وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی
www.roshdmag.ir

ویژه‌نامه‌ی حل مسأله

آموزشی-تحلیلی-اطلاع رسانی

رشد آموزش ریاضی ۸۶

دوره‌ی بیست وچهارم، شماره‌ی ۲، زمستان ۱۳۸۵، بها: ۳۰۰۰ ریال

- آموزش حل مسأله‌ی ریاضی: تحقق یک چشم انداز
- آنچه لازم است درباره‌ی حل مسأله بدانیم
- گذری بر حل مسأله و آموزش آن
- تحلیل محتوای حل مسأله در کتاب‌های درسی ریاضی
- معرفی چند کتاب در حوزه‌ی حل مسأله

افتتاحیه ـ سخنرانی وزیر آموزش و پرورش

سخنرانی عمومی

سخنرانی عمومی ـ میشل آرتیگ

گزارش تصویری هشتمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران

هشتمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران

8th Iranian Mathematics Education Conference

Shahrekord .Aug. 2006 مرداد ماه ۱۳۸۵ شهرکرد

نمایشگاه خانه ی ریاضیات یزد

نمایشگاه کتب درسی قدیمی

نمایشگاه خانه ی ریاضیات یزد

نمایشگاه خانه ی ریاضیات یزد

ادامه در صفحه ی سو

بسم الله الرحمن الرحیم

آموزشی - تحلیلی - اطلاع رسانی

www.roshdmag.ir

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

رشد آموزش ریاضی ۸۶

دوره ی بیست و چهارم، شماره ی ۲ ، زمستان ۱۳۸۵

نشانی دفتر مجله:تهران، صندوق پستی ۶۵۸۵ - ۱۵۸۷۵
تلفن دفتر مجله : ۹-۸۸۸۳۱۱۶۱
(داخلی ۳۷۰ - ۳۷۴)
شماره ی پیام گیر مجلات تخصصی رشد: ۱۱۳-۱۴۸۲-۸۸۳۰
E-mail:info@roshdmag.ir
چاپ : شرکت افست (سهامی عام)
شمارگان: ۱۷۰۰۰

مجله ی رشد آموزش ریاضی نوشته ها و گزارش تحقیقات پژوهشگران و متخصصان تعلیم وتربیت، به ویژه معلّمان دوره های تحصیلی مختلف را در صورتی که در نشریات عمومی درج نشده و مرتبط با موضوع مجله باشد ،می پذیرد . لازم است در مطالب ارسالی موارد زیر رعایت شود:

- مطالب یک خط در میان و در یک روی کاغذ نوشته و در صورت امکان تایپ شود.
- شکل قرار گرفتن جدول ها، نمودارها و تصاویر، پیوست و در حاشیه ی مطلب نیز مشخص شود.
- نثر مقاله، روان و از نظر دستور زبان فارسی درست باشد و در انتخاب واژه های علمی و فنی دقت شود.
- برای ترجمه ی مقاله، نخست اصل مقاله و منبع دقیق آن، به همراه ترجمه ی یک بند از آن، به دفتر مجله ارسال شود تا مورد بررسی هیات تحریریه قرار گیرد و پس از تصویب مقاله و ترجمه ی ارایه شده، سفارش ترجمه به فرستنده ی مقاله داده خواهد شد. در غیر این صورت ،مجله می تواند سفارش ترجمه ی مقاله را به مترجم دیگری بدهد.
- در متن های ارسالی تا حد امکان از معادل های فارسی واژه ها و اصطلاحات استفاده شود.
- زیرنویس ها و منابع، کامل و شامل نام اثر، نام نویسنده، نام مترجم، محل نشر، ناشر، سال انتشار و شماره ی صفحه ی مورد استفاده باشد.
- چکیده ای از موضوع مطلب ارسال شده در حد اکثر ۲۵۰ کلمه ، همراه مطلب ارسال شود.

هم چنین:

- مطالب مندرج در مجله ، الزاما مبیّن نظر دفتر انتشارات کمک آموزشی نیست و مسؤولیت پاسخگویی به پرسش های خوانندگان، با خود نویسنده یا مترجم است.
- مجله در پذیرش، رد، ویرایش یا تلخیص مقاله های رسیده مجاز است.
- مقاله های دریافتی در صورت پذیرش یا رد ، بازگشت داده نمی شود.

یادداشت سردبیر

حل مسأله
قلب طپنده‌ی آموزش ریاضی

گشتالت‌ها معتقد بودند که فرایند حل مسأله، دارای چهار مرحله‌ی اشباع[1]، کمون یا تکوین[2]، الهام[3] و تأیید[4] است. در دوره‌ی کمون یا تکوین، فرد نسبت به مسأله خاموش می‌شود و ظاهراً فعالیتی انجام نمی‌دهد. اما ناخودآگاه مسأله‌حل‌کن، در حال فعالیت بی‌صدا است و این فعالیت‌های ناخودآگاه، چندان ادامه می‌یابد تا فرد، با الهامی می‌شکفد و فریاد «یافتم، یافتم» سر می‌دهد و مسأله‌ی خود را حل می‌کند!

زمستان نیز چنین نقشی در طبیعت دارد. بعد از مرحله‌ی اشباع در فصل‌های قبل؛ گیاهان و درختان به ظاهر به خواب زمستانی می‌روند، ولی لازمه‌ی الهام بهاری و رویش و زایش و نو شدن و شکفته شدن، همین خواب زمستانی است که طبیعت در سکوت، به تکوین بودن خویش می‌پردازد، و شکفتگی بهار را وعده می‌دهد. به همین دلیل، زمستان با وجود سوز و سرما، عزیز است چون طلیعه‌دار و نویدبخش بهار است و عزیز است، چون باد و بارانش نعمت است و سفیدی آن، پاکی و منزهی را وعده می‌دهد.

اولین سالی که رشته‌ی **آموزش ریاضی** را در دوره‌ی کارشناسی ارشد شروع کردم (سال ۱۳۶۴)، درسی به نام **حل مسأله** گرفتم. کنجکاو بودم بدانم که **حل مسأله** یعنی چه و چرا این قدر مهم است که درس مستقلی در دوره‌ی تحصیلات تکمیلی، به آن اختصاص یافته است. یادم می‌آید که استاد این درس، معلم عاشقی بود که سال‌ها در مدرسه و دانشگاه، به تدریس و آموزش معلمان مشغول بود و شور و شوقی که داشت، به طور طبیعی به کلاس منتقل می‌شد. در همین کلاس، با دیدگاه‌های جدیدی آشنا شدم که قبلاً، کمتر به آن‌ها فکر کرده بودم ـ یا حداقل به عنوان یک موضوع قابل مطالعه به آن‌ها فکر نکرده بودم. به طور مثال، وقتی که استاد درس از «آموزش‌پذیر» بودن حل مسأله صحبت می‌کرد، برایم حرف تازه‌ای بود زیرا تصورم این بود که کسانی که ریاضی را خوب یاد گرفته‌اند، حتماً مسأله‌حل‌کن‌های خوبی هم هستند؛ یا وقتی در مورد ارزشیابی حل مسأله صحبت می‌کرد و کلاس را با موقعیت‌هایی مواجه می‌نمود که به عنوان معلم بالقوه، مجبور بودیم راجع به فرایند حل مسأله‌ی یک دانش‌آموز قضاوت کنیم، متوجه شدم که حل مسأله چه رمز و رازهایی دارد و چه عرصه‌ی پرچالش و جذابی است. در همین کلاس بود که برای اولین بار، با ساختاری به نام «فراشناخت» آشنا شدم و دریافتم که علاوه بر جنبه‌های شناختی، مسأله‌حل‌کن به مهارت‌های دیگری نیز نیازمند است و این آشنایی آن‌چنان مجذوبم کرد که در کار تحقیقی رساله‌ی دکتری خود، بر حل مسأله و فراشناخت متمرکز شدم.

یادم می‌آید که در اولین تکلیفی که برای این درس نوشتم، راجع به شباهت‌های ساختاری و شباهت‌های کلامی مسأله‌ی ریاضی بحث کرده بودم و خاطره‌ای را از کلاس سوم ابتدایی خویش نقل نمودم که معلم از ما خواسته بود مسأله‌ی زیر را حل کنیم:

«بقالی... کیلو حبوبات خرید به قیمت کیلویی ... تومان و آن‌ها را کیلویی ... تومان فروخت. بقال چقدر سود کرده است؟»

سپس در امتحان از ما خواست که مسأله‌ی زیر را حل کنیم:

«بزازی... متر پارچه خرید به قیمت متری... تومان و آن‌ها را متری... تومان فروخت. بزاز چقدر سود کرده است؟»

ناگهان، یکی از بچه‌ها دستش را بالا برد و گفت: «خانم اجازه! ما بقالی را بلدیم حل کنیم، بزازی را بلد نیستیم!» این مثال، اگرچه شبیه طنز است، اما بازگوکننده‌ی بسیاری از کلاس‌های سنتی ریاضی است که در آن‌ها، بیش از آن‌که به ساختارهای ریاضی مسأله توجه شود، به قالب مسأله بها داده می‌شود و نتیجه‌اش همان می‌شود که در بالا ذکر شد. استادم برای تحلیل تدریس‌های سنتی، از این مثال استفاده می‌کرد و تا زمانی که فارغ‌التحصیل شدم، می‌گفت که هیچ‌وقت آن مثال را فراموش نمی‌کند. البته باید بگویم که در همین کلاس، برای اولین بار، با پولیا و کارهای ماندگارش آشنا شدم ـ آن هم زمانی که در یک روز پاییزی در سال ۱۹۸۵ دار فانی را وداع گفت و به مناسبت درگذشت این مرد بزرگ، فیلم ماندنی «بیایید حدس زدن را تدریس کنیم» را در کلاس دیدیم و با نقطه‌نظرهای پولیا و تحولی که در آموزش ریاضی و حل مسأله ایجاد کرد، بیش‌تر آشنا شدیم. و چنین بود که پا به دنیای حل مسأله به عنوان یک حوزه‌ی تحقیقی گذاشتیم و از همان موقع تا به حال، حل مسأله هم‌چنان برایم جذابیت دارد و فکر می‌کنم که بسیاری از جوانان علاقه‌مند به آموزش ریاضی نیز نسبت به این حوزه‌ی پرچالش کشش دارند و مشتاق آشنا شدن بیش‌تر با آن هستند. به‌خصوص، معلمان عزیز ریاضی که در واقع، بیش‌ترین تجربه‌ی عملی را با حل مسأله‌ی ریاضی دارند زیرا بسیاری از آن‌ها، این ادعا را قبول دارند که یکی از غایت‌های یادگیری ریاضی، توانایی حل مسأله است. درنتیجه، طی چند سال گذشته، همکاران هیأت تحریریه ابراز علاقه کردند که ویژه‌نامه‌ای برای حل مسأله پیش‌بینی کنیم. این فکر پس از چند سال، بالاخره به واقعیت تبدیل شد و شماره‌ی پیش رو، ویژه‌نامه‌ی حل مسأله است. اولین مقاله‌ی این شماره، ترجمه‌ی مجموعه‌ای است که مختص معلمان ریاضی نوشته شده و هدف آن، آشنا کردن معلمان ریاضی با مبانی نظری حل مسأله به صورت کاربردی است. در واقع، این مقاله می‌تواند منبع ارجاعی مناسبی برای معلمان باشد و حاوی نکته‌های آموزشی مفیدی برای طراحی درس‌های ریاضی با نگرش «تدریس ریاضی از راه حل مسأله» است. این مقاله هم‌چنین، توصیه‌های اجرایی مفیدی در مورد طرح مسأله و شیوه‌های ارزشیابی ریاضی دارد.

مقاله‌ی بعدی سعی کرده است که سیر تحول حل مسأله را معرفی کند و خوانندگان گرامی را با فراز و فرودهای تاریخی حل مسأله‌ی ریاضی آشنا نماید.

یکی دیگر از مقاله‌های این شماره، حل مسأله را در کتاب‌های درسی ریاضی ایران مورد مطالعه قرار داده است که نتیجه‌ی این مطالعه، خواندنی است و می‌تواند برای برنامه‌ریزان درسی ریاضی و معلمان گرامی، آگاه‌کننده باشد.

روایت معلمان این شماره، تجربه‌ی کلاس درس یکی از معلمان ریاضی است و می‌تواند مثال خوبی برای چگونگی تدریس ریاضی از راه حل مسأله باشد.

به هرحال، تلاش کرده‌ایم تا هرچند مختصر، به زوایای مختلف حل مسأله اشاره‌ای داشته باشیم و امیدواریم که توانسته باشیم با این «آب کم»، «تشنگی» لازم را در خوانندگان گرامی ایجاد کنیم تا با مراجعه به منابع و سایت‌های معرفی شده، با ابعاد مختلف این حوزه‌ی وسیع آشناتر شوند و برای افزایش کیفیت تدریس خود، از آن‌ها استفاده کنند.

منتظر نقد و نظرها و دریافت تجربه‌های کلاس درسی همکاران گرامی و معلمان محترم ریاضی هستیم. امیدواریم بتوانیم ویژه‌نامه‌ی دیگری با عنوان «روایت معلمان» یا «تجربه‌های کلاس درس ریاضی» داشته باشیم. این مهم، جز با همکاری و همت شما بزرگواران شدنی نیست. دعوتمان را بپذیرید و ما را در تهیه‌ی ویژه‌نامه‌ی بعدی ـ که پیش‌بینی می‌شود سرشار از تجربه‌های ارزنده‌ای در مورد حل مسأله باشد ـ یاری‌مان دهید.

زیرنویس‌ها

1. Saturation
2. Incubation
3. Inspiration
4. Verification

نویسندگان: رابرت مکینتاش و دنیس جَرِت
مترجمان: زهرا گیلک
مدرس مرکز تربیت معلم الزهرا ـ زنجان
زهرا گویا
دانشگاه شهید بهشتی

آموزش حل مسأله ریاضی:

تحقق یک چشم‌انداز، مروری بر ادبیات تحقیق

اشاره

آزمایشگاه آموزشی منطقه‌ای شمال غرب در پورتلند[1] ایالت اورگان[2]، یک سازمان تحقیقی غیرانتفاعی است که برای آموزشگران و سیاست گذاران در ایالت‌های شمال غربی آلاسکا[3]، آیداهو[4]، مونتانا[5]، اورگان و واشنگتن[6]، خدمات و منابع ارایه می‌دهد. این مرکز، برای معلمان ریاضی و علوم، از پیش‌دبستانی تا پایه‌ی دوازدهم، خدمات تکنیکی و فرصت‌های پیشرفت حرفه‌ای، تحقیقات بر مبنای کلاس درس، دسترسی به کتابخانه‌ای که منابع تدریس و محصولاتی مانند ویدئو، نشریات، کیت‌های آموزشی و مدل‌های تدریس برای حمایت از تدریس استاندارد-محور را امانت می‌دهد، فراهم می‌کند.

در سال ۱۹۹۹، مرکز آموزش ریاضیات و علوم[7]، یک مدل حل مسأله‌ی ریاضی ابداع کرد که معلمان، از پیش‌دبستانی تا پایه‌ی دوازدهم، می‌توانند از آن برای تقویت تدریس و برنامه‌ی درسی خود با استفاده از حل مسأله‌ی باز-پاسخ، کمک بگیرند. این مدل شامل تکلیف‌های کلاسی، راهنمای تصحیح برای ارزیابی عملکرد دانش‌آموزان نسبت به آن تکلیف‌ها، و نمونه‌ی کاری دانش‌آموزان است. این تکلیف‌ها، دانش‌آموزان را به طور فعال، درگیر مسایلی مانند نظریه‌ی اعداد، محاسبات، هندسه، تخمین زدن، احتمالات، آمار و جبر می‌کند. راهنمای تصحیح، برای تدریس آگاهی‌بخش است و معلمان را در ارزیابی عملکرد دانش‌آموزان در زمینه‌ی مشخصه‌های اصلی حل مسأله، یاری می‌کند. این مشخصه‌ها شامل درک مفهومی راهبردها و نحوه‌ی استدلال، محاسبه و اجرا، بصیرت‌های ریاضی و ارتباطات هستند. این مدل، هم‌چنین، شامل توسعه‌ی حرفه‌ای فشرده نیز می‌باشد. این مقاله، به مرور ادبیات مربوط به مشخصه‌ها و ویژگی‌های اصلی فرایندهای یادگیری و آموزش ریاضیات از طریق حل مسأله‌ی باز-پاسخ[8] می‌پردازد. * ادبیات پژوهشی و تحقیق در مورد حل مسأله‌ی مؤثر، برای طراحی مدل حل مسأله‌ی ریاضی NWREL، آگاهی‌بخش بود.

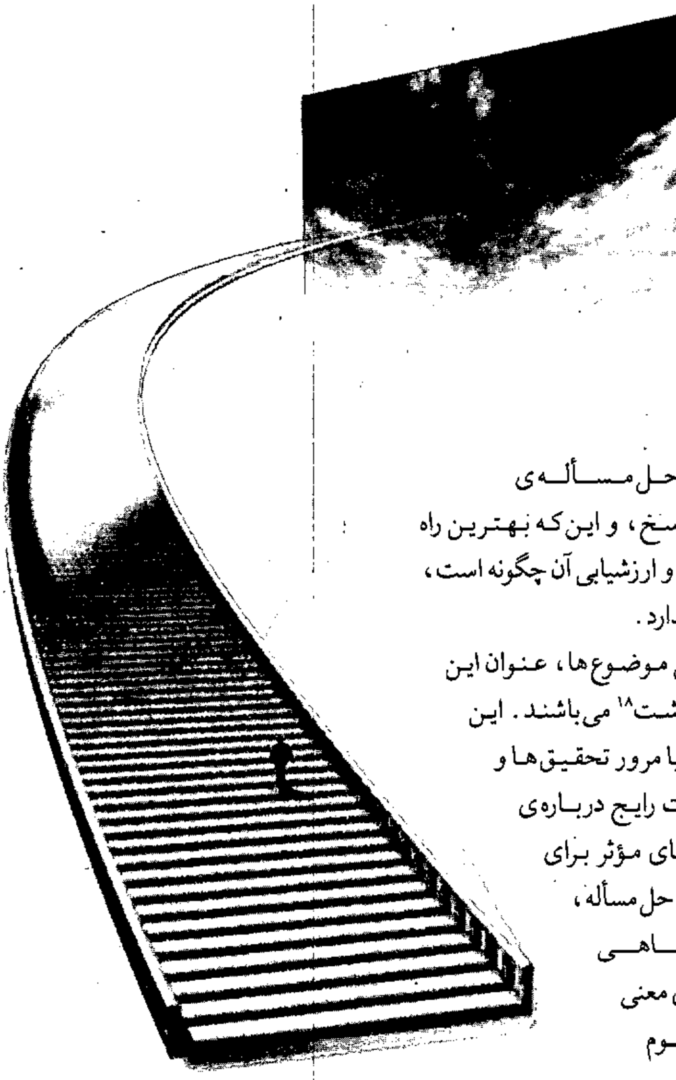
مقدمه

«یک مسأله ضرورتاً با به‌دست آوردن پاسخ صحیح حل نمی‌شود. یک مسأله به راستی حل نشده است مگر این که یادگیرنده بفهمد که چه کرده است و بداند چرا آن کارها مناسب بوده است.»

ویلیام آ. برونل، سنجش فهم و درک[9] (۱۹۴۶)

دو دهه از زمانی که شورای ملی معلمان ریاضی[10] (NCTM) در بیانیه‌ای برای عمل[11] (۱۹۸۰) توصیه کرد که حل مسأله باید نقطه‌ی تمرکز اصلی آموزش ریاضی باشد، گذشته است. شورای ملی معلمان ریاضی در استانداردهای برنامه‌ی درسی و ارزشیابی ریاضیات مدرسه‌ای (۱۹۸۹)، هدف اصلی آموزش ریاضی را توسعه‌ی قدرت ریاضی دانش‌آموزان بدین گونه معرفی کرد: «توانایی فرد در کشف کردن، حدسیه‌سازی، استدلال منطقی، به اضافه‌ی توانایی استفاده‌ی مؤثر از روش‌های گوناگون ریاضی برای حل مسأله‌های غیرمعمولی».

با توجه به نتایج ضعیف دانش‌آموزان امریکایی در بخش حل مسأله‌ی سومین مطالعه‌ی بین‌المللی ریاضیات و علوم[12] (TIMSS) می‌توان قضاوت کرد که دانش‌آموزان هنوز انتظارات جامعه‌ی آموزش ریاضی را برآورده نکرده‌اند (پیک[13]، ۱۹۹۶، ۱۹۹۷؛ تاکاهیرا[14]، گونزالس[15]، فریز[16] و سالگانیک[17]، ۱۹۹۸). با وجود تقاضاها و درخواست‌ها به روی آوردن به رویکردهای حل مسأله در آموزش ریاضی، انتقال از آموزش حقایق و رویه‌های ریاضی به آموزش همراه با تأکید بر فهم و درک ریاضی و مهارت‌های تفکر، کند و مشکل بوده است. بسیاری از معلمان مجاب نشده‌اند که شیوه‌های سنتی باید کنار گذاشته شوند. اکثر آن‌هایی هم که مایل به تغییر هستند، اطمینان ندارند که چگونه باید این کار را انجام دهند. یکی از مشکلات این است که اجماعی بر این که منظور از حل مسأله چیست ـ به خصوص در



مورد حل مسأله‌ی باز-پاسخ، و این که بهترین راه تدریس و ارزشیابی آن چگونه است، وجود ندارد.

این موضوع‌ها، عنوان این تک‌نگاشت[18] می‌باشند. این مقاله، با مرور تحقیق‌ها و ادبیات رایج درباره‌ی روش‌های مؤثر برای آموزش حل مسأله، دیدگاهی درباره‌ی معنی و مفهوم حل مسأله‌ی باز-پاسخ در ریاضیات مدرسه‌ای، فراهم می‌کند.

حل مسأله‌ی باز-پاسخ چیست؟

در حل مسأله‌ی باز-پاسخ، مسأله، چندین پاسخ احتمالی خواهد داشت که می‌توان آن‌ها را به چندین روش به دست آورد و تمرکز نه بر روی پاسخ مسأله، بلکه بر شیوه‌های رسیدن به پاسخ است. حل مسأله‌ی واقعی، مستلزم مسأله‌ای است که کمی فراتر از سطح مهارت‌های دانش‌آموزان باشد به طوری که او به طور خودبه‌خودی نداند که از کدام روش حل مسأله استفاده کند. مسأله باید برای دانش‌آموز غیرمعمولی، چالش برانگیز و ناآشنا بوده و در عین حال ناامیدکننده نباشد (بکر[19] و شیمادا[20]، ۱۹۹۷).

در حل مسأله‌ی باز-پاسخ، دانش‌آموزان مسئول اتخاذ بسیاری از تصمیماتی هستند که در گذشته مسئولیت این تصمیم‌گیری‌ها به عهده‌ی معلمان و کتاب‌های درسی بود.

دانش‌آموز برای تصمیم‌گیری در این خصوص، که کدام روش یا رویه برای حل مسأله‌ی باز ـ پاسخ باید درنظر گرفته شود، به دانش و تجربه‌های قبلی خود درباره مسأله‌های مرتبط متکی خواهد بود. او باید رویه‌ی خود را بسازد و یکی یکی آن‌ها را امتحان کند تا این‌که به پاسخ برسد. سپس این موارد را بررسی کرده و برای دیگران، تجربه‌ی حل مسأله‌ی خود را شرح دهد و فرایند تفکر خود را پی گرفته و راهبردهای اتخاذ شده را مرور کند و مشخص کند که چرا برخی از آن‌ها مفید و برخی نامفید هستند. این مرحله‌ی بررسی، باعث فهم عمیق و درک او از مسأله شده و به شفاف شدن تفکر او درخصوص شیوه‌های مؤثر حل مسأله و چگونگی ارتباط مسأله و شیوه‌های مورد استفاده‌ی او با سایر مسأله‌ها یا حوزه‌های ریاضی، کمک خواهد کرد.

یکی از مسئولیت‌های کلیدی معلمان هم، انتخاب و ارایه‌ی مسأله‌های مناسب است. معلم با انتخاب مسأله‌های «خوب»، شرایط مناسب را برای دانش‌آموزان فراهم می‌کند تا آن‌ها درگیر فرایند معنادار حل مسأله شوند. این بدان معناست که مسأله باید:

- باز ـ پاسخ باشد، یعنی شیوه‌های متنوع حل و پاسخ‌های چندگانه را ارائه کند؛
- به مفاهیم مهم ریاضی اشاره کند؛
- دانش‌آموزان را جذب کرده و به چالش بکشد؛
- با یادگیری قبلی دانش‌آموز مرتبط باشد.

چرا باید حل مسأله‌ی باز ـ پاسخ آموزش داده شود؟

برای کمک به جوانان، برای این‌که مسأله حل‌کن‌های بهتری باشند، علاوه بر این‌که باید آن‌ها را برای ریاضی‌وار فکر کردن آماده نمود، باید آن‌ها را آماده کنیم که به چالش‌های زندگی، با اطمینان به توانایی حل مسأله‌ی خود نگاه کنند. تفکر و مهارت‌های ضروری برای حل مسأله‌های ریاضی، به سایر حوزه‌های زندگی هم گسترش می‌یابد. نویسندگان گزارش تکان‌دهنده‌ی «همه کس به حساب می‌آید: گزارشی به ملت درباره‌ی آینده‌ی آموزش ریاضی» این مسأله را این‌گونه بیان کرده‌اند:

«تجربه با شیوه‌های گوناگون تفکر ریاضی، قدرت ریاضی را می‌سازد ـ یک ظرفیت ذهنی باارزش فزاینده در این دوره‌ی فن‌آوری که هر فرد را قادر به مطالعه‌ی نقادانه، شناسایی نارسایی‌ها، تشخیص یک سویه‌نگری‌ها، ارزیابی خطرات، و ارایه‌ی پیشنهادهای بدیل می‌کند. ریاضیات این قدرت را به ما می‌دهد که جهان اشباع شده از اطلاعاتی را که در آن زندگی می‌کنیم، بهتر بفهمیم» (شورای ملی تحقیق[۲۱]، ۱۹۸۹).

یادگیری ریاضی به وسیله‌ی درگیر شدن با مسأله‌های چالش‌برانگیز و باز ـ پاسخ، در خدمت انواع یادگیری‌های واگراست. ماهیت فعال و متنوع حل مسأله، به دانش‌آموزانی که شیوه‌های یادگیری مختلفی دارند، کمک می‌کند تا فهم و درک ریاضی خود را گسترش داده و آن را نشان دهند (مویر[۲۲]، کی[۲۳] و گرامپ[۲۴]، ۱۹۹۷). رویکردهای یادگیری سنتی که تکیه بر یادگیری طوطی‌وار و راهبردهای تدریسی معلم ـ محور[۲۵] دارند، اغلب توانایی پاسخ‌گویی به نیازهای آموزشی بسیاری از دانش‌آموزانی را که شاید یادگیرنده‌های فعالی باشند یا نیازمند راه‌های متنوعی برای وارد شدن به برنامه‌ی درسی هستند، ندارند.

یادگیری از طریق حل مسأله‌ی باز ـ پاسخ، به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا فهم و درکی را که منعطف بوده و می‌تواند با موقعیت‌های جدید سازگار شود و برای یادگیری چیزهای جدید استفاده شود را توسعه دهند (هیبرت[۲۶]، کارپنتر[۲۷]، فینما[۲۸] و فیوسن[۲۹]، ویرن[۳۰]، موری[۳۱]، اولیویر[۳۲] و هیومن[۳۳]، ۱۹۹۷). آن‌ها توضیح می‌دهند که یادگیری مفهومی، بهترین روش برای یادگیری در یک جهان در حال تغییر و غیرقابل پیش‌بینی است. با این وجود، مفیدبودن تنها دلیل برای یادگیری مفهومی نیست. یاد گرفتن مفهومی و در عین حال به طور علمی و دقیق، با ریاضیات به عنوان یک موضوع هماهنگی دارد. هیبرت می‌گوید: «زمانی که ما قواعد کار کردن با نشانه‌ها را در یک صفحه به خاطر می‌سپاریم ممکن است چیزی یاد بگیریم، ولی ریاضیات را یاد نمی‌گیریم. دانستن یک موضوع به معنای رفتن به درون آن و مشاهده‌ی چگونگی کارکرد اجزا، چگونگی ارتباط اجزا با یکدیگر و این‌که چرا این گونه کار می‌کنند، می‌باشد».

بنابه اظهار هیبرت و همکاران (۱۹۹۷)، وقتی دانش‌آموزان با ایده‌های ریاضی مواجه می‌شوند که علاقه و چالش را در یک زمینه‌ی حل مسأله‌ی باز ـ پاسخ برمی‌انگیزد، احتمال بیش‌تری هست که انواع پاداش‌های درونی را تجربه کنند و این احساس آن‌ها را با جریان حل مسأله، فعالانه درگیر می‌کند. اما دانش‌آموزانی که به حفظ کردن روی می‌آورند، فاقد فهم و درک بوده و احتمالاً احساس رضایت اندکی خواهند داشت و شاید به طور کامل از یادگیری دست بکشند. به گفته‌ی هیبرت، در حقیقت شواهد نشان می‌دهند که اگر دانش‌آموزان، با تکرار و به شکل طوطی‌وار، به حفظ کردن و تمرین کردن رویه‌ها بپردازند، برایشان مشکل خواهد بود که در آینده دوباره به این مفاهیم برگشته

و درک عمیق‌تری از مفاهیم ریاضی که در پس آن رویه‌ها قرار دارد، پیدا کنند. دو پژوهشگر به نام‌های جری بکر و شیگر و شیمادا (۱۹۹۷) نتیجه‌گیری می‌کنند که «دروس مبتنی بر حل مسأله‌ی باز ـ پاسخ که این مسأله‌ها مضمون اصلی آن‌ها باشند، بالقوه برای بهبود تدریس و یادگیری ریاضی غنی هستند».

با قبول اهمیت حل مسأله برای یادگیری ریاضی، راهبران آموزشی در دو دهه‌ی گذشته، حل مسأله را به تمرکز اصلی در اصلاح استانداردها تبدیل ساخته‌اند. در بهار ۲۰۰۰، شورای ملی معلمان ریاضی، هنگام انتشار اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای که در واقع تجدید گزارش ۱۹۸۹ این شورا در مورد استانداردهای ارزیابی و برنامه‌ی درسی برای ریاضیات مدرسه‌ای بود، تعهد خود را نسبت به حل مسأله، دوباره تجدید کرد (NCTM ـ ۲۰۰۰). مانند گزارش اصلی، استانداردهای به‌روز شده‌ی این شورا، حل مسأله را به عنوان یک مؤلفه‌ی اصلی آموزش ریاضی برای تمامی دوره‌های تحصیلی شناخته است.

به علاوه، بسیاری از ایالت‌ها، محتوا و استانداردهای اجرایی و ارزیابی‌های مبتنی بر استانداردهای شورای ملی معلمان ریاضی را که شامل تأکید بر حل مسأله است، پذیرفته‌اند، در حالی که ایالت‌های شمال غربی در مراحل مختلفی از فرایند به‌کارگیری استانداردها و ابداع نظام‌های ارزیابی قرار دارند، اکثر آن‌ها راجع به اهمیت یادگیری و ارزیابی استدلال کردن، گفتمان ریاضی، ایجاد ارتباط و اتصال و به کار بردن دانش در موقعیت‌های مسأله که شعارهای کلیدی حل مسأله هستند، بحث می‌کنند.

نقش حل مسأله در ریاضیات مدرسه‌ای

استانیک[34] و کیل پاتریک[35] (۱۹۸۹) سه مضمون عمومی را که به طور تاریخی نقش حل مسأله در ریاضیات مدرسه‌ای را روشن می‌کند، شناسایی کرده‌اند که عبارتند از **حل مسأله به عنوان زمینه، حل مسأله به عنوان مهارت و حل مسأله به عنوان هنر**.

حل مسأله به عنوان زمینه. نویسندگان، حل مسأله به عنوان زمینه‌ای برای انجام ریاضی را به چندین زیرمقوله تقسیم می‌کنند. در این دیدگاه از حل مسأله به عنوان توجیهی[36] برای تدریس ریاضی استفاده شده است و برای متقاعد ساختن دانش‌آموزان نسبت به ارزش ریاضی، محتوای آن با تجربه‌های حل مسأله‌های واقعی زندگی مرتبط شده است. هم‌چنین، از حل مسأله برای ایجاد انگیزش[37] در دانش‌آموزان استفاده شده تا علاقه‌ی آن‌ها به یک موضوع خاص ریاضی یا یک رویه، از طریق عرضه‌ی یک مثال زمینه‌مدار (از دنیای واقعی) برانگیخته شود. [از این گذشته]، حل مسأله به عنوان یک سرگرمی[38]، یک فعالیت تفریحی که اغلب به عنوان پاداش یا فراغت از مطالعات معمولی مطرح می‌شود، مورد استفاده قرار گرفته است. [بالاخره]، حل مسأله به عنوان یک تمرین[39]، که احتمالاً رایج‌ترین نوع استفاده است، برای تقویت مهارت‌ها و مفاهیمی که به صورت مستقیم آموزش داده می‌شود، مورد استفاده قرار می‌گیرد.

زمانی که حل مسأله به عنوان زمینه‌ای برای ریاضی مورد استفاده قرار می‌گیرد، تأکید بر یافتن تکلیف‌ها و مسأله‌های جالب توجهی است که به آشکار ساختن یک مفهوم یا رویه‌ی ریاضی کمک می‌کند. برای استفاده از حل مسأله به عنوان زمینه، به عنوان مثال، [تصور کنید که] معلمی می‌خواهد مفهوم کسرها را نشان دهد و برای این کار از گروه‌هایی از دانش‌آموزان می‌خواهد که دو تکه آب‌نبات کشی را به نحوی تقسیم کنند که به هر کدام سهم مساوی برسد. با ارایه‌ی این زمینه‌ی حل مسأله، معلم اهداف چندگانه‌ای را دنبال می‌کند که عبارت‌اند از ایجاد فرصت‌هایی برای دانش‌آموزان جهت کشف مفاهیم کسر با استفاده از یک وسیله‌ی آشنا و مطلوب (انگیزش)؛ کمک به درک عینی‌تر مفاهیم (تمرین)؛ و ارایه‌ی یک دلیل منطقی برای یادگیری مفهوم کسر (توجیه کردن).

حل مسأله به عنوان یک مهارت. طرفداران این دیدگاه، مهارت‌های حل مسأله را به عنوان یک موضوع جداگانه در برنامه‌ی درسی می‌بینند نه این که آن را در سرتاسر برنامه و نه در طول آن به عنوان ابزاری برای توسعه‌ی درک مفهومی و مهارت‌های پایه‌ای ببینند. آن‌ها مجموعه‌ای از رویه‌های عمومی (یا قواعد سرانگشتی) را برای حل مسأله به دانش‌آموزان تدریس می‌کنند ـ نظیر کشیدن یک تصویر، بازگشت به عقب، تهیه‌ی یک فهرست و نظایر آن ـ و به آن‌ها تمرین‌هایی می‌دهند تا بتوانند از این رویه‌ها برای حل مسأله‌های معمولی استفاده کنند. با این حال، زمانی که حل مسأله به عنوان مجموعه‌ای از مهارت‌ها درنظر گرفته می‌شود، این مهارت‌ها اغلب در سلسله مراتبی قرار می‌گیرند که در آن، از دانش‌آموزان انتظار می‌رود ابتدا در حل مسأله‌های معمولی به مهارت برسند و سپس به مسأله‌های غیرمعمولی بپردازند. درنتیجه به جای آن که حل کردن مسأله‌های غیرمعمولی به تمام دانش‌آموزان آموزش داده شود، اغلب تنها به دانش‌آموزان سطح بالا آموزش داده می‌شود. [پس] وقتی که اهداف آموزشی حل مسأله تعریف می‌شود، معلمان تمایل دارند که از تمایز بین آموزش حل مسأله به

عنوان یک مهارت جداگانه با قرار دادن حل مسأله در سرتاسر برنامه‌ی درسی برای توسعه‌ی درک مفهومی و مهارت‌های پایه‌ای، آگاهی یابند.

حل مسأله به عنوان هنر. جرج پولیا[40] (۱۹۴۵)، در کتاب کلاسیک خود باعنوان «چگونه مسأله را حل کنیم»، این ایده را معرفی کرد که حل مسأله می‌تواند به عنوان یک هنر عملی مانند نواختن پیانو یا شنا کردن، آموزش داده شود. پولیا حل مسأله را به عنوان عمل اکتشاف می‌دانست و عبارت «رهیافت‌های مدرن»[41] (هنر تحقیق و اکتشاف) را برای توضیح توانایی‌های لازم جهت بررسی و تحقیق موفقیت‌آمیز مسأله‌های جدید معرفی کرد. او مشوق این بود که ریاضی نه به صورت یک مجموعه‌ی تمام شده از حقایق و قواعد، بلکه به عنوان یک علم آزمایشی و استقرایی ارایه شود. هدف از آموزش حل مسأله به عنوان هنر این است که توانایی‌های دانش‌آموزان توسعه یابد تا مسأله‌حل‌کن‌های ماهر و مشتاقی شوند؛ متفکران مستقلی که قادر به درگیر شدن با مسأله‌های باز-پاسخِ بد-تعریف‌شده[42] باشند.

چالش‌های آموزش حل مسأله

هرچند که پولیا بیش از ۵۰ سال قبل، چارچوبی مبتنی بر جست‌وجوگری برای آموزش حل مسأله ارایه کرد، اما هنوز لزوم به‌کارگیری گسترده‌ی ایده‌های او در کلاس‌های درس ایالات متحده احساس نمی‌شود. این نشان می‌دهد که چالش‌های متعددی بر سر راه انجام این انتقال در تدریس ریاضی، وجود دارد.

آموزش حل مسأله‌ی غیرمعمول مشکل است. حل مسأله همان قدر که برای معلم وقت‌گیر و سخت است برای دانش‌آموزان نیز وقت‌گیر و سخت است. تسلط بر هنر آموزش ریاضی تنها در مدت زمان طولانی ممکن است (تامسون[43]، ۱۹۸۹). به گفته‌ی شونفیلد[44] (۱۹۹۲)، آموزش حل مسأله مشکل است زیرا معلمان:

- باید پیامدهای اخذ رویکردهای گوناگون توسط دانش‌آموزان را درک کنند و بدانند آیا ممکن است این رویکردها به نتیجه برسند و اگر نه، چه چیزی باعث می‌شود که با اخذ آن، رویکردهای دانش‌آموزان به نتیجه برسد؛
- باید بدانند چه موقع مداخله کنند و وقتی که اساساً حل مسأله را به عهده‌ی دانش‌آموزان می‌گذارند، چه پیشنهادهایی می‌تواند به آن‌ها کمک کند و چگونه این کار را با هر دانش‌آموز انجام دهند؛
- گاهی باید در موقعیتی قرار گیرند که [گویی] حل مسأله را از قبل نمی‌دانند. به خوبی انجام دادن این کار، بدون دانستن همه‌ی پاسخ‌ها، مستلزم تجربه، اعتماد به نفس و خودآگاهی می‌باشد.

بورکهارد[45] (۱۹۸۸، نقل شده در شونفیلد، ۱۹۹۲)، حتی با پافشاری بیش‌تری تأکید می‌کند که تدریس حل مسأله برای معلمان از بُعد ریاضی، از بُعد پداگوژیکی[46] و از بُعد شخصی مشکل است. معلمان باید در زمینه‌ی ریاضی آن خبرگی را داشته باشند تا رویکردهای متفاوتی را که دانش‌آموزان ممکن است برای حل مسأله انتخاب کنند، بفهمند و تشخیص دهند چگونه آن رویکردها می‌توانند امیدوارکننده باشند. بسیاری از معمان دوره‌ی ابتدایی، آموزش‌های عمومی داشته‌اند و اغلب فاقد زمینه‌ی ریاضی قوی هستند که لازمه‌ی آموزش ریاضی با رویکرد حل مسأله است. از بُعد پداگوژیکی، معلمان باید تصمیم‌های مهم و پیچیده‌ای درباره‌ی سطح مشکل بودن مسأله‌های تعیین شده برای حل، زمان ارایه‌ی کمک و چگونگی ارایه‌ی کمک اتخاذ کنند به طوری که هم متضمن موفقیت دانش‌آموز باشد و هم اطمینان حاصل کنند که احساس مالکیت دانش‌آموزان را نسبت به استراتژی‌های حل مسأله‌ی آن‌ها حفظ می‌کنند. از بُعد شخصی، معلمان گاهی خود را در وضعیت ناخوشایند ندانستن راه‌حل مسأله خواهند دید. بازی نقش «خبره» که معلمان به طور سنتی به ایفای آن پرداخته‌اند، نیازمند تجربه، اعتماد به نفس و خودآگاهی است. اغلب از معلمان خواسته می‌شود ریاضیاتی را تدریس کنند که هرگز در مدرسه با آن روبه‌رو نشده بودند و به شیوه‌ای تدریس کنند که مغایر با آموزش خود آن‌ها بوده است. به این دلایل، معلمان ممکن است علاوه بر این‌ها، به آموزش

هیبرت می‌گوید: «زمانی که ما قواعد کار کردن با نشانه‌ها را در یک صفحه به خاطر می‌سپاریم ممکن است چیزی یاد بگیریم، ولی ریاضیات را یاد نمی‌گیریم. دانستن یک موضوع به معنای رفتن به درون آن و مشاهده‌ی چگونگی کارکرد اجزا، چگونگی ارتباط اجزا با یکدیگر و این که چرا این گونه کار می‌کنند، می‌باشد»

جدیدی در محتوا و نظریه‌ی ریاضی و نیز در شیوه‌های آموزش حل مسأله نیاز داشته باشند.

مسأله‌های غیرمعمولی برای دانش‌آموزان مشکل است. مسأله‌های غیرمعمولی و باز-پاسخ به دلیل ماهیتی که دارند، اغلب برای بسیاری از دانش‌آموزان مشکل هستند. شانون[47] و زاویوسکی[48] (۱۹۹۵)، مطالعه‌ی کوچکی انجام دادند که در آن، سختی تکلیف‌های حل مسأله را بدون ارایه‌ی سرنخ‌ها و گام‌های رویه‌ای به دانش‌آموزان، نشان دادند. در این مطالعه، تکلیف‌های مشابهی به دو گروه از دانش‌آموزان ارایه شد. در تکلیفی به نام «چرخ‌های سوپرمارکت»، به دانش‌آموزان گروه اول، یک مقیاس رسم که از ۱۲ چرخ (گاری) خرید که داخل هم رفته بودند تشکیل شده بود، داده شد و از آن‌ها خواسته شد تا فرمولی برای تعیین طول انباری مورد نیاز برای تعداد دلخواهی از چرخ‌ها و تعداد چرخ‌هایی که در یک انباری داده شده می‌گنجیدند، پیدا کنند. در واقع تمام اطلاعاتی که به دانش‌آموزان داده شد، همین بود. به دانش‌آموزان گروه دوم، تکلیفی به نام «چرخ‌های خرید» داده شد که شامل چندین نکته یا زیرمسأله بود که آن‌ها را به سمت حل مسأله هدایت می‌کرد. در این تکلیف از دانش‌آموزان خواسته شده بود که طول یک چرخ خرید را پیدا کنند و ببینند که وقتی چرخ‌ها را داخل هم قرار می‌دهند، چقدر از هر چرخ بیرون می‌ماند و طول ۲۰ چرخ خرید را پیدا کنند و حساب کنند در یک فضای ۱۰ متری چند چرخ خرید قرار می‌گیرد. سپس از آن‌ها خواسته شد که دو فرمولی را که در تکلیف مربوط به «چرخ‌های سوپرمارکت» از آن‌ها خواسته شده بود به دست آورند.

پژوهشگران گزارش کردند دانش‌آموزانی که اقدام به حل مسأله‌ی «چرخ‌های سوپرمارکت» کردند، در دانستن این‌که چگونه حل مسأله را شروع کنند، با مشکل مواجه بودند. فقط تعداد اندکی از دانش‌آموزان با موفقیت فرمول‌های خواسته شده را به دست آوردند. از سوی دیگر، هیچ‌یک از دانش‌آموزانی که اقدام به حل مسأله‌ی «چرخ‌های خرید» کردند، برای شروع با مشکلی مواجه نشدند و همگی به استثنای یک گروه از آن‌ها، توانستند با موفقیت، فرمول‌های خواسته شده را به دست آورند. مؤلفان نتیجه‌گیری کردند که «حس دست و پنجه نرم کردن دانش‌آموزان در مسأله‌ی چرخ‌های سوپرمارکت، بیش‌تر از مسأله‌ی چرخ‌های خرید بود». برای معلمان، دیدن این دست و پنجه نرم کردن کلافه‌کننده‌ی دانش‌آموزانشان، اغلب دشوار است. دانستن این‌که چه زمانی به دانش‌آموزان راهنمایی کنید و چقدر به آن‌ها کمک کنید، مستلزم ایجاد تعادل ظریفی است که از طریق تجربه و دانستن قابلیت‌های دانش‌آموزان حاصل می‌شود.

معلمان نسبت به تمام کردن محتوای درس دغدغه دارند. پژوهش تیمز (TIMSS)، برنامه‌ی درسی ایالات متحده را در مقایسه با برنامه‌های درسی ریاضی سایر کشورها، برنامه‌ای با

«عرض یک مایل و عمق یک اینچ» توصیف کرد (پیک، ۱۹۹۶، ۱۹۹۷؛ تاکاهیرا، ۱۹۹۸). در ایالات متحده، عموماً از معلمان انتظار می‌رود که هر سال، حوزه‌های گسترده‌ای از محتوای درسی را پوشش دهند. با این حال، حل مسأله‌های چالش‌برانگیز و غیر معمولی، زمان‌بَر است. اغلب، حل یک مسأله می‌تواند تمام یک جلسه از کلاس درس یا بیش‌تر را اشغال کند. بنابراین ضروری است که محتوا و مهارت‌ها در یک زمینه‌ی حل مسأله با هم تلفیق شوند. با انتخاب تکالیف غنی، درگیرکننده و ارزشمند، معلمان می‌توانند مطمئن شوند که از زمان به خوبی استفاده کرده‌اند.

کتاب‌های درسی، مسأله‌های غیرمعمولی اندکی عرضه می‌کنند. اگرچه کتاب‌های درسی در حال بهبود هستند، بیش‌تر آن‌ها تعداد مناسبی از مسأله‌های غیرمعمولی که معلمان بتوانند از بین آن‌ها انتخاب کنند، ارایه نمی‌دهند. بسیاری از معلمان، از دیدگاه‌ها و توالی مطالب ارایه‌شده در کتاب‌های درسی احساس راحتی نمی‌کنند، ولی آن‌ها باید اعتمادبه‌نفس خود را توسعه دهند و در جست‌وجوی سایر مواد آموزشی به عنوان مکمل کتاب‌های درسی خود باشند.

تغییر عمل یک فرد: آمادگی معلمان

رویکرد یک معلم به تدریس ریاضی، بازتاب باورهای او درباره‌ی چیستی ماهیت ریاضی به عنوان یک دیسیپلین است (هرش[۴۹]، ۱۹۸۶). اگر او ریاضی را به عنوان پاسخ‌های صحیح و رویه‌های ابطال‌ناپذیر متشکل از عملیات حسابی، رویه‌های جبری، قضیه‌ها و اصطلاحات هندسی در نظر بگیرد، احتمال دارد که رویکرد تدریس وی نیز بر ارایه‌ی مفاهیم، رویه‌ها، قوانین و معادلات ریاضی همراه با تمرکز و تمرین و به‌خاطرسپاری دانش‌آموزان تأکید داشته باشد. ممکن است معنا و زمینه‌ی بسیاری از این قضیه‌ها و رویه‌ها را به مسأله‌های جنبی برنامه‌ی درسی مرتبط کرد. امّا اگر او ریاضی را به مثابه‌ی یک تلاش فعال و خلاق در نظر بگیرد که شامل جستجوگری و کشف است، احتمالاً بر فعالیت‌هایی تأکید می‌کند که دانش‌آموزان را درگیر تولید، بازیابی معانی و ایجاد اتصال و ارتباط می‌کند. این معلم نقش خود را به عنوان یک تسهیل‌کننده می‌بیند که دانش‌آموزان را برای فکر کردن و زیر سؤال بردن یافته‌ها و مفروضات به چالش می‌کشاند.

ارنست[۵۰] (۱۹۸۸)، سه تصور از ریاضی را به طور خلاصه بیان می‌کند که هرکدام بر تأکیدات متفاوتی در تدریس توجه می‌کنند:

اول از همه، یک دیدگاه پویا و مسأله‌ـ‌محور نسبت به ریاضی وجود دارد که ریاضی را یک حوزه‌ی رو به گسترش خلق و ابداع بشری می‌داند به طوری که در آن، الگوها ایجاد می‌شوند و سپس به صورت دانش تقطیر می‌شوند. بنابراین، ریاضی فرایندی از تجسس، رسیدن به آگاهی و افزودن بر مجموعه‌ی دانش است. ریاضی یک محصول تمام شده نیست، زیرا نتایج آن همواره در معرض تجدیدنظر هستند (**دیدگاه حل مسأله**[۵۱]).

دوم، دیدگاهی از ریاضی وجود دارد که آن را بدنه‌ای از دانش ایستا اما یکپارچه می‌بیند، یک قلمرو شفاف از ساختارها و حقایق به هم پیوسته که با رشته‌هایی از منطق و معنا به هم متصل شده‌اند. بنابراین، ریاضی یک مفهوم یکپارچه، ایستا و غیرقابل تغییر است؛ ریاضی کشف می‌شود نه این که خلق شود (**دیدگاه افلاطونی**[۵۲]).

سوم، دیدگاهی است که ریاضی را شبیه جعبه‌ی ابزار می‌بیند که از انبوهی از حقایق، قوانین و مهارت‌ها ساخته شده است و توسط کارگران با مهارت برای رسیدن به بعضی اهداف خارجی به کار برده می‌شود. پس ریاضی، مجموعه‌ای از قواعد و حقایق نامرتبط ولی مورد استفاده است (**دیدگاه ابزارگرایی**[۵۳]).

هر کدام از این دیدگاه‌ها، ماهیت ریاضی را به نحو متفاوتی تصور می‌کنند. دیدگاه ابزارگرایی، ریاضی را به عنوان مجموعه‌ای از ابزارها می‌نگرد. انتظار می‌رود معلمانی که دیدگاه ابزارگرایی دارند، در کلاس‌های درس خود، بر قواعد، حقایق و رویه‌ها تأکید کنند. کلاس‌های آن‌ها تمایل به معلم‌ـ‌محوری[۵۴] و تأکید بر تکرار و تمرین‌های معمولی دارد. دیدگاه افلاطونی ریاضی را به عنوان مجموعه‌ای از دانش در نظر می‌گیرد. معلمانی که این دیدگاه را برمی‌گزینند، بر ارتباط‌های درونی، مفاهیم زیربنایی و منطق درونی رویه‌های ریاضی متمرکز می‌شوند. دیدگاه حل مسأله بر فرایند جستجوگری متمرکز است. معلمان با دیدگاه حل مسأله تمایل بیش‌تری به تمرکز بر یادگیرنده دارند و روش تدریس آن‌ها ساخت و سازگرایی است. آن‌ها، دانش‌آموزان را فعالانه در کشف مفاهیم ریاضی، خلق استراتژی‌های حل مسأله و ساختن معانی شخصی در یک محیط غنی حل مسأله درگیر می‌سازند (تامسون، ۱۹۹۲).

هم‌چنین، باورهای دانش‌آموزان درباره‌ی ماهیت ریاضی به میزان زیادی تحت تأثیر باورهای معلمانشان قرار دارد. بررسی باورهای دانش‌آموزان درباره‌ی ریاضی آشکار می‌سازد که اغلب دانش‌آموزان فکر می‌کنند باید یک روش حاضر و آماده برای حل مسأله وجود داشته باشد و این روش، باید به سرعت به یک پاسخ

منتهی شود (شونفیلد، ۱۹۸۹ و ۱۹۹۲). شونفیلد (۱۹۹۲)، به یک تحقیق در سال ۱۹۸۳ که توسط ارزیابی ملی پیشرفت تحصیلی[55] (NAEP) انجام گرفته است اشاره می کند که در آن نیمی از دانش آموزان پاسخ دهنده، اعتقاد داشتند «یادگیری ریاضی بیش از همه به خاطرسپاری حقایق است». سه چهارم دانش آموزان پاسخ دهنده بااین عبارت موافق بودند که «انجام ریاضی مستلزم تمرینات فراوان برای چگونگی استفاده از قواعد است». درحالی که ۹۰ درصد از آن ها با این عبارت موافق بودند که «برای حل مسأله های ریاضی، همیشه یک قاعده وجود دارد». دانش آموزانی که چنین باورهایی دارند، ممکن است برای حل مسأله ای که خیلی پیچیده است یا به نظر نمی رسد که یک رویکرد الگوریتمی سر راست ارایه کند، حتی کمترین تلاشی هم نکنند.

از این گذشته، شونفیلد (۱۹۹۲)، تذکر می دهد که اغلب دانش آموزان باور دارند که تمام مسأله ها دارای جواب هستند؛ هم چنین باور دارند که برای هر مسأله تنها یک جواب درست و یک راه حل صحیح وجود دارد؛ و معتقدند که از دانش آموزان عادی نمی توان انتظار داشت که ریاضی را درک کنند، بلکه آن ها صرفاً رویه های ریاضی را به روش مکانیکی به خاطر می سپارند و آن را به کار می بندند. این باورها عمدتاً به تجاربی مربوط هستند که دانش آموزان از کلاس های ریاضی خود و از طرز تلقی و باورهای معلمانشان کسب می کنند.

پس رویکرد حل مسأله به تدریس ریاضی، می تواند به گسترش درک ریاضی دانش آموزان از یک نظم مبتنی بر حقایق و قواعد به سوی درک همراه با جستجوگری، عدم قطعیت، و خلاقیت کمک کند. اما نخست، معلم خود باید به تغییر دنیای ذهنی خویش (Paradigm) بپردازد، و این کار نیازمند رودررو شدن وی با باورهای عمیق خود درباره ی تدریس و یادگیری و تمایل او برای خطرپذیری و ابتکار است (دیرکز[56]، ۱۹۹۳).

بسیاری از معلمان برای اتخاذ رویکرد حل مسأله به تدریس ریاضی، احساس عدم آمادگی می کنند. تعداد زیادی از معلمان، ریاضی را به این روش یاد نگرفته اند. حتی اگر آن ها در درس های روش تدریس دوره ی دانشگاهی خود با حل مسأله مواجه شده باشند، وقتی که در کلاس درس هستند، به همان روش های سنتی که در بیش تر مدارس وجود دارد، تدریس می کنند. تبدیل شدن به عامل تغییر، هنگامی که فرد در محاصره ی باورهای عمیقاً محکم نسبت به تدریس و یادگیری است، مشکل است. امروزه معلمان، اغلب بین فشارهای روزانه از طرف همکاران، والدین، و دیگران هستند تا سنت ها را در کلاس درس حفظ کنند. از طرف دیگر، تحت فشارهای وارد شده از طرف سیاست گذاران برای تدریس استاندارد- محور هستند (همراه با انتظارات تعارض آمیز که دانش آموزان در آزمون های استاندارد که مهارت های پایه را می سنجد، عملکرد بالایی داشته باشند، نه آن که در مواد استاندارد- محور عملکرد بهتری داشته باشند).

مسیر معلم برای تغییر باید با تصدیق تجارب پیشین او شروع شود. او از طریق بازتاب بر تجارب قبلی و در پرتو ایده های جدید درباره ی راهبردهای مؤثر تدریس، بر آن تجارب تکیه خواهد کرد (ریچاردسون[57]، ۱۹۹۰). وسیع تر کردن ادراک معلمان درباره ی ماهیت حل مسأله و توانایی بالقوه ی آن به عنوان یک ابزار تدریس، مستلزم آن است که معلمان نیز به نوبه ی خود مشغول حل مسأله ی باز- پاسخ شوند. این به معنای صرف وقت برای حل مسأله هایی با تنوع وسیع و بازتاب بر تلاش هایشان برای حل این مسأله هاست.

تغییر عمل تدریس یک فرد، زمانی تسهیل می شود که تکنیک های تدریس مؤثر در کلاس درس توسط یک کارورز که در تدریس حل مسأله ماهر است، مدل سازی شود. این مدل سازی باید با مباحثه بین معلمان درباره ی انتخاب و استفاده از استراتژی های حل مسأله دنبال شود. مدل سازی و بحث، یک نمایش عینی از نقش معلمان در تدریس حل مسأله ارایه می کند (ریچاردسون، ۱۹۹۰). مطالعه ی ادبیات مربوط به نظریه و عمل تدریس حل مسأله می تواند معلمان را تحت تأثیر قرار دهد تا آن ها نیز در عمل تدریس خود، تغییر ایجاد کنند (تامسون، ۱۹۸۹). به گفته ی بال[58] (۱۹۹۶)، بررسی مشتاقانه و بدبینانه ی تحقیقات نشان می دهد که معلمان می توانند دریافت ها و بینش های آموزشی را بدون تأکید فراوان بر نتایج آن ها، به دست آورند. آن ها می توانند اصلاحات گسترده ی معرفی شده را که برای محیط بومی جرح و تعدیل شده اند، به عنوان منبعی برای نوآوری ها مورد استفاده قرار دهند.

حقیقت این است که معلمان به طور مستمر، تغییر می کنند تا پاسخ گوی نیازهای در حال تغییر دانش آموزانشان باشند و ایده هایی را که از سایر معلمان شنیده اند، به کار می برند. معلمان، مرجعیت خود را در تعریف آن چه که در کلاس درس رخ می دهد، نشان می دهند زیرا ایده ی مرجعیت، نقش اساسی در مفهوم سازی و ایجاد تغییر در معلم ریاضی ایفا می کند (ویلسون[59] و لیوید[60]، ۲۰۰۰). معلمان باید خودشان در قضاوت کردن

درباره‌ی این که کدام تغییر ارزشمند و معنادار است، دخالت داشته باشند (ریچاردسون، ۱۹۹۰).

به دنبال اهداف اصلاحات، معلمان اغلب نسبت به اثربخشی دانش خود، احساس اضطراب می‌کنند. حرکت در جهت اصلاحات ریاضی، به معنی رویارویی نزدیک با عدم قطعیت‌ها، ابهام‌ها و پیچیدگی‌های واقعی «فهم و درک» و «یادگیری» است. وقتی از دانش‌آموزان می‌خواهیم تا نظرات خود را در یک زمینه‌ی حل مسأله ابراز کنند، باید این مخاطره را بپذیریم که بفهمیم آن‌ها چه چیزهایی را می‌دانند و چه چیزهایی را نمی‌دانند. این کشفیات زمانی می‌توانند ناراحت‌کننده باشند که دانش‌آموزان نشان دهند بسیار کمتر از سطح انتظار معلم یا بیش‌تر از حدی که معلم برای مواجهه با آن آمادگی دارد، می‌دانند (بال، ۱۹۹۶).

تدریس مسأله‌ـمحور و سؤال‌ـمحور، مستلزم توانایی‌هایی فراتر از مهارت و دانش ریاضی است. ویژگی‌های شخصی نظیر صبر و حوصله، کنجکاوی، سخاوت، اعتماد، اطمینان و قدرت تخیل، ارزش فراوانی دارند. علاقه‌مندی به نگریستن به دنیا از دیدگاه فردی دیگر، لذت بردن از طنز، همدلی با ابهام و ملاحظه‌ی سردرگمی و شرمندگی دیگران، سایر ویژگی‌های مهمی هستند که می‌توانند در ایجاد یک محیط یادگیری برای تقویت توانایی‌های حل مسأله‌ی دانش‌آموزان، کمک کنند (بال، ۱۹۹۶). بنابر نوشته‌ی بال، «هم‌چنان که معلمان فهم و درک رابطه‌ی خود را با ریاضی می‌سازند، دوره‌های جدید ریاضی را با دانش‌آموزان خود، تدارک می‌بینند و هم‌چنان که با دانش‌آموزان خود به سمت مسیر جدیدی حرکت می‌کنند، فهم و درک خود آن‌ها از ریاضی نیز، دچار تغییر می‌شود».

حل مسأله به عنوان یک استراتژی در تدریس

به پیشنهاد پولیا (۱۹۴۵)، حل مسأله شامل چهار مرحله‌ی فهم مسأله، طراحی نقشه، اجرای نقشه و دوباره‌نگری (بازگشت به عقب) است. لاژوای[61] (۱۹۹۲) حل مسأله‌ی ریاضی را به صورت مدل‌سازی مسأله و صورت‌بندی و تصدیق فرضیه‌ها از طریق جمع‌آوری و تفسیر داده‌ها با استفاده از تحلیل الگو، رسم نمودار، کامپیوتر یا ماشین‌حساب تعریف می‌کند. این تعریف بر فرایندهای صورت‌بندی، جستجو و تصدیق متمرکز است، ولی دربرگیرنده‌ی عناصر بااهمیت دخیل در مرحله‌ی دوباره‌نگری پولیا که مشتمل بر ارزیابی و تفسیر روش‌ها و نتایج می‌باشد، نیست. مرحله‌ی دوباره‌نگری شامل فعالیت‌هایی مانند موارد زیر است:

- تصدیق نتیجه؛
- جستجو برای روش‌های بدیل حل‌ها؛
- مشخص ساختن اعتبار یک بحث؛
- به کار بستن نتیجه یا راه‌حل مسأله در مسأله‌های دیگر؛
- تفسیر نتیجه؛
- تعمیم راه‌حل‌ها؛
- تولید مسأله‌های جدید برای حل کردن.

شاید مهم‌ترین جنبه‌ی تدریس حل مسأله، دوباره‌نگری باشد، زیرا برای دانش‌آموزان، فرصت یادگیری را درباره‌ی فرایندهای حل مسأله و این که یک مسأله چگونه با سایر مسأله‌ها مرتبط است، ایجاد می‌کند. شونفیلد (۱۹۸۵) و دیگران نشان دادند که مشخصه‌های اصلی که باعث تمایز بین مسأله‌حل‌کن‌های خبره از افراد عادی می‌شود، توانایی آن‌ها در مرتبط کردن ویژگی‌های ظاهری به ساختارهای زیربنایی مسأله‌ها و توانایی آن‌ها در خودـنظمی[62] و تشخیص این است که چه زمانی یک رویکرد یا تاکتیک غیر مولد است. هر چند که معلمان و پژوهشگران گزارش کرده‌اند که ایجاد تمایل در دانش‌آموزان برای تداوم یافته‌های قبلی در یافتن پاسخ صحیح یک مسأله سخت است، ولی توسعه‌ی خودآگاهی و بازتاب، برای تقویت حل مسأله ضروری است.

تدریس خصیصه‌های کلیدی حل مسأله

طبق آن‌چه که ادبیات پژوهشی حوزه‌ی حل مسأله و پژوهش‌های انجام‌شده در این حوزه نشان می‌دهند، بعضی از خصیصه‌های کلیدی وجود دارند که نشان‌دهنده‌ی عملکرد سطح بالای دانش‌آموزان در حل مسأله هستند. مدل حل مسأله‌ی ریاضی NWREL، بر پایه‌ی پژوهش انجام گرفته مبتنی بر خصیصه‌های زیر است: درک مفهومی، راهبردها و استدلال کردن، ارتباطات، محاسبه و اجرا، و بینش‌های ریاضی. این خصیصه‌ها با جزئیات بیش‌تری در زیر شرح داده می‌شوند و به دنبال آن‌ها یک سؤال کلیدی مطرح می‌شود که معلمان می‌توانند در هنگام ارزیابی توانایی‌های حل مسأله‌ی دانش‌آموزان، هم‌چنین هنگامی که آن‌ها را هدایت می‌کنند تا حامی تلاش‌های حل مسأله‌ی آن‌ها باشند، بر این سؤال بازتاب داشته باشند.

درک مفهومی ـ دانش‌آموزان درک مفهومی را از طریق تفسیر اصول ریاضی در یک مسأله و ترجمه‌ی این ایده‌ها به یک بازنمایی منسجم ریاضی با استفاده از حقایق مهم مسأله به نمایش

وقتی دانش‌آموزان با ایده‌های ریاضی مواجه می‌شوند که علاقه و چالش را در یک زمینه‌ی حل مسأله‌ی باز ـ پاسخ برمی‌انگیزد، احتمال بیش‌تری هست که انواع پاداش‌های درونی را تجربه کنند و این احساس آن‌ها را با جریان حل مسأله، فعالانه درگیر می‌کند. اما دانش‌آموزانی که به حفظ کردن روی می‌آورند، فاقد فهم و درک بوده و احتمالاً احساس رضایت اندکی خواهند داشت و شاید به طور کامل از یادگیری دست بکشند.

می‌گذارند. دانش‌آموزان زمانی درک مفهومی خوبی از ریاضی را در یک مسأله نشان می‌دهند که بازنمایی مناسب را انتخاب کرده و از اطلاعات مرتبط استفاده کنند، اصطلاحات ریاضی را با دقت به کار برند و رویه‌های ریاضی قابل کاربرد را انتخاب نمایند (هیبرت و همکاران، ۱۹۹۷؛ NCTM، ۱۹۸۹ و ۲۰۰۰؛ شونفیلد، ۱۹۸۹ و ۱۹۹۲؛ گرین‌وود[۶۳]، ۱۹۹۳).

سؤال کلیدی: آیا تفسیر دانش‌آموز از مسأله با استفاده از رویه‌ها و بازنمایی‌های ریاضی، به طور صحیح مفاهیم کلیدی ریاضی را منعکس می‌کند؟

راهنمایی‌هایی که ممکن است معلم برای کمک به دانش‌آموز برای تفسیر اطلاعات مسأله ارایه دهد شامل موارد زیر است:

- مسأله در مورد چیست؟ مسأله را به زبان خودتان دوباره‌نویسی کنید.
- [در مورد مسأله]، چه می‌دانید؟
- مسأله از شما می‌خواهد که چه چیزی را پیدا کنید؟
- حقایق و اعداد مهم در مسأله کدامند؟ آیا برخی اطلاعات برای حل کردن مسأله غیرضروری هستند؟
- آیا اصطلاحات ریاضی در درک و حل مسأله به شما کمک می‌کند؟
- پاسخ مسأله شبیه چیست (واحدهای اندازه‌گیری، میزان دقت مورد نیاز، شکل پاسخ)؟

توصیه‌هایی به دانش‌آموزان برای کمک به درک مفاهیم ریاضی مربوط به مسأله می‌تواند شامل موارد زیر باشد:

- چه نوع محاسباتی برای حل مسأله مورد نیاز خواهد بود؟
- چگونه می‌توان مسأله را نمایش داد تا درک آن ساده‌تر شود؟
- کدام ایده‌ها و مهارت‌های ریاضی می‌توانند در نمایش و حل مسأله به شما کمک کنند (مانند رسم نمودار، شناسایی الگوها، افزودن کسرها و نظایر این‌ها)؟

راهبردها و استدلال کردن ـ دانش‌آموزان توانایی خود را در استفاده از راهبردها و استدلال کردن از طریق جستجو و انتخاب راهبردهای مناسب حل مسأله و اجرای یک فرایند منطقی خوب طراحی شده و خوب حمایت شده که آن‌ها را به یک راه‌حل منطقی برساند، نشان می‌دهند. تمام انواع بازنمایی‌ها با راه‌حل ایشان تلفیق شده، دانش‌آموزان بر پیشرفت خود نظارت داشته و در صورت نیاز، جرح و تعدیل‌های لازم را انجام داده، کار را تأیید کرده یا اثبات درستی آن را ارایه می‌دهند (هیبرت و همکاران، ۱۹۹۷؛ NCTM، ۱۹۸۹، ۲۰۰۰؛ شونفیلد، ۱۹۸۹، ۱۹۹۲؛ گرین‌وود، ۱۹۹۳؛ بکر و شیمادا، ۱۹۹۷؛ پولیا، ۱۹۴۵، ۶۵ـ۱۹۶۲؛ استیسی[۶۴] و گروز[۶۵]، ۱۹۸۵).

سؤال کلیدی: آیا شواهدی وجود دارد که دانش‌آموز براساس یک طرح، حل مسأله را شروع کرده، راهبردهای متناسب را به کار برده و یک فرایند منطقی و قابل تأیید در جهت دست‌یابی به یک راه‌حل را دنبال کرده باشد؟

راهنمایی‌هایی برای کمک به دانش‌آموزان، برای شروع حل مسأله، می‌تواند شامل موارد زیر باشد:

- آیا رسم یک شکل یا یک نمودار یا ساخت یک مدل می‌تواند به حل این مسأله کمک کند؟
- آیا سازمان‌دهی اطلاعات در یک نمودار، یا جدول، یا فهرست سازمان‌دهی شده به شما کمک می‌کند؟

● آیا حدس زدن، بررسی و تعدیل انجام شده، به حل این نوع مسأله کمک می‌کند؟

● آیا باید دنبال یافتن الگوهایی در اطلاعاتتان باشید؟

● آیا این کار کمک می‌کند که ابتدا مسأله را با استفاده از اعداد ساده‌تر حل کنید؟

● آیا می‌توانید با حرکت رو به عقب، از جایی که می‌خواهید به آن برسید کار را شروع کنید و به جایی که می‌خواهید از آن‌جا آغاز کنید برسید؟

توصیه‌هایی به دانش‌آموزان جهت تفکر در مورد راه‌حل آن‌ها می‌تواند شامل موارد زیر باشد:

● آیا راهبرد مورد استفاده‌ی شما کارآمد است؟ اگر نه، آیا می‌توانید روش کارآمدتری برای حل مسأله پیدا کنید؟

● آیا می‌توانید مثال‌هایی برای حمایت از راه‌حلتان ارایه دهید؟

● آیا طرح و راهبردتان را آن‌قدر خوب درک کرده‌اید که آن را برای فرد دیگری شرح دهید؟

● آیا روش‌های دیگری برای نزدیک شدن به این مسأله وجود دارد؟

● آیا این مسأله شبیه مسأله‌های دیگری است که شما حل کرده‌اید؟

● آیا می‌توانید از آموخته‌های خود برای حل مسأله‌های دیگر نیز استفاده کنید؟

ارتباطات ـ اگر بدانیم که چگونه مطلبی با سایر مطالبی که آن‌ها را می‌دانیم رابطه یا پیوند برقرار می‌کند، آن را درک می‌کنیم. ارتباطات همراه با بازتاب، روابط و پیوندهای جدید تولید می‌کنند. دانش‌آموزانی که بر آن‌چه انجام می‌دهند، بازتاب می‌کنند و در مورد آن، با سایرین ارتباط برقرار می‌کنند، در بهترین موقعیت برای ایجاد ارتباط و اتصال در ریاضی قرار دارند (هیبرت و همکاران، ۱۹۹۷). دانش‌آموزان زمانی ارتباطات خوب را نشان می‌دهند که به وضوح، آن‌چه را که انجام داده‌اند و علت آن کار را، شرح دهند و این توضیح در یک توالی منطقی و روان انجام شود. ارتباطات خوب؛ مستقیم، هدفمند و خوب سازمان یافته است و خواننده ناچار به استنباط نیست، زیرا توضیحات شفاف بوده و فاقد هرگونه خلاء است (هیبرت و همکاران ۱۹۹۷؛ NCTM، ۱۹۸۹ و ۲۰۰۰؛ شونفیلد، ۱۹۸۹ و ۱۹۹۲؛ منوچهری[۶۶] و اندرسون[۶۷]، ۱۹۹۹؛ فن‌زووست[۶۸] و اینارت[۶۹]، ۱۹۹۸؛ بوش‌من[۷۰]، ۱۹۹۵).

سؤال کلیدی: آیا فرد دیگری می‌تواند به آسانی تفکرات دانش‌آموز را درک کند یا این‌که به استنباط و حدس زدن در مورد آن‌چه که دانش‌آموز درصدد انجام آن است، نیاز می‌باشد؟

ارتباطات خوب، بستگی به داشتن یک راهبرد و طرح مسأله‌ی خوب سازمان‌یافته، واضح و روشن دارد. واداشتن دانش‌آموزان به توضیح کلامی راهبردهایشان پیش از نوشتن آن‌ها، می‌تواند در توسعه‌ی مهارت در برقراری ارتباطات مفید باشد.

راهنمایی‌هایی برای کمک به دانش‌آموزان در تبادل ارتباط با تفکر خودشان می‌تواند شامل موارد زیر باشد:

● آیا از جدول‌ها، نمودارها، کلمات یا ترکیبی از این‌ها، در توضیح و گسترش تفکرتان استفاده می‌کنید؟

● اولین کاری که کردید چه بود؟ چرا؟ بعد از آن چه کردید؟ این کار به شما برای رسیدن به هدفتان چه کمکی کرد؟

● چگونه به این نتیجه رسیدید که...؟ از حل کردن این مسأله چه چیزی یاد گرفتید؟

● آیا نشان دادید که چگونه پاسختان را تصدیق می‌کنید؟

● توضیح خود را برای فرد دیگری بخوانید تا مطمئن شوید که این توضیحات، فرایند حل شما را به طور شفاف بیان کرده و درک آن ساده است.

محاسبه و اجرا ـ مهارت‌های پایه‌ای و درک مفهومی باید به همراه هم پیشرفت کنند. برای یادگیری مهارت‌ها به نحوی که فرد بتواند آن‌ها را به خاطر بسپارد، هنگام لزوم آن‌ها را به کار ببرد و بتواند آن‌ها را برای حل مسأله‌های جدید تعدیل کند، باید آن‌ها را همراه با فهم و درک یاد بگیرد. اگر از دانش‌آموزان خواسته شود تا از رویه‌های خود برای پاسخ دادن به مسأله‌های حسابی استفاده کنند و به‌طور مثال، رویه‌های خود را با دیگران در میان بگذارند، درک ریاضی آن‌ها از طریق اجرا، بحث و بازتاب بر ایده‌های دیگران تقویت خواهد شد (هیبرت و همکاران ۱۹۹۷؛ NCTM، ۱۹۸۹ و ۲۰۰۰؛ شونفیلد ۱۹۸۹ و ۱۹۹۲).

دانش‌آموزان خبرگی خود را در محاسبات از طریق اجرای صحیح تمام رویه‌ها، کاربرد صحیح تمام بازنمایی‌های بصری مسأله و مشخص کردن هر یک (نمودارها، جدول‌ها، شکل‌ها و غیره) و نشان دادن استفاده‌ی صحیح از تکنولوژی یا دست‌ورزی‌های قابل دسترسی، به نمایش می‌گذارند.

سؤال کلیدی: با در نظر گرفتن رویکردی که دانش‌آموز برای حل مسأله اتخاذ کرده است، آیا راه‌حل (شامل تمام گام‌های فرایند) به شیوه‌ای صحیح و کامل اجرا شده است؟

راهنمایی‌هایی برای کمک به دانش‌آموزان جهت بهبود مهارت‌های محاسباتی می‌تواند شامل موارد زیر باشد:

● آیا به موازات پیشرفت خود، محاسبات خود را دوباره کنترل

کرده‌اید؟ (به خاطر داشته باشید همیشه هنگام استفاده از ماشین حساب، پاسخ خود را تخمین بزنید).

● آیا قاعده یا فرمول استفاده شده را نشان داده‌اید؟

● آیا از طریق حل مسأله به روشی متفاوت یا از طریق گذاشتن جواب داخل مسأله برای این که ببینید آیا این جواب معنادار است یا خیر، جواب خود را تصدیق کرده‌اید؟

● آیا شکل‌ها یا نمودارهایتان را کنترل کرده‌اید تا مطمئن شوید توضیحات آن‌ها صحیح است؟ (در صورتی که از شکل‌ها یا نمودارها استفاده کرده‌اید).

● آیا در محاسبات و رویه‌های مورد نیاز مسأله تبحر دارید؟ در غیر این صورت قبل از تلاش برای حل مسأله آن‌ها را مرور و تمرین کنید.

● آیا کنترل کرده‌اید تا مطمئن شوید که جواب شما با آن‌چه که مسأله می‌خواهد، منطبق است؟

بصیرت‌های ریاضی- دانش‌آموزان زمانی نسبت به یک مسأله بصیرت نشان می‌دهند که بتوانند اهمیت مسأله را در ارتباط با سایر مسأله‌ها یا در ارتباط با سایر دیسیپلین‌ها یا کاربردهای آن در «جهان واقعی» تشخیص دهند. با تشخیص الگوهای مستتر در مسأله، کشف رویکردها یا راه‌حل‌های چندگانه یا خلق یک قاعده یا فرمول کلی، دانش‌آموزان بصیرت خود را از طریق ساختار زیربنایی مسأله به نمایش می‌گذارند (هیبرت و همکاران، ۱۹۹۷؛ NCTM، ۱۹۸۹ و ۲۰۰۰؛ شونفیلد ۱۹۸۹ و ۱۹۹۲؛ بکر و شیمادا، ۱۹۹۷؛ درکز[۷۱]، ۱۹۹۳؛ پولیا، ۱۹۴۵ و ۶۵-۱۹۶۲).

سؤال کلیدی: آیا دانش‌آموز به ساختار اصلی مسأله دست یافته و می‌بیند چگونه فرایند مورد استفاده برای حل این مسأله، آن را به سایر مسأله‌ها و کاربردهای جهان واقعی پیوند می‌دهد؟

کلید توسعه‌ی بصیرت دانش‌آموزان، رفتن به فراسوی راه‌حل مسأله و تفکر در مورد کاربردهای مسأله در سایر موقعیت‌هاست. راهنمایی‌هایی جهت تقویت بصیرت می‌توانند شامل موارد زیر باشد:

● آیا این مسأله شبیه هیچ یک از مسأله‌هایی که قبلاً دیده‌اید می‌باشد؟ در این صورت آن شباهت‌ها کدام‌ها هستند؟

● آیا در حین حل مسأله، الگویی پیدا کرده‌اید؟

● برای حل کردن مسأله از چه مفروضاتی استفاده کرده‌اید؟

● آیا می‌توانید مسأله‌ای بسازید که از جهاتی با این مسأله مشابه باشد و از جهات دیگری متفاوت باشد؟

● آیا راه‌حل شما تنها راه‌حلی است که برای این مسأله وجود دارد؟

● آیا می‌توانید فرایند یا فرمولی بیابید که بتواند برای حل شکل‌های مختلف این مسأله مورد استفاده قرار گیرد؟

● چگونه این مسأله با سایر مسأله‌هایی که قبلاً دیده‌اید یا با موقعیت‌های زندگی واقعی، شباهت دارد؟

انتخاب مسأله‌ی «خوب»

شورای ملی معلمان ریاضی (NCTM) و جامعه‌ی پژوهشی دائماً اعلام می‌کنند که دانش‌آموزان با مسایل ناآشنا و چالش برانگیز درگیر شوند (NCTM، ۱۹۸۹؛ شونفیلد، ۱۹۸۵؛ هیبرت و همکاران، ۱۹۹۷؛ اسمیت[۷۲] و استین[۷۳]، ۱۹۹۸). انتخاب مسأله‌های «خوب»، کلید تدریس مؤثر حل مسأله است، ولی معلمان اغلب در مورد این که چه مسأله‌ای یک مسأله‌ی «خوب» است، دچار سردرگمی هستند. لغت‌نامه امریکایی آکسفورد (ارلیش[۷۴] و فلکسنر[۷۵]، ۱۹۸۰)، تعاریف زیر را برای واژه‌ی مسأله ارایه می‌دهد:

تعریف اول: چیزی که سروکار داشتن با آن یا درک آن مشکل است؛

تعریف دوم: یک تمرین در یک کتاب درسی یا در یک امتحان.

هر دو تعریف، در حیطه‌ی کاربرد عمومی هستند. معلم ممکن است به دانش‌آموزان کلاس بگوید که مسأله‌های شماره‌ی ۱ تا ۶۰ انتهای فصل را برای تمرین [بیش‌تر] حل کنند. این مورد، مثال روشنی از دومین تعریف است. اگر معلم به مسأله به مفهوم تعریف اول اشاره کرده بود، احتمال داشت که با شورش دانش‌آموزان مواجه شود، زیرا حل کردن ۶۰ مسأله‌ی واقعاً مشکل، یک تکلیف درسی غیرواقع گرایانه است.

یک جنبه‌ی مهم دیگر از تعریف «مسأله»، ماهیت نسبی آن است. آن‌چه که برای دانش‌آموزی مسأله است، ممکن است برای دانش‌آموز دیگری صرفاً یک تمرین باشد. شونفیلد (۱۹۸۵) ماهیت نسبی مسأله را چنین بیان می‌کند:

مسأله بودن، ویژگی ذاتی یک تکلیف ریاضی نیست. بلکه رابطه‌ی خاص بین فرد و تکلیف است که آن تکلیف را برای وی، به یک مسأله تبدیل می‌کند. در این جا، واژه‌ی مسأله با این معنای نسبی به کار رفته است که برای فردی که تلاش می‌کند آن را حل کند، مشکل است. به علاوه، این مشکل باید از نظر ذهنی باشد نه یک مشکل محاسباتی.

به خاطر نسبی بودن مسأله‌ها، مهم است هنگام تدریس و ارزیابی حل مسأله‌ی دانش‌آموزان، تکالیف با دقت انتخاب شوند به نحوی که سطح مشکل بودن آن‌ها برای دانش‌آموزان مناسب باشد. از این گذشته، لازم است مسأله‌ها در حدی مشکل باشند که برای دانش‌آموزان چالش ایجاد کنند، اما سختی مسأله‌ها نباید به اندازه‌ای باشند که آن‌ها را تبدیل به یک معمای غیرقابل حل کند.

پولیا (۶۹-۱۹۶۵) تأکید دارد که دانستن ریاضی به معنای توانایی در انجام ریاضی است، یعنی حل کردن مسأله‌های مشکل. هدف آموزش مدرسه‌ای، تقویت توانایی تفکر در دانش‌آموزان است.

در حالی که مسأله‌های معمولی در خدمت یاد دادن چگونگی به کاربردن رویه‌های خاص به دانش‌آموزان است، تنها از طریق استفاده‌ی خردمندانه از مسأله‌های غیرمعمولی که «نیازمند درجاتی از استقلال، قضاوت، اصالت و خلاقیت» هستند، می‌توان توانایی حل مسأله‌ی آن‌ها را توسعه داد. هالموس[۷۶] (۱۹۸۰) در مقاله‌اش تحت عنوان «قلب ریاضیات» بیان می‌کند که «دلیل اصلی وجود ریاضی‌دان، این است که مسأله حل کند و بنابراین آن‌چه واقعاً ریاضی از آن تشکیل شده، مسأله‌ها و راه‌حل‌ها می‌باشد». این دیدگاه، فاصله‌ی زیادی با دیدگاه به تصویر کشیده شده در کلاس‌های درس ریاضی در مدارس دارد که در آن، ریاضی مجموعه‌ای ایستا و متناهی (هرچند بسیار بزرگ) از حقایق، قواعد، و رویه‌هاست که باید آن‌ها را به خاطر سپرد و تمرین کرد.

معلمان می‌خواهند بین (۱) استفاده از حل مسأله به عنوان زمینه‌ای برای تدریس، (۲) تدریس استراتژی‌های حل مسأله و (۳) تدریس و ارزیابی حل مسأله‌ی دانش‌آموزان خود، تمایز قائل شوند. در هنگام ارزیابی توانایی‌های حل مسأله‌ی دانش‌آموزان، باید به آن‌ها تکلیف‌های ناآشنا داد، تکلیف‌هایی که برای انجام آن‌ها یک روش یا رویه‌ی از پیش آماده را نیاموخته باشند. تکلیف‌ها باید در سطح توانایی حل مسأله‌ی دانش‌آموزان ولی در عین حال، برای آن‌ها مشکل و چالش برانگیز هم باشند.

در حقیقت، تکلیف‌ها اساس آموزش حل مسأله را تشکیل می‌دهند. بازتاب و ارتباطات تنها زمانی امکان‌پذیرند که تکلیف‌ها به طور مناسبی مسأله‌ساز باشند. طبق گفته‌ی هیبرت (هیبرت و همکاران، ۱۹۹۷)، تکلیف‌های مناسب دارای سه جلوه هستند:

- تکلیف‌ها موضوع را برای دانش‌آموزان مسأله‌ساز می‌کنند؛ دانش‌آموزان هم تکلیف‌ها را یک مسأله‌ی جالب می‌بینند.
- تکلیف‌ها باید مرتبط با سطح و فهم دانش‌آموزان باشند؛ دانش‌آموزان باید از دانش و مهارت‌هایی که قبلاً داشته‌اند، برای ایجاد یک روش برای تکمیل تکلیف‌ها استفاده کنند.
- تکلیف‌ها باید فرصت‌هایی برای دانش‌آموزان ایجاد کنند تا بر ایده‌های مهم ریاضی بازتاب داشته باشند. با ابداع و آزمودن روش‌هایی برای حل مسأله‌های ریاضی، دانش‌آموزان درک ریاضی خود را گسترش می‌دهند. تکلیف‌ها در ایجاد توانایی در دانش‌آموز برای درک ریاضی، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند (هیبرت و همکاران، ۱۹۹۷).

تکلیف حل مسأله‌ی «خوب» دارای ویژگی‌های زیر است:

- دانش‌آموز را درگیر و علاقه‌مند می‌سازد؛
  - ✓ قابل کاربرد در جهان واقعی است،
  - ✓ با علائق دانش‌آموز مرتبط است،
  - ✓ مساوات را رعایت می‌کند زیرا همه‌ی دانش‌آموزان را دربر می‌گیرد،
  - ✓ درگیری فعالانه را ارتقا می‌بخشد،
  - ✓ حاوی محتوای ریاضی مهمی است،
  - ✓ با سایر مسأله‌ها و مفهوم‌های ریاضی مرتبط می‌شود،
  - ✓ در راستای برنامه‌ی درسی جاری ریاضی است،

در حقیقت شواهد نشان می‌دهند که اگر دانش‌آموزان، با تکرار و به شکل طوطی‌وار، به حفظ کردن و تمرین کردن رویه‌ها بپردازند، برایشان مشکل خواهد بود که در آینده دوباره به این مفاهیم برگشته و درک عمیق‌تری از مفاهیم ریاضی که در پس آن رویه‌ها قرار دارد، پیدا کنند

✓ با سایر حوزه‌های موضوعی تلفیق می‌شود.
● باز ـ پاسخ و غیر معمولی است؛
✓ امکان استفاده از رویکردها و راه‌حل‌های چندگانه را ایجاد می‌کند،
✓ به سادگی با استفاده از یک رویه‌ی از پیش آموخته شده، قابل حل نیست.
● چالش برانگیز و در عین حال قابل دست‌یابی توسط دانش‌آموزان است؛
✓ نیازمند پافشاری است،
✓ امکان ورود به مسأله را می‌دهد.
● به خوبی طرح شده است؛
✓ حاوی واژه‌های شفاف و بدون ابهام است،
✓ انتظارات را شرح می‌دهد،
✓ پاسخ‌های قابل نمره‌دادن را بر می‌انگیزد.

محیط کلاس درس

محیط کلاس درس، باورهای دانش‌آموزان را درباره‌ی ریاضی شکل می‌دهد، همان‌طور که باورهای فرهنگی و تعامل با سایرین را هم شکل می‌دهد. شونفیلد (۱۹۹۲) بیان می‌کند که «اگر می‌خواهیم بفهمیم که افراد چگونه دیدگاه‌های ریاضی خود را می‌سازند، باید از نقطه‌نظر جامعه‌ی ریاضی که دانش‌آموزان در آن زندگی می‌کنند و نوع اعمالی که در آن جامعه رخ می‌دهد، به این موضوع نگاه کنیم». سه جلوه‌ی یک فرهنگ اجتماعی که دانش‌آموزان را تشویق می‌کند تا با تکالیف ریاضی به عنوان مسأله‌های باارزش و جالب برخورد کنند عبارتند از:

● ایده‌ها، ارزش‌های بالقوه‌ی کلاس درس هستند و این توانایی را دارند که در خدمت یادگیری هر دانش‌آموز باشند و احترام به او و پاسخ وی را تضمین کنند.

● دانش‌آموزان نسبت به روش‌های مورد استفاده در حل مسأله‌ها احساس اقتدار همراه با احترام دارند و تشخیص می‌دهند که روش‌های گوناگونی برای انجام کار وجود دارد. آزادی در کشف روش‌های بدیل و در میان گذاشتن تفکرشان با سایر همسالان، خلاقیت را تشویق کرده و انگیزه‌ی دانش‌آموزان را افزایش می‌دهد.

● دانش‌آموزان و معلمان اشتباهات را محلی در نظر می‌گیرند که فرصت‌هایی را برای آزمودن خطاهای استدلالی و بالا بردن قدرت تجزیه و تحلیل فرد ایجاد می‌کنند. اشتباهات به‌طور سازنده، باید به عنوان فرصت‌هایی برای یادگیری مورد استفاده قرار گیرند.

تحقیقات زیادی راجع به اثربخشی برنامه‌های به اصطلاح بدیل که بر حل مسأله تأکید دارند، در مدارس ابتدایی و در درس حساب انجام شده است. هیبرت (۱۹۹۹)، این پژوهش‌ها را تحلیل کرده و جلوه‌های مشترکی را که مشخص کننده‌ی اغلب این برنامه‌هاست، شناسایی کرده است. این برنامه‌ها:

● بر دانش و مهارت‌های قبلی دانش‌آموزان تکیه دارند؛
● فرصت‌هایی هم برای ابداع و هم برای تمرین ایجاد می‌کنند؛
● بر تجزیه و تحلیل روش‌های چندگانه برای حل مسأله‌ها متمرکزند؛
● از دانش‌آموزان می‌خواهند توضیحاتی ارایه دهند؛
● بر توسعه‌ی مفهومی تأکید دارند بدون آن‌که ایجاد مهارت را قربانی این کار کنند؛
● بر آموزش مفهوم‌ها و مهارت‌های جدید در حین حل مسأله‌ها تأکید می‌کنند.

به جای این‌که معلم تنها به عنوان منبع اطلاعات و ارزیاب صحیح بودن آن‌ها باشد، بر انتخاب و توالی مسأله‌های مناسب، در میان گذاشتن اطلاعات، و ایجاد فرهنگی در کلاس که در آن، دانش‌آموزان به‌طور فردی و تعاملی روی مسأله‌های بدیع کار می‌کنند، تأکید می‌ورزد. معلم بر فعالیت‌های حل مسأله‌ی بازتابی و عادی دانش‌آموزان تکیه می‌کند تا آن‌ها یاد بگیرند (هیبرت و همکاران، ۱۹۹۷).

مخمصه‌ی تعیین این‌که چه موقعی در جریان حل مسأله‌ی دانش‌آموز مداخله کنید بدون آن‌که برای ساخت‌وساز و فهم و درک وی مزاحمتی ایجاد کنید، به خصوص هنگامی که از رویکرد حل مسأله استفاده می‌کنید، همیشه یکی از جنبه‌های [مهم] تدریس است. معلمان می‌توانند به شیوه‌هایی مداخله کنند و تفکر دانش‌آموزان را برانگیخته و آن‌ها را توسعه دهند و هم‌زمان، خودمختاری دانش‌آموزان را به شیوه‌های زیر تقویت کنند:

● انتخاب تکالیفی هدفمند در ذهن (در انتخاب تکالیف مناسب، دانش ریاضی و درک و تفکر دانش‌آموزان اساسی است)؛
● ارایه‌ی اطلاعات مرتبط (قراردادهای ریاضی، روش‌های بدیل، شرح و بسط ایده‌ها و روش‌های اخذ شده توسط دانش‌آموزان)؛
● رهبری توسعه‌ی فرهنگ کلاسی (تمرکز بر روش‌ها، به‌کارگیری موقعیت‌های مناسب برای اعمال مرجعیت) (هیبرت و همکاران، ۱۹۹۷).

نتیجه‌گیری

تغییر در آموزش ریاضی مستلزم دوباره‌سازی فرهنگ کلاس‌های درس ریاضی و دیدگاه معرفت‌شناختی[۷۷] معلمان ریاضی است. باورهای رایج ـ مانند این‌که توانایی ریاضی امری ذاتی است و بنابراین دور از دسترس برخی افراد است، این‌که محتوا و انباشتگی حقایق ریاضی مهم‌تر از یاد دادن تفکر و حل مسأله به دانش‌آموزان است، و این‌که بیش‌ترین انتظاری که می‌توانیم از دانش‌آموزان داشته باشیم این است که ریاضی انجام دهند و نه آن‌که ریاضی بفهمند ـ عمیقاً بر این‌که چه ریاضیاتی در این کشور [آمریکا] تدریس شود و چگونه تدریس شود، تأثیر گذاشته است. دانش‌آموزان و معلمان هنوز بر این باورند که مسأله‌ها باید به سرعت حل شوند و برای حل مسأله، دانش‌آموز باید انواع مشابهی از مسأله‌های حل شده را قبلاً مشاهده کرده باشد. به ندرت از دانش‌آموزان خواسته شده است که برای حل یک مسأله، فرایندی را ابداع کنند یا مسأله‌های خودشان را بر پایه‌ی ارزیابی از یک موقعیت یا داده، طرح کنند. انجام این کار نیازمند ارتقای چشم‌گیر استعدادها و انتظارات، با هدف توسعه‌ی مهارت‌های مرحله‌ی برتر تفکر و اطمینان به توانایی‌های دانش‌آموزان در حل مسأله‌های اصیل است.

اغلب، معلمان به اشتباه بین حل مسأله و مسأله‌های کلامی[۷۸] همبستگی ایجاد می‌کنند. ولی غیر محتمل است که حل یک مسأله‌ی غیرکلامی برای ارایه‌ی کاربرد یا زمینه‌ای برای یادگیری عملیات، رویه‌ها، یا مفاهیم ریاضی، دانش‌آموزان را درگیر حل مسأله‌ی معنادار سازد. در حالی که تمرین‌های مسأله‌های کلامی می‌تواند به آماده‌سازی دانش‌آموزی در حل مسأله کمک کند، ولی تمرین واقعی برای آن‌چه که پولیا (۱۹۴۵) به عنوان هنر حل مسأله به آن اشاره می‌کند، ارایه نمی‌نماید. دانش‌آموزان به ندرت فرصت‌هایی را برای خلاقیت، جستجوگری و کشف ذاتی مسأله‌های چالش برانگیز غنی، غیرمعمولی و مفهومی، تجربه می‌کنند. در نتیجه اغلب دانش‌آموزان ریاضی را به عنوان مجموعه‌ای از حقایق و قواعد معمولی، کسالت‌بار و ایستا می‌بینند که اساساً باید از طریق به خاطرسپاری یاد گرفته شود، نه به صورت یک علم تجربی‌رو به تکامل و گسترش که متکی به جستجوگری است و از طریق آزمایش و حدسیه‌سازی، کشف و خلق می‌شود. دیدگاه اخیر برای بیش‌تر دانش‌آموزان، هم علاقه‌برانگیز، مناسب و جالب است و هم کمتر تحمیلی و ترسناک می‌باشد.

همان‌طور که استیسی[۷۹] (۱۹۹۰) اشاره کرده است، «مسأله‌حل‌کن‌های خوب باید نیازمند منابع غنی، انعطاف و اعتماد به نفس و تمایل برای کشف باشند». آن‌ها هم‌چنین باید پافشاری را یاد بگیرند و توانایی تحمل میزان مشخصی از سردرگمی را در خود ایجاد کنند. برای گسترش این توانایی‌ها دانش‌آموزان نیاز دارند که این سردرگمی را تجربه کنند و خوشحالی ناشی از درگیر شدن با یک مانع و غلبه نمودن بر آن را بچشند.

در کلاس‌های درس ریاضی که بر حل مسأله تأکید نمی‌شود، دانش‌آموزان از احساس خوشحالی و قدرتمند شدن که پس از غلبه بر یک مسأله‌ی مشکل به دست می‌آید، محروم هستند. آن‌ها ابزارها و اعتمادبه‌نفس مورد نیاز را در برخورد با انواع مسأله‌ها که طی کار و زندگی شخصی با آن‌ها مواجه می‌شوند، ندارند و اغلب، از یک درک مفهومی عمیق‌تر که ناشی از ساختن حقایق ریاضی خود فرد از طریق تفکر عمیق است، ناکام می‌مانند.

کاین فورمن[۸۰] که یک دانش‌آموز کلاس هشتم در پورتلند واقع در ایالت اورگان است و در یک برنامه‌ی درسی مسأله ـ محور کار می‌کند، با بصیرت، مزایای یادگیری ریاضی را از دیدگاه حل مسأله، چنین بیان می‌کند:

«یادگیری ریاضی، سفری پر از بزرگراه‌ها، راه‌های فرعی، بن‌بست‌ها و جاده‌های کناری است. سفر آن چیزی است که از آن می‌آموزیم، جایی که اعتماد به‌نفس و آرامش مورد نیاز را برای ریاضی‌دان شدن به‌دست می‌آوریم. سفر مهم‌تر از مقصد است. در حقیقت، سفر هرگز به پایان نمی‌رسد. هر ایده‌ای را می‌توان گسترش داد و همیشه می‌توانیم بیش‌تر جست‌وجو کنیم.

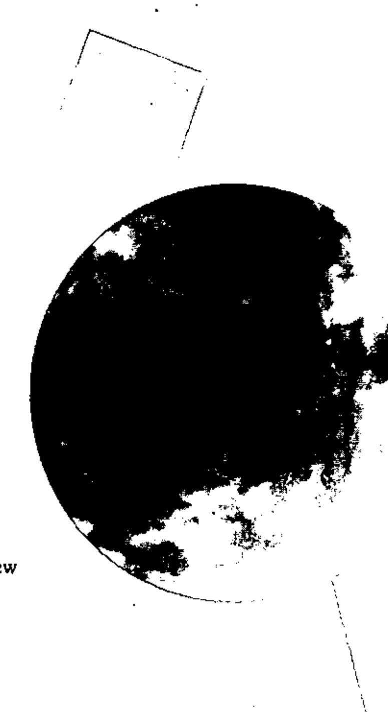
معلم ما، به ما به عنوان متفکران ریاضی که قادر به یافتن راه حل خود هستیم، اعتماد دارد... او می‌داند که مشکلات می‌توانند به‌طور موقت، پیشرفت ما را متوقف سازند و می‌داند ما از تجاربمان می‌آموزیم. بار دیگری که از یک مسیر عبور می‌کنیم ممکن است که به دلیل کشف راه‌های جانبی جدیدتر، تندتر حرکت کنیم یا سفرمان بیش‌تر طول بکشد (فورمن، ۱۹۹۸)».

برای دانش‌آموزی که استعاره‌ی او برای ریاضی سفر است، و برای کسی که مشکلات این سفر را صرفاً عقب نشینی‌های موقتی می‌بیند، محدودیتی وجود ندارد که این سفر، وی را به کجا خواهد برد.

زیرنویس‌ها

* تحت راهنمایی کیت پیکسوتو (Kit Peixotto) در مرکز آموزش علوم و ریاضی در ژوئن سال ۲۰۰۰ میلادی.

1. Portland
2. Oregan
3. Alaska
4. Idaho
5. Montana
6. Washington
7. Mathematics and Science Education Center
8. Open - ended Problem Solving
9. William A. Brownell, The Measurement of Understanding
10. National Council of Teachers of Mathematics, (NCTM)
11. Agenda for Action
12. Third International Mathematics and Science Study (TIMSS)
13. Peak
14. Takahira
15. Gonzales
16. Frase
17. Salganik
18. Monograph
19. Becker (Jervy Becker)
20. Shimada (Shigera Shimada)
21. National Research Council
22. Moyer
23. Cai
24. Grampp
25. Teacher - Centered
26. Hiebert
27. Carpenter
28. Fennema
29. Fusan
30. Wearne
31. Murray
32. Oliver
33. Human
34. Stanic
35. Kilpatrick
36. Justification
37. Motivate
38. Recreation
39. Practice
40. George Polya
41. Modern Heuristics
42. Ill - defined
43. Thompson
44. Schoenfeld
45. Burkhardt
46. Pedagogically
47. Shannon
48. Zawojewski
49. Hersh
50. Ernest
51. The Problem - solving View
52. The Platonic View
53. The Instrumentalist View
54. Teacher - directed
55. National Assessment of Educational Progress (NAEP)
56. Dirkes
57. Richardson
58. Ball
59. Wilson
60. Lioyck
61. Lajoie
62. Self - monitor
63. Granwood
64. Stacy
65. Grooves
66. Manouchehri
67. Enderson
68. Van Zoest
69. Enyart
70. Bushman
71. Dirkes
72. Smith
73. Stein
74. Ehrlich
75. Flexner
76. Halmos
77. Epistemological
78. Word Problem
79. Stacey
80. Kyle Forman



منابع

Ball, D. L. (1996). Teacher learning and the mathematics reforms: What we think we know and what we need to learn. *Phi Delta Kappan, 77(7)*, 500-508.

Becker, J. P., & Shimada, S. (Eds.). (1997). *The open-ended approach: A new proposal for teaching mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Brownell, W. (1946). Measurement of understanding, prepared by the society's committee. In N. B. Henry (Ed.), *National Society for the Study of Education. Committee on the Measurement of Understanding*. Chicago, IL: University of Chicago Press.

Burkhardt, H. (1988). Teaching problem solving. In H. Burkhardt, S. Groves, A Schoenfeld, & K. Stacey (Eds.), *Problem solving – A world view. Proceedings of the problem solving theme group, ICME 5* (pp. 17-42). Nottingham, England: University of Nottingham, Shell Centre for Mathematical Education.

Buschman, L. (1995). Communicating in the language of mathematics. *Teaching Children Mathematics, 1(6)*, 324-329.

Dirkes, M.A. (1993). *Self-directed problem solving: Idea production in mathematics.* Lanham, MD: University Press of America.

Ehrlich, E. H., Flexner, S. B., Carruth, G., & Hawkins, J. M. (Eds.) (1980). *Oxford American dictionary.* New York, NY: Oxford University Press.

Ernest, P. (1988, Auglst). *The impact of beliefs on the teaching of mathematics*. Paper presented at the Sixth International Congress of Mathematical Education, Budapest, Hungary. Also: Ernest, P. (1989). The impact of beliefs on the teaching of mathematics. In P. Ernest (Ed.), *Mathematics teaching: The state of the art* (pp. 249-254). London, England: Falmer Press. Retrieved June 26, 2000 from the World Wide Web: www.ex.ac.uk/~PErnest/impact.htm

Foreman, L. C. (1998). *What's the big idea?* Portland, OR: Math Learning Center.

Greenwood, J. J. (1993). On the natlre of teaching and assessing "mathematical power" and "mathematical thinking". *Arithmetic Teacher, 41(3)*, 144-152.

Halmos, P. R. (1980). The heart of mathematics. *American Mathematical Monthly, 87(7)*, 519-524.

Hersh, R. (1986). Some proposals for revising the philosophy of mathematics. In T. Tymoczko (Ed.), *New directions in the philosophy of mathematics: An anthology*. (pp. 9-28). Boston, MA: Birkhauser.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A., & Human, P. (1997). *Making sense: Teaching and learning mathematics with understanding*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Hiebert, J. (1999). Relationships between research and the NCTM standards. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(1), 3-19.

Lajoie, S.P. (1995). A framework for authentic assessment in mathematics. In T.A. Romberg (Ed.), *Reform in school mathematics and authentic assessment* (pp. 19-37). Albany NY: State University of New York Press.

Manouchehri, A., & Enderson, M.C. (1999). Promoting mathematical discourse: Learning from classroom examples. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 4(4), 216-222.

Moyer, J.C., Cai, J., & Grampp, J. (1997). The gift of diversity in learning through mathematical exploration. In J. Trentacosta, & M.J. Kenney (Eds.), *Multicultural and gender equity in the mathematics classroom: The gift of diversity. 1997 Yearbook* (pp. 151-163). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Assessment of Educational Progress. (1983). *The third national mathematics assessment: Results, trends, and issues* (Report No. 13-Ma-01). Denver, CO: Educational Commission of the States.

National Council of Teachers of Mathematics. (1980). *An agenda for action: Recommendations for school mathematics of the 1980s*, Reston, VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

National Research Council. (1989). *Everybody counts: A report to the nation on the future of mathematics education*. Washington, DC: National Academy Press.

Peak, L. (1996). *Pursuing excellence: A study of LS. eighth-grade mathematics and science teaching, learning, curriculum, and achievement in international context. Initial findings from the third international mathematics and science study*. Washington, DC: U.S. Department of Education, National Center for Education Statistics.

Peak, L. (1997). *Pursuing excellence: A study of LS. fourth-grade mathematics and science teaching, learning, curriculum, and achievement in international context. Initial findings from the third international mathematics and science study*. Washington, DC: U.S. Department of Education, National Center for Education Statistics.

Polya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton, NJ: Princeton Lniversity Press.

Polya, G, (1962-65). *Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem souving* (vols. 1-2). New York, NY: John Wiley and Sons.

Richardson, V. (1990). Significant and worthwhile change in teaching practice. *Educational Researcher*, 19(7), 10-18.

Schoenfeld, A.H. (1985). *Students' beliefs abolt mathematics and their effects on mathematical performance: A questionnaire analysis*. Paper presented at the 69th Annual Meeting of the American Educational Research Association, Chicago, IL.

Schoenfeld, A.H. (1989). Teaching mathematical thinking and problem solving. In L.B. Resnick & L.E. Klopfer (Eds.), *Toward a thinking curriculum: Current cognitive research. 1989 ASCD Yearbook* (pp. 83-103). Washington DC: Association for Supervisors and Curriculum Developers.

Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-368). New York, NY: Macmillan.

Shannon, A., & Zawojewski, J.S. (1995). Connecting research to teaching. Mathematics performance assessment: A new game for students. *Mathematics Teacher*, 88(9), 752-757.

Smith, M.S., & Stein, M.K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(5), 344-350.

Stacey, K., & Groves, S. (1985). *Strategies for problem solving. Burwood*, Victoria (Alstralia): VICTRACC Ltd.

Stacey, K. (1990). On making better problem solvers. *Australian Mathematics Teacher*, 46(4), 28-30.

Stanic, G.M.A., & Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In R.I. Charles & E.A. Silver (Eds.), *Research agenda for mathematics education: Vol. 3. The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp. 1-22). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, & Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Stigler, J.W., & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. New York, NY: Free Press.

Takahira, S., Gonzales, P., Frase, M., & Salganik, L.H. (1998). *Pursuing excellence: A study of U.S. twelfth-grade mathematics* and science achievement in international context. Initial findings from the third international mathematics and science study.* Washington, DC: U.S. Department of Education, National Center for Education Statistics.

Thompson, A.G. (1989). Learning to teach mathematical problem solving: Changes in teachers' conceptions and beliefs. In R.I. Charles & E.A. Silver (Eds.) *Research agenda for mathematics education: Vol. 3. The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp. 232-243). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, & Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Van Zoest, L.R., & Enyart, A.(1998). Discourse, of course: Encouraging genuine mathematical conversations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 4(3), 150-157.

Wilson, M., & Lloyd, G.M. (2000). Sharing mathematical authority with students: The challenge for high school teachers. *Journal of Curriculum and Supervision*, 15(2), 146-169.

منابع دیگری که برای تهیه‌ی این مقاله با آن‌ها مشورت شده است :

Brown, S.I., Cooney, T.J. & Jones, D.(1990). Mathematics teacher education. In W.R.Houston, M.Haberman, & J.Sikula (Eds), Handbook of research on teacher education: *A project of the Association of Teacher Educators* (pp.639-656). New York, NY: Macmillan.

Chapman, O.(1997). Metaphors in the teaching of mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 32(3), 201-228.

Charles, R., Lester, F., & O'Daffer, p. (1987). *How to evaluate progress in problem solving.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Clarke, D. (1997). *Constructive assessment in mathematics: Practical steps for classroom teachers.* Berkeley, CA.: Key Curriculum press.

Conway, K.D. (1999). Assessing open-ended problems. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 4(8), 510-514.

Herman, J.L. (1992). What research tells us about good assessment. *Educational Leadership*, 49(8), 74-78.

Herman , J.L., Aschbacher, P.R., & Winters, L. (1992). *A practical guide to alternative assessment.* Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.

Higgins, K.M., (1993, April). *An investigation of the effects on students' attitudes, beliefs, and abilities in problem solving and mathematics after one year of a systematic approach to the learning of problem solving.* Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Atlanta, GA. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 365521).

Kaplan, R.G.,Yamamoto, T., & Ginsburg, H.(1989). Teaching mathematics concepts. In L.B.Resnick & L.E.Klopfer (Eds.), *Toward a thinking curriculum: Current cognitive research. 1989 ASCD Yearbook.* (pp.59-82). Washington DC: Association for Supervisors and Curriculum Developers.

Leitze, A.R., & Mal, S.T.(1999). Assessing problem-solving thought. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 4(5), 305-311.

Lester, F.K.(1994). Musings about mathematical problem-solving research:1970-1994. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(6), 660-675.

Marshall, S.P.(1989). Assessing problem solving: A short-term remedy and a long-term solution. In R.I.Charles & E.A. Silver (Eds.), *Research agenda for mathematics education: Vol.3.The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp.159-177). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, & Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

McCleod, D. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D.A.Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.575-596). New York, NY: Macmillan.

Resnick, L.B. (1989). Treating mathematics as an ill-structured discipline. In R. Charles & E.A. Silver (Eds.), *Research agenda for mathematics education: Vol. 3.The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp.32-60). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, & Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Silver, E.A., & Marshall, S. (1990). Mathematical and scientific problem solving: Finding issues, and instructional implications. In B.F.Jones & L.Idol (Eds.), *Dimensions of thinking and cognitive instruction* (pp.265-290). Elmhurst, IL: North Central Regional Educational Laboratory, & Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Snow, R.E., & Farr, M.J.(Eds.) (1987). *Aptitude, learning, and instruction: Vol. 3.Cognitive and affective process analyses.* Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum.

Spangler, D.A. (1992). Assessing students' beliefs about mathematics. *Arithmetic Teacher, 40*(3),148-52.

Szetela, W., & Nicol, C.(1992). Evaluating problem solving in mathematics. *Educational Leadership, 49*(8), 42-45.

Thompson, A.(1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.334-368). New York, NY:Macmillan.

Webb, N. (1992). Assessment of students' knowledge of mathematics: Steps toward a theory. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.334-368). New York, NY: Macmillan.

Webb,N., & Romberg, T.A.(1992). *Implications of the NCTM standards for mathematics assessment.* In T.A. Romberg (Ed.), Mathematics assessment and evaluation: Imperatives for mathematics educators (pp.37-60). Albany, NY: State University of New York Press.

Wilson, J.W., Fernandez, M.L., & Hadaway, N. (1993).Mathematical problem solving. In P.S.Wilson (Ed.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics* (pp.57-77). New York, NY: Macmillian.

Zarinnia, E.A., & Romberg, T.A. (1991). *Framework for the California assessment program to report students' achievement in mathematics.* Albany, NY: State University of New York Press.

چند مسأله‌ی چالش‌برانگیز

اشاره

مسایل زیر، توسط دکتر اسدالله نیکنام برایمان ارسال شده‌اند و در شصت و پنجمین مسابقه‌ی ریاضی ویلیام لویل پاتنام[1] که در دسامبر سال ۲۰۰۴ برگزار شد، آمده‌اند. بهترین راه‌حل ارایه شده برای هریک از این مسایل، به نام فرستنده در شماره‌های آینده به چاپ خواهد رسید.

هیأت تحریریه‌ی رشد آموزش ریاضی

مسأله‌ی ۱. فرض کنید

$$p(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_0$$

یک چندجمله‌ای با ضرایب صحیح باشد. اگر r عدد گویایی باشد که $p(r)=0$، نشان دهید n عدد زیر، همگی عدد صحیح هستند.

$$c_n r,\ c_n r^2 + c_{n-1} r,\ c_n r^3 + c_{n-1} r^2 + cn_{n-2} r, \ldots$$
$$c_n r^n + c_{n-1} r^{n-1} + \ldots + c_1 r$$

مسأله‌ی ۲. فرض کنید m و n اعداد صحیح مثبت باشند. نشان دهید

$$\frac{(m+1)!}{(m+n)^{m+n}} < \frac{m!}{m^m} \cdot \frac{n!}{n^n}$$

مسأله‌ی ۳. کلیه‌ی اعداد حقیقی $a > 0$ را تعیین کنید که به‌ازای آن‌ها، تابع پیوسته‌ی غیرمنفی $f(x)$ای تعریف شده روی $[0,a]$ وجود دارد با این خاصیت که ناحیه‌ی

$$R = \{(x,y) \mid 0 \le x \le a, 0 \le y \le f(x)\}$$

دارای محیطی به اندازه‌ی k واحد و مساحتی به اندازه‌ی k واحد است (به ازای یک عدد حقیقی k).

مسأله‌ی ۴. فرض کنید n، عدد صحیح مثبتی باشد و $n \ge 2$ و قرار دهید $\theta = \frac{2\pi}{n}$. نقاط $P_k = (k,0)$ را در صفحه‌ی $x-y$، به ازای $k = 1,2,3,\ldots,n$ تعریف می‌کنیم. فرض کنید R_k نگاشتی باشد که صفحه را در جهت خلاف عقربه‌های ساعت، به اندازه‌ی زاویه θ حول نقطه‌ی P_k دوران می‌دهد و R، نگاشت به‌دست آمده از ترکیب دوران‌های $R_1, R_2, \ldots, R_n$ (به ترتیب) باشد. به ازای نقطه‌ی (x,y)، مختصات نقطه‌ی $R(x,y)$ را بیابید و به ساده‌ترین شکل ممکن، بیان کنید.

زیرنویس

1. Sixty-fifth Annual William Lowell Putnam Mathematical Competition.

علی روزدار
کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی لُردگان
استان چهارمحال و بختیاری

آن چه لازم است درباره‌ی حل مسأله بدانیم!

«هرگونه معرفت انسانی، از تفکر آغاز می‌شود. سپس، به مفهوم‌ها می‌رسد و سرانجام، به اندیشه‌ها ختم می‌گردد»

کانت

مقدمه

یکی از اهداف اصلی آموزش ریاضی، ارتقای توانایی اندیشیدن فرد است. اما اندیشه‌ی ریاضی را نباید یک اندیشه‌ی صوری به حساب آورد. اندیشه‌ی ریاضی، تنها بر اصول، تعریف‌ها و اثبات‌های دقیق استوار نیست، بلکه چیزهای دیگری را هم دربر می‌گیرد. یادگرفتن روش‌های کشف یا روشن کردن مضمون ریاضی یک موقعیت مشخص، استفاده از شباهت‌ها، به‌کار بردن استقرا، و مانند این‌ها، همگی در شکل‌دهی اندیشه‌ی ریاضی فرد، دارای اهمیت ویژه‌ای هستند. با ارتقای توانایی اندیشیدن، ضمن آن‌که دانش‌آموز هنر کشف کردن را می‌آموزد، انتظار می‌رود که بر حل مسایل نیز، قادر شود.

بسیاری بر این باورند که چنین توانایی‌هایی، در بطن «حل مسأله‌ی ریاضی» جای دارند. در واقع، تدریس ریاضی **از طریق حل مسأله**، دانش‌آموز را قادر می‌کند تا دسته‌ای از مسایل را ثابت کرده و برای دسته‌ای جواب مطلوب بیابد. یعنی چنین تدریسی، به وی کمک می‌کند تا برای یک مسأله‌ی ریاضی، خواه مسأله‌ای ثابت کردنی باشد و خواه مسأله‌ای یافتنی، راه‌حلی بیابد. در این میان، استفاده از راهبردها و رهیافت‌های حل مسأله، به‌طور چشم‌گیری مؤثر واقع می‌شود.

مسلماً مسأله حل کن‌های خبره در طول مطالعات ریاضی خود، به خاطر دست‌وپنجه نرم کردن با مسایل ریاضی، شگردها و «حیله» هایی را برای گونه‌های به خصوصی از مسایل به دست آورده‌اند. آن‌ها با بررسی و حل مسایل چالش‌آور، مسأله حل کن‌های خبره شده‌اند و راهبردها و رهیافت‌ها را در عمل آموخته‌اند. بنابراین، رهیافت‌ها قواعدی **تجربی و کلی** هستند که برای حل دسته‌ای از مسایل به کار می‌روند و به مسأله حل کن کمک می‌کنند تا راه‌حل قابل قبولی برای مسأله‌ای که پیش‌رو دارد، بیابد. ضرورت مطالعه راجع به رهیافت‌ها و آموزش آن‌ها، وقتی بیش‌تر آشکار می‌شود که متوجه باشیم هر شخصی که درگیر حل یک مسأله‌ی ریاضی است، لزوماً نباید راه طولانی پیموده شده توسط یک ریاضی‌دان را، برای کشف روش‌هایی برای حل مسایل بپیماید. دلیل این امر، طولانی بودن روند کشف قواعد و خطاهای احتمالی است که ممکن است در این مسیر، سد راه شخص شود. پس با آموزش رهیافت‌ها به دانش‌آموز، در حین حل عملی مسایل ریاضی، می‌توان او را در حل مسأله تواناتر کرد. اما رهیافت‌ها (قواعد تجربی حل مسایل)، متنوع هستند. هم‌چنین، از سوی افراد مختلف، قواعد گوناگونی برای حل مسایل ریاضی ارایه شده است. در این مقاله، قواعدی به عنوان رهیافت معرفی شدند که انتظار می‌رفت یادگیری و استفاده از آن‌ها، توانایی دانش‌آموزان را در حل مسایل ریاضی افزایش دهد. در نتیجه قواعدی هم‌چون: «آن‌قدر به مسأله نگاه کنید تا راه‌حل برایتان آشکار گردد» یا «پیوند [ارتباط میان فرضیات و مجهولات مسأله] را خود تشکیل دهید؛ انتظار داشته باشید معجزه‌ای، این کار را برای شما انجام دهد»، رهیافت یا راهبرد محسوب نشدند.

از این گذشته، به دلیل این‌که توانایی «حل مسأله‌ی ریاضی»، در سطوح بالای یادگیری قرار دارد، این قابلیت، صرفاً با گفتن حاصل نمی‌شود. در نتیجه لازم است که دانش‌آموزان، درگیر حل مسأله‌ی ریاضی شوند و در حین این کار، راهبردهای حل مسأله را یاد بگیرند.

در این مقاله، ابتدا تاریخچه‌ی مختصری از حل مسأله و رهیافت ارایه می‌شود. پس از آن، با اشاره به نقش رهیافت‌ها و تدریس آن‌ها در حل مسأله‌ی ریاضی، **چیستی حل مسأله** و مؤلفه‌های حل مسأله، از جمله رهیافت‌ها بررسی می‌شوند و برخی از تحقیقات انجام شده در رابطه با نقش رهیافت‌ها در حل مسأله‌ی ریاضی، معرفی می‌شوند. این مقاله، با بحث راجع به چگونگی تدریس ریاضی از طریق حل مسأله و نیز تدریس حل مسأله از طریق رهیافت‌ها، که دو موضوع مهم و متفاوت هستند، به پایان خواهد رسید.

تاریخچه‌ی حل مسأله و رهیافت‌ها

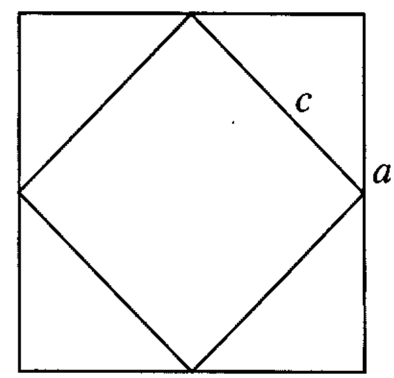
سال ۱۹۴۵ میلادی را می‌توان به عنوان نقطه‌ی عطفی در تاریخ حل مسأله، به‌شمار آورد. در این سال، اثر بزرگ جورج پولیا به نام **چگونه مسأله را حل کنیم** منتشر شد که منشاء تحول عظیمی در آموزش ریاضی، به ویژه در دوره‌های آموزش عمومی در سطح جهان گشت. هم‌چنین، در این سال‌ها، کارها و آثار مهم دیگری نیز پدید آمد که در ادامه، به آن‌ها اشاره خواهد شد.

حل مسأله و رهیافت‌ها قبل از سال ۱۹۴۵ میلادی

هرچند شروع دقیقی را برای آموزش ریاضیات نمی‌توان ذکر کرد، ولی همان‌طور که حکمت (۱۳۵۰) ذکر کرده است، «مطالعات تاریخی نشان می‌دهند که در حدود پنج‌هزار سال پیش در ایران قدیم، ریاضیات را در حد اعلای آن می‌آموختند و روش‌هایی برای آموزش جدول ضرب و تقسیم و جذر و کعب با وسایل هندسی، به‌کار می‌برده‌اند» (ص۴۳۵).

آموزش ریاضی و حل مسأله، کم‌وبیش مورد توجه آموزشگران ریاضی بوده است. شاید بتوان سقراط را اولین کسی دانست که با این روش، به آموزش مفاهیم ریاضی مبادرت کرد که برای نمونه، می‌توان به یکی از معروف‌ترین مباحثه‌های وی در کتاب جمهوریت افلاطون، اشاره کرد. سقراط رو به «منون»، ادعا می‌کند که «من چیزی به شاگرد نمی‌آموزم، بلکه به او کمک می‌کنم تا مطالبی را **به یاد آورد**». سقراط سپس از منون می‌خواهد تا یکی از بردگانش را فراخواند. آن برده «مربع» و «مساحت مربع» را می‌شناسد. با این مقدمات، به کمک سؤال‌های سقراط، شاگرد به سمتی هدایت می‌شود که نشان دهد، چگونه می‌توان

مربعی رسم کرد که مساحت آن دوبرابر مساحت مربع داده شده باشد. به بیانی دیگر در شکلی شبیه شکل (۱)، نشان دهد $a^2 = 2c^2$.



شکل۱.

رسم مربعی که مساحتش دوبرابر مساحت مربع داده شده باشد.

تأثیر سقراط بر حل مسأله‌ی ریاضی به حدی بود که به گفته‌ی پولیا (۱۹۶۲)، بر «روش حل مسأله»، نام «روش سقراطی» نیز نهاده‌اند.

۲۰۰۰ سال بعد از سقراط، نام دکارت با حل مسأله‌ی ریاضی، عجین می‌شود. اگرچه که به گفته‌ی راسل، «دکارت به راستی به عنوان مبتکر فلسفه‌ی نوین، مورد احترام است»، دکارت در ریاضیات هم کارهای ارزنده‌ای انجام داده که در این میان، می‌توان به دستگاه مختصات اشاره کرد که باعث ایجاد تحولی عظیم در ریاضی شد و به دلیل اهمیت آن، دستگاه مختصات دکارتی، نام گرفت. «ایده‌های دکارت در مورد تفکر خلاق، بخشی از یک طرح بزرگ است که در آن علم راه را برای وجودی آرمانگرایانه هموار می‌کند» (شونفیلد، ۱۹۸۷؛ ص۲۸).

دکارت، طی مطالعات ریاضی خود، کوشید تا قواعدی را برای حل مسأله‌ی ریاضی، ارایه دهد. «دکارت در قواعد خود، به این سمت گرایش دارد که روشی عمومی برای حل مسأله پیدا کند. طرح مقدماتی دکارت که امیدوار بود بتواند برای هر گونه مسأله‌ای به کار آید، به تقریب چنین است:

۱. هر مسأله‌ای، از هر گونه‌ای که باشد، به یک مسأله‌ی ریاضی منجر می‌شود؛

۲. هر مسأله‌ی ریاضی، از هر گونه ای که باشد، منجر به یک مسأله‌ی جبری می‌شود؛

۳. هر مسأله‌ی جبری، منجر به یک معادله می‌شود» (نقل شده از پولیا ۱۹۶۲؛ ص۵۹).

طبیعی است که این طرح، نمی‌تواند برای هر موقعیتی به کار آید. اما، برای مجموعه‌ی بزرگی از مسایل مفید است. تلاش دکارت این بود که قواعد کلی را در زمان زندگی‌اش کامل کرده و کاربرد آن‌ها را ملموس‌تر کند. «برای این کار، او کتاب **روش راه بردن عقل**[1] (۱۹۵۲)، را تدوین کرد، ولی به زودی متوجه شد که هنوز هم نقایصی وجود دارد» (شونفیلد، ۱۹۸۷؛ ص۲۹).

دکارت سه جلد کتاب با عنوان «قواعد چندگانه» را تألیف کرد و در هر جلد، به تناسب، مرحله‌ی چندگانه‌ای از طرح بزرگش را توضیح داده است. مثلاً دکارت در جلد اول، به قواعد ۵ و ۶ به نام روش، که نقشه‌ی بزرگ اوست، می‌پردازد. این قواعد عبارتند از: «تجزیه‌ی سیستم‌های پیچیده به مؤلفه‌های ساده؛ کنترل بخش‌های ساده‌تر؛ و ارتباط دوباره‌ی قسمت‌های خوب درک شده به کل خوب درک شده» (شونفیلد، ۱۹۸۷). این قاعده‌ها را به تقریب، می‌توان با یکی از رهیافت‌های مهم ارایه شده توسط پولیا یکی دانست و آن، «تجزیه کردن و دوباره ترکیب کردن» است. اما قواعد دیگر، بسیار کلی‌اند و در عمل، به راحتی نمی‌توان آن‌ها را آموزش داد. مثلاً قاعده‌ی ۸ دکارت می‌گوید: «اگر به چیزی رسیدیم که از درک و شناسایی آن عاجزیم، باید فوراً توقف کنیم». یعنی نباید هرچه را پیش می‌آید امتحان کنیم. بلکه باید از یک کار غیر مفید و بیهوده، پرهیز کنیم. به طور مختصرتر، باید اطمینان حاصل کنیم که آب در هاون نکوبیده‌ایم یا به تعبیر شونفیلد، به «تعقیب غاز وحشی» نرفته‌ایم![2]

به گفته‌ی شونفیلد (۱۹۸۲)، در جلد دوم این کتاب، مقدمات رهیافت‌های پیشرفته‌ی پولیا دیده می‌شود. پولیا اعتقاد دارد که اگرچه طرح دکارت نتوانست برای همه‌ی موردها، بدون استثنا به کار آید، ولی برای مجموعه‌ی بزرگی از آن‌ها مفید واقع شد؛ مجموعه‌ای که حالت‌های گوناگون مهمی را در بر می‌گرفت. «وقتی دانش‌آموز دبیرستانی به حل مسأله‌ای به کمک دستگاه معادله‌ها مشغول است، به طرح دکارت نیاز دارد و به طور جدی، از اندیشه‌هایی که در این طرح وجود دارد، استفاده می‌کند» (ص ۶۰).

در ادامه‌ی سیر تاریخی حل مسأله، به فاصله‌ی دو قرن از

دکارت، به کار دکتر جوزف گال[۳]، پدر جمجمه شناسی[۴] می‌رسیم. شونفیلد (۱۹۸۷) ذکر می‌کند که گال، اثر خود را با نام **علوم آزمایشگاهی ذهن**[۵]، با این فرض اولیه پایه گذاری کرد که پدیده‌های ذهنی، علت های طبیعی[۶] دارند که می‌توان آن‌ها را تعیین کرد. هم‌چنین، وی معتقد بود که ویژگی های آناتومی و فیزیولوژیکی، تأثیر مستقیمی بر رفتار ذهنی فرد دارند. در حقیقت، علم جمجمه شناسی بر این فرض استوار بود که استعدادهای ویژه، در قسمت های بخصوصی از جمجمه قرار گرفته‌اند.

با این حال، نگاهی که جمجمه شناسان به حل مسأله داشتند، در تقابل جدی با نگاه گشتالتی ها به حل مسأله بود. شونفیلد (۱۹۸۷) ابراز می‌دارد که نوعی تجارب گشتالتی توسط پوانکاره، در بخش مباتی علم[۷]، با عنوان **خلق ریاضی**[۸] که در سال ۱۹۰۸ میلادی منتشر شد، شرح داده شد، و داستان **مبانی علم** پوانکاره در سال ۱۹۴۵، موضوع تحقیق گسترده‌ای توسط هادامارد شد. در این زمان، الگوی نخستین طرح چهارمرحله‌ای حل مسأله‌ی گشتالتی به وسیله ی گراهام والاس[۹]، با نام هنر تفکر[۱۰] تدوین شد. چهار مرحله ی حل مسأله‌ی گشتالتی عبارتند از:

۱. اشباع[۱۱]: روی مسأله تا هنگامی کار می‌کنید که همه‌ی آن‌چه را که می‌توانید، انجام داده باشید؛

۲. کمون (تکوین)[۱۲]: مسأله را خارج از ذهن خودآگاه خود قرار می‌دهید و به ناخودآگاه خود اجازه می‌دهید تا به آن تسلط یابد؛

۳. الهام[۱۳]: جواب در یک لحظه، به سراغ شما می‌آید؛

۴. تأیید (تصدیق)[۱۴]: راه‌حل را بازبینی می‌کنید (نقل شده از شونفیلد، ۱۹۸۷).

بولتسانو (۱۸۴۸-۱۷۸۱) نیز، منطق‌دان و ریاضی‌دانی بود که سهم عمده‌ای از کتاب **منطق شناخت شناسی** خود را به موضوع رهیافت‌ها اختصاص داد. پولیا (۱۹۴۵) به نقل از بولتسانو خاطر نشان می‌کند که «... زحمت بیان این مطلب را بر خود هموار می‌سازم که قواعد و راه‌های تحقیقی را که همه‌ی مردان شایسته از آن پیروی کرده‌اند، و غالباً حتی از این پیروی آگاهی نداشته‌اند، با کلماتی روشن بیان کنم» (ص۸۸).

حل مسأله و رهیافت‌ها از سال ۱۹۴۵ میلادی

بررسی سیر تاریخی حل مسأله نشان می‌دهد که سال ۱۹۴۵، در واقع، نقطه‌ی عطفی در نهضت حل مسأله‌ی ریاضی بود. از یک طرف، با پایان جنگ دوم جهانی، تحولی در ریاضی و آموزش ریاضی در سطح بین‌المللی روی داد. در همین راستا، دالمدیکو[۱۵] (۲۰۰۱)، سال ۱۹۴۵ را یک گسیختگی مهم برای ریاضیات قرن بیستم می‌داند و اظهار می‌دارد که «در این سال، تحولی در جهت تغییر رویکرد از **ریاضیات محض به ریاضیات بیش‌تر کاربردی**، صورت گرفت» (ص ۲۲۷).

از سوی دیگر، آموزشگران ریاضی، آثاری از خود به‌جای گذاشتند که تحولی چشم‌گیر در حل مسأله، به دنبال داشت. «در این سال، تفکر خلاق[۱۶] ورتهایمر[۱۷] که مطالعه‌ای کلاسیک در حل مسأله محسوب می‌شد، در انگلستان منتشر شد. به همین ترتیب، رساله ی **روان‌شناسی ابداع در حوزه‌ی ریاضی**[۱۸] اثر ژاک هادامارد[۱۹] و تک‌نگاشت[۲۰] کارل‌دانکر[۲۱] در «حل مسأله»، انتشار یافت (شونفیلد، ۱۹۸۷). با این حال، در ادبیات معاصر حل مسأله‌ی ریاضی، پولیا و شونفیلد، جایگاه ویژه‌ای را به خود اختصاص داده‌اند که به دلیل اهمیت نقش آن‌ها در حل مسأله‌ی ریاضی، به اختصار، به هر یک اشاره می‌شود.

الف) پولیا. اما مهم‌تر از همه، در این سال **چگونه حل کنیم**[۲۲]، شاهکار حل مسأله‌ی پولیا، آغازگر راهی نوین در آموزش ریاضی شد. طبق نظر شونفیلد (۱۹۸۲)، اگرچه کتاب مسأله‌ی مشهور پولیا و زیگو[۲۳] با عنوان **مسایل و قضایایی در آنالیز** و بعضی نوشته‌های پولیا در مورد رهیافت‌ها، قبل از **چگونه حل کنیم** قرار می‌گیرد، اما این کتاب، نقطه‌ای روشن ـ هم برای خود پولیا و هم برای عالم حل مسأله ـ محسوب می‌شود. این کتاب، به گفته ی خود پولیا، چند سال بعد کانون توجه کارهای او شد و خط سیر این کتاب در دو کتاب بعدی وی با نام‌های **اکتشاف ریاضی**[۲۴] و **ریاضیات و استدلال موجه‌نما**[۲۵] دنبال شد. پولیا این دو کتاب را، ادامه‌ی خط فکری خویش می‌داند که در **چگونه حل کنیم**، آغاز شده بود. مهم‌ترین مطلبی که پولیا، کتاب خود را با آن آغاز می‌کند، مراحل حل یک مسأله‌ی ریاضی است. او عقیده دارد که برای یافتن جواب مسأله باید به صورت مکرر، دیدگاه و روش نگریستن خود را به آن مسأله عوض کنیم. **نخست** باید به صورتی آشکار بدانیم که چه‌چیز خواسته شده است (مرحله‌ی اول، **فهمیدن مسأله**).

دوم باید ببینیم که اجزای مختلف مسأله چگونه به هم پیوسته‌اند و ارتباط مجهول با داده‌های مسأله از چه قرار است تا

از این راه، اندیشه‌ای در خصوص حل مسأله پیدا کنیم (طرح نقشه). **سوم، اجرای نقشه** است. مرحله‌ی **چهارم**، پس از پایان یافتن مسأله، **به عقب نگاه کردن** و تجدیدنظر کردن و بحث کردن درباره‌ی حل انجام شده است. پولیا، این اثر معروف خود را «**واژه‌نامه‌ی کوچک راهیابی**[۲۶]» نیز نامید، در حالی که شونفیلد (۱۹۸۲)، پولیا را احیاگر رهیافت‌ها می‌خواند. پولیا در این کتاب خود، رهیافت‌هایی برای دو دسته از مسایل ریاضی، به نام «مسایل ثابت کردنی» و «مسایل یافتنی» ارایه می‌دهد. او مثال‌های متنوع و مسایل پیکار جویی ارایه می‌کند و با «**استدلال رهیافتی**»، به آن‌ها جواب می‌دهد. این مسایل و استدلال‌ها را می‌توان در هر دو کتاب **چگونه مسأله را حل کنیم** و **خلاقیت ریاضی**، مشاهده کرد. به عقیده‌ی پولیا، «استدلال راهیابانه، استدلالی است که نه به عنوان قطعی و نهایی، بلکه تنها به عنوان موجه‌نما و موقتی در نظر گرفته می‌شود، و هدف آن، کشف راه‌حل مسأله‌ی حل کردنی است.»

تأثیر پولیا بر ادبیات حل مسأله و مطالعات تحقیقی در آموزش ریاضی، بسیار چشم‌گیر است. کم‌تر تحقیقی را در زمینه‌ی حل مسأله می‌توان یافت که از کارهای پولیا الهام نگرفته باشد. ایده‌ی پولیا، الهام‌بخش تحقیقات پرباری در زمینه‌ی حل مسأله و رهیافت‌ها بوده است که در زیر، تنها به بعضی از آن تحقیقات و آثار اشاره می‌شود:

چگونه آن را اثبات کنیم نوشته‌ی ویلمان(۱۹۹۶)؛ **حل مسأله‌ی ریاضی** (شونفیلد، ۱۹۸۵)؛ **حل مسأله از طریق مسأله** نوشته‌ی لورن سی. لارسن(۱۹۸۳) [ترجمه‌ی علی ساوجی، ۱۳۸۱]؛ **چگونه مسأله را حل کنیم** نوشته‌ی ویکل گرن (۱۹۸۴)؛ **استفاده از مدل‌های رهیافتی در تدریس ریاضی** (هاز، ۱۹۷۹)؛ و...

گویا (۱۹۹۲) به نقل از لستر (۱۹۸۰)، اظهار می‌دارد که کارهای پولیا، شاید روشن‌ترین تفکر راجع به حل مسأله‌ی ریاضی است. پولیا در سرتاسر **خلاقیت ریاضی و چگونه مسأله را حل کنیم**، در قالب حل کردن مسایل، رهیافت‌های زیادی را معرفی کرده است که در واقع، می‌توانند قواعدی کلی برای حل تعداد زیادی از مسایل ریاضی به حساب آیند. گذشته از این، همان‌طور که آرام (۱۳۶۴)، در مقدمه‌ی ترجمه‌ی کتاب **چگونه مسأله را حل کنیم** ذکر کرده است، پولیا، افزون بر دویست‌وپنجاه مقاله و رساله درباره‌ی **حساب احتمالات**، **آنالیز ترکیبی**، **اکتشاف ریاضی و روش تدریس ریاضیات** نوشته است، و به جرأت می‌توان او را به عنوان «پدر و مؤسس تأکید جدید بر حل مسأله و تأثیر عظیم آن در آموزش علوم ریاضی»، خواند.

ب) **شونفیلد** که خود، از شاگردان پولیا به حساب می‌آید، نقش بزرگی در شناسایی بیش‌تر پولیا به جامعه‌ی ریاضی و هم‌چنین، تأثیر عظیمی در بازشناسی روش حل مسأله و رهیافت‌های حل مسأله داشته است. او مقالات و کتاب‌های زیادی درباره‌ی حل مسأله‌ی ریاضی و تحقیق در آموزش ریاضی دارد که تعدادی از آن‌ها را می‌توان در منابع همین مقاله مشاهده کرد. شونفیلد که خود را وامدار کارهای پولیا می‌داند، به تأسی از نیوتن، اظهار می‌دارد که «اغلب گفته می‌شود هر شخصی

وقتی می‌تواند مسافت دوری را ببیند که بر شانه‌ی غولی ایستاده باشد. در حقیقت، ما اکنون بر بالای تلی از غول‌ها ایستاده‌ایم. ما از فراز شانه‌های پولیا، به منظره می‌نگریم. پولیا نیز از شانه‌های دکارت، قلمرو حل مسأله را مورد بررسی قرار داد» (۱۹۸۷، ص۲۸).

حل مسأله چیست؟

همان‌گونه که فرودنتال (۱۹۸۲)، اظهار می‌دارد، «معنای مسأله، حل مسأله و مسأله حل کردن در آموزش ریاضی، با آن‌چه که در ریاضیات وجود دارد، متفاوت است» (نقل از گویا، ۱۳۸۰). مسأله از دید پولیا (۱۹۶۲)، عبارت است از «ضرورت جست‌وجوی آگاهانه‌ی وسیله‌ای مناسب برای رسیدن به هدفی مشخص که در بدو امر، غیرقابل دسترس می‌نماید، و حل مسأله به معنای پیدا کردن این وسیله است» (ص۲۰۶).

هم‌چنین، پولیا(۱۹۶۲) می‌افزاید که «حل مسأله، موقعیتی است که تنها عقل می‌تواند به آن دست یابد و عقل هم هدیه‌ای است که در انسان وجود دارد. به گفته‌ی ویلیام جیمز؛ حل مسأله عبارت است از خود ـ ویژه‌ترین و خاص‌ترین نوع تفکر آزاد» (۱۳۸۰).

بنابراین، حل مسأله، فعالیتی انسانی است که با تفکر و ممارست به انجام می‌رسد. انسان برای رسیدن به اهداف خود در زندگی، نیازمند حل کردن مسایل عدیده‌ای است. البته رسیدن به هر هدفی را نمی‌توان به معنای «حل مسأله» دانست. مثلاً اگر دقیقاً بدانیم چگونه از یک نقطه به نقطه‌ی دیگر می‌رسیم، در این صورت، دست‌یابی به نقطه‌ی دوم، نیازمند حل مسأله نیست. ممکن است راه را به طرف هدف، قدم‌به‌قدم و همراه با آزمایش و خطا بپیماییم، یا برای رسیدن به هدف، ممکن است از قواعدی مانند «مسیری را انتخاب کنید که به نظر می‌رسد پس از یک روند مشخص، به نتیجه برسد» پیروی کنیم. چنین قاعده‌ی کلی، یک رهیافت نامیده می‌شود. رهیافت‌ها، قاعده‌های کلی هستند که اغلب، به تجربه حاصل می‌شوند و شناخت بهتر آن‌ها، نیازمند شناخت مؤلفه‌های مختلف حل مسأله است.

مؤلفه‌های حل مسأله‌ی ریاضی

چهار دسته دانش مورد نیاز برای حل مسأله که توسط شونفیلد (۱۹۸۵)، معرفی شده است، در جدول(۱) به‌طور خلاصه آمده است. (صفحه‌ی بعد)

به اعتقاد شونفیلد (۱۹۸۵)، در صورتی که شخص بخواهد رفتار حل مسأله‌ی انسانی را بررسی کند، باید به هر چهار دسته‌ی دانش که در اینجا عرضه شده است، بپردازد (ص۱۲). شونفیلد، به کسی که یاد می‌گیرد چگونه ریاضی‌گونه فکر کند، سه صفت **مطلع**[۲۷]، **منعطف**[۲۸] و **کارا**[۲۹] اطلاق می‌کند.

به‌طور نمونه، شونفیلد معتقد است که برای **مطلع شدن**، «دانش‌آموزان نیاز دارند که با حوزه‌ی وسیعی از فنون عملی حل مسأله که با عنوان **رهیافت‌ها** شناخته می‌شوند، آشنا شوند» و برای **کارآ شدن**، می‌بایست آموزش ببینند که چگونه منابع را در ترتیب قرار گرفتنشان مدیریت کنند.

بنابراین، در هنگام تدریس حل مسأله، هم شناخت همه‌جانبه‌ی دانش رهیافت‌های مسأله حل کن و چگونگی به‌کارگیری آن‌ها در جریان حل مسأله‌ی واقعی، و هم تجزیه و تحلیل رفتار حل مسأله برای آشنایی با چگونگی استفاده از مهارت‌های کنترلی و اجرایی حل کننده‌ی مسأله، ضروری است. از سوی دیگر، منابع یعنی مجموعه‌ی دانشی که فرد را در موقعیت‌های عملی حل مسأله‌ی ریاضی توانا می‌کند، باید شناسایی شده و به وی، یادآوری گردند. هم‌چنین، باورهای شخص نسبت به ریاضی و حل مسأله‌ی ریاضی، باید مورد تجزیه و تحلیل قرار گیرند. این باورها، که می‌توان آن‌ها را قرائت‌های مختلف از ماهیت ریاضی و حل مسأله‌ی ریاضی دانست، الزاماً درست نیستند. اما در عین حال، شاکله‌ی ذهن ریاضی فرد را تشکیل می‌دهند.

بنابراین، شخص چه بخواهد اجرای حل مسأله را شرح دهد و چه بخواهد آن را تدریس کند، طبق نظر شونفیلد (۱۹۸۵، ص۱۴)، ناچار است که موضوعات زیر را، مورد بررسی قرار دهد:

■ هرگونه اطلاعات ریاضی که مسأله حل‌کن‌ها درک می‌کنند یا درک نمی‌کنند، و ممکن است به مسأله مرتبط شود (منابع)؛

■ تکنیک‌هایی که برای ایجاد پیشرفت در حل مسأله، ضروری هستند (رهیافت‌ها)؛

■ روشی که به واسطه‌ی آن، مسأله حل‌کن‌ها، اطلاعات در دسترس خود را مورد استفاده قرار می‌دهند یا به تشخیص خود، از آن‌ها، استفاده نمی‌کنند (کنترل)؛

جدول۱ . دسته‌های دانش مورد نیاز برای حل مسأله‌ی ریاضی [منبع : شونفیلد (۱۹۸۵)، ص۱۵]

۱ . **منابع** : دانش ریاضی که شخص در ارتباط با مسأله‌ی داده شده، دارا می‌باشد .	۱-۱ . حقایق؛[۳۰] ۱-۲ . دانش شهودی و غیر رسمی؛[۳۱] ۱-۳ . رویه‌های الگوریتمی؛ ۱-۴ . رویه‌های غیر الگوریتمی ساده (روتین)؛ ۱-۵ . دانش موضوعی[۳۲] راجع به قواعد مورد توافق جامعه‌ی ریاضی .
۲ . **رهیافت‌ها** : راهبردها و فنونی جهت ایجاد روش‌هایی برای مسایل ناشناخته یا غیر استاندارد، هم‌چنین، قواعدی مشخص برای حل ثمربخش مسأله .	۲-۱ . رسم شکل؛ اختصاص عدد یا نماد مناسب؛ ۲-۲ . بهره گرفتن از مسایل مرتبط؛ ۲-۳ . صورت‌بندی مجدد و کار روی مسأله و برگشت به عقب؛ ۲-۴ . آزمون و وارسی روش‌ها .
۳ . **کنترل** : تصمیمات عمومی راجع به گزینش و به کارگیری منابع و رهیافت‌ها .	۳-۱ . طرح نقشه؛ ۳-۲ . بازنگری و ارزیابی؛ ۳-۳ . تصمیم‌گیری؛ ۳-۴ . اعمال فراشناختی آگاهانه .
۴ . **نظام‌های باوری**[۳۳] : «جهان‌بینی ریاضی[۳۴]» شخص درباره‌ی :	۴-۱ . خود؛ ۴-۲ . محیط؛ ۴-۳ . موضوع؛ ۴-۴ . ریاضی .

■ دیدگاه‌های ریاضی فرد، که کمک می‌کنند تا دانش ذکر شده در سه دسته‌ی قبل، مشخص شوند (نظام باورها) .

پس در تدریس حل مسأله، **نخست** باید بدانیم که مسأله حل‌کن، با چه **ابزاری** شروع می‌کند . این ابزار، **فضای اولیه‌ی تجسس**[۳۵] فرد را تشکیل می‌دهند . **دوم** باید بدانیم او از چه روش‌ها و فنونی برای یافتن راه‌حل و جواب، کمک می‌گیرد . **سوم** از روند و چگونگی کنترل منابع و فنون در یافتن جواب مسأله توسط فرد، آگاهی یابیم و **سرانجام**، سیاهه‌ای از آن‌چه را که فرد می‌داند، باور دارد، یا گمان می‌کند که درست است، داشته باشیم . زیرا ضروری است بدانیم که فرد چگونه اطلاعات را سازمان‌دهی و ذخیره کرده است و آن اطلاعات، چگونه برای وی، قابل حصول است . به همین دلیل است که «برای بحث کردن راجع به انجام حل مسأله‌ی انسانی به جای معرفت‌شناسی انتزاعی ریاضی[۳۶]، باید معرفت‌شناسی تکوینی[۳۷] فرد را مورد توجه قرار دهیم» (شونفیلد، ۱۹۸۵) .

شونفیلد(۱۹۸۵) در ادامه، سه دسته‌ی نخست از دسته‌های دانش مورد نیاز برای حل مسأله را برای توصیف چگونگی اجرای حل مسأله‌ی ریاضی کافی می‌داند . در واقع این سه مؤلفه از حل مسأله برای بررسی نحوه‌ی ارایه‌ی راه حل مسأله کفایت می‌کند و مؤلفه‌ی چهارم، نمود ظاهری در فرایند حل نداشته و به راحتی قابل مطالعه نیست .

«**منابع**؛ حقایق و رویه‌هایی را که به طور بالقوه، برای مسأله‌حل‌کن قابل دسترسی‌اند، شرح می‌دهد . **رهیافت‌ها**، روشی را برای به کار گرفتن آن منابع در حد امکان، فراهم می‌آورد و **تصمیمات کنترلی**، کارآیی حقایق، رهیافت‌ها و راهبردهای مورد استفاده را تعیین می‌کنند» (شونفیلد، ۱۹۸۵؛ ص۳۴) .

با توجه به تمرکز مقاله بر رهیافت‌ها، به چیستی آن‌ها می‌پردازیم.

چیستی رهیافت

رهیافت، معادل کلمه‌ی لاتینی Heuristics است و به نظر می‌رسد که با توجه به شکل و معنی کلمه، اسم جمع مکسر است و s انتهایی آن، صرفاً نشانه‌ی جمع نیست.

Heuristic در فرهنگ لغات آکسفورد (۲۰۰۴)، یک صفت معرفی شده است که می‌توان آن را معادل راهیابانه یا راهیابی ترجمه کرد. طبق توضیح فرهنگ لغات آکسفورد (۲۰۰۴)، «تدریس یا آموزش راهیابانه، تدریسی است که شما را به یادگیری از طریق کشف چیزهایی برای خودتان، ترغیب می‌کند.»

اما Heuristics به عنوان یک اسم معرفی شده که عبارت است از «روشی برای حل مسایل از طریق یافتن راه‌های عملی یا پرداختن به آن‌ها و یادگیری از تجارب گذشته».

باطنی در فرهنگ معاصر، Heuristic را به عنوان یک صفت اکتسابی ـ یا رفتاری یا تجربی آزمایشی ـ و Heuristics را به عنوان یک اسم، **روش اکتشافی یا روش یافتاری**، ترجمه کرده است.

بالاخره، **فرا رهیافت**[38] واژه‌ی جدیدی است که در مورد شناسایی بهتر رهیافت‌های حل مسأله، بحث می‌کند.

با این حال، شونفیلد (۱۹۸۵) رهیافت‌ها را قواعدی تجربی برای ساختن روش‌هایی در موقعیت‌های دشوار می‌داند. از این منظر، کار مسأله حل‌کن ریاضی را می‌توان با کار یک شطرنج‌باز مقایسه کرد. یک شطرنج‌باز[39] در یک بازی شطرنج، قبل از انجام هر حرکت، با یک مسأله روبه‌رو می‌شود و آن، گذر از یک موقعیت (پوزیسیون) مشخص به موقعیتی برتر، به گونه‌ای است که مسیر آینده‌ی بازی را با ترکیبی برنده، حفظ کند. انجام این کار، بستگی به ترکیب مهره‌ها، پیچیدگی موقعیت و خبرگی بازیکن دارد. بازیکن خبره، به کمک راهبردهایی که به تجربه آموخته است، می‌تواند جوابی قابل قبول برای آن موقعیت بیابد و بازیکن مبتدی، برای رسیدن به آن مهارت، هم باید با بازی بیش‌تر، تجربه‌ی کافی کسب کند و هم با استفاده از راهبردهای خبرگان، مهارت خود را افزایش دهد.

یکی از اهداف اصلی آموزش ریاضی، ارتقای توانایی اندیشیدن فرد است. اما اندیشه ی ریاضی را نباید یک اندیشه ی صوری به حساب آورد. اندیشه ی ریاضی، تنها بر اصول، تعریف ها و اثبات های دقیق استوار نیست، بلکه چیزهای دیگری را هم دربر می گیرد. یادگرفتن روش های کشف یا روشن کردن مضمون ریاضی یک موقعیت مشخص، استفاده از شباهت ها، به کار بردن استقرا، و مانند این ها، همگی در شکل دهی اندیشه ی ریاضی فرد، دارای اهمیت ویژه ای هستند

در واقع، رهیافت‌ها چنین نقشی را در حل مسایل ریاضی دارند. مسأله حل‌کن‌های خبره، به مدد تجربه‌ی ریاضی خود، رهیافت‌ها و راهبردهایی را برای انواع مختلفی از مسایل، اندوخته‌اند. آن‌ها این رهیافت‌ها را، یا خود کشف کرده‌اند که در این صورت گاه قابل بیان و یا آموزش نیستند، یا از دیگران آموخته‌اند. بنابراین، انواع مختلفی از رهیافت‌ها را می‌توان جمع‌آوری کرد و به دانش‌آموزان آموزش داد تا در صورت نیاز، آن‌ها را به کار گیرند.

به اعتقاد پولیا (۱۹۴۵)، «راهیابی به معنای Heuristics یا Heurestic، نام شاخه‌ای از تحقیق در منطق یا فلسفه یا روان‌شناسی بوده که حدود آن، به خوبی تحدید نشده و کمتر به صورت تفصیلی از آن سخن رفته است... هدف راهیابی، تحقیق در روش‌های اختراع و اکتشاف است» (ص ۱۵۷).

به همین دلیل، پولیا، **کتاب چگونه مسأله را حل کنیم** را، کوششی برای زنده کردن راهیابی به صورت نوین می‌داند و اضافه می‌کند؛ «راهیابی نوین در آن می‌کوشد تا فرایند حل مسایل و مخصوصاً عملیات ذهنی و عقلی سودمند را در این فرایند چنان‌که شایسته است، قابل فهم سازد» (۱۵۷). او عقیده دارد که «برای تحقیق جدی در راهیابی، باید زمینه‌های منطقی و روان‌شناختی آن در نظر گرفته شود، و در این پژوهش، آن‌چه نویسندگان قدیمی هم‌چون پاپوس، دکارت، لایب نیتس و بولتسانو در این خصوص گفته‌اند، نباید مورد غفلت قرار گیرد.»

علاوه بر این، شونفیلد (۱۹۷۹)، **رهیافت** را یک حدس یا راهبرد کلی مستقل از موضوع می‌داند که به شخص کمک می‌کند تا به منابع خود دست یابد، آن‌ها را درک کند یا با شایستگی، آن‌ها را در حل مسایل، نظم و ترتیب بخشد. بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که **رهیافت‌ها** قواعدی کلی و عمومی هستند که مختص یک موضوع یا شرایط مشخص نیستند. با این حال، هرگاه رهیافت‌ها را به طور مشخص‌تر بیان کنیم، و برای مسایل ویژه‌ای به صورت عینی‌تر به کار بریم، آن‌ها به **راهبردها**[۴۰] تقلیل می‌یابند. بدین معنی، یک **رهیافت**، ترکیبی از چند **راهبرد** حل مسأله است. اما گاهی در تعریف این واژه‌ها نیز با تناقض‌هایی مواجه می‌شویم. مثلاً بر خلاف تعریف شونفیلد (۱۹۷۹)، دریسکُل[۴۱] (۱۹۸۲)، رهیافت‌ها را راهبردهای دقیق‌تر حل مسأله می‌داند (ص ۷۴).

به هر حال، گاهی محققین به تساهل، **رهیافت** و **راهبرد** را به یک معنی به کار برده‌اند و در موقعیت‌های مشابه، از **رهیافت‌های حل مسأله، راهبردهای حل مسأله، راهبردهای رهیافتی و رهیافت‌های راهبردی** استفاده کرده‌اند (شونفیلد، ۱۹۸۵ و ۱۹۸۲ و ۱۹۷۹؛ دریسکُل، ۱۹۸۲؛ هاز، ۱۹۷۹).

رهیافت‌ها و فراشناخت

پژوهشگران بسیاری، تحقیق در مورد حل مسأله‌ی ریاضی را، مستلزم توجه دقیق به جنبه‌های فراشناختی رفتار دانش‌آموز دانسته و بدون این ویژگی، چنین مطالعه‌ای را ناقص و ناکارآمد می‌دانند که از آن جمله، می‌توان به شونفیلد (۱۹۷۹ و ۱۹۸۵)، لستر (۱۹۸۸)، سنتوز (۱۹۹۰) و گویا (۱۹۹۲)، اشاره کرد.

طبق یافته‌های لستر (۱۹۸۸)، «آموزش از طریق استفاده از رهیافت‌ها و مهارت‌ها، بدون توجه به جنبه‌های عاطفی[۴۲] و فراشناختی حل مسأله، نامناسب و ناقص است» (ص ۱۱۶). لستر در تحقیق خود، ضمن اشاره به مرتبط بودن مؤلفه‌های حل مسأله با یکدیگر، عامل فراشناخت را بسیار مؤثر یافت و تأکید کرد که «به هرحال، به دلیل پیوندهای بنیادین بین منابع ریاضی از جمله دانش حقایق، الگوریتم‌ها و رهیافت‌ها؛ راهکارهای کنترلی که برای هدایت کردن این منابع مورد استفاده واقع می‌شوند و نقش نظام‌های باوری، ضروری است که فراشناخت، به طور گسترده‌ای با در نظر داشتن حوزه‌های موضوعی خاص[۴۳]، مورد مطالعه قرار گیرد. به ویژه، مهم این است که فراشناخت را به میزانی که با فعالیت‌های ریاضی ارتباط دارد، مطالعه کنیم» (ص ۱۱۷). هم‌چنین، لستر (۱۹۸۸) به نقل از براون اشاره می‌کند که «این تصور غلطی است که فکر کنیم مهارت‌های فراشناختی و دیگر مهارت‌های سطوح برتر تفکر[۴۴] در فرد نسبتاً دیر حاصل می‌شوند.» به همین دلیل، لستر و همکارانش، در تحقیقی که برای بررسی آموزش حل مسأله انجام شد، دانش‌آموزان پایه‌ی هفتم (دوم راهنمایی) را مورد مطالعه قرار دادند و تحقیق خود را بر دو فرض زیربنا نهادند:

الف) فرایندهای شناختی، بسیاری اوقات در حوزه‌های موضوعی خاص، شکل می‌گیرند؛

ب) یک تعامل پویا بین مفاهیم ریاضی و فرایندهایی که در حل مسایل مرتبط با آن مفاهیم مورد استفاده واقع می‌شوند، وجود دارد. یعنی، فرایندهای کنترلی و آگاهی از فرایندهای شناختی به طور هم‌زمان، با توسعه‌ی درک مفاهیم ریاضی، رشد می‌یابند.

از این رو، یادگیرندگان به شرطی می‌توانند توانایی‌های ایجاد شده در فرایند حل مسأله‌ی خود را حفظ کنند و از آن استفاده نمایند که به جنبه‌های فراشناختی یادگیری ایده‌های ریاضی در هر سطحی از آموزش، توجه کرده باشند. در واقع، این جنبه‌های فراشناختی یادگیری، همان چیزی است که شونفیلد (۱۹۹۱)، از آن‌ها به عنوان دانش فراشناختی نام می‌برد و معتقد است که دانش فراشناختی، به داوری‌های فرد درباره‌ی ظرفیت‌های ذهنی و رفتاری خود مربوط می‌شود و مثال‌های زیر را، نمونه‌هایی از دانش فرا شناختی دانسته است:

الف) مقدار اطلاعاتی که فرد می‌تواند بدون خطا به خاطر بسپرد؛

ب) چگونگی فهم موضوع درس ریاضی که تدریس شده است؛

ج) انواع محاسبات ذهنی که فرد می‌تواند انجام دهد؛

د) توانایی‌های فرد برای فهمیدن و به کار بردن مفاهیم ریاضی.

به همین دلیل است که گویا (۱۳۷۷) در رابطه با «نقش فراشناخت در یادگیری حل مسأله»، تأکید می‌کند که یکی از اصلی‌ترین سؤال‌ها در رابطه با تدریس حل مسأله، این بوده است که «انسان‌ها در موقع حل مسأله، دقیقاً چه می‌کنند؟»

در واقع، برای یافتن جواب به سؤال فوق، دانش نوپای فراشناخت برای اولین بار توسط فلاول(۱۹۷۳)، شکل گرفت و این واژه وارد فرهنگ روان‌شناسی شناخت‌گرا شد.

گویا (۱۹۹۲)، به طراحی روش تدریسی پرداخت که در آن، تدریس ریاضی از طریق حل مسأله و با استفاده از راهبردهای فراشناختی، نقش تعیین کننده‌ای بازی می‌کردند. به گفته‌ی وی، هدف از این مطالعه، بررسی تأثیر این نوع تدریس بر باورهای دانشجویان نسبت به ریاضی، حل مسأله‌ی ریاضی، و از همه مهم‌تر، نسبت به خودشان به عنوان یادگیرندگان ریاضی بود که این مطالعه نتایج امیدوار کننده‌ای به دنبال داشت. به‌طور نمونه، این تحقیق نشان داد که توانایی‌های فراشناختی و حل مسأله، لازم و ملزوم یکدیگرند.

آیا رهیافت‌ها را می‌توان آموزش داد؟

به جرأت می‌توان گفت هر معلمی که برای تدریس تکنیک‌های حل مسأله به دانش‌آموزان تلاش کرده باشد، مشاهده کرده است که بعضی از دانش‌آموزان، مسأله حل‌کن‌های بهتری نسبت به بعضی دیگر هستند. عده‌ای از دانش‌آموزان به سرعت یاد می‌گیرند که چگونه به حل مسایل یا اثبات قضیه‌ها بپردازند ـ حتی اگر همیشه موفق به یافتن حل یا اثبات صحیح نشوند. اما عده‌ای دیگر، قادر نیستند از عهده‌ی مسایلی برآیند که حل آن‌ها، به صورت طوطی‌وار و مکانیکی امکان‌پذیر نیست و نمی‌دانند که چگونه از عهده‌ی حل چنین مسایلی، برآیند.

چرا این تفاوت‌ها وجود دارند؟ البته، بعضی از دانش‌آموزان از دیگران سخت‌کوش‌تر و در رابطه با ریاضی، با استعدادتر هستند و توانایی‌های ریاضی بیش‌تری دارند. در واقع، تعدادی از این تفاوت‌ها را مقدار تمایل، رغبت و انگیزه به حل مسأله‌ی ریاضی شکل می‌دهد. عوامل دیگری نیز از جمله دانش پیش‌نیاز برای حل مسأله، جدیت در کار و آن‌چه از آن به عنوان «استعداد ریاضی» نام می‌برند، در افزایش توانایی دانش‌آموزان در حل مسأله دخیل هستند. مارچی (۱۹۸۰)، معتقد است که «مطمئناً در می‌یابیم که بعضی از دانش‌آموزان در حل مسأله بهتر از دیگران هستند.» (ص۳۵) و حتی بدون آموزش، بعضی از دانش‌آموزان به خوبی تأثیر قواعد و تکنیک‌های کلی حل مسأله را که در این جا با عنوان **رهیافت‌ها** از آن‌ها نام می‌بریم، می‌دانند. اما ضرورتاً، همه‌ی آن‌ها چنین توانایی ندارند. پس وظیفه‌ی نظام آموزشی و معلم است که از طریق آموزش مناسب، چنین توانایی‌هایی را در دانش‌آموزان ایجاد کنند.

معلم می‌تواند با اتخاذ روش‌های آگاهانه و مؤثر، دانش‌آموز را مسأله حل‌کن بار بیاورد. البته طبیعی است که همیشه بین توانایی‌های حل مسأله‌ی دانش‌آموزان تفاوت وجود دارد، اما آموزش می‌تواند به ارتقای توانایی‌های حل مسأله‌ی تمام دانش‌آموزان ـ چه ضعیف و چه قوی، نقش اساسی ایفا کند.

شونفیلد (۱۹۸۰) در جواب به این سؤال که «آیا می‌توان به مبتدی کمک کرد تا مانند خبره، مسأله حل کند؟» می‌گوید: «جواب، بله‌ی مشروط است!» او در توضیح این جواب اظهار می‌دارد؛ «من فکر می‌کنم امکان دارد به دانش‌آموزان، درسی داده شود که آن‌ها را قادر سازد مسأله‌های مختلفی را، از جمله مسأله‌هایی که نظیر آن‌ها در کلاس درس حل نشده است، بهتر و با توفیقی بیش‌تر از زمانی که این درس را نخوانده‌اند، حل کنند.» در عین حال، شونفیلد در این‌باره سؤالاتی را مطرح می‌کند که باید در نحوه‌ی اتخاذ رهیافت‌ها و تدریس آن‌ها، موردنظر قرار گیرد. مثلاً

- دانش‌آموز به چه اندازه رشد فکری و چه نوع معلوماتی نیازمند است تا آموزش رهیافت‌ها، برایش مفید واقع شود؟
- درک یک رهیافت، نظیر «هدف‌های فرعی تعیین کنید»، و درک نحوه‌ی استفاده از آن، مستلزم چیست؟
- علاوه بر تسلط بر هریک از رهیافت‌ها، به چه چیز دیگری نیاز است؟

نظر شونفیلد در مورد آموزش رهیافت‌ها این است که این امر، باید جدی گرفته شود. اما اگر تعداد کمی رهیافت را انتخاب کنیم و آن‌ها را در شرایط کاملاً کنترل شده‌ای تدریس نماییم، مؤثر واقع می‌شوند. علاوه بر این، توانایی به کار بردن یکایک رهیافت‌ها، کافی نیست. آن‌ها باید بدانند از هر کدام از این رهیافت‌ها، در چه جایی و چه موقع استفاده کنند. او تأکید می‌کند که می‌توانیم دانش‌آموز را با اسلوبی معقول برای خوب

حل کـردن مسأله، تجهیز کنیم و می‌توانیم پیشرفت در کنار را عملاً، نشان دهیم.

مشکل عمده‌ای که بعضی از صاحب‌نظران این امر به آن اشاره کرده‌اند این است که مدل رهیافتی پولیا، بیش‌تر توصیفی[۴۵] است تا تجویزی[۴۶]، و هر رهیافت می‌بایست به تعدادی راهبرد خاص‌تر شکسته شود تا از این طریق، تدریس آن‌ها مفید واقع شود. (هاز، ۱۹۷۹؛ شونفیلد، ۱۹۸۵؛ ستنوز، ۱۹۹۰؛ گویا، ۱۹۹۲؛ و مارتینز، ۲۰۰۴).

با این حال، پولیا (۱۹۴۵) دو خصوصیت مشترک بین رهیافت‌ها و پیشنهادات خود را **مطابقت با عقل سلیم و کلی بودن** ذکر می‌کند و می‌افزاید: «بدان جهت که از عقل سلیم برمی‌خیزند و غالباً به صورت طبیعی طرح می‌شوند، می‌توانند مستقیماً به ذهن خود دانش‌آموز نیز خطور کنند. هم‌چنین به دلیل این‌که کلی هستند، به طور ضمنی مسأله‌حل‌کن را یاری می‌دهند. بدین معنی که یک راه کلی را نشان می‌دهند و به اندازه‌ی کافی کار برای دانش‌آموز باقی می‌گذارند که خود، به تنهایی آن را انجام دهد» (ص۶).

هاز (۱۹۷۹) در نقد این نگاه توصیفی کلی به حل مسأله می‌نویسد: «مطالعات حل مسأله‌ی انسانی، اغلب به ارایه‌ی مدل‌های توصیفی منجر شده است. به نظر می‌رسد چنین مدل‌هایی، می‌توانند در صورتی که به اندازه‌ی کافی به تفصیل بیان شده باشند، فرایندها را درون موضوعات آزمون شده، ارایه دهند، و شاخه‌ی عمومی تفکر را بیان کنند. به هرحال، ابهام مدل‌های توصیفی از قبیل استفاده از مفاهیمی هم‌چون دوره‌ی تکوین یا بصیرت، آن‌ها را در تدریس حل مسأله، کم‌ارزش می‌سازد» (ص۱۳۷).

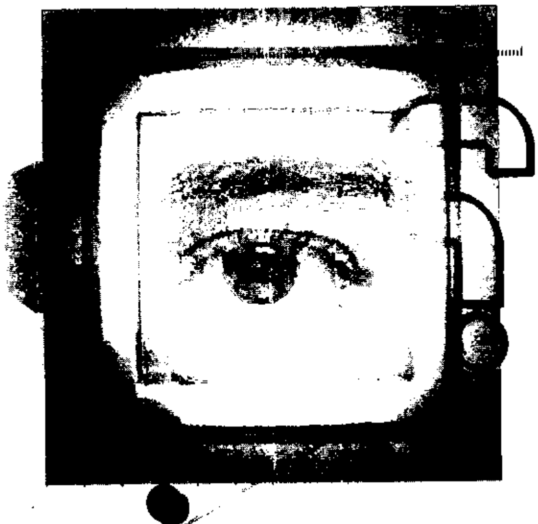
به عقیده‌ی هاز، ثمربخشی این‌گونه مدل‌های توصیفی دقیق[۴۷] و مشروح[۴۸]، با دو عامل منطقی[۴۹] و تجربی[۵۰]، محدود می‌شوند. محدودیت منطقی این است که هیچ ضمانتی وجود ندارد که یک آزمودنی، دقیقاً اعمالی مشابه با آزمودنی دیگر برای حل یک مسأله انجام دهد. محدودیت تجربی، عبارت از دشواری در اثبات آزمایشگاهی این امر است که یک آزمودنی، عملاً در حال انجام دادن فرایندهای شرح داده شده در مدل است (ص۱۳۷). درنتیجه، این عیوب مدل‌های توصیفی، مدل‌های تجویزی حل مسأله را مطلوب‌تر و مناسب‌تر می‌سازد. یک مدل تجویزی، از دستوراتی زنجیره‌ای تشکیل شده است که انجام آن‌چه را که دست‌کم شرط کافی برای دست‌یابی به یک راه‌حل است، محقق می‌سازد.

مارچی (۱۹۸۰) به نقل از لاندا (۱۹۶۹)، توضیح می‌دهد که مدل تجویزی، هم به طور دقیق رفتار آزمودنی‌ها را هدایت می‌کند و هم مثال‌هایی از چگونگی تفکر و عمل او را، هنگامی که در خلال فرایند حل با موانعی روبه‌رو می‌شود، تدارک می‌بیند. اعتبار چنین مدل‌هایی، تنها به صورت تجربی می‌توانند آزمایش شوند. یعنی این‌که به شخص اجازه داده شود تا اعمال تجویز شده به وسیله‌ی مدل را انجام دهد، سپس به مشاهده‌ی نتیجه پرداخته شود. اگر جواب حاصل شده باشد، آن‌گاه احتمال این‌که ساز و کار راه‌حل درک شده باشد، افزایش می‌یابد.

با این حال، پولیا معتقد است که تفکر رهیافتی او، یک استدلال موجه‌نما و آزمایشی[۵۱] است و هدف آن، کشف یک

راه‌حل برای یک مسأله‌ی داده شده است. این امر، بیش‌تر براساس استقرا و استنتاج شکل می‌گیرد و در تقابل آشکار با استدلال دقیق[52] است.

پولیا اولین کسی بود که راهبردهای حل مسأله را چنان توصیف کرد که می‌شد آن‌ها را تدریس کرد. البته خود وی، چنین ادعایی نکرده و هیچ وعده‌ای هم درباره‌ی نتایج احتمالی آن نداده است. ولی چگونگی بیان رهیافت‌ها توسط وی، این اندیشه را به ذهن متبادر می‌کند که می‌توان رهیافت‌ها را به دانش‌آموزان آموزش داد. در این باره، پولیا (۱۹۴۵) اظهار می‌دارد که: «معلمی که می‌خواهد قابلیت شاگردان خود را در حل مسأله رشد دهد، باید علاقه به مسأله‌ها و حل آن‌ها را در ذهن ایشان زیاد کند و فرصت کامل تقلید و تمرین برای آنان، فراهم آورد.» وی ادامه می‌دهد: «اگر معلمی بخواهد اعمال ذهنی متناظر با پرسش‌ها و فهرست پیشنهادی ما را درمیان دانش‌آموزان خود پرورش دهد، باید هرچه بیش‌تر این پرسش‌ها و پیشنهادها را برای آن‌ها، به صورت طبیعی طرح کند. علاوه بر این، وقتی مسأله‌ای را در برابر کلاس مطرح می‌کند، باید تا حدی اندیشه‌های خود را به صورتی نمایشی، برای شاگردان، مجسم سازد و همان پرسش‌ها را برای خود، مطرح سازد» (ص۷). پولیا اطمینان دارد که از برکت چنین آموزش و هدایتی در کلاس درس، سرانجام، دانش‌آموزان کاربرد صحیح رهیافت‌ها و پیشنهادها را یاد می‌گیرند و از این راه، به دانشی دسترسی پیدا خواهند کرد که شاید از دانستن هر مفهوم ریاضی خاص، اهمیت بیش‌تری داشته باشد.



تدریس از راه حل مساله، می‌تواند وضعیتی را فراهم آورد که دانش‌آموزان در یک موقعیتِ مساله‌ای، مفاهیم ریاضی را خلاقانه و فعالانه درک کنند تا بدین طریق، قدرت حل مساله‌ی خود را افزایش دهند و در حل مسایلِ پیش‌رو، به نحو قابل قبولی استدلال کنند. بنابراین، تدریس از راه حل مسأله به این معنی نیست که به سادگی مساله یا تکلیفی تهیه کنیم، عقب‌نشینی کنیم، و منتظر باشیم که جادویی رخ دهد. معلم پاسخ‌گوی ایجاد هنجار مناسب برای این نوع تدریس است

تدریس و یادگیری حل مسأله

با توجه به این که دیدگاه‌های متفاوتی نسبت به ریاضی، و به‌ویژه حل مسأله وجود دارد، تدریس حل مسأله را نیز می‌توان از رویکردهای گوناگون، مورد بررسی قرار داد. از دیدگاه افلاطونی، ریاضی یک هستی یک‌پارچه و انعطاف‌ناپذیر است که کشف‌شدنی است، و خلق‌شدنی نمی‌باشد. در حالی که از دیدگاه صورت‌گرایی هیلبرت، هیچ شیءِ ریاضی خارج از ذهن ما وجود ندارد. با این دیدگاه، شاخه‌های ریاضی به روش اصل موضوعی ساخته می‌شوند و ساخته‌ی ذهن آدمی است، [یعنی] یک بازی با قوانین واضح ـ ولی دلخواه، و با نمادهای فاقد معنی است (صال مصلحیان، ۱۳۸۲). شهودگرایان[53]، از صورت‌گراها نیز افراطی‌تر هستند و معتقدند که یک شئ ریاضی، وقتی وجود دارد که بتوانیم با یک روش معین، و طی چند مرحله، آن را از روی اعداد طبیعی بسازیم.

به گفته‌ی سنتوز (۱۹۹۰)، در کنار این دیدگاه‌های مشهور فلسفی، ارنست[54] (۱۹۸۹)، به «دیدگاه حل مسأله» اشاره می‌کند که بر طبق آن، «ریاضیات یک محصول پایان‌یافته نیست، بلکه یک موضوع پویا است که دائماً در حال گسترش است و دوباره در موقعیت‌های جدید حل مسأله، بروز می‌یابد.» بنابه عقیده‌ی ارنست (۱۹۸۹)، دیدگاه‌های مختلف ریاضی، انواع مختلفی از آموزش را معرفی می‌کنند. ارنست اظهار می‌دارد که دیدگاه حل مسأله به ریاضی، می‌تواند ما را به

پذیرش روش‌ها و رویه‌های مختلفی که دانش‌آموزان برای انجام تکالیف ریاضی انتخاب می‌کنند، هدایت کند. وی در مقابل، به دیدگاه افلاطونی ایستا یا ابزارگرای[۵۵] ریاضی اشاره می‌کند که می‌تواند معلم را به پافشاری بر وجود یک روش صحیح ساده برای حل هر مسأله، راهبری کند. در صورتی که تأکید و تمرکز بر فعالیت‌های مبتنی بر حل مسأله در کلاس درس، حاکی از پذیرش دیدگاهی است که در آن، به بحث گذاشتن مسایل ریاضی، در فهمیدن و توسعه‌ی ایده‌ها و مفاهیم ریاضی، ضروری است.

بنابراین، بسته به دیدگاه‌هایی که نسبت به **ریاضی و حل مسأله** وجود دارد، رویکردهای متفاوتی نیز نسبت به این دو مقوله شکل گرفته است. از سوی دیگر، **حل مسأله اصطلاحی** است که در موضوعات گوناگونی مورد استفاده قرار گرفته است و می‌تواند معانی متفاوتی به خود بگیرد. به عقیده‌ی شونفیلد (۱۳۶۸)، پیشرفت حل مسأله را به دشواری می‌توان منحصر به آموزش ریاضی دانست و هر پیشرفتی در این زمینه، کم و بیش جنبه‌ی عام خواهد یافت (ص ۱۴۶). حل مسأله در علومی هم‌چون شیمی، فیزیک، هوش مصنوعی، و کامپیوتر نیز رواج فراوانی یافته است. سنتوز (۱۹۹۰) به نقل از برانکا[۵۶] (۱۹۸۰)، در ارتباط با استفاده از حل مسأله در آموزش ریاضی، سه تعبیر زیر را از هم متمایز می‌سازد:

الف) حل مسأله به عنوان یک **هدف**؛

ب) حل مسأله به عنوان یک **فرایند**؛

ج) حل مسأله به عنوان یک **مهارت**.

سنتوز (۱۹۹۰) توضیح می‌دهد که از دیدگاه برانکا، تعبیر حل مسأله به عنوان یک **هدف**، بر پایه‌ی این شناخت است که حل مسأله، فعالیت اصلی در توسعه و درک ریاضی است، زیرا یادگیری چگونه مسأله حل کردن، علت اصلی مطالعه‌ی ریاضی است. اما در تعبیر حل مسأله به عنوان یک **فرایند**، توجه اصلی به روش‌ها و رویه‌های حل مسأله است. بالاخره، کاربردهای استفاده شده توسط دانش‌آموزان، به عنوان یک **مهارت** تعبیر شده و بر مشخص کردن گونه‌های به‌خصوصی از مسایل، حوزه‌های محتوایی خاص و فنون ویژه‌ای اشاره دارد که در حل مسأله مورد استفاده قرار می‌گیرند.

علاوه بر این‌ها، شرودر و لستر (۱۹۸۹)، در یک تقسیم‌بندی مشابه، سه رویکرد متمایز به حل مسأله را در تدریس ریاضی، تشریح کرده‌اند:

الف) تدریس درباره‌ی حل مسأله[۵۷]؛ به اعتقاد شرودر و لستر، معلمانی که درباره‌ی حل مسأله تدریس می‌کنند، مدل حل مسأله‌ی پولیا را برجسته می‌کنند و بر آن تأکید می‌نمایند. هم‌چنین، دانش‌آموزان **رهیافت‌ها یا راهبردهایی** را آموزش می‌بینند که می‌توانند خود، آن‌ها را انتخاب کنند، یا باید در طرح‌ریزی و حل مسأله، آن‌ها را به کار برند. در واقع، در بهترین حالت، تدریس درباره‌ی حل مسأله، شامل تجربه‌هایی با مسایل واقعی است. که البته این امر، مستلزم بحث‌های صریح فراوان و تدریس درباره‌ی مسایلی است که در کلاس حل می‌شوند.

گویا (۱۹۹۲) این رویکرد را، شبیه **حل مسأله به عنوان یک مهارت** می‌داند که در آن، محتوای ویژه‌ای از یک مسأله، و تعدادی از مسایل مشابه و روش‌هایی برای هدایت به سمت حل، درنظر گرفته می‌شوند. وی در ادامه، از قول استانیک[۵۸] و کیل پاتریک[۵۹] (۱۹۸۸)، اضافه می‌کند که «حل مسأله، به عنوان یک مهارت، به جای این که به دست‌یابی به دیگر اهداف یا نتایج اجتناب‌ناپذیر مطالعه‌ی ریاضی بنگرد، حل مسأله را به طور مستقل، به عنوان یکی از هدف‌های برنامه‌ی درسی ریاضی، شایسته‌ی توجه می‌بیند. در چنین رویکردی به حل مسأله، معلم معمولاً یک مسأله را حل می‌کند و آن‌گاه، از طریق مشخص کردن چهار مرحله‌ی حل مسأله در مدل پولیا، راجع به فرایند حل، صحبت می‌کند.»

ب) تدریس برای حل مسأله[۶۰]؛ در این نوع تدریس، معلم بر راه‌هایی تمرکز می‌کند که در آن‌ها، ابتدا، یک موضوع ریاضی تدریس می‌شود، به گونه‌ای که آن موضوع ریاضی، بتواند هم در حل مسایل معمولی و هم غیرمعمولی، به کار رود. علاوه بر این، معلمی که ریاضی را برای حل مسأله تدریس می‌کند، نسبت به توانایی‌های دانش‌آموزان در انتقال مطالب آموخته شده از موقعیت یک مسأله به موقعیت‌های دیگر، علاقه‌مند است. گویا (۱۹۹۲)، این رویکرد را شبیه تعبیر **حل مسأله به عنوان هدف** می‌داند که در آن، معلم معمولاً محتوای پایه‌ای ریاضی را، قبل از کاربرد آن محتوا در یافتن راه‌حل‌های مسایل متعدد، ارایه می‌دهد. به گفته‌ی وی، «فرض اساسی این دیدگاه آن است که دانش‌آموزان باید ابتدا محتوای ریاضی را مطالعه کنند، آن‌گاه مسایل علمی را حل نمایند» (ص ۱۶). طبق نظر گویا (۱۹۹۲)، این دیدگاه، تقریباً همان رویکرد استانیک و کیل پاتریک به حل مسأله است که از آن، به عنوان **زمینه**[۶۱] نام

برده‌اند. آن‌ها، حل مسأله را به پنج زیر موضوع زیر تقسیم می‌کنند که همه‌ی این زیرموضوع‌ها، برای دست‌یابی به هدف متعالی حل کردن مسأله معنا پیدا می‌کنند:

الف) حل مسأله به عنوان توجیه[۶۲]؛

ب) حل مسأله به عنوان انگیزش[۶۳]؛

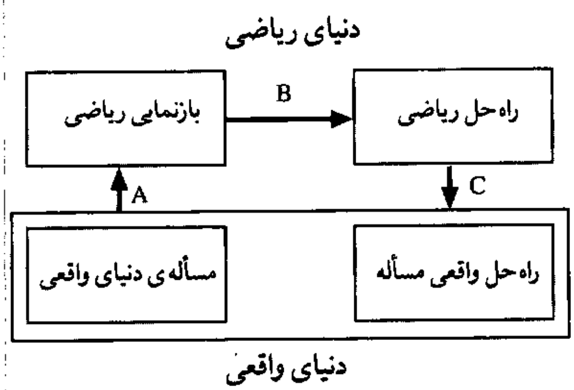
ج) حل مسأله به عنوان بازآفرینی[۶۴]؛

د) حل مسأله به عنوان موتور حرکت[۶۵]؛

ه) حل مسأله به عنوان تمرین عملی.[۶۶]

ج) تدریس از راه حل مسأله[۶۷]؛ در این رویکرد، مسایل، نه‌تنها به عنوان ابزاری برای یادگیری ریاضی، باارزش تلقی می‌شوند، بلکه به عنوان وسیله‌ای حیاتی برای یادگیری ریاضی، به‌حساب می‌آیند. در این رویکرد به حل مسأله، «تدریس یک موضوعِ ریاضی، با یک موقعیت مسأله‌ای که جنبه‌های کلیدی موضوع را در بر دارد، شروع می‌شود و تکنیک‌های حل مسأله ریاضی از حالت جواب‌های معقول[۶۸]، به مسایل معقول متحول می‌شوند.» به اعتقاد شرودر و لستر (۱۹۸۹)، «یادگیری ریاضی بدین روش، می‌تواند به عنوان نهضتی[۶۹] از عینیت[۷۰] به تجرید تلقی شود. یعنی، مسأله‌ای از جهان واقعی به عنوان مثالی از مفهوم یا فن ریاضی انتخاب می‌شود و به بازنمایی نمادین آن منتهی می‌گردد. آن‌ها، مدل زیر را برای تجسم فرایند حل مسأله درتدریس ریاضی از راه حل مسأله، ارایه می‌دهند (شکل ۲).

این مدل، معرف دو سطح، یا دو دنیا است؛ یکی دنیای واقعی اشیاء، مسأله‌ها و کاربردهای ریاضی، و دیگری، دنیای مجردِ نمادها، اعمال و فنون ریاضی است.



شکل ۲. مدل ساده‌ای از فرایند حل مسأله‌ی ریاضی

در این مدل، فرایند حل مسأله دارای سه گام است: گام اول با مسأله‌ای شروع می‌شود که در قالب جملاتی از واقعیت فیزیکی روزانه، قرار دارد. مسأله حل‌کن ابتدا در جهت A، مسأله را به جملات انتزاعی ریاضی ترجمه می‌کند. یعنی، یک بازنمایی ریاضی برای مسأله پیدا می‌کند. سپس از طریق این بازنمایی (در جهت B) به یک حل ریاضی برای مسأله می‌رسد. سرانجام آن راه‌حل را از طریق C، به مسأله‌ی اصلی برمی‌گرداند.

کیل پاتریک (۱۹۸۸) چنین دیدگاهی را **حل مسأله به عنوان هنر** پویا و رو به رشد می‌بیند که در آن، محتوای ریاضی از طریق مباحثات و عرضه‌ی مسایل ویژه، ارایه می‌شود. برای کسانی که این دیدگاه را برمی‌گزینند، نتیجه‌ی نهایی به اندازه‌ی روش‌ها، فرایندها، راهبردها و رهیافت‌های مورد استفاده به وسیله‌ی حل‌کننده‌ی مسأله، اهمیت ندارد. گویا (۱۹۹۲)، عقیده دارد که رویکرد حل مسأله‌ی پولیا، منطبق بر چنین دیدگاهی است، در حالی که شرودر و لستر (۱۹۸۹) معتقدند که تدریس درباره‌ی حل مسأله، مدل پولیا را برجسته می‌کند که این دو برداشت، دو قرائت متفاوت از رویکرد پولیا به حل مسأله‌ی ریاضی است.

به طور خلاصه، **تدریس از راه حل مسأله**، می‌تواند وضعیتی را فراهم آورد که دانش‌آموزان در یک موقعیت مسأله‌ای، مفاهیم ریاضی را خلاقانه و فعالانه درک کنند تا بدین طریق، قدرت حل مسأله‌ی خود را افزایش دهند و در حل مسایلِ پیش‌رو، به نحو قابل‌قبولی استدلال کنند. بنابراین، **تدریس از راه حل مسأله** به این معنی نیست که به سادگی مسأله یا تکلیفی تهیه کنیم، عقب‌نشینی کنیم، و منتظر باشیم که جادویی رخ دهد. معلم پاسخ‌گوی ایجاد هنجار مناسب برای این نوع تدریس است. برای رسیدن به این هدف، معلم باید با دقت و مهارت، بر فرایند قبل، ضمن، و بعد از حل مسأله، نظارت داشته باشد.

تمرکز ما در ادامه‌ی این مقاله، بر رویکرد اول، یعنی آموزش حل مسأله است. برای افزایش ثمربخشی آموزش حل مسأله و بهبود توانایی حل مسأله‌ی دانش‌آموزان، دریسکُل (۱۹۸۲) معتقد است که «معلمان، باید حل مسأله را با سه قانون تدریسی[۷۱] **مدل‌سازی حل مسأله[۷۲]**، **تدریس مستقیم[۷۳]** و **تسهیل فرایند حل مسأله[۷۴]**، تلفیق کنند. یعنی معلمان، باید بعضی از جنبه‌های حل مسأله را مدل‌سازی کنند؛ به طور کاملاً مستقیم، جنبه‌هایی از حل مسأله را تدریس کنند؛ و سرانجام، جنبه‌هایی از حل مسأله را تسهیل کنند» (ص ۷۴).

بنابراین، طبق توصیه‌های دریسکُل، در آموزش رهیافت‌ها می‌توان موارد زیر را درنظر گرفت:

■ بعضی از جنبه‌های حل مسأله، نباید به طور کامل تدریس شوند، بلکه باید از طریق رویارویی دانش‌آموزان با مسأله‌ها و از طریق تعامل و همفکری آن‌ها با معلمان و همکلاسی‌های خود، بعضی از جنبه‌های حل مسأله پرورش یابند. طراحی هدفمند، جنبه‌ای از حل مسأله است که با این روش، پرورش می‌یابد.

■ بعضی از جنبه‌های مسلم و قطعی حل مسأله، برای تدریس مناسبند. مثلاً اگر قرار است کاربرد یک رهیافت را در حل یک مسأله‌ی مشخص بیان کنیم، لازم است نحوه‌ی فراخوانی آن رهیافت و چگونگی به کار گرفتن آن را در حل مسأله، بازگو نماییم.

■ معلم باید حل مسأله را برای دانش‌آموزان خود مدل‌سازی کند تا آن‌ها ببینند که معلمشان چگونه به حل کردن یک مسأله مشغول می‌شود و چگونه راهبردها را برای دست‌یابی به حل مسأله، فعالانه به خدمت می‌گیرد.

تدریس حل مسأله از طریق رهیافت‌ها

محققان آموزش ریاضی درباره‌ی تدریس حل مسأله و آموزش رهیافت‌ها، نظراتی ابراز داشته‌اند که گاه روشنگر و امیدوارکننده و گاه مأیوس‌کننده بوده‌اند. نظرات امیدوارکننده ناشی از نقش رهیافت‌ها در بهبود توانایی حل مسأله‌ی ریاضی در دانش‌آموزان، ثمربخش بودن آموزش رهیافت‌ها و حل مسأله، و مفرح بودن چنین عمل آموزشی هم برای معلم و هم برای دانش‌آموز است. اما نظرات مأیوس‌کننده (هم‌چون نظرات مارچی، ۱۹۸۰ و نگرانی‌های شونفیلد، ۱۳۶۸)، بیش‌تر ناشی از زمان‌بر بودن این نوع تدریس و آموزش، عدم‌استقبال بعضی از مسئولان و یادگیرندگان از این روش، ناکارآمد بودن این روش در کوتاه مدت، تأثیرپذیرفتن آن از عوامل عدیده‌ای از جمله دسته‌های مختلف دانش (منابع، مراقبت (کنترل)، و نظام‌باوری)، ناکافی بودن دانش فراشناختی و عوامل انگیزشی ـ پرورشی، فرهنگی ـ اجتماعی، دشواری ارزشیابی از این نوع توانایی‌ها و پیچیدگی رهیافت‌ها بوده است. یافته‌های تحقیق پایان‌نامه‌ی نگارنده نشان می‌دهد که برای رسیدن به نتیجه‌ی مطلوب در این نوع آموزش، و برای این‌که به دانش‌آموزان کمک کنیم که توانایی حل مسأله‌ی خود را بهبود بخشند، نخست باید آن‌ها را نسبت به ضرورت داشتن آمادگی کافی برای شروع حل مسأله آگاه کنیم. بررسی دانش موضوعی و دانش پیش‌نیاز برای موضوع مورد تدریس، در انگیزه‌ی آن‌ها برای اقدام به حل مسأله ضروری است. دوم، باید به آن‌ها کمک کنیم تا دچار اضطراب نشوند، زیرا چنین اضطرابی، یک عامل بازدارنده در فرایند حل مسأله، و استفاده از رهیافت‌هاست. کاهش اضطراب از طریق ایجاد فضایی دوستانه و مشارکتی در کلاس درس و کاهش تأثیر نمرات امتحانات رسمی در ارزشیابی از موضوع درسی امکان‌پذیر است.

شونفیلد (۱۹۸۰)، در تحقیق خود مسایل عدیده‌ای را به آزمودنی‌های خود داد که باید از رهیافت‌های مشخصی در حل آن‌ها کمک می‌گرفتند. مثلاً او چهار مسأله مطرح کرد که با استفاده از رهیافت «حل مسأله‌ی مشابه ساده‌تر»، به جواب می‌رسیدند. شونفیلد در این مورد می‌گوید: «با این حال بعید است دانش‌آموزی (دانشجویی) که در به کار بردن این رهیافت تجربه ندارد، بتواند در بیش‌تر این مسأله‌ها، با موفقیت از آن استفاده کند، و یکی از علت‌های آن، این است که در هر مسأله، باید رهیافت را به گونه‌ای متفاوت به کار برد.»

شونفیلد (۱۹۸۰) در تحقیق خود، به دو گروه از دانشجویان تدریس یکسانی ارایه داد، با این تفاوت که به گروه نوآور، به‌طور صریح‌تر رهیافت‌ها و راهبردها را ارایه داد و مرتباً از آن‌ها می‌خواست که به فهرست آن‌ها، نگاه کنند. نتایج این تحقیق، تفاوت معنی‌داری را در حد $\frac{۱}{۳۵}$، در عملکرد دو گروه نشان داد، و هریک از دانشجویان نوآور از دانشجویان دیگر پیشی گرفتند. بنابراین، کاربرد صریح رهیافت‌ها، تفاوت‌هایی را بین دو گروه به‌وجود آورد. در جای دیگری، شونفیلد در یک آزمایش مهارت انتگرال‌گیری به نتیجه‌ی مشابه رسید و نتیجه‌گیری کرد که آموزش رهیافت‌ها، توانایی دانش‌آموزان را در حل مسأله افزایش می‌دهد.

هم‌چنین، روزدار (۱۳۸۳)، نشان داد که تقریباً همه‌ی رهیافت‌ها در تدریس، باید به قسمت‌های ویژه‌تر یا راهبردها شکسته شوند. به همین ترتیب، این رهیافت‌ها، بر تقسیم یک مسأله‌ی پیکارجو به قسمت‌های کوچک‌تر، کمک می‌کند. بدین ترتیب، یک مسأله‌ی کلی، دگرگون شده و دوباره ترکیب می‌شود. شکستن یک رهیافت کلی به راهبردهای خاص‌تر، رهیافت‌ها را تدریس‌پذیرتر کرده، ارزشیابی و سنجش آن‌ها را

آسان‌تر نموده و بالأخره توانایی‌های فراشناختی و خود-نظمی‌های دانش‌آموزان را افزایش می‌دهد؛ توانایی‌هایی که به گفته‌ی مارتینز (۲۰۰۴)، برای هر فعالیت گسترده، به‌ویژه حل مسأله، ضروری است. زیرا مسأله‌حل‌کن نیاز دارد که از درستی فعالیت‌ها، هدف کلی و خرده‌هدف‌ها، راهبردهای مورد استفاده برای دست‌یابی به آن هدف‌ها و ثمربخشی راهبردهای مورد استفاده در حین حل مسأله، آگاه شود.

در ارتباط با اهمیت آموزش رهیافت‌ها، هربرت سایمن، از پیشکسوتان معروف حل مسأله‌ی انسانی، رهیافت‌ها و دانش موضوعی را «دو لبه‌ی آموزش حرفه‌ای ثمربخش» معرفی می‌کند و یادآوری می‌نماید که «قیچی‌های دولبه، هنوز هم در نوع خود، بهترین هستند!»

بالاخره، به اعتقاد شونفیلد (۱۹۹۴)، برای افزایش توانایی‌های حل مسأله‌ی ریاضی و ارتقای یادگیری ریاضی، باید تغییراتی در برنامه‌ی درسی و در روش‌های آموزشی صورت گیرد و تمرکز بر موارد زیر، در مرکز توجه قرار گرفته شود:

■ راه‌حل‌ها، به جای به خاطر سپردن رویه‌ها؛
■ الگویابی، به جای حفظ کردن فرمول‌ها؛
■ تدوین حدسیه‌ها، به جای فقط انجام دادن تمرین‌ها (ص۳۳۵).

شونفیلد (۱۹۹۲)، تأکید می‌کند که «دانش‌آموزان، به جای آن‌که ریاضی را یک موجود صُلب، مطلق و بی‌انعطاف درنظر بگیرند، لازم است که آن را به عنوان یک دیسیپلین اکتشافی، پویا و تکاملی مطالعه کنند. در واقع، دانش‌آموزان باید تشویق شوند تا ریاضی را به عنوان یک علم ببینند نه به عنوان یک قانون. از این منظر یادگیری ریاضی، عملی اختیاری است!».

زیرنویس‌ها

* این مقاله، با همکاری زهرا گویا دانشیار دانشگاه شهید بهشتی نگاشته شده است.

1. Rules for the Direction of the Mind

قسمت‌هایی از این کتاب، با عنوان فوق، در کتاب سیر حکمت در اروپا، نوشته‌ی محمدعلی فروغی (ذکاءالملک)، آورده شده است.

۲. این ضرب‌المثل معادل (Chasing Wild Goose) یا تعقیب غاز وحشی است که شونفیلد (۱۹۸۵)، برای این موارد، از آن استفاده کرده است:

3. Dr Franz Joseph gall
4. Phrenology
5. Experimental Science of the Mind
6. Natural Causes
7. The Foundations of Science
8. Mathematical Creation
9. Graham Wallas
10. The Art of Thought
11. Saturation
12. Incubation
13. Inspiration
14. Verification
15. Dalmedico
16. Productive Thinking
17. Wertheimer
18. Psychology of Invention in the Mathematical Field
19. Jacques Hadamard
20. Monograph
21. Karl Danker
22. How to Solve It

این کتاب، با نام «چگونه مسأله را حل کنیم» برای اولین‌بار در سال ۱۳۶۲، توسط مرحوم احمد آرام به فارسی ترجمه شد.

23.Szego
24. Mathematical Discovery

این کتاب، با عنوان «خلاقیت ریاضی» برای اولین‌بار در سال ۱۳۶۴ توسط پرویز شهریاری به فارسی ترجمه شد.

25. Mathematics and Plausible Reasoning

۲۶. واژه‌ای که در ترجمه‌ای که احمدآرام از چگونه مسأله را حل کنیم کرده است، معادل Heuristics گرفته شده است و امروزه، واژه‌ی رهیافت برای این کلمه در این حوزه، متداول‌تر است.

27. Resourceful
28. Flexible
29. Efficient
30. Facts
31. Intuition and Informal Knowledge
32. Propositional Knowledge
33. Belief Systems
34. Mathematical World View
35. Initial Search Space
36. Abstract Mathamatical Epistemology
37. Genetic Epistomology
38. Metaheuristics

۳۹. لازم به ذکر است که نگارنده، شطرنج‌بازی است که تا سطح مسابقات کشوری، با بازی شطرنج آشنایی دارد.

40.Strategies
41. Driscoll
42. Affective
43. Domain-Specific
44. Higher -order Thinking
45. Descriptive
46. Prescriptive
47. Detailed
48. Precise
49. Logical
50. Empirical
51. Tentative
52. Precise
53. Constructivism
54. Ernest

55. Instrumentalist
56. Branca
57. Teaching About Problem Solving
58. G. M. A. Stanic
59. J. Kilpatrick
60. Teaching for Problem Solving
61. Context
62. Justification
63. Motivation
64. Recreation
65. Vehicle
66. Practice
67. Teaching Via Problem Solving
68. Reasonable
69. Movement
70. Concrete
71. Instructional Rules
72. Modeling Problem Solving
73. Teaching Directly
74. Facilitating

منابع انگلیسی

[1] Dalmedico, A. D. (2001); An Image Conflict in Mathematics After 1945; In Batazini U. & Dalmedico A. D. (Eds.) "***Changing Images in Mathematics from the French Revolution to the new Millennium***", Routledge, A. D. (2001).

[2] Driscoll, M. (1983); ***Research Within Reach** (Secondary School Mathematics)*, National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).

[3] Hoz, R. (1979); The Use of Heuristic Models in Mathematics Teaching; ***Journal of Mathematics-Education Science***, Vol. 10, No.1, PP. 137-151.

[4] Lester, F. K (1988); Reflection About Mathematical Problem-Solving Research; In Randall I. Ch. & Edward A. S. (Ed.) ***The Teaching and Assessing Mathematical Problem-solving***, Lawrence Erlbaum Associates; National Council Of Teachers Of Mathematics, PP: 115-124.

[5] Marchi, P. (1980); Can Heuristics Be Taught? ***Journal for the Learning of Mathematics***; PP. 35-42, FLM Publishing Co. Ltd. Montraeal, Quebec, Canada.

[6] Martines, M. (2004); ***What is Problem Solving?*** Network; www.gse.uci.edu.

[7] Santos T. L. M. (1990); College Students' Methods for Solving Mathematical Problems As a Result of Instruction Based on Problem – Solving. Unpoblished doctoral dissertation, The University of British Columbia, Canada.

[8] Schoenfeld, A. H. (1979); Explicit heuristic training as a variable in problem solving performance. ***Journal for research in mathematics education** pp*. 173-178.

[9] Schoenfeld, A. H. (1982a); ***Measure of problem-solving performance and of problem-solving instruction***; *"jornal for research in Mathematics-Education"* vol. 13, no. 1, pp. 31-49.

[10] Schoenfeld, A. H. (1982b); ***A brief and biased history of problem-solving***.

[11] Schoenfeld, A. H. (1985); ***Mathematical Problem Solving***; Academic Press.

[12] Schoenfeld, A. H. (1988a); ***when good teaching leads to bad results:*** The Disasters of "Well-Taught" Mathemtics courses pp: 144-166.

[13] Schoenfeld, A. H. (1988b); ***problem-solving in context***; *"the teaching and assessing of mathematical problem-solving"*. by Edvard A. Silver & Randall L. Carlos, NCTM. INC.

[14] Schoenfeld, A. H. (1992); ***Learning to Think Mathematically** (Problem Solving, Meta-Cognition, and Sense-Making in Mathematics)*; chapter 15 of *"The Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning"* D. Grouws; New York, Macmillan.

[15] Schoenfeld, A. H. (1994); ***What Do We Know About Curricula? Journal of Mathematical Behavior***, 13(1), pp. 55-80.

[16] Schroeder, T. I. & Lester, F. K. (1989); ***Developing Understanding in Mathematics Via Problem Solving***.

[17] Stannic, G. M. A. & Kilpatrick, J. (1988); Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum; In Edward A. Silver & Randall L. Charles (Eds.) ***The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving***, NCTM, Inc.

منابع فارسی

[۱۸] پولیا، جورج (۱۹۶۲): **خلاقیت ریاضی**: ترجمه‌ی پرویز شهریاری (۱۳۸۰)، تهران، انتشارات فاطمی، چاپ ششم.

[۱۹] پولیا، جورج (۱۹۴۵): **چگونه مسأله را حل کنیم**. ترجمه‌ی احمد آرام (۱۳۷۷)، تهران، انتشارات کیهان، چاپ چهارم.

[۲۰] حکمت، علیرضا (۱۳۵۰): **آموزش و پرورش در ایران باستان**. تهران، انتشارات کیهان.

[۲۱] روزدار، علی (۱۳۸۳). **نقش رهیافت‌ها در آموزش ریاضیات متوسطه از طریق حل مسأله**. پایان‌نامه منتشر نشده‌ی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی.

[۲۲] شونفیلد، آلن اچ (۱۹۸۰): **آموزش مهارت‌های حل مسأله**. ترجمه‌ی محمد جلوداری ممقانی (۱۳۶۷)، **مجله‌ی نشر ریاضی**، شماره‌ی ۱.

[۲۳] شونفیلد، آلن اچ (۱۹۸۷): **پولیا، حل مسأله و آموزش**. ترجمه‌ی سعید ذاکری (۱۳۶۸)، **مجله‌ی نشر ریاضی**، شماره‌ی ۲.

[۲۴] صال مصلحیان، محمد (۱۳۸۲): **مکاتب ریاضی**، **مجله‌ی نامه‌ی فلسفه**.

[۲۵] فرودنتال، هانس (۱۹۸۲): **مسایل تحقیقی در آموزش ریاضی**. ترجمه‌ی زهرا گویا و سحر ظهوری زنگنه. **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**، شماره‌ی ۶۵، صص ۵ تا ۱۱، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

[۲۶] گویا، زهرا (۱۳۷۷): **نقش فراشناخت در یادگیری حل مسأله**. **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**، شماره‌ی ۵۳، صص ۱۳ تا ۱۸، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

[۲۷] گویا، زهرا (۱۳۸۰): **واقعاً این همه هیاهو در مورد فراشناخت چیست؟** **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**، شماره‌ی ۶۰-۵۹، صص ۱۳ تا ۱۷، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

[۲۸] لارسن، لورن سی (۱۳۸۱): **حل مسأله از طریق مسأله**. ترجمه‌ی علی ساوجی. تهران، انتشارات فاطمی.

گذری بر حل مسأله و آموزش آن

یوسف آذرنگ
دبیر ریاضی مهاباد
و دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی
دانشگاه شهید بهشتی

به دلیل اهمیّت نقش معلّم، برنامه‌های آموزش معلّمان از اهمیّت ویژه‌ای برخوردار است. مجله در نظر دارد که این مهم را به عنوان یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به همین منظور، ستونی در مجله با عنوان روایت‌های معلمان ریاضی باز شده است تا از طریق آن، بتوانیم رابطه‌ی نزدیک‌تری با معلمان ریاضی برقرار کنیم. این روایت‌ها برای محقّقان و معلمان محقق فرصت ارزنده‌ای به وجود می‌آورد تا به تبیین نظریه‌های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلّم می‌جوشد، بپردازند. آن‌گاه نظریه‌ها به عمل دَر می‌آیند و مجدداً عمل به نظریه کشانده می‌شود و این فرآیند هم‌چنان ادامه پیدا می‌کند.
از همکاران گرامی انتظار می‌رود که روایت‌های خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قرار گیرد، زیرا که زکات علم نشر آن است. معلمان عزیز باید به اهمیّت تجربه‌های خود واقف شوند و با پویایی به غنی‌تر کردن آن‌ها بپردازند.
رشد آموزش ریاضی

آموزش‌هایی که دانش‌آموزان در مدرسه می‌بینند، باید تا حدود زیادی، منعکس‌کننده‌ی زندگی واقعی آن‌ها باشد، و تا زمانی که این آموزش‌ها، نتوانند پل ارتباطی بین دنیای مدرسه و دنیای خارج از مدرسه‌ی دانش‌آموز ایجاد کنند، بازتاب آن‌ها در زندگی واقعی کمتر خواهد بود. هم‌چنین، از آن‌جا که دانش‌آموزان ناگزیر از حل مسایل واقعی خود هستند، پس لازم است که آمادگی لازم جهت حل این مسایل، در آن‌ها فراهم شود.

برای این که دانش‌آموزان عملکرد ریاضی بهتری داشته باشند، باید توانایی حل مسأله‌ی آنان را افزایش دهیم و آموزش حل مسأله در این مورد، می‌تواند کارساز باشد. اکثر دانش‌آموزان، تنها قادر به حل مسایلی هستند که قبلاً آن‌ها را دیده‌اند و با آن‌ها کار کرده‌اند، یا این که معلم در تدریس خود، به انواع مشابه آن‌ها اشاره کرده است و به گونه‌ای آموزش دیده‌اند که بتوانند بیش‌تر تکالیف خود را از روش‌های معمولی یا الگوریتمی، حل کنند. همانگونه که شونفیلد (۱۹۸۵) بیان می‌کند، دانش‌آموزان با تکالیف بسیار مشابهی با آن‌چه که تدریس شده است، مورد آزمون قرار می‌گیرند و این یک فریب‌کاری است که به خودمان و آن‌ها اجازه می‌دهیم که باور کنیم، دانش‌آموزان، آن ریاضی را فهمیده‌اند.

از این رو، به نظر می‌رسد اگر برنامه‌های درس ریاضی «مبتنی بر مسأله» باشد، و دانش‌آموزان به گونه‌ای درگیر حل مسأله شوند، دروس ریاضی را بهتر و مفهومی‌تر یاد خواهند گرفت و هم‌چنین، به کمک آموزش‌های حل مسأله، دانش‌آموزان بهتر می‌توانند مسایل برگرفته از زندگی روزانه‌ی خود را درک کرده و با مدل‌سازی ریاضی آن‌ها، در حل این

مسایل بکوشند. این همان توصیه‌ای است که کاکروفت (۱۹۸۲) به برنامه‌ریزان درسی ریاضی نموده است که: «تدریس ریاضیات در تمام سطوح، باید شامل فرصتی برای حل مسأله و کاربرد ریاضیات در موقعیت‌های زندگی روزانه باشد.»

جورج پولیا در سال ۱۹۴۵، در کتاب «چگونه مسأله را حل کنیم»، مدلی شامل چهار مرحله‌ی زیر برای حل مسأله‌ی ریاضی ارایه کرد:

(۱) فهمیدن مسأله؛

(۲) تهیه‌ی طرحی برای حل مسأله؛

(۳) اجرای طرح؛

(۴) بازنگری.

شونفیلد (۱۹۸۵)، هم با الهام گرفتن از پولیا در کتاب «حل مسأله‌ی ریاضی»، چارچوبی برای حل مسأله‌ی ریاضی شامل چهار حوزه‌ی **منابع**، **رهیافت‌ها**، **کنترل** و **نظام باورها**، تعیین کرده است.

منابع، مجموعه‌ی دانسته‌های فرد را تشکیل می‌دهند که در تملک شخص مسأله‌حل‌کن می‌باشد و اگر شخص مسأله‌حل‌کن به اندازه‌ی کافی آن را در اختیار نداشته باشد، در همان ابتدا در حل مسأله ناکام می‌ماند.

رهیافت‌ها به گفته‌ی پولیا، همان «ابزارهای کشف» می‌باشند. استراتژی‌های رهیافتی، مجموعه قوانینی برای حل موفق مسأله هستند که به منظور درک بهتر مسأله یا پیشرفت در رسیدن به جواب، پیشنهاد می‌شوند. نمونه‌هایی از این استراتژی‌های رهیافتی عبارتند از: استفاده از عناصر کمکی در مسأله، اثبات به کمک مثال نقض، کار روی مسایل کمکی، رسم شکل، راه‌حل بازگشتی، تغییر مسأله، مسأله را حل‌شده فرض کردن و نظایر این‌ها.

کنترل، به معنای انتخاب و به‌کارگیری منابع و استراتژی‌های مناسب برای حل مسأله‌ی موردنظر است. این مقوله، به تصمیمیات کلیدی و مهمی اشاره می‌کند که فرد مسأله‌حل‌کن، ضمن حل مسأله می‌گیرد. این تصمیمات، ممکن است موجب موفقیت در حل مسأله یا شکست در رسیدن به جواب شوند. توانایی فرد برای بازبینی، ارزیابی و اصلاح رفتار خود در حین حل مسأله‌ی ریاضی، از جمله فعالیت‌هایی هستند که در مقوله‌ی کنترل قرار می‌گیرند.

نظام باورها، چهارمین عامل تأثیرگذار بر حل مسأله‌ی ریاضی از دیدگاه شونفیلد است که جهان‌بینی ریاضی فرد را نشان می‌دهد. در واقع، تمام تصمیمات مسأله‌حل‌کن، از باورهای او نشأت می‌گیرد. از آنجا که باورهای افراد در اثر عوامل گوناگونی از جمله تدریس، محیط اطراف، شهود و نوع تفکر ریاضی، به تدریج و به مرور زمان شکل گرفته‌اند، تغییر آن‌ها ساده نیست.

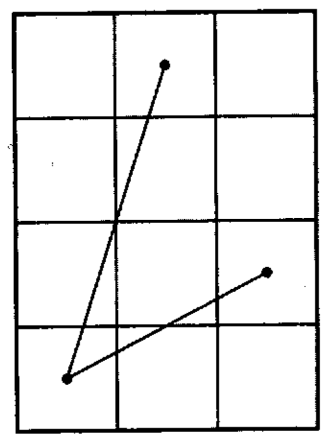
آموزش نباید صرفاً بر دانش موضوعی، راهبردها و قواعد اکتشافی متمرکز باشد، بلکه برای چنین آموزش‌هایی، و به‌ویژه آموزش حل مسأله، باید به دانش و استراتژی‌های فراشناختی نیز توجه داشت، که در واقع از اجزای مهم عامل **کنترل** در چارچوب پیشنهادی شونفیلد می‌باشند.

معلمان در آموزش حل مسأله، می‌توانند با کار در گروه‌های کوچک و بحث همگانی در کلاس، دانش فراشناختی دانش‌آموزان را ارتقا دهند و از آن‌ها بخواهند آن‌چه را که انجام می‌دهند، و دلیل انجام آن‌ها را، شرح دهند و توضیح دهند که چگونه موفقیت در انجام آن کار، به آن‌ها کمک می‌کند تا مسأله‌ی موردنظر خود را حل کنند. یعنی معلم می‌تواند نقش یک راهنما را داشته باشد و ضمن درگیر کردن دانش‌آموزان با فرآیند حل مسأله، آموزش‌های لازم را به آن‌ها ارایه دهد. هم‌چنین، معلمان زمانی می‌توانند حل مسأله را آموزش دهند که خودشان در فرآیند حل، مشارکت داشته باشند و برای این که مشکلات احتمالی دانش‌آموزان را پیش‌بینی کنند لازم است که قبلاً روی مسایل کار کنند.

برای روشن‌تر شدن این بحث، و این که یک مسأله و حل آن‌چه اطلاعاتی را می‌تواند در بر داشته باشد، و هم‌چنین،

آموزش چه نوع مفاهیمی به کمک حل مسأله میسر است، به حل دو مسأله می‌پردازیم.

مسأله ۱. در صفحه‌ی شطرنجی شکل ۱، اندازه‌ی زاویه‌ی بین دو پاره‌خط را بیابید. (با این فرض که، سر پاره‌خط‌ها، در مرکز خانه‌های شطرنجی باشد.)



شکل ۱

حل مسأله. ابتدا، با اندکی توجه درمی‌یابیم که این مسأله، از نوع مسایل «پیدا کردنی» است، یعنی معلومات و مجهولات آن باید معلوم شوند.

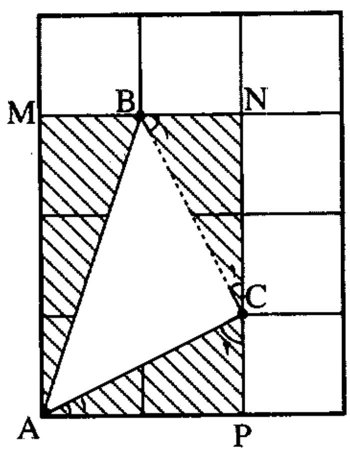
معلومات مسأله:

۱) صفحه‌ی شطرنجی، با دو پاره‌خط روی آن؛

۲) قرار داشتن رأس زاویه و سر پاره‌خط‌ها، در مرکز مربع‌ها (سه خانه‌ی شطرنج).

اگر بخواهیم حل مسأله را به دانش‌آموزان آموزش دهیم، بازگو کردن این اطلاعات و موارد دیگر برای دانش‌آموزان، در درک مسأله مهم است.

مجهول این مسأله، اندازه‌ی یک زاویه است، و برای رسیدن به اندازه‌ی آن زاویه، رهیافت‌های متفاوتی می‌توان انتخاب کرد. می‌توان دو سر پاره‌خط‌ها را به هم وصل کرد تا مثلث ABC درست شود. این کار باعث می‌شود که توجه خود را به زاویه‌های مثلث معطوف کنیم. تشخیص نوع مثلث هم برای پیدا کردن زاویه‌های مثلث مفید است. قبل از شخیص نوع مثلث، می‌توان رأس‌های این مثلث را با یک جابه‌جایی، بر رأس‌های مربع‌ها (خانه‌های شطرنج) منطبق کرد. (شکل ۲)



شکل ۲

معلم با مشخص کردن مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی $\overset{\Delta}{BNC}$ و $\overset{\Delta}{ACP}$، می‌تواند دانش‌آموزان را هدایت کند. چون مثلث‌ها در صفحه‌ی شطرنجی هستند، پی بردن به هم‌نهشتی آن‌ها برای دانش‌آموزان، سخت نیست.

دو مثلث $\overset{\Delta}{BNC}$ و $\overset{\Delta}{ACP}$ به حالت (ض‌زض) همنهشت هستند:

$$\begin{cases} AP = CN \\ \hat{P} = \hat{N} = ۹۰^\circ \\ BN = CP \end{cases}$$

پس $AC = BC$.

و زاویه‌های متناظر نیز برابر هستند:

$$\begin{cases}\hat{A}_1=\hat{C}_1\\ \hat{B}_1=\hat{C}_2\end{cases}\quad(1)$$

تا این جا، مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ با تساوی دو ضلع AC و BC، متساوی‌الساقین است.

از این گذشته، به کمک (۱)، می‌توان نشان داد که $\hat{C}$ قائمه است، زیرا

$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}_1+\hat{C}_1=90^\circ\\ \hat{B}_1=\hat{C}_2\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{C}_1+\hat{C}_2=90^\circ\Rightarrow \hat{C}=90^\circ$$

پس مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است. درنتیجه

$$\hat{A}=\hat{B}=45^\circ$$

یعنی زاویه‌ی بین دو پاره‌خط، 45° است.

در هر مرحله از حل این مسأله، دانش‌آموزان می‌توانند با هدایت و راهنمایی معلم، روی حل آن کنترل لازم را داشته باشند و با یادآوری هم‌نهشتی مثلث‌ها، و نوشتن اجزای متناظر آن‌ها، به نتیجه برسند.

علاوه بر این، مفاهیم بیش‌تری را به کمک این مسأله می‌توان به دانش‌آموزان آموزش داد و در بازنگری و وارسی حل این مسأله، می‌توان راه‌حل‌های دیگری را نیز پیدا کرد.

به طور مثال، کاربرد قضیه‌ی فیثاغورس و عکس آن، در این مسأله به چشم می‌خورد و این قضیه، رهیافت دیگری برای حل این مسأله به ما نشان می‌دهد.

با به کار بردن قضیه‌ی فیثاغورس در دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی $\overset{\triangle}{BCN}$ و $\overset{\triangle}{APC}$، نتیجه می‌گیریم که $BC=AC$ و لذا مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ متساوی‌الساقین است.

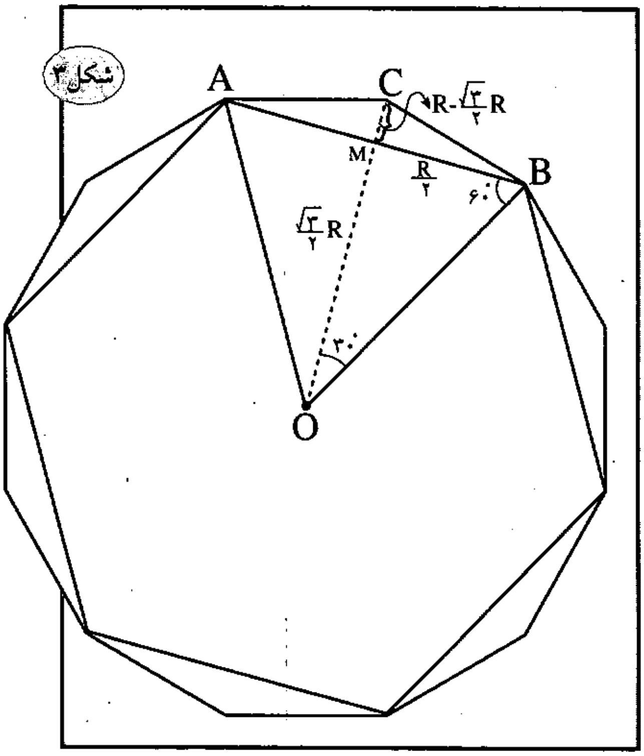
با به کار بردن عکس قضیه‌ی فیثاغورس روی مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ نتیجه می‌گیریم که $AB^2=AC^2+BC^2$، پس مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ قائم‌الزاویه است. درنتیجه، مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است، پس $\hat{A}=45^\circ$.

در هر حال، درست کردن مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ روی پاره‌خط‌ها، نقطه‌ی شروع خوبی برای پیدا کردن زاویه‌ی موردنظر می‌باشد.

مسأله ۲. مساحت دوازده ضلعی منتظم در شکل ۳ را بیابید.

حل مسأله. حل این مسأله برای دانش‌آموزان، مستلزم معلومات و دقت بیش‌تری نسبت به مسأله‌ی قبل است. در اینجا، یافتن مسأله‌ای مرتبط و ساده‌تر برای حل مسأله‌ی اصلی، مفیدتر به نظر می‌آید. از طرفی هم، دانش‌آموزان در هندسه‌ی (۱)، با شش‌ضلعی منتظم و روش به‌دست آوردن مساحت آن، آشنایی پیدا کرده‌اند. بنابراین، معلم می‌تواند دانش‌آموزان را متوجه این نکته کرده و از آنان بخواهد تا مساحت شش‌ضلعی را به دوازده ضلعی منتظم، تعمیم دهند.

$$S_{OAB}=\frac{\sqrt{3}}{4}R^2$$



پس

$$\text{مساحت شش‌ضلعی منتظم} = 6\times\frac{\sqrt{3}}{4}R^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}R^2$$

پس برای پیدا کردن مساحت دوازده ضلعی منتظم، کافیست که دانش‌آموزان، مساحت مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ را پیدا کنند.

$$OM = \frac{\sqrt{3}}{2}R \;,\; OC = R \Rightarrow CM = R - \frac{\sqrt{3}}{2}R$$

$$BM = \frac{R}{2}$$

درنتیجه

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}R(R - \frac{\sqrt{3}}{2}R)$$

پس

$$\text{مساحت دوازده ضلعی منتظم} = \frac{3\sqrt{3}}{2}R^2 + 6\times\frac{1}{2}R(R - \frac{\sqrt{3}}{2}R)$$
$$= 3R^2$$

(R، شعاع دایره‌ی محیطی است)

لازم است که دانش‌آموزان، از ویژگی‌های شش ضلعی منتظم و به‌ویژه این‌که این شکل، به شش مثلث متساوی‌الاضلاع هم‌نهشت تقسیم می‌شود آگاهی داشته باشند و به‌درستی، قضیه‌ی فیثاغورس را به کار برند.

رهیافت‌های دیگری نیز می‌توان برای حل این مسأله درنظر گرفت که از جمله‌ی آن‌ها، تقسیم کردن دوازده‌ضلعی منتظم به دوازده مثلث متساوی‌الساقین هم‌نهشت و پیدا کردن مساحت این مثلث‌ها است.

ولی این روش، به نکات بیش‌تری در مورد مثلث‌ها، از جمله مثلث قائم‌الزاویه نیاز دارد و اجرای مراحل حل آن، کنترل بیش‌تری می‌خواهد. در هرحال، با هدایت و رهبری معلم، دانش‌آموزان با یادآوری حقایق و رویه‌هایی که قبلاً یاد گرفته‌اند، بهتر می‌توانند توانایی لازم را برای حل آن، کسب کنند.

در حل این مسأله، آموزش این نکته مفید است که هرچه تعداد ضلع‌های چندضلعی منتظم افزایش یابد، مساحت آن به مساحت دایره‌ی محیطی آن، نزدیک‌تر می‌شود.

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}R^2 \longrightarrow 3R^2 \longrightarrow \pi R^2$$

مساحت شش ضلعی منتظم — مساحت دوازده ضلعی منتظم — مساحت دایره

باور دانش‌آموزی که به این نکته واقف است، در مقابل دانش‌آموزی که این مطلب را نمی‌داند یا باور ندارد، باعث می‌شود که محکم‌تر به سمت جواب آن حرکت کند. چگونگی رسیدن به مساحت دایره برای دانش‌آموزان جالب است و آشنایی با چگونگی استفاده از الگوریتم و تقریب زدن، از منافع حل چنین مسأله‌ای است.

جمع‌بندی

مهم‌ترین نکته در آموزش حل مسأله برای معلمان، می‌تواند این باشد که آن‌ها سعی کنند توانایی‌های کنترلی و فراشناختی را در دانش‌آموزان، تقویت کنند. علاوه بر این، معلمان باید از باورهای بالقوه‌ی دانش‌آموزان، و چگونگی شکل‌گیری آن‌ها آگاه باشند. شونفیلد (۱۹۸۵) ضمن مشاهده‌ی مسأله‌حل‌کن‌های تازه‌کار، گزارش کرده است که چنین دانش‌آموزانی، اغلب دارای دانش واقعی و راهبردی مناسب برای حل مسأله هستند. اما آن‌ها، به این دلیل از عهده‌ی حل مسأله برنمی‌آیند که تصمیم‌های اجرایی ضعیفی اتخاذ می‌کنند، مسیرهای نامناسبی را پی‌گیری می‌نمایند و نمی‌توانند روی مسیرهای مناسب، سرمایه‌گذاری کنند. از این‌رو، اهمیت توانایی‌های کنترلی و فراشناختی در حل مسأله به خوبی مشهود است.

منابع

1. Shoenfeld A, H. (1985). **Mathematical Problem Solving**, Academinnc Press.

۲. شونفیلد، آلن. (۱۹۹۱). فراشناخت و ریاضیات، ترجمه فرهاد کریمی. مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، شماره‌ی ۵۵، بهار ۷۸. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۳. گویا، زهرا. (۱۳۷۹). واقعاً این همه هیاهو در مورد فراشناخت چیست؟، مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، شماره‌ی ۵۹-۶۰، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۴. گویا، زهرا و رضائی، مانی. (۱۳۸۲). کارگاه حل مسأله‌ی ریاضی، دبیرخانه‌ی راهبردی ریاضی متوسطه‌ی تهران، اسفند ۸۲.

۵. گویا، زهرا و روزدار، علی. (۱۳۸۲). تناسب محتوا و روش در برنامه‌ریزی درسی ریاضیات مدرسه، مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، شماره‌ی ۷۲، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

تحلیل محتوای حل مسأله در کتاب‌های درسی ریاضی

مقاله ی ارایه شده در
هشتمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران
شهرکرد ـ ۲۴ تا ۲۶ مرداد ۱۳۸۵

مانی رضائی
عضو هیأت تحریریه ی رشد آموزش ریاضی

چکیده

به‌طور معمول، در فعالیت‌های روزانه، نحوه‌ی انجام هر کار مورد توجه است و به دنبال پیدا کردن «بهترین» راه هستیم (بهینه‌سازی)، در گفت‌وگوهای روزمره تلاش می‌کنیم که قانع کنیم و البته قانع می‌شویم (استدلال)، محاسبه می‌کنیم، داده‌های پیش رویمان را بررسی می‌کنیم و نتیجه‌گیری می‌کنیم (الگویابی)، و... به‌طور خلاصه، در زندگی روزمره با «مسأله» روبه‌رو هستیم و برای «حل مسأله» تلاش می‌کنیم. موضوع حل مسأله یکی از موضوع‌های مهم در مسیر آموزش ریاضی محسوب می‌شود که در ایران و در سال‌های اخیر مورد توجه بیش‌تری قرار گرفته است.

مقاله ی حاضر به مطالعه ی میزان و نقش «حل مسأله» در مسیر آموزش عمومی (از اول ابتدایی تا پیش‌دانشگاهی) پرداخته است. این بررسی در دوره‌ی دبیرستان به رشته ی ریاضی ـ فیزیک محدود شده، و در این حال هر نوع آموزش ویژه یا محتوای تکمیلی خاص، در مقاطع مختلف، مورد توجه نبوده است. روش بررسی به صورت «تحلیل محتوا» و پیرامون موضوع‌های مطرح شده در کتاب‌های درسی نظام جاری آموزش‌وپرورش است.

مقدمه

پیش از بیان هر مقدمه‌ای، به نقل قولی از شونفیلد اشاره می‌کنیم که نگرش دانش‌آموزان را در مورد مسأله و حل مسأله نشان می‌دهد. هر چند این بررسی روی دانش‌آموزان ایرانی صورت نگرفته است، با این همه شباهت قریبی با نوع نگرش دانش‌آموزان ما دارد. وی می‌گوید: «بسیاری از دانش‌آموزان معتقدند که اندیشه‌ها و روندهای ریاضی که به‌وسیله‌ی متخصصان از بالا منتقل می‌شوند را باید به خاطر بسپارند، در نتیجه انتظار دارند فرمول‌های آماده‌ای برای موقعیت‌هایی که مطالعه کرده‌اند در اختیار داشته باشند و ممکن است در صورتی که فرمول‌ها را فراموش کرده باشند، به سادگی تسلیم شوند یا ممکن است نتوانند از عهده‌ی تحلیل موقعیت‌هایی که قادر به فهمیدن آن‌ها بوده‌اند و سعی کرده‌اند آن‌ها را تحلیل کنند برآیند. به گونه‌ای مشابه، بسیاری از دانش‌آموزانی که تنها تجربه ی آن‌ها در مورد حل مسأله به کار کردن، تمرین و مشق‌های عملی مربوط بوده است، توقع دارند که اگر می‌توانند مسأله‌ای را حل کنند، تنها در چند دقیقه این کار را انجام دهند. چنین دانش‌آموزانی ممکن است به سادگی کار را بر روی مسایل طولانی که قابل حل بوده‌اند متوقف کنند و زمان کم‌تری را به این امر اختصاص دهند» [۱].

۱

این‌که تفکر «حل مسأله در چند دقیقه» از کجا ناشی می‌شود، بحث اصلی ما نیست. اما عملکرد هر یک از معلمان و انتخاب مسأله‌ها و تمرین‌های ویژه که شاید هر یک «در چند دقیقه» حل می‌شوند، به این تفکر دامن زده است. این وضعیت برای دانش‌آموزان ابتدایی و حتی راهنمایی کاملاً مشهود است، و حتی ممکن است دانش‌آموزی که از سرعت کافی برخوردار نباشد و بخواهد مسأله را بررسی کند و سپس به حل آن بپردازد، مورد مؤاخذه(!) قرار گیرد. وضعیت برای دانش‌آموزان دوره‌های بالاتر، به دلیل وجود کنکور (آزمونی سرعتی) نامناسب‌تر است. به این ترتیب، در تمام دوره‌های تحصیلی، دانش‌آموزان با مجموعه‌ای از تمرین‌های کوتاه و برای کسب مهارتی خاص، روبه‌رو می‌شوند. این تمرین‌ها را می‌توان صرفاً تکلیف‌هایی معمولی نامید که برای تکمیل مهارت‌های تدریس شده به دانش‌آموزان داده می‌شود.

چرا «تحلیل محتوا»؟

انتخاب روش تحلیل محتوا برای بررسی جایگاه حل مسأله در کتاب‌های درسی ریاضی، بدان علت بود که به عقیده‌ی «صاحب‌نظران... تحلیل محتوا مستلزم بررسی منظم (سیستماتیک) اشکال ارتباطی با الگوهای مستند به صورت عینی است. روش مزبور از سایر روش‌های کیفی عینی‌تر است. ... احتمالاً بزرگ‌ترین نقاط قوت تحلیل محتوا به شرح زیر است: پژوهشگر فاقد جسارت، محجوب و غیرانفعالی عمل می‌کند؛ در اجرای این روش هیچ الزامی نیست که محیط، میدان یا زمینه تحقیق را تغییر داد. پژوهشگر پس از جمع‌آوری داده‌ها، مشخص می‌کند که در کجا باید تأکید بیش‌تری کرد. هم‌چنین کسانی که تحقیق و نتیجه‌ی آن را می‌خوانند به خوبی از روش انجام کار آگاه هستند. بنابراین می‌توان واقعیت‌ها را کنترل کرد و درست همانند [روش] تحلیل داده‌ها، میزان دقت قابل کنترل است»[۲].

بنابراین، مراحل اجرای این تحقیق پس از تعریف و تعیین مسأله و تمرکز روی منابع، با ارایه‌ی تعریف‌های عملیاتی و با هدف یکسان کردن کار کدگذاری انجام شد.

مسأله و تکلیف: تعریف‌های عملیاتی

در بررسی به عمل آمده، بین «مسأله» و «تکلیف‌های مشابه» تمایز قائل شده‌ایم. تمرکز بر گردایه‌ای از تکلیف‌های خوب تعریف شده، که از راه‌های معمول و الگوریتمی به انجام می‌رسد و به دنبال آن، تکلیف‌های بسیار مشابه آن‌چه که تدریس شده، نمی‌تواند به عنوان مسأله به حساب بیاید. در این زمینه، شونفیلد به صراحت اشاره می‌کند: «... اغلب اوقات معلمان بر گردایه‌ی باریکی از تکلیف‌های خوب تعریف شده متمرکز می‌شوند و دانش‌آموزان را چنان آموزش می‌دهند تا آن تکلیف‌ها را از راه‌های معمولی، اگر نه الگوریتمی، انجام دهند. سپس دانش‌آموزان را با تکلیف‌های بسیار مشابه آن‌چه که تدریس کرده بودند مورد آزمون قرار می‌دهند... این یک فریب‌کاری و حیله‌گری است که به خودمان و آن‌ها اجازه دهیم تا باور کنیم که دانش‌آموزان آن ریاضی را فهمیده‌اند» (به نقل از [۳]). با این حال، به دلیل روشن نبودن مرز بین چنین تمرین‌هایی و مسأله، لازم است تعریفی رسمی برای مسأله ارایه شود.

ابتدا، به نقل از پولیا، تعریف عام از مسأله ارایه می‌کنیم: «... مسأله عبارت است از ضرورت جست‌وجوی آگاهانه‌ی وسیله‌ی مناسبی، برای رسیدن به هدفی روشن، ولی در بدو امر غیرقابل دسترس. حل مسأله، به معنای پیدا کردن این وسیله است» [۴]. پولیا در ادامه، مسأله‌ها را در دو گروه پیچیده و ساده رده‌بندی می‌کند. در حالت اول، پیدا کردن راه‌حل آن دشوار است و در حالت دوم، آسان. وی تأکید می‌کند: «دشواری راه‌حل، تا حد زیادی، به خود مفهوم مسأله مربوط می‌شود. آن‌جا که دشواری نباشد، مسأله‌ای وجود ندارد.» (همان منبع)

بدین ترتیب، چنان‌چه با سؤالی روبه‌رو باشیم که راه‌حل آن را از پیش بدانیم یا تا حدودی زیاد راه‌حل آن برایمان آشکار باشد، با مسأله روبه‌رو نشده‌ایم، بلکه در این حالت تنها تمرینی برای انجام یک یا چند مهارت پیش‌رو داریم. چنین تمرین‌هایی نمی‌توانند مسأله باشند. توجه داشته باشید که سطح دشواری یک مسأله برای دانش‌آموزان در پایه‌های مختلف آموزشی، تفاوت دارد. ممکن است پرسشی برای یک دانش‌آموز، یک مسأله (و حتی دشوار) باشد؛ ولی همان پرسش برای دانش‌آموزی دیگر در پایه‌ی بالاتر، یک تمرین محسوب شود.

گاهی ممکن است در مواجهه با مسأله از خودمان بپرسیم: این، از کدام گونه‌ی مسأله‌ها است؟ در واقع طرح چنین پرسشی می‌تواند به گروه‌بندی جامعی بیانجامد و در ادامه‌ی آن برای هر گروه از مسأله‌ها «روشی برای حل» از پیش مشخص شود. اگر این کار در جریان حل مسأله‌های متعدد و توسط فراگیران انجام شود، می‌تواند آنان را به مسأله حل‌کن‌های خبره تبدیل کند. اما

در برخی موارد، فراگیران به جای حل مسأله، به سمت کدگذاری و شناسایی «گونه ی مسأله» سوق داده می شوند. در این صورت، مسأله ها به تمرین هایی برای شناسایی «گونه ها» تبدیل می شوند. چنین تمرین هایی اگر صرفاً با هدف آشنایی بیش تر فراگیران با گونه های مسأله باشد، به تفکر آگاهانه منجر نمی شود. «...بخش اصلی تفکر آگاهانه ی ما، به حل مسأله مربوط می شود، بجز موردهایی که تفریح می کنیم و یا در آرزوهای خود فرو رفته ایم، اندیشه ی ما هدف معینی را تعقیب می کند و ما در پی پیدا کردن راه و وسیله ای برای رسیدن به این هدف هستیم. مسیر یا مسیرهایی را جست وجو می کنیم که بتوانند ما را به هدف محدود خود برسانند» [۴].

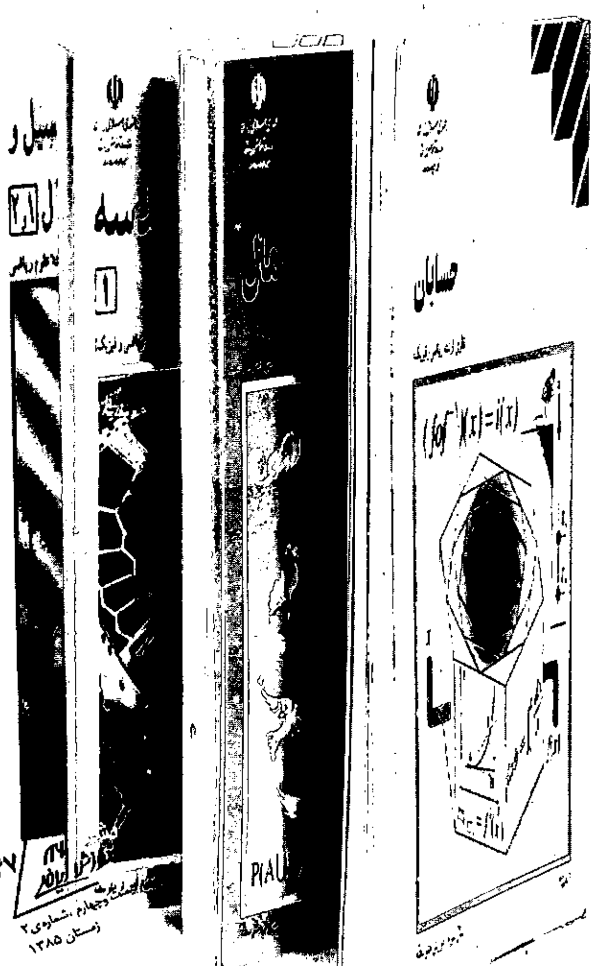
در چنین جست وجویی، دو گونه مسأله، به مفهوم وسیع کلمه، تشخیص داده می شود: مسأله های مربوط به «پیدا کردن» و مسأله های مربوط به «اثبات». هدف مشخص مسأله های مربوط به پیدا کردن (ساختن، به دست آوردن، منجر کردن، متحد کردن، ...) یک موضوع است؛ یعنی مجهول مسأله مفروض است. هدف مشخص مسأله های مربوط به اثبات، عبارت است از اثبات درستی یا نادرستی یک حکم، تأیید یا تکذیب آن. فراگیران در رویارویی با هر یک از این مسأله ها، علاوه بر کسب تجربه ی بیش تر، می توانند توانایی های حل مسأله ی خود را افزایش دهند. انتخاب نوع مسأله و قرار دادن آن در مسیر آموزشی فراگیران، در پایه های مختلف، اهمیت زیادی دارد. به همین دلیل رویکرد آموزشی برنامه ریزان و معلمان به «تدریس حل مسأله»، در انتخاب و تعیین نوع مسأله، نقش ویژه دارد. عدم سازگاری بین مجموعه ی مسأله های انتخاب شده با این رویکرد آموزشی، می تواند به شکست برنامه ی آموزشی و بروز مشکلات یادگیری برای فراگیران منجر شود.

مروری بر سه رویکرد در تدریس حل مسأله

زمانی که صحبت از حل مسأله می شود، چه نوع آموزشی از حل مسأله مورد نظر است. به طور کلی، سه رویکرد اصلی به حل مسأله وجود دارد. این سه رویکرد، شامل «تدریس برای حل مسأله»، «تدریس درباره ی حل مسأله» و «تدریس از راه حل مسأله» است. بدون نقد دقیق و موشکافانه ی هر یک از این رویکردها، به طور فشرده این سه نگرش، با استفاده از مرجع [۵] معرفی می شوند.

تدریس برای حل مسأله. در این رویکرد، معلم محتوا و مفاهیم و فرمول ها و روش ها و الگوریتم های اولیه ی ریاضی را پیش از آن که یادگیرندگان به آن احتیاج داشته باشند، ارایه می کند. نمونه ی بارز این نوع نگرش و رویکرد در تمرین های پایان هر فصل کتاب های درسی و کمک درسی به چشم می خورد. حتی در آموزش های حل مسأله برای المپیادها، عمدتاً چنین آموزشی از حل مسأله مورد توجه قرار می گیرد. طرفداران این رویکرد، اعتقاد دارند که یادگیرنده ی منظم و پرکار به طور طبیعی نباید در حل آن مسایل دچار مشکل شوند و با تکرار این کار، وادار به ساختن و خلاقیت می شوند.

تدریس درباره ی حل مسأله. معلمی که چنین نگرشی دارد، چگونگی حل مسأله را یک مهارت می داند و بدون توجه به موضوع و محتوا، ابتدا انواع الگوریتم ها و رهیافت ها و مراحل حل مسأله را برای فراگیران توضیح می دهد و سپس با حل چند مسأله ی نمونه، آن ها را با چگونگی حل مسایل آشنا می کند. کسانی که هدف تدریس ریاضی را یادگیری حل مسأله می دانند، معمولاً به کتاب پولیا، «چگونه مسأله را حل کنیم» استناد می کنند و به حل مسأله به عنوان یکی از مهارت ها می نگرند که مستلزم توجه ویژه است. این رویکرد یک سوی طیف گسترده ی حل مسأله ی ریاضی قرار دارد و نگرش اول در انتهای دیگر طیف است.



اختلاف اساسی این رویکرد با رویکرد «تدریس برای حل مسأله» بر میزان توجه و تأکید هر یک بر روش حل مسأله در خلاء محتوا و برعکس است.

تدریس ریاضی از راه‌حل مسأله. در این نگرش، حل مسأله به صورت یک فرایند پویا و مستمر مورد توجه است که در آن محصول نهایی یعنی جواب مسأله به اندازه‌ی روش‌ها و مراحل و استراتژی‌ها و رهیافت‌های استفاده شده توسط فراگیرندگان اهمیت ندارد. فعالیت‌های آموزشی پولیا به این نگرش در تدریس ریاضی و جایگاه حل مسأله در آن، اعتبار خاصی بخشید. پولیا بر این باور بود که معلمان باید از طریق بحث و بررسی، حل مسایل متنوع و جالب، تکنیک‌ها و رهیافت‌های حل مسأله را به فراگیرندگان یاد بدهند. این رویکرد می‌تواند موقعیتی را به‌وجود بیاورد تا در آن، یادگیرندگان ریاضی به‌طور خلاق و فعال به انجام دادن ریاضی بپردازند. چنین دیدگاهی فرصت فراگیری و استفاده از استدلال محتمل را با تدریس چگونگی آن به یادگیرندگان می‌دهد. دانستن این که یادگیرندگان چگونه با انجام دادن ریاضی و توسعه‌ی قدرت تعمیم دادن مسایل را پیدا می‌کنند، مستلزم این نکته است که بدانیم آن‌ها چگونه حل مسایل را یاد می‌گیرند و یکی از بهترین راه‌هایی که می‌توان نقبی به درون ذهن و اندیشه‌ی حل کننده‌ی مسأله زد، آشنایی با فراشناخت است.

بحث پیرامون فراشناخت، وسیع‌تر و گسترده‌تر از موضوع مقاله‌ی حاضر است و آن را به صاحب‌نظران وا می‌گذاریم. از موضوع اصلی نوشتار دور شده‌ایم، اما بیش‌تر به دلیل دقت بود تا بی‌توجهی، در ادامه به موضوع مقاله، یعنی تحلیل محتوای مسأله‌ها در کتاب‌های درسی و حل مسأله باز می‌گردیم.

تحلیل محتوای «حل مسأله»

آیزنر در جایی اشاره می‌کند: «گذشته، همیشه دارای درخشندگی و امیدبخشی است. مردم با حسرت نسبت به چگونگی دوران کودکی‌شان و با خشنودی راجع به جامعه‌ای که از آن لذت برده‌اند، به محاسن و خوبی‌های دوران ابتدایی و دبیرستانی که می‌رفته‌اند، نگاه می‌کنند. «رجعت به اصول» از خیلی جنبه‌ها نامی است که به بازگشت به «روزهای خوب گذشته» اطلاق می‌شود. حسرت عوام برای گذشته‌ها، با گرایش آن‌ها به تصریح اجرایی انتظاراتی که از عملکرد دانش‌آموزان دارند، به نحو چشم‌گیری کامل شده است» [۷]. در این میان، بسیاری بر این باور هستند که انجام تمرین‌های بیش‌تر، توانایی حل مسأله را در آن‌ها ایجاد و تقویت کرده است. در حقیقت، این که تا چه حد آموزش ریاضی دوره‌ی دوازده ساله‌ی تحصیلی، به افزایش توانایی حل مسأله در میان فراگیران می‌انجامید، به سادگی قابل اندازه‌گیری نیست. اما این که چه میزان از تمرین‌های ریاضی، در دوره‌های مختلف تحصیلی را می‌توان «مسأله» نامید، قابل اندازه‌گیری است.

بررسی تعداد مسأله‌هایی که در پایه‌های مختلف به دانش‌آموزان ارایه می‌شود، با بررسی رویکرد آموزشی حل مسأله صورت گرفته است. شایان ذکر است که این بررسی بر روی کتاب‌های درسی سال تحصیلی ۸۵-۸۴ انجام شده و افزایش و کاهش تمرین‌ها و مسأله‌ها در سال‌های قبل محاسبه نشده است. هرچند، طی سال‌های اخیر در کتاب‌های ریاضی تغییراتی داده شده، و در برخی موارد حتی بازنویسی صورت گرفته است، اما، به نظر نمی‌رسد این تغییرها تأثیر مهمی در رویکرد مذکور داشته است. یکی از پارامترهایی که بین مسأله و تمرین، تفاوت ایجاد می‌کند، دشواری پرسش است. همان‌گونه که اشاره شد، دشواری مسأله می‌تواند به توانایی‌های فردی دانش‌آموزان بستگی داشته باشد، به همین دلیل، سعی شد تا سطح دشواری مسأله، مستقل از چنین توانایی‌هایی، و متناسب با درس ارایه شده، مورد ارزیابی قرار گیرد.

پنج سال ابتدایی: آشنایی با الفبای محاسبه

در پنج سال نخست آموزش ریاضی، مسأله‌ها شکلی کاملاً شهودی دارند و به صورت مدل شده‌ی موضوع‌های (تا حدی) واقعی بیان می‌شوند. با این همه، مسأله‌ها کاملاً رده‌بندی شده‌اند و دانش‌آموزان می‌دانند چه عملی برای حل کدام مسأله کارآمد است. در واقع دانش‌آموزان در این دوره با مجموعه‌ای متنوع از تمرین‌های مشابه برای آشنایی با روش‌های محاسبه، روبه‌رو می‌شوند. این مجموعه به تفکیک سال تحصیلی در جدول ۱ نشان داده شده است. (جدول ۱)

دوره ابتدایی	اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم
تعداد تکلیف‌های مشابه (مسأله)	۱۵	۵۲	۹۴	۸۵	۴۱

جدول (۱)

مجموعه‌ی تمرین‌هایی که به صورت تکرار نمونه‌های داده شده و برای کسب مهارتی خاص بوده است، در این شمارش، محاسبه نشده است. عنوان «تمرین» و «مسأله» در کتاب‌های درسی این دوره، به تناوب استفاده شده است و مرز بین «تمرین» و «مسأله» تا اندازه‌ای مخدوش است. در جایی مسأله (به تعبیر عام آن در این دوره)، زیر عنوان «تمرین» بیان شده و برعکس. دشواری بیش‌تر تمرین‌ها به علت آن است که هنوز توانایی‌های خواندن و درک مفهوم در این گروه سنی کامل نشده و شاید روی‌آوردن به کلیشه‌های حل مسأله نیز به همین دلیل باشد. البته در پایه‌ی پنجم، هیچ تمرینی زیر عنوان «مسأله» مشاهده نشده و ۳۶ سؤالی که به عنوان مسأله آمده است همراه با ۵ تمرین دوره‌ای می‌تواند به عنوان مسأله‌هایی (ساده) محسوب شوند.

با توجه به آشکار بودن رهیافت‌های حل هر یک از مسأله‌های مطرح شده در دوره‌ی ابتدایی، و با توجه به تعریفی که از مسأله در این مقاله بیان شده است، نمی‌توان هیچ‌یک را به عنوان مسأله در نظر گرفت و همگی در رده‌ی «تکلیف‌های مشابه» شمارش شده‌اند. رویکرد اصلی در این دوره به وضوح «تدریس برای حل مسأله» است. طرح مسأله و حل آن، با هدف کسب مهارت محاسبه در حساب صورت می‌گیرد. تمرکز آشکار تمام کتاب‌های ریاضی دوره‌ی ابتدایی، بر ارتقای مهارت محاسبه‌ای، تا حدودی موجب دور شدن دانش‌آموزان از یادگیری ریاضی می‌شود. اما معنی «یادگیری» بیش از به‌خاطرسپاری و تکرار است. یادگیری دربرگیرنده‌ی بررسی، صورت‌بندی، نمایش، استدلال، و به کارگیری راه‌کارهایی برای حل مسایل و به‌دنبال آن بازتاب بر چگونگی استفاده از ریاضیات است[۸].

سه سال راهنمایی: تدریس درباره‌ی حل مسأله

دانش‌آموزان در سال‌های دوره‌ی راهنمایی با تغییری وسیع در نگرش به مسأله روبه‌رو می‌شوند. برخی از معلمان بر این باور هستند که دانش‌آموزان در ابتدای شروع دوره‌ی راهنمایی، تجربه‌ی خوبی از حل مسأله دارد. حال آن‌که تا این پایه‌ی تحصیلی، دانش‌آموزان مجموعه‌ای از تکلیف‌های مشابه را در برنامه‌ی خود داشته‌اند و ممکن است دانش‌آموزان چندان آماده‌ی این تغییر نگرش نباشند و حتی در برخی موارد افت تحصیلی محسوسی در بین دانش‌آموزان این دوره مشاهده می‌شود.

در صفحه‌های نخست کتاب ریاضی اول راهنمایی با بخشی به عنوان «حل مسأله» روبه‌رو می‌شویم. در این بخش، با اشاره‌های مستقیم به رهیافت‌های حل مسأله، رویکرد «تدریس درباره‌ی حل مسأله» پی گرفته می‌شود. در کتاب ریاضی اول، شش راهبرد «رسم شکل»، «زیر مسأله»، «حل مسأله‌های ساده‌تر»، «الگویابی»، «جدول نظام‌دار»، و «حدس و آزمایش» معرفی شده است و برای هر یک از این راهبردها، دو یا چند مثال معرفی و تحلیل شده است و در ادامه نیز با اشاره‌هایی کم‌وبیش آشکار، تمرین‌هایی برای کسب مهارت بیش‌تر در استفاده از این راهبردها ارایه شده است. این روند در کتاب ریاضی سال دوم راهنمایی دنبال می‌شود و ضمن تکمیل هر یک از شش راهبرد مطرح شده در پایه‌ی اول، راهبردهای «حذف حالت‌های نامطلوب» و «تشکیل معادله» معرفی می‌شود. به این مجموعه در سال سوم راهنمایی، راهبردی جدید اضافه نمی‌شود. اما طرح مسأله در بخش‌های مجزا با عنوان «حل مسأله» ادامه می‌یابد. به عبارت دیگر، آموزش حل مسأله در این دوره با بیان هشت راهبرد و ارایه‌ی مجموعه‌ای از تمرین‌ها پایان می‌یابد. (جدول ۲)

دوره راهنمایی	اول	دوم	سوم
تعداد مسأله‌ها	۸۶	۸۶	۳۸

جدول (۲)

با این وجود، و حتی با هدف تدریس درباره‌ی حل مسأله، تعداد و تنوع تمرین‌ها برای کسب مهارت‌های حل مسأله کافی به نظر نمی‌رسد. بخش کثیری از تمرین‌های دیگر، در مجموعه‌ی تکلیف‌های دوره‌ی راهنمایی، همانند «تمرین‌های مشابه» در دوره‌ی ابتدایی ارایه شده است. هدف از ارایه‌ی این تمرین‌ها، ارتقای مهارت‌های گوناگون دیگر، به‌جز حل مسأله به نظر می‌رسد.

سه سال دبیرستان و پیش‌دانشگاهی: تمرین‌هایی برای کسب مهارت و سرعت

بررسی دوره‌ی دبیرستان و پیش‌دانشگاهی بر روی ۱۰ کتاب اصلی، در مسیر رشته‌ی ریاضی ـ فیزیک، انجام شده است. کتاب‌های ریاضیات ۱ (سال اول)؛ ریاضیات ۲ و هندسه ۱ (سال دوم)؛ حسابان، هندسه ۲، جبر و احتمال، آمار و مدل‌سازی (سال سوم)؛ حساب دیفرانسیل و انتگرال، هندسه تحلیلی و جبر خطی، ریاضیات گسسته (پیش‌دانشگاهی) مورد بررسی قرار گرفت.

دوره دبیرستان و پیش‌دانشگاهی	درصد مسأله‌ها	تعداد مسأله‌ها	تعداد کل تمرین‌ها
ریاضیات ۱	٪۶	۱۹	۳۲۰
ریاضیات ۲	٪۹	۱۲	۱۳۲
هندسه ۱	٪۴۷	۱۳۵	۲۸۶
حسابان	٪۴	۱۷	۳۶۵
هندسه ۲	٪۶۰	۱۴۶	۲۴۳
جبر و احتمال	٪۵۲	۷۱	۱۳۶
آمار و مدل‌سازی	٪۰	—	۱۰۵
حساب دیفرانسیل و انتگرال	٪۳۷	۹۳	۲۵۱
هندسه تحلیلی و جبر خطی	٪۱۵	۲۱	۱۴۴
ریاضیات گسسته	٪۶۵	۶۴	۹۸

جدول (۳)

کتاب آموزش هنر حل مسأله در این بررسی کنار گذاشته شد. این کتاب علی‌رغم تنوع بسیار و رویکردی متفاوت به حل مسأله، بدان علت که مورد توجه معلمان و دانش‌آموزان قرار نگرفته است و تقریباً در حال حاضر در هیچ دبیرستانی (لااقل در محدوده‌ی اطلاعات اندک نگارنده) تدریس نمی‌شود، در این بررسی وارد نشده است. به نظر می‌رسد، مجموعه‌ی غنی مسأله‌های این کتاب، مرجعی برای معلمان شده است، اما بسیاری از معلمان، تدریس آن را در برنامه‌ی خود قرار نمی‌دهند. امید داریم فرصتی مناسب برای نقد و بررسی ویژه برای این کتاب نیز فراهم شود. (جدول ۳)

در کتاب‌های ریاضی این دوره، علاوه بر مسأله‌ها و تمرین‌های آخر هر بخش و بین مطالب درسی، مجموعه‌ای از فعالیت‌ها به چشم می‌خورد که برخی از آن‌ها به دلیل ماهیتشان در رده‌ی تمرین‌ها گنجانده شده‌اند. در جدول ۳، تعداد تمرین‌ها و مسأله‌ها در هر کتاب به تفکیک، در ستون سمت چپ، آمده است. در این دوره، برخلاف دو دوره‌ی پیشین، رویکردی یکنواخت به تدریس مسأله وجود ندارد. اما رویکرد غالب، «تدریس برای حل مسأله» است. به یقین ویژگی‌های هریک از این کتاب‌ها برای معلمان و حتی دانش‌آموزان فارغ‌التحصیل آشکار است. بخش عمده‌ای از تمرین‌ها با هدف افزایش مهارت و تکرار و تثبیت ارایه شده است. در این شرایط، موضوع حل مسأله چندان مورد توجه قرار نمی‌گیرد. در کتاب‌های ریاضیات ۱ و ۲ و هم‌چنین حسابان، این وضع به‌وضوح برقرار است. اما حساب دیفرانسیل و انتگرال به طرح مسأله‌ی بیش‌تری پرداخته است. درس آمار و مدل‌سازی در وضعیتی کاملاً استثنایی، تنها به روایت مباحث می‌پردازد و تمرین‌های آن به محاسبه‌های آماری و بحث پیرامون درس اختصاص دارد و عملاً مسأله‌ای را در بر ندارد. در این میان، ریاضیات گسسته با پرداختن به تمرین‌های اندک، مسأله‌هایی دشوارتر را مطرح ساخته است. در این درس به دلیل ماهیت ویژه‌ی آن، قابلیت طرح مسأله‌های دشوار وجود دارد. به نظر می‌رسد، هندسه تحلیلی و جبر خطی برخلاف دو درس هندسه ۱ و ۲ مسأله‌های کمتری را مطرح می‌سازد و بخش عمده‌ی کتاب حاوی تمرین‌هایی برای مهارت بیش‌تر است.

از آن‌جا که قصد تحلیل موشکافانه‌ی یکایک کتاب‌ها و تمرین‌های آن را نداریم، به این مختصر بسنده می‌کنیم. بدیهی است که قرار دادن هر واحد مورد بررسی در رده‌ی مسأله یا تمرین مشابه می‌تواند به تجربه و دیدگاه‌های فردی تحلیل‌گر وابسته باشد و سؤال درباره‌ی پایایی کدگذاری مطرح سازد.

پایایی کدگذاری

کدگذاری تمرین‌ها و مسأله‌های کتاب‌های درسی، در دو نوبت و به طور مستقل، توسط نگارنده انجام شده و سپس بررسی و طبقه‌بندی صورت گرفته و برای اطمینان از نحوه‌ی انتخاب، ضریب پایایی کدگذاری محاسبه شده است: [۹]

$$\text{ضریب پایایی} = \frac{\text{تعداد واحدهایی که در یک طبقه کدگذاری شده‌اند}}{\text{مجموع کل تعداد واحدهای کدگذاری شده}}$$

که مقدار عددی آن برای بیش از دو هزار داده‌ی بررسی شده، حدوداً برابر با ۰/۹۸۹ است. یعنی کمتر از ۳۰ داده تغییر پیدا کرده است که عمدتاً در بررسی مجدد، با توجه به درجه‌ی سختی برخی پرسش‌ها برای دانش‌آموزان پایه‌ی مورد بررسی، در رده‌ی

مسأله‌ها طبقه‌بندی شدند. با این همه ممکن است در بررسی بیش‌تر، تغییراتی دیگر نیز پدید آید، اما بعید به نظر می‌رسد این تغییرات کلی باشد و تفاوت احتمالی تأثیر چندانی بر نتیجه داشته باشد.

جمع‌بندی و طرح موضوع

در کتاب‌های درسی، تنوع رویکرد به «تدریس حل مسأله» وجود دارد. در دوره‌ی ابتدایی توجه به «حل مسأله» چندان به چشم نمی‌خورد و عمده‌ی تمرین‌ها و مسأله‌ها صرفاً به کسب مهارت بیش‌تر اختصاص دارد. کسب مهارت، در آموزش دوره‌ی راهنمایی روی آشنایی با انواع «روش‌های حل مسأله» متمرکز شده است. مسأله‌هایی که در این دوره ارایه می‌شوند با چنین هدفی و همراه با راهنمایی‌های کافی برای به‌دست آمدن جواب مطرح می‌شوند. دوره‌ی دبیرستان به نوعی، ادامه‌دهنده‌ی مسیر دوره‌ی ابتدایی است. در این دوره نیز، نقش «مسأله» به عنوان یکی از محوری‌ترین فعالیت‌های ریاضی، کم‌رنگ است و (به‌جز در موارد استثنایی) تمرکز ریاضیات مدرسه‌ای بر مهارت‌آموزی است.

در پاسخ به سؤال این تحقیق، مبنی بر میزان «حل مسأله» در مسیر آموزش عمومی، می‌توان ادعا کرد که سهم آن در دوره‌های مختلف ناچیز یا حتی صفر است. در تغییر دوره‌ها نیز به دلیل عدم ثبات در رویکرد، نتیجه‌ی مطلوبی کسب نمی‌شود. به نظر می‌رسد، توجه به کسب مهارت، بیش‌تر مورد توجه برنامه‌ریزان و مؤلفان کتاب‌های درسی است تا رویکردهای حل مسأله. این موضوع با بررسی تعداد مسأله‌ها و تأکید بر آن‌ها در سال پنجم دبستان و سوم راهنمایی، به خوبی مشهود است. در این دو پایه، با افزایش تمرین‌های مهارتی و کاهش مسأله‌ها، روبه‌رو هستیم.

باید توجه داشت که ریاضیات چیزی بیش از علم حساب است. نگاهی به برنامه‌ی درسی و تأکید آن بر مهارت‌ها و توانایی‌های محاسبه، حاکی از نادیده گرفتن جنبه‌های دیگر ریاضیات است. ریاضیات، مطالعه‌ی الگوها و ارتباط‌ها؛ شیوه‌ای برای تفکر است؛ هنری است که با نظم و سازگاری درونی آن توصیف می‌شود؛ زبان علم و ارتباط در زندگی روزمره است؛ و ریاضیات، ابزار زندگی و از ملزومات اشتغال‌های انسانی است[۱۰].

سؤالی دیگر مطرح است که می‌توان در پروژه‌ای وسیع‌تر به آن پرداخت: با فرض ارایه‌ی مسأله‌های متنوع، چه راه‌کاری برای آموزش حل مسأله، در مسیر آموزش برای دانش‌آموزان، می‌توان پیش‌بینی کرد؟ و آیا رویکرد عمومی معلمان ریاضی به «تدریس حل مسأله» به یکدیگر نزدیک است؟

نگارنده، به عنوان معلم، بیش از پانزده سال در تدریس ریاضی خود، دغدغه‌ی آشنایی فراگیران با حل مسأله را داشته، و همواره متناسب با کلاس درس، بر حجم مسأله‌های محول‌شده به فراگیران در برنامه‌ی رسمی، افزوده‌ام. این در حالی است که تصور بر آن است که همه‌ی معلمان (در همه‌ی مقاطع) دست به چنین اقدامی می‌زنند. اما از آن‌جا که رویکرد تدریس حل مسأله در چنین انتخابی و تدریس، نقش بسزایی دارد، آشنایی با رویکرد معلمان، در کنار رویکرد موجود در کتاب‌های درسی، اهمیت بیش‌تری می‌یابد.

کلام آخر، و نه آخرین کلام را به نقل قولی از آقاسی (شاگرد لاکاتوش) اختصاص می‌دهیم: «آموزش، برای تربیت شهروندان مستقل، آزاد و توانا است. از این‌رو، من به جای روش تهییج و گول‌زدن و استحمار کودکان، طرفدار روش اکتشافی واقعی هستم. یعنی با آن‌ها، درباره‌ی تقصیرات گذشته‌ی نظام، به بحث بنشینیم و راجع به لذت کشف کرن و بهبود و نوآوری و تمایل آن‌ها برای تطور استعدادهای ضروری خودشان، گفت‌و‌گو کنیم» [۱۱].

مراجع

[۱] شونفیلد، ا. اچ. (۱۳۷۸). فراشناخت و ریاضیات. رشد آموزش ریاضی، شماره‌ی ۵۵، ص ۴.

[۲] مارشال، کاترین و راس‌من، گرچن ب (ترجمه علی پارسائیان و سیدمحمد اعرابی) روش تحقیقی کیفی. دفتر پژوهش‌های فرهنگی، چاپ دوم، ۱۳۸۱، ص ۱۱۹.

[۳] گویا، زهرا (۱۳۷۹). واقعاً این همه هیاهو در مورد فراشناخت چیست؟ رشد آموزش ریاضی، شماره‌ی ۵۹ـ۶۰، ص ۱۶.

[۴] پولیا، جورج (ترجمه: پرویز شهریاری) **خلاقیت ریاضی**. انتشارات فاطمی، چاپ دوم، ۱۳۷۳، صص ۲۰۵ـ۲۰۹.

[۵] گویا، زهرا (۱۳۷۷). نقش فراشناخت در یادگیری حل مسأله ریاضی. رشد آموزش ریاضی، شماره‌ی ۵۳، ص ۱۳.

[۶] پولیا، جورج (ترجمه: احمد آرام) **چگونه مسأله را حل کنیم؟** انتشارات مؤسسه‌ی کیهان، چاپ اول، ۱۳۶۳.

[۷] آیزنر، الیوت (۱۳۸۱) آنان که گذشته را نادیده می‌گیرند: ۱۲ درس «آسان» برای هزاره‌ی بعد. **رشد آموزش ریاضی**، شماره‌ی ۶۹، ص ۱۵.

[۸] رامبرگ، توماس (۱۳۷۹) استانداردهای برنامه درسی و ارزشیابی NCTM. رشد آموزش ریاضی، شماره‌ی ۶۲، ص ۱۷.

[۹] دلاور، علی. **مبانی نظری و عملی پژوهش در علوم انسانی و اجتماعی**. انتشارات رشد، چاپ اول، ویرایش دوم، ۱۳۸۰.

[۱۰] ریس، رابرت ای؛ سایدام، مرلین ن. و لیندکوئیست، مری مونتگومری (ترجمه: مسعود نوروزیان) **کمک به کودکان در یادگیری ریاضیات**. انتشارات مدرسه، چاپ اول، ۱۳۷۷، ص ۱۰.

[۱۱] آقاسی، جوزف. (۱۳۸۳) در باب آموزش ریاضی: انقلاب لاکاتوش. رشد آموزش ریاضی، شماره‌ی ۷۵، ص ۷.

یک خاطره

دید رو: «هندسه، بهترین و ساده‌ترین منطق‌ها و مناسب‌ترین راه پایدار ساختن اندیشه‌ها است.»

علی‌اکبر جاویدمهر
دبیر ریاضی ساوه

شبی رأس ساعت ۲۱ تلفن زنگ زد. دانش‌آموزی بود و گفت: منزل...؟ گفتم: بفرمایید. دانش‌آموز گفت: آقا یک مسأله‌ی هندسه دارم و جوابش را تا ساعت ۲۲ می‌خواهم. گفتم اگر بتوانم، چَشم! زیرا حل مسایل هندسه، وقت زیادی می‌خواهد. وی صورت مسأله را چنین توضیح داد:

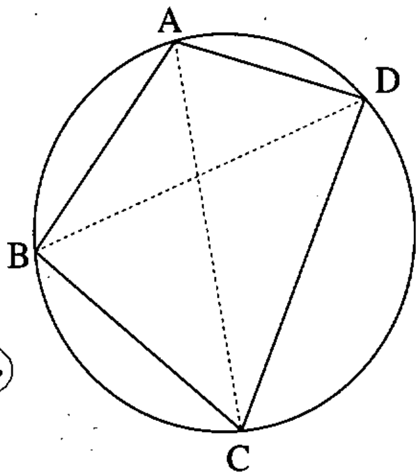
نقطه‌ی M روی کمان CD از دایره‌ی محیطی مربع ABCD واقع است. ثابت کنید

$$MA(MA+MC)=MB(MB+MD)$$

پرسیدم: تا کجا پیش رفته‌ای؟ مرا راهنمایی کن! جواب داد: در کتاب «بازی آموزی و بازشناخت هندسه»، قضیه‌ی بطلمیوس را دیدم که چنین است:

در هر چهارضلعی محاطی مجموع حاصل ضرب‌های ضلع‌های روبه‌رو برابر است با حاصل ضرب دو قطر. یعنی (شکل ۱)

$$AB\times CD+BC\times AD=AC\times BD$$



شکل ۱

بعد از خداحافظی از او، شروع به حل مسأله کردم و دو چهار ضلعی را که به حل مسأله کمک می‌کرد، یافتم.

یکی MABC و دیگری MDAB که می‌توان رابطه‌ی بطلمیوس را در آن‌ها چنین نوشت (شکل ۲)

$$MA\times BC+MC\times AB=AC\times MB \qquad (۱)$$

و نیز چون ABCD مربع است

$AB=BC=CD=AD=\sqrt{۲}R$ و $AC=BD=۲R$

بنابراین از رابطه‌ی (۱) نتیجه می‌شود

$$MA+MC=\sqrt{۲}MB$$

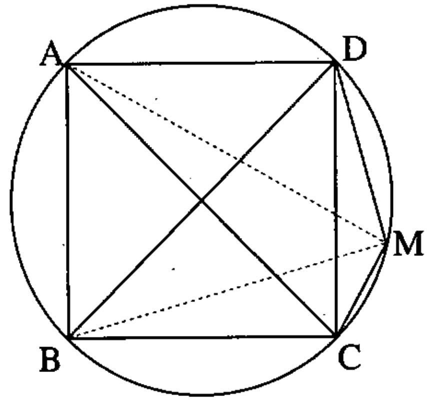
یعنی

$$MA\times(MA+MC)=\sqrt{۲}MA\times MB$$

و به همین ترتیب نتیجه می‌شود

$$MB.(MB+MD)=\sqrt{۲}MA\times MB$$

و مسأله اثبات می‌شود.



شکل ۲

بالاخره ساعت ۱۰ : ۱۰ همان شب، دانش‌آموز مجدداً تماس گرفت. با راهنمایی گام‌به‌گام، دانش‌آموز را به سمت حل مسأله رهنمون شدم. دانش‌آموز خوشحال از دریافت حل مسأله، خداحافظی کرد و آن‌چه از این تجربه برای من باقی ماند، تفکر و تحقیق پیرامون یافتن راه‌های گوناگون اثبات قضیه‌ی بطلمیوس بود که نهایتاً در مجله‌ی یکان دوره‌ی نهم شماره‌۷، شماره‌ی مسلسل ۹۲، سال ۱۳۵۲، بیان منظوم قضیه‌ی بطلمیوس از آقای مهدی عیوقی را یافتم که جهت علاقه‌مندان به هندسه، و در ادامه، عیناً نقل می‌شود.

بیان منظوم قضیه‌ی بطلمیوس

آقای مهدی عیوقی دانش‌آموز پایه‌ی پنجم ریاضی دبیرستان ابن‌سینای همدان، علاوه بر آن‌که به دروس ریاضی علاقه دارد، تا حدی هم با شعر و شاعری سروکار دارد. این دانش‌آموز قضیه‌هایی از هندسه را در قالب شعر بیان کرده که اشعار مربوط به قضیه‌های بطلمیوس و سه عمود را در تاریخ ۱۳۵۱/۱۲/۱۰ برای مجله‌ی یکان فرستاده است که اشعار مربوط به قضیه‌ی بطلمیوس در زیر درج می‌شود.

این سخن نقل مرا شد ز یکی هندسه‌دان	که ورا کهنه یقیناً نکند سیر زمان
گر بنا را ز ازل پایه به احکام نهی	بی‌گمان نیست ورا سوی خرا بیش رهی
آن مهندس سخنی گفت ز نقصان همه دور	شعله‌ای ساخت که اشباع بسی گشته ز نور
گفت ما را که یکی دایره ترسیم کنیم	بهر او چاربری یک‌سره تقدیم کنیم
چو یکی قطر شود ضرب در آن قطر دگر	نرود زحمت ما یک‌سره بی‌شک به‌هدر
گر کنی ضرب تو اضلاع مقابل در هم	نیز افزوده کنی حاصل آن‌ها بر هم
یافت خواهی که دو محصول مساوی شده‌اند	همگی تابع آن فکر کذائی شده‌اند
حال اثبات وی از بهر تو آماده کنم	جام احساس ترا یک‌سره پر باده کنم
کنم ABCD در دایره‌ای حبس کنون	تا که از دارگمانت بکشم زود برون
حال اقطار ورا صورت ترسیم دهیم	B با ABD آن‌گاه برابر بنهیم
نگری گر تو بدین شکل به امعان نظر	شجر رنج تو خواهد که دهد زود ثمر
نسبت چونی آن گر بتو معلوم شود	رنگ اوهام و ظنون یک‌سره معدوم شود
با BAD سه بر EBC مانند بود	این سخن را به یقین فکر تو پابند بود
گر نویسی تو همی نسبت مانندیشان	متعجب شوی از فن هنرمندیشان
AD بر EC کنون چون DB بر BC رود	DB در EC همی چون CB در AD شود
دقتی کن تو در این شکل یکی بار دگر	تا که قانع شوی ای یار نکو خلق و سیر
EBA، BCD را گشته مشابه سه بری	شجر رنج تو وه داده چه نیکو ثمری
نسبت چونی آن گر بتو معلوم شود	رنگ اوهام وظنون یک‌سره معدوم شود
هست AE به DC هم‌چو BA بر BD	یا BA در CD ماند به EA در DB
این روابط چون به هم جمع و کنی ساده سپس	بی‌گمان بر تو نیاید دگر اشکال ز کس
بر تو (عیوقی) چه آمد سخن حق به ثبوت	نسزد در بر حق کار دگر غیر سکوت

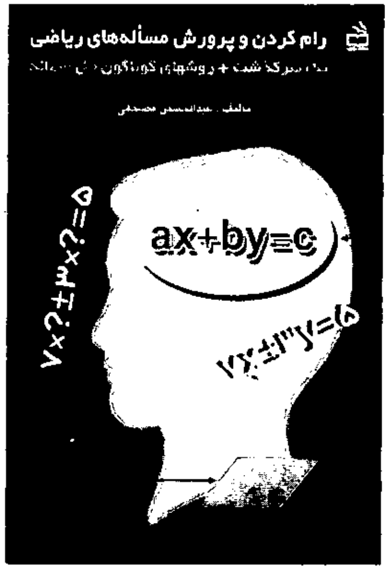
زیرنویس

اثبات قضیه‌ی بطلمیوس و عکس آن در کتب مختلف هندسه آمده است. به‌ویژه در کتاب «بازآموزی و بازشناخت هندسه»، ترجمه‌ی عبدالحسین مصحفی، در صفحات ۵۷ و ۵۸، با استفاده از خط سمسن و با استفاده از تشابه توسط مرحوم حسین غیور آمده است. بهترین روش اثبات قضیه‌ی بطلمیوس و عکس و تعمیم آن با انعکاس انجام می‌گیرد.

معرفی کتاب در حوزه‌ی حل مسأله

سپیده چمن‌آرا

رام کردن و پرورش مسأله‌های ریاضی
یک سرگذشت + روش‌های گوناگون حل مسأله



نویسنده: عبدالحسین مصحفی؛
ناشر: انتشارات مدرسه؛
چاپ اول: زمستان ۱۳۷۷؛
بهاء: ۷۰۰۰ ریال.

نگارنده، در نخستین صفحه‌ی کتاب، در سخنی با خواننده، چنین می‌نویسد:

«نگارنده، هفتاد و دو ساله، دو هفت‌سالگان را در این نگارش پیش چشم داشته است. با این همه، نوجوان‌ترها، جوانان و هم‌چنین بزرگسالان نیز این نگاشته را خوشایند، سرگرم‌کننده و آموزنده خواهند یافت.

نگاشته بر پایه‌ی یک داستان پا می‌گیرد و پیش می‌رود. داستانی از گونه‌ی یک سرگذشت که تکه به تکه بازگو می‌شود و سرانجام به شناسایی معادله‌های سیّال و چگونگی راه‌حل آن‌ها می‌انجامد. هر تکّه از داستان را پرسش‌هایی در پی می‌آید و پس از آن، در یادداشتی بیرون از زمینه‌ی داستان، یکی از روش‌های گوناگون حل مسأله‌های ریاضی یادآوری می‌شود و به دنبال آن، تمرین‌ها و مسأله‌هایی برای حل نموده می‌شوند.

داستان را می‌شود سرسری خواند، ولی چنانچه با ژرف‌نگری خوانده شود نمودی بالاتر از یک خواندنی سرگرم‌کننده را خواهد داشت. مسأله‌ها تا اندازه‌ای رده‌بندی شده‌اند و بیش‌ترشان، چه آن‌ها که ساده می‌نمایند و چه آن‌ها که به اندیشیدن نیاز دارند، نکته‌هایی را بازگو می‌کنند. بیش‌تر مسأله‌ها، مگر آن‌ها که به روش جبری باید حل شوند، درخور توان ریاضی دانش‌آموزان دو سال پایانی دبستان نیز هستند و برای آنان تازگی خواهند داشت. آنان می‌توانند از این راه توانمندی خود را در حل مسأله‌های ریاضی افزایش دهند؛ نوجوانان، بیش‌تر از بزرگ‌ترها به مسأله‌های فکری دل می‌بندند و زودتر هم به راه‌حل آن‌ها دست می‌یابند و گاه راه‌حل‌هایی را به کار می‌برند که بزرگ‌ترها را شگفت‌زده می‌کند.

چنانچه در حل مسأله‌ای درماندید، بهتر است برای زمانی کوتاه آن را رها کنید و به کار دیگر یا به حل مسأله‌ای دیگر بپردازید. به این ترتیب، شانس بیش‌تری برای حل آن خواهید داشت.

پاسخ‌ها و راه‌حل مسأله‌ها در بخش پایانی کتاب آورده شده‌اند. این‌ها تنها برای آنند که پس از آن‌که مسأله‌ای را حل کردید، به درستی پاسخ خود پی ببرید.

این کتاب هم‌چنین می‌تواند انگیزه‌ای باشد برای بررسی و گفت‌وگو در زمینه‌ی مسأله‌های ریاضی در کلاس‌های تربیت معلم.»

حل مسأله ی خلاق:
روش هایی در خلاقیت عملی

نویسنده: داگلاس کمبل؛
مترجم: علیرضا توکلی؛
ناشر: انتشارات مدرسه؛
چاپ اول: ۱۳۸۴؛
بهاء: ۱۲۵۰۰ ریال.

حل مسأله ی خلاق، کتابی متفاوت است. نه در آن عدد و رقمی می بینید و نه مطلقاً فرمول و عبارت ریاضی! همان گونه که عنوان کتاب می گوید، این کتاب برای آشنایی با روش های خلاقیت و حل مسایل عملی و واقعی است. به گفته ی نگارنده:

«هنگامی که کلاس شما فعالیت های حلّ مسأله ی خلاق را به پایان می برند، به این توانایی دست می یابند که تعداد بسیار زیادی ایده را برای یک مسأله ی مشخص، ارایه دهند. آن ها در طریق فکر کردن مردم هم سن خود، گامی فراتر می روند. آن ها قادر خواهند بود روی جمله های مسأله به گونه ای کار کنند تا متقاعد شوند که دارند روی یک مسأله کار می کنند نه یک سری علائم. حداقل آن ها می توانند جمله ی یک مسأله را به گونه ای بازسازی کنند که بتوانند آن را آسان تر حل کنند. برای آن هایی که به این هدف نمی رسند، این نوع فعالیت ها این اعتماد به نفس را می دهد که وقتی با مسأله ای روبه رو شدند بتوانند آن را گسترش دهند و این شانس را داشته باشند که راه حل خوبی ارایه دهند. سرانجام، دانش آموزان درباره ی یافتن راه حل ها و کامل کردن آن ها دچار هیجان می شوند.

تفکّر خلاق، مانند تفکر انتقادی، دارای طرز تلقّی، نظم و تجربه ی ویژه ای با ابزارهای منحصر به خودش است. در هر دو مورد، موضوع این نیست که «شما به آن ها برسید یا نرسید» حلّ مسأله خلاق این عناصر را تهیه می کند... بیش تر فعالیت ها به ابزارهایی نیاز دارند که در تفکر خلاق به کار می رود. فرایند انجام دادن همه فعالیت ها کمک می کند تا تجربه ی لازم برای تبدیل این مهارت ها را به یک عادت فراهم آورد...

...لازم به یادآوری است که خلق کردن یکی از بالاترین درجه های تفکر است. حل مسأله در یک موقعیت کلاسی می تواند یک کار گروهی بسیار قوی را پدید آورد. بچه هایی که با دیگران کار می کنند درمی یابند که ایده ها چگونه شکل می گیرند، تعریف می شوند، گسترش می یابند و به تدریج به چیزی بزرگ تر از «مجموع قسمت ها» تبدیل می شوند. فعالیت نهایی این فرصت را فراهم می آورد که روی چیزی متمرکز شویم که به دیگران منفعت برساند. به کار بردن ابزار خلاقیتی قوی برای یک مسأله ی با ارزش، حس قوی از اعتماد به نفس و ارزش را به وجود می آورد.»

کارگاه حل مسأله

نویسنده: دکتر یحیی تابش؛
ناشر: مؤسسه ی انتشارات فاطمی؛
چاپ دوم: ۱۳۸۱؛
بهاء: ۶۵۰۰ ریال.

این کتاب که یکی از سه جلد کتاب چاپ شده از «مجموعه ی کارگاه های علوم ریاضی» است، برای دانش آموزان سال های اول و دوم دبیرستان و حتی دانش آموزان سوم راهنمایی، قابل استفاده و مفید است. در پیشگفتار کتاب از زبان نویسنده می خوانیم:

«مسأله ها سرچشمه ی جوشندگی ریاضیات هستند و تلاش برای حل مسأله رضایت خاطری را به دنبال دارد که انگیزه ی این تلاش است. البته باید توجه داشت که راه حل مسأله ای با ارزش، به سادگی و بدون زحمت به دست نمی آید؛ ساعت ها و بلکه روزها تلاش فکری را می طلبد و گام گذاشتن به این تلاش است که قله های ناگشوده را می گشاید. ولی آیا

«مسأله» و «حل مسأله»
در مجله‌های رشد آموزش ریاضی در ۱۰ سال گذشته

جمع‌آوری: سپیده چمن‌آرا

برای حل مسأله‌ها راه و روش خاصی وجود دارد که بتوان آن را فرا گرفت؟ در پاسخ این سؤال می‌گوییم هرچند مسأله حل کردن هم‌چون خلاقیت هنری می‌ماند، ولی آشنایی با برخی روش‌ها و کسب تجربه و آشنایی با تجربه‌های دیگران می‌تواند راهگشا باشد. در این کتاب می‌خواهیم چنین کاری را انجام دهیم و با برخی روش‌های ساده آشنا شویم که به کسب تجربه‌هایی ارزشمند منتهی می‌شود.

نکته‌ی دیگر این که بعضی از نکات و مباحث نسبتاً ساده که هم اشتیاق‌برانگیزند و هم ابزاری قوی در حل مسأله فراهم می‌سازند در آموزش‌های رسمی مورد توجه قرار نمی‌گیرند. این کتاب این امکان را نیز فراهم می‌کند که این مباحث پراکنده در اختیار علاقه‌مندان قرار گیرد تا در شیرینی آن سهیم شوند.

این مجموعه به دانش‌آموزان علاقه‌مندی تقدیم می‌شود که تلاش برای حل مسأله برای آنان علاوه بر این که یک مبارزه‌ی فکری است یک چالش فرهنگی نیز محسوب می‌شود که دریچه بر روی ناشناخته‌ها بگشایند. ■

● حیدری قزلجه، رضا. (۱۳۸۴). روایت معلمان: آن‌چه از کلاس «حل مسأله آموختم!»، شماره‌ی ۸۲، دوره‌ی بیست‌وسوم، شماره‌ی ۲، زمستان ۱۳۸۴، صص ۳۲-۳۷.

● قربانی، مهدی. (۱۳۸۳). **یک مسأله و چند راه‌حل**، شماره‌ی ۷۸، دوره‌ی بیست و یکم، شماره‌ی ۴، زمستان ۱۳۸۳، صص ۴۸-۵۱.

● صدقی، مژگان. (۱۳۸۳). **مسأله‌ی هر اسب جای خودش**، شماره‌ی ۷۶، دوره‌ی بیست و یکم، شماره‌ی ۲، تابستان ۱۳۸۳، ص ۳۵.

● مرتاضی مهربانی، نرگس. (۱۳۸۲). **معرفی مدل K-W-D-L برای حل مسأله**، شماره‌ی ۷۴، دوره‌ی بیستم، شماره‌ی ۴، زمستان ۱۳۸۲، صص ۴-۱۴.

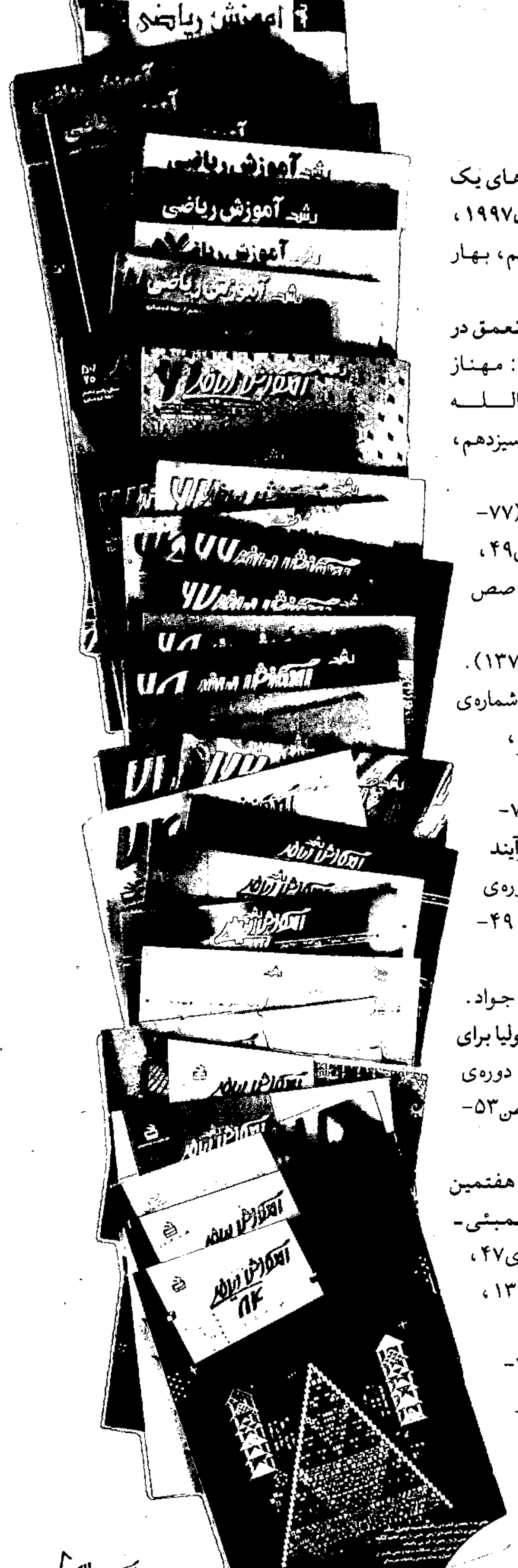
● فرشی، مهدی. (۱۳۸۲). **مسأله‌ی سوزن بوفون**، شماره‌ی ۷۴، دوره‌ی بیستم، شماره‌ی ۴، زمستان ۱۳۸۲، صص ۳۵-۳۹.

● ایوبیان، مرتضی؛ گویا، زهرا. (۱۳۸۲). **نقش فراشناخت در آموزش حل مسأله‌ی ریاضی**، شماره‌ی ۷۴، دوره‌ی بیستم، شماره‌ی ۴، زمستان ۱۳۸۲، صص ۴۰-۵۱.

● رضائی، مانی. (۱۳۸۲). **مسأله: برش بزنید!**، شماره‌ی ۷۲، دوره‌ی بیستم، شماره‌ی ۲، تابستان ۱۳۸۲، ص ۲۲.

● ظهوری زنگنه، بیژن. (۱۳۸۱). **داستان یک مسأله**، شماره‌ی ۶۹، دوره‌ی نوزدهم، شماره‌ی ۳، پاییز ۱۳۸۱، صص ۳۹-۴۱.

● جزایری، ضیاءالدین (دهه‌ی ۲۰ هجری شمسی). **روش جدید در حل**



مسایل فکری حساب، شماره‌های ۶۴ و ۶۵، دوره‌ی هجدهم، شماره‌های ۲ و ۳، تابستان و پاییز ۱۳۸۰، صص ۳۴ تا ۴۱ و ۲۹ تا ۳۲.

● صمدی، معصومه. (۸۰-۱۳۷۹). نقش دانش فراشناخت در حل مسأله‌ی ریاضی دانش‌آموزان پایه‌ی چهارم ابتدایی، شماره‌ی ۶۱، دوره‌ی پانزدهم، صص ۱۱-۱۷.

● نوروزی، محمدرضا (۸۰-۱۳۷۹). روش‌های ره‌گشای حل مسأله و چالش‌های آن. شماره‌ی ۶۰-۵۹، دوره‌ی پانزدهم، صص ۶۷-۷۰.

● یزدچی، صفورا (۸۰-۱۳۷۹). تأثیر شیوه‌های بیان مسأله بر حالت‌های مسأله و راهبردهای حل معادلات درجه اول یک مجهولی در دانش‌آموزان دختر سال دوم راهنمایی، شماره‌ی ۶۰-۵۹، دوره‌ی پانزدهم، صص ۷۱-۷۹.

● دی تمپل، دوآن؛ فیتینگ، مارجری آن. (۷۸-۱۳۷۷). مسأله‌ی خطوط سوایی، مترجم: شیوا آشینه، شماره‌ی ۵۴، دوره‌ی چهاردهم، زمستان ۱۳۷۷، صص ۱۲-۱۸.

● جهانی‌پور، روح‌الله. (۷۸-۱۳۷۷). مسأله چیست؟ شماره‌ی ۵۴، دوره‌ی چهاردهم، زمستان ۱۳۷۷، صص ۱۹-۲۵.

● گویا، زهرا. (۷۸-۱۳۷۷). نقش فراشناخت در یادگیری حل مسأله‌ی ریاضی، شماره‌ی ۵۳، دوره‌ی چهاردهم، پاییز ۱۳۷۷. صص ۱۳-۱۸.

● پاشا، عین‌الله. (۷۷-۱۳۷۶). دو مسأله برای حل، شماره‌ی ۵۲، دوره‌ی چهاردهم، تابستان ۱۳۷۷، ص ۳۱.

● محمودیان، سیدعبادالله؛ مهدیان، محمد (۷۷-۱۳۷۶). ریشه‌های یک مسأله‌ی المپیاد جهانی ریاضی سال ۱۹۹۷، شماره‌ی ۵۱، دوره‌ی چهاردهم، بهار ۱۳۷۷، صص ۵۲-۵۶.

● ماتئو، رابرت. (۱۹۹۶). تعمق در مسایل پیش‌پاافتاده، مترجمان: مهناز پاک‌خصال و عبدالله مصطفایی، شماره‌ی ۴۹، دوره‌ی سیزدهم، پاییز ۱۳۷۶، صص ۴۲-۴۵.

● مهاجری‌بیضائی، قدیر. (۷۷-۱۳۷۶). حل یک مسأله، شماره‌ی ۴۹، دوره‌ی سیزدهم، پاییز ۱۳۷۶، صص ۵۰-۵۱.

● حاجی‌بابائی، جواد. (۷۶-۱۳۷۵). مسأله‌های درس اول (حل مسأله)، شماره‌ی ۴۸، دوره‌ی سیزدهم، بهار ۱۳۷۶، صص ۵۶-۵۷.

● جهانی‌پور، روح‌الله. (۷۶-۱۳۷۵). انتخاب استراتژی در فرآیند حل مسأله، شماره‌ی ۴۷، دوره‌ی دوازدهم، زمستان ۱۳۷۵، صص ۴۹-۵۲.

● گویا، زهرا؛ حاجی‌بابائی، جواد. (۷۶-۱۳۷۵). مدل پیشنهادی پولیا برای حل مسأله، شماره‌ی ۴۷، دوره‌ی دوازدهم، زمستان ۱۳۷۵، صص ۵۳-۵۶.

● حل دو مسأله از مسایل سی و هفتمین المپیاد بین‌المللی ریاضی (بمبئی- هندوستان- تیر ۱۳۷۵)، شماره‌ی ۴۷، دوره‌ی دوازدهم، زمستان ۱۳۷۵، صص ۵۷-۵۹.

● جهانی‌پور، روح‌الله. (۷۶-۱۳۷۵). انتخاب استراتژی در فرآیند حل مسأله، شماره‌ی ۴۶، دوره‌ی دوازدهم، پاییز ۱۳۷۵، صص ۵۷-۶۳.

گزارش و خبر

هشتمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران

۲۴ تا ۲۶ مرداد ۱۳۸۵

شهرکرد-ایران

گزارشگر: مانی رضائی

هشتمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران، در شهرکرد، مرکز استان چهارمحال و بختیاری، طی روزهای ۲۴ تا ۲۶ مرداد ۱۳۸۵ برگزار شد. در این کنفرانس بیش از ۱۲۰۰ نفر از معلمان ریاضی کشور در مقاطع مختلف، دانشجویان و اساتید دانشگاه‌ها به همراه چند مهمان خارجی شرکت داشتند. طبق اعلام مسؤولان، پس از فراخوان اولیه‌ی کنفرانس، ۸۲۲ مقاله به کنفرانس ارایه شد، که پس از داوری، ۸۲ مقاله‌ی فارسی و ۵ مقاله‌ی خارجی برای سخنرانی، ۵۰ مقاله به صورت پوستر، ۱۵ مقاله به صورت نمایشگاهی و ۱۶ مورد برای ارایه در کارگاه انتخاب شدند.

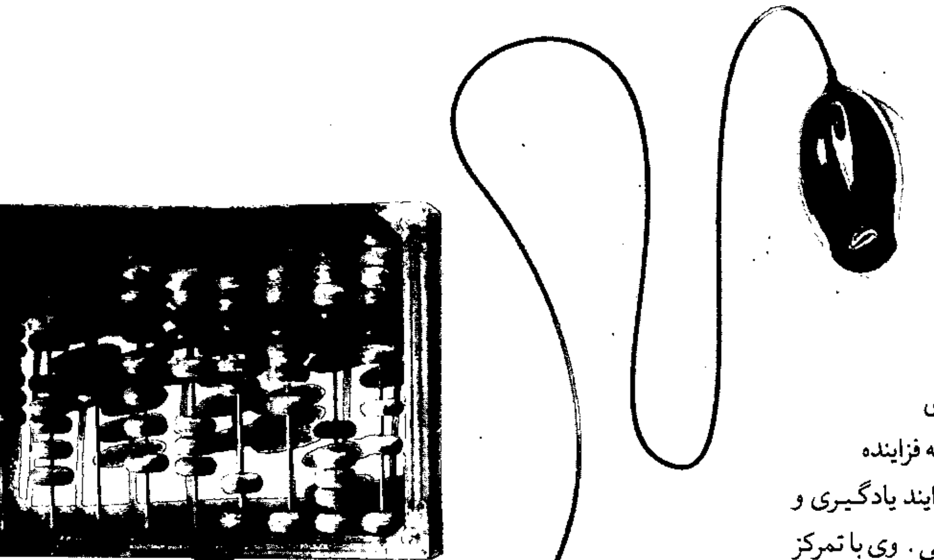
هدف کنفرانس «گسترش فرهنگ ریاضی به طور عام و بررسی مسایل و تبادل تجربه‌های آموزش ریاضی کشور به طور خاص» بیان و محورهای اصلی مقاله‌ها حول موارد زیر اعلام شده بود: ۱) مبانی نظری آموزش ریاضی؛ ۲) وضعیت موجود و چالش‌های پیش‌روی آموزش ریاضی ایران؛ ۳) توسعه‌ی حرفه‌ای معلمان ریاضی؛ ۴) عمومی کردن ریاضیات.

در مراسم افتتاحیه، بعد از اجرای چند برنامه‌ی کوتاه، استاندار چهارمحال و بختیاری و مدیرکل آموزش و پرورش استان هر یک به طور جداگانه، ضمن خوش‌آمدگویی به مهمانان، به ایراد سخنرانی کوتاهی پرداختند. سپس وزیر آموزش و پرورش در سخنرانی خود، با اشاره به وضعیت آموزش ریاضی، به ضرورت پرداختن به ریاضی به صورت عملی و کاربردی در آموزش جاری تأکید کرد و به طرح موضوعات عمومی روز پرداخت.

پس از پایان مراسم افتتاحیه، دکتر محمود مهرمحمدی در سخنرانی عمومی خود، گزارشی مبسوط از مراحل تدوین سند ملی آموزش و پرورش به شرکت کنندگان در کنفرانس ارایه کرد. وی در این سخنرانی به تشریح ساختار سازمانی گروه‌ها و افراد شرکت کننده در این مهم پرداخت. مهرمحمدی با اشاره به ارتباط این سند با سندهای راهبردی و کلان کشور، از کارشناسان و علاقه‌مندان دعوت کرد تا با مراجعه به سایت http://www.sanad.ir نظر خود را در مورد این سند اعلام دارند.

در مدت این کنفرانس سه روزه، علاوه بر سخنرانی عمومی دکتر مهرمحمدی، دو سخنرانی عمومی دیگر به مدت حدود یک ساعت در روزهای بعد برگزار شد. مانوئل سانتوزتریگو از Center for Research and Advanced Studies مکزیک، در دومین روز کنفرانس، سخنرانی خود را با عنوان «حل مسأله‌ی ریاضیات و استفاده از ابزارهای محاسباتی» ارایه کرد. وی با طرح چند سؤال مانند «معنی یادگیری ریاضیات در حل مسأله چیست؟»، «رابطه‌ی فعالیت‌های ریاضی با مراحل یادگیری دیسیپلین ریاضی در دانش‌آموزان چیست؟» و... بحث خود را شروع کرد و حل مسأله را به عنوان رهیافتی برای آموزش یا ساخت و ساز دانش ریاضی دانش‌آموزان معرفی کرد.

سخنران عمومی روز سوم، میشل آرتیگ از دانشگاه پاریس۷ بود. خانم آرتیگ یکی از سرشناس ترین محققان آموزش ریاضی اروپا است. آرتیگ در سخنرانی خود با عنوان «تحقیقات آموزشی چه پیشنهادی برای آموزش ریاضی دارند؟» سه موضوع در



تحقیقات آموزشی را نام برد: ۱) توسعه‌ی چارچوب نظری با رویکردهای اجتماعی و انسان‌شناسانه؛ ۲) توجه فزاینده به معلم به طوری که تخصص حرفه‌ای معلم را نشان دهد؛ ۳) توجه فزاینده به انواع نظام‌های نمادی (semiotic) در فر ایند یادگیری و رویکردهای آگاهی‌بخش به مباحث تکنولوژیکی. وی با تمرکز بر هریک از این موارد، به تأثیر تحقیقات آموزشی بر تحقیقات آموزش ریاضی پرداخت. آرتیگ اشاره کرد: «توجه به نظریه، حیاتی است و مبانی نظری، شکل‌دهنده و توجیه‌کننده‌ی روش‌های تحقیق است و یکی از نظریه‌های مورد توجه، ساخت و سازگرایی است. [با این همه، وی تأکید کرد] تفاوت معناداری بین نظریه‌های یادگیری و نظریه‌های تدریس وجود دارد.» وی افزود: «تعدد زیاد نظریه‌ها، نگران‌کننده است و باید نوعی وحدت رویه به‌وجود آید. از سویی معلم، کلید اصلی هر تحول و تطور آموزشی و تدریس است. معلمان بازیگران اصلی عرصه‌ی تدریس هستند و باید در تحقیقات آموزشی به نقش آن‌ها توجه داشت. در انجام تحقیقات آموزش ریاضی بسیار ضروری است که به نیاز به هر دو نوع تحقیقات بنیادی و کاربردی توجه داشته باشیم.»

علاوه بر سخنرانی‌های عمومی، مقاله‌هایی که برای ارایه در کنفرانس انتخاب شده بودند، در قالب برنامه‌های ۲۰ دقیقه‌ای و به صورت موازی، در دو نوبت صبح و عصر اجرا شدند. موضوع سخنرانی‌ها (با توجه به چکیده‌ی ارایه شده) در رده‌های زیر می‌توانند دسته‌بندی شوند: روش‌های تدریس (۲۰ مورد)، روان‌شناسی آموزش ریاضی (۱۳ مورد)، بررسی نظام آموزشی (۱۲ مورد)، موضوعات دانش ریاضی (۱۱ مورد)، آموزش معلمان (۱۰ مورد)، بازخورد از کلاس درس (۷ مورد)، ریاضی و تکنولوژی (۴ مورد)، تاریخ ریاضی (۴ مورد)، عمومی کردن ریاضی (۱ مورد).

هم‌چنین، محور اصلی اغلب مقاله‌های پوستر شده، به شرح زیر بودند: عمومی کردن ریاضی (۱۰ مورد)، دانش ریاضی (۸ مورد)، روش‌های تدریس (۸ مورد)، بازخورد از کلاس درس (۷ مورد)، روش‌های یاددهی-یادگیری (۵ مورد)، بررسی نظام آموزشی (۵ مورد)، آموزش معلمان (۴ مورد)، ریاضی و تکنولوژی (۲ مورد)، تاریخ ریاضی (۱ مورد). ارایه‌ی مقاله‌های پوستر شده و اجرای کارگاه‌های آموزشی و نمایشگاه‌های دست‌سازه‌های معلمان و دانش‌آموزان مقاطع مختلف و از شهرستان‌های مختلف، به صورت هم‌زمان و در یک نوبت ۲ ساعته در بعدازظهر هر روز پیش‌بینی شده بود.

عصر روز دوم کنفرانس، برنامه‌ی پنج گروه کاری به صورت موازی اجرا شد که دو تای آن، به صورت میزگرد ارایه شد و مورد توجه و استقبال شرکت‌کنندگان کنفرانس قرار گرفت. عنوان گروه‌های کاری بدین شرح بود: ۱) میزگرد آموزش ریاضی در دانشگاه؛ ۲) میزگرد مسایل آزمون‌های نهایی آموزش و پرورش؛ ۳) ICT در آموز ش ریاضی؛ ۴) آموزش آمار؛ ۵) پژو هش معلمان.

در حاشیه‌ی کنفرانس، فعالیت غرفه‌های خانه‌های ریاضیات یزد، زنجان، و اصفهان قابل توجه بود. ارایه‌ی انواع وسایل کمک‌آموزشی برای ریاضی‌ورزی کودکان و نوجوانان و حتی جوانان از جمله فعالیت‌های ارایه شده در این غرفه‌ها بودند. هم‌چنین برخی شرکت‌های تولیدکننده‌ی مواد کمک‌آموزشی به معرفی و عرضه‌ی محصولات خود پرداختند و انتشارات مدرسه، مرکز نشر دانشگاهی، انتشارات فاطمی، و چند ناشر دیگر، کتاب‌های خود را با تخفیف ویژه‌ی کنفرانس ارایه کردند. علاوه بر این، غرفه‌های انجمن ریاضی ایران و اتحادیه‌ی انجمن‌های علمی و آموزشی معلمان ریاضی ایران، نیز در جنب کنفرانس به فعالیت پرداختند.

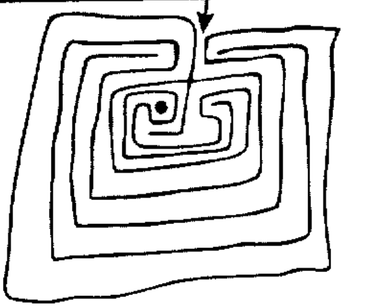
اجرای برنامه‌ی موسیقی سنتی توسط گروه جوان چهار نفری از هنرآموختگان موسیقی سنتی، در پایان روز دوم، علی‌رغم کوتاه بودن، دلنشین بود.

هشتمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران با تغییری محسوس نسبت به کنفرانس‌های پیش از آن روبه‌رو بود. حضور جمع

کثیری از دانشجویان و فارغ التحصیلان کارشناسی ارشد آموزش ریاضی و شرکت فعال آن‌ها و ارایه ی مقاله‌های مختلف توسط ایشان مشهود بود. بعدازظهر روز سوم کنفرانس (۲۶ مرداد)، و پس از سخنرانی عمومی، جلسه‌ای با حضور پروفسور میشل آرتیگ، مانوئل سانتوز، دکترا زهرا گویا، دکتر بیژن ظهوری زنگنه، دکتر محمدرضا فدایی، دکتر مهدی رجبعلی پور، و بیش از ۳۰ نفر از دانشجویان و فارغ التحصیلان آموزش ریاضی دانشگاه‌های شهید بهشتی تهران، آزاد (واحد پونک) و شهید باهنر کرمان، در خانه ی معلم شهرکرد تشکیل شد. این جلسه با هدف بررسی وضعیت آموزش ریاضی و مسایل موجود در تحقیقات برگزار شد. خانم آرتیگ با اشاره به فعالیت انجمن اروپایی آموزش ریاضی، ارتباط دانشجویان آموزش ریاضی با این انجمن را مفید ارزیابی کرد. وی در پاسخ به سؤالی در مورد واکنش معلمان به نتایج تحقیق گفت: «مقاومت معلمان در مقابل تغییر طبیعی است و باید آن را پذیرفت. علت اصلی آن است که سابقاً بسیاری از تحقیقات از بالا به پایین بود. با این که نتایج تحقیقات قبلی از نظر آماری درست بودند، اما کاربردی نداشتند. امروز ما تلاش می‌کنیم تحقیقات از پایین به بالا باشد.» مانوئل سانتوز نیز درخصوص این پرسش، معتقد بود: «این موضوع ویژه ی معلمان نیست؛ هر نوع اصلاحاتی با مقاومت روبه‌رو می‌شود. اما این مهم نیست؛ بلکه باید استراتژی‌ها طوری باشند که معلمان نیز بخشی از تغییر باشند و بهتر است با معلمان علاقه‌مند شروع شود و به بقیه احترام بگذاریم و قبول کنیم که عقاید مختلف وجود دارند.» سانتوز ادامه داد: «برای رشد و توسعه، نیازمند ارتباط هستیم و چاپ کتاب‌های کوچک برای آشنایی عمومی با نتایج تحقیقات، ضرورت دارد. چاپ نتایج یک پژوهش بین‌المللی، وظیفه ی آموزشگران ریاضی را سنگین‌تر می‌کند.» آرتیگ اشاره کرد: «دولت در فرانسه، آموزشگران را به حساب می‌آورد و نتایج آن‌ها را مورد توجه قرار می‌دهد. نمی‌دانم آیا در ایران نیز چنین است!؟...»

هشتمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران با تلاش و مهمان‌نوازی مسؤولان اجرایی کنفرانس در عصر روز بیست‌وششم مردادماه، درحالی به پایان رسید که افق فعالیت معلمان و تحقیق آموزشگران ریاضی بسیار روشن‌تر از گذشته به نظر می‌رسد و امید می‌رود نتایج تحقیقات در این حوزه بیش از پیش مورد استفاده ی معلمان و مورد توجه مؤلفان کتاب‌های درسی، برنامه‌ریزان، و مسؤولان قرار گیرد.

چهل و هفتمین



چهل و هفتمین المپیاد بین‌المللی ریاضی، در تاریخ ۱۲ و ۱۳ جولای ۲۰۰۶ (۲۱ و ۲۲ تیر ۱۳۸۵) در شهر ؟ کشور اسلونی برگزار شد. در این مسابقه، ۹۰ کشور از سراسر جهان شرکت داشتند: تیم ۶ نفره ی ایران نیز به سرپرستی دکتر آرش رستگار و آقای بهمن اصلاح پذیر، برای شرکت در این مسابقه، به شهر لوبیانا رفتند. این مسابقه، هر ساله، در ۲ روز برگزار می‌شود و در هر روز، ۳ مسأله به شرکت کنندگان داده می‌شود که هر مسأله، ۷ امتیاز دارد و زمان پاسخ گویی به آن‌ها، ۴ ساعت و نیم است. در چهل و هفتمین المپیاد بین‌المللی ریاضی، کشور چین با اخذ ۲۱۴ امتیاز از مجموع ۲۵۲ امتیاز شیمی، و اخذ ۶ مدال طلا، موفق به کسب رتبه ی اول این مسابقات شد. در جدول(۱)، امتیازهای تیمی و مدال‌های ۱۰ تیم اول این مسابقات را ملاحظه می‌کنید.

رتبه	کشور	امتیاز	مدال
۱	جمهوری خلق چین	۲۱۴	۶ طلا
۲	فدراسیون روسیه	۱۷۴	۳ طلا، ۳ نقره
۳	جمهوری کره	۱۷۰	۴ طلا، ۲ نقره
۴	آلمان	۱۵۷	۴ طلا، ۲ برنز
۵	ایالات متحده ی آمریکا	۱۵۴	۲ طلا، ۴ نقره
۶	رومانی	۱۵۲	۳ طلا، یک نقره، ۲ برنز
۷	ژاپن	۱۴۶	۲ طلا، ۳ نقره، ۱ برنز
۸	جمهوری اسلامی ایران	۱۴۵	۳ طلا، ۳ نقره
۹	جمهوری مولداوی	۱۴۰	۲ طلا، ۱ نقره، ۳ برنز
۱۰	تایوان	۱۳۶	۱ طلا، ۵ نقره

جدول(۱). امتیازها و مدال‌های ۱۰ تیم اول (IMO-47)

[منبع: http://imo2006.dmfa.si/results-ctd.html]

المپیاد بین‌المللی ریاضی

اِسلونی- ۲۰۰۶

در این میان، تیم ایران با اخذ ۳ مدال طلا و ۳ مدال نقره و ۱۴۵ امتیاز، رتبه‌ی هشتم را از آن خود کرده است. در جدول(۲)، امتیازهای تک‌تک اعضای تیم ایران را مشاهده می‌کنید.

ردیف	نام و نام خانوادگی	مسأله ۱	مسأله ۲	مسأله ۳	مسأله ۴	مسأله ۵	مسأله ۶	مجموع امتیازها	مدال
۱	نیما احمدی پوراناری	۷	۷	۰	۷	۷	۰	۲۸	طلا
۲	ناصر طالبی‌زاده سردری	۷	۷	۰	۶	۷	۱	۲۸	طلا
۳	جابر زارع‌زاده	۷	۷	۰	۷	۷	۰	۲۸	طلا
۴	آرمان فاضلی چاقوشی	۷	۱	۷	۷	۱	۰	۲۳	نقره
۵	محمد باوریان	۷	۵	۰	۶	۱	۰	۱۹	نقره
۶	سیدجلیل کاظمی تبار امیرکلایی	۷	۴	۱	۶	۱	۰	۱۹	نقره

جدول(۲). امتیازهای اعضای تیم ایران

[منبع: http://imo2006.dmfa.si/results-itd.html]

در ادامه، سؤال‌های چهل و هفتمین المپیاد بین‌المللی ریاضی را خواهید دید. برای مشاهده‌ی راه‌حل‌های این مسایل، به آدرس زیر مراجعه کنید:

http://imo2006.dmfa.si/problems.html

روز اول- ۱۲ جولای ۲۰۰۶

مسأله۱. فرض کنید I مرکز دایره‌ی محیطی مثلث ABC باشد. نقطه‌ی P را درون مثلث ABC طوری انتخاب می‌کنیم که

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$$

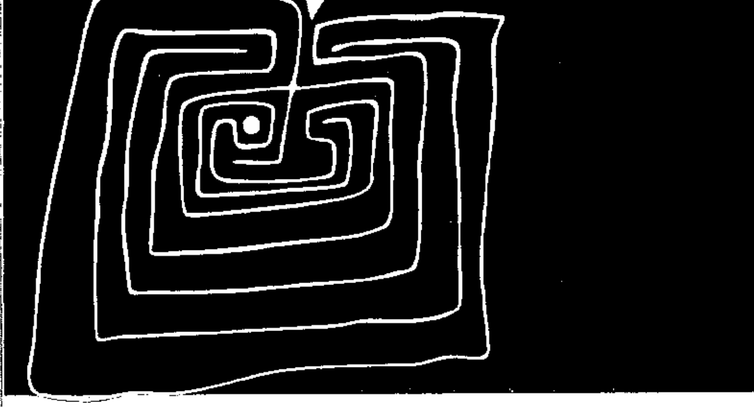
نشان دهید $AP \geq AI$ و تساوی برقرار می‌شود اگر و تنها اگر $P=I$.

مسأله۲. فرض کنید P یک ۲۰۰۶-ضلعی منتظم باشد. قطری از P را خوب گوییم هرگاه نقاط انتهایی این قطر، اضلاع P را به دو قسمت تقسیم کند که هر قسمت تعداد فرد ضلع دارد. اضلاع P نیز قطر خوب به حساب می‌آیند. فرض کنید P را با ۲۰۰۳ قطر که هیچ دوتای آن‌ها درون P تقاطع ندارند به ناحیه‌های مثلث شکل تقسیم کرده‌ایم. بیش‌ترین تعداد مثلث‌های متساوی‌الساقین با دو ضلع خوب را بیابید که می‌توانند در این ناحیه‌بندی ظاهر شوند.

مسأله۳. کمترین مقدار عدد حقیقی M را بیابید به طوری که نامساوی

$$\left|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)\right| \leq M(a^2+b^2+c^2)^2$$

برای هر a، b و c حقیقی برقرار باشد.



روز دوم ـ ۱۳ جولای ۲۰۰۶

مسأله۴ . همه‌ی زوج‌های صحیح (x,y) را بیابید که

$$1+2^{x}+2^{2x+1}=y^{2}$$

مسأله۵ . فرض کنید $P(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی $n>1$ با ضرایب صحیح و k یک عدد صحیح مثبت باشد. چندجمله‌ای $Q(x)=P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$ را در نظر بگیرید که P در آن k بار ظاهر می‌شود. ثابت کنید حداکثر n عدد صحیح t وجود دارد به طوری که $Q(t)=t$.

مسأله۶ . به هر ضلع b از یک چندضلعی محدب P، بیش‌ترین مساحت مثلثی را نسبت می‌دهیم که b را به عنوان ضلع دارد و در P قرار گرفته است. نشان دهید مجموع مساحت‌های نسبت داده شده به اضلاع P، حداقل دو برابر مساحت P است.

شماره‌ی چهارم نشریه‌ی اتحاد منتشر شد!

شماره‌ی چهارم نشریه‌ی **اتحاد** (نشریه‌ی اتحادیه‌ی انجمن‌های علمی و آموزشی معلمان ریاضی ایران) در تابستان سال ۸۵، منتشر شد. این نشریه که صاحب امتیاز آن، اتحادیه‌ی انجمن‌های علمی و آموزشی معلمان ریاضی ایران و مدیر مسؤول آن، آقای محمد ربیعی است، به سردبیری آقای محمدجواد جوامع، از سال ۱۳۸۰ کار خود را آغاز کرده است. شماره‌ی دوم ـ سوم این نشریه، در یک مجلد، در تابستان سال ۱۳۸۴ به چاپ رسیده است. عناوین مهم‌ترین مطالب شماره‌ی چهارم به شرح زیر می‌باشد:

- یادداشت سردبیر
- مصاحبه با استاد عبدالحسین مصحفی

نامه‌های رسیده

نامه‌های زیر تا پایان شهریور ۱۳۸۵، به دستمان رسیده‌اند. از همه‌ی آن‌ها، متشکریم.

دکتر افضل نیا، از تهران؛
فاطمه ملکی جبلی، از پیشوای ورامین؛
فاطمه زیاری، از تهران؛
محمود کلاته عربی، از خراسان شمالی؛
مهدی باقری، از بروجرد؛
مریم عالی، از کرمان؛
نرگس عصارزادگان، از اصفهان؛
محمدحسین اعرابی، از اصفهان؛
مرتضی بیات، از زنجان؛
فریده گوجان سامانی، از تهران؛

◆ محاسبه‌ی مقدار سری $\sum_{i=1} \frac{1}{i^2}$

◆ میدان فکری در کتاب‌های ریاضیات دبیرستان

◆ ارزیابی باور ریاضی دانش‌آموزان با تقریبی از سطوح فازی

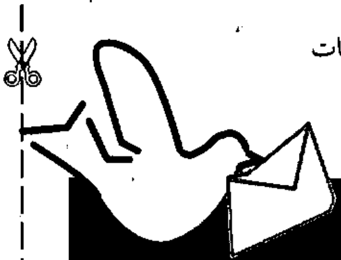
◆ معرفی خانه‌ی ریاضیات یزد

◆ نه سؤال مهم در ترکیبیات

◆ جهت تقعر منحنی

◆ راز موفقیت

◆ بررسی ارتباط تاریخ ریاضیات و آموزش ریاضیات.



منصوره رضوان قهفرخی، از چهارمحال و بختیاری؛
عظیمه سادات خاکباز، از ملایر؛
قاسم حسین قنبری، از سمنان؛
ملیحه ایمان‌پور، از گنبد کاووس؛
حمیدرضا وهابی، از تهران؛
آزاده زمانی ابیانه، از تهران؛
مژگان فریدون‌نژاد، از مبارکه؛
پگاه پیروانی‌نیا، از شیراز؛
سعید صالحی نجف‌آبادی، از نجف‌آباد اصفهان؛
شقایق خوشبخت، از بیرجند؛
فاطمه انوری، از تبریز.

برگ اشتراک مجله های رشد

شرایط

۱ـ واریز مبلغ ۲۰/۰۰۰ ریال به ازای هر عنوان مجله درخواستی، به صورت علی‌الحساب به حساب شمارهٔ ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت شعبه سه راه آزمایش (سرخه‌حصار) کد ۳۹۵ در وجه شرکت افست.

۲ـ ارسال اصل رسید بانکی به همراه برگ تکمیل شده اشتراک.

- **نام مجله :** ....
- **نام و نام خانوادگی:** ....
- **تاریخ تولد:** ....
- **میزان تحصیلات:** ....
- **تلفن:** ....
- **نشانی کامل پستی:**

استان: .... شهرستان: ....

خیابان: ....

....

پلاک: .... کدپستی: ....

- **مبلغ واریز شده:** ....
- **شماره و تاریخ رسید بانکی:** ....

امضا:

نشانی: تهران ـ صندوق پستی مشترکین ۱۶۵۹۵/۱۱۱
نشانی اینترنتی: www.roshdmag.ir
پست الکترونیک: Email:info@roshdmag.ir
☎ **امور مشترکین:** ۷۷۳۳۶۶۵۶ـ۷۷۳۳۵۱۱۰
☎ **پیام گیر مجلات رشد:** ۸۸۳۰۱۴۸۲ـ ۸۸۸۳۹۲۳۲

یادآوری:

- هزینه برگشت مجله در صورت خوانا و کامل نبودن نشانی، بر عهده مشترک است.
- مبنای شروع اشتراک مجله از زمان وصول برگ اشتراک است.
- برای هر عنوان مجله برگ اشتراک جداگانه تکمیل و ارسال کنید (تصویر برگ اشتراک نیز مورد قبول است).

IN THE NAME OF GOD
Ministry of Education
Organization of Research& Educational Planning
Teaching-Aids Publications Office

Roshd
Mathematics Education Journal 86
Vol. 24 No. 2 2006 ISSN: 1606 - 9188

P.O.Box : Tehran 15875 - 6585
E-mail: info@roshdmag.ir
roshd_riazi@yahoo.com

ادامه‌ی گزارش تصویری هشتمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران: ر. ک. صفحه‌ی ۵۸

ک سخنرانی بیست دقیقه ای

غرفه‌ی خانه‌ی ریاضیات اصفهان

نمایشگاه اریگامی

نمایشگاه معلمان آموزش عمومی

نمایشگاه خانه‌ی ریاضیات زنجان

نمایشگاه ابزارهای آموزشی هندسه آموز

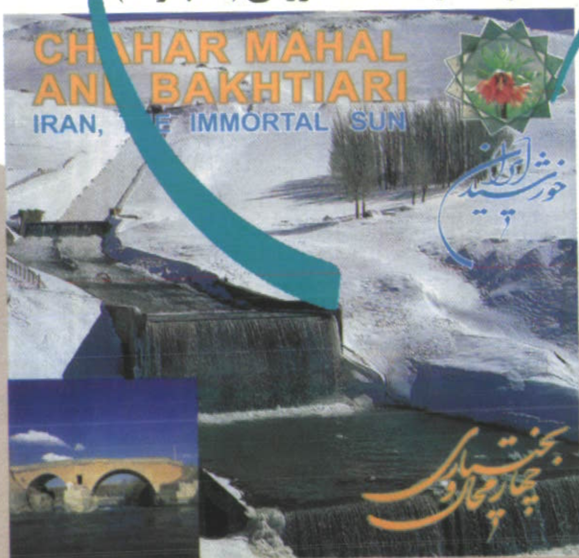
برنامه‌ی موسیقی سنتی

دانشجویان و فارغ التحصیلان کارشناسی ارشد آموزش ریاضی و اساتید...

مجموعه کتاب‌های

خورشید ایران

زیرنظر
دفتر انتشارات کمک آموزشی (کتاب رشد)



تولید و انتشار یک دوره کتاب تصویری زیر عنوان «خورشید ایران» کاری است سترگ و حرکتی است بزرگ در جهت معرفی چهره ای کامل و مبتنی بر واقعیت استان به استان ایران که سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش مسئولیت آن را بر عهده دارد و بر آن است که به فضل الهی و با برخورداری از همکاری و تلاش یک گروه عملیاتی ممتاز و استفاده از امکانات لازم و کافی به هدف خود فعلیت بخشد.

دورهٔ کتاب خورشید ایران برگی است از دفترقطور نعمت های بی شمار خداوند در سرزمینی که طی تاریخ چند هزار سالهٔ خود حامل بار عظیمی از تمدن بشری بوده و امروز چنان ویژگی های ارزشمندی یافته است که می تواند خود را بالنده و پیشرو به جهانیان معرفی کند.

این مجموعه برای کلیه علاقه مندان به حوزه ی «ایران شناسی» و دبیران و معلمان جغرافیا و علوم اجتماعی مفید می باشد.

علاقه مندان می توانند این کتاب ها را از «واحد توزیع و بازرگانی» دفتر انتشارات کمک آموزشی و یا فروشگاه های انتشارات مدرسه تهیه نمایند.

- تلفن واحد توزیع و بازرگانی: ۷۷۳۳۵۱۱۰ و ۷۷۳۳۶۶۵۶-۰۲۱
- تلفن انتشارات مدرسه: ۹-۸۸۸۰۰۳۲۴-۰۲۱