مجله ریاضی
رشد برهان
۴۷
www.roshdmag.org
آموزشی، تحلیلی، اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دوره‌ی متوسطه

❖ دوره‌ی پانزدهم، شماره‌ی ۱
❖ پاییز ۱۳۸۴ ـ بها: ۲۵۰۰ ریال

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

❖ با راهیان المپیادهای ریاضی
❖ مسائلی از احتمال در فضاهای پیوسته
❖ کاربرد بردار در حل مسائل
❖ شرایط تدریس ریاضی
❖ شهود ریاضی و استدلال شهودی
❖ منطق ریاضی

مشاهیر ریاضی مسلمان

ابن هیثم

ابوعلی حسن بن حسن بن هیثم

ابن هیثم یکی از ریاضیدانان نامی و بی تردید بزرگ ترین فیزیکدان عرب است. در قرون وسطی اروپاییان او را الهازن[1] نامیده اند. در تاریخچه ی زندگی او خلأ بسیار وجود دارد. در حدود ۳۵۴ در بصره به دنیا آمد و در زمان خلافت الحاکم (۳۸۶-۴۱۱) به مصر رفت و در آنجا درصدد برآمد که جریان رود نیل را منظم سازد، امّا چون این کار را ناشدنی یافت با وجود ترسی که از خشم خلیفه داشت از آن چشم پوشید. پس از مرگ حاکم به قاهره بازگشت و برای تأمین معاش به رونویسی کتاب های خطی علمی، به ویژه کتاب های ریاضی پرداخت. مرگ وی در ۴۳۰ اتفاق افتاد. فهرست آثار او از صد متجاوز است اکثر این آثار ـ که بعضی از آن ها بسیار کوتاه است ـ درباره ی ریاضیات و فیزیک نوشته شده است. امّا وی به مباحث فلسفی و طبی نیز پرداخته است. در سرتاسر آثار فلسفی ابن هیثم به احاطه ی کامل وی بر نوشته های مؤلفان یونانی بخصوص بطلمیوس می توان پی برد.

نبوغ ریاضی ابن هیثم در مقاله ی پنجم کتاب فی المناظر، آنجا که مسأله ای را حل می کند که امروز به نام او معروف است، به اوج شکوفایی رسیده است. این مساله چنین است:

«در دایره ای به مرکز O و به شعاع R دو نقطه ی ثابت A و B داده می شود. هرگاه دایره را به مثابه آینه ای، فرض کنیم، بر آن، نقطه ای چون M بیابید که شعاع نوری که از A خارج می شود، پس از منعکس شدن در نقطه ی M، بر B بگذرد.»

راه حلّ بسیار پیچیده ی ابن هیثم به یک معادله ی درجه ی چهارم منتهی می شود که وی آن را با قطع کردن هذلولی متساوی القطرین و یک دایره حل کرده است. لئوناردو داوینچی به حل این مسأله علاقه پیدا کرد امّا چون مبانی ریاضی مستحکمی نداشت فقط توانست آن را از راه عملی (مکانیکی) حل کند. سرانجام هویگنس[2]، که در سال ۱۶۹۶ درگذشت، ظریف ترین و ساده ترین راه حل را نشان داد.

ابن هیثم مانند ابن سینا و بیرونی معتقد بود که جهت سیر شعاع نور از طرف شیء به طرف چشم است، نه در جهت عکس آن که اقلیدس و بطلمیوس و کندی انگاشته بودند.

در ریاضیات، ابن هیثم مسأله ی ماهانی را به صورتی بدیع حل کرد و رساله های متعدد درباره ی مطالب ریاضی نوشت.

برخی از آثار ریاضی موجود وی

۱ـ رسالة فی مساحة المجسم المکافی
این رساله توسط سوتر به زبان آلمانی ترجمه و بررسی شده است.

۲ـ مقاله فی تربیع الدائرة
این مقاله نیز توسط سوتر به زبان آلمانی ترجمه و بررسی شده و چند نسخه ی خطی از آن در کتابخانه های مجلس و مدرسه ی سپهسالار و مشهد و زنجان موجود است.

۳ـ مقالة مستقصاة فی الاشکال الهلالیة

۴ـ خواص المثلث من جهة العمود
در سال ۱۹۳۹ م در حیدرآباد دکن به چاپ رسیده و توسط هرملینگ در سال ۱۹۶۴م بررسی شده است. ترجمه ی انگلیسی این مقاله با شرح آن در «گزارش جشن هزاره ی ابن هیثم» به چاپ رسیده است.

۵ـ القول المعروف بالغریب فی حساب المعاملات

۶ـ فصل فی اصول المساحة و ذکرها بالبراهین
در سال ۱۹۳۸ م در حیدرآباد دکن به چاپ رسیده و توسط ویدمان بررسی شده است. علاوه بر این در «گزارش جشن هزاره ی ابن هیثم» به زبان انگلیسی ترجمه شده است.

۷ـ قول فی مساحة الکرة
در سال ۱۹۶۸ م به زبان روسی ترجمه شده است.

ادامه در صفحه‌ی ۳ جلد

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد برهان متوسطه ۴۷

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی
www.roshdmag.org
آموزشی، تحلیلی، اطلاع رسانی

● دوره‌ی پانزدهم ● شماره‌ی ۱ ● پاییز ۱۳۸۴ ● شمارگان: ۱۳۰۰۰ نسخه ● مجله ریاضی، برای دانش‌آموزان دوره‌ی متوسطه

❖ مدیر مسؤول: علیرضا حاجیان زاده ❖ سردبیر: حمیدرضا امیری ❖ مدیر داخلی: میرشهرام صدر ❖ طراح گرافیک: شاهرخ خره‌غانی

❖ ویراستار ادبی: کبری محمودی ❖ اعضای هیأت تحریریه: حمیدرضا امیری، محمد هاشم رستمی، احمد قندهاری، میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی

سید محمدرضا هاشمی موسوی، غلامرضا یاسی‌پور و با تشکر از همکاری ارزنده‌ی استاد پرویز شهریاری ◆ چاپ و صحافی: شرکت افست (سهامی عام)

رشد برهان متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

- نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمه‌ی مقاله‌های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه‌ی علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش کامپیوتر و ...)

این شماره:

رشد برهان متوسطه هر سه ماه یکبار، منتشر می‌شود.

- مجلّه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافه مقاله‌ها آزاد است.
- مقاله‌های وارده، باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.
- مقاله‌های رسیده مسترد نمی‌شود.
- استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر با ذکر دقیق مأخذ بلامانع است.

نشانی دفتر مجلّه: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله: ۹-۸۸۸۳۱۱۶۰ داخلی ۳۷۰
تلفن امور مشترکین: ۷۷۷۳۶۶۵۶ - ۷۷۷۳۱۱۱۰

یادداشت سردبیر

جلسه ی اخیر هیأت تحریریه ی مجله ی رشد برهان متوسطه در جمعی بسیار صمیمی - در منزل استاد پرویز شهریاری - و با حضور همه ی اعضای هیأت تحریریه، به جز استاد یاسی پور، که در مسافرت بودند، برگزار شد. در این جلسه علاوه بر بررسی مطالب، مقاله ها، پیشنهادها و انتقادات رسیده از طرف شما خوانندگان عزیز، روی خط مشی کلّی مجله بحث و تبادل نظر و در نهایت قرار شد حاصل این بحث به تغییراتی در ساختار مجلّه منجر شود. اکنون لازم می دانیم شما دانش آموزان گرامی را از تغییرات مورد نظر آنها آگاه سازیم.

۱. در ۲ شماره از ۴ شماره ی مجلّه همانند شماره های قبل از ۳۷، بخش مسائل برای حل همراه با حل تشریحی به مجلّه افزوده می شود. این مسائل برای کلاس های اول، دوم و سوم رشته های ریاضی و تجربی و به تفکیک کتاب درسی آورده خواهد شد. مسائل در یک شماره براساس امتحان نوبت اول و در شماره ی دیگر براساس همه ی مطالب کتاب درسی (همراه با حل) مطرح می شوند.

شما نیز می توانید با ارسال مسائل کلیدی و هدف دار ما را در این امر یاری کنید. ما مسائل را پس از بررسی و ویرایش علمی و تفکیک برحسب پایه و کتاب درسی، با نام خودتان چاپ خواهیم کرد. فقط یادتان باشد مسائل را همراه با حل آنها ارسال کنید.

۲. بخشِ جواب به نامه های ارسالی، که قبلاً تحت عنوان «آنچه از دوست رسد...» چاپ می شد و نیز بخش «اخبار ریاضی در ایران و جهان» بار دیگر فعال خواهد شد، و ما در هر دو بخش نیاز به همکاری شما داریم، بنابراین اگر مسائل نو و جدید به دستتان می رسد یا در زمینه ای مقاله ای می توانید بنویسید و یا تحقیقی کرده اید، نتیجه ی آن را برای ما ارسال کنید. اگر در شهر شما یا استان شما سمینار، کنفرانس یا همایش ریاضی برگزار شده است، خبر آن را برای ما بفرستید و اگر امکان برقراری ارتباط با شبکه ی جهانی «اینترنت» را دارید و از آن طریق می توانید اخباری را دریافت کنید، برای ما بفرستید.

۳. اعضای هیأت تحریریه از استاد پرویز شهریاری درخواست کردند بخشی از خاطرات خود را که حاصل حدود بیش از نیم قرن تدریس در کلاس های ریاضی است، بنویسند و برای چاپ در اختیار مجله بگذارند. می دانیم که برای شما بسیار قابل استفاده است.

۴. هیأت تحریریه در نظر گرفت مسائل برای حل، که قبلاً از شماره های ۱۸ تا ۳۶، در مجله چاپ شده است به صورت ویژه نامه ای چاپ و در اختیار علاقه مندان قرار گیرد. این کار اِن شاءالله، در صورت موافقت مسئولان دفتر انتشارات کمک آموزشی به مرحله اجرا درخواهد آمد. منتظر مطالب، نامه ها، مسائل، مقاله ها، پیشنهادها، انتقادات و خلاصه ارتباط شما با مجله ی خودتان، هستیم.

از تاریخ بیاموزیم

مرحلهٔ بالای یگانگی دانش ریاضی

ساز و کار
تکامل ریاضیات نظری

۲۰

پرویز شهریاری

اشاره

در شماره‌ی قبل درباره‌ی ساز و کار تکامل ریاضیات نظری بحث شد، به طوری که اگر «از بیرون» به تفرق دانشی ریاضی نظری بیندازیم، لایه بندی شدن نظریه دانش ریاضی و طبقه بندی شدن ساختمان آن را می‌بینیم، ولی اگر «از درون» به آن نگاه کنیم، تکامل این ساختمان دیده می‌شود. بنابراین کافی نیست به بررسی تفرق نظریه ریاضی تنها از بیرون قناعت کنیم، لازم است به رشد نظریه‌های دانش ریاضی، همچون پیشرفت نظریه‌های ریاضی بنگریم. اینک ادامه مطلب را در پی می‌آوریم.

رابطه‌های منطقی دینامیک، نقشی تعیین‌کننده در تشکیل هندسه‌ی هذلولوی داشته‌اند. چرا نخستین نمونه‌ی هندسه‌ی نااقلیدسی، به ویژه از روی هندسه‌ی هذلولوی ساخته شد؟ در پاسخ به این موضوع، باید از تفاوت‌هایی که هندسه‌ی هذلولوی با دیگر هندسه‌های نااقلیدسی دارد، آغاز کرد.

برای بررسی اصل موضوع توازی، همه‌ی بررسی‌کنندگان درباره‌ی محدودبودن حرکت نمی‌اندیشیدند، یعنی فرض را بر همگونی فضا می‌گذاشتند. همگونی فضا هم به معنای ثابت بودن فضا بود. انحنای ثابت فضا، دایره‌ی مکان‌های فضای ریاضی را به سه سمت محدود می‌کند: فضای با انحنای ثابت مثبت، فضای با انحنای صفر (فضای اقلیدسی) و فضای با انحنای منفی (فضای لباچوفسکی). بررسی‌کنندگان در این زمینه تردیدی نداشتند و ناچار بودند، یکی از این سه فضا را انتخاب کنند. ولی فضای با انحنای مثبت، اصل موضوع را حذف می‌کند، زیرا دو خط راست نمی‌توانند در بیش از یک نقطه یکدیگر را قطع کنند. فضای اقلیدسی هم، به‌طور طبیعی کنار می‌رود. بنابراین، بررسی‌کنندگان به هندسه‌ی هذلولوی روی آوردند.

درباره‌ی دشواری فلسفی ریاضیات، به مسأله‌ی ساختمان هندسه‌ی هذلولوی اشاره شده است و بیش از همه روی این موضوع تکیه شده که این هندسه در درجه‌ی اول به این خاطر پدید آمده است که استدلال ساده‌ای برای جانشین کردن چند خط راست موازی به جای یک خط است ارائه دهد. این استدلال‌ها با هدف اثبات درستی اصل موضوع درباره‌ی یگانگی خط راست موازی انجام گرفتند؛ اثبات این که عکس آن به جای نادرستی می‌رسد و یا تناقض پدید می‌آید و... استدلال‌ها به این منظور آغاز شدند که هندسه‌ی اقلیدسی را به تناقض بکشانند، ولی سرانجام لباچوفسکی، بایای و گوس متوجه شدند که هیچ‌گونه تناقضی در هندسه‌ی هذلولوی وجود ندارد. دوم، وقتی روشن شد هیچ تناقضی در هندسه‌ی هذلولوی وجود ندارد، آن را در جایی نشاندند که می‌تواند همپای هندسه‌ی اقلیدسی پیش رود. در این جا موقعیت واقعی بررسی‌های فلسفی روشن شد: یکی به روشنی از قبول آنچه می‌دید سرباز می‌زد و آن را قبول نداشت (لامبرت)، و دیگران با دیدی تازه به جهان نگریستند و در این جهت، موقعیت‌های جالبی به دست آوردند (لباچوفسکی و بایایی). استدلال‌های از راه «برهان خُلف» و تصور فلسفی را می‌توان پایه‌گذار هندسه‌ی هذلولوی دانست. برای نمونه، در کتاب «مسأله‌های اساسی فلسفی دانش‌های طبیعی امروز»، اثر و. ز. برزن کُوف و س. آ. له به دف (۱۹۷۵) گفته می‌شود:

«از جمله عامل‌های مهمی که به کشف هندسه‌ی نااقلیدسی انجامید، کار عظیمی بود که در رابطه با اثبات اصل پنجم اقلیدس انجام گرفت. همه‌ی این تلاش‌ها ناکام ماندند و با هر ناکامی، این اندیشه بیش‌تر قوت می‌یافت که اصل پنجم را نمی‌توان از چهار اصل دیگر و یا قضیه‌ای که به آن مربوط نمی‌شود، نتیجه گرفت. عامل اساسی دیگری که به پیدایش هندسه‌ی نااقلیدسی یاری رساند، پیشرفت فلسفه و اندیشه‌های فلسفی بود که مسأله‌ی طبیعت دانش ریاضی را به‌طور کلی، و هندسه را به‌طور ویژه در مرکز توجه قرار داد. و این، مسأله‌ای قدیمی است که در کارهای رنه دکارت، لایپ نیتس، ف. به کُن، کانت هم دیده می‌شود.»

ن. آ. کیسه له وا، تأثیر متقابل دلیل‌های فلسفی و درونی ریاضیات را، به صورت دیگری روشن می‌کند. او در کتاب «ریاضیات و واقعیت» که در سال ۱۹۶۷ چاپ شد، می‌نویسد: «منطق درونی دانش، دانشمندان و اندیشمندان را به سوی بازبینی اصل موضوع‌های اقلیدس کشاند، و دانشمندان برای اثبات آن‌ها، وقت و انرژی زیادی را روی این اصل موضوع‌ها از دست دادند. ولی سرانجام، نتیجه‌ی این بازبینی‌های منطقی، کشف هندسه‌ی نااقلیدسی بود که تنها امکان داد، در سطح تعریف‌ها، خود ریاضیات را پیش ببرند.»

با بررسی شرط‌های لازم برای ساختن هندسه‌ی هذلولوی معلوم شد، مهم این است که به ناتمام ماندن اثبات اصل موضوع از راه برهان خُلف تأکید شود و تأثیر رابطه‌های منطقی دینامیک و رابطه‌های منطقی ریاضی جدیدی که به هدف استدلال کمک می‌کند، مورد توجه قرار گرفت. این تاثیر بعد از بحران نظریه‌ی ریاضی دیفرانسیلی بر دینامیک روشن شد؛ و این علت درونی آغاز هندسه‌ی اقلیدسی از نظر ریاضی بود. کما این که در نیمه‌ی اول سده‌ی هجدهم، لامبرت و ساکری، نخستین گام‌ها را در اثبات اصل موضوع توازی برداشتند. ساکری کوشید دو خط راست نامحدود را که در نقطه‌ای در بی‌نهایت یکدیگر را قطع می‌کنند، در نظر بگیرید. لامبرت هم «در مرزهایی» که «بی‌نهایت به هم نزدیک» و «بی‌نهایت از هم دور» بودند، ایستاد که به او امکان می‌داد، به بستگی‌های تازه‌ی نظری در بررسی اصل موضوع برسد. ولی پس از محاسبه‌ی بی‌نهایت کوچک‌ها به مفهوم دیفرانسیل گیری و انتگرال گیری و گسترش اثبات‌ها با برهان خُلف، به دشواری برخورد.

رشد ساختمان‌های نظری ریاضیات و دقیق‌کردن آن‌ها، از راه کنارگذاشتن نمونه‌های موجود و تنها تکیه بر رابطه‌های منطقی، می‌توانست چیزی بیش‌تر از گذشته درباره‌ی اصل موضوع پنجم به دست بدهد. اثبات اصل پنجم، زمینه‌ای بود که براساس آن، رابطه‌های منطقی دینامیک، کمبودهای هندسه‌ی مقدماتی اقلیدسی را برطرف می‌کرد. جهت‌گیری بررسی‌های جدید نظری-ریاضی درباره‌ی اصل توازی به این‌جا منجر شد که تنها خود این اصل موضوع مورد توجه قرار گیرد. تصادفی نیست که آفرینندگان هندسه‌ی هذلولوی، تا این اندازه روی بخش‌های آن به‌طور تحلیلی دقت کردند. همه‌ی آن‌ها، کم‌تر یا زیادتر، فضای هندسه‌ی هذلولوی را از نظر دیفرانسیلی، هندسه‌ی تحلیلی و غیره، کاویدند. به ویژه، **نیکلای لباچوفسکی** به این جنبه‌ها علاقه‌مند بود. **ونیامین فه‌دورویچ کاکان**، در یادداشتی که بر کتاب **یانوش بابای**، به نام «من بابای هستم» نوشته، این طور اظهار داشته است: «اگر در کتاب بابای، هندسه‌ی دیفرانسیلی تنها در یک بند شرح داده شده است، برای لباچوفسکی، هندسه‌ی دیفرانسیلی و انتگرال گیری که مربوط به آن است، در مرکز توجه بوده است... علت این امر آن است که لباچوفسکی امید داشت در این محاسبه‌ها، تأئیدی بر درستی هندسه‌ی هذلولوی بیابد.»

و آ. پ. نوردن[1] در کتاب «گوس و لباچوفسکی» می‌نویسد: «لباچوفسکی، خیلی بیش‌تر از گوس در هندسه‌ی نااقلیدسی، جلو رفته بود. او به طور گسترده‌ای مثلثات هذلولوی را بسط داد و در ضمن، خصلت کامل مثلثات کروی را، با طرح اساس هندسه‌ی تحلیلی و دیفرانسیلی فضای خودش، روشن کرد و از آن برای محاسبه‌ی طول، کمان، مساحت، سطح و حجم استفاده کرد.»

بررسی‌های گوس در این زمینه جسته و گریخته و ناکافی بود، ولی لباچوفسکی توانست به نتیجه برسد و به یاری رابطه‌های منطقی دینامیک، عنصرهای سطح را پیدا کند و حتی مقدار سطح را به یاری این عنصرها به دست آورد. ساختار هندسه‌ی هذلولوی به هیچ وجه، بی‌اعتنایی نسبت به رابطه‌های تازه‌ی منطقی نبود. این هندسه به عنوان ساختمانی نظری ریاضی، با جداکردن بستگی‌های تازه‌ی هندسه‌ی مقدماتی اقلیدسی به وجود آمد.

در نظر گرفتن بستگی‌های تابعی و محاسبه‌های دیفرانسیلی و انتگرالی، تنها برای یک رشته استدلال‌های هندسی نبود، بلکه به فرض مجموعه‌ای از توازی‌ها هم مربوط است. رابطه‌های نظری تازه، به صورتی جدی درباره‌ی برهان‌های هندسه‌ی هذلولوی هم مورد استفاده قرار گرفتند. پژوهشگر مشهور و به وجود آورنده‌ی هندسه‌ی هذلولوی، آ. پ. نوردن، بارها تأکید می‌کند که هندسه‌ی درونی، با هندسه‌ی هذلولوی لباچوفسکی که می‌خواهد رابطه‌های مثلثاتی را به یاری این هندسه، با استفاده از مقدارهای بسیار کوچک، پیدا کند، و سپس بی‌تناقضی این دستورها را ثابت کند، منافات ندارد [در کتاب: «کشف لباچوفسکی و مقام آن در هندسه‌ی تازه»].

او گرچه به اشتباه، بی‌تناقضی رابطه‌های مثلثاتی را با بی‌تناقضی تمامی هندسه‌ی هذلولوی یکسان دانست، در جست‌وجوی بعدی، بی‌تناقضی هندسه‌ی نااقلیدسی را ثابت کرد [**بلترام، ۱۸۶۸؛ پوانکاره، ۱۸۷۷؛ کلاین، ۱۸۷۱؛ و کولیج، ۱۹۰۰**].

ارزش چنین مفهوم‌هایی برای به رسمیت شناختن هندسه‌ی هذلولوی، نه تنها به یک رشته اثبات‌ها و برخی بحث‌های اثباتی کمک کرد، بلکه به ژرف‌تر کردن هندسه‌ی هذلولوی هم یاری رساند. آخرین امکان هندسه‌ی هذلولوی ـ که بازتاب متدولوژی آن شنیده شد ـ دورتر از ساختمان نظری آن رفت، زیرا روش قیاسی حداکثر در هندسه‌ی مقدماتی اقلیدسی، ماهیت ارزش‌های ریاضی و اصول ساختمانی آن را روشن کرد. افزایش تدریجی نیروی ریاضیات نظری که براساس رابطه‌های نظری تازه بود، روی یکی از این ساختمان‌ها متمرکز شد (روی هندسه‌ی مقدماتی اقلیدسی) و به یک رشته تغییرهای روش‌شناسی منجر شد. نخستین و مهم‌ترین تغییر را باید در تغییری دانست که نسبت به اعتبار ریاضیات وارد آمد و اگر دقیق‌تر بگوییم، درباره‌ی هم‌ارزی استدلال‌های نظری مربوط به رابطه‌های دنیای واقع. پیش از آن، تنها هندسه‌ی اقلیدسی برای بررسی دنیای واقع و استدلال‌های مربوط به آن پذیرفته شده بود. برای نمونه، اگر ثابت شده است که پنج گونه‌ی جسم منتظم وجود دارد، پس در دنیای واقع هم همین پنج گونه یافت می‌شود. یعنی نوعی تغییر نظری از دانش وجود داشت که بر یک ساختمان نظری تکیه می‌کرد و یک روش اصل موضوعی به رسمیت شناخته شده بود. بر همین پایه هم، همه‌ی موضوع‌های ریاضی فهمیده می‌شدند. تولد روش‌های دیگر اصل موضوعی، این یگانه‌بودن تفسیر را به هم زد. این بازتابی از ریاضیات نظری زمان تازه بود که به کلی ریاضیات دنیای کهن را بر پایه‌ی تازه‌ای قرار می‌داد.

کنار رفتن اصل موضوعی اقلیدسی (و وارد شدن اصل موضوع تازه‌ای به جای اصل پنجم اقلیدس) روشن کرد، به جای هندسه‌ی مقدماتی اقلیدسی، می‌توان هندسه‌ی هذلولوی را قرار داد. تفسیر دنیای واقع، بر پایه‌ی ساختمان جدیدی قرار گرفت که با پیش از آن فرق داشت. استدلال‌های مربوط به دنیای واقع تغییر کرد. بنابراین، روند نظری محاسبه‌ی دیفرانسیلی، همه‌ی این تغییرها را شامل شد و جهان هستی را با روش دیگری تفسیر کرد، به این ترتیب روشن شد، برای تغییر دنیای واقع، باید مدل‌های ریاضی تازه‌ای درست کرد.

کار واقعی سازوکار تکامل روش نظری و نظم دانش ریاضی با همراه کردن دیفرانسیل و انتگرال، خیلی خوب فعالیت‌ها را سامان داد. به دنبال دوران دیفرانسیل‌ها، دوران انتگرال‌گیری فرارسید. دوران انتگرال به این جهت فرا رسیده که روش دیفرانسیل‌گیری به شدت روش وارون را طلب می‌کرد که یکسان نبودند و با همان روش نمی‌شد به آن پرداخت، استدلال در شاخه‌های گوناگون ریاضیات، مختلف است. ریاضیات نظری به بخش‌های متفاوت تقسیم می‌شود و همه را نمی‌توان در یک‌جا جمع کرد.

برای انتگرال‌گیری، با تنظیم دانش نظری ریاضی، در دید اول به نظر می‌رسد که بخش‌های مختلف آن با هم تفاوت دارند. وقتی نظریه‌ی **اواریست گالوا** بعد از مرگ او چاپ شد (۱۸۴۶) که درباره‌ی گروه‌های محدود تبدیل‌ها بود، این امکان را به وجود آورد که با یک دید به موقعیت‌های مختلف نظریه‌های ریاضی نگاه کنیم و همه‌ی آن‌ها را «با دقت هم‌ریختی» مورد بررسی قرار دهیم.

«... و به ویژه در این زمان... دانشمندان عادت می‌کنند، از یک نظریه به نظریه‌ی دیگر که به‌طور مستقیم از آن نتیجه می‌شود، با تغییر اصطلاح‌ها بروند. حیرت‌انگیزترین نمونه، عبارت است از دوگانگی در هندسه‌ی تصویری که در آن زمان به صورت دو ستونی که در ردیف هم بودند، در قضیه‌های **دوگانه‌ای** که نقش بزرگی برای مفهوم‌های هم‌ریختی داشتند، به عهده گرفت. مفهوم گروه‌های هم‌ریخت (به شرطی که بررسی آن‌ها با دقت نظر بیش‌تری انجام گیرد)، به وسیله‌ی گوس برای گروه‌های آبلی و به وسیله‌ی گالوا برای گروه‌های جابه‌جاپذیر روشن شد و در میانه‌های سده‌ی نوزدهم، دیگر برای همه‌ی گروه‌ها به کار می‌رفت.» [**نیکل بورباکی، «رساله‌ای درباره‌ی تاریخ ریاضیات»**].

انتگرال‌گیری به یاری نظریه‌ی گروه‌ها، نه تنها در نظریه‌های جبری اهمیت داشت، بلکه برای تمامی ریاضیات ثمربخش بود. برای نمونه، در نظریه‌ی هندسه، زمینه برای اندیشه‌های نظریه‌ی گروه، با کار **موبیوس** در کتاب «محاسبه» (۱۸۲۷) آغاز شد که در آن، تلاشی برای یکی کردن هندسه‌ی تصویری و هندسه‌ی تحلیلی صورت گرفته بود. گام بعدی در جمع و جور کردن هندسه، مربوط به تغییر عمومیت و اختلاف در عمل‌های تصویری بود. در واقع، **ژرژبول** (۱۸۱۵ـ۱۸۶۴) و نیز **آرتور کیلی** (Clyley؛ ۱۸۲۱ـ۱۸۹۵) و **جیم جوزف سیلوستر** (۱۸۱۴ـ۱۸۹۷). بستگی هندسه‌های تصویری و متری را یادآوری کردند. در این‌جا به ویژه، «یادداشت‌های ششم درباره‌ی شکل‌ها» مهم هستند (۱۹۵۹) که کیلی در آن‌ها، برای نخستین بار مفهوم مقیاس تصویری را وارد کرد.

این تعریف مقیاس همراه با ملاحظه‌ی نظری گروه‌ها، پایه‌ی «برنامه‌ی ارلانگن» شد که چهره‌ی هندسه را در این دوران که بورباکی آن را «سده‌ی طلایی» هندسه می‌نامد، روشن می‌کند. در این برنامه، از این مطلب صحبت شده بود که «امکان می‌داد از دیدگاه واحدی، به همه گونه‌های مختلف دستگاه‌ها و روش‌های مختلف هندسی، بنگریم» [**فه‌لیکس کلاین، تاریخ «برنامه‌ی ارلانگن»**].

الی ژوزف کارتان، ریاضیدان فرانسوی (۱۸۶۹-۱۹۵۱) که از سال ۱۹۳۱ عضو فرهنگستان علوم پاریس بود، اندیشه‌ی **کلاین** را خیلی جالب توضیح می‌دهد: «...همه‌ی گروه‌های پیوسته، به وسیله‌ی هندسه‌ی مستقلی تعریف می‌شوند. این هندسه، به شرطی که متغیر فرض شود، گروه را همچون مقداری در نظر می‌گیرد که هر نقطه‌ی فضا را با این مقدار می‌سنجد و ویژگی‌های شکل را بررسی می‌کند که نسبت به تبدیل‌های گروه G ثابت است... گروه G را، گروه اصلی این هندسه گویند. بنابراین، یک هندسه‌ی آفینی به دست می‌آید که با این هندسه همدیس (کُنفرم) است؛ هندسه‌ی «لاگر...» [**الی کارتان، «نظریه‌ی گروه هندسه» در کتاب «بنیان‌های هندسه»**].

جست‌وجوها، تنها به این جنبه‌ی کارمحدود نشدند. گام بلندی در زمینه‌ی فضای چند بعدی [**ریمان، «درباره‌ی فرضیه‌ای درباره‌ی بنیان‌های هندسه»**؛ ۱۸۵۴]، و دستگاه‌های عددی فوق مختلط و غیره هم برداشته شد. سپس با آغاز از نظریه‌ی کانتوری مجموعه‌ها، همه‌چیز به هم پیوست. برای نمونه، بی‌شمار بودن مجموعه‌ی عددهای حقیقی پایه‌گذاری شد که برای اثبات بسیاری از نظریه‌های عمیق دانش ریاضی مورد استفاده قرار گرفت. به این ترتیب عام کردن دانش نظری ریاضیات، به عنصر مهمی برای پیشرفت و تکامل آن تبدیل شد.

ولی با تلاش‌های فه‌لیکس کلاین، برنهارد ریمان و دیگران، گام نهایی برداشته شد. این، کار عظیمی بود و بدون به کار گرفتن همه‌ی اندیشه‌ها، ممکن نبود. به دنبال این تلاش‌ها وسیله‌ی نیرومندی (روش قیاس حداکثر) سربرآورد که می‌توانست یک نتیجه‌گیری را از بقیه انجام دهد. یک‌بار دیگر بعد از ریاضیات نظری رسمی، روش حداکثر قیاس، ریاضیات را فتح می‌کرد؛ با این شرط که عمل برهان خلف را نفی نکند. عمل تجمیع نظرها یا به یاری روش اصل موضوعی انجام می‌شود و یا به کمک روش حداکثر قیاس.

از نخستین تلاش‌های به کار گرفتن روش حداکثر قیاس برای ساختن دستگاه نظری ریاضی دانش تا به وجود آمدن دستگاه راضی‌کننده، مدت زمانی می‌گذرد. بنابر آگاهی **پروکلوس**، حداکثر قیاس در ریاضیات نظری، به وسیله‌ی **هیپوکرات، له‌ئون و اُدُکس** یافته است. ولی تلاش آن‌ها نتوانست به موفقیت برسد، زیرا پارگی‌های استدلال‌های اثباتی که لازمه‌ی آن زمان بود، به معنای ناپایداری فرض اولیه بود. روش رضایت‌بخش قیاس حداکثر، تنها وقتی به دست آمد که با استدلال‌های پیچیده‌ای روبه‌رو شد و همه‌ی مانع‌های اضافی از سر راه برداشته شدند. البته روند پایه‌گذاری مفهوم‌ها و قاعده‌های نخستین نتیجه‌گیری، چه در ریاضیات نظری رسمی و چه برای ریاضیات نظری دوران جدید را می‌توان تا بی‌نهایت ادامه داد، براساس تعریف‌های نقطه‌ها، خط‌های راست و غیره و اصل موضوع‌هایی که بر پایه‌ی فرض‌های دیگری قرار داشت، قرار گرفت. همین مطلب امکان ساختن روش‌های متفاوتی را برای یک نوع نظریه‌ی ریاضی آماده کرد. راه منطقی و مطابق جهان واقعی، مفهوم‌های دلخواه ایجاد نکرد، زیرا: «عمل انسان میلیاردها بار تکرار می‌شد و در ذهن آدمی شکل‌های منطقی را به وجود می‌آورد. این شکل‌ها، با خصلت اصل موضوعی خود و تنها با نیروی

این میلیاردها تکرار، تحکیم شدند» [ولادیمیر ایلیچ] به جای معیارهای استدلال، به ریاضیات کاربردی (از آن جمله به وسیله ی بررسی کننده ی آن) رو آوردند و به تدریج پایه های منطقی آن را هم پیدا کردند.

روش حداکثر قیاس در ریاضیات نظری زمان ما در سال های ۸۰ سده ی نوزدهم به وجود آمد. فه لیکس کلاین، در «برنامه ی ارلانگن» بر اهمیت و ارزش بالای بررسی اصول و اصل موضوع های مطرح تأکید می کند و در مقاله ی دوم مربوط به هندسه ی نااقلیدسی (۱۸۷۲)، به ویژه با این عبارت از آن به عنوان «نخستین جمله» به «اصل موضوع زمان» یاد می کند [**فه لیکس کلاین، سخنرانی درباره ی، پیشرفت ریاضیات در سده ی ۱۹**].

به دنبال او، **فُوکوس لی** در نظریه ی گروه های تغییرپذیر، ساختمان اصل موضوعی را بر پایه ی مفهوم حرکت و دیفرانسیل گیری مطرح کرد [داوید هیلبرت، «اساس هندسه»]. سپس، پشت سر هم انواع گوناگون اصل موضوع ها مطرح شدند. **م. پاش**، در «سخنرانی هایی مربوط به هندسه ی جدید» (۱۸۸۲)، اصل موضوع های «ردیفی» تکیه می کند که مفهوم های روشنی مثل «بین»، «در درون» و غیره را شامل می شود و ضمن هم نهشتی شکل ها (بر هم قرار دادن شکل ها) پدید می آید. **جوزت سه په آنو**[2] (۱۸۵۸ـ۱۹۳۲) ریاضیدان ایتالیایی، در «سخنرانی هایی درباره ی بنیان های هندسه» (۱۸۸۹)، بر اصل موضوع های «ردیفی» تکیه می کند که به گونه ی دیگری جز نظریه ی «پاش» است. **م. پیه ری** در «هندسه ی مقدماتی به عنوان دانش قیاسی» (۱۸۹۰) بر نقطه ها و حرکت تکیه کرده است.

با این که جست وجوهای مربوط به اصل موضوعی کردن در تمامی دانش ریاضی انجام شده است، در این جا تنها به هندسه ی مقدماتی می پردازیم. کتاب **اقلیدس** به نام «مقدمات»، به صورت «محکی» برای اصل موضوعی کردن های جدید است، زیرا در این جا هم، مثل ساختن هندسه ی هذلولوی، آکسیوم ها و پوستولات ها اقلیدسی، مهم تر از نمونه های دیگر پذیرفته شده اند. **داوید هیلبرت**، «حمله ی» هدفدار و جانانه ای با انتشار کتاب های «بنیان های هندسه» (۱۸۹۹) و «درباره ی بنیان های هندسه» (۱۹۰۳) انجام داد. بر خلاف حالت پایدار هندسه ی مقدماتی، هندسه ی دینامیک مقدماتی ساخته شد (وقتی از ساختمان صحبت می کنیم، ساختار نظری آن را در نظر داریم که بر پایه ی قیاس بنا شده باشد). پس از چاپ کارهای هیلبرت، به قول **د. ن. تروتس نیکوف** می توان گفت که «مسأله ی بنیان های هندسه به پایان رسیده است». [**در کتاب «روند ساختمانی در ریاضیات»**].

کتاب «بنیان هندسه»ی هیلبرت، «به خاطر روشنی و عمق طرح خود، به منشوری در دست ریاضیدانان تبدیل شد و همه ی نوشته های پیش از خود را به فراموشی سپرد» [بورباکی در «رساله ای در تاریخ ریاضیات»]. **هرمان ویل**[3] (۱۸۸۵-۱۹۵۵) ریاضیدان آلمانی، در کتاب «داوید هیلبرت و کارهای ریاضی او» می نویسد: «یکی از کارهای هیلبرت این بود که ساختمان هندسه را بر بنیان دیگری به جز آنچه تا آن روزگار بود، قرار داد و در نتیجه، ساختاری محکم برای آن به وجود آورد. اگر من اشتباه نکنم، هیلبرت نخستین کسی بود که به این سطح از کار رسید. او به طور منظم، اصل موضوع هایی را که به هم مربوط نبودند، بررسی کرد و بی ارتباطی برخی قضیه های اساسی هندسی را به این یا آن اصل موضوع روشن کرد.»

در زمینه ی هندسه ی مقدماتی این امکان وجود دارد که ماهیت اختلاف بین ریاضیات نظری رسمی را با ریاضیات نظری از نوع دینامیک دقیق تر کنیم. این اختلاف برای هندسه ی مقدماتی هندسه ی مقدماتی روشن تر است. هیلبرت در کتاب «بنیان های هندسه»ی خود (۱۸۹۹)، مسأله ی پیشرفت هندسه ی مقدماتی را، بدون ارتباط با اصل موضوع پیوستگی مطرح می کند. **پ. راشوسکی**، در کتاب «داوید هیلبرت و بنیان های هندسه» می گوید: «موفقیت عظیم هیلبرت در تجزیه و تحلیل منطقی هندسه این است که او، امکان پیشرفت هندسه را، بدون استفاده از اصل موضوع پیوستگی، کشف کرد». ساختار هندسه ی ارشمیدسی، به ساختار هندسه ی اقلیدسی نزدیک است.

هیلبرت در کار بعدی خود، «درباره ی بنیان گذاری هندسه» (۱۹۰۲)، همچون ساختار دینامیکی و با استفاده از اصل موضوع هایی که ساخت پیوستگی را هم در نظر گرفته بود. هیلبرت می نویسد: «می خواهم این مطلب را نشان دهم که اختلاف بین اصل موضوع های هندسی که پیشنهاد می کنم (در ۱۹۰۲)، با آنچه پیش از این داده بودم (۱۸۹۹)، چگونه است! قبلاً اصل موضوع ها را طوری تنظیم کرده بودم که اصل موضوع پیوستگی بعد از بقیه ی اصل موضوع ها باشد، تا این پرسش پیش آید که چه تعدادی از قضیه ها و اثبات های هندسه ی مقدماتی به مفهوم پیوستگی ربطی ندارند. برعکس در بررسی تازه، پرسش مربوط به پیوستگی، بین تعریف های صفحه و حرکت و پیش از همه ی اصول موضوع ها جا داده شده است، به نحوی که در این جا مهم ترین پرسش مربوط به کم ترین تعداد آن هاست تا بتوان در ادامه ی کار، از پیوستگی استفاده کرد و به هندسه ی مقدماتی رسید (دایره و خط راست) و به یاری آن ها، هندسه ی مقدماتی را در دنباله ی کار ساخت» [**داوید هیلبرت، در کتاب «بنیان های هندسه»**].

زیرنویس

1. Nezden
2. Peano
3. Weyl

با راهیان المپیادهای ریاضی ۱

غلامرضا یاسی‌پور

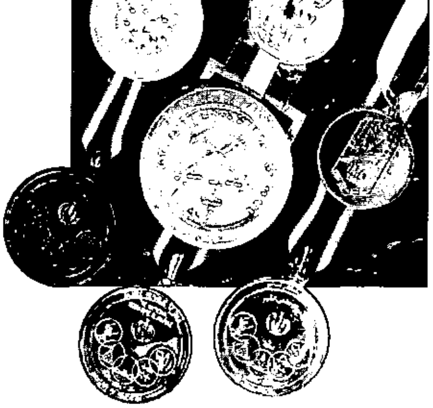
مقدمه

با توجه به مسابقات اُلمپیادی ریاضی و علاقه‌ی دانش‌آموزان به این نوع مسابقات برای آشنایی هرچه بیشتر دانش‌آموزان تصمیم گرفتیم مقاله‌هایی تهیه کنیم که آن‌ها را با نمونه‌های سؤالات و روش حلّ آن‌ها آشنا کند. به همین خاطر به تهیه‌ی متن حاضر پرداختیم که به ترتیب در این شماره و شماره‌های آینده چاپ خواهد شد.

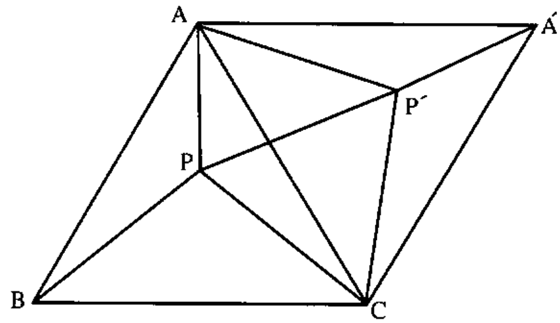
یکی از ویژگی‌های مثلث‌های متساوی‌الاضلاع

دو نقطه‌ی A و B مفروضند. اگر B را به اندازه‌ی °۶۰ حول A، دوران دهیم تا نقطه‌ی B' به دست آید، مثلث ABB' متساوی‌الاضلاع است. پیامد این نتیجه، ویژگی یا خاصیت زیر در مثلث‌های متساوی‌الاضلاع است که پمپکیو[1]، ریاضیدان رومانیایی، در سال ۱۹۳۶ به آن توجه کرد. قضیه‌ی پمپکیو واقعیتی ساده است و بخشی از هندسه‌ی مسطحه‌ی کلاسیک به شمار می‌رود. شگفت‌آور است که این قضیه نه توسط اویلر[2] در قرن هجدهم و نه توسط اشتینیتس[3] در قرن نوزدهم کشف شد.

با مفروض بودن مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و نقطه‌ی P غیرواقع بر محیط دایره‌ی محیطی ABC، می‌توان مثلثی با ضلع‌هایی به طول‌های PA، PB و PC رسم کرد. اگر P بر محیط دایره‌ی مزبور واقع شود، یکی از این سه اندازه برابر مجموع دو اندازه‌ی دیگر است.



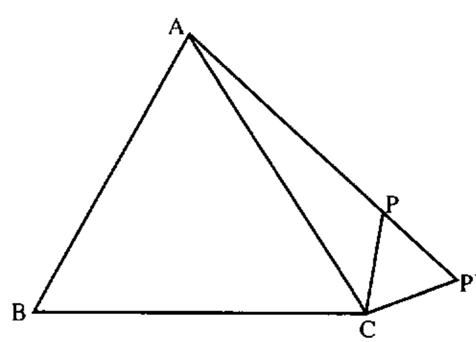
برای ملاحظه‌ی چگونگی برقراری این خاصیت، مثلث را به اندازه‌ی زاویه‌ی 60° و دورانی ساعتگرد، حول C دوران می‌دهیم (شکل ۱).



شکل ۱

فرض می‌کنیم A' و P' نگاره‌های A و P در این دوران باشند. توجه داشته باشید، B حول A دوران یافته است. با توجه به مثلث $PP'A$، ملاحظه می‌کنیم که ضلع $P'A$ نگاره‌ی PB در این دوران است، بنابراین: $P'A=PB$. نیز، مثلث $PP'C$ متساوی‌الاضلاع است؛ بنابراین $PP'=PC$. نتیجه می‌گیریم که ضلع‌های مثلث $PP'A$ برابر PA، PB و PC هستند.

اکنون موردی را بررسی می‌کنیم که مثلث $PP'A$ تباهیده است، یعنی موردی که در آن نقاط P، P' و A هم‌خط هستند (شکل ۲).



شکل ۲

در صورتی که چنین باشد، P درون مثلث مورد بحث نیست. از آن‌جا که A بر خط PP' قرار دارد و مثلث $PP'C$ متساوی‌الاضلاع است، زاویه‌ی APC برابر 120° است البته اگر P بین A و P' باشد. در غیر این صورت برابر 60° است. نتیجه می‌شود که A، P و P' هم خط هستند اگر و تنها اگر P بر محیط دایره‌ی محیطی واقع باشد. در این صورت، نتیجه می‌شود که A، P و P' هم‌خط هستند اگر و تنها اگر P بر محیط دایره‌ی محیطی قرار داشته باشد. در این حالت، $PA=PB+PC$ است، اگر P بر کمان BC باشد، $PB=PA+PC$ است اگر P بر کمان AC باشد و $PC=PA+PB$ است اگر P بر کمان AB باشد.

این خاصیت را می‌توان درباره‌ی جمیع چند ضلعی‌های منتظم توسیع داد. اما در اثبات این مطلب، از ایده‌ای متفاوت استفاده می‌شود. مسائل وابسته‌ی زیر را به عنوان تمرین در نظر بگیرید:

۱. عکس قضیه‌ی فوق را اثبات کنید؛ یعنی این مطلب را که اگر به ازای هر نقطه‌ی P واقع در داخل مثلث ABC بتوان مثلثی با ضلع‌هایی برابر PA، PB و PC رسم کرد، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

۲. در مثلث ABC، AB بزرگ‌ترین ضلع است. ثابت کنید به ازای هر نقطه‌ی P واقع در داخل این مثلث: $PA+PB>PC$.

۳. مکان هندسی نقاط Pای را در صفحه‌ی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC بیابید که در برابری زیر صدق می‌کنند:

$$\max\{PA, PB, PC\} = \frac{1}{2}(PA + PB + PC)$$

۴. فرض می‌کنیم ABCD یک لوزی است و $\angle A = 120^\circ$ و P نقطه‌ای در صفحه‌ی آن باشد. ثابت کنید:

$$PA + PC > \frac{BD}{۲}$$

۵. نقطه‌ی P داخل مثلثی متساوی‌الاضلاع ABC چنان موجود است که: ۵=PC، ۴=PB و ۳=PA طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع را بیابید.

۶. فرض می‌کنیم ABC مثلثی متساوی‌الاضلاع باشد. مکان هندسی نقاط Pای را در صفحه‌ی آن با این خاصیت بیابید که PA، PB و PC ضلع‌های مثلثی قائم‌الزاویه باشند.

۷. مثلث XYZ با ضلع‌هایی به طول‌های x، y و z مفروض است. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و نقطه‌ی P ای را چنان رسم کنید که: PA=x، PB=y و PC=z

۸. فرض می‌کنیم ABC مثلثی متساوی‌الاضلاع و P نقطه‌ای درون آن باشد. مثلث XYZ با XY=PC، YZ=PA و ZX=PB و نقطه‌ی M را درون آن چنان در نظر می‌گیریم که

$$\angle XMY = \angle YMZ = \angle ZMX = ۱۲۰^\circ$$

ثابت کنید: XM+YM+ZM=AB

۹. مکان هندسی نقاط Pای واقع در صفحه‌ی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را چنان بیابید که به ازای آن‌ها مثلث ساخته شده با PA، PB و PC دارای سطحی ثابت باشد.

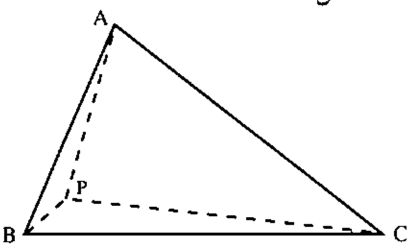
حل تمرین‌ها

۱. ایده‌ی این مسأله، ملاحظه‌ی پدیده‌ای است که در همسایگی یک رأس رخ می‌دهد. فرض می‌کنیم، ABC مثلثی باشد که متساوی‌الاضلاع نیست و می‌انگاریم که AB<BC. همچنین فرض می‌کنیم: a=BC − AB

P را داخل ABC چنان اختیار می‌کنیم که:

$$PB < \frac{a}{۴}, PA - AB < \frac{a}{۴}\ ,\ \ BC - PC < \frac{a}{۴}$$

این کار به علت پیوستگی تابع فاصله امکانپذیر است (شکل ۳).



شکل ۳

داریم: $PA+PB<AB+\frac{a}{۲} = BC - \frac{a}{۲} < BC - \frac{a}{۴} < PC$
در نتیجه PA، PB و PC در نابرابری مثلثی صدق نمی‌کنند. بنابراین نمی‌توانند اضلاع مثلث باشند. این مطلب نشان می‌دهد، مثلثی که متساوی‌الاضلاع نباشد، دارای ویژگی مطلوب نیست.

۲. فرض می‌کنیم D محل تقاطع PC با AB باشد. در این صورت یکی از زاویه‌های ADC یا BDC منفرجه است؛ مثلاً زاویه‌ی ADC. در این صورت، در مثلث ADC، AC>CD. از آن‌جا که AB ≥ AC، نتیجه می‌شود که AB>CP. از طرف دیگر، بنابر نابرابری مثلثی PA+PB>AB، نتیجه می‌شود که: PA+PB>PC.

۳. برابری $\max\{PA, PB, PC\} = \frac{۱}{۲}(PA + PB + PC)$ هم‌ارز این واقعیت است که یکی از قطعه‌های PA، PB و PC برابر مجموع دو قطعه‌ی دیگر است. این واقعه، چنانچه پیش از این ملاحظه کردیم، اگر و تنها اگر P بر محیط دایره‌ی محیطی مثلث ABC قرار داشته باشد، اتفاق می‌افتد.

۴. با به کار بردن قضیه‌ی پمپکیو در مثلث‌های ABC و ACD حاصل می‌کنیم:

$PA + PC \geq PB \quad , \quad PA + PC \geq PD$

از نابرابری مثلثی در مثلث (امکاناً تباهیده‌ی) PBD به دست می‌آوریم:

$PB + PD \geq BD$

و نتیجه می‌شود که:

$PA + PC \geq BD / ۲$

برای برقرار بودن برابری، P باید هم‌زمان بر محیط دایره‌های محیطی ABC و ACD و قطعه خط BD واقع باشد که این موضوع غیرممکن است. در نتیجه نابرابری اکید برقرار است.

۵. دورانی ۶۰° و ساعتگرد، حول A انجام می‌دهیم. فرض می‌کنیم P' نگاره‌ی P در این دوران باشد. از آن‌جا که:

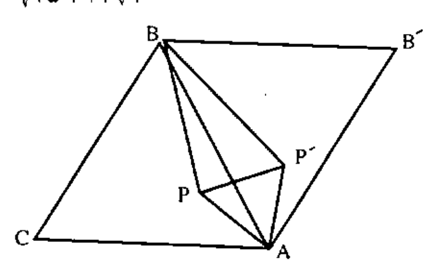
$BP' = CP = ۵$ و $PP' = AP = ۳$

$PP'B$ مثلثی قائم‌الزاویه (شکل ۴) با $\angle BPP' = ۹۰^\circ$ است. همچنین در مثلث متساوی‌الاضلاع $AP'P$، اندازه‌ی زاویه‌ی $\angle P'PA$ برابر ۶۰° است. در نتیجه $\angle APB = ۱۵۰^\circ$. با به کار بردن قاعده‌ی کسینوس‌ها در مثلث APB، به دست می‌آوریم:

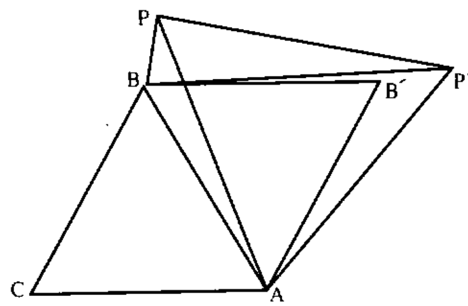
$AB^۲ = ۳^۲ + ۴^۲ + ۲.۳.۴.\sqrt{۳} / ۲$

در نتیجه:

$AB = \sqrt{۲۵ + ۱۲\sqrt{۳}}$



شکل ۴



شکل ۵

۶. نخست فرض می‌کنیم PC وتر باشد. اگر P داخل مثلث باشد، مانند راه‌حل مسأله‌ی پیشین نتیجه می‌گیریم که $PP'B$ مثلثی قائم‌الزاویه است اگر و تنها اگر: $\angle APB = ۱۵۰^\circ$

اگر P، آن‌گونه که در شکل ۵ نشان داده شده است، خارج مثلث باشد، پس $\angle BPP' = ۹۰^\circ$؛ اگر و تنها اگر: $\angle BPA = ۳۰^\circ$، زیرا:

$\angle BPA = \angle BPP' - \angle APP' = \angle BPP' - ۶۰^\circ$

بنابراین مکان مورد نظر، دایره‌ای با مرکزی در خارج مثلث ABC است که در آن AB کمانی ۶۰° را معین می‌کند.

در حالت‌هایی که PA، و متناظراً PB، وتر هستند، دو دایره‌ی دیگر، همنهشت با این دایره، و متناظر با ضلع‌های BC و CA به دست می‌دهند.

۷. این مسأله ترسیم عکس مسأله‌ای است که در نخستین قسمت مقاله توصیف شده است. بار دیگر از دوران‌های ۶۰° استفاده می‌کنیم.

در صورتی که فرض کنیم: $A = X,\ P = Y,\ P' = Z$

می‌توان C را با دوران ۶۰° و ساعتگرد P' حول P به دست آورد (شکل ۱). در این صورت، B از دوران ۶۰° و ساعتگرد C حول A به دست می‌آید.

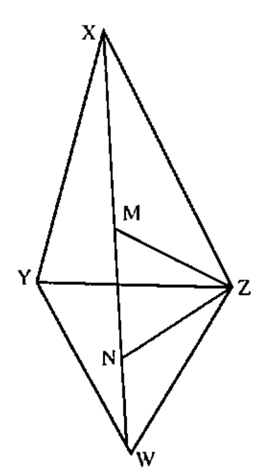
۸. ZMY را حول Z به اندازه‌ی 60° و **پادساعتگرد** به ZNW دوران می‌دهیم (شکل ۶). نخست توجه می‌کنیم که مثلث‌های ZMN و zYw متساوی‌الاضلاع هستند. در نتیجه:

MN=ZM , YW=YZ

اما چون هر دو زاویه‌های XMN و MNW، $60^\circ + 120^\circ$ هستند، نیم صفحه‌اند، بنابراین:

XW=XM+YM+ZM

از طرف دیگر، چون در راه‌حل مسأله‌ی ۷، هنگامی که ترسیمی به قهقرا، مثلث ABC را از مثلث XYZ می‌دهد، می‌توان A=W و C=X را اختیار کرد. در این صورت، طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع مورد بحث XW است که برابر XM+YM+ZM است (صورتی دیگر از این مسأله در USAMO در سال ۱۹۷۴ آمده است).



شکل ۶

۹. ثابت می‌کنیم که مکان مورد نظر مجموعه‌ی تهی، یک دایره یا دو دایره به مرکزهای واقع در O، مرکز ثقل یا گرانیگاه مثلث متساوی‌الاضلاع ABC است.

برای سادگی کار، فرض می‌کنیم سطح مثلث متساوی‌الاضلاع مورد بحث برابر ۱ باشد، بنابراین طول ضلع آن $\frac{2}{\sqrt[4]{3}}$ خواهد بود.

در مورد مثلث XYZ، سطح علامتدار[۴] آن با S[xyz] نمایش داده می‌شود. (بنابر تعریف، S[XYZ] سطح مثلث XYZ است، اگر مثلث به طور مثبت جهت‌دار شده باشد؛ یعنی اگر از X به Y، Y به Z، و Z به X برویم و پادساعتگرد گردش کرده باشیم، و در غیر این صورت، منفی سطح آن خواهد بود.) از بخش اول، شکل ۱ را، با A′ و P′ نگاره‌های A و P در دوران 60° و ساعتگرد حول C، به خاطر بیاورید. در این صورت، APP′ مثلثی با طول‌های ضلع PA، PB و PC خواهد بود.

قرار می‌دهیم:

$$S[PBC] = K_1,\quad S[PCA] = K_2,\quad S[PAB] = K_3$$

و تمام محاسبات را برحسب این سه عدد انجام می‌دهیم (یعنی از مختصات گرانیگاهی «Barycentric coordinates» استفاده می‌کنیم). مثلث‌های APB و A′P′A همنهشت هستند. مثلث‌های A′P′C و APC نیز چنین هستند. در نتیجه:

$$S = [APP'] = 2S[ABC] - 2K_3 - K_1 - K_2 - S[P'PC]$$
$$= 1 - K_3 - S[P'PC]$$

S[P′PC] را برحسب K_1، K_2 و K_3 محاسبه می‌کنیم. توجه داشته باشید، از آن‌جا که دوران را ساعتگرد انجام داده‌ایم، مثلث P′PC به طور مثبت جهت‌دار است. چون مثلث متساوی‌الاضلاع است، محاسبه‌ی طول یکی از ضلع‌هایش، مثلاً ضلع PC، کافی است. فرض می‌کنیم $\angle PCB = \alpha$ و از سطح S[PBC] و S[APC] برای به دست آوردن $\sqrt[4]{3}K_2 = PC.\sin(60^\circ - \alpha)$ و $\sqrt[4]{3}K_1 = PC.\sin\alpha$ استفاده می‌کنیم.

فرمول تفاضل مربوط به سینوس، همراه با برابری اول، دومی را به مورد زیر تبدیل می‌کند:

$$\sqrt[4]{3}K_2 = PC\sin 60^\circ \cos\alpha - PC\cos 60^\circ \sin\alpha$$
$$= PC\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt[4]{3}}{2}K_1$$

در نتیجه:

$$PC\cos\alpha = (2K_2 + K_1)/\sqrt[4]{3}$$

و به دست می‌آوریم:

$$PC^2 = PC^2\sin^2\alpha + PC^2\cos^2\alpha = K_1^2\sqrt{3} + (2K_2 + K_1)^2/\sqrt{3}$$
$$= \frac{4\sqrt{3}}{3}(K_1^2 + K_1K_2 + K_2^2)$$

نتیجه می‌شود که سطح $P'PC$ برابر است با:

$$K_1^2 + K_1K_2 + K_2^2$$

در نتیجه:

$$S[APP'] = 1 - K_3 - (K_1^2 + K_1K_2 + K_2^2) = (K_1 + K_2 + K_3)^2$$
$$-K_3(K_1 + K_2 + K_3) - (K_1^2 + K_1K_2 + K_2^2)$$
$$= K_1K_2 + K_1K_3 + K_2K_3$$

پس، فاصله‌ی P از O، یعنی مرکز مثلث مورد بحث، را برحسب K_1، K_2 و K_3 بیان می‌کنیم. برای این کار، از رویکرد برداری «Vectorial approach» استفاده می‌کنیم. ابتدا توجه می‌کنیم که:

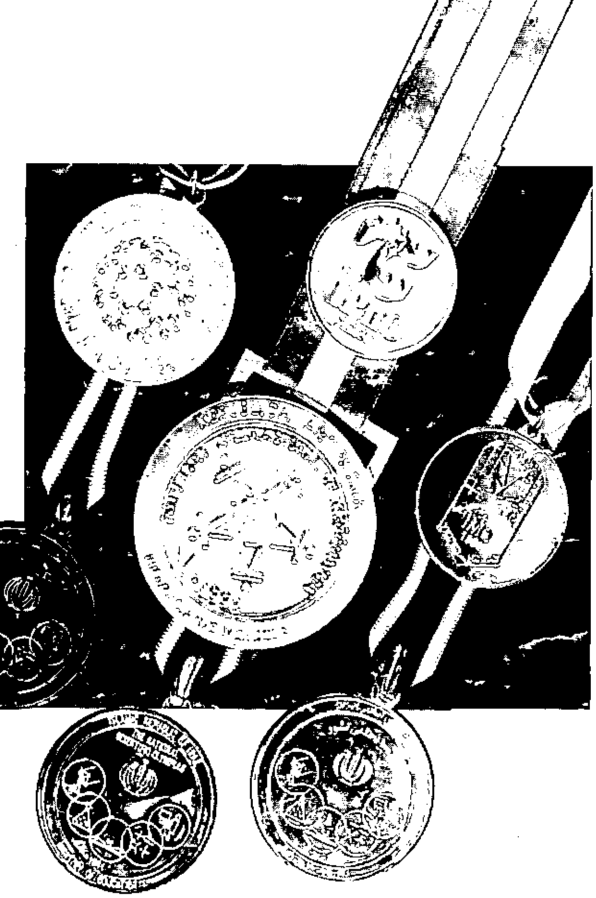
$$\vec{OP} = K_1\vec{OA} + K_2\vec{OB} + K_3\vec{OC}$$

در واقع، برابری در مورد P در یکی از رأس‌ها یا در مرکز مثلث برقرار است و از آن‌جا که دو طرف آن در P خطی هستند، در همه‌جا برقرار است.

رابطه‌ی مزبور با مربع شدن، به صورت زیر در می‌آید:

$$OP^2 = \vec{OP}.\vec{OP} = (K_1^2OA^2 + K_2^2OB^2 + K_3^2OC^2$$
$$+2K_1K_2\vec{OP}.\vec{OB} + 2K_1K_3\vec{OA}.\vec{OC} + 2K_2K_3\vec{OB}.\vec{OC})$$

این مقدار، از آن‌جا که جمع زاویه‌های AOB، AOC،



و BOC برابر 120° هستند و OA=OB=OC، برابر مقدار زیر می‌شود:

$$(K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 - K_1K_2 - K_1K_3 - K_2K_3)OA^2$$
$$= \left((K_1 + K_2 + K_3)^2 + 3(K_1K_2 + K_1K_3 + K_2K_3)\right)OA^2$$
$$= \left(1 - 3(K_1K_2 + K_1K_3 + K_2K_3)\right)OA^2$$

در نتیجه، شرط این که سطح مثلث APP' ثابت باشد، همان شرط ثابت بودن مسافت OP است. اگر سطح مورد بحث، Kای کم‌تر از $\frac{1}{3}$ باشد، مکان مورد نظر شامل دو دایره می‌شود: یکی داخل و دیگری خارج دایره‌ی محیطی مثلث. اگر سطح مزبور $\frac{1}{3}$ باشد، مکان شامل یک دایره و O است. سرانجام، اگر سطح ثابت مورد بحث بزرگ‌تر از $\frac{1}{3}$ باشد، مکان یک دایره است.

ادامه دارد

زیرنویس

1. D.Pompeciu
2. Euler
3. Steinitz
4. signed area

منبع

Mathematical Olympiad Challenges
Titu Andreescu
Rŏzvan Gelca

اتحادهای مثلثاتی

احمد قندهاری

هر تساوی مثلثاتی، بین یک یا چند نسبت مثلثاتی که به ازای جمیع مقدارهای متغیر یا متغیرهای تعریف شده در آن، همواره برقرار باشد، یک اتحاد مثلثاتی نامیده می‌شود.

اتحادهای مثلثاتی معمولاً به سه روش قابل حل هستند:

روش اول: یکی از دو طرف اتحاد مثلثاتی را که مفصل‌تر است، با استفاده از فرمول‌های مثلثاتی و رابطه‌های دیگر جبری و مثلثاتی، آن قدر تغییر می‌دهیم تا به طرف دیگر برسیم.

مسأله‌ی ۱. درستی اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$(\cot a-1)^2+(\cot a+1)^2=\frac{2}{\sin^2 a}$$

حل: عبارت سمت چپ را حل می‌کنیم تا به عبارت سمت راست برسیم:

$$\text{عبارت سمت چپ}=(\cot a-1)^2+(\cot a+1)^2$$
$$=\cot^2 a-2\cot a+1+\cot^2 a+2\cot a+1$$
$$=2\cot^2 a+2$$
$$=2(1+\cot^2 a)$$
$$=2\left(\frac{1}{\sin^2 a}\right)=\frac{2}{\sin^2 a}$$

مسأله‌ی ۲. درستی اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$\frac{1-2\cos^2 a}{\sin a\cos a}=\tan a-\cot a$$

حل: عبارت سمت چپ را حل می‌کنیم:

$$\text{عبارت سمت چپ}=\frac{1-2\cos^2 a}{\sin a.\cos a}$$
$$=\frac{1-\cos^2 a-\cos^2 a}{\sin a.\cos a}$$
$$=\frac{\sin^2 a-\cos^2 a}{\sin a.\cos a}$$
$$=\frac{\sin^2 a}{\sin a.\cos a}-\frac{\cos^2 a}{\sin a\cos a}$$
$$=\frac{\sin a}{\cos a}-\frac{\cos a}{\sin a}=\tan a-\cot a$$

مسأله‌ی ۳. درستی اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$\frac{1}{\cos^4\alpha+\cos^2\alpha.\sin^2\alpha+\sin^2\alpha+\tan^2\alpha}=\cos^2\alpha$$

حل: عبارت سمت چپ را حل می‌کنیم:

$$\text{عبارت سمت چپ}=\frac{1}{\cos^4\alpha+\cos^2\alpha.\sin^2\alpha+\sin^2\alpha+\tan^2\alpha}$$

برای
دانش آموزان
سال دوم

$$= \frac{1}{\cos^2\alpha(\underbrace{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}_{1}) + \sin^2\alpha + \tan^2\alpha}$$

$$= \frac{1}{\underbrace{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}_{1} + \tan^2\alpha}$$

$$= \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2\alpha}} = \cos^2\alpha$$

مسأله‌ی ۴. درستی اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$\cos\alpha + \cos(120^\circ + \alpha) + \cos(240^\circ + \alpha) = 0$$

حل: عبارت سمت چپ را حل می‌کنیم:

$$\text{عبارت سمت چپ} = \cos\alpha + \cos(\pi + \alpha - 60^\circ) + \cos(\pi + \alpha + 60^\circ) =$$

$$= \cos\alpha - \cos(\alpha - 60^\circ) - \cos(\alpha + 60^\circ)$$

$$= \cos\alpha - \left[\cos(\alpha + 60^\circ) + \cos(\alpha - 60^\circ)\right]$$

$$= \cos\alpha - [2\cos\frac{\alpha + 60^\circ + \alpha - 60^\circ}{2} \times \cos\frac{\alpha + 60^\circ - \alpha + 60^\circ}{2}]$$

$$= \cos\alpha - 2\cos\alpha.\cos 60^\circ$$

$$= \cos\alpha - 2\cos\alpha\left(\frac{1}{2}\right) = \cos\alpha - \cos\alpha = 0$$

روش دوم: فرض می‌کنیم تساوی اتحاد درست باشد. دو طرف تساوی را به کمک فرمول‌های مثلثاتی و اعمال جبری آن‌قدر ساده می‌کنیم تا به دو مقدار مساوی برسیم.

مسأله‌ی ۵. درستی اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$\frac{\sin^3\alpha + \cos^3\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{2 - \sin 2\alpha}{2}$$

حل: فرض می‌کنیم تساوی بالا درست باشد. آن را طرفین وسطین می‌کنیم:

$$2(\sin^3\alpha + \cos^3\alpha) = (\sin\alpha + \cos\alpha)(2 - \sin 2\alpha)$$

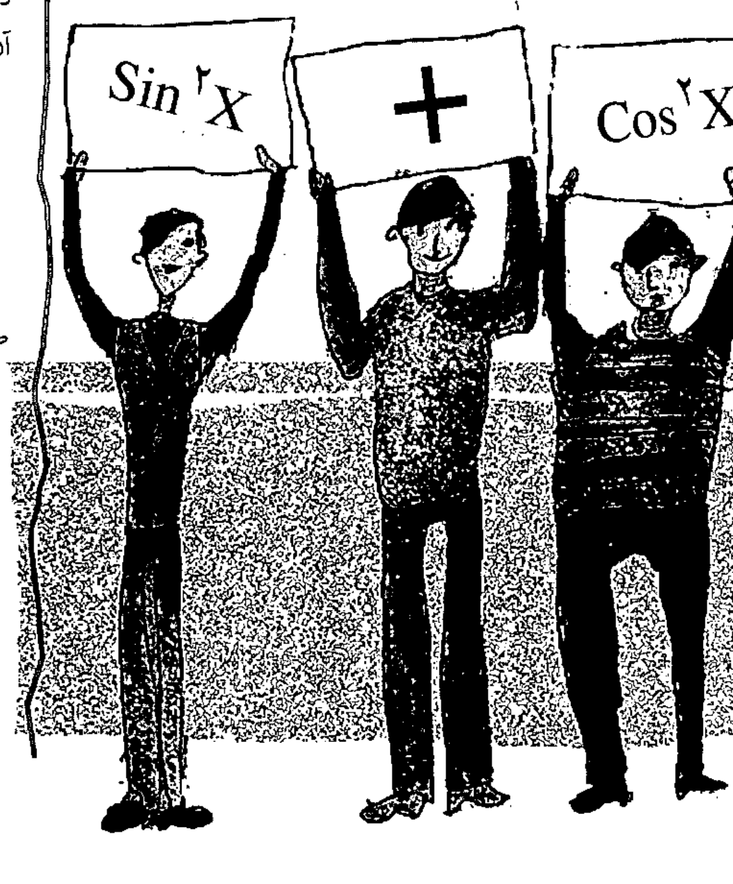
توجه: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 + b^2 - ab)$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha$

$$2(\sin\alpha + \cos\alpha)(\underbrace{\sin\alpha^2 + \cos^2\alpha}_{1} - \sin\alpha\cos\alpha)$$

$$= (\sin\alpha - \cos\alpha)(2 - 2\sin\alpha\cos\alpha)$$

$$2(1 - \sin\alpha\cos\alpha) = 2(1 - \sin\alpha.\cos\alpha)$$



مسأله‌ی ۶: درستی اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$2(1+\cos\alpha)-\sin^2\alpha=4\cos^4\frac{\alpha}{2}$$

حل: فرض می‌کنیم تساوی بالا درست باشد:

$$2\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)-\sin^2\alpha=4\cos^4\frac{\alpha}{2}$$

$$4\cos^2\frac{\alpha}{2}-(\sin\alpha)^2=4\cos^4\frac{\alpha}{2}$$

$$4\cos^2\frac{\alpha}{2}-\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2=4\cos^4\frac{\alpha}{2}$$

$$4\cos^2\frac{\alpha}{2}-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}=4\cos^4\frac{\alpha}{2}$$

$$4\cos^2\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)=4\cos^4\frac{\alpha}{2}$$

چون: $1-\sin^2\frac{\alpha}{2}=\cos^2\frac{\alpha}{2}$

بنابراین داریم: $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\cos^2\frac{\alpha}{2}$

روش سوم: با نوشتن روابط مناسب و با به کارگیری فرمول‌های مثلثاتی، صورت مسأله را می‌سازیم.

مسأله‌ی ۷. درستی اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$\frac{\sin x}{1-\cos x}+\frac{1+\cos x}{\sin x}=\frac{2\sin x}{1-\cos x}$$

حل: به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$2\sin x=2\sin x$$

دو طرف این تساوی را بر $1-\cos x\neq 0$ تقسیم می‌کنیم:

عبارت سمت چپ را در $\frac{\sin x}{\sin x}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{2\sin^2 x}{\sin(1-\cos x)}=\frac{2\sin x}{1-\cos x}$$

$$\frac{\sin^2 x+\sin^2 x}{\sin x(1-\cos x)}=\frac{2\sin x}{1-\cos x}$$

کسر سمت چپ را تفکیک می‌کنیم:

$$\frac{\sin^2 x+(1-\cos^2 x)}{\sin x(1-\cos x)}=\frac{2\sin x}{1-\cos x}$$

$$\frac{\sin^2 x}{\sin x(1-\cos x)}+\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\sin x(1-\cos x)}=\frac{2\sin x}{1-\cos x}$$

در نتیجه:

$$\therefore\ \frac{\sin x}{1-\cos x}+\frac{1+\cos x}{\sin x}=\frac{2\sin x}{1-\cos x}$$

مسأله‌ی ۸: درستی اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$\cos^2 a+2\sin^2 a+\sin^2 a.\tan^2 a=\frac{1}{\cos^2 a}$$

حل:

$$\text{عبارت سمت چپ}=\underbrace{\cos^2 a+\sin^2 a}_{1}+\sin^2 a+\sin^2 a.\tan^2 a$$

$$=1+\sin^2 a(1+\tan^2 a)$$

$$=1+\sin^2 a\left(\frac{1}{\cos^2 a}\right)$$

$$=1+\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a}=1+\tan^2 a=\frac{1}{\cos^2 a}$$

مسأله‌ی ۹: درستی اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$\frac{(a^2-b^2)\cot(\pi-\alpha)}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}+\frac{(a^2+b^2)\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cot(\pi-\alpha)}=-2\alpha^2$$

حل:

$$\text{عبارت سمت چپ}=\frac{(a^2-b^2)(-\cot\alpha)}{\cot\alpha}+\frac{(a^2+b^2)\cot\alpha}{-\cot\alpha}$$

$$=-(a^2-b^2)-(a^2+b^2)=-a^2+b^2$$

$$-a^2-b^2=2a^2$$

مسأله‌ی ۱۰: درستی اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$\frac{2\sin a-\sin 2a}{2\sin a+\sin 2a}=\tan^2\frac{a}{2}$$

حل:

$$\text{عبارت سمت چپ}=\frac{2\sin a-2\sin a\cos a}{2\sin a+2\sin a\cos a}$$

$$\text{عبارت سمت چپ} = \frac{2\sin a(1-\cos a)}{2\sin a(1+\cos a)} = \frac{1-\cos a}{1+\cos a}$$

$$= \frac{2\sin^2\frac{a}{2}}{2\cos^2\frac{a}{2}} = \tan^2\frac{a}{2}$$

مسأله‌ی ۱۱ : درستی اتحاد زیر را ثابت کنید :

$$\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+a\right)-\tan\left(\frac{\pi}{4}-a\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4}+a\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}-a\right)} = \sin 2a$$

حل :

$$\text{داریم}: \begin{cases} \tan p + \tan q = \dfrac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q} \\ \tan p - \tan q = \dfrac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q} \end{cases}$$

$$\text{عبارت سمت چپ} = \frac{\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+a-\frac{\pi}{4}+a\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+a\right).\cos\left(\frac{\pi}{4}-a\right)}}{\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+a+\frac{\pi}{4}-a\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+a\right).\cos\left(\frac{\pi}{4}-a\right)}}$$

$$= \frac{\frac{\sin 2a}{1}}{\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1}} = \frac{\sin 2a}{1} = \sin 2a$$

مسأله‌ی ۱۲ : درستی اتحاد زیر را ثابت کنید :

$$\frac{\sin 2a.\cos a}{(1+\cos 2a)(1+\cos a)} = \tan\frac{a}{2}$$

حل :

$$\text{عبارت سمت چپ} = \frac{2\sin a.\cos a.\cos a}{(2\cos^2 a)\left(2\cos^2\frac{a}{2}\right)} = \frac{2\sin a.\cos^2\frac{a}{2}}{2\cos^2 a\left(2\cos^2\frac{a}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\sin a}{2\cos^2\frac{a}{2}} = \frac{2\sin\frac{a}{2}.\cos\frac{a}{2}}{2\cos^2\frac{a}{2}} = \frac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}} = \tan\frac{a}{2}$$

مسأله‌ی ۱۲ : درستی اتحاد زیر را ثابت کنید :

$$\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$$

حل : داریم :

$$a^4 + b^4 = (a^2+b^2)^2 - 2a^2b^2$$

$$\text{عبارت سمت چپ} = \Big(\underbrace{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}_{1}\Big)^2 - 2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha$$

$$= 1 - 2(\sin\alpha\cos\alpha)^2 = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)^2$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$$

نتیجه‌ی ۱ :

$$\boxed{\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha}$$

مسأله‌ی ۱۳ : درستی اتحاد زیر را ثابت کنید :

$$\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$$

حل : داریم :

$$a^6 + b^6 = (a^2+b^2)(a^4+b^4-a^2b^2)$$

و :

$$a^4 + b^4 = (a^2+b^2)^2 - 2a^2b^2$$

پس :

$$a^6 + b^6 = (a^2+b^2)\left[(a^2+b^2)^2 - 3a^2b^2\right]$$

$$\text{عبارت سمت چپ} = \Big(\underbrace{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}_{1}\Big) \times \left[\Big(\underbrace{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}_{1}\Big)^2 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right]$$

$$\text{عبارت سمت چپ} = 1 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1 - 3(\sin\alpha\cos\alpha)^2$$

$$= 1 - 3\left(\frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)^2$$

$$= 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$$

نتیجه‌ی ۲:

$$\boxed{\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\alpha}$$

مسأله‌ی ۱۴ : درستی اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$2(\cos^8\alpha - \sin^8\alpha) = \cos 2\alpha(1 + \cos^2 2\alpha)$$

حل: داریم:

$$a^8 - b^8 = (a^4 - b^4)(a^4 + b^4)$$
$$= (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)\left[(a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2\right]$$

عبارت سمت چپ
$$= 2(\cos^2 a - \sin^2 a)(\underbrace{\cos^2 a + \sin^2 a}_{1}) \times$$
$$[(\underbrace{\cos^2 a + \sin^2 a}_{1})^2 - 2\cos^2 a.\sin^2 a]$$

عبارت سمت چپ
$$= 2(\cos 2\alpha)(1)\left[1 - 2(\sin\alpha\cos\alpha)^2\right]$$
$$= 2\cos 2a\left[1 - 2\left(\frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)^2\right]$$
$$= 2\cos 2a\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2a\right)$$
$$= 2\cos 2a\left[1 - \frac{1}{2}(1 - \cos^2 2a)\right]$$
$$= 2\cos 2a\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos^2 2a\right]$$
$$= 2\cos 2a\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos^2 2a\right] = \cos 2a(1 + \cos^2 2a)$$

مسأله‌ی ۱۵ . درستی اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$\tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ = 4$$

حل:

عبارت سمت چپ
$$= (\tan 81^\circ + \tan 9^\circ) - (\tan 63^\circ + \tan 27^\circ)$$

داریم:
$$\tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p.\cos q}$$

عبارت سمت چپ
$$= \frac{\sin(81^\circ + 9^\circ)}{\cos 81^\circ \cos 9^\circ} - \frac{\sin(63^\circ + 27^\circ)}{\cos 63^\circ.\cos 27^\circ}$$

توجه:
$$\cos 81^\circ = \sin 9^\circ, \quad \cos 63^\circ = \sin 27^\circ$$

عبارت سمت چپ
$$= \frac{\sin 90^\circ}{\sin 9^\circ \cos 9^\circ} - \frac{\sin 90^\circ}{\sin 27^\circ \cos 27^\circ}$$
$$= \frac{1}{\sin 9^\circ \cos 9^\circ} - \frac{1}{\sin 27^\circ \cos 27^\circ}$$
$$= \frac{2}{2\sin 9^\circ \cos 9^\circ} - \frac{2}{2\sin 27^\circ \cos 27^\circ}$$
$$= \frac{2}{\sin 18^\circ} - \frac{2}{\sin 54^\circ}$$
$$= \frac{2(\sin 54^\circ - \sin 18^\circ)}{\sin 18^\circ \sin 54^\circ}$$
$$= \frac{2 \times 2\cos\frac{54^\circ + 18^\circ}{2}\sin\frac{54^\circ - 18^\circ}{2}}{\sin 18^\circ \sin 54^\circ}$$
$$= \frac{4\cos 36^\circ \sin 18^\circ}{\sin 18^\circ \sin 54^\circ} = \frac{2\cos 36^\circ}{\sin 54^\circ} = \frac{4\sin 54^\circ}{\sin 54^\circ} = 4$$

مسأله‌ی ۱۶ : درستی فرمول زیر را اثبات کنید:

$$\boxed{\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a}$$

حل: مانند یک اتحاد عمل می‌کنیم:

عبارت سمت چپ
$$= \sin 3a = \sin(2a + a) =$$
$$= \sin 2a\cos a + \cos 2a\sin a$$
$$= (2\sin a\cos a).\cos a + (1 - 2\sin^2 a)\sin a$$
$$= 2\sin a\cos^2 a + \sin a - 2\sin^3 a$$
$$= 2\sin a(1 - \sin^2 a) + \sin a - 2\sin^3 a$$
$$= 2\sin a - 2\sin^3 a + \sin a - 2\sin^3 a$$
$$= 3\sin a - 4\sin^3 a$$

مسأله‌ی ۱۷ . درستی فرمول زیر را ثابت کنید:

$$\boxed{\sin 3a = 4\sin a\sin(60^\circ - a)\sin(60^\circ + a)}$$

حل: مانند یک اتحاد عمل می‌کنیم:

عبارت سمت راست
$$= 4\sin a(\sin 60^\circ\cos a - \cos 60^\circ\sin a) \times$$
$$(\sin 60^\circ\cos a + \cos^2 60^\circ\sin^2 a)$$
$$= 4\sin a(\sin^2 60\cos^2 a - \cos^2 60^\circ\sin a)$$
$$= 4\sin a\left(\frac{3}{4}\cos^2 a - \frac{1}{4}\sin^2 a\right)$$

$$= 4\sin a\left[\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\sin^2 a - \frac{1}{4}\sin^2 a\right]$$

$$= 3\sin a - 3\sin^3 \alpha - \sin^2 \alpha$$

بنابر مسأله‌ی ۱۶ :

$$= 3\sin a - 4\sin^3 a = \sin 3a$$

مسأله‌ی ۱۸ . درستی اتحاد زیر را ثابت کنید :

$$\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ \sin 90^\circ = \frac{1}{16}$$

حل :

$$\text{عبارت سمت چپ} = \sin 10^\circ \left(\frac{1}{2}\right) \sin 50^\circ \sin 70^\circ \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2}\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ \qquad \text{رابطه‌ی (I)}$$

در مسأله‌ی ۱۷ داشتیم :

$$\sin 3a = 4\sin a \sin(60^\circ - a)\sin(60^\circ + a)$$

فرض می‌کنیم : $a = 10^\circ$

$$\sin 30^\circ = 4\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} = 4\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ \Rightarrow \sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \frac{1}{8}$$

در رابطه‌ی (I) قرار می‌دهیم :

$$\text{عبارت سمت چپ} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{16}$$

ادامه این مقاله را در شماره‌ی ۴۹ مجله ملاحظه خواهید کرد .

معماهای ف  کری و منطقی

در شهر پاریس، طی تابستان، مغازه‌ی کفش فروشی هر دوشنبه، مغازه‌ی ابزارفروشی هر سه‌شنبه، و مغازه‌ی سبزی‌فروشی هر پنجشنبه بسته است، و بانک تنها روزهای دوشنبه، چهارشنبه و جمعه باز است. یکشنبه‌ها هم تمام این مکان‌ها تعطیل هستند.

یک روز بعدازظهر، خانم A، خانم B، خانم C و خانم D با هم به خرید رفتند، در حالی که هر یک باید به مکانی متفاوت مراجعه می‌کردند. در بازگشتشان این صحبت‌ها بینشان رد و بدل شد :

خانم A : من و خانم D می‌خواستیم این هفته زودتر به خرید برویم، اما موقعیتی که هر دو بتوانیم کارمان را رها کنیم، پیش نیامد.

خانم B : نمی‌خواستم امروز بیایم، اما نمی‌توانستم فردا کاری را که باید انجام بگیرد، انجام بدهم.

خانم C : می‌توانستم دیروز و پریروز هم مثل امروز اقدام کنم.

خانم D : دیروز یا فردا مناسب کارم بود.

هر یک از این خانم‌ها نیاز به رفتن به کدام مکان داشته است؟

۱۷

مسائلی از احتمال در فضاهای پیوسته

حمیدرضا امیری

برای دانش‌آموزان سال سوم ریاضی

شاید ساده‌ترین بیان برای تعریف فضاها یا مجموعه‌های پیوسته چنین باشد: فضای پیوسته به فضایی گفته می‌شود که اندازه‌گیری در آن، با شمارش امکانپذیر نباشد. در واقع، بعضی از فضاها برای اندازه‌گیری، مقیاس‌های اندازه‌گیری خاص خودشان را دارند و با همان مقیاس‌ها اندازه‌گیری می‌شوند؛ مثل: طول، سطح، حجم، وزن، زمان و... برای مثال، ما هیچ‌گاه نمی‌گوییم طول آن درخت چندتاست! یا سطح این اتاق چندتاست! بلکه اولی را با متر و دومی را با متر مربع، حجم را با متر مکعب وزن را با کیلوگرم و زمان را با ثانیه یا ساعت اندازه‌گیری می‌کنیم. به چنین فضاهایی، فضای پیوسته می‌گوییم.

واضح است که اگر پدیده‌هایی تصادفی در فضاهای پیوسته رخ بدهند، فرمول $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ به کار نمی‌آید، زیرا $n(A)$ یعنی تعداد اعضای A و $n(S)$ یعنی تعداد اعضای S و می‌دانیم که تعداد (شمارش) در فضاهای پیوسته بی‌معنی است. بنابراین، احتمال رخداد A در فضای پیوسته‌ی S بر حسب این‌که S فضایی طولی، سطحی، حجمی، وزنی یا زمانی باشد، به یکی از این صورت‌ها محاسبه می‌شود:

I) در فضاهای طولی $\rightarrow P(A)=\frac{l_A}{l_S}$

II) در فضاهای سطحی $\rightarrow P(A)=\frac{a_A}{a_S}$

III) در فضاهای حجمی $\rightarrow P(A)=\frac{V_A}{V_S}$

IV) در فضاهای وزنی $\rightarrow P(A)=\frac{w_A}{w_S}$

V) در فضاهای زمانی $\rightarrow P(A)=\frac{t_A}{t_S}$

در حل مسائل احتمال در فضاهای پیوسته، غالباً از اطلاعات دیگری در زمینه‌های جبر، هندسه و هندسه تحلیلی باید استفاده کنیم که همین موضوع، گاهی اوقات دانش‌آموزان را آزار می‌دهد. ولی اگر اطلاعات ما در زمینه‌های لازم (در حد مقدماتی) کافی باشد، حل مسائل احتمال در فضاهای پیوسته چندان مشکل نیست. سعی می‌کنم با طرح و حل مسائلی، تا حد امکان این مشکل را ساده کنم. در حل مسأله‌ها کوشش کرده‌ام، نکته‌ها و ظرافت‌های موجود را نیز تذکر دهم.

مسأله‌ی ۱. عددی (عدد حقیقی) به تصادف از بازه‌ی [۸ و ۶-] انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن که عدد انتخاب شده:

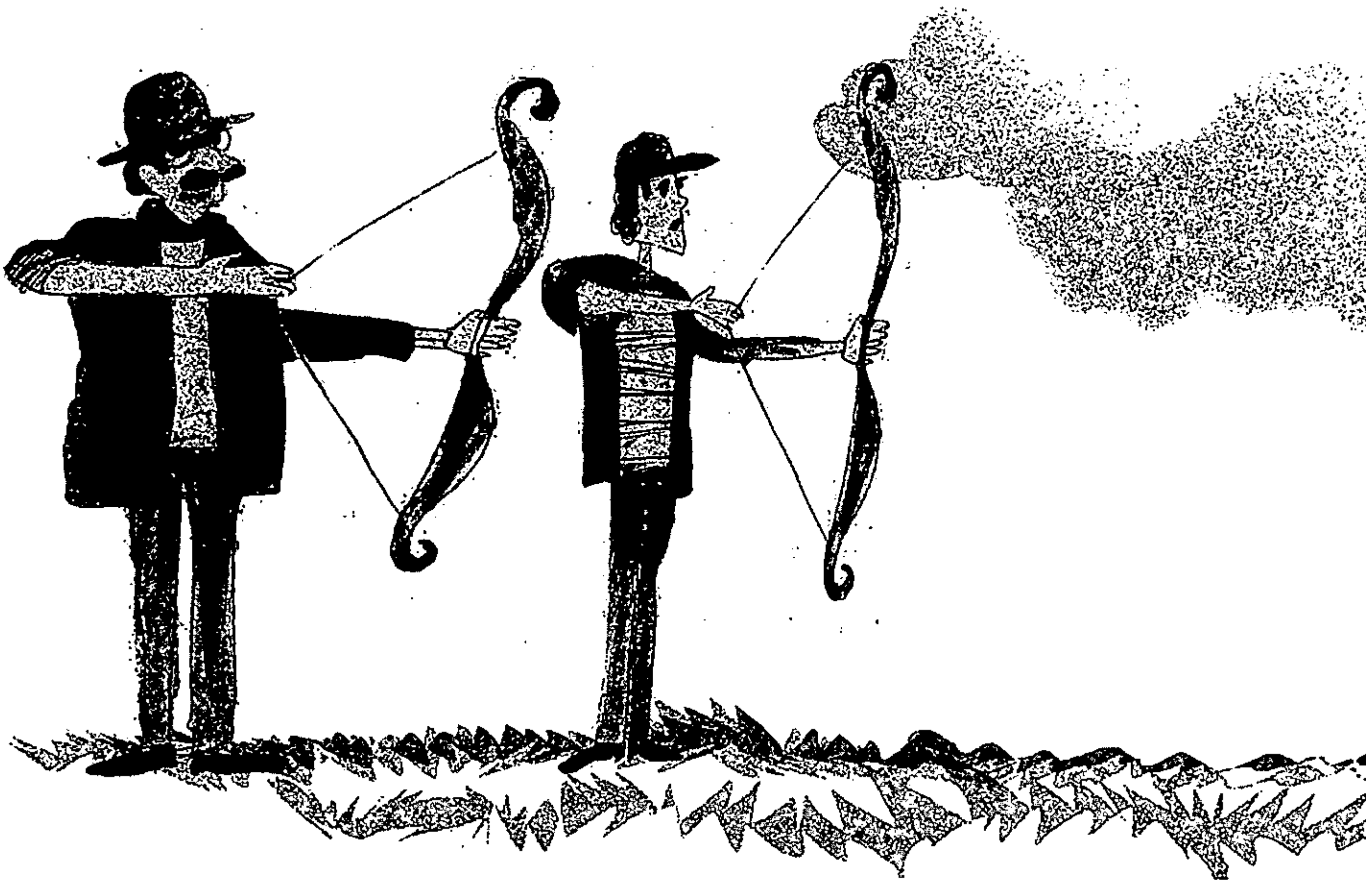
الف) مثبت باشد.

ب) بزرگ‌تر از ۵ باشد.

ج) بین ۱ و ۲ باشد.

د) صحیح باشد.

هـ) بین ۶- و ۸ باشد ($-6<x<8$).



حل: اگر فضای نمونه‌ای را S بنامیم، داریم:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -۶ < x \leq ۸\}$$

و می‌دانیم، بازه‌ها یا فاصله‌ها در اعداد حقیقی، مجموعه‌هایی پیوسته و دارای طول معینی هستند. همچنین می‌دانیم، نقطه یا مجموعه نقاط متناهی و یا حتی مجموعه نقاط نامتناهی ولی گسسته، دارای طول صفر هستند. برای مثال، طول مجموعه‌ی اعداد طبیعی یا طول مجموعه‌ی اعداد صحیح صفر است.

بنابراین، طول بازه‌ی [۸ و۶-) برابر با ۱۴، و با طول بازه‌های (۸ و۶-)، (۸ و۶-] و [۸ و۶-] برابر است. حتی طول مجموعه‌ی $(-۶,-۵)\cup(-۵,-۴)\cup\cdots\cup(۷,۸)$ نیز ۱۴ است. پس در این مسأله داریم:

$$a_s = ۱۴$$

الف) $A = \{x \in S \mid ۰ < x \leq ۸\} \Rightarrow l_A = ۸$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{۸}{۱۴} = \frac{۴}{۷}$$

ب) $A = \{x \in S \mid ۵ < x \leq ۸\} \Rightarrow l_A = ۳ \Rightarrow P(A) = \frac{۳}{۱۴}$

ج) $A = \{x \in S \mid ۱ < x < ۲\} \Rightarrow l_A = ۱ \Rightarrow P(A) = \frac{۱}{۱۴}$

د) $A = \{-۵,-۴,-۳,\ldots,۷,۸\} \Rightarrow l_A = ۰$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{۰}{۱۴} = ۰$$

نظرتان در مورد قسمت (د) چیست؟

بله، احتمال این‌که از بازه‌ی [۸ و۶-) عدد صحیح انتخاب شود، صفر است! البته مشاهده می‌کنید که مجموعه‌ی A دارای ۱۴ عضو است. شاید فکر کنید، حالا آمدیم و عدد صحیحی مانند ۵ انتخاب شد، آیا این امکان وجود دارد؟!

حل مسأله به احتمال صفر منتهی شد، یعنی احتمال رخداد این پیشامد صفر است و این در فضای پیوسته خیلی با فضای گسسته فرق دارد. از نظر شهودی، به‌دو طریق می‌توان به این ابهام پاسخ داد: اول این‌که ما می‌گوییم، احتمالِ رخداد صفر است. مثلاً وقتی حتی در فضای گسسته می‌گوییم، احتمال این که تاسی را بریزیم و عدد ۲ بیاید، $\frac{۱}{۶}$ است، یعنی چه؟ آیا به این معناست که اگر ۶ بار تاسی را بریزیم، حتماً باید یک بار ۲ بیاید؟ خیر، این‌طور نیست. در واقع، عدد $\frac{۱}{۶}$ به نوعی یک میانگین یا توقع ما از آمدن ۲ در ۶ بار پرتاب تاس است. بدین معنی که اگر تاسی را ۶ بار بریزیم و تعداد ۲ را در این شش بار پرتاب یادداشت کنیم، و این آزمایش (آزمایش ۶

بار ریختن تاس و یادداشت تعداد ۲ در هر آزمایش) را ۲۰ بار تکرار کنیم و در این ۱۲۰ بار ریختن تاس، تعداد روشدن‌های ۲، مثلاً مساوی با ۱۸ بار باشد، با تقسیم ۱۸ بر ۱۲۰ به کسر $\frac{۱۸}{۱۲۰}$ می‌رسیم. و اگر این آزمایش را ۵۰ بار تکرار کنیم و تعداد روشدن‌های ۲ را در این ۳۰۰ بار ریختن تاس یادداشت و بر ۳۰۰ تقسیم کنیم، به کسری می‌رسیم که این کسر کم‌کم به عدد $\frac{۱}{۶}$ میل خواهد کرد. و در نهایت، اگر تعداد آزمایش‌ها بی‌شمار باشد، مساوی با $\frac{۱}{۶}$ خواهد بود؟

پاسخ شهودی دیگر، نگاه ما به مجموعه‌ی اعداد حقیقی بین ۶- و ۸ است که اگر این نگاه **حقیقی** باشد (بین هر دو عدد حقیقی، بی‌نهایت عدد حقیقی موجود است) و با این نگاه، یکی از این بی‌نهایت عدد را که ۱۴ تای آن‌ها صحیح است انتخاب کنیم، چه‌قدر احتمال دارد، عدد صحیح انتخاب شود؟!

تذکر مهم: در فضاهای پیوسته، از P(A)=۰ نمی‌توان نتیجه گرفت که $A=\phi$ و از P(A)=۱، نمی‌توان نتیجه گرفت که: A=S.

د) $A=\{x\in S|-۶<x<۸\}\Rightarrow l_A=۱۴\Rightarrow P(A)=\frac{۱۴}{۱۴}$

(دیدیم که P(A)=۱، ولی $S\neq A$)

مسأله‌ی ۲. دو عدد x و y را به تصادف از بازه‌ی (۴ و ۰) انتخاب می‌کنیم. چه‌قدر احتمال دارد:

الف) مجموع دو عدد کوچک‌تر از ۳ باشد.

ب) مجموع دو عدد بین ۲ و ۴ باشد.

ج) مجموع دو عدد مساوی با ۴ باشد.

د) فاصله‌ی دو عدد (قدر مطلق تفاضل آن‌ها) کوچک‌تر از ۳ باشد.

هـ) حداقل یکی از دو عدد بزرگ‌تر از ۳ باشد.

حل: چون هم x و هم y از بازه‌ی (۴ و ۰) انتخاب می‌شوند، پس می‌توان فضای نمونه‌ای را به صورت زیر تعریف کرد:

$$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲|۰<x<۴,۰<y<۴\}=(۰,۴)\times(۰,۴)$$

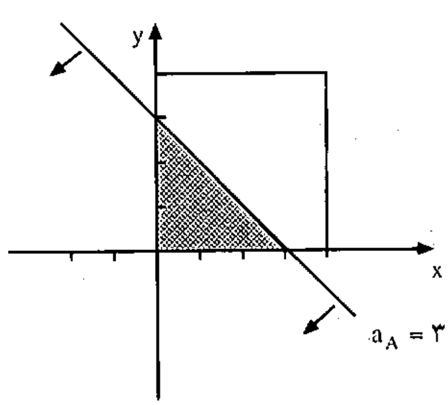
واضح است که مجموعه‌ی S دارای سطح است که همان سطح مربعی است به طول ضلع ۴ و مساحت S برابر است با: $۱۶=۴^۲$؛ یعنی $a_S=۱۶$.

الف) باید مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی x+y<۳ را که یک نیم صفحه است، مشخص کنیم، سپس اشتراک آن را با S به دست آوریم و مساحت این فصل مشترک را بر مساحت S تقسیم کنیم.

تذکر مهم: برای مشخص کردن مجموعه‌ی جواب نامعادلاتی به صورت ax+by>c یا ax+by<c، کافی است نمودار خط ax+by=c را رسم کنیم و نقطه‌ای دلخواه را از یکی از دو نیم صفحه‌ای که خط در صفحه‌ی $\mathbb{R}^۲$ ایجاد کرده است، در نظر بگیریم و مختصات آن را در **نامعادله** قرار دهیم. اگر صدق کند، همان نیم صفحه‌ای که شامل آن نقطه است، مجموعه‌ی جواب را تشکیل می‌دهد و اگر صدق نکند، نیم صفحه‌ی دیگر، مجموعه‌ی جواب است.

صدق می‌کند ۳ > ۰+۰ ⇐ نقطه اختیاری $\binom{۰}{۰}$

(منطقه‌ی جواب با پیکان مشخص شده است.)

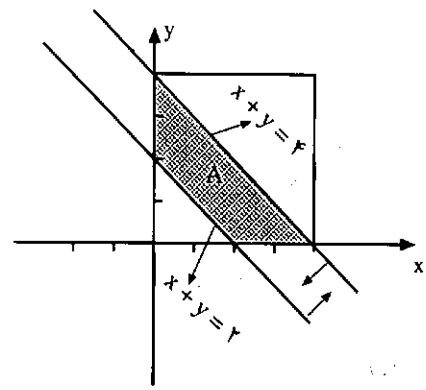


$$a_A=۳\times۳\times\frac{۱}{۲}=\frac{۹}{۲}$$

$$P(A)=\frac{\frac{۹}{۲}}{۱۶}=\frac{۹}{۳۲}$$

ب) در این قسمت باید ۴ > x + y > ۲ باشد که به حل دو نامعادله‌ی ۴ > x + y و ۲ < x + y می‌انجامد. از اشتراک مجموعه جواب‌های این دو نامعادله با S باید اشتراک گرفته

شود و مساحت حاصل را به دست آوریم:



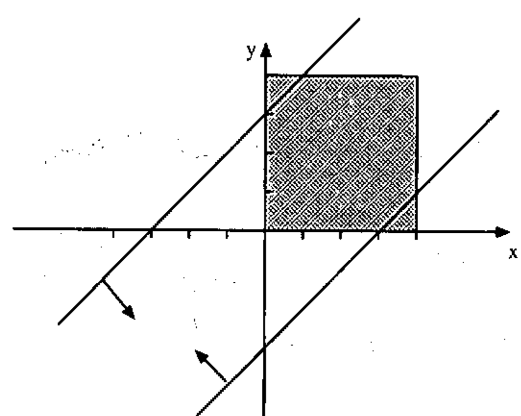
$S = 16 - 8 - 2 = 6$ (مساحت ذوزنقه)

$$P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

(مساحت دو مثلث را از مساحت مربع کم کردیم تا مساحت ذوزنقه به دست آید.)

ج) باید مجموع دو عدد مساوی با ۴ باشد؛ یعنی $x+y=4$ که اشتراک این خط با مربع، پاره‌خطی با مساحت صفر است و در نتیجه: $P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{0}{16} = 0$

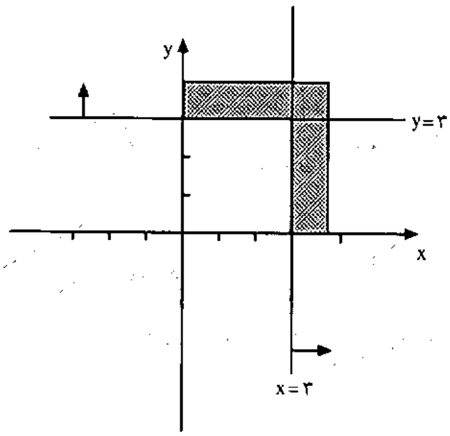
د) باید $3 > |x-y|$ باشد. این نامعادله به دو نامعادله‌ی $3 > x-y > -3$ یا $x-y<3$ و $x-y>-3$ می‌انجامد که روی شکل مشخص کرده‌ایم:



$$a_A = 16 - (1 \times 1 \times \frac{1}{2}) - (1 \times 1 \times \frac{1}{2})$$

$$\Rightarrow a_A = 16 - 1 = 15 \Rightarrow P(A) = \frac{15}{16}$$

هـ) طبق فرض باید $x>3$ یا $y>3$ باشد که باید از اجتماع دو مجموعه جوابِ نامساوی‌ها با S، اشتراک گرفته شود:

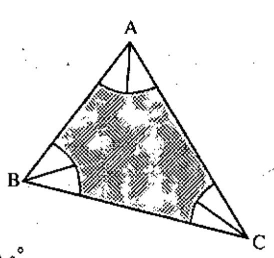


مساحت منطقه‌ی هاشور خورده $= a_A = 16 - 9 = 7$

$$P(A) = \frac{7}{16}$$

مسأله‌ی ۳. اگر نقطه‌ای به تصادف از داخل سطح مثلثی با مساحت K انتخاب کنیم، چه‌قدر احتمال دارد فاصله‌ی این نقطه تا هر یک از رأس‌های مثلث بیش‌تر از l باشد (طول هر ضلع مثلث بزرگ‌تر از 2l است).

حل: ابتدا به مرکز هر یک از رأس‌ها و به شعاع l، دایره‌هایی می‌زنیم تا مطابق شکل، منطقه‌ی موردنظر و مطلوب را که قسمت هاشور خورده است، مشخص کنیم.



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

مساحت سه قطاع $= \frac{1}{2} \times$ مساحت دایره به شعاع l

مساحت سه قطاع $= \frac{1}{2} \times \pi l^2$

مساحت قسمت هاشور خورده $= K - \frac{\pi l^2}{2} \Rightarrow P(A) = \frac{K - \frac{\pi l^2}{2}}{K}$

$$\Rightarrow P(A) = 1 - \frac{\pi l^2}{2K}$$

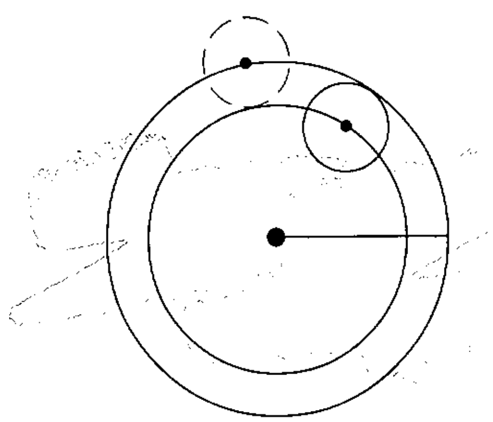
مسأله‌ی ۴ . سکه‌ای به شعاع ۲ را روی صفحه‌ی دایره‌ای شکل به شعاع ۸ پرتاب می‌کنیم . با فرض این که سکه به تمامی خارج صفحه قرار نگیرد ، مطلوب است احتمال آن که :

الف) سکه به تمامی داخلِ صفحه واقع شود .

ب) سکه روی مرکز صفحه را بپوشاند .

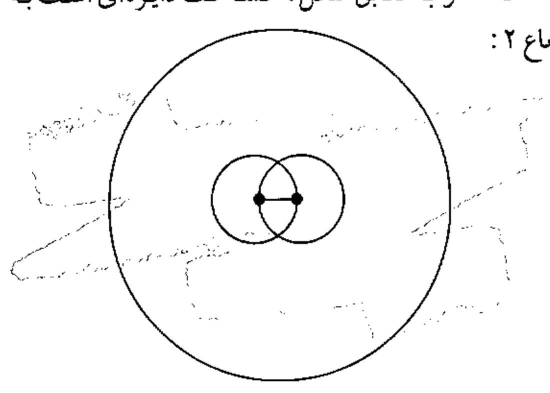
ج) فاصله ی مرکز سکه تا مرکز صفحه بیش تر از ۳ باشد .

حل : الف) مطابق شکل ، اگر دایره‌ای به شعاع ۶=۲−۸ و به مرکزِ صفحه رسم کنیم ، معلوم می‌شود : در صورتی که مرکز سکه خارج دایره‌ی رسم شده واقع شود ، سکه حتماً محیط صفحه را قطع می‌کند . پس منطقه‌ی جواب سطح دایره‌ای است به شعاع ۶ :



$$a_A = ۳۶\pi \Rightarrow P(A) = \frac{۳۶\pi}{۶۴\pi} = \frac{۳۶}{۶۴} = \frac{۹}{۱۶}$$

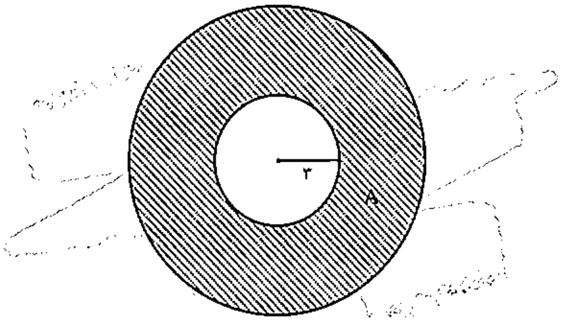
ب) برای این که سکه مرکز دایره را بپوشاند ، کافی است مرکز سکه داخلِ سطح دایره‌ای به شعاع ۲ واقع شود . پس مساحت مطلوب مطابق شکل ، مساحت دایره‌ای است به شعاع ۲ :



$$a_A = ۴\pi \Rightarrow P(A) = \frac{۴\pi}{۶۴\pi} = \frac{۱}{۱۶}$$

(اگر مرکز سکّه روی محیط دایره‌ای به شعاع ۲ واقع شود ، سکه بر مرکز صفحه مماس می‌شود .)

ج) در این حالت ، مرکز سکه باید در خارج از دایره‌ای به شعاع ۳ و به مرکز ، مرکز صفحه واقع شود که مطابق شکل ، قسمت هاشور خورده منطقه‌ی مطلوب است که آن را A می‌نامیم :



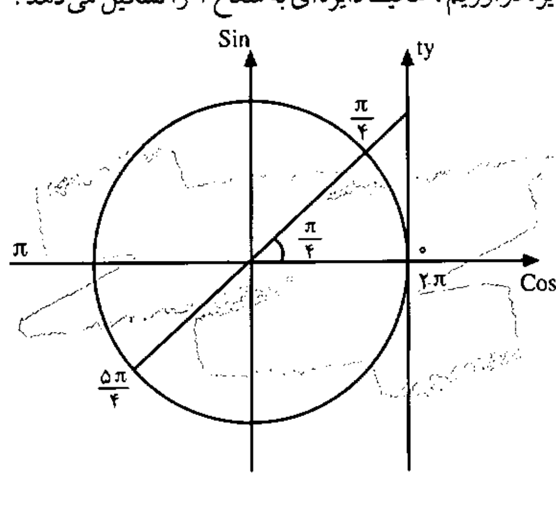
$$a_A = ۶۴\pi - ۹\pi = ۵۵\pi$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{۵۵\pi}{۶۴\pi} = \frac{۵۵}{۶۴}$$

مسأله‌ی ۵ . عددی مانند x را به تصادف از بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ انتخاب می‌کنیم . مطلوب است احتمال آن که :

الف) $\operatorname{tg}x \le ۱$ ؛ ب) $۰ < \operatorname{Sin}x < \frac{۱}{۲}$ ؛ ج) $\operatorname{Cos}x > \frac{۱}{۲}$

حل : چون یک عدد به تصادف از یک بازه انتخاب می‌کنیم ، پس فضای نمونه‌ای دارای طول است که همان طول بازه ، یعنی ۲π می‌باشد . و اگر این بازه را به صورت یک دایره درآوریم ، محیط دایره‌ای به شعاع ۱ را تشکیل می‌دهد .

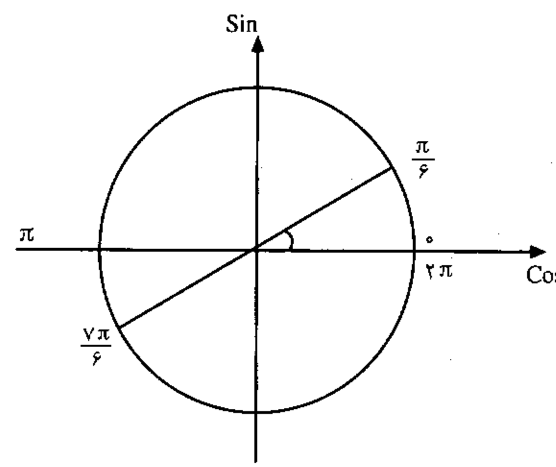


الف) اگر x در فاصله‌ی $[0,\frac{\pi}{4}]$ یا در فاصله‌ی $[\pi,\frac{5\pi}{4}]$ انتخاب شود، همواره $0 \le tg\,x \le 1$ ، و اگر در ناحیه‌ی دوم یا ناحیه‌ی چهارم انتخاب شود نیز، $tg\,x \le 1$ خواهد بود؛ زیرا در این دو ناحیه $tg\,x < 0$ است. پس:

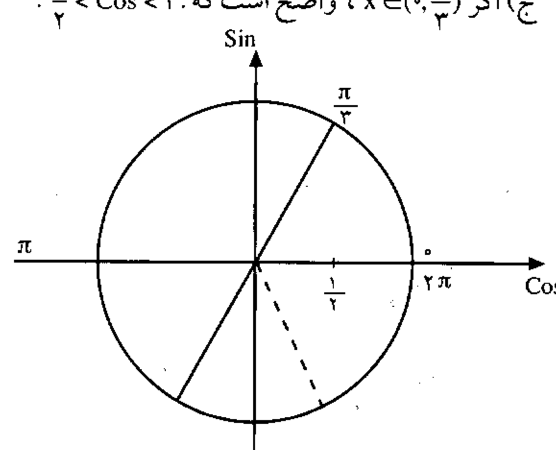
$$l_A = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2} \Rightarrow P(A)=\frac{l_A}{l_S}=\frac{\frac{3\pi}{2}}{2\pi}=\frac{3}{4}$$

ب) برای آن‌که $0 < \sin x < \frac{1}{2}$ باشد، مطابق شکل، باید x از بازه‌ی $(0,\frac{\pi}{6})$ یا $(\pi,\frac{7\pi}{6})$ انتخاب شود؛ پس:

$$l_A = \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{6} \Rightarrow P(A)=\frac{\frac{2\pi}{6}}{2\pi}=\frac{1}{6}$$



ج) اگر $x \in (0,\frac{\pi}{3})$ ، واضح است که: $\frac{1}{2} < \cos x < 1$.



و نیز اگر: $x \in (-\frac{\pi}{3},0)$ ، در این صورت: $\frac{1}{2} < \cos x < 1$.

پس طول بازه‌ی موردنظر عبارت است از:

$$l_A = \frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3} \Rightarrow P(A)=\frac{\frac{2\pi}{3}}{2\pi}=\frac{1}{3}$$

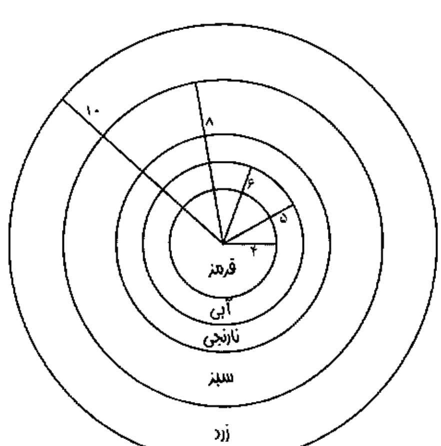
مسأله‌ی ۶. شخصی به سمت یک هدف دایره شکل مطابق نمودار زیر به طور تصادفی تیراندازی می‌کند. اگر قسمت قرمز رنگ ۱۰ امتیاز، قسمت آبی رنگ ۸ امتیاز، قسمت نارنجی رنگ ۶ امتیاز، قسمت سبز رنگ ۵ امتیاز و قسمت زرد رنگ ۴ امتیاز داشته باشد، در این صورت چه قدر احتمال دارد:

الف) با شلیک ۲ تیر حداقل ۱۶ امتیاز بگیرد.

ب) با شلیک ۳ تیر ۲۲ امتیاز بگیرد.

(فرض بر این است که هر تیر این شخص به صفحه‌ی دایره شکل اصابت می‌کند.)

حل: الف) حداقل ۱۶ امتیاز، یعنی ۱۶ امتیاز، یا ۱۸ امتیاز و یا ۲۰ امتیاز. به عبارت دیگر، برای این‌که ۱۶ امتیاز بگیرد، باید هر دو تیر او به منطقه‌ی ۸ امتیازی، یا یک تیر به منطقه‌ی ۱۰ امتیازی و یک تیر به منطقه‌ی ۶ امتیازی اصابت کند. برای کسب ۱۸ امتیاز باید یک تیر را به منطقه‌ی ۱۰ امتیازی (قرمز رنگ) و یک تیر را به منطقه‌ی ۸ امتیازی (آبی رنگ) بزنند. و برای کسب ۲۰ امتیاز، باید هر دو تیر او در



منطقه‌ی ۱۰ امتیازی (دایره‌ای به شعاع ۴) بنشینند.

از طرف دیگر، می‌دانیم که مساحت کل یا a_s برابر با مساحت دایره به شعاع ۱۰ است؛ پس: $a_s = 100\pi$

$a_{\text{آبی}}$ = (مساحت دایره به شعاع ۴) - (مساحت دایره به شعاع ۵) = مساحت قسمت آبی

$$a_{\text{آبی}} = 25\pi - 16\pi = 9\pi$$

$a_{\text{نارنجی}}$ = (مساحت دایره به شعاع ۶) - (مساحت دایره به شعاع ۵)

$$= 36\pi - 25\pi = 11\pi$$

P(حداقل ۱۶ امتیاز) = P(۱۶ امتیاز) + P(۱۸ امتیاز) + P(۲۰ امتیاز)

$$= [\underbrace{(\frac{9\pi}{100\pi} \times \frac{9\pi}{100\pi})}_{\text{هر دو تیر ۸ امتیازی}} + \underbrace{2(\frac{16\pi}{100\pi} \times \frac{11\pi}{100\pi})}_{\text{۱ تیر ۱۰ و دیگری ۶ امتیازی}}]$$

$$+[\underbrace{2 \times (\frac{16\pi}{100\pi} \times \frac{9\pi}{100\pi})}_{\text{هر دو تیر ۱۰ امتیازی}} + \underbrace{(\frac{16\pi}{100\pi} \times \frac{16\pi}{100})}_{\text{۱ تیر ۱۰ و دیگری ۸ امتیاز}}]$$

$$= \frac{81}{10000} + \frac{176}{10000} \times 2 + \frac{144}{10000} \times 2 + \frac{256}{10000} = \frac{977}{10000}$$

ب) حالت‌های ممکن برای کسب ۲۲ امتیاز به صورت‌های زیرند:

۱. اصابت تیر به قسمت‌های ۱۰، ۸ و ۴ امتیازی که به شش طریق امکان‌پذیر است (اول ۱۰، دوم ۸ و سوم ۴ امتیازی، یا اول ۱۰، دوم ۴ و سوم ۸ یا...).

۲. اصابت دو تیر به قسمت‌های ۸ و ۱ تیر به قسمت ۶ امتیازی که به سه طریق امکان‌پذیر است.

۳. اصابت دو تیر به قسمت ۶ امتیازی و ۱ تیر به قسمت ۱۰ امتیازی که به سه طریق امکان‌پذیر است.

$a_{\text{زرد}} = 100\pi - 64\pi = 36\pi$ (مساحت قسمت ۴ امتیازی)

$$P(\text{۲۲ امتیاز}) = \left[6 \times (\frac{16}{100} \times \frac{9}{100} \times \frac{36}{100})\right]$$

$$+\left[3 \times (\frac{9}{100} \times \frac{9}{100} \times \frac{11}{100})\right] + \left[3 \times (\frac{11}{100} \times \frac{11}{100} \times \frac{16}{100})\right]$$

$$P(\text{۲۲ امتیاز}) = \frac{39585}{1000000}$$

مسأله‌ی ۷. سه عدد x، y و z به تصادف از بازه‌ی [۰ و ۴] انتخاب می‌شوند. چه قدر احتمال دارد:

الف) $z>3$؛ ب) $z>3$ و $y>2$؛ ج) $z>2$ و $y>2$ و $x>2$

حل: فضای نمونه‌ای، یعنی $S = \{(x,y,z) | x,y,z \in [0,4]\}$، عبارت است از مجموعه‌ی نقاطی از فضای سه بعدی که داخل یک مکعب به ضلع ۴ قرار دارند (حجم مکعبی به ضلع ۴)؛ پس: $V_S = 4^3 = 64$

الف) چون باید $z>3$، پس: $3 < z \le 4$. و حجم مطلوب عبارت است از حجم مکعب مستطیلی به طول ۴، عرض ۴ و ارتفاع ۱؛ یعنی: $V_A = 4 \times 4 \times 1$. در نتیجه:

$$P(A) = \frac{V_A}{V_S} = \frac{16}{64} = \frac{1}{4}$$

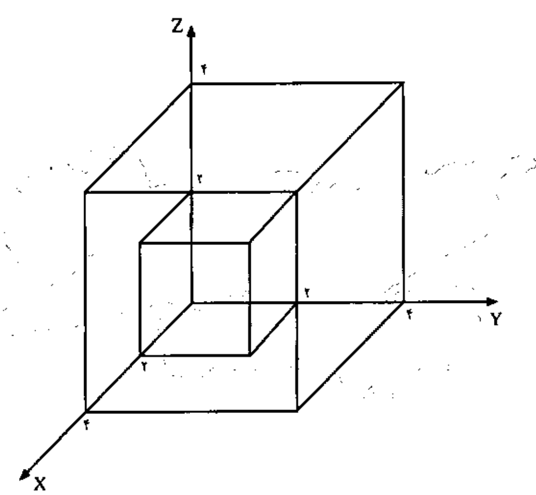
ب) باید $z>3$ و $y>2$، پس باید: $3 < z \le 4$ و $2 < y \le 4$. بنابراین، حجم مطلوب عبارت است از حجم مکعب مستطیلی به طول ۴، عرض ۲ و ارتفاع ۱؛ یعنی: $V_B = 4 \times 2 \times 1$. پس:

$$P(B) = \frac{V_B}{V_S} = \frac{8}{64} = \frac{1}{8}$$

ج) در این قسمت باید: $2 < x \le 4$، $2 < y \le 4$ و $2 < z \le 4$. پس حجم مطلوب حجم مکعبی است به طول، عرض و ارتفاع ۲؛ یعنی: $V_C = 2 \times 2 \times 2$.

پس:

$$P(C) = \frac{V_C}{V_S} = \frac{8}{64} = \frac{1}{8}$$

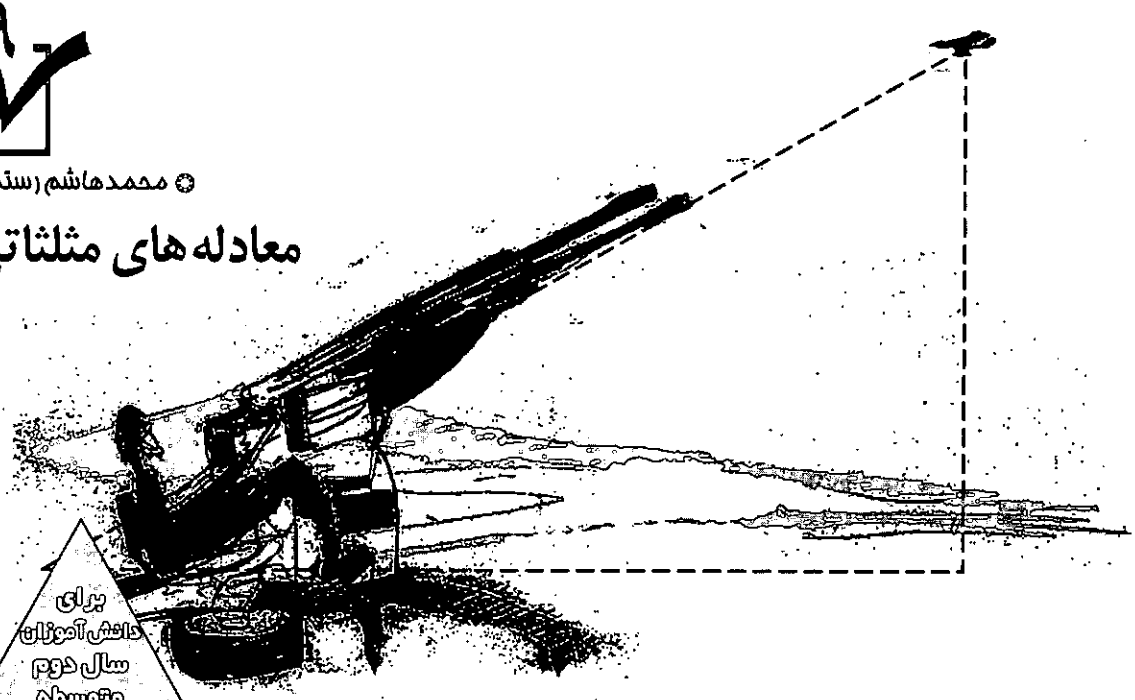


حالا که با مقدمات احتمال در فضاهای پیوسته آشنا شدیم، در شماره‌های بعدی سعی می‌کنیم مثال‌های پیشرفته‌تر و متفاوت‌تری طرح و حل کنیم؛ مسائلی در زمینه‌های هندسی، زمان و مسائل معروف در فضاهای پیوسته. پس تا شماره‌ی بعد!

۹

محمدهاشم رستمی

معادله های مثلثاتی



برای دانش آموزان سال دوم متوسطه

حل معادله های غیرساده ی مثلثاتی

اشاره

در شماره ی قبل درباره ی حل معادله های غیر ساده ی مثلثاتی بحث شد، اینک ادامه ی مطلب را در بخش نهم پی می گیریم:

دستور بیوش

یکی از روش های انتخاب مجهول کمکی برای معادله های غیر ساده ی مثلثاتی یک مجهولی، به ویژه معادله های غیر کلاسیک، یعنی معادله هایی که صورت (فرم) و راه حل مشخصی ندارند، استفاده از قاعده ی بیوش است. در این قاعده، اگر مجهول معادله ی مثلثاتی، x یا مضربی از x باشد، برای حل آن چند حالت خواهیم داشت. اگر در معادله های مثلثاتی داده شده:

۱. کمان x را به $(-x)$ تبدیل کنیم و معادله تغییر نکند، cosx را مجهول کمکی قرار می دهیم.

۲. کمان x را به $(\pi - x)$ تبدیل کنیم و معادله تغییر نکند، sinx را مجهول کمکی قرار می دهیم.

۳. کمان x را به $(\pi + x)$ تبدیل کنیم و معادله تغییر نکند، tgx را مجهول کمکی قرار می دهیم.

۴. کمان x را به $(-x)$، $(\pi - x)$ و $(\pi + x)$ تبدیل کنیم و در هر سه حالت، معادله ی مثلثاتی تغییر نکند، هر یک از سه تابع مثلثاتی cosx، sinx و یا tgx را می توانیم به عنوان مجهول کمکی اختیار کنیم. همچنین، برای پائین آوردن درجه ی معادله، می توان $\cos 2x$ را که با هر سه تبدیل نام برده بدون تغییر می ماند، مجهول کمکی قرار داد.

۵. کمان x را به $(-x)$، $(\pi - x)$ و $(\pi + x)$ تبدیل کنیم و معادله تغییر نکند، می توانیم $tg\frac{x}{2}$ را مجهول کمکی قرار دهیم.

مثال ۱. معادله ی $\frac{4}{\sin x}+\frac{3}{\cot gx}=\cot gx$ را حل کنید.

حل: با تبدیل x به $(\pi - x)$ و $(\pi + x)$، معادله تغییر می کند؛ زیرا داریم:

$$x \to \pi - x \Rightarrow \frac{۴}{\sin(\pi - x)} + \frac{۳}{\cot g(\pi - x)} = \cot g(\pi - x) \Rightarrow \frac{۴}{\sin x} - \frac{۳}{\cot gx} = -\cot gx$$

$$x \to \pi + x \Rightarrow \frac{۴}{\sin(\pi + x)} + \frac{۳}{\cot g(\pi + x)} = \cot g(\pi + x) \Rightarrow \frac{-۴}{\sin x} + \frac{۳}{\cot gx} = \cot gx$$

اما با تبدیل x به $(-x)$، معادله تغییر نمی‌کند، زیرا داریم:

$$x \to (-x) \Rightarrow \frac{۴}{\sin(-x)} + \frac{۳}{\cot g(-x)} = \cot g(-x)$$

$$\Rightarrow \frac{-۴}{\sin x} - \frac{۳}{\cos x} = -\cot gx$$

$$\Rightarrow \frac{۴}{\sin x} + \frac{۳}{\cot gx} = \cot gx$$

بنابراین برای حل این معادله، cosx را مجهول کمکی قرار می‌دهیم. یعنی در صورت امکان معادله‌ی داده شده را ساده می‌کنیم و آن گاه تمام نسبت‌های مثلثاتی موجود در آن را برحسب cosx می‌نویسیم، داریم:

$$\frac{۴}{\sin x} + \frac{۳\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} = ۰ \Rightarrow$$

$$\frac{۴\cos x + ۳\sin^۲ x - \cos^۲ x}{\sin x \cos x} = ۰$$

$$\Rightarrow ۴\cos x + ۳(۱ - \cos^۲ x) - \cos^۲ x = ۰ \Rightarrow$$

$$-۴\cos^۲ x + ۴\cos x + ۳ = ۰ \Rightarrow$$

$$۴\cos^۲ x - ۴\cos x - ۳ = ۰$$

اکنون فرض می‌کنیم $\cos x = y$ باشد، خواهیم داشت:

$$۴y^۲ - ۴y - ۳ = ۰ \Rightarrow y = \frac{+۲ \pm \sqrt{۴ + ۱۲}}{۴} = \frac{۲ \pm ۴}{۴} \Rightarrow$$

$$y = -\frac{۱}{۲} \text{ و } y = \frac{۳}{۲} > ۱$$

جواب $y = \frac{۳}{۲}$ قابل قبول نیست، زیرا $-۱ \le y = \cos x \le ۱$ است. بنابراین برای جواب قابل قبول $y = -\frac{۱}{۲}$ داریم:

$$\cos x = -\frac{۱}{۲} = -\cos\frac{\pi}{۳} = \cos(\pi - \frac{\pi}{۳}) = \cos\frac{۲\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳} \qquad \text{جواب کلی معادله}$$

نکته: دامنه‌ی تعریف معادله‌ی داده شده به صورت زیر است:

$$\left\{x \in R \middle| x \ne k\pi,\ x \ne k\pi + \frac{\pi}{۲}\right\}$$

بنابراین هر دو جواب $x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۳}$ و $x = ۲k\pi - \frac{۲\pi}{۳}$ قابل قبول هستند. به طور کلی، برای تعیین جواب‌های یک معادله اعم از معادله‌ی جبری یا معادله‌ی مثلثاتی، باید به دامنه‌ی تعریف آن توجه داشته باشیم و در صورت وجود جواب‌های غیر قابل قبول، آن‌ها را از مجموعه جواب‌های به دست آمده حذف کنیم.

مثال ۲. معادله‌ی $۱ + \sqrt{۲}\sin ۳x = \cos ۲x$ را حل کنید.

حل: با تبدیل x به (-x) یا (π+x)، این معادله تغییر می‌کند، زیرا داریم:

$$x \to (-x) \Rightarrow ۱ + \sqrt{۲}\sin(-۳x) = \cos(-۲x)$$

$$\Rightarrow ۱ - \sqrt{۲}\sin ۳x = \cos ۲x$$

$$x \to (\pi + x) \Rightarrow ۱ + \sqrt{۲}\sin(۳\pi + ۳x) = \cos(۲\pi + ۲x)$$

$$\Rightarrow ۱ - \sqrt{۲}\sin ۳x = \cos ۲x$$

اما با تبدیل x به(π-x)، معادله تغییر نمی‌کند، زیرا داریم:

$$x \to (\pi - x) \Rightarrow ۱ + \sqrt{۲}\sin(۳\pi - ۳x) = \cos(۲\pi - ۲x)$$

$$\Rightarrow ۱ + \sqrt{۲}\sin ۳x = \cos ۲x$$

بنابراین sinx را مجهول کمکی قرار می‌دهیم. یعنی تمام تابع‌های مثلثاتی موجود در معادله را برحسب sinx می‌نویسیم. داریم:

$$۱ + \sqrt{۲}\sin ۳x = \cos ۲x \Rightarrow ۱ + \sqrt{۲}(۳\sin x - ۴\sin^۳ x) =$$

$$۱ - ۲\sin^۲ x \Rightarrow ۳\sqrt{۲}\sin x - ۴\sqrt{۲}\sin^۳ x + ۲\sin^۲ x = ۰$$

$$\Rightarrow -\sin x(۴\sqrt{۲}\sin^۲ x - ۲\sin x - ۳\sqrt{۲}) = ۰$$

با فرض $\sin x = y$ خواهیم داشت:

$$-y(4\sqrt{2}y^2 - 2y - 3\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow -y = 0 \Rightarrow y = 0,$$
$$4\sqrt{2}\, y^2 - 2y - 3\sqrt{2} = 0 \Rightarrow$$
$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4\sqrt{2}} = \frac{1 \pm 5}{4\sqrt{2}} \Rightarrow$$
$$y = \frac{6}{4\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \cong \frac{4/2}{4} > 1$$ غیرقابل قبول

$$y = \frac{-4}{4\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$ قابل قبول

از آن‌جا داریم:

$y = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$ و

$$y = \frac{-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sin\frac{\pi}{4} = \sin(-\frac{\pi}{4})$$
$$\Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{4}$$

و

$x = 2k\pi + \pi - (\frac{-\pi}{4})$ یا $x = 2k\pi + \frac{5\pi}{4}$

نکته: با توجه به این که دامنه‌ی تعریف معادله‌ی داده شده، $\mathbb{R}$ یعنی مجموعه‌ی اعداد حقیقی است، هر سه جواب کلی به‌دست آمده قابل قبول هستند.

مثال ۳. معادله‌ی $3\cos x + \cos 3x = 2\sin 3x$ را حل کنید.

حل: با تبدیل x به (x-) و (π-x)، این معادله تغییر می‌کند، زیرا داریم:

$$x \to (-x) \Rightarrow 3\cos(-x) + \cos(-3x) = 2\sin(-3x)$$
$$\Rightarrow 3\cos x + \cos 3x = -2\sin 3x$$
$$x \to (\pi - x) \Rightarrow 3\cos(\pi - x) + \cos(3\pi - 3x) = 2\sin(3\pi - 3x)$$
$$\Rightarrow -3\cos x - \cos 3x = 2\sin 3x$$

اما با تبدیل x به $(\pi + x)$، معادله تغییر نمی‌کند، زیرا داریم:

$$x \to \pi + x \Rightarrow 3\cos(\pi + x) + \cos(3\pi + 3x) = 2\sin(3\pi + 3x)$$
$$\Rightarrow -3\cos x - \cos 3x = -2\sin 3x \Rightarrow$$
$$3\cos x + \cos 3x = 2\sin 3x$$

بنابراین tgx را مجهول کمکی قرار می‌دهیم. یعنی پس از ساده کردن معادله، تمام تابع‌های مثلثاتی موجود در معادله را برحسب tgx می‌نویسیم. داریم:

$$3\cos x + \cos 3x = 2\sin 3x$$
$$\Rightarrow 3\cos x + 4\cos^3 x - 3\cos x = 2(3\sin x - 4\sin^3 x)$$
$$\Rightarrow 4\cos^3 x - 6\sin x + 8\sin^3 x = 0$$

با فرض $\cos x \neq 0$ یعنی $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$، طرفین معادله‌ی بالا را بر $\cos^3 x$ تقسیم می‌کنیم. داریم:

$$\frac{4\cos^3 x}{\cos^3 x} - \frac{6\sin x}{\cos^3 x} + \frac{8\sin^3 x}{\cos^3 x} = 0$$
$$\Rightarrow 4 - 6tgx(1 + tg^2x) + 8tg^3x = 0$$
$$\Rightarrow 2tg^3x - 6tgx + 4 = 0 \Rightarrow tg^3x - 3tgx + 2 = 0$$

حال فرض می‌کنیم $tgx = y$ باشد، خواهیم داشت:

$$y^3 - 3y + 2 = 0; (1 - 3 + 2) = 0$$

مجموع ضریب‌های این معادله برابر صفر است، پس یکی از جواب‌های آن $y = 1$ و معادله بر $y - 1$ بخش‌پذیر است. خواهیم داشت:

$$y^3 - 3y + 2 = (y-1)(y^2 + y - 2) = 0$$
$$\Rightarrow y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1 \text{ و } y^2 + y - 2 = 0 \Rightarrow y = 1 \text{ و } y = -2$$

بنابراین، معادله یک ریشه‌ی مضاعف $y = 1$ و یک ریشه‌ی ساده‌ی $y = -2$ دارد که هر دو قابل قبول هستند، بنابراین داریم:

$$y = 1 \Rightarrow tgx = 1 = tg\frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$
$$y = -2 \Rightarrow tgx = -2$$
$$x = k\pi + Arctg(-2)$$

نکته: جواب‌های معادله با شرط $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ سازگارند.

مثال ۴. معادله‌ی $2\sin x \sin 3x = 1$ را حل کنید.

حل: با تبدیل x به (x-)، (π-x) و (π+x)، این معادله تغییر نمی‌کند، زیرا داریم:

$$x \to (-x) \Rightarrow 2\sin(-x)\sin(-3x) = 1$$
$$\Rightarrow 2(-\sin x)(-\sin 3x) = 1 \Rightarrow 2\sin x \sin 3x = 1$$
$$x \to (\pi - x) \Rightarrow 2\sin(\pi - x)\sin(3\pi - 3x) = 1$$
$$\Rightarrow 2\sin x \sin 3x = 1$$
$$x \to (\pi + x) \Rightarrow 2\sin(\pi + x)\sin(3\pi + 3x) = 1$$
$$\Rightarrow 2(-\sin x)(-\sin 3x) = 1 \Rightarrow 2\sin x \sin 3x = 1$$

بنابراین هر یک از تابع های cosx یا sinx یا tgx را می توان مجهول کمکی قرار داد. اما بهتر است $\cos 2x$ را مجهول کمکی بگیریم. برای این کار چنین عمل می کنیم:

$$2\sin x\cos 3x = 1 \Rightarrow \cos(x-3x)-\cos(x+3x)=1$$
$$\Rightarrow \cos(-2x)-\cos 4x=1 \Rightarrow \cos 2x-\cos 4x=1$$
$$\Rightarrow \cos 2x-(2\cos^2 2x-1)=1 \Rightarrow -2\cos^2 2x+\cos 2x=0$$

با فرض $\cos 2x = y$ داریم:

$$-2y^2+y=0 \Rightarrow y(-2y+1)=0 \Rightarrow y=0\ ,\ \ y=\frac{1}{2}$$

هر دو جواب قابل قبول هستند، زیرا y به بازه ی $[-1,+1]$ تعلق دارد. بنابراین داریم:

$$y=0 \Rightarrow \cos 2x=0 \Rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$$

$$y=\frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow 2x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3} \Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}$$

نکته:

۱. می دانیم که $\sin a\sin b=\frac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$ است. بنابراین:

$$\sin x\sin 3x=\frac{1}{2}\left[\cos(x-3x)-\cos(x+3x)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\cos(-2x)-\cos 4x\right]$$

اما $\cos(-2x)=\cos 2x$ بنابراین:

$$\sin x\sin 3x=\frac{1}{2}(\cos 2x-\cos 4x)$$

۲. چون $\cos 2x = y$ فرض شده است، پس دامنه ی تغییرات y بازه ی $[-1,+1]$ است.

۳. با استفاده از اتحاد $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha-1$، داریم:

$$\cos 4x=2\cos^2 2x-1$$

مثال ۵. معادله ی $\sin x-2\cos x=1$ را حل کنید.

حل: با تبدیل x به (-x)، (π-x) و (π+x)، این معادله تغییر می کند، زیرا داریم:

$$x\to(-x) \Rightarrow \sin(-x)-2\cos(-x)=1 \Rightarrow -\sin x-2\cos x=1$$
$$x\to(\pi-x) \Rightarrow \sin(\pi-x)-2\cos(\pi-x)=1 \Rightarrow \sin x+2\cos x=1$$
$$x\to(\pi+x) \Rightarrow \sin(\pi+x)-2\cos(\pi+x)=1 \Rightarrow -\sin x+2\cos x=1$$

بنابراین، $tg\frac{x}{2}$ را مجهول کمکی قرار می دهیم. یعنی تابع های مثلثاتی موجود در معادله را بر حسب $tg\frac{x}{2}$ می نویسیم. داریم:

$$\sin x-2\cos x=1 \Rightarrow \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}-\frac{2(1-tg^2\frac{x}{2})}{1+tg^2\frac{x}{2}}=1$$

$$\Rightarrow 2tg\frac{x}{2}-2+2tg^2\frac{x}{2}=1+tg^2\frac{x}{2} \Rightarrow tg^2\frac{x}{2}+2tg\frac{x}{2}-3=0$$

حال فرض می کنیم $tg\frac{x}{2}=y$ باشد، خواهیم داشت:

$$y^2+2y-3=0 \Rightarrow y=1\ ,\ \ y=-3$$

هر دو جواب قابل قبولند، بنابراین داریم:

$$y=1 \Rightarrow tg\frac{x}{2}=1=tg\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{x}{2}=k\pi+\frac{\pi}{4} \Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

$$y=-3 \Rightarrow tg\frac{x}{2}=-3 \Rightarrow x=2k\pi+2\,\mathrm{Arctg}(-3)$$

نکته: معادله ی $\sin x-2\cos x=1$، کلاسیک نوع اول است که روش بالا یکی از روش های حل آن است.

مثال ۶. معادله ی $\sin^3 x+\cos^3 x=1$ را حل کنید.

حل: با تبدیل x به (-x)، (π-x) و (π+x)، این معادله تغییر می کند. چرا؟ بنابراین می توانیم $tg\frac{x}{2}$ را مجهول کمکی قرار دهیم. خواهیم داشت:

$$\left(\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}\right)^3+\left(\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}\right)^3=1 \Rightarrow$$

پس از ساده کردن این معادله خواهیم داشت:

$$8tg^3\frac{x}{2}-2tg^6\frac{x}{2}-6tg^2\frac{x}{2}=0$$ یا

$$4tg^3\frac{x}{2}-tg^6\frac{x}{2}-3tg^2\frac{x}{2}=0$$

حال با فرض $tg\frac{x}{2}=y$ داریم:

$$4y^3-y^6-3y^2=0 \Rightarrow y^2(4y-y^4-3)=0$$
$$y^2=0 \Rightarrow y=0\ ,\ \ 4y-y^4-3=0 \Rightarrow y^4-4y+3=0$$

مجموع ضریب‌های این معادله مساوی صفر است. بنابراین یک جواب آن $y=1$ و معادله بر $y-1$ بخش‌پذیر است. داریم:

$$y^4-4y+3=(y-1)(y^3+y^2+y-3)=0$$

$$\Rightarrow y-1=0\Rightarrow y=1\ ,\ \ y^3+y^2+y-3=0\ ,1+1+1-3=0$$

مجموع ضریب‌های این معادله نیز صفر است. پس یکی از جواب‌های آن $y=1$ و معادله بر $y-1$ بخش‌پذیر است. داریم:

$$y^3+y^2+y-3=(y-1)(y^2+2y+3)=0$$

$$\Rightarrow y-1=0\Rightarrow y=1\ ,\ \ y^2+2y+3=0\ ,$$

$\Delta'=1-3=-2<0$ ریشه ندارد

بنابراین، جواب‌های به‌دست آمده برای y که همه قابل قبول هستند، عبارتند از: $y=0$ و $y=1$. از آن‌جا خواهیم داشت:

$$y=0\Rightarrow tg\frac{x}{2}=0\Rightarrow\frac{x}{2}=k\pi\Rightarrow x=2k\pi$$

$$y=1\Rightarrow tg\frac{x}{2}=1=tg\frac{\pi}{4}\Rightarrow\frac{x}{2}=k\pi+\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

نکته‌ی مهم: علاوه بر قاعده‌ی بیوش که یک روش کلی برای حل معادله‌های غیرساده‌ی مثلثاتی است، در بسیاری از موارد، روش‌های دیگری برای حل آن‌ها وجود دارد که راه‌حل‌های بسیار جالب و سریع‌تری به دست می‌دهند. برخی از این روش‌ها و مثال‌هایشان را قبلاً دیدید. اینک به چند مثال دیگر توجه کنید:

مثال ۱. معادله‌ی $\sin^2x+2\cos2x=\frac{1}{2}$ را حل کنید.

حل: با استفاده از اتحاد $\sin^2x=\frac{1-\cos2x}{2}$ داریم:

$$\frac{1-\cos2x}{2}+2\cos2x=\frac{1}{2}\Rightarrow1-\cos2x+4\cos2x=1$$

$$\Rightarrow3\cos2x=0\Rightarrow\cos2x=0\Rightarrow2x=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$$

مثال ۲. معادله‌ی $1+\cos x+\cos2x+\cos3x=0$ را حل کنید.

حل: با استفاده از دستور

$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

و $2\cos^2x=1+\cos2x$ داریم:

$$1+\cos2x+\cos x+\cos3x=0$$

$$\Rightarrow2\cos^2x+2\cos\frac{x+3x}{2}\cos\frac{x-3x}{2}=0$$

$$2\cos^2x+2\cos2x\cos x=0\Rightarrow2\cos x(\cos x+\cos2x)=0$$

$$\Rightarrow2\cos x\times2\cos\frac{x+2x}{2}\cos\frac{x-2x}{2}=0$$

$$\Rightarrow4\cos x\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}=0$$

$$\Rightarrow\cos x=0\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2}\ ,$$

$$\cos\frac{3x}{2}=0\Rightarrow\frac{3x}{2}=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{3}$$

$$\cos\frac{x}{2}=0\Rightarrow\frac{x}{2}=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=2k\pi+\pi$$

مثال ۳. معادله‌ی $\cos2x+\cos\frac{x}{2}=0$ را حل کنید.

حل: این معادله را به یک معادله‌ی ساده‌ی مثلثاتی تبدیل می‌کنیم. داریم:

$$\cos2x+\cos\frac{x}{2}=0\Rightarrow\cos2x=-\cos\frac{x}{2}=\cos\left(\pi-\frac{x}{2}\right)\Rightarrow$$

$$2x=2k\pi\pm(\pi-\frac{x}{2})\Rightarrow2x=2k\pi+\pi-\frac{x}{2},2x=2k\pi-\pi+\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow x=\frac{4k\pi}{5}+\frac{2\pi}{5},x=\frac{4k\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}$$

مثال ۴. معادله‌ی $\sin^6x+\cos^6x=\frac{1}{4}$ را حل کنید.

حل: می‌دانیم که $\sin^6x+\cos^6x=1-3\sin^2x\cos^2x$ و $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin2x$ است. بنابراین داریم:

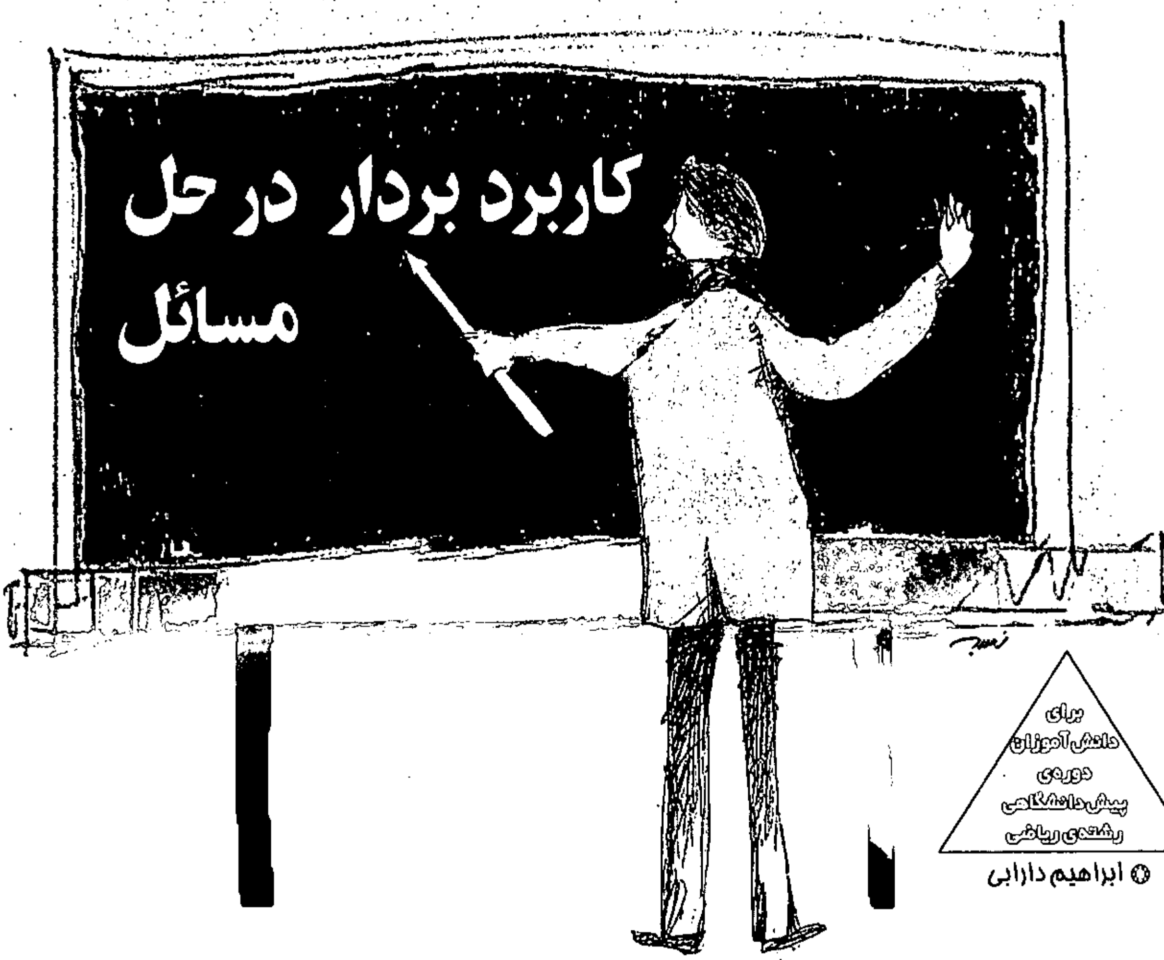
$$1-3\sin^2x\cos^2=\frac{1}{4}\Rightarrow1-3\left(\frac{1}{2}\sin2x\right)^2=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow\frac{-3}{4}\sin^22x=\frac{-3}{4}$$

$$\Rightarrow\sin^22x=1\Rightarrow\frac{1-\cos4x}{2}=1\Rightarrow1-\cos4x=2\Rightarrow$$

$$\cos4x=-1=\cos\pi\Rightarrow4x=2k\pi+\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$$

کاربرد بردار در حل مسائل



برای دانش‌آموزان دوره‌ی پیش‌دانشگاهی رشته‌ی ریاضی

ابراهیم دارابی

بردار در همه‌ی عرصه‌های علوم، از جمله ریاضیات کاربرد زیادی دارد. در این جا کاربرد بردار در حل معادله، نامعادله، اثبات نامساوی‌ها، تعیین ماکزیمم توابع و نیز حل دستگاه معادله‌ها مورد توجه ما است.

برای یادآوری، به بعضی از ویژگی‌های بردار اشاره می‌کنیم:

۱. هر پاره‌خط جهت‌دار را بردار می‌نامند. برداری که ابتدای آن A و انتهای آن B باشد، با نماد $\overrightarrow{AB}$ نشان داده می‌شود.

بردار را با حروف کوچک لاتین، مانند: $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ هم نشان می‌دهند.

۲. تصویرهای بردار a را روی محورهای ox، oy و oz در دستگاه oxyz، به ترتیب با x، y و z نشان می‌دهند و آن‌ها را مختصات بردار a می‌نامند و می‌نویسند:

$\vec{a}(x,y,z)$ یا $\vec{a}=(x,y,z)$

۳. دو بردار a، b با مختصات $\vec{a}(x_1,y_1,z_1)$ و $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ با یکدیگر مساوی هستند؛ اگر و تنها اگر:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 \end{cases}$$

۴ . طول $\vec{a}(x,y,z)$ از فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

۵ . $\vec{a}(x_1,y_1,z_1)$ و $\vec{b}(x_2,y_2,z_2)$ موازی و یا بر یک استقامت هستند، اگر:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

۶ . ضرب داخلی و یا ضرب اسکالر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\cos\varphi$$

که در آن φ زاویه‌ی بین دو بردار است.

از تساوی بالا نتیجه می‌شود:

$$\vec{a}.\vec{b} \le |\vec{a}|.|\vec{b}|$$

۷ . ضرب داخلی دو بردار بر حسب مختصات آن‌ها، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\vec{a}.\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

۸ . از ضرب داخلی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ نتیجه می‌شود که اگر این دو بردار موازی و یا بر یک استقامت باشند، آن‌گاه:

(ب) $$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|$$

(پ) $$|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

و اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر یکدیگر عمود باشند، آن‌گاه:

(ت) یا: $$\begin{cases} \vec{a}.\vec{b} = 0 \\ x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0 \end{cases}$$

اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در صفحه‌ی xoy قرار داشته باشند، آن‌گاه:

$$z_1 = z_2 = 0$$

چون در این مقاله به ویژگی‌های دیگر بردارها نیازی نیست، از آوردن آن‌ها خودداری می‌شود.

مقاله را با حل مثال پی می‌گیریم و به پایان می‌بریم.

مثال ۱ . معادله‌ی زیر را حل کنید:

$$\sqrt{x^3 + 4x^2 + 2x + 8} = x\sqrt{x} + 2\sqrt{2}$$

حل: ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sqrt{(x^2+2)(x+4)} = x\sqrt{x} + 2\sqrt{2}$$

اکنون با توجه به صورت مسأله، $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\vec{a}(x,\sqrt{2}) \ , \ \vec{b}(\sqrt{x},2)$$

داریم:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2+2} \ , \ |\vec{b}| = \sqrt{x+4}$$

$$\vec{a}.\vec{b} = x\sqrt{x} + 2\sqrt{2}$$

بنابر فرمول (الف) داریم:

$$\vec{a}.\vec{b} \le |\vec{a}|.|\vec{b}|$$

اما چون در این مسأله داریم:

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|$$

(صورت مسأله را نگاه کنید).

پس بنابر فرمول (ب)، $\vec{a}$ و $\vec{b}$ موازی هستند و داریم:

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$x = \frac{1}{2}$ در دامنه‌ی تعریف معادله قرار دارد ($D = \{x \in R | x > 0\}$) و در معادله صدق می‌کند. پس $x = \frac{1}{2}$ جواب معادله است.

مثال۲. معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\cos x\sqrt{2-2\sin^2 x}+\sqrt{1-2\cos^2 x}=\sqrt{\cos^2 x+1}$$

حل: بردارهای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\vec{a}(\cos x,1),\ \vec{b}(\sqrt{2-2\sin^2 x}\ ,\ \sqrt{1-2\cos^2 x})$$

داریم:

$$|\vec{a}|=\sqrt{\cos^2 x+1}\ ,\ |\vec{b}|=\sqrt{2-2\sin^2 x+1-2\cos^2 x}=1$$

با توجه به صورت مسأله و بنابر فرمول (ب) داریم:

$$\begin{cases}\vec{a}.\vec{b}=\cos x\sqrt{2-2\sin^2 x}+\sqrt{1-2\cos^2 x}\\ |\vec{a}|.|\vec{b}|=1\times\sqrt{\cos^2 x+1}\Rightarrow \vec{a}\parallel\vec{b}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}\Rightarrow$$

$$\frac{\cos x}{\sqrt{2-2\sin^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{1-2\cos^2 x}}\Rightarrow$$

$$\cos^2 x(1-2\cos^2 x)=2-2\sin^2 x$$

$$\Rightarrow 2\cos^4 x-\cos^2 x+2-2(1-\cos^2 x)=0$$

$$\Rightarrow 2\cos^4 x+\cos^2 x=0\Rightarrow \cos^2 x(2\cos^2 x+1)=0$$

$$\Rightarrow \cos x=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi\ ,\ k\in z$$

مثال۳. اگر $a+b+c=11$، آن‌گاه ثابت کنید:

$$\sqrt{2a+3}+\sqrt{2b+4}+\sqrt{2c+7}\le 6\sqrt{3}$$

اثبات: بردارهای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\vec{x}(\sqrt{2a+3},\sqrt{2b+4},\sqrt{2c+7}\ ,\ \vec{y}(1,1,1)$$

داریم:

$$|\vec{x}|=\sqrt{(2a+3)+(2b+4)+(2c+7)}=\sqrt{2\underbrace{(a+b+c)}_{11}+14}=6$$

$$|\vec{y}|=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$$

$$\vec{x}.\vec{y}=1\times\sqrt{2a+3}+1\times\sqrt{2b+4}+1\times\sqrt{2c+7}$$

بنابر فرمول (الف) داریم:

$$\vec{x}.\vec{y}\le|\vec{x}|.|\vec{y}|\Rightarrow\sqrt{2a+3}+\sqrt{2b+4}+\sqrt{2c+7}\le 6\sqrt{3}$$

مثال۴. اگر x، y و z اعداد حقیقی باشند، ثابت کنید:

$$x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$$

اثبات: بردارهای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\vec{a}(x,y,z)\quad,\quad\vec{b}(y,z,x)$$

داریم:

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\quad,\quad|\vec{b}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\vec{a}.\vec{b}\le|\vec{a}|.|\vec{b}|\ \Rightarrow xy+yz+zx\le\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow xy+yz+zx\le x^2+y^2+z^2$$

مثال ۵. ماکزیمم تابع $y=\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}$ را در بازه‌ی $[-1,0]$ پیدا کنید.

حل: بردارهای $\vec{a}\left(\sqrt{3-x},\sqrt{1+x}\right)$ و $\vec{b}(1,1)$ را در نظر می‌گیریم. داریم:

$$|\vec{a}|=\sqrt{3-x+1+x}=\sqrt{4}=2\ ,\ |\vec{b}|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

$$\vec{a}.\vec{b}\le|\vec{a}|.|\vec{b}|\Rightarrow 1\times\sqrt{3-x}+1\times\sqrt{1+x}\le 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}\le 2\sqrt{2}$$

مقدار تابع را در کرانه‌های بازه‌ی $[-1,0]$ حساب

می‌کنیم:

$$f(-1)=2,\quad f(0)=\sqrt{3}+1$$

$$2\sqrt{2}>\sqrt{3}+1>2\Rightarrow Max(y)=2\sqrt{2}$$

مثال ۶. ماکزیمم تابع $y=\sqrt{3\cos^2 2x+2}+\sqrt{3\sin^2 2x+4}$ را حساب کنید.

حل: بردارهای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\vec{a}\left(\sqrt{3\cos^2 2x+2},\sqrt{3\sin^2 2x+4}\right),\quad \vec{b}(1,1)$$

داریم:

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{3\cos^2 2x+2+3\sin^2 2x+4}=\sqrt{3(\sin^2 2x+\cos^2 2x)+6}$$

$$=\sqrt{3+6}=3$$

$$\left|\vec{b}\right|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

$$\vec{a}.\vec{b}=1\times\sqrt{3\cos^2 2x+2}+1\times\sqrt{3\sin^2 2x+4}$$

$$\vec{a}.\vec{b}\le\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|\Rightarrow y=\sqrt{3\cos^2 2x+2}+\sqrt{3\sin^2 2x+4}\le 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow Max(y)=3\sqrt{2}$$

مثال ۷. ماکزیمم عبارت $S=a\sin x+b\cos x$ را پیدا کنید.

حل: $\vec{a}(a,b)$ و $\vec{b}(\sin x,\cos x)$ را در نظر می‌گیریم. داریم:

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a^2+b^2}\quad,\quad\left|\vec{b}\right|=\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x}=1$$

$$\vec{a}.\vec{b}\le\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|\Rightarrow a\sin x+b\cos x\le 1\times\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\Rightarrow Max(S)=\sqrt{a^2+b^2}$$

مثال ۸. دستگاه معادله‌های زیر را حل کنید:

$$\begin{cases}4x^2+y^2+y(2x+z)=0\\4x^2+2x+y+2yz=0\\12x^2+8y^2+16xy+8yz=4x+4z+2\end{cases}\qquad(1)$$

حل: دستگاه (۱) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{cases}2x(2x+y)+y(y+z)=0\\2x(2x+1)+y(2z+1)=0\\4(2x+y)^2+4(y+z)^2=(2x+1)^2+(2z+1)^2\end{cases}\qquad(2)$$

اکنون با توجه به معادله‌های دستگاه (۲)، بردارهای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\vec{a}(2x,y),\ \vec{b}(2x+y,y+z),\ \vec{c}(2x+1,2z+1)$$

داریم:

$$\vec{a}.\vec{b}=2x(2x+y)+y(y+z)$$

$$\vec{a}.\vec{c}=2x(2x+1)+y(2z+1)$$

$$\vec{b}^2=(2x+y)^2+(y+z)^2$$

$$\vec{c}^2=(2x+1)^2+(2z+1)^2$$

با توجه به معادله سوم دستگاه (۲) و مقدار $\vec{c}(2x+1,2z+1)$ معلوم می‌شود که:

$$4\vec{b}^2=\vec{c}^2$$

اکنون دستگاه (۲) را بر حسب $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{cases}\vec{a}.\vec{b}=0\\\vec{a}.\vec{c}=0\\4\vec{b}^2=\vec{c}^2\end{cases}\qquad(3)$$

این دستگاه را حل می‌کنیم.

اگر $\vec{a}(2x, y) = 0$ ، آن‌گاه:

$$2x = y = 0 \Rightarrow x = 0, y = 0$$

اما اگر $\vec{a} = 0$ ، آن‌گاه: $\vec{a} . \vec{c} = 0$

در نتیجه دو حالت وجود دارد:

$$\begin{cases} \vec{c} = 0 \\ \vec{a} \perp \vec{c} \end{cases} \text{ یا}$$

از یک طرف، اگر $\vec{c}(2x + 1, 2z + 1) = 0$ ، آن‌گاه:

$$\vec{c} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 0 \\ 2z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

چون با فرض x=y=۰ این دستگاه را تشکیل داده‌ایم، پس در این حالت این جواب‌ها قابل قبول نیستند.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0 \Rightarrow$$
$$2x(2x + y) + y(2z + 1) = 0$$
$$\Rightarrow 0 + y(2z + 1) = 0$$
$$\Rightarrow y = 0, \ z = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

از طرف دیگر، اگر $\vec{a} \neq 0$ ، آن‌گاه از دستگاه (۳) نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} \vec{a} \perp \vec{b} \\ \vec{a} \perp \vec{c} \end{cases} \Rightarrow \vec{b} \| \vec{c}$$

و چون $\vec{c}^2 = 4\vec{b}^2$ و یا $\vec{c} = \pm 2\vec{b}$ ، بنابراین در حالت $\vec{c} = 2\vec{b}$ ، طول و عرض $\vec{c}$ ، دو برابر طول و عرض $\vec{b}$ خواهد بود:

$$\begin{cases} 2x + 1 = 2(2x + y) \\ 2z + 1 = 2(y + z) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = 0, \ y = \frac{1}{2}, \ z \in R$$

به ازای x=۰ و $y = \frac{1}{2}$ ، از معادله‌ی دوم دستگاه (۲) مقدار z را پیدا می‌کنیم:

$$2x(2x + 1) + y(2z + 1) = 0$$
$$0 + \frac{1}{2}(2z + 1) = 0 \Rightarrow z = -\frac{1}{2}$$

پس در این حالت داریم:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

در حالت $\vec{c} = -2\vec{b}$ داریم:

$$\vec{a} \| -2\vec{b} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 1 = -2(2x + y) \\ 2z + 1 = 2(y + z) \end{cases} \Rightarrow x = 0, y = -\frac{1}{2}$$

اگر این مقادیر را در معادله‌ی دوم دستگاه (۲) قرار دهیم، نتیجه می‌شود:

$$0 - \frac{1}{2}(2z + 1) = 0 \Rightarrow z = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

منبع مقاله و توضیح آن..................................

در یکی از شماره‌های مجله‌ی «ریاضیات در مدرسه» (چاپ مسکو)، مقاله‌ای در ارتباط با این موضوع چاپ شده بود. من آن را ترجمه کردم و در کتاب «نخستین گام‌ها در المپیادهای ریاضی» (جلد سوم، ویرایش دوم، انتشارات پیشروان ـ مبتکران) آوردم. با توجه به محتوای مقاله و قابل درک بودن آن برای دانش‌آموزان، فکر می‌کنم آوردن آن در مجله‌ی رشد برهان متوسطه به گونه‌ی دیگر، می‌تواند دیدگاه دیگری از کاربرد بردارها پیش‌روی دانش‌آموزان بگشاید. بر این اساس و با حفظ محتوای مقاله، مسائلی را متمایز از مسائل مطرح در آن کتاب، تنها برای چاپ در این مجله طرح و حل کرده‌ام. با توجه به برد وسیعی که مجله‌ی رشد برهان دارد، امیدوارم گروه وسیعی از دانش‌آموزان از آن بهره ببرند.

سلسله درس‌هایی از ریاضیات گسسته (نظریه اعداد)

سید محمدرضا هاشمی موسوی

مبناها

چهار عمل اصلی در مبناهای متفاوت

اشاره: در شماره قبل درباره‌ی بسط یک عدد در مبناهای مختلف بحث کردیم، اینک چهار عمل اصلی در مبناهای مختلف را در پی می‌آوریم.

۱. جمع اعداد در مبناهای متفاوت

اعمال مربوط به جمع، تفریق، ضرب و تقسیم در مبنای غیر از ۱۰، همانند عملیات در مبنای ۱۰ صورت می‌گیرد؛ با این تفاوت که جای مبنای ۱۰ با اعداد دیگری مثل ۲، ۳، ۴، ... و ۹ عوض خواهد شد.

پیش از توضیح عمل جمع در مبنایی غیر از ۱۰ بهتر است، عمل جمع در مبنای ۱۰ را بررسی کنیم تا قواعد جمع که در مبناهای دیگر انجام می‌گیرد، ملموس‌تر شود؛ زیرا قواعد جمع در مبناهای غیر از ۱۰ نیز، دقیقاً همانند قواعد جمع در مبنای ۱۰ است. ابتدا با یک مثال، عملیات جمع در مبنای ۱۰ را مرور می‌کنیم.

$$\left(\begin{array}{r} ۳۴۲ \\ +\underline{۱۷۶} \\ ۵۱۸ \end{array}\right)_{۱۰}$$

در این‌جا برای جمع در مبنای ۱۰ چه کرده‌ایم؟ چرا حاصل جمع دو عدد برابر ۵۱۸ شد؟

می‌خواهیم عدد ۱۷۶ را به عدد ۳۴۲ بیفزاییم. برای این منظور، یکان عدد ۱۷۶ را با یکان عدد ۳۴۲، دهگان ۱۷۶ را با دهگان ۳۴۲ و به همین ترتیب، صدگان ۱۷۶ را با صدگان ۳۴۲ جمع می‌کنیم؛ چون مبنای ۱۰ موردنظر است. بنابراین، در صورتی که مجموع هر دو عدد، از عدد ۱۰ تجاوز کرد(۱۱ = ۴+۷)، باید ۱۰ واحد از عدد فوق را حذف و به صورت ۱ واحد، به ستون بعدی (در این‌جا صدگان) اضافه کنیم.

در ادامه، پس از جمع کردن صدگان‌های دو عدد، باید ۱ واحدی را که از جمع ستون دهگان دو عدد حاصل شده است نیز به آن اضافه کنیم. واضح است که مجموع دو عدد ۳۴۲ و ۱۷۶ برابر ۵۱۸ در مبنای ۱۰ خواهد شد.

اکنون اگر عملیات جمع، تفریق، ضرب و تقسیم، در

مبنای m صورت بگیرد، همیشه به جای هر m در یک ستون، یک واحد به ستون سمت چپ آن می‌افزاییم.

مثال ۱. حاصل جمع زیر را بیابید:

$$\begin{pmatrix} \text{۲۳۴} \\ +\underline{\text{۳۴۷}} \\ \dots \end{pmatrix}_{\text{۸}}$$

حل: چون مبنای عمل برابر ۸ است، کافی است که هرجا حاصل جمع ستونی از ۸ تجاوز کرد، به اندازه‌ی ۸ واحد (مبنا) از حاصل جمع ستون موردنظر کم کنیم و به صورت ۱ واحد به ستون بعدی (سمت چپ) اضافه کنیم. کار جمع کردن ستون‌ها را به ترتیب از سمت راست به چپ انجام می‌دهیم.

(رقم یکان حاصل جمع) ۷+۴=۱۱ و ۱۱−۸ = $\boxed{\text{۳}}$ (ستون اول)

(به ستون بعد، یک واحد اضافه شود)

(رقم دهگان حاصل جمع) ۴+۳=۷ و ۷+۱=۸ و ۸−۸ = $\boxed{\text{۶}}$ (ستون دوم)

(به ستون بعد ۱ واحد اضافه شود)

(رقم صدگان حاصل جمع) ۳+۲=۵ و ۵+۱ = $\boxed{\text{۶}}$ (ستون سوم)

بنابراین جواب نهایی چنین است:

$$\begin{pmatrix} \text{۲۳۴} \\ +\underline{\text{۳۴۷}} \\ \text{۶۰۳} \end{pmatrix}_{\text{۸}}$$

مثال ۲. حاصل جمع زیر را بیابید:

$$\begin{pmatrix} \text{۲۰۲}+ \\ \text{۳۴۱} \\ \text{۵۱۳} \\ \text{۴۳۴} \end{pmatrix}_{\text{۶}}$$

...

حل: عملیات جمع در مبنای ۶ را به صورت زیر انجام می‌دهیم:

(رقم یکان) ۴+۳+۱+۲=۱۰ و ۱۰−۶ = $\boxed{\text{۴}}$ (ستون اول)

(به ستون سمت چپ ۱ واحد اضافه شود)

(رقم دهگان) ۳+۱+۴+۰=۸ و ۸+۱=۹ و ۹−۶ = $\boxed{\text{۳}}$ (ستون دوم)

(به ستون سمت چپ ۱ واحد اضافه شود)

(رقم صدگان) ۴+۵+۳+۲=۱۴ و ۱۴+۱=۱۵ و ۱۵−۲×۶=۱۵−۱۲ = $\boxed{\text{۳}}$ (ستون سوم)

(به ستون سمت چپ ۲ واحد اضافه شود)

توجه: در واقع ستون چهارم ستونی است که همه‌ی ارقام آن صفر هستند.

پس حاصل جمع در مبنای ۶ برابر $(\text{۲۳۳۴})_{\text{۶}}$ است:

$$\begin{pmatrix} \text{۰۲۰۲}+ \\ \text{۰۳۴۱} \\ \text{۰۵۱۳} \\ \text{۰۴۳۴} \end{pmatrix}_{\text{۶}}$$

۲۳۳۴

$$(\text{۲۰۲})_{\text{۶}}+(\text{۳۴۱})_{\text{۶}}+(\text{۵۱۳})_{\text{۶}}+(\text{۴۳۴})_{\text{۶}}=(\text{۲۳۳۴})_{\text{۶}}$$

مثال ۳. حاصل جمع زیر را بیابید:

$$\begin{pmatrix} \text{۷۸۳۱}+ \\ \text{۴۰۳۲} \\ \text{۵۱۷۸} \\ \text{۲۱۰۱۸} \\ \text{۱۸۳۴۰} \end{pmatrix}_{\text{۹}}$$

...

حل: عملیات در مبنای ۹ را به صورت زیر انجام می‌دهیم:

(+۲) (رقم یکان) ۱+۲+۸+۸+۰=۱۹ و ۱۹−۱۸ = $\boxed{\text{۱}}$ (ستون اول)

(+۲) (رقم دهگان) ۳+۳+۷+۱+۴=۱۸ و ۱۸+۲=۲۰ و ۲۰−۱۸ = $\boxed{\text{۲}}$ (ستون دوم)

(+۱) (رقم صدگان) ۸+۰+۱+۰+۳=۱۲ و ۱۲+۲=۱۴ و ۱۴−۹ = $\boxed{\text{۵}}$ (ستون سوم)

(+۲) (رقم هزارگان) ۷+۴+۵+۱+۸=۲۵ و ۲۵+۱=۲۶ و ۲۶−۱۸ = $\boxed{\text{۸}}$ (ستون چهارم)

(رقم ده هزارگان) ۰+۰+۰+۲+۱=۳ و ۳+۲ = $\boxed{\text{۵}}$ (ستون پنجم)

پس حاصل جمع در مبنای ۹ برابر $(\text{۵۸۵۲۱})_{\text{۹}}$ است.

توجه داشته باشید که در واقع در عملیات جمع در هر

مبنا، مجموع اعداد هر ستون در آن مبنا (و در این جا در مبنای ۹) نوشته می‌شود. سپس رقم یکان عدد حاصل در ستون خود نوشته و ارقام بعدی به اعداد ستون بعدی در سمت چپ خود افزوده می‌شود. برای مثال در ستون اول حاصل شد:

$۰+۸+۸+۲+۱=۱۹$

اگر ۱۹ را در مبنای ۹ بنویسیم، خواهیم داشت:

$(۲۱)_۹=(۱۹)_{۱۰}$

دراین عدد یعنی ۲۱، رقم یکان یعنی ۱ در ستون حاصل جمع نوشته شده و رقم دوم آن یعنی ۲، به ستون بعدی (ستون سمت چپ) افزوده شده است.

در ستون دوم به دست آمد: $۲+۴+۱+۷+۳+۳=۲۰$

اگر ۲۰ را در مبنای ۹ بنویسیم، خواهیم داشت:

$(۲۲)_۹=(۲۰)_{۱۰}$

در عدد ۲۲، رقم یکان یعنی ۲ به ستون دوم مربوط است و رقم دوم آن یعنی ۲ به ستون بعدی (ستون سمت چپ) افزوده می‌شود.

در ستون سوم به دست آمد: $۲+۳+۰+۰+۱+۰+۸=۱۴$

اگر ۱۴ را در مبنای ۹ بنویسیم، خواهیم داشت:

$(۱۵)_۹=(۱۴)_{۱۰}$

در عدد ۱۵، رقم یکان یعنی ۵ به ستون سوم مربوط است و رقم دوم آن یعنی ۱ به ستون بعدی (ستون سمت چپ) افزوده می‌شود.

در ستون چهارم به دست آمد:

$۱+۸+۱+۵+۴+۷=۲۶$

اگر ۲۶ را در مبنای ۹ بنویسیم، خواهیم داشت:

$(۲۸)_۹=(۲۶)_{۱۰}$

در عدد ۲۸، رقم یکان یعنی ۸ به ستون چهارم مربوط است و رقم دوم آن یعنی ۲ به ستون بعدی (ستون سمت چپ) افزوده می‌شود.

در نهایت برای ستون پنجم نوشته شد:

$۲+۱+۲+۰+۰=۵$

چون عدد ۵ در مبنای ۹ و ۱۰ برابر است:

$(۵)_۹=(۵)_{۱۰}$

بنابراین، در ستون پنجم خود ۵ (رقم یکان ۵) نوشته می‌شود.

پس، حاصل جمع نهایی به صورت زیر است:

$(۷۸۳۱)_۹+(۴۰۳۲)_۹+(۵۱۷۸)_۹+(۲۱۰۱۸)_۹+(۱۸۳۴۰)_۹=(۵۸۵۲۱)_۹$

نکته‌ی ۱. واضح است که وقتی دو یا چند عدد را جمع می‌کنیم، مبناهای آن‌ها باید برابر باشند. بنابراین اگر هدف جمع کردن چند عدد در مبناهای متفاوت باشد، ابتدا باید همه‌ی آن‌ها را در یک مبنا بنویسیم و سپس آن‌ها را با هم جمع کنیم.

نکته‌ی ۲. اشاره شد که اگر در یک جمع، مجموع ارقام یک ستون در یک پایه، عدد سه و یا چند رقمی باشد، فقط رقم یکان آن را در ستون اول حاصل جمع می‌نویسیم و بقیه‌ی ارقام آن را به ستون سمت چپ اضافه می‌کنیم. برای مثال، اگر مبنای عددنویسی در یک جمع ۵ و مجموع ارقام ستون اول $(۳۴۴)_۵$ باشد، رقم ۴ را در ستون اول حاصل جمع می‌نویسیم و ۳۴ را به ستون دوم اضافه می‌کنیم.

مثال ۴. حاصل جمع $(۱۲)_۵+(۲۳۳)_۴$ را بیابید.

حل: برای یافتن حاصل این جمع، چندین روش را می‌توان به کار برد.

روش اول: هر دو عدد را در مبنای ۱۰ می‌نویسیم و سپس جمع می‌کنیم:

$(۲۳۳)_۴=۳+۳\times۴+۲\times۴^۲=(۴۷)_{۱۰}$

$(۱۲)_۵=۲+۱\times۵=(۷)_{۱۰}$

$(۲۳۳)_۴+(۱۲)_۵=(۴۷)_{۱۰}+(۷)_{۱۰}=(۵۴)_{۱۰}=۵۴$

روش دوم: عدد $(۲۳۳)_۴$ را در مبنای ۵ می‌نویسیم و سپس با عدد $(۱۲)_۵$ جمع می‌کنیم:

$(۲۳۳)_۴=۳+۳\times۴+۲\times۴^۲=(۴۷)_{۱۰}$

$(۴۷)_{۱۰}=(۱۴۲)_۵=(۲۳۳)_۴$

$(۲۳۳)_۴+(۱۲)_۵=(۱۴۲)_۵+(۱۲)_۵=(۲۰۴)_۵$

توجه: برای حل مثال ۴ می‌توان $(۱۲)_۵$ را در مبنای ۴ نوشت، سپس آن را با $(۲۳۳)_۴$ جمع کرد.

۲. تفریق اعداد در مبناهای متفاوت

تفاضل اعداد در مبناهای متفاوت هم مانند جمع آن‌ها صورت می‌گیرد. فقط باید به جای عمل جمع، عمل تفریق را انجام دهیم (در صورتی که پایه‌ها برابر نباشند، ابتدا باید پایه‌ها را یکسان کرد).

مثال ۱. تفریق در مبنای ۸ را محاسبه کنید:

$(۷۶۵)_۸-(۵۶۴)_۸=?$

حل: این دو عدد را در مبنای ۸ زیر یکدیگر می‌نویسیم:

$$\left(\begin{array}{r} ۷۶۵ \\ -\underline{۵۶۴} \\ ۲۰۱ \end{array}\right)_۸$$

بنابراین:

$(۷۶۵)_۸-(۵۶۴)_۸=(۲۰۱)_۸$

مثال ۲. تفریق در مبنای ۷ را محاسبه کنید:

$(۳۴۵)_۷-(۲۵۶)_۷=?$

حل: می‌بینیم که رقم ۶ را نمی‌توان از ۵ کم کرد.

$$\left(\begin{array}{r} ۳۴۵ \\ -\underline{۲۵۶} \\ ... \end{array}\right)_۷$$

بنابراین در عدد ۳۴۵ از رقم سمت چپ ۵ (در بالای ۶ که هر واحد آن ۷ واحد یکان است) ۱ واحد کم می‌کنیم و در عوض ۷ واحد به رقم یکان ۳۴۵ یعنی ۵ می‌افزاییم. پس:

$$\left(\begin{array}{r} ۳۳\overset{(۷)}{۵} \\ -\underline{۲۵\ ۶} \\ ۶ \end{array}\right)_۷$$

در ستون دوم باز رقم ۵ را نمی‌توان از رقم ۳ (در بالای آن) کم کرد. بنابراین در ستون سوم، از رقم ۳ در عدد ۳۳۵، ۱ واحد کم می‌کنیم و در عوض ۷ واحد به رقم ۳ در سمت راست آن می‌افزاییم. پس:

$$\left(\begin{array}{r} ۲\ \overset{(۷)}{۳}\ \overset{(۷)}{۵} \\ -\underline{۲\ ۵\ ۶} \\ ۰\ ۵\ ۶ \end{array}\right)_۷$$

حال می‌توان ارقام پائین را از ارقام نظیر خود در بالا کم کرد. بنابراین:

$(۳۴۵)_۷-(۲۵۶)_۷=(۵۶)_۷$

امتحان عملیات در مبنای ۱۰:

$(۳۴۵)_۷-(۲۵۶)_۷=(۵+۴×۷+۳×۷^۲)_{۱۰}-(۶+۵×۷+۲×۷^۲)_{۱۰}$

$=(۱۸۰)_{۱۰}-(۱۳۹)_{۱۰}=(۴۱)_{۱۰}$

$(۴۱)_{۱۰}=(۵۶)_۷$

۳. ضرب اعداد در مبناهای متفاوت

ضرب اعداد در هر مبنا نیز مانند ضرب دو عدد در مبنای ۱۰ صورت می‌گیرد، با این تفاوت که باید به جای مبنای ۱۰، در مبنای دیگر کار کنیم (در صورتی که مبناها برابر نباشند، ابتدا باید مبناها را برابر کنیم).

مثال ۱. ضرب این دو عدد در مبنای ۴ را محاسبه کنید:

$(۲۳۳)_۴×(۲)_۴=?$

حل: دو عدد را در مبنای ۴ زیر هم می‌نویسیم:

$$\left(\begin{array}{r} ۲۳۳× \\ \underline{۲} \\ ... \end{array}\right)_۴$$

در ستون اول داریم: $۲×۳=(۶)_{۱۰}$. حال اگر ۶ را در مبنای ۴ بنویسیم، خواهیم داشت:

$(۶)_{۱۰}=(۱۲)_۴$

از عدد $(۱۲)_۴$ رقم ۲ را در ستون اول می‌نویسیم و رقم ۱ را به حاصل ضرب (۲×۳) در ستون دوم اضافه می‌کنیم. یعنی در ستون دوم حاصل ضرب، ۷=۱+۳×۲ را باید در مبنای ۴ بنویسیم:

$(۷)_{۱۰}=(۱۳)_۴$

رقم ۳ عدد $(۱۳)_۴$ را در ستون دوم می‌نویسم و رقم ۱ را به حاصل ضرب (۲×۲) در ستون دوم اضافه می‌کنیم:

$۲×۲+۱=۵$

پس رقم سوم حاصل ضرب ۵ است. در نتیجه

حاصل‌ضرب نهایی را می‌توان نوشت:

$$(۲۳۳)_۴\times(۲)_۴=(۵۳۲)_۴$$

مثال ۲. ضرب این دو عدد در مبناهای متفاوت را محاسبه کنید:

$$(۱۳۴)_۵\times(۱۰۱۱)_۲=?$$

حل: ابتدا پایه‌ها را یکسان می‌کنیم. هر دو عدد را در مبنای ۱۰ می‌نویسیم:

$$(۱۳۴)_۵=(۴+۳\times۵+۱\times۵^۲)_{۱۰}=(۴۴)_{۱۰}$$

$$(۱۰۱۱)_۲=(۱+۱\times۲+۰\times۲^۲+۱\times۲^۳)_{۱۰}=(۱۱)_{۱۰}$$

$$(۱۳۴)_۵\times(۱۰۱۱)_۲=(۴۴)_{۱۰}\times(۱۱)_{۱۰}=۴۴\times۱۱=(۴۸۴)_{۱۰}$$

تقسیم اعداد در مبناهای متفاوت

برای تقسیم دو عدد بر یکدیگر، ابتدا باید مبناها را یکسان کرد. فرض کنیم تقسیم زیر مورد نظر باشد:

$$(۷۴)_۸:(۶)_۸$$

برای محاسبه‌ی این تقسیم، بهترین و ساده‌ترین روش این است که هر دو عدد را در مبنای ۱۰ بنویسیم و سپس عمل تقسیم را انجام دهیم و در آخر، خارج قسمت را به هر مبنای دلخواهی که مورد نظر است، تبدیل کنیم:

$(۷۴)_۸=(۴+۷\times۸)_{۱۰}=(۶۰)_{۱۰}$ و $(۶)_۸=(۶)_{۱۰}$

$$(۷۴)_۸:(۶)_۸=(۶۰)_{۱۰}:(۶)_{۱۰}=۶۰:۶=(۱۰)_{۱۰}$$

$$(۱۰)_{۱۰}=(۱۲)_۸$$

در این‌جا می‌توان حاصل تقسیم را نوشت:

$$(۷۴)_۸:(۶)_۸=(۱۲)_۸$$

مثال ۱. حاصل تقسیم $(۱۲۵)_۵:(۲۶)_۷$ را در مبنای ۶ بنویسید.

حل: ابتدا هر دو عدد را در مبنای ۱۰ می‌نویسیم:

$$(۱۲۵)_۵=(۵+۲\times۵+۱\times۵^۲)_{۱۰}=(۴۰)_{۱۰}$$

$$(۲۶)_۷=(۶+۲\times۷)_{۱۰}=(۲۰)_{۱۰}$$

$$(۱۲۵)_۵:(۲۶)_۷=(۴۰)_{۱۰}:(۲۰)_{۱۰}=۴۰:۲۰=(۲)_{۱۰}=(۲)_۶$$

$$(۱۲۵)_۵:(۲۶)_۷=(۲)_۶$$

مثال ۲. از برابری داده شده، مقدار x را پیدا کنید:

$$(۲۴)_x:(۱۵)_۹=(۱۲)_۳$$

حل: از تعریف تقسیم نتیجه می‌شود:

$$(۱۵)_۹\times(۱۲)_۳=(۲۴)_x$$

هر یک از عددها را در مبنای ۱۰ می‌نویسیم:

$$(۱۵)_۹=(۵+۱\times۹)_{۱۰}=(۱۴)_{۱۰}$$

$$(۱۲)_۳=(۲+۱\times۳)_{۱۰}=(۵)_{۱۰}$$

بنابراین:

$$(۲۴)_x=(۱۵)_۹\times(۱۲)_۳=(۱۴)_{۱۰}\times(۵)_{۱۰}=(۷۰)_{۱۰}$$

پس:

$(۲۴)_x=(۴+۲\times x)_{۱۰}=(۷۰)_{۱۰}$ ؛ $۴+۲x=۷۰$ ؛

$۲x=۶۶$ ؛ $x=\frac{۶۶}{۲}=۳۳$ ؛ $\boxed{x=۳۳}$

مثال ۳. از برابری $(۳۱)_x=(۱۵)_{۲x}$ مقدار x را بیابید.

حل: ابتدا هر یک از اعداد را در مبنای ۱۰ می‌نویسیم:

$$(۳۱)_x=(۱+۳x)_{۱۰}=۳x+۱$$

$$(۱۵)_{۲x}=(۵+۱\times(۲x))_{۱۰}=۲x+۵$$

$۳x+۱=۲x+۵$ ؛ $\boxed{x=۴}$

مثال ۴. از برابری $(۳۱)_{۲x}=(۱۵)_{۲x+۲}$ مقدار x را بیابید.

حل:

$$(۳۱)_{۲x}=(۱+۳(۲x))_{۱۰}=۶x+۱$$

$$(۱۵)_{۲x+۲}=(۵+۱(۲x+۲))=۲x+۷$$

$۶x+۱=۲x+۷$ ؛ $۴x=۶$ ؛ $x=\frac{۳}{۲}=۱/۵$

با جایگزین کردن مقدار x خواهیم داشت:

$$(۳۱)_۳=(۱۵)_۵$$

مقدار $x=۱/۵$ مورد قبول نیست؛ زیرا در $(۳۱)_{۲x}$ رقم ۳ و در $(۱۵)_{۲x+۲}$ نیز رقم ۵ موجود است. بنابراین مسأله جواب ندارد.

تمرین: جاهای خالی را با عددهای مناسب پر کنید.

۱) $(۳۴۵)_۷\times(۲۳۴)_۷=(...)_۵$

۲) $(۱۲۳)_۴+(۳۱۲)_۴+(۲۱۳)_۴+(۱۲۳۴)_۵=(...)_۶$

۳) $(۱۰۱۰۱۰۱)_۲+(۱۱۰۱۱۰۱۱)_۲=(...)_۲=(...)_۴$

۴) $(۶۵۴)_۸-(۵۴۳)_۸=(...)_۸=(...)_۲=(...)_۴$

۵) $(۲۳۴)_۵\times(۱۲۰۲۰۱)_۳=(...)_۵=(...)_۳=(...)_۴$

۶) $(۸۴)_۹:(۴)_۹=(...)_۹=(...)_۸=(...)_۷=(...)_۶$

۷. از برابری $(۳۴)_{x-۱}=(۱۴)_{x+۱}$ مقدار x را بیابید.

شرایط تدریس ریاضی

صاحبدلی به مدرسه آمد ز خانقاه — بگسست عهد صحبت اهل طریق را
گفتم میان عالم و عابد چه فرق بود — تا اختیار کردی از آن این فریق را
گفت آن گلیم خویش بدر می برد زموج — وین جهد می کند که بگیرد غریق را

دو سه سالی است که دوست و همکار گرامی، **آقای امیری**، مؤلف و سردبیر محترم مجله ی ریاضی رشد برهان متوسطه، بارها از چند نفراز ما، اعضای هیأت تحریریه ی مجله خواسته اند که روش تدریس ریاضی را بنویسیم. بنده بارها خدمت ایشان و همکاران عرض کرده ام، شاید به تعداد معلمان خوب، روش تدریس وجود داشته باشد؛ زیرا تدریس در یک کلاس به عوامل متفاوتی از جمله: تعداد دانش آموزان، بضاعت علمی آن ها، محل فیزیکی کلاس و مدرسه، شرایط معلم و... بستگی دارد. به همین علت، تاکنون نتوانسته ام در این مقوله کاری انجام دهم تا این که به فکر افتادم، به جای روش تدریس ریاضی، شرایط تدریس ریاضی یک معلم را تا آن جا که در بضاعت دارم، توضیح دهم.

ناگفته پیداست، آنچه که می نویسم، فقط و فقط حاصل تجربه ی چهل و چند ساله ی تدریس خودم است. امکان دارد، قسمت هایی از این نوشته که ارائه خواهد شد، صحیح نباشد و از این بابت از صاحب نظران و دست اندرکاران پوزش می طلبم.

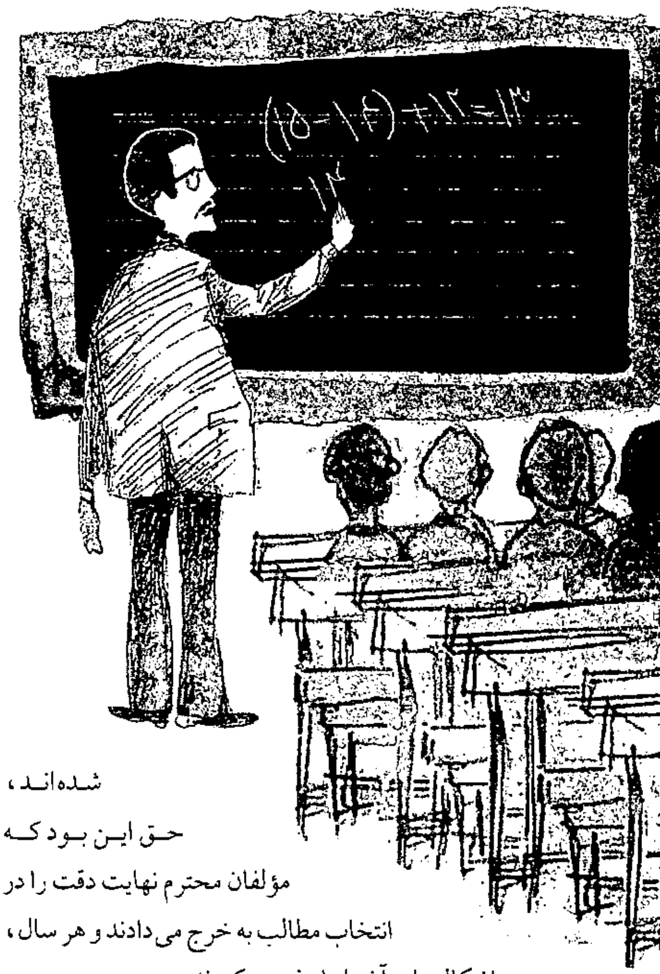
در این نوشته می کوشم، به موضوعات گوناگون مربوط به تدریس ریاضی یک معلم، تا آن جا که در توان دارم، فهرست وار اشاره کنم.

۱. بضاعت علمی معلم

مسلم است که برای انجام هر کاری ابزاری مورد نیاز است. برای تدریس هم بضاعت علمی مناسب برای یک مدرس لازم و ضروری است. معلم باید بر درس و حواشی آن کاملاً مسلط باشد. او باید از کتاب هایی که در زمینه ی تدریس آن درس نوشته شده اند، استفاده کند. البته کتاب های درسی ملاک اصلی تدریسند، ولی نباید فقط به کتاب های درسی اکتفا کرد. اگر چه در کتاب های درسی ریاضی، بعضی مطالب به خوبی نوشته شده اند، ولی مسلم است که این کتاب ها ضعف هایی هم دارند. باید بپذیریم که این کتاب ها کمی شتابزده نوشته شده اند و خالی از اشکال نیستند. برای مثال، در درس های حساب، جبر، حسابان و حساب دیفرانسیل و انتگرال، حتی ۵ مسأله ی ترکیبی هم آورده نشده است. چون این کتاب ها برای کل دانش آموزان کشور نوشته

درس اول

احمد قندهاری



شده‌اند، حق این بود که مؤلفان محترم نهایت دقت را در انتخاب مطالب به خرج می‌دادند و هر سال، اشکال‌های آن‌ها را رفع می‌کردند.

نوشتن کتاب درسی باید از حالت اداری و کاغذبازی معمول خارج شود و برای تألیف آن‌ها، باید گروه‌هایی تشکیل شوند و آنانی که هم علاقه‌مند هستند و هم از بضاعت علمی خوبی برخوردارند، تحت نظارت کلی وزارت آموزش، مبادرت به نوشتن کنند.

بارها در جلسات مجله‌ی برهان خدمت همکاران گرامی عرض کرده‌ام که باید برای کل ریاضیات دبیرستانی سه کتاب نوشته شود:

یک کتاب شامل تمام مطالب هندسه، یک کتاب شامل ریاضی ۱ و ۲، حسابان، مثلثات، حساب دیفرانسیل و انتگرال، و یک کتاب هم برای درس‌های آمار و احتمال، ریاضیات گسسته و ... در کتاب‌ها از کاغذ مرغوب و از مقوای قوی برای جلد استفاده شود و هر ساله، تعداد کمی کتاب چاپ شود. برای مثال، در کتاب ریاضی ۱ و ۲، حسابان، حساب دیفرانسیل و انتگرال، یک کتاب مثلاً با ۲۶ فصل نوشته شود و مثلاً ۵ فصل در سال اول، ۶ فصل در سال دوم، ۷ فصل در سال سوم و ۸ فصل در سال چهارم تدریس شود.

به این ترتیب، اولاً دیگر لازم نیست که مثلاً معادله‌ی درجه دوم، هم در کتاب ریاضی ۲ نوشته شود و هم در درس حسابان، یا مثلاً حد و پیوستگی و مشتق‌پذیری، هم در حسابان بیاید هم در کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال، و این دوباره‌کاری‌ها از بین می‌رود. ثانیاً، اگر معلمی که دارد فصل بیستم را درس می‌دهد، ضمن تدریس به موردی برخورد که مربوط به فصل هشتم است، کافی است شماره‌ی صفحه‌ی آن را یادآوری کند تا اگر دانش‌آموزی اشکال داشت، به راحتی به آن دسترسی داشته باشد.

کمی از موضوع بحث دور شدیم. داشتم عرض می‌کردم که اطلاعات علمی مناسب از لوازم اولیه‌ی تدریس هر معلمی است؛ البته اگر معلم به درستی انتخاب شود. امروزه متأسفانه اغلب داوطلبان رشته‌ی ریاضی که در رشته‌های مهندسی قبول نمی‌شوند، به ناچار دانشگاه تربیت معلم را انتخاب می‌کنند. به عواملی که موجب این شرایط شده است، اشاره نمی‌کنم؛ زیرا دست‌اندرکاران بهتر از بنده از موضوعات مطلع هستند. از طرف دیگر، سال‌هاست که ملاحظه می‌کنیم، مهندس یا پزشکی که نتواند کار مناسبی پیدا کند، به تدریس روی می‌آورد. در حالی که معلم، علاوه بر داشتن تحصیلات

دانشگاهی، باید روش تدریس، روان شناسی، تاریخ آموزش و پرورش و... را بداند که متأسفانه این آقایان در این زمینه ها مسلماً اطلاعات کافی ندارند. اگر هم کار بعضی از این آقایان مورد رضایت است، نه به خاطر علاقه مندی به تدریس، بلکه به دلیل کسب درآمد بیش تر است. در اکثر کشورها، حتی لوله کش باید اجازه ی کار لوله کشی را کسب کند تا بتواند، لوله کشی کند؛ ولی در این جا فرزندان خود را به دست کسانی می سپاریم که شاید بعضی از آن ها صلاحیت تدریس را نداشته باشند. گفتنی ها فوق العاده زیادند و هر دلسوزی را وامی دارند که از هر فرصتی برای طرح آن استفاده کند.

عرض می کردم که معلم باید استطاعت علمی کافی داشته باشد تا بتواند، به درستی از عهده ی تدریس برآید. فرض بفرمایید معلمی می خواهد اتحادها را تدریس کند. ممکن است این طور شروع کند که ابتدا اتحاد اول را بگوید و سپس چند مثال و احیاناً چند تست حل کند و کارش را پایان دهد. دانش آموزان هم که نمی دانند موضوع از چه قرار است، می گویند اتحاد را درس داد و مثال و تست هم حل کرد.

برای بسیاری از همکاران، تفاوت بین مثال، مسأله و تست روشن نیست! کسی که اتحاد را می خواهد تدریس کند، ابتدا باید معنی لغوی اتحاد را بیان کند و سپس تفاوت بین معادله و اتحاد را روشن سازد. تعریف معادله و تعریف اتحاد را روی تخته ی کلاس بنویسد و با ذکر مثال، مفاهیم آن ها را برای دانش آموزان روشن کند. پس از آن است که می تواند شروع کند به بیان اتحاد اول چنانچه بتواند اثبات هندسی اتحاد اول را هم بیان کند و شکل بکشد، مطلب جالب تر خواهد شد.

مسلم است لازمه ی این کار مراجعه به کتاب های مختلف است. آن ها که تازه کار تدریس را شروع کرده اند، حتماً باید یک بار درس خود را بنویسند و سپس اشکالات آن را رفع کنند. به جای دانش آموز از خود سؤال کنند و درصدد پاسخ برآیند، و پس از تسلط، خلاصه ی درس را یادداشت کنند. در این صورت می توان گفت، این معلم شرایط لازم را برای تدریس دارد.

ممکن است همکاران گرامی بفرمایند: «با این حقوق ها که نمی شود این کارها را انجام داد.» باید به اطلاع برسانم مسائل جانبی، هر قدر هم که مهم باشند، نباید در انجام کار، به خصوص در امر تدریس، دخالت داده شوند. یک مثال ساده عرض کنم. اگر پلیسی که شب ها مشغول گشت است، ببیند دزدی دارد از دیوار خانه ای بالا می رود و پیش خود بگوید، مگر چه قدر به من حقوق می دهند که با این دزد درگیر شوم و برای خودم درد سر درست کنم و دزد را تعقیب نکند، آیا بنده و شما می توانیم شب ها به راحتی استراحت کنیم؟ مسأله ی حقوق و دستمزد مهم است، ولی نباید در کار شخص،

به‌خصوص در امر تدریس، اثر سوء بگذارد.

اگر معلمی به کلاس درس برود و یاد کارهای دیگری بیفتد، به درد معلمی نمی‌خورد؛ باید به فکر کار دیگری باشد. تعدادی دانش‌آموز با نهایت علاقه نشسته‌اند که آموزش ببینند، والدین آن‌ها با چه علاقه و امیدی آن‌ها را به مدرسه می‌فرستند، آیا وجدان و انسانیت اجازه می‌دهد که تدریس به درستی انجام نشود؟ کمیِ حقوق و دستمزد، چه ربطی به دانش‌آموز و والدین آن‌ها دارد؟ یا نباید به کلاس رفت یا باید با همه‌ی آنچه در توان داریم کوشش کنیم تا وجدان ما از ما راضی باشد. به هیچ چیز دیگر هم جز آموزش این گل‌های سر سبد خانواده‌ها و این اداره کنندگان مملکت در آینده، فکر نکنیم.

۲. سرو وضع تمیز و مناسب

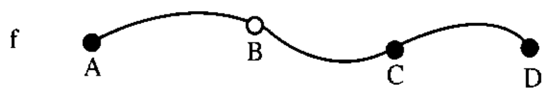
نباید با سرو وضع ژولیده و نامناسب به کلاس رفت. در ضمن نباید لباس‌های مد روز پوشید. لباس به معنی پوشش است. به خصوص لباس معلم برای بچه‌ها الگوست. اگر لباس شما تمیز و مناسب باشد، اثر مطلوبی روی دانش‌آموزان دارد. سرو وضع غیر عادی، مدتی ذهن دانش‌آموزان را به خود مشغول می‌کند و از توجه آن‌ها به درس می‌کاهد. باید توجه داشته باشیم، هر حرکتی و هر نوع رفتاری می‌تواند اثرات خوب و بد روی دانش‌آموزان داشته باشد.

۳. بیان مقدمه‌ی مناسب برای شروع درس

برای شروع تدریس در هر مبحث باید مقدمه‌ای طرح و عنوان کرد؛ به دو علت: اول آن‌که دانش‌آموز از حال و هوای خودش خارج شود و مطلب را جذب کند، و دوم آن‌که این مقدمه باید از مطالبی باشد که دانش‌آموزان با آن‌ها آشنا هستند تا باعث شود، با رغبت بیش‌تری به درس توجه کنند.

اگر معلم ریاضی برای تدریس مبحث پیوستگی، ابتدا معنی پیوستگی و متصل بودن را بیان کند و به طور خلاصه، حد تابع در یک نقطه را یادآوری کند و شکل بکشد، دانش‌آموزان با رغبت بیش‌تری به درس توجه خواهند کرد.

مثلاً می‌تواند شکل ساده‌ی زیر را بکشد.



و با همین شکل مختصر، بدون بیان تعریف ریاضی، شرح دهد:

۱. تابع در نقطه‌ی B حد دارد، ولی هیچ نوع پیوستگی ندارد.

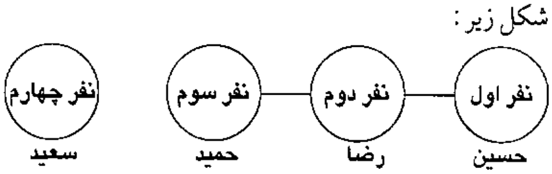
۲. تابع در نقطه‌ی C پیوسته است.

۳. تابع در نقطه‌ی A پیوسته نیست، ولی پیوستگی راست دارد.

۴. تابع در نقطه‌ی D پیوسته نیست، ولی پیوستگی چپ دارد.

در ریاضی باید مطالب دقیق بیان شوند. مثلاً اگر در مورد شکل قبل بگوییم، تابع در نقاط A، B و D پیوسته نیست، ضمن این‌که درست است، کامل نیست. همان طوری که عرض شد، نوع ناپیوستگی در نقاط A، B و Dمتفاوت است.

یادم می‌آید، هر وقت می‌خواستم مبحث پیوستگی در یک نقطه را تدریس کنم، چهار نفر از دانش‌آموزان را انتخاب می‌کردم. آن‌ها را پای تخته می‌آوردم و به آن‌ها می‌گفتم، پشت به دانش‌آموزان و رو به تخته بایستید و دست یکدیگر را بگیرید و به نفر چهارم می‌گفتم شما دست کسی را نگیر؛ مانند شکل زیر:



می‌گفتم، حسین پیوسته نیست، ولی پیوستگی چپ دارد. رضا پیوسته است. حمید هم پیوسته نیست، ولی پیوستگی راست دارد. و سعید کمی سرِتق است: نه پیوستگی راست دارد، نه پیوستگی چپ. اگر این کار باعث تعجب و شاید لبخندی هم بشود، چه بهتر؛ خستگی بچه‌ها کم‌تر می‌شود، ولی هیچ گاه درس پیوستگی و مفهوم آن را فراموش نمی‌کنند. این مقدمه باعث می‌شود که بقیه‌ی درس هم در ذهن آن‌ها به درستی جایگزین شود.

۱۷

معادله های گنگ

میرشهرام صدر

اشاره

در این شماره، درباره‌ی معادله های گنگ بحث خواهیم کرد و حل نامعادله های گنگ را در شماره‌ی آینده‌ی مجله ملاحظه خواهید کرد.

عبارت گنگ

اگر عبارت جبری گویا نباشد، «عبارت جبری گنگ» نامیده می‌شود. در چنین عبارت‌هایی، رادیکال‌های مجهول‌دار وجود دارند؛ مانند:

$$2\sqrt{x+2}-1 \;;\; x^2-3x\sqrt{x^2-4} \;;\; \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x-1}+2 \;;$$
$$3\sqrt{x+1}-3\sqrt{x^2-2x}$$

تذکر. عبارت جبری $(2+\sqrt{3})x^2-\sqrt{2}x+\frac{\sqrt{5}}{2}$ گنگ نیست، بلکه چند جمله‌ای درجه دوم است و ضریب‌های آن اعداد گنگ هستند.

دامنه‌ی عبارت‌های جبری گنگ

هرگاه در یک عبارت جبری، رادیکالی با فرجه‌ی زوج موجود باشد، این رادیکال وقتی تعریف شده است که عبارت زیر آن بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد. یعنی $\sqrt{f(x)}$ وقتی تعریف شده است که $f(x) \geq 0$.

تذکر. عبارت $\frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}}$ وقتی تعریف شده است که $g(x) > 0$؛ چون کسر وقتی تعریف شده است که مخرج آن صفر نباشد.

هرگاه در یک عبارت جبری، رادیکالی با فرجه‌ی فرد موجود باشد، چون زیر رادیکال با فرجه‌ی فرد، هر عددی می‌تواند قرار گیرد، پس در این حالت $D=\mathbb{R}$.

مثال۱. دامنه‌ی عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $3x+\sqrt{x-2}$

ب) $2\sqrt{3x+1}+\sqrt{4-2x}$

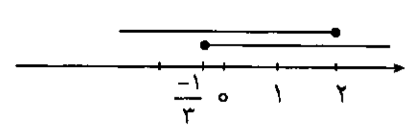
ج) $\sqrt{3-x}-\sqrt{7+x}+\sqrt{16+2x}$

د) $\frac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x+3}$

حل: الف) $x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow D = [2, +\infty)$

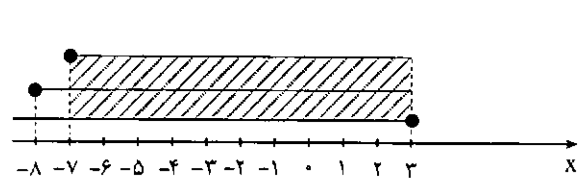
ب)

$$\begin{cases} 3x + 1 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq -1 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{3} \\ \text{و} \\ 4 - 2x \geq 0 \Rightarrow 4 \geq 2x \Rightarrow x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow D = [-\frac{1}{3}, 2]$$



ج)

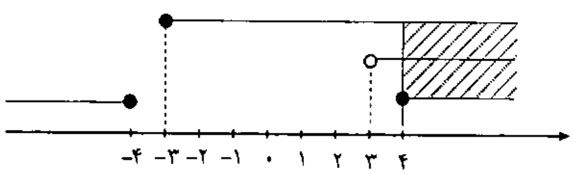
$$\begin{cases} 3 - x \geq 0 \Rightarrow -x \geq -3 \Rightarrow x \leq 3 \\ 7 + x \geq 0 \Rightarrow x \geq -7 \\ 16 + 2x \geq 0 \Rightarrow 2x \geq -16 \Rightarrow x \geq -8 \end{cases} \Rightarrow D = [-7, 3]$$



برای
دانش‌آموزان
سال دوم متوسطه

د)

$$\begin{cases} x^2 - 16 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 16 \Rightarrow x \geq 4 \text{ یا } x \leq -4 \\ x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3 \\ x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3 \end{cases} \Rightarrow D = [4, +\infty)$$



حل معادله‌ی شامل عبارت گنگ

معادله‌هایی را که در آن‌ها عبارت‌های گنگ وجود داشته باشند، معادله‌های گنگ می‌نامیم. مراحل حل این معادله‌ها عبارتند از:

مرحله‌ی اول: دامنه‌ی جواب (دامنه‌ی متغیر) معادله را که همان دامنه‌ی عبارت‌های گنگ معادله است، به دست می‌آوریم و آن را D می‌نامیم. در صورتی که $D \neq \varnothing$، مراحل بعدی را انجام می‌دهیم و در غیر این صورت، معادله‌ی گنگ جواب ندارد.

مرحله‌ی دوم: اگر معادله شامل یک رادیکال باشد، آن رادیکال را یک طرف معادله قرار می‌دهیم و بقیه‌ی مقادیر و متغیرها را به طرف دیگر می‌بریم. سپس دو طرف معادله را به توان فرجه‌ی رادیکال می‌رسانیم.

اگر معادله بیش از یک رادیکال داشته باشد، یک رادیکال را در یک طرف معادله قرار می‌دهیم و بقیه‌ی مقادیر و متغیرها و رادیکال‌ها را به طرف دیگر می‌بریم. سپس دو طرف معادله را به توان فرجه‌ی آن رادیکال می‌رسانیم و پس از ساده کردن، این عمل را تا جایی ادامه می‌دهیم که دیگر در معادله عبارت

گنگ موجود نباشد.

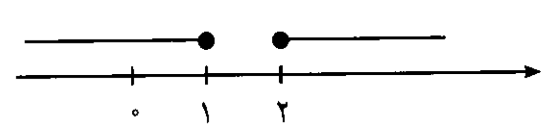
مرحله‌ی سوم: از مرحله‌ی دوم به یک معادله می‌رسیم که پس از حل آن، ریشه‌هایی به دست می‌آیند. این ریشه‌ها در صورتی قابل قبول هستند که هم در دامنه‌ی جواب معادله‌ی گنگ و هم در خود معادله‌ی گنگ صدق کنند.

مثال ۲. نشان دهید معادله‌ی $\sqrt{x-۲}+\sqrt{۱-x}+۳=x$ ریشه ندارد.

حل:

مرحله‌ی اول: دامنه‌ی جواب معادله را می‌یابیم.

$$\begin{cases} x-۲\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۲ \\ ۱-x\geq ۰ \Rightarrow x\leq ۱ \end{cases} \Rightarrow D=\varnothing$$



چون $D=\varnothing$، پس معادله ریشه ندارد.

مثال ۳. ابتدا دامنه‌ی متغیر هر یک از معادله‌های زیر را تعیین کنید و سپس آن‌ها را حل کنید.

الف) $۳+\sqrt{x-۷}=۸$

ب) $\sqrt{x}-x=-۲۰$

ج) $۵-۲\sqrt{۲x-۱}=۱$

د) $\sqrt{۲x+۳}-\sqrt{x-۳}=۰$

هـ) $\sqrt{x}+\sqrt{x+۵}=۵$

و) $\sqrt{x}+۵=-\sqrt{۷x+۱}$

ز) $۳=\frac{۱}{\sqrt{x-۵}}$

ح) $\frac{۱}{\sqrt{x}+۲}+\frac{۱}{۲-\sqrt{x}}=۲$

ط) $\sqrt{x\sqrt[۳]{x}}=\sqrt[۳]{۴}$

ی) $\frac{۸}{\sqrt{۱۰-۲x}}-\sqrt{۱۰-۲x}=۲$

حل: الف) $۳+\sqrt{x-۷}=۸$

مرحله‌ی اول: دامنه‌ی جواب معادله را می‌یابیم:

$x-۷\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۷ \Rightarrow D=[۷,+\infty)$

مرحله‌ی دوم: رادیکال را یک طرف معادله قرار می‌دهیم و بقیه‌ی مقادیر را به طرف دیگر معادله می‌بریم:

$۳+\sqrt{x-۷}=۸ \Rightarrow \sqrt{x-۷}=۵$

اکنون دو طرف معادله را به توان فرجه‌ی رادیکال، یعنی عدد ۲ می‌رسانیم:

$(\sqrt{x-۷})^۲=۵^۲ \Rightarrow x-۷=۲۵ \Rightarrow x=۳۲\in D$

مرحله‌ی سوم: x=۳۲ را در معادله قرار می‌دهیم:

$x=۳۲ \Rightarrow ۳+\sqrt{۳۲-۷}=۸ \Rightarrow ۳+\sqrt{۲۵}=۸ \Rightarrow ۳+۵=۸$

درست است.

چون ریشه‌ی به دست آمده یعنی x=۳۲ هم در دامنه‌ی معادله و هم در خود معادله صدق می‌کند، پس قابل قبول است.

ب) $\sqrt{x}-x=-۲۰$

مرحله‌ی اول:

$x\geq ۰ \Rightarrow D=[۰,+\infty)$

مرحله‌ی دوم:

$$\sqrt{x}-x=-20 \Rightarrow \sqrt{x}=x-20$$
$$\Rightarrow (\sqrt{x})^2=(x-20)^2$$
$$\Rightarrow x=x^2-40x+400 \Rightarrow x^2-41x+400=0$$
$$\Rightarrow x=\frac{41\pm 9}{2} \to \begin{cases} x=25\in D \\ x=16\in D \end{cases}$$

مرحله‌ی سوم:

$x=25 \Rightarrow \sqrt{25}-25=-20 \Rightarrow 5-25=-20 \Rightarrow -20=-20$

درست است.

$x=16 \Rightarrow \sqrt{16}-16=-20 \Rightarrow 4-16=-20 \Rightarrow -12=-20$

نادرست است.

چون $x=25$ هم در دامنه‌ی معادله و هم در معادله صدق می‌کند، پس $x=25$ ریشه‌ی معادله است و چون $x=16$ در معادله صدق نمی‌کند، پس این ریشه غیرقابل قبول است.

ج) $5-2\sqrt{2x-1}=1$

مرحله‌ی اول: $2x-1\geq 0 \Rightarrow x\geq \frac{1}{2} \Rightarrow D=[\frac{1}{2},+\infty)$

مرحله‌ی دوم: $5-2\sqrt{2x-1}=1 \Rightarrow -2\sqrt{2x-1}=-4$

$$\Rightarrow (-2\sqrt{2x-1})^2=(-4)^2$$
$$\Rightarrow 4(2x-1)=16 \Rightarrow 8x=20 \Rightarrow x=\frac{5}{2}\in D$$

مرحله‌ی سوم:

$x=\frac{5}{2} \Rightarrow 5-2\sqrt{2(\frac{5}{2})-1}=1 \Rightarrow 5-2\sqrt{5-1}=1$

درست است. $\Rightarrow 5-4=1 \Rightarrow 1=1$

$x=\frac{5}{2}$ جواب معادله است.

د)

$$\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-3}=0$$
$$\begin{cases} 2x+3\geq 0 \Rightarrow x\geq -\frac{3}{2} \\ x-3\geq 0 \Rightarrow x\geq 3 \end{cases} \Rightarrow D=[3,+\infty)$$
$$\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-3}=0 \Rightarrow \sqrt{2x+3}=\sqrt{x-3}$$

$$(\sqrt{2x+3})^2=(\sqrt{x-3})^2 \Rightarrow 2x+3=x-3 \Rightarrow x=-6\notin D$$

غیرقابل قبول

چون ریشه ی به دست آمده در دامنه‌ی معادله صدق نمی‌کند، پس این ریشه غیرقابل قبول است.

هـ)

$$\sqrt{x}+\sqrt{x+5}=5$$
$$\begin{cases} x\geq 0 \\ x+5\geq 0 \Rightarrow x\geq -5 \end{cases} \Rightarrow D=[0,+\infty)$$

$$\sqrt{x}+\sqrt{x+5}=5 \Rightarrow \sqrt{x+5}=5-\sqrt{x}$$
$$\Rightarrow (\sqrt{x+5})^2=(5-\sqrt{x})^2$$
$$\Rightarrow x+5=25-10\sqrt{x}+x$$
$$\Rightarrow 10\sqrt{x}=20 \Rightarrow \sqrt{x}=2 \Rightarrow x=4\in D$$

$x=4 \Rightarrow \sqrt{4}+\sqrt{4+5}=5 \Rightarrow 2+3=5$ درست است.

$x=4$ جواب معادله است؛ چون هم در دامنه‌ی معادله و هم در معادله صدق می‌کند.

و) راه اول:

$$\sqrt{x}+5=-\sqrt{7x+1}$$
$$\begin{cases} x\geq 0 \\ 7x+1\geq 0 \Rightarrow x\geq -\frac{1}{7} \end{cases} \Rightarrow D=[0,+\infty)$$
$$(\sqrt{x}+5)^2=(-\sqrt{7x+1})^2 \Rightarrow x+10\sqrt{x}+25=7x+1$$
$$\Rightarrow 10\sqrt{x}=6x-24 \Rightarrow 5\sqrt{x}=3x-12 \Rightarrow (5\sqrt{x})^2=(3x-12)^2$$
$$\Rightarrow 25x=9x^2-72x+144 \Rightarrow 9x^2-97x+144=0$$
$$\Rightarrow x=\frac{97\pm 65}{18} \Rightarrow \begin{cases} x=9\in D \\ x=\frac{16}{9}\in D \end{cases}$$

نادرست است . $x=9 \Rightarrow \sqrt{9}+5=-\sqrt{7\times 9+1} \Rightarrow 8=-8$

نادرست است . $x=\frac{16}{9} \Rightarrow \sqrt{\frac{16}{9}}+5=-\sqrt{7\times\frac{16}{9}+1} \Rightarrow \frac{19}{3}=\frac{11}{3}$

این معادله جواب ندارد، زیرا ریشه‌های به دست آمده در معادله صدق نمی‌کنند.

راه دوم: با توجه به صورت معادله یعنی $\sqrt{x}+5=-\sqrt{7x+1}$ ملاحظه می‌کنیم، سمت چپ معادله یعنی $\sqrt{x}+5$ همواره عددی بزرگ‌تر از صفر است و طرف راست معادله یعنی $-\sqrt{7x+1}$ همواره عددی منفی است و هیچ‌گاه عددی منفی با عددی بزرگ‌تر از صفر برابر نیست. بنابراین این معادله جواب ندارد.

ز) $$3=\frac{1}{\sqrt{x-5}}$$

چون $\sqrt{x-5}$ در مخرج کسر قرار دارد و مخرج کسر نباید برابر با صفر شود، پس برای یافتن دامنه‌ی جواب معادله، کافی است زیر رادیکال را بزرگ‌تر از صفر قرار دهیم.

$$x-5>0 \Rightarrow x>5 \Rightarrow D=(5,+\infty)$$

$$3=\frac{1}{\sqrt{x-5}} \Rightarrow 3^2=\left(\frac{1}{\sqrt{x-5}}\right)^2 \Rightarrow 9=\frac{1}{x-5}$$

$$\Rightarrow 9-\frac{1}{x-5}=0 \Rightarrow \frac{9(x-5)-1}{x-5}=0$$

$$\Rightarrow 9x-45-1=0 \Rightarrow x=\frac{46}{9}=5/\overline{1}\in D$$

$$x=\frac{46}{9} \Rightarrow 3=\frac{1}{\sqrt{\frac{46}{9}-5}} \Rightarrow 3=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{9}}} \Rightarrow 3=\frac{1}{\frac{1}{3}} \Rightarrow 3=3$$

درست است.

پس $x=\frac{46}{9}$ جواب معادله است، چون هم در معادله و هم در دامنه‌ی جواب معادله صدق می‌کند.

ح)

$$\frac{1}{\sqrt{x}+2}+\frac{1}{2-\sqrt{x}}=2$$

$$x\geq 0 \Rightarrow D=[0,+\infty)$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}+2}+\frac{1}{2-\sqrt{x}}-2=0$$

$$\Rightarrow \frac{2-\sqrt{x}+\sqrt{x}+2-2(\sqrt{x}+2)(2-\sqrt{x})}{(\sqrt{x}+2)(2-\sqrt{x})}=0$$

$$\Rightarrow 4-2(4-x)=0 \Rightarrow 4-8+2x=0 \Rightarrow x=2\in D$$

$$x=2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}+2}+\frac{1}{2-\sqrt{2}}=2 \Rightarrow \frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{2}+2}{(\sqrt{2}+2)(2-\sqrt{2})}=2$$

$$\Rightarrow \frac{4}{4-2}=2 \Rightarrow 2=2$$ درست است .

پس $x=2$ جواب معادله است؛ چون در دامنه‌ی جواب معادله و در خود معادله صدق می‌کند.

ط)

$$\sqrt{x\sqrt[3]{x}}=\sqrt[3]{4} \Rightarrow \sqrt{\sqrt[3]{x^3\times x}}=\sqrt[3]{4} \Rightarrow \sqrt[6]{x^4}=\sqrt[3]{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{4} \quad ; \quad D=R$$

$$\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{4} \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2\in D$$

$x=2 \Rightarrow \sqrt[3]{2^2}=\sqrt[3]{4}$ درست است.

$x=-2 \Rightarrow \sqrt[3]{(-2)^2}=\sqrt[3]{4}$ درست است.

پس $x=\pm 2$ جواب معادله است.

ی)

$$\frac{8}{\sqrt{10-2x}} - \sqrt{10-2x} = 2$$

$$\begin{cases}10-2x > 0 \Rightarrow x < 5\\ 10-2x \ge 0 \Rightarrow x \le 5\end{cases} \Rightarrow D = (-\infty, 5)$$

با فرض $t = \sqrt{10-2x}$ داریم:

$$\frac{8}{t} - t = 2 \Rightarrow \frac{8-t^2-2t}{t} = 0 \Rightarrow t^2 - 2t + 8 = 0 \Rightarrow t^2 + 2t - 8 = 0$$

$$\Rightarrow (t+4)(t-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases}t = 2\\ t = -4\end{cases}$$

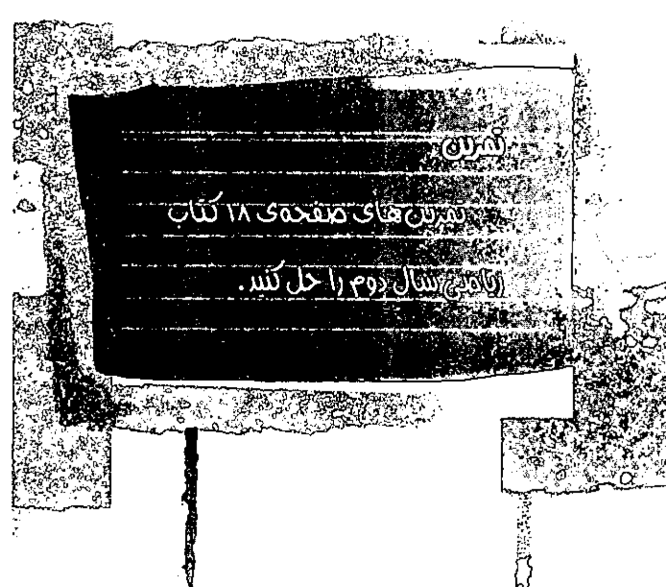
$$t = 2 \Rightarrow 2 = \sqrt{10-2x} \Rightarrow 4 = 10-2x \Rightarrow x = 3 \in D$$

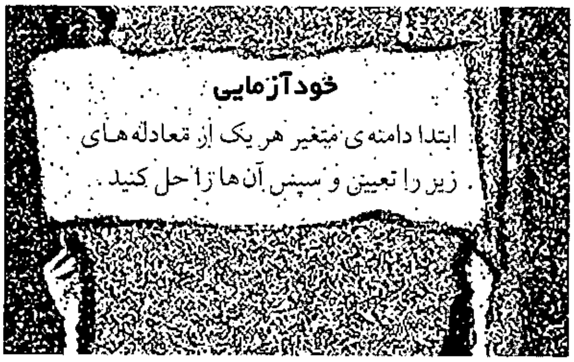
$x = 3 \Rightarrow \frac{8}{\sqrt{10-6}} - \sqrt{10-6} = 2 \Rightarrow 4-2 = 2$ درست است.

پس x=۳ جواب معادله است.

$$t = -4 \Rightarrow -4 = \sqrt{10-2x}$$

چون طرف چپ معادله همواره منفی و طرف راست آن همواره نامنفی است و این امکانپذیر نیست، پس در این حالت معادله جواب ندارد.





۱. $21 + \sqrt{2x-7} = x$

۲. $2\sqrt{x+5} = x+2$

۳. $\sqrt{x} - \sqrt{x+3} = 1$

۴. $\sqrt{x+10} + \sqrt{x-2} = 6$

۵. $\sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} = 4$

۶. $\sqrt{x+4} + \sqrt{2x+6} = 7$

۷. $x + 12\sqrt{x} = 64$

۸. $\frac{x-4}{\sqrt{x}+2} = x-8$

۹. $\sqrt{2-x} + \frac{4}{\sqrt{2-x}+3} = 2$

۱۰. $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{3}{2}$

۱۱. $2x^2 + 3x - 5\sqrt{2x^2+3x+9} = -3$

۱۲. $\sqrt{5x+7} - \sqrt{2x+3} = \sqrt{3x+4}$

۱۳. $\frac{4}{\sqrt[3]{x}+2} + \frac{\sqrt[3]{x}+3}{5} = 2$

❂ هوشنگ شرقی

شهود ریاضی و استدلال شهودی

شهود در ریاضیات چیست و چه جایگاهی دارد؟ آیا استدلال بر مبنای شهود معتبر است یا خیر؟ متأسفانه کتاب درسی جبر و احتمال که این بحث در فصل اول آن و در ابتدای مبحث استدلال ریاضی مطرح شده است نیز از کنار این موضوع به سرعت گذشته و آن را به طور دقیق به خواننده معرفی نکرده است. بسیاری از دانش‌آموزان (و حتی معلمان) رشته‌ی ریاضی نیز، شناخت دقیقی از این موضوع ندارند و مفهوم آن را دقیقاً درک نکرده‌اند. برای آشنایی با این موضوع اساسی در ریاضیات، در این مقاله کوشیده‌ایم، در حد توان شهود در ریاضی را با مثال‌های متنوع بشکافیم و آن را به خوبی بازشناسی کنیم.

فرض کنید از دانش‌آموز دوره‌ی راهنمایی تحصیلی بپرسیم: دو عدد که مجموع آن‌ها مساوی ۱۰ و حاصل ضرب آن‌ها بیش‌ترین مقدار ممکن باشد، کدامند؟ در واقع از او می‌خواهیم، با حفظ مجموع دو عدد، حاصل ضرب آن‌ها را تا حد امکان زیاد کند. چون این دانش‌آموز بیش‌تر با عددهای طبیعی سر و کار داشته، در ذهن خود ممکن است عددهای زیر را امتحان کند:

۱۶ = ۲×۸ و ۱۰ = ۲+۸ ــــ ۹ = ۱×۹ و ۱۰ = ۱+۹

۲۴ = ۴×۶ و ۱۰ = ۴+۶ ــــ ۲۱ = ۳×۷ و ۱۰ = ۳+۷

۲۵ = ۵×۵ و ۱۰ = ۵+۵

و به طور شهودی می‌فهمد که هر چه اختلاف دو عدد کم‌تر شود، حاصل ضرب آن‌ها بیش‌تر می‌شود. بنابراین به طور شهودی به این حکم می‌رسد: «هر گاه مجموع دو عدد مقداری ثابت باشد، حاصل ضرب آن‌ها وقتی بیش‌ترین مقدار ممکن را دارد که آن دو عدد باهم مساوی باشند.»

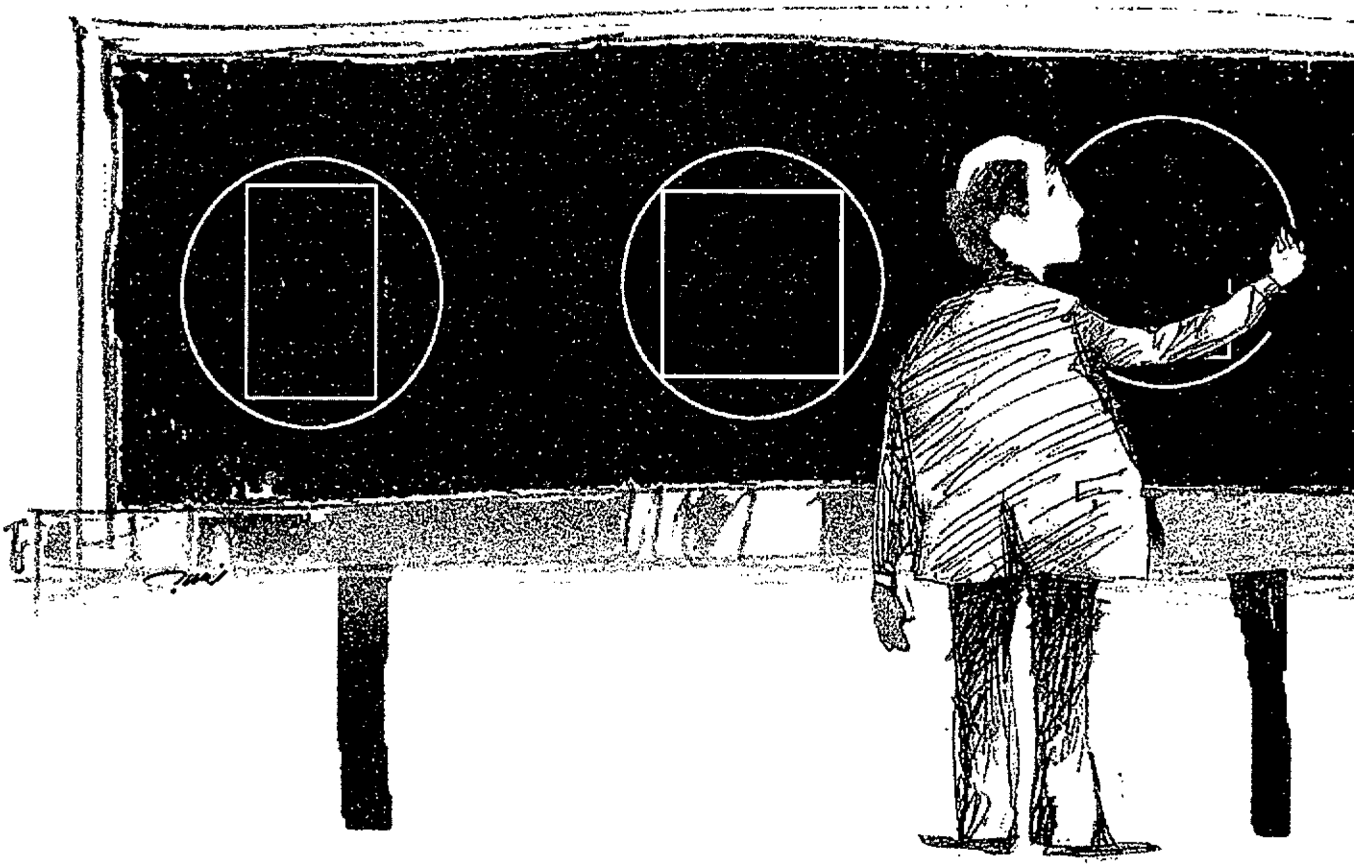
بنابراین در پاسخ به سؤال مورد نظر، عددهای ۵ و ۵ را معرفی می‌کند. اکنون سؤال مشابه دیگری را از همان دانش‌آموز می‌پرسم: «می‌خواهیم با سیمی فلزی به طول ثابت، یک مستطیل درست کنیم؛ یعنی دو سر سیم را به یکدیگر وصل و شکل بسته‌ی حاصل را به مستطیل تبدیل کنیم اگر بخواهیم مساحت مستطیل بیش‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد، آن را به چه صورت درست کنیم؟» به عبارت دیگر، از میان همه‌ی مستطیل‌هایی که محیط آن‌ها مقدار ثابتی (مثلاً ۲۰ cm) است، کدامیک بیش‌ترین مساحت را دارد؟

ممکن است دانش‌آموز ما با همان شهود و با کمی دقت به جواب برسد، ولی دانش‌آموز دبیرستانی (که شهود قوی‌تری دارد)، حتی اگر برای اولین بار با این مسأله مواجه شود، احتمالاً فوراً می‌تواند بگوید: «مستطیل را باید به شکل مربع بسازیم». اما آیا دلیلی هم برای ادعای خود دارد؟

تجربه‌ی نویسنده که این پرسش را با دانش‌آموزان بسیاری در میان گذاشته است، نشان می‌دهد که اکثر آن‌ها، همین پاسخ را تقریباً بی‌درنگ داده‌اند، ولی علت دقیق موضوع را تنها عده‌ی انگشت شماری می‌دانستند.

اگر این دانش‌آموزان با مسأله‌ی بهینه‌سازی از کتاب «حسابان» سال سوم رشته‌ی ریاضی آشنایی دقیق داشته باشند، می‌توانند مسأله را به صورتی منظم حل کنند و به جواب برسند، در غیر این صورت، با روش استدلالی زیر هم می‌توانند به جواب برسند:

محیط این مستطیل مقدار معینی است مساوی با طول سیم



(L). یعنی براساس شکل داریم:

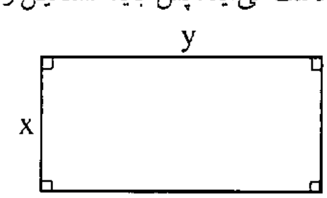
$$2(x+y)=L \Rightarrow y=\frac{L}{2}-x \qquad (1)$$

و مساحت مستطیل $S=xy$ است که در آن x و y هر دو متغیرند و با تغییر آن‌ها مقادیر متفاوتی برای S به دست می‌آید که ما به دنبال بیش‌ترین مقدار هستیم. از رابطه‌ی (۱)، y را بر حسب x در دستور $S=xy$ قرار می‌دهیم و رابطه‌ی جدید را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$S=x(\frac{L}{2}-x)=\frac{Lx}{2}-x^2=-(x^2-\frac{L}{2}x)=$$

$$-\left[(x-\frac{L}{4})^2-\frac{L^2}{16}\right]=\frac{L^2}{16}-(x-\frac{L}{4})^2$$

و چون $(x-\frac{L}{4})^2 \geq 0$ است، بنابراین حداکثر مقدار S وقتی است که $(x-\frac{L}{4})^2=0$ باشد (چرا؟) و در نتیجه: $S \leq \frac{L^2}{16}$. یعنی حداکثر مقدار S مساوی $\frac{L^2}{16}$ است و به ازای $x=y=\frac{L}{4}$ به دست می‌آید. پس باید مستطیل را به صورت



مربعی به ضلع یک چهارم طول سیم درست کنیم.

ملاحظه می‌کنید که شما پاسخ مسأله را به طور «غریزی» می‌دانستید، ولی علت دقیق آن را با استدلال استنتاجی، آن گونه که در بالا دیدید، احتمالاً نمی‌دانستید. اگر هم می‌توانستید این گونه استدلال کنید، باز هم بدون نیاز به این استدلال، از ابتدا جواب صحیح را حدس می‌زدید.

اکنون همان سؤال را قدری پیچیده‌تر کنیم: «اگر محدودیتی در ساختن شکل بسته به کمک همان سیم به طول ثابت (L) نداشته باشیم، برای آن که مساحت آن بیش‌ترین مقدار ممکن باشد، آن را به چه شکلی بسازیم؟ به عبارت دیگر، از بین تمام شکل‌های هندسی بسته به محیط ثابت L، کدام‌یک بیش‌ترین مساحت ممکن را دارد؟»

کمی فکر کنید. بله، درست حدس زده‌اید. تجربه‌ی من می‌گوید که اکثر دانش‌آموزان باز هم درست حدس می‌زنند. این یک قضیه‌ی معروف در ریاضیات است که «هم پیرامونی»[1] نامیده می‌شود: «از بین تمام شکل‌های بسته‌ی هندسی با محیط ثابت، دایره بیش‌ترین مساحت را دارد.»

ولی آیا می‌توانید این موضوع را ثابت کنید؟! احتمالاً این بار حتی اگر به تمام مسائل دبیرستانی (یا حتی به ریاضیات پایه‌ی دوره‌ی دانشگاهی) نیز مسلط باشید، باز هم نتوانید این

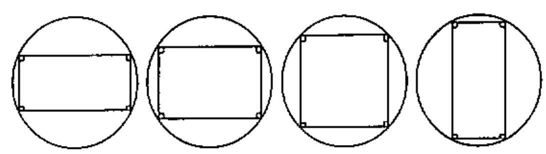
قضیه را که یک قضیه در ریاضیات عالی است، اثبات کنید. ولی شهود شما به راحتی بر درستی آن گواهی می‌دهد. اکنون به این سؤالات پاسخ دهید:

۱. از بین تمام شکل‌های هندسی بسته با مساحت ثابت، کدام‌یک کم‌ترین محیط را دارد؟

۲. با مقدار معینی ورقه‌ی کاغذ می‌خواهیم یک مکعب مستطیل بسازیم. اگر بخواهیم حجم این مکعب مستطیل بیش‌ترین مقدار ممکن باشد، آن را به چه شکل بسازیم؟

۳. از بین تمام شکل‌های فضایی بسته، با مساحت رویه‌ی ثابت، کدام‌یک بیش‌ترین حجم ممکن را دارد؟

۴. از بین تمام مستطیل‌هایی که در یک دایره‌ی معین می‌توان محاط کرد، کدام‌یک بیش‌ترین حجم ممکن را دارد؟ (به شکل‌های زیر دقت کنید.)



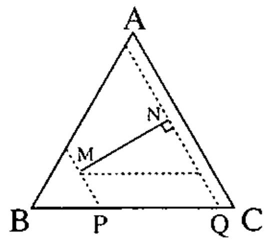
۵. از بین تمام مثلث‌هایی که در یک دایره می‌توان محاط کرد، کدام‌یک بیش‌ترین مساحت ممکن را دارد؟

۶. از بین تمام مکعب مستطیل‌هایی که می‌توان در یک کره‌ی معین محاط کرد، کدام‌یک بیش‌ترین حجم ممکن را دارد؟

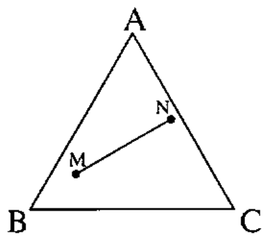
اکنون به یک سؤال دیگر از هندسه پاسخ دهید: «درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع (یا روی محیط آن) دو نقطه‌ی دلخواه M و N اختیار کنید. حداکثر فاصله‌ی دو نقطه (یعنی طول MN) چه‌قدر است؟» پاسخ این سؤال که دیگر کاملاً بدیهی است! حتی اگر از یک دانش‌آموز دوره‌ی ابتدایی (که با مفهوم مثلث و مثلث متساوی‌الاضلاع آشنا باشد) هم این سؤال را بپرسیم، احتمالاً پاسخ می‌دهد: «معلوم است! طول ضلع مثلث.»

شما هم به طور یقین به سرعت همین پاسخ را می‌دهید. ولی اگر بخواهید آن را به طور دقیق اثبات کنید، چه می‌گویید؟ باز هم تجربه‌ی من می‌گوید، اکثر دانش‌آموزان به مشکل برمی‌خورند و فقط می‌گویند: بدیهی است! اما می‌دانیم که در ریاضیات هیچ چیز بدیهی نیست. و به خصوص مطلب بالا، کاملاً قابل اثبات است.

به شکل ۲ دقت کنید.



شکل ۲



شکل ۱

در نقاط M و N دو عمود بر MN رسم می‌کنیم. MN هر وضعی که داشته باشد، این دو عمود حداقل یکی از سه ضلع مثلث را در دو نقطه که هیچ‌کدام خارج از مثلث نیستند، قطع می‌کند. مثلاً در شکل ۲، نقاط P و Q روی BC و هیچ‌یک خارج از مثلث نیست. (علت این امر چیست؟)

اکنون از M خط راستی به موازات همان ضلع (ضلع BC) رسم می‌کنیم تا NQ را در نقطه‌ی T قطع کند. حال واضح است که در مثلث قائم الزاویه‌ی MNT، وتر MT بلندترین ضلع است؛ یعنی $MT \geq MN$. و در متوازی الاضلاع MTQP، $MT=PQ$ و نیز $PQ \leq BC$. بنابراین: $MN \leq BC$ و اثبات حکم تمام است.

سؤال: بیش‌ترین فاصله‌ی دو نقطه‌ی دلخواه که درون یا روی محیط یک مربع هستند، چیست؟ می‌توانید حدس خود را اثبات کنید؟

حال به سؤال دیگر از شاخه‌ای دیگر از ریاضیات توجه کنید:

عبارت جبری $x^{10}+x^5+1$ را به حاصل ضرب دو پرانتز تجزیه کرده‌ایم. کدام‌یک از عبارت‌های جبری زیر، معادل یکی از دو پرانتز است؟

۱) x^3+x+1 ۲) x^2+x+1

۳) x^2-x+1 ۴) x^5+x+1

ابتدا بکوشید، با کمک درک شهودی خود گزینه‌ی درست را حدس بزنید. سپس این عبارت را به حاصل ضرب عوامل تجزیه کنید و درستی یا نادرستی حدس خود را ببینید. چگونگی تجزیه‌ی این عبارت جبری در بسیاری از کتاب‌های کمک درسی موجود است، ولی به عنوان راهنمایی می‌گوییم: عوامل x^9 و $-x^9$، x^8 و $-x^8$، x^7 و $-x^7$ و ...، x و x- را به عبارت فوق اضافه کنید و سپس با دسته‌بندی مناسب که شامل

$(x^{10} + x^9 + x^8)$ و $(-x^9 - x^8 - x^7)$ و... می‌شود و نیز فاکتورگیری، این عبارت را تجزیه کنید. آیا درک شهودی شما درست بوده است؟

آخرین مثال ما، مثالی ساده از نظریه‌ی اعداد است. احتمالاً از دوران ابتدایی به یاد دارید که شرط بخش‌پذیری یک عدد طبیعی بر عدد ۶ چیست؟ بله، درست است. هر عدد طبیعی که بر ۲ و ۳ بخش‌پذیر باشد، بر ۶ بخش‌پذیر است. آیا می‌توان این موضوع را تعمیم داد؟ شرط بخش‌پذیری یک عدد طبیعی بر ۱۵ چیست؟

باز هم حدس شما درست است: «هر عدد طبیعی که بر ۳ و ۵ بخش‌پذیر باشد، بر ۱۵ بخش‌پذیر است.»

حالا ادامه می‌دهیم: هر عدد طبیعی که بر ۳ و ۷ بخش‌پذیر باشد، ... بله، درست است، بر ۲۱ بخش‌پذیر است و حتماً هر عدد طبیعی که بر ۴ و ۵ بخش‌پذیر باشد، بر ۲۰ بخش‌پذیر است. آری همه‌ی این نتیجه‌گیری‌ها درست هستند. اما حالا بگویید، آیا عددی که بر ۶ و ۴ بخش‌پذیر باشد، بر ۲۴ بخش‌پذیر است؟

با کمی اندیشه در می‌یابید که نه این طور نیست. مثلاً ۳۶ بر ۴ و ۶ بخش‌پذیر است، ولی بر ۲۴ بخش‌پذیر نیست. تفاوت این مورد با موارد قبلی چیست؟ اگر شهود خوبی داشته باشید، با کمی تفکر به این حکم کلی صحیح می‌رسید: «هر گاه a و b دو عدد صحیح و نسبت به هم اول (یعنی بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک آن‌ها مساوی ۱) باشند، عددی که بر هر دوی آن‌ها بخش‌پذیر باشد، بر حاصل‌ضرب آن‌ها نیز بخش‌پذیر است.»

اما اگر می‌خواهید اثبات دقیق این حدس شهودی را بدانید، ناگزیر باید تا دوره‌ی پیش دانشگاهی و مطالعه‌ی دقیق بحث نظریه‌ی اعداد صبر کنید.

* * *

اکنون این بحث را با دو پرسش اساسی و پاسخ آن‌ها به پایان می‌رسانیم. پرسش نخست این است: «آیا شهود افراد گوناگون، در زمان‌های متفاوت یکسان است؟»

پاسخ به وضوح منفی است. درست است که شهود نوعی درک غریزی است، اما درک غریزی افراد گوناگون، با سطح اطلاعات و دیدگاه‌های متفاوت، یکسان نیست. سال‌ها پیش از میلاد مسیح (ع) در یونان باستان، اکثر مردم به طور شهودی احساس می‌کردند که زمین مرکز دنیاست و خورشید دور آن می‌گردد؛ زیرا آن‌ها به ظاهر می‌دیدند که هر روز خورشید از مشرق طلوع می‌کند و در مغرب فرو می‌رود و این خورشید است که می‌گردد! همچنین همه‌ی آن‌ها و نیز بسیاری از مردمان، تا قرن‌ها بعد (و در اروپا تا قرن شانزدهم میلادی) تصور می‌کردند زمین مسطح است و به دنبال یافتن پایان دنیا بودند!

البته در همان یونان باستان، فیثاغورس و پیروان او، مدور بودن و کروی بودن زمین را باور داشتند، اما برای آن دلیل محکم و منطقی نداشتند. آن‌ها با شهود خود، تنها از آن‌جایی که دیده بودند، وقتی در سفرهای دریایی یک کشتی از دوردست به ساحل نزدیک می‌شود، ابتدا دماغه و سپس بدنه‌ی آن بر ساحل نشینان آشکار می‌شود، به این باور رسیده بودند.

پس شهود افراد گوناگون، به نوع تفکر، سطح تحصیلات و حتی نوع کار آن‌ها نیز وابسته است. شهود یک دانشمند، با شهود یک فرد عادی تفاوت‌های چشمگیری دارد.

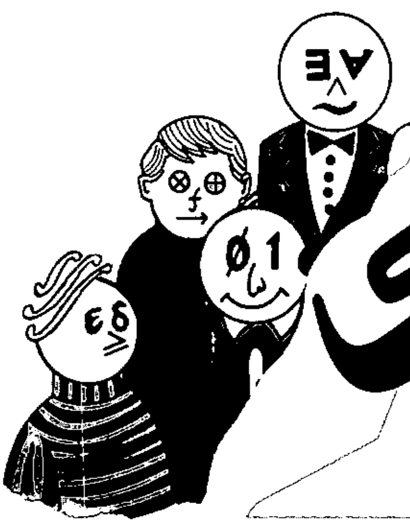
پرسش دوم این است که: «جایگاه شهود در استدلال و ریاضیات چیست؟» پاسخ این است: شهود ابزار مناسبی است برای درک موضوع از سوی دانش‌آموزان و نیز شروع مسأله و فهم آغازین آن برای پژوهشگران. اما هرگز نباید جانشین و جایگزین استدلال شود. بنابراین، استدلال شهودی پایه و اساس منطقی ندارد. تکیه‌ی بیش از حد بر شهود، به جای استدلال دقیق، دانش‌آموزان را از تفکر منطقی و اهمیت آن باز می‌دارد.

اما در عین حال استفاده‌ی به‌جا از شهود، ابزار مناسب و شایسته‌ای برای فهم مطلب است. برای مثال، در بحث حد و پیوستگی در کتاب حسابان سال سوم ریاضی، از شهود استفاده‌ی بسیار مناسبی شده است. یعنی فهم اولیه‌ی موضوع به جز این تقریباً ناممکن است. اما مفهوم دقیق و ریاضی حد و پیوستگی را دانش‌آموزان در کتاب «حساب و دیفرانسیل و انتگرال» دوره‌ی پیش دانشگاهی می‌آموزند.

در هر حال، نکته‌ی بسیار مهمی که هم دانش‌آموزان و هم معلمان رشته‌ی ریاضی باید به آن توجه اکید داشته باشند، این است که: «شهود ابزار درک است نه ابزار استدلال.»

زیرنویس ....

1. Isoperimetric Problem



منطق ریاضی

اشاره: در ادامه ی بحث منطق ریاضی به معرفی ترکیب شرطی در گزاره ها می پردازیم:

۳ـ ترکیبی شرطی: هرگاه بخواهیم از گزاره‌ای مانند p، گزاره‌ای همچون q را نتیجه بگیریم می‌نویسیم $(p \Rightarrow q)$ و این گزاره‌ی است که به صورت‌های زیر خوانده می‌شود: (در گزاره شرطی $(p \Rightarrow q)$، p را مقدم و q را تالی می‌نامند) «p نتیجه می دهد q را»، «q از p نتیجه می‌شود»، «اگر p آنگاه q»، «p شرط کافی است برای q» و «q شرط لازم است برای p».

ترکیب شرطی دو گزاره فقط وقتی دارای ارزش نادرست است که مقدم درست و تالیِ نادرست باشد (به عبارت دیگر اگر از یک گزاره‌ی درست، گزاره‌ای نادرست را نتیجه بگیریم ارزش آن گزاره‌ی شرطی نادرست است) جدول زیر گویای این مطلب است:

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

تذکر مهّم: همان طور که در جدول مشاهده می‌کنید در دو حالت آخر که مقدم یعنی p نادرست است ارزش $(p \Rightarrow q)$ درست بوده و به ارزش تالی یعنی q بستگی ندارد و لذا هرگاه در یک گزاره‌ی شرطی به نادرست بودن مقدم پی بردیم بلافاصله نتیجه می‌گیریم که آن گزاره‌ی شرطی همواره دارای ارزش درست بوده، و این حالت را اصطلاحاً «درستی گزاره به انتفای مقدم» می‌گویند.

تذکر مهّم: هرگاه بخواهیم درستی یک گزاره‌ی شرطی مانند $(p \Rightarrow q)$ را اثبات کنیم، فرض می‌کنیم که p درست بوده و با این فرض باید درست بودن q را اثبات کنیم. در واقع اگر p را نادرست فرض کنیم که به انتفای مقدم گزاره همواره درست بوده و به q بستگی پیدا نمی‌کند، پس p را درست فرض کرده و درستی q را اثبات می‌کنیم.

عکس نقیض یک ترکیب شرطی: اگر $(p \Rightarrow q)$ یک ترکیب شرطی و مفروض باشد عکس نقیض آن به صورت $\sim q \Rightarrow \sim p$ تعریف شده و همواره هر گزاره شرطی با عکس نقیض خودش هم ارز است، به عبارت دیگر، $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$ که اثبات این هم ارزی با استفاده از جدول ارزش‌ها بسیار ساده بوده و در جدول زیر مشاهده می‌کنید:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
د	د	ن	ن	د	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د	د

همان طور که ملاحظه می‌کنید ارزش‌های مربوط به $p \Rightarrow q$ و $\sim q \Rightarrow \sim p$ در همه‌ی حالت‌های ممکن با هم یکسان بوده که هم ارزی دو عبارت را نتیجه می‌دهد.

نکته: هرگاه بخواهیم درستی گزاره‌ای شرطی مانند $p \Rightarrow q$ را بررسی کنیم و اثبات درستی q با فرض درستی p برای ما مشکل باشد می‌توانیم درستیِ $\sim q \Rightarrow \sim p$ را که هم ارز با $p \Rightarrow q$ است بررسی کنیم و در واقع با فرض نادرست بودنِ q به نادرست بودنِ p برسیم. به مثال زیر توجه کنید:

حمید رضا امیری

مثال: می‌خواهیم ثابت کنیم «اگر $a^{۲}$ عددی زوج باشد آنگاه a عددی زوج است» اگر بخواهیم با فرض زوج بودن $a^{۲}$ برسیم کار دشوار است. حال درستی عکس نقیض گزاره‌ی فوق را بررسی می‌کنیم، یعنی ثابت می‌کنیم «اگر a فرد باشد آنگاه $a^{۲}$ نیز فرد است»

$$\text{فرد است } a \Rightarrow a = ۲k + ۱ \Rightarrow a^{۲} = ۴k^{۲} + ۴k + ۱$$

$$a^{۲} = ۲(\underbrace{۲k^{۲} + ۲k}_{k'}) + ۱ \Rightarrow a^{۲} = ۲k' + ۱ \Rightarrow \text{فرد است } a^{۲}$$

آیا به نظر شما برهان عکس نقیض نوعی برهان خلف است؟ یا برهان خلف نوعی برهان عکس نقیض است؟

شما در برهان خلف، نقیض حکم، یعنی نقیض q را فرض کرده و به یک تناقض می‌رسید و اعلام می‌کنید پس $(\sim q)$ نمی‌تواند درست باشد بنابراین q درست است و این تناقض که به آن می‌رسیم، هر تناقض با هر اصل یا گزاره‌ی درستی که همواره درستی آن را پذیرفته‌ایم، می‌تواند باشد ولی در برهان عکس نقیض باید از درستی $(\sim q)$ فقط به درستی $(\sim p)$ یعنی به تناقض با فرض اصلی برسیم. پس در واقع برهان عکس نقیض نوعی برهان خلف است.

تذکر: هر گزاره‌ی شرطی مطابق هم ارزی زیر با یک گزاره‌ی فصلی هم ارز است که اثبات هم ارزی نیز در جدول بررسی شده است.

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$$

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$p \Rightarrow q$
د	د	ن	د	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د
ن	ن	د	د	د

نقیض گزاره‌های فصلی و عطفی:

گاهی اوقات نیاز داریم یک ترکیب فصلی یا عطفی را نقیض کنیم. مثلاً نقیض گزاره‌ی «a عضوی از مجموعه‌ی A یا a عضوی از مجموعه B است» چگونه باید بیان شود؟ در اینجا نیاز داریم گزاره‌هایی چون $(p \vee q)$ و $(q \wedge p)$ و $(p \Rightarrow q)$ را نقیض کنیم.

اگر p و q دو گزاره‌ی دلخواه باشند در این صورت داریم:

$$\text{I)} \sim (p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$$

$$\text{II)} \sim (p \wedge q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$$

اثبات I)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$
د	د	ن	ن	د	ن	ن
د	ن	ن	د	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	د	د

اثبات II از طریق جدول ارزش‌ها به عهده‌ی شما!

نتیجه‌ی مهم: با توجه به تبدیل ترکیب شرطی به فصلی و هم ارزی‌های فوق می‌توان به صورت زیر نقیض یک ترکیب شرطی را نیز به دست آورد،

$$\sim (p \Rightarrow q) \equiv \sim (\sim p \vee q) \equiv \sim (\sim p) \wedge \sim q \equiv p \wedge \sim q$$

بنابراین ثابت کردیم:

$$\sim (p \Rightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q)$$

به این مثال توجه کرده و با توجه به مطالب ذکر شده ابتدا

سعی کنید خودتان هر گزاره را نقیض کنید.

مثال: نقیض هر یک از گزاره‌های مرکّبِ زیر را به دست آورید:

(مجموعه اعداد اول را P می‌نامیم)

I) $a \in N \wedge a \notin P$

II) $\sqrt{۲} \notin Q \vee \sqrt{۲} \notin Z$

III) $a^۲ > ۰ \vee a^۲ = ۰$

IV) $x \in A \vee x \in B$

V) $x \in A \wedge x \in B$

VI) $x \in A \Rightarrow x \in B$

VII) $(x \in N \wedge x \in Z) \Rightarrow x = ۰$

VIII) $a \in P \Rightarrow a \in N \wedge a \notin Q'$

IX) $۲^۴ > ۴^۲ \vee ۳^۴ < ۴^۳$

X) $\frac{۱}{۳} < \frac{۲}{۳} \Rightarrow (\frac{۱}{۳})^۶ < (\frac{۲}{۳})^۶$

لازمه‌ی پاسخ صحیح به هر قسمت یادگیری و استفاده از فرمول‌ها و هم ارزی‌های اثبات شده‌ی قبل است پس می‌توان نوشت:

I) $\sim (a \in N \wedge a \notin P) \equiv (a \notin N \vee a \in P)$

II) $\sim (\sqrt{۲} \notin Q \vee \sqrt{۲} \notin Z) \equiv (\sqrt{۲} \in Q \wedge \sqrt{۲} \in Z)$

III) $\sim (a^۲ > ۰ \vee a = ۰) \equiv a^۲ \leq ۰$ (پس باید $a < ۰$ باشد)

IV) $\sim (x \in A \vee x \in B) \equiv (x \notin A \wedge x \notin B)$

V) $\sim (x \in A \wedge x \in B) \equiv (x \notin A \wedge x \notin B)$

VI) $\sim (x \in A \Rightarrow x \in B) \equiv \sim (x \notin A \vee x \notin B)$
$\equiv (x \in A \wedge x \notin B)$

VII) $\sim [(x \in N \wedge x \in Z \Rightarrow x = ۰] \equiv$
$(x \in N \wedge xX \in Z) \wedge x \neq ۰$

(توجه دارید که از رابطه‌ی $\sim (p \Rightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q)$ استفاده کردیم)

VIII) $\sim (a \in P \Rightarrow (a \in N \wedge a \notin Q')) \equiv$
$a \in P \wedge \sim (a \in N \wedge a \notin Q') \equiv a \in P \wedge (a \notin N \vee a \in Q')$

IX) $\sim (۲^۴ > ۴^۲ \vee ۳^۴ < ۴^۳) \equiv ۲^۴ \leq ۴^۲ \wedge ۳^۴ \geq ۴^۳$

X) $\sim \left[(\frac{۱}{۳} < \frac{۲}{۳}) \Rightarrow (\frac{۱}{۳})^۶ < (\frac{۲}{۳})^۶ \right] \equiv (\frac{۱}{۳} < \frac{۲}{۳}) \wedge (\frac{۱}{۳})^۶ \geq (\frac{۲}{۳})^۶$

ان شاءالله در شماره‌ی بعد به بیان ترکیب دو شرطی، نقیض آن‌ها و قوانین و هم ارزی‌های مهّم دیگر خواهیم پرداخت.

مسائل مسابقه ای

۱- در مثلث ABC، $tgA = \frac{۲۲}{۷}$ و ارتفاع رأس A روی ضلع BC دو پاره خط به طول‌های ۳ و ۱۷ واحد جدا می‌کند. مساحت مثلث ABC را به‌دست آورید.

۲- عدد صحیح a را طوری به‌دست آورید که $ax^{۱۷} + bx^{۱۶} + ۱$ بر $x^۲ - x - ۱$ بخش‌پذیر باشد. $(b \in Z)$

آنچه از دوست رسد....

دانش‌آموزان و خوانندگان عزیز مجله‌ی ریاضی برهان.

هر روزنامه‌های پر محتوای شما، شامل، نظرات، پیشنهادها و مقاله‌ها و مسائل ریاضی که می‌فرستید در دفتر مجله به دستمان می‌رسد. از این که نسبت به مقالات و مسائل مجله اظهار نظر می‌کنید، بسیار سپاسگزاریم. اخیراً هیأت تحریریه‌ی مجله، پس از مطالعه‌ی نامه‌های رسیده و بحث و تبادل، پیرامون آنها، تصمیم گرفت که از شماره‌ی بعدی مجله بخش «مسائل برای حل» بار دیگر در فهرست مطالب قرار گیرد تا گامی هر چند کوچک در جهت بالا بردن سطح کیفی درس ریاضی شما برداشته باشیم. همچنین در این شماره مجله دو مسأله مسابقه‌ای را طرح کرده ایم که امیدواریم آن‌ها را حل و پاسخ خود را برای ما ارسال کنید، تا از بین آن‌ها بهترین پاسخ را در مجله چاپ کنیم و شما نیز برنده‌ی مسابقه شوید.

خواهشمندیم پس از مطالعه‌ی این شماره‌ی مجله و شماره‌های قبل نظرات خود را آماده کنید، چون در شماره‌ی آینده‌ی مجله فرم نظرخواهی درباره‌ی مجله را چاپ می‌کنیم تا بتوانیم از نظرات و انتقادها و پیشنهادهای سازنده‌ی شما عزیزان بیشتر استفاده کنیم.

اسامی تعدادی از خوانندگان مجله که برای ما نامه ارسال کرده‌اند:

آقایان: محمد باقر بارزبان و اسدعباسلو (سیرجان)، فرزاد کاظمی (شاهین شهر اصفهان)، آقا یا خانم A.A.M مهندس محمد اسماعیل قربانی (بجنورد)، سیدعلی جاوید تجریشی (تهران)، منصور رجایی (قوچان)، علی گودرزی (بروجرد) محمود اطهری زاده (کاشان)، سید هادی فیاضی (تبریز)، مولود خانی خواه (جوانرود کرمانشاه)، حامد ضیایی آذری (مشهد مقدس)، سیروس دهمامی (تهران) و عبدالصاحب حسنی نژاد (هندیجان خوزستان)

خانم‌ها: مهناز صادقیان (تهران)، سولماز منتظری(تهران). سیدزهرا میری (تهران) و نرگس عصار زادگان (اصفهان)

همکاران محترم آقایان: رحمان کیومرثی (شهرکرد)، احمد احسنت (شیراز)، یعقوب نعمتی (اردبیل) **خانم‌ها:** صدیقه ابراهیمی (شیراز)، فیروزه درخشنده (قائم شهر) و فاطمه ملکی (پیشوای ورامین) از همگی شما برای ارسال مقاله، مسأله و معمّا با راه تشریحی سپاسگزاریم، در صورت امکان از مقاله‌ها و مسائل ارسالی شما عزیزان، پس از تصویب در هیأت تحریریه استفاده خواهیم کرد.

سرکار خانم ساره ظریف (آبادان)

از آن جا که مسائل ارسالی شما می‌تواند برای دانش‌آموزان مفید باشد، دو مسأله از آن‌ها را می‌آوریم:

مسأله ۱. آیا تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\left[\frac{|x|}{|x|+1}\right]$ تابع ثابت است؟

حل. نامساوی $0 \le |x| < |x|+1$ برای هر عدد حقیقی برقرار است، اگر این نامساوی را بر $|x|+1 \ne 0$ تقسیم کنیم:

$$0 \le \frac{|x|}{|x|+1} < 1 \Rightarrow \left[\frac{|x|}{|x|+1}\right] = 0$$

در نتیجه $g(x)=0$ تابع ثابت است.

مسأله ۲: آیا تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x+[x]$ یک به یک است.

حل.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1+[x_1] = x_2+[x_2] \quad (1)$$
$$\Rightarrow [x_1+[x_1]]=[x_2+[x_2]]$$
$$\Rightarrow [x_1]+[x_1]=[x_2]+[x_2]$$
$$\Rightarrow 2[x_1]=2[x_2]$$
$$\Rightarrow [x_1]=[x_2] \quad (2)$$

با توجه به رابطه‌های (۱) و (۲) داریم:

$x_2=x_1$

پس تابع f یک به یک است.

جناب آقای سیدحسین اصولی در مورد حدس شما راجع به این که: «اگر عددی زوج به غیر از صفر را در عدد ۳ ضرب کنیم، عدد زوجی به دست می‌آید که به شکل $3k$ بوده (k زوج) و حداقل یکی از دو عدد قبل یا بعد آن یعنی $3k \pm 1$ اول خواهد بود»، به مثال نقضِ زیر توجه فرمایید.

$3k=(6+8!)$ که k زوج است اما $8!+5$ و $8!+7$ به ترتیب مضرب ۵ و ۷ بوده و اول نمی‌باشند.

پرویز شهریاری

اتحاد و معادله

باز هم چند مساله‌ی نامتعارف

اشاره

در شماره‌های قبل مساله هایی را طرح کردیم که حل آن‌ها منجر به حل معادله‌ها و نامعادله‌های نامتعارف شد، اینک ادامه آن مسائل را در پی می‌آوریم:

مساله‌ی ۲۴. همه‌ی عددهای شش رقمی را پیدا کنید که:

۱. رقم‌های هر عدد با هم فرق داشته باشند، ولی همه‌ی عددهای شش رقمی با همان رقم‌ها ساخته شده باشند؛

۲. هم عددهای شش رقمی و هم مجموع رقم‌های هر کدام از آن‌ها، بر ۱۱ بخش‌پذیر باشند؛

۳. رقم دوم از سمت چپ برابر ۵ و رقم سوم از سمت چپ برابر ۲ باشد.

حل: عدد را به صورت $\overline{x52yzt}$ $(x \neq 0)$ در نظر می‌گیریم. باید داشته باشیم:

$$x+5+2+y+z+t=11n \qquad (1)$$

چون رقم‌های عدد با هم فرق دارند، مجهول x، y، z و t می‌توانند، دست کم مقدارهای ۰، ۱، ۳، ۴ و حداکثر ۶، ۷، ۸ و ۹ را بپذیرند. پس

$$15 \leq 11n \leq 37$$

بنابراین، عدد n می‌تواند برابر یکی از دو عدد ۲ یا ۳ باشد و از معادله‌ی (۱)، دو معادله‌ی زیر به دست می‌آید:

$$x+y+z+t=15 \qquad (2)$$

$$x+y+z+t=26 \qquad (3)$$

عدد باید بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد. یعنی:

$$x-5+2-y+z-t=11m$$

اگر به مقدارهای ممکن برای x، y، z و t توجه کنیم، به دست می‌آید:

$$-19 \leq 11m \leq 13$$

و m می‌تواند یکی از مقدارهای ۱-، ۰، یا ۱ را بپذیرد. با استفاده از این مقدارهای m، به این سه معادله می‌رسیم:

$$x-y+z-t=-8 \qquad (4)$$

$$x-y+z-t=3 \qquad (5)$$

$$x-y+z-t=14 \qquad (6)$$

برای حل مسأله، باید شش دستگاهی را بررسی کرد که از ترکیب هر یک از دو معادله‌ی (۲) و (۳) با هر یک از سه معادله‌ی (۴) و (۵) و (۶) به دست می‌آید. دستگاه‌های شامل معادله‌های (۲) و (۴)، (۳) و (۶)، (۳) و (۵)، (۳) و (۶) جواب ندارند (مجموع دو عدد زوج برابر عددی فرد می‌شود و یا مجموع دو رقم از ۱۸ بالاتر می‌رود). بنابراین تنها دو دستگاه باقی می‌ماند: (۲) و (۵)، و (۳) و (۴).

از دستگاه

$$\begin{cases} x+y+z+t=15 \\ z-y+z-t=3 \end{cases}$$

به دست می‌آید: $x+z=9$ و $y+t=6$.

دیده می‌شود که x می‌تواند یکی از عددهای ۱، ۳، ۶، ۸ و ۹ باشد. اگر $x=3$، آن‌گاه $z=6$ و در نتیجه معادله‌ی $y+t=6$ بدون جواب می‌ماند، زیرا رقم‌ها باید با هم فرق داشته باشند، به همین ترتیب، برای $x=6$ و $z=3$ یا $x=9$ و $z=0$، معادله‌ی دوم جواب ندارد. دو مقدار برای x می‌ماند که برای آن‌ها می‌توان، مقدارهای z، t و y را پیدا کرد:

1) $x=1, z=8, y=0, t=6$

2) $x=1, z=8, y=6, t=0$

3) $x=8, z=1, y=0, t=6$

4) $x=8, z=1, y=6, t=0$

از دستگاه دوم، یعنی

$$\begin{cases} x+y+z+t=۲۶ \\ x-y+z-t=۸ \end{cases}$$

به دست می‌آید: $x+z=۹$ و $y+t=۱۷$.

با استدلالی شبیه حالت پیش، این جواب‌ها پیدا می‌شوند:

۱) $x=۳, z=۶, y=۸, t=۹$

۲) $x=۳, z=۶, y=۹, t=۸$

۳) $x=۶, z=۳, y=۸, t=۹$

۴) $x=۶, z=۳, y=۹, t=۸$

به این ترتیب، مسأله دارای دو گروه چهار جوابی است (و نه هشت جواب):

۱) ۱۵۲۰۸۶, ۱۵۲۶۸۰, ۸۵۲۰۱۶, ۸۵۲۶۱۰

۲) ۳۵۲۸۶۹, ۳۵۲۹۶۸, ۶۵۲۸۳۹, ۶۵۲۹۳۸

هر هشت جواب را با هم نمی‌توان جواب مسأله دانست، زیرا برای نمونه دو عدد ۱۵۲۰۸۶ و ۶۵۲۸۳۹ رقم‌های یکسان ندارند. بنابراین، گروه چهار عددی (۱) یا گروه چهار عددی (۲) را می‌توان جواب مسأله دانست.

مسأله‌ی ۲۵. تابع f با این ضابطه داده شده است:

$f(x)=x^۳+x,\ x\in R$

اگر g تابع معکوس f باشد، این معادله را حل کنید:

$f(x)=g(x)$

حل: برای $x>۰$ نابرابری $f(x)>۰$ برقرار است. بنابراین، بخشی از نمودار تابع f که در ربع اول محورهای مختصات قرار دارد، بالای خط راست $y=x$ واقع است و نمودار g در این ربع؛ که قرینه‌ی نمودار تابع f نسبت به خط راست $y=x$ است، زیر این خط راست واقع می‌شود. در نتیجه، برای $x>۰$ نمودارهای تابع f و g نقطه‌ی مشترکی ندارند.

از سوی دیگر، تابع‌های f و g، تابع‌هایی فردند. یعنی این معادله نمی‌تواند ریشه‌ی منفی داشته باشد.

معادله تنها یک ریشه دارد: $x=۰$. زیرا $f(۰)=۰$ و بنا به تعریف $g(۰)=۰$، بنابراین $f(۰)=g(۰)$.

مسأله‌ی ۲۶. معادله‌ی $\sqrt[۳]{۲-x}+\sqrt{x-۱}=۱$ را حل کنید.

حل: مجهول‌های تازه‌ای انتخاب می‌کنیم:

$y=\sqrt[۳]{۲-x},\ z=\sqrt{x-۱}$

در این صورت، به این دستگاه می‌رسیم:

$y+z=۱, y^۳+x=۲, z^۲+۱=x$

از آن‌جا داریم: $y^۳+z^۲=۱$ و $y+z=۱$.

در معادله‌ی اول $z=۱-y$ قرار می‌دهیم:

$y^۳+y^۲-۲y=۰, y\in\{۰,۱,-۲\}$.

بنابراین، معادله‌ی فرضی سه ریشه دارد:

$x_۱=۱, x_۲=۲, x_۳=۱۰$

مسأله‌ی ۲۷. پارامتر a را طوری پیدا کنید که مجموع توان‌های دوم همه‌ی جواب این معادله، برابر ۴ شود:

$\log_a|x-۲a|+\log_a x=۲$

حل: معادله‌ی مفروض با معادله‌ی $x|x-۲a|=a^۲$ هم‌ارز است که برای حل آن باید ریشه‌های مثبت معادله‌ی $x^۲(x-۲a)^۲=a^۴$ را به دست آورد. معادله‌ی اخیر به این

صورت در می‌آید:

$$(x^2 - 2ax + a^2)(x^2 - 2ax - a^2) = 0$$

چون $a > 0$، در نتیجه این معادله دارای دو جواب مثبت a و $a(1+\sqrt{2})$ است و مجموع توان‌های دوم آن‌ها وقتی برابر ۴ می‌شود که داشته باشیم: $a = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

مسأله‌ی ۲۸. همه‌ی مقدارهای a را پیدا کنید که برای هر کدام از آن‌ها، تعداد ریشه‌های مثبت معادله‌ی

$$\left[(x-a-1)^2 - 2\right](x-a-1)^2 = a^2 - 1$$

بیش از تعداد ریشه‌های منفی آن باشد.

حل: اگر همه‌ی جمله‌ها را به سمت چپ معادله منتقل کنیم. معادله به صورت $f(x).g(x) = 0$ در می‌آید که در آن

$$f(x) = x^2 - 2(a+1)x + a(a+1),$$
$$g(x) = x^2 - 2(a+1)x + a(a+3)$$

سه جمله‌ای $f(x)$ برای $a \geq -1$ ریشه‌های حقیقی دارد. برای $a > 0$ ریشه‌های آن مثبت و برای $-1 < a < 0$ ریشه‌هایی با علامت‌های متفاوت دارد (حالت‌های $a = 0$ و $a = -1$ را جداگانه بررسی می‌کنیم). اگر به همین ترتیب درباره‌ی سه جمله‌ای $g(x)$ استدلال و سپس نتیجه‌ی دو استدلال را با هم مقایسه کنیم، روشن می‌شود که برای $a > 0$ تعداد ریشه‌های مثبت معادله از تعداد ریشه‌های منفی آن بیش‌تر است.

درباره‌ی حالت $a = 0$، $a = 1$، $a = -1$ و $a = -3$، تنها حالت $a = 0$ با شرط مسأله سازگار است. به این ترتیب، به جواب $a \geq 0$ می‌رسیم.

مسأله‌ی ۲۹. اگر α و β، به ترتیب ریشه‌های دو معادله‌ی $2\cos x = \log_{\frac{5}{8}} x$ و $2\sin x = \log_{\frac{5}{8}} x$ باشند، ثابت کنید $\alpha > \beta$.

حل: اگر نمودار تابع‌های $y = 2\sin x$، $y = 2\cos x$ و $y = \log_{\frac{5}{8}} x$ را رسم کنیم، قانع می‌شویم که:

$$\beta \leq \frac{\pi}{6} \leq \alpha$$

اکنون ثابت می‌کنیم، علامت‌های نابرابری به صورت اکید است و برابری نمی‌تواند درست باشد.

برای اثبات نابرابری $\beta < \frac{\pi}{6}$ و $\alpha > \frac{\pi}{6}$، کافی است ثابت کنیم:

$$\log_{\frac{5}{8}} \frac{\pi}{6} < 2\cos\frac{\pi}{6} \quad \text{و} \quad \log_{\frac{5}{8}} \frac{\pi}{6} > 2\sin\frac{\pi}{6}$$

به زبان دیگر، باید ثابت کنیم:

$$1 < \log_{\frac{5}{8}} \frac{\pi}{6} < \sqrt{3} \Rightarrow \frac{5}{8} > \frac{\pi}{6} > \left(\frac{5}{8}\right)^{\sqrt{3}}$$

نابرابری سمت چپ به نابرابری $4\pi < 15$ منجر می‌شود که درست است. نابرابری سمت راست هم $\pi^2 > \frac{125 \times 9}{128}$ می‌شود که باز هم درست است.

مسأله‌ی ۳۰. مطلوب است مجموع توان‌های یازدهم ریشه‌های معادله‌ی $x^3 + x + 1 = 0$

حل: α، β و γ را ریشه‌های معادله‌ی مفروض می‌گیریم، داریم:

$$\alpha^3 = -(\alpha+1) \Rightarrow \alpha^{11} = \alpha^2.(\alpha^3)^3 = \alpha^2[-(\alpha+1)^3]$$

و از آن‌جا

$$\begin{aligned}\alpha^{11} &= -\alpha^5 - 3\alpha^4 - 3\alpha^3 - \alpha^2 \\ &= -(\alpha^3 + \alpha + 1)(\alpha^2 + 3\alpha + 2) + 3\alpha^2 + 5\alpha + 2 \\ &= 3\alpha^2 + 5\alpha + 2\end{aligned}$$

به همین ترتیب:

$$\beta^{11} = 3\beta^2 + 5\beta + 2 \text{ و } \gamma^{11} = 3\gamma^2 + 5\gamma + 2$$

که از آن‌ها به دست می‌آید:

$$\alpha^{11} + \beta^{11} + \gamma^{11} = 3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + 5(\alpha + \beta + \gamma) + 6 = 0$$

زیرا بنا به رابطه‌های ویت (رابطه‌های بین ضریب ریشه‌های معادله) داریم:

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} = 0$$

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= (\alpha + \beta + \gamma)^2 - (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) \\ &= \frac{b^2}{a^2} - 2 \times \frac{c}{a} = 0 - 2 \times 1 = -2\end{aligned}$$

یادداشت

اگر فرض کنیم $s_k = \alpha^k + \beta^k + \gamma^k$ و سه رابطه‌ی $\alpha^3 + \alpha + 1 = 0$، $\beta^3 + \beta + 1 = 0$ و $\gamma^3 + \gamma + 1 = 0$ را به ترتیب در α^k، β^k و γ^k ضرب کنیم، بعد از جمع برابری‌ها، به رابطه‌ی بازگشتی $s_{k+3} + s_{k+1} + s_k = 0$ می‌رسیم که به یاری آن می‌توان مجموع توان‌های مشابه ریشه‌ها را محاسبه کرد:

$$s_0 = \alpha^0 + \beta^0 + \gamma^0 = 3, s_1 = 0, s_2 = -2$$

اکنون می‌توانیم به یاری s_0 و s_1، مقدار s_2 را به دست آوریم:

$$s_2 = -(s_1 + s_0) = -3$$

و به همین ترتیب:

$$s_3 = 2, s_5 = 5, s_6 = 1, s_7 = -7, s_8 = -6,$$
$$s_9 = 6, s_{11} = -(s_9 + s_8) = -(6-6) = 0$$

مسأله‌ی ۳۱. این معادله‌ی مثلثاتی را حل کنید:

$$\sin x(\cos\frac{x}{4} - 2\sin x) + \cos x(1 + \sin\frac{x}{4} - 2\cos x) = 0$$

حل: ضرب‌ها را انجام می‌دهیم. به دست می‌آید:

$$(\sin x\cos\frac{x}{4} + \cos x\sin\frac{x}{2}) - 2\sin^2\frac{x}{2} - 2\cos^2\frac{x}{2} + \cos x = 0$$

که ما را به معادله‌ی $\sin\frac{5x}{4} + \cos x = 2$ می‌رساند. بیش‌ترین مقدار سینوس برابر ۱ و بیش‌ترین مقدار کسینوس هم برابر واحد است. بنابراین، این معادله تنها وقتی برقرار است که دو جمله‌ی سمت چپ برابری، به طور هم‌زمان برابر واحد باشند:

$$\sin\frac{5x}{4} = 1 \text{ و } \cos x = 1$$

که از آن‌ها به دست می‌آید:

$$x = 2\pi \times \frac{4k+1}{5} \text{ و } x = 2\pi n$$

(k و n عددهای درستی هستند). برای این که این دو عدد برابر باشند، باید $\frac{4k+1}{5}$ عدد درستی باشد. هر عدد درست k می‌تواند به یکی از این چند صورت باشد:

$$5m, 5m+1, 5m+2, 5m+3, 5m+4$$

(m عددی درست است) و با آزمایش مستقیم روشن می‌شود که تنها برای $k = 5m + 1$، عدد $\frac{1+4k}{5}$ عددی درست می‌شود. به این ترتیب، جواب معادله چنین است:

$$x = (1+4m)\pi \text{ و } m \in Z$$

مسأله‌ی ۳۲. دو گروه A و B برای مسابقه‌ی شطرنج انتخاب شدند. قرار بر این بود که هر فرد از یک گروه، با هر فرد گروه دیگر در یک دوره بازی شرکت کند. در این صورت، تعداد کل دورهای بازی، چهار برابر تعداد همه‌ی شرکت کنندگان مسابقه‌ی دو گروه می‌شد. ولی به دلیل این که از هر گروه یک

نفر به خاطر بیماری نتوانست در مسابقه شرکت کند، از تعداد دورهای بازی، نسبت به آنچه پیش‌بینی شده بود، ۱۷ دور کم شد. اگر بدانیم، تعداد افراد گروه A از تعداد افراد گروه B کم‌تر بوده است، تعداد شطرنج بازان گروه A را پیدا کنید.

حل: تعداد بازیکنان گروه A را x و تعداد بازیکنان گروه B را y می‌گیریم. در این صورت:

$$\begin{cases} xy = 4(x+y) \\ (x-1)(y-1) = xy - 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 4(x+y) \\ x+y = 18 \end{cases}$$

از آن‌جا داریم: $x + y = 18$ و $xy = 72$. یعنی x و y ریشه‌های این معادله‌اند:

$$t^2 - 18t + 72 = 0 \Rightarrow t_1 = 6, t_2 = 12$$

چون تعداد افراد گروه A از تعداد بازیکنان گروه B کم‌تر است، بنابراین $x = 6$ و $y = 12$.

یادداشت

وقتی با معادله یا دستگاه معادله‌هایی سروکار داشته باشیم که در آن‌ها مجهول‌ها، عددهای درست یا عددهای طبیعی باشند، می‌توان برخی از شرط‌های مسأله را کنار گذاشت. برای نمونه، مسأله‌ی دو گروه شطرنج باز را می‌شد این طور تنظیم کرد:

دو گروه A و B در مسابقه‌ی شطرنج شرکت دارند. قرار بر این است که هر فرد از یک گروه با هر فرد از گروه دیگر مسابقه دهد. اگر تعداد کل دورهای بازی چهار برابر تعداد همه‌ی شرکت‌کنندگان (که عددی زوج است) باشد و بدانیم تعداد افراد گروه A از تعداد افراد گروه B کم‌تر است، تعداد افراد هر گروه را پیدا کنید.

مسأله به حل این معادله، در مجموعه‌ی عددهای درست منجر می‌شود:

$$xy = 4(x+y) \Rightarrow (x-4)(y-4) = 16$$

با این شرط که x+y عددی زوج است و $x<y$.

از آن‌جا که x و y عددهای طبیعی هستند، بنابراین $x-4$ و $y-4$ مثبت هستند و باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} x-4=1 \\ y-4=16 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} x-4=2 \\ y-4=8 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} x-4=4 \\ y-4=4 \end{cases}$$

ولی فقط حالت دوم پذیرفتنی است، زیرا در حالت اول x+y عددی فرد و در حالت سوم دو عدد x و y برابر می‌شوند. به این ترتیب: $x = 6$ و $y = 12$.

۸ـ مقاله فی ان الکرة اوسع الاشکال المجسمة التی احاطاتها متساویة و ان الدائرة اوسع الاشکال المسطّحة التی احاطاتها متساویه

در سال ۱۹۵۹م به زبان فرانسوی مورد بررسی قرار گرفته است و در سال ۱۹۶۶ به زبان روسی ترجمه شده است.

۹ـ قول فی استخراج مسألة عددیة

دوبار توسط ویدمان به زبان آلمانی مورد تحقیق قرار گرفته است.

۱۰ـ مسأله عددیة مجسمة

۱۱ـ مقالة فی المعلومات

در سال ۱۸۳۴ م توسط سدیّو به زبان فرانسوی ترجمه شده است.

۱۲ـ مقاله فی عم المسبّع فی الدائرة

در سال ۱۹۷۹ م توسط رشدی راشد به زبان فرانسوی ترجمه شده و مورد تحقیق قرار گرفته و متن عربی آن نیز به چاپ رسیده است.

۱۳ـ فصل فی مقدمات ضلع المسبع

در سال ۱۹۲۷ م توسط کارل شوی به زبان آلمانی ترجمه شده. ترجمه‌ی انگلیسی آن نیز در «گزارش جشن هزاره‌ی ابن‌هیثم» به چاپ رسیده است.

۱۴ـ مقالة فی التحلیل و الترکیب

۱۵ـ المعاملات فی الحساب

۱۶ـ مقالة فی مسائل التلاقی

در سال ۱۹۲۶ م توسط ویدمان به زبان آلمانی ترجمه شده است.

۱۷ـ مسائل الهندسیة

در سال ۱۹۲۶ توسط کارل شوی به زبان آلمانی ترجمه شده است.

۱۸ـ رسالة فی برکار [پرگار] الدوائر العظام

در سال ۱۹۱۰ م توسط ویدمان به زبان آلمانی بررسی شده است.

۱۹ـ کتاب فی حل شکوک کتاب اقلیدس فی الاصول و شرح معانیه

از این کتاب چندین نسخه‌ی خطی موجود است که از آن جمله است یک نسخه در کتابخانه‌ی ملک تهران به شماره‌ی ۳۴۳۳/۱. این نسخه در سال ۵۵۷ رونویس شده است.

قسمت هایی از این کتاب توسط رزنفلد و یوشکویچ در سال ۱۹۵۳ م به زبان روسی ترجمه شده است.

ابن صلاح همدانی نیز رساله ای درباره‌ی این کتاب نوشته است با عنوان: «قول فی بیان ما وهم ابوعلی بن الهیثم فی کتابه فی الشکوک علی اقلیدس» که نسخه‌ی خطی آن در ایاصوفیا موجود است.

۲۰ـ شرح مصادرات اقلیدس

۲۱ـ رسالة فی قسمة المقدارین المختلفین المذکورین فی الشکل الاول من مقالة العاشرة من کتاب اقلیدس

درباره‌ی این رساله ابن صلاح همدانی رساله ای دارد موسوم به «قول فی ایضاح غلط ابی علی ... فی الشکل الاول من مقالة العاشره من کتاب اقلیدس فی الاصول».

۲۲ـ رساله فی الفوائد و المستنبطات من شرح المصادرات

۲۳ـ مقاله فی قسمة الخط الذی استعمله ارشمیدس فی المقالة الثانیة من کتابه فی الکرة و الاسطوانة

این مقاله در سال ۱۸۶۰ م توسط ویکه به زبان فرانسوی ترجمه شده است.

۲۴ـ رسالة فی شکل بنی موسی

این رساله در سال ۱۳۵۷ هـ‌ق در حیدرآباد دکن به چاپ رسیده است.

۲۵ـ شرح المجسطی

۲۶ـ مقالة فی تمام کتاب المخروطات (سزگین نام این مقاله را نیاورده است).

فیلم این مقاله در کتابخانه‌ی مرکزی دانشگاه تهران موجود است.

* * *

ابن هیثم علاوه بر آثار ریاضی فوق تعداد زیادی کتاب و مقاله درباره‌ی ریاضیات داشته که از بین رفته است.

برگرفته از کتاب زندگی نامه ریاضی دانان دوره‌ی اسلامی / ابوالقاسم قربانی

زیرنویس

1. Alhazen
2. C.Huygens