مجلهٔ ریاضی

برهان

۲۷

برای دانش آموزان دبیرستان

سال هشتم، شمارهٔ سوّم، زمستان ۱۳۷۷، بها ۲۰۰۰ ریال

بسم الله الرحمن الرحیم

انتشارات مدرسه وابسته به وزارت آموزش و پرورش

❑ صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه ❑ مدیر مسؤول: محمود ابراهیمی
❑ سردبیر: حمیدرضا امیری ❑ مدیر داخلی: میرشهرام صدر
❑ اعضای هیأت تحریریه: آقایان: ❑ حمیدرضا امیری ❑ محمدهاشم رستمی ❑ احمد قندهاری ❑ میرشهرام صدر
❑ سیدمحمدرضا هاشمی موسوی ❑ غلامرضا یاسی پور (با تشکر از همکاری ارزندهٔ آقای پرویز شهریاری)
❑ مدیرفنی: هوشنگ آشتیانی ❑ طراح گرافیک: امیر بابایی ❑ چاپ و صحافی: چاپخانه مدرسه

مطالب این شماره

■ **سال هشتم، زمستان ۱۳۷۷، شمارهٔ سوّم.**

برهان تمامی دبیران محترم و دانش آموزان عزیز را در زمینه های زیر دعوت به همکاری می کند:

● نگارش مقالات کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتابهای ریاضی دبیرستان) ● طرح مسائل کلیدی (برای دانش آموزان) به همراه حل آن ● طرح مسائل مسابقه ای (برای دانش آموزان) به همراه حل آن ● طرح معماهای ریاضی ● نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

■ هیأت تحریریه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافهٔ مقالات آزاد است.
■ مقالات وارده باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.
■ مقالات مجله با رسم‌الخط انتشارات مدرسه به چاپ خواهد رسید.
■ مقالات رسیده مسترد نمی شود.

برهان هر سه ماه یک شماره منتشر می شود.

نشانی: خیابان سپهبد قرنی، خیابان سپند شرقی، پلاک ۳۸
تلفن: ۶-۸۸۹۶۷۶۵، ۷۱_۸۸۰۴۵۶۸، دورنویس (فاکس): ۸۸۲۰۵۹۹، صندوق پستی: ۱۴۱۵۵/۱۹۴۹
تلفن امور مشترکین: ۹-۸۸۰۰۳۲۴

کد ۷۱۴/۱

حرف اوّل

وقتی در یک روزنامه خواندم که کشور جمهوری اسلامی ایران جزءِ سه کشوری است که بیشترین تعداد جمعیت آن نسل جوان است، احساس عجیبی پیدا کردم، احساسی که با قدرت و حسِّ اقتدار و نوعی ترس آمیخته بود. بله! ما جوانترین کشور دنیا هستیم، چه سرمایه‌ای بالاتر و ارزشمندتر از این، و ثروتی بیشتر از این ثروت و چه قدرتی در دنیا بالاتر از این قدرت؟ اما هرکجا ثروتی و سرمایه‌ای انباشته باشد، چشم طمعکاران، دزدان و غارتگران و بخصوص استعمارگران به آن دوخته می‌شود و درصدد آن هستند تا این سرمایه را از چنگ صاحبان اصلی‌اش خارج کنند و در صورتی که موفق نشدند آن را از بین برده و یا به هدر بدهند.

فرصت و تهدید، دو مفهوم قابل تبدیل به یکدیگرند یعنی می‌توانیم با بی‌اعتنایی و عدم سیاستگزاری صحیح و یا احتمالاً با سهل‌انگاری یک فرصت مناسب و طلایی را به یک تهدید جدّی تبدیل کنیم و برعکس، با پشتکار و برنامه‌ریزی صحیح، یک تهدید را به یک فرصت تبدیل کنیم.

جنگ تحمیلی در ابتدا یک تهدید جدّی محسوب می‌شد ولی با رهبری هوشمندانه و خدایی امام راحل و عزم راسخ مردم مسلمانِ ما این تهدید به یک فرصت طلایی برای رشد و نموّ خلاقیتها، همبستگی و یکدلی و ایثار تبدیل گشت.

الآن نیز ما به یک فرصت طلایی دست پیدا کرده‌ایم و آن هم استفاده از نیروهای جوان، خلّاق و با انرژی است که اگر این مسأله و فرصت را جدی نگیریم خیلی سریع به تهدیدی جدّی برای سلامت جامعه ما تبدیل می‌شود.

جوانانِ عزیز، شما سرمایه‌های این مملکت هستید و بدون هیچ تردیدی در تیررَس دشمنان اسلام و انقلاب قرار دارید و همانطور که مشاهده می‌کنید دشمن از هیچ کاری برای نابودی و به اضمحلال کشاندن شما سرمایه‌های گرانقدر ما فروگذاری نمی‌کند. به عناوین مختلف و با ابزارهای متفاوت شما را به بیراهه می‌کشاند تا غیرت، دین، مذهب، علم، اخلاق، ایثار، احترام به بزرگترها و ... را از شما گرفته و بی‌غیرتی بی‌دین و مذهبی، خودسری، بی قید و بندی و خودبینی را جایگزین آن کند.

بهوش باشید و نگذارید با تبلیغات و تهاجم فرهنگیِ غرب، اصالتها و فرهنگِ غنیِ اسلامی و ایرانی ما را لگدکوب کنند و همه چیز ما را به باد فنا بسپارند.

بیایید این فرصت را غنیمت شمرده و از آن به بهترین وجه و در جهت شکوفایی استعدادها و برای آبادانی، همبستگی و اقتدار کشور اسلامیمان، استفاده کنیم و با توکّل به خدا و بهره‌جویی از رهنمودهای رهبر حکیم انقلاب اسلامی، همهٔ راهها، کانالها و شبکه‌های ورودیِ تهاجم و تهدید دشمنان خود را شناسایی و مسدود کنیم. ان‌شاءا...

والسلام ـ سردبیر

● پرویز شهریاری

از تاریخ بیاموزیم (۱)

● به پیشواز سال ۲۰۰۰، سال جهانی ریاضیات

هدف اصلی در این رشته مقاله‌ها، کاوشی در «تاریخ ریاضیات» و بویژه «فلسفهٔ تاریخ ریاضیات» است. می‌خواهیم قانونمند بودن تکامل دانش ریاضی و جنبه‌های فلسفی آن را بررسی کنیم، مقام هر ملت را، و بخصوص مقام ریاضیات ایرانی را، در گذشتهٔ تاریخی پیشرفت ریاضیات بشناسیم. ولی در آغاز بهتر دیدیم با دیدگاه‌های برخی از مورّخان دانش در این زمینه، که به جای خود بسیاری از دشواریهای ذهنی را حل می‌کنند، آشنا شویم و سپس بحث جدّی خود را آغاز کنیم.

دربارهٔ تاریخ ریاضیات (شمارهٔ ۱ سال ۱۹۶۳،
مجلهٔ ریاضیات در دبیرستان، چاپ مسکو)

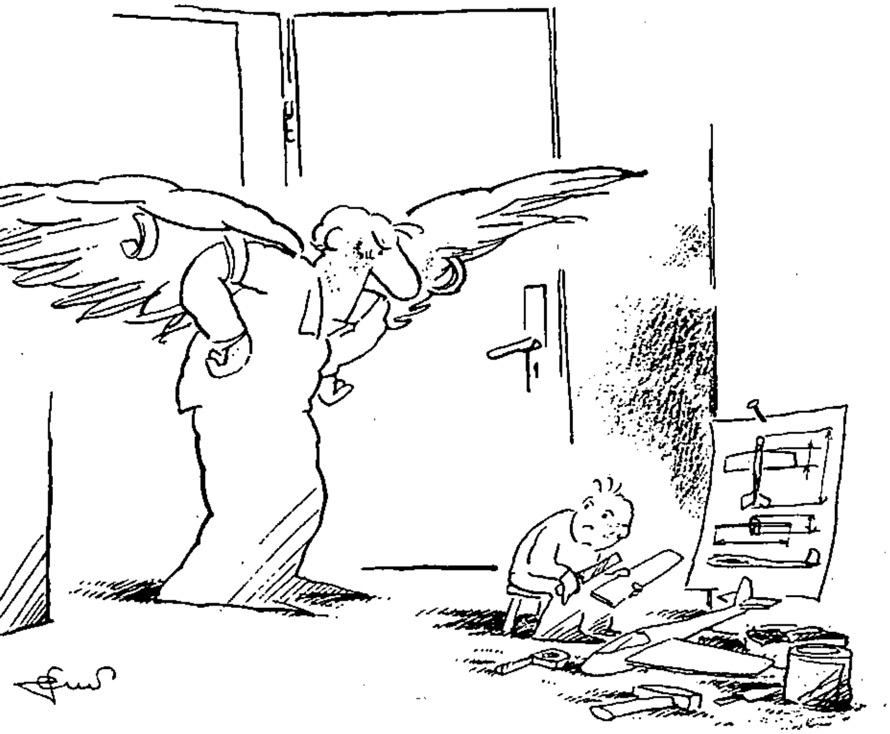
بوریس گِنِه دِنکو

آشنایی با تاریخ دانش، برای هر درس خوانده‌ای سودمند است؛ ولی برای معلمان، آگاهی از تاریخ در زمینه‌ای که با آن سروکار دارند و آشنایی با قانونهای تکامل آن، ضرورت کامل دارد.

همهٔ ما از دوران تحصیل خود، به یاد داریم که نگاه کوتاهی به تاریخ شاخه‌ای از دانش، تا چه اندازه برایمان جالب بود. بیان چند جمله از تاریخ ریاضیات یا کاربرد آن در مسأله‌هایی که در برابر جامعهٔ انسانی قرار دارد و یا اهمیت موضوعهای تجربی برای پیشرفت ریاضیات، تا چه اندازه شرح بحثهای ریاضی را زنده و قابل درک می‌کند. شور و شوق دانش‌آموزان، دربارهٔ حلّ و بحث مسأله‌هایی که به صدها سال پیش برمی‌گردد، قابل وصف نیست. این هم روشن است که علاقه به موضوع درس، یکی از شرطهای اساسی برای یادگیری و پایداری آگاهیها در حافظه است. آگاهیهای مربوط به تاریخ ریاضیات، می‌تواند روشن کند که چگونه هدف آموزش ریاضی در گذر زمان تغییر می‌کند. گفت و گوی معلم با دانش‌آموزان خود دربارهٔ تاریخ دانش، برای برانگیختن نیروهای خلّاق جوانان و برای محکم کردن اعتقاد آنها به استعدادهای پنهان خود، ارزش درجه اوّل دارد. تاریخ ریاضیات، به معلم امکان می‌دهد، از نقش ریاضیات در پیشرفت صنعت و دانشهای دیگر و نیز در تکامل نظر فلسفی انسان نسبت به طبیعت و اهمیت آن در زمان ما، تصویری روشن رو به روی ما قرار دهد.

باید پذیرفت، چنان کتابهایی که معلم بتواند آگاهیهای لازم را در زمینهٔ تاریخ دانش به‌دست آورد، بسیار اندک است و بویژه با توجه به زمان اندکی که معلم در کلاس دارد، کتابهایی لازم است که به طور دقیق، روش استفاده از منبعها و این که چه مطلبی، در کجا و در چه زمانی باید طرح شود، روشن کند. و این هم به عهدهٔ معلمان باتجربه است که با کار گروهی، کتابهای لازم را تهیه کنند.

معلمان و دانش‌آموزان، به کتابهایی نیاز دارند که در آنها، به زندگی بزرگان و نمایندگان دانش بشری، نگاهی کوتاه، ولی گویا انداخته باشد. در زمینهٔ تاریخ ریاضیات، باید دو گونه کتاب فراهم شود: اوّل کتابهای مربوط به ریاضیدانان مشهور همهٔ جهان، و



دوم کتابهای مربوط به ریاضیدانان سرزمینی که معلم و دانش‌آموز در آن زندگی می‌کنند. طبیعی است، در کتاب اول هم، ریاضیدانان سرزمین خودی نباید فراموش شوند. بجز این، باید کتابهایی فراهم شود که بستگی دانش را با زندگی و عمل روشن کند، داستان پیدایش موضوعهای ریاضی را شرح دهد و نوع برخورد آنها را با دشواریهایی که طبیعت در برابر انسان می‌گذارد و یا نیازهای فنی و دفاعی به او تحمیل می‌کند، بیان نماید.

البته فراهم کردن این گونه کتابها ساده نیست؛ ولی رنجی که نویسندگان در این راه می‌برند، به هدر نمی‌رود؛ زیرا همین کتابها راه زندگی را به جوانان نشان می‌دهد و استعدادهای خفتهٔ آنان را بیدار می‌کند و همین شکفتگی استعدادهاست که ثمر خود را در پیشرفت دانش به بار می‌آورد.

بین شاخه‌های دانش که انسان در درازای هزاران سال به وجود آورده است، ریاضیات، جای ویژه و در ضمن مهمی را به خود اختصاص داده است. ریاضیات با دانشهای فیزیک، زیست‌شناسی، اقتصاد و فن‌آوری فرق دارد، با وجود این، به عنوان یکی از روشهای بنیانی، در بررسی‌های مربوط به این دانشها به کار می‌رود و پیداست که این نقش در آینده، گسترش بیشتری هم پیدا می‌کند.

ریاضیات که در دوره‌های باستانی پدید آمد، در جریان پیشرفت خود، راهی دراز و پیچیده پیموده است. در طول مدت هزاران سال، به طور دائم، ویژگیها، موضوع و انگیزه‌های پیشرفت آن تغییر کرده است. ریاضیات از نخستین مفهومهای مربوط به خط راست، به عنوان کوتاهترین فاصلهٔ بین دو نقطه، یا تشکیل نخستین عنصرهای عدد به عنوان واحدهای اولیه، راه خود را آغاز کرد، تا امروز که به یک دانش انتزاعی خالص تبدیل شده است و روشها و مفهومهایی ویژهٔ خود دارد. زمانی بود که انسان، با زحمت، ۲ را با ۳ جمع یا ۴ را از ۷ کم می‌کرد. ولی امروز، البته پس از گذشت هزاران سال، به جایی رسیده است که می‌تواند به محاسبهٔ حرکت جرمهای آسمانی یا پدیده‌های درونی اتم بپردازد. وسیله‌های سادهٔ محاسبه، مثل سنگریزه‌ها، تکه چوبها، شکافهای روی درخت یا عضوهای گوناگون بدن، جای خود را به ابزارهای تازه‌ای مثل رایانه‌ها داده است، که می‌توانند صدها هزار یا میلیونها عمل را روی عددهای چند رقمی، در طول یک یا چند ثانیه انجام دهند.

به طور طبیعی، این پرسشها پیش می‌آید: «مسیر این پیشرفت چگونه پیموده شده است؟ چه عاملهایی مفهومها و روشهای ریاضیات را تکامل داده است؟ دورانهای اصلی تکامل ریاضیات و به طور کلی قانونهای تکامل ریاضیات کدام است؟» اینها پرسشهای اساسی است که در برابر تاریخ ریاضیات قرار دارد و باید به آنها پاسخ داده شود. پاسخ به این پرسشها، نه تنها از دیدگاه مسأله‌های تاریخی اهمیت دارد؛ بلکه بویژه برای زندگی امروز و

پیشرفت دانشهای روز، دارای اهمیتی جدّی است. تنها به این وسیله است که تاریخ گذشتهٔ ریاضیات می‌تواند مسیر پیشرفت حال و آیندهٔ آن را روشن کند و خیلی بیشتر از آشنایی با پیشامدهای سادهٔ تاریخی، قانونهای حاکم بر تاریخ را روشن کند. از این راه است که می‌توان فهمید چگونه و به چه صورتی، ریاضیات کنونی بر گذشتهٔ خود آرمیده و چگونه راه تکامل خود را به سوی آینده می‌گشاید. سرانجام، این روش برخورد با تاریخ ریاضیات، می‌تواند رابطه‌ای را که پیشرفت دانشهای طبیعی، صنعت و روابط تولیدی، با پیشرفت ریاضیات دارد، کشف کند. چنین مطالعه‌ای روشن می‌کند که، این تأثیر و بستگی متقابل است ؛ یعنی همان‌گونه که پیشرفت صنعت و دانشهای طبیعی، ریاضیات را پیش برده است، پیشرفت ریاضیات هم به سهم خود، بر تکامل صنعت و دانشهای طبیعی اثر گذاشته است. بی‌جهت نیست که نویسندهٔ کتاب «دفترهای فلسفی» به «تاریخ اندیشهٔ انسانی، تاریخ دانش و تاریخ صنعت» اهمیّت جدّی داده است. ولی باید پذیرفت، هنوز دوره‌ای از تاریخ ریاضیات که به طور همه جانبه پاسخگوی این طرح باشد، آماده نشده ؛ گرچه مقدمه‌های کار و سندهای اصلی فراهم است.

دربارهٔ تاریخ ریاضیات و اهمیت آن برای خود ریاضیات و برای پیشرفت دانشهای طبیعی و صنعت زمان ما، دیدگاه‌های متفاوتی وجود دارد. می‌توان به تعداد زیادی از دانشمندان (که موفّقیتهای جدّی در شاخه‌های اختصاصی ریاضیات به‌دست آورده‌اند) برخورد که لزوم بررسی تاریخ ریاضیات را برای پیشرفت امروزی مفهومهای ریاضی، نمی‌پذیرند. آنچه موجب پیدایش این دیدگاه شده است، می‌توان به این ترتیب، برشمرد : البته تاریخ ریاضیات برای مطالعهٔ تکامل جامعه و شکل گرفتن فلسفه لازم است ؛ ولی دانش به جلو می‌رود و به طور دائم، با مفهومها و اندیشه‌های تازه‌ای غنی می‌شود، که در گذشته، نشانی از آنها هم، وجود نداشته است. بنابراین توجه به اندیشه‌ها و موضوعهای گذشته، ممکن است ذهن ما را از دانش امروزی و راه آیندهٔ آن منحرف کند. روشن است که بررسی بسیاری از موضوعهای مربوط به گذشته، در مقام مقایسه با آنچه امروز داریم، ابتدایی و ناچیز به‌نظر می‌رسد. آیا از این جا این نتیجه به‌دست نمی‌آید که بررسی تاریخ ریاضیات نمی‌تواند نقشی مثبت داشته باشد؟ از این گذشته، بار اندیشه‌های کهنه، ممکن است ما را به عقب بکشاند و به طور کلی، تأثیری نامطلوب روی پیشرفت اندیشه‌های تازه و تکامل دانش بگذارد. به همین دلیل، هواداران این دیدگاه، مرتّب تبلیغ می‌کنند که تاریخ ریاضیات، یک دانش تاریخی است و تنها به کار کسانی می‌آید که به بررسی تاریخ تکامل جامعهٔ انسانی مشغولند.

اکنون اگر این اعتقاد را بپذیریم که تاریخ ریاضیات، بخشی از تاریخ عمومی است، باز هم در میان کتابهای تاریخی، نشانی از آن نمی‌بینیم. کافی است کتابهای تاریخی ـ که برای دانش‌آموزان دبیرستانی نوشته شده است یا کتابهای تاریخ عمومی ـ را ورق بزنیم، تا قانع شویم که چیزی دربارهٔ تاریخ تکامل دانشها ـ ریاضیات، دانشهای طبیعی و صنعت ـ پیدا نمی‌کنیم.

در این کتابها، نه نامی از ریاضیدانان بزرگ پیدا می‌کنیم (و آیا تنها ریاضیدانان؟) و نه از خود دانش ریاضی، که در واقع انسان را به دوره‌های پیشرفت بعدی هدایت کرده است، خبری به دست می‌آوریم. و البته، چنین وضعی برای کتابهای عمومی تاریخ، طبیعی و از لحاظ روانی، قابل درک است. برای نمونه، کتابی را انتخاب کنیم که مربوط به تاریخ یونان باستان باشد. در این کتاب، ولو ناچیز، می‌توان آگاهیهایی دربارهٔ مجسمه سازی و نویسندگان بزرگ یونان باستان یافت. دانش‌آموزان از این کتابها، دربارهٔ زندگی و کارهای آشیل، اریستوفان، فیدیاس، آگاهیهایی به دست می‌آورند ؛ ولی جست وجوی نامهای اقلیدس، ارشمیدس و دموکریت در این کتابها، به جایی نمی‌رسد. در حالی که تنها آشیل، و دیگر هنرمندان دنیای کهن، سازندهٔ تاریخ تمدن انسانی نبوده‌اند. برای تاریخ فرهنگ و تمدن بشر، و برای مجموعهٔ دانشها و صنعت امروزی، نمی‌توان نقش کسانی مثل ارشمیدس، اقلیدس، دموکریت و آپولونیوس را از یاد برد. به این ترتیب، وضع ناراحت کننده‌ای به‌وجود می‌آید ؛ درحالی که برای تکامل و پیشرفت همهٔ جنبه‌های زندگی امروزی، دانش ریاضی، نقش اساسی و تعیین کننده‌ای دارد و کتابهای درسی تاریخ نخواسته‌اند، ولو به صورتی کوتاه، چگونگی پیشرفت این دانش را در اختیار دانش‌آموزان بگذارند. دانش‌آموزان در درس تاریخ، نمی‌توانند دلیل این امر را دریابند که چرا دانشهای مختلف، و در کنار آنها ریاضیات، نقش اساسی و جدّی داشته است.

این وضع، جنبه‌های ناگوار دیگری هم دارد. پیش از همهٔ این گونه برداشتها، پیشرفت دانشهای تجربی، صنعت و ریاضیات را از تکامل کلی تاریخی و از تکامل بستگیهای اجتماعی جدا می‌کند و ریاضیات را از لحاظ تاریخ جامعه‌های انسانی و تاریخ تمدن، به چیزی صوری و سطحی تبدیل می‌کند.

وقتی ریاضیات چنین جایگاه نمایانی را در زندگی جامعه‌های امروزی به دست آورده است، باید این حق را داشته باشد که دست‌کم فصلهایی از کتابهای درسی تاریخ عمومی را به خود اختصاص دهد. باید ترتیبی داده شود که ریاضیات بتواند به عنوان عنصری که آموزش فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی و کارهای دستی را سامان می‌دهد، به رسمیت شناخته شود.

این برخورد منفی با تاریخ ریاضیات از طرف برخی ریاضیدانان ـ که دربارهٔ آن صحبت کردیم ـ عمومی نیست. بیشتر ریاضیدانان زمان ما و برجسته‌ترین نمایندگان دانشها، به تاریخ ریاضیات، به عنوان عاملی که نقش اساسی در شکل دادن نظریه‌های ریاضی دارد، می‌نگرند و بسیاری از آنان، پژوهشهایی در تاریخ دانش دارند. نمونه‌هایی می‌آوریم.

همهٔ کسانی که با مسأله‌های تربیتی سر و کار دارند، با نام ریاضیدان بزرگ آلمانی «فه‌لیکس کلاین»، که در پایان سدهٔ نوزدهم و آغاز سدهٔ بیستم می‌زیست، آشنا هستند. شهرت کلاین، تنها به خاطر دانش او نیست که توانسته است در ریاضیات، به نتیجه‌های تازه و جالبی برسد؛ بلکه به این دلیل هم هست که در پیشرفت آموزش اروپایی گامهای جدّی برداشت و در بهبود آموزش ریاضیات، نقش اساسی داشت. کلاین همچنین نوشتهٔ جالب و آموزنده‌ای دربارهٔ تاریخ ریاضیات به نام «دربارهٔ پیشرفت ریاضیات در سدهٔ نوزدهم» دارد. گرچه این اثر در ارزیابی دانشمندان سدهٔ نوزدهم، دچار داوریهای ذهنی شده و تا حدّ زیادی به خطا رفته است؛ ولی کلاین نشان داد، ارزش واقعی ریاضیات سدهٔ نوزدهم را بخوبی درک کرده است؛ سده‌ای که توانست دامنهٔ ریاضیات را گسترش دهد و آن را با طرح مطلبهای تازه، بیش از پیش غنی کند.

کتاب بزرگ سه جلدی یکی دیگر از ریاضیدانان به نام «اُ. نیگه باور» با عنوان «بحثهایی در تاریخ ریاضیات باستان» هم مشهور است. در این کتاب، از پژوهشهای نویسندهٔ آن دربارهٔ دانش ریاضیات در سرزمین بابل صحبت شده است، کتابی که تصور ما را دربارهٔ تکامل ریاضیات در عهد باستان بکلی دگرگون می‌کند.

«آندره کولموگوروف» پژوهش تاریخی بسیار جالبی دربارهٔ تکامل اندیشه‌های ریاضی برای فرهنگ بزرگ روسی نوشته است. این مقاله می‌تواند به عنوان یکی از نوشته‌های ژرف و نادری باشد که از دیدگاه فلسفهٔ منطقی دربارهٔ تاریخ ریاضیات نوشته شده است.

سرانجام از کتابی با عنوان «دانشی که بیدار می‌شود» نام می‌بریم. این کتاب را «وان در واردن» ریاضیدان هلندی نوشته است و می‌تواند برای معلمان ریاضیات بسیار سودمند باشد.

ریاضیات، دانشی است که آغاز آن، در ژرفای تاریخ گذشتهٔ انسانی گم می‌شود. مفهوم عدد برای نخستین بار، کی و چگونه پدید آمد؟ این، یکی از دشوارترین مسأله‌های تاریخی است. مطلب بر سر این است که این مفهوم، در دوران پیش از تاریخ و خیلی پیش از زمانی که انسانها به نوشتن تاریخ خود پرداختند، به‌وجود آمده است. دراین باره، امکانهای بسیار کمی داریم. این امکانها عبارت است از بررسی ویژگیهای زبان وهمچنین مطالعهٔ ملتهایی که با دوران پیش از تاریخ خود، فاصلهٔ زیادی ندارند. ولی نباید از یاد برد که در این بررسی هم، نمی‌توان به نخستین مرحله‌های پیدایش مفهوم عدد دست یافت. هنر شمردن، مربوط به زمانی است که هنوز تصوری دربارهٔ عدد، به عنوان یک مفهوم ریاضی، وجود نداشت. به این نکتهٔ اساسی توجه کنیم که مفهومهای ریاضی، در دوره‌ای از تکامل جامعهٔ انسانی به‌وجود آمد که بشر به مرحلهٔ بالایی از پیشرفت فکری رسیده بود. ولی حرکت این مفهومها و قوام گرفتن آنها، تاریخی دراز دارد که به نوبهٔ خود، در تکامل اندیشهٔ انسانی اثر داشته است.

دنبالهٔ مقاله در شمارهٔ بعد

نگاشتهای خطی

ترکیب نگاشتهای خطی و ماتریس ترکیب دو نگاشت خطی
(قسمت دوم)

● حمیدرضا امیری

قضیهٔ زیر ارتباط بین ترکیب دو نگاشت خطی و ماتریس این ترکیب با ماتریسهای دو نگاشت را بوضوح بیان می‌کند.

قضیه: اگر $f:\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ و $g:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ دو نگاشت خطی باشند و A و B به ترتیب ماتریسهای نگاشتهای f و g باشند، در این صورت، اولاً fog نگاشتی خطی از $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ بوده و ثانیاً ماتریس این نگاشتِ خطی $A\times B$ می‌باشد.

تذکر: درواقع حاصل‌ضرب دو ماتریس، مشخص کنندهٔ ترکیب دو نگاشت خطی است و بعکس، و چون ترکیب نگاشتها، خاصیت جا به جایی ندارد، لذا ضرب دو ماتریس نیز خاصیت جا به جایی ندارد.

مسأله: اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 3\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\\ -2 & 3\end{bmatrix}$ بترتیب ماتریسهای نگاشتهای خطی f و g باشند، در این صورت، ماتریس نگاشت خطی gof را به‌دست آورید.

$$M_{gof}=B\times A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\\ -2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -2 & 10\\ -8 & 5\end{bmatrix}$$

تعریف: اگر f نگاشتی خطی از $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ باشد، دراین صورت، fof تعریف شده و در صورتی که A ماتریس نگاشت خطی f باشد، A^2 ماتریس نگاشت خطی fof و... و A^n ماتریس نگاشت خطیِ $\underbrace{fofo\cdots of}_{n\ \text{بار}}$.

تست: اگر f و g دو نگاشت خطی و $fog:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ تعریف شده باشد، در این صورت، نگاشت f کدام می‌تواند باشد؟

۱) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ۲) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

۳) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ۴) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

حل: گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ زیرا :
بُرد نگاشتِ fog زیر مجموعهٔ بُرد f و دامنهٔ آن، زیرمجموعهٔ دامنهٔ g است و چون $fog:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ و $R_{fog} \subseteq \mathbb{R}^2$ پس می‌بایست $g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^m$ و $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^2$ باشند.

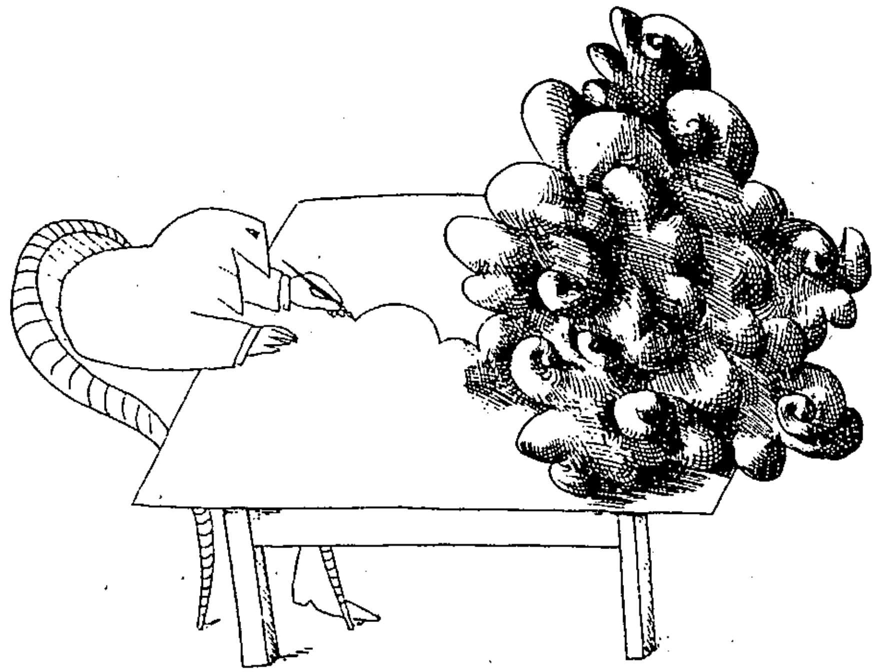
نتیجهٔ مهّم (ماتریس تبدیلهای متوالی): با توجه به قضیهٔ ترکیب نگاشتها، اگر f_1 و f_2 و ... و f_n نگاشتهای خطی و A_1 و A_2 و ... و A_n بترتیب ماتریسهای این نگاشتها باشند و f_1 روی نقطهٔ x اثر کرده و x_1 حاصل شده، سپس f_2 روی x_1 اثر کند و ... و f_n روی x_{n-1} اثر کند تا در نهایت، نقطهٔ y حاصل شود، در این صورت، ماتریس ترکیب این نگاشتها، یعنی ماتریس نگاشت $(f_n o f_{n-1} o \cdots o f_2\, o f_1)$ برابر است با $(A_n A_{n-1} \cdots A_2 A_1)$ و بنابراین :

$$(f_n o f_{n-1} o \cdots o f_2\, o f_1)(x)=y$$

یا

$$(A_n A_{n-1} \cdots A_2 A_1)x=y$$

مسأله: اگر نگاشت $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ تقارن نسبت به محور yها



و $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ تقارن نسبت به نیمساز ربع اوّل باشد، ماتریس ترکیب این دو نگاشت را بیابید.

(ماتریس نگاشت f) × (ماتریس نگاشت g) = ماتریس gof

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = R_{\frac{-\pi}{2}}$$

ماتریس حاصل ماتریس دوران به اندازهٔ $\frac{-\pi}{2}$ است (حول مبدأ)

$$\text{fog ماتریس} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = R_{\frac{\pi}{2}}$$

توجه دارید که اگر نقطه‌ای مانند x تحت تأثیر (gof) قرار گیرد ؛ یعنی ابتدا تحت تأثیر نگاشت f و سپس حاصل آن یعنی f(x)، تحت تأثیر نگاشت g واقع می‌شود، در حقیقت ابتدا نقطهٔ x نسبت به محور yها قرینه شده وسپس نسبت به نیمساز ربع اوّل قرینه می‌شود.

تست: ترکیب دو نگاشت، ابتدا تقارن نسبت به مبدأ مختصات و سپس تقارن نسبت به محور xها کدام است؟

۱) تقارن نسبت به نیمساز ربع دوم

۲) تقارن نسبت به نیمساز ربع اوّل

۳) دوران طول مبدأ به اندازهٔ $\frac{\pi}{2}$

۴) تقارن نسبت به محور yها

حل : گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ زیرا :

(ماتریس تقارن نسبت به محور xها) × (ماتریس تقارن نسبت به مبدأ مختصات) = ماتریس ترکیب دو نگاشت

$$\text{تقارن نسبت به محورyها} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مسأله : $A\Big|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$ نقطهٔ دلخواهی در صفحه است، می‌خواهیم قرینهٔ این نقطه را نسبت به خط $y = mx$ بیابیم. با استفاده از ترکیب نگاشتهای خطی، ماتریس این تبدیل در صفحه را به‌دست آورید. ($m = tg\alpha$ ضریب زاویهٔ خط مورد نظر است.)

حل: نگاشت $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ با ماتریس A را دوران به اندازهٔ $(-\alpha)$ حول مبدأ و نگاشت $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ با ماتریس B تقارن نسبت به محور xها و نگاشت $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ با ماتریس C دوران به اندازهٔ α حول مبدأ را درنظر می‌گیریم، اگر نقطهٔ A و خط $y = mx$ را ابتدا تحت تأثیر نگاشت f قرار دهیم، خط بر محور xها منطبق می‌شود و می‌توان در مرحلهٔ بعد، قرینهٔ نقطهٔ A را نسبت به محور xها به دست آورد(توسط نگاشت g) که نقطهٔ حاصل به اندازهٔ $(-\alpha)$ انحراف دارد و بنابراین، توسط نگاشت h این انحراف جبران می‌شود. حال با توجه به ترکیب نگاشتها، نگاشت(hogof) می‌تواند منظور ما را برآورده کند که ماتریس این نگاشت، برابر است با $D = (CBA)$ و به صورت زیر محاسبه

می‌شود :

$$D=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos2\alpha & \sin2\alpha\\ \sin2\alpha & -\cos2\alpha\end{bmatrix}$$

نکتهٔ مهم : ماتریسهای تقارن نسبت به خط $y = mx$ یعنی $A=\begin{bmatrix}\cos2\alpha & \sin2\alpha\\ \sin2\alpha & -\cos2\alpha\end{bmatrix}$ دارای سه ویژگی زیر می‌باشند که با مقایسهٔ ویژگیهای ماتریس دوران حول مبدأ، به تفاوت آنها در ویژگی (I) پی‌خواهید برد.

I) دترمینان ماتریس تقارن نسبت به خط $y = mx$ برابر با -1 است.

II) طول هر بردار ستونی در این ماتریسها، برابر واحد است.

$$x=\begin{bmatrix}\cos2\alpha\\ \sin2\alpha\end{bmatrix} \text{ و } y=\begin{bmatrix}\sin2\alpha\\ -\cos2\alpha\end{bmatrix}\Rightarrow |x|=|y|=1$$

III) بردارهای ستونی، همواره بر هم عمود می‌باشند.

$$x.y=\cos2\alpha\sin2\alpha-\sin2\alpha\cos2\alpha=0\Rightarrow x\perp y$$

تذکر مهم : اگر A ماتریس تقارن نسبت به خط $y = mx$ باشد، همواره هر نقطه را نسبت به خط $y = mx$ قرینه می‌کند و اگر دوباره روی نقطهٔ حاصل اثر کند، نقطه برخودش منطبق می‌شود و در حالت کلّی اگر تعداد تأثیرهای A روی یک نقطه زوج باشد، نقطه برخودش منطبق خواهد شد. در واقع $A^{2k}=I$ و $A^{2k+1}=A$.

تست : اگر $A=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt3}{2} & \frac12\\ \frac12 & \frac{-\sqrt3}{2}\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{10}} & \frac{-3}{\sqrt{10}}\\ \frac{-3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}}\end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $B^{41}\times A^6$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{10}} & \frac{-3}{\sqrt{10}}\\ \frac{-3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}}\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}\frac{\sqrt3}{2} & \frac12\\ \frac12 & \frac{-\sqrt3}{2}\end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}}\\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{10}}\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}\frac{-\sqrt3}{2} & \frac{-1}{2}\\ \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt3}{2}\end{bmatrix}$

حل : گزینهٔ (۱) صحیح است ؛ زیرا :

ماتریسهای A و B هر دو ماتریسهای تقارن نسبت به خط $y = mx$ می‌باشند ؛ زیرا $|A|=|B|=-1$. بنابراین، براساس مطالب قبل داریم :

$$B^{41}=(B^{40})\times B^1=I\times B=B \quad \text{و} \quad A^6=I$$

$$\Rightarrow B^{41}\times A^6=B\times I=B$$

تمرین : با استفاده از ترکیب نگاشتها، ماتریسِ نگاشتِ تقارن نسبت به خط $y=-x$ را بیابید.

مثال : قرینهٔ نقطهٔ $A\begin{vmatrix}-1\\2\end{vmatrix}$ را نسبت به خط $y+2x=0$ به‌دست آورید.

$$y+2x=0\Rightarrow y=-2x\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=-2$$

$$\cos2\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} \text{ و } \sin2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$$: از طرفی

$$\sin2\alpha=\frac{-4}{5} \text{ و } \cos2\alpha=\frac{-3}{5}\Rightarrow$$ ماتریس تقارن

$$=\begin{bmatrix}-\frac35 & -\frac45\\ -\frac45 & \frac35\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}-\frac35 & -\frac45\\ -\frac45 & \frac35\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix}$$

توجه دارید که نقطهٔ داده شده، روی خط $y=-2x$ واقع است، لذا قرینهٔ آن نسبت به خط $y=-2x$ بر خودش منطبق خواهد شد!

یک ویژگی مهم در ماتریسهای دوران حول مبدأ

اگر نقطهٔ A را ابتدا به اندازهٔ α حول مبدأ دوران داده و به A_1 و سپس A_1 را به اندازهٔ β، حول مبدأ دوران داده و به A_2 تبدیل کنیم، درواقع، نقطهٔ A را به اندازهٔ $(\alpha+\beta)$ حول مبدأ

دوران داده‌ایم. حال اگر R_α و R_β ماتریس تبدیل دوران به اندازهٔ α و β باشند، طبق مطالب قبل، ماتریس این دو تبدیل متوالی که می‌بایست دوران به اندازهٔ $(\alpha+\beta)$ یعنی $R_{\alpha+\beta}$ باشد، برابر است با $R_\beta \times R_\alpha$، بنابراین $R_\beta R_\alpha = R_{(\alpha+\beta)}$. این رابطه قابل تعمیم بوده و در حالت کلّی، با فرض $\alpha=\beta$ داریم:

اگر R_α ماتریس دوران حول مبدأ به اندازهٔ زاویه α باشد، در این صورت:

$$(R_\alpha)^n = (R_{n\alpha}) \Rightarrow \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{bmatrix}$$

مسألهٔ مهم : اگر $A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ ، در این صورت، حاصل A^{1378} را به دست آورید.

حل : ابتدا متذکر می‌شویم که $R_{2\pi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$ یعنی ماتریس دوران به اندازهٔ 2π ، همان ماتریس واحد است (دوران به اندازهٔ 2π تأثیری روی نقطه یا شکل ندارد ؛ همان طور که ماتریس واحد عضو خنثی برای عمل ضرب است.)

حال اگر کمی دقت کنیم، مشاهده می‌کنیم که $A = R_{\frac{\pi}{4}}$ و می‌دانیم $A^8 = R_{8\frac{\pi}{4}} = R_{2\pi} = I$ ، از طرفی $1378 = (8\times172)+2$ (۱۳۷۸ را بر ۸ تقسیم می‌کنیم) پس خواهیم داشت :

$$A^{1378} = (A^8)^{172} \times A^2 = (I)^{172} \times A^2 = I \times A^2 = A^2$$

$$= R_{2\frac{\pi}{4}} = R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

تست : حاصل ضرب

$$\begin{bmatrix} \cos150^\circ & -\sin150^\circ \\ \sin150^\circ & \cos150^\circ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^3 \times \begin{bmatrix} \cos15^\circ & \sin15^\circ \\ -\sin15^\circ & \cos15^\circ \end{bmatrix}$$

کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

حل : گزینه (۴) صحیح است ؛ زیرا :

اگر ماتریسها را بترتیب، از چپ به راست (بدون درنظر گرفتن توان آنها) A و B و C بنامیم، داریم :

$$A = R_{150^\circ} \text{ و } B = R_{45^\circ} \text{ و } C = R_{-15^\circ}$$

$$\Rightarrow AB^3C = R_{(150^\circ+135^\circ-15^\circ)} = R_{270^\circ} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

مسأله : معادلهٔ دوران یافتهٔ منحنی به معادلهٔ $xy=1$ را حول مبدأ به اندازهٔ (-45°) پیدا کنید.

حل : اگر $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نقطهٔ دلخواهی از منحنی $xy=1$ باشد، دراین صورت :

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y = X \\ \frac{-\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y = Y \end{cases}$$

حال x و y را بر حسب X و Y به‌دست می‌آوریم :

$$\sqrt{2}y = X+Y \Rightarrow y = \frac{X+Y}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{2}X+\sqrt{2}Y}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}X+\sqrt{2}Y}{2}\right) = X$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{X+Y}{2} = X \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}x = X - \left(\frac{X+Y}{2}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{پس از ساده شدن}} x = \frac{\sqrt{2}X-\sqrt{2}Y}{2}$$

حال در معادلهٔ منحنی $xy=1$ به جای x و y تبدیل یافته‌های آنها بر حسب X و Y را قرار می‌دهیم که خواهیم داشت :

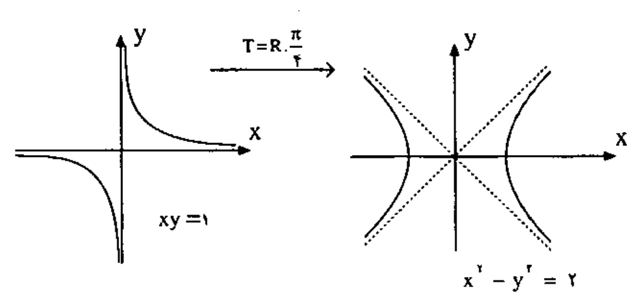
$$xy=1 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}X-\sqrt{2}Y}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}X+\sqrt{2}Y}{2}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{2}X-\sqrt{2}Y\right)\left(\sqrt{2}X+\sqrt{2}Y\right)=4$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{2}X\right)^2-\left(\sqrt{2}Y\right)^2=4$$

$$\Rightarrow 2X^2-2Y^2=4 \Rightarrow X^2-Y^2=2$$

نمودارهای $xy=1$ و $x^2-y^2=2$ در زیر رسم شده است.



تست : اگر f نگاشت تقارن نسبت به خط $y=\frac{-2}{5}x$ باشد، fof کدام نگاشت است؟

۱) تقارن نسبت به خط $y=\frac{2}{5}x$

۲) تقارن نسبت به خط $y=\frac{5}{2}x$

۳) تقارن نسبت به خط $y=x$

۴) نگاشت همانی

حل : گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ زیرا :

اگر A ماتریس نگاشت f باشد، A^2 ماتریس نگاشت fof بوده و طبق مطالب قبل $A^2=I$ ، پس $fof=i$ ، که i نگاشت همانی است.

تست : ماتریس $\begin{bmatrix}3&-4\\4&3\end{bmatrix}$ ماتریس نگاشتِ fog است که f یک تجانس و g دوران است. نسبت تجانس در این تبدیل کدام است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $-\sqrt{5}$ ۳) ۵ ۴) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

حل : گزینهٔ (۳) صحیح است ؛ زیرا :

$$\begin{bmatrix}3&-4\\4&3\end{bmatrix}=5\begin{bmatrix}\frac{3}{5}&\frac{-4}{5}\\\frac{4}{5}&\frac{3}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&0\\0&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{3}{5}&-\frac{4}{5}\\\frac{4}{5}&\frac{3}{5}\end{bmatrix}$$

پس نسبت تجانس ۵ است. (توجه دارید که درماتریسهای دوران، باید طول هر بردار ستونی، واحد باشد و برای واحد کردن طول یک بردار، کافی است هر مؤلفهٔ آن را بر طول آن بردار تقسیم کنیم، که در این تست، هر مؤلفه بر طول بردار یعنی $5=\sqrt{3^2+4^2}$ تقسیم شده است.)

تست : معادلهٔ منحنی $x^2-y^2=1$ پس از تبدیل توسط نگاشت f با ماتریس $A=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $x^2-y^2=1$ ۲) $x^2+y^2=-1$

۳) $x^2+y^2=1$ ۴) $y^2-x^2=1$

حل : گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ زیرا :

(روش اوّل)

$$\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-y=X\\x=Y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-X\\x=Y\end{cases}$$

$$x^2-y^2=1\xRightarrow[x=y]{y=-x}(Y)^2-(-X)^2=1\Rightarrow Y^2-X^2=1$$

(روش دوم)

منحنی $x^2-y^2=1$ یک هذلولی افقی است و f با توجه به ماتریسِ آن، یک دوران حول مبدأ به اندازهٔ $\frac{\pi}{2}$ است، پس حاصل اثر این نگاشت بر منحنی مذکور، یک هذلولیِ قائم است.

در این قسمت، با توجه به شناختی که نسبت به نگاشتهای دوران و تقارن نسبت به خطهای گذرا از مبدأ پیداکرده‌ایم، می‌خواهیم به این مطلب مهم برسیم که :

«نتیجهٔ ترکیب دو تقارنِ متوالی نسبت به خطهای مارّ بر مبدأ، یک دوران است.»

$$\begin{bmatrix}\cos 2\alpha&\sin 2\alpha\\\sin 2\alpha&-\cos 2\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos 2\theta&\sin 2\theta\\\sin 2\theta&-\cos 2\theta\end{bmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{پس از ساده شدن}}\begin{bmatrix}\cos(2\alpha-2\theta)&-\sin(2\alpha-2\theta)\\\sin(2\alpha-2\theta)&\cos(2\alpha-2\theta)\end{bmatrix}=R_{(2\alpha-2\theta)}$$

تست : نقطهٔ A را ابتدا نسبت به خط $y=x$ و سپس نسبت به خط $x=\sqrt{3}y$ قرینه می‌کنیم، ماتریس ترکیب این دو نگاشت

کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۳}}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{-۱}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{-\sqrt{۳}}{۲} \\ \frac{\sqrt{۳}}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۳}}{۲} & \frac{-۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ -\frac{\sqrt{۳}}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$

حل : گزینهٔ (۱) صحیح است ؛ زیرا :

$$y = x \Rightarrow tg\alpha = ۱ \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{۴} \Rightarrow ۲\alpha = \frac{\pi}{۲}$$

$$y = \frac{۱}{\sqrt{۳}}x \Rightarrow y = \frac{\sqrt{۳}}{۳}x \Rightarrow tg\theta = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{۶}$$

$$\Rightarrow ۲\theta = \frac{\pi}{۳}$$

و طبق مطلب قبل، حاصل این دو تقارن، دورانی است به زاویهٔ $\left(\frac{\pi}{۳} - \frac{\pi}{۲}\right) = -\frac{\pi}{۶}$.

تمرین : خط به معادلهٔ $y = mx$ که $m = tg\alpha$ مفروض است، با توجه به ترکیب نگاشتها، ماتریس نگاشت «تصویر قائم روی خط $y = mx$» را به‌دست آورید. (راهنمایی : از سه تبدیل دوران به اندازهٔ $-\alpha$، تصویر قائم روی محور xها و دوران به اندازهٔ α استفاده کنید.)

جواب : ماتریس تصویر قائم یک نقطه روی خط $y = xtg\alpha$

$$= \begin{bmatrix} \cos^۲\alpha & \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha & \sin^۲\alpha \end{bmatrix}$$

تذکر مهم : اگر A ماتریس تصویر قائم روی خط $y = mx$ باشد، داریم :

$$A^۲ = \begin{bmatrix} \cos^۲\alpha & \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha & \sin^۲\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos^۲\alpha & \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha & \sin^۲\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^۴\alpha + \sin^۲\alpha\cos^۲\alpha & \sin\alpha\cos^۳\alpha + \sin^۳\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos^۳\alpha + \sin^۳\alpha\cos\alpha & \sin^۲\alpha\cos^۲\alpha + \sin^۴\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^۲\alpha(\cos^۲\alpha + \sin^۲\alpha) & \sin\alpha\cos\alpha(\cos^۲\alpha + \sin^۲\alpha) \\ \sin\alpha\cos\alpha(\cos^۲\alpha + \sin^۲\alpha) & \sin^۲\alpha(\cos^۲\alpha + \sin^۲\alpha) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^۲\alpha & \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha & \sin^۲\alpha \end{bmatrix} = A$$

ثابت شد که $A^۲ = A$، بنابراین، همواره برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم : $A^n = A$.

لابد میل دارید بدانید که **اراتوستن** چگونه برای اندازه‌گیری زمین اقدام کرد. استدلال او از این قبیل بود : می‌دانیم که محیط دایره به ۳۶۰ درجه تقسیم می‌شود، پس اگر من بتوانم طول یک درجهٔ آن را بر حسب استاد "Stade" معین کنم (هر استاد تقریباً ۱۵۷/۵ متر است) برای تعیین محیط کرهٔ زمین کافی است عدد حاصل را در ۳۶۰ ضرب کنم، بنابراین مطلب رجوع شده بود به این‌که طول کمان یک درجه را معین کنند.

تاریخ علوم - پی‌یر روسو

تاریخچهٔ مجله های ریاضی ایران(۲۶)

در سیرمان در مجله‌های ریاضی ایران به **مجموعهٔ مقالات و مسائل ریاضی** رسیدیم و قسمتهایی از مقالهٔ **نظریهٔ بازیهای** آن را انتخاب و نقل کردیم و اکنون قسمت آخر این مقاله را که به یکی از رشته‌های جدید ریاضیات پرداخته است، بازگو می‌کنیم :

۲. بازیهای صفر ـ مجموع

۲. ۰. مقدمه

در آخرین تمرین، ملاحظه کردیم که در بازی با جدول بی ـ آمد

	X		Y		Z	
A	۸	۲	۱	۹	۷	۳
B	۴	۶	۹	۱	۳	۷
C	۲	۸	۶	۴	۸	۲
D	۶	۴	۴	۶	۶	۴

در غیاب پرداختهای جنبی، برای تشریک مساعی، انگیزه‌ای به بازیکنها ارائه نمی‌شود. اگر فرض کنیم که جایزهٔ شرکت در این بازی، وجوه نقدی است، در این صورت می‌توانیم بسادگی نشان دهیم که حتی اگر پرداختهای جنبی هم مجاز باشد، در تشریک مساعی فایده‌ای نخواهد داشت. دلیل این مطلب، آن است که کل دستاورد هر دو بازیکن، بی‌توجه به نتیجهٔ بازی، یکسان (۱۰) است. در این صورت، هر مجموع اضافه ای که یک بازیکن به عنوان نتیجهٔ تشریک مساعی به‌دست آورد، دیگری باید از دست بدهد. بنابراین، پرداخت جنبی نمی‌تواند کاری جز بی‌اثر کردن سود و زیانهای مزبور انجام دهد.

می‌توانیم از این حذف سود و زیانها، در ساده کردن جدول بی ـ آمد استفاده کنیم. برای این کار، $۵=۱۰\times\frac{۱}{۲}$ را از تمام درایه‌های جدول کم می‌کنیم و به این ترتیب، آن را به‌صورت زیر درمی‌آوریم :

	X		Y		Z	
A	۳	-۳	-۴	۴	۲	-۲
B	-۱	۱	۴	-۴	-۲	۲
C	-۳	۳	۱	-۱	۳	-۳
D	۱	-۱	-۱	۱	۱	-۱

در این صورت، ۵ اضافه‌ای را، که هر بازیکن در جدول اصلی دریافت می‌کند، می‌توان به عنوان جایزهٔ شرکت در بازی در نظر گرفت، و این مقدار، به هیچ‌وجه در استراتژی بازی اثر نمی‌گذارد.

در جدول بی ـ آمدی که هم‌اکنون در بالا نشان دادیم، مجموع دو درایهٔ واقع در هر خانه صفر می‌شود ؛ به عبارت دیگر، هر چه یک بازیکن می‌برد، دیگری می‌بازد. بازی با چنین جدول بی ـ

آمدی به *بازی صفر ـ مجموع*[1] (دقیق‌تر، *بازی صفر ـ مجموع دو نفری*[2]) موسوم است. تعبیر اقتصادی آن، رجوع به وضعیتی دارد که در آن، دو شخص یا گروه، برای مقدار ثابتی کالا به رقابت می‌پردازند. از لحاظ ریاضی، این بازی، از نوعی است که به بهترین وجهی توضیح داده می‌شود، و اساساً بدین علت است که در مورد آن، اجبار نداریم که اوضاع بغرنج حاصل از امکان تشریک مساعی را به حساب آوریم. در بقیهٔ مقاله، تنها به این نوع بازی خواهیم پرداخت.

۲ . ۱. دستاوردهای تضمین شده

تحلیل بازیهای صفر ـ مجموع عمومیمان را با بررسی این مطلب که زمانی که بازیکنان، با توجه به روش قبلاً موصوف، به بازیها با احتیاط می‌پردازند چه اتفاقی می‌افتد، آغاز می‌کنیم. از آن‌جا که در این مرحله $b_{ij} = -a_{ij}$ به ازای جمیع مقادیر i و j برقرار است، می‌توانیم جدول بی ـ آمد را با حذف درایه‌های با حروف ایرانیک ساده کنیم، و بنابراین، جدول مزبور به صورت زیر به نظر خواهد رسید :

	۱	۲	...	n
۱	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
۲	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
.	.	.		.
.	.	.		.
.	.	.		.
m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

هنگامی که B سطر i را انتخاب می‌کند، می‌داند بی‌توجه به عملی که بازیکن دوم انجام می‌دهد، حداقل به کمترین مقدار نشان داده شده در سطر i خواهد رسید ؛ این مقدار را به صورت زیر می‌نویسیم :

$$\min_{j} a_{ij}$$

واضح است که خواست او بر این است که می‌نیمم تضمین شدهٔ مورد بحث، تا آن جا که امکان دارد بزرگ باشد، و به این مقصود می‌تواند با انتخاب سطری (یا یکی از سطرهایی) که $\min_{j} a_{ij}$ به ازای آن بیشترین است، نائل شود ؛ یعنی، کوچکترین درایهٔ هر سطر را در نظر گرفته، سپس سطر شامل ماکزیمم این می‌نیممها را انتخاب می‌کند، و با این انتخاب، اطمینان می‌یابد که حداقل به مبلغ μ، که در آن

$$\mu = \max_{i}(\min_{j} a_{ij}) \qquad (۱)$$

است، خواهد رسید. به روشی مشابه، هنگامی که R ستون j را انتخاب می‌کند، می‌داند که حداقل، کوچکترین درایه‌های ایرانیک اکنون نامرئی واقع در این ستون، یعنی، حداقل $\min_{i} (-a_{ij})$ را دریافت خواهد کرد و تا سر حد امکان، برای بزرگتر کردن این مقدار، ستونی را که آن را ماکزیمم می‌کند، برمی‌گزیند، و به این طریق، می‌تواند به دریافت حداقل ν ، که در آن

$$\nu = \max_{j}(\min_{i}(-a_{ij})) \qquad (۲)$$

است، مطمئن شود.

می‌توان برای ν فرمول معادلی را که بیش از آن که به درد نظریه بخورد مناسب محاسبه‌هاست، با استفاده از معادلهٔ (۲) و به طریق زیر، به‌دست آورد :

$$\begin{aligned}\nu &= \max_{j}(\min_{i}(-a_{ij}))\\ &= \max_{j}(-\max_{i} a_{ij})\\ &= -\min_{j}(\max_{i} a_{ij}) \qquad (۳)\end{aligned}$$

این فرمول دارای این تعبیر است که، بازیکن R، با انتخاب ستون j، آگاه است که حداکثر $\max_{i} a_{ij}$ را *می‌پردازد* و با انتخاب ستون مزبور که این مقدار را به حداقل می‌رساند، می‌تواند زیان خود را به $\min_{j}(\max_{i} a_{ij})$ ، که $-\nu$ است، منحصر کند.

برای توضیح این تعاریف، بار دیگر بازی بررسی شده در آغاز این بخش را، مورد بررسی قرار می‌دهیم، و این بار، جدول مورد بحث را برای نشان دادن می‌نیمم هر سطر (برای محاسبهٔ μ) و ماکزیمم هر ستون (برای محاسبهٔ ν از معادلهٔ (۳)) افزایش می‌دهیم.

i \ j	۱	۲	۳	می نیمم سطر	
۱	۳	−۴	۲	−۴	
۲	−۱	۴	−۲	−۲	
۳	−۳	۱	۳	−۳	$\mu = -۱$
۴	۱	−۱	۱	−۱	
ماکزیمم ستون	۳	۴	۳		
	$\nu = -۳$				

B می‌تواند با انتخاب سطر ۴، مقدار زیانش را، بی‌توجه به عملی که R انجام می‌دهد، تا ۱ نگه دارد ؛ و R می‌تواند با انتخاب ستون ۱ یا ۳، مقدار زیانش را، بی‌توجه به کاری که B می‌کند، تا ۳ نگه دارد.

تمرینها

۱. μ، ν و $\mu+\nu$ را در مورد بازیهای با جدول پی‌ـآمد زیر محاسبه کنید.

(*i*)

	۱	۲
۱	۱	۲
۲	۴	۳

(*ii*)

	کاغذ	قیچی	سنگ
کاغذ	۰	−۱	۱
قیچی	۱	۰	−۱
سنگ	−۱	۱	۰

این بازی می‌تواند توسط دو نفر که باید هر یک همزمان، یکی از دستهایشان را جلو آورند، اجرا شود. در این صورت، جدول پی‌ـآمد فوق، با دست باز که «کاغذ» را نمایش می‌دهد، دو انگشت تشکیل دهندهٔ V که «قیچی» را نشان می‌دهد و مشت گره شده که «سنگ» را نمایش می‌دهد ؛ در صورتی که :

سنگ قیچی را کُند کند
قیچی کاغذ را ببرد
کاغذ سنگ را بپوشاند
و مشابه با مشابه مساوی شود
حاصل خواهد شد

(*iii*)

	۱		۲	
۱	۰	۳	۲	۱
۲	۳	۰	۱	۲

۲. در تمام مثالهای فوق، $\mu+\nu \leq ۰$. آیا این موضوع همواره در مورد بازی صفرـ مجموع صادق است؟ (*راهنمایی* : کل مبلغی را که توسط R و B، به صورت مشترک به‌دست آمده، در نظر بگیرید.)

یادداشتها

۱ـ Zero - sum Game

۲ـ Two - Person zero - sum Game

تماشای این اعداد و اعمال ضرب و جمع، خالی از تعجب و تفریح نیست.

۴۹۷+۲=۴۹۹	۴۷+۲=۴۹	۹+۹=۱۸
۴۹۷×۲=۹۹۴	۴۷×۲=۹۴	۹×۹=۸۱
۱۲×۱۲=۱۴۴	۲۶۳+۲=۲۶۵	۲۴+۳=۲۷
۲۱×۲۱=۴۴۱	۲۶۳×۲=۵۲۶	۲۴×۳=۷۲

دیفرانسیل ـ خطّی سازی و خطا

● احمد قندهاری

اگر تابع به معادلهٔ $y = f(x)$، در بازه (a,b) مشتق‌پذیر باشد و $x \in (a,b)$، چنانچه به x نموّی (رشدی) مانند Δx نسبت دهیم؛ به‌طوری که $(x+\Delta x) \in (a,b)$، خواهیم داشت:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

بنابه تعریف حدّ تابع، می‌توان نوشت: برای هر $\varepsilon > 0$، وجود دارد $\delta > 0$ که:

$$0 < |\Delta x| < \delta \Rightarrow \left|\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)\right| < \varepsilon$$

یا

$$0 < |\Delta x| < \delta \Rightarrow \frac{|\Delta y - f'(x).\Delta x|}{|\Delta x|} < \varepsilon$$

از عبارت $\frac{|\Delta y - f'(x).\Delta x|}{|\Delta x|} < \varepsilon$ نتیجه می‌شود که $|\Delta y - f'(x)\Delta x|$ در مقایسه با $|\Delta x|$ کوچک است. چنانچه Δx به اندازهٔ کافی کوچک باشد $|\Delta y - f'(x)\Delta x| \cong 0$، (تقریباً مساوی $\cong$) و $f'(x).\Delta x$ تقریب مناسبی برای محاسبهٔ Δy است.

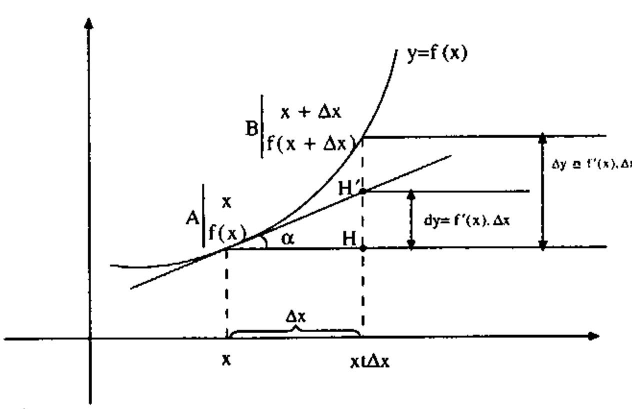
پس اگر $|\Delta x|$ به اندازهٔ کافی کوچک باشد، داریم: $\Delta y \cong f'(x).\Delta x$.

عبارت $f'(x).\Delta x$ را دیفرانسیل تابع گوییم و آن‌را با نماد dy نشان می‌دهیم.

پس:

$$\boxed{\Delta y \cong f'(x).\Delta x \quad , \quad dy = f'(x).\Delta x}$$

به شکل زیر توجه کنید.



$$\text{شیب خط مماس در نقطهٔ } A = f'(x) = \tan\alpha = \frac{HH'}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow HH' = f'(x).\Delta x = dy$$

اگر به شکل دقت کنیم، Δy تغییر عرض تابع f دراثر تغییر x به $x+\Delta x$ است؛ ولی dy تغییر عرض خطّ مماس بر منحنی تابع f در نقطه‌ای به‌طول x دراثر تغییر x به $x+\Delta x$ است. عمل جایگزینی

خطّ مماس به جای f را اصطلاحاً **خطّی‌سازی** و مقدار BH' را **خطای خطّی‌سازی** گوییم و با کوچکتر شدن Δx، مقدار این خطا کاهش می‌یابد. به مثال زیر توجه کنید.

مثال: در تابع به معادلهٔ $y = f(x) = x^2 + x$، مطلوب است محاسبهٔ Δy و dy و $\Delta y - dy$ برای

الف : هر x و Δx

ب : $x = 2$ و $\Delta x = 0/1$

ج : $x = 2$ و $\Delta x = 0/01$

د : $x = 2$ و $\Delta x = 0/001$

حل:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 + (x+\Delta x) - x^2 - x$$

$$\Rightarrow \Delta y = \Delta x(2x + 1 + \Delta x)$$

$$dy = f'(x).\Delta x = (2x+1)\Delta x$$

$$\Delta y - dy = \Delta x(2x+1+\Delta x) - (2x+1)\Delta x = (\Delta x)^2$$

بقیهٔ محاسبات در جدول زیر نوشته شده است.

x	Δx	Δy	dy	$\Delta y - dy$
x	Δx	$\Delta x(2x+1+\Delta x)$	$(2x+1)\Delta x$	$(\Delta x)^2$
۲	۰/۱	۰/۵۱	۰/۵۰	۰/۰۱
۲	۰/۰۱	۰/۰۵۰۱	۰/۰۵	۰/۰۰۱
۲	۰/۰۰۱	۰/۰۰۵۰۰۱	۰/۰۰۵	۰/۰۰۰۰۰۱

به‌طوری که جدول نشان می‌دهد، هر چه‌قدر Δx به صفر نزدیکتر می‌شود، عبارت $(\Delta y - dy)$ کوچکتر می‌شود و عبارت $(\Delta y - dy)$ از Δx کوچکتر است، پس $\Delta y \cong dy$ و این تقریب از Δx کمتر است.

انتشار خطا

دربرخی از اندازه‌گیریها، به‌علّت محدودیت وسایل اندازه‌گیری، معمولاً اندازهٔ مقدار واقعی متغیر، در دست نیست ؛ بلکه با خطایی که آن‌را (متغیر) Δ می‌نامیم، اندازه‌گیری اوّلیه انجام می‌شود. این عمل، باعث می‌شود در محاسبات بعدی نیز مقدار واقعی کمیت مورد نظر به‌دست نیاید. به‌عنوان مثال، اگر در اندازه‌گیری طول شعاع یک دایره، به‌اندازهٔ $\frac{1}{100}$ سانتیمتر خطا کرده باشیم، در محاسبهٔ مساحت دایره، مقدار واقعی مساحت دایره به‌دست نمی‌آید.

به‌علت وجود خطا در محاسبهٔ طول شعاع، اندازهٔ مساحت دایره با خطا به‌دست می‌آید. در این صورت می‌گوییم، خطای اندازه‌گیری در شعاع دایره، به محاسبهٔ مساحت دایره نیز سرایت می‌کند یا انتشار می‌یابد. به مثال زیر توجه کنید :

مثال ۱: در دایره‌ای به شعاع 10^{cm}، چنانچه محاسبهٔ طول شعاع با خطای $\frac{1}{100}$ سانتیمترصورت گیرد، مساحت دایره با چه خطایی محاسبه می‌شود.

حل: $\text{مساحت دایره} = S = \pi R^2 \Rightarrow S'_R = 2\pi R$

$$\Delta y \cong f'(x).\Delta x \Rightarrow \Delta S \cong S'_R \times \Delta R = 2\pi R \times \Delta R$$

$$\Rightarrow \Delta S \cong 2\pi(10)(\frac{1}{100}) = \frac{\pi}{5}$$

معنای این حل آن است که اگر در محاسبهٔ شعاع دایره به اندازهٔ $\frac{1}{100}$ سانتیمتر خطا کرده باشیم، در محاسبهٔ مساحت دایره، این خطا انتشار یافته است و مساحت دایره، با خطای تقریباً $\frac{\pi}{5}$ سانتیمترمربع محاسبه شده است. پس خطای اندازه‌گیری در طول شعاع، به محاسبهٔ مساحت دایره نیز سرایت کرده یا انتشار یافته است. به‌طور خلاصه، در تابع مشتق‌پذیر به معادلهٔ $y = f(x)$، اگر متغیر x به‌اندازه Δx تغییر کند، تغییر تابع یعنی Δy تقریباً برابر است با :

$$\boxed{\Delta y \cong dy = f'(x).\Delta x}$$

مثال ۲: در تابع به معادلهٔ $y = f(x) = \sqrt[3]{x^2}$، اگر در نقطهٔ $x = 8$ متغیر x به‌اندازهٔ $\Delta x = \frac{1}{100}$ تغییر کند، تغییر تابع یعنی Δy تقریباً چه‌قدر است؟

حل: $x = 8\ ,\ \Delta x = \frac{1}{100} \qquad f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

$$\Delta y \cong dy = f'(x).\Delta x = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.\Delta x = \frac{2}{3\sqrt[3]{8}} \times \frac{1}{100} = \frac{1}{300}$$

مثال ۳: در کره‌ای به شعاع 10^{cm}، خطای اندازه‌گیری در حجم کره (40π) است. خطای اندازه‌گیری در شعاع کره چه‌قدر است؟

حل: $\text{حجم کره} = V = \frac{4}{3}\pi R^3 = f(R)$

$$V' = f'(R) = 4\pi R^2.\Delta R$$

$$\Delta V \cong dv = f'(R).\Delta R = 4\pi R^2.\Delta R$$

$$40\pi = 4\pi(10)^2 \times \Delta R \Rightarrow \Delta R = \frac{1}{10} \text{ سانتیمتر}$$

مثال ۴: قطر داخلی یک کرهٔ فلزی ۳۰ سانتیمتر و قطر خارجی آن، ۳۰/۴ سانتیمتر است، حجم تقریبی جدار کره چه‌قدر است؟

حل:

$$\begin{cases} R = 30 \\ \Delta R = \frac{2}{10} \end{cases}$$

$$\text{حجم کره} = V = \frac{4}{3}\pi R^3 = f(R)$$

$$V' = f'(R) = 4\pi R^2$$

$$\Delta V \cong dV = f'(R).\Delta R = 4\pi R^2 \times \Delta R$$

$$= 4\pi(30)^2 \times \frac{2}{10} = 720\pi \text{ سانتیمتر مکعب}$$

مثال۵: در یک قطعه فلز، سوراخی به شکل استوانه به شعاع ۳ سانتیمتر و عمق ۴۰ سانتیمتر کنده شده است. اگر بخواهیم به‌وسیلهٔ تراش، قطر سوراخ را به ۶/۲ سانتیمتر برسانیم، تقریباً چند سانتیمترمکعب باید از حجم فلز را بتراشیم؟

حل:

$$\begin{cases} R = 3 \\ \Delta R = \frac{1}{10} \end{cases}$$

$$\text{حجم استوانه} = V = \pi R^2.h = f(R)$$

$$V' = f'(R) = 2\pi R.h$$

$$\Delta V \cong dV = f'(R).\Delta R = 2\pi Rh.\Delta R$$

$$\Delta V \cong 2\pi(3)(40)(\frac{1}{10}) = 24\pi \text{ سانتیمترمکعب}$$

توجه: اگر $y = f(x)$ معادلهٔ تابع مشتق‌پذیر f باشد، داریم:

اگر متغیر x باشد، آن‌گاه: $y_1 = f(x)$

اگر متغیر $(x + \Delta x)$ باشد، آن‌گاه: $y_2 = f(x + \Delta x)$

درنتیجه: $(1)\quad \Delta y = y_2 - y_1 = f(x + \Delta x) - f(x)$

از طرفی داشتیم: $(2)\quad \Delta y \cong f'(x).\Delta x$

با مقایسه (۱) و (۲) داریم:

$$f(x + \Delta x) - f(x) \cong f'(x).\Delta x$$

یا

$$\boxed{f(x + \Delta x) \cong f(x) + f'(x).\Delta x}$$

این رابطه، مقدار تقریبی وضع جدید تابع را پس از این که x به‌اندازهٔ Δx تغییر کرده است، نشان می‌دهد.

مثال ۶: مقدار تقریبی $\sqrt[5]{33}$ را بیابید.

حل: فرض می‌کنیم: $f(x) = \sqrt[5]{x}$ آن‌گاه $f'(x) = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$

حال اگر $x = 32 = 2^5$ و $\Delta x = 1$ در نظر بگیریم:

$$f(x + \Delta x) \cong f(x) + f'(x).\Delta x$$

$$\Rightarrow \sqrt[5]{x + \Delta x} \cong \sqrt[5]{x} + \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}.\Delta x$$

$$\Rightarrow \sqrt[5]{32 + 1} \cong \sqrt[5]{2^5} + \frac{1}{5\sqrt[5]{2^{20}}}.\Delta x = 2 + \frac{1}{80} = 2/0125$$

مثال ۷: مقدار تقریبی $\tan 62^\circ$ را محاسبه کنید.

حل: فرض می‌کنیم: $f(x) = \tan x$ آن‌گاه

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x$$

حال اگر: $x = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$ و رادیان $\Delta x = 2^\circ = \frac{2 \times \pi}{180}$ باشد:

$$f(x + \Delta x) \cong f(x) + f'(x).\Delta x$$

$$\Rightarrow \tan(x + \Delta x) \cong \tan x + (1 + \tan^2 x).\Delta x$$

$$\Rightarrow \tan(60^\circ + 2^\circ) \cong \tan\frac{\pi}{3} + (1 + \tan^2\frac{\pi}{3}) \times \frac{\pi}{90}$$

$$\Rightarrow \tan 62^\circ \cong \sqrt{3} + (1 + 3) \times \frac{\pi}{90} = \sqrt{3} + \frac{2\pi}{45}$$

مثال ۸: مقدار تقریبی $\mathrm{Arc}\tan 1/02$ را محاسبه کنید.

حل: فرض می‌کنیم: $f(x) = \mathrm{Arc}\tan x$ آن‌گاه

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

اگر: $x = 1$ و $\Delta x = \frac{2}{100}$ آن‌گاه می نویسیم:

$$f(x + \Delta x) \cong f(x) + f'(x).\Delta x$$

$$\Rightarrow \mathrm{Arc}\tan(x + \Delta x) \cong \mathrm{Arc}\tan x + \frac{1}{1 + x^2}.\Delta x$$

$$\Rightarrow \mathrm{Arc}\tan(1 + 0/02) \cong \mathrm{Arc}\tan 1 + \frac{1}{1 + 1}(\frac{2}{100})$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Arc}\tan 1/02 \cong \frac{\pi}{4} + \frac{1}{100}$$

مثال ۹: اگر α (برحسب رادیان) زاویه‌ای به‌قدر کافی کوچک

باشد، ثابت کنید $\tan\alpha \cong \alpha$ ، (α در همسایگی صفر است).

حل: فرض می‌کنیم $f(x)=\tan x$ ، آن‌گاه $f'(x)=1+\tan^2 x$

اگر $x=0$ و $\Delta x=\alpha$ داریم:

$$f(x+\Delta x)\cong f(x)+f'(x).\Delta x$$

$$\Rightarrow \tan(x+\Delta x)\cong \tan x+(1+\tan^2 x).\Delta x$$

$$\Rightarrow \tan(0+\alpha)\cong \tan 0+(1+\tan^2 0).\alpha$$

$$\Rightarrow \tan\alpha\cong\alpha$$

مثال ۱۰: به کمک دیفرانسیل مقدار تقریبی $\sqrt[5]{0/9}-(0/9)^5$ را بیابید.

حل: فرض می‌کنیم: $f(x)=\sqrt[5]{x}-x^5$ آن‌گاه

$$f'(x)=\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}-5x^4$$

اگر $x=1$ و $\Delta x=-\frac{1}{10}$ ، آن‌گاه داریم:

$$f(x+\Delta x)\cong f(x)+f'(x).\Delta x$$

$$\Rightarrow \sqrt[5]{x+\Delta x}-(x+\Delta x)^5$$

$$\cong \sqrt[5]{x}-x^5+(\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}-5x^4).\Delta x$$

$$\Rightarrow \sqrt[5]{1-0/1}-(1-0/1)^5$$

$$\cong \sqrt[5]{1}-1+(\frac{1}{5\sqrt[5]{1}}-5)(-\frac{1}{10})$$

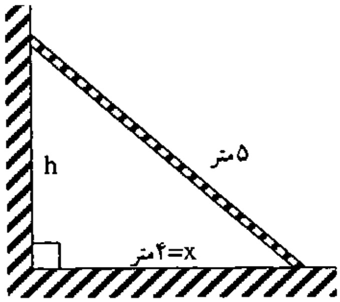
$$\Rightarrow \sqrt[5]{0/9}-(0/9)^5\cong\frac{12}{25}$$

مثال ۱۱: نردبانی به‌طول ۵ متر مطابق شکل به دیواری چنان تکیه داده‌ایم که فاصلهٔ پای نردبان از پای دیوار، ۴ متر است. به‌کمک دیفرانسیل، تغییر ارتفاع انتهای نردبان را حساب کنید؛ درصورتی که پای نردبان از دیوار ۰/۵ متر دورتر رود.

حل: در مثلث قائم‌الزاویه شکل، می‌توان نوشت $h^2=25-x^2$

یا $h=\sqrt{25-x^2}$ و $h'=\frac{-x}{\sqrt{25-x^2}}$

$$\begin{cases}x=4\\ \Delta x=\frac{1}{2}\end{cases}\qquad \Delta h\cong dh=h'\times\Delta x=\frac{-x}{\sqrt{25-x^2}}.\Delta x$$



$$\Rightarrow \Delta h\cong\frac{-4}{\sqrt{25-16}}\times\frac{1}{2}=-\frac{2}{3}\ \text{متر}$$

تابع به معادلهٔ $y=f(x)=x$ را در نظر می‌گیریم. اگر از دو طرف این تابع، دیفرانسیل بگیریم، خواهیم داشت (۱) $dy=dx$ ، از طرفی $dy=f'(x).\Delta x$ پس $dy=1\times\Delta x$ یا (۲) $dy=\Delta x$ ، با مقایسه (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $\Delta x=dx$

تعریف: اگر تابع f با ضابطهٔ $y=f(x)$ تعریف شود، دیفرانسیل x را که با dx نشان می‌دهیم، به‌صورت $\Delta x=dx$ تعیین می‌شود.

پس

$$dy=f'(x).\Delta x$$

یا

$$\boxed{dy=f'(x).dx}$$

به‌طور کلّی:

دیفرانسیل متغیر× (مشتق تابع)= دیفرانسیل هر تابع مشتق‌پذیر

مثلاً اگر تابعهای u و v و t به‌صورت $u=f(x)$ و $v=g(x)$ و $t=h(x)$ باشند داریم:

$$du=u'_x.dx=f'(x).dx$$

$$dv=v'_x.dx=g'(x).dx$$

$$dt=t'_x.dx=h'(x).dx$$

مثال ۱۲: دیفرانسیل تابع به معادلهٔ $y=\mathrm{Arc}\tan x\sqrt{1-x^2}$ را بیابید.

حل:

$$dy=y'.dx=\frac{(x\sqrt{1-x^2})'}{1+(x\sqrt{1-x^2})^2}dx$$

$$\Rightarrow dy=\frac{\sqrt{1-x^2}+\frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1+x^2(1-x^2)}.dx$$

$$=\frac{\frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1+x^2(1-x^2)}dx$$

$$\Rightarrow dy=\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}\left(1+x^2(1-x^2)\right)}dx$$

مثال ۱۳: دیفرانسیل تابع به معادلهٔ $y=Ln\sqrt{x}+e^{2x}+a^{\sqrt{x}}$ را بیابید.

حل:

$$dy=y'.dx=\left[\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}+2e^{2x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}Lna(a^{\sqrt{x}})\right]dx$$

$$dy=\left[\frac{1}{2x}+2e^{2x}+\frac{Lna}{2\sqrt{x}}(a^{\sqrt{x}})\right]dx$$

تمرین

۱ـ مقدار تقریبی $Arc\cot 0/99$ و $\sqrt[6]{63}$ و $\sqrt[n]{a^n+b}$ را بیابید.

۲ـ اگر α (برحسب رادیان) زاویه‌ای به‌قدر کافی کوچک باشد، ثابت کنید: $\sin\alpha\cong\alpha$.

۳ـ دیفرانسیل تابعهای به معادله‌های زیر را بیابید.

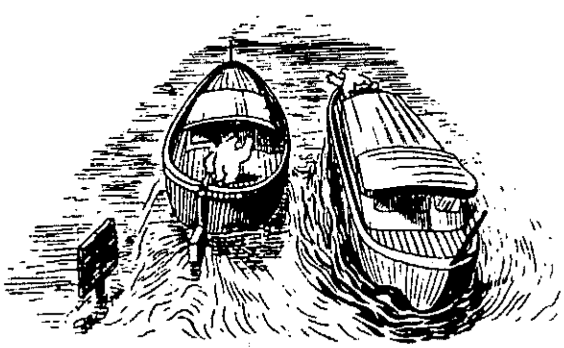
۱) $y=Ln(Arc\tan\sqrt{x})$

۲) $y=a^{Arc\cos x}+e^{Arc\sin x}$

۳) $y=Arc\sin(Lna^x)$

۴) $y=Arc\cos(Ln\sin x)$

تفریح اندیشه ۱



دو کشتی در طول رودخانه‌ای واقع بین دو شهر رفت‌وآمد می‌کنند. سرعت هر دو کشتی ثابت است؛ یک سرعت هنگام حرکت و یک سرعت هنگام توقف. هر کشتی همزمان و رأس ساعت مشخصی از شهر خود به طرف شهر دیگر حرکت می‌کند. اولین محل تلاقی آنها در ۷ کیلومتری یکی از شهرهاست. هر کشتی پس از رسیدن به مقصد ۴ دقیقه توقف، و مجدداً حرکت می‌کند. بار دوم این دو کشتی در ۹ کیلومتری همان شهر قبلی به هم می‌رسند. فاصله بین این دو شهر چقدر است؟

● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمه سیمین‌دخت ترکپور

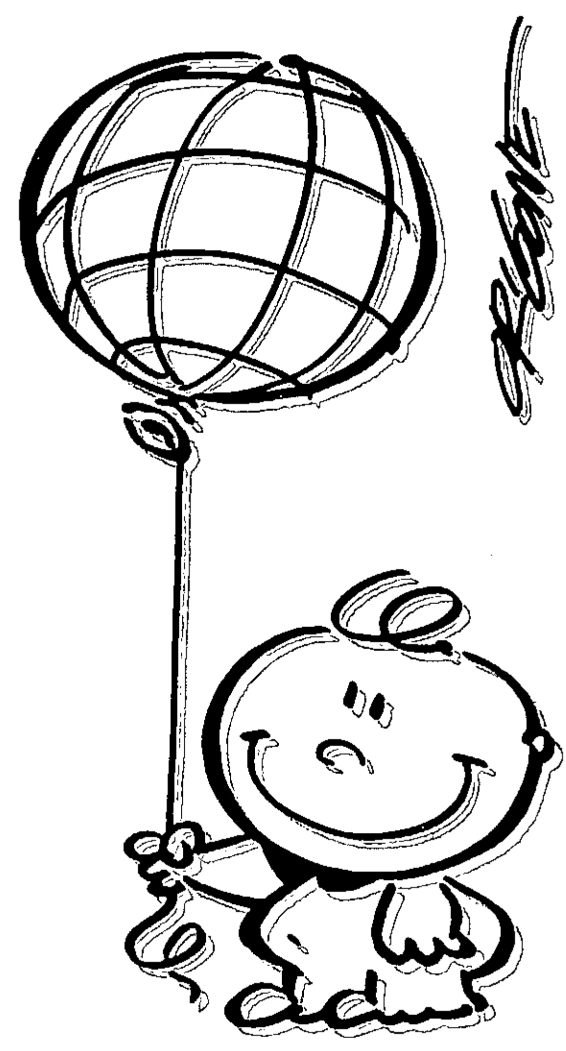
جواب در صفحهٔ ۸۸

نابرابریها

(قسمت سوّم)

● میرشهرام صدر

در شمارهٔ قبل، تعدادی از قضیه های نابرابریها را بررسی کردیم، اکنون در ادامهٔ مقالهٔ قبل، قضیه ها و نتیجه های مهم دیگری از نابرابریها را بیان میکنیم .



قضیهٔ ۱۰. فرض کنیم $a > 0$ ؛ $x > a$ یا $x < -a$ $\Leftrightarrow$ $x^2 > a^2$.

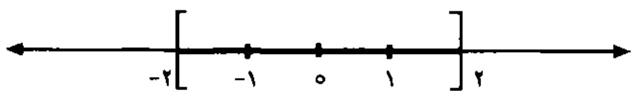
اثبات به عهدهٔ خواننده می‌باشد.

مثال. نابرابریهای زیر را به صورت بازه مشخص کنید :

۱) $x^2 \le 4$ ۲) $x^2 > 3$

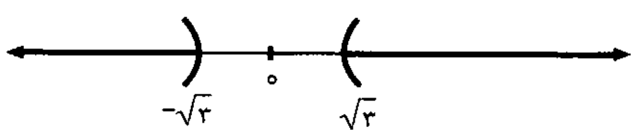
حل.

۱ ـ $x^2 \le 4 \Rightarrow x^2 \le 2^2 \Rightarrow -2 \le x \le 2$



$[-2,2]$

۲ ـ $x^2 > 3 \Rightarrow x^2 > (\sqrt{3})^2 \Rightarrow x > \sqrt{3}$ یا $x < -\sqrt{3}$



$(-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},\infty)$

مسألهٔ ۱. اگر x یک عدد حقیقی باشد، نشان دهید $-|x| \le x \le |x|$.

حل. مسأله را در دو حالت بررسی می‌کنیم :

حالت اوّل : اگر $x \ge 0$ ، آن‌گاه طبق تعریف قدرمطلق $|x| = x$ و در این حالت $-|x| < x$ بنابراین $-|x| \le x \le |x|$.

حالت دوم : اگر $x < 0$ ، آن‌گاه طبق تعریف قدرمطلق $|x| = -x$ یا $-|x| = x$ و در این حالت $x < |x|$ بنابراین $-|x| \le x \le |x|$.

قضیهٔ ۱۱. فرض کنیم $a > 0$ یک عدد حقیقی باشد، در این صورت داریم : $|x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a$.

برهان. فرض کنیم $-a \le x \le a$ دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم :

حالت اوّل : اگر $x \ge 0$ ، آن‌گاه $|x| = x$ ؛ با جایگزینی این رابطه در فرض داریم :

$$-a \le |x| \le a \Rightarrow |x| \le a$$

حالت دوم : اگر $x < 0$ ، آن‌گاه $x = -|x|$ ؛ با جایگزینی این رابطه در فرض داریم :

$$-a \le -|x| \le a \Rightarrow -a \le -|x| \Rightarrow |x| \le a$$

بعکس، فرض کنیم $|x| \le a$، طبق مسألهٔ قبل، برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم :

$$-|x| \le x \le |x|$$

$$\begin{cases} |x| \le a \Rightarrow -a \le -|x| \\ -|x| \le x \le |x| \end{cases} \Rightarrow -a \le -|x| \le x \le |x| \le a$$

$$\Rightarrow -a \le x \le a$$

مثال. فرض کنید $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ثابت کنید :

$$2|a+b+c| \le |a+b| + |a+c| + |b+c|$$

حل.

چون برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم : $-|x| \le x \le |x|$ (مسألهٔ ۱) ، بنابراین :

$$-|a+b| \le a+b \le |a+b|$$

$$-|a+c| \le a+c \le |a+c|$$

$$-|b+c| \le b+c \le |b+c|$$

$$-(|a+b| + |a+c| + |b+c|) \le 2(a+b+c)$$
$$\le |a+b| + |a+c| + |b+c|$$

با توجه به قضیهٔ ۱۰ خواهیم داشت :

$$2|a+b+c| \le |a+b| + |a+c| + |b+c|$$

نتیجهٔ ۵. اگر $a > 0$ یک عدد حقیقی باشد، نابرابریهای زیر، دو به دو معادلند :

$$x^2 \le a^2 \Leftrightarrow |x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a$$

نتیجهٔ ۶. اگر $a > 0$ یک عدد حقیقی باشد، نابرابریهای زیر، دو به دو معادلند.

$$x^2 \ge a^2 \Leftrightarrow |x| \ge a \Rightarrow x \ge a \text{ یا } x \le -a$$

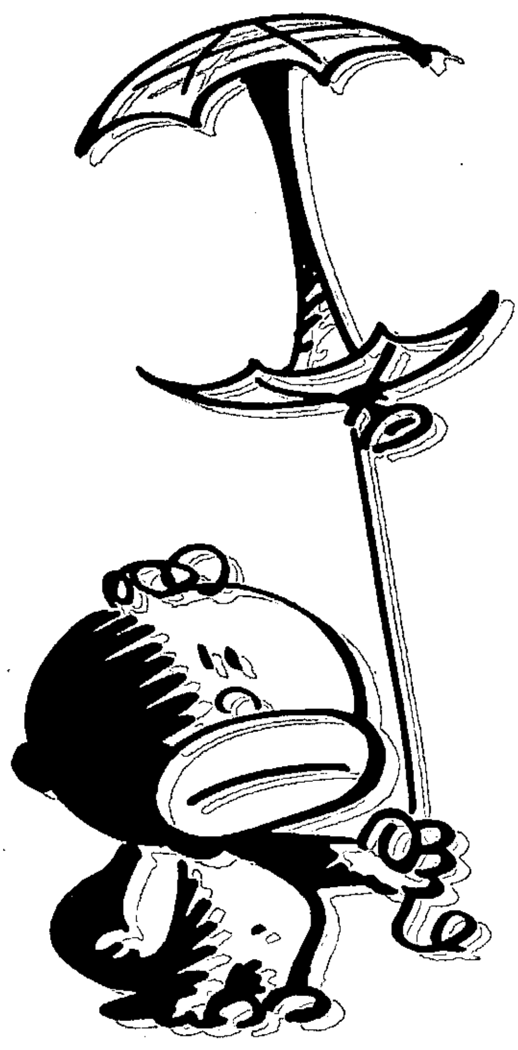
قضیهٔ ۱۲. (نابرابری مثلثی در اعداد حقیقی) اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه $|x+y| \le |x| + |y|$.

برهان. برای عددهای حقیقی x و y داریم :

$$\begin{cases} -|x| \le x \le |x| \\ -|y| \le y \le |y| \end{cases} \Rightarrow -(|x| + |y|) \le x + y \le |x| + |y|$$

$$\Rightarrow |x+y| \le |x| + |y|$$

نتیجهٔ ۷. (تعمیم نابرابری مثلثی در اعداد حقیقی) اگر x_1 ، x_2 ، ... ، x_n ، اعداد حقیقی باشند، آن‌گاه $|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \le |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$ اثبات این حکم به استقرا روی n است :



(نابرابری مثلثی) $n=2: |x_1+x_2|\le|x_1|+|x_2|$

$n=k: |x_1+x_2+\ldots+x_k|\le|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_k|$

(فرض استقرا)

$n=k+1: |x_1+x_2+\ldots+x_k+x_{k+1}|$

(حکم استقرا) $\le|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_k|+|x_{k+1}|$

با توجه به نابرابری مثلثی داریم:

$$|x_1+x_2+\ldots+x_k+x_{k+1}|\le|x_1+x_2+\ldots+x_k|+|x_{k+1}|$$

از مقایسه نابرابری بالا و فرض استقرا، درستی حکم استقرا نتیجه می‌شود:

$$|x_1+x_2+\ldots+x_k+x_{k+1}|\le|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_k|+|x_{k+1}|$$

مسألهٔ ۲. چنانکه x و y دو عدد حقیقی باشند، ثابت کنید $||x|-|y||\le|x-y|$.

حل.

(۱) $|x|=|x-y+y|\le|x-y|+|y|\Rightarrow|x|-|y|\le|x-y|$

$|y|=|y-x+x|\le|y-x|+|x|\Rightarrow|y|-|x|\le|y-x|$

(۲) $\Rightarrow -|x-y|\le|x|-|y|$

با توجه به (۱) و (۲) داریم:

$$-|x-y|\le|x|-|y|\le|x-y|\Rightarrow||x|-|y||\le|x-y|$$

مسألهٔ ۳. چنانکه x و y دو عدد حقیقی باشند، ثابت کنید $||x|-|y||\le|x+y|$.

حل.

$|x|=|x+y-y|\le|x+y|+|-y|=|x+y|+|y|$

(۱) $\Rightarrow|x|-|y|\le|x+y|$

اگر در رابطهٔ (۱) «x را به y» و «y را به x» تبدیل کنیم:

(۲) $|x+y|\ge|y|-|x|\Rightarrow|x|-|y|\ge-|x+y|$

با توجه به (۱) و (۲) داریم:

$$-|x+y|\le|x|-|y|\le|x+y|\Rightarrow||x|-|y||\le|x+y|$$

مثال. ماکزیمم و مینیمم عبارتهای زیر را پیدا کنید:

۱) $A=|x-3|-|x+1|$

۲) $B=|x+5|-|x+2|$

حل.

۱) با توجه به مسألهٔ (۳) داریم:

$$|A|=||x-3|-|x+1||=||3-x|-|x+1||$$
$$\le|3-x+x+1|=4$$
$$\Rightarrow|A|\le4\Rightarrow-4\le A\le4$$

۲) با توجه به مسألهٔ (۲) داریم:

$$|B|=||x+5|-|x+2||\le|x+5-x-2|=3\Rightarrow|B|\le3$$
$$\Rightarrow-3\le B\le3$$

مثال. برای سه عدد حقیقی x، y و z ثابت کنید:

$$|x-y|\le|x-z|+|z-y|$$

حل. با توجه به نابرابری مثلث داریم:

$$|x-z|+|z-y|\ge|x-z+z-y|=|x-y|$$
$$\Rightarrow|x-z|+|z-y|\ge|x-y|$$

خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی

قضیهٔ ۱۳. فرض کنیم a و b دو عدد حقیقی باشند و $a>0$، در این صورت یک عدد طبیعی مانند n وجود دارد؛ به طوری که $an>b$. (این قضیه را بدون اثبات می‌پذیریم.)

مثال. فرض کنیم $a>0$ یک عدد حقیقی باشد، ثابت کنید یک عدد طبیعی مانند n وجود دارد، به طوری که $\frac{1}{n}<a$.

حل. با توجه به قضیهٔ قبل، چون ۱ و a دو عدد حقیقی هستند و $a>0$، بنابراین یک عدد طبیعی مانند n وجود دارد؛ به گونه‌ای که $an>1$، در نتیجه $a>\frac{1}{n}$.

مثال. ثابت کنید معادله $x^2+1=0$ در مجموعهٔ عددهای حقیقی جواب ندارد.

حل. واضح است که $x=0$ در معادله صدق نمی‌کند؛ زیرا

$0+1\neq 0$، برای هر $x\neq 0$ داریم $x^2>0$. پس $x^2+1>0$ در نتیجه x^2+1 هیچ گاه صفر نمی‌شود.

تمرین

۱ ــ برای عددهای حقیقی a، b و c ثابت کنید:

الف) اگر $a>b$ و $c>0$، آن گاه $ac>bc$.

ب) اگر $a>b$ و $c<0$، آن گاه $ac<bc$.

۲ ــ نشان دهید مجموع دو عدد منفی همواره یک عدد منفی است.

۳ ــ اگر $a\leq b$ و $c\leq d$ ثابت کنید:

الف) $a+3c\leq 3d+2b$

ب) $\frac{1}{2}a-4d\leq\frac{1}{2}b-4c$

۴ ــ اگر $a<b$ و $c<d$، دراین‌صورت دربارهٔ $(a-b)\times(d-c)$ چه می‌توان گفت؟

۵ ــ فرض کنیم $0<a<b$ اگر n یک عدد طبیعی باشد، آن گاه $a^{\frac{1}{n}}<b^{\frac{1}{n}}$.

۶ ــ فرض کنیم $a>1$، به ازای عدد گویای $r>0$، ثابت کنید $a^r>1$ و به ازای عدد گویای $r<0$، ثابت کنید $0<a^r<1$.

۷ ــ اگر $0<a<1$، به ازای عدد گویای $r<0$، ثابت کنید $a^r>1$ و به ازای عدد گویای $r>0$، ثابت کنید $0<a^r<1$.

۸ ــ ماکزیمم و می نیمم عبارتهای زیر را پیدا کنید:

۱) $A=|2x-1|-|2x+3|$

۲) $B=|5x+1|-|4-5x|$

۹ ــ نابرابریهای زیر را به صورت بازه مشخص کنید:

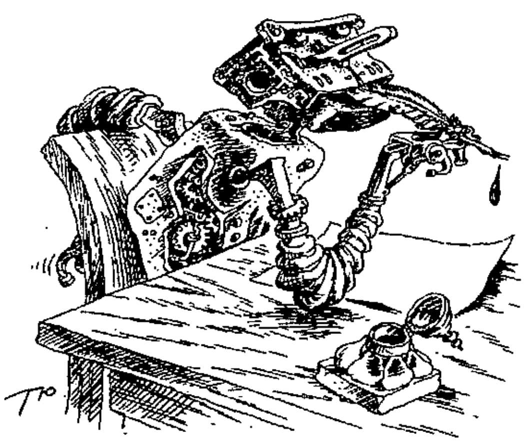
۱) $(x-2)^2\leq 9$

۲) $(2x-1)^2\geq 1$

۳) $(3x-2)^2\leq(5x+4)^2$

۴) $(x-3)^2\geq(2x-1)^2$

چرخهای گردنده



عمه‌خانم تصوّر می کرد نشان دادن فیلمهایی که تابستان گذشته در تعطیلات گرفته است، بدنیست. اما درست ۵ دقیقه و ۲۰ ثانیه پس از شروع نمایش، زمانی که سرعت چرخی که از آن فیلم برداشته می‌شود، $1\frac{1}{2}$ برابر سرعت چرخی که فیلم به دور آن می‌پیچد، بود، فیلم پاره شد. چند دقیقه از فیلم مورد بحث را از دست داده‌ایم؟

جواب در صفحهٔ ۸۸

● قسمت اول

کاربرد ریاضی در علوم و شگفتیهای زمین

● شادی دلکش رودسری

مقدمه

هدف اصلی در مجلات برهان، آشنایی هرچه بیشتر شما عزیزان با مفاهیم و اصول ریاضیات و اهمیت و کاربرد آن در زندگی روزمره، صنعت و سایر علوم، از جمله زمین‌شناسی می‌باشد.

آیا تا به حال دربارهٔ علم زمین‌شناسی و اهداف آن اندیشیده‌اید؟!

از آن‌جا که زمین‌شناسی یکی از رشته‌های بنیادی علوم می‌باشد، و پایه‌های اقتصادی کشور نیز بر اساس این علم بنا شده است، و کاربرد زیادی در اکتشافات مواد هیدروکربوری (نفت، گاز و زغال) و استخراج این مواد، مطالعات هیدروژئولوژیکی «آب‌شناسی» (آبهای زیرزمینی و آبهای جاری)، اکتشاف کانیهای فلزی نظیر سرب و روی، سدسازی و ... دارد، سعی می‌شود از این شماره به بعد تحت عنوان کاربرد ریاضی در علوم و شگفتیهای زمین، علاوه بر ذکر کاربرد قوانین و روابط ریاضی در کشف اسرار زمین، اطلاعاتی مفید و ارزشمند نیز در جهت ارتقای دانش عمومی شما عزیزان ارائه گردد.

به یاد داشته باشید که علوم زمین را باید در خود طبیعت بیاموزید. باید مشاهده‌گر دقیقی باشید و همه‌جا به جست‌وجوی دلایل بروید؛ و با توجه به یافته‌ها و تفسیرهای سر زمین و تجزیه و تحلیل آنها و استفاده از علوم ریاضی، فیزیک و شیمی به اطلاعات مفیدی دست یابید.

هیچ‌کدام از ما درون زمین را ندیده‌ایم و پا را از کرهٔ زمین فراتر نگذاشته‌ایم، اما پژوهشگران با بهره‌گیری مناسب از روابط بین علوم، اطلاعات خوبی را دربارهٔ جنس مواد تشکیل دهندهٔ زمین و واکنشها و وقایعی که در سطح و درون زمین اتفاق می‌افتد، به دست آورده‌اند.

در این شماره در مورد کاربرد لگاریتم در رسوب‌شناسی (یکی از رشته‌های تخصصی زمین‌شناسی) و اهمیّت آن در پروژه‌های سدسازی، جاده‌سازی، پل‌سازی و ... شرح خواهیم داد.

اندازهٔ ذرات تشکیل دهندهٔ رسوبات

پوستهٔ جامد زمین از سنگهای رسوبی، آذرین و دگرگونی تشکیل شده است، و سنگهای رسوبی به تنهایی بیش از ۷۰ درصد سطح خارجی زمین را می‌پوشانند. سنگهای رسوبی از رسوبات مختلفی تشکیل شده‌اند که طی عمل دیاژنز (سنگی شدن) به سنگ تبدیل می‌شوند.

دانه‌های رسوبی در اندازه‌های مختلفی دیده می‌شوند (جدول۱). طبقه‌بندی دانه‌ها از روی بلندترین قطر آنها صورت

می‌گیرد. کرومباین در سال ۱۹۳۴ میلادی، مقیاسی لگاریتمی ارائه داد که به مقیاس فی (Φ) معروف شد، و عبارت است از منفی لگاریتم قطر ذره در پایهٔ ۲.

$\Phi = -\log_2^d$ قطر ذره برحسب میلیمتر = d

	نام اجزای رسوب	برحسب میلیمتر (mm)	برحسب فی (Φ)
گراول	بولدر (Boulder)	قطر>۲۵۶	۸- > کمتر
	کابل (Cobble)	۱۲۸ - ۳۲	(-۵) - (-۷)
	پبل (Pebble)	۱۶-۸	(-۲) - (-۴)
ماسه	گرانول (Granule)	۲	-۱
	ماسهٔ بسیار درشت (very coarse sand)	۱	۰
	ماسهٔ درشت (coarse sand)	۰/۵	۱
	ماسهٔ متوسط (medium sand)	۰/۲۵	۲
	ماسهٔ ریز (fine sand)	۰/۱۲۵	۳
	ماسهٔ بسیار ریز (very fine sand)	۰/۶۲۵	۴
سیلت	سیلت درشت (coarse silt)	۰/۰۳۱	۵
	سیلت متوسط (medium silt)	۰/۰۱۵۶	۶
	سیلت ریز (fine silt)	۰/۰۰۷۸	۷
	سیلت بسیار ریز (very fine silt)	۰/۰۰۳۹	۸
رس	رس (clay)	۰/۰۰۳۹ > قطر	۸ > بیشتر

جدول ۱ـ طبقه‌بندی اندازهٔ دانه‌های رسوبی (آواری) برحسب میلیمتر و فی.

همان‌طور که می‌دانید، هرگاه عدد N (مثبت) را در مبنای معین a (بزرگتر از صفر و مخالف یک) به صورت $N = a^x$ نمایش دهیم، عدد x ، که نمایندهٔ صورت نمایی عدد مفروض با مبنای a است، لگاریتم N در مبنای a خوانده می‌شود و می‌نویسیم $\log_a^N = x$ ، چنان‌که $16 = 2^4$ ، لذا $\log_2^{16} = 4$. لگاریتم اعداد در محاسبه کاربرد بسیار دارد و برای اعمال ضرب، توان، تقسیم و گرفتن ریشه، روشهای ساده و کوتاه به دست می‌دهد. معمولاً در محاسبات لگاریتمی، مبنا را عدد ۱۰ در نظر می‌گیرند.

نکتهٔ (۱) : لگاریتم هر عدد در مبنای خودش مساوی یک می‌باشد.

$\log_a^a = 1$

نکتهٔ (۲) : لگاریتم یک در هر پایه‌ای برابر با صفر می‌شود.

$\log_a^1 = 0$

قضیه‌های لگاریتم

۱) $\log_a^{A.B} = \log_a^A + \log_a^B$

۲) $\log_a^{A/B} = \log_a^A - \log_a^B$

۳) $\log_a^{(A)^m} = m\log_a^A$

۴) $\log_b^a = \frac{\log a}{\log b}$

۵) $\log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$

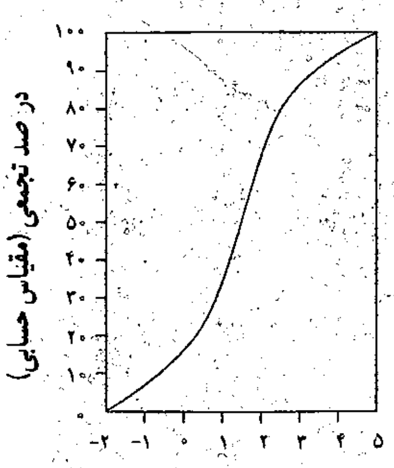
۶) $a^{\log_b^n} = n^{\log_b^a}$

۷) $a^{\log_a^x} = x$

۸) $\log_{b^n}^{a^m} = \frac{m}{n}\log_b^a$

۹) $\log_b^a \times \log_c^b = \log_c^a$

با استفاده از فرمول مقیاس «فی (Φ)»، اندازهٔ ذرات برحسب «فی» محاسبه می‌شود و با توجه به اندازهٔ ذرات به دست آمده (ذرات، مربوط به منطقهٔ محل احداث پروژه می‌باشند، که از محل



شکل ـ نمونه‌ای از منحنی‌های تجمعی.

مورد نظر به آزمایشگاه حمل شده‌اند و آزمایشهای لازم برای شناسایی نوع خاک منطقه روی آنها صورت می‌گیرد.) منحنی مربوط به این ذرات ترسیم می‌شود (منحنی‌های تجمعی).

مزایای کاربرد مقیاس «فی»

۱ـ اندازهٔ دانه‌ها به صورت یک عدد کامل به دست می‌آید، در صورتی که مقیاس میلیمتری دارای تقسیمات عددی بوده و در ترسیم منحنی، اشکالاتی را ایجاد می‌کند.

۲ـ مقیاس «فی» به صورت معکوس عمل می‌کند؛ یعنی با افزایش «فی»، اندازهٔ ذرات کاهش می‌یابند و برعکس.

۳ـ مقیاس «فی» به ما اجازه می‌دهد برای رسم منحنی توزیع ذرات، از کاغذهای حسابی که کاربرد آنها ساده‌تر از کاغذهای لگاریتمی است، استفاده کنیم.

بعد از یافتن اندازهٔ ذرات و ترسیم منحنی مربوط به آن، پارامترهای خاصی، جهت شناسایی نوع خاک منطقه، از روی منحنی محاسبه می‌شوند، و براساس نتایج حاصله از تجزیه و تحلیل منحنی‌ها که منجر به تشخیص نوع خاک منطقه می‌شود و با توجه به خصوصیات و ویژگیهای خاک، اقدامات لازم برای احداث پروژه صورت می‌گیرد.

به طور مثال، در پروژه‌های سدسازی، پل‌سازی و ایجاد مناطق مسکونی، چنانچه جنس خاک منطقهٔ مورد نظر از نوع رس تشخیص داده شود، بنا به دلایلی که در زیر شرح داده خواهد شد، این منطقه برای انجام چنین پروژه‌ای مناسب نمی‌باشد:

۱ـ رس، تراکم‌پذیر بوده و در زیر فشار ناشی از طبقات فوقانی متراکم شده و باعث نشست ساختمان می‌شود.

۲ـ رس، در اثر فشار وارده تغییر شکل داده و با حرکت آهسته باعث انهدام شیبها می‌شود و به همین دلیل بسیاری از زمین‌لغزه‌ها در زمینهای رسی اتفاق می‌افتد.

ویژگیهای خاکهای دانه درشت

۱ـ قدرت تحمل فشار، ناشی از طبقات فوقانی و یا جانبی

۲ـ نفوذپذیری بالا

۳ـ عدم تغییر مقاومت بر اثر افزایش درصد آب

۴ـ معمولاً قابل تراکم نبوده، مگر در صورتی که تراکم آنها پایین باشد، که بر اثر بار دینامیک فشرده می‌شود.

۵ـ عدم تغییر مقاومت در اثر انجماد و ذوب مجدد

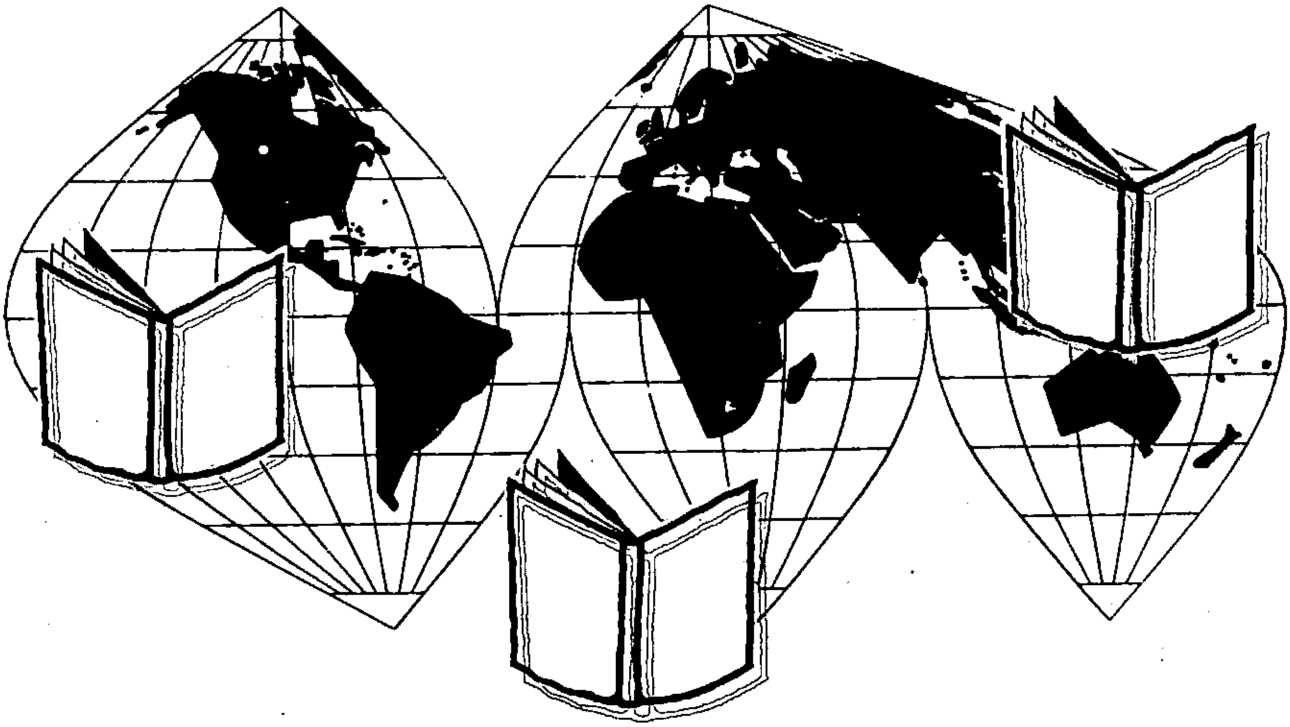
با توجه به دلایل فوق و با در نظر گرفتن ویژگی خاکهای مختلف، برای انجام چنین پروژه‌ای، منطقه‌ای با خاکهای دانه‌درشت مناسب می‌باشد.

در پروژهٔ سدسازی، منطقهٔ حاوی خاک رس به علت نفوذناپذیر بودن و خاصیت چسبندگی بسیار بالای رس که باعث تشکیل لایهٔ نفوذناپذیر و تجمع آب در منطقه می‌شود، حائز اهمیت است.

حال ببینید کوچکترین اشتباه در انجام محاسبات لگاریتمی، چگونه منجر به عدم تشخیص درست اندازهٔ ذرات، اشتباه در ترسیم منحنی مربوطه، تشخیص نادرست نوع خاک منطقهٔ مورد بررسی، از بین رفتن سرمایهٔ ملی کشور و مهمتر از همه به خطر افتادن جان هزاران انسان می‌شود!

غالباً دیده شده است که دانشمندان بزرگ آثار مهم و اصلی خود را مابین بیست و پنج سالگی و سی و پنج سالگی به‌وجود می‌آورند. اما گالیله یک استثنای بزرگ این قانون بود، زیرا وی بعد از هفتاد سالگی توانست دینامیک را ایجاد کند و آن علمی است که از موضوع ایجاد حرکت به وسیلهٔ نیرو گفت و گو می‌کند.

تاریخ علوم ـ پی‌یر روسو



مقاله‌های کوتاه از مجلّه‌های ریاضی معتبر جهان (۲۴)

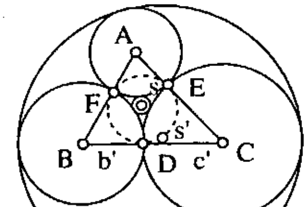
تحقیق در هندسه مثلث به کمک کامپیوتر

(قسمت دوم)

● ترجمه : غلامرضا یاسی پور

Adrion Oldknow
The mathematical gazette
Volume 79 Number 485 July 1995

با این سابقه، به بررسی بیشتر مسأله‌ای بپردازیم که توسط **فردریک سُدی** «Frederick Soddy»، شیمیدان برندهٔ جایزهٔ نوبل، به آن پرداخته شد و در ۱۹۳۶ به چاپ رسید. ممکن است در نظر اوّل آشکار نباشد؛ اما در مورد هر مثلث ABC مجموعهٔ یکتایی از سه دایره، به مراکز A، B و C موجود است که مماس برونی یکدیگرند. (سه مقطع مخروطی را به تصور آورید.) این دایره‌ها در نقطه‌های D، E و F واقع بر BC، CA و AB بر یکدیگر مماس برونیند که در آنها ID عمود بر BC و غیره است (شکل ۴).



شکل ۴

DEF را می‌توان *مثلث تماس* «Contact Triangle» مربوط به دایرهٔ محاطی O_I نامید و ABC *مثلث مماس* «Tangent Triangle» متناظر است. به این ترتیب، ID مماس مشترک دایره‌های O_B و O_C است.

فرض می‌کنیم a'، b' و c' شعاعهای سه‌تایی سُدی «Soddy Triplet» شامل دایره‌های O_A، O_B و O_C باشد. در این صورت $a = b' + c'$ و غیره، و پیرامون

$$2S = a + b + c = 2(a' + b' + c')$$

بنابراین $a' = S - a$ و غیره، در نتیجه :

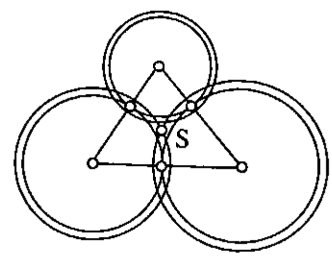
$$\Delta^2 = Sa'b'c' \quad \text{و} \quad S = a' + b' + c'$$

به این ترتیب، سه‌تایی سُدی به دایرهٔ کوچکی مماس می‌شود که در رخنه‌ای بین آنها قرار دارد. این دایره، *دایرهٔ درونی سُدی* «Inner Soddy Circle» O_S با شعاع t است.

سه‌تایی مزبور، توسط دایرهٔ بزرگی که مماس برونی آنهاست، احاطه می‌شود. این دایره، *دایرهٔ برونی سُدی* «Outer Soddy Circle» O_S با شعاع t' است. سُدی کشف مربوط به رابطهٔ بین شعاعهای

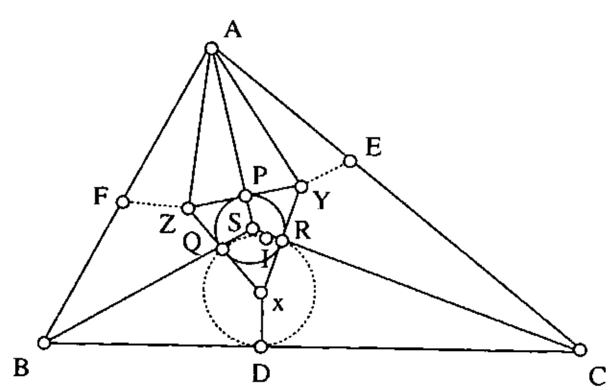
r، a'، b'، c'، t و t' را در شعر [10] «The Kiss Precise» به چاپ رساند. نیاز به تذکر است که این مطلب، پیش از این، توسط **فیلیپ بی‌کرافت** «Philip Beecroft» در ۱۸۴۲، و **رنه دکارت** «René Descartes» در ۱۶۴۳ پیدا شده بود! در هرحال، ترسیم متعارف مراکز سُدی، یا S و S'، کاری پرزحمت و شامل شماری از انعکاسهای دایره‌ها و خطوط در دایره‌های **آپولونیوس** است.

رهیافت ساده‌تر به مسألهٔ مشخص کردن جای S، یافتن مقدار t ای است که توسط آن باید a'، b' و c'، شعاعهای سه‌تایی سُدی، برای گذار دادن آنها از نقطه‌ای منفرد، افزایش یابند (شکل ۵). این نقطه، نقطهٔ S و این مقدار t شعاع O_S خواهد بود.



شکل ۵

امتحان این روش با استفاده از شکلهای متعدد، برای موقع S، تقریبی به قدر کافی مناسب، برای زدن حدسهای زیر به‌دست می‌دهد. فرض می‌کنیم O_S به O_A در P مماس باشد و غیره، و مماسهای مشترک در Q، R در X تلاقی کنند ـ بنابراین، PQR مثلث تماس و XYZ مثلث مماس مربوط به O_S است (شکل ۶).



شکل ۶

حدسها

(الف) X بر ID واقع است و غیره.

(ب) YZ از A به زاویهٔ α دیده می شود که نصف زاویهٔ BAC است و غیره.

(ج) X خط ID را به نسبت

$$IX : XD = \tan\beta + \tan\gamma : 1 = aa' : D$$

تقسیم می‌کند و غیره.

اثباتها

(الف) دایره‌های O_S، O_B و O_C تشکیل یک سه‌تایی مماس‌شونده می‌دهند و بنابراین، مماسهای مشترکشان در نقاط تماس D، Q و R جمیعاً در X، مرکز دایرهٔ محاطی درونی SBC تلاقی می‌کنند. در نتیجه XD بر BC عمود است و X بر ID قرار دارد.

(ب) Y بر نیمساز $C\hat{A}S$، Z بر نیمساز $B\hat{A}S$ قرار دارد، در نتیجه $B\hat{A}Z = Z\hat{A}S$ و $S\hat{A}Y = Y\hat{A}C$.

$$B\hat{A}C = B\hat{A}Z + Z\hat{A}S + S\hat{A}Y + Y\hat{A}C$$
$$= 2(Z\hat{A}S + S\hat{A}Y) = 2Z\hat{A}Y = 2\alpha$$

و غیره.

(ج) فرض می‌کنیم r_A شعاع دایرهٔ محاطی درونی مثلث SBC باشد، بنابراین:

$$IX : XD = r - r_A : r_A$$

اما $r = b\tan\beta$ و غیره، و محاسبه‌های مثلثاتی پیچیده رابطهٔ

$$r = r_A.(1 + \cos\alpha\sec\beta\sec\gamma)$$

و غیره را به دست می‌دهد. از این روابط، و $r = \Delta/S$، $\Delta^2 = Sa'b'c'$، نتیجه‌های مورد نظر به‌دست می‌آیند.

به این ترتیب، تولید ترسیم مستقیم نقطهٔ X، با استفاده از رسم خطی گذرنده از I به موازات BC و مشخص کردن طولهایی برابر $r\tan\beta$، $r\tan\gamma$ و $r.IX' = r\tan\gamma$،

$$IX'' = X'X''' = r\tan\beta \;,\; X'''X'''' = ID = r$$

ممکن است، و بنابراین، XX'' موازی DX'''' است.

هنگامی که X پیدا شد، می‌توان Y و Z را به همان ترتیب، یا با دَوَران X حول B، به اندازهٔ β و حول C به اندازهٔ γ ترسیم کرد. در این صورت، S، به عنوان مرکز دایرهٔ محاطی درونی XYZ رسم می‌شود و P، Q و R تقاطعهای SA با YZ و غیره‌اند.

بعضی محاسبه‌های نمادین با *درایو* «Drive» رابطهٔ بسیار ظریف

$$r = t(2 + \tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma)$$

را ایجاد می‌کند که فرمول دکارت را برای t، شعاع دایرهٔ درونی سُدی، یعنی:

$$\frac{1}{t} = \frac{2}{r} + \frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} + \frac{1}{c'}$$

را به دست می‌دهد.

زمانی که نقاط X، Y، Z، S، P، Q و R در نرم‌افزار هندسی بدقت ترسیم شوند، تغییر دادن مقیاس بسادگی امکان‌پذیر است و جست‌وجوی مفصّلی را آغاز کنیم که ملاحظهٔ آن با ترسیمهای دقیق قراردادی عملی نیست. با استفاده از این روش، قادر به ارائهٔ حدس زیر در کنفرانس ایستر ۱۹۹۴ انجمن ریاضی شدم.

خطوط AX، BY و CZ در نقطهٔ O‌ای منطبقند که بر خط IS قرار دارد.

دو مثلث ABC و XYZ ی را که دارای این ویژگی هستند که خطوط واصل رأسهای متناظرشان از نقطهٔ O‌ای می‌گذرد دو مثلث در پرسپکتیو *با مرکز O* می‌گویند. این ملاحظهٔ به ظاهر بی‌اهمیت، در دورهٔ کوتاهی از زمان، به یک رشته از کشفیات مرتبط با هم می‌انجامد. این نتایج را تنها همراه با اطلاعاتی کافی مطرح خواهیم کرد تا خوانندهٔ علاقه‌مند، ترسیمها را خود انجام دهد و/ یا رابطه‌های جبری مورد بحث را خود تأیید کند.

نسبتهای

$$d = \Delta/aa' \ , \ e = \Delta/bb' \ , \ f = \Delta/cc'$$

در مطالبی که بعد از این می‌آیند، نقشی مهم دارند و ما آنها را *وزنهای رأسی* «Vertex Weights» A، B و C می‌نامیم.

محاسبه‌های مثلثاتی ساده انتخابهای سه ـ خطی «Trilinear» زیر را برای نقاط D، E، F، X، Y، Z، S و O برحسب مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث، یعنی، $I(1,1,1)$ به‌دست می‌دهند:

$$D = (0, e, f) \ , \ X(1, 1+2e, 1+2f) = 1 + 2D \ ,$$

$$P = (1+2d \ , \ 1+e \ , \ 1+f)$$

و غیره.

$$S = (1+d, 1+e, 1+f) \ , \ O = (1+2d, 1+2e, 1+2f)$$

می‌دانیم مثلثهای ABC به مرکز G، **نقطهٔ ژرگون** «Gergonne Point» در پرسپکتیوند. AD، BE و CF در نقطهٔ $G = (d, e, f)$ تقاطع می‌کنند.

خواننده می‌تواند چنین اظهاراتی را بسادگی، برای همخطی مثلاً ADG با قرار دادن در دترمینان (۳) آزمایش کند:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0$$

اکنون، به همین ترتیب و بسادگی، می‌توان نشان داد که چهار نقطهٔ I، S، O و G همخطند.

در سه خطیهای دقیق، I دارای صورت $r(1,1,1)$ و G دارای صورت $h(d, e, f)$ است که در آن:

$$\frac{2}{h} = \frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} + \frac{1}{c'} \qquad (7)$$

و بنابراین هر نقطهٔ K ی واقع بر خط IG، دارای صورت سه‌خطی دقیق

$$(1-\lambda)r(1,1,1) + \lambda\, h(d, e, f)$$

به ازای مقداری از پارامتر λ، و در نتیجه انتخاب:

$$K = (1,1,1) + k(d, e, f) = 1 + kG$$

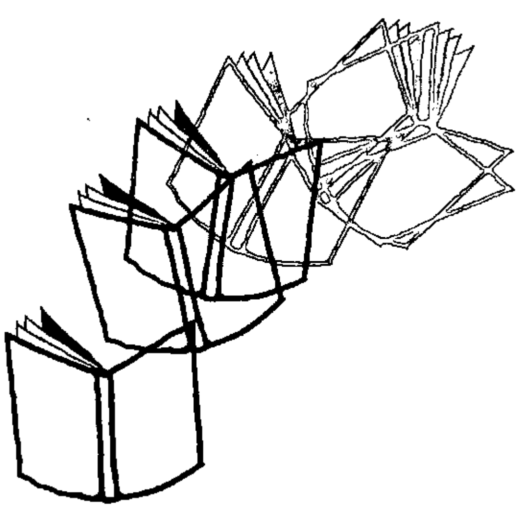
به ازای مقداری از پارامتر تبدیل شدهٔ k است (که در آن، k به ازای نقطهٔ G، مقدار ∞ را اختیار می‌کند). در نتیجه:

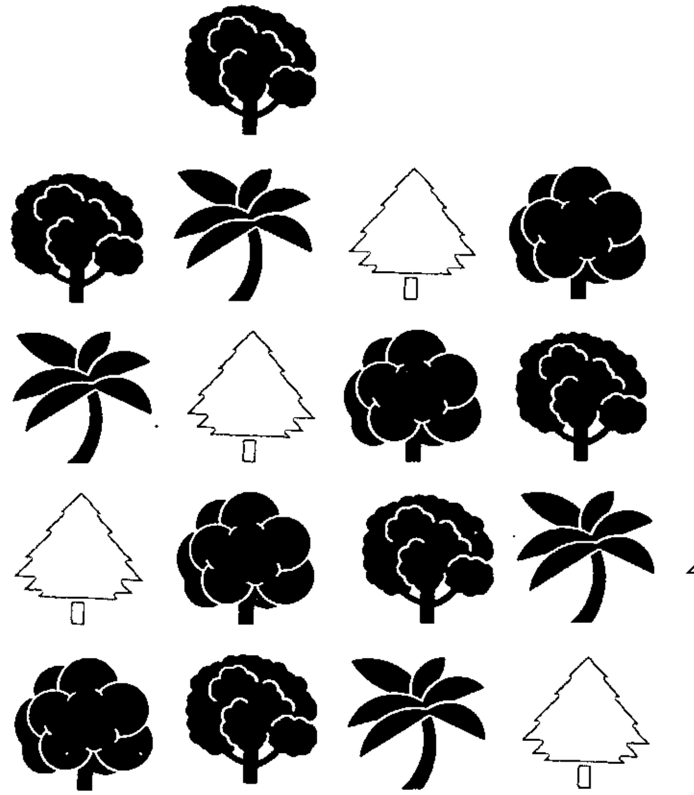
$$S = I + G$$

و:

$$O = I + 2G$$

و همخط بودن واضح است.





ریاضیات ترکیباتی

● ترجمه: یدا... ایلخانی‌پور
از کتاب مبانی ریاضیات گسسته
● مؤلف: جوزف استرایت وپلیمنی

اگرچه در آغاز ریاضیات ترکیباتی، عاملی برای تفریح در حلّ جدولها و بازیها بود، اما در حال حاضر، یکی از میدانهای فعال تحقیق در ریاضی به حساب می‌آید. به‌علاوه کاربردهای مهمی در زمینه‌هایی نظیر کامپیوتر، تحقیق در عملیات، آمار و علوم اجتماعی و نظری دارد.

با اصل جمع و اصل شمول و عدم شمول آشنایی دارید. اینها قوانین ترکیباتی هستند، که به‌وسیلهٔ آن، تعداد عضوها در اجتماع مجموعه‌ها شمرده می‌شود. ریاضیات ترکیباتی، تا حدّ زیادی به تعیین ترتیب عضوهای یک مجموعه تحت یک شرایط خاص مربوط می‌شود. نوعاً عضوها متعلق به مجموعه‌هایی هستند که شمارا متناهی یا شمارا نامتناهی باشند. و به این ترتیب، ریاضیات ترکیباتی، به محدودهٔ ریاضیات گسسته مربوط می‌شود. زمانی که از یک نوع ترتیب خاص صحبت می‌کنیم، معمولاً چندین سؤال پیش می‌آید :

۱ـ وجود : آیا چنین ترتیبی وجود دارد؟

۲ـ شمارش و طبقه‌بندی : از این نوع خاص ترتیب، چه تعداد وجود دارد؟ آیا به یک طریق خاص می‌توان آنها را طبقه‌بندی کرد؟

۳ـ الگوریتمها : آیا روش معینی برای تهیهٔ این ترتیبها وجود دارد؟

علاوه‌بر سؤالهای فوق، می‌توان این سؤال را نیز مطرح کرد که آیا امکان یک قانون کلی وجود دارد؟ و به‌عبارت دیگر، آیا مسألهٔ قابل توجهی وجود دارد که به سؤالهای فوق مربوط باشد؟

مثالهای زیر، بعضی از نظریه‌های بالا را روشن می‌کند.

مثال: هفت فروشگاه عمومی، مدارک بسیار سرّی خود را در یک گاوصندوق نگه‌داری می‌کنند. آنها می‌خواهند تنها زمانی بتوانند در گاوصندوق را باز کنند، که اکثریت اعضا حاضر باشند. بنابراین، آنها پیشنهاد می‌کنند که در گاوصندوق را با تعدادی از قفلهای متفاوت ببندند و هر فروشگاه کلیدهایی برای قفلهای بخصوصی داشته باشد. با این امکان که دو نفر از آنان ممکن است کلید یک قفل را داشته باشند. حداّقل، چه تعداد قفل باید وجود داشته باشد؟ و چه تعداد کلید برای هر فروشگاه وجود دارد؟

حل: فرض کنید $G_1, G_2, \cdots, G_7$ نشان‌دهندهٔ فروشگاه‌ها باشند. چون فقط با اکثریت افراد، فروشگاه‌ها می‌توانند گاوصندوق را باز کنند. غیرممکن است که با حضور سه نفر، گاوصندوق باز شود. بنابراین، برای هر ۳ فروشگاه فرضی، یک قفل وجود دارد، که هیچ‌کدام کلید آن‌را ندارند. آیا می‌توان دو زیرمجموعهٔ متفاوت از سه فروشگاه که هیچ‌کدام کلید یک نوع قفل را ندارند، در نظر گرفت؟ برای مثال، فرض کنید که G_1, G_2, G_3 و G_2, G_3, G_4 کلید قفل مشابه را نداشته باشند. پس G_1, G_2, G_3, G_4 کلید قفل

را ندارند. به شرط مسأله بازمی گردیم که بیشتر افراد می توانند گاوصندوق را باز کنند. بنابراین، باید حداقل به تعداد قفلهای متعددی که وجود دارد، راه‌هایی برای انتخاب یک زیرمجموعهٔ سه عضوی از هفت فروشگاه وجود داشته باشد. با توجه به تعداد کلیدهایی که هر فروشگاه باید داشته باشد، توجه خود را روی یکی از فروشگاه‌ها به نام G_7 معطوف می کنیم. اگر G_7 را به زیرمجموعهٔ S که شامل ۳ فروشگاه است، اضافه کنیم، مجموعهٔ چهار عضوی قادر خواهد بود که گاوصندوق را باز کند. به هر حال، همان‌طوری که اشاره کردیم، یک قفل وجود دارد که اعضای S کلید آن‌را ندارند. پس G_7 باید کلید این قفل را داشته باشد. همچنین، چون هردو زیرمجموعهٔ مختلف از سه فروشگاه، فاقد یک کلیدازیک نوع قفل هستند، G_7 حداقل باید کلیدهای زیادی داشته باشد. همان‌طوری که برای انتخاب یک زیرمجموعهٔ سه عضوی از مجموعهٔ شش عضوی راه‌های زیادی وجود دارد.

این مسألهٔ کلّی، تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی از یک مجموعهٔ n عضوی را مشخص می کند، که در همین فصل به آن می پردازیم.

مثال: در فصل ۵ جایگشت یک مجموعه به عنوان یک تابع یک به یک و پوشا روی خودش معرفی شد. بخصوص اگر A یک مجموعه متناهی باشد، می گوییم $|A| = n$ است. پس می بینیم که یک جایگشت A می تواند به‌عنوان ترتیبی از عضوهای انتخابی A یا nتایی مرتبی که دارای مختصات عضوهای A هستند، باشد. نشان دادیم که !n تا جایگشت از یک مجموعه با n عضو وجود دارد. برای مثال فرض کنید $A = \{۱,۲,۳\}$ باشد ؛ پس :

$$(۱,۲,۳),(۱,۳,۲),(۲,۳,۱),(۲,۱,۳),(۳,۱,۲),(۳,۲,۱)$$

یعنی $۶ = !۳$ جایگشت از اعضای A وجود دارد.

به‌طورکلّی، برای مجموعهٔ متناهی و اختیاری A آیا یک روش مشخصی وجود دارد که به‌وسیلهٔ آن، همهٔ جایگشتهای A به‌دست آید و این سؤال در بخش بعدی مطرح می‌شود.

در فصل (۸) دوباره به جایگشت از نقطه نظر جبری می پردازیم.

مثال: به چند روش می توان ۳۷ شیرینی را بین ۵ نفر تقسیم کرد؟ اگر بچه‌ها را با c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 نشان دهیم فرض کنید x_i تعدادی از شیرینیها باشد که c_i دریافت می کند. به ازای $i = ۱,۲,۳,۴,۵$ می بینیم که x_i یک عدد صحیح غیرمنفی است و،

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_5 = ۳۷$$

در حالت کلّی، مسألهٔ تعیین تعداد جوابهای معادلهٔ

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$$

می باشد ؛ درحالی که x_i عدد صحیح غیرمنفی است. به ازای $i = ۱,۲,\cdots,n$ و $m > ۰$ است.

تمرین:

۱ـ تعداد جایگشتهای هر مجموعه را بنویسید.

(a)$\{۱\}$ (b)$\{۱,۲\}$ (c)$\{۱,۲,۳\}$ (d)$\{۱,۲,۳,۴\}$

۲ـ فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت و $A = \{۱,۲,\cdots,n\}$ باشد. ترتیب «$\leq$» روی جایگشتهای A را به‌صورت زیر تعریف می کنیم : برای دو جایگشت $\pi_1 = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ و $\pi_2 = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ از A تعریف می کنیم : $\pi_1 \leq \pi_2$ به‌شرطی که یا $\pi_1 = \pi_2$ و یا $a_1 < b_1$ یا $a_1 = b_1$ ، ؛ $a_2 = b_2, \ldots, a_{i-1} = b_{i-1}$ و $a_i < b_i$ برای بعضی مقادیر i که $۱ < i \leq n$ ، باشد. این ترتیب، به ترتیب الفبایی معروف است.

الف) نشان دهید که رابطهٔ $\leq$ یک ترتیب کلی از مجموعهٔ جایگشتهای A است.

ب) جایگشتهای مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,۴\}$ را به‌صورت ترتیب الفبایی بنویسید.

ج) به ازای $n = ۷$ ، کدام جایگشت، بلافاصله پس از $(۱,۲,۳,۴,۶,۷,۵)$ می‌آید؟ (به ترتیب الفبایی)

د) به‌ازای $n = ۷$ ، کدام جایگشت بلافاصله پس از $(۱,۶,۲,۷,۵,۴,۳)$ می‌آید؟ (به ترتیب الفبایی)

۳ـ زیرمجموعه های سه عضوی هریک از مجموعه‌های زیر را بنویسید :

a) $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ b) $\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$

۴ـ n و A را در تمرین ۲ درنظر بگیرید و فرض کنید k عدد صحیح باشد. درحالی که $۱ \leq k \leq n$ باشد، ترتیب $\leq$ را نیز ترتیب الفبایی روی زیرمجموعه های K عضوی A می‌نامیم. و ترتیب آن به‌صورت زیر است. فرض کنید :

$$S_1 = \{a_1, a_2, \cdots, a_k\} \quad , \quad S_2 = \{b_1, b_2, \cdots, b_k\}$$

دو زیرمجموعهٔ k عضوی از A باشند و فرض کنید که عضوهای آن طوری نوشته شده باشد. که : $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ و

$b_1 < b_2 < \cdots < b_k$ باشد. پس $S_1 \le S_2$ است، به شرط آن‌که یا $S_1 = S_2$ باشد یا $a_1 < b_1$ و یا $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \cdots, a_{i-1} = b_{i-1}$ باشد و $a_i < b_i$ به ازای i و $1 < i \le k$.

الف) نشان دهید که $\le$ یک ترتیب کلی از زیرمجموعهٔ k عضوی A است.

ب) فهرست زیرمجموعه های سه عضوی $\{1,2,3,4,5,6\}$ را به ترتیب الفبایی بنویسید.

ج) به ازای $n = 7$ کدام زیرمجموعهٔ چهارعضوی، بلافاصله پس از $\{1,3,4,5\}$ می‌آید؟ (به ترتیب الفبایی)

د) به ازای $n = 7$ کدام زیرمجموعهٔ چهارعضوی، بلافاصله پس از $\{2,4,6,7\}$ نوشته می‌شود؟

۵ـ n و A را درتمرینهای ۲ و ۴ در نظر بگیرید. فرض کنید تعریف $\le$ در تمرین ۴ «ترتیب الفبایی» را برای همهٔ زیرمجموعه‌های A به نام $P(A)$ تعمیم دهیم. نخست می‌دانیم که زیرمجموعهٔ تهی، قبل از زیرمجموعهٔ ناتهی می‌آید. پس به ازای دو زیرمجموعهٔ ناتهی A و B که $A \ne B$. فرض کنید x کوچکترین عضو تفاضل متقارن $(A-B)\cup(B-A)$ باشد. اگر $x \in A$ باشد، پس $A < B$ ودرغیراین صورت $B < A$ است. (به‌ازای دو زیرمجموعهٔ A و B و نماد $A \le B$ بدین معناست که یا $A = B$ و یا $A < B$).

الف) نشان دهید که $\le$ یک ترتیب کلی از $P(A)$ است.

ب) فهرست زیرمجموعه های $\{1,2,3,4\}$ را به‌ترتیب الفبایی بنویسید.

ج) به ازای $n = 7$ کدام زیرمجموعه، بلافاصله پس از $\{1,3,4,5\}$ در ترتیب الفبایی می‌آید؟

د) به ازای $n = 7$ کدام زیرمجموعه، بلافاصله پس از $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ می‌آید؟

هـ) به ازای $n = 7$، کدام زیرمجموعه بلافاصله پس از $\{1,7\}$ می‌آید؟

روشهای بنیادی شمارش

با اصول جمع و ضرب آشنا هستید، و هرکدام از آنها را برای مجموعه‌های متناهی A و B به‌صورت زیر داریم:

اصل جمع: اگر A و B از هم جدا باشند، آن گاه:

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

اصل ضرب:
$$|A \times B| = |A| \times |B|$$

در این‌جا هرکدام را به‌طورکلی ثابت می‌کنیم و دستورالعمل‌های بیشتری را ارائه می‌دهیم.

قضیه اصل جمع

اگر $A_1, A_2, \cdots, A_n$ مجموعه‌های متناهی و دو به دو از هم جدا باشند، آن‌گاه:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$$

اثبات: با استقرا روی n و فرض این‌که S مجموعهٔ اعداد صحیح مثبتی باشدکه گزارهٔ فوق درآن درست باشد. واضح است که $1 \in S$ و همان‌طورکه در بخش ۴ـ۲ نشان دادیم، $2 \in S$ است. فرض کنید به ازای عدد صحیح اختیاری $k \ge 2$ ، $k \in S$ باشد؛ یعنی اصل جمع به‌ازای k مجموعهٔ متناهی صادق باشد. برای این‌که نشان دهیم $k+1 \in S$ است، فرض کنید $A_1, A_2, \cdots, A_{k+1}$ ، $k+1$ مجموعهٔ متناهی و از هم جدا باشند، پس $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$ و A_{k+1} مجموعه‌های متناهی و از هم جدا هستند و

$$\begin{aligned}
&|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \cup A_{k+1}| \\
&= |(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) \cup A_{k+1}| \\
&= |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| + |A_{k+1}| \\
&= |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_k| + |A_{k+1}|
\end{aligned}$$

دردومین تساوی $2 \in S$ است؛ درحالی که در سوّمین تساوی، از فرض استقرا استفاده شده است و به همین ترتیب، $k+1 \in S$ است و خواهیم داشت $S = N$.

مثال: اگر یک جفت تاس را با هم پرتاب کنیم، به چند طریق ممکن است مجموع دو تاس ۷ یا ۱۰ باشد؟

حل. فرض کنید نتیجه پرتاب تاسها جفتهای مرتّب (r,s) باشد. درحالی که r نشان‌دهندهٔ روشدن اعداد اوّلین تاس و s دومین تاس باشد، فرض کنید A مجموعهٔ جفت‌های مرتّب مجموع ۷ و

B مجموعهٔ جفتهای مرتب مجموع ۱۰ باشد ؛ پس :

$$A=\{(۱,۶),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۳),(۵,۲),(۶,۱)\}$$

$$B=\{(۴,۶),(۵,۵),(۶,۴)\}$$

بنابراین $A\cup B$ مجموعهٔ جفتهای مرتّب با نتیجه ۷ یا ۱۰ است و جواب مسأله $|A\cup B|$ است. چون A و B مجموعه‌های جدا از هم هستند، داریم :

$$|A\cup B|=|A|+|B|=۶+۳=۹$$

مثال: اگر چهار بار متوالی یک سکّه را بیندازیم، به چند طریق ممکن است یک، دو یا سه بار رو بیاید؟

حل. همان‌طوری که می‌دانیم، از چهار بار پرتاب سکّه، هربار ممکن است یک رو (H) یا یک پشت (T) بیاید. (برای مثال (HTHH) یک امکان است). فرض کنید E_k مجموعه‌ای از آمدن دقیقاً k دو باشد ؛ درحالی که $۰\le k\le ۴$ است، بنابراین

$$E_۱=\{HTTT, THTT, TTHT, TTTH\}$$

$$E_۲=\{HHTT, HTHT, HTTH, THHT, THTH, TTHH\}$$

$$E_۳=\{HHHT, HHTH, HTHH, THHH\}$$

پس $E_۱\cup E_۲\cup E_۳$ مجموعه‌ای از حالتهای آمدن یک، دو یا سه رو است و جواب مسأله $|E_۱\cup E_۲\cup E_۳|$ است، چون $E_۱$ ، $E_۲$ و $E_۳$ مجموعه‌های از هم جدا هستند، داریم :

$$|E_۱\cup E_۲\cup E_۳|=|E_۱|+|E_۲|+|E_۳|$$
$$=۴+۶+۴$$
$$=۱۴$$

قضیه اصل ضرب

اگر $A_۱, A_۲, \cdots, A_n$ مجموعه‌های متناهی باشند. آن‌گاه

$$|A_۱\times A_۲\times\cdots\times A_n|=|A_۱|\times|A_۲|\times\cdots\times|A_n|$$

اثبات: با استفاده از اصل استقرا روی n و فرض این‌که S مجموعه‌ای از اعداد صحیح مثبت است که نتیجه صادق است، داریم $۱,۲\in S$. فرض کنید به ازای عضو اختیاری $k\ge ۲$ ، $k\in S$ باشد. یعنی قضیه به ازای هر k مجموعهٔ متناهی صادق باشد.

برای این‌که نشان دهیم $k+۱\in S$ است، فرض کنید : $A_۱, A_۲, \cdots, A_k, A_{k+۱}$ مجموعه‌های متناهی باشند. تابع زیر را در نظر بگیرید.

$$f:(A_۱\times A_۲\times\cdots\times A_k)\times A_{k+۱}$$
$$\to A_۱\times A_۲\times\cdots\times A_k\times A_{k+۱}$$

با ضابطهٔ :

$$f(((a_۱,a_۲,\cdots,a_k),a_{k+۱}))=(a_۱,a_۲,\cdots,a_k,a_{k+۱})$$

این تابع یک به یک و پوشاست (تمرین ۱۴ را ببینید) بنابراین، طبق قضیهٔ فرعی ۱۲ـ۵ داریم :

$$|(A_۱\times A_۲\times\cdots\times A_k)\times A_{k+۱}|$$
$$=|A_۱\times A_۲\times\cdots\times A_k\times A_{k+۱}|$$

و چون $۲\in S$ و $k\in S$ است، داریم :

$$|(A_۱\times A_۲\times\cdots\times A_k)\times A_{k+۱}|$$
$$=|A_۱\times A_۲\times\cdots\times A_k|\times|A_{k+۱}|$$
$$=|A_۱|\times|A_۲|\times\cdots\times|A_k|\times|A_{k+۱}|$$

بنابراین نتیجه می گیریم که $k+۱\in S$ است. و درنتیجه $S=N$ و اثبات کامل است.

برای درک بیشتر، اصل ضرب رابه صورت زیر نیز می توان بیان کرد.

اصل ضرب: فرض کنید که برای مرتّب کردن n موضوع انتخابی :

۱ـ اوّلین موضوع بتواند با $m_۱$ روش انتخاب شود.

۲ـ برای هرکدام از انتخابهای اوّلین موضوع، موضوع دوم بتواند در $m_۲$ روش انتخاب شود.

۳ـ به ازای اوّلین انتخابهای دو موضوع، موضوع سوّم بتواند با $m_۳$ روش انتخاب شود.

⋮ ⋮ ⋮ ⋮

nـ به ازای انتخاب اوّلین $n-۱$ موضوع، nامین موضوع در m_n روش انتخاب شود.

آن‌گاه n موضوع می‌تواند با هم به $m_۱\times m_۲\times\cdots\times m_n$ روش انتخاب شود.

مثال: به چند روش می‌توان ۴ کارت را به‌طور تصادفی از بین ۵۲ کارت انتخاب کرد ؛ به‌شرطی که :

الف) کارت انتخابی به بقیه کارتها برگردد؟

ب) بدون اضافه کردن کارت انتخاب شده به بقیهٔ کارتها؟

حل الف) برای انتخاب اوّلین کارت، ۵۲ انتخاب وجود دارد ؛ چون اوّلین کارت که انتخاب شود، پیش از انتخاب دوم به کارتها اضافه می‌شود. باز هم برای دومین کارت ۵۲ انتخاب وجود دارد و به همین ترتیب، برای کارتهای سوّم و چهارم. بنابراین، با استفاده از اصل ضرب ترتیبی از چهار کارت انتخاب شده، به‌صورت زیر است :

تعداد انتخابها : $52 \times 52 \times 52 \times 52 = 52^4$

حل ب) برای انتخاب کارت اوّل، ۵۲ انتخاب وجود دارد، و چون اوّلین کارت به بقیهٔ کارتها اضافه نمی‌شود، برای انتخاب دومین کارت ۵۱ انتخاب، سوّمین ۵۰ و چهارمین ۴۹ انتخاب وجود دارد. بنابراین، با استفاده از اصل ضرب داریم :

تعداد راه‌ها : $52 \times 51 \times 50 \times 49$

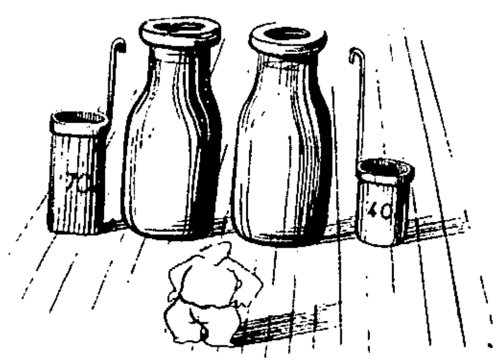
مثال: چه تعداد عدد صحیح n وجود دارد ؛ به‌طوری که $5000 < n < 10000$ و رقمهای n مجزّا باشند؟

حل. اگر n عدد صحیح باشد، آن‌گاه n شامل ۴ رقم است و رقم هزارگان آن باید یکی از اعداد ۵,۶,۷,۸,۹ باشد. بنابراین، برای رقم هزارم ۵ حالت انتخاب وجود دارد. پس از انتخاب رقم هزارم، برای انتخاب رقم صدگان ۹ راه وجود دارد. (دقّت کنید که عدد صفر، می‌تواند برای این رقم استفاده شود).

به همین طریق، برای انتخاب رقم دهگان، هشت طریق و برای انتخاب رقم یکان، هفت طریق وجود دارد. بنابراین، طبق اصل ضرب $5 \times 9 \times 8 \times 7$ راه برای انتخاب n وجود دارد.

یکی دیگر از راه‌های اصلی و مهم شمارش در ترکیبیات، اصل لانه کبوتر است. درک این اصل بسیار آسان است. در واقع به‌نظر می رسد که اثبات آن برای دانش‌آموز بسیار آسان باشد (اگر این‌طور است، سعی کنید آن‌را ثابت کنید و برای این کار، از برهان «خلف» استفاده کنید). در شمارهٔ آینده به این اصل خواهیم پرداخت.

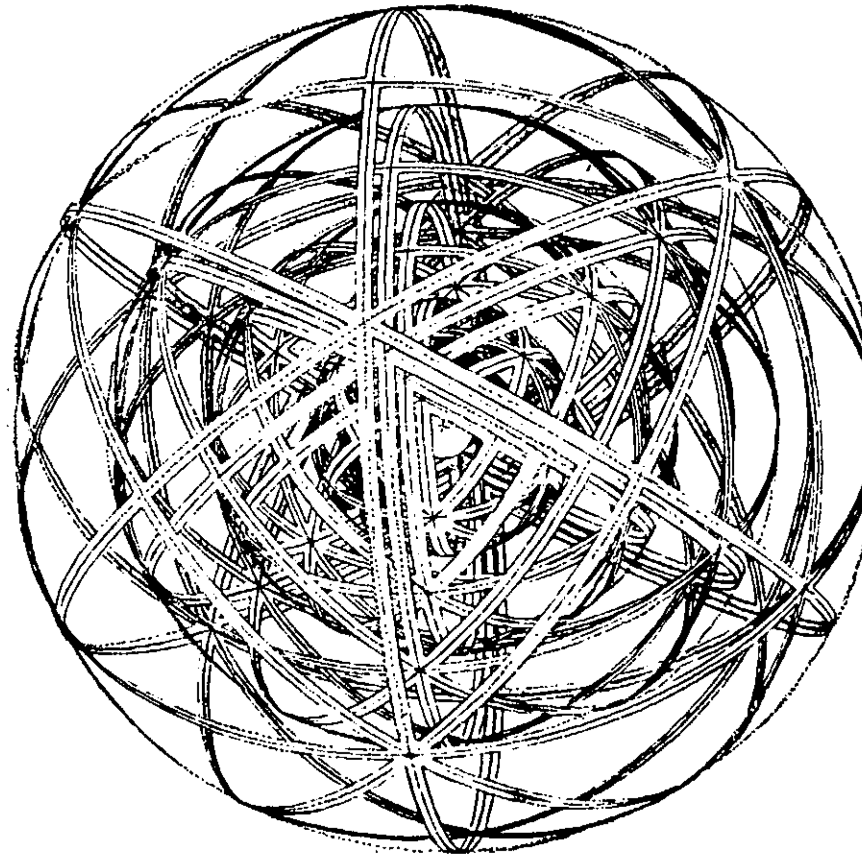
تفریح اندیشه ۳



دو بطری یک لیتری هر دو پر از شیر هستند. مهرداد دو پیمانهٔ خالی به گنجایش ۴۰ و ۷۰ سانتی‌لیتر در اختیار دارد. او می‌خواهد بدون استفاده کردن از ظرف دیگری در هر یک از دو پیمانه، ۳۰ سانتی‌لیتر شیر داشته باشد، بدون اینکه یک قطره از شیر بیرون بریزد. مهرداد در ۶ مرحله این کار را انجام می‌دهد. چگونه؟

● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمه سیمین‌دخت ترکپور

جواب در صفحهٔ ۸۸



سهمی

● سید محمد رضا هاشمی موسوی

با رسم نمودار $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ به روش نقطه‌یابی آشنا هستید. در این جا برای یادآوری این مطلب، چند مثال می‌آوریم.

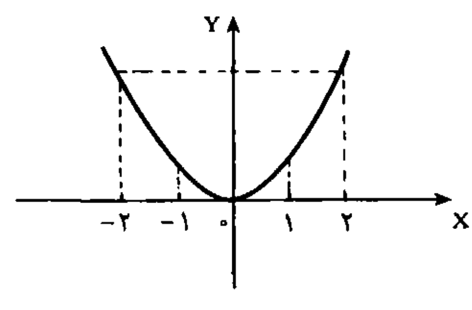
مثال (۱): نمودار $y = x^2$ را رسم کنید.

حل: برای رسم نمودار، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

x	…	−۲	−۱	۰	۱	۲	۳	…
$y = x^2$	…	۴	۱	۰	۱	۴	۹	…

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، به x مقادیر مختلفی داده شده و برای y (یا x^2) به ترتیب، مقادیری به‌دست آمده است که هر نقطه مانند: (x_1, y_1)، مشخص‌کنندهٔ یک نقطه از منحنی $y = x^2$ است. درصورتی که نقاط بیشتری را مشخص کنیم، از وصل این نقاط، نمودار منحنی مطابق شکل زیر رسم می‌شود.

(۱)



توجه: نمودار $y = x^2$، یک «سهمی» را مشخص می‌کند که نسبت به محور yها متقارن است؛ یعنی خط $x = 0$، محور تقارن نمودار است.

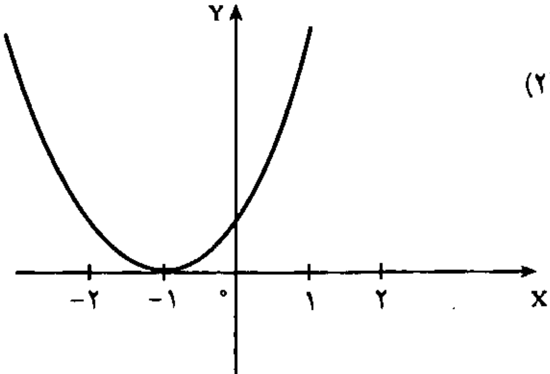
مثال (۲): نمودار $y = (x+1)^2$ را رسم کنید.

حل : برای رسم نمودار، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

x	…	−۲	−۱	۰	۱	۲	…
$y = (x+1)^2$	…	۱	۰	۱	۴	۹	…

با توجه به جدول و مقادیر مختلف دیگری که به x بدهیم، نمودار منحنی مطابق شکل زیر رسم خواهد شد.

(۲)



همان‌طور که مشاهده می‌شود، این نمودار، نظیر نمودار $y = x^۲$ است. این نوع نمودارها را «**سهمی**» می‌نامند.

در نمودار (۱) نقطهٔ $(۰,۰)$ و در نمودار (۲) نقطهٔ $(-۱,۰)$ را **رأس سهمی** می‌نامند. با توجه به نمودارها، ملاحظه می‌شود که این نمودارها به ترتیب در $(۰,۰)$ و $(-۱,۰)$ بر محور xها مماسند.

واضح است که خط $x = -۱$، محور تقارن نمودار $y = (x+۱)^۲$ است. بدیهی است که با تعیین محور تقارن سهمی $y = ax^۲ + bx + c$ و دو نقطهٔ متقارن دیگر (نسبت به محور تقارن) می‌توان نمودار را مشخص کرد.

مثال (۳): نمودار سهمی $y = x^۲ - ۴x + ۵$ را رسم کنید.

حل: برای رسم نمودار سهمی، ابتدا محور تقارن منحنی را تعیین می‌کنیم:

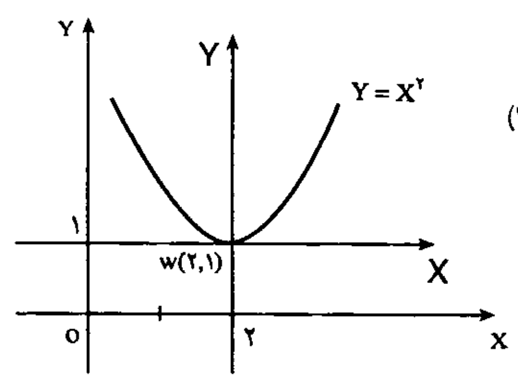
$$y = x^۲ - ۴x + ۵ = (x^۲ - ۴x + ۴) + ۱ = (x-۲)^۲ + ۱;$$

$$y - ۱ = (x-۲)^۲ \qquad (۱)$$

در این جا، با فرض $X = x - ۲$, $Y = y - ۱$:

$$Y = X^۲ \qquad (۲)$$

بنابراین، اگر مبدأ دستگاه xoy را به نقطهٔ $w(۲,۱)$ منتقل کنیم، در دستگاه جدید، کافی است منحنی $Y = X^۲$ را رسم کنیم، که بسیار ساده و مشخص است.



(۳)

با توجه به نمودار (۳)، رأس سهمی و محور تقارن آن به سادگی تعیین می‌شود:

$x = ۲$ (محور تقارن) , $S(۲,۱)$ (رأس سهمی)

در این‌جا با توجه به مثال (۳)، رسم نمودار سهمی به معادلهٔ عمومی زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

$$y = (x-\alpha)^۲ + \beta \qquad (۱)$$

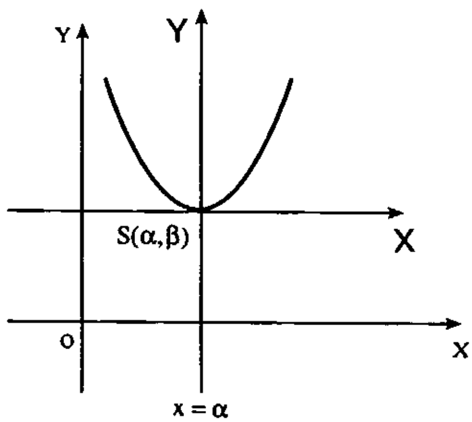
برای رسم نمودار منحنی به معادلهٔ (۱) یا $y - \beta = (x-\alpha)^۲$، فرض می‌کنیم:

$$X = x - \alpha \quad , \quad Y = y - \beta \qquad (۲)$$

بنابراین، معادلهٔ (۱) را می‌توان به‌صورت ساده‌تر نوشت:

$$Y = X^۲ \qquad (۳)$$

درنتیجه اگر مبدأ دستگاه xoy را به نقطهٔ $S(\alpha,\beta)$ منتقل کنیم، در دستگاه جدید، کافی است منحنی به معادلهٔ (۳) را که نمودار آن مشخص است، رسم کنیم.



(۴)

با توجه به نمودار (۴)، رأس سهمی و محور تقارن آن به سادگی تعیین می‌شود:

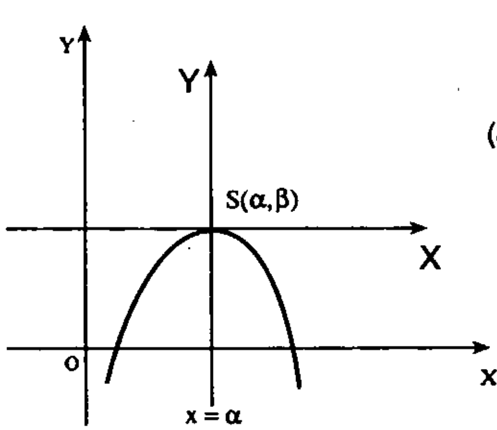
$x = \alpha$ (محور تقارن) , $S(\alpha,\beta)$ (رأس سهمی)

لازم به ذکر است که رأس سهمی (S) در نمودار (۴)، از نظر عرض، کمترین مقدار را دارد. نقطهٔ S مینیمم سهمی است.

به همین ترتیب، رسم نمودار سهمی به معادلهٔ عمومی:

$$y = -(x-\alpha)^۲ + \beta$$

به‌صورت زیر است:



(۵)

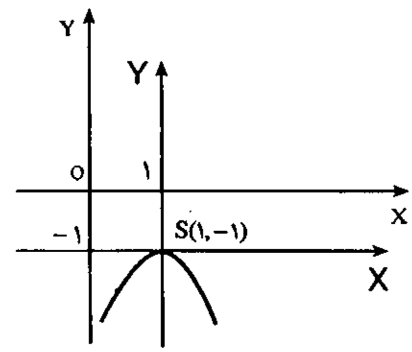
$x = \alpha$ (محور تقارن) , $S(\alpha,\beta)$ (رأس سهمی)

در نمودار (۵)، واضح است که رأس سهمی (S) از نظر عرض، بیشترین مقدار را دارد. نقطهٔ S ماکزیمم سهمی است.

مثال (۴): نمودار سهمی $y = -x^2 + 2x - 2$ را رسم کنید.

حل : ابتدا معادلهٔ سهمی را به‌صورت معادلهٔ عمومی سهمی می‌نویسیم :

$$y = -x^2 + 2x - 2 = -(x^2 - 2x + 1) - 1$$
$$= -(x-1)^2 - 1 \;;$$
$$y + 1 = -(x-1)^2 \;,\; S(1,-1)$$



حال نمودار سهمی به معادلهٔ عمومی زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم :

$$y = a(x-\alpha)^2 + \beta \qquad (1)$$

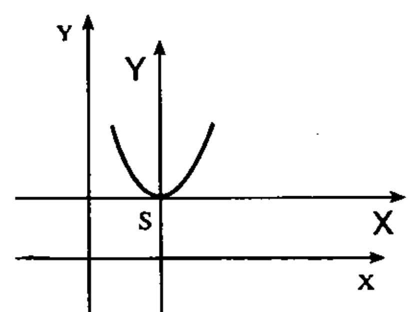
برای بررسی نمودار (۱)، دو حالت در نظر می‌گیریم :

حالت ۱) $a > 0$:

$$y = a(x-\alpha)^2 + \beta \;;\; y - \beta = a(x-\alpha)^2 \qquad (2)$$

چون $a > 0$ فرض شده است، بنابراین نقطهٔ $S(\alpha,\beta)$، مینیمم سهمی است. با فرض $X = x - \alpha$ و $Y = y - \beta$:

$$Y = aX^2 \qquad (3)$$

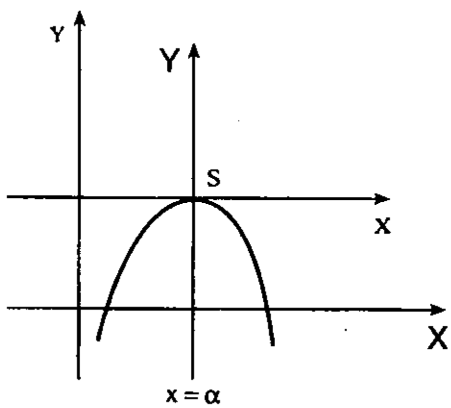


در این جا ضریب a فقط دو شاخهٔ سهمی را به هم نزدیک یا از هم دور می‌کند.

حالت ۲) $a < 0$:

چون $a < 0$ فرض شده است، بنابراین نقطهٔ $S(\alpha,\beta)$، ماکزیمم سهمی است.

نکته: برای رسم نمودار (۱) ابتدا رأس سهمی (نقطهٔ S) را تعیین می‌کنیم. سپس محور تقارن $(x = \alpha)$ آن‌را تعیین و حداقل دو نقطهٔ متقارن نسبت به این خط را معیّن می‌کنیم.



در این جا با توجه به مطالب اخیر، نمودار سهمی به معادلهٔ عمومی زیر را در حالت کلی مورد بررسی قرار می‌دهیم :

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (1)$$

برای بررسی سهمی به معادلهٔ (۱)، ابتدا معادلهٔ آن‌را به‌صورت استاندارد :

$$y - \beta = k(x-\alpha)^2 \qquad (2)$$

تبدیل می‌کنیم :

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

بنابراین :

$$y+\frac{b^2-4ac}{4a}=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \qquad (۳)$$

در این جا، به کمک معادلهٔ (۳)، رأس و محور تقارن سهمی به معادلهٔ (۱) را می‌نویسیم :

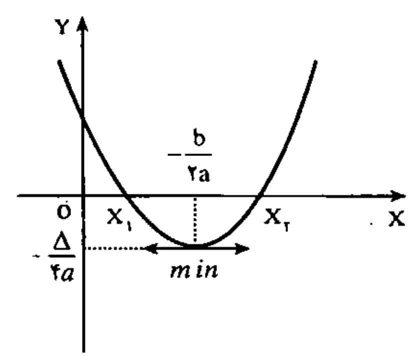
$x=-\frac{b}{2a}$ (محور تقارن)، $S\left(-\frac{b}{2a},-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$ (رأس سهمی)

برای سادگی، عبارت b^2-4ac را به Δ نشان می‌دهیم :

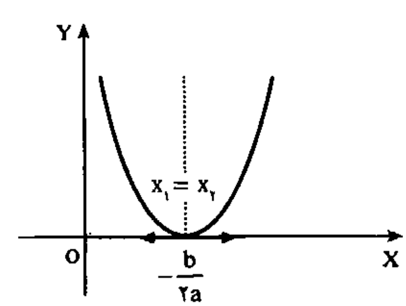
$\Delta=b^2-4ac$

حال برای رسم نمودار (۱) یا (۳)، باید شش حالت کلی ممکن را در نظر گرفت :

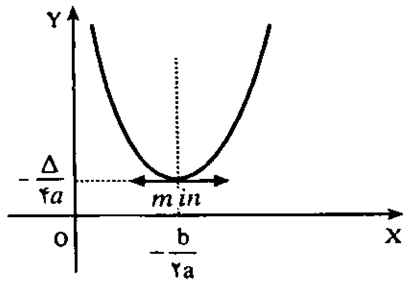
۱) $a>0$ و $\Delta>0$: در این حالت، سهمی دارای مینیمم S است و محور xها را در دو نقطهٔ x_1 و x_2 که ریشهٔ معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$, $(y=0)$ است، قطع می‌کند، و نمودار آن مانند شکل زیر است :



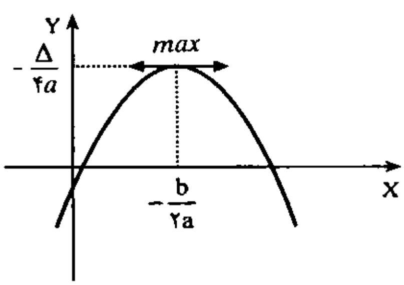
۲) $a>0$ و $\Delta=0$: در این حالت، مینیمم سهمی (S) بر محور xها مماس است و طول نقطهٔ تماس از معادلهٔ $y=0$ به‌دست می‌آید و نمودار آن مانند شکل زیر است :



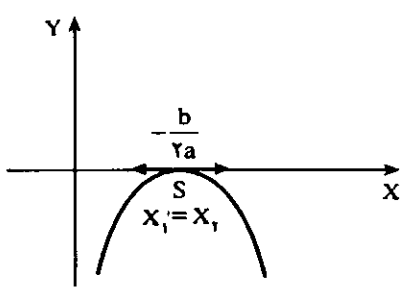
۳) $a>0$ و $\Delta<0$: در این حالت، مینیمم سهمی (S) بالای محور xها قرار دارد و معادلهٔ $y=0$ ریشهٔ حقیقی ندارد، و نمودار آن مانند شکل زیر است :



۴) $a<0$ و $\Delta>0$: در این حالت، سهمی دارای ماکزیمم S است و محور xها را در نقطهٔ x_1 و x_2 که ریشهٔ معادلهٔ $y=0$ است، قطع می‌کند، و نمودار آن مانند شکل زیر است :

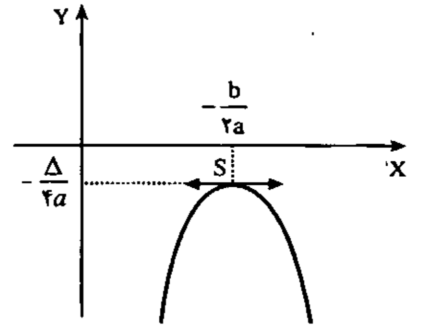


۵) $a<0$ و $\Delta=0$: در این حالت، ماکزیمم سهمی (S) برمحور xها مماس است و طول نقطهٔ تماس از معادلهٔ $y=0$ به‌دست می‌آید، و نمودار آن مانند شکل زیر است :



۶) $a<0$ و $\Delta<0$: در این حالت، ماکزیمم سهمی (S) پایین محور xها قرار دارد و معادلهٔ $y=0$ ریشهٔ حقیقی ندارد، و

نمودار آن مانند شکل زیر است :



مثال (۵): نمودار سهمی $y = x^۲ - ۳x + ۲$ را رسم کنید.

حل: چون $a = ۱ > ۰$ و $\Delta = b^۲ - ۴ac = ۹ - ۸ = ۱ > ۰$ ،
بنابراین سهمی دارای مینیمم S است :

$x = \frac{۳}{۲}$ (محور تقارن) و $S\left(\frac{۳}{۲}, -\frac{۱}{۴}\right)$; $S\left(-\frac{b}{۲a}, -\frac{\Delta}{۴a}\right)$ (رأس سهمی)

با در دست داشتن رأس سهمی و محور تقارن آن، به سادگی می‌توان نمودار سهمی مورد نظر را رسم کرد. برای دقّت بیشتر در رسم نمودار، نقاط برخورد سهمی با محورهای مختصات را تعیین می کنیم :

نقطهٔ برخورد سهمی با محور yها :

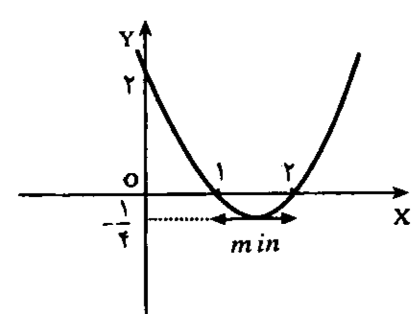
$x = ۰ : \ y = (۰)^۲ - ۳(۰) + ۲ = ۲ \ ; \ A(۰,۲)$

$y = ۰ : \ x^۲ - ۳x + ۲ = ۰ \ ; \ (x-۱)(x-۲) = ۰$

$\Rightarrow x = ۱ \ ; \ x = ۲$

نقاط برخورد سهمی با محور xها : $B(۱,۰) \ , \ C(۲,۰)$

در این‌جا با معلومات به‌دست آمده، به سادگی می توان نمودار سهمی را رسم کرد :



مثال (۶): نمودار سهمی $y = -۴x^۲ + ۸x - ۴$ را رسم کنید.

حل: چون $a = -۴ < ۰$ و $\Delta = b^۲ - ۴ac = ۶۴ - ۶۴ = ۰$ ،
بنابراین سهمی دارای ماکزیمم S است و نقطهٔ S بر محور xها مماس است ؛ یعنی معادلهٔ $y = ۰$ دارای ریشهٔ مضاعف است :

$x = ۱$ (محور تقارن) و $S(۱,۰)$; $S\left(-\frac{b}{۲a}, -\frac{\Delta}{۴a}\right)$ (رأس سهمی)

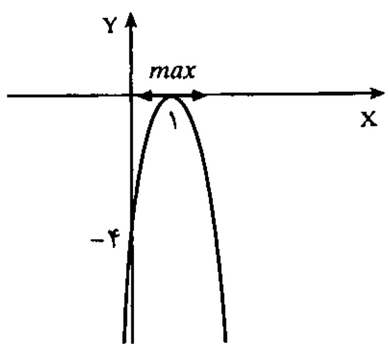
نقطهٔ برخورد سهمی با محور yها :

$x = ۰ : \ y = -۴(۰)^۲ + ۸(۰) - ۴ = -۴ \ ; \ A(۰,-۴)$

$y = ۰ : -۴x^۲ + ۸x - ۴ = ۰ \ ; \ -۴(x-۱)^۲ = ۰ \ ;$

$x_۱ = x_۲ = ۱$

حال با معلومات به‌دست آمده، نمودار سهمی را رسم می کنیم :



مثال (۷): رأس یک سهمی نقطهٔ $S(-۱,۱)$ و مختصات یک نقطهٔ آن $A(۱,۲)$ است. معادلهٔ سهمی را مشخص کنید.

حل: معادلهٔ سهمی در حالت عمومی به صورت $y = ax^۲ + bx + c$ است.

بنابراین :

$$S\left(-\frac{b}{۲a}, -\frac{b^۲ - ۴ac}{۴a}\right) \ , \ S(-۱,۱): \begin{cases} -\dfrac{b}{۲a} = -۱ \\ \\ -\dfrac{b^۲ - ۴ac}{۴a} = ۱ \end{cases} \ ;$$

$$\begin{cases} b = ۲a \\ c - \dfrac{b^۲}{۴a} = ۱ \end{cases} ; \begin{cases} b^۲ = ۴a^۲ \\ c = \dfrac{b^۲}{۴a} + ۱ \end{cases} \Rightarrow b = ۲a\,(۱), \ c = a + ۱\,(۲)$$

مختصات نقطهٔ A در معادلهٔ سهمی صدق می‌کند:

$A(1,2): 2 = a(1)^2 + b(1) + c \; ; \; a+b+c=2$ (۳)

با توجه به رابطه‌های (۱)، (۲) و (۳):

$b=2a, c=a+1 : \; a+b+c=a+2a+a+1=2 \; ;$

$4a+1=2 \; ; \; 4a=1 \; ; \; a=\frac{1}{4}$

پس:

$a=\frac{1}{4}, b=\frac{1}{2}, c=\frac{5}{4} : \; y=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{4}$

(معادله مطلوب)

مثال (۸): در سهمی $y=2x^2-k^3x+k$، عدد k را چنان تعیین کنید که خط $x=2$ محور تقارن آن باشد.

حل: محور تقارن سهمی $y=ax^2+bx+c$، به‌صورت زیر است:

$$x=-\frac{b}{2a}$$

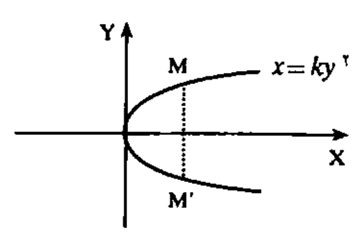
بنابراین، محور تقارن سهمی مورد نظر چنین است:

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-k^3}{2(2)}=2 \; ; \; k^3=8 \; ; \; \boxed{k=2}$$

$k=2 : \; y=2x^2-8x+2$ (معادلهٔ مطلوب)

تبصرهٔ (۱): به هر سهمی که **محور تقارن** آن موازی محور yها باشد؛ «**سهمی قائم**» و هر سهمی که **محور تقارن** آن موازی محور xها باشد؛ «**سهمی افقی**» گویند.

تبصرهٔ (۲): منحنی‌ها به معادله‌های $x=y^2$، $x=ky^2$، $x-\alpha=(y-\beta)^2$، $x-\alpha=-(y-\beta)^2$، $x-\alpha=k(y-\beta)^2$ و در حالت عمومی $x=ay^2+by+c$؛ همگی یک سهمی افقی را مشخص می‌کنند، که به‌طور مثال منحنی به معادلهٔ $x=ky^2$، چنین است:



بحث و بررسی روی سهمی افقی نیز به‌طور کامل مطابق سهمی قائم است، که آن‌را به عنوان **تمرین** می‌گذاریم.

تمرین

۱ ـ نمودار هریک از سهمی‌های زیر را رسم کنید.

۱) $y=-x^2$ ‏ ۲) $y=x^2-1$

۳) $y=-x^2+4$ ‏ ۴) $y=(x-1)^2-1$

۵) $y=-(x+1)^2+1$ ‏ ۶) $y=x^2+x$

۷) $y=4(x-1)^2$ ‏ ۸) $y=3(x+4)^2-2$

۹) $y=x^2-4x+3$ ‏ ۱۰) $y=-x^2+x-1$

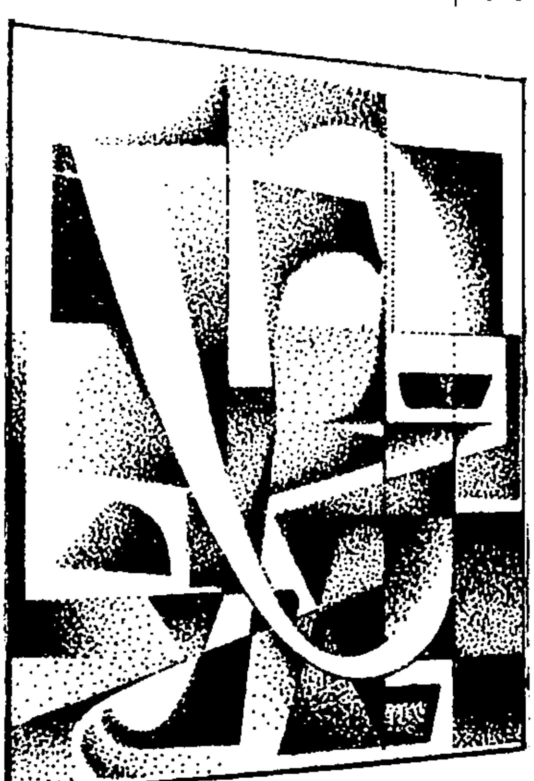
۲ ـ رأس یک سهمی نقطهٔ $S(1,-2)$ و مختصات یک نقطهٔ آن $A(-2,7)$ است. سهمی را مشخص کنید.

(جواب: $y=x^2-2x-1$)

۳ ـ در سهمی $y=-x^2+mx-m^2$، عدد m را چنان تعیین کنید که خط $x=-2$، محور تقارن آن باشد.

(جواب: $m=-4$)

۴ ـ رأس و محور تقارن سهمی افقی $x=ay^2+by+c$ را تعیین کنید و به‌ازای مقادیر مختلف a و $\Delta=b^2-4ac$، نمودار سهمی را رسم کنید.



خانوادهٔ مسأله

هر مسألهٔ ریاضی، با مسأله های دیگری هم‌خانواده است. گونه‌ای از این هم‌خانوادگی، منطقی است و گونه‌ای از آن، پیامد دگرگونیهایی است که در ساختار هندسی مسأله یا در بیان آن پدید آمده است. آشنایی با این هر دو گونه، می‌تواند به یافتن راه‌حلّ مسأله کمک کند، و مهمتر آن‌که، می‌تواند توانمندی، ورزیدگی و آمادگی ذهنی شما را در حلّ مسأله‌ها افزایش دهد و در این زمینه، اطمینان خاطر را در شما پدید آورد.

خانوادهٔ منطقی مسأله

مسأله های ریاضی و قضیه های ریاضی، دارای یک ساختار منطقی‌اند و غیر از این‌که قضیه‌ها را برای شما ثابت کرده‌اند و اثبات مسأله‌ها را به شما واگذار کرده‌اند، تفاوت دیگری با هم ندارند. همانند هر قضیه، هر مسأله نیز دارای فرض و حکم است و با جابه‌جا کردن فرض و حکم و یا با نفی یکی یا هر دوی آنها، می‌توان مسأله‌هایی را بیان کرد که خانوادهٔ منطقی آن مسأله را تشکیل می‌دهند و از بین آنها، ممکن است بعضی صحیح و بعضی غلط باشند.

در مسألهٔ داده شده، اگر P فرض و Q حکم باشد، مسأله به‌صورت «اگر P آن‌گاه Q» (یعنی اگر فرض درست باشد، حکم درست است) بیان می‌شود و مسأله‌های هم‌خانوادهٔ منطقی آن عبارت است از :

عکس مسأله: اگر Q آن‌گاه P (= اگر حکم درست باشد، فرض هم درست است) ؛

عکس نقیض مسأله: اگر Q ~ آن‌گاه P ~ (= اگر حکم نادرست باشد، فرض نیز نادرست است) ؛

متقابل مسأله: اگر P ~ آن‌گاه Q ~ (= اگر فرض نادرست باشد، حکم نیز نادرست است) ؛

خلاف مسأله: اگر P آن‌گاه Q ~ یا اگر Q آن‌گاه P ~ (= اگر فرض درست باشد، حکم نادرست است و عکس نقیض آن).

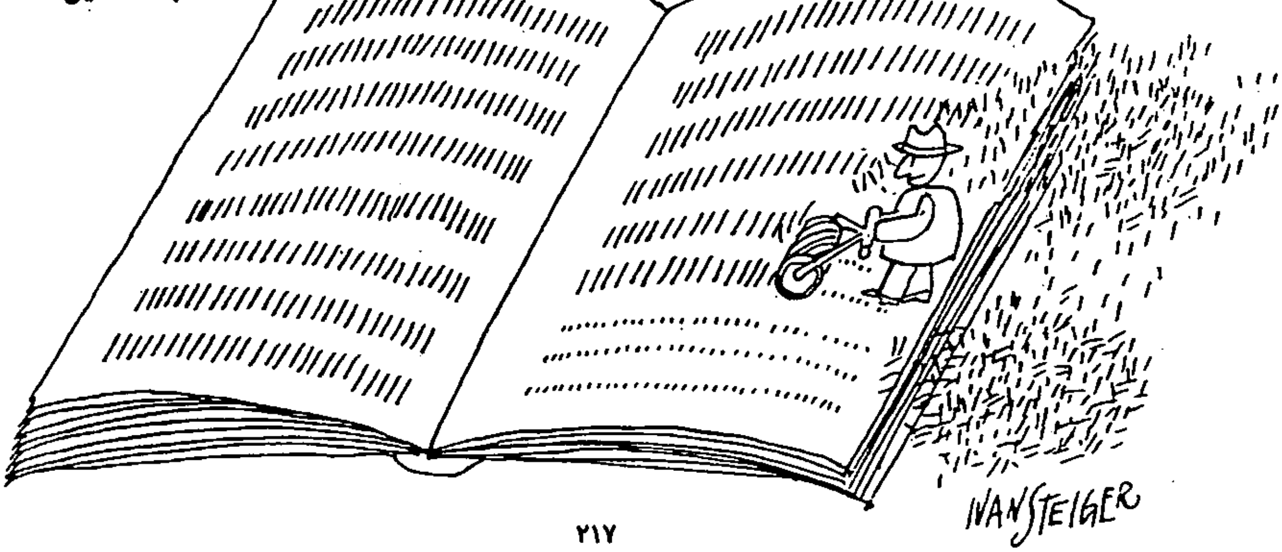
در قضیه‌ها و در مسأله‌های ریاضی، پذیرفته می‌شود که فرض درست است و بر پایهٔ درستی آن، باید ثابت شود که حکم نیز درست است. اگر چنین نباشد، یعنی از درستی فرض، نتیجه شود که حکم نادرست است، آن قضیه یا مسأله، نادرست خواهد بود.

با فرض این‌که مسألهٔ داده شده درست باشد ؛

۱) عکس مسأله ممکن است درست و ممکن است نادرست

مسألهٔ حلّ مسأله‌های ریاضی (۳)

• عبدالحسین مصحفی



باشد. هرگاه عکس مسأله هم درست باشد، آن مسأله به‌صورت «*اگر و تنها اگر فرض آن‌گاه حکم*» بیان می‌شود و هر کدام از فرض و حکم را **شرط لازم و کافی** برای دیگری می‌نامند.

۲) عکس نقیض مسأله با خود مسأله هم‌ارز است ؛ یعنی هرکدام که درست باشد، دیگری نیز درست است و هر کدام که نادرست باشد، دیگری نیز نادرست است. از این‌رو، به‌جای اثبات خود مسأله، می‌توان عکس نقیض آن را ثابت کرد.

۳) متقابل مسأله، عکسِ نقیضِ عکس آن مسأله است ؛ یعنی عکس مسأله و متقابل مسأله هم‌ارزند و هر کدام که درست باشد، دیگری نیز درست است. از این‌رو، متقابل مسأله، آن‌گاه درست است که مسأله به‌صورت شرط لازم و کافی بیان شده باشد.

۴) خلاف مسأله، ناهم‌ارز مسأله است ؛ اگر با پذیرفتن درستی فرض مسأله، نتیجه شود که حکم مسأله نادرست است، خلاف مسأله ثابت شده و خود مسأله رد شده است. بعکس، اگر خلاف مسأله رد شود، خود مسأله ثابت شده است، که در **برهان خلف** چنین فرایندی به‌کار می‌رود.

مثال ۱: در مجموعهٔ عددهای صحیح، اگر دست‌کم یکی از دو عدد a و b بر عدد d بخش‌پذیر باشد، حاصل‌ضرب ab نیز بر d بخش‌پذیر است. عکس این مسأله می‌شود : اگر حاصل‌ضرب دو عدد a و b بر عدد d بخش‌پذیر باشد، دست‌کم یکی از دو عدد a و b بر عدد d بخش‌پذیر است، که در حالت کلی، مسأله‌ای نادرست است (در حالتهایی نادرست و در حالتهایی درست است) ؛ حاصل‌ضرب ab بر خودش بخش‌پذیر است ؛ اما a و b مگر در حالت ویژه، بر ab بخش‌پذیر نیستند. همچنین، ۱۲ که حاصل‌ضرب ۶ در ۲ است، بر ۴ بخش‌پذیر است ؛ درصورتی که ۶ و ۲ هیچ‌کدام بر ۴ بخش‌پذیر نیستند. اما ۱۲ = ۶×۲ که بر ۳ بخش‌پذیر است، عدد ۶ نیز بر ۳ بخش‌پذیر است.

عکس نقیض مسأله می‌شود : اگر حاصل‌ضرب دو عدد a و b بر عدد d بخش‌پذیر نباشد، هیچ‌کدام از دو عدد a و b بر d بخش‌پذیر نیست، که مسأله‌ای درست است.

متقابل مسأله می‌شود : اگر هیچ‌کدام از دو عدد a و b بر عدد d بخش‌پذیر نباشد، حاصل‌ضرب ab نیز بر d بخش‌پذیر نیست، که در حالت کلی درست نیست. دو عدد ۲ و ۶ هیچ‌کدام بر ۴ بخش‌پذیر نیست ؛ اما حاصل‌ضرب آنها بر ۴ بخش‌پذیر است.

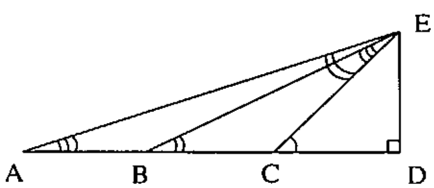
خلاف مسأله می‌شود : اگر دست‌کم یکی از دو عدد a و b بر عدد d بخش‌پذیر باشد، حاصل‌ضرب ab بر d بخش‌پذیر نیست، که مسأله‌ای نادرست است. یا این‌که : اگر حاصل‌ضرب ab بر d بخش‌پذیر باشد، هیچ‌کدام از دو عدد a و b بر d بخش‌پذیر نیست، که در حالت کلی درست نیست.

یادداشت: عکس مسألهٔ مورد مثال، به‌صورت زیر بیان می‌شود و یکی از قضیه‌های بنیادی نظریهٔ اعداد است : اگر حاصل‌ضرب دو عدد a و b بر d بخش‌پذیر باشد و یکی از دو عدد a و b نسبت به d اوّل باشد، عدد دیگر بر d بخش‌پذیر است.

یادآوری: اگرچه به‌جای اثبات یک مسأله نمی‌توان عکس آن را ثابت کرد ؛ اما این بدان معنا نیست که به حکم مسأله توجه نشود. در بسیاری از مسأله‌ها، توجه به حکم و بررسی آن، راه‌حل مسأله را به‌دست می‌دهد.

مثال ۲: مطابق با شکل، زاویهٔ D قائمه است و پاره‌خطهای AB، BC، CD و DE با هم برابرند. ثابت کنید :

$$\angle ECD = \angle EBD + \angle EAD$$



از این‌که زاویهٔ ECD زاویهٔ خارجی مثلث EBC است، نتیجه می‌گیریم :

$$\angle ECD = \angle EBD + \angle BEC$$

از مقایسهٔ این رابطه با رابطهٔ حکم، درمی‌یابیم که باید ثابت کنیم دو زاویهٔ BEC و EAD با هم برابرند. اگر چنین باشد، دو مثلث EAC و EBC که در زاویهٔ ECB مشترکند، با هم متشابه خواهند بود. راهنمایی می‌شویم که باید تشابه این دو مثلث را ثابت کنیم. با توجه به حالتهای کلاسیک تشابه دو مثلث، درمی‌یابیم که باید ثابت کنیم ضلعهای زاویهٔ مشترک دو مثلث، نظیر به نظیر متناسبند و لازم می‌شود اندازه‌های این ضلعها را حساب کنیم. با فرض آن‌که اندازهٔ DE و اندازه‌های پاره‌خطهای برابر با آن a باشد، خواهیم داشت :

$$CE = a\sqrt{۲} \quad , \quad CA = ۲a \quad ,$$

$$\frac{CE}{BC} = \frac{a\sqrt{۲}}{a} = \sqrt{۲} \quad , \quad \frac{AC}{CE} = \frac{۲a}{a\sqrt{۲}} = \sqrt{۲} \quad ,$$

$$\frac{CE}{BC} = \frac{AC}{CE}$$

دو مثلث ACE و BCE که در یک زاویه مشترکند و ضلعهای این زاویه، نظیر به نظیر متناسبند، با هم متشابهند و از تشابه آنها، برابری دو زاویهٔ BEC و EAC و سپس رابطهٔ حکم به‌دست می‌آید.

مثال ۳: ثابت کنید اگر حاصل‌ضرب دو مجموعهٔ A و B مجموعه‌ای تهی باشد، دست‌کم یکی از دو مجموعهٔ A و B تهی است.

برای اثبات این مسأله، کافی است که مسألهٔ عکس نقیض آن را ثابت کنیم. «دست‌کم یکی از دو مجموعهٔ A و B تهی است» به این معناست که «یا A تهی است، یا B تهی است و یا A و B هر دو تهی‌اند» و نفی آن می‌شود «نه A تهی است و نه B». بنابراین، عکس نقیض مسأله می‌شود: «اگر هیچ کدام از دو مجموعهٔ A و B تهی نباشد، حاصل‌ضرب دو مجموعهٔ A و B تهی نیست».

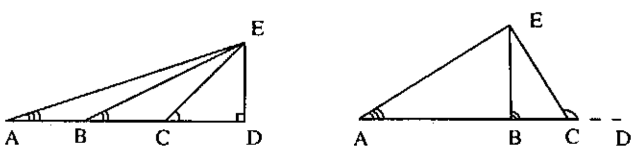
برای اثبات این مسأله هم می‌گوییم: چون A و B هیچ‌کدام تهی نیستند، دست‌کم یک عضو x متعلق به A و یک عضو y متعلق به B وجود دارد و بنا بر تعریف حاصل‌ضرب دو مجموعه، دوتایی مرتّب (x , y) عضو $A \times B$ است و این مجموعه تهی نیست. چون عکس نقیض مسأله ثابت شده، خود مسأله هم ثابت شده است.

هم‌خانواده‌های غیرمنطقی مسأله

مسأله‌های ریاضی از یکدیگر پدید می‌آیند و هر مسأله را می‌توان با دگرگونیهایی در ساختار هندسی آن، به‌گونه‌ای دیگر بیان کرد. همهٔ این مسأله‌ها هم‌خانواده‌اند و اگر خویشاوندی آنها شناخته شود و راه‌حلّ یکی از آنها دانسته شده باشد، از روی آن، بسادگی می‌توان به راه‌حلّ مسأله‌ای دیگر از آنها پی برد. تعدادی از این مسأله‌ها، حالتهای ویژه‌ای از یک مسألهٔ حالت کلی‌اند و چنانچه این مسأله شناخته شود، می‌توان راه‌حلّ آن را روی آن مسأله‌های حالتهای ویژه تعمیم داد. اگر هنگامی که فراغت دارید، مسأله‌های گوناگونی را که با آنها سر و کار داشته‌اید، از این دیدگاه بررسی و آنها را ریشه‌یابی کنید و به پیوندهای موجود بین زنجیره‌هایی از مسأله‌ها پی ببرید، دیدی گسترده را روی مجموعهٔ مسأله‌ها برای خود پدید می‌آورید و در روبه‌رویی با هر مسأله، بسادگی و در کمترین زمان، خواهید توانست از عهدهٔ حلّ آن برآیید.

در اولین برخورد، ممکن است پیوند ساختاری بین مسأله‌ها به ذهن نرسد و پنهان بماند؛ اما با کمی ژرف‌نگری و دقت در ساختار آنها، به آن پیوند و راه‌حلّ مشترک آنها می‌توان پی برد.

مثال ۴: مسأله‌ای که در مثال ۲ بیان شد و این مسأله که «هر ضلع از مثلث قائم‌الزاویه، واسطهٔ هندسی است بین وتر و تصویر آن ضلع بر وتر»، در ظاهر امر، به نظر نمی‌رسد که هم‌خانواده باشند؛ درصورتی که اگر بیشتر دقت کنیم، می‌بینیم در یک ساختار مشترکند: در هر کدام از آنها، دو مثلث که یکی بخشی از دیگری است، با هم متشابهند (دو مثلث ECB و ECA) و در هر دوی آنها، زاویهٔ ECD برابر است با مجموع دو زاویهٔ EBC و EAB.

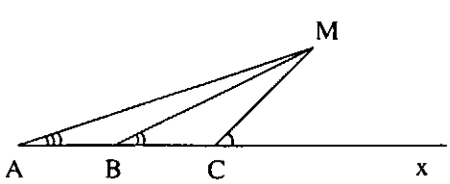


پی بردن به این وجه‌مشترک، ذهن را وامی‌دارد تا بررسی کند آیا مسأله‌ای با حالت کلی هست که این دو مسأله، حالتهای ویژهٔ آن باشند؟ اگر چنین باشد، وجه‌مشترک این مسأله‌ها باید ساختار اصلی مسألهٔ حالت کلی باشد؛ بنابراین، مسألهٔ زیر به میان می‌آید:

سه نقطهٔ A، B و C به همین ترتیب، روی نیم‌خط Ax جای دارند. اگر نقطهٔ M چنان باشد که:

$$\angle MCx = \angle MBx + \angle MAx$$

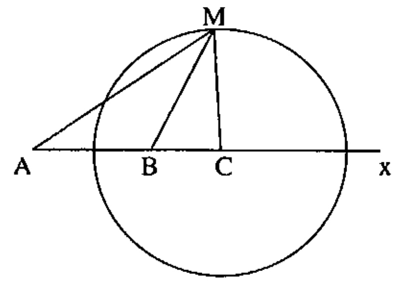
بین اندازه‌های پاره‌خطهای MC، CB و CA چه رابطه‌ای برقرار است؟



از این که زاویهٔ MCx زاویهٔ خارجی مثلث MCB است، برابری دو زاویهٔ BMC و BAM، و بنا بر آن تشابه دو مثلث MBC و MAC نتیجه می‌شود و خواهیم داشت:

$$\frac{MC}{AC} = \frac{BC}{MC} \Rightarrow \overline{MC}^2 = AC.BC$$

پاره‌خط MC واسطهٔ هندسی دو پاره‌خط AC و BC است. نقطه‌ها A، B و C که ثابت باشند، اندازه‌های AC، BC و MC نیز مقدارهای ثابتند و نقطهٔ M بر دایرهٔ به مرکز C و به شعاع $R=\sqrt{AC.BC}$ جای دارد.



بسادگی ثابت می‌شود که نظیر هر نقطهٔ M واقع بر این دایره، زاویهٔ MCx با مجموع دو زاویهٔ MBx و MAx برابر است. بنابراین، دایرهٔ به مرکز C و به شعاع R، مکان هندسی M است.

اکنون با درنظر گرفتن جاهای مختلف M روی دایره و بنابر چگونگی وضع سه نقطهٔ A، B و C، می‌توانیم مسأله‌هایی گوناگون را بیان کنیم که هر کدام حالت ویژه‌ای از این مسألهٔ حالت کلی است. همهٔ آنها هم‌خانواده‌اند و یک راه اثبات دارند.

هرگاه AB و BC برابر باشند و اندازهٔ آنها a فرض شود، اندازهٔ MC می‌شود $a\sqrt{2}$ و در این حالت، اگر M در جایی از دایره انتخاب شود که زاویهٔ MCx به اندازهٔ ۴۵ درجه باشد، عمود MH که بر Cx رسم شود، پاره‌خطهای MH و CH نیز برابر با a می‌شوند و مسألهٔ مثال ۲ را خواهیم داشت.

هرگاه M بر نقطهٔ برخورد دایرهٔ به قطر BC با دایرهٔ مکانش واقع باشد، MB بر AC عمود خواهد بود و مسألهٔ «هر ضلع مثلث قائم‌الزاویه واسطهٔ هندسی است بین وتر و تصویرش بر وتر» نموده خواهد شد.

هرگاه M در جایی از دایره قرار گیرد که MC برAC عمود باشد، نتیجه خواهد شد که تفاضل دو زاویهٔ B و A از مثلث MAB برابر ۹۰ درجه و این مثلث به رأس M شبه قائمه است.

و مسأله‌های دیگری که هر کدام نظیر یک موضع M روی دایره است.

مسأله آفرینی

نظیر هر مسأله، اگر مسأله‌های هم‌خانواده‌اش را بیابید و مسألهٔ حالت کلی همهٔ آنها را به‌دست آورید، با بررسی حالتهای گوناگون این مسألهٔ کلی، چه‌بسا به مسأله‌هایی دست یابید که نه‌تنها برای خود شما، بلکه برای دیگران هم تازگی داشته باشند. دستیابی به راه‌حلّ ابتکاری و زیبای یک مسأله لذتبخش و شوق‌انگیز است. اما لذتبخش‌تر از آن، دستیابی به طرح و بیان مسأله‌هایی است که تازگی داشته باشند.

تمرین ۳:

۱ـ برای امتحان عمل‌ضرب عددها، روشی به‌کار می‌رود که آن را *طرح q به q* می‌نامند؛ اگر در عمل‌ضرب عدد a در عدد b، حاصل‌ضرب برابر با P به‌دست آمده باشد، باقیماندهٔ تقسیم a بر q برابر با r، باقیماندهٔ تقسیم b بر q برابر با s، باقیماندهٔ تقسیم rs بر q برابر با t و باقیماندهٔ تقسیم P بر q برابر با u باشد، چنانچه عمل ضرب صحیح انجام گرفته باشد، دو عدد t و u با هم برابر خواهند بود. در این فرایند، قضیه‌ای به‌کار می‌رود؛ فرض و حکم و قضیه‌های هم‌خانواده منطقی آن را نام ببرید و معلوم کنید کدام درست و کدام نادرستند؟

۲ـ هرگاه A زیرمجموعهٔ B، B زیرمجموعهٔ C و C زیرمجموعهٔ A باشد، ثابت کنید سه مجموعهٔ A، B و C با هم برابرند. فرض و حکم این مسأله و مسأله‌های هم‌خانوادهٔ منطقی آن را بیان و معلوم کنید کدامها درست و کدامها نادرستند، و سرانجام، مسأله را به‌صورت صحیح آن بیان کنید.

۳ـ ثابت کنید اگر دو عدد طبیعی a و b نسبت به هم اوّل باشند، دو عدد $s=a+b$ و $P=ab$ نیز نسبت به هم اوّلند. این مسأله را از راه اثبات نادرستی خلاف آن ثابت کنید.

۴ـ دایرهٔ مثال ۴ را چگونه باید رسم کرد؟ به عبارت دیگر، اگر سه نقطهٔ A، B و C به همین ترتیب، روی نیم‌خط Ax داده شده باشند و M نقطه‌ای باشد که زاویهٔ MCx با مجموع دو زاویهٔ MBx و MAx برابر باشد، دایرهٔ مکان M را باید چگونه رسم کرد؟ نقطهٔ B نسبت به دایرهٔ مکان M چه وضعی دارد؟

۵ ـ دو مسألهٔ زیر را درنظر بگیرید:

مسألهٔ الف: «مثلث ABC در زاویهٔ A قائمه است. نقطهٔ P را روی ضلع AB یا در امتداد آن، و نقطهٔ Q را روی ضلع AC یا در امتداد آن، چنان به‌دست می‌آوریم که دو پاره‌خط AP و AQ با دو ضلع AB و AC، یا هر دو هم‌جهت یا هر دو ناهم‌جهت باشند و تناسب:

$$\frac{AP}{AC}=\frac{AQ}{AB}$$

برقرار باشد. ثابت کنید : ارتفاع نظیر رأس A در هر یک از دو مثلث APQ و ABC میانهٔ نظیر همان رأس در مثلث دیگر است.»

مسألهٔ ب: «در هر چهارضلعی محاطی، اگر دو قطر بر هم عمود باشند، خطی که از نقطهٔ برخورد دو قطر بر یک ضلع عمود شود، ضلع روبه‌رو به آن را نصف می‌کند و اگر دو ضلع بر هم عمود باشند، خطی که از نقطهٔ برخورد آنها بر یک ضلع روبه‌رو عمود شود، ضلع روبه‌روی دیگر را نصف می‌کند.»

آیا دو مسألهٔ بالا هم‌خانواده‌اند؟ کدام‌یک از آنها حالت کلّی‌تر را بیان می‌کند؟

پاسخهای مسأله‌های تمرین ۲:

۱ـ یک راه‌حلّ مسأله، تجزیهٔ سه جمله‌ایهاست که می‌شوند :

$$\begin{cases}(a-۲b)(۳a-b)=۸\\(a-۲b)(a+۴ab)=۷\end{cases}$$

عامل $a-۲b$ نمی‌تواند صفر باشد و از تقسیم دو برابری بر هم رابطهٔ $a=۳b$ به‌دست می‌آید.

۲ـ مقدارهای داده شده برای x و y پس از ساده شدن می‌شوند :

$$x=۲-\sqrt{۳}\ ,\ y=۲+\sqrt{۳}$$

عبارت جبری $f(x,y)$ چون نسبت به x و y متقارن است، با عوض کردن x و y با هم فرق نمی‌کند و چون نسبت به x و y همگن است، همهٔ جمله‌های آن نسبت به x و y همدرجه‌اند ؛ بنابراین :

$$f(x,y)=ax^۲+bxy+ay^۲$$

$$x=y\Rightarrow x^۲(a+b+a)=۰\Rightarrow b=-۲a$$

$$x=۲-\sqrt{۳}\ ,\ y=۲+\sqrt{۳}\Rightarrow ۱۴a+b=۲۴$$

$$\begin{cases}b=-۲a\\ ۱۴a+b=۲۴\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۲\\b=-۴\end{cases}$$

۳ـ داریم :

$$x^۲+y^۲+z^۲=\frac{۱}{۳}$$

$$\left[(x+y+z)^۲+(x-y)^۲+(y-z)^۲+(z-x)^۲\right]$$

$$=\frac{۱}{۳}(a^۲+k^۲)\Rightarrow x^۲+y^۲+z^۲\geq\frac{a^۲}{۳}$$

۴ـ دو طرف را تفضیل در صورت و ترکیب در مخرج می‌کنیم و پس از آن، به توان ۲ می‌رسانیم، که خواهیم داشت :

$$\frac{۱-tgx}{۱+tgx}=\frac{\sqrt{۱+y}}{\sqrt{۱-y}}$$

$$\frac{tg^۲x-۲tgx+۱}{tg^۲x+۲tgx+۱}=\frac{۱+y}{۱-y}$$

باز در صورت تفضیل و در مخرج ترکیب می‌کنیم که خواهیم داشت :

$$y=\frac{۲tgx}{۱+tg^۲x}=\sin ۲x$$

۵ ـ عدد را N، رقم سمت راست آن را x و عدد بدون رقم x را y می‌گیریم :

$$N=۱۰y+x\ ,\ N'=۱۰^nx+y$$

$$۱۰^nx+y=\frac{۳}{۲}(۱۰y+x)\Rightarrow ۲۸y=(۲\times۱۰^n-۳)x$$

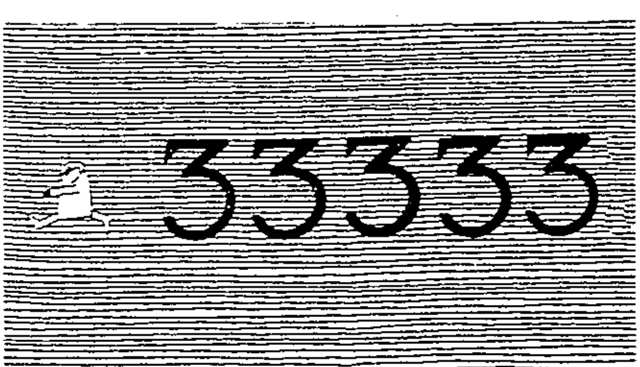
طرف اوّل مضرب ۴ و مضرب ۷، و عدد داخل پرانتز فرد است ؛ پس x مضرب ۴ و کوچکترین مقدارش ۴ است و

$$۷y=۲\times۱۰^n-۳$$

طرف دوم مضرب ۷ است ؛ پس کوچکترین مقدار n برابر ۵ و در نتیجه :

$$y=۲۸۵۷۱\ ,\ N=۲۸۵۷۱۴$$

۶ـ برآیند سه تبدیل، دَوَران به مرکز A و به زاویهٔ ۶۰° خواهد شد.



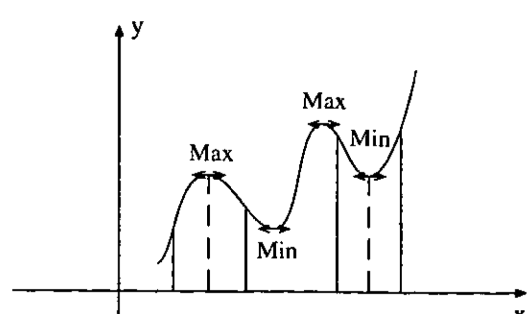
بررسی قضیه‌های مشتق و کاربردهای آنها

● محمدصادق عسگری

در ادامهٔ بررسی قضیه‌های پیوستگی «قضایای مقدار میانی ـ بولتزانو ـ ماکزیمم و می‌نیمم مطلق» به بررسی قضیه‌های کاربرد مشتق می‌پردازیم که عبارتند از : ۱ـ قضیهٔ ماکزیمم و می‌نیمم نسبی ۲ـ قضیهٔ رول ۳ـ قضیهٔ مقدار میانگین. بدیهی است که خواننده باید با تعریف مشتق و روشهای مشتق‌گیری، آشنایی داشته باشد.

تعریف اکسترمم نسبی توابع حقیقی

نقطه‌ای به‌طول $x=c$ از دامنهٔ تابع حقیقی f را طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی (می‌نیمم نسبی) f می‌گوییم ؛ هرگاه همسایگی



$(c-\delta,c+\delta)$ از نقطهٔ $x=c$ موجود باشد ؛ به‌طوری که برای هر $t\in(c-\delta,c+\delta)$ داشته باشیم $f(t)\le f(c)$ $(f(t)\ge f(c))$.

مقدار $f(c)$ را ماکزیمم نسبی (می‌نیمم نسبی) تابع f می‌گویند. به‌علاوه ماکزیمم و می‌نیمم نسبی تابع f را، اکسترمم‌های نسبی تابع f نیز می‌گویند.

قضیهٔ ماکزیمم و می‌نیمم نسبی توابع حقیقی

فرض کنیم تابع حقیقی f بر فاصلهٔ $[a,b]$ پیوسته و در نقطه داخلی $x=c$ از این فاصله $(a<c<b)$ دارای اکسترمم نسبی باشد ؛ در این صورت، اگر f در $x=c$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه $f'(c)=0$.

اثبات: بنا به فرض تابع f در $x=c$ دارای ماکزیمم نسبی (می‌نیمم نسبی) است. بنابراین، همسایگی $(c-\delta,c+\delta)$ وجود دارد ؛ به‌طوری که برای هر $x\in(c-\delta,c+\delta)$ داریم :

$$(*)\quad (f(x)\ge f(c))f(x)\le f(c)$$

ادامهٔ اثبات را برای ماکزیمم نسبی بیان می‌کنیم، برای حالت می‌نیمم نسبی به‌طورمشابه برقرار است ؛ چون f در $x=c$

مشتق‌پذیر است، بنابراین :

$$f'(c)=\lim_{x\to c^+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\lim_{x\to c^-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \quad (**)$$

دو حالت ۱) $x\to c^+$ ۲) $x\to c^-$ را در نظر می‌گیریم.

۱) اگر $x\to c^+$ آن‌گاه $x\ge c$ ، بنابر (*) $f(x)\le f(c)$

بنابراین $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\le 0$ ، درنتیجه داریم :

$f'(c)=\lim_{x\to c^+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\le 0$ یا $f'(c)\le 0$

۲) اگر $x\to c^-$ آن گاه $x\le c$ ، بنابر (*) $f(x)\le f(c)$ ،

بنابراین $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\ge 0$ ، درنتیجه داریم :

$f'(c)=\lim_{x\to c^-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\ge 0$ یا $f'(c)\ge 0$

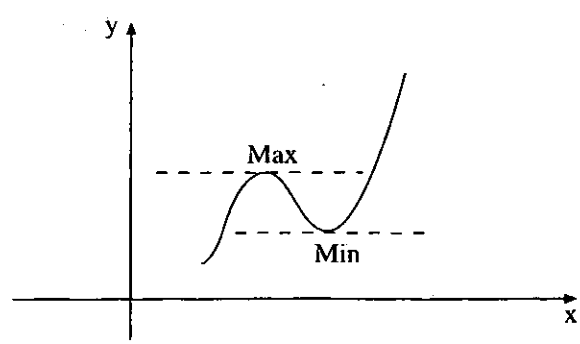
بنابر روابط (۱) و (۲) داریم : $f'(c)=0$.

تعبیر هندسی قضیهٔ ماکزیمم و می‌نیمم نسبی

اگر تابع حقیقی f در نقطهٔ $x=c$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه در این نقطه، یک خط مماس منحصر به‌فرد می‌توان بر نمودار تابع رسم کرد، که ضریب زاویهٔ آن، برابر با مقدار مشتق تابع f در نقطهٔ $x=c$ است ؛ یعنی :

ضریب زاویهٔ خط مماس در نقطه $x=c$ = $f'(c)$

با توجه به نکتهٔ بالا، قضیهٔ ماکزیمم و می‌نیمم نسبی، می‌تواند بیان دیگری از این مطلب باشد. پس اگر تابع f در نقطهٔ $x=c$ از دامنهٔ تابع دارای اکسترمم نسبی و به‌علاوه، در این نقطه، مشتق‌پذیر باشد، در این صورت $f'(c)=0$ ، یعنی : ضریب زاویهٔ خط مماس بر نمودار تابع در این نقطه، صفر است. به‌عبارت دیگر، خط مماس بر نمودار تابع در این نقطه، موازی محور طولهاست.



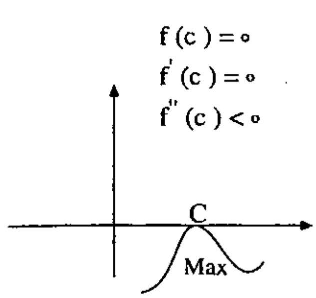
نتیجه‌های قضیه‌های ماکزیمم و می‌نیمم نسبی

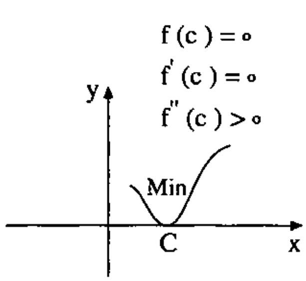
نتیجهٔ ۱: اگر تابع f در نقطهٔ داخلی $x=c$ از دامنه‌اش دارای اکسترمم نسبی باشد، آن‌گاه یا f در این نقطه، مشتق‌پذیر نیست یا $f'(c)=0$.

این نتیجه، یک شرط لازم را برای طول نقاط اکسترمم نسبی بیان می‌کند ؛ زیرا تابع $f(x)=x^3$ در نقطهٔ $x=0$ مشتق‌پذیر است و به‌علاوه $f'(0)=0$ درصورتی که تابع f در $x=0$ دارای اکسترمم نسبی نیست. بنابراین، برای پیدا کردن طول نقاط اکسترمم نسبی تابع f با استفاده از این نتیجه، می‌توان در دامنهٔ تابع به دنبال ریشه‌های مشتق یا نقاطی باشیم که تابع در آنها مشتق‌پذیر نیست. این نقاط درصورتی اکسترمم‌های نسبی هستند که مشتق تابع، یعنی $f'(x)$ ، در این نقاط تغییر علامت دهد. چون در تابع $f(x)=x^3$ ، داریم $f'(x)=3x^2$ ، درنتیجه، مشتق تابع در $x=0$ تغییر علامت نمی‌دهد ؛ بنابراین تابع در $x=0$ اکسترمم نسبی ندارد.

نتیجهٔ ۲: اگر تابع f در نقطهٔ داخلی $x=c$ از دامنه‌اش دارای مشتقات مرتبهٔ اوّل و دوم باشد و به‌علاوه $f'(c)=0$ و $f''(c)<0$ آن‌گاه نقطهٔ $x=c$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی و اگر $f'(c)=0$ و $f''(c)>0$ ، آن‌گاه نقطهٔ $x=c$ طول نقطهٔ می‌نیمم نسبی تابع است. در حالتی که $f'(c)=f''(c)=0$ در مورد نقطهٔ $x=c$ حکمی نمی‌توان داد.

نتیجهٔ ۳: اگر تابع f در نقطهٔ داخلی $x=c$ از دامنه‌اش دارای مشتقات مرتبهٔ اوّل و دوم باشد و به‌علاوه $f(c)=f'(c)=0$ و $f''(c)<0$ ، آن گاه نمودار تابع f در $x=c$ دارای ماکزیمم نسبی و اگر $f(c)=f'(c)=0$ و $f''(c)>0$ ، آن‌گاه f در این نقطه، دارای می‌نیمم نسبی است. به‌علاوه، در این دو حالت، نمودار تابع بر محور طولها مماس است.





نتیجهٔ ۴: اگر تابع کسری با ضابطهٔ $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ در نقطهٔ $(x_\circ,y_\circ)$ دارای اکسترمم نسبی و مشتق‌پذیر باشد، در این صورت $y_\circ=\frac{f'(x_\circ)}{g'(x_\circ)}$، به‌عبارت دیگر، مختصات نقاط اکسترمم نسبی توابع کسری، درصورتی که این توابع در این نقاط، مشتق‌پذیر باشند، در هوپیتال تابع صدق می‌کند.

اثبات: بنابرقضیهٔ ماکزیمم و می‌نیمم نسبی داریم: $y'(x_\circ)=\circ$

$$y=\frac{f(x)}{g(x)}\Rightarrow y'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^{۲}}$$

$$\Rightarrow y'(x_\circ)=\frac{f'(x_\circ)g(x_\circ)-f(x_\circ)g'(x_\circ)}{[g(x_\circ)]^{۲}}=\circ$$

$$\Rightarrow f'(x_\circ)g(x_\circ)-f(x_\circ)g'(x_\circ)=\circ$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_\circ)}{g(x_\circ)}=\frac{f'(x_\circ)}{g'(x_\circ)}$$

$$\Rightarrow y_\circ=\frac{f(x_\circ)}{g(x_\circ)}\Rightarrow y_\circ=\frac{f'(x_\circ)}{g'(x_\circ)}$$

نتیجهٔ ۵: اگر تابع حقیقی با ضابطهٔ $y=\frac{ax^{۲}+bx+c}{a'x^{۲}+b'x+c'}$ در نقطهٔ $(x_\circ,y_\circ)$ دارای اکسترمم نسبی باشد، آن‌گاه خط به معادله $y=y_\circ$ در این نقطه، بر نمودار تابع، مماس است، و به علاوه معادلهٔ $y_\circ=\frac{ax^{۲}+bx+c}{a'x^{۲}+b'x+c'}$ دارای یک ریشهٔ مضاعف است.

بنابراین، برای محاسبهٔ اکسترمم‌های نسبی تابع با ضابطهٔ $y=\frac{ax^{۲}+bx+c}{a'x^{۲}+b'x+c'}$ کافی است ضابطهٔ تابع را طرفین وسطین کنیم و آن را برحسب x مرتّب نماییم. سپس مبین این معادله را برابر صفر قرار دهیم. ریشه‌های حاصل از معادله $\Delta=\circ$، اکسترمم‌های نسبی تابع فوق هستند.

مثال ۱: نقاطی را بر نمودار تابع با ضابطه $y=\frac{\sin x-۱}{\cos x+۱}$ در فاصلهٔ $\circ\le x\le ۲\pi$ بیابید؛ به‌طوری که خط مماس در آنها، موازی محور طولها باشد.

حل: این نقاط، ریشه‌های معادلهٔ $f'(x)=\circ$ می‌باشند. بنابراین داریم:

$$y=\frac{\sin x-۱}{\cos x+۱}\Rightarrow y'=\frac{۱+\cos x-\sin x}{(۱+\cos x)^{۲}}$$

$$y'=\circ\Rightarrow ۱+\cos x-\sin x=\circ$$

$$\Rightarrow \sin x-\cos x=۱\Rightarrow(\sin x-\cos x)^{۲}=۱$$

$$\Rightarrow \sin^{۲}x+\cos^{۲}x-۲\sin x\cos x=۱$$

$$\Rightarrow ۱-\sin ۲x=۱\Rightarrow \sin ۲x=\circ$$

$$\Rightarrow ۲x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۲}$$ ریشهٔ مورد قبول

$$\Rightarrow y(\frac{\pi}{۲})=\circ$$

درنتیجه، این تابع در نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}\frac{\pi}{۲}\\ \circ\end{matrix}\right.$ دارای خط مماس موازی محور طولهاست.

به‌علاوه، چون $y(\frac{\pi}{۲})=y'(\frac{\pi}{۲})=\circ$، بنابراین نمودار تابع در این نقطه، بر محور طولها مماس است.

مثال ۲: ضرایب a و b را در تابع باضابطهٔ $y=ax^{۳}+bx^{۲}+۱$ بیابید؛ به‌طوری که نمودار تابع در نقطه‌ای به‌طول $x=۱$، بر محور xها مماس باشد.

حل: برای آن که نمودار تابع در این نقطه، بر محور xها مماس باشد، باید داشته باشیم $f(۱)=f'(۱)=\circ$، درنتیجه:

$$\begin{cases}f(x)=ax^{۳}+bx^{۲}+۱\\ f'(x)=۳ax^{۲}+۲bx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(۱)=a+b+۱=\circ\\ f'(۱)=۳a+۲b=\circ\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+b=-۱\\ ۳a+۲b=\circ\end{cases}\Rightarrow a=۲\ ,\ \ b=-۳$$

مثال ۳: ضرایب a و b را در تابع با ضابطهٔ $y=\frac{ax^{۲}+bx+۱}{x+۲}$ بیابید؛ به‌طوری که نقطهٔ $M\left|\begin{matrix}-۱\\ ۱\end{matrix}\right.$ ماکزیمم نسبی تابع باشد.

حل: چون تابع در $x=-۱$ مشتق‌پذیر و دارای ماکزیمم نسبی است، درنتیجه اولاً $f'(-۱)=\circ$ ثانیاً مختصات نقطهٔ $M\left|\begin{matrix}-۱\\ ۱\end{matrix}\right.$ در ضابطه تابع صدق می‌کند؛ یعنی: $\begin{cases}f(-۱)=۱\\ f'(-۱)=\circ\end{cases}$

$$y=\frac{ax^{۲}+bx+۱}{x+۲}$$

$$y' = \frac{(2ax+b)(x+2)-(ax^2+bx+1)}{(x+2)^2}$$

$$\begin{cases}\dfrac{a-b+1}{1}=1\\[2mm] \dfrac{(-2a+b)(1)-(a-b+1)}{1}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a-b=0\\-2a+b-a+b-1=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=b\\-3a+2b=1\end{cases}\Rightarrow\ a=-1\ ,\ b=-1$$

مثال ۴: ضرایب a و b را در تابع با ضابطهٔ $y=a\sin x+b\cos x+2$ بیابید؛ به‌طوری که نقطهٔ $M\left|\begin{matrix}\frac{\pi}{3}\\2(1+\sqrt{3})\end{matrix}\right.$ می‌نیمم نسبی تابع باشد.

حل: چون تابع در $x=\frac{\pi}{3}$ مشتق‌پذیر و دارای می‌نیمم نسبی است، درنتیجه: اولاً $f'(\frac{\pi}{3})=0$ و ثانیاً مختصات نقطهٔ M در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند؛ یعنی:

$$\begin{cases}f(\frac{\pi}{3})=2(1+\sqrt{3})\\ f'(\frac{\pi}{3})=0\end{cases}$$

$$y=a\sin x+b\cos x+2$$

$$y'=a\cos x-b\sin x$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a\sin\frac{\pi}{3}+b\cos\frac{\pi}{3}+2=2(1+\sqrt{3})\\ a\cos(\frac{\pi}{3})-b\sin(\frac{\pi}{3})=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{a\sqrt{3}}{2}+\dfrac{b}{2}+2=2+2\sqrt{3}\\[2mm] \dfrac{a}{2}-\dfrac{b\sqrt{3}}{2}=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a\sqrt{3}+b=4\sqrt{3}\\ a-b\sqrt{3}=0\end{cases}\Rightarrow a=3\ ,\ b=\sqrt{3}$$

مثال ۵: نقاطی را بر نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\frac{2x-1}{x+3}$ بیابید؛ به‌طوری که خط مماس در آن نقاط، عمود بر خط به معادله $7y+x=1$ باشند.

حل: باید ضریب زاویهٔ خط مماس (m) و ضریب زاویهٔ خط (m′) در رابطهٔ $mm'=-1$ صدق کنند. بنابراین داریم:

ضریب زاویهٔ خط مماس $= m = f'(x)=\dfrac{7}{(x+3)^2}$

ضریب زاویهٔ خط $= m' = -\dfrac{1}{7}$

$$mm'=-1\Rightarrow\frac{7}{(x+3)^2}\times\frac{-1}{7}=-1$$

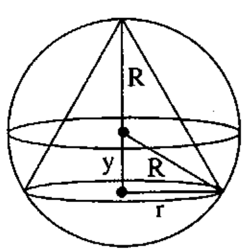
$$\Rightarrow\frac{1}{(x+3)^2}=1\Rightarrow(x+3)^2=1$$

$$\Rightarrow(x+3)=\pm1\Rightarrow x=-3\pm1$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=-2\\x_2=-4\end{cases}\Rightarrow\ A_1\left|\begin{matrix}-2\\-5\end{matrix}\right.\quad A_2\left|\begin{matrix}-4\\9\end{matrix}\right.$$

مثال ۶: می‌خواهیم یک مخروط به شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع h را در یک کره به شعاع R محاط کنیم. شعاع r و ارتفاع h را حساب کنید؛ درصورتی که حجم مخروط ماکزیمم باشد.

حل: با توجه به شکل داریم:



$$\begin{cases}R+y=h\\y^2+r^2=R^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}h=y+R\\r^2=R^2-y^2\end{cases}$$

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h\Rightarrow V=\frac{1}{3}\pi(R^2-y^2)(y+R)$$

$$\Rightarrow V=\frac{\pi}{3}(R-y)(y+R)^2$$

برای یافتن طول نقاط ماکزیمم تابع حجم، باید معادلهٔ $V'_y=0$ را حل کنیم:

$$V' = -\frac{\pi}{۳}(y+R)^{۲} + \frac{۲\pi}{۳}(R-y)(y+R) = ۰$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{۳}(y+R)(-y-R+۲R-۲y) = ۰$$

$$\Rightarrow y+R = ۰ \ , \ -۳y+R = ۰$$

$\Rightarrow y = -R$ غیرقابل قبول ، $y = \frac{R}{۳}$ قابل قبول

$$\Rightarrow h = y+R \Rightarrow \boxed{h = \frac{۴R}{۳}}$$

$$r^{۲} = R^{۲} - y^{۲} \Rightarrow r^{۲} = R^{۲} - \frac{R^{۲}}{۹} \Rightarrow r^{۲} = \frac{۸R^{۲}}{۹}$$

$$\Rightarrow \boxed{r = \frac{۲R\sqrt{۲}}{۳}}$$

مثال ۷: ضرایب a و b را در تابع با ضابطهٔ $y = \frac{x^{۲}+ax+۳}{x+b}$ بیابید ؛ به‌طوری که مختصات نقاط اکسترمم تابع در روابط $x_{Min}+x_{Max} = ۲$ و $y_{Max}+y_{Min} = ۸$ صدق کنند.

حل: بنابر قضیهٔ ماکزیمم و می‌نیمم نسبی، طول نقاط اکسترمم نسبی، تابع ریشه‌های معادلهٔ $f'(x) = ۰$ می‌باشند ؛ بنابراین داریم :

$$f(x) = \frac{x^{۲}+ax+۳}{x+b}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(۲x+a)(x+b)-(x^{۲}+ax+۳)}{(x+b)^{۲}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = ۰ \Rightarrow (۲x+a)(x+b) - x^{۲} - ax - ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow ۲x^{۲} + ۲bx + \cancel{ax} + ab - x^{۲} - \cancel{ax} - ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow x^{۲} + ۲bx + ab - ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow x_{Max} + x_{Min} = -۲b = ۲ \Rightarrow \boxed{b = -۱}$$

برای محاسبهٔ اکسترمم‌های نسبی این تابع داریم :

$$y = \frac{x^{۲}+ax+۳}{x+b} \Rightarrow y = \frac{x^{۲}+ax+۳}{x-۱}$$

$$\Rightarrow y(x-۱) = x^{۲}+ax+۳ \Rightarrow yx - y = x^{۲}+ax+۳$$

$$\Rightarrow x^{۲} + (a-y)x + y + ۳ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۰$$

$$\Rightarrow \Delta = (a-y)^{۲} - ۴(y+۳) = ۰$$

$$\Rightarrow a^{۲} + y^{۲} - ۲ay - ۴y - ۱۲ = ۰$$

$$\Rightarrow y^{۲} - (۲a+۴)y - ۱۲ = ۰$$

$$\Rightarrow y_{Max} + y_{Min} = ۲a + ۴ = ۸$$

$$\Rightarrow ۲a + ۴ = ۸ \Rightarrow ۲a = ۴ \Rightarrow \boxed{a = ۲}$$

مثال ۸: اکسترمم‌های نسبی تابع با ضابطهٔ $y = xLnx + ۱$ را بیابید.

حل: ابتدا دامنهٔ تابع را می‌یابیم :

$$y = xLnx + ۱ \Rightarrow x > ۰ \Rightarrow D_f = (۰, +\infty)$$

$$y' = Lnx + x \times \frac{۱}{x} \Rightarrow y' = ۱ + Lnx$$

$$y' = ۰ \Rightarrow ۱ + Lnx = ۰ \Rightarrow Lnx = -۱$$

$$\Rightarrow x = e^{-۱} \Rightarrow x = \frac{۱}{e} \qquad M\left|\begin{array}{l} \frac{۱}{e} \\ -\frac{۱}{e} \end{array}\right.$$

برای آن‌که ماکزیمم یا می‌نیمم بودن نقطهٔ M را بررسی کنیم، با استفاده از نتیجهٔ (۲)، داریم :

$$y'' = \frac{۱}{x} \qquad y''(\frac{۱}{e}) = e > ۰$$

چون $y'(\frac{۱}{e}) = ۰$ و $y''(\frac{۱}{e}) > ۰$ ، بنابراین نقطهٔ M، نقطهٔ می‌نیمم نسبی این تابع است.

مثال ۹: اکسترمم‌های نسبی تابع با ضابطهٔ $y = x|x+۲|+۱$ را بیابید.

حل: دامنهٔ تابع برابر است با $D = \mathbb{R}$. برای تعیین اکسترمم‌های نسبی این تابع، ابتدا تابع را برحسب ضابطه‌هایش می‌نویسیم :

$$f(x) = x|x+۲|+۱ = \begin{cases} x(x+۲)+۱ & x \geq -۲ \\ -x(x+۲)+۱ & x < -۲ \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^{۲}+۲x+۱ & x \geq -۲ \\ -x^{۲}-۲x+۱ & x < -۲ \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} ۲x+۲ & x > -۲ \\ -۲x-۲ & x < -۲ \end{cases}$$

چون تابع f در نقطهٔ $x = -۲$ مشتق‌پذیر نیست ؛ بنابراین با تعیین علامت مشتق، اکسترمم‌های نسبی را می‌یابیم :

قابل قبول

$$f'(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x>-2\ , & 2x+2=0 \Rightarrow x=-1 \\ x<-2 & -2x-2=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

غیر قابل قبول

$$f'_+(-2)=-2\ ,\ f'_-(-2)=2$$

x	$-\infty$	-2		-1	$+\infty$
y'	$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	1 Max	$\searrow$	0 Min	$\nearrow$

بنابراین : $\mathrm{Min}\begin{vmatrix}-1\\0\end{vmatrix}$ و $\mathrm{Max}\begin{vmatrix}-2\\1\end{vmatrix}$

مثال ۱۰: اکسترمم‌های نسبی تابع با ضابطهٔ $y=\frac{x}{x^2-x+1}$ را بیابید :

حل: دامنهٔ تابع برابر با $D_f=\mathbb{R}$ با استفاده از نتیجهٔ (۵) اکسترمم‌های نسبی را می‌یابیم :

$$y=\frac{x}{x^2-x+1} \Rightarrow yx^2-yx+y=x$$

$$\Rightarrow yx^2-(y+1)x+y=0 \to \Delta=0$$

$$(y+1)^2-4y^2=0 \Rightarrow (y+1)^2=4y^2$$

$$\Rightarrow y+1=\pm 2y$$

$$\Rightarrow y+1=2y \Rightarrow \boxed{y=1}$$

$$\Rightarrow y+1=-2y \Rightarrow 3y=-1 \Rightarrow y=-\frac{1}{3}$$

$$y_{Max}=1 \quad , \quad y_{Min}=-\frac{1}{3}$$

مثال ۱۱: اکسترمم‌های نسبی تابع با ضابطهٔ $y=ax^2+bx+c$ را بیابید.

حل: دامنهٔ تابع برابر $D_f=\mathbb{R}$ برای محاسبه اکسترمم‌های نسبی داریم :

$$y'=2ax+b \Rightarrow y'=0$$

$$\Rightarrow 2ax+b=0 \Rightarrow x=-\frac{b}{2a}\ ,\ y=\frac{4ac-b^2}{4a}$$

چون تابع از مرتبهٔ اوّل و دوم مشتق‌پذیر است و به علاوه $y''=2a$ ، درنتیجه، نقطهٔ $M\begin{vmatrix}-\frac{b}{2a}\\ \frac{4ac-b^2}{4a}\end{vmatrix}$ اکسترمم نسبی تابع است. اگر $a>0$ نقطهٔ M، نقطهٔ می‌نیمم نسبی، و اگر $a<0$ ، آن‌گاه M، نقطهٔ ماکزیمم نسبی است.

مثال ۱۲: مقدار a را چنان بیابید که بین عرضهای نقاط ماکزیمم و می‌نیمم تابع با ضابطهٔ $y=\frac{x^2-1}{ax^2-4x}$ رابطهٔ $y_1=4y_2$ برقرار باشد.

حل: بنابر نتیجهٔ (۵) برای تعیین عرضهای نقاط اکسترمم نسبی تابع داریم :

$$y=\frac{x^2-1}{ax^2-4x} \Rightarrow ayx^2-4yx=x^2-1$$

$$\Rightarrow (ay-1)x^2-4yx+1=0 \Rightarrow \Delta'=0$$

$$\Rightarrow \Delta'=4y^2-(ay-1)=0 \Rightarrow 4y^2-ay+1=0$$

y_1 و y_2 ریشه‌های معادلهٔ بالا هستند. می‌خواهیم رابطهٔ $y_1=4y_2$ بین y_1 و y_2 برقرار باشد، بنابراین داریم :

$$y_1=4y_2 \Rightarrow y_1+y_2=5y_2 \Rightarrow 5y_2=\frac{a}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_2=\frac{a}{20}}$$

$$4y^2-ay+1=0 \Rightarrow \frac{4a^2}{400}-\frac{a^2}{20}+1=0$$

$$\frac{a^2}{100}-\frac{a^2}{20}+1=0 \Rightarrow \frac{a^2-5a^2}{100}=-1 \Rightarrow -4a^2=-100$$

$$a^2=25 \Rightarrow \boxed{a=\pm 5}$$

(ادامه دارد)

طرح و حلّ مسائل اساسی ریاضی به روشهای مقدماتی (۲۴)

از: 100 Great problems of Elementary Mathematics

● ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور

مسأله بیلیارد «الحسن»

محاط کردن مثلث متساوی‌الساقینی که ساقهایش، از دو نقطهٔ معلوم داخل یک دایره می‌گذرند، در آن دایره.

این مسأله از ریاضیدان مسلمان **ابوعلی الحسن بن الحسن بن الهیثم** (۹۶۵ ـ ۱۰۳۹ میلادی) است، که نامش توسط مترجمان کتاب نورشناسی «optics» وی به صورت الحسن ترجمه شده است. مسألهٔ فوق در کتاب مزبور، دارای صورت زیر است:

«برآینهٔ کروی مقعری نقطه‌ای را بیابید که پرتو نورانی آینده از نقطه‌ای معلوم، باید بر آن بخورد تا به نقطهٔ معلوم دیگری منعکس شود.»

این مسأله را می‌توان به صورتهای گوناگون دیگری نیز طرح کرد؛ به عنوان مثال: *«بر یک میز بیلیارد دایره شکل، دو توپ موجود است؛ چگونه باید به یکی از آنها ضربه بزنیم تا پس از برخورد به لبهٔ میز و بازگشت، به توپ دیگر برخورد کند؟»* یا *«بر پیرامون دایره‌ای، نقطه‌ای را بیابید که مجموع فاصله‌هایش از دو نقطهٔ معلوم داخل آن دایره، برابر می‌نیمم (یا ماکزیمم) ی باشد.»*

پس از الحسن، گروه کاملی از ریاضیدانان به این مسأله پرداختند که از این قبیلند: **هویگنس** «Huygens»، **بارو** «Barrow»، **هوپیتال** «de L'Hôpital»، **ریکاتی** «Riccati» و **کولته** «Quéletet».

حل: فرض می‌کنیم دایرهٔ مفروض R، مرکزش M، شعاعش r، نقاط مفروض P و p باشند، و M مبدأ مختصات قائم xy ی باشد که در آن، P و p دارای مختصات $A|B$ و $a|b$ اند.

اگر OS و Os، که از P و p می‌گذرند، ساقهای مثلث OSs مورد جست‌وجو باشند، زاویه‌های ϕ و φ ای، که این ساقها با شعاع OM می‌سازند، باید برابر باشند.

اگر زاویه‌هایی را که خطوط PO، MO و pO با محور xها می‌سازند، با A، μ و λ نمایش دهیم، آن‌گاه، از یک طرف:

$$\phi = A-\mu \quad , \quad \varphi=\mu-\lambda$$

یا

$$\tan\phi = \frac{\tan A - \tan\mu}{1+\tan\mu\tan A} \quad , \quad \tan\varphi=\frac{\tan\mu-\tan\lambda}{1+\tan\mu\tan\lambda}$$

در حالی که، از طرف دیگر، اگر $x|y$ مختصات O باشند:

$$\tan A = \frac{y-B}{x-A} \ ، \ \tan\mu = \frac{y}{x} \ ، \ \tan\lambda = \frac{y-b}{x-a}$$

و در نتیجه، از آن‌جا که $\tan\phi = \tan\varphi$:

$$\frac{\frac{y-B}{x-A} - \frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}\,\frac{y-B}{x-A}} = \frac{\frac{y}{x} - \frac{y-b}{x-a}}{1+\frac{y}{x}\,\frac{y-b}{x-a}}$$

یا سرانجام، اگر قرار دهیم :

$$Ab+Ba=H \ , \quad Aa-Bb=K \ ,$$
$$A+a=h \ , \quad B+b=k$$

آن‌گاه :

$$H(x^2-y^2)-2Kxy+(x^2+y^2)[hy-kx]=0$$

از آن‌جا که نقطهٔ $O(x|y)$ باید روی دایرهٔ R قرار داشته باشد، نتیجه می‌شود که معادلهٔ دایره، یعنی :

$$x^2+y^2=r^2 \qquad (1)$$

در این مرحله کاربرد دارد و شرطمان به صورت زیر درمی‌آید :

$$H(x^2-y^2)-2kxy+r^2[hy-kx]=0 \qquad (2)$$

از آن‌جا که معادلهٔ (۲) نمایشگر یک هذلولی است، شرطمان صورت زیر را به خود می‌گیرد :

نقطهٔ O مورد نظر، نقطهٔ تقاطع دایرهٔ (۱) با هذلولی (۲) است.

از آن‌جا که، در حالت کلی، در مورد دایره و هذلولی، چهار نقطهٔ تقاطع موجود است، در حالت عمومی برای مسأله‌مان، چهار جواب موجود است.

در این مورد، حالت خاصی که در آن C و c، فاصله‌های نقاط P و p از مرکز M، برابرند، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در این حالت، به‌طور طبیعی عمودمنصف Pp را به عنوان محور xها اختیار می‌کنیم، و در این صورت داریم :

$$A=a,\ B=-b,\ H=0,\ K=c^2,\ h=2a,\ k=0$$

و، بنا به (۲) :

$$-2c^2xy+2ar^2y=0$$

این معادله توسط هریک از شرایط زیر برقرار است :

$$y=0 \quad (3) \qquad \text{و} \qquad x=a\frac{r^2}{c^2} \quad (4)$$

از (۳) رابطهٔ متناظر $x=\pm r$ به‌دست می‌آید. در نتیجه، نقاط تقاطع R با محور xها شرط مربوط به نقطهٔ Oای را که در جست‌وجوی آنیم، برقرار می‌کند.

از (۴) نتیجه می‌شود که :

$$\frac{c^2}{a^2}=\frac{r^2}{x}$$

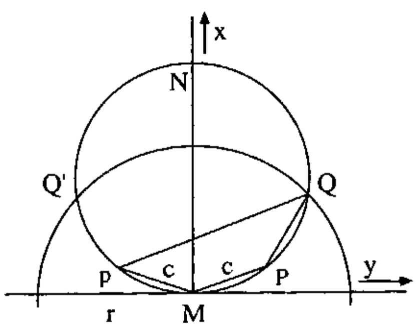
اکنون اگر از M دایرهٔ τ ای را رسم کنیم که قطر $MN=d=c^2/a$ آن بر محور xها قرار دارد، و اگر $Q(X|Y)$ نقطهٔ تقاطع این دایره با R باشد، از آن‌جا که MNQ مثلثی قائم‌الزاویه است، نتیجه می‌گیریم که :

$$MQ^2 = MN.X \ \text{یا}\ r^2=dX$$

اما، از آن‌جا که $r^2/x=d$ ، به‌دست می‌آوریم :

$$X=x$$

در نتیجه، نقاط تقاطع دایره‌های R و τ نیز شرط مربوط به نقطهٔ O ی مورد نظر را برآورده می‌کنند.



شکل ۱

برای موجود شدن این نقاط تقاطع، باید $r<d$ یا $c^2>ar$ باشد. فرض می‌کنیم این شرط برقرار است.

چهارضلعی MPpQی واقع در دایرهٔ τ چهارضلعی‌ای محاطی است، و بنابراین، بنا به قضیهٔ بطلمیوس، باید مجموع حاصل‌ضربهای ضلعهای مقابل آن، برابر حاصل‌ضرب قطرهای آن باشد :

$$PQ.Mp+pQ.MP=MQ.Pp$$

یا

$$(PQ+pQ)c=2br \qquad (5)$$

$MP.pQ'$ ، به ازای هر نقطهٔ دیگر Q' از R، محاطی نیست، و بنابراین مجموع حاصل‌ضربهای ضلعهای مقابل آن، باید بزرگتر از حاصل‌ضرب قطرهای آن باشد :

$$(PQ' + pQ')c > 2br \qquad (۶)$$

از (۵) و (۶) به‌دست می‌آوریم:

$$PQ + pQ < PQ' + pQ'$$

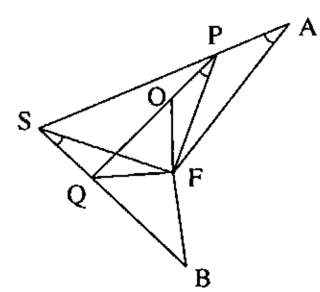
مسألهٔ: « *بر دایره‌ای مفروض، نقطه‌ای بیابید که مجموع فاصله‌هایش از دو نقطهٔ معلوم واقع بر این دایره و به فاصلهٔ برابر از نقطهٔ وسط این دایره، می‌نیمم باشد.* »، دارای جواب جالب زیر است:

نقطهٔ مورد جست‌وجو، نقطهٔ تقاطع دایرهٔ مفروض با دایره‌ای است که از دو نقطهٔ معلوم و مرکز دایرهٔ مفروض می‌گذرد.

تبصره: «الحسن» در رابطه با مسألهٔ فوق، مسألهٔ زیر را نیز حل کرد:

« *چگونه به توپی واقع در یک میز بیلیارد دایره شکل، ضربه وارد کنیم که پس از دوبار برخورد با لبهٔ میز، به‌جای اوّلش بازگردد؟* »

حل: فرض می‌کنیم میز بیلیارد دارای شعاع r و مرکز M باشد. همچنین فرض می‌کنیم موقعیت اوّلیهٔ توپ، نقطهٔ P باشد، بنابراین $MP = c$ معلوم است. فرض می‌کنیم توپ مورد بحث، ابتدا در نقطهٔ U به دایره برخورد و امتداد PM را در F به زاویهٔ قائمه قطع کند؛ سپس در V با دایره برخورد و از آن‌جا به P بازگشت کند. در این صورت: UM و VM نیمسازهای مثلث PUV اند. قرار می‌دهیم:



شکل ۲

$$MF = x,\ FU = y,\ UP = z$$

با استفاده از قضیهٔ نیمسازها در مثلث FUP:

$$y/z = x/c$$

و بنا به قضیهٔ فیثاغورس:

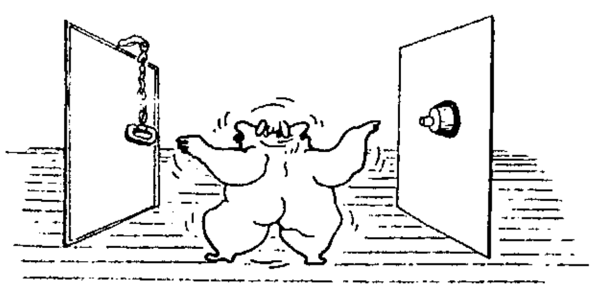
$$r^2 = x^2 + y^2 \quad , \quad z^2 = y^2 + (x+c)^2$$

اگر y و z را از این سه معادله حذف کنیم، معادلهٔ درجهٔ دوم زیر را برای مجهول x به‌دست می‌آوریم:

$$2cx^2 + r^2x = cr^2$$

از این معادله، x بسادگی قابل رسم است.

تفریح اندیشه ٤



مهرداد در انتخاب یکی از دو شرکتی که به او پیشنهاد کار داده بودند تردید داشت. اولی سالانه ۳۶۰۰۰ ریال حقوق به اضافهٔ ۲۰۰۰ ریال افزایش حقوق در هر شش ماه را پیشنهاد می‌کند، و دومی سالانه ۳۶۰۰۰ ریال حقوق به اضافه ۸۰۰۰ ریال اضافه حقوق در هر سال. مهرداد پس از آنکه خوب فکر می‌کند پیشنهاد اولی را می‌پذیرد. چرا؟

● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمه سیمین‌دخت ترکپور

جواب در صفحهٔ ۸۸

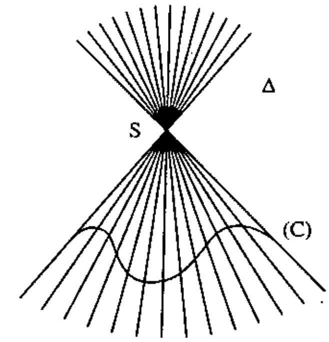
● محمد هاشم رستمی

مکان هندسی

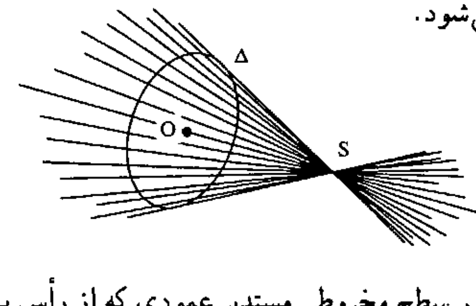
(قسمت شانزدهم)

مقطعهای مخروطی

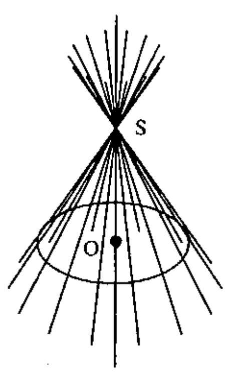
سطح مخروطی. اگر خط Δ چنان تغییر مکان دهد که همواره از نقطهٔ ثابت S بگذرد و بر منحنی ثابت (C) مماس باشد، سطحی به وجود می‌آید که آن را سطح مخروطی می‌نامند. نقطهٔ S رأس، منحنی (C) قاعده و خط Δ مولد سطح مخروطی نامیده می‌شوند.



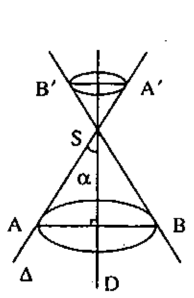
اگر قاعدهٔ سطح مخروطی دایره باشد، سطح مخروطی مستدیر نامیده می‌شود.



اگر در سطح مخروطی مستدیر عمودی که از رأس بر قاعده فرود می‌آید، از مرکز دایره بگذرد، سطح مخروطی را «دوّار» می‌نامند. در این حالت، این خط عمود را محور سطح مخروطی دوّار می‌نامند.



سطح مخروطی دوّار را به صورت زیر نیز می‌توان تعریف نمود: دو خط راست Δ و D متقاطع در نقطهٔ S را در نظر می‌گیریم.



اگر خط D ثابت بماند و خط Δ حول خط D ، چنان دوران نماید که همواره از نقطهٔ ثابت S بگذرد و با خط D، زاویهٔ ثابتی مانند α بسازد، سطحی به وجود می‌آورد که آن را سطح مخروطی دوّار می‌نامند. نقطهٔ S رأس، خط Δ مولد و خط D محور سطح

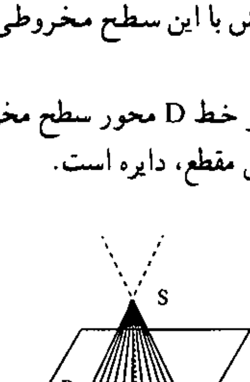
مخروطی دوّار نامیده می‌شوند.

چون خط Δ محدود نیست، سطح مخروطی در دو طرف S به وجود می‌آید که هر جزء را که در یک طرف رأس باشد، یک دامنهٔ سطح مخروطی می‌نامند.

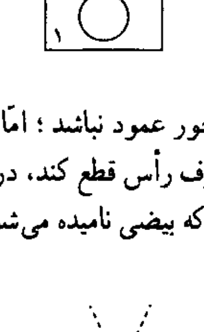
مخروط. اگر قاعدهٔ سطح مخروطی، مسطح و بسته باشد، بخشی از سطح مخروطی که بین رأس و قاعدهٔ آن محصور است، مخروط می‌نامند. بدیهی است در صورتی که سطح مخروطی مستدیر یا دوّار باشد، مخروط نیز بترتیب، مستدیر یا دوّار خواهد بود.

فصل مشترک صفحه با سطح مخروطی دوّار. اگر صفحهٔ P از نقطهٔ S رأس سطح مخروطی دوّار به مولد Δ و محور نگذرد، فصل مشترکش با این سطح مخروطی دوّار، به یکی از صورتهای زیر است:

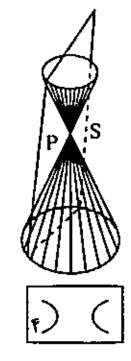
الف. صفحهٔ P بر خط D محور سطح مخروطی عمود باشد در این صورت منحنی مقطع، دایره است.



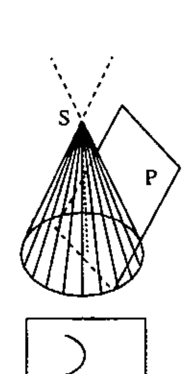
ب. صفحهٔ P بر محور عمود نباشد؛ امّا تمام مولدهای سطح مخروطی را در یک طرف رأس قطع کند، در این صورت مقطع، منحنی مسدودی است که بیضی نامیده می‌شود.



پ. صفحهٔ P برخی از مولدها را در یک طرف رأس و برخی دیگر را در طرف دیگر آن قطع کند، یا به بیان دیگر، صفحهٔ هر دو دامنهٔ سطح مخروطی را تلاقی نماید. در این صورت، مقطع، منحنی است که از دو شاخهٔ متمایز و نامسدود تشکیل می‌شود که به آن هذلولی می‌گویند.

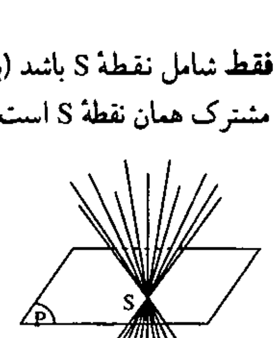


ت. صفحهٔ P با یکی از مولدهای سطح مخروطی موازی باشد. در این صورت، مقطع، منحنی نامسدودی است که سهمی نامیده می‌شود.



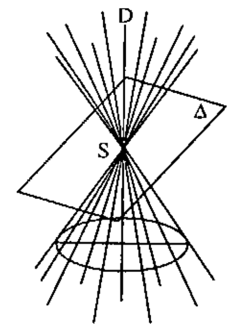
حالتهای ویژه. اگر صفحهٔ P بر نقطهٔ S رأس مخروطی دوّار بگذرد، فصل مشترک آن با سطح مخروطی دوّار به یکی از صورتهای زیر است:

۱. اگر صفحهٔ P **فقط** شامل نقطهٔ S باشد (بر هیچ یک از مولدها نگذرد)، فصل مشترک همان نقطهٔ S است.

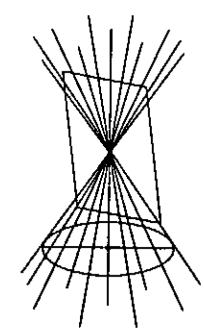


این حالت را حالت خاص دایره می‌نامند.

۲. اگر صفحهٔ P شامل تنها یک مولد سطح مخروطی دوّار باشد، مقطع یک خط راست است که صفحه در طول همین خط راست بر سطح مخروطی مماس است. این حالت را، حالت خاص سهمی می‌نامند.



۳. اگر صفحه شامل دو مولد سطح مخروطی دوّار باشد، فصل مشترک دو خط متقاطع است (همان دو مولد). این حالت را، حالت خاص هذلولی می‌نامند.



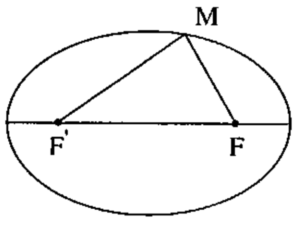
مقطعهای مخروطی. دایره، بیضی، هذلولی و سهمی را که فصل مشترک یک صفحه با یک سطح مخروطی دوّار (در حالتهای مختلف) می‌باشند، مقطعهای مخروطی می‌نامند که در حالتهای ویژه به نقطه، یک خط یا دو خط متقاطع تبدیل می‌شوند.

بیضی. بیضی مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه است که مجموع فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت واقع در آن صفحه، مقدار ثابتی باشد. دو نقطهٔ ثابت را کانونهای بیضی نامیده و معمولاً به F و F′ نشان می‌دهند. مقدار ثابت را عدد ثابت بیضی نامیده و به ۲a نشان می‌دهند.

فاصلهٔ بین دو کانون را که عدد ثابتی است، فاصلهٔ کانونی بیضی می‌نامند و به ۲c نمایش می‌دهند.

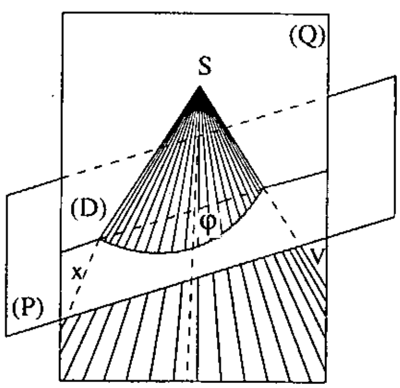
اگر M نقطه‌ای واقع بر بیضی به کانونهای F و F′ و عدد ثابت ۲a باشد، داریم:

$$MF + MF' = 2a$$



قضیهٔ داندلن. اگر صفحه‌ای همهٔ مولدهای سطح مخروطی دوّاری را در یک طرف رأس قطع کند، مقطع آن با سطح مخروطی دوّار یک بیضی است.

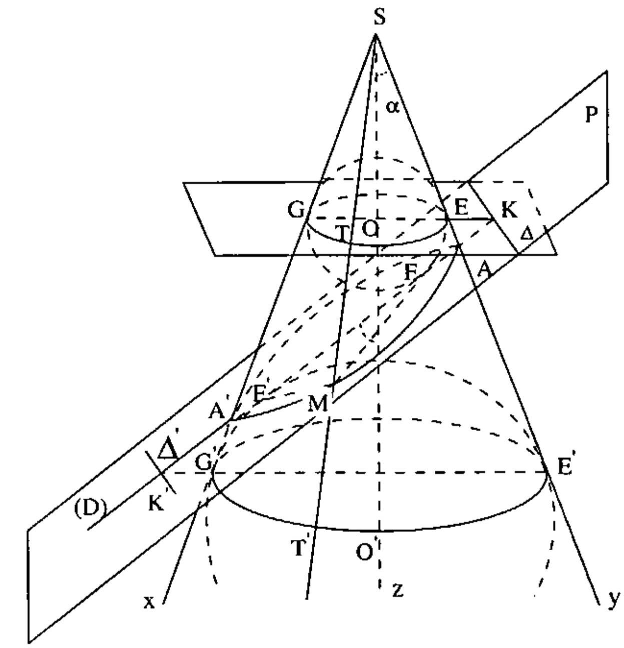
اثبات به روش هندسی. سطح مخروطی دوّار به رأس S و محور D، و صفحهٔ P را که همهٔ مولدهای سطح مخروطی را در یک طرف S قطع کرده است، در نظر می‌گیریم.



نخست صفحهٔ Q را چنان بر محور سطح مخروطی دوّار مرور می‌دهیم که بر صفحهٔ قاطع P عمود باشد و آن را صفحهٔ شکل می‌نامیم. سپس برای ساده کردن اثبات این قضیه، سطح مخروطی و صفحهٔ قاطع را بر صفحهٔ شکل تصویر می‌کنیم. تصویر صفحهٔ P بر صفحهٔ شکل و مقطع آن با صفحهٔ مذکور، خطی مانند D، و تصویر سطح مخروطی دوّار بر صفحهٔ شکل و فصل مشترکش با آن صفحه، زاویهٔ xSy خواهد بود. چون صفحهٔ P تمام مولدها را در یک طرف رأس S قطع کرده است، خط D دو ضلع زاویهٔ xSy را در یک طرف رأس S قطع می‌کند. (شکل)

زاویهٔ بین خط D و محور مسطح مخروطی دوّار که آن را با φ نشان می‌دهیم، زاویهٔ محور با صفحهٔ قاطع است. اگر α

زاویهٔ مولد با محور سطح مخروطی دوّار باشد، چون صفحهٔ قاطع در یک طرف S قرار دارد و عمود بر محور نیست، $\alpha < \varphi < 90^\circ$ است.



نقطه‌های برخورد خط D با Sy و Sx را به ترتیب، A و A′ می‌نامیم. دایره‌های محاطی درونی و محاطی خارجی مماس بر ضلع AA′ از مثلث SAA′ را رسم می‌کنیم. نقطه‌های تماس دایرهٔ محاطی درونی (O) با ضلعهای SA، AA′ و SA′ را به ترتیب، E، F و G و نقطه‌های تماس دایرهٔ محاطی بیرونی (O′) با ضلعهای Sy، AA′ و Sx را بترتیب، E′، F′ و G′ می‌نامیم. حال ثابت می‌کنیم که مقطع یک بیضی است که A و A′ رأسهای محور بزرگ و F و F′ دو کانون آن هستند. زاویهٔ xSy و دایره‌های O و O′ را در حول محورSZ یک دور دوران می‌دهیم ؛ از دوران دایره‌های محاطی درونی و برونی، دو کره به وجود می‌آیند که به ترتیب، در F و F′ بر صفحهٔ قاطع و در طول دو دایره به قطرهای EG و E′G′ بر سطح مخروطی مماسند. حال اگر M یک نقطهٔ دلخواه از منحنی مقطع باشد، باید ثابت کنیم که :

$$MF + MF' = AA'$$

اگر نصف محیط مثلث SAA′ را P بنامیم، داریم :

$$FA = AE = P - SA'$$

و :

$$F'A' = A'G' = P - SA'$$

پس :

$$FA = F'A' \text{ و } AF' = AE'$$

بنابراین از یک طرف :

$$AF + AF' = A'F' + AF' = AA'$$

و از طرف دیگر :

$$AF + AF' = AE + AE' = EE'$$

پس :

$$EE' = AA'$$

چون M در صفحهٔ قاطع است، MFمماس بر کرهٔ O و MF′ مماس بر کرهٔ O′ است ؛ و چون M روی سطح مخروطی است مولد SM بر کره‌های O و O′ مماس است (T و T′ نقطه‌های تماس، روی دایره‌های تماس واقعند).

پس :

$$MF = MT$$

و :

$$MF' = MT'$$

یعنی :

$$MF + MF' = MT + MT' = TT'$$

و چون تمام مولدهای مخروط ناقص، واقع بین دو دایرهٔ تماس، با هم برابرند، $TT' = EE' = AA'$ ؛ یعنی :

$$MF + MF' = AA'$$

و با فرض $AA' = 2a$ ، خواهیم داشت :

$$MF + MF' = 2a$$

معمّاهایی با ماهیت ریاضی

(قسمت اوّل)

● هوشنگ شرقی

در ریاضیات و بخصوص ریاضیات نوین، همواره با مسأله‌هایی روبه‌رو بوده‌ایم که از آنها به‌عنوان ساختمانهای غیرعادی یاد می‌شود. مسائلی در محدودهٔ این ساختمانها قرار دارند که به هیچ یک از گروه‌های کلاسیک ریاضی (جبر، آنالیز، ترکیبیات، هندسه و...) تعلّق ندارند یا لااقل به‌طور مستقیم به آنها مربوط نمی‌باشند و در نظر اوّل، نمی‌توان تشخیص داد که به کدام مبحث ریاضی تعلّق دارند. در مثالهایی که در این گفتار می‌آوریم، خواننده، این موضوع را به روشنی مشاهده می‌کند و زیبایی خیره‌کنندهٔ این مسائل را که در همین شناوری آنها نهفته است، درک می‌کند. مثلاً چه‌قدر زیباست که یک مسألهٔ ریاضی که به نظر می‌رسد ماهیتی جبری دارد، به شیوه‌ای هندسی حل شود. در این جا ما تلاش کرده‌ایم مثالهای خود را به‌گونه‌ای طبقه‌بندی کنیم که مثالهای هر گروه، به نوعی، با یکی از مباحث کلاسیک ریاضی مربوط باشد (هر چند به ظاهر چنین به نظر نیاید) و این کار را با مسأله‌هایی آغاز می‌کنیم که به بحث استقرای ریاضی مربوط می‌شوند. فرض بر این است که خواننده با اصل استقرای ریاضی که در کتابهای مختلف و از جمله کتاب جبر و احتمال سوّم ریاضی، و ریاضی گسسته دورهٔ پیش‌دانشگاهی و سایر کتابهای کمک درسی فراوان مورد بحث قرار گرفته است، آشنایی کافی دارد. پیش از شروع مثالها، اکیداً توصیه می‌کنیم، خواننده پیش از خواندن راه حلّ خود، روی مسأله، تدبیر کافی نماید که در این صورت، زیبایی مسأله‌ها را بهتر درک خواهد کرد.

حل مسأله‌هایی به کمک اصل استقرای ریاضی

مثال ۱: در یک جزیرهٔ دور افتاده و در دل آب و به دور از تمدن بشری، مردمان قبیلهٔ «تروگالیا» زندگی آرام خود را ادامه می‌دادند. در این نوع، زندگی بدوی این مردم، هیچ گونه وسیلهٔ ارتباط کلامی یا اشاره‌ای با هم نداشته و حتی آیینه‌ای هم ندارند که چهرهٔ خود را در آن ببینند، و تنها و تنها رئیس قبیله است که با زبان خاصّ خود که همهٔ افراد آن را می‌فهمند، می‌تواند برای افراد قبیله صحبت کند و دستورهای خود را که حتماً باید اجرا شود، به آنها ابلاغ نماید و این کار، هر روز صبح، یک بار در میدان اجتماعات عمومی قبیله انجام می‌شود، که در آن همه حاضر می‌شوند. آن روز صبح، رئیس قبیله با چهره‌ای برافروخته، روبه همهٔ افراد کرد و گفت: «در بین شما عده‌ای هستند که روی پیشانی خود، علامتی دارند، اینها فوری بروند و خودکشی کنند!» یک ماه بعد، جمعی از افراد خودکشی کردند. آنها چند نفر بودند و از کجا پی به این که روی پیشانی خود علامتی دارند، بردند؟ باز هم تکرار می‌شود که آنها هیچ وسیله‌ای برای دیدن چهرهٔ خود (اعم از آیینه، آب شفّاف یا ...) ندارند و هیچ نوع ارتباط زبانی یا اشاره‌ای هم با هم ندارند و با لمس کردن هم نمی‌توانند پی به وجود علامت روی پیشانی خود برند. و باز توصیه می‌کنیم، پیش از آن که وسوسه شوید، پاسخ را بخوانید و خوب به راه حلّ آن بیندیشید. در این صورت، به پیچیدگی معمّا بیشتر پی می‌برید.

***

پاسخ: شاید به‌طور مستقیم به نظر نیاید؛ ولی مسأله، ماهیّتی استقرایی دارد. فرض کنید، تنها یک نفر در قبیله بر پیشانی خود، علامت داشته باشد، در این صورت، او با مشاهدهٔ سایر افراد که روی پیشانی خود علامت ندارند، فوری درمی‌یابد که تنها خودش روی پیشانی علامت دارد و همان روز اوّل، خودکشی می‌کند. اما اگر در قبیله دو نفر بر پیشانی علامت داشته باشند، هر یک از آنها در بین جمع، یک نفر را دارای علامت می‌بیند و با اتّکا به استدلال قبلی، می‌فهمد که اگر همان یک نفر دارای علامت باشد، باید روز حکم، خودکشی کند و لذا یک روز صبر می‌کند و چون پس از یک روز، متوجه عدم خودکشی آن نفر می‌شود، درمی‌یابد که خود نیز بر پیشانی علامت دارد و روز دوم، هر دو، همزمان خودکشی می‌کنند. لازم به ذکر است که در این‌جا سایر افراد دو نفر را می‌بینند که بر پیشانی علامت دارند و بیشتر (در قسمت بعدی می‌بینیم که دو روز) صبر می‌کنند. به همین ترتیب، اگر سه نفر بر پیشانی علامت داشته باشند، هر یک از آنها، می‌بینند که دو نفر بر پیشانی خود علامت دارند و مطابق استدلال قبل، اگر همین دو نفر علامت داشته باشند، باید روز دوم خودکشی نمایند، و چون روز سوم فرا رسید و هر سه نفر دیدند که هیچ کدام خودکشی نکرده‌اند، همه همزمان در روز سوم خودکشی می‌کنند. نکتهٔ جالب در این مسأله، تقارن دیدگاه همهٔ افراد دارای علامت می‌باشد که احساس مشترکی را به آنها القا می‌کند و همین، برای سایر افراد نیز صادق می‌باشد.

حدس استقرایی چه می‌گوید؟ «اگر n نفر در قبیله، دارای علامتی بر پیشانی خود باشند، باید روز nام خودکشی کنند.»

اکنون این حدس را به استقرای ریاضی، ثابت می‌کنیم:

درستی گزاره برای $n=1$ را قبلاً ثابت کرده‌ایم. اکنون فرض می‌کنیم گزاره برای $n=k$ درست باشد؛ یعنی اگر k نفر دارای علامت بر پیشانی خود باشند، روز kام خودکشی کنند، درستی گزاره برای $n=k+1$ نیز بسادگی اثبات می‌گردد و گذر استقرایی انجام می‌شود. فرض کنیم: $k+1$ نفر در پیشانی خود علامت داشته باشند، هر یک از آنها چه می‌بینند؟ k نفر را که بر پیشانی علامت دارند و طبق فرض استقرا باید روز kام خودکشی کنند. (اگر فقط همین k نفر علامت داشته باشند) پس k روز صبر می‌کنند و چون روز $k+1$ام فرا رسد، همه همزمان می‌فهمند که خودشان نیز علامت دارند و همان روز، همگی به یقین رسیده و خودکشی می‌کنند.

با توجه به حکم استقرای فوق، روشن است که وقتی این افراد روز سی‌ام خودکشی می‌کنند، باید سی نفر بوده باشند.

اینک یک سؤال بامزه از شما می‌کنیم: اگر این افراد، از دستور رئیس سرپیچی کنند و خودکشی نکنند، چه اتفاقی می‌افتد؟!

مثال ۲: هر چند حق داشتید که بپرسید افراد قبیلهٔ مثال ۱ که این‌قدر فهیم هستند و توانایی استدلال استقرایی را دارند، چرا از حداقل لوازم تمدن بی‌بهره‌اند؛ ولی نباید غافل بود که تبعیت آنها از دستور نابخردانه رئیس خود، مبنی بر خودکشی بی‌دلیل، نشانهٔ دوری آنها از تمدن انسانی است، اینک مثالی دیگر داریم از افرادی که به نوع دیگری از تمدن انسانی بدورند و به جای خودکشی، به دیگرکشی دست می‌زنند:

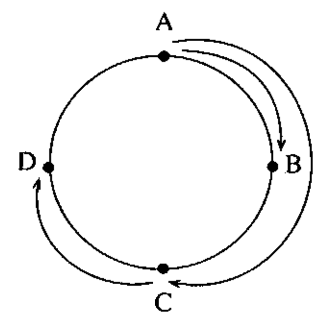
به تعداد ۴۰۹۶ نفر دور یک دایره ایستاده‌اند و همزمان، هر یک به سمت نفر بعدیِ خود (در جهت حرکت عقربه‌های ساعت) تیراندازی می‌کند. بدیهی است که نفر اوّل، نفر دوم را می‌کشد و نفر سوم، نفر چهارم را و... سپس همین روال تکرار می‌شود.

بگویید آخرین فردی که زنده می‌ماند، چندمین نفر است؟ (نسبت به اولین نفری که تیراندازی کرده است.)

***

پاسخ: همان نفر اول

. بسادگی درمی‌یابیم که $۲^{۱۲} = ۴۰۹۶$ ، اینک فرض می‌کنیم که این افراد، دو نفر بودند (A و B) بدیهی است که اگر A اول شلیک کند، B می‌میرد و A زنده می‌ماند. اگر این افراد ۴ نفر باشند، (A و B و C و D) مطابق دیاگرام زیر، اول A شلیک کرده و B می‌میرد، سپس C شلیک کرده و D می‌میرد، و حالا نوبت A است که با شلیک خود، C را از بین برده و خود زنده می‌ماند.



اگر عدهٔ این افراد، هشت نفر باشند نیز، ابتدا نفرات دوم، چهارم، ششم و هشتم می‌میرند، آن‌گاه، نفرات سوم و هفتم، و دست آخر، نفر پنجم توسط نفر اول به قتل می‌رسد (زیرا آخرین نوبت شلیک، متعلق به A می‌باشد) و به این ترتیب، باز هم A زنده می‌ماند.

حدس استقرایی: اگر ۲^n نفر دور یک دایره ایستاده و به ترتیب فوق، به هم شلیک کنند، آخرین نفر که زنده می‌ماند، اولین نفری است که شلیک کرده است.

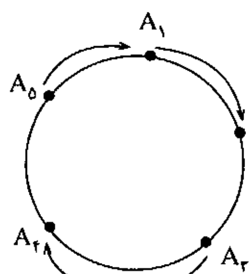
اثبات: برای $n = ۱$ قبلاً استدلال شده است. اگر حکم برای $n = k$ درست باشد؛ یعنی اگر عدهٔ افراد ۲^k باشد، نفر اول زنده بماند، ثابت می‌کنیم برای $n = k + ۱$ هم درست است.

یعنی اگر عدهٔ افراد $۲^{k+۱}$ نفر باشد، باز هم همان نفر اول زنده می‌ماند.

استدلال ساده است، $۲^{k+۱} = ۲ \times ۲^k$ ، بنابراین وقتی نفر اول شلیک می‌کند، نیمی از افراد که در ردیفهای زوج ایستاده‌اند، همگی می‌میرند و عدهٔ افراد به ۲^k نفر کاهش می‌یابد و نوبت شلیک نیز به همان نفر اول می‌رسد. اینک ۲^k نفر می‌مانند و طبق فرض استقرا، با شروع دوبارهٔ شلیک، همان نفر اول زنده خواهد ماند.

مطابق حکم استقرایی فوق، اگر عدهٔ افراد ۴۰۹۶ نفر باشد، همان اولین نفر که شلیک کرده، زنده خواهد ماند.

اینک به طرح مسأله‌ای دیگر در همین راستا می‌پردازیم. اگر عدهٔ افراد ۲^n نباشد، کدام فرد زنده می‌ماند. با مثالهای مختلف، سعی کنید نتیجه‌های به‌دست آمده را کنار هم گذاشته و حدس بزنید، مثلاً اگر عدهٔ افراد پنج نفر باشد، روشن است که مطابق دیاگرام زیر، نفر سوم زنده خواهد ماند. ($A_۱$ ابتدا شلیک کرده است) و اگر عدهٔ افراد، ۷ نفر باشد، نفر هفتم و چنانچه عده افراد ۱۰ نفر باشد، در آخر، نفر پنجم باقی می‌ماند (با رسم نمودار تحقیق کنید) و اگر عدهٔ افراد ۱۳ نفر باشد، نفر هفتم زنده می‌ماند.



حدس استقرایی: اگر N نفر دور دایره‌ای ایستاده و به طریق پیش که گفته شد، به هم تیراندازی کنند، در آخر، نفر ردیف kام زنده می‌ماند؛ به‌طوری که اگر عدد N در مبنای ۲ به‌صورت $N = (a_n a_{n-۱} \dots a_۱ a_۲)_۲$ نوشته شود، عدد k در مبنای ۲ به صورت $k = (a.a_n a_{n-۱} \dots a_۱)_۲$ نوشته می‌شود؛ یعنی برای یافتن شمارهٔ شخصی که زنده می‌ماند، باید عدهٔ افراد را به مبنای ۲ برد و، آخرین رقم سمت چپ را به راست انتقال داد. عدد حاصل، معرّف شمارهٔ شخصی است که زنده می‌ماند. به‌عنوان مثال، وقتی $N = ۱۷$ باشد، خواهیم داشت:

$$N = (۱۰۰۰۱)_۲ \Rightarrow k = (۰۰۰۱۱)_۲ = ۳$$

یعنی نفر سوم زنده می‌ماند.

برای مطالعهٔ بیشتر در این زمینه و اثبات رابطهٔ قبل می‌توانید به مقاله‌ای که ترجمه‌ای است از خانم «شادی رستمی» به نام «مسائل بازگشتی»، مندرج در شمارهٔ اول «فصلنامهٔ المپیاد»، نشریهٔ مرکز المپیاد علمی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش پاییز ۱۳۷۳ رجوع کنید.

مثال ۳: در یک پادگان ۱۰،۰۰۰ سرباز و افسر و درجه‌دار مشغول خدمت هستند. سنّ این افراد، همگی بین ۲۱ و ۴۱ سال می‌باشد. مجموع سنین این افراد، چه عددی می‌تواند باشد؟ روشن

است که حداکثر این عدد، ۴۱۰۰۰۰ می‌باشد و می‌نیمم آن ۲۱۰,۰۰۰ است.

سؤال ما این است: کدام عدد طبیعی بین این دو عدد، نمی‌تواند عدد مجموع سنین این نظامیان باشد؟

***

پاسخ سؤال به نظر قدری مشکل می‌آید و در واقع، با استفاده از نمادگذاری جبری، به این مسأله تبدیل می‌شود: معادلهٔ سیّالهٔ خطی $۲۱x + ۲۲x_۲ + ... + ۴۱x_{۲۱} = n$ به‌ازای کدام عدد طبیعی $۲۱۰,۰۰۰ \le n \le ۴۱۰,۰۰۰$ دارای جواب نمی‌باشد؟ ممکن است پاسخگویی به این سؤال، با شیوه‌های معمول، در نظریهٔ اعداد دشوار باشد؛ ولی با استفاده از استقرای ریاضی، حلّ مسأله آسانتر می‌شود. در واقع، با استقرا ثابت می‌کنیم که این معادله، به ازای جمیع مقادیر طبیعی n، به قسمی که $n \ge ۲۱۰,۰۰۰$ دارای جواب می‌باشد.

به ازای $n = ۲۱۰,۰۰۰$ درستی گزاره بدیهی است؛ زیرا با اختیار کردن $x_۱ = ۱۰,۰۰۰$ و $x_۲ = x_۳ = ... = x_{۲۱} = ۰$ یک جواب قابل قبول به‌دست می‌آید. فرض می‌کنیم: حکم به‌ازای $n = k$ درست باشد و ثابت می‌کنیم به‌ازای $n = k + ۱$ نیز صحیح است. اگر معادلهٔ $۲۱x + ۲۲x + ... + ۴۱x_{۲۱} = k$ دارای یک دسته جواب باشد، آن‌گاه روشن است که:

$$۲۱x_۱ + ۲۲x_۲ + ... + ۴۱x_{۲۱} + ۱ = k + ۱$$

حال اگر حتی یکی از x_iها به ازای $۱ \le i \le ۲۰$ مخالف صفر باشد، آن‌گاه این عدد ۱ را به یکی از ضرایب عددی همان x_i اضافه نموده و از ضرایب آن، یک واحد کم می‌کنیم؛ یعنی:

$$۱ + ax_i = a(x_i - ۱) + (a + ۱)$$

به عنوان مثال:

$$۱ + ۲۵x_۳ = ۲۶ + (x_۳ - ۱)۲۵$$

مفهوم این کار، یعنی این‌که اگر حتی یک نظامی ۲۵ ساله در جمع باشد، آن یک سال اضافه را به او داده و با حذف او، یک نظامی ۲۶ ساله جایگزین می‌کنیم. با روش فوق ثابت می‌شود که به هر حال، یک دسته جواب قابل قبول برای معادله به ازای $n = k + ۱$ وجود دارد. اگر هم همهٔ ضرایب x_i از $i = ۱$ تا $i = ۲۰$ صفر باشد (یعنی همهٔ پادگان از افراد ۴۱ ساله تشکیل شده باشد)، در آن صورت، آن یک سال اضافه را به یکی از افراد ۴۱ ساله اضافه کرده و او را حذف و دو نفر ۲۱ ساله اضافه می‌کنیم.

یعنی: $۴۱x_{۲۱} + ۱ = (x_{۲۱} - ۱)۴۱ + ۲ \times ۲۱$

که باز هم یک دسته جواب قابل قبول به‌دست می‌آید و حکم استقرا ثابت می‌شود.

اینک در انتهای این فصل، تعدادی مثال برای کار فکری مستقل شما مطرح می‌شود. تلاش کنید با تعمّق و تدبّر روی این مثالها، الگوی استقرایی آنها را کشف کرده و با استقرای ریاضی، آنها را حل کنید. مثالها، از آسان به مشکل ردیف شده‌اند.

تمرین ۱: تعداد $۳^{۱۰۰}$ سکهٔ مختلف داریم که به لحاظ ظاهری، به‌طور کامل مشابه و یکسان می‌باشند و به هیچ وجه تمایزی ندارند و یکی از آنها، از بقیه سنگینتر می‌باشد. حداکثر، چند بار لازم است که از یک ترازوی دو کفّه‌ای استفاده شود، تا سکهٔ سنگینتر پیدا شود؟

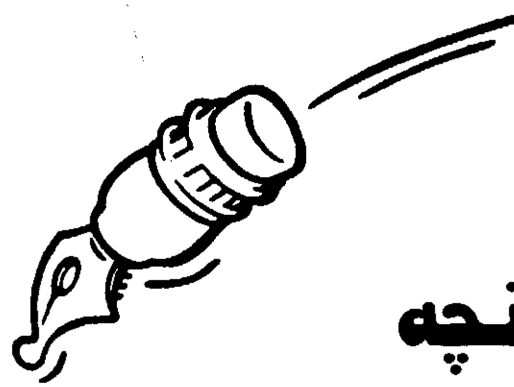
تمرین ۲: در یک کشور، ۱۳۷۷ شهر با ۲۷۵۳ جادهٔ یکطرفه، به یکدیگر مربوطند و بدون نقض قانون، حرکت در جاده‌های یکطرفه، می‌توان از شهری به شهر دیگر و از طریق این جاده‌ها حرکت کرد. ثابت کنید که همیشه جاده‌ای هست که با بستن آن، باز هم این امکان حفظ می‌شود.

تمرین ۳: در یک کشور، تعدادی شهر، ساخته شده و این شهرها هنوز با جاده‌های یکطرفه یا دوطرفه، به هم مربوط نشده‌اند. ثابت کنید که همیشه می‌توان آنها را با جاده‌های یکطرفه و دوطرفه، طوری به هم مربوط کرد که هر سه شهر دلخواه از این شهرها را که انتخاب کنیم، تعداد شهرهایی که از هر یک از آنها به طور مستقیم می‌توانیم به آنها مسافرت کنیم، سه عدد مختلف باشد.

تمرین ۴: ۲۰۰ نفر در یک مسابقهٔ شطرنج شرکت کرده‌اند. در ضمن، هر دو نفر از آنها بیش از یک دور با هم بازی نمی‌کنند. ثابت کنید، اگر بدانیم هیچ سه نفری وجود ندارند که با هم سه بار بازی کرده باشند، آن‌گاه تعداد دورهای بازی بیش از ۱۰,۰۰۰ دور نیست.

تمرین ۵: در کشوری، تعدادی شهر ـ که بیش از دوتاست ـ وجود دارد که قرار است با جاده‌های یکطرفه به هم مربوط شوند. ثابت کنید که می‌توان جاده‌ها را طوری کشید که از هر شهر، بتوان به هر شهر دیگر و حداکثر با دو مسافرت بین شهری، سفر کرد.

تمرین ۶: ثابت کنید، هر مربع دلخواه را می‌توان با برشهای مناسب، به قطعه‌هایی تبدیل کرد که با پهلوی هم قرار دادن این قطعه‌ها، ۱۳۷۷ مربع دیگر درست شود.



آنچه از دوست رسد ...

با اهداء سلام، خدمت همهٔ دانش‌آموزان و خوانندگان محترم مجلهٔ ریاضی برهان

دوستان گرامی، هر روز نامه‌های پرمحتوا و مقاله‌ها و مسأله‌های شما به دستمان می‌رسد، از خداوند بزرگ سپاسگزاریم که توفیق خدمت به شما دانش‌پژوهان را به ما ارزانی داشته است. هیأت تحریریهٔ مجله، پس از مطالعه، بحث و تبادل نظر پیرامون نامه‌های ارسالی شما عزیزان، دربارهٔ موضوعهای زیر، اتفاق نظر داشتند :

۱ـ در شمارهٔ ۲۷ مجلّه، پرسشهای چهارگزینه‌ای مربوط به درسهای ریاضی نیمسال اوّل با کلید آورده شود و حلّ تشریحی آنها را در شمارهٔ ۲۸ می‌آوریم.

۲ـ در شمارهٔ ۲۸ مجلّه، پرسشهای چهارگزینه‌ای مربوط به درسهای ریاضی نیمسال دوم را با حلّ تشریحی می‌آوریم.

۳ـ از این به بعد در هر شمارهٔ مجلّه علاوه بر مسائل برای حل، پرسشهای چهارگزینه‌ای نیز آورده شود.

اسامی تعدادی از خوانندگان مجلّهٔ ریاضی برهان که برای ما نامه ارسال کرده‌اند:

آقایان : نعیم یوسفی‌فرد (قائم‌شهر)، فرهاد اعلی فرد (اصفهان)، حامد اولاد غفاری (تبریز) ، داود خجسته (سالکویه) ، محمود نوری (گنبدکاوس)، جواد روحی (مشهد مقدس)، حنیف احمدی (رشت)، همکارمحترم آقای ابوالفضل شریعتی (اصفهان)، احمد عباس‌پور تربتی (تهران)، فرزاد هانی‌نژاد (تهران)، آرمین جعفری‌یگانه (کرج)، صادق میرشکاریان (شهربابک)، نیما پورجلالی (بابل)، اولاد عفاری و سیّدهاشمی (تبریز)، روزبه فاضل (تهران) ، بهزاد کاظمی (اهواز)، یاشار حبیب‌یار (زنجان)، همکار محترم آقای غلامرضا خسروجردی (سبزوار)، علی مشکین‌قلم (تبریز)، محمدحسین الاردبیلی (تبریز) و خانمها رعنا آهک‌چی (سلمان‌شهر)، نسیبه نصیری (خوی)، آسیه جعفری (بجنورد).

از همگی شما برای ارسال مقاله‌های درسی و کمک‌درسی، مسأله،تست با حل تشریحی سپاسگزاریم، در صورت امکان از مقاله‌ها و مسأله‌های ارسالی شما عزیزان، پس از تصویب در هیأت تحریریه، استفاده خواهیم کرد.

پاسخ برخی از اشکالات شما عزیزان را یادآور می‌شویم :

آقای امیرحسین قدم‌السلطانی (مشهد مقدس)، حلّ درست مسأله‌هایی را که فرستاده‌اید، می‌توانید در جلدهای اوّل و دوم دایرةالمعارف هندسه، تألیف آقای محمدهاشم رستمی، از انتشارات مدرسه، ملاحظه کنید.

آقای امین صوری (اصفهان) مسأله‌های ارسالی شما به دستمان رسید، ان‌شاءا... مورد استفاده قرار می‌گیرد. در مورد مسأله‌ای که اشکال دارید به جلد اوّل دایرةالمعارف هندسه، تألیف آقای محمدهاشم رستمی از انتشارات مدرسه مراجعه کنید.

آقای ابوالقاسم عباسی (نجف‌آباد)، شما در راه‌حلتان از قضیهٔ «دو خط عمود بر یک خط با یکدیگر موازیند» استفاده کرده‌اید، که این مطلب، نتیجه‌ای از اصل توازی اقلیدس است. برای اطلاع

بیشتر از این مطلب و کارهای انجام شده برای اثبات اصل توازی به کتاب هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی، تألیف گرینبرگ مراجعه کنید.

آقای مهرداد کیائی (تبریز)، برای به دست آوردن معادلهٔ عمود مشترک دو خط به معادله‌های:

$$D: x-2=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{-3}\ ,\quad D':\frac{x}{-2}=y-2=z-4$$

راه حلّ ساده‌تری وجود دارد که در زیر آمده است:

$$M\in D\left|\begin{array}{l} t+2\\ 2t+2\\ -3t-1\end{array}\right. ,\qquad M'\in D'\left|\begin{array}{l} -2t'\\ t'+2\\ t'+4\end{array}\right.$$

$$\overrightarrow{M'M}=\left|\begin{array}{l} t+2+2t'\\ 2t+2-t'-2\\ -3t-1-t'-4\end{array}\right. ,\quad L=\left|\begin{array}{l} 1\\ 2\\ -3\end{array}\right. ,\quad L'=\left|\begin{array}{l} -2\\ 1\\ 1\end{array}\right.$$

$$\overrightarrow{M'M}\perp D \Rightarrow t+2t'+2+4t-2t'+9t+3t'+15=0$$

$$\overrightarrow{M'M}\perp D' \Rightarrow -2t-4t'-4+2t-t'-3t-t'-5=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases} t=-1\\ t'=-1\end{cases} ;\quad M\left|\begin{array}{l} 1\\ 0\\ 2\end{array}\right. ,\quad M'\left|\begin{array}{l} 2\\ 1\\ 3\end{array}\right.$$

معادلهٔ عمود مشترک $M'M:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{-1}$

حل مسائل مسابقه‌ای برهان ۲۵

از بین عزیزان دانش‌آموز که مسائل مسابقه‌ای برهان ۲۵ را کامل حل کرده‌اند، حل آقای علیرضا قزلسفلو از شهرستان مینودشت را انتخاب کرده‌ایم که به دلیل خط بسیار زیبای ایشان عیناً متن ارسالی را به چاپ می‌رسانیم (با تشکر از نامبرده).

بسمه تعالی — مورخ: ۱۳۷۷/۲/۱۸

با عرض سلام و خسته نباشید خدمت دست اندرکاران و هیأت تحریریهٔ مجلهٔ ریاضی برهان اینجانب به شرح زیر جواب مسائل مسابقه‌ای شمارهٔ ۲۵ را باطلاع می‌رساند.

۱ـ ثابت کنید هر عدد طبیعی که رقم دهگانش زوج و رقم یکانش ۶ باشد مربع کامل نیست.

حل: از برهان خلف استفاده می‌کنیم.

اگر هر عدد طبیعی که مربع باشد و رقم یکان آن ۶ باشد آنگاه رقم یکان جذر آن ۴ یا ۶ خواهد بود. زیرا رقم یکان مربع این دو عدد ۶ می‌باشد. در اینجا چون بحث صورت مسأله بر روی ارقام یکان و دهگان آن است بدون آنکه به کلیت مسأله اشکالی وارد شود ما نیز فقط دو رقم سمت راست جذر یعنی عدد مورد نظر را در نظر می‌گیریم. حال مسأله را در دو حالت ثابت می‌کنیم:

الف ـ اگر رقم یکان آن ۴ باشد: دو رقم سمت راست عدد مورد نظر: $\overline{a6}$

دو رقم سمت راست جذر عدد مورد نظر: $\overline{b4}$

حال باید با مربع کردن عدد $\overline{b4}$ با در نظر گرفتن دو رقم سمت راست حاصل باید عدد $\overline{a6}$ بدست آید داریم:

$\overline{b4}^2=(10b+4)^2=100b^2+80b+16=100b^2+10(8b+1)+6$

رقم یکان حاصل ۶ می‌باشد که با صورت مسأله مطابقت می‌کند. ولی دهگان عدد حاصل $(8b+1)$ همواره فرد است که با صورت مسأله مبنی بر زوج بودن رقم دهگان عدد مورد نظر مغایرت دارد. لذا عددی که در شرایط مسأله صدق می‌کند مربع کامل نیست.

ب ـ اگر رقم یکان آن ۶ باشد:

بصورت فوق عمل می‌کنیم: دو رقم سمت راست جذر عدد مورد نظر: $\overline{b6}$

$\overline{b6}^2=(10b+6)^2=100b^2+120b+36=100(b^2+b)+10(2b+3)+6$

در اینجا نیز رقم یکان ۶ می‌باشد ولی دهگان عدد حاصل $(2b+3)$ همواره فرد است که با صورت مسأله مغایرت دارد که نتیجه می‌شود عدد مورد نظر مربع کامل نیست.

۲ـ ثابت کنید هر عدد طبیعی که رقم یکان آن ۱ یا ۴ یا ۹ و رقم دهگانش فرد باشد، مجذور کامل نیست.

هر عدد طبیعی که رقم یکان آن ۱ یا ۴ یا ۹ باشد، رقم یکان جذر آن یکی از اعداد ۱، ۲، ۳، ۷، ۸ و یا ۹ خواهد بود در اینجا نیز بروش مسألهٔ فوق عمل می‌کنیم:

دو رقم سمت راست جذر عدد مورد نظر: $\overline{bk}$

$\overline{b1}^2=(10b+1)^2=100b^2+20b+1=100b^2+10(2b)+1$

$\overline{b2}^2=(10b+2)^2=100b^2+40b+4=100b^2+10(4b)+4$

$\overline{b3}^2=(10b+3)^2=100b^2+60b+9=100b^2+10(6b)+9$

$\overline{b7}^2=(10b+7)^2=100b^2+140b+49=100(b^2+b)+10(4b+4)+9$

$\overline{b8}^2=(10b+8)^2=100b^2+160b+64=100(b^2+b)+10(6b+6)+4$

$\overline{b9}^2=(10b+9)^2=100b^2+180b+81=100(b^2+b)+10(8b+8)+1$

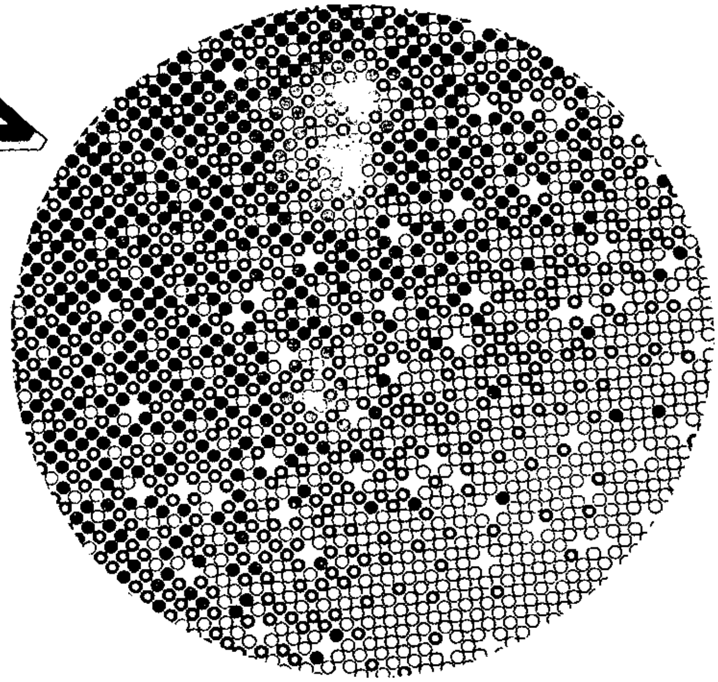
در اینجا نیز مشاهده می‌شود که رقم دهگان اعداد حاصل همواره زوج است که با صورت مسأله مبنی بر فرد بودن رقم دهگان مغایرت دارد. پس نتیجه می‌گیریم که عددی با شرایط مسأله مربع کامل نیست.

توضیح:

ممکن است در دو مسألهٔ فوق ضرایب دهگان و یا صدگان اعداد حاصل دارای مقادیری از ۹ بزرگتر از ۹ گردند که این مورد به کلیت مسأله لطمه‌ای وارد نمی‌کند زیرا در این صورت مقادیر اضافی به مراتب بالاتر تحویل داده می‌شوند. یعنی دهگان به صدگان، صدگان به هزارگان و ....

با تشکر علیرضا قزلسفلو از شهرستان مینودشت

حلّ مسأله‌های برهان ۲۶



حلّ مسأله‌های ریاضی ۲

• سید محمّدرضا هاشمی موسوی

۱. معادلهٔ نیمساز ربع دوم و چهارم به‌صورت $y=-x$ است. اگر $x=a$ طول نقطهٔ مفروض باشد، داریم $y=-a$؛ بنابراین، مختصات نقطهٔ مورد نظر به‌صورت $A(a,-a)$ است و در نتیجه می‌توان نوشت:

$$OA=\sqrt{a^2+(-a)^2}=\sqrt{2a^2}=\sqrt{34};$$
$$2a^2=34;\ a=\pm\sqrt{17}$$

با توجه به این که نقطهٔ مورد نظر در ناحیهٔ چهارم قرار دارد:

$$A(\sqrt{17},-\sqrt{17})$$

۲. چون خط $x+ay=4$ بر خط $ax+by=3$ عمود است:

$$mm'=(\frac{-1}{a})(\frac{-a}{b})=\frac{1}{b}=-1;\ \boxed{b=-1}$$

و چون خط $x+ay=4$ از نقطهٔ $A(-1,1)$ می‌گذرد:

$$A(-1,1):\ (-1)+a(1)=4;\ \boxed{a=5}$$

۳. نقاط A و B نسبت به نقطهٔ M قرینهٔ یکدیگرند، بنابراین، نقطهٔ M بین نقاط A و B قرار دارد:

$$\begin{cases} x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{2m-n+2m+n}{2} \\ =2m=-2;\ \boxed{m=-1} \\ y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{4m+4+4n-4}{2} \\ =2m+2n=2;2(-1)+2n=2;\ \boxed{n=2} \end{cases}$$

۴. معادلهٔ خطی که از وسط پاره‌خط MN می‌گذرد و بر آن عمود است، معادلهٔ عمود منصّف MN است؛ بنابراین:

$$m_{MN}=\frac{y_M-y_N}{x_M-x_N}=\frac{1-(-3)}{-2-2}=\frac{4}{-4}=-1\ ,$$

$m'_{MN}=1$ (شیب عمود منصّف)

نقطهٔ وسط MN چنین است:

$$x_P=\frac{x_M+x_N}{2}=\frac{-2+2}{2}=0\ ,$$
$$y_P=\frac{y_M+y_N}{2}=\frac{1-3}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

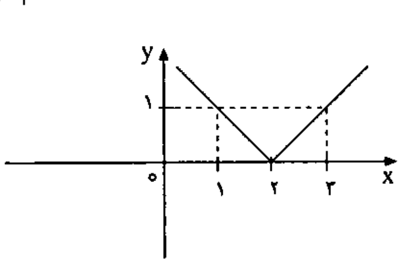
معادلهٔ خطی که از نقطهٔ P می‌گذرد و شیب آن برابر ۱ است، خط عمود منصّف می‌باشد:

$$y-y_p=m'_{MN}(x-x_p);$$
$$y-(-1)=1(x-0);$$

$y=x-1$ (معادلهٔ عمود منصّف)

۵.

x	۱	۲	۳
y	۱	۰	۱



۶. اگر طول مستطیل را y و عرض مستطیل را x بگیریم:

$$\begin{cases} y=4x \\ 2(x+y)=50 \end{cases};\ \begin{cases} y=4x \\ x+y=25 \end{cases};$$
$$x+4x=25;\ 5x=25;\ \boxed{x=5}\ ,$$
$$y=4(5)=20;\ \boxed{y=20}$$
$$R^2=x^2+y^2=5^2+20^2$$

$=۲۵+۴۰۰=۴۲۵$; $\boxed{R=\sqrt{۴۲۵}\ \ (\text{قطر})}$

۷. فاصلهٔ مبدأ (رأس مربع) از خط $۶x+۸y=۳$، برابر طول یک ضلع مربع است:

$$(\text{ضلع مربع})\ d=\frac{|۶(۰)+۸(۰)-۳|}{\sqrt{۶^۲+۸^۲}}=\frac{۳}{۱۰}=۰/۳,$$

(مساحت مربع) $S=(۰/۳)^۲=۰/۰۹$

۸. سهمی به معادلهٔ عمومی $y=ax^۲+bx+c$ به شرط $a<۰$، دارای نقطهٔ ماکزیمم و به شرط $a>۰$ دارای نقطهٔ می‌نیمم است؛ بنابراین سهمی به معادلهٔ $y=(۲m^۲-۸)x^۲-۴$، به شرط $۲m^۲-۸<۰$ دارای نقطهٔ ماکزیمم است:

$$۲m^۲-۸<۰\ ;\ ۲m^۲<۸\ ;\ m^۲<۴\ ;\ -۲<m<۲$$

۹.

$$(\sqrt[۳]{۲-\sqrt{۲}})(\sqrt[۳]{۲+\sqrt{۲}})=\sqrt[۳]{(۲-\sqrt{۲})(۲+\sqrt{۲})}$$
$$=\sqrt[۳]{۴-۲}=\sqrt[۳]{۲}$$
$$P=\sqrt[۳]{۲}\times\sqrt[۳]{۴}=\sqrt[۳]{۸}=\sqrt[۳]{۲^۳}=۲$$

۱۰.

$$\frac{۲\sqrt{۳}-۳\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۳}+۳\sqrt{۲}}\times\frac{۲\sqrt{۳}-۳\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۳}-۳\sqrt{۲}}$$
$$=\frac{(۲\sqrt{۳}-۳\sqrt{۲})^۲}{(۲\sqrt{۳})^۲-(۳\sqrt{۲})^۲}$$
$$=\frac{(۲\sqrt{۳}-۳\sqrt{۲})^۲}{۱۲-۱۸}$$
$$=-\frac{۱}{۶}(۲\sqrt{۳}-۳\sqrt{۲})^۲$$

۱۱. با توجه به برابریهای $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ و $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$:

$$\text{طرف اول}=\underline{۲\cos^۲x}+۲\cos^۲x\tan^۲x+\underline{۲\sin^۲x}+۲\sin^۲x\cot^۲x$$
$$=۲(\cos^۲x+\sin^۲x)+۲\cos^۲x\left(\frac{\sin^۲x}{\cos^۲x}\right)+۲\sin^۲x\left(\frac{\cos^۲x}{\sin^۲x}\right)$$
$$=۲(۱)+۲\sin^۲x+۲\cos^۲x$$
$$=۲+۲(\sin^۲x+\cos^۲x)$$
$$=۲+۲=۴$$

حل مسأله‌های ریاضی ۴

● سید محمدرضا هاشمی موسوی

۱. $$\bar{x}=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{۱۱+۱۲+۱۳+۱۴+۱۵}{۵}=\frac{۶۵}{۵}=۱۳\quad(\text{میانگین})$$

انحراف معیار $S=\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^۲}{n}}$

$$S=\sqrt{\frac{(۱۱-۱۳)^۲+(۱۲-۱۳)^۲+(۱۳-۱۳)^۲+(۱۴-۱۳)^۲+(۱۵-۱۳)^۲}{۵}}$$
$$=\sqrt{\frac{۴+۱+۰+۱+۴}{۵}}=\sqrt{\frac{۱۰}{۵}}=\sqrt{۲}\ ;$$
$$\boxed{S=\sqrt{۲}}$$

۲. $$\begin{cases}t_۳=a+۲d=۴\\ t_{۱۱}=a+۱۰d=-۱۲\end{cases}\Rightarrow ۸d=-۱۶\ ;$$

$$\boxed{d=-۲\ \ (\text{قدر نسبت})}$$

$a+۲(-۲)=۴$; $\boxed{a=۸\ \ (\text{جمله اول})}$

$t_{۱۹}=a+۱۸d=۸+۱۸(-۲)=-۲۸$;

$$\boxed{t_{۱۹}=-۲۸}$$

۳.

(جملهٔ سوم) $t_۳=a_۱q^۲$; $-۹=a_۱q^۲$ (۱)

(جملهٔ پنجم) $t_۵=a_۱q^۴$; $-۸۱=a_۱q^۴$ (۲)

از تقسیم رابطه‌های (۱) و (۲):

$\frac{-۸۱}{-۹}=\frac{a_۱q^۴}{a_۱q^۲}$; $q^۲=۹$; $q=\pm۳$ (قدر نسبت)

$a_۱=\frac{-۹}{q^۲}=\frac{-۹}{۹}=-۱$; $a_۱=-۱$ (جملهٔ اوّل)

بنابراین، شش جملهٔ اوّل تصاعد، به‌صورت زیر است:

$$-۱\ ,\ ۳\ ,\ -۹\ ,\ ۲۷\ ,\ -۸۱\ ,\ ۲۴۳$$

۴. $\cot^۲x-۳\cot x+۲=۰$

با فرض $\cot x=a$، به معادلهٔ درجه دوم زیر می‌رسیم:

$$a^۲-۳a+۲=۰\ ;\ (a-۱)(a-۲)=۰$$
$$\Rightarrow a=۱\ ;\ a=۲$$
$$\cot x=۱=\cot\frac{\pi}{۴}\ ;\ x=k\pi+\frac{\pi}{۴}$$
$$\cot x=۲=\cot(\text{Arccot}\,۲)\ ;$$
$$x=k\pi+\text{Arccot}\,۲$$

۵. $$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{۱-\tan x\tan y}$$

$$\frac{۱}{۳}=\frac{\tan x-۲}{۱+۲\tan x}\ ;\ ۱+۲\tan x=۳\tan x-۶\ ;$$
$$\tan x=۷,\ \cos^۲x=\frac{۱}{۱+\tan^۲x}$$
$$=\frac{۱}{۱+۴۹}=\frac{۱}{۵۰}\ ;$$
$$|\cos x|=\frac{۱}{\sqrt{۵۰}}\ ;\ |\cos x|=\frac{\sqrt{۵۰}}{۵۰}$$

۶.

$$|\vec{v_۱}|=\sqrt{(-۶)^۲+۸^۲}=\sqrt{۳۶+۶۴}$$

$=\sqrt{۱۰۰}=۱۰$ (طول بردار $\vec{v_۱}$)

$$\vec{v_۲}=۳\vec{i}-۴\vec{j}=\begin{bmatrix}۳\\۰\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۰\\-۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳\\-۴\end{bmatrix},$$
$$|\vec{v_۲}|=\sqrt{۳^۲+(-۴)^۲}=\sqrt{۲۵}=۵$$

(طول بردار $\vec{v_۲}$)

$$\vec{v_۱}\cdot\vec{v_۲}=[-۶\quad ۸]\begin{bmatrix}۳\\-۴\end{bmatrix}$$

$=-۱۸-۳۲=-۵۰$ (ضرب اسکالر)

$$\vec{v_۱}\cdot\vec{v_۲}=|\vec{v_۱}||\vec{v_۲}|\cos\theta\ ,$$
$$-۵۰=۱۰\times۵\cos\theta\ ;$$
$$\cos\theta=-۱\ ,\ \theta=۱۸۰^\circ$$

۷.

$$P(۶,۴)=\frac{۶!}{(۶-۴)!}=\frac{۶\times۵\times۴\times۳\times۲!}{۲!}=۳۶۰$$

تعداد کلمه‌هایی که تکرار حروف جایز نیست.

۸. الف ـ عددی زوج است که رقم سمت راست

آن زوج باشد ؛ بنابراین :

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ :رقم سمت راست ۰

۲ ۲ ۳ ۴ ۴ :رقم‌سمت‌راست۲ یا۴

$\Rightarrow ۵\times۴\times۳\times۲\times۱+۴\times۴\times۳\times۲\times۲=۳۱۲$

ب ـ عددی بر ۵ بخش‌پذیر است که رقم سمت راست آن ۰ یا ۵ باشد ؛ بنابراین :

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ :رقم سمت راست ۰

۱ ۲ ۳ ۴ ۴ :رقم سمت راست۵

$\Rightarrow ۵\times۴\times۳\times۲\times۱+۴\times۴\times۳\times۲\times۱=۲۱۶$

ج ـ باقیماندهٔ عددی بر ۱۰ برابر ۲ است که رقم راست آن ۲ باشد ؛ یعنی :

۱ ۲ ۳ ۴ ۴ : رقم سمت راست ۲

$\Rightarrow ۴\times۴\times۳\times۲\times۱=۹۶$

د ـ اگر عدد پنج رقمی، بزرگتر از ۳۴۰۰۰ باشد، آن‌گاه دو حالت زیر را داریم :

حالت اوّل: رقم سمت چپ آن ۴ یا ۵ باشد ؛ بنابراین :

۲ ۳ ۴ ۵ ۲ :رقم سمت چپ ۴ یا ۵

$\Rightarrow ۲\times۵\times۴\times۳\times۲=۲۴۰$

حالت دوم: اوّلین رقم سمت چپ ۳ و دومین رقم سمت چپ ۴ یا ۵ باشد ؛ بنابراین :

۲ ۳ ۴ ۲ ۱ :اولین رقم سمت چپ ۳ و دومین رقم سمت چپ ۴ یا ۵

$\Rightarrow ۱\times۲\times۴\times۳\times۲=۴۸$

با توجه به حالتهای اوّل و دوم داریم :

$۲۴۰+۴۸=۲۸۸$

۹. وقتی روی همهٔ حالتهایی که ممکن است در انجام یک آزمایش، رخ دهند، شرطی در نظر بگیریم، در این صورت، فضای نمونه محدودتر می‌شود ؛ بنابراین، هرگاه مجموع دو عدد زوج باشد، پس باید هردو، زوج یا هردو، فرد باشند، در نتیجه :

$A=\{۲,۴,۶,۸\}$ عددهای زوج

$B=\{۱,۳,۵,۷,۹\}$ عددهای فرد

هردو فرد   هردو زوج

$$n(s)=\binom{۴}{۲}+\binom{۵}{۲}=۶+۱۰=۱۶$$

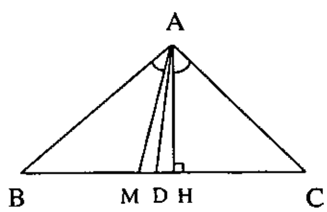
$n(c)=\binom{۵}{۲}=۱۰$ هر دو عدد فرد

$$P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۱۰}{۱۶}=\frac{۵}{۸}$$

حلّ مسأله‌های هندسهٔ ۲

● محمدهاشم رستمی

۱. مثلث ABC را در نظر گرفته، میانهٔ AM، ارتفاع AH و نیمساز AD را رسم می‌کنیم :



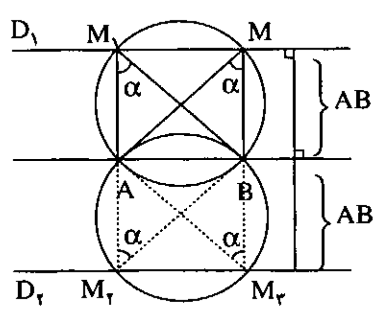
الف. بافرض $AB>AC$، داریم $M\hat{A}B<M\hat{A}C$. زاویهٔ MAB قرار نخواهد داشت ؛ از طرفی $H\hat{A}B>H\hat{A}C$ است (چرا؟). در نتیجه، نیمساز AD در درون زاویهٔ HAC واقع نیست. بنابراین، نیمساز AD درون زاویهٔ HAM واقع است ؛ یعنی نقطهٔ D بین نقطه H و M قرار دارد. در نتیجه $AD<AM$ و یا $d_a<m_a$ است.

اگر $AB<AC$ نیز باشد باز هم رابطهٔ $d_a<m_a$ برقرار است.

ب. با نوشتن رابطه‌های مشابه برای نیمسازهای زاویه‌های درونی و میانه‌های نظیر و جمع کردن عضوهای متناظر آنها داریم :

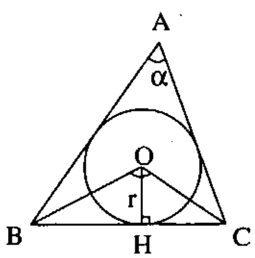
$$d_a+d_b+d_c<m_a+m_b+m_c$$

۲. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که از آن نقطه پاره‌خط AB به زاویهٔ α دیده می‌شود،



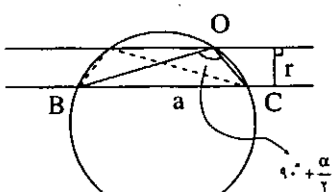
کمان درخور زاویهٔ α روبه‌رو به پاره‌خط AB است، که این مکان هندسی را رسم می‌کنیم (دو قوس از دو دایرهٔ مساوی واقع در دو طرف خط AB). از طرفی مکان هندسی نقطه‌ای که به فاصلهٔ معینی از خط AB باشد، دو خط موازی خط AB و در دو طرف آن می‌باشند. بنابراین، دو خط D_1 و D_2 را موازی خط AB و به فاصله‌ای برابر طول پاره‌خط AB، در دو طرف خط AB رسم می‌کنیم. نقطه‌های برخورد این دو خط، با کمان درخور زاویهٔ α، جواب مسأله است و حداکثر چهار جواب وجود دارد.

۳. فرض می‌کنیم مسأله حل شده باشد و مثلث ABC جواب مسأله باشد. اگر O مرکز دایرهٔ محاطی درونی این مثلث باشد، زاویهٔ $B\hat{O}C=۹۰^\circ+\frac{\alpha}{۲}$ و $BH=r$ است.



با توجه به این که $BC=a$ معلوم است، مثلث BOC با معلوم بودن یک ضلع، ارتفاع نظیر این ضلع و زاویهٔ روبه‌روی به این ضلع، قابل رسم است ؛ این مثلث را رسم می‌کنیم. آن‌گاه به مرکز O و به شعاع r دایره‌ای رسم می‌کنیم و از نقطه‌های B و C، دو مماس بر این دایره رسم می‌کنیم تا در نقطهٔ A یکدیگر را قطع کنند. مثلث ABC جواب مسأله است.

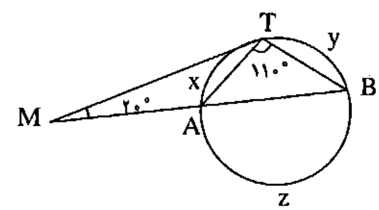
نکته. برای رسم مثلث BOC، ابتدا پاره‌خط BC را به طول a رسم می‌کنیم.



سپس کمان درخور زاویهٔ $۹۰^\circ+\frac{\alpha}{۲}$ روبه‌رو به این پاره‌خط را رسم می‌نماییم. آن‌گاه دو خط موازی BC و به فاصلهٔ r در دو طرف آن رسم می‌کنیم.

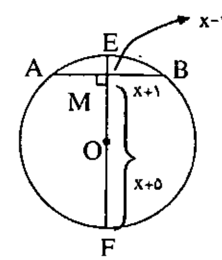
نقطه‌های برخورد این دو خط با کمان درخور زاویهٔ α نقطهٔ O رأس سوم مثلث BOC است. از O به B و C وصل می‌کنیم، مثلث BOC رسم می‌شود. (به‌دلیل یکسان بودن جوابها یک خط موازی BC و به فاصلهٔ r رسم شده است.)

۴. با توجه به شکل داده شده، $z=220^\circ$ است. از آن جا $x+y=140^\circ$ خواهد بود. از طرفی $\hat{M}=20^\circ=\frac{y-x}{2}$، پس $y-x=40^\circ$ است. در نتیجه داریم:



$$\begin{cases}x+y=140^\circ\\ y-x=40^\circ\end{cases}\Rightarrow y=90^\circ, x=50^\circ$$

۵. با توجه به این که قطر عمود بر وتر در هر دایره، آن وتر و کمان نظیرش را نصف می‌کند، $MA=MB=x-1$ است. از طرفی داریم:



$$MA.MB=ME.MF\Rightarrow(x+1)(x+1)$$
$$=(x-1)(x+5)$$
$$\Rightarrow x^2+2x+1=x^2+4x-5\Rightarrow x=3$$
$$EF=x-1+x+5=2x+4=2(3)+4$$
$$=10=2R\Rightarrow R=5$$

۶. با توجه به این که $A=(1,2)$، $B=(-2,1)$ و $C=(3,-2)$ است، داریم:

الف. $T(x,y)=(x+h\ ,\ y+k)$

$$\Rightarrow T(-2,1)=(3,-2)\Rightarrow\begin{cases}x+h=3\\ y+k=-2\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}-2+h=3\\ 1+k=-2\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}h=5\\ k=-3\end{cases}\Rightarrow T(x,y)=(x+5,y-3)$$

ب. $A(1,2)\Rightarrow A'=(1+5,2-3)$
$$\Rightarrow A'=(6,-1)$$
$$B(-2,1)\Rightarrow B'=(-2+5,1-3)$$
$$\Rightarrow B'=(3,-2)$$
$$C(3,-2)\Rightarrow C'=(3+5,-2-3)$$
$$\Rightarrow C'=(8,-5)$$

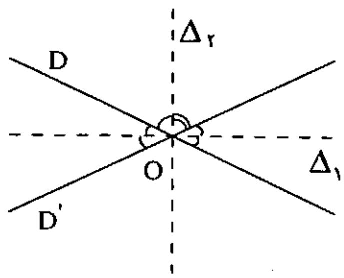
پ. $A'=(6,-1)\ ,\ R(x,y)=(y,x)$
$$\Rightarrow A''=(-1,6)$$
$$B'=(3,-2)\ ,\ R(x,y)=(-x,-y)$$
$$\Rightarrow B''=(-3,2)$$
$$C'=(8,-5)\ ,\ H(x,y)=(2x,2y)$$
$$\Rightarrow C''=(16,-10)$$

ت. فاصلهٔ نقطهٔ A'' از خط $B''C''$ را به‌دست می‌آوریم.
$$B''=(-3,2),C''=(16,-10)$$
$$\Rightarrow B''C'':\frac{x+3}{16+3}=\frac{y-2}{-10-2}$$
$$\Rightarrow 19y-38=-12x-36$$
$$\Rightarrow 12x+19y-2=0$$
$$A''H=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$\Rightarrow A''H=\frac{|12(-1)+19(6)-2|}{\sqrt{144+361}}=\frac{100}{\sqrt{505}}$$

برای تعیین مساحت مثلث طول ضلع BC را محاسبه می‌کنیم.
$$B''C''=\sqrt{(16+3)^2+(-10-2)^2}$$
$$=\sqrt{361+144}=\sqrt{505}$$

از آن جا:
$$S_{A''B''C''}=\frac{1}{2}A''H.B''C''$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{100}{\sqrt{505}}\right)(\sqrt{505})=50$$ واحد سطح

۷. محور تقارن، نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط D و D' است و معادلهٔ این نیمسازها به صورت زیر می‌باشند:
$$\frac{|2x-y+1|}{\sqrt{4+1}}=\frac{|x+2y-3|}{\sqrt{1+4}}$$



$$\Rightarrow|2x-y+1|=|x+2y-3|$$
$$\Rightarrow 2x-y+1=\pm(x+2y-3)$$

بنابراین داریم:
$$\Rightarrow\Delta_1:x-3y+4=0$$
$$\Delta_2:3x+y+2=0$$

حل مسأله‌های ریاضی عمومی ۲ پیش‌دانشگاهی

● میرشهرام صدر

۱. $f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{|x^3+3x|-0}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to0^+}\frac{|x||x^2+3|}{x}=\lim_{x\to0^+}|x^2+3|=3$$
$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{|x^3+3x|-0}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to0^-}\frac{|x||x^2+3|}{x}=\lim_{x\to0^-}-|x^2+3|=-3$$

چون $f'_+(0)\neq f'_-(0)$، پس تابع f در نقطهٔ $x=0$ مشتق‌پذیر نیست.

$$f'_+(-3)=\lim_{x\to-3^+}\frac{|x^3+3x|-36}{x+3}$$
$$=\lim_{x\to-3^+}\frac{-(x^3+3x)-36}{x+3}$$
$$=\lim_{x\to-3^+}\frac{-(x+3)(x^2-3x+12)}{x+3}$$
$$=\lim_{x\to-3^+}-(x^2-3x+12)=30$$
$$f'_-(-3)=\lim_{x\to-3^-}\frac{|x^3+3x|-36}{x+3}$$

$$= \lim_{x\to -۳^-} \frac{-(x+۳)(x^{۲}-۳x+۱۲)}{x+۳} = ۳۰$$

چون $f'_+(-۳)=f'_-(-۳)$، پس تابع f در نقطهٔ $x=-۳$ مشتق‌پذیر است.

۲. $x=\frac{\pi}{۴}$ ، $\sin x\cos y = \frac{۱}{۲}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos y = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos y = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow y=\frac{\pi}{۴}$$

نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}\frac{\pi}{۴}\\ \frac{\pi}{۴}\end{matrix}\right.$ روی منحنی نمایش تابع قرار دارد.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos x\cos y}{-\sin x \sin y} \Rightarrow m = \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = ۱$$

$$y-\frac{\pi}{۴} = ۱(x-\frac{\pi}{۴}) \Rightarrow y=x$$

(معادلهٔ خط مماس بر منحنی در نقطهٔ A)

۳. $f(x)=\frac{x^{۲}}{x^{۲}+x+۱}$;

$$f'(x)=\frac{x^{۲}+۲x}{(x^{۲}+x+۱)^{۲}}$$

وقتی $f'(x)=۰$، داریم:

$x^{۲}+۲x=۰ \Rightarrow x=۰, x=-۲$ (نقاط بحرانی)

چون $x^{۲}+x+۱>۰$، بنابراین، $f'(x)$ همواره تعریف شده است.

x	$-\infty$		-۲		۰		$+\infty$
f'(x)		+	۰	−	۰	+	
f(x)	۱	↗	۳ Max نسبی	↘	۰ Min نسبی	↗	۱

۴. $f'(x)=۲ax+b, f'(۱)=۰$

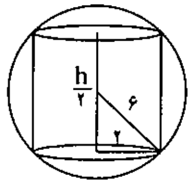
$$\Rightarrow ۲a+b=۰$$

$$f(۱)=۷ \Rightarrow a+b+c=۷$$

$$f(۲)=-۲ \Rightarrow ۴a+۲b+c=-۲$$

$$\begin{cases}۲a+b=۰\\ a+b+c=۷\\ ۴a+۲b+c=-۲\end{cases} \Rightarrow a=-۹, b=۱۸, c=-۲$$

۵.



معادلهٔ اولیه: $S=۲\pi rh$

معادلهٔ ثانویه: $\left(\frac{h}{۲}\right)^{۲}+r^{۲}=۳۶ \Rightarrow h^{۲}+۴r^{۲}=۱۴۴$

$$\Rightarrow ۲r=\sqrt{۱۴۴-h^{۲}}$$

اکنون در معادلهٔ اولیه قرار می‌دهیم: $۲r=\sqrt{۱۴۴-h^{۲}}$، در این صورت معادلهٔ اوّلیه را به یک متغیر وابسته کرده‌ایم: $S=\pi h\sqrt{۱۴۴-h^{۲}}$

اگر S بیشترین مقدار را بگیرد، آن‌گاه $S^{۲}=\pi^{۲}h^{۲}(۱۴۴-h^{۲})$ نیز بیشترین مقدار را خواهد گرفت، بنابراین نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(h)=\pi^{۲}(۱۴۴h^{۲}-h^{۴})$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(h)=\pi^{۲}(۲۸۸h-۴h^{۳})=۰$$

$$\Rightarrow ۴\pi^{۲}h(۷۲-h^{۲})=۰ \Rightarrow h=۰, h=۶\sqrt{۲},$$

$$h=-۶\sqrt{۲}$$

h	$-\infty$		$-۶\sqrt{۲}$		۰		$۶\sqrt{۲}$		$+\infty$
f'		+	۰	−	۰	+	۰	−	
f		↗		↘		↗		↘	

با توجه به جدول بالا، ملاحظه می‌کنیم که تابع f در نقاط $h=۶\sqrt{۲}$ و $h=-۶\sqrt{۲}$ دارای ماکزیمم نسبی است؛ اما چون $h>۰$ (ارتفاع استوانه)، بنابراین $h=۶\sqrt{۲}$.

۶. $y=\frac{۲x^{۲}+۱}{x^{۲}+۲x}$

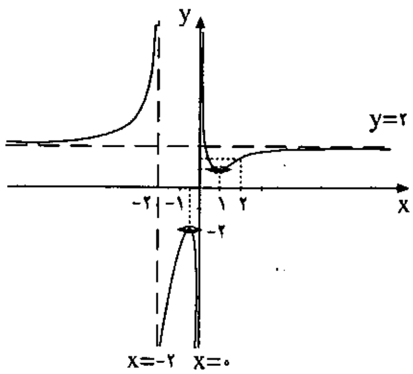
مجانب افقی $\begin{cases}x\to\pm\infty\\ y=۲\end{cases}$

مجانبهای قائم $\begin{cases}y\to\pm\infty\\ x^{۲}+۲x=۰ \Rightarrow x=۰, x=-۲\end{cases}$

$$y'=\frac{۴x(x^{۲}+۲x)-(۲x+۲)(۲x^{۲}+۱)}{(x^{۲}+۲x)^{۲}}$$

$$=\frac{۴x^{۲}-۲x-۲}{(x^{۲}+۲x)^{۲}}=۰ \Rightarrow x=۱, x=-\frac{۱}{۲}$$

x	$-\infty$		-۲		$-\frac{۱}{۲}$		۰		۱		۲		$+\infty$
y'		+	‖	+	۰	−	‖	−	۰	+		+	
y	۲	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-۲ Max	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	۱ Min	↗	$\frac{۹}{۸}$	↗	۲

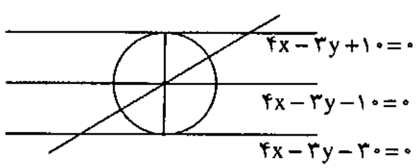


۷. چون دو خط مماس، بر دایره موازی هستند، بنابراین فاصلهٔ دو خط موازی، برابر طول قطر دایره است:

$$d = \frac{|c-c'|}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}} = \frac{|-۳۰-۱۰|}{\sqrt{۱۶+۹}} = ۸$$

$$\Rightarrow r=\frac{d}{۲}=۴ \qquad \text{(شعاع دایره)}$$

مرکز این دایره، روی خطی قرار دارد که موازی با دو خط مماس بر دایره است و فاصلهٔ مرکز دایره تا دو خط برابر است. از طرف دیگر، مرکز دایره روی قطر دایره واقع است، بنابراین داریم:



$$\begin{cases}۴x-۳y-۱۰=۰\\ x+۳y-۱۰=۰\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=۴\\ y=۲\end{cases}$$

اکنون معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $V\left|\begin{matrix}\alpha=۴\\ \beta=۲\end{matrix}\right.$ و شعاع $r=۴$ به‌صورت زیر است:

$$(x-۴)^{۲}+(y-۲)^{۲}=۱۶$$

۸.

$$\begin{cases}۳x+۴y=۷\\ ۳x-۴y=-۱\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=۱\\ y=۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow V\begin{vmatrix}\alpha=۱\\ \beta=۱\end{vmatrix}$$ مرکز هذلولی ; $F\begin{vmatrix}۶\\ ۱\end{vmatrix}$

$$y_F=y_V=۱\Rightarrow FF'\parallel x'x\Rightarrow F\begin{vmatrix}\alpha+c=۶\\ \beta=۱\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow ۱+c=۶\Rightarrow \boxed{c=۵}$$

شیب مجانبها $m=\pm\frac{b}{a}\Rightarrow\pm\frac{b}{a}=\frac{۳}{۴}$

$$\Rightarrow b^۲=\frac{۹}{۱۶}a^۲$$

$$\begin{cases}b^۲=\frac{۹}{۱۶}a^۲\\ a^۲+b^۲=c^۲ \quad\Rightarrow a^۲+\frac{۹}{۱۶}a^۲=۲۵\\ c=۵\end{cases}$$

$$\Rightarrow a^۲=۱۶\Rightarrow\boxed{a=۴}\Rightarrow\boxed{b=۳}$$

$$\Rightarrow\frac{(x-\alpha)^۲}{a^۲}-\frac{(y-\beta)^۲}{b^۲}=۱$$

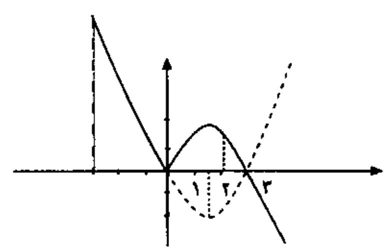
$$\Rightarrow\frac{(x-۱)^۲}{۱۶}-\frac{(y-۱)^۲}{۹}=۱$$

۹. $y=x^۲-۳x\ ;y'=۰\Rightarrow ۲x-۳=۰;$

$x=\frac{۳}{۲}\Rightarrow A\begin{vmatrix}\frac{۳}{۲}\\ -\frac{۹}{۴}\end{vmatrix}$ نقطهٔ اکسترمم

$y=۰\Rightarrow x^۲-۳x=۰\ ;\ x=۰\ ,\ x=۳$

$x^۲-۳x=۰\Rightarrow x=۰,۳$



x		۰		۳	
$x^۲-۳x$	$+$	۰	$-$	۰	$+$

$$\int_{-۳}^{۲}\left|x^۲-۳x\right|dx=\int_{-۳}^{۰}(x^۲-۳x)dx+\int_{۰}^{۲}-(x^۲-۳x)dx$$

$$=\frac{۱}{۳}x^۳-\frac{۳}{۲}x^۲\Big|_{-۳}^{۰}+\left(-\frac{۱}{۳}x^۳+\frac{۳}{۲}x^۲\right)\Big|_{۰}^{۲}$$

$$=۰-\left(\frac{۱}{۳}(-۳)^۳-\frac{۳}{۲}(-۳)^۲\right)+\left(-\frac{۱}{۳}(۲)^۳+\frac{۳}{۲}(۲)^۲\right)-۰$$

$$=\frac{۱۵۵}{۶}$$

۱۰. الف)

$$\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\frac{۳\sin x-\sin ۳x}{۱+\cos x}dx$$

$$=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\frac{۳\sin x-(۳\sin x-۴\sin^۳ x)}{۱+\cos x}dx$$

$$=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\frac{۴\sin^۳ x(۱-\cos x)}{(۱+\cos x)(۱-\cos x)}$$

$$=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\frac{۴\sin^۳ x(۱-\cos x)}{\sin^۲ x}dx$$

$$=۴\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\sin x dx-۴\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\sin x\cos x dx$$

$$=-۴\cos x\Big|_۰^{\frac{\pi}{۲}}-۲\sin^۲ x\Big|_۰^{\frac{\pi}{۲}}=-۴-۲=-۶$$

ب)

$$\begin{cases}u=x+۲;x=u-۲\\ du=dx\end{cases};\begin{cases}x=۶\Rightarrow u=۸\\ x=-۲\Rightarrow u=۰\end{cases}$$

$$\int_{-۲}^{۶}x^۲\sqrt[۳]{x+۲}dx=\int_۰^۸(u-۲)^۲u^{\frac{۱}{۳}}du$$

$$=\int_۰^۸(u^{\frac{۷}{۳}}-۲u^{\frac{۴}{۳}}-۴u^{\frac{۱}{۳}})du$$

$$=\frac{۳u^{\frac{۱۰}{۳}}}{۱۰}-\frac{۶u^{\frac{۷}{۳}}}{۷}-۳u^{\frac{۴}{۳}}\Big|_۰^۸$$

$$=\frac{۳}{۱۰}(\sqrt[۳]{۸})^{۱۰}-\frac{۶}{۷}(\sqrt[۳]{۸})^۷-۳(\sqrt[۳]{۸})^۴$$

$$=\frac{۳\times ۲^{۱۰}}{۱۰}-\frac{۶\times ۲^۷}{۷}-۳\times ۲^۴$$

۱۱.

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{۱+x}+\sqrt{x-۱}}$$

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{۱+x}+\sqrt{x-۱}}\times\frac{\sqrt{۱+x}-\sqrt{x-۱}}{\sqrt{۱+x}-\sqrt{x-۱}}$$

$$=\int\frac{\sqrt{۱+x}-\sqrt{x-۱}}{۲}dx$$

$$=\frac{۱}{۲}\int\sqrt{۱+x}dx-\frac{۱}{۲}\int\sqrt{x-۱}dx$$

$$\begin{cases}u=۱+x\\ du=dx\end{cases};\begin{cases}v=x-۱\\ dv=dx\end{cases}$$

$$I=\frac{۱}{۲}\int u^{\frac{۱}{۲}}du-\frac{۱}{۲}\int v^{\frac{۱}{۲}}dv$$

$$=\frac{۱}{۳}u^{\frac{۳}{۲}}-\frac{۱}{۳}v^{\frac{۳}{۲}}+c$$

$$=\frac{۱}{۳}(۱+x)\sqrt{۱+x}-\frac{۱}{۳}(x-۱)\sqrt{x-۱}+c$$

۱۲.

$$V=\pi\int_۰^{\frac{\pi}{۳}}\frac{۱}{\cos^۲ x}dx=\pi\int_۰^{\frac{\pi}{۳}}(۱+\tan^۲ x)dx$$

$$=\pi\tan x\Big|_۰^{\frac{\pi}{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\pi$$

ریاضی پایه پیش‌دانشگاهی

● میرشهرام صدر

۱. الف)

$$n=۱:۱\times۲=\frac{۱(۱+۱)(۱+۲)}{۳}\Rightarrow ۲=۲$$

فرض استقراء $n=k:۱\times۲+۲\times۳+۳\times۴+\ldots+k(k+۱)=\frac{k(k+۱)(k+۲)}{۳}$

حکم استقراء $n=k+۱:۱\times۲+۲\times۳+۳\times۴+\ldots+k(k+۱)+(k+۱)(k+۲)=\frac{(k+۱)(k+۲)(k+۳)}{۲}$

دو طرف فرض را با $(k+۱)(k+۲)$ جمع می‌کنیم:

$$۱\times۲+۲\times۳+۳\times۴+\ldots+k(k+۱)+(k+۱)(k+۲)=\frac{k(k+۱)(k+۲)}{۳}+(k+۱)(k+۲)$$

$$=\frac{k(k+۱)(k+۲)+۳(k+۱)(k+۲)}{۳}$$

$$=\frac{(k+۱)(k+۲)(k+۳)}{۳}$$

ب)

$۱۰^n-۱=۹t\quad(t\in z)$

$n=۱:\ ۱۰^۱-۱=۹t\Rightarrow ۹=۹t\quad(t\in z)$

فرض استقرا $n=k:\ ۱۰^k-۱=۹t_۱\Rightarrow(t_۱\in z)$

حکم استقرا $n=k+1:\ 10^{k+1}-1=9t_2$

$\Rightarrow (t_2\in z)$

دو طرف فرض را در ۱۰ ضرب می‌کنیم:

$10(10^k-1)=10\times 9t_1$

$10^{k+1}-10=10\times 9t_1$

$10^{k+1}-1=10\times 9t+9$

$\Rightarrow 10^{k+1}-1=9\underbrace{(10t_1+1)}_{t_2\in z}$

$\Rightarrow 10^{k+1}-1=9t_2$

۲. فرض کنیم $3+\sqrt{5}$ عددی گنگ نباشد، بنابراین عددی گویاست؛ یعنی عدد گویایی مانند a موجود است؛ به‌طوری که داریم:

$a=3+\sqrt{5}$

$a^2=(3+\sqrt{5})^2$

$a^2=9+5+6\sqrt{5}\Rightarrow \underbrace{6\sqrt{5}}_{\in Q'}=\underbrace{a^2-14}_{\in Q}$ (۱)

سمت راست برابر (۱) عددی گویا و سمت چپ آن عددی گنگ است و این، غیرممکن می‌باشد؛ بنابراین $3+\sqrt{5}$ عددی گنگ است.

۳.

$a_n=n^2-22n+120=(n-10)(n-12)<0$

$(n-10)(n-12)=0\Rightarrow n=10, n=12, n\in\mathbb{N}$

n	$-\infty$		10		12		$+\infty$
a_n		$+$		$-$		$+$	

عبارت a_n به‌ازای هر n طبیعی با شرط $10<n<12$، عددی منفی است. بنابراین، a_n فقط به‌ازای $n=11$ منفی است؛ یعنی جملهٔ یازدهم دنبالهٔ منفی است.

۴. توپ در برخورد اوّل با سطح زمین ۱ متر، در برخورد دوم $\frac{1}{2}$ متر، در برخورد سوم $\frac{1}{4}$ متر، ... و در برخورد nام $\frac{1}{2^{n-1}}$ متر بالا می‌آید. بنابراین:

$S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^{n-1}}+...$

$=1+\frac{1}{2}\underbrace{(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...)}_{S}$

$\Rightarrow S=1+\frac{1}{2}S; S-\frac{1}{2}S=1; S=2$

۵. $S_{11}=\frac{11}{2}(2a+10d)=110$

$\Rightarrow a+5d=10$

$S_7=\frac{7}{2}(2a+6d)=14\Rightarrow a+3d=2$

$\begin{cases}a+5d=10\\a+3d=2\end{cases}\Rightarrow d=4$

۶. $\begin{cases}S_4=\dfrac{a(q^4-1)}{(q-1)}=15\\[2mm] S_8=\dfrac{a(q^8-1)}{(q-1)}=225\end{cases}$

$\Rightarrow \frac{S_8}{S_4}=\frac{q^8-1}{q^4-1}=17$

$\Rightarrow q^8-1=17(q^4-1)\Rightarrow q^8-17q^4+16=0$

$\Rightarrow (q^4-1)(q^4-16)=0$

$q\neq\pm1\Rightarrow q=\pm2$

۷. $F_6=8, F_5=5:\ S_6=2F_6+F_5-1$

$=2(8)+5-1=20$

$S=20=4\times5$

مجموع شش جملهٔ اوّل دنباله فیبوناتچی، بر عدد اوّل ۵ بخش‌پذیر است.

۸. $x^2-3x-\log_3^{10}=0,$

$x'+x''=-(-3)=3; \log_3^a+\log_3^b=3$

$\log_3^{ab}=3\Rightarrow ab=3^3=27$

$\frac{ab}{\log_3^a+\log_3^b}=\frac{27}{3}=9$

۹. الف)

$x=1000-10p\Rightarrow p=\frac{1000-x}{10}$

معادلهٔ درآمد: $R(x)=x\times p=x\left(\frac{1000-x}{10}\right)$

$=-\frac{1}{10}x^2+100x$

ب) ماکزیمم $x=\frac{-b}{2a}=\frac{100}{\frac{2}{10}}=500$

ج) $x=500$

$\Rightarrow R(500)=500\left(\frac{1000-500}{10}\right)=25000$

د)

سود = هزینه − درآمد $\Rightarrow P(x)=R(x)-C(x)$

$P(x)=100x-\frac{1}{10}x^2-(5000+2x)$

$\Rightarrow P(x)=\frac{-1}{10}x^2+98x-5000$

ماکزیمم $x=\frac{-b}{2a}=\frac{-98}{\frac{-2}{10}}=490$

۱۰. احتمال این که یک نفر مرد باشد:

$P(A)=\frac{\binom{10}{1}}{\binom{30}{1}}=\frac{1}{3}$

احتمال این که یک نفر چشم قهوه‌ای باشد:

$P(B)=\frac{\binom{15}{1}}{\binom{30}{1}}=\frac{1}{2}$

احتمال این که مرد چشم قهوه‌ای باشد:

$P(A\cap B)=\frac{\binom{5}{1}}{\binom{30}{1}}=\frac{1}{6}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

۱۱.

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$0/6=0/4+0/3-P(A\cap B)$

$\Rightarrow P(A\cap B)=0/1$

۱۲.

$x=1,(k^5x^3+4)^5=243$

$\Rightarrow (k^5+4)^5=243=3^5$

$\Rightarrow k^5+4=3\Rightarrow k^5=-1\Rightarrow k=-1$

حلّ مسأله‌های ریاضیات گسستهٔ پیش دانشگاهی

● حمیدرضا امیری

۱. طبق فرض، برای هر $a\in V$، داریم $\deg(a)\geq 3$، حال اگر فرض کنیم $V=\{a_1,a_2,...,a_n\}$، در این صورت:

$$\left.\begin{array}{l} deg(a_1) \geq 3 \\ deg(a_2) \geq 3 \\ \vdots \\ deg(a_n) \geq 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} deg(a_i) \geq 3n$$

$$\Rightarrow 2|E| \geq 3n \Rightarrow 38 \geq 3n$$

$$\Rightarrow n \leq \frac{38}{3} \cong 12/6$$

بنابراین حداکثر مقدار $|V|$ برابر ۱۲ است.

۲. از آن‌جایی که K_p گرافی کامل است، تمام رئوس آن به هم مربوط بوده و اگر M، ماتریس آن باشد، یک ماتریس متقارن و $p \times p$ است که به‌جز درایه‌های روی قطر اصلی آن که همگی صفر هستند، بقیهٔ درایه‌ها ۱ می‌باشند. حال اگر بخواهیم درایهٔ روی قطر اصلی M^2 را مشخص کنیم، در حالت کلی، باید سطر ام M را در ستون ام خودش ضرب کنیم، که البته در سطر ام، $(p-1)$ تا عدد ۱ و نیز روی ستون ام، $(p-1)$ تا عدد ۱ وجود دارد که نظیر به نظیر این (یک‌ها) در هم ضرب و فقط صفر روی سطر ام در صفر، روی ستون ام نیز در هم ضرب می‌شوند، که حاصل جمع $(p-1)$ تا عدد ۱ برابر است با $(p-1)$. به مثال زیر توجه کنید:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

۳. طبق فرض داریم، $a = bq + r$ و $a = 18r$ و $r = b - 1$، پس:

$$18r = bq + (b-1) \Rightarrow 18(b-1) = bq + b - 1$$

$$\Rightarrow 17b - bq = 17 \Rightarrow b(17 - q) = 1 \times 17$$

چون ۱۷ عددی اوّل و تجزیهٔ آن منحصر به فرد است و بدیهی (به شکل $17 = 1 \times 17$)، پس در سمت چپ تساوی، باید یکی از عاملها ۱ و دیگری ۱۷ باشد. حال اگر $17 - q = 17$، پس باید $q = 0$ که با توجه به فرض ایجاب می‌کند، $a = r$ که خلاف $a = 18r$ است، بنابراین $b = 17$ و $17 - q = 1$ یا $\underline{q = 16}$.

$$r = b - 1 \Rightarrow r = 17 - 1 = 16,$$
$$a = 18r = 18 \times 16 = 288$$

۴. طبق فرض داریم $(a^m, b^n) = 1$ پس طبق قضیه، باید اعدادی صحیح چون r و s موجود باشند: به قسمی که:

$$ra^m + sb^n = 1 \Rightarrow \underbrace{(ra^{m-1})}_{r_1}a + \underbrace{(sb^{n-1})}_{s_1}b = 1$$

$$\Rightarrow r_1 a + s_1 b = 1 \Rightarrow (a, b) = 1$$

۵. اثبات به استقرا

$$p(1): 2^2 + 6 - 1 = 9 = 9 \times 1 \Rightarrow p(1) \equiv T$$

$$p(K) \equiv T \Rightarrow 2^{2K} + 6K - 1 = 9t$$

فرض استقرا

$$p(K+1): 2^{2K+2} + 6K + 6 - 1 = 9t'$$

حکم استقرا

دو طرف فرض استقرا را در (2^2) ضرب می‌کنیم تا عدد تواندار در حکم ظاهر شود:

$$2^{2k+2} + 24k - 4 = 36t$$
$$\Rightarrow 2^{2k+2} + 6k + 5 + 18k - 9 = 36t$$
$$\Rightarrow 2^{2k+2} + 6k + 5 = 36t - 18k + 9$$
$$= 9\underbrace{(4t - 2k + 1)}_{t'}$$
$$\Rightarrow 2^{2k+2} + 6k + 5 = 9t'$$

۶. می‌خواهیم ثابت کنیم $3^{15n+2} \times 2^{2n+2} \times 20^{2n} + 3 \overset{13}{\equiv} 0$، برای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$3^3 = 27 \overset{13}{\equiv} 1 \Rightarrow (3^3)^{5n} \overset{13}{\equiv} 1 \Rightarrow 3^{15n} \overset{13}{\equiv} 1$$

$$\Rightarrow 3^{15n+2} \overset{13}{\equiv} 1 \times 3^2 = 9 \quad (1)$$

$$2^{2n+2} \times 20^{2n} = 2^{2n} \times 2^2 \times 20^{2n}$$
$$= (40)^{2n} \times 4,$$

$$40 \overset{13}{\equiv} 1 \Rightarrow (40)^{2n} \overset{13}{\equiv} 1 \Rightarrow (40)^{2n} \times 4 \overset{13}{\equiv} 4 \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow 3^{15n+2} \times 2^{2n+2} \times 20^{2n} + 3 \overset{13}{\equiv} 9 \times 4 + 3 \overset{13}{\equiv} 0$$

۷. مجموعه‌های زیر را درنظر می‌گیریم:

$A_1 = \{$ اعداد ۵ رقمی که رقم ۱ ندارند $\}$

$A_2 = \{$ اعداد ۵ رقمی که رقم ۵ ندارند $\}$

حال اگر بخواهیم تعداد اعداد ۵ رقمی که در آنها ارقام ۱ و ۵ حداقل یک بار به‌کار رفته باشند، را بیابیم، می‌بایست مقدار $|\overline{A_1 \cup A_2}|$ را بیابیم، که داریم:

$$|\overline{A_1 \cup A_2}| = |S| - |A_1 \cup A_2|$$

$\boxed{9}\ \boxed{10}\ \boxed{10}\ \boxed{10}\ \boxed{10}$

همهٔ اعداد ۵ رقمی $|S| = 9 \times 10^4 \Leftarrow$

$\boxed{8}\ \boxed{9}\ \boxed{9}\ \boxed{9}\ \boxed{9}$

(اعداد ۵ رقمی فاقد ۱) $|A_1| = 8 \times 9^4 \Leftarrow$

و به همین ترتیب $|A_2| = 8 \times 9^4$

$\boxed{7}\ \boxed{8}\ \boxed{8}\ \boxed{8}\ \boxed{8} \Rightarrow 7 \times 8^4 = |A_1 \cap A_2|$

(اعداد ۵ رقمی که فاقد ۱ و ۵ هستند.)

$$|\overline{A_1 \cup A_2}| = (9 \times 10^4) - \left[8 \times 9^4 + 8 \times 9^4 - 7 \times 8^4\right]$$

۸. برای محاسبهٔ (ROR) از قضیه استفاده می‌کنیم؛ یعنی از رابطهٔ $M(ROR) = [M(R)]^{(2)}$

$$R = \{(2,2)(4,4)(6,6)(2,4)(4,2)\}$$

$$\Rightarrow M(R) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(M(R))^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = M(ROR)$$

$$\Rightarrow ROR = \{(2,2)(4,4)(6,6)(2,4)(4,2)\} = R$$

۹. برای حلّ این مسأله، از فرمول احتمال کلّ استفاده می‌کنیم و طبق فرض داریم:

$A =$ پیشامد این‌که ساعت معیوب باشد

$\Rightarrow P(A) = ?$

$B_1 =$ پیشامد این‌که ساعت از کارخانهٔ اوّل باشد

$\Rightarrow P(B_1) = 0/47$

$B_2 =$ پیشامد این‌که ساعت از کارخانهٔ دوم باشد

$\Rightarrow P(B_2) = 0/26$

$B_3 =$ پیشامد این‌که ساعت از کارخانهٔ سوّم باشد

$\Rightarrow P(B_3) = 0/27$

$P(A/B_1) = 0/08\ ,\ P(A/B_2) = 0/06\ ,$
$P(A/B_3) = 0/05$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i) \times P(A/B_i)$$
$$= (0/47 \times 0/08) + (0/26 \times 0/06)$$
$$+ (0/27 \times 0/05)$$

۱۰. برای حلّ این مسأله، از فرمول توزیع دو

جمله‌ای استفاده می‌کنیم و داریم :

$k=3$ و $n=5$ (تعداد تکرار آزمایش)

$$P(A_1)=\frac{1}{24}$$

(احتمال این‌که در ۱ بار پرتاب، دو سکه H و تاس ۶ بیاید.)

$$P(A)=\binom{n}{k}\times[P(A_1)]^k\times[1-P(A_1)]^{n-k}$$

$$\Rightarrow P(A)=\binom{5}{3}\times\left(\frac{1}{24}\right)^3\times\left(\frac{23}{24}\right)^2$$

$$\Rightarrow P(A)=10\times\frac{(23)^2}{(24)^5}$$

.۱۱

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{\binom{4}{4}}{\binom{7}{4}}$	$\frac{\binom{3}{1}\times\binom{4}{3}}{\binom{7}{4}}$	$\frac{\binom{3}{2}\times\binom{4}{2}}{\binom{7}{4}}$	$\frac{\binom{3}{3}\times\binom{4}{1}}{\binom{7}{4}}$

(منظور از $x_i=0$ یعنی در ۴ برداشت، هیچ لامپی معیوب نباشد یا هر ۴ لامپ سالم باشند و $x_i=1$ یعنی حالتی که در ۴ لامپ برداشته شده، ۱ لامپ معیوب و سه لامپ سالم باشند و ...)

حلّ مسأله‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال ۲

● احمد قندهاری

۱. بدون این‌که به اثبات لطمه‌ای وارد شود، فرض می‌کنیم $x_1<x_2$ ، تابع به معادلهٔ $f(x)=\mathrm{Arctan}\,x$ در بازهٔ $[x_1,x_2]$ پیوسته و در بازهٔ (x_1,x_2) مشتق‌پذیر است، در نتیجه بنا به قضیهٔ مقدار میانگین (C)ای در بازهٔ (x_1,x_2) هست که

یا

$$f'(c)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)$$

چون $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ ، پس $f'(c)=\frac{1}{1+c^2}$

$$\Rightarrow \mathrm{Arctan}\,x_2-\mathrm{Arctan}\,x_1=\frac{1}{1+c^2}(x_2-x_1)$$

چون $0<\frac{1}{1+c^2}<1$ ، پس :

$$\frac{1}{1+c^2}|x_2-x_1|<|x_2-x_1|$$

$$\Rightarrow \mathrm{Arctan}\,x_2-\mathrm{Arctan}\,x_1<x_2-x_1$$

پس $\Rightarrow |\mathrm{Arctan}\,x_2-\mathrm{Arctan}\,x_1|<|x_2-x_1|$

.۲

$$y=\sqrt[3]{1-x^2}\Rightarrow y'=\frac{-2x}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}$$

$$y''=-\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt[3]{(1-x^2)^2}+\frac{4x^2}{3\sqrt[3]{1-x^2}}}{\sqrt[3]{(1-x^2)^4}}$$

$$=-\frac{2}{3}\times\frac{\frac{3(1-x^2)+4x^2}{3\sqrt[3]{1-x^2}}}{\sqrt[3]{(1-x^2)^4}}$$

$$y''=-\frac{2}{3}\times\frac{3+x^2}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$$

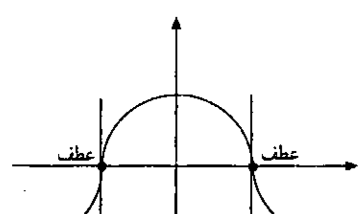
$$=-\frac{2}{3}\times\frac{3+x^2}{3(1-x^2)\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}$$

$$y''=\frac{2}{9}\times\frac{3+x^2}{(x^2-1)\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}$$

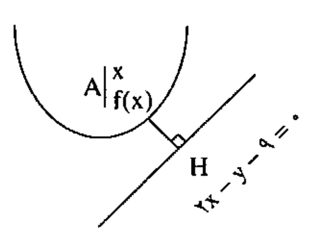
بجز عبارت (x^2-1) بقیهٔ عوامل در y'' مثبتند :

$$x^2-1=0\Rightarrow x=\pm1$$

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
y''		+		−		+	
انحنای y		∪	عطف	∩	عطف	∪	



۳. روش اول: فاصله AH را پیدا کرده، سپس می‌نیمم می‌کنیم. اگر $A\begin{vmatrix}x_1\\y_1\end{vmatrix}$ و معادله خط به صورت $ax+by+c=0$ باشد، داریم :



$$AH=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Rightarrow AH=\frac{|2x-f(x)-9|}{\sqrt{4+1}}$$

$$=\frac{|2x-x^2+2x-9|}{\sqrt5}=\frac{|-x^2+4x-4-5|}{\sqrt5}$$

اگر $x=2$ ، آن‌گاه AH می‌نیمم است.

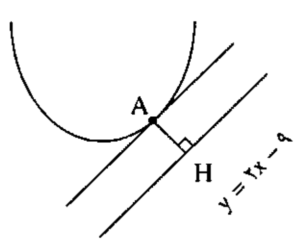
$$AH=\frac{|-(x-2)^2-5|}{\sqrt5}$$

به کمک مشتق از عبارت $|-x^2+4x-9|$ نیز می‌توان می‌نیمم آن را پیدا کرد ؛ به این ترتیب که : $-2x+4=0$ ، پس : $x=2$ و مقدار می‌نیمم برابر است با :

$$\mathrm{Min}(AH)=\frac{|-5|}{\sqrt5}=\boxed{\sqrt5}$$

$\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=0\end{cases}\Rightarrow$ نقطهٔ مورد نظر

روش دوم: خطی موازی خط به معادلهٔ $y=2x-9$ به منحنی تابع مماس می‌کنیم، مختصات نقطه A به‌دست می‌آید. سپس فاصلهٔ AH را که می‌نیمم فاصله است، به‌دست می‌آید.



$\Rightarrow y'=2x-2=2$ شیب خط مماس

$$\Rightarrow 2x=4\Rightarrow x=2\Rightarrow A\begin{vmatrix}2\\0\end{vmatrix}$$

$$AH=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|4-0-9|}{\sqrt{4+1}}$$

$$=\frac{5}{\sqrt5}=\boxed{\sqrt5}$$

.۴ $y=\frac{3x^2-1}{x^3}$

مجانب قائم $y\to\pm\infty\Rightarrow x^3\to0\Rightarrow\boxed{x=0}$

مجانب افقی $x \to \pm\infty \Rightarrow y \to 0 \Rightarrow \boxed{y=0}$

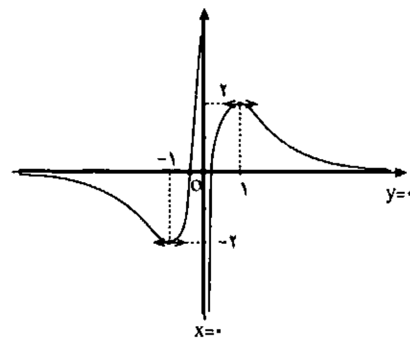
$$y' = \frac{6x^4 - 3x^2(3x^2-1)}{x^6}$$

$$= \frac{3x^2(1-x^2)}{x^6} = \frac{3(1-x^2)}{x^4} = 0$$

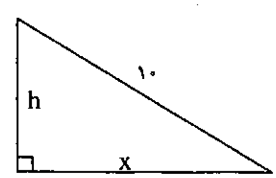
$$\Rightarrow \boxed{x = \pm 1}$$

$$y = 0 \Rightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1		$+\infty$
y'		$-$		$+$		$+$		$+$		$+$		$-$	
y	0	↘	-2	↗	0	↗	$+\infty \mid -\infty$	↗	0	↗	2	↘	0



.۵



$x = 8$

$\Delta x = \frac{1}{2}$

$h^2 = 100 - x^2 \Rightarrow h = \sqrt{100 - x^2}$

$h' = \frac{-x}{\sqrt{100-x^2}}$

$$\Delta h \cong dh = h'.\Delta x = \frac{-x}{\sqrt{100-x^2}}.\Delta x$$

$$= \frac{-8}{\sqrt{100-64}} \times \frac{1}{2} = \frac{-8}{6} \times \frac{1}{2} = -\frac{2}{3}$$ متر

.۶ $\Delta x = \frac{b-0}{n} = \frac{b}{n}$

$x_1 = \frac{b}{n}$ ، $x_2 = 2(\frac{b}{n})$ ، ... $x_i = i(\frac{b}{n})$ ، ... $x_n = n(\frac{b}{n})$

در تابع به معادلهٔ $y = x^3$ ، $y' = 3x^2 \geq 0$ ، پس تابع صعودی اکید است. به کمک بالاریمان ثابت می‌کنیم: $\int_0^b x^3 dx = \frac{b^4}{4}$

$$u_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(u_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(\frac{ib}{n})\frac{b}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{i^3 b^3}{n^3} \times \frac{b}{n} = \frac{b^4}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^3$$

داریم: $\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\Rightarrow u_n(f) = \frac{b^4}{n^4} \times \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\int_0^b x^3 dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{b^4}{n^4} \times \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{b^4}{n^4} \times \frac{n^4}{4} = \frac{b^4}{4}$$

.۷ $$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x - \frac{x^3}{6}}{x^5} = \frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow H_1 = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x - \frac{x^2}{2}}{5x^4} = \frac{0}{0}$$

$$H_2 = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{20x^3} = \frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow H_4 = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{60x^2} = \frac{0}{0}$$

$$H_5 = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{120x} \sim \lim_{x\to 0} \frac{-x}{120x} = -\frac{1}{120}$$

.۸ به روش جزء به جزء $\int xe^{2x}dx$

$$\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ e^{2x}dx = dv \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$$

داریم: $\int udv = uv - \int vdu$

$$\int xe^{2x}dx = \frac{x}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx$$

$$= \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + c$$

توجه: $\int u'e^u dx = e^u + c$.

.۹ توجه: داریم، اگر f تابعی فرد باشد $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

$$\int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{5 + \text{Arcsin}\, x}{4+9x^2}dx = \int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{5dx}{4+9x^2} + \int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{\text{Arcsin}\, x}{4+9x^2}dx$$

امّا تابع به معادلهٔ $f(x) = \frac{\text{Arcsin}\, x}{4+9x^2}$ تابعی فرد است، پس $\int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{\text{Arcsin}\, x}{4+9x^2}dx = 0$

$$\Rightarrow \int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{5}{4+9x^2}dx$$

$$= \frac{5}{4}\int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{dx}{1+\frac{9}{4}x^2} \quad \begin{cases} u = \frac{3}{2}x \\ u' = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$= \frac{5}{4} \times \frac{2}{3}\int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{\frac{3}{2}dx}{1+\frac{9}{4}x^2} = \frac{5}{6}\int_{-1}^{1} \frac{u'dx}{1+u^2}$$

$$= (\frac{5}{6}\text{Arctan}\, u)_{-1}^{1} + c$$

$$= \frac{5}{6}(\text{Arctan}1 + \text{Arctan}1) = \frac{5}{6}(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4})$$

$$= \frac{5\pi}{12}$$

.۱۰

$$S = \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} ydx\right| = \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin(x+\frac{\pi}{4})}dx\right|$$

$$= \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}+2x)}{\sin(x+\frac{\pi}{4})}dx\right|$$

$$= \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin(x+\frac{\pi}{4})\cos(x+\frac{\pi}{4})}{\sin(x+\frac{\pi}{4})}dx\right|$$

$$= \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos(x+\frac{\pi}{4})dx\right| = \left|+2\sin(x+\frac{\pi}{4})\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right|$$

$$= \left|2\sin\frac{\pi}{2} - 2\sin\frac{\pi}{4}\right| = |2-\sqrt{2}| = 2-\sqrt{2}$$

حل مسأله‌های حسابان ۲

• احمد قندهاری

۱. تابع f را در نقطهٔ x_0 وقتی مشتق‌پذیر گویند که $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ برابر یک عدد معلوم و مشخص شود. حال حلّ مسأله:

$$|x^2-4x+3| = |x-3|\times|x-1|$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{|x-3|.|x-1|\sqrt{|x+1|}}{x-3}$$

الف) $x\to 3^+ \Rightarrow \lim_{x\to 3^+}\frac{(\cancel{x-3})|x-1|\sqrt{|x+1|}}{\cancel{x-3}}$

$=2\sqrt{4}=4=f'_+(3)$ مشتق راست

ب) $x\to 3^- \Rightarrow \lim_{x\to 3^-}\frac{-(\cancel{x-3})|x-1|\sqrt{|x+1|}}{\cancel{x-3}}$

$=-2\sqrt{4}=-4=f'_-(3)$ مشتق چپ

پس این تابع در $x_0=3$ مشتق‌پذیر نیست. اگر زاویهٔ بین دو نیم مماس α باشد، داریم:

$$\tan\alpha = \left|\frac{m-m'}{1+mm'}\right| = \left|\frac{4+4}{1-16}\right| = \left|-\frac{8}{15}\right|$$

$$\Rightarrow \alpha = \text{Arctan}\frac{8}{15}$$

۲. تناوب اصلی تابع را T فرض می‌کنیم. باید $f(x+T)=f(x)$

$$f(x+T) = n(x+T) - \lfloor n(x+T)\rfloor$$

$$= nx+nT-\lfloor nx+nT\rfloor$$

برای آن که $f(x+T)$ برابر $f(x)$ شود، باید nT عدد صحیح باشد تا پس از خروج از جزء صحیح با nT بیرونی حذف شود؛ پس $nT=k\in Z$ و کوچکترین عدد صحیح $k=1$، پس $nT=1$، در نتیجه: $\boxed{T=\frac{1}{n}}$

۳. $y=\frac{\cos x}{2\cos x+1}$ ، $0\le x\le 2\pi$

مجانب قائم: $y\to\pm\infty \Rightarrow 2\cos x+1=0$

$$\Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$$

$$x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}\Rightarrow \boxed{x=\frac{2\pi}{3}\ ,\ \frac{4\pi}{3}}$$

$$y' = \frac{-\sin x(2\cos x+1)+2\sin x\cos x}{V^2}$$

$$=\frac{-\sin x}{V^2}=0\Rightarrow \sin x=0\Rightarrow x=k\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{x=0,\pi,2\pi}$$

$x=0$ یا $2\pi \Rightarrow y=\frac{\cos 0}{2\cos 0+1}=\frac{1}{3}$

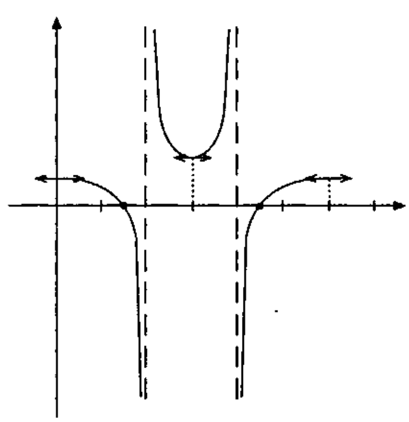
$$x=\pi\Rightarrow y=\frac{-1}{-2+1}=1$$

$$y=0\Rightarrow \cos x=0\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}}$$

x	y
$\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$	$\pm\infty$
0	$\frac{1}{3}$
π	1
2π	$\frac{1}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{3\pi}{2}$	0

x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y'	0 −	−	‖ −	0 +	‖ +	+	0
y	$\frac{1}{3}$ ↘	0 ↘ $-\infty$	‖ $+\infty$ ↘	1 ↗ $+\infty$	‖ $-\infty$ ↗	0 ↗	$\frac{1}{3}$

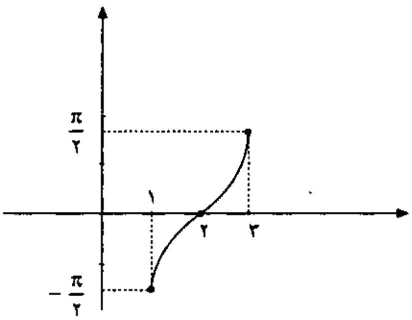


۴. $y=\text{Arcsin}(x-2)$

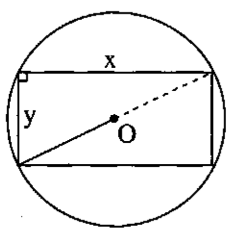
$$-1\le x-2\le 1\Rightarrow 1\le x\le 3\Rightarrow D_{\text{تابع}}=[1,3]$$

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-(x-2)^2}}>0$$

x	1	2	3
y'		+	+
y	$-\frac{\pi}{2}$ ↗	0 ↗	$\frac{\pi}{2}$



۵. مساحت مستطیل را S می‌نامیم.



$$x^2+y^2=16 \quad x,y>0$$

$$S=x.y=x\sqrt{16-x^2}$$

$$S'=\sqrt{16-x^2}+\frac{-x^2}{\sqrt{16-x^2}}$$

$$S'=\frac{16-x^2-x^2}{\sqrt{16-x^2}}=\frac{16-2x^2}{\sqrt{16-x^2}}=0$$

$$\Rightarrow x^2=8\Rightarrow x=2\sqrt{2}$$

$$Max(S)=2\sqrt{2}\sqrt{16-8}=2\sqrt{2}(2\sqrt{2})=8$$

۶. $\log_{\frac{1}{5}}(x^2-4)>-1$

$$\Rightarrow 0<x^2-4<(\frac{1}{5})^{-1}$$

توجه: هرگاه مبنای لگاریتم یعنی a بین صفر و یک باشد، در تابع نامساویها، جهت نامساوی عوض می‌شود.

$$\Rightarrow 0<x^2-4<5\Rightarrow 4<x^2<9$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 < x < 3 \\ \text{یا} \\ -3 < x < -2 \end{cases}$$

۷. شعاع دایره را R می‌نامیم، مختصات مرکز $O'\begin{vmatrix} R \\ -R \end{vmatrix}$ خواهد شد. معادلهٔ دایره که در ربع چهارم بر محور مماس است :

$$(x-R)^2 + (y+R)^2 = R^2$$

$$A\begin{vmatrix} 1 \\ -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{در معادلهٔ دایره}} (1-R)^2 + (-2+R)^2 = R^2$$

$$\Rightarrow 1 + R^2 - 2R + 4 + R^2 - 4R = R^2$$

$$\Rightarrow R^2 - 6R + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} R = 1 \\ R = 5 \end{cases}$$

معادله‌های دایره‌ها :

$$R = 1 \Rightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$$

$$R = 5 \Rightarrow (x-5)^2 + (y+5)^2 = 25$$

۸. O' مرکز هذلولی وسط FF' است

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{O'} = \dfrac{x_F + x_{F'}}{2} = \dfrac{1+1}{2} = 1 \\ y_{O'} = \dfrac{y_F + y_{F'}}{2} = \dfrac{2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow O'\begin{vmatrix} 1 = h \\ 0 = k \end{vmatrix}$$

$$FF' = 2c = |y_F - y_{F'}| = |2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}|$$

$$= 4\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{c = 2\sqrt{3}}$$

$$\frac{c}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{2\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 12 = 4 + b^2 \Rightarrow \boxed{b^2 = 8}$$

چون $x_F = x_{F'}$ ، پس محور کانونی، موازی محور عرضها و هذلولی نوع چهارم است.

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{(y-0)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{8} = 1}$$

۹. $A = \int_{-3}^{3} \dfrac{dx}{9+x^2} = \dfrac{1}{9}\int_{-3}^{3} \dfrac{dx}{1+\dfrac{x^2}{9}}$

$$u = \frac{x}{3} \Rightarrow u' = \frac{1}{3} \begin{cases} \text{اگر } x = -3 \Rightarrow u = -1 \\ \text{اگر } x = 3 \Rightarrow u = 1 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{9}\int_{-1}^{1} \frac{3 \times \frac{1}{3}dx}{1+u^2} = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} \frac{u'dx}{1+u^2}$$

$$= \frac{1}{3}(\mathrm{Arctan}\, u)_{-1}^{1} = \frac{1}{3}(\mathrm{Arctan}\, 1) - (\mathrm{Arctan}(-1))$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{6}$$

۱۰. $\int_0^4 \lfloor x+4 \rfloor dx = \int_0^4 \lfloor x \rfloor dx + \int_0^4 4dx$

$$= \int_0^1 0dx + \int_1^2 1dx + \int_2^3 2dx + \int_3^4 3dx + (4x)_0^4$$

$$= (x)_1^2 + (2x)_2^3 + (3x)_3^4 + (4x)_0^4$$

$$= (2-1) + (6-4) + (12-9) + 16 = 22$$

پاسخ کلیدی پرسش‌های چهارگزینه‌ای

● هندسه ۱

۱. (۴)	۲. (۲)	۳. (۲)	۴. (۴)
۵. (۱)	۶. (۳)	۷. (۲)	۸. (۴)
۹. (۱)	۱۰. (۲)		

● ریاضیات گسسته

۱۱. (۳)	۱۲. (۲)	۱۳. (۴)	۱۴. (۲)
۱۵. (۴)	۱۶. (۲)	۱۷. (۳)	۱۸. (۳)
۱۹. (۳)	۲۰. (۴)	۲۱. (۱)	۲۲. (۳)
۲۳. (۲)	۲۴. (۳)		

● جبر و احتمال

۲۵. (۳)	۲۶. (۱)	۲۷. (۴)	۲۸. (۱)
۲۹. (۳)	۳۰. (۴)	۳۱. (۳)	۳۲. (۳)
۳۳. (۲)	۳۴. (۲)	۳۵. (۲)	۳۶. (۴)

● حسابان ۱

۳۷. (۲)	۳۸. (۴)	۳۹. (۳)	۴۰. (۱)
۴۱. (۳)	۴۲. (۴)	۴۳. (۴)	۴۴. (۱)
۴۵. (۴)	۴۶. (۱)	۴۷. (۴)	۴۸. (۲)
۴۹. (۳)	۵۰. (۳)	۵۱. (۴)	۵۲. (۲)
۵۳. (۳)	۵۴. (۴)	۵۵. (۲)	۵۶. (۴)

● حساب دیفرانسیل و انتگرال ۱

۵۷. (۴)	۵۸. (۳)	۵۹. (۳)	۶۰. (۲)
۶۱. (۳)	۶۲. (۴)	۶۳. (۳	۶۴. (۴)
۶۵. (۴)	۶۶. (۳)	۶۷. (۱)	۶۸. (۱)
۶۹. (۲)	۷۰. (۴)	۷۱. (۱)	۷۲. (۳)
۷۳. (۳)	۷۴. (۱)	۷۵. (۲)	۷۶. (۱)

● ریاضی عمومی ۱

۷۷. (۲)	۷۸. (۳)	۷۹. (۱)	۸۰. (۱)
۸۱. (۴)	۸۲. (۳)	۸۳. (۱)	۸۴. (۱)
۸۵. (۴)	۸۶. (۳)	۸۷. (۲)	

● هندسه تحلیلی

۸۸. (۴)	۸۹. (۳)	۹۰. (۱)	۹۱. (۱)
۹۲. (۲)	۹۳. (۴)	۹۴. (۱)	۹۵. (۲)
۹۶. (۴)	۹۷. (۳)		

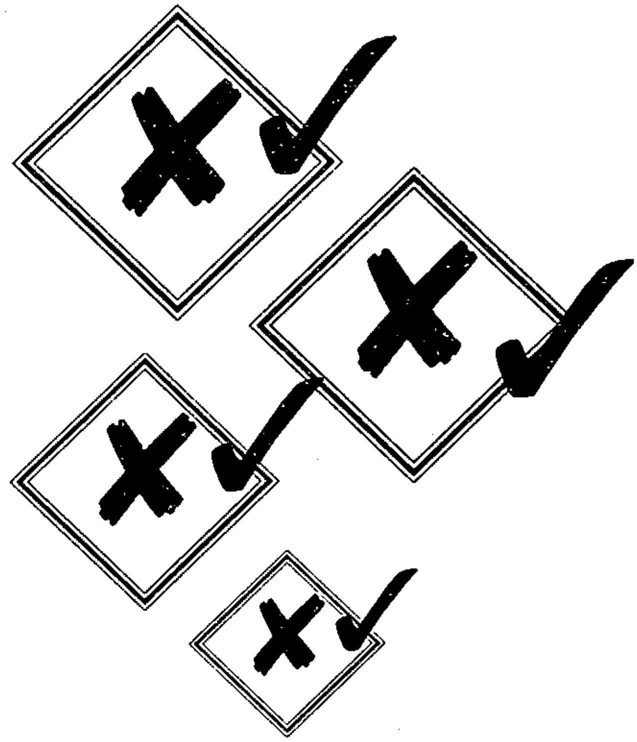
● ریاضی ۱

۹۸. (۲)	۹۹. (۳)	۱۰۰. (۴)	۱۰۱. (۳)
۱۰۲. (۴)	۱۰۳. (۴)	۱۰۴. (۳)	۱۰۵. (۳)
۱۰۶. (۴)	۱۰۷. (۲)		

● ریاضی ۲

۱۰۸. (۳)	۱۰۹. (۱)	۱۱۰. (۳)	۱۱۱. (۲)
۱۱۲. (۴)	۱۱۳. (۲)	۱۱۴. (۲)	۱۱۵. (۱)
۱۱۶. (۴)	۱۱۷. (۴)	۱۱۸. (۳)	۱۱۹. (۲)
۱۲۰. (۳)			

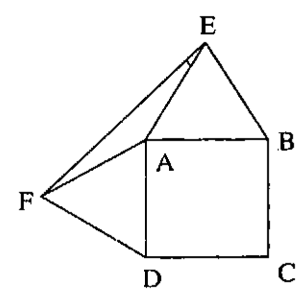
سؤالات چهار گزینه‌ای



احمد قندهاری
محمدهاشم رستمی
حمیدرضا امیری
میرشهرام صدر
سیدمحمدرضا هاشمی موسوی

هندسهٔ ۱

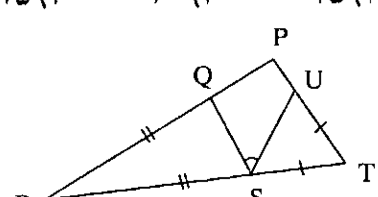
۱. در شکل داده شده چهارضلعی ABCD مربع و مثلثهای ABE و ADF متساوی‌الاضلاعند. متمم زاویهٔ AEF چند درجه است؟



۱) ۱۵ ۲) ۳۰ ۳) ۴۵ ۴) ۷۵

۲. در مثلث قائم‌الزاویهٔ PRT ($\hat{P} = 90^\circ$) ضلعهای مشخص شده با علامتهای یکسان، متساویند؛ اندازهٔ زاویهٔ QSU چند درجه است؟

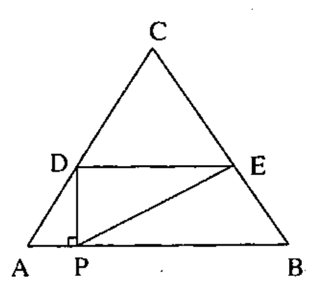
۱) ۳۰ ۲) ۴۵ ۳) ۶۰ ۴) ۷۵



۳. قطرهای یک چهارضلعی محدّب بر هم عمودند. اندازهٔ مساحت این چهارضلعی برابر است با:

۱) حاصل‌ضرب دو قطر
۲) نصف حاصل‌ضرب دو قطر
۳) دو برابر حاصل‌ضرب دو قطر
۴) چهار برابر حاصل‌ضرب دو قطر

۴. در شکل، ABC مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۲۰cm و AD = ۸cm و DP⊥AB است. اندازهٔ پاره‌خط PE چه‌قدر است؟



۱) ۶ ۲) ۸ ۳) $۶\sqrt{۳}$ ۴) $۸\sqrt{۳}$

۵. اگر نسبت مساحتهای دو مثلث متشابه $a^2 + ۳$ و نسبت محیطهای این دو مثلث $a + ۱$ باشد، a برابر است با:

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

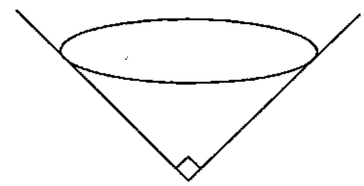
۶. اگر اندازهٔ قطر مکعبی $\sqrt{۲}$ برابر شود، حجم آن چند برابر می‌شود؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۲ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{6}$

۷. قاعدهٔ منشور مایلی، مربعی به ضلع ۸cm، طول یال جانبی آن ۱۲cm و زاویهٔ یال با صفحهٔ قاعده برابر ۶۰ درجه است، اندازهٔ حجم این منشور چه قدر است؟

۱) $64\sqrt{3}$ ۲) $384\sqrt{3}$ ۳) $192\sqrt{3}$ ۴) $128\sqrt{3}$

۸. به اندازهٔ 72π متر مکعب آب در گودالی مخروطی شکل که زاویهٔ رأس آن ۹۰ درجه است، ریخته‌ایم. ارتفاع آب چند متر است؟



۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۹. سطح جانبی یک کره $36\pi cm^2$ است، حجم نصف این کره، چند سانتی‌متر مکعب است؟

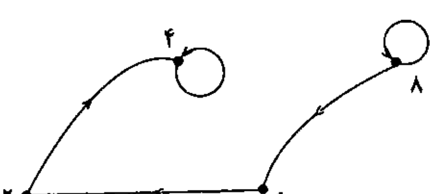
۱) 18π ۲) ۱۸ ۳) 36π ۴) ۳۶

۱۰. ارتفاع هرم مربع القاعدهٔ منتظمی برابر ۱۲cm و اندازهٔ یال آن ۱۳cm است. اندازهٔ مساحت قاعدهٔ این هرم، چند سانتی‌مترمربع است؟

۱) ۲۵ ۲) ۵۰ ۳) ۷۵ ۴) ۱۰۰

❖ ریاضیات گسسته

۱۱. گراف جهت‌دار رابطهٔ R روی $A = \{2,4,6,8\}$ در زیر رسم شده است، رابطهٔ R کدام است؟



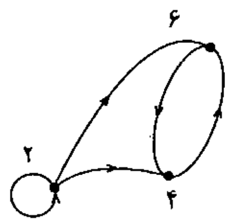
۱) $R = \{(2,4),(6,2),(8,6),(8,8)\}$

۲) $R = \{(2,4),(2,6),(4,4),(8,6),(8,8)\}$

۳) $R = \{(8,6),(2,4),(6,2),(4,4),(8,8)\}$

۴) $R = \{(8,6),(8,8),(6,2),(4,2),(4,4)\}$

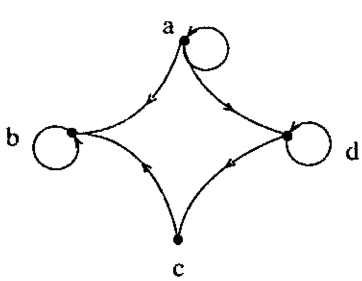
۱۲. اگر $A = \{2,4,6\}$ و R رابطه‌ای روی A با گراف زیر باشد، ماتریس این گراف کدام است؟



۱) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

۱۳. گراف جهت‌دار رابطهٔ R در زیر رسم شده است، کدام گزینه درست است؟



۱) R انعکاسی است.

۲) R متقارن است.

۳) R فقط پاد متقارن و ترایایی است.

۴) R فقط پاد متقارن است.

۱۴. معادلهٔ $x + y + z + t = 7$ چند جواب صحیح مثبت دارد؟

۱) $\binom{10}{3}$ ۲) $\binom{6}{3}$

۳) $\binom{7}{4}$ ۴) $\binom{11}{4}$

۱۵. عبارت حاصل از بسط $(a+b+c+d)^9$ چند جمله دارد؟

۱) $\binom{9}{3}$ ۲) $\binom{10}{4}$

۳) $\binom{8}{3}$ ۴) $\binom{12}{3}$

۱۶. n مهره داریم و آنها را به تصادف در m ظرف $u_1, u_2, \dots, u_m$ قرار می‌دهیم. احتمال آن که در ظرف u_2، k مهره قرار گرفته باشد، چه‌قدر است؟ $(k < n)$

۱) $\dfrac{\binom{n}{k}(m-k)^{n-k}}{n^m}$ ۲) $\dfrac{\binom{n}{k}(m-1)^{n-k}}{n}$

۳) $\dfrac{\binom{n}{k}(m-1)^{n-k}}{n^m}$ ۴) $\dfrac{\binom{n}{k}(m-k)^{n-k}}{m^k}$

۱۷. اگر $P(B)=\frac{1}{3}$ ، $P(\frac{A}{B})=\frac{1}{4}$ و $P(\frac{B}{A})=\frac{2}{5}$ ، در این صورت، $P(A)$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{12}$ ۲) $\frac{5}{11}$

۳) $\frac{5}{24}$ ۴) $\frac{12}{25}$

۱۸. در کیسهٔ A ، ۴ مهرهٔ قرمز و ۳ مهرهٔ سیاه و در کیسهٔ B، ۳ مهرهٔ قرمز و ۵ مهرهٔ سیاه وجود دارد. یکی از این دو کیسه را به تصادف انتخاب و مهره‌ای به تصادف از آن خارج می‌کنیم. اگر مهرهٔ انتخاب شده سیاه باشد، احتمال این که این مهره متعلّق به کیسهٔ B باشد، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{4}{7}$ ۲) $\frac{3}{8}$

۳) $\frac{5}{8}$ ۴) $\frac{1}{8}$

۱۹. یک سکّه طوری ساخته شده است که احتمال T آمدن آن برابر $\frac{2}{3}$ است. اگر این سکّه را ۵ بار پرتاب کنیم، احتمال آن که دقیقاً ۴ بار H بیاید، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{2}{3^4}$ ۲) $\frac{2^4}{3^4}$

۳) $\frac{10}{3^4}$ ۴) $\frac{4}{3^4}$

۲۰. اگر G یک گراف باشد که درجهٔ همهٔ رئوس آن ۴ است و $3|V|=|E|+8$ ، کدام گزینه درست است؟

۱) $|E|=14\ ,\ |V|=7$

۲) $|E|=10\ ,\ |V|=6$

۳) $|E|=18\ ,\ |V|=8$

۴) $|E|=16\ ,\ |V|=8$

۲۱. اگر گراف G دارای ۱۴ رأس و ۲۲ یال باشد، چه تعداد از یال‌ها را باید حذف کنیم تا گراف به درخت تبدیل شود؟

۱) ۹ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۰

۲۲. اگر m عددی طبیعی باشد، حاصل $\left[(2^5,3^m),(3^m,6^m)\right]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) 3^m ۴) 6^m

۲۳. باقیماندهٔ تقسیم $(5^{120}-7)$ بر ۷ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۶- ۴) ۶

۲۴. معادلهٔ $mx+m^2y=k$ در Z، دارای جواب است، کدام گزینه **نادرست** است؟

۱) $m|k$ ۲) $(m,k)=|m|$

۳) $\left[m^4,k^4\right]=k$ ۴) $(m^2,k^2)=k^2$

❖ جبر و احتمال

۲۵. ۵ نقطهٔ متمایز از محیط دایرهٔ مثلثاتی مفروضند، در این صورت کدام گزینه درست است؟

۱) حداقل دو نقطه دارای نسبتهای مثلثاتی برابر هستند.

۲) حداقل دو نقطه از این ۵ نقطه، تانژانتهای برابر خواهند داشت.

۳) حداقل دو نقطه دارای نسبتهای مثلثاتی هم علامت هستند.

۴) هیچ دو نقطه‌ای سینوسهای برابر ندارند.

۲۶. اگر $U=\{1,2,3,\dots,k\}$ مجموعهٔ مرجع $(k>10)$ و $A=\{3,4,\dots,k-3\}$ و $B=\{1,2,\dots,k-6\}$ ، در این صورت مجموعهٔ $(A-B)$ کدام است؟

۱) $\{(k-5),(k-4),(k-3)\}$

۲) $\{1,2,\dots,k-6\}$

۳) $\{3,4,\dots,k-6\}$

۴) $\{1,2,(k-5),(k-4),(k-3)\}$

۲۷. اگر $A=\{x-y,3\}$ و $B=\{3x-2,1\}$ و $A\times B=B\times A$ ، در این صورت کدام گزینه درست است؟

۱) $x=\frac{2}{3}\ ,\ y=\frac{5}{3}$ ۲) $x=-\frac{2}{3}\ ,\ y=-\frac{5}{3}$

۳) $x=\frac{2}{3}\ ,\ y=-\frac{5}{3}$ ۴) $x=\frac{5}{3}\ ,\ y=\frac{2}{3}$

۲۸. شرط لازم و کافی برای آن که $[a]=[b]$ کدام است؟ (رابطهٔ R هم‌ارزی است.)

۱) $(a,b)\in R^{-1}$ ۲) $(b,a)\notin R^{-1}$

۳) $a\in R\ ,\ b\in R$ ۴) $a\not R b$

۲۹. رابطهٔ R روی $\mathbb{R}$ به صورت $(x,y)R(z,k)\Leftrightarrow x+k=y+z$ تعریف شده است ؛ نمودار دسته‌های هم‌ارزی این رابطه کدام است؟

۱) خطوط موازی نیمساز ناحیهٔ دوم

۲) خطوط عمود بر محور yها

۳) خطوط موازی نیمساز ناحیهٔ اوّل

۴) خطوط عمود بر محور xها

۳۰. عدد $(49)^{101}+4^{100}$ به کدام رقم ختم می‌شود؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۳۱. باقیماندهٔ تقسیم $(1!+2!+3!+\dots+20!)$ بر ۲۴ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲۳ ۳) ۹ ۴) ۴

۳۲. می‌خواهیم از بین ۵ فوتبالیست و ۵ دونده، یک تیم چهار نفره انتخاب کنیم. احتمال آن که در این تیم حداقل یک فوتبالیست به طور حتم حضور داشته باشد، کدام است؟

۱) $\frac{80}{93}$ ۲) $\frac{80}{91}$ ۳) $\frac{205}{210}$ ۴) $\frac{205}{220}$

۳۳. یک تاس طوری ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد زوج، ۳ برابر احتمال وقوع هر عدد فرد است. در پرتاب این تاس، احتمال آن که عدد کوچکتر از ۴ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{1}{21}$ ۲) $\frac{5}{12}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{5}{21}$

۳۴. دو قطعه چوب ۱متری و ۲متری داریم، چوب بزرگتر را تصادفی به دو قسمت ارّه می‌کنیم، احتمال آن که این سه قطعه چوب، تشکیل یک مثلث بدهند، کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۳۵. اگر A و B دو پیشامد باشند، $P(A-B)+P(B)$ کدام است؟

۱) $P(A)$ ۲) $P(A\cup B)$

۳) $P(B)$ ۴) $P(A\cap B)$

۳۶. احتمال آن که در تیراندازی، دو شخص A و B به هدف بزنند، بترتیب $\frac{1}{5}$ و $\frac{2}{3}$ است، اگر A و B با هم شلیک کنند، احتمال آن که لااقل یکی به هدف نزند، کدام است؟

۱) $\frac{2}{15}$ ۲) $\frac{4}{15}$ ۳) $\frac{11}{15}$ ۴) $\frac{13}{15}$

❖ حسابان ۱

۳۷. دامنهٔ تعریف تابع به معادلهٔ $f(x)=\sqrt{2-\sqrt{x-1}}$ کدام است؟

۱) $[0,5]$ ۲) $[1,5]$

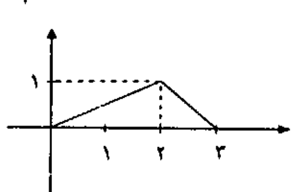
۳) $[-1,5]$ ۴) $[1,4]$

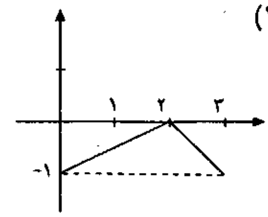
۳۸. برد تابع به معادلهٔ $f(x)=\lfloor \tan x+\cot x\rfloor$ کدام است؟

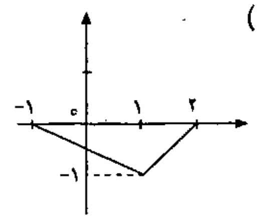
۱) $\mathbb{R}$ ۲) Z

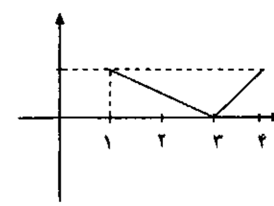
۳) $(\mathbb{R}-Z)$ ۴) $Z-\{\pm1,0\}$

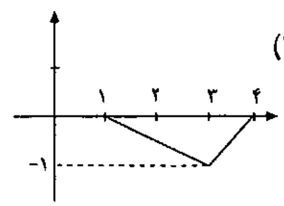
۳۹. اگر نمودار تابع f به صورت شکل زیر باشد، آن‌گاه نمودار تابع به معادلهٔ $g(x)=1-f(x-1)$ کدام است؟



۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۴۰. کدام‌یک از تابعهای به معادله‌های زیر، هم فرد است و هم زوج؟

۱) $f(x)=\left\lfloor \frac{x^2}{x^2+1} \right\rfloor$ ۲) $g(x)=ax^n\ ،\ n\in\mathbb{N}$

۳) $h(x)=\tan x+\cot x$ ۴) $t(x)=x^2-x$

۴۱. سهمی به معادلهٔ $f(x)=\sqrt{2}x^2+\sqrt{m^2+1}\ x-\sqrt{6}$ به ازای چه مقدارهای m، منحنی سهمی محور xها را در دو نقطهٔ متمایز قطع می‌کند؟

۱) $m\geq 2$ ۲) $\sqrt{2}<m<\sqrt{3}$

۳) همهٔ مقادیر m ۴) هیچ مقدار m

۴۲. اگر $f(x)=x^3-3x$، آن‌گاه باقیماندهٔ تقسیم $f(2x-1)$ بر $(2x-1)$ چه‌قدر است؟

۱) ۴ ۲) ۳

۳) ۲ ۴) صفر

۴۳. معادلهٔ تابع معکوس تابع به معادلهٔ $f(x)=x^3-3x^2+3x$ کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=1-\sqrt[3]{x+1}$ ۲) $f^{-1}(x)=-1+\sqrt[3]{x-1}$

۳) $f^{-1}(x)=1+\sqrt[3]{x+1}$ ۴) $f^{-1}(x)=1+\sqrt[3]{x-1}$

۴۴. تابع به معادلهٔ $f(x)=(\lfloor x\rfloor-2)(\lfloor x\rfloor-1)$ در $x_0=2$:

۱) حدّ دارد. ۲) فقط حدّ راست دارد.

۳) فقط حدّ چپ دارد. ۴) نه حدّراست داردنه حدّچپ.

۴۵. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\lfloor x+\sin x\rfloor}{\lfloor 5\sin x\rfloor}$ برابر است با :

۱) صفر ۲) ۱

۳) ۲ ۴) $\frac{1}{2}$

۴۶. $\lim\limits_{x\to\infty}\left\lfloor \frac{4x^2-5}{x^2+1}\right\rfloor$ برابر است با :

۱) ۳ ۲) ۲

۳) ۴ ۴) ۵−

۴۷. معادلهٔ نمودار تابع معکوس تابع به معادلهٔ $f(x)=\frac{2x-1}{x-2}$ کدام است؟

۱) $y=\frac{2x+1}{x-2}$ ۲) $y=\frac{2x+1}{x+2}$

۳) $y=\frac{x-2}{2x-1}$ ۴) $y=\frac{2x-1}{x-2}$

۴۸. اگر f تابعی یک‌به‌یک باشد و داشته باشیم $h(x)=f(\frac{x}{4})$، آن‌گاه معادلهٔ تابع معکوس تابع h کدام است؟

۱) $2f^{-1}(x)$ ۲) $4f^{-1}(x)$

۳) $\frac{f^{-1}(x)}{2}$ ۴) $\frac{f^{-1}(x)}{4}$

۴۹. در تابع به معادلهٔ $f(x)=3x+2$، اگر $x\to 1$، آن‌گاه $f(x)\to 5$، اگر $|f(x)-5|<\frac{1}{100}$، آن‌گاه حدود x کدام است؟

۱) $\frac{199}{200}<x<\frac{201}{200}$ ۲) $\frac{99}{100}<x<\frac{101}{100}$

۳) $\frac{299}{300}<x<\frac{301}{300}$ ۴) $1<x<5$

۵۰. در تابع به معادلهٔ $f(x)=4x+1$، اگر $\frac{49}{10}<f(x)<\frac{51}{10}$، آن‌گاه x به سمت چه عددی میل می‌کند؟

۱) $x\to -1$ ۲) $x\to\frac{1}{2}$

۳) $x \to 1$
۴) $x \to -\frac{1}{2}$

۵۱. معادلهٔ مجانب افقی تابع به معادلهٔ $f(x) = \frac{x+\sqrt{x}}{2x-1}$ ، $x \geq 0$ کدام است؟

۱) $y = 2$
۲) $y = 0$
۳) $y = 1$
۴) $y = \frac{1}{2}$

۵۲. اگر منحنی به معادلهٔ $f(x) = \frac{ax^2+4x-1}{bx+10}$ دارای مجانب افقی به معادلهٔ $y = 1$ باشد، $(a+b)$ برابر است با :

۱) ۵
۲) ۴
۳) ۳
۴) ۲

۵۳. منحنی به معادلهٔ $y = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-2}$ چه مجانبهایی دارد؟

۱) یک قائم و یک افقی
۲) یک قائم و دو افقی
۳) دو افقی
۴) فقط یک قائم

۵۴. منحنی به معادلهٔ $f(x) = \frac{\sin 2x}{\sin x}$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$، چند مجانب قائم دارد؟

۱) یک
۲) دو
۳) سه
۴) هیچ

۵۵. منحنی تابع به معادلهٔ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ چه مجانبهایی دارد؟

۱) یک قائم
۲) دو قائم
۳) دو قائم و یک افقی
۴) یک افقی و یک قائم

۵۶. تابع به معادلهٔ $f(x) = \sqrt{-2x^2+11x-9}$ در کدام یک از بازه‌های زیر پیوسته است؟

۱) $(-\infty, 1) \cup (\frac{9}{2}, +\infty)$
۲) $[-1, 1]$
۳) $[-1, \frac{9}{2}]$
۴) $[2, \frac{9}{2}]$

❖ حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱)

۵۷. کدام یک از گزاره‌های زیر، ویژگی ارشمیدسی اعداد حقیقی است؟

۱) برای هر عدد حقیقی x و y که مثبت باشند عدد طبیعی n وجود دارد که : $nx > y$.
۲) برای هر عدد حقیقی x و عدد حقیقی $y > 0$ ، عدد طبیعی n وجود دارد که : $nx > y$.
۳) برای هر عدد حقیقی y و عدد حقیقی $x > 0$ ، عدد طبیعی n وجود دارد که : $nx < y$.
۴) برای هر عدد حقیقی y و عدد حقیقی $x > 0$ ، عدد طبیعی n وجود دارد که : $nx > y$.

۵۸. اگر $a < x < b$ و a و b حقیقی و $a < b$ ، آن‌گاه داریم :

۱) $\left|x - \frac{a+b}{2}\right| < \frac{a-b}{2}$
۲) $\left|x - \frac{a-b}{2}\right| < \frac{b-a}{2}$
۳) $\left|x - \frac{a+b}{2}\right| < \frac{b-a}{2}$
۴) $\left|x - \frac{a-b}{2}\right| < \frac{a-b}{2}$

۵۹. دنباله‌های : الف : $\{\sqrt{n}\}$، ب : $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$، ج : $\left\{\frac{n^2+10}{n^2-1}\right\}$ و د : $\{n^2-2n\}$ ، کدام همگرا و کدام واگراست.

۱) الف و ج واگرا و ب و د همگراست.
۲) الف و ج همگرا و ب و ج واگراست.
۳) الف و د واگرا و ب و ج همگراست.
۴) الف و ب همگرا و ج و د واگراست.

۶۰. در دنبالهٔ $\left\{\frac{4n+1}{2n-5}\right\}$ برای کدام مقادیر n رابطهٔ $1/999 < \frac{4n+1}{2n-5} < 2/001$ برقرار است؟

۱) $n \geq 5502$
۲) $n \geq 5503$
۳) $n \geq 5501$
۴) $n \geq 5500$

۶۱. دنبالهٔ $\left\{\frac{\cos n + 2n^2 - 1}{n^2+1}\right\}$

۱) واگراست.
۲) به عدد (۱) همگراست.
۳) به عدد (۲) همگراست.
۴) به عدد (۱ −) همگراست.

۶۲. دنبالهٔ مثبت $\{a_n\}$: $a_1=\sqrt{6}$ و $a_{n+1}=\sqrt{6+a_n}$ به کدام یک از اعداد زیر همگراست؟

۱) به ۶ ۲) به $\sqrt{6}$

۳) به ۲ − ۴) به ۳

۶۳. اگر $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^2+1}-\frac{1}{(k+1)^2+1}\right)$، آن‌گاه :

۱) سری به صفر همگراست. ۲) سری به (۱) همگراست.

۳) سری به $\frac{1}{2}$ همگراست. ۴) سری واگراست.

۶۴. اگر $S_n=\sum_{k=1}^{n}\log\frac{k}{k+1}$، آن‌گاه :

۱) سری به صفر همگراست. ۲) سری به $\log 2$ همگراست.

۳) سری به $\log\frac{1}{2}$ همگراست. ۴) سری واگراست.

۶۵. اگر حدّ تابع f در نقطهٔ a برابر L باشد، کدام درست است؟

۱) $\forall\varepsilon>0\exists\delta>0:\ x\geq a\Rightarrow|f(x)-L|<\varepsilon$

۲) $\forall\delta>0\exists\varepsilon>0:\ 0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\varepsilon$

۳) $\forall\varepsilon>0\exists\delta>0:\ 0<|x-a|<\varepsilon\Rightarrow|f(x)-L|<\delta$

۴) $\forall\varepsilon>0\exists\delta>0:\ 0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\varepsilon$

۶۶. تابع به معادلهٔ $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ در نقاط $x_1=3$ و $x_2=-3$

۱) حدّ دارد.

۲) در x_1 حدّ دارد ؛ ولی در x_2 حدّ ندارد.

۳) در x_1 حدّ چپ و در x_2 حدّ راست دارد.

۴) در x_1 حدّ راست و در x_2 حدّ چپ دارد.

۶۷. دو دنبالهٔ : الف : $\left\{\left[1+\frac{1}{n}\right]\right\}$ و ب : $\left\{\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]\right\}$ مفروضند، کدام درست است؟

۱) دنبالهٔ الف حدّ دارد ؛ ولی دنبالهٔ ب حدّ ندارد.

۲) دنبالهٔ الف حدّ ندارد ؛ ولی دنبالهٔ ب حدّ دارد.

۳) دنبالهٔ الف و دنبالهٔ ب، هر دو حدّ دارند.

۴) دنبالهٔ الف و دنبالهٔ ب، هر دو حدّ ندارند.

۶۸. تابع به معادلهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{ax}{|x|}-4, & x>0\\ b-1, & x=0\\ \left[x-\frac{1}{2}\right], & x<0\end{cases}$ در $x_0=0$ پیوسته است ؛ $(a+b)$ برابر است با :

۱) ۳ ۲) ۳ −

۳) ۲ ۴) ۲ −

۶۹. تابع به معادلهٔ $f(x)=\begin{cases}\left(x-\frac{3}{2}\right)(x^2-4), & x\notin Z\\ 0, & x\in Z\end{cases}$ مفروض است. این تابع در چند نقطه به طولهای عدد صحیح پیوسته است؟

۱) یک نقطه ۲) دو نقطه

۳) سه نقطه ۴) بی‌شمار نقطه

۷۰. اگر تابع f در بازهٔ $[a,b]$ پیوسته و صعودی اکید باشد، آن‌گاه کدام همواره درست است؟

۱) تابع f^{-1} در بازه $[a,b]$ پیوسته و صعودی اکید است.

۲) تابع f^{-1} در بازه $[b,a]$ پیوسته و صعودی است.

۳) تابع f^{-1} در بازه $[a,b]$ پیوسته و نزولی اکید است.

۴) تابع f^{-1} در بازه $[f(a),f(b)]$ پیوسته و صعودی اکید است.

۷۱. معادله‌های مجانبهای مایل تابع به معادلهٔ $y=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}$ کدام است؟

۱) $y=\pm x$ ۲) $y=\pm(x-1)$

۳) $y=\pm\frac{x}{2}$ ۴) $y=\pm x\sqrt{2}$

۷۲. تابع به معادلهٔ $f(x)=\sqrt{x(x-1)}+\sqrt{x(x+1)}$ در نقطهٔ $x_0=0$:

۱) مشتق‌پذیر است.

۲) مشتق راست و چپ دارد ؛ ولی مساوی نیستند.

۳) نه مشتق راست دارد نه مشتق چپ.

۴) فقط مشتق راست دارد.

۷۳. اگر $f(x)=\tan^۲ x$، آن‌گاه

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f\left(\frac{\pi}{۴}+۲h\right)-f\left(\frac{\pi}{۴}-۲h\right)}{۲h}$$ برابر است با :

۱) ۴ ۲) ۶

۳) ۸ ۴) ۱۰

۷۴. تابع به معادلهٔ $f(x)=\begin{cases}x^۳ & , x\ge ۲\\ ax^۲+b & , x<۲\end{cases}$ در $x_۰=۲$ مشتق‌پذیر است، $(a-b)$ برابر است با :

۱) ۷ ۲) ۸

۳) -۷ ۴) -۸

۷۵. متحرکی روی مسیر به معادلهٔ $y=\sqrt{x^۲-۴}$ به گونه‌ای حرکت می‌کند که آهنگ افزایش مؤلفهٔ x، ۵ متر در ثانیه است. در $x=۳$ مؤلفهٔ y با چه آهنگی افزایش می‌یابد؟

۱) $۲\sqrt{۵}$ ۲) $۳\sqrt{۵}$

۳) $۴\sqrt{۵}$ ۴) $۵\sqrt{۵}$

۷۶. اگر شعاع یک دایره با سرعت ۲ متر در ثانیه افزایش یابد، مساحت سطح آن، هنگامی که شعاع ۱۰ سانتیمتر است، با چه سرعتی افزایش می‌یابد؟ $\pi=۳/۱۴$

۱) ۱۲۵/۶ ۲) ۱۱۵/۶

۳) ۱۰۵/۶ ۴) ۹۵/۶

❖ ریاضی عمومی ۱

۷۷. اگر ضریب تغییرات داده‌های آماری $x_۱$، $x_۲$، ...، x_n برابر ۴ باشد، ضریب تغییرات داده‌های آماری $۲x_۱$، $۲x_۲$، ...، $۲x_n$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۷۸. اگر از داده‌های آماری، ۵ واحد کم کنیم، آن‌گاه کدام گزینه درست است؟

۱) از دامنهٔ تغییرات ۵ واحد کم می‌شود.

۲) به دامنهٔ تغییرات ۵ واحد اضافه می‌شود.

۳) دامنهٔ تغییرات تغییری نمی‌کند.

۴) به دامنهٔ تغییرات ۲/۵ واحد اضافه می‌شود.

۷۹. از ظرفی که شامل ۶ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه است، ده مهره متوالیاً و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم، احتمال آن که هر دو مهره سیاه باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۶}{۷۲}$ ۲) $\left(\frac{۳}{۹}\right)^۲$

۳) $\frac{۱۱}{۶۴}$ ۴) $\left(\frac{۳}{۸}\right)^۲$

۸۰. به ازای کدام مقدار a، جدول زیر یک توزیع احتمال است؟

x	-۱	۰	۱	۲
P(x)	$\frac{a}{۴}$	$\frac{a}{۴}$	$\frac{a}{۸}$	$\frac{a}{۸}$

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$

۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۸۱. چه رابطه‌ای بین a و b برقرار باشد، تا این که دستگاه $\begin{cases}ax-۲y=۰\\ bx+ay=۰\end{cases}$ دارای جوابهای غیرصفر باشد؟

۱) $۲b-ab=۰$ ۲) $ab-۲a=۰$

۳) $a^۲=۲b$ ۴) $a^۲=-۲b$

۸۲. اگر $y=۲^{۲x-۱}$، آن‌گاه ضابطهٔ معکوس این تابع کدام است؟

۱) $y=\frac{۱}{۲}\log x+\frac{۱}{۲}$ ۲) $y=\frac{۱}{۲}\ln x+\frac{۱}{۲}$

۳) $y=\frac{۱}{۲}\log_۲^x+\frac{۱}{۲}$ ۴) $y=\frac{۱}{۲}\log_۲^x-\frac{۱}{۲}$

۸۳. اگر $e^{۲x}-۲e^x+۱=۰$، مقدار x کدام است؟

۱) $x=۰$ ۲) $x=۱$

۳) $x=-۱$ ۴) $x=e$

۸۴. اگر ماتریس $c=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & (a+b)\\ 0 & a+1 & 1\end{bmatrix}$، ماتریس سطری پلکانی تحویل یافته باشد، در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

۱) $-a=b=1$ ‏ ۲) $a=-b=1$
۳) $a=b=1$ ‏ ۴) $a=b=-1$

۸۵. تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x^5+5x|$ را در نظر می‌گیریم، کدام گزینه درست است؟

۱) تابع f در نقطهٔ $x=0$ مشتق‌پذیر است.
۲) نمودار تابع f در نقطهٔ $x=-5$ زاویه‌دار است.
۳) تابع در نقطهٔ $x=-5$ مشتق‌پذیر است.
۴) نمودار تابع f در نقطهٔ $x=0$ زاویه‌دار است.

۸۶. مشتق تابع با ضابطهٔ $f(x,y)=e^{\cos(x-y)}+e^{\cos(y-x)}+1=0$ کدام است؟

۱) $f'=\dfrac{e^{\cos(x-y)}}{e^{\cos(x+y)}}$ ‏ ۲) $f'=\dfrac{2^{\cos(x-y)}}{e^{\cos(x+y)}}$
۳) $f'=1$ ‏ ۴) $f'=-1$

۸۷. اگر منحنی به معادلهٔ $y=\dfrac{x+3}{x^2+mx+4}$ دارای یک مجانب قائم باشد، m کدام است؟

۱) $m=0$ ‏ ۲) $m=\pm 4$
۳) $m=\pm 8$ ‏ ۴) $m=\pm 6$

❖ هندسهٔ تحلیلی پیش دانشگاهی

۸۸. به ازای چه مقداری از a، فاصلهٔ دونقطهٔ $A=(a+1\ ,\ 2\ ,\ 3+a)$ و $B=(1\ ,\ 3\ ,\ -1+a)$ برابر $\sqrt{26}$ است؟

۱) -3 ‏ ۲) $+3$
۳) $+9$ و -9 ‏ ۴) $+3$ و -3

۸۹. اگر بردارهای $a=(3,2P+5,1)$ و $b=(m-1,m+P-1,m+n)$ برابر باشند، $m+n+P$ چه قدر است؟

۱) ۱ ‏ ۲) ۲
۳) -1 ‏ ۴) -2

۹۰. اگر $a=2i+j+3k$ و $b=-i+2j-k$ باشد، $a.(a+2b)$ کدام است؟

۱) $+8$ ‏ ۲) -8
۳) $+6$ ‏ ۴) -6

۹۱. قرینهٔ بردار $a=(1,-2,0)$ نسبت به بردار $b=(3,1,2)$ کدام بردار است؟

۱) $\left(\frac{-1}{7},\frac{16}{7},\frac{4}{7}\right)$ ‏ ۲) $\left(\frac{-1}{7},\frac{16}{7},\frac{-4}{7}\right)$
۳) $\left(\frac{1}{7},\frac{16}{7},\frac{4}{7}\right)$ ‏ ۴) $\left(\frac{-1}{7},\frac{-16}{7},\frac{-4}{7}\right)$

۹۲. اندازهٔ جبری تصویر بردار $(2a)\times(3b)$ روی محور Zها کدام است؟ در صورتی که $a=3i-j-k$ و $b=2i+3j+k$ باشد.

۱) ۵۵ ‏ ۲) ۶۶
۳) ۴۴ ‏ ۴) ۷۷

۹۳. معادله‌های متقارن خطی که محور طولها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع می‌کند و از نقطه‌ای به طول ۳ و عرض ۴ واقع بر صفحهٔ $z=5$ می‌گذرد، به کدام صورت است؟

۱) $x-2=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{-5}$ ‏ ۲) $x-2=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z}{5}$
۳) $x+2=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{5}$ ‏ ۴) $x-2=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{5}$

۹۴. اگر نقطهٔ $A=(x,y,1)$ روی خط گذرنده از دو نقطهٔ $(2,5,7)$ و $(0,3,2)$ باشد، $x+y$ چه‌قدر است؟

۱) $\frac{11}{5}$ ‏ ۲) $\frac{9}{5}$
۳) $\frac{7}{5}$ ‏ ۴) ۱

۹۵. معادلهٔ صفحهٔ گذرنده بر نقطهٔ $M=(2,4,-1)$ و عمود برخط $D:\begin{cases}x=2t+1\\ y=1-3t\\ z=t\end{cases}$ کدام است؟

۱) $2x+3y+z+9=0$ ۲) $2x-3y+z+9=0$
۳) $-2x-3y+z+9=0$ ۴) $2x-3y+z-9=0$

۹۶. به‌ازای کدام مقدار m، فاصلهٔ نقطهٔ $A=(2m+1, m-2, m)$ از صفحهٔ $2x-y+2z=4$ برابر ۴ است؟

۱) $\frac{-16}{5}, \frac{-8}{5}$ ۲) $\frac{16}{5}, \frac{-8}{5}$
۳) $\frac{16}{5}, \frac{8}{5}$ ۴) $\frac{-16}{5}, \frac{8}{5}$

۹۷. زاویهٔ بین خط $D: x-1=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{2}$ و صفحهٔ $P: 2x-4y+3z-5=0$ کدام است؟

۱) 90° ۲) 45°
۳) 0° ۴) 120°

❖ ریاضی ۱

۹۸. اگر A و B دو مجموعه باشند، حاصل $(A'\cap B)\cup(A-\varnothing)$ کدام است؟

۱) $A\cap B$ ۲) $A\cup B$
۳) B ۴) $\varnothing$

۹۹. مجموعهٔ زیرمجموعه‌های $A=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$، کدام است؟

۱) $\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}$
۲) $\{\varnothing,\{\varnothing\},A\}$
۳) $\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},A\}$
۴) $\{\varnothing,\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing\},\{A\}\}$

۱۰۰. حاصل $(ab)^{m-n} \div (a^m.b^n.a^n.b^m)$، کدام است؟

۱) $(ab)^{2m}$ ۲) $(ab)^{2n}$
۳) $(ab)^{-2m}$ ۴) $(ab)^{-2n}$

۱۰۱. مجموع صورت و مخرج کسر متعارفی مولد کسر اعشاری $0/3\overline{27}$ کدام است؟

۱) ۷۷ ۲) ۷۵
۳) ۷۳ ۴) ۷۱

۱۰۲. حاصل عبارت $(2xyz)(\frac{-2}{3}xy^2z^3)(-3x^2y)$، کدام است؟

۱) $2x^4y^4z^4$ ۲) $-4x^4y^4z^4$
۳) $(4x^2y^2z^2)^2$ ۴) $(2x^2y^2z^2)^2$

۱۰۳. باقیماندهٔ تقسیم عبارت $p(x)=x^2-8x+15$ بر $x-3$، کدام است؟

۱) -2 ۲) -1
۳) 2 ۴) صفر

۱۰۴. حاصل عبارت $\frac{x^5+x+1}{x^3-x^2+1}$، کدام است؟

۱) x^2-x+1 ۲) x^2+x-1
۳) x^2+x+1 ۴) x^2+1

۱۰۵. تجزیهٔ عبارت $A=y^2+2y-x^2+1$، کدام است؟

۱) $(x+y)(x-y+1)$
۲) $(y+x-1)(x-y-1)$
۳) $(x+y+1)(y-x+1)$
۴) $(y-x)(y-x+1)$

۱۰۶. حاصل عبارت $A=\frac{12}{3x^2-3}\times\frac{x^2-3x+2}{4x-8}$، کدام است؟ $(x\notin\{1,2\})$

۱) 1 ۲) $\frac{2}{x+1}$
۳) $\frac{1}{x-1}$ ۴) $\frac{1}{x+1}$

۱۰۷. اگر $x+y=xy=-2$، حاصل عبارت $B=\frac{x^3+y^3}{(x-y)^2}$ کدام است؟

۱) $-\frac{3}{5}$ ۲) $-\frac{5}{3}$
۳) -3 ۴) -5

❖ ریاضی ۲

۱۰۸. نقطهٔ $A(۴m-۱,۲m-۱)$ مفروض است، به ازای چه مقدار m نقطهٔ A روی نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم قرار می‌گیرد؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۰۹. اگر $A(۲n-۱\ ,\ ۲)$ و $B(۲\ ,۲n)$، به ازای کدام مقدار n طول پاره‌خط $AB=۵$ است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ یا ۳ ۲) ۱ یا $\frac{۱}{۲}$

۳) ۱- یا ۳ ۴) $\frac{۱}{۲}$ یا ۱-

۱۱۰. نقاط $A(-۲,۷)$ و $B(۱,۳)$ دو سر قطر مربعی هستند، اندازهٔ مساحت مربع کدام است؟

۱) $\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{۲۵\sqrt{۲}}{۲}$

۳) $\frac{۲۵}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

۱۱۱. اگر دو خط به معادله‌های $ax-y=۱$ و $bx-y+۱=۰$ در نقطه‌ای به طول ۱- بر هم عمود باشند؛ مقدار میانگین a و b کدام است؟

۱) ۱- ۲) صفر

۳) ۱ ۴) ۲

۱۱۲. معادله‌های دو قطر مربعی به صورت $۲x+y+۱=۰$ و $۲y-x-۱=۰$ است؛ فاصلهٔ مرکز مربع از خط $x+y-۲=۰$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۵}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۵}$

۳) $\frac{۴\sqrt{۲}}{۵}$ ۴) $\frac{۶\sqrt{۲}}{۵}$

۱۱۳. دستگاه معادله‌های خطی $\begin{cases}۲x+my=۶\\mx+۲y=۵\end{cases}$، به ازای چه مقادیری از m جواب ندارد؟

۱) $m=\pm۱$ ۲) $m=\pm۲$

۳) $m=\pm۳$ ۴) $m=\pm۴$

۱۱۴. اگر $x=۲-\sqrt{۵}$، حاصل عبارت $\sqrt{(x-۲)^۲}+\sqrt{x^۲}-\sqrt{۲۰}$ کدام است؟

۱) $۲-\sqrt{۵}$ ۲) -۲

۳) $\sqrt{۵}$ ۴) صفر

۱۱۵. اگر $x^۲+x=۱$، حاصل $x^۵$ کدام است؟

۱) $۵x-۳$ ۲) $۵x+۳$

۳) $-۵x+۳$ ۴) $-۵x-۳$

۱۱۶. حاصل $\frac{\sqrt[۴]{۷-۴\sqrt{۳}}}{\sqrt[۸]{(\sqrt{۳}-۲)^۴}}$ کدام است؟

۱) $۲-\sqrt{۳}$ ۲) $۲+\sqrt{۳}$

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۱۱۷. حاصل $(\sin x+\cos x)^۲+(\sin x-\cos x)^۲$، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) ۱ ۴) ۲

۱۱۸. معادلهٔ $۴x=\frac{۴x}{x-۱}+\frac{۸x}{۲x+۲}$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) یک ۲) دو

۳) سه ۴) ریشهٔ حقیقی ندارد

۱۱۹. عبارت $\sqrt{x(x+۲)-(x-۱)(x+۲)}$ به ازای چه مقادیری از x تعریف می‌شود؟

۱) $x\le۲$ ۲) $x\ge-۲$

۳) $x\le۰$ ۴) $x\ge-۳$

۱۲۰. اگر a و b ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-x-۱=۰$ باشند، مقدار عبارت $k=\frac{۱}{a^۲}+\frac{۱}{b^۲}$ کدام است؟

۱) $k=۱$ ۲) $k=۲$

۳) $k=۳$ ۴) $k=۴$

پاسخها در صفحهٔ ۷۶

جوابهای تفریح اندیشه

پاسخ ۱ :

هر دو کشتی در یک ساعت حرکت و توقف می‌کنند. مسأله به تقارن مربوط است و موقعیت کشتیها با همین داده‌ها می‌تواند درست برعکس باشد. بنابراین نقطه‌ای که اوّلین محل ملاقات در حالت اول است، در حالت دوم ، دومین نقطهٔ ملاقات محسوب می‌شود. در این صورت این نقطه ۷ کیلومتر از یک شهر و ۹ کیلومتر از شهر دیگر فاصله دارد.

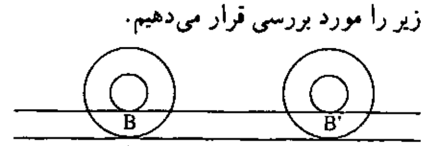
پس فاصلهٔ بین دو شهر ۱۶=۹+۷ کیلومتر است.

پاسخ ۲ :

شعاع فیلم بر چرخ کندتر $1\frac{1}{2}$ شعاع فیلم تا این زمان نمایش داده شده است. زمانهای نمایش متناسب با مسافتهای فیلم است و مساحتها متناسب با مربعهای شعاعها.

زمان باقیمانده $= \frac{16}{3}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2} = 12$ دقیقه

خیلی ساده بود؟ در این صورت، چرخ گردندهٔ زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم.



A نقطه‌ای واقع بر لبهٔ چرخ و B نقطه‌ای واقع بر میلهٔ آن است. هنگامی که چرخ، یک دور کامل می‌زند، A در 'A قرار می‌گیرد. فاصلهٔ افقی طی شده، آشکارا برابر محیط چرخ است. اما، میله نیز یک دور کامل زده است. فاصلهٔ طی شده برابر محیط میله است. نتیجه : میله به بزرگی چرخ است!

این پارادوکس، توسط گالیله در کتاب وی با نام *مکالمه دربارهٔ دو علم جدید*، در قرن هفدهم مطرح شده است. آیا می‌توانید آن را توضیح دهید؟

پاسخ ۳ :

شش مرحله‌ای را که مهرداد انجام داده است، در جدول زیر می‌توان دید.

پیمانهٔ ۷۰ سانتی‌لیتری	پیمانهٔ ۴۰ سانتی لیتری	بطری دوم	بطری اوّل
۰	۰	۱۰۰	۱۰۰
۰	۴۰	۶۰	۱۰۰
۶۰	۴۰	۰	۱۰۰
۷۰	۴۰	۰	۹۰
۷۰	۰	۴۰	۹۰
۳۰	۴۰	۴۰	۹۰
۳۰	۳۰	۴۰	۱۰۰

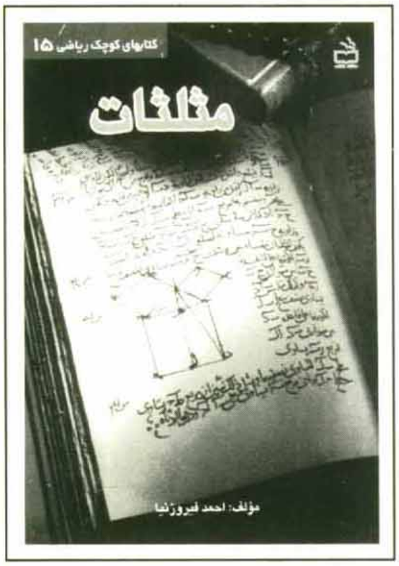
پاسخ ۴ :

دریافتی مهرداد را برای هر شش ماه در مورد هر یک از دو شرکت محاسبه می‌کنیم :

دریافتی / مدت	مجموع دریافتی از شرکت به ریال	مجموع دریافتی از شرکت دوم به ریال
شش ماه اول	۱۸۰۰۰ ریال	۱۸۰۰۰
شش ماه دوم	۱۸۰۰۰+۲۰۰۰۰=۳۸۰۰۰	۱۸۰۰۰+۱۸۰۰۰=۳۶۰۰۰
شش ماه سوم	۳۸۰۰۰+۲۲۰۰۰=۶۰۰۰۰	۳۶۰۰۰+۲۲۰۰۰=۵۸۰۰۰
شش ماه چهارم	۶۰۰۰۰+۲۴۰۰۰=۸۴۰۰۰	۵۸۰۰۰+۲۲۰۰۰=۸۰۰۰۰
شش ماه پنجم	۸۴۰۰۰+۲۶۰۰۰=۱۱۰۰۰۰	۸۰۰۰۰+۲۶۰۰۰=۱۰۶۰۰۰

به طوریکه دیده می‌شود حقوق پرداختی توسط شرکت دوم در پایان هر شش ماه، همواره کمتر از حقوق پرداختی به وسیله شرکت اوّل است.

معرفی کتابهای ریاضی انتشارات مدرسه



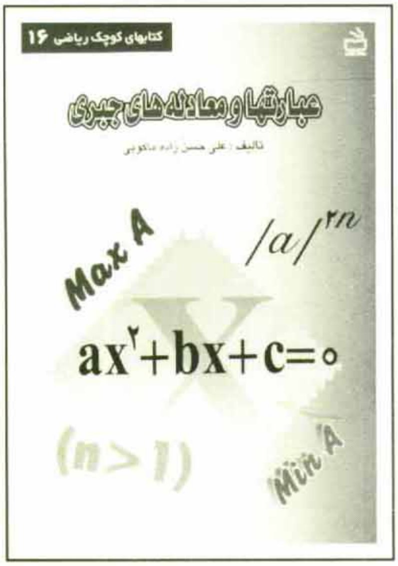
جدید

مثلثات

مؤلف: احمد فیروزنیا

۲۱۲ صفحه / تک رنگ / چاپ اوّل / ۶۰۰۰ ریال

کتاب مثلثات، پانزدهمین کتاب از سری کتابهای کوچک ریاضی است. با توجه به هدف تهیه و تدوین کتابهای کمک درسی و نظر به نیاز آن دسته از دانش‌آموزانی که از راهنماییها و توضیحهای معلم بی‌بهره‌اند، در این کتاب کوشش شده است که مطلبها به نحوی تدوین شود که جنبهٔ خودآموز داشته باشد و منطبق با سرفصلهای درسی نظام جدید آموزش متوسطه باشد. مطالعه این کتاب را به دانش‌آموزان، دبیران، دانشجویان و علاقه‌مندان به ریاضیات، توصیه می کنیم.



جدید

عبارتها و معادله‌های جبری

مؤلف: علی حسن‌زاده ماکویی

۱۲۸ صفحه / تک رنگ / چاپ اوّل / ۳۵۰۰ ریال

کتاب عبارتها و معادله های جبری، شانزدهمین کتاب از سری کتابهای کوچک ریاضی است. این کتاب حاوی مطالبی در زمینهٔ عبارتهای جبری، اتحادهای مهم، تجزیه چندجمله‌ایها و معادله های جبری است، که این موضوعها جزء مفاهیم اساسی حساب و جبر محسوب می‌شوند. در هر قسمت، مسائل متعددی با راهنمای حلّ آنها آمده است. همچنین در انتهای کتاب، سؤالهای چهارگزینه‌ای با حلّ تشریحی آمده است که مطالعهٔ این گونه سؤالها، موجب بازنگری و ترکیب یافته های دانش‌آموزان می گردد. مطالعهٔ این کتاب را به دانش‌آموزان، دبیران، دانشجویان و علاقه‌مندان به ریاضیات توصیه می کنیم.

توجه: از سری کتابهای کوچک ریاضی، کتابهای زیر در دست چاپ می‌باشند:

۱ ـ ورودی به نظریه اعداد/ حمید رضا امیری ـ مازیار رامین راد ۲ ـ دیفرانسیل و انتگرال نامعین / محمّد عابدی
۳ ـ انتگرال معین و کاربردهای آن / محمّد عابدی ۴ ـ بردارها / سیدمحمّدرضا هاشمی موسوی
۵ ـ نابرابری‌ها و نامعادله‌ها / میرشهرام صدر ۶ـ استقرای ریاضی / پرویز شهریاری ۷ـ آمار و مدل‌سازی / دکتر عین‌ا... پاشا ۸ـ تقارن در جبر و روش ضرایب نامعین / پرویز شهریاری

☆ *جلد اول دائرةالمعارف هندسه بصورت دومجلّد جدید (جلداوّل وجلددوّم) زیرچاپ است*

بنوموسی

محمد و احمد و حسن پسرانِ موسی بن شاکر
ریاضیدانان و منجمان مسلمانِ ایرانی (سدهٔ سوم)

بنوموسی شهرت سه برادر است به نامهای محمد و احمد و حسن پسران موسی بن شاکر. این سه برادر در اصل اهل خراسان و از علمای معروف ریاضیات و نجوم و مکانیک در سدهٔ سوم هجری بودند و در بغداد به سر می‌بردند و بزرگترین آنها ابوجعفر محمدبن موسی در ربیع‌الاول سال ۲۵۹ درگذشت.

ابن الندیم در *الفهرست* نوشته است که آنان برای به دست آوردن علوم باستانی به آخرین مرحله در سعی و کوشش رفته و از بذل مال و تشویق دریغی نداشتند و در این راه به هرگونه سختی، تن دردادند و برای دستیابی به علوم، اشخاص را به روم فرستادند و از گوشه و کنار مترجمان را با دادن عطایا و بخششهای گزاف به دور خود جمع کرده و عجایب حکمت را ظاهر کردند و بیشتر در هندسه و مکانیک (الحیل و الحرکات) و موسیقی و نجوم مهارت داشتند.

به هرحال محمد و احمد و حسن در جوانی با دانشمندان حوزهٔ علمی بغداد مأنوس شدند و در علم، ترقی کردند و ثروت خود را صرف گردآوری نسخه‌های خطی کتابهای یونانی و ترجمهٔ آنها به زبان عربی کردند. و به علاوه مترجمان عالیمقامی چون اسحاق بن حنین و ثابت بن قره را در استخدام داشتند و با واداشتن آنان به ترجمهٔ متون علمی یونانی و نیز به وسیلهٔ تحقیقات بدیع و پرافتخار خود، زمینه را برای شکفتگی علوم در سده‌های سوم و چهارم آماده ساختند. نظر به این‌که این سه برادر در کارهای علمی همکاری داشته‌اند تشخیص بیشتر آثار شخصی هریک از آنان میسر نیست. با وجود این بعضی از آثار آنان به نام یکی از سه برادر نامیده شده است.

اهمیت کارهای نجومی بنوموسی و شهرت آنان در بین ریاضیدانان دورهٔ اسلامی از این رو پیداست که بیرونی در چند موضع از آثار خود از آنان نام برده و از صحت رصدهایی که انجام داده‌اند گفت‌وگو کرده و مهارت و استادی آنان را در عمل رصد ستوده است. از جمله در کتاب *آثارالباقیه* نوشته است: «ما به گفتهٔ بطلمیوس ... و قول خالدبن عبدالملک مروردی ... و قول بنوموسی بن شاکر و غیر ایشان نظر کردیم و دیدیم که از تمام این گفته‌ها در این باب، رأی بنوموسی بن شاکر بهتر و برتر است؛ زیرا ایشان در ادراک حقیقت بذل کوشش کردند و در زمان خود به مهارت و استادی در عمل رصد منفرد بودند و علمای فن به چیره‌دستی آنان و درستی رصدشان گواهی می‌دهند.»

آثار ریاضی موجود بنوموسی

۱ ـ *معرفة مساحة الاشکال البسیطة و الکریة*

کتاب *مساحة الاشکال* بنوموسی علاوه بر شهرتی که در کشورهای اسلامی داشته در سده‌های میانه نیز در اروپا شناخته شده بوده است. جرارد کرمونی آن را در سدهٔ دوازدهم میلادی به زبان لاتینی ترجمه کرد.

۲ ـ *کتاب الحیل (= مکانیک)*

این نخستین کتابی است که در دورهٔ اسلامی دربارهٔ مکانیک نوشته شده و نسخه‌های خطی آن در استانبول و در واتیکان و قسمتهایی از آن در واتیکان و برلین موجود است.

۳ ـ *تحریر مخروطات ابلونیوس*

آثار ریاضی مفقود بنوموسی

علاوه بر آنچه گذشت ابن الندیم و قفطی فهرست چند کتاب دیگر از تألیفات بنوموسی را آورده‌اند که از آن جمله است دو کتاب ریاضی زیر که هر دو مفقود شده است:

۱ ـ *کتاب الشکل المدوّر المستطیل*

این کتاب تألیف حسن بن موسی بوده است.

مقصود از شکل مدور مستطیل همان بیضی است.

۲ ـ *کتاب شکل الهندسی الذی بین جالینوس امره*

این کتاب تألیف احمدبن موسی بوده است. در عنوان این کتاب ظاهراً اسم «جالینوس» تحریف شدهٔ اسم «منالاوس» است.