دوره‌ی چهاردهم، شماره‌ی ۲
زمستان ۱۳۸۳، بها: ۲۵۰۰ ریال

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

رشد برهان ۴۴

برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه

آموزشی، تحلیلی، اطلاع‌رسانی

www.roshdmag.org

- با چشم بسته وارد دنیای ریاضی نشوید!
- اعداد فیبوناتچی
- عبارت‌های جبری گویا و اعمال بر روی آن‌ها
- اثبات دو قضیه از تقارن به کمک نگاشت‌ها
- نقش ریاضیات در علوم انسانی و تجربی
- اتحادها و معادله‌ها
- مثلثات

ابن هیثم

شهرت ابن‌هیثم در ریاضیات بر مسأله‌ای که از قرن هفدهم تاکنون به «مسألهٔ ابن‌هیثم» معروف شده استوار است. این مسأله را، به صورتی که ابن‌هیثم در نظر داشته، چنین می‌توان بیان کرد: به‌ازای هر دو نقطه‌ای که در خارج از سطح بازتابنده‌ای- که ممکن است تخت، کروی، استوانه‌ای، یا مخروطی، محدب یا مقعر باشد- قرار داشته باشند نقطه‌ای (یا نقاطی) روی سطح پیدا کنید که نور از یکی از آن دو نقطه پس از بازتاب در این نقطه (یا نقاط) به نقطهٔ دیگر بگذرد. بطلمیوس در المناظر ثابت کرده بود که در آینه‌های محدب کروی فقط یک نقطهٔ بازتاب وجود دارد. وی چند حالت را هم که به آینه‌های مقعر کروی مربوط می‌شوند در نظر گرفته بود، از جمله حالتی که در آن دو نقطهٔ مفروض بر مرکز کره منطبق باشند؛ حالتی که دو نقطه بر قطری واقع باشند و فاصلهٔ شان از مرکز کره مساوی یا نامساوی باشد؛ و حالتی که دو نقطه بر وتری از کره و به یک فاصله از مرکز آن باشند. آنگاه چند حالت را که بازتاب ممکن نیست ذکر کرده بود.[1]

ابن‌هیثم در مقالهٔ پنجم المناظر می‌کوشد این مسأله را برای همهٔ حالات سطوح کروی، استوانه‌ای و مخروطی- چه محدب و چه مقعر- حل کند؛ وگرچه در همه حال موفق نیست، اما نحوهٔ عمل او، که احاطه‌اش را بر ریاضیات عالی یونانی نشان می‌دهد، بحق تحسین ریاضیدانان و مورخان بعدی را برانگیخته است. پژوهندگانی که به بررسی این مسأله پرداخته‌اند، در کار ابن‌هیثم با مشکلاتی مواجه شده‌اند. متن مقالهٔ پنجم المناظر، در نسخهٔ خطی فاتح و نسخه ایاصوفیه، که از روی آن استنساخ شده است، اغلاط فراوانی دارد که نتیجهٔ کار نسخه‌بردار است و در هیچ‌یک از این دو نسخه براهین مفصل با شکلی که مطلب را توضیح دهد همراه نیست.[2] در شرح کمال‌الدین فارسی و در متنی که ریسنر از ترجمهٔ لاتینی قرون وسطایی منتشر کرده چنین شکل‌هائی وجود دارد، اما این متون هم خالی از اشتباه نیستند. از این‌رو باید مراتب امتنان خود را از مصطفی نظیف اظهار داریم که این مسأله را به صورت کامل و روشن تحلیل کرده و چهار فصل از کتاب خود را، که استادانه نوشته شده، بدان اختصاص داده است.

ابن‌هیثم حل این مسأله را در حالت کلی بر شش قضیهٔ فرعی (لِم= مقدمه)، که جداگانه ثابت می‌کند، استوار می‌سازد:

(۱) رسم خطی از نقطهٔ مفروض A واقع بر دایرهٔ ABG، به‌طوری که محیط دایره را در H و قطر BG را در D قطع کند و فاصلهٔ DH مساوی طول معلومی باشد؛ (۲) رسم خطی از نقطهٔ مفروض A به‌طوری که قطر BG را در E و محیط را در D قطع کند و ED مساوی طول معلومی باشد؛ (۳) رسم خط DTK از نقطهٔ D واقع بر ضلع BG از مثلث قائم‌الزاویه‌ای که زاویهٔ B‌اش قائمه است، به طوری که AG را در T و (امتداد) BA را در K قطع کند و نسبت $\frac{KT}{TG}$ مساوی نسبت معلومی باشد؛ (۴) از دو نقطهٔ E و D واقع در خارج دایره‌ای به قطر AB، رسم دو خط EA و DA، که در آن A نقطه‌ای روی محیط دایره است، به طوری که مماس در A زاویهٔ EAD را نصف کند؛ (۵) رسم خطی از نقطهٔ E واقع در خارج دایره‌ای که قطرش AB و مرکز G است، به طوری که محیط را در D و قطر را در Z

ادامه در صفحه ۳ جلد

بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

رشد برهان متوسطه

دورهٔ چهاردهم، شماره ۲
زمستان ۱۳۸۳
بها: ۲۵۰۰ ریال
تیراژ: ۱۵۰۰۰ نسخه
برای دانش آموزان دورهٔ متوسطه
www.roshdmag.org

	۲	یاداشت سردبیر
پرویز شهریاری	۳	از تاریخ بیاموزیم (۱۷)
احمد قندهاری	۸	برد تابع
	۱۳	گفت و گو با استاد احمد قندهاری
حمیدرضا امیری	۲۰	احتمال شرطی، پیشامدهای مستقل و وابسته
	۲۴	تفریح اندیشه
محمدجواد منتظری	۲۵	با چشم بسته وارد دنیای ریاضی نشوید!
محمدهاشم رستمی	۲۸	معادله های مثلثاتی (۶)
غلامرضا یاسی پور	۳۲	اعداد فیبوناتچی
میرشهرام صدر	۳۶	عبارت های جبری گویا و اعمال بر روی آن ها
حمید رشتی زاده	۴۲	اثبات دو قضیه از تقارن به کمک نگاشت ها
دکتر بهمن طباطبایی	۴۶	نقش ریاضیات در علوم انسانی و تجربی
پرویز شهریاری	۴۸	اتحادها و معادله ها (۵)
سیدمحمدرضا هاشمی موسوی	۵۳	محاسبهٔ حدود $\sum \frac{1}{x^n}$
احمد قندهاری	۵۶	مثلثات
مهدی رحمانی	۶۰	مجموعهٔ اعداد گویا

رشد برهان، تمامی دبیران محترم و دانش آموزان عزیز را در زمینه های زیر دعوت به همکاری می کند:

- نگارش مقاله های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب های ریاضی متوسطه و پیش دانشگاهی)
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن ها (برای دانش آموزان)
- طرح مسائل مسابقه ای به همراه حل آن ها (برای دانش آموزان)
- طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمهٔ مقاله های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

رشد برهان، هر سه ماه یک شماره منتشر می شود.

- مجلّه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافه مقاله ها آزاد است.
- مقاله های وارده، باید خوانا و حتی الامکان کوتاه باشد.
- مقاله های رسیده مسترد نمی شود.
- استفاده از مطالب مجلّه در کتاب ها یا مجله های دیگر با ذکر دقیق ماخذ بلامانع است.

نشانی دفتر مجلّه: صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله: ۹ـ ۸۸۳۱۱۶۱۰ داخلی ۳۷۰
تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ ـ ۷۷۳۳۱۱۱۰

یادداشت سردبیر

از کلاس ریاضی چه خبر؟ در کلاس ریاضی شما چه جوّی حاکم است؟ آیا دبیر ریاضی شما تا به حال مساله‌ای را به اشتباه حل کرده است؟ عکس‌العمل شما و سایر دانش‌آموزان چه بوده است؟ برخورد دبیر با شما چه بوده است؟ درست است، به روحیات معلم بستگی دارد! شیرین‌ترین خاطره شما از درس ریاضی با کلاس ریاضی چیست؟ تلخ‌ترین خاطره شما چیست؟ قول بدهید از خاطرات تلخ و شیرین خود در کلاس ریاضی برای ما بنویسید تا برای دوستان شما در «برهان» نقل کنیم. در عوض من هم خاطره‌ای از زمان دانش‌آموزی خود برایتان نقل می‌کنم. بسیار خوب. منتظر نامه‌هایتان هستیم.

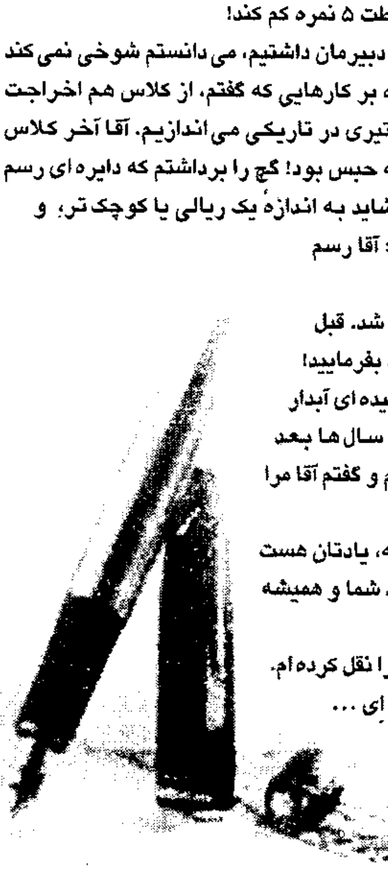
سال اول دبیرستان بودم، در نظام قدیم؛ در آن سال کتاب هندسه‌ای تدریس می‌شد که واقعاً برای بچه‌های کلاس اول سخت بود (در حدّ هندسهٔ ۱ و ۲ نظام فعلی) ما دبیری داشتیم بسیار با سابقه که خیلی هندسه را خوب درس می‌داد، او ویژگی‌های جالبی داشت. مثلاً اصلاً در کلاس با بچه‌ها شوخی نمی‌کرد، از همه درس می‌پرسید، بسیار خوش خط می‌نوشت و از همه جالب‌تر چنان دایره‌هایی با گچ می‌کشید که همهٔ ما متعجب و متحیر می‌شدیم؛ بدون نگاه کردن به تخته می‌گفت: خُب بچه‌ها! دایره‌ای رسم می‌کنیم ... و در حالی که به کلاس نگاه می‌کرد، با دست راست دایره را روی تخته می‌کشید. دایره‌اش واقعاً دایره بود؛ ذره‌ای کج و معوج نبود. از قضا روزی، نمی‌دانم پای دبیر سُر خورد یا گچ ایراد داشت یا ... که دایره‌اش کمی از یک طرف برآمده شد! من با تعجب، خدا وکیلی بدونِ قصد دیگری، به دوستم ناصر، که هر دو در ردیف جلو نشسته بودیم، گفتم: ناصر نگاه کن! این دفعه دایره یه خورده بیضی از آب درآمد! از شانس بدَم، آقا حرفم را شنید و فکر کرد خدای نکرده دارم او را مسخره می‌کنم. گفت: بله، دایرهٔ مرا مسخره می‌کنی؟! بیا بیرون! ای دادِ بیداد چه شد؟! آقا به خدا قسم ما قصدی نداشتیم، چیزی نگفتیم. آقا غلط کردیم ببخشید! آقا گفت! نه خیر فکر کردی به همین راحتی می‌گذرم؟! بیا بیرون! خلاصه؛ از ما عذرخواهی و پشیمانی و از آقا داد و بیداد و تهدید! بالاخره آمدم بیرون و طبق دستور آقا رفتم پای تخته. آقا گفت: ـ ببین امیری، گچ را بر می‌داری و یک دایره می‌کشی، اگر دایره، دایره از آب درآمد که هیچ! کاری با تو ندارم ولی اگر دایره، کج شد و خلاصه دایره نبود وای به حالت، از نمرهٔ ثلث دوم ۵ نمره کم می‌کنم و به آقای معاون هم سفارش می‌کنم از نمره انضباطت ۵ نمره کم کند!

« ـ آقا ترا به خدا من اصلاً تا به حال دایره پای تخته نکشیده‌ام (با توجه به شناختی که از دبیرمان داشتیم، می‌دانستم شوخی نمی‌کند و همه‌ی کارهایی که گفته انجام می‌دهد). آقا گفت اگر تا دو دقیقه دیگر دایره رسم نکنی علاوه بر کارهایی که گفتم، از کلاس هم اخراجت می‌کنم! دیدم چاره‌ای ندارم در ضمن به قول معروف «سنگ مُفت گنجشک مفت» بالاخره یه تیری در تاریکی می‌اندازیم. آقا آخر کلاس ایستاده بود و به تخته چشم دوخته بود. بچه‌ها هم نُطق نمی‌کشیدند و نفس هایشان در سینه حبس بود! گچ را برداشتم که دایره‌ای رسم کنم یک دفعه راهی به ذهنم رسید! رفتم پای تخته و خیلی آرام دایرهٔ بسیار بسیار کوچکی، شاید به اندازهٔ یک ریالی یا کوچک‌تر، و خیلی با دقت، رسم کردم و آمدم کنار. گفتم: آقا بفرمایید! آقا گفت: رسم کن، چرا معطلی؟ گفتم: آقا رسم کردم. اینهاش!

آقا کمی آمد جلو، باز هم جلوتر و جلوتر تا نزدیک ردیف اول و دایره را دید و به من خیره شد. قبل از این که حرفی بزند گفتم: آقا شما گفتید دایره بکش نگفتید با چه شعاعی، من هم دایره کشیدم، بفرمایید! یکی دو تا از بچه‌ها ناخداگاه خندیدند. آقا کمی جلوتر آمد یک بار دیگر به دایره نگاه کرد و کشیده‌ای آبدار به صورتم نواخت و گفت: برو بشین! البته نمره از من کم نکرد و به معاون هم معرفی نشدم. سال‌ها بعد وقتی در یک مدرسه تدریس می‌کردم همان دبیرم را در دفتر معلمین دیدم. رفتم جلو سلام کردم و گفتم آقا مرا می‌شناسید؟ گفت: نخیر آقا نمی‌شناسم. گفتم: آقا شما یک بار یک سیلی به من زده‌اید.

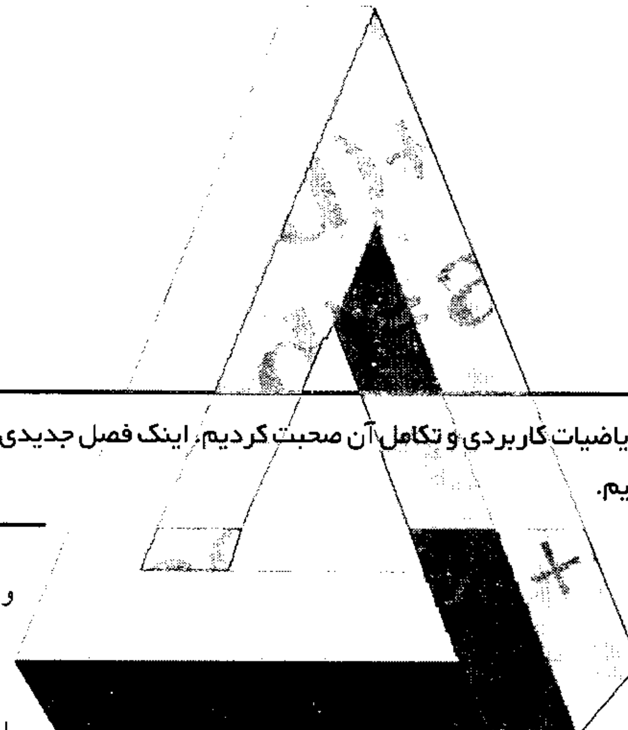
خندید و گفت شوخی می‌کنید من تا به حال کسی را کتک نزده‌ام، گفتم ولی آقا یادتان رفته، یادتان هست سال ۵۶ ... گفت: تو همان دانش‌آموزی!؟ امیری هستی!؟ گفتم: بله آقا من امیری هستم شاگرد شما و همیشه دعاگوی شما.

بلند شد و صورت مرا بوسید و گفت: من تا به حال در چندین جلسه کلاس خاطرهٔ آن روز را نقل کرده‌ام. حالت چطوره؟ گفتم خوبم آقا، به لطف شما، هنوز هم آقا به همان خوبی دایره می‌کشید؟ گفت: ای ...



۱۷

پرویز شهریاری



اشاره

در شماره‌های قبل دربارهٔ ریاضیات کاربردی و تکامل آن صحبت کردیم. اینک فصل جدیدی را با عنوان ریاضیات نظری و تکامل آن آغاز می‌کنیم.

از تاریخ بیاموزیم

ریاضیات نظری

روش عملی ـ کاربردی سازماندهی ریاضیات، با تأثیری که عمل بر تکامل ریاضیات می‌گذارد، معین می‌شود. در ضمن، قانونمندی‌های مربوط به روش عملی سازماندهی هم وارد کار می‌شود. برای روش نظری سازماندهی، که اساس آن بر استدلال و اثبات است، مهم‌تر از هرچیز، بر استقلال دانش ریاضی تکیه دارد که با قانونمندی‌های درونی، تکامل آن مشخص می‌شود. این دو نوع قانونمندی‌های دانش ریاضی، در زمان‌های مختلف و با میزان‌های مختلف ساختاری، به‌تناوب ظاهر می‌شوند و در دگرگونی سازماندهی، منطق تاریخی خود را دارند.

۱. مرحلهٔ آغازین یگانگی نظری دانش ریاضی

شکل گرفتن سازوکار تکامل ریاضیات نظری

پیش از هرچیز، ببینیم چه چیزی یگانگی دانش ریاضیات نظری را تأمین می‌کند!

درک تکامل دانش بر تجزیه و تحلیل برخی از واحدهای آن، که اساسی به شمار می‌آیند، تکیه دارد. بنابر رایج‌ترین عقیده‌ای که وجود دارد، واحد ساختمانی دانش را «نظریه» می‌گیرند و پیشرفت و دگرگونی دانش، به عنوان پیشرفت و دگرگونی نظریه (تئوری) فهمیده می‌شود. ای. لاکاتوس این دیدگاه را اندکی تغییر شکل داده و به عنوان اساس تکامل دانش، پیشرفت و دگرگونی برنامه‌های پژوهشی ـ علمی را در نظر می‌گیرد؛ توالی نظریه‌هایی که دارای برخی ویژگی‌های کلی باشند. نظرهای دیگری هم وجود دارد؛ اساس را بر واحدهای ساختاری «کوچک‌تر» (حالت‌ها، گزاره‌های نظری) یا برعکس، بر چنان خصلت‌های عمده‌ای که برای یک رشتهٔ تکامل از دانش عام باشد ـ مانند شیوهٔ تفکر علمی ـ قرار می‌دهند. همهٔ این دیدگاه‌ها، با آگاهی‌های علمی، در سطح‌های مختلف موقعیت آن، سروکار دارند. از این گذشته، این دیدگاه‌ها، هدف‌های مختلفی را دنبال می‌کنند. مطالعهٔ شیوهٔ تفکر علمی، به قصد روشن کردن مقام و موقعیت آگاهی‌های علمی در دستگاه فرهنگ و یافتن بستگی‌ها و شرط‌های متقابل علم و فرهنگ، انجام می‌گیرد. همچنین هدف پرسش‌های مربوط به مسأله‌های علمی، روشن کردن میزان فعالیت‌های علمی و به دست آوردن «توصیه‌های آموزشی» در جهت فعال کردن یا محتاط بودن، در این یا آن موقعیت خاص است.[۱]

طبیعی است که بررسی دانش

ریاضی به عنوان یک مجموعهٔ کامل یکپارچه و به عنوان یک سیستم، باید از روشی پیروی کند و در ضمن، برای «محاسبهٔ» خود، واحد خاصی داشته باشد. این واحد را باید، با تکیه بر روش سازماندهی دانش جست‌وجو کرد. در حالت دانش نظری ریاضیات، اثبات و استدلال است که موجب به هم پیوستگی و تمامیت آن می‌شود؛ ریاضیات نظری از آن جهت یکپارچه و به هم پیوسته است که به وسیلهٔ استنتاج‌های اثباتی و استدلالی، می‌توان گزاره‌هایی را از گزاره‌های دیگر نتیجه گرفت.

مرحلهٔ آغازین سازمان یافتن ریاضیات نظری از راه نتیجه‌های اثباتی، در این است که واحد ساختمانی اصلی، عبارت است از مفهوم بستگی‌های نظری ـ ریاضی [که بعدها به مفهوم رابطه‌های منطقی تغییر نام دارند] که اثبات‌ها ـ و از راه آن‌ها، تمامی دانش ریاضی نظری ـ به آن‌ها تکیه دارند. در مرحلهٔ اوّل سازمان یافتن دانش نظری ریاضی، مفهوم بستگی‌های ریاضی، مرکزی را تشکیل می‌دهد که گسترش اثبات‌ها و سازماندهی حکم‌ها و گزاره‌های ریاضی، از آن جا آغاز می‌شود. هربار با پدید آمدن بستگی‌های منطقی تازه و با تکیه بر آن‌ها، اثبات‌های تازه، منجر به بازسازی و غنای تمامی حجم نتیجه گیری‌های ریاضی می‌شود، رشد توفانی دانش ریاضی آغاز می‌شود، کمبودها روشن و کشف می‌شود، مسأله‌های تازه‌ای پدید می‌آید، نتیجه‌های نامنتظری در موقعیت‌های علمی و کاربردی به دست می‌آید و تکامل ریاضیات نظری آغاز می‌شود.

سپس وقتی که ساختارهای ریاضیات نظری، با استفاده از بستگی‌های منطقی، صورت روشنی پیدا کردند، دوران بحران سازماندهی «دربین» مفهوم‌های بستگی‌های منطقی فرا رسید؛ بستگی‌های نظری، آغاز به منظم شدن کردند تا با ساختارهایی که در آن‌ها پدید آمده بود، تطبیق داده شوند.

از این زمان، واحد ساختمانی که تأمین کنندهٔ یکپارچگی ریاضیات نظری است، دیگر نه مفهوم، نه نظام جداگانهٔ ریاضیات یا اختلاطی از نظام‌ها، نه موقعیت ریاضیات مقدماتی، نه مسأله یا اثباتی که به بخش‌های خود تقسیم شده است، بلکه تمامی ریاضیات نظری تعیین کنندهٔ بخش‌های کلیت خود، قدم به صحنه گذاشت. این واحد، موجودیت ریاضیات نظری را حفظ می‌کند.

الف) وحدت از درون

گسترش سریع حلقه‌های نظری زنجیرهٔ دگرگونی ریاضیات، یعنی سازماندهی عمومی و کلی، با استفاده از مفهوم‌های نظری ـ ریاضی، دو بار در تاریخ ریاضیات دیده می‌شود؛ اوّل در سدهٔ ششم پیش از میلاد، وقتی که اصل اثبات وارد در ریاضیات شد. بنا بر گواهی پروکلس «تالس» بود که بعد از مسافرت به مصر، برای نخستین‌بار، این نوع آموزش را در یونان رواج داد. او نه تنها خودش بررسی‌های زیادی در این زمینه کرد، بلکه زمینهٔ کار را برای بسیاری از کشف‌های دیگر که به وسیلهٔ آیندگان انجام گرفت، فراهم کرد... پس از او، ماهرک که برادرش «سته سی خور» شاعر بود، مطالعهٔ هندسه را جلو برد. هیپس می‌نویسد که او در این عرصه، به موفقیت‌هایی دست یافت. سپس فیثاغورس مطالعهٔ هندسه را از سر گرفت، به آن نظامی مستقل داد و نخستین اصل‌ها را به صورت نهایی خود آورد و قضایای آن را به صورتی انتزاعی و با روشی روشنفکرانه مورد مطالعه قرار داد. در این جا اساس اثبات‌ها، بستگی‌های منطقی است: «اگر... آن‌گاه»، «بنابراین»، «از آن‌جا»، «به این مناسبت»، «به این معناست»، «فرض کنید» و غیره. این‌جا، بستگی‌های نظری (رابطه‌های منطقی)، این امکان را به وجود آورد که با موضوع‌های ریاضی مشابه کار کنند، برابری یا تشابه آن‌ها را ثابت کنند و در واقع، عمل‌های مربوط به برابری و اتحاد کمیت‌ها و شکل‌ها را گردآورند. در واقع، در این عمل‌ها، کمیّت‌ها و شکل‌ها به خودشان تبدیل می‌شوند. از این به بعد عمل‌ها را، رابطه‌های منطقی «ایستارستاتیک» می‌نامیم.

«انفجار نظری» بعدی در ریاضیات، در دوران جدید پیش آمد. از نیوتن و لایب نیتس تا روزهای ما، رشد پرشتاب بلوک ساختمان‌های نظری ـ ریاضی دنبال می‌شود، نظریه‌های ریاضی شاخه شاخه می‌شوند، شاخه‌های تازه‌ای به آن‌ها اضافه می‌شود، با هم یکی می‌شوند و به وسیلهٔ یک شاخهٔ کلی‌تر، جذب و بلعیده می‌شوند. «در دورهٔ تاریخی کوتاهی در سه سده و ربع سدهٔ بیستم، دست کم ۹۹ درصد همهٔ کشف‌های ریاضی انجام گرفته است. در همین دوره، به تقریب همهٔ نظام‌های

موجود شکل گرفته است» [ب. و. گنه‌دنکو، ک. آ. ریبنی کوف، ن. ای. سیمونوف؛ «مسأله‌های تاریخی ریاضیات عصر جدید» نشریهٔ «بررسی‌های تاریخی ریاضیات»، جلد ۱۵، ۱۹۶۳]. و این، در نتیجهٔ آن است که به دلیل برقراری محاسبهٔ دیفرانسیلی و انتگرالی، امکان تکامل نظری کمیت‌های متغیر به‌وجود آمد. مفهوم‌های دیفرانسیل گیری و انتگرال گیری، مفهوم‌های بستگی‌های منطقی پویا هستند. ورود بستگی‌های تازهٔ نظری، چنان به غنای ریاضیات افزوده است که می‌توان این دیدگاه را ارائه داد که ریاضیات به عنوان یک دانش نظری، تنها در عصر جدید پدیده آمده است!

ما ضمن تجزیه و تحلیل و تکامل ریاضیات نظری، در اساس خود، از مواد تاریخی ریاضیات نظری عصر جدید استفاده می‌کنیم و این، به دلیل آن است که کارهای ریاضی‌دانان کلاسیک یونانی خیلی کم به ما رسیده است: «... آن‌چه را که به‌طور معمول، ریاضیات یونانی می‌نامند، شامل قطعه‌هایی از نوشته‌های ده یا بیست نفر است که در یک دورهٔ ششصدساله پراکنده‌اند» [اُ. نیگه‌باور در «دانش‌های دقیق در دوران باستان»]. طرح منطقی تکامل ریاضیات عصر جدید، می‌تواند «کلیدی» برای «کالبد شکافی» ریاضیات نظری کلاسیک به کمک روابط منطقی باشد.

نخستین گام در برپایی وحدت نظری، بازبینی نتیجه‌هایی بود که از قدیم معلوم بودند و تنظیم تازهٔ تصورهای قبلی. تالس وقتی نخستین قضیه‌ها را ثابت می‌کرد و از جمله این که قطر دایره آن را نصف می‌کند، به هیچ وجه از محدودهٔ آگاهی‌های موجود خارج نمی‌شود. پیش از تالس هم از این ویژگی آگاه بودند، ولی موفقیت تالس در این است که آن را به صورت نظری درک کرد. به همین ترتیب، یکی از موفقیت‌های فیثاغوریان متقدّم، طول وتر مثلث قائم‌الزاویه است که قبلاً در عمل و بدون این‌که ثابت شده باشد، به وسیلهٔ بابلی‌ها شناخته شده بود. همچنین مسأله‌های نخستین ریاضیات نظری عصر جدید، که به‌طور کامل به سدهٔ هفدهم مربوط می‌شود، روی بازسازی موفقیت‌های آپولونیوس (از طریق روش مختصاتی) و ارشمیدس متمرکز شده بود. منحنی‌های درجه سوم و بالاتر مورد مطالعه قرار می‌گیرد که منجر به بررسی منحنی‌های فضایی می‌شود؛ و همهٔ این‌ها به یاری محاسبهٔ دیفرانسیلی و انتگرالی انجام می‌گیرد. طول قطعهٔ منحنی‌ها، مساحت شکل‌ها و حجم جسم‌ها محاسبه می‌شود که پیش از آن به وسیلهٔ ارشمیدس بررسی شده بود. بستگی‌های نظری تازه که درنوبت اوّل روی موضوع شخصی تأیید می‌شوند، تنها بعد می‌توانند به حوزهٔ گستردهٔ موضوع‌هایی که «به چشم» نمی‌آیند، وارد شوند.

موفقیت بزرگ این بستگی‌های منطقی تازهٔ سازماندهی نخستین نظری، عبارت است از ساده کردن نتیجه‌گیری‌های بغرنج از موضع بستگی‌های نظری تازه، جالب است، روش‌های به دست آوردن نتیجه‌گیری‌ها، که باید آن‌ها را «اوج» موفقیت‌های علمی زمان‌های قبلی دانست، خیلی نزدیک به الگوریتم‌های ساده و بنیانی هستند که با بستگی‌های نظری تثبیت شده‌اند برای مثال، ساختمان بغرنجی که ارشمیدس طرح ریخته بود، به محاسبهٔ دیفرانسیلی و انتگرالی بسیار نزدیک است. روش‌های آپولونیوس به غایت بغرنج بود و به دشواری به زبان جبر هندسی بیان می‌شد و به سختی خود را به سمت اندیشه‌های مربوط به روش مختصاتی می‌کشاند (آپولونیوس از نکته‌هایی استفاده می‌کرد که به صورت مبهم و ناقص، شبیه دستگاه مختصاتی بود). بستگی‌های نظری تازه، راه رسیدن به این نتیجه‌ها را بسیار ساده کرد و آن‌ها را در ردیف دستاوردهایی قرار داد که امکان می‌داد موقعیت‌های بغرنج گذشته را در سطح موضوع‌های عادی درآورد.

سازماندهی نخستین در ریاضیات نظری یونان، دیدگاه تازه‌ای به ریاضیات کاربردی پیش از خود داد؛ همان‌طور که سازماندهی نخستین در ریاضیات نظری عصر جدید، نتیجه‌هایی را که بر مبنای جبر هندسی در ریاضیات نظری یونان به دست آمده بود، به صورت دیگری درآورد و نتیجه‌ها را با استفاده از مفهوم‌های تازه‌ای که به دست آمده بود، ساده کرد. مسأله‌هایی که به غایت دشوار بودند، در حوزهٔ ریاضیات عادی و متوسط قرار گرفتند و روش‌های تازه، تغییرات ریشه‌ای در علاقهٔ دانشمندان به‌وجود آورد. تحوّلی که در نتیجه‌گیری‌های نظری، ضمن استفاده از بستگی‌های تابعی و محاسبهٔ دیفرانسیلی و انتگرالی به وجود آمد، تمام چهرهٔ دانش ریاضی و تصور مربوط به جایگاه و درجهٔ اهمیت آن را دگرگون کرد. اگر تا پیش از سدهٔ هفدهم و خود

سدهٔ هفدهم، ضمن جست‌وجوهای نظری، تنها به رگه‌هایی می‌پرداختند که به مسأله‌های ریاضی باستان مربوط می‌شد، در سدهٔ هجدهم وضع به کلی تغییر کرد. حتی هندسهٔ مقدماتی و بررسی‌های مربوط به آن در درجهٔ دوم قرار گرفت و به عقب رانده شد؛ شکاف‌هایی که در مسأله‌های مربوط به دینامیک پدید آمده بود، علاقه‌های ریاضی را به قلمرویی دیگر جلب کرد. فرهنگستانی که ایجاد شده بود (فرهنگستان علوم پاریس، جامعهٔ سلطنتی لندن، فرهنگستان علوم نیویورک، فرهنگستان علوم برلن و...)، به‌طور مرتب دربارهٔ زمینه‌های مبرم مسابقه می‌گذاشتند. و این مسابقه‌ها، بیش‌تر در زمینهٔ مسأله‌های دینامیک بود. نتیجهٔ این مسابقه‌ها با چاپ مقاله‌ها در مجله‌های علمی منعکس می‌شد و در آن‌ها حق تقدّم با مقاله‌هایی بود که دربارهٔ هندسهٔ تحلیلی (روی صفحه و در فضا)، هندسهٔ دیفرانسیلی، آنالیز ریاضی و دیگر نظریه‌هایی بود که بر اساس رابطه‌های منطقی «پویا» نوشته شده بود، و این وضع، یعنی تکیه بر موارد «دینامیکی» ریاضیات، سرانجام به کتاب‌های درسی راه یافت. از جمله در کتاب‌های ریاضیدانانی چون بزو (دورهٔ ریاضیات، ۶جلد ۱۷۶۴-۱۷۶۹)، لژاندر (مقدمات هندسه ۱۷۹۴)، لاکروا (مقدمات هندسه ۱۸۰۳)، به خوبی ماهیت این تغییری را که پیش می‌آمد، روشن می‌کند که تا پایان سدهٔ نوزدهم ادامه داشت. برای مثال، کتاب درسی لاکروا، ۲۵ بار چاپ شد و آخرین بار در سال ۱۸۹۷ بود.

به بستگی ریاضیات نظری که پدید می‌آمد، بامبانی و اصول قبلی دانش ریاضی هم، باید توجه کرد. در این‌جا وضع چنین بود؛ ضمن رشد ساختارهای نظری که در آغاز به صورت «خطی» بود؛ دربارهٔ پایه‌ها و مبانی ریاضیات، موفقیت‌های جدی به‌دست آمد؛ به ویژه اگر ریاضیات نظری عصر جدید را تجزیه و تحلیل کنیم، این مسألهٔ روشن‌تر می‌شود؛ زیرا در این‌جا مبانی ریاضیات نظری باستان و دورهٔ هلنی را کنار گذاشتند، چرا که غنای نظری آن اندک بود، آن را در معرض تردید گذاشتند و به روش قیاسی با دیدی عمیق‌تر نگریستند؛ چرا که در آن کوشش می‌شد یک حکم را با بستگی‌های منطقی ایستا (استاتیک) از حکم‌های دیگر نتیجه بگیرند. ریاضیات جدید، مبانی ریاضیات نظری قبلی را که بر مبنای روش قیاسی بود، گسترش داد. برای برطرف کردن جنبه‌های منطقی حکم‌های نظری نخستین، تلاش آغاز شد؛ زیرا این حکم‌ها بر ساختارهای نظری قبلی، معنای خود را از دست داده بود. مهم نبود که دربارهٔ کدام روش قیاسی صحبت می‌شود، روش اصل موضوعی با روش تصور ترکیبی (که در «مقدمات» اقلیدس به هم پیوند خورده بودند)، کنار گذاشته شد. از یک طرف «مقدمات» اقلیدس به عنوان نمونه و سرمشق مقلدان باقی مانده بود و از طرف دیگر، احترام بی‌چون و چرا، جای خود را به مقاومت شکاکیون می‌داد. به ویژه این مسأله دربارهٔ مفهوم‌های اساسی ـ آکیوم‌ها و پوستولات‌ها ـ که در مرکز توجه قرار گرفته بود و بررسی انتقادی آن‌ها، از دیدگاه روابط منطقی «پویا» بارورتر به نظر می‌رسید. مرحله‌هایی پیش آمد که نفی هرگونه استدلال قیاسی مربوط به ریاضیات سنّتی، به عنوان یکی از راه‌های برطرف کردن پیچیدگی‌های ساختهٔ ریاضیات نظری باستان، در نظر گرفته شد. «در سده‌های هفدهم و هجدهم، آرمان یونانی اصل موضوعی کردن ریاضیات و استفاده از استدلال قیاسی خالص، اثر خود را از دست داد؛ اگرچه هندسهٔ قدیم به پیشرفت و شکوفایی خود ادامه می‌داد» [ر. کورانت، در ریاضیات چیست؟].

نخستین تلاش‌های ناموفق، برای «اصلاح» و تحلیل دستگاه آکیوم‌ها و پوستولات‌های اقلیدس، کمبودهای «مقدمات» را روشن کرد. فقدان مفهوم‌های پیوستگی و بستگی‌های تابعی اقلیدس، هرجا که به پیوستگی و برابری شکل‌های هندسی برمی‌خورد، به شهود رو می‌آورد. ریاضیات جدید می‌کوشد تا این کمبود جدی را از بین ببرد. می‌خواستند پایه‌های ریاضی را چنان تغییر دهند و ساختمان مبانی را به صورتی در آورند، که در آن، روابط منطقی «پویا» منعکس شده باشد؛ از جمله دکارت و لایب‌نیتس کوشیدند، در ساختمان هندسهٔ مقدماتی اقلیدس، اصلاح‌هایی به عمل آورند. این اصلاح‌ها، بیش‌تر در جاهایی بود که روشی غیر دینامیکی (ایستا) به چشم می‌خورد. بذر شکی که آن‌ها کاشتند، خیلی زود به ثمر نشست. تردید نسبت به روش اقلیدسی «قیاس کامل» رشد کرد و حتی در کتاب‌های علمی و آموزشی هم رسوخ کرد.

سفارش برنامه‌ای دالامبر، در این‌باره، اثر زیادی داشت. او پیشنهاد کرد، از اصل موضوعی کردن به شیوهٔ

قدیم صرف نظر شود؛ چرا که به اندازهٔ کافی روشن نیست و نمی‌تواند مسأله‌های ساختمان ریاضیات نظری تازه را منعکس کند. دالامبر (درانسیکلوپدی و در مقالهٔ «پیدایش و تکامل دانش» نوشت: من... به هیچ وجه قصد ندارم استفاده از اصل موضوع‌ها را بی‌هیچ شرطی محکوم کنم؛ تنها می‌خواهم نشان دهم این اصل موضوع‌ها به کجا منجر می‌شوند؛ به ویژه که برای ما عادی شده‌اند، در آن‌ها مهارت پیدا کرده‌ایم و برای حالت‌های مختلف قابل دسترسی‌اند». ولی اصل موضوع‌های اقلیدس، تصوری دربارهٔ «اندیشهٔ ساده» پویا و دینامیک نمی‌دهند؛ اندیشه‌هایی که به فراوانی در ریاضیات جدید وجود دارند. بنابراین «روش اصل موضوعی را باید در جهتی تغییر داد که گزاره‌های کم‌تر روشن، روشن‌تر شوند؛ بدون این که از قبل سیاهه‌ای برای آکیوم‌ها و پوستولاها بدهیم و در ضمن، امکان استفاده از حرکت و آموزش مربوط به بی‌نهایت کوچک‌ها را داشته باشیم.» [پی. آ. به لی؛ آموزش لئوناراویلر دربارهٔ هندسهٔ مقدماتی، بررسی‌های تاریخی ـ ریاضی، جلد ۱۴ سال ۱۹۶۱]؛ یعنی از امکان‌های دینامیکی ریاضیات استفاده کنیم. کتاب‌های درسی بزو، لژاندرو لاکروا، در عمل، سفارش دالامبر را به کار بستند. برای مثال، لاکروا، در بسط و گسترش «مقدمات هندسه» (۱۸۰۳)، از ذکر مبانی اولّیه، در آغاز کتاب خودداری می‌کند. او می‌گوید: «چه فایده دارد که انبوهی از اصل موضوع‌ها را در آغاز کتاب بیاوریم؛ در حالی که ضمن استدلال‌های خود از آن‌ها استفاده نمی‌کنیم.» برخورد منفی با روش قیاسی ایستا، وارد کتاب‌های آموزشی انگلستان، آلمان و روسیه شد و به تدریج از اعتبار سازماندهی ایستایی ریاضیات بر مبنای «مقدمات» کاسته شد.

با وجود این، تلاش‌هایی که در جهت جانشین کردن روش قیاسی دینامیک، به جای روش قیاسی ایستا انجام گرفت، نمی‌توانست با بحران روبه‌رو نشود و چیزی را جانشین وضع موجود کند. خودساختار نظری ریاضیات، از نوع دینامیکی آن، به ویژه نظریه‌های هندسی، از نظر روابط منطقی جدید، در مرحلهٔ اولیهٔ گسترش بودند و هنوز از نمونه‌های مشخصی که سرمشق کار بودند، جدا نشده بودند. الگوریتم‌ها یک جا در مسأله‌های کاربردی جمع بودند، نظریه هنوز از تصورهای «مزاحم» جدا نشده بود و برای هندسه هنوز زبان روش‌های قیاسی جدید فرا نرسیده بود. در زمان دالامبر، کوشش برای ساختن هندسه‌هایی به زبان اصل موضوعی و به هدف بیان علمی موضوع آن، هنوز خصلت گذشته را داشت. در واقع، دقت منطقی که در این امر لازم بود، در تحلیل نهایی منجر به خیال خام می‌شد و نمی‌توانست انتقاد را تحمل کند، [و. ف. کاگان، دربارهٔ هندسهٔ مقدماتی در انتهای سدهٔ هجدهم و آغاز سدهٔ نوزدهم، سال ۱۹۴۹].

به این ترتیب، سازماندهی به یاری مفهوم‌های نظری، روندی است که در آغاز تکامل ریاضیات نظری، در هر دو سطح دیده می‌شود. برای ریاضیات عصر جدید، این سازماندهی تا درون بغرنج‌ترین موفقیت‌های ریاضیات نظری نفوذ می‌کند و تا عمق مبانی آن گسترش می‌یابد، در همهٔ نوشته‌های ریاضی اشاعه می‌یابد، علاقهٔ پژوهشگران را به خود جلب می‌کند. همین سازماندهی این امکان را دارد که رابطه‌های منطقی را هم به‌وجود آورد. خود سازماندهی «کلیدی» برای گشایش این رابطه‌هاست؛ برای ریاضیات نظری سنّتی، یعنی رابطه‌های نظری ایستا (شباهت، برابری و تشابه و برای ریاضیات نظری عصر جدید، یعنی ریاضیات در سطح دوم ـ ریاضیات نظری پویا (عمل‌های دیفرانسیل گیری و انتگرال گیری، استفاده از مفهوم رابطهٔ تابعی) ـ ساختارهای ریاضی، روابط منطقی را در خود جمع می‌کنند و تحت تأثیر آن‌ها، حوزهٔ عینی ـ عملی خود را آماده می‌کنند؛ به ویژه برای ریاضیات نظری عصر جدید، در تمامی سدهٔ هجدهم ـ بدون تغییر جدی ـ چهرهٔ تکامل دوران فرما، دکارت، نیوتن و لایب‌نیتس ادامه می‌یابد. ولی در جریانی چنین آرام برای تکامل ساختارهای نظری، همیشه از جانب خطری طبیعی و غیر قابل دفاع تهدید می‌شود؛ بحران ناشی از درک ساده‌لوحانهٔ روابط نظری.

(ادامه دارد)

زیرنویس

۱. درک روش شناختی دانش را نمی‌توان بامعیار فعالیت پژوهشی به دست آورد و به دانشمند برای رسیدن به هدف، وسیله و امکان واحدی را تحمیل کرد. از جمله لورنتس (Lorengen) معتقد است که دراین باره، تنها می‌توان گفت و گو کرد و بین دانشمندان روش شناس باید بحث را به‌وجود آورد. کروکر (Kruger) هم همین نظر را دارد و یادآوری می‌کند که برای روش‌شناسی؛ از توضیح و پیشرفت‌های بررسی‌های علمی کاری ساخته نیست و تنها می‌توان دربارهٔ آن گفت‌وگو کرد.

۲. از جمله م. شال؛ هندسه‌دان مشهور و مورّخ ریاضیات پایان سدهٔ نوزدهم، همین عقیده را داشت.

برای دانش‌آموزان سال سوم

برد تابع

احمد قندهاری

در تابع با ضابطهٔ $y = f(x)$ ، مجموعهٔ مقادیر y را که در اثر تأثیر تابع f روی xهای مجموعهٔ دامنهٔ تابع حاصل می‌شود، بُرد تابع می‌گویند. برای تعیین برد تابع تا آن‌جا که مقدور باشد، از روش‌های زیر می‌توان بهره گرفت.

۱. تشکیل جدول تغییرات تابع

جدول تغییرات تابع را تشکیل می‌دهیم، سطر سوم جدول تغییرات هر تابع، تغییرات برد تابع را نشان می‌دهد.

مثال. برد تابع با ضابطهٔ $y = x^2 - 5x - 7$ را بیابید.

حل:

$$y'_x = 2x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
y'_x		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		$-\frac{53}{4}$		$+\infty$

برد تابع $R_f = \left[-\frac{53}{4}, +\infty\right)$

۲. محاسبهٔ x از معادلهٔ تابع

از معادلهٔ تابع، x را محاسبه می‌کنیم. سپس محدودهٔ y را چنان تعیین می‌کنیم تا x وجود داشته باشد.

مثال. برد تابع با ضابطهٔ $y = \frac{2x+1}{x^2+2x+3}$ را بیابید.

حل: $y = \frac{2x+1}{x^2+2x+3} \Rightarrow yx^2 + 2yx + 3y = 2x + 1$

$$\Rightarrow yx^2 + 2(y-1)x + (3y-1) = 0$$

$$a = y \;,\; b' = y - 1 \;,\; c = 3y - 1$$

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a} = \frac{1 - y \pm \sqrt{(y-1)^2 - y(3y-1)}}{y}$$

$$= \frac{1 - y \pm \sqrt{-2y^2 - y + 1}}{y}$$

برای این که x وجود داشته باشد، باید:

$$-2y^2 - y + 1 \geq 0$$

$$-2y^2 - y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1 , \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -1 \leq y \leq \frac{1}{2} \;,\; y \neq 0$$

برد تابع $R_f = \left[-1 , \frac{1}{2}\right] - \{0\}$

۳. استفاده از اتحاد $x^{2n} \pm kx^n = (x^n \pm \frac{k}{2})^2 - \frac{k^2}{4}$

به کمک اتحاد بالا، می‌توان بُرد بسیاری از تابع‌ها را به‌دست آورد.

مثال. برد تابع با ضابطهٔ $y = x^{۶} - ۵x^{۳} + ۳$ را بیابید.

حل:

$$y = x^{۶} - ۵x^{۳} - ۳ = (x^{۳} - \frac{۵}{۲})^{۲} - \frac{۲۵}{۴} + ۳$$

$$y = (x^{۳} - \frac{۵}{۲})^{۲} - \frac{۱۳}{۴}$$

کم‌ترین مقدار $(x^{۳} - \frac{۵}{۲})^{۲}$، صفر و بیش‌ترین مقدار آن به سمت $+\infty$ میل می‌کند؛ پس برد تابع $y \geq -\frac{۱۳}{۴}$ بنابراین:

$$R_f = \left[-\frac{۱۳}{۴}\ ,\ +\infty\right)$$

۴. استفاده از صورت ظاهری تابع

در بعضی از تابع‌ها، با استفاده از صورت ظاهری تابع، می‌توان برد تابع را محاسبه کرد.

مثال. برد تابع با ضابطهٔ $y = \sqrt{x^{۲} - ۱} + \sqrt{x^{۲} - ۵x + ۶} + ۳$ را بیابید.

حل: حاصل هر رادیکال با فرجهٔ زوج، مثبت یا صفر است. اگر کمی دقت کنیم، به ازای $x = ۱$ هر دو رادیکال صفر می‌شود و $y = ۳$ و وقتی $x \to \pm\infty$، آن‌گاه $y \to +\infty$؛ پس برد تابع $y \geq ۳$ یا $[۳\ ,\ +\infty)$ است.

۵. استفاده از مشتق و دامنهٔ تابع

در بعضی از تابع‌ها، به کمک مشتق و دامنهٔ تابع، برد تابع به دست می‌آید.

مثال. برد تابع با ضابطهٔ $y = \sqrt{x + \sqrt{۴x - ۱}}$ را بیابید.

حل: تابع صعودی اکید است $\Leftarrow$ $y'_x = \dfrac{۱ + \dfrac{۴}{۲\sqrt{۴x - ۱}}}{۲\sqrt{x + \sqrt{۴x - ۱}}} > ۰$

حال دامنهٔ تابع را محاسبه می‌کنیم.

$$۴x - ۱ \geq ۰ \Rightarrow x \geq \frac{۱}{۴} \Rightarrow D_f = \left[\frac{۱}{۴}\ ,\ +\infty\right)$$

$$x = \frac{۱}{۴} \Rightarrow y = \frac{۱}{۲}\ ,\ x \to +\infty \Rightarrow y \to +\infty$$

برد تابع $R_f = \left[\frac{۱}{۲}\ ,\ +\infty\right)$

۶. تغییر متغیر مثلثاتی

به کمک تغییر متغیر مثلثاتی، برد بعضی از تابع‌ها به‌دست می‌آید.

مثال. برد تابع با ضابطهٔ $y = ۲x\sqrt{۱ - x^{۲}} + ۷$ را بیابید.

حل: $۱ - x^{۲} \geq ۰ \Rightarrow x^{۲} \leq ۱ \Rightarrow -۱ \leq x \leq ۱$

حق داریم در این مثال، با توجه به تغییرات x، x را مساوی sint فرض کنیم.

$$x = \sin t\ \ ,\ \ -\frac{\pi}{۲} \leq t \leq \frac{\pi}{۲}$$

$$y = ۲\sin t\sqrt{۱ - \sin^{۲} t} + ۷ \Rightarrow y = ۲\sin t\sqrt{\cos^{۲} t} + ۷,$$
$$-\frac{\pi}{۲} \leq x \leq \frac{\pi}{۲}$$

$$y = ۲\sin t \cos t + ۷ \Rightarrow y = \sin ۲t + ۷$$

برد تابع:

$$\text{Max}(\sin ۲t) = ۱\ ,\ \text{Min}(\sin ۲t) = -۱ \Rightarrow ۶ \leq y \leq ۸$$

۷. تعیین برد تابع به کمک ماکزیمم و می‌نیمم عبارت‌های مثلثاتی

الف. برای تعیین ماکزیمم و می‌نیمم تابع‌های با ضابطه‌های $y_۱ = a\sin^{۲} x + b\sin x + c$ و

$y_2 = a\cos^2 x + b\cos x + c$ باید به جای sinx و cosx، اعداد ۱ و ۱- و $(-\frac{b}{2a})$ را قرار دهیم؛ به شرطی که $-1 \le -\frac{b}{2a} \le 1$.

ب. $\frac{1}{2^{n-1}} \le \sin x^{2n} + \cos x^{2n} \le 1$ ، $n \in N$

ج. $-\sqrt{a^2+b^2} \le a\sin x + b\cos x \le \sqrt{a^2+b^2}$

د. $\tan x + \cot x \ge 2$ یا $\tan x + \cot x \le -2$

مثال. برد تابع با ضابطهٔ $y = 3\sin^2 x - 4\sin x + 2$ را بیابید.

حل.
$\sin x = 1 \Rightarrow y = 3 - 4 + 2 = 1$

$\sin x = -1 \Rightarrow y = 3 + 4 + 2 = 9$

$\sin x = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow y = 3(\frac{4}{9}) - 4(\frac{2}{3}) + 2 \Rightarrow y = \frac{2}{3}$

پس برد تابع: $\frac{2}{3} \le y \le 9$

توجه: باز هم موارد دیگری برای تعیین برد تابع وجود دارد که در این مقاله، مجال پرداختن به آن‌ها نیست.

آزمون۱. برد تابع با ضابطهٔ $y = x - \sqrt{x-2} - 1$ کدام است؟

۱) $y \ge 0$ ۲) $y \ge 2$ ۳) $y \ge 3$ ۴) $y \ge \frac{3}{4}$

حل: گزینهٔ ۴ صحیح است.

$y = (x-2) - \sqrt{x-2} + 1 = (\sqrt{x+2} - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Min}(\sqrt{x+2} - \frac{1}{2})^2 = 0 \Rightarrow \mathrm{Min}(y) = \frac{3}{4} \\ x \to +\infty \Rightarrow y \to +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow y \ge \frac{3}{4}$$

آزمون۲. برد تابع با ضابطهٔ $y = x^3 + x$ کدام است؟

۱) $y \ge 0$ ۲) $\mathbb{R} - \{0\}$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) $y \le 0$

حل: گزینهٔ ۳ صحیح است.

$y' = 3x^2 + 1 > 0 \Rightarrow$ تابع صعودی اکید است

$D_f = (-\infty, +\infty)$

$$\left.\begin{array}{l} x \to -\infty \Rightarrow y \to -\infty \\ x \to +\infty \Rightarrow y \to +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{برد تابع } R_f = \mathbb{R}$$

آزمون۳. برد تابع با ضابطهٔ $y = \frac{x^2+1}{x}$ کدام است؟

۱) $-1 \le y \le 1$ ۲) $y \le -2$ یا $y \ge 2$

۳) $-2 \le y \le 2$ ۴) $R - \{0\}$

حل: گزینهٔ ۲ صحیح است.

$y = \frac{x^2+1}{x} \Rightarrow x^2 - yx + 1 = 0$

$x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2} \quad ; \quad y^2 - 4 \ge 0 \Rightarrow y^2 \ge 4 \Rightarrow \begin{cases} y \ge 2 \\ y \le -2 \end{cases}$

آزمون ۴. برد تابع با ضابطهٔ $y = (x^2 - 8x + 7)^{20} + 2$ کدام است؟

۱) $y \ge 0$ ۲) $y \ge 2$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) $y \ge 3$

حل: گزینهٔ ۲ صحیح است.

$x^2 - 8x + 7 = 0 \Rightarrow x = 1 \ , \ 7$

$x = 1$ یا $x = 7 \Rightarrow \mathrm{Min}(x^2 - 8x + 7)^{20} = 0 \Rightarrow \mathrm{Min}(y) = 2$

$x \to \pm\infty \Rightarrow y \to +\infty \ ; \ y \ge 2$

آزمون ۵. برد تابع با ضابطهٔ $y = (x^2 - 6x + 10)^{74} + 5$ کدام است؟

۱) $y \ge 5$ ۲) $\mathbb{R}$ ۳) $y \ge 6$ ۴) $y \ge 10$

حل: گزینهٔ ۳ صحیح است.

$y_1 = x^2 - 6x + 10 \Rightarrow y_1' = 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$

$x = 3 \Rightarrow y_1 = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Min}(x^2 - 6x + 10)^{74} = 1 \Rightarrow \mathrm{Min}\ y = 6 \\ x \to \pm\infty \Rightarrow y \to +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow y \ge 6$$

آزمون ۶. برد تابع با ضابطهٔ $y = \sqrt{4x - 7 + \sqrt{x-4}}$ کدام است؟

۱) $y \ge 0$ ۲) $y \ge 1$ ۳) $y \ge 2$ ۴) $y \ge 3$

حل: گزینهٔ ۴ صحیح است.

$D_f = [4, +\infty)$ و $y'_x = \dfrac{4 + \frac{1}{2\sqrt{x-4}}}{2\sqrt{4x - 7 + \sqrt{x-4}}} > 0$ و $x > 4$

$x = 4 \Rightarrow y = \sqrt{16-7} = 3$

$x \to +\infty \Rightarrow y \to +\infty \Rightarrow$ برد تابع : $y \ge 3$

آزمون ۷ . برد تابع با ضابطهٔ $y = 1+\sqrt{-x^2+2x}$ کدام است؟

۱) $1 \le y \le 2$ ۲) $0 \le y < 2$

۳) $y \ge 2$ یا $y \le 1$ ۴) $y \ge 2$ یا $y \le 0$

حل: گزینهٔ ۱ صحیح است.

$y-1 = \sqrt{-x^2+2x}\ ,\ y-1 \ge 0 \Rightarrow y \ge 1$ شرط اولیه

$(y-1)^2 = (\sqrt{-x^2+2x})^2 \Rightarrow (y-1)^2 = -x^2+2x$

$\Rightarrow x^2 - 2x + (y-1)^2 = 0$

$x = 1 \pm \sqrt{1-(y-1)^2}\ ,\ 1-(y-1)^2 \ge 0 \Rightarrow (y-1)^2 \le 1$

$$\Rightarrow -1 \le y-1 \le 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 \le y \le 2 \\ y \ge 1 \end{cases} \Rightarrow 1 \le y \le 2$$

آزمون ۸ . برد تابع با ضابطهٔ $y = x + \sqrt{4-x^2}$ کدام است؟

۱) $-2 \le y \le 2$ ۲) $-2\sqrt{2} \le y \le 2\sqrt{2}$

۳) $-2 \le y \le 2\sqrt{2}$ ۴) $-2\sqrt{2} \le y \le 2$

حل: گزینهٔ ۳ صحیح است.

$4-x^2 \ge 0 \Rightarrow x^2 \le 4 \Rightarrow -2 \le x \le 2$

$y-x = \sqrt{4-x^2}, y-x \ge 0 \Rightarrow \begin{cases} y \ge x \\ -2 \le x \le 2 \end{cases} \Rightarrow y \ge -2$ شرط اولیه

$(y-x)^2 = \sqrt{4-x^2} \Rightarrow y^2 + x^2 - 2yx = 4 - x^2$

$\Rightarrow 2x^2 - 2yx + (y^2-4) = 0$

$$x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 2y^2 + 8}}{2}\ ,\ -y^2 + 8 \ge 0 \quad y^2 \le 8$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2\sqrt{2} \le y \le 2\sqrt{2} \\ y \ge -2 \end{cases} \overset{\text{اشتراک}}{\Rightarrow} -2 \le y \le 2\sqrt{2}$$

آزمون ۹ . برد تابع با ضابطهٔ $y = \lfloor \tan x + \cot x \rfloor$ کدام است؟

۱) z ۲) $z-\{\pm 2\}$ ۳) $z-\{\pm 1, 0\}$ ۴) $z-\{0\}$

حل: گزینهٔ ۳ صحیح است.

الف) $\tan x + \cot x \ge 2 \Rightarrow y = 2, 3, 4, \ldots$

ب) $\tan x + \cot x \le -2 \Rightarrow y = -2, -3, -4, \ldots$

برد تابع $R_f = z - \{\pm 1, 0\}$

آزمون ۱۰ . برد تابع با ضابطهٔ $y = 2x\sqrt{9-x^2} + 4$ کدام است؟

۱) $-5 \le y \le 9$ ۲) $-5 \le y \le 5$

۳) $-6 \le y \le 6$ ۴) $-5 \le y \le 13$

حل: گزینهٔ ۴ صحیح است.

$9 - x^2 \ge 0 \Rightarrow x^2 \le 9 \Rightarrow -3 \le x \le 3$

$x = 3\sin t \quad ; \quad -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$

$y = 6\sin t\sqrt{9-9\sin^2 t} + 4 = 6\sin t\sqrt{9\cos^2 t} + 4$

$= 18\sin t\cos t + 4$

$y = 9\sin 2t + 4$ و $-1 \le \sin 2t \le 1 \Rightarrow -5 \le y \le 13$

آزمون ۱۱ . برد تابع با ضابطهٔ زیر کدام است؟

$$y = (x-2)\sqrt{-x^2+4x-3}$$

۱) $-\frac{1}{2} \le y \le \frac{1}{2}$ ۲) $-1 \le y \le 1$

۳) $-\frac{3}{2} \le y \le \frac{3}{2}$ ۴) $-2 \le y \le 2$

حل: گزینهٔ ۱ صحیح است.

$y = (x-2)\sqrt{1-x^2+4x-4} = (x-2)\sqrt{1-(x-2)^2}$

$1-(x-2)^2 \ge 0 \Rightarrow -1 \le (x-2)^2 \le 1$

$x - 2 = \sin t \quad ; \quad -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$

$y = \sin t\sqrt{1-\sin^2 t} = \sin t\sqrt{\cos^2 t} = \sin t\cos t$

$= \frac{1}{2}\sin 2t$

$$\begin{cases} \text{Max}\sin 2t = 1 \\ \text{Min}\sin 2t = -1 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{2} \le y \le \frac{1}{2}$$

آزمون ۱۲ . برد تابع با ضابطهٔ زیر کدام است؟

$$f(x) = \begin{cases} \lfloor 2x \rfloor - 2x & x \notin z \\ -1 & x \in z \end{cases}$$

۱) $[-1 , 1)$　　۲) $[-1 , 0]$

۳) $[-1 , 0)$　　۴) $[-1 , 1]$

حل: گزینهٔ ۲ صحیح است.

$0 \le x - \lfloor x \rfloor < 1 \Rightarrow -1 < \lfloor x \rfloor - x \le 0$ ؛ داریم

$\Rightarrow -1 < \lfloor 2x \rfloor - 2x \le 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \notin z & -1 < y \le 0 \\ x \in z & y = -1 \end{cases} \Rightarrow -1 \le y \le 0$$

آزمون ۱۳. برد تابع با ضابطهٔ $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ، $y = \sin x + \cos x$ کدام است؟

۱) $-1 \le y \le \sqrt{2}$　　۲) $-\sqrt{2} \le y \le \sqrt{2}$

۳) $1 < y \le \sqrt{2}$　　۴) $-1 \le y \le 1$

حل: گزینه ۳ صحیح است.

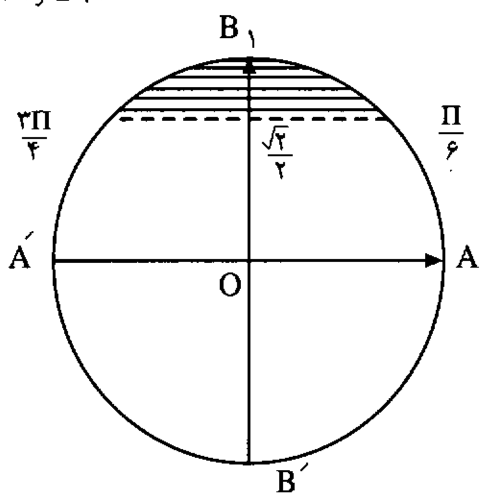
$$y = \sqrt{2}\ \sin(x + \frac{\pi}{4})$$

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} < x + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < \sin(x + \frac{\pi}{4}) \le 1$$

$$\Rightarrow 1 < \sqrt{2}\ \sin(x + \frac{\pi}{4}) \le \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 1 < y \le \sqrt{2}$$



معماهای فـ  ـکری و منطقی

J ، C ، B و S چهار شهروند ثروتمندند که به عنوان معمار، بانکدار، دکتر و وکیل، گرچه نه لزوماً به همین ترتیب، به جامعه خدمت می‌کنند.

B، که محافظه‌کارتر از J، اما لیبرال‌تر از S است، نسبت به افرادی که جوان‌تر از او هستند، گلف‌باز بهتری است و نسبت به افرادی که مسن‌تر از C اند، درآمد بیش‌تری دارد. بانکدار، که بیش از معمار درآمد دارد، نه جوان‌ترین و نه مسن‌ترین افراد جمع است.

معمار از دکتر، که نسبت به وکیل، گلف‌باز ضعیف‌تری است، محافظه‌کارتر است.

همان‌گونه که انتظار می‌رود، مسن‌ترین این افراد، محافظه‌کارترین آنان است و بیش‌ترین درآمد را دارد، و جوان‌ترینشان، بهترین گلف‌باز در میان جمع است.

حرفهٔ هرکس چیست؟

جواب:

۲

بخش دوم و پایانی

گفت‌وگو با استاد احمد قندهاری

شاگردان در همان جلسهٔ اول به ما نمره می‌دهند!

اشاره

استاد احمد قندهاری، معلم، مؤلف و پژوهنده‌ای است که شما خوانندگان عزیز مجله، قسمت اول مصاحبه با ایشان را در شمارهٔ قبل ملاحظه کردید، اینک ادامهٔ مصاحبه را که آقای غلامرضا یاسی‌پور تدوین کرده‌اند و البته اعضای هیأت تحریریه مجله هم در آن شرکت داشته‌اند، در پی می‌آوریم:

❖ **یاسی‌پور: آیا روش فعّال ـ فعّالیت‌محور منظور بوده ـ را در کلاس می‌پذیرید یا نه؟ و اگر می‌پذیرید، چه قدر به‌آن عمل می‌کنید؟ چون یک موقع شما آموزش می‌دهید و زمانی مسأله حل می‌کنید و تمرین می‌دهید؛ خوب این‌ها دو قسمت است. این‌ها جدا از همدیگرند. البته باید تمرین هم باشد؛ چون اصلاً یکی از معانی ریاضی، تمرین است. وقتی عرب‌ها الریاضی می‌نویسند یا ریاضی، یعنی ورزش، و ورزش هم همان تمرین است، یعنی ورزیدن. اصلاً ورزش به معنای تمرین است و خارجی‌ها هم وقتی می‌گویند Exercise، به معنای تمرین است. پس تمرین از آموزش جداست؛ یعنی شما وقتی تمرین می‌دهید، آموزش‌ها و آموخته‌ها را بررسی می‌کنید و روی آن‌ها کار می‌کنید؛ ولی آیا در آموزش شاگردان را دخالت می‌دهید؟**

❂ **استاد قندهاری:** مسلّم است که در تدریس ریاضی، شاگردان دخالت می‌کنند؛ ولی این که در کلاس یک مطلبی را به بحث بگذاریم، در عین حالی که ممکن است درست باشد؛ من این کار را نکرده‌ام. در شرایط فعلی، مثلاً می‌گویم که نظرتان را دربارهٔ این موضوع بگویید یا این مثال را حل کنید. سعی هم می‌کنم مثالی که می‌دهم، جنبهٔ تشویقی داشته باشد؛ به این معنا که یک گوشهٔ آن را راهنمایی می‌کنم که بچه‌ها مقداری تشویق شوند؛ والاّ این که در همهٔ زمینه‌ها این‌ها را دخالت دهم، من فکر می‌کنم حداقل برای من عملی نبوده است.

❖ **یاسی‌پور: بنده این‌طور به نظرم می‌رسد که بیشتر برای انجمن‌ها و کلاس‌های اضافه این مسأله عملی‌تر است.**

سؤال بعدی، سؤال خیلی متعارفی است و من به دنبال پاسخ متفاوتی هستم؛ چون معمولاً وقتی این سؤال را می‌کنند، پاسخ‌ها شبیه هم است. استاد عزیز، اگر بخواهید از نو شغلی را انتخاب کنید، آیا معلمی را برمی‌گزینید؟ و چند ویژگی از شغل معلمی که شما را هم مجذوب کرده، برای ما نام ببرید.

❂ اگر مقدور باشد که من دوباره

هفده، هجده ساله شوم و درس بخوانم، به‌جای رشتهٔ ریاضی، ادبیات را انتخاب می‌کنم. البته ممکن است دلایل مقداری شخصی باشد؛ ولی به هر دلیل، این اعتقاد من است. اما معنایش این نیست که از ریاضی خوشم نمی‌آید و نمی‌خواهم معلم باشم. از شغل معلمی خوشم می‌آید؛ ولی من فکر می‌کنم که مثلاً تدریس حقوق و ادبیات زیبایی‌هایش بیشتر و ملموس‌تر است و به هر دلیل جامعه‌پسندتر. از این طریق بچه‌ها را می‌توان بیشتر جذب و استعدادهایشان را بررسی کرد تا از طریق ریاضی. من معلمی را دوست دارم؛ اما اگر برایم مقدور بود، دوست داشتم که ادبیات بخوانم.

❖ **یاسی‌پور: حمیدی شیرازی، یکی از شاعران معاصر، که در ابتدا معلم دبیرستان البرز هم بود، قصیده‌ای دارد که در انتهایش می‌گوید:**

دو درد بود آن چه مرا پیر کرد و کشت
غوغای عشق بود و بلای معلمی

بعد در ادامه‌اش می‌گوید:

نفرین بر آن کسان که در این جا چو من برند
زجری به این گرانی و اجری بدین کمی

شما که این طور اعتقاد ندارید؟

❂ نه، من اعتقاد ندارم.

❖ **یاسی‌پور: خوب، ویژگی‌هایی که باعث شد تا شما به شغل معلمی جذب شوید، چه بوده است؟ به عبارت دیگر، معلمی چه ویژگی‌هایی دارد که شما را به این شغل علاقه‌مند کرده است؟**

❂ به اعتقاد من، معلمی شغل بسیار زنده‌ای است و شغلی است که می‌تواند در جامعه خیلی اثرگذار باشد. یک معلم منظم، درست و دقیق، واقعاً می‌تواند در آیندهٔ شاگردان اثرگذار باشد. مضافاً این‌که، خیلی از مسائلی که برایم پیش آمده، به‌وسیلهٔ شاگردانم به راحتی رفع شده است. اگر شما رفتار پسندیده‌ای سر کلاس داشته باشید، شاگردان واقعاً از کسانی می‌شوند که پا جا پای شما می‌گذارند و این، نشان‌دهندهٔ رسالت معلمی است. ما بیش از عالِم، به آدم احتیاج داریم. من اعتقادم این است که واقعاً ما آدم خوب می‌خواهیم؛ حالا اگر می‌خواهد مهندس باشد، مهندس خوب باشد. اما اگر آدم خوبی نباشد، می‌شود «چو دزدی با چراغ آید، گزیده‌تر برد کالا».

❖ **یاسی‌پور: کمی از دوران دانشگاه و دبیرستانتان برای ما بفرمایید. کدام معلم در شما خیلی تأثیر داشته است؟ آیا در تدریس، از معلم یا استادی در دانشگاه الگو گرفته‌اید؟**

❂ از دوران ابتدایی که چیز زیادی یادم نیست و معلم اثرگذار هم نداشتم. در دبیرستان هم اگر شما آن سال‌ها یادتان باشد، حتی کتاب درسی هم نبود. من شهرستان ساری درس می‌خواندم و کتاب درسی حدود سه ماه بعد از سال

❂ یک معلم درست و دقیق، واقعاً می‌تواند در آیندهٔ شاگردان اثرگذار باشد.

❂ خیلی از مسائلی که برایم پیش آمده، به‌وسیلهٔ شاگردانم به راحتی رفع شده است.

تحصیلی به دستمان می‌رسید.

❖ یاسی‌پور: ما آن موقع کتاب‌های کهنه می‌خریدیم. معمولاً کتاب‌های سال قبل را استفاده می‌کردیم؛ چون موجود نبود.

❂ علاوه بر این، معلمان معمولاً نسبت به درسشان آگاه نبودند. مثلاً در شهرستان آقایی دبیر ریاضی ما بود که حتی مثال حل شدهٔ کتاب را غلط حل می‌کرد. شاگردان را موظف می‌کرد که هر کدام یک درس جبر را بخوانند و درس بدهند. حالا خودش هم مقداری کمک می‌کرد و بیگانه نبود؛ اما مسلط نبود. شما اگر آن زمان یادتان باشد، سال ششم ریاضی جبر، مثلثات، حساب استدلالی، هندسهٔ ترسیمی، هندسهٔ رقومی، متمم هندسه و مخروطات داشت. هر کدام از ما موظف بودیم یک قسمت را درس بدهیم. در واقع ما هم شاگرد بودیم، هم معلم. معلم هم سرپرستی می‌کرد، کلاس را مثلاً ساکت نگه می‌داشت و احیاناً کمک می‌کرد. این به سال ۳۶ـ۳۷ مربوط می‌شود. البته این را بگویم که من ۵۰ سال است که درس می‌دهم. ۴۳ سال به صورت رسمی، ولی قبل از این که وارد دانشگاه شوم، هزینهٔ خودم را از طریق تدریس تأمین می‌کردم. من معمولاً زمانی که محصل بودم، تا ۹ شب درس می‌دادم. آن موقع هم که می‌دانید مثلاً به یک نفر درس می‌دادیم، ماهی ۳ تومان به ما می‌داد. به هرحال، با این پول زندگی‌ام را اداره می‌کردم.

اما فرمودید کدام استاد اثرگذار بود؟ دکتر منوچهر وصال، در دانشگاه تهران؛ به علت دقتی که در درس آنالیز داشت. مثلاً یک دفعه از ما امتحان گرفت و جمع نمرات ۲۵ نفر شاگرد کلاس ۳۰ شد؛ یعنی اگر جواب سؤال‌ها کامل نبود، صفر می‌داد. از او می‌پرسیدیم استاد چرا صفر می‌دهید؟ می‌گفت من فهمیدم که شما نفهمیدید. این برای من خیلی اهمیت داشت که در این درس دقت لازم را داشته باشم؛ یعنی برایم خیلی تفکر برانگیز می‌شد. به خاطر همین، درس ریاضی برای من پایه و بنیاد شد.

❖ یاسی‌پور: از هم‌شاگردی‌هایتان، غیر از آقای رستمی که حالا این جا حاضرند و در هیأت تحریریه، همکار شما هستند، چه کسانی را به یاد دارید؟

❂ به جز آقای رستمی که از افتخارات ماست و تألیف دایرة‌المعارف هندسه از ایشان، شاید در دنیا بی‌نظیر باشد، آقای دکتر نشوادیان‌بخش، آقای یاسایی که خدا رحمتشان کند، آقای پرویز موسوی که دبیر هندسهٔ فوق‌العاده خوبی است و آقای ابراهیم صادقی که از دبیران فوق‌العاده ممتاز این کشور است. من فکر می‌کنم اکثر کسانی که در کار تدریس باقی مانده‌اند، از دبیران بی‌نظیر و جزو همکلاسی‌های ما هستند. واقعاً باعث افتخار من است که جزو این گروه از همکلاسی‌ها بوده‌ام.

❖ هاشمی موسوی: لطفاً نظر خود را دربارهٔ ریاضیات نظام قدیم و جدید بفرمایید؟

❂ من در مورد سه نظام اسبق، قدیم و جدید تحقیق کرده‌ام. هرچه به عقب‌تر می‌رویم، عمق مطالب بیشتر می‌شود. به اعتقاد من، آنچه که در مسائل ریاضیات اهمیت دارد، وجود مسائل ترکیبی در کتاب است. مسائل ترکیبی باعث می‌شود یک مسأله از چهار، پنج مبحث بگذرد و ارتباط آن‌ها را با هم نشان دهد. این خیلی جالب است، شما اگر مسائل امتحان‌های آموزش اسبق را نگاه کنید، مثلاً در امتحان نهایی به یک مسأله بیست نمره می‌دادند؛ اما آن مسأله، هشت تا سؤال داشت و همه در ارتباط با هم بودند. اصولاً طرح این گونه مسائل کار دشواری است. کار ساده‌ای نیست که شما بتوانید مسأله‌ای را طرح کنید که از ۴۰ مورد درسی، لااقل ۲۵ موردش را پوشش دهد.

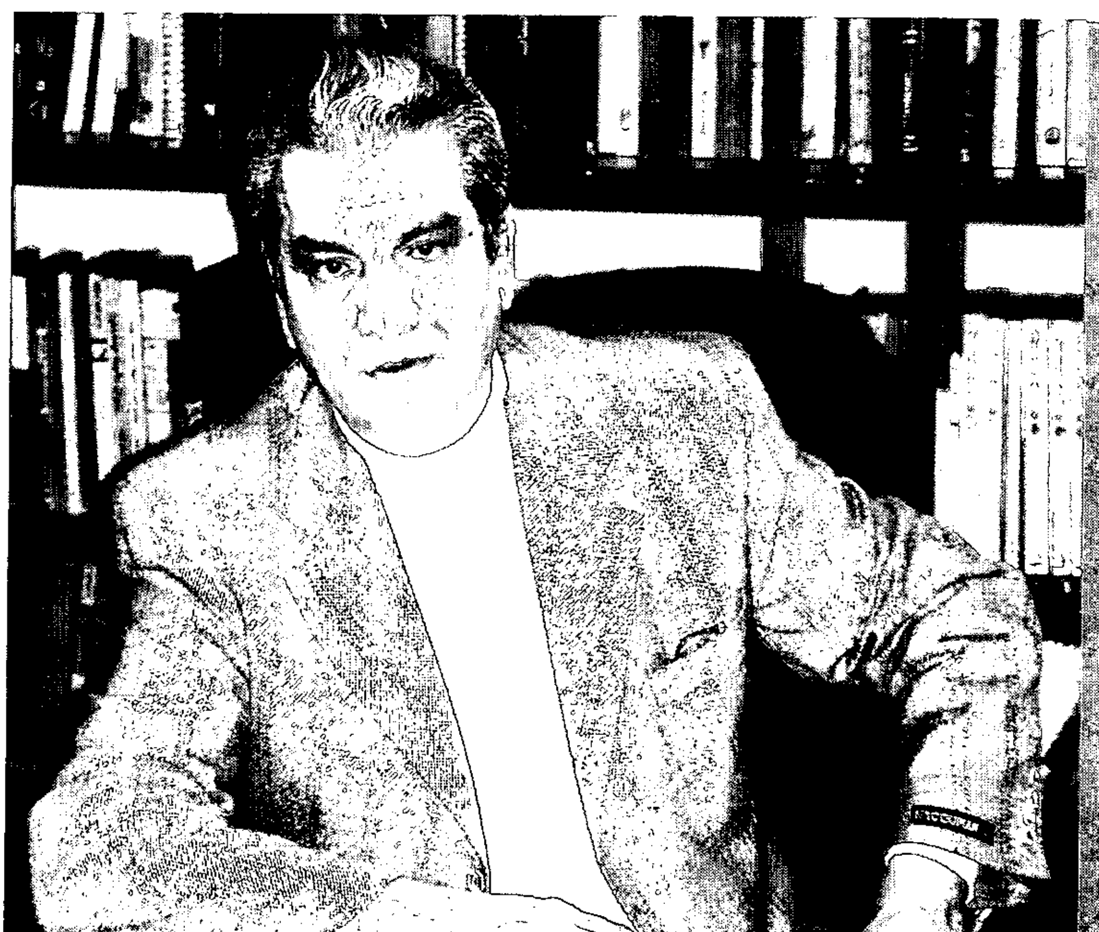
❖ یاسی‌پور: حالا همه جا همین طور شده است؛ چون ما کتاب‌های سابق را

در کشورهای دیگر هم که نگاه می کنیم در همان سابق و اسبق که می فرمایید، همان طور که شما می گویید، این طور بوده است؛ ولی حالا که نگاه می کنیم، این طور نیست. شاید این روش لازم بوده، یعنی به هر حال تجربه ای بود که در همه جا اتفاق افتاده و این تنها مختص ایران نبوده است. این را چه طور توجیه می کنید؟

❂ اولاً مسألهٔ مهمی که مطرح است، این است که، به نظر من در پشت پردهٔ سیاستگذاری آموزش، چیزهای دیگری نهفته است. من معتقدم آنچه که در آموزش و پرورش دنیا صورت می گیرد، ممکن است به صلاح آموزش و پرورش ما نباشد.

❖ **امیری: نکته ای که شما در مورد عمق مطالب اشاره کردید، در کتاب های نظام جدید مشهودتر است؛ یعنی آن مثال معروفی که می گویند یک دریایی به عمق بیست سانتیمتر، واقعاً در حال حاضر در کتاب های ما اتفاق افتاده است.**

❂ من فکر می کنم آموزش ایران مانند زمین کشاورزی است که شما به جای این که نیم متر شخم بزنید و محصول بکارید، پنج سانتیمتر شخم می زنید. محصول می دهد؛ اما حالا این چه قدر ارزش داشته باشد، دیگر آینده نشان می دهد. آنچه که مسلّم است، این که در ایران سرمایه گذاری آموزشی بسیار کم صورت می گیرد.



به اعتقاد من، آن‌چه که در مسائل ریاضیات اهمیت دارد، وجود مسائل ترکیبی در کتاب است. مسائل ترکیبی باعث می‌شود که یک مسأله از چهار، پنج مبحث بگذرد و ارتباط آن‌ها را با هم نشان دهد

❖ هاشمی موسوی: ریاضیات در ایران و کشورهای دیگر را چگونه مقایسه می‌کنید؟

کلاً وقتی شما آموزش ریاضی را مقایسه می‌کنید، آموزش به چند عامل تقسیم می‌شود؛ اگر منظور عامل انسانی، یعنی معلم باشد، من معتقدم که ایران به دلایلی ـ حالا این دلایل شاید خارج از بحث ما باشد ـ معلمان ما کارآمدی بالایی دارند. حالا به هر دلیلی که باشد (اقتصادی، شخصیتی یا اجتماعی) معلمان ما واردترند. آموزش ما به نتیجهٔ مطلوب نرسیده است و این خود به عوامل دیگر آموزشی مربوط می‌شود. آن چیزی که مسلّم است، در کشورهای دیگر هم مدارس خصوصی وجود دارد؛ به‌خصوص در امریکا، که یک دیپلمه در آنجا، به اندازهٔ لیسانسیه بعضی از دانشکده‌های ایران بضاعت علمی دارد و آن‌جا دانشگاه‌هایی هم داریم که لیسانسیه‌اش به اندازهٔ دیپلم ما هم بضاعت علمی ندارد.

در آن‌جا امکانات خیلی بیشتر است. من به یک مدرسهٔ ابتدایی برخورد کردم که یک اتاق پر از چوب داشت که بچه‌ها می‌توانستند با آن‌ها مثلث‌های مختلف را بسازند و عمود منصف و ارتفاعش را رسم کنند. آزمایشگاه‌هایشان خیلی مجهز است. به آموزش بها می‌دهند و مشاوره‌های خوبی هم دارند.

❖ هاشمی موسوی: پیشنهاد شما به معلمان به‌عنوان یک معلم موفق چیست؟

من معتقدم که هر معلمی باید نکاتی را به‌عنوان اصول رعایت کند. اولین آن‌ها، صداقت و نظم در کار است. بعد ملایمت در بیان مطالب جدید و سپس مقدمه‌چینی در بیان آن‌هاست؛ یعنی من معتقدم در کار تدریس، شتابزدگی اصلاً جایگاهی ندارد. حتماً باید مثال بزنیم و توضیح دهیم و اصلاً نباید عجله کنیم. حتماً به بچه‌ها وقت بدهیم که اگر می‌خواهند بنویسند، بنویسند. حتماً باید به شاگردان اجازه دهیم که هر سؤالی دارند، بکنند. باید ترسشان بریزد.

❖ **یاسی‌پور: من یاد صحبت آقای استاد شهریاری افتادم که ایشان از قول یکی از بچه‌ها نقل کرد که به من گفت، آقا شما معلمان آخر سال به ما نمره می‌دهید؛ ولی ما شاگردان همان جلسهٔ اول به شما نمره می‌دهیم. این صحبتی که فرمودید، باید ابتدا کاری کرد که با شاگردان رفیق باشیم و در واقع نمرهٔ بیست را از آنان احراز کنیم. شما اعتقادتان همین است؟**

همین‌طور است. بچه‌ها همان جلسهٔ اول نمره را می‌دهند.

❖ **یاسی‌پور: این جا یک نکته وجود دارد و آن هم پیش‌داوری دانش‌آموزان نسبت به معلمان معروف است. خود این هم نکته‌ای است. مثلاً شما یک معلم معروفی هستید. بالأخره وقتی بچه‌ها بشنوند که آقای قندهاری می‌خواهد سر کلاس بیاید، ولو این که شما و تدریستان را ندیده باشند، به‌هر حال یک پیش‌داوری دارند. این پیش‌داوری چه قدر در این ارزش‌گذاری تأثیر دارد؟**

به اعتقاد من خیلی مؤثر است. شما اگر در این زمینه فرد معروفی باشید، مسأله را هم که غلط حل کنید، مثلاً شاگرد می‌گوید من نمی‌فهمم، این معلم که مسأله را غلط حل نمی‌کند. واقعاً این تصور بین شاگردان هست. به اعتقاد من این فاکتور مثبت برای معلمان معروف وجود دارد.

❖ **هاشمی: رابطهٔ بین دانش‌آموز و معلم باید چگونه باشد که آن تا پایان سال تحصیلی حفظ شود؟**

من معتقدم که به سنّ معلم هم بستگی دارد. مثلاً آقای شرقی الآن نمی‌تواند بگوید که شاگردان، بچه‌های من هستند. این جور درنمی‌آید که مثلاً دانش‌آموزی که الآن پیش‌دانشگاهی است، بچهٔ ایشان باشد. باید برادرانه و به‌عنوان یک دوست با او رفتار کند. اما من الآن مثل یک پدربزرگ رفتار می‌کنم.

۞ پیامبر اکرم صلوات‌الله علیه نمی‌فرماید من به پیغمبری مبعوث شدم، می‌فرماید من به معلمی مبعوث شدم و این خیلی مهم است.

❖ یاس‌پور: خوب این نکتهٔ بسیار مهمی است که دانش‌آموزان احساس ضعف و شکست نکنند؛ زیرا اگر دانش‌آموزی احساس شکست کند، دیگر سخت است که به تحصیلش ادامه دهد. جلال‌الدّین همایی، از استادان معاصر دانشگاه تهران، قطعه‌ای دارد که در واقع باید سرمشق آموزش هر معلم باشد. در آن قطعه می‌گوید:

تند و سرکش چو باد قهر مباش
که به شاخ جوان شکست‌دهی

باید مواظب باشی که شاخ جوان را نشکنی. نباید مانند باد قهر عمل کنی. باید خیلی ملایم باشی؛ چون به هرحال اگر با شاخ جوان تندی کنیم، می‌شکند و دیگر نمی‌تواند از جا بلند شود، و این نکتهٔ بسیار مهمی است.

۞ این مهم است که معلم درس را در آن سطحی که مورد نیاز شاگرد است، پایین بیاورد. پرگویی و گنده‌گویی کردن سر کلاس، آفت کار معلم است.

❖ یاسی‌پور: کاملاً همان روش انبیاست و می‌گویند: «کلّموا الناس علی قَدْرِ عقُولهم». انبیا هم ادعایشان این است که ما معلم هستیم؛ انّما بُعثتُ مُعَلّماً؛ پیغمبر اکرم صلوات‌اللّه علیه، نمی‌فرماید من به پیغمبری مبعوث شدم، می‌فرماید من به معلمی مبعوث شدم و این خیلی مهم است. برانگیخته شدن هم به خاطر معلمی بوده، نه پیامبری. در واقع پیامبری را یک نوع معلمی می‌داند و در واقع همان انتقال است. پیامبر یعنی منتقل کننده و دهندهٔ پیغام.

❖ امیری: استاد کمی در مورد کتاب‌های خودتان و این که چه اوقاتی را صرف نوشتن آن‌ها می‌کنید و تاکنون چند جلد کتاب از شما چاپ شده و اگر آماری از شمارگان آن‌ها دارید، بفرمایید.

۞ من معمولاً غیر از وقت‌های شام و ناهار، بقیهٔ اوقاتم را در دفتر کارم هستم. تقریباً روزی ۱۲ ساعت را می‌نویسم و شتابزده هم نمی‌نویسم. سعی می‌کنم در نوشته‌هایم آن‌چه را بیاورم که سر کلاس بیان می‌کنم. اول فکر می‌کنم که می‌خواهم چه بکنم و یک چارت و نقشهٔ کلی برایش می‌کشم. این نقشه را به چند قسمت تقسیم می‌کنم، بعد هر قسمت را ریز می‌کنم و سپس نوشتن را شروع می‌کنم. تعداد کتاب‌های چاپ شده‌ام ۳۸ عنوان است. شش، هفت عنوان هم زیر چاپ دارم. فکر می‌کنم شمارگان آن‌ها هم بالای یک میلیون باشد.

❖ امیری: لطفاً بفرمایید اولین کتاب شما در چه سالی چاپ شد و در آن هنگام، چه احساسی داشتید؟ وبعد از چاپ آخرین کتابتان چه احساسی داشتید؟

۞ اولین کتابی که چاپ کردم، نامش الان یادم نیست؛ ولی سال ۵۳ بود. البته خوشحال شدم. بعد از این که این کتاب را دیدم، رفتم سر کلاس و خیلی از مسائلش را غلط حل کردم؛ چون بسیار هیجان‌زده بودم. بچه‌ها هم از من می‌پرسیدند: آقا امروز چه شده که مرتب اشتباه می‌کنید؟

❖ صدر: چه انگیزه‌ای باعث شد که بنویسید؟

۞ آنچه که مسلّم است، این است که آدم معمولاً اول رفتارهایش را انجام می‌دهد، سپس به دنبال این می‌رود که چرا من این کار را کردم. بسیاری از شاعران شعر می‌گویند و شما تحلیل می‌کنید، و وقتی از شاعر می‌پرسید، می‌بینید شاعر اصلاً قصدش آن نبوده است. شخصی به نام آقای پاشایی هست که داستان‌های عرفانی ـ علمی ترجمه می‌کند. یک جلد از تاریخ **ویل دورانت** را هم او ترجمه کرده، اما ایشان مفسر شعر است. شما می‌دانید در دنیا **ژرژ پمپیدو** در فرانسه مفسر شعر است و در ایران **آقای پاشایی**. او با آقای **احمد شاملو** نزدیکی و صمیمیت داشت و هر دو هم با من ارتباط نزدیک داشتند. یادم هست یک روز من و

آقایان احمد شاملو و پاشایی در خانهٔ آقای پاشایی نشسته بودیم. آقای شاملو شعری به نام **طاق طاقی های آبی** دارد. آقای پاشایی این شعر را تحلیل کرد. آقای شاملو گفت: این طور نیست؛ اما آقای پاشایی گفت: آقای شاملو تو خودت هم این را نمی‌دانی، و شاملو قبول کرد. من منظورم این است که ما وقتی کاری می‌کنیم، ممکن است روز اول دلایلش برای خودمان روشن نباشد و بعدها معلوم شود. این که فرمودند چه انگیزه‌ای باعث شد من بنویسم، برای خودم روز اول خیلی روشن نبود؛ اما الان می‌توانم توضیح بدهم که چه انگیزه‌ای باعث شد. من تازه از امریکا بازگشته بودم که انقلاب شده بود و بیکار بودم. در خانه نشستم و یک سال طول کشید که دومین کتاب را نوشتم که نامش جبر و آنالیز بود.

❖ **هاشمی موسوی: معیارهای تدریس موفق چیست؟**

۞ فهرست‌وار می‌گویم: نظم، بضاعت علمی، آرام بیان کردن مطلب و شروع مطلب از چیزهایی که دانش‌آموز می‌داند و همچنین متانت، رفاقت، صمیمیت و صداقت معلم. این مجموعه به نظر من باعث می‌شود که یک معلم، آدم موفقی باشد.

❖ **یاسی‌پور: آخرین سؤال این که نظر شما دربارهٔ کتاب‌های درسی نظام جدید چیست؟**

۞ کتاب‌های نظام جدید را کسانی نوشته‌اند که حداقل می‌توانم بگویم بعضی از آن‌ها نویسندهٔ کتاب نیستند. ممکن است مؤلف استاد دانشگاه باشد؛ اما نتواند بنویسد. به اعتقاد من، محقق، مؤلف و معلم، سه مقولهٔ جدا از هم هستند. تألیفات امروزه، در این مرحله، ترجمه‌های بد و انتخاب‌های درهم هستند.

❖ **یاسی‌پور: با تشکر از شما و سایر دوستان، که در این گفت‌وگو شرکت کرده‌اند.**

۲

حمیدرضا امیری

احتمال شرطی، پیشامدهای مستقل و وابسته

برای
دانش آموزان
دوره پیش دانشگاهی

اشاره: در شماره قبل دربارهٔ مقدمات و مفاهیم اولیه احتمال مانند پدیده تصادفی، فضای نمونه‌ای و پیشامد تصادفی بحث کردیم، همچنین پیشامد $A \cap B$ یعنی رخداد توأم A و B را بررسی کردیم. اکنون پیش از ادامهٔ بحث احتمال شرطی، به حل سه تمرین طرح شده در پایان قسمت اول می‌پردازیم:

حل تمرین ۱: الف. سه تاس را ریخته‌ایم می‌خواهیم احتمال آن را حساب کنیم که هر سه اول باشند؛ به شرط آن‌که بدانیم مجموعشان از ۹ کمتر است، پس پیشامدی که رخ داده، یعنی مجموع کمتر از ۹ را B فرض می‌کنیم و پیشامد این را که هر سه اول باشند، A در نظر می‌گیریم و با استفاده از رابطهٔ زیر احتمال را محاسبه می‌کنیم:

برای محاسبهٔ تعداد حالت‌های این که مجموع سه تاس کمتر از ۹ باشد، از جدول زیر استفاده می‌کنیم:

$$p(A / B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

اعداد تاس‌ها	تعداد حالت‌ها
۱ و ۱ و ۱	۱
۱ و ۲ و ۱	۳
۱ و ۲ و ۲	۳
۲ و ۲ و ۲ *	۱
۳ و ۲ و ۱	۶
۳ و ۴ و ۱	۶
۱ و ۳ و ۳	۳
۲ و ۳ و ۳ *	۳
۳ و ۲ و ۲ *	۳
۴ و ۱ و ۱	۳
۵ و ۱ و ۱	۳
۶ و ۱ و ۱	۳
۱ و ۲ و ۴	۶
۱ و ۲ و ۵	۶
	۵۰

برای محاسبهٔ تعداد اعضای پیشامد A مجموعهٔ $A_1 = \{۲,۳,۵\}$ را در نظر گرفته و در این صورت $A = A_1 \times A_1 \times A_1$ خواهد بود که $n(A) = ۳^۳ = ۲۷$ ؛ امّا فقط حالت‌هایی که در جدول در کنار آنها * قرار گرفته، $(A \cap B)$ تشکیل می‌دهند؛ پس $n(A \cap B) = ۱ + ۳ + ۳ = ۷$ ، بنابراین:

$$p(A / B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{۷}{۵۰}$$

ب. در این قسمت می‌خواهیم احتمال هر سه فرد را حساب کنیم؛ به شرط این که بدانیم مجموعشان ۷ است؛ پس مجموع ۷ را پیشامد B در نظر می‌گیریم که رخ داده است و هر سه فرد را پیشامد A فرض می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} ۱,۱,۵ \to ۳ \\ ۲,۱,۴ \to ۶ \\ ۳,۲,۲ \to ۳ \\ ۳,۳,۱ \to ۳ \end{array}\right. \Rightarrow n(B) = ۱۵$$

جمع حالت‌ها = ۱۵

در بین این ۱۵ حالت، فقط ۶ حالت وجود دارد که هر سه تاس فرد هستند (سه حالت برای [۱,۱,۵] و سه حالت برای [۳,۳,۱]، پس $n(A \cap B) = ۶$ ؛

بنابراین: $p(A / B) = \frac{۶}{۱۵}$

حل تمرین ۲ : الف. در پرتاب سه سکه می‌خواهیم احتمال آن را حساب کنیم که هر سه H بیایند؛ به شرط آن‌که بدانیم حداقل یکی از آنها H است.

B = حداقل یکی از سکه‌ها H است

A = هر سه سکه H بیاید

$B' =$ هر سه سکه T است $\Rightarrow n(B') = ۱ \Rightarrow n(B) = ۲^۳ - ۱ = ۷$

$$(A \cap B) = \{(H,H,H)\} \Rightarrow n(A \cap B) = ۱ \Rightarrow p(A / B) = \frac{۱}{۷}$$

ب. در این حالت می‌خواهیم احتمال آن را محاسبه کنیم که دو سکه T بیاید به شرط آن‌که بدانیم حداکثر دو سکه H است.

(هر سه سکه H است = B') حداکثر دو سکه H است = B

A = دو سکه T بیاید

$$B = \left\{\begin{array}{l}(T,T,T),(T,H,T),(H,T,T),(T,T,H), \\ (H,H,T),(H,T,H),(T,H,H)\end{array}\right\}$$

$$A = \{(T,T,H),(T,H,T),(H,T,T)\}$$

$$n(A \cap B) = ۳,\ \ n(B) = ۷ \Rightarrow p(A / B) = \frac{۳}{۷}$$

حل تمرین ۳ : الف. طبق فرض در جعبه ۴ مهره آبی، ۵ مهره قرمز و ۳ مهره سبز قرار دارد و سه مهره را تصادفی خارج کرده‌ایم و می‌خواهیم احتمال آن را حساب کنیم که هر سه آبی باشند؛ به شرط آن‌که بدانیم هر سه همرنگ هستند.

B = هر سه مهره همرنگ هستند

A = هر سه مهره آبی باشند

$$n(B) = \binom{۴}{۳} + \binom{۵}{۳} + \binom{۳}{۳} = ۱۶$$

$$A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A \Rightarrow n(A \cap B) = n(A) = \binom{۴}{۳} = ۴$$

$$\Rightarrow p(A / B) = \frac{۴}{۱۶} = \frac{۱}{۴}$$

ب. در این حالت می‌خواهیم احتمال آن را محاسبه کنیم که ۲ مهره آبی و ۱ مهره سبز باشد؛ به شرطی که بدانیم هیچ‌کدام قرمز نیستند.

B = هیچ‌کدام از سه مهره قرمز نیستند

A = ۲ مهره آبی و ۱ مهره سبز باشد

$$n(B) = \binom{۳+۴}{۳} = \binom{۷}{۳} = ۳۵,\ \ A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$$

$$\Rightarrow n(A \cap B) = n(A) = \binom{۴}{۲} \times \binom{۳}{۱} = ۱۸ \Rightarrow p(A / B) = \frac{۱۸}{۳۵}$$

حال به بحث اصلی خودمان بازمی‌گردیم و برای شروع، مثال معروفی را طرح می‌کنیم که غالباً برداشت دیگری از آن شده و غلط تفسیر می‌شود.

مثال. دو تاس آبی و قرمز را با هم می‌ریزیم و پیشامد A را رو شدن عدد زوج برای تاس آبی و پیشامد B را رو شدن عدد فرد برای تاس قرمز تعریف می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن که A و B با هم رخ بدهند.

حل: درواقع باید $p(A\cap B)$ را به دست آوریم. لازم به تذکر است اگر شما پیشامد A را به صورت $A=\{۲,۴,۶\}$ و پیشامد B را به صورت $A=\{۱,۳,۵\}$ تعریف کنید، $(A\cap B)=\varnothing$ بوده و $p(A\cap B)=۰$؛ در صورتی که می‌دانیم A و B می‌توانند با هم رخ بدهند و احتمال آن صفر نیست، و اشکال در این است که ما باید همواره A و B را از یک فضای نمونه‌ای در نظر بگیریم؛ زیرا تابع احتمال روی یک فضا تعریف می‌شود و فضای نمونه‌ای در این مسأله، دارای ۳۶ زوج مرتب است؛ بنابراین باید A و B را به صورت‌های زیر تعریف کنیم:

$$A=\left\{(a,b)\in S \middle| a\in\{۲,۴,۶\}, b\in\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}\right\}$$

$$B=\left\{(a,b)\in S \middle| a\in\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}, b\in\{۱,۳,۵\}\right\}$$

$$n(A)=۳\times ۶=۱۸,\quad n(B)=۶\times ۳=۱۸$$

$$A\cap B=\left\{(a,b)\in S \middle| a\in\{۲,۴,۶\}, b\in\{۱,۳,۵\}\right\}$$

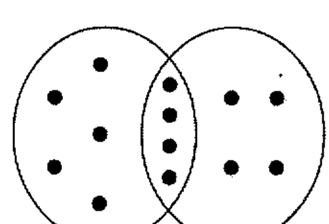
$$\Rightarrow n(A\cap B)=۳\times ۳=۹$$

$$\Rightarrow p(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{۹}{۳۶}=\frac{۱}{۴}$$

در این مرحله، با توجه به مطالب ذکر شده و مثال‌های حل شدهٔ قبل، به‌راحتی می‌توان برای احتمال شرطی، مُدلی به صورت زیر طراحی و به فرمولی که قبلاً از آن استفاده شد، برسیم: فرض کنیم A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند؛ به طوری که $A\cap B\neq\varnothing$ (مطابق شکل)، به وضوح مشاهده می‌شود که اگر پیشامد B رخ داده باشد و بخواهیم احتمال رخداد A را به شرط آن‌که B رخ داده باشد، حساب کنیم؛ یعنی بخواهیم $p(A/B)$ را به دست آوریم، این احتمال با احتمال رخداد $(A\cap B)$ رابطهٔ مستقیم دارد؛ یعنی

$$p(A/B)=kp(A\cap B)\quad (۱)$$

(هرقدر اشتراک A و B بیشتر باشد، چون B رخ داده، به همان نسبت $p(A/B)$ بزرگ‌تر و هرقدر اشتراک A با B کمتر باشد، $p(A/B)$ کوچک‌تر است). حال اگر قرار دهیم $A=B$، رابطهٔ (۱) به صورت $p(B/B)=kp(B\cap B)$ یا $۱=kp(B)$ حاصل می‌شود.



(توجه دارید که احتمال رخداد پیشامد B به شرط آن‌که خودش رخ داده باشد؛ یعنی $p(B/B)$ برابر با ۱ است) که $k=\frac{۱}{p(B)}$ به دست می‌آید و اگر این مقدار در رابطهٔ (۱) قرار دهیم، خواهیم داشت: $p(A/B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}$، که می‌توان آن را به صورت زیر ساده کرد:

$$p(A/B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}}=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$$

پیش از این که تعریف پیشامدهای مستقل و وابسته را مطرح کنیم، یادآوری می‌کنیم که دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S را ناسازگار می‌نامیم؛ در صورتی که $(A\cap B)=\varnothing$ و سازگار می‌نامیم هرگاه $(A\cap B)\neq\varnothing$.

پیشامدهای مستقل از هم:

دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S را مستقل از یکدیگر می‌نامیم؛ هرگاه رخداد یا عدم رخداد هریک، روی رخداد دیگری هیچ تأثیری نداشته باشد؛ در غیر این صورت دو پیشامد را وابسته می‌نامیم.

مثال۱. فرض کنیم تاسی را دوبار ریخته‌ایم (یا دو تاس آبی و قرمز را با هم ریخته‌ایم)، اگر پیشامد A را زوج آمدن تاس اوّل و پیشامد B را فرد آمدن تاس دوم تعریف کنیم، با توجه به تعریف، واضح است که A و B مستقل از یکدیگرند؛ یعنی این که تاس اوّل زوج بیاید یا زوج نیاید، تأثیری در فرد آمدن تاس دوم ندارد و برعکس.

مثال ۲. فرض کنید یک تاس و یک سکه را با هم می اندازیم و دو پیشامد A و B را به ترتیب «زوج آمدن تاس» و «رو شدن H» در نظر بگیریم؛ واضح است که A و B مستقل از یکدیگرند.

توجه دارید که A و B هر دو متعلق به فضای نمونه‌ای و ۱۲ عضوی S هستند.

$$A=\left\{(a,b)\in S \middle| a\in\{۲,۴,۶\}, b\in\{H,T\}\right\}$$

$$B=\left\{(a,b)\in S \middle| a\in\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}, b\in\{H\}\right\}$$

تذکر مهم: با توجه به تعریف پیشامدهای مستقل از هم،

واضح است که اگر دو پیشامد A و B مستقل از یکدیگر باشند و B رخ داده باشد، تأثیری در رخداد A ندارد و اگر A رخ داده باشد، تأثیری در رخداد B ندارد؛ یعنی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} P(A/B)=P(A) \\ P(B/A)=P(B) \end{cases} \Leftrightarrow B \text{ و } A \text{ مستقل از یکدیگرند}$$

نتیجه‌گیری مهم: قبلاً ثابت کردیم که $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ یا $P(A\cap B)=P(A/B)\times P(B)$

که با توجه به تذکر قبل می‌توان گفت:

$P(A\cap B)=P(A)\times P(B) \Leftrightarrow A$ و B مستقل از یکدیگرند.

(بنابراین یکی از راه‌های بررسی این که دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S مستقل از یکدیگرند یا وابسته‌اند، بررسی برقراری تساوی $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ است.)

در واقع تساوی $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ **به نام قانون ضرب احتمالات** برای دو پیشامد A و B در حالت کلّی نام دارد و در حالتی که A و B مستقل از یکدیگر باشند، به صورت $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ نوشته می‌شود.

به عنوان مثال، برای فهم بیشتر این نتیجهٔ مهم، به مثال ابتدای این بحث بر می‌گردیم:

در مثال ۱، یعنی ریختن ۲ تاس (یا ۱ تاس دوبار)، اگر بخواهیم A و B با هم رخ بدهند، یعنی تاس اول زوج و تاس دوم فرد بیاید، خواهیم داشت:

$$A=\{(a,b)\in S | a\in\{۲,۴,۶\}, b\in\{۱,۲,\dots,۶\}\}$$

$$B=\{(a,b)\in S | a\in\{۱,۲,\dots,۶\}, b\in\{۱,۳,۵\}\}$$

$$n(A)=۳\times۶=۱۸ \quad , \quad n(B)=۶\times۳=۱۸$$

$$(A\cap B)=\{(a,b)\in S | a\in\{۲,۴,۶\}, b\in\{۱,۳,۵\}\}$$

$$\Rightarrow n(A\cap B)=۳\times۳=۹$$

$$P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{۹}{۳۶}=\frac{۱}{۴}$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(B)}=\frac{۱۸}{۳۶}=\frac{۱}{۲} \quad , \quad P(B)=\frac{n(B)}{n(A)}=\frac{۱۸}{۳۶}=\frac{۱}{۲}$$

$$P(A)\times P(B)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}=P(A\cap B)$$

درنتیجه A و B مستقل از یکدیگرند.

طرح یک مسألهٔ بسیار مهم

فرض کنید تاسی را دوبار می‌ریزیم و پیشامدهای A و B را در دو حالت به صورت‌های زیر تعریف می‌کنیم. در هر حالت مستقل یا وابسته بودنِ A و B را ابتدا از طریق تعریف و سپس با استفاده از تساوی $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ تحقیق کنید.

(الف $\begin{cases} A= \text{پیشامد این که تاس اول ۴ بیاید} \\ B= \text{پیشامد این که مجموع دو تاس ۹ باشد} \end{cases}$

واضح است که اگر تاس ۴ نیاید (A رخ ندهد) و مثلاً ۱ یا ۲ بیاید، امکان رخداد B وجود ندارد (تاس دوم حداکثر ۶ هم که بیاید، مجموع دو تاس ۹ نخواهد شد)، پس عدم رخداد A روی B تأثیرگذار است و لذا A و B وابسته‌اند.

از طرفی داریم:

$$A=\{(a,b)\in S | a=۴ \ , \ b\in\{۱,۲,\dots,۶\}\}$$

$$B=\{(۳,۶),(۶,۳),(۴,۵),(۵,۴)\} \ , \ A\cap B=\{(۴,۵)\}$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۴}{۳۶}=\frac{۱}{۹}$$

$$P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{۱}{۳۶}$$

$P(A)\times P(B)=\dfrac{۱}{۵۴}\neq\dfrac{۱}{۳۶}=P(A\cap B)\Rightarrow$ B و A وابسته‌اند.

(ب $\begin{cases} A= \text{پیشامد این که تاس اول ۴ بیاید} \\ B= \text{مجموع دو تاس ۷ باشد} \end{cases}$

در نگاه اول، قسمت (ب) با (الف) فرقی ندارد و شاید این طور به نظر برسد که عدم رخداد A، یعنی این‌که تاس اول ۴ نیاید، روی رخداد B تأثیرگذار است؛ ولی ابداً این‌طور نیست؛ زیرا تاس اول ۴ بیاید یا نیاید، روی مجموع ۷ تأثیری ندارد (تاس اول هر عدد غیر از ۴ نیز که بیاید، برای مجموع ۷ امکان وجود دارد) پس A و B مستقل از یکدیگرند. حال از طریق

فرمول، این موضوع را بررسی می‌کنیم:

$n(A)=۶\ ,\ B=\{(۱,۶),(۶,۱),(۲,۵),(۵,۲),(۳,۴),(۴,۳)\}$

$A\cap B=\{(۴,۳)\}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۱}{۳۶}\ ,\ P(A)=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$

و $P(B)=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۳۶}$$

پس A و B مستقل از یکدیگرند.

رابطهٔ بین پیشامدهای مستقل و وابسته با پیشامدهای سازگار و ناسازگار

دیدیم که اگر A وB ناسازگار باشند $(A\cap B)=\varnothing$ و $P(A\cap B)=۰$، پس اگر A وB دو پیشامد ناسازگار و مستقل از هم باشند، باید لااقل یکی از دو پیشامد غیرممکن باشد؛ زیرا:

$$\left.\begin{array}{l}P(A\cap B)=۰\\ P(A\cap B)=P(A)\times P(B)\end{array}\right\}\Rightarrow P(A)\times P(B)=۰$$

$\Rightarrow P(A)=0$ یا $P(B)=0$

به عبارت دیگر، اگر A وB هر دو پیشامدهای غیرممکن نباشند؛ یعنی $P(A)\neq 0$ و $P(B)\neq 0$، در این صورت نمی‌توانند مستقل از هم و در عین حال ناسازگار باشند.

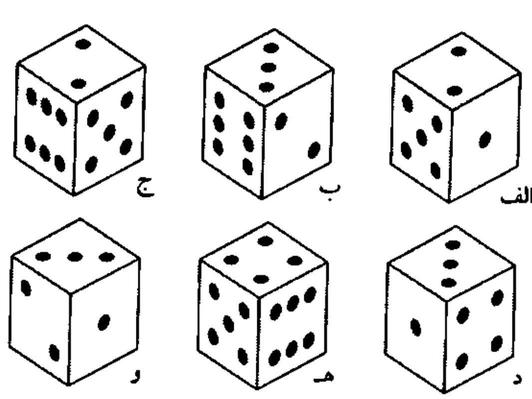
در مسألهٔ قبل، مشاهده کردید که $P(A\cap B)=\frac{۱}{۶}$ (در هر دو حالت (الف) و (ب) پس B وA در هر دو حالت سازگارند، ولی در حالت (الف) وابسته و در حالت (ب) مستقل از هم بودند. پس دو پیشامد سازگار می‌توانند مستقل یا وابسته باشند.

در قسمت بعدی، به معرفی چند رابطه و قانون مهم و کاربردهای آنها در حل مسائل احتمال شرطی خواهیم پرداخت.

تفریح اندیشه ... تفریح اندیشه ... تفریح اندیشه ...

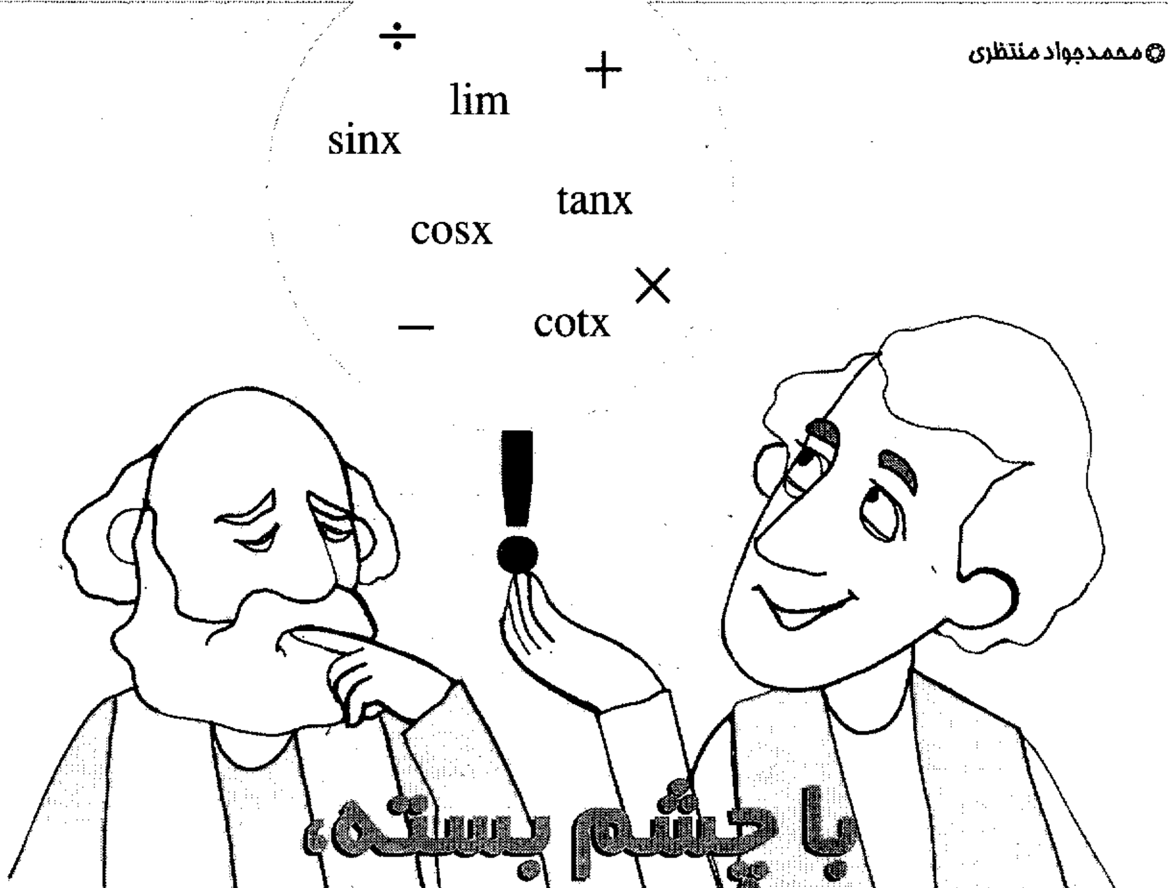
نماهای تاس‌های متفاوت

این شش شکل، مربوط به دو تاس متفاوت است. هر مجموعهٔ سه‌تایی از اینها (شش شکل) نماهای یکی از این دو تاس را نشان می‌دهند. این تاس‌ها استاندارد نیستند (تاس استاندارد یا معمولی، به تاسی گفته می‌شود که مجموع خال‌های هر دو وجه مقابل آن، ۷ باشد. برای مثال، وجه ۱ مقابل وجه ۶، وجه ۲ مقابل وجه ۵ و وجه ۳ مقابل وجه ۴ باشد ـ م). هر سه شکلی را که متعلق به یکی از این دو تاس است، مشخص کنید.



پاسخ: (الف، ب، ج) و (د، هـ، و)

محمدجواد منتظری



با چشم بسته، وارد دنیای ریاضی نشوید!

امروزه بر کسی پوشیده نیست که موفقیت در هر امری، مستلزم علم کامل و اشراف دقیق بر موضوع است. یک معمار اگر نتواند ساختمانی را که قصد دارد بسازد، تجسّم کند، از قدرت تحمل مصالح، ستون‌ها و دیگر اجزای آن اطلاع نداشته باشد یا از امکانات لازم در ساختمان برای زندگی بی‌خبر باشد، نمی‌تواند ساختمانی قابل قبول بسازد.

یک مکانیک اگر از کلیهٔ اجزای اتومبیل و نحوهٔ کارکرد آن‌ها و ظرافت‌هایشان بی‌اطلاع باشد، هرگز مکانیک خوبی نخواهد شد.

با وجود این، بعضی افراد در انجام امور خود عجول هستند و به‌طور شایسته به کار خود نمی‌پردازند. برای مثال، شما در زنگ ورزش، کدام معلم را دوست دارید؟ معلمی را که توپی را به شما بدهد تا به بازی مشغول شوید یا معلمی که نیم ساعت از زنگ ورزشتان را برای آمادگی و گرم کردن بدنتان برای انجام ورزش مورد نظر، اختصاص دهد، و به شما چند تکنیک را آموزش دهد و بخواهد تکنیک‌های مربوطه را در زمین انجام دهید. قطعاً اکثر شما مورد اول را می‌پسندید؛ ولی باید بدانید، با این مربی شما هرگز ورزشکار نخواهید شد و تنها ساعاتی را به تفریح و وقت‌گذرانی پرداخته‌اید.

پس اگر موفقیت در هر امری، مستلزم دید کامل است، آیا برای ورود به دنیای ریاضیات ـ که امروزه اهمیت آن بر هیچ عالمی اعم از علوم مختلف پوشیده نیست و بر آن‌ها مبرهن است که علم و دید دقیق ریاضی، ابزار لازم برای موفقیت است ـ نباید با چشمان باز وارد شد؟

بنابراین در مواجهه با این علم و در حل مسائل مربوطه، نباید با عجله و بدون درک لازم، تنها به دنبال راه‌حل‌های تستی باشیم.

در مدارس امروز ما، متأسفانه دانش‌آموزان به این آفت مبتلا شده‌اند و تعریف درستی از ریاضیات ندارند. ظاهر ریاضی را نظاره می‌کنند و از ورود به دنیای زیبا و شگفت‌انگیز

آن خودداری می‌کنند، و خود را از درک این لذائذ محروم می‌کنند؛ بدون آن که بیندیشند رمز و راز موفقیت در چیست. چنین افرادی هرگز نمی‌توانند از ریاضی لذت ببرند و از مواهب آن بهره جویند، و همیشه خسته‌اند و موفقیت چندانی نخواهند یافت. آنان ریاضی را در حفظ نکات و حل تست‌های مختلف جست‌وجو می‌کنند؛ مانند کاری که آن‌ها در میدان فوتبال انجام می‌دهند و از گرم کردن خود و آماده کردن بدنشان برای انجام ورزش مورد نظر خودداری می‌کنند.

اما راه و چارهٔ کار چیست؟

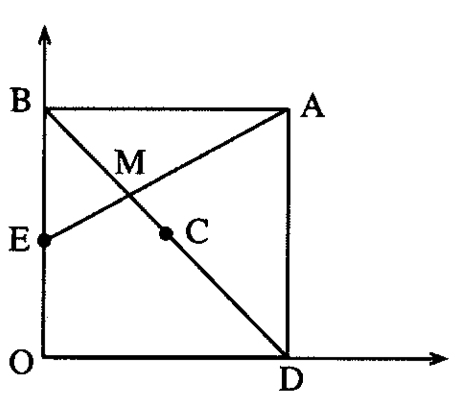
پیش از هر توصیه، یادآور می‌شویم که برای به‌فعل درآوردن سلول‌های مغزی، باید تمرینشان داد، باید به مرور زمان با ورزش‌های مغزی، یعنی سعی در حل مسائل فکری، آن‌ها را به فعالیت واداشت و این عمل باید از اوان دبستان و حتی پایین‌تر آغاز شود، و با اندیشه کردن در مسائل سادهٔ فکری، راه فعالیت‌های بعدی آن‌ها را هموار ساخت. معماهای ریاضی و مسائل هندسه، این وظیفه را به‌خوبی انجام می‌دهند. بنابراین توصیه می‌شود با علاقه و حوصله به آن‌ها بپردازید و از این که ساعت‌ها و روزها روی آن فکر کنید، خسته نشوید. در مرحلهٔ دوم، سعی کنید مطالب ریاضی را به‌طور عمیق یاد بگیرید. در واقع، پیش از فهم دقیق موضوع، از یادگیری نکات تستی بپرهیزید. بسیاری از دانش‌آموزان بوده‌اند که تنها اوقات خود را مصروف یادگیری و حفظ نکات تستی کرده‌اند؛ ولی چون از عمق این مطالب بی‌خبر بوده‌اند، نتوانسته‌اند از آن نکات نیز به‌خوبی استفاده کنند و در کنکور ناموفق بوده‌اند. در واقع، فهم دقیق مطالب، شما را در یادگیری نکات تستی و به‌کارگیری مطلوب آن‌ها، یاری می‌کند.

به عقیدهٔ نگارنده، یکی از ارزشمندترین کتاب‌هایی که تاکنون در مرکز تألیفات کتب درسی چاپ شده است و موارد ذکر شده را به‌خوبی انجام می‌دهد، کتاب ریاضی تکمیلی و هنر حل مسأله است. کتابی که به‌طور شگفت‌آمیزی، توانایی‌های شما را در حل مسائل درسی، اعم از ریاضی و دیگر دروس و حتی تست‌ها بالا می‌برد؛ کتابی که در توسعهٔ قدرت فهم و درک و سرعت حل مسائل، به شما کمک می‌کند. بسیار توصیه می‌شود دانش‌آموزان سال اوّل این درس را جدّی بگیرند. هرچه روی این درس وقت بگذارید، باز کم است. بسیاری از توانایی‌هایی را که لازمهٔ موفقیت برای تحصیل در دانشگاه‌هاست، با این درس تقویت می‌شود. اگر از این درس غافل شوید، فرصت مغتنمی را از دست داده‌اید؛ فرصتی را که شاید دیگر هرگز به‌دست نیاورید.

از توصیه‌های دیگر این است که سعی کنید مسائل ریاضی را خودتان حل کنید. هرگز به یافتن راه‌حل مسأله اکتفا نکنید. سعی کنید خودتان برای هر مسأله‌ای جوابی بیابید، و هر مسأله ریاضی را از چند روش حل کنید. اکثر مسائل ریاضی، راه‌حل منحصربه‌فردی ندارند. تلاش کنید بیندیشید، تفکرات خود را بر روی کاغذ بیاورید و در انتها افکار خود را به معلمان خود ارائه کنید تا اشکالات خود را بیابید. اگر مدتی این روند را دنبال کنید، درخواهید یافت که به‌طور معجزه‌آسایی قدرت تحلیل بسیاری از مسائل ریاضی را یافته‌اید.

در پایان، حل یکی از مسائل ریاضی را که در کنکور سال قبل آمده است، به سه روش ارائه می‌کنیم. امیدواریم در شما انگیزه‌ای ایجاد شود تا از دیدگاه‌های گوناگون به مسائل بنگرید.

مسأله. در یک مربع به ضلع $۴\sqrt{۲}$، خط واصل از رأس به وسط ضلع مقابل، قطر مربع را در M قطع می‌کند. فاصلهٔ نقطهٔ M از وسط مربع چیست؟



راه‌حل اول. مطابق شکل، نقطهٔ O را مبدأ اختیار می‌کنیم و محورهای دستگاه مختصات را بر امتداد اضلاع OD و OB بنا می‌کنیم (روش تحلیلی). آن‌گاه مختصات نقاط A، B، D، E و C (مرکز مربع) به‌ترتیب برابر خواهند بود با:

$B(0,4\sqrt{2})$ و $D(4\sqrt{2},0)$ و $E(0,2\sqrt{2})$

$A(4\sqrt{2},4\sqrt{2})$ و $C(2\sqrt{2},2\sqrt{2})$

حال معادلات خطوط گذرنده از AE و BD را به‌دست می‌آوریم:

$$AE: y-2\sqrt{2}=\frac{4\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}-0}(x-0)\Rightarrow y=\frac{1}{2}x+2\sqrt{2}$$

$$BD: y-4\sqrt{2}=\frac{4\sqrt{2}-0}{0-4\sqrt{2}}(x-0)\Rightarrow y=-x+4\sqrt{2}$$

اما M محل تلاقی این دو خط است، لذا با حل دستگاه زیر، مختصات M را به‌دست می‌آوریم:

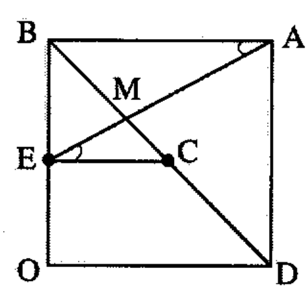
$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+2\sqrt{2} \\ y=-x+4\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}, \frac{8\sqrt{2}}{3}\right)$$

و در آخر با داشتن مختصات نقاط C و M، طول CM را می‌یابیم:

$$CM=\sqrt{\left(\frac{8\sqrt{2}}{3}-2\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}-2\sqrt{2}\right)^2}=\frac{4}{3}$$

راه‌حل دوم: با توجه به شکل داریم:



$$\begin{cases} <AMB=<CME \text{ (متقابل به رأسند)} \\ <BAM=<MEC \quad (CE \parallel AB \text{ و } AE \text{ مورب}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta AMB \sim \Delta CME \text{ (بنابر حالت ۲ زاویهٔ مساوی)}$$

$$\Rightarrow \frac{CM}{BM}=\frac{EM}{AM}=\frac{CE}{AB}=\frac{1}{2}\Rightarrow CM=\frac{1}{2}BM$$

$$\Rightarrow CM=\frac{1}{3}CB$$

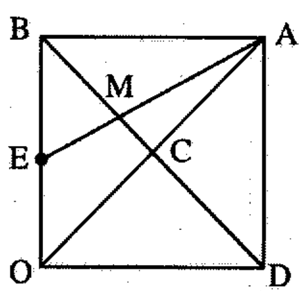
پس:

$$\Rightarrow CM=\frac{1}{3}CB=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}BD\right)=\frac{1}{6}BD=\frac{1}{6}(\sqrt{2}AB)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{6}\times 4\sqrt{2}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

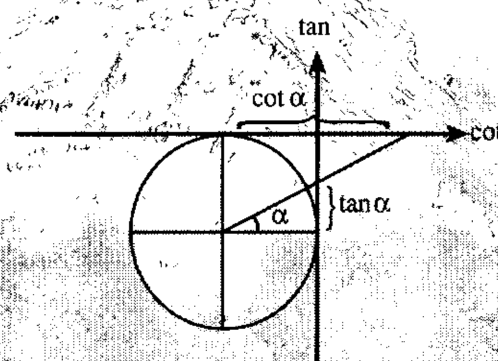
راه‌حل سوم. M محل تلاقی میانه‌های مثلث ABO است و می‌دانیم که فاصلهٔ محل تلاقی میانه‌های هر مثلث تا رأس، $\frac{2}{3}$ و تا ضلع مقابل، $\frac{1}{3}$ میانهٔ نظیر است؛ پس

$$CM=\frac{1}{3}CB=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}BD=\frac{1}{6}\times 8=\frac{4}{3}$$



۶۷

محمدهاشم رستمی



معادله های مثلثاتی

برای دانش آموزان سال اول و دوم متوسطه

اشاره: در شمارهٔ قبل حل معادله‌های مثلثاتی $tgX = tg\alpha$ و $\cot gX = \cot g\alpha$ را ملاحظه کردید، اینک در ادامه مطلب مثال‌هایی را دربارهٔ این نوع معادله‌های مثلثاتی می‌آوریم.

آزمون ۱ . جواب کلی معادلهٔ $3tg3x - \sqrt{3} = 0$ کدام است؟

۱) $k\pi + \frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

۳) $\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{18}$ ۴) $3k\pi + \frac{\pi}{18}$

حل: گزینهٔ ۳ درست است؛ زیرا داریم:

$$3tg3x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow 3tg3x = \sqrt{3} \Rightarrow tg3x = \frac{\sqrt{3}}{3} = tg\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{18}$$

آزمون ۲ . جواب کلی معادلهٔ $\cot g\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) - 2 - \sqrt{3} = 0$ کدام است؟

۱) $2k\pi - \frac{\pi}{3}$ ۲) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$

۳) $k\pi - \frac{\pi}{3}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{3}$

حل: گزینهٔ ۱ درست است؛ زیرا داریم:

$$\cot g\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) - 2 - \sqrt{3} = 0$$

$$\Rightarrow \cot g\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = 2 + \sqrt{3} = \cot g\frac{\pi}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{12} \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi - \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{3}$$

آزمون ۳ . جواب‌های معادلهٔ $tg4x = \cot g\left(\frac{\pi}{3} + 4x\right)$ کدام‌اند؟

۱) $x = \frac{1}{4}\left(k\pi + \frac{\pi}{3}\right)$ ۲) $x = \frac{1}{8}\left(k\pi + \frac{\pi}{3}\right)$

۳) $x = \frac{1}{4}\left(k\pi + \frac{\pi}{6}\right)$ ۴) $x = \frac{1}{8}\left(k\pi + \frac{\pi}{6}\right)$

کنکور سراسری

حل: گزینهٔ ۴ درست است؛ زیرا داریم:

$$\operatorname{tg}4x=\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{3}+4x\right)$$
$$\Rightarrow \operatorname{tg}4x=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}-4x\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}-4x\right)$$
$$\Rightarrow 4x=k\pi+\left(\frac{\pi}{6}-4x\right)\Rightarrow 8x=k\pi+\frac{\pi}{6}$$
$$\Rightarrow x=\frac{1}{8}\left(k\pi+\frac{\pi}{6}\right)$$

آزمون۴ . جواب‌های معادلهٔ $-\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\operatorname{tg}(\pi-x)$ کدام‌اند؟

۱) $\frac{k\pi}{4}$ ۲) $k\pi$

۳) $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ ۴) $(2k+1)\frac{\pi}{4}$

کنکور سراسری

حل : گزینهٔ ۲ درست است . داریم :

$$-\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\operatorname{tg}(\pi-x)\Rightarrow \operatorname{tg}x=-\operatorname{tg}x\Rightarrow 2\operatorname{tg}x=0$$
$$\Rightarrow \operatorname{tg}x=0\Rightarrow x=k\pi$$

آزمون ۵ . یک جواب معادلهٔ $\operatorname{tg}\left(\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{6}\right)-1=0$ کدام است؟

۱) $-\frac{7\pi}{8}$ ۲) $\frac{7\pi}{8}$

۳) $\frac{7\pi}{4}$ ۴) $-\frac{7\pi}{4}$

حل : گزینهٔ ۱ درست است .

راه اوّل : عددهای داده شده در گزینه‌ها را در معادله قرار می‌دهیم . هرکدام در معادله صدق کند ، جواب ، آن است .

$$x=\frac{-7\pi}{8}\xrightarrow{\text{در معادله}}\operatorname{tg}\left(\frac{2}{3}\times\frac{-7\pi}{8}-\frac{\pi}{6}\right)-1=0$$
$$\Rightarrow \operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)-1=0\Rightarrow -\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}-1=0$$
$$\Rightarrow -(-1)-1=0\Rightarrow 1-1=0\Rightarrow 0=0$$

بنابراین $x=\frac{-7\pi}{8}$ جواب معادله و گزینهٔ (۱) درست است . بنابراین نیازی به گذاشتن بقیهٔ گزینه‌ها در معادله نیست .

راه دوم : جواب‌های کلی معادله و سپس جواب‌های خصوصی آن در محدودهٔ جواب‌های داده شده در گزینه‌ها را به دست می‌آوریم . داریم :

$$\operatorname{tg}\left(\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{6}\right)-1=0\Rightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=1=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$$
$$\Rightarrow \frac{2x}{3}-\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{4}\Rightarrow \frac{2x}{3}=k\pi+\frac{5\pi}{12}$$
$$\Rightarrow x=\frac{3k\pi}{2}+\frac{5\pi}{8}$$

k	x	
-1	$-\frac{3\pi}{2}+\frac{5\pi}{8}=\frac{-7\pi}{8}$	جواب

آزمون ۶ . کدام مقدار جواب معادلهٔ $3\operatorname{cotg}\left(\pi x+\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{3}=0$ نیست؟

۱) $\frac{13}{12}$ ۲) $-\frac{11}{12}$

۳) $\frac{25}{12}$ ۴) $\frac{5}{12}$

حل : گزینهٔ ۴ جواب است .

راه اوّل : عددهای داده شده در گزینه‌ها را در معادله قرار می‌دهیم تا مقداری از x که در معادله صدق نمی‌کند ، مشخص شود .

$$x=\frac{13}{12}\xrightarrow{\text{در معادله}}3\operatorname{cotg}\left(\frac{13\pi}{12}+\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{3}=0$$
$$\Rightarrow 3\operatorname{cotg}\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}=0\Rightarrow 3\times\frac{\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}=0$$
$$\Rightarrow \sqrt{3}-\sqrt{3}=0\Rightarrow 0=0$$

$$x=\frac{-11}{12}\xrightarrow{\text{در معادله}}3\operatorname{cotg}\left(\frac{-11\pi}{12}+\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{3}=0$$
$$\Rightarrow 3\operatorname{cotg}\left(\frac{-2\pi}{3}\right)-\sqrt{3}=0\Rightarrow -3\operatorname{cotg}\frac{2\pi}{3}-\sqrt{3}=0$$
$$\Rightarrow -3\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)-\sqrt{3}=0\Rightarrow 0=0$$

$$x=\frac{25}{12}\xrightarrow{\text{در معادله}}3\operatorname{cotg}\left(\frac{25\pi}{12}+\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{3}=0$$
$$\Rightarrow 3\operatorname{cotg}\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}=0$$

$$3\cot g\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}=0 \Rightarrow 3\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)-\sqrt{3}=0 \Rightarrow 0=0$$

چون سه عددهای داده شده در گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) در معادله صدق کرده‌اند، بنابراین جواب معادله‌اند؛ پس $x=\frac{5}{12}$ جواب معادله نیست، پس نیازی به قراردادن این عدد در معادله نیست.

راه دوم: معادله را حل می‌کنیم و جواب‌های خصوصی آن در محدودهٔ عددهای داده شده در گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم. داریم:

$$3\cot g\left(\pi x+\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{3}=0$$

$$\Rightarrow \cot g\left(\pi x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}=\cot g\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \pi x+\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{3} \Rightarrow x=k+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x=k+\frac{1}{12}$$

به‌طوری که دیده می‌شود، $x=\frac{5}{12}$ جزو جواب‌های معادله نیست.

k	x
-1	$-\frac{11}{12}$
0	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{13}{12}$
2	$\frac{25}{12}$

پرسش: برای این تست، کدام راه‌حل ساده‌تر است؟

آزمون ۷. مجموع جواب‌های معادلهٔ $\cot g\left(2x+\frac{\pi}{8}\right)+1-\sqrt{2}=0$ در بازهٔ $[0,\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) π

۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) 2π

حل: گزینهٔ ۳ درست است. جواب‌های کلی معادله و سپس جواب‌های خصوصی موجود در بازهٔ $[0,\pi]$ و آن‌گاه مجموع آن‌ها را به دست می‌آوریم.

$$\cot g\left(2x+\frac{\pi}{8}\right)+1-\sqrt{2}=0$$

$$\Rightarrow \cot g\left(2x+\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}-1=\cot g\frac{\pi}{8}$$

$$\Rightarrow 2x+\frac{\pi}{8}=k\pi+\frac{\pi}{8} \Rightarrow 2x=k\pi \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}$$

k	x
0	0
1	$\frac{\pi}{2}$
2	π
3	$\frac{3\pi}{2}>\pi$

جواب‌های خصوصی موجود در بازهٔ $[0,\pi]$ عبارت‌اند از: 0، $\frac{\pi}{2}$ و π. بنابراین مجموع آن‌ها برابر است با:

$$0+\frac{\pi}{2}+\pi=\frac{3\pi}{2}$$

آزمون ۸. اگر $-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}$ و $tgx=2-3m$ باشد، حدود m کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}<m<1$ ۲) $3<m<1$

۳) $-3<m<-1$ ۴) $\frac{1}{3}\leq m\leq 1$

حل: گزینهٔ ۱ درست است؛ زیرا داریم:

$$-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4} \Rightarrow -1<tgx<1 \Rightarrow -1<2-3m<1$$

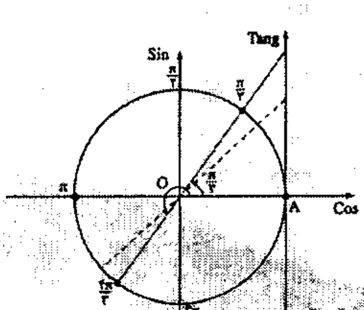
$$\Rightarrow -3<-3m<-1 \Rightarrow \frac{1}{3}<m<1$$

آزمون ۹. اگر $0<tgx<\sqrt{3}$ باشد، کدام گزینه می‌تواند حدود x باشد؟

۱) $0<x<\frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{2}$

۳) $\frac{-\pi}{3}<x<\frac{4\pi}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{3}<x<\pi$

حل: گزینهٔ ۱ درست است. در بازهٔ $[0,2\pi]$ می‌دانیم که $0=tg0=tg\pi$ و $\sqrt{3}=tg\frac{\pi}{3}=tg\frac{4\pi}{3}$ است. بنابراین با توجه به شکل، حدود x می‌تواند به یکی از صورت‌های زیر باشد:



$$0<x<\frac{\pi}{3} \text{ و } \pi<x<\frac{4\pi}{3}$$

آزمون ۱۰ . اگر $-۱<\cot g\left(\frac{x}{۲}-\frac{\pi}{۴}\right)<۱$ باشد، کدام گزینه می‌تواند حدود x باشد؟

۱) $\frac{\pi}{۴}<x<\frac{۳\pi}{۴}$ ۲) $\frac{۵\pi}{۴}<x<\frac{۷\pi}{۴}$

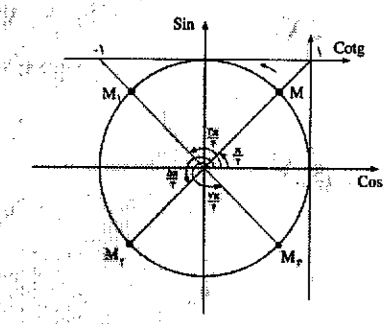
۳) $\frac{۳\pi}{۴}<x<\frac{۷\pi}{۴}$ ۴) $\pi<x<۲\pi$

حل: گزینهٔ ۴ درست است. در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ داریم:

$۱=\cot g\frac{\pi}{۴}=\cot g\frac{۵\pi}{۴}$ و $-۱=\cot g\frac{۳\pi}{۴}=\cot g\frac{۷\pi}{۴}$

بنابراین با فرض $\frac{x}{۲}-\frac{\pi}{۴}=\alpha$ ، $-۱<\cot g\alpha<۱$ و در نتیجه حدود α به یکی از صورت‌های زیر است:

$\frac{\pi}{۴}<\alpha<\frac{۳\pi}{۴}$ $\frac{۵\pi}{۴}<\alpha<\frac{۷\pi}{۴}$



با جایگذاری $\alpha=\frac{x}{۲}-\frac{\pi}{۴}$ خواهیم داشت:

$$\frac{\pi}{۴}<\frac{x}{۲}-\frac{\pi}{۴}<\frac{۳\pi}{۴}\Rightarrow\frac{\pi}{۲}<\frac{x}{۲}<\pi\Rightarrow\pi<x<۲\pi$$

$$\frac{۵\pi}{۴}<\frac{x}{۲}-\frac{\pi}{۴}<\frac{۷\pi}{۴}\Rightarrow\frac{۳\pi}{۲}<\frac{x}{۲}<۲\pi\Rightarrow۳\pi<x<۴\pi$$

تمرین

۱ . معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $tg۲x+\sqrt{۳}=۰$

ب) $\cot g\frac{x}{۳}-\sqrt{۲}+۱=۰$

پ) $(\sqrt{۲}-۱)tg\left(\frac{\pi x}{۲}+\frac{\pi}{۶}\right)-۱=۰$

ت) $\cot g\left(۲x-\frac{\pi}{۴}\right)-\sqrt{۳}=۰$

ث) $tg\left(\frac{۳x}{۲}-\frac{\pi}{۳}\right)+\cot g\left(\frac{x}{۴}-\frac{\pi}{۲}\right)=۰$

ج) $\cot g\left(\pi x+\frac{\pi}{۱۲}\right)-tg\left(\frac{\pi x}{۲}-\frac{\pi}{۸}\right)=۰$

۲ . جواب‌های کلی معادله‌های زیر را به دست آورید، سپس جواب‌های خصوصی هر معادله در بازهٔ داده شده برای آن معادله را تعیین کنید.

الف) $۳tg\frac{x}{۲}+\sqrt{۳}=۰\ ,\ [۰,۲\pi]$

ب) $(۲+\sqrt{۳})\cot g۲x-۱=۰\ ,\ [-\pi,۰]$

پ) $(۲-\sqrt{۳})tg\left(\frac{۲x}{۲}+\frac{\pi}{۵}\right)-۱=۰\ ,\ [۰,۴]$

ت) $(\sqrt{۲}+۱)\cot g\left(۲\pi x-\frac{\pi}{۳}\right)-۱=۰\ ,\ \left[-\frac{۱}{۲},۱\right]$

ث) $tg\left(\pi x+\frac{\pi}{۶}\right)+\cot g\left(\frac{۲\pi x}{۳}-\frac{\pi}{۳}\right)=۰\ ,\ [-۲,۲]$

۳ . معادلهٔ $۳tg\left(۲x-\frac{\pi}{۳}\right)-۳m+۲=۰$ داده شده است.

الف. حدود m را چنان تعیین کنید که $-\frac{\pi}{۲۴}<x<\frac{۳\pi}{۸}$

ب. مقدار m را چنان بیابید که یکی از جواب‌های معادله $x=\frac{۱۳\pi}{۲۴}$ باشد.

پ. مقدار m را چنان تعیین کنید که $\cot gx=-۱$ باشد.

ت. به ازای $m=\frac{۵}{۳}$ معادله را حل کنید.

۴ . معادلهٔ $\cot g\left(\frac{\pi x}{۲}+\frac{\pi}{۳}\right)-m+۳=۰$ داده شده است.

الف. حدود m را چنان بیابید که $-\frac{۱}{۶}<x<\frac{۵}{۶}$ باشد.

ب. مقدار m را چنان تعیین کنید که x=۲، یکی از جواب‌های این معادله باشد.

پ. به ازای $m=۳+\sqrt{۳}$ معادله را حل کنید.

۵ . اگر $tgx=3m+7$ و $\frac{\pi}{۶}<\frac{x}{۲}-\frac{\pi}{۶}<\frac{۵\pi}{۲۴}$ باشد، حدود m را تعیین کنید.

۶ . اگر $-\sqrt{۳}<\cot g\left(۲x-\frac{\pi}{۳}\right)<\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ باشد، حدود x را در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ تعیین کنید.

۵

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

اعداد فیبوناچی

اشاره

در شماره‌های قبل به معرفی اعداد فیبوناچی و رابطه‌ها و خواص بین این اعداد پرداختیم، در ادامه مطلب باز هم دربارهٔ رابطه‌های بین این اعداد بحث می‌کنیم.

۲۱. دستاورد اصلی بخش پیشین را می‌توانیم مشخص‌تر کنیم، قضیهٔ بعدی بعدها مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

قضیه. $$\frac{\alpha^{n-(1/n)}}{\sqrt{5}} \le u_n \le \frac{\alpha^{n+(1/n)}}{\sqrt{5}}$$

اثبات. در این مورد، کارمان را محدود به اثبات سمت چپ این نامساوی دوگانه می‌کنیم. اثبات سمت راست، مشابه آن است.

از آن‌جا که طبق فرمول بینه:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$$

و از آن‌جا که $\alpha\beta = -1$، کافی است نشان دهیم که:

$$\alpha^{n-(1/n)} \le \alpha^n - \frac{1}{\alpha^n}$$

یا

$$\alpha^{2n-(1/n)} \le \alpha^{2n} - 1$$

یا با به توان n رساندن دو طرف:

$$\alpha^{2n^2-1} \le (\alpha^{2n} - 1)^n \qquad (۲۱۰۱)$$

اثبات (۲۱۰۱) با استقرای بر n انجام می‌گیرد. اگر $n=1$، آن‌گاه نامساوی (۲۱۰۱) می‌شود:

$$\alpha \le \alpha^2 - 1$$

که در واقع برقرار است. در واقع یک تساوی داریم.

هنگامی که $n=2$، نامساوی (۲۱۰۱) به (۲۲۰۱):

$$\alpha^7 \le (\alpha^4 - 1)^2$$

منجر می‌شود. این نامساوی را می‌توان با محاسبهٔ مستقیم محقق ساخت. گرچه، آن را می‌توان با به‌کار بردن بعضی از ویژگی‌های مستخرج در بخش ۱۷ نیز به اثبات رساند. به ویژه داریم:

$$\alpha^4 = 3\alpha + 2$$

$$(\alpha^4 - 1)^2 = (3\alpha + 1)^2 = 9\alpha^2 + 6\alpha + 1 = 15\alpha + 10$$

بنابراین (۲۲۰۱) را می‌توان به صورت:

$$\alpha^7 = 13\alpha + 8 \le 15\alpha + 10$$

بازنویسی کرد که واضح است. سرانجام، اگر $n=3$، آن‌گاه (۲۱۰۱) بر این است که:

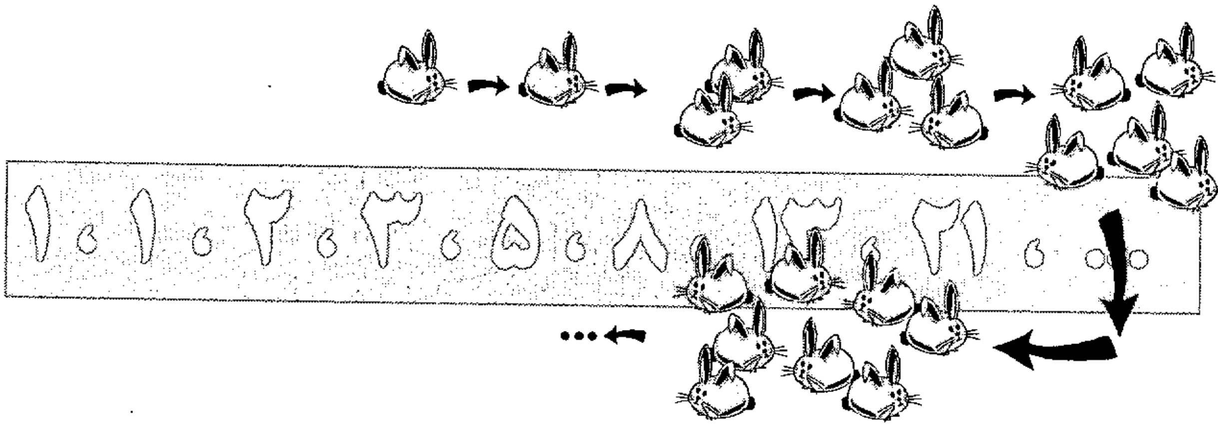
$$\alpha^7 \le (\alpha^6 - 1)^3$$

و می‌توان این نامساوی را به همان طریق فوق اثبات کرد.

اکنون فرض می‌کنیم (۲۱۰۱) به ازای $n>2$ برقرار باشد و می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$\alpha^{2(n+1)^2-1} \le (\alpha^{2n+2} - 1)^{n+1}$$

برای این کار، کافی است نشان دهیم هرگاه به جای n مقدار $n+1$ را قرار دهیم، سمت راست (۲۱۰۱) سریع‌تر از سمت چپ افزایش می‌یابد. واضحاً سمت چپ توسط فاکتور α^{4n+2}



زیاد می‌شود. اکنون افزایش سمت راست را برآورد می‌کنیم. داریم:

$$\frac{\left(\alpha^{2(n+1)}-1\right)^{n+1}}{\left(\alpha^{2n}-1\right)^n} = \left(\alpha^{2(n+1)}-1\right)\left(\frac{\alpha^{2(n+1)}-1}{\alpha^{2n}-1}\right)^n$$

آخرین کسر از α^2 بزرگ‌تر است و گذشته از این:

$$\frac{\alpha^{2(n+1)}-1}{\alpha^{2n}-1}-\alpha^2 = \frac{\alpha^{2n+2}-1-\alpha^{2n+2}+\alpha^2}{\alpha^{2n}-1}$$

$$=\frac{\alpha^2-1}{\alpha^{2n}-1}=\frac{\alpha}{\alpha^{2n}-1}>\frac{\alpha}{\alpha^{2n}}=\frac{1}{\alpha^{2n-1}}$$

بنابراین با استفاده از فرمول دو جمله‌ای (به عنوان نمونه، بخش ۱۱ این بخش را ملاحظه کنید) به دست می‌آوریم:

$$\left(\frac{\alpha^{2(n+1)}-1}{\alpha^{2n}-1}\right)^n > \left(\alpha^2+\frac{1}{\alpha^{2n-1}}\right)^n = \alpha^{2n}+n\frac{\alpha^{2n-2}}{\alpha^{2n-1}}+\cdots$$

که در آن نقطه‌ها به‌جای جمله‌های مثبت نامرتبط قرار دارند.

عبارت اخیر، هنگامی که $n>2$، بزرگ‌تر از $\alpha^{2n}+1$ است؛ بنابراین:

$$\frac{\left(\alpha^{2(n+1)}-1\right)^{n+1}}{\left(\alpha^{2n}-1\right)^n} > \left(\alpha^{2(n+1)}-1\right)\left(\alpha^{2n}+1\right)$$

$$=\alpha^{4n+2}+\alpha^{2n+2}-\alpha^{2n}-1$$

$$=\alpha^{4n+2}+\alpha^{2n}(\alpha^2-1)-1$$

$$=\alpha^{4n+2}+\alpha^{2n+1}-1>\alpha^{4n+2}$$

و به این ترتیب، قضیه به اثبات می‌رسد.

۲۲. در این جا ردهٔ دیگری از دنباله‌هایی را بررسی می‌کنیم که به کمک اعداد فیبوناتچی ایجاد شده‌اند. در آغاز کار، فرض می‌کنیم x عددی دلخواه باشد؛ در این صورت هدفمان محاسبهٔ مجموع زیر است:

$$s_n(x)=u_1x+u_2x^2+\cdots+u_nx^n$$

برای انجام این کار، ابتدا از فرمول بینه استفاده و حاصل می‌کنیم:

$$s_n(x)=\frac{\alpha-\beta}{\sqrt5}x+\frac{\alpha^2-\beta^2}{\sqrt5}x^2+\cdots+\frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt5}x^n$$

$$=\frac{1}{\sqrt5}\left(\alpha x+\alpha^2x^2+\cdots+\alpha^nx^n\right)-\frac{1}{\sqrt5}\left(\beta x+\beta^2x^2+\cdots+\beta^nx^n\right) \tag{23.1}$$

در عبارت اخیر، با مجموع‌های دو تصاعد هندسی با قدر نسبت‌های به ترتیب αx و βx مواجه می‌شویم. فرمول معروف بیانگر مجموع تصاعد هندسی متناهی، تنها زمانی دارای معناست که قدر نسبت آن متفاوت با ۱ باشد. در حالتی که قدر نسبت مورد بحث برابر با ۱ است، تصاعد متناظر شامل جمله‌هایی برابر با یکدیگر است و این مجموع را می‌توان به سادگی محاسبه کرد.

در ارتباط با موارد پیشین، ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن $\alpha x\neq 1$ و $\beta x\neq 1$؛ یعنی: $x\neq 1/\alpha=-\beta$ و $x\neq 1/\beta=-\alpha$. هرگاه چنین باشد، بامحاسبهٔ مجموع‌های

مشمول در (۲۳۰۱) فوق، به دست می‌آوریم:

$$s_n(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}\,\frac{\alpha^{n+1}x^{n+1}-\alpha x}{\alpha x-1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\,\frac{\beta^{n+1}x^{n+1}-\beta x}{\beta x-1}$$

یا بعد از چند تبدیل آشکار:

$$s_n(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}\,\frac{\left(\alpha^{n+1}x^{n+1}-\alpha x\right)(\beta x-1)-\left(\beta^{n+1}x^{n+1}-\beta x\right)(\alpha x-1)}{(\alpha x-1)(\beta x-1)}$$

و گذشته از این:

$$s_n(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^{n+1}\beta x^{n+2}-\alpha^{n+1}x^{n+1}+\alpha x}{\alpha\beta x^2-(\alpha+\beta)x+1}-\frac{\alpha\beta^{n+1}x^{n+2}-\beta^{n+1}x^{n+1}+\beta x}{\alpha\beta x^2-(\alpha+\beta)x+1}\right)$$

اکنون با به خاطر آوردن این مطلب که $\alpha\beta=-1$، $\alpha+\beta=1$ و $\alpha-\beta=\sqrt{5}$، داریم:

$$s_n(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}\,\frac{x\sqrt{5}-\left(\alpha^n-\beta^n\right)x^{n+2}-\left(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}\right)x^{n+1}}{1-x-x^2}$$

و سرانجام؛

(۲۴۰۱)
$$s_n(x)=\frac{x-u_nx^{n+2}-u_{n+1}x^{n+1}}{1-x-x^2}$$

به ویژه با قرار دادن $x=1$ در (۲۴۰۱)، حاصل می‌کنیم:

$$s_n(1)=u_1+u_2+\cdots+u_n=\frac{1-u_n-u_{n+1}}{-1}=u_{n+2}-1$$

که همان فرمولی است که قبلاً در بخش ۱ ذکر شد.

به ازای $x=-1$، داریم:

$$\begin{aligned}s_n(-1)&=u_1-u_2+\cdots+(-1)^{n-1}u_n\\&=\frac{-1-u_n(-1)^{n+2}-u_{n+1}(-1)^{n+1}}{-1}\\&=(-1)^{n+1}u_{n-1}+1\end{aligned}$$

که به معادلهٔ (۶۰۱) واقع در بخش ۳ بر می‌گردد.

اکنون به ذکر دو حالت «استثنایی» می‌پردازیم.

فرض می‌کنیم:

$$x=1/\alpha=-\beta$$

در این صورت در (۲۳۰۱) هر جملهٔ تصاعد اوّل برابر ۱ و مجموع این تصاعد برابر n می‌شود؛ همچنین قدر نسبت تصاعد دوم برابر $-\beta^2$ می‌شود.

بنابراین:

$$\begin{aligned}s_n\left(\frac{1}{\alpha}\right)&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(n-(\beta^2-\beta^4+\cdots+(-1)^{n-1}\beta^{2n})\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(n-\frac{\beta^2-(-1)^n\beta^{2n+2}}{1+\beta^2}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(n-\frac{\beta^2}{1+\beta^2}+(-1)^n\beta^{2n}\frac{\beta^2}{1+\beta^2}\right)\end{aligned}$$

سرانجام، با ملاحظهٔ این که:

$$1+\beta^2=2+\beta=2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\beta^2}{1+\beta^2}&=\frac{1+\beta}{2+\beta}=\frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}=\frac{\left(3-\sqrt{5}\right)\left(5+\sqrt{5}\right)}{\left(5-\sqrt{5}\right)\left(5+\sqrt{5}\right)}\\&=\frac{10-2\sqrt{5}}{20}\end{aligned}$$

به دست می‌آوریم:

$$s_n\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{n}{\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{5}-1}{10}+(-1)^n\beta^{2n}\,\frac{\sqrt{5}-1}{10}$$

(۲۵۰۱)

برای نتیجه گرفتن، فرض می‌کنیم:

$$x=1/\beta=-\alpha$$

در این حالت، قدر نسبت‌های تصاعدهای اخیر و قبلی واقع در (۲۳۰۱)، برابر ۱ و $-\alpha^2$ اند. بنابراین داریم:

$$s_n\left(\frac{1}{\beta}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left((\alpha^2-\alpha^4+\cdots+(-1)^{n-1}\alpha^{2n})-n\right)$$

با محاسبه‌ای مشابه با مورد پیشین، رابطهٔ زیر را به دست می‌آوریم:

$$s_n\left(\frac{1}{\beta}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^2-(-1)^n\alpha^{2n+2}}{1+\alpha^2}-n\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left((-1)^{n+1}\alpha^{2n}\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}+\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}-n\right)$$

و در نتیجه مورد زیر را حاصل می‌کنیم:

$$s_n\left(\frac{1}{\beta}\right)=(-1)^{n+1}\frac{1+\sqrt{5}}{10}\alpha^{2n}+\frac{1+\sqrt{5}}{10}-\frac{n}{\sqrt{5}}$$

(۲۶۰۱)

۲۳. اکنون مایل به بررسی رفتار $s_n(x)$ هنگامی هستیم که x ثابت باشد و n بدون محدودیت افزایش یابد. با حد گرفتن از n در معادلهٔ (۲۳۰۱) به دست می‌آوریم:

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\Big((\alpha x+\alpha^2x^2+\cdots+\alpha^n x^n)$$

$$-(\beta x+\beta^2x^2+\cdots+\beta^n x^n)\Big)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\lim_{n\to\infty}\left(\alpha x+\alpha^2x^2+\cdots+\alpha^n x^n\right)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}\lim_{n\to\infty}\left(\beta x+\beta^2x^2+\cdots+\beta^n x^n\right)$$

بنابراین آنچه در این مورد نیاز داریم، یافتن حدود دو تصاعد هندسی است. به عبارت دیگر، باید مجموع های دو تصاعد هندسی نامتناهی را بیابیم. برای این مقصود، این مطلب شناخته شده را به خاطر می‌آوریم که یک تصاعد هندسی نامتناهی، دارای مجموعی متناهی است؛ اگر و تنها اگر قدرمطلق قدر نسبتش کم‌تر از ۱ باشد. قدر نسبت‌های دو تصاعد مورد بحث، به ترتیب عبارت‌اند از αx و βx.

از آن‌جا که $|\beta|<|\alpha|$ به سادگی نتیجه می‌گیریم که $|\alpha x|<1$ مستلزم $|\beta x|<1$ است. در نتیجه، نابرابری $|\alpha x|<1$ وجود حدود مورد نظر ما را مسلّم می‌کند.

به این ترتیب، حد:

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x)$$

با این شرط موجود است که:

$$|x|<1/\alpha$$

حد مزبور را با $s(x)$ نمایش می‌دهیم. مقدار عملی این حد را می‌توان با استفاده از فرمول (۲۴۰۱) محاسبه کرد.

به این ترتیب، کارمان را بر مبنای قضیهٔ واقع در بخش ۲۰، ادامه داده، به دست می‌آوریم:

$$u_n \le \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}+1$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty} u_n x^{n+2} \le \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}+1\right)x^{n+2}$$

$$=\frac{x^2}{\sqrt{5}}\lim_{n\to\infty}(\alpha x)^n+\lim_{n\to\infty}x^{n+2}$$

از آن‌جا که واضحاً $|\alpha x|<1$ مستلزم $|x|<1$ است، نتیجه می‌گیریم که دو حد اخیر برابر صفرند و از آن:

$$\lim_{n\to\infty} u_n \ x^{n+2}=0$$

استدلالی مشابه به دست می‌دهد:

$$\lim_{n\to\infty} u_{n+1} \ x^{n+1}=0$$

در نتیجه، هنگامی که n بدون محدودیت افزایش یابد، با حد گرفتن در معادلهٔ (۲۴۰۱)، رابطهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$s(x)=\lim_{n\to\infty}s_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x-u_nx^{n+2}-u_{n+1}x^{n+1}}{1-x-x^2}$$

$$=\frac{1}{1-x-x^2}\left(x-\lim_{n\to\infty}u_nx^{n+2}-\lim_{n\to\infty}u_{n+1}x^{n+1}\right)$$

$$=\frac{x}{1-x-x^2}$$

نتیجهٔ به دست آمده را می‌توان، به گونه‌ای پاکیزه، به صورت زیر نوشت:

$$u_1x+u_2x^2+\cdots+u_nx^n+\cdots=\frac{x}{1-x-x^2} \qquad (۲۸۰۱)$$

از (۲۸۰۱) و با تخصیص مقادیر خاص به متغیر x، می‌توان فرمول‌های گوناگون بسیاری استخراج کرد. به عنوان نمونه، با قرار دادن $x=1/2$، به مورد زیر می‌رسیم:

$$\frac{u_1}{2}+\frac{u_2}{2^2}+\cdots+\frac{u_n}{2^n}+\cdots=2$$

برای
دانش آموزان
سال اول

میر شهرام صدر
www.sadr@iransciland.com

عبارت‌های جبری گویا و اعمال بر روی آن‌ها

کسرهایی که غالباً صورت و مخرج آن‌ها چند جمله‌ای است، عبارت‌های جبری گویا می‌نامیم. برای مثال عبارت‌هایی به صورت $\frac{2x^2+x-1}{x+2}$ و $\frac{1}{x-1}$ و $\frac{x^3-7}{x}$ را عبارت‌های جبری گویا هستند.

دامنه عبارت‌های جبری گویا

دامنه عبارت‌های گویا برابر با مجموعه اعداد حقیقی به غیر از ریشه‌های مخرج[1] (در صورت وجود) است، یعنی مقادیری از x که به ازای آن‌ها مخرج کسر صفر می‌شود، از مجموعه اعداد حقیقی R حذف می‌کنیم.

{ریشه‌های مخرج} D=R− (دامنه عبارت گویا)

مثال: دامنه عبارت‌های گویای زیر را تعیین کنید.

الف) $\frac{x^2+1}{x^2-1}$ ب) $\frac{2x^2+1}{x^2+3x-4}$

ج) $\frac{5}{x^2+x}$ د) $\frac{x^3+3x^2+2x}{x(x+1)(x^2-4)}$

حل:

الف) $\frac{x^2+1}{x^2-1}; x^2-1=0 \Rightarrow (x-1)(x+1)=0$

$\Rightarrow x-1=0$ یا $x+1=0 \Rightarrow x=1$ یا $x=-1$

$\Rightarrow D=R-\{-1,+1\}$

ب)

$\frac{2x^2+1}{x^2+3x-4}; x^2+3x-4=0 \Rightarrow (x-1)(x+4)=0$

$\Rightarrow x-1=0$ یا $(x+4)=0 \Rightarrow x=1$ یا $x=-4$

$\Rightarrow D=R-\{-4,1\}$

ج) $\frac{5}{x^2+x}; x^2+x=0 \Rightarrow x(x+1)=0$

$\Rightarrow x=0$ یا $x=-1 \Rightarrow D=R-\{-1,0\}$

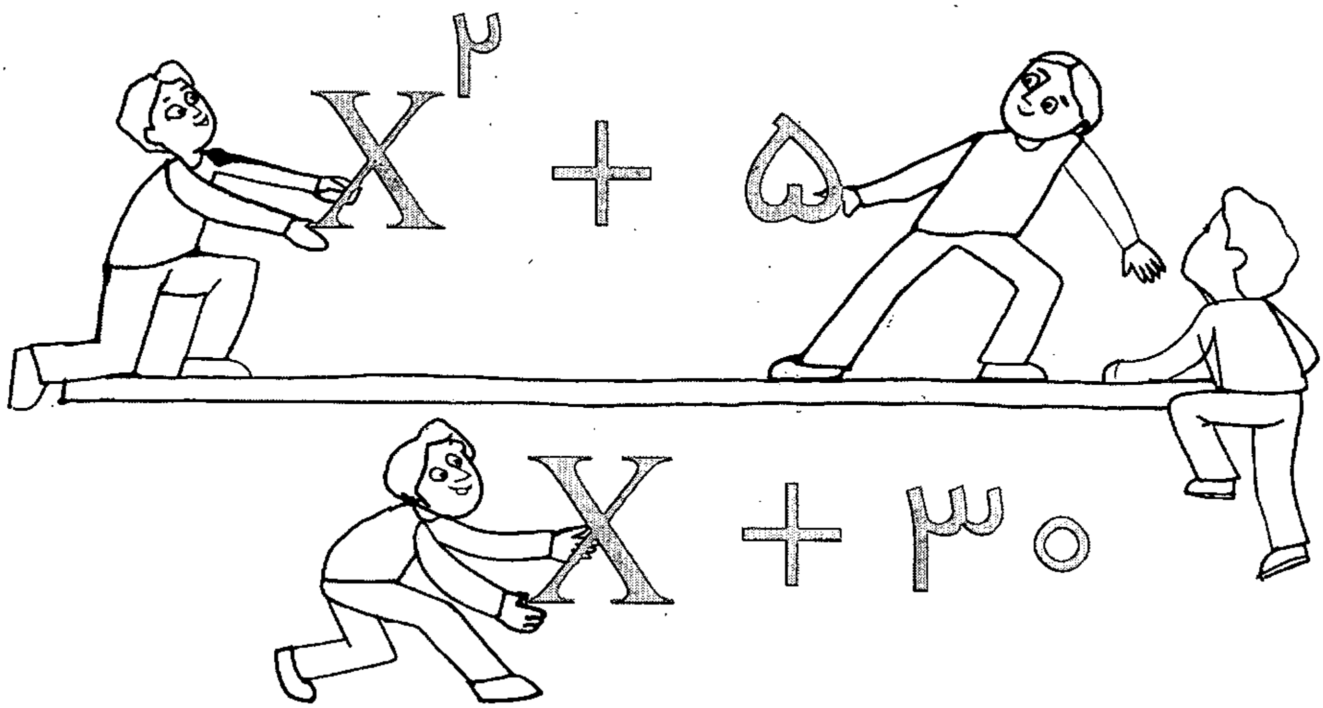
د) $\frac{x^3+3x^2+2x}{x(x+1)(x^2-4)}; x(x+1)(x^2-4)=0$

$\Rightarrow x(x+1)(x-2)(x+2)=0$

$\Rightarrow x=0$ یا $x+1=0$ یا $x-2=0$ یا $x+2=0$

$\Rightarrow x=0$ یا $x=-1$ یا $x=2$ یا $x=-2$

$\Rightarrow D=R-\{-2,-1,0,2\}$



ساده‌کردن عبارت‌های جبری گویا

برای این منظور، ابتدا صورت و مخرج کسر را به حاصل‌ضرب عوامل اول تجزیه می‌کنیم، سپس عوامل مشترک را از صورت و مخرج حذف کرده، تا عبارت ساده شده به‌دست آید.

مثال: عبارت‌های جبری گویای زیر را ساده کنید.

الف) $\dfrac{۳x^۲y+۶xy^۲}{x^۲-۴y^۲}=\dfrac{۳xy(x+۲y)}{(x-۲y)(x+۲y)}=\dfrac{۳xy}{x-۲y}$

ب) $\dfrac{۲۱a^۲bc^۲}{۲۸abd}=\dfrac{۳ac^۲}{۴d}$

ج) $\dfrac{۴۲a^۳-۳۰a^۳m}{۳۵am^۲-۲۵m^۳a}=\dfrac{۶a^۳(۷-۵m)}{۵am^۲(۷-۵m)}=\dfrac{۶a^۲}{۵m^۲}$

د) $\dfrac{۳۵+۵x+۷y+xy}{۵+y}=\dfrac{(۳۵+۷y)+(۵x+xy)}{(۵+y)}$

$=\dfrac{۷(۵+y)+x(۵+y)}{(۵+y)}=\dfrac{(۵+y)(۷+x)}{(۵+y)}=۷+x$

جمع و تفریق عبارت‌های جبری گویا

قبل از این‌که قاعده کلی جمع و تفریق عبارت‌های گویا را بیان کنیم، ابتدا روش محاسبه مخرج مشترک بین دو یا چند کسر را بیان می‌کنیم.

مخرج مشترک بین دو یا چند کسر همان کوچکترین مضرب مشترک بین مخرج‌های آن‌ها است.

مثال: مخرج مشترک حاصل جمع‌های زیر را پیدا کنید؟

الف) $\dfrac{۴}{x^۲+x}+\dfrac{۱}{x^۲+۳x+۲}$

حل:

مخرج کسر اول $A=x^۲+x=x(x+۱)$

مخرج کسر دوم $B=x^۲+۳x+۲=(x+۱)(x+۲)$

مخرج مشترک (ک . م . م) $M=x(x+۱)(x+۲)$

یادآوری: برای محاسبه ک . م . م بین چند عبارت گویا، ابتدا هر یک از آن‌ها را تجزیه می‌کنیم، سپس حاصل ضرب عوامل مشترک با نمای بزرگتر در عوامل غیرمشترک برابر با ک . م . م است.

ب) $\dfrac{۲x+۳}{x^۲-۱}+\dfrac{۳}{x^۴-۱}+\dfrac{x-۱}{x^۶-۱}$

حل: مخرج کسر اول $A = x^{۲} - ۱ = (x-۱)(x+۱)$

مخرج کسر دوم $B = x^{۴} - ۱ = (x^{۲}-۱)(x^{۲}+۱)$

$$= (x-۱)(x+۱)(x^{۲}+۱)$$

مخرج کسر سوم $C = x^{۶} - ۱ = (x^{۲}-۱)(x^{۴}+x^{۲}+۱)$

$$= (x-۱)(x+۱)(x^{۴}+x^{۲}+۱)$$

مخرج مشترک $M = (x-۱)(x+۱)(x^{۲}+۱)(x^{۴}+x^{۲}+۱)$ (ک.م.م)

برای جمع و تفریق عبارت‌های گویا، مراحل زیر را به ترتیب انجام می‌دهیم:

۱. صورت و مخرج هرکسر را به حاصل ضرب عوامل اول تجزیه کرده و در صورت امکان ساده می‌کنیم.

۲. مخرج مشترک یا همان کوچکترین مضرب مشترک بین مخرج‌ها را به دست می‌آوریم.

۳. به جای هریک از کسرها، عبارت‌های گویای معادل را که مخرج آن‌ها، همان کوچک‌ترین مضرب مشترک است، قرار می‌دهیم.

۴. عبارت‌های گویای هم‌مخرج را با هم جمع و تفریق می‌کنیم و حاصل را در صورت امکان ساده می‌کنیم.

مثال: حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $A = \dfrac{۷}{mn} + \dfrac{۳}{mn^{۲}}$

حل:

$$\left.\begin{array}{l} mn \text{ مخرج کسر اول} \\ mn^{۲} \text{ مخرج کسر دوم} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{مخرج مشترک } mn^2$$

کسرهای معادل

$$\begin{cases} \dfrac{۷}{mn} = \dfrac{۷n}{mn^{۲}} \\ \dfrac{۳}{mn^{۲}} \end{cases} \Rightarrow A = \dfrac{۷n}{mn^{۲}} + \dfrac{۳}{mn^{۲}} = \dfrac{۷n+۲}{mn^{۲}}$$

ب) $B = \dfrac{y}{y^{۲}+۲y-۸} - \dfrac{y+۳}{y^{۲}-۱۶}$

حل:

مخرج کسر اول $= y^{۲}+۲y-۸ = (y-۲)(y+۴)$

مخرج کسر دوم $= y^{۲}-۱۶ = (y-۴)(y+۴)$

$\Rightarrow$ مخرج مشترک $= (y-2)(y+4)(y-4)$

کسرهای معادل

$$\begin{cases} \dfrac{y}{y^{۲}+۶y+۸} = \dfrac{y}{(y+۲)(y+۴)} = \dfrac{y(y-۴)}{(y+۲)(y+۴)(y-۴)} \\ \dfrac{y-۳}{y^{۲}-۱۶} = \dfrac{y-۳}{(y-۴)(y+۴)} = \dfrac{(y-۳)(y+۲)}{(y+۲)(y-۴)(y+۴)} \end{cases}$$

$$B = \frac{y(y-۴)}{(y+۲)(y+۴)(y-۴)} - \frac{(y-۳)(y+۲)}{(y+۲)(y-۴)(y+۴)}$$

$$= \frac{y(y-۴)-(y-۳)(y+۲)}{(y-۲)(y-۴)(y+۴)}$$

$$= \frac{y^{۲}-۴y-y^{۲}+y+۶}{(y-۲)(y-۴)(y+۴)} = \frac{-۳(y-۲)}{(y-۲)(y-۴)(y+۴)}$$

$$= \frac{-۳}{(y-۴)(y+۴)}$$

ج)

$$C = \frac{ay^{۲}+b}{۲y-۱} + \frac{۲by+۲ay^{۲}}{۱-۴y^{۲}} - \frac{ay^{۲}-b}{۲y+۱}$$

حل:

مخرج کسر اول $= ۲y-۱$

مخرج کسر دوم $= ۱-۴y^{۲} = (۱-۲y)(۱+۲y) = -(۲y-۱)(۱+۲y)$

مخرج کسر سوم $= ۲y+۱$

مخرج مشترک $= -(۲y-۱)(۱+۲y)$

کسرهای معادل

$$\begin{cases} \dfrac{ay^{۲}+b}{۲y-۱} = \dfrac{(ay^{۲}+b)[-(۱+۲y)]}{-(۲y-۱)(۱+۲y)} = \dfrac{-ay^{۲}-۲ay^{۳}-b-۲by}{-(۲y-۱)(۱+۲y)} \\ \dfrac{۲by+۲ay^{۲}}{۱-۴y^{۲}} = \dfrac{+(۲by+۲ay^{۲})}{-(۲y-۱)(۱+۲y)} = \dfrac{+۲by+۲ay^{۲}}{-(۲y-۱)(۱+۲y)} \\ \dfrac{ay^{۲}-b}{۲y+۱} = \dfrac{-(۲y-۱)(ay^{۲}-b)}{-(۲y-۱)(۱+۲y)} = \dfrac{+ay^{۲}-b-۲ay^{۳}+۲by}{-(۲y-۱)(۱+۲y)} \end{cases}$$

$$C = \frac{-ay^{۲}-۲ay^{۳}-b-۲by}{-(۲y-۱)(۱+۲y)} + \frac{+۲by+۲ay^{۲}}{-(۲y-۱)(۱+۲y)}$$

$$- \frac{ay^{۲}-b-۲ay^{۳}+۲by}{-(۲y-۱)(۱+۲y)}$$

$$= \frac{-ay^{۲}-۲ay^{۳}-b-۲by+۲by+۲ay^{۲}-ay^{۲}+b+۲ay^{۳}-۲by}{-(۲y-۱)(۱+۲y)}$$

$$=\frac{-2by}{-(2y-1)(1+2y)}=\frac{2by}{(2y-1)(1+2y)}$$

د)

$$D=\frac{x+2}{x^2+7x+12}-\frac{x+1}{x^2-3x-18}+\frac{x-2}{x^2-2x-24}$$

حل:

مخرج کسر اول $= x^2+7x+12=(x+3)(x+4)$

مخرج کسر دوم $= x^2-3x-18=(x+3)(x-6)$

مخرج کسر سوم $= (x^2-2x-24)=(x-6)(x+4)$

مخرج مشترک $= (x+3)(x+4)(x-6)$

$$D=\frac{(x+2)(x-6)}{(x+3)(x+4)(x-6)}-\frac{(x+1)(x+4)}{(x+3)(x+4)(x-6)}$$

$$+\frac{(x-2)(x+3)}{(x+3)(x+4)(x-6)}$$

$$=\frac{x^2-4x-12-x^2-5x-4+x^2+x-6}{(x+3)(x+4)(x-6)}$$

$$=\frac{x^2-8x-22}{(x+3)(x+4)(x-6)}$$

ضرب عبارت‌های جبری گویا

برای ضرب دو یا چند عبارت جبری گویا، مراحل زیر را به ترتیب انجام می‌دهیم:

۱. صورت و مخرج هر کسر را به حاصل عوامل اول تجزیه کرده و در صورت امکان ساده می‌کنیم.

۲. صورت کسرها را در یکدیگر و مخرج کسرها را در یکدیگر ضرب کرده و در صورت امکان کسر حاصل را ساده می‌کنیم.

مثال: حاصل عبارات‌های زیر را به دست آورید.

الف)

$$\frac{x^2-4}{x-1}\times\frac{x^2-1}{x+2}$$

$$=\frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)}\times\frac{(x-1)(x+1)}{(x+2)}=\frac{(x-2)(x+2)(x+1)(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

$$=(x-2)(x+1)$$

ب)

$$\frac{3x^2-14x-5}{9x^2-1}\times\frac{1}{x^2-6x+5}$$

$$=\frac{(x-5)(3x+1)}{(3x-1)(3x+1)}\times\frac{1}{(x-1)(x-5)}$$

$$=\frac{(x-5)}{(3x-1)}\times\frac{1}{(x-1)(x-5)}$$

$$=\frac{(x-5)}{(3x-1)(x-1)(x-5)}=\frac{1}{(3x-1)(x-1)}$$

ج)

$$\frac{x^4-8x}{x^2-4x-5}\times\frac{x^2+2x+1}{x^3-x^2-2x}$$

$$=\frac{x(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-5)(x+1)}\times\frac{(x+1)(x+1)}{x(x-2)(x+1)}$$

$$=\frac{x(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-5)(x+1)}\times\frac{(x+1)}{x(x-2)}=\frac{x^2+2x+4}{x-5}$$

د)

$$A=\left(\frac{3x}{2x-1}-\frac{3x-1}{2x+1}\right)\left(2x-\frac{6x+1}{2x+3}\right)$$

$$A=\left(\frac{3x(2x+1)}{(2x-1)(2x+1)}-\frac{(2x-1)(3x-1)}{(2x+1)(2x-1)}\right)\left(\frac{2x(2x+3)}{(2x+3)}-\frac{6x+1}{(2x+3)}\right)$$

$$=\frac{6x^2+3x-6x^2+5x-1}{(2x-1)(2x+1)}\times\frac{4x^2+6x-6x-1}{(2x+3)}$$

$$=\frac{8x-1}{(2x-1)(2x+1)}\times\frac{4x^2-1}{(2x-3)}$$

$$=\frac{(8x-1)(2x-1)(2x+1)}{(2x-1)(2x+1)(2x-3)}=\frac{8x-1}{2x-3}$$

تقسیم عبارت‌های جبری گویا

برای تقسیم دوعبارت جبری گویا مراحل زیر را به ترتیب انجام می‌دهیم:

۱. صورت و مخرج هر کسر را به حاصل ضرب عوامل اول تجزیه کرده و در صورت امکان ساده می‌کنیم.

۲. کسر اول را در معکوس کسر دوم ضرب می‌کنیم.

مثال: حاصل این عبارات را به دست آورید.

الف)

$$\frac{x^4+8x^2+7}{x^2-144y^2}\div\frac{x^4-1}{3x-36y}$$

$$=\frac{(x^2+1)(x^2+7)}{(x-12y)(x+12y)}\div\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{3(x-12y)}$$

$$=\frac{(x^2+1)(x^2+7)}{(x-12y)(x+12y)}\times\frac{3(x-12y)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$

$$=\frac{3(x^2+7)}{(x+12y)(x-1)(x+1)}$$

ب)

$$\frac{x^2-14x-15}{x^2-4x-45}\div\frac{x^2-12x-45}{x^2-6x-27}$$

$$=\frac{(x-15)(x+1)}{(x-9)(x+5)}\div\frac{(x-15)(x+3)}{(x-9)(x+3)}$$

$$=\frac{(x-15)(x+1)}{(x-9)(x+5)}\times\frac{(x-9)}{(x-15)}=\frac{x+1}{x+5}$$

ج)

$$\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right)\div\left(\frac{1}{x-y}-\frac{y}{x^2-y^2}\right)$$

$$\left(\frac{(x+y)(x+y)}{(x-y)(x+y)}-\frac{(x-y)(x-y)}{(x-y)(x+y)}\right)\div\left(\frac{(x+y)}{(x-y)(x+y)}-\frac{y}{(x-y)(x+y)}\right)$$

$$=\left(\frac{x^2+2xy+y^2-x^2+2xy-y^2}{(x-y)(x+y)}\right)\div\left(\frac{x+y-y}{(x-y)(x+y)}\right)$$

$$=\frac{4xy}{(x-y)(x+y)}\times\frac{(x-y)(x+y)}{x}=4y$$

مسائل حل شده

حاصل این عبارت‌ها را به دست آورید.

۱.

$$\frac{a^4-a^2}{a^4+a^3}-\frac{a^2+1-2a}{a^2-a}+\frac{a-1}{a^2-1}$$

$$=\frac{a^2(a^2-1)}{a^3(a+1)}-\frac{(a-1)(a-1)}{a(a-1)}+\frac{a-1}{(a-1)(a+1)}$$

$$=\frac{a^2(a-1)(a+1)}{a^3(a+1)}-\frac{a-1}{a}+\frac{1}{a+1}$$

$$=\frac{a-1}{a}-\frac{a-1}{a}+\frac{1}{a+1}=\frac{1}{a+1}$$

۲.

$$\frac{a^2+ab}{a^2-ab}-\frac{a^3+2a^2b+ab^2}{a^2b-b^3}$$

$$=\frac{a(a+b)}{a(a-b)}-\frac{a(a+b)(a+b)}{b(a-b)(a+b)}$$

$$=\frac{a+b}{a-b}-\frac{a(a+b)}{b(a-b)}=\frac{b(a+b)}{b(a-b)}-\frac{a(a+b)}{b(a-b)}$$

$$=\frac{ab+b^2-a^2-ab}{b(a-b)}$$

$$=\frac{-(a-b)(a+b)}{b(a-b)}=\frac{-(a+b)}{b}$$

۳.

$$A=\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ac}{(b-c)(b-a)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}$$

مخرج کسر اول $=(a-b)(a-c)$

مخرج کسر دوم $=(b-c)(b-a)=-(a-b)(b-c)$

مخرج کسر سوم $=(c-a)(c-b)=[-(a-c)]\,[-(b-c)]=(a-c)(b-c)$

مخرج مشترک $=-(a-b)(b-c)(a-c)$

$$A=\frac{-bc(b-c)}{-(a-b)(b-c)(a-c)}+\frac{ac(a-c)}{-(a-b)(b-c)(a-c)}+\frac{-ab(a-b)}{-(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$=\frac{-b^2c+bc^2+a^2c-ac^2-a^2b+ab^2}{-(a-b)(b-c)(a-c)}$$

در صورت کسر abc را اضافه و کم می‌کنیم:

$$= \frac{-b^2c + bc^2 + a^2c - ac^2 - a^2b + ab^2 + abc - abc}{-(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$A = \frac{(-a^2b + abc + a^2c - ac^2) + (bc^2 - b^2c - abc + ab^2)}{-(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$= \frac{-a(ab - bc - ac + c^2) + b(c^2 - bc - ac + ab)}{-(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$= \frac{(ab - bc - ac + c^2)(-a+b)}{-(a-b)(b-c)(a-c)} = \frac{(a-c)(b-c)(-a+b)}{-(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$= \frac{-(a-b)}{-(a-b)} = 1$$

.۴

$$P = \frac{a+x}{(m+n)^3} \times \frac{x^2-y^2}{12} \times \frac{(m+n)^2}{(m-n)} \times \frac{6(m^2-n^2)}{x+y}$$

$$P = \frac{(a+x)}{(m+n)(m+n)(m+n)} \times \frac{(x-y)(x+y)}{12}$$

$$\times \frac{(m+n)(m+n)}{(m-n)} \times \frac{6(m+n)(m-n)}{(x+y)} = \frac{(a+x)(x-y)}{2}$$

.۵

$$I = \frac{\frac{x-1}{x+3} - \frac{x+3}{x-1}}{1 - \frac{x^2+x-4}{x^2+2x-3}} = \left(\frac{x-1}{x+3} - \frac{x+3}{x-1}\right) \div \left(1 - \frac{x^2+x-4}{x^2+2x-3}\right)$$

$$= \left(\frac{(x-1)(x-1)}{(x+3)(x-1)} - \frac{(x+3)(x+3)}{(x+3)(x-1)}\right) \div \left(\frac{x^2+2x-3}{x^2+2x-3} - \frac{x^2+x-4}{x^2+2x-3}\right)$$

$$= \left(\frac{x^2-2x+1-x^2-6x-9}{(x+3)(x-1)}\right) \div \left(\frac{x^2+2x-3-x^2-x+4}{x^2+2x-3}\right)$$

$$= \frac{-8(x+1)}{(x+3)(x-1)} \div \frac{x+1}{x^2+2x-3}$$

$$= \frac{-8(x+1)}{(x+3)(x-1)} \times \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)} = -8$$

۶. اگر تساوی $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{8x+11}{(x-1)(x-2)}$ به ازای جمیع مقادیر x برقرار باشد، مقدار B+A را بیابید.

حل:

$$\frac{Ax - 2A + Bx - B}{(x-1)(x-2)} = \frac{8x-11}{(x-1)(x-2)}$$

$$\Rightarrow \frac{(A+B)x - (2A+B)}{(x-1)(x-2)} = \frac{8x-11}{(x-1)(x-2)}$$

$$\Rightarrow (A+B)x - (2A+B) \equiv 8x - 1 \Rightarrow \begin{cases} A+B=8 \\ 2A+B=11 \end{cases}$$

$$\overline{A=3\ ,\ B=5}$$

$$\Rightarrow A+B = 3+5 = 8$$

حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

۱. $A = \left(\frac{ab+1}{ab-1} - \frac{ab-1}{ab+1}\right) \div \left(\frac{ab+1}{ab-1} - \frac{ab-1}{ab+1} - 2\right)$

۲. $B = \dfrac{(x+\frac{1}{y})^m (x-\frac{1}{y})^n}{(y+\frac{1}{x})^m (y-\frac{1}{x})^n}$

۳. $C = \frac{1}{1+x^{a-b}} + \frac{1}{1+x^{b-a}}$

۴. $D = \frac{2x+1}{x-3} + \frac{x+1}{x+2} - \frac{2x^2-2x-7}{x^2-x-6}$

۵. $E = \left(\frac{1+x+x^2}{1+x} - \frac{1-x+x^2}{1-x}\right)\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{4} - x\right)$

۶. $F = \left(1 + \frac{2ab}{a^2+b^2}\right)\left(1 - \frac{2ab}{(a+b)^2}\right)$

زیرنویس ....

۱. ریشه‌های مخرج مقادیری از متغیر x می‌باشند که به ازای آن‌ها مخرج کسر برابر با صفر می‌شود.

اثبات دو قضیه از تقارن به کمک نگاشت ها

برای
دانش آموزان
سال سوم

حمید رشتی‌زاده
دبیر ریاضی شهرستان های استان تهران

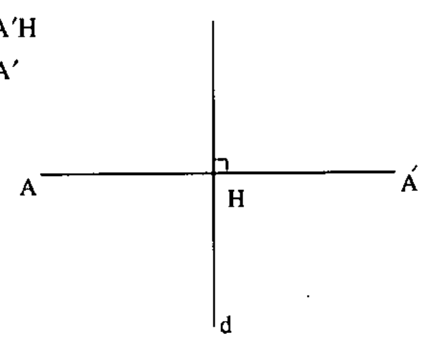
مقدمه

نگاشت‌ها در دورهٔ آموزشی متوسطه، از اهمیت زیادی برخوردارند و آموزش بخشی از هندسه به کمک نگاشت‌ها، از هندسه دیدگاهی تحلیلی را ارائه می دهد. آن‌چه در این مقاله مطالعه می کنید، اثبات دو قضیه از نگاشت‌هاست که در بیشتر کتب هندسی، به‌صورت سنّتی اثبات می‌شوند و سعی بر آن شده که با استفاده از مطالب آموزشی که در کتاب هندسهٔ (۲) ارائه شده است، ثابت شوند.

تعریف ۱. خط ثابت d را در صفحه در نظر گرفته، نقطهٔ A' را تصویر نقطهٔ A نسبت به خط d می‌نامند؛ هرگاه:

۱) $AH = A'H$

۲) $d \perp AA'$



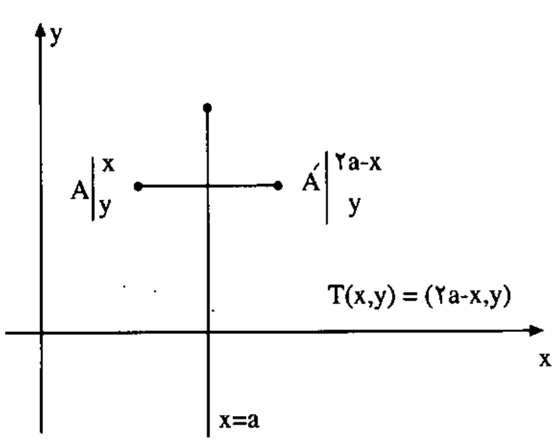
خط d را محور تقارن (بازتاب) و نقاط A و A' را تصویر یکدیگر نسبت به این محور و این تقارن را تقارن محوری می‌نامند.

فرض کنیم $a \in R$ و خط d به معادله $x = a$ باشند. در این صورت، با محاسباتی ساده، در می‌یابیم که تصویر نقطهٔ $A\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ نسبت به خط d عبارت است از: $A'\begin{vmatrix} ۲a - x \\ y \end{vmatrix}$ (۱).

در این صورت، اگر T نگاشت مورد نظر ما باشد، آن گاه ضابطهٔ آن به صورت:

$$T(x, y) = (۲a - x, y)$$

خواهد بود.



به روش مشابهی، می‌توان نشان داد که اگر خط d به معادله $y = b$ باشد، آن‌گاه تصویر نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ نسبت به d نقطهٔ $A''\left|\begin{matrix}x\\2b-y\end{matrix}\right.$ (۲) خواهد بود و اگر T' نگاشت این بازتاب باشد، داریم:

$$T'(x,y) = (x, 2b - y)$$

اکنون این سؤال مطرح می‌شود که اگر d به معادلهٔ $y = ax + b$ باشد، قرینهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ نسبت به d چیست؟

برای پاسخ به این سؤال، فرض کنیم که $A'\left|\begin{matrix}\alpha\\\beta\end{matrix}\right.$ نقطهٔ مورد نظر باشد، آن‌گاه باید دو مورد را در نظر بگیریم.

۱. اگر M وسط پاره‌خط AA' باشد، آن‌گاه مختصات M باید در معادلهٔ d صدق کند؛ درنتیجه:

$$M\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}(x+\alpha)\\ \frac{1}{2}(y+\beta)\end{matrix}\right. \Rightarrow \frac{1}{2}(y+\beta) = \frac{a}{2}(x+\alpha) + b$$

$$\Rightarrow y + \beta = a(x+\alpha) + 2b$$

$$\Rightarrow a\alpha - \beta = y - ax - 2b \qquad (3)$$

۲. از طرف دیگر، فرض می‌کنیم که شیب پاره‌خط AA'، m باشد، آن‌گاه $ma = -1$ خواهد بود یا:

(۴)

$$m = \frac{y-\beta}{x-\alpha} \Rightarrow ay - a\beta = \alpha - x \Rightarrow \alpha + a\beta = ay + x$$

با قرار دادن روابط (۳) و (۴) در یک دستگاه و حل آن، به‌دست می‌آوریم:

$$\alpha = \frac{1}{1+a^2}\left[2ay + (1-a^2)x - 2ab\right]$$

و

$$\beta = \frac{1}{1+a^2}\left[(a^2-1)y + 2ax + 2b\right]$$

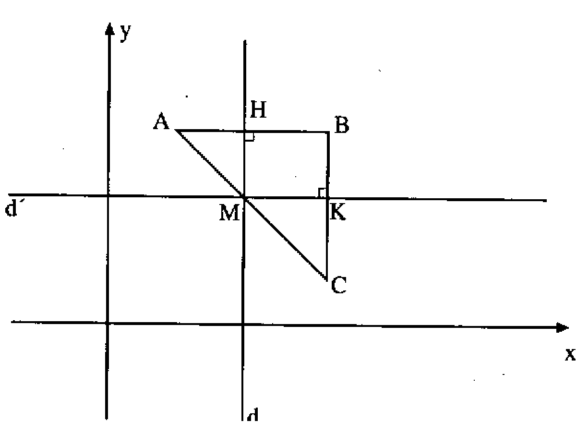
لذا مختصات نقطهٔ A' مشخص خواهد شد. حال اگر نگاشت متناظر با این تقارن را با F نمایش دهیم، آن‌گاه ضابطهٔ آن به صورت زیر است:

$$F(x,y) = \left(\frac{1}{1+a^2}\left[2ay + (1-a^2)x - 2ab\right] \;,\; \frac{1}{1+a^2}\left[(a^2-1)y + 2ax + 2b\right]\right) \qquad (5)$$

تعریف ۲. فرض کنیم که M نقطهٔ ثابتی در صفحه باشد. نقطهٔ A' را تصویر نقطهٔ A نسبت به نقطهٔ M می‌نامند؛ هرگاه $AM = A'M$.

نقطهٔ M را مرکز تقارن و نقاط A و A' را تصاویر یکدیگر نسبت به نقطهٔ M در این تقارن مرکزی می‌نامند.

فرض کنیم $M\left|\begin{matrix}x_1\\y_1\end{matrix}\right.$ مرکز تقارن و $A\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ نقطه‌ای در صفحه باشد. خطوط d و d' را به معادلات $x = x_1$ و $y = y_1$ رسم می‌کنیم. اگر تصویر A را نسبت به d، B و تصویر B را نسبت به d'، C بنامیم، از برابری دو مثلث $\overset{\Delta}{AHM}$ و $\overset{\Delta}{CMK}$، نتیجه می‌شود که $AM = CM$، لذا طبق تعریف (۲) اگر M را به‌عنوان مرکز تقارن در نظر بگیریم، آن‌گاه نقطهٔ C همان نقطهٔ A' خواهد بود.



با توجه به مطالب گفته شده، می‌توان دریافت که باید $B\left|\begin{matrix}2x_1-x\\y\end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix}2x_1-x\\2y_1-y\end{matrix}\right.$ باشند و درنتیجه، نگاشت تقارن مرکزی نسبت به نقطهٔ M عبارت است از:

$$D(x,y) = (2x_1 - x \;,\; 2y_1 - y) \qquad (6)$$

قضیهٔ ۱. ترکیب دو تقارن محوری با محور تقارن‌های موازی، یک انتقال است و اگر فاصلهٔ این دو محور تقارن را با h نمایش دهیم، طول بردار انتقال حاصل برابر ۲h خواهد بود.

برهان. حالت اول: اگر دو خط موازی محور عرض‌ها باشند، آن‌گاه معادلاتی به شکل $d: x = x_1$ و $d': x = x_2$ خواهند داشت. درنتیجه، اگر T نگاشت تقارن نسبت به d و T' نگاشت تقارن نسبت به d' باشند، آن‌گاه:

$$T'oT(x,y) = T'(T(x,y)) = T'(2x_1 - x, y) = (x + 2(x_2 - x_1), y)$$

، که به‌وضوع این نگاشت، یک انتقال با بردار $\vec{V} = (2x_2 - 2x_1 \; , \; 0)$ است و با توجه به این که فاصلهٔ بین این دو خط برابر $h = |x_2 - x_1|$ است، دیده می‌شود که $\|\vec{V}\| = 2h$.

حالت دوم: فرض کنیم که دو خط d و d' به ترتیب به معادلات $y = ax + b$ و $y = ax + b'$ موازی یکدیگر باشند. در این صورت، فاصلهٔ بین این دو خط عبارت است از $h = \frac{|b - b'|}{\sqrt{1 + a^2}}$. اکنون اگر باز هم T نگاشت تقارن نسبت به d و T' نگاشت تقارن نسبت به d' باشد، آن‌گاه برای نقطه‌ای مانند A در صفحه داریم $T(A) = A'$ و $T'(A') = A''$؛ ولی طبق رابطهٔ (۵) به‌دست می‌آید:

$$T(A) = T(x,y) = \left(\frac{1}{1+a^2}\left[2ay + (1-a^2)x - 2ab\right] \; , \; \frac{1}{1+a^2}\left[(a^2-1)y + 2ax + 2b\right]\right) = A' = (x', y')$$

و همچنین $T'(A') = A'' = (x'', y'')$ که در آن

$$x'' = \frac{1}{1+a^2}\left[2ay' + (1-a^2)x' - 2ab'\right]$$

و

$$y'' = \frac{1}{1+a^2}\left[(a^2-1)y' + 2ax' + 2b'\right]$$

که پس از ساده شدن داریم:

$$\begin{cases} x'' = x + \dfrac{2a(b-b')}{1+a^2} \\ y'' = y + \dfrac{2(b'-b)}{1+a^2} \end{cases}$$

و در نتیجه

$$T'oT(x,y) = \left(x + \frac{2a(b-b')}{1+a^2} \; , \; y + \frac{2(b'-b)}{1+a^2}\right) = G(x,y).$$

با توجه به ضابطهٔ G درمی‌یابیم که G یک انتقال است و بردار $\vec{V} = \left(\frac{2a(b-b')}{1+a^2} \; , \; \frac{2(b'-b)}{1+a^2}\right)$ بردار انتقال آن خواهد بود و $\|\vec{V}\| = \frac{2|b-b'|}{\sqrt{1+a^2}} = 2h$.

قضیهٔ ۲. ترکیب دو تقارن محوری با محور تقارن‌های متقاطع یک دوران است و زاویهٔ دوران، برابر است با دو برابر زاویه بین دو محور تقارن.

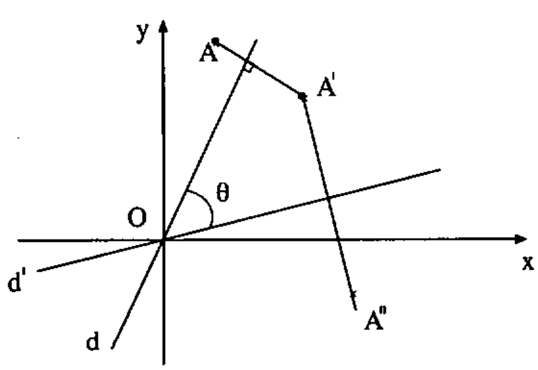
برهان. ابتدا فرض می‌کنیم که دو محور یکدیگر را در مبدأ مختصات قطع می‌کنند. درنتیجه، محورهای تقارن d و d' به ترتیب معادلاتی به صورت $y = ax$ و $y = a'x$ خواهند داشت $(a \neq a')$.

اگر T و T' نگاشت‌های متناظر با این دو تقارن باشند، آن‌گاه:

$$T'(A') = T'(x', y') = A'' = (x'', y'') \; ,$$
$$T(A) = T(x,y) = A' = (x', y')$$

$$T(x,y) = \left(\frac{1}{1+a^2}(2ay + (1-a^2)x), \frac{1}{1+a^2}((a^2-1)y + 2ax)\right) = (x', y')$$

$$T'(x', y') = \left(\frac{1}{1+a'^2}(2a'y' + (1-a'^2)x') \; , \; \frac{1}{1+a'^2}((a'^2-1)y' + 2a'x')\right) = (x'', y'')$$



که در آن

$$x'' = \frac{1}{1+a'^{2}}\left[\frac{2a'}{1+a^{2}}((a^{2}-1)y+2ax)+\frac{(1-a'^{2})}{1+a^{2}}(2ay+(1-a^{2})x)\right]$$

و پس از محاسبات با فرض

$$\begin{cases} m = \dfrac{(1-a^{2})(1-a'^{2})+4aa'}{(1+a^{2})(1+a'^{2})} \\ n = \dfrac{2(a-a'+aa'^{2}-a'a^{2})}{(1+a^{2})(1+a'^{2})} \end{cases}$$ ، خواهیم داشت:

$x'' = mx - ny$ و همچنین $y'' = nx - my$.

اکنون اگر زاویه بین دو محور تقارن را θ در نظر بگیریم، آن‌گاه $\tan\theta = \frac{a-a'}{1+aa'}$ خواهد بود. در نتیجه به کمک محاسبات، مثلثاتی به‌دست می‌آید که $\cos 2\theta = m$ و $\sin 2\theta = n$ و ضابطهٔ ترکیب این دو نگاشت به صورت مقابل

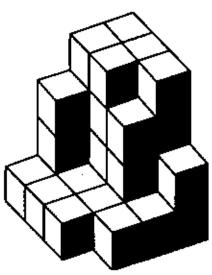
$$T'oT(x,y) = (x.\cos 2\theta - y.\sin 2\theta\ ,\ \ x.\sin 2\theta + y.\cos 2\theta)$$

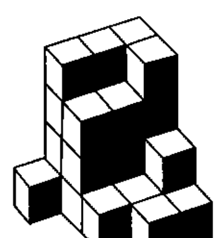
خواهد بود. همین‌طور که ضابطهٔ ترکیب این دو نگاشت نشان می‌دهد، ترکیب آن‌ها یک دوران با زاویهٔ دوران 2θ است. در ادامه اگر d و d' در نقطه‌ای به غیر از مبدأ، همدیگر را قطع کنند، با انتقال مبدأ مختصات به نقطهٔ برخورد دو محور، می‌توان قضیه را به همین شکل اثبات کرد. همچنین اگر یکی از دو محور موازی محور عرض‌ها باشد، می‌توان در جای خود از ضابطهٔ نگاشت آن استفاده کرد.

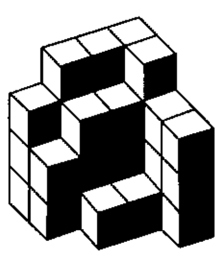
تفریح اندیشه ... تفریح اندیشه ... تفریح اندیشه ...

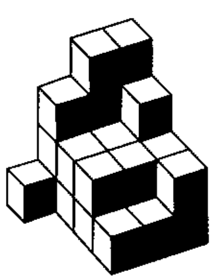
پازل مکعب‌ها

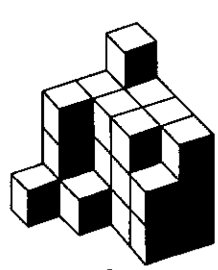
کدام دو مجموعهٔ مکعب‌های زیر را می‌توان با هم جفت‌وجور کرد تا یک مکعب ۴×۴×۴ به دست آید؟


د


الف


ب


هـ


ج

پاسخ: (د) و (هـ)

دکتر بهمن طباطبایی
بخش ریاضی،
دانشکده علوم دانشگاه شیراز

نقش ریاضیات در علوم انسانی و تجربی

اشاره: این مقاله تاکید بر آن دارد که دانش‌آموزان رشته‌های انسانی و تجربی بدانند که مطالب ریاضی را که در دورهٔ متوسطه مطالعه می‌کنند به‌طور مفهومی فرا گیرند، تا در هر رشته‌ای که در دانشگاه ادامه تحصیل می‌دهند، دچار مشکل نشوند.

چکیده: در این مقاله، سعی می‌کنیم با توجه به نیاز رشته‌های علوم انسانی و تجربی به ریاضیات، با عنایت به دانش قبلی آن‌ها در این رشته و آموزش‌هایی که دیده‌اند و نگرش آن‌ها به دنیای ریاضی، پیرامون نحوهٔ آموزش ریاضیات به آن‌ها، سخنی با دوستان در میان بگذاریم. سپس اشاره‌ای خواهیم داشت به تفاوت عمیقی که بین نگاه ما و نگاه دانشجویانمان به عالم ریاضی وجود دارد. سرانجام دربارهٔ نحوهٔ تدوین کتاب‌های درسی آن‌ها به بحث خواهیم نشست.

مقدمه

سعی می‌کنیم مطالب خود را در سه بند الف: نیاز؛ ب: دانش قبلی و آموزش‌هایی که دیده‌اند؛ ج: اختلاف دو نگاه به عالم ریاضی خلاصه کنیم.

الف. نیاز

به‌طور طبیعی همهٔ کسانی که در علوم انسانی، علوم پزشکی و رشته‌های وابسته به علوم پزشکی کار می‌کنند، به مقداری ریاضی نیاز دارند زیرا تجزیه و تحلیل‌های آماری، برآوردها، پیش‌بینی‌ها و برنامه‌ریزی‌ها نمی‌توانند بدون کمک ریاضی انجام شود. می‌نیمم‌کردن هزینه‌ها، ماکزیمم‌سازی درآمدها، تخصیص بودجه‌ها، پی‌گیری و به نتیجه رساندن طرح‌های اقتصادی و...، رشد و توسعهٔ ارزش‌های مثبت مانند شاخص‌های بهداشتی، پیشرفت‌های تحصیلی، توفیق در مسابقات علمی و ورزشی، و تقلیل و کنترل نقاط ضعف مانند بیماری‌ها، اُفت تحصیلی، بی‌کاری، بزه‌کاری، ... نیاز به ریاضی دارد و بدون به‌کارگیری این علم ظریف و دقیق، هیچ گونه حرکتی میسّر نیست. به‌طور خلاصه در علوم انسانی و علوم پزشکی، از ریاضیات باید به عنوان یک ابزار استفاده کرد. روشن است که به‌کار بردن هر ابزاری، مهارت و دانش خود را می‌طلبد و به آموزش خاص خود نیاز دارد.

ب. دانش قبلی و آموزش‌هایی که دیده‌اند.

دانش قبلی محصّلین ما، به‌خصوص محصّلین رشته‌های علوم انسانی از علم ریاضی، بسیار سطحی است؛ به‌طوری که می‌توان گفت اطلاعاتشان از حد یک سلسلهٔ نماد و علامات، فراتر نمی‌رود و برداشت آنان از این علم بنیادی، محفوظاتی بیش نیست. به‌منظور پی‌بردن به بی‌پایه بودن دانش قبلی

محصلین و سطحی بودن برداشت آنان، بد نیست که به مثال زیر توجه کنید.

مثال. در رسم نمودار و تعیین اکسترمم‌های تابع f با ضابطهٔ:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}$$

رسیدیم به:

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

و گفتیم که $f'(0)$ موجود نیست؛ زیرا عدد تقسیم بر صفر تعریف نشده است، لذا ۲ تقسیم بر صفر بی‌معناست. محصّلی فرمود که خوب f' را به صورت کسری ننویسیم؛ بلکه بنویسیم:

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$$

رویداد فوق، مبیّن آن است که محصّل کاری به معنای عبارت $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$ ندارد، فقط آن را یاد گرفته است.

باید توجه داشت که اظهار نظر محصّل پیرامون $f'(x)$، به نحوهٔ آموزشی که دیده است، بی‌ارتباط نیست. در این زمینه می‌توان گفت آموزش‌هایی که محصّلین در دروس ریاضی می‌بینند، صرفاً جنبهٔ حفظی دارد و همراه با تفکر، تعقّل، بحث، مجادله و انتخاب احسن نیست یا به عبارتی دیگر، محصّل در کانالی قرار می‌گیرد که اجباراً باید مطالبی را بپذیرد و کورکورانه به کار گیرد. چنانچه محصّل قصد ادامهٔ تحصیل داشته باشد و بخواهد در رشته‌ای کار کند که به گونه‌ای با نوعی ریاضی سروکار دارد، باید قدرت تشخیص، توانایی تجزیه و تحلیل و جرأت انتخاب پیدا کند. باید از همان سنین دبیرستان که از نظر جسمی و روحی و فعال بودن سلول‌های مغزی در موقعیت بسیار خوبی قرار دارد، فکر کردن، کار کردن، تشخیص دادن و سایر فاکتورهای آموزشی را شخصاً تجربه کند و در این زمینه به نوعی، هر چند ساده، به بلوغ فکری برسد؛ نه این که به ماشین یادداشت کردن، به خاطر سپردن و تحویل دادن تبدیل شود.

ج. اختلاف دو نگاه به عالم ریاضی

متأسفانه تفاوت فاحش و عمیقی بین نگاه ما و نگاه محصّلین ما به دنیای ریاضی وجود دارد. ما با چشمی منطقی، استدلالی و چرایی به ریاضی نگاه می‌کنیم و در خواندن و نوشتن آن، ضمن ریشه‌یابی و سؤال از خود، کوشش می‌کنیم چیزی بدون دلیل نپذیریم و در بیان آن، همهٔ کوشش ما بر آن است که مطلبی را بدون دلیل ارائه نکنیم؛ در حالی که شاید بیشتر محصّلین با اکثر مفاهیم فوق بیگانه هستند و به ریاضی به چشم یک ابزاری نگاه می‌کنند که در به‌کارگیری آن، مهارتی هم کسب نکرده‌اند. در این زمینه، به‌منظور درک تفاوت بین دو نگاه به دنیای ریاضی، بد نیست که به مثال زیر توجه کنید.

مثال. در سر کلاس‌ها می‌گوییم که $+\infty$ و $-\infty$ عدد نیستند و تأکید می‌کنیم که مثلاً در تابع f با ضابطهٔ:

$$f(x) = x(1 - \cos\frac{1}{x})$$

x قالبی است برای متغیرهای حقیقی. باز یادآوری می‌کنیم که $+\infty$ و $-\infty$ عدد نیستند، لذا عدد حقیقی نیستند. برای این که متوجه شویم نتیجهٔ این تدریس، گفتار و تأکید چیست، به حد زیر توجه کنید.

در محاسبهٔ $\lim_{x\to+\infty} x(1 - \cos\frac{1}{x})$ پس از بحث و استدلال و محاسبهٔ حد، محصّلی گفت که من راه‌حل دیگری دارم. عرض کردم بفرمایید پای تابلو و راه‌حل خود را ارائه دهید. به پای تابلو تشریف آورد و گفت که در رابطهٔ:

$$x(1 - \cos\frac{1}{x})$$

به جای x، مقدار $+\infty$ قرار می‌دهیم و حاصل صفر می‌شود.

ملاحظه می‌کنید که در محاسبهٔ حد فوق، چه اصولی را زیر پا می‌گذارد و چه نکات مهمی را نادیده می‌گیرد؟ ملاحظه می‌فرمایید که محصّل کاری به مفهوم بنیادی $0 \times \infty$ که مبهم است، ندارد و راه خود را می‌رود؟

آنچه عرض کردم و مطالب بسیار دیگری که در این مختصر نمی‌گُنجد، می‌رساند که:

اوّلاً، این روش تدریس و نحوهٔ آموزش سنتی که رایج است، برای محصّلین رشته‌های علوم انسانی و علوم پزشکی بسیار مفید نیست. به جرأت می‌توان گفت که دو عامل مهم «بی‌دانشی» و «نیاز به نمره»، باعث می‌شود که وجود ما را در سر کلاس تحمل کنند تا ترم تمام شود.

ثانیاً، برای محصّلین هر رشته (رشته‌های علوم انسانی و پزشکی) باید کتاب‌هایی تدوین شود که در آن از ارائه و بحث پیرامون مفاهیمی که برای ایشان سنگین است، خودداری شود.

به عبارتی دیگر، باید از آن نوع ریاضی که مستقیماً با آن سر و کار دارند، در کتاب‌هایشان آورده شود یا حداقل نوع مثال‌هایی که برای تفهیم بیش‌تر ارائه می‌شود، باید به گونه‌ای باشد که مستقیماً با رشتهٔ تحصیلی آنان مرتبط شود؛ زیرا این عمل باعث می‌شود که نه‌تنها مفاهیم ریاضی را به خوبی درک کنند، بلکه در به‌کارگیری آن، صاحب مهارت و تجربه شوند.

برای دانش‌آموزان سال اول و دوم متوسطه

اتحادها و معادله ها

پرویز شهریاری

حساب در برخی حالت‌ها کارآمدتر از جبر است

اشاره: در شماره‌های قبل راجع به اتحادها و معادله‌های مختلف بحث کردیم، و مسائلی را با تشکیل معادله و حل جبری و استفاده از اتحاد حل کردیم، در ادامه مطلب مسائلی را عنوان می‌کنیم که برای آن راه‌حل‌هایی از حساب را آورده‌ایم که این راه‌حل‌ها نسبت به راه‌های جبری جالبتر است.

آنتوان چخوف در داستان «معلم خصوصی» نکته‌های جالب و خنده‌داری را آورده است؛ از جمله:

«ـ راستش را بخواهید، این یک مسألهٔ جبری است و آن را باید با «ایکس» و «ایگرگ» حل کرد.

شاگرد آهی کشید، دستش را به طرف قلم دراز کرد و گفت:

ـ ولی این مسأله، بدون جبر هم حل می‌شود.

ـ امان از نادانی و بی‌خبری...»

قدیم‌ها، در روزگاری که گاه مهربان‌تر از امروز بوده دوستداران ریاضیات، به کتاب‌های حساب شامل مسأله‌ها علاقه‌مند بودند و به آن‌ها دلبستگی داشتند. دانش‌آموزان با روش گوناگون حل حسابی مسأله‌ها آشنا می‌شدند، آموزش دقیقی می‌دیدند تا به هر اندازه که لازم است، ورزیده شوند و از توانایی‌های خود، در این زمینه، در تمامی طول زندگی استفاده می‌کردند.

در آن روزگار از «تست» و «کنکور» خبری نبود. نه کسی می‌توانست بدون درک اهمیت مسأله آن را حل کند و نه حتی به این اندیشه می‌افتاد که راهی برای «تست‌زدن» بدون این‌که به مفهوم‌های بنیانی ریاضیات پی‌ببرد، پیدا کند. ولی اکنون هم آنانی در زندگی علمی خود موفق می‌شوند که به دور از سروصداها و جنجال‌های روز، سراغ مفهوم‌ها بروند و چیزی را نفهمیده رها نکنند.

باید به جز آموزش روش‌های حل، به ذوق و احساس هنری

دانش‌آموزان هم توجه داشت؛ راه‌حل حسابی این مسأله، زیباتر از راه حل جبری آن است. البته باید گفت که راه‌حل جبری مسأله هم می‌تواند آموزنده باشد و مسیرهای تازه‌ای به روی ما بگشاید. درضمن، از راه حل هندسی هم نباید غافل بود؛ چرا که معنا و مفهوم مسأله را، به صورتی محسوس و عینی، در برابر ما می‌گذارد. منطقی‌تر و معقول‌تر، این است تا به همهٔ راه‌حل‌های ممکن یک مسأله بیندیشیم و از راه حل‌های گوناگون، بهره ببریم. در این جا، چند مسأله را با راه‌حل حسابی و گاه هندسی می‌آوریم؛ ولی سفارش می‌کنیم به راه‌حل‌های دیگر هم بیندیشید. مسأله‌ها چندان ساده نیستند و به اندیشیدن نیاز دارند.

سفارشی به دانش‌آموزان علاقه‌مند دارم که شامل چند بند می‌شود:

۱. هیچ مطلبی را نفهمیده، جلو نروید. هیچ قانونی وجود ندارد تا بدون فهم مطالب قبلی بتوان مطالب تازه را یاد گرفت؛ این از ویژگی‌های ریاضیات است. هر وقت دیدید درس ریاضی را نمی‌فهمید، به گذشته مراجعه کنید، به درس‌های گذشته. از دبیر خود هم کمک بگیرید و به هر حال تکرار می‌کنیم، از هیچ مطلبی نگذرید؛ مگر این که آن را درست فهمیده باشید.

۲. اگر ریاضیات را دوست دارید، سفارش فرد دیگری را نپذیرید که گویا ریاضیات زندگی را تأمین نمی‌کند. از حالا به اندیشهٔ تأمین زندگی نباشید و تنها به دنبال ذوق خود بروید.

۳. مسأله‌ای را که می‌خواهید حل کنید، به راه‌های گوناگون بیندیشید و به راهی که انتخاب کرده‌اید، قانع نشوید.

همین سه سفارش کافی است و به مسأله‌ها بپردازیم. اول مسأله‌ای ساده:

مسألهٔ اوّل. خریداری ۱۳۸ متر ماهوت به رنگ‌های سبز و سیاه به مبلغ ۱۰۸۰۰۰ ریال خرید. از هر رنگ چند متر ماهوت خریده است؛ به شرطی که هر متر ماهوت سبز ۱۰۰۰ ریال و هر متر ماهوت سیاه ۶۰۰ ریال محاسبه شده باشد.

حل: بیش‌تر متن‌های قدیمی‌تر، مسأله را به این صورت حل کرده‌اند:

اگر تمام ۱۳۸ متر از ماهوت سیاه بود، باید قیمت آن‌ها، مبلغ:

$$۱۳۸ \times ۶۰۰ = ۸۲۸۰۰$$

ریال می‌شد. ولی خریدار مبلغ بیش‌تری پرداخته است؛ یعنی مبلغ ۱۰۸۰۰۰ ریال که تفاوتی برابر:

$$۱۰۸۰۰۰ - ۸۲۸۰۰ = ۲۵۲۰۰$$

ریال دارد این اختلاف به این دلیل است که قیمت هر متر ماهوت سبز ۴۰۰ ریال بیش‌تر است. بنابراین ماهوت سبز به اندازهٔ

$$۲۵۲۰۰ : ۴۰۰ = ۶۳$$

متر بوده است. دیگر میزان ماهوت سیاه به سادگی پیدا می‌شود

$$۱۳۸ - ۶۳ = ۷۵ \text{ (متر)}$$

راه حل، ساده و قابل فهم است؛ ولی کم‌تر به آن توجه می‌شود. مسأله‌هایی از این گونه را، ترجیح می‌دهند با «x» و «y» حل کنند. اگر طول پارچهٔ ماهوت سبز را x و طول پارچهٔ ماهوت سیاه را y بگیریم، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} x + y = ۱۳۸ \\ ۱۰۰۰x + ۶۰۰y = ۱۰۸۰۰۰ \end{cases}$$

البته حل این دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی هم مشکل نیست و ما را به همان جواب‌ها برای x و y می‌رساند؛ ولی راه‌حل «حسابی» نیاز به تجزیه و تحلیل ذهنی بیش‌تری دارد و در ضمن، ساده‌تر است و زودتر به نتیجه می‌رسد.

مسألهٔ دوم. نقطه‌های A و B در ساحل رودخانه‌ای، به فاصلهٔ ۲۰ کیلومتر از یکدیگر واقع‌اند؛ در ضمن آب رودخانه، از سوی A به سوی B جریان دارد. قایق موتوری از A به سمت B می‌رود، بعد از رسیدن به B بلافاصله برمی‌گردد و خود را به A می‌رساند و از A دوباره به سمت B می‌رود. همزمان با قایق موتوری، قایق پارویی از A به سوی B حرکت می‌کند. قایق موتوری ضمن برگشت از B، قایق پارویی را در ۴ کیلومتری A ملاقات می‌کند. قایق موتوری برای بار دومی که از A به سمت B می‌رود، در چه فاصله‌ای از A به قایق پارویی می‌رسد؟ قایق پارویی وقتی در جهت جریان آب باشد، بدون استفاده از پارو پیش می‌رود.

حل: حالت اوّل. فرض می‌کنیم، قایق موتوری وقتی در خلاف جریان آب رود حرکت می‌کند، سرعت خود را حفظ کند؛ یعنی هم در جهت جریان آب و هم در خلاف جهت جریان آب، سرعتی ثابت و یکنواخت داشته باشد (در این حالت، می‌توان

مسأله را برای حالتی در نظر گرفت که به جای قایق موتوری، یک دوچرخه‌سوار و به جای قایق پارویی، یک پیاده و فاصلهٔ A تا B جادهٔ شوسه باشد که درنتیجه، دوچرخه‌سوار همیشه سرعتی ثابت دارد). دو قایق وقتی برای نخستین بار به هم می‌رسند که قایق موتوری ۳۶ کیلومتر و قایق ساده ۴ کیلومتر پیموده‌اند. نسبت فاصله‌های پیموده شده برابر است با نسبت سرعت‌ها؛ یعنی قایق موتوری سرعتی ۹ برابر قایق ساده دارد.

۳۶:۴ = ۹

برای ملاقات دوم، قایق موتوری باید ۸ کیلومتر بیش‌تر در راه باشد (از نقطهٔ برخورد اوّل تا A و برگشت همین فاصله). قایق موتوری باید ۹ برابر قایق ساده و درضمن ۸ برابر آن در حرکت باشد (نسبت دو عدد برابر ۹ و تفاضل آن‌ها برابر ۸ است)؛ یعنی قایق موتوری ۹ کیلومتر و قایق ساده یک کیلومتر بعد از ملاقات اوّل باید بپیمایند تا ملاقات دوم دست دهد. به این ترتیب، در ۵ کیلومتر A دوباره به هم می‌رسند.

حالت دوم. وقتی قایق موتوری در جهت جریان آب حرکت می‌کند، به اندازهٔ سرعت جریان آب، به سرعتش افزوده می‌شود و وقتی برخلاف جریان آب حرکت می‌کند، به اندازهٔ سرعت جریان آب، از سرعتش کم می‌شود. در این حالت، با همان سرعتی که از قایق پارویی (وقتی با هم از A حرکت کرده‌اند) دور می‌شود که در برگشت از B به طرف قایق ساده «با همان سرعت» به آن نزدیک می‌شود. درواقع، وقتی دو قایق در جهت جریان آب حرکت می‌کنند، قایق موتوری با سرعتی برابر تفاضل سرعت‌ها، از قایق ساده فاصله می‌گیرد؛ ولی وقتی از طرف دیگر، همان سرعت قایق ساده (یعنی سرعت جریان آب) به آن افزوده می‌شود، درنتیجه قایق موتوری با سرعت اختصاصی خود از قایق پارویی دور می‌شود. وقتی قایق موتوری از B به سمت قایق ساده می‌آید، با سرعتی برابر مجموع سرعت‌های دو قایق به هم نزدیک می‌شوند؛ ولی در عوض از سرعت قایق موتوری، به اندازهٔ سرعت جریان آن کم می‌شود، درنتیجه مانند این است که قایق موتوری با سرعت اختصاصی خود، به محل ملاقات نزدیک می‌شود. بنابراین زمانی که طول می‌کشد تا قایق موتوری از قایق ساده دور شود و به B برسد، برابر با زمان لازم برای این که قایق موتوری، با حرکت از B، تا ملاقات قایق ساده حرکت کند؛ یعنی نسبت مساحت‌هایی که قایق موتوری در این دو حالت پیموده، برابر است با نسبت سرعت‌های آن در جهت جریان آب و در خلاف جهت جریان آب؛ نسبت این سرعت برابر است با $\frac{۲۰}{۱۶}$ یا $\frac{۵}{۴}$. فاصلهٔ نخستین ملاقات تا A برابر ۴ کیلومتر است، بنابراین ملاقات دوم دو قایق در ۵ کیلومتری A پیش می‌آید.

یادداشت. به دو نکتهٔ جالب توجه کنید: ۱. در هر دو حالت به یک نتیجه رسیدیم. ملاقات دوم در ۵ کیلومتری A پیش می‌آید. ۲. آزمایش کنید؛ اگر بخواهیم حالت دوم مسأله را به یاری جبر حل کنیم، چگونه باید معادله یا معادله‌ها را تشکیل داد؟

مسألهٔ سوم. دو بندرگاه کوچک A و B در ساحل رودخانه‌ای واقع‌اند. دو قایق، یکی از A و دیگری از B، در یک لحظه، به سوی یکدیگر حرکت می‌کنند. وقتی به هم می‌رسند، بسته‌های پستی را که به همراه دارند عوض می‌کنند و هر کدام به سوی بندرگاه خود برمی‌گردند. قایقی که از A حرکت کرده بود، یک ساعت بعد دوباره بـه A برگشت. ولی اگر قایق A، ۱۵ دقیقه زودتر از قایق B حرکت می‌کرد، آن دو قایق درست در نقطهٔ وسط A و B به هم می‌رسیدند. قایقی که از B حرکت کرده بود، بعد از چه زمانی دوباره به B برمی‌گردد.

حل: یادآوری می‌کنیم، لحظهٔ برگشت قایق به A، به طور کامل از روی لحظهٔ خروج قایق از B معین می‌شود؛ درست مثل برگشت قایق دیگر به B که از روی لحظهٔ خروج قایق A معین می‌شود. برای درک بهتر مطلب، کافی است تصور کنیم که قایق‌ها در لحظه‌ای که به هم می‌رسند، کالای پستی خود را عوض نکنند و در جهت عکس، به جای نخستین خود برگردند. به این ترتیب، قایقی که از A خارج شده است، پس از یک ساعت و ۱۵ دقیقه به جای نخستین خود برمی‌گردد؛ یعنی برای نصف راه از A تا B و برگشت آن، به یک ساعت و ۱۵ دقیقه نیاز دارد، و برای تمامی راه به ۲ ساعت و ۳۰ دقیقه. بنابراین قایقی که از B خارج شده است، بعد از یک ساعت و ۳۰ دقیقه به جای نخست خود برمی‌گردد.

مسألهٔ چهارم. دو شمش با وزن‌های m کیلوگرم و n کیلوگرم و درصدهای مختلف مس در اختیار داریم. از هر شمش، تکه‌ای به وزن‌های برابر جدا کرده‌ایم و با آنچه باقی مانده است، شمش دیگری ساخته‌ایم. چه تکه‌ای با چه وزنی باید از شمش‌ها جدا

کرد تا درصد مس در شمش جدید برابر باشد؟

حل: این مسأله در بعضی از مسابقه‌ها داده شده است. بی‌تردید، این مسأله را می‌توان به یاری معادله‌ها حل کرد. درضمن، نباید از این مطلب هراس داشت که تعداد مجهول‌ها (یعنی ۳) از تعداد معادله‌ها (یعنی ۱) بیش‌تر است. نباید شگفت‌زده شد که راه‌حل کلی این مسأله، راه حل حسابی است. کلی، از این جهت که برای هر تعداد شمش می‌تواند به کار رود؛ در حالی که راه حل جبری به دشواری برمی‌خورد و همراه با محاسبه‌های مفصل است.

درواقع، این یک مسألهٔ حسابی عادی دربارهٔ «تقسیم به نسبت» است. در هریک از قیمت‌های شمش‌های تازه، باید، از شمش‌های نخستین، به نسبت $\frac{m}{n}$ وارد شود. (دربارهٔ دلیل این مطلب بیندیشید)؛ یعنی در شمش تازهٔ به وزن m کیلوگرم، m بخش برابر از شمش نخست (که به وزن m کیلوگرم است) و n بخشی از همین گونه از شمش دوم لازم است. وزن یک بخش برابر $\frac{m}{m+n}$ کیلوگرم می‌شود. ماندهٔ شمش اول در این شمش تازه برابر است با:

$$\frac{m}{m+n}.m=\frac{m^2}{m+n} \quad (\text{کیلوگرم})$$

و بخش جدا شدهٔ دومی:

$$\frac{mn}{m+n} \quad (\text{کیلوگرم})$$

چنین بخشی را باید از شمش اول جدا کرد

مسألهٔ پنجم. پنج مرد جوان ماهیگر، به صید ماهی مشغول بودند. با پایان یافتن صید، اولی گفت، او بیش از دیگران صید کرده است و $\frac{1}{3}$ آن‌چه را به دست آورده است، بین دیگران به طور برابر تقسیم می‌کند. بعد معلوم شد که دومی بیش از دیگران ماهی دارد و او $\frac{1}{3}$ ماهی‌های خود را به طور برابر بین دیگران تقسیم کرد. می‌دانیم کل صید ماهیگیران ۶ کیلوگرم و ۴۰۰ گرم بوده و بعد از این، جریان به همه برابر رسیده است. مقدار صید هر نفر را، پیش از تقسیم ماهی‌ها معین کنید.

حل: این مسأله، نمونهٔ مسأله‌های حسابی است که باید آن را از آخر حل کرد. در پایان به هر ماهیگیر یک کیلوگرم و ۲۸۰ گرم ماهی رسیده است؛ یعنی پیش از آن که نفر دوم $\frac{1}{3}$ ماهی‌های خود را بین دیگران تقسیم کند، به اندازهٔ:

۹۲۰ گرم و ۱ کیلوگرم = $\frac{3}{2}$ × ۲۸۰ (گرم و ۱ کیلوگرم)

ماهی بوده است. در این زمان، یعنی قبل از آن که نفر دوم $\frac{1}{3}$ ماهی‌های خود را تقسیم کند، چهار نفر دیگر هر کدام به اندازهٔ:

۶۴۰ : ۴ = ۱۶۰ (گرم)

کم‌تر، یعنی هرکدام ۱ کیلوگرم و ۱۲۰ گرم ماهی داشته‌اند، اگر به همین ترتیب استدلال کنیم، روشن می‌شود، پیش از آن که نفر اول $\frac{1}{3}$ ماهی‌های خود را بین چهار نفر دیگر تقسیم کند، یک کیلوگرم و ۶۸۰ گرم، نفر دوم یک کیلوگرم و ۷۸۰ گرم و هریک از سه نفر دیگر، ۹۸۰ گرم ماهی داشته‌اند.

مسألهٔ ششم. در بندر برای پر کردن تانکرها سه لوله وجود دارد. از لولهٔ نخستین در هر ساعت ۳۰۰ تن نفت بیرون می‌آید، از لولهٔ دوم ساعتی ۴۰۰ تن و از لولهٔ سوم ساعتی ۵۰۰ تن. باید دو تانکر بارگیری شود. اگر بارگیری به کمک لولهٔ اول و دوم انجام شود، به نحوی که آن را به یک تانکر و لولهٔ دوم را به تانکر دیگر متصل کنیم، بارگیری دو تانکر، به ازای حداکثر سرعت در دو حالت ممکن اتصال، ۱۲ ساعت وقت می‌گیرد. درضمن، یکی از تانکرها ممکن است زودتر پر شود، که در این صورت، کار لوله‌ای که به آن متصل است، متوقف می‌شود. اگر گنجایش تانکر کوچک‌تر (یعنی حجم آن) دو برابر آنچه اکنون هست، می‌بود و بارگیری به‌وسیلهٔ لوله‌های دوم و سوم انجام می‌گرفت، در این صورت، در حالت سریع‌ترین اتصال، بارگیری ۱۴ ساعت طول می‌کشید.

هر کدام از این نفت‌کش‌ها، چند تن نفت در خود جا می‌دهند؟

حل: روشن است که باید لولهٔ با بهره‌دهی زیادتر را به تانکری وصل کرد که گنجایش بیش‌تر دارد؛ چون یکی از تانکرها در ۱۲ ساعت پر می‌شود، یا تانکر کوچک‌تر:

۱۲ × ۳۰۰ = ۳۶۰۰

تن نفت می‌گیرد و یا:

۱۲ × ۴۰۰ = ۴۸۰۰ (تن)

حالت اول ممکن نیست؛ زیرا با دو برابر کردن حجم تانکر کوچک‌تر به ۷۲۰۰ تن می‌رسیم، که برای پر کردن آن، حتی با لولهٔ سوم هم، بیش از ۱۴ ساعت وقت لازم است. بنابراین تانکر بزرگ‌تر ۴۸۰۰ تن گنجایش دارد و با لولهٔ دوم پر می‌شود و از آن گذشته با لولهٔ سوم، زودتر از ۱۴ ساعت؛ یعنی تانکر کوچک‌تر گنجایشی به این اندازه دارد:

$\frac{۱}{۲}\times ۱۴\times ۵۰۰ = ۳۵۰۰$ (تن)

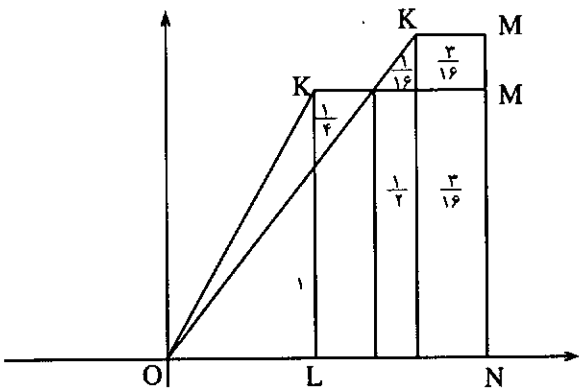
مسألهٔ هفتم. در خبری مربوط به مسابقهٔ اسکی گفته شده است، درصد تعداد عضوهای گروهی که در مسابقه شرکت کرده‌اند، در مرز از ۹۶/۸ درصد تا ۹۷/۲ درصد است. حداقل ممکن تعداد عضوهای این گروه چقدر است؟

حل: درصد کسانی که در مسابقه شرکت نمی‌کنند، از ۲/۸ درصد تا ۳/۲ درصد است. اگر یک نفر در مسابقه شرکت نکند (کم‌تر از آن ممکن نیست)، تعداد عضوهای گروه، در مرزهای: از... $۱\times\frac{۱۰۰}{۲/۸} = ۳۵/۷$ تا ... $۱\times\frac{۱۰۰}{۳/۲} = ۳۱/۲۰۰$ خواهد بود؛ یعنی کم‌ترین تعداد عضوهای گروه ۳۲ نفر است. روشن است، به ازای این تعداد عضوها، ۳/۲ درصد کم‌تر از واحد است؛ در حالی که بنابر شرط، یک نفر در مسابقه شرکت نکرده است.

مسألهٔ هشتم. این مسأله را به دو جهت در این جا آورده‌ایم؛ نخست این که در حل این مسأله، از هیچ معادله‌ای یا رابطه‌ای که بین مجهول‌ها باشد، استفاده نشده و بیش‌تر در هندسه و رسم به‌کار رفته است؛ دوم از روشی برای حل مسأله‌های مربوط به حرکت استفاده شده است که به نمایش هندسی آن‌ها مربوط می‌شود.

از نقطه‌های A و B، دو قطار به سوی یکدیگر در یک لحظه حرکت کردند. هر کدام از آن‌ها در آغاز با شتابی یکنواخت حرکت کردند (سرعت نخستین قطارها برابر صفر و شتاب حرکت در دو قطار متفاوت است)، و سپس با سرعتی یکنواخت پیش رفتند. نسبت سرعت‌های حرکت‌های یکنواخت دو قطار، برابر $\frac{۵}{۴}$ است. در چند لحظهٔ زمانی، سرعت قطارها برابر بود، ولی در آن لحظه، یکی از قطارها، فاصله‌ای برابر $\frac{۵}{۴}$ دیگری را طی می‌کرد. دو قطار در یک لحظه به نقطه‌های A و B رسیدند. چه بخشی از راه را هریک از قطارها پیموده بودند تا لحظه‌ای که دو قطار به سرعت‌های برابر رسیدند.

حل: سرعت را برای هر یک از قطارها به صورت هندسی در نظر می‌گیریم. نمایش را در دستگاه مختصاتی که سرعت را برحسب زمان برای هر قطار نشان می‌دهد، معین می‌کنیم. درضمن، فرض می‌کنیم دو قطار از یک نقطه حرکت کرده‌اند.



برای یکی از قطارها، نمایش حرکت را با OKM در نظر می‌گیریم و برای دیگری OK_1M_1 (شکل را ببینید). اندازهٔ مساحتی را که هر قطار می‌پیماید، برابر است با حاصل‌ضرب زمان (محور افقی) در سرعت (محور قائم)؛ یعنی برابر مساحت شکلی است که از پایین با محور زمان و از سمت چپ با سرعت نشان داده شده است.

بنابر شرط مسأله، مساحت ذوزنقه‌های OKMN و OK_1M_1N با هم برابرند؛ یعنی شکل‌های OKP و PK_1M_1M هم ارزند (مساحتی برابر دارند). بنابر شرط، مساحت OKPL برابر است با $\frac{۵}{۴}$ مساحت OPL. اگر مساحت OPL را برابر واحد بگیریم، مساحت OKP برابر $\frac{۱}{۴}$ و مساحت PK_1T برابر $\frac{۱}{۱۶}$ می‌شود؛ زیرا $K_1T=\frac{۱}{۴}PL$ (بنابر شرط سرعت حرکت یکنواخت‌ها برابر $\frac{۵}{۴}$ است؛ یعنی $MN=\frac{۵}{۴}PL$) و مثلث‌های OPL و PK_1T متشابهند. سپس از هم‌ارزی OKP و PK_1M_1M، مساحت مستطیل TK_1M_1M را پیدا می‌کنیم که برابر $\frac{۳}{۱۶}$ می‌شود. بعد مساحت دو مستطیل باقی‌مانده را به دست می‌آوریم. تا به مسیر (برابر با مساحت‌های OKMN یا OK_1M_1N) برابر است با $۲\frac{۱}{۲}$. از آن‌جا که مساحت‌های ذوزنقهٔ OKPL و مثلث OPL به ترتیب برابر است با $\frac{۵}{۴}$ را، پس در لحظهٔ برابری سرعت‌ها (در نقطهٔ P)، یکی از قطارها $\frac{۱}{۲}$ مسیر را پیموده است و دیگری $\frac{۲}{۵}$ آن را.

اسامی برندگان مسأله‌های مسابقه‌ای برهان

۱ـ معصومه ابوالفتحی / تهران	۱ـ محمد رجبی / تهران
۲ـ رسول شریفی / اصفهان	۲ـ مرتضی نعمتی / تالش
۳ـ الهام رستگار / تهران	۳ـ مریم هخامنشی / بیجار

محاسبهٔ حدود $\sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x^n}$ $(n\in\mathbb{Q}\ ,\ k\in\mathbb{N})$

سید محمدرضا هاشمی موسوی

برای محاسبهٔ حدود $\sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x^n}$ به‌ازای هر k و هر n گویا،

کافی است نابرابری‌های زیر را اثبات کنیم:

$$\begin{cases}\dfrac{n-1}{k^n}>\dfrac{1}{k^{n-1}}-\dfrac{1}{(k+1)^{n-1}} & (1)\\[2mm] \dfrac{n-1}{k^n}<\dfrac{1}{(k-1)^{n-1}}-\dfrac{1}{k^{n-1}} & (2)\end{cases}$$

برای اثبات (۱) و (۲) به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{1}{k^{n-1}}-\frac{1}{(k+1)^{n-1}}=\frac{(k+1)^{n-1}-k^{n-1}}{k^{n-1}(k+1)^{n-1}}=$$

$$\frac{(k+1-k)\left[(k+1)^{n-2}+(k+1)^{n-3}k+\dots+k^{n-2}\right]}{k^{n-1}(k+1)^{n-1}}$$

$$=\frac{(k+1)^{n-2}+(k+1)^{n-3}k+\dots+k^{n-2}}{k^{n-1}(k+1)^{n-2}}<\frac{(n-1)(k+1)^{n-2}}{k^{n-1}(k+1)^{n-1}}<\frac{n-1}{k^n}$$

در نتیجه:

$$\frac{n-1}{k^n}>\frac{1}{k^{n-1}}-\frac{1}{(k+1)^{n-1}}\qquad(1)$$

و همچنین به‌طور مشابه داریم:

$$\frac{1}{(k-1)^{n-1}}-\frac{1}{k^{n-1}}=\frac{k^{n-1}-(k-1)^{n-1}}{k^{n-1}(k-1)^{n-1}}=$$

$$\frac{(k-k+1)\left[k^{n-2}+k^{n-3}(k-1)+\dots+(k-1)^{n-2}\right]}{k^{n-1}(k-1)^{n-1}}=$$

$$\frac{k^{n-2}+k^{n-3}(k-1)+\dots+(k-1)^{n-2}}{k^{n-1}(k-1)^{n-1}}>\frac{(n-1)(k-1)^{n-2}}{k^{n-1}(k-1)^{n-2}}>\frac{n-1}{k^n}$$

در نتیجه:

$$\frac{n-1}{k^n}<\frac{1}{(k-1)^{n-1}}-\frac{1}{k^{n-1}}\qquad(2)$$

پس از اثبات (۱) و (۲) می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{k^{n-1}}-\frac{1}{(k+1)^{n-1}}<\frac{n-1}{k^n}<\frac{1}{(k-1)^{n-1}}-\frac{1}{k^{n-1}}\qquad(3)$$

در رابطهٔ (۳) مقادیر طبیعی به‌جز یک را به k نسبت می‌دهیم، که در این صورت داریم:

$$k=2:\ \frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{3^{n-1}}<\frac{n-1}{2^n}<\frac{1}{1^{n-1}}-\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$k=3:\ \frac{1}{3^{n-1}}-\frac{1}{4^{n-1}}<\frac{n-1}{3^n}<\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{3^{n-1}}$$

....

$$k:\ \frac{1}{k^{n-1}}-\frac{1}{(k+1)^{n-1}}<\frac{n-1}{k^{n}}<\frac{1}{(k-1)^{n-1}}-\frac{1}{k^{n-1}}$$

از جمع روابط فوق نتیجه می‌شود:

$$\therefore\ \frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{(k+1)^{n-1}}<(n-1)\sum_{x=2}^{k}\frac{1}{x^{n}}<1-\frac{1}{k^{n-1}}$$

در این جا از رابطهٔ (۳) رابطهٔ زیر نتیجه می‌شود:

(۴)

$$\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{(k+1)^{n-1}}<(n-1)\sum_{x=2}^{k}\frac{1}{x^{n}}<1-\frac{1}{k^{n-1}}$$

اینک طرفین رابطهٔ (۴) را بر $n-1>0$ تقسیم می‌کنیم و به کل نابرابری یک واحد اضافی می‌کنیم که در این صورت داریم:

$$n-1>0:\ 1+\frac{1}{(n-1)2^{n-1}}-\frac{1}{(n-1)(k+1)^{n-1}}<$$

$$\sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x^{n}}<1+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{(n-1)k^{n-1}} \qquad (5)$$

نابرابری مضاعف (۵) حدود $\sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x^{n}}$ را به‌ازای هر k طبیعی و هر n گویای بزرگ‌تر از یک نشان می‌دهد.

به‌عنوان مثال، حدود $\sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x^{2}}$ و $\sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x^{3}}$ را حساب می‌کنیم:

$$n=2:\ 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{k+1}<\sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x^{2}}<1+1-\frac{1}{k};$$

$$\frac{3k+1}{2K+2}<\sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x^{2}}<\frac{2k-1}{k}$$

بدیهی است اگر $k\to\infty$ خواهیم داشت: $\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{x^{2}}<2$

$$n=3:\ 1+\frac{1}{8}-\frac{1}{2(k+1)^{2}}<\sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x^{3}}<1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2k^{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{(3k+1)(3k+5)}{8(k+1)^{2}}<\sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x^{3}}<\frac{3k^{2}-1}{2k^{2}}$$

بدیهی است اگر $k\to\infty$، خواهیم داشت: $\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{x^{3}}<\frac{3}{2}$

به طور کلی اگر $k\to\infty$، داریم $\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{x^{n}}<\frac{n}{n-1}$ $(n>1)$.

حال اگر طرفین رابطهٔ (۴) را بر $n-1<0$ تقسیم کنیم و به کل نابرابری حاصل یک واحد اضافه کنیم، خواهیم داشت:

$$n-1<0:\ 1+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{(n-1)k^{n-1}}<\sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x^{n}}<$$

$$1+\frac{1}{(n-1)2^{n-1}}-\frac{1}{(n-1)(k+1)^{n-1}} \qquad (6)$$

نابرابری (۶) حدود $\sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x^{n}}$ را به‌ازای هر k طبیعی و هر n گویای کوچک‌تر از یک نشان می‌دهد.

به‌عنوان مثال، حدود $\sum_{x=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{x}}$ ، $\sum_{x=1}^{k}x$ و $\sum_{x=1}^{k}\sqrt{x}$ را حساب می‌کنیم:

$$n=\frac{1}{2}:\ 1-2+2\sqrt{k}<\sum_{x=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{x}}<1-2\sqrt{2}+2\sqrt{k+1};$$

$$2\sqrt{k}-1<\sum_{x=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{x}}<2\sqrt{k+1}-2\sqrt{2}+1$$

$$n=-1:\ 1-\frac{1}{2}+\frac{k^{2}}{2}<\sum_{x=1}^{k}x<1-2+\frac{(k+1)^{2}}{2};$$

$$\frac{k^{2}+1}{2}<\sum_{x=1}^{k}x<\frac{(k+1)^{2}}{2}-1$$

$$n=\frac{-1}{2}:\ 1-\frac{2}{3}+\frac{2k\sqrt{k}}{3}<\sum_{x=1}^{k}\sqrt{x}<$$

$$1-\frac{4\sqrt{2}}{3}+\frac{2(k+1)\sqrt{k+1}}{3};$$

$$\frac{2k\sqrt{k}+1}{3} < \sum_{x=1}^{k}\sqrt{x} < \frac{2(k+1)\sqrt{k+1}+3-4\sqrt{2}}{3}$$

در این‌جا برای تکمیل شدن بحث، تنها حالت $n-1=0$ باقی می‌ماند که این حالت را به‌طور مستقل بررسی و حدود $\sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x}$ را مشخص می‌کنیم.

برای تعیین حدود $\sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x}$ ، می‌توان نوشت:

$$m>0:\ \sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x^{1+\frac{1}{m}}} \le \sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x} \le \sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x^{1-\frac{1}{m}}}$$

بنابراین کافی است کران بالای $\sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x^{1-\frac{1}{m}}}$ و کران پایین $\sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x^{1+\frac{1}{m}}}$ را به‌دست آوریم. برای این منظور، در رابطهٔ (۵) عدد n را به $\left(1+\frac{1}{m}\right)$ تبدیل می‌کنیم و در این صورت:

$$(m>0)\ \frac{m}{\sqrt[m]{2}}+1-\frac{m}{\sqrt[m]{k+1}} \le \sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x^{1+\frac{1}{m}}} \le m+1-\frac{m}{\sqrt[m]{k}} \quad (7)$$

به‌طور مشابه در رابطهٔ (۶) عدد n را به $\left(1-\frac{1}{m}\right)$ تبدیل می‌کنیم و در این صورت داریم:

$$(m>0)\ m\sqrt[m]{k}-m+1 \le \sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x^{1-\frac{1}{m}}} \le m\sqrt[m]{k+1}-m\sqrt[m]{2}+1 \quad (8)$$

در این‌جا از روابط (۷) و (۸) حدود $\sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x}$ نتیجه می‌شود،

یعنی:

$$1+\frac{m}{\sqrt[m]{2}}-\frac{m}{\sqrt[m]{k+1}} \le \sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x^{1+\frac{1}{m}}} \le \sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x} \le \sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x^{1-\frac{1}{m}}} \le m\sqrt[m]{k+1}-m\sqrt[m]{2}+1\ ;$$

$$1+\frac{m}{\sqrt[m]{2}}-\frac{m}{\sqrt[m]{k+1}} \le \sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x} \le 1-m\sqrt[m]{2}+m\sqrt[m]{k+1} \quad (9)$$

اکنون اگر $m\to\infty$ ، حدود $\sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x}$ به دلخواه به‌دست خواهدآمد. به‌عبارت دیگر، اگر هر قدر مقدار m را بزرگ‌تر اختیارکنیم، حدود سری هارمونیک دقیق‌تر به‌دست می‌آید.

بنابراین برای به‌دست آوردن هرچه دقیق‌تر سری $\sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x}$ و محاسبهٔ این سری با تقریب دلخواه، باید m را افزایش دهیم.

به‌عنوان مثال، اگر $m=10^6$ اختیارشود، حدود $\sum_{x=1}^{10^6}\frac{1}{x}$ چنین می‌شود:

$$14/1223 < \sum_{x=1}^{10^6}\frac{1}{x} < 14/1226$$

درنتیجه با تقریب ۰/۰۰۰۳، سری فوق برابر است با $\sum_{x=1}^{10^6}\frac{1}{x} \approx 14/1223$ که با سه‌رقم اعشار صحیح است.

با اختیارکردن $m>10^6$ از رابطهٔ (۹) توسط ماشین‌های محاسبه‌گر بادقت بالا، می‌توان سری هارمونیک را به‌ازای هر k با تقریب دلخواه محاسبه کرد. بنابراین رابطهٔ (۹) را می‌توان الگوریتم محاسبهٔ $\sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x}$ دانست.

در این‌جا حدود $\sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x^n}$ برای هر k طبیعی و هر n گویا به شکل زیر خلاصه می‌شود:

$$\begin{cases} (5)\quad n>1:\ 1+\frac{1}{(n-1)2^{n-1}}-\frac{1}{(n-1)(k+1)^{n-1}} < \sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x^n} < 1+\frac{1}{x^{n-1}}-\frac{1}{(n-1)k^{n-1}} \\ (9)\quad n=1:\ 1+\frac{m}{\sqrt[m]{2}}-\frac{m}{\sqrt[m]{k+1}} \le \sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x} \le 1-m\sqrt[m]{2}+m\sqrt[m]{k+1} \quad (m\to\infty) \\ (6)\quad n<1:\ 1+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{(n-1)k^{n-1}} < \sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x^n} < 1+\frac{1}{(n-1)2^{n-1}}-\frac{1}{(n-1)(k+1)^{n-1}} \end{cases}$$

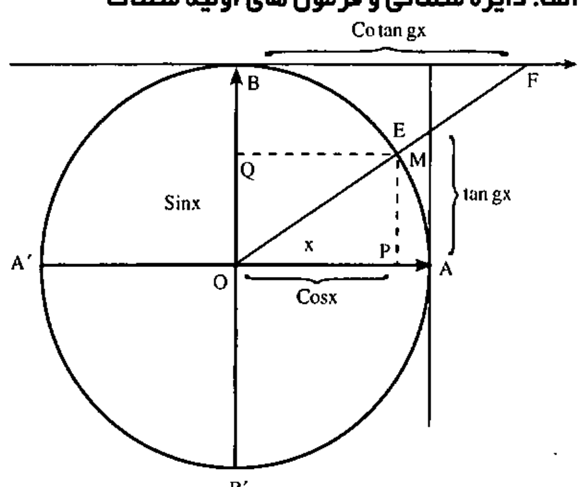
احمد قندهاری

مثلثات

برای
دانش‌آموزان
سال دوم متوسطه

مقدمه

الف. دایرهٔ مثلثاتی و فرمول های اوّلیهٔ مثلثات



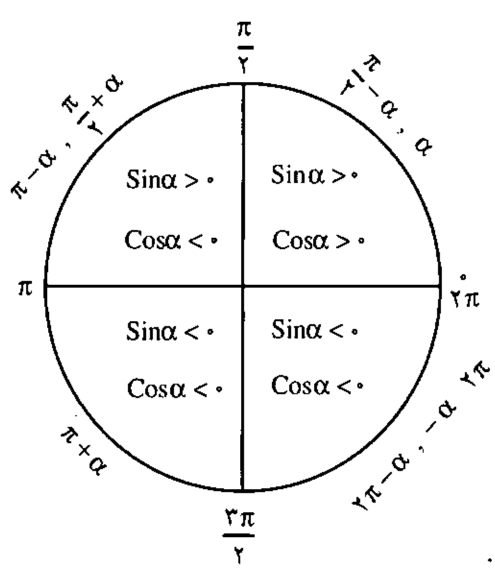
$$1)\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow \begin{cases}\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha\\ \cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha\end{cases}$$

$$2)\ \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\quad (\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2})$$

$$3)\ \cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\quad (\alpha\neq k\pi)$$

$$4)\ \tan\alpha.\cot\alpha=1 \Rightarrow \begin{cases}\tan\alpha=\dfrac{1}{\cot\alpha}\\ \cot\alpha=\dfrac{1}{\tan\alpha}\end{cases}\left(\alpha\neq\frac{k\pi}{2}\right)$$

تمرین۱ . اگر $\cot\alpha=\sqrt{2}-1$ و $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ ، آن‌گاه $\tan\alpha$ ، $\cos\alpha$ و $\sin\alpha$ را بیابید.



حل:

$$\tan\alpha=\frac{1}{\cot\alpha}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}\times\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}+1$$

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+\tan^2\alpha=1+\left(\sqrt{2}+1\right)^2$$

$$=1+3+2\sqrt{2}=2\left(2+\sqrt{2}\right)$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha=\frac{1}{2\left(2+\sqrt{2}\right)}=\frac{1}{2\left(2+\sqrt{2}\right)}\times\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$$

$$=\frac{2-\sqrt{2}}{2(2)}\Rightarrow \cos\alpha=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = 1-\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$$=\frac{2-\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

تمرین۲ . اگر $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ ، $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ و $a,b>0$ ، $\sin\alpha$ ، $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ را بیابید .

حل :

$$\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = 1-\frac{a^2}{a^2+b^2} = \frac{b^2}{a^2+b^2}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}} = \frac{b}{a} \Rightarrow \cot\alpha = \frac{a}{b}$$

ب. واحدهای کمان یا زاویه

۱ . **درجه** : اگر محیط یک دایره را به (۳۶۰) قسمت مساوی تقسیم کنیم ، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی مقابل به هر قسمت را یک درجه گویند . علامت درجه (°) و مقدار زاویه بر حسب درجه را با D نشان می‌دهند .

۲ . **رادیان** : اگر شعاع یک دایره را با یک تکه نخ اندازه بگیریم ، سپس آن را روی محیط دایره منطبق کنیم ، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی مقابل به این کمان اشغال شده به‌وسیلهٔ نخ را یک رادیان گویند . علامت رادیان r و مقدار زاویه بر حسب رادیان را با R نشان می‌دهند . با اندازه‌گیری‌های دقیق متوجه شدند که محیط یک دایره تقریباً ۶/۲۸ رادیان است که آن را با 2π نشان می‌دهند .

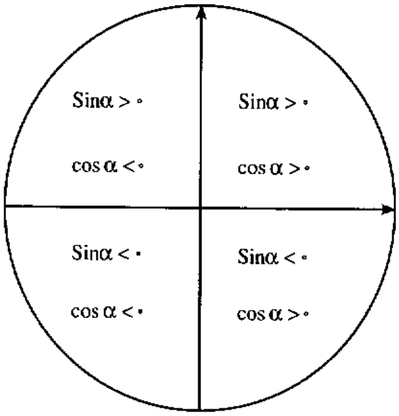
رابطهٔ بین درجه و رادیان : $\boxed{\frac{D}{180}=\frac{R}{\pi}}$

ج . رابطهٔ بین نسبت‌های مثلثاتی $(\pi-\alpha)$ ، $(\pi+\alpha)$ ، $(-\alpha)$ ، $(2\pi-\alpha)$ ، $(\frac{\pi}{2}-\alpha)$ و $(\frac{\pi}{2}+\alpha)$ بر حسب نسبت‌های مثلثاتی α . فرض می‌کنیم $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

توجه : α , $(\frac{\pi}{2}-\alpha)$ در ربع اوّل دایرهٔ مثلثاتی است .

$(\pi-\alpha)$, $(\frac{\pi}{2}+\alpha)$ در ربع دوم دایرهٔ مثلثاتی است .

$(-\alpha)$, $(2\pi-\alpha)$ در ربع چهارم دایرهٔ مثلثاتی است .



$(\pi+\alpha)$ در ربع سوم دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد .

$-\alpha$, $(2\pi-\alpha)$ در ربع چهارم است ، لذا سینوس آن‌ها منفی است .

$$(1)\ \begin{cases}\sin(2\pi-\alpha)=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha\\ \cos(2\pi-\alpha)=\cos(-\alpha)=\cos\alpha\end{cases}$$

$(\pi-\alpha)$ در ربع دوم است ، لذا کسینوس آن منفی است .

$$(2)\ \begin{cases}\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha\\ \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha\end{cases}$$

$(\pi+\alpha)$ در ربع سوم است ، لذا سینوس و کسینوس آن منفی است .

$$(3)\ \begin{cases}\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha\\ \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha\end{cases}$$

$(\frac{\pi}{2}-\alpha)$ در ربع اوّل است ، لذا سینوس و کسینوس آن مثبت است ؛ ولی تابع مثلثاتی عوض می‌شود .

$$(4)\ \begin{cases}\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha\\ \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha\end{cases}$$

$(\frac{\pi}{2}+\alpha)$ در ربع دوم است ، لذا کسینوس آن منفی است و تابع مثلثاتی عوض می‌شود .

$$(5)\ \begin{cases}\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha\\ \cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha\end{cases}$$

از تقسیم فرمول‌های (۱) ، (۲) ، (۳) ، (۴) و (۵) بر یکدیگر فرمول‌های ، تانژانت و کتانژانت محاسبه می‌شود .

تمرین۳. حاصل کسر زیر را بیابید.

$$A=\frac{\sin\frac{5\pi}{6}+\cos\frac{7\pi}{6}+\tan\frac{11\pi}{6}+\cot\frac{2\pi}{3}}{\sin\frac{4\pi}{3}+\cos\frac{5\pi}{3}+\tan\frac{3\pi}{4}+\cot\frac{7\pi}{4}}$$

حل:

$$\sin\frac{5\pi}{6}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{7\pi}{6}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\frac{11\pi}{6}=\tan\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\tan\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot\frac{2\pi}{3}=\cot\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cot\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin\frac{4\pi}{3}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{5\pi}{3}=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{3\pi}{4}=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$$

$$\cot\frac{7\pi}{4}=\cot\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cot\frac{\pi}{4}=-1$$

$$A=\frac{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}-1-1}$$

$$=\frac{3-3\sqrt{3}-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}}{6\left(\frac{-\sqrt{3}+1-4}{2}\right)}=\frac{7\sqrt{3}-3}{3\left(3+\sqrt{3}\right)}$$

د. نسبت‌های مثلثاتی $(\alpha\pm\beta)$ بر حسب نسبت‌های مثلثاتی α و β.

$$(6)\quad \sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$(7)\quad \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\sin\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$(8)\quad \tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\alpha}{1\mp\tan\alpha.\tan\beta}$$

تمرین۴. $\sin 15^\circ$ و $\tan 75^\circ$ را بیابید.

حل:

$$\sin 15^\circ=\sin\left(45^\circ-30^\circ\right)$$

$$=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ$$

$$\sin 15^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\tan 75^\circ=\tan\left(45^\circ+30^\circ\right)=\frac{\tan 45^\circ+\tan 30^\circ}{1-\tan 45^\circ.\tan 30^\circ}$$

$$=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$

$$\tan 75^\circ=\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\times\frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\frac{12+6\sqrt{3}}{6}=2+\sqrt{3}$$

هـ. نسبت‌های مثلثاتی (2α)

اگر در فرمول‌های ۶، ۷ و β را به α تبدیل کنیم:

$$(9)\quad \sin 2\alpha=2\sin\alpha.\cos\alpha$$

$$(10)\quad \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

$$(11)\quad \cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1\Rightarrow\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$(12)\quad \cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha\Rightarrow\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$(13)\quad \sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

$$(14)\quad \cos 2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

$$(15)\quad \tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

تمرین۵. مطلوب است محاسبهٔ حاصل کسر

$$P=\frac{\sin 2\alpha\cos\alpha}{(1+\cos 2\alpha)(1+\cos\alpha)}$$

حل:

$$P=\frac{2\sin\alpha.\cos\alpha.\cos\alpha}{(2\cos^2\alpha)(2\cos^2\frac{\alpha}{2})}=\frac{2\sin\alpha.\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha(2\cos^2\frac{\alpha}{2})}=\frac{\sin\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$P=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\tan\frac{\alpha}{2}$$

تمرین۶. برد تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}+\frac{1-x^2}{1+x^2}$ رابیابید.

حل: $D_f=\mathbb{R}$ می‌توان $x=\tan\alpha$ فرض کرد. پس:

$$f(x)=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}+\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\sin 2\alpha+\cos 2\alpha$$

داریم: $-\sqrt{a^2+b^2}\le a\sin x+b\cos x\le\sqrt{a^2+b^2}$

$$\Rightarrow -\sqrt{2} \le \sin 2\alpha + \cos 2\alpha \le \sqrt{2} \Rightarrow$$ برد تابع؛ $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

تمرین ۷. ثابت کنید: $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\sin 80^\circ} = 4$

حل: $\sin 80^\circ = \sin(90^\circ - 10^\circ) = \sin(\frac{\pi}{2} - 10^\circ) = \cos 10^\circ$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\sin 80^\circ} = \frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$$

$$= \frac{\cos 10^\circ - \sqrt{3}\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ}$$

$$= \frac{\cos 10^\circ - \tan 60^\circ . \sin 10^\circ}{\frac{1}{2}\sin 20^\circ} \times \frac{\cos 60^\circ}{\cos 60^\circ}$$

$$= \frac{\cos 60^\circ \cos 10^\circ - \sin 60^\circ \sin 10^\circ}{\frac{1}{4}\sin 20^\circ}$$

$$A = \frac{\cos(60+10^\circ)}{\frac{1}{4}\sin 20^\circ} = \frac{\cos 70^\circ}{\frac{1}{4}\sin 20^\circ} = \frac{\sin 20^\circ}{\frac{1}{4}\sin 20^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

تمرین ۸. ثابت کنید؛ $\cos\frac{\pi}{5}.\cos\frac{3\pi}{5} = -\frac{1}{4}$

حل:

$\cos\frac{3\pi}{5} = \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = -\cos\frac{2\pi}{5}$ در عبارت بالا قرار می‌دهیم.

سمت چپ عبارت $= -\cos\frac{\pi}{5}.\cos\frac{2\pi}{5} = -\cos\frac{\pi}{5}.\cos\frac{2\pi}{5}\left(\frac{4\sin\frac{\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}}\right)$

$$= \frac{-2\times\left(2\sin\frac{\pi}{5}.\cos\frac{\pi}{5}\right).\cos\frac{2\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{-2\left(\sin\frac{2\pi}{5}\right).\cos\frac{2\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}}$$

$$= \frac{-\sin\frac{4\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}} = -\frac{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right)}{4\sin\frac{\pi}{5}} = -\frac{\sin\frac{\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}} = -\frac{1}{4}$$

تمرین ۹. مطلوب است محاسبهٔ $P = \sin^4\frac{\pi}{24} + \cos^4\frac{\pi}{24}$

حل: داریم: $a^4 + b^4 = \left(a^2 + b^2\right)^2 - 2a^2b^2$

$$P = \sin^4\frac{\pi}{24} + \cos^4\frac{\pi}{24}$$

$$= \underbrace{\left(\sin^2\frac{\pi}{24} + \cos^2\frac{\pi}{24}\right)^2}_{1} - 2\sin^2\frac{\pi}{24}.\cos^2\frac{\pi}{24}$$

$$P = 1 - 2\left(\sin\frac{\pi}{24}.\cos\frac{\pi}{24}\right)^2$$

$$= 1 - 2\left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{12}\right)^2 = 1 - 2\left(\frac{1}{4}\sin^2\frac{\pi}{12}\right)$$

$$P = 1 - \frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{12} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1 - \cos\frac{\pi}{6}}{2}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{6 + \sqrt{3}}{8}$$

تمرین ۱۰. حاصل کسر $P = \frac{1 - \cot^2\left(\frac{\pi}{4} + a\right)}{1 + \cot^2\left(\frac{\pi}{4} + a\right)}$ را بیابید.

حل: $\frac{\pi}{4} + a = x$ فرض می‌شود: $P = \frac{1 - \cot^2 x}{1 + \cot^2 x} \times \frac{\tan^2 x}{\tan^2 x}$

$$= \frac{\tan^2 x - 1}{\tan^2 x + 1} = -\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

$$P = -\cos 2x = -\cos 2\left(\frac{\pi}{4} + a\right)$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2a\right) = \sin 2a$$

تمرین ۱۱. اگر $\tan(3a + 2b) = 3$ و $\tan(3a - 2b) = 1$، آن‌گاه $\tan 6a$ را بیابید.

حل:
$$\begin{cases} 3a + 2b = x \\ 3a - 2b = y \end{cases} \Rightarrow 6a = x + y$$

$$6a = x + y \Rightarrow \tan 6a = \tan(x + y)$$

$$= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x.\tan y} = \frac{3 + 1}{1 - 3} = -2$$

تمرین ۱۲. با فرض $x \ne 2k\pi$ و $x \ne 2k\pi + \frac{\pi}{2}$، اگر تساوی زیر به ازای جمیع مقادیر x برقرار باشد، a، b و c را بیابید.

$$\frac{\sin x.\cos x}{\sin x + \cos x - 1} = a\sin x + b\cos x + c$$

حل:

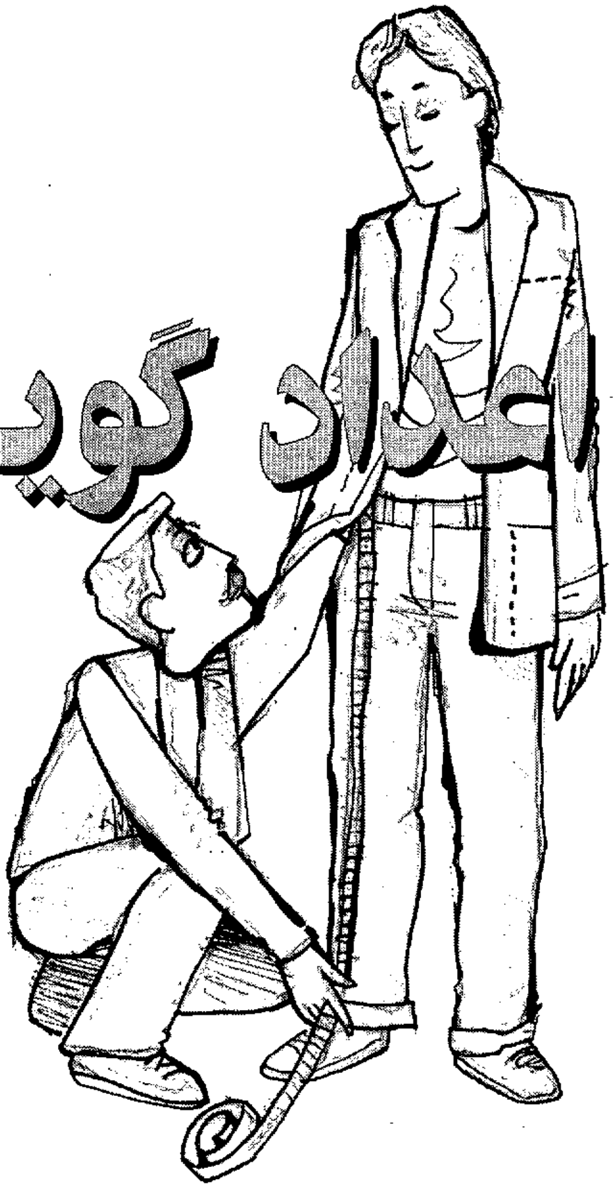
عبارت سمت چپ $= \frac{\sin x.\cos x}{(\sin x + \cos x) - 1} \times \frac{(\sin x + \cos x) + 1}{(\sin x + \cos x) + 1}$

$$= \frac{\sin x.\cos x(\sin x + \cos x + 1)}{1 + 2\sin x\cos x - 1} = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}$$

$$= a\sin x + b\cos x + c \Rightarrow a = b = c = \frac{1}{2}$$

> «چون به مشکلات و نیازمندی‌های مردم درمورد علم حساب نگریستم، دریافتم که تمام آن مشکلات در عدد خلاصه شده‌است.»
>
> محمدبن موسی خوارزمی

مجموعهٔ اعداد گویا



برای
دانش‌آموزان
سال اول

یادآوری: با کسرهایی به‌صورت $\frac{۵}{۳}$ و $\frac{-۴}{۷}$ و نظایر آن‌ها آشنا هستید. به‌طور کلی هر عددی به‌صورت $\frac{m}{n}$ را که در آن m و n اعدادی صحیح باشند و $n \neq ۰$، آن را یک کسر می‌نامیم. هر عددی را که بتوان به شکل یک کسر نوشت، یک عدد گویاست.

ممکن است این سؤال برای شما پیش بیاید که، مگر اعدادی هم هستند که نتوان آن را به‌صورت یک کسر نوشت؟ می‌توان ثابت کرد که مثلاً $\sqrt{۳}$ را نمی‌توان به‌صورت یک کسر نوشت؛ یعنی کسری مساوی $\sqrt{۳}$ وجودندارد. بعداً در این مورد بیش‌تر صحبت خواهیم کرد.

تاریخچه

نیاز بشر اولیه به سنجش و شمارش دارایی‌های خود، به‌طور طبیعی سبب پیدایش نخستین مجموعهٔ عددی، یعنی مجموعهٔ اعداد طبیعی شده‌است. می‌دانیم حاصل جمع دو عدد طبیعی، یک عدد طبیعی است؛ یعنی اعداد طبیعی نسبت به عمل جمع بسته‌اند. تا زمانی که دو عدد را با هم جمع می‌کردند و حاصل یک عدد طبیعی بود، مشکلی پیش نمی‌آمد؛ ولی وقتی این سؤال مطرح شد که برای مثال عدد ۳ را با چه عددی جمع کنیم تا ۷ حاصل شود، درواقع به‌معادلهٔ زیر برخوردند:

$$۳ + \square = ۷$$

پیش‌آمدن چنین مشکلات و معادلاتی، معکوس(قرینه) عمل جمع را در ذهن مردم باستان به‌وجود آورد که ما امروزه آن را تفریق می‌نامیم. درواقع، عمل تفریق دوعدد طبیعی به‌صورت زیر، به‌وسیلهٔ جمع تعریف می‌شود:

$$a - b = \square \Leftrightarrow b + \square = a$$

اما عمل تفریق به‌مفهوم امروزی، در این مجموعه بسته نبود. این موضوع و این که در طبیعت و پیرامون زندگی مردم آن‌زمان، پدیده‌های متقابل و متضاد مانند گرمی در مقابل سردی، سفیدی در مقابل سیاهی، حرکت در مقابل سکون، رفت در مقابل بازگشت و... مشاهده می‌شد، تصور پیدایش و وجود اعداد منفی را در اذهان مطرح می‌کرد. بالاخره با پیدایش اعداد منفی(قرینه‌های اعداد طبیعی) و بعدها با اضافه شدن صفر به این مجموعه، مجموعهٔ اعداد صحیح $Z=\{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\}$ کامل شد، که در این مجموعه، اعمال جمع و تفریق به‌راحتی انجام می‌گرفت.

لزوم صرفه‌جویی در کار و وقت، سبب شد که عمل ضرب به‌عنوان تعمیم عمل جمع مطرح شود؛ به این صورت:

$$a+a+\cdots+a=n.a \quad a\in Z, n\in N$$

عمل ضرب در Z به‌راحتی انجام می‌گرفت؛ ولی وقتی به معکوسش فکرمی‌کردند یا با معادلاتی به شکل:

$$3\times\square=2$$

برخوردمی‌کردند، دیگر Z کفاف این محاسبات را نمی‌کرد. به‌عبارت دیگر، چنین معادله‌ای در این مجموعه، دارای جواب نبود. مانند عمل تفریق، عمل تقسیم نیز به‌عنوان معکوس عمل ضرب، به‌صورت زیر تعریف شد:

$$\frac{a}{b}=\square \Leftrightarrow \square\times b=a$$

اما عمل تقسیم در Z بسته نبود. این موضوع و ظاهر شدن معادلاتی به‌شکل:

$3\times\square=1$ که مجهول آن به‌صورت $\square=\frac{1}{3}$ است، و همچنین لزوم تقسیم دارایی‌ها و املاک به نسبت و سهم معین(تقسیم ارث)، سبب شد تا اعداد گویا از روی اعداد صحیح، به‌شکل زیر تعریف شود:

$$Q=\left\{\frac{m}{n}\middle| m,n\in Z, n\neq 0\right\}$$

تعریف مجموعهٔ اعداد گویا

Q حرف اول کلمهٔ Quotient به معنای خارج قسمت است.

هر عدد صحیح، یک عدد گویاست؛ یعنی $Z\subset Q$ (چرا؟)

پس تابه‌حال یادگرفتیم: $N\subset Z\subset Q$.

◇ **فعالیت ۱**

الف. اگر صورت کسر مثبتی را در عددی بزرگ‌تر از یک ضرب کنیم، آن کسر چه تغییری می‌کند؟

ب. اگر مخرج کسر مثبتی را در عددی بزرگ‌تر از یک ضرب کنیم، آن کسر چه تغییری می‌کند؟

پ. اگر صورت کسر منفی را در عددی بزرگ‌تر از یک ضرب کنیم، آن کسر چه تغییری می‌کند؟

ت. اگر مخرج کسر منفی را بر عددی بزرگ‌تر از یک ضرب کنیم، آن کسر چه تغییری می‌کند؟

ث. اگر صورت کسر را در عدد صفر ضرب کنیم، حاصل کسر چه می‌شود؟

ج. اگر صورت و مخرج کسر را در عدد ثابتی غیرصفر کنیم، کسر چه تغییری می‌کند؟

تمرین: فعالیت بالا را در صورتی که عددی که ضرب می‌شود، بین صفر و یک، صفر و ۱- و کوچک‌تر از ۱- باشد، انجام دهید، اگر عمل ضرب به تقسیم تبدیل شود، چه‌طور؟ نتیجهٔ فعالیت را در حالتی کلی بیان کنید.

دو عدد گویای مساوی

صورت و مخرج یک کسر را می‌توان در عددی غیرصفر ضرب یا تقسیم کرد؛ یعنی هر عدد گویا دارای بی‌شمار نماد است.

◇ **فعالیت ۲**

الف. چند کسر مثبت را که صورت آن‌ها عدد ثابتی است، در نظر بگیرید، کدام کسر بزرگ‌تر است؟ کدام کسر کوچک‌تر است؟

ب. چند کسر مثبت را که مخرج آن‌ها عدد ثابتی است، درنظر بگیرید، کدام کسر بزرگ‌تر و کدام کسر کوچک‌تر است؟

تمرین: فعالیت بالا را درصورتی که کسر منفی باشد، انجام دهید و نتیجه این فعالیت را در حالت کلی بیان کنید.

◇ **فعالیت ۳**

الف. کسری مثال بزنید و ب.م.م بین صورت و مخرج آن کسر را بیابید.

ب. صورت و مخرج کسر را بر ب.م.م تقسیم کنید.

پ. آیا ب.م.م کسر به‌دست آمده، برابر یک است؟

ت. چند کسر دیگر مثال بزنید و این فعالیت را در مورد آن

انجام دهید. نتیجهٔ فعالیت را بیان کنید.

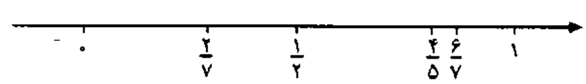
اعداد گویای تحویل ناپذیر

هر کسر را می‌توان به صورت کسری که دیگر ساده نشود، تبدیل کرد، که آن کسر را تحویل ناپذیر گویند. به عبارت دیگر، هرگاه ب.م.م صورت و مخرج برابر یک شد، کسر را تحویل ناپذیر نامند.

◇ فعالیت ۴

رضا: با مسأله‌ای مواجه شده‌ام و آن این است که، می‌خواهیم کسرهای $\frac{۲}{۷}$، $\frac{۴}{۵}$، $\frac{۶}{۷}$ و $\frac{۱}{۲}$ را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم. محمد چه راهی به نظرت می‌رسد؟

محمد: به نظر من به طور تقریبی می‌توان محل هریک از کسرها را روی محور اعداد نمایش داد. همهٔ کسرها از یک کوچک‌ترند؛ چون صورت آن‌ها از مخرج‌هایشان کوچک‌تر است.



رضا: به نظر تو اگر تعداد اعداد گویا زیاد بود، این روش، جالب است؟

محمد: راستش می‌خواستم بگویم اعداد $\frac{۴}{۵}$ و $\frac{۶}{۷}$ تقریباً به هم نزدیک‌اند و برای تقسیم یک پاره‌خط به قطعات مساوی، باید خیلی دقت کرد. اگر اعداد ما خیلی به هم نزدیک باشند، ممکن است در مشاهده خطا داشته باشیم یا این که خط‌کش ما دقیق نباشد تا بتوانیم موقعیت دقیق دو کسر را روی محور مشخص کنیم. رضا راه دیگری به فکرت می‌رسد؟

رضا: به نظر من اگر بتوان مخرج کسرها را با هم مساوی کرد و بعد مقایسه را انجام داد، کار ساده‌تر می‌شود.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{۱}{۲}=\frac{۱\times ۳۵}{۲\times ۳۵}=\frac{۳۵}{۷۰},\quad \frac{۶}{۷}=\frac{۶\times ۱۰}{۷\times ۱۰}=\frac{۶۰}{۷۰}\\ \frac{۴}{۵}=\frac{۴\times ۱۴}{۵\times ۱۴}=\frac{۵۶}{۷۰},\quad \frac{۲}{۷}=\frac{۲\times ۱۰}{۷\times ۱۰}=\frac{۲۰}{۷۰}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{۲}{۷}<\frac{۱}{۲}<\frac{۴}{۵}<\frac{۶}{۷}$$

محمد: درست است؛ می‌توان این گونه کسرها را مقایسه کرد. اما اگر تعداد اعداد گویا زیاد باشد، این روش خیلی طول می‌کشد.

رضا: خوب، البته می‌توان تعدادی از اعداد گویا را که از کوچکی یا بزرگی آن‌ها اطلاع داریم، کنار بگذاریم، برای مثال می‌دانیم که $\frac{۱}{۲}$ از $\frac{۲}{۷}$ بزرگ‌تر است و فقط $\frac{۶}{۷}$ و $\frac{۴}{۵}$ به عدد یک نزدیک‌ترند و آن دو را با هم مقایسه کنیم.

محمد و رضا تصمیم گرفتند نزد معلمشان بروند و از او بخواهند تا راهنمایی‌شان کند.

معلم: ببینید دانش‌آموزان خوبم، اگر صورت کسرها بر مخرج آن‌ها تقسیم و سپس اعداد اعشاری حاصل را با هم مقایسه کنیم، به نظرم این راه ساده‌تر است. حالا حاصل کسرها را مقایسه کنید.

محمد: حاصل کسرها را به اتفاق هم به دست آوردیم:

$$\frac{۱}{۲}=۰/۵,\quad \frac{۶}{۷}=۰/۸,\quad \frac{۴}{۵}=۰/۸,\quad \frac{۲}{۷}=۰/۲۵$$

خوب تاکنون مشخص شد $\frac{۲}{۷}<\frac{۱}{۲}$؛ ولی آقای معلم، الان $\frac{۶}{۷}$ و $\frac{۴}{۵}$ جواب‌های یکسانی به ما دادند.

معلم: خوب فکر کنید، آیا راه‌حلی به ذهنتان می‌رسد؟

رضا: آری، خوب هریک از کسرها را تا دو رقم اعشار حساب کنیم.

محمد: نیازی به محاسبهٔ همه کسرها نیست، فقط دو کسر $\frac{۶}{۷}$ و $\frac{۴}{۵}$ کفایت می‌کند.

رضا: راست گفتی، تکلیف آن دو کسر دیگر مشخص است.

معلم: این روش نیز اشکالی دارد؛ می‌توانید بگویید اشکال آن چیست؟

رضا: آقای معلم، خوب ابتدا تصمیم گرفتیم که تا یک رقم اعشار حساب کنیم و سپس در مرحلهٔ بعد، تا دو رقم اعشار حساب کردیم؛ اگر تعداد اعداد گویا زیاد بود، مشکل ایجاد می‌شد.

معلم: آفرین! به نکتهٔ خوبی اشاره کردید. اشکال آن این است که ناچاریم هربار برای نمایش اعشاری هر کسر، تا چند رقم اعشار محاسبه کنیم. البته ماشین حساب تا چند رقم اعشار را خوب حساب می‌کند و اگر با رایانه آشنایی داشته باشید، می‌توانید برنامه‌ای بنویسید که اعداد را از کوچک به بزرگ یا به عکس مرتب کند.

مسأله مبارزه‌طلب. اگر $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ که در آن‌ها، a، b، c و d اعداد طبیعی هستند، آن‌گاه نشان دهید که $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$.

آیا می‌توان نتیجه گرفت که بین دو عدد گویا، بی‌شمار عدد گویا وجود دارد؟ (چگونه؟)

مثال ۱ . می‌خواهیم بین دو عدد گویای $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۵}$ یک عدد گویا بیابیم . ابتدا کسرها را هم مخرج می‌کنیم :

$$\frac{۱}{۵}=\frac{۱\times۳}{۵\times۳}=\frac{۳}{۱۵}\ ,\ \frac{۱}{۳}=\frac{۱\times۵}{۳\times۵}=\frac{۵}{۱۵}$$

سپس دنبال عددی می‌گردیم که بین ۳ و ۵ باشد :

$$\frac{۳}{۱۵}<\frac{۴}{۱۵}<\frac{۵}{۱۵}$$

مثال ۲ . می‌خواهیم بین دو عدد گویای $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ یک عدد گویا پیدا کنیم . ابتدا کسرها را هم مخرج می‌کنیم

$$\frac{۱}{۳}=\frac{۱\times۲}{۳\times۲}=\frac{۲}{۶}\ ,\ \frac{۱}{۲}=\frac{۱\times۳}{۲\times۳}=\frac{۳}{۶}$$

حال چون صورت‌ها اعداد متوالی هستند ، می توان صورت و مخرج کسرها را در عدد ۲ ضرب کنیم تا بتوان عددی بین آن‌ها پیدا کنیم ؛ پس : $\frac{۱}{۲}=\frac{۶}{۱۲}\ ,\ \frac{۱}{۳}=\frac{۴}{۱۲}$ ؛ درنتیجه داریم :

$$\frac{۱}{۳}=\frac{۴}{۱۲}<\frac{۵}{۱۲}<\frac{۶}{۱۲}=\frac{۱}{۲}$$

◇ **فعالیت ۵**

الف . آیا میانگین دو عدد گویای $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ ، بین دو عدد گویای داده شده است؟

(میانگین دو عدد، یعنی حاصل جمع دو عدد تقسیم بر عدد ۲)

ب . آیا عدد $\frac{۲}{۵}$ بین دو عدد گویای $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ است؟

پ . آیا رابطهٔ $\frac{۱}{۲}>\frac{۱+۱}{۳+۲}>\frac{۱}{۳}$ درست است؟

کار با ماشین حساب

کسرهای زیر را با ماشین حساب محاسبه کنید و نتیجه را درمقابل آن بنویسید :

$\frac{۱}{۲}=۰/۵$, $\frac{۱}{۳}=۰/۳۳۳۳۳۳۳۳۳$,

$\frac{۱}{۴}=$........ , $\frac{۱}{۵}=$.......;

$\frac{۱}{۶}=۰/۱۶۶۶۶۶۶۶۶$, $\frac{۱}{۷}=$........ ,

$\frac{۱}{۸}=$....... , $\frac{۱}{۹}=$.........

الف . حاصل $\frac{۱}{۳}=۰/۳۳۳۳۳۳۳۳۳$ به‌دست آمد . اگر طرفین را در ۳ ضرب کنیم ، می بینیم که $۰/۹۹۹۹۹۹۹۹۹=۱$ درست نیست . چه‌طور چنین چیزی ممکن است؟ آیا می‌توان نتیجه گرفت که جواب‌ها تقریبی است؟

ب . اگر عدد ۱ را بر ۳ تقسیم کنیم ، مشاهده می‌کنیم که در خارج قسمت عدد ۳ تکرار می‌شود . آیا روش ساده‌تری برای این که این عدد تکراری را ننویسیم ، وجود دارد؟

پ . اعداد گویای بالا را به چند دسته می‌توانید تقسیم کنید؟

ت . آیا راهی وجوددارد که بدون عمل تقسیم بتوان اعداد گویا را به سه دسته تقسیم کرد؟

◇ **فعالیت ۶**

الف . کسرهای روبه رو چه ویژگی مشترکی دارند؟

$$۰/۳=\frac{۱}{۳}\ ,\ ۰/۲۵=\frac{۲۵}{۱۰۰}=\frac{۱}{۴}\ ,$$
$$۰/۴۵۳=\frac{۴۵۳}{۱۰۰۰}\ ,\ ۱/۴=\frac{۱۴}{۱۰}=\frac{۷}{۵}$$

ب . پس از ساده کردن کسرها در مخرج آن‌ها ، کدام عامل‌های اول وجوددارد؟ آیا می‌توان مخرج آن‌ها را به صورت $۲^n\times۵^m$ که در آن m و n اعداد حسابی هستند ، نوشت؟

پ . آیا هر کسری را که مخرج آن به صورت $۲^n\times۵^m$ است ، می‌توان به صورت توانی از عدد ۱۰ نوشت؟

ت . از این فعالیت چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

در انتهای این فصل مشابه با صفحه‌های ۲۷ و ۲۸ کتاب درسی ریاضی ۱ ، می‌توان تدریس را به پایان رساند .

◇ **خود را بیازماییم**

۱ . درستی یا نادرستی هریک از عبارت‌های زیر را مشخص کنید :

۱) $Z\subset Q$ ۲) $N\subset Q$ ۳) $Q\subset W$

ـ هر عدد گویا را می‌توان به‌صورت یک کسر متعارفی مثبت نوشت .

ـ غیر از اعداد گویا ، عددی وجود ندارد .

ـ در مجموعهٔ اعداد گویا کوچک‌ترین عضو و بزرگ‌ترین عضو وجود ندارد .

ـ صورت و مخرج یک کسر را می‌توان در یک عدد ضرب کرد .

ـ عدد صفر ، یک عدد گویاست .

ـ عدد $-۰/۲۵$ یک عدد گویا نیست .

۲. دوسال و سه ماه، چه کسری از سه سال و چهار ماه است؟

۳. یکی از کسرهای معادل $\frac{۲}{۵}$ به صورت $\frac{۳۴}{۲a+۱}$ نشان داده شده است. a چه قدر است؟

۴. به ازای چه مقدار a، دو کسر $\frac{a+۱}{۳}$ و $\frac{a-۴}{۲}$ قرینهٔ یکدیگرند؟

۵. اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ باشد، نشان دهید به ازای هر $m \neq \frac{-d}{b}$ داریم: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+mc}{b+md}$.

۶. پنج عدد گویای بین $\frac{-۳}{۲}$ و $\frac{-۲}{۳}$ بیابید.

۷. کسرهای زیر را به اعشاری تبدیل و دورهٔ گردش هریک را مشخص کنید.

$\frac{۲۶}{۶۵}$ ، $\frac{۱۳}{۶۵}$ ، $\frac{۴}{۶}$ ، $\frac{۵}{۶}$ ، $\frac{۷}{۳۴}$ ، $\frac{۱۳}{۲۳۱}$ ، $\frac{۱}{۱۳}$ ، $\frac{۱}{۷}$

۸. از کسرهای زیر، کدام مولد عدد اعشاری تحقیقی، کدام مولد عدد اعشاری متناوب ساده و کدام متناوب مرکب است؟ پس از تحقیق، عدد اعشاری هریک را بنویسید.

$\frac{۲}{۲۵}$ ، $\frac{۳}{۴}$ ، $\frac{۷}{۱۲}$ ، $\frac{۵}{۳۳}$ ، $\frac{۳}{۵۰}$ ، $\frac{۱}{۸}$
$\frac{۰/۲۵}{۳}$ ، $\frac{۲۶}{۶۵}$ ، $\frac{۵}{۱۱}$ ، $\frac{۵}{۱۸}$ ،

۹. اعداد $\frac{-۳}{۴}$ ، $\frac{-۴}{۵}$ ، $\frac{۳}{۵}$ ، $\frac{۴}{۵}$ و $\frac{۳}{۴}$ را از بزرگ به کوچک مرتب کنید.

۱۰. اگر $a>۱$ و a گویا باشد، ثابت کنید $a > \frac{۲a}{a+۱} > ۱$.

کاربرد اعداد گویا

خوارزمی نیمهٔ اول کتابش را به راه‌حل‌های معادلات مختلف و اثبات صحت روش‌های خود اختصاص می‌دهد؛ ولی نیمهٔ دیگر کتاب مشتمل بر مثال‌هایی از چگونگی استفاده از علم حساب و جبر در مسائلی است که به حساب نیازهای قوانین اسلامی مطرح می‌شوند.

وقتی شخصی فوت می‌کند و برای فرد بیگانه میراثی باقی نمی‌گذارد، سهم‌های شرعی وراث طبیعی او را می‌توان با حساب کسرها محاسبه کرد. محاسبهٔ این سهم‌ها به «علم‌الفرایض» موسوم شد. مثال زیر از کتاب خوارزمی، کاربرد حساب را در این جا نشان می‌دهد.

مثال. «زنی درمی‌گذرد. از او شوهر، یک پسر و سه دختر باقی می‌ماند.» و منظور محاسبهٔ کسر ماترکی است که به هریک از وراث می‌رسد.

قانون(شرع) در این حالت، آن است که شوهر $\frac{۱}{۴}$ ماترک را می‌برد و به پسر دوبرابر سهم هر دختر تعلق می‌گیرد. (ولی باید اضافه کرد که قانون ارث اسلامی از لحاظ حقوق زنان، به‌مراتب پیشرفته‌تر از رسومات دوران پیش از اسلام در شبه‌جزیرهٔ عربستان است.)

خوارزمی سپس باقی‌ماندهٔ ماترک را پس از کسر شوهر، یعنی $\frac{۳}{۴}$ را، به پنج قسمت تقسیم می‌کند، دو قسمت برای پسر و سه قسمت برای دختران، چون کوچک‌ترین مضرب مشترک پنج و چهار، ۲۰ است، ماترک باید به ۲۰ قسمت مساوی تقسیم شود. از این ۲۰ قسمت، شوهر پنج، پسر شش و هریک از دختران سه قسمت می‌برند.

مراجع

۱. بابلیان، اسماعیل و همکاران، ریاضیات سال اول دبیرستان، وزارت آموزش‌وپرورش، ۱۳۸۱.
۲. بهروش، محمود و همکاران، روش تدریس ریاضیات ابتدایی، دورهٔ کاردانی تربیت‌معلم ابتدایی، وزارت آموزش‌وپرورش، ۱۳۷۰.
۳. جهانشاهی، محمد، اصول فراگیری و آموزش ریاضی دبیرستانی و پیش‌دانشگاهی، انتشارات مدرسه، ۱۳۷۷.
۴. داریوش همدانی، حمیده و همکاران، مهارت‌های پایهٔ ریاضی، وزارت آموزش‌وپرورش ۱۳۸۱.
۵. رحمانی، مهدی، اهداف آموزش ریاضی چیست و چه نقشی در اعتلای ریاضیات دارد، رشد آموزش ریاضی شمارهٔ ۵۰، زمستان ۱۳۷۶.
۶. رستگار، آرش، ریاضیات ۱، کتاب پیشنهادی وزارت آموزش‌وپرورش، چاپ بهار ۱۳۸۱.
۷. صفائیان، افسر، مجموعه تمرین‌های ریاضی دورهٔ راهنمایی، گامی به‌سوی دبیرستان، انتشارات مبتکران، ۱۳۸۰.
۸. فرزان، مسعود و همکاران، ریاضی سال سوم راهنمایی، وزارت آموزش‌وپرورش، ۱۳۸۱.
۹. فرزان، مسعود و همکاران، کتاب معلم(روش تدریس)ریاضی دورهٔ راهنمایی، وزارت آموزش‌وپرورش، ۱۳۷۲.
۱۰. وحیدی، محمدقاسم، گوشه‌هایی از ریاضیات دورهٔ اسلامی، تألیف جی. ال. برگرن، انتشارات فاطمی، ۱۳۷۳.

مه از صفحه ۲ جلد

طع کند و DZ با ZG برابر باشد؛ و (۶) رسم خطی از نقطهٔ D واقع بر ضلع GB از مثلث قائم‌الزاویه‌ای، که زاویهٔ Bاش قائمه است، به طوری ه وتر AG را در K و امتداد AB از طرف B را در T قطع کند و TK/KG رابر با نسبت معلومی باشد.[۳]

روشن است که لم‌های (۱) و (۲) حالت‌های خاصی از یک سأله‌اند و میان (۳) و (۶) نیز چنین رابطه‌ای وجود دارد. نظیف در ان استدلال ابن‌هیثم هریک از این دو جفت را در قالب یک ترسیم ندسی بیان کرده است. بد نیست که در اینجا ترسیم او برای (۱) و ۲) را نقل کنیم و در توضیح روش ابن‌هیثم بر راه او برویم و به ترسیم ارجاع دهیم. اتفاقاً (۱) و (۲) برخی از ویژگی‌های مشخصهٔ راه‌حلی ا که برای مسألهٔ هندسی مورد نظر پیشنهاد شده دربردارند. در شکل، نقطهٔ نامعلومی بر محیط دایرهٔ کوچک به قطر BG است. می‌خواهیم A خطی رسم کنیم که دایره را در D و قطر، یا امتداد آن، را در E قطع ند و DE مساوی طول معلوم Z باشد.

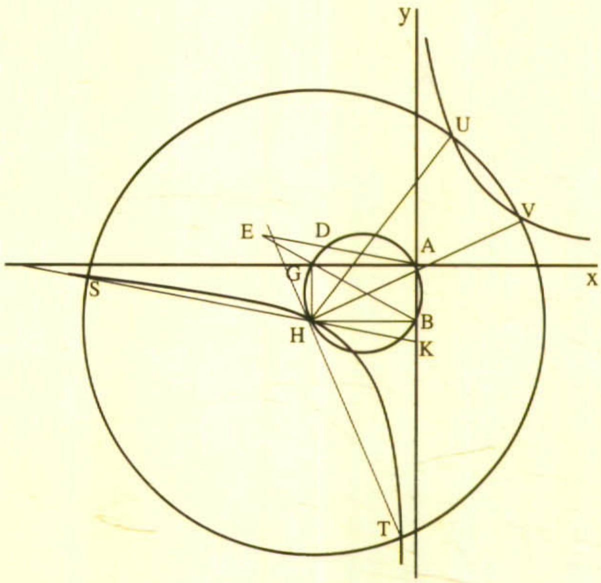
از G خط GH را موازی AB رسم می‌کنیم تا دایره را در H قطع کند BH را وصل می‌کنیم. فرض می‌کنیم که امتدادهای AG و AB، ترتیب، نمایندهٔ محورهای x و y باشند؛ بدین نحو که مبدأ محورها A منطبق است. هذلولیی را که از H می‌گذرد و x و y مجانبهای آن ستند رسم می‌کنیم. آنگاه به مرکز H دایره‌ای به شعاع

$$HS = \frac{BG^2}{z}$$

رسم می‌کنیم (HS ضلع مستطیلی که ضلع دیگرش z و مساحتش BG است). این دایره، در حالت کلی، دو شاخهٔ هذلول را در چهار نطه مانند S و T و U و V قطع خواهد کرد. H را به هر چهار نقطه صل، و از A خطهائی به موازات HS و HT و HU و HV رسم می‌کنیم. ریک از این موازیها دایرهٔ محیطی مثلث ABG را در نقطه‌ای چون D و طر، یا امتداد آن، را در نقطه‌ای چون E قطع خواهد کرد. ثابت شده ست که هریک از این خطوط در شرط مورد نظر ما صدق می‌کند.

به خلاف اثبات بالا ابن‌هیثم سه حالت، یکی پس از دیگری، در ظر گرفته است: (آ) خط مطلوب مماس بر دایره است، یعنی A بر D نطبق است؛ (ب) D روی قوس AG است؛ و (ج) D روی قوس AB ست. با وجود کلّیت لم (۱)، وی حالتی را که خط مطلوب امتداد BG ا در طرف B قطع می‌کند، در نظر نمی‌گیرد.

همچنین وقتی که به لم (۲) می‌پردازد، برحسب رابطهٔ دایره با شاخهٔ مقابل» هذلولی، سه حالت زیر را جداگانه بررسی می‌کند: (آ) ایره این شاخه را در دو نقطه قطع می‌کند؛ (ب) دایره در یک نقطه بر ین شاخه مماس می‌شود؛ و (ج) دایره این شاخه را قطع نمی‌کند. البته



ابن‌هیثم از دستگاه مختصات متعامدی که مبدأش نقطهٔ معلوم A باشد چیزی نگفته است، با این حال مربعی مشابه ABHG را در نظر گرفته ضلع‌های آن را که نظیر AB و AG‌اند به عنوان مجانب‌های هذلولیی وصف می‌کند که از نقطه‌ای نظیر نقطهٔ H در شکل رسم کرده است.

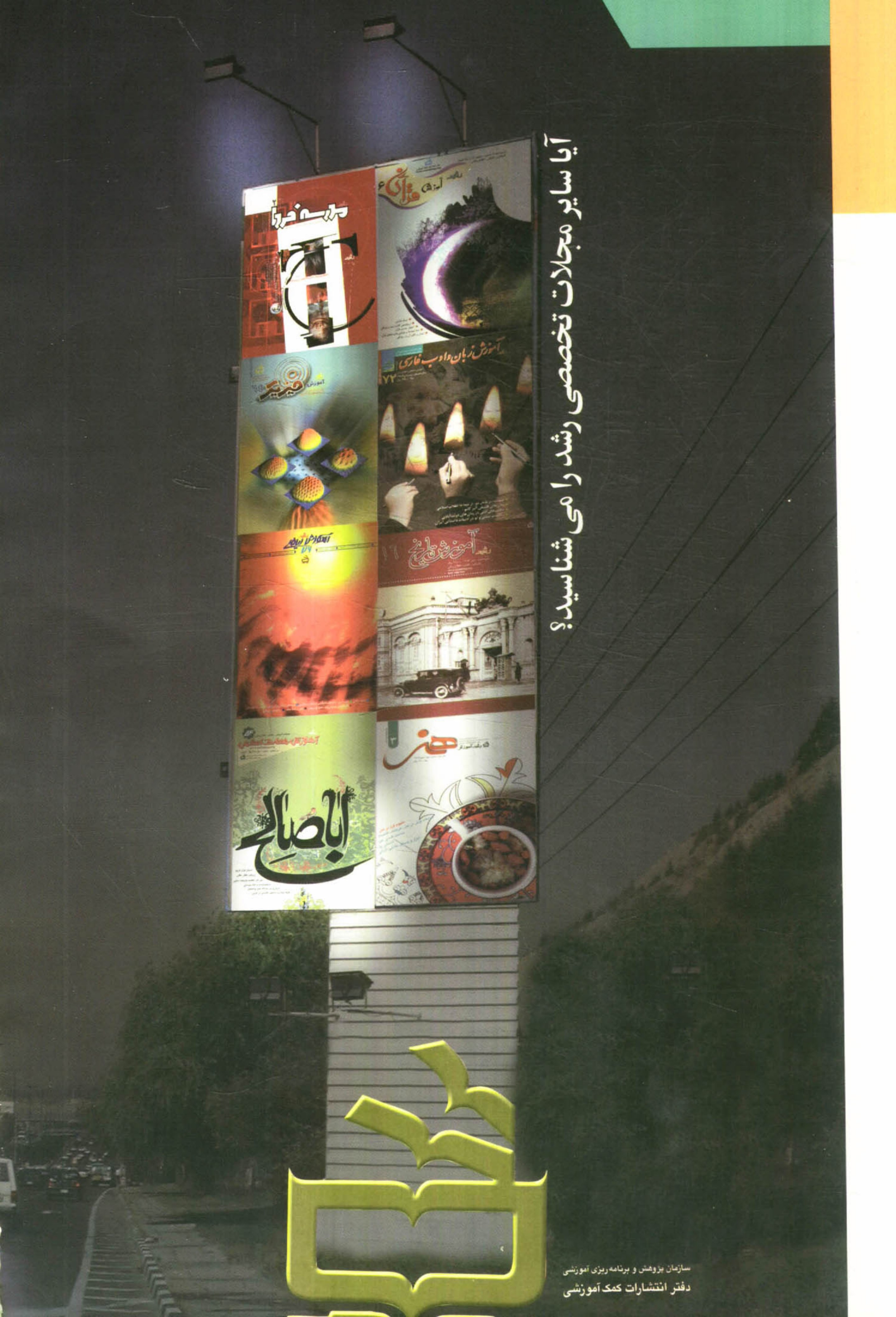
ابن‌هیثم، که این شش لم را برای یافتن نقطهٔ بازتاب در انواع مختلف سطوح به‌کار می‌برد، باز موارد خاص را به‌نوبت می‌آزماید. نظیف اثبات کرده است که حالتهای مختلف مشمول لم ۴، حل کلی مسأله را برای سطوح کروی، چه محدب و چه مقعر، تشکیل می‌دهند. در مورد آینه‌های استوانه‌ای ابن‌هیثم این حالات را در نظر می‌گیرد: (آ) دو نقطه در صفحه‌ای عمود بر محور استوانه واقع‌اند؛ [(ب) حالتی که دو نقطه روی صفحه‌ای قرار دارند که محور استوانه هم در آن واقع است]؛ و (ج) حالت کلی، که در آن مقطع صفحه‌ای که دو نقطه درآنند با استوانه نه خط مستقیم است و نه دایره بلکه بیضی است. برای آن‌که نشان دهد در سطوح محدب مخروطی بازتاب فقط از یک نقطه، که او تعیین کرده است، صورت می‌گیرد شش حالت مختلف را توصیف می‌کند. در مورد آینه‌های مقعر ثابت می‌کند که بازتاب ممکن است در یک تا چهار نقطه رخ دهد، اما عدهٔ این نقاط از چهار بیشتر نمی‌شود؛ و در مورد آینه‌های استوانه‌ای مقعر هم استدلال می‌کند که نقاط بازتاب به همین تعداد است.

زیرنویس..

۱. Recherches sur la catoptrique grecque («پژوهش‌هایی دربارهٔ انعکاس نور در یونانی»)، از آ. لوژون (بروکسل، ۱۹۵۷)، ۷۱ـ۷۴.

۲. نمودارها در نسخهٔ کوپرولو ۹۵۲ موجود است (← کتابشناسی، «کارهای اصلی»، زیر شمارهٔ سوم ۳). تا آنجا که من می‌دانم، از این نسخهٔ خطی تاکنون در تحقیق دربارهٔ المناظر استفاده نشده است.

۳. Opticae thesaurus. Alhazeni libri VII، ۱۴۲ـ۱۵۰.


آیا سایر مجلات تخصصی رشد را می شناسید؟
آموزش زبان و ادب فارسی
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی