ISSN 1606-9188

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی
www.roshdmag.ir

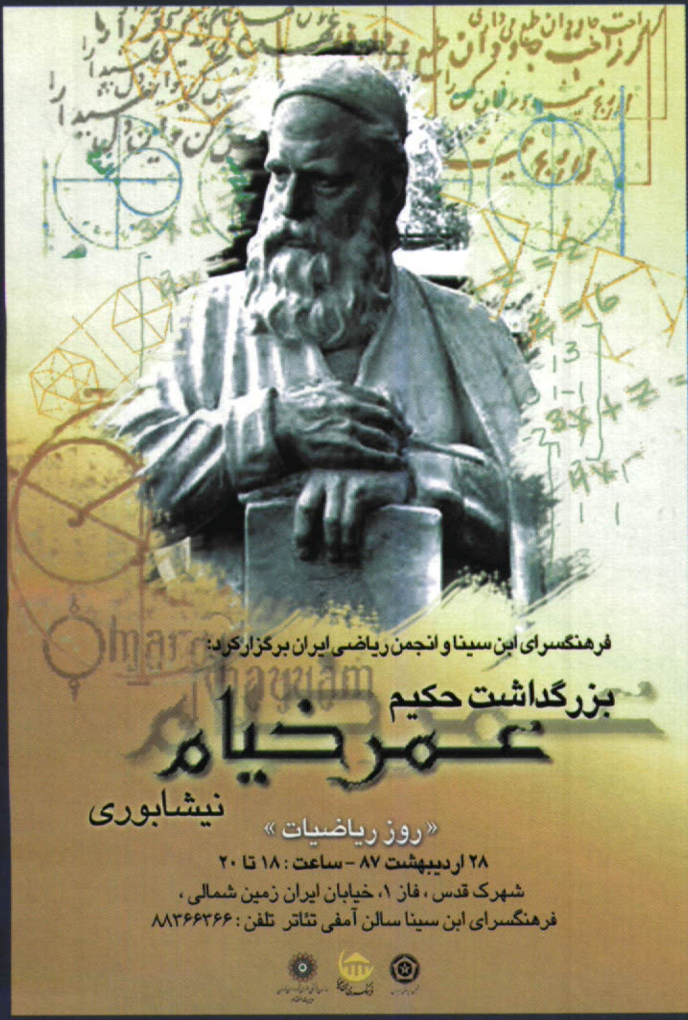
آموزشی ـ تحلیلی ـ اطلاع رسانی

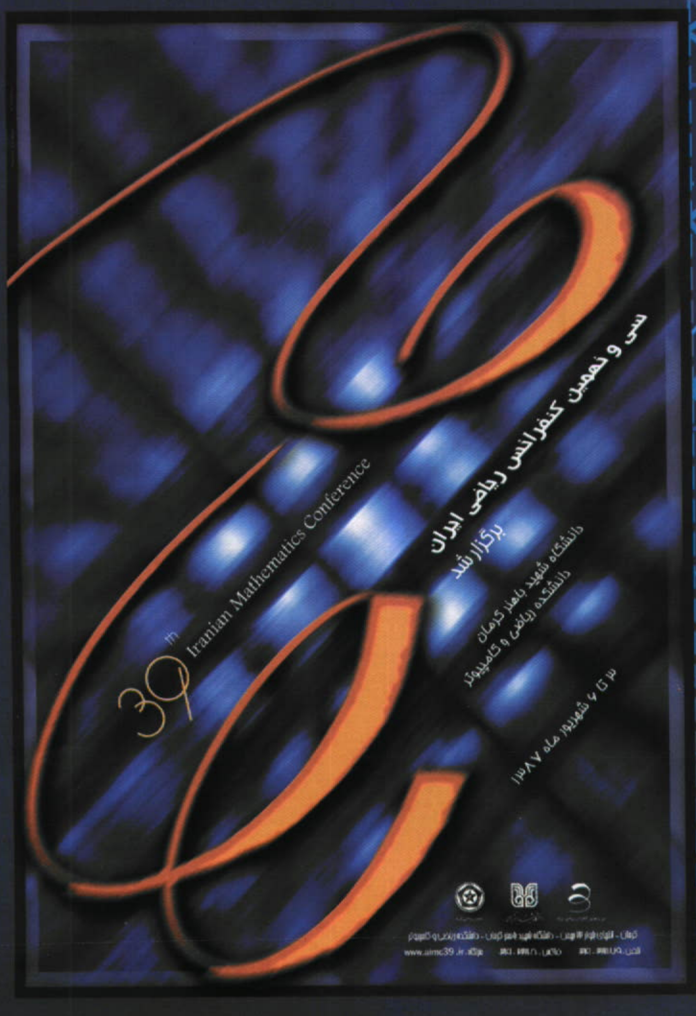
رشد آموزش ریاضی ۹۳

دوره‌ی بیست و ششم، شماره‌ی ۱، پاییز ۱۳۸۷، بها: ۴۰۰۰ ریال

- استفاده از ساخت های نظری برای تدریس آگاهانه
- ریاضی ۱ و بدفهمی دانش آموزان
- یک مدل چهار مرحله ای یاددهی و یادگیری ریاضی
- درباره ی معادله ی $x^y=y^x$
- چرا تدریس ریاضی دشوار است؟
- احتمال دو جمله ای

طرح و عکس جلد: مهسا قبایی





بهار و تابستان سال ۱۳۸۷
در جامعه‌ی ریاضی ایران

بسم الله الرحمن الرحیم

آموزشی - تحلیلی - اطلاع رسانی

www.roshdmag.ir

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

رشد آموزش ریاضی ۹۳

دوره ی بیست و ششم، شماره ی ۱ ، پاییز ۱۳۸۷

مدیر مسئول: علیرضا حاجیان زاده
سردبیر: زهرا گویا
مدیر داخلی: سپیده چمن آرا

طراح گرافیک: مهسا قبایی

نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۶۵۸۵ - ۱۵۸۷۵
تلفن دفتر مجله: ۹- ۸۸۸۳۱۱۶۱ (داخلی ۳۷۴)
شماره ی پیام گیر مجلات تخصصی رشد: ۱۱۲- ۸۸۳۰۱۴۸۲
E-mail: riazi@roshdmag.ir
چاپ: شرکت افست (سهامی عام)
شمارگان: ۱۷۰۰۰

مجله ی رشد آموزش ریاضی نوشته ها و گزارش تحقیقات پژوهشگران و متخصصان تعلیم و تربیت، به ویژه معلمان دوره های تحصیلی مختلف را در صورتی که در نشریات عمومی درج نشده و مرتبط با موضوع مجله باشد، می پذیرد. لازم است در مطالب ارسالی موارد زیر رعایت شود:

- مطالب یک خط در میان و در یک روی کاغذ نوشته و در صورت امکان تایپ شود.
- شکل قرار گرفتن جدول ها، نمودارها و تصاویر، پیوست و در حاشیه ی مطلب نیز مشخص شود.
- نثر مقاله، روان و از نظر دستور زبان فارسی درست باشد و در انتخاب واژه های علمی و فنی دقت شود.
- برای ترجمه ی مقاله، نخست اصل مقاله و منبع دقیق آن، به همراه ترجمه ی یک بند از آن، به دفتر مجله ارسال شود تا مورد بررسی هیات تحریریه قرار گیرد و پس از تصویب مقاله و ترجمه ی ارایه شده، سفارش ترجمه به فرستنده ی مقاله داده خواهد شد. در غیر این صورت، مجله می تواند سفارش ترجمه ی مقاله را به مترجم دیگری بدهد.
- در متن های ارسالی تا حد امکان از معادل های فارسی واژه ها و اصطلاحات استفاده شود.
- زیرنویس ها و منابع، کامل و شامل نام اثر، نام نویسنده، نام مترجم، محل نشر، ناشر، سال انتشار و شماره ی صفحه ی مورد استفاده باشد.
- چکیده ای از موضوع مطلب ارسال شده در حد اکثر ۲۵۰ کلمه، همراه مطلب ارسال شود.

هم چنین:

- مطالب مندرج در مجله، الزاما مبیّن نظر دفتر انتشارات کمک آموزشی نیست و مسئولیت پاسخ گویی به پرسش های خوانندگان، با خود نویسنده یا مترجم است.
- مجله در پذیرش، رد، ویرایش یا تلخیص مقاله های رسیده مجاز است.
- مقاله های دریافتی در صورت پذیرش یا رد، باز گشت داده نمی شود.

ابراز قدرشناسی جامعه‌ی علمی به مصحفی یک فرهنگی تمام‌عیار

با عقل و فهم و دانش، داد سخن توان داد　　چون جمع شد معانی، گوی بیان توان زد
عشق و شباب و رندی، مجموعه‌ی مراد است　　ساقی بیا که جامی در این زمان توان زد

فرهنگ ایرانی ویژگی منحصر به فردی دارد و آن، قدر بزرگان دانستن است. شاید این یادگار فردوسی بزرگ به یادگار است که به ایرانی هشدار داد:

بزرگش ندارند اهل خرد　　هر آن کس که نام بزرگان به زشتی برد

بزرگانی که هر یک در دوران خود، تاریخ ساز بوده و هستند و حتی در غیاب ساختارهای نظام‌مند علمی ـ آموزشی، یک تنه کمر همت بسته و توانسته‌اند حرکت‌های عظیم ایجاد کنند. دقت در زندگی این بزرگان نشان می‌دهد که اکثر آن‌ها، دارای مشترکات قابل توجهی بوده‌اند. به طور مثال، اغلب آن‌ها علاوه بر علم و هوش و استعداد سرشار که رکن رکین هر حرکت اثربخشی‌اند، انسان‌هایی با اخلاق، تلاش‌گر، چندبعدی، متواضع و بی‌ادعا، از نظر علمی حریص و از نظر مادی قانع، خستگی‌ناپذیر، چالش‌جو، مردمی، خلاق و نوآور، عارف و عاشق و به شدت انسان دوست بوده‌اند و در واقع، مصداق کلام خواجه‌ی شیرازند!

آن‌ها زیاد می‌کوشند و کم طلب می‌کنند و همیشه در حال حرکت و زایش و تولیدند. چنین بزرگانی در قلب و روح جامعه‌ی ایرانی جای دارند و جامعه همیشه درصدد بوده است تا به موقع، مراتب قدرشناسی خود را به ایشان، ابراز دارد. جالب این‌جاست که در جامعه‌ی فرهنگی ایران و از میان اقشار مختلف و زحمت‌کش و ماندگار، معلمان از حرمت خاصی برخوردارند زیرا هرکه هرچه شده، معلمی اثرگذار در زندگی خود داشته است!

عبدالحسین مصحفی یکی از این بزرگان است که در سرنوشت بسیاری از فرزندان این مرز و بوم، نقش اثرگذاری داشته است. یکی از استادان به نام ریاضی و از ارادتمندان ایشان نقل می‌کند که چگونه در روزهای سرد و برفی زمستان، ساعت‌ها در کنار دکه‌ی روزنامه فروشی یکی از شهرهای کوچک ایران به انتظار می‌ایستاد تا مجله‌ی **یکان** برسد و او بتواند تشنگی یک ماه خود را با مسایل چالش‌برانگیز

آن، سیراب نماید! مصحفی با متانت و تعهد خاص خود، از هر روزنه‌ای برای توسعه‌ی ریاضی در ایران استفاده کرد و علاوه بر تدریس و تألیف، کارهای تأسیسی قابل‌توجهی انجام داد که شاه بیت غزل‌هایش، انتشار ۱۱۷ شماره‌ی **یکان** بود که در زمان خود و در نوع خود، بی‌نظیر بود. مجله‌ای که بی‌وقفه، از آبان ۱۳۴۲ تا اسفند ۱۳۵۶ هرماه چاپ می‌شد و تقریباً می‌توان ادعا کرد که تمام ریاضی‌خوانده‌های آن زمان و ریاضی‌دان‌های برآمده از آن نسل، همگی با یکان مأنوس بوده‌اند و یکی از عوامل علاقه‌مندی خود را به ریاضی، یکان می‌دانند. یکانی که حاصل تلاش فردی مصحفی و همسر ایشان بود و جالب این‌جاست که همیشه در صحبت‌هایشان اشاره کرده‌اند که «بدون سرمایه‌گذاری و همت همسرم، امکان انتشار یکان وجود نداشت.»

عبدالحسین مصحفی از سال ۱۳۴۳ تا زمانی که در ۱۳۵۸/۱۰/۲۷ از خدمات دولتی بازنشسته شد، نقش بی‌بدیلی در برنامه‌ریزی، تألیف، چاپ و توزیع کتاب‌های درسی ایران داشت. این معلم خستگی‌ناپذیر، از ابتدای بازنشستگی تا به‌حال، دائم در حال ترجمه و تألیف و ویراستاری و ارایه‌ی خدمات فرهنگی بوده است. مصحفی یکی از پابرجاترین همکاران مجله‌ی رشد آموزش ریاضی است و بدین وسیله، تلاش می‌نماید تا تجربیات ارزنده و دانش وسیع خود را در اختیار نسل جدید معلمان ریاضی ایران قرار دهد.

همه‌ی این ویژگی‌ها باعث شده تا دانشکده‌ی ریاضی دانشگاه یزد، دست به ابتکار جالبی بزند و پیشنهاد اعطای دکترای افتخاری به عبدالحسین مصحفی را به وزارت علوم، تحقیقات و فناوری بدهد. برای بررسی این پیشنهاد، کمیته‌ای در وزارت متبوع تشکیل شد جالب این‌جاست که در جمع‌بندی خود، به این نتیجه رسید که شایسته است دکترای افتخاری **آموزش ریاضی** به عبدالحسین مصحفی اعطا گردد و با این اقدام جالب، دکترای آموزش ریاضی در ایران تأسیس شد!

این مدرک در تاریخ ۸۷/۲/۲۵ طی مراسم باشکوهی که با همکاری دانشگاه یزد و سازمان آموزش‌وپرورش یزد برگزار شده بود، به ایشان اعطا شد و جامعه‌ی ریاضی و آموزش ریاضی ایران را غرق در شعف کرد. آقای عبدالحسین مصحفی پس از مرحوم احمد بیرشک و استاد پرویز شهریاری، سومین بزرگ جامعه‌ی ریاضی ایران است که مدرک افتخاری دکتری دریافت داشته است. سه معلمی که ریاضی‌خوانده‌های قدیم و جدید از محضرشان فیض برده‌اند، عشق معلمی ایشان به شاگردانشان سرایت کرده و علاقه‌مندی به ریاضی و معلمی را در آن‌ها شعله‌ور کرده است. جامعه‌ی علمی آموزشی ریاضی از تألیف‌ها و ترجمه‌ها و کتاب‌های درسی این سه بزرگ بسیار آموخته است و برای نسل جدید هم مانند نسل‌های قبلی، هر سه نام‌هایی آشنا، مورد احترام و حرکت بخش‌اند.

مجله‌ی رشد آموزش ریاضی به نوبه‌ی خود، این حرکت عمیق فرهنگی را ارج می‌گذارد و قدردانی خود را از مبتکران و بانیان و حامیان آن ابراز می‌دارد. مهم این است که این بزرگان هرچه بیش‌تر مورد توجه قرار می‌گیرند، ذره‌ای از افتادگی و تواضعشان کم نمی‌شود، زیرا به خوبی آموخته‌اند که

افتادگی آموز اگر طالب فیضی   هرگز نخورد آب، زمینی که بلند است

البته جامعه‌ی علمی، این بزرگان را همیشه به عنوان استاد بزرگ داشته است و دریافت این مدرک، ممکن است هیچ تأثیری در زندگی آن‌ها نداشته باشد، اما جامعه خرسند است که توانسته است بخشی از وظایف خود را در رابطه با قدرشناسی از بزرگان انجام دهد. آرزوی تداوم این حرکت را داریم.

چکیده

هدف من در این مقاله، این است که نشان دهم چگونه می‌توان از ساخت‌های نظری، برای تدریس آگاهانه‌تر ریاضی استفاده کرد و چگونه همین ساخت‌ها توسط افرادی که به کسانی که می‌خواهند معلم شوند درس می‌دهند، استفاده می‌شود. پیشنهادهای من براساس ساختارهایی است که طی دهه‌ی ۸۰ در دانشگاه آزاد[1] لندن توسعه یافت و از آن زمان مورد استفاده قرار گرفت، به‌همراه بصیرتی که در تقابل با برخی از محققان و سنت‌های تحقیقی، تحقق یافت:

استفاده از ساخت‌های نظری برای تدریس آگاهانه

مقاله‌ی ارایه شده در نهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران*

شهریور ۱۳۸۶

جان میسون، دانشگاه آزاد لندن

ترجمه: سپیده چمن‌آرا، معلم ریاضی راهنمایی منطقه‌ی ۲ تهران

ایده‌های اصلی

بهتر است میان **تکالیف**[2]، **فعالیت**[3]، **تجربه**[4] و **بازتاب**[5]، تمایز قائل شویم. تکالیف، همان چیزهایی هستند که نویسنده‌ها در کتاب‌های درسی قرار می‌دهند، معلم‌ها به دانش‌آموزان می‌دهند تا فعالیت آن‌ها را شکل بدهند. به هرحال، آن‌چه که دانش‌آموزان می‌پندارند تکلیف است، اغلب آن چیزی نیست که معلم قصد دارد، و این نیز ممکن است آن چیزی نباشد که نویسنده‌ی کتاب درنظر داشته است! **فعالیت** آن چیزی است که دانش‌آموزان واقعاً انجام می‌دهند، و با تفسیر آن‌ها از اهداف تکلیف، هدایت شده است. تمایز میان تکلیف و فعالیت، به وگودسکی برمی‌گردد (کریستیانسن و والتر، ۱۹۸۶ را ببینید)، لیکن بسیاری از افراد نیز زمانی که رفتار یادگیرندگان در کلاس‌های درس را به‌دقت مشاهده می‌کنند، این تمایز را قائل می‌شوند.

مثال: زمانی که به دانش‌آموزان، چند مثال حل شده نشان می‌دهید و سپس از آن‌ها می‌خواهید به سؤال‌های مشابهی پاسخ دهند، از مثال‌های حل شده به‌عنوان یک شابلون (کلیشه) استفاده می‌کنند و تلاش می‌کنند ببینند چگونه می‌توانند اعداد (یا چیزهای دیگر) را تغییر دهند تا با تمرینی که به ایشان داده شده، جور شود. دانش‌آموزانی که فقط کلیشه‌برداری می‌کنند، ممکن است رفتار خود را تربیت کنند، ولیکن بدون سایر اشکال عمل و بازتاب، بعید است که آگاهی خود از ساختارهای نهفته در مسأله را آموزش ببینند. نتیجه این است که احتمالاً ایشان، برای پاسخ‌گویی به تمرین‌هایی که به نوعی متفاوت هستند، انعطاف کافی نخواهند داشت. راه خوبی برای آزمودن این امر، آن است که یک تمرین استاندارد را بگیرید و با معکوس کردن یا undo کردن آن، تمرین جدیدی بسازید که در آن به دانش‌آموز، پاسخ را داده باشید و از وی خواسته باشید بعضی از داده‌ها یا همه‌ی داده‌هایی را که منجر به آن پاسخ می‌شوند، بیابند. به‌عنوان مثال، «معادله‌ی $3x + 7 = 19$ را حل کنید» را می‌توان به «معادله‌ای بسازید که $x = 4$ جواب معادله باشد و در آن، اعداد ۷ و ۱۹ به‌کار رفته باشد» تبدیل کرد. البته پاسخ‌های ممکن بسیاری وجود دارند، لیکن چنین تمرینی، به دانش‌آموزان فرصت می‌دهد که خلاق باشند.

فعالیت یعنی فقط فرد، کاری انجام دهد. فعالیت، یادگیری نیست. هدف فعالیت این است که یادگیرندگان، تحت رهبری، اعمالی را انجام دهند که بتوانند به زودی این اعمال را برای خودشان شکل بدهند. این، همان چیزی است که لو وگودسکی، از آن با نام **دامنه‌ی تقریبی رشد**[۶] یاد کرده است (والسینر، ۱۹۸۸). از لحاظ پداگوژیکی، فعالیت کارآمد، یادگیرنده را به چالش می‌اندازد تا اعمال آشنا را به روش‌های جدیدی به‌کار بندد یا اعمال جدیدی برای حل تکالیف جدید، توسعه دهد. می‌تواند طی یک فعالیت، تدریس نیز صورت گیرد، چرا که طی تعامل‌هایی که یادگیرندگان در آن فعالیت درگیر آن هستند می‌توان توصیه‌ها و راهنمایی‌های مؤثری به دانش‌آموزان پیشنهاد کرد. ولی موفقیت تجارب منجر به تجربه‌ی آن موفقیت نخواهد بود: نیازمند چیز بیش‌تری هستیم که تجربه را به یادگیری تبدیل کنیم. به‌نظر می‌رسد یکی از دلایلی که ما از تجارب چیزی یاد نمی‌گیریم، این است که اغلب نمی‌توان از تجربه‌ی صرف چیزی فرا گرفت. عمل دیگری نیز لازم است، که اغلب آن را **بازتاب** می‌نامیم، و طی آن، آن‌چه که مورد تجربه قرار گرفته است، با عمل یادگیرندگان تلفیق می‌شود تا عملکرد آینده‌ی آن‌ها را آگاهانه سازد.

معلمان از تمایز میان تکالیف، فعالیت، تجربه و بازتاب با استفاده از آن‌ها در طراحی تدریس و هدایت کلاس‌های درس خود، منفعت می‌برند. آموزشگران معلمان نیز با ساخت تکالیفی برای معلمان احتمالی آینده، از این تمایز سود می‌برند؛ تکالیفی که احتمالاً فعالیت‌هایی را برمی‌انگیزانند که طی آن افراد، به‌عنوان معلم، خود اهمیت این تمایز را تجربه می‌کنند.

روش‌های من

این ایده‌های اصلی و مرکزی، دارای استلزاماتی برای روش‌های کاری هستند. من از تکالیف برای تولید فعالیت‌هایی استفاده می‌کنم که ضمن آن‌ها، افراد تجاربی داشته باشند که از آن‌ها چیزی یاد بگیرند. در سخنرانی کنفرانس، از تکالیفی استفاده خواهم کرد که افراد را وادار به تجربه‌ی استفاده از توانایی‌های طبیعی مختلفشان، ارزش ساخت اشیای ریاضی برای خودشان و انتخاب‌های مناسب برای خودشان به‌عنوان یادگیرنده کند و تأثیر ساختارهای روان‌شناسانه را در طراحی و اجرای آگاهانه‌تر تدریس ببینند. حدس می‌زنم آن‌چه که افراد، ضمن سخنرانی کسب خواهند کرد، بیش‌تر از آن چیزی باشد که هنگام اجرای تکالیف، برایشان رخ می‌دهد: شیوه‌هایی که توسط آن از توانایی‌های طبیعی ریاضی خویش استفاده می‌کنند، روشی که به سوی تکلیف و فعالیت کشیده می‌شوند، و روشی که در آن می‌توان از ساختارها برای توجیه و طراحی تکالیف مشابه برای یادگیرندگان استفاده کرد.

تکالیف

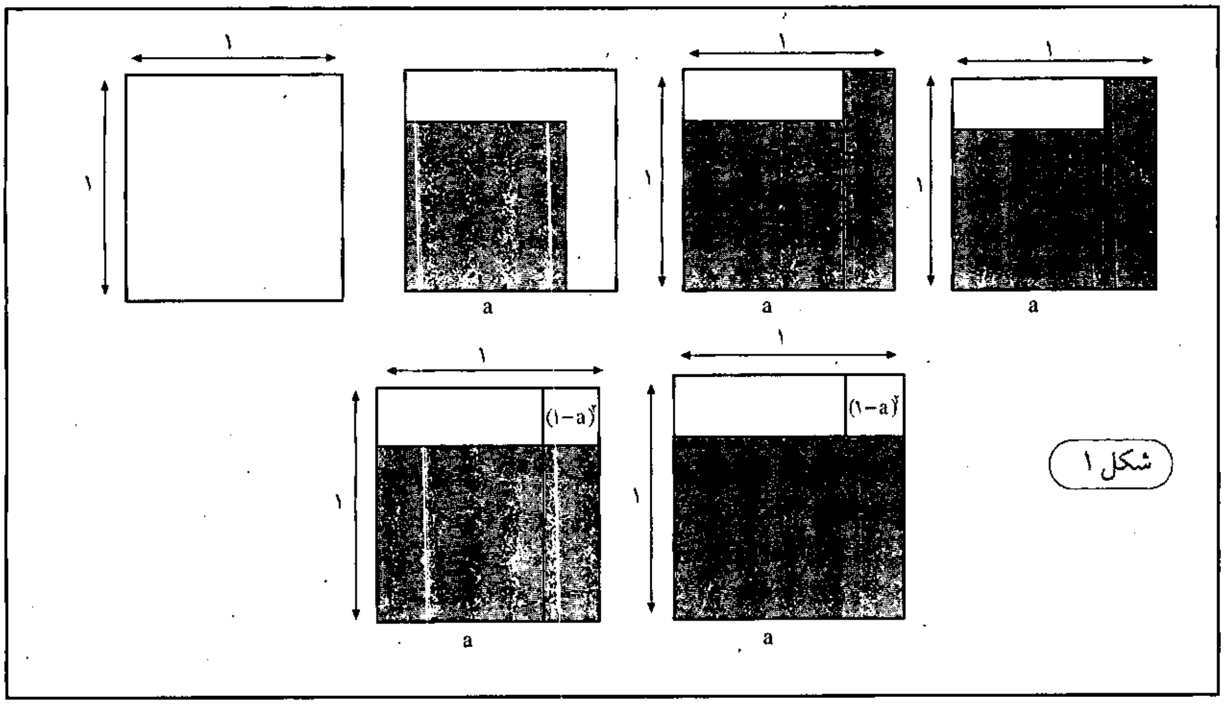
تکالیفی که در این مقاله انتخاب شده‌اند، تنها برای نمایش توانایی‌های طبیعی حس ریاضی و کاربرد ساختارهای روانی در طراحی و کاربرد آن‌ها نیستند، بلکه، تکالیف نوعی را نیز نشان می‌دهند. هریک از تکالیف نوعی را می‌توان به طرز کارآمدی در مدارس ابتدایی، راهنمایی، متوسطه، و حتی دانشگاه، مورد استفاده قرار داد.

● **تکلیف ۱: یک مجموع**

دو عدد دارم که مجموعشان یک است. کدام مقدار بزرگ‌تر است: مجموع مجذور عدد بزرگ‌تر با عدد کوچک‌تر یا مجموع عدد بزرگ‌تر با مجذور عدد کوچک‌تر؟ نخست حدس بزنید، سپس حدس خود را بررسی کنید!

قصدم این است که افراد، پیش از انجام محاسبات، حدس‌هایی بزنند: تنها زمانی از اشتباهات خود می‌آموزید که اول، دچار آن اشتباه شده باشید؛ در صورتی که خود را به این متعهد کنید که پیش از آزمودن مسأله، درباره‌ی آن حدس مناسبی بزنید، شهود خود را اصلاح خواهید کرد. البته اکثر مردم مستقیماً سراغ جبر می‌روند. لیکن افراد محتاط، سعی می‌کنند یکی-دو مثال خاص حل کنند. **حل مثال خاص**[۷]، یک راه طبیعی برای زمانی است که با یک موضوع مجرد یا موضوع کلّی مواجه می‌شویم. هدف از مثال خاص، کسب بصیرت درباره‌ی آن چیزی است که [در حالت کلی] اتفاق می‌افتد. اکنون نمایش تصویری از آن‌چه اتفاق می‌افتد را نمایش می‌دهم تا ببینید که پاسخ هر دو عبارت، یکی است. (شکل ۱)

با نمایش متوالی این تصاویر، امیدوارم افراد را تحریک کنم که در هر مرحله، موضوع برایشان روشن شود و بتوانند حدس



شکل ۱

بزنند که در تصویر بعدی چه اتفاقی می‌افتد. در کلاس درس، یادگیرندگانی که حضور دارند، حدس‌هایی می‌زنند و آن‌ها را بررسی می‌کنند. آن‌ها فعالانه درگیر هستند. یادگیرندگانی که پشت جزوه‌نویسی مخفی هستند یا در انتظار آن‌چه بعداً اتفاق می‌افتد می‌مانند، نسبتاً منفعل هستند. آن‌ها از خود، کار نمی‌کشند. آن‌ها، ریاضی‌وار فکر نمی‌کنند. یک کم بررسی و مفهوم‌سازی لازم است، چرا که همان‌طور که متوجه شده‌اید، شما دارید یک مجذور (مساحت) را به یک عدد (طول) اضافه می‌کنید. لیکن همان طور که در یونان باستان پی برده بودند، می‌توانیم از طول واحد برای تبدیل یک کمیت طولی به یک کمیت سطحی، استفاده کنیم. از آن‌جا که مساحت‌های تیره شده با هم برابرند، هر دو عبارت، مقادیر یکسان دارند... حداقل برای زمانی که هر دو عدد موردنظر، مثبت باشند. آیا می‌توان با یک نمودار یا تصویر نشان داد که این عبارت‌ها به ازای اعداد منفی نیز با هم برابرند؟

● **تکلیف ۲: اعداد اعشاری**

یک عدد اعشاری بنویسید که بین ۲ و ۳ باشد.

اکنون یک عدد اعشاری بین ۲ و ۳ بنویسید که در آن رقم ۵ نباشد.

حال یک عدد اعشاری بین ۲ و ۳ بنویسید که در آن رقم ۵ نباشد ولی رقم ۷ داشته باشد.

بالاخره، یک عدد اعشاری بین ۲ و ۳ بنویسید که در آن رقم ۵ به کار نرفته باشد، ولی رقم ۷ داشته باشد و تا حد امکان به $\frac{۵}{۲}$ نزدیک باشد.

ساختار تکلیفی فوق، با چیزی شروع می‌شود که فکر می‌کنیم اغلب یادگیرندگان آن را انتخاب خواهند کرد [یعنی عدد ۲/۵]، سپس تحریم آن تا آنان را وادار کنیم خلاقانه‌تر فکر کنند تا نسبت به سایر اعداد ممکن نیز آگاهی یابند. پس از آن محدودیت‌های بیش‌تری گذاشتیم. اغلب مردم، پیش از این که آخرین شرط را بگذاریم، به عدد ۲/۴۷ می‌رسند. پس از آن، تعدادی از آن‌ها به سمت اعدادی مانند ۲/۴۹۹۹۹۷ می‌روند و دیگران اعدادی مانند ۲/۴۷۹۹۹۹ را انتخاب می‌کنند. با تلفیق این دو ایده، می‌توان اعدادی مانند ۲/۴۹۹۹۹۷۹۹۹۹ را به‌دست آورد [که از هر دوی آن‌ها، به $\frac{۵}{۲}$ یا ۲/۵، نزدیک‌تر است]. دو بلوک ۹ها را می‌توان هر قدر که دوست داریم، بلند اختیار کنیم، و حتی می‌توان بلوک دوم را تا بی‌نهایت ادامه داد.

با توصیف این که کدام یک از اعداد، به $\frac{۵}{۲}$ نزدیک‌تر هستند، و با درنظر گرفتن دنباله‌هایی از اعداد که بلوک اول یا بلوک دوم ۹های آن، طولانی‌تر و طولانی‌تر می‌شوند، به مفهوم حد می‌رسیم؛ در حالی که تنها از تسلط رایج یادگیرندگان بر اعداد اعشاری استفاده کرده‌ایم. به‌علاوه، این حقیقت که آن‌ها را به ساخت اعدادی برای خودشان دعوت می‌کنیم، بر علاقه و انگیزه‌ی آن‌ها می‌افزاید.

با بررسی ایده‌های یکدیگر و استفاده از آن‌ها در ساختارهای خودشان، تجربه‌های آن‌ها را غنا می‌بخشیم. اگر معلم توجه آن‌ها را به استراتژی‌هایی که کار می‌کنند و نکاتی که در بحث‌های کلاسی وجود دارند، جلب کند، به احتمال زیاد یادگیرندگان در آینده نیز از ایده‌های مشابه، استفاده خواهند کرد. یک بار انجام تکلیفی مشابه این تکلیف، برای یادگیرندگان مفید است؛ و انجام چندین باره‌ی آن، آنان را قادر می‌سازد تجارب قبلی خود را بسازند و ایده‌ها را با تفکر و عمل شخصی خود، تلفیق کنند. یک جنبه‌ی مهم این تکلیف و سایر تکالیف، این است که یادگیرندگان با اشیای آشنا (ارقام)، دست‌ورزی می‌کنند تا اعداد را بسازند و حسی از ساختار اعداد به‌دست آورند (در این نمونه، این که با شرایط داده شده، چگونه اعداد با طولانی‌تر شدن بلوک ۹ها، بزرگ می‌شوند). اگر طی بحث‌های کلاسی، یادگیرندگان بتوانند استدلال خود درباره‌ی دنباله‌ی

... و ۲/۴۹۹۹۷ و ۲/۴۹۹۷ و ۲/۴۹۷ و ۲/۴۷

را بیان کنند و این که حد آن چیست را دریابند، آن‌گاه دامنه‌ی اعداد اعشاری آشنای خود را بسط داده‌اند تا حسی از اعداد اعشاری به اندازه‌ی کافی بلند و نامتناهی به‌دست آورند.

● **تکلیف ۳: تفاضلِ ۲**

یک جفت عدد بنویسید که تفاضل آن‌ها، ۲ باشد.
یک جفت عدد دیگر بنویسید (که باز هم تفاضلشان ۲ باشد.)
یک جفت دیگر هم بنویسید.

من و همسرم، آن واتسون[۸]، کشف کردیم که در سومین درخواست، اغلب افراد شروع می‌کنند به خلاق شدن یا باهوش شدن. در عین حال که آن‌ها، از این که شما قصد داشته باشید از آن‌ها بخواهید کار بغرنجی با اعداد خود انجام دهند نمی‌ترسند، شروع می‌کنند به ماجراجویی. اگر افراد جفت اعداد خود را به صورت عادی نمایش دهند، دیگران ایده‌هایی از آن‌ها برمی‌دارند که به ذهن خود آن‌ها هم بروز نکرده است: به‌عنوان مثال، بعضی فکر می‌کنند از اعداد کسری استفاده کنند، ولی دیگران، نه؛ بعضی فکر می‌کنند از اعداد منفی استفاده کنند، اما دیگران چنین نمی‌کنند؛ برخی به اعداد اعشاری می‌اندیشند، لیکن بقیه نه؛ و عده‌ای به ریشه‌ها یا اعداد مختلط فکر می‌کنند. در مواجهه با امکانی که شما به آن فکر نکرده بودید، برای دفعات بعدی که به تکالیف مشابه برخورد کنید، آزادی بیش‌تری برای انتخاب به‌دست می‌آورید (واتسون و میسون، ۲۰۰۵).

ما به افرادی برخورد کردیم که به اعدادی مانند ۱۱ و ۱ (چه به‌عنوان اعدادی در مبنای دو، چه به‌عنوان اعداد روی یک ساعت) نیز درست مانند جفت‌های سنتی ۹۹۹۹ و ۱۰۰۰۱ فکر کرده بودند: اعدادی که بسیاری از یادگیرندگان برایشان سخت بود که متوجه بشوند این دو، تفاضل ۲ دارند.

زمانی که از یادگیرندگان می‌خواهیم که جفت عددی بسازند که تفاضلشان ۲ باشد و دیدن این که تفاضل آن‌ها ۲ است، ساده نباشد؛ افراد، سراغ اعدادی مثل $\sqrt[۳]{۱۲۵}$ و $\sqrt{۴۹}$ یا $۱\frac{۵}{۷}-$ و $\frac{۲}{۷}$ یا $۱+\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۲}}$ و $۱-\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۲}}$ و مانند آن‌ها می‌روند. خلاقیتی بزرگ عرضه می‌شود. باز هم یادگیرندگان را به دست‌ورزی با اشیای آشنا (اعداد) دعوت کردیم تا اعداد پیچیده‌تری با آن‌ها بسازند که یک ویژگی خاص یا محدودیتی دارند.

● **تکلیف ۴: تشخیص ویژگی‌ها[۹]**

چه اعدادی را می‌توان به صورت ۲ واحد بیش‌تر از مجموع چهار عدد صحیح متوالی، نمایش داد؟
چه اعدادی را می‌توان به صورت ۱ واحد بیش‌تر از حاصل‌ضرب چهار عدد متوالی، نمایش داد؟

سؤال اول چنان ساده به نظر می‌رسد که آن‌ها که در جبر، اعتماد به نفس دارند، تصمیم می‌گیرند با دست‌ورزی با حروف مرسومی هم‌چون x یا n، روی مسأله کار کنند. به‌وضوح،

کشف این که هر مضرب ۴ که از ۸ بزرگ‌تر باشد، در شرایط این سؤال صدق می‌کند، کار سختی نیست (خود را به اعداد صحیح محدود کردیم). لیکن رویکردی مشابه برای مسأله‌ی دوم، ما را با محاسبات جبری مشکلی مواجه می‌سازد. تا زمانی که درباره‌ی آن‌چه اتفاق می‌افتد حدس نزنید، برایتان مشکل خواهد بود که در عبارت‌های جبری متناظر با آن، هیچ ساختاری را ببینید. اما اگر برای دیدن آن‌چه اتفاق می‌افتد، مثال خاصی بزنید، آماده می‌شوید حدسی بزنید که درستی آن با جبر، ثابت می‌شود. قدرت مثال‌های خاص و شهودی که از بررسی آن مثال خاص به منظور تعمیم آن استفاده می‌شود، در اختیار همه‌ی یادگیرندگانی است که می‌توانند حرف بزنند؛ چرا که زبان، همه‌اش برای چک و چانه زدن میان خاص و عام است.

من دو تا حدس دارم:

حدس ۱: درسی که به یادگیرندگان هیچ فرصتی نمی‌دهد که فرآیند تعمیم را تجربه کنند، یک درس ریاضی نیست.

حدس ۲: هر صفحه از هر کتاب درسی ریاضی، حداقل یک تعمیم دارد؛ این تعمیم ممکن است صریح یا ضمنی باشد. به عنوان یک معلم، نه تنها ضروری است که بتوانیم تعمیم‌های ضمنی را تشخیص دهیم، بلکه باید بتوانیم یادگیرندگان را برای استفاده از توانایی‌شان در تعمیم موضوعات هدایت کنیم تا فرآیند تعمیم را تجربه کنند. مجموعه‌ای از مثال‌های حل شده، کلیشه‌ای به یادگیرندگان می‌دهد که آن را تقلید کنند؛ و این یک تعمیم ضمنی است. مجموعه‌ای از مثال‌ها درباره‌ی مفاهیم ریاضی مانند زاویه یا مثلث یا اعداد اول، دعوت به تعمیم است، به دیدن امری کلی در مثالی خاص.

اگر یادگیرندگان را به استفاده از توانایی‌شان ترغیب نکنیم، در این صورت به مشارکت در ریاضی و به ریاضی‌وار فکر کردن تشویق نمی‌شوند، و بنابراین باید به حافظه‌شان تکیه کنند و به تشخیص تطابق میان سؤال‌های امتحانی و تمرین‌هایی که انجام می‌دهند!

● **تکلیف ۵: ترسیم نمودار**

ـ نمودارهای یک جفت خط راست را رسم کنید که عرض از مبدأ آن‌ها، ۲ تا اختلاف داشته باشند.

ـ نمودارهای دو خط راست را رسم کنید که طول از مبدأهای آن‌ها، ۲ تا اختلاف داشته باشند.

ـ نمودارهای دو خط راست را رسم کنید که شیب‌های آن‌ها، ۲ تا اختلاف داشته باشند.

ـ حال، نمودارهای دو خط راست را رسم کنید که هم طول از مبدأهای آن‌ها و هم عرض از مبدأهای آن‌ها و هم شیب‌های آن‌ها، ۲ واحد با هم اختلاف داشته باشند!

افرادی که برای هر یک از سه قسمت اول تکلیف، تنها یک مثال ارایه کرده‌اند، برای حل کردن قسمت آخر، در موقعیت ضعیفی هستند. در حالی که کسانی که در هر یک از سه قسمت اول، به همه‌ی جفت‌های خطوط ممکن فکر کرده‌اند، برای مواجه شدن با قسمت آخر، مجهزتر هستند. بهتر است مثال‌هایی را که در هر لحظه به ذهن یادگیرنده خطور می‌کند، **فضای مثال‌های در دسترس**[10] یادگیرنده بنامیم. صفت **در دسترس** به این معنی است که مثال‌های دیگری هستند که زیر پوششی قرار دارند که ممکن است هنوز به ذهن نیامده باشد، جزئی از **فضای مثال‌های غنی‌تر**. زمانی که یادگیرندگان فضای مثال محدود یا باریکی داشته باشند، برای مواجه شدن با قضایا یا حقایقی که معلم مطرح می‌کند، در موقعیت ضعیفی قرار دارند. تکالیف ساختنی، هم برای غنا بخشیدن به فضای مثال‌های یادگیرنده مفید هستند، هم برای برملا کردن گستردگی و پیچیدگی فضای مثال‌های در دسترس وی.

هم‌چنین این تکلیف نشان می‌دهد که تکلیفی با مضمون «تفاضل ۲»، می‌تواند نسخه‌های متفاوتی داشته باشد که مورد استفاده‌ی یادگیرندگان در هر سن و با هر سطحی از پختگی قرار گیرد. البته به جای **تفاضل** می‌توان از عملگر یا رابطه‌ی دیگری استفاده کرد، و ۲ نیز می‌تواند به کلی چیز دیگری باشد، و اشیاء می‌توانند اعداد، توابع، شکل‌های هندسی و نظایر آن باشند.

قسمت چهارم این تکلیف قصد دارد قوه‌ی تخیّل را تمرین دهد، و برای این منظور، به‌جای پیشنهاد استفاده از جبر، از کلمه‌ی «رسم کنید» استفاده شده است. راه‌حل جبری این سؤال، سخت نیست، مگر این‌که در استفاده از پارامترها، اعتماد به‌نفس کافی نداشته باشید. لیکن بسیاری از یادگیرندگان نه معنای واقعی شیب را می‌دانند و نه با نمودارهای خط راست ـ آن‌طور که باید و شاید ـ دست‌ورزی کرده‌اند.

● **تکلیف ۶: بیش‌تر یا کم‌تر**

با یک مثلث مختلف‌الاضلاع شروع کنید. سپس سعی کنید جدول زیر را که درباره‌ی مثلث‌هایی است که روابط متفاوتی با این مثلث دارند، تکمیل کنید [نوع مثلث را تعیین کنید].

محیط / ارتفاع	بیش‌تر	هم اندازه	کم‌تر
بیش‌تر	محیط بیش‌تر، ارتفاع بلندتر	محیط هم اندازه، ارتفاع بلندتر	محیط کم‌تر ارتفاع بلندتر
هم اندازه	محیط بیش‌تر هم ارتفاع		محیط کم‌تر هم ارتفاع
کم‌تر	محیط بیش‌تر ارتفاع کوتاه‌تر	محیط هم اندازه، ارتفاع کوتاه‌تر	محیط کم‌تر ارتفاع کوتاه‌تر

این ساختار تکلیف، توسط همسرم، آن واتسون، براساس ایده‌ی دینا تیروش[11] توسعه یافته است و این نخستین باری است که آن را به دیگران نشان می‌دهم. هدف این است که توجه یادگیرنده را به جای خود مفاهیم، به روابط میان آن‌ها جلب کنیم. در این‌جا، رابطه‌ی میان ارتفاع و محیط تقریباً ساده است، لیکن این ساختار را می‌توان در بسیاری از موقعیت‌های دیگر نیز به کار برد. به‌عنوان مثال می‌توانید با یک مستطیل شروع کنید و در مورد تغییرات محیط و مساحت در هر یک از خانه‌های جدول سؤال کنید. گاهی بدون توسعه‌ی رده‌ی اشیای (در این مثال، مستطیل‌ها) نمی‌توان سایر اشیای مرتبط را درنظر گرفت.

در این‌جا دوباره از یادگیرندگان خواسته می‌شود که خانه‌های جدول را پر کنند، و الزاماً، محدوده‌ی مثال‌هایی را که می‌توانند در جدول قرار گیرند، کشف کنند، نه این‌که فقط یک مثال بزنند. به این ترتیب آن‌ها با چگونگی تأثیر متقابل دو خاصیت بر یکدیگر، آشنا می‌شوند.

بازتاب

یکی از قهرمانان یا افرادی که در کودکی تحت تأثیر وی بوده‌ام، عمر خیام بود؛ به دو دلیل: یکی این‌که پدرم، بعضی از رباعیات او را دائم می‌خواند، و دیگر این‌که زمانی که نوجوان بودم، شرح زندگی و فعالیت‌های ریاضی خیام را خواندم.

دوبیتی‌ای [که پدرم می‌خواند] این بود:

یک چند به کودکی به استاد شدیم
یک چند ز استادی خود شاد شدیم
پایان سخن شنو که ما را چه رسید
از خاک درآمدیم بر باد شدیم

که سه ترجمه‌ی مختلف به زبان انگلیسی از آن شده است:

Myself when young did eagerly frequent
Doctor and Saint and hear great argument
About it and about but ever more
Went out by the same door where in I went.

Pursuing knowledge in childhood we rise
Until we bocome masterful and wise
But if we took through the disguise
We see the lies of worldly ties

In childhood we strove to go to school
Our turn to teach, joyous as a rule
The end of the story is sad and cruel
From dust we came, and gone with winds cool.

این سه ترجمه از این دو بیتی، جنبه‌های مختلفی از یاددهی

و یادگیری ریاضیات را نمایش می‌دهد. نخست، وجود ترجمه‌های مختلف با معانی مختلف، شبیه روش‌هایی است که یادگیرندگان مختلف یک تکلیف ریاضی را به صورت‌های متفاوتی تفسیر می‌کنند. بعضی آن را هم‌چون یک مسئولیت سنگین می‌دانند که یا باید هرچه زودتر آن را تمام کنند، یا همان‌طور حل نشده آن را می‌گذارند؛ در حالی که سایرین آن را چیزی می‌دانند که باید انجام دهند تا یک جوری، یادگیری به طرز معجزه‌آسایی رخ دهد. دیگران، تکالیف را به عنوان فرصت‌هایی می‌دانند که در آن، از توانشان برای معنادار کردن ریاضیات و کسب حس ریاضی‌وار، گسترش و چالش [ذهنی] خویش، و درنتیجه یادگیری، استفاده می‌کنند. در تفسیرهای مختلف هدف تکلیف و آن‌چه که واقعاً تکلیف می‌خواهد نیز چنین تنوعی هست.

دوم، آخرین ترجمه‌ی شعر، از دور بی‌پایان بازتولید تجربه‌ی یادگیری کودک به‌عنوان یک معلم، خبر می‌دهد. من، قصد دارم از این فراتر بروم و بگویم که هر نسل، روش‌های عالمانه‌تر و کارآمدتری برای ترویج یادگیری، توسعه می‌دهد. ترجمه‌ی دوم، ترجمه‌ی موشکافانه‌تری است، که خبر می‌دهد که یادگیری، به‌عنوان شکلی از تسلط بر دنیا یا به‌عنوان یک هدف، در خودش شکلی از هم‌سان شدن[12] با جهان، ضمن از دست دادن ارتباط با پیشامدهای مهم‌تر است. تدریس را می‌توان به صورت وادار ساختن یادگیرندگان برای دیدن چیزهای بزرگ‌تر از میان روابط مادی دید. در مورد ریاضی، می‌توان آن را به معنی دست‌یابی به دنیای اَشکال و نمادها دانست. ترجمه‌ی بسیار مفسرانه‌ی فیتز جرالد[13]، به من یادآوری می‌کند که مناقشات علمی، من را ارتقاء نمی‌دهد؛ بلکه آن‌چه مهم است، تجربه‌های وسیع و یادگرفتن از این تجربه‌هاست. به‌عنوان یک معلم، ضروری است از طریق وادار ساختن یادگیرندگان به استفاده از کارهایی که با هستی آن‌ها عجین شده است، تجربه‌های آن‌ها را فرا بخوانیم. این اعمال روی اشیای ملموس و آشنا صورت می‌گیرند. طی چالشی که آن‌ها را به انطباق و توسعه‌ی اعمالشان و تجربه‌ی کارهای بدیع و بسیار قوی شوق می‌دهد، یادگیری نیز جذب می‌شود. در این صورت ممکن است این اعمال به جای یادگیرنده، به کارکرد آن‌ها ملحق شوند.

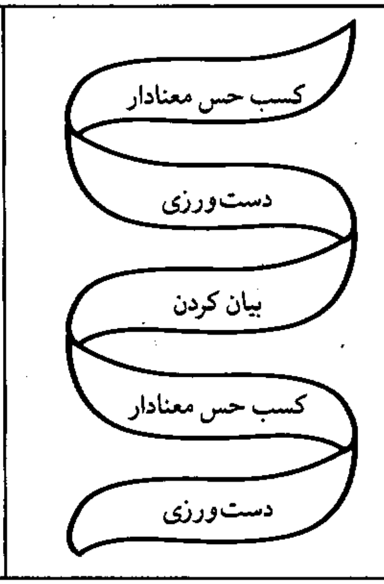
ساخت‌های روانی

من و همکارم در دانشگاه آزاد لندن، (فلوید و همکاران، ۱۹۸۱؛ هم‌چنین میسون و جان وایلدر، ۲۰۰۴/۲۰۰۶ را ببینید) تجارب منتخب خود در یاددهی و یادگیری را بیرون کشیدیم و در پرتو نظرات جروم برونر[14] (۱۹۹۶)، برای کمک به ایجاد ارتباط[15] با یکدیگر درباره‌ی طراحی و رهبری دروس[16]، ساخت‌هایی را توسعه دادیم.

MGA[17]

با وادار کردن یادگیرندگان به **دست‌ورزی** با اشیای ملموس و آشنا، [الزاماً] یادگیری تولید نمی‌شود. هدف از دست‌ورزی با اشیاء (این اشیاء می‌توانند فیزیکی، ذهنی، یا نمادی باشند) این است که نسبت به ساختارها یا روابط نهفته در آن‌ها، حس معناداری پیدا کنند. یکی از تم‌های مرکزی در ریاضیات، **ناوردایی در کانون تغییر**[18] می‌باشد. بنابراین، دست‌ورزی با اشیای ملموس، تشخیص روابط ناوردا را امکان‌پذیر می‌سازد و در همان حال، قدردان دامنه‌ی آن تغییراتی می‌شویم که در آن‌ها، آن ناوردا، ثابت می‌ماند. به‌عنوان مثال، تخصیص یک امر به‌منظور تعمیم آن، دست‌ورزی با حالت‌های ساده‌ی ملموسی است که اعتمادبه‌نفس را القا می‌کنند؛ به‌منظور دیدن امری کلی از درون امری خاص؛ آن امر کلی که در عین تغییر سایر اشیاء، ثابت می‌ماند. در تکلیف(۱)، مجموع دو عدد، ناوردا است (یعنی ۱) و منجر به دو محاسبه می‌شود که مقادیر یکسان دارند: یک ناوردای دیگر! در تکلیف (۲)، با آزمودن اعداد اعشاری مختلف، یادگیرنده با روش‌هایی که می‌توان توسط آن‌ها، یک عدد اعشاری را بزرگ‌تر کرد، مواجه می‌شوند، مشروط بر این محدودیت که کمتر از ۲/۵ باشد. یادگیرندگان تشویق می‌شوند بیش‌تر قدردان روابط میان اعداد اعشاری باشند.

کسب حسی معنادار از روابط و ناورداها، کمک مهمی به درک و فهم است، لیکن تا زمانی که سعی می‌کنید دیگران را متقاعد سازید که «دارید به آن‌ها درس می‌دهید»، نمی‌توانید مطمئن باشید که ایده‌های شما را فهمیده باشند. بنابراین، ما **بیان کردن** را به این‌ها افزودیم؛ عملی که در آن ابتدا در تلاش برای توصیف حس خود از روابط و ناورداها، دچار خطا می‌شوید، ولی با گذشت زمان، و با تلاش‌های مکرر، بیانات شما، منسجم‌تر و منطقی‌تر و نیزخلاصه‌تر و موجزتر می‌گردند. این بیانات، به عبارت‌های تکنیکی مرتبط با کلکسیونی غنی از مثال‌ها تبدیل می‌شوند، و بنابراین پایه‌ای



زمانی که قدری گیج می‌شوید یا میان تعمیم و تجرید گم می‌شوید، یا زمانی که روی مسأله‌ای کار می‌کنید، می‌توانید بازگشت کنید و به عقب برگردید و مثال‌های بسیار بسیار آشنا (مثال‌های خاص) را درنظر بگیرید تا از آن‌چه که گفته می‌شود یا انجام می‌شود، حس معناداری کسب کنید. پس از آن می‌توانید برای خودتان تعمیم یا تجرید را بیان کنید، و درنتیجه آن را با داشته‌های خودتان تلفیق می‌کنید.

برای دست‌ورزی‌های آینده می‌گردند. نتیجه‌ی آن، مارپیچ یادگیری است که در شکل بالا، نشان داده شده است.

رویکرد دیگری به همین ایده‌ها، این است که برحسب رفتار یادگیرندگان فکر کنیم. یک تکلیف، می‌تواند ضمن دست‌ورزی با اشیاء، آن‌ها را به تلاش درباره‌ی موضوعی از همان نوع یا انواع دیگر، وادار کند. زمانی که از آن‌ها می‌خواهیم با خودشان و با دیگران درباره‌ی کاری که انجام داده‌اند، صحبت کنند، پیشگویی کنند، حدس‌هایی بزنند، و آن حدس‌ها را بیازمایند، به آن‌ها کمک می‌کنیم تبیین ساختارهای نهفته در روابط را توسعه دهند[و این ساختارها را بهتر بیان کنند].

ثبت و ضبط، به ویژه با استفاده از عبارت‌های تکنیکی، توسط تلاش و صحبت کردن حمایت می‌شود، و خود، به تبیین فصیح‌تر و «تلاش» متمرکزتر، کمک می‌کند. ما از سه‌تایی تلاش ـ صحبت ـ ثبت و ضبط[۱۹]، به عنوان یک یادآور[۲۰] استفاده می‌کنیم که یادگیرندگان را با گزارش‌های کتبی، دست‌پاچه می‌کند، به‌ویژه نوشته‌هایی که در آن‌ها نمادها برای یادگیرندگان، ناآشنا یا مجرد هستند؛ این کار نسبت به زمانی که آن‌ها را درگیر فعالیت‌هایی می‌کنیم که در آن هم کاری انجام می‌دهند و هم صحبت می‌کنند و پس از آن، از کارهایشان یک گزارش کتبی می‌دهند، کمتر کارآمد است.

توانایی‌ها

در دهه‌ی ۱۹۸۰، صحبت درباره‌ی **فرآیندهای تفکر**[۲۱] متداول بود(میسون و همکاران، ۱۹۸۲). ولیکن من دیده‌ام که بسیاری از این‌ها، همان توانایی‌های طبیعی[ذهنی] هستند که هر یادگیرنده‌ای که به مدرسه می‌رود، پیش از آن ابراز کرده است. پرسش اساسی این است که آیا همه‌ی این توانایی‌ها با درس‌های ریاضی شکل گرفته‌اند، یا به دلایل فرضی کارایی و ضرورت، معلم و نویسنده‌ی متن کتاب درسی، این توانایی‌ها را غصب کرده‌اند و سعی می‌کنند کاری برای یادگیرندگان انجام دهند.

تخصیص و تعمیم

جورج پولیا(۱۹۶۲) اشاره کرده است که جستجوی مثال‌های خاص یا حالت‌های خاص یا حالت‌های خیلی خاص، برای کارکرد بشر، اساسی است: زمانی که با تجرید یا تعمیم مواجه می‌شوید، سعی می‌کنید مثال‌ها یا مثال نقض‌هایی را در تجارب خودتان بیابید. من امیدوارم خوانندگان این مقاله، این کار را برای خودشان انجام دهند. هدف از تخصیص همان‌طور که پیش از این گفتیم، درک حس معنادار از موضوع و قدردان روابط ساختاری نهفته در آن موضوع (به‌عنوان یک موضوع عمومی) بودن است. بنابراین ضمن این اعمال، یادگیرنده می‌تواند موضوعات عمومی را که حاوی یک موضوع ریاضی است، بازسازی کند و گسترش دهد. هنگامی که در یک کتاب درسی، حالت‌های خاص معرفی می‌شوند و یک گزاره‌ی عمومی بیان می‌شود، نویسنده جای یادگیرنده را می‌گیرد. لازم است یادگیرندگان را تشویق کنم که خودشان از مثال‌های خاص، تعمیم دهند؛ و نیز تشویقشان کنیم زمانی که با یک امر عمومی یا مجرد مواجه می‌شوند، آن را تخصیص دهند.

حدس زدن و قانع کردن

افراد دائم حدس می‌زنند: حوادث غیرمترقبه، شاهدی هستند بر این که انتظارات ما ـ حتی انتظارات ضمنی ما ـ نقش برآب می‌شوند. به گفته‌ی پولیا، در ریاضیات، حدس زدن خیلی مهم است؛ آن را از خارج از خود به دست آوردن و سپس به آن شک کردن: بررسی مثال‌های بیش‌تر (تخصیص)، تلاش برای یافتن مثال‌های نقض، یا تلاش به منظور توجیه آن حدس برای خود و دیگران. متقاعد شدن نسبت به حدس خودمان، کار ساده‌ای است. پس از آن، یاد گرفتن به چالش کشیدن حدس‌های افراد دیگر، اهمیت دارد چرا که در این صورت خواهید توانست ضمن این چالش‌ها، حدس‌های خود را نیز بهبود ببخشید. برای شکوفایی تفکر ریاضی، ضروری است که فضاهای کلاس درس، فضای حدس باشد: یک شیوه‌ی کاری که در آن هر حرفی که توسط معلم یا توسط یادگیرندگان زده می‌شود، به‌عنوان حدسی است که باید جرح و تعدیل شود. به جای تأکید بر یک جواب درست یا یک روش درست یا غلط، هر کمکی، به‌عنوان یک حدس دیده می‌شود که ممکن است نیاز به اصلاحات داشته باشد، پس دیگران «از شما دعوت می‌کنند براساس مثال‌های نقض مطرح شده، حدس خود را اصلاح کنید.»

تجسم و بیان

همه کس این توان را دارد که تجسم کند و زبان، ابزاری است که توسط آن، آن‌چه را که تجسم کرده‌ایم، در قالب کلمات، موسیقی، هنر یا رقص، بیان می‌کنیم. اغلب در ریاضیات، اشیاء مورد نظر، تجسمی هستند نه فیزیکی؛ بنابراین ضروری است که روی توسعه‌ی توانایی تجسم یادگیرندگان، کار کنیم. من از تکالیف (۱) و (۵) برای جلب توجه ویژه به این جنبه‌ی انسانی، استفاده کردم، لیکن این جنبه در تمام تفکرات ریاضی وجود دارد. زمانی که تلاش می‌کنید درک معناداری از روابط ساختاری به دست آورید، درواقع در دنیای تجسمات کار می‌کنید.

در ریاضیات، ما تجسمات خود را توسط نمودارها و نمادها، ضمن پیشنهاد حالت‌های خاص یا ویژه‌ای که انتظار داریم توسط آن‌ها، دیگران به امر کلی مورد نظر ما دست یابند، بیان می‌کنیم.

بچه‌های کوچک دوست دارند اشیاء را مرتب کنند، و آن‌ها را به شیوه‌های مختلف بچینند. تکالیفی که بر مبنای مرتب کردن اشیای ریاضی بنا شده‌اند، ابزارهای آموزشی قوی‌ای برای تحریک یادگیرندگان به آگاهی از وجوه تشابه و وجوه تمایز بین آن اشیاء ـ به عنوان روشی برای درک مفاهیم و قدردانی از آن‌ها ـ می‌باشند (سُوان، ۲۰۰۶).

ریاضی‌دان‌ها هم، ضمن رده‌بندی اشیاء، آن‌ها را دسته‌بندی و مرتب می‌کنند؛ به همین دلیل من از تکلیف (۴) استفاده کردم. بیش‌تر محتوای ریاضی، درباره‌ی یافتن توصیفی دیگر از ویژگی‌هایی است که مجموعه‌ای از اشیاء را تعریف یا مشخص می‌کنند. به بیان دیگر، ویژگی‌های مشخصه، ناورداهایی در مرکز تغییر آن مثال‌ها هستند. هرچقدر یادگیرندگان، به فضای غنی‌تر و وسیع‌تری از مثال‌ها دسترسی داشته باشند، درک و قدردانی آن‌ها از مفاهیم، عمیق‌تر است. فرنس مارتُن (مارتن و بوت، ۱۹۹۷) چنین ابراز کرده است که «یادگیری، درباره‌ی آگاه شدن از جنبه‌های بیش‌تری است که می‌توانند تغییر کنند (وجوه تنوع[۲۲]) بدون مثال‌هایی که مثال بودن خود را از دست می‌دهند.»

برای استدلال منسجم و متقاعدکننده در ریاضیات، ضروری است که ویژگی‌هایی را که مجموعه‌های دقیق از اشیاء را مشخص می‌کنند، بیابیم. سپس با استفاده از این ویژگی‌ها می‌توانیم دلایلی درباره‌ی آن‌چه که باید اتفاق بیفتد، بیاوریم. پس، اعداد فرد، با این ویژگی که به شکل $2n-1$ یا $2n+1$ هستند مشخص می‌شوند؛ همه‌ی اعداد اول یا باید به شکل $6n+1$ باشند یا به شکل $6n-1$، و مانند این‌ها. تکلیف(۴) قصد دارد حاوی تجربه‌ی رده‌بندی باشد.

موافق بودن و مدعی

همه کس این توان را دارد که ابتکار به خرج دهد، حدس‌هایی بزند، تخصیص کند، تعمیم دهد، در دنیای ریاضی عمل کند: به بیان دیگر، **ادعا کند**. هم‌چنین، این قدرت را دارد که عقب بنشیند و صبر کند تا به او دیکته شود، صرفاً راضی باشد، با آن‌چه که در کتاب‌های درسی یا توسط معلم گفته می‌شود، **موافقت کند**. یادگیرندگانی که نسبت به آن‌چه قرار است بیاید، پیش‌دستی می‌کنند (مانند تکلیف ۱)، چیزی یاد می‌گیرند؛ زیرا حدس می‌زنند و حدس خود را می‌آزمایند و لذا از تجربه‌ی خویش، چیزی یاد می‌گیرند. درحالی که یادگیرندگانی که راضی به قبول

همه‌چیز هستند و عقب می‌نشینند و معتقدند اگر تلاش کنند، یک جوابی به دست خواهند آورد، احتمالاً در آزمون‌هایی که سؤال‌های آن، همه‌چیز هست مگر پرسش‌های متداول (روتین)، ناگهان بیدار خواهند شد!

مضامین ریاضی

چندین مضمون وجود دارد که ریاضیات مدرسه‌ای را پُر کرده است و به یادگیرندگان کمک می‌کند یگانگی و ساختار ریاضی را به‌عنوان یک کل، به صورت معناداری درک کنند.

ناوردایی در مرکز تغییر

همان‌گونه که پیش از این اشاره شد، می‌توان بیش‌تر ریاضیات را جستجو یا تشخیص روابط ناوردایی دانست که هنگام تغییر جنبه‌هایی خاص، ثابت می‌مانند. بنابراین، مجموع زاویه‌های داخلی یک مثلث در صفحه، ناوردا است؛ هر چند که شکل یا اندازه‌ی مثلث‌ها را می‌توان تغییر داد. نسبت ضلع مقابل به وتر در یک مثلث قائم‌الزاویه، تحت تغییر مقیاس، ثابت است (چرا که خود زاویه‌های مثلث نیز تحت این تغییر ناوردا هستند). لذا تانژانت یک زاویه، تحت تغییر اندازه‌های اضلاع آن زاویه، ناوردا است.

با جلب توجه به ناورداها و اجازه‌ی تغییر دادن برخی جنبه‌ها، به یادگیرندگان کمک می‌کنید قدردان ریاضی به عنوان یک حوزه‌ی تحقیقی نظام‌مند باشند، نه این‌که آن را جعبه ابزاری از تکنیک‌ها برای حل مسایل استاندارد قلمداد کنند.

یکی از اَشکال هوشمندانه‌ی ناوردایی در مرکز تغییر این است که تکلیف(۲) را بگیرید و آن را این طور تغییر دهید که یادگیرنده‌ها اعدادی بسازند که از بالا به $\frac{5}{9}$ برسند. به‌عنوان مثال، اعداد اعشاری را بخواهید که در آن‌ها رقم ۵، مجاز باشد و نیز استفاده از رقم ۱ در آن‌ها نیز اجباری بوده و تا حد امکان به عدد $\frac{5}{9}$ نزدیک باشند. در این جا، آن‌چه ناوردا است، هدف تکلیف است (تا حد امکان نزدیک بودن به $\frac{5}{9}$) که درون محدودیت‌های بین ۲ و ۳ بودن و داشتن ارقامی خاص و... قرار گرفته است. هم‌چنین مفاهیم دنباله و حد در هر دو صورت تکلیف، مشترک هستند.

آزادی و محدودیت

این مضامین نیز در سراسر ریاضی مدرسه‌ای پُر شده‌اند، هر چند که من صریحاً به آن‌ها اشاره نکرده‌ام. زمانی که از یادگیرندگان می‌خواهیم مسأله‌ای را حل کنند، آن‌ها می‌توانند آن را به‌عنوان چیزی که در آغاز کاملاً آزاد است ببینند (مثلاً یک یا دو عدد که جواب‌های یک معادله هستند)، اما بعداً محدودیت‌هایی به آن‌ها افزوده می‌شود. من سعی کردم تجربه‌ای مانند این را در تکلیف (۳) و به ویژه در تکلیف (۵) بگنجانم که در آن، تک‌تک محدودیت‌ها با یکدیگر ترکیب می‌شوند تا تکلیفی چالش‌برانگیز بسازند. من تکلیف (۵) را با همان ترتیبی که انجام دادم نشان داده‌ام که در آن هریک از محدودیت‌های خاص، به تنهایی آمده است. قصدم این بود که نشان دهم یادگیرنده می‌تواند از قسمت چهارم شروع کند و برای خودش، آن را به مؤلفه‌هایی بشکند، ضمن این‌که به یک جفت خط دلخواه فکر می‌کند که به مرور محدودیت‌هایی روی آن‌ها گذاشته می‌شود.

Doing & Undoing

زمانی که یک ریاضی‌دان در **انجام** (Doing) کاری مانند حل یک مسأله یا اثبات یک حدسیه، موفق می‌شود، کششی طبیعی او را به تلاش برای معکوس کردن آن فرآیند می‌کشد؛ یعنی Undo کردن آن! مثلاً کم کردن یک عدد از عدد دیگر، **انجام** کار است. زمانی که پاسخ تفریق را به یادگیرنده می‌دهید و از او می‌پرسید کدام جفت اعداد، این پاسخ را تولید کرده‌اند- مانند تکلیف (۳)- آن را بسیار خلاقانه‌تر می‌کنید. باز هم معمولاً متداول است که برای این‌که ببینیم آیا یادگیرندگان ارزش مکانی را فهمیده‌اند یا نه، از آن‌ها بپرسیم کدام یک از دو عدد اعشاری داده شده، بزرگ‌تر هستند. لیکن می‌توانیم مانند تکلیف (۲)، پرسش خلاقانه‌تر و جستجوگرانه‌تری مطرح کنیم و بخواهیم برای خود، اعداد اعشاری‌ای بسازند که بلندتر و بلندتر می‌شوند و برای این کار، نیازمند مقایسه‌ی اعداد نیز باشند.

استفاده از ساخت‌ها برای تدریس و برای تدریس به معلمان

ثابت شده است که MGA و DTR، به همراه توانایی‌ها و مضامین ریاضی، در یادآوری آن‌چه که معلمان تلاش می‌کنند در کلاس‌های درس به آن دست یابند، و لذا در انتخاب مثال‌ها توسط معلمان، شیوه‌های تعاملشان با یادگیرندگان، و توقعاتشان از یادگیرندگان، کارآمد هستند.

اگر توقعاتتان کوچک باشد، آن‌چه به دست می‌آورید نیز کوچک است؛ اگر توقعاتتان بزرگ باشد، باز هم آن‌چه به دست

می‌آورید، کوچک است. لیکن سه تا از عواملی که بیش از سایر عوامل، موفقیت یادگیرندگان را محدود می‌سازد، انگیزه و توقع آن‌ها از خودشان، انتظارات صریح و ضمنی ابراز شده توسط معلمان، و توقعات صریح و ضمنی ابراز شده توسط والدین آن‌ها است. مردم‌شناسان، علاقه‌مند هستند که بگویند

فقدانِ شواهد، شاهدی بر فقدان نیست.

در آموزش ریاضی، این به این معنی است که فقط به این دلیل که یک یادگیرنده مسأله‌ای را حل نمی‌کند، نمی‌توان نتیجه گرفت که او نمی‌تواند؛ او فقط حل نکرده است! در هر زمان، عوامل زیادی ممکن است وجود داشته باشند که به رفتار وی کمک کنند. اگر توقعمان را در حد دست‌یابی به رفتار جاری تقلیل دهیم، معلم، با اشتباه گرفتن فقدان شاهد به جای شاهد فقدان، گرفتار یک مارپیچ نزولی از یأس و پیشرفت کم می‌شود. شواهد رو به رشدی وجود دارد که زمانی که یادگیرندگان را، به عنوان افراد صاحب قدرت و توان که می‌توانند یکدیگر را در کار با هم حمایت کنند، می‌انگاریم؛ و زمانی که در تلاش برای تفکر ریاضی، ضمن استفاده از توانایی‌هایشان حمایت می‌شوند، می‌توانند سؤال‌هایی را در آن حل کنند که مانند آن را تا قبل از آن هرگز ندیده‌اند (واتسون و همکاران، ۲۰۰۴؛ واتسون، ۲۰۰۷).

چینی‌ها می‌گویند

> اگر به شخصی یک ماهی بدهید، او را برای یک روز سیر کرده‌اید؛ و اگر به او ماهیگیری را یاد بدهید، او را برای همه‌ی عمر سیر کرده‌اید (یا حداقل تا زمانی که ذخایر موجود تمام شوند!).

معلمان می‌توانند با تجمع مجموعه‌ای از وقایع کلاسی با ساخت‌هایی مانند MGA و DTR و با توانایی‌ها و مضامین ریاضی، احتمال این را که در زمان‌های مورد نیاز، ایده‌های مفید به ذهنشان خطور کند را تقویت کنند (میسون، ۲۰۰۲). به عنوان مثال، هنگامی که تلاش می‌کنم یادگیرندگان نمادهای مجرد را به کار ببرند، احتمالاً DTR یا MGA به عنوان یادآور به ذهن می‌رسند که انجام دادن و صحبت کردن، مفیدند اگرچه پیش از تلاش برای بیان توسط نمادهای خلاصه، ضروری نیستند. به عنوان مثالی دیگر، هنگامی که یک مثال حل‌شده را برای یادگیرندگان مرور می‌کنم، کار را قطع کنیم و از آن‌ها بخواهیم درحالی که تکنیک مورد نظر کار می‌کند، آن‌چه را که می‌توان تغییر داد، و چگونگی این تغییر را در مثالی خاص در نظر بگیرند.

در یکی از کارگاه‌هایی که برگزار کردم، پیشنهادم این بود که تغییر کوچکی، که تنها چند دقیقه از زمان یک روز را می‌گیرد، بهترین راه کشف چنین ایده‌هایی است. به محض این‌که یادگیرندگان به انواع جدید پرسش‌ها و خواسته‌ها، انواع جدید تکالیف، و روش‌های جدید فکر کردن عادت می‌کنند (واتسون و میسون، ۱۹۹۸)، احتمال دارد که بیش‌تر و بیش‌تر پاسخ مثبت بدهند و درحقیقت تقاضای کار بیش‌تری مشابه با آن‌ها را داشته باشند. اگر سعی کنید خیلی زیاد و خیلی سریع تغییر دهید، صرفاً با مقاومت در برابر ناآشنایی با کارها مواجه می‌شوید.

مثلاً به جای این‌که از یادگیرندگان بخواهید برای تکلیف شب، «پرسش‌هایی که شماره‌ی فرد دارند را انجام دهید»، از آن‌ها بخواهید «آن تعداد از پرسش‌ها را حل کنید که لازم است تا بتوانید پرسش‌هایی از این نوع را پاسخ دهید.» ابتدا آن‌ها متوجه نمی‌شوند از آن‌ها چه می‌خواهید، ولی پس از کمی توضیح، می‌بینید که منظور از انجام تمرین‌ها، به دست آوردن جواب نیست، بلکه این است که بفهمیم چگونه و چه موقع یک تکنیک، کار می‌کند.

هم‌چنین پیشنهاد کردم از یادگیرندگان بخواهیم در پایان هر فصل، تمرین‌های شخصی خود را بر روی کارت‌هایی بنویسند، به طوری که هر از گاهی، بتوانند به کارت‌ها مراجعه کنند و آن‌ها را با ترتیبی که به نظر مناسب می‌رسد، مرتب کنند. زمانی که حساسیت‌های خودشان برای مرتب کردن کارت‌ها را با حساسیت‌های دیگران ـ و احتمالاً با حساسیت‌های معلم ـ مقایسه می‌کنند، متوجه می‌شوند که راه‌های کم و بیش مفیدی برای نگاه به مسایل وجود دارد. این کار می‌تواند کمک کند برای امتحان‌هایی که در آن باید «نوع» سؤال را هرچه سریع‌تر تشخیص دهند تا برای حل آن از تکنیک مناسب استفاده کنند، آماده شوند.

تدریس، با قراردادهای ضمنی[۲۴]، (بروسیو، ۱۹۹۷) که در آن یادگیرندگان اعتقاد دارند که اگر تکالیفی را که به ایشان داده می‌شود انجام دهند به طرز معجزه‌آسایی، یادگیری رُخ خواهد داد؛ به بن‌بست رسیده است. این بدین معنی است که یادگیرندگان مایلند صریحاً به ایشان گفته شود که باید چه کار کنند (بنابراین خواهند توانست تکالیف را با حداقل تلاش و انرژی، انجام دهند). اما معلم، تحت فشار است، چرا که هرچه معلم، صریح‌تر، شفاف‌تر و واضح‌تر بگوید که یادگیرندگان برای تکمیل تکالیف چه باید بکنند، برای یادگیرندگان ساده‌تر است

که کاری که از آن‌ها خواسته شده است را انجام دهند بدون این که واقعاً با ریاضی برخورد کنند، بدون این که ریاضی‌وار فکر کنند، بدون این که چیزی یاد بگیرند. بنابراین از نظر آموزشی، تکالیف مؤثر آن‌هایی هستند که یادگیرندگان را به استفاده از توانایی‌های خودشان و بازخوانی اعمال مرسوم در عین انطباق یا اصلاح آن‌ها برای مواجه شدن با چالش‌های جدیدی تشویق کنند. به این ترتیب به تم اصلی خود باز می‌گردم، که تکالیف تنها، فقط چالش است؛ فعالیت تنها، فقط انجام دادن است؛ تجربه‌ی تنها فقط روشی برای وقت‌گذرانی است. برای این که یادگیری واقعی رخ دهد، در تکالیف باید فعالیت‌هایی تولید شود که ضمن آن، یادگیرندگان؛ استفاده از توانایی‌های خود و نقش مضامین ریاضی را تجربه کنند، و ضمن تعامل با معلم، توجهشان به این توانایی‌ها و مضامین جلب شود به طوری که زمانی که بر آن‌چه در درس اتفاق افتاده است بازتاب می‌کنند، واقعاً چیزی یاد بگیرند. به بیان دیگر، آن‌ها فضای مثال‌های خویش را غنا می‌بخشند و کارهای جدید را با دانش خویش تلفیق می‌کنند و نسبت به مفاهیم، زبان‌آورتر می‌شوند و نسبت به دامنه‌ی وسیعی از اشیاء، مطمئن‌تر می‌گردند.

از نظر من، تدریس به صورت دنباله‌ای از اعمال و تعاملات و دنباله‌ای از تصمیمات گرفته شده توسط معلم، «در زمان اتفاق می‌افتد». در عوض، یادگیری، به عنوان فرآیند بلوغ، حتی در زمان خواب، «طی زمان اتفاق می‌افتد». لیکن تنها زمانی یادگیری رخ می‌دهد که یادگیرندگان را به جای این که همیشه تسلیم و موافق باشند» به ادعا کردن، حدسیه‌سازی و دفاع از حدسیه‌ها، و استفاده از توانایی‌های دیگرشان دعوت کنیم.

زیرنویس‌ها

1. Open University
2. Tasks
3. Activity
4. Experience
5. Reflection
6. Zone of Proximal Development
7. Specialising
8. Anne Watson
9. Characterising
10. Accessible Example Space
11. Dina Tirosh
12. Identification
13. Fitz Gerald
14. Jerome Bruner
15. Communicate
16. Planning & Conducting Lessons

۱۷. ابتدای کلمات Getting-A-Sense-of و Manipulating و Articutating که به ترتیب به معنای دست‌ورزی، کسب حس معنادار و بیان کردن می‌باشند.

18. Invarience in the midst of Change

۱۹. ابتدای سه کلمه‌ی Doing و Talking و Recording به معنای تلاش، صحبت، ثبت و ضبط.

20. Reminder
21. Thinking Processes
22. Demensions of Variation

۲۳. عنوان این بخش را ترجمه نکردم، زیرا تصور می‌کنم خود واژگان اصلی، بار معنایی دارند که در فارسی، معادل مناسبی برای آن‌ها نیست (مترجم).

24. Didactic Contract

منبع ترجمه شده

* Mason, John, (2007). Using Theoretical Constructs to Inform Teaching, IMEC9.

منابع

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical situations in Mathematics: Didactiques des Mathématiques*, 1970-1990, Balacheff, N. Cooper, M. Suther land, R. and Warfield, V. (trans.), kluwer, Dordrecht.

Bruner, J. (1966). *Towar ds a Theory of Instruction*, Cambridge: Harvard University Press.

Christiansen, B. and Walther, G. (1986). Task and Activity, in B. Christiansen, G. Howson & M. Otte, *Perspectives in Mathematics Educatiion*, Dordrecht, Reidel, p 243-307.

Floyd, A., Burton, L., James, N., & Mason, J. (1981), *EM 235: Developing Mathematical Thinking*. Milton Keynes: Open University.

Marton, F. & Booth, S. (1997). *Learning and Awareness*. Hillsdale, USA: Lawrence Erlbaum.

Mason, J. Burton L. & Stacey K. (1982). *Thinking mathematically*. London: Addison Wesley.

Mason, J. & Johnston-Wilder, S. (2004/2006). *Designing and Using Mathematical Tasks*. Milton Keynes: Open University, republished (2006). St. Albans: Tarquin.

Mason, J. (2002). *Researching Your own Practice: The Discipline of Noticing*. London: Routledge Falmer Pólya, G. (1962) *Mathematical Discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving* (combined edition), Wiley, New York.

Swan, M. (2006). Collaborative Learning in Mathematics: a challenge to our beliefs and practices. London: National Institute of Adult Continuing Education.

Valsiner, J. (1988). *Developmental Psychology in the Soviet Union*. Brighton: Harvester.

Watson, A. & Mason, J. (2005). *Mathematics as a Constructive Activity: learners generating examples*. Mahwah: Erlbaum.

Watson, A. De Geest, E. & Prestage, S. (2004). *Deep progress in mathematics: the improving attainment in mathematics project*, Oxford: Dept. of Education, Oxford University.

Watson, A. & Mason, J. (1998). *Questions and Prompts for Mathematical Thinking*. Derby: Association of Teachers of Mathematics.

Watson, A. (2007). *Raising Achievement in School Mathematics*. Maidenhead: Open University Press.

مقدمه

آشنایی مقدماتی با زبان و نمادهای ریاضی، کسب آمادگی لازم برای مطالعه‌ی سایر علوم، توانایی استدلال کردن، مهارت در حل مسأله و مدل‌سازی، از مهم‌ترین اهداف آموزش ریاضی دردوره‌ی دبیرستان است که معلمان ریاضی به عنوان بخشی از اعضای جامعه‌ی آموزشی، در تحقق این اهداف نقش به‌سزایی دارند.

ورود دانش‌آموزان به دوره‌ی متوسطه و آشنا شدن آن‌ها با درس ریاضی۱، به‌عنوان یکی از مهم‌ترین دروس پایه‌ی اول دبیرستان، به‌منزله‌ی آشنایی دانش‌آموزان با مفاهیم بیش‌تری از حوزه‌ی ریاضی است؛ زیرا دانش‌آموزان پس از پشت سر گذاشتن دوره‌ی راهنمایی، در سال اول دبیرستان با نمادها، روابط و مفاهیم مجرد بیش‌تری روبه‌رو می‌شوند که تفاوت عمده‌ای با مفاهیم اشاره شده در این دوره دارد. در کتاب ریاضی۱، دانش‌آموزان با مفاهیم متنوعی از جبر، هندسه و مثلثات آشنا می‌شوند اما این کتاب، بیش‌تر بر مفاهیم جبری متمرکز است. در حالی که ریاضیات دوره‌ی راهنمایی، بیش‌تر شامل مفاهیم حسابی است. لذا، دانش‌آموزان با حوزه‌ی جدید جبر آشنایی بیش‌تری پیدا می‌کنند که این آشنایی در بیش‌تر مواقع، موجب بدفهمی‌های زیادی در یادگیری مفاهیم ریاضی می‌گردد.

آن‌چه در این مقاله به آن اشاره می‌شود، برخی از بدفهمی‌های دانش‌آموزان در ریاضی است که هم در ادبیات پژوهشی مستند شده است و هم تجربه‌ی بسیاری از معلمان ریاضی، وجود این بدفهمی‌ها را تأیید می‌کند.

ریاضی ۱ و بدفهمی‌های دانش‌آموزان

یوسف آذرنگ
دبیر ریاضی سردشت آذربایجان غربی

جبر و پیدایش آن

به گفته‌ی تال[2] (۱۹۹۶)، یکی از صورت‌های ریاضیِ، ریاضیات مجرد یا نمادین است و حساب، جبر و حسابان نمونه‌هایی از ریاضیات مجرد هستند که اغلب از اشیای جهان واقعی ناشی شده‌اند و همراه با محاسبات و دست‌ورزی با نمادها، توسعه یافته‌اند. در مقطع دبیرستان، با معرفی مفاهیم جبر و حسابان در کتاب‌های ریاضی، ریاضیات نمادین و صورت‌های آن چهره‌ی غالب‌تری بر صورت‌های ملموس و غیررسمی آن دارد که همین امر موجب می‌شود دانش‌آموزان در برخورد با مفاهیم ریاضی و یادگیری آن با مشکلات زیادی مواجه شوند.

خوارزمی، ریاضی‌دان معروف ایرانی که در سده‌ی نهم زندگی می‌کرد، با نوشتن کتاب «الجبر و المقابله» برای اولین بار واژه‌ی «جبر» را نام‌گذاری کرد. وی در این کتاب، نخستین قانون‌های کلی برای حل معادلات درجه‌ی۱ و ۲ را ذکر کرده است. لذا از نگاه اول، جبر موضوعی برای منظم کردن قانون‌های کلی، تبدیل عبارت‌ها و حل معادله‌ها بوده است. عمر خیام (۱۱۲۲-۱۰۴۸)، شاعر و ریاضی‌دان بزرگ ایرانی هم، جبر را به‌عنوان علمی که برای حل معادله‌ها به‌کار می‌رود تعریف کرده است. شهریاری (۱۳۸۰)، در مورد پیدایش جبر و ورود نمادهای حرفی به آن ابراز می‌دارد که جبر به‌دنبال حساب پدید آمد و ویت (۱۶۰۳-۱۵۴۰) برای نخستین بار،

آغاز به نوشتن مسأله‌ها به صورت کلی کرد و مقدارهای مجهول را با حرف‌های صدادار لاتین و مقدارهای معلوم را با حرف‌های بی‌صدا نشان داد و برای نخستین بار، دستورهای حرفی پدید آمد که از ویژگی‌های اصلی جبر امروزی است.

بنابراین، چیزی که دانش‌آموزان در دبیرستان و از جمله ریاضی۱ با آن سروکار دارند، جبر مقدماتی است که شامل کار بر روی نمادهای حرفی، انجام عملیات ریاضی با آن‌ها، حل معادله و ساده کردن عبارت‌هاست.

کیبرن[5] (۱۹۹۶) در همین ارتباط بیان می‌کند که «حداقل در جبر مقدماتی، جبر ابزاری است که به موجب آن، نه تنها اعداد و کمیت‌ها را با نمادهای حرفی معرفی می‌کنیم، بلکه با این نمادها محاسبه هم انجام می‌دهیم» (ص ۲۷۱).

حال با پیدایش این نمادگذاری جبری و معرفی اعمال ترکیبی به کمک این نمادگذاری که کتاب‌های درسی ریاضی مملو از آن است، موضوع یادگیری جبر و موانع یادگیری آن، اهمیت ویژه‌ای پیدا می‌کند و به طور قطع همین نمادگذاری‌ها و پیچیدگی مفاهیم ناشی از به کارگیری حروف، یکی از مهم‌ترین موانع یادگیری جبر به حساب می‌آید. لذا، بررسی‌ها و تحقیقات بیش‌تر در این مورد جهت برطرف کردن موانع موجود، مفید خواهند بود.

جبر و مشکلات یادگیری دانش‌آموزان

به دفعات دیده شده است که دانش‌آموزان کلاس‌های اول دبیرستان در حساب و اعمال مربوط به آن مشکل دارند و به راحتی نمی‌توانند جمع و تفریق عددهای گویا را انجام دهند. پیداست که این دسته از دانش‌آموزان، در برخورد با عبارت‌های جبری، با مشکلات بیش‌تری مواجه خواهند شد. وقتی که آن‌ها در محاسبه‌ی اعداد کسری و حتی در محاسبه با اعداد صحیح مهارت کافی ندارند، نمی‌توان انتظار داشت که آن‌ها در محاسبه با چندجمله‌ای‌ها و عبارت‌های جبری به خوبی عمل کنند. اما در مواجهه با تمام بخش‌های کتاب ریاضی۱، دانش‌آموزان با بدفهمی‌های متنوعی روبه‌رو هستند که عمده‌ترین آن‌ها مربوط به چندجمله‌ای‌ها، معادله‌ی خط و نسبت‌های مثلثاتی است که به طور مختصر به آن‌ها اشاره می‌شود:

ـ در بخش چندجمله‌ای‌ها، استفاده از اتحادها، تجزیه‌ی چندجمله‌ای‌ها و ساده کردن عبارت‌های گویا، از قسمت‌های پردردسر و مشکل‌آفرین برای دانش‌آموزان است. مشکلات یادگیری در این قسمت‌ها، بسیار زیاد و رفع بدفهمی‌ها هم دوچندان مشکل است. به طور مثال، بعد از حل چند نمونه مثال از اتحاد مربع دوجمله‌ای، باز مشاهده می‌شود که بسیاری از دانش‌آموزان در برگه‌های امتحانی، در استفاده از این اتحاد به صورت زیر عمل می‌کنند: $(x+y)^۲ = x^۲ + y^۲$. یا این که در به کارگیری اتحادها، تشخیص درست و مناسبی ندارند. در تجزیه‌ی چندجمله‌ای‌ها هم، وضع بدتر است و عموماً نمی‌دانند در تجزیه‌ی یک چندجمله‌ای، به چه روشی عمل کنند. البته بسیاری از بدفهمی‌ها در ارتباط با اتحادها، تجزیه و ساده کردن عبارت‌های گویا، به قسمت‌های قبلی درس برمی‌گردد ـ جایی که آن‌ها در جمع و تفریق و ضرب و تقسیم چندجمله‌ای‌ها به راحتی نمی‌توانند اعمال و محاسبات جبری لازم را انجام دهند. موارد زیر، نمونه‌هایی از بدفهمی‌های دانش‌آموزان است که تجربه‌ی بسیاری از معلمان ریاضی، آن‌ها را تأیید می‌کند:

۱) $۲x - x = ۲$

۲) $\frac{۳x}{x} = ۳x$

۳) $\frac{۲x+y}{۲} = x+y$

۴) $\frac{xy+\cancel{x}}{\cancel{x}} = xy$

۵) $۲x + ۴x + ۱ = ۷x$

۶) $(۲x^۳)^۳ = ۶x^۹$

بسیاری از یافته‌های پژوهشی نیز، بدفهمی‌هایی مشابه بالا را تأیید کرده‌اند. به عنوان مثال، تال (۲۰۰۲) در ارتباط با بدفهمی‌های دانش‌آموزان در جبر، به برخی از تعمیم‌های نادرست اشاره می‌کند که آن‌ها در یک زمینه‌ی جدید انجام می‌دهند. به عنوان نمونه، با اشاره به ساده کردن عبارت $۱ + ۲x + ۳$ و رسیدن به جواب $۶x$، چنین بدفهمی‌هایی را ناشی از این می‌دانند که دانش‌آموزان، اعمال حسابی را به صورت نادرست به جبر هم تعمیم می‌دهند که گویا و حسام (۱۳۸۴)، از آن به عنوان مداخله‌ی طرح‌واره‌ی قبلی در یادگیری جدید نام برده‌اند. زیرا طرح‌واره‌ی قبلی دانش‌آموز در مورد اعمال حسابی با جمع جبری جملات متشابه (یادگیری جدید)،

تداخل پیدا می‌کند.

فیشباین و موزی کانت[۶] (۲۰۰۲) نیز، بدفهمی‌های دانش‌آموزان را در جبر، از مسیر دیگری بررسی می‌کنند. آن‌ها در مطالعه‌ای، در ارتباط با ساده کردن عبارت‌ها و حل معادلات به این نتیجه رسیدند که دانش‌آموزان با به‌کار بردن تبدیلات درست قادر بودند معادلاتی نظیر $\frac{x}{2}+\frac{x-3}{4}-\frac{5x}{8}=1$ را حل کنند، ولی برای ساده کردن عبارت $\frac{x}{2}+\frac{x-3}{4}-\frac{5x}{8}$ که مشابه همان کاری است که در حل معادله‌ی بالا انجام داده بودند، با به‌دست آوردن مخرج مشترک، به پاسخ ناقص $4x+2(x-3)-5x$ رسیده بودند. فیشباین و موزی کانت با مرتبط کردن عمل دانش‌آموزان به درک رابطه‌ای و درک ابزاری[۷]، اظهار داشتند به‌دلیل این‌که جبر را به صورت رابطه‌ای یاد نگرفته بودند، نتوانستند عبارت را به درستی ساده کنند.

در همین ارتباط، غلام‌آزاد (۱۳۸۰) اشاره می‌کند که «سردرگمی دانش‌آموزان بین ساده کردن عبارت‌ها و حل معادله‌ها وقتی آشکار می‌شود که دانش‌آموزان به سمت راست یک معادله به‌عنوان جواب اشاره می‌کنند یا وقتی عبارتی را ساده می‌کنند، به آن به صورت یک معادله نگاه می‌کنند و شروع به حل آن می‌کنند و کنجکاو خواهند بود که ببینند وقتی همه‌ی جملات شامل x حذف می‌شوند، بر سر x چه می‌آید» (ص۸).

لذا در ساده کردن عبارت‌ها و حل معادلات می‌توان گفت که علامت تساوی نقش مهمی دارد. بدین صورت که دانش‌آموزان در حساب، یاد گرفته‌اند که به دنبال تساوی، همواره جواب می‌آید. شاید هم اگر در ساده کردن عبارت $3+2x+1$ به جواب $6x$ می‌رسند، به این دلیل است که آن‌ها بر مبنای عملی که در حساب انجام می‌دهند، می‌خواهند به یک عدد یا جمله برسند. در حل معادلات هم آن‌گونه که مشهود است، مفهوم هم‌ارزی دو عبارت و دو معادله برای آن‌ها تداعی نشده است.

- در ارتباط با دستگاه مختصات و مفاهیم مربوط به آن، از جمله مختصات وسط پاره‌خط، طول پاره‌خط، معادله‌ی خط و غیره، دانش‌آموزان باز هم با مشکلات زیادی مواجهند. با وجود آشنایی نسبی آن‌ها در دوره‌ی راهنمایی با نمایش نقطه روی دستگاه مختصات، رسم خط و نظایر این‌ها، دیده شده است که دانش‌آموزان سال اول دبیرستان در یادگیری همین مفاهیم ساده، به‌طور جدی مشکل دارند. به کرات مشاهده شده است که آن‌ها در پاسخ به سؤالات این بخش، مفاهیم را با هم قاطی می‌کنند. به‌طور مثال، اگر در سؤالی از آن‌ها خواسته شده است که معادله‌ی خطی را بنویسند که از نقاط معلوم A و B بگذرد، به اشتباه سؤال دیگری را پاسخ داده‌اند؛ یعنی گاهی طول پاره‌خط AB یا مختصات وسط پاره‌خط AB را به‌دست آورده‌اند.

برخی دیگر از مشکلات یادگیری هم مربوط به عدم تسلط کافی بر اعمال حسابی و جبری است. به عنوان مثال، اگر دانش‌آموزان نمی‌توانند به‌راحتی دو نقطه از معادله‌ی $3x+2y=8$ را پیدا کنند، بیش‌تر به این دلیل است که در جای‌گذاری اعداد به‌جای حروف و اعمال ساده‌ی جبری مربوط به آن، مشکل دارند. حتی مشاهده شده است که در نوشتن معادله‌ی خط، شیب خط یا به‌دست آوردن فاصله‌ی یک نقطه از خط، به سادگی نمی‌توانند اعمال لازم را انجام دهند و عملاً در درگیری با مفاهیم ساده‌ی جبری، با اشتباهات زیادی مواجه می‌شوند.

انجام دادن ریاضی یک چیز و تفکر در ریاضی چیزی دیگر است. زمانی که ما درگیر فعالیت‌های جبری هستیم، در واقع ریاضی انجام می‌دهیم. اما مسأله این است که آیا به لحاظ ریاضی، در حال تفکر هستیم یا خیر

علاوه بر این‌ها، مفاهیم مربوط به دستگاه مختصات، از نوع هندسی هستند و ارایه‌ی آن‌ها با زبان جبر و معرفی آن‌ها در قالب قواعد و فرمول‌ها، دانش‌آموزان را با اشتباهات مفهومی زیادی مواجه می‌سازد. درگیر شدن دانش‌آموزان با روابط و فرمول‌های جبری از یک طرف و نبود زمینه‌های کافی و مناسب برای مرتبط کردن این روابط با مفاهیم هندسی، موجب شده است که این بدفهمی‌ها دوچندان شود؛ به طوری که در برگه‌های امتحانی دانش‌آموزان مشاهده می‌شود که به لحاظ جبری می‌توانند طول پاره‌خط AB را با دو نقطه‌ی معلوم A و B پیدا کنند ولی در نمایش پاره‌خط روی دستگاه مختصات مشکل دارند، یا تصور این‌که $x=0$ معادله‌ی خطی است که طول

تمام نقاط آن صفر می‌باشد برای آن‌ها دشوار است. لذا مفاهیم مورد بحث، ارتباط تنگاتنگی با جبر و هندسه پیدا می‌کنند و اگر دانش‌آموزان نتوانند یک پل ارتباطی مناسب بین جبر و هندسه برقرار کنند، نمی‌توان به رفع بدفهمی‌های آنان امیدوار بود.

ـ افزون بر این‌ها، بخش نسبت‌های مثلثاتی نیز از مهم‌ترین و مشکل‌ترین بخش‌های کتاب ریاضی ۱ است. مفاهیم این بخش، انتزاعی‌تر از سایر مفاهیم کتاب به‌نظر می‌رسد. به همین دلیل، بیش‌تر دانش‌آموزان در یادگیری مفاهیم آن و هم‌چنین حل مسایل این بخش، به‌طور جدی مشکل دارند. مفاهیم مثلثاتی، وابستگی زیادی به مفاهیم دیگر از جمله زاویه، نسبت، اشکال هندسی مانند مثلث و روابط بین اجزای مثلث دارند. پس اگر دانش‌آموزان در یادگیری مفاهیم مرتبط و با درجه‌ی انتزاعی پایین‌تر مشکل دارند، نمی‌توان انتظار داشت به‌راحتی بتوانند مفاهیم مثلثاتی را یاد بگیرند. به‌طور مثال، می‌توان به بحث روابط بین نسبت‌های مثلثاتی اشاره کرد که اکثر دانش‌آموزان در یادگیری و استفاده‌ی مناسب از آن‌ها با مشکلات زیادی مواجهند. مثلاً، دانش‌آموزی که به‌خوبی اتحاد مربع دوجمله‌ای را یاد نگرفته است، طبیعی است که برای اثبات درستی رابطه‌ی $(\sin\beta+\cos\beta)^2+(\sin\beta-\cos\beta)^2=2$ مشکل داشته باشد. لذا، با تداوم این بدفهمی‌ها در پایه‌های بالاتر، عملاً دانش‌آموزان در یادگیری مفاهیم بیش‌تر و پیچیده‌تر این حوزه، با سختی‌های زیادی روبه‌رو خواهند شد. به‌عنوان نمونه، برخی اوقات بدفهمی‌هایی مشابه $\sin(a+b)=\sin a+\sin b$ در پایه‌ی دوم و سوم به چشم می‌خورد و یا این‌که گاهی دیده می‌شود که در کسر $\frac{\sin\theta}{\theta}$، θها را با هم حذف می‌کنند. به‌طور کلی، رفع بدفهمی‌های دانش‌آموزان در این حوزه، نیازمند بازنگری جدی برنامه‌های درسی و ایجاد زمینه‌های مناسب برای شروع و معرفی مفاهیم مثلثاتی و هم‌چنین، به‌کارگیری ابزارها و روش‌های تدریس مناسب‌تر است.

ریشه‌یابی بدفهمی‌های دانش‌آموزان

به گفته‌ی گویا و حسام (۱۳۸۴)، آشنایی با بدفهمی‌های معرفی شده در ادبیات پژوهشی حوزه‌ی آموزش ریاضی، باعث می‌شود تا بتوان ذهنیت روشن‌تری نسبت به این که بدفهمی ریاضی چیست، پیدا کرد.

بیش‌تر بدفهمی‌های دانش‌آموزان در ریاضی ۱، به طرح‌واره‌های ذهنی و نحوه‌ی شکل‌گیری و بسط آن‌ها باز می‌گردد و اغلب مشاهده می‌شود که طرح‌واره‌های خلق شده توسط دانش‌آموزان، یک‌پارچه و منسجم نیستند. لذا، نباید اشتباهات مفهومی یا بدفهمی‌ها را ناشی از عدم تمرکز، بی‌دقتی و امثال آن دانست، بلکه باید ریشه‌ی آن‌ها را در طرح‌واره‌های ذهنی افراد جست‌وجو کرد.

برای توضیح بیش‌تر، در برخورد با یادگیری مفاهیم ریاضی، بنابر نظریه‌ی رشد شناختی پیاژه، فرآیند سازگاری به دو صورت جذب[8] و انطباق[9] صورت می‌گیرد. از نظر پیاژه، جذب وقتی صورت می‌گیرد که شخص مطالب تازه‌ای را بر حسب مطالب آشنا ببیند؛[10] یعنی در موقعیتی تازه، رفتاری را انجام دهد که در موقعیت‌های گذشته انجام می‌داده است. به‌طور مثال، دانش‌آموزی که برای به‌توان رساندن یک جمله‌ای‌ها، یاد گرفته است به صورت $(ab)^2=a^2b^2$ عمل کند، در به‌دست آوردن حاصل عبارت $(a+b)^2$ نیز ممکن است به همین صورت عمل کرده و جواب a^2+b^2 را به‌دست آورد. بنابراین، به گفته‌ی موسی‌پور (۱۳۸۲)، باید از ارایه‌ی اطلاعات کاملاً منطبق با ساختار کنونی دانش افراد خودداری کرد، چراکه در این صورت، تنها جذب به‌وقوع خواهد پیوست و اصلاح و تغییر ساختار دانش و درنتیجه رشد، تحقق نخواهد یافت. وی اشاره می‌کند که از ارایه‌ی اطلاعات کاملاً بیگانه با ساختار کنونی دانش افراد نیز باید خودداری شود زیرا در این صورت، عمل جذب اطلاعات هرگز اتفاق نمی‌افتد. بدین صورت درمی‌یابیم در بسیاری از مواقع، عمل جذب یا انطباق در یادگیری مفاهیم ریاضی به‌درستی صورت نمی‌گیرد.

علاوه بر این، یادگیری فرمول‌وار و انجام اعمال ریاضی بر پایه‌ی رویه‌ها، نزد دانش‌آموزان رواج زیادی دارد. معمولاً دانش‌آموزان عادت دارند برای حل مسایل ریاضی، از رویه‌های از پیش تعیین شده استفاده کنند تا بتوانند حداقل در سایه‌ی آن، به جواب قانع‌کننده‌ای برسند. آن‌چه که رویه‌ها و قواعد ریاضی به دانش‌آموزان یاد می‌دهد این است که به آن‌ها کمک می‌کند تا بدانند که چگونه اعمال ریاضی را انجام دهند، البته به شرطی که دانش‌آموزان بتوانند رویه‌ها و قواعد را به‌درستی به‌کار گیرند. به‌عنوان مثال، برای حل معادله‌ی درجه‌ی دوم

شناسایی و کشف بدفهمی های دانش آموزان برای معلمان ریاضی اهمیت زیادی دارد، زیرا آن ها می توانند تا حدودی روش تدریس خود را بر مبنای بدفهمی های دانش آموزان تعدیل کنند. تشخیص بدفهمی ها کمک خواهد کرد که بفهمیم چه روشی، کی و کجا در یادگیری دانش آموزان مؤثر است. آگاهی از فرآیندهای ذهنی آن ها، معلمان ریاضی را کمک خواهد کرد تا درصدد ایجاد تغییرات مناسب در روش یادگیری و کشف روش های بهتر باشند و دانش آموزان را با هدف های عالی تر درس های ریاضی و ارتباط تنگاتنگ آن ها با دنیای واقعی آشنا سازند

$2x^{2}+7x+3=0$ ، روش Δ یک رویه‌ی خاص است که معمولاً دانش‌آموزان، علاقه‌ی زیادی به استفاده از آن دارند، ولی استفاده از رویه‌های مشخص همیشه برای آن‌ها ساده نیست. مثلاً رسم سهمی با معادله‌ی مشخص $y - y_1 = a(x - x_1)^2$ که در کتاب درسی ریاضی ۱ وجود دارد، برای بسیاری از دانش‌آموزان مشکل است و آن‌ها قادر نیستند مختصات رأس، معادله‌ی محور تقارن و در ادامه، نمودار سهمی را به‌درستی رسم کنند. در هر حال، دانش‌آموزان در حل مسایلی که به گونه‌ای بیانگر رویه و روش خاص است راحت‌تر عمل می‌کنند، هرچند که در برخی موارد در بازخوانی آن رویه و طی مسیر حل مسأله، با مشکلاتی مواجه می‌شوند. لذا، با این توضیحات، یادگیری رویه‌ای و ابزارگونه‌ی دانش‌آموزان را نمی‌توان بی‌ارتباط با طرح‌واره‌های ذهنی آن‌ها دانست؛ زیرا تصور بسیاری از دانش‌آموزان این است که در برخورد با هر مسأله‌ی ریاضی، باید از قبل قاعده یا روشی برای حل داشته باشند. چنین تصوری در مورد ریاضی و حل مسأله‌ی ریاضی موجب می‌شود که دانش‌آموزان در بسط و بازسازی طرح‌واره‌های ذهنی خود، با مشکلات زیادی مواجه شوند و بدفهمی‌های آن‌ها عمیق‌تر و ریشه‌دارتر شود. بنابراین، بهتر است که انجام دادن اعمال ریاضی با نوعی تفکر همراه باشد تا بتوان با درایت خاصی مسیر حرکت را کنترل و رهبری کرد.

تفکر جبری در مقابل جبر

انجام دادن ریاضی یک چیز و تفکر در ریاضی چیزی دیگر است. زمانی که ما درگیر فعالیت‌های جبری هستیم، در واقع ریاضی انجام می‌دهیم. اما مسأله این است که آیا به لحاظ ریاضی، در حال تفکر هستیم یا خیر. کیرن (۱۹۹۶) به نقل از لاو (۱۹۸۶)، اظهار می‌دارد که جبر اکنون «معنی دادن به نمادها» نیست بلکه ماورای آن است و به خودی خود، به وضعیت‌هایی از تفکر مرتبط است که اساساً جبری هستند. برای مثال، نحوه‌ی برخورد و رفتار با مجهول، معکوس کردن و قرینه کردن اعمال، دیدن کلیت در حالت خاص. آگاهی یافتن از این فرایندها و در کنترل قرار دادن آن‌ها چیزی است که به لحاظ جبری، تفکر معنی می‌شوند. بدین جهت، یادگیری جبر در یک روش رابطه‌ای مستلزم استفاده از روش‌های بهتری است و تکرار و تمرین مطالب، شاید تأثیر چندانی نداشته باشد. لذا داشتن نوعی تفکر در جبر و حل مسایل آن و ایجاد راه‌کارهای مناسب برای برخورد با حروف جبری، ضروری است. مفاهیم در قالب‌های رسمی و به صورت نمادین، پرمحتوا هستند و معانی آن‌ها به سادگی آشکار نیست. پس، به‌کارگیری زبان ریاضی در شکل ظریفی لازم است. به‌عنوان مثال، می‌توان در معرفی و توصیف یک مفهوم ریاضی، از بازنمایی‌های گوناگون استفاده نمود و تنها به استفاده‌ی سرراست قواعد و رویه‌ها قناعت نکرد. دانش‌آموزی که برای حل یک معادله از رسم نمودارها استفاده می‌کند و قادر به تشخیص جواب روی نمودارها است، در مقابل دانش‌آموزی که از یک رویه‌ی خاص جبری استفاده می‌کند، هوشمندانه‌تر عمل می‌کند. زیرا وی قادر است مفاهیم جبری را به زبان هندسی ترجمه و تفسیر کند و ابزارهای هندسی را که قابل فهم‌تر و ملموس‌ترند به ابزارهای جبری مقدم بدارد.

بنابراین، بهتر است در برخورد با مفاهیم جبری، دانش‌آموزان را با مسیرهای مناسب‌تری آشنا سازیم و ضرورتاً تنها به ابزارهای نمادین ـ حرفی اتکا و اکتفا نکنیم. توصیف یک معادله و ساختن یک مسأله‌ی کلامی برای آن، حل معادله

به کمک رسم نمودار، جمع دو تابع از روی نمودار آن‌ها، ارایه‌ی مدل‌های هندسی برای اتحادهای جبری و استفاده از مثال‌های عددی در مواجه با مفاهیم انتزاعی، همه و همه کمک خواهند کرد تا مفاهیم ریاضی و به‌ویژه مفاهیم جبری را بهتر درک کنیم.

ضروری است ما به عنوان معلمان ریاضی، چنین تفکر واگرایی را در دانش‌آموزان تقویت کنیم. چیزی که امروزه، بیش‌تر با روح فرآیند یادگیری سازگار است.

نتیجه‌گیری و پیشنهاد

شناسایی و کشف بدفهمی‌های دانش‌آموزان برای معلمان ریاضی اهمیت زیادی دارد، زیرا آن‌ها می‌توانند تا حدودی روش تدریس خود را بر مبنای بدفهمی‌های دانش‌آموزان تعدیل کنند. تشخیص بدفهمی‌ها کمک خواهد کرد که بفهمیم چه روشی، کی و کجا در یادگیری دانش‌آموزان مؤثر است. آگاهی از فرآیندهای ذهنی آن‌ها، معلمان ریاضی را کمک خواهد کرد تا درصدد ایجاد تغییرات مناسب در روش یادگیری و کشف روش‌های بهتر باشند و دانش‌آموزان را با هدف‌های عالی‌تر درس‌های ریاضی و ارتباط تنگاتنگ آن‌ها با دنیای واقعی آشنا سازند.

بنابراین، می‌توان جهت رفع بدفهمی‌های دانش‌آموزان موارد زیر را در نظر گرفت:

۱) تدریس هر مفهوم ریاضی بر مبنای شهود دانش‌آموزان باشد. یعنی، سعی شود در هر بحث ریاضی، ابتدا شهود یادگیرنده نسبت به آن موضوع تحریک و تقویت شود. به‌طور مثال، بهتر است از مثال‌های ساده و روشن استفاده گردد.

۲) مفاهیم ریاضی درجات متنوعی از انتزاع را شامل می‌شوند. لذا در معرفی هر مفهوم، به یادگیرنده و درجه‌ی انتزاع آن مفهوم توجه شود.

۳) دانش‌آموزان را هدایت کنیم برای یادگیری ریاضی، بنا به سلیقه‌ها و توانایی‌های خودشان عمل کنند و آن‌ها را مجبور به استفاده از یک روش ثابت نکنیم.

۴) بازتاب بیش‌تری روی بدفهمی‌های دانش‌آموزان داشته باشیم و سریع از آن‌ها نگذریم. هم‌چنین، در ارایه‌ی مفاهیم ریاضی، به معلومات و دانش یادگیرنده اهمیت بیش‌تری بدهیم. معلمی که به این امر توجه دارد، بهتر می‌تواند دانش‌آموزان خود را در بسط و بازسای طرح‌واره‌های ذهنی‌شان یاری نماید.

۵) بهتر است تقدم و تأخر مطالب، هم در تدریس و هم در سازمان‌دهی محتوای درسی، به خوبی رعایت شوند.

۶) دانش‌آموزان را کمک کنیم مفاهیم را برای خود کشف یا خلق کنند و از انتقال مستقیم آن‌ها و تدریس بر پایه‌ی رویه‌ها، خودداری کنیم.

۷) مفاهیم ریاضی را با زمینه‌های واقعی و ملموس آن پیوند دهیم و دانش‌آموزان را هدایت کنیم مفاهیم مجرد ریاضی را با چهره‌های واقعی و مثال‌های روشن از دنیای واقعی لمس کنند.

زیرنویس‌ها

1. Misconception
2. Tall
3. Abstract
4. Vietia
5. Kieren
6. Fischbein & Muzicant
7. Relational and Instrumental Understanding
8. Assimilation
9. Accommondation

منابع

1. Kieren, E. (1996). The Changing Face of School Algebra. 8th International Congress on Mathematics Education (ICME-8). Selected Lectures, Sevilla, 14-21.
2. Fischbein, E., and Muzicant, B. (2002). Richard Skemp and His Conception of Relational and Instrumental Understanding: Open Sentences and Phrases. In D. Tall & M. O. j Thomas (Eds.), Inteligence, Learning and Understanding Mathematics, 49-78, Post Pressed Flaxton, Australion.
3. Tall, D. (2002). Continuities and Discontinuties in Long-Term Learning Schemas. In D. Tall & M. O. j Thomas (Eds.). Inteligence, Learning and Understanding Mathematics, Post Pressed Flaxton, Australion.

۴. تال، دیوید. (۱۹۹۶). تکنولوژی اطلاعات و آموزش ریاضی: اشتیاق‌ها و امکان‌ها و واقعیت‌ها، ترجمه‌ی شیوا زمانی (۱۳۷۵)، مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، شماره‌ی ۴۷، صص ۱۱ تا ۲۳، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهشی و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۵. شهریاری، پرویز. (۱۳۸۰)، سرگذشت ریاضیات، نشر مهاجر.

۶. غلام‌آزاد، سهیلا. (۱۳۸۰). دوباره‌نگری به برنامه‌ی جبر دبیرستانی. مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، شماره‌ی ۶۳، صص ۴ تا ۱۲، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهشی و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۷. گویا، زهرا و حسام، عبدالله. (۱۳۸۴). نقش طرح‌واره‌ها در شکل‌گیری بدفهمی‌های ریاضی دانش‌آموزان، مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، شماره‌ی ۸۲، صص ۴ تا ۱۵، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۸. موسی‌پور، نعمت‌الله. (۱۳۸۲). مبانی برنامه‌ریزی آموزش متوسطه، نشر آستان قدس رضوی.

۹. کتاب ریاضی ۱ متوسطه.

مقدمه

تحقیقات در زمینه‌ی روان‌شناسی کاربردی و آموزش، دیدگاه‌های متعددی درباره‌ی چگونگی تفکر و یادگیری دانش‌آموزان، تبیین کرده است. اما تأثیر ناشی از آن بر آموزش واقعی در کلاس درس، نامتعادل و غیرقابل پیش‌بینی است. در عوض، در آموزش عالی، بسیاری هستند که نتایج تحقیقات آموزشی را به مدل‌های یادگیری خاص رشته‌ی تحصیلی خودشان تبدیل می‌کنند (فلور و همکاران، ۲۰۰۰؛ بورپاک، مک نورلین و هارپر، ۱۹۹۵). این مدل‌ها به نوبه‌ی خود برای اصلاح روش‌های آموزشی، تولید مجدد درس‌های موجود و حتی پیشنهاد درس جدید، مورد استفاده قرار می‌گیرند.

تحقیق در آموزش ریاضی نیز کمتر از این موارد نبوده، اما به کارگیری نتایج آن تحقیق، اغلب منجر به طرح سؤالاتی مشکل از قبیل «چه میزان از تکنولوژی، مناسب است؟» و «یک روش آموزش، در چه موقعیتی مؤثرتر واقع می‌شود؟» شده است. در پاسخ به چنین سؤالاتی، این مقاله، مشاهدات فردی و تحقیق آموزش را با هم ترکیب کرده و از آن، مدلی برای یادگیری ریاضی ساخته است. ماهیت چنین ترکیبی در مدل ارایه شده در این مقاله، متجلی است و می‌توان از آن برای جهت‌دهی به اصلاح آموزشی و برنامه‌ی درسی، استفاده کرد.

با این حال، پیش از ارایه‌ی این مدل، اجازه دهید این شاخص را پیشنهاد کنم. تدریس، با توجهی اصیل به دانش‌آموزان و اشتیاق نسبت به موضوع، شروع می‌شود. همه‌ی منافع ناشی از این مدل، بر این توجه و اشتیاق اضافه می‌شود زیرا به عقیده‌ی من، هیچ چیز نمی‌تواند، و نباید، جایگزین رابطه‌ی دوطرفه و ارزشمند معلم ـ دانش‌آموز شود.

یک مدل چهار مرحله‌ای یاددهی و یادگیری ریاضی

جِف نیسلی، گروه ریاضی دانشگاه ایالتی ایست تنسی
ترجمه: **حسن جوشن**، دبیر ریاضی منطقه‌ی میان جلگه، شهرستان نیشابور

برخی نتایج حاصل از پژوهش‌های آموزشی

این بخش به‌طور خلاصه، پیشینه‌ی پژوهش در آموزش ریاضی و روان‌شناسی کاربردی مرتبط با این مقاله را بررسی می‌کند. این بررسی، جامع نیست و تلاشی برای توجیه نتیجه‌گیری ارایه شده در این بخش، نشده است. خوانندگان علاقه‌مند می‌توانند برای اطلاعات بیش‌تر، به منابع موجود مراجعه کنند.

تحقیقات دهه‌های گذشته در آموزش نشان می‌دهد که دانش‌آموزان، از سبک‌های یادگیری فردی استفاده می‌کنند (فلور، ۱۹۹۶). در نتیجه، آموزش باید چند بُعدی باشد تا دربرگیرنده‌ی سبک‌های یادگیری گوناگون باشد. مکتوبات بسیاری، از جمله کتاب‌های درسی، پرسش‌نامه‌های روش یادگیری و منابع برای استفاده در کلاس درس وجود دارند که همگی، حامی این ادعا هستند (به‌طور مثال، به دان و دان[1]، ۱۹۹۳، مراجعه کنید).

به علاوه، تحقیقات دهه‌های گذشته در روان‌شناسی

کاربردی، حاکی از آن است که بهترین راه تحقیق حل مسأله، رویکرد ساختن استراتژی است. در حقیقت، مطالعات مربوط به نقش تفاوت‌های فردی در کسب مهارت، حاکی از این است که سریع‌ترین یادگیرندگان، کسانی هستند که برای شکل‌گیری مفهوم [در ذهن خود]، استراتژی تولید می‌کنند (آیرینگ[۲]، جانسون و فرانسیس، ۱۹۹۳). بنابراین، هر مدل یادگیری ریاضی باید به‌عنوان یک سبک یادگیری، شامل ساختن استراتژی باشد.

در نتیجه، عقیده دارم که مدل یادگیری که بیش از همه در ریاضی کاربرد دارد، مدل یادگیری کولب[۳] است (برای بحث درباره‌ی این مدل، به ایوان و همکاران، ۱۹۹۳، مراجعه کنید). در مدل کولب، سبک یادگیری دانش‌آموز، با دو عامل تعیین می‌شود ـ این که آیا دانش‌آموز، ملموس و عینی را به انتزاعی ترجیح می‌دهد و آیا دانش‌آموز، آزمایش کردن فعال[۴] را به مشاهده‌ی بازتابی[۵] ترجیح می‌دهد. این دو سؤال، منجر به چهار نوع یادگیرنده می‌شود:

- عینی، بازتابی: کسانی که بر پایه‌های تجربه‌های قبلی می‌سازند؛
- عینی، فعال: کسانی که با آزمون و خطا یاد می‌گیرند؛
- انتزاعی، بازتابی: کسانی که از توضیحات با جزئیات یاد می‌گیرند؛
- انتزاعی، فعال: کسانی که با توسعه‌ی استراتژی‌های فردی یاد می‌گیرند.

اگرچه مدل‌های دیگری نیز برای ریاضی به‌کار می‌روند، واضح است که تمایز سبک‌های یادگیری، ممکن است مهم‌تر از توصیف هر سبک به‌طور جداگانه باشد (فلور، ۱۹۹۶).

بالاخره اجازه دهید که «حفظ کن و پس بده»[۶] را به‌عنوان یک روش یادگیری نامطلوب، بررسی کنیم. استدلال رهیافتی[۷]، یک فرآیند فکری است که در آن، مجموعه‌ای از الگوها و اعمال وابسته به آن‌ها، حفظ می‌شوند، به‌طوری که وقتی یک مفهوم جدید ارایه می‌شود، نزدیک‌ترین الگو، عمل انجام شده را تعیین می‌کند (پیرل، ۱۹۹۶). متأسفانه ضوابطی که برای تعیین نزدیکی مورد استفاده قرار می‌گیرند، اغلب نامناسب هستند و به نتایج نادرستی منتهی می‌شوند.

برای مثال، اگر دانش‌آموزی عبارت

$$\sqrt{x^4+4x^2}$$

را به اشتباه به صورت

$$x^2+2x$$

ساده کند، احتمالاً آن دانش‌آموز، از ضوابط دیداری برای تعیین این که نزدیک‌ترین الگو، پیدا کردن ریشه‌ی یک عبارت توانی بوده، استفاده کرده است. یعنی، استدلال رهیافتی، دانشی است بدون درک، مسیری کوتاه در یادگیری که جلوی تفکر انتقادی را می‌گیرد. علاوه بر این، این چنین روش‌های اختیاری و نامطمئن در حل مسأله، دلیل اصلی ایجاد «اضطراب ریاضی» است که اغلب دانش‌آموزان را در درس‌های مقدماتی، دچار مصیبت می‌کند.

یادگیری در یک زمینه‌ی ریاضی

مدل ارایه شده در این مقاله، بر اساس این ایده است که سبک‌های یادگیری کولب، مستقیماً ترجمان سبک‌های یادگیری ریاضی هستند. مثلاً یادگیرندگان «عینی ـ بازتابی»، کسانی هستند که از دانش قبلی، به عنوان استعاره و داربستی[۸] برای ایده‌های جدید استفاده می‌کنند. در درس‌های ریاضی، چنین دانش‌آموزانی، آن‌هایی هستند که مسایل را با دنباله‌روی از یک مثال حل شده در کتاب درسی، حل می‌کنند. به همین ترتیب، سه روش دیگر در یادگیری کولب نیز ترجمان سبک‌های یادگیری ریاضی می‌باشند:

۱) تمثیل‌گر[۹]: این دانش‌آموزان، صورت (فرم) را به کارکرد ترجیح می‌دهند و بدین جهت، اغلب جزئیات را نادیده می‌گیرند. آن‌ها با جست‌وجوی رویکردهای مشابه در مثال‌های قبلی، به مسأله‌ها می‌پردازند [کلیشه‌سازی].

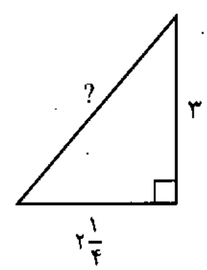
۲) تلفیق‌گر[۱۰]: این دانش‌آموزان، به شدت بر مقایسه‌ی ایده‌های جدید با ایده‌هایی که برای آن‌ها شناخته شده است، متکی هستند. آن‌ها با تکیه بر بصیرت‌های متکی بر «عقل سلیم» خود، به مسأله می‌پردازند ـ یعنی با مقایسه‌ی آن‌ها با مسایلی که می‌توانند حل کنند.

۳) تحلیل‌گر[۱۱]: این دانش‌آموزان، به توضیحات منطقی و الگوریتم‌ها علاقه دارند. آن‌ها مسایل را با یک توالی گام به گام و منطقی که با فرض‌های اولیه شروع شده و با اثبات حکم خاتمه می‌یابد، حل می‌کنند.

۴) ترکیب‌گر[۱۲]: این دانش‌آموزان، مفاهیم را به‌صورت ابزاری برای ساختن ایده‌ها و رویکردهای جدید می‌بینند. آن‌ها، مسایل را با ایجاد استراتژی‌های فردی و رویکردهای جدید، حل می‌کنند.

به‌علاوه، مشاهدات و آزمایش‌های چندساله و تعامل با دانش‌آموزان، به من می‌باوراند که تمام سبک‌های یادگیری، در همین چهار سبک خلاصه می‌شود. البته یقیناً، تحقیق بیش‌تر برای اثبات این ادعا لازم است.

به‌عنوان مثال، در یک آزمایش، مطمئن شدم که هر دانش‌آموز، قضیه‌ی فیثاغورس را می‌داند و یک خط‌کش نیز دارد. سپس از آن‌ها خواستم طول وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای با اضلاع ۳ و $2\frac{1}{4}$ را به‌دست آورند.



شکل ۱. مثلث قائم‌الزاویه، با وتر نامعلوم

بعضی از دانش‌آموزان، در کتاب درسی، به دنبال مثال مشابهی می‌گشتند. بسیاری از آن‌ها، وتر را با خط‌کش اندازه‌گیری کردند. برخی مستقیماً از قضیه‌ی فیثاغورس استفاده کردند و تعداد کمی، تشخیص دادند که این مثلث، همان مثلث با اضلاع ۳ و ۴ و ۵ است منتها با واحد $\frac{1}{4}$.

به‌هر حال، از سبک‌های دیگری استفاده نشد و مشابهاً در سایر آزمایش‌هایی که انجام دادم، فقط تعدادی کمتر از انگشتان دست، از سبک‌هایی غیر از چهار سبک ذکر شده در بالا، استفاده کردند. علاوه بر این، مشاهده کردم که سبک یادگیری یک دانش‌آموز خاص، از موضوعی به موضوع دیگر تغییر می‌کند و متأسفانه، وقتی که سبک یادگیری او موفقیت‌آمیز نیست، وی به استدلال رهیافتی متوسل می‌شود.

چهار مرحله‌ی یادگیری ریاضی

پس سؤال این است که «چه چیز باعث می‌شود که یک دانش‌آموز، هنگام مواجه شدن با یک مفهوم جدید، سبک خاصی را انتخاب کند؟» من به این نتیجه رسیده‌ام که تفاوت‌ها در سبک یادگیری، اغلب به میزان موفقیت دانش‌آموز در ترجمه‌ی یک ایده‌ی جدید به یک مفهوم کاملاً درک شده بستگی دارد. در واقع، به‌نظر می‌رسد که هریک از ما، یک مفهوم جدید را به وسیله‌ی گذر از چهار مرحله‌ی متمایز فهم و درک، می‌آموزیم:

۱) مشابهت‌سازی[13]: یک مفهوم جدید، به‌صورت استعاری، بر حسب مفاهیم شناخته شده و در یک زمینه‌ی آشنا، توصیف می‌شود [کلیشه‌سازی].

۲) تلفیق[14]: از مقایسه، اندازه‌گیری و جست‌وجو، برای تمیز دادن مفهوم جدید از مفاهیم شناخته شده استفاده می‌شود.

۳) تجزیه و تحیل[15]: مفهوم جدید، جزئی از پایگاه دانش موجود می‌شود. از توضیحات و پیوندها و ارتباطات، برای «بیرون کشیدن»[16] مفهوم جدید، استفاده می‌شود.

۴) ترکیب[17]: مفهوم جدید، هویت منحصر به‌فرد خود را می‌طلبد و بنابراین به ابزاری برای توسعه‌ی استراتژی و تمثیل‌سازی بیش‌تر، تبدیل می‌شود.

بنابراین نتیجه می‌شود که سبک یادگیری یک دانش‌آموز، نشان دهنده‌ی میزان پیشرفت وی در چهار مرحله‌ی فوق است:

- تمثیل‌گرها: نمی‌توانند مفهوم جدید را از مفاهیم شناخته شده تمیز دهند.
- تلفیق‌گرها: تشخیص می‌دهند که یک مفهوم، جدید است، امّا متوجه نمی‌شوند که چگونه مفهوم جدید با مفاهیم آشنا مرتبط می‌شوند.
- تحلیل‌گرها: ارتباط مفهوم جدید با مفاهیم شناخته شده را می‌بینند، امّا فاقد اطلاعاتی هستند که به ویژگی منحصربه‌فرد آن مفهوم مربوط است.
- ترکیب‌گرها: بر مفهوم جدید، تسلط دارند و می‌توانند از آن، برای حل مسأله‌ها و توسعه‌ی استراتژی‌ها (یعنی نظریه‌ی جدید) و خلق تمثیل‌های جدید، استفاده کنند.

هم‌چنین، نتیجه می‌شود که سبک یادگیری یک دانش‌آموز، می‌تواند متفاوت باشد، گرچه در عمل، سبک یک دانش‌آموز برای مفاهیم مشابه، تمایل به ثابت ماندن دارد.

اهمیت تمثیل‌ها (کلیشه‌ها)

این مدل، پیشنهاد می‌دهد که یادگیری یک مفهوم جدید، با ایجاد یک تمثیل شروع می‌شود. یعنی یادگیری، با یک توصیف استعاری (تمثیلی) از یک مفهوم جدید در یک زمینه‌ی آشنا، آغاز می‌شود. به‌علاوه، ناتوانی در تمثیل‌سازی و مشابهت‌سازی، منجر به رویکرد رهیافتی می‌گردد. یعنی اگر

دانش‌آموزی، هیچ توصیف استعاری از یک مفهوم نداشته باشد، محتمل است که به سبک یادگیری «حفظ کن و مرتبط کن» متوسل شود.

مثلاً، آموزش بازی شطرنج را بدون استفاده از تمثیل‌ها در نظر بگیرید. با یک جدول ۸×۸ شروع می‌کنیم، که در آن بازیکنان ۱ و ۲، مهره‌هایی را که با علامت‌های A و B و C و D و E و F، برچسب‌گذاری و مرتب شده‌اند، در اختیار دارند. (شکل۲)

B۱	C۱	D۱	E۱	F۱	D۱	C۱	B۱
A۱	A۱	A۱	A۱	A۱	A۱	A۱	A۱
A۲	A۲	A۲	A۲	A۲	A۲	A۲	A۲
B۲	C۲	D۲	E۲	F۲	D۲	C۲	B۲

شکل۲. شطرنج بدون تمثیل

سپس برای بازیکنان توضیح می‌دهیم که حرکت‌های درست هر مهره، توسط نوع مهره تعیین می‌شود و هدف بازی، از حرکت انداختن مهره‌ی F بازیکن حریف است. در پاسخ به چنین آموزشی، احتمالاً دانش‌آموزان حرکات معتبر (درست) هر مهره را حفظ می‌کنند و با استفاده از علائم بصری، حرکت‌های مهره‌ها را انجام می‌دهند ـ که البته چندان جالب نیست!

واضح است که یادگیری، به توسعه‌ی تمثیل‌ها نیاز دارد. در حقیقت افراد، بازی شطرنج را می‌آموزند و از آن لذت می‌برند زیرا مهره‌های بازی، خود تمثیلی از شخصیت‌های نظامی قرون وسطی هستند. مثلاً مهره‌های پیاده‌ی شطرنج زیاد هستند، اما توانایی آن‌ها کم است؛ اسب‌ها می‌توانند از روی سایر مهره‌ها «بپرند» و مهره‌های وزیر، قدرت نامحدودی دارند. اسیر کردن شاه، تمثیلی برای برنده شدن در بازی است. در واقع، بسیاری از بازی‌های ویدئویی و بازی‌های روی صفحه[18]، محبوبیت خود را مدیون همین هستند که هریک، تمثیلی از پیشامدها و مردم واقعی می‌باشند.

من در تدریس خود دریافته‌ام که حساب، یکی از لذت‌بخش‌ترین و سودمندترین زمینه‌ها برای تمثیل‌ها و مشابهت‌ها در ریاضی است. مثلاً خود ما از ضرب اعداد صحیح مانند

$$۲^۲ \times ۲^۳ = (۲\times۲)\times(۲\times۲\times۲) = ۲\times۲\times۲\times۲\times۲ = ۲^۵$$

استفاده می‌کنیم تا به این حقیقت برسیم که

$$a^b . a^c = a^{(b+c)}$$

به علاوه، مدل‌های بصری و فیزیکی نیز به‌عنوان زمینه‌های مناسبی برای تمثیل به‌کار می‌روند؛ البته تا زمانی که به آسانی فهمیده شده و به شکلی آشنا، ارایه شوند.

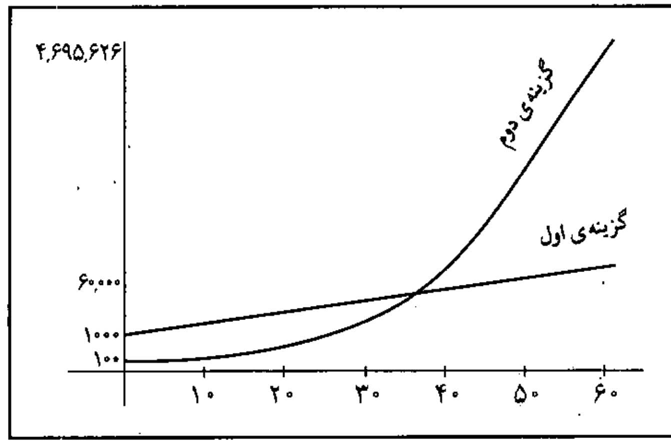
مؤلفه‌های تلفیق

وقتی یک مفهوم به صورت تمثیلی معرفی می‌شود، باید با پایگاه دانش موجود، تلفیق شود. به عقیده‌ی من، این فرایند تلفیق، با یک تعریف آغاز می‌شود؛ زیرا یک تعریف، برچسبی به مفهوم جدید نسبت می‌دهد و آن را درون یک موقعیت ریاضی قرار می‌دهد. زمانی که یک مفهوم را تعریف می‌کنیم، می‌توانم آن را با مفاهیم شناخته شده از قبل، مقایسه و مقابله کنیم.

مجسم‌کردن[19]، آزمایش کردن[20] و اکتشاف[21]، نقش‌های کلیدی در تلفیق بازی می‌کند. البته در میان آن‌ها، مقایسه‌های بصری و تجسّم از همه قدرتمندتر است و اکتشاف و آزمایش، راه‌هایی برای مقایسه‌ی پدیده‌های جدید با پدیده‌های خوب مطالعه شده و خوب فهمیده شده می‌باشند. در نتیجه، اغلب در این وضعیت، استفاده از تکنولوژی به‌عنوان یک ابزار تجسمی، مطلوب است.

به‌طور مثال، وقتی رشد نمایی را تعریف می‌کنیم و تمثیل می‌زنیم، بهترین کمک به دانش‌آموزان، ممکن است این باشد که این پدیده‌ی جدید ـ رشد نمایی ـ را با پدیده‌ی شناخته شده‌ی رشد خطی، مقایسه کنیم. در واقع، فرض کنید به دانش‌آموزان گفته می‌شود که برای دریافت یک جایزه‌ی نقدی، دو گزینه دارند: یا دریافت ۱۰۰۰ دلار در ماه به مدت ۶۰ماه، یا دریافت همه‌ی سود حاصل از یک سرمایه‌گذاری ۱۰۰ دلاری با سود ماهانه‌ی ٪۲۰ به مدت ۶۰ ماه. مقایسه‌ی بصری این دو گزینه، تفاوت‌ها و شباهت‌های میان رشد خطی و رشد نمایی را آشکار می‌سازد. (شکل۳)

به ویژه، رشد نمایی در ابتدا تقریباً خطی به‌نظر می‌رسد و بنابراین در چند ماه اول، گزینه‌ی ۱ مقدار بیش‌تری خواهد شد. با این حال، پس از گذشت زمان، رشد نمایی پیشی می‌گیرد و به‌صورت فزاینده‌ای سریع‌تر از گزینه‌ی خطی، رشد می‌کند



شکل ۳. مقایسه‌ی بصری رشد خطی و رشد نمایی

به طوری که پس از ۶۰ ماه، گزینه‌ی ۱، ۶۰۰۰۰ دلار می‌ارزد در حالی که گزینه‌ی ۲، ۴۶۹۵۶۲۶ (بیش از ۴ میلیون دلار) ارزش دارد.

تحلیل و ترکیب

کوتاه سخن آن که تحلیل، یعنی این که دانش‌آموز، به صورت نقادانه، درباره‌ی مفهوم جدید فکر می‌کند. یعنی مفهوم جدید، شخصیت خاص خود را پیدا می‌کند و دانش‌آموز، مایل است که هرچه بیش‌تر درباره‌ی آن، یاد بگیرد. تحلیل گران می‌خواهند تاریخ آن مفهوم، راهبردهای استفاده از آن و توضیحاتی در مورد خصیصه‌های مختلف آن را بدانند. افزون بر این، مفهوم جدید تقریباً به صورت یکی از شخصیت‌های متعددی در می‌آید که تحلیل کنندگان می‌خواهند ارتباط آن را با سایر مفاهیم (شخصیت‌های) موجود و نیز حوزه‌های تأثیر آن درون پایگاه دانش موجود خود را بدانند.

بدین جهت، تحلیل گران به کسب اطلاعات زیاد در یک دوره‌ی زمانی کوتاه، تمایل دارند و لذا ارایه‌ی درست به صورت سخنرانی برای آن‌ها، کاملاً مناسب است. متأسفانه، وضعیت جاری چنین است که فرض می‌کنیم همه‌ی دانش‌آموزان ما، برای همه‌ی مفاهیم، تحلیل گر هستند و این، به این معنی است که مقدار وسیعی اطلاعات را به دانش‌آموزانی ارایه می‌دهیم که حتی تشخیص نمی‌دهند که با یک ایده‌ی جدید مواجه شده‌اند.

در واقع، چنین وضعیتی در حسابان، برای مفهوم حد رخ می‌دهد. مطالعات نشان داده است که تقریباً هیچ کس این درس را با درک جامعی از مفهوم حد به پایان نمی‌رساند (زیدیک[۲۲], ۲۰۰۰). در عوض، اغلب دانش‌آموزان به رهیافت‌ها متوسل می‌شوند تا در مواجه‌ی اولیه‌ی خود با فرآیند حد، با آن دست و پنجه نرم کنند.

سرانجام، ترکیب اساساً تسلط بر موضوع است، بدین معنا که مفهوم جدید، به صورت ابزاری در می‌آید که دانش‌آموز برای ایجاد استراتژی‌های فردی حل مسأله، از آن استفاده می‌کند. مثلاً، اگرچه بازی‌ها اغلب به تمثیل‌ها و مشابهت‌ها بستگی دارند، اما قسمت سرگرم کننده‌ی بازی، تحلیل آن و ایجاد استراتژی‌های جدید برای بُردن است. در واقع در هر بازی، همه‌ی ما دوست داریم به نقطه‌ای برسیم که کنترل بازی را در دست بگیریم یعنی نقطه‌ای که استراتژی‌های خودمان را ترکیب می‌کنیم و سپس از آن‌ها برای ایجاد تمثیل‌ها و مجازهای خودمان از مفاهیم جدید، استفاده می‌کنیم.

نقش معلم

همان طور که در مقدمه ذکر شد، ارزش این مدل ۴ مرحله‌ای یادگیری ریاضی این است که می‌توان از آن به عنوان راهنمایی برای ایجاد روش‌های اصلاحی و برنامه‌ی درسی استفاده کرد. به عنوان مثال، می‌توانیم با استفاده از این مدل، نقش معلم در یک درس ریاضی اصلاح شده را توصیف و بررسی کنیم.

برای شروع باید بدانیم که ترکیب، عملی خلاقانه است. پس همه‌ی دانش‌آموزان نمی‌توانند با مفهوم ارایه شده، ترکیب انجام دهند. به علاوه، تمثیل‌های مناسب، به پیشینه‌ی فرهنگی دانش‌آموز بستگی دارد و در نتیجه، تمثیل‌های جدید باید به صورت پیوسته، توسعه یابند. بالاخره، برخی مفاهیم نسبت به سایر مفاهیم، نیازمند تمثیل سازی، تلفیق و تحلیل بیش‌تری هستند. به بیان ساده‌تر، این مدل به ما اجازه نمی‌دهد که یادگیری ریاضی را به یک فرآیند خودبه‌خودی با ۴ گام کنترل شده، تبدیل کنیم. پس باید واسطه‌ای وجود داشته باشد ـ یعنی یک معلم ـ که تمثیل‌ها و مشابهت‌ها را برای دانش‌آموزان توسعه می‌دهد، میزان تمثیل و تلفیق و تحلیل مورد استفاده در ارایه‌ی یک مفهوم را تعیین می‌کند و اوست که اطمینان حاصل می‌کند که آیا دانش‌آموزان یاد گرفته‌اند درباره‌ی هر مفهوم، به صورت

انتقادی فکر کنند. و هرگاه دانش‌آموزان بتوانند انتقادی فکر کنند، معلم باید با ارایه‌ی راه‌کارهای حل مسأله و ایجاد تمثیل‌های جدید، برای بسیاری از دانش‌آموزان، عمل ترکیب را انجام دهد.

به بیان دقیق‌تر، این مدل برای معلم، نقش‌های زیر را در هریک از ۴ مرحله‌ی کسب مفهوم، بیان می‌کند:

- **تمثیل‌سازی و مشابهت‌سازی**: معلم یک داستان‌سرا (نقال) است؛
- **تلفیق**: معلم، یک راهنما است؛
- **تحلیل**: معلم، یک خبره است؛
- **ترکیب**: معلم، یک مربی[۲۳] است.

در این مقاله، فرصت توضیح بیش‌تر درباره‌ی هریک از این نقش‌ها وجود ندارد، لیکن اجازه دهید نکته‌ای را خاطر نشان کنم که احساس می‌کنم نباید از آن غفلت کرد. دانش‌آموزانی که بااستعداد هستند، در نظام آموزشی ما اغلب کسل یا حتی خفه می‌شوند. اگر بپذیریم که مربی، کسی است که نظم و ترتیب و ساختار را برای ایجاد خلاقیت به‌کار می‌گیرد، پس به وضوح این دانش‌آموزان هستند که باید توسط وی تربیت شوند. به‌ویژه معلمان باید مطمئن شوند که ترکیب کننده‌ها، تشخیص می‌دهند که در ریاضی، خلاقیت وجود دارد و آن‌ها باید نشان دهند که چنین خلاقیتی، هم لذت‌بخش و هم باارزش است.

نقش تکنولوژی

گرچه نظرات اصلاحی از قبیل استفاده از تکنولوژی، یادگیری گروهی، و قانون ۴ مرحله‌ای، ارزشمند و اثربخش هستند، امّا به‌کارگیری آن‌ها، اغلب نیازمند صرف زمان زیاد از زمان باارزش کلاس است. اگر از این ایده‌های اصلاحی، عاقلانه استفاده نشود، به‌راحتی می‌توانند منجر به درس‌هایی شوند که عمیق هستند اما وسعت ندارند، که در این صورت برای برنامه‌ریزی درسی بعد از دبیرستان، نامناسب می‌باشند.

در هرحال، مدل ۴ مرحله‌ای یادگیری، اجازه می‌دهد برای انجام اصلاحات، راه‌کارهایی ایجاد کنیم که در آن، محتوای درس، قربانی نشود. برای نشان دادن این ادعا، توضیحات خود را به گنجاندن تکنولوژی در برنامه‌ی درسی، محدود می‌کنم.

فرض کنید مفهومی داریم که استفاده از تکنولوژی را ایجاب می‌کند. برای تعیین چگونگی استفاده‌ی بهینه از آن تکنولوژی، ابتدا باید مشخص کنیم که کدام یک از این ۴ مرحله، آن تکنولوژی را به بهترین وجه توصیف می‌کند و پس از آن، ضروری است که استفاده از آن تکنولوژی را به آن مرحله از ارایه‌ی مفهوم، محدود سازیم. به علاوه، اگر معلوم کنیم که دانش‌آموزان در آن مرحله، به زمان خیلی کمی نیازمندند، شاید دیگر نخواهیم از آن تکنولوژی استفاده کنیم.

مثلاً فرض کنید یک برنامه‌ی «اَپلت»[۲۴] داریم که همگرایی سری ریمان در ناحیه‌ی زیرمنحنی را نشان می‌دهد؛ هیچ مقایسه‌ای میان ایده‌های شناخته شده و ایده‌های ناشناخته انجام نمی‌دهد، و کمکی به تمایز مفهوم انتگرال از سایر مفاهیم (مانند پادمشتق) نمی‌کند. بنابراین، این برنامه برای تلفیق، تحلیل یا ترکیب، مناسب نیست.

با این وجود، اگر درک و استفاده از اَپلت، ساده باشد می‌توان از آن به‌عنوان زمینه‌ی بصری عالی برای مفهوم انتگرال، استفاده کرد. پس، من از آن به‌عنوان یک تمثیل برای انتگرال معین استفاده می‌کنم: آن را به‌عنوان نمایشی برای مفهوم جدید معرفی خواهم کرد. پس از آن، از آن به‌عنوان انگیزه‌بخش تعاریف اِفراز، مجموع ریمان، و نهایتاً انتگرال معین استفاده خواهم کرد.

در حقیقت، ممکن است تصمیم بگیرم که ۲-۳ تصویر که خوب ترسیم شده باشند، همان تأثیر برنامه‌ی اَپلت را دارند، و لذا ممکن است قانع شوم که در زمان و تلاشی که برای معرفی اپلت و چگونگی کار با آن صرف می‌شود، صرفه‌جویی کنم. یا ممکن است تصمیم بگیرم که واقعاً می‌خواهم از اپلت استفاده کنم و متعاقباً تکلیفی طراحی کنم که در آن از دانشجویان بخواهم نتایج حاصل از اپلت را با نتایج حاصل از قلم و کاغذ، مقایسه کنند.

از این گذشته، نوع استفاده‌ی من از تکنولوژی، از ترمی به ترم دیگر، متفاوت است. ممکن است در یک ترم ببینم که تک‌تک دانشجویان و کلاس، نیازمند صرف زمان بیش‌تری برای تمثیل مفهوم انتگرال معین هستند. یا ممکن است برنامه‌ی اپلت را فقط در حد فرصتی برای به چالش کشیدن گروهی از ترکیب‌کننده‌ها، نشان دهم تا نسخه‌ی بهتری از اپلت بسازند ـ با این ضمانت که در آینده به جای برنامه‌ی فعلی، از برنامه‌ی آن‌ها استفاده خواهم کرد.

استفاده یا عدم استفاده‌ی من از تکنولوژی، تحت‌تأثیر نقشی است که تکنولوژی می‌تواند در ارایه‌ی یک مفهوم خاص، بازی کند. برای من حیرت‌آور است که تکنولوژی، که در ابتدا بسیار

جذاب به نظر می‌رسد، واقعاً با توجه به این مدل، ارزش آموزشی اندکی دارد.

جمع بندی

در آخر، می‌خواهم باور خود را تکرار کنم که این مدل، تنها زمانی مؤثر است که به صورت ابزاری در دستان یک معلم مشتاق باشد که می‌خواهد رابطه‌ی معلم ـ شاگردی را ارتقا دهد. در حقیقت، حدس می‌زنم که بسیاری از معلمان، همین حالا هم از این مدل استفاده می‌کنند، بدون این که به آن رسمیت داده باشند. در حال حاضر، بسیاری از ما به جای این که از قضیه‌ی فیثاغورس استفاده کنیم، وتر یک مثلث قائم‌الزاویه را با خط کش اندازه می‌گیریم. ما این کار را می‌کنیم چون می‌دانیم که زمانی که دانش‌آموز می‌بیند نتایج حاصل از اندازه‌گیری و قضیه‌ها، یکی هستند، در حل مسایل، از قضیه‌ها مستقل از اندازه‌گیری استفاده می‌کند.

با این وجود، این مدل، ابزاری بسیار ارزشمند در تدریس من بوده است. این مدل به من اجازه می‌دهد که نیازهای دانش‌آموزان را سریع و مؤثر تشخیص دهم، وقت و کاربرد تکنولوژی را بودجه‌بندی کنم و اعتماد دانش‌آموزان نسبت به توانایی‌ام در هدایت آن‌ها به سوی موفقیت را افزایش دهم. امیدوارم این مدل برای همکاران آموزشگرم در حرفه‌ی ریاضی نیز به همین اندازه با ارزش باشد.

زیرنویس‌ها

1. Dunn and Dunn
2. Eyring
3. Kolb's Learning Model
4. Active Experimentation
5. Refletive Observation
6. Memorize And Regurgitate

معنی دقیق‌تر این عبارت، «حفظ کن و استفراغ کن» است.

۷. توجه داشته باشید که منظور از «استدلال رهیافتی» در این مقاله، استدلال‌های بی‌دلیل و اختیاری است و ارتباطی به «رهیافت» به معنایی که پولیا از آن‌ها نام برده، ندارد.

8. Allegory

در فرهنگ لغت و بستر، معنای این واژه چنین است: «داستان یا توصیفی که شخصیت‌ها و پیشامدها، نمادی برای معانی زیربنایی عمیق‌تری هستند.»

9. Allegorizer
10. Integrator
11. Analyzer
12. Synthesizer
13. Allegorization
14. Integration
15. Analysis
16. Fleshout
17. Synthesis
18. Board Games

انواع بازی‌هایی که روی یک تخته انجام می‌شوند از قبیل منچ، مونوپولی، مار و پله، شطرنج و نظایر آن.

19. Visualization
20. Experimentation
21. Exploration
22. Szydlik
23. Coach

به معنای همان نقشی که مربی در یک تیم ورزشی دارد.

24. Applet

منبع اصلی ترجمه شده

Knisley, J. (2006). A New Four-Stage Model of Mathematical Teaching & Learning.

علاقه‌مندان می‌توانند از طریق آدرس‌های زیر، با نویسنده و مترجم این مقاله ارتباط برقرار کنند.

نویسنده: knisleyi @ etsu.edu

مترجم: Jovshan@ gmail.com

متابع

Bloom, B.S.(1956). Taxonomy of Educational Objectives. David McKay Company. New York.

Buriak, Philip, Brian McNurlen, and Joe Harper. (1995). System Model for Learning. In the Proceedings of the ASEE/IEEE Frontiers in Education Conference 2a.

Dunn, R.S., and Dunn, K.J. (1993). Teaching Secondary Students Through Their Individual Learning Styles: Practical Approaches for Grades 7-12. Allyn & Bacon.

Evans, N J., Deanna S.F., and Florence Guido-DiBrito. (1998). Student Development in College: Theory, Research, and Practice. Jossey-Bass..

Eyring, J. D. Johnson, D.S. and Francis. D.F. (1993). A Cross-Level Units of Analysis Approach to Individual Differences in Skill Acquistion. *Journal of Applied Psychology* 78(5), 805-814.

Felder, R. M. (1996). Matters of Style. *ASEE Prism* 6(4), 18-23.

Felder,. M., Woods, D.R., and Stice, J.E., and Rugarcia. A. The Future of Engineering Education: II. Teaching Methods that Work. *Chem. Engr. Education*. 34(1) 26-39.

Lee, Frank J., Anderson, J.R., and Matessa, M.P.(1995). Components of Dynamic Skill Acquisition. *In Proceedings of the Seventeenth Annual Conference of the Cognitive Science Society*, 506-511.

Pearl, J. (1984). Heuristics: *Intelligent Search Strategies for Computer Problem-Solving*. Addison-Wesley, Reading, MA.

Szydlik, J. E(2000). Mathematical Beliefs and Conceptual Understanding of the Limit of a Function. *Journal for Research in Mathematics Education* 31(3), 258-276.

درباره‌ی معادله‌ی $x^y = y^x$

وای. اس. کوپیتز و اچ. مارتینی
ترجمه: محمدرضا درفشه
دانشکده‌ی علوم دانشگاه تهران

۱. مقدمه

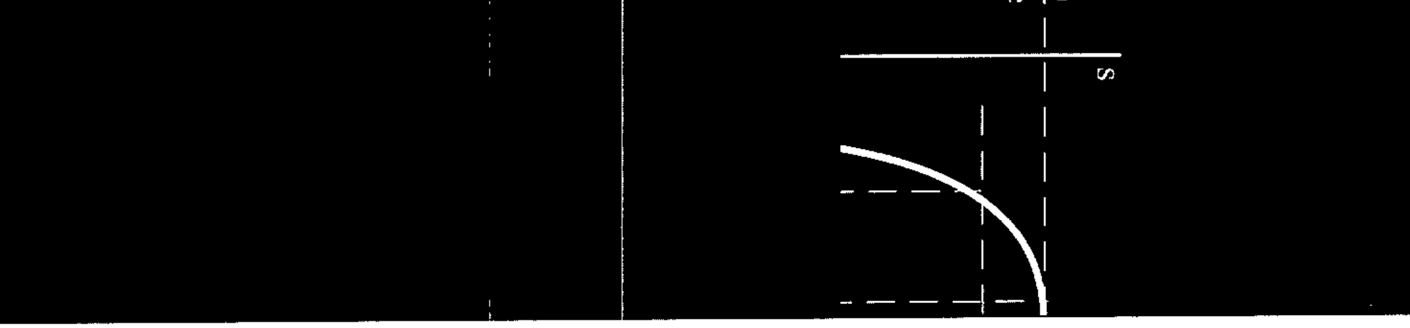
به نظر می‌رسد که معادله‌ی $x^y = y^x$ ، $x, y > 0$ ، در حیطه‌ی ریاضیات رها شده باشد، تنها می‌دانیم که در جمله‌ی [۲] از آن یادی شده است.

هدف ما در این نوشته، بررسی حل این معادله است. در نگاه اول روشن نیست که به ازای چه مقادیری از $y > 0$ جواب نابدیهی برای $x^y = y^x$ ، $x, y > 0$ ، وجود دارد، یعنی مقداری چون $x \neq y$ ، $x > 0$ ، به طوری که (x,y) در معادله صدق کند. این مطلب در پاراگراف ۱، جایی که دیده می‌شود مجموعه‌ی جواب‌های نابدیهی در $(x, y) = (e, e)$ متمرکز می‌شود، مورد بحث قرار می‌گیرد.

این نقطه، نقطه‌ی تجمع مجموعه جواب‌های گویای نابدیهی معادله‌ی $x^y = y^x$ ، $x, y > 0$ است (پاراگراف ۲)، و یک نقطه‌ی دوگانه (منفرد) از منحنی‌ای که معادله‌ی آن $x^y = y^x$ می‌باشد (پاراگراف ۳).

پس از اتمام این مقاله به مرجع [۱] برخوردیم که در آن بحث تاریخی جالبی درباره‌ی معادله‌ی $x^y = y^x$ ، $x, y > 0$ ، نوشته شده است. از آن مقاله یاد می‌گیریم که قبلاً اویلر این معادله را بررسی کرد و نمایش پارامتریک (۴) را که در ادامه می‌آید کشف نمود، و سپس با استفاده از آن، جواب‌های گویای (۵) را استخراج کرد. وی هم‌چنین دو خط مجانب ($x = 1$ و $y = 1$) منحنی را می‌شناخت. هم‌چنین دانیل برنولی در نامه‌ای به گلدباخ اعلام می‌کند که جواب‌های گویای معادله را پیدا کرده است. ای. جی. مولتون در [۴] بحثی مفصل درباره‌ی منحنی با معادله‌ی $x^y = y^x$ ، $x, y > 0$ ، انجام می‌دهد، که شامل گزاره ۱ زیر (بدون ارائه‌ی حل صریح) و شکلی مشابه شکل ۲ است. اما بحث ما در این مقاله پیشرفته‌تر از بحث مقاله‌ی مولتون است.

آر. سی. آرچی‌بالد با ابزار بیش‌تری (در [۱]) تحقیقات زیادی مرتبط با معادله‌ی $x^y = y^x$ ، $x, y > 0$ را می‌یابد، و به همه‌ی آن‌ها (تا سال ۱۹۲۱ م) ارجاع می‌دهد. ما نتوانستیم کارهایی که پس از این تاریخ یا سال‌های اخیر درباره‌ی این معادله انجام شده را بیابیم. با این که همه‌ی تحقیقات انجام شده را به کمک Math. Rev. مرور نکرده‌ایم، برداشتمان این است که قضیه‌ی ۱ (سرشت نمائی جواب‌های گویا) تازگی دارد و در مجموع، حل کاملی از معادله‌ی $x^y = y^x$ ارائه می‌دهد؛ در حالی که دیگران فقط با حالت‌های خاص این معادله کار کرده‌اند.



۲. جواب‌های نابدیهی $x^y=y^x$

برای این که بعداً دچار سردرگمی نشویم، بهتر است به‌جای معادله‌ی $x^y = y^x$ ، $x, y > ۰$ ، معادله‌ی زیر را در نظر بگیریم

$$t^m = m^t, \quad t\ ,\ m > ۰ \qquad (۱)$$

که در آن m یک «پارامتر» و t «مجهول» است.

گزاره ۱. معادله‌ی (۱) دارای جواب نابدیهی است اگر و تنها اگر $۱ < m \neq e$ ، و به ازای چنین mای، این جواب منحصر به فرد است.

برهان. قرار می‌دهیم $u(t) = \frac{\ln t}{t}$ ، $t > ۰$ ، و با گرفتن لگاریتم از دو طرف(۱) دیده می‌شود که (۱) هم‌ارز معادله‌ی زیر است:

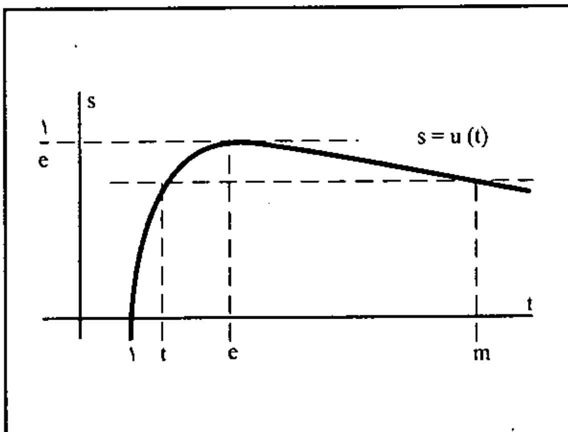
$$u(t) = u(m)\ ,\ t > ۰ \qquad (۲)$$

که در آن $m > ۰$ یک پارامتر می‌باشد.

تعداد جواب‌های نابدیهی (۲) را می‌توان برحسب مجموعه‌ی پیش ـ تصویر $u(m)$ تحت u بیان کرد:

(۳) تعداد جواب‌های $t \neq m$ برای(۲)= تعداد $۱ - (u^{-۱}(u(m))$

که $u^{-۱}(s)$ ، مجموعه‌ی پیش‌ـ‌تصویرهای s تحت u است.



شکل ۱

چون $u'(t) = \frac{۱ - \ln t}{t^۲}$ ، u در بازه‌ی $[۰, e]$ صعودی است، و به ازای $t = e$ ، مقدار ماکسیمم $u(e) = \frac{۱}{e}$ را اختیار می‌کند، و در بازه‌ی $[e, \infty)$ نزولی است. چون

$$\lim u(t) = \begin{cases} ۰\ , & t \to \infty \quad \text{به ازای} \\ -\infty\ , & t \to ۰^+ \quad \text{به ازای} \end{cases}$$

خطوط $s = ۰$ و $t = ۰$ ، به ترتیب مجانب‌های افقی و عمودی نمودار $s = u(t)$ می‌باشند (شکل۱). از این رو

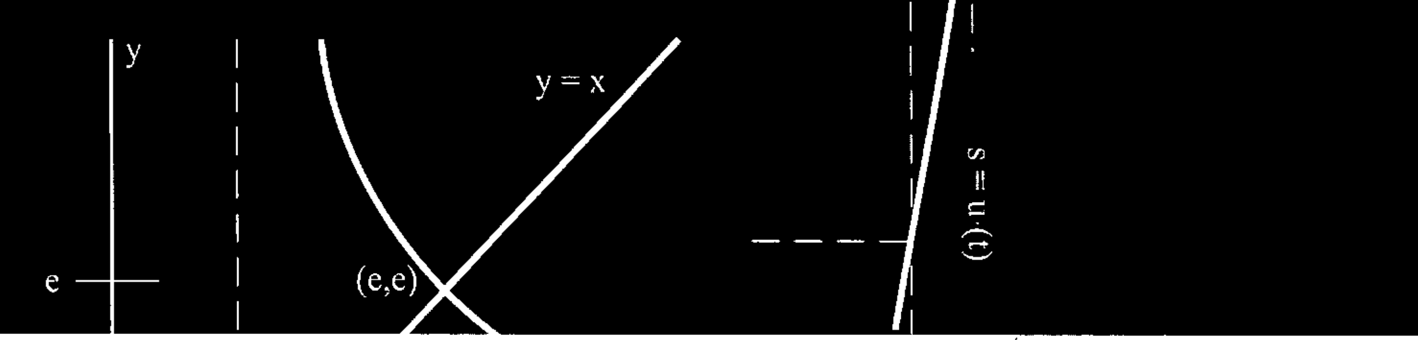
$$\#\left(u^{-۱}(s)\right) = \begin{cases} ۰\ ,\ \frac{۱}{e} < s & \text{اگر} \\ ۱\ ,\ s \leq ۰ \quad \text{یا} \quad \frac{۱}{e} & \text{اگر} \\ ۲\ ,\ ۰ < s < \frac{۱}{e} & \text{اگر} \end{cases}$$

و متناظراً

$$\#\left(u^{-۱}(u(m))\right) = \begin{cases} ۰\ ,\ m \leq ۰ & \text{اگر} \\ ۱\ ,\ ۰ < m \leq ۱ \ \text{یا}\ m = e & \text{اگر} \\ ۲\ ,\ ۱ < m \neq e & \text{اگر} \end{cases}$$

که بنابه (۳)، گزاره ثابت می‌شود.

نقش m و t در گزاره‌ی ۱، قابل تعویض است. از این رو اگر گزاره‌ی ۱ را در مورد $x^y = y^x$ (که $(m, t) \to (x, y)$) اعمال کنیم نتیجه می‌گیریم که برای $۱ < x \neq e$ ، عدد منحصر به فرد y، $۱ < y \neq e$ ، وجود دارد به قسمی که (x, y) یک جواب نابدیهی $x^y = y^x$ است $(x, y > ۰)$. به این ترتیب نگاشت پوشای $x \to \varphi(x)$ از $(۱, \infty) / \{e\}$ به خودش حاصل می‌شود. در اینجا نقش x و y قابل تعویض‌اند، از این رو نمودار $y = \varphi(x)$ نسبت

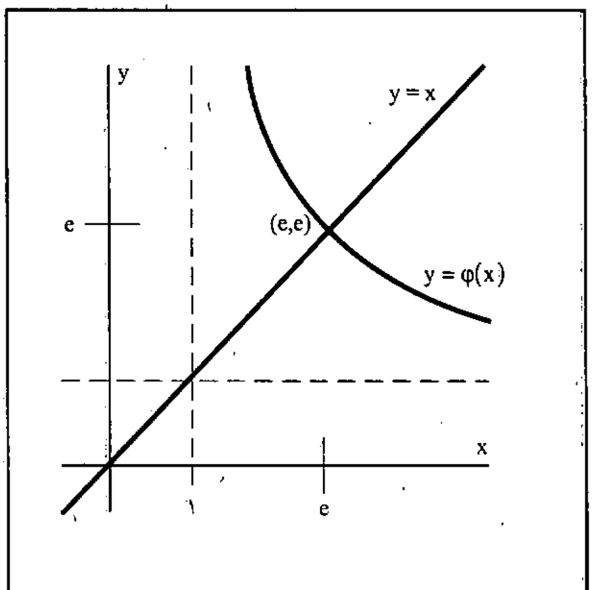


به خط $y = x$ متقارن است، یعنی $\varphi(\varphi(x)) = x$ (برگردان).

بررسی نمودار $s = u(t)$ (شکل ۱) نشان می‌دهد که زمانی که m در بازه‌ی $(1,\infty)$ افزایش می‌یابد جواب متناظر $t \neq m$ از (۱) در بازه‌ی (e,∞) نزول می‌کند، و برعکس. بنابراین، φ در بازه‌ی $(1,\infty)/\{e\}$ اکیداً نزولی است. بررسی مشابه نشان می‌دهد که

$$\lim_{x\to 1}\varphi(x) = \infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to\infty}\varphi(x) = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to e}\varphi(x) = e$$

با استفاده از آخرین حد می‌توان با تعریف $\varphi(e) = e$ تابع φ را در $x = e$ پیوسته ساخت. چون $2^4 = 16 = 4^2$، $\varphi(2) = 4$ و $\varphi(4) = 2$. منحنی $y = \varphi(x)$ در شکل ۲ نمایش داده می‌شود.



شکل ۲

گزاره ۲. تنها جواب‌های صحیح و نابدیهی معادله‌ی $x^y = y^x$، $x,y > 0$، عبارتند از $(2,4)$ و $(4,2)$.

برهان. چون تنها عدد صحیح در بازه‌ی $[1,e)$ عبارت است از ۲ و $\varphi(2) = 4$ پس $(2,4)$ تنها نقطه با مختصات صحیح روی نمودار $y = \varphi(x)$ است، $1 < x \leq e$. بنا به تقارن، $(4,2)$ نیز تنها نقطه با مختصات صحیح روی این نمودار به‌ازای $e \leq x < \infty$ است.

۳. جواب‌های گویای معادله‌ی $x^y = y^x$

فرض کنید (x,y) یک جواب نابدیهی از معادله‌ی $x^y = y^x$، $x,y > 0$، است و قرار دهید $y = px$. در این صورت $p \neq 1$ و $p > 0$ و $x^y = y^x$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$x^{px} = (px)^x \Rightarrow (x^x)^p = p^x x^x \Rightarrow (x^x)^{p-1} = (x^{p-1})^x = p^x$$

درنتیجه $x^{p-1} = p$ یا به طور معادل $x = p^{\frac{1}{p-1}}$.

قرار می‌دهیم $h = \frac{1}{p-1}$، $h \in \mathbb{R} - [-1,0]$ (چون $p \neq 1$، $p > 0$)

یعنی $p - 1 = \frac{1}{h}$، $p = 1 + \frac{1}{h}$ و درنتیجه $x = (1+\frac{1}{h})^h$.

چون $y = px$ پس $y = (1+\frac{1}{h})(1+\frac{1}{h})^h = (1+\frac{1}{h})^{h+1}$.

بنابراین

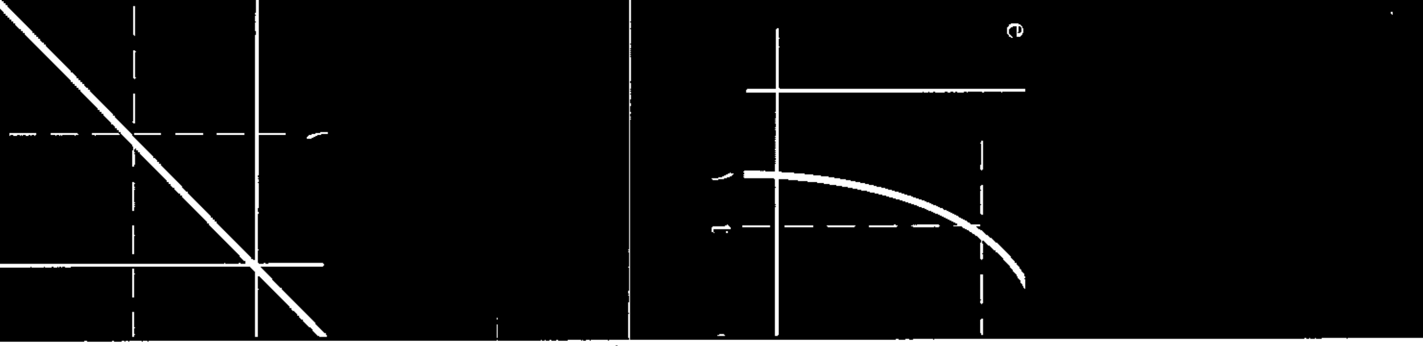
$$(x,y) = \left((1+\frac{1}{h})^h, (1+\frac{1}{h})^{h+1}\right) \qquad (4)$$

$h \in \mathbb{R} - [-1,0]$، یک جواب نابدیهی و پارامتری از معادله‌ی $x^y = y^x$، $x,y > 0$، است. توجه کنید که اگر $h \to \infty$ آن‌گاه $(x,y) \to (e,e)$. به‌ازای $n \in \mathbb{Z} - \{-1,0\}$،

$$(x,y) = \left((1+\frac{1}{n})^n, (1+\frac{1}{n})^{n+1}\right) \qquad (5)$$

که یک جواب نابدیهی و گویای معادله‌ی $x^y = y^x$، $x,y > 0$ می‌باشد.

قضیه ۱. اگر (x,y) یک جواب نابدیهی و گویای معادله‌ی $x^y = y^x$، $x,y > 0$، باشد آن‌گاه به‌ازای $n \in \mathbb{Z} - \{-1,0\}$ ای،



به شکل (۵) است.

برهان. چون برای هر $k \in \mathbb{Z}-\{-1,0\}$ داریم

$$(1-\frac{1}{k+1})^{-(k+1)+1}=(\frac{k}{k+1})^{-k}=(\frac{k+1}{k})^{k}=(1+\frac{1}{k})^{k}$$

پس کافی است حالت $y>x$ را در نظر گرفته و ثابت کنیم که در این حالت به ازای nای، (x,y) به شکل (۵) است. بنابراین فرض می‌کنیم که (x,y) یک جواب گویای $x^{y}=y^{x}$ با شرط $y>x>0$ باشد. پس $p=\frac{y}{x}>1$ گویاست و $h=\frac{1}{p-1}$ یک عدد گویای مثبت است. قرار می‌دهیم $h=\frac{n}{\alpha}$ که $n,\alpha \in \mathbb{N}$ و $(n,\alpha)=1$ (در اینجا (k,k') بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک k و k′ است). در این صورت بنابه (۴) می‌توان نوشت

$$x=(1+\frac{1}{h})^{h}=(1+\frac{\alpha}{n})^{\frac{n}{\alpha}}=(\frac{n+\alpha}{n})^{\frac{n}{\alpha}}$$

فرض کنید $x=\frac{u}{v}$، $u,v \in \mathbb{N}$ و $(u,v)=1$. آن‌گاه $(\frac{n+\alpha}{n})^{\frac{n}{\alpha}}=x=\frac{u}{v}$ که از آن نتیجه می‌شود $(\frac{n+\alpha}{n})^{n}=(\frac{u}{v})^{\alpha}$ و از این رو

$$\frac{(n+\alpha)^{n}}{n^{n}}=\frac{u^{\alpha}}{v^{\alpha}} \qquad (6)$$

چون $(n,\alpha)=1$ پس $(n+\alpha,n)=1$ و $((n+\alpha)^{n},n^{n})=1$. مشابهاً، چون $(u,v)=1$ پس $(u^{\alpha},v^{\alpha})=1$.

نتیجه می‌گیریم که هر دو طرف تساوی (۶)، شکل ساده‌شده‌ای از یک عدد گویاست، از این رو (بنابه یگانگی شکل ساده شده) داریم

$$n^{n}=v^{\alpha} \quad \text{و} \quad (n+\alpha)^{n}=u^{\alpha} \qquad (7)$$

اکنون اثبات قضیه ۱ را با لم‌های زیر ادامه می‌دهیم.

لم ۱: گیریم $a,b,r,s \in \mathbb{N}$ در تساوی $a^{b}=r^{s}$ صدق می‌کنند. فرض کنید $(b,s)=1$. در این صورت $a=t^{s}$ به ازای یک $t \in \mathbb{N}$.

برهان. کافی است نشان دهیم که اگر p عامل اولی از k با درجه‌ی تکرار k باشد (یعنی $p^{k}|a$ ولی $p^{k+1}\nmid a$)، آن‌گاه $s|k$.
چون درجه‌ی تکرار p در a^{b} مساوی kb است، پس $p^{kb}|r^{s}$ ولی $p^{kb+1}\nmid r^{s}$. فرض کنید m درجه‌ی تکرار p در r است، یعنی $p^{m}|r$ ولی $p^{m+1}\nmid r$. درجه‌ی تکرار p در r^{s} مساوی ms می‌باشد. از این رو kb=ms. چون $(b,s)=1$ پس $s|k$ و لم ثابت می‌شود.

اکنون چون $(n,\alpha)=1$، با استفاده از لم ۱ (که دوبار در (۷) به کار گرفته می‌شود) نتیجه می‌شود

$$n=c^{\alpha}, \quad n+\alpha=d^{\alpha}$$

که $c,d \in \mathbb{N}$. بنابراین $\alpha=d^{\alpha}-c^{\alpha}$.

لم ۲. اگر $c,d,\alpha \in \mathbb{N}$ و $d>c$ و $\alpha \geq 2$ آن‌گاه $\alpha<d^{\alpha}-c^{\alpha}$.

برهان. از استقراء روی α استفاده می‌کنیم:

$\alpha=2$:

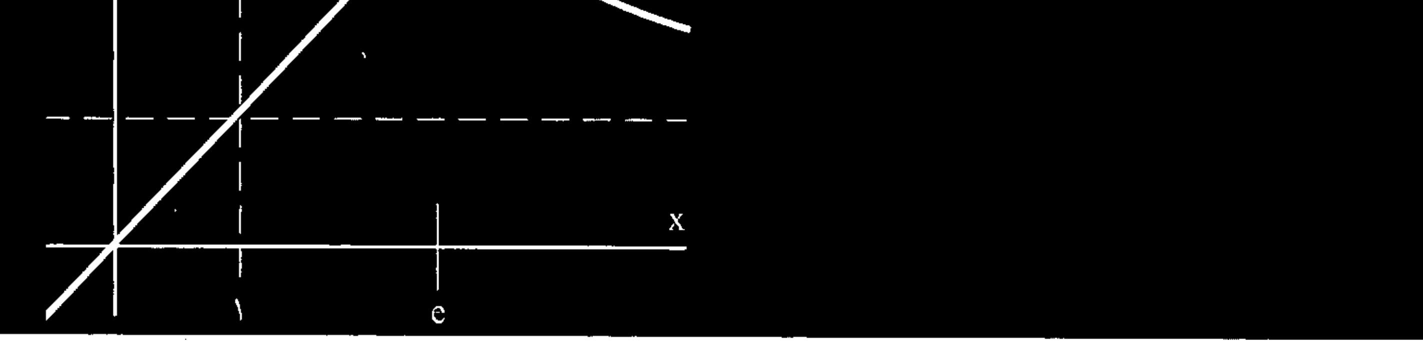
$$d>c \Rightarrow d-c \geq 1$$
$$d+c \geq 3 \Rightarrow d^{2}-c^{2}=(d-c)(d+c) \geq 1\times 3>2=\alpha$$

فرض کنید لم برای α برقرار است و آن را برای $\alpha+1$ ثابت می‌کنیم:

$$\begin{aligned} d^{\alpha+1}-c^{\alpha+1} &= d.d^{\alpha}-c.c^{\alpha} \\ &= d^{\alpha}-c^{\alpha}+\big((d-1)d^{\alpha}-(c-1)c^{\alpha}\big) \\ &= (d^{\alpha}-c^{\alpha})+\big((d-c).d^{\alpha}\big)+(c-1)(d^{\alpha}-c^{\alpha})>\alpha+1+0 \\ &= \alpha+1 \end{aligned}$$

(آخرین نامساوی بالا از فرض استقراء نتیجه می‌شود).
بنابراین ثابت می‌شود که $d^{\alpha+1}-c^{\alpha+1}>\alpha+1$ و اثبات لم به پایان می‌رسد.

اکنون از لم ۲ نتیجه می‌شود که تساوی $\alpha=d^{\alpha}-c^{\alpha}$ که قبلاً به‌دست آوردیم نمی‌تواند برقرار باشد مگر این‌که $\alpha=1$ (و



در نتیجه $d = c + 1$). بنابراین $h = \frac{n}{\alpha} = \frac{n}{1} = n$ و

$$x = (1+\frac{1}{h})^h = (1+\frac{1}{n})^n$$

$$y = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$$

و به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

نتیجه۱ . $p(e,e)$ نقطه‌ی منحصر به فرد مجموعه‌ی نقاط تجمع با مختصات گویا (=مجموعه‌ی جواب‌های گویا و نابدیهی $x^y = y^x$ ، $x, y > 0$) روی نمودار $y = \varphi(x)$ است.

۴. اهمیت $p(e,e)$ برای منحنی نمایش معادله‌ی $x^y = y^x$

با استفاده از بحث زیر دیده می‌شود که منحنی نمایش $x^y = y^x$ ، $x, y > 0$ ، دارای دو شاخه است:

(i) خط $y=x$ ، $x > 0$.

(ii) منحنی $y = \varphi(x)$ ، $x > 1$.

این دو شاخه در $p(e,e)$ تلاقی کنند. بنابراین p یک نقطه‌ی مضاعف برای این منحنی است. این مطلب را می‌توان با استفاده از نظریه‌ی کلی نقاط منفرد نیز بررسی کرد. منحنی نمایش $x^y = y^x$ ، $x, y > 0$ ، یک منحنی تراز صفر از $F(x,y) = x^y - y^x$ است، یعنی معادله‌ی آن $F(x,y) = 0$ است.

محاسبات ساده نشان می‌دهد که

$$F_x = yx^{y-1} - y^x \ln y \Rightarrow F_x(e,e) = 0$$

$$F_y = x^y \ln x - xy^{x-1} \Rightarrow F_y(e,e) = 0$$

بنابراین p یک نقطه‌ی منفرد منحنی است. طبیعت این انفراد (نقطه‌ی مطرود، نقطه‌ی تیز، نقطه‌ی دوگانه، یا نقطه‌ی نامعین) توسط علامت مبین آن در p تعیین می‌شود، یعنی

$$F_{xx}F_{yy} - F_{xy}^2$$

(به‌عنوان مثال به [۳] صفحه ۸۴ مراجعه شود). داریم

$$F_{xx} = y(y-1)x^{y-2} - y^x(\ln y)^2$$

پس

$$F_{xx}(e,e) = e(e-1)e^{e-2} - e^e.1 = -e^{e-1}$$

مشابهاً

$$F_{yy} = x^y(\ln x)^2 - x(x-1)y^{x-2}$$

پس

$$F_{yy}(e,e) = e^e.1 - e(e-1)e^{e-2} = e^{e-1}$$

و

$$F_{xx}(p)F_{yy}(p) = -(e^{e-1})^2 < 0$$

از این رو

$$\Delta_F(p) = -(e^{e-1})^2 - F_{xy}^2(p) < 0$$

بنابراین p یک نقطه‌ی مضاعف منحنی نمایش معادله‌ی $x^y = y^x$ ، $x, y > 0$ ، است. شکل ۲ در بالا، این منحنی و نقطه‌ی مضاعف $p(e,e)$ را نشان می‌دهد.

یادداشت . پس از پذیرفته شدن این مقاله، چهار مرجع دیگر [۸]–[۵] مورد توجه ما قرار گرفت (از وجود دوتای آن‌ها توسط آی. له‌من مطلع شدیم). در [۸] حل معادله‌ی (۱) در حیطه‌ی اعداد جبری سرشت نمایی شده است و [۵] شامل سرشت نمایی گویای معادله نظیر جواب‌های مقاله‌ی ما است. از نقطه‌نظر استدلالی، بحث جالبی درباره‌ی (۱) در مرجع [۷] ارائه شده است و در [۶] تعمیم‌هایی از (۱) مورد بحث قرار گرفته است.

مراجع

[1] R. C. Archibald; Problem Notes, No. 9. *Amer. Math. Monthly* 28 (1921), 141-143.

[2] Yehoshua Bar-Hillel, Y.N. Neman (Eds.); *Dapim Lematematika u'lephisika* (in Hebrew), Issue No. 6, Jerusalem (March 1943), p. 11, Problem 87 and its Solution in Issue No.7(June 1943), p.10.

[3] R. H. Fowler; *The Elementary Differential Geometry of Plane Curves. Cambridge University* Press, London, 2nd ed., 1929.

[4] E. J. Moulton: The Real Function Defined by $x^y = y^x$. *Amer. Math. Monthly* 23 (1916), 233-237.

[5] P. Hohler, P. Gebauer; Kann man ohne Rechner entscheiden, ob - e^π oder π^e grösser ist? *Elem. Math.*36 (1981), 131-134.

[6] R. A. Knoebel; Exponentials reiterated. *Amer. Math. Monthly* 88(1981), 235-252.

[7] I. Lehmann; Wie symmetrisch sind die sieben Grundrechenarten? *Mathematik in der Schule* 34 (1996) 344-356.

[8] D. Sato; Algebraic Solution of $x^y = y^x (0 < x < y)$. Proc. *Amer. Math. Soc.* 31 (1972), 316.

اشاره

آن‌چه در ادامه می‌خوانید، گزارشی است از یکی از جلسات درس حسابان در یکی از دبیرستان‌های شهرستان کرج که برای درس آموزش ریاضی(۱) در نیم‌سال اول سال ۸۷–۸۶ در دانشگاه شهید بهشتی تهیه شده است.

گزارشی از یک کلاس درس

بهروز ورمزیار
دانشجوی کارشناسی ریاضی

به‌دلیل اهمیّت نقش معلّم، برنامه‌های آموزش معلّمان از اهمیّت ویژه‌ای برخوردار است. مجله‌ی رشد آموزش ریاضی در نظر دارد که این مهم را به‌عنوان یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به‌همین منظور، ستونی در مجله با عنوان روایت‌های معلمان ریاضی باز شده است تا از طریق آن، بتوانیم رابطه‌ی نزدیک‌تری با معلمان ریاضی برقرار کنیم. این روایت‌ها برای محققان و معلمان محقق فرصت ارزنده‌ای به‌وجود می‌آورد تا به‌تبیین نظریه‌های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلّم می‌جوشد، بپردازند. آن‌گاه نظریه‌ها به‌عمل دَر می‌آیند و مجدداً عمل به‌نظریه کشانده می‌شود و این فرآیند هم‌چنان ادامه پیدا می‌کند.

از همکاران گرامی انتظار می‌رود که روایت‌های خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قرار گیرد، زیرا که زکات علم نشر آن است. معلمان عزیز باید به‌اهمیّت تجربه‌های خود واقف شوند و با پویایی به‌غنی‌تر کردن آن‌ها بپردازند.

روزی که به مدرسه رفتم گرچه دبیر کلاس، قبلاً موضوع را با معاون مدرسه در میان گذاشته بود به دفتر معاون رفتم و از ایشان به طور رسمی تقاضا کردم که اجازه‌ی حضور در کلاس را به من بدهد، که البته موافقت خود را در قالب تعارفات روزمره بیان کردند.

در دفتر مدرسه به‌چند تن از دبیران حاضر معرفی شدم، اتفاقاً در دفتر، دبیر ریاضی دیگری نیز بود که سؤالاتی پرسیدند و من پاسخ دادم، سپس دبیر کلاس، با ایشان در مورد برخی مسایل که قرار بود به بچه‌ها تدریس شود و نیز برخی سؤالات که بچه‌ها پرسیده بودند به مشورت پرداختند. یکی از سؤالاتی که برای من هم جالب بود، این بود که یکی از شاگردان از دبیر خود خواسته بود وارون تابع $f(x) = x^3 + x$ را با روش‌های معمول یعنی پیدا کردن x برحسب y به‌دست آورد، و از آن‌جا که در مورد به‌دست آوردن ریشه‌های چند جمله‌ای درجه‌ی سوم برای بچه‌ها مطلبی گفته نشده بود، تصمیم گرفتند در فرصت مناسب روشی به‌جز آن برای پیدا کردن وارون این تابع بیابند.

در همین اثنا، زنگ شروع کلاس‌ها به صدادرآمد و من پس از خداحافظی از دبیران حاضر در دفتر و معاون، با اجازه‌ی دبیر کلاس، کمی زودتر در کلاس حاضر شدم و بعد از تقریباً یک دقیقه ایشان وارد کلاس شدند. با ورود من به کلاس هم‌همه‌ای به‌پا خاست و من سؤال و تعجب بزرگی که در ذهن بچه‌ها شکل گرفته بود را به‌خوبی حس می‌کردم. بالاخره یکی از شاگردان پرسید علت حضور من در کلاس چیست که پاسخ دادم برای کار تحقیقی در این کلاس حاضر شده‌ام. سپس نگاه‌ها از من به دبیر کلاس که به کلاس وارد می‌شد متوجه گردید.

بچه‌ها که تعدادشان ۲۴ الی ۲۶ نفر بود، در دو ستون از سه ستون میز و صندلی موجود در کلاس نشسته بودند، به‌طوری که وقتی دبیر رو به آن‌ها ایستاده بود، در سمت چپ ایشان قرار داشتند. علت هم معلوم بود، دبیر با دست راست می‌نوشتند و بدین‌ترتیب بچه‌ها می‌توانستند نسبت به آن‌چه نوشته می‌شود، دید بهتری داشته باشند.

من هم در انتهای ستون خالی از شاگردان نشستم تا اشراف بیش‌تری نسبت به کلاس داشته باشم.

دبیر کلاس، طبق شیوه‌ی معمول خود برای تسلط بر کلاس و ساکت کردن بچه‌ها، روی تابلویی که تازه پاک شدنش توسط یکی از شاگردان به پایان رسیده بود، شروع به نوشتن جمله‌ای با این مضمون کردند:

$x = ۱/۴ \rightarrow x^۲ - ۱ = ۰/۸۶$

$x = ۱/۳ \rightarrow x^۲ - ۱ = ۰/۶۹$

$x = ۱/۲ \rightarrow x^۲ - ۱ = ۰/۴۴$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$۱^+ \qquad ۰^+$

موضوع درس: حسابان، مبحث: حد و رفع ابهام

شروع درس

«گاهی در محاسبه‌ی حد، عباراتی به شکل $\frac{\overset{\text{حدی}}{۰}}{\underset{\text{حدی}}{۰}}$ ظاهر می‌گردد که ابهام دارد و برای رفع ابهام، عامل مبهم کننده را از بین می‌بریم.»

ـ معلم برای توضیح آن‌چه گفته بود چنین آغاز کرد:

می‌دانیم $\frac{\text{عدد}}{۰}$ بی‌معنی یا تعریف نشده است، مثلاً

$\frac{۲}{۰}، \frac{۰}{۰}، ...$

یکی از دانش‌آموزان پرسید: چرا عدد تقسیم بر صفر بی‌معنی است؟

دبیر خطاب به دانش‌آموز سؤالاتی پرسید که به قرار زیر بودند:

معلم: مثلاً عدد ۳ را در نظر بگیر و بگو معکوس یا وارون آن چیست؟

دانش‌آموز: $\frac{۱}{۳}$.

معلم: در مورد ۵ یا $\frac{۳}{۲}$ یا $\frac{۴}{۵}$ چه می‌گویی؟

دانش‌آموز: $\frac{۱}{۵}$، $\frac{۲}{۳}$، $\frac{۵}{۴}$ (دبیر، اعداد را روی تابلو نوشت).

معلم: حال بگو منظورت از این که می‌گویی مثلاً وارون $\frac{۳}{۲}$ برابر $\frac{۲}{۳}$ یا وارون $\frac{۴}{۵}$ برابر $\frac{۵}{۴}$ است چیست؟

دانش‌آموز: (با قدری مکث) نمی‌دانم.

معلم: به‌طور کلی در موضوع بحث ما، منظور از وارون یک عدد، عددی است که اگر آن‌را در خود عدد ضرب کنیم حاصل‌ضرب ۱ شود و چنین نوشت:

$\frac{۳}{۲} \times \frac{۲}{۳} = ۱ \ ،\ \frac{۴}{۵} \times \frac{۵}{۴} = ۱ \ ،...$

معلم: (خطاب به دانش‌آموز) آیا قبول داری صفر در هر عددی ضرب شود حاصل صفر است؟ (و استاد زیر کلمه‌ی هر خط کشید).

دانش‌آموز: بلی.

معلم: حال بگو چه عددی است که در صفر ضرب شود، حاصل ۱ است؟

دانش‌آموز: (در حالی‌که به دست معلم که به کلمه‌ی «هر» اشاره داشت نگاه می‌کرد گفت) هر عددی در صفر ضرب شود حاصل صفر است (و مکث کرد).

دبیر اضافه کرد: پس هیچ عددی نیست که در صفر ضرب شود و حاصل ۱ شود، یعنی وارون صفر که با نماد $\frac{۱}{۰}$ نشان داده می‌شود وجود ندارد، پس

$\frac{\text{عدد}}{۰} = \text{عدد} \times \frac{۱}{۰}$ (چیزی که وجود ندارد) $\overset{\text{عدد}}{\leftarrow}$ بی‌معنی

پس نوشتن عباراتی به‌شکل $\frac{۳}{۰}$ یا $\frac{-۱}{۰}$ یا $\frac{۰}{۰}$ و نظایر آن‌ها جایز نیست.

البته همه می‌دانیم که استدلال معلم بر اساس تعاریف و قضایایی است که در مورد میدان داریم:

● اگر R حلقه‌ی یک‌داری باشد که $R \neq \{0\}$ در این صورت $1_R \neq 0_R$ ؛

● اگر R حلقه باشد، $a.0_R = 0_R.a = 0_R$

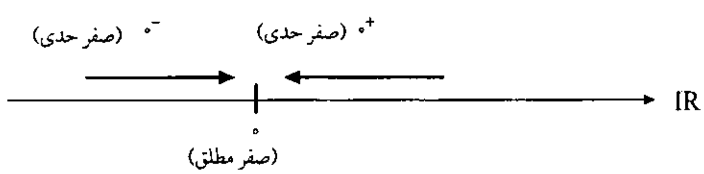
● هر میدان، حلقه‌ی یک‌دار تعویض‌پذیری است که مقسوم‌علیه صفر ندارد.

استاد در ادامه‌ی صحبت‌های خود در مورد $\frac{\cdot}{0}$ اضافه کرد:

در حد عباراتی به‌شکل $\frac{0_{\text{حدی}}}{0_{\text{حدی}}}$ مبهم است نه بی‌معنی.

صفر حدی چیست؟

معلم در رابطه با توضیح صفر حدی نمودار زیر را رسم کرد:

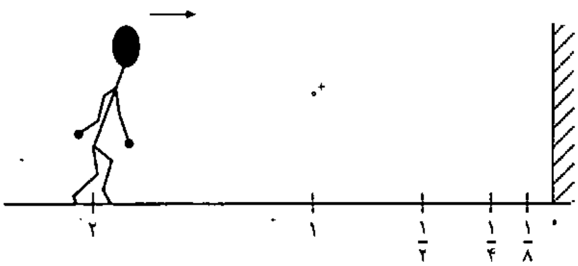


ـ «صفر حدی عبارتی است که به صفر نزدیک می‌شود ولی هیچ‌گاه خود صفر نمی‌شود.

قرارداد می‌کنیم اگر عبارت مورد نظر از سمت راست به صفر نزدیک شد با علامت 0^+ و اگر از سمت چپ به صفر نزدیک شد با علامت 0^- نشانش دهیم.»

معلم به بیان تمثیلی برای این موضوع پرداخت:

فرض کنید در ۲ متری دیواری ایستاده‌اید، سپس با سرعت ۱ متر بر ثانیه به‌دیوار نزدیک می‌شوید. بعد از گذشت اولین ثانیه، سرعت شما نصف می‌شود، یعنی در حالی که در فاصله‌ی ۱ متری دیوار هستید، با سرعت $\frac{1}{2}$ متر بر ثانیه به آن نزدیک می‌شوید. با گذشت دومین ثانیه، در حالی که در فاصله‌ی $\frac{1}{2}$ متری دیوار هستید سرعت شما دوباره نصف می‌شود؛ یعنی $\frac{1}{4}$ متر برثانیه و به‌همین ترتیب شما هر ثانیه به دیوار نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوید ولی به‌دیوار نمی‌رسید. (دبیر آنچه گفته شد را ننوشت بلکه بر روی شکل زیر توضیح داد)

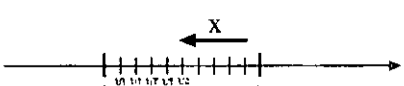


معلم با آگاهی از این نکته که $\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^k = 2$ با شوخی گفت این بی‌نوا باید تا ابد زنده بماند تا به دیوار برسد!

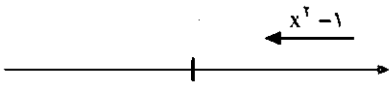
بعد از چند دقیقه که بحث و پرسش‌های بچه‌ها در این رابطه خاتمه یافت، معلم مثال دیگری آورد:

عبارت $x^2 - 1$ را در نظر بگیریم و ببینیم وقتی که x به ۱ از چپ و راست میل می‌کند، چه رفتاری دارد.

وقتی x از راست به ۱ میل می‌کند: $x \to 1^+$



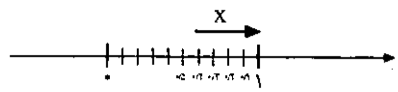
$$x = 1/5 \rightarrow x^2 - 1 = 1/25$$
$$x = 1/4 \rightarrow x^2 - 1 = 0/86$$
$$x = 1/3 \rightarrow x^2 - 1 = 0/69$$
$$x = 1/2 \rightarrow x^2 - 1 = 0/44$$
$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$
$$1^+ \qquad\qquad 0^+$$



$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{[x]}$$

وقتی x از سمت چپ به ۱ میل می‌کند:

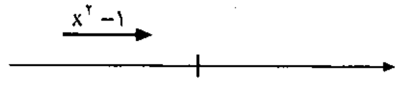
$x \to 1^-$



$x = 0/5 \quad \to \quad x^2-1=-0/75$
$x = 0/6 \quad \to \quad x^2-1=-0/64$
$x = 0/7 \quad \to \quad x^2-1=-0/49$
$x = 0/8 \quad \to \quad x^2-1=-0/36$

$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$

$1^- \qquad\qquad\qquad 0^-$



یکی از دانش‌آموزان پرسید: آیا همیشه وقتی x از سمت راست به یک عدد نزدیک می‌شود عبارت از سمت راست به صفر نزدیک می‌شود و به همین ترتیب از چپ؟

معلم پاسخ داد: اگر در مثال بالا، عبارت $1-x^2$ را در نظر بگیریم

$x \to 1^+ \longrightarrow 1-x^2 \to 0^-$

و

$x \to 1^- \longrightarrow 1-x^2 \to 0^+$

یا حتی گاهی به این که x از کدام طرف به عدد نزدیک شود بستگی ندارد. مثلاً عبارت زیر

$(1-x)^2$ یا $(x-1)^2$

$x \to 1^+ \longrightarrow (x-1)^2 \to 0^+$

$x \to 1^- \longrightarrow (x-1)^2 \to 0^+$

سپس معلم گفت در مطالب گذشته از این واقعیت استفاده کردیم که $\frac{0\ \text{حدی}}{\text{عدد}}=0$ ولی آن را به صورت $\frac{0}{\text{عدد}}=0$ می‌نوشتیم، مثلاً $\lim \frac{x^2-1}{x+5}=\frac{0}{6}=0$. در حالی که اکنون می‌دانیم صورت کسر، صفر (مطلق) نیست، بلکه به بیان غیر ریاضی، عددی بسیار بسیار کوچک است که پس از تقسیم، حاصل کسر بسیار بسیار کوچک و در حد صفر می‌شود.

از این پس نیز همین رویه را در پیش می‌گیریم. یعنی ابتدا عددی که x به آن میل می‌کند را در عبارتی که می‌خواهیم از آن حد بگیریم قرار می‌دهیم. اگر حاصل به صورت $\frac{0}{\text{عدد}}$ درآمد طبق آن‌چه قبلاً داشتیم جواب حد صفر است. ولی اگر حاصل به صورت $\frac{0}{0}$ (البته منظور $\frac{0\ \text{حدی}}{0\ \text{حدی}}$ است، قبل از این گفتیم که $\frac{0}{0}$ بی‌معنی است) درآمد، می‌گوییم ابهام دارد یا مبهم است.

معلم دسته‌بندی زیر را از آن‌چه تاکنون گفته شده بود و یا قرار بود گفته شود انجام داد:

$\frac{0\ \text{مطلق}}{0\ \text{حدی}}=0$

$\lim_{x\to 0^+}\frac{[x]}{x}=0$ جلوتر توضیح می‌دهیم

$\frac{0\ \text{حدی}}{0\ \text{حدی}}$ مبهم : رفع ابهام

$\frac{\text{عدد} \neq \text{صفرمطلق}}{0\ \text{حدی}} \to \infty$

$\lim_{x\to 0^-}\frac{[x]}{x}=+\infty$ بعداً گفته خواهد شد

$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x+5}=\frac{0}{5}=0$: قبلاً در این مورد بحث شده

$\frac{0\ \text{حدی}}{\text{عدد}}=0$

$$= \lim_{x \to ۰} x + ۱ = ۰ + ۱ = ۰$$

$$\frac{\text{۰ مطلق}}{\text{۰ حدی}}$$

در حدگیری به چنین حالتی برخورد نمی‌کنید چون اصلاً x در دامنه‌ی عبارتی که از آن می‌خواهیم حدبگیریم قرار ندارد. البته بعداً بیش‌تر توضیح خواهیم داد: $\lim_{x \to ۰^+} \frac{x}{[x]}$

و نیز داریم: $\frac{\text{عدد}}{۰}$ یا $\frac{۰}{۰}$ بی‌معنی

و $۰ = \frac{\text{صفر مطلق}}{\text{عدد}}$: $\lim_{x \to ۰^+} \frac{[x]}{x + ۵} = ۰$

ابهام چیست و چگونه رفع ابهام کنیم؟

معلم از بچه‌ها پرسید مبهم یعنی چه؟

بچه‌ها که معلوم بود مفهوم مبهم را می‌دانند ولی نمی‌توانند معنی آن را به‌درستی بیان کنند، هریک چیزی گفتند. معلم اضافه کرد همان‌طور که گفتید مبهم چیزی است که تصور درستی از آن نداریم. علت این که ما در حد، به عباراتی به‌شکل $\frac{۰}{۰}$ مبهم می‌گوییم را در مثال‌های زیر ببینید:

$$\frac{۰/۱}{۰/۲}, \frac{۰/۰۱}{۰/۰۲}, \frac{۰/۰۰۱}{۰/۰۰۲}, \frac{۰/۰۰۰۱}{۰/۰۰۰۲}, \dots \to \frac{\text{۰ حدی}}{\text{۰ حدی}} = \frac{۱}{۲}$$

$$* \begin{cases} \frac{۰/۵^۲ + ۰/۵}{۰/۵}, & \frac{۰/۴^۲ + ۰/۴}{۰/۴}, & \frac{۰/۳^۲ + ۰/۳}{۰/۳}, & \frac{۰/۲^۲ + ۰/۲}{۰/۲}, & \dots \to \frac{\text{۰ حدی}}{\text{۰ حدی}} = ? \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ ۱ + ۰/۵ & ۱ + ۰/۴ & ۱ + ۰/۳ & ۱ + ۰/۲ & \dots \to ۱ + ۰ = ۱ \end{cases}$$

همان‌طور که می‌بینید صورت و مخرج هر دو به‌صفر میل می‌کنند ولی حاصل کسر عددی است ثابت. همیشه نمی‌توانیم به این راحتی حاصل $\frac{\text{۰ حدی}}{\text{۰ حدی}}$ را پیدا کنیم. یعنی نمی‌دانیم در حد چه نسبتی بین صورت و مخرج وجود دارد و به این دلیل به این عبارات مبهم می‌گوییم. البته برای رفع این مشکل، راه‌های بسیاری وجود دارد، از جمله فاکتور گرفتن، استفاده از اتحادهای جبری یا مثلثاتی، گویا کردن کسرها و... (البته برخی از این راه‌ها توسط خود دانش‌آموزان پیشنهاد می‌شد)

مثال: $\lim_{x \to ۰} \frac{x^۲ + x}{x} \to \frac{۰}{۰}$ مبهم

طبق رویه‌ی گذشته، صفر را در صورت و مخرج کسر قرار می‌دهیم و متوجه هستیم منظورمان $\frac{\text{۰ حدی}}{\text{۰ حدی}}$ است. حال به رفع ابهام می‌پردازیم.

ابتدا باید عامل مبهم‌کننده را بشناسیم، برای پیدا کردن عامل مبهم‌کننده، توجه کنیم که x به چه عددی نزدیک می‌شود، در این‌صورت تفاضل x و آن عدد، عامل مبهم‌کننده است و باید آن‌را از صورت و مخرج حذف کنیم. در این مثال $x - ۰$ یا همان x، عامل مبهم‌کننده است. لذا با فاکتور گیری x از صورت کسر داریم

$$\lim_{x \to ۰} \frac{x^۲ + x}{x} = \lim_{x \to ۰} \frac{\cancel{x}(x + ۱)}{\cancel{x}} = \lim_{x \to ۰} x + ۱ = ۰ + ۱ = ۰$$

(به * توجه کنید.)

مثال دیگر: (الف) $\lim_{x \to ۴} \frac{\sqrt{x} - ۲}{x - ۴}$

معلم از بچه‌ها خواست راهی برای رفع ابهام حد بالا پیشنهاد کنند. بچه‌ها ابتدا ۴ را در صورت و مخرج قرار دادند تا از مبهم بودن حد اطمینان حاصل کنند.

معدودی از بچه‌ها که قبلاً با چنین حدودی سروکار داشتند، گفتند کسر را در مزدوج صورت ضرب کنیم.

$$\lim_{x \to ۴} \frac{\sqrt{x} - ۲}{x - ۴} \times \frac{\sqrt{x} + ۲}{\sqrt{x} + ۲} = \lim_{x \to ۴} \frac{\cancel{(x - ۴)}}{\cancel{(x - ۴)}(\sqrt{x} + ۲)}$$

$$= \lim_{x \to ۴} \frac{۱}{\sqrt{x} + ۲} = \frac{۱}{۲ + ۲} = \frac{۱}{۴}$$

معلم در مورد حد زیر نیز از بچه‌ها پیشنهاد خواست

(ب) $\lim_{x \to ۸} \frac{\sqrt[۳]{x} - ۲}{x - ۸}$

اکثر بچه‌ها پس از این‌که ۸ را در صورت و مخرج قرار دادند اعلام کردند کسر را در مزدوج صورت ضرب کنیم. معلم گفت ولی انجام این کار باعث از بین‌رفتن ریشه‌ی سوم x

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)}{x}$$

نمی‌شود یعنی عامل مبهم‌کننده که $x-8$ است در صورت ظاهر نمی‌گردد.

$$\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}\times\frac{\sqrt[3]{x}+2}{\sqrt[3]{x}+2}=\frac{\sqrt[3]{x^2}-4}{(\sqrt[3]{x}+2)(x-8)}$$

باید دنبال راه دیگری باشید و اتحاد چاق‌ولاغر را پیشنهاد کرد و سپس یکی از بچه‌ها پای تابلو آن‌را حل کرد.

از آن‌جا که بعد از ساده کردن الف و ب به صورت

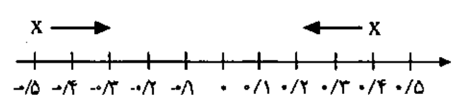
$$\lim_{x\to 8}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+8+2\sqrt[3]{x}}\ ,\ \lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

درآمده بودند یکی از بچه‌ها پرسید آیا همیشه ۱ در صورت قرار می‌گیرد؟ معلم پاسخ داد اگر مثال الف را برعکس در نظر بگیری یعنی $\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$ متوجه خواهد شد که چنین نیست و دانش‌آموز متوجه اشتباه خود شد.

مثال‌های بعدی:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{[x]}{x}\ ,\ \lim_{x\to 0^-}\frac{[x]}{x}$$

بچه‌ها در مورد حد اول دچار اشتباه شدند و گفتند نیاز به رفع ابهام دارد ولی با توضیح معلم متوجه اشتباه خود شدند. وی برای توضیح مطلب از نمودار زیر استفاده کرد.



وقتی $x\to 0^+$:

$$x=0.5 \ \to\ \frac{[0.5]}{0.5}=\frac{0_{\text{مطلق}}}{0.5}=0$$
$$x=0.4 \ \to\ \frac{[0.4]}{0.4}=\frac{0_{\text{مطلق}}}{0.4}=0$$
$$x=0.3 \ \to\ \frac{[0.3]}{0.3}=\frac{0_{\text{مطلق}}}{0.3}=0$$
$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$
$$0^+ \qquad\qquad \frac{0_{\text{مطلق}}}{0_{\text{حدی}}}=0$$

بچه‌ها به پیروی از همین روش در مورد حد دوم به عبارت $\lim_{x\to 0^-}\frac{[x]}{x}=\frac{-1}{0^-}$ رسیدند، ولی نتوانستند جواب نهایی را بیابند.

استاد گفت فعلاً بپذیرید که جواب $+\infty$ است، مثبت به این لحاظ که صورت و مخرج هم‌علامت هستند و بی‌نهایت از این‌رو که صورت کسر عددی ثابت است و مخرج آن کوچک و کوچک‌تر می‌شود پس کسر بزرگ و بزرگ‌تر می‌گردد.

البته بعداً در مورد این حدود، بیش‌تر خواهیم گفت.

مثال: $\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{[x]},\ \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{[x]}$

در مورد حد اول بچه‌ها بلافاصله طبق روش بالا نتیجه گرفتند $\frac{0}{-1}=0$ و مشکلی نبود. ولی در مورد دومی، مردد باقی ماندند چون به عبارت $\frac{0_{\text{حدی}}}{0_{\text{مطلق}}}$ رسیده بودند.

معلم گفت اگر دامنه‌ی $\frac{x}{[x]}$ را پیدا کنیم متوجه می‌شویم اصلاً x نمی‌تواند از سمت راست به صفر نزدیک شود، لذا مجاز به حدگیری نیستیم. دامنه‌ی $\frac{x}{[x]}$، در شکل زیر نشان داده شده است.

مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{2x^3+5}{\sqrt{x+2}}$

در این مثال عده‌ای به گویا کردن کسر پرداختند. عده‌ای ابتدا صفر را در صورت و مخرج کسر قرار دادند و گفتند چرا مبهم نیست؟ عده‌ای با تردید گفتند جواب $\frac{5}{\sqrt{2}}$ است.

در انتها معلم به توضیح مطلب پرداخت و گفت قرار نیست همه‌ی موارد مبهم باشد. پس دقت کنید! سعی کنید ابتدا عددی که x به آن میل می‌کند را در عبارت قرار دهید و بعد تصمیم بگیرید چه کنید.

این آخرین مثالی بود که زده شد؛ در حالی که دقایقی پیش (حدود ۱۰ دقیقه) زنگ به صدا درآمده بود. ولی چون زنگ آخر بود، بچه‌ها در کلاس مانده بودند!

چرا تدریس ریاضی دشوار است؟

تذکراتی از جانب هارولد بروکمن

ترجمه: مجید قاسمی
دبیر ریاضی شهرستان آمل

تذکر ۰:

گاهی اوقات، به دانش‌آموزان حرف‌هایی از این دست گفته می‌شود که «ریاضی، نقش مهمی در زندگی روزانه‌ی ما دارد.» قبول چنین حرف‌هایی بسیار دشوار است و برای هر کسی که آن را می‌شنود یا می‌خواند، چالشی ایجاد می‌شود: برای من ایمیل بفرستید[1] و درباره‌ی آخرین باری که ریاضی را در «زندگی روزانه»تان به کار گرفتید ـ حتی برای کاری نه چندان مهم ـ بنویسید. به‌زودی نتایج آن را در منزلگاه خود گزارش خواهم داد.

تذکر ۱:

آن‌چه در ادامه می‌آید، مثالی کلاسیک از یک موضوع است. دقیقاً خود آن‌چه که این، مثالی از آن است، می‌تواند موضوع یک بحث جالب باشد.

این سؤال را از گروه بزرگی از افرادی که به طور تصادفی انتخاب شده‌اند، بپرسید:

با استفاده از حروف B و G، جمله‌ی زیر را با یک عبارت جبری بنویسید: «در این کلاس، تعداد پسران، دو برابر تعداد دختران است.»

خواهید دید که بیش از نیمی از افراد «تحصیل کرده»، پاسخ نادرست می‌دهند.

بدون هیچ اظهارنظری، فقط پاسخ‌های آن‌ها را بنویسید. حال از آن‌ها بخواهید تا معادله‌ای را که نوشته‌اند، تا حد امکان کلمه به کلمه ترجمه کنند. خواهید دید که ترجمه، دقیقاً مطابق با اطلاعات اصلی نیست. معادله‌ای که آن‌ها می‌نویسند به احتمال زیاد $B = 2G$ یا $G = 2B$ است. اما معمولاً می‌گویند:

پسر، مساوی است با دو دختر؛

یا

پسرها، دو برابر دخترها هستند؛

یا

پسرها، دو ضرب در دخترها هستند؛

یا معکوس این‌ها.

حالا این مطلب به ما چه می‌گوید؟ می‌توان دریافت که حروف B و G در ذهن این افراد، مشخصاً با اعداد متناظر نیست. اگر چنین بود، می‌بایست با چنین ترجمه‌ای مواجه می‌شدیم:

تعداد پسران، دو برابر تعداد دختران است؛

یا چیزی شبیه به آن.

و در این جا، مسأله‌ی مهمی نهفته است:

نمادهایی که در عبارت‌های جبری استفاده می‌شوند، مشخصاً نه به‌عنوان اعداد، بلکه به مثابه اشیاء فهمیده می‌شوند.

تذکر ۲:

یکی از نتایج منطقی تذکر اول این است که چون نمادهای جبری به‌عنوان اعداد فهمیده نمی‌شوند، عملگرهای محذوف در واقع حذف نشده‌اند و عبارت جبری $2B$، معنی «۲ پسر» را با خود حمل می‌کند. این، یک مفهوم عددی نیست، بلکه یک مفهوم فیزیکی است. این ایده که B در $2B$، نمایانگر عدد است، در تقابل با «پسران» گم شده است. در واقع در این جا، هیچ عمل ضربی وجود ندارد. شاید بهتر باشد بگذاریم علامت ضرب در این جا باقی بماند.

تذکر ۳:

حال در این جا، یک نکته‌ی جالب وجود دارد. آزمایش خود را با افراد مختلف تکرار کنید، اما این بار این پرسش را مطرح کنید:

با استفاده از حروف T و S، جمله‌ی زیر را با عبارت‌های جبری توصیف کنید: «این مدرسه، دو برابر تعداد معلمی که دارد، دانش‌آموز دارد.»

این بار نیز حاضرم شرط ببندم که بخش اعظم پاسخ‌ها، نادرست خواهند بود، اما نه به میزان دفعه‌ی قبل.

به گمان من، دلیل آن این است که این بار، امکان بررسی مجدد جواب، وجود دارد. در آزمایش اول، راهی برای این که بدانیم آیا در کلاس، تعداد پسران از تعداد دختران بیش‌تر هست یا خیر، نداشتیم. بنابراین هیچ تلاشی برای مقایسه‌ی عبارت جبری پیشنهادی با واقعیت، صورت نمی‌گرفت. اما در این جا، عاقلانه است که فرض کنیم تعداد دانش‌آموزان از تعداد معلمان بیش‌تر است. به همین دلیل، بعضی از افراد ـ تأکید می‌کنم، بعضی از افراد ـ این زحمت را به خود می‌دهند که عبارت جبری خود را در برابر آن‌چه که آن را از نظر منطقی درست می‌دانند، مورد بررسی قرار دهند.

این مسأله با جزئیات بیش‌تر و رسمی‌تر، در مقالات زیر، تشریح شده است:

http://www.ed.gov/databases/ERTC-Digests/ed313192.html

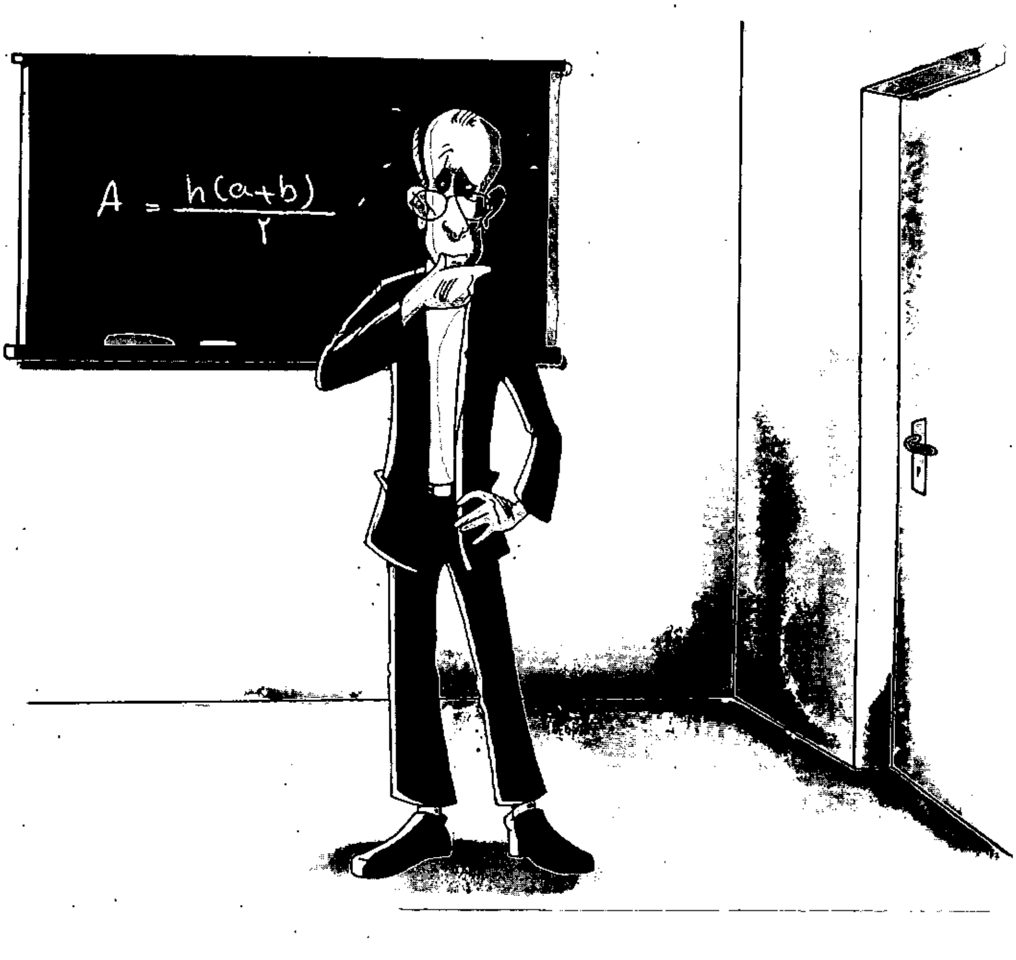
http://www-sci.uni-klu.ac.at/~gossimit/pap/misconvar.html

تذکر ۴:

فرض کنید، عکس مسأله‌های بالا را برای شخصی مطرح کنیم: عبارت جبری $G = 2B$ را به یک جمله‌ی (انگلیسی) روان ترجمه کنید.[2]

آیا پاسخ‌دهنده، جوابی روشن خواهد داد که در آن، به طور عینی واضح باشد که او B و G را به مثابه اعداد می‌بیند؟ من تردید دارم. احساس می‌کنم که افراد زیادی به چیزی که هم‌اکنون گفته‌ام، واکنشی مانند واکنش زیر نشان خواهند داد:

خوب، که چی؟ من می‌دانم که B و G و T و S، معرف اعداد هستند نه اشیا. فقط به این دلیل که من این موضوع را به وضوح بیان نکرده‌ام، به این معنی نیست که آن را نمی‌فهمم.



اما من با این حرف مخالفم زیرا به‌کارگیری نادقیق زبان در ارتباطات عادی، اغلب منجر به سوءبرداشت می‌شود. ریاضیات هم یک زبان است و متأسفانه، استفاده‌ی نادقیق از واژگان گمراه‌کننده، ناسازگار و گاهی نادرست در ریاضیات مدرسه‌ای کاملاً مرسوم می‌باشد و این، حداقل بخشی از دلایل وجود مشکلات زیای است که در یادگیری ریاضیات وجود دارد. باید پرسید که مزیت بی‌دقتی در استفاده از واژگان در حوزه‌ای که فرض بر این است که دقیق‌ترین موضوع درسی مدرسه‌ای است، چیست؟

تذکر ۵:

عنوان این مقاله، این است که چرا تدریس ریاضی این قدر دشوار است. وقتی در سال‌های اول دبیرستان [یا اواخر دوره‌ی راهنمایی] تدریس می‌کردم، متوجه شدم که آدم‌های مختلفی برای تدریس ریاضیات انتخاب شده بودند. حتی در میان آن‌ها کسانی بودند که معلوم بود برای این کار، آمادگی ندارند. فکر می‌کنم تصوری مشترک بین مدیران وجود داشت که احتمالاً ریاضیات ساده‌ترین موضوع برای تدریس است. فراموش نکنید که ما درباره‌ی پایه‌های هفتم تا دهم مدرسه صحبت می‌کنیم. همه‌کس می‌تواند آن را تدریس کند. [اما] ممکن است دوستش نداشته باشند. عنوان این مقاله نشان می‌دهد که این نگرش در حال تغییر است.

از سوی دیگر، احساس می‌کنم از منظر والدین و دانش‌آموزان، ریاضیات موضوعی است که یادگیری آن دشوار است نه تدریس آن. می‌دانم که وقتی در مکالمات غیررسمی با مردم، به آن‌ها می‌گویم که سابقاً ریاضی تدریس می‌کردم، اغلب در پاسخ می‌گویند «من هرگز ریاضی‌ام خوب نبوده است» یا عباراتی نظیر این را بیان می‌کنند.

اگر کسی بخواهد درباره‌ی دانش‌آموزان دبیرستانی با هدف مشخص کردن نگرش آن‌ها نسبت به موضوعات مختلف مدرسه‌ای، تحقیقی انجام دهد، احتمالاً متوجه می‌شود که «بهره‌ی رضایت» از ریاضیات، نسبتاً کم است. هم‌چنین این نکته را درک خواهد کرد که تعداد بی‌تناسبی از دانش‌آموزان که در درس‌های دیگر، خوب عمل می‌کنند، با ریاضیات مشکل دارند. نیز دانش‌آموزان زیادی به ریاضیات، نه به‌عنوان یک درس جالب یا مفید، بلکه به‌عنوان یک مشکل بزرگ نگاه می‌کنند که باید آن را تحمل کرد. در عین حال، همه‌ی آن‌ها می‌دانند که ریاضیات یک «درس بسیار مهم» است.

من خودم کاملاً مطمئن نیستم که چرا ریاضیات، این قدر مهم است. شاید چون با تفکر منطقی سر و کار دارد. ریاضی‌ورزی به شما می‌آموزد که منطقی فکر کنید. چیزی شبیه به این. و البته این حرف، کاملاً بی‌معنی است؛ اما مطمئناً بعضی مردم این‌طور فکر می‌کردند. تصور می‌کنم هنوز هم بعضی‌ها چنین عقیده‌ای دارند.

به نظر می‌رسد مشکلاتی وجود دارد. فکر می‌کنم یکی از مشکلات با این واقعیت ارتباط دارد که ریاضیات مدرسه‌ای، واقعاً درباره‌ی فهم و درک نیست بلکه در مورد مهارت‌ها است. خواهش می‌کنم متوجه این نکته باشید که من، درباره‌ی واقعیت‌های کلاس درس صحبت می‌کنم؛ نه درباره‌ی چیزی که باید وجود داشته باشد. مهارت را برحسب قدرت پاسخ‌گویی درست به نوع خاصی از «مسأله» تعریف می‌کنند.

آن‌چه که برای این مهارت لازم است، نوعی دست‌ورزی با نمادهای جبری است؛ مانند ساده کردن کسرهای پیچیده و امثالهم. اما توانایی انجام کاری به معنای فهم و درک آن کار نیست. علاوه بر این، فهم هر چیز دارای مراتب مختلفی است که اغلب شامل بعضی از استعاره‌ها یا چیزهای دیگر است. اگرچه از این اصطلاح، به کرات در جمع‌های آموزشی و نیز توسط والدین و دانش‌آموزان، استفاده می‌شود، لیکن حتی نشانی از توافق درباره‌ی معنای فهم و درک، بین معلمان وجود ندارد. به‌عنوان مثال، ممکن است سؤال شود که آیا فهم استعاره‌ای، همان فهم واقعی است؟ اغلب اوقات، همان درک استعاره‌ای است که فهمیده می‌شود: چندین استعاره‌ی معتبر وابسته به شرایط؛ چندین راه معتبر فهمیدن. غیر از این است؟

این نکته عموماً مورد پذیرش است که تدریس متکی بر فهم و درک، از تدریس مهارت‌ها دشوارتر است. هم‌چنین تعداد کمی از معلمان می‌دانند یا حتی ادعا می‌کنند که می‌دانند امتحان فهم و درک‌ـ محور، به یک شیوه‌ی عملی در محیط مدرسه، چگونه باید باشد. این بدان معناست که آن معلمان، به جای آن‌که دانش‌آموزان را برای امتحان آماده کنند، سعی می‌کنند در آن‌ها فهم و درک نسبت به موضوع را ایجاد کنند. چنین معلمانی ایمن هستند زیرا هیچ راهی وجود ندارد که براساس آن بتوان مشخص کرد که آیا آن‌ها به اهداف آموزشی مورد نظر رسیده‌اند یا خیر. به عبارت دیگر، هیچ راهی برای پاسخ‌گویی وجود ندارد. اگر کسی در این نکته مخالف است، خوشحال خواهم شد که نظر او را بشنوم.

بنابراین، در کلاس‌های ریاضی مدارس، اغلب فعالیت‌های معطوف به ایجاد مهارت از راه تکالیف تمرینی بسیار زیاد است. همان چیزی که به آن drill می‌گویند. دلیل این که این‌ها مهم هستند و با موضوع مورد بحث، ارتباط دارند، این است که تنها از طریق

فهم و درک شخصی است که بینشی که لازمه‌ی یادگیری شخص است، می‌تواند از طریق خود شخص حاصل شود.

یادکرد ۶:

من فکر می‌کنم که میان ریاضی و ریاضی مدرسه‌ای، تمایز وجود دارد. بحث درباره‌ی این موضوع، فضای زیادی می‌خواهد و در این‌جا، تنها می‌توان چند اشاره‌ی ابتدایی به آن کرد. در کارگاه تعمیر اتومبیل در مدرسه، دانش‌آموزان، ماشین‌ها را تعمیر می‌کنند و این، با کاری که در سایر تعمیرگاه‌های واقعی ماشین اتفاق می‌افتد، خیلی تفاوت ندارد.

در کلاس‌های فیزیک، دانش‌آموزان به روش تجربی (از طریق آزمایش)، خاصیت‌های فیزیکی اشیا و نیز خاصیت‌های مکانیکی سیستم‌های دینامیکی را تعیین می‌کنند. کاری که ضرورتاً با فعالیت‌های فیزیک‌دان‌های واقعی، متفاوت نیست.

در کلاس‌های ادبیات انگلیسی، دانش‌آموزان درباره‌ی غنای آثار ادبی بحث می‌کنند و با نوشتن، عقاید و نظرات خود را بیان می‌کنند که چندان با فعالیت‌های منتقدان و مؤلفان، تفاوتی ندارد.

اما آن‌چه در کلاس‌های ریاضی اتفاق می‌افتد، عملاً هیچ شباهتی به فعالیت‌های ریاضی‌دان‌ها در دنیای واقعی، ندارد.

تذکر ۷:

یکی دیگر از مشکلات مربوط به ریاضیات مدرسه‌ای این است که برای دانش‌آموزان روشن نیست که چگونه آن‌چه که آن‌ها [در مدرسه] انجام می‌دهند، «با طرح واره‌ای که از اشیاء در ذهن دارند، جور درمی‌آید؟» به نظر می‌رسد فرصت کمی داریم که برگردیم و به آن‌چه که قصد داریم انجام دهیم، آن‌چه که انجام داده‌ایم، مقصدی که پیش‌رو داریم و چرایی انجام آن‌ها، نگاهی کلی و اجمالی بیندازیم. جنگل را نمی‌توان دید زیرا درختان زیادی در آن‌جا وجود دارد. به نظر می‌رسد ریاضی مدرسه‌ای، مجموعه‌ی بی‌پایان موضوعاتی است که هیچ ارتباط روشنی بین آن‌ها وجود ندارد. البته معلم ریاضی می‌تواند به سادگی لزوم هریک از آن‌ها را با این که هریک، درواقع پیش‌نیاز انجام یا «فهمیدن» موضوع بعدی است، توجیه کند. همه‌ی این‌ها را می‌توان پذیرفت؛ اما من واقعاً باور نمی‌کنم که دانش‌آموزان چنین تصویر گسترده‌ای از ریاضی داشته باشند و به همین دلیل، این فعالیت‌ها در نظر آن‌ها مجموعه‌ای از فعالیت‌های منفرد و طوطی‌وار خواهد بود. زمانی که همه‌ی این فعالیت‌ها گفته و انجام داده شوند، [دانش‌آموز] به کجا خواهد رسید؟ چه توجیهی برای دانش‌آموزان خواهد شد؟ «سپس شما خواهید توانست از ریاضیات برای حل مسایل استفاده کنید». قبول. اما چه نوع مسأله‌ای؟ خوب! در پایان هر فصل از درس، مثال‌هایی ارایه می‌شود. مثلاً چیزی شبیه به محاسبه‌ی طول نرده‌های مزرعه‌ی یک کشاورز. مثال زیر، نمونه‌ی خوبی است:

اگر «بیل» یک پرتقال بیش‌تر از «پیتر» داشته باشد و «پیتر» و «بیل» روی‌هم ۵ پرتقال داشته باشند، «بیل» چند پرتقال دارد؟

آیا این، آن چیزی است که موضوع ریاضیات است؟ چند مسأله در ریاضیات مدرسه‌ای وجود دارد که آن‌قدر مهم به‌نظر می‌رسند که توجه همه را به خود جلب کنند؟ تعداد آن‌ها خیلی زیاد نیست؛ و دلیل آن این است که برای تمرین روی «مبحث نظری» که تازه تدریس و معرفی شده است، از «مسایل کلامی» استفاده می‌شود. رویکرد دیگر این است که از مسایل شروع کنیم و سپس ریاضیات مرتبط با آن را توسعه دهیم- توجیه ریاضی‌ورزی-. به عبارت دیگر، شاید باید ترتیب کارهایی را که داریم انجام می‌دهیم، برعکس کنیم. فکر می‌کنم این، معقول باشد. شما هم موافقید؟

تذکر ۸:

من، درباره‌ی استفاده‌ی نادقیق از زبان و مسایلی که از آن ناشی می‌شود، صحبت کردم. در این‌جا، چند نکته‌ی خاص در این خصوص را مطرح می‌کنم. به نظر نمی‌رسد بر روی تمایز بین نماد نشان‌دهنده‌ی جمع، عمل جمع، حاصل جمع و علامت اعداد غیر منفی، تأکید زیادی بشود. گاهی «به‌اضافه»[۳] و «جمع»[۴] و «مجموع»[۵] و «مثبت»[۶]، به‌جای هم استفاده می‌شوند. همان‌طور که ۲ به‌اضافه‌ی ۳، می‌شود ۵؛ مجموع ۲ و ۳ نیز ۵ است و در مقابل اگر ۲ را با ۳ جمع کنیم، ۵ می‌شود.

«جمع»[۷]، نام یک عمل است. «به اضافه»، هدایت به سمت انجام عمل جمع است. «مجموع» یا «حاصل جمع»، چیزی است که در عمل جمع به دست می‌آید.

واژه‌ی «و»[۸] نیز کاربردی مشابه دارد، هر چند هیچ ربطی به عمل جمع ندارد! جمله‌ی «۲ و ۳ می‌شود ۵» هیچ معنایی ندارد مگر زمانی که منظور از «و»، یکی از عملگرهای جبر بول[۹] باشد که در آن صورت باید این جمله را در رده‌ی گزاره‌های نادرست قرار داد.

به همین صورت، هر وقت که از دانش‌آموزان می‌شنوم که در بیان اعداد «منفی»[۱۰]، از واژه‌ی «منها»[۱۱] استفاده می‌کنند، یکه می‌خورم. چه چیز می‌تواند استفاده‌های نادرست از واژه‌های «تفریق»[۱۲]، «اختلاف»[۱۳]، «منها» و «منفی»، را در زمینه‌های

نامناسب، توجیه کند؟

اغلب جملاتی از این قبیل را می‌بینیم یا می‌شنویم:

[۲ منهای ۳ می‌شود منهای ۱] ۱−=۳−۲ .[14]

این ناراحت‌کننده است که ما اجازه می‌دهیم در کلاس‌های درس ریاضی‌مان، چنین آشفتگی‌هایی وجود داشته باشد.

به هر حال، این سومین بار است که به این موضوع پرداخته‌ام؛ بهتر است آن را رها کنم.

تذکر ۹:

«یک لگد دیگر به قوطی نوشابه.»

همه‌ی زبان‌های کامپیوتری، به‌جز زبان بیسیک ـ که مدت‌ها است زمان آن گذشته است ـ میان عمل‌گر تساوی «=» و عملکرد منطقی هم‌ارزی «≡»، تمایز قائل می‌شوند.

در ریاضیات مدرسه‌ای، به هر دلیلی، این تمایز هرگز وجود نداشته است. در ۳ = x و ۵ = ۳ + ۲، فرض بر این است که علامت «=» در هر دو دقیقاً به یک معنا می‌باشد. و فرض بر این است که ریاضی یک موضوع دقیق است؟

تذکر ۱۰:

اگر چیزی مثل یک قرارداد اجتماعی بین جامعه و نظام مدارس عمومی وجود داشت که مشخص کند برنامه‌ی درسی ریاضی چه باید باشد، از خود بپرسید که محتوای چنین برنامه‌ای شامل چه چیزهایی می‌تواند باشد؟

به نظر من، آمار باید جزو برنامه باشد تا شهروندان بتوانند اطلاعات اقتصادی را که تمام تصمیمات سیاسی براساس آن‌ها گرفته می‌شود، بفهمند. هم‌چنین در این برنامه، حسابداری و مدیریت اموال شخصی باید گنجانده شود تا شهروندان، عاقلانه هزینه کنند و بتوانند برای دوره‌ی بازنشستگی خود، پس‌انداز کنند و از نظر مالی، مسئولیت‌پذیر شوند.

آیا این موضوعات، در نظام مدارس عمومی، آموزش داده می‌شود؟ در بعضی از نظام‌های آموزشی، تنها در حد یک اشاره‌ی کوتاه وجود دارند و اغلب برای رشته‌های غیر ریاضی و علوم، رزرو می‌شوند. آیا علت آن این است که «دانش‌آموزان رشته‌های ریاضی و تجربی»، لازم نیست شهروندان مسئولی باشند، یا به این دلیل است که این موضوعات برای اغلب دانش‌آموزان، بسیار ساده هستند؟

در عوض، به این دانش‌آموزان، فاکتورگیری تدریس می‌شود.

آن هم به تفصیل. از تک‌جمله‌ای‌ها فاکتور می‌گیرند. از دوجمله‌ای‌ها فاکتور می‌گیرند. از سه‌جمله‌ای‌ها فاکتور می‌گیرند. از چندجمله‌ای‌های پیچیده فاکتور می‌گیرند. آخر که چه؟ برای تربیت شهروندانی مسئولیت‌پذیر و لایق؟ یا به این دلیل که برای حل «معادلات» دانستن آن‌ها لازم است؟ بیایید «جدی» باشیم.

تذکر ۱۱:

واژه‌ی «معادلات» در پایان تذکر قبل، درون علامت نقل‌قول قرار داده شد. این، مثالی از یک معادله است: $۵ = ۳ + ۲$. $x = ۷$ نیز مثالی دیگر است.

$x + y = ۷$ یک معادله نیست. یک **رابطه**[15] است.

یک تفاوت میان معادله و رابطه این است که مسایل اندکی وجود دارند که به معادله ختم می‌شوند ـ فقط معماها. در این جا از تعریف مسأله و معما استفاده کرده‌ام که در یکی دیگر از «تذکرات»، به آن خواهیم پرداخت.

به هر حال، بحث ساختن رابطه‌ها، اگر نگوییم در همه‌ی آن‌ها، اما در اغلب متون ریاضی مدرسه‌ای به طرز نامناسبی مطرح می‌شود و موجب بروز مشکلات غیرضروری زیادی می‌گردد. واقعاً باید این مسأله را در زمان دیگری شرح و بسط دهم.

تذکر ۱۲:

بحث‌های زیادی است که کامپیوتر، تقریباً مهم‌ترین اختراع وابسته به ریاضی است. به کمک کامپیوتر، رویه[16] هایی برای حل مسایل پدید آمده‌اند که نه تنها کارآمد هستند، بلکه بسیار سریع‌تر و آسان‌تر از رویه‌های قدیمی، کارها را انجام می‌دهند. درحقیقت، اغلب موضوعاتی که در ریاضی سنتی مدرسه‌ای به آن پرداخته می‌شود، توسط تکنیک‌های کامپیوتری، غیر قابل استفاده و منسوخ شده‌اند. هم‌اکنون سه دهه از انقلاب کامپیوترهای شخصی گذشته است. آیا برنامه‌ی درسی ریاضیات مدرسه‌ای، کامپیوتر را به رسمیت شناخته است؟

تذکر ۱۳:

تدریس ریاضی، برعکس انجام می‌شود. یک سناریوی نوعی (مرسوم) را در نظر بگیرید: اول معرفی مفهوم، بعد تمرین و در پایان، چند «مسأله‌ی کلامی» که فرآیند حل آن‌ها، متضمن به‌کارگیری آن مفهوم است. یعنی حرکت از عام به خاص.

اما همه می‌دانیم که یادگیری، همیشه برعکس است: از خاص

به عام. مفاهیم را نمی‌توان براساس برنامه‌ی هفتگی درس داد. شکل‌گیری مفاهیم، فرآیند تعمیم است. تعمیم از طریق مثال‌های خاص صورت می‌پذیرد. و ما تعجب می‌کنیم که چرا تدریس ریاضیات، این همه دشوار است؟

تذکر ۱۴

دیروز، دانش‌آموز کلاس نهم من برای درس خصوصی هفتگی‌اش[17]، نزد من آمد. درس کلاس آن‌ها، حل معادله‌ی یک‌مجهولی بود. هم‌چنین، حل «فرمول» برحسب یک متغیر خاص نیز به آن‌ها گفته شده بود. به عنوان مثال، او تمرین زیر را حل کرد:

«$A = \frac{h(a+b)}{۲}$ را برحسب a، حل کنید.»

او هم‌چنین مقادیر عددی را در فرمول‌ها جایگزین می‌کرد.

حال از او خواسته شد که معادلاتی با یک متغیر بنویسید که از نوع مسایلی هم‌چون مسایل زیر هستند:

«حاصل جمع دو عدد متوالی، ۴۵ است. آن دو عدد کدامند؟»

یا «مجموع دو عدد ۵ و اختلاف دو عدد، ۱ است.»

فرض بر این است که او برای مسأله‌ی اول، $x + x + ۱ = ۴۵$ و برای دومی، $x - ۱ + x = ۵$ را بنویسید. اما وی، با این دو مسأله، مشکل داشت. به او گفتم که از L برای نمایش عدد بزرگ‌تر و از S برای نمایش عدد کوچک‌تر استفاده کند. در هر کدام از این دو سؤال، شما دو معادله به دست می‌آورید. (برخلاف میلم که دوست داشتم آن‌ها را رابطه بنامم.)

برای اولی، می‌توانی بنویسی $L = S + ۱$ و $L + S = ۴۵$ و برای دومی، معادله‌های $L + S = ۵$ و $L - S = ۱$ را بنویس. خوب! بقیه‌ی جواب را هم که می‌دانید!

بله، آن‌ها در پایه‌های بالاتر این کارها را انجام می‌دهند. اما او با این راه‌حل، هیچ مشکلی نداشت. فکر می‌کنم استفاده از دو متغیر، واضح‌تر است؛ مخصوصاً اگر از حروف مناسبی به‌عنوان متغیرها استفاده کنیم که به شما یادآوری کنند که معرف چه چیزهایی هستند. من هیچ کتاب درسی را سراغ ندارم که چنین کاری بکند. شما سراغ دارید؟

تذکر ۱۵

فصل بعدی کتاب درسی این دانش‌آموز، «مثلث‌های هم‌نهشت» بود، دقیقاً همین موضوع. غیر منتظره است، نه؟ چه ارتباطی بین این دو فصل، وجود دارد؟

به گمانم چیزی که واقعاً اتفاق افتاده این بوده که بعضی از اعضای کمیته‌ی برنامه‌ریزی درسی، می‌خواستند هندسه‌ی اقلیدسی را حذف کنند، اما تسلیم فشارهای محافظه‌کاران شدند تا بخشی از آن را در کتاب‌های درسی حفظ کنند (فصل هندسه‌ی اقلیدسی را «استدلال»[18] نیز می‌نامند). از این رو، فصل «مثلث‌های هم‌نهشت» را به‌عنوان یک موضوع هندسی نگه داشتند. کاربردهای آن (احتمالاً ارتفاع درخت‌ها و امثالهم) تا پایان سال دوم برای دانش‌آموزان مشخص نمی‌شود. یک موضوع مبهم که هیچ ارتباطی با واقعیت ندارد؛ مثل ض‌ض‌ض، ض‌زض و زض‌ز[19].

سؤال: چرا باید این چیزها را یاد بگیریم؟

پاسخ: با یادگرفتن این چیزها، می‌توانید سال دیگر بیش‌تر یاد بگیرید.

سؤال: چرا باید آن‌ها را یاد بگیریم؟

پاسخ: متأسفانه هنوز آن‌قدر ریاضی نیاموخته‌اید که پاسخ این سؤال را بفهمید. مجبورید که چند سالی صبر کنید. بعداً آن را می‌فهمید.

سؤال: چرا باید آن‌ها را یاد بگیریم؟

پاسخ: در زندگی روزانه‌تان به آن‌ها نیازمند هستید.

شما جواب بهتری دارید؟ واقعاً؟!

زیرنویس‌ها

1. brochmann@saltspring.com

۲. با توجه به این که اصل مقاله، به انگلیسی است، در این‌جا گفته شده «جمله‌ی انگلیسی روان». (رشد آموزش ریاضی)

3. Plus
4. Add
5. Sum
6. Positive
7. Addition
8. And
9. Boolean Operations
10. Negative
11. Minus
12. Subtraction
13. Difference

۱۴. در کتاب ریاضی اول راهنمایی در ایران، در معرفی اعداد منفی، چنین می‌خوانیم: «۵- را می‌خوانیم منفی ۵ (گاهی منهای ۵ هم گفته می‌شود.)»
(ریاضی، سال اول راهنمایی، ص ۱۲۶، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش، ۱۳۸۶). (رشد آموزش ریاضی)

15. Relation
16. Procedure

۱۷. در انگلستان، معلم دانش‌آموزان را براساس نیازهای فردی آن‌ها، در محل کلاس یا مدرسه، جدا از بقیه، کمک می‌کند و نام این کار، Tutoring است که در فارسی، واژه‌ی «تدریس خصوصی» معادل آن شده است.

18. Reasoning

۱۹. ض‌ض‌ض = تساوی سه ضلع آن‌ها، ض‌زض = تساوی دو مثلث در حالت تساوی دو ضلع و زاویه‌ی بین در آن‌ها؛ زض‌ز = تساوی دو مثلث در حالت تساوی دو زاویه و ضلع بین در آن‌ها.

احتمال دوجمله‌ای

نرگس عصار زادگان
دبیر ریاضی اصفهان

در تدریس احتمال دوجمله‌ای و مثلث خیام ـ پاسکال، بیان مثال زیر می‌تواند سودمند باشد.

در صورت پرتاب یک سکه ممکن است رو یا پشت ظاهر شود. اجازه دهید این وضعیت ۵۰-۵۰ را با عددهای ۱ و ۱ نشان دهیم.

اگر سکه‌ای را دو بار پرتاب کنید، ممکن است به دو رو؛ یا یک رو و یک پشت، یا یک پشت و یک رو؛ یا دو پشت دست یابید. با جمع دو پیشامد وسط با هم داریم ۱ و ۲ و ۱.

اگر سکه‌ای را سه بار پرتاب کنید، ممکن است ۳ رو؛ یا دو رو و یک پشت به سه راه: ر-ر-پ، ر-پ-ر یا پ-ر-ر؛ یا دو پشت و یک رو به سه راه: پ-پ-ر، پ-ر-پ، یا ر-پ-پ؛ یا سه پشت داشته باشید. این حالت‌های ممکن می‌تواند به صورت ۱ و ۳ و ۳ و ۱ خلاصه شود.

به همین ترتیب، این حالت‌شماری‌ها را می‌توان به شکل فشرده، در یک آرایه‌ی مثلثی کنار هم قرار داد.

۱ ۱
۱ ۲ ۱
۱ ۳ ۳ ۱
۱ ۴ ۶ ۴ ۱
۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱
۱ ۶ ۱۵ ۲۰ ۱۵ ۶ ۱
۱ ۷ ۲۱ ۳۵ ۳۵ ۲۱ ۷ ۱
۱ ۸ ۲۸ ۵۶ ۷۰ ۵۶ ۲۸ ۸ ۱
۱ ۹ ۳۶ ۸۴ ۱۲۶ ۱۲۶ ۸۴ ۳۶ ۹ ۱
⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

مثلث خیام ـ پاسکال

هر عدد، از جمع دو عدد مجاور ردیف بالا به‌دست می‌آید. مثلاً در ردیف هفتم، ۶+۱۵=۲۱.

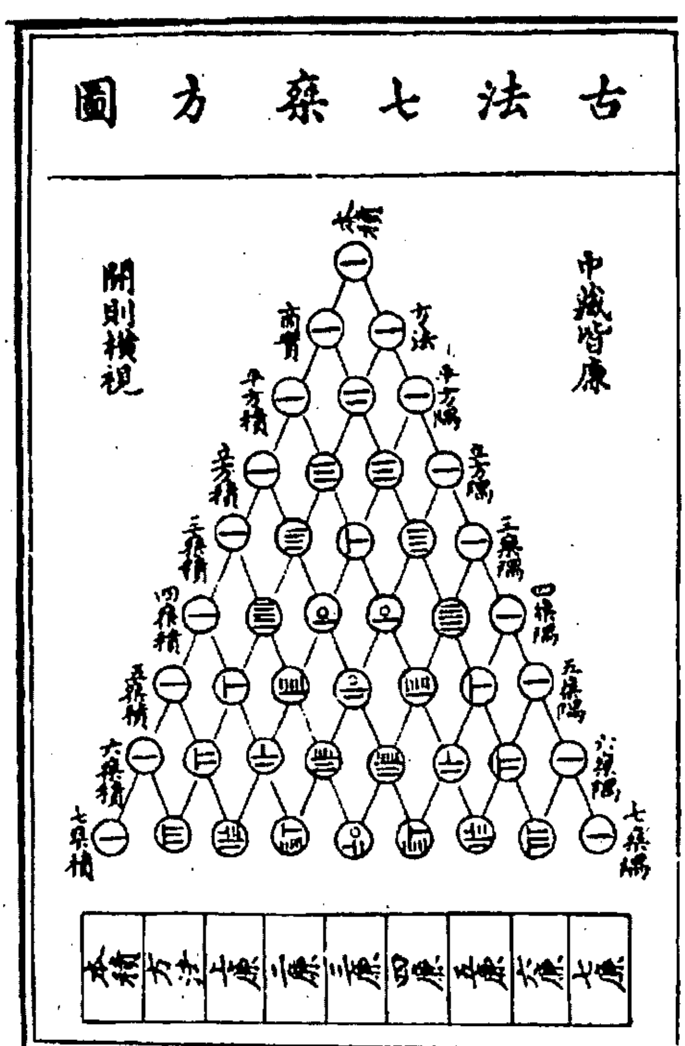
حال به ردیف پنجم نگاه کنید. اعداد این ردیف نشان می‌دهد اگر سکه‌ای ۵ بار پرتاب شود،

یک راه برای به‌دست آوردن ۵ رو، ۵ راه برای به‌دست آوردن ۴ رو و ۱ پشت، ۱۰ راه برای به‌دست آوردن ۳ رو و ۲ پشت، ۱۰ راه برای به‌دست آوردن ۲ رو و ۳ پشت و بالاخره ۵ راه برای به‌دست آوردن ۴ رو و ۱ پشت و تنها یک راه برای به‌دست آوردن ۵ رو، وجود دارد. فرض کنید بخواهیم احتمال ۴ رو و ۱ پشت در ۵ پرتاب را به‌دست آوریم. با جمع همه‌ی اعداد ردیف پنجم، در کل ۳۲ نتیجه برای پرتاب ۵ سکه وجود دارد. لذا کسر $\frac{۵}{۳۲}$ نسبت تعداد پیروزی به تعداد کل نتایج آزمایش (در پرتاب ۵ سکه) را به‌دست می‌دهد. ما به تعریف ریاضی احتمال دست یافته‌ایم.

مثلث خیام - پاسکال ویژگی‌های پنهان بسیاری دارد که یکی از جالب‌ترین آن‌ها این است که اولین عدد بعد از ۱ در هر ردیف، همه‌ی اعداد دیگر آن ردیف را می‌شمارد اگر و تنها اگر اول باشد. ۵ و ۷ در سطرهای مربوطه، همه‌ی اعداد دیگر را می‌شمارند، اما ۶ و ۸ و ۹ چنین خاصیتی ندارند. به هرحال هر قدر مثلث را گسترش دهید، این ویژگی در کل مثلث برقرار است. این آرایه‌ی مثلثی از اعداد، هم دانسته‌های ما را در مورد احتمال گردآوری می‌کند و هم به ما کمک می‌کند اعداد اول را شناسایی کنیم.

ما در مثلث خیام پاسکال ضابطه‌ای برای اول بودن یافته‌ایم؛ اما افسوس که ساختن مثلث به قدر کافی بزرگ برای آزمایش اول بودن یک عدد بزرگ، کاری بس پرزحمت‌تر از آزمایش به‌روش قدیمی تقسیم است.

خیام، ریاضی‌دان مسلمان ایرانی، اعداد این مثلث را سال‌ها پیش از دیگران کشف کرد. جالب است بدانید یک ریاضی‌دان چینی به نام چو شی - چی[1] نیز در سال ۱۳۰۳ میلادی، در یک کتاب این ضرایب را به‌دست آورده است. نسخه‌ی اصلی کتاب از بین رفته اما کپی‌های آن موجود است که در شکل زیر نمونه‌ای از آن را مشاهده می‌کنید.



مثلث چو شی - چی[2]

جدول این ضرایب در ۱۵۵۴ ابتدا توسط یک ریاضی‌دان آلمانی به نام اشتیفل[۳] ارایه شد، سپس پاسکال در ۱۵۷۰، مثلث خود را ارائه داد.[۴] [۱]

***

به هنگام تدریس استقلال پیشامدها می‌توان مثال جالب زیر را به کار برد:

فرض کنید خانواده‌ی دوست شما ۴ فرزند دختر دارد و فرزند پنجم نیز در راه است. چه قدر شانس وجود دارد که تازه‌وارد نیز دختر باشد؟ شما نباید روی پسر بودن شرط ببندید. حتی با این فرض که در یک جامعه‌ی بزرگ، تعداد خانواده‌های صاحب یک دختر و چند پسر نسبت به خانواده‌های صاحب یک پسر و چند دختر بیش‌تر باشند، شانس هنوز ۵۰-۵۰ است.

ممکن است مسأله این گونه مطرح شود: «همه‌ی خانواده‌های ۵ فرزندی را در نظر بگیرید. از این میان، به یقین، تعداد خانواده‌های صاحب ۵ دختر بیش از خانواده‌های صاحب ۴ دختر و ۱ پسر نیست.» درست است، بیش‌تر نیست. در واقع مثلث خیام ـ پاسکال دقیقاً نسبت‌های همه‌ی ترکیب‌های مربوط به ۵ فرزند را بیان می‌کند. در این جا دوباره سطر پنجم این مثلث را مرور می‌کنیم:

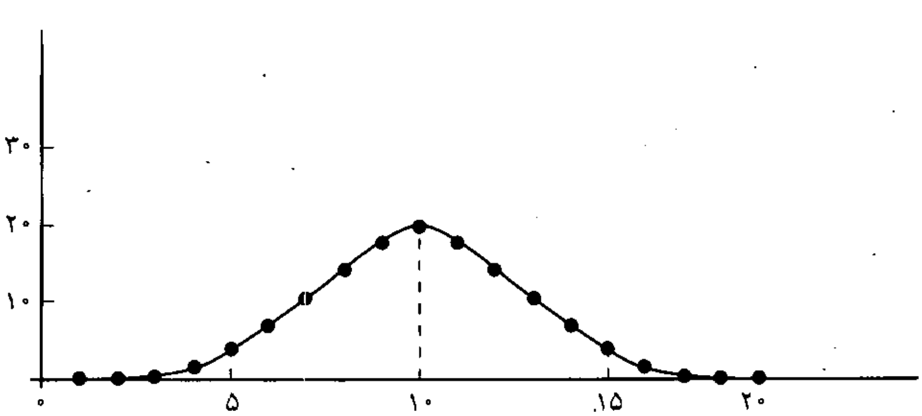
۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱

به طور متوسط، به ازای یک خانواده‌ی صاحب ۵ دختر، ۵ خانواده با ۴ دختر، ۱۰ خانواده با ۳ دختر، ۱۰ تا با ۲ دختر، ۵ تا با ۱ دختر، و یک خانواده بدون دختر و دارای ۵ پسر وجود دارد.

بسیار خوب، بنابراین پیروزمندانه سؤال می‌کنید، «اگر تعداد خانواده‌های صاحب ۴ دختر و ۱ پسر، نسبت به خانواده‌های صاحب ۵ دختر و بدون پسر بیش‌تر باشند، پس چرا خانواده‌ی دوست من که تاکنون ۴ دختر دارد، شانس زیادی برای داشتن فرزند پسر بعدی ندارد؟» پاسخ به عبارت «تا کنون» بازمی‌گردد. در بررسی یک خانواده‌ی ۵ فرزندی که تاکنون $\frac{۴}{۵}$ فرزندان آن تعیین شده، عضو پنجم دیگر یک عضو تصادفی نیست. خانواده‌ی دوست شما نمی‌تواند با همه‌ی خانواده‌های دارای ۴ دختر، و ۱ پسر مقایسه شود. بلکه تنها می‌تواند با خانواده‌های صاحب ۴ دختر، و ۱ پسر که پسر کوچک‌ترین فرزند آن‌ها است، مقایسه شود؛ و تعداد این گونه خانواده‌ها دقیقاً با تعداد خانواده‌های دارای ۵ دختر، یکی است. از این رو شرط‌بندی جایی ندارد!

***

در یکی از تمرین‌های فصل احتمال کتاب *جبر و احتمال*، ابتدا نموداری برای نمایش احتمال رخ دادن پیشامد رو در پرتاب ۲۰ سکه نمایش داده شده، سپس این سؤال مطرح شده است: *اگر تعداد سکه‌های پرتاب شده را افزایش دهیم، احتمال مساوی بودن تعداد «ر» و «پ»ها چه تغییری می‌کند؟* [۳] در این قسمت، این سؤال را به طور دقیق بررسی می‌کنیم.



نمودار (۱)

در صورت ۱۰ بار پرتاب یک سکه، شاید دقیقاً ۵ رو و ۵ پشت رخ دهد، یا شاید رخ ندهد. اما افراد بسیاری که در استنتاج های ذهنی خود خیلی دقیق نیستند این گونه نتیجه گیری می کنند: «ده پرتاب کافی نیست، «با توجه به قانون میانگین ها» اگر تعداد پرتاب ها بیش تر شود، شانس بهتری برای به دست آوردن دقیقاً نیمی رو و نیمی پشت خواهیم داشت. و اگر دفعات زیادتری مثلاً، ۱۰۰۰ پرتاب داشته باشیم، شانس ها به قدری عالی می شوند که دقیقاً ۵۰۰ رو و ۵۰۰ پشت به دست خواهیم آورد.»

چنین تصوری اشتباه است. مثلث خیام ـ پاسکال داستان صحیح را به ما می گوید. فقط به سطور زوج دقت کنید، زیرا اگر تعداد پرتاب ها فرد باشد انتخاب نصف آن ها ناممکن است، می بینیم که اگر سکه ای را تنها دو بار پرتاب کنیم، احتمال به دست آوردن نیمی رو و نیمی پشت (یکی از هر کدام) $\frac{۱}{۲}$ است. این احتمال هرگز از این مقدار زیادتر نمی شود. از جایی که هست پایین می آید، اما بالا نمی رود! در ۴ پرتاب دقیقاً احتمال رو آمدن نصف پرتاب ها $\frac{۶}{۱۶}$ یا $\frac{۳}{۸}$ است[۵] (شش راه پیروزی از بین ۱۶ راه انجام پرتاب ـ تعریف ریاضی احتمال). در ۶ پرتاب، دقیقاً احتمال رو آمدن نصف پرتاب ها $\frac{۲۰}{۶۴}$ یا $\frac{۵}{۱۶}$ است. چند احتمال اول در جدول زیر آمده است:

تعداد پرتاب ها	احتمال رو آمدن دقیقاً نصف پرتاب ها
۲	$\frac{۱}{۲}=۰/۵۰۰۰$
۴	$\frac{۶}{۱۶}=۰/۳۷۵۰$
۶	$\frac{۲۰}{۶۴}=۰/۳۱۲۵$
۸	$\frac{۷۰}{۲۵۶}=۰/۲۷۳۴$
۱۰	$\frac{۲۵۲}{۱۰۲۴}=۰/۲۴۶۱$
۱۲	$\frac{۹۲۴}{۴۰۹۶}=۰/۲۲۵۶$

جدول (۱)

نکته ی جالب توجه این که احتمال در جهت کاهش به سمت صفر ادامه دارد. به زبان ریاضی، «می تواند مقدار کوچک دلخواه تولید کند.» شما می توانید هر قدر بخواهید احتمال را با «پرتاب به اندازه ی کافی زیاد»، کاهش دهید.

❊ ❊ ❊

در بخش قوانین احتمال کتاب جبر و احتمال سال سوم ریاضی مثال زیر آمده است:

اگر بخواهیم احتمال این که حداقل دو نفر از بین n نفر روز تولد یکسانی داشته باشند را به دست آوریم از دستور زیر استفاده می کنیم: [۳]

$$p(A')=۱-\frac{۳۶۵\times ۳۶۴\times\cdots\times(۳۶۵-n+۱)}{۳۶۵^{n}}$$

سپس جدول صفحه ی بعد ارایه شده است: (جدول ۲)

تعداد افراد در گروه	درصد احتمال وجود دو نفر با روز تولد یکسان
۲	۰
۴	۲
۶	۴
۸	۷
۱۰	۱۲
۱۲	۱۷
۱۴	۲۲
۱۶	۲۸
۱۸	۳۵
۲۰	۴۱
۲۲	۴۸
۲۴	**۵۴**
۲۶	۶۰
۲۸	۶۵
۳۰	۷۱
۳۲	۷۵
۳۴	۸۰
۳۶	۸۳
۳۸	۸۶
۴۰	۸۹
۴۲	۹۱
۴۴	۹۳
۴۶	۹۵
۴۸	۹۶
۵۰	۹۷

جدول (۲)

در این قسمت بیانِ متفاوت و جذاب‌تری از این مثال ارایه می‌شود:

«اگر در یک مهمانی بزرگ ـ شامل ۱۲ زوج یا بیش‌تر ـ که در آن صحبت‌های غیررسمی در جریان است حضور دارید، از مهمانان حاضر در مجلس بپرسید: «چه قدر احتمال می‌دهید که دو نفر از شما یک تاریخ تولد داشته باشید؟» چون ۳۶۵ روز تولد ممکن وجود دارد، اغلب مهمان‌ها یک مرتبه بیان می‌کنند تقریباً ناممکن است که دو نفر یک تاریخ تولد داشته باشند. برخی از آن‌ها حتی شرط‌بندی می‌کنند. ما باید شرط آن‌ها را ببریم. با توجه به جدول بالا ۵۴٪ احتمال دارد که از میان ۲۴ فرد تصادفی دست‌کم ۲ نفر تاریخ تولد یکسان داشته باشند، یعنی احتمال از نصف بیشتر است، و وقتی شمار افراد از ۲۴ بیشتر باشد، احتمال به سرعت افزایش می‌یابد، به طوری که در ۵۰ نفر ۹۷٪ احتمال وجود دارد که دست‌کم دو نفر تاریخ تولد یکسان داشته باشند.

سعی خودتان را بکنید. اگر همواره جواب نمی‌دهد، ناامید نشوید؛ اگر فرصتی برای انجام آزمایش با چند گروه مختلف دارید، اغلب با افرادی که روز تولد یکسان دارند مواجه می‌شوید. اگر نگران هستید که آن‌ها حقه بزنند، از هر کدام بخواهید تاریخ تولدشان را روی تکه‌های کوچک کاغذ بنویسند سپس این تکه‌های کاغذ را جمع‌آوری کرده و آن‌ها را بخوانید. اکنون موضوع این نیست که آیا تاریخ تولد صحیح را نوشته‌اند یا نه، چون آن‌ها از تاریخ‌های دیگران آگاهی ندارند: تاریخ‌های روی تکه‌های کوچک کاغذ نیز تصادفی هستند.

از آن‌جا که همکار من این مسأله را با شک و تردید پذیرفته بود، یک بار آن را در یک کلاس بزرگ دانش‌آموزان مطرح کرد و گفت: «می‌خواهم شرط ببندم که دو نفر از شما در این کلاس حتماً یک تاریخ تولد دارید.» انفجار خنده او را گیج کرده بود تا وقتی به یاد آورد جفت دوقلوهای هم‌سان در ردیف جلو نشسته‌اند! [۲]»

زیرنویس‌ها

1. Chu Shi- Chieh
2. J. Needham, Science and Civilization in China, Vol.3 (New York: Cambridge University Press, 1959), p.135.
3. Stifel M. Stifel, Arithmetica Integra (Norimburgae, 1544).
4. Cardano, Opus Nouum de Proportionibus Numerorum (Basilea, 1570).

۵. احتمال رو آمدن دقیقاً نصف پرتاب‌ها از به کارگیری دستور $\dfrac{\binom{n}{k}}{2^n}$ به دست می‌آید.

منابع

[1] Charles M. Grinstead: Swarthmore College & J. Laurie Snell: Dartmouth College. **Introduction to Probability.** Available: http://www.dartmouth.edu/~chance[2006]

[2] C. Stanley Ogilvy. **Excursions in Mathematics.** (1984). Dover Publications, INC. NewYork.

[۳] ظهوری زنگنه. بیژن، گویا. زهرا، تابش، یحیی، ایلخانی‌پور. یدالله. جبر و احتمال سال سوم نظام جدید آموزش متوسطه. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی درسی، وزارت آموزش و پرورش، شرکت چاپ و نشر کتب درسی، ۱۳۸۶.

چکیده‌های پایان‌نامه‌های کارشناسی ارشد آموزش ریاضی

عنوان پایان‌نامه: تأثیر روش درس‌پژوهی در معلمان ریاضی

پژوهشگر: حمیدرضا اکتفایی‌نژاد

استاد راهنما: دکتر محمدرضا فدایی

استاد مشاور: دکتر زهرا گویا

تاریخ دفاع: ۸۵/۶/۲۹

داوران: دکتر مهدی رجبعلی‌پور، دکتر اسفندیار اسلامی

دانشگاه محل تحصیل: شهید باهنر کرمان.

چکیده

تحقیق انجام‌شده از نوع توصیفی می‌باشد که هدف آن، تشریح «درس‌پژوهی» و بررسی تأثیر آن بر معلمین ریاضی است. جامعه‌ی نمونه این تحقیق را چهار معلم ریاضی از بین ده معلم ریاضی منطقه‌ی دشت مرغاب استان فارس تشکیل می‌دادند که به صورت داوطلبانه در این تحقیق شرکت کردند. سعی بر این بود که الگوی مطلوب درس‌پژوهی در ایران معرفی گردد و هم‌چنین یافته‌های این تحقیق نشان داد که این روش، در مقوله‌های بسیاری بر معلمان ریاضی تأثیر دارد.

عنوان پایان‌نامه: بررسی سیستمی آموزش با استفاده از شبکه‌های پتری

پژوهشگر: خلیل‌اله ممشلی

استاد راهنما: دکتر محمدرضا مولایی

استاد مشاور: دکتر محمدرضا فدایی

تاریخ دفاع: ۸۵/۷/۱۵

داوران: دکتر اسفندیار اسلامی، دکتر نصراله گرامی

دانشگاه محل تحصیل: شهید باهنر کرمان.

چکیده

در قرن بیستم توجه زیادی به امر آموزش ریاضی شده است به طوری که روش‌های گوناگونی جهت بهینه‌سازی و کارآمدی آن و به‌ویژه تدریس ریاضی ارایه شده است. در این نگارش، مدلی از روش تدریس به صورت یک سیستم در قالب شبکه‌های پتری بیان می‌شود.

در فصل اول، ابتدا به ظهور نظریه‌ی سیستم‌ها و ویژگی‌های آن پرداخته شده که به دو نوع سیستم باز و بسته اشاره شده است. سپس موضوع سیبرنتیک به عنوان شاخه‌ای بین‌رشته‌ای به صورت نوع خاصی از سیستم‌ها توضیح داده شده و دو ویژگی مهم سیستم‌های سیبرنتیکی، کنترل و بازخورد، مدنظر قرار داده شده است. مبادله‌ی اطلاعات از ارکان هر نوع سیستم سیبرنتیکی می‌باشد که بدون در نظر گرفتن کنترل، سیستم را به سمت بی‌نظمی و آنتروپی می‌کشاند.

در فصل دوم زبان و تعریف آن به صورت یک نظام بیان می‌شود. در مبحث ارتباط که از ویژگی‌های یک سیستم می‌باشد باید به انتقال اطلاعات و انتخاب کلمات و جملات و ساختار سلسله‌مراتبی زبان توجه شود. در ادامه به دستور تبدیلی به‌عنوان بخشی پیچیده از ساختار سلسله‌مراتبی زبان و «نظریه‌ی چامسکی» درباره‌ی آن، اشاره شده است.

در فصل سوم به شبکه‌های پتری، تعاریف، کاربردها، انواع و تعریف ریاضیاتی آن اشاره می‌شود. در فصل سوم موضوع روان‌شناسی شناختی و انواع تفکر و چگونگی شکل‌گیری ایده‌ها و طرح‌واره‌ها بیان شده است. چند مثال تاریخ ریاضی در غالب شبکه‌های پتری آورده شده است. تلفیق تفکر بازتابی و قوم‌نگرانه را می‌توان در آموزش ریاضی در قالب شبکه‌های پتری مدنظر قرار داد.

عنوان پایان‌نامه: بررسی مهارت‌های مطالعه‌ی ریاضی دانشجویان دانشگاه شهید باهنر کرمان

پژوهشگر: محسن یزدانفر

استاد راهنما: دکتر مهدی رجبعلی‌پور

استاد مشاور: دکتر فریبرز درتاج

تاریخ دفاع: ۸۵/۱۰/۲۳

داوران: دکتر محمدرضا فدایی، دکتر اسفندیار اسلامی
دانشگاه محل تحصیل: شهید باهنر کرمان.

چکیده

پژوهش حاضر به‌منظور بررسی مهارت‌های مطالعه‌ی ریاضی دانشجویان دانشگاه شهید باهنر کرمان انجام گرفته است. در چهارچوب هدف اصلی به سه پرسش

۱ـ دانشجویان از نظر مهارت‌های مطالعه‌ی ریاضی در چه وضعیتی قرار دارند؟

۲ـ آیا وضعیت مهارت‌های مطالعه‌ی ریاضی دانشجویان با جنسیت و رشته‌ی تحصیلی آن‌ها ارتباط دارد؟

۳ـ آیا مهارت‌های مطالعه‌ی ریاضی می‌تواند پیشرفت تحصیلی ریاضی را پیش‌بینی کند؟

پاسخ داده شد. به این منظور در یک پژوهش پیمایشی (زمینه‌یابی)، ۱۵ آزمودنی به روش نمونه‌گیری تصادفی‌ـ‌خوشه‌ای چندمرحله‌ای از بین دانشجویان درس ریاضی عمومی ۲ انتخاب و پرسش‌نامه‌ی مهارت‌های مطالعه‌ی ریاضی تهیه و بر روی آن‌ها اجرا گردید. پرسش‌نامه حاوی ۳۷ سؤال و در مجموع از ۷ خرده‌آزمون تشکیل شده بود که ۷ سازه‌ی **انگیزش، مکان مطالعه، راهبردهای یادگیری، راهبردهای یادداشت‌برداری، راهبردهای مرور، مدیریت زمان و راهبردهای امتحان دادن** را اندازه می‌گرفت. پس از اجرا و نمره‌گذاری پرسش‌نامه، دانشجویان از نظر مهارت‌های مطالعه‌ی ریاضی سطح‌بندی شده و هر دانشجو در یکی از سطوح مهارت‌های مطالعه‌ی ریاضی **ضعیف، خوب و عالی** قرار گرفت. هم‌چنین رابطه‌ی بین نمره‌ی مهارت‌های مطالعه‌ی ریاضی و ویژگی‌های جمعیت‌شناختی از قبیل جنسیت و رشته‌ی تحصیلی، مورد بررسی قرار گرفت. نتایج نشان داد که در مجموع، دانشجویان از مهارت‌های مطالعه‌ی ریاضی ضعیفی برخوردار می‌باشند. استفاده از آزمون‌های آمار استنباطی از قبیل ضریب همبستگی پیرسون، آزمون لون، آزمون تحلیل واریانس یک طرفه و آزمون کمترین تفاوت معنی‌داری (LSD) در تجزیه و تحلیل داده‌ها نشان داد که بین میانگین نمرات دختران و پسران در آزمون مهارت‌های مطالعه‌ی ریاضی، تفاوت معناداری وجود دارد؛ میانگین‌های نمرات دختران و پسران در خرده آزمون‌های انگیزش، راهبردهای یادگیری، مدیریت زمان و راهبردهای امتحان دادن دارای تفاوت معناداری می‌باشد؛ میانگین‌های نمرات دانشجویان رشته‌های مختلف تحصیلی در خرده آزمون‌های راهبردهای یادداشت‌برداری، راهبردهای مرور و راهبردهای امتحان دادن دارای تفاوت معناداری می‌باشد و راهبردهای یادگیری، انگیزش و راهبردهای امتحان دادن می‌توانند به خوبی موفقیت دانشجویان را در ریاضیات پیش‌بینی کنند. هنجارهای درصدی دانشجویان در آزمون مهارت‌های مطالعه‌ی ریاضی در کل نمونه، براساس جنسیت و هم‌چنین به تفکیک رشته‌ی تحصیلی نیز ارایه گردید. در پایان، نتایج مورد بحث و بررسی قرار گرفت و راه‌کارهایی پیشنهاد شد. هم‌چنین، مراحل طراحی یک برنامه‌ی جامع آموزش مهارت‌های مطالعه‌ی ریاضی ارایه گردید.

عنوان پایان‌نامه: تأثیر مسایل کاربردی و الگوسازی در یادگیری مفهومی ریاضی
پژوهشگر: محمد اصغریان
استاد راهنما: دکتر مهدی رجبعلی‌پور
استاد مشاور: دکتر بیژن ظهوری زنگنه
تاریخ دفاع: ۸۵/۱۲/۱۵
داوران: دکتر محمدرضا فدایی، دکتر اسفندیار اسلامی
دانشگاه محل تحصیل: شهید باهنر کرمان.

چکیده

به گفته‌ی پولاک (۱۹۸۸) ریاضیات باید به‌صورت کاربردی در برنامه‌ی آموزشی باشد، زیرا ریاضیات:

۱. برای زندگی روزانه و عملی لازم است؛
۲. برای شهروندان اندیشمندی که در موقعیت‌های خاص برای جامعه تصمیم می‌گیرند، لازم است؛
۳. برای بعضی از افراد جهت آگاهی در شغلشان ضروری است؛
۴. قسمتی از فرهنگ عمومی بشری است. [۴۹]

لذا محقق با فرض بر این که بحث مسایل کاربردی و مدل‌سازی مسایل واقعی در مقایسه با مسایلی که به ظاهر جدا از واقعیت و تجربیات بچه‌ها هستند در یادگیری مفهومی ریاضیات و انتقال آن از موقعیت آموزشی به موقعیت تازه مفید است، به مقایسه‌ی نظام‌مند این دو روش پرداخته است. در این تحقیق، پژوهشگر به دنبال آزمایش این موضوع بوده است که آیا ارایه‌ی مسایل کاربردی در بحث مسأله‌محوری کلاس به توسعه‌ی درک مفهومی ریاضی دانش‌آموزان، شناخت بدفهمی‌ها و ارتقای یادگیری ریاضیاتشان می‌انجامد یا نه؟ بنابراین پس از جمع‌آوری داده‌ها از روش‌های مختلف مانند، پرسش‌نامه، مشاهده، پرسش و سؤال از طرف معلم و دانش‌آموز، چک‌لیست‌ها و... و با استفاده از آمار توصیفی و استنباطی نتایج زیر را به‌دست آورده است:

۱. دانش‌آموزان به خاطر کم بودن وقت آموزشی کتاب

هندسه(۱)، برخورد حفظی با مسأله‌ها و قضیه‌های هندسه، ارزشیابی نادرست، عدم آموزش مفهومی و عدم آشنایی با کاربردهای هندسه در زندگی روزمره، نسبت به سایر دروس ریاضی به این درس علاقه‌ی کمتری دارند.

۲. با استفاده از آموزش در گروه‌های کوچک، استفاده از ابهامات دانش‌آموزان برای پیشبرد درس، استفاده از مسایل نسبتاً راحت در ابتدای هر جلسه، استفاده از مسایل کاربردی و محاسبه‌گرها و دادن فرصت به دانش‌آموزان برای رفع ابهامات خویش، می‌توان انگیزه‌ی آنان را برای کار با هندسه افزایش داد.

۳. دانش‌آموزانی که با مسایل کاربردی مورد آموزش قرار می‌گیرند، نسبت به افرادی که با چنین مسایلی مورد آموزش قرار نمی‌گیرند، در رویارویی با موقعیت‌های جدید بهتر عمل می‌کنند.

۴. یکی از علت‌های ناتوانی دانش‌آموزان در به‌کارگیری مفاهیم هندسه، عدم آموزش با چنین روشی است.

عنوان پایان‌نامه: مفهوم کسر برای معلمان ابتدایی

پژوهشگر: سارا حسن‌پور فرد

استاد راهنما: دکتر مهدی رجبعلی‌پور

استاد مشاور: دکتر محمدرضا فدایی

تاریخ دفاع: ۸۵/۱۲/۲۶

داوران: دکتر یوسف بهرامپور، دکتر محمدرضا مولایی

دانشگاه محل تحصیل: شهید باهنر کرمان.

چکیده

نتایج تحقیقات درباره‌ی مفهوم کسر در داخل و خارج کشور نشان می‌دهد که تصورهای چندگانه‌ی کسر، ایجاد پیچیدگی در مفهوم آن می‌کند (دکتر شکوهی-ریون مک‌کروری-بهر و همکارانش-کاراﻻمبوس-...).

در این پایان‌نامه که جهت استفاده‌ی معلمان ابتدایی تهیه گردیده، سعی شده است ضمن بیان سیر تاریخی تحول کسر، معلمان ابتدایی را متوجه مشکل بودن مفهوم کسر و اعمال روی آن بنماید.

تصورهای چندگانه‌ی کسر با پنج زیرساختار، جزء به کل-عملگر-نسبت-خارج قسمت-اندازه، ارتباط داده می‌شود. از بین روش‌های آموزش کسر، روش «وو» بیان می‌شود که یک زیرساختار را معرفی کرده و سعی می‌کند به کمک آن، زیر ساختارهای دیگر را تفسیر کند. در پایان به دلیل اهمیت موضوع، زمینه‌ای برای تحقیقات آینده بیان می‌شود.

عنوان پایان‌نامه: پیامدهای استفاده از درس پژوهی در توسعه‌ی حرفه‌ای معلمان ریاضی دوره‌ی راهنمایی تحصیلی ناحیه ۲ کرمان

پژوهشگر: عظیمه سادات خاکباز

استاد راهنما: دکتر محمدرضا فدایی

استاد مشاور: دکتر نعمت‌اله موسی‌پور

تاریخ دفاع: ۸۶/۶/۳۱

داوران: دکتر زهرا گویا، دکتر اسفندیار اسلامی

دانشگاه محل تحصیل: شهید باهنر کرمان.

چکیده

پژوهش‌های بین‌المللی اخیر در زمینه‌ی توسعه‌ی حرفه‌ای معلمان، روشنگر جهت‌گیری‌های متفاوتی از اقدامات معمول در این حوزه است. این پژوهش‌ها بیش‌تر بر مدرسه و کلاس درس استوار است و می‌کوشد معلمان را بیش از پیش در تصمیم‌گیری‌های مربوط به شیوه‌های بهبود کیفیت آموزشی مدارس مشارکت دهد. این آموزش به معلمان کمک می‌کند تا به هنگام کسب صلاحیت‌های حرفه‌ای در حین کار، به بازسازی فکری خویش و دانش‌آموزان در فرآیند یاددهی-یادگیری توجه جدی مبذول دارند.

پژوهش حاضر، جهت بررسی پیامدهای استفاده از درس‌پژوهی* به عنوان نمونه‌ای از پژوهش مشارکتی در کلاس درس، بر توسعه‌ی حرفه‌ای معلمان صورت گرفته است. در این پژوهش، ابتدا به بررسی ویژگی‌های برنامه‌ی توسعه‌ی حرفه‌ای مطلوب از دیدگاه معلمان ریاضی پرداخته می‌شود، سپس درس‌پژوهی که ایده‌ای ژاپنی برای توسعه‌ی حرفه‌ای معلمان می‌باشد، جهت بررسی به‌عنوان یک الگوی مؤثر در توسعه‌ی حرفه‌ای معلمان ارایه می‌گردد و مشکلات و موانع به‌کارگیری این ایده در سیستم آموزشی فعلی ایران بررسی می‌شود.

این پژوهش به شیوه‌ی پژوهش مشارکتی، با مشارکت دو گروه پنج و ده‌نفری از معلمان ریاضی ناحیه‌ی دو کرمان در دوره‌ی راهنمایی تحصیلی صورت گرفت که پژوهشگر در هر کدام از گروه‌ها عضویت داشته است. داده‌های این پژوهش از طریق پرسش‌نامه، مشاهده‌ی مشارکتی، یادداشت‌های میدانی اعضای گروه‌ها، یادداشت‌ها و نظرات ناظران بیرونی، مصاحبه با معلمان و دانش‌آموزان، ضبط صدا، فیلم و عکس جمع‌آوری شدند که از طریق کدگذاری به شیوه‌ی مقوله‌بندی، تجزیه و تحلیل گردیدند.

نتایج حاصل از تحلیل داده‌ها نشان داد که درس‌پژوهی می‌تواند

به عنوان الگویی مطلوب در توسعه‌ی حرفه‌ای معلمان مطرح گردد. مشکلات و موانع اجرایی این الگو در سیستم آموزشی فعلی شناسایی و راه‌حل‌هایی برای رفع آن‌ها پیشنهاد شد. در پایان، پیشنهادهایی جهت بومی‌سازی درس‌پژوهی، به عنوان نوعی پژوهش مشارکتی مؤثر در توسعه‌ی حرفه‌ای معلمان، ارایه و یک الگوی بومی برای توسعه‌ی حرفه‌ای معلمان از طریق درس‌پژوهی، براساس یافته‌های پژوهش حاضر، معرفی گردید.

* دکتر ماکوتا یوشیدا (Dr.Makota Yoshida) برای اولین‌بار، در پایان‌نامه‌ی دکتری خود (۱۹۹۹م)، واژه‌ی "Jugyou Kenkuu" را به "Lesson Study" ترجمه کرد. دکتر محمدرضا سرکارآرانی نیز در کتاب شکاف آموزشی (۱۳۸۳ش) این اصطلاح را با عبارت «مطالعه‌ی درس» بیان نمود. دکتر مهدی رجبعلی‌پور (۱۳۸۵ش) آن را به «درس‌پژوهی» تغییر داد.

عنوان پایان‌نامه: بررسی رابطه بین مهارت‌های حرفه‌ای معلمان ریاضی و عملکرد تحصیلی دانش‌آموزان دختر پایه دوم متوسطه و مقایسه‌ی آن بین دو رشته‌ی ریاضی ـ فیزیک و علوم تجربی

پژوهشگر: فائظه وزیری سرشک

استاد راهنما: دکتر محمدرضا فدایی

استاد مشاور: دکتر سیدحمیدرضا علوی

تاریخ دفاع: ۸۶/۶/۳۱

داوران: دکتر زهرا گویا، دکتر اسفندیار اسلامی

دانشگاه محل تحصیل: شهید باهنر کرمان.

چکیده

هدف از تحقیق حاضر، تعیین رابطه بین «مهارت‌های مدیریت کلاس، عرضه‌ی مفاهیم ریاضی و داشتن مهارت‌های عمومی تدریس معلمان ریاضی» و «عملکرد تحصیلی ریاضی دانش‌آموزان» است. به‌علاوه این تحقیق به مقایسه‌ی جداگانه‌ی این رابطه‌ها در دانش‌آموزان دو رشته‌ی تحصیلی ریاضی ـ فیزیک و علوم تجربی دوره‌ی متوسطه، به منظور شناخت بهتر مهارت‌های تأثیرگذار بر عملکرد تحصیلی ریاضی دانش‌آموزان پرداخته است.

روش تحقیق انجام شده توصیفی ـ همبستگی و جامعه‌ی آماری آن شامل کلیه‌ی دانش‌آموزان دختر پایه‌ی دوم ریاضی ـ فیزیک و علوم تجربی دبیرستان‌های دولتی شهرستان شاهین‌شهر استان اصفهان (۳۴۰ نفر دانش‌آموز در هفت مدرسه‌ی دولتی موجود) که درس ریاضی ۲ را در نیم‌سال اول سال تحصیلی ۸۵-۱۳۸۶ گذرانده‌اند، می‌باشد.

ابزار جمع‌آوری داده‌ها، پرسش‌نامه‌ی محقق ساخته با سؤالات بسته ـ پاسخ و در مقیاس پنج گزینه‌ای بود. روایی پرسش‌نامه از روش محتوایی، ۸۳٪ و اعتبار آن از روش آزمون مجدد و با استفاده از ضریب همبستگی اسپرمن، ۹۴٪ برآورد گردید.

به‌منظور تجزیه‌وتحلیل داده‌ها، در سطح آمار توصیفی برای رسم نمودارها و جداول و در سطح آمار استنباطی از دو آزمون اسپیرمن و کندال تاو b استفاده شد.

نتایج حاصل از یافته‌های تحقیق عبارتند از:

۱. بین عملکرد تحصیلی ریاضی دانش‌آموزان و مهارت‌های عمومی تدریس معلمان ریاضی رابطه وجود دارد؛

۲. بین عملکرد تحصیلی ریاضی دانش‌آموزان رشته‌ی ریاضی ـ فیزیک و مهارت مدیریت کلاس معلمان ریاضی رابطه وجود دارد؛

۳. بین عملکرد تحصیلی ریاضی دانش‌آموزان رشته‌ی علوم تجربی و

ـ مهارت‌های مدیریت کلاس معلمان ریاضی

ـ مهارت‌های عمومی تدریس معلمان ریاضی

ـ مهارت عرضه کردن مفاهیم معلمان ریاضی

رابطه وجود دارد.

عنوان پایان‌نامه: بررسی نگرش دانش‌آموزان پایه‌ی سوم راهنمایی شهرستان راور نسبت به درس ریاضی

پژوهشگر: فهیمه شمسی‌نژاد راوری

استاد راهنما: دکتر محمدرضا فدایی

استاد مشاور: دکتر عباس رحمتی

تاریخ دفاع: ۸۶/۶/۳۱

داوران: دکتر زهرا گویا، دکتر محمود محسنی مقدم

دانشگاه محل تحصیل: شهید باهنر کرمان.

چکیده

طی دهه‌های گذشته، در تحقیقاتی درباره‌ی آموزش ریاضی، نگرش دانش‌آموزان نسبت به درس ریاضی مورد توجه قرار گرفته است. به‌منظور بهبود آموزش ریاضی در ایران از طریق تمرکز بر نگرش دانش‌آموزان نسبت به درس ریاضی، این تحقیق با هدف سنجش نگرش‌های دانش‌آموزان پایه‌ی سوم راهنمایی شهرستان راور انجام شده است.

آزمودنی‌های این پژوهش، ۱۵۰ دانش‌آموز دختر و پسر مشغول به تحصیل در پایه‌ی سوم راهنمایی (مدارس عادی) بودند و از ۸ حوزه‌ی مقیاس سنجش نگرش نسبت به ریاضی فنماشرمن (MAS)، جهت سنجش نگرش و احساسات دانش‌آموزان در مورد یادگیری ریاضیات، استفاده شد. این ۸ حوزه عبارتند از:

۱ـ نگرش نسبت به موقعیت در ریاضیات؛ ۲ـ نگرش مادران به ریاضیات؛ ۳ـ نگرش پدران نسبت به ریاضیات؛ ۴ـ اضطراب ریاضی؛ ۵ـ انگیزش؛ ۶ـ سودمندی ریاضیات؛ ۷ـ نگرش نسبت به معلمان ریاضی؛ ۸ـ اعتماد‌به‌نفس در یادگیری ریاضی.

در نتیجه تحلیل آماری داده‌های حاصل از این تحقیق آشکار شد که:

ـ بیش از نیمی از دانش‌آموزان دارای اضطراب زیادی در درس ریاضی هستند؛

ـ درصد بالایی از دانش‌آموزان در حوزه‌ی پنجم یعنی انگیزش، که پشتکار دانش‌آموزان را هنگام روبه‌رو شدن با مسایل چالش برانگیز ریاضی می‌سنجد، دارای نگرشی منفی هستند؛

ـ به منظور بررسی تفاوت‌های نگرشی دانش‌آموزان دختر و پسر در هر حوزه از آزمون من ویتنی در سطح $\alpha = ۰/۰۵$ استفاده شد، که در هیچ حوزه‌ای تفاوت معنی‌داری بین نگرش دختران و پسران دیده نشد.

عنوان پایان‌نامه: بررسی تأثیر توانایی‌های کنترلی بر حل مسایل مربوط به انتگرال نامعین

پژوهشگر: مهدیه‌سادات آقایی شهربابکی

استاد راهنما: دکتر محمدرضا فدایی

تاریخ دفاع: ۸۶/۸/۹

داوران: دکتر اسفندیار اسلامی، دکتر محمود فرهادیان

دانشگاه محل تحصیل: شهید باهنر کرمان.

چکیده

یکی از مهم‌ترین هدف‌های آموزش ریاضی، ارتقای توانایی حل مسأله است. شورای معلمان ریاضی آمریکا و کانادا (NCTM) بر لزوم وجود حل مسأله در ریاضیات مدرسه‌ای تأکید کرده و اظهار می‌دارد که حل مسأله، قسمت مهم و اصلی آموزش ریاضی است. حل مسأله، «قدرت ریاضی» دانش‌آموزان را افزایش می‌دهد؛ باورهایی را در دانش‌آموزان پرورش می‌دهد تا قادر شوند ریاضی‌گونه فکر کنند و از انجام دادن ریاضی، لذت ببرند. تدریس ریاضی از طریق حل مسأله، که در آن دانش‌آموزان با هدایت و راهنمای معلم خود و از طریق حل مسأله‌های مختلف به یادگیری یک موضوع ریاضی اقدام کنند، مورد توجه آموزشگران معروف ریاضی از جمله جورج پولیا، شونفیلد و نیز شورای معلمان ریاضی بوده است. به عقیده‌ی شونفیلد (۱۹۸۵)، رفتارها و توانایی‌های کنترلی به‌عنوان مهارت‌های اجرایی و فراشناختی برای حل مسأله، دومین مؤلفه‌ی حل مسأله‌ی ریاضی است.

هدف این تحقیق، بررسی تأثیر آموزش توانایی‌های کنترلی بر توانایی دانشجویان در حل مسایل مربوط به انتگرال نامعین است. در این تحقیق، ضمن مطالعه‌ی مبانی نظری حل مسأله و توانایی‌های کنترلی، تدریس عملی حل مسأله و آموزش مهارت‌های کنترلی در کلاس درس صورت گرفت. دو گروه از دانشجویان دوره‌ی کاردانی الکترونیک در قالب دو کلاس انتخاب شده و تحت آموزش قرار گرفتند. یک کلاس به‌عنوان گروه شاهد، تحت تدریس سنتی ریاضی قرار گرفتند. در این روش مفاهیم و موضوعات توسط معلم انتقال داده می‌شد. در کلاس دیگر به‌عنوان گروه آزمایش تحت آموزش ریاضی از طریق حل مسأله و با تأکید بر توانایی‌ها و مهارت‌های کنترلی و فراشناختی قرار گرفتند. مطالعه‌ی رفتارها و مهارت‌های کنترلی به‌عنوان یکی از رفتارهای مهم و تأثیرگذار در حل مسایل ریاضی، کانون توجه این تحقیق بود. در پایان نیم‌سال اول سال تحصیلی ۸۳-۱۳۸۲، یک امتحان تشریحی به‌طور هماهنگ از هر دو گروه به‌عمل آمد. در این پژوهش، محقق از دانشجویان هر دو گروه خواست تا تمامی فرایندهای ذهنی خود را در حین حل هر دو مسأله روی کاغذ بنویسند. پروتکل‌های نوشتاری دانشجویان هر دو گروه مورد تجزیه‌وتحلیل و مقایسه قرار گرفت و هم‌چنین نتایج دانشجویان هر دو گروه در آن امتحان مورد تجزیه‌وتحلیل قرار گرفت.

در نتیجه‌ی تحلیل آماری داده‌های حاصل از این تحقیق، مشخص شد که آموزش مهارت‌ها و توانایی‌های کنترلی، بر افزایش توانایی قدرت حل مسأله‌ی ریاضی دانشجویان تأثیر چشم‌گیری دارد. تدریس مسایل مربوط به انتگرال نامعین با تأکید بر مهارت‌های اجرایی و آموزشی رفتارهای فراشناختی، تأثیر زیادی بر پیشرفت تحصیلی دانشجویان در این درس دارد. به‌قول شونفیلد (۱۹۸۰) دانستن راهبردها یا رهیافت‌ها مانند در اختیار داشتن تعدادی کلید در مقابل یک در بسته است. اگر شخص بتواند از میان انبوه کلیدها، کلیدهایی را انتخاب کند که تعداد آن‌ها انگشت‌شمار باشد و برای باز کردن قفل در مناسب باشد؛ در شرایط زمانی محدود، ضریب موفقیت او افزایش می‌یابد.

بر اساس نتایج پژوهش به معلمان گران‌قدر پیشنهاد می‌شود افزایش مهارت و توانایی دانش‌آموزان در حل مسأله را جزو اهداف مهم تدریس خود قلمداد کنند و تدریس را بر محوریت دانش‌آموز شکل دهند روش‌های حل مسأله‌ی دانش‌آموزان را با دقت و حوصله مورد مطالعه قرار دهند.

گزارش اعطای دکترای افتخاری به عبدالحسین مصحفی

گزارشگر: سپیده چمن آرا

«خدای را شکر می گویم که به آرزوی دیرینه ی دیگری هم رسیدم. بخت با ریاضیات کشور، یار بوده است که بزرگانی چون احمد بیرشک، ابوالقاسم قربانی، پرویز شهریاری، و عبدالحسین مصحفی، مدرک دکتری را لازمه ی خدمت و تعالی ندانستند و برای اخذ آن به خارج از کشور نرفتند و در کسوتی بس متفاوت، چنین بالنده و شکوفا شدند. مراسم امروز، تأثیری در زندگی ایشان ندارد. تشویقشان خداداد است و یک عمر زحمت و تجربه. تنها ثمره ی اعطای درجه ی دکترای افتخاری به این فرهیختگان، تکریم علم و عالم است و پیروی برخی از جوانان، از راه و رسم آنان...»

این جملات، جملاتی است که دکتر مهدی بهزاد، در مراسم اعطای درجه ی دکترای افتخاری به استاد، عبدالحسین مصحفی در بعدازظهر روز چهارشنبه، ۲۵ اردیبهشت ۱۳۸۷، در آغاز سخنرانی خود برای شنوندگان، که سالن سینما دانش آموز شهر یزد را پُر کرده بودند، ایراد کرد؛ و چه زیبا احساس خود را ـ که با احساس بسیاری از حاضرین در آن مراسم، مشترک بوده است ـ بیان نمود.

این مراسم، که با حضور اساتید دانشگاه یزد، اساتید ریاضی دانشگاه‌های تهران و شهرهای دیگر، اعضای انجمن ریاضی ایران، اعضای کمیته ی علمی دهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران، جمعی از معلمان پیشکسوت شهر یزد و تعدادی از دانشجویان و معلمان ریاضی برگزار شد، با تلاوت آیاتی از قرآن مجید توسط دانش آموز دختر، موحده آیت‌الهی و پخش سرود جمهوری اسلامی ایران آغاز شد و با سخنرانی دکتر میبدی، ریاست دانشگاه یزد، ادامه یافت. دکتر میبدی، پس از اظهار خوشوقتی از حضور در چنان جمعی، از برکاتی که پس از شروع فعالیت‌های مرتبط با تصویب اعطای درجه ی دکتری به آقای مصحفی، برای دانشگاه یزد به وجود آمده است سخن گفته و از تلاش‌های دکتر بهزاد، دکتر مدقالچی، دکتر محمودیان و دکتر محسنی که با بررسی موشکافانه ی خود، این مدرک را شایسته ی آقای مصحفی دانستند، تشکر کرد. وی از بنیان گذاران خانه‌های ریاضیات اصفهان و یزد نیز قدردانی کرده و ابراز امیدواری کرد این مراسم، نقطه ی شروع همکاری‌های مشترک مدرسه و دانشگاه یزد باشد ـ مانند دانشگاه صنعتی اصفهان.

پس از این سخنرانی، کلیپی از دانشگاه یزد برای حضار پخش شد. سپس آقای باغستانی، رییس سازمان آموزش و پرورش استان یزد، با اشاره به تلاش‌های خانه ی ریاضیات یزد و انجمن علمی ـ آموزشی معلمان ریاضی یزد برای اعطای این مدرک به آقای مصحفی، و نیز اشاره به شایستگی‌های وی در انتشار مجله ی یکان ـ به مدت ۱۵ سال، و در ۱۱۷ شماره ـ و تألیفات کتاب و مقاله و ترجمه‌ها و... برای

دکتر عبدالحسین مصحفی

حضار، سخنانی ایراد کرد.

پخش کلیپ در مورد خانه‌ی ریاضیات یزد ـ که از سال ۱۳۷۹ تأسیس شده است ـ و فعالیت‌های آن، از جمله برگزاری ۶ نمایشگاه ریاضی، برنامه‌ی بعدی این مراسم بود.

پس از آن، آقای ضیاء اسلامیان، که خود از دبیران ریاضی شهر یزد می‌باشد، سخنانی بیان کرد. وی که به عنوان دانش‌آموز ۵۰ سال پیش آقای مصحفی، سخن می‌راند، نخست، موفقیت دانش‌آموزان یزدی در کنکورهای سراسری و اخذ رتبه‌های بالا در این کنکور و رتبه‌بندی‌های اخلاقی را مرهون سطح بالای معلمان و دبیران و جامعه‌ی فرهنگی یزد ـ که هم در همه‌ی دروس، سرآمد بوده و هستند و هم معلم اخلاق برای دانش‌آموزان می‌باشند ـ عنوان کرد. سپس به دو جنبه ـ خاطره ـ از فعالیت‌های آقای مصحفی، یعنی نحوه‌ی تدریس جذاب درس هندسه‌ی ترسیمی و رقومی و نیز انتشار مجله‌ی یکان در فضای سال ۴۲، اشاره کرده و مانند یک دانش‌آموز مسئول، ابراز کرد که «فن درس خود را در این دو زمینه، پس داده‌ام: تدریس هندسه‌ی ترسیمی و رقومی در دبیرستان‌های یزد و نیز همکاری در انتشار نشریه‌ی ریاضی استان یزد.» آقای ضیاء اسلامیان، اولین آشنایی خود با نشریه‌ی یکان را چنین توصیف کرد: «اولین بار، در سال ۴۲ که در دانشگاه تهران تحصیل می‌کردم، در دانشکده‌ی علوم، مجله‌ی یکان را دیدم. در فضای آن زمان دانشکده‌ی علوم که اساتیدی مانند دکتر قینی، پروفسور فاطمی، پروفسور هشترودی و... داشت و در دبیرستان‌های خوب تهران هم تدریس می‌کردند، نشریه‌ای منتشر نمی‌شد. در این حال، یک نفر از استان یزد به تهران آمد و چنین مجله‌ای را منتشر کرد که حرفی برای گفتن داشت: با قسمت‌های متنوعی که داشت، می‌توانست دانش‌آموزان را جذب خود کند...» پس از این سخنان، کلیپی از آقای عبدالحسین مصحفی پخش شد که در آن، شرح زندگی و شرح تلاش‌های وی برای انتشار این مجله را از زبان خود وی شنیدیم و این‌که: «مدیر مسئول مجله، همسرم بود...» و باز، این‌که «تأمین هزینه‌ی انتشار چند شماره‌ی مجله، با فروش زمینی که میراث پدری همسرم و متعلق به وی بود، تأمین شد...»

این مراسم، با سخنرانی دکتر مهدی بهزاد، که ۵۴ سال قبل، در دبیرستان ایرانشهر یزد، شاگرد آقای مصحفی بوده است، ادامه یافت. دکتر بهزاد، که خود پیشنهاددهنده‌ی اعطای این مدرک به آقای مصحفی بوده است، به تفصیل فعالیت‌های صورت گرفته از جانب انجمن ریاضی ایران برای تحقق چنین امری و نیز موشکافی حاضران در جلسه‌ی دفاع از این پیشنهاد و بالاخره، پیشنهاد وزیر علوم، فنون، تحقیقات و فن‌آوری مبنی بر اعطای دکترای افتخاری آموزش ریاضی به آقای مصحفی به منظور تجلیل از سایر معلمان ریاضی را شرح داد.

وی به تعداد تألیفات و ویرایش‌ها و ترجمه‌های آقای مصحفی اشاره کرده و پیشنهاد داد تمام این آثار، به صورت لوح فشرده درآمده، و در اختیار علاقه‌مندان قرار گیرد.

سخنان دکتر بهزاد با خاطره‌ی زیر، ادامه یافت: «حدود سال‌های ۴۰-۴۱ بود که در ایالات متحده، مشغول تحصیل بودم که از استاد، نامه‌ای به این مضمون به دستم رسید که در فکر کسب امتیاز برای انتشار مجله‌ای هستند. نخست از دریافت نامه تعجب کردم زیرا سال‌ها بود از استاد بی‌خبر


دکتر مهدی بهزاد


آقای باغستانی


دکتر میدی

بودم و نمی‌دانستم آدرس مرا از کجا یافته‌اند؟ تصمیمشان را ستودم و به‌عنوان نمونه، چند مسأله‌ی از مجله‌ی مانتلی (American Mathematical Monthly) را به فارسی برگرداندم و برایشان فرستادم. بعدها دیدم که این مطلب در یکان درج شده است. خوشبختانه به همت خانه‌ی ریاضیات یزد، دوره‌ی کامل مجله‌های یکان و شماره‌های سالانه‌ی آن، در چهار لوح فشرده تقدیم علاقه‌مندان شده است. استاد فرموده‌اند: «روزها تدریس می‌کردم و شب‌ها تا ساعت سه نیمه‌شب، دنبال کار مجله بودم. ساعت شش صبح هم به چاپ‌خانه می‌رفتم. کل کار مجله روی دوش من و همسرم بود...» با نقل این جملات، حاضرین در مراسم، همسر آقای مصحفی را، که از ابتدای مراسم، در جمع حضوری آرام داشتند، با کف زدن‌های خود، ستودند.

دکتر مهدی بهزاد، در ادامه‌ی سخنان خود، ضمن اشاره به جنبه‌های متنوع تألیفات و ترجمه‌های آقای مصحفی در تاریخ ریاضی، آموزش ریاضی، کامپیوتر، نجوم، هنر و ریاضی و مهم‌تر از همه، عمومی کردن ریاضی، گلچینی از مصاحبه‌های ایشان را که در نشریات مختلف چاپ شده است، برای حضار خوانده و صحبت‌های خود را با این جملات، خاتمه داد:

«در یک کلام، با افتخار از طرف خود و هزاران هزار برخوردار از وجودشان و از آثارشان، بر دستانشان بوسه می‌زنم. اجازه فرمایید عشق به خدمت، ایثارگری، فروتنی، تلاش، خلاقیت و دست‌آوردهای استاد دکتر عبدالحسین مصحفی و حمایت‌های بی‌دریغ همسر فرهیخته‌شان را ارج نهیم و همگی بپاخیزیم و برایشان بهترین‌ها را آرزو کنیم. سپاسگزارم...»

با این سخنان، همه‌ی حضار، بپاخاسته و استاد و همسر ایشان را تشویق کردند.

بالاخره، بخش اصلی مراسم، یعنی زمان اهدای مدرک دکتری افتخاری به آقای

دکتر عبدالحسین مصحفی و همسر ایشان

عبدالحسین مصحفی فرارسید که با حضور آقایان میبدی، باغستانی، دوران، جمعی از اساتید دانشگاه یزد و دانشگاه‌های تهران و سایر شهرها، چند تن از اعضای خانه‌ی ریاضیات یزد، و تعدادی از دبیران پیشکسوت شهر یزد بر روی صحنه‌ی سالن سینما دانش‌آموز این شهر، لوح دکترای افتخاری آموزش ریاضی، به آقای عبدالحسین مصحفی، تقدیم شد. هم‌چنین از جانب دانشکده‌ی ریاضی دانشگاه یزد لوح تقدیری به وی تقدیم شد. به‌علاوه، لوح تقدیری از جانب سازمان آموزش و پرورش و انجمن علمی ـ آموزشی معلمان استان یزد، به وی اعطا شد. در این مراسم، به همسر دکتر مصحفی نیز یک حلقه‌ی گل و یک جلد کلام‌الله مجید اهدا گردید. پس از ابراز احساسات حاضرین، زمان آن بود که کلام دکتر مصحفی شنیده شود: «سلامٌ علی اهل دار العبادهْ؛ سلامٌ علی اهل دار الفضائل.»

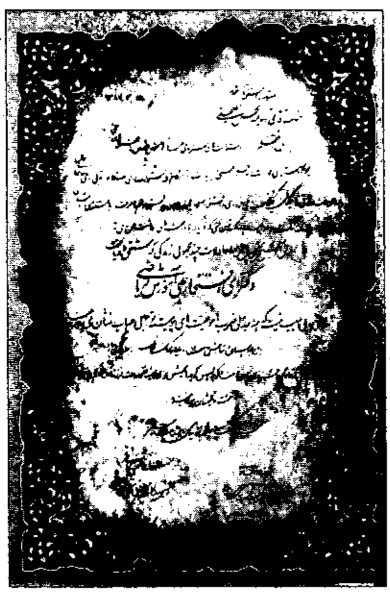
دکتر مصحفی، که با وجود کهولت سن و بیماری جسمانی، از آغاز مراسم تا بدان جا، صبورانه در جمع حضور داشت، ضمن ابراز این‌که «صحبت کردن برایم دشوار است و جمله‌ها از ذهنم فرار می‌کنند، لذا از روی یادداشت می‌خوانم، ضمن آن‌که خسته هستم»؛ با این بیت از فردوسی، سخنان خود را ادامه داد:

«به نام خداوند جان و خرد
کزین برتر اندیشه برنگذرد»

و از پیامبر اسلام که به کسب دانش ارج نهاده است، یاد کرده؛ سپس به مرور تاریخی تأسیس کانون‌های علمی از زمان فیثاغورسی‌ها تاکنون ـ که دانشگاه یزد، یکی از نوپاترین آن است ـ پرداخت. از تمام کسانی که در جمع حضور یافته‌اند، و به‌ویژه از دکتر مهدی بهزاد، قدردانی کرد و از فرزانگانی یاد کرد که روزگاری دانش‌آموز وی بوده‌اند، و از دانشمندان ریاضی ایران، از خیام تا زمان حال. و بالاخره، از همسر خویش، به خاطر همراهی‌های وی که موجب موفقیت دکتر مصحفی در تألیف، ترجمه و نشر بوده است، سپاسگزاری نمود.

این مراسم که رسماً از ساعت ۵ بعدازظهر آغاز شده بود، حدود ساعت ۷ عصر خاتمه یافت.

در ادامه، چکیده‌ای از زندگی‌نامه‌ی دکتر مصحفی را که در مراسم آن روز میان حضار توزیع شد، می‌خوانید:



فشرده زندگی‌نامه‌ی عبدالحسین مصحفی

✓ تولد در ۵ اسفند ۱۳۰۳ در خانواده‌ای مذهبی در شهر کرمان.

✓ آموختن قرائت قرآن در کودکی.

✓ گذراندن تحصیلات دوره‌ی شش ساله‌ی ابتدایی و دوره‌ی سه ساله‌ی سیکل یکم متوسطه در بیش‌تر این سال‌ها در دبیرستان ملی شهاب از ۱۳۱۱ تا ۱۳۲۰.

✓ به خواست پدر اشتغال به معلمی در همان دبیرستان شهاب ابتدا از مهر ۱۳۲۰.

✓ درگذشت پدر در ۱۳۲۱ و عهده‌دار شدن سرپرستی خانواده‌ی شش نفری.

✓ تدریس خصوصی قرائت قرآن و درس‌های ریاضی در خانواده‌ها.

✓ خودآموزی درس‌های دوره دوم متوسطه همراه با تدریس خصوصی ریاضیات آن‌ها.

✓ گذراندن امتحان نهایی سال پنجم دبیرستان به صورت داوطلب در ۱۳۲۷ در کرمان.

✓ داوطلب خدمت نظام وظیفه در دانشکده‌ی افسری تهران و خدمت افسری در رسته‌ی توپخانه از مهر ۱۳۲۸ تا اسفند ۱۳۲۹.

✓ گذراندن امتحان نهایی سال ششم دبیرستان در رشته‌ی ریاضی و به صورت داوطلب در ۱۳۳۰ در تهران.

✓ پذیرفته شدن در آزمون ورودی رشته‌ی ریاضی دانشسرای عالی ایران و دانشکده‌ی علوم دانشگاه تهران در مهر ۱۳۳۰ و گذراندن دوره‌ی سه ساله تحصیل در این دو دانشکده و اخذ درجه‌ی لیسانس از آن‌ها در شهریور ۱۳۳۳.

✓ دبیر ریاضی دبیرستان‌ها، دانشسرای مقدماتی و کلاس‌های تربیت‌معلم یزد از مهر ۱۳۳۳ تا پایان شهریور ۱۳۴۱.

✓ ازدواج در یزد و توفیق دارا شدن دو فرزند در یزد و تهران.

✓ ارائه‌ی خدمات فرهنگی عمومی در سمت خبرنگار فرهنگی روزنامه‌ی کیهان در یزد از ۱۳۳۸ تا ۱۳۴۱.

✓ راه‌اندازی مسابقه‌ی روزنامه‌نگاری دیواری بین دبیرستان‌ها و دانشسرای یزد در بهار ۱۳۴۱ .

✓ انتقال به تهران و دبیر دبیرستان‌های آن‌جا از مهر ۱۳۴۱ تا شهریور ۱۳۴۴ .

✓ کسب امتیاز مجله‌ی ریاضی یکان در آبان ۱۳۴۲ و انتشار مرتب این مجله به صورت ماهنامه همراه با شماره‌های ویژه‌ی سالانه از بهمن ۱۳۴۲ تا اسفند ۱۳۵۶ .

✓ عضویت در هیأت مؤسس و در هیأت اجرایی انجمن معلمان ریاضی از ۱۳۴۳ تا ۱۳۴۸ .

✓ کارشناس برنامه‌های ریاضی در اداره‌ی کل برنامه‌ها و تحقیقات وزارت آموزش و پرورش از ۱۳۴۴ تا ۱۳۴۷ .

✓ نماینده‌ی وزارت آموزش و پرورش در شرکت چاپ و توزیع کتاب‌های درسی از ۱۳۴۷ تا ۱۳۵۲ .

✓ کارشناس مسئول کتاب‌های ریاضی در سازمان کتاب‌های درسی از ۱۳۵۲ تا ۱۳۵۷ .

✓ استفاده از بورس ۷۵ روزه‌ی دولت بلژیک در زمینه‌ی بررسی و آشنایی با ریاضیات جدید در ۱۳۵۲ .

✓ سه ترم همکاری در خدمات مربوط به انتشارات و مطبوعات علمی و تحقیقی وزارت علوم از ۴۸/۱/۶ تا ۴۸/۱۲/۲۹ و از ۴۹/۱/۸ تا ۴۹/۴/۳۱ .

✓ تدریس روش تدریس ریاضیات در دانشکده‌ی علوم و دانشکده‌ی علوم تربیتی دانشگاه سپاهیان انقلاب در نیم‌سال‌های ۱۳۵۶ و ۱۳۵۷ .

✓ مأمور به شرکت در سمینار بین‌المللی قانون کپی‌رایت (قانون حفظ حقوق مؤلف و مصنف) به مدت سه روز در دهلی‌نو در زمستان ۱۳۵۶ .

✓ رییس سازمان کتاب‌های درسی و سرپرست دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی از اسفند ۱۳۵۷ تا دی ۱۳۵۸ .

✓ بازنشسته از خدمات دولتی در ۱۳۵۸/۱۰/۲۷ .

✓ دو دوره شرکت در کلاس‌های آشنایی با کامپیوتر و با روش‌های برنامه‌نویسی در سازمان مدیریت صنعتی در ۱۳۶۵ .

✓ ویراستار با قرارداد خرید خدمت در مرکز نشر دانشگاهی از دی ۱۳۶۶ تا فروردین ۱۳۷۰ .

✓ تألیف و یا ترجمه ۱۸ کتاب و بالغ بر ۸۹ مقاله در زمینه‌ی ریاضیات و کامپیوتر از ابتدای بازنشستگی تاکنون مطابق با فهرست‌های مربوط . .

✓ اقامت به قصد دائم در یزد از آبان ۱۳۷۰ .

کمیسیون بین‌المللی تدریس ریاضی (ICMI) در سال ۲۰۰۰ ، دو جایزه‌ی بین‌المللی به منظور تأکید بر وجود تحقیقات با کیفیت در حوزه‌ی آموزش ریاضی تأسیس کرد. این کمیسیون زیر نظر اتحادیه‌ی بین‌المللی ریاضی (IMU) فعالیت می‌کند و کمیته‌ی اجرایی آن از طرف IMU تعیین می‌شود.

انتخاب مدال فلیکس کلاین، به افتخار وی که نخستین رییس ICMI (سال‌های ۱۹۰۸ تا ۱۹۲۰) بود، و به پاس تعهد مستمر وی در ایجاد رشته‌ی آموزش ریاضی صورت می‌گیرد. دریافت‌کنندگان مدال فلیکس کلاین، کسانی هستند که تحقیقاتی در آموزش ریاضی و با تأثیر طولانی داشته‌اند و تحقیقات آنان به بازسازی و بهبود جامعه‌ی تحقیقی منجر شده است.

مدال هانس فرودنتال، به افتخار وی که هشتمین رییس ICMI (۱۹۶۷-۱۹۷۰) بود، اعطا می‌شود. با تلاش‌های فرودنتال، نخستین کنگره‌ی بین‌المللی آموزش ریاضی (ICME1) برگزار شد. هم‌چنین وی، پایه‌گذار معتبرترین و معروف‌ترین مجله‌ی آموزش ریاضی است. مدال هانس فرودنتال به کسانی اعطا می‌شود که تحقیقاتی اصیل، ابتکاری و تأثیرگذار در حوزه‌ی آموزش ریاضی داشته‌اند.

این جوایز در سال‌های فرد (میلادی) شامل یک مدال و اعتبارنامه‌ی مدال، در مراسم افتتاحیه‌ی ICME که متعاقب آن برگزار می‌شود، اعطا خواهد شد. کمیته‌ی داوران، از برندگان مدال‌ها برای سخنرانی در ICME دعوت به عمل می‌آورد.

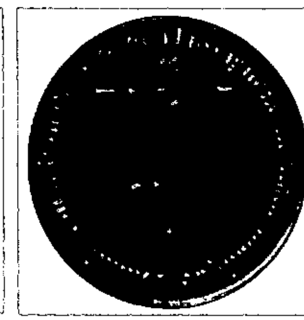
کمیته‌ی داوران متشکل از شش نفر است که منتخب رییس ICMI هستند. اعضای فعال در کمیته‌ی داوران، به جز رییس آن، ناشناخته هستند و تنها پس از تمام شدن دوره‌ی عضویت در کمیته، نام آن‌ها اعلام می‌شود. هریک از اعضا به مدت هشت سال و تجدیدنشدنی، عضو کمیته هستند (به‌جز سه نفر که در اولین کمیته چهار سال عضو هستند) و بدین‌ترتیب هر چهار سال، سه نفر در کمیته تغییر می‌کنند.

اولین کمیته‌ی داوران، متشکل از شش نفر، در سال ۲۰۰۲ شروع به کار کرد، که سه تن از اعضای کمیته برای هشت سال و سه نفر دیگر برای چهار سال انتخاب شده‌اند.

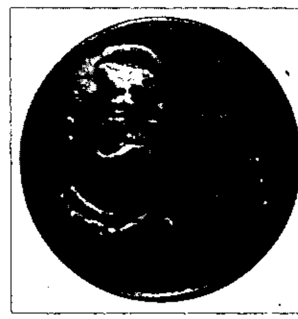
کمیته‌ی داوران که ریاست آن برعهده‌ی پروفسور میشل آرتیگ است، در پایان سال گذشته‌ی میلادی، «جرمی کیل‌پاتریک» را برنده‌ی مدال فلیکس کلاین؛ و «آنا اسفارد» را برنده‌ی مدال هانس فرودنتال اعلام کرد. این دو مدال در یازدهمین کنگره‌ی بین‌المللی آموزش ریاضی (ICME11) در شهر مونتری مکزیک به آنان اعطا

مدال هانس فرودنتال و مدال فلیکس کلاین در سال ۲۰۰۷

گزارشگر: مانی رضائی



پشت هر دو مدال



مدال فلیکس کلاین

مدال هانس فرودنتال

خواهد شد. قرار است در مراسم اعطای مدال‌ها، دوآمبروسیو و کاب، برندگان دوره‌ی قبل (۲۰۰۵) نیز به همراه کیل‌پاتریک و اسفارد سخنرانی کنند.

نام برندگان این مدال‌ها از ابتدای تأسیس آن تاکنون، به شرح زیر است:

سال ۲۰۰۳:

مدال فلیکس کلاین: گای بوراسا Guy Brousseau

مدال هانس فرودنتال: سیلیا هویلز Celia Hoyles

این دو مدال در سال ۲۰۰۴ و در ICME 10 در کوپنهاگ دانمارک اعطا شد. (خبر و گزارش این مراسم را می‌توانید در شماره‌ی ۸۰ مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، بخوانید.)

سال ۲۰۰۵:

مدال فلیکس کلاین: آبیراتان دوآمبروسیو Ubiratan D'Ambrosio

مدال هانس فرودنتال: پاول کاب Paul Cobb

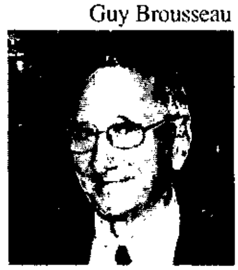
سال ۲۰۰۷:

مدال فلیکس کلاین: جرمی کیل پاتریک Jeremy Kilpatrick

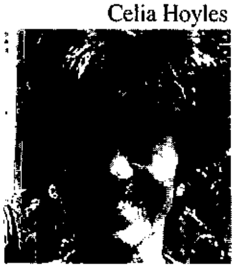
مدال هانس فرودنتال: آنا اسفارد Anna Sfard

خبر این مراسم در سال جاری، در یکی از شماره‌های آینده‌ی مجله منتشر خواهد شد.

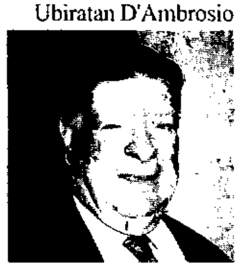
Guy Brousseau



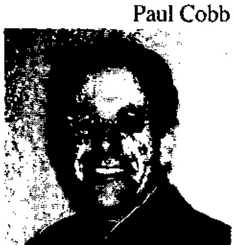
Celia Hoyles



Ubiratan D'Ambrosio



Paul Cobb

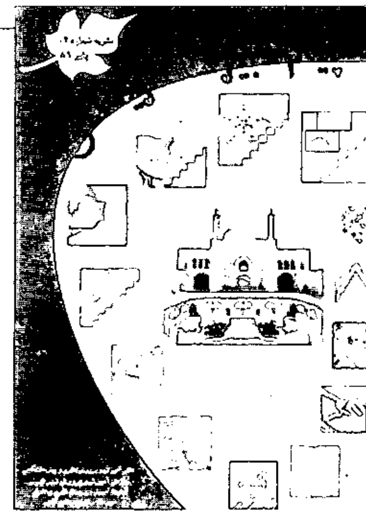


Jeremy Kilpatrick

Anna Sfard

معرفی نشریه

سپیده چمن‌آرا



آخرین شماره‌ی «فصل‌نامه‌ی پیام دبیرخانه‌ی ریاضی»، نشریه‌ی داخلی و تخصصی دبیرخانه‌ی راهبری ریاضی، در پاییز سال ۸۶ انتشار یافته است. در این شماره، که دوازدهمین شماره‌ی این فصل‌نامه است، عناوین زیر به چشم می‌خورد:

- یادداشت دبیرخانه
- دبیرخانه‌ی راهبری دروس: مفهوم توسعه‌ی گروه‌های آموزشی
- شیوه‌های آموزش ریاضی و حل چند مسأله
- گزارش برگزاری پنجمین گردهمایی سرگروه‌های ریاضی استان‌ها
- بیانیه‌ی پایانی گردهمایی
- شیوه‌های نقد و بررسی کتب درسی
- حدهای مسأله‌ساز
- بازتاب یک فعالیت
- یک مسأله در هندسه‌ی مسطحه
- منطق فازی
- حل چند مسأله‌ی چالش برانگیز
- هر فصل، یک مسابقه
- تجزیه، با استفاده از خاصیت دوره‌ی
- مسابقه‌ی تجربه‌ی من
- تهدید و فشارهای روانی در کلاس‌های ریاضی
- گام‌هایی در رسیدن به ایده‌های نو در ریاضی
- نگاهی به نشریات ریاضی استان‌ها
- از میان نامه‌های رسیده به دبیرخانه
- تأملی بر تدوین و نگارش مقالات ریاضی در گروه‌های آموزشی
- نظرسنجی.

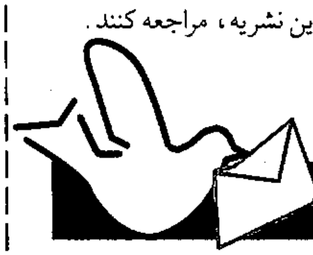
در مقاله‌ی «دبیرخانه‌ی راهبری دروس: مفهوم توسعه‌ی گروه‌های آموزشی» با چگونگی آغاز فعالیت دبیرخانه‌ی راهبری دروس دوره‌ی متوسطه و پیش‌دانشگاهی و اهداف و فعالیت‌های آن، آشنا می‌شویم. در این مقاله می‌خوانیم:

«از سال‌های گذشته و در راستای سیاست تمرکززدایی و به‌منظور بهره‌مندی از قابلیت‌ها، توانمندی‌ها و استعدادهای سازمان‌های آموزش و پرورش و افزایش مشارکت آنان، بخشی از فعالیت‌های گروه‌های آموزشی دفتر آموزش و پرورش نظری و پیش‌دانشگاهی با راه‌اندازی دبیرخانه‌ی راهبری دروس به سازمان آموزش و پرورش استان‌های کشور تفویض گردید. این تفکر از آن‌جا نشأت گرفت که اولاً حوزه‌ی ستادی در استفاده از ظرفیت‌های معلمان و متخصصان در سراسر کشور با محدودیت‌هایی اساسی مواجه بود و ثانیاً تفویض اختیار به استان‌ها موجب اذعان و اعتقاد به کارهای اساسی شده و همراهی استان‌ها را در تحقق برنامه‌های کلان فراهم می‌نمود و زمینه‌ساز اعتقاد و باور استان‌ها به اصالت و سودبخشی برنامه‌ها می‌گردید. تلاش بر این است روند این توسعه‌ی آموزشی و ظرفیت‌سازی سازمانی بیشتر مورد بررسی قرار گیرد.

فعالیت دبیرخانه‌های راهبری دروس دوره‌ی متوسطه و پیش‌دانشگاهی برای اولین‌بار در سال تحصیلی ۸۱-۱۳۸۰ با راه‌اندازی ۱۳ دبیرخانه در ۱۳ استان آغاز شد. در سال تحصیلی ۸۲-۱۳۸۱، این تعداد به ۱۷ دبیرخانه در ۱۷ استان افزایش یافت. در سال تحصیلی ۸۳-۸۲ تعداد دبیرخانه‌های دروس کشور به ۱۸ رسید و ۱۸ استان کشور مسئولیت اداره‌ی دبیرخانه را عهده‌دار شدند. این دبیرخانه‌ها در دروس شیمی، فیزیک، زیست‌شناسی، ریاضی، رایانه، زمین‌شناسی، ادبیات فارسی، عربی، زبان انگلیسی، تاریخ، جغرافیا، علوم اجتماعی، اقتصاد، آمادگی دفاعی، مدیران، دینی و قرآن، فلسفه و منطق و روان‌شناسی فعالیت داشتند که هم‌اکنون نیز

در استان‌های کشور مشغول فعالیت هستند. عناوین برنامه‌های دبیرخانه‌ها شامل برگزاری مسابقه / جشنواره / نمایشگاه / انتشار فصل‌نامه / بروشور / نشریه / برگزاری کارگاه آموزشی / دوره‌های ضمن خدمت / تهیه‌ی سؤالات امتحانی (بانک سؤال) / تهیه‌ی فیلم و لوح فشرده‌ی آموزشی / نقد و بررسی کتاب درسی بوده است.»

در ادامه‌ی این مقاله، ضمن بررسی برخی مشکلات و محدودیت‌های پیش‌روی برنامه‌های گروه‌های آموزشی، چگونگی شکل‌گیری دبیرخانه‌های راهبری دروس و ویژگی‌های آن‌ها و ملاک‌های موجود در راه‌اندازی دبیرخانه‌ها در استان‌های کشور، مطرح شده است و در خاتمه، جدول روند راه‌اندازی دبیرخانه‌ها در استان‌های کشور طی سال‌های گذشته، برای اطلاع خوانندگان، آمده است. علاقه‌مندان به کسب اطلاعات بیش‌تر می‌توانند به اصل مقاله در این نشریه، مراجعه کنند.



نامه‌های رسیده

مطالب و نامه‌های دوستان زیر، از فروردین تا پایان تیرماه ۱۳۸۷ به دستمان رسیده است. از همگی متشکریم و منتظر مطالب خوانندگان دیگر نیز هستیم.

محرم نکوئی، از سلماس؛ مهران راسته؛ مژگان فریدون‌نژاد، از اصفهان؛ سیدیحیی میرعماد، از دامغان؛ یاسر سلمان‌زاده، از خوی؛ حمید دافعی، از زنجان؛ عبدالساده نیسی، از اهواز؛ طاهر جهدی، از تکاب؛ محمدمهدی سرایی و فهیمه کلاهدوز، از شهرضا؛ کاظم وحدتی یکتا، از لالجین؛ سکینه جمشیدیان، از تهران؛ مهوش خرسندنیا، از کرمانشاه؛ رقیه قریشی، از ساوه؛ علیرضا احمدی‌مقدم، از گوگان (آذربایجان شرقی)؛ لیلا مختاری، از جاجرم؛ زهرا کامیاب، از تهران؛ حسین علیزاده، از مرند (آذربایجان شرقی)؛ علی جوادی، از قزوین؛ محمدیاسر خطیب‌زاده، از نیشابور؛ کریم قنبری، از کرمانشاه؛ صدیقه نخلی، از کاشان؛ شمسی سادات حسینی، از کاشان؛ مریم مجیدی‌فر، از زنجان؛ قاسم حسین قنبری، از سمنان؛ آذر کریمی، از اصفهان، مصطفی صالحی، از سلطانیه‌ی زنجان؛ زهرا لآلی، از تهران.

IN THE NAME OF GOD
Ministry of Education
Organization of Research& Educational Planning
Teaching-Aids Publications Office

93

Mathematics Education Journal

Vol. 26 No. 1 2008 ISSN: 1606 - 9188

P.O.Bax : Tehran 15875 - 6585
E-mail: riazi@roshdmag.ir
roshd_riazi@yahoo.com

برگ اشتراک مجله های رشد

شرایط:

۱. واریز مبلغ ۳۰/۰۰۰ ریال به ازای هر عنوان مجله درخواستی، به صورت علی الحساب به حساب شماره‌ی ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت شعبه سه راه آزمایش (سرخه حصار) کد ۳۹۵ در وجه شرکت افست

۲. ارسال اصل رسید بانکی به همراه برگ تکمیل شده اشتراک

- **نام مجله :** ....
- **نام و نام خانوادگی:** ....
- **تاریخ تولد:** ....
- **میزان تحصیلات:** ....
- **تلفن:** ....
- **نشانی کامل پستی:**

استان: .... شهرستان: ....

خیابان: ....

....

پلاک: .... کدپستی: ....

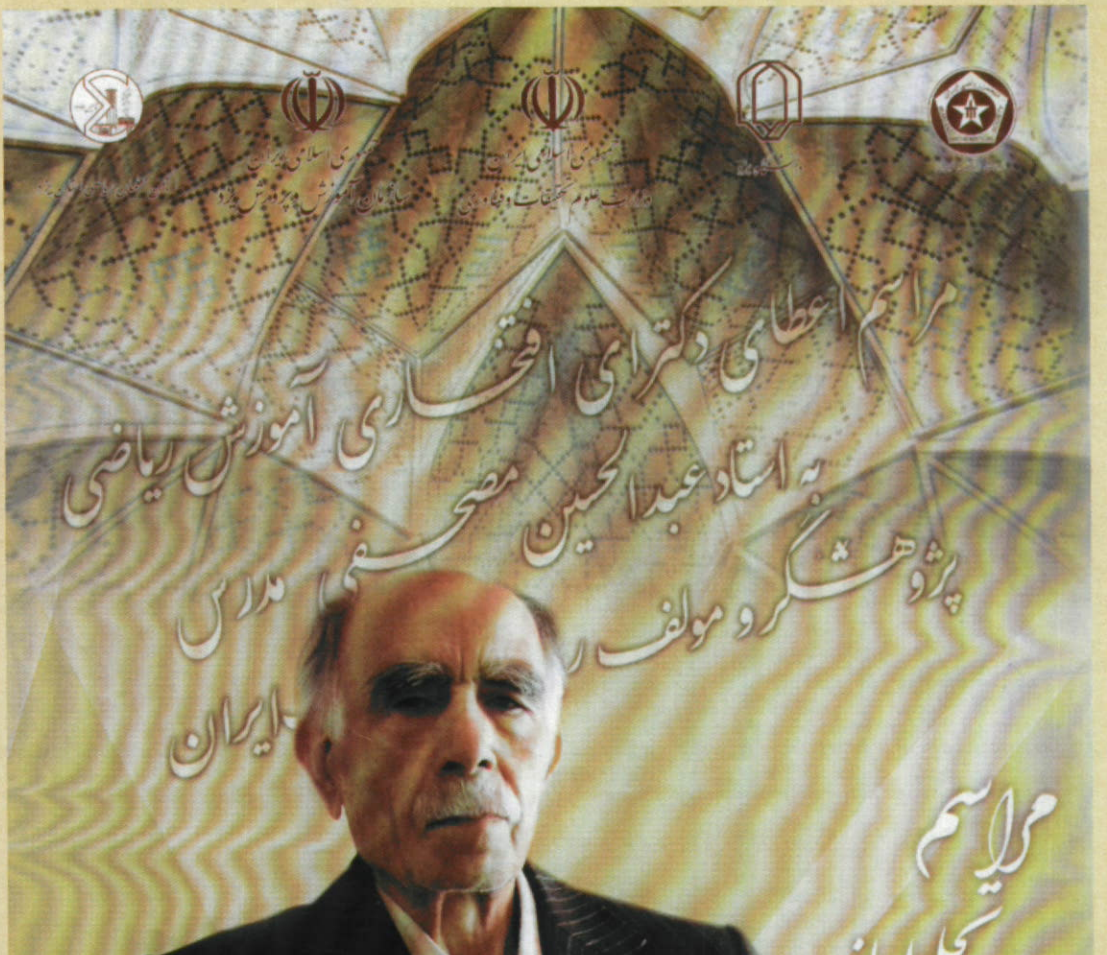
- **مبلغ واریز شده:** ....
- **شماره و تاریخ رسید بانکی:** ....
- **آیا مایل به دریافت مجله درخواستی به صورت پست پیشتاز هستید؟** بله ☐ خیر ☐

امضا:

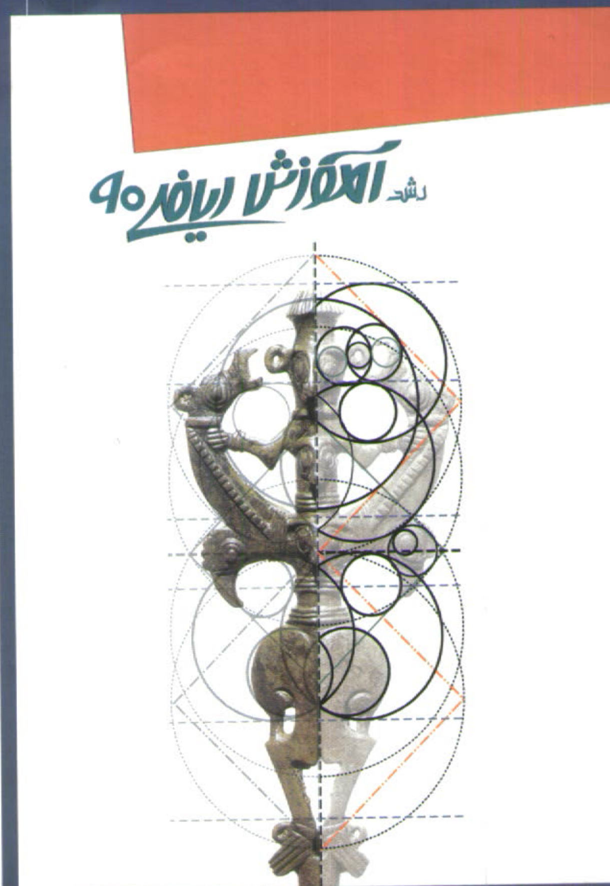
نشانی: تهران ـ صندوق پستی ۱۶۵۹۵/۱۱۱
نشانی اینترنتی: www.roshdmag.ir
پست الکترونیک: Email:info@roshdmag.ir
امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ـ۷۷۳۳۵۱۱۰
پیام گیر مجلات رشد: ۸۸۳۰۱۴۸۲ـ۸۸۸۳۹۲۳۲

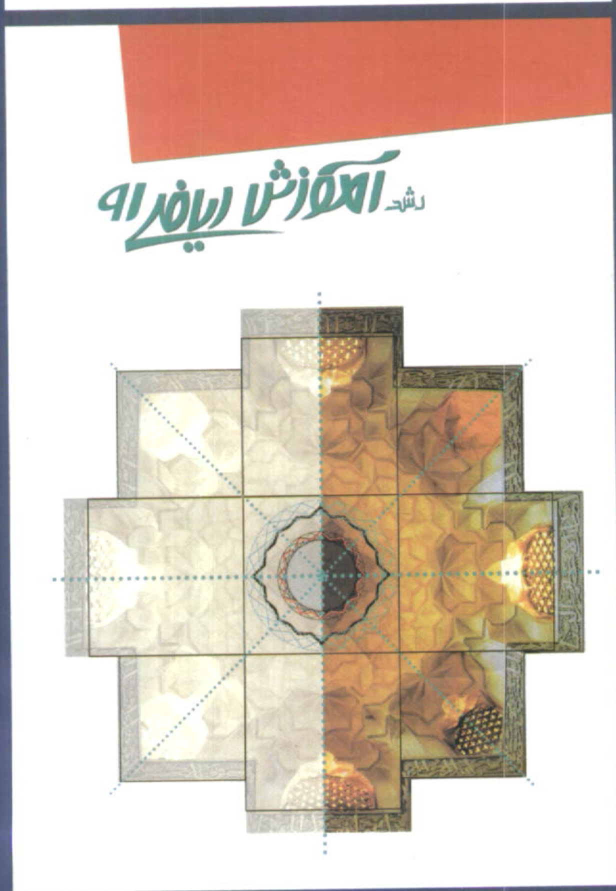
یادآوری:

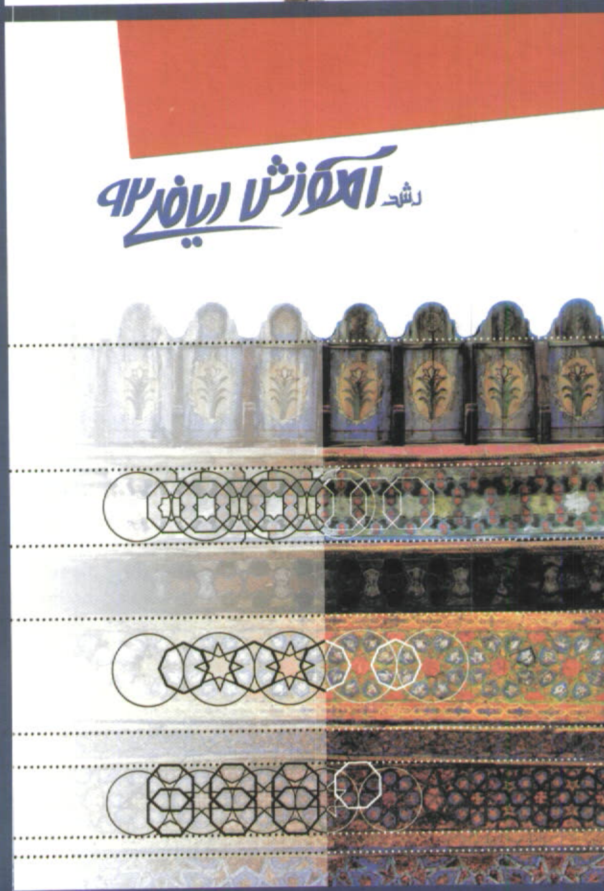
- هزینه برگشت مجله در صورت خوانا و کامل نبودن نشانی، بر عهده مشترک است.
- مبنای شروع اشتراک مجله از زمان وصول برگ اشتراک می‌باشد.
- برای هر عنوان مجله برگ اشتراک جداگانه تکمیل و ارسال کنید (تصویر برگ اشتراک نیز مورد قبول است)



گزارش این مراسم را در همین شماره ی مجله می خوانید.







مجله ی رشد آموزش ریاضی در سال گذشته