+by+cz+d=۰$ و $P':a'x+b'y+c'z+d'=۰$ قرار دارد، باید عبارت $\delta=P(A).P'(A)(aa'+bb'+cc')$ را تعیین علامت کنیم. در صورتی که $\delta<۰$ باشد نقطهٔ A درون فرجهٔ حاده حاصل از تقاطع صفحات p و p' واقع است. و اگر $\delta>۰$ باشد نقطهٔ A درون فرجهٔ منفرجه حاصل از تقاطع این دو صفحه است. و در صورتی که $P(A)=۰$ باشد نقطهٔ A روی صفحهٔ P واقع است. و اگر $P'(A)=۰$ باشد نقطهٔ A روی صفحهٔ P' قرار دارد و اگر $P(A)=P'(A)=۰$ باشد نقطهٔ A روی فصل مشترک دو صفحه واقع است. پس در این مسئله داریم:

$P:x-۲y+z-۱=۰ \quad P':۲x+z-۱=۰ \quad A(۱,۰,۲)$

$\delta=P(A)P'(A)(aa'+bb'+cc')$

$=(۱-۰+۲-۱)(۲+۲-۱)(۲+۰+۱)$

$\Rightarrow \delta=۱۸>۰ \Rightarrow$

نقطهٔ A درون فرجه منفرجهٔ حاصل از تقاطع دو صفحه قرار دارد.

۳۶- گزینهٔ (۴) درست است.

زیرا: $\vec{a}.(\vec{b}\wedge\vec{c})$ حاصل‌ضرب مختلط $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ است که یک عدد جبری است. بین گزینه‌های داده شده گزینه‌های (۲) و (۴) حاصل ضرب مختلط سه بردار می‌باشند و دو گزینهٔ دیگر تعریف نشده‌اند.

امّا در گزینهٔ (۲) جای دو عامل متوالی $\vec{b}$ و $\vec{c}$ عوض شده است پس علامت عدد جبری حاصل از این گزینه با علامت عدد جبری حاصل از عبارت مفروض یکی نیست. پس گزینهٔ (۴) جواب است.

نکته: با توجه به خاصیت حاصل‌ضرب مختلط سه بردار مشخص است که: $\vec{a}.(\vec{b}\wedge\vec{c}) = (\vec{a}\wedge\vec{b}).\vec{c}$

پس گزینهٔ (۴) جواب است.

۳۷- مختصات مرکز مکعب حاصل $O_۱(\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲})$ است و معادلهٔ صفحهٔ گذرنده از نقاط A' و B' و C' به صورت $\frac{x}{۱}+\frac{y}{۱}+\frac{z}{۱}=۱$ یا $x+y+z-۱=۰$ است. زیرا طول از مبدأ و عرض از مبدأ و ارتفاع از مبدأ صفحه ABC همگی برابر ۱ می‌باشند.

از آنجا:

$$O_۱H=\frac{|ax_۱+by_۱+cz_۱+d|}{\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}}=$$

$$\frac{\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1\right|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

پس گزینهٔ (۱) درست است.

۳۸- خطی که بر دو محور oz و oy عمود باشد بر صفحهٔ yoz عمود است یعنی با محور xها موازی است پس معادلهٔ آن به صورت $\begin{cases} z=a \\ y=b \end{cases}$ است. بنابراین گزینهٔ (۳) جواب است.

۳۹- گزینهٔ (۲) جواب است.

زیرا با توجه به اینکه صفحات داده شده متوازی‌اند داریم:

$$\begin{cases} P: x-y-2z-6=0 \\ P': x-y-2z-12=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$HH'=\frac{|d-d'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|-6+12|}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$$

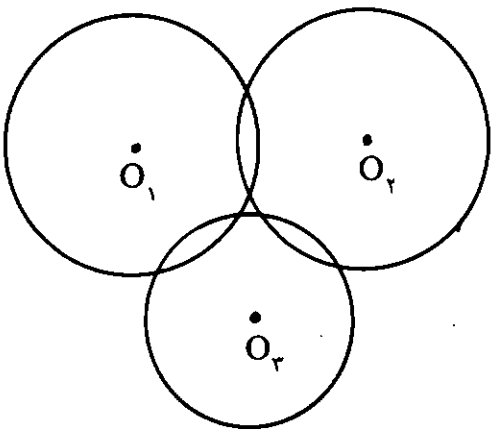
۴۰- گزینهٔ (۴) درست است.

زیرا بنا به رابطهٔ نیوتن در تقسیم توافقی می‌توان نوشت:

$$\overline{OC}\cdot\overline{OD}=\overline{OA}^2=\overline{OB}^2 \Rightarrow$$

$$\overline{OC}\cdot\overline{OD}=(4)^2=(-4)^2=16$$

۴۱- در این تست، در گزینه‌های (۲) و (۳) و (۴) مرکز اصلی سه دایره خارج سه دایره واقع است. بنابراین همواره دایره‌ای وجود دارد که بر آن سه دایره عمود باشد پس این سه گزینه جواب نیستند. ولی در گزینهٔ (۱): اگر نقطهٔ تقاطع وتر مشترکهای سه دایره، درون سه دایره قرار گیرد، دایره‌ای وجود ندارد که بر آن سه دایره عمود باشد. یعنی این گزینه جواب خواهد بود. ولی در صورتی که نقطهٔ تقاطع وتر مشترکهای سه دایره خارج سه دایره قرار داشته باشد، دایره‌ای وجود دارد که بر این سه دایره عمود باشد. بنابراین در این حالت این گزینه نیز جواب نیست. به عنوان مثال مرکز اصلی سه دایرهٔ $C_1: (x-6)^2+y^2=37$ و $C_2: (x+6)^2+y^2=37$ و $C_3: x^2+(y+5)^2=4$ که دو به دو متقاطع هستند نقطه $\omega(0, \frac{-11}{5})$ است که خارج هر سه دایره قرار دارد و قوت آن نسبت به هر یک از سه دایره برابر $\frac{96}{25}>0$ است و معادلهٔ دایرهٔ عمود بر سه دایره به صورت $x^2+y^2+\frac{22}{5}y+1=0$ می‌باشد.



۴۲- گزینهٔ (۲) درست است.

زیرا از قراردادن مختصات نقطهٔ $(-2,2)$ در معادلهٔ دسته دایرهٔ داده شده داریم:

$$a(4+4-40)+b(4+4+4)=0 \Rightarrow a=-3b$$

$$\Rightarrow -3b(x^2+y^2-2x)+b(x^2+y^2-2y)\cdot=0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-3x+y=0$$

$$\Rightarrow R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{9+1}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

۴۳- گزینهٔ (۳) درست است.

زیرا در حالت کلی مزدوج دسته دایرهٔ به معادلهٔ $x^2+y^2-2by+p=0$ دسته دایرهٔ به معادلهٔ $x^2+y^2-2ax-p=0$ است.

۴۴- گزینهٔ (۱) جواب است.

بنا به تعریف. (فصل مشترک یک صفحه با سطح مخروطی در

صورتی سهمی است که آن صفحه با یکی از مولدهای سطح مخروطی موازی باشد).

۴۵- گزینهٔ (۳) درست است.

زیرا وقتی نقطهٔ M خارج بیضی نباشد یا روی بیضی است و یا داخل بیضی قرار دارد. در صورتی که نقطهٔ M روی بیضی قرار داشته باشد مجموع فاصله‌اش از دو کانون بیضی برابر $2a$، عدد ثابتِ بیضی است و هنگامی که نقطه داخل بیضی باشد مجموع فاصله‌اش از دو کانون از $2a$ کمتر می‌باشد. بنابراین کافی است از معادلهٔ بیضی داده شده $2a$ را محاسبه کنیم.

$$۳x^۲+۲(y^۲-۳y)=\frac{۱۵}{۲} \Rightarrow ۳x^۲+۲(y-\frac{۳}{۲})^۲=۱۲$$

$$\Rightarrow \frac{x^۲}{۴}+\frac{(y-\frac{۳}{۲})^۲}{۶}=۱ \Rightarrow a^۲=۶ \Rightarrow a=\sqrt{۶}$$

$$\Rightarrow ۲a=۲\sqrt{۶}$$

۴۶- گزینهٔ (۲) درست است.

زیرا همواره فاصلهٔ هر کانون هذلولی از هر یک از خطوط مجانبش برابر b می‌باشد. در این مسئله داریم:

$$۴x^۲-y^۲+۲y=۹ \Rightarrow ۴x^۲-(y-۱)^۲=۸$$

$$\Rightarrow \frac{x^۲}{۲}-\frac{(y-۱)^۲}{۸}=۱ \Rightarrow b^۲=۸$$

$$\Rightarrow b=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$$

۴۷- گزینهٔ (۴) درست است.

زیرا بنا به تعریف، خط هادی سهمی جواب مسئله است و خط هادی سهمی به معادله داده شده، $y=-\frac{۷}{۴}$ است زیرا داریم:

$$۳y=x^۲-۲x-۲ \Rightarrow s(۱,-۱),\ p=\frac{۳}{۲},\ y=\beta-\frac{p}{۲}$$

$$\Rightarrow y=-۱-\frac{۳}{۴}=\frac{-۷}{۴} \Rightarrow y=\frac{-۷}{۴}$$ معادلهٔ خط هادی

۴۸- گزینهٔ (۳) جواب است.

زیرا دایرهٔ اصلی بیضی دایره‌ای است که مرکزش مرکز بیضی و شعاعش برابر a است.

در این مسئله:

$$o_۱(۰,۱),\ a=۲ \Rightarrow x^۲+(y-۱)^۲=۴$$ مرکز بیضی

$$\Rightarrow x^۲+y^۲-۲y-۳=۰$$

۴۹- گزینهٔ (۲) درست است. زیرا:

راه اول:

$$A(-۱,۲,۰),\ D: ۲(x-\frac{۱}{۲})=۳(y+\frac{۵}{۳})=-(z-۷)$$

$$\Rightarrow \frac{x-\frac{۱}{۲}}{۳}=\frac{y+\frac{۵}{۳}}{۲}=\frac{z-۷}{-۶} \Rightarrow (a=۳,b=۲,c=-۶)$$

$$\Rightarrow a(x-x_۱)+b(y-y_۱)+c(z-z_۱)=۰$$

$$\Rightarrow ۳(x+۱)+۲(y-۲)-۶(z-۰)=۰$$

$$\Rightarrow ۳x+۲y-۶z-۱=۰$$

راه دوم: مختصات نقطهٔ A فقط در معادلهٔ صفحهٔ داده شده در گزینهٔ (۲) صدق می‌کند پس این گزینه جواب است.

۵۰- گزینهٔ (۳) درست است. زیرا:

راه اول: مختصات نقاط تقاطع خط و صفحه را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x-۱=\frac{y+۱}{-۲}=\frac{z}{۶}=t \\ \quad \Rightarrow x=t+۱,\ y=-۲t-۱,\ z=۶t \\ ۳x-۲y-z-۶=۰ \\ \quad \Rightarrow ۳(t+۱)-۲(-۲t-۱)-۶t-۶=۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow t=۱ \Rightarrow M(۲,-۳,۶)$$

راه دوم: فقط مختصات نقطهٔ داده شده در گزینهٔ (۳)، هم در معادلهٔ صفحه، و هم در معادلهٔ خط داده شده، صدق می‌کند. پس این گزینه جواب است.

۵۱- گزینهٔ (۱) جواب است زیرا:

$$۳DE=BC \Rightarrow \frac{DE}{BC}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow$$

$$\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow$$

$$\frac{AD}{AB-AD}=\frac{۱}{۳-۱} \Rightarrow \frac{AD}{DB}=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{۱۲}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow AD=۶$$

۵۲- گزینهٔ (۴) درست است. زیرا:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{۲p}{۲p'} \Rightarrow$$

$$\frac{۶}{a'}=\frac{۸}{b'}=\frac{۱۰}{c'}=\frac{۲۴}{۷۲}=\frac{۱}{۳}$$

مثلث داده شده به اضلاع ۶ و ۸ و ۱۰ قائم‌الزاویه است که مساحت آن $S=۲۴cm^۲$ است که چون نسبت تشابه دو مثلث برابر ۳ می‌باشد پس مساحت مثلث مطلوب $۹\times۲۴=۲۱۶$ سانتی‌متر مربع است.

۵۳- گزینهٔ (۱) درست است.

زیرا اگر AH ارتفاع وارد بر وتر BC از مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A}=۹۰^\circ$) باشد داریم:

$$AH^۲=HB.HC \Rightarrow ۳۶=۴/۵\times HC \Rightarrow HC=۸cm$$

$$\Rightarrow BC=a=۴/۵+۸=۱۲/۵cm \Rightarrow$$

$$m_a=\frac{۱۲/۵}{۲}=۶/۲۵$$

۵۴- گزینهٔ (۴) درست است زیرا:

$$a^۲+bc=b^۲+c^۲ \Rightarrow a^۲=b^۲+c^۲-bc \Rightarrow \hat{A}=۶۰^\circ$$

۵۵- گزینهٔ (۱) جواب است. زیرا ۱۴ و ۴۸ و ۵۰ یک دسته عدد فیثاغورسی متناسب با دسته عدد فیثاغورسی ۷ و ۲۴ و ۲۵ است. پس این مثلث قائم‌الزاویه است و در نتیجه بزرگترین زاویهٔ آن ۹۰° است.

۵۶- گزینهٔ (۴) درست است.

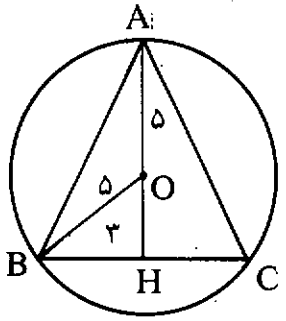
زیرا مثلث OPT قائم‌الزاویه در رأس T است. پس:

$$OT^۲=OH(OH+HP) \Rightarrow ۳۶=x(x+۶/۴)$$

$$\Rightarrow x^۲+۶/۴x-۳۶=۰ \Rightarrow x_۱,x_۲=-۳/۲\pm۶/۸ \Rightarrow x=-۱۰$$

$$x=۳/۶=OH \Rightarrow OF=۳/۶+۶/۴=۱۰ \Rightarrow PT=۸cm$$

۵۷- گزینهٔ (۳) درست است.



زیرا بین مثلثهای مورد نظر مثلثی بیشترین مساحت را دارد که ارتفاعش بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد. و این در صورتی است که مثلث متساوی‌الساقین باشد و رأس A در طرف دیگر مرکز نسبت به قاعدهٔ ثابت BC قرار گیرد. در این صورت داریم:

$$BC=۶ \Rightarrow BH=۳, OB=R=۵ \Rightarrow OH=۴ \Rightarrow AH=$$

$$OH+OA \Rightarrow AH=۴+۵=۹ \Rightarrow S_{ABC}=\frac{۱}{۲}BC\times AH$$

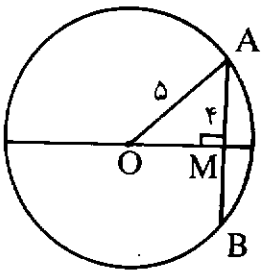
$$=\frac{۱}{۲}\times۶\times۹ \Rightarrow S_{ABC}=۲۷$$

۵۸- گزینهٔ (۴) درست است زیرا:

$$\cos\hat{A}=\frac{۱۲}{۱۳} \Rightarrow \sin\hat{A}=\frac{۵}{۱۳}=\cos\hat{C} \Rightarrow$$

$$\hat{A}+\hat{C}=۹۰^\circ \Rightarrow \hat{B}=۹۰^\circ$$

۵۹ـ گزینهٔ (۱) درست است.



زیرا کوچکترین وتر مرسوم از یک نقطه در یک دایره وتری است که بر قطر گذرنده از آن نقطه عمود باشد. پس:

$$OA=۵\ ,\ AM=\frac{AB}{۲}=\frac{۸}{۲}=۴\Rightarrow OM=۳$$

۶۰ـ گزینهٔ (۱) درست است. زیرا:

$$\Delta: ۲x-y-۴=۰\Rightarrow A(۰,-۴), B(۲,۰), O(۰,۰)$$

$$\Rightarrow G\left(\frac{۲}{۳},\frac{-۴}{۳}\right)\Rightarrow OG=\sqrt{\frac{۴}{۹}+\frac{۱۶}{۹}}=\frac{۲\sqrt{۵}}{۳}$$

۶۱ـ گزینهٔ (۳) درست است. زیرا:

$$\left(-۲\vec{V}_۱\right)\cdot\left(۳\vec{V}_۲\right)=-۶\left(\vec{V}_۱\cdot\vec{V}_۲\right)$$

$$=-۶\left|\vec{V}_۱\right|\left|\vec{V}_۲\right|\cos\left(\vec{V}_۱,\vec{V}_۲\right)$$

$$=-۶(۶)\times(۴)\times\cos ۶۰=-۷۲$$

۶۲ـ گزینهٔ (۱) درست است.

زیرا برای شکل حاصل از دو دایرهٔ متساوی، نقطهٔ وسط خط المرکزین مرکز تقارن است. لذا وترهای AB و $A'B'$ متساوی‌اند، پس نسبت اندازه‌های آنها ۱ است.

۶۳ـ گزینهٔ (۴) درست است.

زیرا مستطیل یک مرکز تقارن و دو محور تقارن دارد.

۶۴ـ گزینهٔ (۲) درست است.

زیرا طبق دستور اولر $F+S=A+۲$ داریم:

تعداد یالها: $F=۲۰, S=۱۲\Rightarrow ۲۰+۱۲=A+۲\Rightarrow A=۳۰$

۶۵ـ گزینهٔ (۳) درست است.

زیرا اگر فقط شعاع قاعده مخروطی را دو برابر کنیم، حجم آن ۴ برابر می‌شود و اگر فقط ارتفاع آن را نصف کنیم، حجم آن نصف می‌شود. پس در این مسئله حجم مخروط حاصل

$۴\times\frac{۱}{۲}=۲$ برابر حجم مخروط اولیه است.

۶۶ـ گزینهٔ (۱) درست است.

زیرا شش برابر حجم این قاچ کروی برابر حجم کره است. چون $۶\times۶۰^\circ=۳۶۰^\circ$. در نتیجه:

$$V=\frac{۴}{۳}\pi R^۳=\frac{۴}{۳}\pi(۳)^۳=۳۶\pi$$

۶۷ـ گزینهٔ (۳) درست است.

زیرا ضلع مکعب محیط بر کره‌ای به شعاع R ، مساوی $a=۲R$ است. پس:

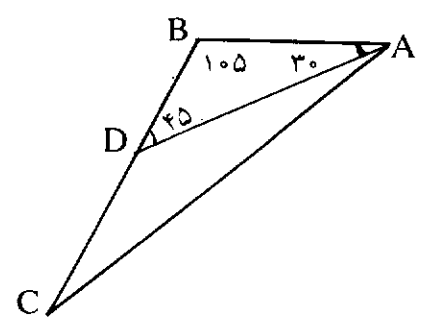
$$\frac{S_{\text{کره}}}{S_{\text{مکعب}}}=\frac{۴\pi R^۲}{۶(۲R)^۲}=\frac{۴\pi R^۲}{۲۴R^۲}=\frac{\pi}{۶}$$

۶۸ـ گزینهٔ (۴) درست است.

زیرا در چهار وجهی منتظم به ضلع a اندازهٔ ارتفاع چهار وجهی $h=\frac{a\sqrt{۶}}{۳}$ است. پس:

$$۲=\frac{a\sqrt{۶}}{۳}\Rightarrow a=\frac{۶}{\sqrt{۶}}=\sqrt{۶}$$

۶۹ـ گزینهٔ (۳) درست است.



زیرا اگر AD نیمساز داخلی زاویه A از مثلث ABC باشد، در مثلث ABD داریم:

$$\hat{B}=۱۰۵^\circ, B\hat{A}D=۳۰^\circ \Rightarrow B\hat{D}A=۴۵^\circ,$$
$$AB=۴(\sqrt{۶}-\sqrt{۲})$$

طبق رابطهٔ سینوسها می‌توان نوشت:

$$\frac{AD}{\sin ۱۰۵}=\frac{AB}{\sin ۴۵}$$
$$\Rightarrow \frac{AD}{\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}}=\frac{۴(\sqrt{۶}-\sqrt{۲})}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}$$
$$\Rightarrow AD=\frac{۸}{\sqrt{۲}}=۴\sqrt{۲}$$

۷۰- گزینهٔ (۳) درست است زیرا:

$$\hat{C}=۶۰^\circ, \hat{A}=۲\hat{B} \Rightarrow \hat{A}+\hat{B}=۱۸۰-۶۰=۱۲۰$$
$$\Rightarrow ۲\hat{B}+\hat{B}=۱۲۰ \Rightarrow \hat{B}=۴۰^\circ, \hat{A}=۸۰^\circ$$
$$\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{\sin\hat{A}}{\sin\hat{B}}=\frac{\sin ۸۰}{\sin ۴۰}=\frac{۲\sin ۴۰\cos ۴۰}{\sin ۴۰}$$
$$=۲\cos ۴۰^\circ$$

پاسخ تشریحی تستهای جبر و مثلثات تجربی

● سید محمد رضا هاشمی موسوی

۱ - گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

$$۳m^۳x - ۲۷x = m^۲ \Rightarrow x = \frac{m^۲}{۳m^۳ - ۲۷},$$

$$۳m^۳ - ۲۷ = ۰ \Rightarrow m^۳ = ۹ \Rightarrow m = \sqrt[۲]{۹}$$

۲ - گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

$$x_۱ + x_۲ = ۱ \quad , \quad x_۱x_۲ = -۱$$

$$\frac{۱}{x_۱^۳} + \frac{۱}{x_۲^۳} = \frac{x_۱^۳ + x_۲^۳}{x_۱^۳x_۲^۳} = \frac{(x_۱ + x_۲)^۳ - ۳x_۱x_۲(x_۱ + x_۲)}{(x_۱x_۲)^۳}$$

$$= \frac{۱ - ۳(-۱)}{(-۱)^۳} = \frac{۴}{-۱} = -۴$$

۳ - گزینهٔ (۱) صحیح است زیرا:

کسری مساوی صفر است که صورتش صفر باشد و ریشه‌های صورت یک معادله کسری نباید مخرج را صفر کنند.

$$\begin{cases} (x^۴ - x^۲)(x^۳ + ۱)(x^۲ - ۳x + ۲) = ۰ \\ (x^۳ + ۲x^۲)(x^۲ - ۱)^۲ \neq ۰ \end{cases}$$

$$x^۴ - x^۲ = ۰ \Rightarrow x^۲(x^۲ - ۱) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x^۲ = ۰ & \Rightarrow & x = ۰ \\ x^۲ - ۱ = ۰ & \Rightarrow & x = \pm ۱ \end{vmatrix}$$

$$x^۳ + ۱ = ۰ \Rightarrow x^۳ = -۱ \Rightarrow x = -۱$$

$$x^۲ - ۳x + ۲ = ۰ \Rightarrow (x - ۱)(x - ۲) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x - ۱ = ۰ & \Rightarrow & x = ۱ \\ x - ۲ = ۰ & \Rightarrow & x = ۲ \end{vmatrix}$$

پس از جایگزینی ریشه‌ها در مخرج کسر، فقط ریشهٔ $x = ۲$ مورد قبول قرار می‌گیرد.

۴ - گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا:

برای آنکه دو معادلهٔ

$$a'x^۲ + b'x + c' = ۰ \quad \text{و} \quad ax^۲ + bx + c = ۰$$

ریشه مشترک داشته باشند باید داشته باشیم:

$$(ab' - a'b)(bc' - b'c) = (ac' - a'c)^۲$$

پس خواهیم داشت:

$$x(x^۲ + mx + ۱) = ۰ \quad \text{و} \quad x(x^۲ + x + m) = ۰$$

و در نتیجه برای به‌دست آوردن شرط ریشهٔ مشترک غیر صفر می‌توان نوشت: $(x \neq ۰)$

$$x^۲ + mx + ۱ = ۰ \quad \text{و} \quad x^۲ + x + m = ۰ \Rightarrow$$

$$(۱ - m)(m^۲ - ۱) = (m - ۱)^۲$$

$$(m - ۱)^۲ + (m - ۱)(m^۲ - ۱) = ۰ \Rightarrow$$

$$(m - ۱)^۲(۱ + m + ۱) = ۰ \Rightarrow$$

$$(m - ۱)^۲(m + ۲) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} m = ۱ \\ \text{یا} \\ m = -۲ \end{vmatrix}$$

۵ - گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا:

اگر ریشه‌های معادلهٔ مطلوب را به $y_۱$ و $y_۲$ نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} y_۱ = x_۱^۳ \\ y_۲ = x_۲^۳ \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y_۱ + y_۲ = x_۱^۳ + x_۲^۳ = (x_۱ + x_۲)^۳ - ۳x_۱x_۲(x_۱ + x_۲) \\ y_۱y_۲ = x_۱^۳x_۲^۳ = (x_۱x_۲)^۳ \end{cases}$$

و از معادلهٔ $x^۲ - ۳x + ۱ = ۰$ نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} x_۱+x_۲=۳ \\ x_۱x_۲=۱ \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y_۱+y_۲=۳^۳-۳\times۱\times۳=۲۷-۹=۱۸ \Rightarrow S=۱۸ \\ y_۱y_۲=۱^۳=۱ \Rightarrow P=۱ \end{cases}$$

$x^۲ - Sx + P = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۱۸x + ۱ = ۰$
(معادلهٔ مطلوب)

۶- گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

$$m^۲x+۲(m+x)+۱=۳mx$$
$$\Rightarrow (m^۲+۲-۳m)x=-۲m-۱$$
$$x=\frac{-(۲m+۱)}{m^۲-۳m+۲} \Rightarrow m^۲-۳m+۲=۰$$
$$\xrightarrow[\text{(نامعین است)}]{x} (m-۱)(m-۲)=۰ \Rightarrow \begin{vmatrix} m=۱ \\ \text{یا} \\ m=۲ \end{vmatrix}$$

۷- گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا:
طرف چپ معادله فوق همواره مثبت است و تنها وقتی صفر می‌شود که هریک از عبارتهای با توان زوج برابر صفر شوند.
یعنی:

$$\begin{cases} x^{۶۹}-x=۰ \Rightarrow x(x^{۶۸}-۱)=۰ \\ \Rightarrow \begin{vmatrix} x=۰ \\ \text{یا} \\ x^{۶۸}-۱=۰ \Rightarrow x^{۶۸}=۱ \Rightarrow x=\pm۱ \end{vmatrix} \\ x^{۷۱}-x=۰ \Rightarrow x(x^{۷۰}-۱)=۰ \\ \Rightarrow \begin{vmatrix} x=۰ \\ \text{یا} \\ x^{۷۰}-۱=۰ \Rightarrow x^{۷۰}=۱ \Rightarrow x=\pm۱ \end{vmatrix} \\ x^۳+۳x^۲+۲x=۰ \Rightarrow x(x^۲+۳x+۲)=۰ \\ \Rightarrow \begin{vmatrix} x=۰ \\ \text{یا} \\ x^۲+۳x+۲=۰ \Rightarrow \begin{vmatrix} x=-۱ \\ \text{یا} \\ x=-۲ \end{vmatrix} \end{vmatrix} \end{cases}$$

چون $x=۰$ و $x=-۱$ در هر سه معادله صدق می‌کند بنابراین معادله تنها دو ریشه حقیقی دارد.

۸- گزینهٔ (۱) صحیح است زیرا:
ابتدا ریشهٔ معادله را گویا می‌کنیم یعنی:

$$\frac{۱}{\sqrt{۳-۲\sqrt{۲}}}\times\frac{\sqrt{۳+۲\sqrt{۲}}}{\sqrt{۳+۲\sqrt{۲}}}=\frac{\sqrt{۳+۲\sqrt{۲}}}{\sqrt{۹-۸}}$$

سپس رادیکال مرکب را ساده می‌کنیم:

$$x_۱=\frac{۱}{\sqrt{۳-۲\sqrt{۲}}}=\sqrt{۳+۲\sqrt{۲}}=\sqrt{۱+۲+۲\sqrt{۲}}$$
$$=\sqrt{(۱+\sqrt{۲})^۲}=۱+\sqrt{۲}$$

بنابراین چون معادله با ضرایب گویا است پس باید مجموع ریشه‌ها مقداری گویا باشد، و این وقتی ممکن است که ریشهٔ دیگر مزدوج ظاهر شود یعنی $x_۲=۱-\sqrt{۲}$ و یا $x_۲=\frac{-۱}{۱+\sqrt{۲}}$

۹- گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:
معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ وقتی ریشهٔ حقیقی دارد که: $\Delta=b^۲-۴ac \geq ۰$ یا $\Delta'=b'^۲-ac \geq ۰$ $(b'=\frac{b}{۲})$. پس برای معادلهٔ

$$(m + ۱)x^۲ - ۲(m - ۱)x + m = ۰$$

داریم: $\Delta' = (m - ۱)^۲ - m(m + ۱) \geq ۰$

$$(m -۱)^۲ - m (m + ۱) \geq ۰$$
$$\Rightarrow m^۲ - ۲m + ۱ - m^۲ - m \geq ۰ \Rightarrow -۳m \geq -۱$$
$$\Rightarrow m \leq \frac{۱}{۳}$$

۱۰- گزینهٔ (۳) صحیح است زیرا:
همواره قدر مطلق ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ چنین است:

$$|x_۲-x_۱| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \qquad (\Delta=b^۲-۴ac)$$

پس برای معادله $۲x^۲ - mx + ۳ = ۰$ خواهیم داشت:

$$|x_۲-x_۱| = \frac{\sqrt{m^۲-۲۴}}{۲} = \frac{۵}{۲} \Rightarrow m^۲-۲۴=۲۵$$
$$\Rightarrow m^۲=۴۹$$
$$\Rightarrow m=\pm ۷$$

۱۱ - گزینه (۳) صحیح است زیرا:

معادله درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ وقتی ریشهٔ حقیقی ندارد که:

$$\Delta=b^۲-۴ac<۰ \quad \text{یا} \quad \Delta'=b'^۲-ac<۰ \quad (b'=\frac{b}{۲})$$

پس برای معادلهٔ $x^۲ + ۶mx + ۱ = ۰$ خواهیم داشت:

$$\Delta'=(۳m)^۲-۱<۰ \Rightarrow (۳m)^۲<۱$$
$$\Rightarrow -۱<۳m<۱ \Rightarrow \frac{-۱}{۳}<m<\frac{۱}{۳}$$

۱۲ - گزینهٔ (۱) صحیح است زیرا:

اگر طول و عرض مستطیل را به ترتیب به x و y نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x^۲+y^۲=۱۰۰ \\ ۲(x+y)=۲۸ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+y)^۲-۲xy=۱۰۰ \\ x+y=۱۴ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۱۴^۲-۲xy=۱۰۰ \\ x+y=۱۴ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=۱۴ \\ xy=\frac{۱۹۶-۱۰۰}{۲}=\frac{۹۶}{۲}=۴۸ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=۱۴ \\ xy=۴۸ \end{cases} \Rightarrow z^۲-۱۴z+۴۸=۰$$

$$\Rightarrow (z-۶)(z-۸)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x=۸ \\ y=۶ \end{vmatrix} \overset{\text{عرض}}{\overset{\text{طول}}{\Rightarrow}} |x-y| = |۸-۶| = ۲$$

۱۳ - گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

اگر اعداد متوالی را به $x - ۱$ و x و $x + ۱$ نمایش دهیم، بنابراین خواهیم داشت:

$$(x-۱)x(x+۱) = (x-۱) + x + (x+۱) \Rightarrow$$
$$x(x^۲-۱) = ۳x$$
$$x(x^۲-۱) - ۳x = ۰ \Rightarrow x(x^۲-۱-۳) = ۰ \Rightarrow$$
$$x(x^۲-۴) = ۰$$
$$x = ۰ \quad \text{یا} \quad x^۲-۴=۰ \Rightarrow x^۲=۴ \Rightarrow x=\pm ۲$$

چون سه عدد طبیعی هستند پس تنها جواب $x = ۲$ قابل قبول است و سه عدد عبارتند از: ۱ و ۲ و ۳ و در نتیجه مجموع مربعات آنان چنین است:

$$۳^۲ + ۲^۲ + ۱^۲ = ۹ + ۴ + ۱ = ۱۴$$

۱۴ - گزینه (۳) صحیح است، زیرا:

مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - m^۲x + ۱ = ۰$ برابرند با:

$$\begin{cases} x'+x''=m^۲ \\ x'x''=۱ \end{cases}$$

از طرفی ریشه‌های معادله چنین می‌باشند:

$$x'=\sin\alpha \quad \text{و} \quad x''=\cos\alpha$$

پس خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \sin\alpha+\cos\alpha=m^۲ \\ \sin\alpha\cos\alpha=۱ \end{cases} \quad (۰<\alpha<\frac{\pi}{۲})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha+۲\sin\alpha\cos\alpha=m^۴ \\ \sin\alpha\cos\alpha=۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۱+۲\times ۱=m^۴ \\ \sin\alpha\cos\alpha=۱ \end{cases} \Rightarrow m^۴=۳ \Rightarrow m=\pm\sqrt[۴]{۳}$$

۱۵ - گزینه (۳) صحیح است، زیرا:

از روابط بین ریشه‌ها و ضرایب معادلهٔ $x^۲-\sqrt{۲}x-\sqrt{۵}=۰$ داریم:

$$\begin{cases} x'+x''=\sqrt{۲} \\ x'x''=-\sqrt{۵} \end{cases} , \quad x'=\log a \quad , \quad x''=\log b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log a+\log b=\sqrt{۲} \\ \log a \log b=-\sqrt{۵} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log ab=\sqrt{۲} \\ \log a \log b=-\sqrt{۵} \end{cases}$$

$$\log^{۴} a \log^{۴} b \log^{۲} ab=(\log a \log b)^{۴} \log^{۲} ab$$

$$=(-\sqrt{۵})^{۴}(\sqrt{۲})^{۲}=۵۰$$

۱۶- گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$(۸x^{۱۶}-۸)(۱۶-۱۶x^{۸})=۸\times۱۶(x^{۱۶}-۱)(۱-x^{۸})$$

$$=۱۲۸(x^{۸}-۱)(x^{۸}+۱)(۱-x^{۸})\geq ۰$$

$$-۱۲۸(x^{۸}+۱)(x^{۸}-۱)^{۲}\geq ۰ \Rightarrow ۱۲۸(x^{۸}+۱)(x^{۸}-۱)^{۲}\leq ۰$$

نامعادله فقط در حالت $x^{۲}-۱=۰$ برقرار است، پس داریم:

$$x^{۲}-۱=۰ \Rightarrow x^{۲}=۱ \Rightarrow x=\pm ۱$$

۱۷- گزینه (۱) صحیح است، زیرا:

$$\begin{cases} -۹x^{۲}-۱۲x<۳ \\ \quad \Rightarrow ۹x^{۲}+۱۲x+۳>۰ \Rightarrow ۳x^{۲}+۴x+۱>۰ \\ ۴x^{۲}-۱۲x>۰ \\ \quad \Rightarrow x^{۲}-۳x>۰ \Rightarrow x(x-۱)>۰ \\ -۱<x<۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (۳x+۱)(x+۱)>۰ \\ x(x-۳)>۰ \\ -۱<x<۳ \end{cases}$$

$$۳x+۱=۰ \Rightarrow x=\frac{-۱}{۳}$$

$$x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱$$

$$x=۰ \ , \ x-۳=۰ \Rightarrow x=۳$$

x	$-\infty$	-۱	$\frac{-۱}{۳}$	۰	۳	$+\infty$
$(x+۱)(۳x+۱)$	+	۰ −	۰ +	+	+	
$x(x-۳)$	+	+	+	۰ −	۰ +	
			جواب			

$$\frac{-۱}{۳}<x<۰$$

۱۸- گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

از رابطهٔ $\log_b^a=\frac{\log a}{\log b}$ نتیجه می‌شود:

$$\log_{۴}(۱-x^{۲})=\frac{\log(۱-x^{۲})}{\log ۴}$$

$$\Rightarrow \frac{\log(۱-x^{۲})}{۲\log ۲}\geq\frac{-۱}{۲} \Rightarrow \log(۱-x^{۲})\geq -\log ۲$$

$$\Rightarrow \log(۱-x^{۲})\geq \log\frac{۱}{۲}$$

$$۱-x^{۲}\geq\frac{۱}{۲} \Rightarrow x^{۲}\leq\frac{۱}{۲} \Rightarrow -\frac{\sqrt{۲}}{۲}\leq x\leq\frac{\sqrt{۲}}{۲} \quad \text{یا}$$

$$|x|\leq\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۱۹- گزینه (۴)صحیح است، زیرا:

$$\begin{cases} x^{۲}-۳>۰ \\ \log\sqrt{x^{۲}-۳}\geq ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^{۲}>۳ \\ \sqrt{x^{۲}-۳}\geq ۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x>\sqrt{۳} \quad \text{یا} \quad x<-\sqrt{۳} \\ x^{۲}-۳\geq ۱ \Rightarrow x^{۲}\geq ۴ \Rightarrow x\geq ۲ \text{ یا } x\leq -۲ \end{cases}$$

۲۰- گزینه (۳) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt[۸]{\sqrt[۵]{\sqrt[۲]{x^{۵}-۳۲}}}=\sqrt[۲]{\sqrt[۵]{\sqrt[۸]{x^{۵}-۳۲}}} \Rightarrow$$

$$x^{۵}-۳۲\geq ۰ \Rightarrow x^{۵}\geq ۳۲ \Rightarrow x\geq ۲$$

۲۱ - گزینه (۲) صحیح است، زیرا:

$$\frac{۲^{n+۳}}{۴^{n+۱}-۱۲}=\frac{۱۶}{۶۱} \Rightarrow ۶۱\times۲^{n+۳}=۱۶(۴^{n+۱}-۱۲)$$

$$\Rightarrow \quad ۸\times۶۱\times۲^{n}=۱۶\times۴\times۲^{۲n}-۱۶\times۱۲$$

$$۶۴\times۲^{۲n}-۴۸۸\times۲^{n}-۱۹۲=۰ \Rightarrow$$

(فقط ریشهٔ مثبت قابل قبول است)

$$۲^{n}=\frac{۲۴۴\pm\sqrt{۲۴۴^{۲}+۶۴\times۱۹۲}}{۶۴}$$

$$\Rightarrow ۲^{n}=\frac{۲۴۴+\sqrt{۷۱۸۲۴}}{۶۴}=\frac{۲۴۴+۲۶۸}{۶۴}=\frac{۵۱۲}{۶۴}=۸$$

$$\Rightarrow ۲^{n}=۸ \Rightarrow ۲^{n}=۲^{۳} \Rightarrow n=۳$$

۲۲ - گزینه (۳) صحیح است، زیرا:

$$a_n=a_۱+(n-۱)\,d$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n=۵: & a_۵=a_۱+۴d=۲۳ \\ n=۸: & a_۸=a_۱+۷d=۳۸ \end{cases} \Rightarrow$$

$$۷d-۴d=۳۸-۲۳$$

$$۳d=۱۵$$

$$d=۵$$

$$a_۱=۲۳-۴d=۲۳-۴\times۵=۲۳-۲۰=۳ \quad ,$$

$$a_۲=۳+(۳-۱)\times۵=۱۳$$

۲۳ - گزینه (۳) صحیح است، زیرا:

$$a_{۱۰}+a_{۱۷}=۳n+۵m$$

$$a_k+a_s=۲n+۳m+n+۲m$$

$$=۳n+۵m \quad (a_s=n+۲m\ ,\ a_k=۲n+۳m)$$

پس داریم: $a_{۱۰}+a_{۱۷}=a_k+a_s$ و می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} a_k=a_{۱۰} \\ a_s=a_{۱۷} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲n+۳m=۱۷ \\ n+۲m=۱۰ \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} n=۴ \\ m=۳ \end{cases} \Rightarrow \quad m+n=۷$$

یا

$$\begin{cases} a_k=a_{۱۷} \\ a_s=a_{۱۰} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲n+۳m=۱۰ \\ n+۲m=۱۷ \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} n=۲۴ \\ m=-۳۱ \end{cases} \Rightarrow \quad m+n=-۷$$

۲۴ - گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$S_n=۳\log_n^{\left(\frac{۱}{n^{۲}}\right)^{n}}+۶n^{۲}=۳n\log_n n^{-۳}+۶n^{۲}=$$

$$-۹n+۶n^{۲}=\frac{n}{۲}\left[۲a_۱+(n-۱)d\right]$$

$$S_n=\left(a_۱-\frac{d}{۲}\right)n+\frac{d}{۲}n^{۲}$$

از قیاس $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{d}{۲}=۶ \quad \Rightarrow \quad d=۱۲ \\ a_۱-\frac{d}{۲}=-۹ \quad \Rightarrow \quad a_۱=-۹+۶=-۳ \end{cases}$$

۲۵ - گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$a_n=\frac{۱}{۳^{n-۲}}$$

$$a_۱=\frac{۱}{۳^{۱-۲}}=۳ \quad , \quad a_۲=\frac{۱}{۳^{۲-۲}}=\frac{۱}{۱}=۱ \quad \Rightarrow$$

$$r=\frac{a_۲}{a_۱}=\frac{۱}{۳} \quad , \quad S=\frac{a_۱}{۱-r}=\frac{۳}{۱-\frac{۱}{۳}}=\frac{۳}{\frac{۲}{۳}}=\frac{۹}{۲}$$

۲۶ - گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$a_n=a_۱r^{n-۱} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} n=۴ & : a_۴=a_۱r^{۳}=۲۴ \\ n=۷ & : a_۷=a_۱r^{۶}=۱۹۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a_۷}{a_۴}=\frac{r^۶}{r^۳}=\frac{۱۹۲}{۲۴}$$

$r^۳=۸ \Rightarrow r=۲$, $a_۱r^۳=۲۴$

$$\Rightarrow a_۱=\frac{۲۴}{r^۳}=\frac{۲۴}{۸}=۳$$

$a_۲=۳\times۲=۶$ (جملهٔ دوم)

۲۷- گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$(۲k-۱)(۲k+۱)=۴۸۳ \Rightarrow ۴k^۲-۱=۴۸۳$

$\Rightarrow k^۲=۱۲۱ \Rightarrow$

$k=۱۱, ۲k-۱=۲(۱۱)-۱=۲۱ \Rightarrow ۲۱, ۲۳, ۲۵$

۲۸- گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$\log\sqrt[۵]{۵}=\frac{۱}{۵}\log۵=\frac{۱}{۵}\log\frac{۱۰}{۲}=$$

$$\frac{۱}{۵}(\log۱۰-\log۲)=\frac{۱}{۵}(۱-۰/۳۰۱)=\frac{۰/۶۹۹}{۵}$$

$$\frac{۰/۶۹۹\times۲}{۵\times۲}=\frac{۱/۳۹۸}{۱۰}=۰/۱۳۹۸$$

۲۹- گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا: $(\log۳=k)$

$$\log\sqrt[۲k]{۹۰۰}=\frac{۱}{۲k}\log۹۰۰=\frac{۱}{۲k}(\log۹+\log۱۰۰)$$

$$=\frac{۱}{۲k}(۲\log۳+۲)=\frac{k+۱}{k}=۱+\frac{۱}{k}$$

۳۰- گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$۳\log x^۲=۲\log۳ \Rightarrow \log x^۶=\log۹$

$\Rightarrow x^۶=۹ \Rightarrow x^۳=\pm۳ \Rightarrow x=\pm\sqrt[۳]{۳} \Rightarrow |x|=\sqrt[۳]{۳}$

۳۱- گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$\log۹^۹=۹\log۹=۱۸\log۳=۱۸(۰/۴۷)=۸/۵۸۶$

(تعداد ارقام عدد = منفی + ۱)۹ = ۸ + ۱ = تعداد ارقام عدد $۹^۹$

۳۲- گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$\log_۲\sqrt{۲\sqrt{۲\sqrt{۲\sqrt{۲}}}}=\log_۲\sqrt{\sqrt{۸\sqrt{\sqrt{۸}}}}=$$

$$\log_۲\sqrt[۴]{۸\sqrt[۴]{۸}}=\log_۲\sqrt[۴]{۲\sqrt[۴]{۸^۵}}=\log_۲\sqrt[۱۶]{۲^{۱۵}}=$$

$$\log_{۲^۴}^{\frac{۱۵}{۱۶}}=\frac{۱۵}{۱۶}\log_{۲^۴}^{۲}=\frac{۱۵}{۱۶}$$

۳۳- گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$۴^{۳+۶+۹+\ldots+۳x}=۶۴ \Rightarrow ۴^{۳(۱+۲+\ldots+x)}=۴^۳$

$۳(۱+۲+\ldots+x)=۳ \Rightarrow ۱+۲+۳+\ldots+x=۱$

$$\frac{x(x+۱)}{۲}=۱ \Rightarrow x^۲+x-۲=۰ \Rightarrow$$

$(x-۱)(x+۲)=۰ \Rightarrow x=۱$

۳۴- گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$a^{\log x}=x^{\log a} \Rightarrow ۲^{\log x}=x^{\log ۲}$,

$۲^{\log x}+۲^{\log x}=۲$

$۲\times۲^{\log x}=۲ \Rightarrow ۲^{\log x}=۱ \Rightarrow$

$\log x=۰ \Rightarrow x=۱$

۳۵- گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt[۶]{\log\sqrt[۴]{(x^۲-۹)^۲}}=\sqrt[۳]{|\log\sqrt{|x^۲-۹|}|}$$

$\Rightarrow x^۲-۹=۰ \Rightarrow x=\pm۳$

۳۶- گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

اگر زاویهٔ مطلوب را برحسب درجه به D نمایش دهیم داریم:

$$G = ۱۰ + D$$

$$\frac{G}{۱۰} = \frac{D}{۹} \Rightarrow \frac{D}{۹} = \frac{۱۰+D}{۱۰} \Rightarrow$$

$$۱۰D = ۹۰ + ۹D \Rightarrow D = ۹۰^{g} = \frac{۹۰^{\circ}}{۲}$$

۳۷- گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

زاویهٔ بین عقربهٔ ساعت شمار و دقیقه شمار چنین است:

$$\alpha = |۵/۵M - ۳۰h|$$

(با فرض h ساعت و M دقیقه) در نتیجه داریم:

$$\alpha = |۵/۵ \times ۴۰ - ۳۰ \times ۶|$$

$$\alpha = |۲۲۰ - ۱۸۰| = ۴۰ \Rightarrow \alpha = ۴۰^{\circ}$$

۳۸- گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا: $\left(۰ < x < \frac{\pi}{۴}\right)$

$$\frac{۱+\cos ۲x}{\sin ۲x} = \frac{\sin ۲x}{۱-\cos ۲x} \Rightarrow$$

$$۵\left(\frac{۱+\cos ۲x}{\sin ۲x}\right)^{۵} + ۳\left(\frac{۱+\cos ۲x}{\sin ۲x}\right)^{۵} = \frac{۱}{۴}$$

$$۸\left(\frac{۱+\cos ۲x}{\sin ۲x}\right)^{۵} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow$$

$$\frac{۱+\cos ۲x}{\sin ۲x} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \sin ۲x = ۲ + ۲\cos ۲x$$

۳۹- گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا: $\left(۰ < x < \frac{\pi}{۲}\right)$

$$\left(\sqrt{\frac{۱-\cos x}{\sin^{۲} x}} + \sqrt{\frac{۱+\cos x}{(۱+\cos x)^{۲}}}\right)\sqrt{۱+\cos x} =$$

$$\left(\sqrt{\frac{۱-\cos x}{۱-\cos^{۲} x}} + \sqrt{\frac{۱}{۱+\cos x}}\right)\sqrt{۱+\cos x} =$$

$$\left(\sqrt{\frac{۱}{۱+\cos x}} + \sqrt{\frac{۱}{۱+\cos x}}\right)\sqrt{۱+\cos x} =$$

$$\left(\frac{۱}{\sqrt{۱+\cos x}} + \frac{۱}{\sqrt{۱+\cos x}}\right)\sqrt{۱+\cos x} = ۲$$

۴۰- گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا: $\left(۰ < x < \frac{\pi}{۲}\right)$

$$\left(\frac{۱+\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{۱+\sin x}\right)\sqrt{۱-\sin^{۲} x} =$$

$$\left(\frac{(۱+\sin x)^{۲} + \cos^{۲} x}{\cos x\,(۱+\sin x)}\right)\,|\cos x|$$

با توجه به شرط $۰ < x < \frac{\pi}{۲}$ داریم:

$$= \left(\frac{۱+\sin^{۲} x + \cos^{۲} x + ۲\sin x}{\cos x\,(۱+\sin x)}\right)\cos x$$

$$= \frac{۲+۲\sin x}{۱+\sin x} = ۲$$

۴۱- گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$\tan ۴nx \cot ۳x = ۱ \Rightarrow \frac{\tan ۴nx}{\tan ۳x} = ۱ \Rightarrow$$

$$\tan ۴nx = \tan ۳x$$

$$۴nx = K\pi + ۳x \Rightarrow (۴n-۳)x = K\pi \Rightarrow$$

$$x = \frac{K\pi}{۴n-۳} \xrightarrow{x \text{ نا معین}} ۴n-۳ = ۰ \Rightarrow n = \frac{۳}{۴}$$

۴۲- گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا: $\left(۰ < x < \frac{\pi}{۲}\right)$

$$\left(\sqrt{\frac{۱-\cos x}{۱+\cos x}} + \sqrt{\frac{۱+\cos x}{۱-\cos x}}\right)\sin x$$

$$= \left(\sqrt{\frac{(1-\cos x)^2}{1-\cos^2 x}} + \sqrt{\frac{(1+\cos x)^2}{1-\cos^2 x}} \right) \sin x$$

$$= \left(\frac{|1-\cos x|}{|\sin x|} + \frac{|1+\cos x|}{|\sin x|} \right) \sin x$$

با توجه به شرط $0 < x < \frac{\pi}{2}$ داریم:

$$= \left(\frac{1-\cos x+1+\cos x}{\sin x} \right) \sin x = 2$$

۴۳- گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

طرف اول همواره مثبت است و تنها وقتی صفر می‌شود که هر یک از عبارات برابر صفر باشند:

$$\begin{cases} \sin^{72} x = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = K\pi \\ \sqrt{\sin x} = 0 \end{cases}$$

و در نتیجه مجموعهٔ جواب معادله چنین است:

$$\{ x \mid x = K\pi \}$$

۴۴- گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا: $(\pi < x < \frac{3\pi}{2})$

$$3\cos nx + 2 = 0 \Rightarrow \cos nx = \frac{-2}{3}$$

با توجه به شرط $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ داریم:

$$\sin nx = \pm\sqrt{1-\cos^2 nx}$$

$$\sin nx = -\sqrt{1-\left(\frac{-2}{3}\right)^2} = -\sqrt{1-\frac{4}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

۴۵- گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$\tg x \cdot \cotg x = 1 \quad , \quad \tg x = \frac{(b^2+1)(5a^2+5)}{a^2+b} \quad ,$$

$$\cotg x = \frac{a^3+ab}{10b^2+10}$$

$$\frac{(b^2+1)(5a^2+5)}{a^2+b} \cdot \frac{a^3+ab}{10b^2+10} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{5(b^2+1)(a^2+1)}{a^2+b} \cdot \frac{a(a^2+b)}{10(b^2+1)} = 1$$

پس از اختصار لازم داریم:

$$a(a^2+1) = 2 \Rightarrow a^3+a-2=0 \Rightarrow$$

$$(a-1)(a^2+a+2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-1=0 \Rightarrow a=1 \\ \text{یا} \\ a^2+a+2=0 \end{cases}$$ ریشهٔ حقیقی ندارد.

۴۶- گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$12 \operatorname{Arcsin} \sqrt[5]{x} = 2\pi \Rightarrow \operatorname{Arcsin} \sqrt[5]{x} = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \sqrt[5]{x} = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\sqrt[5]{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{32}$$

۴۷- گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$\frac{5\cotg 225^\circ + \cos 240^\circ + 2\sin 330^\circ + 4\tg 135^\circ}{10\tg 225^\circ + \cos 450^\circ - \cotg 135^\circ + 20\sin 210^\circ}$$

$$= \frac{5\cotg 45^\circ - \cos 60^\circ - 2\sin 30^\circ - 4\tg 45^\circ}{10\tg 45^\circ + \cos 90^\circ + \cotg 45^\circ - 20\sin 30^\circ}$$

$$= \frac{5-\frac{1}{2}-1-4}{10+0+1-10} = \frac{-1}{2}$$

۴۸- گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$\log \tg 45^\circ = \log 1 = 0$$

پس صورت کسر صفر است:

$$\log \text{tg}\,۱^\circ \times \log \text{tg}\,۲^\circ \times \cdots \times \log \text{tg}\,۴۵^\circ \times \cdots \times \log \text{tg}\,۸۹^\circ = ۰$$

مخرج کسر مخالف صفر است و داریم:

$$\log ۲ + \log \cos ۶۰^\circ = \log ۲ \cos ۶۰^\circ = \log ۱ = ۰$$

۴۹- گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$\sin x + \cos x = m \qquad (۱)$$

$$\Rightarrow \sin^۲ x + \cos^۲ x + ۲\sin x \cos x = m^۲$$

$$\Rightarrow ۱ + ۲\sin x \cos x = m^۲$$

$$\Rightarrow \sin x \cos x = \frac{m^۲ - ۱}{۲} \qquad (۲)$$

از تقسیم رابطهٔ (۱) بر (۲) داریم:

$$\frac{m}{\frac{m^۲-۱}{۲}} = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin x}{\sin x \cos x} + \frac{\cos x}{\sin x \cos x}$$

$$= \frac{۱}{\cos x} + \frac{۱}{\sin x} \Rightarrow \frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos x} = \frac{۲m}{m^۲ - ۱}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{\sin x} + \frac{۱}{\cos x} = \frac{۲m}{m^۲-۱} \Rightarrow m^۲ - ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow m^۲ = ۱ \Rightarrow m = \pm ۱$$

۵۰- گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا: $(۰ < x, y < ۲\pi)$

طرف دوم برابر ۲ است. پس طرف اول نیز باید برابر ۲ باشد و این با توجه به حدود سینوس و کسینوس وقتی ممکن است که داشته باشیم: $\sin(x - ۲y) = ۱ , \cos(۲x + y) = ۱$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - ۲y = \frac{\pi}{۲} \\ ۲x + y = ۰ \end{cases} \times ۲ \Rightarrow \begin{cases} x - ۲y = \frac{\pi}{۲} \\ ۴x + ۲y = ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۵x = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{\pi}{۱۰} , y = \frac{-\pi}{۵}$$

$$\Rightarrow x + y = \frac{\pi}{۱۰} - \frac{\pi}{۵} = \frac{-\pi}{۱۰}$$

۵۱- گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$\sin^۴ x + \cos^۴ x = ۱ - ۲\sin^۲ x \cos^۲ x$$

$$۱ + \sin^۴ x + \cos^۴ x =$$

$$\sin^۲ x - ۲\sin^۲ x \cos^۲ x + \cos^۲ x =$$

$$\sin^۲ x + \cos^۲ x - ۲\sin^۲ x \cos^۲ x$$

$$۱ + ۱ - ۲\sin^۲ x \cos^۲ x = ۱ - ۲\sin^۲ x \cos^۲ x \Rightarrow$$

$۱ = ۰$ غیرممکن

معادله جواب ندارد. زیرا معادل یک تساوی غیر ممکن است.

۵۲- گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

طبق قضیه شال داریم: $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$

$$\frac{\overline{AB} - \overline{CB} + \overline{AC}}{\overline{BC} - \overline{BA}} = \frac{\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}}{\overline{BC} + \overline{AB}} =$$

$$\frac{\overline{AC} + \overline{AC}}{\overline{AB} + \overline{BC}} = \frac{۲\overline{AC}}{\overline{AC}} = ۲ \qquad (x_A \neq x_C \text{ با توجه به فرض:})$$

۵۳- گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$x_B = \frac{x_A + x_C}{۲}$$

$$x_A + x_C = ۲x_B \Rightarrow ۲m + ۱ + ۴ = ۲(۶m - ۲)$$

$$\Rightarrow ۲m + ۵ = ۱۲m - ۴$$

$$۱۰m = ۹ \Rightarrow m = \frac{۹}{۱۰}$$

۵۴- گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

معادلهٔ نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم چنین است: $y = -x$

پس مختصات نقطهٔ A باید در معادلهٔ اخیر صدق کند:

$$۲m - ۱ = -(۴m - ۱)$$

$$۲m - ۱ = -۴m + ۱ \Rightarrow ۶m = ۲ \Rightarrow$$

$$m = \frac{۲}{۶} \Rightarrow m = \frac{۱}{۳}$$

۵۵- گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:
برای متوازی‌الاضلاع ABCD داریم:

$$\begin{cases} x_A+x_C=x_B+x_D \\ y_A+y_C=y_B+y_D \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-2+b-1=3a+1+2a+1 \\ a-1+b=2a-3+b-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a-b=-5 \\ a=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=17 \\ a=3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a-b=3-17=-14$$

۵۶- گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:
مختصات مرکز ثقل مثلث (G) چنین است:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \; x_G = -2, \; y_G = 1$$

$$-2 = \frac{m - 1 + 2 + 3}{3} \Rightarrow m + 4 = -6 \Rightarrow m = -10$$

$$1 = \frac{m - n - 1 + 2}{3} \Rightarrow m - n + 1 = 3 \Rightarrow$$

$$m - n = 2$$

$$-10 - n = 2 \Rightarrow n = -12 \;, \; m + n = -22$$

۵۷- گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$$

$$=\sqrt{(2m-1-2)^2+(2-2m)^2}=5$$

$$(2m-3)^2+(2-2m)^2=25 \Rightarrow$$

$$4m^2-12m+9+4m^2-8m+4=25 \Rightarrow$$

$$8m^2-20m-12=0 \Rightarrow 2m^2-5m-3=0$$

$$\Rightarrow m=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{4}$$

$$m=\frac{5\pm7}{4} \Rightarrow \left| \begin{matrix} m=3 \\ \text{یا} \\ m=\frac{-1}{2} \end{matrix} \right.$$

۵۸- گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:
اگر a یک ضلع مربع و R، قطر مربع باشد داریم:

$$2a^2=R^2$$

$$R^2=(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2=$$

$$(1 + 2)^2 + (3 - 7)^2 = 9 + 16=25$$

$$2a^2= 25 \Rightarrow a^2=\frac{25}{2} \Rightarrow S= a^2= \frac{25}{2}$$ مساحت مربع

۵۹- گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) =2\sin\frac{\pi}{3}+1=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+1=\sqrt{3}+1$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) =2\sin\frac{\pi}{4}+1=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}+1=\sqrt{2}+1$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) =2\cos\frac{\pi}{6}-1=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}-1=\sqrt{3}-1$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot f\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot f\left(\frac{\pi}{6}\right) =2\sqrt{2}+2$$

۶۰- گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$f(x)= 2^x \Rightarrow f(x + 2)= 2^{x+2},$$

$$f(x + 1)= 2^{x+1}$$

$$\Rightarrow f(x + 2) - f(x + 1) =$$

$$2^{x+2}- 2^{x+1}= 2^2 \times 2^x - 2 \times 2^x =$$

$$4 \times 2^x - 2 \times 2^x = 2 \times 2^x = 2^{x+1}= 32 = 2^5$$

$$\Rightarrow x + 1= 5 \Rightarrow x = 4$$

۶۱- گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:
با تبدیل x به $-x$ داریم:

$$\begin{cases} f(x) + mf(-x) = 3x \\ f(-x) + mf(x) = -3x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) + mf(-x) = 3x \\ mf(x) + f(-x) = -3x \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{m} = \frac{m}{1}$$

$$\Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$$

به ازای $m = \pm 1$ دستگاه جواب ندارد و در نتیجه $f(x)$ نامعین است.

۶۲ـ گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$D_f = \{x | x^2 - 1 \geq 0\} \cap \{x | x + 1 > 0\} =$$
$$\{x | x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1\} \cap \{x | x > -1\}$$
$$D_f = \{x | x \geq 1\} = [1, +\infty[$$

۶۳ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{0} + \frac{x+1}{0} & x \geq 0 \\ \frac{x+1}{\sqrt{-2x}} + \frac{x+1}{\sqrt{4x}} & x < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

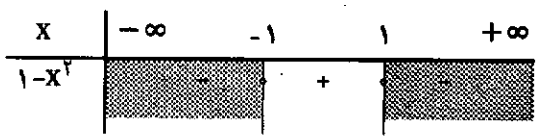
$$f(x) = \begin{cases} \text{نامعین} & x \geq 0 \\ \frac{x+1}{\sqrt{-2x}} + \frac{x+1}{2\sqrt{x}} & x < 0 \end{cases}$$

به ازای $x < 0$ نیز عبارت $\frac{x+1}{2\sqrt{x}}$ غیر حقیقی است و $f(x)$ نامعین است. پس دامنهٔ تابع $\varnothing$ است.

۶۴ـ گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$\frac{x^2+1}{1-x^2} > 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$$

$$\Rightarrow x = \pm 1 , x^2 + 1 > 0$$



$$\Rightarrow D_f = \{x \mid -1 < x < 1\}$$

دامنهٔ تعریف: $D_f =]-1, 1[$

۶۵ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$gof(x) = g(f(x)) = 1 - (x\sqrt[3]{x})^2$$
$$= 1 - x^2\sqrt[3]{x^2} = 1 - x^2\sqrt{|x|}$$

$|x|$ همواره مثبت است پس دامنهٔ gof مجموعهٔ اعداد حقیقی (IR) است.

۶۶ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

محل تلاقی خط $y - 2x + 1 = 0$ با محورهای مختصات چنین است:

$$A \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \end{vmatrix} , \quad B \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{vmatrix}$$

از طرفی نقاط A و B نیز متعلق به تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{ax+1}{4x+b}$ نیز می‌باشند، بنابراین داریم:

$$f(0) = \frac{1}{b} = -1 \Rightarrow b = -1 ,$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a\left(\frac{1}{2}\right) + 1}{4\left(\frac{1}{2}\right) + b} = 0$$

$$\frac{a}{2} + 1 = 0 \Rightarrow a = -2 , \quad a + b = -1 - 2 = -3$$

۶۷ـ گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$D : mx - y = 1 \Rightarrow m_D = m$$

$$D' : 2y - x = 3 \Rightarrow m_{D'} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} 45^\circ = \left| \frac{m_D - m_{D'}}{1 + m_D m_{D'}} \right| = \frac{m - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2} \times m}$$

$$m - \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}m \Rightarrow \frac{1}{2}m = \frac{3}{2} \Rightarrow m = 3$$

۶۸ـ گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

مختصات نقطه‌ای به طول ۱- در هر دو خط صدق می‌کند. و

همچنین حاصل ضرب ضریب زاویه‌های دو خط برابر ۱- است، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} -n-y+1=0 \\ -m-y=1 \\ mn=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=-2 \\ mn=-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$n(n-2)=-1 \Rightarrow n^2-2n+1=0 \Rightarrow n=1$$

$$n=1 : m(1)=-1 \Rightarrow m=-1 ,$$

$$m+n=-1+1=0 \Rightarrow m+n=0$$

۶۹- گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-x^3}{ax^3+1} =$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3\left(\frac{1}{x}-1\right)}{x^3\left(a+\frac{1}{x^3}\right)} = \frac{-1}{a} = a^2$$

$$\Rightarrow a^3=-1 \Rightarrow a=-1$$

۷۰- گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^n+x^5+72}{mx^{15}-x^2+73} =$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^n\left(1+\frac{x^5}{x^n}+\frac{72}{x^n}\right)}{x^{15}\left(m-\frac{1}{x^{13}}+\frac{73}{x^{15}}\right)} = \frac{-1}{3}$$

حد عبارت اخیر برابر $\frac{-1}{3}$ شده است، بنابراین درجهٔ صورت و مخرج باید مساوی باشند. پس داریم:

$$n=15 \text{ و } \frac{1}{m}=\frac{-1}{3} \Rightarrow m=-3 \text{ و } \frac{n}{m}=\frac{15}{-3}=-5$$

۷۱- گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x \tan 2x \sin 3x}{6x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x \tan 2x \sin 3x}{x\times 2x\times 3x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{2x} \times \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x}$$

$$= 1\times 1\times 1 = 1$$

۷۲- گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

شرایط پیوستگی در نقطهٔ A چنین است:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^-} f(x) = f(-1) = 2$$

$$\begin{cases} a+1=2 \\ a(-1)^3+b=2 \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} a=1 \\ -a+b=2 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} a=1 \\ b=3 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\geq -1 \\ x^3+3 & x<-1 \end{cases}$$

$f(0)=1$ ، $x<-1$: $f'(x)=3x^2$ ،

$f''(x)=6x$

$f'(-2)=12$ ، $f''(-3)=-18 \Rightarrow$

$$\frac{f'(-2)f(0)}{f''(-3)} = \frac{12\times 1}{-18} = \frac{-2}{3}$$

۷۳- گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3+a}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2}{3\sqrt[3]{(x^3+a)^2}} = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+a)^2}}$$

$f'(-1)=1$

$$f'(-1)=\frac{1}{\sqrt[3]{(-1+a)^2}}=1 \Rightarrow$$

$$\sqrt[۳]{(a-۱)^۳}=۱ \Rightarrow (a-۱)^۳=۱ \Rightarrow$$
$$a-۱=\pm ۱ \Rightarrow \begin{vmatrix} a=۰ \\ a=۲ \end{vmatrix} \text{ یا}$$

۷۴- گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$y'_x=y'_u \times u'_x \quad , \quad u=\sin x+\cos ۲x$$
$$y'_x=(۳u^۲-۲u)(\cos x-۲\sin ۲x)$$
$$x=\frac{\pi}{۴} \Rightarrow u=\sin\frac{\pi}{۴}+\cos\frac{\pi}{۲}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$
$$y'_x=\left(۳\times\frac{۱}{۲}-۲\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}-۲\right)$$
$$=\left(\frac{۳}{۲}-\sqrt{۲}\right)\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}-۲\right)=\frac{۱۱\sqrt{۲}}{۴}-۴$$

۷۵- گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

مرکز تقارن تابع با ضابطهٔ $y=\sin x$ مبدأ مختصات است، پس داریم: $I(۰,۰)$

$$d=\frac{|h|}{\sqrt{۱+۱}}=\sqrt{۶} \Rightarrow |h|=\sqrt{۱۲} \Rightarrow h=\pm ۲\sqrt{۳}$$

۷۶- گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$۲x^۲+\frac{y^۲}{۲}=۳ \Rightarrow x^۲+\frac{y^۲}{۴}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow (x-\frac{y}{۲})^۲+xy=\frac{۳}{۲}$$
$$xy=\frac{۳}{۲}-(x-\frac{y}{۲})^۲$$

xy وقتی ماکزیمم خواهد بود که عبارت نامنفی، $(x-\frac{y}{۲})^۲$ می‌نیمم باشد و در نتیجه باید داشته باشیم:

$$x-\frac{y}{۲}=۰ \Rightarrow x=\frac{y}{۲} \Rightarrow \frac{x^۳}{y^۳}=\frac{۱}{۸}$$

۷۷- گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

ضریب زاویهٔ خط مماس در نقطهٔ مورد نظر برابر مشتق تابع به‌ازای طول تماس می‌باشد، بنابراین داریم:

$$f(x)=\tg^۲(\sin ۲x) \Rightarrow$$
$$f'(x)=۲(۲\cos ۲x)\tg(\sin ۲x)(۱+\tg^۲(\sin ۲x))$$
$$\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{۲}\right)=۰ \quad , \quad m=f'\left(\frac{\pi}{۲}\right)=۰ \Rightarrow m=۰$$

ضریب زاویهٔ خط مماس

۷۸- گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt{۶}\,(\sin(n+۱)x\cos nx-$$
$$\sin nx\cos(n+۱)x)=\sqrt{۳}$$
$$\sin((n+۱)x-nx)=\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۶}} \Rightarrow$$
$$\sin x=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\sin ۴۵^\circ$$

در فاصلهٔ $[\frac{-\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}]$ جواب معادله چنین است: $x=۴۵^\circ$

۷۹- گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$\cotg ۸۰^\circ \tg ۵۰^\circ \cotg ۲۰^\circ=\tg ۱۰^\circ \tg ۵۰^\circ \tg ۷۰^\circ$$

با توجه به اتحاد مثلثاتی:

$$\tg x\tg(۶۰^\circ-x)\tg(۶۰^\circ+x)=\tg ۳x$$

داریم:

$$x=۱۰ \Rightarrow \tg ۱۰^\circ \tg ۵۰^\circ \tg ۷۰^\circ=\tg ۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

۸۰- گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$\cos ۴۸^\circ+\sin ۱۸^\circ-\cos ۱۲^\circ=\sin ۴۲^\circ+\sin ۱۸^\circ-\cos ۱۲^\circ$$
$$=۲\cos ۱۲^\circ \sin ۳۰^\circ-\cos ۱۲^\circ=۲(\frac{۱}{۲})\cos ۱۲^\circ-\cos ۱۲^\circ$$
$$=\cos ۱۲^\circ-\cos ۱۲^\circ=۰$$

۸۱- گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$\sin\left(۳(\frac{\pi}{۴})-۲(\frac{-\pi}{۶})-\frac{\pi}{۳}+(\frac{۳\pi}{۴})\right)=$$
$$\sin\left(\frac{۳\pi}{۲}\right)=-۱$$

۸۲- گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x$$
$$=1+\cos x+\cos 3x+\cos 2x+\cos 4x$$
$$=1+2\cos 2x\cos x+2\cos 3x\cos x$$
$$=1+2\cos x(\cos 2x+\cos 3x)$$
$$=1+2\cos x\left(2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}\right)$$
$$=1+4\cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}$$
$$=1+\frac{4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cos x\cos\frac{5x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=1+\frac{\sin 2x\cos\frac{5x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$x=\frac{2\pi}{9}\ :\ 1+\frac{\sin 2x\cos\frac{5x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=1+\frac{\sin\frac{4\pi}{9}\cos\frac{5\pi}{9}}{\sin\frac{\pi}{9}}$$
$$=1+\frac{\frac{1}{2}\sin\frac{10\pi}{9}}{\sin\frac{\pi}{9}}=1+\frac{\frac{1}{2}\sin\left(\frac{-\pi}{9}\right)}{\sin\frac{\pi}{9}}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

۸۳- گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا: $0\le x\le\frac{\pi}{2}$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}-2x\right)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}=\pm\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\quad\Rightarrow$$

$$\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}=2x-\frac{\pi}{6}\ \Rightarrow\ x_1=\frac{2\pi}{15}$$

$$\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}=-2x+\frac{\pi}{6}\ \Rightarrow\ x_2=0\ ,\ x_1+x_2=\frac{2\pi}{15}$$

۸۴- گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$2\cos\frac{x}{24}\sin\frac{x}{24}\cos\frac{x}{12}\cos\frac{x}{6}=\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow\ \sin\frac{x}{12}\cos\frac{x}{12}\cos\frac{x}{6}=\frac{1}{8}$$

$$2\sin\frac{x}{12}\cos\frac{x}{12}\cos\frac{x}{6}=\frac{1}{4}\ \Rightarrow\ \sin\frac{x}{6}\cos\frac{x}{6}=\frac{1}{4}$$

$$2\sin\frac{x}{6}\cos\frac{x}{6}=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \sin\frac{x}{3}=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow\ \frac{x}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{6}\ \Rightarrow\ x=6k\pi+\frac{\pi}{2}$$

۸۵- گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا: $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$

$$\cot gx=2+\sqrt{3}\ \Rightarrow\ \frac{1}{tgx}=2+\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow\ tgx=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$$

$$tgx=tg\frac{13\pi}{12}\ \Rightarrow\ x=\frac{13\pi}{12}\ \Rightarrow$$

$$tg4x=tg\frac{13\pi}{3}=tg\left(4\pi+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$tg4x=tg\frac{\pi}{3}\ \Rightarrow\ tg4x=\sqrt{3}$$

۸۶- گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$f(x)=-16x^3+4x^2$$
$$f'(x)=-48x^2+8x,\ f''(x)=-96x+8\ \Rightarrow$$
$$f''(x)=0$$
$$-96x+8=0\ \Rightarrow\ x=\frac{-8}{-96}=\frac{1}{12}\Rightarrow x=\frac{1}{12}$$

طول نقطه عطف

$$m=f'\left(\frac{1}{12}\right)=-16\left(\frac{1}{12}\right)^3+4\left(\frac{1}{12}\right)^2$$
$$=-\frac{16}{64\times 27}+\frac{4}{16\times 9}=-\frac{1}{4\times 27}+\frac{1}{4\times 9}$$

$$m=\frac{2}{4\times 27}=\frac{1}{54}$$ ضریب زاویهٔ خط مماس

$$\Rightarrow mm'=-1\Rightarrow m'=\frac{-1}{\frac{1}{54}}=-54$$

ضریب زاویهٔ خط قائم در نقطهٔ عطف منحنی

۸۷ـ گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$f(x)=\frac{۶mx-۱}{۲x-۳m} \Rightarrow I\left|\begin{array}{l} x=\frac{۳m}{۲} \\ y=۳m \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left|\begin{array}{l} m=\frac{۲x}{۳} \\ y=۳m \end{array}\right. \Rightarrow y=۳(\frac{۲x}{۳})=۲x \Rightarrow y=۲x$$

۸۸ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$f(x)=۲x^۳-۳ax^۲+۲x$$

$$f'(x)=۶x^۲-۶ax+۲ \Rightarrow$$

$$f'(x)>۰ \ , \ ۶x^۲-۶ax+۲>۰$$

$$۳x^۲-۳ax+۱>۰ \Rightarrow$$

$$\left|\begin{array}{l} \Delta=۹a^۲-۱۲<۰ \\ ۳>۰ \end{array}\right. \Rightarrow ۹a^۲-۱۲<۰$$

$$۹a^۲<۱۲ \Rightarrow ۳a^۲<۴ \Rightarrow$$

$$a^۲<\frac{۴}{۳} \Rightarrow -\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}<a<\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

۸۹ـ گزینهٔ(۳) صحیح است، زیرا:

$$(x+۲)^۲+(y-۲)^۲=۱$$

$$\Rightarrow o_۱\left|\begin{array}{c} -۲ \\ ۲ \end{array}\right. , \ R=۱$$

$$(x-۱)^۲+(y+۲)^۲=۹ \Rightarrow o_۲\left|\begin{array}{c} ۱ \\ -۲ \end{array}\right. , \ R'=۳$$

فاصله خط المرکزین دو دایره: $d=o_۱o_۲=\sqrt{۳^۲+۴^۲}=۵$

$$TT'=\sqrt{d^۲-(R+R')^۲}=\sqrt{۲۵-(۳+۱)^۲}$$

$$=\sqrt{۲۵-۱۶}=\sqrt{۹}=۳$$

۹۰ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

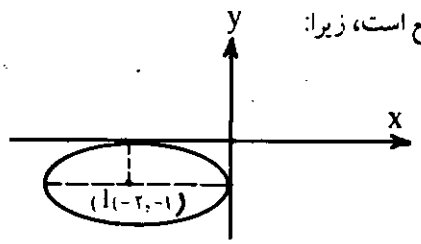
$C: (x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲$

مرکز دایرهٔ C روی خط $y=x$ قرار دارد و مختصات آن چنین است: $o_۱\left|\begin{array}{c} \alpha \\ \alpha \end{array}\right.$ همچنین از مبدأ مختصات o نیز می‌گذرد، پس داریم:

$$\alpha^۲+\alpha^۲=R^۲$$

$$\Rightarrow R^۲=۲\alpha^۲ \ , C:(x-\alpha)^۲+(y-\alpha)^۲=۲\alpha^۲$$

۹۱ـ گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:



محور کانونی بیضی فوق موازی محور طولهااست. و در نتیجه $a=۲$ و $b=۱$ است. پس داریم:

$$\frac{(x+۲)^۲}{۴}+\frac{(y+۱)^۲}{۱}=۱$$

۹۲ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

مکان هندسی نقاطی که از آن نقاط دو مماس عمود برهم، بر سهمی می‌توان رسم نمود خط هادی سهمی است، پس داریم:

$$(y+۲)^۲=-۴(x-۱) \ , \ S(\alpha=۱ \ , \beta=-۲)$$

$$۲p=-۴ \Rightarrow p=-۲ \ ,$$

$$x=\alpha-\frac{p}{۲}=۱+\frac{۲}{۲}=۲ \Rightarrow x-۲=۰$$

۹۳ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$C(۲,-۲), c=\sqrt{۶}, a^۲+b^۲=c^۲ , a=b$ مرکز هذلولی

$$\Rightarrow ۲a^۲=c^۲ \ , \ ۲a^۲=۶ \Rightarrow a^۲=۳ \Rightarrow a=b=\sqrt{۳}$$

$$\frac{(x-۲)^۲}{۳}-\frac{(y+۲)^۲}{۳}=۱ \Rightarrow (x-۲)^۲-(y+۲)^۲=۳$$

$$x^۲+۴-۴x-y^۲-۴-۴y=۳ \Rightarrow x^۲-y^۲-۴x-۴y=۳$$

۹۴ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$f''(x)=۱۲x \Rightarrow f'(x)=۶x^۲+c \text{ و } f'(-۱)=۰ \Rightarrow c=-۶$$

$f'(x)=۶x^۲-۶ \Rightarrow f(x)=۲x^۳-۶x+c_۱$, $f(-۱)=۰$

$f(-۱)=۲(-۱)^۳-۶(-۱)+c_۱=۰ \Rightarrow c_۱=-۴$

$\Rightarrow f(x)=۲x^۳-۶x-۴ \Rightarrow f(۱)=۲-۶-۴=-۸$

۹۵- گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

مختصات نقاط تلاقی:

$$\begin{cases} y^۲=۲px \\ x^۲=۲py \end{cases} \Rightarrow O(۰,۰) \ , \ A(۲p,۲p)$$

$$y_۱=\frac{x^۲}{۲p} \ , \ y_۲=\sqrt{۲px}$$

$$S_{۰}^{۲p}=\int_{۰}^{۲p}(y_۲-y_۱)dx=$$

$$\int_{۰}^{۲p}\left(\sqrt{۲px}-\frac{x^۲}{۲p}\right)dx=\frac{۴}{۳}p^۲=۳$$

$$p^۲=\frac{۹}{۴} \Rightarrow p=\pm\frac{۳}{۲} \xrightarrow{\text{مقدار } p} |p|=\frac{۳}{۲}$$

۹۶- گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}\frac{tg^n x}{\cos^۲ x}dx=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}tg^n x(۱+tg^۲ x)dx=$$

$$\left[\frac{tg^{n+۱}x}{n+۱}\right]_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}=\frac{tg^{n+۱}\frac{\pi}{۴}}{n+۱}=\frac{۱}{۵}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{n+۱}=\frac{۱}{۵} \Rightarrow n+۱=۵ \Rightarrow n=۴$$

۹۷- گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$m(\cos x+\sin x)=۲+۳\cos x-m$

معادلهٔ کلاسیک نوع اول: $a\sin x+b\cos x=c$

$(m-۳)\cos x+m\sin x=۲-m$

شرط جواب: $a^۲+b^۲\geq c^۲$ $m^۲+(m-۳)^۲\geq(۲-m)^۲$

$\Rightarrow ۲m^۲-۶m+۹\geq ۴+m^۲-۴m \Rightarrow m^۲-۲m+۵\geq ۰$

$\Rightarrow (m-۱)^۲+۴>۰$

۹۸- گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$b=۲a\cos\hat{C} \quad (a\neq ۰) \quad \Rightarrow \quad \cos\hat{C}=\frac{a^۲+b^۲-c^۲}{۲ab}$$

$$b=۲a\left(\frac{a^۲+b^۲-c^۲}{۲ab}\right) \quad \Rightarrow \quad b^۲=a^۲+b^۲-c^۲$$

$$a^۲-c^۲=۰ \quad \Rightarrow \quad a^۲=c^۲ \quad \Rightarrow \quad a=c$$

پس مثلث متساوی‌الساقین در رأس B است.

۹۹- گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$tg\,۴x+\cot g\,۴x=۲\sqrt{۲}$$

$$\frac{۲}{۲\sin ۴x\cos ۴x}=\frac{۲}{\sin ۸x}=۲\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow \sin ۸x=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\sin\frac{\pi}{۴}$$

$$۸x_۱=۲K\pi+\frac{\pi}{۴} \ , \ ۸x_۲=۲K\pi+\pi-\frac{\pi}{۴}$$

$$x_۱=\frac{K\pi}{۴}+\frac{\pi}{۳۲} \ , \ x_۲=\frac{K\pi}{۴}+\frac{۳\pi}{۳۲} \ , \ x\in\left[\frac{\pi}{۳۲},\frac{۳\pi}{۳۲}\right]$$

$$K=۰ \quad \Rightarrow \quad x_۱+x_۲=\frac{\pi}{۳۲}+\frac{۳\pi}{۳۲}=\frac{۴\pi}{۳۲}=\frac{\pi}{۸}$$

۱۰۰- گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$y=\cos^۳\frac{۲\pi}{۳}x+tg^۵\frac{\pi}{۶}x+\sin^۴\frac{\pi}{۲}x$$

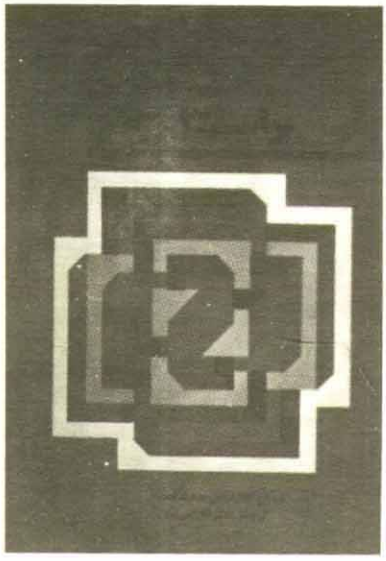
$$T_۱=\frac{۲\pi}{\frac{۲\pi}{۳}}=۳ \ , \ T_۲=\frac{\pi}{\frac{\pi}{۶}}=۶ \ , \ T_۳=\frac{\pi}{\frac{\pi}{۲}}=۲$$

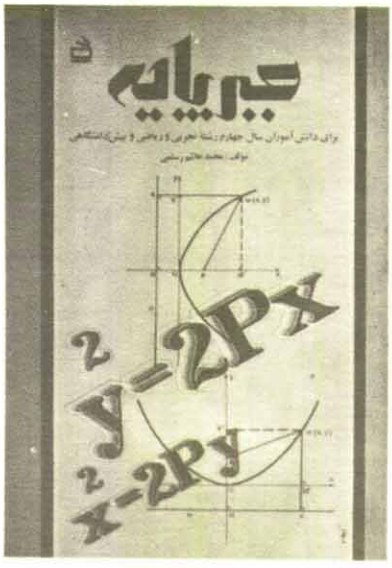
کوچکترین مضرب مشترک بین $T_۱$ و $T_۲$ و $T_۳$ دورهٔ تناوب تابع است:

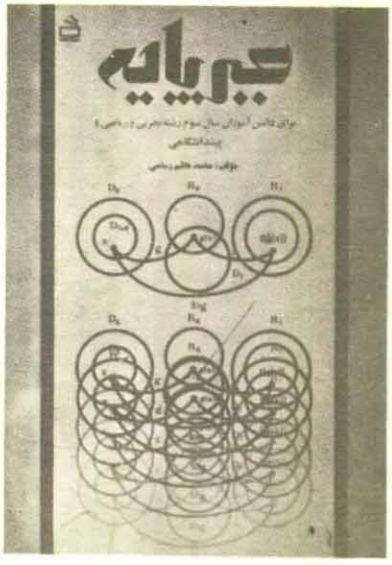
$T=۶$

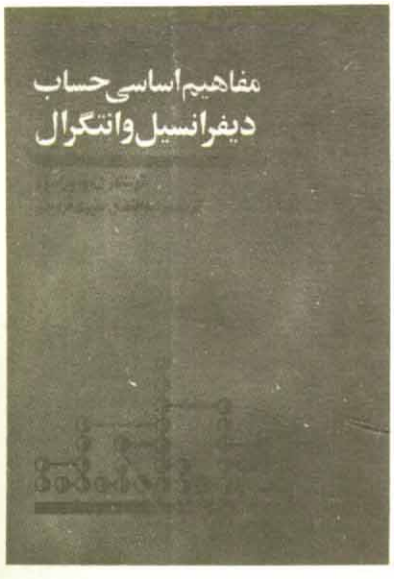
اسامی تعدادی از کتابهای ریاضی منتشر شده

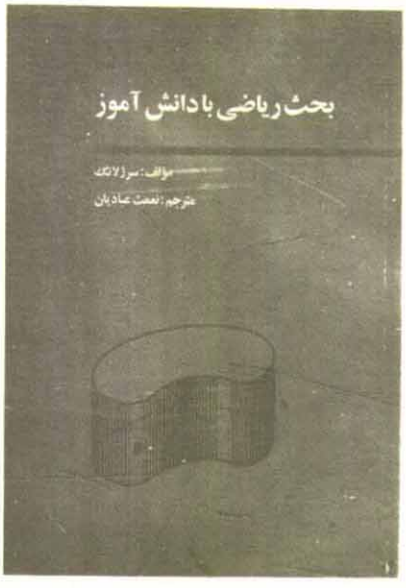
توسط انتشارات مدرسه

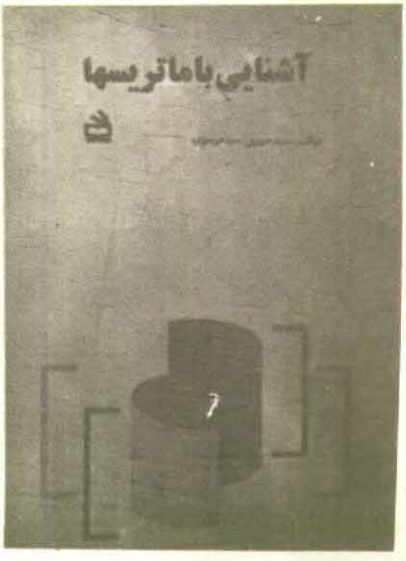












توصیه‌ها و تذکرات مهم:

عموماً در کنکورها به روش تستی و ۴ گزینه‌ای، ۳ نوع تست مطرح می‌شود که لازم است دانش‌آموزان این ۳ نوع تست را شناسایی و تشخیص دهند تا از نظر زمان‌بندی، بهتر و راحت‌تر بتوانند به سؤالات جواب دهند. در این زمینه لازم است به نکات زیر توجه شود، ابتدا به شناسایی این ۳ نوع تست می‌پردازیم:

نوع اول: تستهایی که بسیار ساده بوده و زمانی در حدود ۱۰ الی ۱۵ ثانیه وقت برای جوابگویی نیاز دارند، در این نوع تستها معمولاً دانش‌آموز با خواندن صورت تست بلافاصله جواب را در ذهن آماده کرده و بین گزینه‌ها به دنبال آن می‌گردد.

مثال: نقیض گزارهٔ $(p \Rightarrow q)$ کدام است؟

$\sim p \Rightarrow q$ (۱ $\quad$ $\sim p \Rightarrow \sim q$ (۲ $\quad$ $\sim p \vee q$ (۳ $\quad$ $p \wedge \sim q$ (۴

نوع دوم: تستهایی که می‌توان آنها را تستهای نرمال نامید و این نوع تستها تقریباً در مدت زمان تعیین شده برای هر تست قابل جوابگویی هستند (۴۵ ثانیه الی ۱ دقیقه) و داوطلب پس از مطالعهٔ صورت تست با استفاده از چند فرمول و رابطه به جواب دست پیدا خواهد کرد.

نوع سوم: تستهای سخت و مشکل که این نوع تستها دو دسته‌اند:

دسته اول: تستهایی که از نظر حل مشکلی ندارند ولی راه‌حل طولانی دارند و وقت زیادی (۲ الی ۳ دقیقه) از داوطلب، طلب می‌کنند و دستهٔ دوم: تستهایی که نکته‌دار هستند و حل آنها نیاز به ابتکار و گاهی مطالعه مطالب خارج از کتب دبیرستانی دارد.

توصیه‌های لازم:

۱ـ داوطلبان ابتدا سؤالات نوع اول و دوم را سریعاً جواب داده و وقتی به سؤالاتی از نوع سوم برخورد می‌کنند، اگر از دسته اول (وقت‌گیر) باشد باید علامتی در کنار آن گذاشته و آن تست را رها کنند و اگر از دستهٔ دوم باشد (نکته‌دار) و نکته آن را پیدا کند که تست به نوع اول یا دوم برمی‌گردد و در غیر این‌صورت آن تست را هم باید با علامتی در کنار آن رها کند. با این حساب این داوطلب به‌طور حتم وقت اضافی خواهد داشت و می‌تواند این وقت اضافی را روی تستهای وقت‌گیر ازنوع سوم صرف کرده و به حل آنها بپردازد.

۲ـ داوطلبان سعی کنند به هنگام حل سؤالات ۴ گزینه‌ای، در منزل یا خارج از محیط امتحان و کنکور حتماً با زمان‌بندی و از روی وقت مبادرت به زدن تست کنند.

۳ـ هرگاه مفهوم اصلی و عمق یک مطلب درسی را خوب یاد گرفتید مطمئن باشید هر نوع تست در آن زمینه را می‌توانید جوابگو باشید.

مؤیّد و پیروز باشید: سردبیر