ISSN:1735-4951
www.roshdmag.ir

رشد برهان

مجله ی ریاضی

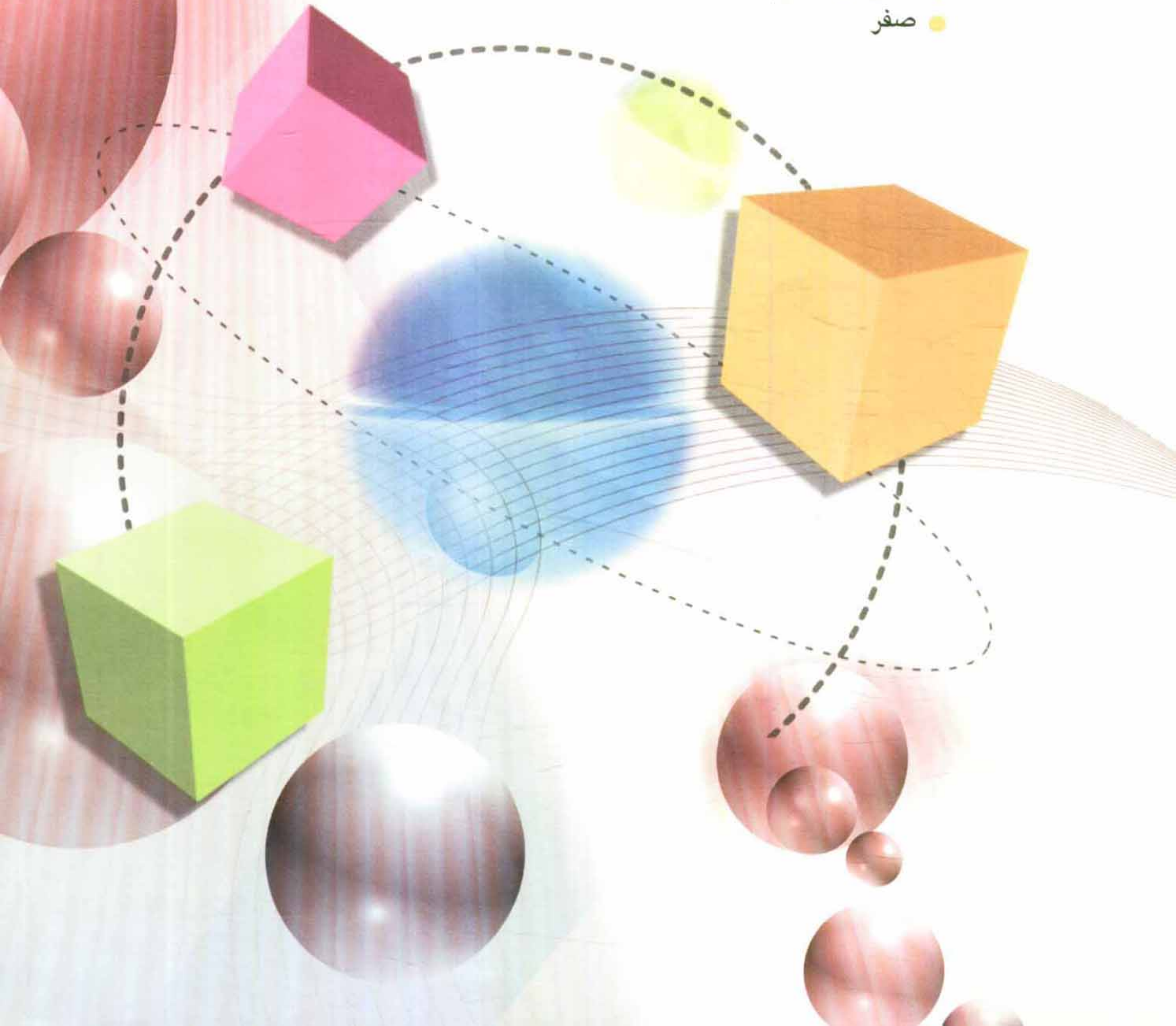
دوره ی متوسطه

۶۲

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش وبرنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

فصلنامه ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی

• دوره‌ی هجدهم • شماره‌ی ۴ • تابستان ۱۳۸۸ • بها: ۴۰۰۰ ریال



محمد بن حسین کرجی

ریاضی دان ایرانی

تا چندی پیش وی را به غلط کرخی می‌نامیدند و او را به «کَرخ» واقع در حومه‌ی بغداد منسوب می‌کردند و از اهل عراق می‌شمردند. وی از ریاضیدانان بزرگ ایران در نیمه‌ی دوم سده‌ی چهارم و اوایل سده‌ی پنجم و از مردم کرج (واقع در نزدیکی تهران کنونی) بوده است. ظاهراً کرجی در شهر ری که در آن زمان مرکز دانشمندان بوده به تحصیل پرداخته و سپس به بغداد رفته و با ابوغالب محمدبن علی بن خلف واسطی ملقب به فخر الملک (متوفی به سال ۴۰۷) وزیر بهاءالدوله[1] و وزیر پسر او سلطان‌الدوله[2] ارتباط داشته و کتاب معروف خود الفخری را به نام وی نوشته است. کرجی در حدود سال ۴۰۳ یا پیش از آن تاریخ از عراق به زادگاه خود بازگشته و برای ابوغانم معروف‌بن محمد[3] کتابی درباره‌ی «استخراج آب‌های پنهانی»[4] نوشته است.

کرجی در مقدمه‌ی کتاب انباط المیاه الخفیه ـ= استخراج آب‌های پنهانی) نوشته است:

«چون به سرزمین عراق وارد شدم و مردم آن دیار را از کوچک و بزرگ دوستدار دانش دیدم، دریافتم که دانش و اهل دانش را بزرگ و محترم می‌شمارند، در مدتی که در آن‌جا بودم تصنیفی در حساب و هندسه پرداختم. سرانجام وقتی به سرزمین جبل (=طبرستان) بازگشتم مطالبی که از اوضاع عراق تصنیف کرده بودم در جبل گم شد و ناپدید گشت. شعله‌ی اشتیاق تصنیف فرو نشست و طبع آماده به تألیف فرو افسرد تا آن‌که خدا سرزمین جبل و مردم آن را به دیدار مولانا الوزیر، الرئیس، السیدالاجل المنصور ولی النعم ابوغانم معروف‌بن محمد یاری فرمود.»

از عبارات فوق نتیجه می‌شود که اولا کرجی از اهل عراق نبوده بلکه از زادگاه خود بدانجا سفر کرده و بعد هم به طبرستان مراجعت کرده است. ثانیاً تاریخ مراجعت کرجی را از عراق به ایران می‌توان در حدود سال ۴۰۳ یا کمی قبل از آن دانست. زیرا ابوغانم معروف‌بن محمدوزیر منوچهربن قابوس بوده و منوچهر از سال ۴۰۳ به بعد سلطنت کرده است و به‌طوری که از نوشته‌ی کرجی برمی‌آید وی پیش از وزارت ابوغانم به طبرستان بازگشته است.

کرجی در کتاب استخراج آب‌های پنهانی از مشاهدات خود در بعضی از شهرهای ایران و از جمله ساوه و اصفهان گفت‌وگو کرده است.

سوتر تاریخ وفات کرجی را در حدود سال ۴۲۰ تعیین کرده است.

آثار ریاضی موجود کرجی

۱. الفخری فی (صناعة) الجبر و المقابله

این کتاب از جهت تاریخ ریاضیات مهم است. زیرا علاوه بر آن‌که بسیاری از مطالب آن بدیع و تازه است مؤلف این کتاب را با شرح چگونگی محاسبات جبری شروع کرده و فصلی را به این مبحث اختصاص داده که در کتاب‌های جبر پیش از وی دیده نمی‌شود.

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد برهان ۶۲

مجله‌ی ریاضی

دوره‌ی آموزش متوسطه

ISSN 1735 - 4951

فصلنامه‌ی آموزشی، تحلیلی واطلاع‌رسانی

دوره‌ی هجدهم /شماره‌ی۴/ تابستان ۱۳۸۸/شمارگان: ۱۱۰۰۰ نسخه

◆ مدیر مسئول : محمد ناصری

◆ سردبیر : حمیدرضا امیری

◆ مدیر داخلی : میرشهرام صدر

◆ طراح گرافیک : آزیتا کوثری

◆ اعضای هیئت تحریریه : حمیدرضا امیری، محمد هاشم رستمی، احمد قندهاری، میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی، سید محمدرضا هاشمی موسوی، غلامرضا یاسی پور و با تشکر از همکاری ارزنده‌ی استاد پرویز شهریاری

◆ ویراستار ادبی : کبری محمودی

◆ چاپ و صحافی : شرکت‌افست (سهامی عام)

www.roshdmag.ir

صندوق الکترونیکی سردبیر : Borhanm@roshdmag.ir

پیام‌گیر نشریات رشد : ۸۸۸۳۹۲۳۲-۸۸۳۰۱۴۸۲

◆ نشانی دفتر مجلّه : تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵ تلفن دفتر مجله : ۸۸۳۰۵۸۶۲

تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ ـ ۷۷۳۳۵۱۱۰

رشد برهان متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر به همکاری دعوت می کند:

■ نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث درسی کتاب‌های ریاضی دوره‌ی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)

■ طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)

■ طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)

■ طرح معماهای ریاضی

■ نگارش یا ترجمه‌ی مقاله‌های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه‌ی علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش کامپیوتر و ...)

رشد برهان متوسطه هر سه ماه، یکبار منتشر می شود.

مجلّه در حکّ، اصلاح، حذف و اضافه ی مقاله ها آزاد است.

مقاله های وارده ،باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.

مقاله های رسیده مسترد نمی شود.

استفاده از مطالب مجلّه در کتاب ها یا مجله های دیگر با ذکر دقیق مأخذ بلامانع است.

حرف اول

یادداشت سردبیر

عزیزان دانش‌آموز و علاقه‌مندان به درس شیرین ریاضی، سلام. سلامی به گرمی تابستان؛ تابستانی که ان‌شاءالله با برنامه‌ریزی مناسب بتوانید بهترین استفاده را از آن ببرید و سال تحصیلی جدید را با دستی پر آغاز کنید. در شماره‌ی قبل راجع به یکی از ارکان آموزش، یعنی کتاب درسی، با شما صحبت کردم. در این فرصت می‌خواهیم راجع به اصلی‌ترین رکن آموزش و پرورش یعنی معلم حرف بزنیم که بعد از خداوند تبارک‌وتعالی و پدر و مادر، سنگین‌ترین مسئولیت‌ها یعنی مسئولیت انسان‌سازی و تربیت بر عهده‌ی اوست. اگرچه به حق، قلم و زبان قاصر از بیان ویژگی‌ها و جایگاه رفیع معلم است، اما آن‌چه را در حد این صفحه امکان‌پذیر است، با هم درمیان می‌گذاریم. در عظمت و بزرگی جایگاه مقام معلم همین دو روایت کفایت می‌کند که پیامبر اکرم(ص) فرمودند: «انّی بُعثتُ مُعلّما» و حضرت علی(ع) فرمودند: «من علمنی حرفا فقد صیرنی عبدا». همین معلم است که ما باید در محضر او قرار گیریم و از او بیاموزیم.

دوست عزیز، به واسطه‌ی حضور و وجود معلم است که کلاس درس و فضای آموزشی و میز و نیمکت‌های کلاس از قداست و معنویت برخوردار است.

آموزه‌های دینی ما متذکر این مهم هستند که همواره باید در حضور و محضر استاد با ادب و آداب خاصی قرار گیریم و با تمام وجود گوش دل و سر را متوجه درس او سازیم. معلم در کلاس درس باید ویژگی‌های خاصی برای ارائه‌ی مطالب درسی داشته باشد. باید حضور ذهن و تمرکز داشته باشد، باید احساس کند مخاطبانش با همه‌ی وجود، حضور فیزیکی و ذهنی دارند و با حواس جمع درس او را گوش می‌دهند. این تمرکز می‌تواند با یک حرکت نابه‌جا، با خنده‌ای بی‌موقع، شیطنتی کوچک و حتی با یک سؤال بی‌مورد و بدون ارتباط با موضوع، به‌هم بخورد و سررشته‌ی کلام از دست معلم خارج شود که در این صورت بیشترین ضرر متوجه شما خواهد بود.

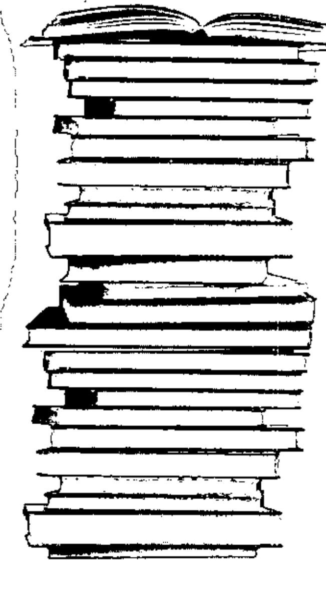
با ادب نشستن، با ادب سؤال کردن، با خضوع جواب دادن و با تواضع بحث کردن در محضر معلم، جزو اصلی‌ترین سفارشات و آموزه‌های دینی ما به‌شمار می‌رود که رعایت نمودن این موارد، در درجه‌ی اول به نفع خود دانش‌آموزان است.

همان‌طور که معلم به عنوان یک الگو موظف است با ظاهری آراسته و ساده در کلاس حاضر شود، دانش‌آموزان نیز باید با ظاهری کاملاً ساده و به اصطلاح دانش‌آموزی، در این فضای مقدس یعنی کلاس درس حاضر شوند و بیرون کلاس نیز موظف‌اند با معلمان خود در نهایت ادب و تواضع برخورد کنند و احترام به معلم و مقام معلم فقط محدود و منحصر به داخل کلاس نیست. مگر نه این‌که حضرت امیر(ع) فرمودند: هرکس حرفی (یا مطلبی) به من بیاموزد، مرا بنده‌ی خود کرده است.»

آیا سزاوار است که شاگرد در برابر معلم خود بی‌احترامی کند؟ بدون اجازه از کلاس خارج و یا به کلاس وارد شود؟ هرگز سزاوار نیست! از پدران یا پدربزرگ‌های خود سؤال کنید، وقتی یکی از معلمان خود را حتی بیرون از مدرسه و در کوچه و خیابان می‌دیدند، چه عکس‌العملی نشان می‌دادند و با چه احترامی با آن‌ها برخورد می‌کردند. آیا این فرهنگ بسیار باارزش و گران‌قدر به آن‌ها کمک نمی‌کرد که در کلاس درس هم بتوانند از وجود و محضر معلم خود استفاده‌ی بهینه داشته باشند؟

عزیزان دانش‌آموز، ان‌شاءالله با احیای این فرهنگ پسندیده و پرمحتوا، بتوانید به وظیفه‌ی اصلی خودتان، یعنی آموختن دانش عمل کنید و آن را به نسل‌های بعد از خود انتقال دهید.

والسلام



ریاضیات در ایران (۴)

فرزندان موسی شاکر

● پرویز شهریاری

● تصویرساز: امیر سیاحی

موسی شاکر یک نام پُرآوازه در دربار مأمون[۱] بود. او از اهالی خراسان بود و به ستاره‌شناسی علاقه‌ی زیادی داشت و این فن را از پدران خود یاد گرفته بود. بسیاری شب‌ها دور از روشنایی خانه‌ها، در بیابان‌های اطراف به مشاهده و جست‌وجو در رفتار ستارگان می‌پرداخت. از طلوع و غروب آن‌ها باخبر بود و پیوسته مشاهداتش را یادداشت می‌کرد.

مأمون با آن‌که منجمان زیادی داشت که طالع او و حوادث آینده را پیشگویی می‌کردند، اما به دلیل بیان امیدبخش موسی در گفته‌هایش، به او علاقه‌ی خاصی داشت. به همین دلیل موسی به سرعت در قصر مأمون شهرت و مقامی شایسته پیدا کرد. اما او حتی پس از آن‌که جایگاه ویژه و بی‌نظیرش را به‌دست آورد، دست از رصد ستارگان و شب‌زنده‌داری در بیابان‌های اطراف شهر برنداشت.

موسی مردی امین، باادب، منظم و دقیق بود. کارهای محوله را به‌خوبی و به‌موقع انجام می‌داد. سال‌ها به همین منوال گذشت تا این‌که در اطراف شهر مرو که مقر حکومت مأمون بود، راهزن‌ها، جاده‌ها را ناامن کردند و بسیاری از کاروان‌ها را مورد دستبرد قرار دادند. ناامنی و غارت اموال، مردم را عاصی کرد؛ به طوری که پی‌درپی به دربار پیغام می‌فرستادند و اعتراض و نارضایتی خود را به گوش مأمون می‌رساندند. ناامنی به‌قدری شدید شد که شک و بدگمانی را بین درباریان دامن زد و فرصت خوبی برای کینه‌ها و حسادت‌های فروخفته فراهم ساخت. رفت‌وآمدهای شبانه‌ی موسی عامل مناسبی برای تهمت زدن و لکه‌دار کردن شرافت او بود. خبرِ دست داشتن موسی در راهزنی‌های شبانه به‌گوش مأمون رسید؛ اما مردم همگی شهادت دادند که موسی را جز به نماز و عبادت، رفع مشکلات مردم و مطالعه‌ی رفتار ستارگان ندیده‌اند. مأمون هم تن به آن ادعاهای دروغ نداد و موسی این بار به لطف خداوند رحمان سربلند شد.

موسی سه پسر داشت: **محمد، احمد و حسن**. بعد از مرگ پدر این سه برادر در دربار مأمون می‌مانند، به تحصیل رو می‌آورند و در ریاضیات، مکانیک و اخترشناسی مشهور می‌شوند. آن‌ها را به نام «بنی‌موسی» و یا «بنوموسی» می‌شناسند. نوشته‌های آن‌ها را به دشواری می‌توان از هم جداکرد.

برادر بزرگ‌تر، یعنی محمد که به «ابوجعفر» مشهور است و در سال ۸۷۳ میلادی درگذشت، کمتر به ریاضیات می‌پرداخت و مهم‌ترین نوشته‌ی او کتابی است به نام «معرفة مساحة الاشکال بسیطه و کرویه» که به احتمالی دو برادر دیگر هم در تنظیم آن نقش داشته‌اند. این کتاب شامل ۱۸ قضیه است درباره‌ی مساحت و حجم سطح‌های متفاوت هندسی. **نصیرالدین توسی** این کتاب را به‌عنوان یک کتاب درسی درآورده است (چهار سده بعد از پیدایش آن). **لئوناردو داوینچی** (۱۵۱۷-۱۴۴۳ میلادی) ایتالیایی، در کتاب «هندسه‌ی کاربردی»، از قضیه‌های کتاب پسران موسی استفاده کرده است.

کتاب «معرفة مساحة...»، اول‌بار در سده‌ی دوازدهم میلادی به زبان لاتین ترجمه و در سال ۱۸۸۵ میلادی منتشر شد. در این کتاب به‌جز مساحت‌ها و حجم‌ها، درباره‌ی تقسیم زاویه به سه بخش برابر و تعیین واسطه‌ی بین دو مقدار نیز بحث شده است.

احمد فرزند موسی بیشتر در زمینه‌ی مکانیک کار می‌کرده و کتاب «الحیل» او نمونه‌ای از آن است. این کتاب را در زبان عربی «حیل» (یعنی حیله‌ها) می‌گفتند. درضمن، احمد و حسن تلاش کردند کتاب «سطح‌های مخروطی» **آپولونیوس** را به زبان عربی برگردانند، ولی ناتمام ماند.

پسران موسی امکانات مالی بسیاری در اختیار داشتند که سخاوتمندانه از آن‌ها در راه ترویج دانش استفاده می‌کردند. آن‌ها برای گردآوری کتاب، هیئت‌هایی را به روم و یونان می‌فرستادند و به برگردانان (مترجمان) و پژوهشگران علم یاری‌های فراوان می‌رساندند.

فرزندان موسی شاکر، قضیه‌ای را که به «قضیه‌ی هرون» (در سده‌ی اول میلادی) مشهور شده است و مربوط به محاسبه‌ی مساحت مثلث به یاری ضلع‌های آن می‌شود، ثابت کردند.

اروپایی‌ها برای نخستین‌بار، محاسبه‌ی مساحت مثلث به کمک طول‌های سه ضلع آن را، بین نوشته‌های **هرون** پیدا کردند. به همین مناسبت، این دستور را «دستور هرون» نام نهادند، در حالی که **ارشمیدس** (سده‌ی سوم پیش از میلاد) این دستور را پیدا کرده بود. ریاضی‌دانان ایرانی، از جمله ابوریحان بیرونی (۹۹۸-۹۴۷ میلادی) که خود اثبات دیگری درباره‌ی این دستور ارائه داده است، از اثبات ارشمیدس یاد کرده‌اند. اثبات ارشمیدس را ابوریحان بیرونی به عربی بازگردانده است. اگر طول ضلع‌های مثلث را a، b و c فرض کنیم و نصف مجموع سه‌ضلع را p بگیریم، این دستور چنین می‌شود:

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

قضیه‌ی مربوط به این دستور را، هرون در کتاب اول متریک خود آورده و آن را ثابت کرده و دستورها و قضیه‌های زیادی را، با کاربرد آن‌ها، برای اثبات ارائه شده است. او در کتاب خود می‌نویسد:

«تو می‌توانی اندازه‌ی مساحت مثلث را این گونه محاسبه کنی: طول ضلع‌های مثلث را یکی برابر ۱۳، دومی برابر ۱۴ و سومی برابر ۱۵ می‌گیریم. برای این‌که مساحت آن را پیدا کنیم، بدین‌ترتیب عمل می‌کنیم: ۱۳، ۱۴ و ۱۵ را با هم جمع می‌کنیم، ۴۲ به‌دست می‌آید. این را نصف می‌کنیم می‌شود ۲۱. ضلع‌های مثلث را یکی پس از دیگری از آن کم می‌کنیم: در آغاز ۱۳ را کم می‌کنیم، ۸ به‌دست می‌آید. بعد ۱۴ را که ۷ حاصل می‌گردد و سرانجام ۱۵ را که ۶ نتیجه می‌دهد. اکنون ۲۱ را در ۸ ضرب می‌کنیم، ۱۶۸ به‌دست می‌آید، این عدد را ۷ برابر می‌کنیم، می‌شود ۱۱۷۶. و این را ۶ برابر می‌کنیم، به‌دست می‌آید: ۷۰۵۶ که ریشه‌ی دوم آن ۸۴ می‌شود. این، مقدار مساحت را به ما می‌دهد.»

همین دستور را در سده‌ی نهم میلادی محمد، احمد و حسن پسران موسی هم مطرح کردند که می‌توان آن را در کتاب «اندازه‌گیری مساحت شکل‌های صفحه و شکل‌های کروی» دید. این کتاب در سده‌ی دوازدهم میلادی به‌وسیله‌ی **جرارد کوبنایی** به زبان لاتین ترجمه شد (این برگردان در «بازل» به نام «کتاب سه برادر درباره‌ی هندسه» نگه‌داری می‌شود.)

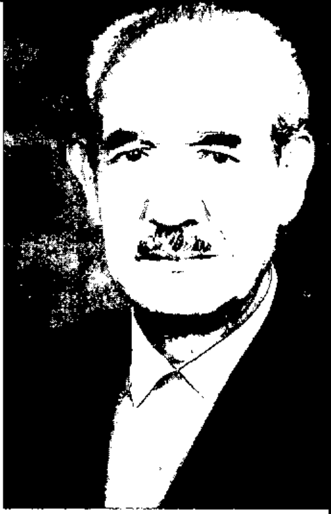
نصیرالدین توسی هم این کتاب را تحریر کرده است. درضمن برای مساحت مثلث، وقتی طول ضلع‌های آن معلوم باشد، یعنی قضیه‌ی هفتم، استدلال تازه‌ای آورده است که نسخه‌هایی از آن در کتاب‌خانه‌ی مرکزی دانشگاه تهران، کتاب‌خانه‌ی مجلس و کتاب‌خانه‌ی سپهسالار وجود دارد.

❑

آن‌چه در این‌جا آمد، استدلال ریاضی‌دانان قدیمی درباره‌ی مساحت مثلث برحسب طول ضلع‌های آن بود که بیشتر از نظر تاریخ ریاضیات اهمیت دارد. به‌ویژه راه‌حل فرزندان موسی شاکر، بعد از راه‌حل ارشمیدس و هرون، برای ما جالب است. در سال‌های بعد و به‌ویژه در هندسه‌های اخیر، راه‌حل‌های ساده‌تری برای این قضیه پیشنهاد شدند که در این‌جا از آن‌ها می‌گذریم.

۱. ابوالعباس عبدالله ملقب به مأمون‌بالله، هفتمین خلیفه عباسی بود که در سال ۱۷۰ ق به دنیا آمد و در سال ۲۱۸ ق درگذشت. مأمون دوستدار دانش بود و به علوم عقلی توجه داشت. او امام رضا(ع) را به قصد محدود کردن قیام شیعیان به عنوان ولیعهد به دربار خود دعوت کرد.

یادی از معلمی فروتن و اهل قلم



بارها اتفاق می‌افتاد، وقتی در دفتر مجله مشغول مطالعه بودم، نگاهم را که از روی دست‌نوشته‌ها برمی‌داشتم و به در اتاق توجه می‌کردم، می‌دیدم که مردی بلندقامت با موهایی سفید و تبسم بر لب به من نگاه می‌کند و با کمال ادب و فروتنی، با لهجه‌ی شیرین آذری سلام می‌کند و اجازه‌ی ورود می‌خواهد. ناخودآگاه شرمنده و خجل می‌شدم و از خدا می‌خواستم که کمکم کند تا بتوانم همراه مناسبی برای استاد علی حسن‌زاده ماکویی باشم.

قبل از این، در ایام تحصیل در دوره‌ی متوسطه، کتاب‌های ریاضی ایشان را مطالعه کرده و از دقت و حسن نظر استاد در طراحی سؤال‌های ریاضی استفاده برده بودم. اما از وقتی که توفیق همکاری با مجله‌ی رشد برهان متوسطه را پیدا کردم، از نزدیک با این استاد گران‌قدر آشنا شدم. هر وقت که می‌آمد، با همه‌ی بزرگی علم و تجربه‌اش، آن‌قدر محبت و احترام می‌کرد که هیچ‌گاه نتوانستم به‌طور شایسته پاسخ‌گوی فروتنی و محبت‌های ایشان باشم. به‌درستی این معلم دلسوز، الگوی ادب و قلم محسوب می‌شود.

استاد علی حسن‌زاده ماکویی در سال ۱۳۰۹ شمسی در شهرستان خوی دیده به جهان گشود. ایشان با سختی‌ها و مشکلات فراوان مراحل تحصیل را پشت‌سر گذاشت و مدرک کارشناسی ریاضی خود را از دانش‌سرای عالی دریافت کرد. از آن پس با عشق و علاقه‌ی فراوان به شغل معلمی روی آورد.

ایشان با جدیت در عمق و قدرت بخشیدن به پایه‌ی ریاضی دانش‌آموزان می‌کوشید و این تلاش همواره برایشان لذت‌بخش بود. خلاصه‌ای از فعالیت‌های ایشان از این قرار است:

- تدریس در مناطق محروم، مانند شهرستان‌های ماکو و گناباد
- همکاری با شهید آیت‌الله دکتر بهشتی در دبیرستان‌های قم
- تألیف کتاب‌های درسی مثلثات دوره‌ی متوسطه نظام قدیم
- عضویت در شورای عالی نظارت بر تألیف کتاب‌های درسی (قبل از سال ۱۳۶۰ شمسی)
- عضویت در هیئت مؤسس گروه فرهنگی خوارزمی
- تألیف بیش از ۴۰ جلد کتاب ریاضی در زمینه‌های جبر و مثلثات برای دوره‌ی متوسطه
- همکاری با مجله‌ی ریاضی رشد برهان متوسطه و گروه ریاضی انتشارات مدرسه

این معلم زحمت‌کش و عاشق در اسفندماه سال ۱۳۸۶ در سن ۷۸ سالگی به دلیل عارضه‌ی قلبی بدرود حیات گفت، در حالی که تا آخرین روزهای عمر پربرکت خویش، برای آموزش و تحقیق در زمینه‌ی ریاضیات تلاش می‌کرد.

در شماره‌های قبل، مقاله‌هایی از این استاد فرزانه را مطالعه کرده‌اید. در این شماره نیز نوشته‌ای از ایشان را مطالعه می‌کنید. اکنون گرچه جایشان بین ما خالی است، ولی اثرات آن معلم عاشق بین ما حضور دارد. روحش شاد و یادش گرامی باد.

ان‌شاءالله

میرشهرام صدر

دنباله‌های عددی

تعریف دنباله

برد تابعی مانند $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$، مجموعه‌ای از عددهای حقیقی را تولید می‌کند که اگر این عددها را پشت سر هم قرار دهیم، به آن یک «دنباله»[۱] می‌گویند. برای مثال، تابع $\begin{cases} f:\mathbb{N}\to\mathbb{R} \\ f(n)=(-1)^n \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم. بُرد این تابع مجموعه‌ی $R=\{-1,1\}$ است و دنباله‌ی زیر توسط این مجموعه تولید می‌شود:

دنباله‌ی f : $-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,\cdots$

مگر آن که دامنه‌ی آن زیر مجموعه‌ی متناهی از ($\mathbb{N}$) باشد.

مثال: جمله‌های دنباله‌ی $f(n)=\frac{1}{n}$ عبارت‌اند از:

$$a_1=1,\ a_2=\frac{1}{2},\ a_3=\frac{1}{3},\ \cdots,a_n=\frac{1}{n},\cdots$$

حد دنباله

دنباله‌ی نامتناهی $\{a_n\}$ وقتی دارای حد است که وقتی $n\to\infty$ جمله‌ی عمومی آن به سمت عدد حقیقی l میل کند $(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l)$. و یا به ازای هر $\varepsilon>0$ عددی مانند $M\in\mathbb{N}$ موجود باشد؛ به قسمی که به ازای $n\geq M$ داشته باشیم:

$|a_n - L| < \varepsilon$. در حالت خاص، a_n را وقتی بی‌نهایت کوچک می‌گویند که: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. دنباله‌ای که حد داشته باشد، «همگرا» است و در غیر این صورت، دنباله را «واگرا» می‌گویند.

حد نامتناهی

نماد $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ یعنی:

$$\forall N > 0, \exists M \in \mathbb{N}: n \ge M \Rightarrow |a_n| > N$$

هرگاه حد دنباله‌ی $\{a_n\}$ نامتناهی باشد، $|a_n|$ را بی‌نهایت بزرگ می‌گویند. یادآوری می‌شود که نماد $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$، یک نماد سمبلیک است؛ زیرا مفهوم حد با نماد ∞ نه تنها سازگار نیست، بلکه متناقض نیز هست.

چند نکته درباره‌ی حد دنباله

فرض می‌کنیم: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_1$ و $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_2$ و L_1 و $L_2 \in \mathbb{R}$.

داریم:

۱. $a_n \le b_n \Rightarrow L_1 \le L_2$

۲. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = L_1 \pm L_2$

۳. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n . b_n) = L_1 . L_2$

۴. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L_1}{L_2} \quad b_n, L_2 \neq 0$

۵. اگر دنباله‌ی $\{a_n\}$ همگرا و دنباله‌ی $\{b_n\}$ واگرا باشد، آن‌گاه دنباله‌ی $\{a_n + b_n\}$ واگرا ولی دنباله‌ی $\{a_n . b_n\}$ ممکن است همگرا یا واگرا باشد.

مثال: دنباله‌ی همگرای $\{a_n\} = \left\{\frac{2n}{n^2 - 1}\right\}$ و دنباله‌ی واگرای $\{b_n\} = \left\{\frac{n^2+1}{3n}\right\}$ را درنظر می‌گیریم. دنباله‌ی $\{a_n + b_n\} = \left\{\frac{n^4 + 6n^2 - 1}{3n^3 - 3n}\right\}$ واگرا و دنباله‌ی $\{a_n . b_n\} = \left\{\frac{2(n^2+1)}{3(n^2-1)}\right\}$ همگراست.

۶. اگر دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ واگرا باشند، در مورد همگرایی یا واگرایی دنباله‌های $\{a_n + b_n\}$ و $\{a_n . b_n\}$ نمی‌توان قضاوت کرد.

مثال: دنباله‌های $\{a_n\} = \{1 - (-1)^n\}$ و $\{b_n\} = \{1 + (-1)^n\}$ واگرا، ولی دنباله‌های $\{a_n + b_n\}$ و $\{a_n . b_n\}$ همگرا هستند.

هم‌چنین دنباله‌های $\{a_n\} = \left\{\frac{n^2}{n+4}\right\}$ و $\{b_n\} = \left\{\frac{n^2}{3-n}\right\}$ واگرا هستند، ولی دنباله‌ی $\{a_n + b_n\}$ همگرا و دنباله‌ی $\{a_n . b_n\}$ واگراست.

۷. اگر $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ و $\{b_n\}$ دنباله‌ی نامشخصی باشد، آن‌گاه همواره نمی‌توان نتیجه گرفت: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n . b_n = 0$.

مثال: دنباله‌های $\{a_n\} = \left\{\sin\frac{\pi}{2}\right\}$ و $\{b_n\} = \left\{\frac{n}{2}\right\}$ را درنظر می‌گیریم. داریم:

$$\lim_{n\to\infty} a_n . b_n = \frac{\pi}{2} . \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\pi/n)}{(\pi/n)} = \frac{\pi}{2}$$

۸. هرگاه $a_n . b_n = 0$ باشد، آن‌گاه همواره نمی‌توان نتیجه گرفت که: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ یا $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

مثال: دنباله‌های $\{a_n\} = \left\{\frac{1 + (-1)^n}{3}\right\}$ و $\{b_n\} = \left\{\frac{1 - (-1)^n}{2}\right\}$ را درنظر بگیرید.

۹. هرگاه $\{A_n\} = \{L + a_n\}$ و $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (a_n بی‌نهایت کوچک باشد)، آن‌گاه: $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = L$.

مثال: تحقیق کنید: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

حل:

$$\sqrt[n]{n} = 1 + a_n \Rightarrow n = (1 + a_n)^n$$

$$\Rightarrow n = 1 + na_n + \frac{n(n-1)}{2!} a_n^2 + \cdots + a_n^n$$

به‌ازای $n > 1$، همه‌ی جمله‌های بسط بالا مثبت هستند. پس داریم:

$$n > 1 + \frac{n(n-1)}{2} . a_n^2 \text{ یا } n - 1 > \frac{n(n-1)}{2} . a_n^2 \Rightarrow a_n < \sqrt{\frac{2}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

تمرین

الف) بزرگ‌ترین جمله‌ی دنباله‌های زیر را معین کنید.

۱. $\{a_n\} = \left\{\frac{n^2}{2^n}\right\}$

۲. $\{a_n\} = \left\{\frac{\sqrt{n}}{100 + n}\right\}$

۳. $\{a_n\} = \left\{\frac{1000^n}{n!}\right\}$

ب) کوچک‌ترین جمله‌ی دنباله‌های زیر را معین کنید.

۴. $\{a_n\} = \{n^2 - 9n - 100\}$

۵. $\{a_n\} = \left\{n + \frac{100}{n}\right\}$

ج) با استفاده از تعریف حد دنباله (تعیین $M(\varepsilon)$ برای هر $\varepsilon > ۰$)، ثابت کنید حد دنباله‌های زیر برابر صفر است (یعنی بی‌نهایت کوچک هستند).

۶. $\{a_n\}=\{(-۱)^n(۰/۹۹۹)^n\}$

۷. $\{a_n\}=\left\{\frac{(-۱)^{n+۱}}{n}\right\}$

۸. $\{a_n\}=\left\{\frac{۲n}{n^۳+۱}\right\}$

۹. $\{a_n\}=\left\{\frac{۱}{n!}\right\}$

د) با استفاده از تعریف حد نامتناهی دنباله (تعیین $M(N)$ برای هر عدد $N > ۰$)، ثابت کنید دنباله‌های زیر حد نامتناهی دارند (یعنی بی‌نهایت بزرگ هستند).

۱۰. $\{a_n\}=\{۲^{\sqrt{n}}\}$

۱۱. $\{a_n\}=\{\log\log n\},\ n\ge ۲$

هـ) حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید ($n\in\mathbb{N}$).

۱۲. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[۳]{n^۲}\sin(n!)}{n+۱}$

۱۳. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+۱}-\sqrt{n})$

۱۴. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-۲)^n+۳^n}{(-۲)^{n+۱}+(۳)^{n+۱}}$

۱۵. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{۱+a+\cdots+a^n}{۱+b+\cdots+b^n},\ |a|,|b|<۱$

۱۶. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{۲}.\sqrt[۴]{۲}.\sqrt[۸]{۲}\cdots\sqrt[۲^n]{۲})$

راهنمایی و جواب تمرین‌ها

۱. a_k وقتی بزرگ‌ترین جمله‌ی دنباله است که داشته باشیم:

$$a_k-a_{k-۱}>۰\Rightarrow ۱\le k<۲+\sqrt{۲}\ ,\ a_k-a_{k+۱}>۰$$

$$\Rightarrow k>۱+\sqrt{۲}\Rightarrow ۱+\sqrt{۲}<k<۲+\sqrt{۲}\ ,\ k\in\mathbb{N}$$

$$\Rightarrow k=۳\Rightarrow a_۳=\frac{۹}{۸}$$ بزرگ‌ترین جمله

۲. $$(a_k)^۲-(a_{k-۱})^۲>۰\Rightarrow ۱\le k<\frac{۱+\sqrt{۴۰۰۰۱}}{۲}$$

$$(a_k)^۲-(a_{k+۱})^۲>۰\Rightarrow k>\frac{-۱+\sqrt{۴۰۰۰۱}}{۲}$$

$$\Rightarrow k=۱۰۰\ ,\ a_{۱۰۰}=\frac{۱}{۲۰}$$

۳. $a_{۱۰۰۰}=\frac{۱۰۰۰^{۱۰۰۰}}{۱۰۰۰!}$

۴. $a_k-a_{k-۱}<۰\ ,\ a_k-a_{k+۱}<۰\Rightarrow a_۴=a_۵=-۱۲۰$

۵. $a_{۱۰}=۲۰$

۶. $$\varepsilon>۰\ ,\ |a_n|<\varepsilon\Rightarrow n\log(۰/۹۹۹)<\log\varepsilon$$

$$\log(۰/۹۹۹)<۰\ ,\ ۰<\varepsilon<۱\Rightarrow\log\varepsilon<۰$$

$$n>\frac{\log\varepsilon}{\log(۰/۹۹۹)}\ ,\ \frac{۱}{\log(۰/۹۹۹)}\approx -۲۳۰۱$$

$$\Rightarrow M>۲۳۰۱\left\lfloor\log\frac{۱}{\varepsilon}\right\rfloor$$

$$\forall\varepsilon>۰\exists\in\mathbb{N}:n\ge M\Rightarrow|a_n|<\varepsilon$$

۷. $M>\left\lfloor\frac{۱}{\varepsilon}\right\rfloor$

۸. $M>\left\lfloor\sqrt{\frac{۲}{\varepsilon}}\right\rfloor$

۹. به آسانی می‌توان ثابت کرد: $n>۱\ ,\ n!\ge ۲^n$ و $\forall n\in\mathbb{N}\Rightarrow n!\ge ۲^{n-۱}$.

$$\varepsilon>۰\ ,\ \frac{۱}{n!}<\varepsilon\Rightarrow n!\ge ۲^{n-۱}>\frac{۱}{\varepsilon}\Rightarrow M>۱+\left\lfloor\frac{\log(۱/۴)}{\log ۲}\right\rfloor$$

۱۰. $$N>۰\ ,\ a_n>N\Rightarrow ۲^{\sqrt{n}}>N\Rightarrow\sqrt{n}>\frac{\log N}{\log ۲}$$

$$\Rightarrow M>\left\lfloor\left(\frac{\log N}{\log ۲}\right)^۲\right\rfloor$$

$$\Rightarrow\forall N>۰,\exists M\in N:n\ge M\Rightarrow a_n>N$$

۱۱. $M\ge ۱۰^{۱۰^N}$

۱۲. $$L=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(n!)}{n^{۱/۳}+\frac{۱}{n^{۲/۳}}}=۰$$

۱۳. $$L=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}}=۰$$

۱۴. $$L=\lim_{n\to\infty}\frac{(-۲/۳)^n+۱}{-۲\times(-۲/۳)^n+۳}=\frac{۱}{۳}$$

۱۵.

$$L=\frac{۱-b}{۱-a}.\lim_{n\to\infty}\frac{۱-a^n}{۱-b^n}\ ,\ \lim_{n\to\infty}a^n=\lim_{n\to\infty}b^n=۰\Rightarrow L=۱$$

۱۶. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲^۲}+\cdots+\frac{۱}{۲^n}\right)=۱$$

$$\Rightarrow L=\lim_{n\to\infty}۲^{۱/۲}\times ۲^{۱/۲^۲}\times\cdots\times ۲^{۱/۲^n}=۲$$

1. Sequence

صفر

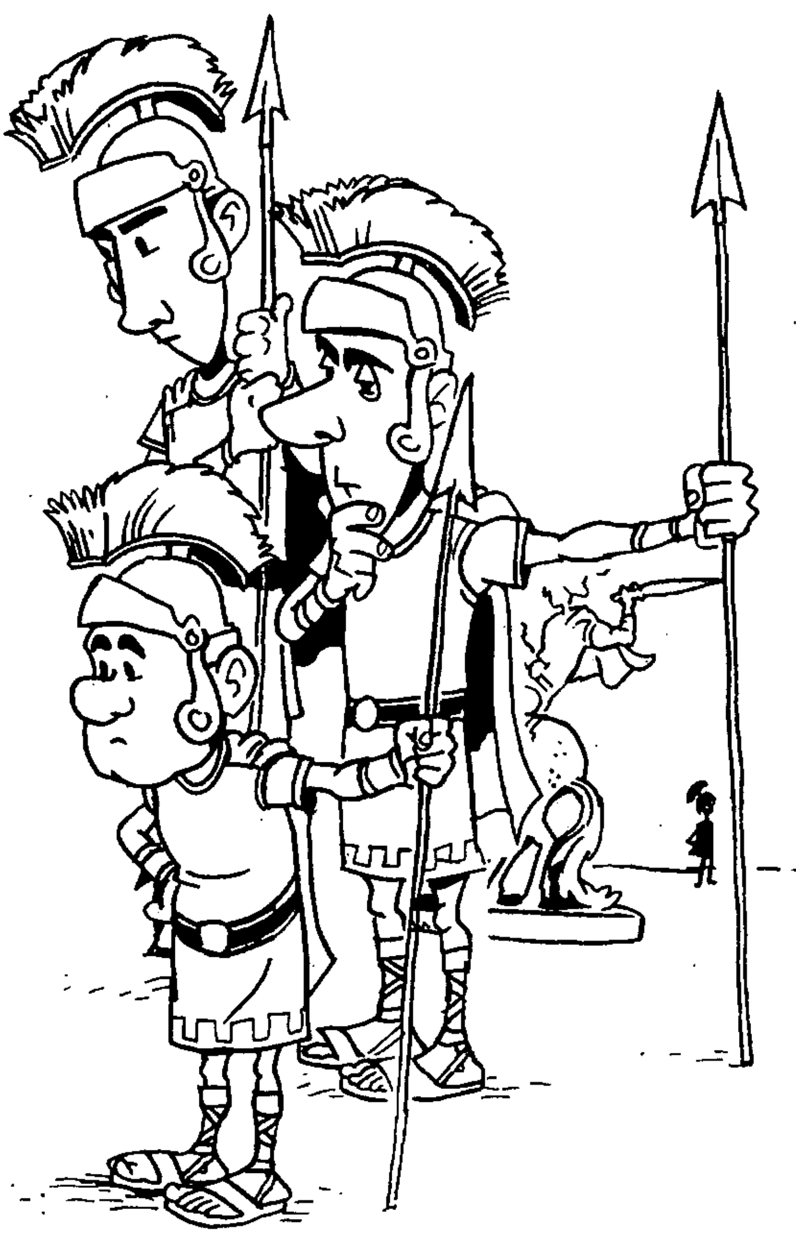
● غلامرضا یاسی‌پور

در دوران جوانی، ورودی متزلزل به سرزمین اعداد داریم. می‌آموزیم که ۱ اولین عدد «الفبای اعداد» است که به معرفی اعداد شمارش ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و... می‌پردازد. اعداد شمارش آن‌هایی هستند که اشیای حقیقی از قبیل سیب، پرتقال، موز و گلابی را می‌شمرند. تنها مدتی بعد است که می‌توانیم شمار سیب‌های جعبه‌ای را، زمانی که سیبی در آن نیست، بشمریم.

حتی یونانیان قدیم که در علوم و ریاضیات به پیشرفت‌های عظیمی نائل شدند، و رومیان که به خاطر کارهای برجسته‌شان در امور مهندسی معروف‌اند، در برخورد با تعداد سیب‌های واقع در جعبه‌های تهی، فاقد روشی مؤثر بودند و در دادن نامی به «هیچ»[۱] توفیق نیافتند. رومیان روش خودشان را در ترکیب I، V، X، L، M، D و C داشتند، اما صفر در کجا قرار داشت؟ آن‌ها نیز «هیچ» را به شمار نمی‌آوردند.

چگونه صفر پذیرفته شد؟

تصور بر این است که کاربرد نماد نمایش دهنده‌ی «هیچی»[۲] از هزاران سال پیش آغاز شده است. تمدن «مایاها»[۳] در سرزمینی که اینک مکزیک نامیده می‌شود، صفر[۴] را به صورت‌های گوناگون به کار برده است. اندکی بعد، بطلمیوس[۵] که منجّم بود، در دستگاه عددی‌اش، تحت نفوذ بابلی‌ها[۶]، از نمادی مشابه صفر روزگار خودمان، به عنوان «جانگه‌دار» استفاده کرد. صفر، به عنوان جانگه‌دار، می‌توانست برای متمایز کردن دو مثال (در نماد نویسی امروزه) چون ۷۵ و ۷۰۵، به جای استفاده از موردی که بابلی‌ها به کار می‌بردند، به کار رود. این موضوع را می‌توان با معرفی «کاما» در ادبیات مقایسه کرد، چرا که در هر دو مورد به خواندن مفهوم درست کمک می‌رسانند؛ اما همان گونه که کاما برای کاربردش، با مجموعه‌ای از قواعد به کار می‌رود، برای استفاده از صفر نیز، باید قواعدی در دست باشد.



براهماگوپتا[۷]، ریاضی‌دان هندی قرن هفتم میلادی، صفر را به عنوان «عدد»[۸] و نه صرفاً یک جانگه‌دار، در نظر گرفت و برای به کار بردن آن، قواعدی به دست داد. قواعد مزبور از این قبیل بودند: «مجموع یک عدد مثبت و صفر، مثبت است» و «مجموع صفر و صفر، صفر است.» وی در تصور صفر به عنوان یک عدد، و نه یک جانگه‌دار، کاملاً پیشرو بود. دستگاه شمارش هند و عربی، که شامل صفر در این روش است، بار اول در غرب توسط لئوناردوی پیسایی[۹]، فیبوناتچی[۱۰]، در «کتاب شمارش»[۱۱] وی که ابتدا به سال ۱۲۰۲ میلادی منتشر شد، رواج یافت. وی که در شمال آفریقا بزرگ شده و در مکتب هند و عربی تعلیم یافته بود، توانمندی کاربرد علامت اضافی را در ترکیب با نمادهای هندی ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ دریافت.

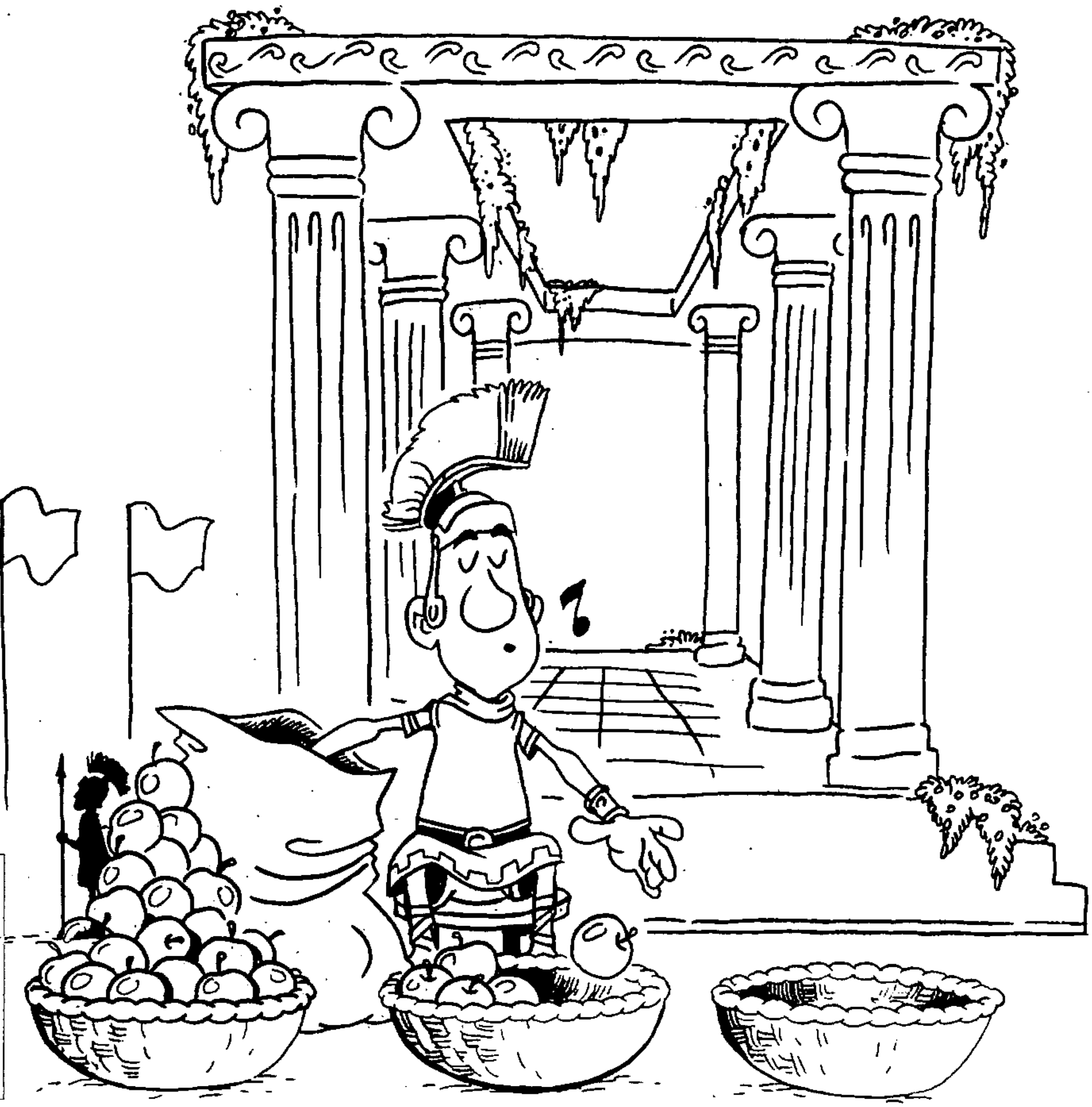
وارد کردن صفر در دستگاه شمارش، پرسشی را به وجود آورد که براهماگوپتا به اختصار این گونه آن را مطرح کرد: با این «تازه‌وارد

فضول» چگونه باید برخورد کرد؟ وی کلید شروع کار را زد، اما چاره‌جویی‌اش مبهم بود. در واقع، چگونه صفر می‌توانست به گونه‌ای دقیق‌تر، در دستگاه حساب موجود، تنظیم و به آن ملحق شود؟ بعضی از تنظیم‌ها ساده بودند. یعنی چون ۰ به جمع و ضرب وارد می‌شد، به پاکیزگی جا می‌گرفت، اما دو عمل تفریق و تقسیم به سادگی با «بیگانه‌ی مورد بحث» کنار نمی‌آمدند. پس برای اطمینان از این‌که ۰ با مابقی حساب مورد قبول، هماهنگ است، به مفاهیمی تازه نیاز بود.

کارکرد صفر چگونه است؟

جمع و ضرب با صفر، ساده و بی دردسر است؛ چون می‌توان، برای به‌دست آوردن صد، ۰ را به ۱۰ افزود. ولی ما جمع کردن یا «افزودن» را به طریقی، با تصور و تخیلی کمتر، در عمل حسابی‌مان به کار خواهیم برد. جمع صفر با یک عدد، آن عدد را بدون تغییر باقی می‌گذارد، در حالی که ضرب ۰ در هر عدد، همواره ۰ را به‌عنوان پاسخ به‌دست می‌دهد. برای مثال داریم: $۷+۰=۷$ و $۷\times۰=۰$. تفریق عملی ساده است، اما می‌تواند به منفی‌ها منجر شود: $۷-۰=۷$ و $۰-۷=-۷$ در حالی که تقسیم شامل صفر، به مشکلاتی می‌انجامد.

فرض می‌کنیم، طولی را با چوب اندازه‌گیری‌مان، اندازه گرفته باشیم. نیز فرض می‌کنیم، طول چوب اندازه‌گیری، در واقع ۷ واحد طول باشد. در این صورت می‌خواهیم بدانیم، چوب اندازه‌گیری چندبار در امتداد طول مورد نظرمان قرار می‌گیرد. اگر طول مورد نظر عملاً ۲۸ واحد باشد، پاسخ ۲۸ تقسیم بر ۷ است. یا به زبان



نمادها: ۴ = ۷ ÷ ۲۸ . نماد بهتر در بیان این تقسیم، عبارت است از:

$$\frac{۲۸}{۷} = ۴$$

و آن‌گاه می‌توانیم آن را با «طرفین ـ وسطین» کردن، به صورت ضرب بنویسیم: ۲۸ = ۷ × ۴ . اینک در تقسیم ۰ بر ۷ چه می‌توانیم گفت؟ برای کمک به دادن پاسخ در این حال، پاسخ را a می‌نامیم، به‌طوری که:

$$\frac{۰}{۷} = a$$

این رابطه، با طرفین و وسطین کردن، هم‌ارز ۰ = ۷ × a است! اما اگر چنین باشد، تنها مقدار ممکن برای ۰ خود ۰ است، زیرا اگر ضرب دو عدد ۰ را حاصل کند، یکی از آن‌دو باید ۰ باشد. واضح است که ۷ چنین نیست، پس a باید صفر باشد. ولی این مشکل اصلی عمل با صفر نیست، مرحله‌ی تقسیم بر صفر است.

اگر در مورد $\frac{۷}{۰}$ نیز به همان طریق $\frac{۰}{۷}$ عمل کنیم، معادله‌ی $b = \frac{۷}{۰}$ را خواهیم داشت.

در این صورت، با طرفین وسطین کردن، ۷ = b × ۰ و با این گزاره‌ی مهمل برخورد می‌کنیم که ۰ = ۷ . بنابراین، با پذیرفتن امکان عدد بودن $\frac{۷}{۰}$ امکان هرج و مرجی شمارشی را در مقیاسی عظیم خواهیم داشت. طریق بیرون شدن از این ماجرا، آوردن این سخن است که $\frac{۷}{۰}$ «تعریف نشده»[12] است. یعنی مجاز نیستیم که از عمل تقسیم ۷ (یا هر عدد ناصفر دیگر) بر ۰، مطلب معنی‌داری به دست آوریم. بنابراین، خیلی ساده، اجازه نمی‌دهیم این عمل رخ بدهد؛ همان‌گونه که به طریقی مشابه، مجاز نیست بدون رسیدن به موضوعی مهمل، کامایی در میان یک کلمه قرار داده شود.

در قرن دوازدهم میلادی، **بهاسکارا**[13]، ریاضی‌دان هندی، در تعقیب کارهای براهماگوپتا، تقسیم بر ۰ را بررسی و پیشنهاد کرد، حاصل عدد تقسیم شده بر ۰، بی‌نهایت است. این سخن معقول بود، زیرا در صورتی که عددی را بر عدد بسیار کوچکی تقسیم کنیم، پاسخ بسیار بزرگ خواهد شد. به عنوان نمونه، ۷ تقسیم بر یک دهم، می‌شود ۷۰، و بر یک صدم، می‌شود ۷۰۰ . به این ترتیب با کوچک‌تر و کوچک‌تر کردن مخرج، پاسخ به‌دست آمده بزرگ‌تر و بزرگ‌تر خواهد شد. و در کوچک نهایی، یعنی خود صفر، پاسخ باید بی‌نهایت باشد. با پذیرفتن این قسم استدلال، به موقعیت توضیح مفهومی حتی وهمی‌تر، یعنی بی‌نهایت می‌رسیم. اما سروکله زدن با بی‌نهایت به جایی نمی‌رسد. زیرا «بی‌نهایت»[14] (با نماد متعارف ∞) با قواعد معمول حساب تطبیق نمی‌کند و عدد به مفهوم معمول نیست.

لکن، در صورتی که $\frac{۷}{۰}$ مشکل ایجاد کند، با مورد حتی وهمی‌تر $\frac{۰}{۰}$، چه می‌توان کرد؟ اگر $c = \frac{۰}{۰}$ باشد، با طرفین وسطین کردن، به تساوی ۰ = ۰ × c و به این واقعیت می‌رسیم که: ۰ = ۰ . این رابطه، گرچه روشنگری ندارد، ولی مهمل نیز نیست. در واقع c می‌تواند هر عددی باشد که در این صورت، به موردی ناممکن نرسیده‌ایم. پس به این نتیجه می‌رسیم که حاصل تقسیم $\frac{۰}{۰}$ می‌تواند هر عددی باشد که به زبان ریاضی مهذّب، «نامعین»[15] نامیده می‌شود.

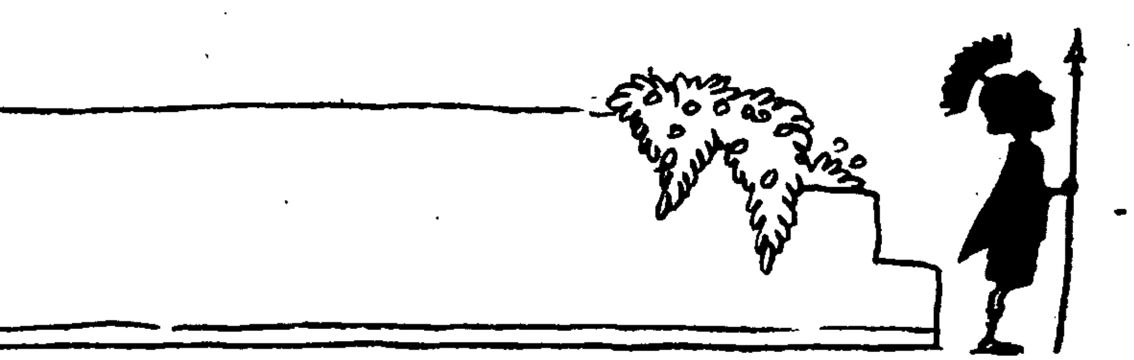
به این ترتیب، با توجه به تمام موارد، چون تقسیم بر صفر را مورد بررسی قرار دهیم، به این نتیجه می‌رسیم که بهتر آن است، این عمل را از مسیری که محاسبات را انجام می‌دهیم، خارج کنیم؛ چه ریاضیات را می‌توان بدون آن نیز به شادابی اداره کرد.

کاربرد صفر چیست؟

اما بدون صفر به سادگی نمی‌توان به کارها پرداخت، زیرا پیشرفت علوم وابسته به آن است. در علوم، از طول صفر درجه،

همه‌چیز درباره‌ی هیچ

مجموع صفر و یک عدد مثبت، مثبت است.
مجموع صفر و یک عدد منفی، منفی است.
مجموع یک عدد مثبت و یک عدد منفی، تفاضل آن‌هاست؛ یا، اگر برابر باشند، صفر است.
صفر تقسیم بر یک عدد مثبت یا منفی، یا صفر است یا به عنوان کسری با صفر در صورت، و مقداری متناهی در مخرج، بیان می‌شود.
براهماگوپتا ۶۲۸ میلادی



درجه ی صفر بر مقیاس دما، نیز انرژی صفر، و ثقل صفر سخن می گوییم. این پدیده، به زبان غیرعلمی، با مفاهیمی چون ساعت صفر و تحمل صفر نیز وارد شده است. برای صفر، حتی می توان کاربردهای بیشتری در نظر گرفت.

ریاضیات نمی تواند بدون صفر سر کند. چه این پدیده در هسته ی مرکزی مفاهیمی از ریاضیات قرار دارد که دستگاه شمارش، جبر و هندسه را به حرکت درمی آورند. در «محورها»[16] صفر، عددی است که اعداد مثبت را از اعداد منفی جدا می کند، و به این ترتیب موقعیتی ممتاز اختیار می نماید، در دستگاه دهدهی، صفر به عنوان جانگه دار به کار می رود که به ما توانایی می دهد، هم از اعداد عظیم و هم از ارقام میکروسکوپی استفاده به عمل آوریم.

طی گذشت قرن ها، صفر پذیرفته شده، مورد استفاده قرار گرفته و یکی از بزرگ ترین اختراعات بشر به شمار رفته است. در قرن نوزدهم میلادی، هالستد[17]، ریاضی دان آمریکایی، با اقتباس از نمایش نامه ی «رؤیای نیمه شب تابستان»[18] اثر شکسپیر[19]، از صفر به عنوان موتور پیشرفتی یاد کرد که به «هیچ واهی، نه تنها محل سکونت، نام، تصویر، و نماد می داد، بلکه از آن به عنوان توان یاری دهنده ای سخن می گفت که شاخصه ی نژاد هندیانی است که صفر از میانشان برخاسته است.»

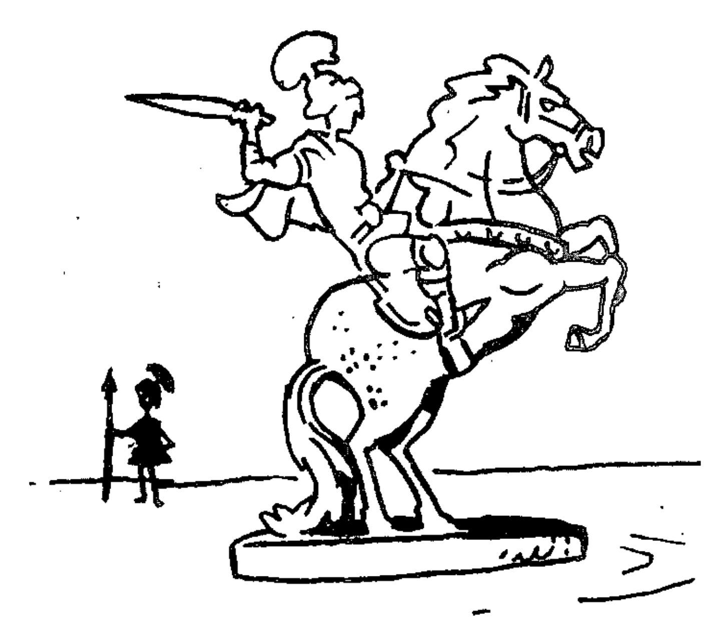
صفر هنگامی که معرفی شد باید به عنوان موجودی عجیب و غریب در نظر گرفته شده باشد، اما ریاضی دانان بر این عادت اند که به مفاهیم غریبی بپردازند که فایده شان بعدها به اثبات می رسد. هم ارز عدد صفر در روزگار ما، در نظریه ی مجموعه ها رخ می دهد که در آن مفهوم «مجموعه»[20] کلکسیونی از عناصر است. در این نظریه ∅ مجموعه ای بدون عضو را نمایش می دهد؛ مجموعه ای که به نام «مجموعه ی تهی»[21] موسوم است. این ایده، گرچه در حال حاضر عجیب به نظر می رسد، اما مانند صفر وجودش ضروری و اجتناب ناپذیر است.

چند تاریخچه

۷۰۰ قبل از میلاد: بابلی ها، در دستگاه شمارشان از صفر به عنوان جانگه دار استفاده می کردند.

۶۲۸ میلادی: براهماگوپتا صفر را به کار برد، و قواعدی برای استفاده از آن با سایر اعداد بیان کرد.

۸۳۰ میلادی: ماهاویرا[22]، مفاهیمی را درباره ی چگونگی برخورد صفر با سایر اعداد به کار برد.



۱۱۰۰ میلادی: بهاسکارا از ۰ به عنوان نمادی در جبر استفاده کرد و سعی در به کار بردن آن داشت.

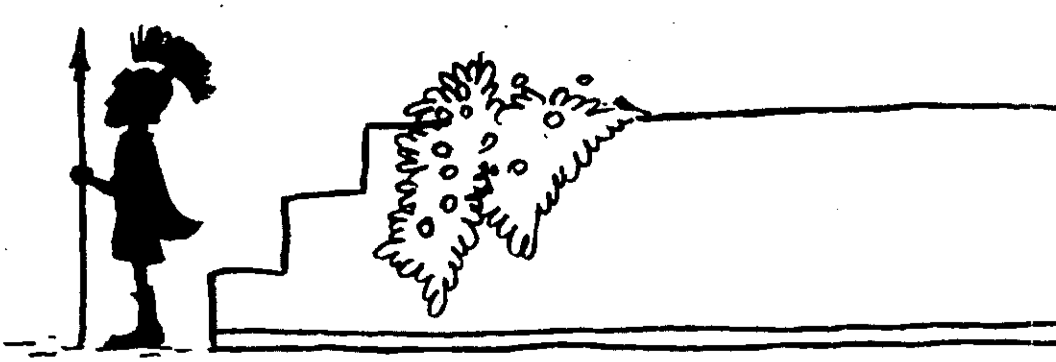
۱۲۰۲ میلادی: فیبوناتچی از نماد اضافی ۰ در دستگاه شمارش هندی-عربی ۱، ۲، ۳، ...، و ۹، اما نه به عنوان عددی برابر با این اعداد، استفاده کرد.

خلاصه ی کلام

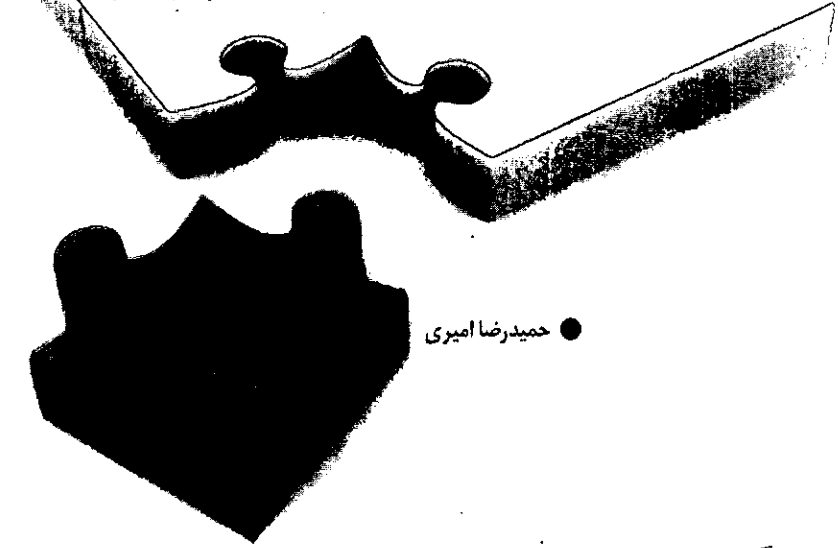
هیچ، در واقع، چیزی است.

---

1. nothing
2. nothingness
3. Maya civilization
4. zero
5. Claudius Ptolemy
6. Babylonians
7. Brahmagupta
8. number
9. Leonardo of Pisa
10. Fibonacci
11. Liber Abaci
12. undefined
13. Bhaskara
14. infinity
15. indeterminate
16. number lines
17. G.B. Halsted
18. Midsummer Night's Dream
19. Shakespeare
20. Set
21. empty set
22. Mahavira



قضیه‌ی تقسیم (۲)



● حمیدرضا امیری

اشاره

در این قسمت می‌خواهیم با توجه به ویژگی‌ها و خواص رابطه‌ی «عاد کردن» که در قسمت قبل مورد بررسی و تجزیه و تحلیل قرار گرفت، نمونه‌هایی از کاربرد آن‌ها را در حل مسائل بخش‌پذیری مطرح کنیم. بنابراین قبل از مطالعه‌ی این قسمت، یک بار دیگر ویژگی‌های رابطه‌ی عاد کردن را مرور کنید تا آمادگی استفاده از آن‌ها را داشته باشید.

مسئله‌ی ۱. اگر $a|a-b$ ، ثابت کنید: $a|b$ و سپس نشان دهید: $a|a^n-b^n$.

حل:

طبق فرض: $a|a-b$

می‌دانیم: $a|a$

$\Rightarrow a\big|[a-(a-b)] \Rightarrow a|b$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{ثابت شد}: & a|b \Rightarrow a|b^n \\ \text{می‌دانیم}: & a|a \Rightarrow a|a^n \end{array}\right\} \Rightarrow a|a^n-b^n$$

مسئله‌ی ۲. اگر $a-b|a$ ، ثابت کنید: $a-b|b$.

(فکر می‌کنم دقیقاً شبیه مسئله‌ی قبل و به راحتی قابل حل است. اقدام کنید!)

مسئله‌ی ۳. اگر $4|5k-1$ ، آن‌گاه ثابت کنید: $16|45k^2+6k-3$.

حل: برای رسیدن از رابطه‌ی $4|x$ به رابطه‌ی $16|y$ ، به دو طریق می‌توان عمل کرد: یا طرفین را به توان ۲ رساند ($4^2|x^2$) و یا طرفین را در ۴ ضرب کرد ($16|4x$):

$$4|5k-1 \Rightarrow 16|25k^2-10k+1 \qquad (1)$$

$$4|5k-1 \Rightarrow 16|20k-4 \qquad (2)$$

حال اگر سمت راستِ رابطه‌های (۱) و (۲) را با هم جمع کنیم و از سمت راستِ رابطه‌ی حکم کم کنیم، به عبارت $(20k^2-4k)$ می‌رسیم که با ضرب سمت راست رابطه‌ی (۲) در k تأمین می‌شود!

$$16|20k-4 \xrightarrow{\text{در } k \text{ ضرب می‌شود}} 16|20k^2-4k \qquad (3)$$

(۱) و (۲) و (۳) $\Rightarrow 16|45k^2+6k-3$.

مسئله‌ی ۴. اگر $ab|c$ ، ثابت کنید: $a|c$ و $b|c$.

حل:

$$ab|c \Rightarrow c=abq \Rightarrow \begin{cases} c=a(\underbrace{bq}_{q'}) \Rightarrow a|c \\ c=b(\underbrace{aq}_{q''}) \Rightarrow b|c \end{cases}$$

مسئله‌ی ۵. برای مسئله‌ی ۴ حالت کلی را بیان و اثبات کنید و سپس از $a^n|c$ نتیجه بگیرید: $a|c$. «اگر: $a_1\times a_2\times\cdots\times a_n|c$ ، آن‌گاه: $a_1|c$ و $a_2|c,\cdots,a_n|c$ »

حل: اثبات به روش استقرا روی n:

$n=1: a_1|c \Rightarrow a_1|c$

$n=2: a_1\times a_2|c \xrightarrow{\text{مسئله ۴}} a_1|c, a_2|c$

فرض استقرا $n=k: a_1\times a_2\times\cdots\times a_k|c \Rightarrow a_1|c,\cdots,a_k|c$

حکم استقرا $n=k+1: a_1\times\cdots\times a_k\times a_{k+1}|c \Rightarrow a_1|c,\cdots,a_{k+1}|c$

فرض کنیم: $a_1\times a_2\times\cdots\times a_k\times a_{k+1}|c \Rightarrow (a_1\times\cdots\times a_k)\times a_{k+1}|c$

مسئله‌ی ۴ $\Rightarrow \underbrace{(a_1\times\cdots\times a_k)|c}_{\text{استفاده از فرض استقرا}}, a_{k+1}|c \Rightarrow a_1|c,\cdots,a_k|c, a_{k+1}|c$

حال اگر فرض کنیم: $a_1=a_2=\cdots=a_k=a$ ، در این صورت داریم:

$a\times a\times\cdots\times a|c$ یا $a^n|c \Rightarrow a|c$

مسئله‌ی ۶. برای هر $b>1$ ثابت کنید: اگر $m|n$ ، آن‌گاه: $(b^m-1)|(b^n-1)$.

حل:

طبق فرض: $m|n \Rightarrow n=mq$ (۱)

از طرف دیگر با توجه به (۱) می‌دانیم: $b^n-1=b^{mq}-1=(b^m)^q-1$

$$=(b^m-1)\underbrace{((b^m)^{q-1}+(b^m)^{q-2}+\dots+1)}_{t}$$

$$\Rightarrow b^n-1=(b^m-1)\times t \Rightarrow b^m-1|b^n-1$$

مسئله‌ی ۷. عکسِ مسئله‌ی ۶ را بیان و ثابت کنید.

(برای هر $b>1$ ثابت کنید: اگر $b^m-1|b^n-1$ ، آن‌گاه: $m|n$.)

حل: کافی است (b^n-1) را بر (b^m-1) تقسیم کنیم و باقی‌مانده را، مثلاً پس از k مرحله، مساوی با صفر قرار دهیم که در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{array}{l|l}
b^n-1 & b^m-1 \\ \cline{2-2}
\underline{b^n-b^{n-m}} & b^{n-m}+b^{n-2m}-b^{n-3m}\dots \\
b^{n-m}-1 & \\
\underline{b^{n-m}-b^{n-2m}} & \\
b^{n-2m}-1 & \\
\underline{\vdots} & \\
b^{n-km}-1 &
\end{array}$$

باقی‌مانده‌ی تقسیم $=b^{n-km}-1=0 \Rightarrow b^{n-km}=1 \xrightarrow{b>1} n-km=0$

$$\Rightarrow n=km \Rightarrow m|n$$

(این مسئله از طریق لِم اقلیدس نیز قابل حل است که بعداً بیان خواهد شد.)

مسئله‌ی ۸. اگر $a|6k+5$ و $a|5k+4$ ، ثابت کنید: $a=\pm1$.

حل: می‌دانیم معادلِ حکم، یعنی $a=\pm1$ ، آن است که ثابت شود: $a|1$.

$$\left.\begin{array}{l} a|6k+5 \Rightarrow a|30k+25 \\ a|5k+4 \Rightarrow a|30k+24 \end{array}\right\} \Rightarrow a|(30k+25)-(30k+24)$$

$$\Rightarrow a|1 \Rightarrow a=\pm1$$

مسئله‌ی ۹. چند نقطه با هر دو مختص صحیح، روی منحنی به معادله‌ی $y=\frac{2x^2-3x+4}{x+1}$ قرار دارند؟

حل: اگر بخواهیم $y\in Z$ باشد، باید صورت کسر بر مخرج بخش‌پذیر باشد؛ یعنی: $x+1|2x^2-3x+4$ (۱)

(۲) از طرف دیگر: $x+1|x+1 \xrightarrow{\text{ضرب در } 2x} x+1|2x^2+2x$

(۱) و (۲) $\Rightarrow x+1|(2x^2+2x)-(2x^2-3x+4)$

(۳) $\Rightarrow x+1|5x-4$

(۴) هم‌چنین می‌دانیم: $x+1|x+1 \Rightarrow x+1|5x+5$

(۳) و (۴) $\Rightarrow x+1|(5x+5)-(5x-4) \Rightarrow x+1|9$

$\Rightarrow x+1=\pm1$ یا ±3 یا $\pm9 \Rightarrow x\in\{0,-2,2,-4,8,-10\}$

به ازای هر x با قرار دادن در معادله‌ی منحنی، یک y در z حاصل می‌شود. درنتیجه روی این منحنی فقط ۶ نقطه با هر دو مختص صحیح وجود دارند.

مسئله‌ی ۱۰. اگر $y=\frac{f(x)}{x-a}$ ، ثابت کنید: طولِ نقاط با مختصات صحیح که روی منحنی به معادله‌ی مذکور قرار دارند، از رابطه‌ی $x-a|f(a)$ به‌دست می‌آید.

حل: می‌دانیم، شرط این‌که $y\in Z$ باشد آن است که: $x-a|f(x)$. از طرف دیگر می‌دانیم، اگر $f(x)$ را بر $(x-a)$ تقسیم کنیم، خواهیم داشت: $f(x)=(x-a)q(x)+r$ که: $r=f(a)$.

بنابراین:

$$\left.\begin{array}{r} x-a|(x-a)q(x)+r \\ \text{از طرف دیگر:}\; x-a|(x-a)q(x) \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم}} x-a|r \Rightarrow x-a|f(a)$$

مسئله‌ی ۱۱. چند نقطه با هر دو مختص صحیح، روی منحنی به معادله‌ی $y=\frac{2x^3+2x^2+x}{x+2}$ قرار دارند؟

حل:

$$y\in Z \xrightarrow{\text{مسئله‌ی ۱۰}} x+2|2(-2)^3+2(-2)^2+(-2) \Rightarrow x+2|-10$$

$\Rightarrow x+2=\pm1$ یا ±2 یا ±5 یا ±10

پس ۸ نقطه با مختصات صحیح روی منحنی واقع هستند.

مسئله‌ی ۱۲. به ازای چند عدد طبیعی و کمتر از ۵۰ داریم: $126|5^n+1$.

یادآوری: می‌دانیم که a^n+b^n به ازای هر n فرد بر $a+b$ بخش‌پذیر است و a^n-b^n برای هر n بر $(a-b)$ بخش‌پذیر خواهد بود. عبارت a^n-b^n نیز به ازای هر n زوج بر $a+b$ بخش‌پذیر است.

حل:

$$126|5^n+1 \Rightarrow 5^3+1|5^n+1 \Rightarrow 5^3+1\Big|(5^3)^{\frac{n}{3}}+1$$

بنابر یادآوری فوق، باید $\frac{n}{3}$ عددی صحیح و فرد باشد تا رابطه‌ی اخیر برقرار شود:

$$\frac{n}{3}=k,\ k=2t+1 \Rightarrow \frac{n}{3}=2t+1 \Rightarrow n=6t+3 \qquad 0\le t\le 7$$

$$\Rightarrow n\in\{3,9,15,21,27,33,39,45\}$$

مسئله‌ی ۱۳. اگر $a^2-b^2|a$، ثابت کنید: $a-b|b$.

حل:

$$a^2-b^2|a \Rightarrow (a-b)(a+b)|a$$

$$\xrightarrow{\text{مسئله‌ی ۴}} (a-b)|a \xrightarrow{\text{مسئله‌ی ۲}} a-b|b$$

مسئله‌ی ۱۴. اگر $x-y|5x+1$ و $x^3-y^3|5x$، ثابت کنید x و y متوالی‌اند.

حل:

$$x^3-y^3|5x \overset{\text{مسئله‌ی ۴}}{\Rightarrow} (x-y)|5x\ ,\ x-y|5x+1 \Rightarrow x-y|1$$

$\Rightarrow x-y=\pm 1 \Rightarrow$ x و y متوالی‌اند

مسئله‌ی ۱۵. به ازای چند عدد دو رقمی، رابطه‌ی $33|2^n-1$ برقرار است؟

حل:

$$33=2^5+1|2^n-1 \Rightarrow 2^5+1\Big|(2^5)^{\frac{n}{5}}-1$$

می‌دانیم، عبارت a^n-b^n فقط به ازای nهای زوج بر $(a+b)$ بخش‌پذیر است. پس:

$$\frac{n}{5}=2k \Rightarrow n=10k\ ,\ 10\le 10k\le 99 \Rightarrow 1\le k\le 9$$

یعنی دقیقاً ۹ عدد دو رقمی وجود دارد که در رابطه‌ی فوق صدق می‌کند.

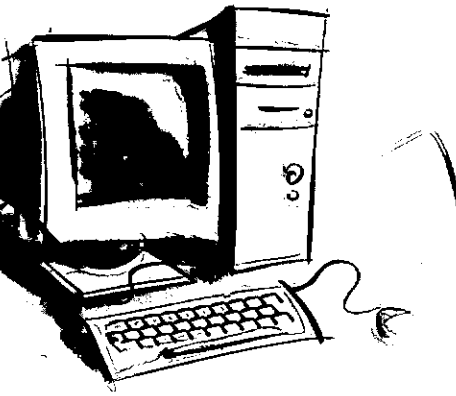
مسئله‌ی ۱۶. چند عدد طبیعی مانند n وجود دارند، به طوری که داشته باشیم: $n|330$ و $15|n$؟

حل: چون $15|n$، پس: $n=15k$ و باید $15k|330$، پس: $k|22$. بنابراین: $k\in\{1,2,11,22\}$ و: $n\in\{15,30,165,330\}$.

یعنی ۴ عدد طبیعی چون n در رابطه‌های فوق صدق می‌کند.

در مقاله‌ی بعدی ان‌شاءالله به سراغ قضیه‌ی تقسیم و کاربردهای آن در Z خواهیم رفت و مشاهده خواهید کرد که رابطه‌ی عاد کردن و ویژگی‌های آن هم‌چنان کاربرد دارند و از آن‌ها استفاده خواهد شد.

ادامه دارد...



معرفی سایت‌های ریاضی جهان

● احسان یارمحمدی

اسم سایت: **MATH-KAL**

آدرس اینترنتی سایت: **http://www.mathkalusa.com**

در بالای صفحه اصلی سایت MATH-KAL عنوان‌های زیر ملاحظه می‌شود.

* صفحه اصلی (Home)
* نتایج (Products)
* نمونه نمایشی (Demo)
* سفارشات (Orders)
* عنوان‌های ریاضی (Math Topics)
* تماس (Contact)
* پرسش‌های اغلب پاسخ داده شده (FAQ)[1]

عناوین ریاضی این سایت عبارتند از:

■ ویژگی‌ها (Features)

- آموزش خصوصی محاوره‌ای (Interactive Tutorial)
- کتاب درسی الکترونیکی (Electronic Textbook)
- محیط کاوش (Exploration Enviroment)
- جعبه ابزار کار معلم (Teacher Tool kit)
- تکلیف‌ساز (Homework Generator)
- آزمون‌های زمان‌دار (On Screen Timed Tests)

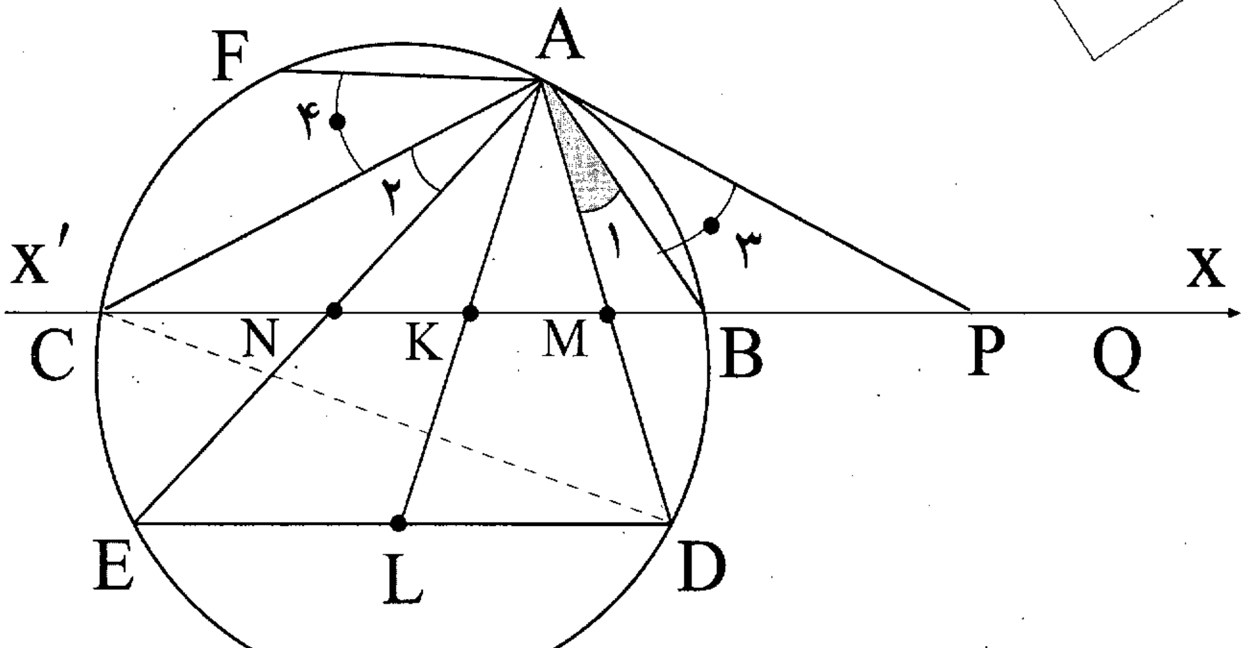
■ نتایج (Products)

- جبر ۱ (Algebra 1)
- جبر ۲ (Algebra 2)
- مثلثات و مختصات (Trigonometry & Coordinate)
- هندسه (Geometry)
- مسائل توضیحی[2] و احتمال (Word Problems & Probability)

ادامه در صفحه‌ی ۵۰

تعمیم قضیه‌ی مربع ارتفاع مثلث قائم‌الزاویه

● دکتر احمد شرف‌الدین



چکیده

در مثلث قائم‌الزاویه قضیه‌ای داریم به نام «مربع ارتفاع»؛ این چنین: در مثلث قائم‌الزاویه، مربع ارتفاع وارد بر وتر برابر است با حاصل ضرب دو قطعه‌ای که ارتفاع روی وتر پدید می‌آورد.

نگارنده، قضیه‌ی ارتفاع مثلث قائم‌الزاویه را تعمیم داده است؛ این چنین: مثلث دل‌خواه ABC را درنظر می‌گیریم و محور X′X را بر یکی از اضلاع آن، مثلاً بر ضلع BC اختیار می‌کنیم. می‌خواهیم بر محور یاد شده نقطه‌ای چون M بیابیم که رابطه‌ی $\overline{MA}^2 = |\overline{MB}.\overline{MC}|$ برقرار باشد. ($\overline{MB}$ و $\overline{MC}$، اندازه‌های جبریِ بردارهای $\overrightarrow{MB}$ و $\overrightarrow{MC}$، روی محور X′X هستند). ثابت می‌کنیم روی محور X′X، چهار نقطه وجود دارد که در رابطه‌ی مطلوب صدق می‌کنند. از این چهار نقطه، سه نقطه در فاصله‌ی متناهی است و یکی نقطه‌ای است که به سوی بی‌نهایت رفته است. برای اثبات نکته‌ی اخیر، از یک حکم جبری بهره می‌گیریم که اکنون

یاد می‌کنیم: در معادله‌ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، اگر a به سوی صفر میل کند، یک جواب به‌سوی مقدار $-\frac{c}{b}$ و یک جواب به سوی بی‌نهایت میل می‌کند.

۞ ۞ ۞

۱. (قضیه‌ی مثلث قائم‌الزاویه). در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC که BC وتر و AH ارتفاع وارد بر وتر است، چنین داریم:

$\overline{AH}^2 = HA.HB$

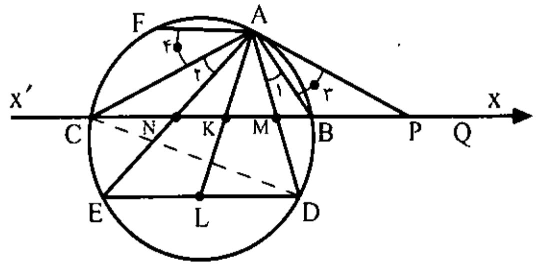
برهان: از تشابه دو مثلث AHB و AHC ، رابطه‌ی موردنظر به‌دست می‌آید.

۞

۲. قضیه. مثلث دل‌خواه ABC و محور X′X را منطبق بر یکی از اضلاع آن مثلاً ضلع BC درنظر می‌گیریم. می‌خواهیم نقطه‌ای چون M بر محور X′X بیابیم که رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

(۱) $\overline{MA}^2 = \overline{MB}.\overline{MC}$

$\overline{MB}$ و $\overline{MC}$ اندازه‌های جبری دو بردار $\overrightarrow{MB}$ و $\overrightarrow{MC}$ روی محور X′X می‌باشند.



شکل۱

چهار نقطه از محور X′X در رابطه‌ی مطلوب صدق می‌کنند. از این چهار نقطه، سه نقطه در فاصله‌ی متناهی‌اند و یک نقطه به‌سوی بی‌نهایت میل می‌کند.

برهان: نقطه‌ی دل‌خواه K را روی پاره‌خط BC اختیار می‌کنیم و روی خط AK نقطه‌ی L را طوری اختیار می‌کنیم که AK = AL باشد. از نقطه‌ی L خط l را موازی خط BC رسم می‌کنیم و نقاط برخورد آن را با دایره‌ی محیطی مثلث ABC ، با D و E نشان می‌دهیم. نقطه‌ی برخورد پاره‌خط BC را با دو خط AD و AE به ترتیب M و N می‌نامیم. ثابت می‌کنیم رابطه‌های زیر برقرارند:

(۲) $\overline{MA}^2 = -\overline{MB}.\overline{MC}$

(۳) $\overline{NA}^2 = -\overline{NB}.\overline{NC}$

برهان: چون دو خط BC و DE موازی‌اند و نقطه‌ی K ، وسط پاره‌خط AL است، پس: AM = MD و AN = NE . دو مثلث ABM و MDC ، متشابه‌اند، زیرا زاویه‌های آن‌ها متساوی‌اند: دو زاویه‌ی BAM و BCD مقابل به کمان BD اند و دو زاویه‌ی ABM و MDC مقابل به کمان FC هستند. از تشابه دو مثلث یاد شده، رابطه‌ی ۲ حاصل می‌شود و از تشابه دو مثلث ANC و BNE ، رابطه‌ی ۳ به‌دست می‌آید. پس دو نقطه‌ی M و N جواب‌هایی از مسئله‌اند. آیا مسئله جواب‌های دیگری نیز دارد؟ ـ آری، خواهیم دید.

۞

تبصره: دو خط AM و AN نسبت به دو خط AB و AC هم‌زاویه‌اند (منظور از این اصطلاح آن است که دو زاویه‌ی MAB و NAC برابرند). برای اثبات می‌گوییم، این دو زاویه روبه‌روی دو کمان برابرند، زیرا دو خط BC و ED موازی‌اند. پس دو کمان $\overset{\frown}{BD}$ و CE برابرند و لذا زاویه‌ی A_1 با زاویه‌ی A_2 برابر است.

۞

جواب‌های دیگر مسئله کدام‌اند؟

نقطه‌ی برخورد خط مماس بر دایره‌ی محیطی مثلث ABC ، در نقطه‌ی A با خط BC را، با P نشان می‌دهیم. نقطه‌ی P ، جواب دیگری از مسئله است. برای اثبات می‌گوییم، دو مثلث APB و APC متشابه‌اند. (این دو مثلث در زاویه‌ی P مشترک‌اند و اندازه‌ی دو زاویه‌ی BCA و BAP برابر است. زیرا اندازه‌ی این دو زاویه نصف اندازه‌ی کمان AB است). از تشابه این دو مثلث نتیجه می‌شود: $\overline{PA}^2 = \overline{PB}.\overline{PC}$

۞

حل کامل مسئله

در آن‌چه گذشت ثابت کردیم، دو جواب مسئله (یعنی دو نقطه‌ی M و N) روی پاره‌خط BC قرار دارند و یک جواب، نقطه‌ی برخورد خط BC با مماسی است که از نقطه‌ی A بر دایره‌ی محیطی مثلث رسم شود (یعنی نقطه‌ی P). اکنون می‌گوییم، مسئله یک جواب دیگر دارد و آن نقطه‌ای است از خط BC که به سوی بی‌نهایت رفته است. برای رسیدن به این نکته، حکم جبری زیر را به‌کار می‌بریم:

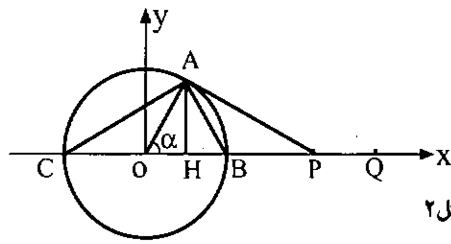
حکم: در معادله‌ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، اگر ضریب a به سوی صفر میل کند، یکی از جواب‌ها به سوی $-\frac{c}{b}$ میل می‌کند و جواب دیگر به سوی بی‌نهایت.

برای اثبات این که نقطه‌ی بی‌نهایت خط BC ، جواب دیگری از مسئله است، نقطه‌ی دل‌خواه Q را روی خط BC ، خارج از پاره‌خط BC درنظر می‌گیریم و آن را به سوی بی‌نهایت میل می‌دهیم و به آسانی ثابت می‌کنیم:

$$\lim_{BQ \to \infty} \frac{\overline{QA}^2}{\overline{QB}.\overline{QC}} = 1$$

اثبات آسان است و به خواننده واگذار می‌شود.

اکنون مطلب را با به‌کارگیری دستگاه مختصات دکارتی ثابت می‌کنیم: در شکل۲، دستگاه مختصات xoy را چنان اختیار می‌کنیم که محور ox منطبق بر خط BC و محور oy منطبق بر عمودمنصف پاره‌خط BC باشد (انتخاب مثلث ABC به صورت قائم‌الزاویه و انتخاب محورهای مختصات در جایگاهی که گفته شد، برای سهولت محاسبه است. حل مسئله در حالت کلی همان است، ولی محاسبه اندکی طولانی می‌شود). اندازه‌ی شعاع دایره‌ی محیطی مثلث ABC را r و اندازه‌ی زاویه‌ی BOA را α می‌نامیم.



شکل۲

معادله‌ی هندسی $\overline{QA}^2 = |\overline{QB}.\overline{QC}|$ (۴) را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

مختصات دو نقطه‌ی A و Q را نیز چنین می‌نویسیم: $A(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$ و $Q(x,0)$. رابطه‌ی موردنظر به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\overline{QA}^2 = (x - r\cos\alpha)^2 + (0 - r\sin\alpha)^2$$

اگر نقطه‌ی Q روی پاره‌خط BC باشد، معادله‌ی ۱ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(5)\quad (x - r\cos\alpha)^2 + r^2\sin^2\alpha = -(x^2 - r^2)$$

اگر نقطه‌ی Q خارج پاره‌خط BC باشد، معادله‌ی ۱ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(6)\quad (x - r\cos\alpha)^2 + r^2\sin^2\alpha = x^2 - r^2$$

معادله‌ی ۵ پس از ساده شدن به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$2x^2 - (2r\cos\alpha)x = 0$$

جواب‌های این معادله $x = 0$ و $x = r\cos\alpha$ می‌باشند. معادله‌ی (۶) پس از اختصار به صورت $(r\cos\alpha)x - r^2 = 0$ درمی‌آید. جواب این معادله $x = \frac{r}{\cos\alpha}$ می‌شود. $\frac{r}{\cos\alpha}$ طول نقطه‌ی P است. (نقطه‌ی P، نقطه‌ی برخورد خط BC و خط مماس بر دایره در نقطه A است).

*

آیا مسئله جواب دیگری دارد؟

آری. برای این‌که ثابت کنیم مسئله جواب دیگری دارد، آن را به صورت کلی‌تر مطرح می‌کنیم. بدین قرار که پارامتری در مسئله وارد می‌کنیم تا کلی‌تر شود. حال مسئله‌ی کلی‌تر را بررسی می‌کنیم. در بررسی، پارامتر را به سوی ۱ میل می‌دهیم؛ این‌چنین:

طرح مسئله به صورت کلی‌تر. مثلث ABC مفروض است. بر خط BC نقطه‌ای چون M تعیین کنید که رابطه‌ی زیر برقرار باشد.

(۷) $\overline{MA}^2 = k\overline{MB}.\overline{MC}$ k پارامتری مثبت است

اگر نقطه‌ی M روی پاره‌خط BC باشد، معادله‌ی هندسی ۷ به صورت تحلیلی ۸ نوشته می‌شود و اگر نقطه‌ی M روی پاره‌خط BC نباشد، معادله‌ی ۷ به صورت ۹ نوشته می‌شود.

$$(x - r\cos\alpha)^2 + r^2\sin^2\alpha = -k\overline{MB}.\overline{MC} = -k(x^2 - r^2)$$
(۸)

$$(9)\quad (x - r\cos\alpha)^2 + r^2\sin^2\alpha = k\overline{MB}.\overline{MC} = k(x^2 - r^2)$$

معادله‌ی ۸ دارای دو جواب است. معادله‌ی ۹ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(1-k)x^2 - (2r\cos\alpha)x + (1+k)r^2 = 0$$

در معادله‌ی درجه دوم بالا، پارامتر k را به سوی یک میل می‌دهیم؛ یعنی ضریب x^2 را به سوی صفر میل می‌دهیم. هنگامی که k به سوی یک میل می‌کند، یک جواب معادله که آن را x_1 می‌نامیم، به سوی $\frac{r}{\cos\alpha} = -\frac{c}{b}$ میل می‌کند. $\frac{r}{\cos\alpha}$ طول نقطه‌ی P است و جواب دیگر مسئله که آن را x_2 می‌نامیم، به سوی بی‌نهایت میل می‌کند:

$$x_2 = \frac{c}{a}.\frac{1}{x_1} = \frac{(1+k)r^2}{1-k}.\frac{\cos\alpha}{r}$$

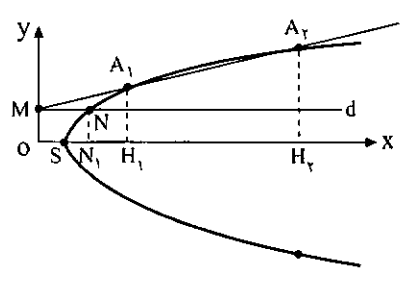
$$\underset{k\to 1}{\text{حد}}\ x_2 = \infty$$

***

توضیح بیشتر درباره‌ی معادله‌ی درجه دومی که ضریب جمله‌ی درجه دوم آن به سوی صفر میل می‌کند

در بعضی مسائل هندسی که معادله‌ی درجه دوم به کار می‌آید، ممکن است ضریب جمله‌ی درجه دوم به سوی صفر میل کند. در سطرهای آینده دو مثال می‌آوریم:

مثال۱. سهمی p به معادله‌ی $y = \sqrt{x-1}$ را در نظر می‌گیریم. از نقطه‌ی $M(0,1)$، خط l به معادله‌ی $y = mx + 1$ را رسم می‌کنیم. طول‌های نقطه‌های برخورد خط l و سهمی p را حساب کنید.



شکل۳

مختصات نقاط تقاطع خط l و سهمی β، جواب‌های دستگاه معادلات زیرند.

$$\begin{cases} y = \sqrt{x-1} \\ y = mx + 1 \end{cases}$$

طول‌های نقاط برخورد l و p جواب‌های معادله‌ی زیرند.

$$m^2x^2 + (2m-1)x + 2 = 0 \qquad (10)$$

نقطه‌های برخورد خط l و p را A_1 و A_2 می‌نامیم. از نقطه‌ی $M(1,0)$، خطی موازی خط ox رسم می‌کنیم و نقطه‌ی برخورد آن را با سهمی p، با N نشان می‌دهیم. تصویرهای سه نقطه‌ی A_1، A_2 و N را روی محور ox به ترتیب H_1 و H_2، و N_1 می‌نامیم. جواب‌های معادله‌ی ۱۰ که آن‌ها را x_1 و x_2 می‌نامیم، طول‌های دو نقطه‌ی H_1 و H_2 است.

وقتی در معادله‌ی ۱۰، پارامتر m به سوی صفر میل می‌کند، خط l دور نقطه‌ی A می‌چرخد و به طرف خط d میل می‌کند. در ضمن، نقطه‌ی A_1 روی سهمی حرکت و به سوی نقطه‌ی N میل می‌کند و نقطه‌ی A_2 روی سهمی p حرکت و به سوی بی‌نهایت می‌رود. با حرکت خط l، نقطه‌ی H_1 به سوی نقطه‌ی N می‌رود و نقطه‌ی H_2 به سوی بی‌نهایت.

در معادله‌ی ۱۰، وقتی m به سوی صفر میل می‌کند، جواب x_1 به سوی $-\frac{c}{b}$ میل می‌کند (بنابر حکم ۴).

$$\lim_{m\to 0} \frac{-c}{b} = \lim_{m\to 0} \frac{-2}{2m-1} = 2$$

عدد «۲»، طول نقطه‌ی N است. در معادله‌ی درجه دوم ۱۰، وقتی m به سوی صفر میل می‌کند، جواب x_2 (یعنی طول نقطه‌ی A_2)، به سوی بی‌نهایت می‌رود:

$$x_1x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2}{m^2}$$

$$x_2 = \frac{c}{a} \times \frac{1}{x_1}$$

$$\lim_{m\to 0} x_2 = \lim_{m\to 0} \frac{2}{m^2} \times \lim_{m\to 0} \frac{1}{x_1} = \infty$$

* * *

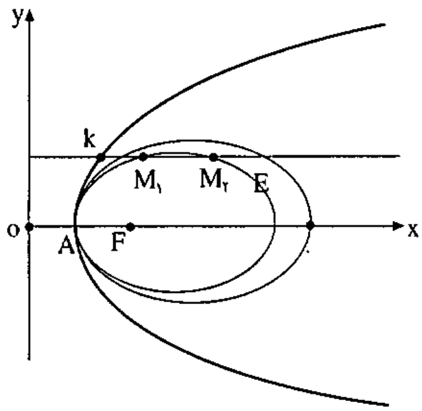
مثال هندسی که هم‌اکنون یاد کردیم، به درک حکم جبری ۴ کمک می‌کند و برعکس.

مثال ۲. قضیه‌ی هندسی جالبی که در سطرهای زیر یاد می‌شود، به درک حکم جبری ۴ کمک می‌کند و برعکس.

قضیه: سهمی شکل حدی بیضی متغیری است که یک رأس و کانون مجاور آن ثابت بماند، در حالی که محور بزرگ آن بی‌نهایت افزایش یابد.

مسئله: بیضی متغیر E که کانون F و رأس Aی آن ثابت است و محور بزرگ آن بی‌نهایت افزایش می‌یابد و نیز سهمی p را که دارای همان کانون F در رأس A است، درنظر می‌گیریم.

خط $y = m$، بیضی E را در نقاط M_1 و M_2 و سهمی p را در نقطه‌ی K قطع می‌کند.



شکل۴

معادله‌ای که طول نقاط M_1 و M_2 را به‌دست می‌دهد، از درجه‌ی دوم است. هنگامی که طول محور بزرگ بیضی E افزایش می‌یابد، نقطه‌ی M_1 به سوی نقطه‌ی K و نقطه‌ی M_2 به سوی بی‌نهایت می‌رود.

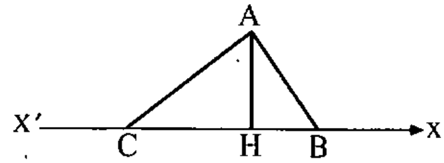
توجه: لازم است حکم جبری ۴ و دو مثال ۱ و ۲ یاد شده در بالا، با هم مطالعه شوند تا درک شود، دلیل این که در بعضی مسائل هندسی، معادله‌ی موردنظر به جای آن که درجه دوم شود، درجه اول می‌شود، چیست.

* * *

تبصره: قضیه‌ی ۲ نه‌تنها تعمیم قضیه‌ی مربع ارتفاع مثلث قائم‌الزاویه است، بلکه به ما می‌آموزد که قضیه‌ی مربع ارتفاع مثلث قائم‌الزاویه و قضیه‌ی مربع ضلع مجاور به زاویه‌ی قائمه یکسان‌اند. در سطرهای آینده، در این مورد توضیح می‌دهیم:

۱. قضیه‌ی مربع ارتفاع مثلث قائم‌الزاویه: در مثلث قائم‌الزاویه، مربع ارتفاع وارد بر وتر برابر است با حاصل‌ضرب دو قطعه‌ای که ارتفاع روی وتر پدید می‌آورد.

$\overline{AH}^2 = HB.HC$



شکل۵

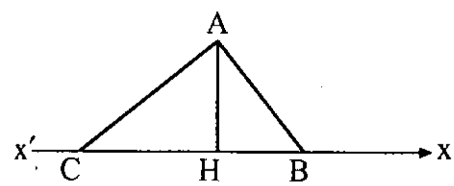
II. **قضیه ضلع مجاور به زاویه قائمه:** در مثلث قائم‌الزاویه، مربع ضلع مجاور به زاویه قائمه مساوی است با حاصل‌ضرب وتر در تصویر همان ضلع بر وتر.

$\overline{AB}^2 = BC.BH$

$\overline{AC}^2 = BC.CH$

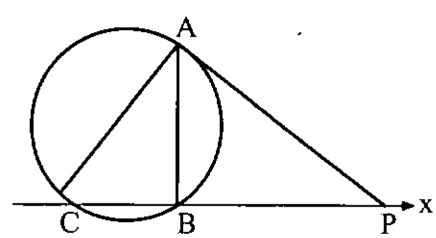
اثبات یکسانی دو قضیه‌ی I و II

I′. مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC را که در آن A رأس زاویه‌ی قائمه است، درنظر می‌گیریم. محور X′X را منطبق بر وتر BC اختیار می‌کنیم. در قضیه‌ی ۲ ثابت کردیم، بر پاره‌خط BC نقطه‌ای چون H وجود دارد؛ به طوری که $\overline{HA}^2 = HB.HC$ (H پای ارتفاع است).



شکل۶

II′. مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC را که در آن BC وتر است، درنظر می‌گیریم و محور X′X را بر یکی از اضلاع پهلوی زاویه‌ی قائمه اختیار می‌کنیم. در قضیه‌ی ۲ ثابت کردیم که روی محور X′X و خارج از پاره‌خط BC، نقطه‌ای چون P وجود دارد؛ به طوری که: $\overline{PA}^2 = PB.PC$.



شکل۷

افزون بر این ثابت کردیم، خط PA بر دایره‌ی محیطی مثلث ABC مماس است. می‌گوییم، چون AC قطر دایره است، پس خط PA بر خط AC عمود است. بنابراین، زاویه‌ی $\hat{A}$ قائمه است. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی PAC، پاره‌خط PA ضلع مجاور زاویه‌ی قائمه است و پاره‌خط PC وتر است. رابطه‌ی $\overline{PA}^2 = PB.PC$ بیان می‌کند، مربع ضلع مجاور به زاویه‌ی قائمه، برابر حاصل‌ضرب وتر در تصویر همان ضلع بر وتر است.

مختصر این‌که، وقتی قضیه‌ی ۲ را در مثلث قائم‌الزاویه به‌کار می‌بریم، اگر محور X′X روی وتر اختیار شود، قضیه‌ی مربع ارتفاع به‌دست می‌آید و اگر محور X′X را روی ضلع مجاور زاویه‌ی قائمه اختیار کنیم، قضیه‌ی مربع ضلع مجاور به زاویه‌ی قائمه حاصل می‌شود. پس قضیه‌ی مربع ارتفاع مثلث قائم‌الزاویه و قضیه‌ی مربع ضلع مجاور به زاویه‌ی قائمه‌ی مثلث قائم‌الزاویه، همان قضیه‌ی ۲ در مورد مثلث قائم‌الزاویه است.

❋ ❋ ❋

مسئله‌ای برای سرگرمی

مسئله‌ای درباره‌ی قضیه‌ی ۲ مطرح می‌کنیم: مثلث ABC داده شده است. بر خط BC، نقطه‌ی M را چنان انتخاب کنید که رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$\overline{MA}^2 = MB \times MC$

روی خط BC و خارج از پاره‌خط BC، همواره یک نقطه در فاصله‌ی متناهی وجود دارد که در رابطه‌ی یادشده صدق می‌کند. اما روی پاره‌خط BC ممکن است دو نقطه‌ی متمایز یا یک نقطه‌ی مضاعف وجود داشته باشد که در رابطه‌ی یاد شده صدق کند. ثابت کنید شرط وجود جواب چنین است:

$\overline{AD}^2 \leq \frac{1}{2} AB \times AC$

نقطه‌ی D پای نیم‌ساز زاویه‌ی داخلی A است. نامساوی در مورد دو جواب متمایز و تساوی در مورد جواب مضاعف است.

اشاره

یکی از مهم‌ترین پیوندها و اتصال‌ها در همه‌ی ریاضیات، اتصال و پیوند بین هندسه و جبر است.

در این شماره نیز (از استانداردهای NCTM) این اتصال و ارتباط را در فضای سه‌بعدی بررسی می‌کنیم.

نکته‌ی مهم: ضمن بررسی رویکرد هندسی- رویکرد جبری در آموزش هندسه، برخی از راهبردهای مهم برای حل مسئله‌های هندسه را مطرح می‌کنیم.

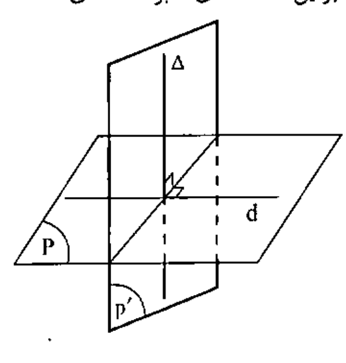
رویکرد هندسی- رویکرد جبری در آموزش هندسه (۷)

● محمدهاشم رستمی

مثال ۸: از هر خط L که بر صفحه‌ی P، عمود نیست، یک و تنها یک صفحه می‌گذرد که بر صفحه‌ی P عمود باشد.

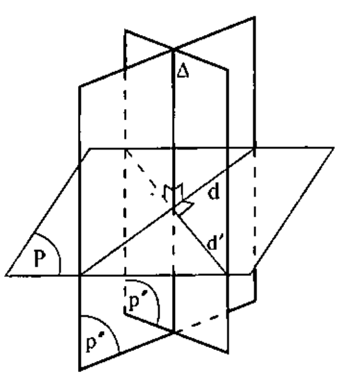
حل: نخست تعریف دو صفحه‌ی عمود بر هم را می‌بینیم:

تعریف دو صفحه‌ی عمود بر هم: دو صفحه را عمود بر هم می‌نامیم، هرگاه خطی در یکی از این دو صفحه وجود داشته باشد که بر دیگری عمود باشد: در شکل ۱ خط Δ از صفحه‌ی P بر صفحه‌ی P' عمود است. بنابراین، صفحه‌ی P بر صفحه‌ی P' عمود است.



شکل ۱

از این تعریف نتیجه می‌شود، که اگر خطی مانند Δ بر صفحه‌ی P عمود باشد، هر صفحه‌ای که بر خط Δ بگذرد، بر صفحه‌ی P عمود است. در شکل ۲ خط Δ بر صفحه‌ی P عمود است و دو صفحه‌ی دل‌خواه P' و P'' بر خط Δ گذشته‌اند. پس این دو صفحه بر صفحه‌ی P عمودند.



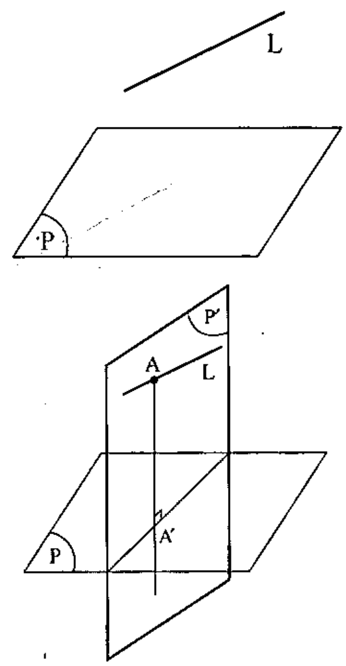
شکل ۲

اینک مسئله را با دو رویکرد هندسی و مختصاتی- جبری حل می‌کنیم.

الف) رویکرد هندسی

صفحه‌ی P و خط L را که بر صفحه‌ی P عمود نیست در نظر می‌گیریم. نخست ثابت می‌کنیم صفحه‌ای مانند P' وجود دارد که بر خط L می‌گذرد و بر صفحه‌ی P عمود است و سپس ثابت می‌کنیم، صفحه‌ی P' یکتاست.

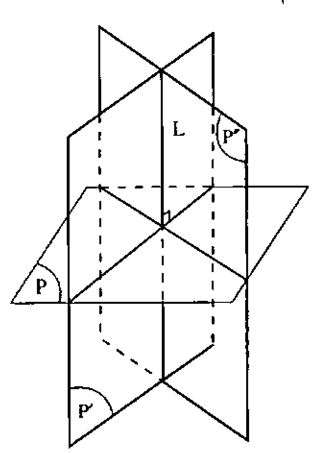
برای اثبات، از یک نقطه‌ی دل‌خواه مانند A واقع بر خط L، خط AA' را عمود بر صفحه‌ی P رسم می‌کنیم. صفحه‌ای را که بر دو خط متقاطع L و AA' می‌گذرد، صفحه‌ی P' می‌نامیم. این صفحه بر صفحه‌ی P عمود است، زیرا بنا به تعریف، شامل خط AA' است که این خط عمود بر صفحه‌ی P است.



شکل۳

نکته: روش رسم خطی که از یک نقطه بر یک صفحه عمود می‌شود، در کتاب درسی آمده است.

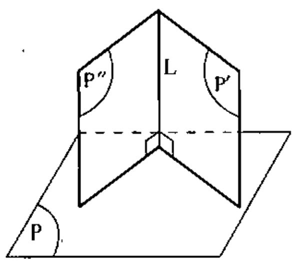
اکنون ثابت می‌کنیم که صفحه‌ی P' یکتا (منحصر به فرد) است.



شکل۴

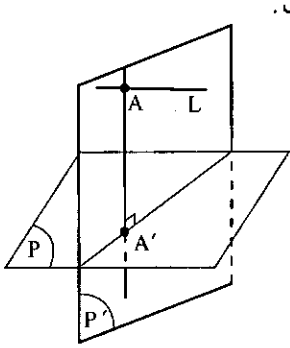
برای اثبات از برهان خلف استفاده می‌کنیم. بدین ترتیب که فرض می‌کنیم صفحه‌ی P' یکتا نباشد.

در این صورت، صفحه‌ی دیگری مانند P'' وجود دارد که بر خط L می‌گذرد و بر صفحه‌ی P عمود است. دو صفحه‌ی P' و P'' که هر دو بر صفحه‌ی P عمودند، در خط L مشترک‌اند. به بیان دیگر، خط L فصل مشترک دو صفحه‌ی P' و P'' است که هر دو بر صفحه‌ی P عمودند. بنابراین، خط L بر صفحه‌ی P عمود است، اما این مطلب خلاف فرض مسئله است؛ زیرا بنا به فرض، خط L بر صفحه‌ی P عمود نیست. پس هیچ صفحه‌ی دیگری غیر از صفحه‌ی P' وجود ندارد که بر خط L بگذرد و بر صفحه‌ی P عمود باشد. درنتیجه صفحه‌ی P' یکتاست.



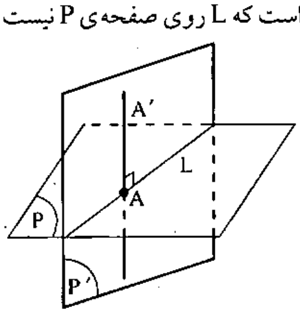
شکل۵

نکته: می‌دانیم که اگر دو صفحه‌ی متقاطع P' و P'' بر یک صفحه مانند P عمود باشند، فصل مشترک آن‌ها (خط L در شکل۵) بر صفحه‌ی P عمود است.



شکل۶

بحث: خط L می‌تواند موازی صفحه‌ی P و یا روی این صفحه باشد. در این دو حالت نیز روش حل مسئله مشابه روش حلی است که بیان شد. تنها در حالتی که خط L روی صفحه‌ی P است، از نقطه‌ی دل‌خواه A واقع بر L، باید عمود AA' را بر صفحه‌ی P اخراج کنیم و آن‌گاه صفحه‌ی P' را بر L و AA' بگذرانیم. ادامه‌ی اثبات همانند حالتی است که L روی صفحه‌ی P نیست.



شکل۷

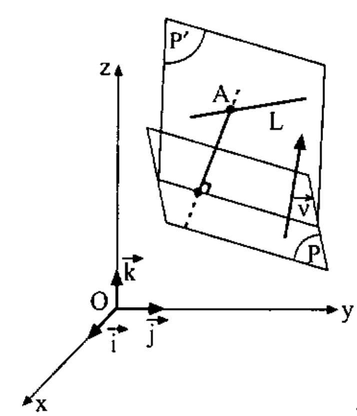
نکته‌ی ۱ : وقتی خط L موازی صفحه‌ی P و یا روی این صفحه باشد، بدیهی است که بر این صفحه عمود نخواهد بود. یعنی شرط عمود نبودن L بر P به خودی‌خود برقرار است(شکل۷).

نکته‌ی ۲ : بنا به قرارداد، وقتی خطی هیچ نقطه‌ی مشترکی با یک صفحه نداشته باشد و یا تمام نقاط آن روی آن صفحه باشند، آن خط را موازی آن صفحه می‌نامند. با توجه به این قرارداد می‌توانیم دو خط ذکر شده در بالا را یک حالت و آن هم حالت موازی بودن خط L با صفحه‌ی P در نظر بگیریم.

ب) رویکرد مختصاتی- جبری

دستگاه مختصات قائم $o-xyz$ را در نظر می‌گیریم. در این دستگاه مختصات، صفحه‌ی P به معادله‌ی $P: ax+by+cz+d=0$ و L به معادله‌ی $L: \frac{x-x_1}{p}=\frac{y-y_1}{q}=\frac{z-z_1}{r}$ است که با فرض عمود نبودن خط L بر صفحه‌ی P داریم:

$\frac{a}{p}\neq\frac{b}{q}\neq\frac{c}{r}$ یا $\frac{a}{p}=\frac{b}{q}\neq\frac{c}{r}$ یا $\frac{a}{p}\neq\frac{b}{q}=\frac{c}{r}$



شکل۸

با توجه به نکات بالا می‌خواهیم ثابت کنیم، یک و تنها یک صفحه وجود دارد که بر خط $L: \frac{x-x_1}{p}=\frac{y-y_1}{q}=\frac{z-z_1}{r}$ می‌گذرد و بر صفحه‌ی $P: ax+by+cz+d=0$ عمود است.

برای اثبات، یک نقطه‌ی دلخواه از خط L مثلاً نقطه‌ی $A=(x_1,y_1,z_1)$ را اختیار می‌کنیم و معادله‌ی خط AA' را که از نقطه‌ی A بر صفحه‌ی P عمود می‌شود، می‌نویسیم. می‌دانیم که خط AA' با بردار قائم صفحه‌ی P یعنی با بردار $\vec{V}=(a,b,c)$ موازی است. بنابراین یک دسته پارامترهای هادی خط AA' همان (a,b,c) است. پس معادله‌ی خط AA' به‌صورت زیر است:

$$AA': \frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$$

اکنون معادله‌ی صفحه‌ی P' را که بر دو خط L و AA' می‌گذرد، می‌نویسیم.

داریم:

$$P': \begin{cases} \frac{x-x_1}{p}=\frac{y-y_1}{q}=\frac{z-z_1}{r} \\ \frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c} \end{cases}$$

اگر بخواهیم معادله‌ی کانونیک صفحه‌ی P را به‌دست آوریم، می‌توانیم بردار قائم آن را که بر دو خط L و AA' عمود است، مشخص سازیم و با داشتن مختصات نقطه‌ای از این صفحه از جمله نقطه‌ی $A=(x_1,y_1,z_1)$ معادله‌ی صفحه‌ی P' را بنویسیم. داریم:

$$\vec{V}_{P'}=\vec{V}_L\times\vec{V}_{AA'}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p & q & r \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$=\vec{i}(qc-br)+\vec{j}(ar-pc)+\vec{k}(pb-aq)\Rightarrow\vec{V}_{P'}$$
$$=(qc-br, ar-pe, pb-aq)\Rightarrow P':(qc-br)(x-x_1)$$
$$+(ar-pc)(y-y_1)+(pb-aq)(z-z_1)=0$$

برای یکتایی صفحه‌ی P' می‌توان مشابه روش هندسی، از برهان خلف استفاده کرد. هم‌چنین می‌توانیم با تغییر نقطه‌ی A و اختیار نقطه‌های دیگری روی L مانند B ، C و... و رسم عمودهای BB' ، CC' و... و نوشتن معادله‌ی صفحه‌های (L,BB') ، (L,CC') و... ببینیم که معادله‌ی تمام این صفحه‌ها، همان معادله‌ی صفحه‌ی P' است که قبلاً به‌دست آوردیم.

پرسش : نظر شما درباره‌ی این روش و روش قبلی برای یکتایی صفحه‌ی P' چیست؟ برای ما بنویسید.

نکته‌ی مهم : برای نوشتن صفحه‌ی P' می‌توانیم معادله‌ی دسته صفحه‌ای را که بر خط L می‌گذرد بنویسیم و از بین صفحه‌های این دسته صفحه، صفحه‌ای منحصربه‌فرد اختیار کنیم که بر صفحه‌ی P عمود است.

اینک نمونه‌ای از این مسئله را با روش مختصاتی- جبری حل می‌کنیم.

مسئله: خط $L:\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{-1}$ و صفحه‌ی $P:2x-y+z+1=0$ داده شده‌اند.

اولاً: ثابت کنید که خط L بر صفحه‌ی P عمود نیست.

ثانیاً: معادله‌ی صفحه‌ی P' را بنویسید که بر خط L می‌گذرد و بر صفحه‌ی P عمود است.

ثالثاً: ثابت کنید صفحه‌ی P' یکتاست.

حل: داریم:

اولاً:

$$\vec{V}_L=(2,3,-1)\ ,\ \vec{V}_P=(2,-1,1)$$

$\frac{2}{3}\neq\frac{3}{-1}\neq\frac{1}{-1}\Rightarrow$ خط L بر صفحه‌ی P عمود نیست

ثانیاً: برای نوشتن معادله‌ی صفحه‌ی P' به یکی از روش‌های زیر عمل می‌کنیم:

روش اول: معادله‌ی خط AA' را که $A\in L$ و $AA'\perp P$ است می‌نویسیم. داریم:

$A=(1,-2,0)\in L$ و $\vec{V}_P=(2,-1,1)$

$$\Rightarrow AA':\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{1}$$

اکنون معادله‌ی صفحه‌ی گذرنده بر L و AA' را می‌نویسیم. داریم:

$$\begin{cases} L: & \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{-1} \\ AA': & \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{1} \end{cases}$$

این معادله را می‌توانیم به صورت کانونیک درآوریم:

$$\vec{V}_{P'}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\vec{i}(3-1)+\vec{j}(-2-2)+\vec{k}(-2-6)$$

$$=2\vec{i}-4\vec{j}-8\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_{P'}=(2,-4,-8)\Rightarrow P':2(x-1)-4(y+2)-8(z-0)=0$$

$$\Rightarrow P':2x-4y-8z-10=0\Rightarrow P':x-2y-4z-5=0$$

روش دوم: معادله‌ی دسته صفحه‌ی گذرنده بر L را می‌نویسیم و از بین صفحه‌های این دسته صفحه، معادله‌ی صفحه‌ای را که بر صفحه‌ی P عمود است، می‌نویسیم. این صفحه یکتاست.

$$L:\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{-1}\Rightarrow \begin{cases} P_1: & 3x-3=2y+4 \\ P_2: & -x+1=2z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_1: & 3x-2y-7=0 \\ P_2: & x+2z-1=0 \end{cases}\Rightarrow P_1+\lambda P_2=0$$

$$\Rightarrow 3x-2y-7+\lambda(x+2z-1)=0$$

$$\Rightarrow (3+\lambda)x-2y+2\lambda z-\lambda-7=0$$

معادله‌ی دسته صفحه‌ی گذرنده بر L

$\Rightarrow \vec{V}_{\text{دسته صفحه}}=(3+\lambda,-2,2\lambda)$ و $\vec{V}_P=(2,-1,1)$

شرط عمود بودن دو صفحه $\vec{V}_{\text{دسته صفحه}}\cdot\vec{V}_P=0$

$$\Rightarrow (3+\lambda)(2)+(-2)(-1)+(2\lambda)(1)=0$$

$$\Rightarrow 6+2\lambda+2+2\lambda=0\Rightarrow 4\lambda+8=0\Rightarrow \lambda=-2$$

$$\lambda=-2\xrightarrow{\text{در معادله‌ی دسته صفحه}}(3-2)x-2y-4z+2-7=0$$

$$\Rightarrow P':x-2y-4z-5=0$$

که این معادله، همان معادله‌ی صفحه‌ی P' به‌دست آمده در روش اول است.

ثالثاً: یکتا بودن صفحه‌ی P' در روش دوم ثابت شده است، زیرا از بین صفحه‌های یک دسته صفحه، تنها و تنها یک صفحه وجود دارد که بر صفحه‌ی مفروضی عمود باشد. با وجود این، می‌توانیم یکتا بودن صفحه‌ی P' را با استفاده از برهان خلف مانند روش هندسی، ثابت کنیم.

نکته‌ی مهم: همان‌طور که در مثال‌های قبلی این بحث گفتیم، انتخاب دستگاه مختصات در ساده‌تر شدن راه‌حل جبری اهمیت زیادی دارد. در راه‌حل جبری ارائه شده، برای مثال ۸، دستگاه مختصات $o-xyz$ را به‌صورت کلی اختیار کردیم. اکنون می‌خواهیم ببینیم که با انتخاب این دستگاه مختصات به‌صورتی دیگر، آیا می‌توانیم محاسبه‌ها را ساده‌تر کنیم؟ به نظر شما دستگاه مختصات را چگونه انتخاب کنیم تا راه‌حل جبری ساده‌تر شود؟

پیشنهاد و راه‌حل خودتان را به نشانی مجله‌ی رشد برهان متوسطه ارسال کنید. بهترین راه‌حل، با ذکر نام فرستنده‌ی آن، در شماره‌ی بعدی مجله چاپ خواهد شد.

مجانب‌ها، حدّ و پیوستگی (۳)

● احمد قندهاری

اشاره

در شماره‌های قبل مفاهیم حد چپ و راست تابع و حد تابع در یک نقطه بررسی شد و به قضایای حد اشاره کردیم، و به‌دنبال آن هم‌ارزی‌های حدی و رفع ابهام در حالت‌های گوناگون را مطرح کردیم. اینک ادامه‌ی مطالب را در پی می‌آوریم.

مجانب قائم

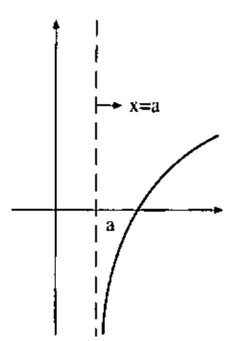
خط $x = a$ را مجانب قائم منحنی تابع با ضابطه‌ی $y = f(x)$ گوییم، هرگاه یکی از موارد زیر برقرار باشد:

الف) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

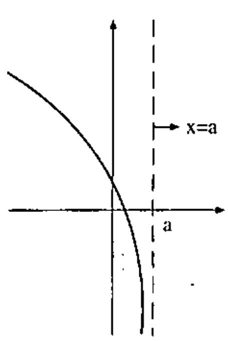
ب) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

ج) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

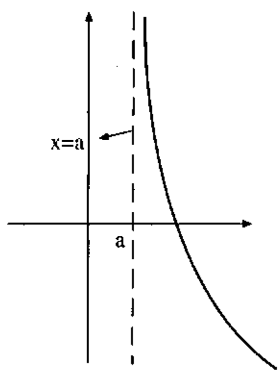
د) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$



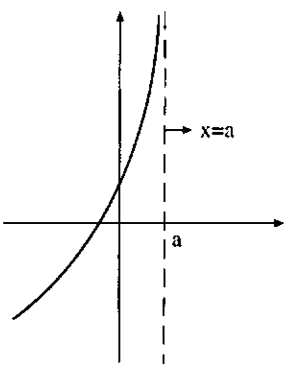
$\begin{cases} x \to a^+ \\ f(x) \to -\infty \end{cases}$



$\begin{cases} x \to a^- \\ f(x) \to -\infty \end{cases}$



$\begin{cases} x \to a^+ \\ f(x) \to +\infty \end{cases}$



$\begin{cases} x \to a^- \\ f(x) \to +\infty \end{cases}$

توجه: مجانب قائم، در تابع‌های به معادله‌ی کسری وجود دارد. برای تعیین معادله‌ی مجانب قائم، مخرج کسر را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

مثال۱. مجانب قائم هریک از تابع‌ها به معادله‌های زیر را بیابید.

الف) $f(x) = \dfrac{۲x - ۱}{x - ۴}$

حل:

خطی به معادله‌ی $x = ۴$، مجانب قائم منحنی تابع f است.

مجانب قائم: $x - ۴ = ۰ \Rightarrow x = ۴$

زیرا: $x \to ۴ \;;\; \lim f(x) = \pm\infty$

ب) $f(x)=\frac{3}{x^3-x}$

مجانب قائم: $x^3-x=0 \Rightarrow x(x^2-1)=0 \Rightarrow x=0\ ,\ \pm 1$

پس خط‌ها به معادله‌های $x=0$ ، $x=1$ و $x=-1$ ، مجانب‌های قائم منحنی این تابع است.

مثال۲. به ازای چه مقادیر m، منحنی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{4}{x^2+mx+4}$ یک مجانب قائم دارد؟

حل: معادله‌ی $x^2+mx+4=0$ باید یک ریشه‌ی حقیقی داشته باشد. پس باید:

$$\Delta=b^2-4ac=0 \Rightarrow m^2-16=0 \Rightarrow m^2=16 \Rightarrow m=\pm 4$$

مثال۳. اگر دو خط $x=2\sqrt{2}-3$ و $x=2\sqrt{2}+3$ معادله‌های مجانب‌های قائم منحنی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x^2+5}{2x^2+ax+b}$ باشند، a و b را بیابید.

حل: $2x^2+ax+b=0$

ریشه‌های مخرج عبارت‌اند از: $(2\sqrt{2}-3)\ ,\ (2\sqrt{2}+3)$.

مجموع ریشه‌ها $=-\frac{a}{2}=(2\sqrt{2}+3)+(2\sqrt{2}-3)=4\sqrt{2}$

$$\Rightarrow -\frac{a}{2}=4\sqrt{2} \Rightarrow a=-8\sqrt{2}$$

حاصل ضرب ریشه‌ها $=\frac{b}{2}=(2\sqrt{2}+3)(2\sqrt{2}-3)=8-9=-1$

$$\Rightarrow \frac{b}{2}=-1 \Rightarrow b=-2$$

نکته۱. قبل از تعیین معادله‌ی مجانب قائم، اگر کسر قابل ساده شدن باشد، اول کسر را ساده کنید و سپس مجانب قائم را بیابید.

مثال۴. مجانب‌های قائم منحنی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{(x^2-4x+3)(x-5)}{(x-1)^2(x^2-25)}$ را بیابید.

حل: ابتدا کسر را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(x-1)^2(x-5)(x+5)}=\frac{x-3}{(x+1)(x+5)}\ ;\ x\neq 1,5$$

مجانب قائم: $(x+1)(x+5)=0 \Rightarrow x=-1\ ,\ x=-5$

اگر $x\to -1\ ;\ f(x)\to \pm\infty$

اگر $x\to -5\ ;\ f(x)\to \pm\infty$

پس خط‌های به معادله‌های $x=-1$ و $x=-5$ مجانب‌های قائم منحنی این تابع هستند.

نکته۲. مجانب قائم وقتی قابل قبول است که به ازای آن، عبارت داخل رادیکال‌ها با فرجه‌ی زوج را به عدد منفی تبدیل نکند.

مثال۵. معادله‌های مجانب‌های قائم منحنی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{(x-1)\sqrt{x^2-2}}{x(x-3)(x-4)}$ را بیابید.

حل:

مجانب قائم: $x(x-3)(x-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \\ x=4 \end{cases}$

$x=0$ قابل قبول نیست، زیرا داخل رادیکال صورت را به عدد منفی تبدیل می‌کند. پس $x=3$ و $x=4$ معادله‌های مجانب‌های قائم منحنی این تابع‌اند.

حد در بی‌نهایت

تعریف: فرض می‌کنیم تابع f در بازه‌ی $(a,+\infty)$ تعریف شده باشد. می‌گوییم حدّ تابع f وقتی $x \to +\infty$، برابر عدد حقیقی L است، هرگاه $|f(x)-L|$ را بتوانیم به هر اندازه که بخواهیم کوچک کنیم؛ به شرطی که x را به اندازه‌ی کافی بزرگ اختیار کنیم. در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

هم‌چنین، اگر تابع f در بازه‌ی $(-\infty,a)$ تعریف شده باشد، می‌گوییم: حدّ تابع f وقتی $x \to -\infty$، برابر عدد حقیقی L است، هرگاه $|f(x)-L|$ را بتوانیم به هر اندازه که بخواهیم کوچک کنیم؛ به شرطی که x را به اندازه‌ی کافی کوچک اختیار کنیم. در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

مثال۱. اگر $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{x} = 2$ باشد، چنان‌چه بخواهیم داشته باشیم: $\left|\frac{2x-1}{x} - 2\right| < \frac{1}{10^6}$، آن‌گاه باید x را چه قدر بزرگ اختیار کنیم؟

حل:

$$\left|\frac{2x-1}{x} - 2\right| < \frac{1}{10^6} \Rightarrow \left|\frac{2x-1-2x}{x}\right| < \frac{1}{10^6}$$

$$\left|\frac{-1}{x}\right| < \frac{1}{10^6} \Rightarrow \frac{1}{|x|} < \frac{1}{10^6} \Rightarrow \underset{x\to+\infty}{|x| > 10^6} \Rightarrow x > 10^6$$

پس باید x را بزرگ‌تر از 10^6 انتخاب کنیم.

مثال۲. اگر $\lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{2x} = \frac{1}{2}$ باشد، چنان‌چه بخواهیم داشته باشیم: $\left|\frac{x+1}{2x} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{10^8}$، آن‌گاه باید x را چه قدر کوچک اختیار کنیم؟

حل:

$$\left|\frac{x+1}{2x} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{10^8} \Rightarrow \left|\frac{x+1-x}{2x}\right| < \frac{1}{10^8}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{2x}\right| < \frac{1}{10^8} \Rightarrow \frac{1}{2|x|} < \frac{1}{10^8} \Rightarrow 2|x| > 10^8 \Rightarrow |x| > \frac{10^8}{2}$$

$$x \to -\infty \;;\; |x| = -x$$

$$\Rightarrow -x > \frac{10^8}{2} \Rightarrow x < -\frac{10^8}{2}$$

پس باید x را کوچک‌تر از $-\frac{10^8}{2}$ اختیار کنیم.

مثال۳. مطلوب است محاسبه‌ی حدهای زیر:

الف) $A = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3-5x^2+4x-1}{x^3+x+5} = \frac{\infty}{\infty}$

حل:

$$A = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3(2-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x^3})}{x^3(1+\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^3})} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^3}}$$

$$= \frac{2-0+0-0}{1+0+0} = \frac{2}{1} = 2$$

ب) $B = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{4x^2+x}+\sqrt{x^2-x}} = \frac{\infty}{\infty}$

حل:

$$B = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2(1+\frac{4}{x})}+\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x})}}{\sqrt{x^2(4+\frac{1}{x})}+\sqrt{x^2(1-\frac{1}{x})}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}}+|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{|x|\sqrt{4+\frac{1}{x}}+|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}}}$$

توجه: $x \to +\infty \;;\; |x| = x$

$$B = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{4}{x}}+x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x\sqrt{4+\frac{1}{x}}+x\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}(\sqrt{1+\frac{4}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}})}{\cancel{x}(\sqrt{4+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}})}$$

$$= \frac{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}}{\sqrt{4+0}+\sqrt{1-0}} = \frac{1+1}{2+1} = \frac{2}{3}$$

نکته‌ی مهم: اگر در مسئله‌ای، وقتی $x \to +\infty$ یا $x \to -\infty$، حد تابع به صورت $(+\infty - \infty)$ شود، برای حل، عبارت مسئله را در عبارت مناسبی ضرب می‌کنیم تا این حالت حذف شود. سپس مانند مثال‌های قبلی، حد مسئله را محاسبه می‌کنیم. به این مثال‌ها توجه کنید.

مثال۴. مطلوب است محاسبه‌ی حدهای زیر:

الف) $C = \lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-4x+1}-\sqrt{x^2+2x})$

حل:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-4x+1}-\sqrt{x^2+2x}) = +\infty-\infty$$

عبارت مسئله را در مزدوج خودش ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$C = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2-4x+1}-\sqrt{x^2+2x})(\sqrt{x^2-4x+1}+\sqrt{x^2+2x})}{\sqrt{x^2-4x+1}+\sqrt{x^2+2x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4x+1-x^2-2x}{\sqrt{x^2(1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2})}+\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x})}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-6x+1}{|x|\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}+|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x(-6+\frac{1}{x})}{x\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}+x\sqrt{1+\frac{2}{x}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}(-6+\frac{1}{x})}{\cancel{x}(\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}})}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-6+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}}} = \frac{-6}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \frac{-6}{2} = -3$$

حل:

ب) $D = \lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt[3]{x^3+2x^2}-x) = -\infty+\infty$

نکته:

$$a-b = (\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{ab})$$

$$D = \lim_{x\to-\infty}(\sqrt[3]{x^3+2x^2}-x)\times\frac{\sqrt[3]{(x^3+2x^2)^2}+x^2+x\sqrt[3]{x^3+2x^2}}{\sqrt[3]{(x^3+2x^2)^2}+x^2+x\sqrt[3]{x^3+2x^2}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+2x^2-x^3}{\sqrt[3]{x^6(1+\frac{2}{x})^2}+x^2+x\sqrt[3]{x^3(1+\frac{2}{x})}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x^2\sqrt[3]{(1+\frac{2}{x})^2}+x^2+x^2\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}}$$

$$D = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x^2(\sqrt[3]{(1+\frac{2}{x})^2}+1+\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}})}$$

$$= \frac{2}{(\sqrt[3]{(1+0)^2}+1+\sqrt[3]{1+0})} = \frac{2}{1+1+1} = \frac{2}{3}$$

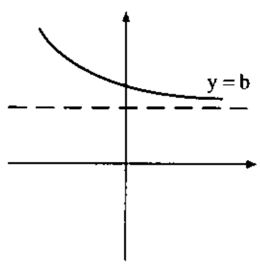
مجانب افقی

خط $y = b$ را مجانب افقی منحنی تابع با ضابطه‌ی $y = f(x)$ گوییم، هرگاه فقط و فقط یکی از سه مورد زیر وجود داشته باشد:

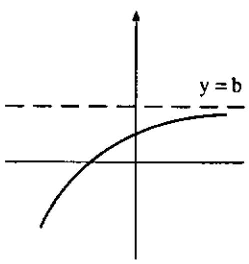
الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$

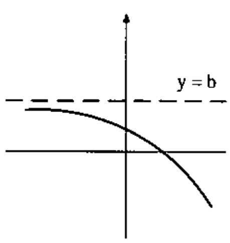
ج) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b$



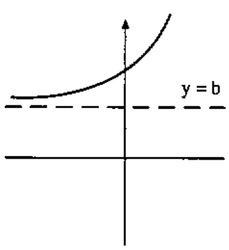
$\begin{cases} x\to+\infty \\ y\to b\end{cases}$



$\begin{cases} x\to+\infty \\ y\to b\end{cases}$



$\begin{cases} x\to-\infty \\ y\to b\end{cases}$



$\begin{cases} x\to-\infty \\ y\to b\end{cases}$

برای تعیین مجانب افقی یک تابع، x را به سمت ∞ میل می‌دهیم و حد تابع را محاسبه می‌کنیم.

نکته: تابعی که ضابطه‌ی آن کسری باشد، وقتی مجانب افقی دارد

که صورت و مخرج هم‌درجه باشند (در این صورت $y=\frac{a}{a'}$ مجانب افقی است)، یا درجه‌ی صورت کمتر از درجه‌ی مخرج باشد (در این صورت $y=0$ مجانب افقی است).

مثال۱ . مجانب افقی تابع های به معادله های زیر را بیابید.

الف) $y=\dfrac{2x-1}{x-4}$

حل:

$$\text{مجانب افقی}: x\to\pm\infty \Rightarrow \lim y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x-4}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\cancel{x}(2-\frac{1}{x})}{\cancel{x}(1-\frac{4}{x})}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{1-\frac{4}{x}}=\frac{2-0}{1-0}=2\ ;\ y=2\ \text{معادله‌ی مجانب افقی}$$

ب) $y=\dfrac{4x+5}{x^2+1}$

حل:

$$\text{مجانب افقی}: x\to\pm\infty \Rightarrow \lim y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x+5}{x^2+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\cancel{x}(4+\frac{5}{x})}{x^{\cancel{2}}(1+\frac{1}{x^2})}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4+\frac{5}{x}}{x(1+\frac{1}{x^2})}=\lim_{n\to\pm\infty}\frac{4}{x}=0\ ;\ y=0\ \text{معادله‌ی مجانب افقی}$$

ج) $y=\dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{2x+5}$

حل:

$$\text{مجانب افقی}: x\to\pm\infty \Rightarrow \lim y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x}}{2x+5}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x})}}{x(2+\frac{5}{x})}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}}{x(2+\frac{5}{x})}$$

$$1)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}}{x(2+\frac{5}{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{2}{x}}}{x(2+\frac{5}{x})}=\frac{1}{2}$$

پس $y=\frac{1}{2}$ معادله‌ی مجانب افقی است، وقتی: $x\to+\infty$.

$$2)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}}{x(2+\frac{5}{x})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}}}{x(2+\frac{5}{x})}=-\frac{1}{2}$$

پس $y=-\frac{1}{2}$ هم معادله‌ی مجانب افقی دیگر این منحنی است، وقتی: $x\to-\infty$.

مثال ۲ . مجانب افقی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=(\sqrt{x^2+10x+5}-x)$ را وقتی $x\to+\infty$ ، بیابید.

حل:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+10x+5}-x)=+\infty-\infty$$

عبارت مسئله را در مزدوج خودش ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+10x+5}-x)\times\frac{\sqrt{x^2+10x+5}+x}{\sqrt{x^2+10x+5}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+10x+5-x^2}{\sqrt{x^2(1+\frac{10}{x}+\frac{5}{x^2})}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{10x+5}{|x|\sqrt{1+\frac{10}{x}+\frac{5}{x^2}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(10+\frac{5}{x})}{x\sqrt{1+\frac{10}{x}+\frac{5}{x^2}}+x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}(10+\frac{5}{x})}{\cancel{x}(\sqrt{1+\frac{10}{x}+\frac{5}{x^2}}+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{10+\frac{5}{x}}{\sqrt{1+\frac{10}{x}+\frac{5}{x^2}}+1}$$

$$=\frac{10}{\sqrt{1}+1}=\frac{10}{2}=5$$

پس $y=5$ معادله‌ی مُجانب افقی این تابع است.

تمرین: معادله‌های مجانب‌های قائم و افقی هریک از تابع‌های به این معادله‌ها را بیابید.

$$1)\ y=\frac{x^2-4x}{2x^2-8}\qquad 2)\ y=\frac{x-1}{x^2-1}$$

۳) $y=\tan x$

۴) $y=\dfrac{x-5}{\sqrt{4x^2-8x}}$

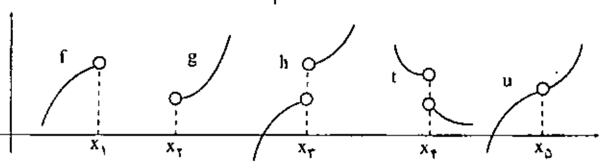
۵) $y=\cot x$

۶) $y=(\sqrt{x^2+2x}+x)$

پیوستگی‌ها

حد و پیوستگی به‌طریقه‌ی شهودی

۱. حد: نقطه‌ی تو خالی در نمودارها را نقطه‌ی حد گوییم. اگر نمودار در سمت چپ نقطه‌ی تو خالی باشد، آن نقطه را «حد چپ» و اگر در سمت راست نقطه‌ی تو خالی باشد، آن نقطه را «حد راست» گوییم. هم‌چنین، اگر در دو طرف نقطه‌ی تو خالی نمودار وجود داشته باشد، آن نقطه را «نقطه‌ی حد» گوییم. به نمودارهای زیر توجه کنید:



نتایج:

۱. تابع f در x_1 فقط حد چپ دارد.

۲. تابع g در x_2 فقط حد راست دارد.

۳. تابع h در x_3، حد راست و حد چپ دارد، ولی برابر نیستند. حد راست تابع بیشتر از حد چپ آن است.

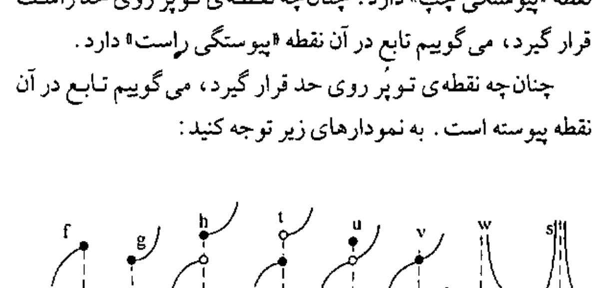
۴. تابع t در x_4، حد راست و حد چپ دارد، ولی برابر نیستند. حد چپ تابع بیشتر از حد راست آن است.

۵. تابع u در x_5 حد دارد.

۲. پیوستگی: وقتی می‌گوییم تابع f در a پیوسته است، یعنی تابع f در a به بقیه‌ی شکل متصل است. نقطه‌ی توپُر در شکل‌ها را «مقدار تابع» گویند.

اگر نقطه‌ی توپر روی حد چپ قرار گیرد، می‌گوییم تابع در آن نقطه «پیوستگی چپ» دارد. چنان‌چه نقطه‌ی توپُر روی حد راست قرار گیرد، می‌گوییم تابع در آن نقطه «پیوستگی راست» دارد.

چنان‌چه نقطه‌ی توپُر روی حد قرار گیرد، می‌گوییم تابع در آن نقطه پیوسته است. به نمودارهای زیر توجه کنید:



نتایج شکل

۱. تابع f در x_1 فقط پیوستگی چپ دارد.

۲. تابع g در x_2 فقط پیوستگی راست دارد.

۳. تابع h در x_3 فقط پیوستگی راست دارد و حد چپ هم دارد.

۴. تابع t در x_4 فقط پیوستگی چپ دارد و حد راست هم دارد.

۵. تابع u در x_5 حد دارد، ولی نه پیوستگی راست دارد و نه پیوستگی چپ.

۶. تابع v در x_6 پیوسته است.

۷. تابع w و تابع s به‌ترتیب در x_7 و x_8 ناپیوستگی رفع‌نشدنی دارند.

با این مقدمات و آشنایی به تعریف ریاضی پیوستگی می‌پردازیم.

تعریف پیوستگی تابع در یک نقطه

تابع f را در نقطه‌ی x_0 وقتی پیوسته گوییم که این تابع در یک همسایگی x_0 تعریف شده باشد و حد تابع در x_0 مساوی مقدار تابع $(f(x_0))$ در x_0 باشد. پس:

۱. اگر داشته باشیم: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$، آن‌گاه می‌گوییم تابع در x_0 پیوسته است؛ مانند نقطه‌ی x_6 در تابع v.

۲. اگر داشته باشیم: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)\neq\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$، آن‌گاه می‌گوییم تابع در x_0 پیوسته نیست و فقط پیوستگی راست دارد؛ مانند نقطه‌ی x_3 در تابع h.

۳. اگر داشته باشیم: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$، آن‌گاه می‌گوییم تابع در x_0 پیوسته نیست و فقط پیوستگی چپ دارد؛ مانند نقطه‌ی x_4 در تابع t.

۴. اگر داشته باشیم: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\neq f(x_0)$، آن‌گاه می‌گوییم تابع در x_0 حد دارد، ولی هیچ نوع پیوستگی ندارد؛ مانند نقطه‌ی x_5 در تابع u.

۵. در دو تابع w و s، تابع در همسایگی x_7 و x_8 تعریف نشده است، پس بحث پیوستگی مورد ندارد. ولی اصطلاحاً به این نوع ناپیوستگی، ناپیوستگی رفع نشدنی هم می‌گویند.

مثال ۱. در تابع با ضابطه‌ی زیر، پیوستگی تابع را در $x=0$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{1-\cos 2x}}{x\sqrt{2}} & , x\neq 0\\ -2 & , x=0\end{cases}$$

حل: ضابطه‌ی دوم تابع، مقدار تابع را نشان می‌دهد. پس برای حل باید حد راست و حد چپ تابع را محاسبه کرد.

مقدار تابع $f(0)=-2$

الف) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt{1-\cos 2x}}{x\sqrt{2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt{2\sin^2 x}}{x\sqrt{2}}$

$\sim \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt{2x^2}}{x\sqrt{2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt{2}|x|}{x\sqrt{2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt{2}x}{x\sqrt{2}}=2$ حد راست

ب) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{2\sqrt{1-\cos 2x}}{x\sqrt{2}}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{2\sqrt{2\sin^2 x}}{x\sqrt{2}}$

$\sim \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{2\sqrt{2x^2}}{x\sqrt{2}}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{2\sqrt{2}|x|}{x\sqrt{2}}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-2\sqrt{2}x}{x\sqrt{2}}=-2$

حد چپ

چون در این تابع در نقطه‌ی $x=0$، فقط حد چپ برابر مقدار تابع است، بنابراین این تابع در ۰ فقط پیوستگی چپ دارد.

مثال ۲. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^2+2x+\lfloor x\rfloor$ مفروض است. پیوستگی این تابع را در $x_0=2$ بررسی کنید.

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2+2x+\lfloor x\rfloor)=4+4+\lfloor 2^+\rfloor$

$=4+4+2=10$ حد راست تابع

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2+2x+\lfloor x\rfloor)=4+4+\lfloor 2^-\rfloor$

$=4+4+1=9$ حد چپ تابع

مقدار تابع $f(2)=4+4+\lfloor 2\rfloor=4+4+2=10$

چون در این مسئله در $x=2$، فقط حد راست برابر مقدار تابع شده است، می‌گوییم تابع f در $x=2$ پیوسته نیست، ولی فقط پیوستگی راست دارد.

مثال ۳. پیوستگی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\lfloor x+\lfloor x\rfloor\rfloor.\lfloor 1-x+\lfloor x\rfloor\rfloor$ را در $x=0$ بررسی کنید.

حل:

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lfloor 0^+ +\lfloor 0^+\rfloor\rfloor.\lfloor 1+0^- +\lfloor 0^+\rfloor\rfloor=\lfloor 0^+ +0\rfloor.\lfloor 1^- +0\rfloor$

$=\lfloor 0^+\rfloor.\lfloor 1^-\rfloor=0(0)=0$ حد راست

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lfloor 0^- +\lfloor 0^-\rfloor\rfloor.\lfloor 1+0^+ +\lfloor 0^-\rfloor\rfloor=\lfloor 0^- -1\rfloor.\lfloor 1^+ -1\rfloor$

$=\lfloor -1^-\rfloor.\lfloor 0^+\rfloor=-2(0)=0$ حد چپ

مقدار تابع $f(0)=\lfloor 0+\lfloor 0\rfloor\rfloor.\lfloor 1-0+\lfloor 0\rfloor\rfloor=\lfloor 0\rfloor.\lfloor 1\rfloor=(0)(1)=0$

پس این تابع در $x=0$ پیوسته است.

مثال ۴. تابع f با ضابطه‌ی زیر مفروض است.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax-x^2}{|x|} & ,\ x>0\\ b+\lfloor x-\sqrt{5}\rfloor & ,\ x=0\\ \lfloor 4+x\rfloor & ,\ x<0\end{cases}$$

اگر این تابع در $x=0$ پیوسته باشد، a و b را بیابید.

حل:

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{ax-x^2}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x(a-x)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}(a-x)=a$ حد راست

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\lfloor 4+x\rfloor=\lfloor 4+0^-\rfloor=\lfloor 4^-\rfloor=3$ حد چپ

مقدار تابع $f(0)=b+\lfloor 0-\sqrt{5}\rfloor=b-3$ مقدار تابع

$a=3\ ,\ b-3=3\Rightarrow b=6$

مثال ۵. تابع f با ضابطه‌ی زیر مفروض است.

$$f(x)=\begin{cases}2ax^2+b|x| & ,\ x<1\\ \lfloor x^2-\sqrt{7}\rfloor & ,\ x=1\\ a\sin(x-1)+b\lfloor x\rfloor & ,\ x>1\end{cases}$$

اگر این تابع در $x=1$ پیوسته باشد، a و b را بیابید.

حل:

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(a\sin(x-1)+b\lfloor x\rfloor)$

$=a\sin 0+b\lfloor 1^+\rfloor=0+b=b$ حد راست

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(2ax^2+b|x|)=2a+b$ حد چپ

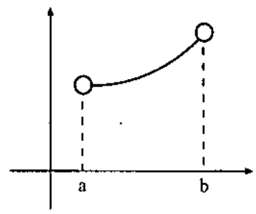
مقدار تابع $=f(1)=\lfloor 1-\sqrt{7}\rfloor=\lfloor 1-2/6\rfloor=\lfloor -1/6\rfloor=-2$

$b=-2\ ,\ 2a+b=-2\Rightarrow 2a-2=-2\Rightarrow a=0$

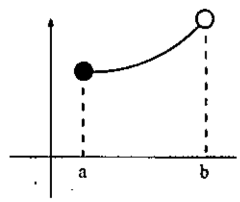
نکته: اگر تابع f در x_0 و تابع g در $f(x_0)$ پیوسته باشند، آن‌گاه تابع gof در x_0 پیوسته است و اگر تابع g در x_0 و تابع f در $g(x_0)$ پیوسته باشد، آن‌گاه تابع fog در x_0 پیوسته است.

پیوستگی در یک بازه

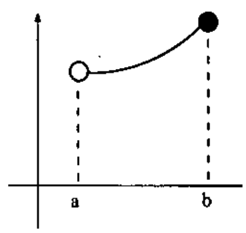
۱ . تابع f را در بازه‌ی (a,b) وقتی پیوسته گوییم که f در تمام نقاط این بازه پیوسته باشد.



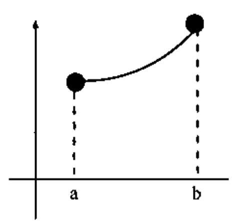
۲ . تابع f را در بازه‌ی $[a,b)$ وقتی پیوسته گوییم که:
اولاً، در تمام نقاط بازه‌ی (a,b) پیوسته باشد.
ثانیاً، در a پیوستگی راست داشته باشد.



۳ . تابع f را در بازه‌ی $(a,b]$ وقتی پیوسته گوییم که:
اولاً، در بازه‌ی (a,b) پیوسته باشد.
ثانیاً، در b پیوستگی چپ داشته باشد.



۴ . تابع f را در بازه‌ی $[a,b]$ وقتی پیوسته گوییم که:
اولاً، در بازه‌ی (a,b) پیوسته باشد.
ثانیاً، در a پیوستگی راست و در b پیوستگی چپ داشته باشد.



مثال ۱ . ثابت کنید تابع با ضابطه‌ی $f(x)=2x+\lfloor x \rfloor$ در بازه‌ی $[1,2)$ پیوسته است.

حل: اولاً، باید ثابت کنیم، این تابع در بازه‌ی $(1,2)$ پیوسته است.

$$1<x_0<2 \Rightarrow \begin{cases} 1<x_0^+<2 \\ 1<x_0^-<2 \end{cases}$$

حد راست $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = 2x_0 + \lfloor x_0^+ \rfloor = 2x_0+1$

حد چپ $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = 2x_0 + \lfloor x_0^- \rfloor = 2x_0+1$

مقدار تابع $f(x_0) = 2x_0 + \lfloor x_0 \rfloor = 2x_0+1$

پس این تابع در بازه‌ی $(1,2)$ پیوسته است.

ثانیاً، باید ثابت کنیم، این تابع در ۱ از راست پیوسته است.

حد راست $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2+\lfloor 1^+ \rfloor = 2+1=3$

مقدار تابع $f(1) = 2+\lfloor 1 \rfloor = 2+1=3$

پس این تابع در $x=1$ از راست پیوسته است.

مثال ۲ . تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ مفروض است. ثابت کنید، این تابع در بازه‌ی $[-1,1]$ پیوسته است.

حل:

$$1-x^2=0 \Rightarrow x=\pm 1$$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$1-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

اولاً، باید ثابت کنیم، این تابع در بازه‌ی $(-1,1)$ پیوسته است.

$$-1<x_0<1 \Rightarrow \begin{cases} -1<x_0^+<1 \\ -1<x_0^-<1 \end{cases}$$

حد راست $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \sqrt{1-x_0^2}$

حد چپ $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \sqrt{1-x_0^2}$

مقدار تابع $f(x_0)=\sqrt{1-x_0^2}$ ثانیاً، باید ثابت کنیم، این تابع در $x=-1$ پیوستگی راست و در $x=1$ پیوستگی چپ دارد.

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \sqrt{0^+} = \sqrt{0}$ و $f(-1)=\sqrt{0}=0$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \sqrt{0^+} = \sqrt{0}$ و $f(1)=\sqrt{0}=0$

بنابراین، این تابع در بازه‌ی $[-1,1]$ پیوسته است.

مجموعه‌ی Q منتهاشمار است

$Q \sim \mathbb{N}$

میرشهرام صدر

اشاره

با مفهوم تابع و تابع های یک به یک و پوششی، در پایه دوم متوسطه آشنا شده‌اید و مطالب تکمیلی را در حسابان سال سوم فرا گرفته‌اید. در این مقاله با استفاده از این مفاهیم نشان می‌دهیم که مجموعه‌ی اعداد گویا، قابل شمارش و نامتناهی (منتهاشمارا) هستند؛ یعنی مجموعه‌ی Q با $\mathbb{N}$ هم‌ارز است. به تعبیر دیگر، ثابت می‌کنیم که تعداد اعداد طبیعی و اعداد گویا با هم برابر است.

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

شما با اصطلاحات «مجموعه‌ی متناهی» و «مجموعه‌ی نامتناهی» آشنایی دارید. مجموعه‌ی انگشتان یک دست خود را مجموعه‌ای متناهی و مجموعه‌ی اعداد طبیعی و مجموعه‌ی نقاط واقع بر یک قطعه خط مستقیم را نامتناهی می‌شماریم. در حالت کلی، مجموعه‌ای متناهی است که یا تهی و یا به طور دقیق شامل n عضو باشد، که n عدد صحیح مثبت است. یا به عبارت دیگر، مجموعه‌ای متناهی است که شامل تعداد معینی عضو متفاوت باشد و در شمارش عضوهای متفاوت مجموعه، کار شمارش به پایان برسد. در غیر این صورت مجموعه نامتناهی است.

مثال۱. فرض کنیم مجموعه‌ی M روزهای هفته باشد، آن‌گاه M متناهی است.

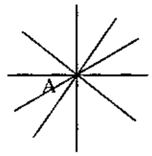
M={شنبه، یکشنبه، دوشنبه، سه‌شنبه، چهارشنبه، پنج‌شنبه، جمعه}

مثال۲. فرض کنیم: P={x| رودخانه‌ای در دنیا: x}. اگرچه شمردن همه‌ی رودخانه‌های دنیا مشکل است، اما با توجه به تعریف، مجموعه‌ی P متناهی است.

مثال۳. مجموعه‌ی دایره‌هایی که از مبدأ مختصات می‌گذرند، مجموعه‌ای نامتناهی است.

مثال۴. مجموعه جواب‌های معادله‌ی $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ متناهی است، زیرا معادله دارای این مجموعه جواب است: $\{-3, -1, 1, 3\}$.

مثال۵. مجموعه‌ی اعداد طبیعی و مجموعه‌ی خطوط گذرنده از یک نقطه‌ی ثابت، مجموعه‌هایی نامتناهی می‌باشند.



عدد اصلی یک مجموعه

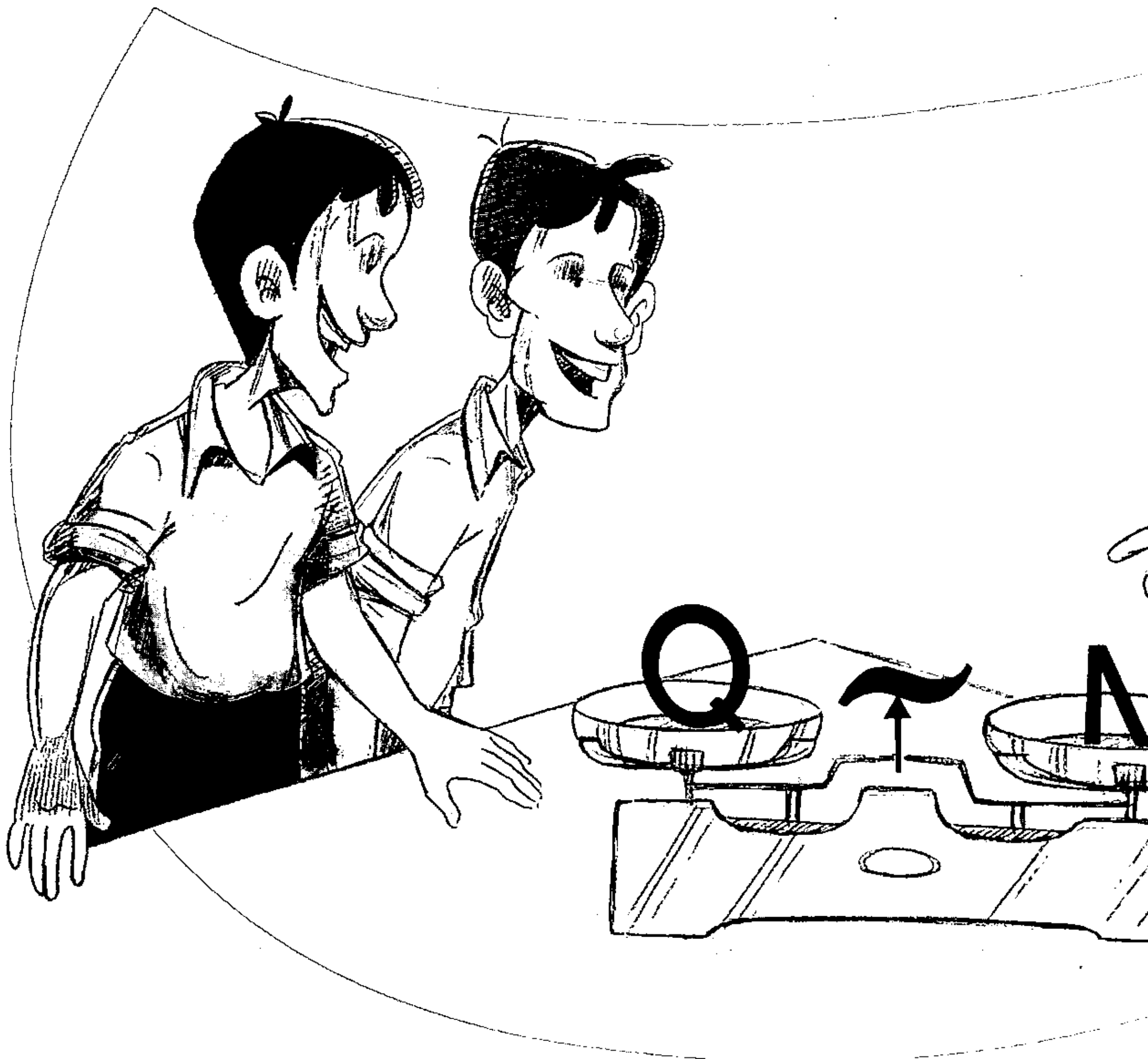
فرض کنیم، A مجموعه‌ای متناهی باشد. با توجه به تعریفی که از مجموعه‌ی متناهی بیان شد، اعضای مجموعه‌ی A قابل شمارش هستند. تعداد اعضای مجموعه A را عدد اصلی مجموعه‌ی A می‌گوییم و با نماد $n(A)$ نشان می‌دهیم.

عدد اصلی هر یک از مجموعه‌های $\varnothing$، $\{a_1\}$، $\{a_1, a_2\}$، $\{a_1, a_2, a_3\}$، $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ و... به ترتیب برابر با ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و... است. بنابراین عدد اصلی هر مجموعه‌ی متناهی مانند A، عدد صحیح و نامنفیِ $n(A)$ است، به‌طوری که: $0 \le n(A) \le k \;;\; k \in \mathbb{N}$.

عدد اصلی مجموعه‌های نامتناهی را در مبحث مجموعه‌های «شمارا» و «ناشمارا» بیان خواهیم کرد.

مجموعه‌ی هم‌ارز

فرض کنید کلاسی که شما در آن درس می‌خوانید، ۳۰ دانش‌آموز دارد. یک روز معلم ریاضی وارد کلاس می‌شود و به هر یک از دانش‌آموزان یکی از اعداد ۱ تا ۳۰ را نسبت می‌دهد؛ به‌طوری که اگر هر عددی بین ۱ تا ۳۰ انتخاب شود، دانش‌آموزی هست که منتسب به آن عدد باشد و برعکس، اگر دانش‌آموزی را در نظر بگیریم، یکی از اعداد ۱ تا ۳۰ منتسب به آن دانش‌آموز است. در این حالت می‌گوییم، مجموعه‌ی دانش‌آموزان و مجموعه‌ی اعداد ۱ تا ۳۰ هم‌ارز هستند. بنابراین، مجموعه‌ی



ناتهی A را هم‌ارز با مجموعه‌ی ناتهی B گوییم، هرگاه هر عضو A فقط و فقط با یک عضو B و هر عضو B فقط و فقط با یک عضو A مرتبط باشد، و می‌نویسیم: $A\sim B$.

نکته‌ی ۱. در صورتی‌که: $A\sim B$، آن‌گاه عدد اصلی A با عدد اصلی B برابر است؛ یعنی:

$$A \sim B \Rightarrow n(A) = n(B)$$

مسئله‌ی ۱. نشان‌دهید که مجموعه‌ی اعداد طبیعی با مجموعه‌ی اعداد زوج طبیعی هم‌عدد هستند.

حل: برای این‌که نشان دهیم، عدد اصلی دو مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ و E با یکدیگر برابرند، کافی است نشان دهیم که این دو مجموعه می‌توانند هم‌ارز باشند. با توجه به نمودار ۱ ملاحظه می‌کنیم که: $\mathbb{N} \sim E$، در نتیجه دو مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ و E هم عدد هستند.

$$\begin{array}{lcccccccc} \mathbb{N}: & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & \cdots & n & \cdots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ E: & ۲ & ۴ & ۶ & ۸ & \cdots & ۲n & \cdots \end{array}$$

(نمودار ۱)

با توجه به نمودار ۱ ملاحظه می‌کنیم که برای هر عدد طبیعی n، فقط و فقط یک عضو منحصر به‌فرد مانند ۲n از اعداد زوج وجود دارد که با آن مرتبط است. و برعکس، برای هر ۲n از مجموعه‌ی E، فقط و فقط عضو منحصر به فرد $n = \frac{۲n}{۲}$ از $\mathbb{N}$ وجود دارد که باآن در ارتباط است.

نکته‌ی ۲. مجموعه‌ی $\mathbb{N}_k = \{۱,۲,\dots,k\}$ را قطعه‌ای از اعداد طبیعی می‌گوییم، هرگاه A مجموعه‌ای متناهی باشد و: $A \neq \varnothing$. در این‌صورت A می‌تواند با قطعه‌ای از اعداد طبیعی هم‌ارز باشد. یعنی برای هر مجموعه‌ی متناهی $A \neq \varnothing$ داریم:

$$A \sim \mathbb{N}_k$$

اکنون این سؤال پیش می‌آید که آیا درباره‌ی هر دو مجموعه‌ی دل‌خواه می‌توان گفت تعداد عضوهایشان مساوی است یا نه. درباره‌ی مجموعه‌های متناهی با شمردن عضوها و یا جفت کردن اعضای آن می‌توان به این سؤال پاسخ داد، اما درباره‌ی مجموعه‌های نامتناهی، جواب سؤال بستگی به این دارد که تعداد مساوی عضو داشتن را چگونه تعریف کنیم تا بگوییم دو مجموعه «هم‌عدد» هستند.

برای بررسی هم‌ارزی بین دو مجموعه‌ی نامتناهی، تعریف زیر را که نظریه‌ی مجموعه‌ها را دگرگون کرد و به ریاضی‌دان آلمانی، **ژرژ کانتور** منسوب است، مطرح کنیم.

مجموعه‌ی A هم‌ارز با مجموعه B است، اگر تابعی چون $f: A \to B$ موجود باشد، به‌طوری که f هم یک‌به‌یک و هم پوششی باشد. در این صورت می‌گویند: تابع f تناظری یک‌به‌یک بین مجموعه‌های A و B تعریف می‌کند.

مسئله‌ی ۲. مجموعه‌ی $M = \{۱,۱۰,۱۰۰,۱۰۰۰,\cdots\}$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید: $\mathbb{N} \sim M$.

حل: باید تابعی یک‌به‌یک و پوششی بین $\mathbb{N}$ و M تعریف کنیم. تابع f را به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} f: \mathbb{N} \longrightarrow M \\ f(n) = ۱۰^{n-۱} \end{cases}$$

این تابع یک‌به‌یک است، زیرا:

$$\begin{aligned} f(n_۱) = f(n_۲) &\Rightarrow ۱۰^{n_۱-۱} = ۱۰^{n_۲-۱} \\ &\Rightarrow n_۱ - ۱ = n_۲ - ۱ \\ &\Rightarrow n_۱ = n_۲ \end{aligned}$$

تابع f پوششی است، زیرا برای هر $y \in M$، یک عدد طبیعی مانند $n = ۱ + \log y$ وجود دارد، به‌طوری که: $y = f(n)$.

یعنی برای هر $y \in M$، وجود دارد: $n \in \mathbb{N}$، به‌طوری که:

$$\begin{aligned} y = ۱۰^{n-۱} &\Rightarrow \log y = \log ۱۰^{n-۱} \\ &\Rightarrow \log y = n - ۱ \\ &\Rightarrow n = (۱ + \log y) \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

مثال ۶ . بین مجموعه‌ی اعداد طبیعی و مجموعه‌ی اعداد طبیعی که مجذور کامل هستند، توسط تابع f به صورت زیر تناظری یک‌به‌یک موجود است.

مجموعه‌ی اعداد طبیعی مجذور کامل $\mathbb{N} = \{۱, ۲, ۳, \ldots\} \; ; \; A = \{۱, ۴, ۹, ۱۶, ۲۵, ۳۶, \ldots\}$

$$\begin{cases} f: \mathbb{N} \to A \\ f(x) = x^{۲} \end{cases}$$

تابع f با ضابطه‌ی فوق، یک‌به‌یک و پوششی است (چرا؟) لذا: $\mathbb{N} \sim A$.

مجموعه‌های شمارا و ناشمارا

تا این جا دیدیم که مجموعه‌های متناهی قابل شمارش هستند. هم‌چنین، با مجموعه‌هایی نامتناهی آشنا شدید که با اعداد طبیعی هم عدد یا هم‌ارز بودند. بنا به تعریف، مجموعه‌ی A را «شمارا» یا «شمارش‌پذیر» می‌گوییم، هرگاه متناهی باشد، یا: $A \sim \mathbb{N}$.

مجموعه‌های $\mathbb{N}$ ، E ، O (مجموعه‌ی اعداد فرد طبیعی) و هر زیر مجموعه‌ی نامتناهی از $\mathbb{N}$ را مجموعه‌هایی «شمارا» و نامتناهی یا «منتها شمارا» می‌گوییم.

مسئله‌ی ۳ . ثابت کنید مجموعه‌ی اعداد صحیح «منتهاشمارا» است.

اثبات: به این منظور ثابت می‌کنیم که: $\mathbb{N} \sim Z$.
تابع f با ضابطه‌ی زیر یک‌به‌یک و پوششی است (چرا؟)

$$\begin{cases} f: \mathbb{N} \to Z \\ f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{۲} & \text{زوج } n \\ \dfrac{۱-n}{۲} & \text{فرد } n \end{cases} \end{cases}$$

در نتیجه: $\mathbb{N} \sim Z$. چون N نامتناهی و شماراست، در نتیجه Z منتها شماراست.
با توجه به تابع f، دو مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ و Z به‌صورت نمودار ۲ هم‌ارزند:

$$\begin{array}{lccccccc} \mathbb{N}: & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & \cdots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ Z: & ۰ & ۱ & -۱ & ۲ & -۲ & ۳ & \cdots \end{array}$$

(نمودار ۲)

نکته‌ی ۳ . اگر A زیرمجموعه‌ی نامتناهی از Z باشد، در این صورت داریم:

$\mathbb{N} \sim Z \sim E \sim O \sim A$

همه‌ی مجموعه‌های فوق هم‌عدد هستند و بنابه تعریف، عدد اصلی همگی آنان را $\aleph_0$ (الف صفر) می‌نامیم. بنابراین داریم:

$|\mathbb{N}| = |Z| = |E| = |O| = |A| = \aleph_0$

حال فرض کنیم، مجموعه‌ی اعداد حقیقی بین ۲ و ۳ (شامل خود ۲ و خود ۳) در دست باشد و بخواهیم این مجموعه، یعنی $A = \{x \in \mathbb{R} | ۲ \le x \le ۳\}$ را برچسب‌گذاری کنیم. واضح است که اولین عضو این مجموعه را می‌توان عدد ۲ در نظر گرفت و برچسب شماره‌ی ۱ را به عدد ۲ اختصاص داد. بلافاصله به‌دنبال دومین عدد بعد از ۲ می‌گردیم تا برچسب شماره‌ی ۲ را که آماده کرده‌ایم، روی آن بچسبانیم. آیا می‌توان یک عدد حقیقی بلافاصله بعد از ۲ نام برد؟ جواب منفی است. ما نمی‌توانیم عدد حقیقی بلافاصله پس از ۲ را معرفی یا پیدا کنیم؛ به گونه‌ای که بین آن عدد و عدد ۲ هیچ عدد حقیقی دیگری وجود نداشته باشد. زیرا ثابت شده است که: «همواره بین هر دو عدد حقیقی متمایز، بی‌نهایت عدد حقیقی وجود دارد.» بنابراین، هم‌چنان در به‌کار بردن برچسب شماره‌ی ۲ ناتوان می‌مانیم. پس، مجموعه‌ی فوق شمارش‌ناپذیر یا ناشماراست.

تعریف: مجموعه‌ی A را شمارش‌ناپذیر می‌نامیم، هرگاه شمارش‌پذیر نباشد و به‌عبارت دیگر «متناهی نباشد و با $\mathbb{N}$ هم‌ارز نباشد». پس:

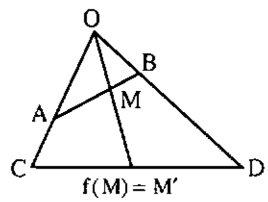
$\mathbb{N} \sim A$ و (A نامتناهی است) $\Leftrightarrow$ A شمارش‌ناپذیر است.

مثال ۷. مجموعه‌ی اعداد حقیقی، یعنی $\mathbb{R}$ و تمام زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$ به شکل $A = \{x \in \mathbb{R} | a \le x \le b\}$ (که نقاط ابتدایی و انتهایی مجموعه‌ی A تأثیری در «ناشمارایی» ندارند.) و مجموعه‌ی اعداد گنگ، «ناشمارا» یا شمارش‌ناپذیر هستند.

مثال ۸. فرض کنیم: $G = [۰,۱]$ و $H = [۲,۵]$. ملاحظه می‌کنیم که دو مجموعه‌ی H و G ناشمارا هستند. تابع $f: G \to H$ با ضابطه‌ی $f(x) = ۳x + ۲$ را در نظر می‌گیریم. با کمی دقت ملاحظه می‌کنیم که f هم یک‌به‌یک است و هم پوششی. پس: $G \sim H$؛ یعنی G هم‌ارز H می‌باشد؛ زیرا:

$$y = [۲,۵] \Rightarrow ۲ \le ۳x + ۲ \le ۵ \Rightarrow ۰ \le x \le ۱$$

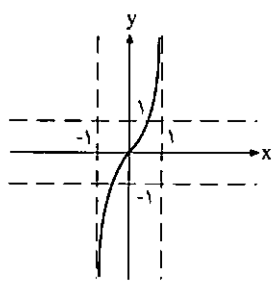
مثال ۹. فرض کنیم AB پاره خط مستقیمی به طول یک سانتی‌متر و CD قطعه خطی مستقیم به طول دل‌خواه باشد. مطابق شکل ۲، تابع f را بر مجموعه‌ی نقاط AB با این ضابطه تعریف می‌کنیم که f(M) یا M′ نقطه‌ی تقاطع خط OM با CD است. به‌وضوح می‌توان دید که f تناظر یک‌به‌یک بین مجموعه‌ی نقاط پاره‌خط AB و مجموعه‌ی نقاط پاره‌خط CD برقرار می‌کند.



مثال ۱۰. تابع $f: (-۱,۱) \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x) = \dfrac{x}{۱-|x|}$ یک‌به‌یک و پوشاست. بنابراین، بازه‌ی $(-۱,۱)$ هم‌ارز مجموعه‌ی اعداد حقیقی است. یعنی مجموعه‌ی اعداد حقیقی و بازه‌ی (۱ و ۱-) «هم‌عدد» هستند. چون تابع f(x) دارای قدرمطلق است، بنابراین f(x) تابعی دو ضابطه‌ای، به‌صورت زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{۱-x} & x \ge ۰ \\[2mm] \dfrac{x}{۱+x} & x < ۰ \end{cases}$$

با توجه به دامنه و ضابطه‌ی تابع f، نمودار آن به صورت نمودار ۳ است. نمودار به روشنی نشان می‌دهد که f یک‌به‌یک و پوششی است.



(نمودار ۳)

نکته‌ی ۴. اگر A بازه‌ای از اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ باشد، در این صورت داریم:

$A \sim \mathbb{R}$

بنا به تعریف، عدد اصلی $\mathbb{R}$ و A را با α نمایش می‌دهیم. بنابراین داریم:

$|\mathbb{R}| = |A| = \alpha$

اگر بخواهیم مقایسه‌ای بین α و $\aleph_0$ داشته باشیم، باید بگوییم که α به‌مراتب بزرگ‌تر از $\aleph_0$ است. در تئوری مجموعه‌های پیشرفته ثابت می‌کنند که: $\alpha = ۲^{\aleph_0}$.

مثال ۱۱. هر دنباله‌ی نامتناهی $a_۱, a_۲, a_۳, \cdots$ با عضوهای متمایز شمارای نامتناهی است. زیرا هر دنباله، اساساً تابعی مانند $\begin{cases} f: \mathbb{N} \to R_f \\ f(n) = a_n \end{cases}$ است که این تابع یک‌به‌یک و پوششی است. برای مثال، هریک از مجموعه‌های زیر شمارای نامتناهی (منتها شمارا) هستند:

$$\left\{۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۴}, \cdots, \frac{۱}{n}, \cdots\right\}$$

$$\left\{۱,-۲,۳,-۴,\cdots,(-۱)^{n-۱}n,\cdots\right\}$$

$$\left\{(۱,۱),(۴,۸),(۹,۲۷),\cdots,(n^{۲},n^{۳}),\cdots\right\}$$

مسئله‌ی ۴. ثابت کنید $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ متنها شماراست.

حل:

روش اول: با توجه به مسئله‌ی قبل و نمودار زیر، مجموعه‌ی $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ متنها شماراست.

$$\begin{array}{ccccc}
(۱,۱) & (۱,۲) & (۱,۳) & (۱,۴) & \cdots \\
(۲,۱) & (۲,۲) & (۲,۳) & (۲,۴) & \cdots \\
(۳,۱) & (۳,۲) & (۳,۳) & (۳,۴) & \cdots \\
(۴,۱) & (۴,۲) & (۴,۳) & (۴,۴) & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

(نمودار ۴)

$$\mathbb{N}\times\mathbb{N}=\left\{(۱,۱),(۲,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۲,۲),(۳,۱),(۴,۱),(۳,۲),\cdots\right\}$$

روش دوم: تابع زیر یک به یک و پوششی است و نشان می‌دهد که: $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\sim\mathbb{N}$. چون $\mathbb{N}$ متنهاشماراست، پس $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ نیز متنهاشماراست.

$$\begin{cases} f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N} \\ f(m,n)=۲^{m-۱}(۲n-۱) \end{cases}$$

f یک به یک است، زیرا:

$$f(m_۱,n_۱)=f(m_۲,n_۲)\Rightarrow ۲^{m_۱-۱}(۲n_۱-۱)=۲^{m_۲-۱}(۲n_۲-۱)$$
$$\Rightarrow m_۱=m_۲, n_۱=n_۲\Rightarrow(m_۱,n_۱)=(m_۲,n_۲)$$

از طرف دیگر، برای هر $y\in\mathbb{N}$ می‌توان نوشت:

$$y=۲^{m-۱}(۲n-۱)$$

زیرا با استفاده از تقسیم همواره می‌توان نوشت:

$$y=۲^{i}\times l\ ;\qquad i\in W, l\in O$$

اکنون اگر قرار دهیم: $m=i+۱$ و $n=\frac{۱}{۲}(l+۱)$ ، خواهیم داشت:

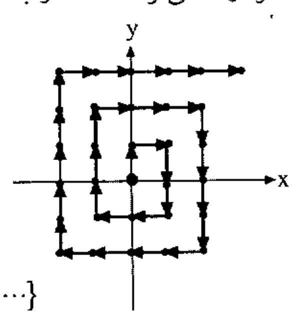
$$f(m,n)=y=۲^{m-۱}(۲n-۱)$$

پس f پوششی است و درنتیجه: $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\sim\mathbb{N}$.

مسئله‌ی ۵. نشان دهید $Z\times Z$ متنهاشماراست.

حل:

روش اول: با توجه به مثال ۱۱ و نمودار۵، می‌توان $Z\times Z$ را به صورت دنباله‌ای نامتناهی نوشت:



(نمودار ۵)

$$Z\times Z=\left\{(۰,۰),(۰,۱),(۱,۱),(۱,۰),(۱,-۱),(۰,-۱),\cdots\right\}$$

روش دوم: اجتماع چند مجموعه‌ی منتهاشمارا یک مجموعه‌ی منتهاشماراست.

$$Z\times Z=[\mathbb{N}\times\mathbb{N}]\cup[-\mathbb{N}\times\mathbb{N}]\cup[\mathbb{N}\times(-\mathbb{N})]\cup[(-N)\times(-N)]\cup[Z\times\{0\}]\cup[\{0\}\times Z]$$

نتیجه: $Z\times\mathbb{N}$ منتهاشماراست.

مسئله‌ی ۶. ثابت کنید Q منتهاشماراست.

حل:

روش اول: با توجه به مسئله‌ی ۱ و نمودار ۶، Q را به صورت دنباله‌ای نامتناهی می‌توان نوشت.

$$\begin{array}{cccccc}
\frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{-1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{-2}{1} & \cdots \\
\frac{0}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{-2}{2} & \cdots \\
\frac{0}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \cdots \\
\frac{0}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{-2}{4} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

(نمودار ۶)

عوامل تکراری را حذف می‌کنیم و از روی نمودار ۶ مجموعه‌ی Q را می‌نویسیم:

$$Q=\left\{0,1,-1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{2},2,-2,-\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots\right\}=\left\{\frac{m}{n}\Big|m\in Z,n\in\mathbb{N}\right\}$$

روش دوم: مجموعه‌ی تمام اعداد گویای مثبت را با نماد Q^+ و مجموعه‌ی تمام اعداد گویای منفی را با نماد Q^- نمایش می‌دهیم. واضح است که:

$$Q=Q^+\cup\{0\}\cup Q^-$$

چون: $Q^+\sim Q^-$، پس برای این که ثابت کنیم Q منتهاشماراست، کافی است نشان دهیم که Q^+ منتهاشماراست. به این منظور تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} f:Q^+\to\mathbb{N}\times\mathbb{N} \\ f(\frac{m}{n})=(m,n) \end{cases}$$

در این تابع m و n نسبت به هم اول‌اند، یعنی: $(m,n)=1$.
تابع f یک به یک و پوششی است. (چرا؟) پس داریم:

$$Q^+\sim f(Q^+)\subset\mathbb{N}\times\mathbb{N}$$

چون $\mathbb{N}$ نامتناهی و $\mathbb{N}\subset Q^+$، پس Q^+ نامتناهی است. درنتیجه $f(Q^+)$ یک زیر مجموعه‌ی نامتناهی مجموعه‌ی منتهاشمارای $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ است. از این رو $f(Q^+)$ منتهاشمارا و درنتیجه Q^+ منتهاشماراست.

در اثبات این قسمت، از قضیه‌ی زیر استفاده کرده‌ایم که آن را بدون اثبات می‌پذیریم:

قضیه: هر زیرمجموعه‌ی نامتناهی از یک مجموعه‌ی منتهاشمارا، مجموعه‌ای منتهاشماراست.

ملاحظه کردید که Q^+ منتهاشمار است، چون: $Q^+\sim Q^-$. پس Q^- نیز منتهاشماراست. از آن‌جا که اجتماع چند مجموعه‌ی منتهاشمارا، یک مجموعه‌ی منتهاشماراست، پس Q منتهاشماراست.

۱. نگرشی به چند مفهوم اساسی در نظریه مجموعه‌ها، میرشهرام صدر، برهان ۱۵ متوسطه
۲. مقدمه‌ای بر منطق و نظریه‌ی مجموعه‌ها، تألیف محمد رجبی طرخورانی
۳. نظریه مجموعه‌ها، نوشته‌ی سیمور لیپ شوتس، ترجمه‌ی محمود مهدی‌زاده
۴. نظریه مجموعه‌ها، نوشته واسلاو سرپینکی، پرویز شهریاری

نظریه‌ی مجموعه‌های فازی (۴)

● دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی
عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی

اشاره

همان‌طور که در قسمت‌های قبلی مطرح شد، «نظریه‌ی مجموعه‌های فازی» در سال ۱۹۶۵ توسط پروفسور لطفی عسگرزاده در آمریکا ابداع شد. وی در «مجله‌ی اطلاعات و کنترل» که خود سردبیر آن بود، مقاله‌ی «مجموعه‌های فازی» خویش را چاپ کرد. نظریه‌ی مجموعه‌های فازی، حاصل توسعه‌ی نظریه‌ی مجموعه‌های معمولی است و منطق فازی، حاصل توسعه‌ی منطق دوارزشی است. فازی بودن نوعی ابهام و عدم‌قطعیت را بیان می‌کند و با مفهوم عدم‌اطمینان در علم احتمالات متفاوت است.

در مفاهیم فازی، دیدگاه شخصی افراد معیار سنجش است و هر مفهوم به سلیقه‌ی افراد وابستگی کامل دارد. مثلاً «جوان‌بودن» یک مفهوم فازی است، چرا که مثلاً یک فرد ۳۰ ساله ممکن است بین جمعی از افراد بالای ۶۰ سال جوان تلقی شود، ولی بین محصلین دوره‌ی ابتدایی جوان به‌حساب نیاید. هر مفهوم فازی، به موقعیتی که در آن به‌کار گرفته می‌شود، بستگی دارد و نظریه‌ی منطق و مجموعه‌های فازی، با دیدگاه ریاضی به بررسی این ابهامات می‌پردازد. در این قسمت به معرفی چند عمل و مفاهیم دیگر روی مجموعه‌های فازی می‌پردازیم.

تعریف: فرض کنیم $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو مجموعه‌ی فازی روی مجموعه‌ی مرجع X باشند. در این صورت، جمع جبری و ضرب جبری این دو مجموعه، مجموعه‌های فازی به‌صورت $\tilde{A}+\tilde{B}$ و $\tilde{A}.\tilde{B}$ هستند که توابع عضویت آن‌ها برای هر $x \in X$ به این صورت تعریف می‌شود:

$$\mu_{\tilde{A}+\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x).\mu_{\tilde{B}}(x),$$
$$\mu_{\tilde{A}.\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x).\mu_{\tilde{B}}(x)$$

با توجه به تعریف، ضرب جبری توان mام مجموعه‌ی فازی

$\tilde{A}$، مجموعه‌ای فازی به‌صورت $\tilde{A}^{m}$ است که تابع عضویت آن به این صورت تعریف می‌شود:

$$\mu_{\tilde{A}^m}(x)=\left(\mu_{\tilde{A}}(x)\right)^m \ ,\quad m\in\mathbb{N}$$

هم‌چنین، جمع کران‌دار و تفریق کران‌دار این دو مجموعه‌ی فازی، مجموعه‌های فازی به صورت $\tilde{A}\oplus\tilde{B}$ و $\tilde{A}-\tilde{B}$ هستند که توابع عضویت آن‌ها برای هر $x\in X$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{\tilde{A}\oplus\tilde{B}}(x)=\min\left\{1,\mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x)\right\}\ ,$$

$$\mu_{\tilde{A}-\tilde{B}}(x)=\max\left\{0,\mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x)-1\right\}$$

مثال: دو مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ روی $\mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\tilde{A}=\{(1,0/3),(3,1),(4,0/7)\}$$

$$\tilde{B}=\{(1,0/2),(4,1),(5,0/6)\}$$

در زیرمجموعه‌های فازی، $\tilde{A}+\tilde{B}$، $\tilde{A}-\tilde{B}$، $\tilde{A}^{2}$، $\tilde{A}\oplus\tilde{B}$ و $\tilde{A}-\tilde{B}$ مشخص شده‌اند.

$$\tilde{A}+\tilde{B}=\{(1,0/44),(3,1),(4,1),(5,0/6)\}$$

به عنوان مثال:

$$\mu_{\tilde{A}+\tilde{B}}(1)=\mu_{\tilde{A}}(1)+\mu_{\tilde{B}}(1)-\mu_{\tilde{A}}(1).\mu_{\tilde{B}}(1)$$
$$=0/3+0/2-0/3\times 0/2=0/44$$

$$\tilde{A}.\tilde{B}=\{(1,0/06),(4,0/7)\}$$

به عنوان مثال:

$$\mu_{\tilde{A}+\tilde{B}}(3)=\mu_{\tilde{A}}(3).\mu_{\tilde{B}}(3)=1\times 0=0$$

چون مقدار تابع عضویت در $x=3$ صفر شده، این عضو در مجموعه نیامده است.

$$\tilde{A}^{2}=\{(1,0/09),(3,1),(4,0/49)\}$$

$$\tilde{A}\oplus\tilde{B}=\{(1,0/5),(3,1),(4,1),(5,0/6)\}$$

به عنوان مثال:

$$\mu_{\tilde{A}\oplus\tilde{B}}(4)=\min\left\{1,\mu_{\tilde{A}}(4)+\mu_{\tilde{B}}(4)\right\}$$
$$=\min\{1,0/7+1\}=1$$

$$\tilde{A}-\tilde{B}=\{(4,0/7)\}$$

به عنوان مثال:

$$\mu_{\tilde{A}-\tilde{B}}(1)=\max\left\{0,\mu_{\tilde{A}}(1)+\mu_{\tilde{B}}(1)-1\right\}$$
$$=\max\{0,0/3+0/2-1\}=\max\{0,-0/5\}=0$$

چون مقدار تابع عضویت در $x=1$ صفر شده، این عضو در مجموعه منظور نشده است.

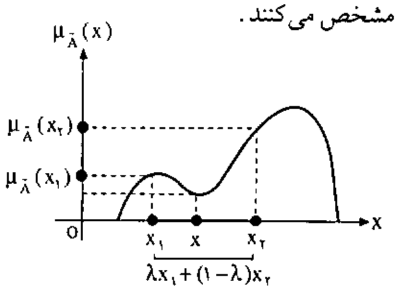
همان‌گونه که ملاحظه شد، اعمال ریاضی روی مجموعه‌های فازی به‌طور مستقیم از روی توابع عضویت آن‌ها تعریف می‌شود.

در ادامه به معرفی محدب بودن یک مجموعه‌ی فازی می‌پردازیم.

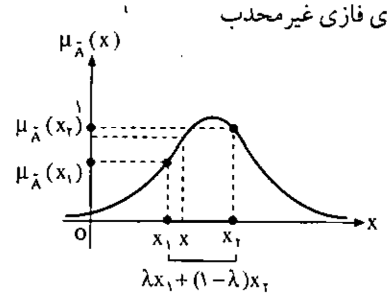
تعریف: مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ را محدب گوییم، هرگاه به ازای هر $x_1,x_2\in X$ و هر $\lambda\in[0,1]$ رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\geq\min\left\{\mu_{\tilde{A}}(x_1),\mu_{\tilde{A}}(x_2)\right\}$$

اشکال زیر نمونه‌ای از یک مجموعه‌ی فازی محدب و غیرمحدب را مشخص می‌کنند.



مجموعه‌ی فازی غیرمحدب



مجموعه‌ی فازی محدب

می‌دانیم، اگر $0\leq\lambda\leq 1$ باشد، مقادیر $\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$، روی پاره‌خط واصل بین دو نقطه‌ی x_1 و x_2 واقع هستند. بنابراین، در صورتی که $\tilde{A}$ مجموعه‌ی فازی محدبی باشد، مقدار درجه‌ی عضویت هر عضو روی این پاره‌خط بزرگ‌تر یا مساوی حداقل مقدار درجه‌های عضویت در دو سر این پاره‌خط است. قضیه‌ی زیر یک شرط لازم و کافی برای محدب بودن یک مجموعه‌ی فازی را مطرح می‌کند.

قضیه: شرط لازم و کافی برای آن‌که مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ محدب باشد آن است که مجموعه‌ی $\alpha-$ برش $\tilde{A}$ به ازای هر $0\leq\alpha\leq 1$ محدب باشد. یعنی اگر x_1,x_2 دو عضو دل‌خواه A_α باشند، آن‌گاه $\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$ نیز برای هر $0\leq\lambda\leq 1$ در A_α باشد.

مثال: ثابت کنید، مجموعه‌ی فازی زیر نمونه‌ای از یک مجموعه‌ی فازی محدب است.

$$\tilde{A}=\left\{(x,\mu_{\tilde{A}}(x))\middle| x\in\mathbb{R}\right\}\ ,\quad \mu_{\tilde{A}}(x)=e^{-x^2}$$

برای اثبات این موضوع می‌توانیم ثابت کنیم مجموعه‌ی $\alpha-$ برش $\tilde{A}$ محدب است. ابتدا A_α را می‌یابیم:

$$e^{-x^2}\geq\alpha\Rightarrow -x^2\geq\ln\alpha\Rightarrow x^2\leq-\ln\alpha$$

$$\Rightarrow -\sqrt{-\ln\alpha} \le x \le \sqrt{-\ln\alpha}$$

$$\Rightarrow A_\alpha = \left[-\sqrt{-\ln\alpha}, \sqrt{-\ln\alpha}\right], \quad 0 \le \alpha \le 1$$

توجه می‌کنیم که: $\ln\alpha \le 0$. لذا زیر رادیکال مقداری نامنفی است. حال اگر داشته باشیم: $x_1, x_2 \in A_\alpha$ ، آن‌گاه:

$$-\sqrt{-\ln\alpha} \le x_1 \le \sqrt{-\ln\alpha} \xrightarrow{\times\lambda} -\lambda\sqrt{-\ln\alpha} \le \lambda x_1 \le \lambda\sqrt{-\ln\alpha}$$

$$-\sqrt{-\ln\alpha} \le x_2 \le \sqrt{-\ln\alpha}$$

$$\xrightarrow{\times(1-\lambda)} -(1-\lambda)\sqrt{-\ln\alpha} \le (1-\lambda)x_2 \le (1-\lambda)\sqrt{-\ln\alpha}$$

با جمع بستن طرفین این نامساوی‌ها داریم:

$$-\sqrt{-\ln\alpha} \le \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \le \sqrt{-\ln\alpha}$$

بنابراین: $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in A_\alpha$ که $0 \le \lambda \le 1$. به این ترتیب A_α مجموعه‌ای محدب است و درنتیجه بنابر قضیه‌ی فوق، $\tilde{A}$ مجموعه‌ی فازی محدبی است.

با استفاده از مفهوم فوق، تعریف زیر را برای یک عدد فازی مطرح می‌کنیم:

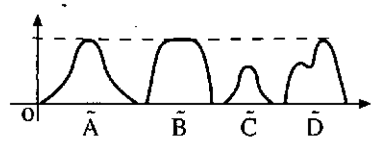
تعریف: فرض کنیم $\tilde{A}$ یک مجموعه‌ی فازی روی $\mathbb{R}$ باشد. در این صورت $\tilde{A}$ را یک عدد فازی گوییم، هرگاه:

الف) $\tilde{A}$ مجموعه‌ی فازی محدب باشد.

ب) تنها یک نقطه‌ی $x_0 \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد که: $\mu_{\tilde{A}}(x_0) = 1$

ج) تابع $\mu_{\tilde{A}}$ به طور قطعه‌ای پیوسته باشد.

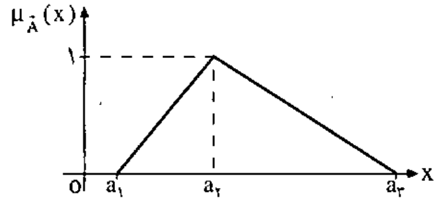
در شکل زیر فقط مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ و یک عدد فازی است، ولی مجموعه‌های فازی $\tilde{B}$ ، $\tilde{C}$ و $\tilde{D}$ اعداد فازی نیستند.



مقدار تابع عضویت $\tilde{B}$ در بیش از یک نقطه برابر با ۱ شده است. مقدار تابع عضویت $\tilde{C}$ در هیچ نقطه‌ای برابر ۱ نشده است و $\tilde{D}$ یک مجموعه‌ی فازی محدب نیست.

یکی از اعداد فازی مشهور، «عدد فازی مثلثی» است. تابع عضویت این عدد فازی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a_1}{a_2-a_1} & a_1 \le x < a_2 \\ \dfrac{a_3-x}{a_3-a_2} & a_2 \le x < a_3 \\ 0 & \text{در غیراین صورت} \end{cases}$$



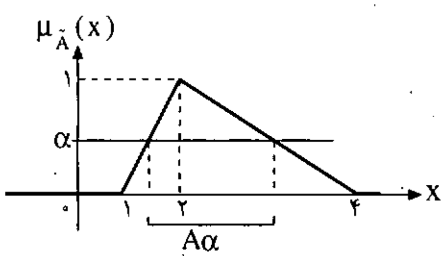
یک عدد فازی مثلثی

در این حالت، عدد فازی $\tilde{A}$ را به صورت $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$ نمایش می‌دهیم. به نقطه‌ی a_2 که به ازای آن داریم: $\mu_{\tilde{A}}(a_2) = 1$ ، «میانه» می‌گوییم.

مثال: تابع عضویت عدد فازی مثلثی $\tilde{A} = (1, 2, 4)$ و مجموعه‌ی α– برش این عدد فازی به صورت زیر هستند:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} x-1 & 1 \le x < 2 \\ 2-\dfrac{x}{2} & 2 \le x < 4 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

و $A_\alpha = [\alpha+1, 4-2\alpha]$



تابع عضویت عدد فازی $\tilde{A} = (1, 2, 4)$

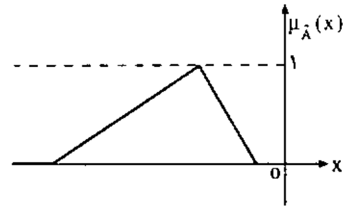
ملاحظه می‌کنیم که: $A_1 = \{2\}$ (مجموعه ۱ـ برش $\tilde{A}$) و $A_0 = [1, 4]$ (مجموعه ۰ـ برش $\tilde{A}$)

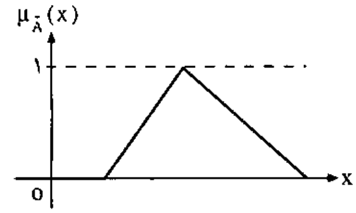
در حالت کلی، مجموعه‌ی α– برش عدد فازی مثلثی $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$ به صورت زیر است:

$$A_\alpha = [a_1 + (a_2 - a_1)\alpha, a_3 - (a_3 - a_2)\alpha], \quad 0 \le \alpha \le 1$$

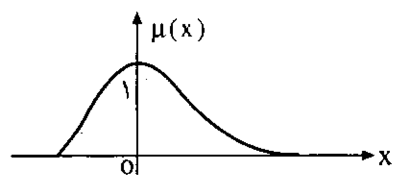
تعریف: عدد فازی $\tilde{A}$ را مثبت گوییم، هرگاه: $\forall x < 0, \ \mu_{\tilde{A}}(x) = 0$ ، و منفی گوییم، هرگاه: $\forall x > 0, \ \mu_{\tilde{A}}(x) = 0$.

شکل صفحه بعد نمونه‌ای از یک عدد فازی مثبت و یک عدد فازی منفی را نمایش می‌دهد.





برای مثال، عدد فازی مثلثی $\tilde{A}=(1,2,4)$ در مثال بالا یک عدد فازی مثبت است. لازم به ذکر است که یک عدد فازی می‌تواند نه مثبت باشد و نه منفی. شکل زیر نمونه‌ای از یک عدد فازی است که نه مثبت است و نه منفی.



در ادامه چند تمرین برای خواننده مطرح کرده‌ایم که با توجه به آن‌چه شرح دادیم، می‌تواند به حل آن‌ها بپردازد.

۱. تابع عضویتی برای هریک از مجموعه‌های فازی زیر تعیین کنید:

الف) مجموعه‌ی فازی تقریباً ۳

ب) مجموعه‌ی فازی تقریباً بین ۱ و ۳

ج) مجموعه‌ی فازی خیلی بزرگ‌تر از ۳

۲. درباره‌ی محدب بودن هریک از مجموعه‌های فازی زیر تحقیق کنید:

$$\tilde{A}=\left\{(x,\mu_{\tilde{A}}(x))\,|\,x\in\mathbb{R}\right\},\quad \mu_{\tilde{A}}(x)=\frac{1}{1+(\frac{1}{x-10})}$$

$$\tilde{B}=\left\{(x,\mu_{\tilde{B}}(x))\,|\,x\in\mathbb{R}\right\},\quad \mu_{\tilde{B}}(x)=\frac{1}{1+(x-10)^2}$$

۳. دو مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ در $\mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\tilde{A}=\{(1,0/2),(3,0/4),(4,0/7),(5,1),(6,0/8),(7,0/5)\}$$

$$\tilde{B}=\{(2,0/4),(3,0/7),(4,1),(5,0/7),(7,0/3)\}$$

مطلوب است محاسبه‌ی: $\tilde{A}+\tilde{B}$ ، $\tilde{A}^2$ ، $\tilde{A}.\tilde{B}$ ، $\tilde{A}\oplus\tilde{B}$ و $\tilde{A}-\tilde{B}$ و $\tilde{A}\times\tilde{B}$.

۴. مجموعه‌ی α- برش عدد فازی مثلثی زیر را بیابید و مشخص کنید، این عدد فازی مثبت است یا منفی.

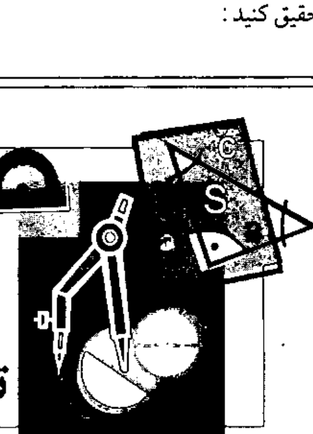
$$\tilde{A}=\left\{(x,\mu_{\tilde{A}}(x))\,|\,x\in\mathbb{R}\right\}$$

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}\frac{x+2}{2} & -2<x\le 0\\ 1-x & 0<x\le 1\\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

در قسمت بعدی، ضمن راهنمایی و حل این تمرین‌ها، خواننده را با مفاهیمی دیگر در مجموعه‌ها و منطق فازی آشنا می‌کنیم.

1. Zimmermann, H. J. Fuzzy Sets theory and its applications, kluwer academic publishers 1996.

۲. کازوتاناکا. مقدمه‌ای بر منطق فازی برای کاربردهای عملی آن. ترجمه‌ی دکتر علی وحیدیان و دکتر حامد رضا طارقیان. ۱۳۸۱.



سؤالات تفریح اندیشه

۱. دستگاه زیر را حل کنید:

$$\begin{cases}x^2+y^2=208\\ xy=96\end{cases}$$

جواب ۱:

$$D=\{(12,8),(8,12),(-8,-12),(-12,-8)\}$$

۲. مجموع پنج زاویه از زاویه‌های یک هشت‌ضلعی، 845° است. از سه زاویه‌ی باقی‌مانده، دو زاویه، متمم یکدیگر و دو زاویه، مکمل یکدیگرند. اندازه‌ی این سه زاویه را بیابید.

جواب: 35° ، 55° و 145°

۳. همه‌ی مقادیر x را چنان بیابید که به‌ازای آن‌ها، عبارت زیر عددی حقیقی باشد:

$$z=[-x+10+(x+2)i](x-i)$$

جواب: ۲ و ۵-

مسابقه‌های ریاضی در کشورهای مختلف
المپیاد ریاضی در سوئد

● هوشنگ شرقی

سابقه‌ی برگزاری المپیاد ریاضی در کشور سوئد، به سال ۱۹۶۱ برمی‌گردد. مسابقه‌ی ریاضی دانش‌آموزی در کشور سوئد در دو مرحله برگزار می‌شود و در هر مرحله، عده‌ای از دانش‌آموزان برگزیده می‌شوند تا تیم نهایی المپیاد ریاضی این کشور برای شرکت در مسابقه‌ی جهانی انتخاب شود. سوئد جزو نخستین کشورهای اروپای غربی بود که در «المپیاد بین‌المللی ریاضی» شرکت کرد.

نخستین المپیاد بین‌المللی ریاضی در سال ۱۹۵۹ و تنها بین تعدادی از کشورهای بلوک شرق اروپا برگزار شد و تا سال ۱۹۶۵ نیز، تنها کشورهای اروپای شرقی در آن شرکت داشتند.

از این سال با شرکت کشور فنلاند، پای کشورهای اروپای غربی نیز به آن باز شد. کشور سوئد از سال ۱۹۶۷ در این المپیاد شرکت کرده و تا امروز نیز همواره در آن حضور داشته و مقام‌های خوبی به‌دست آورده است. یک بار هم به سال ۱۹۹۱، میزبان این رقابت‌ها بوده است.

در این جا به منظور آشنایی خوانندگان مجله، نمونه سؤال‌هایی از مسابقات ریاضی این کشور را در سال ۱۹۸۶، همراه با راه‌حل‌های آن‌ها آورده‌ایم. سطح سؤالات در مقایسه با المپیادهای کشورهای سطح اول المپیاد ریاضی (مانند شوروی، آمریکا، چین، ایران، رومانی و ویتنام) پایین است، ولی برای علاقه‌مندان به المپیادهای ریاضی و به عنوان آماده‌سازی، سؤال‌های بدی نیستند و ارزش اندیشیدن دارند.

صورت مسائل

۱. ثابت کنید برای هر مقدار $0 < b < a$، نابرابری‌های زیر برقرارند:

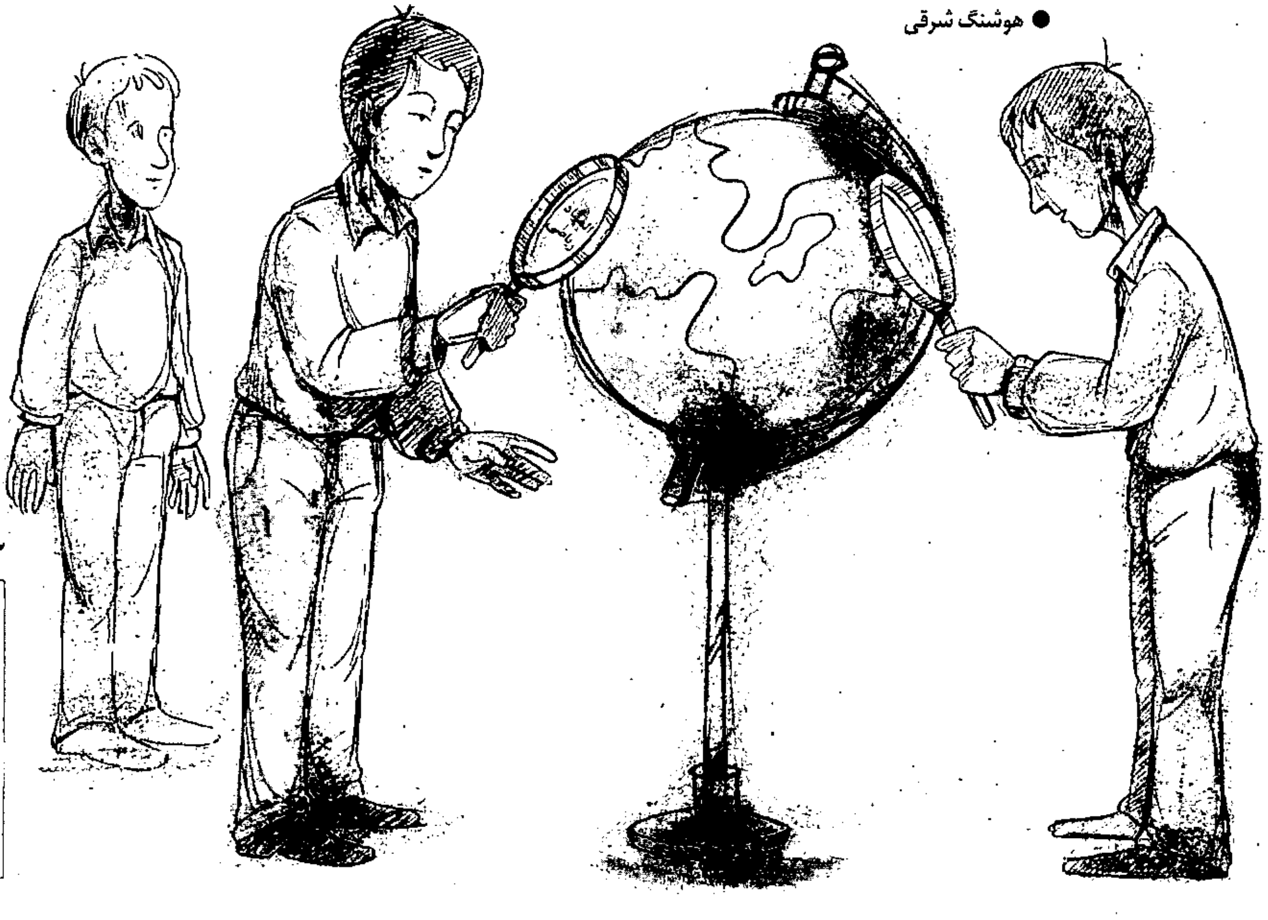
$$\frac{(a-b)^2}{8a} < \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} < \frac{(a-b)^2}{8b}$$

۲. کوچک‌ترین عدد طبیعی را پیدا کنید که دارای این ویژگی باشد: «اگر رقم اول آن را (از سمت چپ) به آخر ببریم (در عددنویسی پایه‌ی ۱۰)، عدد مفروض $\frac{7}{2}$ برابر شود.»

۳. $(a,0)$، $(0,b)$ و (c,d) را مختصات رأس‌های مثلث ABC می‌گیریم که در آن a، b، c و d عددهای مثبتی هستند. اگر O مبدأ مختصات باشد، درستی نابرابری زیر را ثابت کنید:

$$AB + BC + CA \geq 2CO$$

۴. نقطه‌های A، B و C روی محیط دایره‌ای به شعاع r، و نقطه‌ی D در درون این دایره طوری قرار گرفته‌اند که AB=BC و مثلث BCD متساوی‌الاضلاع شده است. نیم‌خط راست AD، محیط دایره را در E قطع می‌کند. ثابت کنید: DE=r.



حل مسائل

۱. اگر از روش بازگشتی استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{(a-b)^2}{8a} < \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} < \frac{(a-b)^2}{8a}$$

$$\Rightarrow \frac{(a-b)^2}{4a} < (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 < \frac{(a-b)^2}{4b}$$

و با جای‌گذاری $\sqrt{a}-\sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ داریم:

$$\frac{(a-b)^2}{4a} < \frac{(a-b)^2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} < \frac{(a-b)^2}{4b}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4a} < \frac{1}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} < \frac{1}{4b}$$

$$\Rightarrow 4a > (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 > 4b$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{a} > \sqrt{a}+\sqrt{b} > 2\sqrt{b}$$

با توجه به فرض $a > b$، درستی نابرابری‌های فوق واضح است. (چرا؟) در ضمن، تمام مراحل نیز بازگشت پذیرند و می‌توانید با برگشت از مسیر فوق، درستی نابرابری‌ها را به‌طور هم‌زمان اثبات کنید.

۲. اگر عدد فوق را n رقمی و با ارقام a_0 و a_1 و... و a_n فرض کنیم، مسئله به‌صورت زیر مدل‌سازی می‌شود:

$$\frac{7}{2}\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_2 a_1 a_0} = \overline{a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_2 a_1 a_0 a_n}$$

با بسط در مبنای ده و ساده‌کردن طرفین تساوی خواهیم داشت:

$$7(10^n a_n + 10^{n-1}a_{n-1} + \cdots + 100a_2 + 10a_1 + a_0)$$
$$= 2(10^n a_{n-1} + 10^{n-1}a_{n-2} + \cdots + 10^3 a_2 + 10^2 a_1 + 10a_0 + a_n)$$
$$\Rightarrow (7\times 10^n - 2)a_n = 10^{n-1}a_{n-1}(20-7) + 10^{n-2}(20-7)a_{n-2}$$
$$+ \cdots + 100a_2(20-7) + 10a_1(20-7) + (20-7)a_0$$
$$= 13(10^{n-1}a_{n-1} + 10^{n-2}a_{n-2} + \cdots + 100a_2 + 10a_1 + a_0)$$
$$\Rightarrow (7\times 10^n - 2)a_n = 13\overline{a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_2 a_1 a_0}$$
$$\Rightarrow 13 \mid 7\times 10^n - 2$$

اکنون با امتحان کردن مقادیر n، نخستین مقدار n که برای آن $7\times 10^n - 2$ بر ۱۳ بخش‌پذیر باشد، ۵ به‌دست می‌آید:

$$7\times 10^5 - 2 = 699998 = 13\times 53846$$
$$\Rightarrow 13\times 53846 a_5 = 13\overline{a_4 a_3 a_2 a_1 a_0}$$
$$\Rightarrow 53846 a_5 = \overline{a_4 a_3 a_2 a_1 a_0}$$

و با فرض $a_5 = 1$ نتیجه می‌شود:

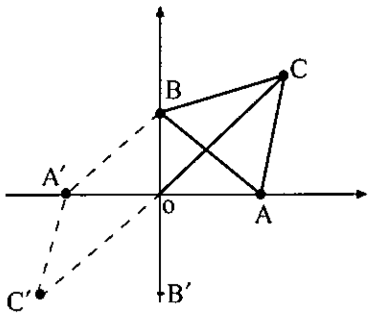
$$\overline{a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0} = 153846$$

که با شرط مسئله نیز سازگار است:

$$538461 = \frac{7}{2}\times 153846$$

لذا کوچک‌ترین عدد با ویژگی فوق، عدد شش‌رقمی ۱۵۳۸۴۶ است.

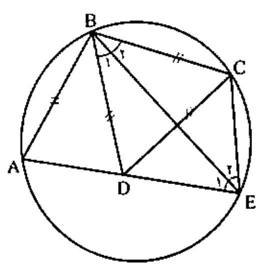
۳. قرینه‌های نقاط A، B و C نسبت به O را A'، B' و C' می‌نامیم. حال واضح است که داریم: $OC = OC'$ و $A'C' = AC$ و $A'B = AB$.



هم‌چنین، در چهار ضلعی $C'A'BC$ داریم:

$$A'C' + A'B + BC > CC'$$
$$\Rightarrow AB + BC + CA > 2CO$$

۴. با توجه به شکل می‌توان نوشت:



$$AB = BC \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} \Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{E}_2 = \alpha$$

$$\begin{cases} \Delta BCE: \dfrac{BC}{\sin E_2} = \dfrac{BE}{\sin(B\hat{C}E)} \\ \Delta BDE: \dfrac{BD}{\sin E_1} = \dfrac{BE}{\sin(B\hat{D}E)} \\ BC = BD \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin(B\hat{C}E) = \sin(B\hat{D}E) \Rightarrow B\hat{C}E = B\hat{D}E$$
یا $B\hat{C}E + B\hat{D}E = 180^\circ$

اگر داشته باشیم: $B\hat{C}E + B\hat{D}E = 180^\circ$، در این صورت BCED یک چهارضلعی محاطی و دایره‌ی محیطی آن، همان دایره‌ی محیطی مثلث BCE، یعنی دایره‌ی اصلی است. در نتیجه D روی محیط دایره واقع می‌شود. یعنی AD وتری از دایره است و دایره را در نقطه‌ی دیگری قطع نمی‌کند و در این حالت مسئله جواب ندارد. بنابراین باید $B\hat{C}E = B\hat{D}E$ باشد و لذا با توجه به مجموع زوایا، خواهیم داشت:

$$\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = 30^\circ, \Delta BDE: DE = 2r\sin\hat{B}_1 = 2r\sin 30^\circ = r$$

یک مسئله با پاسخی به ظاهر صحیح!

برای دانش‌آموزان سال سوم ریاضی و تجربی و بالاتر

● عنایت‌اله راستی‌زاده

دبیر ریاضی دبیرستان‌های شیراز

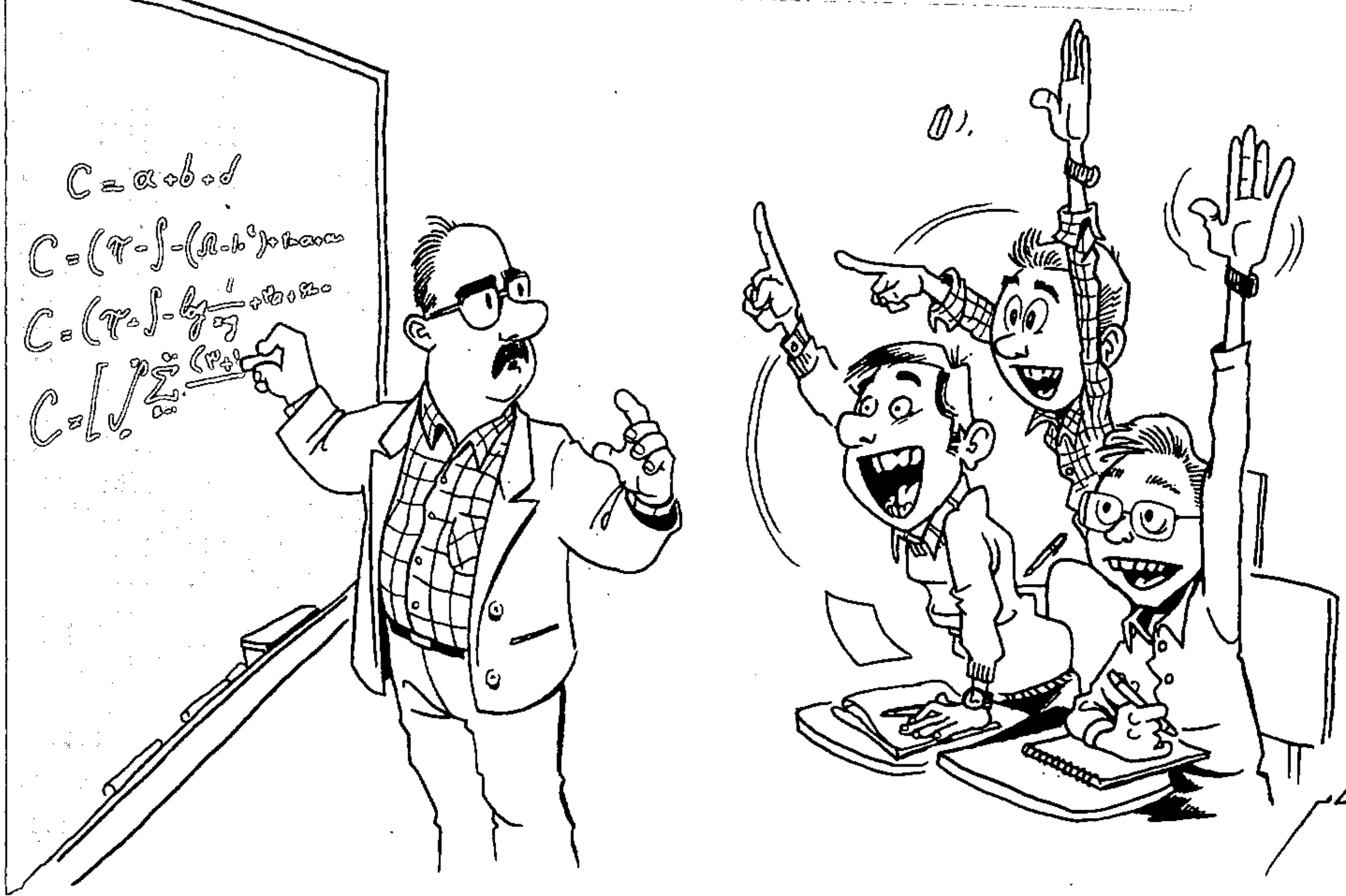
اشاره

غالباً اتفاق می‌افتد که دانش‌آموزان در پاسخ دادن به بعضی سؤالات، عجله می‌کنند و بدون توجه به تمام جوانب مسئله، پاسخ را می‌یابند، اما از آن می‌گذرند. به نمونه‌ای از این گونه مسئله‌ها توجه کنید:

مسئله: دو تابع مانند f و g مثال بزنید که هیچ‌کدام در نقطه‌ی a پیوسته نباشند، اما حاصل جمع آن‌ها در نقطه‌ی a پیوسته شود.

دانش‌آموزی برای حل این مسئله چنین نوشته است:

فرض کنیم: $g(x) = \frac{-1}{\sqrt{x-1}} + 1$ و $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} + 1$



دو تابع f و g در نقطه‌ی $x_0 = 1$ تعریف نشده‌اند، پس در این نقطه پیوسته نیستند. اما تابع حاصل جمع آن‌ها با ضابطه‌ی:

$$(f+g)(x) = 2$$

تابع ثابت است و همه‌جا، از جمله در نقطه‌ی $x_0 = 1$ پیوسته است!

چرا این پاسخ اشتباه است؟

اشتباه پاسخ در این‌جاست که دانش‌آموز به دامنه‌ی تعریف تابع $f+g$ توجه نکرده است! می‌دانیم، دامنه‌ی تعریف تابع $f+g$، اشتراک دامنه‌های دو تابع f و g است و چون: $D_f = D_g = (1,+\infty)$، لذا: $D_{f+g} = (1,+\infty)$.

یعنی تابع $f+g$ در نقطه‌ی $x_0 = 1$ تعریف نشده است و لذا در این نقطه پیوسته نیست.

آموزنده است که نمودار تابع f، g و $f+g$ اخیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و ناپیوستگی تابع $f+g$ را در نقطه‌ی $x_0 = 1$ از روی نمودار هم مشاهده کنید!

دانش‌آموز دیگری در پاسخ به این سؤال،

$$g(x) = 1-[x] \text{ و } f(x) = 1+[x]$$

را در نظر گرفته است که در این صورت

$$(f+g)(x) = 2 \text{ و } D_{f+g} = R$$

f و g در نقاط صحیح پیوسته نیستند، چون در این نقاط حد ندارند. اما تابع $f+g$ در تمام نقاط صحیح پیوسته است.

یک پاسخ متفاوت اما صحیح دیگر

این پاسخ چنین است:

فرض کنیم دو تابع f و g به صورت زیر تعریف شده باشند:

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & (x>1) \\ x & (x \le 1) \end{cases} \text{ و } g(x) = \begin{cases} x-1 & (x>1) \\ 2x & (x \le 1) \end{cases}$$

از آن‌جایی که:

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = 3$ و $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = 1$، لذا f در نقطه‌ی ۱ حد ندارد و پیوسته نیست.

هم‌چنین:

$\lim\limits_{x\to1^+} g(x) = 0$ و $\lim\limits_{x\to1^-} g(x) = 2$ درنتیجه g نیز در نقطه‌ی ۱ حد ندارد و پیوسته نیست.

اما تابع حاصل جمع آن‌ها که به صورت زیر تعریف شده است:

$$(f+g)(x) = \begin{cases} 2x+1 & (x>1) \\ 3x & (x \le 1) \end{cases}$$

در نقطه‌ی ۱ دارای حد چپ و راست برابر با ۳ است و:

$$(f+g)(x) = 3$$

بنابراین در این نقطه پیوسته است.

آموزنده است که نمودار توابع f و g و $f+g$ اخیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و پیوستگی تابع $f+g$ را در نقطه‌ی $x_0 = 1$ از روی نمودار هم مشاهده کنید!

با راهیان المپیادهای ریاضی (۱۴)

● غلامرضا یاسی‌پور

درباره‌ی یک اتحاد جبری

این بخش با مسائلی سر و کار دارد که می‌توانند با استفاده از اتحاد جبری زیر حل شوند:

$$x^4+\frac{1}{4}y^4=(x^2+xy+\frac{1}{2}y^2)(x^2-xy+\frac{1}{2}y^2)$$

در این مورد، دو مثال به‌دست می‌دهیم.

الف) مجموع زیر را محاسبه کنید:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{4k}{4k^4+1}$$

با استفاده از اتحاد فوق، به دست می‌آوریم:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{4k}{4k^4+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k^2+2k+1)-(2k^2-2k+1)}{(2k^2+2k+1)(2k^2-2k+1)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k^2-2k+1}-\frac{1}{2(k+1)^2-2(k+1)+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{2n^2+2n+1}$$

و به این ترتیب، کار به سامان می‌رسد.

ب) با مفروض بودن ماتریس $n\times n$، A با ویژگی $A^3=0$، *ثابت کنید ماتریس*

$$M=\frac{1}{2}A^2+A+I_n$$

وارون‌پذیر است.

در واقع، وارون این ماتریس عبارت است از:

$$\frac{1}{2}A^2-A+I_n$$

زیرا حاصل ضرب دو ماتریس، $\frac{1}{4}A^4+I_n$ را می‌دهد که برابر اتحاد مورد بحث است. البته در این حالت می‌توان نتیجه را از این واقعیت استخراج کرد که ویژه مقدارهای M ناصفرند و این خود پیامد مستقیمی از «قضیه‌ی نگاشت طیفی[25]» است.

در ادامه مثال‌های بیشتری از کاربرد این اتحاد به دست می‌دهیم.

۱. ثابت کنید، به ازای هر عدد صحیح $n>2$، عدد $2^{2^n-2}+1$ اول نیست.

۲. ثابت کنید هر دنباله‌ی صادق در بازگشتی

$$x_{n+1}+x_{n-1}=\sqrt{2}x_n$$

دوره‌ای است.

۳. این مجموع را محاسبه کنید:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2-\frac{1}{2}}{k^4+\frac{1}{4}}$$

۴. محاسبه کنید:

$$\frac{(1^4+\frac{1}{4})(3^4+\frac{1}{4})\cdots((2n-1)^4+\frac{1}{4})}{(2^4+\frac{1}{4})(4^4+\frac{1}{4})\cdots((2n)^4+\frac{1}{4})}$$

۵. نشان دهید، به ازای هر n، بی‌نهایت عدد a چنان موجود است که عدد n^4+a اول نیست.

۶. نشان دهید n^4+4^n اول است، اگر و تنها اگر: $n=1$.

۷. چندجمله‌ای

$$P(X)=X^4+6X^2-4X+1$$

را در نظر می‌گیریم. ثابت کنید $P(X^4)$ را می‌توان به صورت دو چندجمله‌ای با ضرایب صحیح و درجه‌ی هر یک بزرگ‌تر از ۱ نوشت.

۸. ثابت کنید، به ازای هر عدد صحیح n بزرگ‌تر از ۱، عدد $n^{12}+64$ را می‌توان به صورت حاصل ضرب چهار عدد صحیح متمایز بزرگ‌تر از ۱ نوشت.

۹. فرض می‌کنیم m و n اعدادی صحیح و مثبت باشند. ثابت کنید هرگاه m زوج باشد، آن‌گاه

$$\sum_{k=0}^{m}(-4)^k n^{4(m-k)}$$

اول نیست.

حل مسئله‌ها

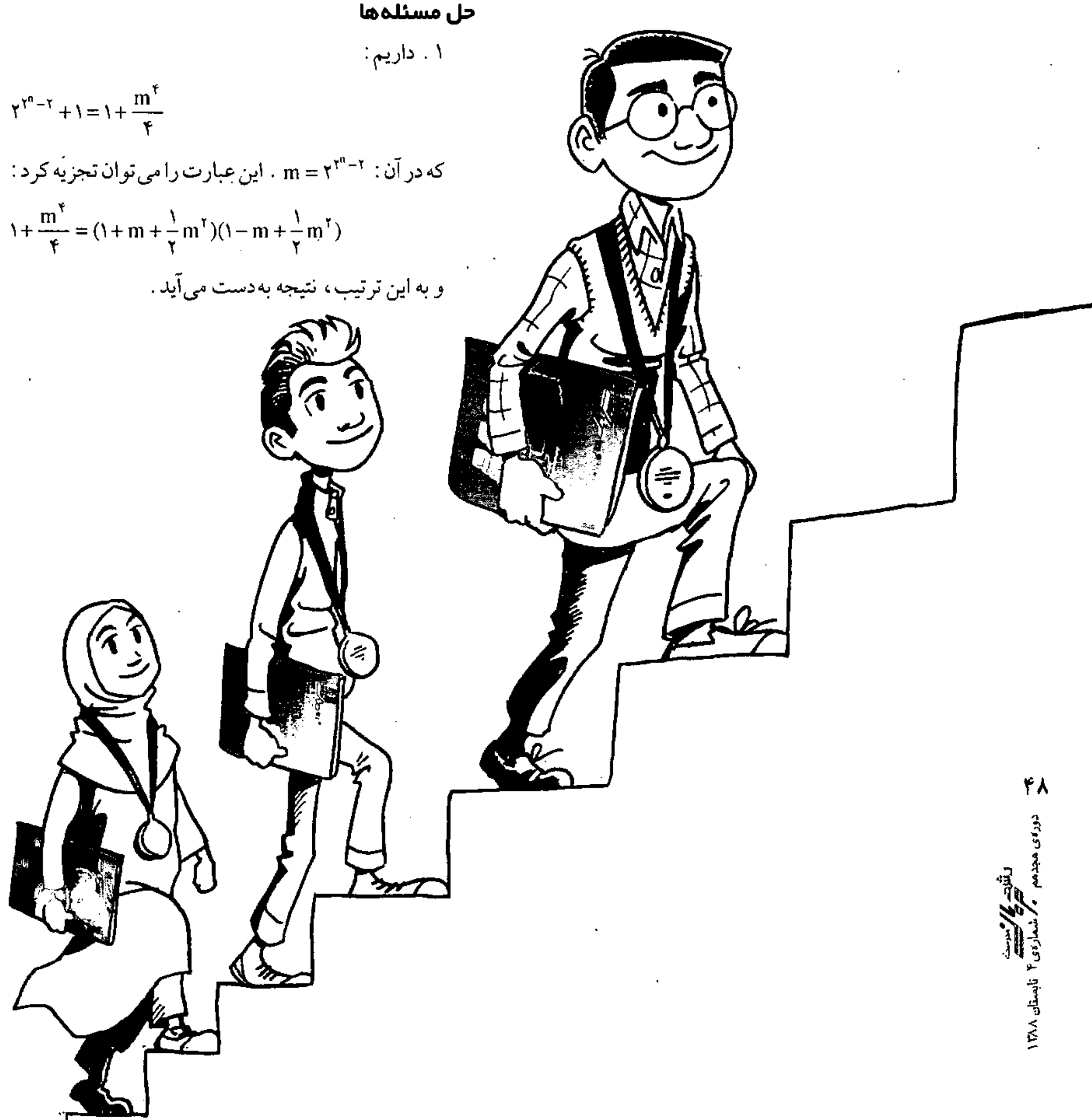
۱. داریم:

$$2^{2^n-2}+1=1+\frac{m^4}{4}$$

که در آن: $m=2^{2^{n-2}}$. این عبارت را می‌توان تجزیه کرد:

$$1+\frac{m^4}{4}=(1+m+\frac{1}{2}m^2)(1-m+\frac{1}{2}m^2)$$

و به این ترتیب، نتیجه به دست می‌آید.



۲. توجه داشته باشید که تجزیه‌ی x^4+1 می‌دهد:

$$X^4+1=4((X/\sqrt{2})^4+\frac{1}{4})$$

$$=4((X/\sqrt{2})^2+X/\sqrt{2}+\frac{1}{2})((X/\sqrt{2})^2-X/\sqrt{2}+\frac{1}{2})$$

$$=(X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1)$$

که نشان می‌دهد، α، β و ریشه‌های معادله‌ی مشخصه‌ی دنباله، یعنی:

$$X^2-\sqrt{2}X+1=0$$

ریشه‌های X^4+1 هستند. بنابراین ریشه‌های هشتم واحدند. جمله‌ی عمومی دنباله به‌صورت

$$x_n=a\alpha^n+b\beta^n$$

به‌ازای a و b ای است، و درنتیجه دنباله‌ی متناوب با دوره‌ی تناوب ۸ است.

(kvant (Quantum))

۳. از آن‌جا که:

$$k^4+\frac{1}{4}=(k^2-k+\frac{1}{2})(k^2+k+\frac{1}{2})$$

داریم:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2-\frac{1}{2}}{k^4+\frac{1}{4}}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-\frac{1}{2}}{k^2-k+\frac{1}{2}}-\frac{k+\frac{1}{2}}{k^2+k+\frac{1}{2}}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-\frac{1}{2}}{k^2-k+\frac{1}{2}}-\frac{(k+1)-\frac{1}{2}}{(k+1)^2-(k+1)+\frac{1}{2}}\right)$$

که مجموعی ادغامی، و برابر است با:

$$1-(2n+1)/(2n^2+2n+1)$$

(T. Andreescu)

۴. تجزیه‌ی زیر را به‌کار می‌بریم:

$$m^4+\frac{1}{4}=(m^2+m+\frac{1}{2})(m^2-m+\frac{1}{2})$$

در این صورت، حاصل‌ضرب می‌شود:

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)^4+\frac{1}{4}}{(2k)^4+\frac{1}{4}}$$

$$=\prod_{k=1}^{n}\frac{((2k-1)^2+(2k-1)+\frac{1}{2})((2k-1)^2-(2k-1)+\frac{1}{2})}{((2k)^2+2k+\frac{1}{2})((2k)^2+2k+\frac{1}{2})}$$

از آن‌جا که:

$$m^2-m+\frac{1}{2}=(m-1)^2+(m-1)+\frac{1}{2}$$

عامل‌های واقع در صورت، با عوامل واقع در مخرج را، به استثنای $1^2-1+\frac{1}{2}$ در صورت و $(2n)^2+2n+\frac{1}{2}$ در مخرج، حذف می‌کنند. درنتیجه، پاسخ عبارت است از:

$$1/(8n^2+4n+1)$$

۵. اگر $a=4k^4$ را، با $k>1$ انتخاب کنیم، آن‌گاه:

$$n^4+4k^4=(n^2+2nk+2k^2)(n^2-2nk+2k^2)$$

از آن‌جا که:

$$n^2+2nk+2k^2>k>1$$

و:

$$n^2-2nk+2k^2=(n-k)^2+k^2>k^2>1$$

هیچ‌یک از اعداد n^4+4k^4 اول نیست.

(یازدهمین المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۶۹)

۶. اگر n زوج باشد، عدد به‌طور واضح بر ۲ بخش‌پذیر است. اگر n فرد، مثلاً $n=2k+1$ باشد، آن‌گاه با به کار بردن اتحاد، به‌ازای $X=n$ و $Y=2^{k+1}$ به‌دست می‌آوریم:

$$n^4+4^n=n^4+\frac{1}{4}4^{2k+2}$$

$$=(n^2+2^{k+1}n+2^{2k+1})(n^2-2^{k+1}n+2^{2k+1})$$

اگر $n>1$ باشد، هر دو عامل بزرگ‌تر از ۱ هستند که اثبات می‌کند در این حالت، عدد مرکب است.

البته هنگامی که $n=1$ باشد، داریم: $4^n+n^4=5$ که اول است.

۷. داریم:

$$P(X^4)=X^{16}+6X^8-4X^4+1=(X^4-1)^4+4(X^3)^4$$

این عبارت را می‌توان به‌صورت زیر تجزیه کرد:

$$\left[(X^4-1)^2+2(X^4-1)X^3+2(X^3)^2\right]\times$$
$$\left[(X^4-1)^2-2(X^4-1)X^3+2(X^3)^2\right]$$

و به این ترتیب، کار تمام است.

۸. با استفاده از اتحاد، $n^{12}+64$ را به‌صورت زیر تجزیه می‌کنیم:

$$(n^6-4n^3+8)(n^6+4n^3+8)$$

از طرف دیگر، $64 + n^{12}$ مجموع دو مکعب است؛ درنتیجه به این صورت تجزیه می‌شود:

$$(n^4+4)(n^8-4n^4+16)$$

با استفاده از همین اتحاد:

$$n^4+4=(n^2-2n+2)(n^2+2n+2)$$

چندجمله‌ای‌های n^2-2n+2 و n^2+2n+2 روی حلقه‌ی چندجمله‌ای های با ضرایب صحیح تحویل‌ناپذیرند. درنتیجه، در ترتیبی چندجمله‌ای‌های n^6-4n^3+8 و n^6+4n^3+8 را می‌شمارند. بررسی حالات، دو مورد زیر را به‌دست می‌دهد:

$$n^6+4n^3+8=(n^2-2n+2)(n^4+2n^3+2n^2+4n+4)$$

و:

$$n^6-4n^3+8=(n^2+2n+2)(n^4-2n^3+2n^2-4n+4)$$

به این ترتیب:

$$n^{12}+64=(n^2-2n+2)(n^2+2n+2)$$
$$(n^4-2n^3+2n^2-4n+4)\times(n^4+2n^3+2n^2+4n+4)$$

چهار عامل موجود، در همین ترتیب، اکیداً صعودی و بنابراین متمایزند.

(T. Andreescu)

۹. با مجموع‌یابی به صورت تصاعد هندسی به‌دست می‌آوریم:

$$\sum_{k=0}^{m}(-4)^k n^{4(m-k)} = n^{4m}\sum_{k=0}^{m}\left(-\frac{4}{n}\right)^k = \frac{(n^4)^{m+1}+4^{m+1}}{n^4+4}$$

$$=\frac{(n^{m+1})^4+4(2^{m/2})^4}{n^4+4}$$

صورت را با استفاده از اتحاد بحث شده در این بخش، می‌توان به صورت حاصل‌ضرب‌های زیر نوشت:

$$n^{2(m+1)}+2^{m/2+1}n^{m+1}+2^{m+1}$$

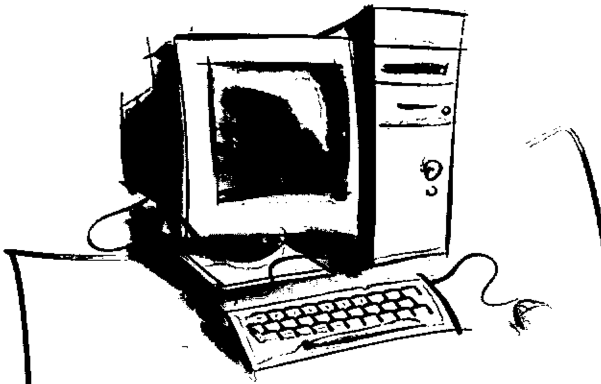
و:

$$n^{2(m+1)}-2^{m/2+1}n^{m+1}+2^{m+1}$$

از آن‌جا که $m \ge 2$ است، مخرج از هریک از این دو عامل کوچک‌تر است. بنابراین پس از حذف‌های ممکن عدد باقی‌مانده هنوز حاصل‌ضرب دو عدد بزرگ‌تر از یک است (یکی از عامل اول و یکی از عامل دوم) و مسئله حل می‌شود.

(T. Andreescu)

1. spectral mapping theorem



ادامه‌ی مطالب صفحه ۱۴

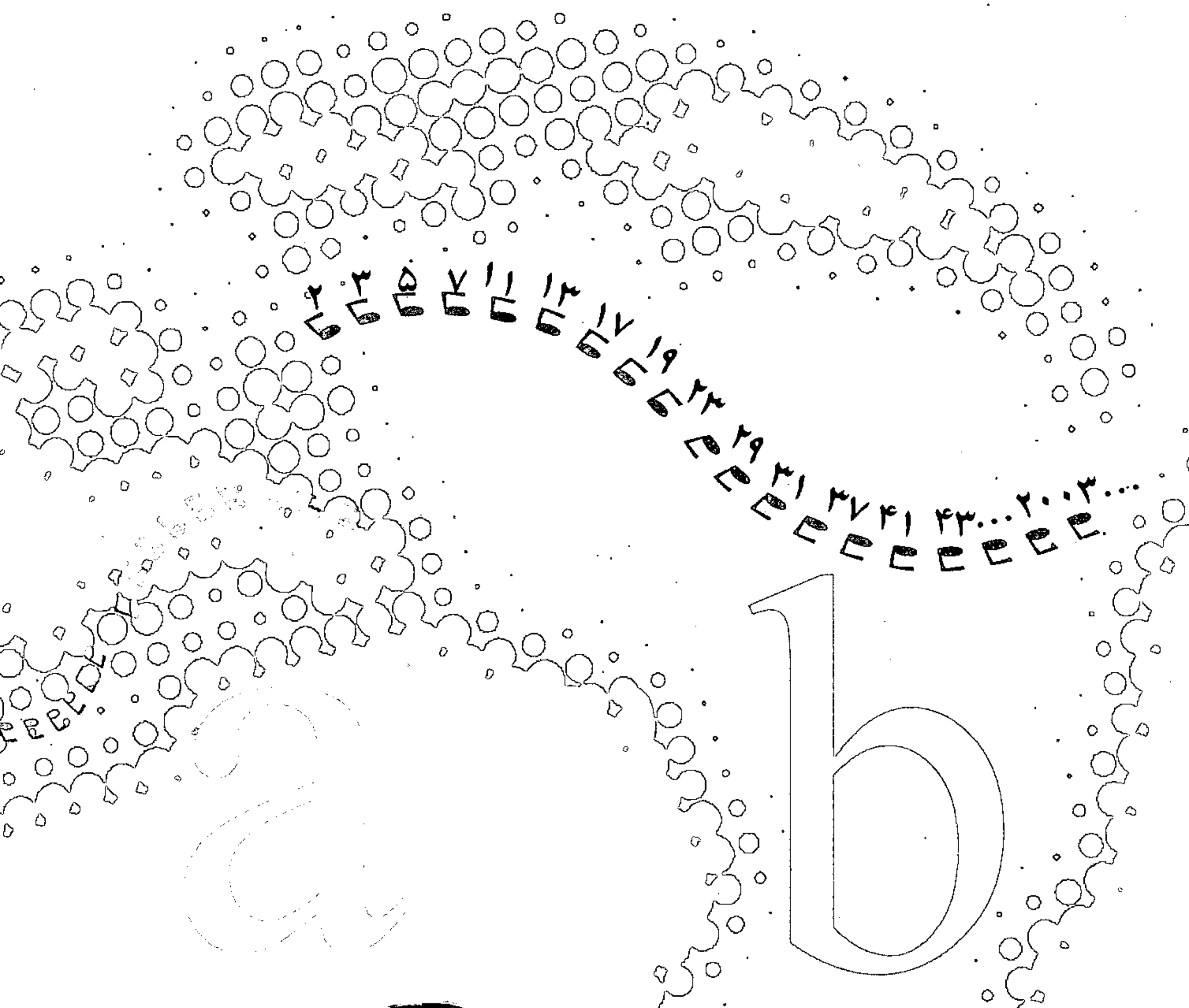
- حساب دیفرانسیل و برنامه‌ریزی خطی (Calculus & Linear Programming)

■ عنوان‌های ریاضیات (Mathematical Topics)

- عبارات جبری ۱ (Algebraic Expressions 1)
- عبارات جبری ۲ (Algebraic Expressions 2)
- مساحت و حجم (Area and Volume)
- معادلات ۱ (Equations 1)
- معادلات ۲ (Equations 2)
- معادلات ۳ (Equations 3)
- معادلات ۴ (Equations 4)
- مسائل توضیحی۱ (Word Problems 1)
- مسائل توضیحی۲ (Word Problems 2)
- دنباله‌ها (Sequences)
- مثلثات ۱ (Trigonometry 1)
- مثلثات ۲ (Trigonometry 2)
- هندسه مختصاتی (Coordinate Geometry)
- آنالیز ۱ مشتق‌ها (Analysis 1 Dervatives)
- آنالیز ۲ مشتق‌ها (Analysis 2 Dervatives)
- آنالیز ۳ انتگرال‌ها (Analysis 3 Integrals)
- برنامه‌ریزی خطی (Linear Programming)
- احتمال ۱ (Probability 1)
- احتمال ۲ (Probability 2)

۱. FAQ مخفف Frequently Asked Questions می‌باشد.

۲. منظور از مسائل توضیحی(Word Problems)، مسائلی است که صورت مسأله به شکل متن و بدون فرمول ریاضی ارائه گردیده است و خواننده برای حل این نمونه مسائل باید معادله‌های مناسب و متناسب با صورت مسأله را بنویسد، سپس آن را حل نماید.



هم‌نهشتی و کاربردهای آن

قسمت ۶

● سید محمدرضا هاشمی موسوی

اشاره

در قسمت قبل، به برخی از کاربردهای هم‌نهشتی اشاره شد. در این قسمت نیز به ادامه‌ی مطلب با عنوان قضیه‌ی اویلر، تعمیمی از قضیه‌ی کوچک فرما و کاربردهای آن در حل مسئله‌ها و معادله‌های سیاله‌ی خطی و درجه‌ی nام و تعیین باقی‌مانده‌ی تقسیم و دیگر مسئله‌های خلاق می‌پردازیم. در آخر مبحث، تمرین‌هایی هدف‌دار طراحی شده‌اند که با مشاهده‌ی مثال‌های متن درس می‌توانید، آن‌ها را حل کنید. برای فراگیری بهتر مطالب، بکوشید مثال‌هایی

نظیر و یا در تعمیم مسئله‌ها طراحی و حل کنید.

قضیه‌ی اویلر و کاربردهای آن

قضیه‌ی اویلر که می‌توان آن را به‌عنوان یک قضیه‌ی مستقل معرفی کرد، در واقع تعمیمی از قضیه‌ی فرماست. ابتدا به عنوان این قضیه‌ی بسیار مهم و اثبات آن می‌پردازیم. توجه به این نکته لازم است که فرما قضیه‌ی کوچک خود را حدود ۸۰سال قبل از اویلر بیان کرد.

قضیه‌ی اویلر: اگر m عددی طبیعی و a عددی صحیح باشد و $(m,a)=۱$ ، آن‌گاه: $a^{\varphi(m)} \overset{m}{\equiv} ۱$

تبصره‌ی ۱: تابع φ را تابع حسابی اویلر می‌نامند و این یک تابع ضربی است که برای $m>۱$ در واقع برابر تعداد اعداد طبیعی و کوچک‌تر از m است که نسبت به m اول‌اند و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$m = p_۱ \cdot p_۲ \cdot p_۳ \cdots p_n$$

$$\varphi(m) = m(۱-\frac{۱}{p_۱})(۱-\frac{۱}{p_۲})(۱-\frac{۱}{p_۳})\cdots(۱-\frac{۱}{p_n})$$

در این رابطه، $p_۱$ ، $p_۲$ ، ... و p_n اعداد اول هستند که m به حاصل‌ضرب n عدد اول تجزیه شده است. بدیهی است، اگر m برابر عددی اول باشد:

$$m = p \ : \ \varphi(m) = \varphi(p) = p(۱-\frac{۱}{p}) = p-۱$$

برای مثال، $\varphi(۱)$ ، $\varphi(۲)$ ، $\varphi(۶)$ ، $\varphi(۶۰)$ و $\varphi(۲۰۰۳)$ را تعیین می‌کنیم:

$$\varphi(۱)=۱ \ , \ \varphi(۲)=۱ \ , \ \varphi(۶)=۶(۱-\frac{۱}{۲})(۱-\frac{۱}{۳})=۲$$

$$\varphi(۶۰)=۶۰(۱-\frac{۱}{۲})(۱-\frac{۱}{۳})(۱-\frac{۱}{۵})=۱۶ \ ,$$

$$\varphi(۲۰۰۳)=۲۰۰۳-۱=۲۰۰۲$$

(عدد $p=۲۰۰۳$ اول است و $۶۰=۲^۲\times ۳\times ۵$)

تبصره‌ی ۲. چون φ یک تابع ضربی است، از تعریف $\varphi(m)$ داریم:

$$۱) \ m,n \in \mathbb{N} \ , \ (m,n)=d : \varphi(mn)=\varphi(m).\varphi(n)\times\frac{d}{\varphi(d)} \ (*)$$

(d: بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد طبیعی m و n)

اگر m و n نسبت به هم اول باشند، یعنی

$$\varphi(mn)=\varphi(m).\varphi(n) \ : \ (m,n)=۱$$

$$m=۱ \ , \ n=p(\quad) \ ; \ (p,۱)=۱$$

$$\varphi(۱\times p)=\varphi(۱).\varphi(p)=۱.\varphi(p)=p-۱$$

$$۲) \ \varphi(۱۰^n)=۱۰^n(۱-\frac{۱}{۲})(۱-\frac{۱}{۵})=۱۰^{n-۱}\times ۴$$

$$۳) \ \varphi(۲n)^{\circ} = \begin{cases} ۲\varphi(n) & \text{زوج } n \\ \varphi(n) & \text{فرد } n \end{cases}$$

$$۴) \ \varphi(۳n) \overset{(*)}{=} \begin{cases} ۳\varphi(n) & ۳|n \\ ۲\varphi(n) & ۳|n \end{cases}$$

$$۵) \ n=۲^k \ : \ \varphi(n)=\varphi(۲^k)=۲^k(۱-\frac{۱}{۲})=\frac{۲^k}{۲}=\frac{n}{۲}$$

$$۶) \ n\in\mathbb{N} \ : \ \varphi(n^۲)=\varphi(n,n)\overset{(*)}{=}\varphi(n).\varphi(n).\frac{(n,n)}{\varphi(n,n)}=n\varphi(n)$$

$$۷) \ (a,b)=d \ , \ [a,b]=c \ : \ \varphi(a)\varphi(b)=\varphi(c)\varphi(d)$$

$$(d=۱ \ ; \ c=ab \ : \ \varphi(ab)=\varphi(a).\varphi(b))$$

$$۸) \ \sum_{i=۱}^{k}\varphi(d_i)=m(d_۱,d_۲,\ldots,d_k) \ :m \text{ شمارنده‌های مثبت}$$

اثبات قضیه‌ی اویلر

اگر $(a,m)=۱$ و فرض کنیم $x_۱$ ، $x_۲$ ، ... و x_n که در آن $n=\varphi(m)$ ، دسته‌ی ساده‌ی باقی‌مانده، به پیمانه‌ی m باشند، واضح است که عددهای $ax_۱$ ، $ax_۲$ ، ... و ax_n نیز دسته‌ی باقی‌مانده‌ها، به پیمانه‌ی m هستند؛ زیرا:

$$(a,m)=۱ \ , \ n=\varphi(m) \ : \ ax_۱ \overset{m}{\equiv} x_۱$$

$$ax_۲ \overset{m}{\equiv} x_۲$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$ax_n \overset{m}{\equiv} x_n$$

از ضرب هم‌نهشتی‌ها:

$$a^n x_1 . x_2 . \ldots x_n \overset{m}{\equiv} x_1 . x_2 . \ldots x_n$$

چون $(m, x_1 x_2 \ldots x_n) = 1$، پس از اختصار لازم خواهیم داشت:

$$a^n \overset{m}{\equiv} 1 \ ; \ a^{\varphi(m)} \overset{m}{\equiv} 1$$

بدیهی است، اگر m عدد اولی مثل p باشد، قضیه‌ی اویلر به حالت خاص، یعنی قضیه‌ی کوچک فرما تبدیل می‌شود:

$$m = p \ : \ \varphi(p) = p - 1 \ ; \ a^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1$$ (قضیه‌ی فرما)

تذکر: در قسمت‌های قبل ثابت شد، قضیه‌ی لایبنیتز حالت خاصی از قضیه‌ی ویلسن و قضیه‌ی ویلسن نیز نتیجه‌ای از قضیه‌ی کوچک فرماست. بنابراین، در این‌جا ثابت می‌شود، از قضیه‌ی اویلر، قضیه‌های لایبنیتز، ویلسن و فرما نتیجه خواهد شد:

(قضیه‌ی ویلسن) $(p-1)! \overset{p}{\equiv} -1 \ , \ (p-2)! \overset{p}{\equiv} 1$ (قضیه‌ی لایبنیتز)

هم‌چنین می‌توان ثابت کرد، قضایای فرما و ویلسن جمعاً با این حکم معادل‌اند که به ازای هر عدد اول p و هر عدد صحیح a، عدد p عبارت عددی $M = a^p + (p-1)!a$ را می‌شمارد:

$$P|M$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد 7^{83} بر ۳۰ را بیابید.

حل: با توجه به قضیه‌ی اویلر و برابری $30 = 2 \times 3 \times 5$، می‌توان نوشت:

$$7^{\varphi(30)} \overset{30}{\equiv} 1 \ ; \ \varphi(30) = 30(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5}) = 8 \ ;$$

$$7^8 \overset{30}{\equiv} 1 \ ; \ 7^{80} \overset{30}{\equiv} 1 \ ; \ 7^{83} \overset{30}{\equiv} 7^3 = 7(7^2) \overset{30}{\equiv} 7(19) \overset{30}{\equiv} 13$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $N = 87 \times 47^{2008}$ بر ۱۲ را بیابید.

حل: $(47,12) = 1 \ , \ 47^{\varphi(12)} \overset{12}{\equiv} 1 \ ; \ 47^4 \overset{12}{\equiv} 1 \ ; \ (47^4)^{502} \overset{12}{\equiv} 1$

$47^{2008} \overset{12}{\equiv} 1 \ ; \ 87 \overset{12}{\equiv} 3 \ ; \ 87 \times 47^{2008} \overset{12}{\equiv} 3$ (باقی‌مانده‌ی تقسیم)

$$(\varphi(12) = \varphi(2^2 \times 3) = 12(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3}) = 4)$$

مثال: تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۳۹۰ را که نسبت به ۶۰ و ۳۶ اول‌اند تعیین کنید.

حل:

$$390 = 2 \times 3 \times 5 \times 13 \ , \ (a,60) = 1 \ ; \ (a, 2^2 \times 3 \times 5) = 1 \ (1)$$

$$(a,36) = 1 \ ; \ (a, 2^2 \times 3^2) = 1 \ (2) \xrightarrow{(2),(1)} (a, 2 \times 3 \times 5) = 1$$

$$\text{جواب مسئله} = 390(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5}) = 390 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = 104$$

۱۰۴ عدد طبیعی وجود دارد که نسبت به دو عدد ۳۶ و ۶۰ اول‌اند.

مثال: دو رقم سمت راست عدد N را بیابید:

$$N = 3^{1367} \times 2008$$

حل:

$$(3,100) = 1 \ , \ \varphi(100) = \varphi(10^2) = 10^{2-1} \times 4 = 40$$

با توجه به قضیه‌ی اویلر:

$$3^{\varphi(100)} \overset{100}{\equiv} 1 \ ; \ 3^{40} \overset{100}{\equiv} 1 \ ; \ (3^{40})^{34} \overset{100}{\equiv} 1 \ ; \ 3^{1360} \overset{100}{\equiv} 1$$

$$3^{1360} \times 3^7 \overset{100}{\equiv} 3^7 = 2187 \overset{100}{\equiv} 87 \ ; \ 2008 \overset{100}{\equiv} 8$$

$$N = 3^{1367} \times 2008 \overset{100}{\equiv} 87 \times 8 = 696 \overset{100}{\equiv} 96$$

(دو رقم سمت راست N)

مثال: اگر $(m,n) = 1$، نشان دهید:

$$m^{\varphi(n)} + n^{\varphi(m)} \overset{mn}{\equiv} 1$$

حل: با توجه به قضیه‌ی اویلر می‌توان نوشت:

$$(m,n) = 1 \ ; \ m^{\varphi(n)} \overset{n}{\equiv} 1 \ (1) \ , \ n^{\varphi(m)} \overset{m}{\equiv} 1 \ (2)$$

از طرفی، هم‌نهشتی‌های زیر بدیهی است:

$$m^{\varphi(n)} \overset{m}{\equiv} 0 \ (3) \ , \ n^{\varphi(m)} \overset{n}{\equiv} 0 \ (4)$$

از جمع هم‌نهشتی‌ها

$$(1)+(4) \ : \ m^{\varphi(n)} + n^{\varphi(m)} \overset{n}{\equiv} 1 \ (5),$$

$$(2)+(3) \ : \ n^{\varphi(m)} + m^{\varphi(n)} \overset{m}{\equiv} 1 \ (6)$$

از جمع ۵ و ۶ هم‌نهشتی مورد نظر حاصل می‌شود:

$$(5)+(6) \ : \ m^{\varphi(n)} + n^{\varphi(m)} \overset{mn}{\equiv} 1$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد k را بر ۹۶۰ بیابید:

$$k = 25^{48} + 168^{20}$$

حل: با توجه به برابری‌های $168 = 2^3 \times 3 \times 7$ و $25 = 5^2$ و قضیه‌ی اویلر و مثال قبل:

$$۲۵^{\varphi(۱۶۸)} + ۱۶۸^{\varphi(۲۵)} = ۲۵^{۴۸} + ۱۶۸^{۲۰} \overset{۲۰\times۴۸}{\equiv} ۱ \;;$$

$k \overset{۹۶۰}{\equiv} ۱$ (باقی‌مانده‌ی تقسیم)

مثال: نشان دهید اگر $(m,۵) = (n,۵) = ۱$ ، آن‌گاه:

$$۲۵ | (m^{۲۰} - n^{۲۰})$$

حل: با توجه به برابری $۵^۲ = ۲۵$ و قضیه‌ی اویلر می‌توان نوشت:

$$(m,۵) = ۱ \;;\; (m,۲۵) = ۱ \;:\; m^{\varphi(۲۵)} \overset{۲۵}{\equiv} ۱$$

$$\varphi(۲۵) = ۲۵(۱ - \frac{۱}{۵}) = ۲۰$$

$$m^{۲۰} \overset{۲۵}{\equiv} ۱ \;,\; (n,۲۵) = ۱ \;;\; n^{\varphi(۲۵)} \overset{۲۵}{\equiv} ۱ \;;\; n^{۲۰} \overset{۲۵}{\equiv} ۱$$

بنابراین:

$$m^{۲۰} - n^{۲۰} \overset{۲۵}{\equiv} ۰ \;;\; ۲۵ | m^{۲۰} - n^{۲۰}$$

مثال: اگر k عددی صحیح باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم $k^{۵۴}$ بر ۸۱ را بیابید.

حل: با توجه به برابری $۳^۴ = ۸۱$ و قضیه‌ی اویلر:

$$\varphi(۸۱) = ۸۱(۱ - \frac{۱}{۳}) = ۵۴ \;;\; ۳|k \text{ یا } (۳,k) = ۱$$

$$(۳^۴,k) = ۱ \;;\; k^{\varphi(۸۱)} \overset{۸۱}{\equiv} ۱ \;;\; k^{۵۴} \overset{۸۱}{\equiv} ۱ \quad (۳,k) = ۱$$

بدیهی است که در حالت $۳|k$ یا $۳^۴|k^۴$:

$$۳^۴ | k^{۵۴} \;;\; k^{۵۴} \overset{۸۱}{\equiv} ۰$$

مثال: نشان دهید اگر $(۱۰,m) = ۱$ ، آن‌گاه سه رقم سمت راست m و $m^{۱۰۱}$ با هم برابرند.

حل: برای اثبات حکم، باید نشان دهیم: $m^{۱۰۱} \overset{۱۰۰۰}{\equiv} m$

با توجه به برابری $۸ \times ۱۲۵ = ۱۰۰۰$ و قضیه‌ی اویلر، می‌توان نوشت:

$$\varphi(۸) = \varphi(۲^۳) = ۸(۱ - \frac{۱}{۲}) = ۴ \;,\; \varphi(۱۲۵) = \varphi(۵^۳)$$

$$= ۱۲۵(۱ - \frac{۱}{۵}) = ۱۰۰$$

$$m^{\varphi(۱۲۵)} \overset{۱۲۵}{\equiv} ۱ \;;\; m^{۱۰۰} \overset{۱۲۵}{\equiv} ۱ \;\; (۱) \;,\; \varphi(۸)|\varphi(۱۲۵) \;;\; m^{۱۰۰} \overset{۸}{\equiv} ۱ \;\; (۲)$$

از روابط ۱ و ۲ خواهیم داشت:

$$m^{۱۰۰} \overset{۸\times۱۲۵}{\equiv} ۱ \;;\; m^{۱۰۰} \overset{۱۰۰۰}{\equiv} ۱ \;;\; m^{۱۰۱} \overset{۱۰۰۰}{\equiv} m$$

مثال: دو رقم سمت راست عدد N را بیابید.

$$N = ۱۳۸۸ \times ۷^{۳۰۰۱}$$

حل: با توجه به قضیه‌ی اویلر:

$$\varphi(۱۰۰) = \varphi(۲^۲ \times ۵^۲) = ۱۰۰(۱ - \frac{۱}{۲})(۱ - \frac{۱}{۵}) = ۴۰$$

$$(۷,۱۰۰) = ۱ \;;\; ۷^{\varphi(۱۰۰)} \overset{۱۰۰}{\equiv} ۱ \;;\; ۷^{۴۰} \overset{۱۰۰}{\equiv} ۱ \;;\; (۷^{۴۰})^{۷۵} \overset{۱۰۰}{\equiv} ۱$$

$$۷^{۳۰۰۰} \times ۷ \overset{۱۰۰}{\equiv} ۷ \;;\; N = ۱۳۸۸ \times ۷^{۳۰۰۱} \overset{۱۰۰}{\equiv} ۱۳۸۸ \times ۷ = ۹۷۱۶ \;;$$

$$N \overset{۱۰۰}{\equiv} ۹۷۱۶ \overset{۱۰۰}{\equiv} ۱۶$$

(دو رقم سمت راست عدد N برابر ۱۶ است)

مثال: معادله‌ی سیاله‌ی خطی عمومی $ax+by=c$ را با استفاده از قضیه‌ی اویلر حل کنید.

حل: ابتدا معادله را به یک معادله‌ی هم‌نهشتی تحویل می‌دهیم:

$$ax + by = c \;;\; ax \overset{b}{\equiv} c \text{ یا } by \overset{a}{\equiv} c$$

می‌دانیم شرط جواب برای معادله‌ی سیاله‌ی مورد نظر $(a,b)|c$ است. پس برای حل معادله‌ی مورد نظر، همیشه باید داشته باشیم $(a,b) = ۱$ که با این فرض خواهیم داشت:

$$(a,b) = ۱ \;;\; x \overset{b}{\equiv} ca^{\varphi(b)-۱} \text{ یا } y \overset{a}{\equiv} cb^{\varphi(a)-۱}$$

مثال: معادله‌ی سیاله‌ی $۳x + ۴y = ۱۹$ را حل کنید.

حل: با توجه به $(۳,۴) = ۱$ و قضیه‌ی اویلر می‌توان نوشت:

$$\varphi(۴) = ۴(۱ - \frac{۱}{۲}) = ۲ \;;\; x \overset{۴}{\equiv} ۱۹ \times ۳^{\varphi(۴)-۱} = ۱۹ \times ۳ = ۵۷ \overset{۴}{\equiv} ۱$$

$x = ۴k + ۱$;

k	۰	۱	۲	...
x	۱	۵	۹	...
y	۴	۱	۳	...

$$۳(۴k + ۱) + ۴y = ۱۹ \;;\; y = ۴ - ۳k$$

مثال: اگر $(m,n) = ۱$ ، آن‌گاه یک سلسله جواب عمومی معادله‌ی زیر را با استفاده از قضیه‌ی اویلر تعیین کنید.

$$x^n + y^n = z^m \quad (۱)$$

حل: برای تعیین یک سلسله از جواب‌های معادله‌ی ۱ ، ابتدا یک سلسله از جواب‌های معادله‌ی زیر را تعیین می‌کنیم:

$$k > ۱ \;,\; k \in \mathbb{N} \;:\; x_۱^{k-۱} + x_۲^{k-۱} = x_۳^k \quad (۲)$$

برای تعیین یک سلسله از جواب‌های معادله‌ی ۲، کافی است آن را با اتحاد زیر مقایسه کنیم:

$$a,b\in Z:\ (a^k+ab^{k-1})^{k-1}+(ba^{k-1}+b^k)^{k-1}=(a^{k-1}+b^{k-1})^k \quad (3)$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی ۲ و اتحاد ۳، بلافاصله یک سلسله جواب معادله‌ی ۲ به‌دست می‌آید:

$$(x_1,x_2,x_3)=(a^k+ab^{k-1},\ ba^{k-1}+b^k,\ a^{k-1}+b^{k-1})$$

در این‌جا، با فرض $k=m^{\varphi(n)}$، معادله‌ی ۲ به معادله‌ی زیر تحول می‌شود:

$$x_1^{m^{\varphi(n)}-1}+x_2^{m^{\varphi(n)}-1}=x_3^{m^{\varphi(n)}} \quad (4)$$

(φ: تابع حسابی اویلر)

طبق قضیه‌ی اویلر، اگر $(m,n)=1$، آن‌گاه $(m^{\varphi(n)}-1)$ بر n بخش‌پذیر است:

$$(m,n)=1;\ m^{\varphi(n)}-1=n\left(1+2\left\lfloor\frac{m^{\varphi(n)}-1}{2n}\right\rfloor\right) \quad (5)$$

($\lfloor\ \rfloor$: قسمت درست عدد)

با توجه به رابطه‌ی ۵ بلافاصله یک سلسله از جواب‌های معادله‌ی ۱ حاصل می‌شود:

$$(6)\ \begin{cases} x=(a^{m^{\varphi(n)}}+ab^{m^{\varphi(n)}-1})^{1+2\left\lfloor\frac{m^{\varphi(n)}-1}{2n}\right\rfloor} \\ y=(ba^{m^{\varphi(n)}-1}+b^{m^{\varphi(n)}})^{1+2\left\lfloor\frac{m^{\varphi(n)}-1}{2n}\right\rfloor} \\ z=(a^{m^{\varphi(n)}-1}+b^{m^{\varphi(n)}-1})^{m^{\varphi(n)-1}} \end{cases}$$

$$(m=p^k.q^s.r^t\ldots,\ \varphi(m)=m(1-\frac{1}{p})\ldots)$$

مثال: معادله‌ی سیاله‌ی درجه‌ی هفتم زیر را حل کنید.

$$34x^7-14y=4282$$

حل: معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$17x^7\overset{7}{\equiv}2141;\ 17x^7\overset{7}{\equiv}3x\overset{7}{\equiv}6;\ x\overset{7}{\equiv}2$$

$$x=2;\ y=\frac{17(2)^7-2141}{7}=5;$$

$$x=7k+2,\ y=17s+5$$

k	۰	۱	۲	...
x	۲	۹	۱۶	...
y	۵	۶۸۳۲۶۳	۶۵۱۹۱۴۳۷۷۳	...

تمرین

۱. حاصل $\varphi(10^{1387})$، $\varphi(2008)$، $\varphi(kn)$ و $\varphi(2^k)$ را بیابید.

۲. از قضیه‌ی اویلر، قضیه‌های فرما، لایبنیتز و ویلسن را نتیجه بگیرید.

۳. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد 7^{87} بر ۲۰ را بیابید.

۴. تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۴۰۰ را که نسبت به اعداد ۳۰ و ۱۸ اول‌اند، بیابید.

۵. دو رقم سمت راست عدد N را بیابید.

$$N=3^{1364}\times 2009$$

۶. اگر m و n نسبت به هم اول باشند، نشان دهید:

$$m^{\varphi(n)}+n^{\varphi(m)}\overset{mn}{\equiv}1$$

۷. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد k بر ۶۳ را بیابید.

$$k=13^7+78^9$$

۸. نشان دهید، اگر $(k,3)=(s,3)=1$، آن‌گاه:

$$9|(m^6-n^6)$$

۹. اگر k عددی صحیح باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم N^{294} بر ۳۴۳ را بیابید.

۱۰. نشان دهید اگر $(10,n)=1$، آن‌گاه چهار رقم سمت راست $10m$ و $10m^{101}$ با هم برابرند.

۱۱. دو رقم سمت راست عدد Mرا بیابید:

$$M=1389\times 7^{2001}$$

۱۲. معادله‌ی سیاله‌ی $13x+87y=74$ را با استفاده از قضیه‌ی اویلر حل کنید.

۱۳. یک سلسله جواب عمومی $x^{1387}+y^{1387}=z^{2003}$ را با استفاده از قضیه‌ی اویلر تعیین کنید.

۱۴. اگر $(m,n)=1$، مضرب k را در برابری زیر تعیین کنید:

$$m^{\varphi(n)}\doteq kn+1$$

برتراند راسل

(فیلسوف، ریاضی‌دان، ادیب، و برنده‌ی جایزه‌ی نوبل در ادبیات)

● برگردان: احمد قندهاری

برتراند آرتوز ویلیام راسل[1] در ۱۸ می سال ۱۸۷۲ در **رونز کرُفت ویلز**[2] متولد شد. دو ساله بود که مادر و خواهرش را از دست داد و چهار ساله بود که پدرش درگذشت. پدربزرگش **لُرد جان راسل**[3] که سابقاً نخست‌وزیر بود، به همراه مادربزرگش، مراقبت از او و برادرش را برعهده گرفتند. راسل به مدرسه نرفت، برایش معلم خصوصی گرفتند و به خاطر داشتن هوش فوق‌العاده، توانست زبان‌های فرانسه و آلمانی را به سرعت یاد بگیرد.

راسل در سال ۱۸۹۰ وارد دانشکده‌ی ترینیتی[4] کمبریج[5] شد و چون در رشته‌ی فلسفه شاگرد اول بود، به او بورس تحصیلی داده شد. ولی او از آن استفاده نکرد. زیرا در تابستان سال ۱۸۹۴، در سفارت انگلستان در پاریس مشغول به کار شد و در دسامبر همان سال ازدواج کرد. پس از گذراندن چند ماه در برلین و مطالعه در زمینه‌ی دموکراسی، برای ادامه‌ی تحصیل در رشته‌ی فلسفه، به شهرک هَسل مر[6] فرانسه رفت.

در سال ۱۹۰۰ با ریاضی‌دان معروف **پینو**[7] آشنا شد و در گردهمایی بین‌المللی ریاضیات شرکت کرد. پس از آن، بلافاصله مطالعه‌ی ریاضیات را شروع کرد و موفق به کشف یک پارادکس در مجموعه‌ها شد. در سال ۱۹۰۳، کتاب مهم خود به‌نام اصول ریاضیات را نوشت و به کمک دوستش دکتر **آلفرد وایت هد**[8]، منطق ریاضی پینو را توسعه داد. در سال ۱۹۰۸، عضو انجمن سلطنتی بریتانیا شد و در همان سال به‌عنوان مدرس، در ترینیتی کالج استخدام شد.

بعد از شروع جنگ جهانی اول، به‌طور فعال از صلح طرف‌داری کرد و با قانونی که می‌گفت: اگر کسی واجد شرط باشد، ولی از پیوستن به ارتش خودداری کند، باید به مدت دو سال زندانی شود، شدیداً مخالفت کرد و رساله‌ای هم در این زمینه انتشار داد. پس از آن، شغل خود را در ترینیتی کالج از دست داد. پس از مدتی هم، از طرف دانشگاه هاروارد ایالات متحده به تدریس دعوت شد، ولی دولت انگلستان از صدور پاسپورت برای او خودداری کرد.

راسل در سال ۱۹۱۸ ، دوباره برای تدریس در دانشکده‌ای به‌کار دعوت شد، ولی این‌بار ارتش رسماً از ادامه‌ی کارش جلوگیری کرد و به بهانه‌ی نوشتن رساله‌ی ضد جنگ ، او را به پنج ماه زندان محکوم کرد. در زندان کتاب «مقدمه‌ی فلسفه‌ی ریاضی» را نوشت. در سال ۱۹۲۱ هم چند تن از دوستانش کتاب «تحلیل ذهن» را که مجموعه‌ی سخنرانی‌های او در لندن بود، منتشر کردند.

در سال ۱۹۲۰ ، راسل برای مطالعه‌ی شرایط سیاسی اتحاد جماهیر شوروی سوسیالیستی، به این کشور سفر کرد. پس از چند ماه به کشور چین رفت، در دانشگاه پکن، چندین سخنرانی درباره‌ی فلسفه ایراد کرد، در دسامبر همان سال به انگلستان بازگشت.

در سال ۱۹۳۸ به ایالات متحده رفت و چند سال در دانشگاه‌های آن کشور به تدریس پرداخت. در آمریکا هم به خاطر عقاید خاصش از تدریس کنار گذاشته شد.

راسل فیلسوفی منتقد بود و به خاطر زحماتش در منطق ریاضی و فلسفه‌ی تحلیلی، دانشمندی شناخته شده بود. درواقع می‌توان گفت، او یکی از دو تن منطق‌دانان بزرگ قرن بیستم به شمار می‌رفت که نه‌تنها در فلسفه، منطق و ریاضی استاد بود، بلکه صاحب‌نظر و استاد مسائل گوناگون از جمله ادبیات بود؛ به‌خصوص نظریه‌ی سیاسی و بشردوستانه‌ی او در سراسر دنیا، طرف‌داران بی‌شماری داشت.

راسل در سال ۱۹۴۹ ، مدال شایستگی علمی دریافت کرد و در سال ۱۹۵۰ جایزه‌ی ادبیات نوبل را از آن خود کرد. او صلح‌طلبی واقعی بود که در این راه متحمل زحمات زیادی هم شد. یکی از کارهای قابل توجه او «پارادکس راسل» است که در مبحث مجموعه‌ها مطرح است، بدین صورت:

مجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌هایی که عضو خود نیستند، چنین مجموعه‌ای اگر وجود داشته باشد باید عضوی از خودش باشد، اگر و فقط اگر عضو خودش نباشد.

این پارادوکس به مفهوم علمی بسیار معنی‌دار است و عمق تفکر و مطالعات دقیق و زیاد او در نظریه‌ی مجموعه‌ها، منطق، فلسفه و بنیادهای ریاضی را نشان می‌دهد. او حقیقتاً فیلسوف و عالم منطق‌دان و منتقد اجتماعی و طرف‌دار صلح در جهان بود. در سال ۱۹۵۵ ، راسل با آلبرت اینشتین بیانیه‌ی مشترکی درباره‌ی صلح منتشر کردند. در سال ۱۹۵۸ ، راسل رئیس گروه خلع سلاح هسته‌ای جهان شد و در سال ۱۹۶۱ نیز به خاطر اعتراضاتی که علیه سلاح‌های هسته‌ای کرد، با آن همه شهرت و اعتبار علمی جهانی، به یک هفته زندان محکوم شد. راسل در دوم فوریه‌ی سال ۱۹۷۰ در ویلز درگذشت.

---

1. Bertrand Arthur William Russell 2. Rovens Croft Wales 3. Lord John Russell 4. Tirinity
5. Cambridge6. Hasle mere 7. Peano 8. Alfred White Head

معادله‌ی سیاله (۱)

• سیمین اکبری‌زاده
دبیر ریاضی اراک

«من به هیچ وجه تئوری اعداد را از علم معادلات سیاله تفکیک نمی‌کنم و این دو موضوع را یک و تنها یک شاخه‌ی آنالیز جبری می‌دانم. در واقع، قضیه‌ای در باب اعداد (صحیح) وجود ندارد که حل آن مربوط به حل یک یا چند معادله‌ی سیاله نشود.»

لژاندر

تعریف

معمولاً به هر معادله با یک یا چند متغیر که دامنه‌ی متغیرهای آن اعداد صحیح هستند، «معادله‌ی سیاله» گفته می‌شود. با توجه به آن‌که نخستین کتاب در این زمینه، کتاب «علم حساب» **دیوفانتوس یا دیوفانت** است، معادلات سیاله را معادلات دیوفانتوس یا دیوفانتی می‌خوانند.

ساده‌ترین معادله‌ی سیاله، معادله‌ی سیاله‌ی دو متغیره‌ی خطی (درجه‌ی اول) $ax+by=c$ است که در آن a، b و c اعداد صحیح هستند. منظور از حل این معادله، پیدا کردن مقادیر صحیح برای x و y به اسم x_0 و y_0 است که در معادله صدق کند؛ یعنی $ax_0 + by_0 = c$.

سؤالاتی که در این زمینه مطرح می‌شوند و در این مقاله پاسخ آن‌ها را می‌یابیم، عبارت‌اند از:

۱. تحت چه شرایطی می‌توان مطمئن بود که معادله‌ی سیاله‌ی داده شده جواب صحیح دارد؟

۲ . در صورت وجود جواب، چگونه می‌توان جواب‌های صحیح یک معادله‌ی سیاله را یافت؟

۳ . در صورت وجود جواب، چگونه می‌توان جواب‌های صحیح همراه با شرایط خاص یک معادله‌ی سیاله را یافت؟

ابتدا یک «لم» را بدون اثبات بیان می‌کنیم:

لم اقلیدس: اگر $a|bc$ و a و b نسبت به هم اول باشند، آن‌گاه: $a|c$.

سؤال ۱ . آیا معادله‌ی سیاله‌ی $۹x + ۵y = ۱۷$ دارای جواب صحیح است؟ $۹x + ۶y = ۱۷$ چه‌طور؟

پاسخ: معادله‌ی اول دارای جواب صحیح است. مثلاً با انتخاب $y = -۲$ و $x = ۳$ خواهیم داشت: $۹(۳) + ۵(-۲) = ۱۷$. یعنی: $۱۷ = ۱۷$ و تساوی برقرار است. پس زوج مرتب $(۳, -۲)$ یک جواب صحیح برای این معادله است. ولی برای معادله‌ی دوم هرچه جست‌وجو کنیم، پاسخ صحیح نمی‌یابیم.

قضیه‌ی زیر، شرط لازم و کافی برای وجود جواب صحیح یک معادله‌ی سیاله را بیان می‌کند.

قضیه‌ی۱ : معادله‌ی سیاله‌ی $ax+by=c$ دارای جواب صحیح است، اگر و تنها اگر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک a و b، عدد c را عاد کند.

مثال۱ . به کمک این قضیه می‌توان گفت: معادله‌ی $۹x + ۵y = ۱۷$ دارای جواب صحیح است؛ زیرا: $(۹, ۵) = ۱$ و: $۱|۱۷$. ولی معادله‌ی $۹x + ۶y = ۱۷$ دارای جواب صحیح نیست؛ زیرا: $(۹, ۶) = ۳$ و: $۳ \nmid ۱۷$.

نتیجه‌ی قضیه: اگر در معادله‌ی سیاله‌ی $ax+by=c$، داشته باشیم $(a, b) = ۱$ ، آن‌گاه حتماً معادله جواب صحیح دارد؛ زیرا همواره: $۱|c$.

مثال ۲ . در این مثال می‌خواهیم ببینیم به ازای چه مقادیری از m، معادله‌ی سیاله‌ی $۲x + my = ۷$ دارای جواب است $(m \in z)$.

طبق قضیه، شرط وجود جواب برای این معادله آن است که: $(۲, m)|۷$. و چون تنها مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۷، اعداد ۱ و ۷ هستند، لذا باید داشته باشیم: $(۲, m) = ۷$ یا $(۲, m) = ۱$.

برای هیچ mی، تساوی $(۲, m) = ۷$ برقرار نیست، لذا تنها حالت مقبول $(۲, m) = ۱$ است. یعنی این معادله برای mهایی جواب دارد که نسبت به ۲ اول باشند؛ مانند: $\pm۱, \pm۳, \pm۵, \dots$.

مثال ۳ . در این مثال می‌خواهیم ببینیم، کوچک‌ترین عدد مثبت b، طوری که معادله‌ی $۱۱۱۱x + ۷۰۴y = ۱۵۰۰ + b$ جواب داشته باشد، چه عددی است.

چون: $(۱۱۱۱, ۷۰۴) = ۱۱$ ، لذا شرط وجود جواب برای این معادله آن است که: $۱۱|۱۵۰۰ + b$.

با توجه به آن‌که باقی‌مانده‌ی ۱۵۰۰ بر ۱۱ ، ۴ است، لذا باقی‌مانده‌ی ۱۵۰۷ بر ۱۱ ، صفر است. به عبارت دیگر: $۱۱|۱۵۰۰ + ۷$. بنابراین کوچک‌ترین عدد مثبت b، ۷ است.

سؤال ۲ . همه‌ی جواب‌های صحیح معادله‌ی $۹x + ۵y = ۱۷$ را بیابید.

پاسخ: جواب‌ها عبارت‌اند از:

$$\begin{cases} x = ۳ \\ y = -۲ \end{cases} \text{و} \begin{cases} x = -۲ \\ y = ۷ \end{cases} \text{و} \begin{cases} x = -۷ \\ y = ۱۶ \end{cases} \text{و} \begin{cases} x = ۸ \\ y = -۱۱ \end{cases} \text{و} \dots$$

و به این ترتیب می‌توان بی‌شمار جواب صحیح برای معادله پیدا کرد. ولی شکل کلی جواب‌ها چگونه است و چگونه می‌توانیم جواب‌های عمومی معادله‌ی سیاله را به‌دست آوریم؟ به عبارت دیگر، با چه روشی می‌توان فرمولی برای x و y یافت که به کمک آن، کلیه‌ی جواب‌های صحیح معادله به‌دست آید؟ در ادامه‌ی مقاله پاسخ این سؤال را خواهید یافت.

سخنی برای گوش شنوا: با فرض آن‌که معادله‌ی سیاله‌ی $ax+by=c$ دارای جواب باشد، بهتر است پس از محاسبه‌ی بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک a و b، طرفین معادله را بر آن تقسیم کنیم و روی معادله‌ی جدید کار

کنیم. چون کار کردن با معادلاتی که ضرایب متغیر آن‌ها از لحاظ قدرمطلق کوچک‌ترند، طبعاً ساده‌تر است.

الف) روش‌های حل معادله‌ی سیاله‌ی دو متغیره‌ی خطی

۱. روش اول برای یافتن جواب عمومی

در این روش از مفهوم بخش‌پذیری و لم اقلیدس استفاده می‌شود.

مثال۴. در این مثال، تمامی جواب‌های صحیح معادله‌ی $7x + 5y = 130$ را به‌دست می‌آوریم.

حل: چون $5y$ و ۱۳۰ هر دو بر ۵ بخش‌پذیر هستند، لذا شرط برقراری تساوی آن است که $7x$ نیز مضرب ۵ باشد؛ یعنی باید داشته باشیم: $5 | 7x$. و با توجه به آن‌که $(7,5)=1$، لذا باید: $5 | x$. یعنی شرط برقراری تساوی آن است که x مضرب صحیح ۵ باشد؛ یا: $x = 5k \ (k \in z)$.

با جای‌گذاری در معادله‌ی اولیه خواهیم داشت: $7(5k) + 5y = 130$ و با تقسیم طرفین تساوی بر ۵ معادله‌ی $7k + y = 26$ به‌دست می‌آید. لذا: $y = 26 - 7k \ (k \in z)$.

پس همه‌ی جواب‌های صحیح این معادله به‌کمک $\begin{cases} x = 5k \\ y = 26 - 7k \quad (k \in z) \end{cases}$ به‌دست خواهند آمد.

با انتخاب هر عدد صحیح دل‌خواه برای k، می‌توان یک جواب معادله را یافت. تعدادی از جواب‌ها از این قرارند:

k	...	−۲	−۱	۰	۱	۲	...
x		−۱۰	−۵	۰	۵	۱۰	
y		۴۰	۳۳	۲۶	۱۹	۱۲	

توجه: این روش هنگامی مناسب است که عدد ثابت معادله و ضریب یکی از مجهولات، مقسوم‌علیه مشترک داشته باشند، مثل e. در این صورت مجهول دیگر نیز باید مضرب e باشد. لذا به‌جای مجهول دیگر ek قرار می‌دهیم. به این ترتیب، یکی از مجهولات برحسب k به‌دست می‌آید. حاصل را در معادله‌ی اولیه قرار می‌دهیم و با تقسیم طرفین تساوی بر e، مجهول دیگر نیز بر حسب k به‌دست خواهد آمد.

۲. روش دوم برای یافتن جواب عمومی

در این روش، با فرض آن‌که معادله‌ی سیاله‌ی $ax+by=c$ دارای جواب باشد و $(a,b)=d$ و x_0 و y_0 یک جواب معادله باشد (جواب خصوصی)، آن‌گاه تمام جواب‌های معادله به این صورت خواهد بود:

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d}k \ (\text{ضریب } y) \\ y = y_0 - \frac{a}{d}k \ (\text{ضریب } x) \end{cases}$$

فرمول(۱)

که در آن: $k \in z$ یا به طور معادل:

$$\begin{cases} x = x_0 - \frac{b}{d}k \\ y = y_0 + \frac{a}{d}k \end{cases} \quad (k \in z)$$

فرمول(۲)

مثال۵. در این مثال: به کمک روش دوم جواب‌های صحیح معادله‌ی $9x + 5y = 17$ را به‌دست می‌آوریم.

$b = y$ ضریب $= 5$; $a = x$ ضریب $= 9$; $d = (9,5) = 1$

و در ضمن، یکی از جواب‌های معادله $\begin{cases} x = ۳ \\ y = -۲ \end{cases}$ است. چون این جواب‌ها در معادله صدق می‌کنند،

آن‌ها را جواب خصوصی می‌نامیم و قرار می‌دهیم: $\begin{cases} x_. = ۳ \\ y_. = -۲ \end{cases}$. حال با جای‌گذاری در فرمول(۱)،

جواب‌های عمومی معادله به‌شکل $(k \in z)$ $\begin{cases} x = ۳ + ۵k \\ y = -۲ - ۹k \end{cases}$ به‌دست می‌آیند و با انتخاب هر عدد صحیح

دل‌خواه برای k، می‌توان یک جواب معادله را یافت. مثلاً با انتخاب $k = ۰, -۱, -۲, -۳$، به ترتیب همان جواب‌های ذکر شده در سؤال ۲ به‌دست می‌آیند و این معادله بی‌شمار جواب صحیح دارد.

نکته: اگر از فرمول(۲) استفاده کنیم، جواب‌های عمومی معادله به‌شکل $(k \in z)$ $\begin{cases} x = ۳ - ۵k \\ y = -۲ + ۹x \end{cases}$

به‌دست می‌آیند و یا حتی اگر در شروع کار، جواب خصوصی دیگری را به‌دست آوریم، مثلاً: $\begin{cases} x_. = ۸ \\ y_. = -۱۱ \end{cases}$

در این صورت جواب‌های عمومی معادله با فرمول(۲) به شکل $(k \in z)$ $\begin{cases} x = ۸ - ۵k \\ y = -۱۱ + ۹k \end{cases}$ به‌دست

می‌آیند. در این مثال، سه شکل به ظاهر متفاوت برای جواب عمومی این معادله‌ی سیاله پیدا کردیم. ولی مجموعه‌ی مقادیری که برای (x,y) از شکل‌های متفاوت حاصل می‌شوند، یکی است. به عبارت دیگر، هر جواب خاص که از یک فرم جواب عمومی به‌دست آید، از فرم‌های دیگر نیز حاصل می‌شود؛ البته با

انتخاب عدد مناسبی برای پارامتر k. مثلاً جواب $\begin{cases} x = ۳ \\ y = -۲ \end{cases}$ از شکل اول جواب عمومی این مثال، با انتخاب

$k = ۰$ به‌دست می‌آید و همین جواب از شکل دوم با انتخاب $k = ۰$ و از شکل سوم با انتخاب $k = ۱$ به‌دست می‌آید. با تغییر مناسبی در پارامتر سه شکل به ظاهر متفاوت جواب، می‌توان آن‌ها را مشابه کرد. مثلاً در این مثال، اگر در شکل دوم جواب به جای k، K- قرار دهیم و در شکل سوم جواب به جای k، $۱ - k$ قرار دهیم، شکل‌های به‌دست آمده مانند شکل اول خواهند شد.

در ضمن در این مثال:

شکل اول جواب عمومی $\Rightarrow x + y = ۱ - ۴k$

شکل دوم جواب عمومی $\Rightarrow x + y = ۱ - ۴k$

شکل سوم جواب عمومی $\Rightarrow x + y = ۳ + ۴k$

و با انتخاب هر جواب خصوصی دل‌خواه و هر یک از فرمول‌های (۱) و (۲) نیز، ضریب پارامتر k در x+y یا ۴ است یا ۴- و این موضوع کلیت دارد. لذا طی این مثال به نکته‌ی زیر پی بردیم:

نکته: ظاهراً ممکن است جواب‌های عمومی به‌دست آمده با روش‌های مختلف، متفاوت باشند، ولی:

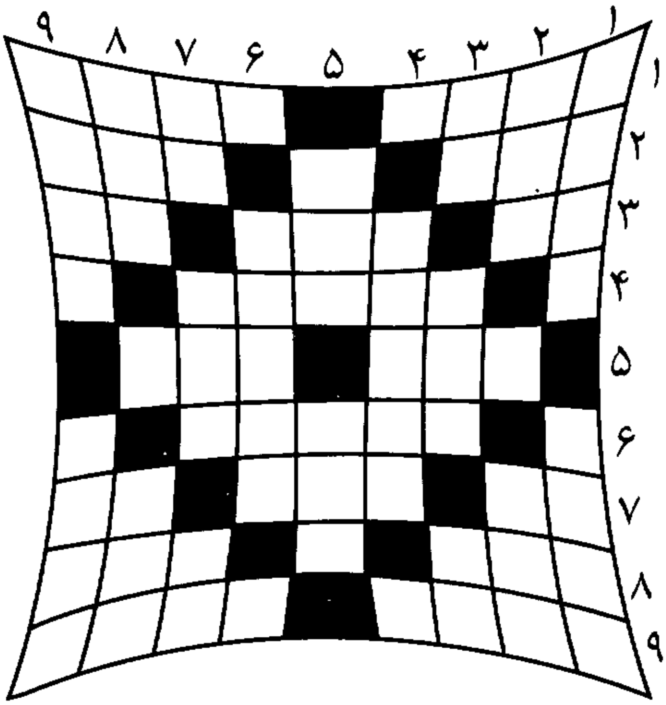
اولاً اگر در یک جواب عمومی به جای پارامتر k، پارامتر دیگری برحسب k قرار دهیم، ظاهر جواب‌های عمومی مشابه خواهد شد.

و ثانیاً ضریب پارامتر k در x+y یا مثل هم است و یا قرینه.

توجه: روش جواب خصوصی روش ساده‌ای است، ولی هنگامی مناسب است که بتوانیم جواب خصوصی $x_.$ و $y_.$ را راحت پیدا کنیم. لذا پیدا کردن حتی یک جواب برای معادله‌ی سیاله غنیمت است تا بتوانیم از آن‌ها به‌عنوان جواب خصوصی استفاده کنیم. اما چگونه؟

ادامه دارد...

جدول ریاضی



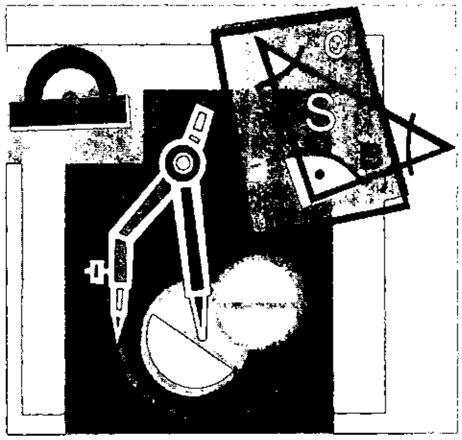
افقی:

۱. بنا به گفته «گوس» ریاضیات سلطان علوم است و... سلطان ریاضیات ـ ساختن دایره‌ای معادل با آن از مسائل لاینحل ریاضی است. ۲. نقطه تلاقی دو ضلع از چند ضلعی ـ ریاضیات جدید قضایا را در این حالت مطرح می‌کند. ۳. بزرگتر از جزء ـ زاویه کوچکتر از قائمه ـ چون با خودش جمع گردد مجذور شود. ۴. سال گذشته هم از این نوع بود. ۵. برجی از منطقه البروج که هم‌ردیف مرداد به حساب می‌آید ـ تکلیفی که سه قسمت از پنج قسمت آن انجام گرفته است. ۶. علامت ریشه گرفتن. ۷. تنها عددی که مجموع خود و معکوسش از ۲ بزرگتر نیست ـ وارونه آن‌چه که یا بدیهی است و یا بدون اثبات قبول می‌شود ـ ضلع. ۸. واحد زمان ـ قرار دادن مثلاً چند واسطه عددی یا هندسی بین دو عدد ۹. اگر با نمای صفر باشد برابر با یک خواهد بود ـ اصطلاح پارسی خمسه مرقه.

عمودی:

۱. تغییر فاصله‌ی نقطه نسبت به یک مبدأ ـ عددی که در کشور ما برای دانش‌آموزان مقدس است. ۲. نوری آن واحد فاصله در نجوم می‌باشد ـ محدب نیست. ۳. معمولاً مساحت و هم چنین سطح را با آن نمایش می‌دهند ـ قسمتی از قسمت‌های یک واحد ـ ۲۱ به حساب ابجد. ۴. انواع آن تغییر مکان، انتقال، دوران و تجانس می‌باشد. ۵. دانشکده‌ای که زبده‌ی فارغ‌التحصیلان رشته ریاضی را می‌پذیرد ـ سومری‌ها آن را مبنای عددنویسی قرار داده بودند. ۶. سیستم بی‌انتها. ۷. راهی که ثلث آن باقی مانده است ـ معکوس واحد فرهنگستانی ـ ۴ و ۵۰ به حساب ابجد. ۸. فضای اینیشتین چهار تای آن را دارد ـ نام قسمت‌های دوازده‌گانه منطقه البروج ۹. وضع دو خط که با یکدیگر زاویه‌های مجاور مساوی می‌سازند ـ واحد کمان.

منبع: مجله یکان



پاسخ تفریح اندیشه

حل ۱ :

$$x^2 + y^2 = 208 \qquad (1)$$

$$xy = 96 \qquad (2)$$

از ۲ :

$$2xy = 192 \qquad (3)$$

افزودن ۳ به ۱ می‌دهد :

$$x^2 + y^2 + 2xy = 208 + 192$$

$$(x+y)^2 = 400 \text{ ، } x + y = \pm 20 \qquad (4)$$

با تفریق ۳ از ۱ داریم :

$$x^2 + y^2 - 2xy = 208 - 192$$

$$(x-y)^2 = 16 \text{ ، } x - y = \pm 4 \qquad (5)$$

از ۴ و ۵ دستگاه‌های زیر را حل می‌کنیم :

الف) $\begin{cases} x+y=20 \\ x-y=4 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} x+y=20 \\ x-y=-4 \end{cases}$

ج) $\begin{cases} x+y=-20 \\ x-y=4 \end{cases}$ د) $\begin{cases} x+y=-20 \\ x-y=-4 \end{cases}$

جواب دستگاه الف عبارت است از : $y = 8$ ، $x = 12$

جواب دستگاه ب عبارت است از : $y = 12$ ، $x = 12$

جواب دستگاه ج عبارت است از : $y = -12$ ، $x = -8$

جواب دستگاه د عبارت است از:

$x = -12 \ , \ y = -8$

❊❊❊

حل ۲: مجموع زاویه‌های درونی یک n ضلعی $180(n-2)$ درجه است. با قرار دادن $n = 8$، به‌دست می‌آوریم:

$180^\circ(6) = 1080^\circ$

در این صورت، مجموع زاویه‌های باقی‌مانده عبارت است از:

$1080^\circ - 845^\circ = 235^\circ$

توجه داریم که سه زاویه‌ی باقی‌مانده، شامل دو زاویه‌ی مکمل و دو زاویه‌ی متمم هستند. درنتیجه، یکی از این زاویه‌ها در این جفت مشترک است. فرض می‌کنیم، اندازه‌ی این زاویه x° باشد. درنتیجه، اندازه‌های دو زاویه‌ی دیگر، به‌ترتیب $(180-x)^\circ$ و $(90-x)^\circ$ است:

$x + (180 - x) + (90 - x) = 235$

$x = 35$

❊❊❊

حل: ابتدا z را به صورت $a + bi$ می‌نویسیم. بعد، برای حقیقی بودن z، باید b برابر صفر باشد. بنابراین جمیع مقادیر برقرارکننده‌ی این شرط را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} z &= [-x + 10 + (x+2)i](x - i) \\ &= -x^2 + 10x + (x^2 + 2x)i + xi - 10i + (x+2) \\ &= (-x^2 + 10x + x + 2) + (x^2 + 2x + x - 10)i \\ &= (-x^2 + 11x + 2) + (x^2 + 3x - 10)i \end{aligned}$$

برای حقیقی بودن z، باید جزء انگاری آن برابر صفر باشد:

$x^2 + 3x - 10 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x - 5) = 0$

$x_1 = 2$ و $x_2 = -5$

❊❊❊

کرجی این کتاب را به نام ابوغالب محمدبن علی بن خلف واسطی، ملقب به فخر الدوله و متوفی به سال ۴۰۷ که ذکرش گذشت نوشته و ظاهراً به همین مناسبت آن را الفخری نامیده است.[۵]

ترجمه ی فارسی قسمتی از مقدمه ی کتاب الفخری

محمدبن حسین کرجی حاسب که خدای تعالی او را بیامرزد گفته است:

چنین دریافتم که موضوع علم حساب استخراج مجهولات از روی معلومات در جمیع انواع آن است و پی بردم که واضح ترین راه ها به سوی آن، و نخستین وسیله برای رسیدن به آن، صناعت جبر و مقابله است، از جهت قدرت آن و شمول آن بر همه ی مسائل مختلف حساب. و دیدم که کتاب هایی که در این صناعت تصنیف شده به طور کامل همه ی اطلاعات مقدماتی لازم را در بر ندارند. و از جهت آن چه برای وقوف یافتن بر فروع آن لازم است کافی نیستند. و کسانی که این کتاب ها را تألیف کرده اند در شرح مقدمات آن، که راه رسیدن به غایت و دست یافتن به نهایت این علم است، کوتاهی کرده اند. سپس در این صناعت چیزهای تازه ی نیکویی یافتم که در آثار هیچ یک از آن مؤلفان ندیدم. و مشکلاتی را حل کردم که در کتاب های آنان بیان آن ها را نیافتم. و چون این فضیلت را یافتم و احتیاج به جبران این نقیصه را حس کردم چاره ای جز این نیافتم که کتابی تألیف کنم که همه ی این معلومات را در بر داشته باشد و در آن شرح ملخص اصول جبر را بدهم، به نحوی که از کدورت حشو و آلایش لغو پاک و مصفا باشد...»

۲. الکافی فی الحساب

این کتاب دارای ۷۰ بخش است. ۴۳ بخش اول آن درباره ی اعمال حساب و بخش های ۴۴ تا ۵۳ آن درباره ی هندسه و بخش های ۵۴ تا ۷۰ آن مربوط به جبر است.

بر کتاب الکافی فی الحساب دو شرح نوشته شده است:

الف ـ شرح کتاب الکافی للکرجی، تألیف ابوعبدالله شقاق بغدادی.

ب ـ الشرح الشافی للکتاب الکافی فی الحساب. این شرح تألیف محمدبن علی بن حسن بن احمد شهرزوری است که آن را در سال ۵۹۱ نوشته و یک نسخه ی خطی آن که با نسخه ی اصل مقابله شده است در استانبول (ینی جامع به شماره ی ۸۰۱) موجود می باشد.

۳. البدیع فی الحساب

این یکی از مهم ترین تألیفات کرجی و نشان دهنده ی نمو و پیشرفت علم جبر تا اوایل سده ی پنجم نزد مسلمین است و یک نسخه ی خطی از آن در واتیکان موجود است.

این کتاب که بنا به نوشته ی خود کرجی، در مقدمه ی آن، زبده ی علم حساب و ثمره ی آن و غایت آن است دارای سه مقاله است به این شرح: المقالة الاولی فی الاصول، القول علی المجهولات، المقاله فی ذکر الاستقراء.

۴. علل حساب الجبر و المقابله و شرح ها

این کتاب مشتمل بر این باب ها است: باب اموال تعدل جذوراً، باب تنصیف الاجذار فی المسائل الثلثه، باب تضعیف الجذور و تنصیف ها، باب ضرب الاجذار فی الاجذار، قسمة الاجذار علی الاجذار، جمع الاجذار بعضها الی بعض و نقصان بعضها من بعض.

زیرنویس

۱. بهاءالدوله، ابونصربن عضدالدوله پسر بویه ی دیلمی که از ۳۷۹ تا ۴۰۳ سلطنت کرد.

۲. سلطان الدوله ابوشجاع فناخسرو که در ۴۰۳ تا ۴۱۲ سلطنت کرد.

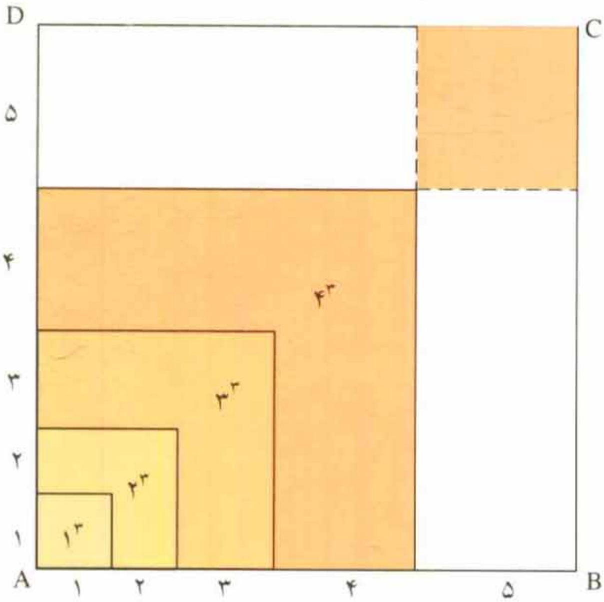
۳. شاعر و ادیب ایرانی، کاتب و وزیر منوچهربن قابوس ـ لغت نامه، مقاله ی: ابوغانم قصری ـ منوچهربن قابوس از دیالمه ی آل زیار بود که از سال ۴۰۳ تا ۴۲۰ در طبرستان حکومت کرد.

۴. عنوان عربی این کتاب انباط المیاه الخفیه است. در سال ۱۳۴۵ خورشیدی توسط حسین خدیو جم به فارسی ترجمه و توسط بنیاد فرهنگ ایران منتشر شد.

۵. گویا کرجی خود ملقب به «فخرالدین» بوده است (کشف الظنون، ج۱، ص۲۳۷)

اثبات محمد بن حسین کرجی برای دستور

$$۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + \cdots + n^۳ = \frac{۱}{۴} n^۲ (n+۱)^۲$$



(شکل بالا، برای n=۵)

مربع **ABCD** را به ضلع $n + \cdots + ۳ + ۲ + ۱$ در نظر می‌گیریم (در شکل **n=۵**) و مساحت این مربع را به دو طریق محاسبه می‌کنیم:

۱) ضلع مربع برابر است با $\frac{۱}{۲} n(n+۱)$، پس $S_{ABCD} = \frac{۱}{۴} n^۲ (n+۱)^۲$.

۲) مربع را به‌صورتی که در شکل دیده می‌شود، به نوارهای گونیایی تقسیم می‌کنیم و مثلاً نوار گونیایی **n**ام را در نظر می‌گیریم. این نوار شامل یک مربع به ضلع برابر **n** و دو مستطیل، هر یک به طول $\frac{۱}{۲} n(n+۱) - n$ و به عرض **n**، می‌باشد، بنابراین مساحت آن چنین است:

$$\text{مساحت نوار گونیایی } n\text{ام} = n^۲ + ۲[\frac{۱}{۲} n(n+۱) - n]n = n^۳$$

بنابراین

$$S_{ABCD} = ۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + \cdots + n^۳$$

با برابر قرار دادن دو مقداری که برای مساحت مربع به‌دست آوردیم، به دستور مورد نظر می‌رسیم.