رشد برهان ۶۱

مجله‌ی ریاضی

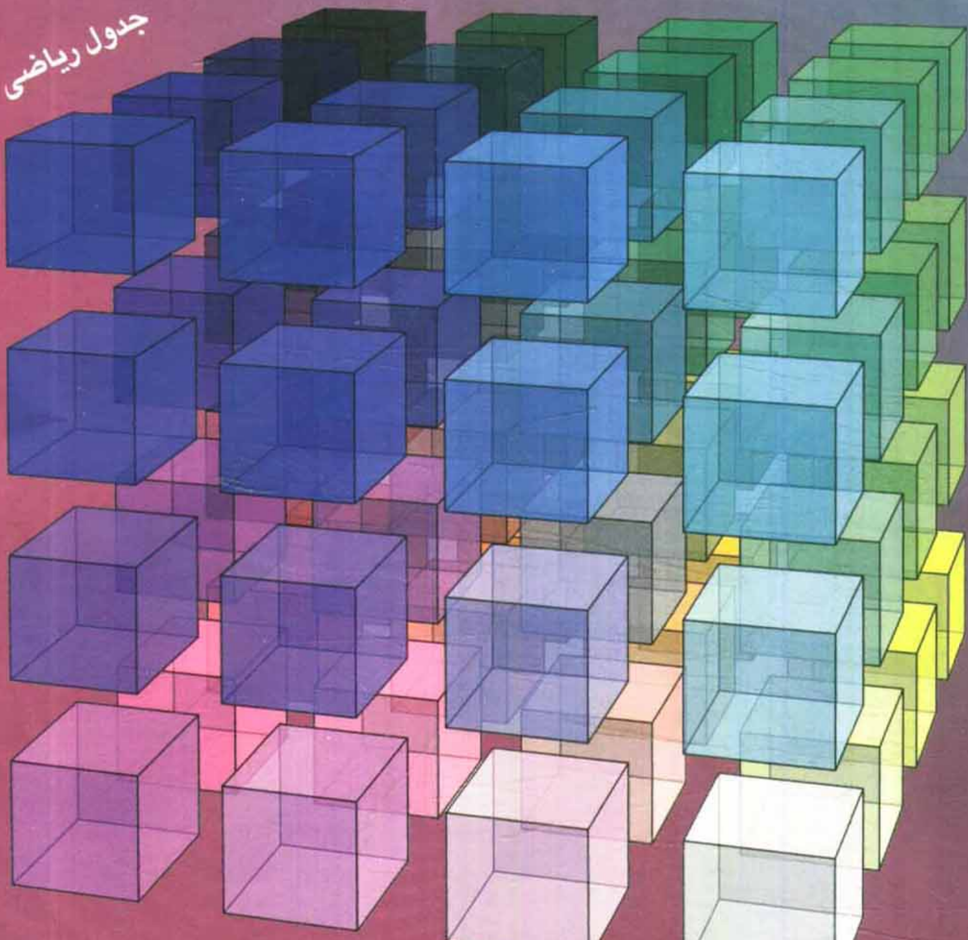
دوره ی متوسطه

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

فصلنامه ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

• دوره‌ی هجدهم • شماره‌ی ۳ • بهار ۱۳۸۸ • بها: ۴۰۰۰ ریال

ISSN:1735-4951
www.roshdmag.ir



• نامعادله های دو متغیره وکاربردهای آن

جدول ریاضی

• یادی از استاد اسدالله‌آل بویه

قضیه تقسیم و کاربرد های آن در Z

ثابت بن قرّه

ابوالحسن ثابت بن قرة بن زهر ون حرّانی
ریاضی دان و منجم حوزه‌ی علمی بغداد (۲۲۱ - ۲۸۸)

از مردم حرّان واقع در بین النهرین بود. در حدود سال ۲۲۱ به‌دنیا آمد. خانواده‌اش به نجوم و ریاضیات دلبستگی داشتند. زبان اصلی ثابت سریانی بود و زبان‌های یونانی و عربی را خوب می دانست. در جوانی در حرّان به شغل صرّافی اشتغال داشت. هنگامی که محمدبن موسی بن شاکر در حین مسافرت گذارش به حرّان افتاد با او آشنا شد و چون از وقوف او بر زبان‌های عربی و یونانی آگاه گردید او را با خود به بغداد برد. وی در تحت تعلیم و هدایت بنوموسی به تحصیل ریاضیات و نجوم ادامه داد و علم طب را نیز فرا گرفت و یکی از زبردست‌ترین دانشمندان و مترجمان عصر خود گردید.

آثار اقلیدس و ارشمیدس و اپولونیوس و ثاوذوسیوس و بطلمیوس و اوطوقیوس به‌دست خود او و یا زیرنظر او به عربی ترجمه شد. ترجمه‌های دیگران و از جمله اسحاق بن حنین را اصلاح کرد.

آثار ریاضی ثابت بن قره نقش مهمی در پیشرفت ریاضیات دوره‌ی اسلامی داشته است. نوشته‌های وی راه را برای اکتشافات بعدی مانند تعمیم مفهوم عدد صحیح به اعداد حقیقی مثبت و حساب انتگرال و مثلثات کروی و جز این‌ها هموار کرد. طریقه‌ی وی در تعیین مساحت سهمی و حجم سهمی‌وار بسیار جالب است. دستور زیر را برای محاسبه‌ی دسته‌ای از عددهای متحاب بیان و ثابت کرد:

«هرگاه $p = 3 \times 2^n - 1$ و $q = 3 \times 2^{n-1} - 1$ و $r = 9 \times 2^{2n-1} - 1$ بوده و p و q و r عددهای اول بزرگتر از ۲ باشند آن‌گاه عددهای $2^n pq$ و $2^n r$ متحاب خواهند بود.»

ثابت، علاوه بر این، طبیبی زبردست و در پایان عمرش از ملازمان خلیفه معتضد عباسی بود. وی به سال ۲۸۸ در بغداد درگذشت.

سنان بن ثابت پسر و ابراهیم بن سنان نوه‌ی او نیز از دانشمندان نامی بودند.

در حدود ۱۳۰ کتاب و رساله در طب و ریاضیات و نجوم به ثابت منسوب است. در این جا فقط از آثار ریاضی وی گفت‌وگو می شود.

تقسیم‌بندی آثار ریاضی ثابت بن قره

این آثار را به دو دسته می توان تقسیم کرد. دسته‌ی اول تألیفات خود اوست و دسته‌ی دوم آثار بعض ریاضی‌دانان یونان است که یا خود او به عربی ترجمه کرده و یا ترجمه‌ی دیگران را اصلاح کرده است.

الف. آثار ریاضی تألیف خود ثابت

۱. کتاب فی الشکل الملقب بالقطاع

همین کتاب با عنوان الشکل القطاع و النسب المؤلفه نیز وجود دارد و به زبان لاتینی ترجمه شده است. در ایران چند نسخه از آن موجود است.[۱]

۲. رساله الی المتعلمین فی النسبة المؤلفة

در سال ۱۹۶۶ به زبان روسی ترجمه شد. نسخه‌ای از آن در مدرسه‌ی سپهسالار هست.[۲]

۳. رساله فی (انه) کیف ینبغی ان یسلک الی نیل المطلوب من المعانی الهندسیه

۴. کتاب فی مساحة الاشکال المسطحه و المجسمه

فیلم آن در دانشگاه تهران موجود است.[۳]

۵. مقاله فی ان الخطین اذا أخرجا علی اقل من قائمتین التقیا

همین مقاله با عنوان زیر نیز موجود است:

کتاب فی انه اذا وقع خط مستقیم علی خطین مستقیمین فصیر الزاویتین التین فی جهة واحده اقل من قائمتین فان الخطین التقیا اذا اخرجا فی تلک الجهة[۴]

بقیه در صفحه ی ۳ جلد

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد برهان ۶۱
مجله ی ریاضی
دوره ی آموزش متوسطه
ISSN 1735 - 4951
فصلنامه ی آموزشی، تحلیلی واطلاع رسانی
دوره ی هجدهم /شماره ی۳/ بهار ۱۳۸۸/شمارگان: ۱۶۰۰۰ نسخه

www.roshdmag.ir
صندوق الکترونیکی سردبیر: Borhanm@roshdmag.ir
پیام گیر نشریات رشد: ۸۸۳۰۱۴۸۲-۸۸۸۳۹۲۳۲
◆ نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵ تلفن دفتر مجله: ۸۸۳۰۵۸۶۲
تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ _ ۷۷۳۳۵۱۱۰

رشد برهان متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش آموزان عزیز را در زمینه های زیر به همکاری دعوت می کند:

- نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی دوره‌ی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمه‌ی مقاله‌های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه‌ی علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش کامپیوتر و ...)

رشد برهان متوسطه هر سه ماه، یکبار منتشر می شود.
مجلّه در حکّ، اصلاح، حذف و اضافه ی مقاله ها آزاد است.
مقاله های وارده ،باید خوانا و حتی الامکان کوتاه باشد.
مقاله های رسیده مسترد نمی شود.
استفاده از مطالب مجلّه در کتاب ها یا مجله های دیگر با ذکر دقیق مأخذ بلامانع است.

یادداشت سردبیر

کتاب‌های درسی ما

مردم هر جامعه‌ای، برای رسیدن به قله‌های رفیع عزّت و افتخار تلاش می کنند و در جهت نیل به اهداف از پیش تعیین شده‌ی علمی، فرهنگی، اقتصادی، اجتماعی، آموزشی و ... برنامه‌ریزی کرده و می‌کوشند تا از همه‌ی امکانات پیرامون خود استفاده‌ی بهینه داشته باشند. کشور ایران اسلامی نیز از این قاعده مستثنا نیست و سند چشم‌انداز ۲۰ ساله نمایانگر همین مطلب است.

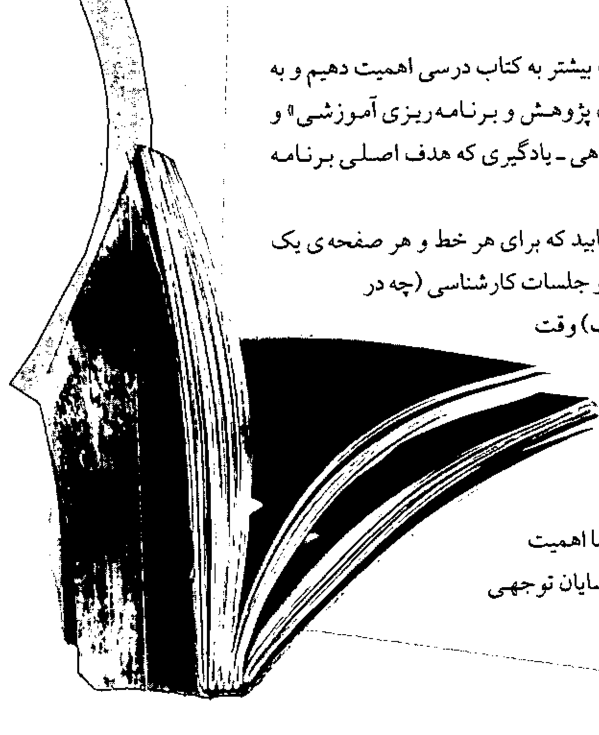
در این میان اولین نگاه مسئولین و دست‌اندرکاران و برنامه‌ریزان، به شما نوجوانان و جوانان عزیز، که آینده‌سازان این مرز و بوم هستید، می باشد.

از طرف دیگر، آموزش و پرورش به عنوان یکی از نهادهای مهم نظام جمهوری اسلامی ایران، عهده‌دار مسئولیت بسیار سنگین و پر اهمیت آموزش و تربیت است. تا جایی که به اعتقاد بسیاری از صاحب‌نظران، پایه و اساس هر گونه تغییر نگرش، فرهنگ‌سازی، تولید علم و خلاصه هر نوع زمینه‌سازی برای رسیدن به اهداف بلند یک ملت، در کلاس‌های درس (از پیش دبستان تا متوسطه) پی‌ریزی و محکم می‌شود. بر این اساس می باید از همه‌ی امکانات و وسایل آموزشی و کمک آموزشی به نحو شایسته بهره برد تا این امر به شکل مناسبی تحقق پیدا کند. چرخه‌ی آموزش در کشور ما از ارکان، اجزا و سازمان‌های متفاوت و متنوعی تشکیل یافته است که همگی در یک راستا و در طول یکدیگر عهده‌دار انجام این وظیفه‌ی سنگین می باشند.

یکی از ابزارهایی که نقش مهمی را در این چرخه ایفا می کند، کتاب درسی است که معلمین و دبیران محترم در کلاس درس آن را تدریس می کنند تا در نهایت اهداف آموزشی و تربیتی آن، در وجود شما عزیزان نهادینه شود و بتوانید در آینده از این آموزش‌ها بهره بگیرید و به اهداف فردی و اجتماعی برسید. محتوای کتاب درسی لازم است با رویکرد جامعه و نیازهای واقعی مخاطبین تدوین و بر اساس سند ملی برنامه‌ی درسی توسط کارشناسان و برنامه‌ریزان آموزش و پرور ش تهیه شود، این کتاب ها باید در برگیرنده و چکیده‌ی همه‌ی این نیازها (چه در ارتباط با کتاب‌های درسی قبل و بعد از خودش و چه در ارتباط با بحث‌های تربیتی و فرهنگ‌سازی اجتماعی) و هدف‌های آموزشی باشند.

بنابراین، وظیفه همه‌ی ما معلمین و شما دانش‌آموزان است که هر چه بیشتر به کتاب درسی اهمیت دهیم و به دنبال اعتلا بخشیدن به آن باشیم تا زحمات سازمان‌هایی هم‌چون «سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی» و کارشناسان این سازمان به نتیجه‌ی مطلوب بینجامد و در نهایت فرایند یاددهی ـ یادگیری که هدف اصلی برنامه درسی است، در بهترین حالت نمایان شود.

اگر در جریان جزئیات تألیف کتاب‌های درسی قرار بگیرید و آگاهی یابید که برای هر خط و هر صفحه‌ی یک کتاب درسی چه قدر زحمت کشیده می شود و چندین ساعت برنامه‌ریزی و جلسات کارشناسی (چه در شوراهای برنامه‌ریزی درسی و چه در کمیته‌های تخصصی و گروه‌های تألیف) وقت صرف می‌شود تا یک کتاب درسی به شکلی درآید که هم اکنون در اختیار شماست، بی‌شک سطر به سطر، صفحه به صفحه و تمرین به تمرین آن را به دقت مطالعه می‌کنید و باتأمل و تأنّی بیشتری مطالب آن را فرا خواهید گرفت.



بیایید از همین امروز کتاب‌های درسی را از این دریچه نگاه کنیم و به آن‌ها اهمیت بیشتری بدهیم. خواهید دید که در آینده نیز به پیشرفت درسی خود کمک شایان توجهی کرده‌اید و ان‌شاءالله موفقیت بیشتری کسب خواهید کرد.

والسلام

ریاضیات در ایران (۳)

• پرویز شهریاری

پیش از خوارزمی (محمد فرزند موسی)، اگر ارشمیدس و چند تن دیگر را به شمار نیاوریم، مردم یونان چیزی به فرهنگ انسانی اضافه نکردند؛ البته باید کسانی را هم که خارج از گود محسوب می‌شدند، اضافه کنیم. این‌ها هم بر خلاف یونانی‌ها، به مسئله‌های روزانه پرداختند. به همین دلیل، مردم آزاد یونان آن‌ها را نمی‌پذیرفتند. جامعه‌ی یونانی دوران بردگی را می‌گذراند و در نتیجه، آن‌چه کاربرد داشت، ویژه‌ی بردگان بود و از آن چیزی به ما نرسیده است.

ارشمیدس برده‌ای آزاد شده بود. به همین علت، آن‌چه آورده است جنبه‌ی کاربردی دارد. سر آخر هم، زمانی که رومی‌ها به یونان لشکر کشیدند و یک سرباز رومی به سرای ارشمیدس رفت، ارشمیدس مشغول نوشتن بود و چیز تازه‌ای کشف کرده بود. به همین دلیل به سرباز رومی گفت: به نوشته‌ی من کاری نداشته باش. سرباز هم او را کشت.

یونانی‌ها مقداری از دانسته‌های خود را از سرزمین بابل گرفته بودند. از آن‌جا که نوشته‌های بابلی روی خشت و آجر حک شده بودند، به‌تدریج از بین رفتند و تنها جزئی از آن‌ها باقی ماند. ولی یونانی‌ها که همه‌ی ریاضیات را شاخه‌ای از هندسه می‌پنداشتند توانستند در دوران طلایی خود، به بخشی از هندسه دست پیدا کنند؛ گرچه هیچ جا از کاربردهای این هندسه نام نمی‌برند.

یونانی‌ها برای عددها نشانه‌هایی نداشتند و از ۲۷ حرف الفبای خود استفاده می‌کردند. برای صفر هم علامتی نداشتند و عددنویسی آن‌ها، هنوز به شکل موضعی در نیامده بود.

در «میان دو رود» (اهالی بابل) و به صورت کمتر پیشرفته مردم عیلام، با روش موضعی عددنویسی آشنا بودند و با آن‌که در آن‌جا از مبنای ۶۰ در عددنویسی استفاده می‌کردند، ولی عددها را به خوبی می‌شناختند و در بابل برای صفر هم علامتی داشتند. در هر دو جا، برده‌داری حکومت می‌کرد؛ در یونان برده‌داری خصوصی و در بابل و عیلام برده داری دولتی.

وقتی از دموکراسی یونانی گفت‌وگو می‌شود، منظور مردم آزاد است که به کارهای مشخصی می‌پرداختند، ولی این دموکراسی شامل برده‌ها نمی‌شد. حساب به همین دلیل پیش نرفت، زیرا احتیاجی به آن نبود. بر سردر آکادمی افلاطون نوشته بودند «هرکس هندسه نمی‌داند، وارد نشود.» و منظور هندسه‌ای بود که هیچ کاربرد عملی نداشته باشد.

در چین، وجود «کتابی در نه باب» که در سده‌های اول و دوم پیش از میلاد تنظیم شده است، گواهی بر سابقه‌ی کار ریاضی‌دانان چینی و سنت‌های ریاضی چین است. پس از آن هم کار پیشرفت ریاضیات در چین متوقف شد. برای نمونه، تسته‌سه‌زی (نیمه‌ی دوم سده‌ی پنجم میلادی) توانست عدد π (یعنی نسبت طول محیط دایره بر طول قطر آن) را تا ۶ رقم درست دهدهی به‌دست آورد. نشانه‌های روشنی در دست است که ریاضی‌دانان چینی برای نخستین‌بار از شیوه‌ی نوشتن کسرهای دهدهی استفاده می‌کرده‌اند. سیانوتون (نیمه‌ی اول سده‌ی هفتم میلادی)، مسئله‌های هندسی را به یاری معادله‌ها حل می‌کرد و تا حل برخی از معادله‌های درجه‌ی سوم هم پیش رفت.

با همه‌ی این‌ها، بسیار بعید است که پیشرفت‌های ریاضی‌دانان چینی توانسته باشد، بر ریاضی‌دانان شرق میانه و نزدیک اثر گذاشته باشد. به ویژه هیچ نشانه‌ای در دست نداریم که برای نمونه، محمدبن موسی خوارزمی از همه یا بخشی از دستاوردهای چینیان آگاه باشد. نحوه‌ی بحث

و شیوه‌ی استدلال این ریاضی‌دان ایرانی هم، با روش کار چینی‌ها به کلی متفاوت است. بنابراین لزومی ندارد در این‌جا به بحث درباره‌ی سابقه‌ی ریاضیات چینی و شیوه‌ی کار آن‌ها بپردازیم.

ولی ایران و هند در بیشتر دوران تاریخ خود، رابطه‌ی فرهنگی داشته‌اند. برای نمونه از این موضوع آگاهیم که در دوران حکومت پارت‌ها، جمعی از مغ‌های سیستان به هندوستان رفتند و سنت‌های ریاضی و اخترشناسی را پایه گذاشتند و به «مغ - برهمن» مشهور شدند. به ظاهر براهماگوپتا، ریاضی‌دان هندی سده‌ی هفتم میلادی، از جمله‌ی این مغ - برهمن‌ها بوده است. آن‌ها بعدها به ایران بازگشتند و در «استخر» فارس، نوعی حکومت محلی تشکیل دادند که موجب سرکار آمدن ساسانیان شد. دست‌کم ترجمه‌ی «کلیله‌ودمنه» نشانه‌ای است از ارتباط فرهنگی ایران و هند در دوران ساسانی. این کتاب به‌وسیله‌ی دادبه پارسی (به ابن مقفع معروف است) از پهلوی به عربی برگردانده شد که تا امروز هم در دست ماست.

ابوریحان بیرونی، بعدها و در زمان **محمود غزنوی** و به فرمان او به هند رفت. ولی در زمانی که محمود مشغول گرفتن کشور و غارت اموال هندی‌ها بود، بیرونی به جمع دانشمندان هندی پیوست و سرانجام به رییس آن‌ها تبدیل شد. کتاب «ماللهند» بیرونی اگر نبود، از بسیاری از وقایع هندی سال‌های نخستین هجری و پیش از آن آگاه نبودیم. او «سانسکریت» را یاد گرفت و بسیاری از کتاب‌های خود را به سانسکریت ترجمه کرد. به جز آن، کتاب‌هایی را از سانسکریت به عربی برگرداند. او در تمامی حکومت محمود غزنوی نتوانست به میهن خود بازگردد و تنها در دوره‌ی حکومت مسعود بود که به سرزمین آبا و اجدادی خود بازگشت.

کار اصلی هندی‌ها که در واقع جهشی برای ریاضیات بود، کشف دستگاه موضعی عددنویسی دهدهی بود و انتخاب نمادی برای «هیچ» (یعنی صفر). دستگاه کنونی عددنویسی که در همه جای جهان پذیرفته شده است، از هند آغاز شد و سپس به ریاضی‌دانان شرق میانه و نزدیک رسید و از آن‌جا و به‌ویژه با انتشار کتاب «حساب» محمد، فرزند موسی خوارزمی، به همه‌ی جهان و اروپا رفت.

آریاتهاما، ریاضی‌دان هندی سده‌ی پنجم میلادی، از دستگاه دهدهی عددنویسی، کم و بیش به همان صورت امروزی استفاده می‌کرد و اگرچه نشانه‌های او برای نوشتن عددها، در طول زمان دچار دگرگونی شد، ولی در هر حال، بین نشانه‌های او و نشانه‌های امروزی، شباهت‌های زیاد وجود دارد.

هندی‌ها با شیوه‌ی شاعرانه‌ی خود، مسئله‌هایی را طرح و حل می‌کردند که به معادله‌های درجه‌ی اول و درجه‌ی دوم منجر می‌شدند و اگرچه در دوره‌های بعدی، عددهای منفی را هم می‌شناختند، ولی تنها به پاسخ مثبت معادله‌ها اکتفا می‌کردند و پاسخ‌های منفی را کنار می‌گذاشتند. هندی‌ها برای حل مسئله‌های خود، به جای حرف و علامت، از «روایت» استفاده می‌کردند و روش حل معادله‌ها را که گاه با هندسه هم مخلوط می‌شد، با شرح و بیان توضیح می‌دادند.

خوارزم

سرزمین خوارزم که امروز «خیوه» نام دارد، در بیشتر دوران‌های تاریخ بخشی از سرزمین ایران و به احتمال زیاد جایگاه تولد و رشد زرتشت بوده است. با وجود این، ما بحث کوتاه مربوط به خوارزم را به این مناسبت در این‌جا قرار داده‌ایم که زادگاه بسیاری از دانشمندان ایرانی هم‌چون ابوریحان بیرونی، **ابونصر فارابی**، ابن سینا و به‌ویژه محمدموسی خوارزمی بوده است.

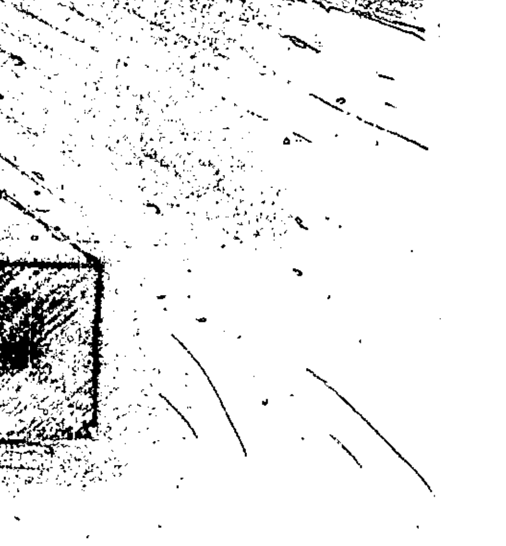
از خوارزم، در اوستا به «خواریزم» و در کتیبه‌ی بیستون به «خواریزمیش» نام برده شده است. برخی آن را همان سرزمین «آریا» می‌دانند که در اوستا با احترام از آن نام برده می‌شود. با همه‌ی پژوهش‌هایی که در این سال‌ها شده است، از تمدن، فرهنگ و زبان خوارزم چیز زیادی نمی‌دانیم؛ چرا که سرزمین خوارزم بارها و بارها مورد هجوم و قتل و غارت قرار گرفته است.

با همه‌ی این‌ها، مردم خوارزم توانستند خود را بازیابند و فرهنگ و سنت‌های خود را حفظ کنند. حتی هجوم سلجوقیان در سده‌ی پنجم هجری و حمله‌ی مغول و قتل‌عام مردم خوارزم در سده‌ی هفتم هجری نتوانست آن‌ها را به کلی نابود کند، ولی به‌تدریج زبان و خط و سنت‌های علمی فراموش شدند. حمله‌ی تیمور در سده‌ی هشتم هجری و قتل‌عام مردم خوارزم، به واقع تیر خلاصی بر این زبان و فرهنگ بود.

ولی در زمان محمدبن موسی خوارزمی در سده‌ی سوم هجری، بی‌تردید اثرها و سنت‌های علمی گذشته، کم‌وبیش در این‌جا و آن‌جا باقی مانده بود و به‌ویژه خوارزمی از این آثار و سنت‌های علمی نیز بهره‌ی فراوان برده است.

اروپای غربی

از مدت‌ها پیش از زوال مکتب اسکندریه، اروپای غربی در تاریکی جهل فرو رفته بود و با سقوط کامل مکتب اسکندریه در سده‌های سوم و چهارم میلادی، عنصرهای تفکر یونانی به تقریب به کلی از صحنه خارج شدند. فرماندهان و حکام تنها در فکر جنگ و در عین حال، ساختن کاخ‌های بزرگ بودند و رهبران آن‌ها تسلط خود را بر جامعه‌ی بی‌سواد و جدا شده از فرهنگ علمی گذشته، محکم می‌کردند. اسلحه و تعصب جای دانش را گرفت و جادوگران، فال‌بینان و شیادان، سرنوشت فرهنگی مردم را به‌دست گرفتند. کیمیاگری تنها شیوه‌ی پژوهش‌های علمی بود و در سراسر اروپای غربی، گروه‌های زیادی در حال تبدیل مس به طلا، تمامی زندگی و عمر خود را صرف می‌کردند. این عقیده رواج کامل داشت که: «نفوذ در طبیعت ممکن



نیست . »، «رازهای طبیعت را نمی‌توان شناخت» و در نتیجه، اندیشه‌های ضدعلمی جانشین ارزش‌های علمی شدند.

در این دوران، تنها جرقه‌هایی کوچک و اغلب از طرف رهبران دینی (چرا که علم و فلسفه تنها در اختیار آن‌ها بود) در ظلمت سده‌های نخستین دوران تاریک‌اندیشی اروپایی درخشید. از میان آن‌ها می‌توان از **آکلوین**[1] اهل «یورک» انگلستان نام برد که او را **آلبینوس**[2] هم نامیده‌اند. او در پایان سده‌ی هشتم میلادی کتاب‌هایی در حکمت الهی، فلسفه، دستور زبان و حساب نوشت.. نوشته‌های ریاضی او، با این‌که بسیار مقدماتی بودند، صدها سال تنها سرچشمه‌ی درسی برای علاقه‌مندان به شمار می‌رفتند.

ایران

کار ترجمه‌ی متن‌های علمی و فرهنگی از زبان‌های هندی و پهلوی که از زمان **منصور**، خلیفه‌ی دوم عباسی آغاز شده بود، در میان خلافت **هارون‌الرشید** و پسرش **مأمون** (که هم همسر ایرانی داشت و هم مادرش ایرانی بود) به اوج خود رسید و زمینه را برای رشد فرهنگ و از آن جمله ریاضیات، آماده کرد.

از مترجمان و دانشمندان ایرانی در این دوره، می‌توان سیاهه‌ی بزرگی ترتیب داد که در این‌جا تنها نام سه تن از نخستین مترجمان را می‌بریم:

● **یعقوب فرزند طارق** (مرگ در سال ۱۸۰ هجری قمری) در ترجمه‌ی کتاب «سید هاتنا» کوشید که یک کتاب هندی درباره‌ی اخترشناسی بود.

● **محمد فرزند ابراهیم فرازی** (مرگ در حدود سال ۱۸۵ هجری قمری) که کار ترجمه‌ی **سیدهاتنا** را از زبان سانسکریت به پایان رساند.

● **فضل فرزند نوبخت** «سیدهاتنا» را از پهلوی به عربی ترجمه کرد.

دادبه که بعد از مسلمان شدن، نام عبدالله را انتخاب کرد و به عبدالله فرزند مقفع مشهور شد، یکی از بزرگ‌ترین دانشمندان ایرانی خوانده شده است. او در سده‌ی اول هجری قمری تمام تلاش خود را در طول زندگی (که تنها ۳۶ سال بود) صرف ترجمه و تألیف اثرهایی در زمینه‌ی سنت‌های ایرانی کرد. کلیله و دمنه را از پهلوی به عربی ترجمه کرد و باب «برزویه‌ی حکیم» را به آن افزود. این باب یکی از زیباترین نوشته‌ها در نثر عربی است که ابن‌مقفع به واقع اندیشه‌های خود را در آن بیان داشته است. بسیاری اعتقاد دارند که او از هواداران نهضت شعوبی بود که بسیاری از بزرگان، سرداران و دانشمندان ایرانی را دربرمی‌گرفت. آن‌ها با قلم و شمشیر خود با خلیفه‌های اموی می‌جنگیدند. ابن‌مقفع اهل فارس بود و سرانجام به دستور خلیفه‌ی عباسی قطعه‌قطعه و به تنور آتش انداخته شد.

1. Acluin
2. Albinus

حد تابع (۲)

lim

احمد قندهاری

برای دانش آموزان سال سوم متوسطه و دوره‌ی پیش دانشگاهی

رشد برهان متوسطه / دوره‌ی هجدهم / شماره‌ی ۳ بهار ۱۳۸۸

اشاره

در شماره‌ی قبل مفاهیم حد چپ و راست تابع و حد تابع در یک نقطه بررسی شد و به قضایای حد اشاره کردیم، اینک ادامه مطلب را در پی می‌آوریم.

قضیه: به ازای هر x (برحسب رادیان) که $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ باشد، داریم:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

از این قضیه نتیجه می‌گیریم:

$$\lim_{x\to 0} \cos x < \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} < \lim_{x\to 0} 1$$

$$1 < \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} < 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

نتیجه (هم‌ارزی)

$$\begin{cases} \sin ax \sim ax \\ \tan ax \sim ax \end{cases} ;\ x \to 0$$ برحسب رادیان

$$\begin{cases} \sin u \sim u \\ \tan u \sim u \end{cases} ;\ u \to 0$$ برحسب رادیان

دو توابع هم‌ارز

دو تابع f و g را در a وقتی هم‌ارز گویند که:

مثال ۲. مطلوب است محاسبه‌ی

اولاً: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ یا ∞ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ یا ∞

(a می‌تواند هر عدد حقیقی یا $+\infty$ یا $-\infty$ باشد).

ثانیاً: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$

مثال: تابع f به معادله‌ی $f(x)=\sin 4x$ و تابع g به معادله‌ی $g(x)=4x$ را وقتی $x\to 0$ هم‌ارز گوییم، زیرا:

اولاً: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$

ثانیاً: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(f)x}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{4x}=1$

چند هم‌ارزی قابل استفاده در آزمون‌ها وقتی $x\to 0$

1) $\sin ax \sim ax$

2) $\tan ax \sim ax$

3) $\text{Arc}\sin ax \sim ax$

4) $\text{Arc}\tan ax \sim ax$

5) $1-\cos mx \sim \dfrac{m^2x^2}{2}$

6) $(x-\sin x) \sim \dfrac{1}{6}x^3$

7) $(x-\tan x) \sim -\dfrac{1}{3}x^3$

8) $(\tan x-\sin x) \sim \dfrac{x^3}{2}$

9) $(x-\text{Arc}\sin x) \sim -\dfrac{x^3}{6}$

10) $(x-\text{Arc}\tan x) \sim \dfrac{x^3}{3}$

11) $(x-\sin x-\dfrac{1}{6}x^3) \sim -\dfrac{x^5}{120}$

12) $(x-\tan x+\dfrac{1}{3}x^3) \sim -\dfrac{2x^5}{15}$

13) $ax^n_{(n\in N)}+bx^{n-1}+\cdots+tx \sim tx$

14) $ax^n_{(n\in N)}+bx^{n-1}+\cdots+tx+u \sim u$

مثال: مطلوب است محاسبه‌ی این حدها:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x.\tan 5x}{2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2x)(5x)}{2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10x^2}{2x^2}=5$

2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{2\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{2\sin^2 x}}{2\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{2x^2}}{2(2x)}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{2}|x|}{4x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{2}|x|}{4x}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

3) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{1-\cos 4x}}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{2\sin^2 2x}}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{2}x}{\sqrt{2(2x)^2}}$

$=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{2}x}{\sqrt{8x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{2}x}{2\sqrt{2}|x|}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{2(-x)}=-\dfrac{1}{2}$

رفع ابهام مسئله از حالت $\frac{0}{0}$

اگر در محاسبه‌ی حد یک کسر به حالت $\frac{0}{0}$ برخوردیم، برای تعیین حد از روش‌های زیر استفاده می‌کنیم (فرض می‌کنیم $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{0}{0}$):

۱. عبارت $f(x)$ و $g(x)$ را تجزیه می‌کنیم تا عامل $(x-a)$ در آن‌ها ظاهر شود. پس از حذف این عامل از صورت و مخرج، حد تابع به‌دست می‌آید.

مثال ۱. مطلوب است محاسبه‌ی حد زیر.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+4x-5}{x^4+x-2}=\frac{0}{0}$$

حل: الف) برای تجزیه‌ی صورت و مخرج، هر کدام را بر $(x-1)$ تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{array}{r|l} x^3+4x-5 & x-1 \\ \hline 0 & x^2+x+5 \end{array}\qquad \begin{array}{r|l} x^4+x-2 & x-1 \\ \hline 0 & x^3+x^2+x+2 \end{array}$$

$x^3+4x-5=(x-1)(x^2+x+5)$

$x^4+x-2=(x-1)(x^3+x^2+x+2)$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+4x-5}{x^4+x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+5)}{(x-1)(x^3+x^2+x+2)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+5}{x^3+x^2+x+2}=\frac{1+1+5}{1+1+1+2}=\frac{7}{5}$$

۲. اگر $f(x)$ یا $g(x)$ یا هر دو عبارت‌های رادیکالی باشند،

صورت و مخرج را در عبارت مناسبی ضرب می‌کنیم تا صورت و مخرج کسر قابل تجزیه، بدون رادیکال شود. آن‌گاه بنا به شماره‌ی ۱، آن‌ها را تجزیه می‌کنیم تا حد تابع به‌دست آید.

مثال ۲. مطلوب است محاسبه‌ی حد:

$$A = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{2}}$$

حل:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{2}} = \frac{0}{0}$$

صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم:

$$A = \lim_{x \to 1} \frac{(x^2 - 4x + 3)(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{2})}{(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{2})(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{2})}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x^2 - 4x + 3)(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{2})}{x^2 + x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x-3)(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{2})}{(x-1)(x+2)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-3)(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{2})}{x+2}$$

$$= \frac{-2(\sqrt{2} + \sqrt{2})}{3} = -\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

مثال ۳. مطلوب است محاسبه‌ی

$$B = \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{20}}$$

حل:

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{20}} = \frac{0}{0}$$

صورت و مخرج را هم در مزدوج صورت و هم در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم.

$$B = \lim_{x \to 4} \frac{(\sqrt{2x+1} - 3)(\sqrt{2x+1} + 3)(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{20})}{(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{20})(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{20})(\sqrt{2x+1} + 3)}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{(2x + 1 - 9)(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{20})}{(x^2 + x - 20)(\sqrt{2x+1} + 3)}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{2(x-4)(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{20})}{(x-4)(x+5)(\sqrt{2x+1} + 3)}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{2(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{20})}{(x+5)(\sqrt{2x+1} + 3)} = \frac{2(\sqrt{20} + \sqrt{20})}{9(\sqrt{9} + 3)}$$

$$B = \frac{4\sqrt{20}}{54} = \frac{2\sqrt{20}}{27} = \frac{8\sqrt{5}}{27}$$

مثال ۴. مطلوب است محاسبه‌ی حد:

$$C = \lim_{x \to 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt{x} - 2\sqrt{2}}$$

حل:

$$\lim_{x \to 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt{x} - 2\sqrt{2}} = \frac{2 - 2}{\sqrt{8} - 2\sqrt{2}} = \frac{0}{0}$$

داریم:

$$a - b = (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{ab})$$

درباره‌ی صورت کسر، از اتحاد بالا استفاده می‌کنیم و درباره‌ی مخرج، از اتحاد مزدوج.

$$C = \lim_{x \to 8} \frac{(\sqrt[3]{x} - 2)(\sqrt[3]{x^2} + 4 + 2\sqrt[3]{x})(\sqrt{x} + 2\sqrt{2})}{(\sqrt{x} - 2\sqrt{2})(\sqrt{x} + 2\sqrt{2})(\sqrt[3]{x^2} + 4 + 2\sqrt[3]{x})}$$

$$= \lim_{x \to 8} \frac{(x-8)(\sqrt{x} + 2\sqrt{2})}{(x-8)(\sqrt[3]{x^2} + 4 + 2\sqrt[3]{x})} = \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} + 2\sqrt{2}}{\sqrt[3]{x^2} + 4 + 2\sqrt[3]{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{8} + 2\sqrt{2}}{\sqrt[3]{64} + 4 + 2\sqrt[3]{8}} = \frac{4\sqrt{2}}{4 + 4 + 4} = \frac{4\sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

۳. اگر عبارت $f(x)$ یا $g(x)$ یا هر دو مثلثاتی باشند، آن‌ها را به حاصل‌ضرب تبدیل می‌کنیم. سپس از هم‌ارزی‌های مثلثاتی استفاده می‌کنیم. در غیر این صورت، از تبدیل‌ها و فرمول‌های مثلثاتی استفاده می‌کنیم.

مثال ۵. مطلوب است محاسبه‌ی حد:

$$D = \lim_{x \to a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$$

حل:

$$\lim_{x \to a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \frac{0}{0}$$

صورت را به حاصل‌ضرب تبدیل می‌کنیم:

$$D = \lim_{x \to a} \frac{2\cos\frac{x+a}{2} . \sin\frac{x-a}{2}}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{2\cos\frac{x+a}{2}\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \cos\frac{x+a}{2} = \cos\frac{a+a}{2} = \cos a$$

می‌دانیم که: $x \to a;\ \sin\frac{x-a}{2} \sim \frac{x-a}{2}$

مثال ۶. مطلوب است محاسبه‌ی حد $E=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x\sin x^2}$

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x\sin x^2}=\frac{0}{0}$$

$$E=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\frac{\sin x}{\cos x}}{x\sin x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x\text{conx}-\sin x}{\cos x}}{x\sin x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x.\cos x-\sin x}{x\cos x.\sin x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x(1-\cos x)}{x\cos x.\sin x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x(2\sin^2\frac{x}{2})}{x\cos x.\sin x^2}\sim\lim_{x\to 0}\frac{-x(2\times\frac{x^2}{4})}{x.\cos x(x^2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{2}}{x^3\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}}{\cos x}=\frac{-\frac{1}{2}}{1}=-\frac{1}{2}$$

توجه: در حل این مسئله، از هم‌ارزی ۸ هم می‌توان استفاده کرد.

مثال ۷. مطلوب است محاسبه‌ی حد:

$$F=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$$

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}=\frac{0}{0}$$

کسر را در مزدوج صورت ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$F=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x})(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}{x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\tan x-1-\sin x}{x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$F=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x-\sin x\cos x}{\cos x}}{x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin x\cos x}{x^3\cos x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(2\sin^2\frac{x}{2})}{x^3\cos x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$\sim\lim_{x\to 0}\frac{x(2\times\frac{x^2}{4})}{x^3\cos x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{2}}{x^3\cos x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}}{\cos x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1(\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0})}=\frac{\frac{1}{2}}{1+1}=\frac{1}{4}$$

توجه: در حل این مسئله هم می‌توان از هم‌ارزی ۸ استفاده کرد.

تمرین: حدهای زیر را بیابید.

۱) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}$

۲) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^5+x-2}{x^4+x-2}$

۳) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\cos 4x}}{\sin 4x}$

۴) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-1}$

حدهای نامتناهی

۱. اگر تابع f در یک همسایگی محذوف a، تعریف شده باشد و وقتی $x \to a^+$، مقدار f(x) مرتباً بزرگ و بزرگ‌تر شود، به‌طوری که وقتی x از سمت راست به a خیلی نزدیک شود، مقدار f(x) بی‌هیچ محدودیتی افزایش یابد، در این صورت می‌گوییم: حد تابع $+\infty$ است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$$

۲. در صورتی که با نزدیک شدن x از سمت راست به a، مقدار f(x) بدون هیچ محدودیتی کاهش یابد، می‌گوییم: وقتی $x \to a^+$، حد تابع $-\infty$ است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$

۳. چنان‌چه با نزدیک شدن x به a از سمت چپ، مقدار f(x) بی‌هیچ محدودیتی افزایش یابد، در این صورت می‌گوییم: وقتی $x \to a^-$، حد تابع $+\infty$ است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$$

۴. اگر با نزدیک شدن x به a از سمت چپ، مقدار f(x) بی‌هیچ محدودیتی کاهش یابد، در این صورت می‌گوییم: وقتی $x \to a^-$، حد تابع $-\infty$ است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$$

نکته‌ی مهم: $+\infty$ یا $-\infty$ عدد نیستند، بلکه نشان می‌دهند که مقدار تابع بی‌هیچ محدودیتی افزایش یا کاهش می‌یابد (در واقع باید گفت، تابع حد مشخصی ندارد).

تعریف: اگر $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ را در نظر بگیریم، این حد بدین معنی است که می‌توان f(x) را از هر عدد مثبت بزرگی، بزرگ‌تر انتخاب کرد؛ به شرطی که x را به اندازه‌ی کافی به a نزدیک کنیم.

چنان‌چه $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ را در نظر بگیریم، این حد بدین معنی است که می‌توان f(x) را از هر عدد منفی کوچکی، کوچک‌تر انتخاب کرد؛ به شرطی که x را به اندازه‌ی کافی به a نزدیک کنیم.

نکته: اگر k یک عدد حقیقی مثبت باشد، داریم $(n \in N)$:

$$\lim_{x\to a^+} \frac{k}{(x-a)^{2n-1}} = +\infty \qquad \lim_{x\to a^-} \frac{k}{(x-a)^{2n-1}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to a^+ \text{ یا } a^-} \frac{k}{(x-a)^{2n}} = +\infty$$

چنان‌چه k یک عدد حقیقی منفی باشد، داریم $(n \in N)$:

$$\lim_{x\to a^+} \frac{k}{(x-a)^{2n-1}} = -\infty \qquad \lim_{x\to a^-} \frac{k}{(x-a)^{2n-1}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to a^+ \text{ یا } a^-} \frac{k}{(x-a)^{2n}} = -\infty$$

مثال ۱: می‌دانیم $\lim_{x\to 1} \frac{4}{(x-1)^2} = +\infty$. اگر بخواهیم $\frac{4}{(x-1)^2} > 40000$ باشد، x را چه‌قدر باید به عدد ۱ نزدیک کنیم؟

حل: در دو طرف نامساوی را معکوس می‌کنیم. درنتیجه جهت نامساوی عوض می‌شود:

$$\frac{4}{(x-1)^2} > 40000$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{4} < \frac{1}{40000}$$

از دو طرف ریشه‌ی دوم می‌گیریم:

$$\frac{|x-1|}{2} < \frac{1}{200} \Rightarrow |x-1| < \frac{1}{100}$$

یعنی x را باید آن‌قدر به عدد ۱ نزدیک کنیم تا $|x-1|$ کمتر از $\frac{1}{100}$ باشد.

مثال ۲. می‌دانیم $\lim_{x\to 2} \frac{-2}{(x-2)^2} = -\infty$. اگر بخواهیم $\frac{-2}{(x-2)^2} < -8\times 10^6$ باشد، x را چه‌قدر باید به عدد ۲ نزدیک کنیم؟

حل دو طرف نامساوی را در ۱- ضرب می‌کنیم:

$$\frac{-2}{(x-2)^2} < -8\times 10^6$$

$$\Rightarrow \frac{2}{(x-2)^2} > 8\times 10^6 \Rightarrow \frac{1}{(x-2)^2} > 4\times 10^6$$

معکوس می‌کنیم:

$$\Rightarrow (x-2)^2 < \frac{1}{4\times 10^6} \xrightarrow{\text{ریشه‌ی دوم}} |x-2| < \frac{1}{2000}$$

یعنی x را آن‌قدر باید به عدد ۲ نزدیک کنیم تا $|x-2|$ کمتر از $\frac{1}{2000}$ باشد.

مثال ۳. مطلوب است محاسبه‌ی حدهای زیر:

۱) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}} \tan x$

حل: این حد را به ناچار در دو حالت بررسی می‌کنیم:

الف) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi^+}{۲}} \tan x = \lim\limits_{x\to\frac{\pi^+}{۲}} \frac{\sin x}{\cos x} \to \frac{\sin\frac{\pi^+}{۲}}{\cos\frac{\pi^+}{۲}} \to \frac{۱}{۰^-} \to -\infty$

(منظور از علامت $\to$ میل کردن در حالت حدی است)

ب) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi^-}{۲}} \tan x = \lim\limits_{x\to\frac{\pi^-}{۲}} \frac{\sin x}{\cos x} \to \frac{\sin\frac{\pi^-}{۲}}{\cos\frac{\pi^-}{۲}} \to \frac{۱}{۰^+} \to +\infty$

۲) $\lim\limits_{x\to ۰} \cot x$

الف) $\lim\limits_{x\to ۰^+} \cot x = \lim\limits_{x\to ۰^+} \frac{\cos x}{\sin x} \to \frac{\cos ۰^+}{\sin ۰^+} \to \frac{۱}{۰^+} \to +\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰^-} \cot x = \lim\limits_{x\to ۰^-} \frac{\cos x}{\sin x} \to \frac{\cos ۰^-}{\sin ۰^-} \to \frac{۱}{۰^-} \to -\infty$

۳) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{\sin(x+\frac{\pi}{۴})}{\cos ۲x}$

الف) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi^+}{۴}} \frac{\sin(x+\frac{\pi}{۴})}{\cos ۲x} \to \frac{\sin\frac{\pi^+}{۲}}{\cos\frac{\pi^+}{۲}} \to \frac{۱}{۰^-} \to -\infty$

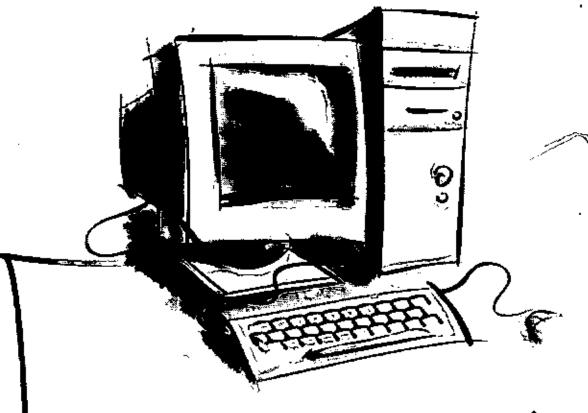
ب) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi^-}{۴}} \frac{\sin(x+\frac{\pi}{۴})}{\cos ۲x} \to \frac{\sin\frac{\pi^-}{۲}}{\cos\frac{\pi^-}{۲}} \to \frac{۱}{۰^+} \to +\infty$

۴) $\lim\limits_{x\to ۱^-} \frac{x^۲-۴x}{(x-۱)^۳} \to \frac{۱-۴}{(۰^-)^۳} \to \frac{-۳}{۰^-} \to +\infty$

۵) $\lim\limits_{x\to ۴^-} \frac{x^۲+۲x+۴}{(x-۴)^۲} \to \frac{۱۶+۸+۴}{(۰^-)^۲} \to \frac{۲۸}{۰^+} \to +\infty$

۶) $\lim\limits_{x\to -۱^-} \frac{-۲x+۱}{(x+۱)^۵} \to \frac{۲+۱}{(۰^-)^۵} \to \frac{۳}{۰^-} \to -\infty$

ادامه دارد...



معرفی سایت‌های ریاضی جهان

• احسان یارمحمدی

اسم سایت: **Algebra**

آدرس اینترنتی سایت: **http://www.algebra.com**

این سایت کمک‌هایی را در قالب تکالیف منزل، به‌وسیله‌ی استاد راهنمای ریاضی که به‌صورت رایگان در این سایت خدمت می‌کند، در اختیار علاقه‌مندان قرار می‌دهد. در ضمن، هر بخش این سایت شامل درس‌ها و مسئله‌های حل شده، به‌همراه مکانی برای ارسال مسائل ریاضی خود به قسمت استاد راهنمای ریاضی آن است. در این قسمت، از هر چهار مسئله‌ی ارسال‌شده توسط کاربران، سه مسئله به وسیله‌ی استاد راهنمای ریاضی پاسخ داده می‌شود. به‌علاوه، بیشتر بخش‌های این سایت یک بایگانی دارد که دربرگیرنده‌ی مسائل حل شده به‌وسیله‌ی استاد راهنمای ریاضی است.

در ادامه، چهار قسمت اصلی سایت **Algebra** را به همراه عنوان‌های آن ارائه می‌کنیم:

■ **جبر مقدماتی (Pre-Algebra)**

● کسرهای عددی **(Numeric Fractions)**

● اعداد اعشاری، توانی از ۱۰، گرد کردن
(Decimal Numbers, Power of 10, Rounding)

● اعمال به وسیله‌ی اعداد علامت‌دار
(OPerations with Signed Numbers)

● توان‌ها و اعمال روی توان‌ها
(Exponents and Operations on Exponents)

● بخش‌پذیری و اعداد اول
(Divisibility and Prime Numbers)

● اعمال وارون برای جمع و ضرب متقابل
(Inverse Operations for Addition and Multipication Reciprocals)

● ارزش‌یابی عبارات، پرانتزها
(Evaluation of Expressions, Parentheses)

ادامه در صفحه ی ۳۳

نامعادله‌های ۲ متغیره و کاربردهای آن‌ها

برای دانش‌آموزان سال سوم متوسطه

● میرشهرام صدر

اشاره

با حل نامعادله‌های یک متغیره در سال‌های قبل آشنا شده‌اید؛ نامعادله‌های یک متغیره‌ی درجه‌ی اول مانند:

$$\frac{۳}{۲}x-۲\leq\frac{۴}{۵}-\frac{۲}{۷}x \quad ; \quad ۲x+۵\geq ۰$$

و نامعادله‌های یک متغیره‌ی درجه‌ی دوم مانند:

$$۲x^۲+۳x-۵>۰ \quad ; \quad (m-۱)^۲\leq ۲m(m-۱)$$

کمی فراتر از نامعادله‌های بالا، می‌توان به نامعادله‌های یک متغیره شامل عبارات گویا، گنگ، نمایی، لگاریتمی و مثلثاتی[1] اشاره کرد؛ مانند:

$$\frac{-x^۲+۳x+۱۰}{x^۳-۱}>۰ \quad ; \quad \frac{۱}{\sqrt{۳-x}}>\frac{۱}{x-۲}$$

$$۷^{۳x-۱}\geq ۹^{۲-x}; \quad \log_x(x+۱)\leq\log_{\frac{۱}{x}}(۲-x)$$

$$\sqrt{۳}\tan x\geq ۲\sin x$$

مجموعه‌ی جواب هریک از نامعادله‌های یک متغیره بالا، مجموعه‌ای شامل نقاط روی محور اعداد حقیقی است. در این مقاله با نامعادله‌هایی دو متغیره مانند:

$$x+y\leq ۹ \text{ ، } y^۲\leq ۴x \text{ و } x^۲+y^۲<۲۵$$

آشنا می‌شویم و روش به دست آوردن مجموعه‌ی جواب این نامعادله‌ها را که قسمتی از صفحه‌ی مختصات است، بررسی می‌کنیم.

صورت کلی هر نامعادله‌ی دو متغیره به یکی از شکل‌های $f(x,y)\geq ۰$ ، $f(x,y)\leq ۰$ ، $f(x,y)>۰$ و $f(x,y)<۰$ است و مجموعه جواب هریک از این نامعادله‌ها، زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^۲$ (صفحه‌ی مختصات) است.

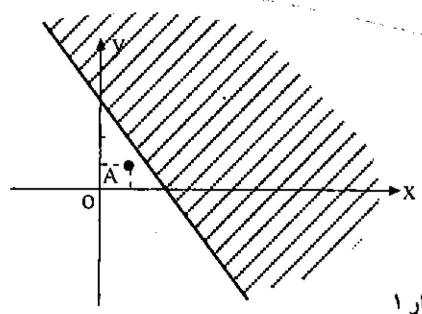
برای حل هریک از نامعادله‌های دو متغیره‌ی قبل، ابتدا نمودار $f(x,y)=۰$ را رسم و ملاحظه می‌کنیم که این نمودار صفحه مختصات را به چند ناحیه تقسیم می‌کند. برای به‌دست آوردن مجموعه جواب نامعادله، کافی است مختصات یک نقطه‌ی دل‌خواه از هر ناحیه را در نامعادله قرار دهیم. چنان‌چه نامعادله به یک نابرابری همیشه درست تبدیل شد، ناحیه‌ای که شامل آن نقطه است، مجموعه جواب نامعادله را تشکیل می‌دهد.

تذکر: مجموعه جواب نامعادله‌های $f(x,y)\geq ۰$ یا $f(x,y)\leq ۰$ شامل نقاط روی نمودار $f(x,y)=۰$ است، درحالی‌که

مجموعه جواب نامعادله‌های $f(x,y)>0$ یا $f(x,y)<0$ شامل نقاط روی نمودار $f(x,y)=0$ نیست. برای مثال، برای یافتن مجموعه جواب نامعادله $3x+2y\ge 6$، ابتدا نمودار خط به معادله‌ی $3x+2y=6$ را رسم می‌کنیم. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، این نمودار صفحه‌ی مختصات ($\mathbb{R}^2$) را به سه ناحیه تقسیم می‌کند که عبارت‌اند از: ۱. مجموعه نقاط روی خط؛ ۲. مجموعه نقاط طرف راست خط؛ ۳. مجموعه نقاط طرف چپ خط.

$3x+2y=6$

x	0	2
y	3	0



نمودار ۱

اکنون برای این‌که تشخیص دهیم، کدام طرف خط، مجموعه جواب نامعادله است، مختصات یک نقطه‌ی دل‌خواه از $\mathbb{R}^2$ مانند $A(1,1)$ را در نامعادله قرار می‌دهیم:

$$A(1,1)\in \mathbb{R}^2 \Rightarrow 3\times 1+2\times 1\ge 6 \Rightarrow 5\ge 6$$

چون نابرابری آخر نادرست است، بنابراین طرفی از خط که شامل نقطه‌ی $(1,1)$ نیست، مجموعه جواب نامعادله است. هم‌چنین با توجه به تذکری که گذشت، مجموعه جواب نامعادله شامل نقاط روی خط به معادله‌ی $3x+2y=6$ است.

مثال: نمودار هریک از نامعادله‌ها را در صفحه‌ی xOy مشخص کنید:

۱) $2x-4\ge 0$ ۲) $3x-2<x+1$

۳) $3y-9\le 0$ ۴) $5(y-1)>2y+7$

۵) $x-y\ge 0$ ۶) $-x-2y\le -4$

۷) $x^2+y^2\ge 9$ ۸) $y^2<4x$

۹) $(x^2+y^2-9)(y^2-4x)>0$ ۱۰) $\begin{cases} x+y\le 9 \\ 5x+3y\ge 30 \\ 5y\ge x \\ 2y\le x \end{cases}$

حل:

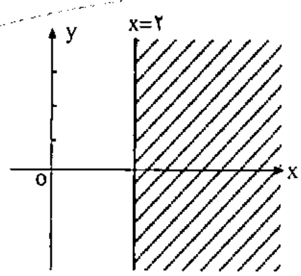
۱. ابتدا نمودار خط به معادله‌ی $2x-4=0$ را رسم می‌کنیم:

$$2x-4=0\Rightarrow x=2$$

می‌دانیم که نمودار خط به معادله‌ی $x=2$، خطی است که در نقطه‌ای به طول ۲ عمود بر محور xهاست. اکنون مختصات یک نقطه‌ی دل‌خواه مانند $O(0,0)$ را در نامعادله قرار می‌دهیم:

$$O(0,0)\in \mathbb{R}^2 \Rightarrow 2\times 0-4\ge 0\Rightarrow -4\ge 0$$

چون نابرابری آخر نادرست است، بنابراین طرفی از خط که شامل نقطه‌ی $O(0,0)$ نیست، مجموعه‌ی جواب نامعادله است، هم‌چنین، مجموعه جواب نامعادله شامل نقاط روی خط به معادله‌ی $x=2$ است.



نمودار ۲

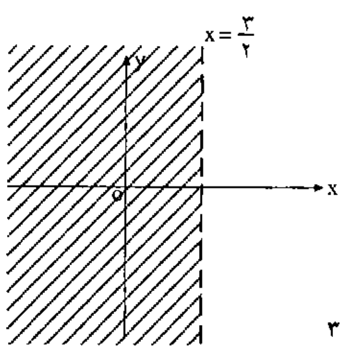
۲.

$$3x-2<x+1\Rightarrow 2x<3\Rightarrow x<\frac{3}{2}$$

ابتدا خط به معادله‌ی $x=\frac{3}{2}$ را رسم می‌کنیم و سپس مختصات نقطه‌ای دل‌خواه مانند $O(0,0)$ را در نامعادله قرار می‌دهیم:

$$O(0,0)\in \mathbb{R}^2 \Rightarrow 0<\frac{3}{2}$$

چون نابرابری آخر درست است، بنابراین طرفی از خط که نقطه‌ی O را شامل می‌شود، مجموعه جواب نامعادله است. باید توجه داشته باشیم که مجموعه جواب نامعادله شامل نقاط روی خط به معادله‌ی $x=\frac{3}{2}$ نیست.



نمودار ۳

۳. ابتدا خط به معادله‌ی $3y-9=0$ را رسم می‌کنیم:

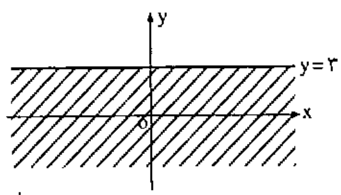
$$3y-9=0\Rightarrow y=3$$

می‌دانیم که نمودار خط به معادله‌ی $y=3$، خطی است که در

نقطه‌ای به عرض ۳ عمود بر محور yهاست. اکنون مختصات یک نقطه‌ی دلخواه، مانند $O(0,0)$ را در نامعادله قرار می‌دهیم:

$O(0,0)\in \mathbb{R}^2 \Rightarrow 3\times 0-9\le 0 \Rightarrow -9\le 0$

چون نابرابری آخر درست است، بنابراین طرفی از خط که نقطه‌ی O را شامل می‌شود، مجموعه جواب نامعادله است. هم‌چنین، مجموعه جواب نامعادله شامل نقاط روی خط به معادله‌ی $y=3$ است.



نمودار ۴

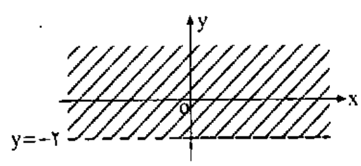
۴.

$5(y-1)>2y-11 \Rightarrow y>-2$

ابتدا خط به معادله‌ی $y=-2$ را رسم می‌کنیم. سپس مختصات نقطه‌ای دل‌خواه مانند $O(0,0)$ را در نامعادله قرار می‌دهیم:

$O(0,0)\in \mathbb{R}^2 \Rightarrow 0>-2$

چون نابرابری آخر درست است، بنابراین طرفی از خط که نقطه‌ی O را شامل می‌شود، مجموعه جواب نامعادله است، هم‌چنین مجموعه جواب نامعادله شامل نقاط روی خط به معادله‌ی $y=-2$ نیست.



نمودار ۵

۵. ابتدا نمودار خط به معادله‌ی $x-y=0$ را رسم می‌کنیم:

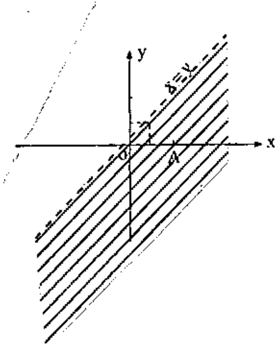
$x-y=0$

x	۰	۱
y	۰	۱

اکنون مختصات نقطه‌ای دل‌خواه مانند $A(2,0)$ را در نامعادله قرار می‌دهیم:

$A(2,0)\in \mathbb{R}^2 \Rightarrow 2-0\ge 0 \Rightarrow 2\ge 0$

چون نابرابری آخر درست است، بنابراین طرفی از خط که نقطه‌ی $A(2,0)$ را شامل می‌شود، مجموعه جواب نامعادله است. هم‌چنین مجموعه جواب نامعادله شامل نقاط روی خط به معادله‌ی $x-y=0$ است.



نمودار ۶

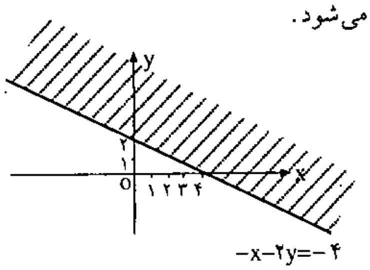
۶.

$-x-2y=-4$

x	۰	۴
y	۲	۰

$O(0,0)\in\mathbb{R}^2 \Rightarrow 0\le -4$ نقطه‌ی دل‌خواه

چون نابرابری آخر نادرست است، بنابراین طرفی از خط که شامل نقطه‌ی O نیست، مجموعه جواب نامعادله است. هم‌چنین، مجموعه جواب نامعادله شامل نقاط روی خط به معادله‌ی $-x-2y=-4$ می‌شود.

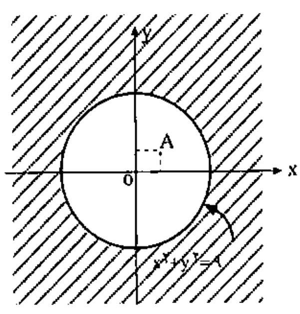


نمودار ۷

۷. ابتدا نمودار دایره‌ی $x^2+y^2=9$ را رسم می‌کنیم. می‌دانیم که این معادله، معادله‌ی یک دایره به مرکز $O\begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix}$ و شعاع $r=\sqrt{9}=3$ است. سپس مختصات یک نقطه‌ی دل‌خواه مانند $A(1,1)$ را در نامعادله قرار می‌دهیم:

$A(1,1)\in\mathbb{R}^2 \Rightarrow 1^2+1^2\ge 9 \Rightarrow 2\ge 9$

چون نابرابری آخر نادرست است، بنابراین ناحیه‌ای که شامل نقطه‌ی $A(1,1)$ نیست، مجموعه جواب نامعادله است. هم‌چنین، مجموعه جواب نامعادله شامل نقاط روی دایره به معادله‌ی $x^2+y^2=9$ می‌شود.



نمودار ۸

تذکر: به طور کلی مجموعه جواب نامعادله‌ی $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2>R^2$، مجموعه نقاط بیرون دایره به مرکز $O'\begin{vmatrix}\alpha\\\beta\end{vmatrix}$ و شعاع R است و مجموعه جواب نامعادله‌ی $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2<R^2$، مجموعه نقاط درون دایره به مرکز $O'\begin{vmatrix}\alpha\\\beta\end{vmatrix}$ و شعاع R است.

۸. ابتدا نمودار سهمی $y^2=4x$ را به کمک نقطه‌یابی رسم می‌کنیم:

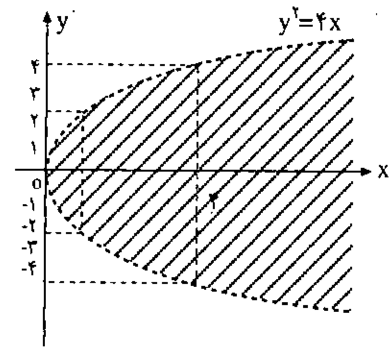
$y^2 = 4x$

x	۴	۱	۰	۱	۴
y	۴-	۲-	۰	۲	۴

اکنون مختصات نقطه‌ای دل‌خواه مانند $A(1,0)$ را در نامعادله قرار می‌دهیم:

$A(1,0) \in \mathbb{R} \Rightarrow 0^2 < 4\times 1 \Rightarrow 0 < 4$

چون نابرابری آخر درست است، بنابراین ناحیه‌ای که شامل نقطه‌ی $A(1,0)$ است، مجموعه جواب نامعادله محسوب می‌شود. هم‌چنین، مجموعه جواب نامعادله شامل نقاط روی سهمی به معادله‌ی $y^2 = 4x$ نیست.



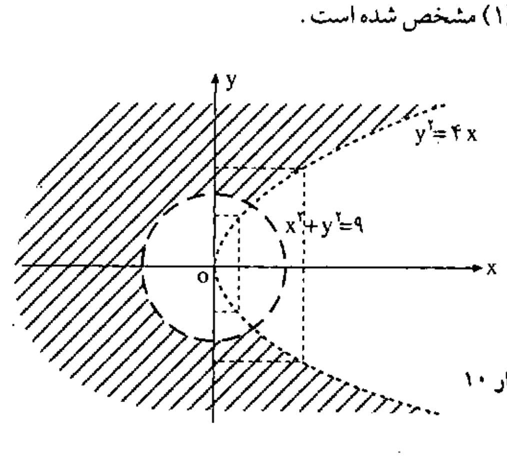
نمودار ۹

۹. برای حل نامعادله‌ی $(x^2+y^2-9)(y^2-4x) > 0$ باید اجتماع مجموعه جواب‌های دو دستگاه زیر را به‌دست آوریم:

$$\begin{cases} x^2+y^2-9>0 \\ y^2-4x>0 \end{cases} (1) \quad ; \quad \begin{cases} x^2+y^2-9<0 \\ y^2-4x<0 \end{cases} (2)$$

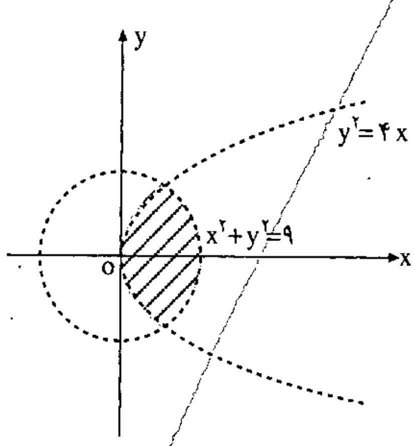
ابتدا مجموعه جواب دستگاه (۱) را به‌دست می‌آوریم:

مجموعه جواب نامعادله‌ی $x^2+y^2>9$، مجموعه نقاط بیرون دایره به معادله‌ی $x^2+y^2=9$ و مجموعه جواب نامعادله‌ی $y^2>4x$، مجموعه نقاط بیرون سهمی به معادله‌ی $y^2=4x$ است؛ اشتراک مجموعه جواب‌های دو نامعادله‌ی دستگاه (۱)، مجموعه جواب این دستگاه است. در شکل زیر مجموعه جواب دستگاه (۱) مشخص شده است.



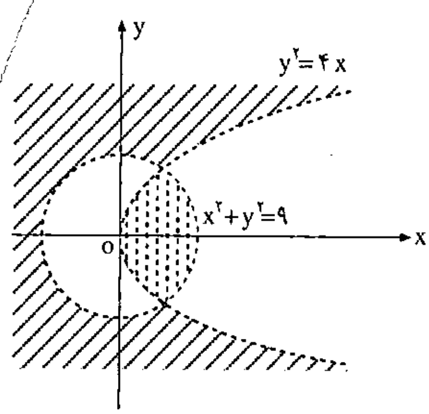
نمودار ۱۰

اکنون مجموعه جواب دستگاه(۲) را به‌دست می‌آوریم: مجموعه جواب نامعادله $x^2+y^2<9$، مجموعه نقاط درون دایره به معادله‌ی $x^2+y^2=9$ و مجموعه جواب نامعادله‌ی $y^2<4x$، مجموعه نقاط درون سهمی به معادله‌ی $y^2=4x$ است؛ اشتراک مجموعه جواب‌های دو نامعادله‌ی دستگاه (۲)، مجموعه جواب این دستگاه است. در شکل زیر مجموعه جواب دستگاه (۲) مشخص شده است.



نمودار ۱۱

نمودار زیر که از اجتماع مجموعه جواب‌های دو دستگاه (۱) و (۲) به دست آمده، مجموعه جواب نامعادله‌ی $(x^2+y^2-9)(y^2-4x)>0$ است.



نمودار ۱۲

۱۰.
$$\begin{cases} x+y \le 9 \\ 5x+3y \ge 30 \\ 5y \ge x \\ 2y \le x \end{cases}$$

برای حلّ این دستگاه، ابتدا خط‌ها به معادله‌های زیر را رسم می‌کنیم:

$L_1: x+y=9$;

x	۰	۹
y	۹	۰

$L_2: 5x+3y=30$;

x	۰	۶
y	۱۰	۰

$L_3: 5y=x$;

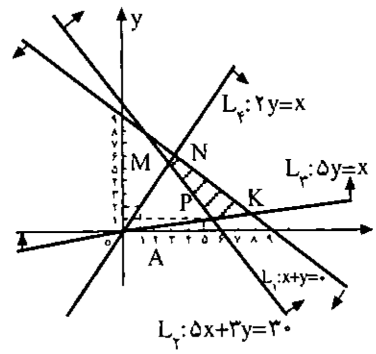
x	۰	۵
y	۰	۱

$L_4: 2y = x \;;\; \begin{array}{c|cc} x & 0 & 2 \\ \hline y & 0 & 1 \end{array}$

اکنون برای این که تشخیص دهیم، کدام طرف خط، مجموعه جواب نامعادله است، مختصات یک نقطه‌ی دل‌خواه از $\mathbb{R}^2$، مانند $A(2,0)$ را در نامعادله‌ها قرار می‌دهیم:

$$A(2,0) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \begin{cases} 2+0 \leq 9 \Rightarrow 2 \leq 9 \\ 5\times 2 + 3\times 0 \geq 30 \Rightarrow 10 \ngeq 30 \\ 5\times 0 \geq 2 \Rightarrow 0 \ngeq 2 \\ 2\times 0 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq 2 \end{cases}$$

مجموعه جواب دستگاه بالا، چهارضلعی MNPK است.



نمودار ۱۳

کاربردهای نامعادله‌های دو متغیره

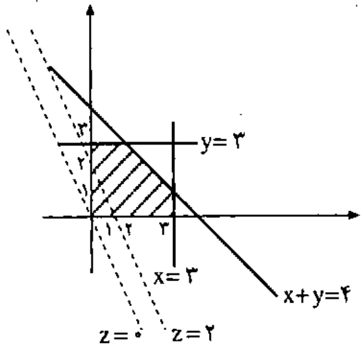
نامعادله‌های دو متغیره و تعیین مجموعه‌ی جواب آن‌ها به صورت هندسی، کاربردهای فراوانی در مباحث گوناگون دارد. از آن جمله در اقتصاد، مدیریت و برنامه‌ریزی، عمده‌ی این کاربردها حول بحث بهینه‌سازی سیستم‌ها با محدودیت است. «برنامه‌ریزی خطی» یا همان «بهینه‌سازی خطی»، روشی در ریاضیات است که به پیدا کردن مقدار مینی‌مم (کمینه) یا ماکزی‌مم (بیشینه) از یک تابع دو متغیره (تابع هدف) روی یک چند ضلعی محدب می‌پردازد. این چندضلعی‌های محدب، در حقیقت نمایش نموداری تعدادی محدودیت از نوع معادله‌های خطی دو متغیره است. برای روشن‌تر شدن بحث به ذکر چند مسئله می‌پردازیم.

مسئله‌ی ۱. دو متغیر مثبت x و y در نابرابری‌های دستگاه نامعادلات زیر صدق می‌کنند:

$$\begin{cases} x+y \leq 4 \\ x \leq 3 \\ y \leq 3 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

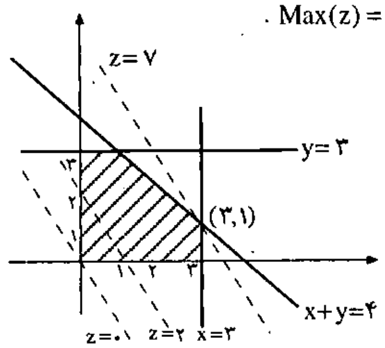
ماکزی‌مم تابع با ضابطه‌ی $z = f(x,y) = 2x + y$ را به ازای x و yهایی که در شرایط نامعادله‌های بالا صدق می‌کنند، به‌دست آورید.

بدیهی است که هدف، یافتن حداکثر مقدار z به ازای x و yهایی است که در تمام نامعادله‌ها صدق کنند. برای حل این مسئله روش‌های جبری نیز وجود دارند، ولی روش هندسی روشن‌تر و ساده‌تر است. به این منظور نمودار هندسی دستگاه نامعادله‌ها را رسم می‌کنیم. مختصات تمامی نقاط واقع در پنج‌ضلعی هاشور خورده و روی مرزهای آن در تمام نامعادله‌ها صدق می‌کنند. اما تابع دو متغیره‌ی z به لحاظ هندسی با تغییر z یک دسته خطوط را با شیب $m = -2$ مشخص می‌کند که دو تا از آن‌ها به ازای $z = 0$ و $z = 2$ رسم شده‌اند.



نمودار ۱۴

هرچه این دسته خطوط از مبدأ مختصات دور شوند، نقاط روی آن‌ها که در شرایط نامعادله‌ها صدق می‌کنند، مقدار بیشتری از z را به دست می‌دهند و لذا با انتقال این خطوط به دورترین نقاط محدوده‌ی فوق که بهترین شرایط را برای z ایجاد می‌کنند، مختصات مورد نظر را به دست می‌آوریم. باید دقت کرد که در این انتقال، خط حاصل از محدوده‌ی هاشور خورده نگذرد و بر محدوده‌ی فوق مماس شود که نقطه‌ی تماس (یکی از گوشه‌های محدوده‌ی مورد نظر است) جواب مطلوب محسوب می‌شود. مطابق شکل زیر، مختصات این نقطه که محل برخورد دو خط به معادله‌های $x = 3$ و $x + y = 4$ است، به صورت $(x,y) = (3,1)$ معلوم می‌شود و روشن است که به ازای این دو مقدار: $\mathrm{Max}(z) = 7$.

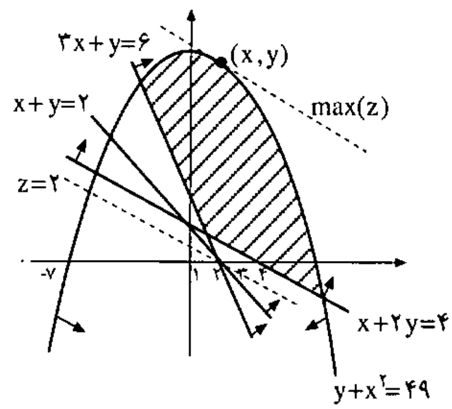


نمودار ۱۵

مسئله‌ی ۲. ماکزی‌مم $z = x + 2y$ را که در شرایط دستگاه نامعادلات زیر صدق می‌کند، به‌دست آورید:

$$\begin{cases} x+y \geq 2 \\ x+2y \geq 4 \\ 3x+y \geq 6 \\ y+x^2 < 49 \end{cases}$$

حل : ابتدا محدوده‌ی مورد نظر را به دست می‌آوریم. سپس یکی از خطوط مربوط به تابع هدف را، مثلاً به ازای $z = 2$ رسم می‌کنیم. آن‌گاه با انتقال موازی باید این خط را به دورترین نقطه‌ی محدوده فرستاد و بر محدوده‌ی فوق مماس کرد که در شکل این کار انجام شده است. اکنون کافی است مختصات نقطه‌ی تماس را به‌دست آوریم.



نمودار ۱۶

برای این کار باید مختصات نقطه‌ای را بر منحنی به معادله‌ی $y + x^2 = 49$ تعیین کرد که مماس بر منحنی در آن‌جا با خط به معادله‌ی $x + 2y = 2$ موازی باشد؛ یعنی شیب آن مساوی $-\frac{1}{2}$ باشد. می‌دانیم که مشتق تابع در هر نقطه، ضریب زاویه (شیب) مماس بر آن را به‌دست می‌دهد. پس مشتق تابع با ضابطه‌ی $y + x^2 = 49$ را می‌گیریم و مساوی $-\frac{1}{2}$ قرار می‌دهیم:

$$y = 49 - x^2; y' = -2x \Rightarrow -2x = -\frac{1}{2}; x = \frac{1}{4}$$

$$y + \frac{1}{16} = 49 \quad y = 48\frac{15}{16} \quad ; \quad Max(z) = 98\frac{1}{8}$$

بدیهی است که برای مینی‌مم کردن تابع دو متغیره‌ی z به شیوه‌ی فوق با انتقال موازی باید دسته‌ی خطوط را حتی‌الامکان به مبدأ مختصات نزدیک‌تر کرد.

تمرین: نمودار هر یک از نامعادله‌های زیر را در صفحه‌ی xOy مشخص کنید:

۱) $3(x-1) \geq -2x + 4$

۲) $\frac{2x-3}{2} \leq 3x - 2$

۳) $1 \leq 2y - 3 \leq 5$

۴) $\frac{4-3y}{5} \geq 2$

۵) $-x + 2y \geq 4$

۶) $y^2 - 2x < 0$

۷) $y \geq 4x^2 + 8x + 1$

۸) $|x + 2y| \leq 8$

۹) $2x^2 + 2y^2 - 32 \leq 0$

۱۰) $x^2 + y^2 - 2x - 2y \geq 2$

۱۱) $3y - x \leq 6$

۱۲) $x^2 - 2y \geq 0$

۱۳) $y < \frac{x+1}{x-1}$

۱۴) $(x^2 + y^2 - 4)(y - x^2) < 0$

نمودار مجموعه جواب هر یک از دستگاه‌های زیر را در صفحه‌ی xOy مشخص کنید:

۱) $\begin{cases} x + y \geq 6 \\ x + y \leq 8 \\ 0 \leq x \leq 5 \\ 0 \leq y \leq 30 \end{cases}$

۲) $\begin{cases} x + y \leq 10 \\ 4 \leq y \leq 7 \\ 2 \leq x \leq 6 \\ y \leq 7 - x \end{cases}$

۳) $\begin{cases} 5x + 4y \geq 20 \\ 4x + 5y \geq 20 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

۴) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 \\ x > 0 \\ y > 0 \\ x - y \geq 0 \end{cases}$

۵) $\begin{cases} y \geq x^2 \\ x \geq y^2 \end{cases}$

۶) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ y \geq x^2 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$

ماکزی‌مم یا مینی‌مم تابع هدف z را در هر یک از موارد زیر با شرایط داده شده به‌دست آورید:

۱) $\begin{cases} Max(z) = 2x + y \\ 2x + 3y \leq 6 \\ x + y \geq 1 \\ y \geq 1 \\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$

۲) $\begin{cases} Min(z) = x + y \\ 2x + y \geq 3 \\ x + 2y \geq 4 \\ x \geq 0 , \ y \geq 0 \\ 2x + 3y \geq 6 \end{cases}$

۳) $\begin{cases} Max(z), \ Min(z) = 2x + 3y \\ x + y \leq 3 \\ 2x + y \leq 4 \\ 0 \leq x \leq 2 \\ y \geq 1 \end{cases}$

۴) $\begin{cases} Max(z) = y - x^2 \\ x + y \geq 3 \\ x^2 + y^2 \leq 16 \\ x \geq 0 , \ y \geq 0 \end{cases}$

---

۱. برای اطلاعات بیشتر درباره‌ی حل نامعادله‌ها، به کتاب کوچک ریاضی نابرابرها و نامعادله‌ها از «انتشارات مدرسه» مراجعه کنید.

---

۱. معادلات و نامعادلات، ترجمه و تدوین ابراهیم دارابی، انتشارات مبتکران.
۲. معادله و نامعادله، نوشته‌ی والدی و اسیوویچ و اویلف و همکاران، ترجمه‌ی پرویز شهریاری، انتشارات مدرسه.

یادی از استاد اسدالله آل بویه

● دکتر احمد شرف‌الدین

زنده‌یاد دکتر اسدالله آل‌بویه، استاد گران‌قدر ریاضی، سال‌ها در دانش‌سرای عالی و دانشکده‌ی علوم دانشگاه تهران، هندسه عالی تدریس می‌کرد. آل‌بویه تاکنون چند کتاب ارزنده در زمینه‌ی هندسه تدوین کرده است. وی در فرانسه تحصیل کرده بود و به همراه زنده‌یاد دکتر محسن هشترودی، استاد گران‌قدر ریاضی، از شاگردان الی کارتان بودند. الی کارتان (۱۹۵۱-۱۸۶۹) از ریاضی‌دانان بزرگ جهان بود که سال‌ها در دانشگاه «سربن» تدریس می‌کرد و تحقیقات مهمی در هندسه و نظریه‌ی گروه‌ها دارد.

هشترودی و آل‌بویه پس از فراگیری مقدمات ریاضی برای ورود به دوره‌ی دکترا، خواستند زیرنظر کارتان به تحقیقات ریاضی دوره‌ی دکترا بپردازند. کارتان به منظور سنجش توانایی آن‌ها برای تحقیقات در ریاضی، به آن‌ها مسائلی از هندسه‌ی خالص داد و با وقت کاملاً کافی. کارتان استعداد آن‌ها را براساس راه‌حل‌هایی که عرضه کرده بودند، پسندید و آنان را برای انجام تحقیقات زیرنظر خود پذیرفت.

استاد آل‌بویه در مسائلی که برای حل به دانشجویان می‌داد، علاوه بر به کارگیری نظریه‌ی گروه‌ها، متغیر مختلط و...، به حل با قضایای هندسه‌ی خاص توجه خاص داشت. این که افلاطون، هندسه را برای آموختن فلسفه بسیار لازم می‌دانست، از این جهت است که فلسفه فرمول ندارد و فکر استدلالی می‌خواهد (بر سر در مدرسه‌ی افلاطون نوشته شده بود: هر کس هندسه نمی‌داند به این مدرسه داخل نشود). بسیاری از بزرگان دانش، هندسه را وسیله‌ی مناسبی برای پرورش فکر می‌دانند. پاسکال (۱۶۶۲-۱۶۲۳)، یکی از بزرگ‌ترین نوابغ جهان چنین می‌گوید: «ما به تجربه دریافته‌ایم، بین افرادی که هوش برابر دارند و در همه چیز یکسان‌اند، آن که بر هندسه تسلط دارد، برتر است و قدرت ذهنی کاملاً نویی دارد.»

کانت (۱۷۲۴-۱۸۰۴)، فیلسوف بزرگ آلمانی نیز می گوید: «فلسفه یاد گرفتن اندیشه‌ها نیست، فلسفه یاد گرفتن اندیشیدن است.» ملاحظه می کنیم که کانت برای استدلال و تفکر ارزش والایی قائل است و کسب محفوظات را علم محسوب نمی‌دارد. در آموزش ضروری است که استدلال مورد توجه کاملِ آموزنده باشد. آموزش‌هایی که صرفاً بر محفوظات متکی باشند، چندان اثری در تقویت فکر ندارند. توضیح و استدلال در آموزش، به‌تدریج در محصلان لذت تفکر به‌وجود می‌آورد. لذت تفکر عالی‌ترین لذت‌هاست و اثر بسیار عمیقی در وارسته کردن انسان دارد؛ چرا که تفکر مداوم، توجه انسان را به درک حقایق بیشتر می کند و او را به سوی قناعت می‌برد.

معلمی که با توضیح کافی و استدلال‌های دقیق به‌طور مداوم علم را تبیین می کند و بدین سان لذت فراگیرندگان را از تفکر افزایش می‌دهد، نقش بسیار مهمی در پرورش اخلاقی آنان دارد؛ چرا که بر وارستگی آنان می‌افزاید. افزون بر این، هنگامی که فکر دانش‌آموز با استدلال‌های پیوسته پرورش یابد و از فکر کردن لذت ببرد، به مطالعه به‌طور خودآموز می‌پردازد و خود، معلم خویش می‌شود و همواره به مطالعه ادامه می‌دهد.

❊ ❊ ❊

درس استاد آل‌بویه تنها هندسه نبود، بلکه گهگاه به ذکر مسائلی از جامعه می‌پرداخت. او عاشق فرهنگ و تمدن ایران بود. همواره در کلاس و در خارج از کلاس، به مناسبت‌های گوناگون درباره‌ی شکوه تمدن ایران و خدمات بزرگان ایران سخن می گفت. در این مختصر، از دو گفته‌ی ایشان یاد می کنم:

● استاد آل‌بویه، پیش از آن که در پاریس افتخار شاگردی کارتان را پیدا کند، در شهر نانسی تحصیل می کرد. آل‌بویه برای ما دانشجویان اظهار داشت که او و دو دانشجوی ایرانی دیگر، در امتحانات پایان سال دانشگاه نانسی شاگرد اول شدند و این موفقیت جالب ایرانی‌ها در روزنامه‌ی محلی با عنوان «ایرانیان را بشناسیم» چاپ شد. در آن روزنامه چاپ شده بود که سه تن از دانشجویان ایرانی، در سه رشته‌ی متفاوت، در میان دانشجویان دانشگاه نانسی شاگرد اول شده‌اند.

آل‌بویه افزود که پس از چند روز که در خدمت استاد ریاضی خود بودم، یک دانشجوی فرانسوی هم که در حضور استاد بود، از استاد پرسید: «چه‌طور آل‌بویه که ایرانی است، شاگرد اول شده و هیچ کدام از دانشجویان فرانسوی شاگرد اول نشده‌اند؟» استاد جواب داد: «ایرانیان ملتی باهوش‌اند، اما در طی تاریخ به کرّات مورد حمله‌ی بیگانگان قرار گرفته‌اند. با وجود این، دانشمندان، فیلسوفان و شاعران بزرگی از آن سرزمین برخاسته‌اند. اگر ایرانیان مورد تهاجم‌های بسیار سخت بیگانگان قرار نمی گرفتند، درخشندگی بیشتری از خود نشان می‌دادند.»

● از جمله پندهای بسیار ارزشمند استاد آل‌بویه این بود: فرزندان خود را چنان تربیت کنید که نسبت به آموزگار همواره احساسات و رفتار احترام‌آمیز داشته باشند. در این مورد، یکی از مثال‌های آل‌بویه چنین بود که اگر دریافتید، آموزگار مسئله‌ای را درست حل نکرده است، به هیچ‌وجه به فرزند نگویید که آموزگار مسئله را درست حل نکرده است؛ بلکه بگویید یک راه‌حل دیگر هم وجود دارد. آن‌گاه راه‌حل درست را که می‌دانید، به فرزند بیاموزید. من نصیحت استاد آل‌بویه را همواره به کار برده‌ام و از به کار بردن نصیحت ایشان بسیار لذت برده‌ام.

روح آن استاد بزرگوار شاد باشد و خدمات علمی شاگردانش گسترده باد.

رویکرد هندسی - رویکرد جبری در آموزش هندسه (۶)

● محمدهاشم رستمی

اشاره

یکی از مهم‌ترین پیوندها و اتصال‌ها در همه‌ی ریاضیات، اتصال و پیوند بین هندسه و جبر است.

در این شماره نیز (از استانداردهای NCTM) این اتصال و ارتباط را در سه بعد (فضا) بررسی می‌کنیم.

نکته‌ی مهم: ضمن بررسی رویکرد هندسی - رویکرد جبری در آموزش هندسه، برخی راهبردهای مهم برای حل مسئله‌های هندسه را مطرح می‌کنیم.

راهبرد تحدید یا کوچک‌کردن مسئله

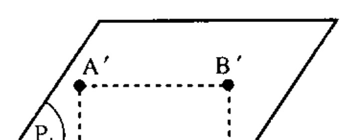
یکی از راهبردهای مهم و کارا برای حل مسئله‌ها، راهبرد تحدید یا کوچک کردن مسئله‌ی داده شده است. درباره‌ی این راهبرد بیشتر صحبت خواهیم کرد. اکنون به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۶. مجموعه‌ی صفحه‌هایی را تعیین کنید که سه نقطه‌ی ثابت A، B و C از هریک از آن‌ها به یک فاصله باشند.

حل:

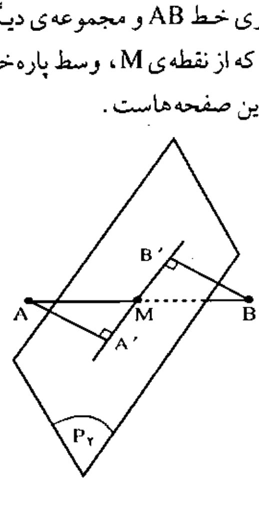
الف) روش هندسی

برای حل این مسئله از روش تحدید یا کوچک کردن مسئله استفاده می‌کنیم. برای این کار، یکی از نقطه‌ها، مثلاً نقطه‌ی C را کنار می‌گذاریم. اکنون مجموعه‌ی صفحه‌هایی را باید مشخص کنیم که دو نقطه‌ی ثابت A و B از هریک از آن‌ها به یک فاصله‌اند. این مسئله را قبلاً بررسی کرده‌ایم (مثال ۵، مقاله‌ی شماره‌ی قبل).



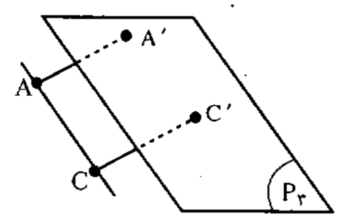
(شکل۱)

دیدیم که دو مجموعه صفحه جواب مسئله هستند: یک مجموعه صفحه‌های موازی خط AB و مجموعه‌ی دیگر، مجموعه‌ی صفحه‌هایی است که از نقطه‌ی M، وسط پاره‌خط AB می‌گذرند. P_2 یک نمونه از این صفحه‌هاست.



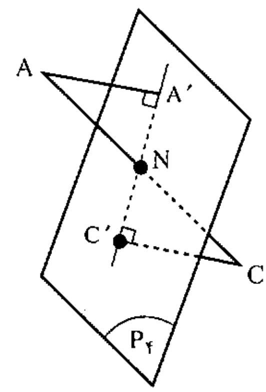
(شکل۲)

اکنون نقطه‌ای دیگر، مثلاً نقطه‌ی B را کنار می‌گذاریم و مجموعه‌ی صفحه‌هایی را تعیین می‌کنیم که دو نقطه‌ی A و C از هریک از آن‌ها به یک فاصله‌اند.



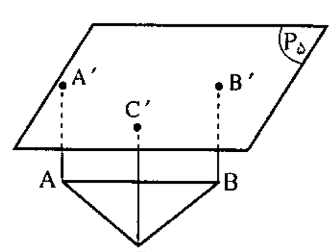
(شکل ۳)

این مسئله را قبلاً حل کرده‌ایم و می‌دانیم که دو مجموعه صفحه جواب مسئله هستند: یکی مجموعه‌ی صفحه‌هایی که با خط AC موازی‌اند و P_3 یک نمونه از آن‌هاست. مجموعه‌ی دیگر، مجموعه‌ی صفحه‌هایی است که از نقطه‌ی N وسط پاره‌خط AC می‌گذرند و P_4 یک نمونه از این صفحه‌هاست.



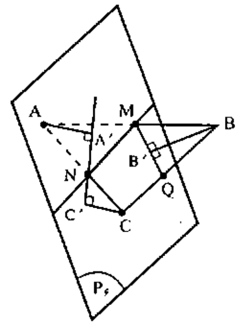
(شکل ۴)

پس مجموعه‌ی صفحه‌هایی که سه نقطه‌ی A، B و C از آن‌ها به یک فاصله‌اند، چند دسته‌اند: یکی دسته‌ای که با خط‌های AB و AC و در نتیجه با صفحه‌ی گذرنده بر سه نقطه‌ی A، B و C موازی است که صفحه‌ی P_5 در شکل ۵، یک نمونه از آن‌هاست.



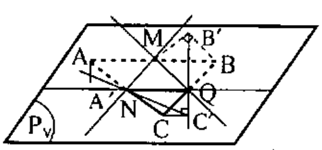
(شکل ۵)

دسته صفحه‌های دیگر جواب مسئله، سه دسته صفحه است که از خط‌های واصل بین وسط‌های پاره‌خط‌های AB، AC و BC می‌گذرند. اگر وسط پاره‌خط BC را نقطه‌ی Q بنامیم، این سه دسته صفحه، یکی دسته صفحه‌ای است که بر دو نقطه‌ی M و N و یا درواقع بر خط MN می‌گذرد. صفحه‌ی P_6 یک صفحه از این دسته صفحه است (شکل ۶).

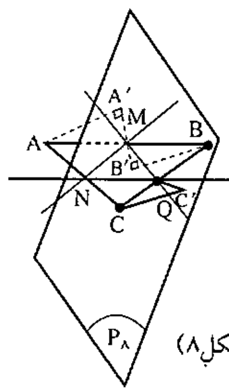


(شکل ۶)

دسته صفحه‌ی دیگر، دسته صفحه‌ای است که بر دو نقطه‌ی N و Q و یا درواقع بر خط NQ می‌گذرد. P_7 یک نمونه از این دسته صفحه است (شکل ۷). و دسته‌ی آخر جواب مسئله، دسته صفحه‌ای است که بر خط MQ می‌گذرد. صفحه‌ی P_8 یک نمونه از این دسته صفحه است (شکل ۸).



(شکل ۷)



(شکل ۸)

پس به طور کلی می‌توان گفت که چهار دسته صفحه وجود دارد که سه نقطه‌ی ثابت A، B و C از هریک صفحه‌های این دسته‌ها به یک فاصله‌اند. با فرض این‌که نقطه‌های M، N و Q را به‌ترتیب وسط پاره‌خط‌های AB، AC و BC بگیریم، این چهار دسته صفحه عبارت‌اند از:

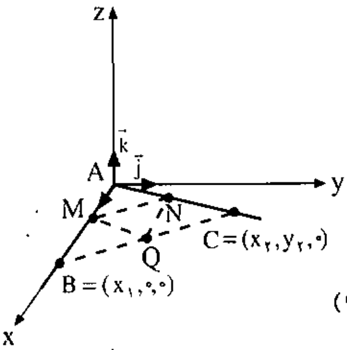
- دسته‌ی اول، دسته صفحه‌ای است که صفحه‌های آن با صفحه‌ی ABC موازی هستند. P_5 یک صفحه از این دسته صفحه است.
- دسته‌ی دوم، دسته صفحه‌ای است که بر خط MN می‌گذرد. P_6 یک صفحه از این دسته صفحه است.
- دسته‌ی سوم، دسته صفحه‌ای است که بر خط NQ می‌گذرد. P_7 یک صفحه از این دسته صفحه است.
- دسته‌ی چهارم، دسته صفحه‌ای است که بر خط MQ می‌گذرد. P_8 یک صفحه از این دسته صفحه است.

نکته‌ی ۱. واضح است، صفحه‌ای که با AB و AC موازی باشد، با خط BC نیز موازی است (مانند صفحه‌ی P_5). و در این صورت، چون $AA' = BB'$ و $AA' = CC'$ است پس $AA' = BB' = CC'$ است. یعنی سه نقطه‌ی A، B و C از صفحه‌ی P_5 و درنتیجه از هر صفحه‌ی موازی صفحه‌ی P_5 به یک فاصله‌اند.

نکته‌ی ۲. صفحه‌ی P_6 که بر خط MN می‌گذرد، یک صفحه از دسته صفحه‌ای است که سه نقطه‌ی A، B و C از آن به یک فاصله‌اند. زیرا چون صفحه‌ی P_6 بر M، وسط AB گذشته،

$AA' = BB'$ است. و چون صفحه‌ی P_6 بر نقطه‌ی N وسط AC گذشته، $AA' = CC'$ است. پس $AA' = BB' = CC'$ است. یعنی سه نقطه‌ی A، B و C از صفحه‌ی P_6 به یک فاصله‌اند. همین مطلب برای صفحه‌های P_7 و P_8 نیز برقرار است.

ب) روش جبری- مختصاتی



(شکل۹)

دستگاه مختصات قائم O-xyz را چنان در نظر می‌گیریم که نقطه‌ی O منطبق بر نقطه‌ی ثابت A، نقطه‌ی B روی محور xها و نقطه‌ی C در صفحه‌ی xoy باشد. در این صورت، $A=(0,0,0)$، $B=(x_1,0,0)$ و $C=(x_2,y_2,0)$ خواهد بود. اکنون اگر صفحه‌ی اختیاری P به معادله‌ی $ax+by+cz+d=0$ یکی از صفحه‌هایی باشد که سه نقطه‌ی A، B و C از آن به یک فاصله باشند، با توجه به این‌که:

$$AA' = \frac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \text{ و } BB' = \frac{|ax_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \text{ و}$$

$CC' = \dfrac{|ax_2+by_2+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ و $AA' = BB' = CC'$، خواهیم داشت:

$$\frac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|ax_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|ax_2+by_2+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$|d| = |ax_1+d| = |ax_2+by_2+d|$$

از این رابطه، مشابه آن‌چه درباره‌ی دو نقطه‌ی ثابت (مثال ۵) دیدیم، دیده می‌شود که چهار دسته صفحه جواب مسئله است:

● **دسته‌ی اول:** دسته صفحه‌ای که صفحه‌های آن موازی صفحه‌ی ABC و معادله‌ی آن به صورت Z=k است ($k \in \mathbb{R}$).

● **دسته‌ی دوم:** دسته صفحه‌ای است که بر خط MN، یعنی خط واصل بین نقطه‌های M و N وسط پاره‌خط‌های AB و AC می‌گذرد و با توجه به این‌که:

$$M=(\frac{x_1}{2},0,0)\ ,\ N=(\frac{x_2}{2},\frac{y_2}{2},0)$$

$$MN: \frac{x-\frac{x_1}{2}}{\frac{x_2-x_1}{2}} = \frac{y-0}{\frac{y_2}{2}-0}\ ,\quad Z=0$$

یا

$$\begin{cases}(x-\frac{x_1}{2})\frac{y_2}{2}-(\frac{x_2-x_1}{2})y=0\\ Z=0\end{cases}$$

این دسته صفحه به معادله‌ی زیر است:

$$\alpha\left[(x-\frac{x_1}{2})\frac{y_2}{2}-(\frac{x_2-x_1}{2})y\right]+\beta Z=0$$

● **دسته‌ی سوم:** دسته صفحه‌ای است که بر خط NQ می‌گذرد.

● **دسته‌ی چهارم:** دسته صفحه‌ای است که بر خط MQ می‌گذرد.

معادله‌ی دسته صفحه‌های سوم و چهارم مشابه معادله‌ی دسته صفحه‌ی دوم به دست می‌آید. محاسبه را خودتان انجام دهید.

نکته: می‌توانیم دستگاه مختصات O-xyz را در حالت عمومی و به صورتی در نظر بگیریم که نقطه‌های ثابت A، B و C روی هیچ‌یک از محورهای مختصات نباشند. در این صورت، $A=(x_1,y_1,z_1)$ و $B=(x_2,y_2,z_2)$ و $C=(x_3,y_3,z_3)$ خواهد بود. و اگر ما صفحه‌ی P به معادله‌ی $ax+by+cz+d=0$ را یکی از صفحه‌های جواب مسئله، یعنی صفحه‌ای اختیار کنیم که سه نقطه‌ی A، B و C از آن به یک فاصله باشند، یعنی $AA' = BB' = CC'$ باشد، با توجه به این‌که:

$$AA' = \frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$BB' = \frac{|ax_2+by_2+cz_2+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$CC' = \frac{|ax_3+by_3+cz_3+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

خواهیم داشت:

$$|ax_1+by_1+cz_1+d| = |ax_2+by_2+cz_2+d| = |ax_3+by_3+cz_3+d|$$

از این رابطه مشابه آن‌چه در مثال ۵ دیدیم، می‌توانیم ثابت کنیم چهار دسته صفحه جواب مسئله است. برای مثال ثابت می‌کنیم که صفحه‌ی P با $\vec{AB}$ و هم‌چنین با $\vec{AC}$ موازی است. پس این صفحه موازی صفحه‌ی ABC است و درنتیجه، یک دسته صفحه‌ی جواب مسئله، دسته صفحه‌ای است که صفحه‌های آن با صفحه‌ی ABC، یعنی صفحه‌ی شامل سه نقطه‌ی ثابت داده شده، موازی است.

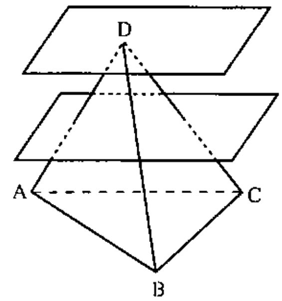
مثال ۷. چهار نقطه‌ی ثابت A، B، C و D غیر واقع در یک صفحه داده شده‌اند. صفحه یا صفحه‌هایی را مشخص کنید که این چهار نقطه از هریک از آن‌ها به یک فاصله باشند.

حل

الف) روش هندسی

اگر مثال‌های ۵ و ۶ را حل نکرده بودیم، ابتدا مسئله را برای دو نقطه و سپس برای سه نقطه حل می‌کردیم. یعنی از راهبرد تحدید (کوچک کردن مسئله) استفاده می‌کردیم و آن‌گاه به حل مسئله برای

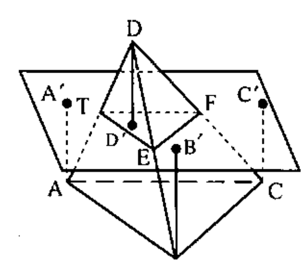
چهار نقطه‌ی غیر واقع در یک صفحه می‌پرداختیم. اما ما قبلاً در مثال ۵ مسئله را برای دو نقطه‌ی ثابت و در مثال ۶ مسئله را برای سه نقطه‌ی ثابت حل کرده‌ایم. بنابراین از این مثال، یعنی مثال ۶ برای حل مسئله استفاده می‌کنیم. با حل مثال ۶ ثابت کردیم، چهار دسته صفحه وجود دارد که سه نقطه‌ی ثابت A، B و C از صفحه‌های آن‌ها به یک فاصله‌اند. اکنون باید ببینیم که در هر کدام از این دسته صفحه‌ها، چند صفحه وجود دارد که چهار نقطه‌ی A، B، C و D از آن‌ها به یک فاصله‌اند. این چهار نقطه‌ی ثابت چهاروجهی ABCD را می‌سازند (شکل ۱۰).



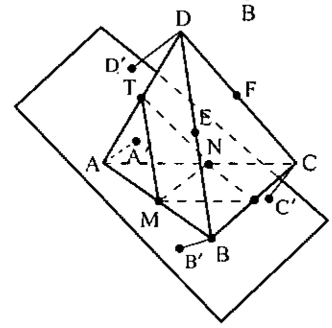
(شکل ۱۰)

● یک دسته صفحه‌ای که سه نقطه‌ی A، B و C از آن به یک فاصله‌اند، دسته صفحه‌ای است موازی صفحه‌ی ABC. از بین صفحه‌های این دسته، باید صفحه‌ای را اختیار کنیم که نقطه‌ی A و D نیز از آن به یک فاصله باشند.

این صفحه از نقطه‌ی T وسط پاره‌خط DA می‌گذرد. بدیهی است، صفحه‌ای که موازی صفحه‌ی ABC باشد و از وسط پاره‌خط DA بگذرد، از نقطه‌های E و F، وسط پاره‌خط‌های DB و DC نیز می‌گذرد. یعنی صفحه‌ی TEF که موازی صفحه‌ی ABC است و بر وسط یال‌های DA، DB و DC از چهاروجهی DABC می‌گذرد، صفحه‌ای از دسته صفحه‌ی موازی صفحه‌ی ABC است که هر چهار نقطه‌ی A، B، C و D از آن به یک فاصله هستند. پس داریم: $DD' = AA' = BB' = CC'$ (شکل ۱۱).



(شکل ۱۱)



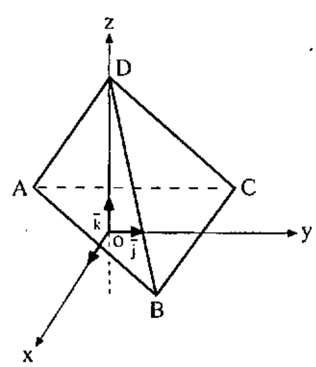
(شکل ۱۲)

تمرین. مشابه این صفحه، سه صفحه‌ی دیگر نیز جواب مسئله است که هر کدام با یک وجه دیگر چهاروجهی موازی است، آن‌ها را مشخص کنید.

● دسته‌ی صفحه‌ی دیگری که سه نقطه‌ی A، B و C از آن به یک فاصله‌اند، دسته صفحه‌ای است که بر نقطه‌های M وسط AB و N وسط AC (یا بر خط MN) می‌گذرد. حال از بین صفحه‌های این دسته، باید صفحه‌ای را مشخص کنیم که دو نقطه‌ی D و A از آن نیز به یک فاصله باشند. اما می‌دانیم، مجموعه‌ی صفحه‌هایی که دو نقطه‌ی D و A از آن به یک فاصله‌اند، بر نقطه‌ی T وسط پاره‌خط DA می‌گذرد. پس از بین صفحه‌های دسته صفحه‌ی گذرنده بر خط MN، صفحه‌ای که بر نقطه‌ی T می‌گذرد، یعنی صفحه‌ی MNT، یک صفحه‌ی جواب این مسئله است و همان صفحه‌ای است که چهار نقطه‌ی A، B، C و D از آن به یک فاصله‌اند (شکل ۱۲). صفحه‌های MNE و MNF نیز صفحه‌های دیگری از این دسته صفحه (دسته صفحه‌ی گذرنده بر MN) هستند که چهار نقطه‌ی A، B، C و D از آن‌ها به یک فاصله‌اند.

تمرین. با توجه به شکل ۱۲، صفحه‌های دیگری از دسته صفحه‌های گذرنده بر NQ و MQ را که جواب مسئله هستند، یعنی چهار نقطه‌ی A، B، C و D از آن‌ها به یک فاصله‌اند، تعیین کنید.

ب) روش جبری- مختصاتی



(شکل ۱۳)

دستگاه مختصات قائم O-xyz را چنان در نظر بگیرید که نقطه‌ی D روی محور Zها و صفحه‌ی ABC روی صفحه‌ی xoy باشد. در این صورت، نقطه‌ی برخورد عمودی که از D بر صفحه‌ی ABC رسم می‌شود، نقطه‌ی O مبدأ این دستگاه مختصات است. در این دستگاه مختصات $A = (x_1, y_1, 0)$، $B = (x_2, y_2, 0)$، $C = (x_3, y_3, 0)$ و $D = (0, 0, z_1)$ خواهد بود. اکنون اگر صفحه‌ی $P: ax + by + cz + d = 0$ یکی از صفحه‌های جواب مسئله، یعنی صفحه‌ای باشد که چهار نقطه‌ی A، B، C و D از آن به یک فاصله‌اند، با محاسبه‌ی AA'، BB'، CC' و DD' و این‌که $AA' = BB' = CC' = DD'$ است، صفحه‌های جواب مسئله را مشخص کنید.

نکته: می‌توانید با روشی دیگر، مختصات نقطه‌های M، N، Q، T، E و F، وسط یال‌های چهاروجهی ABCD را برحسب مختصات نقطه‌های A، B، C، D به‌دست آورید. معادله‌ی صفحه‌های گذرنده بر هر سه نقطه از این شش نقطه، مثلاً معادله‌ی صفحه MNT را بنویسید و ثابت کنید که چهار نقطه‌ی A، B، C و D از این صفحه به یک فاصله‌اند.

ادامه دارد...

۵ روش برای محاسبه‌ی $S_p(n)=\sum_{i=0}^{n} i^p = 0+1^p+2^p+3^p+\ldots+n^p \ (p\in N)$

● سیمین اکبری‌زاده
دبیر ریاضی (اراک)

چکیده

هدف این مقاله بررسی روش‌های متفاوت برای محاسبه‌ی $S_p(n)=\sum_{i=0}^{n} i^p$ است. در این زمینه دو روش به کمک تفاضلات و دو روش دیگر به کمک ماتریس و دترمینان ارائه شده‌اند و نهایتاً یک روش به کمک مشتق و انتگرال معین بیان شده است.

تعریف: اگر $\{h_i\}_{i\geq 0}$ یک دنباله باشد با جملات $h_0, h_1, h_2, \ldots$، آن‌گاه:

$$\begin{cases} \Delta^0 h_i = h_i & \text{تفاضل پیشروی مرتبه‌ی صفرم } h_i \\ \Delta^n h_i = \Delta^{n-1}h_{i+1} - \Delta^{n-1}h_i \quad i=0,1,2,\ldots & \text{تفاضل پیشروی مرتبه‌ی } n\text{ام } h_i \end{cases}$$

روش اول: استفاده از تفاضلات پیشرو

اگر در دنباله‌ی $\{h_i\}_{i\geq 0}$، تفاضلات پیشروی مرتبه‌ی pام ثابت باشد، آن‌گاه:

$$h_i = h_0 + \binom{i}{1}\Delta^1 h_0 + \binom{i}{2}\Delta^2 h_0 + \ldots + \binom{i}{p}\Delta^p h_0$$

و با استفاده از ویژگی ضرایب دو جمله‌ای $\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{i}{p} = \binom{n+1}{p+1}\right)$ خواهیم داشت:

$$\sum_{i=0}^{n} h_i = h_0\binom{n+1}{1} + \Delta^1 h_0\binom{n+1}{2} + \Delta^2 h_0\binom{n+1}{3} + \ldots + \Delta^p h_0\binom{n+1}{p+1} \qquad \text{فرمول (۱)}$$

در این فرمول: $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}$

مثال۱. برای محاسبه‌ی عبارت زیر:

$$S_2(n) = \sum_{i=0}^{n} i^2 = 0+1+2^2+3^2+\ldots+n^2$$

دنباله‌ی h_i را مساوی i^2 اختیار کرده و چند جمله‌ی اول این دنباله را در نظر گرفته‌ایم:

$$h_0=0, h_1=1, h_2=4, h_3=9, h_4=16, h_5=25$$

جدول تفاضلات پیشروی این دنباله را تشکیل می‌دهیم (جدول ۱).

i	$h_i = \Delta^۰ h_i$	$\Delta h_i = h_{i+۱} - h_i$	$\Delta^۲ h_i = \Delta h_{i+۱} - \Delta h_i$	$\Delta^۳ h_i = \Delta^۲ h_{i+۱} - \Delta^۲ h_i$	$\Delta^۴ h_i$
۰	۰	۱	۲	۰	۰
۱	۱	۳	۲	۰	۰
۲	۴	۵	۲	۰	۰
۳	۹	۷	۲	۰	
۴	۱۶	۹	۲		
۵	۲۵				

جدول ۱ . تفاضلات پیشروی دنباله‌ی h_i

با توجه به جدول ۱ ، تفاضلات پیشروی مرتبه‌ی دوم این دنباله ثابت و مرتبه‌ی سوم به بعد آن صفر است . (به‌طور کلی در دنباله‌ی i^p ، تفاضلات پیشروی مرتبه pام ثابت و مرتبه p+۱ام به بعد صفر است .)

داریم: $\Delta^۰ h_۰ = h_۰ = ۰, \Delta^۱ h_۰ = ۱, \Delta^۲ h_۰ = ۲$. لذا طبق فرمول (۱) خواهیم داشت :

$$\sum_{i=۰}^{n} h_i = \sum_{i=۰}^{n} i^۲ = ۰\binom{n+۱}{۱} + ۱\binom{n+۱}{۲} + ۲\binom{n+۱}{۳}$$

$$= ۰ + \frac{(n+۱)n}{۲} + \frac{۲(n+۱)n(n-۱)}{۳!}$$

پس از ساده کردن، تساوی $S_۲(n) = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$ حاصل می‌شود. در واقع در این روش، به کمک جدول تفاضلات پیشروی دنباله‌ی i^p ، برای $i = ۰, ۱, ۲, \ldots, p$ می‌توان فرمولی کلی برای $S_p(n) = \sum_{i=۰}^{n} i^p$ به دست آورد.

تعریف: اگر $\{h_i\}_{i \geq ۰}$ یک دنباله باشد با جملات $h_۰, h_۱, h_۲, \ldots$ ، آن‌گاه :

$$\begin{cases} h_i \text{ تفاضل پیشروی مرتبه‌ی صفرم} & : R_i^۰ = h_i \\ h_i \text{ تفاضل پیشروی مرتبه‌ی nام} & : R_i^n = \dfrac{R_{i+۱}^{n-۱} - R_i^{n-۱}}{n} \end{cases}$$

روش دوم: استفاده از تفاضلات تقسیم شده

اگر در دنباله‌ی $\{h_i\}_{i \geq ۰}$ ، تفاضلات تقسیم شده‌ی مرتبه‌ی p ام ثابت باشد، آن‌گاه :

$$h_n = R_۰^۰ + R_۰^۱(n-۰) + R_۰^۲(n-۰)(n-۱) + R_۰^۳(n-۰)(n-۱)(n-۲) + \ldots + R_۰^p(n-۰)(n-۱)(n-۲)\ldots(n-p+۱) \quad \text{فرمول (۲)}$$

مثال ۲ . برای محاسبه‌ی سری، چند جمله‌ی اول آن را درنظر می‌گیریم. داریم :

$$h_n = S_۲(n) = \sum_{i=۰}^{n} i^۲ = ۰ + ۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + \ldots + n^۲$$

$$h_۰ = \sum_{i=۰}^{۰} i^۲ = ۰ \qquad h_۱ = \sum_{i=۰}^{۱} i^۲ = ۰ + ۱ = ۱$$

$$h_۲ = \sum_{i=۰}^{۲} i^۲ = ۰ + ۱^۲ + ۲^۲ = ۵$$

$$h_۳ = \sum_{i=۰}^{۳} i^۲ = ۰ + ۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ = ۱۴$$

$$h_۴ = \sum_{i=۰}^{۴} i^۲ = ۰ + ۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + ۴^۲ = ۳۰$$

جدول تفاضلات تقسیم شده‌ی این دنباله را تشکیل می‌دهیم (جدول۲).

i	h_i	$R_i^۱ = \frac{R_{i+۱}^۰ - R_i^۰}{۱}$	$R_i^۲ = \frac{R_{i+۱}^۱ - R_i^۱}{۲}$	$R_i^۳ = \frac{R_{i+۱}^۲ - R_i^۲}{۳}$	$R_i^۴ = \frac{R_{i+۱}^۳ - R_i^۳}{۴}$
۰	۰	$(۱-۰)/۱ = ۱$	$\frac{۴-۱}{۲} = \frac{۳}{۲}$	$\frac{\frac{۵}{۲} - \frac{۳}{۲}}{۳} = \frac{۱}{۳}$	$\frac{\frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۳}}{۴} = ۰$
۱	۱	$(۵-۱)/۱ = ۴$	$\frac{۹-۴}{۲} = \frac{۵}{۲}$	$\frac{\frac{۷}{۲} - \frac{۵}{۲}}{۳} = \frac{۱}{۳}$	
۲	۵	$(۱۴-۵)/۱ = ۹$	$\frac{۱۶-۹}{۲} = \frac{۷}{۲}$		
۳	۱۴	$(۳۰-۱۴)/۱ = ۱۶$			
۴	۳۰				

جدول ۲ . تفاضلات تقسیم‌شده‌ی دنباله‌ی h_i

با توجه به جدول ۲ ، تفاضلات تقسیم‌شده‌ی مرتبه‌ی سوم این دنباله ثابت و مرتبه‌ی چهارم به بعد آن صفر است . (به‌طور کلی در دنباله‌ی $S_p(n) = \sum_{i=۰}^{n} i^p$ ، تفاضلات تقسیم‌شده‌ی مرتبه p+۱ام ثابت و مرتبه‌ی p+۲ام به بعد صفر است .)

داریم: $R_۰^۰ = h_۰ = ۰, R_۰^۱ = ۱, R_۰^۲ = \frac{۳}{۲}, R_۰^۳ = \frac{۱}{۳}$ ، لذا طبق فرمول ۲ خواهیم داشت :

$$h_n = \sum_{i=۰}^{n} i^۲ = ۰ + ۱(n-۰) + \frac{۳}{۲}(n-۰)(n-۱) + \frac{۱}{۳}(n-۰)(n-۱)(n-۲)$$

پس از ساده کردن، تساوی زیر حاصل می‌شود .

$$h_n = S_۲(n) = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$$

در واقع در این روش با انتخاب p مناسب و به کمک جدول تفاضلات تقسیم‌شده‌ی دنباله‌ی $S_p(0),S_p(1),S_p(2),\dots,S_p(p+1)$ (یعنی p+۲ جمله اول $S_p(n)$) و با استفاده از فرمول (۲)، می‌توان فرمولی کلی برای $S_p(n)$ برحسب n به‌دست آورد.

روش سوم: استفاده از ماتریس

فرض کنیم $S_k(n)=a_1n+a_2n^2+a_3n^3+\dots+a_{k+1}n^{k+1}$ ضرایب چند جمله‌ای با حل دستگاه معادلات خطی زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} \binom{k+1}{k} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \binom{k+1}{k-1} & \binom{k}{k-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \binom{k+1}{k-2} & \binom{k}{k-2} & \binom{k-1}{k-2} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \dots & 0 \\ \binom{k+1}{0} & \binom{k}{0} & \binom{k-1}{0} & \binom{k-2}{0} & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{k+1} \\ a_k \\ a_{k-1} \\ \vdots \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \binom{k}{k} \\ \binom{k}{k-1} \\ \binom{k}{k-2} \\ \vdots \\ \binom{k}{0} \end{bmatrix}$$

مثال۳. با انتخاب $k=3$، $S_3(n)$ را با این روش به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_4 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_4 = \frac{1}{4} \\ a_3 = \frac{1}{2} \\ a_2 = \frac{1}{4} \\ a_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow S_3(n)=\sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

ماتریس به‌کار رفته در این روش به خاطر پایین مثلثی بودن، تقریباً همان مثلث پاسکال است و فقط یک ضلع آن با این مثلث فرق دارد. تفاوت ستون دوم ماتریس ضرایب و ماتریس مقادیر ثابت، تنها در عنصر اول آن‌هاست. این عنصر در اولی صفر و در دومی یک است. در ضمن، با استفاده از سه ردیف اول در ماتریس اصلی همیشه خواهیم داشت:

$$a_{k+1}=\frac{1}{k+1},\ a_k=\frac{1}{2},\ a_{k-1}=\frac{k}{12},\ a_{k-2}=a_{k-4}=a_{k-6}=\dots=0$$

و مجموع ضرایب چند جمله‌ای همیشه برابر ۱ است.

روش چهارم: استفاده از دترمینان

$S_k(n)$ یا به‌طور خلاصه S_k از دترمینان زیر محاسبه می‌شود:

$$S_k(n)=\frac{n+1}{(k+1)!}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & (n+1)-1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & \dots & (n+1)^2-1 \\ 4 & 6 & 4 & 0 & \dots & (n+1)^3-1 \\ 5 & 10 & 10 & 5 & \dots & (n+1)^4-1 \\ \dots & & & & \dots & \\ k+1 & & & & \dots & (n+1)^k-1 \end{vmatrix}$$

فرمول (۴)

طبق بسط دو جمله‌ای نیوتن داریم:

$$(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\binom{n}{3}a^{n-3}b^3+\dots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+b^n \qquad n\in N$$

اگر در این رابطه به جای n و b و a به ترتیب k+۱ و ۱ و x قرار دهیم، داریم:

$$(x+1)^{k+1}=x^{k+1}+\binom{k+1}{1}x^k+\binom{k+1}{2}x^{k-1}+\dots+\binom{k+1}{k}x+1$$

حال اگر در این رابطه به جای x به ترتیب $1,2,\dots,n$ قرار دهیم و تساوی‌های حاصل را نظیر به نظیر با هم جمع کنیم، پس از حذف عوامل مساوی از طرفین داریم:

$$(n+1)^{k+1}=1+\binom{k+1}{1}\left[1^k+2^k+3^k+\dots+n^k\right]+\binom{k+1}{2}\left[1^{k-1}+2^{k-1}+\dots+n^{k-1}\right]+\dots+\binom{k+1}{k}\left[1+2+\dots+n\right]+\underbrace{(1+1+1\dots+1)}_{\text{بار } n}$$

با توجه به تساوی $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ فرمول (۵) به‌دست می‌آید:

$$(n+1)^{k+1}=\binom{k+1}{k}S_k+\binom{k+1}{k-1}S_{k-1}+\dots+\binom{k+1}{1}S_1+(n+1)$$

فرمول (۵)

اگر در فرمول (۵) به ترتیب مقادیر $k,\dots,1,2$ را به k نسبت دهیم، دستگاهی با k معادله و k مجهول به‌دست می‌آید که ماتریس مجهولات آن یک ماتریس مثلثی است. با حل دستگاه فرمول (۴)

پاسخ حاصل می‌شود.

مثال ۴. برای محاسبه‌ی $S_2(n)$، در فرمول (۴) به جای k عدد ۲ را قرار می‌دهیم. خواهیم داشت:

$$S_2(n)=\frac{n+1}{3!}\begin{vmatrix} 2 & n \\ 3 & (n+1)^2-1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{n+1}{6}\left[2(n+1)^2-2-3n\right]=\frac{(n+1)n(2n+1)}{6}$$

روش پنجم: استفاده از تابع اولیه و مشتق

طبق نمادگذاری $S_k(n)=1^k+2^k+\dots+n^k$ و $S_{k+1}(n)=1^{k+1}+2^{k+1}+3^{k+1}+\dots+n^{k+1}$ و می‌دانیم:

$k\neq -1$ ، $\int x^k dx=\frac{x^{k+1}}{k+1}+c$ و $(x^k)'=kx^{k-1}$ لذا:

الف) با استفاده از $S_k(n)$ و انتگرال معین می‌توان $S_{k+1}(n)$ را محاسبه کرد.

ب) با استفاده از $S_{k+1}(n)$ و مشتق می‌توان $S_k(n)$ را محاسبه کرد.

به این منظور کافی است از فرمول‌های (۵ـالف) و (۵ـب) استفاده کرد.

قضیه: می‌توان ثابت کرد که:

فرمول (۵ـالف) $S_{k+1}(n)=(k+1)\int_0^n S_k(n)dn+c_k n$

در هنگام استفاده از این روش، به کمک $S_k(n)$ و انتگرال معین $S_{k+1}(n)$ را به‌دست آورده و برای یافتن c_k، با توجه به آن که $S_{k+1}(1)=1^{k+1}=1$ در فرمول بدست آمده برای $S_{k+1}(n)$ بجای n یک قرار می‌دهیم.

مثال ۵. با توجه به آن‌که $S_1(n)=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}$، به کمک تابع اولیه $S_2(n)$ را به‌دست می‌آوریم. اگر در فرمول (۵ـالف) بجای k یک قرار دهیم، داریم: $S_2(n)=2\int_0^n S_1(n)dn+c_1n$ پس:

$$S_2(n)=2\int_0^n\left(\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}\right)dn+c_1n=2\left[\frac{n^3}{2\times 3}+\frac{n^2}{2\times 2}\right]+c_1n$$

$$\Rightarrow S_2(n)=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+c_1n$$

چون $S_2(1)=1^2=1$ برای یافتن c_1 کافی است در تساوی بالا به‌جای n، عدد ۱ را قرار دهیم:

$$S_2(1)=1=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+c_1\Rightarrow c_1=\frac{1}{6}\Rightarrow S_2(n)=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$$

در ضمن هرگاه بخواهیم به کمک $S_{k+1}(n)$، $S_k(n)$ را به‌دست آوریم از فرمول (۵ـب) استفاده می‌کنیم.

فرمول (۵ـب) $S_k(n)=\frac{S'_{k+1}(n)}{k+1}$

با این قرارداد که با توجه به آن‌که $S_k(n)=\frac{n(n+1)}{2}$ بر n قابل قسمت است هرگاه مشتق $S_{k+1}(n)$ دارای عدد ثابت شد عدد ثابت را حذف می‌کنیم و در غیر این صورت تمامی جملات را می‌نویسیم.

مثال ۶. با توجه به آن‌که $S_2(n)=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$، به کمک مشتق $S_1(n)$ را به‌دست می‌آوریم. اگر در فرمول (۵ـب) به‌جای k عدد ۱ را قرار دهیم داریم: $S_1(n)=\frac{S'_2(n)}{2}$ پس:

$$S_1(n)=\frac{n^2+n+\frac{1}{6}}{2}\Rightarrow S_1(n)=\frac{n^2+n}{2}$$

تمرین ۱. $S_3(n)$ را به کمک تفاضلات پیشرو به‌دست آورید.

حل: جدول تفاضلات پیشروی دنباله‌ی $i=0,1,2,3,\dots$ ، $h_i=i^3$ را تشکیل می‌دهیم (جدول ۳).

i	h_i	$\Delta^1 h_i$	$\Delta^2 h_i$	$\Delta^3 h_i$	$\Delta^4 h_i$
۰	۰	۱	۶	۶	۰
۱	۱	۷	۱۲	۶	
۲	۸	۱۹	۱۸		
۳	۲۷	۳۷			
۴	۶۴				

جدول ۳. تفاضلات پیشروی دنباله‌ی h_i

طبق فرمول ۱:

$$\sum_{i=0}^{n}h_i=\sum_{i=0}^{n}i^3=0\binom{n+1}{1}+1\binom{n+1}{2}+6\binom{n+1}{3}+6\binom{n+1}{4}$$

$$\Rightarrow S_3(n)=\frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}$$

تمرین ۲. $S_3(n)$ را به کمک تفاضلات تقسیم شده به‌دست آورید.

حل: دنباله‌ی $h_n=\sum_{i=0}^{n}i^3$ را در نظر می‌گیریم و چند جمله‌ی اول دنباله را می‌یابیم:

$h_0=0, h_1=1, h_2=9, h_3=36, h_4=100$

جدول تفاضلات تقسیم شده‌ی این دنباله را تشکیل می‌دهیم (جدول ۴).

i	h_i	$R_i^۱$	$R_i^۲$	$R_i^۳$	$R_i^۴$
۰	۰	$(۱-۰)/۱=۱$	$\frac{۸-۱}{۲}=\frac{۷}{۲}$	$\frac{\frac{۱۹}{۲}-\frac{۷}{۲}}{۳}=۲$	$\frac{۳-۲}{۴}=\frac{۱}{۴}$
۱	۱	$(۹-۱)/۱=۸$	$\frac{۲۷-۸}{۲}=\frac{۱۹}{۲}$	$\frac{\frac{۳۷}{۲}-\frac{۱۹}{۲}}{۳}=۳$	$\frac{۴-۳}{۴}=\frac{۱}{۴}$
۲	۹	$(۳۶-۹)/۱=۲۷$	$\frac{۶۴-۲۷}{۲}=\frac{۳۷}{۲}$	$\frac{\frac{۶۱}{۲}-\frac{۳۷}{۲}}{۳}=۴$	
۳	۳۶	$(۱۰۰-۳۶)/۱=۶۴$	$\frac{۱۲۵-۶۴}{۲}=\frac{۶۱}{۲}$		
۴	۱۰۰	$(۲۲۵-۱۰۰)/۱=۱۲۵$			
۵	۲۲۵				

جدول ۴. تفاضلات تقسیم‌شده‌ی دنباله‌ی h_i

طبق جدول ۴، تفاضلات تقسیم‌شده‌ی مرتبه‌ی چهارم این دنباله ثابت است.

$$R_۰^۰=۰, R_۰^۱=۱, R_۰^۲=\frac{۷}{۲}, R_۰^۳=۲,\ldots, R_۰^۴=\frac{۱}{۴}$$

$$h_n=۰+۱(n-۰)+\frac{۷}{۲}(n-۰)(n-۱)+۲(n-۰)(n-۱)(n-۲)+$$
$$\frac{۱}{۴}(n-۰)(n-۱)(n-۲)(n-۳)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=۰}^{n} i^۳=S_۳(n)=\frac{n^۴}{۴}+\frac{n^۳}{۲}+\frac{n^۲}{۴}$$

تمرین ۳. $S_۲(n)$ را با استفاده از ماتریس به‌دست آورید.

حل: در فرمول (۳) به‌جای k عدد ۲ را قرار می‌دهیم. خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۳ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_۳ \\ a_۲ \\ a_۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}\Rightarrow \begin{cases} a_۳=\frac{۱}{۳} \\ a_۲=\frac{۱}{۲} \\ a_۱=\frac{۱}{۶} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_۲=\sum_{i=۱}^{n} i^۲=\frac{n}{۶}+\frac{n^۲}{۲}+\frac{n^۳}{۳}$$

تمرین ۴. $S_۳(n)$ را با استفاده از دترمینان به‌دست آورید.

حل: در فرمول (۴) به‌جای k عدد ۳ را قرار می‌دهیم. خواهیم داشت:

$$S_۳(n)=\frac{n+۱}{۴!}\begin{vmatrix} ۲ & ۰ & n \\ ۳ & ۳ & (n+۱)^۲-۱ \\ ۴ & ۶ & (n+۱)^۳-۱ \end{vmatrix}=\cdots=\frac{n^۴}{۴}+\frac{n^۳}{۲}+\frac{n^۲}{۴}$$

تمرین ۵. به کمک تابع اولیه $S_۳(n)$ را محاسبه کنید.

حل: در فرمول (۵-الف) به‌جای k عدد ۲ را قرار می‌دهیم.

$$S_۳(n)=۳\int_۰^n S_۲(n)dn+c_۳n$$

$$=۳\int_۰^n\left(\frac{n^۳}{۳}+\frac{n^۲}{۲}+\frac{n}{۶}\right)dn+c_۳n$$

$$=۳\left[\frac{n^۴}{۳\times۴}+\frac{n^۳}{۲\times۳}+\frac{n^۲}{۲\times۶}\right]+c_۳n$$

$$\Rightarrow S_۳(n)=\frac{n^۴}{۴}+\frac{n^۳}{۲}+\frac{n^۲}{۴}+c_۳n$$

می‌دانیم $S_۳(۱)=۱^۳=۱$ اگر در تساوی بالا $n=۱$ قرار دهیم داریم:

$$S_۳(۱)=۱=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}+c_۳\Rightarrow c_۳=۰$$

$$\Rightarrow S_۳(n)=\frac{n^۴}{۴}+\frac{n^۳}{۲}+\frac{n^۲}{۴}$$

توجه: می‌توان ثابت کرد هنگامی که می‌خواهیم به کمک $S_{۲k}$ و تابع اولیه، $S_{۲k+۱}$ را محاسبه کنیم ضریب $c_{۲k}=۰$ خواهد شد مثلاً برای محاسبه‌ی $S_۳(n)$ در مثال بالا کافی بود به صورت زیر عمل کنیم:

$$S_۳(n)=۳\int_۰^n S_۲(n)dn=۳\int_۰^n\left(\frac{n^۳}{۳}+\frac{n^۲}{۲}+\frac{n}{۶}\right)dn$$

$$\Rightarrow S_۳(n)=\frac{n^۴}{۴}+\frac{n^۳}{۲}+\frac{n^۲}{۴}$$

تمرین ۶. به کمک مشتق $S_۲(n)$ را محاسبه کنید.

حل: در فرمول (۵-ب) بجای k عدد ۲ قرار می‌دهیم.

$$S_۲(n)=\frac{S'_۳(n)}{۳}=\frac{n^۳+\frac{۳}{۲}n^۲+\frac{۲n}{۴}}{۳}\Rightarrow S_۲(n)=\frac{n^۳}{۳}+\frac{n^۲}{۲}+\frac{n}{۶}$$

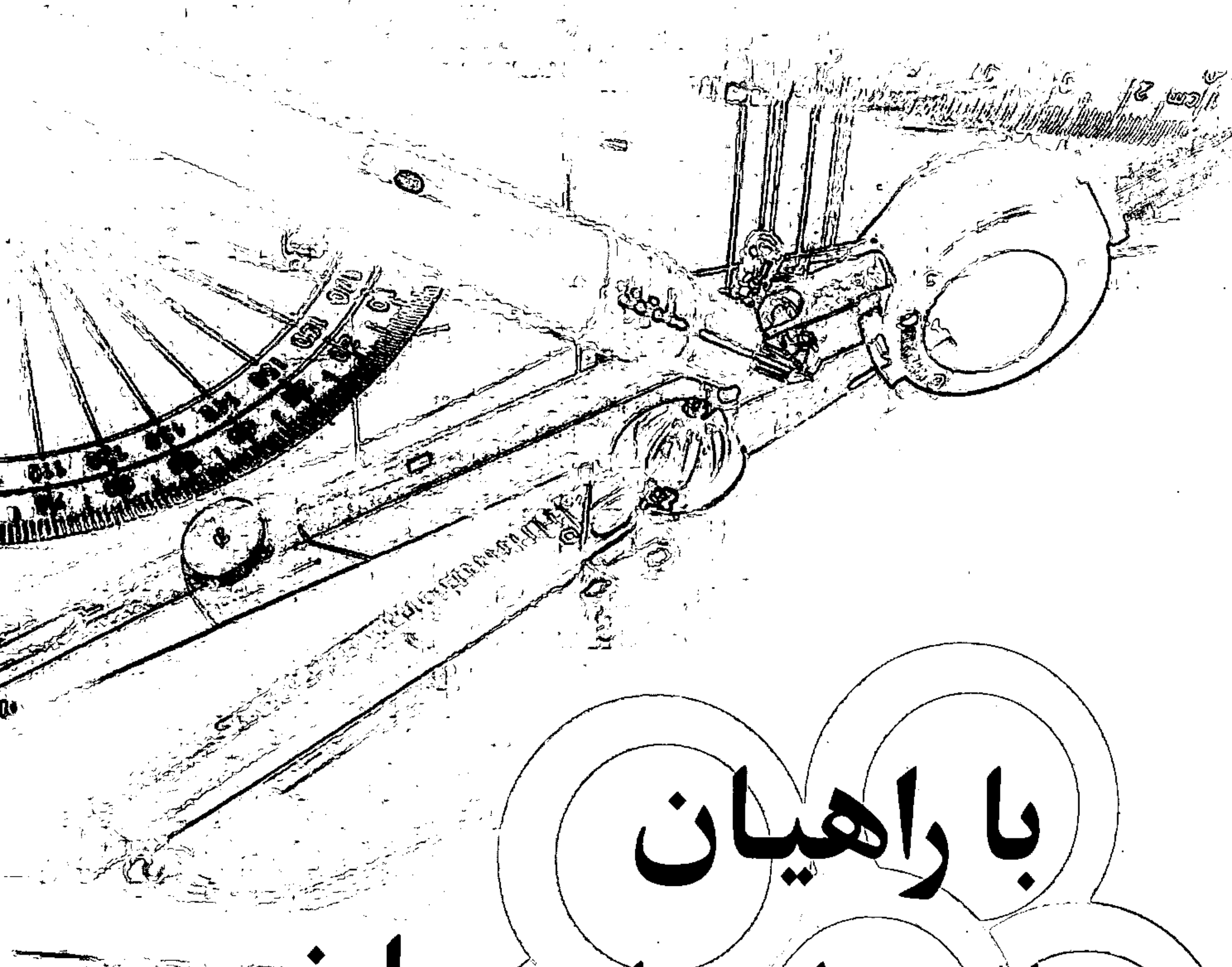
۱. بابلیان، اسماعیل. نخستین گام‌ها در آنالیز عددی (فصل درون‌یابی).

۲. ساروی، مسعود. روش عمومی برای یافتن S_k. گزارش نوزدهمین کنفرانس ریاضی کشور. ص ۵۳ـ۵۰.

۳. هاشمی، محمدرضا. مجله‌ی رشد آموزش ریاضی. شماره‌ی ۱۶. صفحه ۵۵ـ۵۴.

۴. عبدالحسین مصحفی، مجله‌ی یکان.

۵. نامی ساعی، حسین. رشد آموزش ریاضی. ش ۶۶. ص ۲۹-۳۹.



با راهیان المپیادهای ریاضی (۱۳)

● غلامرضا یاسی‌پور

مجموع‌ها و حاصل ضرب‌های ادغامی در جبر

پیش از این ملاحظه کردیم، بسیاری از مجموع‌ها را می‌توان با ادغامی کردن آن‌ها، یعنی قرار دادنشان به صورت: $\sum_{k=1}^{n}[F(k+1)-F(k)]$ به سادگی محاسبه کرد. در واقع، در مجموع‌هایی چنین، $F(k)$ها، به ازای k بین ۲ و $n-1$، حذف می‌شوند و مجموع را برابر $F(n+1)-F(1)$ باقی می‌گذارند. خواننده ممکن است به شباهت بین این روش و قضیه‌ی اصلی حساب جامع و فاضل توجه کند و نتیجه بگیرد که در این مورد، پادمشتق گسسته‌ای برای جمله‌های مجموع موردنظر به‌دست می‌آید.

مثال ساده‌ای که روش مجموع‌یابی ادغامی در آن به‌کار رفته، محاسبه‌ی $\sum_{k=1}^{n} k!.k$ است. اگر بنویسیم:

$$k!.k = k!.(k+1-1) = (k+1)!-k!$$

در این صورت، مجموع به این صورت درمی‌آید:

$$\sum_{k=1}^{n}[(k+1)!-k!]$$

که پس از انجام عمل حذف، برابر $(n+1)!-1$ می‌شود.

مسئله: مجموع زیر را محاسبه کنید:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}$$

حل: مخرج کسر را گویا می‌کنیم. داریم:

$$\left((k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}\right)\left((k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}\right)$$
$$=k(k+1)^2-(k+1)k^2=k(k+1)$$

در این صورت، مجموع به صورت زیر درمی‌آید:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

در محاسبه‌ی حاصل‌ضرب‌ها نیز می‌توان از روشی مشابه استفاده کرد. در این حال، عبارت را به صورت حاصل‌ضرب کسرهایی می‌نویسیم که صورت‌ها و مخرج‌هایشان به طور متناوب حذف شوند و صورت کسر اول و مخرج کسر آخر، یا برعکس را باقی بگذارند. در این مورد، مثال زیر را به‌دست می‌دهیم:

مسئله: ثابت کنید:

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$$

با تجزیه و نوشتن هر عامل به صورت یک کسر، حاصل می‌کنیم:

$$\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)=\prod_{n=2}^{N}\frac{n-1}{n}\prod_{n=2}^{N}\frac{n+1}{n}$$
$$=\frac{1}{N}.\frac{N+1}{2}=\frac{N+1}{2N}$$

با میل کردن N به بی‌نهایت، درمی‌یابیم که حاصل‌ضرب برابر $\frac{1}{2}$ است.

اکنون خواننده را به حل مسائل زیر دعوت می‌کنیم:

۱. محاسبه کنید:
$$\sum_{k=1}^{n}k!(k^2+k+1)$$

۲. فرض می‌کنیم a_1، a_2، ... و a_n تصاعدی حسابی با قدرنسبت d باشد. محاسبه کنید:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k a_{k+1}}$$

۳. مجموع زیر را محاسبه کنید:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{6^k}{(3^k-2^k)(3^{k+1}-2^{k+1})}$$

۴. دنباله‌ی $\{x_n\}_n$ توسط $x_1=\frac{1}{2}$ و $x_{k+1}=x_k^2+x_k$ تعریف شده است. بزرگ‌ترین عدد صحیح کمتر از مقدار زیر را بیابید.

$$\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\dots+\frac{1}{x_{100}+1}$$

۵. فرض می‌کنیم F_n دنباله‌ی فیبوناتچی باشد $(F_1=1, F_2=1, F_n=F_n+F_{n-1})$. محاسبه کنید:

الف) $$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}\ F_{n+1}}$$

ب) $$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{F_{n-1}\ F_{n+1}}$$

۶. مجموع زیر را محاسبه کنید:

$$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\dots+\sqrt{1+\frac{1}{1999^2}+\frac{1}{2000^2}}$$

۷. نابرابری زیر را ثابت کنید:

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{9997}+\sqrt{9999}}>24$$

۸. نابرابری دوگانه‌ی زیر را اثبات کنید:

$$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{m})<\frac{1}{\sqrt{m}}+\frac{1}{\sqrt{m+1}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n}}$$
$$<2(\sqrt{n}\cdots\sqrt{m-1})$$

۹. فرض می‌کنیم:

$$a_k=\frac{k}{(k-1)^{\frac{4}{3}}+k^{\frac{4}{3}}+(k+1)^{\frac{4}{3}}}$$

ثابت کنید:

$$a_1+a_2+\dots+a_{999}<50$$

۱۰. نابرابری زیر را ثابت کنید:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}<2$$

۱۱. مجموع زیر را حساب کنید:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{F_{2^n}}$$

در این مجموع F_m، mامین جمله‌ی دنباله‌ی فیبوناتچی است.

۱۲. ثابت کنید:

$$\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{2}{3}$$

۱۳. حاصل‌ضرب زیر را محاسبه کنید:

$$\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)$$

۱۴. فرض می‌کنیم:

$$L_1 = 2\ ,\ L_2 = 1\ ,\ L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$$

به ازای $n \geq 1$، «دنباله‌ی لوکاس»[1] باشد. رابطه‌ی $\prod_{k=1}^{m} L_{2^k} + 1 = F_{2^{m+1}}$ را ثابت کنید که در آن $\{F_n\}_n$ دنباله‌ی فیبوناتچی است.

حل مسئله‌ها

۱. می‌توان نوشت:

$$\sum_{k=1}^{n} k!(k^2+k+1) = \sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^2 - k\right]k!$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)!(k+1) - k!k\right]$$

$$= (n+1)!(n+1) - 1$$

۲. داریم:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{k+1}-a_k}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

این عبارت، از آن‌جا که $a_{n+1} - a_1 = nd$، برابر است با: $n/\left((a_1+nd)a_1\right)$.

۳. با استفاده از اتحاد:

$$\frac{6^k}{(3^k-2^k)(3^{k+1}-2^{k+1})} = \frac{3^k}{3^k-2^k} - \frac{3^{k+1}}{3^{k+1}-2^{k+1}}$$

ملاحظه می‌کنیم که مقدار مجموع مورد بحث برابر است با:

$$\frac{3}{3-2} - \lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^n-2^n} = 3 - 1 = 2$$

توجه: برابری:

$$\frac{6^k}{(3^k-2^k)(3^{k+1}-2^{k+1})} = \frac{2}{3^k-2^k} - \frac{2^{k+1}}{3^{k+1}-2^{k+1}}$$

روش متفاوت دیگری از ادغام کردن این مجموع را به‌دست می‌دهد (44th. W. L. Putman Mathematical Competion, 1984).

۴. برای ادغام کردن مجموع، از رابطه‌ی بازگشتی دنباله استفاده می‌کنیم. از آن‌جا که:

$$x_{k+1} = x_k^2 + x_k$$

به دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{x_{k+1}} = \frac{1}{x_k(x_k+1)} = \frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_k+1}$$

بنابراین:

$$\frac{1}{x_k+1} = \frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k+1}}$$

در این صورت:

$$\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \cdots + \frac{1}{x_{100}+1} = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_{101}}$$

از آن‌جا که $x_1 = \frac{1}{2}$ و $0 < 1/x_{101} < 1$، قسمت صحیح مجموع برابر ۱ است (تورنمنت شهرها، پاییز ۱۹۸۵، طرح از A. Andjans).

۵. با استفاده از فرمول بازگشتی دنباله‌ی فیبوناتچی، زنجیره‌های نابرابری‌های زیر را به‌دست می‌آوریم:

الف)

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}F_{n+1}} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{F_{n+1}-F_{n-1}}{F_{n-1}F_{n+1}} = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{F_{n-1}} - \frac{1}{F_{n+1}}\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} - \frac{1}{F_N} - \frac{1}{F_{N+1}}\right) = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} = 2$$

ب)

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{F_{n-1}F_{n+1}} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}F_nF_{n+1}} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{F_{n+1}-F_{n-1}}{F_{n-1}F_nF_{n+1}}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{F_{n-1}F_n} - \frac{1}{F_nF_{n+1}}\right)$$

$$= \lim\left(\frac{1}{F_1F_2} - \frac{1}{F_NF_{N+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{F_1F_2} = 1$$

۶. به ازای عدد صحیح و مثبت n می‌توان نوشت:

$$1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n^2(n+1)^2 + (n+1)^2 + n^2}{n^2(n+1)^2}$$

$$= \frac{(n^2+n+1)^2}{n^2(n+1)^2}$$

بنابراین:

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} = \frac{n^2+n+1}{n^2+n} = 1 + \frac{1}{n(n+1)}$$

درنتیجه، مجموع داده شده برابر است با:

$$\sum_{n=1}^{1999}\left(1 + \frac{1}{n(n+1)}\right) = \sum_{n=1}^{1999}\left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 2000 - \frac{1}{2000}$$

۷. برای ادغام کردن این مجموع، چندجمله‌ی مفقود داریم. از آن‌جا که سمت چپ بزرگ‌تر از

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{9}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{9999}+\sqrt{10001}}$$

است، نابرابری از:

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{9999}+\sqrt{10001}}>48$$

پیروی می‌کند. اکنون، برای ادغام کردن آماده‌ایم. مخرج‌ها را گویا می‌کنیم و نابرابری هم‌ارز زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}+\dots+\frac{\sqrt{10001}-\sqrt{9999}}{2}>48$$

سمت چپ این نابرابری، برابر $(\sqrt{10001}-1)/2$ است و بررسی مختصری نشان می‌دهد که این مقدار بزرگ‌تر از ۴۸ است (مسابقه‌ی ریاضی اوکراین).

۸. از آن‌جا که به ازای عدد صحیح و مثبت k:

$$(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})=1$$

داریم:

$$2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=\frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}<\frac{1}{\sqrt{k}}$$

و

$$\frac{1}{\sqrt{k}}<\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}=2(\sqrt{k}+\sqrt{k-1})$$

با ترکیب این دو، داریم:

$$2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})<\frac{1}{\sqrt{k}}<2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$$

با جمع همه‌ی این نابرابری‌ها، به‌ازای kی بین m و n حاصل می‌کنیم:

$$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{m})<\frac{1}{\sqrt{m}}+\frac{1}{\sqrt{m+1}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{n}-\sqrt{m-1})$$

و نابرابری دوگانه‌ی مورد بحث اثبات می‌شود.

۹. روش حل این است که ابتدا مخرج a_n را با قرار دادن $(k-1)^{\frac{2}{3}}(k+1)^{\frac{2}{3}}$ به جای $k^{\frac{4}{3}}$، کاهش دهیم و آن‌گاه آن را گویا کنیم. داریم:

$$a_n<\frac{k}{(k-1)^{\frac{4}{3}}+(k-1)^{\frac{2}{3}}(k+1)^{\frac{2}{3}}+(k+1)^{\frac{4}{3}}}$$

$$=\frac{k\left((k+1)^{\frac{2}{3}}-(k-1)^{\frac{2}{3}}\right)}{(k+1)^2-(k-1)^2}=\frac{1}{4}\left((k+1)^{\frac{2}{3}}-(k-1)^{\frac{2}{3}}\right)$$

نتیجه می‌شود که:

$$\sum_{n=1}^{999}a_n<\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{999}\left((k+1)^{\frac{2}{3}}-(k-1)^{\frac{2}{3}}\right)$$

$$=\frac{1}{4}(1000^{\frac{2}{3}}+999^{\frac{2}{3}}-1^{\frac{2}{3}}-0^{\frac{2}{3}})$$

$$<\frac{1}{4}(100+100-1)<50$$

(T. Andreescu)

۱۰. طبیعی است که جمله‌های مجموع را به‌صورت زیر تبدیل کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}=\frac{\sqrt{n}}{n(n+1)}=\frac{\sqrt{n}}{n}-\frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

این کار ما را مجاز می‌کند که مجموع را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{n}$$

این مجموع ادغام نمی‌شود، اما از سمت بالا توسط

$$1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}\sqrt{n-1}}=1+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

که به ۲ ادغام می‌شود، کران‌دار است و به این ترتیب، نابرابری به اثبات می‌رسد (امتحان ورودی کالج رومانی).

۱۱. بنا به استقرا،

$$F_{2m}F_{m-1}-F_{2m-1}F_m=(-1)^mF_m,\ \ m\ge 1$$

قرار دادن $m=2^{n-1}$، می‌دهد:

$$F_{2^n}F_{2^{n-1}-1}-F_{2^n-1}F_{2^{n-1}}=F_{2^{n-1}},\ \ n\ge 2$$

یا:

$$\frac{1}{F_{2^n}} = \frac{F_{2^{n-1}}-1}{F_{2^{n-1}}} - \frac{F_{2^{n-1}}}{F_{2^n}},\quad n \ge 2$$

به این ترتیب:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2^n}} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} + \lim_{N\to\infty}\left(\frac{F_1}{F_2} - \frac{F_{2^N-1}}{F_{2^N}}\right) = 3 - \frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$$

$$= \frac{7-\sqrt{5}}{2}$$

۱۲. داریم:

$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3-1}{n^3+1} = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=2}^{N} \frac{n^3-1}{n^3+1} = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=2} \frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)(n^2-n+1)}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \prod_{n=2}^{N} \frac{n-1}{n+1} \prod_{n=2}^{N} \frac{(n+1)^2-(n+1)+1}{n^2-n+1}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1\times 2\times\left((N+1)^2-(N+1)+1\right)}{3N(N+1)} = \frac{2}{3}$$

(مسابقه‌ی ریاضی پاتنام)

۱۳. می‌توان نوشت:

$$\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right) = 2\lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^{2^0}}\right)\prod_{n=1}^{N}\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)$$

حاصل ضرب اخیر، از آن جا که:

$$\left(1-\frac{1}{2^{2^n}}\right)\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right) = \left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

ادغام می‌شود و برابر $1-\frac{1}{2}^{2^{N+1}}$ است. درنتیجه، پاسخ مسئله ۲ است.

۱۴. دنباله‌های فیبوناتچی و لوکاس[1]، به ازای هر $n \ge 1$ در اتحادهای $F_{n+1}+F_{n-1}=L_{n+1}$ و $F_{2n}=F_{n+1}^2-F_{n-1}^2$ صدق می‌کنند. در این صورت:

$$F_{2n} = (F_{n+1}+F_{n-1})(F_{n+1}-F_{n-1}) = L_{n+1}F_n$$

بنابراین:

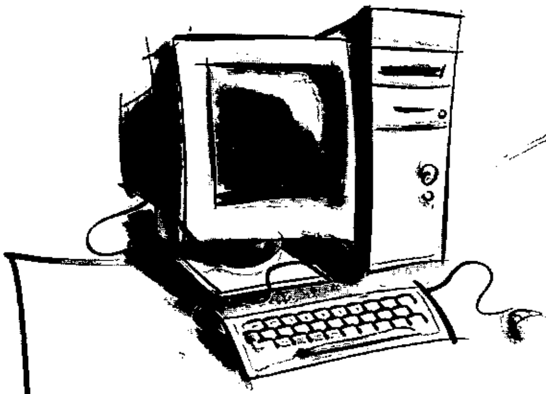
$$L_{n+1} = \frac{F_{2n}}{F_n},\quad n \ge 1$$

بنابراین:

$$\prod_{k=1}^{m} L_{2^k+1} = \prod_{k=1}^{m} \frac{F_{2^{k+1}}}{F_{2^k}} = \frac{F_{2^{m+1}}}{F_2} = F_{2^{m+1}}$$

و اثبات انجام می‌گیرد (T. Andreescu).

1. Lucas sequence



معرفی سایت‌های ریاضی جهان

● احسان یارمحمدی

- ● پخشی، شرکت پذیری، جابه‌جایی‌پذیر، ویژگی‌ها **(Distributive, Associative, Commutative, Properties)**
- ● معادله‌ها **(Equations)**
- ● نامعادله‌ها **(Inequations)**
- ● معادلات خطی، نمودارها، شیب **(Linear Equations, Graphs, slope)**
- ● تناسب‌ها **(Proportions)**
- ● درصد و نمودارهای دایره‌ای **(Percentage and Pie Charts)**
- ● میانگین **(Average)**

■ جبر ۱ **(Algebra I)**

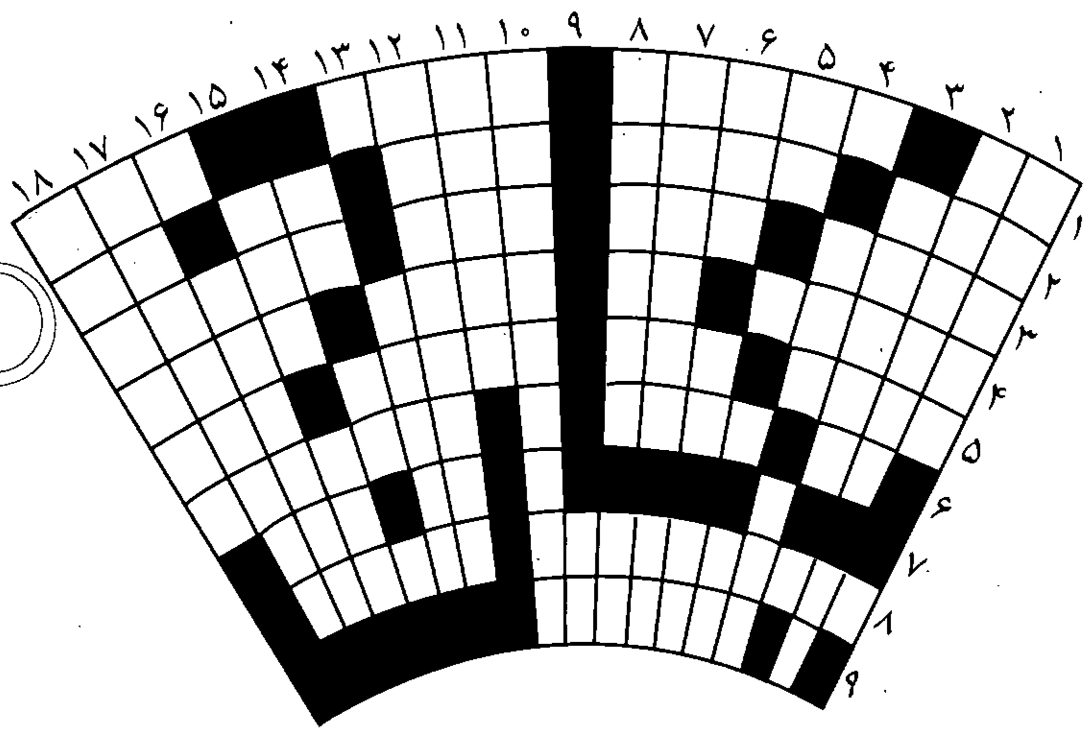
- ● جبر در علم دارایی **(Algebra in Finance)**
- ● توابع، دامنه **(Functions, Domain)**
- ● دستگاه‌های مختصات، رسم نمودار، غیره **(Coordinate Systems, Graph Plotting, etc)**
- ● نمودارها، ترسیم معادله‌ها و نامعادله‌ها **(Graphs, Graphing Equations and Inequations)**
- ● اعداد حقیقی، اعداد گنگ، غیره **(Real Numbers, Irrational Numbers, etc)**
- ● قدر مطلق **(Absolute Value)**
- ● لگاریتم **(Logarithm)**
- ● دستگاه‌های معادلات خطی **(Systems of Line Equations)**
- ● ریشه‌ی دوم، ریشه‌ی سوم، ریشه‌ی n-ام **(Square Root, Cubic Root, n-th Root)**
- ● توان‌های منفی و کسری **(Negative and Fractional Exponents)**

ادامه در صفحه ی ۳۹

جدول ریاضی

اشاره

مجله‌ی ریاضی یکان از بهمن سال ۱۳۴۲ به مدیرمسئولی و سردبیری استاد عبدالحسین مصحفی کار خود را شروع کرد و ۱۱۷ شماره را به صورت ماهنامه تا اسفند سال ۱۳۵۶ منتشر کرد. اکنون با گذشت چهل و شش سال از تاریخ انتشار اولین شماره‌ی یکان هنوز هم مطالب قابل استفاده و جذابی در آن یافت می‌شود. در این شماره جدول اعداد متقاطع را از این مجله برای شما انتخاب کرده و در پی می‌آوریم.



قرارداد ـ جهت معمولی برای قرار دادن حروف کلمات در جدول برای ردیف افقی از راست به چپ و برای ردیف قائم از بالا به پایین است. چنان‌چه قبل از شرح کلمه‌ی مربوط به یک قسمت، علامت (ـــ) گذاشته شده باشد، جهت قرار دادن حروف آن کلمه در جهت عکس معمولی خواهد بود؛ یعنی برای ردیف افقی از چپ به راست و برای ردیف قائم از پایین به بالا.

ردیف افقی

۱ـ جز بر خودش بر عدد دیگر بخش‌پذیر نیست ـ قطعه خطی که دارای امتداد، جهت و اندازه باشد ـ به معنی پایه است و در رقومی برابر است با کتانژانت زاویه‌ی میل ـ زیباترین سیاره‌ی منظومه شمسی.

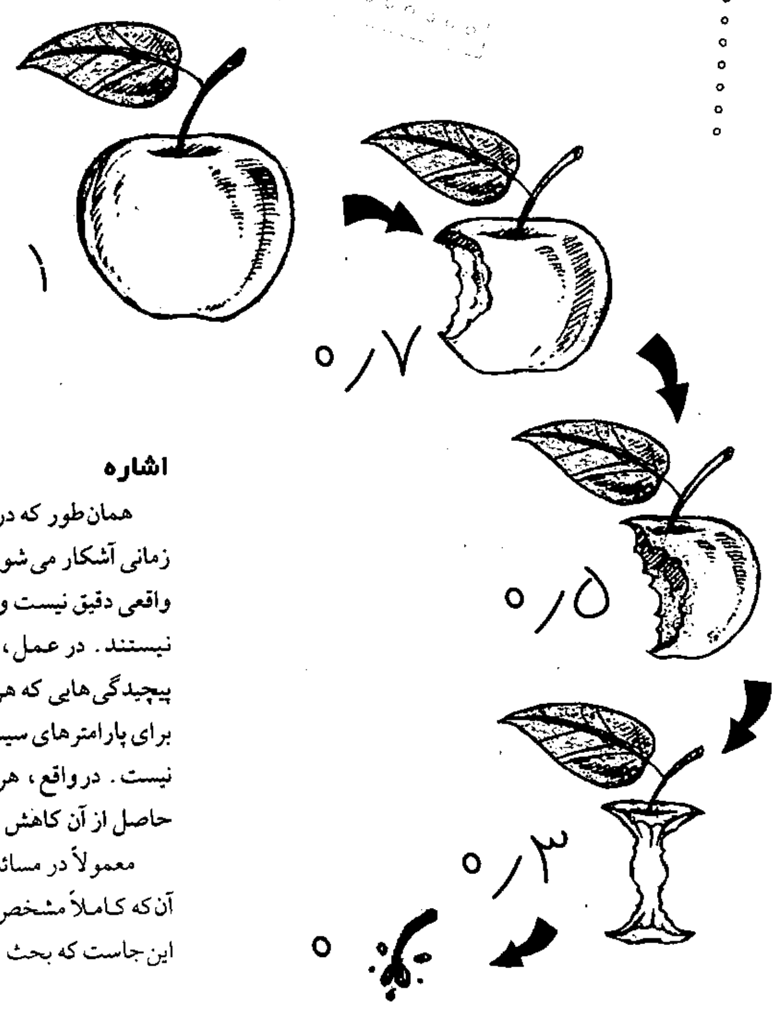
۲ـ سه ربع از کیلو ـ تضعیف آن از مسائل تاریخی و لاینحل هندسه است ـ افسانه‌ای ساخته‌اند که با سقوط آن نیوتن قانون جاذبه را کشف کرد ـ (ـــ) قضیه‌ی کمکی که در مقدمه‌ی یک قضیه اثبات شود ـ (ـــ) صد متر مربع . ۳ـ (ـــ) جیب بی‌انتها ـ دو سر کمان را به هم وصل می‌کند ـ با حذف اول جهت را مشخص می‌کند ـ (ـــ) اولین عدد ترتیبی یا وصفی . ۴ـ نام یکی از دو بعد سطح ـ کوچک‌ترین عددی که عده‌ی حروفش با خودش مساوی است ـ سالی که به اندازه‌ی ده روز و سیزده ساعت و سیزده ثانیه از سال شمسی کوتاه‌تر است ـ عبارتی جبری را گویند وقتی که در آن جمله‌ها به ترتیب درجه واقع شده باشند . ۵ـ اولین مترجم جبر خیام به زبان فرانسه ـ یک فوت با انتهای اضافی ـ آن‌چه که به وسیله‌ی اثبات از فرض یک قضیه به‌دست می‌آید ـ در خارج از حوزه‌ی قوه‌ی جاذبه وجود ندارد . ۶ـ از جزء بزرگ‌تر است ـ دلیلی که دومش به ما بعد آخرش منتقل شده است ـ اولش را نقطه‌دار کنید، نام دانشمند ایرانی نویسنده اولین کتاب جبر به‌دست می‌آید . ۷ـ یک و دو به حساب ابجد ـ دانشکده‌ای که اکثر فارغ‌التحصیلان ششم ریاضی دهه ۱۳۴۰ شمسی مایل به تحصیل در آن بودند . ۸ـ ساده‌ترین و طبیعی‌ترین ماشین حساب ـ تابعی را گویند که در ازای مقداری از متغیر دارای مقدار نباشد . ۹ـ دانش‌آموزان رشته‌ی ریاضی خود را چنین می‌دانند تا این‌که از دانشکده فارغ‌التحصیل شوند و رسماً این عنوان را به‌دست آورند .

ردیف قائم

۱ـ کوچک‌ترین دو عددی که با جموع خود تشکیل تصاعد می‌دهند . ۲ـ (ـــ) دانشمندی که هیئت او مدتی جانشین هیئت بطلمیوس شد و جای خود را به هیئت کپلر داد ـ مساوی است با مجموع دو رقم عدد مربعش . ۳ـ قسمتی از حجم کره که محدود باشد به سطح یک قاچ و دو صفحه‌ی قطری و فعلاً درهم شکسته است . ۴ـ با حذف وسط عددی را بیان می‌کند که مساوی است با مجموع دو عدد ماقبلش و با حذف اول به معنی وتر خواهد بود ـ عضوی از ناظر که مرکز کره سماوی اختیار می‌شود . ۵ـ دو ثلث از رمه ـ خط‌کشی که همراه تخته رسم است . ۶ـ با حذف وسط اولین عدد زوج به‌دست خواهد آمد ـ عدد اسم معروف ـ علامت جمع . ۷ـ نام نقطه‌ی تقاطع استوای سماوی با دایرةالبروج ـ اگر الف به اولش اضافه شود، به مقدار کمتر از ده گفته می‌شود . ۸ـ دانشمند ریاضی‌دان استاد کلژدوفرانس، مخترع نوعی ترازو و اولین نفر که روش ترسیم مماس بر منحنی را از روی حرکت به‌دست آورد ـ دوسوم دست . ۹ـ هر عدد که بر ۲ ، ۳ و ۵ قابل قسمت باشد، بر آن نیز قابل قسمت خواهد بود . ۱۰ـ دانشمند معروف انگلیسی، کاشف قانون جاذبه‌ی عمومی . ۱۱ـ اگر آخرش را با ماقبل عوض کنید، دستگاه فرانسوی حاصل خواهد شد . ۱۲ـ دانشمند و ریاضی‌دان ایرانی معاصر ابن‌سینا، صاحب تألیفات بسیار در ریاضی . ۱۳ـ اولش را کنار بگذارید، باقی درهم ریخته آن‌چه خواهد بود که مقصود از حل مسئله تعیین آن است . ۱۴ـ تبریزی‌اش مساوی سه کیلو است ـ علامت جمع . ۱۵ـ (ـــ) زاویه‌ی حاده که خط با تصویرش در یک صفحه می‌سازد ـ اخراج عدد صحیح از کسر . ۱۶ـ دو حرف آخرش را قبل از آن قرار دهید، موقعی را معین می‌کند که آفتاب در نصف‌النهار است . ۱۷ـ گالیله به‌خاطر چنین ادعایی محکوم شد . ۱۸ـ اگر حرف ز به آخرش اضافه شود، دانشمندی را معرفی می‌کند که معاصر نیوتون بوده است و با ابداع آنالیز عناصر بی‌نهایت کوچک، انقلابی در علم ایجاد کرد .

● دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی
عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی

مقدمه‌ای بر نظریه‌ی مجموعه‌های فازی (۳)



اشاره

همان‌طور که در دو قسمت قبل اشاره شد، اهمیت بحث فازی زمانی آشکار می‌شود که اطلاعات ما در بررسی رفتار یک سیستم واقعی دقیق نیست و داده‌های اولیه به‌طور یقین برای ما مشخص نیستند. در عمل، هنگام مدل‌سازی یک سیستم، با توجه به پیچیدگی‌هایی که هر سیستم دارد، امکان رسیدن به مقادیری دقیق برای پارامترهای سیستم و داده‌های اولیه، در بسیاری از مواقع مقدور نیست. درواقع، هرقدر سیستم پیچیده‌تر باشد، دقت مدل ریاضی حاصل از آن کاهش می‌یابد.

معمولاً در مسائل عملی، با مقادیری سروکار داریم که به جای آن‌که کاملاً مشخص باشند، به‌طور تقریبی مشخص هستند. این‌جاست که بحث فازی بودن این مقادیر مطرح می‌شود. درواقع،

مفهوم فازی بودن زمانی مطرح می‌شود که نوعی عدم قطعیت در مقادیر یک مسئله به‌وجود می‌آید. امروزه این اطمینان حاصل شده است که تنها با مفاهیم مجموعه‌های قطعی و مقادیر صفر و یک نمی‌توان رفتار سیستم‌ها را به نمایش درآورد. زیرا این رفتارها به حالت فازی گرایش دارند و نوعی ابهام در اطلاعات اولیه وجود دارد که برای توصیف آن‌ها ناچار باید به مقادیری بین صفر و یک رجوع کنیم.

مدل‌های ریاضی که در علوم فنی و مهندسی به کار می‌روند، براساس مفروضات و قوانینی طراحی می‌شوند که به سبب آن‌ها، مدل حاصل دقیق نخواهد بود. چرا که هنگام ساخت مدلی از یک سیستم واقعی، ساده‌سازی‌هایی انجام می‌گیرند و از برخی عوامل صرف‌نظر می‌شود. این به معنای آن است که نوعی ابهام در مدل حاصل ایجاد کرده‌ایم. حال برای بررسی این ابهام، نیاز است، به تئوری مجموعه‌های فازی رجوع کنیم.

لازم به ذکر است، با مدل‌های احتمالاتی و قوانین احتمال نمی‌توان این ابهام را توصیف کرد. در مبحث احتمالات، به‌دنبال آن هستیم که با اطلاعات فعلی، چه میزان اطمینان به وقوع یک رویداد در آینده داریم و در واقع میزان انتظار ما برای وقوع یک رویداد تصادفی پیش‌بینی می‌شود. در حالی که در بحث مجموعه‌های فازی، میزان احتمال وقوع یا عدم وقوع یک رویداد اهمیت ندارد، بلکه مفاهیمی چون بزرگ بودن، بسیار کوچک بودن، تقریباً برابر بودن، خیلی نزدیک بودن و مانند آن‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرند. به عبارت دیگر، قطعی بودن به معنای دو ارزشی بودن (ارزش‌های صفر یا یک)، و فازی بودن به معنای چندارزشی بودن (ارزش‌های از صفر تا یک) یا چند مقداری بودن است. در طراحی یک سیستم که رفتاری فازی دارد، ما باید انواع این مقادیر و ارزش‌ها را لحاظ کنیم.

پروفسور **عسگرزاده**، در سال ۱۹۶۵ همین نظریه‌ی مجموعه‌های چند مقداری را مطرح کرد. نام «فازی» را روی آن نهاد و آن را به عنوان تعمیمی از مجموعه‌های دو مقداری (صفر و یک) ارائه کرد. از آن سال تاکنون، محاسبات بر مبنای منطق فازی یا منطق چندمقداری، در میان دانشمندان و محققان جهان جایگاه خاصی یافته و کاربردهای وسیعی در علوم گوناگون نظیر ریاضی، آمار، اقتصاد، مدیریت، فنی و مهندسی و... داشته است. حال به ادامه‌ی بحث می‌پردازیم.

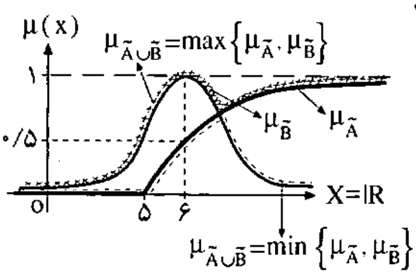
در قسمت قبل، ضمن معرفی متمم، اجتماع و اشتراک دو مجموعه‌ی فازی، دیدیم که برخی خواص نظریه‌ی مجموعه‌های معمولی نظیر «قانون دمورگان»، در مجموعه‌های فازی نیز برقرارند، ولی روابطی چون $\tilde{A}\cap\tilde{A}^C=\phi$ یا $\tilde{A}\cup\tilde{A}^C=X$ در صورتی که $\tilde{A}$ مجموعه‌ای فازی باشد، برقرار نیستند. فرض کنیم $\tilde{A}$ مجموعه‌ی فازی بسیار بزرگ‌تر از ۵ و $\tilde{B}$ مجموعه‌ی فازی تقریباً ۶ باشد. تابع عضویت هر یک از این مجموعه‌های فازی را می‌توان به این صورت بیان کرد:

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}0 & x\le 5\\ \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{(x-5)^2}} & x>5\end{cases},\quad \mu_{\tilde{B}}(x)=\frac{1}{1+(x-6)^2}$$

ملاحظه می‌کنیم که اولاً به ازای هر $x\in\mathbb{R}$ داریم: $0\le\mu_{\tilde{A}}(x)\le 1$ و $0\le\mu_{\tilde{B}}(x)\le 1$ ثانیاً هرقدر x از عدد ۵ دورتر می‌شود، مقدار $\mu_{\tilde{A}}(x)$ به یک نزدیک‌تر خواهد شد. هم‌چنین: $\mu_{\tilde{B}}(6)=1$.

در نمودار ۱، توابع عضویت $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ و هم‌چنین توابع عضویت $\tilde{A}\cup\tilde{B}$ و $\tilde{A}\cap\tilde{B}$ براساس تعریف ماکزی‌مم و مینی‌مم از اجتماع و اشتراک دو مجموعه‌ی فازی مشخص شده‌اند.

نمودار ۱



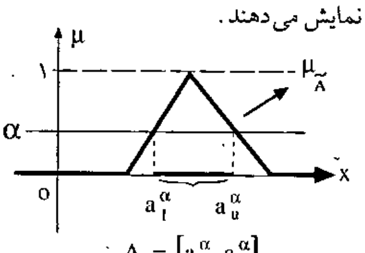
در ادامه چند مفهوم اساسی در مجموعه‌های فازی را معرفی می‌کنیم.

فرض کنیم $\tilde{A}$ یک مجموعه‌ی فازی روی مجموعه‌ی مرجع X باشد. در این صورت مجموعه‌ی «α ـ برش»[1] $\tilde{A}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A_\alpha=\left\{x\in X\,\middle|\,\mu_{\tilde{A}}(x)\ge\alpha\right\}$$

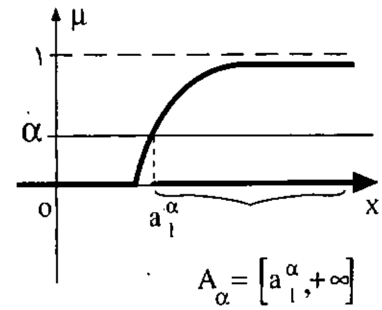
که در آن: $0\le\alpha\le 1$. به عبارت دیگر، α ـ برش یک مجموعه‌ی فازی عبارت است از اعضایی از مجموعه‌ی مرجع که «درجه‌ی عضویت»[2] آن‌ها بزرگ‌تر یا مساوی α باشد. α ـ برش یک مجموعه فازی یک مجموعه قطعی (غیر فازی) است که می‌توان آن را به صورت یک بازه‌ی حقیقی نظیر $[a_l^\alpha,a_u^\alpha]$ یا $[a_l^\alpha,+\infty)$ نوشت و در آن، a_l^α و a_u^α به‌ترتیب نقاط ابتدا و انتهای این بازه فرض شده‌اند. نمودارهای ۲ و ۳ نمونه‌هایی از α ـ برش یک مجموعه‌ی فازی را نمایش می‌دهند.

نمودار ۲



$$A_\alpha=\left[a_l^\alpha,a_u^\alpha\right]$$

نمودار ۳



مجموعه α - برش را مجموعه‌ی α - سطح یا α - تراز نیز می‌نامند. هم‌چنین می‌توان گفت: $A_\circ = X$.

مجموعه‌ی «α ـ برش قوی»[3] $\tilde{A}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A'_\alpha = \left\{x \in X \middle| \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\right\}$$

به عبارت دیگر، α ـ برش قوی $\tilde{A}$ مجموعه اعضایی از X است که درجه‌ی عضویت آن‌ها از α بزرگ‌تر باشند. هم‌چنین، «تکیه‌گاه»[4] مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S(\tilde{A}) = \left\{x \in X \middle| \mu_{\tilde{A}}(x) > \circ\right\}$$

به عبارت دیگر، تکیه‌گاه $\tilde{A}$ مجموعه‌ی اعضایی از X است که درجه‌ی عضویت آن‌ها مثبت باشد. در صورتی که $\tilde{A}$ یک مجموعه‌ی فازی متناهی باشد، «عدد اصلی»[5] $\tilde{A}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|\tilde{A}| = \sum_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x)$$

و به وسیله‌ی آن، عدد اصلی نسبی $\tilde{A}$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\|\tilde{A}\| = \frac{|\tilde{A}|}{|X|}$$

که در آن $|X|$ تعداد اعضای مجموعه‌ی متناهی X است.

برای درک بهتر تعاریف فوق به مثال زیر توجه می‌کنیم:

مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ را به صورت منازل راحت برای یک خانواده‌ی ۴نفری در نظر می‌گیریم. اگر راحتی را بر اساس تعداد اتاق‌خواب‌ها منظور کنیم و $X = \{۱,۲,۳,\ldots,۱۰\}$ را مجموعه‌ی تعداد اتاق‌خواب های منزل فرض کنیم، آن‌گاه مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ را می‌توان به شکل زیر بیان کرد:

$$\tilde{A} = \{(۱,۰/۱),(۲,۰/۵),(۳,۰/۸),(۴,۱),(۵,۰/۷),(۶,۰/۳)\}$$

ملاحظه می‌کنیم برای اعضای ۷ تا ۱۰، درجه‌ی عضویت صفر در $\tilde{A}$ منظور شده است. به همین لحاظ در $\tilde{A}$ مطرح نشده‌اند.

حالت ایده‌آل با درجه‌ی عضویت ۱ زمانی است که منزل دارای ۴ اتاق‌خواب باشد و هر قدر از ۴ دورتر می‌شویم، درجه‌ی عضویت کوچک‌تر می‌شود. در این حالت مجموعه‌ی تکیه‌گاه $\tilde{A}$ به صورت زیر است:

$$S(\tilde{A}) = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$$

هم‌چنین، نمونه‌هایی از α- برش و α- برش قوی $\tilde{A}$ به‌ازای $\alpha = ۰/۳, ۰/۵, ۱$ از این قرار است:

$$A_{۰/۳} = \{۲,۳,۴,۵,۶\} \qquad A'_{۰/۳} = \{۲,۳,۴,۵\}$$
$$A_{۰/۵} = \{۲,۳,۴,۵\} \qquad A'_{۰/۵} = \{۳,۴,۵\}$$
$$A_۱ = \{۴\} \qquad A'_۱ = \varnothing$$

عدد اصلی و عدد اصلی نسبی $\tilde{A}$ نیز به صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$|\tilde{A}| = ۰/۱ + ۰/۵ + ۰/۸ + ۱ + ۰/۷ + ۰/۳ = ۳/۴$$

$$\|\tilde{A}\| = \frac{۳/۴}{۱۰} = ۰/۳۴$$

حال مجموعه α ـ برش مجموعه ی فازی تقریباً ۱۰ را به دست می‌آوریم. گیریم $\tilde{A}$ نام این مجموعه باشد. تابع عضویت $\tilde{A}$ را می‌توان به شکل زیر درنظر گرفت:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{۱}{۱ + (x - ۱۰)^۲}, \quad x \in \mathbb{R}$$

حال قرار می‌دهیم: $\mu_{\tilde{A}}(x) \ge \alpha$. لذا: $\frac{۱}{۱ + (x - ۱۰)^۲} \ge \alpha$

و از آن‌جا: $۱ + (x - ۱۰)^۲ \le \frac{۱}{\alpha}$ در نتیجه: $(x - ۱۰)^۲ \le \frac{۱ - \alpha}{\alpha}$ و به این ترتیب:

$$|x - ۱۰| \le \sqrt{\frac{۱ - \alpha}{\alpha}} \Rightarrow ۱۰ - \sqrt{\frac{۱ - \alpha}{\alpha}} \le x \le ۱۰ + \sqrt{\frac{۱ - \alpha}{\alpha}}$$

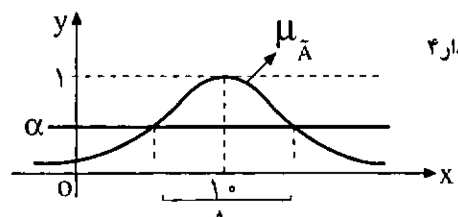
بنابراین:

$$A_\alpha = \left[۱۰ - \sqrt{\frac{۱ - \alpha}{\alpha}}, ۱۰ + \sqrt{\frac{۱ - \alpha}{\alpha}}\right], \quad \circ < \alpha \le ۱$$

ملاحظه می‌کنیم که: $A_۱ = \{۱۰\}$, $S(\tilde{A}) = \mathbb{R}$

نمودار۴، A_α را به ازای یک $\circ < \alpha \le ۱$ مشخص می‌کند:

نمودار۴



مفهوم حاصل‌ضرب دو مجموعه‌ی فازی از مفاهیم مهم در تئوری مجموعه‌های فازی است که آن را چنین تعریف می‌کنیم: فرض کنیم $\tilde{A}_۱$ و $\tilde{A}_۲$ دو مجموعه‌ی فازی به‌ترتیب روی مجموعه‌های مرجع $X_۱$ و $X_۲$ باشند.

در این صورت مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}_۱ \times \tilde{A}_۲$ روی $X_۱ \times X_۲$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{A}_۱ \times \tilde{A}_۲ = \left\{\left[(x_۱, x_۲), \mu_{\tilde{A}_۱ \times \tilde{A}_۲}(x)\right] \middle| x = (x_۱, x_۲) \in X_۱ \times X_۲\right\}$$

که در آن:

$$\mu_{\tilde{A}_۱ \times \tilde{A}_۲}(x) = \min\left\{\mu_{\tilde{A}_۱}(x_۱), \mu_{\tilde{A}_۲}(x_۲)\right\}$$

این حاصل‌ضرب را ضرب دکارتی یا کارتزین $\tilde{A}_۱$ در $\tilde{A}_۲$ نیز می‌نامند. برای مثال، فرض کنیم:

$X_۱ = X_۲ = \{۱, ۲, \ldots, ۱۰\}$ و $\tilde{A}_۱ = \{(۳, ۰/۵), (۵, ۱), (۷, ۰/۶)\}$

و $\tilde{A}_۲ = \{(۳, ۱), (۵, ۰/۶)\}$ در این صورت:

$$\tilde{A}_۱ \times \tilde{A}_۲ = \{[(۳,۳), ۰/۵], [(۳,۵), ۰/۵], [(۵,۳), ۱], [(۵,۵), ۰/۶], [(۷,۳), ۰/۶], [(۷,۵), ۰/۶]\}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنیم، عمل ضرب دکارتی دو مجموعه‌ی فازی شبیه ضرب دکارتی دو مجموعه‌ی قطعی در نظریه‌ی مجموعه‌های کلاسیک انجام می‌شود، با این تفاوت که هر زوج مرتب دارای یک درجه‌ی عضویت است. در قسمت‌های بعد سایر اعمال ریاضی مهم در نظریه‌ی مجموعه‌های فازی و نیز چند مفهوم اساسی نظیر مجموعه‌های محدب و نرمال را معرفی می‌کنیم.

---

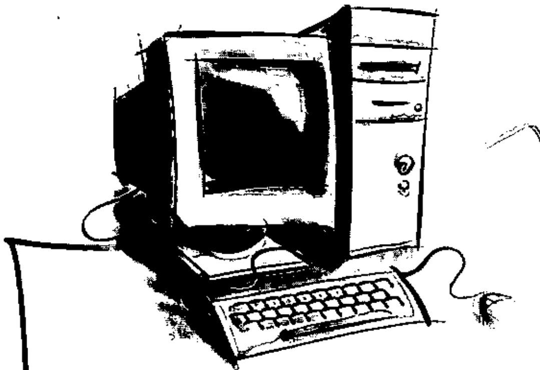
1. α-Level, α-Cut
2. membership degree
3. Stronge α − cut
4. Support
5. Cardinal number

---

۱. منهاج، دکتر محمدباقر. محاسبات فازی. انتشارات دانش‌نگار. ۱۳۸۶.

۲. شوندی، دکتر حسن. نظریه‌ی مجموعه‌های فازی و کاربرد آن در مهندسی صنایع و مدیریت. انتشارات گسترش علوم پایه. ۱۳۸۵.

3. Fuzzy set theory and its applications, H.J. Zimmermann, third edition, Kluwer Academic Publishers, London, 1996.



معرفی سایت‌های ریاضی جهان

● احسان یارمحمدی

● عبارات شامل متغیرها، جانشین‌سازی
(Expressions Involving Variables, substitution)

● چند جمله‌ای‌ها، عبارت‌ها و معادله‌های گویا
(Polynomials, Rational Expressions and Equations)

● معادلات پیچیده رادیکالی شامل ریشه‌ها
(Radicals Complicated Equations Involving Roots)

● معادله‌های درجه‌ی دوم (Quadratic Equations)

● نامعادله‌ها (Inequations)

● دستگاه‌های معادلات غیرخطی
(Systems of Equations that are not Linear)

■ جبر ۲ (Algebra II)

● اعداد مختلط (Complex Numbers)

● جبر خطی (معادلات غیرخطی)
(Linear Algebra (Not Linear Equations))

● مقدمه‌ای بر بردارها، جمع و ضرب
(Introduction to Vctors, Addition and Scaling)

● ماتریس‌ها، دترمینان، قاعده‌ی کرامر
(Matrices, Determinant, Cramer Rule)

● نما و لگاریتم در توابع توانی
(Exponent and Logarithm as Functions of Power)

● توابع گویا، آنالیز و ترسیم
(Rational Functions, Analyzing and Graphing)

● مقاطع مخروطی ـ بیضی، سهمی، هذلولی
(Conic Sections _ Ellipse, Parabola, Hyperbola)

● دنباله‌های اعداد، سری‌ها و چگونگی مجموع آن‌ها
(Sequences of Numbers, Series and How to Sum them)

ادامه در صفحه ی ۵۰

ه های
ی در کشورهای مختلف

مسئله هایی از المپیاد ریاضی کشورهای مغرب

ترجمه و تالیف: هوشنگ شرقی

اشاره

المپیاد ریاضی کشورهای مغرب، از جمله رقابت‌های ریاضی منطقه‌ای است که هر سال بین کشورهای آفریقایی برگزار می‌شود. این کشورها عبارت‌اند از: لیبی، تونس، الجزایر و مراکش که از نخستین سال‌های دهه‌ی ۸۰ میلادی مسابقه‌ی ریاضی مشترک بین آن‌ها آغاز شده است.

در این شماره، منتخبی از سؤال‌های المپیاد ریاضی مغرب را از سال ۱۹۸۶، همراه با راه‌حل آن‌ها می‌آوریم و در صورت دست‌رسی به سؤال‌های سال‌های جدیدتر، در شماره‌های آینده از آن‌ها استفاده می‌کنیم.

سؤال‌ها

۱. رقم‌های x، y و z را طوری پیدا کنید که برای هر مقدار $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم:

$$\sqrt{\underbrace{xx\cdots x}_{2n\ \text{رقم}} - \underbrace{yy\cdots y}_{n\ \text{رقم}}} = \underbrace{zz\cdots z}_{n\ \text{رقم}}$$

۲. خط راست موازی قطر AC از چهارضلعی محدب ABCD، از وسط قطر BD گذشته و خط راستی را که از وسط AC موازی BD رسم می‌شود، در نقطه‌ی O قطع کرده است. ثابت کنید، چهارضلعی‌های OABC، OBCD، OCDA و ODAB مساحت‌هایی برابر دارند.

۳. ثابت کنید برای عددهای مثبت و دل‌خواه a_1، a_2 و a_3 داریم:

$$3\left(\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_1}\right) \geq 4\left(\frac{1}{a_1+a_2}+\frac{1}{a_2+a_3}+\frac{1}{a_1+a_3}\right)^2$$

۴. دو دایره‌ی هم‌مرکز در O مفروض‌اند. دو خط راست که از O گذشته‌اند، دایره‌ی بزرگ‌تر را در A و B دایره‌ی کوچک‌تر را در نقاط C و D قطع کرده‌اند؛ به قسمی که O بین نقاط A و C قرار دارد و D بین نقاط B و O. ثابت کنید دایره‌ی محیطی مثلث AOB و دایره‌ی محیطی مثلث COD و دایره‌ی به قطر BD و دایره‌ی به قطر AC همگی از یک نقطه می‌گذرند.

۵. جواب‌های درست این معادله را پیدا کنید:

$$5^{2x} - 3\times 2^{2y} + 5^x \times 2^{y-1} - 2^{y-1} - 2\times 5^x + 1 = 0$$

حل

۱. می‌توان معادله را به این صورت بازنویسی کرد:

$$x(\underbrace{111\cdots1}_{2n\ \text{رقم}}) - y(\underbrace{111\cdots1}_{n\ \text{رقم}}) = z^2(\underbrace{111\cdots1}_{n\ \text{رقم}})^2$$

$$\Rightarrow x(\underbrace{111\cdots1}_{n\ \text{رقم}}\underbrace{111\cdots1}_{n\ \text{رقم}}) - y(\underbrace{111\cdots1}_{n\ \text{رقم}}) = z^2(\underbrace{111\cdots1}_{n\ \text{رقم}})^2$$

$$\Rightarrow x\left[10^n(\underbrace{111\cdots1}_{n\ \text{رقم}}) + (\underbrace{111\cdots1}_{n\ \text{رقم}})\right] - y(\underbrace{111\cdots1}_{n\ \text{رقم}}) = z^2(\underbrace{111\cdots1}_{n\ \text{رقم}})^2$$

$$\Rightarrow x(\underbrace{111\cdots1}_{n\ \text{رقم}})(10^n+1) - y(\underbrace{111\cdots1}_{n\ \text{رقم}}) = z^2(\underbrace{111\cdots1}_{n\ \text{رقم}})^2$$

$$\Rightarrow x(10^n+1) - y = z^2(\underbrace{111\cdots1}_{n\ \text{رقم}})$$

$$\Rightarrow x(10^n-1) + (2x-y) = z^2(\underbrace{111\cdots1}_{n\ \text{رقم}})$$

هم‌چنین به سادگی می‌توان ثابت کرد:

$$\underbrace{11\cdots1}_{n\text{رقم}} = \frac{10^n - 1}{9}$$

و از آن‌جا:

$$(2x - y) = (z^2 - 9x)(\underbrace{11\cdots1}_{n\text{رقم}})$$

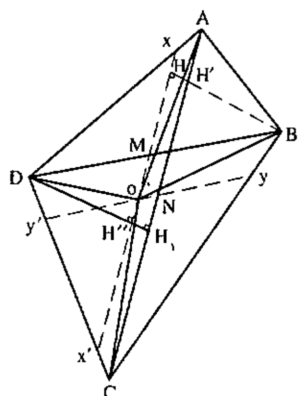
و برای آن‌که این رابطه به ازای همه‌ی مقادیر n برقرار باشد، باید داشته باشیم:

$$2x - y = 0 \quad , \quad z^2 - 9x = 0$$

و از آن‌جا: $9x = z^2$ و برای آن‌که $9x$ مربع کامل باشد، باید $x = 1$ یا ۴ یا ۹ و از آن‌جا با توجه به این‌که $y = 2x$ و y نیز یک رقم است، تنها این پاسخ‌ها را داریم:

$(x = 1 \; , \; y = 2 \; , \; z = 3)$ یا $(x = 4 \; , \; y = 8 \; , \; z = 6)$

۲. مطابق شکل $xx' \parallel AC$ و $yy' \parallel BD$ و از B و D عمودهایی بر xx' رسم کرده‌ایم. چون $MB=MD$ است، بنابراین: $\overset{\Delta}{MBH} \cong \overset{\Delta}{MDH''}$ و در نتیجه:



$$BH = DH'' \Rightarrow$$
$$BH' + HH' = DH'' \Rightarrow$$
$$BH'.AC + HH'.AC = DH''.AC \Rightarrow$$
$$2S_{ABC} + 2S_{OAC} = (DH_1 - H_1H'').AC$$

هم‌چنین بدیهی است که: $HH' = H_1H''$ و در نتیجه:

$$2S_{ABC} + 2S_{OAC} = 2S_{ADC} - 2S_{OAC} \Rightarrow$$
$$S_{ABC} + S_{OAC} = S_{ADC} - S_{OAC} \Rightarrow S_{OABC} = S_{OCDA}$$

بنابراین داریم:

$S_{OABC} = S_{OCDA} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$ و به طریق مشابه می‌توان ثابت کرد:

$$S_{ODAB} = S_{OBCD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

و از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$S_{OABC} = S_{OBCD} = S_{OCDA} = S_{ODAB}$$

۳. با توجه به نابرابری واسطه‌های حسابی ـ هندسی می‌توان نوشت:

$$a_1 + a_2 \geq 2\sqrt{a_1a_2} \Rightarrow \frac{1}{a_1 + a_2} \leq \frac{1}{2\sqrt{a_1a_2}}$$

و به همین ترتیب:

$$\frac{1}{a_1 + a_3} \leq \frac{1}{2\sqrt{a_1a_3}} \quad , \quad \frac{1}{a_2 + a_3} \leq \frac{1}{2\sqrt{a_2a_3}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{a_1 + a_2} + \frac{1}{a_2 + a_3} + \frac{1}{a_1 + a_3} \leq \frac{1}{2\sqrt{a_1a_2}} + \frac{1}{2\sqrt{a_2a_3}} + \frac{1}{2\sqrt{a_1a_3}}$$

و لذا برای اثبات این نابرابری کافی است نشان دهیم:

$$3\left(\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \frac{1}{a_1a_3}\right) \geq 4\left(\frac{1}{2\sqrt{a_1a_2}} + \frac{1}{2\sqrt{a_2a_3}} + \frac{1}{2\sqrt{a_1a_3}}\right)^2$$

و با فرض $a_1a_2 = x$ ، $a_2a_3 = y$ و $a_1a_3 = z$ ، نابرابری به این صورت نوشته می‌شود:

$$3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 4\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{2\sqrt{z}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq$$

$$4\left(\frac{1}{4x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{4z} + \frac{1}{2\sqrt{xy}} + \frac{1}{2\sqrt{xz}} + \frac{1}{2\sqrt{yz}}\right) \Rightarrow$$

$$2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq \frac{2}{\sqrt{xy}} + \frac{2}{\sqrt{xz}} + \frac{2}{\sqrt{yz}}$$

و با فرض $x > 0$ ، $y > 0$ و $z > 0$ می‌توان نابرابری را به سه نابرابری زیر تفکیک کرد که از جمع آن‌ها نابرابری فوق اثبات می‌شود:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}} \quad , \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{z} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}} , \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{2}{\sqrt{yz}}$$

و به دلیل تقارن، اثبات یکی از نابرابری‌های بالا کافی است:

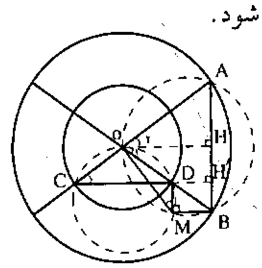
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}} \Rightarrow \frac{x+y}{xy} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}} \Rightarrow$$

$$x + y \geq \frac{2xy}{\sqrt{xy}} \Rightarrow x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

و نابرابری فوق هم براساس نابرابری واسطه‌های حسابی ـ هندسی برقرار است. لازم به ذکر است، اثبات براساس استدلال بازگشتی انجام شده و همه‌ی مراحل نیز برگشت‌پذیرند.

۴. با توجه به اطلاعات مسئله، شکل صفحه بعد را برای آن رسم می‌کنیم. بدیهی است، مثلث‌های OCD و OAB متساوی‌الساقین هستند و در نتیجه نیم‌ساز زاویه‌ی خارجی رأس O

از مثلث ODC موازی قاعده‌ی CD است. این نیم‌ساز، نیم‌ساز زاویه‌ی رأس O از مثلث OAB نیز هست و در نتیجه ارتفاع وارد بر AB نیز محسوب می‌شود.



بنابراین: $OH \perp AB \ , \ CH' \parallel OH \Rightarrow CH' \perp AB$

و اگر نقطه‌ی برخورد دوایر محیطی مثلث‌های OCD و OAB را M بنامیم، خواهیم داشت:

محاطی $MOAB \Rightarrow O\hat{M}B + O\hat{A}B = ۱۸۰^\circ \Rightarrow$

$$O\hat{M}D + B\hat{M}D + O\hat{A}B = ۱۸۰^\circ \ , \ O\hat{M}D = O\hat{C}D = \frac{\widehat{OD}}{۲},$$

$$O\hat{C}D + O\hat{A}B + \hat{H}' = ۱۸۰^\circ \Rightarrow O\hat{C}D + O\hat{A}B = ۹۰^\circ,$$

$$\underbrace{O\hat{C}D + O\hat{A}B}_{۹۰^\circ} + B\hat{M}D = ۱۸۰^\circ \Rightarrow B\hat{M}D = ۹۰^\circ$$

و بنابراین، M روی دایره‌ای به قطر BD قرار دارد. به طریق مشابه می‌توان ثابت کرد: $A\hat{M}C = ۹۰^\circ$ و لذا M روی دایره‌ای به قطر AC نیز واقع است.

۵. با فرض $a = ۵^x$ و $b = ۲^y$ خواهیم داشت:

$$a^۲ - ۳b^۲ + \frac{ab}{۲} - \frac{b}{۲} - ۲a + ۱ = ۰$$
$$\Rightarrow ۲a^۲ - ۶b^۲ + ab - b - ۴a + ۲ = ۰$$
$$\Rightarrow ۲a^۲ - ۸b^۲ + ۲b^۲ + ab - b - ۴a + ۲ = ۰$$
$$\Rightarrow ۲(a - ۲b)(a + ۲b) + b(a + ۲b) - b - ۴a + ۲ = ۰$$
$$\Rightarrow (a + ۲b)(۲a - ۴b + b) - b - ۴a + ۲ = ۰$$
$$\Rightarrow (a + ۲b)(۲a - ۳b) - ۲(a + ۲b) - (۲a - ۳b) + ۲ = ۰$$
$$\Rightarrow (a + ۲b - ۱)(۲a - ۳b - ۲) = ۰$$
$$\Rightarrow a + ۲b = ۱ \quad \text{یا} \quad ۲a - ۳b = ۲$$
$$\Rightarrow ۵^x + ۲^{y+۱} = ۱ \quad \text{یا} \quad ۲\times ۵^x - ۳\times ۲^y = ۲$$
$$\Rightarrow ۵^x + ۲^{y+۱} = ۱ \ \ (I) \quad \text{یا} \quad ۵^x - ۳\times ۲^{y-۱} = ۱ \ \ (II)$$

تساوی (I) به ازای هیچ دو عدد صحیح x و y برقرار نمی‌شود، زیرا اگر $x \ge ۰$ باشد، داریم: $۵^x \ge ۱$ و درنتیجه: $۵^x + ۲^{y+۱} > ۱$. و اگر $y + ۱ \ge ۰$ باشد، آن‌گاه داریم: $۲^{y+۱} \ge ۱$ و $۵^x + ۲^{y+۱} > ۱$. بنابراین، باید $x < ۰$ و $y + ۱ < ۰$ باشد. درنتیجه معادله‌ی فوق به صورت $۵^{-m} + ۲^{-n} = ۱$ با شرط $n > ۰$ و $m > ۰$ درمی‌آید که با معادله‌ی $\frac{۱}{۵^m} + \frac{۱}{۲^n} = ۱$ هم‌ارز است و از آن‌جا: $۵^m + ۲^n = ۵^m.۲^n$ که این هم ممکن نیست، زیرا عبارت سمت چپ تساوی عددی فرد و عبارت سمت راست عددی زوج است. بنابراین، فقط می‌توان به معادله‌ی (II) توجه کرد:

$$۵^x - ۳\times ۲^{y-۱} = ۱ \Rightarrow ۵^x - ۵\times ۲^{y-۱} + ۲\times ۲^{y-۱} = ۱$$
$$\Rightarrow ۵(۵^{x-۱} - ۲^{y-۱}) = ۱ - ۲^y \Rightarrow ۵(۲^{y-۱} - ۵^{x-۱}) = ۲^y - ۱$$

پس لازم است که $۲^y - ۱ = ۵k$ باشد و با فرض $y = ۴y' + r$ خواهیم داشت:

$$۲^{۴y'+r} - ۱ = ۵k \Rightarrow ۲^{۴y'} \times ۲^r - ۱ = ۵k$$
$$\Rightarrow ۱۶^{y'}.۲^r - ۱ \overset{۵}{\equiv} ۰ \ , \ ۱۶ \overset{۵}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۲^r - ۱ \overset{۵}{\equiv} ۰$$

و با فرض ۳ یا ۲ یا ۱ یا $r = ۰$، فقط به ازای $r = ۰$ این برابری ممکن است. درنتیجه داریم: $y = ۴y'$ و از آن‌جا خواهیم داشت:

$$۵^x - ۳\times ۲^{۴y'-۱} = ۱ \Rightarrow ۵^x - ۱ = \frac{۳\times ۱۶^{y'}}{۲}$$
$$\Rightarrow ۲\times ۵^x - ۲ = ۳\times ۱۶^{y'}$$

عبارت سمت راست این تساوی مضربی از ۳ است. بنابراین عبارت سمت چپ نیز باید مضرب ۳ باشد. اگر x فرد باشد، خواهیم داشت:

$$x = ۲x' + ۱ \Rightarrow ۲\times ۵^x - ۲ = ۲\times ۵^{۲x'+۱} - ۲$$
$$= ۲\times ۲۵^{x'} \times ۵ - ۲ \overset{۳}{\equiv} ۲$$

پس باید x زوج باشد و از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$x = ۲x' \Rightarrow ۲\times ۵^{۲x'} - ۲ = ۳\times ۱۶^{y'}$$
$$\Rightarrow ۲\times ۲۵^{x'} - ۲ = ۳\times ۱۶^{y'} \Rightarrow ۲(۲۵^{x'} - ۱) = ۳\times ۱۶^{y'}$$
$$\Rightarrow ۲(۲۵ - ۱)(۲۵^{x'-۱} + ۲۵^{x'-۲} + \dots + ۲۵ + ۱) = ۳\times ۱۶^{y'}$$
$$\Rightarrow ۴۸(۲۵^{x'-۱} + ۲۵^{x'-۲} + \dots + ۲۵ + ۱) = ۴۸\times ۱۶^{y'-۱}$$
$$\Rightarrow ۲۵^{x'-۱} + ۲۵^{x'-۲} + \dots + ۲۵ + ۱ = ۱۶^{y'-۱}$$

رقم سمت راست عبارت فوق همواره مساوی ۶ است (مگر آن‌که $y' - ۱ = ۰$) و رقم سمت راست عبارت سمت چپ در صورتی مساوی ۶ است که تعداد توان‌های ۲۵ فرد باشد؛ یعنی $x' - ۱$ فرد و درنتیجه x' زوج باشد:

$$x' = ۲x'' \Rightarrow ۲(۲۵^{۲x''} - ۱) = ۳\times ۱۶^{y'}$$
$$\Rightarrow ۲(۶۲۵^{x''} - ۱) = ۳\times ۱۶^{y'}$$
$$\Rightarrow ۲(۶۲۵ - ۱)\underbrace{(۶۲۵^{x''-۱} + ۶۲۵^{x''-۲} + \dots + ۱)}_{A} = ۳\times ۱۶^{y'}$$
$$\Rightarrow ۲\times ۶۲۴A = ۳\times ۱۶^{y'}$$
$$\Rightarrow ۲\times ۲^۴ \times ۱۳ \times ۳A = ۳\times ۱۶^{y'}$$
$$\Rightarrow ۱۳A = ۲^{۴y'-۵}$$

که تساوی اخیر هرگز برقرار نمی‌شود (چرا؟) پس تنها حالت قابل قبول آن است که $y' - ۱ = ۰$ باشد و درنتیجه:

$y' = ۱ \Rightarrow y = ۴$ و $x = ۲$

□

اشاره

در قسمت قبل به برخی از کاربردهای هم‌نهشتی اشاره شد. در این شماره نیز به ادامه‌ی مطلب که تعیین دو رقم راست یک عدد، تعیین سه‌رقم سمت راست یک عدد، قضیه‌ی ویلسن به‌عنوان نتیجه‌ای از قضیه‌ی کوچک‌فرما و کاربردهای آن در حل مسئله‌ها و معادله‌های سیاله‌ی درجه‌ی nام و تعیین باقی‌مانده‌ی تقسیم یک عدد شامل فاکتوریل بر یک عدد اول و دیگر مسئله‌های خلاق و ابتکاری می‌پردازیم.

در آخر مبحث، تمرین‌هایی نظیر مثال‌های متن طراحی شده‌اند که می‌توانید با دیدن مثال‌ها، آن‌ها را حل کنید.

تعیین دو رقم سمت راست یک عدد

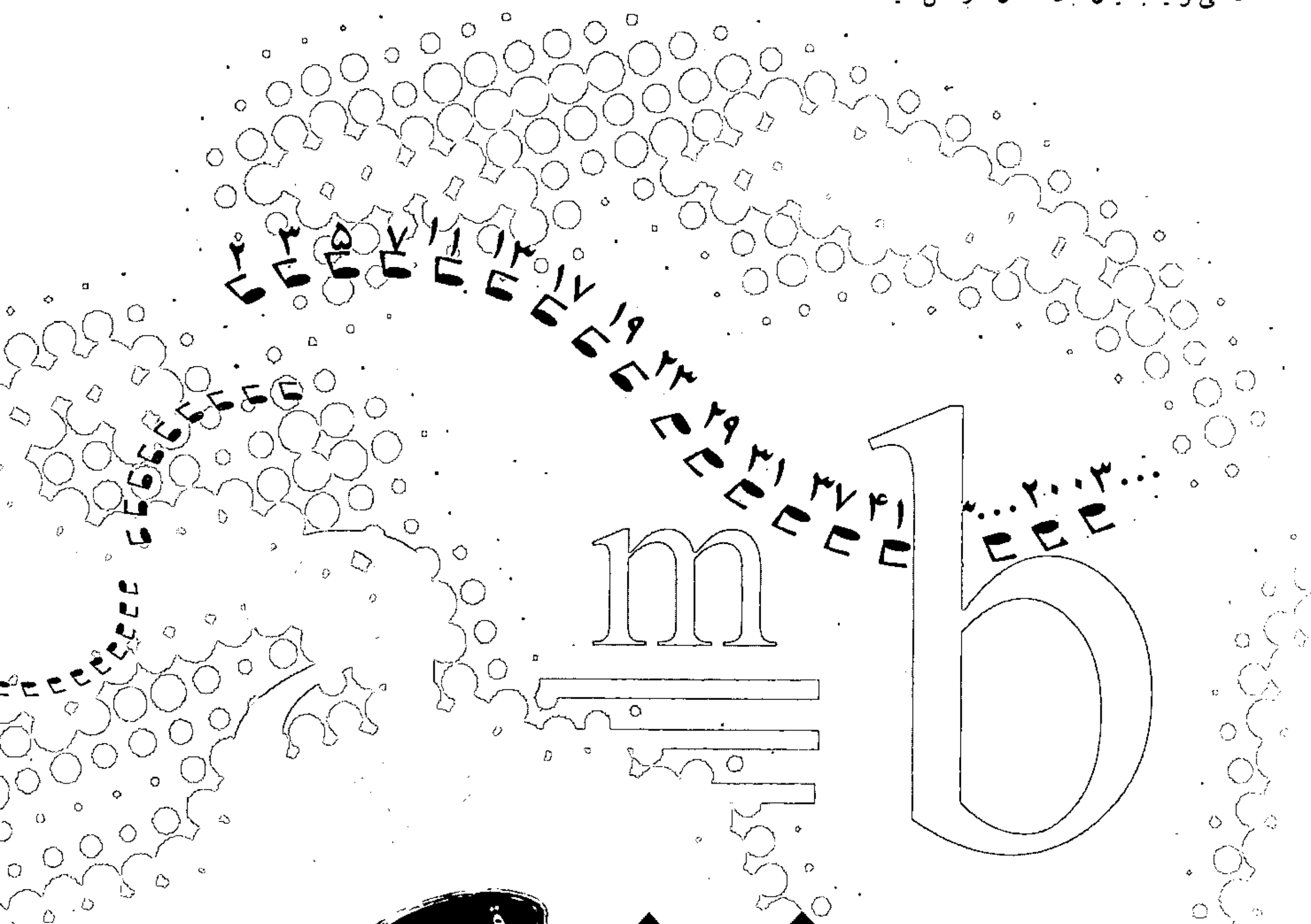
برای تعیین دو رقم سمت راست هر عدد، کافی است باقی‌مانده‌ی تقسیم آن عدد را بر ۱۰۰ بیابیم. در واقع دو رقم سمت راست عددی مثل N از هم‌نهشتی $N \overset{۱۰۰}{\equiv} \overline{ab}$ تعیین می‌شود.

مثال: دو رقم سمت راست عدد N را بیابید.

$$N = ۱! + ۲! + ۳! + \cdots + ۱۳۸۷!$$

حل: بدیهی است که اگر $n \geq ۱۰$، آن‌گاه $n! \overset{۱۰۰}{\equiv} ۰$. پس:

$$N = ۱! + ۲! + ۳! + \cdots + ۱۳۸۷! \overset{۱۰۰}{\equiv} ۱ + ۲ + ۶ + ۲۴$$
$$+ ۲۰ + ۲۰ + ۴۰ + ۲۰ + ۸۰ + ۰ + \cdots$$



هم‌نهشتی و کاربردهای آن

قسمت ۵

● سید محمدرضا هاشمی موسوی
hashemi-moosavi@yahoo.com

$N \overset{100}{\equiv} 213 \overset{100}{\equiv} 13 \;;\; N \overset{100}{\equiv} 13$ (دو رقم سمت راست N)

مثال: دو رقم سمت راست عدد M را تعیین کنید.

$$M = 2!+4!+6!+\cdots+2008!$$

حل: با توجه به هم‌نهشتی $n! \underset{(n\ge 10)}{\overset{100}{\equiv}} 0$، می‌توان نوشت:

$$M = 2!+4!+6!+\cdots+2008! \overset{100}{\equiv} 2+24+20+20+0+0+\cdots+0 = 66$$

$M \overset{100}{\equiv} 66$ (دو رقم سمت راست عدد M)

مثال: دو رقم سمت راست عدد M را تعیین کنید.

$$M = 2^{1387}+5^{1387}+7^{1387}$$

حل: $M = (2^{10})^{138}\times 2^{7} + (5^{2})^{693}\times 5 + (7^{4})^{346}\times 7^{3}$;

$$M = (1024)^{138}\times(128)+(25)^{693}\times 5+(2401)^{346}\times(343)$$

$$M \overset{100}{\equiv} 24^{138}\times 28+25\times 5+(1)^{346}\times 43 \overset{100}{\equiv} 76\times 28+25+43$$

$M \overset{100}{\equiv} 2196 \;;\; M \overset{100}{\equiv} 96$ (دو رقم سمت راست عدد M)

مثال: دو رقم سمت راست عدد N را تعیین کنید.

$$N = 26^{1}+26^{2}+\cdots+26^{1388}$$

حل: با توجه به نکات قبل، هم‌نهشتی $26^{n} \overset{100}{\equiv} 76$ بدیهی است، پس:

$$N = 26^{1}+26^{2}+26^{3}+\cdots+26^{1388} \overset{100}{\equiv} 26+\underbrace{76+76+\cdots+76}_{\text{1387 مرتبه}}$$

$$N \overset{100}{\equiv} 26+1387(76) \overset{100}{\equiv} 26+(87)(76) = 6638 \overset{100}{\equiv} 38$$

$N \overset{100}{\equiv} 38$ (دو رقم سمت راست عدد N)

مثال: دو رقم سمت راست عدد M را بیابید.

$$M = 24^{25^{1387}}+25^{26^{1388}}+26^{24^{1389}}$$

حل: با توجه به نکات قبل، هم‌نهشتی‌های زیر بدیهی هستند:

$$24^{n} \underset{(\text{فرد } n)}{\overset{100}{\equiv}} 24 \;,\; 25^{n} \overset{100}{\equiv} 25 \;,\; 26^{n} \underset{(n\ge 2)}{\overset{100}{\equiv}} 76$$

بنابراین، چون توان عدد ۲۴ عددی فرد است، پس:

$$M \overset{100}{\equiv} 24+25+76$$

$M \overset{100}{\equiv} 125 \overset{100}{\equiv} 25 \;;\; M \overset{100}{\equiv} 25$ (دو رقم سمت راست عدد M)

تعیین سه رقم سمت راست یک عدد

برای تعیین سه رقم سمت راست هر عدد، کافی است باقی‌مانده‌ی تقسیم آن عدد را بر ۱۰۰۰ بیابیم. در واقع سه رقم سمت راست عددی مثل N، از هم‌نهشتی $N \overset{1000}{\equiv} \overline{abc}$ تعیین می‌شود.

مثال: سه رقم سمت راست عدد N را تعیین کنید.

$$N = \left(7^{1387}\times 11^{1388}\times 13^{1389}\right)^{2}$$

حل: با توجه به برابری $1001 = 7\times 11\times 13$، می‌توان نوشت:

$$N = \left((7\times 11\times 13)^{1387}\times 11\times 13^{2}\right)^{2} = (1001^{1387}\times 1859)^{2}$$

$$N = (1001)^{2\times 1387}\times(1859)^{2} \overset{1000}{\equiv} (1)^{2\times 1387}\times(859)^{2} = 737881 \overset{1000}{\equiv} 881$$

$N \overset{1000}{\equiv} 881$ (سه رقم سمت راست عدد N)

مثال: سه رقم سمت راست N را از رابطه‌ی زیر بیابید:

$$N \overset{1000}{\equiv} 343^{1387}\times 331^{1388}\times 197^{1389}$$

حل: با توجه به برابری‌های زیر:

$$7^{3}=343,\; 11^{3}=1331,\; 13^{3}=2197,\; 7\times 11\times 13=1001$$

می‌توان نوشت:

$$N \overset{1000}{\equiv} 343^{1387}\times 331^{1388}\times 197^{1389} \overset{1000}{\equiv} 343^{1387}\times 1331^{1388}\times 2197^{1389}$$

$$N \overset{1000}{\equiv} (7^{3})^{1387}\times(11^{3})^{1388}\times(13^{3})^{1389} = (7\times 11\times 13)^{3\times 1387}\times 11^{3}\times 13^{6}$$

$$N \overset{1000}{\equiv} (1001)^{3\times 1387}\times(1331)(2197)^{2} \overset{1000}{\equiv} (1)^{3\times 1387}\times(331)(197)^{2}$$

$$N \overset{1000}{\equiv} (331)(38809) \overset{1000}{\equiv} (331)(809) = 267779 \overset{1000}{\equiv} 779$$

$N \overset{1000}{\equiv} 779$ (سه رقم سمت راست عدد N)

مثال: سه رقم سمت راست عدد M را بیابید.

$$M = (2007)^{2008}.(2011)^{2009}.(2013)^{2010}$$

حل:

$$M = (2007)^{2008}.(2011)^{2009}.(2013)^{2010} \overset{1000}{\equiv} 7^{2008}\times 11^{2009}\times 13^{2010}$$

$$M \overset{1000}{\equiv} (7\times 11\times 13)^{2008}\times 11\times 13^{2} \overset{1000}{\equiv} (1)^{2008}\times 11\times 169 = 1859 \overset{1000}{\equiv} 859$$

$M \overset{1000}{\equiv} 859$ (سه رقم سمت راست عدد M)

مثال: سه رقم سمت راست عدد M را بیابید.

$$M = 5!+10!+15!+\cdots+2010!$$

حل: با توجه به هم‌نهشتی $n! \underset{(n\ge 15)}{\overset{1000}{\equiv}} 0$ می‌توان نوشت:

$$M = 5!+10!+15!+\cdots+2010! \overset{1000}{\equiv} 120+3628800+0+0+\cdots+0$$

$$M \overset{1000}{\equiv} 3628920 \overset{1000}{\equiv} 920 \;;\; M \overset{1000}{\equiv} 920$$

(سه رقم سمت راست عدد M)

قضیه‌ی ویلسن، نتیجه‌ای از قضیه‌ی کوچک فرما و کاربرد آن

اگر p عددی اول باشد، آن‌گاه:

$$(p-1)! \overset{p}{\equiv} -1$$

اثبات قضیه‌ی ویلسن و نتیجه‌ی آن:

$$(p-2)! \underset{(\text{اول } p)}{\overset{p}{\equiv}} 1$$

به راحتی از قضیه‌ی کوچک فرما نتیجه می‌شود؛ زیرا کافی است در قضیه‌ی فرما:

$$(a,p)=1 \;;\; a^{p-1} \underset{(\text{اول } p)}{\overset{p}{\equiv}} 1$$

به‌جای a، عدد $(p-2)!$ یا $(p-1)!$ را جای‌گزین کرد، زیرا:

$$(p,(p-2)!)=1 \;,\; (p,(p-1)!)=1$$

بنابراین:

$$(p>2) \;,\; a=(p-2)! : ((p-2)!)^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1 \;;\; (p-2)! \overset{p}{\equiv} 1$$

$$(p>2) \;,\; a=(p-1)! : ((p-1)!)^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1 \;;\; (p-1)! \overset{p}{\equiv} -1$$

چون $(p-1)$ با فرض $p>2$، عددی زوج است، پس از جذرگیری از دو طرف هم‌نهشتی، اعداد ± 1 ظاهر می‌شوند که از طریق آزمایش معلوم می‌شود، جواب‌های $(p-1)! \overset{p}{\equiv} 1$ و $(p-2)! \overset{p}{\equiv} -1$ خارجی هستند و این قضیه برای $p=2$ نیز برقرار است:

$$(\text{اول } p) : (p-2)! \overset{p}{\equiv} 1 \;,\; (p-1)! \overset{p}{\equiv} -1$$

توجه داشته باشیم که از قضیه‌ی ویلسن می‌توان به‌طور مستقیم به رابطه‌ی دیگر رسید؛ زیرا:

$$(p-1)! \overset{p}{\equiv} -1 \;;\; (p-1)! \overset{p}{\equiv} p-1 \;,\; (p-1\;,\; p)=1 \;;$$

$$(p-2)!(p-1) \overset{p}{\equiv} p-1 \;;\; (p-2)! \overset{p}{\equiv} 1$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $(2002)!$ بر 2003 را بیابید.

حل: با توجه به قضیه‌ی ویلسن، چون $p=2003$ عددی اول است، پس می‌توان نوشت:

$$p=2003 : (2003-1)! \overset{2003}{\equiv} -1 \;;\; (2002)! \overset{2003}{\equiv} -1$$

$$(2002)! \overset{2003}{\equiv} -1+2003=2002 \;;\; (2002)! \overset{2003}{\equiv} 2002$$

(باقی‌مانده‌ی تقسیم)

مثال: با استفاده از قضیه‌ی ویلسن، یک سلسله جواب برای معادله‌ی سیاله‌ی زیر بیابید.

$$p_1,p_2 \in \mathbb{N} \;,\; p_1,p_2 < p\ (\text{اول}) : X^{p_1}+Y^{p_2}=Z^{p} \quad (1)$$

حل: به منظور تعیین جوابی برای معادله‌ی ۱، ابتدا یک سلسله از جواب‌های معادله‌ی زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$X_1^n + X_2^n = X_3^{n+1} \quad (2)$$

به این منظور، کافی است که معادله‌ی ۲ را با اتحاد زیر مقایسه کنیم:

$$(a^{n+1}+ab^n)^n+(a^nb+b^{n+1})^n=(a^n+b^n)^{n+1} \quad (3)$$

از مقایسه‌ی معادله ۲ و اتحاد ۳ خواهیم داشت

$$(4)\begin{cases} x_1=a^{n+1}+ab^n \\ x_2=a^nb+b^{n+1} \\ x_3=a^n+b^n \end{cases}$$

در این جا، با فرض $n=(p-1)!$، معادله‌ی ۲ به معادله‌ی زیر تحویل می‌شود:

$$x_1^{(p-1)!}+x_2^{(p-1)!}=x_3^{(p-1)!+1} \quad (5)$$

طبق قضیه‌ی ویلسن، اگر p عددی اول باشد، عبارت $(p-1)!+1$ بر p بخش‌پذیر است. از طرف دیگر می‌توان نوشت:

$$(p-1)!+1=p\left(1+2\left\lfloor\frac{(p-1)!+1}{2p}\right\rfloor\right) \quad (6)$$

($\lfloor\ \rfloor$: قسمت درست عدد)

در این جا، با استفاده از رابطه‌ی ۶ و با توجه به شرط $p_1,p_2<p$، معادله‌ی ۵ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\left(x_1^{\frac{(p-1)!}{p_1}}\right)^{p_1}+\left(x_2^{\frac{(p-1)!}{p_2}}\right)^{p_2}=\left(x_3^{1+2\left\lfloor\frac{(p-1)!+1}{2p}\right\rfloor}\right)^{p} \quad (7)$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی ۱ با اتحاد ۷، یک سلسله از جواب‌های معادله‌ی ۱ حاصل می‌شوند:

$$(8)\begin{cases} X=\left(a^{(p-1)!+1}+ab^{(p-1)!}\right)^{\frac{(p-1)!}{p_1}} \\ Y=\left(a^{(p-1)!}b+b^{(p-1)!+1}\right)^{\frac{(p-1)!}{p_2}} \\ Z=\left(a^{(p-1)!}+b^{(p-1)!}\right)^{1+2\left\lfloor\frac{(p-1)!+1}{2p}\right\rfloor} \end{cases}$$

(برای کسب اطلاع بیش‌تر درباره‌ی حل معادله‌های سیاله و تعمیم آن‌ها، به شماره‌های ۵۴، ۵۵ و ۵۶ رشد برهان متوسطه رجوع شود.)

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد M را بر ۸۳ بیابید.

$$M=1+82!^{1387}+82!^{1388}+82!^{1389}+82!^{1394}$$

حل: با توجه به قضیه‌ی ویلسن می‌توان نوشت:

$$(83-1)! \overset{83}{\equiv} -1 \;;\; 82! \overset{83}{\equiv} -1$$

و با توجه به قضیه‌ی کوچک فرما:

$$۸۲^{۸۳-۱} \overset{۸۳}{\equiv} ۱ \;;\; ۸۲^{۸۲} \overset{۸۳}{\equiv} ۱ \;;\; (۸۲^{۸۲})^{۱۷} \overset{۸۳}{\equiv} (۱)^{۱۷} \;;\; ۸۲^{۱۳۹۴} \overset{۸۳}{\equiv} ۱$$

بنابراین:

$$M \overset{۸۳}{\equiv} ۱+(-۱)^{۱۳۸۷}+(-۱)^{۱۳۸۸}+(-۱)^{۱۳۸۹}+۱=$$

$$۱-۱+۱-۱+۱=۱ \;;\; M \overset{۸۳}{\equiv} ۱$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد N را بر ۲۰۰۳ بیابید.

$$N=(۲۰۰۱!)^{۲۰۰۸}+(۲۰۰۲!)^{۲۰۰۹}$$

حل: با استفاده از قضیه‌ی ویلسن و نتیجه‌ی آن:

$$۲۰۰۲!=(۲۰۰۳-۱)! \overset{۲۰۰۳}{\equiv} -۱ \;,\; ۲۰۰۱!=(۲۰۰۳-۲)! \overset{۲۰۰۳}{\equiv} ۱$$

بنابراین:

$$N \overset{۲۰۰۳}{\equiv} (۱)^{۲۰۰۸}+(-۱)^{۲۰۰۹}=۱-۱=۰ \;,\; N \overset{۲۰۰۳}{\equiv} ۰$$

پس، عدد N بر ۲۰۰۳ بخش‌پذیر است.

مثال: برای هر عدد اول p و هر عدد صحیح a نشان دهید:

$$p \mid (a^p+(p-۱)!a)$$

حل: طبق قضیه‌ی کوچک فرما ($a^p \overset{p}{\equiv} a$)، می‌توان نوشت:

$$a^p+(p-۱)!a \overset{p}{\equiv} a(۱+(p-۱)!)$$

هم‌چنین، طبق قضیه‌ی ویلسن ($(p-۱)! \overset{p}{\equiv} -۱$) می‌توان نوشت:

$$a(۱+(p-۱)!) \overset{p}{\equiv} a(۱-۱)=۰$$

در این‌جا حکم ثابت می‌شود.

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم !۱۸ را بر ۴۳۷ به‌دست آورید.

حل: با توجه به ۴۳۷=۱۹×۲۳ و طبق قضیه‌ی ویلسن: $۱۸! \overset{۱۹}{\equiv} -۱$ و $۲۲! \overset{۲۳}{\equiv} -۱$ یا $۱۸!\times۱۹\times۲۰\times۲۱\times۲۲ \overset{۲۳}{\equiv} -۱$، خواهیم داشت:

$$۲۲!=۱۸!(-۴)(-۳)(-۲)(-۱) \overset{۲۳}{\equiv} ۱۸!(۲۴) \overset{۲۳}{\equiv} ۱۸!(۱)=۱۸! \overset{۲۳}{\equiv} -۱$$

پس:

$$۱۸! \overset{۱۹\times۲۳}{\equiv} -۱ \;;\; ۱۸! \overset{۴۳۷}{\equiv} -۱ \;;\; ۱۸! \overset{۴۳۷}{\equiv} ۴۳۷-۱=۴۳۶$$

(باقی‌مانده‌ی تقسیم)

مثال: عکس قضیه‌ی ویلسن را ثابت کنید. یعنی اگر $m>۱$ و m اول نباشد، ثابت کنید:

$$(m-۱)! \overset{m}{\not\equiv} -۱$$

حل: چون m عددی اول نیست، بنابراین عدد صحیح $k>۱$ وجود دارد؛ چنان‌که $k|m$، پس $k|(m-۱)!$. در نتیجه، اگر $(m-۱)! \overset{m}{\equiv} -۱$ پس باید $k|(-۱)$ باشد که غیرممکن است و در این‌جا عکس قضیه‌ی ویلسن نیز ثابت می‌شود.

مثال: اگر p عددی اول و فرد باشد، از قضیه‌ی ویلسن نتیجه بگیرید:

$$۲(p-۳)! \overset{p}{\equiv} -۱$$

حل: از قضیه‌ی ویلسن ($(p-۱)! \overset{p}{\equiv} -۱$) نتیجه می‌شود:

$$p \ge ۳ :\ (p-۱)! \overset{p}{\equiv} (p-۱)(p-۲)(p-۳)! \overset{p}{\equiv}$$

$$(-۱)(-۲)(p-۳)!=۲(p-۳)! \overset{p}{\equiv} -۱$$

تمرین

۱. دو رقم سمت راست عدد N را بیابید.

$$N=۱!+۲!+۳!+\cdots+۲۰۰۹!$$

۲. دو رقم سمت راست عدد M را بیابید.

$$M=۲!+۴!+۶!+\cdots+۱۳۸۹!$$

۳. دو رقم سمت راست عدد N را بیابید.

$$N=۹^{۹^{۹^{۹}}}+۹^{۹^{۹}}+۹^{۹}+۹$$

۴. دو رقم سمت راست عدد M را تعیین کنید.

$$M=۲۴^{۱}+۲۴^{۲}+۲۴^{۳}+\cdots+۲۴^{۲۰۰۹}$$

۵. دو رقم سمت راست عدد N را بیابید.

$$N=۲^{۲۰۰۹}+۵^{۲۰۰۹}+۷^{۲۰۰۹}$$

۶. دو رقم سمت راست عدد M را بیابید.

$$M=۲۶^{۱}+۲۶^{۲}+۲۶^{۳}+\cdots+۲۶^{۲۰۰۸}$$

۷. دو رقم سمت راست عدد N را بیابید.

$$N=۲۴^{۲۶^{۲۰۰۷}}+۲۵^{۲۵^{۲۰۰۸}}+۲۶^{۲۵^{۲۰۰۹}}$$

۸. سه رقم سمت راست عدد M را بیابید.

$$M=(۷^{۲۰۰۸}\times۱۱^{۲۰۰۹}\times۱۳^{۲۰۱۰})^{۳}$$

۹. سه رقم سمت راست عدد N را از رابطه‌ی زیر تعیین کنید:

$$N \overset{۱۰۰۰}{\equiv} ۳۴۳^{۲۰۰۷}\times۳۳۱^{۲۰۰۸}\times۱۹۷^{۲۰۰۹}$$

۱۰. سه رقم سمت راست عدد M را بیابید.

$$M=(۲۰۰۷)^{۱۳۸۷}.(۲۰۱۱)^{۱۳۸۸}.(۲۰۱۳)^{۱۳۸۹}$$

۱۱. سه رقم سمت راست عدد N را بیابید.

$$N=۴۰۱^{۱۳۸۷}\times۶۴۱^{۱۳۸۸}\times۵۶۱^{۱۳۸۹}$$

۱۲. سه رقم سمت راست عدد M را بیابید.

$$M=۵!+۱۰!+۱۵!+\cdots+۱۳۹۰!$$

۱۳. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد N را بیابید.

$$N=(۲۰۰۲)!^{۱۳۸۸}+(۲۰۰۲)!^{۲۰۰۹}$$

۱۴. با استفاده از قضیه‌ی ویلسن، یک سلسله از جواب‌های عمومی معادله‌ی زیر را بیابید.

$$x^{۱۳}+y^{۸۹}=z^{۲۰۰۳}$$

۱۵. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد M را بر ۸۳ بیابید.

$$M=۱+۸۲!^{۲۰۰۸}+۸۲!^{۲۰۰۹}+۸۲!^{۲۰۱۰}$$

۱۶. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد N را بیابید.

$N=(۲۰۰۱!)^{۱۳۸۸}+(۲۰۰۲!)^{۱۳۸۹}$ را بر ۲۰۰۳

ادامه دارد...

قضیه‌ی تقسیم و کاربردهای آن در Z (۱)

برای دانش‌آموزان دوره‌ی پیش دانشگاهی رشته ریاضی

● حمیدرضا امیری

یکی از اصلی‌ترین و پایه‌ای‌ترین مباحث در نظریه‌ی مقدماتی اعداد، قضیه ی تقسیم در Z و مسائل و کاربردهای آن است. برای ورود به این بحث پیش‌نیازهای چندانی لازم نداریم و آن‌چه را هم که نیاز داریم، بسیار ساده و مقدماتی هستند؛ تعاریف و اصولی هم‌چون تعریف عضو ابتدا و انتها، کران بالا و پایین و اصولی چون اصل خوش‌ترتیبی و اصل استقرای ریاضی که همگی در کتاب درسی - ریاضیات گسسته - آورده شده‌اند.

ابتدا به تعریف رابطه‌ی «عاد کردن» در Z و بیان خواص، ویژگی‌ها و نتایج حاصل از این تعریف و حل مسائلی می‌پردازم که گاه در امتحانات و کنکورها نمونه‌هایی از آن‌ها آمده است. امیدوارم این بحث و موضوع برای شما جالب و سرگرم‌کننده باشد. فراموش نکنیم که نظریه‌ی اعداد از قدیمی‌ترین شاخه‌های علم ریاضی است. مسائل و قضیه‌هایی در این شاخه از ریاضیات وجود دارند که قدمت آن‌ها به دو تا سه هزار سال پیش برمی‌گردد و مسائلی وجود دارند که صدها سال است، لاینحل باقی مانده‌اند و از راه‌حل آن‌ها در حد یک حدس یاد می‌شود!

مسائل نظریه‌ی اعداد و به‌خصوص مسائل مربوط به قضیه‌ی تقسیم، ب‌م‌م و ک‌م‌م بسیار جالب‌اند و به شدت حس کنجکاوی انسان را تحریک می‌کنند. به همین دلیل، حل آن‌ها بسیار لذت‌بخش و سرگرم‌کننده است! بحث را با تعریف رابطه‌ی عاد کردن و مسائل مربوط به آن آغاز می‌کنم.

تعریف: اگر a و b اعداد صحیح باشند و $a \neq 0$، در این صورت وقتی b بر a بخش‌پذیر است، یعنی $b = a \times q \quad (q \in Z)$، می‌نویسیم: $a|b$ و می‌خوانیم: «a عاد می‌کند b را یا a می‌شمارد b را.»

رابطه‌ی عاد کردن روی Z، $a|b \Leftrightarrow b = aq \quad (q \in Z)$، از خواص انعکاسی، تقارنی، پادتقارنی و تعدی، دو خاصیت انعکاسی و تعدی را دارد و دو خاصیت دیگر را ندارد؛ زیرا:

(I) $\forall a \in Z, a = a \times 1 \Rightarrow a|a$) (خاصیت انعکاسی دارد)

II) $4|8, 8\nmid 4 \Rightarrow$ (خاصیت تقارنی ندارد)

III) $2|-2, -2|2, 2 \neq -2 \Rightarrow$ (خاصیت پادتقارنی ندارد)

IV) فرض کنیم $a|b, b|c \Rightarrow b = aq_1, c = bq_2 \Rightarrow c = \overbrace{(aq_1)}^{b} \times q_2$

$\Rightarrow c = a(q_1q_2) \Rightarrow c = aq \Rightarrow a|c$ (خاصیت تعدی دارد)

تذکر: رابطه‌ی بخش‌پذیری یا عاد کردن روی $\mathbb{N}$ خاصیت پادتقارنی دارد. به عبارت دیگر، اگر a و b دو عدد طبیعی باشند، در این صورت از $a|b$ و $b|a$ نتیجه می‌گیریم: $a = b$.

رابطه‌ی عاد کردن روی Z دارای ویژگی‌هایی است که از آن‌ها تقریباً در همه‌ی موضوعات مقدماتی (تا آخر بحث هم‌نهشتی‌ها و حتی معادلات سیاله) نظریه‌ی اعداد استفاده خواهیم کرد. لذا یادگیری این ویژگی‌ها که بعداً به عنوان ابزارهایی برای حل مسائل و پرسش‌های چهارگزینه‌ای و اثبات قضیه‌ها از آن‌ها بهره می‌گیریم، بسیار ضروری است.

ویژگی‌های رابطه‌ی عاد کردن روی Z

۱) $a|b \Rightarrow a|-b, -a|b, -a|-b$

اثبات: $a|b \Rightarrow b = aq \Rightarrow -b = -aq = a\underbrace{(-q)}_{q'} = aq' \Rightarrow a|-b$

(توجه دارید که معادل حکم مسئله، یعنی معادل $a|-b$، طبق تعریف $-b = aq'$ است که ما خودمان را به این رابطه رساندیم!)

برای اثبات $-a|b$ باید به رابطه‌ی $b = -aq'$ برسیم:

$a|b \Rightarrow b = aq \Rightarrow b = (-a)\underbrace{(-q)}_{q'} \Rightarrow b = -aq' \Rightarrow -a|b$

اثبات حکم سوم، یعنی $-a|-b$ به عهده‌ی شما.

۲) $a|b \Leftrightarrow ma|mb \quad (m \in Z)$

اثبات: $a|b \Leftrightarrow b = aq \Leftrightarrow mb = maq \Leftrightarrow ma|mb$

۳) $a|b \Rightarrow \overbrace{a|mb}^{mb=aq'} \quad (m \in Z)$

اثبات: $a|b \Rightarrow b = aq \Rightarrow mb = maq \Rightarrow mb = a\underbrace{(mq)}_{q'}$

$\Rightarrow mb = aq' \Rightarrow a|mb$

تذکر: عکس ویژگی (۳) در حالت کلی برقرار نیست و حتی از $a|bc$ در حالت کلی نمی‌توان نتیجه گرفت که: $a|b$ یا $a|c$. به‌عنوان مثال نقض، می‌دانیم $6|3 \times 4$، در صورتی که $6\nmid 3$ و $6\nmid 4$.

۴) $a|b \Leftrightarrow a^n|b^n (a^n|b^n \Leftrightarrow b^n = a^nq')$

اثبات: $a|b \Rightarrow b = aq \Rightarrow b^n = a^nq^n \xrightarrow{q^n=q'} b^n = a^nq'$

$\Rightarrow a^n | b^n$

برای اثبات طرف دوم رابطه‌ی دو شرطی (۴) به دو تذکر زیر دقت کنید:

تذکر ۱: اگر a عددی گویا باشد، حتماً باید به شکل $a = \frac{m}{n}$ باشد که: $m,n \in Z$ و $n \neq 0$. و اگر عددی صحیح نباشد، دو حالت امکان‌پذیر است: یا آن عدد گویا و غیرصحیح است که باید به شکل $\frac{m}{n}$ باشد و یا آن عدد گنگ است.

تذکر ۲: اگر $a \neq 0$ عددی صحیح (و در حالت کلی‌تر اگر a عددی گویا) و b عددی گنگ باشد، در این صورت: $(ab) \in Q'$ (حاصل‌ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ همواره گنگ است).

اثبات از راه برهان خلف

$a \in Q, b \in Q', a \neq 0 \Rightarrow (ab) \in Q$ فرض کنیم (فرض خلف)

اگر فرض کنیم: $ab = c$ و $c \in Q$، در این صورت خواهیم داشت: $b = \frac{c}{a}$ و می‌دانیم $\frac{c}{a}$، یعنی تقسیم عدد گویای c بر عدد گویا و ناصفرِ a، همواره عددی گویاست و با گنگ بودن b تناقض دارد. پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است؛ یعنی: $ab \in Q'$.

اثبات طرف دوم ویژگیِ (۴):

$$a^n | b^n \Rightarrow b^n = a^n q (q \in Z) \Rightarrow b = a \times \sqrt[n]{q}$$

اگر ثابت کنیم $\sqrt[n]{q}$ عددی صحیح است، می‌توانیم آن را q' فرض کنیم و $b = aq'$، یعنی $a|b$ همان حکم مسئله است. برای اثبات این که: $\sqrt[n]{q} \in Z$، از برهان خلف کمک می‌گیریم. فرض کنیم: $\sqrt[n]{q} \notin Z$. پس طبق تذکر (۱) $\sqrt[n]{q}$ یا گویا و غیرصحیح و یا گنگ است که چون داریم: $q \in Z$، $\sqrt[n]{q}$ نمی‌تواند به صورت $\frac{m_1}{n_1}$ باشد و لذا $\sqrt[n]{q}$ گویا نیست (اگر $\sqrt[n]{q} = \frac{m_1}{n_1}$ باشد، در این صورت داریم: $q = \frac{m_1^n}{n_1^n}$ که با صحیح بودنِ q تناقض دارد). پس: $\sqrt[n]{q} \notin Q$ و در نتیجه: $\sqrt[n]{q} = \in Q$.

و بنابر تذکر ۲، چون: $b = a \times \sqrt[n]{q}$ و $a \neq 0$، لذا باید $a \times \sqrt[n]{q}$ عددی گنگ باشد که با صحیح بودن b تناقض دارد. پس فرض خلف ما، یعنی $\sqrt[n]{q} \notin Z$، باطل است و باید داشته باشیم: $\sqrt[n]{q} \in Z$ که این نشان می‌دهد، می‌توان فرض کرد: $\sqrt[n]{q} = q'$.

پس داریم:

$$a^n | b^n \Rightarrow b^n = a^n q (q \in Z) \Rightarrow b = a\sqrt[n]{q} \Rightarrow b = aq' \Rightarrow a|b$$

۵) $a|b \,,\; a|c \Rightarrow a|b \pm c$

یعنی اگر عددی دو عدد را بشمارد، آن‌گاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را نیز می‌شمارد.

اثبات:
$$\left.\begin{array}{l} a|b \Rightarrow b = aq_1 \\ a|c \Rightarrow c = aq_2 \end{array}\right\} \Rightarrow b \pm c = a(\underbrace{q_1 \pm q_2}_{q'}) \Rightarrow a|b \pm c$$

تذکر: عکسِ ویژگی (۵) در حالت کلی برقرار نیست ($2|3+5$، ولی $2|3$ و $2|5$).

۶) $a|b \,,\; c|d \Rightarrow ac|bd$

اثبات:
$$\left.\begin{array}{l} a|b \Rightarrow b = aq_1 \\ c|d \Rightarrow d = cq_2 \end{array}\right\} \Rightarrow bd = ac(\overbrace{q_1 q_2}^{q}) \Rightarrow ac|bd$$

۷) $a|b \xrightarrow{q \neq 0} |a| \leq |b|$

اثبات: $a|b \xrightarrow{q \neq 0} b = aq \Rightarrow |b| = |aq| \Rightarrow |b| = |a|\,|q|$

$b \neq 0 \Rightarrow q \neq 0 \xrightarrow{|q| \geq 1} |a|\,|q| \geq |a| \Rightarrow |b| \geq |a|$

۸) $a|b \,,\; b|a \Rightarrow a = \pm b$

اثبات:
$$\left.\begin{array}{l} a|b \Rightarrow |a| \leq |b| \\ b|a \Rightarrow |b| \leq |a| \end{array}\right\} \Rightarrow |a| = |b| \Rightarrow a = \pm b$$

۹) $a \in Z \Rightarrow 1|a$ (هر عدد صحیح بر یک بخش‌پذیر است)

اثبات: $a \in Z \Rightarrow a = 1 \times a \Rightarrow 1|a$

۱۰) $a \in Z \Rightarrow a|0$ (صفر بر هر عدد صحیح بخش‌پذیر است)

اثبات: $a \in Z \Rightarrow 0 = a \times 0 \Rightarrow a|0$

۱۱) $a \in Z \,,\; a|1 \Rightarrow a = \pm b$

اثبات:
$$\left.\begin{array}{l} a|1 \\ 1|a \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ویژگی ۸}} a = \pm 1$$
(طبق ویژگی (۹) برای $1|a$)

۱۲) $a|b \xrightarrow{m<n} a^m | b^n \rightarrow (b^n = a^m q')$

اثبات: $a|b \Rightarrow b = aq \Rightarrow b^n = a^n q \;\underline{\underline{m<n}}\; a^m(\underbrace{a^{n-m}q}_{q'})$

$\Rightarrow a^m q' \Rightarrow a^m | b^n$

۱۳) $a^m | b^n \Rightarrow \xrightarrow{m>n} a|b$

اثبات: $a^m | b^n \Rightarrow b^n = a^m q \;\underline{\underline{m>n}}\; a^n(\underbrace{a^{m-n}q}_{q'})$

$\Rightarrow b^n = a^n q' \Rightarrow a^n | b^n \xrightarrow{\text{ویژگی ۴}} a|b$

کاربرد این ویژگی‌ها را در حل مسائل بسیار جالب و گاه پیچیده‌ی بخش‌پذیری، در مقاله‌ی بعدی مشاهده خواهید کرد.

ادامه دارد...

رنه دکارت

● احمد قندهاری

رنه دکارت[1] فیلسوفی بود که روش ریاضی گونه‌ی کشف حقیقت در کاوش‌های علمی را در رساله‌ی «گفتار در روش» خود مطرح کرد. او معتقد بود، ریاضیات در همه‌ی وجوه زندگی و طبیعت دخالت دارد. هم‌چنین عمیقاً باور داشت، منطق و استدلال ریاضیات، دقیقاً در همه‌ی علوم اثری عمیق و مثبت دارد و بنیاد درک همه‌ی علوم است. ابداع هندسه‌ی تحلیلی او که ترکیبی از جبر و هندسه بود، باعث تغییر مسیر ریاضیات شد.

رنه دکارت در ۳۱ مارس سال ۱۵۹۶ در «لاهی»[2] فرانسه که در جنوب غربی پاریس قرار دارد، متولد شد. پدرش وکیل دعاوی بود. پدر و مادرش هر دو از زمین‌داران ثروتمند بودند. متأسفانه مادرش مدت کوتاهی پس از تولد رنه، درگذشت. رنه نیز کودکی ضعیف و بیمار بود. تقریباً کسی انتظار نداشت زنده بماند و اگرچه رنه زنده ماند، ولی همیشه ضعیف و تقریباً ناسالم بود. به همین علت هم، در خانه نازپرورده بود. ولی در تحصیل، شاگرد کوشا و متفکری بود. پدرش او را «فیلسوف کوچک» می‌نامید، زیرا در مورد هر چیزی سؤال‌های دقیقی مطرح می‌کرد و به سادگی هم قانع نمی‌شد. بعدها پدرش او را به مدرسه‌ی بهتری فرستاد.

رنه عادت داشت در رخت‌خواب دراز بکشد و مطالعه کند. این عادت را هم‌چنان در بزرگ‌سالی هم حفظ کرده بود. در مدرسه‌ی جدید، موضوع مورد علاقه‌ی رنه، ریاضیات بود؛ اگرچه پس از هشت سال تحصیل در آن مدرسه، و مطالعات بسیار زیاد، معتقد شده بود که هنوز هیچ نمی‌داند. ولی در ۱۸ سالگی به‌غایت، ستایش‌انگیز شده بود، زیرا به همه‌ی اطلاعات و دانش آن روزگار دست یافته بود. او بیشتر از گذشته، جذب ریاضیات شد، زیرا باور داشت که ریاضیات تنها علمی است که می‌توان به آن کاملاً اعتماد کرد و پایه‌ی یادگیری دیگر علوم است. با وجود این باور، برای تحصیل در رشته‌ی حقوق به دانشگاه رفت.

در سال ۱۶۱۶، از دانشگاه فارغ‌التحصیل شد و تصمیم گرفت کاری بیابد که بتواند به سفر بپردازد و تجربه‌های مفید کسب کند. به قول خودش می‌خواست «کتاب جهان» را بخواند. لذا در ۲۲ سالگی به نیروی ارتش پیوست. البته نه به‌خاطر جنگ یا دریافت حقوق، بلکه به این دلیل که نظامی بودن در آن زمان نوعی ارزش اجتماعی تلقی می‌شد. او بیشتر به خاطر موقعیت اجتماعی و سفرهای آن، به ارتش شاهزاده اورلئان پیوست. این شاهزاده لشکری فراهم کرد تا علیه اسپانیایی‌ها بجنگد که می‌خواستند دوباره هلند را زیر نفوذ بگیرند. دکارت کار چندانی در ارتش نداشت و بیشتر اوقات به

مطالعه می‌پرداخت. او ریاضی‌دانی را ملاقات کرد که او هم به هندسه‌ی تحلیلی علاقه‌مند بود.

پس از آن‌که دکارت از ارتش استعفا داد، چند سالی در فرانسه زیست، به سراسر اروپا سفر کرد و با دانشمندان دیگر ملاقات‌هایی داشت. در سال ۱۶۲۸ تصمیم گرفت در هلند زندگی کند. در این زمان احساس کرد، باید کاری بنیادی انجام دهد. ولی این فکر را با کسی درمیان نگذاشت. بعدها این کوشش‌ها باعث ایجاد فلسفه‌ی جدیدی به نام «فلسفه‌ی عقل‌گرا» (Rasionalism) شد. و این جمله‌ی معروف از اوست که می‌گوید: «من فکر می‌کنم، پس من وجود دارم.»

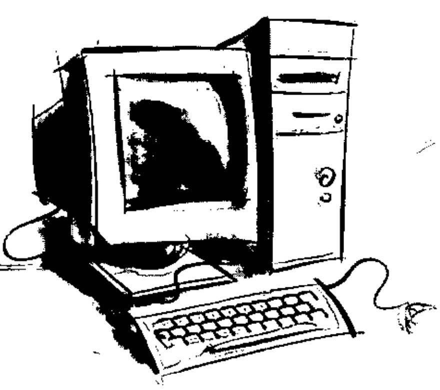
دکارت اکثر اوقات به تنهایی و تفکر پناه می‌برد و به دنبال حقیقت بود. در مورد همه چیز مانند فیزیک، نجوم، نور، کیهان‌شناسی، جنین‌شناسی، تشریح بدن، فیزیولوژی، روان‌شناسی، زمین‌شناسی و حتی داروشناسی و تغذیه به مطالعه می‌پرداخت. بالاخره در سال ۱۶۳۷، شاهکار او، کتابی با عنوان «روش دکارت» به چاپ رسید. این روش شامل شناخت روش علمی بود و قسمتی از کتاب هم به هندسه‌ی تحلیلی اختصاص داشت.

هندسه‌ی تحلیلی ترکیبی از جبر و هندسه است. در آن زمان، همه فکر می‌کردند نمی‌توان این دو بخش مستقل ریاضی را به هم پیوند داد. در حالی که هندسه‌ی تحلیلی دکارت، موجب پیدایش نمودارها و تهیه‌ی نقشه و بسیاری چیزهای دیگر شد. با استفاده از دستگاه محورهای مختصات، این امکان به‌وجود آمد که جای هر نقطه‌ای با دو مختص مشخص شود. دکارت نشان داد که هندسه چه قدر می‌تواند برای جبر مفید باشد و بسیاری از معادلات جبری را می‌توان به کمک نمودار حل کرد.

در سال ۱۶۴۹، دکارت به عنوان یک فیلسوف و ریاضی‌دان در اروپا به شهرت رسید. در این سال، او به وسیله‌ی ملکه‌ی جوان سوئد تشویق شد، آکادمی علوم سوئد را سازمان‌دهی کند. این ملکه که نامش کریستینا بود، به مدت سه سال با دکارت مکاتبه داشت تا توانست او را به چنین کاری متقاعد کند. به محض این‌که دکارت تقاضای ملکه را پذیرفت، ملکه یک کشتی اختصاصی برای دکارت فرستاد تا او را به استکهلم بیاورد. پس از ورود دکارت به استکهلم، ملکه تقاضا کرد به او فلسفه بیاموزد و دکارت هم پذیرفت. تدریس به ملکه هفته‌ای سه روز بود که از ساعت پنج صبح شروع می‌شد. برای شخصی مانند دکارت که همیشه عادت داشت در جای گرم و نرمی به مطالعه بپردازد، هوای سرد زمستان استکهلم آزاردهنده بود. دکارت نتوانست خود را با این شرایط سازگار کند. درنهایت، سرمای شدیدی خورد که به سینه پهلو منجر شد و در ۱۱ فوریه‌ی سال ۱۶۵۰ درگذشت.

---

1. Rene Descartes
2. La Hage
3. Christina



معرفی سایت‌های ریاضی جهان

● احسان یارمحمدی

- احتمال و آمار (Probability and Statistics)
- مثلثات (Trigonometry)
- ترکیبات و تبدیل (Combinatorics and Permutation)
- واحد تبدیل (Unit Conversion)

■ هندسه (Geometry)

- فرمول‌های هندسی (Geometric Formula)
- زاویه‌ها، زاویه‌های مکمل، زاویه‌های متمم (Angels, Complementary, Supplementary Angels)
- مثلث‌ها (Triangles)
- قضیه‌ی فیثاغورس (Pythagorean Theorem)
- حجم، حجم متریک (Volume, Metric Volume)
- دایره و ویژگی‌های آن (Circle and their Properties)
- چهار گوش‌ها (Rectangles)
- طول، فاصله، مختصات‌ها، طول متریک (Length, Distance, Cooradinates, Metric Length)
- اثبات‌ها در هندسه (Proofs in Geometry)
- اجسام در فضا، جسم سه‌بعدی، استوانه، گوی (Bodies in Space, Right Solid, Cylinder, Sphere)
- متوازی‌الاضلاع‌ها (Paralle lograms)
- نقطه‌ها، خط‌ها، زاویه‌ها، محیط (Points, Lines, Angles, Perimeter)
- چند ضلعی‌ها (Polygons)
- مساحت و مساحت سطح (Area and Surface Area)

مسائل برای حل

ریاضیات ۱

مجتبی رفیعی

۱. ساده‌شده‌ی عبارت زیر را بنویسید.

$$A = \left|\sqrt{2} - \sqrt{3}\right| + \left|\sqrt{3} - \sqrt{2} - 1\right|$$

۲. اگر $0 < a < 1$، ثابت کنید: $0 < \frac{8a}{8a+3} < 1$

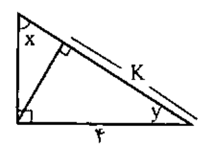
۳. x و y را چنان بیابید که مجموعه‌های $A = \{2x+3y, 7\}$ و $B = \{3x-2y, 9\}$ با هم برابر باشند.

۴. حاصل عبارت $\frac{2/16 \times 10^{4} \times (0/1)^{3}}{(0/2)^{2}}$ را به صورت نماد علمی بنویسید.

۵. اگر $a + \sqrt[3]{b} = 1$ باشد، حاصل $\frac{a^2 + 3\sqrt[3]{b}}{1-b}$ را بیابید.

۶: عبارت $x^2 + (x-2)(y+1) - 2x$ را تجزیه کنید.

۷. در شکل مقابل مقدار k را بیابید.



۸. عبارت $\frac{1}{(3\sqrt{8} - \sqrt{50} + \sqrt{3})}$ را گویا کنید.

۹. خارج قسمت تقسیم عبارت $x^3 + 8$ بر $x + 2$ برابر $x^m - kx^n + 4$ است. حاصل m+n+k چقدر است؟.

۱۰. اگر $A = 2x^3 - 1$ و $B = 2x^3 - 4$ حاصل عبارت $M = 2A^2 + 3B^2 + 6AB$ را پیدا کنید.

۱۱. فروشنده‌ای حساب کرد اگر تخم‌مرغ‌های خود را یکی ۴۵ تومان بفروشد زیان می‌بیند ولی اگر آن‌ها را دانه‌ای ۶۰ تومان بفروشد ۱۰۰۰ تومان سود می‌برد تعداد تخم‌مرغ‌ها و قیمت خرید هر تخم‌مرغ چه‌قدر است؟

۱۲. مثلث ABC با رئوس $A(2,3)$ و $B(3,0)$ و $C(0,2)$ مفروض است.

الف) طول میانه‌ی وارد بر ضلع BC را محاسبه کنید.

ب) معادله‌ی ارتفاع وارد بر ضلع AB را بنویسید.

۱۳. معادله‌ی $9x^2 - 12x + 4 = 0$ را حل کنید.

۱۴. مکعب مستطیلی با قاعده مربع شکل و ارتفاع ۸ مفروض است. اگر عدد حجم مکعب ۱۰ واحد کمتر از عدد سطح مکعب مستطیل باشد، حجم مکعب کدام است؟

۱۵. مجموعه جواب دستگاه نامعادلات زیر را بیابید.

$$\begin{cases} |x| < 2 \\ (2x-1) < |x| \end{cases}$$

ریاضیات ۲

مهر شهرام صدر

۱. عبارت زیر را تعیین علامت کنید.

$$\frac{x^2 - 4}{(3-2x)(4x^2 - 4x + 1)}$$

۲. حدود m را طوری تعیین کنید که نامساوی زیر به ازای جمیع مقادیر x برقرار باشد.

$$(-3m)x^2 + 2mx + 1 > 0$$

۳. نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $|3 - x| < 3$

ب) $|2x+1| \le |x-2|$

۴. معادله زیر را حل کنید.

$$\frac{x-1}{2x} - \frac{1}{2x+1} = \frac{7-3x}{4x^2+2x}$$

۵. اگر $f(x) = ax + b$ باشد، حاصل $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ را حساب کنید.

۶. معکوس تابع زیر را به‌دست آورید.

$$\begin{cases} f(x) = \frac{3x+7}{x+2} \\ R - \{2\} \to R - \{3\} \end{cases}$$

۷. مبدأ مختصات را به نقطه‌ی $o'(-3,2)$ منتقل می‌کنیم، مختصات نقطه‌ی $A(7,3)$ را در دستگاه جدید بنویسید.

۸. اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $AX = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، مطلوب است تعیین ماتریس X.

۹. دستگاه دو معادله دومجهولی زیر را به روش ماتریس معکوس حل کنید.

$$\begin{cases} 2mx + 4y = 4 \\ -4x + 2my = 2 \end{cases}$$

۱۰. به ازای چه مقدار m، دستگاه زیر جواب دارد.

$$\begin{cases} 2mx - 4y = 6 \\ -4x + 2my = 2 \end{cases}$$

۱۱. عبارات زیر را حساب کنید.

الف) $\log_{25}^{\sqrt{125}}$

ب) $\log_{7}^{49^2}$

۱۲. معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$2\log_7^x = \log_7^{81}$$

۱۳. اگر جمله‌ی عمومی یک تصاعد حسابی $t_n = 2n + 1$ باشد مجموع ۳ جمله اول این تصاعد را حساب کنید.

۱۴. چهار واسطه هندسی بین $\frac{3}{8}$ و $\frac{128}{81}$ درج کنید.

۱۵. اگر $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ و $\cos\beta = \frac{1}{5}$ (α و β حاده هستند) عبارات زیر را محاسبه کنید.

الف) $\sin 2\alpha$

ب) $\cos(\beta + 30)$

۱۶. معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$2\sin^2 x - \cos^2 x = 0$$

۱۷. هر گاه $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$ و $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} \\ -2 \end{bmatrix}$ باشد، زاویه بین دو بردار را محاسبه کنید.

۱۸. تعیین کنید با ارقام ۲ و۳و۵و۶و۷

الف) چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت. (بدون تکرار)

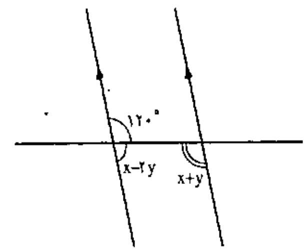
ب) چه تعداد از این اعداد فرد هستند. (بدون تکرار)

ج) چه تعداد از آن‌ها کوچک‌تر از ۴۰۰ هستند. (بدون تکرار)

هندسه‌ی ۱

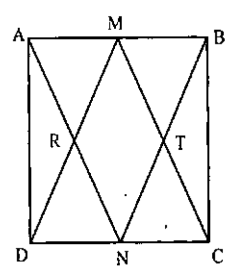
محمدهاشم رستمی

۱. اندازه‌ی x و y را تعیین کنید (پیکان‌های هم‌جهت، خط‌های موازی را نشان می‌دهند).

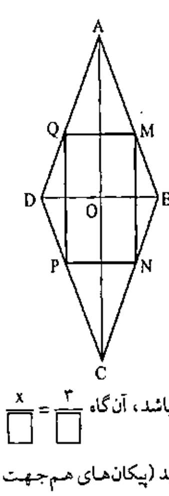


۲. تعداد قطرهای یک nضلعی محدب ۳۵ است. اندازه‌ی مجموع زاویه‌های درونی این nضلعی را تعیین کنید.

۳. چهارضلعی ABCD مربع و نقطه‌های M و N وسط ضلع‌های AB و CD قرار دارند. ثابت کنید چهارضلعی MTNR لوزی است.

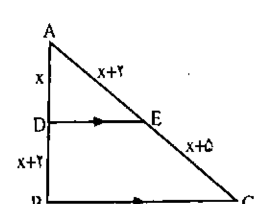


۴. نقطه‌های M، N، P و Q به‌ترتیب وسط ضلع‌های AB، BC، CD و DA از لوزی ABCD هستند. اگر $AC = 60$ و $BD = 24$ باشد، اندازه‌ی مساحت چهارضلعی MNPQ را تعیین کنید.

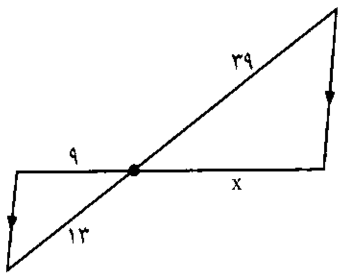


۵. اگر $\frac{3}{1}=\frac{y-3}{y}=\frac{x-y}{4}$ باشد، آن‌گاه $\frac{x}{\square}=\frac{3}{\square}$

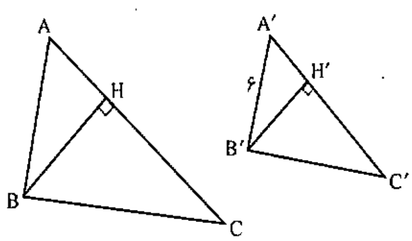
۶. اندازه‌ی x و y را تعیین کنید (پیکان‌های هم‌جهت خط‌های موازی را نشان می‌دهند.)



۷. اندازه‌ی x را در شکل زیر تعیین کنید (پیکان‌های هم‌جهت خط‌های موازی را نشان می‌دهند.)



۸. در شکل داده شده، دو مثلث ABC و A′B′C′ متشابه‌اند و $3B'H' = 2BH$ است، اندازه‌ی ضلع AB را تعیین کنید.



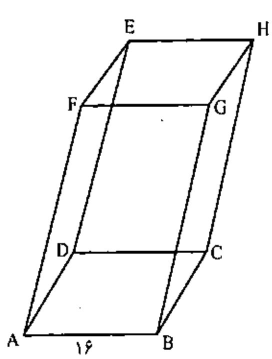
۹. حجم یک مکعب مستطیل ۲۴۰۰۰ واحد حجم و ابعاد آن به نسبت ۲ و ۳ و ۴ هستند:

الف) اندازه‌ی قطر این مکعب مستطیل را تعیین کنید.

ب) اندازه‌ی ضلع مکعبی را که سطح کل آن مساوی سطح کل این مکعب‌مستطیل است، به‌دست آورید.

۱۰. شعاع قاعده‌ی یک مخروط قائم ۱۲ و اندازه‌ی سطح کل این مخروط قائم 624π است. اندازه‌ی حجم این مخروط قائم را تعیین کنید.

۱۱. اندازه‌ی ضلع مربع قاعده‌ی متوازی‌السطوح مایل ABCDEFGH مساوی ۱۶ سانتی‌متر و طول یال جانبی آن ۳۶ سانتی‌متر است. اگر زاویه‌ی یال AF با صفحه‌ی قاعده‌ی ABCD مساوی ۶۰ درجه باشد، اندازه‌ی حجم این متوازی‌السطوح را تعیین کنید.



۱۲. سطح کره‌ای را به‌دست آورید که حجم آن مساوی 288π سانتی‌متر مکعب است.

حسابان ۱

احمد قندهاری

۱. اگر $f(x)=\sqrt{2x-6}$ و $g(x)=\sqrt{1-x}$ باشد ؛ بدون تشکیل تابع‌های fog و gof دامنه‌ی تعریف fog و gof را بیابید.

۲. اگر $f(x)=x+3$ و $g(x)=2x^2-x+1$ باشد، a را چنان بیابید تا داشته باشیم: $(fog)(a)=(gof)(a)$.

۳. ثابت کنید: $\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}\cot\frac{\pi}{14}$.

۴. مطلوب است محاسبه‌ی حد:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}$$

۵. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}\ ,\ x\neq 1$ ، $f(1)$ را چنان تعریف کنید که تابع در $x=1$ پیوسته باشد.

۶. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}ax^2+1\ , & x>1\\ x+b\ , & x\leq 1\end{cases}$ در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. $(a+b)$ را بیابید.

۷. از نقطه‌ی $P(0,-1)$ دو مماس بر منحنی تابع به معادله‌ی $y=x^2-4x$ رسم کرده‌ایم. طول‌های نقاط تماس را بیابید.

۸. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^3+ax^2+b$ ، a و b را چنان بیابید که نقطه‌ی $F(1,0)$ عطف نمودار تابع باشد. سپس جدول تغییرات و نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=x^3-3x^2+2$ را رسم کنید.

۹. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{(2a+b)x-5}{x-a+b}$ ، a و b را چنان بیابید که $O'(4,2)$ مرکز تقارن منحنی تابع باشد. سپس جدول تغییرات و نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=\frac{2x-5}{x-4}$ را رسم کنید.

۱۰. جدول تغییرات و نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=\sin^2 x+\sin x$ را وقتی $0\leq x\leq 2\pi$ است، رسم کنید.

۱۱. در کره‌ای به شعاع ۶، مخروطی به حجم ماکزیمم محاط کرده‌ایم. ارتفاع مخروط را بیابید.

جبر و احتمال

هوشنگ شرقی

۱. با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید:

$$\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{2\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}<\frac{n}{n+1}$$

۲. اگر a و b دو عدد حقیقی و مثبت باشند، ثابت کنید:

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{a}\geq a^2+b^2$$

۳. می‌دانیم $\sqrt[3]{2}$ عددی گنگ است، ثابت کنید، $\sqrt[3]{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ نیز عددی گنگ است.

۴. ثابت کنید در بین دانش‌آموزان یک مدرسه که ۲۱ کلاس پنجاه نفری دارد، حداقل دو دانش‌آموز می‌توان پیدا کرد که حرف اوّل نام و نام خانوادگی آن‌ها دقیقاً مثل هم باشد.

۵. ثابت کنید مجموع مربع‌های هر دو عدد طبیعی متوالی در تقسیم بر ۴ باقی‌مانده‌ی ۱ دارد.

۶. با استفاده از جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:

الف) $(A\cup B)-(B\cup C)=(A-B)-C$

ب) $A\subseteq B\Rightarrow A-B=\varnothing$

۷. اگر $A=\{x|x\in Z, x^2<4x\}$ و $B=\{x|x\in\mathbb{R}, x^2\leq 1\}$ ، $A\times B$ را تشکیل داده و نمودار آن را رسم کنید.

۸. رابطه‌ی R را که به صورت زیر معرفی شده است، به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش داده و نمودار آن را رسم کنید:

$$\begin{cases}R:\ Z\to Z\\ xRy\Rightarrow x+y^2<xy+1\ ,\ x^2\leq 4\end{cases}$$

۹. رابطه‌ی زیر در $\mathbb{R}^2$ تعریف شده است:

$$\begin{cases}R:\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\\ (x,y)R(z,t)\Leftrightarrow x^2+y^2=z^2+t^2\end{cases}$$

نشان دهید R هم ارزی است و کلاس هم‌ارزی $[(2,-1)]$ را به دست آورید.

۱۰. اعداد طبیعی بازه‌ی (۳۵و۲۰) را روی کارت نوشته و پس از مخلوط کردن کارت‌ها یکی از آن‌ها را به تصادف بیرون می‌آوریم. مطلوب است تعیین:

الف) فضای نمونه این تجربه‌ی تصادفی

ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت عددی مضرب ۳ باشد.

ج) پیشامد B که در آن عدد روی کارت عددی اول باشد.

د) پیشامد $A'\cap B'$

۱۱. ده نفر دانش‌آموز در یک ردیف شامل ده صندلی نشسته‌اند. احتمال آن‌که دو نفر آن‌ها که با هم برادرند، کنار هم نشسته باشند، چه‌قدر است؟

۱۲. درون یک مخروط که قطر قاعده و یال آن با هم مساوی‌اند، نقطه‌ای به تصادف انتخاب می‌کنیم، مطلوب است احتمال آن‌که این نقطه درون کره‌ی محاط در مخروط نباشد.

۱۳. تاسی طوری ساخته شده که احتمال آمدن عددهای بزرگ‌تر از ۳ در آن، دو برابر احتمال آمدن عددهای کوچک‌تر از ۳ است. اگر احتمال آمدن عدد ۳ در این تاس با تاس‌های معمولی یکسان باشد، احتمال آمدن ۴ در پرتاب این تاس چه‌قدر است؟

۱۴. در یک خانواده با ۵ فرزند، احتمال آن‌که سه پسر در خانوده باشد چه قدر است؟

۱۵. یک عدد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۷۰ انتخاب می‌کنیم، احتمال آن‌که این عدد مضرب ۳ یا ۴ بوده و مضرب ۵ نباشد را به دست آورید.

۱۶. اگر $p(A\cup B)=\frac{2}{3}$ و $p(A)=\frac{1}{6}$ باشد، $p(A'-B')$ را به دست آورید.

هندسه‌ی ۲

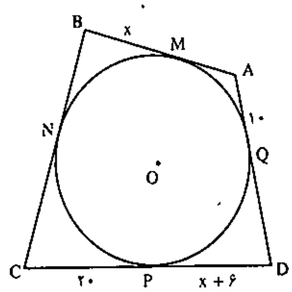
محمد هاشم رستمی

۱. با استفاده از برهان خلف ثابت کنید که در هر مثلث، عمودمنصف‌های هر دو ضلع، متقاطع‌اند.

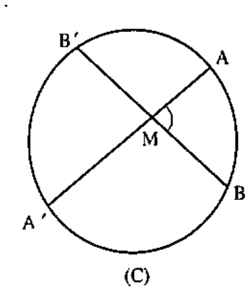
۲. اندازه‌های سه ارتفاع یک مثلث داده شده‌اند. این مثلث را رسم کنید.

۳. طول مستطیلی دو برابر عرض آن است. از برخورد نیم‌سازهای زاویه‌های درونی این مستطیل، مربعی به ضلع ۸ سانتی‌متر ایجاد شده است. اندازه‌ی طول و عرض این مستطیل را بیابید.

۴. چهارضلعی ABCD بر دایره‌ی O محیط است (شکل). اگر محیط این چهارضلعی ۱۲۰ باشد، اندازه‌ی x را تعیین کنید.



۵. دو وتر AA' و BB' از دایره‌ی C، در نقطه‌ی M یکدیگر را قطع کرده‌اند. تعیین کنید:

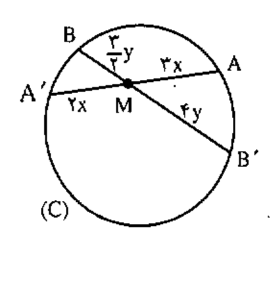


الف) اندازه‌ی زاویه‌ی AMB را اگر $\widehat{AB}=80^\circ$ و $\widehat{A'B'}=60^\circ$ باشد.

ب) اندازه‌ی زاویه‌ی AMB را اگر $\widehat{A'B}+\widehat{AB'}=200^\circ$ باشد.

ج) اندازه‌ی کمان $\widehat{AB}$ را اگر $AMB'=110^\circ$ و $\widehat{A'B'}=3\widehat{AB}$ باشد.

۶. اندازه‌ی x و y را در دایره‌ی داده شده بیابید؛ در صورتی که $2AA'=4BB'-14$ باشد.



۷. نقطه‌های $A=(2,0)$ ، $B=(5,2)$ ، $C=(4,4)$ و $D=(1,2)$ رأس‌های چهارضلعی ABCD هستند.

الف) این چهارضلعی و تصویرش را تحت تبدیل $H(x,y)=(-x-2,y+3)$ رسم کنید.

ب) تبدیل H را توصیف کنید.

۸. معادله‌ی بازتاب خط $D:2y-5=0$ را نسبت به هریک از محورهای بازتاب زیر تعیین کنید:

الف) $y=x$

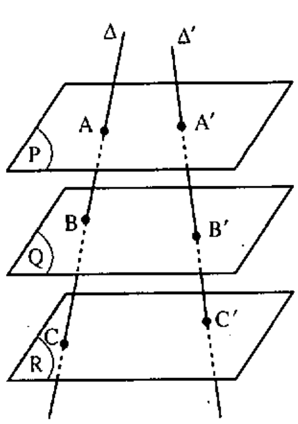
ب) $y=-x$

۹. در انتقال $T(x,y)=(x-2,y+7)$ ، نقطه‌های $A'=(3,5)$ و $B'=(2,-1)$ انتقال یافته‌ی چه نقطه‌هایی هستند؟

۱۰. مثلث ABC در صفحه‌ی P و نقطه‌ی S در خارج آن داده شده‌اند. روی خط‌های SA و SB، دو نقطه‌ی M و N را چنان اختیار می‌کنیم که $\frac{SM}{SA}=\frac{SN}{SB}$ باشد. ثابت کنید فصل مشترک صفحه‌ی P، صفحه‌ی CMN، موازی AB است.

۱۱. سه صفحه‌ی موازی P، Q و R، دو خط Δ و ′Δ را در نقطه‌های A، B، C و ′A، ′B و ′C قطع کرده‌اند.

الف) اگر $AB=12$ ، $AC=30$ و $A'B'=16$ باشد؛ $B'C'$ را تعیین کنید.



ب) اگر $BC=18$ ، $A'B'=12$ و $B'C'=16$ باشد، اندازه‌ی AB را بیابید.

۱۲. دو نقطه‌ی A و B، صفحه‌ی P و خط Δ روی P داده شده‌اند. نقطه‌ی M را روی خط Δ چنان بیابید که مثلث MAB متساوی‌الساقین باشد (بحث کنید).

پاسخ تشریحی مسائل

ریاضیات ۱

.۱

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{2}-\sqrt{3}<0 \Rightarrow \left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|=\sqrt{3}-\sqrt{2}\\ \sqrt{3}-\sqrt{2}-1<0 \Rightarrow \left|\sqrt{3}-\sqrt{2}-1\right|=\sqrt{2}+1-\sqrt{3}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow A=\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{2}+1-\sqrt{3}=1$$

.۲

$$0<a<1 \Rightarrow 0<\frac{a}{1}<\frac{7a}{7a} \Rightarrow 0<\frac{a}{1}<\frac{7a+a}{7a+1}<\frac{7a}{7a}$$

$$\Rightarrow 0<\frac{a}{1}<\frac{8a}{7a+1}<1 \Rightarrow 0<\frac{8a}{7a+1}<1 \Rightarrow \frac{0}{a+2}<\frac{8a}{7a+a}<1$$

$$\frac{0}{a+2}<\frac{8a+0}{7a+1+a+2}<\frac{8a}{7a+1}<1$$

$$\Rightarrow \frac{0}{a+2}<\frac{8a+0}{8a+3}<\frac{8a}{7a+1}<1 \Rightarrow 0<\frac{8a}{8a+3}<1$$

.۳

$$\begin{cases}3x-2y=7\\2x+3y=9\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}3\times\\2\times\end{matrix}\begin{cases}3x-2y=7\\2x+3y=9\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}9x-6y=21\\4x+6y=18\end{cases}$$

رابطه‌ی (۱) و (۲) را با هم جمع می‌کنیم

$$13x=39 \Rightarrow x=\frac{39}{13}=3$$

$$3x-2y=7 \xrightarrow{x=3} 9-2y=7 \Rightarrow y=1$$

.۴

$$\frac{2/16\times10^{4}\times(0/1)^{3}}{(0/2)^{2}}=\frac{2/16\times10^{4}\times(10^{-1})^{3}}{(2\times10^{-1})^{2}}$$

$$=\frac{2/16\times10^{4}\times10^{-3}}{4\times10^{-2}}=0/54\times10^{1}\times10^{2}=5/4\times10^{2}$$

.۵

$$a+\sqrt[3]{b}=1 \Rightarrow (a+\sqrt[3]{b}=1)^{3} \Rightarrow a^{3}+b+3a\sqrt[3]{b}(a+\sqrt[3]{b})=1$$

$$a^{3}+b+3a\sqrt[3]{b}=1 \Rightarrow a^{3}+3a\sqrt[3]{b}=1-b$$

$$\Rightarrow a(a^{2}+3\sqrt[3]{b})=1-b \Rightarrow \frac{a^{2}+3\sqrt[3]{b}}{1-b}=\frac{1}{a}$$

.۶

$$x^{2}+(x-2)(y+1)-2x=x^{2}+xy+x-2y-2-2x=$$

$$x^{2}+x(y-1)+(-2y-2)=(x+y+1)(x-2)$$

.۷

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی با اضلاع K و ۴ داریم:

$$\frac{k}{4}=\cos y \Rightarrow k=4\cos y$$

با توجه به این‌که x و y دو زاویه‌ی متمم هستند پس:

$$x=\frac{\pi}{2}-y \Rightarrow \sin x=\cos y \Rightarrow k=4\sin x$$

.۸

$$\frac{1}{(3\sqrt{8}-\sqrt{50}+\sqrt{3})}=\frac{1}{6\sqrt{2}-5\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

برای گویا کردن کسر، صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم.

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

.۹

$$a^{3}+b^{3}=(a+b)(a^{2}-ab+b^{2})$$

$$x^{3}+8=(x+2)(x^{2}-2x+2^{2})$$

$$\Rightarrow x^{2}-2x+2^{2}=x^{m}-kx^{n}+4 \Rightarrow \begin{cases}m=2\\n=1\\k=2\end{cases} \Rightarrow m+n+k=5$$

.۱۰

$$M=2(2x^{3}-1)^{2}+3(2x^{3}-4)^{2}+6(2x^{3}-1)(2x^{3}-4)$$

$$=2(4x^{6}-4x^{3}+1)+3(4x^{6}-16x^{3}+16)+24x^{6}-60x^{3}+24$$

$$=8x^{6}-8x^{3}+2+12x^{6}-48x^{3}+48+24x^{6}-60x^{3}+24$$

$$=44x^{6}-4x^{3}+74$$

.۱۱

$$45x+500=60x-1000 \Rightarrow -15x=-1500 \Rightarrow x=100$$

مبلغ خرید برای ۱۰۰ تخم‌مرغ برابر است با ۵۰۰۰=۵۰۰+۱۰۰×۴۵ تومان

$$100y=5000 \Rightarrow y=50$$

یعنی قیمت خرید هر تخم مرغ ۵۰ تومان بوده است.

۱۲. الف)

$$x_M=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{3+0}{2}=\frac{3}{2}\ ,\ y_M=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{0+2}{2}=1$$

$$\Rightarrow AM=\sqrt{(2-\frac{3}{2})^{2}+(3-1)^{2}}=\sqrt{\frac{1}{4}+4}=\frac{\sqrt{17}}{2}$$

ب)

$$m_{CH}\times m_{AB}=-1\ ,\ m_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{3-0}{2-3}=-3$$

$$\Rightarrow m_{CH}=\frac{1}{3}$$

$$y-y_C=m(x-x_C) \Rightarrow y-2=\frac{1}{3}(x-0) \Rightarrow y=\frac{1}{3}x+2$$

.۱۳

$$9x^{2}-12x+4=0$$

$$\begin{cases}a=9\\b=12 \Rightarrow \Delta=b^{2}-4ac=(12)^{2}-4(9)(4)=144-144=0\\c=4\end{cases}$$

$$\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-12\pm\sqrt{0}}{2(9)}=\frac{-12}{18}=\frac{-2}{3}$$

.۱۴

$x^{2}\times 8$ = ارتفاع × سطح قاعده = حجم مکعب

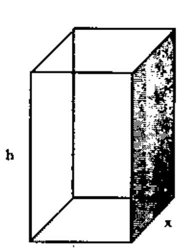
$2x^{2}+4x(8)$ = سطح جانبی + مجموع سطح دو قاعده = سطح کل

$$\Rightarrow 8x^{2}=2x^{2}+32x-10$$

$$\Rightarrow 6x^{2}=32x-10 \Rightarrow 3x^{2}-16x+5=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}(3x-15)(3x-1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x=5 \Rightarrow V=8x^{2}=8\times25=200\\x=\frac{1}{3} \Rightarrow V=8x^{2}=8\times\frac{1}{9}=\frac{8}{9}\end{cases}$$



.۱۵

$$\left.\begin{array}{l}x\geq0,x<2,2x-1<x \Rightarrow x<1 \Rightarrow 0\leq x<1\\ x<0,-x<2,2x-1<-x \Rightarrow 3x<1 \Rightarrow x<\frac{1}{3} \Rightarrow -2<x<0\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow -2<x<1$$

ریاضیات ۲

۱. ریشه‌ی هر یک از عبارات را محاسبه کنید.

$A=\frac{x^۲-۴}{(۳-۲x)(۴x^۲-۴x+۱)}$

$x^۲-۴=۰\Rightarrow x^۲=۴\Rightarrow x=\pm۲$

$۳-۲x=۰\Rightarrow -۲x=-۳\Rightarrow x=\frac{۳}{۲}$

$۴x^۲-۴x+۱=۰;\Delta=b^۲-۴ac=$
$۱۶-۴(۴)\times۱=۱۶-۱۶=۰$

$\Rightarrow x=\frac{-b}{۲a}=\frac{+۴}{۴\times۲}=\frac{۱}{۲}$ ریشه‌ی مضاعف

ریشه‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم و در جدول قرار می‌دهیم.

x		-۲		$\frac{۱}{۲}$		$\frac{۳}{۲}$		۲	
$x^۲-۴$	+		−		−		−		+
$۳-۲x$	+		+		+		−		−
$۴x^۲-۴x+۱$	+		+		+		+		+
A	+		−	ت.ن	−	ت.ن	+		−

۲. در معادله‌ی فوق اگر $\Delta<۰$ و $-۳m>۰$ $(a>۰)$ عبارت به ازای جمیع مقادیر x مثبت است.

$\Delta=b^۲-۴ac=(۲m)^۲-۴(-۳m)(۱)=۴m^۲+۱۲m<۰$

$۴m(m+۳)<۰\Rightarrow\begin{cases}۴m=۰\Rightarrow m=۰\\ m+۳=۰\Rightarrow m=-۳\end{cases}$

$-۳m>۰\Rightarrow m<۰$

m		-۳		۰	
$۴m^۲+۱۲m$	+		−		+
$۴m^۲+۱۲m<۰$			جواب		

اشتراک $m<۰$ و $-۳<m<۰$ برابر است با: $-۳<m<۰$

$-۳<m<۰\Rightarrow$ جواب

۳.

الف) $|۳-x|<۳\Rightarrow -۳<۳-x<۳$

حالت اول $:۳-x<۳\Rightarrow -x<۳-۳\Rightarrow -x<۰\Rightarrow x>۰$
حالت دوم $:-۳<۳-x\Rightarrow -۳-۳<-x\Rightarrow -۶<-x\Rightarrow ۶>x$
$\Rightarrow ۰<x<۶$

ب) $|۲x+۱|\le|x-۲|$

طرفین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم.

$(۲x+۱)^۲\le(x-۲)^۲\Rightarrow ۴x^۲+۴x+۱\le x^۲-۴x+۴\Rightarrow$
$۴x^۲+۴x+۱+۴x-x^۲-۴\le۰\Rightarrow ۳x^۲+۸x-۳\le۰$

$\begin{cases}\Delta=b^۲-۴ac=۶۴-۴(۳)(-۳)=۶۴+۳۶=۱۰۰\\ a=۳\\ b=۸\\ c=-۳\end{cases}$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}\Rightarrow x=\frac{-۸\pm\sqrt{۱۰۰}}{۲\times۳}\Rightarrow \begin{matrix}x=\frac{-۸+۱۰}{۶}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}\\ x=\frac{-۸-۱۰}{۶}=-۳\end{matrix}$

x		-۳		$\frac{۱}{۳}$	
$۳x^۲+۸x-۳$	+		−		+

جواب $=-۳\le x\le\frac{۱}{۳}$

۴. ابتدا دامنه‌ی عبارت را تعیین می‌کنیم، پس باید مخرج تک‌تک کسر را مساوی صفر قرار دهیم.

$۲x=۰\Rightarrow x=۰$

$۲x+۱=۰\Rightarrow ۲x=-۱\Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}$

$۴x^۲+۲x=۰\Rightarrow ۲x(۲x+۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\ x=-\frac{۱}{۲}\end{cases}$

دامنه $D=\mathbb{R}-\left\{۰,-\frac{۱}{۲}\right\}$

مخرج مشترک $۲x(۲x+۱)=۴x^۲+۲x$ است.

$\frac{x-۱}{۲x}-\frac{۱}{۲x+۱}=\frac{۷-۳x}{۴x^۲+۲x}$
$\frac{(۲x+۱)(x-۱)-۲x}{۲x(۲x+۱)}=\frac{۷-۳x}{۴x^۲+۲x}$

$(۲x+۱)(x-۱)-۲x=۷-۳x$
$۲x^۲+x-۲x-۱-۲x=۷-۳x\Rightarrow ۲x^۲=۸$
$\Rightarrow x^۲=۴\to x=\pm۲$

هر دو ریشه قابل قبول‌اند چون متعلق به دامنه هستند.

۵.

$f(x)=ax+b\Rightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$
$=\frac{a(x+\Delta x)+b-ax-b}{\Delta x}$
$=\frac{ax+a\Delta x-ax}{\Delta x}=\frac{a\Delta x}{\Delta x}=a$

۶. برای این‌که تابع معکوس‌پذیر باشد، باید شرط زیر برقرار باشد. (شرط یک‌به‌یک بودن)

$f(x_۱)=f(x_۲)\Rightarrow x_۱=x_۲$
$\frac{۳x_۱+۷}{x_۱+۲}=\frac{۳x_۲+۷}{x_۲+۲}$
$\Rightarrow(۳x_۱+۷)(x_۲+۲)=(۳x_۲+۷)(x_۱+۲)$
$\Rightarrow ۳x_۱x_۲+۶x_۱+۷x_۲+۱۴=۳x_۲x_۱+۶x_۲+۷x_۱+۱۴$
$\Rightarrow ۷x_۲-۶x_۲=۷x_۱-۶x_۱\Rightarrow x_۲=x_۱$

در نتیجه تابع یک‌به‌یک است. برای به‌دست آوردن معکوس باید x را بر حسب y محاسبه کنیم.

$f(x)=y=\frac{۳x+۷}{x+۲}\Rightarrow xy+۲y=۳x+۷\Rightarrow$

$xy-۳x=۷-۲y\Rightarrow x(y-۳)=۷-۲y\Rightarrow x=\frac{۷-۲y}{y-۳}$

$\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۷-۲x}{x-۳}$

در رابطه‌ی بالا به جای yها x قرار می‌دهیم.

۷.

$$O'(-3,2)\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-3\\ \beta=2\end{cases}\quad A(7,3)\Rightarrow\begin{cases}x=7\\ y=3\end{cases}\quad\begin{cases}X=?\\ Y=?\end{cases}$$

$$A'\begin{cases}X=x-\alpha\\ Y=y-\beta\end{cases}\Rightarrow A'\begin{cases}7-(-3)\\ 3-2\end{cases}\Rightarrow A'=(10,1)$$

۸. ماتریس $X=\begin{bmatrix}a&b\\ c&d\end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم.

$$AX=\begin{bmatrix}7&8\\ 1&2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-2&3\\ 1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\ c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&8\\ 1&2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-2a+3c & -2b+3d\\ a(1)+0(c) & 1(b)+0(d)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&8\\ 1&2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}-2a+3c & 3d-2b\\ a & b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&8\\ 1&2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=2\\ -2a+3c=7\xRightarrow{a=1}-2\times1+3c=7\Rightarrow 3c=7+2=9\Rightarrow c=\frac{9}{3}=3\\ 3d-2b=8\xRightarrow{b=2}3d-2\times2=8\Rightarrow 3d=8+4\Rightarrow 3d=12\Rightarrow d=4\end{cases}$$

۹.

$$\begin{cases}3x+2y=7\\ -4x-2y=-8\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}3&2\\ -4&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\ -8\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2\\ -4&-2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}7\\ -8\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\frac{1}{3(-2)-(-4)(2)}\begin{bmatrix}-2&-2\\ 4&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\ -8\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\frac{1}{-6+8}\begin{bmatrix}-2&-2\\ 4&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\ -8\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-2&-2\\ 4&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\ -8\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-1\\ 2&\frac{3}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\ -8\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\times7+(-1)(-8)\\ 2\times7+\frac{3}{2}\times(-8)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-7+8\\ 14-12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}$$

۱۰. برای این‌که دستگاه فوق جواب داشته باشد دترمینان ماتریس ضرایب صفر نباشد.

$$\begin{cases}2mx-4y=4\\ -4x+2my=2\end{cases}\quad A=\begin{bmatrix}2m&-4\\ -4&2m\end{bmatrix}\Rightarrow|A|\neq0$$

$$\Rightarrow 4m^2-(-4)(-4)\neq0\Rightarrow 4m^2-16\neq0\Rightarrow m^2-4\neq0$$

$$m^2\neq4\Rightarrow m\neq\pm2$$

۱۱.

الف) $\log_{25}^{\sqrt{125}}=\log_{5^2}^{\sqrt{5^3}}=\log_{5^2}^{5^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{3}{2}}{2}\log_5^5$

$$=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{2}{1}}\times1=\frac{3}{4}$$

ب) $\log_7^{49^2}=\log_7^{(7^2)^2}=\log_7^{7^4}=4\log_7^7=4\times1=4$

۱۲.

$$2\log_7^x=\log_7^{81}\Rightarrow\log_7^{x^2}=\log_7^{81}\Rightarrow x^2=81\Rightarrow x=\pm9$$

۱۳. باید t_3 و t_2 و t_1 را محاسبه و مجموع آن‌ها را به‌دست آوریم.

$$t_n=2n+1$$
$$\Rightarrow n=1\Rightarrow t_1=2\times1+1=2+1=3$$
$$n=2\Rightarrow t_2=2\times2+1=4+1=5$$
$$n=3\Rightarrow t_3=2\times3+1=6+1=7$$
$$t_1+t_2+t_3=3+5+7=15$$

۱۴. چون باید چهار جمله بین $\frac{3}{8}$ و $\frac{128}{81}$ درج کنیم پس $a=t_1=\frac{3}{8}$ و $t_6=\frac{128}{81}$ است.

$$\begin{array}{cccccc}\frac{3}{8}, & \square, & \square, & \square, & \square, & \frac{128}{81}\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ a & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 & t_6\end{array}$$

$$a_n=aq^{n-1}\Rightarrow a_6=aq^5\Rightarrow\frac{128}{81}=\frac{3}{8}\times q^5$$

$$\Rightarrow q^5=\frac{128}{81}\div\frac{3}{8}=\frac{128}{81}\times\frac{8}{3}\Rightarrow q^5=\frac{1024}{243}$$

$$q^5=\frac{2^{10}}{3^5}\Rightarrow q^5\Rightarrow(\frac{2^2}{3})^5\Rightarrow q^5=(\frac{4}{3})^5\Rightarrow q=\frac{4}{3}$$

$$t_2=aq=\frac{3}{8}\times\frac{4}{3}\Rightarrow t_2=\frac{1}{2}$$

$$t_3=aq^2=\frac{3}{8}\times(\frac{4}{3})^2=\frac{2}{3}$$

$$t_4=aq^3=qt_3=\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{9}$$

$$t_5=aq^4=qt_4=\frac{4}{3}\times\frac{8}{9}=\frac{32}{27}$$

۱۵.

$$\sin\alpha=\frac{2}{3}\Rightarrow\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-(\frac{2}{3})^2=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$$

$$\cos\alpha=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\pm\sqrt{5}}{3}\ \text{حاده}\ \alpha\Rightarrow\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\cos\beta=\frac{1}{5}\Rightarrow\sin^2\beta=1-\cos^2\beta\Rightarrow\sin^2\beta=1-(\frac{1}{5})^2=$$

$$1-\frac{1}{25}=\frac{24}{25}\Rightarrow\sin\beta=\sqrt{\frac{24}{25}}=\pm\frac{\sqrt{24}}{5}\ \text{حاده}\ \beta\Rightarrow\sin\beta$$

$$=\frac{\sqrt{24}}{5}$$

الف) $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{4\sqrt{5}}{9}$

ب) $\cos(\beta+30)=\cos\beta\cos30-\sin\beta\sin30$

$$=\frac{1}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{24}}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{10}-\frac{\sqrt{24}}{10}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{24}}{10}$$

۱۶ . $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$ را در معادله جای‌گذاری می‌کنیم.

$$2\sin^2 x-\cos^2 x=0 \Rightarrow 2(1-\cos^2 x)-\cos^2 x=0$$
$$\Rightarrow 2-2\cos^2 x-\cos^2 x=0 \Rightarrow 2-3\cos^2 x=0$$
$$\Rightarrow -3\cos^2 x=-2 \Rightarrow \cos^2 x=\frac{2}{3} \Rightarrow \cos x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$
$$\cos x=\sqrt{\frac{2}{3}}=\cos\alpha \Rightarrow \alpha=\operatorname{Arccos}\sqrt{\frac{2}{3}}$$
$$\Rightarrow x=2k\pi\pm\operatorname{Arccos}\sqrt{\frac{2}{3}}$$
$$\cos x=-\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow \cos x=\operatorname{Arccos}\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$
$$\Rightarrow \alpha=\operatorname{Arccos}\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \Rightarrow x=2k\pi\pm\operatorname{Arccosc}\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

۱۷ .

$$\vec{v}_1.\vec{v}_2=x_1x_2+y_1y_2=(2\sqrt{3}\times 3)+(-2\times\sqrt{3})$$
$$=6\sqrt{3}-2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$$
$$\vec{v}_1.\vec{v}_2=|\vec{v}_1||\vec{v}_2|\cos\theta \Rightarrow 4\sqrt{3}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}\times\sqrt{x_2^2+y_2^2}\cos\theta$$
$$\Rightarrow 4\sqrt{3}=\sqrt{3^2+\sqrt{3}^2}\times\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(-2)^2}\cos\theta$$
$$\Rightarrow 4\sqrt{3}=(2\sqrt{3})(4)\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=\frac{4\sqrt{3}}{8\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \cos 60^\circ=\cos\theta \Rightarrow \theta=60^\circ$$

۱۸ . باید تبدیل (جایگشت) ۳ شی از ۵ شی را به دست آوریم.

الف) $p(5,3)=\frac{5!}{2!}=\frac{5\times 4\times 3\times 2!}{2!}=60$

ب) برای این که اعداد فرد باشند باید رقم یکان آن‌ها فرد باشد پس برای رقم یکان ۳ انتخاب ۳ و ۵ و ۷ را داریم، لذا یکی از این اعداد انتخاب شده و ۴ عدد برای انتخاب دهگان، سپس ۳ عدد برای جایگزینی در صدگان وجود دارند.

یکان دهگان صدگان

$\boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{3}\quad 3\times 4\times 3=36$

ج) چون اعداد باید از ۴۰۰ کوچک‌تر باشند، لذا در صدگان آن‌ها فقط دو عدد ۲ و ۳ می‌توانند قرار گیرند، پس برای صدگان ۲ انتخاب داریم. پس از انتخاب یکی از اعداد فوق، ۴ انتخاب برای دهگان و سپس ۳ انتخاب برای عدد یکان وجود دارد.

یکان دهگان صدگان

$\boxed{2}\ \boxed{4}\ \boxed{3}\quad .2\times 4\times 3=24$

هندسه ۱

۱ . داریم:

$$\begin{cases}x+y=120^\circ\\ x-2y=180^\circ-120^\circ\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x+y=120^\circ\\ x-2y=60^\circ\end{cases} \Rightarrow x=100^\circ,\ y=20^\circ$$

۲ . می‌دانیم که تعداد قطرهای یک nضلعی محدب $\frac{n(n-3)}{2}$ است، پس داریم:

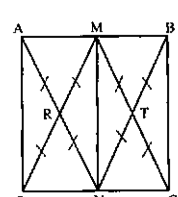
$$\frac{n(n-3)}{2}=35 \Rightarrow n^2-3n=70 \Rightarrow n^2-3n-70=0$$
$$\Rightarrow (n-10)(n+7)=0 \Rightarrow n=10\ ,\quad n=-7<0$$

اما مجموع زاویه‌های درونی هر nضلعی محدب مساوی $(2n-4)$ قائمه و یا $(n-2)\times 180^\circ$ است. پس خواهیم داشت:

مجموع زاویه‌های درونی ۱۰ ضلعی محدب:

$n=10 \Rightarrow 2\times 10-4=16$ قائمه $=16\times 90^\circ=1440^\circ$

۳ . اگر از M به N وصل کنیم، دو مستطیل AMND و MBCN به وجود می‌آیند که قطرهای آن‌ها با هم مساوی و منصف یکدیگرند. یعنی داریم:



AR=RN=RM=RD و MT=TC=TB=TN

اما به دلیل هم‌نهشت بودن مثلث‌های AND و BNC به حالت (ض‌زض)، AN=BN است. بنابراین نصف آن‌ها نیز مساوی خواهد بود. یعنی:

MR=RN=NT=TM

و درنتیجه MRNT لوزی است.

۴ . می‌دانیم که از وصل کردن وسط‌های ضلع‌های متوالی یک لوزی، یک مستطیل پدید می‌آید. (چرا؟) پس MNPQ یک مستطیل است. اما داریم:

$MN=\frac{AC}{2}=\frac{60}{2}=30$ و $NP=\frac{BD}{2}=\frac{24}{2}=12$ (چرا؟)

بنابراین خواهیم داشت:

$S_{MNPQ}=MN\times NP=30\times 12=360$ واحد سطح

۵ . با توجه به ویژگی نسبت‌های مساوی و خاصیت تناسب داریم:

$$\begin{cases}\dfrac{(x-y)+(y-3)+3}{4+y+1}=\dfrac{3}{1}\\ 3y=y-3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{x}{4+y+1}=\dfrac{3}{1}\\ y=-\dfrac{3}{2}=-1/5\end{cases}$$
$$\Rightarrow \frac{x}{4-1/5+1}=\frac{3}{1} \Rightarrow \frac{x}{3/5}=\frac{3}{1} \Rightarrow \frac{x}{7}=\frac{3}{2}$$

پس خواهیم داشت: $\frac{x}{\boxed{7}}=\frac{3}{\boxed{2}}$

نکته: به جای ۷ و ۲ می‌توان 7k و 2k $(k\in R)$ را درنظر گرفت.

۶ . به دلیل موازی بودن DE و BC داریم:

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{x}{x+(x+2)}=\frac{x+2}{(x+2)+(x+5)}=\frac{6}{y}$$
$$\Rightarrow \frac{x}{2x+2}=\frac{x+2}{2x+7}=\frac{6}{y} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{x}{2x+2}=\dfrac{x+2}{2x+7}\\ \dfrac{x}{2x+2}=\dfrac{6}{y}\end{cases}$$
$$\Rightarrow 2x^2+7x=2x^2+6x+4 \Rightarrow x=4$$
$$\Rightarrow \frac{4}{8+2}=\frac{6}{y} \Rightarrow \frac{4}{10}=\frac{6}{y} \Rightarrow y=15$$

۷ . بنا به قضیه‌ی تالس (یا تشابه مثلث‌ها) داریم:

$$\frac{x}{9}=\frac{39}{13} \Rightarrow \frac{x}{9}=3 \Rightarrow x=27$$

۸ . می‌دانیم که نسبت هر دو پاره‌خط متناظر در دو شکل متشابه، مساوی نسبت تشابه آن دو شکل است. بنابراین داریم:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'H'}{BH} \qquad (1)$$

اما بنا به فرض $3B'H'=2BH$ و یا (۲) $\frac{B'H'}{BH}=\frac{2}{3}$ است. از رابطه‌های ۱ و ۲ نتیجه می‌شود:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{2}{3}$$

اما $A'B'=6$ است. پس خواهیم داشت:

$$\frac{6}{AB}=\frac{2}{3}\Rightarrow AB=9$$

۹ . ابعاد مکعب مستطیل را $2k$ ، $3k$ و $4k$ فرض می‌کنیم. داریم:

$$\text{حجم مکعب مستطیل}=2k\times 3k\times 4k=24k^3\Rightarrow 24000$$

$$=24k^3\Rightarrow k^3=1000\Rightarrow k=10$$

$$\Rightarrow \text{ابعاد مکعب مستطیل}=20 \text{ و } 30 \text{ و } 40$$

اما می‌دانیم که اندازه‌ی قطر مکعب مستطیل به ابعاد a، b و c برابر است با:

$$d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

بنابراین داریم:

الف)

$$d=\sqrt{20^2+30^2+40^2}=\sqrt{400+900+1600}$$

$$=\sqrt{2900}=10\sqrt{29}$$

ب) سطح کل این مکعب مستطیل برابر است با:

$$S_{\text{کل}}=S_{\text{جانبی}}+S_{\text{دو قاعده}}=2(20+30)\times 40+2(20\times 30)$$

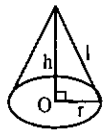
$$\Rightarrow S_{\text{کل}}\ 4000+1200=5200 \text{ واحد سطح}$$

از طرف دیگر، سطح کل مکعبی به ضلع a، مساوی $6a^2$ است. پس خواهیم داشت:

$$6a^2=5200\Rightarrow a^2=\frac{5200}{6}=\frac{2600}{3}\Rightarrow a=10\sqrt{\frac{26}{3}}$$

ضلع مکعب

۱۰ . اگر h ارتفاع مخروط قائم، l مولد آن و r شعاع قاعده‌اش باشد، داریم:



$$S_{\text{کل مخروط قائم}}=S_{\text{جانبی}}+S_{\text{قاعده}}=2\pi rl+\pi r^2$$

$$\Rightarrow 624\pi=2\pi\times 12\times l+144\pi\Rightarrow 24\pi l=480\pi\Rightarrow l=20,$$

$$l=\sqrt{h^2+r^2}\Rightarrow 20=\sqrt{h^2+144}\Rightarrow 400=h^2+144$$

$$\Rightarrow h^2=256\Rightarrow h=16. \qquad \text{ارتفاع مخروط}$$

$$\Rightarrow \text{حجم مخروط}=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$\Rightarrow \text{حجم مخروط}=\frac{1}{3}\times\pi\times 12^2\times 16=768\pi \text{ واحد حجم}$$

۱۱ . می‌دانیم که:

ارتفاع × سطح قاعده = حجم متوازی‌السطوح

اما:

$$\text{ارتفاع متوازی‌السطوح مایل}=\text{طول یال}\times\cos 60^\circ=36\times\frac{1}{2}$$

$$=18cm,\ \text{مساحت قاعده}=16^2=256cm^2$$

$$\Rightarrow \text{حجم متوازی‌السطوح}=256\times 18=4608cm^3$$

۱۲ . شعاع کره را R می‌گیریم. داریم:

$$\text{حجم کره}=\frac{4}{3}\pi R^3\Rightarrow 288\pi=\frac{4}{3}\pi R^3\Rightarrow 216=R^3$$

$$\Rightarrow R=6cm$$

$$\text{سطح کره}=4\pi R^2\Rightarrow \text{سطح کره}=4\pi\times 6^2=144\pi cm^2$$

حسابان

۱ .

$$f(x)=\sqrt{2x-6}\ ,\ 2x-6\geq 0\Rightarrow x\geq 3\ ,$$

$$g(x)=\sqrt{1-x}\ ,\ x\leq 1$$

$$D_{fog}=\left\{x \mid x\in D_g, g(x)\in D_f\right\}$$

$$x\leq 1\ ,\ \sqrt{1-x}\geq 3\Rightarrow 1-x\geq 9\Rightarrow x\leq -8$$

$$\Rightarrow D_{fog}=(-\infty,-8]$$

$$D_{gof}=\left\{x\in D_f, f(x)\in D_g\right\}$$

$$x\geq 3\ ,\ \sqrt{2x-6}\leq 1\Rightarrow 2x-6\leq 1\Rightarrow x\leq\frac{7}{2}\Rightarrow$$

$$D_{gof}=\left[3,\frac{7}{2}\right]$$

۲ .

$$f(g(a))=g(f(a))\Rightarrow f(2a^2-a+1)=g(a+3)\Rightarrow$$

$$2a^2-a+1+3=2(a+3)^2-a-3+1\Rightarrow$$

$$2a^2-a+4=2a^2+11a+16\Rightarrow 12a=-12\Rightarrow a=-1$$

۳ .

$$\frac{\pi}{7}=x\ ;\ \sin x+\sin 2x+\sin 3x=\frac{1}{2}\times\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$\underbrace{2\sin x\sin\frac{x}{2}}+\underbrace{2\sin 2x\sin\frac{x}{2}}+\underbrace{2\sin 3x\sin\frac{x}{2}}=\cos\frac{x}{2}$$

$$2\sin a\sin b=\cos(a-b)-\cos(a+b)$$

$$\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}+\cos\frac{3x}{2}-\cos\frac{5x}{2}+\cos\frac{5x}{2}-\cos\frac{7x}{2}=\cos\frac{x}{2}$$

$$\cos\frac{x}{2}-\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0}=\cos\frac{x}{2}\Rightarrow\cos\frac{x}{2}=\cos\frac{x}{2}$$

۴ .

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}=\frac{0}{0}\ ,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}\times\frac{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x}}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x})}{1+\tan x-1+\tan x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x})}{2\tan x}$$

$$\sim\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2}=\frac{\sqrt{1}+\sqrt{1}}{2}=\frac{2}{2}=1$$

۵ .

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{0}{0}\ ,\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+1+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}+1+\sqrt[3]{x}}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+1+\sqrt[3]{x})}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+1+\sqrt[3]{x}} = \frac{1+1}{1+1+1} = \frac{2}{3} = f(1)$$

.۶

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+1, & x>1 \\ x+b, & x\le 1\end{cases} \qquad f'(x)=\begin{cases}2ax, & x>1\\ 1, & x\le 1\end{cases}$$

$$f'_{(1^+)} = f'_{(1^-)} \Rightarrow 2a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) \Rightarrow a+1 = 1+b$$

$$\frac{1}{2}+1=1+b\Rightarrow b=\frac{1}{2}$$

.۷

$$A\left|\begin{matrix}\alpha \\ \alpha^2-4\alpha\end{matrix}\right.$$ نقطه‌ی تماس

$$; y=x^2-4x \Rightarrow y'_x = 2x-4 \quad m_{\text{مماس}} = 2\alpha-4 \quad P\left|\begin{matrix}0\\-1\end{matrix}\right.$$

$$y-y_A = m(x-x_A) \Rightarrow y-\alpha^2+4\alpha = (2\alpha-4)(x-\alpha)$$

این خط مماس باید از p بگذرد.

$$-1-\alpha^2+4\alpha = (2\alpha-4)(-\alpha)$$

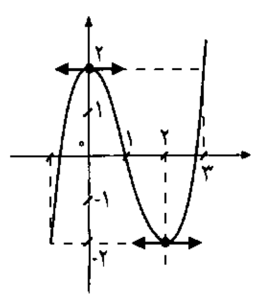
$\Rightarrow -1-\alpha^2+4\alpha = -2\alpha^2+4\alpha \Rightarrow \alpha^2=1\Rightarrow \alpha=\pm 1$ طول‌های نقاط تماس

.۸

$$y=x^3+ax^2+b,\ y_F = -\frac{a}{3}=1 \Rightarrow a=-3$$

$$F(1,0) \xrightarrow{\text{در معادله‌ی تابع}} 0=1+a+b \Rightarrow 0=1-3+b\Rightarrow b=2$$

$$y=x^3-3x^2+2\Rightarrow y'_x=3x^2-6x=0\Rightarrow x=0,2$$



x	$-\infty$		-1		0		1		2		3		$+\infty$
y'_x		+		+	0	−		−	0	+		+	
y	$-\infty$	↗	-2	↗	2	↘	0	↘	-2	↗	2	↗	$+\infty$

.۹

$y=\frac{(2a+b)x-5}{x-a+b} \qquad O'\left|\begin{matrix}4\\2\end{matrix}\right. \Rightarrow$ $x=4$ معادله‌ی مجانب قائم، $y=2$ معادله‌ی مجانب افقی

مجانب قائم : $x-a+b=0\Rightarrow 4-a+b=0\Rightarrow a-b=4$

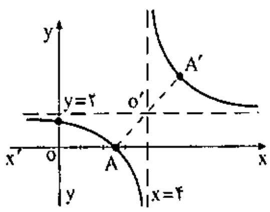
مجانب افقی : $y=2a+b\Rightarrow 2=2a+b\Rightarrow 2a+b=2$

$$\Rightarrow\begin{cases}a-b=4\\2a+b=2\end{cases}\Rightarrow a=2,\ b=0$$

$y=\frac{2x-5}{x-4}$ $x=4$ معادله‌ی مجانب قائم، $y=2$ معادله‌ی مجانب افقی

$y'_x = \frac{-3}{(x-4)^2} < 0 \quad x>4$ یا $x<-4$

$$x=0\Rightarrow y=\frac{5}{4},\ y=0\Rightarrow x=\frac{5}{2}$$



x	$-\infty$		0		$\frac{5}{2}$		4		$+\infty$
y'		−		−		−	‖	−	
y	2	↘	$\frac{5}{4}$	↘	0	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	2

.۱۰

$$y=\sin^2 x+\sin x \quad 0\le x\le 2\pi \quad y'_x = 2\cos x\sin x+\cos x=0$$

$$\cos x(2\sin x+1)=0,\ \cos x=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}$$

$$2\sin x+1=0\Rightarrow \sin x=\frac{-1}{2}$$

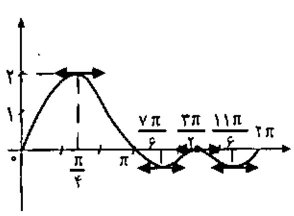
$$\sin x=\sin\frac{7\pi}{6}\Rightarrow \begin{cases}x=2k\pi+\frac{7\pi}{6}\\ x=2k\pi+\pi-\frac{7\pi}{6}\end{cases}\Rightarrow x=\frac{7\pi}{6},\ \frac{11\pi}{6}$$

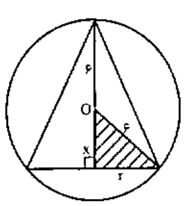
$$y=0\Rightarrow \sin^2 x+\sin x=0\Rightarrow \sin x(\sin x+1)=0$$

$$\Rightarrow \sin x=0\Rightarrow x=0,\pi,2\pi,\ \sin x+1=0$$

$$\Rightarrow \sin x=-1\Rightarrow x=\frac{3\pi}{2}$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
y'_x		+	0	−		−	0	+	0	−	0	+	
y		↗	2	↘	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	0





.۱۱

$h=x+6$ ارتفاع مخروط

$x^2+r^2=36\Rightarrow r^2=36-x^2$: در مثلث قائم‌الزاویه ی شکل داریم

$$V=\text{سطح قاعده}\times\frac{\text{ارتفاع}}{3}\Rightarrow V=\pi r^2\times\frac{h}{3}$$

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h\Rightarrow V=\frac{\pi}{3}(36-x^2)(x+6)$$

$$V'_x=\frac{\pi}{3}\left[-2x(x+6)+(36-x^2)\right]=0$$

$$-2x(x+6)+(6-x)(6+x)=0\Rightarrow (6+x)(-2x+6-x)=0$$

$6+x>0$ پس: $-2x+6-x=0$

$\Rightarrow -3x=-6\Rightarrow x=2\Rightarrow h=8$ ارتفاع مخروط

جبر واحتمال

۱.
$n=1:\ \frac{1}{1\times3}<\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$

$n=k:\ \frac{1}{1\times3}+\frac{1}{2\times4}+\cdots+\frac{1}{k(k+2)}<\frac{k}{k+1}$ (فرض استقرا)

$n=k+1:\ \frac{1}{1\times3}+\frac{1}{2\times4}+\cdots+\frac{1}{k(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+3)}<\frac{k+1}{k+2}$ (حکم استقرا)

دو طرف فرض را با $\frac{1}{(k+1)(k+3)}$ جمع می‌کنیم:

$$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{2\times4}+\cdots+\frac{1}{k(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+3)}<\frac{1}{(k+1)(k+3)}+\frac{k}{k+1}$$

حال برای رسیدن از این فرض به حکم، کافی است نشان دهیم:

$$\frac{1}{(k+1)(k+3)}+\frac{k}{k+1}\le\frac{k+1}{k+2}$$

$$\Rightarrow\frac{k^2+3k+1}{(k+1)(k+3)}\le\frac{k+1}{k+2}\Leftrightarrow k^3+3k^2+k+2k^2+6k+2\le(k+1)^2(k+3)$$

$$=(k^2+2k+1)(k+3)=k^3+5k^2+7k+3\Leftrightarrow 2\le3$$

و چون همه‌ی مراحل برگشت‌پذیرند، لذا نامساوی فوق صحیح بوده و از ترکیب آن با فرض جدید به حکم می‌رسیم:

$$\begin{cases}\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{2\times4}+\cdots+\frac{1}{k(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+3)}<\frac{1}{(k+1)(k+3)}+\frac{k}{k+1}\\ \frac{1}{(k+1)(k+3)}+\frac{k}{k+1}\le\frac{k+1}{k+2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{2\times4}+\cdots+\frac{1}{(k+1)(k+3)}<\frac{k+1}{k+2}$$

۲. به کمک استدلال بازگشتی حکم ثابت می‌شود:

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{a}\ge a^2+b^2\Leftrightarrow\frac{a^4+b^4}{ab}\ge a^2+b^2$$

$$a^4+b^4\ge a^3b+ab^3\Leftrightarrow a^4-a^3b+b^4-ab^3\ge0$$

$$\Leftrightarrow a^3(a-b)-b^3(a-b)\ge0\Leftrightarrow(a-b)(a^3-b^3)\ge0$$

$$\Leftrightarrow(a-b)^2(a^2+ab+b^2)\ge0.$$

a^2+ab+b^2 یک سه‌جمله‌ای همواره مثبت است و $(a-b)^2\ge0$ پس، نتیجه آخر همواره درست و همه‌ی مراحل نیز برگشت‌پذیرند.

۳. اثبات با برهان خلف: فرض کنیم $\sqrt[3]{\sqrt5+\sqrt2}$ عددی گنگ نباشد:

$$\sqrt[3]{\sqrt5+\sqrt2}=\frac{m}{n}\ \text{و}\ m,n\in Z\ \text{و}\ n\neq0\Rightarrow\sqrt5+\sqrt2=\frac{m^3}{n^3}$$

$$\Rightarrow\sqrt5=\frac{m^3}{n^3}-\sqrt2\Rightarrow5=\frac{m^6}{n^6}+2-\frac{2\sqrt2m^3}{n^3}$$

$$\Rightarrow(\frac{2m^3}{n^3})\sqrt2=\frac{m^6}{n^6}-3=\frac{m^6-3n^6}{n^6}\Rightarrow\sqrt2=\frac{\frac{m^6-3n^6}{n^6}}{\frac{2m^3}{n^3}}$$

$$\Rightarrow\sqrt2=\frac{m^6-3n^6}{2m^3n^3}=\frac{p}{q},\ p,q\in Z,q\neq0\Rightarrow\sqrt2\in Q\ \text{(تناقض)}$$

۴. تعداد دانش‌آموزان مدرسه ۱۰۵۰=۲۱×۵۰ تا است و تعداد ترکیب‌های مختلف حروف اول نام و نام خانوادگی به کمک اصل ضرب، ۱۰۲۴=۳۲×۳۲ است. و درنتیجه طبق اصل لانه کبوتری لااقل دو نفر یافت می‌شوند که حرف اول نام و نام خانوادگی آن‌ها دقیقاً یکسان است.

۵.

$$n^2+(n+1)^2=n^2+n^2+2n+1=2n^2+2n+1=2n(n+1)+1$$

و چون n و n+1 دو عدد متوالی هستند پس لااقل یکی از آن‌ها زوج است و درنتیجه حاصلضرب آن‌ها زوج است:

$$n(n+1)=2k\Rightarrow n^2+(n+1)^2=4k+1$$

۶.

الف) $(A\cup B)-(B\cup C)=(A\cup B)\cap(B\cup C)'=(A\cup B)\cap(B'\cap C')$

$=[(A\cup B)\cap B']\cap C'=[(A\cap B')\cup(\underbrace{B\cap B'}_{\varnothing})]\cap C'$

$=(A\cap B')\cap C'=(A-B)-C$

ب) $A\subseteq B\Rightarrow A\cup B=B\Rightarrow(A\cup B)\cap B'=B\cap B'$

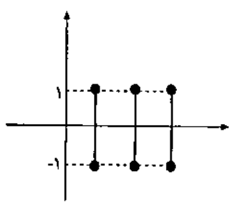
$\Rightarrow(A\cap B')\cup(\underbrace{B\cap B'}_{\varnothing})=\varnothing\Rightarrow A\cap B'=\varnothing\Rightarrow A-B=\varnothing$

۷.

$x^2<4x\Rightarrow x(x-4)<0\Rightarrow0<x<4$

$\Rightarrow x=1,2,3\ \Rightarrow\ A=\{1,2,3\},\ B=[-1,1]$

$\Rightarrow A\times B=\{(x,y)|x=1,2,3,\ y\in R,\ -1\le y\le1\}$



۸.

$x^2\le4\Rightarrow-2\le x\le2\Rightarrow x=-2$ یا -1 یا 0 یا 1 یا 2

$x=-2\Rightarrow y^2-2<-2y+1\Rightarrow y^2+2y-3<0\Rightarrow-3<y<1$

$\Rightarrow y=-2$ یا -1 یا 0

$x=-1\Rightarrow y^2-1<-y+1\Rightarrow y^2+y-2<0$

$\Rightarrow-2<y<1\Rightarrow y=-1$ یا 0

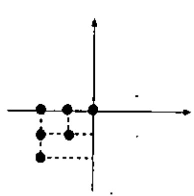
$x=0\Rightarrow y^2<1\Rightarrow-1<y<1\Rightarrow y=0$

$x=1\Rightarrow y^2+1<y+1\Rightarrow y^2-y<0\Rightarrow0<y<1\Rightarrow y\in Q$

$x=2\Rightarrow y^2+2<2y+1\Rightarrow y^2-2y+1<0\Rightarrow(y-1)^2<0$

$\Rightarrow y\in Q$

$\Rightarrow R=\{(-2,-2),(-2,-1),(-2,0),(-1,-1),(-1,0),(0,0)\}$



۹.

خاصیت انعکاسی: $(x,y)R(x,y)\Rightarrow x^2+y^2=x^2+y^2$

خاصیت تقارنی: $(x,y)R(z,t)\Leftrightarrow(z,t)R(x,y)$

$x^2+y^2=z^2+t^2\Leftrightarrow z^2+t^2=x^2+y^2$

خاصیت تعدی: $(x,y)R(z,t),(z,t)R(r,s)\Rightarrow$

$x^2+y^2=z^2+t^2,\ z^2+t^2=r^2+s^2\Rightarrow x^2+y^2=r^2+s^2$

$\Rightarrow(x,y)R(r,s)$

$(-1,2)R(x,y)\Rightarrow x^2+y^2=1+4=5$

$\Rightarrow[(-1,2)]=\{(x,y)|x,y\in R,\ x^2+y^2=5\}$

۱۰.

الف) $S=\{21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,33,34\}$

ب) $A=\{21,24,27,30,33\}$

ج) $B=\{23,29,31\}$

د) $A\cup B=\{21,23,24,27,29,30,31,33\}$

$A'\cap B'=(A\cup B)'=\{22,25,26,28,32,34\}$

۱۱. $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{9!\times 2!}{10!}=\frac{9!\times 2}{10\times 9!}=\frac{1}{5}$

۱۲. $AB=AC=BC$ و $OA=\frac{2}{3}AH$ و $\Delta AOH':\sin 30^\circ=\frac{OH'}{OA}=\frac{1}{2}$

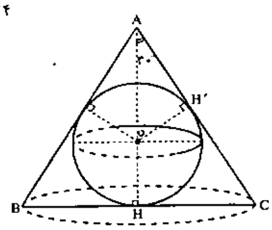
$\Rightarrow OH'=r=\frac{1}{2}OA=\frac{1}{3}AH$ ، $AH=\frac{\sqrt{3}}{2}AB$

$\Rightarrow AH=\frac{\sqrt{3}}{2}a$ ، $BC=a$ ، $r=\frac{\sqrt{3}}{6}a$

$\Rightarrow$ (کره) $V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi(\frac{1}{12}\times\frac{\sqrt{3}}{6}a^3)=\frac{\pi\sqrt{3}a^3}{54}$

$\Rightarrow$ (مخروط) $V=\frac{1}{3}\pi BH^2.AH=\frac{1}{3}\pi(\frac{a}{2})^2(\frac{\sqrt{3}}{2}a)=\frac{\pi\sqrt{3}a^3}{24}$

$\Rightarrow P(A)=\frac{\frac{\pi\sqrt{3}a^3}{54}}{\frac{\pi\sqrt{3}a^3}{24}}=\frac{24}{54}=\frac{4}{9}\Rightarrow P(A')=1-P(A)=\frac{5}{9}$



۱۳. $P(1)=P(2)=x, P(4)=P(5)=P(6)=2x, P(3)=\frac{1}{6}\Rightarrow$

$P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)+P(6)=8x+\frac{1}{6}=1$

$\Rightarrow x=\frac{5}{48}\Rightarrow p(4)=2x=\frac{5}{12}$

۱۴. $P(A)=\frac{\binom{5}{3}}{2^5}=\frac{10}{32}=\frac{5}{16}$

۱۵. اگر A را پیشامد مضرب ۳ بودن، B را پیشامد مضرب ۴ بودن و C را پیشامد مضرب ۵ بودن عدد انتخاب شده بگیریم، خواهیم داشت:

$P((A\cup B)\cap C')=P((A\cup B)-C)=P(A\cup B)-P[(A\cup B)\cap C]$

$=P(A)+P(B)-P(A\cap B)-P[(A\cap C)\cup(B\cap C)]$

$=P(A)+P(B)-P(A\cap B)-[P(A\cap C)+P(B\cap C)-P(A\cap B\cap C)]$

$=P(A)+P(B)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)=$

$\frac{[\frac{70}{3}]}{70}+\frac{[\frac{70}{4}]}{70}-\frac{[\frac{70}{12}]}{70}-\frac{[\frac{70}{15}]}{70}-\frac{[\frac{70}{20}]}{70}+\frac{[\frac{70}{60}]}{70}=$

$\frac{23+17-5-4-3+1}{70}=\frac{29}{70}$

۱۶.

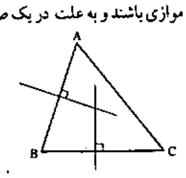
$P(A'-B')=P(A'\cap B)=P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(A'-B')$

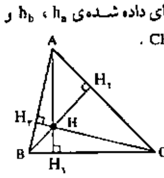
$\Rightarrow\frac{2}{3}=\frac{1}{6}+P(A'-B')\Rightarrow P(A'-B')=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$

هندسه ۲

۱. مثلث ABC را در نظر می‌گیریم و عمودمنصف‌های دو ضلع از این مثلث، مثلاً عمودمنصف‌های ضلع‌های AB و BC را رسم می‌کنیم. اگر این دو عمودمنصف متقاطع باشند، حکم مسئله ثابت شده است. اما اگر این دو عمودمنصف متقاطع نباشند، چون در یک صفحه قرار دارند، با هم موازی خواهند بود که در این صورت A، B و C روی یک خط راست قرار خواهند داشت. یعنی مثلثی تشکیل نمی‌دهند و این خلاف فرض مثلث بودن ABC است. پس دو عمودمنصف رسم شده نمی‌توانند موازی باشند و به علت در یک صفحه قرار داشتن، متقاطع‌اند.



۲. فرض می‌کنیم مسئله حل شده و مثلث ABC جواب مسئله باشد؛ یعنی مثلثی باشد که اندازه‌ی سه ارتفاع آن مقدارهای داده شده‌ی h_a ، h_b و h_c باشد. بنابراین داریم: $AH_1=h_a$ ، $BH_2=h_b$ و $CH_3=h_c$.



اگر نقطه‌ی برخورد ارتفاع‌های این مثلث را H بنامیم، به طوری که دیده می‌شود، هیچ مثلثی از مثلث‌های تشکیل دهنده‌ی شکل، مثلاً مثلث‌های AH_1B ، AH_1C ، HBC ، HH_2B و HH_3C و ...، با اندازه‌های معلوم h_a ، h_b و h_c قابل رسم نیستند. پس لازم است با توجه به معلومات مسئله، مثلثی قابل رسم پیدا کنیم.

می‌دانیم، رابطه‌ای در مثلث که اندازه‌ی ارتفاع‌های مثلث در آن دخالت دارند، رابطه‌ی مساحت مثلث $S=\frac{1}{2}a.h_a=\frac{1}{2}b.h_b=\frac{1}{2}c.h_c$ است. این رابطه را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

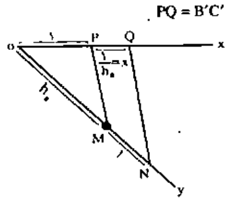
$$\frac{a}{\frac{1}{h_a}}=\frac{b}{\frac{1}{h_b}}=\frac{c}{\frac{1}{h_c}}$$

فرض می‌کنیم $B'C'=\frac{1}{h_a}$ ، $A'C'=\frac{1}{h_b}$ و $A'B'=\frac{1}{h_c}$ باشد. در این صورت خواهیم داشت:

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}$$

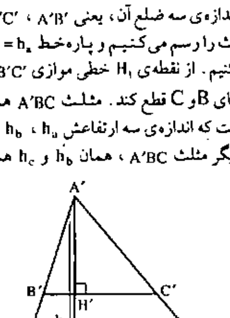
این رابطه نشان می‌دهد که مثلث $A'B'C'$ که ضلع‌های آن $\frac{1}{h_a}$ ، $\frac{1}{h_b}$ و $\frac{1}{h_c}$ هستند، با مثلث ABC متشابه است. بنابراین برای حل مسئله، یعنی رسم مثلث ABC که سه ارتفاع آن داده شده، کافی است مثلث $A'B'C'$ را که سه ضلع آن $\frac{1}{h_a}$ ، $\frac{1}{h_b}$ و $\frac{1}{h_c}$ هستند و متشابه با مثلث ABC است، رسم کنیم و آن‌گاه مثلثی متشابه با $A'B'C'$ بکشیم که ارتفاع‌های آن h_a ، h_b و h_c باشند.

برای انجام این کار، نخست پاره‌خط‌هایی به طول $\frac{1}{h_a}$ ، $\frac{1}{h_b}$ و $\frac{1}{h_c}$ رسم می‌کنیم. برای رسم پاره‌خط $A'B'=\frac{1}{h_a}$ ، این رابطه را به صورت $\frac{1}{A'B'}=\frac{h_a}{1}$ در می‌آوریم و آن‌گاه چنین عمل می‌کنیم: زاویه‌ی دل‌خواه xoy را رسم می‌کنیم. روی ox، پاره‌خط‌های $OM=h_a$ و $MN=1$ و روی ضلع oy پاره‌خط $OP=1$ را جدا می‌کنیم. آن‌گاه خطی از M به P می‌کشیم و از N خطی موازی MP رسم می‌کنیم تا oy را در نقطه‌ی Q قطع کند. خواهیم داشت: $PQ=B'C'=\frac{1}{h_a}$.



به روش مشابه پاره‌خط‌های $A'C'=\frac{1}{h_b}$ و $A'B'=\frac{1}{h_c}$ را رسم می‌کنیم. اکنون مثلث $A'B'C'$ را با معلوم بودن اندازه‌ی سه ضلع آن، یعنی $A'B'$ ، $A'C'$ و $B'C'$ رسم می‌کنیم. حال ارتفاع $A'H'$ از این مثلث را رسم می‌کنیم و پاره‌خط $A'H_1=h_a$ را روی $A'H'$ و در جهت از A' به H' جدا می‌کنیم. از نقطه‌ی H_1 خطی موازی $B'C'$ رسم می‌کنیم تا خط‌های $A'B'$ و $A'C'$ را در نقطه‌های B و C قطع کند. مثلث $A'BC$ همان مثلث ABC جواب مسئله است؛ یعنی مثلثی است که اندازه‌ی سه ارتفاعش h_a ، h_b و h_c است.

سؤال: چرا دو ارتفاع دیگر مثلث $A'BC$ ، همان h_b و h_c هستند.



۳. طول مستطیل را a و عرض آن را b می‌گیریم. داریم: $a = 2b \quad (1)$

از طرف دیگر می‌دانیم، طول ضلع مربعی که از برخورد نیم‌سازهای زاویه‌های درونی مستطیلی به طول a و عرض b ایجاد می‌شود، برابر است با:

$$\text{ضلع مربع حاصل} = \frac{(a-b)\sqrt{2}}{2}$$

بنابراین داریم:

$$8 = \frac{(a-b)\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a-b = 8\sqrt{2} \qquad (2)$$

از (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} a = 2b \\ a-b = 8\sqrt{2} \Rightarrow b = 8\sqrt{2}\ ,\ a = 16\sqrt{2} \end{cases}$$

۴. در چهارضلعی محیطی ABCD داریم:

$$AB+CD = BC+AD \Rightarrow \text{محیط } ABCD = 2(AB+CD)$$

اما $AM = AQ = 10$ است، پس داریم:

$$\text{محیط } ABCD = 2(10+x+x+6+20) \Rightarrow 120 = 2(36+2x)$$

$$\Rightarrow 36+2x = 60 \Rightarrow 2x = 24 \Rightarrow x = 12$$

۵. می‌دانیم که: $\hat{AMB} = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{A'B'}}{2}$. پس داریم:

الف)

$$\hat{AMB} = \frac{80^\circ + 60^\circ}{2} = 70^\circ$$

ب)

$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{A'B'} = 360^\circ - (\overset{\frown}{A'B} + \overset{\frown}{AB'}) = 360^\circ - 200^\circ = 160^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{AMB} = \frac{160^\circ}{2} = 80^\circ$$

ج)

$$\hat{AMB'} = 110^\circ \Rightarrow \hat{AMB} = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$$

$$\hat{AMB} = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{A'B'}}{2} \Rightarrow 70^\circ = \frac{\overset{\frown}{AB} + 3\overset{\frown}{AB}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = 35^\circ$$

۶. با توجه به رابطه‌ی طولی در دایره داریم:

$$MA.MA' = MB.MB' \Rightarrow 3x \times 2x = \frac{3}{2}y \times 4y \Rightarrow$$

$$6x^2 = 6y^2 \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x = y \qquad (1)$$

از طرف دیگر بنا به فرض داریم:

$$3AA' = 4BB' - 14 \Rightarrow 3(3x+2x) = 4(\frac{3}{2}y + 4y) - 14$$

$$\Rightarrow 15x = 22y - 14 \Rightarrow 7y = 14 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 2$$

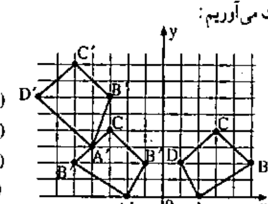
۷. الف) تصویر راس‌های A، B، C و D از چهار ضلعی ABCD تحت تبدیل $T(x,y) = (-x-2, y+3)$ را به ترتیب A'، B'، C' و D' می‌نامیم و مختصات این نقطه‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$A' = T(A) = T(2,0) = (-2-2, 0+3) = (-4,3)$$

$$B' = T(B) = T(5,2) = (-5-2, 2+3) = (-7,5)$$

$$C' = T(C) = T(3,4) = (-3-2, 4+3) = (-5,7)$$

$$D' = T(D) = T(1,2) = (-1-2, 2+3) = (-3,5)$$



اکنون نقطه‌های A، B، C، D و A'، B'، C'، D' را در یک دستگاه محورهای مختصات تعیین می‌کنیم و چهار ضلعی‌های ABCD و $A'B'C'D'$ را رسم می‌کنیم.

ب) تحت بازتاب $R(x,y)=(-x,y)$، چهارضلعی ABCD به چهار ضلعی $A_1B_1C_1D_1$، و چهار ضلعی $A_1B_1C_1D_1$ تحت انتقال با بردار انتقال $\vec{V} = (-2,3)$، به چهارضلعی $A'B'C'D'$ تبدیل می‌شود. پس تبدیل H نتیجه‌ی ترکیب یک بازتاب و یک انتقال است.

۸. دو نقطه‌ی دل‌خواه از خط $2y - 5 = 0$ یا $y = \frac{5}{2}$ را درنظر می‌گیریم. برای مثال، نقطه‌های $A = (0, \frac{5}{2})$ و $B = (1, \frac{5}{2})$ از آن را انتخاب می‌کنیم و تصویر آن‌ها را تحت بازتاب‌های (الف) و (ب) به‌دست می‌آوریم. آن‌گاه معادله‌ی خط تصویر در هر یک از این دو بازتاب را می‌نویسیم:

الف) ضابطه‌ی بازتاب نسبت به خط y=x، $R(x,y) = (y,x)$ است. پس داریم:

$$A' = R(A) = R(0, \frac{5}{2}) = (\frac{5}{2}, 0) \Rightarrow A' = (\frac{5}{2}, 0)$$

$$B' = R(B) = R(1, \frac{5}{2}) = (\frac{5}{2}, 1) \Rightarrow B' = (\frac{5}{2}, 1)$$

معادله‌ی تصویر خط داده شده تحت بازتاب نسبت به خط y=x: $\Rightarrow A'B': x = \frac{5}{2}$

برگ اشتراک مجله‌های رشد

شرایط:

۱. واریز مبلغ ۳۰/۰۰۰ ریال به ازای هر عنوان مجله درخواستی، به صورت علی‌الحساب به حساب شماره‌ی ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت شعبه سه راه آزمایش (سرخه‌حصار) کد ۳۹۵ در وجه شرکت افست

۲. ارسال اصل رسید بانکی به همراه برگ تکمیل شده اشتراک

- **نام مجله:** ....
- **نام و نام خانوادگی:** ....
- **تاریخ تولد:** ....
- **میزان تحصیلات:** ....
- **تلفن:** ....
- **نشانی کامل پستی:**

استان: .... شهرستان: ....

خیابان: ....

....

پلاک: .... کدپستی: ....

- **مبلغ واریز شده:** ....
- **شماره و تاریخ رسید بانکی:** ....
- **آیا مایل به دریافت مجله درخواستی به صورت پست پیشتاز هستید؟** بله ☐ خیر ☐

امضا:

نشانی: تهران ـ صندوق پستی ۱۶۵۹۵/۱۱۱

نشانی اینترنتی: www.roshdmag.ir

پست الکترونیک: Email:info@roshdmag.ir

☎ **امور مشترکین:** ۷۷۳۳۶۶۵۶ـ۷۷۳۳۵۱۱۰

☎ **پیام‌گیر مجلات رشد:** ۸۸۳۰۱۴۸۲ـ۸۸۸۳۹۲۳۲

یادآوری:

- هزینه برگشت مجله در صورت خوانا و کامل نبودن نشانی، بر عهده مشترک است.
- مبنای شروع اشتراک مجله از زمان وصول برگ اشتراک می‌باشد.
- برای هر عنوان مجله برگ اشتراک جداگانه تکمیل و ارسال کنید (تصویر برگ اشتراک نیز مورد قبول است)

ب) ضابطه‌ی نگاشت بازتاب نسبت به خط $y=-x$، $R(x,y)=(-y,-x)$ است. بنابراین داریم:

$$A''=R(A)=R(0,\frac{5}{2})=(-\frac{5}{2},0)$$

$$B''=R(B)=R(1,\frac{5}{2})=(-\frac{5}{2},-1)$$

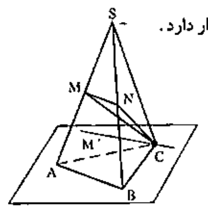
معادله‌ی بازتاب خط داده شده نسبت به خط $y=-x$: $\Rightarrow A''B'': x=-\frac{5}{2}$

۹. فرض می‌کنیم $A=(x,y)$ باشد. داریم:

$$A'=(3,5)\Rightarrow\begin{cases}x-2=3\\y+7=5\end{cases}\Rightarrow A\begin{vmatrix}x=5\\y=-2\end{vmatrix}$$

$$B'=(2,-1)\Rightarrow\begin{cases}x-2=2\\y+7=-1\end{cases}\Rightarrow B\begin{vmatrix}x=4\\y=-8\end{vmatrix}$$

۱۰. از رابطه‌ی $\frac{SM}{SA}=\frac{SN}{SB}$ نتیجه می‌شود که MN موازی AB است؛ در نتیجه با صفحه‌ی P موازی است. زیرا خط AB روی صفحه‌ی P قرار دارد.



بنابراین هر صفحه‌ای که بر MN بگذرد، صفحه‌ی P را در فصل مشترکی موازی خط MN قطع خواهد کرد. در نتیجه، صفحه‌ی CMN صفحه‌ی P را در فصل مشترکی موازی MN قطع می‌کند که از نقطه‌ی C می‌گذرد.

۱۱. بنابر قضیه‌ی تالس در فضا، $\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}$ است. بنابراین داریم:

الف)

$$AC=30, BC=AC-AB=30-12=18, \frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}$$

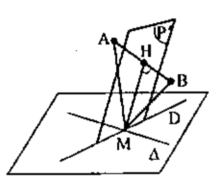
$$\Rightarrow\frac{12}{18}=\frac{16}{B'C'}\Rightarrow B'C'=24$$

ب)

$$BC=18, A'B'=12, B'C'=16, \frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}$$

$$\Rightarrow\frac{AB}{18}=\frac{12}{16}\Rightarrow AB=13/5$$

۱۲. فرض می‌کنیم مثلث MAB جواب مسئله باشد. یعنی مثلثی باشد که رأس M آن روی خط Δ در صفحه‌ی P و $MA=MB$ است.



این یعنی نقطه‌ی M به یک فاصله از دو نقطه‌ی A و B است. پس به مکان هندسی نقطه‌ای از فضا تعلق دارد که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله است. اما می‌دانیم، مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله است، صفحه‌ی عمودمنصف پاره‌خط AB است. بنابراین برای حل مسئله چنین عمل می‌کنیم:

۱. صفحه‌ی عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم و آن را صفحه‌ی P' می‌نامیم.
۲. فصل مشترک صفحه‌ی P' با صفحه‌ی P را D می‌نامیم.
۳. نقطه‌ی برخورد خط Δ و خط D را M می‌نامیم.
۴. از M به A و B وصل می‌کنیم. مثلث متساوی‌الساقین ABC جواب مسئله است.

بحث:

۱. اگر صفحه‌ی P' موازی صفحه‌ی P و متمایز از P باشد و این در صورتی است که راستای AB عمود بر صفحه‌ی P باشد؛ مسئله جواب ندارد.

۲. اگر صفحه‌ی P' صفحه‌ی P را در خط D قطع کند؛ بنابراین آن خط D: الف) متقاطع با Δ باشد؛ ب) موازی Δ باشد؛ ج) منطبق بر Δ باشد.

مسئله به ترتیب یک جواب، هیچ جواب و یا بی‌شمار جواب دارد. شکل‌ها را خودتان رسم کنید.

۶ . رساله فی حجة المنسوبه الی سقراط فی المربع و قطره

توسط ایدین صایلی به زبان انگلیسی ترجمه شده است .

۷ . مقاله فی عمل شکل مجسم ذی اربع عشره قاعده تحیط به کره معلوم

نشر و به زبان آلمانی ترجمه شده است .

۸ . کتاب فی قطوع الاستوانه و بسیطها

۹ . کتاب فی مساحة قطع المخروط الذی یسمی المکافی

به زبان آلمانی ترجمه شده است .[4]

۱۰ . مساحة المجسمة المکافیه

به زبان آلمانی بررسی و ترجمه شده است .

۱۱ . قول فی تصحیح مسائل الجبر بالبراهین الهندسیه

به زبان آلمانی بررسی و ترجمه شده است .[5]

۱۲ . کتاب فی الاعداد المتحابه

این مشهورترین اثر ریاضی ثابت‌بن قره است . متن عربی آن در سال ۱۹۷۷ میلادی توسط احمد سعیدان در اردن به چاپ رسیده است . همین کتاب با عنوان زیر موجود است : «مقاله فی استخراج الاعداد المتحابه بسهولة المسلک الی ذلک .»[6]

۱۳ . مسأله فی عمل المتوسطین و قسمة الزاویه معلومه بثلاثه اقسام متساویه

۱۴ . کتاب الی ابن وهب فی التأتی لاستخراج عمل المسائل الهندسیه

۱۵ . رساله فی العلة التی رتب اقلیدس اشکال کتابه ذلک الترتیب

۱۶ . مسأله اذا خرج (فی الدائره) ضلع المثلث و ضلع المسدس فی جهة واحده عن المرکز کان سطح الذی بحاز بینهما مثل سدس الدائره .

۱۷ . رساله درباره‌ی یک مسأله مربوط به مقاله‌ی سیزدهم اقلیدس

۱۸ . کتاب المفروضات

تحریر این کتاب توسط نصیرالدین طوسی به چاپ رسیده است .[7]

ب. آثار ریاضی یونانی که ثابت ترجمه یا اصلاح کرده است.

۱۹ . شرح الشکل الملقب بالقطاع من کتاب المجسطی .

۲۰ . اصلاح کتاب المعطیات اقلیدس

۲۱ . مقاله فی برهان المصادرة المشهوره من اقلیدس

۲۲ . اصلاح ترجمه‌ی اصول اقلیدس توسط اسحاق بن حنین

۲۳ . ترجمه‌ی کتاب الکرة و الاسطوانه لارشمیدس

۲۴ . ترجمه‌ی کتاب عمل الدائرة المقسومه بسبع اقسام متساویه لارشمیدس

۲۵ . ترجمه‌ی رساله فی اصول الهندسه

۲۶ . ترجمه‌ی رساله فی الدوائر المتماسه

۲۷ . ترجمه‌ی کتاب المأخوذات لارشمیدس مع شرحها لعلی بن احمد النسوی

۲۸ . کتاب الکرة المتحرکه لاطولوقس

۲۹ . المدخل الی علم العدد الذی وضعه نیقوماخس الجاراسینی

۳۰ . کتاب الکره لثاوذوسیوس

۳۱ . کتاب اوطوقیوس فی حکایة ما استخرجه القدماء من خطین بین خطین حتی یتوالی الاربعة متناسبه

۳۲ . کتاب المخروطات لابولونیوس

ثابت‌بن قره مقالات پنجم تا هفتم این کتاب را ترجمه کرده است .

زیرنویس

۱ . فهرست رضوی، ج۸، ص۳۴۳-۳۴۴/ فهرست سپهسالار، ج۵، ص۲۵۵ / فهرست میکروفیلم‌ها، ج۱ ، ص۴۶۸/ نشریه‌ی دانشگاه تهران، ج۳، ص۱۹۱ .

۲ . فهرست سپهسالار، بخش پنجم، ص۲۵۵ .

۳ . فهرست میکروفیلم‌ها، ج۱ ، ص۴۶۸ ، ش۶ .

۴ . فهرست سپهسالار، بخش چهارم، ص۳۷۴ .

۵ . نسخه‌های خطی آن در ایران : فهرست رضوی، ج۸، ص۳۴۶، فهرست میکروفیلم‌ها، ج۱ ، ص۴۶۸ (ش۳) .

۶ . نسخه‌های خطی آن : فهرست مجلس، ج۱ ، ص۵۴، فهرست رضوی، ج۸، ص۳۹۰ و نشریه‌ی دانشگاه تهران، ج۳، ص۱۶۸ و ۲۲۸ .

۷ . طوسی : (نه رساله، رساله‌ی دوم) و نسخه‌های خطی آن در ایران موجود است : فهرست میکروفیلم‌ها، ج۱ ، ص۴۶۸ (ش۴)، نشریه‌ی دانشگاه تهران، ج۳، ص۱۵۹ و ۲۲۹ .

منبع

زندگی‌نامه ریاضی‌دانان دوره‌ی اسلامی/ ابوالقاسم قربانی/ مرکز نشر دانشگاهی

منطق ریاضی در سخن سعدی (قضیه دمورگان)

محال است که هنرمندان بمیرند و بی‌هنران جای ایشان بگیرند.

در این نوشتار، از منطق ریاضی برای صحیح خواندن سخن حکیمانه‌ی یاد شده کمک می‌گیریم. عبارت یاد شده را با علامت‌های منطق ریاضی می‌نویسیم. دو گزاره‌ی زیر را در نظر می‌گیریم:

۱) هنرمندان می‌میرند.

۲) بی‌هنران جای هنرمندان را می‌گیرند.

گزاره‌ی نخست را با p و گزاره‌ی دوم را با q نشان می‌دهیم. علامت‌های منطقی ~، ∧ و ∨ را به ترتیب برای

ناقض	به جای	چنین نیست که
عاطف	به جای	و
فاصل	به جای	یا (منطقی)

به کار می‌بریم.

عبارت مورد بحث را در دو صورت می‌توان خواند که با علامت‌های منطقی به صورت‌های زیر نوشته می‌شوند:

$$(\sim p)\wedge q \qquad (۳)$$

$$\sim(p\wedge q) \qquad (۴)$$

در عبارت ۳، دامنه‌ی عمل ناقض، مؤلفه‌ی ساده‌ی p است. در عبارت ۴ دامنه‌ی عمل ناقض، ترکیب عطفی $p\wedge q$ است.

چون گزاره‌ی q نادرست است (زیرا بی‌هنران هرگز نمی‌توانند جای هنرمندان را بگیرند)، پس گزاره‌ی مرکب ۳ نادرست است (زیرا می‌دانیم که ترکیب عطفی دو گزاره، فقط و فقط وقتی درست است که هر دو مؤلفه‌اش درست باشند).

اکنون گزاره‌ی مرکب ۴ را بنا بر قاعده‌ی دمورگان به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(\sim p)\vee(\sim q) \qquad (۵)$$

(توضیح: ترکیب منطقی «چنین نیست که (pوq)» معادل است با ترکیب منطقی «چنین نیست که p یا چنین نیست که q».)

چون در ترکیب فصلی ۵ مؤلفه‌ی ($\sim q$) درست است (زیرا $\sim q$ به این معنی است که بی‌هنران نمی‌توانند جای هنرمندان را بگیرند)، پس گزاره‌ی مرکب ۵ درست است (زیرا می‌دانیم که ترکیب فصلی دو گزاره، فقط و فقط وقتی نادرست است که هر دو مؤلفه‌اش نادرست باشند).

بنابراین، عبارت مورد بحث را باید طوری خواند که ناقض «محال است که» دامنه‌ی عمل خود را بر عبارت «هنرمندان بمیرند و بی‌هنران جای ایشان بگیرند.» بگستراند.

لازم است که در عبارت مورد بحث، «بمیرند و» به صورت «بمیرندُ» تلفظ شود و سپس بدون مکث جمله‌ی «بی‌هنران جای ایشان را بگیرند» گفته شود.

به کارگیری منطق ریاضی برای خواندن درست سخن سعدی، نشان می‌دهد که در این سخن، اثری از قضیه‌ی دمورگان وجود دارد. هنگامی که سخن سعدی را درست بخوانیم شکوه آوایی آن جلوه‌گر می‌شود.

برگرفته از کتاب ریاضی دلاویز در ادب گهرریز / پژوهش و نگارش دکتر احمد شرف‌الدین / انتشارات مدرسه