مجله ریاضی

برهان

برای دانش آموزان دبیرستان

۱۷

سال پنجم، بهار ۱۳۷۵ شمارهٔ سوم، بهاء ۲۰۰۰ ریال

بسم الله الرحمن الرحیم

انتشارات مدرسه وابسته به وزارت آموزش و پرورش

❑ صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه ❑ مدیر مسئول: محمود ابراهیمی ❑ سردبیر: حمیدرضا امیری

مطالب این شماره

❑ سال پنجم، بهار ۱۳۷۵ شمارهٔ سوّم

برهان تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

۱ـ نگارش مقالات کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتب ریاضی راهنمایی) ۲ـ طرح مسائل کلیدی (برای دانش‌آموزان) به‌همراه‌حل آن ۳ـ طرح مسائل مسابقه‌ای (برای‌دانش‌آموزان) به‌همراه حل آن ۴ـ طرح معماهای‌ریاضی ۵ـ نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

■ **هیئت تحریریه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافهٔ مقالات آزاد است.** ■ **مقالات مجله با رسم‌الخط انتشارات مدرسه به چاپ خواهد رسید.**

■ **مقالات وارده باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.** ■ **مقالات رسیده مسترد نمی‌شود.**

برهان هر ۳ ماه یک شماره منتشر می‌شود.

نشانی: تهران، خیابان سپهبد قرنی، پل کریمخان زند، کوچه شهید محمود حقیقت طلب، پلاک ۳۶
تلفن: ۴ـ۸۸۹۷۷۷۳، ۸۹۳۸۰۹، ۸۸۰۲۳۳۶، ۸۸۰۲۳۴۷ فاکس: ۸۸۲۰۵۹۹
صندوق پستی: ۱۴۱۵۵/۱۹۴۹

حرف اوّل

السلام علیک یا اباعبدا... و علی‌الارواح التی حلت بفنائک

خداوندا! کیست که ساغر محبت از دست تو نوش کرد و حلقهٔ بندگی دیگری در گوش کرد؟! خدایا! کدامین کهکشان بر گرد تو گشت و واله و حیرانِ تو نگشت؟! معشوقا! کدامین انسان پیشانی عشق بر خاک ربوبیت تو سایید و شیرینی تو چشید و دل به دیگری سپرد؟! دلبرا! کدامین پروانه شعله‌های ملتهب جمال تو را دید و به ظلمت پناه برد؟! امیدا! کدامین یوسف به عشق رؤیای تو آواره نگشت؟! شورآفرینا! کدامین محمّد در حرا صدای تو شنید و نلرزید؟![*] شاهدا! کدامین حسین ندای تو شنید و شهید نگشت؟!

به راستی فلسفهٔ شهادت امام حسین(ع) و یارانِ باوفایش در کربلای عشق چه بود؟ چگونه بود که امام در اوج نبرد و چکاچک شمشیرها و در لحظات بحرانیِ جنگ وقتی فرارسیدنِ ظهر را احساس می‌کند، دست از جنگ می‌شوید و در زیر باران تیرها و نیزه‌ها به **نماز** می‌ایستد. پس نماز هدف اصلی قیام اباعبدالله است.

بر تمامی پیروانِ امام حسین(ع) واجب است که در تمام جنبه‌های زندگی خود و به زیباترین وجه ممکن و با شنواترین گوشِ دل، پیامِ عینی امام را تحقق بخشیده تا موجبات خشنودی ایشان ـ که همان خشنودی حضرت حق می‌باشد ـ فراهم شود.

اِن شاءا...

عزیزان:

از این شماره به بعد (شمارهٔ ۱۸ که برای اول سال تحصیلی جدید آماده خواهد شد) بخش مسائل برای حل به کتابهای ریاضی نظام جدید اختصاص خواهد داشت و براساس هر ترم سؤالات از کتابهای ریاضی که در آن ترم تدریس خواهد شد، طرح می‌شوند و به همین دلیل در این شماره فقط پاسخ مسائل برای حلِ شمارهٔ قبل را آورده‌ایم.

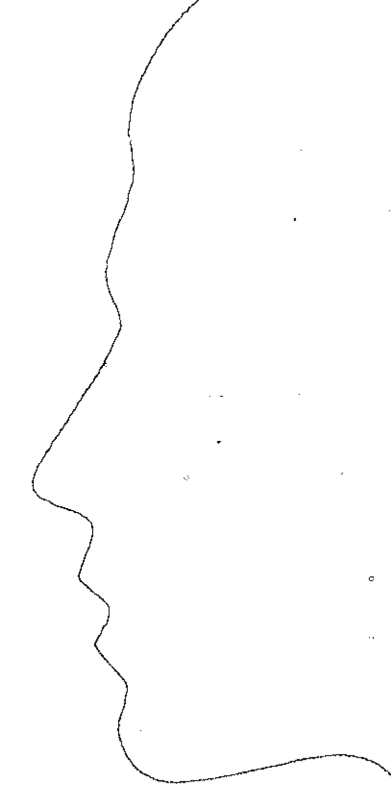
از شما دانش‌آموزان عزیز نیز تقاضا می‌کنیم از این به بعد مسائل ارسالی خود را از کتابهای نظام جدید و براساس سرفصلهای این کتابها و با قید سال و نام کتاب به همراه حل مسائل برای ما ارسال کنید.

منتظر نامه‌ها، مقالات، پیشنهادات و انتقادهای شما عزیزان هستیم.

والسلام ـ سردبیر

---

* برگرفته از کتاب «دست دعا، چشم امید» آقای سید مهدی شجاعی



شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۱۷)

○ پرویز شهریاری

از این گونه **نمونه‌ها**، به‌فراوانی و در تمامی شاخه‌های ریاضیات وجود دارد. ریاضیات راهنمای عمل است. بنابراین، باید با عمل سازگار باشد. معادله، فرمول، شکل و حتی استدلال، به‌شرطی سودمند است که معرف یک واقعیت باشد و بتواند دشواریهایی را که در برابر زندگی انسان وجود دارد، حل کند. در غیر این صورت، به‌نوعی بازی ذهنی تبدیل می‌شود و نمی‌تواند سودی عملی داشته باشد. در این‌جا، مثالهای دیگری می‌آوریم که، به‌جز مثال آخر، بسیار ساده‌اند، ولی بی‌توجهی ما به‌واقعیت‌ها می‌تواند در مورد آنها نیز، ما را گمراه کند. برخی از این مثالها به‌درک درست تعریفها مربوط می‌شود. گمان من بر این است که شما دانش‌آموز عزیز، به‌این مثالهای ساده نیاز ندارید، ولی ذکر آنها را بی‌فایده نمی‌دانم، چرا که **تکرار**، یکی از شرطهای یادگیری است.

مثال ۱۵ ـ p عددی اول و دو عدد طبیعی a و b نسبت به‌هم اول‌اند.

ثابت کنید، اگر ab و $a+b$ بر p بخش‌پذیر باشند، آن هنگام $a^۳-b^۳$ هم بر p بخش‌پذیر است.

مسأله، با استدلال ساده‌ای حل، و درستی حکم آن ثابت می‌شود. این برابری روشن است:

$$a^۳-b^۳=(a-b)[(a+b)^۲-ab]$$

مقدار داخل کروشه، بر p بخش‌پذیر است، زیرا هم $(a+b)^۲$ و هم ab، بنا به‌فرض، مضربی از p هستند. درنتیجه، سمت راست برابری مضربی از p می‌شود، یعنی $a^۳-b^۳$ بر p بخش‌پذیر است.

هیچ اشکالی در استدلال نیست. ولی بیشتر دقت کنیم. اگر حاصل‌ضرب ab بر عدد اول p بخش‌پذیر باشد، از آنجا که a و b نسبت به‌هم اولند، یا a بر p بخش‌پذیر است و یا b. فرض کنیم a مضربی از p باشد، چون مجموع $a+b$ هم مضربی از p است، بنابراین، به‌ناچار، b هم باید مضربی از p باشد. وقتی هردوعدد a و b، بر $p \neq ۱$ بخش‌پذیر باشند، نمی‌توانند نسبت به‌هم اول باشند. در واقع، فرض مسأله، با خودش تناقض دارد. نمی‌توان دو عدد a و b را طوری پیدا کرد که، نسبت به‌هم اول باشند و، در ضمن، دو عدد ab و $a+b$ بر عدد اولی مانند p بخش‌پذیر باشند.

یادداشت: در منطق ریاضی گفته می‌شود: از یک گزارهٔ نادرست، می‌توان هر گزاره‌ای را نتیجه گرفت. به‌طور مثال می‌توان گفت: «اگر ۲ با ۵ برابر باشد، آن هنگام، هر معادله‌ای ریشهٔ حقیقی دارد»... ولی، این بحث مربوط به‌منطق ریاضی (که از دیدگاه منطقی درست است)، در آزمایش و عمل، کاربرد کمتری دارد و ضمن حل مسئله‌های محاسبه‌ای یا استدلالی، به‌جز در موردهای نادر، باید از آن صرف‌نظر کرد.

مثال ۱۶ ـ معادلهٔ $x^x=x$ را حل کنید.

راه‌حل مسأله دشوار نیست، در این‌جا تنها در این باره صحبت می‌کنیم که: آیا $x=-۱$ جوابی از معادله است؟ در واقع به‌ازای $x=-۱$ داریم:

$$x^x=(-۱)^{-۱}=\frac{۱}{(-۱)^۱}=-۱=x$$

$x=-1$ در معادله صدق می‌کند، با وجود این نباید آن را جوابی از معادله دانست. این معادله تنها یک جواب دارد: $x=1$

چرا؟ دلیل این مطلب به‌تعریف تابع با ضابطه:

$$y=[f(x)]^{\varphi(x)} \qquad (1)$$

مربوط می‌شود. دامنهٔ این تابع، یعنی مقدارهای قابل قبول برای متغیر x ــ بنا به‌تعریف ــ با این شرطها تعیین می‌شود: $f(x)$ مقداری مثبت باشد و در ضمن، $f(x)$ و $\varphi(x)$ دارای مقداری عددی باشند.

چرا در تعریف این تابع، $f(x)$ را مثبت می‌گیرند؟ برای این‌که، در حالت منفی بودن $f(x)$، اغلب برای y نمی‌توان مقدار معینی پیدا کرد. فرض کنید بخواهیم مقداری برای عدد $a=(-1)^{\sqrt{2}}$ پیدا کنیم. می‌دانیم:

$$1/4<\sqrt{2}<1/5$$

به‌این امید، مقدارهای تقریبی $\sqrt{2}$ را درنظر گرفتیم که شاید بتوانیم راهی برای محاسبه a پیدا کنیم. اگر $\sqrt{2}$ را برابر $1/4$ بگیریم:

$$a=(-1)^{1/4}=(-1)^{\frac{7}{5}}=\sqrt[5]{(-1)^7}=-1$$

و اگر $\sqrt{2}$ را برابر $1/5$ فرض کنیم:

$$a=(-1)^{1/5}=(-1)^{\frac{3}{2}}=\sqrt{(-1)^3}=\sqrt{-1}$$

که عددی موهومی است.

در بحثی دقیقتر، وقتی در (۱) داشته باشیم $f(x)<0$، برای پیوستگی یا ناپیوستگی تابع و درنتیجه، برای مشتق‌پذیر بودن یا مشتق‌پذیر نبودن تابع نمی‌توانیم حرفی بزنیم.

در مثال بعدی، احتمال اشتباه بیشتر است.

مثال ۱۷ ـ این معادله را حل کنید:

$$(\cos x)^{\sin^2 x-\frac{3}{2}\sin x+\frac{1}{2}}=1$$

خیلی زود و به‌سادگی، این دو جواب به‌دست می‌آید:

$$x_1=2k\pi \ \text{و}\ x_2=k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{6}\ (k\in Z)$$

برای $x_1=2k\pi$ نمی‌توان ایرادی گرفت، زیرا به‌ازای آن داریم:

$$\cos x=\cos(2k\pi)=1$$

که مقداری مثبت است. ولی کسینوس x، به ازای همهٔ مقدارهای x_2، مثبت نمی‌شود، اگر $k=2n$، آن هنگام

$$\cos x=\cos(2n\pi+\frac{\pi}{6})=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}>0$$

و اگر $k=2n+1$، آن هنگام،

$$\cos x=\cos(2n\pi+\frac{5\pi}{6})=\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}<0$$

بنابراین، برای جوابهای معادله، باید نوشت:

$$x_1=2k\pi,\ x_2=2k\pi+\frac{\pi}{6}\ (k\in Z)$$

مثال ۱۸ ـ این معادله را حل کنید:

$$\sqrt{4x-y^2}-\sqrt{y+2}=\sqrt{4x^2+y}$$

معادله‌ای است گنگ. ولی چرا تنها یک معادله؟ برای دو مجهول، دو معادله لازم است و، در اینجا، تنها یک معادله به‌ما داده‌اند. به‌هر حال، باید معادله را گویا کنیم. جملهٔ دوم را از سمت چپ برابری، به‌سمت راست می‌بریم و، دو طرف برابری را، مجذور می‌کنیم، به‌ترتیب به‌دست می‌آید:

$$(\sqrt{4x-y^2})^2=(\sqrt{y+2}+\sqrt{4x^2+y})^2$$
$$4x-y^2=2y+2+4x^2+2\sqrt{(y+2)(4x^2+y)}$$
$$(y+1)^2+(2x-1)^2+2\sqrt{(y+2)(4x^2+y)}=0$$

هیچ یک از جمله‌های سمت چپ برابری اخیر، نمی‌تواند منفی باشد و، بنابراین، برای این که مجموع آنها برابر صفر شود، باید هر سه جمله برابر صفر باشند:

$$\begin{cases} y+1=0 \\ 2x-1=0 \\ (y+2)(4x^2+y)=0 \end{cases}$$

از تعداد کم معادله‌ها نگران بودیم، اکنون باید از تعداد زیاد آنها گله داشته باشیم: سه معادله برای دو مجهول دستگاه تنها وقتی جواب دارد که، جواب حاصل از دو معادلهٔ اول، به‌خودی خود، در معادلهٔ سوم هم صدق کند. از دو معادلهٔ اول دستگاه، به‌سادگی، به‌دست می‌آید:

$$x=\frac{1}{2},\ y=-1$$

که در معادلهٔ سوم دستگاه هم صدق می‌کند. روشن است که این عددها را باید در معادله اصلی هم امتحان کرد، زیرا ضمن حل، با مجذور کردن دو طرف برابری، ممکن است جوابهای دیگری وارد آن شده باشند. ولی آزمایش نشان می‌دهد که، این مقدارهای x و y، در معادلهٔ اصلی صدق می‌کنند.

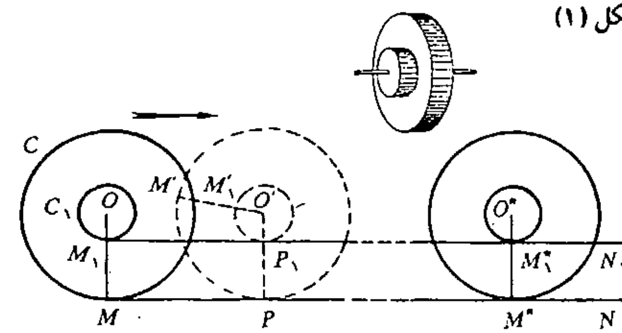
اکنون به‌مثالی می‌پردازیم که منتسب به ارسطو[1] است. این مثال، نمونهٔ جالبی از استدلال نادرست است و با آن که نادرستی نتیجه‌گیری از همان آغاز روشن است رد کردن آن چندان ساده نیست و نیازمند منطقی ظریف و هوشمندانه است. پاسخ این «سفسطه» را از کتاب

«یاکوب‌دوبنوف» به‌نام «اشتباه در استدلال‌های هندسی» با حذف تکه‌هایی از آن، برداشته‌ایم.

مثال ۱۹ ـ آیا همهٔ دایره‌ها، محیطی برابر دارند؟

طرح مسأله. دو دایره هم مرکز C و C_1 را درنظر می‌گیریم که به‌یکدیگر محکم شده باشند (شکل ۱). برای درک بهتر، به‌نمونه

شکل (۱)



فیزیکی آن هم توجه می‌کنیم: دو غلتک استوانه‌ای که محوری مشترک و افقی داشته باشند و به‌صورتی استوار، به‌یکدیگر چسبیده باشند (بهتر است فرض کنیم، بخشی از استوانه را، به‌صورت استوانه جدیدی تراشیده باشیم، به‌نحوی که محورش همان محور استوانه اصلی و شعاعش کوچکتر از آن باشد (شکل ۱ ـ بالا). از نقطه‌های M و M_1 واقع بر محیط دایره‌های C و C_1، که با نقطهٔ O روی یک خط راست‌اند، مماسهای MN و M_1N_1 را بر دایره‌ها رسم می‌کنیم. از آنجا که دایره‌ها به‌هم محکم شده‌اند، هرگاه یکی از دایره‌ها، به‌اندازه زاویه‌ای حرکت کند، دیگری هم به‌همان اندازه حرکت خواهد کرد. به‌این ترتیب، اگر دایره C روی خط راست MN حرکت کند، دایرهٔ C_1 روی خط راست M_1N_1 حرکت خواهد کرد. (در شکل ۱، نشانه پیکان نشان می‌دهد، دو دایرهٔ به‌هم چسبیده، در کدام جهت حرکت می‌کنند، دایرهٔ نقطه‌چین، یکی از حالتهای بینابینی دایره را نشان می‌دهد، در ضمن M' و M'_1، جای تازه نقطه‌های M و M_1 هستند.) برای نمونه فیزیکی، باید این‌طور فرض کرد که، زیر هر یک از غلتکها، سطحی افقی قرار گرفته است و، هر استوانه، روی سطح مربوط به‌خود، می‌غلتد. فرض کنیم، دایرهٔ C روی خط راست MN، یک دور کامل بزند و نقطهٔ M به‌وضع نقطه M^* درآید، در این صورت، دایره C_1 هم یک دور کامل می‌زند و نقطهٔ M_1 به‌وضع M^*_1 (روی شعاع O^*M^*) درمی‌آید. O^*M^* موازی OM است، زیرا هر دو، بر خط راست MN عمودند. بنابراین نتیجه می‌گیریم:

$$|MM^*| = |M_1M^*_1|$$

یعنی، دو دایره، بعد از یک دور کامل حرکت، راهی برابر پیموده‌اند و، بنابراین، محیط دو دایره، طولهایی برابر دارند. چون دایره‌های C و C_1 را، به‌دلخواه انتخاب کرده‌ایم، پس محیط هر دو دایرهٔ دلخواه، طولی برابر دارند.

به‌نظر می‌رسد، این مسأله، پیش از آن که به‌هندسه مربوط باشد، به‌مکانیک (یا بهتر بگوییم، جنبش‌شناسی یا سینماتیک) بستگی دارد، زیرا سخن بر سر چرخی است که به‌صورت خاصی حرکت می‌کند. از سوی دیگر، می‌توان پیش‌بینی کرد که، پوشش مکانیکی مسأله را می‌توان کنار گذاشت، زیرا در اینجا، زمان نقش چندانی ندارد. یعنی اگر سرعت حرکت چرخ را، تند یا کند کنیم، تغییری در وضع مسأله پدید نمی‌آید. تمامی «سفسطهٔ» مسأله را، می‌توان با زبان هندسه بیان کرد که ما هم، اندکی بعد، به‌آن می‌پردازیم.

بی‌تردید، نقطهٔ ضعف استدلال مسأله را، باید در این جمله جست‌وجو کرد: «دایره (بدون لغزش) بر خط راست می‌غلتد.» باید دربارهٔ معنای درست این جمله دقت کنیم، در این صورت، خیلی زود کشف خواهیم کرد: اگر یکی از دو دایرهٔ چسبیده به‌هم، بدون لغزش بغلتد، حرکت دیگری نمی‌تواند بدون لغزش باشد و، به‌این ترتیب، نادرستی حکم مسأله روشن می‌شود.

در آغاز، با زبان «جنبش‌شناسی» صحبت می‌کنیم. وقتی می‌گوییم، دایره روی خط راست، بدون لغزش، می‌غلتد، به‌این معناست که، دایره طوری حرکت می‌کند که در هر لحظه بر خط راست مماس است، در ضمن، نقطه‌ای از دایره که به‌عنوان نقطه تماس، روی خط راست واقع است، در این لحظه سرعتی برابر صفر دارد. به‌زبان دیگر، نقطه‌ای از دایره که در لحظهٔ مفروض، در «پایین» یعنی در «نقطه تماس» قرار گرفته، برای دایره غلتنده، «مرکز دوران لحظه‌ای» است. در واقع، برای تعیین سرعت هر نقطه از دایره (که لزومی ندارد، روی محیط دایره باشد)، باید به‌این نکته توجه داشته باشیم که، در این لحظه، دور نقطه تماس دوران می‌کند. به‌ویژه، امتداد این سرعت، عمود بر خط راستی است که نقطهٔ مفروض را به‌نقطهٔ تماس وصل می‌کند. به‌عنوان نمونه، باتوجه به‌شکل (۱)، سرعت نقطه‌ای که در وضع M' است، در جهت عمود بر خط راست $M'P$ قرار دارد.

به‌این ترتیب اگر نقطه‌ای از دایره، در لحظه‌ای که «پایین» قرار گرفته است، سرعتی مخالف صفر داشته باشد، در حالتی که سرعتش در جهت حرکت باشد، می‌گویند حرکتی «با لغزش مثبت» دارد و در حالتی که سرعتش در خلاف حرکت باشد، می‌گویند حرکتی «با

لغزش منفی» دارد. تنها در حالتی که لغزش وجود نداشته باشد، می‌توان نتیجه گرفت: شعاع دایره‌ای که روی خط راست می‌غلتد، به‌اندازه زاویه‌ای دوران می‌کند و راهی که می‌پیماید ،برابر است با طول کمان روبه‌رو به این زاویه، به‌طورمثال در شکل (۱) داریم: $|MP| = \widehat{PM'}$ و به‌ویژه، MM^* برابر است با طول محیط دایره‌ای که می‌غلتد. در حالتی که لغزش مثبت باشد $|MP| > \widehat{PM'}$ و در حالتی که با لغزش منفی سروکار داشته باشیم $|MP| < \widehat{PM'}$.

اکنون با بیان هندسی، تفاوت گونه‌های مختلف غلتیدن را شرح می‌دهیم، اگرچه به‌خاطر روشنتر بودن مطلب، گاهی از زبان جنبش‌شناسی (سینماتیک) هم استفاده می‌کنیم. پاره‌خط راست $|MM^*| = 2\pi R$ را درنظر می‌گیریم (شکل ۱) و برای هر نقطه آن مثل P ، در یک طرف خط راست MM^* ، دایره‌ای به‌مرکز O' و شعاع برابر R رسم می‌کنیم، روی محیط این دایره، کمان PM' را برابر طول پاره‌خط راست PM ، طوری جدا می‌کنیم که $\widehat{PM'}$ و $\overline{PM}$ نسبت به‌نقطهٔ P ، در یک جهت باشند [یعنی کمان PM' (و اگر کمان بزرگتر از نیم‌دایره باشد بخشی از آن که به P چسبیده است) و پاره‌خط راست PM ، در یک سمت قطر PO' واقع باشند]. اگر این ساختمان را، برای همهٔ حالتهای ممکن نقطه P روی پاره‌خط راست MM^* ، انجام دهیم، گوییم (گرچه با زبان «جنبش‌شناسی» صحبت می‌کنیم، ولی در واقع، از حوزهٔ هندسه خارج نمی‌شویم)، مجموعهٔ همهٔ دایره‌های مماس، از یک دوران دایرهٔ به‌شعاع R روی خط راست MN ــ که بدون لغزش روی خط راست MN می‌غلتد ــ به‌دست می‌آید و مکان هندسی نقطه M متناظر با وضعهای مختلف نقطه P، عبارت است از مسیر نقطهٔ M .

اگر در این ساختمان، برابری $|MP| = \widehat{PM'}$ را به $|MP| = k\widehat{PM'}$ تغییر دهیم (k ضریب ثابتی مخالف واحد است)، می‌گوییم: «دایره با لغزش ثابت به‌ضریب k می‌غلتد، درضمن، لغزش را مثبت یا منفی می‌گوییم، وقتی که $k-1$ مثبت یا منفی باشد».

باتوجه به‌این تعریف، به‌مسأله مربوط به‌چرخ برمی‌گردیم. از دیدگاه جنبش‌شناسی، وقتی از دو دایره هم مرکز، دایرهٔ بزرگتر روی خط راست MN ، بدون لغزش، می‌غلتد (شکل ۱)، دایره کوچکتر، روی خط راست M_1N_1 ، نمی‌تواند بدون لغزش بغلتد. در واقع، اگر دایرهٔ کوچکتر هم، بدون لغزش بغلتد، در لحظه‌ای که مرکز مشترک دو دایره، روی O' قرار گیرد، شکل متحرک دارای دو مرکز دوران لحظه‌ای P و P_1 خواهد بود (و در این صورت، سرعت نقطهٔ M' ، باید هم در جهت عمود بر PM' و هم در جهت عمود بر P_1M' باشد که ممکن نیست). به‌جز این، می‌توان گفت که، دایرهٔ کوچکتر، با لغزش مثبت می‌غلتد، زیرا در هرحال، باید داشته باشیم:

$$|M_1P_1| = |MP| = \widehat{PM'}$$

و بنابراین:

$$|M_1P_1| > \widehat{P_1M'_1}$$

برعکس، اگر دایرهٔ کوچکتر را، بدون لغزش، روی خط راست M_1N_1 بغلتانیم، ثابت می‌شود که دایرهٔ بزرگتر، با لغزش منفی خواهد غلتید.

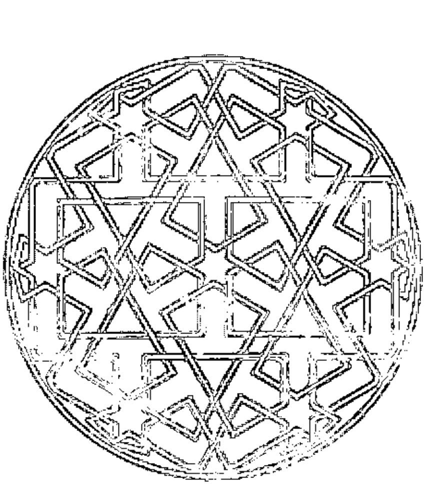
با تعریفهای هندسی هم، می‌توان به‌همین نتیجه‌ها رسید: وقتی دایرهٔ بزرگتر شکل (۱)، طوری بغلتد که در هر وضع داشته باشیم، $|MP| = \widehat{PM'}$ ، آن وقت برای دایرهٔ کوچکتر، باید نابرابری $|M_1P_1| > \widehat{P_1M'_1}$ برقرار باشد و داشته باشیم:

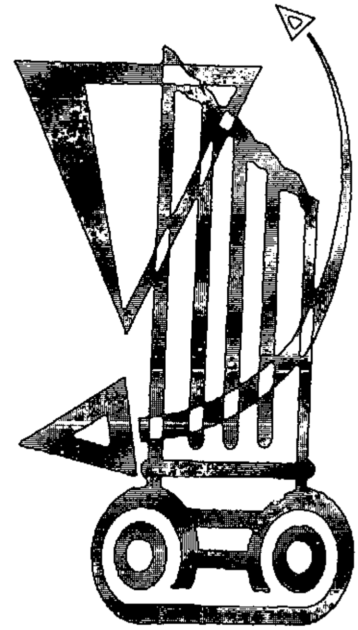
$$|M_1P_1| = \frac{R}{r}\widehat{P_1M'_1}$$

که در آن، R و r ، شعاعهای دو دایرهٔ بزرگتر و کوچکتر هستند. بنابراین، دایرهٔ کوچکتر، با لغزش مثبت به‌ضریب $\frac{R}{r} > 1$ می‌غلتد. برعکس، اگر دایرهٔ کوچکتر، بدون لغزش بغلتد، دایرهٔ بزرگتر، با لغزش منفی به‌ضریب $\frac{r}{R} < 1$ خواهد غلتید.

◆ **یادداشتها**

1– Aristoté lés (فیلسوف یونانی سدهٔ چهارم پیش از میلاد)





حدّ

(قسمت دوّم)

▷ احمد قندهاری

(با توجه به محدوده کتاب حسابان (۱) نظام جدید)

▷ حدّ چپ

مثال (۸): تابع به معادله $f(x)=\begin{cases} x+۱ & x\neq ۱ \\ ۳ & x=۱ \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم.

مقادیر $f(x)$ را به ازاء $x<۱$ و در نزدیکی عدد (۱) محاسبه می‌کنیم و نتیجه را در جدول زیر می‌نویسیم

x	۰	۰/۵	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹
f(x)	۱	۱/۵	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹

در این جدول مشاهده می‌شود وقتی x (از مقادیر کوچکتر از (۱)) به عدد (۱) نزدیک و نزدیکتر می شود، مقدار $f(x)$ به عدد (۲) نزدیک و نزدیکتر می‌شود.

حال اگر به طریقه دیگر به این جدول نگاه کنیم و ابتدا مقادیر $f(x)$ را در نظر بگیریم، ملاحظه می‌کنیم که مقادیر $f(x)$ به عدد (۲) نزدیک و نزدیکتر می‌شود اگر x (از مقادیر کوچکتر (۱)) به عدد (۱) نزدیک و نزدیکتر شود.

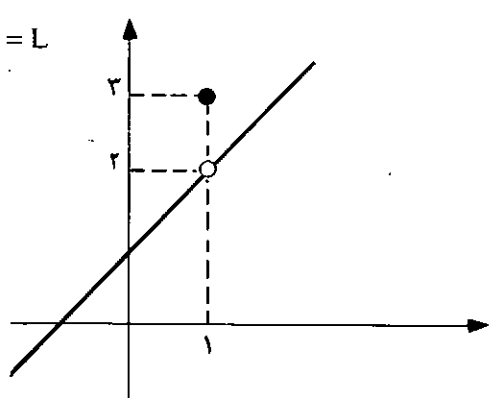
می توانیم مقادیر $f(x)$ را به هر اندازه دلخواه به عدد (۲) نزدیک کنیم. به شرطی که x را به اندازهٔ کافی از طرف اعداد کوچکتر از (۱) به عدد (۱) نزدیک کنیم. پس به طریقه شهودی می‌توان گفت که حدّ چپ تابع وقتی x، از طرف اعداد کوچکتر از (۱) به عدد (۱) نزدیک می‌شود برابر عدد (۲) است و می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \text{حد}\ f(x)=۲ \\ x\to ۱^- \end{cases}$$

▷ نتیجه شهودی حدّ چپ تابع:

فرض کنیم تابع f به معادله $f(x)$ در بازه (a,x_0) تعریف شده باشد. عدد L را حدّ چپ تابع در نقطه x_0 می‌نامیم اگر بتوان مقدار $f(x)$ را به هر اندازه دلخواه به عدد L نزدیک کرد به شرطی که عدد مثبت (x_0-x) را به قدر کافی به صفر نزدیک کنیم. می نویسیم:

$$\begin{cases} \text{حد}\ f(x)=L \\ x\to x_0^- \end{cases}$$



▷ تعریف ریاضی حدّ چپ تابع:

فرض می کنیم تابع f به معادله $f(x)$ در بازه (a,x_0) تعریف شده باشد. عدد L را حدّ چپ تابع f در نقطه x_0

می‌نامیم، اگر برای هر عدد مثبت (ε) عدد مثبتی مانند δ (وابسته به ε) وجود داشته باشد. به طوری که:

$$0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$$

دوباره به مثال (۸) برمی‌گردیم. و سؤال زیر را مطرح می‌کنیم.

سؤال: می‌خواهیم مقدار $f(x)$ آنقدر به عدد (۲) نزدیک شود که $|f(x)-2|$ از $\frac{1}{100}$ کوچکتر باشد. در این صورت x را از طرف اعداد کوچکتر از (۱) به عدد (۱) چقدر باید نزدیک کنیم.

جواب: می‌نویسیم:

$$|f(x)-2| < \frac{1}{100} \Rightarrow |x+1-2| < \frac{1}{100} \Rightarrow |x-1| < \frac{1}{100}$$

چون $x \to 1^- \Rightarrow |x-1| = 1-x$

$$\Rightarrow 0 < 1-x < \frac{1}{100}$$

ملاحظه می‌شود که x را باید از طرف اعداد کوچکتر از (۱) به عدد (۱) آن قدر نزدیک کنیم که $(1-x)$ از $\frac{1}{100}$ کوچکتر باشد.

حال همین سؤال را کلّی‌تر مطرح می‌کنیم.

سؤال: می‌خواهیم مقدار $f(x)$ را به عدد (۲) آن قدر نزدیک کنیم تا $|f(x)-2|$ از عدد مثبت‌فوق‌العاده کوچک (ε)، کوچکتر شود در این صورت x را از طرف اعداد کوچکتر از (۱) به عدد (۱) چقدر باید نزدیک کرد.

جواب: می‌نویسیم:

$$|f(x)-2| < \varepsilon \Rightarrow |x+1-2| < \varepsilon \Rightarrow |x-1| < \varepsilon$$

چون $x \to 1^- \Rightarrow |x-1| = 1-x$

$$\Rightarrow 0 < 1-x < \varepsilon \Rightarrow \delta \le \varepsilon$$

پس باید x را از طرف اعداد کوچکتر از (۱) به عدد (۱) به اندازه ε یا مقادیر کوچکتر از (ε) نزدیک کنیم.

یا می‌توان گفت باید x را از طرف اعداد کوچکتر از (۱) به عدد (۱) آنقدر نزدیک کرد تا $(x-1)$ از ε کمتر باشد.

مثال (۹): تابع f به معادله

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 1 \\ 1-x^2 & x < 1 \end{cases}$$

را در نظر می‌گیریم.

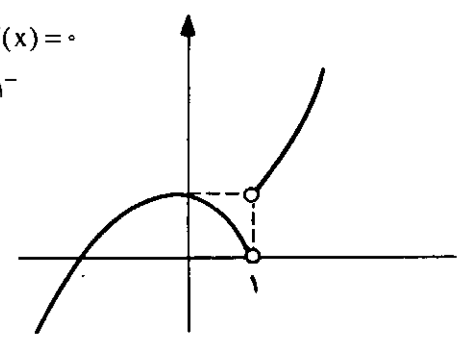
می‌خواهیم حدّ چپ این تابع را وقتی x از مقادیر کوچکتر از (۱) به عدد (۱) نزدیک می‌شود به طریقه شهودی (تشکیل جدول x و $f(x)$) بررسی و تعیین کنیم. برای این کار جدول زیر را می‌نویسیم.

x	۰	۰/۵	۰/۸	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹
f(x)	۱	۰/۷۵	۰/۳۶	۰/۱۹	۰/۱۲	۰/۰۱

به طوری که در این جدول ملاحظه می‌شود، وقتی x **از طرف اعداد کوچکتر از (۱) به عدد (۱) نزدیک و نزدیکتر می‌شود، مقدار $f(x)$ به عدد صفر نزدیک و نزدیکتر می شود.**

به بیان دیگر، اگر مقادیر $f(x)$ را درنظر بگیریم، ملاحظه می‌کنیم، که مقادیر $f(x)$ را می‌توان به هر اندازه دلخواه به صفر نزدیک کرد به شرطی که x **را از طرف اعداد کوچکتر از (۱) به** عدد (۱) به اندازه کافی نزدیک کنیم پس می‌نویسیم:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$$



تمرین ۱: مسایل زیر را هم به طریقه شهودی (تشکیل جدول x و $f(x)$) و هم با تعریف ریاضی حدّ چپ تابع بررسی و حل کنید.

$$\lim_{x \to 0^-} (-4x+2) = 2 \qquad \lim_{x \to 1^-} (2x+1) = 3$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2-4}{|x-2|} = -4 \qquad \lim_{x \to 1^-} \sqrt{1-x} = 0$$

تمرین ۲: به طریقه شهودی (تشکیل جدول x و f(x)) حدّ چپ توابع به معادلات زیر را بررسی کنید و حدس بزنید.

$$\lim_{x \to ۲^-} ([x]+[-x]) \qquad \lim_{x \to ۱^-} ([x]-۱)$$

$$\lim_{x \to ۴^-} (x-[x]) \qquad \lim_{x \to ۱^-} \frac{x^۲-۷x+۶}{x-۱}$$

◄ حدّ تابع:

مثال (۱۰): تابع f به معادله $f(x)=۳x+۱$ را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم به طریقه شهودی (تشکیل جدول x و f(x)) حدّ تابع فوق را وقتی x از دو طرف به عدد (۲) میل می‌کند را بیابیم. برای این منظور جدول زیر را تشکیل می‌دهیم.

x	۱/۵,۱/۹,۱/۹,۱/۹۹۹ → ۲ ← ۲/۰۰۱,۲/۰۱,۲/۱,۲/۵
f(x)	۵/۵,۶/۷,۶/۹۷,۶/۹۹۷ → ۷ ← ۷/۰۰۳,۷/۰۳,۷/۳,۸/۵

به طوری که جدول نشان می‌دهد وقتی x از هر دو طرف به عدد (۲) نزدیک و نزدیکتر شود، مقدار f(x) نیز به عدد (۷) نزدیک و نزدیکتر می‌شود. حال اگر از دیدگاه دیگری به جدول نگاه کنیم، ملاحظه می‌کنیم که f(x) به عدد (۷) نزدیک و نزدیکتر می‌شود. اگر x به عدد (۲) نزدیک و نزدیکتر شود، می‌توانیم f(x) را به هر اندازه دلخواه به عدد ۷ نزدیک کنیم به شرطی که x را به اندازه کافی به عدد (۲) نزدیک کنیم.

◄ نتیجه شهودی حدّ تابع:

فرض می‌کنیم تابع f به معادله f(x) دربازهٔ (a,b) شامل ($x_۰$) تعریف شده باشد. (ممکن است تابع f در خود $x_۰$ تعریف نشده باشد).

وقتی می‌نویسیم: $\lim_{x \to x_۰} f(x)=L$

به معنی آن است که: می‌توان f(x) را به هر اندازه دلخواه به عدد L نزدیک کرد به شرطی که x را (از هر دو طرف) به قدر کافی به $x_۰$ نزدیک کنیم. به بیان دیگر مقدار $|f(x)-L|$ را می‌توان به هر اندازه دلخواه به صفر نزدیک کرد به شرطی که $|x-x_۰|$ را به قدر کافی به صفر نزدیک کنیم.

از جدول مثال (۱۰) نتایج زیر به دست می‌آید.

$$\text{اگر} \quad |x-۲|=۰/۵ \Rightarrow |f(x)-۷|=۱/۵$$
$$\text{اگر} \quad |x-۲|=۰/۱ \Rightarrow |f(x)-۷|=۰/۳$$
$$\text{اگر} \quad |x-۲|=۰/۰۱ \Rightarrow |f(x)-۷|=۰/۰۳$$
$$\text{اگر} \quad |x-۲|=۰/۰۰۱ \Rightarrow |f(x)-۷|=۰/۰۰۳$$

بررسی این جدول نشان می‌دهد، وقتی اختلاف x و عدد (۲) به اندازه (۰/۵±)باشد، اختلاف f(x) و عدد (۷) به اندازه (۱/۵±) است و وقتی اختلاف x و عدد (۲) به اندازه (۰/۱±) باشد، اختلاف f(x) و عدد (۷) به اندازه (۰/۳±) است. و وقتی اختلاف x و عدد (۲) به اندازه (۰/۰۱±) باشد، اختلاف f(x) و عدد (۷) به اندازه (۰/۰۳±) است. و بالاخره وقتی اختلاف x و عدد (۲) به اندازه (۰/۰۰۱±) باشد، اختلاف f(x) و عدد (۷) به اندازه (۰/۰۰۳±) است. می‌توانیم نتیجه بگیریم که می‌توان $|f(x)-۷|$ را به هر اندازه دلخواه که بخواهیم به صفر نزدیک کنیم به شرطی که $|x-۲|$ را به اندازهٔ، کافی به صفر نزدیک کنیم.

سؤال: اگر بخواهیم $|f(x)-۷|$ کوچکتر از $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ باشد، x را چقدر باید به عدد (۲) نزدیک کنیم.

جواب: می‌نویسیم:

$$|f(x)-۷|<\frac{۱}{۱۰۰۰} \Rightarrow |۳x+۱-۷|<\frac{۱}{۱۰۰۰}$$
$$\Rightarrow |۳x-۶|<\frac{۱}{۱۰۰۰} \Rightarrow ۳|x-۲|<\frac{۱}{۱۰۰۰} \Rightarrow$$
$$|x-۲|<\frac{۱}{۳۰۰۰}$$

به طوری که ملاحظه شد، باید $|x-۲|$ را از $\frac{۱}{۳۰۰۰}$ کوچکتر اختیار کنیم. حال سؤال قبلی را به صورت کلی مطرح می‌کنیم.

سؤال: اگر بخواهیم $|f(x)-۷|$کوچکتر از عدد مثبت خیلی کوچک (ε) باشد آنگاه $|x-۲|$ را باید کوچکتر از چه

عددی اختیار کنیم.

جواب: می‌نویسیم:

$$|f(x)-۷|<\varepsilon \Rightarrow |۳x+۱-۷|<\varepsilon$$
$$\Rightarrow |۳x-۶|<\varepsilon \Rightarrow ۳|x-۲|<\varepsilon$$
$$\Rightarrow |x-۲|<\frac{\varepsilon}{۳} \qquad \delta=\frac{\varepsilon}{۳}$$

به طوری که ملاحظه شد، باید $|x-۲|$ را از $\frac{\varepsilon}{۳}$ یا δ کوچکتر اختیار کنیم. نتیجه:

اگر $\varepsilon=\frac{۱}{۱۰۰}$، آنگاه $\delta\le\frac{۱}{۳۰۰}$

اگر $\varepsilon=\frac{۱}{۱۰۰۰}$، آنگاه $\delta\le\frac{۱}{۳۰۰۰}$

اگر $\varepsilon=\frac{۱}{۱۰۰۰۰}$، آنگاه $\delta\le\frac{۱}{۳۰۰۰۰}$

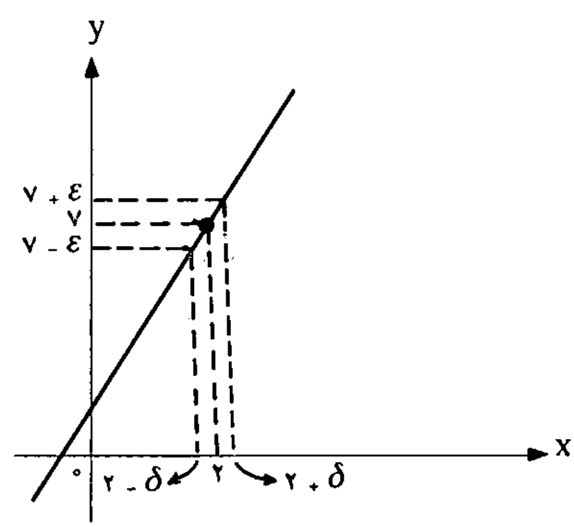
پس برای هر $\varepsilon>۰$، حداّقل یک $\delta>۰$ (وابسته به ε) به دست می‌آید که:

$$۰<|x-۲|<\delta \Rightarrow |f(x)-۷|<\varepsilon$$

توجه:

$$|x-۲|<\delta \Rightarrow -\delta<x-۲<\delta \Rightarrow ۲-\delta<x<۲+\delta$$
$$|f(x)-۷|<\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon<f(x)-۷<\varepsilon$$
$$\Rightarrow ۷-\varepsilon<f(x)<۷+\varepsilon$$

نمودار هندسی تابع و بحث فوق چنین است.



تعریف ریاضی حدّ تابع:

فرض می‌کنیم تابع f به معادله $f(x)$ در بازه (a,b) شامل $x_۰$ تعریف شده باشند. (ممکن است تابع f در خود $x_۰$ تعریف نشده باشد).

وقتی نوشته می‌شود $\begin{cases} \text{حد } f(x)=L \\ x\to x_۰ \end{cases}$

به این معنی است که: برای هر عدد مثبت فوق‌العاده کوچک (ε)، عدد مثبت کوچکی (وابسته به ε) مانند δ وجود دارد به طوری که:

اگر $۰<|x-x_۰|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

مثال (۱۱): نشان دهید در تابع به معادله $f(x)=۲x+۱$،

$$\begin{cases} \text{حد} f(x)=۳ \\ x\to ۱ \end{cases}$$

ابتدا به طریقه شهودی (تشکیل جدول x و $f(x)$) مسأله را بررسی می‌کنیم.

x	۰/۷	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	→	۱	←	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱	۱/۳
f(x)	۲/۴	۲/۸	۲/۹۸	۲/۹۹۸	→	۳	←	۳/۰۰۲	۳/۰۲	۳/۲	۳/۶

به طوری که این جدول نشان می‌دهد، وقتی x از دو طرف به عدد (۱) نزدیک و نزدیکتر می‌شود، مقدار $f(x)$ به عدد (۳) نزدیک و نزدیکتر می‌شود. حال اگر از دیدی دیگر به جدول نگاه کنیم، ملاحظه می‌کنیم که $f(x)$ را می‌توانیم به اندازه دلخواه به عدد (۳) نزدیک کنیم به شرطی که x را به اندازه کافی به عدد (۱) نزدیک کنیم.

به عبارت دیگر مقدار $|f(x)-۳|$ را می‌توانیم به اندازه دلخواه به صفر نزدیک کنیم به شرطی که مقدار $|x-۱|$ را به قدر کافی به صفر نزدیک کنیم. حال مسأله را با استفاده از تعریف ریاضی حدّ تابع، حل می‌کنیم.

می‌گوییم حدّ تابع فوق وقتی $x\to ۱$ عدد (۳) است هرگاه:

به ازاء هر عدد مثبت فوق‌العاده کوچک (ε)، عدد مثبت δ (وابسته به ε) وجود داشته باشد به طوری که:

اگر $۰<|x-۱|<\delta \Rightarrow |f(x)-۳|<\varepsilon$

این تعریف می‌گوید مقدار $|f(x)-۳|$ را به اندازه دلخواه (ε) به صفر نزدیک می‌کنیم به شرطی که مقدار $|x-۱|$ را به قدر کافی

(به قدر δ) به صفر نزدیک کنیم. می‌نویسیم:

$$|f(x)-۳|<\varepsilon \Rightarrow |۲x+۱-۳|<\varepsilon \Rightarrow |۲x-۲|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow ۲|x-۱|<\varepsilon \Rightarrow |x-۱|<\frac{\varepsilon}{۲} \qquad \delta \le \frac{\varepsilon}{۲}$$

پس اگر $|x-۲|$ را کوچکتر از δ اختیار کنیم، آنگاه $|f(x)-۳|$ کوچکتر از مقدار دلخواه (ε) خواهد شد.

اگر $\varepsilon=\frac{۱}{۱۰۰}$ ، آنگاه $\delta \le \frac{۱}{۲۰۰}$

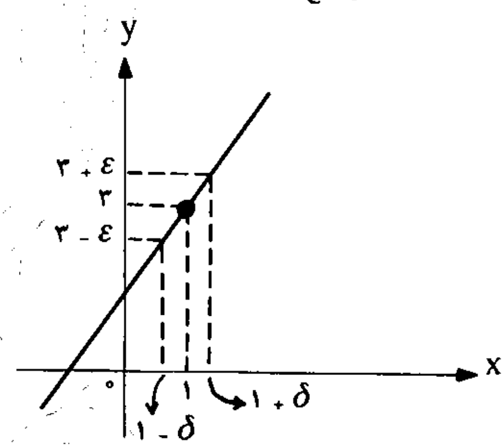
اگر $\varepsilon=\frac{۱}{۱۰۰۰}$ ، آنگاه $\delta \le \frac{۱}{۲۰۰۰}$

اگر $\varepsilon=\frac{۱}{۱۰۰۰۰}$ ، آنگاه $\delta \le \frac{۱}{۲۰۰۰۰}$

پس برای هر $\varepsilon>۰$ ، حداقل یک δ (وابسته به ε) وجود دارد که:

اگر $۰<|x-۱|<\delta \Rightarrow |f(x)-۳|<\varepsilon$

نمودار هندسی تابع و بحث فوق چنین است.



$$|x-۱|<\delta \Rightarrow -\delta<x-۱<\delta \Rightarrow ۱-\delta<x<۱+\delta$$

$$|f(x)-۳|<\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon<f(x)-۳<\varepsilon$$

$$\Rightarrow ۳-\varepsilon<f(x)<۳+\varepsilon$$

مثال (۱۲): با تعریف ریاضی حدّ تابع ثابت کنید :

$$\begin{cases} \text{حد}\,(x^۲-۴x)=-۴ \\ x \to ۲ \end{cases}$$

حل: می‌خواهیم نشان دهیم که در تابع به معادله $f(x)=x^۲-۴x$ وقتی x به عدد (۲) نزدیک و نزدیکتر می‌شود، مقدار f(x) به عدد (۴-) نزدیک و نزدیکتر می‌شود. به عبارت دیگر f(x) را به هر اندازه دلخواه می‌توان به عدد (۴-) نزدیک کرد به شرطی که، x را به قدر کافی به عدد (۲) نزدیک کنیم یعنی $|f(x)+۴|$ را به هر اندازه دلخواه می‌توان به عدد صفر نزدیک کرد به شرطی که $|x-۲|$ را به قدر کافی به صفر نزدیک کنیم.

به بیان کلّی‌تر می‌خواهیم $|f(x)+۴|$ را به اندازه‌ای به صفر نزدیک کنیم تا از عدد مثبت فوق‌العاده کوچک (ε) کوچکتر باشد. به شرطی که $|x-۲|$ را به قدر کافی به صفر نزدیک کنیم تا $|x-۲|$ کوچکتر از δ (وابسته به ε) باشد.

می‌نویسیم:

$$|f(x)+۴|<\varepsilon \Rightarrow \left|x^۲-۴x+۴\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|(x-۲)^۲\right|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow (x-۲)^۲<\varepsilon \Rightarrow |x-۲|<\sqrt{\varepsilon} \Rightarrow \delta \le \sqrt{\varepsilon}$$

پس باید $|x-۲|$ را آنقدر به صفر نزدیک کنیم تا $۰<|x-۲|<\delta$.

مثال (۱۳): ثابت کنید حدّ تابع f به معادله

$$f(x)=\frac{x^۲-۴x+۳}{|x-۱|}$$

وقتی $x \to ۳$ برابر صفر است.

حل: باید نشان دهیم: برای هر $\varepsilon>۰$ ، لااقل یک عدد مثبت مانند (δ) وجود دارد به طوری که :

$$۰<|x-۳|<\delta \Rightarrow \left|\frac{x^۲-۴x+۳}{|x-۱|}\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{x^۲-۴x+۳}{|x-۱|}\right|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\frac{(x-۱)(x-۳)}{(x-۱)}\right|<\varepsilon$$

$$\begin{cases} x \to ۳ \\ \quad |x-۱|=\ (x-۱) \end{cases}$$

$$\Rightarrow |x-۳|<\varepsilon \Rightarrow \delta \le \varepsilon$$

مثال (۱۴): ثابت کنید، حدّ تابع به معادله $f(x)=(-۱)^{[x]}(۲x-۶)$ وقتی $x \to ۳$ برابر صفر است.

حل: باید نشان دهیم برای هر $\varepsilon>۰$ ، لااقل یک عدد

مثبت مانند (δ) وجود دارد به طوری که:

$$۰ < |x-۳| < \delta \Rightarrow \left|(-۱)^{[x]}(۲x-۶)\right| < \varepsilon$$

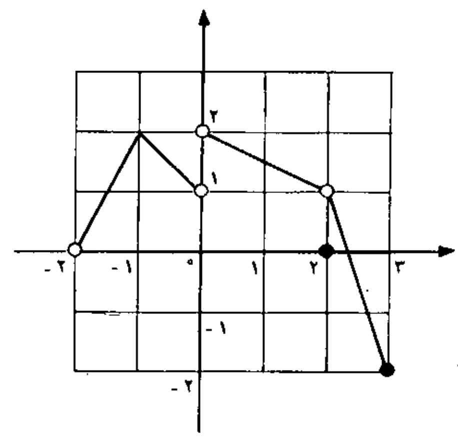
توجه:

$$\begin{cases} (-۱)^{[x]} = \pm ۱ \\ x \to ۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow |\pm(۲x-۶)| < \varepsilon \Rightarrow |\pm ۲(x-۳)| < \varepsilon \Rightarrow ۲|x-۳| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |x-۳| < \frac{\varepsilon}{۲} \Rightarrow \quad \delta \leq \frac{\varepsilon}{۲}$$

تمرین۱: فرض کنید نمودار تابع f شکل زیر باشد. حدّهای زیر را بیابید.



$$\begin{cases} \text{حد } f(x) \\ x \to ۲ \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{حد } f(x) \\ x \to ۳^- \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{حد } f(x) \\ x \to -۱ \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{حد } f(x) \\ x \to ۱^- \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{حد } f(x) \\ x \to ۱^+ \end{cases}$$

تمرین ۲: توابع به معادلات زیر مفروض‌اند جدول زیر را برای هر کدام کامل کنید.

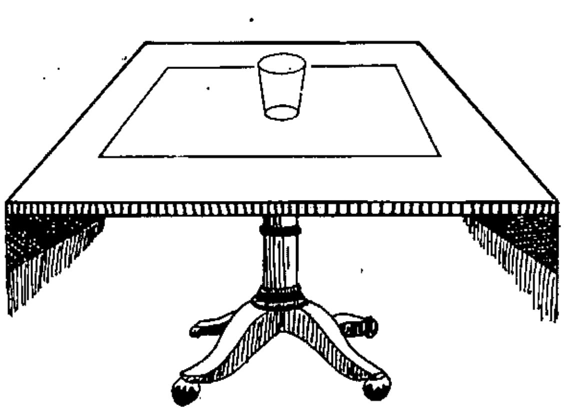
$$f(x) = \left|\frac{x^۲-۴}{|x|-۲}\right| \qquad f(x) = \sqrt{x-۱}$$

$$f(x) = \frac{x^۲-۴}{|x-۲|}$$

x	۱/۷	۱/۹	۱/۹۹ →	۲	← ۲/۰۱	۲/۱	۲/۳
f(x)							

تفریح اندیشهٔ ۱

لیوان آبی بر چهار پایهٔ پوشیده از سفره‌ای قرار دارد. چگونه می‌توان بدون دست زدن به لیوان، سفره را از روی چهارپایه برداشت و لیوان را باقی گذاشت؟



جواب در صفحهٔ ۸۸

تاریخچهٔ مجلات ریاضی ایران (۱۶)

در شمارهٔ ۱۴ مجلهٔ یکان تحت عنوان: «بی‌آنکه عصبانی شوید این مسئله را حل کنید.» چنین می‌خوانیم:

در یک ردیف خانه پنج زوج زندگی می‌کنند: آقا و خانم صبور، وفا، صبا، غیور و پایا. پنج فروشنده هستند که هیچ‌کدام متأهل نیستند و به‌این خانه‌ها مراجعه می‌کنند. فرض کنیم که اینها بقال و نفت‌فروش و نانوا و قصاب و روزنامه‌فروش باشند. اسامی این فروشنده‌ها عبارت است از صبور، وفا، صبا، غیور و پایا اما نه به‌ترتیب.

خواهر شوهردار قصاب در خانهٔ شماره ۱ زندگی می‌کند.

آقای غیور در همسایگی دیوار به‌دیوار شخصی که همنام نفت‌فروش است زندگی می‌کند.

شخصی که همنام روزنامه‌فروش است خویشاوندی ندارد.

شخصی که همنام قصاب است در خانهٔ شماره ۲ زندگی می‌کند.

آقای غیور با شوهر خواهر قصاب به‌کار می‌رود.

آقای وفا به‌شخصی که همنام نفت‌فروش است در باغچه‌اش کمک می‌کند.

آقای صبا در همسایگی دیوار به‌دیوار شخصی که همنام روزنامه‌فروش است زندگی می‌کند.

خانم صبور و خانم غیور خواهرند.

شخصی که همنام نانواست فقط یک شوهرخواهر دارد که در خانهٔ شمارهٔ ۳ زندگی می‌کند.

آقای پایا در همسایگی دیوار به‌دیوار شخصی که همنام نفت‌فروش است زندگی می‌کند.

آیا می‌توانید بگویید که نام هر یک از فروشنده‌ها چیست؟ همچنین شماره‌های خانهٔ هر یک از این زوجها چیست؟

در همین شماره در نامه‌ای از هوشنگ شریف‌زاده به‌مجله دربارهٔ اعداد فیثاغورسی چنین آمده است:

... در شمارهٔ ۱۳ مجلهٔ یکان مقاله‌ای تحت عنوان «ساده‌ترین راه تعیین اعداد فیثاغورسی» به‌قلم آقای خلیل‌صدیق ارشادی ملاحظه شد. ایشان پس از مطالعه در مورد اعداد فیثاغورسی بیمار و در بیمارستان بستری شدند و در همان موقع موفق به‌کشف دو فرمول شدند که برای اظهارنظر به‌چند نفر از استادان خارجی طی نامهٔ خصوصی ارسال داشته‌اند. این فرمولها که به‌قول خودشان کاملاً بی‌سابقه بوده است عبارت بود از:

$$X^2+\left[\left(\frac{X}{2}\right)^2-1\right]^2=\left[\left(\frac{X}{2}\right)^2+1\right]^2$$

که در آن X عددی است زوج و:

$$Y^2+\left(\frac{Y^2-1}{2}\right)^2=\left[\left(\frac{Y^2-1}{2}\right)^2+1\right]^2$$

که در آن Y عددی است فرد. جدولی هم برای اعداد از یک تا بیست‌وشش تنظیم فرموده بودند. ایشان مرقوم داشته‌اند «از طریق حل این فرمولها، با دردست داشتن یکی از اعداد می‌توان دو عدد دیگر را پیدا کرد، به‌عبارت دیگر اگر یکی از اضلاع مثلث قائم‌الزاویه معلوم باشد، ضلع دیگر و وتر آن نیز به‌آسانی تعیین می‌گردد». بنده از آقای مکتشف عزیز سؤال می‌کنم که اگر یکی از اضلاع مثلث قائم‌الزاویه ۲۴ باشد ضلع دیگر چقدر خواهد شد ۷ یا ۱۰ یا ۱۴۳ (!؟). خواهشمند است قبلاً به‌جدول مراجعه و بعد پاسخ دهند.

فرمولی که آقای صدیق ارشادی کشف فرموده‌اند! قبل از ایشان به‌وسیلهٔ فیثاغورس، افلاطون و براهماگوپتا در قرون قبل از میلاد بیان شده است و این موضوع در غالب کتب ریاضی مذکور می‌باشد از جمله در کتاب جبر و مقابلهٔ خیام نگارش آقای غلامحسین مصاحب:

۱ ـ فرمولی راکه فیثاغورس به‌دست آورده:

$$(2n^2+2n+1)^2=(2n^2+2n)^2+(2n+1)^2$$

و یا اگر n فرد باشد:

$$n^2+\left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2$$

۲ ـ فرمولی که افلاطون به‌دست داده:

$$(2n)^2+(n^2-1)^2=(n^2+1)^2$$

۳ ـ دستوری که براهماگوپتا پیدا کرده به‌صورتهای زیر است:

$$(2mn)^2+(m^2-n^2)^2=(m^2+n^2)^2$$

و

$$(\sqrt{m})^2+\left[\frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}-n\right)\right]^2=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}+n\right)\right]^2$$

* * *

آقای مرتضی صدیقین تذکر داده‌اند که فرمولهای مذکور در مقالهٔ مزبور در کتاب هندسهٔ مسطحهٔ تألیف میرزارضاخان مهندس‌الملک در صفحهٔ ۱۹۸ مذکور می‌باشد. ایشان همچنین تذکر داده‌اند که استعمال این فرمولها خالی از اشکال نبوده و برای دانش‌آموزان ایجاد اشکال می‌نماید.

باز هم در همین شماره در شرح حال دکتر اکبرزاده به‌قلم دکتر هوشنگ منتصری چنین آورده شده است:

آقای دکتر حسن اکبرزاده در سال ۱۳۰۶ شمسی در شهرستان رشت به‌دنیا آمده، آموزش ابتدایی را در همان شهر و تحصیلات متوسطه را در سال ۱۳۲۶ در دبیرستان البرز خاتمه داده سپس وارد دانشکدهٔ علوم تهران گردیده، در سال ۱۳۲۹ لیسانس در رشتهٔ علوم ریاضی را با احراز رتبهٔ اول و اخذ مدال علمی به‌پایان رسانید.

پس از پایان تحصیلات دانشگاهی در ایران بلافاصله برای ادامهٔ تحصیلات عالیهٔ خود به‌فرانسه مسافرت کرده و در دانشگاه پاریس «سوربون» در مدت دو سال بعد از گذراندن چهار شهادت‌نامه (ریاضیات عمومی ـ مکانیک استدلالی، حساب جامعه و فاضله و هندسهٔ عالی) مجدداً به‌اخذ درجهٔ لیسانس علوم ریاضی نایل گردید. یک سال بعد با دریافت شهادت‌نامهٔ آنالیز عالی کار رسالهٔ دکترای خود را آغاز نمود.

موضوع رسالهٔ آقای دکتر اکبرزاده دربارهٔ «فضاهای فینسلر» می‌باشد. «فینسلر» ریاضیدان سویسی در اوایل قرن بیستم بوده است. در دنبالهٔ مطالعات خود به‌یک نوع از فضاهایی که بعدها به‌نام خود او معروف گردید برخورد نمود، این فضاها نوع عمومیتر و دقیقتری از فضاهای «ریمان» می‌باشد که در رشته‌های «فیزیک ریاضی» موارد استعمال دارد.

ارتباط فضاهای فینسلر با مسایل مطروحه در «نسبیت عمومی» و آخرین نظریهٔ انیشتین «نظریهٔ وحدانی» و همچنین در توضیح و تفسیر تئوریهای مکانیک آنالتیک و مکانیک کوانتیک از دیرباز مورد توجه دانشمندان قرار داشته است به‌طوری که در سالهای اخیر بسیاری از مکتبهای ریاضی شالودهٔ تئوریهای مزبور را بر اساس فضاهای فینسلر طرح کرده‌اند.

مطالعات و تحقیقات آقای دکتر اکبرزاده دربارهٔ پی‌ریزی جدید و عمومیت فضاهای فینسلر آنقدر جالب و پرارزش بود که بعد از تهیه و تنظیم دو یادداشت به‌آکادمی علوم پاریس در همان حال که کار رسالهٔ دکترای خود را تعقیب می‌نمود به‌عنوان وابستهٔ تحقیقاتی در «مرکز دولتی تحقیقات علمی» استخدام گردید و پس از آن چهار یادداشت دیگر به‌آکادمی علوم پاریس تقدیم نمود که همهٔ این شش یادداشت به‌صورت جزواتی چاپ گردیده و به‌کلیهٔ مراکز تحقیقاتی و دانشگاهی کشورهای جهان فرستاده شده است.

بالاخره در ۱۳ ژوئن ۱۹۶۱ بعد از یازده سال تحصیل و تحقیق در پاریس رسالهٔ دکترای دولتی خود را با درجهٔ «شایان افتخار» که بالاترین درجات تصویب یک رساله از طرف هیئت قضات می‌باشد گذراند.

پس از پایان تحصیلات آقای دکتر اکبرزاده به‌سمت «مأمور تحقیقاتی» در مؤسسهٔ معروف «کلژدوفرانس» انتخاب گردید.

متن رسالهٔ آقای دکتر اکبرزاده به‌علت اهمیت علمی آن در سالنامهٔ

دانشسرای عالی در پاریس (۱۹۶۳ ـ ۱۹۶۲) چاپ گردیده و در کلژدوفرانس و همچنین در پاره‌ای از دانشکده‌های خارج از فرانسه نیز تحقیقات این جوان ایرانی با ذکر نام خود او تدریس می‌شود.

کار آقای دکتر اکبرزاده در کلژدوفرانس صرف‌نظر از ادامهٔ تحقیقات، دادن یک سلسله کنفرانسها و هدایت پروفسور آگرژه‌هایی است که مشغول تهیهٔ رسالهٔ تحقیقاتی می‌باشند. ←

در شمارهٔ ۱۵ یکان در مقالهٔ:

نظری اجمالی به‌مبانی ریاضیات

که از دکتر استول و ترجمهٔ جهانگیر شمس‌آوری است و در انجمن معلمان ریاضی در ۲۴ اسفند ۱۳۴۳ ایراد شده چنین می‌خوانیم:

نخستین هدف من از این سخنرانی وصف شرایطی است که بعضی از ریاضیدانان را واداشت که عطف توجهی به‌مبانی ریاضیات مبذول دارند. اجازه بدهید که خیال شما را از این بابت راحت کنم که فرض من بر این بوده است که هیچ آشنایی‌ای با این رشته از دانش که همه خود را وقف آن کرده‌ایم ندارم. نظر من در این خصوص برحسب تجربه‌های شخصی منعکس ساختن این حقیقت است که از میان کسانی که ریاضیات را به‌کار می‌برند، یا خالق آن هستند، تنها چند تنی علاقه و آشنایی با مبانی آن دارند. شاید از روی حسن نیت باشد که اذعان کنیم که مبانی ریاضیات در وضع نسبتاً تأسف‌انگیزی قرار دارد.

اخیراً یکی از پژوهندگان مشهور ریاضیات وضع بنای ریاضیات را به‌یک کشتی تشبیه کرده است که از یک طرف به‌آهستگی در آب فرو می‌رود و از طرف دیگر به‌نظر می‌رسد که به‌علت سرعت خارق‌العادهٔ نمو و توسعهٔ روبنایش در آب بالا می‌آید.

مطالب را با نام بردن از مفاهیم ریاضی که به‌کار خواهم گرفت آغاز می‌کنم.

۱) سلسلهٔ طبیعی اعداد مانند ۱ و ۲ و ۳ و... که به‌منظور شمردن به‌کار گرفته می‌شوند.

۲) مفهوم مجموعه. یک مجموعه، با درک مستقیم و به‌طور کشف و شهود، گرد آمده‌ای از اشیا است. هر یک از اشیای این مجموعه به‌نام عنصر یا عضو مجموعه خوانده می‌شود. چنانچه x عنصر مجموعه A باشد آن را چنین می‌نویسیم: $x \in A$.

مجموعه‌های A و B متساوی‌اند اگر و فقط اگر عضوهای آنها یکی باشد و آن را با علامت چنین می‌نویسیم: $A=B$. به‌مجموعه‌های خود، مجموعهٔ تهی یا خالی را نیز علاوه می‌کنیم و آن مجموعه‌ای است که هیچ عضو ندارد و با علامت چنین نشان داده می‌شود: $\varnothing$.

۳) رابطهٔ شمول برای مجموعه‌ها: اگر A و B مجموعه‌هایی باشند که هر عضو A عضوی از B باشد، A جزء B است که با علامت چنین نوشته می‌شود: $A \subseteq B$. همچنین می‌توان گفت که A زیرمجموعه‌ای از B است اگر داشته باشیم $A \subseteq B$ و $A \neq B$، A زیرمجموعهٔ واقعی B است که با علامت چنین نشان داده می‌شود: $A \subset B$.

۴) چنانچه A مجموعه‌ای باشد، مجموعهٔ تواندار A (که با علامت چنین نمایش داده می‌شود: $P(A)$) مجموعه‌ای است که اعضایش زیرمجموعه‌های مختلف A است. به‌طور مثال اگر A مجموعه‌ای با عنصرهای ۱ و ۲ و ۳ باشد (که چنین نمایش داده می‌شود: $A=\{۱,۲,۳\}$)، مجموعهٔ تواندار آن چنین است:

$$P(A)=\{\varnothing,\{۱\},\{۲\},\{۳\},\{۱,۲\},\{۱,۳\},\{۲,۳\},\{۱,۲,۳\}\}$$

توجه داشته باشید که $P(A)$ دارای $۸=۲^۳$ عضو است. به‌طور کلی اگر مجموعه‌ای دارای n عضو باشد، مجموعهٔ تواندار آن دارای ۲^n عضو است.

۵) مفهوم اندازهٔ یک مجموعه. در زندگی روزانه اندازهٔ یک مجموعه را با یک عدد از سلسلهٔ طبیعی اعداد بیان می‌کنیم. می‌گوییم که مجموعهٔ A دارای اندازه‌ای برابر n است (و آن را چنین می‌نمایانیم $\#A=n$) اگر بتوان عضوهای A را در مقابلهٔ عضوهای مجموعهٔ $\{۱,۲,...,n\}$ قرار داد. (به‌زبان دقیق این بدان معنی است که مقابلهٔ یک به‌یک بین اعضای مجموعهٔ A و مجموعهٔ $\{۱,۲,...,n\}$ برقرار است.) مجموعه‌هایی که اندازه‌های آنها را بتوان به‌این وسیله معین کرد مجموعه‌های محدود نامیده می‌شوند. در ریاضیات اغلب مجموعه‌هایی درنظر گرفته می‌شوند که محدود نیستند. چنان مجموعه‌هایی نامحدود خوانده می‌شوند. معمولاً مقایسهٔ اندازه‌های مجموعه‌ها به‌وسیلهٔ معین کردن اندازهٔ هر یک از آنها و بعد مقایسهٔ اعداد به‌دست آمده از نظر ترتیب قرار گرفتنشان در سلسلهٔ طبیعی اعداد به‌عمل می‌آید. به‌طور مثال اگر معلم A بگوید که تعداد شاگردان او بیش از تعداد شاگردان B است، احتمال دارد که به‌این مطالب ضمن مقایسهٔ تعداد شاگردان کلاس خود، که به‌طور مثال ۴۰ تا است، و تعداد شاگردان کلاس معلم B، که به‌طور مثال ۳۰ تا

است، پی برده باشد. اما توجه داشته باشید که حاجتی برای به‌کار بردن اعداد طبیعی در این مثال نیست. بدین معنی که هریک از این دو معلم می‌توانند به‌همان نتیجه برسند چنانچه صورت اسامی شاگردان کلاسهای خود را تهیه و مشاهده کنند که صورت اسامی شاگردان معلم B قابل مقابله با یکی از زیرمجموعه‌های واقعی صورت اسامی شاگردان معلم A است.

مطالبی که تا اینجا بیان شد برای آمادگی کافی است و اکنون به‌موضوع اصلی باز می‌گردم. در سال ۱۸۸۰ کانتور ریاضیدان آلمانی علاقمند به‌مقایسهٔ اندازهٔ بعضی مجموعه‌های نامحدود گشت. تحقیقات وی منجر به‌نظریهٔ مجموعه‌ها و به‌ویژه نظریهٔ حساب ماورای حد که یک رشته از همین حساب معمولی اعداد طبیعی است گشت. تعریف اساسی وی که خواهیم گفت بر پایهٔ آن چیزی است که در آخرین قسمت، یعنی شمارهٔ ۵، از مقدمات بالا آمده است.

تعریف ـ فرض کنید که A و B دو مجموعه باشند. می‌گوییم که A و B دارای یک اندازه هستند و چنین می‌نویسیم: $A\sim B$ اگر و فقط اگر مقابله‌ای یک به‌یک بین عناصر A و B وجود داشته باشد. اندازهٔ مجموعهٔ A بزرگتر از اندازهٔ مجموعهٔ B است (که چنین نوشته می‌شود: $A>B$) اگر و فقط اگر مقابله‌ای یک به‌یک بین عناصر B و زیرمجموعه‌ای از A وجود داشته باشد و برعکس آن چنین نباشد.

هنگامی که مجموعه‌های محدود را به‌کار می‌بریم، تعاریف فوق موافق مفاهیمی است که از اندازه در شمارهٔ ۵ ذکر کردیم.

به‌هر حال آنچه مهم است این که این تعاریف در مجموعه‌های نامحدود نیز قابل استعمال هستند. وقتی که این تعاریف را دربارهٔ مجموعه‌های نامحدود به‌کار می‌بریم مواجه با نتایجی می‌شویم که اغلب برخلاف آن چیزی است که به‌وسیلهٔ شهود و درک مستقیم و محسوسات حاصل می‌آید. به‌طور مثال اندازهٔ مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح و اندازهٔ مجموعهٔ همهٔ اعداد مثبت گویا به‌همان اندازهٔ مجموعهٔ N یعنی مجموعهٔ اعداد طبیعی است. بنابراین اندازهٔ مجموعهٔ نامحدود ممکن است که به‌اندازهٔ بعضی از زیرمجموعه‌های واقعی خود باشد!

مجموعه‌های نامحدودی هستند که اندازهٔ آنها بزرگتر از N است. یکی از آنها مجموعهٔ I یعنی مجموعهٔ همه اعداد حقیقی x است به‌قسمی که $0<x<1$. یعنی $I>N$. از طرف دیگر مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی اندازه‌ای برابر اندازهٔ مجموعهٔ I دارد. این حقیقت که $I>N$ ما را در برابر این پرسش قرار می‌دهد که آیا زیرمجموعه‌ای وجود دارد به‌قسمی که داشته باشیم $I>S$ و $S>N$. تاکنون پاسخ این پرسش معلوم نشده است.

برای هر مجموعهٔ A ، مجموعهٔ تواندار A دارای اندازهٔ بیشتری است. این قضیه را کانتور عنوان کرده است و تعمیم نتیجه‌ای دربارهٔ مجموعه‌های نامحدود است. زیرا با به‌خاطر آوردن این که اگر A صاحب n عضو باشد، $P(A)$ صاحب 2^n عضو است. مسلم می‌شود که به‌ازای هر عدد n از سلسلهٔ طبیعی اعداد $2^n>n$.

متأسفانه این قضیهٔ کانتور منجر به‌یک تناقض می‌شود. برای نشان دادن این تناقض مجموعهٔ S را که مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها است درنظر بگیرید. طبق قضیه $P(S)>S$. از سوی دیگر، چون $P(S)$ خود یک مجموعه است (مجموعه‌ای که عناصرش زیرمجموعه‌های S هستند) $P(S)\subseteq S$. از اینجا عناصر $P(S)$ را می‌توان به‌راه ساده‌ای در مقابلهٔ عناصر یک زیرمجموعه از S قرار داد. اکنون این سؤال پیش می‌آید که آیا می‌توان متعاکساً عناصر مجموعهٔ S را در مقابلهٔ عناصر زیرمجموعه‌ای از $P(S)$ قرار داد؟ در پاسخ این سؤال اگر فرض کنیم که چنین چیزی امکان دارد می‌توان به‌این نتیجه رسید که $P(S)\sim S$. و این متناقض نتیجه‌ای است که $P(S)>S$. حال اگر فرض کنیم که پاسخ به‌آن پرسش «نه» باشد، نتیجه می‌گیریم که $S>P(S)$ و باز با تناقض مواجه می‌شویم.

این تناقض که به‌نام پارادوکس کانتور مشهور است یکی از چند تناقضی است که با قیاس از نظریهٔ کانتور دربارهٔ مجموعه‌های ماورای حد، درست در همان زمان که نظریهٔ او مورد قبول ریاضیدانان گشت، استنباط شده است. هنگامی که به‌اهمیت این تناقضات پی برده شد، ریاضیدانان، خود و ریاضیات را مواجه با بحرانی حقیقی یافتند. بعضی متحمل بار سنگین به‌نظم درآوردن خانهٔ خود گشتند. کوشش آنان شکلهای مختلفی گرفت. کوششی برای تجدید ساختمان نظریهٔ مجموعه چون یک نظریهٔ اصولی (اکسیوماتیک) انجام گرفت. توصیه‌هایی که از این طریق نیل به‌مقصود مورد بحث قرار گرفت این بود که این تناقضات مربوط به‌مجموعه‌های بسیار بزرگ است (پیش از این، مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها را درنظر گرفتیم) ـ و بنابراین باید حدودی در اطراف مفهوم مجموعه قرار داد تا مجموعه‌های مزاحم طرد شوند. این عمل (آنچنان که بحثش ادامه دارد) ممکن است به‌وسیلهٔ زیرنفوذ درآوردن مفاهیم نظریهٔ مجموعه توسط اصول موضوعه انجام پذیرد، به‌همان طریق که در یک هندسهٔ مستحکم

اقلیدسی «نقطه» و «خط» تحت فرمانبری از اصول موضوعه هستند. نخستین دستگاه اصولی نظریهٔ مجموعه بهوسیله زرملا در سال ۱۹۰۸ عرضه گشت. پس اصلاحاتی در این نظریه بهوسیله فرانکل (سال ۱۹۲۰)، سکولم (سال ۱۹۲۰)، وان‌نومان (سال ۱۹۲۰)، برنیز (سال ۱۹۴۰) و گودل (سال ۱۹۴۰) انجام گرفت. وضع موجود اصل‌بندی نظریهٔ مجموعه را که توسط اکثر ریاضیدانان پذیرفته شده است چنین می‌توان توضیح داد: هیچ تناقضی از میان آنها مشتق نشده است. (البته، هر اصل‌بندیی که متضمن تناقضی بوده کنار گذاشته شده است.) از طرف دیگر نامتناقض بودن هیچ یک از آنها ثابت نشده است، یعنی غیرممکن است که مطلبی از نظریه ساخته شود بهقسمی که هم آن و هم نفی آن قضیه باشند.

راه‌حل اساسی دیگر برای برطرف ساختن بحرانی که بهوسیلهٔ این تناقضات بهوجود آمده بود روش بسیار وسیعتری را درنظر گرفت. و آن بهوسیلهٔ ریاضیدانانی که قادر نبودند یا در جهت توسعهٔ نظریهٔ کانتور دربارهٔ مجموعه یا در اشتقاق تناقضات نظیر آنچه بدان اشاره شد نکته‌ای اساسی بیابند عرضه گشت. آنها بهموضوع روش استدلال و ناصحیح بودن آن پرداختند. بدین‌ترتیب آنها بهاین نتیجه رسیدند که یک مسئله واقعی که باید بهحل آن اقدام کرد همان روشن ساختن مفهوم اثبات درست است. تصدیقی که در حدود سال ۱۹۰۰ بهوسیلهٔ بعضی از ریاضیدانان عرضه گشت مبنی بر این که مفهوم اثبات درست را تحت هیچ قاعده‌سازیی نمی‌توان برحسب اصطلاحهای صریح و ریاضی در آورد مشخص آغاز پژوهشهای نوین در بنیان ریاضیات است.

بخصوص اساس مطالعه‌ای منظم و تحت قاعده بهوسایل ریاضی دربارهٔ قوانین منطق که قدم بهقلمرو اثبات ریاضی می‌گذارند نهاده شد. از کارهای اولیهٔ بول و دیگران راسل منطقدان انگلیسی و همکارش وایت‌هد چون یک نظریهٔ اصولی دستگاهی از منطق مناسب برای ریاضیات بیرون کشیده آن را توسعه دادند. (اصلاحی از این نظریه، که عموماً بهنام حساب مجهولات از رتبهٔ اول خوانده می‌شود در کتابهای درسی نوین منطق ریاضی آمده است.) راسل و وایت‌هد با عدم رضایت از انجام کار، در کتاب تاریخی خود بهنام اصول ریاضیات، (۱۹۱۳ - ۱۹۱۰) کوشش کردند نشان دهند که همهٔ ریاضیات می‌تواند در چهارچوب دستگاه منطق آنها بهتکامل بگراید. ماهیت روش آنها در این خصوص در حقیقت تجربی بود چه آنها نشان دادند که چگونه رشته‌هایی از ریاضیات نظیر نظریهٔ مجموعه، نظریهٔ اعداد، و هندسه را می‌توان بر اساس نظریهٔ آنها عرضه داشت و قضایای اصلی این نظریه‌ها را براساسی متحدالشکل و با قاعده استوار ساخت. اما از نظر واقعیت، آنها برای موضوع مورد بحث خود اثباتی ارائه نکرده‌اند. ممکن است که سؤال شود برای اثبات چه می‌توانست ارائه شود؟ یقیناً، اگر همچنان که راسل و وایت‌هد ادعا کردند، ادعا شود که حساب مقدماتی می‌تواند در میان دستگاهی که در کتاب اصول ریاضیات ارائه شده تجلی نماید، آن وقت برای هر فرمول داده شدهٔ حساب باید حالتی باشد که یا آن یانفی آن یک قضیه باشد (یعنی نظریه باید کامل باشد). اینکه اصول ریاضیات کامل نیست (یعنی غیرکامل است) در سال ۱۹۳۱ بهوسیلهٔ گودل اثبات گردید.

بدین‌ترتیب که وی نشان داد بر اساس محدود کردن توجه به‌آن قسمت از اصول ریاضیات که مناسب برای ظاهر ساختن حساب است فرمولی هست به قسمی که نه آن و نه نفی آن را می‌توان از اصول موضوعه و بهوسیلهٔ قوانین نتیجه‌گیری فراهم آورده شده اثبات کرد. علاوه بر این اثبات گودل نشان داد که مطالب را با افزودن اصول موضوعهٔ اضافی نیز نمی‌توان ترمیم کرد. بالاخره، (با بهخاطر آوردن تعریف نامتناقض بودن یا سازگاری که پیش از این گفته شد) گودل ثابت کرد که اگر دستگاهی مانند دستگاهی که در کتاب اصول ریاضیات ذکر شده است نامتناقض باشد، غیرممکن است که بتوان آن حقیقت را یعنی نامتناقض بودن آن را اثبات کرد.

گرچه نتایج مأخوذهٔ گودل پایه‌های تز وایت‌هد و راسل و همچنین امیدهای دیگران را فرو ریخت، ولی مقدری هم برای موضوع بنیانهای ریاضیات با منطق ریاضی معلوم نساخت بدین‌معنی که هر دوی آنها زینت‌بخش رشته‌های ریاضیات هستند ولی جهت هر یک بهوسیلهٔ نتایج عمیقی که گودل به دست آورد تغیر یافته است.

در همین شماره در مقالهٔ:

محاسبهٔ Σn^p

که توسط رضا منصوری[1] دانش‌آموز ششم ریاضی دبیرستان رهنما، با الهام از روش ابوبکرمحمد کرخی در محاسبهٔ Σn^3 (مذکور در کتاب جبر و مقابلهٔ خیام، تألیف: مصاحب) نوشته شده چنین آمده است:

۱ - محاسبهٔ Σn : مربع $ABCD$ را بهضلع n (n عدد صحیح مثبت) بنا کرده، مطابق شکل طولهای BB_1 و DD_1 را برابر با واحد جدا می‌کنیم. مساحت سطح محصور به $BB_1C_1D_1DC$ برابر خواهد

بود با:

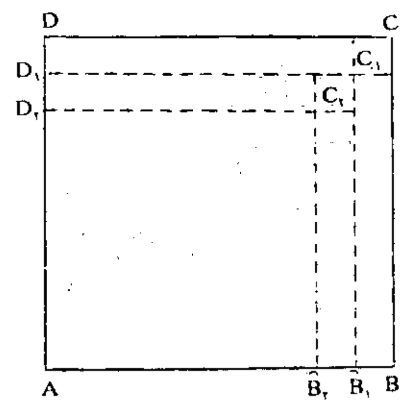
$۲n-۱$ اگر طولهای $B_۱B_۲$ و $D_۱D_۲$ را نیز برابر با واحد جدا نماییم مساحت سطح محصور به $B_۱B_۲C_۲D_۲D_۱C_۱$ برابر خواهد شد با $۲(n-۱)-۱$ و با تکرار این عمل نتیجه خواهیم گرفت که سطح مربع ABCD برابر است با:

$$[۲n-۱]+[۲(n-۱)-۱]+[۲(n-۲)-۱]+\dots+[۴-۱]+[۲-۱]$$

که برابر می‌شود با $۲\Sigma n-n$ و چون مساحت سطح مربع به‌ضلع n برابر $n^۲$ است پس:

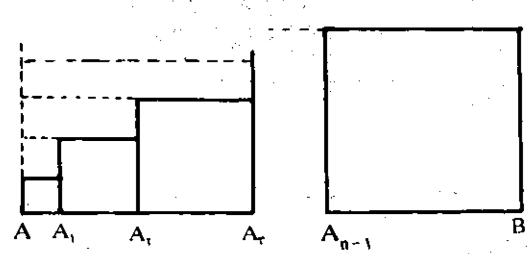
$$۲\Sigma n-n=n^۲ ,\quad \Sigma n=\frac{n^۲+n}{۲}=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

شکل (۱)



۲ ـ محاسبهٔ $\Sigma n^۲$: قطعه خط AB به‌طول $AB=\Sigma n$ را درنظر می‌گیریم. بر این قطعه خط ابتدا از A قطعه خطهای $AA_۱=۱$ و $A_۱A_۲=۲$ و...و $A_{n-۱}B=n$ را جدا کرده روی هر یک از این قطعه خطها مربعی بنا می‌کنیم. مجموع سطوح این مربعها برابر با $\Sigma n^۲$ است.

شکل (۲)



اگر مجموع سطوح این مربعها را از سطح مستطیل به‌طول AB و به‌عرض n کم کنیم، مساحت سطح باقیمانده برابر است با:

$$۱+(۱+۲)+(۱+۲+۳)+\dots+[۱+۲+\dots+(n-۱)]$$

یا به‌صورت دیگر:

$$\Sigma(n-۱)+\Sigma(n-۲)+\dots+\Sigma[n-(n-۱)]$$

که برابر می‌شود با:

$$\frac{n(n-۱)}{۲}+\frac{(n-۱)(n-۲)}{۲}+\dots+\frac{[n-(n-۲)][n-(n-۱)]}{۲}$$

و به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\frac{۱}{۲}[n^۲-n+(n-۱)^۲-(n-۱)+(n-۲)^۲-(n-۲)+\dots]$$

و درنتیجه برابر است با:

$$\frac{۱}{۲}(\Sigma n^۲-\Sigma n)$$

و چون سطح کل مستطیل فوق‌الذکر برابر $n.\Sigma n$ است پس:

$$\Sigma n^۲+\frac{۱}{۲}(\Sigma n^۲-\Sigma n)=n\Sigma n$$

و از آنجا به‌دست خواهد آمد:

$$\Sigma n^۲=\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$$

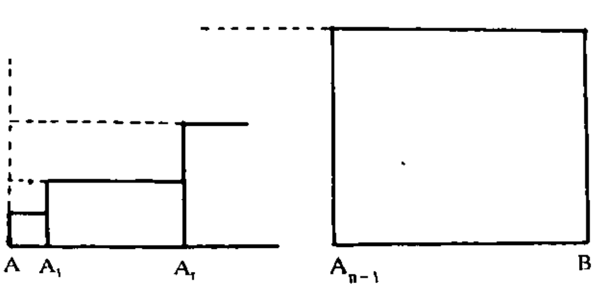
۳ ـ محاسبهٔ Σn^p: به‌فرض این که $\Sigma n^{p-۱}$ معلوم باشد قطعه خط AB را به‌طول $\Sigma n^{p-۱}$ اختیار کرده بر آن قطعه خطهای $AA_۱=۱^{p-۱}$ و $A_۱A_۲=۲^{p-۱}$ و...و $A_{n-۱}B=n^{p-۱}$ را جدا کرده بر روی آنها مستطیلهایی می‌سازیم که ارتفاع آنها به‌ترتیب برابر با ۱ و ۲ و ۳ و ... و n باشد. مجموع سطوح این مربع مستطیلها برابر با Σn^p است و چنانچه مجموع این مساحتها را از مساحت مستطیل به‌طول AB و به‌عرض n کم کنیم، مساحت سطح باقیمانده برابر است با:

$$۱^{p-۱}+(۱^{p-۱}+۲^{p-۱})+\dots+[۱^{p-۱}+۲^{p-۱}+\dots+(n-۱)^{p-۱}]$$

که برابر است با:

$$\Sigma(n-۱)^{p-۱}+\Sigma(n-۲)^{p-۱}+\dots+۱$$

شکل (۳)



و باتوجه به‌این که مساحت سطح مستطیل فوق‌الذکر برابر با $n.\Sigma n^{p-1}$ است خواهیم داشت:

$$n\Sigma n^{p-1}=\Sigma n^{p}+\Sigma(n-1)^{p-1}+\Sigma(n-2)^{p-1}+\dots+1$$

و از آنجا:

$$\Sigma n^{p}=n\Sigma n^{p-1}-[\Sigma(n-1)^{p-1}+\Sigma(n-2)^{p-1}+\dots+1]$$

از فرمول بالا با معلوم بودن Σn مقدار Σn^{2} و از روی آن Σn^{3} و بعد Σn^{4} و... و بالاخره Σn^{p} حساب می‌شود.

* * *

تمرین: روابط زیر را محقق کنید.

$$8\Sigma n^{3}=3(2n+1)\Sigma n^{2}-\Sigma n$$

$$5\Sigma n^{4}+\Sigma n^{2}=6\Sigma n\Sigma n^{2}$$

$$2\Sigma n^{5}+(\Sigma n)^{2}=3(\Sigma n^{2})^{2}$$

$$7\Sigma n^{6}+5\Sigma n^{4}=12\Sigma n^{2}.\Sigma n^{3}$$

و نتیجه بگیرید:

$$\Sigma n^{3}=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^{2}=(\Sigma n)^{2}$$

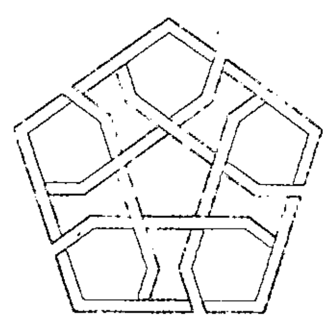
$$\Sigma n^{4}=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^{2}+3n-1)$$

$$\Sigma n^{5}=\frac{1}{2}[3(\Sigma n^{2})^{2}-(\Sigma n)^{2}]$$

$$\Sigma n^{6}=\frac{1}{42}n(n+1)(2n+1)[3n^{2}(n+1)^{2}-3n(n+1)+1]$$

★ یادداشت:

۱ ـ دکتر رضا منصوری فعلی استاد فیزیک و رئیس انجمن فیزیک ایران.



ادب ریاضی

سخنانی است با این خصوصیت که دیگران را به اشتباه می‌افکند و گمراه می‌کند. حق را به باطل مشتبه می‌سازد. ناحق را حق جلوه می‌دهد و حق را ناحق. کسی را که دانا نیست، دانای تیزبین معرفی می‌کند، و آن را که حکیم و داناست نادان وعامی می‌نماید.

لفظ سَفَسْطه درواقع نام فن و حرفه‌ای است که انسان را ـ به وسیلهٔ قول و ابهام ـ در کار مغالطه و فریبکاری و اشتباهکاری (تصویه و تلبیس) توانا می‌کند، خواه درمورد خودش به این که من صاحب علم و حکمت و فضیلت هستم، خواه درمورد دیگری به این که او شخصی ناقص و ناتمام است، بدون آنکه درواقع چنین بوده باشد.

احصاء‌العلوم فارابی

ترجمهٔ خدیوجم

و بدترین قرنها قرنی است که در آن بساط اجتهاد و ریاضت درنوردیده شود و سیر اندیشه‌ها منقطع گردد و درهای مکاشفات بسته و راههای مشاهدات مسدود گردد.

حکمت‌الاشراق

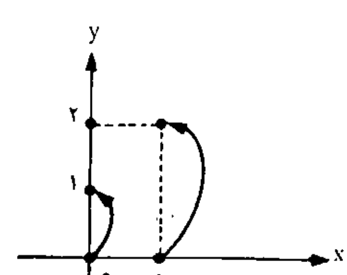
تبدیل ـ تبدیلات خطی
(نگاشتهای خطی)

(دانش آموزان پیش‌دانشگاهی، رشتهٔ ریاضی)

● حمیدرضا امیری

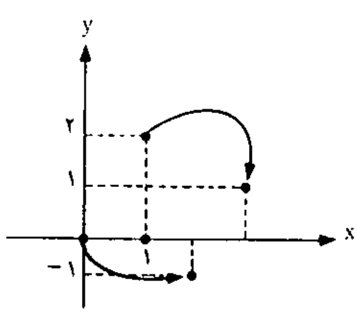
شاید ساده‌ترین نوع تبدیل را بتوانیم در توابع حقیقی جستجو کنیم، مثلاً وقتی می‌نویسیم $\begin{matrix} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x)=x^2+1\end{matrix}$ در واقع یک تبدیل روی خط اعداد حقیقی متصور می‌شود، در این مثال تابع f عدد حقیقی صفر را به ۱ ($f(0)=1$) و عدد حقیقی ۲ را به ۵ و عدد حقیقی $\sqrt{2}$ را به ۳ و ... تبدیل می‌کند، این تبدیل روی خط اعداد حقیقی انجام‌شده و کاملاً مشهود است.

حال اگر تابعی را از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}^2$ تعریف کنیم، هر عدد حقیقی را به‌یک زوج مرتب تبدیل کرده‌ایم و یا به‌عبارت دیگر هر نقطهٔ یک‌بُعدی را به‌نقطه‌ای با دو بعد در صفحهٔ مختصات دکارتی تبدیل کرده‌ایم. مثلاً اگر تعریف کنیم $\begin{matrix} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2 \\ f(x)=(x,x+1)\end{matrix}$ در این صورت تابع f عدد حقیقی صفر را به‌زوج مرتب (۱ و ۰) و عدد حقیقی ۱ را به‌زوج مرتب (۲ و ۱) و ... تبدیل می‌کند.



به‌عنوان مثال‌دیگری، تابع $\begin{matrix} f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2 \\ f((x,y))=(x+2,y-1)\end{matrix}$ رادرنظرمی‌گیریم.

این تابع روی مجموعهٔ نقاط صفحهٔ دکارتی ($\mathbb{R}^2$) اثر کرده و هر نقطه را با ضابطه‌ای مشخص به‌نقطهٔ دیگری در همان صفحه تبدیل می‌کند. مثلاً، نقطهٔ (۲ و ۱) را به‌نقطهٔ (۱ و ۳) و یا نقطهٔ (۰ و ۰) را به (۱− و ۲) و ... تبدیل می‌کند، به‌نمودار توجه کنید:



به‌همین ترتیب می‌توان توابعی از صفحه ($\mathbb{R}^2$) به‌فضا ($\mathbb{R}^3$) و یا از $\mathbb{R}^3$ به $\mathbb{R}^2$ تعریف کرد. به‌عنوان مثال $\begin{matrix} f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3 \\ f((x,y))=(x+1,y-2,x+y)\end{matrix}$ تابعی است از مجموعهٔ نقاط صفحه به فضای سه‌بعدی و $\begin{matrix} g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2 \\ g((x,y,z))=(x-1,y+z)\end{matrix}$ نیز تابعی از $\mathbb{R}^3$ به $\mathbb{R}^2$ می‌باشد که هرکدام ویژگیهای مخصوص به‌خود را داشته و در نهایت یک تبدیل را برای ما انجام می‌دهند.

حال می‌خواهیم اندکی بیشتر روی تابع f در مثال اخیر، تأمل کنیم. همان‌طور که مشاهده می‌کنید تأثیر تابع f روی یک عضو از

IR^2 یک سه‌تایی مرتب از IR^3 است که هر مؤلفهٔ این سه‌تایی مرتب با ضابطهٔ خاصی ایجاد می‌شود، اگر قرار دهیم:

$$f_1:IR^2\to IR \quad , \quad f_2:IR^2\to IR \quad , \quad f_3:IR^2\to IR$$

$$f_1((x,y))=x+1 \qquad f_2((x,y))=y-2 \qquad f_3((x,y))=x+y$$

در این صورت تابع f را می‌توان به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$f:IR^2\to IR^3$$
$$f((x,y))=(f_1,f_2,f_3)$$

و در مورد تابع g اگر قرار دهیم

$$g_1:IR^3\to IR \quad \text{و} \quad g_2:IR^3\to R$$

$$g_1((x,y,z))=x-1 \qquad g_2((x,y,z))=y+z$$

در این صورت تابع g را نیز می‌توان به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$g:IR^3\to IR^2$$
$$g((x,y,z))=(g_1,g_2)$$

و همان‌طور که مشاهده می‌کنید هر g_i تابعی است از $IR^3\to IR$.

در حالت کلی می‌توان این مطلب را تعمیم داده و بگوییم:

اگر f تابعی از IR^n به IR^m باشد، می‌توان آن را به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$f:IR^n\to IR^m$$
$$f((x_1,x_2,\dots,x_n))=(f_1,f_2,\dots,f_m)$$

که در تعریف فوق هر f_i تابعی است از $IR^n\to IR$.

حال می‌خواهیم دستهٔ خاصی از تابعهای به‌شکل فوق را مورد بررسی قرار دهیم.

اگر در تابع $f:IR^n\to IR^m$، $f:((x_1,x_2,\dots,x_n))=(f_1,f_2,\dots,f_n)$ ، هر f_i که تابعی از $IR^n\to IR$ می‌باشد برحسب x_1 و x_2 و ... و x_n از درجه ۱ و همگون باشد، آن را یک تابع خطی یا نگاشت خطی می‌نامند.

مثال ۱: تابع $f:IR^3\to IR^2$، $f((x_1,x_2,x_3))=(f_1,f_2)$ که به‌صورت زیر تعریف می‌شود خطی است:

$$f_1((x_1,x_2,x_3))=x_1+x_2-2x_3$$
$$f_2((x_1,x_2,x_3))=2x_1+x_2$$

مثال ۲: تابع $f:IR^2\to IR^3$، $f((x_1,x_2))=(f_1,f_2,f_3)$ که به‌صورت زیر تعریف شده است، خطی نمی‌باشد، زیرا در تعریف f_1 ، x_1x_2 نسبت به‌متغیرهای x_1 و x_2 از درجه دوم است.

$$f_1((x_1,x_2))=x_1x_2+x_1$$
$$f_2((x_1,x_2))=x_1-x_2$$
$$f_3((x_1,x_2))=2x_1+x_2$$

مثال ۳: تابع $f:IR\to IR^2$، $f(x)=(f_1,f_2)$ که به‌صورت زیر تعریف شده است، خطی نیست زیرا، در تعریف f_1 ، مقدار ثابتِ ۲ از درجه ۱ نیست.

$$f_1(x)=x+2$$
$$f_2(x)=2x$$

مثال ۴: تابع $f:IR^2\to IR^2$ با ضابطهٔ $f((x_1,x_2))=(f_1,f_2)$ که

$$f_1((x_1,x_2))=(\cos\alpha)x_1+(\sin\alpha)x_2$$

و

$$f_2((x_1,x_2))=(\sin\alpha)x_1-(\cos\alpha)x_2$$

یک تابع خطی است زیرا f_1 و f_2 نسبت به x_1 و x_2 از درجه اول و همگون هستند. تابع فوق هر نقطه از صفحه را نسبت به‌خط $y=x\,tg\,\frac{\alpha}{2}$ قرینه کرده و نقطهٔ جدیدی در صفحه مشخص می‌کند.

◀ نگاشتهای خطی و نمایش ماتریسی آنها

قرارداد: نگاشت خطی $f:IR^n\to IR^m$ با ضابطهٔ

$$f((x_1,x_2,\dots,x_n))=(f_1,f_2,\dots,f_m)$$

را با فرض $y_1=f_1$، $y_2=f_2$ و ... و $y_m=f_m$ و $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ و $y=(f_1,f_2,\dots,f_m)$ ، می‌توان به‌صورت $f:IR^n\to IR^m$ نمایش داد.

$$f(x)=y$$

با توجه به‌قرارداد فوق و با توجه به‌اینکه f یک نگاشت خطی است، هر y_i که تابعی از IR^n به IR است به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n$$
$$y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n$$
$$\vdots$$
$$y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n$$

حال اگر ضرایب a_{ij} را به‌همان ترتیب نوشته شده روی سطرها و ستونهای منظمی قرار دهیم ماتریسی $m\times n$ همچون $A=[a_{ij}]$ به‌دست می‌آید که در این صورت نگاشت f را می‌توان به‌شکل ماتریسی و به‌صورت زیر نمایش داد:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots\cdots a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad y = Ax$$

همانطور که مشاهده می‌کنید هر نگاشت خطی را می‌توان به‌صورتِ ماتریسی نمایش داد و در واقع اگر f یک نگاشت خطی از IR^n به IR^m باشد، این نگاشت را می‌توان از تأثیر یک ماتریس $m\times n$ روی اعضای IR^n که به‌صورت ماتریسهایی ستونی نوشته شده باشند، به‌دست آورد.

همچنین اگر یک ماتریس $m\times n$ بر عضوی از IR^n (n ـ تاییهای مرتب) که به‌صورت ستونی نوشته شده‌اند، اثر کند حاصل یک عضو از IR^m بوده و در واقع یک نگاشت خطی تعریف می‌شود. به‌مثالهای زیر توجه کنید:

مثال ۵: تبدیل خطی $f:IR^2\to IR^3$ با ضابطهٔ زیر مفروض است این تبدیل را به‌شکل ماتریسی نمایش می‌دهیم:

$$y_1 = f_1((x_1,x_2)) = 4x_1 + 2x_2$$
$$y_2 = f_2((x_1,x_2)) = -2x_1 + x_2$$
$$y_3 = f_3((x_1,x_2)) = \sqrt{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 1 \\ \sqrt{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

مثال ۶: تبدیل خطی $f:IR^3\to IR^2$ در زیر به‌شکل ماتریسی نمایش داده شده است

$$y_1 = f_1((x_1,x_2,x_3)) = x_1 + x_2 + x_3$$
$$y_2 = f_2((x_1,x_2,x_3)) = 2x_1 - x_2 + 3x_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

مثال ۷: هرگاه صورتِ ماتریسیِ یک تبدیل خطی به‌صورت زیر باشد،

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

در این صورت اگر این تبدیل خطی را f بنامیم خواهیم داشت:

$$f((x_1,x_2)) = (x_1\cos\theta - x_2\sin\theta, x_1\sin\theta + x_2\cos\theta)$$

یا $f:IR^2\to IR^2$

$$f:IR^2\to IR^2$$
$$f((x_1,x_2)) = (y_1,y_2)$$

در صفحهٔ ۵۶ کتاب درسی ثابت شده است که این تبدیل خطی، تبدیلِ دورانی حولِ مبدأ مختصات و به‌اندازهٔ زاویهٔ θ می‌باشد.

مسألهٔ ۱: اگر A ماتریسی $m\times n$ (ماتریس تبدیل نگاشت خطیِ $f:IR^n\to IR^m$) باشد و $e_j=(0,0,\ldots,1,\ldots,0)$ (مؤلفهٔ j ام یک است و بقیهٔ مؤلفه‌های n تایی، همگی صفر هستند) در این صورت ثابت کنید $f(e_j)=A^j$، که A^j ستونِ j ام ماتریس A است.

طبق مطالبِ قبل، هر تبدیل خطی مانند f متناظر است با یک ماتریسِ تبدیل مانند A و برعکس؛ بنابراین برای اثبات مطلب فوق کافی است ماتریس A را در بردار ستونی e_j ضرب کرده و حاصل A^j باشد:

$$\begin{bmatrix} a_{11}a_{12}\cdots a_{1j}\cdots a_{1m} \\ a_{21}a_{22}\cdots a_{2j}\cdots a_{2m} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}a_{m2}\cdots a_{mj}\cdots a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} = A^j$$

نتیجهٔ مهم: اگر A ماتریس تبدیل خطی $f:IR^n\to IR^m$ باشد در این صورت این ماتریس را می‌توان به‌شکل زیر توجیه کرد:

ستون اول A یعنی A^1 برابر است با $f(e_1)$ و ستون دوم A یعنی A^2 برابر است با $f(e_2)$ ... و ستونِ n ام A، برابر است با $f(e_n)$. حال به‌دنبال محک و ملاکی هستیم تا بتوانیم خطی بودنِ یک نگاشت را تشخیص دهیم، قضیهٔ زیر این محک را به‌دست ما می‌دهد.

قضیه: نگاشت $f:IR^n\to IR^m$ یک نگاشت خطی است. اگر و فقط اگر دو شرط زیر برقرار باشند:

الف) به‌ازای هر $x,x'\in IR^n$: $f(x+x')=f(x)+f(x')$.

ب) به‌ازای هر $x\in IR^n$ و $r\in IR$: $f(rx)=rf(x)$.

(اثبات قضیه در کتاب درسی موجود است)

بنابراین از این به‌بعد برای اثباتِ خطی بودنِ یک نگاشت فقط کافی است دو شرط (الف) و (ب) را برای آن بررسی کنیم.

مسألهٔ ۲: تابع f به‌صورت زیر تعریف شده است. ثابت کنید این تابع، یک تابع خطی است.

$$f:IR^2\to IR^2$$
$$f((x_1,x_2)) = (x_1\cos\theta - x_2\sin\theta, x_1\sin\theta + x_2\cos\theta)$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = x_1\cos\theta - x_2\sin\theta \\ y_2 = x_1\sin\theta + x_2\cos\theta \end{array}\right. \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

کافی است شرطهای الف و ب را ثابت کنیم پس:

الف)
$$\begin{aligned}f[(x_1,x_2)+(x'_1,x'_2)]&=f[(x_1+x'_1,x_2+x'_2)]\\&=((x_1+x'_1)\cos\theta-(x_2+x'_2)\sin\theta \ \text{و}\ (x_1+x'_1)\sin\theta+(x_2+x'_2)\cos\theta)\\&=((x_1\cos\theta-x_2\sin\theta)+(x'_1\cos\theta+x'_2\sin\theta)\ \text{و}\ (x_1\sin\theta+x_2\cos\theta)+(x'_1\sin\theta+x'_2\cos\theta))\\&=(x_1\cos\theta-x_2\sin\theta\ \text{و}\ x_1\sin\theta+x_2\cos\theta)+(x'_1\cos\theta+x'_2\sin\theta\ \text{و}\ x'_1\sin\theta+x'_2\cos\theta)\\&=f((x_1,x_2))+f((x'_1,x'_2))\end{aligned}$$

ب)
$$\begin{aligned}f(r(x_1,x_2))&=f((rx_1,rx_2))\\&=(rx_1\cos\theta-rx_2\sin\theta\ \text{و}\ rx_1\sin\theta+rx_2\cos\theta)\\&=(r(x_1\cos\theta-x_2\sin\theta)\ \text{و}\ r(x_1\sin\theta+x_2\cos\theta))\\&=r(x_1\cos\theta-x_2\sin\theta\ \text{و}\ x_1\sin\theta+x_2\cos\theta)\\&=rf((x_1,x_2))\end{aligned}$$

پس با توجه به‌قضیهٔ قبل تابع f، خطی است که اگر آن را R_θ بنامیم و نقطهٔ (x_1,x_2) را روی صفحهٔ مختصات مشخص کرده و تبدیل یافتهٔ آن تحت‌تأثیر R_θ را نیز به‌دست آوریم به‌راحتی مشاهده می‌شود که نقطهٔ (x_1,x_2) به‌اندازهٔ زاویهٔ θ حول مبدأ دوران یافته است پس R_θ یک تبدیل دوران حول مبدأ است.

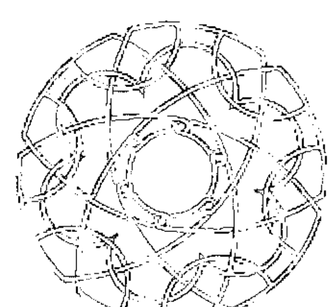
مسألهٔ ۳: آیا تابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ که به‌صورت $f((x_1,x_2))=x_1x_2$ تعریف شده است خطی است یا خیر؟

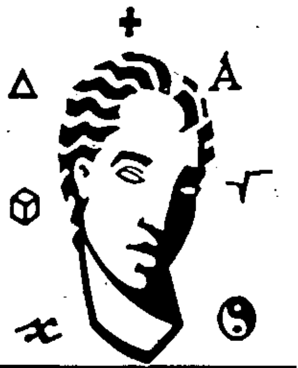
با توجه به‌تعریف تابع خطی واضح است که x_1x_2 نسبت به‌متغیرهای x_1 و x_2 از درجه دوم بوده و تابع خطی نیست و نیز با توجه به‌قسمت (ب) قضیهٔ قبل داریم:

$f(r(x_1,x_2))=f((rx_1,rx_2))=rx_1\times rx_2=r^2x_1x_2$ (۱)

از طرف دیگر $\rightarrow rf((x_1,x_2))=r\times x_1x_2=rx_1x_2$ (۲)

(۱) و (۲) $\Rightarrow f(r(x_1,x_2))\neq rf((x_1,x_2)) \Rightarrow$ تابع خطی نیست





تفریح اندیشهٔ ۲

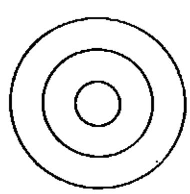
تمرین به هدف زدن

خانم معلم از جواد پرسید: در صورتی که گلوله‌ای در هر چهار بار یک بار به هدف بخورد، و چهار گلوله از چنین گلوله‌هایی به یک هدف زده شود، احتمال این که تیر به هدف بخورد چقدر است؟

جواد پاسخ داد: ساده است، قطعاً یک گلوله در هدف خواهد نشست.

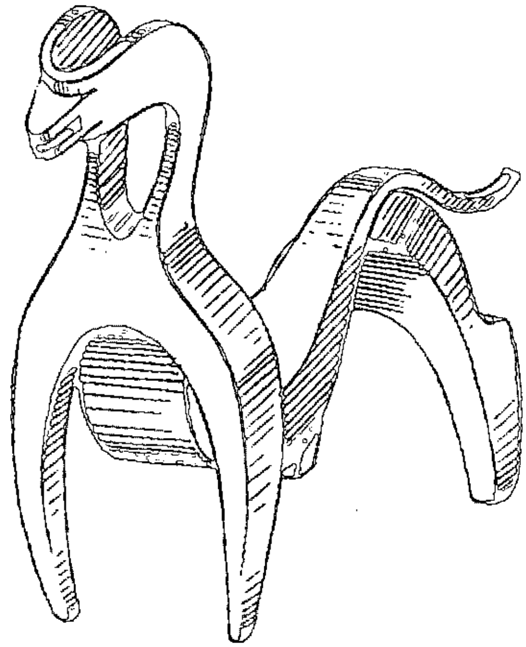
ـ برو پای تخته و بیست و پنج بار بنویس:

La Théorie de Probabi lité no est que
le bon sens confirmé par le cacul Marquis de
Laplace

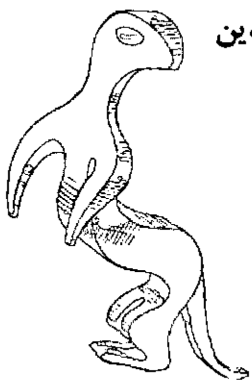


جواب در صفحهٔ ۸۸

داستان شیر و موش در هندسه



از : دکتراحمد شرف‌الدین

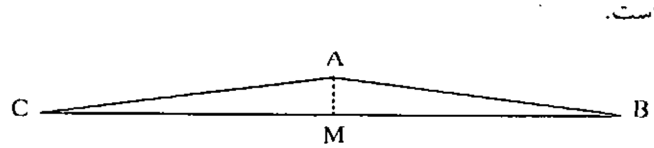


داستان شیر و موش را در کودکی در کتاب دبستانی خوانده‌ایم. اینچنین:

«موشی به‌چنگ شیری افتاد. شیر خواست او را ببلعد. موش از شیر خواست که او را رها کند شاید روزی بتواند شیر را یاری دهد. شیر خندید و گفت از تو حیوان ضعیف چه کاری ساخته است و او را آزاد کرد. روزی شیر در دام صیادی افتاد. موش از آنجا گذشت او را در دام اسیر یافت. فوراً به‌جویدن طنابهای دام پرداخت و پس از اندکی شیر را آزاد ساخت».

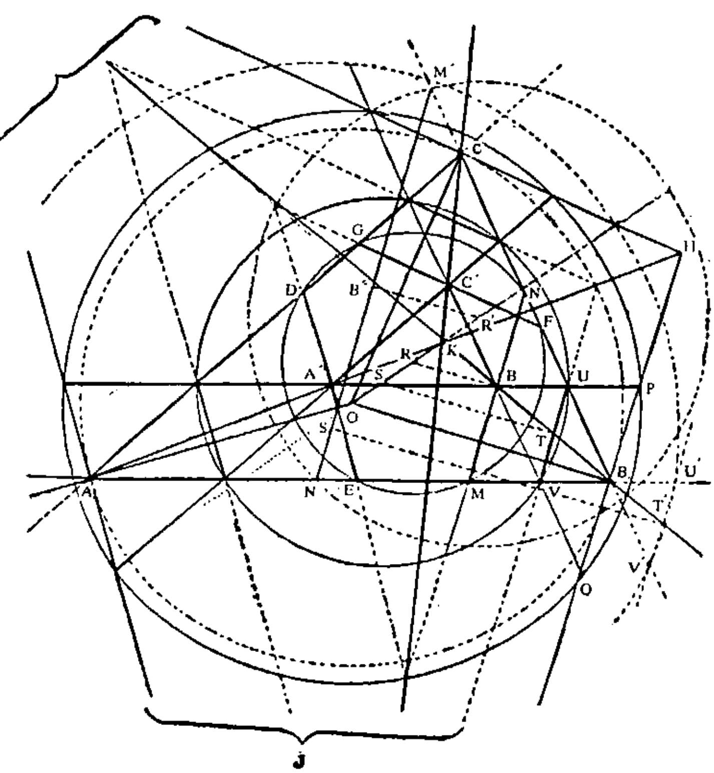
یک حکم مهم هندسی (۱)

در مثلث متساوی‌الساقین اگر زاویه رأس بسیار نزدیک به ۱۸۰° باشد، نسبت طول هر ساق به‌طول میانه مربوط به‌قاعده بسیار بزرگ است.



خواننده: چرا حکم هندسی بالا را به‌عنوان یک حکم مهم معرفی کرده‌اید. این حکم بسیار ساده است و در برابر بعضی احکام هندسی بسیار سخت و پیچیده که چون شیراند موشی بیش نیست. چقدر خوب است که حکم (۱) را با حکم هندسی زیر مقایسه کنید تا دیگر آن را به‌عنوان یک حکم مهم معرفی نکنید.

قضیه: مثلث ABC را درنظر می‌گیریم و نقطه لوموآن مربوط به‌آن را K می‌نامیم. نقاط 'A، 'B، و'C به‌ترتیب پاره‌خطهای KA، KB، و KC را به‌یک نسبت و در یک جهت تقسیم می‌کنند. نقاط تقاطع اضلاع مثلث ABC را با ضد موازیهای مرسوم از نقاط 'A، 'B، و 'C تعیین می‌کنیم. همچنین نقاط تقاطع اضلاع مثلث A'B'C' را با ضدموازیهای مرسوم از نقاط A، B، و C تعیین می‌کنیم. بالاخره نقاط تقاطع اضلاع دو مثلث ABC و A'B'C' را به‌دست می‌آوریم. سه‌گروه شش‌نقطه‌ای هم‌دایره‌ای حاصل می‌شود.



می‌بینید که حکم (۱) در برابر حکم بالا که چون شیر غرنده است موشی بیش نیست. از حکم (۱) که چون موش ضعیفی است چه کاری ساخته است؟

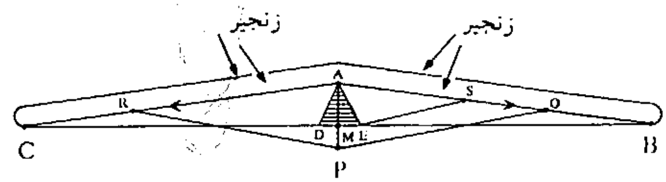
خواننده عزیز اندکی صبر و شکیبایی داشته باشید. بگذارید تا ما کاربردهایی از حکم (۱) عرضه کنیم آن‌وقت خواهید دید که از این حکم که آن را موش حساب می‌کنید کارهایی ساخته است که از بسیاری شیرها ساخته نیست!

کاربردهایی از حکم (۱)

حکم (۱) به‌طور مؤثر در حل بعضی مسایل به‌کار می‌آید. در ادامه مقاله مثالهای متعددی در این‌باره عرضه می‌کنیم.

مثال (۱). یک سنگ می‌تواند زنجیرهای یک بولدزر را بگسلد. هنگامی که یک بولدزر از روی یک مانع عبور کند، زنجیرهای آن در یک لحظه کوتاه، تماس کامل خود را با زمین از دست می‌دهند. در این لحظه نیروی کششی بسیار زیاد به زنجیرها وارد می‌شود به‌طوری که ممکن است زنجیرها پاره شوند. این مطلب از همان حکم (۱) یعنی خاصیت مثلث متساوی‌الساقینی که زاویه رأس آن نزدیک ۱۸۰° است نتیجه می‌شود. اینک توضیح این مطلب:

در شکل زیر، خط افقی BC نمایش زمین و BAC نمایش نیمی از زنجیر بولدزر است و مثلث پرداز شده ADE نمایش یک سنگ است که در نقطه A با زنجیر در تماس است.



قسمتی از وزن یا تمام وزن بولدزر در نقطه A به‌مانع وارد می‌شود که آن را با $\overrightarrow{AP}$ نمایش می‌دهیم. این نیرو را می‌توان به‌دو نیروی $\overrightarrow{AQ}$ و $\overrightarrow{AR}$ در امتداد دو ساق مثلث ABC تجزیه کرد. اگر زاویه A نزدیک به ۱۸۰° باشد نسبت اندازه نیروی $\overrightarrow{AQ}$ (یا $\overrightarrow{AR}$) به‌اندازه نیروی $\overrightarrow{AP}$ بسیار بزرگ است. لذا دو نیروی کششی بزرگ $\overrightarrow{AQ}$ و $\overrightarrow{AB}$ به‌زنجیر وارد می‌شود.

اگر وزن بولدزر ۱۱/۴ تن و سطح تماس هر زنجیر ۴ مترمربع و ارتفاع مانع ۲۵۰ میلی‌متر باشد اندازه هر یک از دو نیروی $\overrightarrow{AQ}$ و $\overrightarrow{AR}$ مساوی ۲۳ تن خواهد بود. چون زنجیر در دو طرف نقطه A با دو نیروی بزرگ ۲۳ تن کشیده می‌شود احتمال شکسته شدن آن زیاد است.

خواننده از مثال مذکور در بالا به‌خوبی درمی‌یابد که حکم هندسی (۱) بسیار مهم است. در صفحات آینده مثالهای دیگری ذکر می‌کنیم. قبل از ذکر مثالهای بعدی، نسبت اندازه‌های نیروهای در امتداد دو ساق را به‌اندازه نیروی در امتداد میانه حساب می‌کنیم.

محاسبه نسبت اندازه‌های نیروها. در شکل (۳) چنین داریم:

$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AR}$$

اگر از نقطه M وسط قاعده BC، خط MS را موازی خط AC رسم کنیم، از وسط ساق AB خواهد گذشت. لذا می‌توان نوشت:

$$(۱)\ \frac{AP}{AQ}=\frac{AM}{AS}=\frac{۲AM}{AB}$$

از طرفی چنین داریم:

$$(۲)\ \frac{AM}{AB}=\sin MBA$$

هنگامی که زاویه A نزدیک به ۱۸۰° است زاویه MBA کوچک است. فرض کنیم زاویه A مساوی ۱۷۶° باشد آنگاه اندازه زاویه MBA مساوی ۲ درجه است و

$$(۳)\ \sin MBA=۰/۰۳۴۹\ ...$$

رابطه (۱) با رعایت رابطه (۳) به‌صورت زیر درمی‌آید:

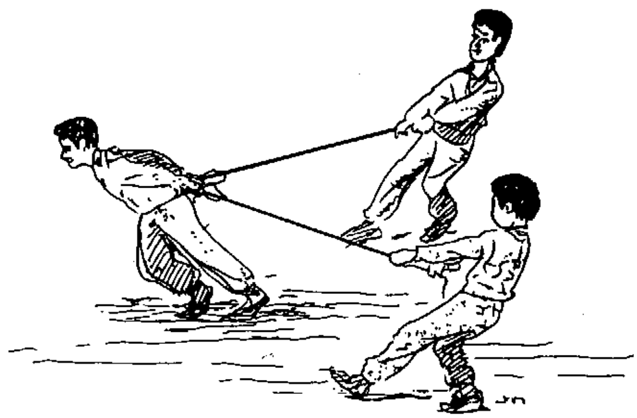
$$\frac{AP}{AQ}=۲\times ۰/۰۳۴۹\ ...=۰/۰۶۹۸...\simeq ۰/۰۷$$

اگر اندازه نیروی $\overrightarrow{AP}$ را مساوی ۵۰ کیلوگرم فرض کنیم، اندازه نیروی $\overrightarrow{AQ}$ (یا $\overrightarrow{AR}$) در حدود ۷۱۱ کیلوگرم خواهد بود. ملاحظه می‌شود که نسبت اندازه نیروی $\overrightarrow{AQ}$ به‌اندازه نیروی $\overrightarrow{AP}$ بزرگ است.

مثال (۲). یک بازی برای کودکان. مطابق شکل، دو سر یک طناب را احمد و محمود در دست دارند و به‌سوی خود می‌کشند. عباس وسط طناب را در دست دارد و آن را چنان می‌کشد که نیروی آن دو را خنثی کند. آیا عباس می‌تواند بر آن دو غلبه کند؟

آری. عباس باید در ابتدای بازی طوری قرار گیرد که در وسط طناب باشد و به‌علاوه زاویه طناب به‌اندازه کافی بزرگ باشد. سپس طناب را به‌سوی خود بکشد و در تمام مدت بازی باید توجه داشته باشد که نیروی زیاد و مداوم بر طناب وارد نکند بلکه باید همواره آن اندازه نیرو وارد کند که زاویه طناب به ۱۸۰° نزدیک باشد. اگر

عباس نیروی زیاد و مداوم وارد کند زاویه طناب به‌تدریج کم می‌شود و لحظه‌ای فرا می‌رسد که غلبه خود را نسبت به‌دو نفر دیگر از دست می‌دهد.



مثال (۳) توت تکانی. دهقانها برای چیدن توت، از یک چادر (پارچه بزرگ مربعی ضخیم) استفاده می‌کنند. بدین قرار که چند نفر گوشه‌های یک چادر را گرفته و در زیر درخت توت می‌ایستند و یک نفر بالای درخت می‌رود و شاخه‌های آن را تکان می‌دهد تا توتها از درخت به‌روی چادر بریزد.

در ابتدای کار افرادی که گوشه‌های چادر را در دست دارند می‌توانند چادر را با اندک نیرویی به‌صورت کشیده نگاه دارند (یعنی چادر به‌صورت یک صفحه باشد). اما همین که مقداری توت به‌روی چادر ریخته شد و توتها به‌مرکز چادر رفت نیرویی بزرگ از طرف مرکز چادر به‌گوشه‌های آن وارد می‌شود. به‌طوری که افرادی که گوشه‌های چادر را در دست دارند به‌خوبی احساس می‌کنند که باید گوشه‌های چادر را با نیروی بسیاری به‌طرف خود بکشند تا چادر کمابیش کشیده باقی بماند. کسانی که در این کار شرکت کرده باشند به‌خوبی حس کرده‌اند که با وجود آنکه مقدار توت در مرکز چادر اندک است نگاهداری گوشه‌های چادر در دست مشکل است و باید نیرویی زیاد مصرف کنند.

این مطلب با همان حکم شماره (۱) قابل توضیح است.

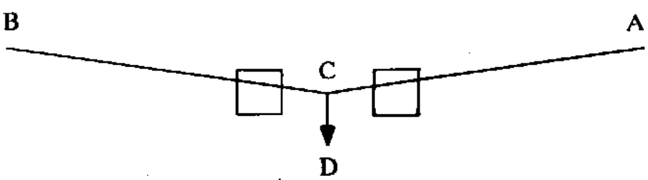
در هنگام توت‌چینی باید گوشه‌های چادر را محکم گرفت و چادر را شل کرد. گوشه‌های چادر را باید محکم در دست بگیرند تا چادر در برابر نیروی زیادی که از مرکز به‌گوشه‌ها وارد می‌شود از دست بیرون نیاید. همچنین چادر را باید شل کنند یعنی هر دو فردی که در برابر هم جای دارند (در دو انتهای یک قطر قرار دارند) باید فاصله خود را از یکدیگر کم کنند.

اگر A و B دو رأس مقابل و O مرکز چادر باشد وقتی چادر را شل کنند مقدار زاویه AOB از $180°$ دور می‌شود و لذا مؤلفه‌های نیرویی که در مرکز چادر به‌چادر وارد می‌شود روی دو خط OA و OB کوچکتر خواهد شد.

مثال (۴) خشک کردن لباس روی طناب. دو میخ بزرگ A و B را در دو دیوار موازی هم کاملاً در مقابل هم بکوبید (یعنی به‌طوری که خط AB افقی باشد و به‌علاوه عمود بر دو دیوار باشد). سپس دو سر یک طناب را به‌این دو میخ ببندید به‌طوری که طناب کاملاً کشیده باشد. اگر تعداد کمی رخت روی طناب آویزان کنیم، درصورتی که جای میخها در دو دیوار کاملاً محکم نباشد (به‌طور مثال دیوارها گلی باشد یا میخها در بندکشیهای یک دیوار آجری کوبیده شده باشند) پس از اندک مدتی ممکن است دو میخ به‌تدریج مقداری از دیوارها بیرون بیایند با وجود آنکه وزن رختها چندان زیاد نباشد.

این امر تعجب‌انگیز به‌نظر می‌آید یعنی با وجود آنکه وزن رختها چندان زیاد نیست میخها مقداری از دیوار بیرون می‌آیند یا کاملاً از دیوار خارج می‌شوند.

برای توضیح این مطلب حکم هندسی (۱) را به‌کار می‌بریم.



در شکل بالا، بردار $\overrightarrow{CD}$ نمایش نیرویی است که به‌نقطه C وسط طناب AB وارد می‌شود. اگر زاویه ACB به $180°$ نزدیک باشد، مؤلفه‌های بردار $\overrightarrow{CD}$ روی دو خط CA و CB بزرگ خواهند بود و لذا دو نیروی بزرگ به‌دو میخ وارد می‌شود که درصورتی که دیوار محکم نباشد ممکن است میخها بیرون آیند.

از این جهت است که خانمهای خانه‌دار طناب را مقداری شل می‌بندند.

اکنون درباره مطلب توضیح بیشتری می‌دهیم: مؤلفه‌های بردار $\overrightarrow{CD}$ را روی دو خط CA و CB به‌ترتیب $\vec{a}$ و $\vec{b}$ می‌نامیم. تصاویر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را روی دو خط CA و CB به‌ترتیب $\vec{a'}$ و $\vec{b'}$ می‌نامیم. دو نیروی $\vec{a'}$ و $\vec{b'}$ در راستای محورهای دو میخ به‌آنها وارد می‌شود و دو میخ را به‌سوی خارج دیوار می‌کشند. چون مقدار زاویه‌های CAB و CBA

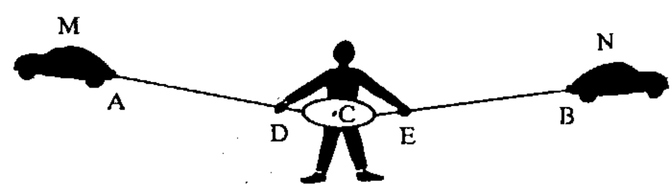
کوچک است پس اندازه‌های دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بزرگ است. اگر دو میخ A و B را در مقابل هم نکوبیم به‌طوری که زاویه CAB کوچکتر از زاویه حاصل از خط CA و محور میخ باشد آنگاه نیروی کششی کمتری در امتداد محور میخها به‌آنها وارد می‌شود و احتمال درآمدن میخها از دیوار کمتر می‌شود.

پس برای آنکه میخها از دیوار بیرون نیایند باید دو میخ را در مقابل هم نکوبند (البته دو میخ می‌توانند در یک صفحه افقی باشند) و به‌علاوه طناب را باید اندکی شل ببندند.

از مثالهای مذکور به خوبی می‌توان دریافت که حکم(۱) که به‌نظر بسیار ساده می‌رسد چقدر مهم است و قهرمان داستان ما که یک موش است کارهایی انجام می‌دهد که از بسیاری شیران ساخته نیست.

مثال ۵. یک نمایش پهلوانی

در شکل زیر دو کامیون M و N در خلاف جهت هم قرار گرفته‌اند. کابل AB در نقطهٔ A به‌شاسی کامیون M و در نقطهٔ B به‌شاسی کامیون N بسته شده است. نقطهٔ وسط کابل AB را C می‌نامیم. دو تخته چرم را روی هم می‌دوزیم و کابل را از بین دو تخته چرم عبور می‌دهیم به‌طوری که نقطه C در داخل و وسط چرم باشد.



پهلوان نمایش دهنده، تخته چرم را روی سینه خود می‌گذارد و با سینه خود به‌آن فشار می‌دهد و با دو دست خود کابل را در دو نقطهٔ D و E می‌گیرد.

طول کابل AB را طوری انتخاب می‌کنیم که نسبت به‌پهنای سینه پهلوان خیلی بزرگ باشد. پهلوان در جایی قرار می‌گیرد که زاویه دو پاره‌خط AD و BE به ۱۸۰ درجه خیلی نزدیک باشد.

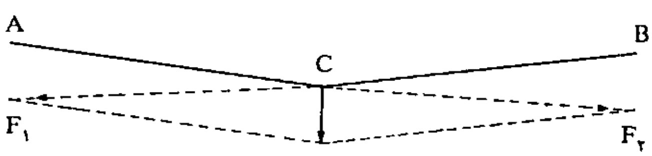
چون طول کابل AB نسبت به‌پهنای شانه پهلوان بسیار بزرگ است می‌توان CA و CB را به‌منزله دو پاره‌خط راست درنظر گرفت. در این صورت ACB یک مثلث متساوی‌الساقین است که زاویه رأس آن (یعنی زاویه ACB) خیلی به ۱۸۰ درجه نزدیک است.

نمایش شروع می‌شود. دو راننده کامیون، کامیونها را روشن می‌کنند و هر کدام کامیونها را به‌طرف جلو هدایت می‌کنند. پهلوان با سینه خود به‌تخته چرم فشار می‌آورد و با دو دست خود دو کابل CA و CB را با نیرویی که خیلی زیاد نیست، ولی با قیافه ساختگی که نشانگر تلاش بسیار زیاد اوست، به‌طرف خود می‌کشد.

نیرویی که پهلوان با سینه خود به‌تخته چرم وارد می‌کند به‌دو نیروی $\vec{CF_1}$ و $\vec{CF_2}$ تجزیه می‌شود؛(شکل زیر)بزرگ بودن این دو نیرو به‌علت آن است که در مثلث متساوی‌الساقین CAB، زاویه رأس C خیلی به ۱۸۰ درجه نزدیک است.

نیروی بزرگ $\vec{CF_1}$ نیروی کشش کامیون m و نیروی بزرگ $\vec{CF_2}$ نیروی کشش کامیون N را خنثی می‌کند.

چون زاویه ACB خیلی به ۱۸۰ درجه نزدیک است تماشاچیان تصور می‌کنند که دو کابل CA و CB در یک امتدادند و این موجب اشتباه در قضاوت آنها می‌شود. آنها تصور می‌کنند که پهلوان نمایش‌دهندهٔ بیش از حد نیرومند است به‌طوری که با قدرت بازوان خود دو کامیون را به‌طرف خود می‌کشد و مانع جلو رفتن آنها می‌شود، در حالی‌که چنین نیست. نیرویی که پهلوان با سینه خود به‌کابل وارد می‌کند به‌دو نیروی بزرگ تجزیه می‌شود و این دو نیرو در خلاف نیروهایی است که از طرف دو کامیون به‌دو انتهای کابل وارد می‌شود.

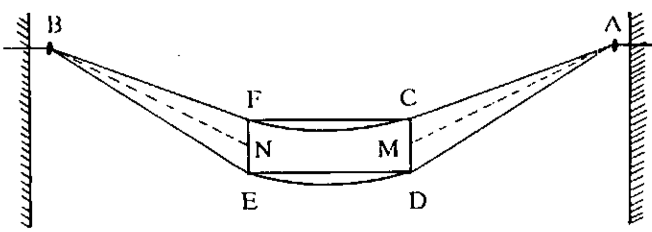


مثال ٦: ننو

ننو [=نه‌نو=ننی=نانو] نوعی گهواره است که از پارچه یا چرم می‌دوزند و از دو طرف آن را با طناب به‌دو دیوار یا دو درخت متصل می‌کنند.

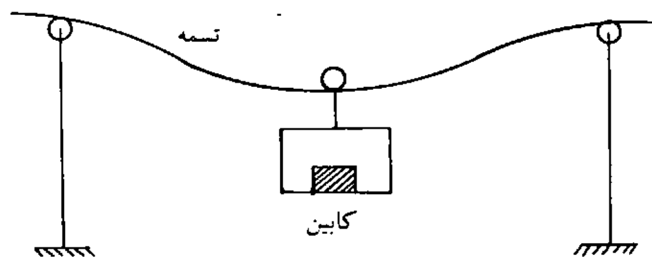
در شکل زیر شمای یک نو برای بحث هندسی رسم شده است.

در این شکل مستطیل CDEF نمایش یک چرم (یا پارچه) نسبتاً گود است. این چرم به‌دو قطعه چوب CD و EF متصل است. در دو نقطه A و B که دو نقطه مقابل از دو دیوار مقابل یک اتاق‌اند دو میخ بزرگ A و B به‌دیوار کوبیده شده‌اند. دو قطعه چوب CD و EF با طنابهای AC ، AD ، BE و BF که دارای طولهای مساوی‌اند، به‌دو میخ A و B متصل‌اند. وسطهای دو پاره‌خط CD و EF را به‌ترتیب M و N می‌نامیم. طول طنابها را به‌اندازه کافی اختیار می‌کنیم تا زاویه دو خط AM و BN به ۱۸۰ درجه نزدیک نباشد تا دو میخ A و B به‌آسانی از دو دیوار بیرون نیایند.



مثال ۷. تله‌کابین

در سیستم حمل و نقل به‌وسیله تله‌کابین، کابل تله‌کابین نباید خیلی کشیده باشد. اگر امتداد کابل در دو طرف غلتک نزدیک ۱۸۰ درجه باشد کشش کابلها در دو طرف غلتک کابین مقدار بزرگی خواهد شد و منجر به‌بریده شدن کابل می‌شود.



ادب ریاضی

← چون پیدا و دانسته برابر ناپیدا و نادانسته است، پس همان‌گونه که گاهی تصور ساده و بدون حکم پیدا و دانسته است مانند شناخت ما به‌نام مثلث، و زمانی هم تصوری که با او تصدیق همراه است پیدا می‌باشد مانند باور ما به‌این که سه‌زاویهٔ مثلث با دو زاویهٔ قائمه برابر است، همچنین گاهی یک چیز از جهت تصور ناپیدا و ناشناخته است در این صورت معنای آن به‌ذهن نمی‌آید، مگر آنکه شناخته شود مانند «ذی‌الاسمین» و «منفصل» و مانند آن دو، و زمانی یک چیزی از جهت تصدیق ناپیدا و نامعلوم است تا دانسته شود مانند قوی بودن (برابر بودن) قطر دایره نسبت به‌دو ضلع زاویهٔ قائمه‌ای که همان قطر، وتر آن زاویه واقع شده است، پس آنچه در علوم و نظایر آن مطلوب ماست یا به‌سوی تصور ناپیدا و مجهول و یا به‌سوی تصدیق ناپیدا و مطلوب است، که باید به‌دست آید. →

اشارات و تنبیهات

شرح مشکلات و تقریر و بازنمودن معضلات و استخراج علوم و صناعات و بررسی مسایل و مباحث و اثبات و استوار کردن آنچه از مباحث محقق می‌گردد نیاز به‌تجرید عقل و تمیز ذهن و تصفیهٔ فکر و تدقیق نظر و بریدن از شوایب حسیه دارد و نیاز به‌بریدن و دوری از وسواسهای معتاد و عادی دارد و همهٔ اینها موکول به‌أمن و أمان است.

حکمت الاشراق

شیخ شهاب‌الدین سهروردی

توان (نما)

(قسمت دوّم)

(سال اول نظام جدید و قدیم)

● سید محمدرضا هاشمی موسوی

تمرین: اگر a و b و c اعداد حقیقی مخالف صفر و m و n اعداد صحیح باشند. حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

$$1)\ \frac{a^{m+n}\times a^{m-n}\times a^{-m}}{b^{m-n}\times b^{m+n}\times b^{-m}}$$

(جواب: $(\frac{a}{b})^m$)

$$2)\ \frac{a^{m+n}\div a^{m-n}}{b^{m+n}\div b^{m-n}}\times\frac{b^{n-m}\times b^{n+m}}{c^{n+m}\times c^{n-m}}$$

(جواب: $(\frac{a}{c})^{2n}$)

تمرین: عبارت $(2x^2-2)^0$ به ازای چه مقادیری از x تعریف نشده (مبهم) و به ازای چه مقادیری از x تعریف شده است؟

(جواب: به ازای $x=\pm 1$ تعریف نشده (مبهم) و به ازای بقیهٔ عددهای حقیقی تعریف شده است.)

● اعداد منفی توان‌دار

به تساویهای زیر توجه کنید:

$$(-2)^1=-2$$

$$(-2)^2=(-2)(-2)=+4$$

$$(-2)^3=(-2)(-2)(-2)=-8$$

$$(-2)^4=(-2)(-2)(-2)(-2)=+16$$

$$(-2)^5=(-2)(-2)(-2)(-2)(-2)=-32$$

با توجه به تساویهای اخیر دستور زیر را می‌توان بیان کرد:

۶) هر عدد حقیقی منفی به توان عددی زوج (مضربی از ۲) برسد حاصل عددی مثبت، و به توان عددی فرد (مضربی از ۲ نباشد) برسد حاصل عددی منفی خواهد شد.

اگر a عددی حقیقی و k عدد صحیح دلخواهی باشد، بیان ریاضی دستور (۶) چنین است: (هر عدد زوج را می‌توان به صورت $2k$ و هر عدد فرد را به شکل $2k+1$ یا $2k-1$ نشان داد)

$$(-a)^{2k}=a^{2k}\ ,\ (-a)^{2k+1}=-a^{2k+1}$$

در آینده مفهوم توانهای گویا و اعمال روی آنها بیان خواهد شد.

برهان:

$$(-a)^{2k}=((-1)\times(a))^{2k}$$
$$=(-1)^{2k}\times a^{2k}=(+1)a^{2k}=a^{2k}$$

و همچنین:

$$(-a)^{2k+1}=(-a)^{2k}\times(-a)=$$
$$a^{2k}(-a)=-a\times a^{2k}=-a^{2k+1}$$

مثال ۱۲: با فرض این که a یک عدد حقیقی مخالف صفر باشد، حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به دست آورید.

۱) $a\times(-a)^{34}\times(-a)^{7}\times(-a)^{-5}\times(-a)^{-3}$

۲) $\left((-a)^{5}\right)^{-4}\times\left((-a)^{-3}\right)^{-7}\times(-1)^{1374}\times(-1)^{1375}$

حل:

با استفاده از دستور (۶) داریم:

$$1)\ (-a)^{34}=a^{34}\ ,\ (-a)^{7}=-a^{7}\ ,$$
$$(-a)^{-5}=\frac{1}{(-a)^{5}}=\frac{1}{-a^{5}}=-\frac{1}{a^{5}}=-\left(\frac{1}{a}\right)^{5}\ ,$$
$$(-a)^{-3}=\frac{1}{(-a)^{3}}=\frac{1}{-a^{3}}=-\frac{1}{a^{3}}=-\left(\frac{1}{a}\right)^{3}$$

پس خواهیم داشت:

$$a\times(-a)^{34}\times(-a)^{7}\times(-a)^{-5}\times(-a)^{-3}$$
$$=a\times a^{34}\times(-a^{7})\times\left(-\frac{1}{a^{5}}\right)\times\left(-\frac{1}{a^{3}}\right)$$
$$=(-a^{35+7})\times\left(\frac{1}{a^{8}}\right)=-\frac{a^{42}}{a^{8}}=-a^{42-8}=-a^{34}$$

داریم:

$$\left((-a)^{5}\right)^{-4}=((-a))^{-20}=$$
$$(-a)^{-20}=\frac{1}{(-a)^{20}}=\frac{1}{a^{20}}=\left(\frac{1}{a}\right)^{20}$$
$$\left((-a)^{-3}\right)^{-7}=(-a)^{(-3)\times(-7)}=(-a)^{21}=-a^{21}$$
$$(-1)^{1374}=+1\ ,\ (-1)^{1375}=-1$$

پس خواهیم داشت:

$$\left((-a)^{5}\right)^{-4}\times\left((-a)^{-3}\right)^{-7}\times(-1)^{1374}\times(-1)^{1375}=$$
$$\left(\frac{1}{a^{20}}\right)\times\left(-a^{21}\right)(+1)(-1)=\left(\frac{1}{a^{20}}\right)\times\left(a^{21}\right)=\frac{a^{21}}{a^{20}}$$
$$=a^{21-20}=a^{1}=a$$

تمرین: با فرض این که a یک عدد حقیقی مخالف صفر و k یک عدد صحیح باشد، حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به‌دست آورید.

۱) $\left((-a)^{k}\right)^{2}\times(-a)^{k}\times(-a)^{k}\times(-a)$

۲) $\left((-a)^{k}\right)^{-2}\times(-a)^{74}$

۳) $\left(\left((-a)^{3k}\right)^{5}\right)^{-2k}\times\left((-a^{k})^{-5}\right)^{-6k}$

۴) $(-a)^{2k}\times(-a)^{1-2k}\times a^{-1}$

● مجموع و تفاضل اعداد توان‌دار

برای ساده کردن عبارتهایی مانند:

$$6\times2^{8}+5\times2^{9}+6\times2^{7}-24\times2^{5}$$

ابتدا باید توان اعداد نمایی با پایهٔ یکسان را مساوی کرد. در عبارت اخیر می‌توان نمای تمام اعداد توانی با پایهٔ ۲ را به ۸ رساند. یعنی اعداد توان‌دار با پایهٔ یکسان را متشابه کرد:

$$5\times2^{9}=5\times2\times2^{8}=10\times2^{8},$$
$$6\times2^{7}=3\times2\times2^{7}=3\times2^{8},$$
$$24\times2^{5}=3\times8\times2^{5}=$$
$$3\times2^{3}\times2^{5}=3\times2^{8}$$

بنابراین داریم:

$$6\times2^{8}+5\times2^{9}+6\times2^{7}-24\times2^{5}$$
$$=6\times2^{8}+10\times2^{8}+3\times2^{8}-3\times2^{8}$$
$$=(6+10+3-3)\times2^{8}=16\times2^{8}=2^{4}\times2^{8}=2^{12}$$

همچنین عبارتی مانند:

$$4\times3^{34}+9\times3^{32}-15\times3^{33}+27\times3^{31}$$

را به شکل زیر می‌توان ساده کرد:

$$4\times3^{34}+9\times3^{32}-15\times3^{33}+27\times3^{31}$$
$$=4\times3^{34}+3^{2}\times3^{32}-5\times3\times3^{33}+3^{3}\times3^{31}$$
$$=4\times3^{34}+3^{34}-5\times3^{34}+3^{34}=(4+1-5+1)\times3^{34}$$
$$=3^{34}$$

همین‌طور عبارتی مانند:

$$A=20(a^{3})^{2}+5(-a^{2})^{3}-3(-a^{3})^{2}$$
$$+(-a)^{2}\times(2a^{2})(-a^{2})$$

که در آن a عدد حقیقی است را می توان به شکل زیر ساده کرد:

$$A = 20a^6 - 5a^6 - 3a^6 - 2a^6$$
$$= (20-5-3-2)\times a^6 = 10a^6$$

بنابراین حاصل عبارت A برابر $10a^6$ است.

با توجه به مثالهای اخیر دستور زیر را می‌توان بیان کرد:

۷) برای مجموع یا تفاضل اعداد توانی ابتدا عددهای تواندار با پایهٔ یکسان را متشابه می‌کنیم. و سپس مانند جمع جبری جملات متشابه عمل می‌کنیم. (جمع جبری عبارتهایی با پایهٔ یکسان که غیر متشابه می‌باشند: مانند: $3a^4 + 4a^3 + 2a^2 - a$ ، ساده نمی‌شوند.)

مثال ۱۳: با فرض این که a یک عدد حقیقی است. حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به دست آورید.

1) $A = 5(a^3)^2 - 4(a^2)^3$

2) $B = 7(a^3)^4 + (-a^6)^2 - 3a^{12} + (-a)^{12} - 5(-a^3)^4$

حل:

1) $A = 5a^6 - 4a^6 = (5-4)\times a^6 = a^6$

2) $B = 7a^{12} + a^{12} - 3a^{12} + a^{12} - 5a^{12}$
$= (7+1-3+1-5)\times a^{12} = a^{12}$

مثال ۱۴: با فرض این که x یک عدد حقیقی است. حاصل هریک از عبارتهای زیر را به‌دست آورید.

1) $A = 3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2}$

2) $B = 25^x + 5^{2x+1} - 5^{2x+2} + 25^{x+1} - 5^{2x}$

3) $C = 9\times 3^{2x} - 9^x + 27\times 3^{2x-2} - 6\times 3^{2x-1} + 2\times 9^{x+1}$

4) $D = \dfrac{2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3}}{4\times 2^{x+3} - 2\times 2^{x+3} - 2^{x+2}}$

حل:

$$A = 3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2}$$
$$= \frac{3^x}{3} + 3^x + 3\times 3^x + 3^2\times 3^x$$
$$= (\frac{1}{3} + 1 + 3 + 9)\times 3^x = \frac{40}{3}\times 3^x = 40\times\frac{3^x}{3} = 40\times 3^{x-1}$$

$$B = 25^x + 5^{2x}\times 5 - 5^{2x}\times 5^2 + 25^x\times 25 - 5^{2x}$$
$$= 5^{2x} + 5\times 5^{2x} - 25\times 5^{2x} + 25\times 5^{2x} - 5^{2x}$$
$$= (1+5-25+25-1)\times 5^{2x} = 5\times 5^{2x} = 5^{2x+1}$$

$$C = 9\times 3^{2x} - 3^{2x} + 27\times\frac{3^{2x}}{3^2} - 6\times\frac{3^{2x}}{3} + 2\times 9^x\times 9$$
$$= 9\times 3^{2x} - 3^{2x} + \frac{27}{9}\times 3^{2x} - \frac{6}{3}\times 3^{2x} + 18\times 3^{2x}$$
$$= (9-1+3-2+18)\times 3^{2x}$$
$$= 27\times 3^{2x} = 3^3\times 3^{2x} = 3^{2x+3}$$

$$D = \frac{2^x + 2\times 2^x + 2^2\times 2^x + 2^3\times 2^x}{4\times 2^3\times 2^x - 2\times 2^3\times 2^x - 2^2\times 2^x}$$
$$= \frac{2^x(1+2+4+8)}{2^x(32-16-4)} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$$

تمرین: با فرض این که x یک عدد حقیقی است. حاصل هریک از عبارتهای زیر را به‌دست آورید.

1) $A = 9^x - 2\times 9^x + 5\times 3^{2x}$
$- 4\times 3^{2x} + 9\times 3^{2x}$ (جواب: $A = 3^{2x+2}$)

2) $B = 25^x + 5^6\times 5^{2x+1}$
$- 4\times 25^{x+1} + 4\times 5^{2x+2} - 5^{2x}$ (جواب: $B = 5^{2x+7}$)

3) $C = \dfrac{3^x + 4\times 3^x + 3^{x+1} - 5\times 3^{x+1} + 3^{x+2}}{3\times 3^{x-1}\times 3^x\times 3^{2-x} + 3^{x+1}}$ (جواب: $C = \frac{1}{6}$)

4) $D = \dfrac{2^{x+2} + 2^{x+4} - 2^{x+3} + 5\times 2^x}{3\times 2^x - 2^{x+1} + 2^{x+4} - 5\times 2^{x+1}}$ (جواب: $D = \frac{17}{7}$)

● حل معادله‌های توانی (نمایی)

معادلهٔ توانی، معادله‌ای است که در آن مجهول به صورت توان ظاهر شده است، مانند:

$$2^x = 16$$

برای حل چنین معادله‌ای باید دو طرف معادله را به دو عدد تواندار با پایه‌های یکسان تبدیل کنیم:

$$2^x = 2^4$$

سپس توانهای دو طرف تساوی را مساوی هم قرار دهیم و جواب معادله را به‌دست آوریم:

$x=۴$

این تذکر لازم است که برای حل معادلات توانی باید آگاهی کافی از تعاریف و دستورات و عملیات توانی داشته باشیم. زیرا غالباً برای حل کردن یک معادلهٔ توانی باید اعمال جبری مختلفی انجام دهیم تا به یک تساوی قابل حل برسیم. (حل معادلات توانی از نوع دیگر را در مبحث لگاریتم خواهید دید.)

مثال ۱۵: معادلهٔ توانی زیر را حل کنید.

$$۲^{۲x+۱}+۴^{x+۲}+۲=۷۴$$

حل:

$$۲^{۲x+۱}+۴^{x+۲}=۷۴-۲\Rightarrow ۲^{۲x}\times۲+۴^۲\times۴^x=۷۲\Rightarrow$$

$$۲\times۲^{۲x}+۱۶\times۲^{۲x}=۷۲\Rightarrow(۲+۱۶)\times۲^{۲x}=۷۲\Rightarrow$$

$$۱۸\times۲^{۲x}=۷۲\Rightarrow ۲^{۲x}=\frac{۷۲}{۱۸}=۴$$

$$\Rightarrow ۲^{۲x}=۲^۲\Rightarrow ۲x=۲\Rightarrow\boxed{x=۱}$$

بنابراین تنها جواب معادله $x=۱$ است.

مثال ۱۶: معادله های نمایی زیر را حل کنید.

۱) $۴^{۲x}=۲۵۶$

۲) $۹^{x+۱}=۲۷\times۳^{x+۲}$

۳) $۵^x+۵^{x+۱}=۶$

۴) $۵^{۲x+۲}\times۲^{۲x}=۰/۰۰۲۵$

۵) $۸\times۲^{۲x^۲}+۲=۲۰۵۰$

۶) $(\frac{۱}{۳})^{۲-x}=۲۴۳$

۷) $(\frac{۱}{۲۵})^{۲x}\times۵^{x-۲}=۵$

۸) $۲^{۲^x-۱}+۱=۹$

۹) $(\frac{۱}{۴۹})^{x-\frac{۳}{۲}}\times۷^x=۷^۴$

۱۰) $۸^{x+۲}=۸\times۳^{۴x+۴}$

۱۱) $۳^x+۳^{x+۱}+۳^{x+۲}+۳^{x+۳}=۳۶۰$

۱۲) $۵^{۲x+۱}+۲۵^x-۵^{۲x+۲}+۲۵^{x+۱}-۵^{۲x}=۵^{۱۰۱}$

۱۳) $\dfrac{۳^{۲x}+۳^{۲x-۱}}{۲\times۸^x+۸\times۲^{۳x}}=\dfrac{۳}{۲۰}$

۱۴) $۳^x\times(۲\frac{۲}{۳})^x\times(\frac{۹}{۶۴})^{۲x-۱}=\frac{۹}{۸}$

۱۵) $(۰/۵)^{x-۴}\times(\frac{۱}{۰/۱۲۵})^{۴-x}=(۰/۲۵)^۲$

۱۶) $۲^{x+۱}-۲^{۶-x}=۸$

۱۷) $۲^{x+۱}+۲^{۲-x}=۶$

۱۸) $۳\times۹\times۲۷\times۸۱\times۳^{۲x}-۳^{۲x+۹}=۲\times۳^{۱۹}$

حل:

۱) $۴^{۲x}=۲۵۶\Rightarrow ۴^{۲x}=۴^۴\Rightarrow ۲x=۴\Rightarrow\boxed{x=۲}$

۲) $۹^{x+۱}=۲۷\times۳^{x+۲}\Rightarrow ۳^{۲x+۲}$

$=۳^۳\times۳^{x+۲}\Rightarrow ۳^{۲x+۲}=۳^{x+۵}\Rightarrow ۲x+۲=x+۵\Rightarrow$

$۲x-x=۵-۲\Rightarrow\boxed{x=۳}$

۳) $۵^x+۵^{x+۱}=۶\Rightarrow ۵^x+۵\times۵^x=۶\Rightarrow(۱+۵)\times۵^x=۶$

$\Rightarrow ۶\times۵^x=۶\Rightarrow ۵^x=۱\Rightarrow ۵^x=۵^۰\Rightarrow\boxed{x=۰}$

۴) $۵^{۲x+۲}\times۲^{۲x}=۰/۰۰۲۵\Rightarrow$

$۵^۲\times۵^{۲x}\times۲^{۲x}=\frac{۲۵}{۱۰۰۰۰}=\frac{۲۵}{۱۰^۴}$

$\Rightarrow ۲۵\times(۵\times۲)^{۲x}=۲۵\times۱۰^{-۴}\Rightarrow$

$۱۰^{۲x}=۱۰^{-۴}\Rightarrow ۲x=-۴\Rightarrow\boxed{x=-۲}$

۵) $۸\times۲^{۲x^۲}+۲=۲۰۵۰\Rightarrow ۲^۳\times۲^{۲x^۲}=۲۰۵۰-۲\Rightarrow$

$۲^{۲x^۲+۳}=۲۰۴۸\Rightarrow ۲^{۲x^۲+۳}=۲^{۱۱}\Rightarrow ۲x^۲+۳=۱۱$

$\Rightarrow ۲x^۲=۸\Rightarrow x^۲=۴\Rightarrow\boxed{x=\pm۲}$

۶) $(\frac{۱}{۳})^{۲-x}=۲۴۳\Rightarrow(۳^{-۱})^{۲-x}=۳^۵$

$\Rightarrow ۳^{x-۲}=۳^۵\Rightarrow x-۲=۵\Rightarrow\boxed{x=۷}$

۷) $(\frac{۱}{۲۵})^{۲x}\times۵^{x-۲}=۵\Rightarrow(۵^{-۲})^{۲x}\times۵^{x-۲}=۵$

$\Rightarrow ۵^{-۴x}\times۵^{x-۲}=۵\Rightarrow ۵^{-۴x+x-۲}=۵\Rightarrow ۵^{-۳x-۲}$

$=۵^۱\Rightarrow -۳x-۲=۱\Rightarrow -۳x=۳\Rightarrow\boxed{x=-۱}$

۸) $۲^{۲^x-۱}+۱=۹\Rightarrow ۲^{۲^x-۱}=۹-۱$

$\Rightarrow ۲^{۲^x-۱}=۸\Rightarrow ۲^{۲^x-۱}=۲^۳\Rightarrow ۲^x-۱=۳$

$\Rightarrow ۲^x=۴\Rightarrow ۲^x=۲^۲\Rightarrow\boxed{x=۲}$

۹) $(\frac{1}{49})^{x-\frac{3}{2}} \times 7^x = 7^4 \Rightarrow (7^{-2})^{x-\frac{3}{2}} \times 7^x = 7^4$

$\Rightarrow 7^{-2x+3} \times 7^x = 7^4 \Rightarrow 7^{-2x+3+x} = 7^4 \Rightarrow 7^{-x+3} = 7^4$

$\Rightarrow -x+3=4 \Rightarrow -x=1 \Rightarrow \boxed{x=-1}$

۱۰) $8^{x+2} = 8 \times 3^{4x+4} \Rightarrow \frac{8^{x+2}}{8} = \frac{8 \times 3^{4x+4}}{8} \Rightarrow$

$8^{x+2-1} = 3^{4(x+1)} \Rightarrow 8^{x+1} = (3^4)^{(x+1)} \Rightarrow 8^{x+1} = 81^{x+1}$

در معادلهٔ اخیر، نماهای طرفین مساوی است، ولی پایه ها مساوی نیست. بنابراین معادله وقتی جواب دارد که نمای طرفین معادله برابر صفر شود:

$x+1=0 \Rightarrow \boxed{x=-1}$

معادله به ازای $x=-1$ به تساوی عددی $8^0 = 81^0$ تبدیل می‌شود، که یک تساوی درست است.

۱۱) $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} = 360$

$\Rightarrow 3^x + 3 \times 3^x + 3^2 \times 3^x + 3^3 \times 3^x = 360$

$\Rightarrow (1+3+9+27) \times 3^x = 360 \Rightarrow 40 \times 3^x = 360$

$\Rightarrow 3^x = \frac{360}{40} = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow \boxed{x=2}$

۱۲) $5^{2x+1} + 25^x - 5^{2x+2} + 25^{x+1} - 5^{2x} = 5^{101} \Rightarrow$

$5 \times 5^{2x} + 5^{2x} - 5^2 \times 5^{2x} + 25 \times 5^{2x} - 5^{2x} = 5^{101}$

$\Rightarrow (5+1-25+25-1) \times 5^{2x} = 5^{101} \Rightarrow 5 \times 5^{2x} = 5^{101}$

$\Rightarrow 5^{2x+1} = 5^{101} \Rightarrow 2x+1 = 101 \Rightarrow 2x = 100$

$\Rightarrow \boxed{x=50}$

۱۳) $\frac{3^{2x} + 3^{2x-1}}{2 \times 8^x + 8 \times 2^{3x}} = \frac{3}{20} \Rightarrow \frac{3^{2x} + \frac{1}{3} \times 3^{2x}}{2 \times 8^x + 8 \times 8^x} = \frac{3}{20}$

$\Rightarrow \frac{(1+\frac{1}{3}) \times 3^{2x}}{(2+8) \times 8^x} = \frac{3}{20} \Rightarrow \frac{\frac{4}{3} \times 9^x}{10 \times 8^x} = \frac{3}{20} \Rightarrow \frac{4}{30} \times (\frac{9}{8})^x =$

$\frac{3}{20} \Rightarrow (\frac{9}{8})^x = \frac{9}{8} \Rightarrow (\frac{9}{8})^x = (\frac{9}{8})^1 \Rightarrow \boxed{x=1}$

۱۴) $3^x \times (2\frac{2}{3})^x \times (\frac{9}{64})^{2x-1} = \frac{9}{8}$

$\Rightarrow 3^x \times (\frac{8}{3})^x \times (\frac{9}{64})^{2x} \times (\frac{9}{64})^{-1} = \frac{9}{8}$

$\Rightarrow (3 \times \frac{8}{3})^x \times (\frac{9^2}{64^2})^x \times \frac{64}{9} = \frac{9}{8}$

$\Rightarrow (\frac{8 \times 9^2}{64 \times 64})^x = \frac{9^2}{64 \times 8}$

$\Rightarrow (\frac{9^2}{64 \times 8})^x = (\frac{9^2}{64 \times 8})^1$

$\Rightarrow (\frac{81}{512})^x = (\frac{81}{512})^1 \Rightarrow \boxed{x=1}$

۱۵) $(0/5)^{x-4} \times (\frac{1}{0/125})^{4-x} = (0/25)^2 \Rightarrow (0/5)^{x-4} \times (0/125)^{x-4} = (0/5)^4$

$\Rightarrow (0/5)^{x-4} \times (0/5)^{3x-12} = (0/5)^4 \Rightarrow (0/5)^{x-4+3x-12}$

$= (0/5)^4 \Rightarrow (0/5)^{4x-16} = (0/5)^4 \Rightarrow$

$4x-16 = 4 \Rightarrow 4x = 20 \Rightarrow \boxed{x=5}$

۱۶) $2^{x+1} - 2^{6-x} = 8 \Rightarrow 2 \times 2^x - 2^6 \times 2^{-x} = 8$

طرفین معادله را بر ۲ تقسیم و در 2^x ضرب می‌کنیم:

$\frac{2^x}{2}(2 \times 2^x - 2^6 \times 2^{-x}) = 8 \times \frac{2^x}{2} \Rightarrow 2^{2x} - 2^5 = 4 \times 2^x$

با فرض $2^x = A$، داریم:

$A^2 - 32 = 4A \Rightarrow A^2 - 4A - 32 = 0$

$\Rightarrow (A+4)(A-8) = 0$

$\Rightarrow A+4=0$ یا $A-8=0$

$\Rightarrow 2^x+4=0$ یا $2^x-8=0 \Rightarrow 2^x = -4$

یا $2^x = 8 = 2^3 \Rightarrow \boxed{x=3}$

معادلهٔ $2^x = -4$ جواب ندارد.

۱۷) $2^{x+1} + 2^{2-x} = 6 \Rightarrow$

$2 \times 2^x + 2^2 \times 2^{-x} = 6$

طرفین معادله را بر ۲ تقسیم و در 2^x ضرب می‌کنیم:

$\frac{2^x}{2}(2 \times 2^x + 4 \times 2^{-x}) = \frac{2^x}{2} \times 6$

$\Rightarrow 2^{2x} + 2 = 3 \times 2^x$

با فرض $2^x = A$، داریم:

$A^2 + 2 = 3A \Rightarrow A^2 - 3A + 2 = 0$

$\Rightarrow (A-1)(A-2) = 0$

$\Rightarrow A-1=0$ یا $A-2=0 \Rightarrow A=1$ یا

$A=2 \Rightarrow 2^x = 1$ یا $2^x = 2$

$\Rightarrow 2^x = 2^0$ یا $2^x = 2^1 \Rightarrow \boxed{x=0}$ یا $\boxed{x=1}$

بنابراین معادله دارای دو جواب $x=۰$ و $x=۱$ می‌باشد.

$$۱۸)\ ۳\times ۹\times ۲۷\times ۸۱\times ۳^{۲x}-۳^{۲x+۹}=$$
$$۲\times ۳^{۱۹}\Rightarrow ۳\times ۳^{۲}\times ۳^{۳}\times ۳^{۴}\times ۳^{۲x}-۳^{۲x+۹}=۲\times ۳^{۱۹}$$
$$\Rightarrow ۳\times ۳^{۹}\times ۳^{۲x}-۳^{۲x+۹}=۲\times ۳^{۱۹}\Rightarrow ۳\times ۳^{۲x+۹}-۳^{۲x+۹}$$
$$=۲\times ۳^{۱۹}\Rightarrow (۳-۱)\times ۳^{۲x+۹}=۲\times ۳^{۱۹}\Rightarrow$$
$$۲\times ۳^{۲x+۹}=۲\times ۳^{۱۹}\Rightarrow ۳^{۲x+۹}=۳^{۱۹}$$
$$\Rightarrow ۲x+۹=۱۹\Rightarrow ۲x=۱۰\Rightarrow \boxed{x=۵}$$

تمرین: معادله‌های نمایی زیر را حل کنید.

$۱)\ ۵^{۵x}=۵^{۱۰۰}$

$۲)\ ۴^{۵x+۱}=۲^{۷۶۲}$

$۳)\ ۳^{۳^{x}-۱}+۱=۱۰$

$۴)\ ۹^{۳x}=۳\times ۳^{x+۴}\times ۳^{x-۱}$

$۵)\ ۳^{x+۱}+۳^{x-۱}=۳۰$

$۶)\ (\frac{۱}{۲})^{۵-x}=۲^{۹۵}$

$۷)\ ۳^{۱۰}\times ۳^{۲۰}\times ۳^{۳۰}\times ۳^{۴۰}\times ۳^{x}-۳^{x+۹۹}=۲\times ۳^{۹}$

$۸)\ ۲^{x-۱}+۲^{x}+۲^{x+۱}+۲^{x+۲}=۱۵$

$۹)\ \frac{۳^{۲x+۱}+۳^{۲x}}{۴\times ۸^{x}+۲^{۳x+۴}}=\frac{۹}{۴۰}$

$۱۰)\ ۳^{x-۲}\times ۲^{۳}\times (۲\frac{۲}{۳})^{x}\times (\frac{۹}{۶۴})^{۲x}=\frac{۹}{۶۴}$

$۱۱)\ (\frac{۱}{۴۹})^{x-\frac{۳}{۲}}=۷^{۴-x}$

$۱۲)\ ۵^{x+۳}=۲۵\times ۲^{۵x+۵}$

$۱۳)\ ۷^{۲x^{۲}+۱}-۴۹^{x^{۲}}=۶\times ۷^{۴}\times ۴۹^{۲}$

$۱۴)\ ۴\times ۸^{۲x}\times (\frac{۱۰۰۰}{۱۲۵})^{۴-x}=۰/۰۶۲۵$

$۱۵)\ ۲^{x+۲}=۱۶+۲^{۷-x}$

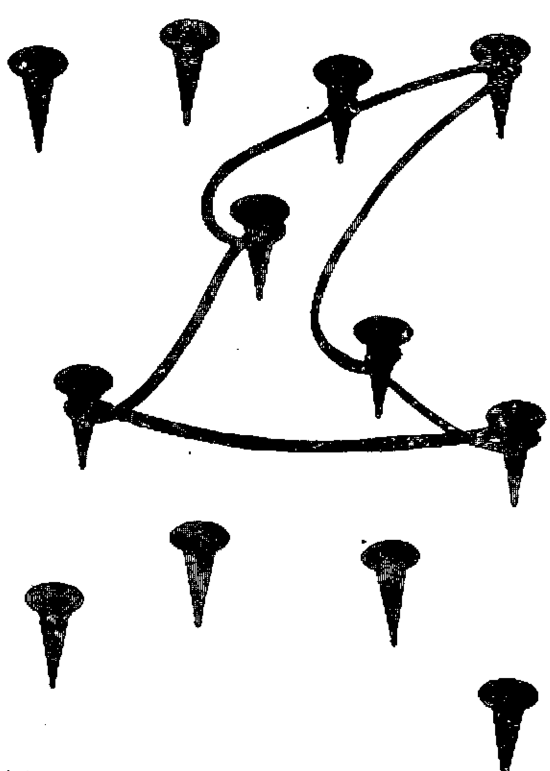
$۱۶)\ ۲۵^{۲x+۲}+۵^{۲x+۱}+۵^{۲x+۳}+۲۱=$
$۲۵^{x+۲}+۵^{۲x+۲}+۵^{۲x}+۵^{۳}$

$۱۷)\ ۷^{x+۱}+۷^{۲-x}=۵۶$

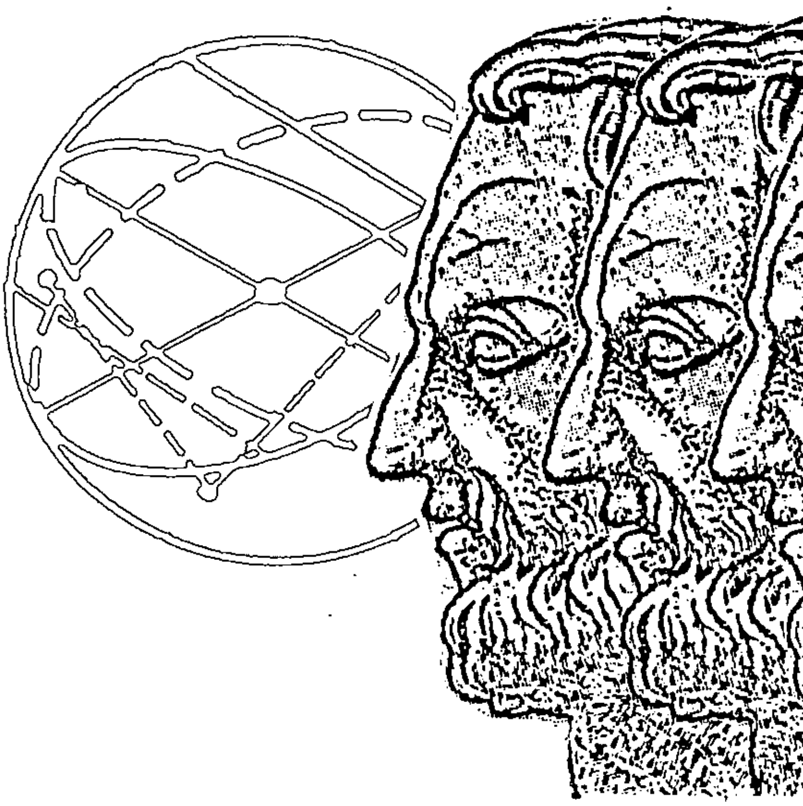
$۱۸)\ ۲^{۲^{x}}+۲=۱۷+(۱۳۷۴)^{x}\times (۱۳۷۴)^{-x}$

تفریح اندیشهٔ ۳

تعدادی میخ چوبی را در زمین فرو کرده‌ایم، و دو بازیکن مقداری نخ دارند. هر بازیکن به نوبت، جفت میخهایی را که قبلاً به هم وصل نشده‌اند می‌بندد. بازیکنی که شکلی بسته را ایجاد کند می‌برد.



جواب در صفحهٔ ۸۸



مشاهیر ریاضی جهان

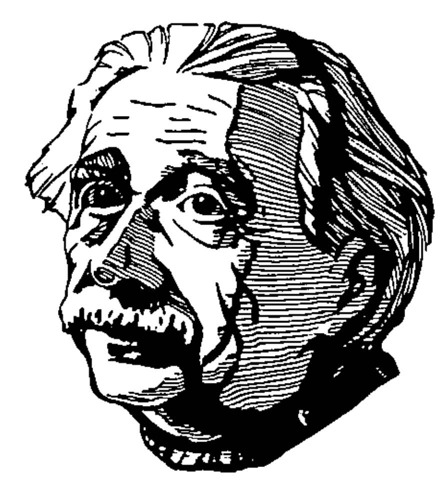
از: فرهنگ فشردهٔ ریاضی آکسفورد

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

◀ ددکیند، ریچارد Dedekind , Richard (۱۸۳۱ - ۱۹۱۶).
ددکیند ریاضی‌دانی آلمانی بود که چند سالی را در دانشگاه گوتینگن "University at Cöttingen" گذراند و بیشتر باقی‌ماندهٔ عمرش را در دانشکده‌ای فنی تدریس کرد. شهرتش به علت برش ددکیند است. این برش رجوع به ساخت صوری دستگاه عدد حقیقی‌اش از اعداد گویا دارد. این کار قدم مهمی به سوی تنظیمی از ریاضیات که در این قرن ملاحظه کرده‌ایم، بوده است. تنظیمی که ۲۰۰۰ سال پیشتر توسط اودوکسوس "Eudoxus" پیش‌بینی شده بود. در این مورد خواننده را به روایت بسیار خواندنی ددکیند از کارش در مقالهٔ **پیوستگی و اعداد گنگ** "continuity and Irrational Numbers" حوالت می‌دهیم.

◀ دکارت، رنه Déscartes , René (۱۵۹۶ - ۱۶۵۰).
در نظر اغلب مردم، دکارت فرانسوی بیشتر به عنوان یک فیلسوف شناخته می‌شود. در علوم فیزیکی، وی به خاطر نظریهٔ گردبادهایش به عنوان توضیح حرکت سیاره‌ای در خاطرها مانده است، نظریه‌ای که توسط نیوتن درهم شکست. در ریاضیات، بیشتر به علت طرح هندسهٔ دکارتیش، که از مختصات "coordinates" برای تبدیل هندسه به جبر استفاده می‌کند، معروف است. این مطلب امروزه بسیار ساده و واضح به نظر می‌رسد، اما شخص باید بداند که مقدار بسیار کمی از ریاضیات جدید، از جمله کل مفهوم وابستگی تابعی، بدون آن توان مطرح شدن داشته است. مشهور است که دکارت هنگامی که در سوئد زندگی می‌کرده، با کار کردن در داخل یک بخاری خود را گرم می‌داشته اس

◀ اینشتاین، آلبرت Einstein , Albert (۱۸۷۹ ـ ۱۹۵۵).
کار اینشتاین یگانه تأثیر مهم بر توسعهٔ فیزیک از زمان نیوتن به بعد بود. او عهده‌دار تئوریهای نسبیت خاص (۱۹۰۵) و عام (۱۹۱۶) بود. سهمی اساسی در موجودیت نظریهٔ کوانتوم داشت و تأثیری مهم بر ترمودینامیک گذاشت. معروفیتش شاید، بیشتر به خاطر معادلهٔ $E = mc^2$ اش، که هم‌ارزی ماده و انرژی را بیان می‌کند، باشد. او خود را بیشتر فیزیک‌دان در نظر می‌گرفت تا ریاضی‌دان، اما اثرش موجب به‌وجود آمدن گسترشهای بسیاری در ریاضیات مدرن شد. قدرت عظیم اینشتاین، برخلاف تصور عام از وی، به عنوان پرفسور مو سفیدی که بسرعت علائم غیرقابل مفهومی بر تخته سیاه می‌نگارد، تواناییش در طرح سؤالهای ساده و دادن پاسخهای ساده بود، و به این طریق نظرمان را نسبت به جهان و درکمان را از زمان و مکان عوض کرد. هیچ چیز نمی‌توانست اساسیتر از این باشد.

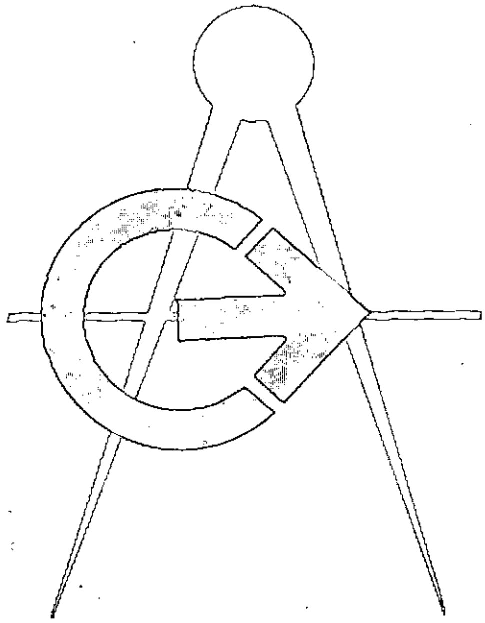


◀ اقلیدس Euclid (حدود ۳۰۰ ق.م.).
اقلیدس ریاضی‌دانی یونانی بود که در اسکندریه کار کرد. مؤلف کتابی که به‌درستی می‌تواند دومین کتاب بانفوذ در فرهنگ غرب به‌شمار رود، یعنی: مقدمات «Elements» است. در مورد او مطالب اندکی می‌دانیم و آشکار نیست که کتاب مورد بحث تا چه‌اندازه اثر اصلی را توصیف می‌کند و تا چه اندازه کتابی درسی است. مقدمات بخش مهمی از هندسه را، دقیقاً تا ساختمان اجسام افلاطونی "Platonic Solids" پنجگانه، با منطقی دقیق و با شروع از آکسیومهای «انکارناپذیر» گسترش می‌دهد. این کتاب طی دو هزار سال به عنوان مدلی از آنچه که ریاضیات محض در مورد آن است، به کار رفت. این کتاب را نباید با کتابهای درسی قدیمی به همین نام، که به‌سبب سادگی، معمولاً کل ساختار ظریف اثر اقلیدس را نابود می‌کردند، اشتباه کرد.

◀ اودوکسوس Eudoxus (حدود ۳۸۰ ق.م.).
اودوکسوس بدون شک یکی از بزرگترین ریاضی‌دانهای دوران باستان بوده‌است. متأسفانه، تمام آثارش از بین‌رفته است، اما می‌دانیم که عهده‌دار اثر واقع در کتاب ۵ مقدمات "Elements" اقلیدس بوده‌است. همین اثر نیز به تنهایی برای بزرگ شمردن او کافی است، زیرا به زبان آن ایام، طرحی درست و دقیق از دستگاه اعداد حقیقی است. مفاهیم واقع در این اثر به قدری استادانه و ظریف بودند که اهمیتشان بزودی فراموش شدند و در واقع تا زمانی که مسائلی مشابه آنها ریاضی‌دانان قرن نوزدهم را احاطه نکردند آن‌طور که باید و شاید درک نشدند.

◀ اویلر، لئونهارد Euler , leonhard (۱۷۰۷ ـ ۱۷۸۳).
مجموع آثار اویلر، پرکارترین ریاضی‌دانهای مشهور، به بیش از ۹۰ مجلد عظیم (گرچه در چاپ بزرگ) می‌رسد. می‌گویند که محاسبات را به سادگی نفس کشیدن انجام می‌داد. جالبتر این است که قسمت مهمی از این آثار را پس از نابینا شدن انجام داده است. اویلر در سوئیس متولد شد اما بیشتر ایام خود را در برلین فردریک کبیر و سن‌پطرزبورگ کاترین کبیر گذراند. مطرح کردن سهم اویلر در ریاضیات در یک پاراگراف مشکل است. او در عصر بسیار باروری که در آن حساب جدید دیفرانسیل و انتگرال در جمیع جهات گسترش یافته بود کار می‌کرد و در اغلب زمینه‌های ریاضیات سهیم بود. جالب این است که اویلر بیشتر به خاطر نمادهایی که معرفی یا همگانی کرده معروف شده است. علایم اساسی π، e، i و نماد مجموع Σ و نماد استاندارد تابعمان، یعنی $f(x)$، در میان کارهای او و در زبان ریاضیات است. کتاب Introduction In Analysin Infinitorum اش مهمترین کتاب درسی ریاضیات اواخر قرن هجدهم بود. از میان حجم عظیم آثار اویلر، نتیجه‌ای معروف را که به حق، از آن مغرور بود مطرح می‌کنیم:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$$



کاربرد دترمینان

(قسمت اول)

● سیامک جعفری از (اهواز)

معمول است که دترمینان را در ضمن درس ماتریسها عنوان می‌کنند و البته این روش مزیتهایی دارد. در اینجا دترمینان را به‌صورت یک تابع عددی که دامنهٔ آن مجموعه‌ای از ماتریسهای مربع است تعریف می‌کنیم.

یادآوری: یادآوری دو نکته از کتابهای درسی ضروری است. ابتدا دستگاه سه‌معادلهٔ زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

با عملیاتی که آشنا هستید جواب این دستگاه به‌صورت زیر است:

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

نکته دوم اینکه حاصلضرب سه‌گانه اسکالر بسادگی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\vec{a}.(\vec{b}\wedge\vec{c})=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}).\begin{vmatrix} i & j & k \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

و خواص زیر را به‌کمک دترمینان بسادگی اثبات کرد:

$$\vec{a}.(\vec{b}\wedge\vec{c})=\vec{b}.(\vec{c}\wedge\vec{a})=\vec{c}.(\vec{a}\wedge\vec{b})$$

$$\vec{a}.(\vec{b}\wedge\vec{c})=-\vec{b}.(\vec{a}\wedge\vec{c})$$

$$\vec{a}.(\vec{b}\wedge\vec{c})=0$$

مسئله: معادله صفحه‌ای را بنویسید که از دو نقطه $A(0,1,2)$ و $B(1,-2,0)$ بگذرد و بر صفحه به‌معادله $2x-3y+5z-1=0$ عمود باشد.

حل:

الف) بدون استفاده از دترمینان

$$\begin{aligned} P\perp P' &\Rightarrow \\ A\in P' &\Rightarrow \\ B\in P' &\Rightarrow \end{aligned} \begin{cases} 2a-3b+5c=0 \\ b+2c+d=0 \\ a-2b+d=0 \end{cases}$$

با حل دستگاه سه‌معادله، برحسب d خواهیم داشت:

$c=d\ ,\ b=-3d\ ,\ a=-7d$

معادلهٔ صفحهٔ P' خواهد شد: $P':\ -7x-3y+z+1=0$

ب) به‌کمک دترمینان

دترمینان زیر را حساب کنید:

$$\begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

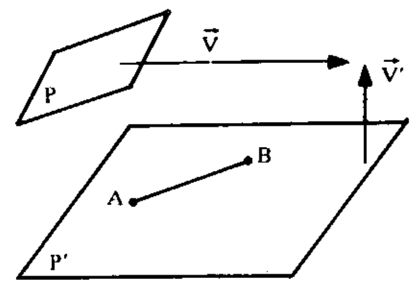
$$\Rightarrow -7x-3y+z+1=0$$

و به‌دست آوردن این دترمینان ساده است. بیاد داشته باشید که در روش اول ما حل دستگاه را برحسب d به‌عهده خودتان گذاشتیم.

اگر V' بردار قائم صفحه باشد:

بردار قائم $\vec{V'}=\vec{V}\wedge\overrightarrow{AB}$

معادله P' $\quad P'\equiv\overrightarrow{AM}.(\vec{V}\wedge\overrightarrow{AB})=0$



که همان ضرب اسکالر سه‌گانه است و دترمینان بالا را نتیجه می‌دهد.

مسئله: معادله صفحه‌ای را بنویسید که شامل خط Δ به‌معادلات $\begin{cases}x=y\\ z=0\end{cases}$ بوده و از نقطه $A(1,2,3)$ بگذرد.

حل:

الف) بدون کمک دترمینان

مختصات نقطه غیرمشخص از خط Δ که معادله‌های پارامتری آن به‌صورت $x=y=t$ و $z=0$ است باید به‌ازاء هر مقدار t:

$$at+bt+0+d=0$$

$$(a+b)t+d=0$$

این رابطه برقرار باشد.

$$A\in P\quad \begin{cases}a+2b+3c+d=0\\ a+b\qquad\quad =0\\ \qquad\qquad d=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+2b+3c=0\\ a=-b\end{cases}\Rightarrow c=\frac{a}{c}$$

معادله صفحه خواهد شد:

$$P: 3x-3y+z=0$$

ب) به‌کمک دترمینان

دترمینان زیر را بسط می‌دهیم:

$$\begin{vmatrix}x-1 & y-2 & z-3\\ 1-1 & 1-2 & 0-3\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x-1 & y-2 & z-3\\ 0 & -1 & -3\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=0$$

$$B\in\Delta:(1,1,0)$$

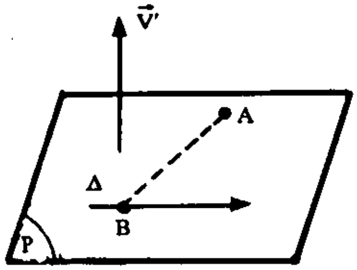
$$\Rightarrow 3x-3y+z=0$$

و به‌دست آوردن این دترمینان با یک روش مشابه ساده خواهد بود.

نقطهٔ دلخواهی مانند B از خط Δ را اختیار می‌کنیم.

بردار قائم صفحه $\vec{V}=\vec{\Delta}\wedge\overrightarrow{AB}$

معادله صفحه P $\quad P\equiv\overrightarrow{BM}.(\vec{\Delta}\wedge\overrightarrow{AB})=0$



که همان دترمینان بالا را می‌دهد به‌شکل کلی زیر:

$$\begin{vmatrix}x-x_A & y-y_A & z-z_A\\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A\\ p & q & r\end{vmatrix}=0$$

مسئله: معادله صفحه‌ای را بنویسید که از سه نقطه $A(2,0,-1)$ و $B(1,-1,2)$ و $C(0,2,1)$ می‌گذرد.

حل:

الف) بدون دترمینان

$$P: ax+by+cz+d=0$$

$$\begin{aligned}A\in P&\Rightarrow\\ B\in P&\Rightarrow\\ C\in P&\Rightarrow\end{aligned}\begin{cases}2a-c+d=0\\ a-b+2c+d=0\\ 2b+c+d=0\end{cases}$$

از حل دستگاه اخیر به‌دست می‌آید:

$$a=-\frac{2d}{3},\ b=-\frac{d}{3},\ c=-\frac{d}{3}$$

$$-\frac{2d}{3}x-\frac{d}{3}y-\frac{d}{3}z+d=0$$

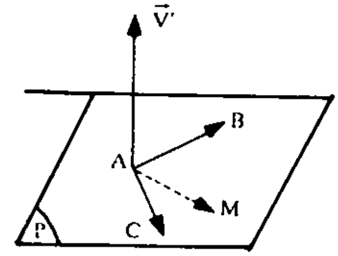
$$P: 2x+y+z-3=0$$

ب) به‌کمک دترمینان

M نقطه‌ای از صفحه است.

بردار قائم $\vec{V}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$

معادله صفحه $P\equiv\overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})=0$



که اگر این ضرب سه‌گانه اسکالر را انجام دهیم خواهیم داشت:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

مسئله: دو صفحه P و Q به‌معادلات $P:4x+y-2=0$ و $Q:y-2z=0$ مفروضند. معادله صفحه‌ای را که از فصل مشترک دوصفحه P و Q گذشته و بر صفحه R به‌معادله $R:x-2y+z=1$ عمود است بنویسید.

حل:

الف) بدون دترمینان

به‌کمک دسته صفحه داریم:

$$y-2z+\alpha(4x+y-2)=0$$

$$4\alpha x+(1+\alpha)y-2z-2\alpha=0$$

بردار قائم صفحه موردنظر بر بردار قائم R عمود است.

$$\vec{V}(4\alpha, 1+\alpha, -2)$$

$$1(4\alpha)-2(1+\alpha)+1(-2)=0 \Rightarrow \alpha=2$$

معادله صفحه مطلوب: $8x+3y-2z-4=0$

ب) به‌کمک دترمینان

فصل مشترک دو صفحه یک خط Δ است. بنابراین باید معادله صفحه‌ای را پیدا کرد که از یک خط گذشته و بر صفحه دیگر عمود باشد (یا با بردار قائمی موازی باشد).

اگر $z=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow A=(\frac{1}{2},0,0)$

اگر $z=1 \Rightarrow y=2 \Rightarrow x=0 \Rightarrow B=(0,2,1)$

بردار قائم $\vec{V'}=\vec{V}\wedge\vec{AB}$

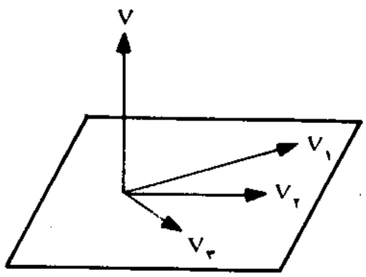
معادله صفحه $P\equiv\vec{AM}.(\vec{V}\wedge\vec{AB})=0$

$$\begin{vmatrix} x-\frac{1}{2} & y & z \\ -\frac{1}{2} & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 8x+3y-2z-4=0$$

با توجه به‌بحث بالا در معادله صفحه اگر سه بردار $\vec{V_1}$ و $\vec{V_2}$ و $\vec{V_3}$ داشته باشیم که در یک صفحه باشند از روی شکل بسادگی دیده می‌شود که:

$$\vec{V}=\vec{V_2}\wedge\vec{V_3}$$

$$P=\vec{V_1}.\vec{V}=0 \Rightarrow \vec{V_1}.(\vec{V_2}\wedge\vec{V_3})=0$$



بنابراین می‌توان گفت شرط اینکه سه بردار V_1 و V_2 و V_3 در یک صفحه باشند این است که دترمینان زیر صفر باشد:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

مشابه بحث بالا می‌توان شرط اینکه چهار نقطه در یک صفحه واقع باشند را پیدا کرد. معادله صفحه‌ای که از سه نقطه می‌گذشت را بیاد داریم

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

حال اگر نقطه‌ای به‌مختصات $A(x_0,y_0,z_0)$ در صفحه باشد باید در معادله صفحه صدق کند. پس شرط اینکه چهار نقطه روی یک صفحه باشند به‌دست آمد.

$$\begin{vmatrix} x_0-x_1 & y_0-y_1 & z_0-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

تست ۱) کدامیک از خطوط زیر متقاطع هستند:

$$\frac{x-6}{3}=\frac{y+1}{+2}=\frac{z+2}{-3}$$

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-7}{1}=\frac{z-3}{4}$$

$$\frac{x}{-2}=\frac{y+5}{3}=\frac{z-4}{1}$$

الف) ۱ و ۲

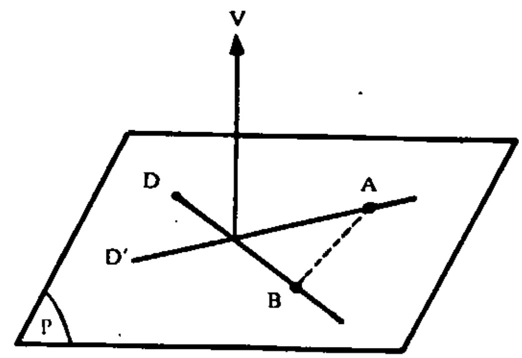
ب) ۱ و ۳

ج) ۲ و ۳

د) هیچکدام

حل: با توجه به‌شکل اگر دترمینان زیر برابر صفر شد دو خط متقاطع هستند.

$$\begin{vmatrix} x_A-x_B & y_A-y_B & z_A-z_B \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0$$



با آزمایش دترمینان برای خطوط ۱ و ۳

$$A\begin{vmatrix} 6 \\ -1 \\ -2 \end{vmatrix} \quad B\begin{vmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{vmatrix} \quad C\begin{vmatrix} 0 \\ -5 \\ 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 6-0 & -1+5 & -2-4 \\ 3 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 4 & -6 \\ 3 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

از امتحان دو حالت دیگر که متنافر هستند صرف‌نظر می‌کنیم. پس جواب ب درست است.

تست ۲) معادله صفحه‌ای که شامل دو خط موازی به‌معادلات $D: \frac{x}{2} = \frac{y}{2} = z$ و $D': \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = z$ کدام است.

الف) $y+2z=0$

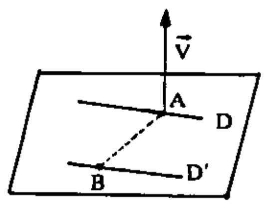
ب) $y-2z+1=0$

ج) $y-2z=0$

د) $x+y-2z=1$

حل: از روی شکل کاملاً مشخص است که معادله خواهد شد: $\overrightarrow{AM}.(\vec{\Delta}\wedge\overrightarrow{AB})=0$

$$\begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$



که خواهد شد:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1-0 & 0-0 & 0-0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -1(y-2z)=0 \Rightarrow y-2z=0$$

تست ۳) معادله صفحه‌ای که بر خط $D: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}$ می‌گذرد و بر صفحه P، $P: x-2y+z-5=0$ عمود است کدامیک می‌باشد.

الف) $19x-12y+z-18=0$

ب) $11x+2y-7z+16=0$

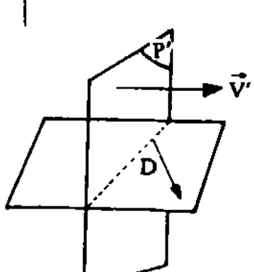
ج) $x-5y-3z=0$

د) $x+y+2z+3=0$

حل: ضرب خارجی V' و Δ بردار قائم صفحه مورد نظر می‌شود. نقطه‌ای از خط Δ هم که مشخص است. پس

$$\begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-0 & y+1 & z-2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 11x+2y-7z+16=0$$



تمرین:

۱) نشان دهید معادله صفحه‌ای که از نقطه $M(x_0,y_0,z_0)$ می‌گذرد و با دو بردار $\vec{a}_1$ و $\vec{a}_2$ موازی است به‌صورت زیر است:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0$$

۲) نشان دهید معادله صفحه‌ای که از خط $\frac{x-x'}{k}=\frac{y-y'}{l}=\frac{z-z'}{m}$ می‌گذرد و از نقطه‌ای به‌مختصات (x_0,y_0,z_0) غیرواقع بر این خط گذشته به‌صورت زیر است:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x'-x_0 & y'-y_0 & z'-z_0 \\ k & l & m \end{vmatrix} = 0$$

۳) نشان دهید شرط اینکه چهار نقطه روی یک صفحه باشند آن است که

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

۴) نشان دهید اگر فصول مشترک صفحات زیر متقاطع باشند

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0 \\ a_4x+b_4y+c_4z+d_4=0 \end{cases}$$

دترمینان زیر همواره برابر صفر است:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0$$

۵) شرط این‌که سه صفحه روبرو در یک خط همرأس باشند را به‌دست آورید. شرط این‌که در یک نقطه همرأس باشند (مشترک باشند) چیست؟

$$P_1:\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$$
$$P_2:\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$
$$P_3:\ a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0$$

اندیشهٔ ریاضی

آیا در جبر بول عمل تفریق وجود دارد؟

دو کمیت بولی x و y را درنظر می‌گیریم. می خواهیم تفاضل این دو کمیت را تعریف کنیم. یک کمیت z جست‌و جو می‌کنیم به‌طوری که تساوی زیر برقرار باشد.

$$x = y + z \qquad (1)$$

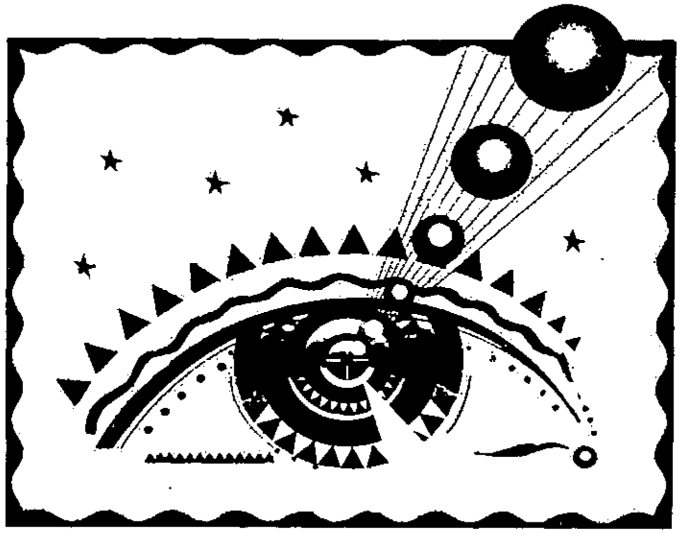
سه حالت ممکن است پیش آید

حالت اول . اگر $y=0$ باشد در این صورت از رابطه (۱) نتیجه می‌شود که $x = z$ یعنی اگر $x=0$ باشد آنگاه $z=0$ و اگر $x=1$ باشد آنگاه $z=1$ پس در حالتی که $y=0$ است مقدار z مشخص نیست.

حالت دوم. اگر $y=1$ و $x=1$ باشد در این حالت از تساوی (۱) نتیجه می‌شود که z می‌تواند صفر یا یک باشد. پس مقدار z، در این حالت مشخص نیست.

حالت سوم. اگر $x=1$ و $y=0$ باشد در این حالت از رابطه (۱) نتیجه می‌شود که برای z مقداری وجود ندارد. مختصر آن که در حالت اول می‌توان عمل تفریق تعریف کرد و در دو حالت دیگر نمی‌توان عمل تفریق تعریف کرد. پس در جبر بول در حالت کلی نمی‌توان عمل تفریق تعریف کرد.

● دکتر احمد شرف‌الدین



دانش آموزان دبیرستان نظام قدیم و جدید

آموزش ترجمه متون ریاضی (۱۳)

● حمیدرضا امیری

6.5 Inequalities in two variables

We have seen above that the solution of an inequality in one variable is a set of points on the real line.

The solution of an inequality in two variables x and y of the form $f(x, y) > 0$ is a set of points (x, y) in the x,y-plane. The equation $f(x, y) = 0$ is the equation of a curve C in the x,y-plane which divides the plane into two regions. In general, in one of these regions $f(x, y)$ is greater than 0 and in the other $f(x, y)$ is less than 0. Which region is which is easily determined by finding the sign of $f(x, y)$ for just one point.

Example 17 Determine the region of the x, y-plane for which $x^2 + y^2 > 9$.

We first write the inequality in the form

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 9 > 0.$$

The curve C given by $x^2 + y^2 - 9 = 0$, or $x^2 + y^2 = 9$, is a circle whose centre is the origin and of radius 3.

The origin $(0, 0)$ is inside the circle and

$$f(0, 0) = -9$$

and so is not in the required region. The required region is therefore the set of points outside the circle (see Fig. 6.8).

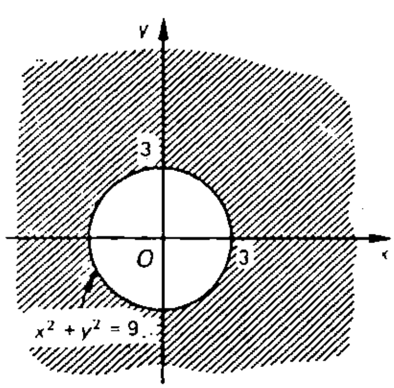


Fig. 6.8

۶.۵ نابرابریهای دومتغیره

در قسمتهای قبل مشاهده کردیم که مجموعهٔ جواب یک نابرابری یک متغیره، مجموعه‌ای است شامل نقاطی روی خط عددهای حقیقی.

مجموعهٔ جواب یک نابرابری با دو متغیر x و y به‌شکل $f(x,y) > 0$ مجموعه‌ای است شامل (x,y)هایی واقع در صفحهٔ xoy (صفحهٔ مختصات دکارتی)، که این صفحه را به‌دو ناحیه تقسیم می‌کند. در حالت کلی، یکی از این ناحیه‌ها $f(x,y) > 0$ و ناحیهٔ دیگر $f(x,y) < 0$ می‌باشد. با پیدا کردن علامت $f(x,y)$ در یک نقطهٔ دلخواه از صفحه، این ناحیه‌ها به‌راحتی قابل تشخیص می‌باشند.

مثال ۱۷:

ناحیه‌ای از صفحهٔ (xoy) را مشخص کنید که در آن $x^2+y^2>9$.

ابتدا نابرابری را به‌شکل زیر می‌نویسیم:

$$f(x,y)\equiv x^2+y^2-9>0$$

منحنی C حاصل از $x^2+y^2-9=0$ یا $x^2+y^2=9$ دایره‌ای است به‌مرکز مبدأ مختصات و به‌شعاع ۳.

مبدأ مختصات (۰،۰) در داخل دایره واقع است و $f(0,0)=-9$ و بنابراین در ناحیهٔ جواب قرار ندارد. بنابراین ناحیهٔ جواب مجموعهٔ نقاط خارج دایره می‌باشد. (شکل ۶.۸ را مشاهده کنید.)

Example 18 Determine the region of the x,y-plane for which $x + y \leq 1$.

Write this as $f(x, y) = x + y - 1 \leq 0$. Since the given inequality includes the = sign, the region will include the curve $x + y = 1$. Let us now seek the region for which $x + y < 1$, i.e. $f(x, y) < 0$.

The curve $x + y = 1$ is of course a straight line. This line divides the plane into two half-planes. Substituting (0, 0), we obtain

$$f(0, 0) = -1 < 0$$

and so (0, 0) is in the required region.

The shaded region, including the line, is therefore the required set of points (see Fig. 6.9).

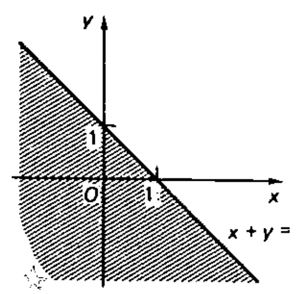


Fig. 6.9

مثال ۱۸:

ناحیه‌ای از صفحهٔ xoy را مشخص کنید که در آن $x+y\leq 1$. ابتدا نابرابری را به‌صورت $f(x,y)=x+y-1\leq 0$ می‌نویسیم. نابرابری در حالت تساوی مجموعهٔ نقاط روی منحنی $x+y=1$ را شامل می‌شود. حالا بیایید در جستجوی ناحیه‌ای باشیم که $x+y<1$، یعنی $f(x,y)<0$.

منحنی $x+y=1$ مطمئناً یک خط راست است. این خط صفحه را به‌دو نیم‌صفحه تقسیم می‌کند. با قرار دادن (۰،۰) در نابرابری، خواهیم داشت:

$$f(0,0)=-1<0$$

و بنابراین (۰،۰) در ناحیهٔ جواب قرار دارد. بنابراین ناحیهٔ هاشور خورده که مجموعهٔ نقاط روی خط را نیز شامل می‌شود، مجموعهٔ جواب نابرابری می‌باشد. (شکل ۶.۹ را مشاهده کنید.)

If we add the further constraints that $x \geq 0$ and $y \geq 0$, we obtain the region shown in Fig. 6.10, all the boundaries being included.

When the boundary (or part of it) is included, the relevant parts are usually indicated by heavier curves, as shown in Fig. 6.10.

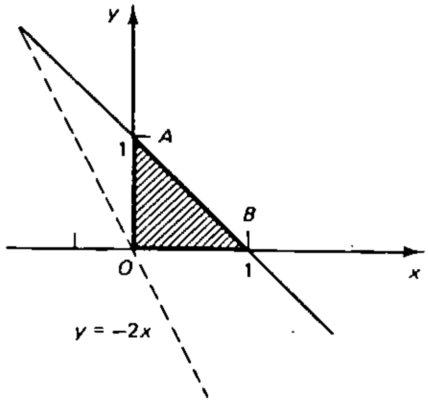


Fig. 6.10

It is quite often necessary to obtain the greatest or least values for points in such a region. (Problems of this nature occur in linear programming.) For example, we might ask: What is the greatest value of $z = 2x + y$ for points satisfying the given inequalities?

The curve $2x + y = k$ is a straight line parallel to the dotted line. As we move this line to the right, k increases. The greatest value will therefore occur when the line is as far from the origin as possible, i.e. when it passes through the point B. The value of z at B is $2(1) + 0 = 2$.

اگر ما محدودیتهای $x\geq 0$ و $y\geq 0$ را نیز اضافه کنیم، ناحیه‌ای حاصل می‌شود که در شکل ۶ ـ ۱۰ نشان داده شده است، که تمام خطوط مرزی را نیز شامل می‌شود.

وقتی که ناحیهٔ جواب شامل مرزها (یا قسمتهایی از آنها) باشد، ناحیهٔ مربوطه معمولاً توسط یک منحنی بسته مشخص می‌کند، مطابق آنچه در شکل ۶ . ۱۰ نشان داده شده است.

در بسیاری اوقات نیاز داریم که بیشترین یا کمترین مقدار را در یک ناحیه به‌دست آوریم (این نوع مسائل در مبحث برنامه‌ریزی خطی پیش می‌آیند). برای مثال، ممکن است سؤال کنیم: بیشترین مقدار $z=2x+y$ برای نقاط واقع در مجموعهٔ جواب نابرابری فوق چقدر است؟ (به‌ازای چه نقطه‌ای از ناحیهٔ فوق عبارت $z=2x+y$ بیشترین مقدار خود را کسب می‌کند.)

منحنی $2x+y=k$، دسته خطوطی موازی با هم را مشخص می‌کند. حال اگر خط $y=-2x$ را به‌موازات خودش و به‌طرف بالا

حرکت دهیم مقدار k افزایش می‌یابد. بیشترین مقدار زمانی به‌دست می‌آید که خط از مبدأ مختصات دور می‌شود، یعنی: وقتی که می‌خواهد نقطهٔ B را ترک کند مقدار z در نقطهٔ B عبارت است از: ۲(۱)+۰=۲ .

Example 19 Determine the region of the x,y-plane for which

$$(x^2 + y^2 - 9)(y^2 - 4x) > 0.$$

The given inequality can only be satisfied if either
(a) both brackets are positive, or
(b) both brackets are negative.
(a) $x^2 + y^2 - 9 > 0$, $y^2 - 4x > 0$.
The curve C_1: $x^2 + y^2 = 9$ is a circle whose centre is the origin and of radius 3. At the point (0, 0) the function $x^2 + y^2 - 9 < 0$ and so is not in the required region. The required region is the set of points outside the circle.
The curve C_2: $y^2 = 4x$ is a parabola. At the point (1, 0) the function $y^2 - 4x < 0$ and so, again, the point is not in the given region.
Hence, the required region is the region shaded in Fig. 6.11.

(b) $x^2 + y^2 - 9 < 0$, $y^2 - 4x < 0$.

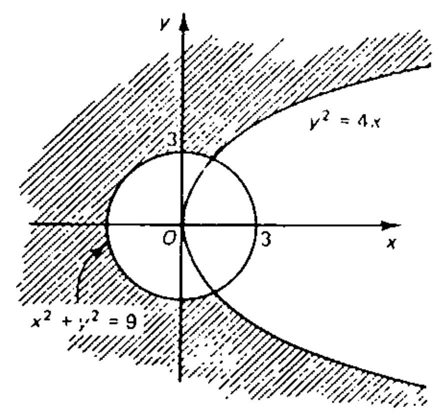


Fig. 6.11

مثال ۱۹:

ناحیه‌ای از صفحهٔ xoy را مشخص کنید که در آن $(x^2+y^2-9)(y^2-4x)>0$. باتوجه به‌نابرابری، ما فقط دو حالت می‌توانیم درنظر بگیریم:

(الف) هر دو پرانتز مثبت باشند، یا

(ب) هر دو پرانتز منفی باشند.

(الف) $x^2+y^2-9>0$ و $y^2-4x>0$

منحنی $C_1:x^2+y^2=9$ دایره‌ای است به‌مرکز مبدأ و شعاع ۳. نقطهٔ (۰،۰) در نابرابری صدق نکرده و بنابراین ناحیهٔ جواب، عبارت است از: مجموعهٔ نقاط واقع در خارج دایره.

منحنی $C_2:y^2=4x$ یک سهمی است. در نقطهٔ (۱،۰) داریم $y^2-4x<0$ و بنابراین این نقطه نیز نمی‌تواند در ناحیهٔ جواب واقع باشد. پس، ناحیه جواب عبارت است از: ناحیهٔ هاشور خورده در شکل ۱۱ـ۶.

(ب) $x^2+y^2-9<0$ و $y^2-4x<0$

We may use the above analysis. In this case we require the alternative regions in both cases and so we obtain the region shaded in Fig. 6.12.
The complete picture is obtained by superimposing Fig. 6.11 on Fig. 6.12.

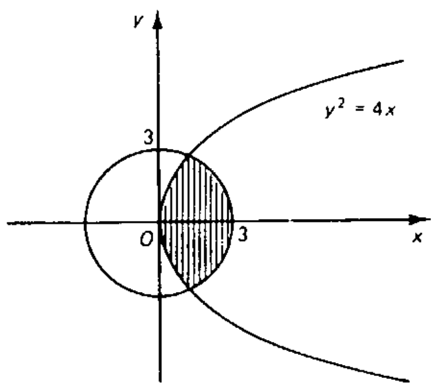


Fig. 6.12

ما از تجزیه و تحلیلی که در بالا انجام شد استفاده می‌کنیم. در این حالت مجموعهٔ جواب حاصل از ناحیهٔ جواب هر دو نابرابری، ناحیه‌ای را برای ما حاصل می‌کند که در شکل ۱۲ـ۶ هاشور خورده است.

تصویر کامل ناحیهٔ جواب از منطبق کردن شکل ۱۱ـ۶ بر ۱۲ـ۶ به‌دست می‌آید.

Exercise 6

1 Given that $x > y$, show that $x - b > y - b$.
2 Given that $x > y$ and $a > 0$, show that $ax > ay$.
3 Given that $a > b$ and a and b are positive, show that, for any positive integer n, $a^n > b^n$.
4 Find the set of values of x for which

$$3x - 2 > 7.$$

5 Find the set of values of x for which

$$\frac{2x+3}{x-1} < 1.$$

6 Find the set of values of x for which

$$3x - 2 > x^2.$$

7 Find the set of values of x for which

$$\frac{x-5}{2-x} > 3.$$

8 Find the set of values of x for which

$$|x-3|<4.$$

9 Find the set of values of x for which

$$|1-2x| \leqslant |3x-1|.$$

10 Find the set of values of x for which

$$(x+2)(x-2)(x+7)>0.$$

11 Find the set of values of x for which

$$\frac{x^2+56}{x}>15.$$

12 Show that for real values of x the values of the function $\frac{x^2+2}{2x+1}$ cannot lie between -2 and 1.

13 Determine the region of the x,y-plane for which $x \geqslant 0$ and $x-y \leqslant 1$. Hence find the minimum value of y.

14 Shade the region of the x,y-plane for which $y^2<4x$, $x-y<\frac{5}{4}$. Hence find the maximum and minimum values of y.

15 Determine the region of the x,y-plane for which

$$(x^2+y^2-4)(y-x^2)<0.$$

تمرین ٦:

۱ ـ با فرض اینکه $x>y$، نشان دهید $x-b>y-b$.

۲ ـ با فرض اینکه $x>y$ و $a>0$، نشان دهید که $ax>ay$.

۳ ـ با فرض اینکه $a>b$ و a و b هر دو مثبت هستند، نشان دهید، برای هر عدد صحیح مثبت مانند n، $a^n>b^n$.

۴ ـ مجموعهٔ جواب نابرابری $7<2-3x$ را بیابید.

۵ ـ مجموعهٔ جواب نابرابری $1>\frac{2x+3}{x-1}$ را بیابید.

٦ ـ مجموعهٔ جواب نابرابری $x^2<3x-2$ را بیابید.

۷ ـ مجموعهٔ جواب نابرابری $3>\frac{x-5}{2-x}$ را بیابید.

۸ ـ مجموعهٔ جواب نابرابری $4>|x-3|$ را بیابید.

۹ ـ مجموعهٔ جواب نابرابری $|1-3x| \leq |2x-1|$ را بیابید.

۱۰ ـ مجموعهٔ جواب نابرابری $0<(x+2)(x-2)(x+7)$ را بیابید.

۱۱ ـ مجموعهٔ جواب نابرابری $15<\frac{x^2+56}{x}$ را بیابید.

۱۲ ـ نشان دهید برای مقادیر حقیقی x، مقدار تابع $\frac{x^2+2}{2x+1}$ نمی‌تواند بین دو عدد ۱ و ۲− واقع شود.

۱۳ ـ ناحیه‌ای از صفحهٔ xoy را مشخص کنید که در آن $x\geq 0$ و $x-y\leq 1$. سپس کمترین مقدار y را بیابید.

۱۴ ـ ناحیه‌ای از صفحهٔ xoy را هاشور بزنید که در آن $y^2<4x$ و $x-y<\frac{5}{4}$. سپس بیشترین و کمترین مقدار y را بیابید.

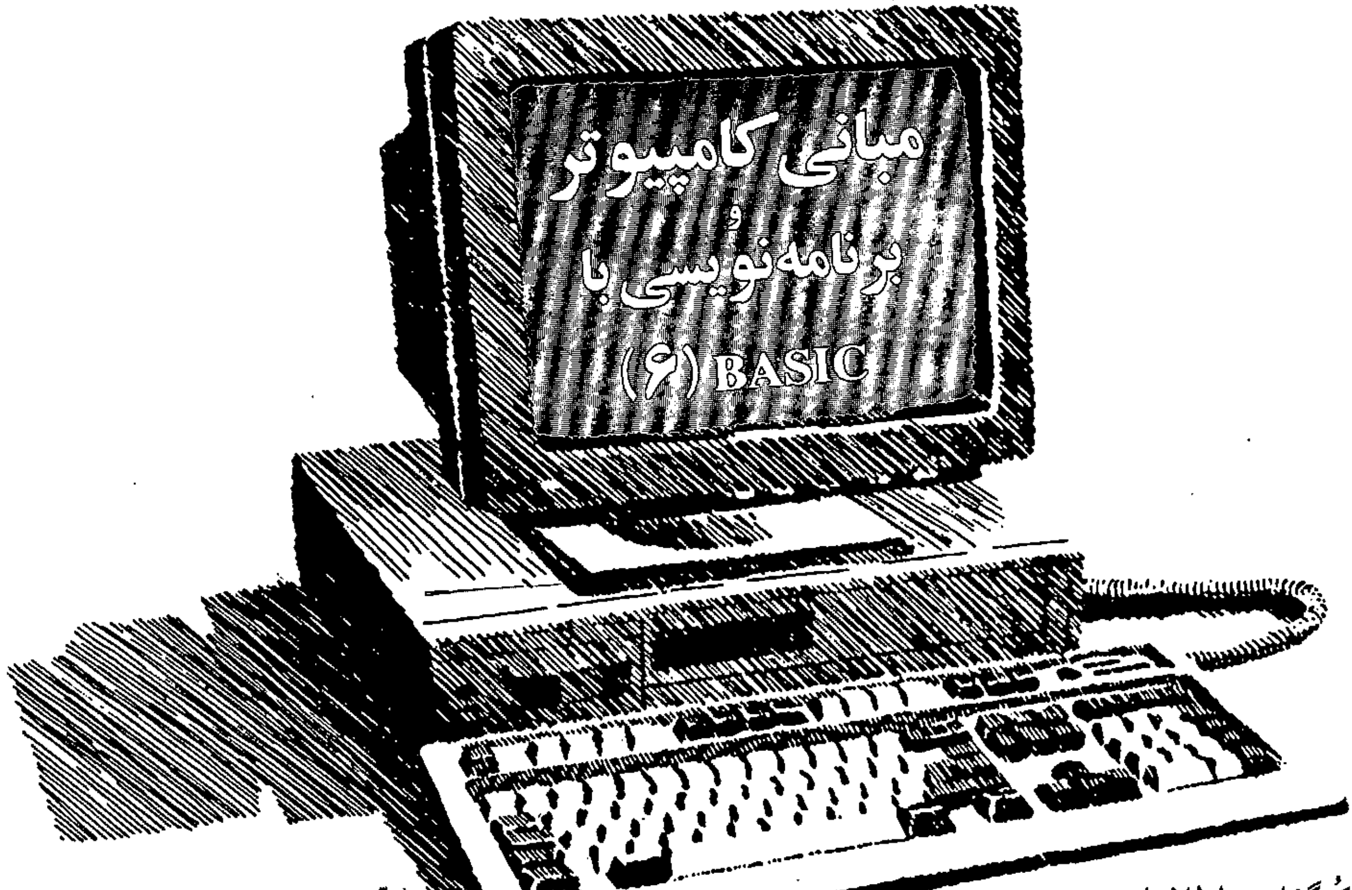
۱۵ ـ ناحیه‌ای از صفحهٔ xoy را مشخص کنید که در آن $(x^2+y^2-4)(y-x^2)<0$.

ادب ریاضی

سهم مسلمین در بسط کلیهٔ شاخه‌های ریاضیات تأثیر گذاشته است و در بسیاری در درجهٔ اول اهمیت بوده است. با وجود این، هیچ کتاب درسی در تاریخ ریاضیات به زبان انگلیسی جز از یک دیدگاه کلی، به سهم مسلمین نمی‌پردازد. این امر نه‌تنها از نظر علمی، بلکه از لحاظ آموزشی نیز مایهٔ تأسف است، زیرا سهم دستاوردهای دورهٔ اسلامی، گوهرهایی از استدلال ریاضی را که در دسترس آموختگان ریاضیات دورهٔ دبیرستان هست، در خود دارند. بسیاری از اینها، مراحل مهمّی را در بسط حساب اعشاری، مثلثات مسطحه و کروی، جبر و روشهایی از قبیل درونیابی و تقریب ریشه‌های معادلات نشان می‌دهند.

کتابهای تاریخ ریاضیات و تاریخ ریاضیات دورهٔ اسلامی به زبان فارسی نادرترند و معدود محققان تاریخ ریاضیات ایرانی نیز عمدتاً همّ خود را به علم رجال و شرح احوال دانشمندان اسلامی و ایرانی معطوف داشته‌اند و یا آثار آنها در حدّ تک‌نگاری است. مثلاً زنده یاد دکتر غلامحسین مصاحب در کتاب «حکیم عمرخیام به عنوان عالم جبر» پس از مقدمه‌ای کوتاه در مورد تاریخ ریاضیات دورهٔ اسلامی، تلاش عمدهٔ خود را به نقد و بررسی رسالهٔ «جبر و مقابله» حکیم عمرخیام مصروف داشته و استاد ابوالقاسم قربانی هم عمدتاً در آثار خود به شناساندن رجال ریاضیات اسلامی و ایرانی اهتمام ورزیده است.

(قسمتی از پیشگفتار کتاب گوشه‌هایی از ریاضیات دوره اسلامی)



(سوّم ریاضی نظام جدید و قدیم)

کُدگذاری اطلاعات
و نمایش اِعداد صحیح و اعشاری در کامپیوتر (۶)

❑ حسین ابراهیم‌زادهٔ قُلزم

انواع روشهای مکمل‌گیری و چگونگیِ ساختن مکمل یک عدد در مبنای دلخواه:

برای هر سیستم عملیاتی و عددی مبنای[1] b دو نوع مکمل به صورت ۱ــ مکمل ۱-b ۲ــ مکمل b تعریف شده است. از آنجا که در کامپیوتر سیستم‌های عملیاتی مهم عبارتند از **الف** ــ سیستم دودویی یا binary **ب** ــ سیستم هشت‌تایی یا octal **ج** ــ سیستم دهدهی یا decimal **د** ــ سیستم شانزده‌تایی یا hexadecimal، از این رو، برای مبنای ۲ دو مکمل با نامهای مکمل ۱ و مکمل ۲، برای مبنای ۸ دو مکمل با نامهای مکمل ۷ و مکمل ۸، برای مبنای ۱۰ دو مکمل با نامهای مکمل ۹ و مکمل ۱۰ و برای مبنای ۱۶ دو مکمل با نامهای مکمل ۱۵ و مکمل ۱۶ تعریف می‌شود.

محاسبهٔ مکمل ۱ ـ b: برای محاسبهٔ مکمل ۱ - b عدد مثبت A در مبنای b سه روش به شرح زیر وجود دارد.

۱ ــ روش محاسباتی[2]

۲ ــ روش ذهنی

۳ ــ استفاده از مکمل b

۱ ــ روش محاسباتی برای محاسبهٔ مکمل ۱ ـ b عدد مثبت A: اگر A یک عدد مثبت در مبنای b دارای n رقم در قسمت صحیح[3] و m رقم در قسمت کسری[4] یا ممیزدار باشد آنگاه مکمل ۱ - b عدد A به‌صورت $b^n - b^{-m} - A$ تعریف می‌شود. لازم به ذکر است که نتیجهٔ هریک از عبارتهای b^n و b^{-m} در مبنای ۱۰ بوده بدنبال محاسبه، حاصل به مبنای b تبدیل می‌شود. عدد A همواره در مبنای b است.

مثال: مکمل ۱ عدد $(1011010)_2$ را با روش محاسباتی به‌دست آورید.

حل: در این‌جا $n=7$ و $m=0$ است چون قسمت کسری نداریم، درنتیجه

مکمل۱عدد $(1011010)_2$

$= (۲^{۷} - ۲^{۰})_{۱۰} - (۱۰۱۱۰۱۰)_{۲} =$

$(۱۲۷)_{۱۰} - (۱۰۱۱۰۱۰)_{۲} = (۱۱۱۱۱۱۱)_{۲}$

$- (۱۰۱۱۰۱۰)_{۲} = (۱۰۰۱۰۱)_{۲}$

مثال: مکمل ۱ عدد $(۱۱۰۰۱۱۰۰)_{۲}$ را با روش محاسباتی به‌دست آورید.

حل:

مکمل۱عدد $(۱۱۰۰۱۱۰۰)_{۲}$

$= (۲^{۸} - ۲^{۰})_{۱۰} - (۱۱۰۰۱۱۰۰)_{۲} = (۲۵۵)_{۱۰}$

$-(۱۱۰۰۱۱۰۰)_{۲} = (۱۱۱۱۱۱۱۱)_{۲} -$

$(۱۱۰۰۱۱۰۰)_{۲} = (۱۱۰۰۱۱)_{۲}$

مثال: مکمل ۱ عدد $(۱۰۰۱۰/۰۱۰۱۰۱)_{۲}$ را با روش محاسباتی به‌دست آورید.

حل: در اینجا $n = ۵$ و $m = ۶$ است، درنتیجه

مکمل۱عدد $(۱۰۰۱۰/۰۱۰۱۰۱)_{۲}$

$= (۲^{۵} - ۲^{-۶})_{۱۰} - (۱۰۰۱۰/۰۱۰۱۰۱)_{۲}$

$= (۳۲ - ۰/۰۱۵۶۲۵)_{۱۰} - (۱۰۰۱۰/۰۱۰۱۰۱)_{۲}$

$= (۳۱/۹۸۴۳۷۵)_{۱۰} - (۱۰۰۱۰/۰۱۰۱۰۱)_{۲}$

$= (۱۱۱۱۱/۱۱۱۱۱۱)_{۲} - (۱۰۰۱۰/۰۱۰۱۰۱)_{۲}$

$= (۱۱۰۱/۱۰۱۰۱۰)_{۲}$

مثال: مکمل ۷ عدد $(۴۵۶۳)_{۸}$ را با روش محاسباتی به‌دست آورید.

حل: در اینجا $n = ۴$ و $m = ۰$ است. درنتیجه:

مکمل۷عدد $(۴۵۶۳)_{۸}$

$= (۸^{۴} - ۸^{۰})_{۱۰} - (۴۵۶۳)_{۸} =$

$(۴۰۹۵)_{۱۰} - (۴۵۶۳)_{۸} = (۷۷۷۷)_{۸}$

$-(۴۵۶۳)_{۸} = (۳۲۱۴)_{۸}$

تمرین: مکمل ۷ عدد $(۱۲۳/۴۵۶)_{۸}$ را با روش محاسباتی به‌دست آورید.

مثال: مکمل ۹ عدد $(۷۴/۳۶۰)_{۱۰}$ را با روش محاسباتی به‌دست آورید.

حل: در اینجا $n = ۲$ و $m = ۳$ و $b = ۱۰$ است، درنتیجه

مکمل۹عدد $(۷۴/۳۶۰)_{۱۰}$

$= (۱۰^{۲} - ۱۰^{-۳})_{۱۰} - (۷۴/۳۶۰)_{۱۰} =$

$(۹۹/۹۹۹ - ۷۴/۳۶۰) = ۲۵/۶۳۹$

مثال: مکمل ۹ عدد $(۱۸)_{۱۰}$ را با روش محاسباتی به‌دست آورید.

حل:

مکمل۹عدد $(۱۸)_{۱۰}$

$= (۱۰^{۲} - ۱۰^{۰})_{۱۰} - (۱۸)_{۱۰} =$

$۹۹ - ۱۸ = ۸۱$

مثال: مکمل ۱۵ عدد $(۱۲۳)_{۱۶}$ را با روش محاسباتی به‌دست آورید.

حل:

مکمل۱۵عدد $(۱۲۳)_{۱۶}$

$= (۱۶^{۳} - ۱۶^{۰})_{۱۰} - (۱۲۳)_{۱۶} =$

$(۴۰۹۵)_{۱۰} - (۱۲۳)_{۱۶}$

$= (FFF)_{۱۶} - (۱۲۳)_{۱۶} = (EDC)_{۱۶}$

تمرین: مکمل ۱۵ عدد $(۱۲۳/۱۲)_{۱۶}$ را با روش محاسباتی به‌دست آورید.

۲ ــ روش ذهنی برای محاسبهٔ مکمل b−۱ عدد مثبت A : در این روش برای محاسبهٔ مکمل b−۱ عدد صحیح یا ممیزدار A، هر یک از ارقام آن را از b−۱ کم می‌کنیم آنچه که به دست می‌آید مکمل b−۱ عدد A است. به عبارت دیگر اگر A به صورت $(a_{n-۱}a_{n-۲}\dots a_{۰}.a_{-۱}\dots a_{-m})_{b}$ باشد آنگاه مکمل b−۱ عدد A برابر $(s_{n-۱}s_{n-۲}\dots s_{۰}.s_{-۱}s_{-۲}\dots s_{-m})_{b}$ است که در آن:

$$s_{n-۱} = (b-۱) - (a_{n-۱})$$

$$s_{n-۲} = (b-۱) - (a_{n-۲})$$

$$\vdots$$

$$s_{۰} = (b-۱) - (a_{۰})$$

$$s_{-۱} = (b-۱) - (a_{-۱})$$

$$\vdots$$

$$s_{-m} = (b-۱) - (a_{-m})$$

مثال: مکمل ۱ عدد $(۱۰۱۱۰۱۰)_{۲}$ را با روش ذهنی به‌دست آورید.

حل: در اینجا $b-۱=۲-۱=۱$ است و از این رو هر رقم عدد داده شده را از یک کم می‌کنیم.

مکمل۱عدد $(۱۰۱۱۰۱۰)_{۲}$

$=\left[(۱-۱)(۱-۰)(۱-۱)(۱-۱)(۱-۰)(۱-۱)(۱-۰)\right]_{۲}$

$=(۰۱۰۰۱۰۱)_{۲}=(۱۰۰۱۰۱)_{۲}$

همان‌گونه که از مثال پیداست برای به‌دست آوردن مکمل ۱ عدد، کافی است در عدد داده شده تمام یک‌ها را به صفر و تمام صفرها را به یک تبدیل کنیم.

مثال: مکمل ۱ عدد $(۱۱۰۰۱۱۰۰)_{۲}$ را با روش ذهنی به‌دست آورید.

حل: با تبدیل یک‌ها به صفر و صفرها به یک داریم:

مکمل۱عدد $(۱۱۰۰۱۱۰۰)_{۲}$

$=(۰۰۱۱۰۰۱۱)_{۲}=(۱۱۰۰۱۱)_{۲}$

مثال: مکمل ۱ عدد $(۱۰۰۱۰/۰۱۰۱۰۱)_{۲}$ را با روش ذهنی به‌دست آورید.

حل:

عدد ۱۰۰۱۰/۰۱۰۱۰۱

مکمل ۱ $\Leftarrow$ ۰۱۱۰۱/۱۰۱۰۱۰

درنتیجه مکمل یک عدد $(۱۰۰۱۰/۰۱۰۱۰۱)_{۲}$ عدد $(۱۱۰۱/۱۰۱۰۱۰)_{۲}$ است.

مثال: مکمل ۷ عدد $(۴۵۶۳)_{۸}$ را با روش ذهنی به دست آورید.

حل: در اینجا $۷=۸-۱=b-۱$ است از این رو هر رقم عدد داده شده را از ۷ کم می‌کنیم.

در نتیجه:

مکمل۷عدد $(۴۵۶۳)_{۸}$

$=\left[(۷-۴)(۷-۵)(۷-۶)(۷-۳)\right]_{۸}=(۳۲۱۴)_{۸}$

مثال: مکمل ۷ عدد $(۱۲۳/۴۵۶)_{۸}$ را با روش ذهنی به دست آورید.

حل:

مکمل۷عدد $(۱۲۳/۴۵۶)_{۸}$

$=\left[(۷-۱)(۷-۲)(۷-۳)/(۷-۴)(۷-۵)(۷-۶)\right]_{۸}$

$=(۶۵۴/۳۲۱)_{۸}$

مثال: مکمل ۹ عدد $(۷۴/۳۶۰)_{۱۰}$ را با روش ذهنی به‌دست آورید.

حل: هر رقم عدد داده شده را از ۹ کم می‌کنیم، درنتیجه:

مکمل۹عدد $(۷۴/۳۶۰)_{۱۰}$ = $(۲۵/۶۳۹)$

مثال: مکمل ۹ عدد $(۱۸)_{۱۰}$ را با روش ذهنی به‌دست آورید.

حل: هر رقم عدد داده شده را از ۹ کم می‌کنیم درنتیجه:

مکمل۹عدد $(۱۸)_{۱۰}$

$=\left[(۹-۱)(۹-۸)\right]_{۱۰}=(۸۱)_{۱۰}.$

مثال: مکمل ۱۵ عدد $(۱۲۳)_{۱۶}$ را با روش ذهنی به‌دست آورید.

حل: در اینجا $۱۵=۱۶-۱=b-۱$ است از این رو هر رقم عدد داده شده را از ۱۵ کم می‌کنیم.

در نتیجه:

مکمل۱۵عدد $(۱۲۳)_{۱۶}$

$=\left[(۱۵-۱)(۱۵-۲)(۱۵-۳)\right]_{۱۶}=(EDC)_{۱۶}$

مثال: مکمل ۱۵ عدد $(۱۲۳/۱۲)_{۱۶}$ را با روش ذهنی به‌دست آورید.

حل:

مکمل۱۵عدد $(۱۲۳/۱۲)_{۱۶}$

$=\left[(۱۵-۱)(۱۵-۲)(۱۵-۳)/(۱۵-۱)(۱۵-۲)\right]_{۱۶}$

$=(EDC/ED)_{۱۶}$

۳ ــ استفاده از مکمل b : این روش محاسبهٔ مکمل b−۱ عدد صحیح یا ممیزدار A را بعد از بیان روش مکمل b اندکی دیرتر توضیح می‌دهیم.

محاسبهٔ مکمل b : برای محاسبهٔ مکمل b عدد مثبت A در مبنای b نیز سه روش به شرح زیر وجود دارد.

۱ ــ روش محاسباتی

۲ ــ روش ذهنی

۳ ــ استفاده از مکمل b−۱

۱ ــ روش محاسباتی برای محاسبهٔ مکمل b عدد مثبت A

مثبت A : اگر A یک عدد مثبت در مبنای b دارای n رقم در قسمت صحیح و m رقم در قسمت کسری باشد آنگاه مکمل b عدد A به‌صورت $b^n - A$ تعریف می‌شود. برخلاف مکمل b−۱ عدد A، در محاسبهٔ مکمل b قسمت کسری هیچ نقشی

ایفا نمی‌کند به همین خاطر b^{-m} در تبدیل بالا وجود ندارد. در این روش نیز نتیجهٔ عبارت b^n عددی در مبنای ۱۰ بود پس از انجام محاسبهٔ b^n، حاصل به مبنای b تبدیل می‌شود.

مثال: مکمل ۲ عدد $(۱۰۱۱۰۱۰)_۲$ را با روش محاسباتی به‌دست آورید.

حل: در اینجا $n=۷$ است. در نتیجه

مکمل۲عدد $(۱۰۱۱۰۱۰)_۲$

$=(۲^۷)_{۱۰}-(۱۰۱۱۰۱۰)_۲=$

$(۱۰۰۰۰۰۰۰)_۲-(۱۰۱۱۰۱۰)_۲$

$=(۱۰۰۱۱۰)_۲$

مثال: مکمل ۲ عدد $(۱۱۰۰۱۱۰۰)_۲$ را با روش محاسباتی به‌دست آورید.

حل:

مکمل۲عدد $(۱۱۰۰۱۱۰۰)_۲$

$=(۲^۸)_{۱۰}-(۱۱۰۰۱۱۰۰)_۲=$

$(۱۰۰۰۰۰۰۰۰)_۲-(۱۱۰۰۱۱۰۰)_۲$

$=(۱۱۰۱۰۰)_۲$

مثال: مکمل ۲ عدد $(۱۰۰۱۰/۰۱۰۱۰۱)_۲$ را با روش محاسباتی به‌دست آورید.

حل:

مکمل۲عدد $(۱۰۰۱۰/۰۱۰۱۰۱)_۲$

$=(۲^۵)_{۱۰}-(۱۰۰۱۰/۰۱۰۱۰۱)_۲$

$=(۱۰۰۰۰۰)_۲-(۱۰۰۱۰/۰۱۰۱۰۱)_۲$

$=(۱۰۰۰۱/۱۱۰۰۱۱)_۲$

مثال: مکمل ۸ عدد $(۴۵۶۳)_۸$ را با روش محاسباتی به‌دست آورید.

حل:

مکمل۸عدد $(۴۵۶۳)_۸$

$=(۸^۴)_{۱۰}-(۴۵۶۳)_۸=(۱۰۰۰۰)_۸$

$-(۴۵۶۳)_۸=(۳۲۱۵)_۸$

مثال: مکمل ۸ عدد $(۱۲۳/۴۵۶)_۸$ را با روش محاسباتی به‌دست آورید.

حل:

مکمل۸عدد $(۱۲۳/۴۵۶)_۸$

$=(۸^۳)_{۱۰}-(۱۲۳/۴۵۶)_۸$

$=(۱۰۰۰)_۸-(۱۲۳/۴۵۶)_۸$

$=(۶۵۴/۳۲۲)_۸$

مثال: مکمل ۱۰ عدد $(۷۴/۳۶۰)_{۱۰}$ را با روش محاسباتی به‌دست آورید.

حل:

مکمل۱۰عدد $(۷۴/۳۶۰)_{۱۰}$

$=(۱۰^۲)_{۱۰}-(۷۴/۳۶۰)_{۱۰}=(۱۰۰-۷۴/۳۶۰)_{۱۰}$

$=(۲۵/۶۴۰)_{۱۰}$

مثال: مکمل ۱۰ عدد $(۱۸)_{۱۰}$ را با روش محاسباتی به‌دست آورید.

حل:

مکمل۹عدد $(۱۸)_{۱۰}$

$=(۱۰^۲)_{۱۰}-(۱۸)_{۱۰}=(۱۰۰-۱۸)_{۱۰}=(۸۲)_{۱۰}$

مثال: مکمل ۱۶ عدد $(۱۲۳)_{۱۶}$ را با روش محاسباتی به‌دست آورید.

حل:

مکمل۱۵عدد $(۱۲۳)_{۱۶}$

$=(۱۶^۳)_{۱۰}-(۱۲۳)_{۱۶}=(۱۰۰۰)_{۱۶}-(۱۲۳)_{۱۶}=(EDD)_{۱۶}$

مثال: مکمل ۱۶ عدد $(۱۲۳/۱۲)_{۱۶}$ را با روش محاسباتی به‌دست آورید.

حل:

مکمل۱۶عدد $(۱۲۳/۱۲)_{۱۶}$

$=(۱۶^۳)_{۱۰}-(۱۲۳/۱۲)_{۱۶}=(۱۰۰۰)_{۱۶}-(۱۲۳/۱۲)_{۱۶}$

$=(EDC/EE)_{۱۶}$

۲ ــ روش ذهنی برای محاسبهٔ مکمل b عدد مثبت

A : در این روش چه عدد A یک عدد صحیح مثبت باشد و چه یک عدد ممیزدار، برای محاسبهٔ مکمل b عدد A، کافی است رقم یا رقمهای صفر در سمت راست عدد را کنار گذاشته آنگاه اولین رقم غیر صفر را از b و بقیهٔ ارقام را از $b-۱$ کم کنیم.

مثال: مکمل ۲ عدد (۱۰۱۱۰۱۰) را با روش ذهنی به‌دست آورید.

حل: با توجه به شرحی که داده شده داریم:

۱۱۱۱۱۲
−۱۰۱۱۰۱۰
۰۱۰۰۱۱۰

در نتیجه مکمل ۲ عدد $_{۲}$(۱۰۱۱۰۱۰۱) عدد$_{۲}$(۱۰۰۱۱۰) است.

مثال: مکمل ۲ عدد $_{۲}$(۰۰۱۱۰۰۱۱۰۰) را با روش ذهنی به‌دست آورید.

حل:

۱۱۱۱۱۲
−۱۱۰۰۱۱۰۰
۰۰۱۱۰۱۰۰

درنتیجه مکمل ۲ عدد $_{۲}$(۰۰۱۱۰۰۱۱۰۰) عدد $_{۲}$(۰۰۱۰۰۱۱۰) است.

مثال: مکمل ۲ عدد $_{۲}$(۱۰۱۰۱۰/۰۱۰۱۰۰۱) را با روش ذهنی به‌دست آورید.

حل:

۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۲
−۱۰۰۱۰/۰۱۰۱۰۱
۰۱۱۰۱/۱۰۱۰۱۱

در نتیجه مکمل ۲ عدد $_{۲}$(۱۰۱۰۱۰/۰۱۰۱۰۰۱) عدد $_{۲}$(۱۱۰۱/۱۰۱۰۱۱) است.

مثال: مکمل ۸ عدد $_{۸}$(۴۵۶۳) را با روش ذهنی به‌دست آورید.

حل:

۷۷۷۸
−۴۵۶۳
۳۲۱۵

در نتیجه مکمل ۸ عدد $_{۸}$(۴۵۶۳) عدد $_{۸}$(۳۲۱۵) است.

مثال: مکمل ۸ عدد $_{۸}$(۱۲۳/۴۵۶) را با روش ذهنی به دست آورید.

حل:

۷۷۷/۷۷۸
−۱۲۳/۴۵۶
۶۵۴/۳۲۲

درنتیجه مکمل ۸ عدد $_{۸}$(۱۲۳/۴۵۶) عدد $_{۸}$(۶۵۴/۳۲۲) است.

مثال: مکمل ۱۰ عدد $_{۱۰}$(۷۴/۳۶۰) را با روش ذهنی به‌دست آورید.

حل:

۹۹/۹(۱۰)
−۷۴/۳۶۰
۲۵/۶۴۰

درنتیجه مکمل ۱۰ عدد $_{۱۰}$(۷۴/۳۶۰) عدد $_{۱۰}$(۲۵/۶۴۰) است.

مثال: مکمل ۱۰ عدد $_{۱۰}$(۱۸) را با روش ذهنی به‌دست آورید.

حل:

۹(۱۰)
−۱۸
۸۲

درنتیجه مکمل ۱۰ عدد $_{۱۰}$(۱۸) عدد $_{۱۰}$(۸۲) است.

مثال: مکمل ۱۶ عدد $_{۱۶}$(۱۲۳) را با روش ذهنی به‌دست آورید.

حل:

(۱۵)(۱۵)(۱۶)
−۱ ۲ ۳
E D D.

درنتیجه مکمل ۱۶ عدد $_{۱۶}$(۱۲۳) عدد $_{۱۶}$(EDD) است.

مثال: مکمل ۱۶ عدد $_{۱۶}$(۱۲۳/۱۲) را با روش ذهنی به‌دست آورید.

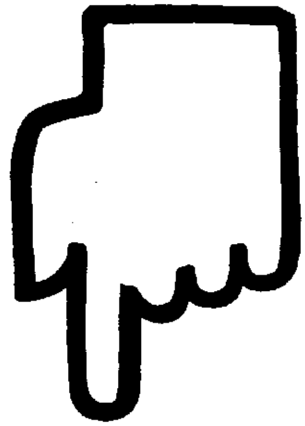
حل:

FFF / F(۱۶)
−۱۲۳/۱۲
EDC / EE

در نتیجه مکمل ۱۶ عدد $_{۱۶}$(۱۲۳/۱۲) عدد $_{۱۶}$(EDC / EE) است.

❑ واژه نامهٔ ریاضی و کامپیوتر:

1 - Base
2 - Arithmetic procedure
3 - Integer part
4 - Fra ctional part



● محمد رحیم (دبیر دبیرستان امام صادق (ع))

محاسبهٔ همزمان سریهای $\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta$ و $\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta$ به‌کمک اعداد مختلط

هریک از سریهای $\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta$ و $\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta$ را می‌توان به‌طور جداگانه با روشهای معمول به‌دست آورد. آنچه که در زیر می‌آید محاسبهٔ همزمان سریهای فوق به‌کمک اعداد مختلط است. با توجه به‌رابطهٔ $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ تساویهای زیر را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}
\cos\theta+i\sin\theta&=\cos\theta+i\sin\theta\\
(\cos\theta+i\sin\theta)^2&=\cos 2\theta+i\sin 2\theta\\
(\cos\theta+i\sin\theta)^3&=\cos 3\theta+i\sin 3\theta\\
&\vdots\\
(\cos\theta+i\sin\theta)^n&=\cos n\theta+i\sin n\theta
\end{aligned}$$

از جمع عبارات موجود در طرفین تساویهای فوق داریم:

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^1+(\cos\theta+i\sin\theta)^2+\ldots+(\cos\theta+i\sin\theta)^n=$$
$$(\cos\theta+\ldots+\cos n\theta)+(\sin\theta+\ldots+\sin n\theta)i$$
$$(\cos\theta+i\sin\theta)^1+(\cos\theta+i\sin\theta)^2+\ldots+(\cos\theta+i\sin\theta)^n=$$
$$\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta+i\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta$$

از طرفی می‌دانیم:

$x+x^2+\ldots+x^n=\dfrac{x(x^n-1)}{x-1}$ ،$x\neq\pm1$ و $|x|<1$

با جایگزینی $(x\neq\pm1\Rightarrow\cos\theta\neq\pm1\Rightarrow\theta\neq k\pi)\,x=\cos\theta+i\sin\theta$ خواهیم داشت:

$$\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)\left[(\cos\theta+i\sin\theta)^n-1\right]}{\cos\theta+i\sin\theta-1}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta+i\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta \qquad (1)$$

فرض می‌کنیم $S=\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta+i\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta$ و رابطهٔ (۱) را بازنویسی می‌کنیم:

$$S=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)\left[(\cos\theta+i\sin\theta)^n-1\right]}{\cos\theta+i\sin\theta-1}$$
$$=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)\left[(\cos\theta+i\sin\theta)^n-1\right]}{\cos\theta-1+i\sin\theta}$$

صورت و مخرج کسر فوق را در مزدوج مخرج کسر یعنی $\cos\theta-1-i\sin\theta$ ضرب می‌کنیم:

$$S=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta-1-i\sin\theta)\left[(\cos\theta+i\sin\theta)^n-1\right]}{\left[(\cos\theta-1)+i\sin\theta\right]\left[(\cos\theta-1)-i\sin\theta\right]}$$

محاسبات کسر فوق در زیر می‌آید:

$$(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta-1-i\sin\theta)=\cos^2\theta+\sin^2\theta-\cos\theta-i\sin\theta$$
$$=-(\cos\theta+i\sin\theta-1)$$
$$[(\cos\theta-1)+i\sin\theta][(\cos\theta-1)-i\sin\theta]$$
$$=(\cos\theta-1)^2+\sin^2\theta=2-2\cos\theta=4\sin^2\frac{\theta}{2}$$
$$\Rightarrow S=\frac{-(\cos\theta+i\sin\theta-1)\left[(\cos\theta+i\sin\theta)^n-1\right]}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\Rightarrow S=\frac{-\left[(\cos\theta+i\sin\theta)^{n+1}-(\cos\theta+i\sin\theta)^{n}-(\cos\theta+i\sin\theta)+1\right]}{4\sin^{2}\frac{\theta}{2}}$$

$$\Rightarrow S=\frac{-1}{4\sin^{2}\frac{\theta}{2}}\,[(\cos(n+1)\theta+i\sin(n+1)\theta)$$

$$-(\cos n\theta+i\sin n\theta)-(\cos\theta+i\sin\theta)+1]$$

$$\Rightarrow S=\frac{-1}{4\sin^{2}\frac{\theta}{2}}\,[(\cos(n+1)\theta-\cos n\theta-\cos\theta+1)+i$$

$$(\sin(n+1)\theta-\sin n\theta-\sin\theta)] \qquad (2)$$

عبارات داخل کروشهٔ رابطهٔ (۲) را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

پرانتز اول:

$$\cos(n+1)\theta-\cos n\theta=$$

$$-2\sin\frac{2n+1}{2}\theta\sin\frac{\theta}{2}$$

$$1-\cos\theta=2\sin^{2}\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow\cos(n+1)\theta-\cos n\theta+1-\cos\theta$$

$$=2\sin\frac{\theta}{2}\left[\sin\frac{\theta}{2}-\sin\frac{2n+1}{2}\theta\right]$$

$$=-4\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n\theta}{2}$$

پرانتز دوم:

$$\sin(n+1)\theta-\sin n\theta=2\cos\frac{2n+1}{2}\theta\sin\frac{\theta}{2}$$

$$-\sin\theta=-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow\sin(n+1)\theta-\sin n\theta-\sin\theta$$

$$=2\sin\frac{\theta}{2}\left[\cos\frac{2n+1}{2}\theta-\cos\frac{\theta}{2}\right]$$

$$=-4\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n\theta}{2}$$

با جایگزین کردن عبارات ساده شده داریم:

$$S=\frac{-1}{4\sin^{2}\frac{\theta}{2}}\left[-4\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n\theta}{2}\right.$$

$$\left.-4i\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n\theta}{2}\right]$$

$$S=\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta+i\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta=\frac{\cos\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$+i\frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

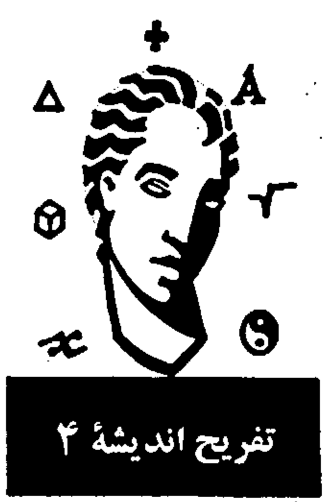
با مساوی قرار دادن قسمتهای حقیقی و موهومی، نتیجهٔ نهایی به‌دست می‌آید:

$$\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta=\frac{\cos\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

اگر روابط فوق را به‌یکدیگر تقسیم کنیم نتیجهٔ زیر نیز به‌دست می‌آید:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta}{\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta}=\operatorname{tg}\frac{n+1}{2}\theta$$



چنانچه یک تخته به شکل مربع با ۲۵ گل میخ مجهز باشد، چند مربع متفاوت می‌تواند به روی آن ایجاد شود؟

جواب در صفحهٔ ۸۸

طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روشهای مقدماتی (۱۵)

100 Great problems of Elementary Mathematics

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

مربع به‌صورت تصویر یک چهارضلعی

ثابت کنید هر چهارضلعی را می‌توان به‌عنوان تصویر پرسپکتیوی یک مربع درنظر گرفت.

تصویر پرسپکتیوی[1]، پرسپکتیوی[2] یا تصویر مرکزی[3]، ساده‌ترین و مهمترین تصویرها را می‌توان به‌صورت زیر توضیح داد.

مفروضها عبارت‌اند از: نقطهٔ ثابت Z، مرکز تصویر[4]، و صفحهٔ ثابت E، صفحهٔ تصویر[5]. تصویر پرسپکتیوی یا، به‌طور مختصرتر، پرسپکتیو. نقطه دلخواه P_0 به معنی P، نقطه تقاطع «پرتو تصویری[6]» ZP_0 با صفحهٔ تصویر، درنظر گرفته می‌شود. P_0 «شیء[7]» و P «تصویر» است. تصویر یک شکل مجموعهٔ تصویرهای نقطه‌هایی است که شکل (شیء) شامل آنهاست. به‌این ترتیب، پرسپکتیو خط مستقیمی چون g_0 خط مستقیمی چون g، یعنی تقاطع صفحهٔ Zg_0 با صفحهٔ تصویر، است.

تصویر پرسپکتیوی‌ای که در آن تنها نقطه‌های صفحه‌ای چون E_0، صفحهٔ شیء[8]، به‌روی صفحهٔ تصویر تصویر شده است، دارای اهمیتی خاص است. D، خط تقاطع صفحهٔ شیء و صفحهٔ تصویر به‌محور پرسپکتیوی[9] موسوم است. محور پرسپکتیوی مکان هندسی نقطهٔ شیء‌ای است که با نقطهٔ تصویرش منطبق است. طبق این موضوع یک خط شیئی دلخواه و تصویرش در این محور متقاطع می‌شوند.

در پرسپکتیوی مورد بحث نقشی قابل توجه توسط نقطه‌های در فاصلهٔ بینهایت صفحهٔ شیئی ایفا می‌شود. از آنجا که شعاعهای تصویری به‌نقطه‌های در فاصلهٔ بینهایت E_0 موازی E_0 حرکت می‌کنند، در صفحهٔ Δای گذرنده از Z و موازی با E_0 واقع‌اند و درنتیجه با صفحهٔ تصویر در f، خط تقاطع این صفحه با Δ برخورد می‌کنند. این خط مشترک به‌خط فرار[10] صفحهٔ شیئی E_0 موسوم است. خط فرار با محور پرسپکتیوی موازی است.

به‌خاطر اجتناب از محدود کردن اعتبار عمومی قضیهٔ فوق، «پرسپکتیو یک خط نیز یک خط است»، توسط حالتی خاص، مجموعهٔ نقطه‌های در فاصلهٔ بینهایت E_0 را «خط در فاصلهٔ بینهایت» این صفحه می‌نامیم و در این صورت می‌توانیم به‌طور مختصر بیان کنیم که:

پرسپکتیو خط در فاصلهٔ بینهایت یک صفحه، خط فرار این صفحه است.

مکانی که در آن g، تصویر g_0، خط دلخواهی از E_0، خط فرار f را قطع می‌کند و تصویر نقطهٔ در فاصلهٔ بینهایت g_0 است نقطهٔ فرار[11] g_0 نامیده می‌شود.

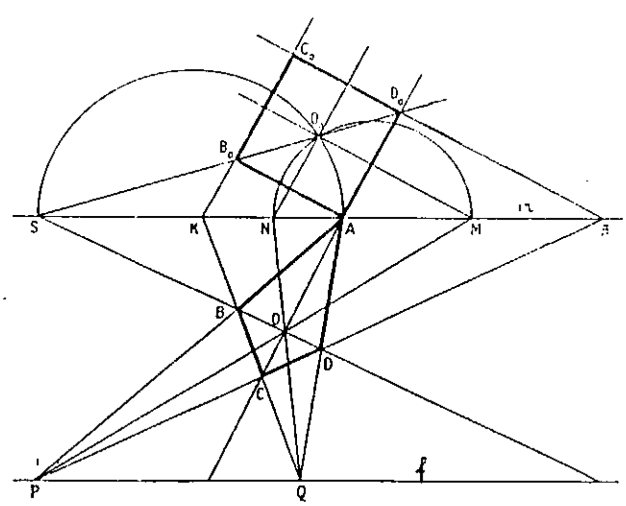
اکنون به‌حل مسأله‌مان می‌پردازیم:

فرض می‌کنیم چهارضلعی ABCD‌ی واقع در صفحهٔ ترسیم E چهارضلعی مفروض، O نقطهٔ تقاطع قطرهای AC و BD‌ی آن، P نقطهٔ تقاطع ضلعهای مقابل AB و CD، Q نقطهٔ تقاطع ضلعهای مقابل BC و DA باشد. فرض می‌کنیم مربعی را که در جستجوی آنیم، مطابقتاً، $A_0B_0C_0D_0$، نقطهٔ تقاطع قطرهای آن را O_0، صفحهٔ آن را E_0 بنامیم. از آنجا که P_0 و Q_0، نقطه‌های تقاطع دو جفت ضلع مقابل بر خط در فاصلهٔ بینهایت E_0 قرار دارند P و Q،

تصویرهای آنها، باید بر f، خط فرار پرسپکتیو بودن گذرنده از E_o و E واقع شود. این که کدام موازی با f را به‌عنوان محور پرسپکتیو بودن O انتخاب کنیم تفاوتی نمی‌کند. در این صورت موازی گذرنده از A را درنظر می‌گیریم. نقطه‌های تقاطع این محور با خطهای CD، BC، OP، OQ، و BD را با H، K، M، N، و S مشخص می‌کنیم. این نقطه‌ها را، از آنجاکه هر خط شیئی خط تصویری متناظر خود را بر محور مورد بحث تلاقی می‌کند، می‌توان H_o، K_o، M_o، N_o، S_o نیز نامید.

در چهارضلعی ABCD ضلعهای مقابل PBA و PCD و قطرهای PO و PQ یک دسته شعاعهای توافقی[12] تشکیل می‌دهند. از آنجاکه شعاع PQ موازی خط a حرکت می‌کند، پاره‌خطهای MA و MH به‌طولهای برابرند.

در چهارضلعی ABCD ضلعهای مقابل QCB و QDA و قطرهای QO و QP دسته شعاعهای توافقی می‌سازند. از آنجاکه $QP \parallel a$، پاره‌خطهای NA و NK نیز به‌طولهای برابرند.



از آنجاکه قطرهای مربع موردنظر باید قطرهای چهارضلعی مفروض را در محور مورد بحث تلاقی کنند، قطرهای مربع مزبور باید از A و S بگذرند. طبق این موضوع O_o، نقطهٔ تقاطع قطرها بر نیمدایره‌ای با قطر AS متعلق به‌صفحهٔ E_o واقع می‌شود.

از آنجاکه M_oO_o و N_oO_o، میان‌خطهای[13] مربع مورد بحث از O_o می‌گذرند، O_o نیز بر نیمدایرهٔ به‌قطر MN واقع در صفحهٔ E_o قرار دارد.

نقطهٔ تقاطع دو نیمدایرهٔ مزبور، O_o، نقطهٔ مرکزی[14] مربع موردنظر است.

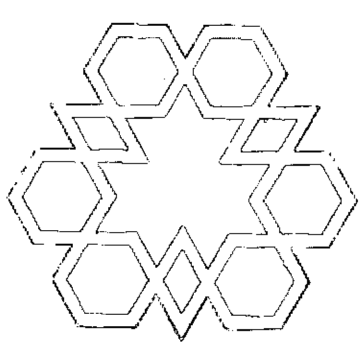
A_oB_o و C_oD_o، ضلعهای مربع مورد بحث از A و H موازی MO_o، و ضلعهای B_oC_o و D_oA_o از آن از K و A موازی NO_o هستند.

برای راحتی کار، ترسیم مربوطه را در خود صفحهٔ ترسیم انجام داده‌ایم. در این صورت، برای به‌دست آوردن پرسپکتیوی فضایی مطلوب، مربع مزبور را حول محور a، به‌عنوان محور دوران[15] به‌صفحهٔ جدید E_o دوران می‌دهیم، از f صفحهٔ Δ را موازی E_o رسم می‌کنیم، O_o، نقطهٔ تقاطع قطرها را، که اکنون در E_o قرار دارد، به O وصل می‌کنیم، و نقطهٔ تقاطع خط واصل مزبور را با Δ به‌صورت Z مشخص می‌کنیم.

اکنون درصورتی که مربع $A_oB_oC_oD_o$ واقع در E_o را از مرکز Z به‌روی E تصویر کنیم، مربع ABCD را به‌عنوان تصویر پرسپکتیوی به‌دست می‌آوریم.

یادداشتها

1– Perspective Projection
2– Perspectivity
3– Central projection
4– Center of projections
5– Plane of the image
6– Projection ray
7– Object
8– Object plane
9– axis of perspectivity
10– Vanishing line
11– Vanishing point
12– harmonic ray pencil
13– mid lines
14– Center point
15– axis of rotation



اثبات نامساویها

● محمدعلی سلحشور

(دبیر ریاضی دبیرستانهای اصفهان)

نامساویهایی که اعتبار آنها نیاز به‌اثبات با استفاده از گزاره‌های شناخته شده دارد در این مبحث مورد بررسی قرار می‌گیرد. اگرچه گزاره‌ای که به‌آن استناد می‌شود اثبات نشده باشد اما این معنا را دارد که برای هر مقدار حقیقی درست است.

الف: اثبات نامساوی بر اساس تعریف

چنانچه از تعریف برمی‌آید $a>b$ یعنی $a-b$ برای هر مقدار حقیقی a و b مثبت است بنابراین در اثبات نابرابری:

$$f(a,b,...k)>q(a,b,...k)$$

برای همهٔ مقادیر a، b و ...k تفاضل $f(a,b,...k)-q(a,b,...k)$ را تشکیل و نشان می‌دهیم برای همهٔ مقادیر a، b و ...k مثبت است. این روش در اثبات نابرابریهای $f<q$ و $f\geq q$ و $f\leq q$ نیز کاربری دارد.

مثال ۱: (نامساوی کوشی) ثابت کنید:

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab} \qquad a\geq 0, b\geq 0$$

حل: $\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}$ را تشکیل و علامت آن را معین می‌کنیم.

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a-2\sqrt{ab}+b}{2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$$

یعنی برای همهٔ مقادیر حقیقی نامنفی a و b مثبت است و درحالتی که $a=b$ صفر است. یعنی:

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab} \quad \text{یا} \quad \frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\geq 0$$

مثال ۲: نشان دهید اگر $ab>0$ آنگاه $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$.

حل:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)-2=\frac{a^2+b^2-2ab}{ab}=\frac{(a-b)^2}{ab}$$

باتوجه به‌آنکه $ab>0$ داریم: $\frac{(a-b)^2}{ab}\geq 0$ حالت تساوی وقتی است که $a=b$. بنابراین $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)-2$ نامنفی است یعنی نامساوی برقرار است.

مثال ۳: ثابت کنید:

$$a^2+4b^2+3c^2+14>2a+12b+6c$$

حل: تفاضل $(a^2+4b^2+3c^2+14)-(2a+12b+6c)$ را تشکیل می‌دهیم. این تفاضل را به‌شکل زیر سازمان می‌دهیم:

$$(a^2-2a+1)+(4b^2-12b+9)+(3c^2-6c+3)+1$$

$$=(a-1)^2+(2b-3)^2+3(c-1)^2+1$$

که برای هر مقدار حقیقی a، b، c مثبت است. اثبات نامساوی بالا محقق است.

مثال ۴: نشان دهید اگر $a+b+c\geq 0$ آنگاه $a^3+b^3+c^3\geq 3abc$

حل: تفاضل $a^3+b^3+c^3-3abc$ را تشکیل می‌دهیم. می‌دانیم:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$

$$=\frac{1}{2}(a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc)$$

$$=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2]$$

باتوجه به‌فرض $a+b+c\geq 0$ عبارت جبری حاصل نامنفی است. بنابراین نامساوی بالا برقرار است. توجه دارید که تساوی برای حالتی است که $a+b+c=0$ یا $a=b=c$.

ب: روش ترکیبی اثبات نامساویها

در روش ترکیبی از برخی تعاریف و نامساویهای شناخته شده در اثبات نامساویهای موردنظر استفاده می‌شود. برای نمونه می‌توان به‌نامساویهای: $a^2 \geq 0$ و $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ وقتی $a \geq 0$ و $b \geq 0$ و $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$ وقتی $ab>0$ و $ax^2+bx+c>0$ وقتی $a>0$ و $b^2-4ac<0$ اشاره کرد.

مثال ۵ : نشان دهید اگر $a \geq 0$ و $b \geq 0$ و $c \geq 0$ و $d \geq 0$ آنگاه:

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$$

حل: نامساوی کوشی را الگو قرار می‌دهیم:

$$\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} \geq \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{c+d}{2}\right)}$$

چون $\frac{c+d}{2} \geq \sqrt{cd}$ و $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ داریم:

$$\sqrt{\frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2}} \geq \sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}$$

$$\rightarrow \frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} \geq \sqrt[4]{abcd} \rightarrow \frac{a+d+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$$

حالت تساوی وقتی برقرار است که $a=b$ و $c=d$ و $\frac{a+b}{2}=\frac{c+d}{2}$ یعنی $a=b=c=d$.

مثال ٦ : نشان دهید! $(\frac{n+1}{2})^n > n$ وقتی $n>1$ و $n \in N$.

حل: از نامساوی کوشی برای اثبات درستی نابرابری فوق استفاده می‌کنیم:

$$\frac{n+1}{2} \geq \sqrt{n \times 1}$$

$$\frac{(n-1)+2}{2} \geq \sqrt{(n-1)\times 2}$$

$$\frac{(n-2)+3}{2} \geq \sqrt{(n-2)\times 3}$$

$$\vdots$$

$$\frac{2+(n-1)}{2} \geq \sqrt{2\times(n-1)}$$

$$\frac{1+n}{2} \geq \sqrt{1\times n}$$

طرفین n نامساوی بالا را در هم ضرب می‌کنیم:

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \geq \sqrt{[n(n-1)(n-2)...2\times 1][1\times 2\times 3\times ...\times (n-1)\times n]}$$

$$=\sqrt{n!n!}=\sqrt{(n!)^2}=n!$$

بنابراین از ضرب نامساویهای کوشی نامساوی (٦) به‌دست می‌آید که بافرض $n>1$ نامساوی $(\frac{n+1}{2})^n > n!$ که موردنیاز بود محقق می‌شود.

مثال ۷ : نشان دهید اگر $a>0$ و $b>0$ و $c>0$ آنگاه:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$$

حل: نامساویهای شناخته شده زیر را درنظر می‌گیریم:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2\ ,\ \frac{a}{c}+\frac{c}{a} \geq 2\ ,\ \frac{b}{c}+\frac{c}{b} \geq 2$$

از جمع طرفین نامساویهای بالا به‌دست می‌آید:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b} \geq 6$$

$$\rightarrow \frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c} \geq 6$$

$$\rightarrow \frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c}+3 \geq 9$$

$$\rightarrow \left(1+\frac{b+c}{a}\right)+\left(1+\frac{a+c}{b}\right)+\left(1+\frac{a+b}{c}\right) \geq 9$$

$$\rightarrow \left(\frac{a+b+c}{a}\right)+\left(\frac{b+a+c}{b}\right)+\left(\frac{c+a+b}{c}\right) \geq 9$$

با فاکتور قرار دادن عامل $a+b+c$:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$$

حالت تساوی وقتی $a=b=c$ برقرار است.

مثال ۸ : ثابت کنید اگر $x \in N$ و $n>1$ آنگاه:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+...+\frac{1}{n^2}<1$$

حل:

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{2\times 2}<\frac{1}{1\times 2}\ ,\ \frac{1}{9}=\frac{1}{3\times 3}<\frac{1}{2\times 3}\ ,$$

$$\frac{1}{16}=\frac{1}{4\times 4}<\frac{1}{3\times 4}\ ...,\ \frac{1}{n^2}=\frac{1}{n\times n}<\frac{1}{(n-1)\times n}$$

$(n-1)$ نامساوی بالا را با هم جمع می‌کنیم. به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+...+\frac{1}{n^2}<\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+...+$$

$$\frac{1}{(n-1)^n} = \frac{2-1}{1\times 2} + \frac{3-2}{2\times 3} + \frac{4-3}{3\times 4} + \dots +$$

$$\frac{n-(n-1)}{(n-1).n} = (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + (\frac{1}{3}-\frac{1}{4})$$

$$+\dots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}) = 1-\frac{1}{n} < 1$$

پایان اثبات!

ج: اثبات نامساوی با استفاده از برهان خلف:

مثال ۹ : نشان دهید اگر $a\geq 0$ و $b\geq 0$ و $c\geq 0$ و $d\geq 0$ آنگاه:

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab}+\sqrt{cd}$$

حل: فرض کنید برای مقادیر a و b و c و d نامساوی (۹) برقرار نباشد یعنی:

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} < \sqrt{ab}+\sqrt{cd}$$

طرفین نامساوی مثبت هستند و می‌توان آنها را به‌توان ۲ رساند:

$$\rightarrow \sqrt{(a+c)(b+d)} < ab+cd+2\sqrt{abcd}$$

$$\rightarrow \sqrt{bc+da} < 2\sqrt{abcd} \rightarrow \frac{bc+ad}{2} < \sqrt{abcd}$$

که با توجه به‌نامساوی کوشي نتیجه حاصل نادرست است. پس نامساوی (۹) برقرار است.

مثال ۱۰ : نشان دهید اگر $a\geq 0$ و $b\geq 0$ و $c\geq 0$ آنگاه:

$$\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$

حل: فرض می‌کنیم برای مقادیر a و b و c نامساوی (۱۰) برقرار نباشد و داشته باشیم:

$$\frac{a+b+c}{3} > \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$

از مربع کردن طرفین نامساوی به‌دست می‌آید:

$$(\frac{a+b+c}{3})^2 > \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \rightarrow (a+b+c)^2 > 3(a^2b^2c^2)$$

$$\rightarrow 3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2 < 0 \rightarrow 3(a^2+b^2+c^2)-$$

$$(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc) < 0 \rightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-$$

$$2ab-2ac-2bc < 0 \rightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2 < 0$$

این نتیجه که مجموع چند مربع است نادرست است. بنابراین نقض حکم درست نیست و نامساوی (۱۰) برقرار می‌باشد.

توضیح: اعداد نامنفی a_1 ، a_2 ، ... و a_n را در نظر بگیرید. کمیتهای زیر را داریم:

واسطه هندسی $G_n=\sqrt{a_1.a_2...a_n}$

واسطه همساز $H_n=\dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n}}$

میانگین‌مربع ازاعداد a_1 و a_2 و a_n $\quad Q_n=\sqrt{\dfrac{a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2}{n}}$

میانگین حسابی $\quad A_n=\dfrac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}$

رابطهٔ زیر بین این کمیتها برقرار است:

$$H_n \leq G_n \leq A_n \leq Q_n$$

د: اثبات نامساویها با استفاده از استقراء:

مثال ۱۱ : نشان دهید اگر $n\in N$ و $n\geq 3$ آنگاه: $2^n > 2n+1$

حل:

$n=3 \rightarrow 2^3 > 2(3)+1$

$n=k \rightarrow 2^k > 2k+1$ فرض استقراء

$n=k+1 \rightarrow 2^{k+1} > 2k+3$ حکم استقراء

$2^{k+1} = 2\times 2^k > 2(2k+1) = 4k+2 = (2k+3)+(2k-1)$

$\rightarrow 2^{k+1} > (2k+3)+(2k-1)$

اما برای مقادیر طبیعی k ، $2k-1>0$ پس:

$2^{k+1} > 2^k+3$

مثال ۱۲ : نشان دهید اگر $n\in N$ آنگاه:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^n-1} > \frac{n}{2}$$

اثبات: برای $n=1$ داریم $1 > \frac{1}{2}$ که گزاره‌ای است درست.
حال فرض می‌کنیم برای $n=k$، درست باشد. (فرض استقراء)

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^k-1} > \frac{k}{2}$$

باید نشان دهیم نامساوی (۱۲) برای $n=k+1$ نیز درست است. (حکم استقراء)

$$S_{k+1}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2^{k+1}-1} > \frac{k+1}{2}$$

$$S_{k+1}=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2^k-1})$$
$$+(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\dots+\frac{1}{2^{k+1}-1})$$
$$=S_k+P_k$$

$$P_k=\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\dots+\frac{1}{2^{k+1}-1}$$

P_k مجموع 2^k کسر است که هر کدام از $\frac{1}{2^{k+1}}$ بزرگترند. بنابراین:

$$P_k=\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\dots+\frac{1}{2^{k+1}-1} > \frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{k+1}}+$$
$$\dots+\frac{1}{2^{k+1}}=2^k\times\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2}$$

یعنی: $S_k > \frac{k}{2}$

$$P_k > \frac{1}{2} \rightarrow S_{k+1}=S_k+P_k > \frac{k}{2}+\frac{1}{2}=\frac{k+1}{2}$$

$$\rightarrow S_{k+1} > \frac{k+1}{2}$$

ادب ریاضی

و همان‌طور که ما امور محسوسه را مشاهده می‌کنیم و از این راه به‌پارهٔ از احوال و اوضاع آنها دانش یقینی پیدا می‌کنیم و سپس بر اساس و بنیان این‌گونه احوال متیقنه دانشها و علوم صحیحی [به‌مانند هیأت و جز آن] بار کرده و استوار می‌نماییم پس همین‌طور اموری از روحانیات را مشاهده می‌کنیم و سپس اموری دیگر را بر اساس و پایهٔ آنها نهاده و استوار می‌کنیم و کسی که راه و روش وی این نباشد او را از این دانش بهره‌ای نباشد و به‌زودی شکوک و تردیدها او را بازیچهٔ خود قرار دهد.

حکمت‌الاشراق

هر تحقیقی که به‌ترتیب اشیا بستگی دارد تا از آگاهی به‌آن، دانستن، چیزهای دیگر حاصل گردد، بلکه هر تحقیقی که وابستگی آن به‌هر تألیفی باشد (خواه در آن ترتیب معینی ملحوظ شود یا خیر)، چنین تحقیقی، به‌شناختن مفرداتی (که در آن تألیف و ترتیب واقع شده است) محتاج است و نیاز تحقیق به‌شناختن مفردات، از هر جهت نیست، بلکه از آن جهتی است، که آن تألیف و ترتیب شایسته‌اند، که در آن، مفردات باشند، به‌همین دلیل اهل منطق به‌رعایت نمودن احوال معانی مفرد نیازمندند تا بدین وسیله به‌مراعات احوال تألیف دسترسی یابند.

اشارات و تنبیهات

ابوعلی‌سینا

گراف
(قسمت اول)

قابل استفاده دانش‌آموزان رشته ریاضی، دوره پیش‌دانشگاهی، ریاضیات گسسته

منبع مورد استفاده: ریاضیات گسسته و ترکیباتی

رالف ـ پ ـ گریمالدی (جلد دوم)

● ترجمه و گردآوری: سیمین اکبری‌زاده (دبیر ریاضی ـ اراک)

نظریهٔ گراف یکی از مفیدترین و پرکاربردترین شاخه‌های ریاضیات گسسته است. این نظریه بسیار وسیع و پیشرفته‌تر از آن است که بتوان همهٔ مطالب آن را در یک مقاله جمع‌آوری نمود و در این مقاله سعی شده در حد نیاز دانش‌آموزان دوره پیش‌دانشگاهی به‌آن پرداخته شود. لازم به‌تذکر است که با توجه به‌تنوع اصطلاحات نظریه گراف، عبارات به‌کار رفته در این مقاله استاندارد نمی‌باشند.

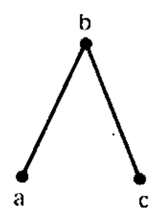
◄ تعریف: گراف (Graph)

گراف بی‌جهت G زوجی مرتب مانند (E و V) است که در آن V مجموعهٔ متناهی و ناتهی و E زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های متشکل از دو عضو متمایز V باشد.* اعضای V را رئوس یا گره‌ها (vertices) ی G و اعضای E را یالها یا خطها (edges) ی G می‌نامیم.

قرارداد: می‌نویسیم $\{a,b\}\in$» یا $ab\in$» ، هرگاه یال ab دو رأس متمایز a و b را بهم وصل کرده باشد، در این صورت گوییم رئوس a و b مجاورند.

توجه: در بعضی گرافها، مجاز به‌داشتن طوقه (loop) یا یالهایی به‌صورت $\{a,a\}$ هستیم، ولی گرافهایی که در کتاب درسی و این مقاله موردنظر می‌باشد بدون طوقه (a) می‌باشند.

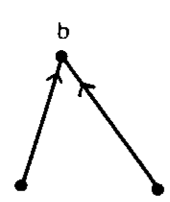
مثال ۱: در گراف شکل (۱): $E=\{\{a,b\},\{b,c\}\}$ ، $V=\{a,b,c\}$ و با توجه به‌اینکه تعداد اعضای V (تعداد رئوس گراف) ۳ می‌باشد، گوییم مرتبهٔ گراف ۴ است و می‌نویسیم: $|V|=3$ یا $P=3$. و نیز با توجه به‌اینکه تعداد اعضای E (تعداد یالهای گراف) ۲ می‌باشد، گوییم اندازهٔ گراف ۲ است و می‌نویسیم: $|E|=2$ یا $q=2$.



شکل (۱)

تذکر: گرافی را که برای یالهای آن جهت در نظر گرفته شود، گراف جهتدار می‌نامند، در این صورت هرگاه از a به b یک یال جهتدار موجود باشد، می‌نویسیم: $(a,b)\in E$. البته در کتب دبیرستانی موضوع مورد بحث معمولاً گراف بی‌جهت است.

مثال ۲: گراف شکل (۲)، گراف جهتداری است که در آن $E=\{(a,b),(c,b)\}$.



شکل (۲)

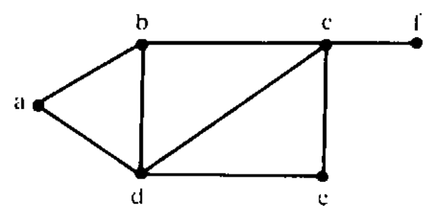
◄ تعریف: گردش (Walk)

فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف بی‌جهت و x,y دو رأس آن

باشند یک گردش از x به y در G، دنبالهٔ متناهی از رئوس و یالهای G مانند $x,e_1,x_1,e_2,\dots,e_n,y$ می‌باشد که از رأس x شروع و به‌رأس y ختم می‌شود و دارای n یال $e_i=\{x_{i-1},x_i\}$ ، $1 \le i \le n$ می‌باشد. عدد n را طول گردش می‌نامیم.

توجه: در گردش ممکن است برخی از رئوس و یالها بیش از یک‌بار ظاهر شوند و نیز معمولاً از نوشتن یالها در دنباله صرف‌نظر می‌شود.

مثال ۳: در گراف شکل (۳): ۱) دنبالهٔ رئوس b,c,d,e,c,f یک b-f گردش به‌طول ۵ می‌باشد که رأس c تکرار شده ولی هیچ یالی بیش از یک بار ظاهر نشده است.



شکل (۳)

۲) دنبالهٔ رئوس f,c,e,d,a یک f-a گردش به‌طول ۴ می‌باشد که هیچ رأس و یال تکراری در آن وجود ندارد.

تعریف: خط سیر و مدار trail and circuit / مسیر و دور path and cycle

فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف بی‌جهت باشد و $x-y$ گردشی در آن:

الف: اگر در گردش $x-y$ هیچ یالی تکراری نباشد، این گردش را یک $x-y$ خط سیر نامیم. خط سیر بستهٔ $x-x$ را یک مدار گوییم.

ب: اگر در گردش $x-y$ هیچ رأسی بیش از یک بار ظاهر نشود، این گردش را یک $x-y$ مسیر نامیم. مسیر بستهٔ $x-x$ را یک دور یا دایره گوییم.

مثال ۴: الف: $b-f$ گردش لیست‌شده در مثال ۳ یک $b-f$ خط سیر می‌باشد. ولی $b-f$ مسیر نیست چون رأس C در آن تکرار شده است.

ب: $f-a$ گردش لیست شده در مثال ۳ هم $f-a$ خط سیر و هم $f-a$ مسیر است.

پ: در شکل (۳): a,b,d,c,e,d,a یک $a-a$ مدار هست ولی باتوجه به‌این که رأس d تکرار شده دور نیست.

قضیه: فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف بی‌جهت باشد، با $a,b\in V$ ، $a\neq b$. اگر یک خط سیر از a به b (در G) موجود باشد، آنگاه یک مسیر از a به b (در G) موجود است.

اثبات: چون یک خط سیر از a به b موجود است، یکی از کم‌طولترین آنها مثلاً $\{a,x_1\},\{x_1,x_2\},\dots,\{x_n,b\}$ را انتخاب می‌کنیم. اگر این خط سیر یک مسیر نباشد (رأس تکراری مانند x_k در آن وجود دارد و) خواهیم داشت:

$\{a,x_1\}$ و $\{x_1,x_2\}$ و ... و $\{x_{k-1},x_k\}$ و $\{x_k,x_{k+1}\}$

و ... و $\{x_{m-1},x_m\}$ و $\{x_m,x_{m+1}\}$ و... و $\{x_n,b\}$ $(x_k=x_m)$

و به‌این ترتیب:

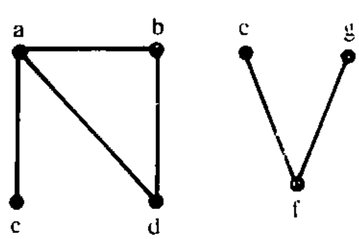
$\{a,x_1\}$ و $\{x_1,x_2\}$ و ... و $\{x_{k-1},x_k\}$ و $\{x_m,x_{m+1}\}$ و ... و $\{x_n,b\}$

خط سیری از a به b می‌باشد که خط سیری کوتاهتر است. (لذا مطمئناً کم‌طولترین خط سیر از a به b همان مسیر موجود از a به b می‌باشد).

◄ تعریف: گراف همبند (connected graph)

فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف بی‌جهت باشد، هرگاه بین هر دو رأس متمایز G یک مسیر موجود باشد، G را همبند (یا مرتبط) نامیم. گرافی را که همبند نیست، ناهمبند یا نامرتبط گوییم.

مثال ۵: گراف شکل (۴) همبند نیست، چون به‌عنوان مثال هیچ مسیری از a به e موجود نیست. منتهی این گراف از دو قسمت تشکیل شده که هر یک از آنها همبند هستند و آنها را مؤلفه‌های گراف می‌نامیم. بنابراین یک گراف همبند است، اگر و تنها اگر فقط یک مؤلفه داشته باشد.



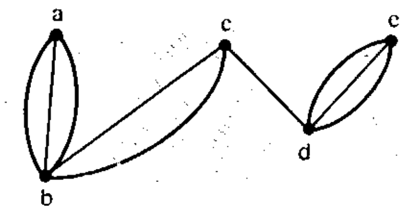
شکل (۴)

تعریف: تعداد مؤلفه‌های گراف G را با $k(G)$ نمایش می‌دهیم.

مثال ٦: گراف شکل (۳) همبند است لذا $k(G)=1$. ولی در گراف شکل (۴) داریم: $k(G)=2$.

◄ تعریف: گراف چندگانه (multigraph)

گراف $G=(V,E)$ را گراف چندگانه گوییم، هرگاه رئوسی مانند $a,b\in V$، $a\neq b$ موجود باشند چنانکه بیش از یک یال بین a و b موجود باشد. برای $n\in z^+$، گراف چندگانهٔ G را یک n نمودار گوییم هرگاه هیچ یالی بیش از n بار در آن تکرار نشده باشد. (و حداقل یک یال در آن n بار تکرار شده باشد)



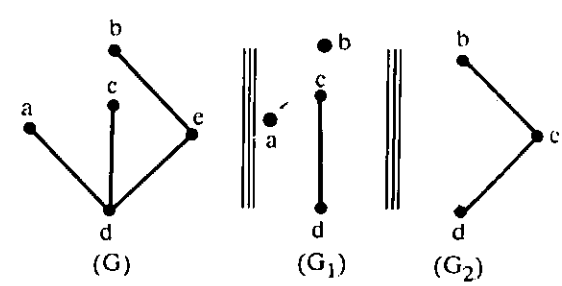
شکل (۵)

مثال ۷: گراف شکل (۵) یک گراف ۳ گانه است.

◄ تعریف. زیرگراف (subgraph)

فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف باشد، $G_1=(V_1,E_1)$ را زیرگراف G می‌نامیم هرگاه $\phi\neq V_1\subseteq V$ و $E_1\subseteq E$، که هر یال در E_1 بر رأسهای موجود در V_1 واقع است.

مثال ۸: در شکل (۶) G_1 و G_2 زیرگرافهای G هستند.



شکل (۶)

◄ تعریف: درجهٔ رأس (degree of vertex)

فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف بی‌جهت یا چندگانه باشد، برای هر رأس G مانند v، درجهٔ v تعداد یالهایی از G است که از رأس v می‌گذرد و آن را با $deg(v)$ نمایش می‌دهیم.

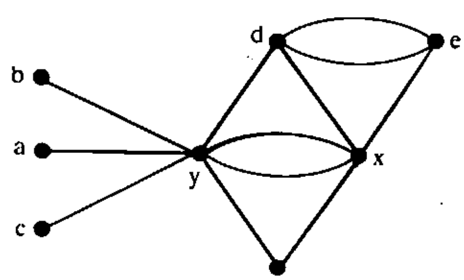
مثلاً در گراف G_1 شکل (۶) داریم: $deg(c)=deg(d)=1$ و $deg(a)=deg(b)=0$، رئوس a و b را ایزوله یا تنها گوییم.

مسئله ۱: فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف بی‌جهت باشد که همبند است و $|V|\geq 2$. ثابت کنید G شامل دو رأس مانند a و b هست که $deg(a)=deg(b)$.

اثبات: (حل مسئله با استفاده از اصل لانه کبوتری انجام می‌گیرد).
فرض می‌کنیم $|V|=n\geq 2$. باتوجه به تعریف گراف، چون یالها دو رأس متمایز را به هم وصل می‌کنند، یالی که وصل کنندهٔ یک رأس به خودش باشد وجود ندارد، لذا حداکثر تعداد یالهای گذرنده از هر رأس دلخواه G مانند x، $n-1$ می‌باشد، بنابراین طبق تعریف درجه $deg(x)\leq n-1$. از طرفی چون گراف G همبند است و در گراف همبند رأسی با درجهٔ صفر (ایزوله) موجود نیست، بنابراین حداقل تعداد یالهای گذرنده از هر رأس دلخواه مانند x، یک می‌باشد لذا $deg(x)\geq 1$. به‌این ترتیب برای هر رأس دلخواه مانند x داریم: $1\leq deg(x)\leq n-1$ و $deg(x)\in\{1,2,\dots,n-1\}$. حال اگر n رأس را به‌عنوان کبوتر و $n-1$ درجهٔ ممکن هر رأس را به‌عنوان لانهٔ کبوتر درنظر بگیریم، چون $n>n-1$، حداقل ۲ رأس مانند a و b در G موجود است که هم درجه‌اند و $deg(a)=deg(b)$.

مسئله ۲: الف) چرا رسم گراف بی‌جهت همبند با ۸ رأس طوری که دنبالهٔ درجات رئوس آن ۷ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ و ۱ و ۱ باشد غیرممکن است؟ ب) یک گراف چندگانهٔ بی‌جهت همبند با ۸ رأس ارائه‌دهید که درجات رئوس آن ۷ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ و ۱ و ۱ باشد.

حل: الف) فرض می‌کنیم $a,b,c,x,y\in V$ و $deg(y)=7$ و $deg(x)=5$ و $deg(a)=deg(b)=deg(c)=1$ چون $deg(y)=7$ پس y با هر ۷ رأس دیگر V مجاور است، لذا رأس x با هیچ یک از رئوس a و b و c مجاور نیست. از طرفی طبق تعریف گراف رأس x با خودش مجاور نیست بنابراین رأس x حداکثر می‌تواند با ۴ رأس باقیمانده مجاور باشد و چون گراف ساده است $deg(x)\leq 4$ و این با $deg(x)=5$ در تناقض است. لذا چنین گرافی قابل رسم نیست، مگر با شرط چندگانه بودن یا طوقه داشتن.



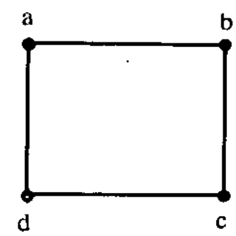
شکل (۷)

ب) شکل (۷) یک گراف دوگانه و همبند است و $deg(a)=deg(b)=deg(c)=1$، $deg(f)=2$، $deg(e)=3$، $deg(d)=4$، $deg(x)=5$ و $deg(y)=7$.

◄ تعریف: گراف کامل (complete graph)

فرض کنید V مجموعه‌ای با n رأس باشد. گراف کامل روی V با k_n نمایش داده می‌شود و گراف بی‌جهتی است که برای هر دو رأس متمایز آن مانند a و b **یک یال** $\{a,b\}$ موجود باشد.

• مثال ۹: شکل (۸) گراف کامل نیست. چون به‌عنوان مثال $\{a,c\}\notin E$.



شکل (۸)

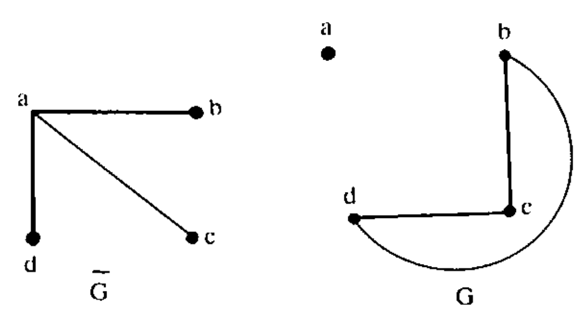
مثال ۱۰: تعداد یالهای گراف کامل k_n، $\binom{n}{2}$ و درجه هر رأس آن $n-1$ است.

◄ تعریف: مکمل گراف (complement of graph)

فرض کنید G یک گراف بی‌جهت با n رأس باشد. مکمل G با $\overline{G}$ نمایش داده می‌شود و عبارت است از زیرگرافی از k_n که شامل n رأس G می‌باشد ولی یالهای آن همهٔ یالهایی است که در G نیست پس $|E(G)|+|E(\overline{G})|=\binom{n}{2}$.

تذکر: k_n در نمودارها همان نقشی را دارد که مجموعهٔ مرجع در مجموعه‌ها دارد.

مثال ۱۱: در شکل ۹، متمم گراف G رسم شده است.



شکل (۹)

مسئله ۳: هرگاه G یک گراف بی‌جهت با v رأس و e یال باشد، تعداد یالهای $\overline{G}$ چند تا است.

حل:

$$|E(G)|=e \text{ و } |V(G)|=v \Rightarrow |E(k_v)|=\binom{v}{2}.$$

$$|E(G)|+|E(\overline{G})|=|E(k_v)| \Rightarrow |E(\overline{G})|=\binom{v}{2}-e$$

تست ۱: فرض کنید G یک گراف بی‌جهت با n رأس باشد. اگر G، ۵۶ یال و $\overline{G}$، ۸۰ یال داشته باشد، مقدار n کدام است؟

الف) ۱۶ ب) ۱۷ پ) ۱۸ ت) ۱۹

حل: گزینهٔ (ب) صحیح است.

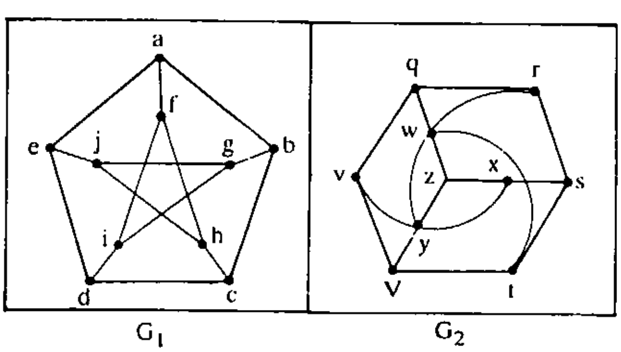
$$|E(G)|+|E(\overline{G})|=\binom{n}{2} \Rightarrow 56+80=\binom{n}{2} \Rightarrow n^2-n-272=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{n=17} \\ n=-16 \text{ غیرقابل قبول} \end{cases}$$

◄ تعریف: گرافهای یکریخت (Isomorphic graphs)

فرض کنید $G_1=(V_1,E_1)$ و $G_2=(V_2,E_2)$ دو گراف بی‌جهت باشند. تابعی مانند $f:V_1\to V_2$ یکریختی گرافها نامیده می‌شود هرگاه: اولاً) f یک به‌یک و پوشا باشد. و ثانیاً) برای هر دو رأس دلخواه G_1 مانند a و b، $\{a,b\}\in E_1$ اگر و فقط اگر $\{f(a),f(b)\}\in E_2$. هرگاه چنین تابعی وجود داشته باشد، G_1 و G_2 را گرافهای یکریخت می‌نامیم.

توجه: اگر ۲ نمودار دارای تعداد رئوس مختلف یا تعداد یال مختلف باشند، یکریخت نیستند.

مثال ۱۲: گرافهای شکل (۱۰)، دو گراف با ۱۰ رأس هستند. با پیدا کردن تناظر زیر مجاورت‌ها حفظ می‌شوند.



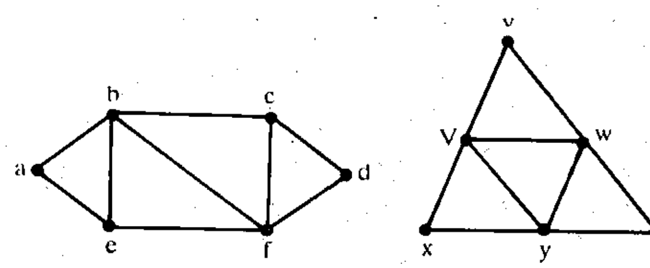
شکل (۱۰)

$a\to q$ $c\to u$ $e\to r$ $g\to x$ $i\to z$

$b\to v$ $d\to y$ $f\to w$ $h\to t$ $j\to s$

برای مثال {f,h} یالی در گراف G_1 است و یال متناظر آن {w,t} در گراف G_2 وجود دارد. اما ببینیم این تناظر چطور پیش آمده؟ توجه داریم برای اینکه یک ایزومورفیسم مجاورتها را حفظ کند، آن ایزومورفیسم زیرگرافهایی مثل مسیرها و دورها را حفظ می‌کند. در گراف G_1 یالهای af,fi,id,de,ea دوری به‌طول ۵ می‌سازند. بنابراین هنگامی که سعی می‌کنیم ایزومورفیسم را پیدا کنیم باید این را حفظ کنیم. یالهای متناظر در گراف G_2 qw,wz,zy,yr,rq می‌باشند که آنها نیز دوری به‌طول ۵ تشکیل داده‌اند. به‌علاوه در گراف G_1 با شروع از a، مسیر a,f,h,c,b,g,j,e,d,i را می‌یابیم که از هر رأس فقط یک بار می‌گذرد، مسیر متناظر آن در گراف G_2 q,w,t,u,v,x,s,r,y,z می‌باشد که همان خصوصیت را دارد (دو گراف یکریخت هستند).

مسئله ۴: آیا گرافهای G_1 و G_2 در شکل (۱۱) یکریخت هستند؟

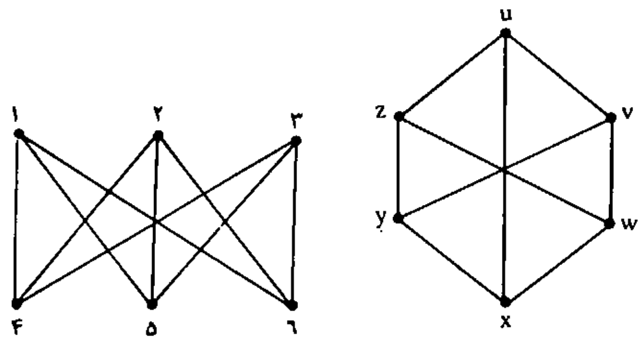


(G_1) (G_2)

شکل (۱۱)

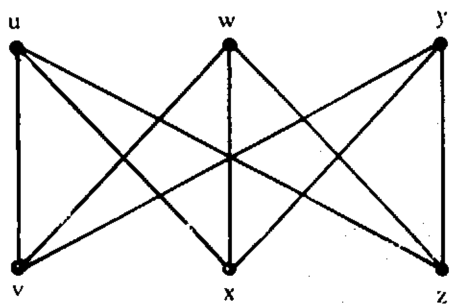
حل: علی‌رغم اینکه هر دو ۶ رأس و ۹ یال دارند ولی یکریخت نیستند. در گراف G_1، دو رأس a و d درجه ۲ هستند و در گراف G_2، ۳ رأس z و x و u درجه ۲ می‌باشند، بنابراین اگر مثلاً رأس a را به‌رأس x و رأس d را به‌رأس z نظیر کنیم، هیچ رأسی از گراف G_1 باقی نخواهد ماند که آن را به u نظیر کنیم و نمی‌توان ساختن تناظر یک به‌یک بین رئوس ۲ گراف را ادامه داد. لذا دو گراف یکریخت نیستند. به‌علاوه در گراف G_2 می‌توانیم از هر رأس شروع کنیم و مداری شامل تمام یالهای گراف و هر یال یک بار بیابیم. مثلاً، اگر از رأس u شروع کنیم مدار u,w,v,y,w,z,y,x,v,u واجد چنین خاصیتی است. (چنین گرافی را گراف **اویلری** می‌نامند) ولی G_1 چنین نیست.

مسئله ۵: الف) نشان دهید G_1 و G_2 در شکل (۱۲) یکریخت هستند. ب) امکان وجود چند ایزومورفیسم $f:G_1\to G_2$ وجود دارد؟



(G_1) (G_2) شکل (۱۲)

حل: الف) گراف G_2 را می‌توانیم به‌صورت گراف شکل (۱۳) رسم کنیم. لذا دو گراف یکریخت هستند. ب) ۷۲ ایزومورفیسم.



شکل (۱۳)

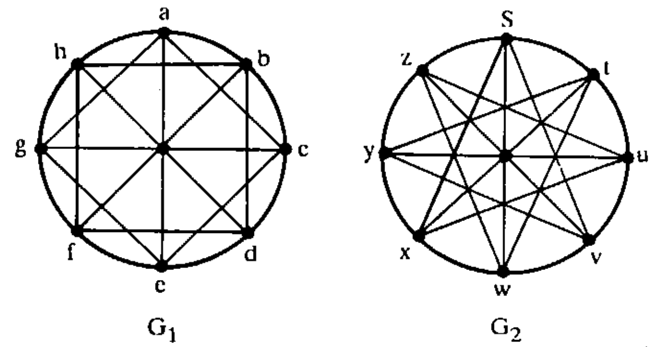
مسئله ۶: الف) اگر G_1 و G_2 دو گراف بی‌جهت باشند، ثابت کنید G_1 و G_2 یکریخت هستند اگر و تنها اگر $\overline{G_1}$ و $\overline{G_2}$ یکریخت باشند. ب) آیا گرافهای شکل (۱۴) یکریخت هستند؟

حل: الف) فرض می‌کنیم $G_1=(V_1,E_1)$ و $G_2=(V_2,E_2)$ یکریخت باشند و ثابت می‌کنیم $\overline{G_1}$ و $\overline{G_2}$ یکریخت هستند. با توجه به‌فرض تابعی مانند $f:V_1\to V_2$ وجود دارد که اولاً f یک به‌یک و پوشاست و ثانیاً f مجاورت‌ها را حفظ می‌کند یعنی: برای هر $x,y\in V_1$، $\{x,y\}\in E_1 \Leftrightarrow \{f(x),f(y)\}\in E_2$. *

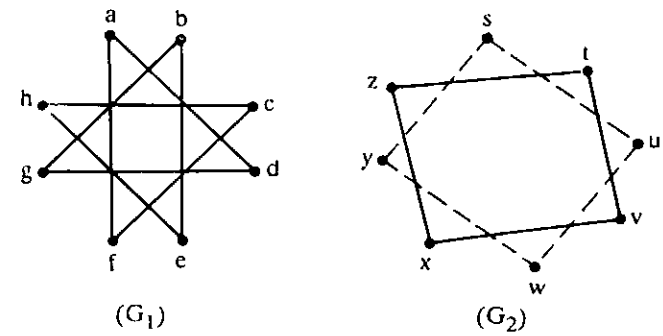
برای اثبات حکم فرض می‌کنیم $x,y\in V_1$ و $\{x,y\}\in \overline{E_1}$ پس $\{x,y\}\notin E_1$، لذا طبق رابطهٔ * $\{f(x),f(y)\}\notin E_2$ بنابراین $\{f(x),f(y)\}\in \overline{E_2}$. لذا همین تابع f مجاورتها را برای $\overline{G_1}$ و $\overline{G_2}$ نیز حفظ می‌کند و می‌تواند برای تعریف یک یکریختی بین $\overline{G_1}$ و $\overline{G_2}$ مورد استفاده قرار گیرد. اثبات برعکس نیز به‌روش مشابه انجام می‌شود.

ب) دو گراف شکل (۱۴) یکریخت نیستند. چون مکمل گرافِ G_1 دوری به‌طول ۸ (f,a,d,g,b,e,h,c,f) می‌باشد ولی مکمل گراف G_2

اجتماع دو دور به‌طول ۴ (z,t,u,x,z) و (s,u,w,y,s) می‌باشد. (طبق شکل ۱۵).



شکل (۱۴)



شکل (۱۵)

تست ۲: کدامیک از گرافهای شکل (۱۶) یکریخت هستند؟

الف) گرافهای شکل (a) ب) گرافهای شکل (b)

پ) گرافهای شکل (c) ت) گرافهای هر سه شکل.

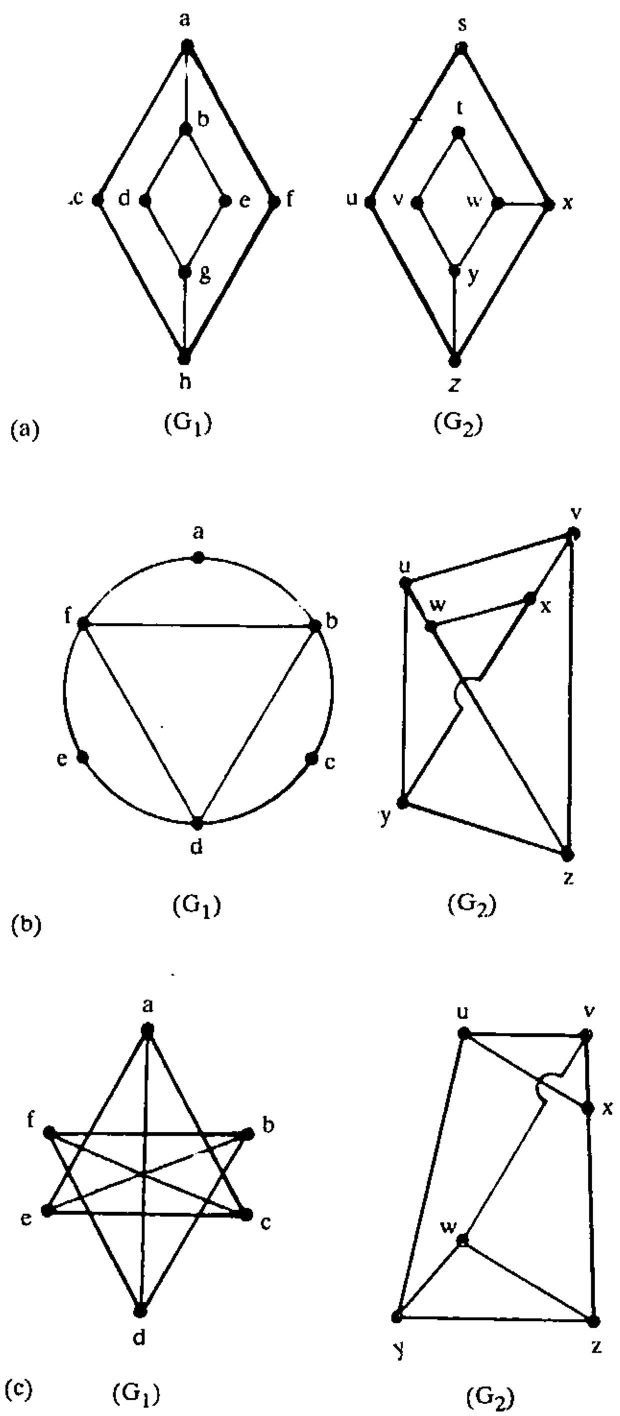
حل: گرافهای شکل (a) یکریخت نیستند. چون G_2 شامل دوری به‌طول ۸ (x,s,u,z,y,v,t,w,x) می‌باشد ولی G_1 شامل هیچ دوری به‌طول ۸ نیست. گرافهای شکل (b) نیز یکریخت نیستند. چون G_2 شامل دوری به‌طول ۴ (u,v,x,w,u) هست ولی G_1 شامل هیچ دوری به‌طول ۴ نیست.

و اما در مورد گرافهای شکل (c) درجه تمام رئوس در هر ۲ گراف ۳ است. به‌طور دلخواه a را به u نظیر می‌کنیم. چون $\{a,b\}\notin E_1$ و $f(a)=u$، b را باید به‌رأسی از G_2 نظیر کرد که مجاور با u نباشد پس نمی‌توان آن را به v و y و x نظیر کرد و باید به‌یکی از ۲ رأس w یا z نظیر شود. به‌این ترتیب b را به w نظیر می‌کنیم. اکنون نوبت به‌رأس c رسیده. چون $\{\underset{\substack{\downarrow\\ u}}{a},c\}\in E_1$ و $\{\underset{\substack{\downarrow\\ w}}{b},c\}\notin E_1$، لذا c را باید به‌رأسی نظیر کرد که مجاور u باشد ولی با w مجاور نباشد بنابراین نمی‌توان c را به v و y و z نظیر کرد پس c→x و با ادامهٔ این روند تناظر زیر را به‌دست خواهیم آورد.

a→u و b→w و c→x

d→y و e→v و f→z

(البته یکتا نیست) که در هر ۲ شرط تعریف صدق می‌کند. لذا دو گراف یکریختند. و گزینهٔ (پ) صحیح است.



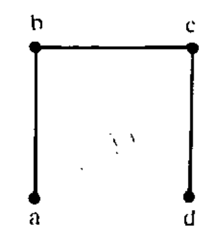
شکل (۱٦)

◀ تعریف: گراف خود مکمل:

(self−complementary graph)

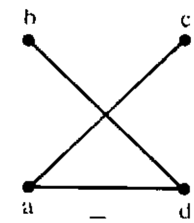
هرگاه G یک گراف بی‌جهت باشد، اگر G و $\overline{G}$ یکریخت باشند آنگاه G را یک گراف خود مکمل (خود متمم گویند).

مثال ۱۳: گراف شکل (۱۷) یک گراف خود مکمل است. چون باتوجه به‌شکل (۱۸) G و $\overline{G}$ هر دو مسیری به‌طول ۳ هستند و مسیرهای هم طول یکریخت می‌باشند.



(G)

شکل (۱۷)



($\overline{G}$)

شکل (۱۸)

تست ۳: هرگاه G یک گراف خود مکمل با n رأس باشد، تعداد یالهای گراف G با کدام گزینه برابر است.

الف) n ب) $\binom{n}{2}$ پ) $2\times\binom{n}{2}$ ت) $\dfrac{\binom{n}{2}}{2}$

حل: چون G و $\overline{G}$ یکریخت هستند پس $E(G)=E(\overline{G})$. از طرفی می‌دانیم $|E(G)|+|E(\overline{G})|=\binom{n}{2}$. (چون G ، n رأس دارد). لذا $2|E(G)|=\binom{n}{2}$ و $|E(G)|=\dfrac{\binom{n}{2}}{2}$ و گزینهٔ (ت) درست است.

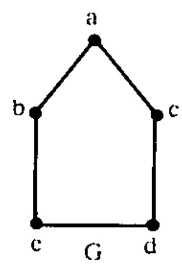
مسئله ۷: فرض کنید G دوری با n رأس باشد. ثابت کنید G خود متمم است اگر و فقط اگر n=۵.

اثبات: **قسمت لزوم)** فرض می‌کنیم G دوری با n رأس و خود متمم‌باشد. ثابت می‌کنیم n=۵ . چون G گرافی خود مکمل با n رأس است طبق تست بالا، تعداد یالهای گراف G، $\dfrac{\binom{n}{2}}{2}$ است. از طرفی چون G دوری با n رأس است پس تعداد یالهای G نیز n می‌باشد. لذا $n=\dfrac{\binom{n}{2}}{2}$

$$n=\frac{1}{2}\binom{n}{2}\Rightarrow n=\frac{1}{4}n(n-1)\Rightarrow$$

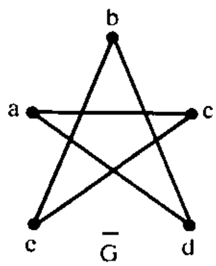
$$n^{2}-5n=0\Rightarrow\begin{cases} n=0 & \text{غیرممکن} \\ \boxed{n=5} \end{cases}$$

اثبات کفایت: فرض می‌کنیم G دوری با ۵ رأس باشد، ثابت می‌کنیم خود متمم است. هرگاه G دوری با یالهای ab,bc,cd,dc,ea مطابق شکل (۱۹) باشد، آنگاه $\overline{G}$ نیز مطابق شکل (۲۰) دوری با ۵ یال ac,ce,eb,bd,da می‌باشد. لذا G و $\overline{G}$ هر دو دورهایی هم طول و درنتیجه یکریخت هستند و G خود متمم است.



G

شکل (۱۹)



$\overline{G}$

شکل (۲۰)

قضیه: هرگاه G=(V,E) یک گراف بی‌جهت یا چندگانه باشد، آنگاه $\sum_{v\in V}\deg(v)=2|E|$.

اثبات این قضیه در کتاب جبر و احتمال نظام جدید آمده است.

◀ تعریف: گراف منظم (regular graph)

گراف بی‌جهت یا چندگانه‌ای را که درجهٔ تمام رئوس آن مساوی باشد گراف منظم می‌نامیم. مثلاً گرافهای شکلهای (۱۹) و (۲۰) را یک گراف ۲ ـ منتظم می‌نامیم. چون درجهٔ تمام رئوس آنها ۲ است. به‌طور کلی هر گراف همبند و ۲ منتظم را یک دور می‌نامیم.

مسئلهٔ ۸: الف) آیا گراف منظمی وجود دارد که درجه تمام رئوس آن ۴ باشد و ۱۰ یال داشته باشد؟

ب) در سؤال بالا به‌جای عدد ۱۰، ۱۵ قرار داده و پاسخ دهید.

حل: الف) فرض می‌کنیم چنین گرافی موجود و n رأس داشته باشد. برای هر رأس دلخواه مانند x: $\deg(x)=4$ ، پس طبق تعریف گراف منظم داریم: $\sum_{x\in V}\deg(x)=4n$.

از طرفی طبق قضیه بالا $\sum_{x\in V}\deg(x)=2|E|=20$ بنابراین $4n=20$ و $n=5$. چنین گرافی موجود و ۵ رأس دارد.

ب) فرض می‌کنیم تعداد رئوس این گراف n باشد لذا:

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{x\in V}\deg(x)=4n\\ \text{از طرفی } \sum_{x\in V}\deg(x)=2|E|=30\end{array}\right\}\Rightarrow 4n=30\Rightarrow n=\frac{30}{4}$$

n به‌دست آمده عدد طبیعی نیست پس چنین گرافی موجود نیست.

تست ۴: هرگاه $G=(V,E)$ دارای ۱۰ یال و ۲ رأس از درجه ۴ و بقیه رئوس از درجه ۳ باشد، تعداد رئوس این گراف باکدامیک از گزینه‌های زیر برابر است.

الف) ۴ ب) ۵ پ) ۶ ت) ۷

حل: فرض می‌کنیم تعداد رئوس درجه ۳، n تا باشد پس

$$20=2|E|=\sum_{x\in V}\deg x=2\times 4+3\times n=8+3n$$

$$\Rightarrow 8+3n=20\Rightarrow n=4\Rightarrow \text{تعداد رئوس گراف}=4+2=6\Rightarrow$$

گزینه (پ) درست است.

تست ۵: اگر $G=(V,E)$ یک گراف همبند باشد که $|E|=17$ و برای هر $a\in V$، $\deg a\ge 3$ حداکثر مقدار $|V|$ کدام است.

الف) ۱۰ ب) ۱۱ پ) ۱۲ ت) نمی‌توان تعیین کرد.

حل: فرض می‌کنیم تعداد رئوس G، n باشد.

$$\forall a\in V,\ \deg(a)\ge 3\Rightarrow \sum_{a\in V}\deg(a)\ge 3n\Rightarrow 2|E|\ge 3n$$

$$\Rightarrow 34\ge 3n\Rightarrow n\le\frac{34}{3}=11/\ldots\Rightarrow$$

لذا حداکثر مقدار $|V|$، ۱۱ می‌باشد و گزینه (ب) درست است.

مسئله ۹: فرض کنید G یک گراف بی‌جهت با n رأس و e لبه (یال) باشد و $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ به‌ترتیب بزرگترین و کوچکترین درجه در بین درجه‌های رئوس گراف g باشند. ثابت کنید $\delta\le 2(\frac{e}{n})\le\Delta$.

حل: طبق تعریف مذکور برای هر رأس دلخواه G مانند a داریم: $\delta\le\deg(a)\le\Delta$ لذا:

$$\sum_{a\in V}\delta\le\sum_{a\in V}\deg(a)\le\sum_{a\in V}\Delta\Rightarrow\delta|V|\le 2|E|\le\Delta|V|\ \div|V|\ \Longrightarrow$$

$$\delta\le\frac{2|E|}{|V|\le\Delta\Rightarrow\delta}\le\frac{2e}{n}\le\Delta.$$

$$\underbrace{\delta+\delta+\delta+\ldots+\delta}_{|V|\text{ بار}}=\delta|V|$$

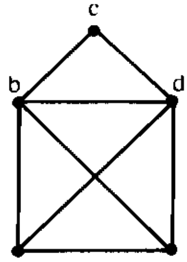
◀ تعریف: مدار اویلری و خط سیر اویلری

(Euler circuit and Euler trail)

فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف بی‌جهت یا چندگانه باشد. هرگاه مداری در G موجود باشد که از هر رأس G بگذرد و از هر یال دقیقاً یک بار بگذرد، گوییم G مدار اویلری دارد (یا به‌اختصار G گراف اویلری است).

هرگاه خط سیری در G موجود باشد چنانکه از هر رأس G بگذرد و از هر یال دقیقاً یک بار بگذرد، آن را خط سیر اویلری می‌نامیم.

مسئله ۱۰: در گراف شکل (۲۱)، الف) آیا می‌توان از یک رأس شروع کرد و از هر یال دقیقاً یک بار گذشت و به‌همان رأس اول رسید (به‌عبارت دیگر آیا گراف اویلری است؟)



شکل (۲۱)

ب) آیا می‌توان از یک رأس شروع کرد و از هر یال دقیقاً یک بار گذشت و به‌رأس دیگری به‌جز رأس اول بازگشت (به‌عبارت دیگر آیا گراف خط سیر اویلری دارد)؟

حل: الف) خیر. ب) بله مثلاً با طی کردن دنبالهٔ رئوس a,b,c,d,e,b,d,a,e خط سیر اویلری از a به e خواهیم داشت.

قضیه: فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف بی‌جهت یا چندگانه باشد. G مدار اویلری دارد (G گراف اویلری است)، اگر و تنها اگر G همبند باشد و تمام رئوس آن درجه زوج داشته باشند.

اثبات قسمت لزوم در کتاب درسی ذکر شده و اثبات کفایت با کمک استقراء روی تعداد یالهای G انجام می‌گیرد و از نوشتن آن صرف‌نظر می‌شود.

نتیجه: فرض کنید $G=(V,E)$ یک نمودار بی‌جهت یا چندگانه باشد. G خط سیر اویلری دارد اگر و تنها اگر همبند باشد و فقط ۲ رأس با درجه فرد داشته باشد.

اثبات: قسمت لزوم) فرض می‌کنیم G همبند و a و b دو رأس G با درجه فرد باشند. یال $\{a,b\}$ را به‌گراف G اضافه می‌کنیم. اکنون

گراف حاصل (G_1) همبند است و تمام رئوس آن زوج هستند. بنابراین طبق قضیه بالا، G_1 مدار اویلری دارد. حال با حذف یال $\{a,b\}$ از این مدار، خط سیر اویلری برای G به‌دست خواهیم آورد. (بنابراین رأس شروع و پایان خط سیر اویلری دارای درجه فرد هستند.)

اثبات: قسمت کفایت) فرض می‌کنیم $G=(V,E)$ یک خط سیر اویلری از a به b داشته باشد. با اضافه کردن یال $\{a,b\}$ به گراف G گراف بزرگتر $G_1=(V_1,E_1)$ تشکیل می‌شود که G_1 مدار اویلری دارد. بنابراین طبق قضیه بالا، G_1 همبند و تمام رئوس آن زوجند. با حذف یال $\{a,b\}$ از G_1 تمام رئوس G دارای درجه‌های زوج خواهند بود به‌جز a و b

$\deg_G(a)=\deg_{G_1}(a)-1$ و $\deg_G(b)=\deg_{G_1}(b)-1$.

بنابراین رئوس a و b در G درجه فرد دارند و نیز چون یالها در خط سیر اویلری تشکیل داده‌اند بنابراین G همبند است.

گراف شکل (۲۱) همبند است و نیز ۲ رأس با درجه فرد دارد. لذا با استفاده از این نتیجه فوراً می‌توان ادعا کرد خط سیر اویلری دارد.

مسئله ۱۱ الف) اگر گراف کامل k_n مدار اویلری داشته باشد، مقدار n را مشخص کنید.

ب) اگر گراف کامل k_n خط سیر اویلری داشته باشد ولی مدار اویلری نداشته باشد، مقدار n را مشخص کنید.

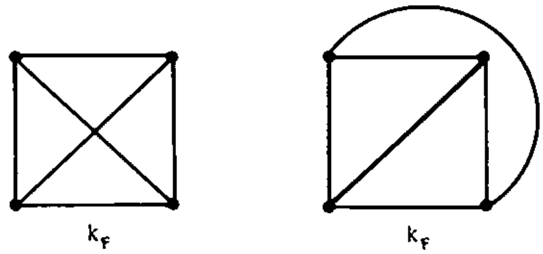
حل: الف) طبق تعریف گراف کامل، درجهٔ هر رأس k_n، $n-1$ می‌باشد. لذا طبق قضیه شرط اویلری بودن k_n آن است که $n-1$ زوج و درنتیجه n باید فرد باشد.

ب) $n=2$ k_2 خط سیر اویلری دارد ولی گراف اویلری نیست.

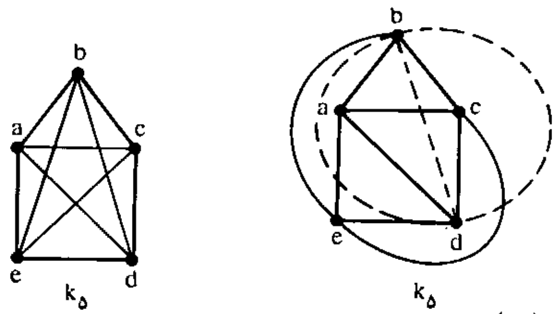
◄ تعریف: گراف مسطح (planar graph)

گراف G را مسطح گوییم، هرگاه بتوان G را در صفحه چنان رسم کرد که یالهای آن فقط یکدیگر را در رئوس قطع کنند.

مثال ۱۴: k_4 گراف مسطح می‌باشد، چون می‌توان آن را مطابق شکل (۲۲) چنان رسم کرد که یالها فقط در رئوس یکدیگر را قطع کنند. گراف k_5 چطور؟ آیا مسطح است؟ باید ببینیم آیا می‌توان یالهای آن را چنان رسم کرد که فقط در رئوس همدیگر را قطع کنند؟ این کار را مطابق شکل (۲۳) تا ۹ مرحله انجام می‌دهیم (خطوط پر). اینک نوبت به‌آخرین یال یعنی $\{b,d\}$ رسیده. آیا آن را هم می‌توان طوری رسم کرد که یالهای دیگر را فقط در رئوس قطع کند؟



شکل (۲۲)

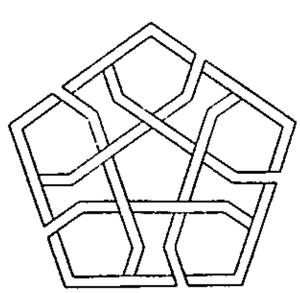


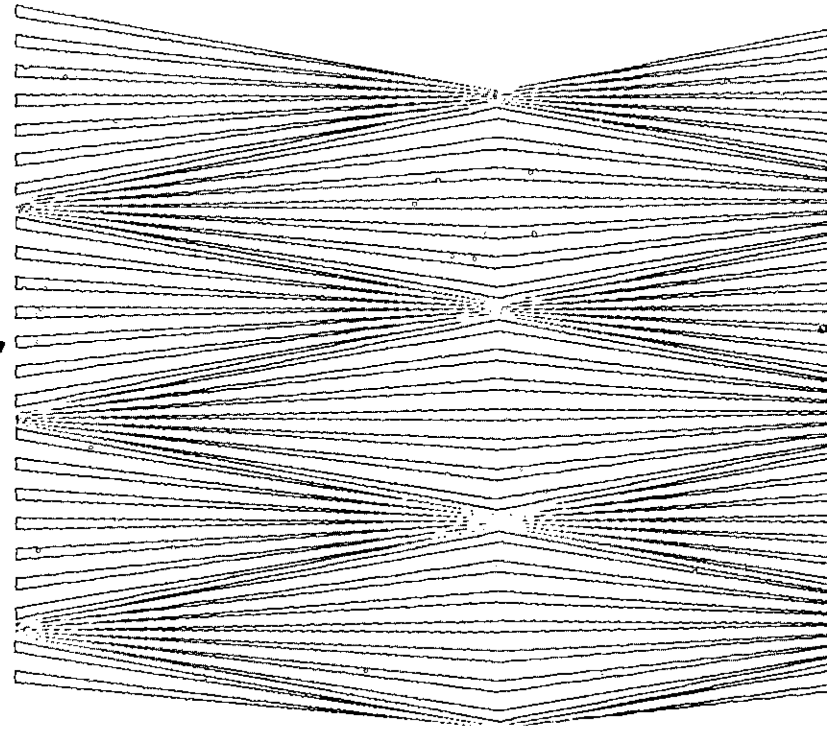
شکل (۲۳)

آزمایش می‌کنیم. ۳ راه مختلف برای رسم $\{b,d\}$ موجود است که با خط‌چین نشان داده شده، می‌بینیم در هر ۳ مورد یال $\{b,d\}$ یالهای دیگر را در نقطه‌ای به‌جز رأس قطع خواهد کرد. لذا k_5 مسطح نیست. باتوجه به‌مراحل بالا، بدیهی است که اگر از k_5 یک یال (مثلاً $\{b,d\}$) را برداریم، گراف حاصل مسطح خواهند بود.

○ یادداشت:

* در تعریفی که برای گراف در کتاب گریمالدی ارائه شده، هر رأس می‌تواند به‌وسیلهٔ یک حلقه با خودش نیز مجاور باشد، به‌همین علت در برخی تمرینات مخصوصاً به‌بی‌طوقه بودن گراف اشاره شده، ولی در این مقاله به‌علت هماهنگی با تعریف ارائه‌شده برای گراف در کتاب پیش‌دانشگاهی، بر تمایز رئوس مجاور تأکید شده و لذا در تمرینات مورد استفاده نیز بی‌طوقه بودن گراف حذف شده. چون در تعریف نهفته است.





خطهای راست و صفحه‌های عمودبرهم در فضا

(قسمت دوّم)

(قسمت اوّل در شمارهٔ ۱۵ به چاپ رسیده است)

● پرویز شهریاری

§ ۴. تصویر قائم برصفحه. قضیهٔ سه عمود

۱. حالت خاص تصویر موازی از یک شکل برصفحه را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. اگر تصویر برصفحه α، به موازات خط راست l که بر α عموداست، انجام گیرد، آن وقت تصویر را، **تصویر قائم** گویند.

در تصویر قائم برصفحه، هرخط راست تصویر کننده، برصفحهٔ تصویر عمود است (بند ۳، قضیه ۲).

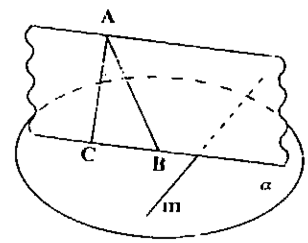
تصویر قائم، بیش از هر نوع دیگری از تصویر، درعمل کاربرد دارد. مثلاً، برای نشان دادن ویژگیهای یک قطعهٔ صنعتی، تصویر قائم آن را روی دوصفحه نشان می‌دهند: صفحهٔ افقی H و صفحهٔ قائم V. از این به‌بعد و برای سادگی کار، به جای «تصویر قائم شکل»، خواهیم گفت «تصویر شکل».

۲. اکنون به قضیه سه عمود می‌پردازیم.

وقتی که خط راست، صفحه‌ای را قطع کند، ولی برآن عمود نباشد، خط راست را، نسبت به صفحه، **مایل** می‌نامیم.

قضیه ٦. خط راست واقع برصفحه وقتی، و تنها وقتی، برمایل نسبت به این صفحه عمود است که، برتصویر مایل روی صفحه، عمودباشد.

شکل (۷)



اثبات. صفحهٔ α، $(AC)\perp\alpha$، (AB) مایل نسبت به‌صفحهٔ α و (CB) تصویر این مایل برصفحهٔ α را درنظر می‌گیریم (شکل ۷).

۱) m را خط راستی واقع برصفحهٔ α می‌گیریم که برخط راست CB عمود باشد. باید ثابت کنیم $m\perp(AB)$.

از تعریف عمود برصفحه نتیجه می‌شود $(AC)\perp m$، به این ترتیب، خط راست m بردوخط متقاطع CB و AC واقع برصفحهٔ ABC عمود است و، در نتیجه، بنابرقضیهٔ ۱، برصفحهٔ ABC عمود خواهدبود؛ و از آن جا $m\perp(AB)$.

۲) $m\subset\alpha$ و $m\perp(AB)$ فرض می‌کنیم؛ چون علاوه برآن، $(AC)\perp m$، پس $m\perp(ABC)$. بنابراین $m\perp(CB)$.

پرسشها و مسأله‌ها

۱۱. از نقطهٔ A، عمود AB و مایل AC رانسبت به صفحهٔ α رسم کرده‌ایم $(C\subset\alpha\ ,\ B\subset\alpha)$. ۱) مطلوب است طول تصویر پاره‌خط راست AC، به‌شرطی که $|AC|=37\text{cm}$ و $|AB|=35\text{cm}$. ۲) مطلوب است $|AC|$، به‌شرطی که $|AB|=6\text{cm}$ و $B\hat{A}C=60^\circ$. ۳) مطلوب است $|AB|$، به شرطی که $|AC|=2\sqrt{10}\text{cm}$ و $|BC|=3|AB|$.

۱۲. از یک نقطه، دومایل یکی به طول ۱۵ سانتی‌متر و دیگری به طول ۲۰ سانتی‌متر نسبت به صفحه‌ای رسم کرده‌ایم (طول هر مایل را تانقطهٔ برخورد آن باصفحه درنظر گرفته‌ایم). تصویر یکی از این پاره خطهای راست، طولی برابر ۱۶ سانتی‌متر دارد؛ طول تصویر پارخط راست دیگر راپیداکنید.

۱۳. به کمک قضیه سه عمود، ثابت کنید، هرقطر مکعب

برصفحه‌ای عمود است که از انتهای سه یالی که دریک رأس باایـن قطر مشترک‌اند، می‌گذرد.

۱۴. خط راست a، صفحهٔ α را قطع کرده و M، یکی از نقطه‌های این صفحه است. آیا روی صفحهٔ α، خط راستی وجود دارد که از نقطهٔ M بگذرد و برخط راست a عمود باشد؟

۱۵. قاعدهٔ هرم MABC، مثلث قائم الزاویه‌ای است که، ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمهٔ آن، طولهایی برابر ۱۰ سانتی‌متر و ۲۴ سانتی‌متر دارند. ارتفاع هرم، ۱۲ سانتی‌متر طول دارد و وتر AB را نصف می‌کند. طول هریک از ارتفاعهای وجه‌های جانبی هرم را، که از M رسم شده‌اند، پیدا کنید.

۱۶. از نقطهٔ O، محل برخورد قطرهای ذوزنقه‌ای، عمود OM به‌طول ۳ سانتی‌متر را برصفحهٔ ذوزنقه رسم کرده‌ایم. فاصلهٔ نقطهٔ M تا دو قاعدهٔ ذوزنقه را پیدا کنید، به‌شرطی که طول دو قاعده به نسبت $\frac{1}{2}$ و ارتفاع ذوزنقه برابر ۱۲ سانتی‌متر باشد.

۱۷. قاعدهٔ یک هرم، مثلث قائم الزاویه‌ای با ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمه ۶ و ۸ سانتی‌متر است. پای ارتفاع هرم، روی رأس قائمهٔ قاعده است و طول این ارتفاع، برابر ۳/۶ سانتی‌متر است. مطلوب است محاسبهٔ فاصلهٔ رأس هرم تا وتر مثلث‌قاعده.

۱۸. مثلثی باضلعهای به طول ۲۰، ۶۵ و ۷۵ سانتی‌متر، قاعده یک هرم را تشکیل می‌دهد. پای ارتفاع هرم، روی رأس زاویهٔ بزرگتر مثلث واقع است. طول این ارتفاع، برابر ۶۰ سانتی‌متراست. مطلوب است فاصلهٔ رأس هرم تاضلع بزرگتر قاعده.

۵. تقارن محوری

دو نقطهٔ M و M_1 از فضا را، نسبت به خط راست l، قرینهٔ یکدیگر گویند، وقتی که، این خط راست، بر پاره‌خط راست MM_1 عمود باشد و آن را نصف کند. دراین صورت، هرنقطه خط راست l، قرینهٔ خودش نسبت به l است.

تعریف. تقارن محوری، به نگاشتی از فضا برخودش گویند که، به‌ازای آن، هرنقطه‌ای، به نقطهٔ قرینهٔ آن، نسبت به خط راست مفروض l، نگاشته شود. درچنین صورتی، خط راست l را، **محور تقارن** گویند.

اگر در تقارن محوری با محور l، نقطهٔ M_1، نگارهٔ نقطهٔ M باشد، می‌نویسند:

$$S_l(M)=M_1$$

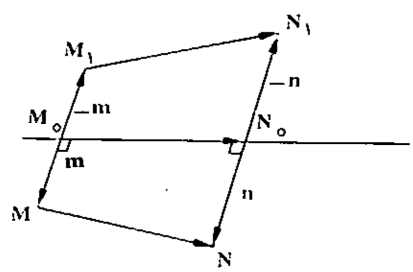
به این ترتیب $S_l(\Phi)=\Phi_1$، به معنای آن است که، در تقارن به محور l، شکل Φ به شکل Φ_1 تبدیل می‌شود.

گویند شکل Φ دارای محورتقارن l است، وقتی که قرینهٔ شکل Φ نسبت به محور l، برخودش منطبق شود: $S_l(\Phi)=\Phi$.

قضیهٔ ۷. تقارن محوری، یک تغییر مکان است.

اثبات. فرض کنید $S_l(M)=M_1$ و $S_l(N)=N_1$ (شکل ۸). ثابت می‌کنیم $|MN|=|M_1N_1|$. بردارهای **m**، **n** و **p** را، آن‌طور که در شکل ۸ دیده می‌شود، درنظر می‌گیریم. بنابر تعریف تقارن محوری داریم:

شکل (۸)



$$\mathbf{m}.\mathbf{p}=\mathbf{n}.\mathbf{p}=0$$

باتوجه به قاعدهٔ چند ضلعی (برای جمع بردارها) به‌دست می‌آید:

$$\overrightarrow{MN}=-\mathbf{m}+\mathbf{p}+\mathbf{n} \quad ; \quad \overrightarrow{M_1N_1}=\mathbf{m}+\mathbf{p}-\mathbf{n}$$

که از آن‌جا خواهیم داشت:

$$|MN|^2=\mathbf{m}^2+\mathbf{p}^2+\mathbf{n}^2-2\mathbf{m}.\mathbf{n}$$
$$|M_1N_1|^2=\mathbf{m}^2+\mathbf{p}^2+\mathbf{n}^2-2\mathbf{m}.\mathbf{n}$$

بنابراین $|MN|^2=|M_1N_1|^2$ و $|MN|=|M_1N_1|$.

از قضیه ۷ نتیجه می‌شود که، تقارن محوری، هرشکل را به شکلی همنهشت با آن تبدیل می‌کند.

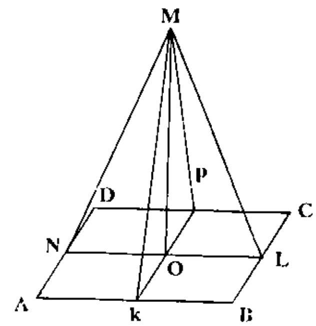
با استفاده از معیار عمود بودن خط راست و صفحه بریکدیگر و همچنین تقارن محوری، می‌توان معیارهای همنهشتی مثلثهایی را که به صورتی دلخواه در فضا قرار دارند، ثابت کرد. تنظیم این معیارها، درست به‌همان صورت هندسهٔ مسطحه است.

مسأله. مربع به‌ضلع برابر a و نقطهٔ M در بیرون صفحهٔ مربع و به‌فاصله d از هر ضلع آن داده‌شده‌است. اگر فاصلهٔ از نقطهٔ M تا صفحهٔ مربع برابر h باشد، d را محاسبه کنید.

حل. ABCD رامربع مفروض می‌گیریم (شکل ۹). $[MO]\perp(ABC)$. از نقطه O، عمودهای [OK]، [OL]، [ON] و [OP] را برضلع‌های مربع فرود می‌آوریم و نقطه‌های K، L، N و P را به M وصل می‌کنیم. بنابر قضیه سه عمود، پاره‌خطهای راست MK، ML، MN و MP، برضلعهای متناظر مربع

عمودند. بنابر شرط مسأله، این پاره‌خطهای راست، طولهایی برابر دارند و ، بنابراین، کافی است، طول یکی از آنها را محاسبه کنیم. داریم $|AB|=a$ و $|MO|=h$ ، $|MK|=d$ را به‌دست می‌آوریم.

شکل (۹)



مثلثهای قائم الزاویه MOK ، MOL ، MON و MOP همنهشت‌اند، یعنی

$$|OK|=|OL|=|ON|=|OP|$$

بنابراین، نقطهٔ O ، مرکز دایرهٔ محاط درمربع ABCD است، از آن‌جا $|OK|=\frac{a}{2}$.

درمثلث MOK داریم:

$$d=\sqrt{|MO|^2+|OK|^2}=\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{4h^2+a^2}$$

پرسشها و مسأله‌ها

۱۹. ۱) در چهار وجهی ABCD ، وجه‌های ABC و ABD، مثلثهای متساوی الساقینی‌اند باقاعدهٔ مشترک AB . قرینهٔ چهاروجهی را نسبت به محور AB پیدا کنید.

۲) منشور قائم $ABCA_1B_1C_1$ مفروض است. قرینهٔ آن را نسبت به محور AA_1 پیدا کنید.

۲۰. قاعدهٔ یک هرم قائم، مثلث‌متساوی الاضلاعی است به ضلع ۶ سانتی‌متر؛ ارتفاع هرم، برابر ۱ سانتی‌متر است. فاصلهٔ رأس هرم تا ضلع قاعده را پیدا کنید.

۲۱. پای ارتفاع هرمی، برمرکز دایرهٔ محاطی مثلث قاعدهٔ هرم، منطبق است. طول این ارتفاع را به‌دست آورید، به‌شرطی که ضلعهای مثلث قاعدهٔ هرم، برابر ۶ ، ۵ و ۵ سانتی متر و فاصله رأس هرم تا یکی از ضلعهای قاعده، برابر ۲/۵ سانتی‌متر باشد.

۲۲. مستطیل ABCD ، با فرض $|AB|=a$ و $|BC|=b$ ، قاعدهٔ هرم SABCD را تشکیل می‌دهد. پای ارتفاع هرم، برمحل برخورد قطرهای مستطیل واقع است و خود ارتفاع، طولی برابر d دارد. مطلوب است طول یالهای جانبی هرم و فاصلهٔ رأس هرم تا ضلعهای قاعده.

۶. فاصلهٔ نقطه تا صفحه

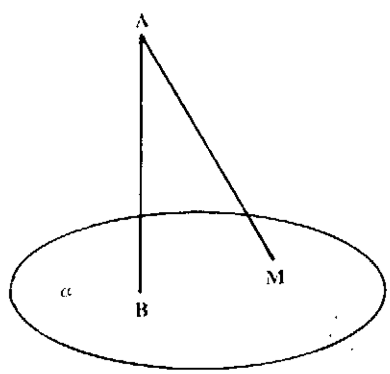
مفهوم فاصلهٔ بین دوشکل را مطرح می‌کنیم که، فاصلهٔ نقطه تا شکل، حالت خاصی از آن می‌شود.

تعریف. اگر درمیان همهٔ فاصله‌هایی که بین نقطه‌های شکل Φ_1 بانقطه‌های شکل Φ_2 به‌دست می‌آید، کمترین فاصله وجود داشته‌باشد، آن را فاصله بین دو شکل Φ_1 و Φ_2 گویند.

قضیهٔ ۸. فاصلهٔ یک نقطه از صفحهٔ مفروض برابر است بافاصلهٔ این نقطه تا تصویر آن براین صفحه.

اثبات. نقطهٔ A و صفحهٔ α را درنظر می‌گیریم (شکل ۱۰).

شکل (۱۰)



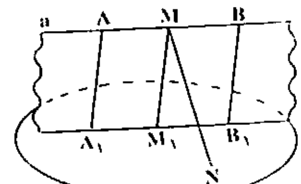
در حالت $A\notin\alpha$ ، B را تصویر A برصفحهٔ α و M رانقطهٔ دلخواه این صفحه ، متفاوت با B ، فرض می‌کنیم. باید ثابت کنیم: $|AB|<|AM|$.

خط راست MB را رسم می‌کنیم، دراین صورت $[AB]\perp(MB)$. درصفحهٔ MAB ، نقطهٔ B ، تصویر A برخط راست BM است، یعنی $|AB|<|AM|$. بنابراین ، $|AB|$ فاصلهٔ نقطهٔ A از صفحهٔ α است.

در حالت $A\in\alpha$ ، مطلب روشن‌است. در واقع، دراین حالت، فاصله A از صفحه برابر صفر و، درضمن، فاصلهٔ A از تصویر آن برصفحه هم، برابر صفر است.

مسأله. ثابت کنید، فاصلهٔ یک خط راست از صفحه‌ای که باآن موازی است، برابر است با فاصلهٔ نقطهٔ دلخواهی از خط راست تا صفحهٔ مفروض.

شکل (۱۱)



حل. فرض کنید $a \parallel \alpha$ ولی $a \not\subset \alpha$ (شکل ۱۱). از نقطه‌های دلخواه A و B واقع برخط راست a، عمودهای $[AA_1]$ و $[BB_1]$ را برصفحهٔ α فرود می‌آوریم. چون دوخط راست AA_1 و BB_1 و همچنین دوخط راست AB و A_1B_1 باهم موازی‌اند، پس $|AA_1| = |BB_1|$. واین، به معنای آن است که فاصلهٔ هر نقطه از خط راست a تاصفحهٔ α، به‌جای این نقطه ارتباطی ندارد.

اکنون پاره‌خط راست MN را درنظر می‌گیریم که نقطهٔ دلخواه $M\in a$ را به نقطهٔ $N\in\alpha$ وصل کرده‌است و برصفحهٔ α عمود نیست. اگر M_1 تصویر نقطهٔ M برصفحهٔ α باشد، آن وقت بنابر قضیهٔ ۸ داریم: $|MN| > |MN_1|$.

به این ترتیب، $|MM_1|$ فاصله بین خط راست a و صفحهٔ α است.

درحالت $a\subset\alpha$ هم، درستی حکم به قوت خود باقی است؛ دراین حالت خاص، هردو فاصله‌ای که درصورت مسأله آمده است، برابر صفرند.

پرسشها و مسأله‌ها

۲۳. وجه ABC از چهاروجهی ABCD، مثلثی است متساوی‌الاضلاع باضلع به طول a و هریک از یالهای DA، DB، DC، طولی برابر b دارند. مطلوب است فاصلهٔ از رأس D تا صفحهٔ وجه ABC.

۲۴. یال مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ برابر a است. مطلوب است فاصلهٔ: ۱) از رأس A تاصفحهٔ BB_1D_1؛ ۲) از رأس A_1 تا صفحهٔ AB_1D_1.

۲۵. ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمه از مثلث قائم‌الزاویه‌ای برابر ۳ سانتی‌متر و ۴ سانتی متر است. نقطهٔ M به فاصلهٔ ۶ سانتی‌متر از صفحهٔ مثلث و، درضمن، به‌یک فاصله از سه رأس مثلث است. فاصلهٔ اخیر را محاسبه کنید.

۲۶. لوزی به‌ضلع ۶ سانتی‌متر و زاویهٔ ۶۰ درجه داده‌شده‌است. نقطهٔ M، به‌فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر از صفحهٔ لوزی و به یک فاصله از خطهای راست شامل ضلعهای آن واقع است. این فاصله را محاسبه کنید.

۲۷. ۱) روی صفحهٔ α، دوخط راست موازی باهم و به فاصلهٔ m از یکدیگر، رسم شده‌است. نقطهٔ S به‌فاصلهٔ h از صفحهٔ α و، درضمن، به‌یک فاصله از دوخط موازی واقع است. این فاصله را پیداکنید.

۲) خطهای راست موازی a و b را، به فاصلهٔ ۴۴ سانتی‌متر از یکدیگر، روی صفحهٔ α رسم کرده‌ایم. خط راست c موازی باخطهای راست مفروض و به فاصلهٔ ۱۵ سانتی‌متر از صفحهٔ α قرار دارد. اگر فاصلهٔ c تا a برابر ۳۹ سانتی‌متر باشد، فاصلهٔ بین c و b را پیداکنید.

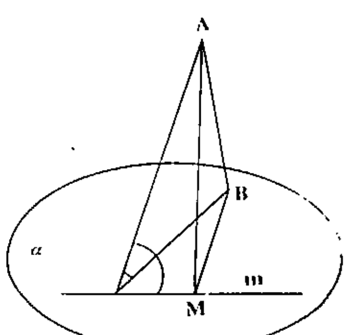
۲۸. مطلوب است مجموعهٔ نقطه‌هایی که از صفحهٔ مفروض به فاصلهٔ: ۱) برابر ۱؛ ۲) کوچکتر از ۱ باشند.

۷. زاویه بین خط راست وصفحه

قضیه ۹. زاویهٔ بین خط راستی که برصفحهٔ مفروض عمود نیست و تصویر آن بر این صفحه، کوچکترین زاویه‌ای است که خط راست باهریک از خطهای راست واقع برصفحه می‌سازد.

اثبات. (AC) را مایل نسبت به صفحهٔ α و $C\in\alpha$ می‌گیریم (شکل ۱۲). عمود AB برصفحهٔ α را رسم می‌کنیم $(B\in\alpha)$. دراین صورت (BC)، تصویر مایل AC برصفحهٔ α است. زاویهٔ بین خطهای راست CA و CB را β و زاویهٔ بین خطهای راست CA و m را (که به‌دلخواه و از نقطهٔ C، روی صفحهٔ α رسم شده‌است)، φ می‌نامیم. باید ثابت کنیم $\beta<\varphi$.

شکل (۱۲)



اگر $m\perp(BC)$، بنابرقضیهٔ سه عمود $\varphi=90^\circ$. دراین حالت، قضیه درست است، زیرا $\beta<90^\circ$.

اگر $m=(BC)$، آن وقت $\varphi=\beta$ و باز هم قضیه درست است.

اکنون حالتی را درنظر می‌گیریم که خط راست m عمود بر (BC) و یا منطبق برآن نباشد. پاره‌خط راست BM را عمودبر m رسم $(M\in m)$ و M را به A وصل می‌کنیم، دراین صورت

$[AM]\perp m$ (قضیه سه عمود). در مثلثهای قائم الزاویهٔ ACB و ACM داریم:

$$\sin\beta=\frac{|AB|}{|AC|}\quad,\quad \sin\varphi=\frac{|AM|}{|AC|}$$

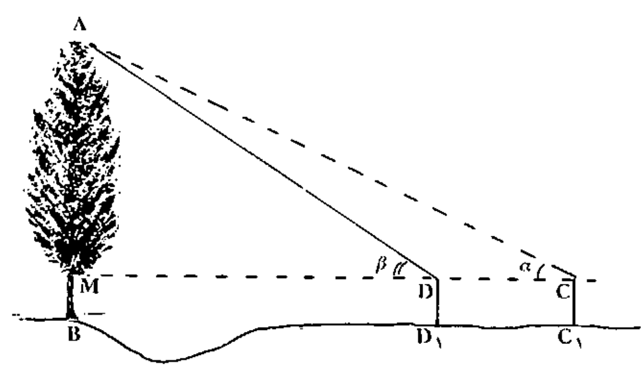
ولی $[AB]\perp\alpha$، بنابراین $[AB]<[AM]$ (بند ۶). به این ترتیب $\sin\beta<\sin\varphi$ و $\beta<\varphi$.

تعریف. زاویهٔ بین خط راست مایل نسبت به‌صفحه، باصفحه، به‌زاویهٔ بین مایل و تصویر آن برصفحه، گفته می‌شود.

زاویه بین مایل a و صفحهٔ α را بانماد $(\widehat{a,\alpha})$ نشان می‌دهند که برای آن داریم: $0^\circ<(\widehat{a,\alpha})<90^\circ$.

مسأله. ارتفاع [AB] را پیداکنید، به‌شرطی که نقطه‌های A وB در دسترس نباشند شکل (۱۳).

(شکل ۱۳)



حل. پاره‌خط راست C_1D_1 را روی زمین و درجهت نقطهٔ B انتخاب می‌کنیم و طول آن را اندازه می‌گیریم؛ سپس، اندازهٔ زاویه‌های ACM و ADM را به‌دست می‌آوریم. فرض کنید: $|C_1D_1|=b$ ، $\widehat{ACM}=\alpha$ ، $\widehat{ADM}=\beta$. ارتفاع $|CC_1|$ را (ارتفاع ابزاری که برای اندازه‌گیری زاویه‌ها مورد استفاده قرارمی‌گیرد) h می‌نامیم. باتوجه به‌قضیهٔ سینوسها در مثلث ACD داریم:

$$|AD|:\sin\alpha=|CD|:\sin\widehat{CAD}$$

ولی $|CD|=b$ و $\widehat{CAD}=\beta-\alpha$. در این صورت

$$|AD|=\frac{b\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$$

درمثلث قائم‌الزاویهٔ ADM داریم:

$$|AM|=|AD|.\sin\beta$$

وبنابراین، سرانجام، به‌دست می‌آید:

$$|AB|=\frac{b\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}+h$$

مسائل مسابقه‌ای

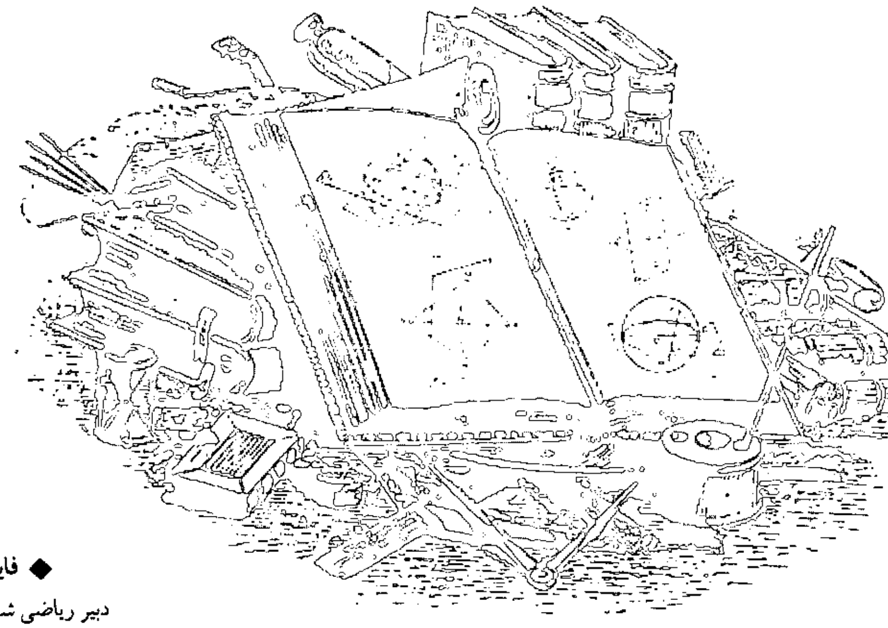
۱ـ ثابت کنید: هرگاه n عددی صحیح و مثبت باشد و n مربع کامل نباشد آنگاه $\sqrt{n}$ گنگ است.

۲ـ اگر $a_1, ..., a_n$ و $b_1, ..., b_n$ عددهای حقیقی دلخواه باشند ثابت کنید:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k b_k\right)^2\le\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)$$

(این نامساوی به نامساوی کوشی ـ شوارتز معروف است)

لازم به تذکر است که اولاً: حل مسائل مسابقه‌ای ۱۵ که می‌بایست در این شماره بیاید در شمارهٔ آینده چاپ خواهد شد و ثانیاً: برای پاسخگویی به‌مسائل‌مسابقه‌ای ۲ ماه فرصت‌دارید و روی پاکت نامه حتماً قیدکنید «مربوط به‌مسائل‌مسابقهٔ شمارهٔ ...»



◆ فایق رشیدزاده
دبیر ریاضی شهرستان مهاباد

گزارشی از بیست و ششمین کنفرانس ریاضی کشور

دانشگاه شهید باهُنر کرمان در روزهای ۸ تا ۱۱ فروردین ۷۴ میزبان بیست‌و ششمین کنفرانس ریاضی کشور بود. این کنفرانس با همکاری انجمن ریاضی ایران و با پشتیبانی مسؤولان عالی رتبهٔ کشور، وزارتخانه‌ها و استانداری کرمان برگزار شد. در این کنفرانس بیش از ۱۰۰۰ نفر از جمله عده‌ای از ریاضیدانان خارجی و ریاضیدانان ایرانی مقیم خارج از کشور شرکت داشتند. سخنرانیها در دو زمینهٔ عمومی و تخصصی ارائه شد و در این کنفرانس برای دومین بار شاهد فعالیت کارگاههای آموزش ریاضی، آنالیز عددی، هندسه و ریاضیات فازی بودیم، که استقبال دبیران ریاضی کشور از این کارگاه آموزش ریاضی، چشمگیر بود. اقدام شایستهٔ کمیته اجرایی کنفرانس انتشار کتب کارگاهها و ارائه آن به شرکت کنندگان بود. در کنار کنفرانس میزگرد نظام جدید و مجمع عمومی انجمن ریاضی ایران و همچنین مسابقهٔ ریاضی دانشجویی برگزار شد. علاوه بر این نمایشگاه کتابهای ریاضی خارجی و نمایشگاه و فروشگاه کتابهای علوم پایه فارسی و اجرای تأتر و کنسرت موسیقی و تورهای مسافرتی ماهان و بم از فعالیتهای جنبی و مفید این کنفرانس بود.

استقبال چشمگیر از کُنسرت موسیقی گروه تنبور نوازان با صدای گرم اُستاد جلال‌الدّین محمدیان نشانهٔ تلاش اعضای کمیته اجرایی و همکاری ادارهٔ فرهنگ و ارشاد اسلامی استان کرمان است. همچنین صفهای طویل شرکت‌کنندگان کنفرانس، برای رزرو بلیط تورهای مسافرتی ماهان و بم حاکی از جذابیت آثار تاریخی استان کرمان و استقبال شرکت‌کنندگان از این برنامه ها بود.

میزگرد نظام جدید آموزش متوسطه نیز با استقبال گرم دبیران ریاضی کشور همراه بود. در این میزگرد مهندس علاقه‌مندان، تنی چند از اساتید دانشگاه و دبیران شرکت داشتند. ابتدا مهندس علاقه‌مندان هدفهای نظام جدید و مقایسهٔ آن با نظام فعلی را برای حاضران تشریح کردند. سپس اساتید دانشگاه هر یک مزایا و مشکلات نظام جدید را مورد بحث و بررسی قرار دادند. در پایان میزگرد بر این نکته تأکید شد تمام دست‌اندرکاران، اساتید و دبیران محترم، باید در پیاده کردن نظام جدید همکاری نزدیک و بیشتری داشته باشند.

یکی از تصمیم‌های خوب کنفرانس، تجلیلی بود که از چهار استاد و پژوهشگر ریاضیات به عمل آورد. در جلسهٔ عمومی کنفرانس، پیش از ظهر هشتم فروردین، آقایان دکتر جواد بهبودیان، دکتر ابوالقاسم قربانی، دکتر هادی شفیعیها و پرویز شهریاری، به‌عنوان پیش‌کسوتان ریاضی کشور به شرکت کنندگان معرفی شدند و هدیه‌هایی دریافت کردند.

حرف آخر اینکه تلاش شبانه‌روزی کمیتهٔ اجرایی کنفرانس، دبیر کنفرانس، دانشجویان دانشگاه شهید باهنر کادر خدماتی و مقامات مؤسسه‌های مختلف استان کرمان، در هر چه بهتر برگزار کردن کنفرانس قابل تقدیر و ستودنی بود. که به حق در تحقق این هدف موفق و سرافراز شدند.

رادیکال

(قسمت اول)

● سیدمحمدرضا هاشمی موسوی

عددهای گنگ

هر عددی که قابل تبدیل به‌نسبت دو عدد درست نباشد، عددی گنگ (اصم) است. می‌دانیم طول قطر مربعی به‌ضلع ۱ واحد، برابر $\sqrt{۲}$ است، که یک عدد گنگ است. بدیهی است که هیچ عدد گویایی نمی‌توان یافت که دقیقاً برابر $\sqrt{۲}$ باشد، زیرا:

$$۱/۴^{۲}=۱/۹۶<۲<۱/۵^{۲}=۲/۲۵$$
$$۱/۴۱^{۲}=۱/۹۸۸۱<۲<۱/۴۲^{۲}=۲/۰۱۶۴$$
$$۱/۴۱۴^{۲}=۱/۹۹۹۳۹۶<۲<۱/۴۱۵^{۲}=۲/۰۰۲۲۲۵$$
$$۱/۴۱۴۲^{۲}=۱/۹۹۹۹۶۱۶۴<۲<۱/۴۱۴۳^{۲}=۲/۰۰۰۲۴۴۴۹$$

و هرچه کار را ادامه دهیم، به‌یک عدد دهدهی نخواهیم رسید که مجذور آن برابر ۲ باشد. به‌عبارت دیگر اگر m و n عددهایی درست فرض شوند، نمی‌توان $\sqrt{۲}$ را به‌صورت نسبت $\frac{m}{n}$ نوشت. در اینجا این مطلب را با روش «برهان خلف» به‌اثبات می‌رسانیم: اگر $\frac{m}{n}$ را کسری ساده‌نشدنی فرض کنیم، یعنی m و n نسبت به‌هم، اول باشند. به‌بیان دیگر بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد m و n برابر واحد باشد (دو عدد m و n، هر دو، جز واحد بر هیچ عدد دیگری، بخش‌پذیر نباشند).

و فرض کنیم $\sqrt{۲}$ عدد گویا باشد و داشته باشیم:

$$\sqrt{۲}=\frac{m}{n} \Rightarrow ۲=\frac{m^{۲}}{n^{۲}} \Rightarrow m^{۲}=۲n^{۲} \qquad (۱)$$

از تساوی (۱) نتیجه می‌شود که سمت راست برابری بر ۲ بخش‌پذیر است، پس باید $m^{۲}$، یعنی m هم بر ۲ بخش‌پذیر باشد و داشته باشیم:

$$m=۲k \quad (k\in\mathbb{Z})$$

در برابری (۱)، ۲k را به‌جای m می‌گذاریم:

$$(۲k)^{۲}=۲n^{۲}\Rightarrow ۴k^{۲}=۲n^{۲}\Rightarrow ۲k^{۲}=n^{۲} \qquad (۲)$$

از برابری (۲) هم باید نتیجه گرفت که عدد n نیز بر ۲ بخش‌پذیر است. ولی از آنجا که m و n را نسبت به‌هم اول گرفته بودیم، نتیجه می‌گیریم که فرض ما نادرست بوده است و نمی‌توان $\sqrt{۲}$ را به‌صورت کسر $\frac{m}{n}$ نوشت: $\sqrt{۲}$ یک عدد گنگ است. تعداد عددهای گنگ، بینهایت است؛ از این جالبتر، بین هر دو عدد گویا، یا بین هر دو عدد گنگ، یا بین یک عدد گویا و یک عدد گنگ، بینهایت عدد گنگ وجود دارد. مجموعهٔ همهٔ عددهای گویا و گنگ را، مجموعهٔ عددهای حقیقی (IR) می‌نامند.

ریشهٔ دوم یک عدد

مساحت مربعی ۱۶ سانتیمتر مربع است، طول ضلع مربع چند سانتیمتر است؟

برای حل این مسأله طول ضلع مربع را x سانتیمتر فرض می‌کنیم، در این صورت مساحت مربع $x^{۲}$ خواهد بود:

$$x^{۲}=۱۶ \qquad (۱)$$

در تساوی (۱) باید عدد x را پیدا کنیم؛ یعنی عددی را بیابیم که توان دوم آن ۱۶ باشد. باکمی دقت ملاحظه می‌شود که دو عدد ۴ و ۴− وجود دارند که توان دوم آنها ۱۶ است، زیرا:

$$۴^{۲}=۱۶ \quad و \quad (-۴)^{۲}=۱۶$$

و چون طول ضلع، عدد منفی نمی‌تواند باشد، بنابراین طول ضلع مربع یعنی x برابر ۴ سانتیمتر می‌شود: $x=۴$

عددهای ۴ و ۴− را ریشهٔ دوم عدد ۱۶ می‌نامند.

ریشه‌های دوم عدد $\frac{1}{16}$ عددهای $\frac{1}{4}$ و $-\frac{1}{4}$ می‌باشند، زیرا:

$$(\frac{1}{4})^2=\frac{1}{16} \quad \text{و} \quad (-\frac{1}{4})^2=\frac{1}{16}$$

ریشهٔ دوم ۰ نیز ۰ است، زیرا:

$$0^2=0$$

آیا عدد ۱۶− ریشهٔ دوم دارد؟

عدد ۱۶− ریشهٔ دوم ندارد، زیرا اگر فرض کنیم عددهای ۴ و ۴− و یا هر عدد حقیقی دیگر ریشهٔ دوم ۱۶− باشد، باید توان دوم این عددها (۴ و ۴− و یا هر عدد حقیقی دیگر که ریشهٔ دوم ۱۶− فرض می‌شود) مساوی ۱۶− شود؛ ولی می‌دانیم که توان دوم هر عدد حقیقی هیچگاه عدد منفی نیست؛ از این‌رو عدد ۱۶− ریشهٔ دوم حقیقی ندارد. و به‌همین دلیل:

اعداد منفی ریشهٔ دوم حقیقی ندارند.

همان‌طور که گفته شد، ۴ و ۴− ریشه‌های دوم ۱۶ می‌باشند.

ریشه‌های دوم ۱۶ را با $\sqrt{16}$ و $-\sqrt{16}$ نشان می‌دهیم و به‌ترتیب می‌خوانیم رادیکال ۱۶ و منهای رادیکال ۱۶.

ریشه‌های دوم ۰/۰۱ عبارتند از:

$$\sqrt{0/01}=0/1 \quad \text{و} \quad -\sqrt{0/01}=-0/1$$

زیرا:

$$(0/1)\times(0/1)=0/01 \quad \text{و} \quad (-0/1)\times(-0/1)=0/01$$

ریشه‌های دوم ۲ عبارتند از $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$. ($\sqrt{2}$ همان جذر عدد ۲ است که مقدار آن را با هر تقریبی می‌توان حساب کرد.)

ریشه‌های دوم عدد a (a بزرگتر یا مساوی صفر) را با $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$ نشان می‌دهیم. $\sqrt{a}$ ریشهٔ دوم مثبت a و $-\sqrt{a}$ ریشهٔ دوم منفی a است.

به‌طور کلی اگر x یک عدد حقیقی و a یک عدد مثبت و $x^2=a$ باشد، داریم:

$$x=\sqrt{a} \quad \text{و} \quad x=-\sqrt{a} \quad (a\geq 0)$$

به‌بیان دیگر اگر a یک عدد حقیقی مثبت یا صفر باشد، b را ریشهٔ دوم عدد حقیقی a گویند؛ هرگاه $b^2=a(a\geq 0)$

مثال ۱: ریشه‌های دوم عددهای ۳۶، ۹ و ۱۰۰ و ۰/۰۰۰۱ و ۰/۸۱ و $\frac{9}{16}$ و $\frac{4}{81}$ و ۱ و ۲ و ۴− و ۱۰۰− و $\frac{-1}{9}$ را در صورت وجود بیابید.

حل:

$$\pm\sqrt{36}=\pm 6 \;,\; \pm\sqrt{9}=\pm 3 \;,\; \pm\sqrt{100}=\pm 10 \;,\; \pm\sqrt{0/0001}=\pm 0/01$$

$$\pm\sqrt{0/81}=\pm 0/9 \;,\; \pm\sqrt{\frac{9}{16}}=\pm\frac{3}{4} \;,\; \pm\sqrt{\frac{4}{81}}=\pm\frac{2}{9} \;,$$

$$\pm\sqrt{1}=\pm 1 \;,\; \pm\sqrt{2}\simeq\pm 1/4142$$

عددهای ۴− و ۱۰۰− و $\frac{-1}{9}$، چون عددی منفی هستند، ریشهٔ دوم ندارند.

مثال ۲: حاصل عبارتهای

$$\sqrt{0/04} \;,\; \sqrt{144} \;,\; (\sqrt{36})^2 \;,\; \sqrt{169}$$

$$\sqrt{-1} \;,\; \sqrt{-16} \;,\; \sqrt{-9^2} \;,\; \sqrt{(-2)^2} \;,$$

$$-\sqrt{(-9)^2} \;,\; \sqrt{\frac{25}{4}} \;,\; \sqrt{\frac{16}{81}} \;,\; \sqrt{-(-9)^3} \;,\; \sqrt{-(-2)^2}$$

را در صورت وجود بیابید.

حل:

$$\sqrt{169}=\sqrt{13^2}=13 \;,\; (\sqrt{36})^2=(6)^2=36 \;,$$

$$\sqrt{144}=\sqrt{12^2}=12 \;,\; \sqrt{0/04}=\sqrt{(0/2)^2}=0/2 \;,$$

$$\sqrt{\frac{16}{81}}=\sqrt{\frac{4^2}{9^2}}=\sqrt{(\frac{4}{9})^2}=\frac{4}{9} \;,$$

$$\sqrt{\frac{25}{4}}=\sqrt{\frac{5^2}{2^2}}=\sqrt{(\frac{5}{2})^2}=\frac{5}{2} \;,$$

$$-\sqrt{(-9)^2}=-\sqrt{81}=-9 \;;\; \sqrt{(-2)^2}=\sqrt{4}=\sqrt{2^2}=2$$

$$\sqrt{-(-9)^3}=\sqrt{9^3}=\sqrt{(3^2)^3}=\sqrt{(3^3)^2}=3^3=27$$

عددهای $\sqrt{-81}=\sqrt{-9^2}\;,\;\sqrt{-16}\;,\;\sqrt{-1}\;,\;\sqrt{-4}=\sqrt{-(-2)^2}$ غیرحقیقی می‌باشند. زیرا عددهای منفی جذر و ریشهٔ دوم حقیقی ندارند.

توجه: ریشهٔ دوم مثبت عدد $(-2)^2$ و یا ۴ برابر ۲ است، یعنی:

$$\sqrt{(-2)^2}=\sqrt{4}=2$$

و ریشهٔ دوم منفی عدد $(-2)^2$ و یا ۴ برابر ۲− است، یعنی:

$$-\sqrt{(-2)^2}=-\sqrt{4}=-2$$

همچنین توجه داشته باشید که عبارت $\sqrt{(-9)^2}$ و $\sqrt{-9^2}$ یکی نیست.

زیرا:

$$\sqrt{(-9)^2}=\sqrt{81}=9\ ,\ \sqrt{-9^2}=\sqrt{-81}$$

(عدد ۸۱− ریشهٔ دوم حقیقی ندارد.)

یعنی ریشهٔ دوم مثبت $(-9)^2$ برابر ۹ است و -9^2 ریشهٔ دوم حقیقی ندارد.

محاسبهٔ $\sqrt{x^2}$

برای مثال عبارت $\sqrt{x^2}$ را به‌ازای برخی از مقادیر مختلف x محاسبه می‌کنیم:

$$x=4 \quad : \quad \sqrt{x^2}=\sqrt{4^2}=4$$

$$x=0/2 \quad : \quad \sqrt{x^2}=\sqrt{0/2^2}=0/2$$

$$x=-5 \quad : \quad \sqrt{x^2}=\sqrt{(-5)^2}=\sqrt{25}=5$$

$$x=\frac{-2}{3} \quad : \quad \sqrt{x^2}=\sqrt{\left(\frac{-2}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$$

با دقت در محاسبات اخیر ملاحظه می‌شود که در محاسبهٔ $\sqrt{x^2}$ اگر به‌جای x اعداد مثبت یا صفر قرار دهیم، $\sqrt{x^2}=x$ است و اگر به‌جای x عددهای منفی قرار دهیم، $\sqrt{x^2}=-x$ می‌باشد:

اگر x عددی مثبت یا صفر باشد ($x\geq 0$)، داریم: $\sqrt{x^2}=x$

و اگر x عددی منفی باشد ($x<0$)، داریم: $\sqrt{x^2}=-x$

برای مثال:

$$\sqrt{(+5)^2}=+5\ ,\ \sqrt{(-7)^2}=-(-7)=7$$

$$\sqrt{(-\sqrt{2})^2}=-(-\sqrt{2})=\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{(+\frac{4}{9})}=+\frac{2}{3}$$

$$-\sqrt{(-\frac{5}{7})^2}=-\left[-(-\frac{5}{7})\right]=-\frac{5}{7}\ ,\ -\sqrt{(-5)^2}=-\left(-(-5)\right)=-5$$

مثال ۳: حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید:

1) $5\sqrt{9}+\sqrt{(-4)^2}-4\sqrt{(-3)^2}$

2) $2\sqrt{\frac{25}{36}}-\sqrt{(-\frac{5}{6})^2}$

3) $4\sqrt{(0/01)^2}-4\sqrt{(-0/01)^2}-20\sqrt{\frac{1}{100}}+\sqrt{4}$

4) $\sqrt{1\frac{16}{9}}-\sqrt{(-\frac{5}{9})^2}$

حل:

1) $5\sqrt{9}+\sqrt{(-4)^2}-4\sqrt{(-3)^2}=5(3)-(-4)-4(-(-3))$

$=15+4-12=7$

2) $2\sqrt{\frac{25}{36}}-\sqrt{(-\frac{5}{6})^2}=2(\frac{5}{6})-\left[-(-\frac{5}{6})\right]=\frac{10}{6}-\frac{5}{6}$

$=\frac{10-5}{6}=\frac{5}{6}$

3) $4\sqrt{(0/01)^2}-4\sqrt{(-0/01)^2}-20\sqrt{\frac{1}{100}}+\sqrt{4}$

$=4(0/01)-4(-(-0/01))-20(\frac{1}{10})+2$

$=0/04-0/04-2+2=0$

4) $\sqrt{1\frac{16}{9}}-\sqrt{(-\frac{5}{9})^2}=\sqrt{\frac{25}{9}}-\left[-(-\frac{5}{9})\right]$

$=\frac{5}{3}-\frac{5}{9}=\frac{15-5}{9}=\frac{10}{9}$

مثال ۴: کدام‌یک از تساویهای زیر به‌ازای هر مقدار حقیقی x همواره درست است.

1) $-\sqrt{x}=7$ 2) $\sqrt{x}+4=0$

3) $\sqrt{(-x^2)^2}=-x^2$ 4) $\sqrt{x^4}=x^2$

حل: فقط تساوی $\sqrt{x^4}=x^2$ درست است. زیرا در تساوی $-\sqrt{x}=7$ طرف اول تساوی یعنی $-\sqrt{x}$، به‌ازای هر x حقیقی مثبت، همواره منفی است و طرف دوم عددی است مثبت که در نتیجه این تساوی در مجموعهٔ اعداد حقیقی غیرممکن است. تساوی $\sqrt{x}+4=0$ نیز در مجموعهٔ اعداد حقیقی غیرممکن است، زیرا طرف اول تساوی یعنی عبارت $\sqrt{x}+4$ به‌ازای هر x حقیقی مثبت، همواره مثبت و مخالف صفر است. همچنین تساوی $\sqrt{(-x^2)^2}=-x^2$ فقط به‌ازای $x=0$ برقرار است. زیرا طرف اول تساوی یعنی $\sqrt{(-x^2)^2}=\sqrt{x^4}=x^2$، همواره مثبت است و طرف دوم تساوی یعنی $-x^2$، همواره منفی است. بدیهی است تساوی $\sqrt{x^4}=x^2$ به‌ازای هر مقدار حقیقی x همواره درست است، زیرا:

$$\sqrt{x^4}=\sqrt{(x^2)^2}=x^2$$

مثال ۵: عبارت $\sqrt{(x^2-1)^2}$ را به‌ازای $x=0\ ,\ x=-2\ ,\ x=1\ ,$ $x=\sqrt{2}\ ,\ x=-\sqrt{3}\ ,\ x=4\ ,\ x=-\frac{1}{2}$ و $x=0/1$ حساب کنید.

حل:

$$x=۰:\ \sqrt{(۰-۱)^۲}=\sqrt{(-۱)^۲}=-(-۱)=۱$$

$$x=-۲:\ \sqrt{(۴-۱)^۲}=\sqrt{۳^۲}=۳$$

$$x=۱:\ \sqrt{(۱-۱)^۲}=\sqrt{۰^۲}=۰$$

$$x=\sqrt{۲}:\ \sqrt{(۲-۱)^۲}=\sqrt{۱^۲}=۱$$

$$x=-\sqrt{۳}:\ \sqrt{(۳-۱)^۲}=\sqrt{۲^۲}=۲$$

$$x=۴:\ \sqrt{(۱۶-۱)^۲}=\sqrt{۱۵^۲}=۱۵$$

$$x=-\frac{۱}{۲}:\ \sqrt{(\frac{۱}{۴}-۱)^۲}=\sqrt{(-\frac{۳}{۴})^۲}=-(-\frac{۳}{۴})=\frac{۳}{۴}$$

$$x=۰/۱:\ \sqrt{(۰/۰۱-۱)^۲}=\sqrt{(-۰/۹۹)^۲}=-(-۰/۹۹)=۰/۹۹$$

قدرمطلق

علی ۲۰۰ ریال موجودی و حمید ۲۰۰ ریال مقروض است. در اینجا، برای علی و حمید از عدد ۲۰۰ استفاده کردیم؛ در حالی که علی ۲۰۰+ ریال و حمید ۲۰۰- ریال دارد.

پس، وقتی فقط از خود عدد یاد شود و علامت آن (یعنی مثبت یا منفی بودن آن) موردنظر نباشد، گوییم با قدرمطلق عدد روبرو هستیم. برای نشان دادن قدرمطلق، از دو پاره‌خط راست کوتاه و موازی که در دوطرف عدد قرار می‌دهیم، استفاده می‌کنیم. بنابراین:

$$|-۲۰۰|=۲۰۰ \quad \text{و} \quad |+۲۰۰|=۲۰۰$$

به‌بیان ساده‌تر، می‌توان گفت: منظور از قدرمطلق یک عدد، مقدار عددی آن، با علامت مثبت است. زیرا وقتی می‌نویسیم ۲۰۰، منظور ما در واقع ۲۰۰+ است.

مثال ۱: قدرمطلق عددهای $-\sqrt{۲}$ ، $+\sqrt{۲}$ ، $۷-\sqrt{۵}$ ، $\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۵}-۲$ را بیابید.

حل:

$$|-\sqrt{۲}|=\sqrt{۲} \quad \text{و} \quad |+\sqrt{۲}|=\sqrt{۲}$$

می‌دانیم $\sqrt{۵}<۷$ ؛ پس: $۷-\sqrt{۵}>۰$ ، بنابراین قدرمطلق عدد $۷-\sqrt{۵}$ با خودش برابر است:

$$|۷-\sqrt{۵}|=۷-\sqrt{۵}$$

همچنین می‌دانیم $\sqrt{۳}>\sqrt{۲}$ ؛ پس: $\sqrt{۳}-\sqrt{۲}>۰$ ، بنابراین قدرمطلق عدد $\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$ با خودش برابر است:

$$|\sqrt{۳}-\sqrt{۲}|=\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$$

و همین‌طور:

$$\sqrt{۵}>۲ \Rightarrow \sqrt{۵}-۲>۰ \Rightarrow |\sqrt{۵}-۲|=\sqrt{۵}-۲$$

با توجه به‌مثال (۱)، قدرمطلق عدد حقیقی a را می‌توان به‌شکل برابری زیر نشان داد:

$$|a|=\begin{cases} a & a\geq ۰ \\ -a & a<۰ \end{cases} \qquad (۱)$$

تعبیر تساوی (۱) این است که اگر a عددی مثبت یا صفر باشد، قدرمطلق آن با خودش برابر است. ولی اگر a عددی منفی باشد، قدرمطلق آن، برابر با قرینهٔ آن عدد است.

توجه داشته باشید که $\sqrt{۹}$ با ریشهٔ دوم ۹ فرق دارد:

ریشهٔ دوم عدد ۹، می‌تواند ۳+ یا ۳- باشد، ولی $\sqrt{۹}$ فقط برابرِ ۳ یعنی قدرمطلق ۳+ و ۳- می‌باشد:

$$\sqrt{۹}=\sqrt{(\pm ۳)^۲}=|\pm ۳|=۳$$

به‌این ترتیب، همیشه باید نوشت:

$$\sqrt{a^۲}=|a| \qquad (۲)$$

تساوی (۲) نشان می‌دهد که جذر هر عدد حقیقی مثبت، همیشه برابر یک عدد حقیقی مثبت است.

مثال ۲: حاصل عبارتهای زیر را پیدا کنید:

$۱)\ |-\sqrt{۲}|$ $\qquad$ $۲)\ \left|\frac{۲}{۳}-\frac{۳}{۲}\right|$

$۳)\ \left|-\sqrt{(-\frac{۳}{۴})^۲}\right|$ $\qquad$ $۴)\ |۷-\sqrt{۵۰}|$

$۵)\ \left|\sqrt{(-۳)^۲}-\sqrt{(-۵)^۲}\right|$ $\qquad$ $۶)\ \big||۳-\sqrt{۱۰}|-|۴+\sqrt{۱۰}|\big|$

$۷)\ \sqrt{(\sqrt{۳}-۴)^۲}$

حل: با توجه به‌تعریف قدرمطلق داریم:

$$۱)\ |-\sqrt{۲}|=\sqrt{۲}$$

$$۲)\ \left|\frac{۲}{۳}-\frac{۳}{۲}\right|=\left|\frac{۴-۹}{۶}\right|=\left|\frac{-۵}{۶}\right|=\frac{۵}{۶}$$

$$۳)\ \left|-\sqrt{(-\frac{۳}{۴})^۲}\right|=\left|\sqrt{(-\frac{۳}{۴})^۲}\right|=\left|-\frac{۳}{۴}\right|=\frac{۳}{۴}$$

$$۴)\ |۷-\sqrt{۵۰}|=|-(\sqrt{۵۰}-۷)|=|\sqrt{۵۰}-۷|$$
$$=\sqrt{۵۰}-۷$$

$$۵)\ \left|\sqrt{(-۳)^۲}-\sqrt{(-۵)^۲}\right|=\big||-۳|-|-۵|\big|=|۳-۵|$$
$$=|-۲|=۲$$

$$۶)\ \big||۳-\sqrt{۱۰}|-|۴+\sqrt{۱۰}|\big|$$

$$= \left| \left|-(\sqrt{10}-3)\right| - (4+\sqrt{10}) \right|$$
$$= \left| \left|\sqrt{10}-3\right| - 4 - \sqrt{10} \right| = \left| \sqrt{10}-3-4-\sqrt{10} \right|$$
$$= |-7| = 7$$

$$7)\ \sqrt{(\sqrt{3}-4)^2} = |\sqrt{3}-4| = |-(4-\sqrt{3})|$$
$$= |4-\sqrt{3}| = 4-\sqrt{3}$$

برای هر x و y حقیقی همیشه داریم:

$$1)\ \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2y^2} = \sqrt{x^2}.\sqrt{y^2} \Rightarrow |x.y| = |x|.|y|$$

$$2)\ \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2}{y^2}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{y^2}} \Rightarrow \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0)$$

$$3)\ \sqrt{x^{2n}} = \sqrt{(x^n)^2} = (\sqrt{x^2})^n$$
$$\Rightarrow |x^n| = |x|^n \quad (n \in IN)$$

مثال ۳: حاصل عبارتهای $|-5x^2|$ و $\left|\frac{-7}{x^4}\right|$ و $\frac{|x|}{x}$ و $|(-13)^{75}|$ را پیدا کنید $(x \neq 0)$.

حل:

$$1)\ |-5x^2| = |-5|\ |x^2| = 5x^2$$

$$2)\ \left|\frac{-7}{x^4}\right| = \frac{|-7|}{|x^4|} = \frac{7}{x^4}$$

$$3)\ \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x} & x>0 \\ \frac{-x}{x} & x<0 \end{cases} \Rightarrow \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$

$$4)\ \left|(-13)^{75}\right| = |(-13)|^{75} = 13^{75}$$

ریشهٔ n ام یک عدد

به‌همان ترتیب که از تعریف توان دوم یک عدد، ریشهٔ دوم را تعریف کردیم؛ می‌توان از تعریف توان سوم، توان چهارم، توان پنجم و ... توان nام (n عدد طبیعی)، ریشه‌های سوم، چهارم، پنجم و ... ریشهٔ nام را تعریف کرد.

مثال:

از $125 = 5^3$ نتیجه می‌شود $\sqrt[3]{125} = 5$ و می‌خوانیم «ریشهٔ سوم ۱۲۵ برابر ۵ است.»

از $16 = 2^4$ نتیجه می‌شود $\sqrt[4]{16} = 2$ و می‌خوانیم «ریشهٔ چهارم ۱۶ برابر ۲ است.»

از $243 = 3^5$ نتیجه می‌شود $\sqrt[5]{243} = 3$ و می‌خوانیم «ریشهٔ پنجم ۲۴۳ برابر ۳ است.»

از $64 = 2^6$ نتیجه می‌شود $\sqrt[6]{64} = 2$ و می‌خوانیم «ریشهٔ ششم ۶۴ برابر ۲ است.»

به‌طور کلی:

برای هر عدد طبیعی n بزرگتر یا مساوی ۲ $(n \geq 2)$ و عددهای حقیقی a و b، اگر $a^n = b$ باشد، و n عددی فرد باشد:

$$a = \sqrt[n]{b}$$

و اگر n عددی زوج و $b \geq 0$ باشد:

$$|a| = \sqrt[n]{b}$$

برای مثال:

$-2 = \sqrt[3]{-8}$ ، زیرا $-8 = (-2)^3$ است.

$2 = \sqrt[5]{32}$ ، زیرا $32 = 2^5$ است.

$2 = \sqrt[6]{64}$ ، زیرا $64 = 2^6$ است.

$\frac{3}{2} = \sqrt[4]{\frac{81}{16}}$ ، زیرا $\frac{81}{16} = \left(\frac{3}{2}\right)^4$ است.

عبارتهایی مانند: $\sqrt[10]{-10^{10}}$, $\sqrt{-81}$, $\sqrt[74]{-2}$, $\sqrt[100]{-1}$,

$\sqrt[6]{-64}$, $\sqrt[4]{-16}$, $\sqrt[8]{-2^8}$

عدد حقیقی نیستند. زیرا عددهای منفی ریشهٔ زوج ندارند.

مثال ٦: حاصل عبارتهای زیر را در صورت وجود بیابید.

$1)\ \sqrt[5]{\frac{-1}{32}}$ $\qquad$ $2)\ \sqrt{(-3)(-3)^3} - \sqrt{81}$

$3)\ 2 + \sqrt[3]{-8}$ $\qquad$ $4)\ 2\sqrt{5^2} - \sqrt[4]{81} - \sqrt[4]{625}$

$5)\ -\sqrt[11]{(-7)(-7)^2(-7)^3(-7)^5}$ $\qquad$ $6)\ -\sqrt[3]{6 \times (-4)(-9)}$

$7)\ \sqrt[5]{32} . \sqrt{(-4)^2}$ $\qquad$ $8)\ \sqrt[3]{8} \times \sqrt[6]{2 \times 4 \times 8}$

$9)\ \sqrt[3]{-8} - \sqrt{4}$ $\qquad$ $10)\ 2\sqrt[3]{64} - \sqrt{16}$

حل:

$$1)\ \sqrt[5]{\frac{-1}{32}} = \sqrt[5]{\left(-\frac{1}{2}\right)^5} = -\frac{1}{2}$$

$$2)\ \sqrt{(-3)(-3)^3} - \sqrt{81} = \sqrt{(-3)^4} - 9 = (-3)^2 - 9 = 9 - 9 = 0$$

$$3)\ 2 + \sqrt[3]{-8} = 2 + \sqrt[3]{(-2)^3} = 2 - 2 = 0$$

$$4)\ 2\sqrt{5^2} - \sqrt[4]{81} - \sqrt[4]{625} = 2 \times 5 - \sqrt[4]{3^4} - \sqrt[4]{5^4}$$
$$= 10 - 3 - 5 = 2$$

$$5)\ -\sqrt[11]{(-7)(-7)^2(-7)^3(-7)^5} = -\sqrt[11]{(-7)^{11}}$$
$$= -(-7) = 7$$

۶) $-\sqrt[3]{6\times(-4)(-9)} = -\sqrt[3]{6\times 36} = -\sqrt[3]{6^3} = -6$

۷) $\sqrt[5]{32} - \sqrt[4]{(-4)^2} = \sqrt[5]{2^5} - \sqrt[4]{16} = 2 - \sqrt[4]{2^4} = 2-2=0$

۸) $\sqrt[3]{8}\times\sqrt[6]{2\times4\times8} = \sqrt[3]{2^3}\times\sqrt[6]{2\times2^2\times2^3}$
$= 2\times\sqrt[6]{2^6} = 2\times2=4$

۹) $\sqrt[3]{-8}-\sqrt{4} = \sqrt[3]{(-2)^3}-\sqrt{2^2} = -2-2=-4$

۱۰) $2\sqrt[3]{64}-\sqrt{16} = 2\sqrt[3]{4^3}-\sqrt{4^2}$
$= 2\times4-4=8-4=4$

تعریف

هرگاه عدد حقیقی k توان nام عدد حقیقی a باشد، k را توان nام کامل a می‌نامند. به‌طور مثال: «۲۵» توان دوم کامل ۵+ یا ۵−، و «۸» توان سوم کامل ۲، و «۶۲۵» توان چهارم کامل ۵+ یا ۵−، و «۳۲» توان پنجم کامل ۲، و «۶۴» توان ششم کامل ۲+ یا ۲−، می‌باشد. به‌همین ترتیب اگر عبارت جبری D توان nام عبارت جبری A باشد، D را توان nام کامل A می‌نامند. به‌طور مثال:
«$a^2+2ab+b^2$» یا $(a+b)^2$ توان دوم کامل $(a+b)$ یا $-(a+b)$، و «$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$» یا $(a-b)^3$ توان سوم کامل $(a-b)$، و «x^{74}» توان هفتادوچهارم کامل x یا −x، و «$a^{12}b^6c^{18}$» توان ششم کامل (a^2bc^3)» می‌باشد. بنابراین هر توان کاملی که زیر رادیکال بوده و نمای آن برابر با فرجهٔ رادیکال باشد، از زیر رادیکال بیرون می‌آید. به‌طور مثال:

$$\sqrt[6]{7^6}=7,\ \sqrt[5]{32}=\sqrt[5]{2^5}=2,\ \sqrt[7]{5^7}=5,$$
$$\sqrt[3]{x^9}=\sqrt[3]{(x^3)^3}=x^3$$
$$\sqrt[75]{(x^3+1)^{75}}=x^3+1,$$
$$\sqrt[5]{a^{10}b^{20}c^{35}}=\sqrt[5]{(a^2b^4c^7)^5}=a^2b^4c^7$$

توجه:

۱) اگر فرجهٔ رادیکال (n) عددی زوج باشد، عدد یا عبارتی که از زیر رادیکال بیرون می‌آید نمی‌تواند منفی باشد. به‌طور مثال:

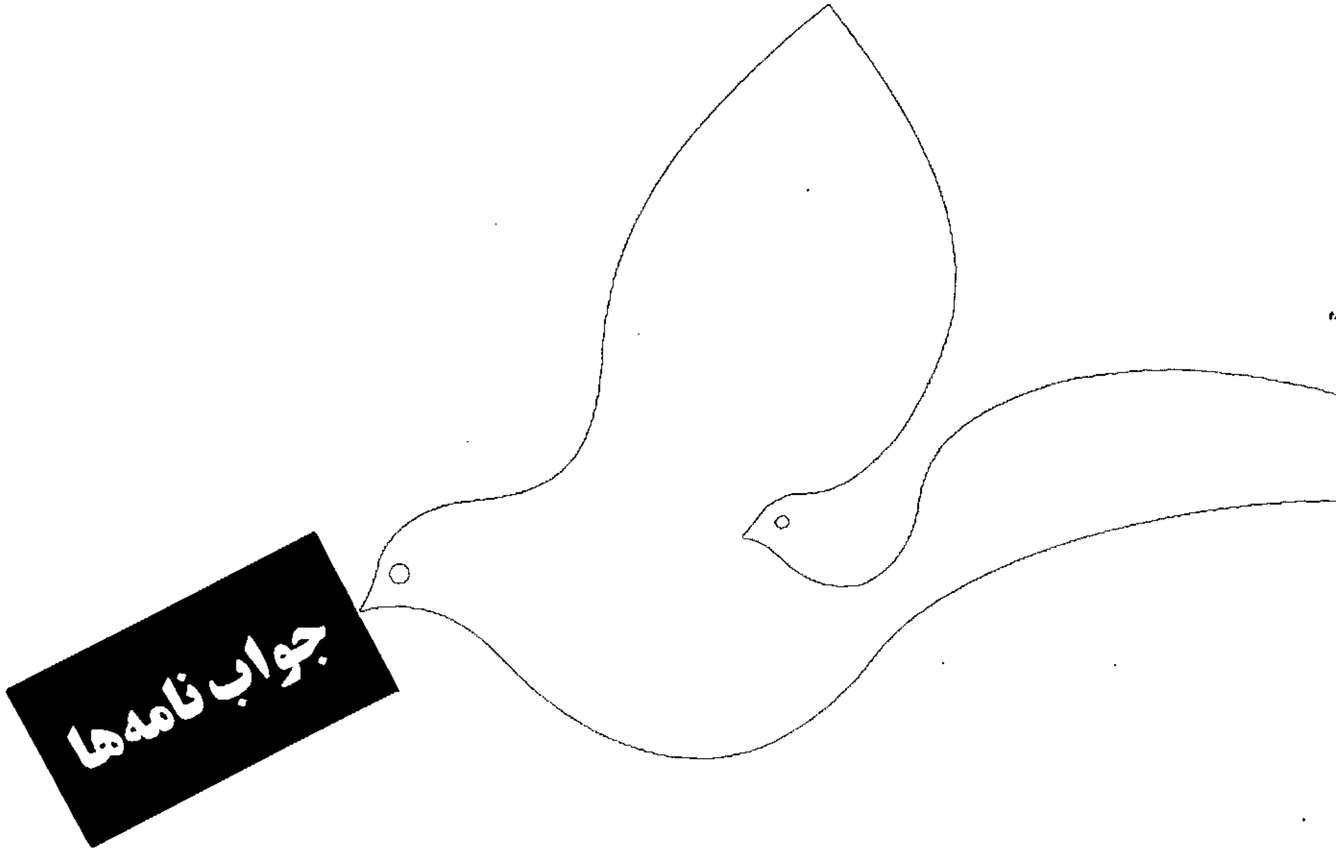
$$\sqrt[8]{(-2)^8}=-(-2)=2,\ \sqrt[10]{(-10)^{10}}=-(-10)=10,$$
$$\sqrt[74]{(-2)^{74}}=-(-2)=2$$
$$\sqrt[6]{(-4)(-4)^2(-4)^3}=\sqrt[6]{(-4)^6}=-(-4)=4,$$
$$\sqrt[2k]{(-5)^{2k}}=-(-5)=5 \quad (k\in IN)$$
$$\sqrt[4k]{(-a)^{8k}}=\sqrt[4k]{\left((-a)^2\right)^{4k}}=\sqrt[4k]{(a^2)^{4k}}=a^2,$$
$$\sqrt[2k]{x^{4k}}=\sqrt[2k]{(x^2)^{2k}}=x^2$$
$$\sqrt{x^4+2x^2+1}=\sqrt{(x^2+1)^2}=x^2+1,$$
$$\sqrt[4]{a^8b^{16}c^{40}}=\sqrt[4]{(a^2b^4c^{10})^4}=a^2b^4c^{10}$$

۲) اگر اعداد و یا عبارات جبری زیر رادیکال مضربی صحیح از فرجهٔ رادیکال نباشند، آن رادیکال را گنگ (اصم) می‌نامند. به‌طور مثال:

$$\sqrt{2},\ \sqrt[3]{9},\ \sqrt[5]{34},\ \sqrt{x^2+1},\ \sqrt[4]{(x^2+1)^3},\ \sqrt[74]{2^{75}}$$

۳) اگر فرجهٔ رادیکال عددی زوج و عدد یا عبارت زیر رادیکال همواره منفی باشد، در این صورت آن عدد یا عبارت رادیکالی در مجموعهٔ اعداد حقیقی (IR) بی‌معنی است. برای مثال تمام اعداد و عبارات رادیکالی زیر در مجموعهٔ اعداد حقیقی (IR) بی‌معنی می‌باشند:

$$\sqrt{-4},\ \sqrt[4]{-81},\ \sqrt[6]{-64},\ \sqrt[8]{-2^8},$$
$$\sqrt[20]{-5^{20}},\ \sqrt[100]{-10^{100}},$$
$$\sqrt[4]{-\sqrt{4}},\ \sqrt[74]{-1},\ \sqrt[2k]{-2^{2k}}\ (k\in IN),$$
$$\sqrt[2k]{-5^{2k}},\ \sqrt[4k]{-(-2)^{4k}},\ \sqrt[5]{2\sqrt[4]{-16}},$$
$$\sqrt[4]{-(x^2+1)^4}\ (x\in IR),\ \sqrt{-(x^2+4)},$$
$$\sqrt[8]{-(x^4+2)},\ \sqrt[6]{-4x^2-8},$$
$$\sqrt{-(x^4+2x^2+1)},\ \sqrt[10]{\frac{-1}{2x^2+1}},\ \sqrt[4]{\frac{-16}{(x^2+1)^4}},$$
$$\sqrt[74]{\frac{-1}{x^{74}}},\ \sqrt{-\sqrt[4]{(x^2+1)^4}}$$



خانم نیکتا محتاج؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (تهران)

از مسایل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. در شماره‌های آینده مجله از آنها استفاده خواهیم کرد.

آقای ابوالفضل بادرستانی؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (اراک)

از مسایل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. در صورت لزوم از آنها استفاده خواهیم کرد.

آقای اکبر ترابی؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (زنجان)

از مسایل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. در صورت لزوم و در جای مناسب از آنها استفاده خواهیم کرد.

آقای رضا عاقلی؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (سیاهکل)

از مسایل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. در صورت لزوم از آنها استفاده خواهیم کرد. باز هم از نامه‌هایی که برای ما ارسال داشته‌اید، کمال تشکر و قدردانی را داریم.

آقای ارسلان حجت انصاری (گیلان)

ضمن تشکر از مطلب شما در مورد «قضیهٔ فرما» به عرض می‌رسانیم که روش اثبات شما در رابطه با این قضیه بسیار خاص است، و قضیه به ازای اعداد خاصی که مورد نظر نیست، بررسی شده است. شما یکی از اعداد را به فرم $x = m(z-y)$ گرفته‌اید و مسأله را از عمومیت خود خارج کرده‌اید. بدیهی است که برای اثبات قضیه چنین روشهایی مورد نظر نیست. در این جا به اطلاع خوانندگان می‌رسانیم که مجله ریاضی دانش‌آموزی « برهان» از پاسخگویی به مقالات و مسایلی که از سطح دانش‌آموزان دبیرستان بالاتر باشد، معذور است. زیرا این کار جزو اهداف مجله نیست.

آقای سید جواد حسینی؛ دانش آموز رشتهٔ ریاضی (قم)

از مسایل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. در صورت لزوم از آنها استفاده خواهیم کرد.

آقای مجید کریمی مقدم؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (بجنورد)

از مسایل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. برای شماره‌های بعدی مجله از آنها استفاده خواهیم کرد.

آقای ایمان عشایری؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (ساری)

ضمن تشکر از نامهٔ شما که حاوی مقاله‌ای با عنوان «محاسبهٔ مجموع سری $\ldots + \frac{۱}{۳^۲} + \frac{۱}{۲^۲} + ۱$» است، به عرض شما می‌رسانیم که این‌گونه مقالات اولاً در سطح دانش‌آموزان دبیرستان نیست و درثانی در این مورد روشهای بسیاری در کتب و مجلات ریاضی می‌توان یافت.

آقای ناصر والاناصر سردرودی؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (تبریز)

از مطلب ارسالی شما با عنوان «بازی با اعداد» متشکریم. در صورت لزوم و در جای مناسب از آن استفاده خواهیم کرد.

آقای سید محمد شعاری شعار؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (رشت)

از مسایل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. در صورت لزوم از آنها استفاده خواهیم کرد.

آقای مجید بالو؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (آمل)

از مسایل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم.

آقای یاسر علمی؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (مشهد)

از مطالب ارسالی شما متشکریم. از آنها در جای مناسب استفاده خواهیم کرد.

آقای فرهاد شریف (مشهد)

از مطالب ارسالی شما در رابطه با «اعداد تام» و « قضیهٔ ویلسون» متشکریم. ان‌شاءالله در جای مناسب از آنها استفاده خواهیم کرد. موفق و پیروز باشید.

آقای ابراهیم فاتح (سقز)

از ارسال نامهٔ شما که حاوی چند مسألهٔ حل شده نیز بود، متشکریم. در صورت لزوم ودر جای مناسب از آنها استفاده خواهیم کرد.

آقای حمید بخشی؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (لنگرود)

از مسایل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. در صورت لزوم از آنها استفاده خواهیم کرد.

خانم سهیلا جعفری (داراب)

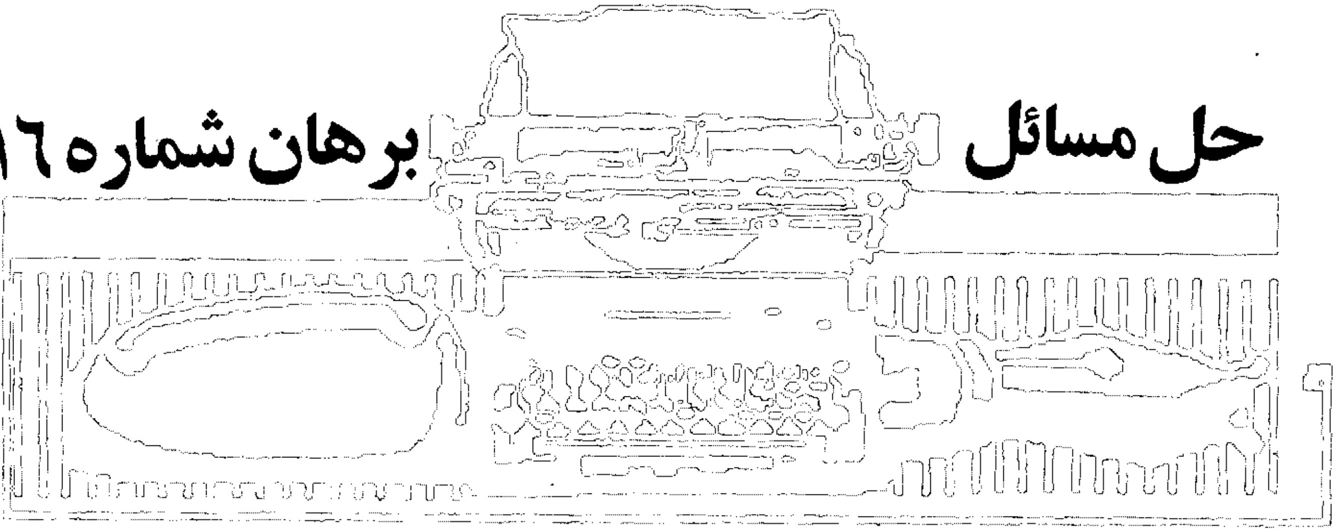
از ارسال نامهٔ شما که حاوی مطلبی دربارهٔ « توزیع اعداد اول» است، متشکریم. در جواب باید بگوییم که یک فرمول یا یک رابطه را که به ازای برخی از اعداد، عدد اولی به دست دهد، نمی‌توان یک فرمول جدیدی برای توزیع اعداد اول دانست. فرمول: $P(n) = n^۲ - n + ۴۱$ کلی نیست و فقط به ازای اعداد ۱ تا ۴۰ عددی اول به‌دست می‌دهد و پس از آن اعدادی یافت می‌شود که به ازای آنها حاصل عددی اول نیست، مانند $n = ۴۱$ که داریم: $P(۴۱) = ۴۱ \times ۴۱$. فرمولی را که شما ارائه داده‌اید فقط به ازای پنج عدد اولیه مورد امتحان قرار گرفته است و پس از آن امکان وجود موارد نقض بسیار است. بهتر است اعداد بعدی را نیز امتحان کنید و موارد نقض را مشاهده نمایید. متذکر می‌شویم که از نظر تئوری اعداد، برای توزیع اعداد اول، فرمولی مورد قبول است که به ازای جمیع مقادیر طبیعی؛ عددی اول حاصل شود، و مورد نقض نیز نداشته باشد. با این حال فرمول شما را عیناً در این جا می‌آوریم:

$$P(k) = ۲۵k^۲ + (۵k - ۱)^۲$$

یا

$$P(k) = (۵k + ۲)^۲ + (۵k + ۳)^۲$$

حل مسائل برهان شماره ۱۶



حل مسائل ریاضیات سال اول

۱ ـ باتوجه به‌اینکه نقطهٔ O محل برخورد نیمسازهای زوایای داخلی مثلث ABC است، در مثلث قائم‌الزاویه OEC داریم:

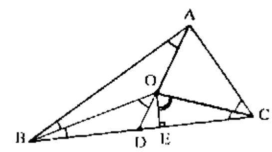
$$C\hat{O}E=90^\circ-O\hat{C}E=90^\circ-\frac{\hat{C}}{2}$$

اما

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ\Rightarrow\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{B}}{2}+\frac{\hat{C}}{2}=90^\circ$$

پس

$$C\hat{O}E=\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{B}}{2}+\frac{\hat{C}}{2}-\frac{\hat{C}}{2}=\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{B}}{2} \quad (1)$$



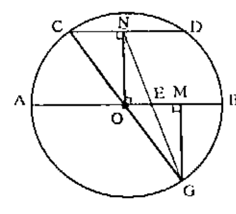
از طرفی زاویهٔ BOD ، زاویهٔ خارجی مثلث OAB است پس:

$$B\hat{O}D=\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{B}}{2} \quad (2)$$

از دو رابطهٔ (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که: $B\hat{O}D=C\hat{O}E$

۲ ـ از نقطهٔ O به‌نقاط N و C و G وصل می‌کنیم، چون نقطهٔ N وسط وتر CD است، پس ON عمودمنصف این وتر می‌باشد و داریم:

$$NC=\frac{CD}{2}=\frac{R}{2}$$



از آنجا دو مثلث قائم‌الزاویه ONC و OMG به‌دلیل تساوی وتر و یک ضلع ($OC=OG=R$، $NC=OM=\frac{R}{2}$ و $O\hat{N}C=O\hat{M}G=90^\circ$) برابرند. پس $ON=MG$ حال اگر نقطهٔ تقاطع NG با قطر AB را E بنامیم، دو مثلث قائم‌الزاویه ONE و MGE به‌حالت تساوی یک ضلع و یک زاویهٔ حاده برابرند ($N\hat{O}E=G\hat{M}O=90^\circ$, $ON=MG$, $\hat{E}_1=\hat{E}_2$). پس $NE=EG$ یعنی نقطهٔ E وسط پاره‌خط NG است. یا به‌عبارت دیگر پاره‌خط NG به‌وسیلهٔ قطر AB نصف شده است.

۳ ـ چون گزاره‌های $(p\Rightarrow q)$ و $(\sim p\Rightarrow q)$ هر دو ارزش درست دارند و همواره یکی از دو گزارهٔ p و ~p ارزش درست دارند، q نمی‌تواند ارزش نادرست داشته باشد زیرا در این صورت یکی از دو گزارهٔ $(p\Rightarrow q)$ یا $(\sim p\Rightarrow q)$ ارزش نادرست، خواهد داشت که خلاف فرض است:

$$q\equiv T\Rightarrow\sim q\equiv F\Rightarrow[\sim q\Rightarrow(p\Rightarrow r)]\equiv T$$

(گزارهٔ داده‌شده به‌انتفای مقدم ارزش درست دارد).

۴ ـ طبق فرض داریم $A\subseteq B$ و برای اثبات این که $A=B$ کافی است ثابت کنیم $B\subseteq A$. از طرفی چون $A\subseteq B$ پس $A-B=\phi$ یا $A\cap B'=\phi$ و:

طبق فرض: $\underbrace{(A\cap B')}_{\phi}\cup(A'\cap B)=A\Rightarrow A'\cap B=A$

$$\Rightarrow A\cup(A'\cap B)=A\cup A\Rightarrow\underbrace{(A\cup A')}_{M}\cap(A\cup B)=A$$

$$\Rightarrow(A\cup B)=A\Rightarrow B\subseteq A$$

۵ ـ برای اثبات $A=B$ ، ثابت می‌کنیم $A\subseteq B$ و $B\subseteq A$

طبق فرض: $[(A\cap B')\cup(A'\cap B)]=\phi$

$$\Rightarrow A\cup[(A\cap B')\cup(A'\cap B)]=A\cup\phi$$

$$\xRightarrow{\text{شرکت‌پذیری}}\underbrace{[A\cup(A\cap B')]}_{\text{جذب}}\cup(A'\cap B)=A$$

$$\Rightarrow A\cup(A'\cap B)=A\xRightarrow{\text{پخشی}}\underbrace{(A\cup A')}_{M}\cap(A\cup B)=A$$

$$\Rightarrow A\cup B=A\Rightarrow B\subseteq A \quad (1)$$

طبق فرض: $[(A\cap B')\cup(A'\cap B)]=\phi$

$$\Rightarrow[(A\cap B')\cup(A'\cap B)]\cup B=\phi\cup B$$

$$\xRightarrow{\text{شرکت‌پذیری}}(A\cap B')\cup\underbrace{[(A'\cap B)\cup B]}_{\text{جذب}}=B$$

$$\Rightarrow(A\cap B')\cup B=B$$

$$\xRightarrow{\text{پخشی}}(A\cup B)\cap\underbrace{(B'\cup B)}_{M}=B$$

$$\Rightarrow(A\cup B)=B\Rightarrow A\subseteq B \quad (2)$$

$$(1)\text{ و }(2)\Rightarrow A=B$$

۶ ـ طرفین تساوی را به‌توان ۳ می‌رسانیم:

$$x+\frac{1}{x}=t$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}+3x.\frac{1}{x}(x+\frac{1}{x})=t^3$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}+3(1)(t)=t^3\Rightarrow\frac{x^6+1}{x^3}=t^3-3t$$

۷ ـ

$$(\sqrt[4]{2}-1)^6(\sqrt[4]{2}+1)^6(3+2\sqrt{2})^3=$$

$$((\sqrt[4]{2}-1)(\sqrt[4]{2}+1))^6(3+2\sqrt{2})^3=$$

$$(\sqrt{2}-1)^6[3+2\sqrt{2}]^3=[(\sqrt{2}-1)^2]^3[3+2\sqrt{2}]^3=$$

$$(2+1-2\sqrt{2})^3(3+2\sqrt{2})^3=(3-2\sqrt{2})^3(3+2\sqrt{2})^3=$$

$$((3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2}))^3=(9-8)^3=(1)^3=1$$

۸ ـ

$$ab-5b-4a+20=0$$

$$a(b-4)-5(b-4)=0$$

$$(b-4)(a-5)=0\Rightarrow b=4 \text{ یا } a=5$$

اگر $b=4$ ، آنگاه رابطه $ab-5b-4a+20=0$ برقرار است. پس می‌نیمم $(a+b)$ باتوجه به‌شرط $a,b\geq0$ برابر (۴) است.

حل مسائل ریاضیات سال دوم ریاضی

۱ ـ حل از آقای امیرحسین بسطامی دانش‌آموز سال چهارم ریاضی از تهران.

پای ارتفاعات رأسهای A و B و C را به‌ترتیب A′ و B′ و C′ می‌نامیم و فرض می‌کنیم $S_{HBC}=S_1$ و $S_{HAB}=S_2$ و $S_{HAC}=S_3$ باشد. در این صورت داریم:

$$S_1+S_2+S_3=S$$

و

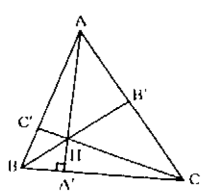
$$BC.AH+AB.CH+AC.BH=$$

$$BC(AA'-HA')+AB(CC'-HC')+AC(BB'-HB')=$$

$$BC.AA'+AB.CC'+AC.BB'-$$

$$(BC.HA'+AB.HC'+AC.HB')=$$

$$2S+2S+2S-2(S_1+S_2+S_3)=6S-2S=4S$$



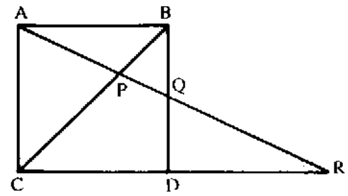
۲ ـ باید ثابت کنیم $AP^2=PR.PQ$ داریم:

$$AB\parallel DR\Rightarrow\Delta ABP\sim\Delta PDR\Rightarrow\frac{AP}{PR}=\frac{PB}{PD} \quad (1)$$

$$AD\parallel BQ\Rightarrow\Delta ADP\sim\Delta BPQ\Rightarrow\frac{PQ}{AP}=\frac{PB}{PD} \quad (2)$$

از مقایسهٔ روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\frac{AP}{PR}=\frac{PQ}{AP}\Rightarrow AP^2=PR.PQ$$



۳ ـ الف) عمل Δ در مجموعه‌ها به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$$

حال می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$A\times(B\Delta C)=(A\times B)\Delta(A\times C)$$

سمت راست حکم $=[(A\times B)-(A\times C)]\cup[(A\times C)-(A\times B)]$

$$=[A\times(B-C)]\cup[A\times(C-B)]=A\times[(B-C)\cup(C-B)]$$

$$=A\times(B\Delta C)$$

ب) ثابت می‌کنیم:

$$(A\Delta B)\times C=(A\times C)\Delta(B\times C)$$

سمت راست حکم $=[(A\times C)-(B\times C)]\cup[(B\times C)-(A\times C)]$

$$=[(A-B)\times C]\cup[(B-A)\times C]=[(A-B)\cup(B-A)]\times C$$

$$=(A\Delta B)\times C$$

(توجه داریم که عمل $\times$ نسبت به $\cup$ از چپ و راست توزیع‌پذیر است)

۴ ـ برای اثبات پوشش بودن تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطهٔ:

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1\ , & x\geq -1\\ -x^2+1\ , & x\leq 1\end{cases}$$

می‌بایست ثابت کنیم $R_f=\mathbb{R}$. اگر هر ضابطه تابع را در حکم یک تابع فرض کنیم، مثلاً فرض کنیم $f_1(x)=x^2+1$ و $f_2(x)=-x^2+1$ واضح است که $R_{f_1}\cup R_{f_2}=R_f$ از طرفی داریم:

$$R_{f_1}: y_1=x^2+1\Rightarrow x^2=y_1-1\Rightarrow x=\pm\sqrt{y_1-1}$$

$$y_1-1\geq 0\Rightarrow y_1\geq 1\Rightarrow R_{f_1}=\{x\mid x\geq 1\}$$

$$R_{f_2}: y_2=-x^2+1\Rightarrow x^2=1-y\Rightarrow x=\pm\sqrt{1-y}$$

$$1-y\geq 0\Rightarrow 1\geq y\Rightarrow R_{f_2}=\{x\mid x\leq 1\}$$

$$R_{f_1}\cup R_2=\mathbb{R}$$

تابع فوق یک‌به‌یک نیست زیرا اشتراک بردهای ضابطه‌ها تهی نیست و مثلاً $1\in(R_{f_1}\cap R_{f_2})$

$$x^2+1=1\Rightarrow x^2=0\Rightarrow x=0$$

$$-x^2+1=1\Rightarrow -x^2=0\Rightarrow x=0$$

$$f(0)=0^2+1=1$$

$$f(0)=-0^2+1=1$$

تابع یک‌به‌یک نیست.

۵ ـ

$$(x+y-3)^2+(y+z-5)^4+(z+x-4)^6=0$$

تساوی وقتی برقرار است که هر پرانتز مساوی صفر باشد

$$\Rightarrow\begin{cases}x+y-3=0\\ y+z-5=0\\ z+x-4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=3\\ y+z=5\\ z+x=4\end{cases}$$

گرچه این دستگاه به‌راحتی قابل حل است ولی اگر معادله (۲) را در (۲) و معادله (۳) را در (۳) ضرب کنیم سپس، سه معادله را جمع کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{cases}x+y=3\\ 2y+2z=10\\ 3z+3x=12\end{cases}\xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}} 3y+4x+5z=25$$

۶ ـ

$$tg\alpha=\left|\frac{m-m'}{1+mm'}\right|\Rightarrow tg\frac{\pi}{4}=\left|\frac{m-2}{1+2m}\right|=1$$

$$\Rightarrow\frac{m-2}{1+2m}=\pm1\Rightarrow\begin{cases}1+2m=m-2\Rightarrow m=-3\\ m-2=-1-2m\Rightarrow m=\frac{1}{3}\end{cases}$$

اگر $m=-3\Rightarrow\begin{cases}y=-3x+1\\ y=2x-3\end{cases}\Rightarrow 2x-3=-3x+1\Rightarrow x=\frac{4}{5}$

اگر $m=\frac{1}{3}\Rightarrow\begin{cases}y=\frac{1}{3}x+1\\ y=2x+\frac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow 2x+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}x+1\Rightarrow x=\frac{2}{5}$

۷ ـ

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)=\frac{n}{2}(100+140)=120n$$

از طرفی مجموع زوایای داخلی هر n ضلعی محدب $(n-2)\times180^\circ$ است.

$$\Rightarrow 120n=180(n-2)\Rightarrow 2n=3n-6\Rightarrow\boxed{n=6}$$

پس n ضلعی مسأله شش ضلعی است.

۸ ـ با استفاده از اتحاد $\sin^2x=1-\cos^2x$ ، داریم:

$$a\sin^2x-b\cos^2x=a(1-\cos^2x)-b\cos^2x$$

$$=a-a\cos^2x-b\cos^2x$$

$$=a-(a+b)\cos^2x=a-b$$

$$\Rightarrow(a+b)\cos^2x=b\Rightarrow\cos^2x=\frac{b}{a+b}\Rightarrow\frac{\cos^2x}{b}=\frac{1}{a+b}\ (1)$$

به‌همین ترتیب داریم:

$$\sin^2x=\frac{a}{a+b}\Rightarrow\frac{\sin^2x}{a}=\frac{1}{a+b}\ (2)$$

از روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$\frac{\cos^2x}{b}=\frac{\sin^2x}{a}=\frac{1}{a+b}$$

$$\Rightarrow\frac{\cos^4x}{b^2}=\frac{\sin^4x}{a^2}=\frac{1}{(a+b)^2}=\lambda$$

$$\frac{\cos^4x}{b^2}=\lambda\Rightarrow\frac{\cos^8x}{b^4}=\lambda^2\Rightarrow\frac{\cos^8x}{b^3}=b\lambda^2\ (3)$$

$$\frac{\sin^4x}{a^2}=\lambda\Rightarrow\frac{\sin^8x}{a^4}=\lambda^2\Rightarrow\frac{\sin^8x}{a^3}=a\lambda^2\ (4)$$

از جمع روابط (۳) و (۴) خواهیم داشت:

$$\frac{\sin^8x}{a^3}+\frac{\cos^8x}{b^3}=(a+b)\lambda^2=(a+b)\times\frac{1}{(a+b)^4}$$

$$=\frac{1}{(a+b)^3}\Rightarrow\frac{\sin^8x}{a^3}+\frac{\cos^8x}{b^3}=\frac{1}{(a+b)^3}$$

۹ ـ با استفاده از تساوی $(\cos x)^0=1$ با فرض $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ داریم:

$$1)\ (\cos x)^{\sin^2x-\frac{3}{2}\sin x+\frac{1}{2}}=(\cos x)^0$$

$$\Rightarrow\sin^2x-\frac{3}{2}\sin x+\frac{1}{2}=0\Rightarrow(\sin x-1)(\sin x-\frac{1}{2})=0$$

$\Rightarrow\sin x-1=0$ یا $\sin x-\frac{1}{2}=0\Rightarrow\sin x=1$ یا $\sin x=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ یا $x=2k\pi+\frac{\pi}{6}$ یا $x=2k\pi+\frac{5\pi}{6}$

یا:

$$\cos x=1\Rightarrow x=2k\pi$$

$$2)\ 3\,\mathrm{arctg}\sqrt{x^2-5x+9}=\pi$$

$$\Rightarrow\mathrm{arctg}\sqrt{x^2-5x+9}=\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow tg(\mathrm{arctg}\sqrt{x^2-5x+9})=tg\frac{\pi}{3}$$

$$\sqrt{x^2-5x+9}=\sqrt{3}\Rightarrow x^2-5x+9=3$$

$$\Rightarrow x^2-5x+6=0\Rightarrow(x-2)(x-3)=0$$

$\Rightarrow x=2$ یا $x=3$

حل مسائل ریاضیات سال سوم ریاضی

۱ ـ حل از آقای امیرحسین بسطامی دانش‌آموز چهارم ریاضی از تهران

فرض می‌کنیم:

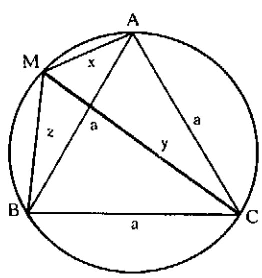
$$AB=AC=BC=a\ ,\ MC=z\ ,\ MB=y\ ,\ MA=x$$

باشد. بنا به‌رابطهٔ بطلمیوس در چهارضلعی محاطی MABC داریم:

$$MB.AC=MA.BC+MC.AB\Rightarrow$$

$$y.a=x.a+z.a\Rightarrow$$

$$a.y=a(x+z)\Rightarrow y=x+z\ (1)$$



با فرض فوق داریم:

$$MA^4+MB^4+MC^4=x^4+y^4+z^4\ (2)$$

در رابطهٔ (۲) به‌جای y از رابطهٔ (۱) مقدار می‌گذاریم خواهیم داشت:

$$MA^4+MB^4+MC^4=x^4+z^4+(x+z)^4=$$

$$2(x^4+z^4+2x^3z+3x^2z^2+2xz^3)=$$

$$2(x^2+xz+z^2)^2\ (3)$$

اما در مثلث AMC اندازهٔ زاویهٔ $\widehat{AMC}=120^\circ$ است پس:

$$AC^2=AM^2+MC^2+MA.MC\Rightarrow a^2=x^2+z^2+xz\ (4)$$

از رابطه‌های (۳) و (۴) نتیجه می‌شود:

$$MA^4+MB^4+MC^4=2(a^2)^2=2a^4=Cte$$

۲ ـ می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$r_ar_b+r_ar_c+r_br_c=P^2$$

داریم:

$$r_a=\frac{S}{P-a}\ ,\ r_b=\frac{S}{P-b}\ ,\ r_c=\frac{S}{P-c}$$

از آنجا خواهیم داشت:

$$\frac{S}{P-a}\cdot\frac{S}{P-b}+\frac{S}{P-a}\cdot\frac{S}{P-c}+\frac{S}{P-b}\cdot\frac{S}{P-c}=$$

$$\frac{S^2(P-c+P-b+P-a)}{(P-a)(P-b)(P-c)}=\frac{P(P-a)(P-b)(P-c)(3P-2P)}{(P-a)(P-b)(P-c)}$$

$$=P\times P=P^2$$

۳ ـ الف) داریم: $ha=\frac{2S}{a}$ و $r=\frac{S}{P}$ از آنجا:

$$ha=3r\Rightarrow\frac{2S}{a}=\frac{3S}{P}\Rightarrow 2P=3a\Rightarrow a+b+c=3a$$

اما بنا به‌فرض $b+c=2a$ پس:

$$a+2a=3a\Rightarrow 3a=3a$$

ب) داریم $ha=\frac{2S}{a}$ و $ra=\frac{S}{P-a}$ از آنجا:

$$ra=ha\Rightarrow\frac{S}{P-a}=\frac{2S}{a}\Rightarrow\frac{1}{P-a}=\frac{2}{a}$$

$$\Rightarrow 2P-2a=a\Rightarrow a+b+c=3a\Rightarrow a+2b=3a\Rightarrow 3a=3a$$

بنابراین روابط الف و ب برقرارند.

۴ ـ برای اثبات این که اعضای مجموعهٔ $\{\sin 2x,\ tgx,\ x^2\}$

وابستهٔ خطی‌اند کافی است ترکیبی خطی از آنها تشکیل داده که مساوی با صفر باشد و همهٔ ضرایب آن ترکیب خطی با هم صفر نباشند:

$\sin 2x = 2\operatorname{tg}x\cos^2 x$ یا $\sin 2x = \frac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$ می‌دانیم

$\Rightarrow \sin 2x - 2\cos^2 x\operatorname{tg}x + 0x^2 = \bar{0}$

و به‌ازای هر $x \neq \frac{k\pi}{2}$ ضرایب ترکیب خطی فوق برای $\operatorname{tg}x$ و $\sin 2x$ همواره ناصفر بوده پس وابستهٔ خطی‌اند.

۵ ـ عمل * در جبر بول به‌صورت $a*b=(a+b).(a'+b')$ تعریف شده است. حال به‌اثبات قسمتهای مختلف مسأله می‌پردازیم:

الف) $a*a=(a+a).(a'+a')=a.a'=0$

ب) $a*1=(a+1).(a'+1')=1.(a'+0)=1.a'=a'$

ج) $a*a'=(a+a').(a'+a)=1.1=1$

د) $a*0=(a+0).(a'+0')=a.(a'+1)=a.1=a$

ه) سمت چپ $=a.(b*c)=a.[(b+c).(b'+c')]$

$=a.(bb'+bc'+cb'+cc')=a.(bc'+cb')$

سمت راست$=(a.b)*(a.c)=[(ab)+(ac)].[(ab)'+(ac)']$

$=[(ab)+(ac)].[(a'+b')+(a'+c')]$

$=\underbrace{(aba')}_{0}+\underbrace{(abb')}_{0}+\underbrace{(aba')}_{0}+abc'+\underbrace{aca'}_{0}+acb'+\underbrace{aca'}_{0}+\underbrace{acc'}_{0}$

$=abc'+acb'=a.(bc'+cb')$

۶ ـ اگر بخواهیم مجموع دو رقم اول و چهارم عددِ ۴ رقمی، ۱۰ باشد می‌توانیم از زوج مرتبهای مجموعهٔ زیر استفاده کنیم

$A=\{(6,4),(4,6),(3,7),(7,3),(8,2),(2,8),(9,1),(1,9)\}$

و اگر بخواهیم مجموع دو رقم وسط ۴ باشد، از زوج مرتبهای مجموعهٔ $B=\{(1,3),(3,1),(4,0),(0,4)\}$ ، می‌توان استفاده کرد (تکرار ارقام مجاز نیست).

برای استفاده از (۱,۹) چهار حالتِ استفاده از اعضای مجموعهٔ B امکان‌پذیر است و همین‌طور برای (۹,۱). برای زوج مرتبهای (۸,۲) و (۲,۸) نیز به‌همین صورت است، ولی برای استفاده از هر یک از زوج مرتبهای (۷,۳) یا (۳,۷) فقط دو عضو از B را می‌توان به‌کار برد یعنی (۴,۰) و (۰,۴) را می‌توان به‌کار گرفت و اگر به‌این ترتیب محاسبه شود در مجموع ۲۴ عدد ۴ رقمی با شرایط فوق می‌توان ساخت.

۷ ـ در بسط $(1+x)^n$ ، مجموع ضرایب توانهای فرد x مساوی $(\frac{2^n}{2})$ و مجموع ضرایب توانهای زوج x مساوی $(1-\frac{2^n}{2})$ است. در بسط $(1-x)^6$ ، مجموع ضرایب توانهای فرد x ، $(-\frac{2^6}{2})$ یعنی (−۳۲) و مجموع ضرایب توانهای زوج x مساوی $(1-\frac{2^6}{2})$ یعنی (+۳۱) است $63=(-32)-(+31)$ پس مجموع ضرایب توانهای زوج x ، (۶۳) واحد از مجموع ضرایب توانهای فرد (x) بیشتر است.

۸ ـ

$f(x+y,x-y)=2\sin x\sin y$

$\Rightarrow f(x+y,x-y)=\cos(x-y)-\cos(x+y)$

حال در سراسر رابطهٔ بالا به‌جای (x+y) ، x و به‌جای (x−y) ، y را قرار می‌دهیم.

$\Rightarrow f(x,y)=\cos y-\cos x$

$\Rightarrow f(\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{2})=\cos\frac{\pi}{2}-\cos\frac{2\pi}{3}=0-(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$

۹ ـ

$y=x^3+mx^2-4$

$y'=3x^2+2mx=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\frac{2m}{3} \end{cases}$

$x=0$ نمی‌تواند طول ماکزیمم باشد زیرا y آن (−۴) است در صورتی که y ماکزیمم صفر است. پس $x=-\frac{2m}{3}$ طول ماکزیمم است و عرض آن صفر است.

$\Rightarrow M \left| \begin{matrix} -\frac{2m}{3} \\ 0 \end{matrix} \right. \xRightarrow{\text{در تابع}} 0=-\frac{8m^3}{27}+\frac{4m^3}{9}-4 \Rightarrow -8m^3+12m^3$

$=4\times 27 \Rightarrow 4m^3=4\times 27 \Rightarrow m^3=27 \Rightarrow \boxed{m=3}$

۱۰ ـ

$1)\ 7\cos^2 x+5\sin^2 x=2\sin^2 x+\sin x\cos x+\frac{9}{2}$

$\Rightarrow 7\cos^2 x+3\sin^2 x-\sin x\cos x=\frac{9}{2}$

دو طرف تساوی را بر $\cos^2 x$ تقسیم می‌کنیم و از اتحاد $1+\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$ استفاده می‌کنیم:

$7+3\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}x=\frac{9}{2}(1+\operatorname{tg}^2 x) \Rightarrow \frac{3}{2}\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}x-\frac{5}{2}=0$

$\Rightarrow 3\operatorname{tg}^2 x+2\operatorname{tg}x-5=0 \Rightarrow (3\operatorname{tg}x+5)(\operatorname{tg}x-1)=0$

$\Rightarrow \operatorname{tg}x=1$ یا $\operatorname{tg}x=-\frac{5}{3}$

$\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4}$ یا $x=k\pi+\operatorname{Arctg}(-\frac{5}{3})$

$2)\ 3\sin 2x-2\sqrt{3}\cos 2x=6$

با استفاده از اتحادهای $\sin 2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$ و $\cos 2x=\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$ ، خواهیم داشت:

$3(\frac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2 x})-3\sqrt{3}(\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x})=6$

دو طرف تساوی را بر عدد ۳ تقسیم می‌کنیم:

$\Rightarrow 2\operatorname{tg}x-\sqrt{3}(1-\operatorname{tg}^2 x)=2(1+\operatorname{tg}^2 x)$

$\Rightarrow 2\operatorname{tg}x-\sqrt{3}+\sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x=2+2\operatorname{tg}^2 x$

$(2-\sqrt{3})\operatorname{tg}^2 x-2\operatorname{tg}x+2+\sqrt{3}=0$

$\Rightarrow \operatorname{tg}x=\frac{1\pm\sqrt{1-(4-3)}}{2-\sqrt{3}}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$

$\Rightarrow \operatorname{tg}x=\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12} \Rightarrow \boxed{x=k\pi+\frac{5\pi}{12}}$

$3)\ 3\operatorname{tg}(x-\frac{\pi}{12})+\operatorname{cotg}(\frac{\pi}{12}-x)=2$

$\Rightarrow 3\operatorname{tg}(x-\frac{\pi}{12})-\operatorname{cotg}(x-\frac{\pi}{12})=2$

دو طرف تساوی را در $\operatorname{tg}(x-\frac{\pi}{12})$ ضرب می‌کنیم:

$3\operatorname{tg}^2(x-\frac{\pi}{12})-1=2\operatorname{tg}(x-\frac{\pi}{12})$

$\Rightarrow 3\operatorname{tg}^2(x-\frac{\pi}{12})-2\operatorname{tg}(x-\frac{\pi}{12})-1=0$

$\Rightarrow \operatorname{tg}(x-\frac{\pi}{12})=\frac{1\pm 2}{3} \Rightarrow \operatorname{tg}(x-\frac{\pi}{12})=1$

یا $\operatorname{tg}(x-\frac{\pi}{12})=-\frac{1}{3} \Rightarrow x-\frac{\pi}{12}=k\pi+\frac{\pi}{4}$

یا $x-\frac{\pi}{12}=k\pi+\operatorname{Arctg}(-\frac{1}{3})$

$\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{3}$ یا $x=k\pi+\frac{\pi}{12}+\operatorname{Arctg}(-\frac{1}{3})$

۱۱ ـ

$\begin{cases} x-y=\frac{\pi}{3} \\ \frac{\cos x}{\cos y}=2-\sqrt{3} \end{cases}$

$\frac{\cos x}{\cos y}=2-\sqrt{3} \Rightarrow \frac{\cos x+\cos y}{\cos x-\cos y}=$

$\frac{2-\sqrt{3}+1}{2-\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{-(\sqrt{3}-1)}=-\sqrt{3}$

$\Rightarrow \frac{2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}{-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}}=-\sqrt{3}$

$\Rightarrow \operatorname{cotg}\frac{x+y}{2}\operatorname{cotg}\frac{x-y}{2}=\sqrt{3}$

$\Rightarrow \operatorname{cotg}\frac{x+y}{2}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{6}=\sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{cotg}\frac{x+y}{2}=1$

$\Rightarrow \operatorname{cotg}\frac{x+y}{2}=\operatorname{cotg}\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{x+y}{2}=k\pi+\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \begin{cases} x-y=\frac{\pi}{3} \\ x+y=2k\pi+\frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow x=k\pi+\frac{5\pi}{12},\ y=k\pi+\frac{\pi}{12}$

۱۲ ـ با استفاده از تساویهای $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$ ، داریم:

$a\sin(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2})=(b-c)\cos\frac{\hat{A}}{2}$

$\Rightarrow 2R\sin\hat{A}\sin(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2})=2R(\sin\hat{B}-\sin\hat{C})\cos\frac{\hat{A}}{2}$

$\Rightarrow \sin\hat{A}\sin(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2})=2\sin\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}\cos\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}\cos\frac{\hat{A}}{2}$

$\Rightarrow \sin(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2})[\sin\hat{A}-2\cos\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}\cos\frac{\hat{A}}{2}]=0$

$\Rightarrow \sin(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2})=0$ یا $\sin\hat{A}=2\cos\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}\cos\frac{\hat{A}}{2}$

با استفاده از تساوی $\sin\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}=\cos\frac{\hat{A}}{2}$ ، خواهیم داشت:

$\sin\hat{A}=2\cos\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}\sin\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2} \Rightarrow \sin\hat{A}=\sin(\hat{B}+\hat{C})$

$\Rightarrow \hat{A}=\hat{B}+\hat{C}$ یا $\hat{A}=\pi-(\hat{B}+\hat{C})$ (مثلث غیرمشخص)

$\Rightarrow \boxed{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\pi}$

۱۳ ـ

```
DECLARE FUNCTION FACT (N)
DECLARE FUNCTION EXPAND (C1, N, I)
CLS
DO
  INPUT "Enter a number for power N :"; N
LOOP UNTIL (INT(N) = N AND SGN(N) = 1)
PRINT "(x+y+z)^"; N; "=";
FOR I = 0 TO N
   C1 = FACT(N) / (FACT(I) * FACT(N - I))
   CAL = EXPAND(C1, N, I)
NEXT
END


FUNCTION EXPAND (C1, N, I)
 IF N = I THEN
   PRINT "Z^"; I
   EXIT FUNCTION
 END IF
 FOR J = 0 TO N - I
  C2 = FACT(N - I) / (FACT(J) * FACT(N - I - J))
  IF N - I - J = 0 THEN
    IF I = 0 THEN
      IF C1 * C2 = 1 THEN
        PRINT "y^"; J; "+";
      ELSE
        PRINT C1 * C2; "y^"; J; "+";
      END IF
    ELSE
     IF C1 * C2 = 1 THEN
       PRINT "y^"; J; "Z^"; I; "+";
     ELSE
       PRINT C1 * C2; "y^"; J; "Z^"; I; "+";
     END IF
    END IF
   ELSEIF J = 0 THEN
    IF I = 0 THEN
     IF C1 * C2 = 1 THEN
       PRINT "x^"; N - I - J; "
     ELSE
       PRINT C1 * C2; "x^"; N - I - J; "+";
     END IF
    ELSE
```

```
      IF C1 * C2 = 1 THEN
        PRINT "x^"; N - I - J; "z^"; I; "+";
      ELSE
        PRINT C1 * C2; "x^"; N - I - J; "z^"; I; "+";
      END IF
    END IF
    ELSEIF I = 0 THEN
      IF C1 * C2 = 1 THEN
        PRINT "x^"; N - I - J; "y^"; J; "+";
      ELSE
        PRINT C1 * C2; "x^"; N - I - J; "y^"; J; "+";
      END IF
    ELSE
    IF C1 * C2 = 1 THEN
      PRINT "x^"; N - I - J; "z^"; I; "+";
    ELSE
      PRINT C1 * C2; "x^"; N - I - J; "y^"; J; "z^"; I; "+";
    END IF
  END IF
 NEXT
END FUNCTION

FUNCTION FACT (N)

FUNCTION FACT (N)
  IF N = 0 THEN
     FACT = 1
     EXIT FUNCTION
  ELSE
     F = 1
     FOR I = 1 TO N
       F = F * I
     NEXT
     FACT = F
  END IF
END FUNCTION
```

منطق این برنامه، بر این اصل استوار است که در بسط سه جمله‌ای :

$$(x+y+z)^n=[(x+y)+z]^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(x+y)^{n-i}\cdot z^i$$

است که در آن، c1 ضریب هر جمله از بسط $[(x+y)+z]^n$، c2 ضریب هر جمله از بسط $(x+y)^n$ و c1 * c2 ضریب نهایی هر جمله از بسط $(x+y+z)^n$ است.

حل مسائل ریاضیات سال چهارم ریاضی

۱ ـ بردار $(2\vec{a}-3\vec{b})\wedge(\vec{a}+2\vec{b})$ را $\vec{w}$ می‌نامیم و تصاویر بردار $\vec{u}=\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|}$ را که بردار یکه در راستای $\vec{w}$ است پیدا می‌کنیم.

$\vec{a}(-1,2,3)\Rightarrow 2\vec{a}(-2,4,6),\ \vec{b}(3,0,-2)\Rightarrow 3\vec{b}(9,0,-6)$

$\Rightarrow(2\vec{a}-3\vec{b})(-11,4,12),\ 2\vec{b}(6,0,-4)\Rightarrow\vec{a}+2\vec{b}(5,2,1)$

$\Rightarrow\vec{w}=(2\vec{a}-3\vec{b})\wedge(\vec{a}+2\vec{b})(-28,49,-42)$

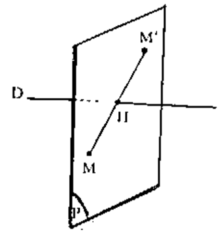
$\Rightarrow|\vec{w}|=\sqrt{784+2401+1764}=\sqrt{4949}=7\sqrt{101}$

$\Rightarrow\vec{u}=\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|}\left(-\frac{28}{7\sqrt{101}},\frac{49}{7\sqrt{101}},\frac{-42}{7\sqrt{101}}\right)$

$\Rightarrow\vec{u}\left(\frac{-4\sqrt{101}}{101},\frac{7\sqrt{101}}{101},\frac{-6\sqrt{101}}{101}\right)$

۲ ـ معادلهٔ صفحه‌ای را که از نقطه M بر خط D عمود می‌شود می‌نویسیم و نقطه تقاطع آن را با صفحهٔ P نقطهٔ H می‌نامیم، سپس مختصات نقطهٔ M' قرینهٔ نقطه M نسبت به‌نقطهٔ H را به‌دست می‌آوریم.

$$D:\begin{cases}x-y-4z+12=0\Rightarrow\vec{v}_1(1,-1,-4)\\2x+y-2z+3=0\Rightarrow\vec{v}_2(2,1,-2)\end{cases}$$



بردار نرمال صفحه P و بردار هادی خط D $\Rightarrow\vec{V}_D=\vec{v}_1\wedge\vec{v}_2(6,-6,3)$

$M(4,1,6)$

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$\Rightarrow 6(x-4)-6(y-1)+3(z-6)=0$

$6x-6y+3z-36=0$

$\Rightarrow 2x-2y+z-12=0$ معادلهٔ صفحهٔ P

$$\begin{cases}2x-2y+z-12=0\\x-y-4z+12=0\\2x+y-2z+3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x-6z+15=0\\ \\6x-3z-6=0\end{cases}$$

$\Rightarrow x=3,\ z=4\Rightarrow y=-1\Rightarrow H(3,-1,4)$

$$\left.\begin{array}{l}x_M+x_{M'}=2x_H\Rightarrow 4+x_{M'}=6\Rightarrow x_{M'}=2\\y_M+y_{M'}=2y_H\Rightarrow 1+y_{M'}=-2\Rightarrow y_{M'}=-3\\z_M+z_{M'}=2z_H\Rightarrow 6+z_{M'}=8\Rightarrow z_{M'}=2\end{array}\right\}\Rightarrow M'\left|\begin{array}{l}2\\-3\\2\end{array}\right.$$

۳ ـ می‌دانیم که فاصلهٔ نقطهٔ $M_1(x_1,y_1,z)$ از خط $D:\frac{x-x}{P}=\frac{y-y}{q}=\frac{z-z}{R}$ از دستور $M_1H=\frac{|\overrightarrow{M_1A}\wedge\vec{v}|}{|\vec{v}|}$ محاسبه می‌شود که در آن A نقطه‌ای دلخواه از خط D و $\vec{V}$ بردار هادی این خط است (صفحهٔ ۵۸ برهان ۱۴). پس برای یافتن معادلهٔ مکان هندسی خواسته شده فرض می‌کنیم M(x,y,z) یکی از نقاط این مکان هندسی یعنی نقطه‌ای باشد، که از خط D به‌فاصلهٔ ثابت ۴ واقع است.

در این صورت داریم:

$$D:\begin{cases}x=t-1\\y=2t+3\\z=-t-2\end{cases}\Rightarrow\vec{V}_D\left|\begin{array}{l}1\\2\\-1\end{array}\right.\quad,\ t=0\Rightarrow$$

$$A\left|\begin{array}{l}x=-1\\y=3\\z=-2\end{array}\right.\quad,\ M\left|\begin{array}{l}x\\y\\z\end{array}\right.\Rightarrow\overrightarrow{MA}\left|\begin{array}{l}x+1\\y-3\\z+2\end{array}\right.\Rightarrow$$

$\overrightarrow{MA}\wedge\vec{V}(-y-2z-1,x+z+3,2x-y+5)$

$\Rightarrow|\overrightarrow{MA}\wedge\vec{V}|=$

$\sqrt{(-y-2z-1)^2+(x+z+3)^2+(2x-y+5)^2}$

$|\vec{V}|=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6},\ MH=4\Rightarrow$

$$4=\frac{\sqrt{(+y+2z+1)^2+(x+z+3)^2+(2x-y+5)^2}}{\sqrt{6}}$$

$\Rightarrow(y+2z+1)^2+(x+z+3)^2+(2x-y+5)^2=96$

معادلهٔ مکان هندسی خواسته شده که یک رویهٔ استوانه‌ای دوار است.

۴ ـ طبق فرض داریم، $p*q\equiv(p\vee q)\wedge(\sim p\vee\sim q)$ در این صورت قسمتهای مختلف مسأله را ثابت می‌کنیم:

الف) $p*\sim p\equiv(p\vee\sim p)\wedge(\sim p\vee\sim(\sim p))\equiv T\wedge(\sim p\vee p)$

$\equiv T\wedge T\equiv T$

$p*p\sim(p\vee p)\wedge(\sim p\vee\sim p)\equiv p\wedge\sim p\equiv F$

$p*F\equiv(p\vee F)\wedge(\sim p\vee T)\equiv p\wedge T\equiv p$

ب) سمت چپ $\equiv p\wedge(q*r)\equiv p\wedge[(q\vee r)\wedge(\sim q\vee\sim r)]$

$\equiv p\wedge[\underbrace{(q\wedge\sim q)}_{F}\vee(r\wedge\sim q)\vee(q\wedge\sim r)\vee\underbrace{(r\wedge\sim r)}_{F}]$

$\equiv p\wedge[(r\wedge\sim q)\vee(q\wedge\sim r)]$

سمت راست $\equiv(p\wedge q)*(p\wedge r)\equiv[(p\wedge q)\vee(p\wedge r)]$

$\wedge[(\sim p\vee\sim q)\vee(\sim p\vee\sim r)]\equiv[(p\wedge q)\vee(p\wedge r)]$

$\wedge(\sim p\vee\sim q\vee\sim r)\equiv[\overbrace{(p\wedge q)\wedge\sim p}^{F}]\vee[\overbrace{(p\wedge q)\wedge\sim q}^{F}]$

$\vee[(p\wedge q)\wedge\sim r]\vee[\overbrace{(p\wedge r)\wedge\sim p}^{F}]\vee[(p\wedge r)\wedge\sim q]$

$\vee[\underbrace{(p\wedge r)\wedge\sim r}_{F}]\equiv[p\wedge(q\wedge\sim r)]\vee[p\wedge(r\wedge\sim q)]$

سمت چپ $\equiv p\wedge[(q\wedge\sim r)\vee(r\wedge\sim q)]\equiv$

۵ ـ طبق فرض داریم: $a\overset{m}{\equiv}b$ ، $a\overset{n}{\equiv}c$ می‌خواهیم ثابت کنیم $b\overset{(m,n)}{\equiv}c$

$$\left.\begin{array}{l}a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow a-b=mk\Rightarrow a=mk+b\\a\overset{n}{\equiv}c\Rightarrow a-c=nk'\Rightarrow a=nk'+c\end{array}\right\}\Rightarrow mk+b=nk'+c$$

$\Rightarrow b-c=nk'-mk\ (1)$

از طرفی اگر فرض کنیم $(m,n)=d$ در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & d\mid m\Rightarrow d\mid mk \arrow[dr] & \\ (m,n)=d \arrow[ur] \arrow[dr] & & d\mid nk'-mk \\ & d\mid n\Rightarrow d\mid nk' \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$\overset{(1)}{\Longrightarrow}d\mid b-c\Rightarrow b\overset{d}{\equiv}c$

۶ ـ بدون بسط و فقط با استفاده از خواص دترمینان داریم:

$$\begin{vmatrix}0&a&b&0\\a&0&0&b\\b&0&0&a\\0&b&a&0\end{vmatrix}\overset{\text{سطر ۲ + سطر ۳}}{=}\begin{vmatrix}0&a&b&0\\a+b&0&0&a+b\\b&0&0&a\\0&b&a&0\end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{ستون ۲ + ستون ۳}}{=}\begin{vmatrix}0&a+b&b&0\\a+b&0&0&a+b\\b&0&0&a\\0&a+b&a&0\end{vmatrix}=(a+b)^2\begin{vmatrix}0&1&b&0\\1&0&0&1\\b&0&0&a\\0&1&a&0\end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{قرینه ستون ۱ + ستون ۴}}{\overset{\text{قرینه سطر ۱ + سطر ۴}}{=}}(a+b)^2\begin{vmatrix}0&1&b&0\\1&0&0&0\\b&0&0&a-b\\0&0&a-b&0\end{vmatrix}=(a+b)^2(a-b)^2$$

$$\begin{vmatrix}0&1&b&0\\1&0&0&0\\b&0&0&1\\0&0&1&0\end{vmatrix}$$

b ـ برابر ستون ۴ را به ستون اول.

جای دو ستون اول و دوم تعویض شود.

$$=(a^2-b^2)^2\begin{vmatrix}0&1&b&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{vmatrix}$$

جای دو ستون سوم و چهارم تعویض شود.

$$=-(a^2-b^2)^2\begin{vmatrix}1&0&b&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{vmatrix}$$

$$=+(a^2-b^2)^2\begin{vmatrix}1&0&0&b\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}=(a^2-b^2)^2$$

۷ ـ

$-\sin^2\pi x\geq 0\Rightarrow\sin\pi x=0\Rightarrow\pi x=k\pi\Rightarrow x=k$

چون در مثلثات K∈Z پس دامنه این رادیکال یعنی $\sqrt{-\sin^2\pi x}$, Z می‌باشد.

اگر $x\in Z\Rightarrow f(x)=\sqrt{x^2}-4x+4+0=\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|$

دامنه رادیکال بزرگ هم Z را می‌پذیرد پس $D_f=Z$

اما قیافه معادله تابع چنین است:

$f(x)=\sqrt{x^2}-4x+4+0-\sqrt{0}\Rightarrow f(x)=|x-2|$

چون x∈Z و قدرمطلقها مثبت یا صفرند پس برد تابع: $Z^+\cup\{0\}$

۸ ـ $a>0$،

$x^4+y^2=a^2x^2\Rightarrow y^2=a^2x^2-x^4$

$\Rightarrow y^2=x^2(a^2-x^2)\Rightarrow y=\pm x\sqrt{a^2-x^2}$

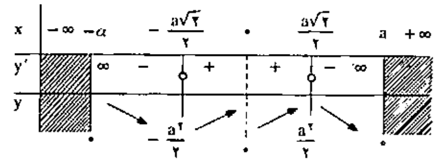
باید منحنی به‌معادلهٔ $y=x\sqrt{a^2-x^2}$ را رسم کنیم سپس قرینه شکل را

نسبت به محور xها رسم کنیم.

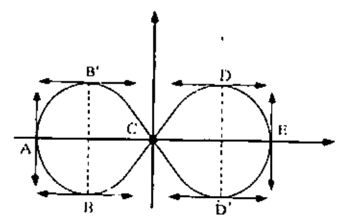
$a^2-x^2\geq 0\Rightarrow x^2\leq a^2\Rightarrow -a\leq x\leq a\Rightarrow D_f=[-a,a]$

$y'=\sqrt{a^2-x^2}+\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}\times x\Rightarrow y'=\frac{a^2-2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}=0\Rightarrow$

$x=\pm\frac{a\sqrt{2}}{2}$



$A\rightarrow B\rightarrow C\longrightarrow D\longrightarrow E$



۹ ـ

$$I=\int\frac{dx}{\cos x\sqrt{\cos 2x}}\ ,\ \cos x$$

$\cos x$ را در مخرج ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$I=\int\frac{dx}{\frac{\cos^2 x}{\cos x}\sqrt{\cos 2x}}$$

حال $\cos x$ مخرج را به‌داخل رادیکال می‌بریم:

$$\Rightarrow I=\int\frac{dx}{\cos^2x\sqrt{\frac{\cos 2x}{\cos^2 x}}}=\int\frac{dx}{\cos^2x\sqrt{\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\cos^2x}}}$$

$$=\int\frac{dx}{\cos^2x\sqrt{1-tg^2x}}=\int\frac{(1+tg^2x)dx}{\sqrt{1-tg^2x}}$$

$u=tgx\Rightarrow du=(1+tg^2x)dx$

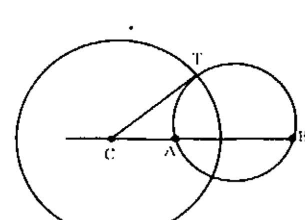
$$\Rightarrow I=\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\text{Arcsin}\,u+C=\text{Arcsin}\,(tgx)+C$$

❏ حل مسائل ریاضیات سال دوم تجربی

۱ ـ بنا به‌رابطه‌های طولی در دایره داریم:

$CT^2=CA.CB$ اما $CA.CB$

مقدار ثابتی است زیرا نقاط A و B و C ثابت می‌باشند. پس CT^2 و از آنجا CT مقدار ثابتی می‌باشد که چون نقطهٔ C ثابت است، پس مکان هندسی نقطهٔ T دایره‌ای به‌مرکز C و به‌شعاع $R=\sqrt{CA.CB}$ است.



۲ ـ بنا به‌رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$AH^2=BH.CH$ از آنجا:

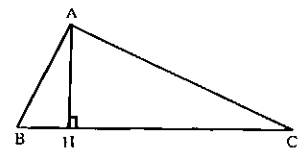
$(m\sqrt{2})^2=(m-1)(2m+3)\Rightarrow 2m^2=2m^2+m-3\Rightarrow m=3\Rightarrow$

$AH=3\sqrt{2}\ ,\ BH=3-1=2\ ,\ CH=2m+3=6+3=9\Rightarrow$

$BC=11\ ,\ AB^2=AH^2+BH^2=18+4=22\Rightarrow AB=\sqrt{22},$

$AC^2=AH^2+CH^2=18+81=99\Rightarrow AC=3\sqrt{11}$

$S=\frac{1}{2}AB.AC=\frac{1}{2}\times\sqrt{22}\times 3\sqrt{11}=\frac{33\sqrt{2}}{2}$ مساحت مثلث



۳ ـ

$2x^3-3x^2y-8x-4y+y^3=2x^3+x^2y-8x-4y+y^3-4x^2y$

$=x^2(2x+y)-4(2x+y)+y(y^2-4x^2)$

$=(2x+y)(x^2-4)+y(y-2x)(y+2x)$

$=(2x+y)(x^2-4+y^2-2xy)$

$=(2x+y)[(x-y)^2-4]$

$=(2x+y)(x-y-2)(x-y+2)$

۴ ـ

$\frac{mx-1}{2x-3}=mx-2\Rightarrow mx-1=(2x-3)(mx-2)$

$\Rightarrow mx-1=2mx^2-3mx-4x+6$

$\Rightarrow 2mx^2-4(m+1)x+7=0$

$\Delta'_x=4(m+1)^2-14m=4m^2-6m+4$

$\Delta'_m=9-16=-7<0$

چون مبین سه‌جمله‌ای Δ'_x منفی است، پس علامت سه‌جمله‌ای موافق علامت $a=4$ و مثبت است:

$\forall m\in\mathbb{R}\ ,\ 4m^2-6m+4>0$

بنابراین به‌ازای هر $m\in\mathbb{R}$ مبین معادله (Δ'_x) همواره مثبت است و درنتیجه معادله به‌ازای هر عدد حقیقی غیر صفر m دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است.

۵ ـ

$2^0+2^1+2^2+2^3+...+2^{n-1}=65535$

$\frac{2^n-1}{2-1}=65535$

$2^n-1=65535\Rightarrow 2^n=65536$

$\Rightarrow 2^n=2^{16}\Rightarrow\boxed{n=16}$

۶ ـ

$A=\log^2 5+\log^2 8+2\log 5\log 8-4\log 4$

$=(\log 5+\log 8)^2-4\log 4$

$=(\log 5+3\log 2)^2-8\log 2$

$=\log^2 5+9\log^2 2+6\log 5\log 2-8\log 2$

$=\log^2 5+\log^2 2-2\log 5\log 2+8\log^2 2+8\log 5\log 2-8\log 2$

$=(\log 5-\log 2)^2+8(\log^2 2+\log 5\log 2-\log 2)$

$=(\log\frac{10}{2}-\log 2)^2+8[\log 2(\log 2+\log 5)-\log 2]$

$=(1-2\log 2)^2+8(\log 2\log 10-\log 2)$

$=(1-\log 4)^2+8(\log 2-\log 2)$

$=(1-\log 4)^2\Rightarrow\boxed{A=(1-\log 4)^2}$

۷ ـ

$\log_a^x=\frac{1}{2}\Rightarrow\log_x^a=2\qquad(1)$

$\log_b^x=\frac{1}{3}\Rightarrow\log_x^b=3\qquad(2)$

$\log_c^x=\frac{1}{4}\Rightarrow\log_x^c=4\qquad(3)$

از جمع تساویهای (۱) و (۲) و (۳) داریم:

$\log_x^a+\log_x^b+\log_x^c=9\Rightarrow\log_x^{abc}=9$

$\log_x^x=1\Rightarrow\log_x^{abc}+\log_x^x=9+1\Rightarrow\boxed{\log_x^{abcx}=10}$

۸ ـ

$$A=\frac{1+\sqrt{3}\,tg10^\circ}{\sqrt{3}-tg10^\circ}=\frac{\frac{1+\sqrt{3}\,tg10^\circ}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}-tg10^\circ}{\sqrt{3}}}=$$

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+tg10^\circ}{1-\frac{tg10^\circ}{\sqrt{3}}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+tg10^\circ}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}tg10^\circ}=$$

$$\frac{tg30^\circ+tg10^\circ}{1-tg30^\circ tg10^\circ}=tg(30^\circ+10^\circ)$$

$\Rightarrow\boxed{A=tg40^\circ}\simeq 0/839$

۹ ـ با استفاده از اتحاد $\cos^2x=\frac{1}{1+tg^2x}$، داریم:

$2^{\sin^2x}+2^{\frac{1}{1+tg^2x}}=3$

$\Rightarrow 2^{\sin^2x}+2^{\cos^2x}=3\Rightarrow 2^{1-\cos^2x}+2^{\cos^2x}=3$

$\Rightarrow\frac{2}{2^{\cos^2x}}+2^{\cos^2x}=3$

با فرض $2^{\cos^2x}=y$، خواهیم داشت:

$\frac{2}{y}+y=3\Rightarrow y^2-3y+2=0\Rightarrow(y-1)(y-2)=0$

$\Rightarrow y=1$ یا $y=2\Rightarrow 2^{\cos^2x}=1$ یا $2^{\cos^2x}=2$

$\Rightarrow\cos^2x=0$ یا $\cos^2x=1\Rightarrow\cos x=0$ یا $\cos x=\pm 1$

$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ یا $x=2k\pi$ یا $x=2k\pi\pm\pi$

۱۰ ـ

با استفاده از اتحاد $tgx=\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$، داریم:

$tgx=\frac{\sin 80^\circ}{1+\cos 40^\circ}\times\frac{\cos 40^\circ}{1+\cos 80^\circ}=$

$\frac{\sin 80^\circ}{1+\cos 80^\circ}\times\frac{\cos 40^\circ}{1+\cos 40^\circ}=tg40^\circ\times\frac{\cos 40^\circ}{1+\cos 40^\circ}=$

$\frac{\sin 40^\circ}{\cos 40^\circ}\times\frac{\cos 40^\circ}{1+\cos 40^\circ}=\frac{\sin 40^\circ}{1+\cos 40^\circ}=tg20^\circ$

$\Rightarrow tgx=tg20^\circ\Rightarrow\boxed{x=k\pi+\frac{\pi}{9}}$

❏ حل مسائل ریاضیات سال سوم تجربی

۱ ـ با شرایط داده شده در مسأله داریم:

$A(-1,0)\ ,\ y=x^2+1\Rightarrow y'=2x\Rightarrow 2x=0\Rightarrow x=0\Rightarrow y=1$

$\Rightarrow B(0,1)\ ,\ C(2,2)\Rightarrow$

مرکز ثقل مثلث G $\left|\begin{array}{l}x=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}=\frac{-1+0+2}{3}=\frac{1}{3}\\ y=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}=\frac{0+1+2}{3}=1\end{array}\right.$

$\Rightarrow G=(\frac{1}{3} , 1)$

$OG=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\frac{1}{9}+1}=\frac{\sqrt{10}}{3}$

اندازهٔ بردار مکان نقطهٔ G

۲ ـ نخست ثابت می‌کنیم که برای هر نقطهٔ O در صفحهٔ مثلث ABC همواره رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\overline{OA}.\overline{BC}+\overline{OB}.\overline{CA}+\overline{OC}.\overline{AB}=0 \qquad (1)$$

داریم:

$$\overline{OA}.(\overline{OC}-\overline{OB})+\overline{OB}.(\overline{OA}-\overline{OC})+\overline{OC}(\overline{OB}-\overline{OA})=0$$

$$\cancel{\overline{OA}.\overline{OC}}-\cancel{\overline{OA}.\overline{OB}}+\cancel{\overline{OB}.\overline{OA}}-\cancel{\overline{OB}.\overline{OC}}+\cancel{\overline{OC}.\overline{OB}}-\cancel{\overline{OC}.\overline{OA}}=0$$

$\Rightarrow 0=0$

حال برای اثبات همرس بودن سه ارتفاع مثلث ABC، دو ارتفاع BB' و CC' را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آنها را O می‌نامیم و از O به رأس A وصل می‌کنیم. داریم:

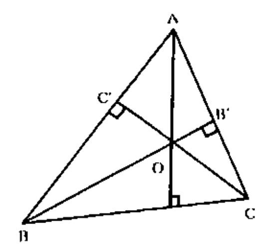
$$\overline{OB}\perp C\Rightarrow \overline{OB}.\overline{CA}=0 \qquad (2)$$

$$\overline{OC}\perp \overline{AB}\Rightarrow \overline{OC}.\overline{AB}=0 \qquad (3)$$

$$(1)+(2)\Rightarrow \overline{OB}.\overline{CA}+\overline{OC}.\overline{AB}=0 \qquad (4)$$

از مقایسه این رابطه با رابطهٔ (۱) نتیجه می‌شود که:

$$\overline{OA}.\overline{BC}=0\Rightarrow \overline{OA}\perp \overline{BC}$$



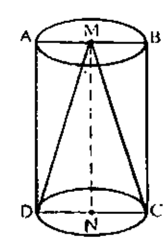
بنابراین ارتفاع رأس A نیز از نقطهٔ O می‌گذرد. پس سه ارتفاع هر مثلث همرسند.

۳ ـ حجم حاصل از دوران مثلث ADM حول خط MN برابر است با تفاضل حجم استوانه به ارتفاع AD=۸ و شعاع قاعدهٔ $AM=\frac{4}{2}=2$ و مخروط به ارتفاع MN=۸ و شعاع قاعدهٔ DN=۲ بنابراین:

$$\text{حجم استوانه}=\pi\times DN^2\times AD=\pi\times 4\times 8=32\pi$$

$$\text{حجم مخروط}=\frac{1}{3}\pi\times DN^2\times AD=\frac{1}{3}\pi\times 4\times 8=\frac{32\pi}{3}$$

$$\text{حجم حاصل از دوران مثلث AMD حول MN}=32\pi-\frac{32\pi}{3}=\frac{64\pi}{3}$$



در نتیجه حجم حاصل از دوران مثلث AMD حول خط MN دو برابر حجم حاصل از دوران مثلث MDN حول خط MN است. و این نشان می‌دهد که اگر یک استوانهٔ دوار و یک مخروط دوار شعاع قاعده‌شان برابر، و ارتفاعشان نیز برابر باشد، حجم مخروط، $\frac{1}{3}$ حجم استوانه است.

۴ ـ دامنهٔ تابع:

$$f(x)=\sqrt{2x^2-2}+\sqrt{4-4x^2}$$

$$D_f=\{x|2x^2-2\geq 0 \text{ و } 4-4x^2\geq 0\}=\{x|2x^2\geq 2 \text{ و } 4x^2\leq 4\}$$

$$=\{x|x^2\geq 1 \text{ و } x^2\leq 1\}=\{x|x^2=1\}=\{-1 \text{ و } 1\}$$

برد تابع:

$$f(-1)=0 \text{ و } f(1)=0\Rightarrow R_f=\{0\}$$

۵ ـ مختصات نقاط تقاطع از دستگاه زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{cases} y=\frac{3}{2} \\ y=\sin x+2 \end{cases}\Rightarrow \sin x+2=\frac{3}{2}\Rightarrow \sin x=-\frac{1}{2}=\sin(-\frac{\pi}{6})$$

$$\Rightarrow x=2k\pi-\frac{\pi}{6} \text{ یا } x=2k\pi+\frac{7\pi}{6}\Rightarrow k=0: \quad A\left|\begin{matrix} x=\frac{7\pi}{6} \\ y=\frac{3}{2}\end{matrix}\right.$$

(A مختصات یکی از نقاط تقاطع می‌باشد.)

$$y'=\cos x\Rightarrow m=\cos\frac{7\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ و } m_A=0$$

$$\Rightarrow tg\omega=\left|\frac{m_A-m}{1+m_A.m}\right|=\left|\frac{0-(-\frac{\sqrt{3}}{2})}{1+(0)(-\frac{\sqrt{3}}{2})}\right|=\left|\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega=Arctg\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

۶ ـ اگر نقطهٔ مفروض B(x,y)، نزدیکترین نقطهٔ منحنی موردنظر به نقطهٔ A باشد، در این صورت داریم:

$$V=AB=\sqrt{(3-x)^2+(0-y)^2} \quad , y^2=x^2-2$$

$$\Rightarrow V=\sqrt{(3-x)^2+y^2}=\sqrt{9+x^2-6x+x^2-2}=\sqrt{2x^2-6x+7}$$

$$\Rightarrow V'=\frac{4x-6}{2\sqrt{2x^2-6x+7}}\Rightarrow V'=0\Rightarrow 4x-6=0$$

$$\Rightarrow 4x=6\Rightarrow x=\frac{3}{2} ; y^2=(\frac{3}{2})^2-2=\frac{9}{4}-2=\frac{1}{4}\Rightarrow y=\pm\frac{1}{2}$$

پس مسأله دارای دو جواب است:

$$M_1\left|\begin{matrix}\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2}\end{matrix}\right. \quad \text{یا} \quad M_2\left|\begin{matrix}\frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{matrix}\right.$$

۷ ـ

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^3}{4x^2+6x}-\frac{3x^2}{3x+2}\right) \quad (\text{صورت مبهم } \infty-\infty) =$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2}{2x+3}-\frac{3x^2}{3x+2}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2(3x+2)-3x^2(2x+3)}{(2x+3)(3x+2)}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2-9x^2}{6x^2+13x+6}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-5x^2}{x^2(6+\frac{13}{x}+\frac{6}{x^2})}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-5}{6+\frac{13}{x}+\frac{6}{x^2}}\right)=-\frac{5}{6}$$

$$2)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{Arctgx}{5x}\right)=\frac{0}{0} \quad (\text{مبهم})$$

با فرض Arc tgx=t یا x=tgt و با توجه به $\begin{cases}x\to 0\\ t\to 0\end{cases}$، خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{Arctgx}{5x}\right)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{t}{5tgt}\right)=\frac{1}{5}\lim_{t\to 0}\left(\frac{t}{tgt}\right)$$

$$=\frac{1}{5}\times 1=\frac{1}{5}$$

۸ ـ تابع f در x=۱ پیوسته است، اگر داشته باشیم:

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^-}f(x)=f(1)$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x^2+1)=2$$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{k-kx}{\sin(x-1)}\right)=-k\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{x-1}{\sin(x-1)}\right)$$

با فرض t=x−۱ و با توجه به $\begin{cases}x\to 1^-\\ t\to 0^-\end{cases}$؛ خواهیم داشت:

$$-k\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{x-1}{\sin(x-1)}\right)=-k\lim_{t\to 0^-}\left(\frac{t}{\sin t}\right)=-k\times 1=-k$$

$$f(1)=2\Rightarrow -k=2\Rightarrow \boxed{k=-2}$$

۹ ـ

$$1)\quad \sin A+\sin B+\sin C=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

می‌دانیم:

$$A+B+C=\pi\Rightarrow A+B=\pi-C$$

$$\frac{A+B}{2}=\frac{\pi-C}{2}\Rightarrow \sin\frac{A+B}{2}=\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2})=\cos\frac{C}{2} \quad (1)$$

$$\text{و } \cos\frac{A+B}{2}=\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2})=\sin\frac{C}{2} \quad (2)$$

بنابراین با استفاده از روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$\text{طرف اول}=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$=2\cos\frac{C}{2}(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2})$$

$$=2\cos\frac{C}{2}(2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2})$$

$$=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$2)\quad \sin A+\sin B-\sin C=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

با استفاده از روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$\text{طرف اول}=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$=2\cos\frac{C}{2}(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2})$$

$$=2\cos\frac{C}{2}(2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2})$$

$$=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

۱۰ ـ

$$1)\quad 4\sin(x+\frac{\pi}{6})\sin(x-\frac{\pi}{6})=1$$

$$\Rightarrow \frac{4}{2}[\cos(x+\frac{\pi}{6}-x+\frac{\pi}{6})-\cos(x+\frac{\pi}{6}+x-\frac{\pi}{6})]=1$$

$$\Rightarrow 2(\cos\frac{\pi}{3}-\cos 2x)=1$$

$$\Rightarrow 2(\frac{1}{2}-\cos 2x)=1\Rightarrow \cos 2x=0$$

$$\Rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow \boxed{x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}}$$

۲) $\cos 5x\cos 3x-\sin x\sin 3x=1$

با استفاده از تساویهای زیر:

$$\cos 5x\cos 3x=\frac{1}{2}[\cos(5x+3x)+\cos(5x-3x)]$$
$$=\frac{1}{2}(\cos 8x+\cos 2x)$$
$$\sin x\sin 3x=\frac{1}{2}[\cos(x-3x)-\cos(x+3x)]$$
$$=\frac{1}{2}(\cos 2x-\cos 4x)$$

خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2}(\cos 8x+\cos 2x)-\frac{1}{2}(\cos 2x-\cos 4x)=1$$
$$\Rightarrow \cos 8x+\cos 4x-2=0\Rightarrow 2\cos^2 4x-1+\cos 4x-2=0$$
$$\Rightarrow 2\cos^2 4x+\cos 4x-3=0\Rightarrow \cos 4x=1$$
یا $\cos 4x=-\frac{3}{2}$

می‌دانیم تساوی $\cos 4x=-\frac{3}{2}$ در مجموعهٔ اعداد حقیقی غیرممکن است. بنابراین:

$$\cos 4x=1\Rightarrow 4x=2k\pi\Rightarrow \boxed{x=\frac{K\pi}{2}}$$

۱۱ ـ با استفاده از اتحادهای زیر:

$4\sin(60^\circ-x)\sin x\sin(60^\circ+x)=\sin 3x$ (۱)

$4\cos(60^\circ-x)\cos x.\cos(60^\circ+x)=\cos 3x$ (۲)

خواهیم داشت:

$$P=\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 60^\circ\cos 80^\circ$$
$$=\cos 60^\circ[\cos(60^\circ-20^\circ)\cos 20^\circ\cos(60^\circ+20^\circ)]$$
$$\Rightarrow \boxed{P=\frac{1}{16}}\qquad =\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\cos(3\times 20^\circ)\right]=$$
$$\frac{1}{8}\cos 60^\circ=\frac{1}{16}$$
$$S=\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 60^\circ\sin 80^\circ$$
$$=\sin 60^\circ[\sin(60^\circ-20^\circ)\sin 20^\circ\sin(60^\circ+20^\circ)]$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{1}{4}\sin(3\times 20^\circ)\right]=\frac{\sqrt{3}}{8}\sin 60^\circ$$
$$=\frac{3}{16}\Rightarrow \boxed{S=\frac{3}{16}}$$

□ حل مسائل ریاضیات چهارم تجربی

۱ ـ

$$\begin{cases} y=-x & \text{(نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم)}\\ 7x-4y=55 \end{cases}\Rightarrow 7x-4(-x)=55$$
$$\Rightarrow 11x=55\Rightarrow x=5\ ,\ y=-5$$
$$\Rightarrow -5=K(5)+10\Rightarrow 5K=-15\Rightarrow \boxed{k=-3}$$

۲ ـ می‌دانیم برای رابطهٔ $f(x,y)=C$ داریم:

$y'=-\frac{f'_x}{f'_y}$ (f'_x مشتق نسبت x و f'_y مشتق نسبت y است)

بنابراین:

$$(y-2x)^2=2y-x+1\Rightarrow f(x,y)=(y-2x)^2-2y+x=1$$
$$\Rightarrow y'=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{2(-2)(y-2x)+1}{2(1)(y-2x)-2}=\frac{4y-8x-1}{2y-4x-2}$$

۳ ـ مشخصات مرکز دایره‌ای به‌شعاع R که بر محورهای مختصات مماس است و از نقطهٔ M(۲ و ۱) واقع در ناحیهٔ اول دستگاه مختصات می‌گذرد، چنین است: $O'(R,R)$

همچنین معادلهٔ استاندارد دایره چنین است:

(مرکز دایره) $O'(\alpha\beta)$: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$ (R شعاع دایره)

بنابراین:

$$O'(R,R):\ (x-R)^2+(y-R)^2=R^2$$

و چون دایرهٔ موردنظر از نقطهٔ M(۲ و ۱) می‌گذرد، خواهیم داشت:

$$M(1\ و\ 2):\ (1-R)^2+(2-R)^2=R^2\Rightarrow R^2-6R+5=0$$
$$\Rightarrow (R-1)(R-5)=0\Rightarrow R=1 \text{ یا } R=5$$

پس مسأله دارای دو جواب است:

$$(x-1)^2+(y-1)^2=1 \text{ یا } (x-5)^2+(y-5)^2=25$$

۴ ـ

$$y=\frac{7}{x^3}+2x\sqrt{2x^2+4}=7x^{-3}+\frac{1}{3}(6x)(2x^2+4)^{\frac{1}{2}}$$
$$\Rightarrow Y=\frac{7x^{-2}}{-2}+\frac{1}{3}\frac{(2x^2+4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C$$
$$\Rightarrow Y=-\frac{7}{2x^2}+\frac{2}{9}(2x^2+4)\sqrt{2x^2+4}+C$$

۵ ـ می‌دانیم $V_{\frac{\pi}{2}}=\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}y^2dx=\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(3\cos^2x-3\cos x)dx$

$$=3\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\cos^2x-\cos x)dx=3\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\frac{1+\cos 2x}{2}-\cos x\right)dx$$
$$=3\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos 2x}{2}-\cos x\right)dx=3\pi\left(\frac{1}{2}x+\frac{\sin 2x}{4}-\sin x\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$
$$=3\pi\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\sin 2\pi}{4}-\sin\pi-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\sin\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{2}\right)\right]$$
$$=3\pi\left(\frac{\pi}{4}+1\right)\Rightarrow \boxed{V_{\frac{\pi}{2}}=3\pi\left(\frac{\pi}{4}+1\right)}$$

۶ ـ

۱) $\cot g(x-\frac{\pi}{4})-tg(\frac{\pi}{4}-x)=2\Rightarrow$

$\cot g(x-\frac{\pi}{4})+tg(x-\frac{\pi}{4})=2$

دو طرف معادله را در $tg(x-\frac{\pi}{4})$ ضرب می‌کنیم:

$$1+tg^2(x-\frac{\pi}{4})=2tg(x-\frac{\pi}{4})\Rightarrow$$
$$tg^2(x-\frac{\pi}{4})-2tg(x-\frac{\pi}{4})+1=0$$
$$\Rightarrow (tg(x-\frac{\pi}{4})-1)^2=0\Rightarrow tg(x-\frac{\pi}{4})-1=0$$
$$\Rightarrow tg(x-\frac{\pi}{4})=1\Rightarrow tg(x-\frac{\pi}{4})=tg\frac{\pi}{4}$$
$$\Rightarrow x-\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{4}\Rightarrow \boxed{x=k\pi+\frac{\pi}{2}}$$

۲) $\sqrt{6}(\sin x+\cos x)+\sqrt{3}\sin 2x=2\sqrt{3}$

با فرض $y=\sin x+\cos x$، داریم:

$$y=\sin x+\cos x\Rightarrow y^2=\underbrace{\sin^2x+\cos^2x}_{1}+\underbrace{2\sin x\cos x}_{\sin 2x}$$
$$\Rightarrow y^2=1+\sin 2x\Rightarrow \sin 2x=y^2-1$$

بنابراین:

$$\sqrt{6}y+\sqrt{3}(y^2-1)=2\sqrt{3}\Rightarrow \sqrt{3}y^2+\sqrt{6}y-4\sqrt{3}=0$$
$$\Rightarrow y^2+\sqrt{2}y-4=0\Rightarrow y=\sqrt{2} \text{ یا } y=-2\sqrt{2}\ \text{(غ ق ق)}$$

(زیرا: $-\sqrt{2}\le y\le\sqrt{2}$)

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\Rightarrow \sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow \cos(x-\frac{\pi}{4})=1$$
$$\Rightarrow \boxed{x=2K\pi+\frac{\pi}{4}}$$

۷ ـ با استفاده از رابطهٔ:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$$

و فرض مسأله:

$$a^2b+a^2c=b^3+c^3\Rightarrow a^2(b+c)=(b+c)(b^2-bc+c^2)$$
$$\Rightarrow a^2=b^2-bc+c^2$$

خواهیم داشت:

$$b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}=b^2-bc+c^2$$
$$\Rightarrow 2\cos\hat{A}=1\Rightarrow \cos\hat{A}=\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \boxed{\hat{A}=60^\circ}$$
$$b=2, c=1:\ a^2=2^2-2\times 1+1\Rightarrow a^2=3\Rightarrow \boxed{a=\sqrt{3}}$$
$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=2R\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=2R\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2R$$
$$\Rightarrow 2R=2\Rightarrow \boxed{R=1}$$

جوابهای تفریح اندیشه

جواب ۱: سفره را لوله کرده، لیوان را به آرامی با قسمت لوله شده هل دهید.

جواب ۲: عقل سلیم می‌گوید اگر هر گلوله دارای شانس به خطا رفتن باشد، شانسی برای به خطا رفتن هر چهار گلوله وجود دارد. همچنین، هدف مورد بحث می‌تواند توسط یک، دو، سه، یا هر چهار گلوله مورد اصابت قرار گیرد.

لاپلاس یادآوری می‌کند «با محاسبه تأیید کنید.» زیرا عقل سلیم، با هوشی چون هوش جواد نیز، گاهی آدمی را به اشتباه می‌اندازد. (کسی که اعلام کرد که در انداختن دو تاس احتمال *دوازده* درست به اندازهٔ احتمال *یازده* است، ریاضیدانی کمتر از لایب‌نیتز، یکی از به وجود آورندگان حساب دیفرانسیل و انتگرال، نبوده است!)

از آنجا که هر گلوله در نخوردن به هدف ۳ شانس در ۴ دارد، احتمال به هدف نخوردن هر چهار عبارت است از:

$$\frac{۳}{۴}\times\frac{۳}{۴}\times\frac{۳}{۴}\times\frac{۳}{۴}=\frac{۸۱}{۲۵۶}$$

و احتمال اینکه تیری به هدف بخورد عبارت است از:

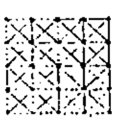
$$۱-\frac{۸۱}{۲۵۶}=\frac{۱۷۵}{۲۵۶}$$

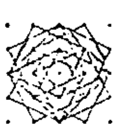
(۱۷۵ شانس فوق شامل به هدف خوردنهای یک، دو، سه، و هر چهار گلوله است.)

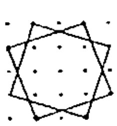
جواب ۳: اگر میخی به دو میخ دیگر بسته شده باشد، بازیکنی که بعد به بازی می‌پردازد بازی را، با وصل کردن این میخها به هم، می‌برد. بنابراین، بازی، تا زمانی که حداقل دو میخ «آزاد» (یعنی، میخهایی که تنها به یک میخ دیگر وصل شده‌اند) موجودند، ادامه خواهد یافت. این وضعیت $\frac{n}{۲}$ حرکت، به ازای n ی که تعداد زوجی از میخها باشد، و $\frac{(n-۱)}{۲}$ حرکت، به ازای n فرد، خواهد داشت. بنابراین، بازیکن اوّل در صورتی که n بخشپذیر بر ۴ (یعنی $\frac{n}{۲}$ زوج) باشد یا در صورتی که n، چون بر ۴ تقسیم شود، باقیمانده ۱ ی داشته باشد، می‌برد. در صورتی که باقیماندهٔ مزبور ۲ یا ۳ باشد، بازیکن دوم برنده است.

جواب ۴:

۱۶ مربع	۱×۱
۹ مربع	۲×۲
۴ مربع	۳×۳
۱ مربع	۴×۴
۹ مربع	$\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}$
۱ مربع	$۲\sqrt{۲}\times۲\sqrt{۲}$
۸ مربع	$\sqrt{۵}\times\sqrt{۵}$
۲ مربع	$\sqrt{۱۰}\times\sqrt{۱۰}$







و در مجموع ۵۰ مربع می‌توان ساخت.

Borhan
Vol. 5 No. 3
Serial numbers: 17 Spring 1996

In the name of God

Borhan is a mathematics journal published four times a year by Madrasse Publications. Each issue includes articles related to mathematics and its various topics specifically those concerning highschool education in Iran.

All communications should be sent to the editor at the following address:
Madrasse Publication - No. 36. Haghighat talab Street, Sepahbod gharany Ave, Tehran, Iran
Post code: 14155/1949

Contents:

کد ۴۰۳/۱

کوشیار گیلی*

کیا ابوالحسن کوشیار بن لبان بن باشهری گیلانی

ریاضیدان و منجم ایرانی (در حدود ۳۳۰ ـ اوایل سدهٔ پنجم)

سوتر دورهٔ زندگانی کوشیار را تقریباً بین سالهای ۳۶۰ تا ۴۲۰ ذکر کرده و مؤلفان مغرب زمین از او تقلید کرده‌اند. امّا این تاریخ دقیق نیست. زیرا کوشیار در کتاب زیج خود مثال مولودی از سال ۳۳۲ یزدگردی، مطابق با ۵۳-۳۵۲ هجری قمری آورده است. پس وی این زیج را در سال ۳۵۳ نوشته و لابد در آن هنگام در حدود بیست تا سی سال داشته است.

آثار موجود ریاضی وی

۱ـ کتاب فی اصول حساب الهند

کتاب اصول حساب‌الهند کوشیار (خواهد آمد) از این جهت در تاریخ ریاضیات مهم و مورد توجه است که در بین کتابهای حسابی که از دورهٔ اسلامی به دست ما رسیده، قدیمترین کتابی است که در آن دستگاه شمار باارزش مکان تشریح شده و در آن ارقام هندی به کار رفته است. این کتاب از حیث تأثیری که در بسط مفاهیم و اصطلاحات ریاضی داشته نیز مهم است.

این کتاب در دو مقاله است. در مقالهٔ اول آن مؤلف چهار عمل اصلی حساب و استخراج جذر را در دستگاه شمار اعشاری شرح داده و در مقالهٔ دوم کسرها را در دستگاه شمار شصتگانی و با به کاربردن ارقام هندی توضیح داده است.

۲ـ عیون‌الاصول فی‌الحساب

یک نسخهٔ نفیس از کتاب کوشیار باعنوان عیون‌الاصول فی‌الحساب در جزو مجموعه‌ای (به شمارهٔ ۲۰۹۲/۴) در کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران موجود است.

این کتاب بسیار فشرده و مختصر و در دوازده باب است و ترجمهٔ فارسی عنوان بابهای آن به شرح زیر می‌باشد:

باب اول در صورتهای حروف، باب دوم در افزودن عدد بر عدد، باب سوم در کاستن عدد از عدد، باب چهارم در ضرب، باب پنجم در حاصل‌ضرب، باب ششم در تقسیم، باب هفتم در حاصل‌قسمت، باب هشتم در جذر، باب نهم در حاصل جذر، باب دهم در کعب، باب یازدهم در حاصل کعب، باب دوازدهم در میزان.

۳ـ زیج جامع

بیرونی در کتاب افرادالمقال فی امرالظلال به این زیج اشاره کرده است. عکس نسخهٔ خطی این زیج به شمارهٔ ۵۱۰ تا ۵۱۳ (چهار جزء) و فیلم آن نیز در کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران موجود است. علاوه براین نسخه‌های خطی آن در برلین و استانبول نیز هست.

دو مقالهٔ اول و دوم این زیج مربوط به نجوم عملی و دو مقالهٔ سوم و چهارم آن در نجوم نظری است. در آخر مقالهٔ سوم یک باب مفرد هست با عنوان «جوامع علم الهیئه».

---

* از کتاب زندگی‌نامه ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی، نشر دانشگاهی