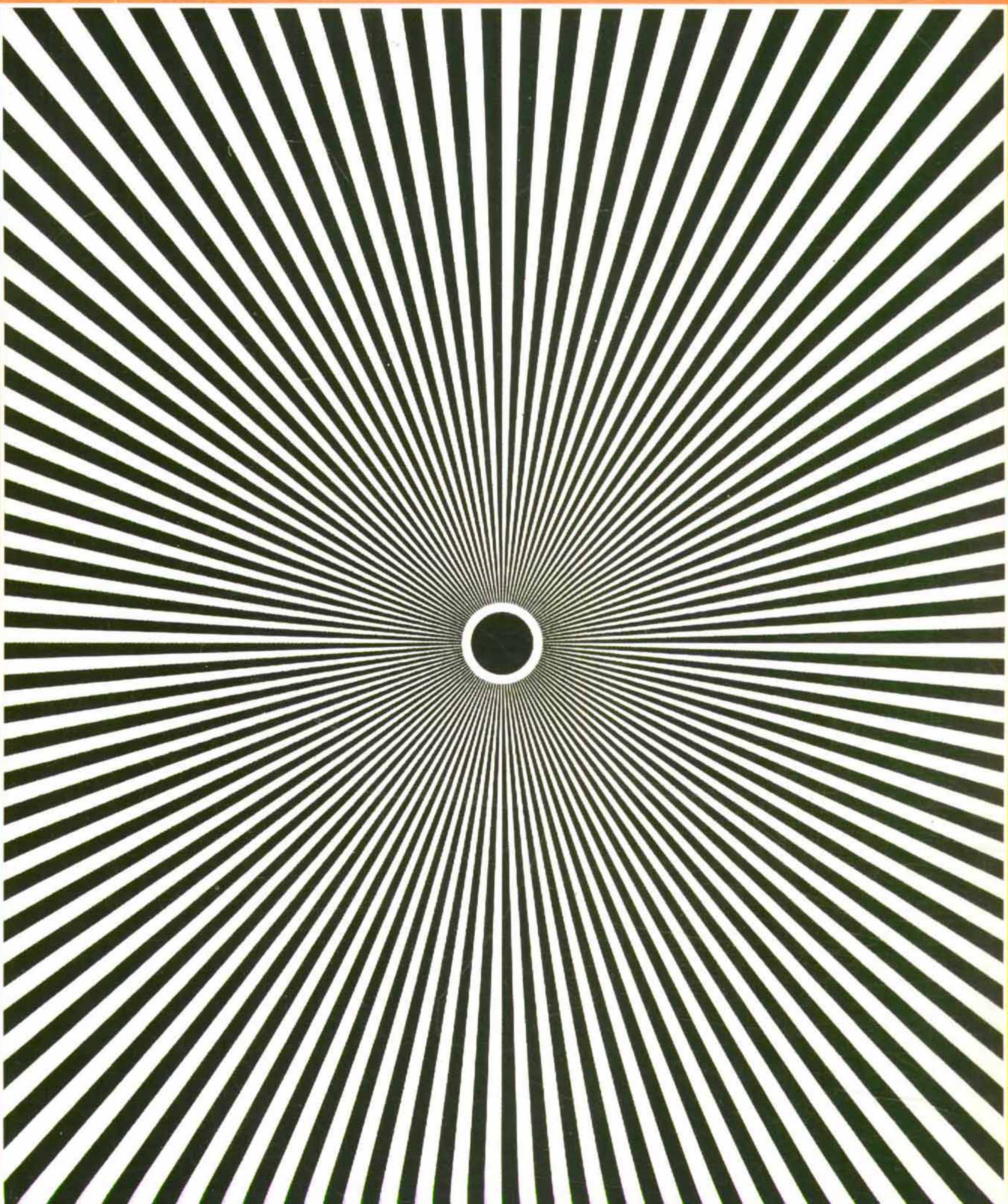
مجله ریاضی

برهان

۲۲

برای دانش آموزان دبیرستان



سال هفتم، شمارهٔ دوم، پاییز ۱۳۷۶، بها ۲۰۰۰ ریال

بسم الله الرحمن الرحیم

انتشارات مدرسه وابسته به وزارت آموزش و پرورش

مطالب این شماره

◆ حرف اوّل ۱
◆ شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۲۲)/ پرویز شهریاری ۲
◆ چند نکته دربارهٔ f(x) ها/احمد قندهاری ۸
◆ تاریخچه مجلات ریاضی در ایران (۲۱)/ غلامرضا یاسی‌پور ۱۳
◆ در حاشیهٔ تابع (قسمت چهارم)/ حمیدرضا امیری ۱۵
◆ درکشویی/ دکتر احمد شرف‌الدین ۱۹
◆ آموزش ترجمهٔ متون ریاضی (۱۸)/ حمیدرضا امیری ۲۵
◆ ریاضیات گسسته (قسمت هفتم)/ ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور ۲۷
◆ آموزش برنامه‌نویسی به زبان پاسکال (۲)/ محمّد رحیم ۳۱
◆ رسم منحنیهای توابع سینوسی و .../ میرشهرام صدر ۳۵
◆ مقالات کوتاه از مجله‌های ریاضی معتبر جهان (۱۹)/ ترجمه غلامرضا یاسی‌پور ۴۳
◆ هم‌ارزی قضیه‌های مقدار میانی و بولتزانو/ محمّدصادق عسگری ۴۶
◆ سرگرمی برای اندیشه‌ورزی/ ترجمهٔ حسن نصیرنیا ۵۲
◆ روشهای عددی برای محاسبهٔ مقدار تقریبی انتگرالهای معیّن/ سیدمحمّدرضا هاشمی موسوی ۵۳
◆ دومین کنفرانس آموزش ریاضی ایران/ میرشهرام صدر ۵۷
◆ میانگین همساز/ پرویز شهریاری ۵۹
◆ مسایل مسابقه‌ای ۶۱
◆ مشاهیر ریاضی جهان ۶۲
◆ تئوری زوج خط / سیامک جعفری ۶۴
◆ تجزیهٔ یک عدد به عوامل اوّل ۶۸
◆ کامپیوتر و شغل آینده/ محسن صدیقی مشکنانی ۷۳
◆ معرفی کتاب ۷۶
◆ مسأله برای حل ۷۷
◆ حل مسأله‌های مسابقه‌ای برهان ۲۰ ۸۱
◆ حل مسأله‌های برهان شماره ۲۱ ۸۲

■ سال هفتم، پاییز ۱۳۷۶، شمارهٔ دوم.

برهان تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:
● نگارش مقالات کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتب ریاضی دبیرستان) ● طرح مسائل کلیدی (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن ● طرح مسائل مسابقه‌ای (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن ● طرح معماهای ریاضی ● نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

■ هیئت تحریریه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافهٔ مقالات آزاد است.
■ مقالات وارده باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.
■ مقالات مجله با رسم‌الخطِ انتشارات مدرسه به چاپ خواهد رسید.
■ مقالات رسیده مسترد نمی‌شود.

برهان هر ۳ ماه یک شماره منتشر می‌شود.

نشانی: خیابان سپهبدقرنی، پل کریمخان‌زند، کوچه شهیدمحمودحقیقت‌طلب، پلاک ۳۶
تلفن: ۹ـ۸۸۱۰۳۲۵، دورنویس (فاکس): ۸۸۲۰۵۹۹ صندوق‌پستی: ۱۴۱۵۵/۱۹۴۹

حرف اوّل

نهر شیری در بهشت

سال قبل در یکی از دبیرستانهای تهران دانش‌آموزی داشتم که پس از گذشت یک ماه از سال تحصیلی کاملاً نظرم را جلب کرد و از همان ابتدا متوجه علاقه و استعداد و پشتکار او شدم. او علاوه بر انجام تکالیف کلاس همیشه بیش از آنچه مورد نیاز کلاس بود مطالعه می‌کرد و حتی درس جلسه بعد را نیز بررسی می‌نمود. سؤالهای او در کلاس دقیق و عمیق بود و به سؤالهای من نیز همیشه پاسخ صحیح می‌داد. در امتحانها تمیزترین و زیباترین ورقهٔ امتحانی از ایشان بود. مسلّم و عادلانه است که او برای من با بقیه شاگردهای کلاس فرق داشته باشد و برایش احترام و ارزش و پاداش مخصوصی قایل شوم. این دانش‌آموز، علاوه بر وظایفی که برای او در حکم واجبات بود اعمال دیگری که برایش حکم مستحبات را داشت نیز به نحو احسن انجام می‌داد و همین امر باعث پیشرفت و ارتقاء وی می‌گشت.

اگر انجام یک سری وظایف غیرواجب از طرف یک دانش‌آموز در نظر مربّی او باارزش جلوه کرده، آیا در نزد خالق یکتا و ربّ‌العالمین که همه چیز ما از اوست، بندگان سخت‌کوش و متّقی نسبت به دیگر بندگانش که فقط به انجام واجبات بسنده می‌کنند مساوی هستند؟ آیا در نظر حضرت حق پاداش مؤمنی که سعی در انجام و اقامهٔ مستحبات دارد با پاداش مؤمنی که پا را از حد واجبات فراتر نمی‌گذارد فرقی ندارد؟

عزیزان دانش‌آموز! خداوند واجبات را برای همه و مستحبات را نیز برای همه مسلمین قرار داده است، اما مستحبات را فقط آنها که قصد تقرّب به درگاه الهی را دارند انجام داده و از طریق آن موجبات خشنودی خالق و رشد و کمال معنوی خود را فراهم می‌آورند.

در هر سال ماهها و ایامی هستند که این مستحبات از جانب خداوند و توسط پیامبر(ص) و معصومین علیهم‌السلام بیشتر توصیه شده و نیز عبادتهای مخصوصی درنظر گرفته شده که انجام آنها در این ماهها و ایام بیشتر مورد نظر حضرت پروردگار است.

از جمله این ماهها سه ماه رجب[1]، شعبان و رمضان است که در پیش داریم، فراموش نکنیم که بزرگان دین و اولیاء خدا و حتّی بزرگانِ علم همچون فارابی و ابن‌سینا همواره بر انجام مستحبات تأکید داشته و خود عامل به آنها بودند. عزیزان، این ماهها، ماههای سازندگی، خودسازی و آمادگی برای حرکت به سوی ا... است، این فرصتها را غنیمت بشمارید و از آنها استفاده کنید.

والسلام ـ سردبیر

۱- رَجَبْ نام نهرِ شیری است در بهشت.

شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۲۲)

● پرویز شهریاری

IV ساختمان سایهٔ یک جسم فضایی بر صفحه. اگر بخواهیم این عنوان «فیزیکی» را ــ که به ظاهر به مبحث نور مربوط می‌شود ــ به زبان ریاضی درآوریم، باید بگوییم: **«مسأله‌هایی دربارهٔ تصویر یک شکل فضایی بر صفحه»**.

در واقع، همان‌طور که از فیزیک می‌دانیم، نور روی خط راست حرکت می‌کند؛ بنابراین، اگر نور از نقطهٔ S بر جسم بتابد (سرچشمهٔ نور را برای سادگی کار، یک نقطه به حساب می‌آوریم)، برای پیدا کردن سایهٔ جسم بر صفحه، باید از نقطهٔ S به همهٔ نقطه‌های جسم وصل کنیم و ادامه دهیم تا صفحه را قطع کنند: مجموعهٔ نقطه‌هایی که روی صفحه به‌دست می‌آید، سایهٔ جسم را تشکیل می‌دهد. این روش ساختن سایه را، در هندسه، **تصویر مرکزی جسم بر صفحه**، و نقطهٔ S را، **مرکز تصویر** گویند.

برای پیدا کردن سایه جسم بر صفحه، لازم نیست همهٔ نیم‌خط‌های راستی را که از S و نقطه‌های جسم گذشته‌اند، رسم کنیم. برای پیدا کردن سایه، کافی است بتوانیم دورهٔ آن را تشخیص دهیم.

دشواریهایی که ممکن است در عمل پیدا شود، مربوط به این است که: **کدام نیم‌خط‌های راست را، برای تشخیص دورهٔ سایه، باید رسم کرد؟**

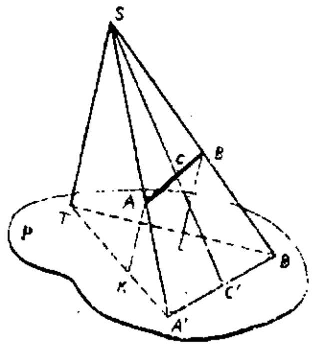
مسأله‌های مربوط به سایه، بیش از همه، در دو مورد ممکن است دشواری ایجاد کند: ۱) پیدا کردن شکل سایه و ۲) محاسبهٔ برخی از عنصرهای آن (مثل محاسبهٔ مساحت سایه). دشواری مربوط به محاسبه را، مثل حالت‌مقطع، باید ناشی از دشواری حل مسأله‌های فضایی و کاربرد مثلثات در آنها دانست، ولی دشواری مربوط به شکل سایه را، باید با تجسم فضایی، همراه با استدلال منطقی برطرف کرد.

در آغاز، به ساده‌ترین مسأله از این‌گونه، یعنی سایهٔ یک پاره‌خط راست می‌پردازیم.

مسألهٔ ۱۵. پاره‌خط راست AB، به وسیلهٔ نقطهٔ نورانی

S روشن شده است و می‌دانیم، نقطهٔ S، نسبت به صفحهٔ P، بالای نقطه‌های A و B واقع است. پاره‌خط راست AB، چه سایه‌ای روی صفحهٔ P می‌اندازد؟

با توجه به موقعیت نقطه‌های S، A و B، نیم‌خط‌های راست SA و SB، صفحه P را در نقطه‌هایی مثل 'A و 'B قطع می‌کنند. روشن است، پاره‌خط راست 'A'B، همان سایهٔ



شکل ۱۷

پاره‌خط راست AB است. اثبات این حکم دشوار نیست: هر خط راستی که در درون مثلث 'SA'B، طوری رسم شود که از رأس S بگذرد، پاره‌خط‌های راست AB و 'A'B را به‌ترتیب، در نقطه‌هایی مثل C و 'C قطع می‌کند که در ضمن، 'C سایهٔ C است. از این‌جا نتیجه می‌شود که: سایهٔ هر نقطه‌ای از پاره‌خط راست AB، بر 'A'B قرار می‌گیرد و برعکس، هر نقطه‌ای از پاره‌خط راست 'A'B، سایهٔ نقطه‌ای از AB است.

برای دقیقتر شدن مطلب، باید نکته‌ای را به آن چه گفته‌ایم، اضافه کنیم: ما نقطه‌های 'A و 'B را جدا از هم در نظر گرفتیم و در این‌باره سکوت کردیم که، اگر S، A و B روی یک خط راست باشند، آن وقت 'A و 'B دو نقطهٔ متمایز نخواهند بود. در این حالت، سایهٔ پاره‌خط راست AB، تنها همان نقطهٔ 'A خواهد بود، یعنی سایهٔ پاره‌خط راست، به یک نقطه تبدیل می‌شود.

برای پیدا کردن سایهٔ پاره‌خط راست، به پاره‌خط‌های راست ST، AK و BL نیازی نیست (در شکل ۱۷، این پاره‌خط‌های راست بر صفحه P عمودند). ولی اگر بخواهیم محاسبه‌ای انجام دهیم، این پاره‌خط‌های راست می‌توانند سودمند باشند. خودتان ثابت کنید، نقطهٔ K روی پاره‌خط راست 'TA و نقطهٔ L روی پاره‌خط راست 'TB قرار دارند. در ضمن برای دو حالت دیگر هم، خودتان شکل را رسم کنید:

۱) حالتی که فاصلهٔ نقطهٔ S از صفحهٔ P، مقداری بین فاصله‌های A و B از P باشد؛ و ۲) وقتی که فاصلهٔ ST، از دو فاصلهٔ SK و SL کوچکتر باشد.

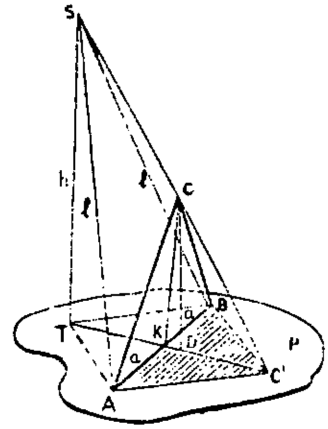
با توجه به مسألهٔ ۱۵، روشن می‌شود که، سایهٔ هر مثلث، مثلث دیگری است که، ضلعهای آن، سایهٔ ضلعهای متناظر خود در مثلث اصلی است؛ تنها در حالتی که نقطهٔ S، روی صفحهٔ مثلث باشد، سایهٔ مثلث، به صورت یک پاره‌خط راست درمی‌آید. [در این‌جا، هر وقت از سایهٔ یک جسم صحبت کنیم، فرض بر این است که سرچشمهٔ نور (که به جسم و به صفحه می‌تابد) طوری است که سایه، بخش محدودی از صفحه را گرفته است.]

به گزارهٔ شرطی مهم زیر هم توجه کنیم: اگر پاره‌خط راست AB، موازی صفحهٔ P باشد، سایهٔ آن، 'A'B هم، موازی AB خواهد بود؛ در این حالت، صفحهٔ 'SA'B، از پاره‌خط راست AB (که موازی صفحهٔ P است) می‌گذرد و بنابراین، صفحهٔ P را در خط راستی موازی AB قطع می‌کند. از این‌جا نتیجه می‌شود که: سایهٔ هر متوازی‌الاضلاع بر صفحه‌ای که از یک ضلع دلخواه آن می‌گذرد، یک ذوزنقه است، به جز در حالتی که سرچشمهٔ نور، بر صفحهٔ متوازی الاضلاع واقع باشد (در این حالت، سایه، به یک پاره‌خط راست تبدیل می‌شود).

مسأله‌ای می‌آوریم تا با دستگیرهٔ آن روشن کنیم، در این‌گونه موردها، چگونه باید به محاسبه پرداخت. ضمن حل مسأله، به اثبات حکمهای هندسی نمی‌پردازیم، ولی طبیعی است، برای حل کامل مسأله، باید همهٔ این حکمها ثابت شوند.

مسألهٔ ۱۶: قاعدهٔ AB از مثلث متساوی‌الساقین ABC، بر صفحهٔ P واقع است و طولی برابر $2a$ دارد. در ضمن می‌دانیم، مقدار زاویه C (زاویهٔ رأس مثلث) برابر است با 2α و صفحهٔ مثلث با صفحهٔ P، زاویه‌ای برابر β می‌سازد.

مثلث، به وسیلهٔ نقطهٔ S روشن می‌شود که به فاصلهٔ h از صفحهٔ P و در بالای رأس C و به فاصلهٔ l از دو نقطهٔ A و B قرار دارد. مساحت سایهٔ مثلث ABC را، بر صفحهٔ P، پیدا کنید (شکل ۱۸).



شکل ۱۸

پاره‌خطهای راست ST و CD را، عمود بر صفحهٔ P، رسم می‌کنیم. از برابری طولهای دو پاره‌خط راست SA و SB نتیجه می‌شود که، خط راست TD از نقطهٔ K، وسط قاعدهٔ AB، و همچنین، از نقطهٔ C′، سایهٔ C، می‌گذرد (هر دو حکم را؛ به طور جداگانه، خودتان ثابت کنید). به جز این، روشن است که، زاویهٔ CKD، زاویهٔ دو وجهی بین صفحهٔ مثلث ABC و صفحهٔ P است و، بنابراین $\widehat{CKD}=\beta$.

سایهٔ مثلث ABC، یعنی ABC′ ، یک مثلث متساوی‌الساقین است و برای حل مسأله، باید طول ارتفاع آن، KC′ را پیدا کرد. از تشابه دو مثلث STC′ و CDC′ به دست می‌آید:

$$\frac{|CD|}{|DC'|}=\frac{|ST|}{|TK|+|KD|+|DC|}$$

که از آن محاسبه می‌شود:

$$|DC'|=\frac{|CD|(|TK|+|KD|)}{|ST|-|CD|}$$

طول پاره‌خطهای راست CD و KD، از مثلث CKD، محاسبه می‌شوند:

$$|CD|=|CK|.\sin\beta=a\cot g\alpha\ \sin\beta;$$

$$|DK|=a\cot g\alpha\ \cos\beta$$

از طرف دیگر، از مثلثهای ATK و ATS به‌دست می‌آید:

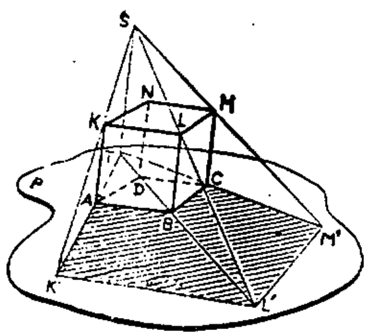
$$|TK|^2=|TA|^2-|AK|^2=l^2-h^2-a^2$$

با قرار دادن مقدارهایی که برای طول پاره‌خطهای راست CD، KD و TK پیدا کردیم، مقدار طول پاره‌خط راست DC′ و، سپس،

$$|KC'|=|KD|+|DC'|$$

به دست می‌آید. پاسخ نهایی، به اندازهٔ کافی طولانی است، ولی پیدا کردن آن دشوار نیست.

ساختن سایهٔ چند وجهی‌ها، دشواری عمده‌ای، در مقایسه با ساختن تصویر قائم آنها، پیدا نمی‌کند. به شکل ۱۹ توجه کنید:



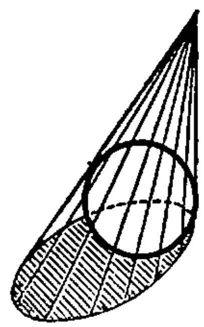
شکل ۱۹

قاعدهٔ ABCD از مکعب ABCDKLMN روی صفحهٔ P قرار دارد، نقطهٔ S، سرچشمهٔ نور را روی صفحهٔ قطری مکعب (صفحه‌ای که از مربع NLBD می‌گذرد) طوری انتخاب کرده‌ایم که تصویر قائم S بر P، یعنی نقطهٔ T، در بیرون قاعدهٔ مکعب قرار گیرد. سایهٔ چنین مکعبی خیلی ساده به دست می‌آید: روشن است، این سایه، از سایه‌های دو وجهی AKLB و BLMC به‌دست می‌آید و از دو ذوزنقه تشکیل شده است. برای این که، به عنوان نمونه، ذوزنقهٔ ABL′K′ را، با دقت هندسی، پیدا کنیم، باید عمود ST را بر صفحهٔ قاعدهٔ مکعب در نظر بگیریم،

آن‌وقت نقطهٔ K'، به عنوان نقطهٔ برخورد خطهای راست TA و SK به‌دست می‌آید. به همین ترتیب، نقطهٔ L'، در نقطهٔ برخورد خطهای راست TB و SL قرار دارد (هر یک از این دو حکم، نیازمند اثبات است؛ خودتان ثابت کنید). این ساختمان هندسی، بی‌تردید، برای محاسبهٔ عنصرهای سایه، مثل مساحت آن، به درد می‌خورد. اگر موضع سرچشمهٔ نور معین باشد (به عنوان مثال، با معلوم بودن طول پاره‌خطهای راست ST و TD)، با توجه به این ساختمان هندسی، می‌توان طول سایهٔ هر یک از پاره‌خطهای راست افقی و قائم را پیدا کرد (که در واقع، همان طول ضلعهای ذوزنقه است) و، سپس، مساحت را بر حسب طول ضلعها به‌دست آورد (خودتان، حل مسأله را تمام کنید).

وقتی با سایهٔ جسمهای گرد سر و کار داشته باشیم، دشواری، به‌گونه دیگری پدید می‌آید. در این‌گونه مسأله‌ها، با مفهوم مماس بر جسم برخورد می‌کنیم. در واقع، اگر سرچشمهٔ نور، کره‌ای را که بر صفحه قرار گرفته است، روشن‌کند، برای پیدا کردن دورهٔ سایه، باید پرتوهایی از نور را در نظر گرفت که، تنها در یک نقطه، با کره مشترک باشند، یعنی نیم‌خطهای راستی را که بر کره مماس‌اند (شکل ۲۰) و این به بحثی از هندسهٔ فضایی مربوط می‌شود که از برنامهٔ دبیرستانی بیرون است.

به همین مناسبت، این مسأله را تنها در حالت سادهٔ آن، وقتی که S (سرچشمهٔ نور)، درست در بالای مرکز کره قرار گرفته باشد، بررسی می‌کنیم. در این حالت، مماسهایی که از S، بر

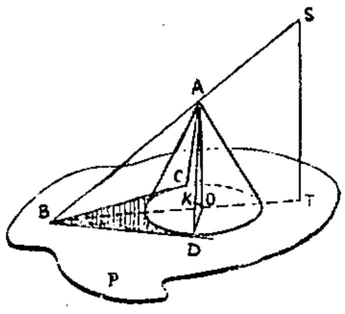


شکل ۲۰

سطح کره رسم شوند، مولدهای یک مخروط را تشکیل می‌دهند و، روشن است که سایهٔ آن، به‌صورت یک دایره درمی‌آید.

تنها یادآوری می‌کنیم، اگر فاصلهٔ نقطهٔ S از صفحه، بزرگتر از قطر کره باشد، سایهٔ آن بر صفحه به صورت بیضی درمی‌آید؛ اگر فاصلهٔ S از صفحه، برابر قطر کره باشد، سایهٔ آن، بخشی نامتناهی از صفحه را فرا می‌گیرد، که در داخل یک سهمی قرار گرفته است. و اگر فاصلهٔ S از صفحه، کوچکتر از قطر دایره باشد، سایهٔ کره در درون شاخه‌های یک هذلولی واقع می‌شود؛ این مطلب را در هندسهٔ تحلیلی ثابت می‌کنند. بیضی، سهمی و هذلولی، سه حالت مختلف از مقطعهای مخروطی هستند.

مسأله ۱۷. قاعدهٔ مخروط قائمی، بر یک صفحه قرار دارد. شعاع قاعدهٔ مخروط برابر ۱ متر و ارتفاع مخروط برابر ۲ متر است. سرچشمهٔ نور، در ۴ متری صفحه، طوری قرار گرفته است که، فاصلهٔ پای عمودی که از آن‌جا بر صفحه رسم شده است تا مرکز قاعدهٔ مخروط، برابر ۲ متر است. مساحت سایهٔ مخروط بر صفحه را، بدون در نظر گرفتن قاعدهٔ مخروط، پیدا کنید (شکل ۲۱).



شکل ۲۱

قبل از هر چیز یادآوری می‌کنیم، اگر OK بر مولد AD عمود باشد، صفحه‌ای که از AD بگذرد و بر OK عمود باشد، جز نقطه‌های واقع بر AD، نقطهٔ مشترک دیگری با سطح مخروطی ندارد. بنابراین، هیچ خط راستی از این صفحه، به جز خط راست AD، نمی‌تواند بیش از یک نقطهٔ مشترک با سطح مخروطی داشته باشد.

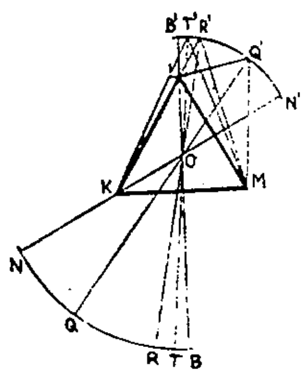
اکنون از نقطهٔ B، مماسهای BC و BD را بر دایرهٔ قاعدهٔ

مخروط رسم می‌کنیم. در این صورت، خط BD بر DO عمود می‌شود و درنتیجه، خط راست BD، بر صفحهٔ AOD عمود است. بنابراین BD بر OK هم عمود می‌شود. چون، بنابر فرض، OK بر DA عمود است، بنابراین OK بر صفحهٔ ABD عمود می‌شود. یعنی، صفحهٔ ABD از همان نوعی است که، در آغاز حل، از آن صحبت کردیم. به این ترتیب، هر نیم خط راستی که از نقطهٔ S روی این صفحه رسم شود، بر سطح مخروطی مماس خواهد بود و بنابراین، مرز سایه به‌وسیلهٔ همین نیم‌خط راست معین می‌شود، یعنی این مرز، بر مماس BD منطبق است. به همین ترتیب، مرز دیگر سایه، یعنی BC هم معین می‌شود.

به این ترتیب، سایهٔ مخروط، شکلی است که به دو پاره‌خط راست BD و BC و کمان کوچکتر CD محدود شده است. خودتان مساحت این شکل را پیدا کنید.

در پایان مسأله‌ای را می‌آوریم که، در آن، سرچشمهٔ نور، جابه‌جا می‌شود و می‌خواهیم، حرکت سایه را دنبال کنیم.

مسأله ۱۸. چهار وجهی منتظمی روی صفحهٔ P قرار دارد. چشمهٔ نور S، روی محیط دایره‌ای، که بر صفحه‌ای موازی P واقع است، حرکت می‌کند. مرکز دایره، روی ارتفاع هرم قرار دارد. بزرگی شعاع دایره چنان است که، از هر نقطهٔ واقع بر محیط آن، دست‌کم، یکی از ضلعهای قاعدهٔ هرم دیده نمی‌شود. ثابت کنید، کمترین مساحت سایه، وقتی به‌دست می‌آید که نقطهٔ S، بر صفحهٔ یکی از وجه‌های جانبی هرم قرار گیرد.



شکل ۲۲

این مسأله را، بدون رسم شکل فضایی هم، می‌توان حل کرد. به سادگی می‌توان تصور کرد، اگر از بالا نگاه کنیم، تصویری شبیه شکل ۲۲ دیده می‌شود: در این شکل، O رأس هرم و دایره π'، دایره‌ای است که، سایهٔ رأس هرم، ضمن حرکت S، روی آن حرکت می‌کند (حرکت S روی دایره π است؛ در شکل، دایرهٔ π در پایین و دایرهٔ π' در بالا قرار گرفته است).

فرض کنیم، صفحه‌هایی که از ارتفاع هرم و یکی از یالهای OK و OL می‌گذرند، به ترتیب، دایرهٔ π را در نقطه‌های N و B قطع کنند. با توجه به تقارن، روشن است که، کافی است، حرکت S را، تنها روی کمان NB مورد بررسی قرار دهیم.

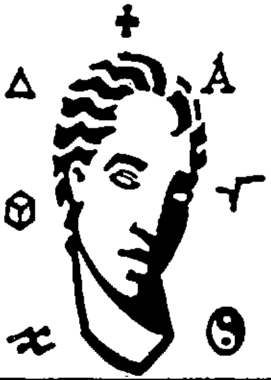
اکنون فرض کنید، نقطهٔ S، روی محیط دایرهٔ π، از N به طرف نقطهٔ B حرکت می‌کند. ضمن این حرکت، سایهٔ رأس هم از N' به طرف نقطهٔ B' جابه‌جا می‌شود.

R' را نقطه‌ای از محیط دایرهٔ π' می‌گیریم که بر خط راست KL واقع باشد و R را، نقطهٔ متناظر آن از S، فرض می‌کنیم. نقطهٔ R بر خط راست OR' قرار دارد و، نقطه‌های O و R'، روی وجه OKL واقع‌اند. بنابراین، نقطهٔ R هم روی صفحهٔ OKL قرار می‌گیرد. به این ترتیب، اگر نقطهٔ S، در نقطه‌ای مثل Q، بین N و R قرار گیرد (و از آن جمله، خود نقطه‌های N و R)، از آن‌جا، تنها یک ضلع LM از قاعدهٔ هرم دیده نمی‌شود و، سایهٔ هرم، به صورت مثلث $LQ'M$ درمی‌آید. وقتی حرکت S، از N به طرف R باشد، مساحت این مثلث، رو به کاهش می‌رود، زیرا قاعدهٔ مثلث، یعنی LM، ثابت می‌ماند و ارتفاع آن، به روشنی، کوچک و کوچکتر می‌شود.

اگر نقطهٔ S، در نقطه‌ای مثل T، بین R و B باشد، از آن‌جا، دو ضلع KL و LM، از قاعدهٔ هرم، دیده نمی‌شوند. بنابراین سایهٔ هرم، به‌صورت چهارضلعی $T'KLM$ درمی‌آید. مثلث KLM، با اضافه شدن این سایه به آن، به مثلث $T'KM$ تبدیل می‌شود. مساحت مثلث $T'KM$، وقتی نقطهٔ S از R به سمت B می‌رود، بزرگتر می‌شود، زیرا قاعدهٔ مثلث ثابت می‌ماند و ارتفاع آن روبه افزایش است. بنابراین، روشن است که، ضمن این

حرکت، مساحت چهار ضلعی T'KLM هم ترقی می‌کند، زیرا اختلاف مساحت این چهارضلعی با مساحت مثلث T'KM مقدار ثابتی است (برابر با مساحت قاعدهٔ هرم).

به این ترتیب، وقتی نقطهٔ S، از N به طرف R می‌رود، مساحت سایه کم می‌شود و، وقتی از R به طرف B می‌رود، این مساحت زیاد می‌شود. یعنی، کمترین مقدار مساحت سایه، وقتی به دست می‌آید که، چشمهٔ نور، در نقطهٔ R، یعنی روی وجه OKL باشد.



تفریح اندیشه ۱

لوبیاهای جهندهٔ مکزیکی

دوستم سه قوطی یک شکل و شش لوبیای جهنده ـ سه قرمز و سه سیاه ـ در کنارش گذاشته بود، و هنگامی که پشتم به او بود در هر قوطی دو لوبیا قرار داد و اولی را با برچسب «ق ـ س» (به‌جای قرمز ـ سیاه)، دومی را با برچسب «ق ـ ق»، و آخری را با برچسب «س ـ س» مشخص کرد، و در حالی که آنها را مقابل من می‌گذاشت، گفت: هیچ‌یک از این قوطیها دارای برچسب درست نیست. اجازه داری از هر قوطی که انتخاب می‌کنی، هر بار یک لوبیا ـ البته بدون نگاه کردن به داخل قوطی ـ برداری. مسأله‌ای که برای تو مطرح کرده‌ام این است که مشخص کنی در هر قوطی کدام لوبیاها قرار دارند. این را هم به‌خاطر داشته باش که مجاز نیستی بیش از حد لزوم لوبیا از قوطیها بیرون بیاوری.

پس از چند دقیقه فکر کردن گفتم: حلش کردم، خیلی ساده بود!

دوستم که از حرفم اصلاً تعجب نکرده بود گفت: حالا مسأله را به طریق دیگری طرح می‌کنم.

سپس برچسبها را از قوطیها برداشت و دو لوبیای قرمز در قوطی اول، دو لوبیای سیاه در قوطی دوم، و یک لوبیای قرمز و یک لوبیای سیاه در قوطی سوم قرار داد، و بعد از بستن در جعبه‌ها جای آنها را جلوی من عوض کرد، و گفت: هر یک از قوطیها را که می‌خواهی بردار و یک لوبیا از آن بیرون بیاور.

یک لوبیای قرمز بیرون آوردم.

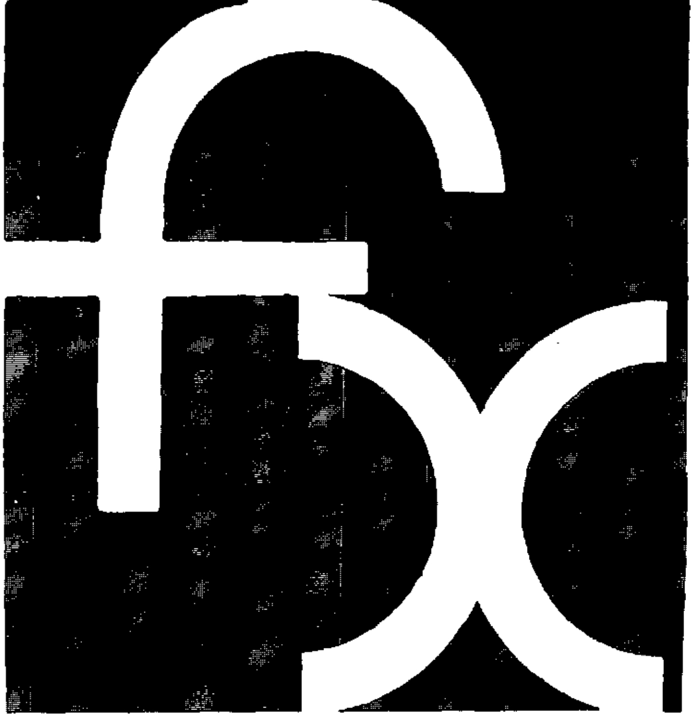
دوستم پرسید: احتمال اینکه دومین لوبیای واقع در قوطی‌ای که انتخاب کرده‌ای نیز قرمز باشد چیست؟

با صدای بلند استدلال کردم: لوبیای قرمزی که بیرون آوردم باید یا از قوطی «قرمز ـ قرمز» یا از قوطی «قرمز ـ سیاه» باشد، و از آنجا که احتمال انتخاب هر یک از قوطیها دقیقاً یکی است، احتمال اینکه لوبیای دوم نیز قرمز باشد پنجاه ـ پنجاه است.

و اضافه کردم: این یکی نیز بسیار آسان بود.

دوستم با لبخند گفت: خیر، دوست عزیز آسان نیست، مشکل است.

جواب در صفحهٔ ۸۸



چند نکته درباره $f(x)$ها

• احمد قندهاری

هر عبارت بر حسب x را می‌توان با $f(x)$ نشان داد[1].

به عنوان مثال: $f(x)=2x-4$، $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$، $f(x)=\sqrt{x^2-1}$، $f(x)=\sin^2 x-1$، $f(x)=\mathrm{Arctan}\,x$ و...

بحث این مقاله در مورد انواع $f(x)$ها است و می‌خواهیم درباره پنج مورد اساسی مربوط به $f(x)$ها مطالبی را به شرح زیر عنوان کنیم:

۱ـ فرض کنیم $f(x)$ معلوم است، می‌خواهیم $f(h(x))$ را بیابیم.

۲ـ فرض کنیم $f(g(x))$ معلوم است، می‌خواهیم $f(x)$ را بیابیم.

۳ـ رابطه‌ای مانند $af(h(x))+bf(t(x))=g(x)$ مفروض است. می‌خواهیم $f(x)$ را پیدا کنیم.

۴ـ فرض کنیم $f(x)$ و $f(g(x))$ معلوم است، می‌خواهیم $g(x)$ را پیدا کنیم.

۵ـ فرض کنیم $f(x)$ و $g(f(x))$ معلوم است، می‌خواهیم $g(x)$ را پیدا کنیم. حال به توضیح و تشریح هریک از موارد پنج‌گانه گفته شده می‌پردازیم. برای آنکه مطلب بهتر به خاطر بماند، این پنج مورد را به صورتهای زیر نام‌گذاری می‌کنیم:

۱ـ مسأله اصلی $f(x)$:

یعنی $f(x)$ معلوم است، می‌خواهیم $f(h(x))$ را محاسبه کنیم. بدیهی است برای محاسبه $f(h(x))$ باید در تساوی $f(x)$ به جای هر x، $h(x)$ را قرار دهیم. توجه کنید، این عمل یک جایگذاری است، به معنی این که $h(x)$ با x برابر نمی‌باشد.

مثال (۱): اگر $f(x)=3x-4x^3$، آن‌گاه $f(\sin\alpha)$ را بیابید.

حل: باید در تساوی $f(x)$ به جای هر x، $\sin\alpha$ را قرار دهیم:

$$\Rightarrow f(\sin\alpha)=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$$

اگر کمی دقّت کنیم، با توجه به فرمول:

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$$

می‌توان نوشت:

$$f(\sin\alpha)=\sin 3\alpha$$

مثال (۲): اگر $f(x)=x^5$، آن‌گاه $f(f(f(x)))$ را بیابید.

حل: محاسبه $f(f(x))$ چنین است که باید در تساوی $f(x)$، به جای هر x، $f(x)$ را قرار دهیم، $f(f(x))$ را $h(x)$ می‌نامیم.

$$h(x)=f(f(x))=(x^5)^5=x^{25}$$

$$f(f(f(x)))=f(h(x))=f(x^{25})=(x^{25})^5=x^{125}$$

۱ـ f اوّل کلمه function است که به‌طور معمول به عنوان ضابطه تابعی از x به‌کار می‌رود.

نتیجه:

$$f(x)=x^n \Rightarrow \underbrace{fff\cdots f(x)}_{\text{مرتبه } m}=x^{n^m}$$
$$n\in N$$

مثال(۳): اگر $x\neq 1$ ، $f(x)=\frac{1}{1-x}$ ، آن‌گاه $f(f(\frac{1}{x}))$ ، $(x\neq 0)$ را بیابید.

حل: ابتدا $f(\frac{1}{x})$ را $h(x)$ می‌نامیم و آن را تشکیل می‌دهیم :

$$h(x)=f(\frac{1}{x})=\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=\frac{1}{\frac{x-1}{x}}=\frac{x}{x-1}$$

سپس $f(f(\frac{1}{x}))$ که همان $f(h(x))$ است را تشکیل می‌دهیم :

$$f(f(\frac{1}{x}))=h(f(x))=f(\frac{x}{x-1})=\frac{1}{1-\frac{x}{x-1}}$$

$$=\frac{1}{\frac{x-1-x}{x-1}}\Rightarrow f(f(\frac{1}{x}))=1-x$$

در سه مثال ذکر شده، $f(x)$ شامل یک متغیر x بود، ولی ممکن است fشامل چند متغیر باشد که آن را به صورتهای زیر نشان می‌دهیم :

$f(x,y,z,...)$ ، $f(x,y,z)$ ، $f(x,y)$

به مثالهای زیر دقت کنید :

مثال(۴): اگر $f(x,y)=x^2+4xy$ ، آن‌گاه $f(\sin\alpha,\cos\alpha)$ را بیابید.

حل: برای ساختن $f(\sin\alpha,\cos\alpha)$ باید به جای x، $\sin\alpha$ و به جای y ، $\cos\alpha$ را قرار دهیم :

$$f(\sin\alpha,\cos\alpha)=\sin^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha$$
$$=\sin^2\alpha+2\sin 2\alpha$$

مثال (۵): اگر $f(x,y,z)=xy+yz+zx$ ، آن‌گاه $f(a-b,b-c,c-a)$ را بیابید.

حل: باید به جای x ، $(a-b)$ و به جای y ، $(b-c)$ و به جای z ، $(c-a)$ را قرار دهیم :

$$f(a-b,b-c,c-a)=(a-b)(b-c)+$$
$$(b-c)(c-a)+(c-a)(a-b)$$

اگر سمت راست را در هم ضرب و جمع جبری کنیم :

$$f(a-b,b-c,c-a)=ab+ac+bc-(a^2+b^2+c^2)$$

۲ـ مسأله یافتن $f(x)$:

یعنی $f(h(x))$ معلوم است، می‌خواهیم $f(x)$را محاسبه کنیم.

روش اوّل: $h(x)$ را مساوی a فرض می‌کنیم، از این‌جا x را پیدا کرده ، در مسأله قرار می‌دهیم.

مثال(۱): اگر $f(2x-1)=4x^2-4x+5$ آن‌گاه $f(x)$را بیابید.

حل:

$$2x-1=a\Rightarrow x=\frac{a+1}{2}$$

$$f(a)=4(\frac{a+1}{2})^2-4(\frac{a+1}{2})+5$$
$$=4(\frac{a^2+2a+1}{4})-2(a+1)+5$$
$$=a^2+2a+1-2a-2+5$$
$$=a^2+4$$

حال به‌جای a ، x را قرار می‌دهیم : $f(x)=x^2+4$

روش دوم: عبارت سمت راست را بر حسب $(2x-1)$ می‌نویسیم (اگر مقدور باشد)، سپس در کل تساوی $(2x-1)$ را به x تبدیل می‌کنیم. بهتر است این را روش **تبدیل** بنامیم.

$$f(2x-1)=4x^2-4x+1+4$$
$$f(2x-1)=(2x-1)^2+4 \qquad 2x-1\xrightarrow{\text{تبدیل}}x$$
$$\Rightarrow f(x)=x^2+4$$

روش سوم: روش عددگذاری است که به طور معمول در تستها رایج است، فرض کنید این مثال به صورت تست زیر باشد :

اگر $f(2x-1)=4x^2-4x+5$ ، آن‌گاه $f(x)$ کدام است؟

۱) x^2+x+3 ۲) x^2-4
۳) x^2+4 ۴) x^2+3

حل: به جای x عددی مانند (۱) قرار می‌دهیم :

$$\Rightarrow f(1)=4-4+5\Rightarrow f(1)=5$$

حال می‌گوییم گزینه‌ای درست است که $f(1)$ آن(۵)باشد. ملاحظه می‌کنیم هم‌گزینه (۱) درست است و هم گزینه (۳)، حال عددی دیگری مانند (۰) را به جای x قرار می‌دهیم.

$$f(-1)=0-0+5\Rightarrow f(-1)=5$$

حال بین دو گزینه (۱) و (۳) امتحان می‌کنیم، درگزینه (۱) $f(-1)=3$,ولی در گزینه (۳)، $f(-1)=5$ ، پس گزینه (۳) درست است. ممکن است در تستها با همان عمل اول گزینه جواب مشخص شود.

مثال (۲): اگر $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$ ، آن‌گاه f(x) را بیابید.

حل: از روش تبدیل استفاده می‌کنیم.

$$f(x+\frac{1}{x})=(x+\frac{1}{x})^2-2$$

$$x+\frac{1}{x}\xrightarrow{\text{تبدیل}}x\Rightarrow f(x)=x^2-2$$

مثال (۳): اگر $f(x+\frac{1}{x})=x^4+\frac{1}{x^4}$ ، آن‌گاه f(x)را بیابید.

حل: از روش تبدیل استفاده می‌کنیم :

$$f(x+\frac{1}{x})=\left[x^2+\frac{1}{x^2}\right]^2-2=\left[(x+\frac{1}{x})^2-2\right]^2-2$$

$$x+\frac{1}{x}\xrightarrow{\text{تبدیل}}x\Rightarrow f(x)=(x^2-2)^2-2$$

توجه : ممکن است روش تبدیل در یک مسأله مقدور نباشد. مانند مثال زیر :

مثال(۴): اگر $x>0$ و $x>\frac{1}{x}$ و $f(x+\frac{1}{x})=x^2-\frac{1}{x^2}$ ، آن‌گاه f(x) را بیابید.

حل: $f(x+\frac{1}{x})=(x+\frac{1}{x})(x-\frac{1}{x})$

طرفین تساوی را به توان (۲) می‌رسانیم :

از طرفین تساوی۴واحد کم می‌کنیم : $x^2+\frac{1}{x^2}+2=a^2$

$$x^2+\frac{1}{x^2}-2=a^2-4\Rightarrow(x-\frac{1}{x})^2=a^2-4$$

باتوجه به اینکه $x>0$ و $x>\frac{1}{x}$: $\Rightarrow x-\frac{1}{x}=\sqrt{a^2-4}$

و $x+\frac{1}{x}=a$ و $x-\frac{1}{x}=\sqrt{a^2-4}$

: $f(x+\frac{1}{x})=(x+\frac{1}{x})(x-\frac{1}{x})$

$$f(a)=a\sqrt{a^2-4}\Rightarrow f(x)=x\sqrt{x^2-4}$$

مثال (۵): اگر $f(x+y,x-y)=x.y$ ، آن‌گاه f(x,y) را بیابید.

حل: روش اول

$$\begin{cases}x+y=a\\x-y=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{a+b}{2}\\y=\frac{a-b}{2}\end{cases}$$

داشتیم : $f(x+y,x-y)=xy\Rightarrow f(a,b)=\frac{a+b}{2}.\frac{a-b}{2}$

$$\Rightarrow f(a,b)=\frac{a^2-b^2}{4}\Rightarrow f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{4}$$

روش دوم (روش تبدیل):

می‌دانیم که :

$$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab\Rightarrow\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4}=ab$$

$$\Rightarrow f(x+y,x-y)=x.y=\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{4}$$

حال (x+y)را به x و $(x-y)$ را به y تبدیل می‌کنیم :

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{4}$$

مثال (۶): اگر

$f(x+y,x-y)=2\sin x\sin y+\cos x+\cos y$ ، آن‌گاه f(x,y)را بیابید.

حل: روش تبدیل :

$$\begin{cases}2\sin x\sin y=\cos(x-y)-\cos(x+y)\\\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}\end{cases}$$

$$f(x+y,x-y)=\cos(x-y)-\cos(x+y)+2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

حال (x+y)را به x و $(x-y)$را به y تبدیل می‌کنیم :

$$f(x,y)=\cos y-\cos x+2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}$$

مثال (۷): اگر $x<0$ و $f(\frac{y}{x})=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$ ، آن‌گاه f(x) را بیابید.

توجه :

$$\begin{cases}x\sqrt{2}=\sqrt{2x^2}\\x>0\end{cases}\qquad\begin{cases}x\sqrt{2}=-\sqrt{2x^2}\\x<0\end{cases}$$

حل: روش تبدیل

$$f(\frac{y}{x})=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}=-\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2}}=-\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}$$

حال $(\frac{y}{x})$ را به x تبدیل می‌کنیم:

$$f(x)=-\sqrt{1+x^2}$$

مثال (۸): اگر $f\left(\frac{x-4}{y+5}\right)=\frac{y-x+9}{x+y+1}$ ، آن‌گاه $f(\frac{y}{x})$ را بیابید.

حل: روش تبدیل

$$f\left(\frac{x-4}{y+5}\right)=\frac{(y+5)-(x-4)}{(x-4)+(y+5)}$$

حال (x-4) را به y و (y+5) را به x تبدیل می‌کنیم.

$$\Rightarrow f(\frac{y}{x})=\frac{x-y}{y+x}$$

مثال (۹): اگر $f\left(\frac{4x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\right)=\frac{2x}{1+x^2}+\frac{1-x^2}{1+x^2}$ ، آن‌گاه $f(\sin 2\alpha)$ را بیابید.

حل: $x=tg\frac{\alpha}{2}$ فرض می‌شود.

$$f\left(2\times\frac{2x}{1+x^2}\times\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)=\frac{2x}{1+x^2}+\frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$f\left(2\times\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}\times\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}\right)=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}+\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Rightarrow f(2\sin\alpha.\cos\alpha)=\sin\alpha+\cos\alpha$$

$$\Rightarrow f(\sin 2\alpha)=\sin\alpha+\cos\alpha$$

مثال (۱۰): اگر $f(x)=\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$ و $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$ ، آن‌گاه مطلوب است محاسبه $n\in N$ ، $\underbrace{fofo.....f}_{\text{مرتبه } 2n}(\sqrt{\cos 2\alpha})$

حل:

$$f\sqrt{\cos 2\alpha}=\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}=\sqrt{\frac{2\sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha}}=\sqrt{tg^2\alpha}=tg\alpha$$

$$fof(\sqrt{\cos 2\alpha})=f(tg\alpha)=\sqrt{\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}}$$

$$=\sqrt{\cos^2\alpha(1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha})}=\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\sqrt{\cos 2\alpha}$$

$$\Rightarrow fofof(\sqrt{\cos 2\alpha})=f(\sqrt{\cos 2\alpha})=tg\alpha$$

$$\Rightarrow fofofof(\sqrt{\cos 2\alpha})=f(tg\alpha)=\sqrt{\cos 2\alpha}$$

به همین ترتیب نتیجه می‌گیریم:

$$\underbrace{fofo....f(\sqrt{\cos 2\alpha})}_{\text{مرتبه } 2n}=\sqrt{\cos 2\alpha}$$

حال به روش استقراء ثابت می‌کنیم:

داشتیم: $n=1\Rightarrow fof\sqrt{\cos 2\alpha}=\sqrt{\cos 2\alpha}$

$$n=k, k\in N\Rightarrow \underbrace{fofo...f}_{\text{مرتبه } 2k}\sqrt{\cos 2\alpha}=\sqrt{\cos 2\alpha}$$

ثابت‌می‌کنیم: $n=k+1\Rightarrow \underbrace{fofo...f}_{\text{مرتبه } 2(k+1)}\sqrt{\cos 2\alpha}=\sqrt{\cos 2\alpha}$

$$=fofof\underbrace{......f(\sqrt{\cos 2\alpha})}_{\text{مرتبه } 2k}=fof\sqrt{\cos 2\alpha}=\sqrt{\cos 2\alpha}$$

مثال ۱۱: اگر برای عددهای حقیقی x,y و عدد طبیعی n داشته باشیم: $f(x+y)=f(x)+f(y)$ و $f(1)\neq 0$ ثابت کنید:

$f(n)=nf(1)$

$n=1\Rightarrow f(1)=f(1)$

فرض می‌کنیم به ازای $n=k\in N$ داشته باشیم $f(k)=kf(1)$. حال ثابت می‌کنیم به ازای $n=k+1$ نیز رابطه فوق برقرار است:

$$\begin{cases}x=k\\y=1\end{cases}\Rightarrow f(k+1)=f(k)+f(1)$$

$$f(k+1)=kf(1)+f(1)$$

$$\Rightarrow f(k+1)=(k+1)f(1)$$

۳ـ مسأله گسترده f(x)

مسائلی است به صورت $af(h(x))+bf(t(x))=g(x)$ ، می‌خواهیم f(x) را محاسبه کنیم. باید عملی انجام دهیم که h(x) و t(x) به یکدیگر تبدیل شوند. آن‌گاه دستگاه حاصل را حل کرده و f(x) را محاسبه می‌کنیم.

مثال ۱: اگر $3f(x)+2f(-x)=10x-12$ ، آن‌گاه f(x) را بیابید.

حل: اگر در رابطه بالا x را به x- تبدیل کنیم، خواهیم داشت:

$$3f(-x)+2f(x)=-10x-12$$

حال با رابطه اولیه یک دستگاه می‌سازیم.

$$\begin{cases} 3f(x)+2f(-x)=10x-12 & \times 3 \\ 3f(-x)+2f(x)=-10x-12 & \times (-2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9f(x)+6f(-x)=30x-36 \\ -6f(-x)-4f(x)=20x+24 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 5f(x)=50x-12 \Rightarrow f(x)=10x-\frac{12}{5}$$

مثال ۲: اگر $2f(2x-3)+f(3-2x)=8x+20$، آن‌گاه $f(4x-1)$ را بیابید.

حل: $2x-3=a$ فرض می‌شود $\Rightarrow x=\frac{a+3}{2}$

در صورت مسأله قرار می‌دهیم:

$$2f(a)+f(-a)=4a+32$$

حال مانند مثال قبل a را به $-a$ تبدیل می‌کنیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} 2f(-a)+f(a)=-4a+32 \\ 2f(a)+f(-a)=4a+32 & \times(-2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow -3f(a)=-12a \Rightarrow f(a)=4a$$

$$\Rightarrow f(4x-1)=4(4x-1) \Rightarrow f(4x-1)=16x-4$$

مثال ۳: اگر $f(\sin x)+2f(\cos x)=2\sin^2 x$، آن‌گاه $f(tgx)$ را بیابید.

حل: x را به $(\frac{\pi}{2}-x)$ تبدیل می‌کنیم:

$$\Rightarrow f(\sin(\frac{\pi}{2}-x))+2f(\cos(\frac{\pi}{2}-x))=2\sin^2(\frac{\pi}{2}-x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(\cos x)+2f(\sin x)=2\cos^2 x \\ f(\sin x)+2f(\cos x)=2\sin^2 x & \times(-2) \end{cases}$$

در نتیجه:

$$-3f(\cos x)=2\cos^2 x-4\sin^2 x$$

$$-3f(\cos x)=2\cos^2 x-4+4\cos^2 x$$

$$-3f(\cos x)=6\cos^2 x-4 \Rightarrow f(\cos x)=-2\cos^2 x+\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow f(tgx)=-2tg^2x+\frac{4}{3}$$

۴ـ مسأله ترکیبی

وقتی $f(x)$ و $f(g(x))$ معلوم است، می‌خواهیم $g(x)$ را محاسبه کنیم. در این شرایط با توجه به ساخت $f(g(x))$، $g(x)$ به راحتی محاسبه می‌شود.

مثال ۱: اگر $f(x)=2x-3$ و $f(g(x))=6x^4+4x^2-1$، $g(x)$ را بیابید.

حل: $f(g(x))=6x^4+4x^2-1$

$$2g(x)-3=6x^4+4x^2-1 \Rightarrow 2g(x)=6x^4+4x^2+2$$

$$\Rightarrow g(x)=3x^4+2x^2+1$$

مثال ۲: اگر $f(x)=4x-5$ و $f(g(x))=8x^2+8x-1$، $g(f(x))$ را بیابید.

حل: $f(g(x))=8x^2+8x-1$

$$\Rightarrow 4g(x)-5=8x^2+8x-1 \Rightarrow g(x)=2x^2+2x+1$$

$$g(f(x))=g(4x-5)=2(4x-5)^2+2(4x-5)+1$$

$$\Rightarrow g(f(x))=32x^2-72x+41$$

۵ـ مسأله ترکیبی

وقتی $f(x)$ و $g(f(x))$ معلوم است، می‌خواهیم، $g(x)$ را محاسبه کنیم. با توجه به ساخت $g(f(x))$، مسأله به شماره ۲ درس (مسأله یافتن $f(x)$) تبدیل می‌شود.

مثال ۱: اگر $f(x)=2x-5$ و $g(f(x))=4x^2-20x+1$، آن‌گاه $g(x)$ را بیابید.

حل: $g(f(x))=4x^2-20x+1$

$$g(2x-5)=4x^2-20x+1$$

$$g(2x-5)=(2x-5)^2-24$$

حال $(2x-5)$ را به x تبدیل می‌کنیم:

$$g(x)=x^2-24$$

تمرین:

۱ـ اگر $f(x)=\frac{4}{x-4}$، $x\neq 4$، $x\neq 0$، آن‌گاه $f\left(\frac{1}{f(\frac{1}{x})}\right)$ را بیابید.

۲ـ اگر $f(\frac{x+1}{x-1})=\sin x.\cos x$، آن‌گاه $f(\frac{x+1}{x-1})\cdot f(\frac{x-1}{x+1})$ را بیابید.

۳ـ اگر $f(x+\frac{1}{x})=x^3+\frac{1}{x^3}$، آن‌گاه $f(\frac{1}{x^3})$ را بیابید.

۴ـ اگر $f(x-1)+3f(1-x)=4x$، آن‌گاه $f(\frac{1}{x})$ را بیابید.

۵ـ اگر $f(\frac{x+1}{y+1})=\frac{x+y+2}{x+1}$، آن‌گاه $f(\frac{1}{x})$ را بیابید.

۶ـ اگر $2f(x^3)+f(-x^3)=x$، آن‌گاه $f(x^2)$ را بیابید.

۷ـ اگر $f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$، آن‌گاه $f(\frac{1}{y})$ را بیابید.

۸ـ اگر $f(x)=\frac{x+1}{x-1}, f(g(x))=-f(x)$، آن‌گاه $g(x)$ را بیابید.

• غلامرضا یاسی‌پور

تاریخچهٔ مجلات ریاضی در ایران (۲۱)

در شمارهٔ ۲۷ مجله و در مقالهٔ داستانهای تفننی ریاضی، نوشتهٔ ژرژگامو، تحت عنوان **باد اتر**، این مسأله طرح و بررسی شده است:

دسته‌ای از افراد نیروی هوایی دور میزی در باشگاه هوانوردان نشسته‌اند و مشغول صحبت کردن و ورق زدن مجلات مصورهستند. یکی از آنها خطاب به دیگری می‌گوید:

ـ جاک، مثل اینکه قرار است امروز تا پایگاه N پرواز کرده و قبل از غروب مراجعت کنی؟!

ـ امروز از این کار منصرف شدم. پایگاه N درست در سمت مشرق ما واقع است و بادی قوی که از سمت مشرق می‌وزد پرواز هواپیمای مرا کُند خواهد کرد. بهتر است که تا فردا صبر کنم. هواشناسی برای فردا روز آرامی را پیش‌بینی کرده است.

ـ اما اگر همین امروز عصر قصد مراجعت داشته باشی، در زمان پروازت تغییری حاصل نمی‌شود: باد به همان اندازه که در رفتن به پایگاه N هواپیمایت را به عقب می‌راند در مراجعت از آنجا آن را به جلو رانده سرعتش را زیاد می‌کند. زمانی را که در وقت رفتن از دست داده،باشی به هنگام برگشتن جبران می‌کنی.

ـ تو این‌طور فکر می‌کنی ؟!

ـ مسلماً که چنین است.

ـ چنین برمی‌آید که در این باره بی‌تجربه هستی و از **نظریهٔ نسبیت** اطلاعی نداری.

ـ نظریهٔ نسبیت چه ربطی به موضوع ما دارد؟

ـ در حقیقت این موضوع اساس آزمایشی است که **مایکلسون** دربارهٔ حرکت یک موج در «جریان اتر» انجام داد، جریانی که بایستی در اثر حرکت زمین در مادهٔ «اتر» پدید آمده باشد.

جاک به گفتهٔ خود خطاب به همکارش چنین ادامه داد:

مسألهٔ پرواز خودم را تا پایگاه N به زبان معمولی طوری تشریح می‌کنم که اگر ریاضیات را هم فراموش کرده باشی به اشکالی برنخوری. به هنگام رفتن تا پایگاه N که باد در خلاف جهت حرکت می‌وزد سرعت هواپیما کم می‌شود و در نتیجه زمان بیشتری برای رسیدن به پایگاه لازم است: برعکس به هنگام مراجعت باد که در جهت حرکت هواپیما می‌وزد سرعت هواپیما را زیاد کرده و در نتیجه زمان کمتری صرف خواهد شد. مقاومت باد و در نتیجه کندی سرعت هواپیما در زمانی طولانیتر انجام می‌گیرد و ازدیاد سرعت آن در زمانی کمتر و روی هم رفته

زمانی که از دست می‌رود بیش از زمانی است که صرفه‌جویی می‌شود و باخت بیش از برد است.

ممکن است که از این استدلال ساده قانع نشده باشی، اما اگر ریاضیات و حل معادلات را به خاطر داشته باشی توضیح قانع‌کننده‌تری به تو خواهم داد. فرض کنیم v سرعت هواپیمای من (سرعت آن نسبت به هوا) و v' سرعت باد باشد. اگر l فاصلهٔ پایگاه N تا اینجا فرض شود، زمان لازم برای رفتن از اینجا تا N برابر خواهد شد با $\frac{l}{v-v'}$ و زمان برگشتن از آنجا برابر خواهد بود با $\frac{l}{v+v'}$ و در نتیجه زمان رفت و برگشت روی هم چنین خواهد شد:

$$T=\frac{l}{v-v'}+\frac{l}{v+v'}=\frac{2lv}{v^2-v'^2}=\frac{2l}{v}\cdot\frac{1}{1-\frac{v'^2}{v^2}}$$

اگر هوا کاملاً آرام باشد، $v'=0$ بوده و T برابر $\frac{2l}{v}$ می‌باشد. اما اگر v' وجود داشته باشد، در این صورت مقدار T بیش از مقدار $\frac{2l}{v}$ خواهد بود.

فرض کنیم که سرعت باد برابر با نصف سرعت هواپیما یعنی $\frac{v'}{v}=\frac{1}{2}$ باشد. در این صورت زمان t چنین خواهد شد:

$$T=\frac{2l}{v}\times\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2l}{v}\times\frac{4}{3}$$

ملاحظه می‌شود که زمان رفت و برگشت $\frac{4}{3}$ برابر شده است. اگر سرعت باد با سرعت هواپیما برابر باشد، در این صورت زمان لازم زمانی نامحدود خواهد بود.

از اینها گذشته و صرف نظر از مسألهٔ مقاومت باد، من از این جهت امروز به پایگاه N پرواز نمی‌کنم که به وسیلهٔ تلفن چنین دستوری را به من داده‌اند. انجام مأموریت من به فردا موکول شده است.

همکار جاک از وی خواست حال که آنجا می‌ماند و وقت دارد، راجع به نظریهٔ نسبیت و آزمایش مایکلسون توضیحات بیشتری بدهد و جاک چنین توضیح داد:

این یک اصل است. بعضی از فیزیکدانان برای اینکه چگونگی انتشارات نور را در فضا توجیه کنند، فرض کردند که تمام فضا را یک نوع مادهٔ سبک به نام «اتر» فرا گرفته است. مایکلسون فکر کرد که اگر چنین ماده‌ای وجود داشته باشد، باید در نتیجهٔ حرکت زمین در آن یک نوع «جریان اتر» یا «باد اتر» به‌وجود آید. زمین با سرعت حدود ۳۰ کیلومتر در ثانیه دور خورشید می‌گردد و ما که بر زمین مستقر هستیم باید وجود چنین وزشی را حس بکنیم. همچنانکه وقتی در هواپیمای روباز حرکت می‌کنیم، وزش باد را در اطراف خود حس می‌کنیم.

باری، مایکلسون در آزمایش خود از یک منبع نور یک شعاع نورانی را در جهت جریان فرضی اتر و یک شعاع نورانی را در جهت عمود بر آن به خارج فرستاد و با استفاده از انعکاس، این دو شعاع را به منبع بازگرداند و زمان وصول آنها را به منبع با هم مقایسه کرد. قاعدةً باید شعاعی که در جهت جریان اتر فرستاده باشد، دیرتر از شعاع دیگر واصل شده باشد، همان طور که برای رفت و برگشت هواپیمای خود در جهت حرکت باد توضیح دادم و حساب کردم. مایکلسون امیدوار بود که با مقایسهٔ زمان برگشت دو شعاع نورانی تغییر مکان زمین را نسبت به اتر تعیین کند.

اما برخلاف تصور، هر دو شعاع در یک لحظه به منبع واصل شدند، بدون آنکه یکی نسبت به دیگری تأخیر داشته باشد. نتیجهٔ این آزمایش تا مدتها فیزیکدانان را متحیر ساخته بود، تا اینکه اینشتین با ارائه نظریهٔ مشهور خود راجع به نسبیت، تصورات گذشتگان را دربارهٔ فضا و زمان دگرگون ساخت و علت نتیجهٔ غیرمنتظرهٔ آزمایش مایکلسون را بیان داشت.

من تصور نمی‌کردم که موضوع پرواز من تا پایگاه N به نظریهٔ نسبیت اینشتین منتهی شود. شاید بگویید که طرح مسألهٔ پرواز تا پایگاه N در مقابل نظریهٔ نسبیت ابلهانه است، اما موضوع آن است که اغلب تصور می‌کنند اثر باد در حرکت هواپیما در جهت وزش باد در رفت و برگشت آن خنثی می‌شود.

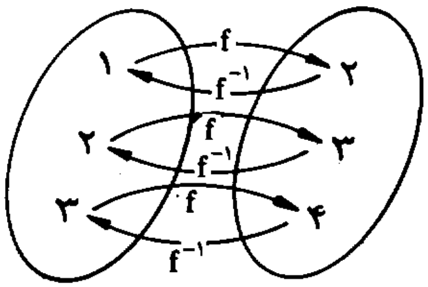
در حاشیه تابع

(قسمت چهارم)

●حمیدرضا امیری

تابع معکوس و معکوس تابع

فرض کنید روی مجموعهٔ اعداد طبیعی تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x+1$ تعریف شده باشد و داشته باشیم $f=\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ حال اگر وارون f یعنی f^{-1} را تشکیل دهیم، خواهیم داشت $f^{-1}=\{(2,1),(3,2),(4,3)\}$ اگر نمودار پیکانی این دو رابطه را رسم کرده، با هم مقایسه کنیم، مشاهده می‌شود که این دو رابطه اثر یکدیگر را خنثی می‌کنند، یعنی هر عضوی را که f از مجموعهٔ اول به مجموعهٔ دوم منتقل می‌کند f^{-1}، آن عضو را به‌جای قبلی خود برمی‌گرداند.



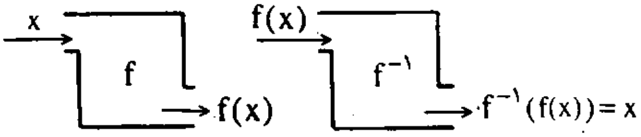
$f(1)=2\ ,\ f^{-1}(2)=1$

$f(2)=3\ ,\ f^{-1}(3)=2$

$f(3)=4\ ,\ f^{-1}(4)=3$

همان‌طورکه ملاحظه می‌شود همواره، $D_f=R_{f^{-1}}$ و $R_f=D_{f^{-1}}$.

این مطلب را می‌توان به‌صورت زیر نیز توجیه کرد که اگر f و f^{-1} را در حکم دو ماشین تابع در نظر بگیریم، همواره ورودی تابع f، xها بوده و خروجی آن $f(x)$ و ورودی تابع f^{-1}، $f(x)$ها هستند و خروجی f^{-1}، xها می‌باشند.



در حالت کلّی اگر $f(x)=y$، در این صورت $f^{-1}(y)=x$ و برعکس، حال با توجه به تابع f که در ابتدای این مبحث به آن اشاره شد یعنی $f(x)=x+1$ و این‌که تابع f روی اعضای دامنه به این شکل اثر می‌کند، که ۱ واحد به آنها اضافه می‌کند، می‌خواهیم ضابطهٔ f^{-1} را بیابیم، بدیهی است که اگر $y=x+1$، ضابطهٔ f باشد (ضابطهٔ f برحسب x است) کافی است x را برحسب y بیابیم. یعنی $x=y-1$ که این ضابطه، ضابطهٔ f^{-1} است، یعنی $f^{-1}(y)=y-1$، اگردر حالت کلّی f^{-1} را برحسب x یا z بیان کنیم به ترتیب خواهیم داشت، $f^{-1}(x)=x-1$ و $f^{-1}(z)=z-1$.

بنابراین اگر بتوانیم ضابطهٔ f^{-1} را از روی ضابطهٔ f به‌دست آوریم، در این حالت و با توجه به تعریف ترکیب توابع می‌توانیم تابع معکوس را به‌صورت زیر تعریف کنیم:

تعریف: تابعهای f و g معکوس یکدیگرند اگر و فقط اگر داشته باشیم:

الف) به ازای هر x از D_g، $(fog)(x)=f(g(x))=x$

ب) به ازای هر x از D_f، $(gof)(x)=g(f(x))=x$

در این صورت g را با f^{-1} و f را با g^{-1} نمایش می‌دهند.

مثال: نشان دهید که دو تابع f و g با ضابطه‌های $f(x)=x^3+1$ و $g(x)=\sqrt[3]{x-1}$ وارون یکدیگرند.

$$(fog)(x)=f(g(x))=(\sqrt[3]{x-1})^3+1=(x-1)+1=x$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=(\sqrt[3]{x^3+1})-1=\sqrt[3]{x^3}=x$$

پس طبق تعریف دو تابع f و g وارون یکدیگرند.

شاید این مطلب در ذهن ایجاد شود که چون $f(g(x))=x$ و $g(f(x))=x$ پس اگر f و g وارون هم باشند باید $fog=gof$ که این مطلب در حالت کلّی صحیح نمی‌باشد و برای روشن شدنِ مطلب f و g را به صورت مجموعه‌هایی از زوجهای مرتب و وارون یکدیگر در نظر می‌گیریم، توجه کنید!

فرض کنیم $f=\{(2,3)\ (3,4),(1,5)\}$

$$\Rightarrow f^{-1}=g=\{(3,2),(4,3),(5,1)\}$$

$$fog=\{(3,3),(4,4),(5,5)\}$$

$$gof=\{(2,2),(3,3),(1,1)\}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید fog و gof هر دو تابعهای همانی هستند ولی $fog\neq gof$ می‌باشد.

نامی که در ابتدای این بحث به‌کار بردیم، **تابعِ معکوس و معکوس تابع** بود. اکنون این سؤال پیش می‌آید که، آیا همواره اگر f یک تابع باشد، f^{-1} نیز تابع است یا خیر؟

مثلاً اگر $f=\{(2,3)(3,4)\}$، واضح است که f طبق تعریف تابع، یک تابع است و $f^{-1}=\{(3,2)(4,3)\}$ نیز تابع است که در این حالت f^{-1} را تابع معکوسِ f نامیده و اصطلاحاً می‌گوییم تابع f **معکوس‌پذیر** است. امّا اگر فرض کنیم $f=\{(2,3)(3,3)\}$، f تابع است ولی $f^{-1}=\{(3,2)(3,3)\}$ (با توجه به تعریف تابع) تابع نمی‌باشد، که در این حالت f^{-1} را فقط می‌توان معکوس f نامیده و می‌گوییم f معکوس‌پذیر نیست.

اگر کمی دقت کنید، مشاهده می‌کنید در این مثال، f تابع است ولی یک‌به یک نیست. یعنی زوج مرتبهای آن دارای مؤلفه‌های دوم برابر هستند و همین امر باعث می‌شود در f^{-1} زوج مرتبهایی بامؤلفه‌های اوّل برابر تولید شوند که تابع بودن f^{-1} را نقض می‌کند و اگر چنین زوج مرتبهایی (با مؤلفه‌های دوم برابر) در f یافت نشود، در f^{-1} نیز زوج مرتبهایی با مؤلفه‌های اوّل برابر یافت نخواهد شد و f^{-1} تابع می‌شود. پس معکوس‌پذیر بودنِ تابع f را به‌صورت زیر به شکلِ قضیه‌ای می‌توان بیان کرد:

قضیه: تابع f معکوس‌پذیر است، اگر و فقط اگر یک به یک باشد.

مثال: ثابت کنید تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{2x-1}{x+2}$ معکوس‌پذیر است و ضابطهٔ تابع معکوس آن را بیابید.

برای اثبات معکوس‌پذیریِ تابع طبق قضیه کافی است ثابت کنیم تابع f یک‌به‌یک است پس،

فرض کنیم: $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow \frac{2x_1-1}{x_1+2}=\frac{2x_2-1}{x_2+2}$

$$\Rightarrow \cancel{2x_1x_2}+4x_1-x_2-\cancel{2}=\cancel{2x_1x_2}+4x_2-x_1-\cancel{2}$$

$\Rightarrow 5x_1=5x_2\Rightarrow x_1=x_2$ تابع f یک‌به‌یک است.

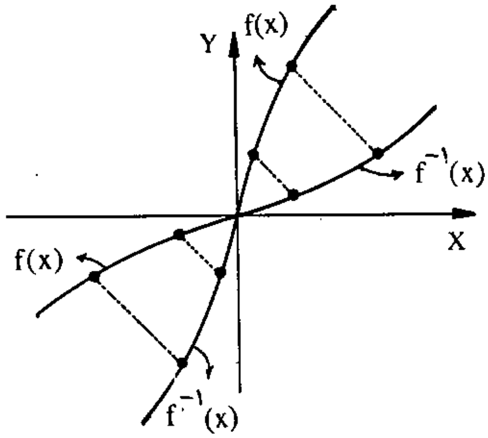
فرض کنیم $y=\frac{2x-1}{x+2}\Rightarrow xy+2y=2x-1$

$$\Rightarrow xy-2x=-2y-1\Rightarrow x(y-2)=-2y-1$$

$$\Rightarrow x=\frac{-2y-1}{y-2}\Rightarrow f^{-1}(y)=\frac{-2y-1}{y-2}$$

$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{-2x-1}{x-2}$ (ضابطهٔ f^{-1} برحسب x)

تذکر مهم: می‌خواهیم از نظر نموداری، وضعیت یک تابع معکوس‌پذیر و معکوسِ آن را بررسی کنیم، اولاً چون f معکوس‌پذیر است پس طبق قضیه یک‌به‌یک است و لذا خطی موازی با محور xها نمی‌تواند نمودار f را در بیش از یک نقطه قطع کند، از طرفی اگر $(a,b)\in f$ یا $f(a)=b$ با توجه به تعریف f^{-1} واضح است که $(b,a)\in f^{-1}$ یا $f^{-1}(b)=a$، پس از آن‌جایی که دو نقطهٔ (a,b) و (b,a) نسبت به خط $y=x$ تقارن دارند به‌راحتی می‌توان نتیجه گرفت که نمودارهای f و f^{-1} نسبت به خط $y=x$ قرینهٔ محوری یکدیگرند. پس به‌راحتی با دراختیار داشتن نمودارِ تابع f و توجه به مطلبِ فوق به‌راحتی می‌توان به نمودار f^{-1} دست پیدا کرد. در شکل زیر این مطلب مشاهده می‌شود:



مثال: فرض کنید $f(x)=x^{3}-1$ و $g(x)=2x+1$ در این صورت هریک از تابعهای f^{-1} و g^{-1} و $(fog)^{-1}$ و $g^{-1}of^{-1}$ را محاسبه کرده و رابطهٔ $(fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1}$ را تحقیق کنید.

چون f و g هر دو تابعهای یک‌به‌یک هستند لذا معکوس‌پذیر بوده و داریم:

$$y=x-1 \Rightarrow x=y+1 \Rightarrow f^{-1}(x)=x+1$$

$$y=2x+1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}(y-1) \Rightarrow g^{-1}(x)=\frac{1}{2}(x-1)$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=(2x+1)-1=2x$$

$$\Rightarrow (fog)^{-1}(x)=\frac{x}{2} \quad (1)$$

$$(g^{-1}of^{-1})(x)=g^{-1}(f^{-1}(x))=\frac{1}{2}[(x+1)-1]=\frac{1}{2}x \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow (fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1}$$

تذکر مهم: مطلبی که در مثال قبل تحقیق شد، تصادفی نبوده و در حالت کلّی نیز برقرار بوده و می‌توان آن را به‌صورت قضیهٔ زیر بیان کرد:

قضیه: اگر f و g دو تابع معکوس‌پذیر باشند همواره، $(fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1}$.

نتیجهٔ مهم: این قضیه را می‌توان به‌صورت بسیار مناسبی در محاسبهٔ وارونِ تابعهایی که بتوان آنها را به شکل ترکیب چند تابع نوشت، به‌کار برد.

مثال: وارون تابع با ضابطهٔ $h(x)=\frac{1}{3}(x+3)^{4}$ را به‌دست آورید.

قبل از محاسبهٔ وارون f، ابتدا متذکر می‌شویم که قضیهٔ قبل قابل تعمیم است، یعنی برای سه تابع f و g و h و حتی بیشتر نیز می‌توان قضیه را به‌کار برد مثلاً برای سه تابع f و g و h داریم:

$$(fogoh)^{-1}=h^{-1}og^{-1}of^{-1}$$

حال اگر قرار دهیم $f(x)=x+3$ و $g(x)=x^{4}$ و $k(x)=\frac{1}{3}x$ واضح است که

$$f^{-1}(x)=x-3,\ g^{-1}(x)=\sqrt[4]{x},\ k^{-1}(x)=3x$$

و $h(x)=(kogof)(x)$

زیرا $(kogof)(x)=ko(g(f(x))$ ، $g(f(x))=(x+3)^{4}$

$$\Rightarrow ko(g(f(x))=\frac{1}{3}(x+3)^{4}$$

پس: $h^{-1}(x)=(f^{-1}og^{-1}ok^{-1})(x)=f^{-1}o((g^{-1}ok^{-1})(x))$

$$\Rightarrow h^{-1}(x)=f^{-1}o(g^{-1}(k^{-1}(x)))\ ,\ g^{-1}(k^{-1}(x))=\sqrt[4]{3x}$$

$$\Rightarrow h^{-1}(x)=f^{-1}(\sqrt[4]{3x})=(\sqrt[4]{3x})-3$$

تمرین:

۱ ــ تابع f به معادلهٔ $f(x)=x^{2}-2x+3$ در کدام یک از فاصله‌های زیر معکوس پذیر است.

الف) $(-\infty,1)$ ب) $(-\infty,1]$ ج) $(1,+\infty)$ د) $[1,+\infty)$

۲ ــ ثابت کنید تابع f به معادلهٔ $f(x)=2\sqrt{x-2}+x$ معکوس‌پذیر بوده و ضابطهٔ f^{-1} را برحسب x بیابید.

۳ ــ ثابت کنید تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$ معکوس‌پذیر بوده و ضابطهٔ f^{-1} را بیابید.

۴ ــ اگر $h(x)=4(x-1)^{3}$ در این صورت ضابطهٔ h^{-1} را بیابید.

۵ ــ اگر $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x+2 & x\geq 1\\ 2x-1 & x<1\end{cases}$ در این صورت $f^{-1}(x)$ را بیابید.

۶ ــ هر یک از حالتهای زیر را بررسی کنید که آیا دو تابع داده شدهٔ f و g، وارون یکدیگرند یا خیر؟

الف) $f(x)=2x^{3}-1$ و $g(x)=\sqrt[3]{\frac{2y+1}{3}}$

ب) $f(x)=2x+5$ و $g(x)=\frac{1}{2}(x-5)$

ج) $f(x)=x^5+1$ و $g(x)=\sqrt[5]{x-1}$

د) $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\arcsin x$

هـ) $f(x)=\tan x$ و $g(x)=\text{cotg}(x)$

۷ـ کدام‌یک از تابعهای زیر معکوس‌پذیر می‌باشند؟

الف) $f(x)=x^2+x$ ب) $f(x)=x^2-x$ (برای هر $x\geq 0$)

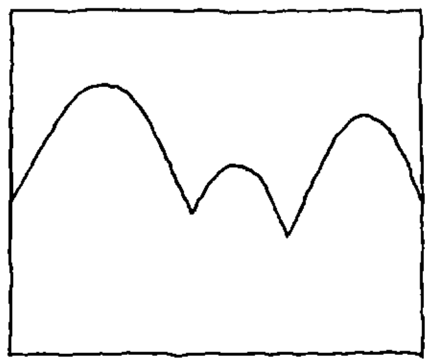
ج) $f(x)=2x^3-4$ د) $f(x)=\frac{4-x}{3x+2}$

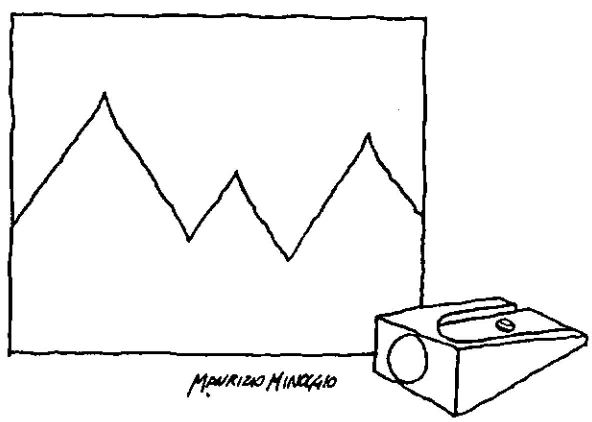
هـ) $f(x)=\frac{4}{x^2+1}$ (برای هر $x\geq 0$)

و) $f(x)=\sqrt[3]{2x-3}$

۸ـ ثابت کنید که اگر تابع f، زوج باشد، معکوس‌پذیر نیست.

۹ـ ثابت کنید تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ با معکوس خود برابر است.





ادب ریاضی

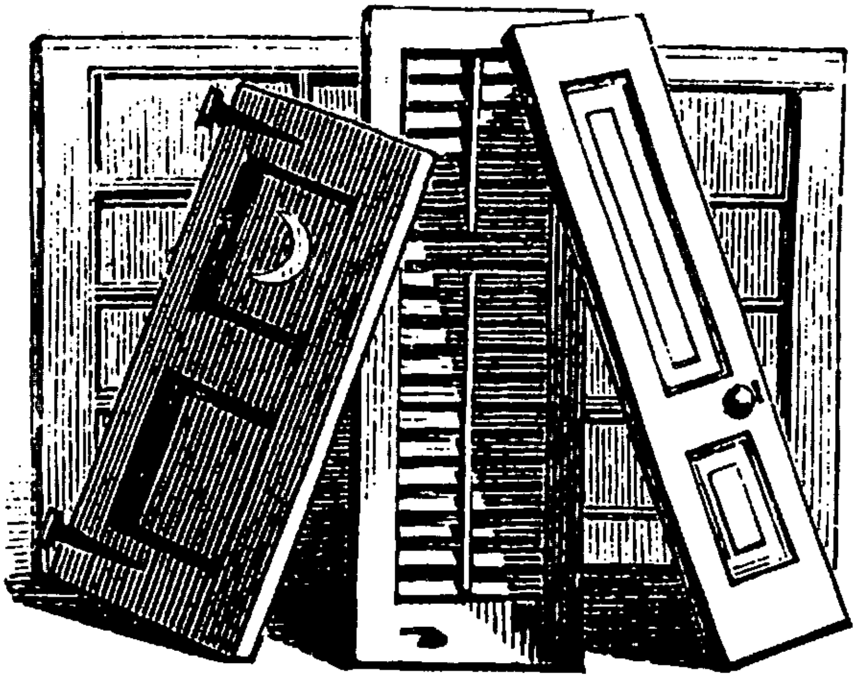
اولین شاخه و انشعاب علمی، آن شعبه‌ای بود که مطلقاً احتیاج به تجربه نداشت و برای پیدایش آن حداقل توجه و علاقه‌مندی لازم بود. اما چه کسی برای این کار علاقه‌مندتر از چوپانی است که چون گلهٔ خود را به چراگاه می‌برد، شبانگاه هنگام مراجعت می‌خواهد بداند که همهٔ آنها به جای خود هستند یا نه؟ خواهید گفت که برای اطمینان از این مطلب کافی بود که چوپان گوسفندان خود را بشمارد، اما چوپان عهد حجر هنوز شمردن نمی‌دانست و با این حال طبعاً جهل او مانع آن نمی‌گردید که وی تعداد واقعی آنها را معین کند، زیرا مرغ خانگی نیز که حساب و حساب کردن نمی‌داند هنگامی که یکی از جوجگان او غائب باشند ناله و فریاد می‌کند و او را می‌طلبد.

اما به زودی چه چوپان و چه آن کشاورزی که احتیاج داشت تا وسعت مزرعهٔ خود را تعیین کند و چه بسیار کسان دیگر درنتیجهٔ احتیاج مجبور شدند نوعی وسیلهٔ شمارش دقیقتر، غیر از غریزهٔ طبیعی خود، به‌وجود آورند و برای این کار انگشتان دست، دستگاه حساب کردن آماده و مهیایی بود.

تاریخ علوم

پی‌یر روسو

ترجمه: حسن صفاری

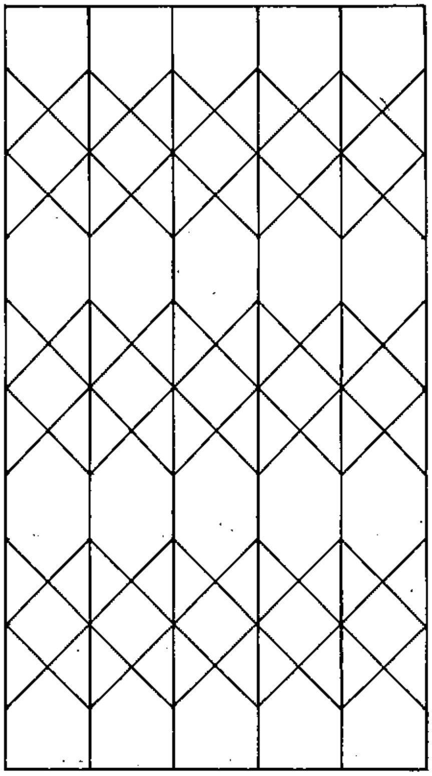


در کشویی

● دکتر احمد شرف‌الدین

یک مسألهٔ زیبای هندسه

شکل زیر طرح کلی یک لنگه درکشویی (آکوردئونی) را نشان می‌دهد. در کشویی فلزی علاوه بر محکم بودن چون به آسانی جمع می‌شود و پس از جمع شدن در کنار جرز مغازه



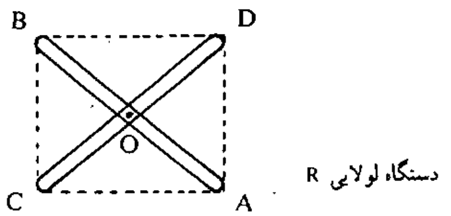
شکل ۱

جای کمی اشغال می‌کند مورد توجه است. از خارج مغازه‌ای که در کشویی دارد، می‌توان داخل آن را مشاهده کرد، از تنوع کالاهای آن مطلع شد و این از محاسن در کشویی است.

برای تحلیل اساس هندسی در کشویی، ابتدا ترکیب لوزیها را در نظر گرفته و پس از آن که استدلال را به پایان رساندم و درباره مطلب بیشتر فکر کردم، دریافتم که بهتر است تحلیل اساس هندسی در کشویی بر مبنای خاصیت مستطیل باشد.

خاصیت مستطیل: دو قطر یک مستطیل مساوی‌اند و یکدیگر را نصف می‌کنند و برعکس اگر در یک چهار ضلعی دو قطر مساوی باشند و یکدیگر را نصف کنند آن چهارضلعی مستطیل است.

به کارگیری خاصیت مستطیل در صنعت: وسطهای دو تسمه AB و CD را که دارای طولهای مساوی‌اند سوراخ می‌کنیم و از سوراخ آنها لولا عبور می‌دهیم. هنگامی که دو



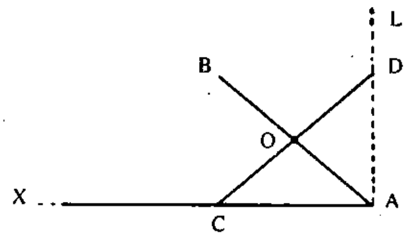
شکل ۲

تسمه لولا شده را دور لولای O می‌چرخانیم، شکل چهارضلعی ACBD تغییر می‌کند، ولی این چهارضلعی همواره مستطیل است، زیرا دو قطر آن مساوی‌اند و یکدیگر را نصف می‌کنند.

برای آسانی کار، دستگاه لولایی حاصل از دو تسمه لولا شده مذکور در بالا را R می‌نامیم.

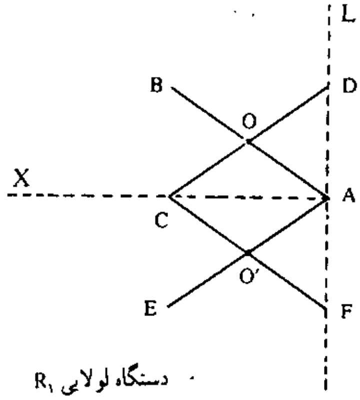
ترکیب دستگاههای R: در لولایی از چند دستگاه R و چند تیغه عمودی (عمود بر سطح زمین) که به طرز مناسب به هم لولا شده‌اند تشکیل شده است.

اگر رأس A از یک دستگاه لولایی R را ثابت نگاه داریم و رأس C را روی نیم خطی چون AX به طرف نقطه A حرکت دهیم، نقطه D روی نیم‌خط AL که از نقطه A بر نیم‌خط AX عمود است حرکت می‌کند. شکل (۳)



شکل ۳

اکنون دو دستگاه لولایی از نوع R می‌سازیم و سپس آن دو را مانند شکل (۴) به هم لولا می‌کنیم. یکی از این دو دستگاه تشکیل شده است از دو تسمه هم طول AB و CD که در وسطشان نقطه O به هم لولا شده‌اند. دستگاه دیگر از دو تسمه

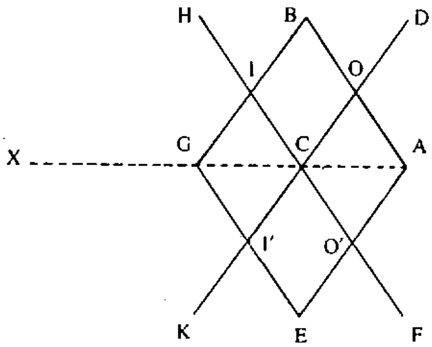


شکل ۴

هم طول AE و CF که در وسطشان به یکدیگر لولا شده‌اند تشکیل شده است. دو دستگاه مذکور در دو نقطه A و C به هم لولا شده‌اند. دستگاه حاصل از دو دستگاه مذکور را دستگاه R_1 می‌نامیم.

اگر نقطه A را ثابت نگاه داریم و نقطه C را روی نیم‌خطی چون AX به سوی نقطه A حرکت دهیم، دو نقطه D و F روی خط راست L که از نقطه A بر خط AX عمود شده باشد حرکت می‌کند. حرکت نقطه C موجب حرکت دو نقطه B و E می‌شود، اما سه نقطه C ،B و E همواره بر یک خط راست قرار دارند. چهارضلعی AOCO′ یک لوزی است، زیرا طولهای چهارضلع آن مساوی‌اند. وقتی نقطه C را به طرف نقطه A می‌بریم، شکل لوزی تغییر می‌کند و دو رأس O و O′ آن از خط AX دور می‌شوند. وقتی نقطه C را از نقطه A دور می‌کنیم دو نقطه O و O′ به خط AX نزدیک می‌شوند. خط متحرک OO′ همواره موازی خط L است.

اکنون دو دستگاه لولایی به شکل R_1 می‌سازیم و آنها را مانند شکل (۵) به هم لولا می‌کنیم. دستگاه حاصل را R_2 می‌نامیم.



شکل ۵

در دستگاه R_2 دو تسمه AB و GB در نقطه B و دو تسمه AE و GE در نقطه E لولا شده‌اند. چهار تسمه CD، CH، CK و CF در نقطه C لولا شده اند.

در دستگاه لولایی R_2 نقطهٔ A را ثابت نگاه می‌داریم و نقطهٔ G را روی نیم‌خطی چون AX به طرف نقطهٔ A حرکت می‌دهیم. با حرکت نقطهٔ G به طرف نقطهٔ A، شکل دستگاه لولایی تغییر

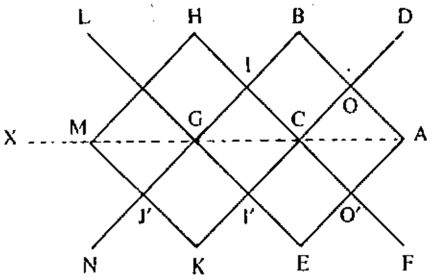
می‌کند اما نقطه C همواره بر وسط پاره‌خط متغیر GA قرار دارد. برای اثبات این مطلب می‌گوییم در چهارضلعی BICO طولهای هر چهارضلعی برابراند پس $OC \parallel BG$ و $IC \parallel BA$. خط OC که از نقطهٔ O وسط ضلع AB از مثلث ABC موازی ضلع BG رسم شده از وسط ضلع AG می‌گذرد. به همین دلیل خط IC از وسط ضلع AG می‌گذرد پس نقطهٔ C وسط ضلع GA است.

وقتی نقطهٔ G را به طرف نقطهٔ A ببریم، دستگاه لولایی R_2 تغییر شکل می‌دهد اما در تمام لحظات، دستگاه لولایی R_1 که در سمت راست خط BCE واقع است با دستگاه لولایی R_1 که در سمت چپ BCE قرار دارد با هم مساوی‌اند.

چون دو چهار ضلعی BICO و $IGI'C$ لوزی‌اند پس $CO \parallel BI$ و $CI' \parallel IG$ پس CD و CK در یک امتداداند. از این جهت به جای دو تسمه CD و CK فقط یک تسمه DK به کار می‌بریم. با همین شیوه استدلال نتیجه می‌گیریم که به جای دو تسمه CH و CF می‌توان یک تسمه HF به کار برد.

اکنون یک دستگاه لولایی R_1 در سمت چپ دستگاه لولایی R_2 قرار می‌دهیم و آنها را مانند شکل (۶) به یکدیگر لولا می‌کنیم و دستگاه حاصل را R_3 می‌نامیم. دو دستگاه لولایی R_2 و R_1 در نقاط H، G و K به هم لولا شده‌اند.

اگر نقطهٔ M را روی نیم‌خطی چون AX به طرف A حرکت دهیم، آنگاه دو نقطهٔ G و C به طرف نقطهٔ A حرکت می‌کنند و



دستگاه لولایی R_2

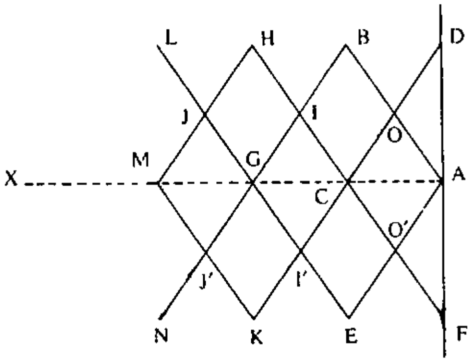
شکل ۶

همواره چنین داریم:

$\overline{MG} = \overline{GC} = \overline{GA}$

به آسانی می‌توان ثابت کرد که دو خط GB و GN همواره در یک امتداداند پس بجای دو تسمه GB و GN فقط یک تسمه BN به کار می‌بریم. همچنین بجای دو تسمه GE و GL یک تسمه EL به کار می‌بریم.

ساختمان در کشویی: دو تیغه فلزی هم طول M_1M_2 و $M'_1M'_2$ اختیار می‌کنیم و آنها را به جرز مغازه در امتداد عمود برزمین و نزدیک به‌هم استوار می‌کنیم، سپس دستگاه لولایی R_3 را که در شکل (۶) نموده شده است طوری قرار می‌دهیم که سه نقطهٔ A، D و F بین دو تیغه مذکور قرار گیرد. این دستگاه لولایی را در یک یا دو نقطه به دو میله M_1M_2 و $M'_1M'_2$ لوله می‌کنیم. شکل (۷)



شکل ۷

اگر دستگاه R_3 فقط در یک نقطه مثلاً در نقطهٔ A به دو تیغه لولا شود، آنگاه این دستگاه دور لولا به طرف پایین می‌چرخد.

اگر دستگاه لولایی R_3 در دو نقطه یا سه نقطه به دو تیغه مذکور لولا شود، آنگاه شبکه R_3 باز و بسته نمی‌شود (منظور آن است که با وارد کردن نیرو به تسمه‌های شبکه R_3 هیچ یک از تسمه‌ها حرکت نمی‌کنند). برای اثبات حکم اخیرالذکر فرض می‌کنیم دستگاه لولایی مذکور در دو نقطه D و F به دو تیغه M_1M_2 و $M'_1M'_2$ لولا شده باشد.

در مثلث DCF طولهای سه ضلع معین‌اند (ثابت‌اند)، زیرا دو پاره‌خط CD و CF نمایشگر دو تسمه CD و CF‌اند که طولشان

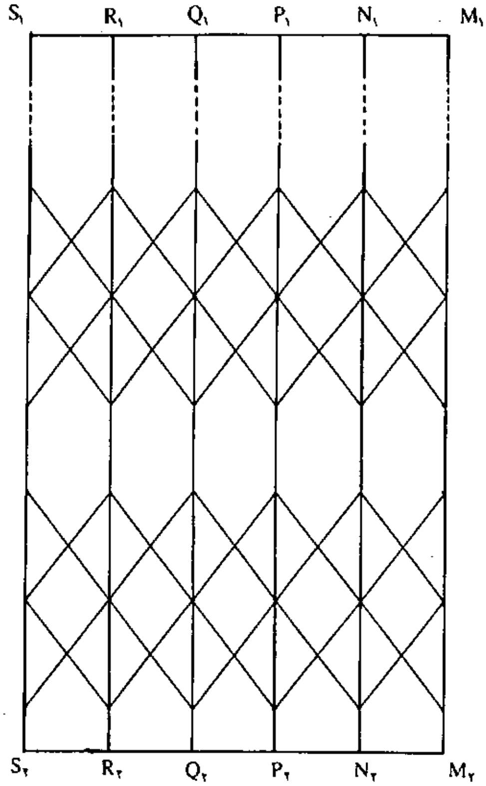
ثابت است و دو نقطهٔ D و F نمایش جای دو لولای ثابت می‌باشند، پس طول FD ثابت است. پس دو تسمه CD و CF دارای وضعیت ثابت‌اند، یعنی با وارد کردن نیرو به دستگاه لولایی R_2 دو تسمه مذکور حرکت نمی‌کنند.

چون CD جزیی از تسمه DK و همچنین CF جزیی از تسمه FH است پس با وارد شدن نیرو به شبکه لولایی R_2، دو تسمه DK و FH حرکت نمی‌کنند، بنابراین تمام نقاط دو تسمه مذکور وضع ثابت دارند. پس نقطهٔ O وضع ثابت دارد. حال می‌گوییم دو نقطهٔ A و O از تسمه AB دارای وضع ثابت‌اند، پس تسمه AB وضع ثابت دارد و لذا نقطه B وضع ثابت دارد (منظور آن است که اگر نیرویی به شبکه R_2 وارد شود لولای B حرکت نمی‌کند). اکنون می‌گوییم چون تسمه FH وضعیت ثابتی دارد پس نقطه I وضع ثابتی دارد. اکنون توجه کنیم که دو نقطهٔ B و I از تسمه BN وضع ثابت دارند، پس این تسمه وضع ثابت دارد. این شیوه استدلال را ادامه می‌دهیم و گام به‌گام به پیش می‌رویم تا نتیجه بگیریم که تمام تسمه‌های شبکه R_2 که در دو نقطه D و F به دو تیغه M_1M_2 و $M'_1M'_2$ لولا شده‌اند، حرکت نمی‌کنند.

تیغه‌های عمودی در کشویی: در شکل (۸) یک لنگه در کشویی نمایش شده است. در این شکل خطهای M_1M_2، N_1N_2، P_1P_2، .... نمایش تیغه‌های فلزی عمود به سطح زمین‌اند که در جلوی در کشویی قرار دارند. در پشت در کشویی تیغه‌های فلزی $M'_1M'_2$، $N'_1N'_2$، $P'_1P'_2$، .... قرار دارند که به ترتیب در پشت تیغه‌های M_1M_2، N_1N_2، P_1P_2، .... می‌باشند (منظور از جلو در کشویی سمتی از در کشویی است که به طرف خارج مغازه است).

هر جفت تیغه عمودی رو به روی هم (N_1N_2، $N'_1N'_2$)، ($P'_1P'_2$ و P_1P_2)، .... در بالا و پایین به هم متصل شده‌اند (شکل ۹). میله اتصال بالایی می‌تواند در داخل شیار یک ناودانک افقی حرکت کند. این ناودانک فلزی قسمت بالای چهارچوب در را تشکیل می‌دهد. میله اتصال پایینی می‌تواند در شیار بین دو تیغه فلزی که روی زمین محکم شده‌اند حرکت کند.

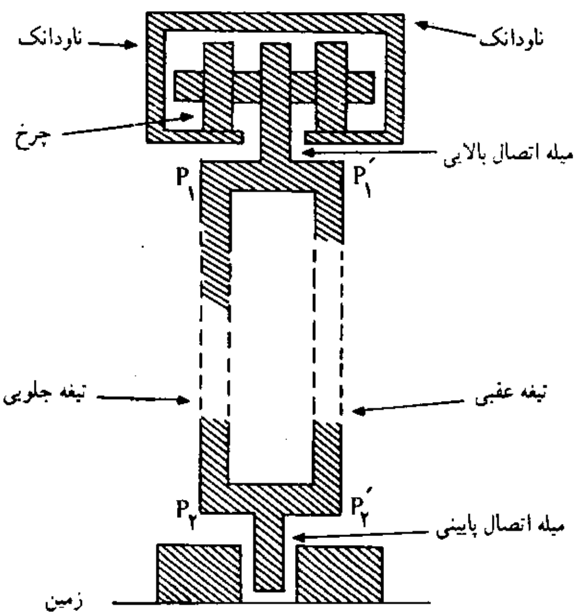
چهارچوب در کشویی: چهارچوب در کشویی تشکیل



شکل ۸

می‌شود از :

۱ ــ چهار جفت تیغه فلزی که در دو طرف مغازه به جرز محکم شده‌اند (دو جفت در سمت راست و دو جفت در سمت چپ).



شکل ۹

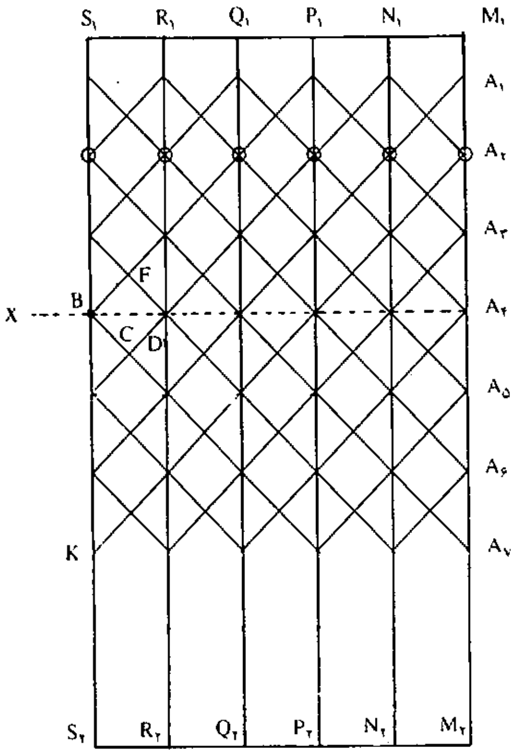
۲ ــ دو تیغه فلزی که در آستانه در به‌طور موازی با هم قرار دارند. این دو تیغه اندکی در زمین فرو رفته‌اند. انتهای آنها به تیغه‌های جرز متصل‌اند. بین این دو تیغه شیار باریکی است که میله‌های اتصال پایینی تیغه‌ها می‌توانند در آن حرکت نمایند.

۳ ــ در قسمت بالای چهارچوب یک ناودانک فلزی قرار دارد که به تیغه‌های جرز متصل است. میله‌های اتصال بالایی تیغه‌های عمودی متحرک، می‌توانند در شیار ناودانک حرکت کنند (به جز تیغه‌های دو جرز بقیه تیغه‌ها می‌توانند حرکت کنند). میله‌های اتصال بالایی اگر به‌وسیله چرخهایی بر سطح پایین ناودانک متکی شوند، آنگاه فشار وزن تیغه‌ها و شبکه لولایی به ناودانک وارد می‌شود و درنتیجه باز و بسته شدن در کشویی روان می‌شود (یعنی اگر تیغه قائم S_1S_2 را به طرف تیغه ثابت M_1M_2 حرکت دهیم تیغه‌های N_1N_2، P_1P_2، Q_1Q_2، R_1R_2، به روانی به طرف تیغه M_1M_2 حرکت می‌کنند).

فایده شیار پایین آستانه چهارچوب در کشویی آن است که دامنه نوسان تیغه‌های بلند عمودی را کم می‌کند.

اندکی بیشتر فکر کنیم: اکنون از خود می‌پرسیم که چرا در کشویی را به شکل (۱) می‌سازند و به صورت شکل زیر نمی‌سازند.به عبارت دیگر چرا تعداد دستگاههای لولایی R_1 را در امتداد تیغه‌ها به اندازه کافی زیاد اختیار نمی‌کنند تا شبکه لولایی حاصل در را از بالا تا پایین بپوشاند.

اگر شبکه لولایی در کشویی را در دو نقطه یا بیش از دو نقطه به تیغه‌های جرز لولا کنیم، آنگاه در باز و بسته نمی‌شود یعنی تیغه‌های عمودی و شبکه لولایی نمی‌توانند حرکت کنند. اگر شبکه لولایی در کشویی را در یک نقطه مثلاً A_4 به تیغه‌های جرز لولا کنیم، هنگامی که تیغه‌های عمودی را به طرف جرز فشار می‌دهیم، قسمتی از شبکه لولایی که در پایین خط A_4x قرار دارد به مقدار زیاد پایین می‌رود (خطی را که از نقطه A_4 به خط M_1M_2 عمود شود خط A_4X می‌نامیم) و درنتیجه انتهای پایین شبکه لولایی به زمین‌گیر می‌کند (منظور کف شیار پایین است) و نمی‌تواند جلوتر برود. همچنین قسمتی از شبکه لولایی که در بالای خط A_4X است به مقدار زیاد بالا



شکل ۱۰

می‌رود و درنتیجه انتهای بالایی شبکه به زیر ناودانک گیر می‌کند و نمی‌تواند بیشتر به طرف تیغه M_1M_2 برود.

بیشتر توضیح می‌دهیم : لوزی BCDE را در شبکه شکل ۱۰ در نظر می‌گیریم. تیغه فلزی S_1S_2 را به اندازه a به طرف تیغه جرز یعنی M_1M_2 می‌بریم و فرض می‌کنیم رأس C لوزی از خط A_4X به اندازه L پایین برود و رأس E از همان خط به اندازه L بالا برود، در این صورت نقاطی چون A_7 که پایینترین نقاط شبکه فلزی لولایی‌اند به اندازه (6L) پایین می‌روند و نقاطی چون A_1 که بالاترین نقاط شبکه فلزی‌اند به اندازه (6L) بالا می‌روند. در صورتی که در شبکه لولایی شکل (۱) مقدار بالا و پایین رفتن انتهای بالایی و انتهای پایینی هر شبکه جزیی برابر (2L) است.

خلاصه آن که شبکه لولایی در کشویی اگر به صورت یک پارچه ساخته شود، نمی‌تواند به‌طور کامل باز و بسته شود، مگر آن که انتهای شبکه لولایی در قسمت پایین با آستانه در خیلی فاصله داشته باشد و همچنین فاصله انتهای شبکه لولایی در قسمت بالا با ناودانک خیلی زیاد باشد. در این صورت در

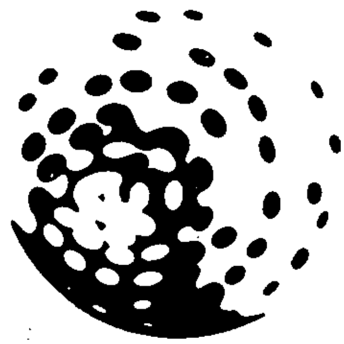
کشویی دارای نقصی بزرگ است.

شبکه لولایی یک پارچه دارای نقص دیگری که در مقابل نقص مذکور در بالا بسیار اندک است: اگر شبکه لولایی یک پارچه باشد، فقط یک لولای ثابت که از دو تیغه M_1M_2، $M'_1M'_2$ می‌گذرد، به کار می‌رود اما اگر شبکه لولا، از سه شبکه جزیی تشکیل شود، آنگاه سه لولای ثابت که از دو تیغه M_1M_2 و $M'_1M'_2$ می‌گذرند به کار می‌آید. در حالت اول فشار روی لولای ثابت بیشتر است.

چند تبصره:

۱ ــ چون در شبکه لولایی در کشویی مقدار زیادی لوزی مشاهده می‌کنیم، به عبارت دیگر چون شبکه لولایی در کشویی تقریباً پوشیده از لوزیهاست، چنین تصور می‌کنیم که تحلیل هندسی در کشویی باید براساس لوزی باشد در صورتی که چنین نیست. درکشویی از دستگاههای لولایی از نوع R تشکیل شده است، لذا تحلیل هندسی در کشویی اگر براساس دستگاههای لولایی به شکل R باشد، بهتر است در واقع امر دستگاه لولایی R، موتیف (MOTEF) شبکه لولایی در کشویی است. از این جهت است که دستگاه لولایی R را موتیف شبکه لولایی در کشویی محسوب می‌دارم.

۲ ــ در تحلیل هندسی شبکه لولایی در کشویی براساس موتیف R، نزدیکی هندسی دستگاه R با بالابری که براساس خاصیت مثلث قائم‌الزاویه ساخته می‌شود معلوم می‌شود.



تفریح اندیشه ۲

یک استنتاج منطقی

الف: در این معما پنج گزارهٔ حرفی موجودند.

ب: این گزاره نیست.

پ: تنها دو تا از این گزاره‌ها دروغ‌اند.

ت: تنها یکی از آنها راست است.

ث: اگر بتوانید این معما را حل کنید، شخصی بسیار منطقی هستید.

آیا گزارهٔ ث راست است؟

جواب در صفحهٔ ۸۸

آموزش ترجمه متون ریاضی(۱۸)

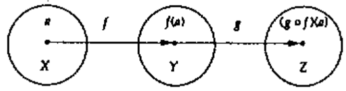
● حمیدرضا امیری

10. Composition of Functions

Suppose there are two functions $f : X \longrightarrow Y$ and $g : Y \longrightarrow Z$ in which the domain of g is the codomain of f. Then we denote the composition of these two functions as $g \circ f$, a function mapping X to Z defined as follows:

(10.1) $$\forall a \in X, (g \circ f)(a) := g(f(a)).$$

(10.1F)



(10.2) The notation $g \circ f$ may seem backward, but it is necessary because we put the argument of the function on the right-hand side. From the sketch (10.1F) you see that f is the function we must apply first. From a we go to $f(a)$. From $f(a)$ we go to $g(f(a))$. We call this function $g \circ f$ and write

$$g \circ f : X \longrightarrow Z.$$

۱۰. ترکیب تابعها

فرض کنیم دو تابع $f : X \rightarrow Y$ و $g : Y \rightarrow Z$ وجود داشته باشند، به طوری که دامنهٔ g هم دامنهٔ f باشد. سپس ترکیب این دو تابع را با نماد gof نمایش داده و آن تابعی است که طبق تعریف زیر X را به Z می‌نگارد:

$$\forall a \in X \ , \ (gof)(a) = g(f(a))$$

ممکن است نماد gof(با توجه به نمودار) یک رابطهٔ پَسرو (برگشتی) به نظر برسد، اما ضروری می‌باشد، زیرا ما شناسهٔ تابع را (a را) در سمت راست قرار می‌دهیم. از نمودار (۱۰.۱F) درمی‌یابید، f تابعی است که می‌بایست اول از آن استفاده کنیم. از a به f(a) می‌رویم. از f(a) به g(f(a)) می‌رویم. ما این تابع را gof نامیده و می‌نویسیم: $gof : X \rightarrow Z$.

(If, as some do, we wrote the arguments of our functions on the left, we would denote the same composition as $f \circ g$ and define it as $((a)f)g$. See (18).)

(10.3) You have seen the composition of functions before, as for example $\log(1+x)$, which is the composition of the logarithm function g with the function f defined by the rule $f(x) = 1 + x$ for all real $x > -1$. Here is another example: a program (f) that acts on the input (a) to produce a value $(f(a))$, which is then taken as the input to a subroutine (g).

(اگر از اول، ما شناسهٔ تابعهایمان را در سمت چپ آنها می‌نوشتیم می‌بایست برای نمایش همان ترکیب، نمایش fog را به کار ببریم و آن را به صورت g((a)f) تعریف کنیم (۱۸ را مشاهده کنید).

شما قبلاً ترکیب تابعها را دیده‌اید، به طور مثال لگاریتم $\log(1+x)$ به صورت ترکیب تابع لگاریتم g با تابع f که با ضابطهٔ $f(x)=1+x$ برای هر عدد حقیقی $x > -1$ تعریف شده است. در اینجا مثال دیگری عنوان می‌کنیم:

برنامهٔ (f) که روی ورودی (a) اثر کرده و مقدار حاصل‌ضربی (f (a)) را به دست می‌دهد و سپس این مقدار به عنوان ورودی زیر برنامهٔ (g) در نظر گرفته می‌شود.

The *chain rule* in calculus tells you how to get the derivative of a composition of functions $g \circ f$ in terms of the derivatives of the functions f and g. In our notation, if the prime ′ denotes derivative, the chain rule is

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'.$$

Thus to find $(\sin^2 x)'$ we have, for all $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) := x^2$$
$$f(x) := \sin x.$$

Then $(g \circ f)(x) := g(f(x)) = g(\sin x) = (\sin x)^2 =: \sin^2 x$. The derivatives: $g'(x) = 2x$ and $f'(x) = \cos x$. By the chain rule $(g' \circ f)(x) := g'(f(x)) = g'(\sin x) = 2\sin x$; multiply these by $f'(x) = \cos x$ to get the result $(\sin^2 x)' = 2\sin x \cos x$.

قاعدهٔ زنجیری در حساب دیفرانسیل و انتگرال برای شما بیان می‌کند که مشتق‌گیری از ترکیب تابعها یعنی gof بر حسب مشتقهای تابعهای f و g است.

در نمادگذاری ما، اگر پریم نشان دهندهٔ مشتق باشد، قاعدهٔ زنجیری به صورت زیر است :

$$(g\circ f)' = (g'\circ f).f'$$

بنابراین برای یافتن $(\sin^2 x)'$ خواهیم داشت، برای هر $x \in R$

$$g(x) := x^2$$

$$f(x) := \sin x$$

بنابراین :

$$(g\circ f)(x) := g(f(x)) = g(\sin x) = (\sin x)^2 =: \sin^2 x.$$

مشتق : $g'(x) = 2x \ , \ f'(x) = \cos x.$

با توجه به قاعدهٔ زنجیری

$$(g'\circ f)(x) := g'(f(x)) = g'(\sin x) = 2\sin x$$

با ضرب مقدار حاصل در $f'(x) = \cos x$ نتیجه بدست می‌آید : $(\sin^2 x)' = 2\sin x \cos x$

Proposition (10.4) The composition of injections [surjections] is injective [surjective].[†] ∎

The proof, omitted here, is a nice exercise.

Corollary (10.5) The composition of bijections is a bijection.

قضیهٔ (۱۰.۴)

ترکیب ــ تابعهای ــ یک به یک [پوشا] تابعی یک به یک [پوشا] می‌باشد. در اینجا اثبات که تمرین خوبی می‌باشد حذف شده است.

نتیجه (۱۰.۵)

ترکیب ــ تابعهای ــ دو سویی یک تابع دو سویی است.

Proposition (10.6) The inverse of a composition is the composition of the inverses in reverse order:

$$(\widehat{g\circ f})^{-1} = \hat{f}^{-1}\circ \hat{g}^{-1}.$$

Proof Notice first that this claim makes sense, because $(\widehat{g\circ f})^{-1}$, with the above choice of notation in (10.1F) for domains and codomains, is a function from $\mathcal{P}(Z)$ to $\mathcal{P}(X)$, and $\hat{g}^{-1}$ maps $\mathcal{P}(Z)$ to $\mathcal{P}(Y)$, and $\hat{f}^{-1}$ maps $\mathcal{P}(Y)$ to $\mathcal{P}(X)$.

قضیهٔ (۱۰.۶)

معکوس یک ترکیب عبارت است از ترکیب معکوسها با ترتیب عکس :

$$(\widehat{g\circ f})^{-1} = \hat{f}^{-1}\circ\hat{g}^{-1}$$

اثبات

در ابتدا توجه کنید که این ادعا مفهومی را می‌سازد، زیرا $(\widehat{g\circ f})^{-1}$، با انتخاب بالا از نمادگذاری(۱۰.۱F) برای دامنه‌ها و هم دامنه‌ها، تابعی است از $P(Z)$ به $P(X)$، و g^{-1} می‌نگارد $P(Z)$ را به $P(Y)$، و f^{-1} می‌نگارد $P(Y)$ را به $P(X)$.

Let us prove the claim (10.6) of equality between functions. We have just observed that both have the same domain and codomain. We now must show that

$$\forall C \subseteq Y, (\widehat{g\circ f})^{-1}(C) = (\hat{f}^{-1}\circ \hat{g}^{-1})(C). \tag{10.7}$$

We can transform the left side of (10.7) into the right side more easily than you might think:

$$\begin{aligned}(\widehat{g\circ f})^{-1}(C) &:= \{a;\, a\in X, (g\circ f)(a)\in C\}\\ &:= \{a;\, a\in X, g(f(a))\in C\}\\ &:= \{a;\, a\in X, f(a)\in \hat{g}^{-1}(C)\}\\ &:= \{a;\, a\in X, a\in \hat{f}^{-1}(\hat{g}^{-1}(C))\}\\ &:= (\hat{f}^{-1}\circ\hat{g}^{-1})(C).\end{aligned}$$

QED

بیایید ادعای (۱۰.۶) از برابری بین تابعها را ثابت کنید. دیدیم که هر دو ــ تابع ــ دامنه و هم دامنهٔ مشابه دارند. حال می‌بایست نشان دهیم که

$$\forall C\subseteq Y \ , \ (\widehat{g\circ f})^{-1}(\hat{C}) = (f^{-1}\circ g^{-1})(\hat{C})$$

ما بسیار ساده‌تر از آنچه شما ممکن است فکر کنید، سمت چپ رابطهٔ (۱۰.۷) را به سمت راست تبدیل می‌کنیم :

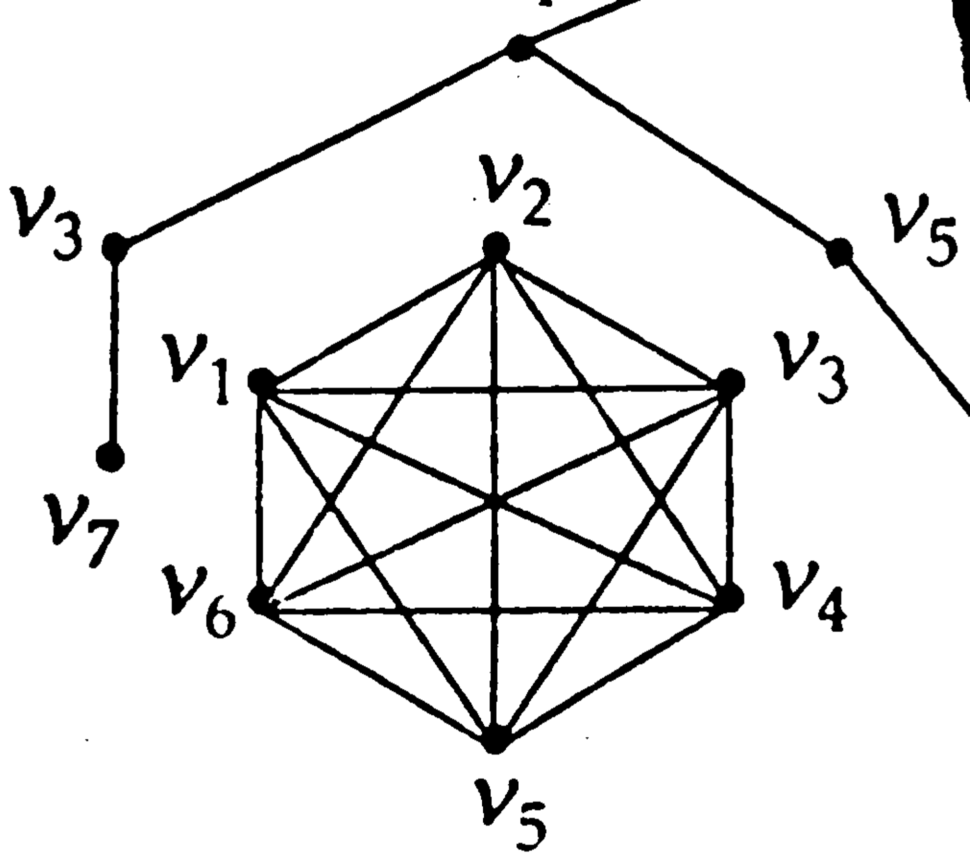
$$\begin{aligned}(\widehat{g\circ f})^{-1}(C) &:= \{a; a\in X, (g\circ f)(a)\in C\}\\ &:= \{a; a\in X, g(f(a))\in C\}\\ &:= \{a; a\in X, f(a)\in \hat{g}^{-1}(C)\}\\ &:= \{a; a\in X, a\in \hat{f}^{-1}(\hat{g}^{-1}(C))\}\\ &:= (\hat{f}^{-1}\circ\hat{g}^{-1})(c)\end{aligned}$$

● ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

ریاضیات گسسته

RALPH P. GRIMALDI

(قسمت هفتم)



اکنون با بازگشت به بررسی روشهای اثبات قضایا (یا استلزامهای منطقی)، باید نگاهی محتاطانه به اندازهٔ جدول ۱۳.۲ بیندازیم. جدول مزبور دارای هشت سطر است، زیرا می‌توانیم سه فرض p_1، p_2 و p_3 و نتیجهٔ q را بر حسب سه گزارهٔ p، r و s نمایش دهیم. اگر، فی‌المثل، با اثبات این موضوع که

$$[(p\to r)\wedge(r\to s)\wedge(t\vee\bar{s})\wedge(\bar{t}\vee u)\wedge\bar{u}]\to\bar{p}$$

استلزام منطقی (یا قضیه) است یا خیر، مواجه شویم، جدول مورد نیاز به $2^5 = ۳۲$ سطر نیاز خواهد داشت. این رهیافت، چون تعداد فرضها بیشتر شوند و جدولهای ارزشمان به ۶۴، ۱۲۸، ۲۵۶ سطر یا بیشتر افزایش یابد، کارآیی خود را به سرعت از دست می‌دهد.

گذشته از این، با یکبار دیگر نگریستن به جدول ۱۳.۲، درمی‌یابیم که در تشخیص این که

$$[(p\to r)\wedge(\bar{s}\to p)\wedge\bar{r}]\to s$$

استلزامی منطقی است یا نه، تنها به بررسی سطرهایی از جدول نیاز داریم که در آنها هر یک از سه فرض $p\to r$، $\bar{s}\to p$ و $\bar{r}$ ارزش راستی ۱ دارد. (به خاطر داشته باشید در صورتی که گزارهٔ سمت چپ یک شرطی دروغ باشد، اهمیتی به گزارهٔ سمت راست آن نمی‌دهیم.) و این تنها در سطر دوم جدول رخ می‌دهد، و بنابراین در واقع مقدار زیادی از جدول ۱۳.۲ ضروری نیست. (همواره چنین نیست که تنها یک سطر جمیع فرضها را راست داشته باشد.)

در نتیجه، آنچه در این مرحله مورد نیاز است، تکنیک یا فهرستی از تکنیکهایی است که به گونه‌ای لزوم رسم جدولهای ارزش، مخصوصاً جدولهای ارزش بزرگ، را کنار می‌گذارد. این تکنیکها به *قواعد استنتاج*[1] موسوم‌اند، و به طریق زیر به کمکمان می‌آیند:

۱. استفاده از این تکنیک توانایمان می‌کند که تنها به بررسی حالتهایی که در آنها جمیع فرضها راست‌اند بپردازیم. در نتیجه تنها سطرهایی از جدول ارزش را در نظر می‌گیریم که در آنها هر فرض دارای ارزش راستی ۱ است و جدول ارزش مربوطه را رسم نمی‌کنیم.

۲. قواعد استنتاج در توسعهٔ *اثباتهای* مرحله به مرحله، با نشان این که چگونه نتیجهٔ q منطقاً از فرضهای p_1، p_2، p_3، ...، p_n واقع در استلزام

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \dots \wedge p_n) \to q$$

به دست می‌آید، اساسی‌اند.

توسعه‌ای چنین درستی اثبات (یا *استدلال*[۲]) مان را محقق می‌کند.

هر یک از قاعده‌های استنتاج از استلزامی منطقی یا هم‌ارزی‌ای منطقی رخ می‌دهد، و استلزام منطقی یا هم ارزی‌ای منطقی مزبور، در هر حالت، بدون اثبات بیان می‌شود.

قواعد استنتاج بسیاری در بررسی منطق روی می‌دهند، و ما به آنهایی توجه می‌کنیم که به کمکشان در اثبات قضایای مورد بحثمان نیاز داریم. قواعدی را که هم اکنون تحقیقشان را آغاز می‌کنیم در آینده، در جدول ۲. ۱۴ خلاصه خواهیم کرد.

مثال ۱۸.۲

به عنوان اولین مثال قاعدهٔ استنتاج موسوم به *قیاس استثنایی*[۳]، یا *قاعدهٔ فاصل*[۴] را بررسی می‌کنیم. این قاعده به صورت علامتی با استلزام منطقی

$$[p \wedge (p \to q)] \Rightarrow q$$

بیان می‌شود.

قاعدهٔ واقعی را به صورت جدول شکل

$$\begin{array}{l} p \\ p \to q \\ \hline \therefore \quad q \end{array}$$

می‌نویسیم، که سه نقطه ($\therefore$) ی آن به جای کلمهٔ «بنابراین» قرار گرفته است، و مقرر می‌کند که q دنبالهٔ منطقی فرضهای p و $p \to q$ است، که در بالای خط افقی ظاهر شده‌اند. نیز می‌گوییم که فرضها (گزاره‌های بالای خط افقی) *استدلال* درست[۵] یا *اثبات*[۶]، نتیجهٔ q را به دست می‌دهند.

این قاعده در وضعیتهایی رخ می‌دهد که در آنها استدلال می‌کنیم که *اگر* (۱) p راست باشد، و (۲) $p \to q$ راست باشد (یا $p \Rightarrow q$)، *آنگاه* نتیجهٔ q نیز باید راست باشد. (به هر حال، اگر q دروغ و p راست باشد، نمی‌توانیم $p \to q$ را راست داشته باشیم.)

اثبات زیر نشان می‌دهد که چگونه می‌توان قاعدهٔ انفصال را در هندسهٔ دبیرستان به کاربرد.

(۱) مثلث ABC متساوی الاضلاع است. $\qquad p$

(۲) اگر مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد، آنگاه مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

(۳) بنابراین مثلث ABC متساوی الساقین است.

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \hline \therefore \quad q \end{array}$$

مثال ۱۹.۲

دومین قاعدهٔ استنتاج با استلزام منطقی

$$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \Rightarrow p \to r$$

داده می‌شود، که p، q، و r آن هر سه گزاره‌اند. این قاعده به صورت جدول شکل چنین نوشته می‌شود.

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to r \\ \hline \therefore \quad p \to r \end{array}$$

این قاعده، که به آن به عنوان *قانون قیاس*[۷] اشاره می‌شود، در اثباتهای بسیار و استدلالهای ریاضی دیگر رخ می‌دهد. در واقع، همان طور که راه حل (اثبات) زیر مبرهن می‌کند، از آن به دفعات بسیار در حل معادلات جبری استفاده می‌کنیم.

(۱) اگر $۳x - ۷ = ۲۰$، آنگاه $۳x = ۲۷$ $\qquad p \to q$

(۲) اگر $۳x = ۲۷$، آنگاه $x = ۹$ $\qquad \underline{q \to r}$

(۳) بنابراین، اگر $۳x - ۷ = ۲۰$، آنگاه $x = ۹$ $\qquad \therefore \; p \to r$

مثال بعد شامل اثبات اندکی طولانیتری است که قواعد استنتاج مطرح در مثالهای ۱۸.۲ و ۱۹.۲ را به کار می‌برد. در واقع، در این مثال در می‌یابیم که ممکن است در تحقیق درستی

یک استدلال بیش از یک راه موجود باشد.

مثال ۲.۲۰

استدلال زیر را در نظر بگیرید.

(۱) در مثلث ABC، طولهای اضلاع AB و AC مساوی‌اند.	p
(۲) اگر مثلث ABC دارای دو ضلع مساوی باشد، آنگاه مثلث مزبور متساوی‌الساقین است.	$p \to q$
(۳) اگر مثلث ABC متساوی‌الساقین باشد، آنگاه زوایای مقابل به اضلاع متساوی الطول مساوی‌اند.	$q \to r$
(۴) بنابراین، زوایای B و C در مثلث ABC مساوی‌اند.	$\therefore\ r$

با تمرکز بر صورتهای گزاره‌های استدلال پیشین، می‌توان آن را به گونه‌ای فشرده‌تر به صورت زیر بنویسیم :

$$\begin{array}{l} p \\ p \to q \qquad (*) \\ q \to r \\ \hline \therefore\ r \end{array}$$

اکنون نیازی به نگران بودن در این مورد که گزاره‌ها عملاً به جای چه مواردی قرار گرفته‌اند نیست، و هدفمان استفاده از دو قاعدهٔ استنتاجی که تاکنون بررسی کرده‌ایم برای استنتاج راستی گزارهٔ r از راستی سه فرض p، $p \to q$، و $q \to r$ است.

اثباتمان به طریق زیر تقریر می‌شود :

دلایل	مراحل
فرض	(۱) $p \to q$
فرض	(۲) $q \to r$
این گزاره از مراحل (۱) و (۲) و قانون قیاس نتیجه می‌شود	(۳) $p \to r$
فرض	(۴) p
این گزاره از مراحل (۴) و (۳) و قاعدهٔ انفصال نتیجه می‌شود.	(۵) $\therefore\ r$

پیش از پرداختن به قانون سوم استنتاج، نشان می‌دهیم که می‌توان اثبات دومی در مورد استدلال ارائه شده در (*) به دست داد. در اینجا «دلایل» مان به صورتی مختصر می‌شود که آن را در باقی این بخش مورد استفاده قرار خواهیم داد، و در هر حال، هر چه را که برای مبرهن کردن این مطلب لازم باشد که چگونه هر مرحلهٔ یک اثبات از مراحل پیشین به دست آمده، یا نتیجه شده است، ثبت می‌کنیم.

اثبات دوم استدلال فوق عبارت است از :

دلایل	مراحل
فرض	(۱) p
فرض	(۲) $p \to q$
(۱)، (۲) ، و قاعدهٔ انفصال	(۳) q
فرض	(۴) $q \to r$
(۳)، (۴) و قاعدهٔ انفصال	(۵) $\therefore\ r$

مثال ۲.۲۱

قاعدهٔ موسوم به *انفصال نقیض*[^] به صورت زیر است :

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \bar{q} \\ \hline \therefore\ \bar{p} \end{array}$$

این قاعده از استلزام منطقی $[(p \to q) \wedge \bar{q}] \Rightarrow \bar{p}$ نتیجه می‌شود.

از این قاعده در طرح اثبات استدلال زیر بهره می‌گیریم :

$$\begin{array}{l} p \to q \\ r \to s \\ t \vee \bar{s} \\ \bar{t} \vee u \end{array}$$

$\overline{u}$

$\therefore\ \overline{p}$

هم انفصال نقیض هم قانون قیاس، همراه با همارزی منطقی مطرح در مثال ۲.۶ به صحنه می‌آیند.

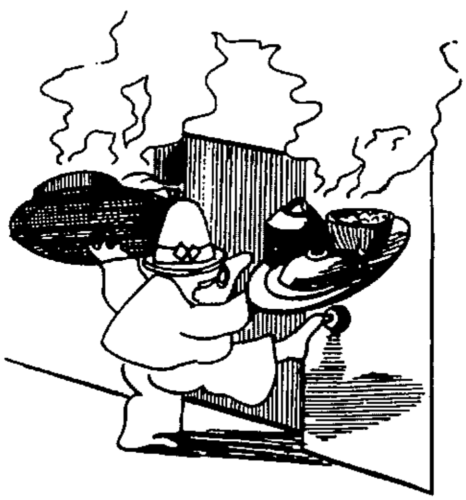
دلایل	مراحل
فرض	(۱) $p \to r$ ، $r \to s$
(۱) و قانون قیاس	(۲) $p \to s$
فرض	(۳) $t \vee \overline{s}$
(۳) و قانون تعویضپذیری	(۴) $\overline{s} \vee t$
(۴) و هم ارزی منطقی $\overline{s} \vee t$	(۵) $s \to t$
(۲) ، (۵) و قانون قیاس	(۶) $p \to t$
فرض	(۷) $\overline{t} \vee u$
(۷) و همارزی منطقی $\overline{t} \vee u$	(۸) $t \to u$
(۶)، (۸) و قانون قیاس	(۹) $p \to u$
فرض	(۱۰) $\overline{u}$
(۹)، (۱۰)، و انفصال نقیض	(۱۱) $\therefore\ \overline{p}$

یادداشتها

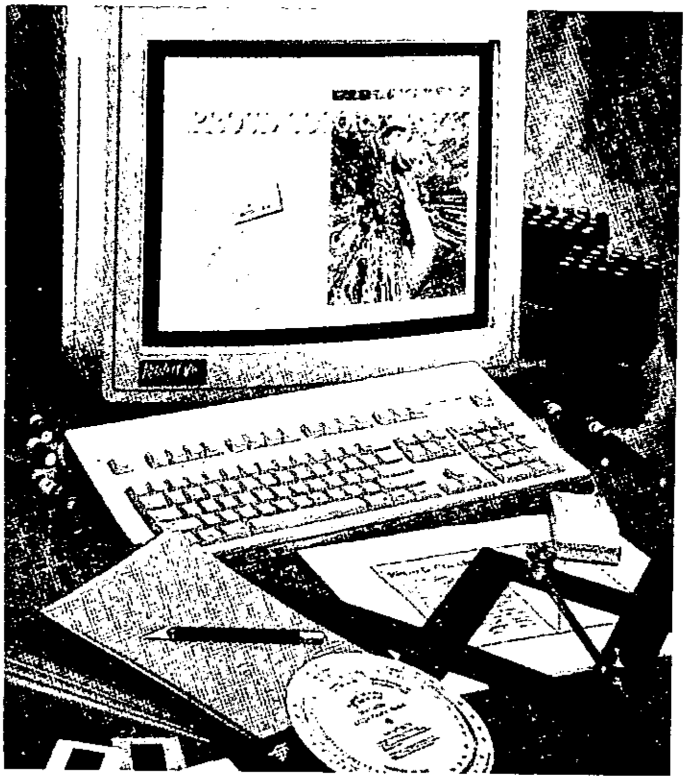
1. Rules of inference
2. Argument
3. Modus Ponenes
4. Rules of Detachment
5. Valid arguments
6. Proof
7. Law of the Syllogism
8. Modus Tollens

تفریح اندیشه۳

مهرداد و آرش برای خوردن شام به رستوران رفته بودند. برای مهرداد ۵ ظرف و برای دوستش ۳ ظرف غذا آوردند. در همین موقع دوستشان، علی، سر رسید و آنها غذایشان را با او تقسیم کردند. علی پس از صرف غذا، سهم خود را که ۱۶ تومان بود پرداخت. در صورتی که بهای تمام غذاهای سفارش داده شده برابر باشد، مهرداد و آرش هر کدام چه مبلغی از این ۱۶ تومان را دریافت کرده‌اند؟



جواب در صفحهٔ ۸۸



آموزش برنامه‌نویسی به زبان پاسکال

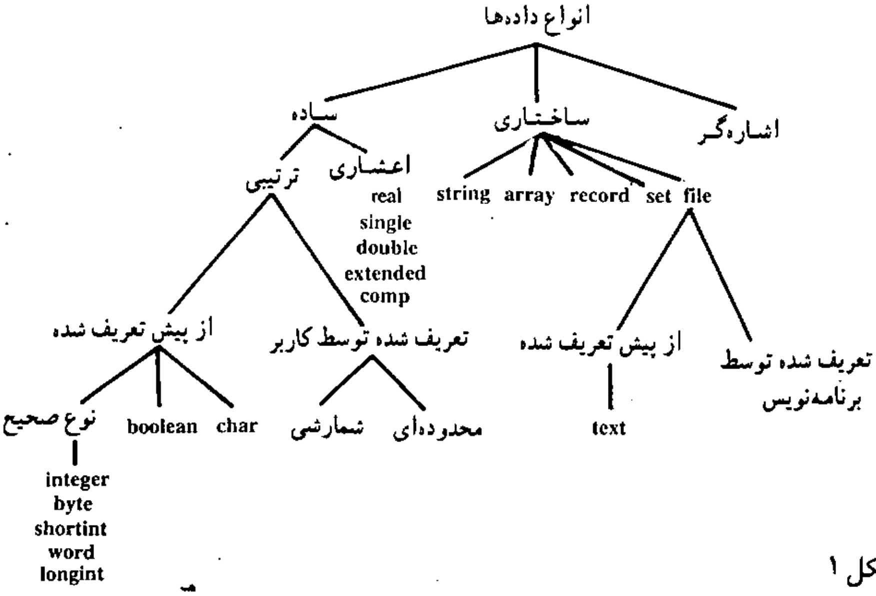
(قسمت دوم)

● محمد رحیم

معرفی انواع داده‌ها در زبان پاسکال

برای نگهداری اطلاعات در طول برنامه باید متغیرهایی را متناسب با نوع اطلاعات تعریف کرد تا اطلاعات از این طریق در حافظه نگهداری شوند. به نوع اطلاعات و داده‌ها اصطلاحاً Data Type یا «نوع» می‌گویند. در شکل ۱ نمودار جامعی از انواع داده‌های مختلف در زبان پاسکال آمده است.

در برنامه‌نویسی ممکن است یک داده و یا گروهی از داده‌های مرتبط با هم را در حافظه ذخیره کنیم. بدیهی است که گروهی از داده‌ها مانند نمره‌های دانش‌آموزان یک کلاس را می‌توان تفکیک کرد، ولی یک داده از نوع صحیح، مثلاً عدد ۵ و یا از نوع اعشاری، مثلاً ۵/۵ را نمی‌توان به داده‌های جزیی‌تر تفکیک کرد. به همین دلیل در شکل ۱ به تقسیم‌بندی نوع ساده[1]



شکل ۱

و ساختاری[۲] اشاره شده است. دادهٔ نوع ساده غیر قابل تفکیک بوده و برای نگهداری داده‌های منفرد به کار می‌رود، ولی داده‌های ساختاری قابل تفکیک به داده‌های کوچکتر هستند. مثلاً دادهٔ نوع رشته (string) که مجموعه‌ای از کاراکترها را شامل می‌شود می‌تواند به اجزای کوچکتری تقسیم شود.

تقسیم‌بندی دیگری که در شکل ۱ به آن اشاره شده مربوط به داده‌های نوع ترتیبی[۳] است. مجموعهٔ محدودی را در نظر بگیرید که دارای عنصر ابتدا و انتها باشد. اگر این مجموعه دارای این خاصیت باشد که به جز عنصر اول مابقی عناصر دارای عنصر ماقبل باشند و نیز به جز عنصر آخر مابقی عناصر دارای عنصر بعد از خود باشند، به چنین مجموعه‌ای یک مجموعه مرتب می‌گوییم. برای مثال اعداد صحیح ...,۲,۱,۰,۱-,۲-,۳-,... به طور طبیعی مرتب هستند. دادهٔ نوع منطقی (Boolean) که فقط می‌تواند True یا False بپذیرد یک داده ترتیبی است. دادهٔ نوع کاراکتری (char) که در زبان پاسکال مبنای عددی دارد یک دادهٔ نوع ترتیبی است. در واقع هرکاراکتر با یک عدد مشخص می‌شود.

توجه داشته باشید که دادهٔ نوع اعشاری (مثلاً real) نمی‌تواند یک دادهٔ نوع ترتیبی باشد، چون برای یک عدد اعشاری نمی‌توان بلافاصله عدد قبل و بعد آن‌را مشخص کرد، ولی در هر صورت دادهٔ نوع اعشاری یک دادهٔ نوع ساده است.

دادهٔ نوع اشاره‌گر[۴] برای نگهداری آدرس به کار می‌رود.

مطابق شکل ۱ در زبان پاسکال این قابلیت وجود دارد که نوعهای جدیدی توسط برنامه‌نویس برحسب ضرورت ایجاد شود. نوعهای ایجاد شده می‌تواند ساده و یا ساختاری باشند.

متغیرها و نحوهٔ معرفی آنها

در شمارهٔ قبلی مجله توضیح دادیم که در زبان پاسکال کلیهٔ متغیرهای مورد استفاده در برنامه باید معرفی شوند. در ابتدای این نوشتار نیز اشاره شد که متغیرها باید متناسب با نوع اطلاعات تعریف شوند. توضیح این مطلب ضروری است که خانه‌های حافظهٔ کامپیوتر دارای دو ویژگی مهم هستند:

الف) آدرس دارند.

ب) توانایی نگهداری اطلاعات را دارند.

در اینجا دسته‌بندی متغیرها نیز بر همین اساس صورت می‌گیرد:

الف) متغیرهایی که آدرس نگه می‌دارند، مانند اشاره‌گرها که در آینده بحث خواهد شد.

ب) متغیرهایی که مقدار نگه می‌دارند، به جز اشاره‌گرها تمام انواع معرفی شده در شکل ۱ انواعی هستند که نگهدارنده مقدار و نه آدرس هستند. در این دسته‌بندی متغیرهای مختلفی را می‌توان معرفی کرد، ولی ما در حال حاضر توجه خود را به متغیرهای زیر معطوف می‌کنیم و سایر متغیرها در آینده معرفی خواهند شد:

۱) متغیرهای نوع صحیح: برای نگهداری اعداد صحیح، «نوع»[۵] متغیر باید یکی از موارد زیر باشد:

longint, word, integer, shortint, byte

۲) متغیرهای نوع اعشاری: برای نگهداری اعداد اعشاری، «نوع» متغیر باید یکی از موارد زیر باشد:

comp, extended, double, single, real

۳) متغیر نوع کاراکتری: برای نگهداری یک کاراکتر، «نوع» متغیر باید char باشد.

۴) متغیر نوع رشته: برای نگهداری مجموعه‌ای از کاراکترها، «نوع» متغیر باید string باشد.

۵) متغیر منطقی: متغیری است که برای نگهداری True و یا False (درست و یا نادرست) به کار می‌رود و «نوع» متغیری که برای آن تعریف می‌شود از نوع Boolean است.

توجه داشته باشید که نام متغیر همانند یک برچسب بر روی یکی از خانه‌های حافظه است و این خانه از حافظه همانطور که قبلاً گفته شد دارای آدرس مشخصی است. در طول اجرای برنامه نام متغیر و آدرس خانه‌ای از حافظه که نام متغیر به آن منتسب است بدون تغییر باقی می‌ماند، ولی محتویات این خانه از حافظه در طول برنامه ممکن است تغییر کند.

چون نام متغیر یک نوع شناسه است، لذا از قاعده‌ای که در

شمارهٔ قبلی مجله در مورد شناسه‌ها گفته شد پیروی می‌کند .

حال که با «نوع» متغیرها آشنا شدیم، باید نحوهٔ اعلان متغیرها را فرا بگیریم. همانطور که در شمارهٔ قبلی مجله در بخش «ساختار زبان پاسکال» اشاره شد، کلیهٔ متغیرهای مورد استفاده باید در بخش اعلانات معرفی شوند. در شکل ۲ نمودار دستوری مربوط به نحوهٔ اعلان متغیرها آمده است.

مطابق شکل ۲، در بخش اعلانات برای آنکه مشخص شود که می‌خواهیم متغیرها را معرفی کنیم، باید ابتدا کلمهٔ کلیدی VAR را بیاوریم و پس از آن به ترتیب نام متغیر، علامت دو نقطه (:)، نوع متغیر و در نهایت باید علامت نقطه ویرگول (;) بیاید. در صورتی که چندین متغیر از یک نوع بخواهیم معرفی کنیم، نام متغیرها را با ویرگول از یکدیگر جدا می‌کنیم. به مثال زیر توجه کنید :

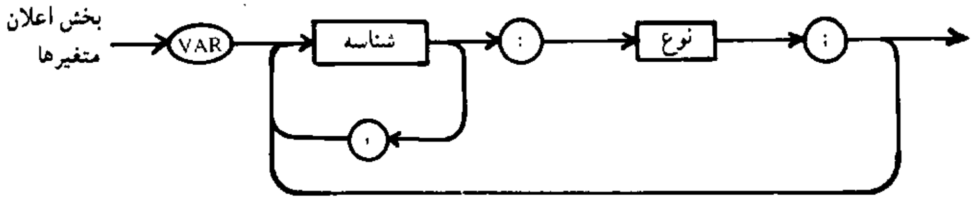
```
Var
      A: Integer;
   B و C: Integer;
x و y و z: Real;
      ch: char;
      str: string;
    flag: Boolean;
```

در مثال فوق A,B,C متغیرهایی هستند که مقادیر صحیح را نگهداری می‌کنند و z و y و x متغیرهایی که مقادیر اعشاری را نگهداری می‌کنند و متغیر flag یک متغیر منطقی است که فقط می‌تواند True و یا False را نگهداری کند. متغیر ch برای نگهداری یک کاراکتر و متغیر str برای نگهداری مجموعه‌ای از کاراکترها به کار می‌رود. متذکر می‌شود که نام متغیرهایی که در مثال فوق آمده، هریک به طور جداگانه به یکی از خانه‌های حافظه منتسب هستند و هیچگونه تداخلی با یکدیگر ندارند. به برنامهٔ زیر توجه کنید :

```
program test;
Var
   a: Integer;
   x: Real;
   ch: char;
   s: string;
BEGIN
   a: = 2;
   x: = 3.5;
   ch: = 'a';
   s: = 'Rahim';
   writeln ('a = ',a);
   writeln ('x = ',x);
   writeln ('The first character is ', ch);
   writeln ('My Name Is ', s);
END.
```

در برنامهٔ فوق ابتدا عنوان برنامه، سپس بخش اعلانات var و در نهایت قسمت اصلی برنامه آمده که با BEGIN شروع شده و با .END به اتمام رسیده است.

در بخش اعلانات چهار متغیر با چهار نوع مختلف معرفی شده و در قسمت اصلی برنامه ابتدا این متغیرها مقدارگذاری شده و سپس با استفاده از دستور writeln مقادیر این متغیرها به همراه یک سری عبارات در خروجی چاپ می‌شود. خروجی برنامهٔ فوق چنین است :



شکل ۲

a = 2

x = 3.5

The first character is a

My Name Is Rahim

همانطور که گفته شد برای نگهداری اعداد صحیح، نوع متغیر می‌تواند Byte، Integer، word و... و در مورد اعداد اعشاری نوع متغیر می‌تواند real، double و... باشد. حال ممکن است این سؤال مطرح شود که برای نگهداری اعداد صحیح چه موقع از Byte و چه موقع از Integer استفاده می‌شود. برای روشن شدن مطلب باید به این نکته اشاره کرد که ما نمی‌توانیم هر عدد صحیح دلخواه بزرگی را در حافظه نگهداری کنیم. در واقع نوعهایی که برای متغیرهای نوع صحیح معرفی شد هر کدام دارای محدودیتی است. برای مثال، متغیری که از نوع Byte است، فقط می‌تواند اعداد ۰ تا ۲۵۵ را نگهداری کند و متغیری که از نوع Integer است، فقط می‌تواند اعداد بین ۳۲۷۶۸- تا ۳۲۷۶۷ را نگهداری کند، به طور مشابه در مورد نوعهای اعشاری نیز محدودیت داریم. همانطور که می‌دانید یک عدد اعشاری به صورت $a\times۱۰^{b}$ درمی‌آید که در آن a مانتیس و b نمای عدد است. در اینجا این محدودیت به a و b اعمال می‌شود. در واقع a و b هر عدد دلخواهی نمی‌توانند باشند. در جدول ۱ محدودیت نوعهای صحیح و در جدول ۲ محدودیت نوعهای اعشاری آمده است. برای آنکه اعداد صحیح و یا اعشاری بزرگتری را در حافظهٔ کامپیوتر نگهداری کنیم، باید حافظهٔ بیشتری را اختصاص دهیم. در

نوع متغیر	محدوده	حافظه مورد نیاز
byte	۰ ...۲۵۵	۱ بایت
shortint	-۱۲۸...۱۲۷	۱ بایت
integer	-۳۲۷۶۸...۳۲۷۶۷	۲ بایت
word	۰ ...۶۵۵۳۵	۲ بایت
longint	-۲۱۴۷۴۸۳۶۴۸...۲۱۴۷۴۸۳۶۴۷	۴ بایت

جدول ۱

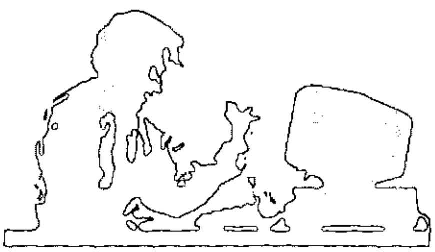
جداول ۱ و ۲ به حافظه‌ای که هرکدام از نوعها نیاز دارند تا بتوانند عدد صحیح و یا اعشاری را، که محدودهٔ آن در جدول آمده، ذخیره کنند نیز ذکر شده است. لازم به ذکر است که برای نگهداری اعداد اعشاری خیلی نزدیک به صفر نیز محدودیت داریم که برای نوعهای مختلف در جدول ۲ مشخص شده است.

نوع متغیر	محدوده	تعداد ارقام مانتیس	حافظه‌موردنیاز
Real	$۲/۹\times۱۰^{-۳۹}...۱/۷\times۱۰^{۳۸}$	۱۱ـ۱۲	۶
Single	$۱/۵\times۱۰^{-۴۵}...۳/۴\times۱۰^{۳۸}$	۷ـ۸	۴
Double	$۵/۰\times۱۰^{-۳۲۴}...۱/۷\times۱۰^{۳۰۸}$	۱۵ـ۱۶	۸
Extended	$۳/۴\times۱۰^{-۴۹۳۲}...۱/۱\times۱۰^{۴۹۳۲}$	۱۹ـ۲۰	۱۰
Comp	$-۲^{۶۳}+۱...۲^{۶۳}-۱$	۱۹ـ۲۰	۸

جدول ۲

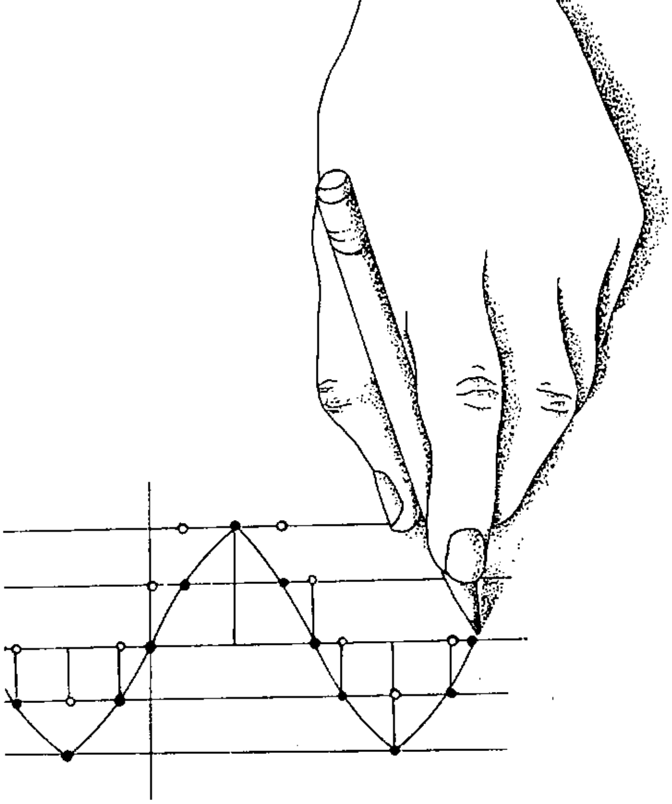
متغیرهایی که با char اعلان می‌شوند به اندازهٔ یک بایت از حافظه را اشغال می‌کنند.

متغیرهایی که از نوع رشته یا string تعریف می‌شوند، حداکثر می‌توانند ۲۵۵ کاراکتر را نگهداری کنند.



واژه‌نامهٔ ریاضی و کامپیوتر

۱ـ Simple
۲ـ Structured
۳ـ Ordinal
۴ـ Pointer
۵ـ Type



رسم منحنیهای توابع سینوسی و کسینوسی درجه اول با روش نقطه‌یابی و انتقال

برای داوطلبان کنکور نظام جدید و درس ریاضی ۳

● میرشهرام صدر

هر حرکتی که در بازه‌های زمانی مساوی تکرار شود، حرکت تناوبی است. جهان پر از حرکتهای تناوبی است که از آن جمله می‌توان از نوسانهای رقاصک ساعت مچی، سیم تار مرتعش، جرم آویزان متصل به فنر درحال نوسان، عقربه کوچک ساعت که بعد از طی دوازده ساعت دوباره مسیر اولیه را تکرار می‌کند و پاندول ساعت که هر رفت و برگشت را در مدت یک ثانیه طی می‌کند و دوباره مسیر رفت و برگشت اولیه را تکرار می‌کند. در این مقاله توابع متناوبی را رسم می‌کنیم، که در فاصله‌های مساوی تکرار می‌شوند. چنان‌که خواهیم دید، توابع سینوسی و کسینوسی درجه اول نمونه‌ای از این نوع توابع می‌باشند.

تابع متناوب

تابع حقیقی f را متناوب گوییم، هرگاه کوچکترین مقدار مثبتی مانند $T \neq 0$ موجود باشد، به‌طوری که برای هر x واقع در دامنه f، $x \pm T$ نیز در دامنه f باشد و

$$f(x+T)=f(x)$$

در این صورت T را دوره تناوب تابع f می‌گوییم.

مسأله: دوره تناوب تابع با ضابطه $f(x)=\sin(ax+\beta)$ را به‌دست آورید.

حل:

$$f(x+T)=f(x) \Rightarrow \sin[a(x+T)+\beta]$$
$$=\sin(ax+\beta)$$
$$\Rightarrow ax+aT+\beta=2k\pi+ax+\beta \ \ (k\in z)$$
$$\Rightarrow T=\frac{2k\pi}{a}$$

کوچکترین مقدار مثبت T به‌ازای $k=1$ به‌دست می‌آید، چون $D_f=\mathbb{R}$ بدیهی است که اگر $x\in D_f$ آن‌گاه $x\pm T\in D_f$. بنابراین دوره تناوب تابع $f(x)=\sin(ax+\beta)$ برابر است با $T=\frac{2\pi}{a}$. به‌طریق مشابه می‌توان بررسی کرد، که دوره تناوب تابع $f(x)=\cos(ax+\beta)$ به‌صورت $T=\frac{2\pi}{a}$ می‌باشد.

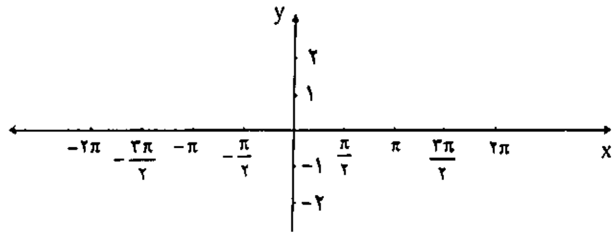
ـــ مراحل رسم منحنیهای توابع $f(x)=k\sin(ax+\beta)+L$ و $f(x)=k\cos(ax+\beta)+L$، کــه در آنهـا: $L\in\mathbb{R}$ و a و $k\neq 0$ و β زاویه‌ای برحسب رادیان می‌باشد.

با توجه به مطالب گفته شده درباره تابع متناوب به‌سادگی درمی‌یابیم که توابعی به‌صورت بالا متناوب می‌باشند. بنابراین شکل آنها در فاصله‌های برابر به‌طور دقیق تکرار می‌شوند. لذا کافی است نمودار آنها را در فاصله $[0, T]$ رسم نماییم، سپس

در فاصله‌های برابر با طول دوره تناوب شکل تابع را به‌طور دقیق تکرار کنیم، تا این‌که نمودار تابع در هر فاصله‌ای از صفحه مختصات مشخص باشد.

برای رسم شکل این نوع توابع مراحل زیر را به‌ترتیب انجام می‌دهیم:

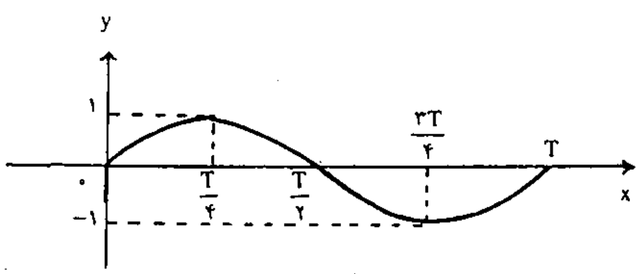
مرحله اول ــ در دستگاه مختصات xoy روی محور xها π را تقریباً به اندازه سه واحد درنظر می‌گیریم، بنابراین $\frac{\pi}{2}$ را ۱/۵ واحد و $\frac{3\pi}{2}$ را ۴/۵ واحد و ۲π را ۶ واحد انتخاب می‌کنیم.



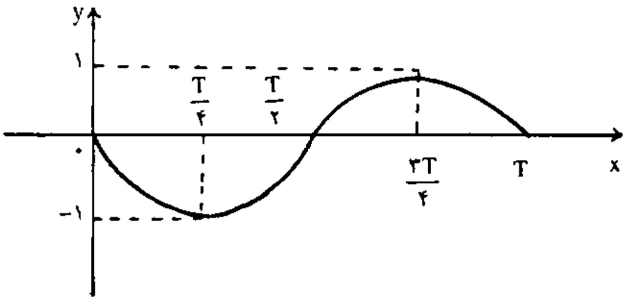
مرحله دوم ــ دوره تناوب تابع را با استفاده از فرمول $T=\frac{2\pi}{a}$ به‌دست می‌آوریم.

مرحله سوم ــ منحنی نمایش تابع با ضابطه $y=\sin ax$ و $y=-\sin ax$ (یا $y=\cos ax$ و $y=-\cos ax$) را به کمک جدولهای زیر و با استفاده از روش نقطه‌یابی در ناحیه $[0,T]$ (T دوره تناوب تابع است) رسم می‌کنیم.

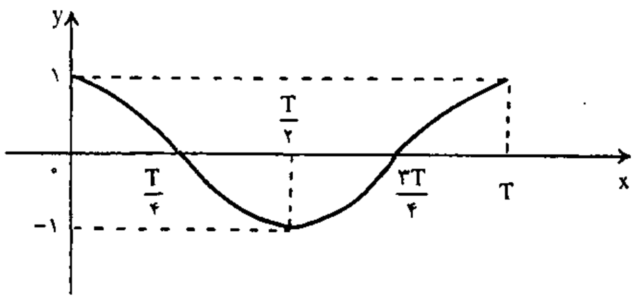
x	۰	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
$y=\sin ax$	۰	۱	۰	-۱	۰



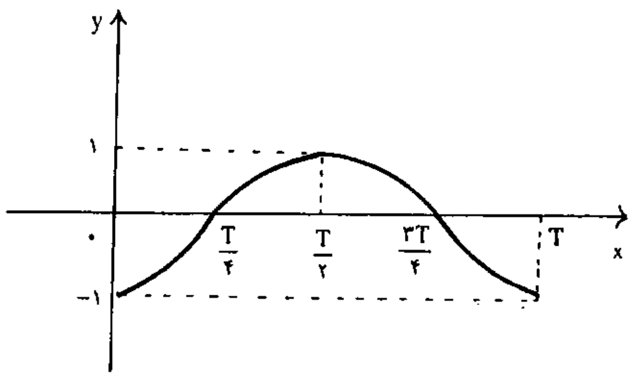
x	۰	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
$y=-\sin ax$	۰	-۱	۰	۱	۰



x	۰	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
$y=\cos ax$	۱	۰	-۱	۰	۱

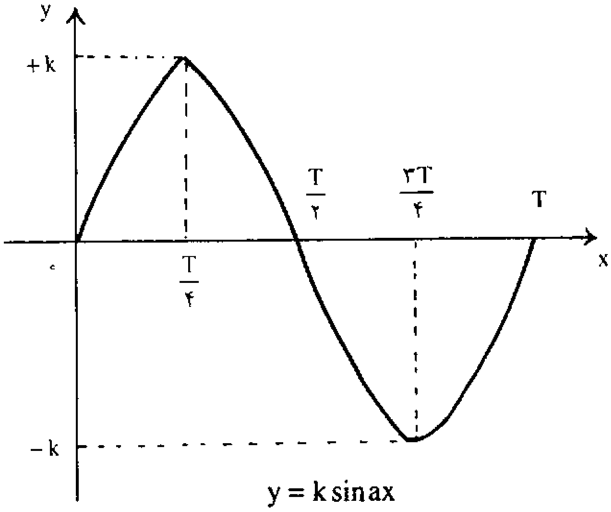


	۰	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
$y=-\cos ax$	-۱	۰	۱	۰	-۱



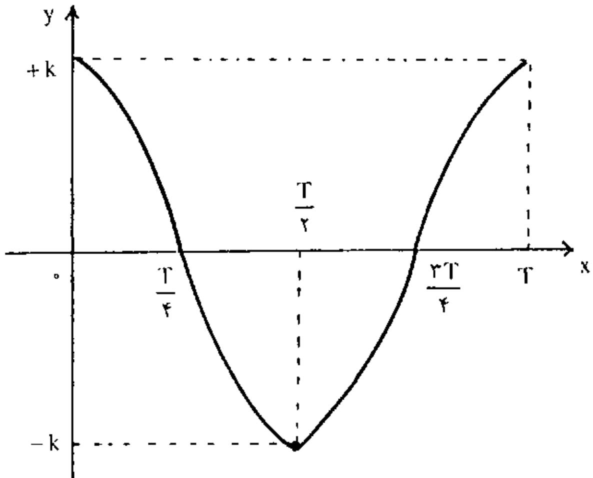
مرحله چهارم ــ نمایش منحنی توابع با ضابطه $y = k\sin ax$ (یا $y = k\cos ax$) را رسم می‌کنیم، برای این منظور باید عرض نقاط ماکزیمم و مینیمم منحنیهای نمودار مرحله سوم را از نقاط ۱+ و ۱− به‌ترتیب به نقاط $+k$ و $-k$ انتقال دهیم، تا این‌که منحنی آنها به‌صورت زیر به‌دست آید.

با فرض این‌که $k > ۰$ داریم :



$y = k\sin ax$

$k > ۰$

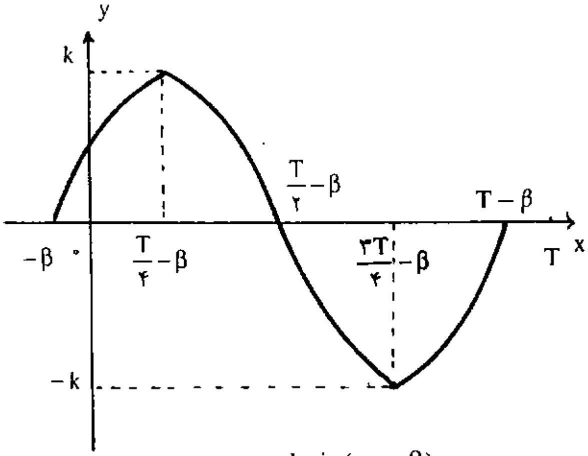


$y = k\cos ax$

$k > ۰$

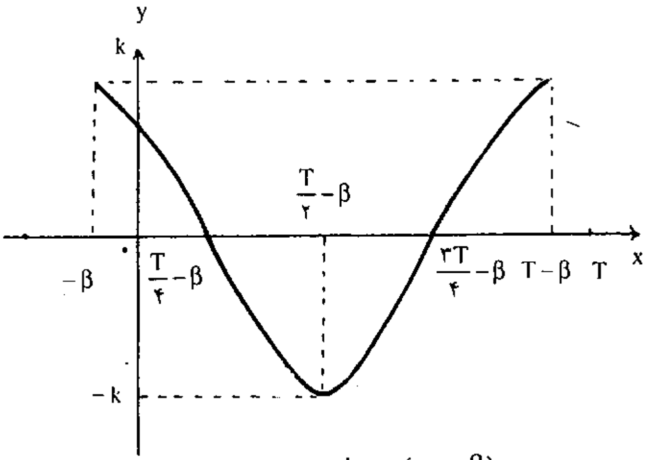
مرحله پنجم ــ منحنی نمایش توابع با ضابطه $y = k\sin(ax+\beta)$ (یا $y = k\cos(ax+\beta)$) را رسم می‌کنیم : اگر $\beta > ۰$ (β زاویه‌ای برحسب رادیان)، آن‌گاه منحنیهای به‌دست آمده از مرحله چهارم را به اندازه β واحد رادیان در جهت منفی محور طولها منتقل می‌کنیم. حال اگر $\beta < ۰$، آن‌گاه منحنیهای به‌دست آمده از مرحله چهارم را به اندازه β واحد رادیان در جهت مثبت محور طولها منتقل می‌کنیم.

با فرض این‌که $\beta > ۰$ باشد،نمودار منحنیها به‌صورت زیر به‌دست می‌آید :



$y = k\sin(ax+\beta)$

$(k > ۰, \beta > ۰)$

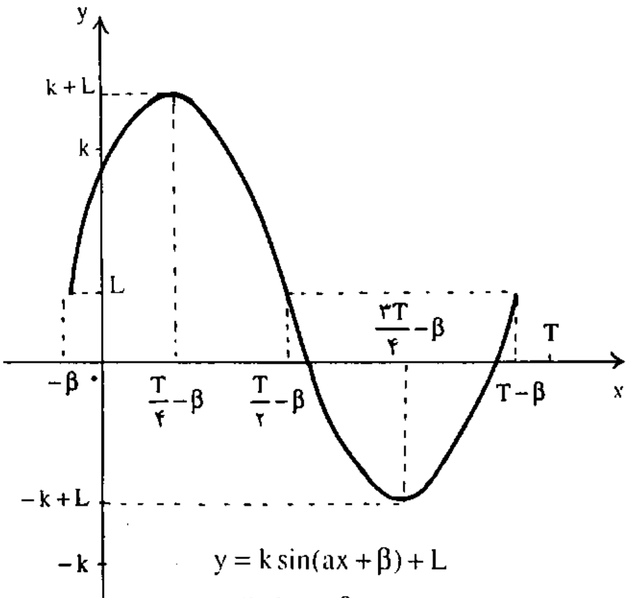


$y = k\cos(ax+\beta)$

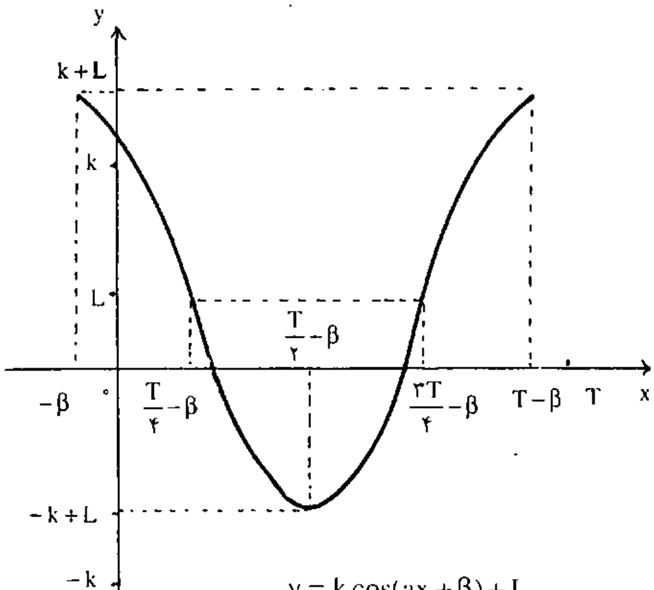
$(k > ۰, \beta > ۰)$

مرحله ششم ــ در این مرحله منحنی نمایش توابع با ضابطه $y = k\sin(ax+\beta)+L$ (یا $y = k\cos(ax+\beta)+L$) را رسم می‌کنیم. اگر $L > ۰$ (L عدد حقیقی است)، آن‌گاه منحنیهای به‌دست آمده از مرحله پنجم را به اندازه L واحد در جهت مثبت محور عرضها بالا می‌بریم و اگر $L < ۰$، آن‌گاه منحنیهای به‌دست آمده از مرحله پنجم را به اندازه L واحد در جهت منفی محور عرضها پایین می‌بریم.

با فرض این‌که $L > ۰$ شکل توابع بالا به‌صورت زیر می‌باشد :



$y = k\sin(ax+\beta)+L$
$(k, L > ۰, \beta > ۰)$

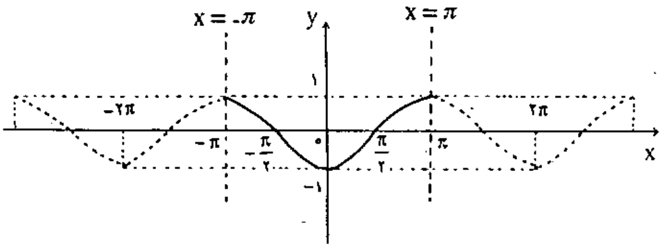


$y = k\cos(ax+\beta)+L$
$(k, L > ۰, \beta > ۰)$

مثال ۱ــ منحنی نمایش تابع با ضابطه $y = -\cos x$ را در فاصله $[-\pi, \pi]$ رسم کنید.

حل: دوره تناوب این تابع $T = \frac{۲\pi}{۱} = ۲\pi$ می‌باشد بنابراین به کمک جدول زیر و روش نقطه‌یابی نمودار این تابع را در فاصله $[۰, ۲\pi]$ رسم می‌کنیم، سپس در فاصله‌های مساوی ۲π شکل آن‌را به‌طور دقیق تکرار می‌کنیم و قسمتی از منحنی که بین دو خط $x = -\pi$ و $x = +\pi$ قرار دارد، شکل مورد نظر ما می‌باشد.

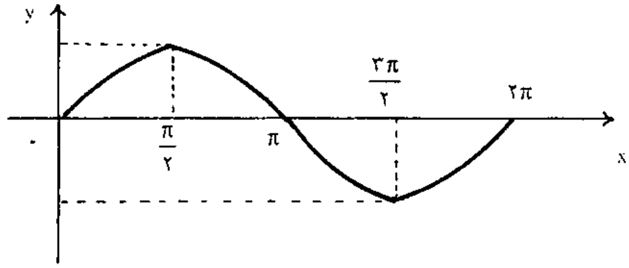
	۰	$\frac{T}{۴} = \frac{\pi}{۲}$	$\frac{T}{۲} = \pi$	$\frac{۳T}{۴} = \frac{۳\pi}{۲}$	$T = ۲\pi$
$y = -\cos x$	−۱	۰	۱	۰	−۱



مثال ۲ــ با استفاده از رسم منحنی توابع مثلثاتی نشان دهید که $\sin(x + \frac{\pi}{۲}) = \cos x$.

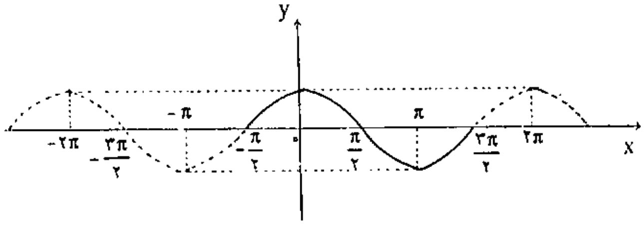
حل: دوره تناوب $y = \sin(x + \frac{\pi}{۲})$ برابر با $T = ۲\pi$ می‌باشد، بنابراین نمودار $y = \sin x$ را در فاصله $[۰, ۲\pi]$ رسم می‌کنیم.

	۰	$\frac{T}{۴} = \frac{\pi}{۲}$	$\frac{T}{۲} = \pi$	$\frac{۳T}{۴} = \frac{۳\pi}{۲}$	$T = ۲\pi$
$y = \sin x$	۰	۱	۰	−۱	۰



اکنون برای رسم $y = \sin(x + \frac{\pi}{۲})$ کافی است شکل مرحله

قبل را به اندازه $\frac{\pi}{۲}$ رادیان به طرف چپ منتقل کنیم. سپس منحنی نمایش این تابع را در فاصله‌های مساوی ۲π تکرار می‌کنیم.

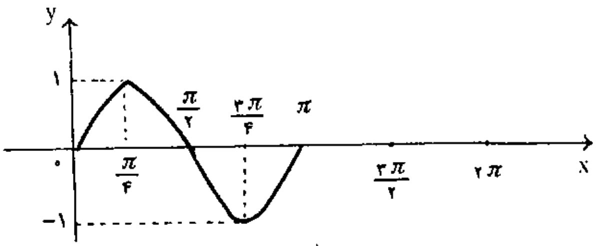


همان‌طور که ملاحظه می‌کنید منحنی بالا نمایش تابع با ضابطه $y = \sin(x + \frac{\pi}{۲})$ و هم‌چنین منحنی نمایش تابع $y = \cos x$ می‌باشد. در فیزیک اصطلاحاً می‌گویند منحنی نمایش $y = \sin x$، $\frac{\pi}{۲}$ تقدم فاز نسبت به $y = \cos x$ دارد، یعنی این‌که منحنی نمایش تابع $y = \sin x$ به اندازه $\frac{\pi}{۲}$ رادیان از منحنی نمایش تابع $y = \cos x$ جلوتر می‌باشد.

مثال ۳ ــ منحنی نمایش تابع با ضابطه $y = ۳\sin(۲x + \frac{\pi}{۶}) - ۲$ را رسم کنید.

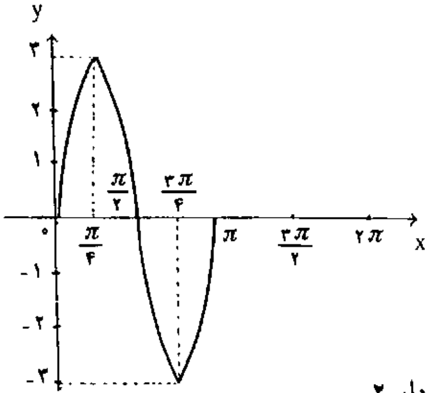
حل ــ دوره تناوب تابع فوق $T = \frac{۲\pi}{۲} = \pi$ می‌باشد، بنابراین به کمک جدول زیر و با روش نقطه‌یابی ابتدا نمودار $y = \sin ۲x$ را در فاصله $[۰, \pi]$ رسم می‌کنیم.

x	۰	$\frac{T}{۴} = \frac{\pi}{۴}$	$\frac{T}{۲} = \frac{\pi}{۲}$	$\frac{۳T}{۴} = \frac{۳\pi}{۴}$	$T = \pi$
$y = \sin ۲x$	۰	۱	۰	-۱	۰



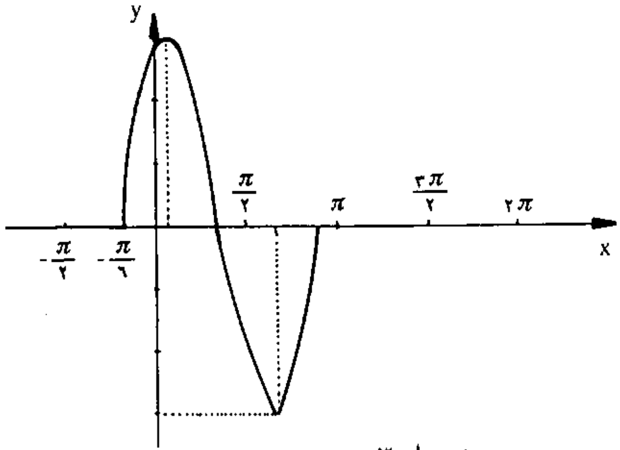
نمودار ۱

اکنون منحنی نمایش $y = ۳\sin ۲x$ را رسم می‌کنیم، برای این‌کار کافی است نقاط ۳+ و ۳− را روی محور عرض‌ها مشخص کنیم و نقاط ماکزیمم و مینیمم (نمودار ۱) را به‌ترتیب به نقاط ۳+ و ۳− منتقل کنیم.



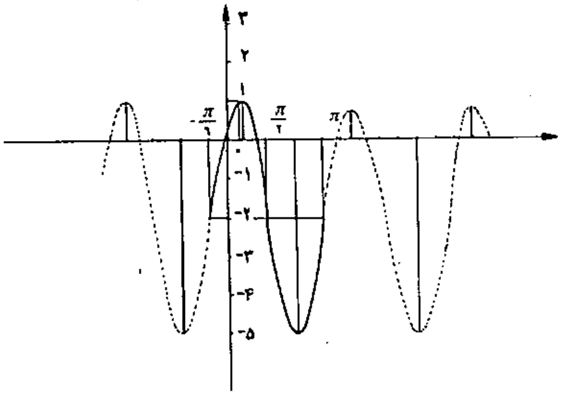
نمودار ۲

برای رسم منحنی نمایش $y = ۳\sin(۲x + \frac{\pi}{۶})$ کافی است (نمودار ۲) را به اندازه $\frac{\pi}{۶}$ رادیان به طرف چپ منتقل کنیم. بنابراین:



نمودار ۳

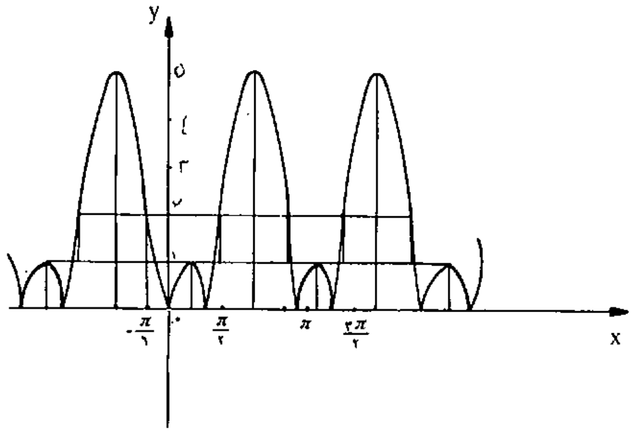
در مرحله آخر برای رسم $y = ۳\sin(۲x + \frac{\pi}{۶}) - ۲$ کافی است (نمودار ۳) را به اندازه ۲ واحد به طرف پایین منتقل کنیم، سپس در فاصله مساوی π شکل آن را به‌طور دقیق تکرار کنیم.



نمودار ۴

مثال ۴ ــ منحنی نمایش تابع با ضابطه $y=\left|3\sin(2x+\frac{\pi}{6})-2\right|$ را رسم کنید.

حل ــ ابتدا منحنی نمایش تابع $y=3\sin(2x+\frac{\pi}{6})-2$ را رسم می‌کنیم (نمودار ۴)، سپس قرینه قسمتی از منحنی نمایش تابع که زیر محور طولهاست نسبت به محور xها پیدا می‌کنیم، درنتیجه نمودار تابع به‌صورت زیر به‌دست می‌آید :

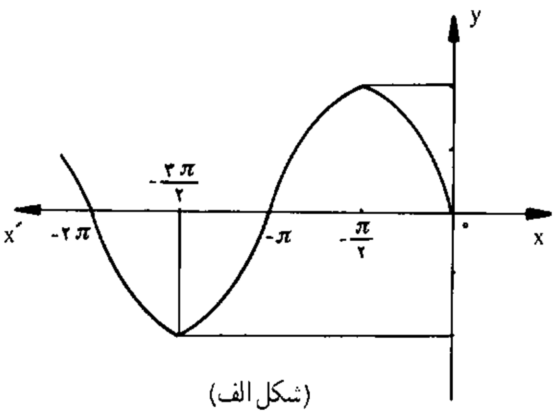


مثال ۵ ــ منحنی نمایش تابع با ضابطه $y=2\sin|x|$ را رسم کنید.

حل ــ با توجه به خواص قدرمطلق داریم :

$$\sin|x|=\begin{cases}\sin x & x\geq 0\\ -\sin x & x<0\end{cases}$$

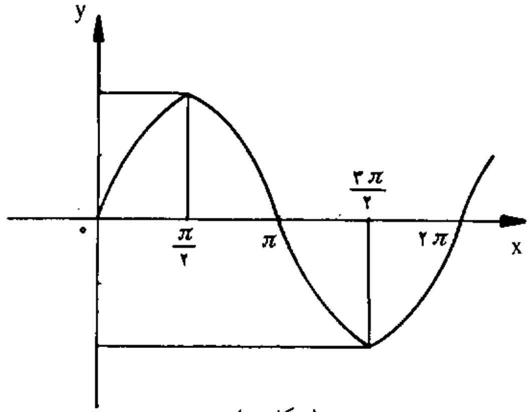
برای رسم منحنی نمایش این تابع ابتدا $y=2\sin x$ را برای $x\geq 0$ رسم می‌کنیم، سپس $y=-2\sin x$ را برای $x<0$ رسم خواهیم کرد.



(شکل الف)

$y=-2\sin x$

$(x<0)$

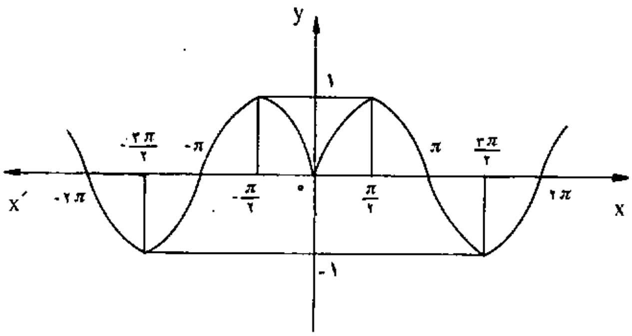


(شکل ب)

$y=2\sin x$

$(x\geq 0)$

اکنون اگر (شکل الف و ب) را در یک دستگاه مختصات رسم نماییم، منحنی نمایش تابع $y=2\sin|x|$ را خواهیم داشت :



$y=2\sin|x|$

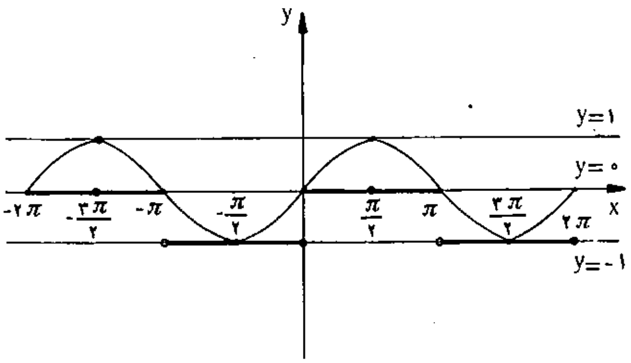
مثال ۶ ــ نمودار تابع با ضابطهٔ $y=[\sin x]$ را در فاصله $[-2\pi,2\pi]$ رسم کنید.

حل :

مرحله ۱ــ ابتدا منحنی تابع با ضابطه $y=\sin x$ را در فاصله $[-2\pi,2\pi]$ رسم می‌کنیم.

مرحله ۲ــ سه خط $y=-1$ و $y=0$ و $y=1$ را رسم می‌کنیم و نقاطی از منحنی را که روی این سه خط واقع می‌باشند، با نقاطی توپر مشخص می‌کنیم، سپس قسمتی از منحنی که بین دو خط $y=-1$ و $y=0$ قرار دارد (به غیر از نقاط توپر) را روی خط $y=-1$ تصویر می‌کنیم و به همین ترتیب قسمتی از منحنی که بین دو خط $y=0$ و $y=1$ قرار دارد (به غیر از نقاط توپر) را روی خط $y=0$ تصویر می‌کنیم،

تا نمودار تابع $y=[\sin x]$ را در فاصله $[-۲\pi,۲\pi]$ به‌صورت زیر به‌دست آوریم.



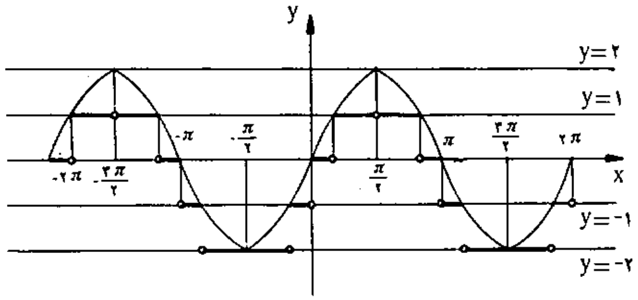
مثال ۷ــ نمودار تابع با ضابطه $y=[۲\sin x]$ را در فاصله $[-۲\pi,۲\pi]$ رسم کنید.

حل:

مرحله ۱ــ با توجه به مطالب گفته شده درباره رسم توابع مثلثاتی درجه اول، ابتدا منحنی نمایش $y=+۲\sin x$ را رسم می‌کنیم.

مرحله ۲ــ خطوط $y=-۲$ ، $y=-۱$ ، $y=۰$ ، $y=۱$ و $y=۲$ را رسم می‌کنیم و نقاطی از منحنی که روی این خطوط قرار دارند را پررنگ می‌کنیم، سپس قسمتی از منحنی که بین دو خط $y=-۲$ و $y=-۱$ قرار دارد (به غیر از نقاط پررنگ) را روی خط $y=-۲$ تصویر می‌کنیم و قسمتی از منحنی که بین دو خط $y=-۱$ و $y=۰$ قرار دارد (به غیر از نقاط پررنگ) را روی خط $y=-۱$ تصویر می‌کنیم[1] و به همین ترتیب قسمتی از منحنی که بین دو خط $y=۰$ و $y=۱$ قرار دارد (به غیر از نقاط پررنگ) را روی خط $y=۰$ تصویر می‌کنیم و در مرحله آخر قسمتی از منحنی که بین دو خط $y=۱$ و $y=۲$ قرار دارد (به غیر از نقاط پررنگ) را روی خط $y=۱$ تصویر می‌کنیم تا نمودار تابع فوق را به‌دست آوریم.

۱ــ به‌طور کلی قسمتی از منحنی که بین دو خط افقی متوالی قرار دارد را روی خط افقی پایین تصویر می‌کنیم. یعنی اگر قسمتی از نمودار منحنی بین دو خط افقی متوالی $y=i$ و $y=i+۱$ قرار داشته باشد، آن را روی خط $y=i$ تصویر می‌نماییم.

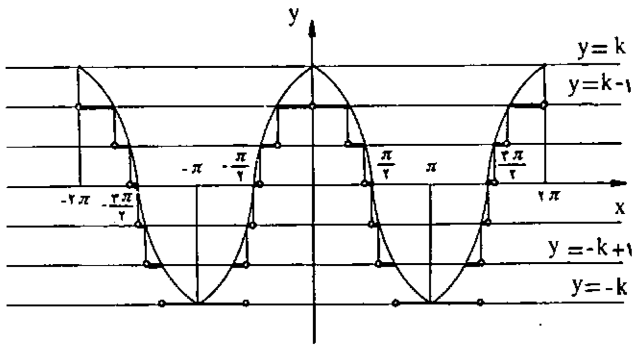


مثال ۸ــ نمودار تابع با ضابطه $y=[k\cos x]$ (که در آن $\begin{matrix}|k|\geq ۱\\ k\in z\end{matrix}$) را در فاصله $[-۲\pi,۲\pi]$ رسم کنید.

حل:

مرحله ۱ــ ابتدا منحنی $y=k\cos x$ را در فاصله $[-۲\pi,۲\pi]$ رسم می‌کنیم.

مرحله ۲ــ خطوط $y=-k$ و $y=-k+۱$ و $y=-k+۲$ و... $y=k-۱$ و $y=k$ را رسم می‌کنیم و نقاطی از منحنی که روی این خطوط واقع می‌باشند را پر رنگ می‌کنیم، سپس قسمتی از منحنی را که بین دو خط $y=-k$ و $y=-k+۱$ قرار دارد، روی خط $y=-k$ تصویر می‌کنیم، و... به همین ترتیب در مرحله آخر قسمتی از منحنی را که بین دو خط $y=k-۱$ و $y=k$ قرار دارد، روی خط $y=k-۱$ تصویر می‌کنیم، تا نمودار تابع فوق را به‌دست آوریم.

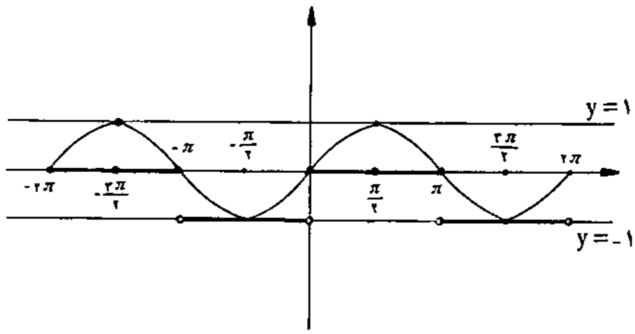


مثال ۹ــ نمودار تابع با ضابطه $y=[k\sin x]$ (که در آن $۰\leq|k|<۱$) را در فاصله $[-۲\pi,۲\pi]$ رسم کنید.

حل:

مرحله ۱ــ چون $۰\leq|k|<۱$، بنابراین منحنی نمایش تابع $y=k\sin x$ همواره بین‌دو خط $y=-۱$ و $y=۱$ واقع می‌شود.

مرحله ۲ـ ابتدا نقاطی از منحنی را که روی خط $y=0$ قرار دارند، پر رنگ می‌کنیم. سپس قسمتی از منحنی را که بین دو خط $y=-1$ و $y=0$ قرار دارد، روی خط $y=-1$ تصویر می‌کنیم و به همین ترتیب قسمتی از منحنی را که بین دو خط $y=0$ و $y=1$ قرار دارد، روی خط $y=0$ تصویر می‌کنیم، تا نمودار تابع فوق را به‌دست آوریم.



تمرین

منحنی نمایش توابع زیر را رسم کنید.

۱ـ $y=-\cos(2x+\frac{\pi}{4})+4$

۲ـ $y=4\sin(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6})-3$

۳ـ $y=\left|3\sin(\frac{1}{4}x+\frac{\pi}{3})+2\right|$

۴ـ $y=-5\sin(x+\frac{\pi}{7})-1$

فهرست منابع

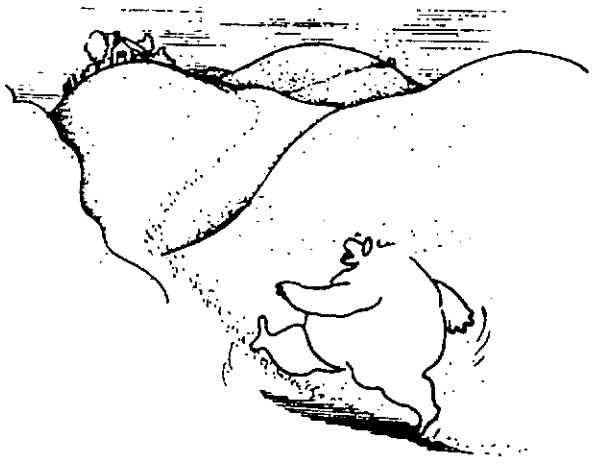
۱ـ ریاضیات ۳ نظام جدید.

۲ـ حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی ـ لیتهلد ـ (جلد اول).

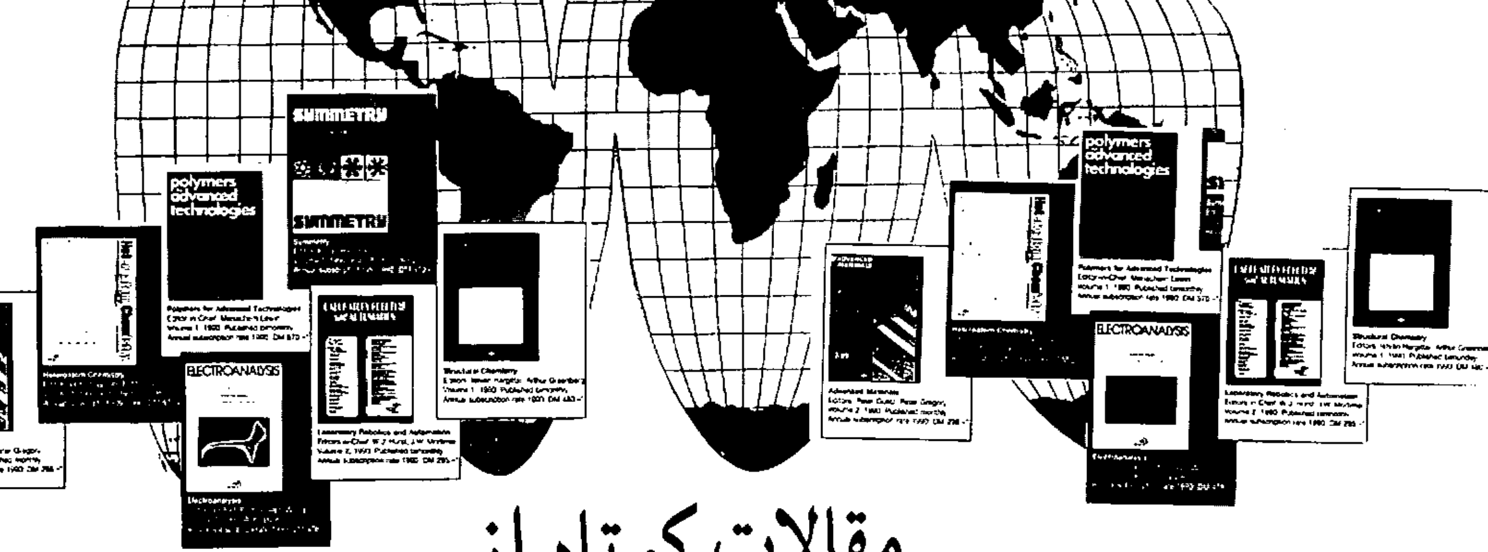
۳ـ فیزیک هالیدی ـ (جلد اول).

تفریح اندیشه ۴

مهرداد به پیاده‌روی عادت دارد. سرعت او در راهپیمایی ثابت و ۶ کیلومتر در ساعت است. او هر روز، هنگام ظهر، در یک میهمانخانهٔ ییلاقی که در میانهٔ مسیرش است، با دوستش ملاقات می‌کند. این محل در فاصلهٔ ۳۰ کیلومتری خانه او و دوستش واقع شده است. سرعت دوستش در راهپیمایی ۵/۵ کیلومتر در ساعت، یعنی کمی کمتر از سرعت مهرداد می‌باشد. اگر این دو قرار بگذارند که سر ظهر و همزمان به محل ملاقاتشان در میهمانخانه برسند، در ساعت ۱۱ در چه فاصله‌ای از یکدیگر باید قرار داشته باشند.



جواب در صفحهٔ ۸۸



مقالات کوتاه از مجله‌های ریاضی معتبر جهان (۱۹)

قضایای سِوا، مِنلائوس، و اصل سطح

(قسمت اول)

Branko Grünbaum
G.C.Shephard
Mathematics Magazine vol. 68

● ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

۱. مقدمه

قضایای سِوا و مِنلائوس، که به زودی از آنها سخن خواهیم گفت، از جذاب‌ترین و پربارترین قضایای هندسهٔ مسطحهٔ مقدماتی‌اند. بیان این قضایا آسان، و خود قضایا کاملاً عمومی‌اند. مثلاً، قضیهٔ منلائوس، در مورد هر مثلث و هر خط قاطع ناگذرنده از رأس آن، به کار می‌رود. این قضایا و اثبات آنها، چنان که از نامشان پیداست، قضایایی کلاسیک‌اند. منلائوس یونانی در قرن اول میلادی می‌زیست، و جیووانی سوای ایتالیایی "Giovanni Ceva" قضیهٔ خود (و قضیهٔ دوباره کشف کردهٔ منلائوس) را در قرن هفدهم میلادی انتشار داد. اخیراً هواهِنْ "Hoehn" با نشان دادن این که حاصل ضرب پنج، خارج قسمت از طولهای خاصی واقع در یک پنج ضلعی دارای مقدار ۱ است، به نتیجهٔ تازه‌ای از این دست رسید.

هدف از این مقاله، نشان دادن این مطلب است که نتایجی از این نوع، و توسیعاتشان به چند ضلعیهای عمومی‌ای [با هر چند ضلع دلخواه] پیامدهای اندیشهٔ ساده‌ای است که آن را اصل سطح "Area Principle" نام داده‌ایم. این اصل را در شکل ۱ توضیح داده‌ایم. در این شکل P نقطهٔ تقاطع خطوط BC و A_1A_2 است. با نمایش دادن طولهای قطعات $[A_1,P]$ و $[A_2,P]$، به ترتیب، با $|A_1P|$ و $|A_2P|$ و سطح مثلثهای $[A_1,B,C]$ و $[A_2,B,C]$، به ترتیب، با $|A_1BC|$ و $|A_2BC|$. اصل سطح بر این است که

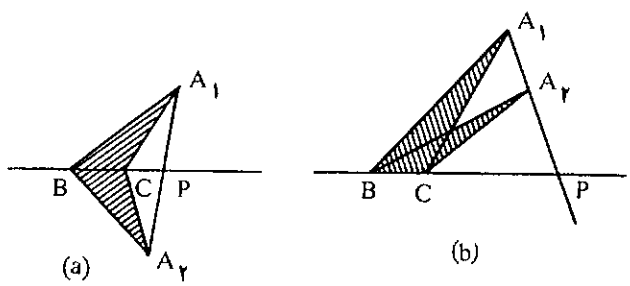
$$\frac{|A_1P|}{|A_2P|}=\frac{|A_1BC|}{|A_2BC|} \qquad (1)$$

و این رابطه، تا زمانی که نسبتهای موجود در آن خوش تعریف باشند، یعنی مخرجهای آنها صفر نباشند، برقرار است. درستی (۱) به اینکه نقاط A_1 و A_2 توسط BC از هم جدا شده باشند یا نه، بستگی ندارد (شکل (a)۱ یا شکل (b)۱). بعداً (۱) را، با در نظر گرفتن علامت برای نسبتهای آن، پالوده خواهیم کرد؛ اما در حال حاضر سطحها و طولها را مثبت در نظر می‌گیریم.

اثبات (۱) بلافاصله به دست می‌آید. روشن است که هر طرف این برابری با نسبت ارتفاعات دو مثلث به قاعدهٔ [B,C] برابر است. توجه داشته باشید که، هرچند بعضی از اثباتهای مشهور قضیهٔ سوا (فی‌المثل، کتاب قضایا و مسائل هندسه را ملاحظه کنید) از استدلالهای مربوط به سطوح بهره برده‌اند، این اثباتها با «اصل سطح» مورد بحث ما متفاوت‌اند.

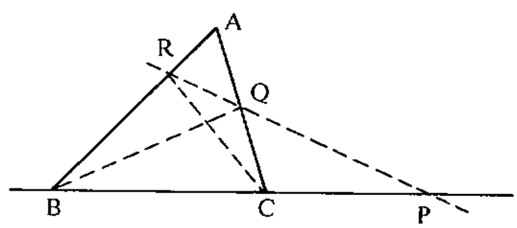
به عنوان پیش‌درآمدی از روشهای به کار رفته، از اصل سطح، برای اثبات سه قضیهٔ یاد شده استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم قاطعی خطوط BC، CA، AB، مشخص شده از زوجهای گفته شده از رأسهای مثلث [A,B,C]، را به ترتیب در نقاط P، Q، R قطع کند، و این نقاط از رأسهای مثلث مزبور متمایز باشند (شکل ۲ را ملاحظه کنید). قضیهٔ منلائوس بر این است که:

$$\frac{|BP|}{|PC|}\cdot\frac{|CQ|}{|QA|}\cdot\frac{|AR|}{|RB|}=\text{۱} \qquad (\text{۲})$$



شکل ۱

اصل سطح مقرر می‌کند که: $|A_1P|/|A_2P|=|A_1BC|/|A_2BC|$



شکل ۲

قضیهٔ منلائوس مقرر می‌کند که:

$(|BP|/|PC|).(|CQ|/|QA|).(|AR|/|RB|)=\text{۱}$

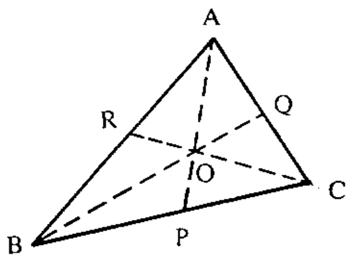
برای اثبات این مطلب، اصل سطح را دربارهٔ مثلثهای با قاعدهٔ [R,Q] به کار برده، ملاحظه می‌کنیم که:

$$\frac{|BP|}{|PC|}=\frac{|BRQ|}{|CRQ|},\ \frac{|CQ|}{|QA|}=\frac{|CRQ|}{|ARQ|},\ \frac{|AR|}{|RB|}=\frac{|ARQ|}{|BRQ|}$$

با قرار دادن این مقادیر در (۲)، جمیع سطحهای مثلثها حذف می‌شوند، و مشخص می‌شود که (۲) درست است، و به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

اکنون فرض می‌کنیم O چنان نقطه‌ای باشد که خطوط AO، BO و CO اضلاع مقابل مثلث را، به ترتیب در P، Q و R تلاقی کنند. در این مورد فرض کرده‌ایم، که این سه نقطه از رأسهای A، B و C متمایزند (شکل ۳ را ملاحظه کنید). قضیهٔ سوا بر این است که رابطهٔ (۲) در این حالت نیز برقرار است. برای اثبات این مطلب مثلثهای با قاعدهٔ [A,O] را در نظر می‌گیریم. در این صورت اصل سطح به دست می‌دهد.

$$\frac{|BP|}{|PC|}=\frac{|AOB|}{|COA|}$$



شکل ۳

قضیهٔ سوا بر این است که:

$(|BP|/|PC|).(|CQ|/|QA|).(|AR|/|RB|)=\text{۱}$

به همان ترتیب، با استفاده از مثلثهای به قاعده‌های [B,O] و [C,O]، داریم:

$$\frac{|CQ|}{|QA|}=\frac{|BOC|}{|AOB|},\quad \frac{|AR|}{|RB|}=\frac{|COA|}{|BOC|}$$

با قرار دادن این مقادیر در (۲)، سطحهای مثلثها همه حذف شده مقدار (۱) را، که قضیه را اثبات می‌کند، به دست می‌دهند.

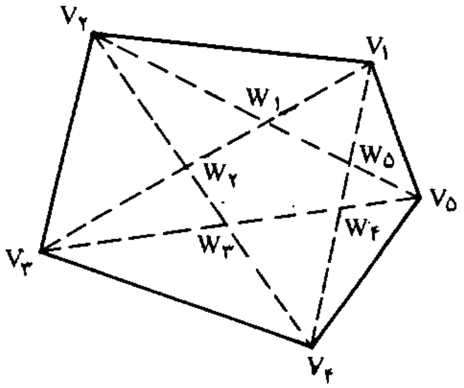
سرانجام، قضیهٔ هواهن را در نظر می‌گیریم، که روابط زیر را، با استفاده از علامت نویسی مقرر در شکل، در مورد پنج‌ضلعی، به دست می‌دهد.

(۳)

$$\frac{|V_1W_1|}{|W_2V_3|}\cdot\frac{|V_2W_2|}{|W_3V_4|}\cdot\frac{|V_3W_3|}{|W_4V_5|}\cdot\frac{|V_4W_4|}{|W_5V_1|}\cdot\frac{|V_5W_5|}{|W_1V_2|}=1$$

(۴)

$$\frac{|V_1W_2|}{|W_1V_3|}\cdot\frac{|V_2W_3|}{|W_2V_4|}\cdot\frac{|V_3W_4|}{|W_3V_5|}\cdot\frac{|V_4W_5|}{|W_4V_1|}\cdot\frac{|V_5W_1|}{|W_5V_2|}=1$$



شکل ۴

قضیهٔ هواهن بر این است که :

$$\frac{|V_1W_1|}{|W_2V_3|}\cdot\frac{|V_2W_2|}{|W_3V_4|}\cdot\frac{|V_3W_3|}{|W_4V_5|}\cdot\frac{|V_4W_4|}{|W_5V_1|}\cdot\frac{|V_5W_5|}{|W_1V_2|}=1$$

$$\frac{|V_1W_2|}{|W_1V_3|}\cdot\frac{|V_2W_3|}{|W_2V_4|}\cdot\frac{|V_3W_4|}{|W_3V_5|}\cdot\frac{|V_4W_5|}{|W_4V_1|}\cdot\frac{|V_5W_1|}{|W_5V_2|}=1$$

در اثبات اصلی هواهن، از قضیهٔ منلائوس در مثلثها و قاطعهای گوناگون واقع در شکل استفاده شده است ؛ ولی ما در اینجا، با استفاده از اصل سطح، اثباتی ساده‌تر و مستقیم‌تر به دست می‌دهیم.

پنج ضلعی نشان داده شده در شکل ۴ را در نظر می‌گیریم. (در این اولین برخورد توجه‌مان را به حالتی معطوف کرده‌ایم که در آن $[V_1, V_2, V_3, V_4, V_5]$ یک پنج ضلعی محدب است. حالت عمومی‌تر را، بدون هیچ گونه فرضی در مورد تحدب، در بخش ۴ بررسی خواهیم کرد.) با استفاده از مثلثهای به قاعدهٔ $[V_2, V_4]$ ، داریم :

$$\frac{|V_1W_2|}{|W_2V_3|}=\frac{|V_1V_2V_4|}{|V_3V_4V_2|}$$

در نتیجه :

$$|V_1V_3|/|W_2V_3|=\left(|V_1W_2|+|W_2V_3|\right)/\left(|W_2V_3|\right)$$
$$=(|V_1V_2V_4|+|V_3V_4V_2|/|V_3V_4V_2|$$
$$=|V_1V_2V_3V_4|/|V_3V_4V_2|$$

که در آن $|V_1V_2V_3V_4|$ سطح چهار ضلعی $[V_1, V_2, V_3, V_4]$ است. به همین ترتیب،

$$\frac{|V_1V_3|}{|V_1W_4|}=\frac{|V_1V_2V_3V_5|}{|V_1V_2V_5|}$$

و بنابراین

$$\frac{|V_1W_1|}{|W_2V_3|}=\frac{|V_1V_2V_5|}{|V_1V_2V_3V_5|}\cdot\frac{|V_1V_2V_3V_4|}{|V_3V_4V_2|}$$

در حالت کلی، به ازای ۵ و ... و ۲ و ۱ = i

$$\frac{|V_iW_i|}{|W_{i+1}V_{i+2}|}=\frac{|V_iV_{i+1}V_{i+4}|}{|V_iV_{i+1}V_{i+2}V_{i+4}|}\cdot\frac{|V_iV_{i+1}V_{i+2}V_{i+3}|}{|V_{i+2}V_{i+3}V_{i+1}|}\qquad(5)$$

با قرار دادن این مقادیر در طرف چپ (۳) ملاحظه می‌کنیم که جمیع سطحهای مثلثها و چهارضلعیها حذف می‌شوند، و چنانکه مطلوب بود، مقدار ۱ را به دست می دهند. دومین اظهار (۴) از قضیهٔ هواهن را می‌توان به طریقی مشابه اثبات کرد.

نمونهٔ اثباتهای فوق را می‌توان به‌طور مکرر به کاربرد : نسبتهای طولها را به صورت نسبتهای سطحها بیان می‌کنیم، و بعد، با ضرب این نسبتها، نشان می‌دهیم که، حذف انجام می‌گیرد و مقداری ثابت را به دست می‌دهد.

در اینجا پیش از توضیح توسیعات این نتایج، آنها را در زمینه‌ای عمومی‌تر مطرح می‌کنیم.

هم ارزی قضیه‌های مقدار میانی و بولتزانو ـ کاربردهای آنها

مورد استفاده دانش‌آموزان پیش‌دانشگاهی

• محمّدصادق عسگری

کتابهای کمک درسی نظام قدیم دبیرستان درقسمت پیوستگی و مشتق، بیشتر به بررسی پیوستگی توابع و مشتق‌پذیری آنها دریک نقطه و یا دریک فاصله پرداخته‌اند، و در قسمت کاربرد مشتق نیز به بیان چگونگی رسم نمودار توابع حقیقی و یا پیداکردن اکسترمم‌های نسبی و ماکزیمم و می‌نیمم مطلق توابع می‌پردازند. درنظام جدید نیز این مفاهیم بیشتر در موارد گفته شده به‌کار رفته است. در ریاضی عمومی دورهٔ پیش‌دانشگاهی، دراین قسمتها قضایایی وجود دارد که درکتابهای کمک درسی به دلیل جدید بودن آنها، کمتر مورد بررسی قرار گرفته است. این قضیه‌ها در قسمت پیوستگی عبارتند از :

۱ ـ قضیه بولتزانو ۲ـ قضیه مقدار میانی ۳ـ قضیه ماکزیمم و می‌نیمم‌مطلق توابع پیوسته.

و در بخش مشتق پذیری تحت عنوان :

۱ـ قضیه ماکزیمم و مینیمم نسبی

۲ـ قضیه رُول

۳ـ قضیه مقدار میانگین می‌باشند.

دراینجا سعی در بیان این قضایا و چگونگی استفاده از آنها در حل مسائل شده است. بنابراین، فرض براین است که خوانندگان ازقبل با تعاریف پیوستگی و مشتق‌پذیری و قضیه‌های مقدماتی این دوقسمت آشنایی کافی دارند.

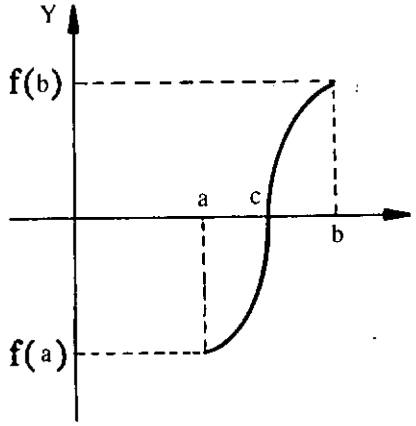
قضیه بولتزانو و قضیه مقدار میانی دو قضیه معادل در مبحث پیوستگی هستند که درابتدا این دوقضیه را به صورت نتیجه‌ای از قضیه دیگر می‌آوریم.

قضیه بولتزانو :

اگر تابع حقیقی f بر فاصله $[a,b]$ پیوسته و $f(a)f(b)<0$ باشد، آنگاه نقطه $a<c<b$ وجود دارد، به‌طوری که $f(c)=0$. یعنی با برقراری شرایط قضیه معادله $f(x)=0$ حداقل یک ریشه در فاصله (a,b) دارد.

تعبیر هندسی قضیه بولتزانو

شرایط قضیه بولتزانو به‌طور هندسی، یعنی اگر نمودار تابع f بر فاصله $[a,b]$ متصل باشد و ابتدا و انتهای نمودار تابع f یکی در پایین و دیگری در بالای محور xها قرار داشته باشد، آنگاه نمودار تابع f محور xها را حداقل در یک نقطه $a<c<b$ قطع می‌کند.

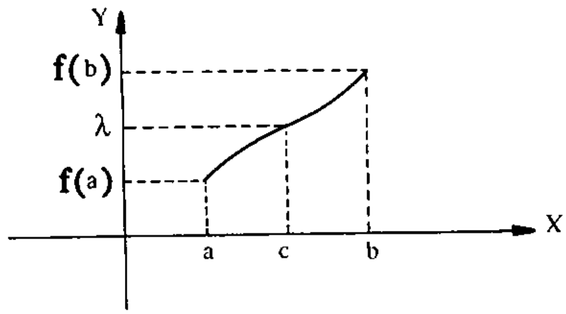


قضیه مقدار میانی پیوستگی:

اگر f بر فاصله $[a,b]$ پیوسته و λ عددی بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد آنگاه نقطه $a<c<b$ وجود دارد، به‌طوری که $f(c)=\lambda$. به بیان دیگر یعنی اگر f بر $[a,b]$ پیوسته باشد و در یک حالت داشته باشیم $f(a)<\lambda<f(b)$، آنگاه نقطه $a<c<b$ وجود دارد، به‌طوری که $f(c)=\lambda$.

تعبیر هندسی قضیه مقدار میانی

قضیه مقدار میانی به تعبیر هندسی یعنی توابع پیوسته بر یک فاصله بسته همواره تمام مقادیر بُردشان را اختیار می‌کنند.



اثبات قضیه بولتزانو با استفاده از قضیه مقدار میانی

اگر تابع f بر فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد و $f(a)f(b)<0$، آنگاه دو حالت اتفاق می‌افتد.

I) $f(a)<0<f(b)$ II) $f(b)<0<f(a)$

درحالت I داریم $f(a)<0<f(b)$ چون 0 بین $f(a)$ و $f(b)$ قرار دارد، بنابر قضیه مقدار میانی نقطه $a<c<b$ وجود دارد، به‌طوری که $f(c)=0$.

به‌طور مشابه درحالت II نیز حکم قضیه برقرار است.

اثبات قضیه مقدار میانی با استفاده از قضیه بولتزانو:

فرض کنیم f بر $[a,b]$ و $f(a)<\lambda<f(b)$ باشد f بنابراین داریم:

$f(a)<\lambda \Rightarrow f(a)-\lambda<0$

$\lambda<f(b) \Rightarrow f(b)-\lambda>0 \quad (*)$

تابع $g:[a,b]\to \mathbb{R}$ را با ضابطهٔ $g(x)=f(x)-\lambda$ تعریف می‌کنیم. چون f بر $[a,b]$ پیوسته است، درنتیجه تابع g نیز پیوسته می‌شود. و به‌علاوه داریم:

$g(a)=f(a)-\lambda<0$ و $g(b)=f(b)-\lambda>0$

یعنی $g(a)g(b)<0$ بنابر قضیه بولتزانو نقطه $a<c<b$ وجود دارد، به‌طوری که $g(c)=0$ و یا $f(c)-\lambda=0$ در نتیجه $f(c)=\lambda$.

قضیه دیگری که در قسمت پیوستگی اهمیت زیادی دارد، قضیه ماکزیمم و مینیمم مطلق توابع پیوسته است؛ که قبل از بیان صورت این قضیه تعریف زیر را می‌آوریم.

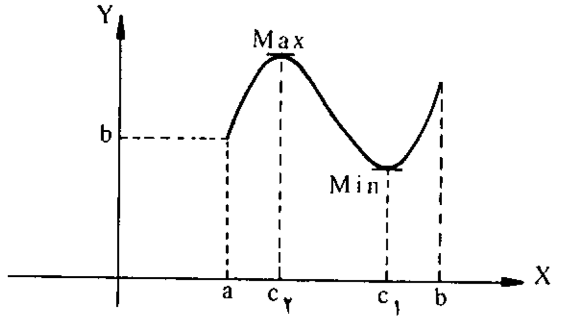
تعریف: نقطه $c\in D_f$ را نقطه ماکزیمم مطلق تابع حقیقی f خوانیم، هرگاه برای هر $x\in D_f$ داشته باشیم، $f(x)\le f(c)$، در این صورت $f(c)$ را مقدار ماکزیمم مطلق f می‌گویند. به طور مشابه نقطه $C\in D_f$ را نقطهٔ مینیمم مطلق f گویند. هرگاه برای هر $x\in D_f$ داشته باشیم $f(x)\ge f(c)$ که دراین حالت نیز $f(c)$ را مینیمم مطلق f می‌گویند.

قضیه ماکزیمم و مینیمم مطلق توابع پیوسته:

اگر تابع f بر فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه f ماکزیمم و مینیمم مطلق خود را براین فاصله اختیار می‌کند، یعنی نقاط $C_1,C_2\in[a,b]$ وجود دارند، به‌طوری که برای هر $x\in[a,b]$ داریم:

$f(C_1)\le f(x)\le f(C_2)$

$f(C_1)$ را می‌نیمم مطلق و $f(C_2)$ را ماکزیمم مطلق f می‌گویند.



لازم به تذکر است که قضیه فوق روی فاصله‌های باز برقرار نیست، مثلاً تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ روی فاصله باز $(0,+\infty)$ پیوسته است. در صورتی‌که این تابع روی این فاصله ماکزیمم و مینیمم مطلق ندارد.

استفاده از قضایای پیوستگی درحل مسائل اهمیت زیادی دارد که درمثالهای زیر طریقه استفاده از این قضایا را نشان می‌دهیم.

مثالها:

مثال ۱: بُرد تابع $f(x)=x+\sqrt{1-x^2}$ را تعیین کنید.

می‌دانیم همواره در توابع حقیقی محاسبه دامنه تابع بر محاسبه بُرد آن مقدم است. بنابراین ابتدا دامنه این تابع را تعیین می‌کنیم.

الف ـ تعیین دامنه:

$$1-x^2\ge 0\Rightarrow x^2\le 1\Rightarrow |x|\le 1\Rightarrow -1\le x\le 1$$

$$D_f=[-1,1]$$

ب ـ تعیین بُرد:

تابع $\sin\theta$ برای هر $\theta\in\mathbb{R}$ یک تابع پیوسته است که بُرد این تابع فاصله $[-1,1]$ است. از طرفی داریم: $-1\le x\le 1$ بنابر قضیه مقدار میانی برای تابع سینوس، وجود دارد $\theta\in\mathbb{R}$ به‌طوری که $x=\sin\theta$ در نتیجه:

$$y=f(x)=f(\sin\theta)=\sin\theta+\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sin\theta\pm\cos\theta$$

با توجه به نامساوی $-\sqrt{a^2+b^2}\le a\sin\theta+b\cos\theta\le\sqrt{a^2+b^2}$ داریم:

$$-\sqrt{2}\le y=\sin\theta\pm\cos\theta\le\sqrt{2}$$

$$-\sqrt{2}\le y\le\sqrt{2}$$

از طرفی

$$y=x+\sqrt{1-x^2}\Rightarrow y-x=\sqrt{1-x^2}\ge 0\Rightarrow y-x\ge 0$$

$$\Rightarrow -1\le x\le y\le\sqrt{2}\Rightarrow -1\le y\le\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow R_f=[-1,\sqrt{2}]$$

مثال ۲: بُرد تابع $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$ را تعیین کنید.

الف ـ تعیین دامنه: $D_f=\mathbb{R}$

ب ـ تعیین بُرد:

تابع $\tan\theta$ برای هر $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ پیوسته است و بُرد آن برابر مجموعه اعداد حقیقی($\mathbb{R}$) است. حال برای $x\in\mathbb{R}$، بنابر قضیه مقدار میانی برای تابع تانژانت وجود دارد $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ به‌طوری که $x=tg\theta$، درنتیجه:

$$y=f(x)=f(\tan\theta)=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\sin 2\theta\Rightarrow y=\sin 2\theta$$

از $-\pi\le 2\theta\le\pi$ نتیجه می‌گیریم $-1\le y\le 1$ بنابراین

$$R_f=[-1,1]$$

مثال ۳: بُرد تابع $f(x)=ax\pm\sqrt{b^2-x^2}$ را به‌دست آورید: (a و $b\ge 0$)

الف ـ تعیین دامنه:

$$b^2-x^2\ge 0\Rightarrow x^2\le b^2\Rightarrow |x|\le b\Rightarrow -b\le x\le b$$

$$\Rightarrow D_f=[-b,b]$$

ب ـ تعیین بُرد: بنابر قسمت الف داریم $-b\le x\le b$، درنتیجه: $-1\le\frac{x}{b}\le 1$ بنابر پیوستگی تابع سینوس و استفاده از قضیه مقدار میانی وجود دارد $\theta\in\mathbb{R}$ به‌طوری که $\frac{x}{b}=\sin\theta$ و یا $x=b\sin\theta$

$$y=f(x)=f(b\sin\theta)=ab\sin\theta\pm\sqrt{b^2-b^2\sin\theta}$$

$$\Rightarrow y=ab\sin\theta\pm b\cos\theta$$

چون داریم:

$$-\sqrt{a^2b^2+b^2} \le ab\sin\theta \pm b\cos\theta \le \sqrt{a^2b^2+b^2}$$

درنتیجه $-b\sqrt{1+a^2} \le y \le b\sqrt{1+a^2}$ حال دوحالت را درنظر می‌گیریم:

$$\text{I)}\ y = ax+\sqrt{b^2-x^2} \qquad \text{II)}\ y = ax-\sqrt{b^2-x^2}$$

$$y = ax+\sqrt{b^2-x^2} \Rightarrow y-ax=\sqrt{b^2-x^2}\ge 0 \Rightarrow y-ax\ge 0 \quad \text{(I)}$$

$$\Rightarrow ax\le y \Rightarrow -b\le x\le \frac{y}{a}\le \frac{b}{a}\sqrt{1+a^2}$$

$$\Rightarrow -ab\le y\le b\sqrt{1+a^2} \Rightarrow R_f=[-ab, b\sqrt{1+a^2}$$

$$\text{(II}\quad y = ax-\sqrt{b^2-x^2} \Rightarrow ax-y=\sqrt{b^2-x^2}\ge 0$$

$$\Rightarrow ax-y\ge 0\Rightarrow y\le ax\Rightarrow \frac{-b\sqrt{1+a^2}}{a}\le \frac{y}{a}\le x\le b\Rightarrow$$

$$-b\sqrt{1+a^2}\le y\le ab\Rightarrow R_f=\left[-b\sqrt{1+a^2},ab\right]$$

مثال ۴: ثابت کنید معادله $x^4-x-1=0$ در فاصله $[0,2]$ حداقل یک ریشه دارد.

قرار می‌دهیم $f(x)=x^4-x-1$. دراین‌صورت تابع f بر فاصله $[0,2]$ پیوسته است و به‌علاوه داریم

$$f(0)=-1<0 \quad \text{و} \quad f(2)=13>0$$

بنابراین طبق قضیهٔ بولتزانو، نقطهٔ $0<c<2$ وجود دارد، به‌طوری که $f(c)=0$ یا $c^4-c-1=0$، یعنی معادلهٔ فوق در فاصلهٔ $[0,2]$ حداقل یک ریشه دارد.

نکته: باتوجه به حل مثال ۴ ملاحظه می‌شود که قضیه بولتزانو، فقط وجود ریشه را برای یک معادله درصورت امکان نشان می‌دهد. ازاین قضیه نمی‌توان به‌طور دقیق ریشه‌های یک معادله را محاسبه کرد. ولی به کمک این قضیه می‌توان مقدار تقریبی ریشه‌های یک معادله را به‌دست آورد. به‌مثال ۵ توجه کنید.

مثال ۵: با استفاده از جدول زیر محلّ تقریبی جواب معادلهٔ $\sin 3x\cos 4x=\frac{x^3}{\pi^3}$ را در بازه $[1/07,1/15]$ به‌دست آورید.

x	x^3/π^3	$\sin 3x\cos 4x$	$f(x)=\frac{x^3}{\pi^3}-\sin 3x\cos 4x$
۱/۰۷	۰/۰۳۹۵	۰/۰۲۸۶	۰/۰۱۰۹
۱/۰۸	۰/۰۴۰۶	۰/۰۳۷۶	۰/۰۰۳۰
۱/۰۹	۰/۰۴۱۸	۰/۰۴۴۲	−۰/۰۰۲۴
۱/۱۰	۰/۰۴۲۹	۰/۰۴۸۵	−۰/۰۰۵۶
۱/۱۱	۰/۰۴۴۱	۰/۰۵۰۴	−۰/۰۰۶۳
۱/۱۲	۰/۰۴۵۳	۰/۰۴۹۹	−۰/۰۰۴۶
۱/۱۳	۰/۰۴۶۵	۰/۰۴۷۰	−۰/۰۰۰۵
۱/۱۴	۰/۰۴۷۸	۰/۰۴۱۷	۰/۰۰۶۱
۱/۱۵	۰/۰۴۹۱	۰/۰۳۴۰	۰/۰۱۵۱

باتوجه به جدول بالا ملاحظه می‌شود که معادلهٔ $\frac{x^3}{\pi^3}-\sin 3x\cos 4x=0$ حداقل دراین فاصله دو ریشه دارد که محل تقریبی این دو ریشه، فاصله‌های $[1/13,1/14]$، $[1/08,1/09]$ می‌باشد، که به‌طور تقریبی این دو ریشه برابرند با:

$$x_1\cong\frac{1/08+1/09}{2}=\frac{2/17}{2}=1/085 \qquad [1/08,1/09]$$

$$x_2\cong\frac{1/13+1/14}{2}=\frac{2/27}{2}=1/135 \qquad [1/13,1/14]$$

مثال ۶: اگر تابع f در بازه $[0,1]$ پیوسته و برای هر $x\in[0,1]$، $0\le f(x)\le 1$ نشان دهید که برای حداقل یک مقدار $c\in[0,1]$، $f(c)=c$.

اگر $f(0)=0$ و یا $f(1)=1$ باشد، آنگاه حکم مسأله برقرار است. فرض کنیم $f(0)\neq 0$ و $f(1)\neq 1$ تابع $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ را با ضابطه $g(x)=f(x)-x$ تعریف می‌کنیم.

دراین‌صورت بنابر پیوستگی تابع f ، تابع g نیز بر فاصله $[0,1]$ پیوسته است و به‌علاوه بنابر فرض $f(0)>0$ و $0<f(1)<1$، حال داریم:

$g(0)=f(0)>0$ و $g(1)=f(1)-1<0$

درنتیجه بنابر قضیه بولتزانو نقطه $0\le c\le 1$ وجود دارد، به‌طوری که $g(c)=0$ و یا $f(c)-c=0$ و بنابراین $f(c)=c$

مثال ۷: ثابت کنید معادله $ax^2+bx+c=0$ با شرط $5a+3b+3c=0$ همواره یک ریشه درفاصله (۲و۰) دارد.

شرط $5a+3b+3c=0$ را به‌صورت زیر مرتب می‌کنیم:

$$5a+3b+3c=c+(a+b+c)+(4a+2b+c)=f(0)+f(1)+f(2)$$

بنابراین $f(0)+f(1)+f(2)=0$ چون مجموع سه‌عدد $f(0)$ و $f(1)$ و $f(2)$ برابر صفراست، درنتیجه باید همواره دوتا از این سه عدد مختلف‌العلامه باشند، در نتیجه حالتهای زیر را داریم:

$f(0)$ و $f(1)$ مختلف‌العلامه $\Rightarrow f(0)f(1)<0 \xRightarrow{\text{ق بولتزانو}}$ f یک ریشه در $(0,1)$ دارد

$f(0)$ و $f(2)$ مختلف‌العلامه $\Rightarrow f(0)f(2)<0 \xRightarrow{\text{ق بولتزانو}}$ f یک ریشه در $(0,2)$ دارد

$f(1)$ و $f(2)$ مختلف‌العلامه $\Rightarrow f(1)f(2)<0 \xRightarrow{\text{ق بولتزانو}}$ f یک ریشه در $(1,2)$ دارد

که ازهریک از حالتهای فوق می‌توان نتیجه گرفت که همواره f حداقل یک ریشه در $(0,2)$ دارد.

مثال ۸: اگر f تابعی حقیقی پیوسته بر فاصله $[1,2]$ باشد و داشته باشیم $1>f(1)$ و $2>f(2)$، آنگاه نقطه‌ای مانند $1<c<2$ وجود دارد به‌طوری که $f(c)=c$ تابعی حقیقی $g:[1,2]\to\mathbb{R}$ با ضابطه $g(x)=f(x)-x$ تعریف می‌کنیم.

چون f و تابع همانی بر فاصله $[1,2]$ پیوسته در نتیجه تفاضل آنها یعنی تابع g نیز براین فاصله پیوسته است. با استفاده از مفروضات مسأله داریم:

$$g(1)=f(1)-1<0 \quad \text{و} \quad g(2)=f(2)-2>0$$

درنتیجه: $g(1)g(2)<0$ بنابر قضیه بولتزانو وجود دارد $1<c<2$ به‌طوری که $g(c)=0$ یا $f(c)-c=0$ یعنی $f(c)=c$

تمرین: اگر f تابعی حقیقی پیوسته بر فاصله $[a,b]$ باشد و داشته باشیم $f(a)<a$ و $f(b)<b$، آنگاه نقطه‌ای مانند $a<c<b$ وجود دارد به‌طوری که $f(c)=c$

{**تذکر**: نقطه c را یک نقطه ثابت تابع حقیقی f گویند هرگاه $f(c)=c$.}

مثال ۹: اگر $-1<a<b$، ثابت کنید عدد حقیقی $a<c<b$ وجود دارد، به‌طوری که

$$2\sqrt{1+c}=\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}$$

حل:

$$-1<a<b\Rightarrow 0<a+1<b+1\Rightarrow \sqrt{a+1}<\sqrt{b+1}$$

از آنجا که میانگین هردو عدد حقیقی همواره بین آن دو عدد حقیقی قرار دارد، بنابراین داریم:

$$\sqrt{1+a}<\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}}{2}<\sqrt{1+b}$$

تابع حقیقی $f(x)=\sqrt{1+x}$ را درنظر می‌گیریم. این تابع روی فاصله $[a,b]$ پیوسته است و به‌علاوه $R_f=\left[\sqrt{1+a},\sqrt{1+b}\right]$ اگر قرار دهیم $\lambda=\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}}{2}$ آنگاه داریم: $\sqrt{1+a}<\lambda<\sqrt{1+b}$ بنابر قضیه مقدار میانی برای تابع f نقطه $a<c<b$ وجود دارد، به‌طوری که $f(c)=\lambda$ یعنی $\sqrt{1+c}=\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}}{2}$ در نتیجه:

$$2\sqrt{1+c}=\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}$$

مثال ۱۰: ثابت کنید که هر چند جمله‌ای با درجه فرد حتماً یک صفر دارد.

فرض کنیم $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ یک چند جمله‌ای از درجه n باشد و n یک عدد طبیعی فرد در این‌صورت همواره حدود تابع f در $\pm\infty$ مختلف‌العلامه می‌باشند، یعنی $\lim\limits_{n\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty$ درنتیجه اعداد حقیقی $a<0$ و $b>0$ وجود دارند، به‌طوری که $f(a)<0$ و $f(b)>0$.

حال اگر تابع f را بر فاصله $[a,b]$ درنظر بگیریم، این تابع

براین فاصله پیوسته است و به‌علاوه $f(a)f(b)<0$ ، درنتیجه بنابر قضیه بولتزانو وجود دارد $a<c<b$ ، به‌طوری که $f(c)=0$ یعنی $x=c$ یک صفر چندجمله‌ای $f(x)$ است. به‌عبارت دیگر هر معادله از درجه فرد حداقل یک ریشه حقیقی دارد.

مثال ۱۱: فرض کنیم

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ و $a_0a_n<0$ ،

ثابت کنید وجود دارد $c>0$ ، به‌طوری که $f(c)=0$ یعنی هر معادله درجه nام با شرط $a_na_0<0$ حداقل یک ریشه مثبت دارد.

$$a_nf(x)=a_n^2x^n+a_na_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_na_1x+a_na_0$$

حال داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}a_nf(x)=\lim_{x\to+\infty}a_n^2x^n=+\infty$$

بنابراین عدد حقیقی $b>0$ وجود دارد، به‌طوری که $a_nf(b)>0$ یعنی $f(b)$ و a_n هم علامت هستند. بنابر فرض $a_na_0<0$ یعنی a_n و a_0 مختلف‌العلامه‌اند درنتیجه $f(b)$ و a_0 نیز مختلف‌العلامه‌اند یعنی $a_0f(b)<0$ حال تابع f را بر فاصله $[0,b]$ درنظر می‌گیریم. این تابع براین فاصله پیوسته است و به‌علاوه $f(0)=a_0$ بنابراین $f(0)f(b)=a_0f(b)<0$ حال بنا بر قضیه بولتزانو نقطه $0<c<b$ وجود دارد به‌طوری که $f(c)=0$.

مثال ۱۲: فرض کنید f تابعی پیوسته بر فاصله $[a,b]$ باشد و به‌علاوه $f(a)+f(b)=0$. ثابت کنید معادله $f(x)=0$ حداقل یک ریشه در فاصله $[a,b]$ دارد.

اگر $f(a)=0$ یا $f(b)=0$ باشد، حکم مسأله برقرار است. فرض کنیم $f(a)\neq 0$ و $f(b)\neq 0$ دراین‌صورت چون $f(a)+f(b)=0$ درنتیجه:

$$f(a)+f(b)=0\Rightarrow f(a)=-f(b)\Rightarrow f(a)f(b)=-[f(b)]^2<0\Rightarrow f(a)f(b)<0$$

بنابر قضیه بولتزانو نقطهٔ $a<c<b$ وجود دارد، به‌طوری که $f(c)=0$ یعنی معادلهٔ $f(x)=0$ در فاصلهٔ $[a,b]$ حداقل یک ریشه دارد.

تمرین

۱ـ بُرد هریک از توابع زیر را با استفاده از قضیهٔ مقدار میانی پیوستگی محاسبه کنید.

۱) $f(x)=x+\sqrt{4-x^2}$ ۲) $f(x)=2x-\sqrt{9-x^2}$

۳) $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$ ۴) $f(x)=\dfrac{7x}{1+x^2}$

۵) $f(x)=\dfrac{2x^2}{1+x^2}$ ۶) $f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

۷) $f(x)=\dfrac{1+2x-x^2}{1+x^2}$ ۸) $f(x)=\dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}$

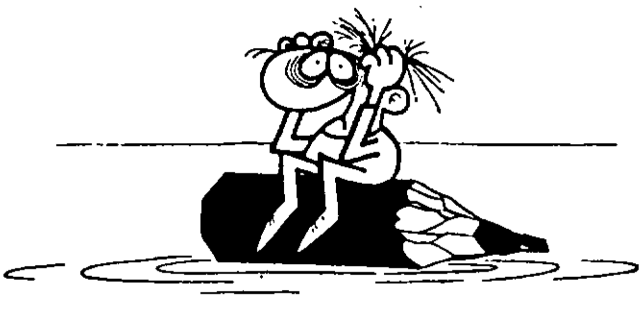
۹) $f(x)=3-x+\sqrt{1-x^2}$

۲ـ ثابت کنید هرمعادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ با شرط $a+c=0$ همواره یک ریشه در فاصله $[-1,1]$ دارد. (راهنمایی: $f(-1)+f(1)$ را تشکیل دهید.)

۳ـ ثابت کنید معادله $x^5+x^4-x^3+2x-2=0$ حداقل یک ریشه مثبت دارد.

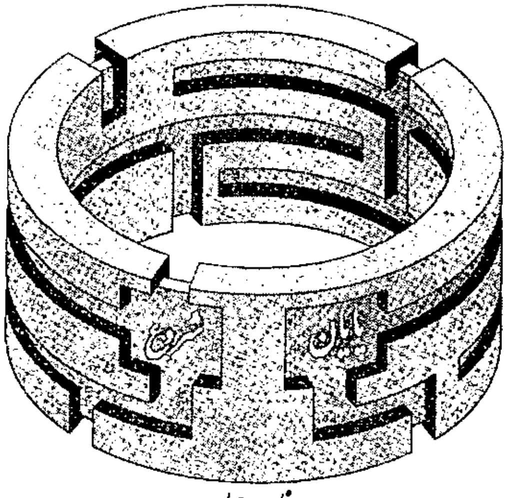
۴ـ ثابت کنید معادله $x^3+x^2+x-1=0$ همواره یک ریشه در فاصلهٔ $[0,1]$ دارد.

۵ـ ثابت کنید به ازای هر مقدار حقیقی k معادله $3\sin x+k\cos x-1=0$ همواره یک ریشه در فاصلهٔ $[0,\pi]$ دارد. (راهنمایی: $f(0)+f(\frac{\pi}{2})+f(\pi)$ را تشکیل دهید).

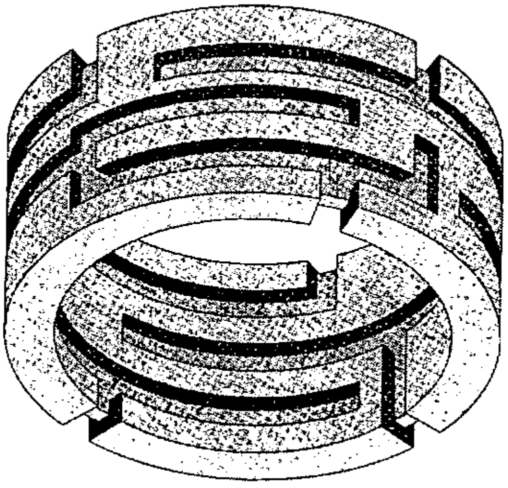


سرگرمی برای اندیشه‌ورزی

● ترجمه حسن نصیرنیا



نمای جلو



نمای پشت

بازی با مازِ[1] چند بُعدیِ افسانه‌ای

دو تصویری که می‌بینید، نماهای متفاوتِ یک ماز حلقوی است که به دستور اُردَپ (Ordap) پادشاهِ نیرنگ‌بازِ سرزمین باستانی زفیلا (Xafilah) طراحی و ساخته شده است. چندی پیش، تصویری از این مازِ افسانه‌ای در حفاریهای باستان‌شناسان کشف شده است.

می گویند، اُردپ دختر هوشمند و زیرکی به‌نام «ویکتوریا» داشته است. اُردَپ تصمیم می‌گیرد که از میانِ خواستگارانِ بی‌شمار ویکتوریا، هوشمندترین آنان را به‌عنوان داماد و وارثِ تاج و تختِ خود برگزیند. برای این‌منظور، افزارمندِ مُبتکرِ دربار یک ماز حلقوی عجیب ابداع می‌کند که بر سطوح بیرونی و درونی آن شیارهای پیچ در پیچی حک شده است. اُردَپ به خواستگاران دخترش تصویری از این ماز (شاملِ دونمایِ پیشین و پسین) می‌دهد و از آنان می‌خواهد که از نقطهٔ شروع، از یکی از شیارها حرکت را آغاز کنند و به نقطهٔ پایان برسند.

ما نیز شما را فرامی‌خوانیم، مدادی برگیرید و با استفاده از نیروی تخیّل و تجسّم، راه حلِ مازِ اردپ را بیابید. چنانچه موفق به یافتن آن نشدید، به صفحه ۶۷ مجله رجوع کنید.

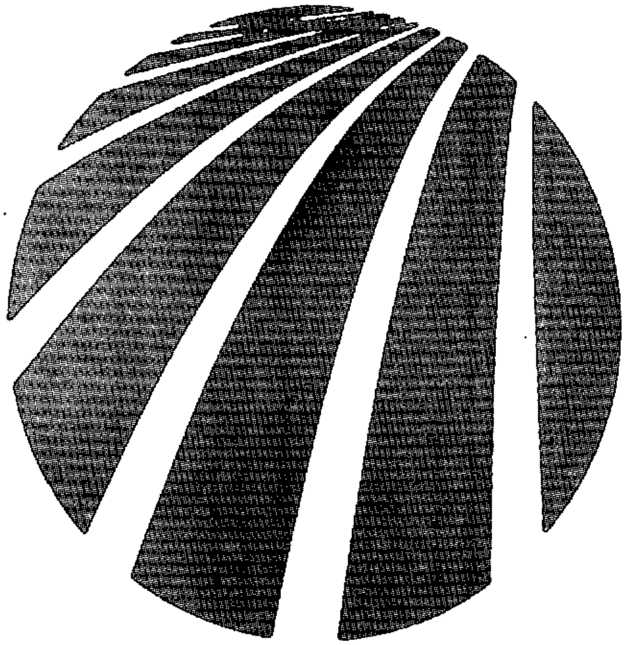
زیرنویس

۱ـ واژهٔ ماز در فارسی به معنی «چین و شکن» است. در زبان انگلیسی کلمهٔ maze به معنی «شبکه گذرگاههای پیچ در پیچ و گیج‌کننده» است. در زبان فرانسوی برای ادای این مفهوم از واژهٔ labyrinthe، لابیرنت (این واژه از کلمهٔ یونانی labyrintos مشتق شده است) استفاده می‌کنند. چنانکه می‌دانید، از دستگاه ماز در آزمونها و تجربه‌های روان‌شناسی استفاده می کنند.(م)

مأخذ ترجمه:

Discover Magazine, Sept. 1992.

روشهای عددی برای محاسبهٔ مقدار تقریبی انتگرالهای معین



حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲)
دورهٔ پیش‌دانشگاهی رشته علوم ریاضی

● سیدمحمّدرضا هاشمی موسوی

با روشهای متداول محاسبهٔ $\int_a^b f(x)dx$ آشنا هستید. در این مقاله سعی می‌شود برخی از روشهای عددی برای محاسبهٔ مقدار تقریبی انتگرالهای معینی که با روشهای متداول و معمول قابل محاسبه نیستند، ارائه شود. به‌طور مثال، می‌دانیم تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ روی فاصلهٔ [۲و۱]پیوسته و درنتیجه انتگرال‌پذیر است، ولی مقدار انتگرال معین $\int_1^2 \sin(\frac{1}{x})dx$، چیست؟ و چگونه می‌توان آن‌را محاسبه کرد؟

در اینجا راههایی برای محاسبهٔ مقدار تقریبی این‌گونه انتگرالهای معین ارائه خواهد شد. مجموعهٔ این روشها به‌نام روشهای عددی انتگرالگیری موسوم است. در تعریف انتگرال دیدیم که اگر بازهٔ [a و b] را به n قسمت مساوی تقسیم کنیم:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x$$

که در این رابطه $\Delta x=\frac{b-a}{n}$ و $x_{k-1}\le c_k\le x_k$ ، $k\in \mathrm{IN}$ است.

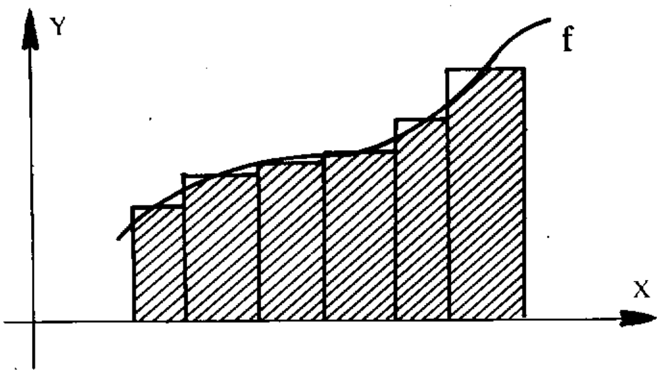
بنابراین اگر n به اندازهٔ کافی بزرگ اختیار شود، می‌توان مقدار $I_n=\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x$ را تقریب مناسبی برای مقدار انتگرال معین $\int_a^b f(x)dx$ دانست.

روش نقطهٔ میانی (مستطیلی)

دیدیم که مقدار $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x$ با انتخاب نقطهٔ c_k تغییر می‌کند. در این روش نقطهٔ c_k وسط x_{k-1} و x_k در نظر گرفته می‌شود:

$$c_k=\frac{x_{k-1}+x_k}{2}$$

به شکل زیر که برای تابعی مانند : f رسم شده است، توجه کنید :



مثال: با استفاده از روش نقطهٔ میانی، مقدار انتگرال $I=\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$ را تقریب بزنید.

حل: اگر بازهٔ [۱ و ۰] را به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم ($n=10$)، آنگاه

$$\Delta x = \frac{1-0}{10}=0/1$$

و $x_0=0$ و $x_k=\frac{k}{10}=0/1k\ (1\le k\le 10)$

و به‌ازای هر $k\in\{1,2,\dots,10\}$، مقدار نقاط میانی $c_k=0/1k=0/05$ را از ضابطهٔ $f(x)=\frac{1}{x+1}$ محاسبه می‌کنیم:

$$I_{10}=\sum_{k=1}^{10} f(c_k)\Delta x = 0/1\sum_{k=1}^{10} f(c_k) = 0/1\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{0/1k-0/05+1}\right)$$

بنابراین:

$$I_{10}=0/1\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{0/1k+0/95}\right)$$

$$=0/1\left(\frac{1}{1/05}+\frac{1}{1/15}+\frac{1}{1/25}+\dots+\frac{1}{1/95}\right)$$

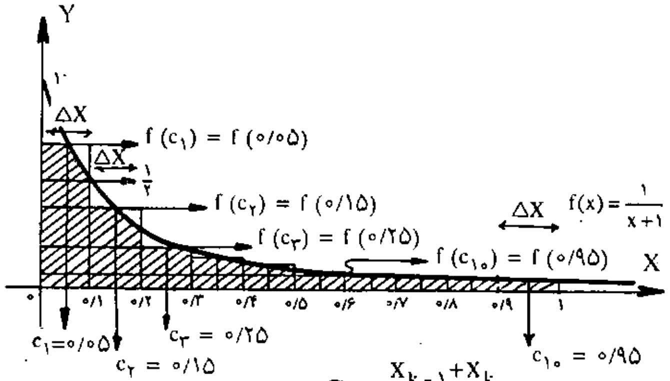
$$I_{10}\approx 0/1\times 6/3223 \Rightarrow \boxed{I_{10}\approx 0/63223\ \text{(مقدار تقریبی)}}$$

در اینجا مقدار واقعی انتگرال را محاسبه می‌کنیم، و سپس با I_{10} مقایسه می‌کنیم:

$$I=\int_0^1\frac{dx}{x+1}=[Ln(x+1)]_0^1 = Ln2-Ln1=Ln2-0=Ln2$$

$$\Rightarrow \boxed{I=\int_0^1\frac{dx}{x+1}=Ln2\approx 0/69314418\ \text{(مقدار واقعی)}}$$

بنابراین I_{10} با تقریب نقصانی کمتر از ۰/۰۶۱ با مقدار واقعی اختلاف دارد. واضح است که با افزایش n، جواب به‌دست آمده برای I_n، به مقدار واقعی نزدیکتر می‌شود. یعنی اگر n به عددی بسیار بزرگ میل کند؛ مقدار I_n به $Ln2$ می‌گراید. برای درک بیشتر این روش، تعبیر هندسی محاسبهٔ I_{10} را در شکل زیر مشاهده کنید. مقدار I_{10} برابر مجموع مساحت مستطیلهایی به ابعاد Δx و $f(c_k)$ (مستطیلهای سایه‌خورده) است.



$$C_k=\frac{x_{k-1}+x_k}{2}$$

مثال: با استفاده از روش نقطهٔ میانی مقدار انتگرالهای $I_1=\int_0^1 x^2dx$ و $I_2=\int_0^1\sin(x^2)dx$ و $I_3=\int_0^1 e^{\frac{-x^2}{2}}dx$ را تخمین بزنید.

حل: اگر برای هر سه انتگرال بازهٔ [۱ و ۰] را به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم ($n=10$)، آنگاه $\Delta x=\frac{1-0}{10}=0/1$

و $x_0=0$ و $x_k=\frac{k}{10}=0/1k\ (1\le k\le 10)$

و به‌ازای هر $k\in\{1,2,\dots,10\}$، مقدار نقاط میانی $c_k=0/1k-0/05$ را به‌ترتیب از ضابطه‌های $f(x)=x^2$ و $f(x)=\sin(x^2)$ و $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$، محاسبه می‌کنیم:

$$I_{10}=\sum_{k=1}^{10} f(c_k)\Delta x \Rightarrow I_{10}=0/1\sum_{k=1}^{10}(0/1k-0/05)^2 \Rightarrow$$

$$I_{10}=0/1\left(\sum_{k=1}^{10}0/01k^2-\sum_{k=1}^{10}0/01k+\sum_{k=1}^{10}0/0025\right)$$

$$=0/1\left[0/01\left(\frac{10\times 11\times 21}{6}\right)-0/01\left(\frac{10\times 11}{2}\right)+0/0025(10)\right]$$

$$=0/3325 \Rightarrow \boxed{I_1\approx 0/3325}$$

می‌دانیم مقدار واقعی $I_1=\int_0^1 x^2dx$ برابر $\frac{1}{3}$ است، بنابراین با مقدار I_{10} حدود ۰/۰۰۱ اختلاف دارد.

در جدول زیر مقدار انتگرال I_1 را برای تعداد تقسیمات متفاوت نمایش داده‌ایم:

n	۱۰	۵۰	۱۰۰	۲۰۰
I_n	۰/۳۳۲۵	۰/۳۳۳۳	۰/۳۳۳۳۲۵	۰/۳۳۳۳۳۱

مشاهده می‌شود که با افزایش n، مقدار I_n به مقدار واقعی انتگرال نزدیکتر می‌شود. به همین ترتیب I_2 و I_3 را می‌توان

به‌طور تقریبی محاسبه کرد، و به نتایج زیر رسید :

$$I_2=\int_0^1 \sin(x^2)dx \approx I_{10}=0/1\sum_{k=1}^{10}\sin(c_k^2)\approx 0/3098$$

همچنین می‌توان به نتیجهٔ زیر رسید :

$$I_2=\int_0^1 \sin(x^2)dx \approx I_{20}=\frac{1}{20}\sum_{k=1}^{20}\sin(c_k^2)\approx 0/310$$

می‌دانیم امکان محاسبهٔ مقدار واقعی I_2 وجود ندارد، بنابراین با افزایش n می‌توان به مقدار واقعی انتگرال نزدیک شد. با انتخاب n بسیار بزرگ خواهیم دید که مقدار واقعی انتگرال با دقت سه رقم اعشار برابر ۰/۳۱۰ است.

$$I_3=\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx \approx I_{10}=\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10}e^{-\frac{c_k^2}{2}}\approx 0/8558$$

همچنین می‌توان به نتیجهٔ زیر رسید :

$$I_3=\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx \approx I_{20}=\frac{1}{20}\sum_{k=1}^{20}e^{-\frac{c_k^2}{2}}\approx 0/8557$$

بنابراین مقدار انتگرال I_3 با دقت سه رقم اعشار برابر ۰/۸۵۶ است: $I_3=\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx\approx 0/856$.

روش ذوزنقه

در این روش برای محاسبهٔ $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x$، به‌جای این که نقطهٔ c_k را میانگین x_{k-1} و x_k بگیریم، $f(c_k)$ را متوسط مقادیر $f(x_{k-1})$ و $f(x_k)$ انتخاب می‌کنیم :

$$f(c_k)=\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}$$

توجه کنید که اگر تابع پیوسته باشد، بنابر قضیهٔ مقدار میانی یک c_k بین x_{k-1} و x_k وجود دارد که مقدارش برابر $\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}$ باشد.

پس می‌توان نوشت :

$$J_n=\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x=\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\Delta x$$
$$=\frac{\Delta x}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[f(x_{k-1})+f(x_k)\right]$$
$$=\frac{\Delta x}{2}\left[\sum_{k=1}^{n}f(x_{k-1})+\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\right]$$

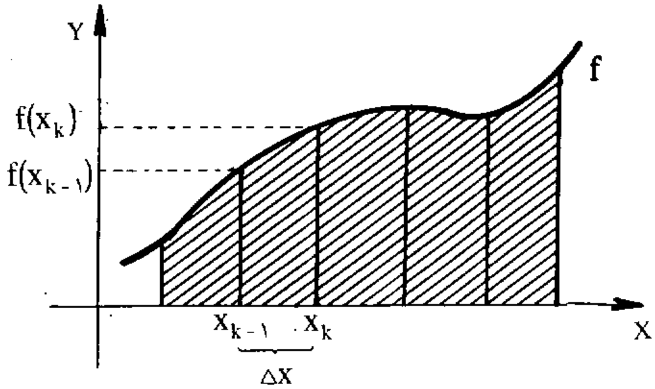
با توجه به برابریهای زیر :

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})=f(x_0)+\sum_{k=2}^{n} f(x_{k-1})=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)$$
$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)=f(x_n)+\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)$$

خواهیم داشت :

$$J_n=\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x$$
$$=\frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0)+\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(x_n)+\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)\right]$$
$$=\frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0)+f(x_n)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)\right]$$

به شکل زیر که برای تابعی مانند f: رسم شده است، توجه کنید :



با توجه به شکل مشاهده می‌کنیم که طول قاعده‌های هریک از ذوزنقه‌ها $f(x_{k-1})$ و $f(x_k)$ و ارتفاع آنها Δx است. بنابراین $\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\Delta x$ مساحت ذوزنقه‌ای با قاعده‌های $f(x_{k-1})$ و $f(x_k)$ و ارتفاع Δx است.

با فرض $m=\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2}$ می‌توان نوشت :

$$J_n=\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x=\Delta x\left[m+\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)\right]$$

مثال: با استفاده از روش ذوزنقه‌ای مقدار انتگرال $J=\int_0^1\frac{dx}{x+1}$ را تقریب بزنید.

حل: اگر بازهٔ [۱ و ۰] را به ۱۰ قسمت برابر تقسیم کنیم، $(n=10)$، آنگاه $\Delta x=\frac{1-0}{10}=\frac{1}{10}=0/1$ و در نتیجه خواهیم داشت :

$$J_{10}=\frac{0/1}{2}\left[f(0)+f(1)+2\sum_{k=1}^{9}f(x_k)\right]$$

با توجه به ضابطهٔ تابع، یعنی $f(x)=\frac{۱}{x+۱}$ ، می‌توان نوشت :

$$J_{۱۰}=۰/۰۵\left[۱+\frac{۱}{۲}+۲\sum_{k=۱}^{۹}\frac{۱}{x_k+۱}\right]$$

$$\left(\sum_{k=۱}^{۹}\frac{۱}{x_k+۱}\approx ۶/۱۸۷۴۲\right)$$

$$=۰/۰۵\left[\frac{۳}{۲}+۲\left(\frac{۱}{۱/۱}+\frac{۱}{۱/۲}+\frac{۱}{۱/۳}+...+\frac{۱}{۱/۹}\right)\right]\approx ۰/۶۹۳۷۴$$

در این‌جا اگر مقدار $J_{۱۰}$ را با مقدار واقعی انتگرال یعنی $J=\int_۰^۱\frac{dx}{x+۱}=Ln۲$ مقایسه کنیم، نتیجه می‌شود که $J_{۱۰}$ با تقریب اضافی کمتر از ۰/۰۰۰۶ با مقدار واقعی اختلاف دارد.

با مقایسهٔ مقادیر $I_{۱۰}$ و $J_{۱۰}$ و J نتیجه می‌شود :

$$I_{۱۰}<J<J_{۱۰}\qquad (I_n<J<J_n)$$

تمرین: با استفاده از روش ذوزنقه‌ای مقدار $J=\int_۰^۱ e^{-x^۲}dx$ را تقریب بزنید.

مثال: با استفاده از روش ذوزنقه‌ای مقادیر $J=\int_۰^۱x^۲dx$ و $J'=\int_۰^۱e^{x^۲}dx$ را تقریب بزنید.

حل: اگر بازهٔ [۱ و ۰] را به ۱۰ قسمت برابر تقسیم کنیم، $(n=۱۰)$، آنگاه $\Delta x=\frac{۱-۰}{۱۰}=۰/۱$ و در نتیجه خواهیم داشت :

$$J_{۱۰}=\frac{۰/۱}{۲}\left[f(۰)+f(۱)+۲\sum_{k=۱}^{۹}f(x_k)\right]$$

برای تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^۲$ ، می‌توان نوشت :

$$J_{۱۰}=۰/۰۵\left[۰+۱+۲\sum_{k=۱}^{۹}x_k^۲\right]$$

$$=۰/۰۵[۱+۲(۰/۰۱+۰/۰۴+۰/۰۹+۰/۱۶+...+۰/۸۱)]$$

$$\Rightarrow J_{۱۰}=۰/۳۳۵۰\qquad (I_n<J<J_n)$$

برای تابع با ضابطهٔ $f(x)=e^{x^۲}$ ، می‌توان نوشت :

$$J'_{۱۰}=۰/۰۵[۱+e+۲(۱/۰۰۱+...+۲/۰۷۳)]$$

می‌دانیم $e\approx ۲/۷۱۸۳$ ، پس :

$$J'_{۱۰}\approx ۱/۳۴۸۷$$

تمرین: با استفاده از روش نقطه میانی و روش ذوزنقه‌ای مقدار $S=\int_۱^۲\sin(\frac{۱}{x})dx$ را تقریب بزنید.

روش سیمپسون

این قاعده با تقسیم [b و a] به یک تعداد زوج از بازه‌های برابر (n زوج بازهٔ برابر) و تقریب $f(x)$ به‌وسیلهٔ یک سه جمله‌ای درجهٔ دوم :

$$y=f(x)\approx ax^۲+bx+c \qquad (۱)$$

که از سه نقطهٔ متوالی متناظر به $x_۰,x_۱,x_۲;x_۱,x_۲,x_۳;...;x_{n-۲},x_{n-۱},x_n$ ، می‌گذرد به‌دست می‌آید. از نظر هندسی این قاعده به‌جای خم $y=f(x)$ مجموعه‌ای از کمان‌های سهمی تقریبی (۱) را قرار می‌دهد :

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{\Delta x}{۳}(y_۰+۴y_۱+۲y_۲+۴y_۳+۲y_۴+۴y_۵+...+۲y_{n-۲}+۴y_{n-۱}+y_n)$$

مثال: مقدار انتگرال معین $\int_۰^۱\frac{dx}{x^۲+۱}$ را با استفاده از روشهای ذوزنقه‌ای و سیمپسون با تقسیم بازهٔ [۱ و ۰] به $n=۴$ قسمت برابر، تقریب بزنید.

حل: با فرض $y=f(x)=\frac{۱}{x^۲+۱}$ ، خواهیم داشت :

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{۱-۰}{۴}=\frac{۱}{۴}=۰/۲۵$$

حال مقدار y را با چهار رقم اعشار محاسبه می‌کنیم :

$y_۰=f(۰)=۱/۰۰۰۰$ و $y_۱=f(۰/۲۵)=۰/۹۴۱۲$ و

$y_۲=f(۰/۵)=۰/۸۰۰۰$ و $y_۳=f(۰/۷۵)=۰/۶۴۰۰$ و

$y_۴=f(۱)=۰/۵۰۰۰$

از قاعدهٔ ذوزنقه‌ای نتیجه می‌شود :

$$\int_۰^۱\frac{dx}{x^۲+۱}\approx\frac{\Delta x}{۲}[y_۰+y_۴+۲(y_۱+y_۲+y_۳)]=\frac{۰/۲۵}{۲}[۱+۰/۵+۲(۲/۳۸۱۲)]=۰/۷۸۲۸$$

از قاعدهٔ سیمپسون نتیجه می‌شود :

$$\int_۰^۱\frac{dx}{x^۲+۱}\approx\frac{\Delta x}{۳}(y_۰+۴y_۱+۲y_۲+۴y_۳+y_۴)$$

$$=\frac{۰/۲۵}{۳}(۱+۴(۰/۹۴۱۲)+۲(۰/۸)+۴(۰/۶۴)+۰/۵)$$

$$=۰/۷۸۵۴$$

در این‌جا مقدار واقعی $\int_۰^۱\frac{dx}{x^۲+۱}$ را محاسبه می‌کنیم :

$$\int_۰^۱\frac{dx}{x^۲+۱}=[\mathrm{Arc}\tan x]_۰^۱=\frac{\pi}{۴}\approx ۰/۷۸۵۴$$

دومین کنفرانس آموزش ریاضی ایران

● میرشهرام صدر

دومین کنفرانس آموزش ریاضی ایران، به همّت ادارهٔ کل آموزش و پرورش استان کرمانشاه و با حمایت انجمن ریاضی ایران و دانشکده علوم دانشگاه رازی کرمانشاه، در روزهای اول تا سوم شهریورماه ۱۳۷۶ در مرکز تربیت معلم شهید صدوقی و مرکز آموزش نیروی انسانی فرهنگیان شهر تاریخی و خطّهٔ شهیدپرور کرمانشاه برگزار شد.

در این کنفرانس بیش از ۹۰۰ نفر دبیر و استاد دانشگاه و ۴ نفر میهمان خارجی شرکت داشتند. استادان دانشگاه، همراه با دبیران و دانش‌پژوهان آموزش ریاضی، ارائهٔ مقاله و تبادل نظر کردند، که این امر باعث وحدت و همبستگی بیشتر بین مدرسه و دانشگاه در جهت پیشرفت آموزش ریاضی شد.

هدف اصلی کنفرانس، اعتلای آموزش ریاضی از طریق مشارکت سازندهٔ همه دست‌اندرکاران آموزش ریاضی، بخصوص معلمان پرتوان، زحمتکش، با مطالعه و علاقه‌مند به پژوهش در زمینهٔ آموزش ریاضی بود.

با توجه به هدف اصلی کنفرانس و نیازهای جامعه آموزش ریاضی، چهار محور اصلی این کنفرانس عبارت بودند از:

ـ ضرورت تدوین استانداردهای ملی برنامهٔ درسی

ـ نقش آموزش ریاضی در اعتلای ریاضیات

ـ ضرورت تحول در آموزش مستمر، جهت اعتلای دانش حرفه‌ای معلمان ریاضی

ـ شیوهٔ تدریس مفاهیم ریاضی با تأکید بر حسابان

مراسم افتتاحیه صبح روز شنبه، اول شهریور پس از حمل قرآن کریم توسط دانش‌آموزان پیشتاز کرمانشاه، با تلاوت آیاتی از قرآن و به اهتزاز درآوردن پرچم جمهوری اسلامی ایران، همراه با سرود و پرچم دومین کنفرانس آموزش ریاضی آغاز شد. سپس آقای فرخ‌پور، مدیر کل آموزش و پرورش استان کرمانشاه به مدعوین و شرکت کنندگان خیرمقدم گفت و گزارشی از کارهای انجام شده را به سمع حاضران در کنفرانس رساند. همچنین دبیر کمیته علمی کنفرانس، خانم زهرا گویا ضمن خیرمقدم به شرکت کنندگان دربارهٔ برنامه‌های کنفرانس، نحوه داوری مقالات با توجه به چهارمحور اصلی کنفرانس سخنرانی کردند.

از طرف کمیته علمی، در این جلسه جناب آقای میرزا

جلیلی از استان تهران، جناب آقای سید مرتضی حسنی نسب از استان کرمانشاه و جناب آقای **یونس عابدین دوست** از استان گیلان به عنوان پیشکسوتان جامعه آموزش ریاضی ایران معرفی شدند و لوح تقدیر دریافت کردند.

اولین سخنران عمومی جلسهٔ افتتاحیه که باعث پربارتر شدن این کنفرانس گردید، استاد فرزانه، حضرت علامه محمد تقی جعفری بودند. ایشان سخنرانی خود را دربارهٔ «شهود و تجرید» ایراد فرمودند و در لابه‌لای سخنان گهربارشان به اهمیت ریاضیات در جهان امروز اشاره کردند. در این کنفرانس، تقریباً ۷۰ مقاله به صورت سخنرانی‌های ۲۰ یا ۴۰ دقیقه‌ای، عمومی؛ پوستر با چکیده و پوستر بدون چکیده در دو سالن و چهار کلاس تشکیل شد.

سخنرانان عمومی این کنفرانس، دکتر **غلامحسین شکوهی** دربارهٔ «نقدی بر روشهای آموزش مقدمات ریاضی»، دکتر *عبادا*... *محمودیان* دربارهٔ «نقش ریاضیات گسسته در آموزش ریاضی» پرفسور *آلن بیشاپ*[۱] از استرالیا دربارهٔ «رابطهٔ بین آموزش ریاضی و فرهنگ»، دکتر *یوداریا محمد یوسف*[۲] از مالزی دربارهٔ «تدریس حقایق ریاضی در مقابل تدریس فرایند تفکر ریاضی در دوره کارشناسی آموزش ریاضی»، دکتر *مهدی رجبعلی‌پور* دربارهٔ «تعریف جدید برای مفهوم بی‌نهایت کوچک» و دکتر *زهرا گویا* دربارهٔ «توسعهٔ حرفه‌ای معلمان ریاضی ــ یک ضرورت» صحبت کردند. همچنین در این کنفرانس، مقاله‌ای توسط آقای *حمیدرضا امیری* از طرف هیأت تحریریهٔ مجلهٔ ریاضی برهان با عنوان «تاریخچه و نقش مجله‌های آموزش ریاضی در آموزش ریاضیات» ارائه گردید، متن کامل این مقاله را علاقه‌مندان می‌توانند در شماره‌های آینده مجله مطالعه کنند.

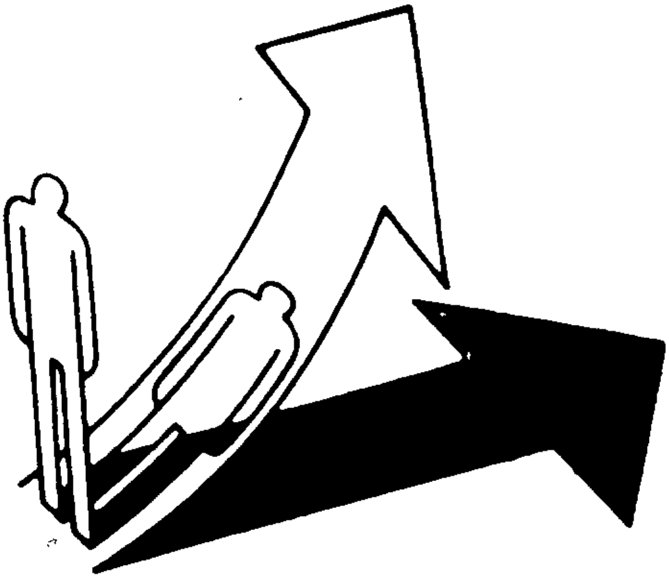
در این کنفرانس، دو میزگرد برپا شد که اولین میزگرد در بعد از ظهر اول شهریور با هدف رویارویی صمیمانهٔ معلمان ریاضی با شورای ریاضی دفتر برنامه‌ریزی تألیف کتابهای درسی آموزش و پرورش و دومین میز گرد، ساعت یازده و سی دقیقهٔ روز سوم شهریور با هدف بررسی کتاب و مشکلات درس حسابان تشکیل شد.

کمیته علمی، اجرایی و هیأت امنای کنفرانس، با دلسوزی و به کارگیری تمام امکانات موجود، با توجه به محدودیتهای شدیدی که در طی هشت سال دفاع مقدس در این شهر تاریخی و شهید پرور وجود داشت، در ارائهٔ محتوای علمی و اجرای این کنفرانس موفق بودند. در کنار برنامه‌های علمی، نمایشگاه صنایع آموزشی وزارت آموزش و پرورش و نمایشگاه کتاب انتشارات مدرسه دایر بود. درضمن، وضعیت پذیرایی و مکانهای اسکان شرکت کنندگان در کنفرانس بسیار عالی بود و کرمانشاهیهای عزیز همهٔ امکاناتشان را به بهترین وضعیتی در طبق اخلاص نهاده بودند.

در خاتمه، باید از همه دست‌اندرکاران، کمیته‌های علمی و اجرایی و هیأت امنای دومین کنفرانس آموزش ریاضی ایران که با همکاری، همدلی، مسئولیت‌پذیری فراوان، عشق و ایثار، توانستند این کنفرانس را برپا کنند، تشکر و قدردانی نمود. امید است که با این گونه تلاشها و برگزاری کنفرانسها بتوانیم هر چه بیشتر و بهتر در جهت گسترش آموزش ریاضی و ارتقای سطح علمی آموزشگران ریاضی و برقراری رابطهٔ تنگاتنگ بین مدرسه و دانشگاه، گامهای بلندتری برداریم.

۱) Alan Bishop

۲) Yudariah bt Mohammad Yousof



میانگین همساز

• پرویز شهریاری

میانگین همساز n عدد مثبت a_1، a_2، …، a_n، به این ترتیب تعریف می‌شود:

$$M=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$$

اگر میانگین همساز را (که به آن واسطهٔ توافقی هم می‌گویند) با میانگین‌های مشهورتر یعنی میانگین حسابی

$$A=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

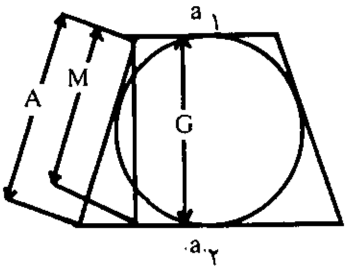
و میانگین هندسی $G=\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$

مقایسه کنیم معلوم می‌شود که از هر دوی آنها کوچکتر است؛

درواقع $A\ge G\ge M$

علامت برابری، تنها وقتی برقرار است که همهٔ عددهای a_1، a_2، …، a_n، باهم برابر باشند.

بستگی بین سه میانگین به ازای $n=۲$ را می‌توان به سادگی و با زیبایی، تعبیر هندسی کرد. ذوزنقه‌ای با ساق‌های برابر و قاعده‌های به طولهای a_1 و a_2 درنظر می‌گیریم که بر دایره‌ای محیط باشد (به سادگی ثابت می‌شود که، چنین ذوزنقه‌ای، همیشه وجود دارد). دراینصورت، طول ساق این ذوزنقه، میانگین حسابی a_1 و a_2، طول ارتفاع ذوزنقه، میانگین هندسی و طول تصویرارتفاع روی ساق، میانگین همساز آنها است.



مفهوم «میانگین» با مفهوم تصاعد بستگی نزدیک دارد. در تصاعد حسابی، هرجمله (به جز جملهٔ اول و جملهٔ آخر) میانگین حسابی دو جملهٔ مجاور خود است. همچنین، در تصاعد هندسی، هر جمله (به‌جز جمله‌های اول و آخر) میانگین هندسی دوجملهٔ مجاور خود است. به همین ترتیب می‌توان تصاعد همساز (یا تصاعد توافقی) را تعریف کرد: هرجملهٔ تصاعد همساز (به جز دوجملهٔ اول و آخر)، میانگین همساز دو جملهٔ مجاور خود است. دنباله

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots,\frac{1}{n},\cdots\ (n\in N)$$

نمونه‌ای از یک تصاعد همساز است. درواقع، دو جملهٔ مجاور

جملهٔ $\frac{1}{n}$ عبارتند از $\frac{1}{n-1}$ و $\frac{1}{n+1}$، که میانگین همساز آن‌ها، چنین است:

$$\frac{2}{\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n+1}}=\frac{2}{n-1+n+1}=\frac{1}{n}$$

مجموع جمله‌های این تصاعد همساز، یعنی

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

را **رشتهٔ همساز (یا رشتهٔ توافقی)** گویند.

گوتفرید ویلهلم لایپ نیتس، ریاضی‌دان، فیزیک‌دان و فیلسوف آلمانی، در سال ۱۶۷۳ ثابت کرد که، این رشته، مجموعی برابر بی‌نهایت دارد. یعنی حد مجموع جزئی

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

با بزرگ شدن n، به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

استدلال لایپ نیتس چنین بود. این n جمله ازرشته همساز را درنظر می‌گیریم:

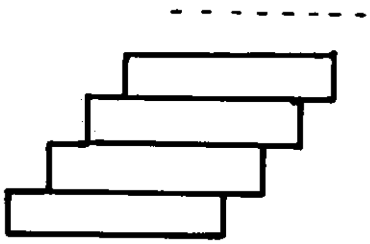
$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

هرجملهٔ این رشته از $\frac{1}{2n}$ کوچکتر نیست، بنابراین، این مجموع از $\frac{1}{2}$ بزرگتر است. باتوجه به این نکته، می‌توان نوشت:

$$1>\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{2}$$
....
$$\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+2}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}>\frac{1}{2}$$

روشن است، اگر جمله‌های رشتهٔ همساز را، به همین ترتیب گروه‌بندی کنیم، هربار تکه‌ای از رشته را به‌دست می‌آوریم که، مجموع جمله‌های آن، از $\frac{1}{2}$ کمتر نیست؛ در ضمن، تعداد این تکه‌ها در رشته، بی‌نهایت است.

جالب است، اگر آجری را روی سطح زمین قرار دهیم، آجر دوم را روی آن طوری قرار دهیم که انتهای چپ آن در نقطه $\frac{1}{2}$



آجر زیرین قرار گیرد، به همین ترتیب آجرسوم را درنقطهٔ $\frac{1}{3}$ آجر زیر خود، آجر چهارم را در نقطه $\frac{1}{4}$ آجر سوم و غیره قرار دهیم، ساختمانی پایدار به‌دست می‌آید، و این ساختمان را می‌توان به هر اندازه بلند ساخت.

لئوناراولر در سال ۱۷۴۰ ثابت کرد، مجموع S_n شبیه $\ln_n$ افزایش می‌یابد. به زبان دقیقتر، عدد ثابت C وجود دارد، به‌نحوی که

$$S_n=Ln_n+C+\varepsilon_n$$

که در آن، وقتی n به سمت بی‌نهایت میل کند، ε_n به سمت صفر میل می‌کند؛ درضمن عدد

$$C=0/57721...$$

ثابت اولر نامیده می‌شود.

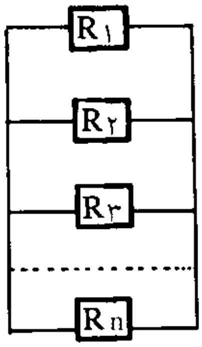
رشتهٔ همساز تنها نمونهٔ تصاعد همساز نیست. اگر a و b را دوجملهٔ اول یک تصاعد همساز بگیریم، جملهٔ سوم آن برابر $\frac{ab}{2a-b}$، جملهٔ چهارم آن برابر $\frac{ab}{3a-2b}$ .... و جملهٔ nام آن برابر $\frac{ab}{(n-1)a+(n-2)b}$ می‌شود. توجه کنیم، اگرa و b دو جملهٔ اول یک تصاعد حسابی باشند، جملهٔ nام آن برابر $(n-1)b+(n-2)a$؛ و اگر a و b دو جملهٔ اول یک تصاعد هندسی باشند، جملهٔ nام آن برابر $\frac{b^{n-1}}{a^{n-2}}$ می‌شود.

به سادگی می‌توان ثابت کرد که، به شرط $a\neq 0$ و $b\neq 0$ **مجموع جمله‌های هر تصاعد همساز به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.**

در فیزیک، اغلب با میانگین همساز روبه‌رو می‌شویم. به

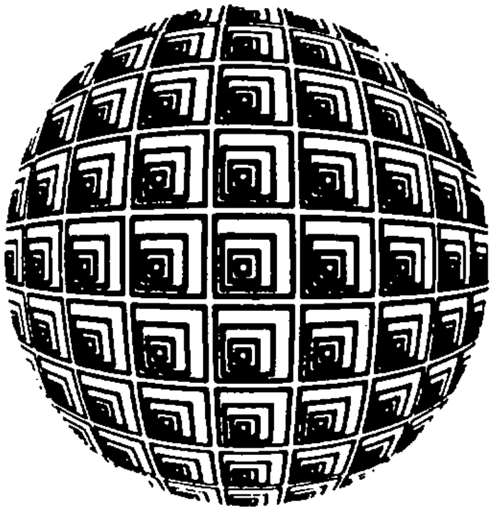
عنوان نمونه، مقاومت دستگاهی که از n مقاومت موازیِ R_1، R_2، ...، R_n تشکیل شده است، برابر است با:

$$R=\frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\cdots+\frac{1}{R_n}}$$



یعنی، برابر است با $\frac{1}{n}$ میانگین همساز آن‌ها یا فاصلهٔ کانونی دستگاهی که شامل n عدسی نازکِ با فاصله‌های کانونی f_1، f_2، ...، f_n باشد، برابر است با :

$$f=\frac{1}{\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}+\cdots+\frac{1}{f_n}}$$



مسائل مسابقه‌ای

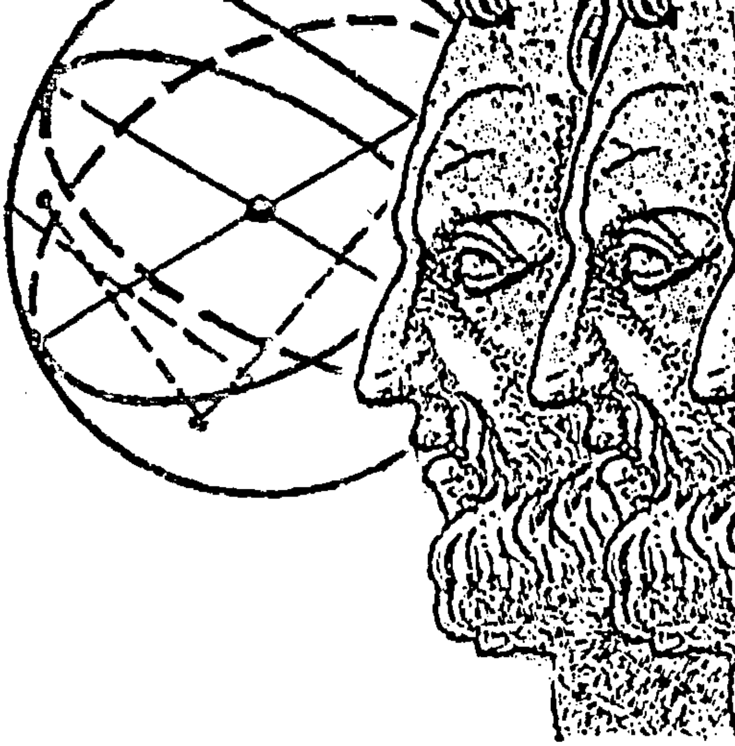
● حمیدرضا امیری

۱ـ در ظرف A ، ۳ مهره قرمز و ۵ مهرهٔ آبی در ظرف B ، ۴ مهرهٔ قرمز و ۳ مهرهٔ آبی و در ظرف C ، ۴ مهرهٔ قرمز و ۲ مهرهٔ آبی وجود دارد. از ظرفهای A و B و C به ترتیب ۲ و ۳ و ۲ مهره به تصادف خارج کرده و در ظرف D قرار می‌دهیم و سپس ۱ مهره به تصادف از D خارج می‌کنیم، احتمال آنکه مهرهٔ خارج شده قرمز باشد را به دست آورید.

۲ـ مطلوب است تعیین عددی طبیعی با شرایط زیر:

I) تعداد مقسوم‌علیه‌های آن، فرد باشد.

II) اگر آن عدد را بر ۳۹ تقسیم کنیم، باقی‌مانده ۱ و خارج قسمت عددی اوّل باشد.



مشاهیر ریاضی جهان

برگرفته از فرهنگ ریاضیات آکسفورد

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

پوانکاره، هانری[1] (۱۸۵۴ــ ۱۹۱۲). به‌قول‌هاردی[2]، شهرت ریاضی، چون به‌دست آید، دیرپاست. ریموند پوانکاره[3]، رئیس‌جمهور فرانسه، پسر عموی هانری است و نه برعکس. پوانکاره عموماً به عنوان آخرین ریاضیدان فعال در کل حوزهٔ ریاضیات درنظر گرفته می‌شود. او از یک قلمرو ریاضیات به قلمرو دیگر می‌رفت و کارهای مهمی در اغلب آنها انجام می‌داد، و در این مورد نه مستعمره‌نشین که فاتح بود. در ریاضیات محض به‌عنوان یکی از واضعان اصلی توپولوژی و کاشف توابع خود ریخت بود. در ریاضیات کاربردی، به‌خاطر اثر تئوریکش راجع به جنبه‌های کیفی مکانیک سماوی، که احتمالاً از زمان لاپلاس و لاگرانژ به بعد، مهمترین اثر در این زمینه بود، معروف است. نظریهٔ کیفی معادلات دیفرانسیلش برانگیخته از این دو ریاضیات و مرتبط کنندهٔ آنها بود. کتابهای متعدد پوانکاره که به هر دو مفهوم، در ریاضیات و دانش مشهورند، به هیچ وجه کمتر از دستاوردهای او نبوده‌اند. این کتب هنوز هم مؤکداً به هر ریاضیدان یا دانشمند جوان و بلندپرواز توصیه می‌شوند.

فیثاغورس[4] (مرگ در حدود ۴۹۷ ق.م.). فیثاغورس یکی از اولین فلاسفه و عرفای یونان بود. چنین به‌نظر می‌رسد که او و مکتبش اولین اشخاصی بوده‌اند که ریاضیات را به‌طور جدی به‌عنوان بررسی این علم از لحاظ خودش و در مقابل این‌گونه که مجموعه‌ای از فرمولها برای محاسبات عملی باشد، درنظر می‌گرفته‌اند. اینان به افتخار کشف قضیهٔ معروف فیثاغورس[5] در مورد مثلثهای قائم‌الزاویه نائل آمدند. فیثاغورسیان، به دلایل نیمه فلسفی، با اعداد نیمه رمزی نیز سر و کار داشتند. گفته می‌شود که اعداد تمام را به‌عنوان تشکیل‌دهندهٔ اساسی واقعیت درنظر می‌گرفته‌اند. این نظر گاه با کشف *اعداد گنگ*[6] درهم شکسته شد.

ریمان، برنهارد[7] (۱۸۲۶ــ ۱۸۶۶). ریمان، ریاضیدان آلمانی، یکی از چهره‌های مهم ریاضیات قرن نوزدهم است، که از بسیاری جهات، خلف با هوش گاوس می‌باشد. به‌خاطر معادلات کوشی ــ ریمان[8] رویه‌های ریمان، هندسهٔ ریمانی، معادلهٔ دیفرانسیل ریمان، *انتگرال ریمان*[9]، تابع زتای ریمان و فرض ریمان معروف است. موضوعات فوق آثار عظیمی را تشکیل می‌دهند. در هندسه ابزارهایی را مطرح کرد که با استفاده از آنها اینشتین مآلاً به توصیف جهان پرداخت و قرن بیستم به سوی نظریهٔ خمینه‌ها[10] حرکت کرد. اندیشه‌های اساسی هندسه‌اش در نطق افتتاحیهٔ دانشگاه گوتینگن[11] مطرح شدند. گاوس که در آن زمان آخرین سال حیات طولانی‌اش را می‌گذراند از حضار این سخنرانی بود. ریمان، در زمانی که آنالیز، پس از افراط کاریهای صوری قرن هجدهم درحال دقیق شدن بود، کارهای بسیار مهمی در این موضوع انجام داد. به‌خاطر تعریف‌اش از انتگرال، معرف حضور بسیاری از دانشجویان ریاضی است. در فرض ریمان، یکی از برجسته‌ترین مسائل ریاضیات را برای این رشته به‌جای نهاد؛ یعنی این که تابع زتای ریمان جمیع صفرهای مختلط خود را بر خط $Rz = \frac{1}{2}$ دارد. این مسأله، درصورتی که اثبات شود، مطالب زیادی در مورد توزیع اعداد اول بیان

می‌کند، و یکی از موارد بسیار قابل توجه تأثیر متقابل آنالیز و حساب خواهد بود.

تیلور، بروک[۱۲] (۱۶۸۵ـ ۱۷۳۱). تیلور ریاضیدانی بریتانیایی است که نامش را به *سری تیلور*[۱۳]، بسط تابعی دلخواه به توانهای متغیرش، داده است. سری مزبور توسط جیمز گرگوری[۱۴]، نیز دیگران، کشف شده است.

توم، رنه[۱۵] (۱۹۲۳ـ). توم ریاضیدانی فرانسوی است که بیشتر به‌خاطر نظریهٔ ساخت تکوین‌اش معروف می‌باشد، که به‌عنوان نظریهٔ فاجعه مشهور است، این نظریه یکی از کوششهای جدی و معدود در به‌کار گرفتن ریاضیات در قالبها و جریانات موجودات زنده است، غالب کوششهای قبلی به‌طور طبیعی در مسیر کمی بودن در سنت ریاضیات کاربردی انجام گرفته‌اند، و توسط پیچیدگی محض طبیعت با شکست مواجه شده‌اند. نظریهٔ توم از این توان که هم‌کیفی هم دقیق است، برخوردار می‌باشد.

فون نویمان، جان[۱۶] (۱۹۰۳ـ ۱۹۵۷). فون نویمان، دانشمند اعجوبه، در بوداپست متولد شد اما از ۱۹۳۰ به بعد در آمریکا زندگی کرد. در ریاضیات محض، بیشتر به‌خاطر کارش در آنالیز تابعی، به‌خصوص در زمینهٔ فضاهای هیلبرت معروف است. در ریاضیات کاربردی، یکی از به‌وجود آورندگان نظریهٔ بهینه‌سازی و نظریهٔ بازیهاست. کتابی اساسی در مورد اقتصاد ریاضی نوشت. در سراسر عمر به ادوات مکانیکی علاقه‌مند بود و نوعی مخترع به‌شمار می‌رفت، و همین علاقه او را به توسعهٔ اولیهٔ کامپیوترهای الکترونیکی مدرن و مفهوم مهم برنامهٔ ذخیره شده رهنمون شد. بزرگترین شکست نویمان، در میان تأسف عمیقش، کوشش بیهوده‌اش در معرفی تذکرهٔ رستوران وینی به پرینستون بود.

وایراشتراس، کارل[۱۷] (۱۸۱۵ـ ۱۸۹۷). آنالیز ریاضی قرن نوزدهم از آشفته بازار حساب دیفرانسیل و انتگرال قرن هجدهم گسترش یافت. جریان مزبور با افرادی مانند کوشی آغاز شد، و در آثار وایراشتراس به کمال رسید. در اواخر قرن هجدهم، ریاضیدانها در مورد تفاوت بین تابع و فرمول دچار اشکال بودند. در زمان وایراشتراس، کارها به مرحله‌ای رسیده بود که او توان، علاقه‌مندی به‌دست دادن مثالی از تابعی که در هر جا پیوسته باشد، اما در هیچ‌جا مشتق‌پذیر نباشد را به‌دست آورده بود. این مرحله، به یک معنی، مرحله‌ای بود که در آن آنالیز ریاضی در میان ناراحتی بسیاری از بدگویان وایراشتراس، از شهود و درک متعارف منحرف شده بود. بعضی از کارهای او هنگامی انجام گرفت که معلم مدرسه‌ای محلی بود، و تماس اندکی با دنیای ریاضیدانهای حرفه‌ای داشت. وایراشتراس یکی از اشخاص معدودی است که در سن بالای ۴۰ سالگی مستقیماً از معلمی مدرسه به استادی ریاضیات رسید.

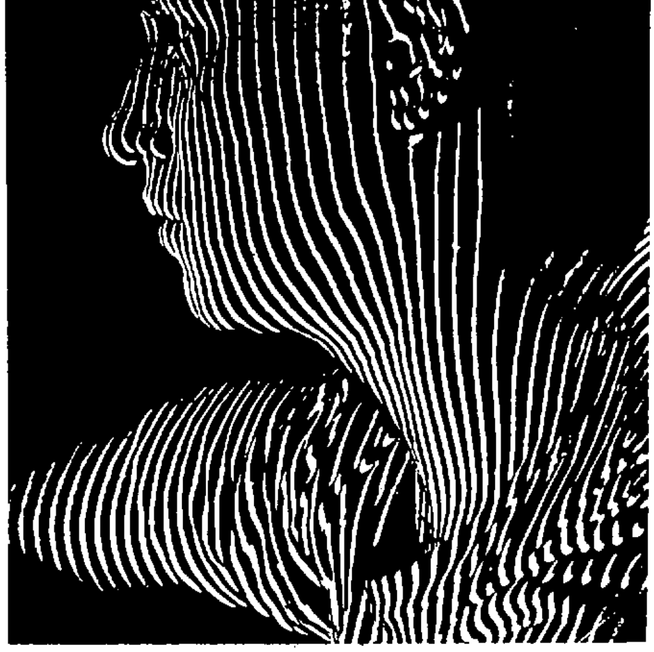
یادداشتها:

۱. Poincaré, Henri
۲. Hardy
۳. Raymond Poincaré
۴. Pythagoras
۵. Pythagoras' Theorem
۶. Irrational numbers
۷. Riemann, Bernhard
۸. Cauchy - Riemann
۹. Riemann integral
۱۰. manifolds
۱۱. Gottingen
۱۲. Taylor, Brook
۱۳. Taylor series
۱۴. James Gregory
۱۵. Thom, René
۱۶. Von Neumann, John
۱۷. Weierstrass, Karl

پوانکاره

تئوری زوج خط

●سیامک جعفری



(۱) شکل کلی معادله درجه دوم به‌صورت زیر است :

$$S(x,y)\equiv ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

اگر $D\equiv ax+by+c=0$ و $D'\equiv lx+my+n=0$ معادلات دو خط راست باشند، به معادله $DD'=0$ توجه بفرمایید.

$$DD':(ax+by+c)(lx+my+n)=0$$

مشخص است که :

۱) اگر $P(x_1,y_1)$ روی D (یا D') باشد، روی مکان DD' نیز هست.

۲) برعکس اگر $DD'=0$ برای یک $P(x_1,y_1)$، آنگاه این نقطه روی D یا D' است.

۳) اگر برای $P(x_1,y_1)$، $D\neq 0$ و $D'\neq 0$ آنگاه $DD'\neq 0$ می‌شود، یعنی نقطه $P(x_1,y_1)$ روی مکان DD' نیز نیست.

به‌طور کلی $DD'=0$ نمایش یک زوج خط مانند $D=0$ و $D'=0$ خواهد شد. این معادله $DD'=0$ نسبت به x و y درجه دوم است.

(۲) حال اگر $S(x,y)=0$ نمایش یک زوج خط باشد، باید به شکل $DD'=0$ قابل تبدیل باشد، سه حالت را بررسی می‌کنیم :

۱) $a\neq 0$

معادله را نسبت به x مرتب می‌کنیم :

$$ax^2+2(hy+g)x+(by^2+2fy+c)=0$$

طبق تئوری معادله درجه دوم خواهد شد.

$$a\left[x-\frac{-(hy+g)+\sqrt{(hy+g)^2-a(by^2+2fy+c)}}{a}\right]$$

$$\times\left[x-\frac{-(hy+g)-\sqrt{(hy+g)^2-a(by^2+2fy+c)}}{a}\right]=0$$

به‌عبارت ساده‌تر:

$$\left[(ax+by+c)-\sqrt{(hy+g)^2-a(by^2+2fy+c)}\right]$$

$$\times\left[(ax+hy+g)+\sqrt{(hy+g)^2-a(by^2+2fy+c)}\right]$$

عبارت بالا وقتی خطی می‌شود که مقدارهای زیر رادیکال مربع کامل باشند. یعنی اگر برحسب y مرتب شوند، عبارت زیر مربع کامل باشد. $(h^2-ab)y^2+2(gh-af)y+(g^2-ac)$

یعنی معادله $(h^2-ab)y^2+2(gh-af)y+(g^2-ac)=0$ دارای ریشه مضاعف باشد.

$$\Delta'=0\Rightarrow(gh-af)^2=(h^2-ab)(g^2-ac)$$

عبارت اخیر را به شکل دترمینان می‌نویسیم :

$$\Delta=\begin{vmatrix}a&h&g\\h&b&f\\g&f&c\end{vmatrix}=0$$

به‌طور خلاصه اگر $a\neq 0$ باشد، آنگاه $S(x,y)=0$ وقتی

نمایش زوج خط می‌شود که دترمینان مذکور برابر صفر باشد. فی‌الواقع بر طبق تئوری ماتریسی دستگاه معادلات دو خط حاصل حالت دوّم:

۲) $a=0$، $b\neq 0$ بحث مشابه حالت ۱ می‌شود.

۳) $a=0$ و $b=0$، $h\neq 0$ آنگاه

$$S(x,y): hxy+2gx+2fy+c=0$$

برای تبدیل $S(x,y)=0$ بر ضرب دو عبارت خطی چنین عمل می‌کنیم:

$$hxy+2gx+2fy+c\equiv(x+p)(y+q)$$

$$p=f/h\ ,\ q=g/h\ ,\ p.q=c/2h$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\frac{f.g}{h^2}=\frac{c}{2h}\ \Rightarrow\ ch-2fg=0$$

امّا دقت بفرمایید که اگر $a=b=0$ باشد، آنگاه

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & h & g \\ h & 0 & f \\ g & f & c \end{vmatrix}=ch-2fg$$

که نشان می‌دهد همان شرط $\Delta=0$ اینجا نیز برقرار است.

از بحث سه حالت به این نتیجه می‌رسیم که $S(x,y)=0$ وقتی یک زوج خط را نمایش می‌دهد که $\Delta=0$ باشد.

(۳) بحث مشابه برای حالتی است که زوج خط، محل تلاقی در مبدأ مختصات داشته باشند، که در اینجا ما به کمک معادلات انتقال از $S(x,y)=0$ به شکل کلی آنها $H(x,y)=0$ می‌رسیم.

یا از حاصل‌ضرب دو خط که از مبدأ می‌گذرند.

معادله دو خط که از مبدأ می‌گذرند

$$(y-m_1x)(y-m_2x)=0$$

$$m_1m_2x^2-(m_1+m_2)xy+y^2=0 \qquad (1)$$

و به‌طورکلی

$$H(x,y): ax^2+2hxy+by^2=0 \qquad (2)$$

که به آن معادله همگن درجه دوم می‌گویند. عکس مسأله بالا نیز صادق است.

تمرین (۱): نشان دهید اگر قسمتی از عبارت $H(x,y)$ و $S(x,y)$ که برحسب x و y درجه دوّم هستند یکی باشند، زوج خط $H(x,y)=0$ موازی زوج خط $S(x,y)=0$ است.

۱) شیب زوج خط $H(x,y)=0$

$$S=m_1+m_2=-\frac{2h}{b}\ ,\ p=m_1m_2=\frac{a}{b}$$

با مقایسه معادلات (۱) و (۲)

$$x^2-Sx+P=0\Rightarrow m^2-(m_1+m_2)m+(m_1m_2)=0$$

$$\Rightarrow m^2+\frac{2h}{b}m+\frac{a}{b}=0$$

$$\Rightarrow bm^2+2hm+a=0$$

شیب زوج خط ریشه معادله درجه دوّم اخیر است. آشکار است طبق تمرین (۱) داده شده، برای تعیین شیب زوج خط $S(x,y)=0$ نیز به همین ترتیب به‌دست می‌آید.

تمرین (۲): در وجود شیب زوج خط بحث کنید.

۲) زاویه بین زوج خط $H(x,y)=0$

$$tg(D,D')=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$$

با توجه به بحث قبل و تئوری معادله درجه دوم

$$tg(D,D')=\frac{(\sqrt{(h^2-ab)}/b)}{1+\frac{a}{b}}$$

$$tg(D,D')=\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}$$

به‌همین ترتیب زاویه بین زوج خط $S(x,y)=0$ که عبارت درجه دوم آن با $H(x,y)=0$ یکی است نیز به‌دست می‌آید.

۳) نیمسازهای زوج خط $H(x,y)=0$

نیمساز زاویه مکان هندسی نقاطی است که از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

(۴) طبق فرمول محاسبه فاصله یک نقطه از خط. اگر دو خط را به‌صورت $y=m_1x$ و $y=m_2x$ درنظر بگیریم داریم:

$$\frac{y-m_1x}{\sqrt{1+m_1^2}}=\pm\frac{y-m_2x}{\sqrt{1+m_2^2}}$$

درنتیجه برای پیدا کردن معادله زوج ـ نیمسازها مانند زوج

خط عمل می‌کنیم :

$$\left[\frac{y-m_1x}{\sqrt{1+m_1^2}}+\frac{y-m_2x}{\sqrt{1+m_2^2}}\right]\left[\frac{y-m_1x}{\sqrt{1+m_1^2}}-\frac{y-m_2x}{\sqrt{1+m_2^2}}\right]=0$$

پس از ساده کردن

$$(m_1+m_2)x^2-2(1-m_1m_2)xy-(m_1+m_2)y^2=0$$

عبارت m_1-m_2 که در محاسبات ظاهر می‌شود، صفر نیست، زیرا در این‌صورت زوج خط $H(x,y)=0$ بر هم منطبق می‌شوند. زیرا اگر $m_1-m_2=0$ آنگاه $y-m_2x=0$ و $y-m_1x=0$ برهم منطبق می‌شوند.

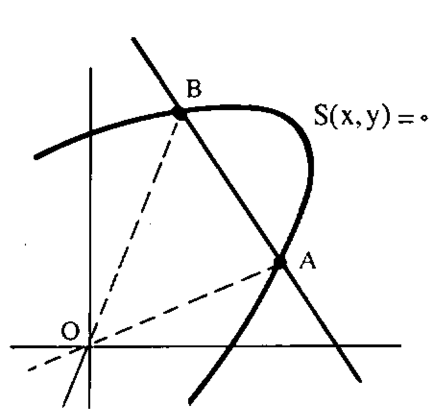
معادله اخیر با جایگذاری m_1+m_2 و $m_1\times m_2$، از قبل می‌شود :

$$-\frac{2h}{b}x^2-2(1-\frac{a}{b})xy-(-\frac{2h}{b})y^2=0$$

و بالاخره : معادله زوج‌ـ نیمساز می‌شود :

$$\frac{x^2-y^2}{xy}=\frac{a-b}{h}$$

(۵) با توجه به شکل روبرو اگر معادله خط AB به‌صورت $y=mx+k$ باشد، آنگاه یک روش برای به‌دست آوردن زوج خط OA و OB چنین است :



اولاً : A,B محل تلاقی دو خط OA و OB با $S(x,y)=0$ هستند.

ثانیاً : مرکز معادله همگن $H(x,y)=0$ یک زوج خط مبدأ مختصات است.

ثالثاً : $(y-mx)=k(y-mx)=k^2$

حال می‌توان به کمک عامل k^2، $S(x,y)=0$ را تبدیل به همگن $H(x,y)=0$ کرد.

$$(ax^2+2hxy+by^2)k^2+(2gx+2fy)k(y-mx)+c(y-mx)^2=0$$

معادله اخیر، همان زوج خط OA و OB است.

مسائل

۱) ثابت کنید شرط اینکه زوج خط

$$S(x,y)\equiv ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

موازی باشد این است که : $a/h=h/b=g/f$ ، آنگاه معادلات دو خط موازی را به‌دست آورید و نشان دهید فاصلهٔ بین آنها خواهد شد $2\sqrt{\frac{g^2-ac}{a^2+h^2}}$، شیب زوج خط را محاسبه کنید.

۲) نشان دهید سطح مثلث محدود به خط $px+qy-1=0$ و زوج خط $ax^2+2hxy+by^2=0$ خواهد شد.

$$S=\sqrt{h^2-ab}\big/(bp^2-2hpq+aq^2)$$

۳) نشان‌دهید معادله زوج‌خطی که از مبدأ می‌گذرد و بر زوج خط $ax^2+2hxy+by^2=0$ عمود است $bx^2-2hxy+ay^2=0$ است.

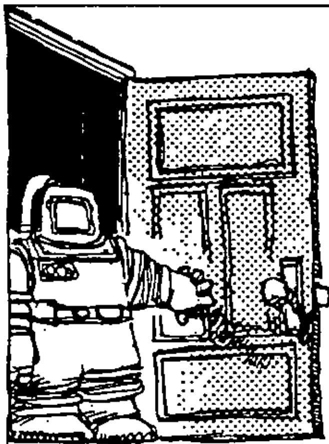
۴) اگر $ax^2+2hxy+by^2=0$ معادله زوج خط OA و OB و معادله زوج خط OP و OQ به صورت $(a+\lambda)x^2+2hxy+(b+\lambda)y^2=0$ باشد، نشان دهید $\angle AOP=\angle BOQ$

۵) ثابت کنید معادله زوج خطی که از مبدأ می‌گذرد و با خط $lx+my+n=0$ مثلث متساوی‌الاضلاع می‌سازد، $(l^2-3m^2)x^2+8lmxy+(m^2-3l^2)y^2=0$ می‌باشد.

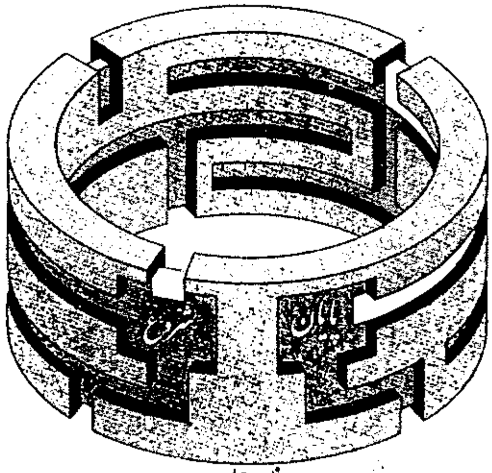
۶) نشان دهید شرط اینکه یکی از خطوط، زوج خط $ax^2+2hxy+by^2=0$ بر یکی از خطوط زوج خط $lx^2+2mxy+hy^2=0$ عمود باشد، آن است که :

$$4(hm+ma)(mb+nl)=(al-bn)^2$$

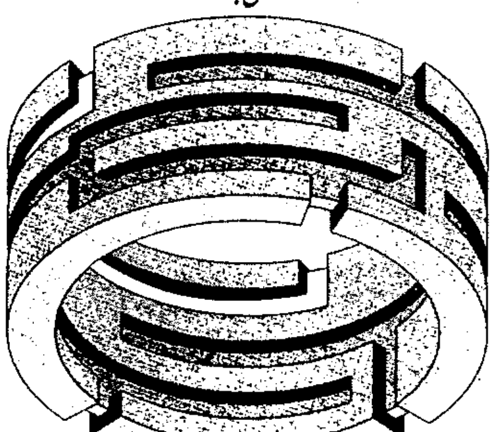
۷) ثابت کنید اگر دو زوج خط $ax^2+2hxy+by^2=0$ و $a'x^2+2h'xy+b'y^2=0$ در یک خط مشترک باشند، آنگاه



پاسخ سرگرمی برای اندیشه‌ورزی



نمای جلو



نمای پشت

$$4(ah'-a'h)(hb'-h'b)=(ab'-a'b)^2$$

۸) اگر دو زوج خط $x^2-2bxy-y^2=0$ و $x^2-2axy-y^2=0$، هر یک منصف زاویه دیگری باشد، نشان دهید $ab+1=0$

۹) نشان دهید حاصلضرب فواصل نقطه (α,β) از زوج خط $ax^2+2hxy+by^2=0$ خواهد شد.

$$(a\alpha^2+2h\alpha\beta+b\beta^2)\Big/\sqrt{(a-b)^2+4h^2}$$

۱۰) PM و PN عمودهایی هستند که بر زوج خط $ax^2+2hxy+by^2=0$ رسم شده است، اگر طول MN برابر $2k$ باشد، نشان دهید مکان p خواهد شد.

$$(x^2+y^2)(h^2-ab)=k^2\left[(4h^2+(a-b)^2\right]$$

منابع

۱ـ هندسه تحلیلی — حسین غیور

۲ـ ریاضی جدید — نظام قدیم سال چهارم

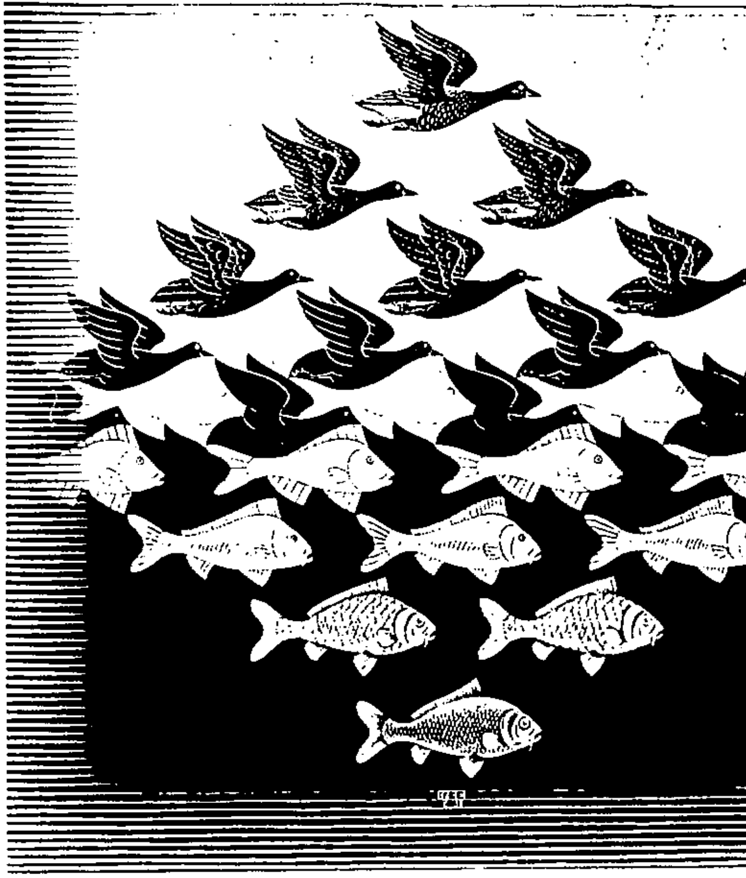
۳ـ هندسه مخروطی — غلامعلی گهرفر

۴ـ جبرپایه — محمدهاشم رستمی

۵ ـ جبر خطی — طرخورانی

۶ ـ مجلات ریاضی رشد، برهان ـ یکان

تجزیه یک عدد به عوامل اوّل



• مقاله از یک دانش‌آموز دبیرستانی

(برای دانش‌آموزان سال اول نظام جدید)

مجموعه اعداد اول: مجموعه اعداد اول زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی است که هر کدام از عضوهای آن دو و فقط دو مقسوم‌علیه مثبت دارند که یکی از آن مقسوم‌علیه‌ها ۱ و دیگری خود آن عدد می‌باشد. با این تعریف معلوم می‌شود که عدد ۱ عدد اول نیست، چون فقط یک مقسوم‌علیه دارد.

مجموعه اعداد اولی که عدد طبیعی m بر آنها بخش‌پذیر باشد، عاملهای اول m نامیده می‌شوند. هر عدد طبیعی بزرگتر از ۱ را می‌توان به حاصل‌ضرب عاملهای اول تجزیه کرد. قبل از این‌که روش تجزیه یک عدد به عاملهای اول بیان شود، شرایط بخش‌پذیری اعداد طبیعی به چند عدد نخست مجموعه اعداد اول، یادآوری می‌شود :

الف) بخش‌پذیری بر ۲: شرط لازم برای آن که یک عدد بر ۲ بخش‌پذیر باشد، آن است که رقم یکان آن زوج باشد ، مانند ۳۰، ۱۹۹۶، ۲۰۴

ب) بخش‌پذیری بر ۳: شرط لازم برای آن‌که عددی بر ۳ بخش‌پذیر باشد، آن است که مجموع ارقام آن عدد بر ۳ بخش‌پذیر باشد : مانند ۱۹۲. (زیرا ۱۲=۲+۹+۱ و ۱۲ بر ۳ بخش‌پذیر است).

ج) بخش‌پذیری بر ۵: شرط لازم برای آن‌که یک عدد بر ۵ بخش‌پذیر باشد، آن است که رقم یکان آن صفر یا ۵ باشد، مانند ۲۰۵، ۴۱۰.

د) بخش‌پذیری بر ۷: عددی بر ۷ بخش‌پذیر است که اگر رقم اول سمت چپ آن را در ۳ ضرب کرده و با رقم دوم سمت چپ جمع کنیم و حاصل را بر ۷ تقسیم کنیم ؛ سپس باقیماندهٔ تقسیم را دوباره در ۳ ضرب کرده و با رقم سوم از سمت چپ جمع و حاصل را بر ۷ تقسیم کنیم ؛ و همین عملها را تا آخرین رقم ادامه دهیم ؛ در پایان، باقیماندهٔ تقسیم بر ۷ برابر با صفر باشد.

مثال ۱: آیا عدد ۳۷۵۲۰ بر ۷ بخش‌پذیر است؟

جواب:

۳×۳=۹	۲×۳=۶	۴×۳=۱۲	۰×۳=۰
۹+۷=۱۶	۶+۵=۱۱	۱۲+۲=۱۴	۰+۰=۰
۱۶÷۷=۲+ ۲/۷	۱۱÷۷=۱+ ۴/۷	۱۴÷۷=۲+ ۰/۷	۰÷۷=۰+ ۰/۷

باقیماندهٔ مورد نظر

چون در پایان این عمل، باقیماندهٔ تقسیم صفر می‌باشد،پس عدد ۳۷۵۲۰ بر ۷ بخش‌پذیر است.

هـ) بخش‌پذیری بر ۱۱: عددی بر ۱۱ بخش‌پذیر است که اختلاف مجموع ارقام مرتبهٔ زوج (یکان، صدگان، ده هزارگان، ...) با مجموع ارقام مرتبهٔ فرد (دهگان، هزارگان، صدهزارگان، ...) بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد.

مثال ۲: از دو عدد $a = ۴۵۰۲۹۱۶$ و $b = ۴۲۳۷۶۴$ کدام‌یک بر ۱۱ بخش‌پذیر است؟

جواب:

مجموع ارقام مرتبهٔ زوج عدد a $= ۶+۹+۰+۴ = ۱۹$

مجموع ارقام مرتبهٔ فرد عدد a $= ۱+۲+۵ = ۸$

چون اختلاف ۱۹ و ۸ یعنی ۱۱ بر ۱۱ بخش‌پذیر است، پس a بر ۱۱ بخش‌پذیر است.

مجموع ارقام مرتبهٔ زوج b $= ۴+۷+۲ = ۱۳$

مجموع ارقام مرتبهٔ فرد b $= ۶+۳+۴ = ۱۳$

چون اختلاف ۱۳ و ۱۳ یعنی صفر بر ۱۱ بخش‌پذیر است، پس b نیز بر ۱۱ بخش‌پذیر است. (یادآوری می‌شود که صفر بر تمامی اعداد طبیعی بخش‌پذیر است).

عددی مانند m اول است، اگر و تنها اگر m بر هیچ‌کدام از اعداد اول نابیشتر از $\sqrt{m}$ بخش‌پذیر نباشد. به‌عنوان مثال برای بررسی اول بودن عدد ۱۲۷، کافی است تحقیق کنیم که آیا ۱۲۷ بر یکی از اعداد اول نابیشتر از $\sqrt{۱۲۷}$ (۲، ۳، ۵، ۷ و ۱۱) بخش‌پذیر است یا خیر؟ عدد ۱۲۷ بر ۲ بخش‌پذیر نیست، چون رقم یکان آن فرد است ؛ بر ۳ بخش‌پذیر نیست چون $۱+۲+۷$ یعنی ۱۰ بر ۳ بخش‌پذیر نیست ؛ بر ۵ بخش‌پذیر نیست چون رقم یکان آن یکی از ارقام «۰» یا «۵» نیست ؛ بر ۷ بخش‌پذیر نیست چون :

$$۱ \times ۳ + ۲ = ۵ \qquad ۵ \times ۳ + ۷ = ۲۲$$

$$۵ \div ۷ = ۰ + \frac{۵}{۷} \qquad ۲۲ \div ۷ = ۳ + \frac{۱}{۷}$$

باقیمانده

عدد فوق بر ۱۱ نیز بخش‌پذیر نیست ؛ زیرا $۶ = ۷ + ۲ - ۱$ و ۶ بر ۱۱ بخش‌پذیر نیست ؛ پس عدد ۱۲۷ یک عدد اول می‌باشد.

برای تجزیهٔ یک عدد به حاصل‌ضرب عاملهای اول، آن را به کوچکترین عدد اولی که بر آن بخش‌پذیر باشد تقسیم می‌کنیم و خارج قسمت را نیز بر کوچکترین عدد اولی که بر آن بخش‌پذیر باشد تقسیم می‌کنیم و این‌کار را تا جایی ادامه می‌دهیم که خارج‌قسمت یک باشد. در این‌صورت حاصل‌ضرب مقسوم‌علیه‌ها، حاصل‌ضرب عاملهای اول عدد مورد نظر خواهد بود.

مثال ۳: اعداد ۳۶ و ۴۵ را به حاصل‌ضرب عاملهای اول تجزیه کنید.

جواب:

$۴۵ = ۳^۲ \times ۵^۱$

۴۵	۳
۱۵	۳
۵	۵
۱	

$۳۶ = ۲^۲ \times ۳^۲$

۳۶	۲
۱۸	۲
۹	۳
۳	۳
۱	

مثال ۴: اعداد ۱۴۱۶، ۱۳۷۵ و ۱۹۹۶ را به حاصل‌ضرب عاملهای اول تجزیه کنید.

جواب:

$۱۴۱۶ = ۲^۳ \times ۳^۱ \times ۵۹^۱$

۱۴۱۶	۲
۷۰۸	۲
۳۵۴	۲
۱۷۷	۳
۵۹	۵۹
۱	

$۱۳۷۵ = ۵^۳ \times ۱۱^۱$

۱۳۷۵	۵
۲۷۵	۵
۵۵	۵
۱۱	۱۱
۱	

$۱۹۹۶ = ۲^۲ \times ۴۹۹$

۱۹۹۶	۲
۹۹۸	۲
۴۹۹	۴۹۹
۱	

کوچکترین مضرب مشترک دو عدد

کوچکترین مضرب مشترک دو عدد a و b عبارت است از کوچکترین عددی که هم بر a و هم بر b بخش‌پذیر باشد. برای پیدا کردن کوچکترین مضرب مشترک دو عدد a و b (ک.م.م) که آن را به صورت $[a,b]$ نمایش می‌دهیم ؛ ابتدا دو عدد a و b را به حاصل‌ضرب عاملهای اول تجزیه می‌کنیم. سپس کوچکترین مضرب مشترک دو عدد عبارت است از حاصل‌ضرب عاملهای مشترک و غیرمشترک با توان بیشتر که در تجزیه دو عدد موجود است. به‌عنوان مثال ک.م.م دو عدد ۳۶ و ۴۵ با توجه به مثال ۳ برابر با $۵^۱ \times ۳^۲ \times ۲^۲$ یعنی ۱۸۰ خواهد بود.

مثال ۵: $[۱۴۱۶ , ۱۹۹۶]$ را بیابید.

جواب: با توجه به مثال ۴ که دو عدد مورد نظر به عاملهای اول تجزیه شده است :

$$[۱۴۱۶ , ۱۹۹۶] = ۲^۳ \times ۳^۱ \times ۵۹^۱ \times ۴۹۹^۱$$

کوچکترین مضرب مشترک سه عدد و یا بیشتر نیز به همین صورت تعریف می‌شود.

مثال ۶: کوچکترین مضرب مشترک سه عدد ۱۳۷۵، ۱۴۱۶ و ۱۹۹۶ را بیابید.

جواب:

$$[۱۳۷۵ , ۱۴۱۶ , ۱۹۹۶] = ۲^۳ \times ۳^۱ \times ۵^۳ \times ۱۱ \times ۵۹ \times ۴۹۹$$

بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد

بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد a و b عبارت است از بزرگترین عددی که هم a و هم b بر آن بخش‌پذیر می‌باشند. برای پیدا کردن بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد a و b (ب.م.م) که آن را به‌صورت (a و b) نمایش می‌دهیم ؛ ابتدا دو عدد a و b را به حاصل‌ضرب عاملهای اول تجزیه می‌کنیم، سپس بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد عبارت است از حاصل‌ضرب عاملهای مشترک دو عدد a و b با توان بیشتر که در تجزیه دو عدد موجود است. به‌عنوان مثال ب.م.م دو عدد ۴۵ و ۳۶ با توجه به مثال ۳ برابر با $۳^۲$ یعنی ۹ می‌باشد.

مثال ۷: (۱۹۹۶ و ۱۴۱۶) را بیابید.

جواب: با توجه به مثال ۴ که دو عدد مورد نظر به عاملهای اول تجزیه شده‌اند خواهیم داشت :

$$(۱۴۱۶,۱۹۹۶) = ۲^۲ = ۴$$

دو عدد متباین (نسبت به هم اول)

دو عدد a و b را نسبت به هم اول یا متباین گویند هرگاه ب.م.م آن دو عدد برابر با ۱ باشد. برای مثال دو عدد ۸ و ۹ نسبت به هم اول می‌باشند، زیرا ۱= (۹ و ۸).

بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک n عدد $(n \geq ۳)$ نیز به همین صورت تعریف می‌شود. باید توجه داشت که در این حالت منظور از عاملهای مشترک، اعداد اولی هستند که در تجزیه تمامی n عدد مشترک می‌باشد.

مثال ۸: بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک سه عدد ۱۳۷۵، ۱۴۱۶ و ۱۹۹۶ را بیابید.

جواب: ۱= (۱۹۹۶ و ۱۴۱۶ و ۱۳۷۵)

با بررسی مثالهای ۵ و ۷ می‌توان حدس زد که، حاصل‌ضرب ک.م.م دو عدد a و b در ب.م.م آن دوعدد برابربا حاصل‌ضرب a و b است. این حدس با بررسی ک.م.م و ب.م.م دو عدد ۳۶ و ۴۵ قوی‌تر می‌شود. حال این مطلب را در مورد هر دو عدد دلخواه مثبت a و b، اثبات می‌کنیم :

قضیه: برای هر دو عدد طبیعی a و b تساوی $(a,b).[a,b]=ab$ برقرار می‌باشد.

برهان: فرض می‌کنیم $(a,b)=d$ بنابراین $a' \neq ۰$ و $b' \neq ۰$ یافت می‌شوند به‌گونه‌ای که $a=d.a'$ و $b=d.b'$ که در آن a' و b' هیچ عامل مشترکی ندارند. به عبارت دیگر a' و b' نسبت به هم اول می‌باشند. درنتیجه :

$$a.b=(d.a').(d.b')=d.(a'.b'.d)$$

در طرف راست این برابری، عبارت داخل پرانتز برابر است با حاصل‌ضرب عاملهای مشترک در عاملهای غیرمشترک ؛ که طبق تعریف این حاصل‌ضرب همان ک.م.م. دو عدد a و b می‌باشد :

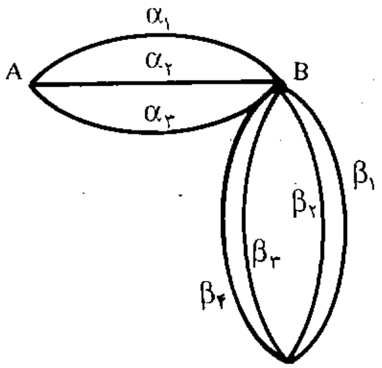
$a.b = d.[a,b] = (a,b).[a,b]$

با بررسی مثالهای ۶ و ۸ معلوم می‌شود که این موضوع در مورد ک.م.م و ب.م.م سه عدد صدق نمی‌کند. یعنی:

$a.b.c \neq (a,b,c).[a,b,c]$

اصل ضرب

اگر از شهر A به شهر B سه مسیر α_1، α_2 و α_3 و از شهر B به شهر C چهار مسیر β_1، β_2، β_3 و β_4 موجود باشد، واضح است که برای رفتن از شهر A به شهر B می‌توان 3×4 یعنی ۱۲ مسیر را انتخاب کرد که عبارتند از:



$\alpha_1\beta_1$	$\alpha_2\beta_1$	$\alpha_3\beta_1$
$\alpha_1\beta_2$	$\alpha_2\beta_2$	$\alpha_3\beta_2$
$\alpha_1\beta_3$	$\alpha_2\beta_3$	$\alpha_3\beta_3$
$\alpha_1\beta_4$	$\alpha_2\beta_4$	$\alpha_3\beta_4$

در حالت کلی اگر از شهر A_1 به شهر A_2، m_1 مسیر و از A_2 به A_3، m_2 مسیر و... و از A_n به A_{n+1}، m_n مسیر مستقل از هم موجود باشد، برای رفتن از A_1 به A_{n+1} به تعداد $m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$ مسیر موجود خواهد بود.

تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت یک عدد

مثال ۹: تمامی مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد ۳۶ را بنویسید.

جواب: می‌دانیم $3^2 \times 2^2 = 36$. برای نوشتن یک مقسوم‌علیه از عدد ۳۶ می‌توانیم از عاملهای ۲ به تعداد ۰ یا ۱ یا ۲ عدد، و از عاملهای ۳ نیز به تعداد ۰ یا ۱ یا ۲ عدد انتخاب کنیم که طبق اصل ضرب این عدد 3×3 یعنی ۹ مقسوم‌علیه خواهد داشت که عبارتند از:

$d_1 = 2^0 \times 3^0 \qquad d_4 = 2^1 \times 3^0 \qquad d_7 = 2^2 \times 3^0$

$d_2 = 2^0 \times 3^1 \qquad d_5 = 2^1 \times 3^1 \qquad d_8 = 2^2 \times 3^1$

$d_3 = 2^0 \times 3^2 \qquad d_6 = 2^1 \times 3^2 \qquad d_9 = 2^2 \times 3^2$

مثال ۱۰: تمامی مقسوم‌علیه‌های عدد ۴۵ را بنویسید.

جواب: می‌دانیم $5^1 \times 3^2 = 45$. پس تمامی مقسوم‌علیه‌های مثبت ۴۵ عبارتند از:

$d_1 = 3^0 \times 5^0 \qquad d_3 = 3^1 \times 5^0 \qquad d_5 = 3^2 \times 5^0$

$d_2 = 3^0 \times 5^1 \qquad d_4 = 3^1 \times 5^1 \qquad d_6 = 3^2 \times 5^1$

درحالت کلی اگر عدد تجزیه به عوامل اول a به‌صورت $a = P_1^{\alpha_1}.P_2^{\alpha_2}.\cdots.P_n^{\alpha_n}$ باشد، که در آن P_1، P_2، ....، P_n اعداد اول متمایز می‌باشند، برای نوشتن یک مقسوم‌علیه از a می‌توانیم از عاملهای P_1 به تعداد ۰، ۱،....، α_1 و از عاملهای P_2 به تعداد ۰، ۱،....، α_2 و... و بالاخره از عاملهای P_n به تعداد ۰، ۱،....، α_n انتخاب کنیم که طبق اصل ضرب این عدد به تعداد $(\alpha_1+1).(\alpha_2+1).\cdots.(\alpha_n+1)$ مقسوم‌علیه خواهد داشت.

مثال ۱۱: تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد $n = 2^7 \times 3^2 \times 4^3$ را بیابید.

جواب: باید دقت داشت که عدد n هنوز به صورت حاصل‌ضرب عاملهای اول آن تجزیه نشده است، چون ۴ عامل اول نیست. پس آن را به‌صورت حاصل‌ضرب عاملهای اول تجزیه می کنیم:

$$n = 2^7 \times 3^2 \times (2^2)^3 = 2^7 \times 3^2 \times 2^6 = 2^{13} \times 3^2$$

و طبق اصل ضرب، تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد n برابر با $(2+1)(13+1)$ یعنی ۴۲ می‌باشد.

مثال ۱۲: جذر عدد 2^{16} را بیابید.

جواب: واضح است که دنبال عددی هستیم که در خودش ضرب شود و عدد 2^{16} را تولید کند و این عددی نیست، جز 2^8 زیرا $2^{16} = 2^8 \times 2^8$.

پس جذر عدد $n^m (n \ge 0)$ برابر $n^{\frac{m}{2}}$ خواهد بود، زیرا $n^{\frac{m}{2}} . n^{\frac{m}{2}} = n^m$.

درحالت کلی اگر عدد a را به‌صورت $a = P_1^{\alpha_1}.P_2^{\alpha_2}.\dots.P_n^{\alpha_n}$ تجزیه کرده باشیم، که در آن P_1، P_2، ....، P_n اعداد اول متمایزی هستند، آنگاه جذر عدد a برابر با $P_1^{\frac{\alpha_1}{2}}.P_2^{\frac{\alpha_2}{2}}.\dots.P_n^{\frac{\alpha_n}{2}}$ است. پس عدد a وقتی مجذور کامل است که α_1، α_2، ....، α_n همگی زوج باشند.

مثال ۱۳: از دو عدد a و b که $a = 2^9 \times 3^{16}$ و $b = 2^6 \times 5^8$ می‌باشند، کدام‌یک مجذور کامل است؟

جواب: عدد a مجذور کامل نیست چون توان عوامل اول آن همگی زوج نیستند. ولی عدد b مجذور کامل است، چون هم توان ۲ و هم توان ۵ که هر دو اولند، زوج هستند.

مثال ۱۴: اگر $a = 2^3 \times 3^7 \times 5^6$ باشد، کوچکترین عدد طبیعی را بیابید که وقتی در a ضرب می‌شود حاصل مجذور کامل گردد.

جواب: عدد مطلوب را b می‌نامیم. برای اینکه a.b مربع کامل باشد، باید توان عاملهای اول آن همگی زوج باشند، پس؛ $b = 2 \times 3$ زیرا در این‌صورت خواهیم داشت:

$$a.b = (2^1 \times 3^1)(2^3 \times 3^7 \times 5^6) = 2^4 \times 3^8 \times 5^6$$

که مجذور کامل است.

مثال ۱۵: اگر $a = 2^3 \times 3^5 \times 6^7$ باشد، کوچکترین عدد طبیعی را بیابید که وقتی در a ضرب می‌شود، حاصل مجذور کامل گردد.

جواب: باید دقت کرد که عدد a به حاصل‌ضرب عاملهای اولش تجزیه نشده است. بنابراین ابتدا آن را به‌صورت حاصل‌ضرب عاملهای اول تجزیه می‌کنیم:

$$a = 2^3 \times 3^5 \times (2 \times 3)^7 = 2^{10} \times 3^{12}$$

که حاصل مجذور کامل است، پس عدد مطلوب $2^0 \times 3^0$ یعنی عدد ۱ می‌باشد.

مثال ۱۶: چند عدد دو رقمی می‌توان پیدا کرد که وقتی در عدد $a = 3^6 \times 5^5 \times 45^{10}$ ضرب می‌شوند حاصل مکعب کامل گردند؟

جواب: باید توجه داشت که یک عدد وقتی مکعب کامل است که توان هر کدام از عاملهای اول آن بعد از تجزیه، مضرب ۳ باشند.

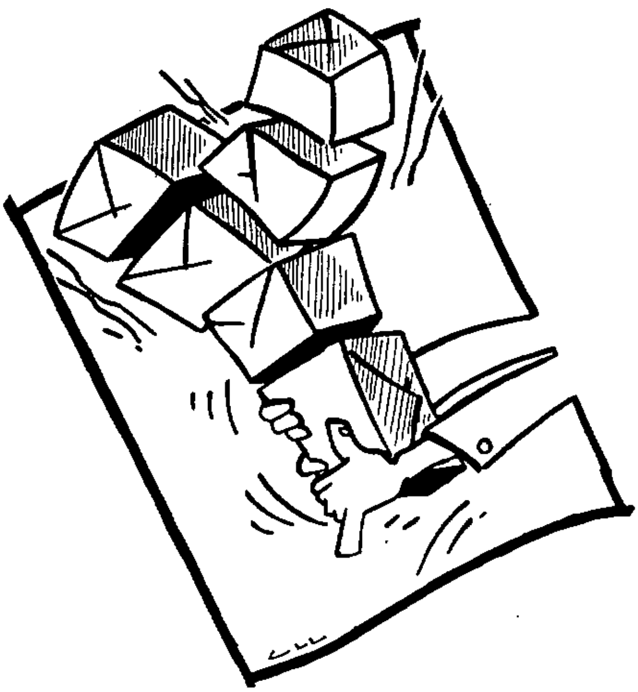
ابتدا عدد مورد نظر را به حاصل‌ضرب عاملهای اول تجزیه می‌کنیم:

ابتدا عدد مورد نظر را به حاصل ضرب عاملهای اول تجزیه می‌کنیم:

$$a = 3^6 \times 5^5 \times (3^2 \times 5)^{10} = 3^{26} \times 5^{15}$$

برای اینکه a . b که در آن b عدد مطلوب است، مکعب کامل باشد، باید توانهای عاملهای اول عدد حاصل مضرب ۳ باشند:

$$b_1 = 3 \Rightarrow a.b_1 = 3^{27} \times 5^{15}$$



کامپیوتر و شغل آینده

● محسن صدیقی مشکنانی

دانشکده برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی اصفهان

برای رفع مشکلات گذشته و یا برای به‌دست آوردن تواناییها و تسهیلات جدید، انسان هر روز دستگاهها و ابزار تازه‌ای می‌سازد. یا اینکه آنها را بهتر می‌کند. مثل ساختن هواپیما، ابزار صنعتی و دستگاههای جدید پزشکی. همراه هر ابزار جدید، شغلهایی به‌طور طبیعی شکل می‌گیرد :

۱ـ کارشناسان مربوط به آن دستگاه که کارشان، طراحی، تولید، تغییر و تعمیر آن ابزار است.

۲ـ کسانی که آن ابزار در محیط کاری به کار می‌گیرند.

۳ـ کسانی که موضوعِ کارشان آن ابزار است.

به‌عنوان مثال در مورد خودرو افراد و شغلهای زیر مطرح است :

۱ـ طراحان، مهندسان، کارگران و تمام دست‌اندرکاران تولید، تغییر و تعمیر بخشهای مختلف خودرو.

۲ـ رانندگان، کسانی که شغل آنها رانندگی است. گرچه بسیاری از افراد رانندگی خودرو خود را به‌عهده دارند.

۳ـ فروشندگان قطعات یدکی، بنگاههای معاملات خودرو و مشاغل مرتبط دیگر که موضوع کارشان خودرو است.

گاهی ممکن است یک دستگاه یا ابزار را با تغییراتی برای کاربردهای خاصّی آماده کنند. به‌عنوان مثال، آمبولانس برای حمل بیمار، تراکتور برای کارهای کشاورزی و ماشین آتش‌نشانی برای مقابله با آتش‌سوزیها. مسلماً یک رانندهٔ آمبولانس یا تراکتور با رانندهٔ ماشینهای معمولی متفاوت است. رانندهٔ آمبولانس باید چگونگی مراقبتهای اولیهٔ پزشکی را نیز بداند. رانندهٔ تراکتور چگونگی کار در مزارع کشاورزی را نیز باید بداند. با این مثالها احتمالاً متوجه شده‌اید که در مورد هر دستگاه، علاوه بر مشاغلی که در بالا ذکر شد، مشاغل متعددی با توجه به نوعِ به‌کارگیری آن دستگاه مطرح می‌شود. کسانی که این‌گونه مشاغل را دنبال می‌کنند، هم باید کار با ابزار را بدانند و هم محیط کارشان (مثلاً کشاورزی در مزرعه یا کمکهای اولیه به بیماران) را بشناسند. به‌علاوه این ابزار هم باید توسط کارشناسان (گروه اول) برای این کاربرد جدید طراحی و ساخته شده باشند.

کامپیوتر به‌عنوان یک ابزار

با مقدمه‌ای که در بالا گفته شد، می‌خواهیم به سراغ کامپیوتر و مشاغل مرتبط با آن برویم. در مورد کامپیوتر به‌عنوان یک ابزار هم مشاغل متعددی مطرح است :

۱ـ طراحان، سازندگان و تولیدکنندگان بخشهای الکترونیکی

کامپیوتر (سخت‌افزار) و همچنین طراحان و تولیدکنندگان برنامه‌هایی که روی آن سخت‌افزار باید اجرا شود (نرم‌افزار). همچنین کسانی که مسؤول نصب و راه‌اندازی یک سیستم کامپیوتری در محیط اجرایی خاص هستند و یا مسؤول رفع اشکالات احتمالی و تغییرات جدید هستند. (تقسیم‌بندی مشاغل تخصصی رشته کامپیوتر خود فرصت دیگری را طلب می‌کند).

۲ـ راه برای کامپیوتر، کسانی که معمولاً برنامه‌های ثابتی را روی سخت‌افزار ثابت به تناوب اجرا می‌کنند. مثلاً هر ماهه برنامهٔ حقوق و دستمزد را برای کارکنان یک اداره اجرا می‌کنند.

۳ـ ارائه‌دهندگان کامپیوتر، قطعات یدکی و ابزارهای متصل‌شونده به کامپیوتر و برنامه‌های کامپیوتری و یا واردکنندگان داده‌ها و کلاً کسانی که موضوع کارشان کامپیوتر است.

۴ـ کسانی که با ابزارِ کامپیوتر، کارِ خود را انجام می‌دهند. مثلاً ماشین‌نویسان که با استفاده از کامپیوتر و برنامه‌های مربوط ماشین‌نویسی می‌کنند. یا کسانی که به کمک کامپیوتر قطعات صنعتی را طراحی می‌کنند.

کسانی که در گروه چهارم هستند، تعدادشان به مراتب از تعداد افراد گروههای دیگر بیشتر است. بد نیست در ذهن خود در اجتماع گردش کنید و مشاغلی که با کامپیوتر درهم آمیخته است را فهرست کنید. در بانکها، در ادارات، در پزشکی، در صنعت، در کشاورزی و در تمام زمینه‌های دیگر. هر روز هم کاربردهای جدیدتری مطرح می‌شود.

شاید مهمترین ویژگی کامپیوتر در مقایسه با ابزارهای دیگر همین برنامه‌پذیری و قدرت تطابق آن با کاربردهای مختلف باشد. این درحالی است که به‌کارگیری دستگاهها و ابزار دیگر در چند زمینهٔ متفاوت مشکل است. مثلاً به‌کارگیری یک ماشین آتش‌نشانی برای شخم زدن تقریباً غیرممکن است. ولی با هر برنامهٔ جدید، همان کامپیوتر (همان سخت‌افزار) قابلیتی دیگر را در اختیار می‌گذارد. روی یک کامپیوتر خاص می‌توان یک برنامهٔ بازی گذاشت و با آن بازی کرد. می‌توان یک برنامهٔ طراحی صنعتی گذاشت و با آن به طراحی صنعتی پرداخت. می‌توان یک برنامهٔ محاسبات راه و ساختمان داشت و با آن محاسبات یک پل را انجام داد. جالب این است که شغل تعداد بسیار بسیار زیادی از افراد در ایران و در جهان این است که بدانند چگونه با یک برنامهٔ کامپیوتری (مثلاً نقشه‌کشی) به‌خوبی کار کنند. بد نیست نگاهی به آگهیهای استخدام در روزنامه‌های مختلف داشته باشید. خیلی سریع متوجه می‌شوید که بسیاری از مؤسسات، استخدام افراد جدید را مشروط به آشنایی ایشان با بعضی برنامه‌های کامپیوتری کرده‌اند. تعداد این موارد به شدّت رو به تزاید است.

نقش کامپیوتر در شغل آینده

از صحبتهای بالا می‌خواهم نتیجه بگیرم که حتّی اگر کار تخصصی شما کامپیوتر نباشد، در هر رشته‌ای که بخواهید در آینده کار کنید، به احتمال زیاد با کامپیوتر سر و کار خواهید داشت و دانستن چگونگی کار با کامپیوتر به نوعی مثل سواد داشتن لازم است. باید سواد کامپیوتری را با کار عملی با کامپیوتر یاد گرفت. بعلاوه آشنایی با بعضی برنامه‌های کامپیوتری می‌تواند یک شغل بالقوه برای آینده باشد.

مشاهده می‌شود بعضی جوانان و نوجوانان بخش عمدهٔ وقت خود با کامپیوتر را به بازی کردن می‌گذرانند. من مخالف بازیهای کامپیوتری نیستم. بازیهایی که اشکالات فرهنگی و اجتماعی نداشته باشند می‌توانند ازجهات متعددی آموزش‌دهنده و مفید باشند. ولی به‌جای سرگرم شدن با آنها می‌توان با برنامه‌هایی کار کرد که تسلّط به آنها می‌تواند در آینده حتی به‌عنوان یک شغل مطرح باشد. مثلاً برای کارهای گرافیکی و انتشاراتی.

از سوی دیگر بعضی افراد سرگرم کلاسهای آموزشی کامپیوتری متعدد هستند. با اتمام یک دوره آموزشی، آموزش یک زبان برنامه‌سازی دیگر را شروع می‌کنند. این حرف به این معنی نیست که من با آموزشهای کامپیوتری مخالفم. نه‌تنها مخالف نیستم بلکه بعضی آموزشها را ضروری می‌دانم. یاد گرفتن کار با زبانهای برنامه‌نویسی متعدد می‌تواند در دراز مدت،

به‌خصوص برای کسانی که بخواهند به نوعی در گروه کارشناسان زمینه کامپیوتر باشند، مفید باشد. زبانهای برنامه‌سازی ابزارهایی برای تهیهٔ برنامه‌هایی است که دیگران بتوانند از آنها برای رفع دشواریهای محیط کاری خود استفاده کنند. امّا تا موقعی که ابزاری برای کاربردش به‌کار نرود، چه خاصیّتی دارد؟ که گفته‌اند «برای نهادن چه سنگ و چه زر». مشترکات زبانهای برنامه‌سازی به مراتب بیشتر از تفاوتهای آنهاست. غالباً یک برنامه‌نویس خوب می‌تواند بسیاری از ناتوانیهای یک زبان را با کارِ خود جبران کند. منظورم این است که به‌جای رفتن به سراغ زبانهای برنامه‌سازی متعدد، بهتر است به یکی از آنها مسلّط شد و در عوض به کاربردها بیشتر فکر کرد و به پیاده‌سازی کاربردها همت نمود. امّا در بسیاری از موارد، دنبال کردن کاربردهای جدی کامپیوتری نیاز به آگاهی دیگری علاوه بر دانستن زبان برنامه‌نویسی دارد. می‌خواهم بگویم موقعیتهای شغلی حاصل از تسلّط به برنامه‌های کاربردی به مراتب بیشتر و قابل دسترستر از موقعیتهای شغلی حاصل از دانستن زبانهای برنامه‌سازی است.

چند پرسش

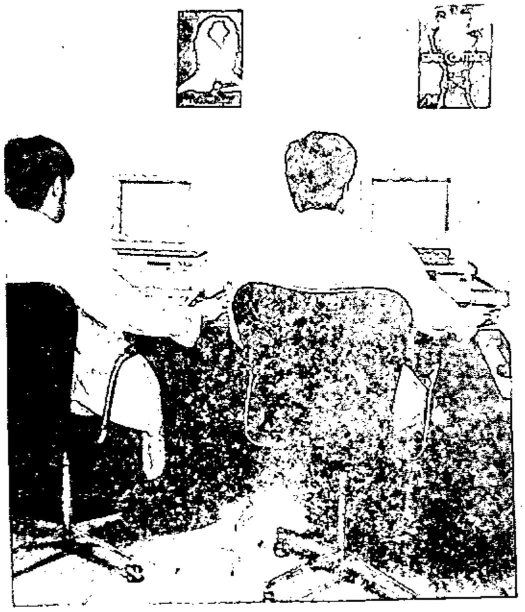
در اینجا چند پرسش اصلی می‌تواند مطرح باشد که: چه برنامه‌های کامپیوتری در زمینه‌های تخصصی وجود دارد؟ چگونه می‌توان از وجود آنها مطلع شد؟ چگونه می‌توان آنها را به‌دست آورد؟ چگونه می‌توان با آنها کار کرد؟

جالب اینجاست که در مورد بازیها نیز چنین پرسشهایی مطرح است. اما بسیاری از جوانان و نوجوانان برای این پرسشها پاسخهای مناسبی پیدا کرده‌اند. به‌دلیل اینکه عملاً برنامه‌های بازی جدید و متعدد را در اختیار دارند و به آن مشغولند. می‌خواهم نتیجه بگیرم که اگر دانش‌آموزان واقعاً دنبال جواب پرسشهای این‌گونه در مورد برنامه‌های تخصصی باشند، خود می‌توانند به این پاسخها برسند.

البته مسؤولان و مدرسان مدارس راهنمایی، دبیرستانها (و در کل نظام آموزشی کشور) می‌توانند به شدت در این زمینه کمک‌کننده باشند. مدرسان دروس کامپیوتر، حرفه و فن و پرورشی و همچنین مدرسان دروس تخصصی می‌توانند در تهیه مستندها و برنامه‌ها، معرفی و آموزش آنها اقدام کنند. این‌کار نه‌تنها برای دانش‌آموزان، بلکه برای خود مدرسان هم بسیار سودمند است.

نتیجه‌گیری

- آشنایی با کامپیوتر و توان کار با برنامه‌های کامپیوتری مثل سواد خواندن و نوشتن لازم است.
- سرگرم شدن به آموزشهای متعدد و مشابه، مثل سرگرم شدن به بازیها، می‌تواند عاملی برای اتلاف تواناییها و به‌خصوص از دست دادن زمان باشد.
- تسلّط در کار با هر برنامهٔ کاربردیِ خوب کامپیوتری، می‌تواند عاملی تعیین‌کننده در اشتغال به یک شغل در آن زمینه باشد.



معرفی کتاب

● **پرسشهای چهارگزینه‌ای و پاسخهای تشریحی**

سفارش تألیف: معاونت آموزش متوسطه، دفتر آموزشهای نظری و پیش‌دانشگاهی وزارت آموزش و پرورش

توزیع: انتشارات مدرسه

نظر به اینکه دانش‌آموزان نظام جدید آموزش متوسطه در برنامه آموزشی و درسی نظام جدید نیاز به آشنایی به شیوه اجرایی آزمون سراسری دانشگاهها دارند، ضرورت برنامه‌ریزی در تهیه کتابهای کمک آموزشی براساس کتابهای نظام جدید هر چه بیشتر احساس می‌شود. به این منظور دفتر آموزشهای نظری و پیش‌دانشگاهی با همکاری گروهی از دبیران و مدرسین مجرب دبیرستانها اقدام به تهیه سؤالات چهارگزینه‌ای با پاسخ تشریحی در رشته‌های ریاضی ـ تجربی ـ انسانی را نموده که می‌تواند به عنوان یک منبع کمک‌آموزشی سودمند جهت ارتقاء سطح علمی دانش‌آموزان مورد استفاده قرار گیرد. بدون شک بررسی دقیق و کامل کتاب درسی محور اصلی مطالعات دانش‌آموزان عزیز را تشکیل می‌دهد و این مجموعه حاضر در جهت درک بهتر و عمیق‌تر مطالب درسی و آمادگی هرچه بیشتر دانش‌آموزان نظام جدید برای شرکت در آزمون ورودی دانشگاهها و مراکز آموزش عالی پیش‌بینی و تدوین گردیده است. در مراحل مختلف طرح و ارزیابی سؤالات سعی بر آن شده که محتوای کتاب درسی نظام جدید مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته و متناسب با بخشهای کتاب سؤالات و پرسشهای مناسب طراحی و پاسخ تشریحی آن داده شود.

کتابهای ریاضی که در این مجموعه کتابها، تاکنون چاپ و توزیع شده به قرار زیر است:

۱ـ حساب دیفرانسیل و انتگرال ۱ (مصطفی اخگرژند و عباس اعتزازیان)

۲ـ حساب دیفرانسیل و انتگرال ۲ (سیدحسین سیدموسوی و اکبر جوادی)

۳ـ ریاضیات گسسته (حمیدرضا امیری و سیدحسین سیدموسوی)

۴ـ جبر و احتمال (محمدصادق نوذری و رضا ممقانی)

۵ـ هندسهٔ تحلیلی و جبرخطی (علی‌اکبر علی‌پوروحیم‌امیری)

۶ـ ریاضی ۱ و ۲ (رمضان همتی و محمود جالینوسی)

۷ـ ریاضی ۳ و ۴ (علی‌اکبر علی‌پور و رحیم امیری)

۸ـ حسابان ۲ (عبدالرضا عالی‌پناه و علی‌اکبر همتی)

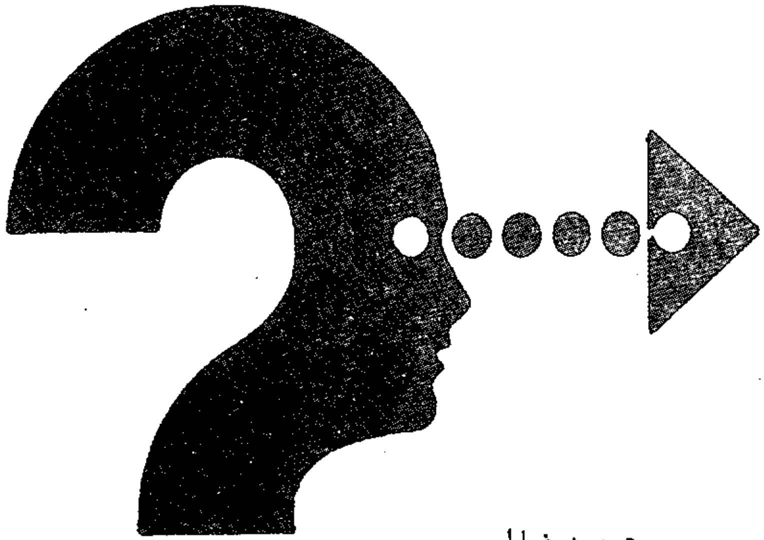
کتابهای ریاضی زیر در دست چاپ بوده و به زودی منتشر می‌شود:

۱ـ ریاضی پایه رشتهٔ علوم‌انسانی (سیدمحمدرضاهاشمی‌موسوی و میرشهرام صدر)

۲ـ حسابان ۱ (عبدالرضا عالی‌پناه و علی‌اکبر همتی)

۳ـ ریاضی ۵ (داریوش مشعوف، حسین خاکپاش، رحیم آصفی و زین‌العابدین دهقان)

۴ـ ریاضیات عمومی رشتهٔ تجربی ۱ و ۲، پیش‌دانشگاهی (داریوش مشعوف، رحیم آصفی، حسین خاکپاش و زین‌العابدین دهقان)



مسأله برای حل

• حمیدرضا امیری
• سید محمدرضا هاشمی موسوی
• میرشهرام صدر
• محمّدصادق عسگری

مسأله‌های ریاضیات ۲

(۱) به‌ازای چه مقادیری از m معادلهٔ $2m^2x+6m+4=(6m-4)x$ جواب حقیقی ندارد؟

(۲) درصورتی که x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2-x-m^2=0$ باشند، حاصل عبارت $p=\frac{x_1^2+x_2^2-x_1x_2}{x_1^3+x_2^3}$ را بیابید.

(۳) مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $(x^4+2)(7x+14)(x^2-1)^4\ge 0$ را بیابید.

(۴) اگر خط به معادلهٔ $px+qy=1$ برخط به معادلهٔ $py+x-q=0$ عمود باشد و از نقطهٔ A(۱ و ۲-) نیز بگذرد، مقادیر p و q را تعیین کنید (pو$q\neq 0$).

(۵) برای آن‌که نقطهٔ مفروض $p(6m-12\ ,\ 4m-12)$ در ناحیهٔ چهارم محورهای مختصات واقع شود، حدود m را بیابید.

(۶) خطی که از دو نقطهٔ A(-۷و-۶) و B(-۶و-۷) می‌گذرد، با محور xها چه زاویه‌ای می‌سازد؟

(۷) اگر A(m-۱و۲) و B(۲و -۱) و C(۳وm-n) رأسهای مثلث ABC و نقطهٔ G(-۲ و ۱) مرکز ثقل این مثلث باشند، مقدار m و n را تعیین کنید.

مسأله‌های ریاضیات ۴

(۱) انحراف معیار داده‌های زیر را به‌دست آورید:

۲۴و۲۲و۱۶و۱۴و۱۲و۸

(۲) حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$p=\frac{\tan 45^\circ+[\log(\tan 1^\circ)+\log(\tan 2^\circ)+\cdots+\log(\tan 89^\circ)]}{(\tan 1^\circ)(\tan 2^\circ)\cdots(\tan 89^\circ)}$$

(۳) اگر $\tan(x+y)=2$ و $\tan y=\frac{1}{3}$، آنگاه x چقدر است؟

(۴) اگر $\tan 6x=\tan 4x+\tan 2x$، آنگاه حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$p=\tan 2x\ \ \tan 4x\ \ \tan 6x$$

(۵) مجموع n جملهٔ یک تصاعد عددی برابر

$S_n = 3n^2 - 4n$ است، جملهٔ اوّل، قدر نسبت و جملهٔ یازدهم این تصاعد را تعیین کنید $(n \in \mathbb{N})$.

(۶) جملهٔ عمومی یک تصاعد هندسی $\frac{1}{3^{n-1}}$ است، حدّ مجموع این تصاعد را بیابید.

(۷) اگر $\vec{u}=\begin{bmatrix}-3\\-1\end{bmatrix}$ و $\vec{v}=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$، مختصات و طول بردار $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$ و حاصل $\vec{u}\times\vec{v}$ را بیابید.

(۸) تعداد قطرهای یک n ضلعی محدب را ازطریق ترکیب ۲شیء از n شیء بیابید.

مسأله‌های حسابان ۲

(۱) a و b را چنان به‌دست آورید که، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}+\sqrt{ax+b} & x\ge 0\\ a\cos x+b\sin x & x<0\end{cases}$ در نقطهٔ $x=0$ مشتق‌پذیر باشد.

(۲) درتابع با ضابطهٔ $y=x^3+ax^2+bx+c$، a و b و c را چنان تعیین کنید که نقطهٔ (۱ و ۱-) مرکز تقارن منحنی باشد، و خط مماس در نقطهٔ $x=0$ عمود بر خط به معادلهٔ $2y-x=1$ باشد.

(۳) الف ـ به‌ازای چه مقادیری از a و b منحنی تابع با ضابطهٔ $y=\frac{b\sin x+a}{\sin x+1}$ برمحور xها مماس است؟

ب ـ به ازای $a=1$ و $b=-1$ نمودار این تابع را درفاصله $[0,2\pi]$ رسم کنید.

(۴) تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^2}{x^2+x+1}$ مفروض است. نقاط بحرانی و نقاط ماکزیمم و مینیمم مطلق یا نسبی را (درصورت وجود) تعیین کنید.

(۵) الف ـ دامنه و بُرد تابع با ضابطه $y=\text{Arctg}\left[\text{Ln}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right]$ را به‌دست آورید.

ب ـ معادلهٔ خط مماس و خط قائم را بر نمودار این تابع درنقطهٔ $x=0$ بنویسید.

(۶) نمودار هریک از توابع با ضابطه‌های زیر را رسم کنید.

الف) $y=\text{Ln}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ ب) $y=\text{Arccos}\left(\frac{2-x}{2+x}\right)$

(۷) اگر $-1\le x\le 0$ ثابت کنید:

$$\text{Arccos}\,x=\pi-\text{Arcsin}\sqrt{1-x^2}$$

(۸) حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x+1}}$ ب) $\lim\limits_{x\to 1^+} x^{\frac{1}{x-1}}$

(۹) مشتق هریک از توابع با ضابطه‌های زیر را بیابید.

الف) $y=(\sin x)^{1+\tan x}$ ب) $y=\frac{xe^x}{1+xe^x}$

ج) $y=\int^{\sin x}\frac{dt}{1-t^2}$ د) $y=\int_1^{\text{tg}x}\frac{\cos 2t}{1+t^2}dt$

(۱۰) نقطهٔ $M\begin{cases}x=1+2\cos\theta\\ y=2+\sin\theta\end{cases}$ مفروض است.

اولاً: مکان هندسی نقطهٔ M را وقتی $0\le\theta\le 2\pi$ باشد، تعیین کنید.

ثانیاً: مکان هندسی نقطه M را رسم کنید. ثالثاً: معادله خط مماس و خط قائم را درنقطه $t=\frac{\pi}{6}$ بنویسید.

(۱۱) انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{x}\right]x^2dx$ ب) $\int_{-2}^{2}\frac{dx}{4+x^2}$

ج) $\int_{-1}^{5}\frac{|x-3|-4}{2}dx$

مسأله‌های ریاضیات گسسته پیش‌دانشگاهی

(۱) آیا ممکن است در یک کلاس ۲۱ نفری، هر دانش‌آموز به تنهایی، با ۷ نفر از همکلاسی‌های خود، دوست صمیمی باشد؟ چرا؟

(۲) اگر G یک گراف باشد، یک‌دور اویلری برای گراف G دوری است که شامل هر رأس و هر یالِG باشد.(از هر رأس G

حداقل یک‌بار مورد استفاده قرار گرفته و از هر یال G نیز فقط یک‌بار استفاده شود.)

ثابت کنید: اگر گرافی یک دور **اویلری** داشته باشد، هررأس این گراف، درجهٔ زوج دارد.

با استفاده از مطلب فوق، مسألهٔ معروف پُل‌های کونیگبرگ را حل کنید!

(۳) ثابت کنید که دورقم سمت راست $A = \sum_{k=1}^{21} k!$ ، ۱۳ می‌باشد.

(۴) ثابت کنید که عبارت $\left(a^{n+4} - a^{n}\right)$ همواره بر ۳۰ بخش‌پذیر است.

(۵) عبارت حاصل از بسط $(x+y+z+t)^{14}$ چند جمله دارد؟

(۶) معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ ، چند جواب صحیح و نامنفی با شرط $x_1 < 1$ و $x_2 > 3$ دارد؟

(۷) رابطهٔ بازگشتی $a_{n+2} - 8a_{n+1} + 16a_n = 0$ با شرطهای اولیهٔ $a_0 = 0$ و $a_1 = 8$ را حل کنید.

(۸) n مهره را به تصادف داخل N ظرف u_1 و u_2 و ... و u_N قرار می‌دهیم، احتمال اینکه در ظرف u_1 ، دقیقاً K مهره قرار گرفته باشد چقدر است (K<n)

(۹) اگر متغیر تصادفی X دارای تابع توزیع احتمالی به‌صورت $f_X(x) = a(\frac{1}{3})^x$ به ازای $X = 0,1,2,\cdots$ باشد، عدد حقیقی a کدام است؟

مسأله‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال ۲

(۱) تابع باضابطهٔ $f(x) = x^2|x|+1$ درفاصلهٔ $[0,2]$ مفروض است. نقاط بحرانی و نقاط ماگزیمم و مینیمم مطلق یا نسبی را (درصورت وجود) تعیین کنید.

(۲) قضیه مقدار میانگین را بیان کنید و سپس به کمک قضیه مقدار میانگین، ثابت کنید برای هر $0<a<b$

$$\frac{b-a}{b^2+1} < \operatorname{Arc\,tan} b - \operatorname{Arc\,tan} a < \frac{b-a}{a^2+1}$$

(۳) جدول تغییرات و نمودار هریک از توابع زیر را رسم کنید و نقاط عطف هریک را بیابید.

(الف) $f(x) = x^2(x+2)^3$ (ب) $f(x) = \dfrac{x^2+x}{x^2+x+3}$

(۴) به‌کمک تعریف انتگرال معین هریک از حدود زیر را محاسبه کنید:

(الف) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{1+n^2} + \dfrac{n}{4+n^2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n^2}\right)$

(ب) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{-\frac{1}{n}} + e^{-\frac{2}{n}} + \cdots + e^{-\frac{n}{n}}}{n}$

(۵) حدود زیر را محاسبه کنید.

(الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{(x-2)}(2x+1)$

(ب) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x(1-e^x)}{(1+x)\operatorname{Ln}(1-x)}$

(ج) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\operatorname{Ln}(1-x)} - \dfrac{1}{x}\right)$

(۶) انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

(الف) $\int x\operatorname{Ln}x\,dx$ (ب) $\int \dfrac{e^{2x}\,dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

(ج) $\int \dfrac{dx}{x+\sqrt{x}+1}$

(۷) طول کمان منحنی (طول قوس) به معادلهٔ $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4$ را بیابید.

(۸) مطلوب است حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به منحنی‌های $y = \sqrt{4-x^2}$ و $y = 1$ حول محور xها.

(۹) مساحت محصوری بین منحنی $y = x - x^2$ و $y = 2x - 2$ را حساب کنید.

مسأله‌های ریاضی عمومی ۲ پیش‌دانشگاهی

(۱) درستی نتیجهٔ قضیه رُل را برای تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ روی بازه $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ تحقیق کنید.

(۲) ماکسیمم و مینیمم نسبی تابع باضابطهٔ $f(x)=x^4+\frac{4}{3}x^3-4x^2$ را با استفاده از آزمون مشتق دوم به‌دست آورید و تعیین کنید درچه بازه‌ای تقعّر منحنی تابع داده شده رو به بالا و درچه بازه‌ای تقعّر آن رو به پایین است.

(۳) منحنی نمایش توابع به معادله‌های زیر را رسم کنید.

الف) $y=\frac{-1+x}{x+2}$ ب) $y=\frac{x^3-3x-2}{x^3}$

(۴) حجم بزرگترین مخروط دواری را بیابید که در درون کره‌ای به شعاع r محاط شده است.

(۵) یک تلسکوپ انعکاسی دارای آینه‌ای سهموی است که فاصله رأس تا کانونش ۵ سانتیمتر می‌باشد. اگر قطر قاعده آینه ۴۰ سانتیمتر باشد، عمق آینه درمرکز آن چقدر است؟

(۶) معادله هذلولی را بنویسید که نقاط $F(6,-3)$ و $F'(-4,-3)$ کانونهای آن بوده و خط به معادلهٔ $3y-4x+13=0$ یکی از مجانبهای آن باشد.

(۷) با استفاده از نمودار تابع باضابطهٔ $f(x)=|6-3x|-6$ مقدار $\int_{-1}^{5}f(x)dx$ را حساب کنید.

(۸) الف ـ مساحت محدود به محور xها، منحنی تابع باضابطهٔ $y=\sqrt{\frac{\cos x-\sin x}{(\sin x+\cos x)^5}}$، محور yها و خط $x=\frac{\pi}{3}$ را حول محور xها دوران می‌دهیم، حجم جسم حاصل را حساب کنید.

ب ـ مقدار میانگین تابع باضابطهٔ $y=x^2\sqrt[3]{x+2}$ را بر بازه $[-2,6]$ پیدا کنید.

(۹) یک بازیکن فوتبال $\frac{7}{10}$ ضربات پنالتی خود را گُل می‌کند، اگر او پنج ضربه پنالتی بزند، احتمال آن‌که دقیقاً سه گل زده باشد، چقدر است؟

(۱۰) درتوزیع زیر، امید ریاضی برابر $\frac{70}{42}$ است، مقدار K را به‌دست آورید.

X	۰	۱	K	۳
P	$\frac{1}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{42}$

این‌قدر می‌دانم که در حدود سال ۴۵۰ قبل از میلاد مسیح یونانیان دارای هندسه‌ای بدوی و مقدماتی بوده‌اند: موضوع این هندسه فقط طریقه‌های عملی و دستورهای قابل استفاده در اندازه‌گیری طول پارچه یا میزان محصول زیتون نبوده است، بلکه استدلالها و براهین منطقی متصل به یکدیگر دیده می‌شد که در حدود هندسهٔ مقدماتی ما بوده‌اند.

بدون شک این استدلالها آن‌قدرها دقیق نبوده است و بیشتر از الهام و مکاشفه استفاده می‌کردند تا از منطق و بیشتر آنها مربوط به ساختمانهای هندسی بوده است.

تاریخ علوم، پی‌یرروسو

ترجمه: حسن صفاری

حل مسأله‌های مسابقه‌ای برهان ۲۰

(۱) نشان دهید برای هر عدد حقیقی ۱ و $x \neq ۰$ داریم:

$$۱<\left(\frac{۲^{x}-۱}{x}\right)^{\frac{۱}{x-۱}}<۲$$

اثبات: فرض کنیم ۱ و $x \neq ۰$ دلخواه و ازاین به بعد ثابت باشد. قرار می‌دهیم: $f:[۱,۲] \to IR$ با ضابطه $f(t)=t^{x}$

این تابع روی فاصله [۲و۱] پیوسته و برفاصله(۲و۱) مشتق‌پذیر است. بنابه قضیه مقدار میانگین وجود دارد $C \in (۱,۲)$ به‌طوری که

$$f(۲)-f(۱)=f'(C)(۲-۱)$$

$$۲^{x}-۱=xC^{x-۱}$$

$$\frac{۲^{x}-۱}{x}=C^{x-۱}$$

$$\left(\frac{۲^{x}-۱}{x}\right)^{\frac{۱}{x-۱}}=C$$

چون $۱<C<۲$، درنتیجه داریم: $۱<\left(\frac{۲^{x}-۱}{x}\right)^{\frac{۱}{x-۱}}<۲$

(۲) فرض کنیم $p>۵$ یک عدد اول باشد،قرار می‌دهیم:

$$S=\{p-n^{۲}: n \in Z^{+}, n^{۲}<p\}$$

(برای مثال اگر $P=۳۱$ باشد در این صورت $S=\{۶,۱۵,۲۲,۲۷,۳۰\}$)

ثابت کنید S شامل دوعضو a وb چنان است به‌طوری که $a|b$ و $۱<a<b$.

اثبات: اگر عدد اول p چنان باشد، به‌طوری که $p=m^{۲}+۱$ آنگاه بنابه‌فرض $p>۵$ باید m عدد زوج باشد و $m^{۲}+۱>۵$ یا $m^{۲}>۴$ درنتیجه $m>۲$ بنابراین m زوج است و $m>۲$ و $p=m^{۲}+۱$ دراین حالت قرار می‌دهیم:

$$b=p-۱^{۲}=m^{۲} \quad \text{و} \quad a=p-(m-۱)^{۲}=۲m$$

اولاً: $a,b \in S$ زیرا $p=m^{۲}+۱$ در نتیجه $m^{۲}<p$ و $a=p-(m-۱)^{۲}$ و $b=p-۱^{۲}$ به‌علاوه چون $m>۲$ درنتیجه $m^{۲}>۲m>۱$ یعنی $۱<a<b$. همچنین چون m عدد طبیعی زوج است، درنتیجه $۲|m$ لذا $۲m|m^{۲}$ یعنی $a|b$

اگر عدد اول p به شکل $m^{۲}+۱$ نباشد، دراین صورت عدد صحیح مثبت m را چنان درنظر می‌گیریم؛ به‌طوری که $۵<۱+m^{۲}<p<(m+۱)^{۲}-۱$ دراین حالت قرار می‌دهیم:

$a=p-m^{۲}$ واضح است $a \in S$ و به‌علاوه

$$۱+m^{۲}<p<(m+۱)^{۲}-۱$$

$$۱+m^{۲}<p<m^{۲}+۲m$$

$$۱<p-m^{۲}<۲m$$

$$۱<a<۲m$$

یعنی $۱<a<۲m$ ثانیاً $a \neq m$ زیرا اگر a=m آنگاه باید $p-m^{۲}=m$ درنتیجه $p=m^{۲}+m$ که این با اول بودن p متناقض است.

چون هرعدد طبیعی بین ۱ و $۲m$ بجز m به شکل $m-k$ یا $m+k$ $(k \in N)$ می‌باشد، بنابراین عدد طبیعی $k<m$ چنان وجود دارد به‌طوری که $a|(m-k)(m+k)$ درنتیجه $a|(m-k)(m+k)+a$ قرار می‌دهیم $b=(m-k)(m+k)+a$ بنابراین $a|b$ به‌علاوه

$$b=(m-k)(m+k)+a=m^{۲}-k^{۲}+a=$$
$$m^{۲}-k^{۲}+p-m^{۲}=p-k^{۲}$$

چون $k^{۲}<m^{۲}<p$ درنتیجه $b \in S$ واز آنجا که $m^{۲}-k^{۲}>۰$ لذا $a<m^{۲}-k^{۲}+a$ یعنی: $۱<a<b$ این نشان می‌دهد که $a,b \in S$ و $۱<a<b$ و $a|b$

حل مسأله‌های برهان شماره ۲۱

حل مسأله‌های ریاضیات ۱

(۱)
$$A=\{x \mid x\in \mathbb{Z} \text{ و } -1\le x<6\}$$
$$B=\{x \mid x\in \mathbb{R} \text{ و } x\ge 1\} \text{ و } C=\{x \mid x\in \mathbb{R} \text{ و } x\le 5\}$$
$$(A\cup B)\cap C=\{x \mid x\in \mathbb{R} \text{ و } 1\le x\le 5 \;; x=0 \;; x=-1\}$$

(۲) می‌دانیم تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ nعضوی برابر 2^n است. بنابراین:

$$2^{k+2}=2^k+96 \Rightarrow 4\times 2^k-2^k=96$$
$$\Rightarrow 3\times 2^k=96$$
$$\Rightarrow 2^k=\frac{96}{3}=32=2^5 \Rightarrow \boxed{k=5}$$

(۳)

$$1)\ (a^3-2)(a^3+2)(a^{12}+4a^6+16)=$$
$$=(a^6-4)(a^{12}+4a^6+16)$$
$$=a^{18}-64$$

$$2)\ (2x-y)^3(y^2+4x^2)^3(2x+y)^3$$
$$=\left[(2x-y)(2x+y)(y^2+4x^2)\right]^3$$
$$=\left[(4x^2-y^2)(4x^2+y^2)\right]^3$$
$$=(16x^4-y^4)^3$$

(۴)

$$1)(a+b)^4+16=(a+b)^4+8(a+b)^2+16-8(a+b)^2$$
$$=[(a+b)^2+4]^2-8(a+b)^2$$
$$=[(a+b)^2+4-2\sqrt{2}(a+b)][(a+b)^2+4+2\sqrt{2}(a+b)]$$
$$2)\ x^2+5y+x-25y^2=(x^2-25y^2)+(x+5y)$$
$$=(x-5y)(x+5y)+(x+5y)$$
$$=(x+5y)(x-5y+1)$$

(۵)

$$x^4+px^2+qx+2 \,\Big|\, \frac{x^2-2x+2}{x^2+2x+p+2}$$
$$\underline{-x^4+2x^3-2x^2}$$
$$2x^3+(p-2)x^2+qx+2$$
$$\underline{-2x^3+4x^2-4x}$$
$$(p+2)x^2+(q-4)x+2$$
$$\underline{-(p+2)x^2+(2p+4)x-2p-4}$$
$$(q+2p)x-2p-2$$

باقیمانده باید برابر $7x+4$ باشد، بنابراین:

$$\begin{cases} q+2p=7 \\ -2p-2=4 \end{cases} \Rightarrow p=-3 \text{ و } q=13$$

(۶) می‌توان نوشت:

$$x^{45}+1=(x^{15})^3+1$$
$$=(x^{15}+1)(x^{30}-x^{15}+1)$$

بنابراین بزرگترین عامل مشترک بین $x^{45}+1$ و $x^{15}+1$ چنین است: $(x^{45}+1 \text{ و } x^{15}+1)=x^{15}+1$

(۷)

$$\frac{p-a}{(p-q)(p-r)}+\frac{q-a}{(q-r)(q-p)}+\frac{r-a}{(r-p)(r-q)}$$
$$=\frac{(p-a)(q-r)-(q-a)(p-r)+(r-a)(p-q)}{(p-q)(p-r)(q-r)}$$
$$=\frac{\cancel{pq}-\cancel{pr}-\cancel{aq}+\cancel{ar}-\cancel{qp}+\cancel{qr}+\cancel{ap}-\cancel{ar}+\cancel{rp}-\cancel{rq}-\cancel{ap}+\cancel{aq}}{(p-q)(p-r)(q-r)}=0$$

حاصل عبارت برابر صفر است.

حل مسأله‌های ریاضیات ۳

(۱)
$$\frac{x^3-4x^2+5x}{(x^2+1)(x-1)}\ge 0$$

$$x^3-4x^2+5x=0 \Rightarrow x(x^2-4x+5)=0 \Rightarrow \boxed{x=0};$$

$x^2-4x+5=0$ (ریشه حقیقی ندارد، $\Delta<0$)

$x^2+1=0$ (ریشه حقیقی ندارد) و $x-1=0 \Rightarrow \boxed{x=1}$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
x^3-4x^2+5x	$-$	0	$+$		$+$
x^2+1	$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
جواب	$+$		$-$		$+$

مجموعهٔ جواب $=\{x \mid x\in \mathbb{R} \text{ و } x\le 0 \text{ و } x>1\}$

(۲)
$$p(x)=\frac{1}{x-4}+\sqrt{4-x^2}+\sqrt{x^2-4}$$

$$\begin{cases} 4-x^2\ge 0 \\ x^2-4\ge 0 \\ x-4\ne 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2\le 4 \\ x^2\ge 4 \\ x\ne 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\le x\le 2 \\ x\ge 2 \text{ یا } x\le -2 \\ x\ne 4 \end{cases}$$

مجموعهٔ جواب دستگاه اخیر، دامنهٔ متغیر عبارت $p(x)$ است: یعنی عبارت فوق، فقط به‌ازای $x=\pm 2$ تعریف شده است: $D_p=\{-2,2\}$

یا

(۳)
$$\frac{4x-1}{2x+1}-\frac{2x-1}{2x-2}=\frac{2x+3}{4x^2-2x-2}$$

باتوجه به $x\ne 1$ و $x\ne -\frac{1}{2}$، می‌توان نوشت:

$$\frac{(4x-1)(2x-2)-(2x-1)(2x+1)}{(2x+1)(2x-2)}=\frac{2x+3}{(2x+1)(2x-2)}$$

$$8x^2-8x-2x+2-(4x^2-1)=2x+3$$
$$4x^2-12x=0 \Rightarrow x=0 \;;\; x=3$$

(۴)
$$\begin{cases}4^{3x-3y}=32\\ 9^{3x+3y}=243\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2^{6x-6y}=2^5\\ 3^{6x+6y}=3^5\end{cases}$$

$$\begin{cases}6x-6y=5\\ 6x+6y=5\end{cases} \Rightarrow 12x=10 \Rightarrow x=\frac{5}{6} \text{ و } y=0$$

(۵) بافرض $x \geq 2$ ، دوطرف معادله را به توان ۲ می‌رسانیم :

$$\left(\sqrt{x-2}\right)^2=\left(\sqrt{2x-3}-1\right)^2$$
$$x-2=2x-3+1-2\sqrt{2x-3}$$
$$2\sqrt{2x-3}=x \Rightarrow 4(2x-3)=x^2$$
$$x^2-8x+12=0 \Rightarrow (x-2)(x-6)=0$$

(هردو ریشه قابل قبول است زیرا در معادلهٔ اول صدق می‌کند) $x=2 ; x=6$

(۶)
$$f(x)=\begin{cases}x^2-1 & x\geq 2\\ x+3 & x<2\end{cases} \text{ و } g(x)=x+4$$

$$f(-1)=(-1)+3=2 \Rightarrow g(f(-1))=g(2)=2+4=6$$
$$g(0)=0+4=4 \Rightarrow f(g(0))=f(4)=4^2-1=15$$

(۷)
$$f(x)=x^2-3x \text{ و } A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$
$$f(A)=A^2-3A \text{ و } f(-A)=A^2+3A$$
$$f(A)+f(-A)=A^2-3A+A^2+3A=2A^2$$
$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+1 & -1+0\\ -1+0 & 1+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$
$$f(-A)+f(A)=2\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -2\\ -2 & 2\end{bmatrix}$$

(۸) تابعی معکوس پذیر است که یک‌به‌یک باشد :

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1^5+1}{x_1^5-1}=\frac{x_2^5+1}{x_2^5-1} \Rightarrow$$
$$(x_1^5+1)(x_2^5-1)=(x_1^5-1)(x_2^5+1)$$
$$x_1^5x_2^5-x_1^5+x_2^5-1=x_1^5x_2^5+x_1^5-x_2^5-1$$
$$2x_1^5=2x_2^5 \Rightarrow x_1^5=x_2^5 \Rightarrow x_1=x_2$$

تابع f یک‌به‌یک است، بنابر این معکوس پذیر است.
حال ضابطهٔ تابع f^{-1} را به‌دست می‌آوریم :

$$y=f(x)=\frac{x^5+1}{x^5-1} \Rightarrow x^5=\frac{y+1}{y-1} \Rightarrow x=\sqrt[5]{\frac{y+1}{y-1}}$$
$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[5]{\frac{x+1}{x-1}}$$ (ضابطهٔ تابع معکوس)

(۹) $f(x)=\frac{x}{x+1}$ و $(fog)(x)=2x$

$$(fog)(x)=f(g(x))=\frac{g(x)}{g(x)+1} \Rightarrow \frac{g(x)}{g(x)+1}=2x$$
$$g(x)=2xg(x)+2x \Rightarrow g(x)=\frac{2x}{1-2x}$$

(۱۰) $x=X-3$ و $y=Y+4 : 2(X-3)-(Y+4)=5$
$$2X-6-Y-4=5 \Rightarrow 2X-Y=15$$

حل مسأله‌های جبر و احتمال

۱) می‌دانیم باقیماندهٔ تقسیم هر عدد صحیح بر n، می‌تواند یکی از اعداد ۰، ۱، ۲، ...، $n-1$ باشد. حال اگر این n عدد را (از صفر تا $n-1$) در حکم لانه‌های کبوتر و اعضای مجموعهٔ A را که تعدادشان $(n+1)$ است، کبوترها فرض کنیم، طبق اصل «لانه کبوتری» دست کم دو عضو مجموعهٔ A می‌بایست بر n هم باقیمانده باشند!

(۲) در حالت کلّی ثابت می‌شود اگر $A\subseteq B$ و $C\subseteq D$ آنگاه $(A\cap C)\subseteq(B\cap D)$ و $(A\cup C)\subseteq(B\cup D)$ (ثابت کنید!)

می‌دانیم همواره $\varnothing\subseteq X$ (۱) از طرفی طبق فرض $X\subseteq A$ و $X\subseteq A'$ پس $(X\cap X)\subseteq(A\cap A')$ یا $X\subseteq\varnothing$ (۲) و با توجه به (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $X=\varnothing$. برای حل قسمت دوم مسأله، به صورت زیر عمل می‌کنیم :

می‌دانیم $X\subseteq U$ (۱)

طبق فرض داریم $A'\subseteq X \;,\; A\subseteq X \Rightarrow (A'\cup A)\subseteq(X\cup X)$
$$\Rightarrow U\subseteq X \quad (2)$$
$$(1),(2) \Rightarrow X=U$$

(۳) فرض‌کنیم A وB و C وD مجموعه‌های دلخواهی باشند، می‌خواهیم ثابت کنیم :

$(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$، برای این کار کافی است ثابت کنیم مجموعهٔ سمت چپ تساویِ فوق زیر مجموعهٔ طرف راست است و برعکس : پس عضو دلخواهی از سمت چپ تساوی در نظر گرفته و ثابت می‌کنیم عضوی از مجموعهٔ سمت راستی بوده و برعکس :

فرض کنیم $(x,y)\in[(A\times B)\cap(C\times D)]$
$$\xrightarrow{\text{تعریف اشتراک}} (x,y)\in(A\times B) \text{ و } (x,y)\in(C\times D)$$
$$\xrightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}} (x\in A \text{ و } y\in B) \text{ و } (x\in C \text{ و } y\in D)$$
$$\xrightarrow{\text{جابجایی}} (x\in A \text{ و } x\in C) \text{ و } (y\in B \text{ و } y\in D)$$
$$\xrightarrow{\text{تعریف اشتراک}} [x\in(A\cap C)] \text{ و } [y\in(B\cap D)]$$
$$\xrightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}} (x,y)\in[(A\cap C)\times(B\cap D)]$$

(۴) طبق تعریف، داریم :

$$(x,y)R(z,t) \Leftrightarrow x^2+y^2=z^2+t^2$$

۱)خاصیت بازتابی $x^2+y^2=x^2+y^2 \Rightarrow (x,y)R(x,y)$

۲) فرض کنیم $(x,y)R(z,t)$ در نتیجه :
$$x^2+y^2=z^2+t^2 \Rightarrow z^2+t^2=x^2+y^2$$
خاصیت تقارنی $\Rightarrow (z,t)R(x,y)$

۳) فرض کنیم $(x,y)R(x,t)$ و $(z,t)R(m,n)$ درنتیجه :
$$x^2+y^2=z^2+t^2 \text{ و } z^2+t^2=m^2+n^2$$
خاصیت تعدی $\Rightarrow x^2+y^2=m^2+n^2 \Rightarrow (x,y)R(m,n)$

برای تعیین شکل کلاسهای هم‌ارزیِ رابطهٔ داده شده، کافی است شکل یک کلاس هم‌ارزیِ دلخواه مثل $[(1,0)]$ را بیابیم :
$$[(1,0)]=\left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x,y)R(1,0)\right\}$$
$$=\left\{(x,y) \,\middle|\, x^2+y^2=1^2+0^2=1\right\}$$

یعنی شکل کلاسِ هم ارزی $[(1,0)]$ دایره‌ای است به مرکز مبدأ مختصات و به شعاع ۱ بنابراین بقیهٔ کلاسهای هم‌ارزی این رابطه نیز دایره‌هایی به مرکز مبدأ (دایره‌های هم مرکز) و با شعاعهای متفاوت خواهند بود. (کلاسهای هم‌ارزی یک رابطه نباید اشتراکی داشته باشند.)

(۵) تعداد اعضای فضای نمونه در این مسأله !۹ می‌باشد و تعداد حالتهایی که می‌توان در نظر گرفت تا رضا در مکان وسط قرار گرفته باشد!۸ است. پس $P(A)=\frac{8!}{9!}=\frac{1}{9}$

(۶) چون احتمال رو شدن هر عدد زوج ۳ برابر هر عدد فرد است، پس :

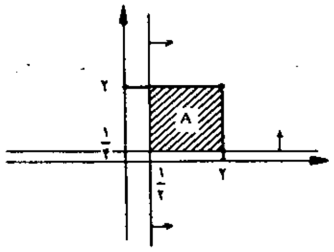
$$p(2)=p(4)=p(6)=3p(1)=3p(3)=3p(5)$$

از طرفی: $p(1)+p(2)+\cdots+p(6)=1$
$$\Rightarrow p(1)+3p(1)+p(1)+3p(1)+p(1)+3p(1)=1$$
$$\Rightarrow p(1)=\frac{1}{12} \text{ و } p(3)=p(5)=\frac{1}{12}, p(2)=p(4)=p(6)=\frac{3}{12}$$
$$A=\{1,2,3,4\} \Rightarrow p(A)=\frac{1}{12}+\frac{3}{12}+\frac{1}{12}+\frac{3}{12}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$$

(۷) برای حل این مسأله از توزیع دو جمله‌ای استفاده می‌کنیم.

$$p(\text{مجموع دو تاس ۵})=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$
$$p(\text{دقیقاً k بار موفقیت})=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$
$$p(\text{۴ بار موفقیت})=\binom{6}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^4\times\left(\frac{8}{9}\right)^2$$

(۸) فضای نمونه‌ای طبق شکل زیر سطح مربعی است به طول ضلع ۲ واحد و داریم :



$$p(A)=\frac{a_A}{a_S}=\frac{\frac{3}{2}\times\frac{7}{4}}{2\times 2}=\frac{21}{32}$$

(۹) طبق فرض $Z=(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$ و I,J طبق رابطهٔ

دموآر داریم:

$$Z^6=(\cos 6\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{6\pi}{3})=(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=1$$

از طرفی: $1376=6\times(229)+2 \Rightarrow Z^{1376}=(Z^6)^{229}\times Z^2 =1\times Z^2=Z^2$

و $Z^2=(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})=\left[\cos(\pi-\frac{\pi}{3})+i\sin(\pi-\frac{\pi}{3})\right]$

$$\Rightarrow Z^2=(-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

حل مسأله‌های هندسهٔ تحلیلی پیش‌دانشگاهی

(۱) این مکان هندسی، کره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و به شعاع $\sqrt{6}$ است. معادلهٔ این کره به‌صورت $x^2+y^2+z^2=(\sqrt{6})^2=6$ است.

برای آنکه نقطهٔ $A(a,2a-1,a+1)$ روی این کره قرار داشته باشد، باید مختصاتش در معادلهٔ کره صدق کند، یعنی داشته باشیم:

$$a^2+(2a-1)^2+(a+1)^2=6 \Rightarrow 6a^2-2a-4=0 \Rightarrow$$
$$3a^2-a-2=0 \Rightarrow a=1, a=-\frac{2}{3}$$

(۲) داریم:

$$a=i+2j-k, b=-3i+j+2k \Rightarrow a=(1,2,-1)$$
و $b=(-3,1,2) \Rightarrow 3a=(3,6,-3), 2b=(-6,2,4)$
$$\Rightarrow 3a-2b=(9,4,-7) \Rightarrow |3a-2b|=\sqrt{9^2+4^2+(-7)^2}=\sqrt{146}$$

(۳) اگر تصویر بردار b روی بردار a را b' بنامیم، داریم:

$$a=(2,3,-1)\ ,b=(2,0,-3) \Rightarrow$$
$$b' \text{ اندازه جبری } = pr\frac{b}{a}=\frac{a.b}{|\vec{a}|}=\frac{4+0+3}{\sqrt{4+9+1}}=\frac{7}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{14}}{2}$$

(۴) بردارهای هادی دو خط، $L_1=(3,m,2)$ و $L_2=(1,-1,2)$ و زاویهٔ بین دو خط $\alpha=60^\circ$ است. از آنجا داریم:

$$\cos\alpha=\frac{L_1.L_2}{|\vec{L}_1||\vec{L}_2|} \Rightarrow \cos 60^\circ=\frac{3-m+4}{\sqrt{9+m^2+4}.\sqrt{1+1+4}}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{7-m}{\sqrt{6}.\sqrt{m^2+13}} \Rightarrow 6m^2+78=4m^2+196-56m$$
$$2m^2+56m-118=0 \Rightarrow m^2+28m-59=0 \Rightarrow$$
$$m=-14\pm\sqrt{255}$$

(۵) قرینهٔ نقطهٔ $M(x,y,z)$ نسبت به محور xها نقطهٔ $M_1(x,-y,-z)$ است بنابراین معادلهٔ قرینهٔ خط D نسبت به محور xها به صورت زیر است:

$$2x+1=-y-2=-3(-z)+1$$
$$\Rightarrow 2(x+\frac{1}{2})=-(y+2)=3(z+\frac{1}{3})$$
$$\Rightarrow \frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{x+\frac{1}{2}}{3}=\frac{y+2}{-6}=\frac{z+\frac{1}{3}}{2}$$

(۶) معادله‌های متقارن خط Δ را می‌نویسیم:

$$N(1,2,1)\ ,\ L=(3,2,1) \Rightarrow \Delta: \frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{1}$$

برای تعیین فاصلهٔ نقطهٔ $P(-1,0,2)$ از خط Δ از دستور

$$D=\frac{|\vec{P_0P}\times\vec{L}|}{|\vec{L}|}$$

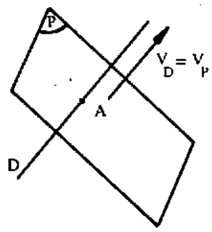
استفاده می‌کنیم که P_0 نقطه‌ای دلخواه از خط Δ است.

بدین ترتیب:

$$P_0\in\Delta: x=4 \Rightarrow y=4, z=2 \Rightarrow P_0=(4,4,2), P=(-1,0,2)$$
$$\vec{P_0P}=(-5,-4,0)\ ,\ L=(3,2,1) \Rightarrow$$
$$\vec{P_0P}\times\vec{L}=(-4,5,2) \Rightarrow D=\frac{\sqrt{16+25+4}}{\sqrt{9+4+1}}=\frac{3\sqrt{70}}{14}$$

نکته: نقطهٔ P_0 را می‌توان همان نقطهٔ $N(1,2,1)$ در نظر گرفت.

(۷) نقطهٔ به طول ۲ را A می‌نامیم و مقدار t متناظرِ آن را تعیین می‌کنیم تا مختصات نقطهٔ A را محاسبه کنیم.



$$t-1=2 \Rightarrow t=3 \Rightarrow A(2,7,-1)$$

حال، بردار قائم صفحهٔ مورد نظر را، که همان بردار هادی خط D است، مشخص می‌سازیم و معادلهٔ صفحهٔ خواسته شده را می‌نویسیم.

$$V_P=V_D=(1,2,-1)$$
$$\Rightarrow a(x-x_0)+b(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$
$$\Rightarrow 1(x-2)+2(y-7)-1(z+1)=0$$
$$\Rightarrow x+2y-z-17=0$$

حل مسأله‌های جبر خطی پیش‌دانشگاهی

(۱) برای اثبات مستقل خطی بودن بردارهای داده شده، کافی است یک ترکیب خطی دلخواه از آنها را مساوی با بردار صفر قرار داده و ثابت کنیم همهٔ ضرایب آن ترکیب خطی صفر هستند.

$$\alpha_1(x^3+x+1)+\alpha_2(x^2+2x-1)+\alpha_3(x+2)+\alpha_4 x$$
$$=0x^3+0x^2+0x+0$$
$$\alpha_1x^3+\alpha_2x^2+(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)x+$$
$$(\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3)=0$$

$$\Rightarrow \alpha_1=0\ ,\ \alpha_2=0 \Rightarrow \begin{cases}0+0+\alpha_3+\alpha_4=0\\ 0-0+2\alpha_3=0 \Rightarrow \alpha_3=0\end{cases}$$
$$\Rightarrow \alpha_4=0$$

(۲) چون بردارهای V_1 و V_2 و V_3 پایه‌ای برای IR^3 تشکیل می‌دهند پس طبق تعریف مستقل خطی می‌باشند. حال، فرض کنیم بردار u را به دو صورت بتوانیم بر حسب این سه بردار بنویسیم، یعنی:

$$u=\alpha_1V_1+\alpha_2V_2+\alpha_3V_3 \quad (1)$$
و $u=\beta_1V_1+\beta_2V_2+\beta_3V_3 \quad (2)$
$$(1)\ ,\ (2) \Rightarrow \alpha_1V_1+\alpha_2V_2+\alpha_3V_3=\beta_1V_1+\beta_2V_2+\beta_3V_3$$
$$\Rightarrow (\alpha_1-\beta_1)V_1+(\alpha_2-\beta_2)V_2+(\alpha_3-\beta_3)V_3=0$$
$$\xrightarrow{\text{مستقل خطی‌اند}} \alpha_1-\beta_1=\alpha_2-\beta_2=\alpha_3-\beta_3=0$$
$$\Rightarrow \alpha_1=\beta_1\ ,\ \alpha_2=\beta_2\ ,\ \alpha_3=\beta_3$$

(۳) چون ماتریس نگاشت خطی f، 3×2 است لذا f نگاشتی از IR^2 به IR^3 می‌باشد از طرفی می‌دانیم:

$f(IR^2)$ بُعد + بُعد هسته = ۲

برای تعیین بُعد هسته به شکل زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \quad (k_f=\{(x,y)|f(x,y)=(0,0,0)\})$$

$$\begin{cases}x-y=0\\ 2x=0\\ x+3y=0\end{cases} \Rightarrow x=y=0 \Rightarrow k_f=\{(0,0)\}$$

بنابراین طبق قضیه نگاشت یک به یک است.

از طرفی چون نگاشت خطی f از IR^2 به IR^3 است، نمی‌تواند پوشا باشد. پس داریم:

$f(IR^2)$ بُعد = ۲ − بُعد هسته = ۲ − ۰ = ۲

(۴) می‌دانیم بردارهای (۰, ۱) و (۱, ۰) یک پایهٔ متداول برای IR^2 می‌باشند، لذا هر بردار در IR^2 را می‌توان بر حسب ترکیب خطی این دو بردار نوشت:

$$(3\ ,4)=3(1\ ,0)+4(0\ ,1)$$
$$f(3\ ,4)=f[3(1\ ,0)+4(0\ ,1)]$$
$$\xrightarrow{\text{f خطی است}} 3f(1\ ,0)+4f(0\ ,1)=$$
$$3(2,-1)+4(1\ ,2)=(6,-3)+(4,8)=(10,5)$$

(۵) سطر اول دترمینان سمت چپ را در a و سطر دوم را در b و سطر سوم را در c ضرب می‌کنیم.

$$\begin{vmatrix}bc & 1 & a\\ ac & 1 & b\\ ab & 1 & c\end{vmatrix}=\frac{1}{abc}\begin{vmatrix}abc & a & a^2\\ abc & b & b^2\\ abc & c & c^2\end{vmatrix}=$$

$$\frac{abc}{abc}\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}$$

(۶) اگر $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ مفروض باشد، در این صورت: $\lambda^2-(a+d)\lambda+|A|=0$ معادله‌ای است که ریشه های آن مقادیر ویژهٔ A بوده و $(a-\lambda)x+by=0$ امتدادهای ویژهٔ نظیر هر λ را مشخص می‌کند.

$$A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -2 & -2\end{bmatrix} \Rightarrow \lambda^2+\lambda-2=0 \Rightarrow \lambda_1=1\ ,\ \lambda_2=-2$$

امتدادهای بردارهای ویژه به‌صورت زیر است :

$$(3-\lambda)x+2y=0 \quad \begin{cases}\lambda_1=1\Rightarrow y=-x\\ \lambda_2=-2\Rightarrow 2y=-5x\end{cases}$$

حل مسأله‌های هندسه ۱ نظام‌جدید

(۱) زاویه‌های مجاور به هر ساق ذوزنقه مکمل یکدیگرند. بنابراین :

$$2\alpha-5^\circ+\alpha+5^\circ=180^\circ\Rightarrow 3\alpha=180^\circ$$

$$\Rightarrow\alpha=60^\circ\Rightarrow\hat{A}=115^\circ\ ,\ \hat{D}=65^\circ$$

$$\beta+130^\circ=180^\circ\Rightarrow\beta=50^\circ\Rightarrow\hat{C}=50^\circ$$

(۲) درمثلث قائم الزاویه ABB' ، $BB'=2\sqrt{73}$ ، $AB=C$ و $AB'=\frac{C}{2}$ و در مثلث قائم‌الزاویه ACC' ، $CC'=4\sqrt{13}$ ، $AC=b$ و $AC'=\frac{b}{2}$ است ؛ بنابراین داریم :

$$BB'^2=AB'^2+AB^2\Rightarrow 292=\frac{b^2}{4}+c^2\quad(1)$$

$$CC'^2=AC'^2+CC'^2\Rightarrow 208=\frac{c^2}{4}+b^2\quad(2)$$

$$(1)+(2)\Rightarrow 500=\frac{5}{4}(b^2+c^2)\ ,\ b^2+c^2=a^2\Rightarrow$$

$a^2=400\Rightarrow a=20$ اندازهٔ وتر مثلث ABC

(۳) مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a برابر $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ است. پس :

$$96\sqrt{3}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\Rightarrow a^2=384\Rightarrow a=8\sqrt{6}\Rightarrow$$

محیط مثلث متساوی‌الاضلاع $=3a=18\sqrt{6}$

(۴) با توجه به قضیهٔ تالس، داریم :

$$\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}\quad(1)$$

اما از رابطهٔ $5AD=2DB$ نتیجه می‌شود :

$$\frac{AD}{DB}=\frac{2}{5}\Rightarrow\frac{AD}{AD+DB}=\frac{2}{2+5}\Rightarrow\frac{AD}{AB}=\frac{2}{7}\quad(2)$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) خواهیم داشت :

$$\frac{DE}{BC}=\frac{2}{7}\Rightarrow\frac{x+1}{3x+5}=\frac{2}{7}\Rightarrow 7x+7=6x+10$$

$$\Rightarrow x=3\Rightarrow BC=9+5=14$$

(۵) هر دو پنج ضلعی منتظم متشابه‌اند. بنابراین نسبت مساحتهای آنها برابر مجذور نسبت تشابه، یعنی مجذور نسبت ضلعهای آنها می‌باشد. بنابراین اگر مساحتهای دو پنج ضلعی منتظم را S و S′ (S′ > S) و ضلعهای متناظر آنها را a و a′ بنامیم، داریم :

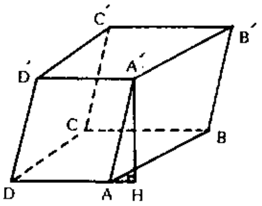
$$S'=16S\Rightarrow\frac{S'}{S}=16\ ,\ \frac{S'}{S}=\left(\frac{a'}{a}\right)^2\Rightarrow$$

نسبت ضلعهای دو پنج ضلعی منتظم : $\left(\frac{a'}{a}\right)^2=16\Rightarrow\frac{a'}{a}=4$

(۶) ارتفاع این متوازی السطوح برابر است با :

$$A'H=AA'\sin 75^\circ=4(\sqrt{6}-\sqrt{2}).\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow A'H=4$$

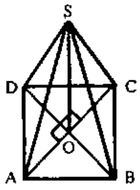


از آنجا :

$\Leftarrow$ ارتفاع × سطح قاعده = حجم متوازی السطوح

حجم متوازی‌السطوح $=16(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2\times 4=64(8-4\sqrt{3})$

(۷) اندازهٔ ضلع قاعده و ارتفاع هرم را به دست می‌آوریم. با توجه به این که SA = ۱۰ و AC = ۱۲ است، داریم :



$$AB=\frac{AC}{\sqrt{2}}=\frac{12}{\sqrt{2}}=6\sqrt{2}\ ,\ AO=\frac{AC}{2}=6\ ,$$

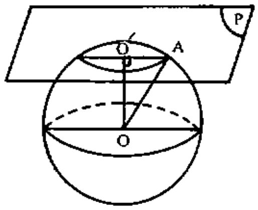
$$SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=\sqrt{100-36}=8$$

$\Leftarrow$ ارتفاع × سطح قاعده $\times\frac{1}{3}=$ حجم هرم

حجم هرم $=\frac{1}{3}(6\sqrt{2})^2\times 8\Rightarrow$

حجم هرم $=192$

(۸) شعاع کره را بدست می‌آوریم. در مثلث قائم‌الزاویه $OO'A$ داریم :



$$OA=R=\sqrt{OO'^2+O'A^2}=\sqrt{12^2+5^2}=13$$

از آنجا حجم کره را محاسبه می‌کنیم.

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3\Rightarrow V=\frac{4}{3}\pi(13)^3\Rightarrow V=\frac{8788\pi}{3}$$

حل مسأله‌های ریاضی ۵

(۱) با توجه به این که $A=[3,+\infty)$ ، $B=[-4,6]$ ، $C=[1,+\infty)$ و $D=(-\infty,1]$ است داریم :

الف. $A\cap C=[3,+\infty)\ ,\ B\cup D=(-\infty,6]\Rightarrow$

$$(A\cap C)\cup(B\cup D)=[3,+\infty)\cup(-\infty,6]=(-\infty,+\infty)$$

ب. $A\cup B=[-4,+\infty)\ ,\ C\cup D=(-\infty,+\infty)\Rightarrow$

$$(A\cup B)\cap(C\cup D)=[-4,+\infty)\cap(-\infty,+\infty)=[-4,+\infty)$$

(۲) داریم :

$$f(x)=ax+b\ ,g(x)=x^2+2x+4$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=a(x^2+2x+4)+b$$

$$=ax^2+2ax+4a+b$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=(ax+b)^2+2(ax+b)+4\Rightarrow$$

$$(gof)(x)=a^2x^2+2a(b+1)x+b^2+2b+4$$

$$\Rightarrow(fog)(x)+(gof)(x)$$

$$=a(a+1)x^2+2a(b+2)x+b^2+3b+4a+4$$

با توجه به اینکه $(fog)(x)+(gof)(x)=-6x+4$ است، پس :

$$\begin{cases}a(a+1)=0\Rightarrow a=0,\ a=-1\\ 2a(b+2)=-6\Rightarrow -2(b+2)=-6\Rightarrow b+2=3\Rightarrow b=1\\ b^2+3b+4a+4=4\Rightarrow 1+3-4+4=4\Rightarrow 4=4\end{cases}$$

بنابراین a = −۱ و b = ۱ قابل قبول است.

(۳) با توجه به تعریف حد چپ، حد راست، و مقدار تابع در یک نقطه، داریم :

$$\begin{cases}2+a=5\\ b+c=3\ \Rightarrow a=3\ ,b=2\ ,c=1\\ \frac{a+c}{b+2}=1\end{cases}$$

(۴) داریم :

الف) $\lim\limits_{x\to7}\frac{x-2-\sqrt{2x+11}}{\sqrt{x+2}-3}=\frac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to7}\frac{((x-2)^2-2x-11)(\sqrt{x+2}+3)}{(x+2-9)(x-2+\sqrt{2x+11})}$$

$$=\lim_{x\to7}\frac{(x-7)(x+1)(\sqrt{x+2}+3)}{(x-7)(x-2+\sqrt{2x+11})}$$

$$=\lim_{x\to7}\frac{(x+1)(\sqrt{x+2}+3)}{x-2+\sqrt{2x+11}}=\frac{24}{5}$$

ب) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{8}}\frac{\sin(4x+\frac{\pi}{2})}{\frac{x}{2}+\frac{\pi}{16}}=\frac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to-\frac{\pi}{8}}\frac{\sin 4(x+\frac{\pi}{8})}{\frac{1}{2}(x+\frac{\pi}{8})}=\frac{4}{\frac{1}{2}}=8$$

زیرا داریم : $\lim\limits_{\alpha\to0}\frac{\sin m\alpha}{\alpha}=m$

(۵) با توجه به $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ، داریم :

$$f(x)=\sqrt{x^2+5x}\ ,f(x+h)=\sqrt{(x+h)^2+5(x+h)}$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{(x+h)^2+5(x+h)}-\sqrt{x^2+5x}}{h}=\frac{0}{0}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^2}+h^2+2hx+\cancel{5x}+5h-\cancel{x^2}-\cancel{5x}}{h(\sqrt{(x+h)^2+5(x+h)}+\sqrt{x^2+5x})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(h+2x+5)}{h(\sqrt{(x+h)^2+5(x+h)}+\sqrt{x^2+5x})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h+2x+5}{\sqrt{(x+h)^2+5(x+h)}+\sqrt{x^2+5x}}$$

$$= \frac{2x+5}{\sqrt{x^2+5}+\sqrt{x^2+5}} = \frac{2x+5}{2\sqrt{x^2+5}}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{2x+5}{2\sqrt{x^2+5}}$$

(۶) داریم:

الف) $f(x)=\frac{(x-4)^2}{x+\sqrt{x}} \Rightarrow$

$$f'(x)=\frac{2(x-4)(x+\sqrt{x})-(1+\frac{1}{2\sqrt{x}})(x-4)^2}{(x+\sqrt{x})^2}$$

ب) $f(x)=\frac{2\sin 2x\cos 2x}{\cos 4x}=\frac{\sin 4x}{\cos 4x}=\tan 4x \Rightarrow$

$$f'(x)=4(1+\tan^2 4x)$$

(۷) نقطهٔ برخورد نمودار این تابع بامحورعرضها $(0 , -3)$ و نقطه $(1 , -4)$ نقطهٔ ماگزیمم یا مینیمم آن است، بنابراین:

$f(x)=ax^2+bx+c$

$(0 , -3)\xrightarrow{\text{در تابع}} -3=c \quad (1)$

$(1 , -4)\xrightarrow{\text{در تابع}} -4=a+b+c \quad (2)$

$f'(x)=2ax+b \Rightarrow 0=2a(1)+b \Rightarrow 2a+b=0 \quad (3)$

از رابطه‌های (۱) و (۲) و (۳) نتیجه می‌شود:

$a=1 ,\ b=-2 ,\ c=-3 \Rightarrow f(x)=x^2-2x-3$

حل مسأله‌های حسابان ۱

(۱): روش اول:

$y=x-\sqrt{x-2}$

$y=x-2-\sqrt{x-2}+2$

دو جملهٔ اول را به اتحاد تبدیل می‌کنیم:

$y=\left(\sqrt{x-2}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+2$

$y=\left(\sqrt{x-2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$

کمترین مقدار $\left(\sqrt{x-2}-\frac{1}{2}\right)^2$ صفراست پس کمترین مقدار y برابر $(\frac{7}{4})$ است بیشترین مقدار $\left(\sqrt{x-2}-\frac{1}{2}\right)^2$ به سمت $+\infty$ میل می‌کند پس بیشترین مقدار y هم به سمت $(+\infty)$ میل می‌کند. در نتیجه بُرد تابع: $\left\{y \mid y\ge \frac{7}{4}\right\}$

روش دوم:

$\sqrt{x-2}=x-y$

$\sqrt{x-2}\ge 0 \Rightarrow x-y\ge 0\Rightarrow y\le x$

طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم $\quad x-y=\sqrt{x-2}$

$\Rightarrow x^2+y^2-2xy=x-2$

$x^2-(2y+1)x+y^2+2=0$

$\Delta=(2y+1)^2-4y^2-8\ge 0$

$4y^2+4y+1-4y^2-8\ge 0\Rightarrow 4y\ge 7\Rightarrow y\ge\frac{7}{4}$

بردتابع $=\left\{y \mid y\ge\frac{7}{4}\right\}$

روش سوم:

$y'=1-\frac{1}{2\sqrt{x-2}}=\frac{2\sqrt{x-2}-1}{2\sqrt{x-2}}=0\Rightarrow 2\sqrt{x-2}=1$

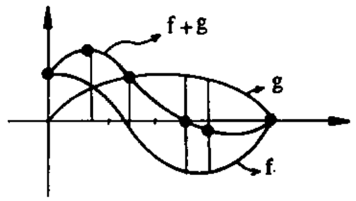
عرض مینیمم $\quad 4x-8=1\Rightarrow x=\frac{9}{4}\Rightarrow y=\frac{7}{4}$

$x\to+\infty\Rightarrow y\to+\infty\Rightarrow y\ge\frac{7}{4}$

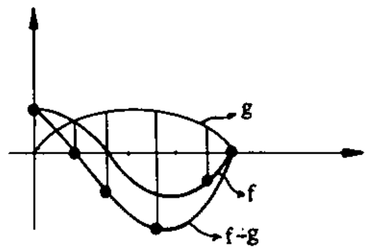
بردتابع $=\left\{y \mid y\ge\frac{7}{4}\right\}$

(۲):

برای رسم تابع به معادله $y=f(x)+g(x)$ باید از هر نقطه روی محور xها رابطی موازی محور عرضها رسم کنیم تا به نمودار f برسیم. سپس از این نقطه به اندازهٔ عرض نقطه هم طول نمودار g به بالا رویم.



برای رسم تابع به معادلهٔ $y=f(x)-g(x)$، باید از هرنقطهٔ روی محور xها، رابطی موازی محور عرضها رسم کنیم تا به نمودار f برسیم، سپس از این نقطه به اندازهٔ عرض نقطهٔ هم طول g به پایین بیاییم.



(۳): روش اول:

فرض می‌کنیم آن ریشهٔ معادلهٔ x باشد. پس $x=5-2\sqrt{3}$ باید طرفین آن را به توان ۲ برسانیم، چون می‌خواهیم معادله درجه دوم حاصل ضرایب گویا داشته باشد، باید بنویسیم: $x-5=-2\sqrt{3}$ سپس طرفین این رابطه را به توان ۲ برسانیم:

$\Rightarrow x^2-10x+25=12\Rightarrow x^2-10x+13=0$

روش دوم:

اگر معادلهٔ درجه دومی با ضرایب گویا، یک ریشه $(5-2\sqrt{3})$ داشته باشد، حتماً باید ریشهٔ دیگرش $(5+2\sqrt{3})$ باشد تا S یعنی مجموع ریشه‌ها و P یعنی حاصل‌ضرب ریشه‌ها رادیکالی نباشند.

$$\Rightarrow \begin{cases}x'=5-2\sqrt{3}\\ x''=5+2\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}S=10\\ P=25-12=13\end{cases}$$

$x^2-Sx+P=0\Rightarrow x^2-10x+13=0$

(۴): برای تعیین ضابطهٔ تابع معکوس تابع f، باید x را از تابع اصلی پیدا کرد، سپس جای x و y را با هم عوض کرد.

$y=x\sqrt{x}+3x+3\sqrt{x}$

$y+1=x\sqrt{x}+3x+3\sqrt{x}+1$

$y+1=(\sqrt{x}+1)^3\Rightarrow(\sqrt{x}+1)=\sqrt[3]{y+1}$

$\Rightarrow\sqrt{x}=\sqrt[3]{y+1}-1\Rightarrow x=(\sqrt[3]{y+1}-1)^2$

حال، جای x وy را با هم عوض می‌کنیم.

$\Rightarrow y=(\sqrt[3]{x+1}-1)^2\Rightarrow f^{-1}(x)=(\sqrt[3]{x+1}-1)^2$

(۵)

$|f(x)-3|<\frac{1}{100}\Rightarrow|4x-1-3|<\frac{1}{100}$

$\Rightarrow|4x-4|<\frac{1}{100}\Rightarrow 4|x-1|<\frac{1}{100}$

$\Rightarrow|x-1|<\frac{1}{400}\Rightarrow-\frac{1}{400}<x-1<+\frac{1}{400}$

$1-\frac{1}{400}<x<1+\frac{1}{400}\Rightarrow\frac{399}{400}<x<\frac{401}{400}$

(۶): چون $C\ne 0$، صورت و مخرج تابع را بر C تقسیم می‌کنیم.

$$\Rightarrow y=\frac{\frac{a}{c}x+\frac{b}{c}}{x+\frac{d}{c}}$$

اگر $\frac{a}{c}=m$ و $\frac{b}{c}=n$ و $\frac{d}{c}=k$ فرض شوند، داریم:

$y=\frac{mx+n}{x+k}$

محل تلاقی مجانبها $O'\left|\begin{matrix}-k=1\\ m=2\end{matrix}\right.\Rightarrow\begin{cases}\boxed{k=-1}\\ \boxed{m=2}\end{cases}$

$A\left|\begin{matrix}0\\ -1\end{matrix}\right.\xrightarrow{\text{درمعادلهٔ منحنی}}-1=\frac{0+n}{0+k}\Rightarrow-1=\frac{n}{k}$

معادله تابع $\quad\Rightarrow -1=\frac{n}{-1}\Rightarrow\boxed{n=1}\Rightarrow y=\frac{2x+1}{x-1}$

رسم منحنی تابع: به معادلهٔ $y=\frac{2x+1}{x-1}$

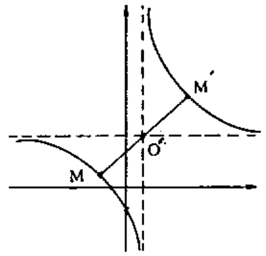
$y=2$: مجانب افقی $\quad$ $x=1$: مجانب قائم

$y'=\frac{2(x-1)-(2x+1)}{(x-1)^2}=\frac{-3}{(x-1)^2}<0$

$x=0\Rightarrow y=-1 ,\ y=0\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$

x	y
قائم {۱	$\pm\infty$
$\pm\infty$	افقی {۲
۰	-1
$-\frac{1}{2}$	۰

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
y'		$-$		$-$		$-$		$-$	
y	2	$\searrow$		$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	2



حل قسمت آخر مسأله (۶) $x=0 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow A\Big|_{-1=f(x_0)}^{0=x_0}$

$$f'(x)=\frac{-3}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(x_0)=\frac{-3}{1}=-3$$

معادلهٔ خط مماس برمنحنی در نقطهٔ $A\Big|_{f(x_0)}^{x_0}$ به‌صورت زیر است:

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

$$y=-3(x-0)-1 \Rightarrow \boxed{y=-3x-1}$$

معادلهٔ خط قائم بر منحنی درنقطهٔ $A\Big|_{f(x_0)}^{x_0}$ به‌صورت زیر است :

$$y=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)$$

$$y=+\frac{1}{3}(x-0)-1 \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{3}x-1}$$

حل مسأله‌های حساب دیفرانسیل (۱)

حل مسأله (۱)

اولاً : فرض می‌کنیم :

$$\begin{cases}\lim (n^2-2n)=l\\ n\to+\infty\end{cases}$$

پس باید ثابت کنیم برای هر $\varepsilon>0$، عددی مانند M، $M\in N$ وجود دارد که برای هر $n>M$ داشته باشیم $\left|n^2-2n-l\right|<4$ و می‌نویسیم :

$$\left|n^2-2n-l\right|<4 \Rightarrow n^2-2n-L<4 \Rightarrow n^2-2n<L+4$$

$n\to\infty$

$$\Rightarrow (n-1)^2-1<l+4 \Rightarrow (n-1)^2<l+4+1$$

$$\Rightarrow n-1<\sqrt{l+4+1} \Rightarrow n<\sqrt{l+4+1}+1$$

و این غیرممکن است، زیرا وقتی، $n\to\infty$، n کراندار نیست.

ثانیاً :

$$\lim_{n\to+\infty} (n^2-2n)=+\infty$$

باید ثابت کنیم برای هر $N>0$، عددی مانند M وجود دارد که $n>M \Rightarrow n^2-2n>N$

می‌نویسیم :

$$n^2-2n>N \Rightarrow (n-1)^2-1>N \Rightarrow (n-1)^2>N+1$$

$$\Rightarrow n-1>\sqrt{N+1} \Rightarrow n>\sqrt{N+1}+1$$

اگر $M=\sqrt{N+1}+1$ فرض شود، آنگاه برای هر $n>M$ داریم $n^2-2n>N$.

(۲)

$$\frac{2}{1-4K^2}=\frac{-2}{4K^2-1}=\frac{-2}{(2K+1)(2K-1)}=\frac{A}{2K+1}+\frac{B}{2K-1}$$

$$\Rightarrow \frac{-2}{4K^2-1}=\frac{2AK-A+2BK+B}{4K^2-1}$$

$$=(2A+2B)K+(B-A)\equiv-2 \Rightarrow \begin{cases}2A+2B=0\\ B-A=-2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A=1\\ B=-1\end{cases}$$

درنتیجه :

$$\frac{2}{1-4K^2}=\frac{1}{2K+1}-\frac{1}{2K-1}$$

$$K=1 \Rightarrow S_1=\frac{1}{3}-\frac{1}{1}$$

$$K=2 \Rightarrow S_2=\frac{1}{5}-\frac{1}{3}$$

$$K=3 \Rightarrow S_3=\frac{1}{7}-\frac{1}{5}$$

....

$$K=K \Rightarrow S_K=\frac{1}{2K+1}-\frac{1}{2K-1}$$

درنتیجه :

$$\sum_{K=1}^{\infty}\frac{2}{1-4K^2}=\frac{1}{2K+1}-1 \Rightarrow \sum_{K=1}^{\infty}\frac{2}{1-4K^2}=-1$$

پس سری همگرا به عدد (۱-) است.

(۳)

باید ثابت کنیم برای هر $\varepsilon>0$، وجود دارد $\delta>0$ به‌طوری که

$$0<|x-1|<\delta \Rightarrow \left|\frac{x^2+1}{x^2-4x+5}-1\right|<\varepsilon$$

می‌نویسیم :

$$\left|\frac{x^2+1}{x^2-4x+5}-1\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1+4x-5}{x^2-4x+5}\right|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{4|x-1|}{\left|x^2-4x+5\right|}<\varepsilon$$

می‌دانیم مینیمم x^2-4x+5 برابر (۱) است :

اگر $\quad \frac{4|x-1|}{1}<\varepsilon \Rightarrow \frac{4|x-1|}{\left|x^2-4x+5\right|}<\varepsilon$

$$\Rightarrow |x-1|<\frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow \delta\le\frac{\varepsilon}{4}$$

(۴)

الف : مجانب قائم :

$$y\to\infty \Rightarrow \frac{t+2}{t(t+1)}\to\infty \Rightarrow t(t+1)\to 0$$

درنتیجه :

$$\begin{cases}t\to 0 \Rightarrow x\to\infty\\ t\to -1 \Rightarrow x\to\frac{3}{2}\end{cases}$$

پس خط به معادله $x=\frac{3}{2}$ معادله مجانب قائم منحنی تابع است.

ب : مجانب افقی :

$$x\to\infty \Rightarrow \frac{t-2}{t(t-1)}\to\infty \Rightarrow t(t-1)\to 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases}t\to 0 \Rightarrow y\to\infty\\ t\to 1 \Rightarrow y\to\frac{3}{2}\end{cases}$$

پس خط به معادلهٔ $y=\frac{3}{2}$ معادلهٔ مجانب افقی است.

ج : می‌دانیم شرط لازم وجود مجانب مایل در یک منحنی به معادله $y=f(x)$ آن است که $\begin{cases}x\to\infty\\ y\to\infty\end{cases}$

باید (t)ای پیدا کنیم تا باعث ایجاد این شرط شود، ضمن تعیین مجانبهای قائم و افقی به این t برخوردیم و آن $t\to 0$ یعنی اگر $t\to 0$ آنگاه $\begin{cases}x\to\infty\\ y\to\infty\end{cases}$.

چنانچه معادلهٔ مجانب مایل به‌صورت $y=mx+h$ باشد داریم :

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{t\to 1}\frac{\frac{t+2}{t(t+1)}}{\frac{t-2}{t(t-1)}}=\lim_{t\to 0}\frac{\cancel{t}(t-1)(t+2)}{\cancel{t}(t+1)(t-2)}=$$

$$\frac{-2}{-2} \Rightarrow \boxed{1=m}$$

$$h=\lim_{x\to\infty}(y-mx)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{t+2}{t(t+1)}-\frac{t-2}{t(t-1)}\right)$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{(t-1)(t+2)-(t+1)(t-2)}{t(t^2-1)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2t}{t(t^2-1)}=\frac{2}{-1} \Rightarrow \boxed{-2=h} \Rightarrow \boxed{y=x-2}$$

معادله مجانب مایل

(۵) اگر $A'\Big|_{2}^{10}$ روی منحنی تابع f باشد، آنگاه $A\Big|_{10}^{2}$ روی منحنی تابع f است، پس :

$$y=10 \Rightarrow 10=x^3+x \Rightarrow \boxed{x=2} \Rightarrow A\Big|_{10}^{2} \;;A'\Big|_{2}^{10}$$

$$(f^{-1})'_{(10)}=\frac{1}{f'_{(2)}}=\frac{1}{3x^2+1}\Big|_{x=2}=\frac{1}{13}=m_{\text{مماس در }A'} \Rightarrow m_{\text{قائم}}=-13$$

$$y-y_{A'}=m_{\text{قائم}}(x-x_{A'}) \Rightarrow y-2=-13(x-10)$$

$$\Rightarrow \boxed{y=-13x+132}$$

(۶)

$$\text{هزینه متوسط}=\frac{C(x)}{x}=\frac{2000+1/2x+30\sqrt[3]{x^2}}{x}$$

$$x=3375 \Rightarrow \frac{C(x)}{x}=\frac{2000+1200+30\times\sqrt[3]{(3375)^2}}{3375}$$

هزینه متوسط

$$=\frac{3200+30\sqrt[3]{15^6}}{3375}=\frac{3200+30\times 225}{3375}=2/94$$

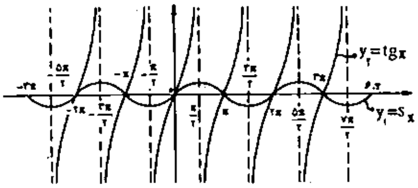
$$\text{هزینهٔ نهایی}=C'(n)=1/2+30\times\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

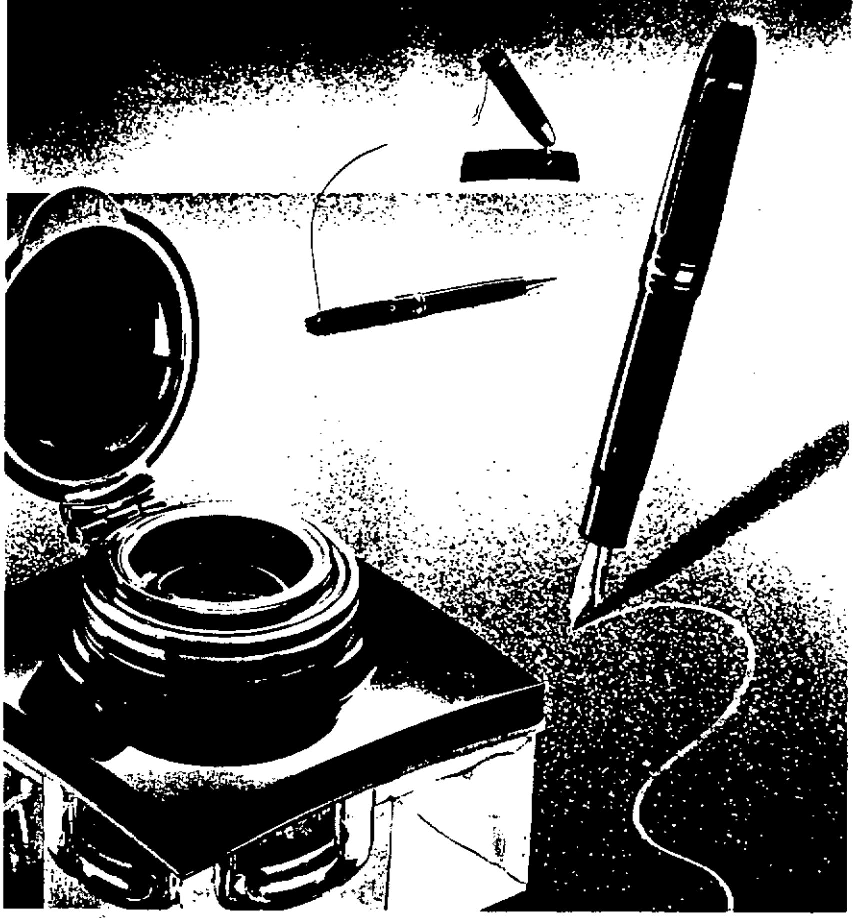
$$C'(3375)=1/2+\frac{30\times 2}{3\sqrt[3]{3375}}=1/2+\frac{30\times 2}{3\times 15}=2/53$$

هزینه نهایی

(۷)

باید دو تابع به معادله‌های $y_1=\sin x$ و $y_2=\operatorname{tg}x$ را رسم کنیم، ملاحظه می‌کنیم تعداد نقاط تقاطع بی‌شمار است. پس معادلهٔ $\sin x-\operatorname{tg}x=0$ بی‌شمار ریشه دارد.





جوابهای تفریح اندیشه

پاسخ ۱:

پاسخ: معمای اول شاید «خیلی ساده» باشد، از قوطی با برچسب «ق ـ س» یک لوبیا بردارید. این تنها انتخابی است که باید انجام دهید. هر دو لوبیای داخل این قوطی که یک رنگ‌اند به این ترتیب مشخص می‌شوند : برچسب «ق ـ س» را بردارید و آن را با برچسب صحیحی که از یکی از دو قوطی دیگر برداشته‌اید عوض کنید. اکنون برچسبهای این دو قوطی را تعویض کنید. در این حال هر سه قوطی دارای برچسب صحیح‌اند.

توجه داشته باشید که لوبیاها نمی‌توانسته‌اند به‌صورت یک قرمز و یک سیاه در هر قوطی توزیع شده باشند، زیرا در این صورت برچسب «ق ـ س» صحیح می‌شود.

معمای دوم یکی دیگر از آن «پارادوکسها»ی عالی احتمال را مطرح می‌کند که از قرار معلوم منطق انکارناپذیر در آنها درواقع موجه نماست. در حقیقت احتمال اینکه لوبیای دوم قوطی نیز قرمز باشد دو برابر احتمال سیاه بودن آن است.

کار را با بیرون آوردن اولی آغاز می‌کنیم. می‌توانستیم با احتمالی مساوی لوبیایی سیاه بیرون بیاوریم. در این صورت بی‌توجه به رنگ بیرون آورده شده احتمال بیرون آوردن لوبیای مورد نظر از قوطی «همرنگ» («ق ـ ق» یا «س ـ س») دو برابر احتمال بیرون آوردن آن از قوطی «مخلوط» («ق ـ س») است.

طریق دیگر پرداختن به این مسأله، این استدلال است که احتمال برداشته شدن لوبیای قرمز از قوطی «ق ـ ق» دو برابر بیرون آمدن آن از قوطی «ق ـ س» است، زیرا در اولی دو قرمز و در دومی تنها یک قرمز وجود داشته است.

اگر هنوز پاسخ داده شده را (یعنی احتمال ۲ در ۳ برای اینکه لوبیای دوم نیز قرمز باشد) را نپذیرفته‌اید سه لیوان و شش مهره برداشته، ده الی بیست بار آزمایش کنید.

در ضمن، گرچه استدلال ارائه شده در صورت معما محققاً متداولترین پاسخ داده شده است، تنها پاسخ خطایی که تاکنون شنیده‌ام نیست. زمانی مهندسی برجسته با این جواب شگفت‌زده‌ام کرد که، از آنجا که بعد از بیرون آوردن لوبیا پنج لوبیای نامشخص، ۳ سیاه و ۲ قرمز، موجودند، احتمال اینکه لوبیای دوم سیاه باشد $۱\frac{۱}{۲}$ است.

پاسخ ۲:

پاسخ: از دو گزارهٔ اول یکی راست و دیگری دروغ است. گزارهٔ «ت» نمی‌تواند بدون اینکه متناقض با خودش باشد، راست باشد. گزارهٔ آخر، چه «ب» راست باشد چه نه، نمی تواند بدون نقض کردن «ب» یا «ت» دروغ باشد. نتیجه : شخص بسیار منطقی‌ای هستید، نتیجه‌ای تملق‌آمیز، اما آیا راست است؟

فرض می‌کنیم گزارهٔ «ث» به دروغی آشکار چون «سیاه سفید است» تبدیل شود. در این صورت درست مثل منطقیون یونانی زمانی که ایپمنیوس «Epimenides of Crete» فریاد زد:«تمام کرتیها دروغگویند» با پارادوکس مواجه می‌شویم.

در راه غلبه بر این پارادوکسها و آوردن منطق در دستگاهی ریاضی و صوری کارهای بسیاری توسط متفکران جدیدی چون راسل و وایتهد به عمل آمده است. از گودل اصل عدم قطعیت «Uncertainty Principle» را داریم که بر این است که دستگاهی که با خودش سر و کار دارد با پارادوکس مواجه می‌شود، و اصلهایش را نمی‌توان در خود آن دستگاه به اثبات رساند.

در این صورت پاسخ به معمای مورد نظر این است که راستی گزارهٔ «ث» غیرقطعی است. **ویلیام جیمز** نوشته است : «اندیشه‌های راست آنهایی هستند که بتوان آنها را درک کرد، اعتبار داد، تأیید کرد و به اثبات رساند.»

پاسخ ۳:

چون سهم هر نفر ۱۶ تومان است بنابراین قیمت کل غذاهای سفارش داده شده ۴۸=۳×۱۶ تومان می‌باشد. از طرفی مجموع ظرفهای سفارش داده شده، ۸=۳+۵ ظرف و قیمت هرکدام نیز برابر می‌باشد، پس قیمت هر ظرف غذا ۶=۸:۴۸ تومان است.

چون مهرداد ۵ ظرف سفارش داده بود، قبلاً باید ۳۰=۵×۶ تومان می‌پرداخت که اگر از آن سهم مساوی ۱۶ تومان را برداریم می‌شود ۱۴=۱۶−۳۰ تومان یعنی مهرداد باید ۱۴ تومان از علی بگیرد. همین‌طور آرش قبلاً ۱۸=۶×۳ تومان باید می‌پرداخت که اگر ۱۶ تومان را از آن کم کنیم می‌شود ۲=۱۶−۱۸ تومان، بنابراین آرش هم ۲ تومان باید از علی بگیرد. به عبارت دیگر از ۱۶ تومانی که علی بابت غذایش پرداخته، ۱۴ تومان به مهرداد و ۲ تومان را به آرش داده است.

پاسخ ۴:

در ساعت ۱۱ هرکدام از آنها به اندازهٔ یک ساعت راهپیمایی تا میهمانخانه با هم فاصله دارند، یعنی مهرداد ۶کیلومتر و دوستش ۵/۵کیلومتر. بنابراین فاصلهٔ این دو از یکدیگر در ساعت ۱۱ برابر است با ۱۱/۵=۵/۵+۶کیلومتر.

Borhan
Vol. 7 No. 2
Serial numbers: 22 Autumn 1997

In the name of God

- Borhan is a mathematics journal published four times a year by Madrasse Publications.
Each issue includes articles related to mathematics and its various topics specifically those concerning highschool education in Iran.

All communications should be sent to the editor at the following address:
Madrasse Publication - No. 36. Haghighat talab Street, Sepahbod gharany Ave, Tehran, Iran
Post code: 14155/1949

Contents:

1. You, Too, can be successful in your mathematics lessons. — P. Shahriari
2. About f(x)
3. A brief history of mathematics magazins in Iran. — G. R. Yassipour
4. Function and concept of function IV — H. R. Amiri
5. Numerical methods for computation ...
6. Computer and next job — M. S. Meshkenani
7. Descrete mathematics — G. R. Yassipour
8. Acquaintance with Famous Mathematicians. — S. M. R. Hashemi mosavi
9. coupled line theorem — S. Jafari
10. Harmonic mean — P. Shahriari
11. Sinusoid and cosine curressketching (point to point) — M. S. Sadr
12. Equivalence of intermediate value theorem and ... — M. S. Asgari
13. Locus XII — M. H. Rostami
14. Instruction of translation of mathematics articles. — H. R. Amiri
15. Short articles of authentic mathematics journals. — G. R. Yassipour
16. Solving of a fundamental problem of mathematics by elementary methods. — G. R. Yassipour
17. Decomposition into prime factors
18. An algorithm for solution cubic equation — A. Amidi
19. 2nd annual iranian mathematics education conference

ابوالجود

ابوالجود محمدبن لیث از ریاضیدانان مسلمانِ ایرانی نیمهٔ دوم قرن چهارم هجری و شاگرد صاغانی و معاصر با بیرونی بوده و با او و عده‌ای دیگر از ریاضیدانان زمان خود و از جمله سجزی رابطهٔ علمی داشته است.

از نوشته‌های او چنین برمی‌آید که پس از فراغت از تحصیل، درس و مدرسه را رها کرد و ظاهراً در قلمرو پادشاهان سامانی یعنی خراسان و ماوراءالنهر به **اَعمال سلطانی** (کارهای اداری دربار) مشغول بوده و در عین حال به ریاضیات می‌پرداخته است.

بیرونی در قانون مسعودی ابوالجود را از ریاضیدانان برجستهٔ زمان خود خوانده و در کتاب «استخراج‌الاوتار» به یکی از مقالات وی درباره حلّ یک مسأله هندسی اشاره کرده است.

خیام پس از ذکر دو **صِنف** معادلهٔ منسوب به ابوالجود خطای او را در حل معادلهٔ $x^3+a=cx^2$ به‌وسیلهٔ قطوع مخروطی به تفصیل شرح داده است.

یوشکویچ، با درنظرگرفتن مطالبی که خیام دربارهٔ ابوالجود نوشته، نتیجه گرفته است که: چنین به‌نظر می‌آید که ابوالجود یکی از نخستین کسانی است که کوشیده‌اند تا براساس روشهای قدما یک نظریه کلی برای حل معادلات درجهٔ سوم بیابند.

ابوالجود در حل مسألهٔ تثلیث زاویه و تقسیم دایره به هفت و نه جزء متساوی، تحقیقاتی به‌عمل آورده است. وی در رساله‌ای که در جواب سؤالات ابوریحان بیرونی دربارهٔ چهار مسأله هندسی نوشته است حل مسأله سوم یعنی چگونگی تقسیم دایره به نه جزء متساوی را به حل معادلهٔ زیر برگردانده است:

$$x^3+1=3x$$

در همان رساله ابوالجود حل یک مسألهٔ هندسی دیگر (سؤال اول بیرونی) را به حل یک معادلهٔ درجهٔ چهارم برگرداند، و آن را به وسیلهٔ تقاطع یک سهمی و یک هذلولی متساوی‌القطرین حل کرده است.

ابوالجود چند رساله در جواب مسایلی که برای او مطرح می‌کرده‌اند به قرار زیر نوشته است:

۱- بیرونی راه حل چهار مسأله هندسی را از ابوالجود خواسته بود و او رساله‌ای را در جواب بیرونی نوشته است. نسخهٔ اصلی این رساله در لیدن موجود است.

سؤال اول بیرونی این است: پاره‌خط BC و نقطه A در خارج آن مفروض است. می‌خواهیم از نقطه A خط راستی رسم کنیم که BC را در نقطه D قطع کند، به وجهی که رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$AB\times BC+\overline{BD}^2=\overline{BC}^2$$

ابوالجود این مسأله را به‌وسیله تقاطع یک سهمی و یک هذلولی متساوی‌القطرین حل کرده است.

سؤال دوم بیرونی این است: اگر کسی گفت که وتر یک هفتم دایره مساوی با نصف وتر یک سوم دایره است، چگونه عدم امکان این را ثابت کنیم؟

سؤال سوم دربارهٔ محاسبه ضلع نه ضلعی منتظم محاطی از راه جبر است.

ابوالجود این مسأله را به حلّ معادلهٔ درجهٔ سوم $x^3+1=3x$ برگردانده است.

سؤال چهارم بیرونی مربوط است به محاسبهٔ وتر کمان یک درجه از دایره.

۲- جواب ابوالجود به مسأله‌ای که توسط ابوجعفرخازن طرح شده است.

مسأله این است: مثلث ABC و نقطه D مفروض است. ضلع BC را از دوطرف امتداد می‌دهیم و می‌خواهیم روی آن نقطه‌ای مانند M بیابیم که اگر آن را به D وصل کنیم تا اضلاع AB و AC را در نقاط P و Q قطع کند، نسبت $\frac{QM}{PQ}$ مساوی با عدد معلومی شود.

۳- جواب ابوالجود به مسأله‌ای است که توسط سجزی طرح شده است.

مسأله این است: ترسیم خط راستی که از نقطهٔ معین بگذرد و سه خط راست متقارب را قطع کند، به‌نحوی که برخی از پاره‌خطهای حاصل دارای نسبت معینی باشند.

(برگرفته از کتاب زندگینامه ریاضیدانان دورهٔ اسلامی مرکز نشر دانشگاهی)