آموزشی، تحلیلی، اطلاع‌رسانی

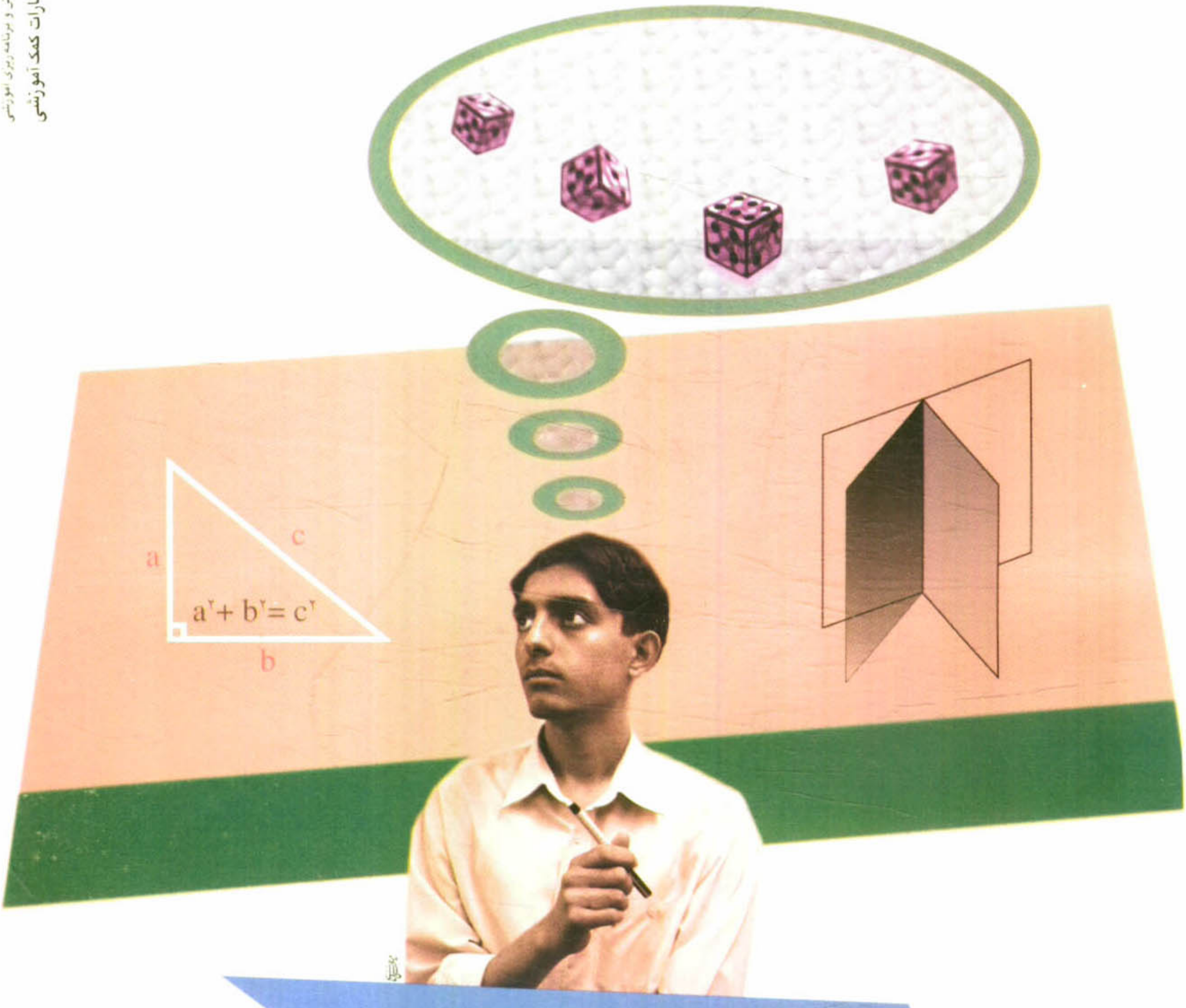
رشد برهان ۴۳

برای دانش‌آموزان دوره‌ی **متوسطه**

دوره‌ی چهاردهم، شماره‌ی اول
پاییز ۱۳۸۳، بها: ۲۵۰۰ ریال

www.roshdmag.org

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی



هفتمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران به همت فرهیختگان و مردم غیور استان کردستان از یکم تا سوم شهریورماه ۱۳۸۳ در شهر سنندج برگزار شد. در این کنفرانس حدود ۱۰۰۰ نفر از پیشگامان آموزش ریاضی کشور حضور داشتند و در کل ۱۷۰ مقاله در قالب سخنرانی، پوستر و کارگاه آموزشی ارائه شد که از نظر آماری تعداد شرکت کنندگان و ارائه مقالات در بین کنفرانس‌های قبلی در ایران بی نظیر بود.

برای اطلاع بیشتر از جزئیات و مقالات ارائه شده در این کنفرانس می توانید به آدرس سایت www.tmkurd.org مراجعه نمایید.

بسم الله الرحمن الرحیم

سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

رشد برهان ۵۱
متوسطه

دورهٔ چهاردهم، شماره ۱
پاییز ۱۳۸۳
بها: ۲۵۰۰ ریال
شمارگان: ۱۵۰۰۰ نسخه
برای دانش آموزان دورهٔ متوسطه

آموزشی، تحلیلی، اطلاع رسانی

www.roshdmag.org

رشد برهان، تمامی دبیران محترم و دانش آموزان عزیز را در زمینه های زیر دعوت به همکاری می کند:

- نگارش مقاله های کمک درسی(شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب های ریاضی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن ها(برای دانش آموزان)
- طرح مسائل مسابقه ای به همراه حل آن ها(برای دانش آموزان)
- طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمهٔ مقاله های عمومی ریاضی(مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

رشد برهان، هر سه ماه یک شماره منتشر می شود.

- مجلّه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافه کردن مقاله ها آزاد است.
- مقاله های وارده ،باید خوانا و حتی الامکان کوتاه باشد.
- مقاله های رسیده مسترد نمی شود.
- استفاده از مطالب مجلّه در کتاب ها یا مجله های دیگر با ذکر دقیق ماخذ بلامانع است.

نشانی دفتر مجلّه: صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله: ۹ ـ ۸۸۳۱۱۶۰ داخلی ۳۷۴ ـ ۳۷۰
تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۶۶۵۶ ـ ۷۷۳۱۱۱۰

یادداشت سردبیر

آغاز فصل پاییز همواره مصادف است با آغاز بهار علم و دانش و بازگشایی مراکز آموزشی؛ آغازی که همه ی دانش آموزان بی صبرانه انتظار آن را می کشند و خود را برای آن آماده می کنند، شما چطور؟ آیا با دستی پر، با برنامه ریزی دقیق و با پشتکاری کافی، سال تحصیلی را آغاز کرده اید؟

راستی اگر اولین بار است که مجله ریاضی برهان را مطالعه می کنید، پیوستن به جمع خوانندگان این مجله را به شما خوش آمد می گوییم، ان شاءالله بتوانیم مهم ترین خواسته های شما را برآورده سازیم.

شما چقدر با ریاضیات دوست هستید؟ تا چه اندازه به آن علاقه مندید؟ چه مقدار برای آن اهمیت قائل هستید؟ به نظر من اگر برای ریاضیات اهمیت قائل شوید، به آن علاقه مند خواهید شد و حتماً با آن دوست می شوید. البته در تمام این مراحل عواملی تاثیرگذارند که از آن جمله است، آموزش ریاضیات مطابق با استانداردهای جهانی، که این استانداردها می بایست با توجه به موقعیت اجتماعی، فرهنگی و حتی جغرافیایی و امکانات آموزشی ما، تعدیل یافته و به شکلی قابل اجرا و مفید مورد استفاده قرار گیرد.

به نظر شما آنچه در حال حاضر تحت عنوان ریاضیات می آموزید تا چه اندازه شما را با ریاضیات مانوس کرده است؟ آیا آموزش ریاضی را به عنوان یک دانش آموز، با شیوه ی فعلی قبول دارید؟ اگر جواب شما منفی است، چه پیشنهادی دارید؟

از عوامل مهم و مؤثر در آموزش ریاضی، استفاده از منابع کمک آموزشی است که یکی از آنها هم اکنون در دستان شماست و در حال مطالعه آن می باشید، ما می خواهیم از طریق مطالب این مجله شما را با ریاضیات دوست و به طرف آن جذب کنیم؛ یک دوست خوب باید آیینه ی دوست خود باشد و حسن و عیب او را گوشزد کرده و در فکر رفع نقایص دوست خود باشد، باید با دوست خودش هم صحبت باشد و اگر احتیاج دارد از او کمک بخواهد، اگر ان شاءالله «برهان» را دوست خود می دانید، هم عیب های ما را تذکر دهید و هم اگر اشکالی دارید یا در مواردی ضعف دارید از ما سؤال کنید، به هر صورت با مجله رشد برهان ارتباط برقرار کنید تا دوستی شما با مجله و با ما پایدارتر و پویاتر باشد.

پرویز شهریاری

از تاریخ بیاموزیم

ریاضیات نظری و ریاضیات کاربردی

اشاره

در شماره قبل به تکامل ریاضیات کاربردی و سنت نظری پرداختیم، همچنین به سازماندهی که ریاضیدان‌های مختلف از ریاضیات داشته‌اند اشاره شد. اینک ادامه مطلب را در پی می‌آوریم:

ریاضیات کاربردی همچون وسیله‌ای برای سازمان دادن دانش ریاضی، اساس کار خود را بر دستاوردهای حاصل از حل مسأله‌های مربوط به اندازه‌گیری و مقایسه‌ای قرار می‌دهد. عنصرها و مبانی تشکیل دهندهٔ ریاضیات کاربردی، عبارت‌اند از نیازهای مربوط به فعالیت عملی، و در اطراف این عنصرها، گونه‌های مختلف مسأله‌ها جمع شده‌اند.

در برابر سازماندهی کاربردی، مهم‌ترین ویژگی روش نظری سازماندهی دانش ریاضی، عبارت است از یکپارچگی آن به یاری اثبات عبور منطقی از یک موقعیت به موقعیت دیگر.

از همین جا، اختلاف بین ریاضیات نظری با ریاضیات کاربردی، در ارتباط متقابلی که با فعالیت عملی دارند، نتیجه می‌شود. اگر ریاضیات کاربردی بر فعالیت عملی تکیه دارد و از آن نیرو می‌گیرد، ریاضیات نظری تا اندازهٔ زیادی خودگردان است و با سازوکار درونی و انگیزهٔ درونی خود پیشرفت می‌کند. البته این وضع به معنای آن نیست که ریاضیات نظری، به مفهوم کلی خود، با عمل ارتباطی ندارد و به نیازها و خواست‌های بیرون از خود توجهی نمی‌کند. برای این که ماهیت اختلاف‌ها و عنصرهای شباهت را در برخورد این نوع ریاضیات، با عمل روشن کنیم، دو مثال مشخص از این گونه کنش‌های متقابل می‌آوریم.

نخستین مثال به زمان گسترش فعال ریاضیات نظری در دورهٔ جدید مربوط می‌شود. نیوتن با استفاده از «حساب بی‌نهایت کوچک‌ها» و به کار بردن آن در مسأله‌های مربوط به پیدا کردن شکل واقعی زمین، این شکل را به صورت نظری پیش‌بینی کرد. او با این فرض که زمین، زمانی به حالت مذاب و آتشین بوده است، ثابت کرد که شکل واقعی زمین، شبه‌کره‌ای است که در دو قطب خود فشرده شده است. ولی نیوتن در چاپ کشف خود که در ضمن، تأکیدی بر قانون جاذبهٔ عمومی بود، شتاب نکرد و تنها وقتی تصمیم به انتشار آن گرفت که اندازه‌گیری *پی‌کار* (۱۶۸۲) آماده شد. نیوتن از مقداری که پی‌کار برای شعاع زمین به دست آورده بود و از دستاوردهای آن زمان دربارهٔ شتاب فشردگی استفاده کرد؛ او برای فشردگی به مقدار ۱:۲۳۲۰ رسید. این نتیجه‌گیری، در رابطه با ساختمان ریاضیات نظری، یک نتیجه‌گیری کاربردی است. بدون وجود ساختمان نظری، چنین نتیجه‌ای به دست نمی‌آمد. وجود ساختمان منظم ویکپارچهٔ ریاضیات نظری، امکان استفاده از آن را به وجود می‌آورد. ریاضیات نظری این قابلیت را دارد که همهٔ آن نیازهای عملی را، که با امکان‌های دستگاه نظری سازگار است، به حساب می‌آورد.

ریاضیات نظری، که در تدارک این مسأله (که نسبت به ریاضیات نظری عنصری بیرونی است). به موفقیت می‌رسد، خود موجب تدارک‌های بعدی در همین جهت می‌شود. در تلاش‌های بعدی، یا نتیجه‌گیری نیوتن دقیق‌تر یا به کلی رد می‌شود. با وجود این، همهٔ این تلاش‌ها با استفاده از ساختمان نظری

ریاضیات انجام می‌گیرد. در کنار ملاحظه‌های نیوتن، با آغاز از دکارت، نظریهٔ دیگری هم دربارهٔ زمین وجود داشت که بنابر آن، زمین مانند سایر جسم‌های بزرگ سماوی، در نتیجهٔ حرکت‌های توفانی ذرّه‌های مختلف تشکیل شده است. کاسینی‌ها ـ پدر و پسر ـ که هوادار نظر دکارت بودند، با استفاده از همان ابزار، یعنی ریاضیات نظری، پاسخ دیگری به‌دست آوردند: زمین یک بیضوی است که محور کوچک‌تر آن بر صفحهٔ استوا قرار دارد. بررسی‌های شاگردان پی‌کار، که در فرانسه انجام شد، همین دیدگاه دوم را تأیید می‌کرد. به زبان دیگر، ابزار ریاضیات نظری می‌تواند با تکیه بر دیدگاه‌های مختلف، به نتیجه‌های دقیقی برسد. بدون این ابزار نمی‌توان تصویرهای مقدماتی و مبهم را به‌جلو برد و به نتیجه رسانید. ماهیت کاربرد ریاضیات نظری در به‌دست آوردن نتیجه‌ای مشخص، به کمک آن است، نه این که در دستور این نتیجهٔ مشخص، ابزار ریاضیات نظری وجود داشته باشد.

این امکان که می‌توان از یک ابزار نظری، به طریقه‌های گوناگون استفاده کرد، موجب پیشرفت بعدی در بررسی‌های عملی و کاربردی می‌شود. این بررسی‌ها تحت تأثیر ریاضیات نظری، با توجه به سطح تکامل آن و با استفاده از موفقیت‌های آن، پیش می‌روند و دگرگون می‌شوند. عدم‌تطبیق نتیجه‌گیری‌های نیوتن و هواداران دکارت، لزوم مطالعهٔ دقیق‌تر بررسی‌های عملی با جهت‌گیری‌های تازه‌ای را به‌وجود می‌آورد. «فرهنگستان علوم فرانسه تصمیم گرفت دو هیأت برای اندازه‌گیری کمان زمین، یکی در نزدیکی استوا و دیگری در نزدیکی قطب بفرستد. مقایسهٔ این کمان‌ها نشان می‌داد، کدام دیدگاه ـ دیدگاه نیوتن یا دیدگاه خانواده کاسینی و هواداران دکارت ـ که مورد استفادهٔ ابزار نظری قرار گرفته، درست است. در سال ۱۷۳۵ بوگه، گُودُن و لاکُون دامین به پرو فرستاده شدند، که در آن‌جا، کمان ۳ درجه و ۷ دقیقه را اندازه گرفتند. هیأت دوم در ترکیب مُون‌پرتویی، کلر و دیگران، در سال ۱۷۳۶ به لاپلان‌دیا (در شمال اسکاندیناوی) اعزام شدند که در آن‌جا کمانی به طول یک درجه را اندازه گرفتند.» [آ. آ. هوساک در «آغاز نظریهٔ تقریب تابع‌ها»]. هر دو مأموریت، برای اندازه‌گیری ضریب فشردگی «شبه‌کرهٔ» زمین، تنها به یاری تصویرهای نظری و با استفاده از ریاضیات نظری ممکن بود. با توجه به یک مسألهٔ کاربردی، می‌توان در درون ریاضیات نظری، راه تکامل را یافت؛ تکاملی که متکی بر ابزارهای نظری است. از این راه می‌توان مسأله‌های کاربردی را تصحیح کرد و آن را به طرف ساختمان‌های نظری پیش برد. به‌ویژه از همین راه است که مسألهٔ نخستین، با امکان‌های ریاضیات نظری، در جهت‌های مختلف صیقل می‌خورد، مضمون آن مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد و همهٔ آن‌چه را که به‌نحوی معادل مسألهٔ نخستین است، به‌طور دقیق، از مضمون آن بیرون می‌کشد.

ریاضیات نظری «نورافکنی» نیرومند است که با پرتوهای خود، مسأله‌های کاربردی را به‌طور کامل روشن می‌کند. ولی برخلاف نورافکن واقعی، که خصلت ثابتی دارد و تنها یک طرف جسم ساکن را روشن می‌کند، ریاضیات نظری ابزاری بسیار حساس و دقیق برای مطالعه است و موجب توجه به بسیاری از پیچیدگی‌های مسألهٔ کاربردی می‌شود. از جمله هیأت‌هایی که به پرو و لاپلان‌دیا رفتند، به تجزیه و تحلیل اندازه‌گیری‌های انجام شده و نتیجه‌های حاصل از آن پرداختند. از مشهورترین این کارها، می‌توان از کتاب کلرو با عنوان «نظریهٔ شکل زمین، بر اساس مقدمات هیدروستاتیک» (۱۷۴۳) و مقاله‌های لوپرتویی نام برد که در آن‌ها، دربارهٔ پیشرفت ریاضیات نظری و کاربردی با عنوان نتیجه‌هایی از اندازه‌گیری انجام شده، صحبت می‌کند. ریاضیات نظری با کامل کردن خود، و به‌ویژه از نظر روش‌های مناسب، در برابر خواست‌ها و نیازهای بیرونی، عکس‌العمل نشان می‌دهد. این روش‌ها که وجود آن‌ها بیرون از مسأله‌هایی است که در عمل او بیرون از ریاضیات پیدا شده‌اند، خود را با امکان‌های ریاضیات نظری تطبیق می‌دهند و با گونه‌های روش‌هایی که می‌توانند سودمند باشند، به صحنهٔ اصلی ریاضیات نظری گام می‌نهند. دربارهٔ ریاضیات نظری می‌توان گفت، نورافکنی است که خودش، خودش را تکمیل می‌کند؛ ولی این میل تا جایی است که بتواند از پتانسیل خود استفاده کند و تا زمانی که این نیروی درونی تمام نشده است، نمی‌تواند طرح تغییر ساختاری خود را تغییر دهد. بستگی‌های نظری تازه‌ای به وجود می‌آورد و به «گذار منطقی» تازه‌ای، از یک موقعیت به موقعیت دیگر می‌رسد. این نیروی بالقوهٔ درونی، که می‌توان آن را «نیروی تاریخی» ریاضیات نظری دانست، ناشی از پرسش‌هایی است که در عمل، در برابر ریاضیدانان قبلی قرار گرفته است. ریاضیات نظری تنها در محدودهٔ

مسأله‌هایی حرکت می‌کند که با عنصرهای تشکیل‌دهندهٔ ریاضیات کاربردی پیشین شباهت داشته باشد. به همین دلیل است که ریاضیات نظری دوران جدید، که ریشه‌هایی در ریاضیات کاربردی سده‌های میانه دارد و برای حل مسأله‌هایی مناسب است، با انتخاب موضوع‌هایی که جنبهٔ دینامیکی دارد (یا به قول انگلس، ریاضیات با کمیّت‌های متغیر)، اغلب برای حل مسأله‌هایی که به صورت‌های مختلف به هم مربوط‌اند و در آن‌ها تعداد بسیار زیادی از پارامترهای ممکن دخالت دارند، مناسب از آب درمی‌آید.

نطفه‌های تکامل نظری، که برای دانش ریاضی مناسب باشند، حتی در میان نخستین نسل پژوهشگران هم دیده می‌شود. سپس اویلر در مقاله‌های خود و لاپلاس در «مسأله‌ای دربارهٔ شکل زمین» (که در ۱۷۶۳ نوشته و در سال ۱۷۸۶ از طرف فرهنگستان علوم پاریس چاپ شد)، عنصرهایی از ریاضیات نظری را تکامل دادند. در این‌جا می‌توان سرچشمه‌های نظریهٔ تقریب تابع‌های پیوسته را پیدا کرد که روی تابع‌های ساده‌ای، که در مجموعهٔ معینی از نقطه‌ها تعریف شده‌اند، مقدار تابع‌های تقریبی را معین کرد. «در الگوریتم‌های لاپلاس برای پیدا کردن بهترین تقریب، می‌توان به‌نحوی قضیه‌های داله ـ پوسن، شنیر و دیگر قضیه‌های مشابه آن‌ها را دربارهٔ تقریب‌های یکنواخت، بازشناخت» [آ. آ. هوساک در «آغاز پیشرفت نظریهٔ تقریب تابع‌ها»]. مسأله‌های عملی و کاربردی کمک می‌کنند تا بخش‌های دیگری مورد مطالعه قرار گیرند؛ ولی خود این مطالعه، در چارچوب ریاضیات نظری انجام می‌گیرد و مرزهای مجاز تصحیح و پیشرفت ریاضیات نظری، به‌وسیلهٔ عامل‌هایی که نسبت به آن بیرون است، درست از همین‌جا می‌گذرد. ریاضیات در محدودهٔ این مرزها، همراه با رابطه‌های منطقی (که در اساس استدلال‌ها هستند)، به نظری شدن ادامه می‌دهند.

مثال دوم، به دورهٔ ریاضیات کاربردی سده‌های میانه مربوط می‌شود که در واقع، از زمان ریاضیات نظری و دورهٔ هلنی آغاز می‌شود و تا زمان پیدایش ریاضیات نظری دورهٔ جدید ادامه می‌یابد. این موضوع به حیطهٔ مطالعهٔ «چشم‌انداز» (پرسپکتیو)، سازمان دادن آن و رابطهٔ متقابل آن با دانش ریاضیات کاربردی مربوط می‌شود.

سمت‌گیری کاربردی دانش دربارهٔ پرسپکتیو، به‌ویژه در زمان نوزایی (رونسانس) قابل تأمّل است.

یکی از حالت‌های خاص تصویر، عبارت است از تصویر مرکزی شکل فضایی بر صفحه (یا نگاشت تصویری شکل فضایی). دربارهٔ پرسپکتیو، نوشته‌های لئون باتیستا آلبرتی (۱۴۰۴ ـ ۱۴۷۲ میلادی)، پیترو دولا فرانچسکو (۱۴۱۶ ـ ۱۴۹۲)، لئوناردو داوینچی (۱۴۵۲ ـ ۱۵۱۲)، آلبریخت دُورر (۱۴۷۱ ـ ۱۵۲۸) و دیگر پژوهشگران دوران نوزایی، اهمیت زیادی دارد. همهٔ آنان به موضوع پرسپکتیو در درجهٔ اول برای ساختن تصویر چیزهای دنیای واقعی و هم برای کارهای نقاشی و معماری

علاقه‌مند بودند. نظریهٔ ریاضی پرسپکتیو، در نظریه‌های کلی بینایی، همراه با روان‌شناسی دیدن، مطالعهٔ ساختمان چشم، مطالعهٔ درک طبیعت نور و غیر آن حل می‌شود. از جمله می‌توان سخن ارسطو را آورد که مرز اپتیک و ریاضیات را مشخص می‌کند: «اپتیک خطوط ریاضی را مطالعه می‌کند؛ اما به صورت فیزیکی و نه ریاضی.» در دورهٔ نوزایی، توجه اصلی به ویژگی‌هایی از پرسپکتیو بود که در عمل به کار می‌آمدند و در تقسیم‌بندی تابلوها و نقشهٔ ساختمان‌ها مورد استفاده قرار می‌گرفتند. درضمن، تعریف پرسپکتیو هم با تکیه بر نشانه‌هایی ساخته شد که برای ساختارهای ریاضی، بیرونی بود. لئوناردو داوینچی که پرسپکتیو را «موضوعی استدلالی» می‌داند، بلافاصله بر کار عملی آن تأکید می‌کند: «پرسپکتیو چیزی جز دیدن جایی از طریق شیشهٔ مسطح کاملاً روشن نیست؛ به‌نحوی که بر سطح آن، باید همهٔ چیزهایی که در پشت این شیشه واقع‌اند، نقش شده باشد.» در ریاضیات کاربردی، هر نتیجه‌ای که از اندازه‌گیری و محاسبه به‌دست آید، اهمیت دارد. بنابراین برخلاف ریاضیات نظری، دستاوردهای ریاضیات کاربردی، از دیدگاه پژوهشگر، ربطی به ارزش نظری آن ندارد و تنها کاربرد عملی آن‌ها در نظر گرفته می‌شود. درواقع، این دستاوردها در ورای نظریه قرار دارد و هیچ اجباری ندارد که در چارچوب نظریه بیان شود.

افزایش حجم ریاضیات کاربردی، رشد کمیّت دستاوردها و دقیق‌تر شدن آن‌ها، در ارتباط مستقیم با خواست‌های بیرونی است؛ بدون این که لزومی به تصحیح این دستاوردها به کمک نظریه یا تطبیق آن‌ها با نظریه وجود داشته باشد و بدون این که ابزار نظری، تأثیر مشخصی بر انتخاب هدف‌ها و روش‌های حل مسأله‌ها بگذارد. ریاضیات نظری، مسأله‌های عملی را ارزیابی می‌کند، با دید انتقادی به آن‌ها می‌نگرد و تلاش می‌کند آگاهی‌های ریاضی را که جهت‌گیری عملی دارند، به آگاهی‌های کاربردی تبدیل کند. ولی ریاضیات کاربردی، به عکس، مسأله‌های عملی را جذب می‌کند و در خود فرو می‌برد. در این جا نیازهایی که در زندگی و عمل مطرح می‌شوند، در گونه‌های مختلف مسأله‌هایی که جهت‌گیری کاربردی دارند، جذب و تحکیم می‌شوند؛ بدون این که کم‌ترین توجهی به بستگی نظری آن‌ها شود. دستاوردها و شیوهٔ به‌دست آوردن آن‌ها، در دانش ریاضی و در تقسیم‌بندی نظری آن اثر می‌گذارد. لئون باتیستا آلبرتی قضیه‌های تازه‌ای را طرح و ثابت می‌کند و ملاک عمل او، میزان سودمندی کلی آن‌هاست. بعد اشاره می‌کند که این قضیه‌ها به حوزه‌ای از دانش ریاضی تعلق دارند؛ ولی خیلی زود آن را فراموش می‌کند. همچنین لئوناردو داوینچی به توضیح برخی جنبه‌های پرسپکتیو به صورت «دستورالعمل‌هایی» برای رسم تصویرها و منظره‌ها می‌پردازد. او شرح می‌دهد که چگونه تصویرها را قرار دهند، چگونه چیزها را در ارتباط با دوری و نزدیکی آن‌ها به چشم، به کمک تصویر نمایش دهند، چگونه امکان دیدن منظره از نقطه‌های مختلف تأمین کنند و... .

خود نوع طرح این روش‌های کار، به نوع «دستورالعمل‌ها» و «نسخه‌های» ریاضیات کاربردی دوران بابلی‌ها و مصر باستان برای حل مسأله‌ها شباهت دارد. و این، پیامد استفاده از دستاوردهای ریاضیات کاربردی است. همین لئوناردو داوینچی روش درست به تصویر کشیدن مکان‌ها را این طور شرح می‌دهد: «شیشه‌ای به اندازهٔ $\frac{1}{2}$ صفحهٔ کاغذ سلطنتی انتخاب کن. آن را به‌خوبی در برابر چشمانت، یعنی بین چشم و چیزی که می‌خواهی به تصویر بکشی، محکم کن. سپس چشمت را در فاصلهٔ $\frac{2}{3}$ آرَش از شیشه قرار بده و سر خود را، به‌نحوی محکم نگهدار که هیچ حرکتی نداشته باشد. بعد یک چشم خود را با پوششی ببند. قلم‌مو یا مداد نرم را بردار و آن‌چه در آن طرف شیشه می‌بینی، روی آن رسم کن.» در گذشته، چنین «نسخه‌هایی» دربارهٔ نظریهٔ پرسپکتیو در مقایسه با نتیجه‌های حاصل از آن، در درجهٔ دوم قرار می‌گرفت و پوشیده می‌ماند. همین نتیجه‌گیری‌ها که به صورتی مبهم جنبهٔ نظری موضوع را منعکس می‌کنند، به معنای شباهتی است که بین ریاضیات کاربردی قبل از یونان و ریاضیات کاربردی سده‌های میانه (همراه با دورهٔ رنسانس) وجود دارد؛ گرچه دورهٔ دوم بعد از دورهٔ پیشرفت ریاضیات یونان باستان آمده است.

هم لئوناردو داوینچی و هم لئون باتیستا آلبرتی، از موفقیت گذشتگان دربارهٔ نظریهٔ پرسپکیتو اطلاع داشتند؛ زیرا «وی‌ته‌لو» در کتاب مشهور خود «اپتیک» آن را شرح داده بود و «جون پیکام» در رساله‌ای «دربارهٔ پرسپکتیو» دستاوردهای نظریهٔ پرسپکتیو را که در گذشته به‌دست آمده بود، جمع کرده بود. ولی این پوشش، جنبهٔ دشمنی با نظریه را ندارد، بلکه تا حد امکان از نظریه استفاده می‌کند؛ از نظریه تا آن‌جا استفاده می‌کند

که سودمند باشد.[1] در زمان تسلط ریاضیات کاربردی که تزلزلی در تکامل مستقل ریاضیات نظری قبلی پدید می‌آید، ریاضیات نظری مورد انکار قرار نمی‌گیرد؛ ولی در برابر مسأله‌های کاربردی هم قرار نمی‌گیرد و با آن رقابت نمی‌کند.

وقتی در عمل به پرسپکتیو نیاز باشد، به ناچار به‌وجود می‌آید، بررسی و مطالعه می‌شود و مورد بهره‌برداری قرار می‌گیرد. به یاد آوریم که آلبرتی معمار بود، فرانچسکو نقاشی می‌کرد، دیورر هم نقاش بود و درباره‌ٔ علاقه و استعدادهای همه‌جانبه‌ٔ لئوناردو داوینچی، نیازی به سخن گفتن نیست، و روشن است، وقتی آموزش پرسپکتیو، مربوط به کاربرد مورد استفاده‌ٔ آن باشد، به‌هیچ‌وجه نمی‌توان آن را ریاضیات خالص به‌شمار آورد. انتقال آگاهی از استاد به دستیار خود، در رابطه‌ٔ معلمی و شاگردی مشخص می‌شود و این، همان محدودیت تاریخی آموزش است که موجب تحکیم ریاضیات کاربردی سده‌های میانه شده است.

ریاضیات کاربردی پایداری خود را در فعالیت گروه اجتماعی خاصی به‌دست می‌آورد که در آن، همه‌ٔ گونه‌های آموزشی به هم آمیخته است. به‌وجود آمدن بستگی‌های نظری در ریاضیات و رابطه‌های منطقی بین حکم‌های ریاضی، به حلقه‌ٔ نظری زنجیره‌ٔ حرکت و تغییر دانش ریاضی و متناظر با آن، فعالیت علمی را به جنب و جوش جدّی وامی‌دارد؛ فعالیت در جهت جست‌وجوی قضیه‌ها و حکم‌های تازه‌ٔ نظری، به کمک پیچ‌های منطقی و تبدیل عنصرهای ریاضی. جهشی کیفی در فعالیت پدید می‌آید و سرچشمه‌ٔ نیرومندی برای ظهور قانونمندی‌های درونی ساختارهای نظری می‌شود و آن‌ها را به جلو صحنه می‌راند. درباره‌ٔ رابطه‌ٔ متقابل ریاضیات کاربردی و فعالیت‌های عملی، ریاضیات کاربردی به‌طور کامل و در مجموع، از فعالیت‌های عملی پیروی می‌کند. ریاضیات نظری، این سلسله مراتب را به نفع کشف قانونمندی‌های درونی ریاضیات به هم می‌زند. مطالعه‌ٔ این قانونمندی‌ها، ضرورت تقسیم به دو گروه را پدید می‌آورد؛ گروه اول به سمت عمل می‌رود (ریاضیات کاربردی) و گروه دوم ریاضیات «خالص» را مطالعه می‌کند. خود دانشمند ریاضی («نظریه‌پرداز») بیش‌تر فرزند ریاضیات نظری به‌شمار می‌آید، نه این که ریاضیات نظری فرزند او باشد.

مثال‌هایی که آوردیم، اهمیت اختلاف در روش سازماندهی ریاضیات را در رابطه‌ٔ متقابلی که با مسأله‌های عملی دارند، روشن می‌کنند:

۱. ریاضیات نظری، ضمن انتخاب مسأله‌ٔ عملی، با استفاده‌ای که از ساختمان نظری برای حل آن می‌کند، آن را به درون خود راه می‌دهد و جای آن را در فضای ساختار نظری خود مشخص می‌کند. در مقابل ریاضیات کاربردی، از دیدگاه نظری، برای انتخاب مسأله‌ها و امکان حل آن‌ها، توقّع چندانی ندارد. با وجود این «بی‌توقّعی» نظری ریاضیات کاربردی نسبت به انتخاب مسأله‌ها، به معنای آن نیست که، در ریاضیات کاربردی، هیچ‌گونه محک و معیاری برای انتخاب مسأله‌ها وجود ندارد.

۲. ریاضیات نظری، در ارزیابی و با احتیاط، با پیشرفت تولید و با نتیجه‌های حاصل از آن برخورد می‌کند. دیدگاه مسأله را تصحیح می‌کند و همه‌ٔ امکان‌های نظری را، که در درون مسأله وجود دارد، از آن بیرون می‌کشد. در ضمن، تصحیح خود ریاضیات نظری، در بستر بستگی‌های نظری موجود و به‌وسیله‌ٔ تکامل ساختاری آن، تحقق می‌یابد. در عوض ریاضیات کاربردی در پیوستگی با بنیادهای عملی پیش می‌رود.

۳. دستاوردهای تازه در ریاضیات نظری، با رابطه‌های منطقی (که اثبات‌ها و استدلال‌ها، براساس آن انجام می‌گیرد) و به یاری کار عملی در جهت کامل کردن ساختار درونی دانش نظری، تحکیم می‌شوند. در ریاضیات کاربردی، دستاوردهای تازه به کمک آموزش (و با توجه به اثر بیرونی آن)، تحکیم می‌یابد.

به این ترتیب، ریاضیات نظری و ریاضیات کاربردی، از یک طرف در رابطه با واقعیت، موازی با هم پیش می‌روند و از طرف دیگر، ریاضیات کاربردی رابطه‌ای آگاهانه با واقعیت دارد؛ در حالی که رابطه‌ٔ ریاضیات نظری با واقعیت ناآگاهانه است. خصلت این «موازی بودن» را می‌توان به‌طور خلاصه، این‌طور بیان کرد: برای ریاضیات نظری، عمل و کاربرد جنبه‌ٔ بیرونی دارد؛ ولی برای ریاضیات کاربردی، جنبه‌های درونی و بیرونی بر هم منطبق‌اند. با همه‌ٔ این‌ها باید یادآوری کرد که این مقایسه را نمی‌توان خیلی جلو برد و از آن، جای بررسی واقع‌بینانه‌ٔ موضوع‌های ریاضی و بستگی‌های آن‌ها، از نظر تاریخی استفاده کرد.

زیرنویس

۱. البته از این‌جا نباید به این نتیجه رسید که در زمینه‌ٔ پرسپکتیو، خبری از سنّت نظری نبوده است. این سنّت نظری را می‌توان در کارهای کندی، خازنی و دیگران پیدا کرد.

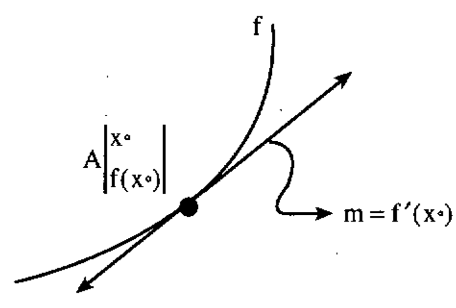
مشتق‌پذیری تابع f در نقطهٔ x_0 روی منحنی f

احمد قندهاری

برای دانش‌آموزان سال سوم متوسطه

فرض می‌کنیم که تابع f در بازهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد و $a < x_0 < b$.

تابع f را در نقطهٔ x_0، وقتی مشتق‌پذیر گوییم که $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ برابر یک عدد مشخص و معین باشد. در این صورت، این حد را (که برابر شیب خط مماس بر منحنی f در x_0 است) مشتق تابع f در نقطهٔ به طول x_0 می‌گوییم و آن را با نماد $f'(x_0)$ نشان می‌دهیم.

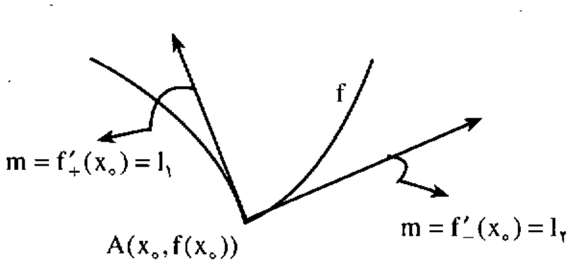


تذکر ۱. اگر حد فوق برابر با دو مقدار متفاوت شود یا ∞ شود و یا مقدار نامعلومی شود، می‌گوییم تابع f در نقطه‌ای به طول x_0 مشتق‌پذیر نیست.

تذکر ۲. اگر در یک مسأله ناچار شدیم $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ را یک‌بار وقتی $x \to x_0^+$ و یک بار برای وقتی $x \to x_0^-$ بیابیم، آن‌گاه خواهیم داشت:

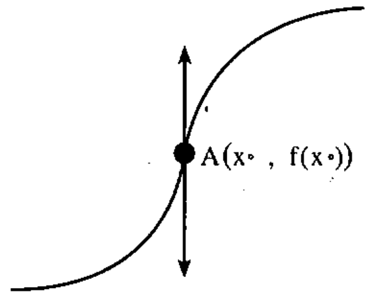
الف. اگر $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l_1$، در این صورت l_1 را با نماد $f'_+(x_0)$ نشان می‌دهیم و این عدد، شیب خط مماس بر منحنی تابع f در طرف راست نقطه‌ای به طول x_0 است و آن را مشتق راست می‌گوییم.

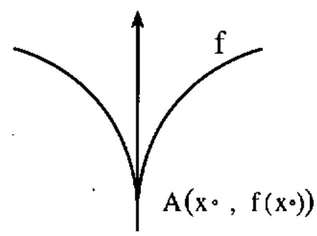
ب. اگر $\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l_2$، در این صورت l_2 را با نماد $f'_-(x_0)$ نشان می‌دهیم و این عدد شیب خط مماس بر منحنی تابع f در طرف چپ نقطهٔ به طول x_0 است و آن را مشتق چپ می‌گوییم.



تذکر ۳. اگر $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$، ∞ شیب خط مماس بر منحنی در نقطه‌ای به طول x_0 است؛ ولی بنا به تعریف می‌گوییم تابع f در x_0 مشتق‌پذیر نیست، ∞ هم یک عدد حقیقی نیست؛ ولی راستای خط مماس را نشان می‌دهد

که عمود بر محور xهاست؛ مانند شکل‌های زیر:





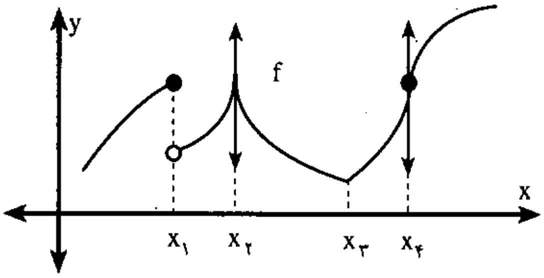
نکتهٔ مهم. همهٔ مسائل مشتق‌پذیری، مسائل حد با ابهام $\frac{0}{0}$ است. برای حل آن‌ها باید:

۱. عبارت $f(x)-f(x_0)$ را تجزیه کرد تا عامل $(x-x_0)$ در آن ایجاد شود، پس از حذف این عامل از صورت و مخرج، حد مورد نظر محاسبه می‌شود.

۲. اگر عبارت $f(x)-f(x_0)$ رادیکالی باشد، باید صورت و مخرج کسر را در عبارت مناسبی ضرب کنیم تا رادیکال صورت حذف شود، سپس مانند شمارهٔ (۱) عمل می‌کنیم.

۳. اگر عبارت $f(x)-f(x_0)$ مثلثاتی باشد، آن عبارت را به حاصلضرب تبدیل می‌کنیم و از هم‌ارزی $u \to 0 \begin{cases} \sin u \sim u \\ \tan u \sim u \end{cases}$ استفاده می‌کنیم؛ در این موقع، عبارت‌های مورد نیاز به عبارت‌های جبری تبدیل می‌شوند، آن‌گاه حد مورد نظر را محاسبه می‌کنیم.

تذکر ۴. یک نمودار، در نقاط زاویه‌دار، در نقاط ناپیوسته و در نقاطی که خط مماس بر منحنی تابع موازی محور yها باشد، مشتق‌پذیر نیست. به نمودار تابع f در این شکل توجه کنید.



این تابع در نقاط به طول‌های x_1 و x_2 و x_3 و x_4 مشتق‌پذیر نیست.

مسألهٔ ۱. مشتق‌پذیری تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^3-2x+3$ را در نقطهٔ $x_0=2$ بررسی کنید.

حل:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x+3-7}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x-4}{x-2}$$

$$x^3-2x-4 \left| \frac{x-2}{x^2+2x+2} \right.$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x^2+2x+2)=10=f'(2)$$

این تابع در $x_0=2$ مشتق‌پذیر است.

مسألهٔ ۲. مشتق‌پذیری تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x^2-6x}$ را در نقطهٔ $x_0=-1$ بررسی کنید.

حل:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2-6x}-\sqrt{7}}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2-6x}-\sqrt{7}}{x+1}\times\frac{\sqrt{x^2-6x}+\sqrt{7}}{\sqrt{x^2-6x}+\sqrt{7}}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-6x-7}{(x+1)\left(\sqrt{x^2-6x}+7\right)}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-7)}{(x+1)\left(\sqrt{x^2-6x}+7\right)} = \lim_{x\to -1}\frac{x-7}{\sqrt{x^2-6x}+7}$$

$$= \frac{-8}{2\sqrt{7}} = \frac{-4}{\sqrt{7}} = f'(-1)$$

پس این تابع در $x_0 = -1$ مشتق‌پذیر است.

مسألهٔ ۳. مشتق‌پذیری تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt[3]{x^3+x}$ را در نقطهٔ $x_0 = 1$ بررسی کنید.

حل:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^3+x}-\sqrt[3]{2}}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^3+x}-\sqrt[3]{2}}{x-1}\times\frac{\sqrt[3]{(x^3+x)^2}+\sqrt[3]{2(x^3+x)^2}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{(x^3+x)^2}+\sqrt[3]{2(x^3+x)}+\sqrt[3]{4}}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{(x-1)\left(\sqrt[3]{(x^3+x)^2}+\sqrt[3]{2(x^3+x)}+\sqrt[3]{4}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+2)}{(x-1)\left(\sqrt[3]{(x^3+x)^2}+\sqrt[3]{2(x^3+x)}+\sqrt[3]{4}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+2}{\sqrt[3]{(x^3+x)^2}+\sqrt[3]{2(x^3+x)}+\sqrt[3]{4}} = \frac{4}{3\sqrt[3]{4}} = f'(1)$$

پس این تابع در $x_0 = 1$ مشتق‌پذیر است.

مسألهٔ ۴. مشتق‌پذیری تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sin\sqrt{x}$ را در نقطهٔ $x_0 = 4$ بررسی کنید.

حل:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{\sin\sqrt{x}-\sin 2}{x-4} =$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{2\sin\frac{\sqrt{x}-2}{2}.\cos\frac{\sqrt{x}+2}{2}}{x-4} =$$

$$x\to 4;\ \frac{\sqrt{x}-2}{2}\to 0 \Rightarrow \sin\frac{\sqrt{x}-2}{2}\sim\frac{\sqrt{x}-2}{2}$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{2\left(\frac{\sqrt{x}-2}{2}\right).\cos\frac{\sqrt{x}+2}{2}}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{x}-2\right).\cos\frac{\sqrt{x}+2}{2}}{x-4}$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right).\cos\frac{\sqrt{x}+2}{2}}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{(x-4).\cos\frac{\sqrt{x}+2}{2}}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{\cos\frac{\sqrt{x}+2}{2}}{\sqrt{x}+2} = \frac{\cos 2}{4} = f'(4)$$

بنابراین، تابع f در $x_0 = 4$ مشتق‌پذیر است.

مسألهٔ ۵. مشتق‌پذیری تابع با ضابطهٔ $f(x)=\cos\sqrt{x^2+3x}$ را در نقطهٔ $x_0 = 1$ بررسی کنید.

حل:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\cos\sqrt{x^2+3x}-\cos 2}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{-2\sin\frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{2}.\sin\frac{\sqrt{x^2+3x}+2}{2}}{x-1}$$

$$x\to 1;\ \frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{2}\to 0 \Rightarrow \sin\frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{2}\sim\frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{2}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{-2\left(\frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{2}\right).\sin\frac{\sqrt{x^2+3x}+2}{2}}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{-\left(\sqrt{x^2+3x}-2\right)\sin\frac{\sqrt{x^2+3x}+2}{2}}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{-\left(\sqrt{x^2+3x}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3x}+2\right)\sin\frac{\sqrt{x^2+3x}+2}{2}}{(x-1)(\sqrt{x^2+3x}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{-\left(x^2+3x-4\right)\sin\frac{\sqrt{x^2+3x}+2}{2}}{(x-1)(\sqrt{x^2+3x}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)(x+4).\sin\frac{\sqrt{x^2+3x}+2}{2}}{(x-1)(\sqrt{x^2+3x}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{-(x+4)\sin\frac{\sqrt{x^2+3x}+2}{2}}{\sqrt{x^2+3x}+2}$$

$$= \frac{-5\sin 2}{4} = f'(1)$$

پس این تابع در $x_0 = 1$ مشتق‌پذیر است.

مسألهٔ ۶. مشتق‌پذیری تابع با ضابطهٔ $f(x) = \left|x^2-2\right|$ را در نقطهٔ $x_0 = \sqrt{2}$ بررسی کنید.

حل:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{f(x)-f(\sqrt{2})}{x-\sqrt{2}} = \lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{\left|x^2-2\right|-0}{x-\sqrt{2}}$$

$$= \lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{\left|x-\sqrt{2}\right|.\left|x+\sqrt{2}\right|}{x-\sqrt{2}}$$

الف) $\displaystyle \lim_{x\to\sqrt{2}^+}\frac{\left|x-\sqrt{2}\right|.\left|x+\sqrt{2}\right|}{x-\sqrt{2}} = \lim_{x\to\sqrt{2}^+}\frac{\left(x-\sqrt{2}\right).\left(x+\sqrt{2}\right)}{x-\sqrt{2}} = \lim_{x\to\sqrt{2}^+}\left(x+\sqrt{2}\right)$

$= 2\sqrt{2} = f'_+\left(\sqrt{2}\right)$ (مشتق راست تابع f در $x_0 = \sqrt{2}$)

ب) $\displaystyle \lim_{x\to\sqrt{2}^-}\frac{\left|x-\sqrt{2}\right|.\left|x+\sqrt{2}\right|}{x-\sqrt{2}} = \lim_{x\to\sqrt{2}^-}\frac{-\left(x-\sqrt{2}\right).\left(x+\sqrt{2}\right)}{x-\sqrt{2}} = \lim_{x\to\sqrt{2}^-}-\left|x+\sqrt{2}\right|$

$= -2\sqrt{2} = f'_-\left(\sqrt{2}\right)$ (مشتق چپ تابع f در $x_0 = \sqrt{2}$)

پس این تابع در $x_0 = \sqrt{2}$ مشتق‌پذیر نیست.

مسألهٔ ۷. مشتق‌پذیری تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)\left(x^2+1\right)}$ را در نقطهٔ $x_0 = 2$ بررسی کنید.

حل:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{(x-2)\left(x^2+2\right)}-0}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{(x-2)}.\sqrt[3]{x^2+2}}{\sqrt[3]{(x-2)^3}} = \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x^2+2}}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} = \frac{\sqrt[3]{6}}{0^+} \to +\infty$$

این تابع در $x_0 = 2$ مشتق‌پذیر نیست و راستای خط مماس بر منحنی در این نقطه، موازی محور yهاست.

مسألهٔ ۸. مشتق‌پذیری تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-2)}$ را در نقطهٔ $x_0 = 0$ بررسی کنید.

حل:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2(x-2)}-0}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2}.\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt[3]{x^3}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt[3]{x}} = \frac{\sqrt[3]{-2}}{0^\pm} \to \mp\infty$$

این تابع هم در $x_0 = 0$ مشتق‌پذیر نیست و راستای خط مماس بر منحنی در $x_0 = 0$ موازی محور yهاست.

مسألهٔ ۹. مشتق‌پذیر تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} x.\cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ را در نقطهٔ $x_0 = 0$ بررسی کنید.

حل:

عددی نامعلوم در بازهٔ

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos\frac{1}{x}-0}{x} = \lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$$

$$= \cos(\pm\infty) = [-1,1]$$

پس این تابع در $x_0 = 0$ مشتق‌پذیر نیست.

فرض کنید این شکل سه طبقهٔ یک ساختمان باشد.

طبقهٔ سوم	مشتق‌پذیری
طبقهٔ دوم	پیوستگی
طبقهٔ اول	حد

قضیهٔ ۱. اگر تابع f در x_0 مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه f در x_0 پیوسته است.

قضیهٔ ۲. اگر تابع f در x_0 پیوسته باشد، آن‌گاه f در x_0 حد دارد.

قضیهٔ ۳. اگر تابع f در x_0 حد نداشته باشد، آن‌گاه f در x_0 نه پیوسته است و نه مشتق‌پذیر. سه قضیه را با شکل بالا می‌توان بیان کرد.

مسألهٔ ۱۰. تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x^3+x, & x \geq 2 \\ ax^2+bx, & x<2 \end{cases}$ در $x_0 = 2$ مشتق‌پذیر است. a و b را بیابید.

حل:

$$f(x)=\begin{cases} x^3+x, & x \geq 2 \\ ax^2+bx, & x<2 \end{cases} \qquad f'(x)=\begin{cases} 3x^2+1, & x \geq 2 \\ 2ax+b, & x<2 \end{cases}$$

چون تابع f در $x_0 = 2$ مشتق‌پذیر است، پس $f'_-(2)=f'_+(2)$ ؛ بنابراین:

$$2a(2)+b=3(2)^2+1 \Rightarrow 4a+b=13$$

چون تابع f در $x_0 = 2$ مشتق‌پذیر است، پس f در $x_0 = 2$ پیوسته است و حد دارد؛ بنابراین:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x) \Rightarrow 4a+2b=10$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a+b=13 \\ 4a+2b=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=-3 \end{cases}$$

معماهای فـ  ـکری و منطقی

C، J، M و S چهار نفرند که شغلشان قصاب، داروساز، بقّال و پلیس ـ گرچه نه لزوماً به همین ترتیب ـ است.

C و J همسایه‌اند و به نوبت همدیگر را با اتومبیل به سر کار می‌برند.

درآمد J بیش از M است.

C به طور منظم در بازی بولینگ از S می‌برد.

قصاب همیشه پیاده سر کار می‌رود.

پلیس نزدیک داروساز زندگی نمی‌کند.

تنها وقتی که بقّال و پلیس ملاقات کردند، وقتی بود که پلیس بقّال را به خاطر سرعت زیاد توقیف کرد.

درآمد پلیس از داروساز یا بقّال بیشتر است.

شغل هر یک چیست؟

C: [illegible] J: [illegible] M: [illegible] S: [illegible]

۱

⚙ حمیدرضا امیری

احتمال شرطی؛ پیشامدهای مستقل و وابسته

معمولاً دانش‌آموزانی که مبحث احتمال شرطی و مسائل مربوط به آن را بررسی می‌کنند، تا حدود زیادی با مشکل روبه‌رو می‌شوند و حتی دبیران محترم نیز در انتقال این مفاهیم، تا حدی انرژی بیش‌تری صرف می‌کنند؛ در صورتی که به اعتقاد من، احتمال شرطی و مسائل مربوط به آن، نسبت به مسائل احتمال غیرشرطی، ساده‌تر و از پیچیدگی کم‌تری برخوردارند؛ البته به شرط آن که احتمال غیرشرطی را خوب درک کرده باشیم.

درواقع، اشکال اصلی در این است که مقدمات و مفاهیم اولیهٔ احتمال درک نشده است؛ والا یک مسألهٔ احتمال شرطی، چیزی جز محدودیت قائل شدن برای یک مسألهٔ احتمال غیرشرطی نیست. بنابراین سعی می‌کنم ابتدا مفاهیم اولیه و مقدمات احتمال را به صورتی ساده و تا حدی شهودی بیان کنم و سپس به بحث اصلی، یعنی احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل و وابسته می‌پردازم.

اولین توضیح، دربارهٔ واژهٔ احتمال است که بعضی آن را مترادف با شانس در نظر می‌گیرند، که این اشکال دارد. شما می‌دانید که وقتی یک پدیدهٔ تصادفی رخ می‌دهد، احتمال به‌وقوع پیوستن یک پیشامد تصادفی در فضای نمونه‌ای حاصل، عددی است حقیقی مانند $0 \le n \le 1$، که در واقع عدد n شانس به‌وقوع پیوستن پیشامد مزبور را اندازه‌گیری می‌کند؛

بنابراین احتمال مترادف است با اندازه‌گیری شانس.

توضیح دیگر در مورد سه واژهٔ پدیدهٔ تصادفی، فضای نمونه‌ای و پیشامد تصادفی است که در توضیحات قبل به کار رفته است.

هر پدیده‌ای که در رخداد آن قطعیّت وجود نداشته باشد، به طوری که از همهٔ حالت‌های ممکن در به وقوع پیوستن آن اطلاع داشته باشیم، اما چگونگی به وقوع پیوستن آن مشخص نباشد، یک **پدیدهٔ تصادفی** نامیده می‌شود.

به عنوان مثال، این پدیده که سنگی را از ارتفاعی رها کنیم و به زمین برخورد کند، یک پدیدهٔ قطعی است و تصادفی محسوب نمی‌شود؛ ولی پدیدهٔ انداختن یک تاس، یک پدیدهٔ تصادفی است؛ زیرا اولاً از همهٔ حالت‌های ممکن در به وقوع پیوستن آن پدیده اطلاع داریم (عدد ۱ یا ۲ یا ... و یا ۶ ظاهر خواهد شد) و ثانیاً، تا وقتی تاس در حرکت است، هیچ قطعیتی در رو شدن هریک از ۶ عدد ۱ تا ۶ وجود ندارد.

حالا اگر پدیده‌ای تصادفی رخ دهد و ما همهٔ حالت‌های ممکن در به‌وقوع پیوستن آن پدیده را در یک مجموعهٔ مانند S قرار دهیم، به مجموعهٔ S فضای نمونه‌ای آن پدیدهٔ تصادفی گفته می‌شود. به‌عنوان مثال، وقتی تاسی را می‌ریزیم، فضای نمونه‌ای آن (مجموعه‌ای شامل همهٔ حالت‌های ممکن) عبارت است از $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ یا وقتی سکه‌ای را می‌اندازیم، $S=\{H,T\}$ فضای نمونه‌ای آن است. به عنوان مثال، اگر ارقام ۲، ۳، ۴ را به تصادف کنار هم قرار دهیم، $S=\{۴۳۲,۴۲۳,۳۲۴,۳۴۲,۲۴۳,۲۳۴\}$ فضای نمونه‌ای این پدیدهٔ تصادفی را تشکیل می‌دهد.

در صورتی که یک پدیدهٔ تصادفی رخ داده و S فضای نمونه‌ای این پدیدهٔ تصادفی باشد، هر زیرمجموعهٔ S مانند A را یک **پیشامد تصادفی** از فضای نمونه‌ای S می‌نامیم. درواقع هر پیشامد تصادفی از یک فضای نمونه‌ای، زیرمجموعه‌ای از آن فضای نمونه‌ای بوده که می‌تواند تهی ($\varnothing$) یا خود مجموعهٔ S باشد، که پیشامد تهی را پیشامد نشدنی یا غیرممکن و S را پیشامد حتمی می‌نامند.

به نظر شما وقتی یک تاس را می‌ریزیم، چند پیشامد تصادفی می‌توان برای این پدیدهٔ تصادفی تعریف کرد؟ با عجله جواب ندهید! به تعریف پیشامد تصادفی که ذکر شد، دقت کنید. بلی، صحیح است؛ $۲^۶$ پیشامد تصادفی در ریختن یک تاس می‌توان تعریف کرد (هر زیرمجموعهٔ یک مجموعهٔ ۶ عضوی که تعدادشان $۲^۶$ است). اگر فرض کنیم $A_۱=\varnothing$ و $A_۲=S$، $A_۳=\{۲,۳,۴\}$، $A_۴=\{۱,۴,۶\}$، $A_۵=\{۲,۳,۶\}$ و $A_۶=\{۱,۴\}$ برای هر یک از مجموعه‌های $A_۱$ تا $A_۴$، می‌توان پیشامدهایی به صورت زیر تعریف کرد:

$A_۱$: پیشامد این که تاس عددی بزرگ‌تر از ۶ بیاید.

$A_۲$: پیشامد این که تاس عددی کوچک‌تر از ۷ بیاید.

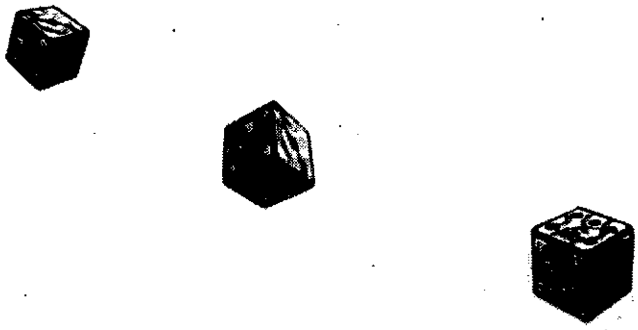
$A_۳$: پیشامد این که تاس عددی بین ۱ و ۵ بیاید.

$A_۴$: پیشامد این که عدد رو شده، در معادلهٔ $(x-۱)(x-۴)(x-۶)=۰$ صدق کند.

تمرین: برای هریک از مجموعه‌های $A_۵$ و $A_۶$ یک پیشامد تعریف کنید.

موضوع دیگری که بسیار مهم بوده و به بحث آیندهٔ ما هم مربوط است، موضوع رخداد یک پیشامد تصادفی است و حالت‌هایی که می‌تواند یک پیشامد تصادفی رخ دهد، این بحث را با یک پرسش و طرح یک مسأله کامل می‌کنیم:

مجموعه‌های $A_۱=\{۲\}$، $A_۲=\{۲,۴,۶\}$، $A_۳=\{۲,۳,۵\}$، $A_۴=\{۱,۲,۳\}$ و $A_۵=\{۱,۳,۴,۵,۶\}$ را در نظر می‌گیریم. حال اگر یک تاس را بریزیم، واضح است که $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ فضای نمونه‌ای این پدیده بوده و $A_۱,A_۲,\cdots,A_۵$ همگی پیشامدهایی در این فضای نمونه‌ای هستند. سؤال این است که اگر مشاهده کنیم که تاس عدد ۲ را نشان می‌دهد، کدام یک از پیشامدهای تصادفی $A_۱$ تا $A_۵$ قطعاً رخ داده‌اند؟ پیشامد $A_۱$ قطعاً رخ داده است، پیشامد $A_۲$ چطور؟ اگر فرض کنیم پیشامد $A_۲$، «رو شدن عدد زوج» تعریف شود و تاس ۲ بیاید، آیا زوج نامیده؟ پس $A_۲$ نیز رخ



داده است.

اگر پیشامدهای A_3 و A_4 به ترتیب «رو شدن عدد اول کوچک‌تر از ۷» و «رو شدن عدد طبیعی و کوچک‌تر از ۴» تعریف شوند، آیا A_3 و A_4 نیز رخ داده‌اند؟ جواب مثبت است و تنها پیشامد A_5 است که رخ نداده، لذا می‌توان گفت: هر پیشامد (زیرمجموعه) از فضای نمونه‌ای S (ریختن یک تاس) که شامل عدد ۲ باشد، رخ داده است (اگر تاس ۲ آمده باشد)، تعداد این پیشامدها برابر است با $۳۲ = ۲^۵$. چرا؟

تمرین. دو تاس را با هم می‌ریزیم و مشاهده می‌کنیم که مجموع دو تاس بزرگ‌تر از ۱۰ است؛ در این صورت چند پیشامد تصادفی از فضای نمونه‌ای حاصل می‌تواند رخ دهد؟

جواب: $(۲^{۳۳})$

یکی دیگر از موضوع‌هایی که در آینده با آن روبه‌رو خواهیم شد، مسألهٔ رخداد دو پیشامد A و B به صورت توأم است. اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و بخواهیم با هم رخ بدهند، دو حالت ممکن است پیش آید؛ یکی آن‌که این دو پیشامد که با هم رخ می‌دهند، از نظر عضو نیز اشتراک داشته باشند و دیگر این‌که عضو مشترک نداشته باشند؛ یعنی اشتراک مجموعه‌ای برای آن‌ها تهی باشد. به مثال‌های زیر توجه کنید:

مثال ۱. تاسی را می‌ریزیم و پیشامد A را «رو شدن عدد زوج» و پیشامد B را «رو شدن عدد اول» تعریف می‌کنیم، که در این مثال $(A \cap B) = \{۲\}$؛ بنابراین اگر تاس ۲ بیاید، دو پیشامد A و B با هم رخ داده‌اند.

مثال ۲. تاسی را می‌ریزیم و پیشامد A را «رو شدن عدد زوج» و پیشامد B را «رو شدن عدد فرد» تعریف می‌کنیم که در این مثال $(A \cap B) = \varnothing$؛ بنابراین A و B نمی‌توانند با هم رخ بدهند.

تذکر مهم: در احتمال همواره رخداد دو پیشامد A و B را به صورت توأم و با نماد $(A \cap B)$ نمایش می‌دهیم؛ به عبارت دیگر $p(A \cap B)$، یعنی «احتمال رخداد دو پیشامد A و B با هم».

نتیجهٔ مهم: اگر A و B هر دو از یک فضای نمونه‌ای مانند S تعریف شده باشند، $(A \cap B)$ یعنی رخداد توأم A و B با اشتراک مجموعه‌ای برای دو مجموعهٔ A و B برابر است.

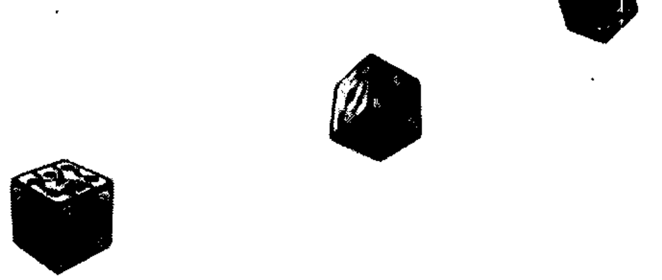
پس اگر در یک مسأله احتمال، به $p(A \cap B)$ برخوردیم، برای آن فقط یک تعبیر داریم و آن «احتمال این که دو پیشامد A با هم رخ بدهند» بنابراین اگر A و B هر دو از یک فضای نمونه‌ای مانند S تعریف شده باشند، کار ساده است و به دنبال اعضای مشترک A و B هستیم.

حال به بحث اصلی خودمان، یعنی احتمال شرطی بازمی‌گردیم، پس از این، فرض می‌کنیم شما مقدمات احتمال را آموخته‌اید و سعی می‌کنیم از رابطهٔ اصلی احتمال رخداد پیشامد A از فضای نمونه‌ای S، یعنی $p(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ استفاده کنیم.

اگر به یاد داشته باشید، در ابتدای بحثمان اشاره کردم که «یک مسألهٔ احتمال شرطی، چیزی جز محدودیت قائل شدن برای یک مسألهٔ احتمال غیرشرطی نیست». سعی می‌کنم این موضوع را با ذکر چند مثال برای شما ملموس کنم و سپس مدل احتمال شرطی و قوانین مربوط به آن را بیان و تجزیه و تحلیل کرده، به طرح و حل مسائلی می‌پردازیم تا سرانجام پیشامدهای مستقل و وابسته را تعریف کنیم.

مثال ۱. تاسی را می‌ریزیم، اگر احتمال رو شدن عدد اول را بخواهیم، جواب می‌دهید $p(A) = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$. حال اگر سؤال کنیم چقدر احتمال دارد عدد اول رو شود، به شرط آن که بدانیم تاس عدد زوج آمده، جواب شما چیست؟

وقتی می‌گوییم به شرط آن که تاس عدد زوج آمده، یعنی پیشامد زوج آمدن رخ داده است؛ لذا فضای نمونه‌ای جدیدی که همواره زیرمجموعهٔ فضای نمونه‌ای اصلی است، به وجود



آمده است، که در این مثال، شرط موجود باعث شده $S_1 = \{۲,۴,۶\}$ فضای نمونه‌ای جدید باشد که ما در این فضای نمونه‌ای، به‌دنبال پیشامد مطلوب خودمان، یعنی اول آمدن تاس هستیم که چون فقط عدد ۲ در S_1 اول است، احتمال روشدن عدد اول به شرط زوج آمدن، عبارت است از: $p(A) = \frac{۱}{۳}$.

مثال ۲ . دو تاس را با هم می‌ریزیم، مطلوب است احتمال آن‌که:

الف . مجموع دو تاس ۸ باشد؛ به شرط آن‌که بدانیم هر دو تاس اوّل هستند .

ب . مجموع دو تاس کم‌تر از ۷ باشد؛ به شرط آن که هر دو تاس مثل هم باشند .

ج . هر دو زوج باشند؛ به شرط آن که بدانیم مجموعشان ۷ است .

د . مجموعشان بزرگ‌تر از ۹ باشد؛ به شرط آن که بدانیم: هر دو بزرگ‌تر از ۳ هستند .

هـ . هر دو بزرگ‌تر از ۳ باشند؛ به شرط آن‌که بدانیم مجموعشان بزرگ‌تر از ۹ است .

حل : در حل تمام قسمت‌ها، همواره B را پیشامدی که رخ داده و A را پیشامد مطلوب است، فرض می‌کنیم:

الف)

$$B = \{(۲,۲),(۲,۳),(۳,۲),(۲,۵),(۵,۲),(۳,۵),(۵,۳),(۵,۵),(۳,۳)\}$$

$$A = \{(۲,۶),(۶,۲),(۳,۵),(۵,۳),(۴,۴)\}$$

$P(B$ رخداد پیشامد A به شرط $) = p(A/B) = \frac{۲}{۹}$

(پیشامد B درواقع فضای نمونه‌ای جدید است که در آن به دنبال مجموع ۸ هستیم و فقط دو زوج (۵,۳) و (۳,۵) در B یافت می‌شوند که مجموعشان ۸ است . حال اگر کمی دقت کنید، ملاحظه می‌کنید که $A \cap B = \{(۳,۵),(۵,۳)\}$ و درواقع $\frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{۲}{۹}$ همان احتمال مطلوب است!

(بعداً نیز ثابت می‌شود که $p(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$ به‌عنوان فرمولی برای محاسبهٔ احتمال رخداد A به شرط آن‌که B رخ داده باشد، به‌کار می‌رود.)

ب) $B = \{(۱,۱),(۲,۲),\cdots,(۶,۶)\}$

$$A = \{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۱),(۱,۳),(۳,۱),\cdots,(۲,۴),(۴,۲)\}$$

$$A \cap B = \{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳)\} \Rightarrow p(A/B) = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

ج) $B = \{(۱,۶),(۶,۱),(۲,۵),(۵,۲),(۳,۴),(۴,۳)\}$

$$A = \{(۲,۲),(۲,۴),(۲,۶),(۴,۲),(۴,۴),(۴,۶),(۶,۲),(۶,۴),(۶,۶)\}$$

$$(A \cap B) = \varnothing \Rightarrow p(A/B) = \frac{۰}{۶} = ۰$$

(درواقع اگر مجموع دو تاس ۷ باشد که عددی فرد است، باید یکی از آن دو عدد زوج و دیگری فرد باشد و امکان هر دو زوج بودن وجود ندارد.)

د)

$$B = \{(۴,۴),(۴,۵),(۴,۶),(۵,۴),(۵,۵),(۵,۶),(۶,۴),(۶,۵),(۶,۶)\}$$

$$A = \{(۶,۴),(۴,۶),(۵,۵),(۶,۵),(۵,۶),(۶,۶)\}$$

$$A \subseteq B \Rightarrow (A \cap B) = A \Rightarrow p(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{n(A)}{n(B)} = \frac{۶}{۹}$$

هـ) $B = \{(۶,۴),(۴,۶),(۵,۵),(۶,۵),(۵,۶),(۶,۶)\}$

$$A = \{(۴,۴),(۴,۵),(۴,۶),(۵,۴),(۵,۵),(۵,۶),(۶,۴),(۶,۵),(۶,۶)\}$$

$$B \subseteq A \Rightarrow A \cap B = B \Rightarrow p(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{n(B)}{n(B)} = ۱$$

(توجه دارید که $(A \cap B)$ به همان معناست که قبلاً روی آن بحث شد؛ یعنی A و B با هم رخ بدهند و چون A و B از یک فضای نمونه‌ای هستند، عضوهای مشترک A و B مورد نظر است.)

در شمارهٔ بعد، به بیان و تجزیه و تحلیل مدل احتمال شرطی و قوانین مربوط به آن خواهیم پرداخت. توصیه می‌کنم

برای آمادگی بیش‌تر، تمرین‌های زیر را حل کنید.

تمرین:

۱. سه تاس را با هم می‌ریزیم، مطلوب است احتمال آن‌که:

الف. هر سه اوّل باشند؛ به شرط آن‌که بدانیم مجموعشان کم‌تر از ۹ است.

ب. هر سه فرد باشند؛ به شرط آن که بدانیم مجموعشان ۷ است.

۲. سه سکّه را با هم می‌اندازیم، چه‌قدر احتمال دارد:

الف. هر سه H بیایند؛ به شرط آن‌که بدانیم حداقل یکی از آنها H است.

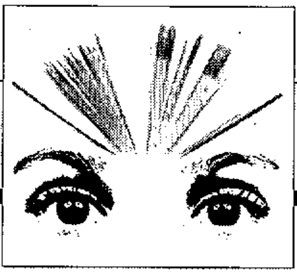
ب. دو سکه T بیاید؛ به شرط آن‌که بدانیم حداکثر دو سکّه H است.

۳. در جعبه‌ای، ۴ مهرهٔ آبی، ۵ مهرهٔ قرمز و ۳ مهرهٔ سبز وجود دارد. از این جعبه، سه مهره به تصادف خارج می‌کنیم، چه‌قدر احتمال دارد:

الف. هر سه مهره آبی باشند؛ به شرط آن‌که بدانیم هر سه همرنگ هستند.

ب. ۲ مهرهٔ آبی و ۱ مهرهٔ سبز باشد؛ به شرط آن‌که بدانیم هیچ‌کدام قرمز نیستند.

(جواب این تمرین‌ها را در شمارهٔ بعدی مجلّه ملاحظه خواهید کرد.)

معماهای فـ  ـکری و منطقی

B ، C ، J و S که نام‌های اشخاصی هستند که مسؤولیت‌های حسابداری، صندوقداری، ریاست و مدیرعامل را ـ گرچه نه لزوماً به این ترتیب ـ در بانکی به عهده دارند.

مدیرعامل، گرچه صندوقدار مرتب او را شکست می‌دهد، با هیچ‌کس دیگر در بانک شطرنج بازی نمی‌کند.

هم رئیس و هم صندوقدار شطرنجبازان بهتری نسبت به حسابدارند.

J و S همسایهٔ دیوار به دیوارند و اغلب عصرها با هم شطرنج بازی می‌کنند. C شطرنجباز بهتری نسبت به J است.

حسابدار نزدیک مدیرعامل زندگی می‌کند؛ اما از دیگران دور است.

مقام هر یک کدام است؟

جواب:
B: حسابدار C: مدیرعامل J: رئیس S: صندوقدار

بحثی در حل معماهای فکری و منطقی

از: وایلی

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

یکی از موارد مکمل آموزش ریاضی، پرداختن به معماهاست. و در این میان، معماهای فکری ـ منطقی، و ریاضی، جای ویژه‌ای به خود اختصاص می‌دهند.

معماهای فکری ـ منطقی یا ریاضی، روش تحقیق و پژوهش، چگونگی پرداختن به مسائل فکری، استفاده از تفکر ناب، و از همه مهمتر، گذشتن از حوزه های به ظاهر غریب منطق و فکر را به پردازندهٔ به خود می‌آموزد و او را به سیاحت در زمینه‌های ناآشنای خرد رهنمون می‌شود. مقالهٔ زیر، نگاهی است مختصر به این چشم‌انداز پرثمر؛ امیدواریم که برای خواننده مفید باشد.

***

معماهای با ویژگی صرفاً منطقی، از یک طرف با توجه به این واقعیت که شامل بازی با کلمات، گزاره‌های عمداً فریب‌آمیز و حدس زدن ـ و به طور مختصر، هیچ نوع کجروی‌ای از این دست ـ نیست، با چیستان‌ها متفاوت‌اند، و از طرف دیگر، با پرسش‌ها و اغلب معماهای ریاضی، از این لحاظ تفاوت دارند که به جای تکیه بر حافظهٔ بیش‌تر، بر مبنای تفکر تنظیم شده‌اند، به عبارت دیگر، کلید حل آنرا، به جای این‌که به مخزنی از اطلاعات نیاز داشته باشد، بیش‌تر به هوش و درایت طبیعی و ذاتی متکی است.

برای این‌که معماهای فکری‌ـ‌منطقی تا حد امکان با این موضوع مطابقت داشته باشد، حداکثر کوشش را به کار می‌بریم که موارد مبتنی بر واقعیت آن‌ها حتی‌الامکان معدود و محدود باشد. در بعضی از مثال‌ها، کاربرد مختصری جبر مقدماتی، می‌تواند به ساده کردن راه‌حل کمک کند؛ اما هیچ یک از آن‌ها به هیچ‌گونه اطلاعات فنی‌ای ماورای جداول ضرب و این واقعیت که:

زمان × سرعت = فاصله

نیاز ندارد. ولی این انتظار را داریم که حل کننده با این واقعیت که یک انسان باید بزرگ‌تر از فرزندان خود باشد و زمانی که دو نفر در یک بازی مختلط دو نفره شرکت می‌کنند، یکی مرد و دیگری زن است و با واقعیت‌های ساده در حد تجربیات

روزمره آشنا باشد.

ملاحظهٔ این مطلب جالب است که معماهایی از نوع صرفاً منطقی، مظهر فرایندهای کامل عملی‌اند. در آغاز کار، شخص با توده‌ای از داده‌های کم‌وبیش نامرتبط مواجه می‌شود. از این واقعیت‌ها شاید بتوان بلافاصله استنتاج‌های مثبت معدودی استخراج کرد؛ اما معمولاً ضروری می‌شود که در مورد آن‌ها فرض‌های موقتی یا عملی، برای جست‌وجوی راهنمایی در نظر گرفته شود و در این صورت باید درستی فرض‌های مزبور، با آزمایش کردن پیامدهای آن‌ها در سازگاری با داده‌های اولیه، به دقت مورد بررسی قرار گیرد و در صورت ظهور ناسازگاری، باید مفروضات موقتی مزبور را کنار گذاشت و فرض‌های دیگری را تا رسیدن به مجموعه‌ای از نتایج سازگار، جانشین آن‌ها کرد. سپس باید به امتحان این نتایج برای یکتایی آن‌ها در این مورد پرداخت که آیا فقط آن‌ها شرایط مسأله را برقرار می‌کنند یا موارد دیگر نیز به‌طور مساوی قابل قبول‌اند.

بنابراین با استفاده از فرایند اساسی در نظر گرفتن فرض، استخراج نتایج از آن و امتحان سازگاری آن‌ها در چارچوب کلی مسأله، سرانجام پاسخ از دل اطلاعات به ظاهر نامربوطی بیرون کشیده می‌شود که ارائه داده شده‌اند.

ویژگی ذاتی معماهای منطقی است که راه‌حلشان را نمی‌توان به صورت الگویی ثابت درآورد. با وجود این، در این مرحله، ارائه پیشنهادهایی عمومی برای پرداختن به معماهایی از این نوع، می‌تواند سودمند باشد. ابتدا مثال زیر را در نظر می‌گیریم:

B، P، R و S چهار هنرمند با استعداد و خلاق‌اند، که تخصص یکی بندبازی، یکی نقاشی، یکی خوانندگی و دیگری نویسندگی (گرچه نه لزوماً به این ترتیب) است.

۱. شبی که «خواننده» اولین اجرای خود را در کنسرتی انجام داد، B و R در میان جمعیت شنونده بودند.

۲. هم P، هم «نویسنده»، برای کشیدن تصویرشان، مقابل «نقاش» نشسته‌اند.

۳. «نویسنده» که بیوگرافی‌اش از S جزو کتاب‌های پرفروش قرار گرفته است، می‌خواهد بیوگرافی B را نیز بنویسد.

۴. B هیچ‌گاه با R آشنا نبوده است.

حوزهٔ هنری هریک از این چهارنفر چیست؟

از برداشتن واقعیت‌ها و فرض‌ها، و نتایج متعدد مبتنی بر آن‌ها، گیج‌کننده و مشکل است. در جمیع معماها، البته غیر از ساده‌ترینشان، بهتر است که تحلیلمان را به طور سیستماتیک به یک سری یادداشت تبدیل کنیم. یکی از روش‌های رسیدن به این مقصود، تنظیم آرایه‌ای است که در بردارندهٔ تمام امکانات باشد؛ به این ترتیب:

	نویسنده	خواننده	نقاش	بندباز
B				
P				
R				
S				

به عنوان مثال، اگر اکنون به این نتیجه برسیم که P نمی‌تواند بندباز باشد، حرفی، مثلاً ✗، در مقابل نام او در ستون با سرستون *بندباز* قرار می‌دهیم، یا اگر تشخیص دهیم که B باید نقاش باشد، علامت دیگری، مثلاً O، در مقابل نامش در این ستون می‌گذاریم، و با استفاده از آن می‌توانیم مربع‌های باقی‌ماندهٔ در این سطر و ستون را با ✗ پر کنیم (زیرا تنها یک B و تنها یک نقاش موجود است). به طور واضح، زمانی‌که به گونه‌ای سازگار و دقیق یک O در هر سطر و در هر ستون قرار دهیم، راه‌حل کامل می‌شود و با استفاده از آن، مشخص می‌کنیم که هریک از این اشخاص چه کاره است.

در مسألهٔ مورد بحث، از (۱) می‌دانیم که نه B و نه R خواننده است؛ در نتیجه در مقابل آن‌ها و در ستون مناسب × قرار می‌دهیم. از (۲) در می‌یابیم که P نه نقاش و نه نویسنده است و از (۳) می‌فهمیم که نویسنده نه B و نه S است. جدول، با ✗هایی که به نحو مطلوب در آن قرار گرفته‌اند، به صورت زیر است:

	نویسنده	خواننده	نقاش	بندباز
B	✗	✗		
P	✗		✗	
R		✗		
S	✗			

اکنون با حذف، آشکار می‌شود که R نویسنده است. در نتیجه یک O در مقابل نام او و در ستون با سرستون نویسنده قرار می‌دهیم و مربع‌های باقی‌مانده در سطرش را با × پرمی‌کنیم. گذشته از این، طبق (۲)، R مقابل نقاش قرار گرفته، در حالی که طبق (۴)B او را نمی‌شناسد؛ بنابراین B نقاش نیست و در نتیجه، با حذف، باید بندباز باشد. اما در این صورت نه Pو نه S نمی‌توانند بندباز باشند و این ملاحظه خواننده را به عنوان تنها مورد ممکن برای P به جا می‌گذارد. سرانجام، S باید نقاش باشد و راه‌حل کامل می‌شود.

شیوه‌ای که به توضیح آن پرداختیم، در مورد معماهای شناسایی نیز مناسب است؛ معماهایی که در آن‌ها اطلاعات لازم به صورت گزاره‌های شرطی یا ممکن خاص داده شده‌اند. دراین‌باره مثالی ساده می‌زنیم:

(۱) اگر A، P باشد، C، R نیست.

(۲) اگر B، P یا R باشد، A، Q است.

(۳) اگر A، Q یا R باشد، B، P است.

تناظر بین نمادهای (C، Bو A) و نمادهای (R، Qو P) را مشخص کنید.

فرض می‌کنیم کار را با پذیرش فرض A، P است، آغاز کرده‌ایم. در این صورت، جدولی رسم می‌کنیم که در آن O در مقابل A در ستون با سرستون P و × در مربع‌های دیگر واقع در سطر A و ستون P قرار داشته باشد:

	P	Q	R
A	O	✗	✗
B	✗		
C	✗		

اکنون از (۱)، C نمی‌تواند R باشد؛ در نتیجه باید Q باشد و در این صورت و لزوماً B باید R باشد. اما از (۲)، اگر B، R باشد، A باید Qباشد، که هم با فرض A، P است و هم با نتیجهٔ C، Q است، متناقض است. این عدم سازگاری وادارمان می‌کند که فرض A، P است را کنار بگذاریم.

اکنون کار را با رسم جدول تازه‌ای بر مبنای این واقعیت ادامه می‌دهیم که A، P نیست. بنا به (۳)، اگر A، P نباشد، آن‌گاه B باید P باشد. در نتیجه، می‌توان یکO در مقابل B در ستون P وارد کرد و در مربع‌های باقی‌مانده در این سطر و ستون × قرار داد:

	P	Q	R
A	✗		
B	O	✗	✗
C	✗		

در این صورت، از (۲) نتیجه می‌گیریم که A، Q است و از آن به دست می‌آوریم که C، R است، و حل مسأله را کامل می‌کنیم.

در بعضی معماها اطلاعات داده شده، شامل مجموعه‌ای از گزاره‌هایی ست که می‌دانیم تعدادی از آنها دروغ است؛ البته بدون این‌که مشخص باشد که اظهارات ناراست کدام است. معماهایی از این دست را نیز می‌توان با استفاده از جدول مورد بررسی قرار داد. به عنوان مثال، مورد زیر را در نظر می‌گیریم:

یک روز صبح فینلی «Finelli» را در حالی که گلوله خورده بود، مرده یافتند و پلیس چند ساعت بعد، سه مظنون را بازداشت کرد. سه مظنون مورد بازپرسی قرار گرفتند و اظهارات زیر را بیان کردند.

B: (۱) من این کار را نکرده‌ام.

(۲) قبل از این با J ملاقات نکرده‌ام.

(۳) البته فینلی را می‌شناختم.

J: (۱) من این کار را نکرده‌ام.

(۲) Bو T هر دو از رفقای من هستند.

(۳) B هرگز کسی را نکشته است.

T: (۱) من این کار را نکرده ام.

(۲) هنگامی که B گفت هیچ‌گاه J را ندیده، دروغ گفت.

(۳) نمی‌دانم چه کسی این کار را انجام داده است.

اگر یکی و تنها یکی از گزاره های هر نفر دروغ باشد و اگر یکی از سه نفر مقصر باشد، جنایتکار کدام است؟

در این مورد، جدول مناسب به صورت زیر است:

	۱	۲	۳
B			
J			
T			

و برای این که مسأله مان با گزاره های داده شده سازگار باشد، باید یک F (برای *دروغ*) و دو T (برای *راست*) در هر سطر آن وارد کنیم.

در آغاز می توانیم این استنتاج مثبت را استخراج کنیم که T بی گناه است؛ زیرا اگر او مرتکب جنایت شده باشد، اولین و سومین گزاره اش دروغ می شوند که متناقض با این شرط داده شده است، که تنها یکی از اظهارات هر نفر دروغ است. این نتیجه را می توانیم به صورت یک T مقابل *T* در ستون اول درج کنیم.

اکنون دو مورد داریم: یا (الف) B مقصّر است، یا (ب) J مقصّر است. اگر (الف) را فرض کنیم، در این صورت گزارهٔ اول B دروغ می شود و گزارهٔ آخر J نیز چنین است، و این مطلب، تحت شرایط مسأله به این معناست که گزارهٔ دوم B و گزارهٔ دوم J باید راست باشند. اما این غیرممکن است؛ زیرا این دو واضحاً مناقض یکدیگرند. در نتیجه باید این فرض را رها کنیم که B جنایتکار مورد بحث است. بنابراین، نتیجه می شود که J کسی است که فینلی را به قتل رسانده است و این موضوع را می توان با بررسی جدول کامل با توجه به مورد (ب) بررسی کرد:

	۱	۲	۳
B	T	F	T
J	F	T	T
T	T	T	F

معماهایی که با استفاده از رمزبندی یا مخفی کردن ارقام در یک محاسبهٔ حسابی مطرح می شوند، چیزی غیر از توجه به حقایق عددی واضح نیاز ندارند. در این مورد نیز مانند معماهای از نوع شفاهی تر پیشین، ردیابی سر نخ ها و نتایج با استفاده از طریق منظم جدول بندی مفید است. برای توضیح این مطلب، مثال زیر را در نظر می گیریم:

در یک مسألهٔ ضرب، به جای هر یک از ارقام ۰ تا ۹ حرف متفاوتی قرار داده ایم و محاسبهٔ رمزی شده را به صورت زیر درآورده ایم:

```
        A L E
        R U M
    ---------
      W I N E
    W U W L
  E W W E
  -----------
  E R M P N E
```

هر یک از این حروف، به جای چه رقمی قرار گرفته است؟

برای منظم کردن کار، ابتدا حروف متفاوت ظاهر در مسأله را در یک سطر می نویسیم:

ALERUMWINP

سپس زیر هر حرف، هم ارز عددی آن را، در صورت کشف، یادداشت می کنیم و در ستون های زیر، حروف گوناگون سرنخ ها و فرض های موقتی را در حالی می نویسیم که مواظبیم استنتاج های مرتبط را در یک سطر افقی قرار داده باشیم.

در مسائلی از این دست، با جست وجویی ساده، اغلب می توان ارقام ۰تا ۱ را به دست آورد یا دست کم آن ها را به امکاناتی بسیار معدود، محدود کرد. به عنوان نمونه، هیچ گاه ۰ به صورت آخرین رقم سمت چپ یک عدد صحیح قرار نمی گیرد و زمانی که عددی در صفر ضرب شود، نتیجه منحصراً از صفرها تشکیل می شود. گذشته از این، هنگامی که عددی در ۱ ضرب شود، نتیجهٔ خود آن عدد است. در مسألهٔ مورد بحث، می توان ۰ را با بررسی حتی ساده تری شناخت؛ زیرا در ستون دوم از راست، N به علاوهٔ L برابر N شده، در حالی که عددی از ستون سمت راست انتقال نیافته و این بدان معناست که L باید صفر باشد.

در جست وجویمان برای ۱، می توانیم بلافاصله R، U و

M را حذف کنیم؛ زیرا هیچ‌یک از آن‌ها، به عنوان مضروب‌فیه سطر دوم، ELA را به دست نداده است. گذشته از این، E به این دلیل نمی‌تواند ۱ باشد که U برابر E حاصلی مختوم به U به دست نداده است. در مسألهٔ مورد بحث، سرنخ‌هایی در این مورد نداریم که A، I، N، P یا W رقم ۱ هستند یا نه.

حاصلضرب جزئی WUWL به L ختم شده است، که می‌دانیم ۰ است. در نتیجه یکی از دو حرف U و E باید ۵ باشد. با نگاه کردن به رقم‌های یکان حاصل ضرب‌های جزئی دیگر، ملاحظه می‌کنیم که هم M×E و هم R×E اعداد ختم شده به E هستند. اندکی دقت (یا نگاهی به جدول ضرب)، نشان می‌دهد که در این صورت E باید ۵ باشد.

اما در صورت ۵ بودن E، R و M باید فرد باشند؛ زیرا عدد زوج ضرب شده در ۵، حاصلی مختوم به ۰ می‌دهد و در هیچ‌یک از دو حاصلضرب جزئی اول و سوم، چنین نیست. گذشته از این، با استدلالی مشابه، واضح می‌شود که U عددی زوج است.

در این مرحله، بهتر است به جدولمان بازگشته، زیر U امکانات مختلف، یعنی ۲، ۴، ۶ و ۸ را قرار دهیم. مقابل هریک از این‌ها مقدار نظیر W را، چنان که از حاصلضرب جزئی WUWL دریافته‌ایم، می‌نویسیم. اکنون دو رقم آخر این حاصلضرب معین می‌شوند؛ زیرا مشخص است که عامل ALE برابر ۵ ۰ـ است. به سادگی ملاحظه می‌شود که این مقادیر W برابر ۱، ۲، ۳ و ۴ است.

اکنون با بررسی ستون دوم از چپ، می‌توانیم امکان‌های نظیر R را استنتاج کنیم. همان‌گونه که قبلاً ملاحظه کردیم، R باید فرد باشد؛ در نتیجه مقدار آن دو برابر W به‌علاوهٔ ۱ است (۱ به ضرورت از ستون سمت راست آن انتقال یافته است.) در این صورت، مقادیر ممکن R عبارت‌اند از ۳، ۵، ۷ و ۹، و جدولمان به صورت زیر در می‌آید:

A	L	E	R	U	M	W	I	N	P
	۰	۵							
			۳	۲		۱			
			۵	۴		۲			
			۷	۶		۳			
			۹	۸		۴			

اکنون در ستون سوم از چپ مثال، مجموع ارقام U، W و W باید بیش از ۹ باشد؛ زیرا ۱ باید از این ستون به ستون سمت چپ انتقال یافته باشد. مقادیر واقع در دو سطر اول جدول، برای این منظور بسیار کوچک‌اند؛ بنابراین می‌توانیم هر دوی این سطرها را خط بزنیم.

بررسی بیشتر مجموع ارقام U، W و W در ستون سوم از چپ و در ارتباط با این واقعیت که M فرد است، نشان می‌دهد که M در سطر سوم جدول، باید ۳ باشد؛ در حالی که در سطر چهارم باید ۷ باشد. این ماجرا مجازمان می‌کند که سطر سوم جدول را نیز کنار بگذاریم؛ زیرا این سطر شامل ۳، هم برای M و هم برای W است، که غیر ممکن است. بنابراین، جواب صحیح باید جوابی باشد که در سطر چهارم است. در نتیجه R، ۹، U، ۸، M، ۷ و W، ۴ است. با قرار دادن این مقادیر در مسأله، مشخص کردن این که A، ۶، I، ۲، N، ۳، P، ۱ است، عملی آسان است و حل مسأله را کامل می‌کند.

مثال زیر را به عنوان مثالی از معمایی در نظر می‌گیریم که به جای ارقام رمزبندی شده، شامل رقم‌های پنهان است: یک مسأله تقسیم طولانی هر رقم غیر از رقم ۷ پنهان است، به صورت زیر است:

```
            • ۷ •
      • • | • • • • •
            • ۷ ۷
              • ۷ •
              • ۷ •
                  •   •
                  •   •
```

ارقام مفقود را بیابید.

مرحلهٔ واضح پرداختن به این مسأله، اولین حاصلضرب جزئی آن، یعنی ۷۷– است؛ زیرا این حاصلضرب بیش‌تر از موارد واقع در مسألهٔ مشخص شده است. اما تنها اعداد یک رقمی‌ای که حاصلضربشان به ۷ ختم می‌شود، ۳ و ۹ هستند. در نتیجه، اولین رقم واقع در خارج قسمت، باید یکی از این اعداد و آخرین رقم واقع در مقسوم‌علیه، باید عدد دیگر باشد. اگر مقسوم‌علیه‌های ممکن را به صورت ۹– در نظر بگیریم و هریک را در ۳ ضرب کنیم، در می‌یابیم که تنها موردی که

حاصلضربی به صورت ۷۷- به دست می‌دهد، ۵۹ است که ۱۷۷ را می‌دهد. از طرف دیگر، اگر مقسوم‌علیه‌های به صورت ۳- را مورد بررسی قرار دهیم و هر یک را در ۹ ضرب کنیم، در می‌یابیم که تنها ۵۳ حاصلضرب به صورت ۷۷- را به دست می‌دهد. اما باید اولین امکان از این دو را کنار بگذاریم؛ زیرا زمانی که ۵۹ در دومین رقم واقع در خارج قسمت، یعنی ۷ ضرب شود، نتیجه ۴۱۳ می‌شود؛ در حالی که بنا بر مسأله، دومین حاصلضرب جزئی، به صورت -۷- است. این بررسی ۵۳ را به عنوان امکان منحصربه‌فرد مقسوم‌علیه و ۹ را به عنوان رقم اول مقسوم‌علیه باقی می‌گذارد. سرانجام ملاحظه می‌کنیم که آخرین رقم خارج قسمت باید ۱ باشد؛ زیرا آخرین حاصلضرب جزئی تنها شامل دو رقم است. با دانستن این‌که مقسوم‌علیه ۵۳ و خارج‌قسمت ۹۷۱ است، می‌توانیم برای به‌دست آوردن مقسوم، آن‌ها را در هم ضرب کنیم. در این صورت، بقیهٔ مسأله بلافاصله به دست می‌آید.

معمولاً اغلب معماهای هر مجموعه، جواب‌های منحصربه‌فرد دارند؛ اما تعداد اندکی از آن‌ها، به پاسخ‌های متفاوت و متعددی منجر می‌شوند؛ وضعیتی که عموماً در صورت مسأله خاطرنشان می‌شود. پاره‌ای معما نیز وجود دارند که در آن‌ها موضوع نه یافتن جواب، بلکه اثبات آن است، که داده‌های مفروض، در صورتی که با هم در نظر گرفته شوند، ناسازگارند. در توضیح معمایی از این دست، تفریق رمزبندی شدهٔ زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{array}{r} E\ I\ G\ H\ T \\ -\ T\ H\ R\ E\ E \\ \hline F\ I\ V\ E \end{array}$$

اگر فرض بر این باشد که هریک از حروف به جای رقم متفاوتی قرار دارد، ثابت کنید تخصیص رقم یکتا به هریک از این حروف، برای تشکیل تفریق صحیح، ممکن نیست.

ابتدا توجه می‌کنیم که در چپ‌ترین ستون، تفریق T از E، رقم ۰ را به‌جا گذاشته است. در نتیجه E باید دقیقاً ۱ واحد بیش‌تر از T باشد (۱ را از E برای استفاده در ستون دوم فرض کرده‌ایم). اما در راست‌ترین ستون، T منهای E، رقم E را می‌دهد (زیرا E بزرگ‌تر از T است. برای امکان این تفریق، باید ۱ را از ستون واقع در چپ آن قرض کنیم.) یا در جهت عکس، E بعلاوهٔ E، عددی دو رقمی است که T را در مکان یکان خود دارد. در نتیجه T باید زوج باشد و البته متفاوت از ۰؛ زیرا به عنوان چپ‌ترین رقم، در سطر دوم مسأله ظاهر شده است. بنابراین امکان‌های زیر را داریم:

T:۲ ۴ ۶ ۸

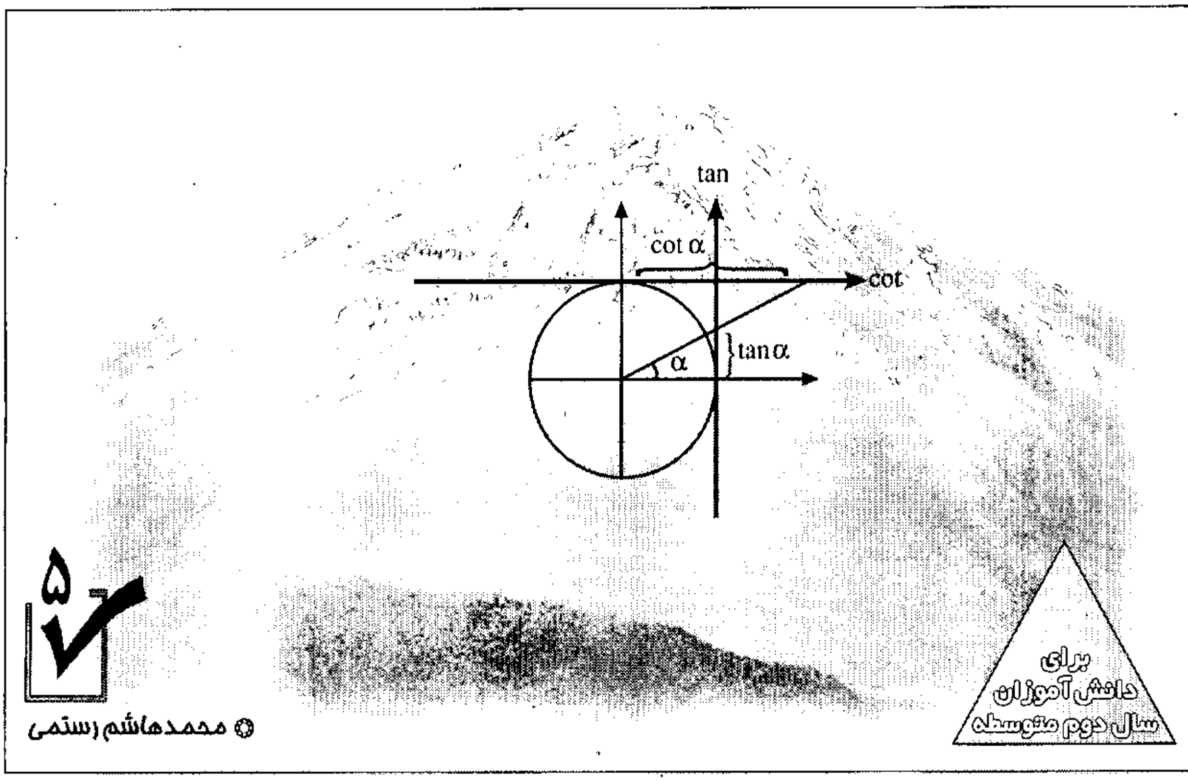
E:۶ ۷ ۸ ۹

در میان این موارد، تنها یک جفت، یعنی E=۹ و T=۸ است که شرط دیگر را برقرار می‌کنند؛ یعنی این شرط را که E یک واحد بیش‌تر از T است.

اکنون تفریق واقع در ستون دوم از راست را در نظر می‌گیریم. پیش از این ملاحظه کردیم که باید از H عدد ۱ را برای استفاده در ستون سمت راست قرض بگیریم. در نتیجه E، یعنی ۹، چون از H منهای ۱ کم شود، V را به جا می‌گذارد. اما این که اول ۱ را از عددی قرض بگیریم و بعد ۹ واحد از آن‌چه می‌ماند، کم کنیم، برابر آن است که از عدد اصلی ۱۰ واحد کم شود، و زمانی که ۱۰ از هر عدد کم شود، رقم یکان آن عدد لزوماً به همان صورت رقم یکان پاسخ ظاهر می‌شود. در نتیجه، حاصل تفریق در ستون دوم از راست باید H باشد و نمی‌تواند رقم متفاوت V شود. این تناقض ناگزیر ثابت می‌کند که مسأله را نمی‌توان برای به‌دست دادن تفریقی صحیح رمزبندی کرد.

حل بسیاری از معماهای متعارف آسان است؛ اما بعضی از آن‌ها نسبتاً مشکل‌اند. احتمال دارد که شخصی بعضی را آسان‌تر از شخصی دیگر بیابد؛ چرا که روش‌های تحلیل از فردی به فرد دیگر تفاوت می‌کند. زمان لازم برای حل یک مسألهٔ خاص نیز، به‌عنوان دلیلی بر قابلیت استدلال حل کننده، کم‌اهمیت است؛ زیرا ممکن است شخصی بنا به تصادف محض، فرض صحیح را برای اولین آزمایش خود انتخاب کند؛ در حالی که ممکن است فردی با همان ضریب هوشی، پیش از رسیدن به فرض درست، تعدادی نامشخص از فرض‌های نابسامان را جست‌وجو کند.

این نکته را نیز بیفزاییم که ممکن است معمایی در محتوا تازه و جدید باشد، اما در صورت نمی‌تواند؛ زیرا طرح معمایی که از لحاظ صورت کاملاً تازه باشد، تقریباً غیرقابل تصور است. به‌طور کلی معمایی را فکری-منطقی می‌گوییم که با کم‌ترین اطلاعات لازم و تنها توسط استدلال منطقی قابل حل باشد.



محمدهاشم رستمی

حلّ معادله های ساده مثلثاتی

اشاره

حل معادله‌های $\sin X = a$ و $\cos X = b$ را قبلاً دیدیم. اکنون حل معادله‌های $tgX = c$ و $\cot gX = d$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

حل معادله‌های $tgX = c$ و $\cot gX = d$.

فرض می‌کنیم $c = tg\alpha$، یا $d = \cot g\alpha$ باشد. در این صورت داریم:

$$tgX = tg\alpha \Rightarrow X = k\pi + \alpha$$

$$\cot gX = \cot g\alpha \Rightarrow X = k\pi + \alpha$$

بنابراین جواب کلی هر دو معادلهٔ $tgX = tg\alpha$ و $\cot gX = \cot g\alpha$ به صورت $X = k\pi + \alpha$ است.

مثال ۱. معادلهٔ $۳tgx - \sqrt{۳} = ۰$ را حل کنید.

حل: داریم:

$$۳tgx - \sqrt{۳} = ۰ \Rightarrow ۳tgx = \sqrt{۳} \Rightarrow tgx = \frac{\sqrt{۳}}{۳} = tg\frac{\pi}{۶}$$

$$\Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۶}$$

مثال ۲. معادلهٔ $۳tgx + \sqrt{۳} = ۰$ را حل کنید.

حل: داریم:

$$۳tgx + \sqrt{۳} = ۰ \Rightarrow ۳tgx = -\sqrt{۳} \Rightarrow tgx = \frac{-\sqrt{۳}}{۳} = -tg\frac{\pi}{۶}$$

$$= tg\left(\frac{-\pi}{۶}\right) \Rightarrow x = k\pi + \left(-\frac{\pi}{۶}\right) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۶}$$

مثال ۳. معادلهٔ $۳\cot gx - \sqrt{۳} = ۰$ را حل کنید.

حل: داریم:

$$۳\cot gx - \sqrt{۳} = ۰ \Rightarrow ۳\cot gx = \sqrt{۳} \Rightarrow \cot gx = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$= \cot g\frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۳}$$

مثال ۴. معادلهٔ $۳\cot gx + \sqrt{۳} = ۰$ را حل کنید.

حل: داریم:

$$3\cot gx+\sqrt{3}=0\Rightarrow 3\cot gx=-\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \cot gx=-\frac{\sqrt{3}}{3}=-\cot g\frac{\pi}{3}=\cot g\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow x=k\pi+\left(-\frac{\pi}{3}\right)\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{3}$$

مثال ۵. جواب کلی معادلهٔ $(2+\sqrt{3})tg2x-1=0$ و سپس جواب‌های خصوصی موجود در بازهٔ $(0,\pi)$ را به‌دست آورید.

حل: داریم:

$$(2+\sqrt{3})tg2x-1=0\Rightarrow(2+\sqrt{3})tg2x=1$$

$$\Rightarrow tg2x=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{1(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=\frac{2-\sqrt{3}}{4-3}$$

$$=2-\sqrt{3}=tg\frac{\pi}{12}$$

جواب کلی معادلهٔ

$$\Rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{12}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{24}$$

برای تعیین جواب‌های خصوصی مورد نظر، به جای k، عددهای صحیح مناسب قرار می‌دهیم.

k	x	
-1	$\frac{-11\pi}{24}<0$	
0	$\frac{\pi}{24}$	جواب
1	$\frac{13\pi}{24}$	جواب
2	$\pi+\frac{\pi}{24}>\pi$	

به‌طوری که دیده می‌شود، جواب‌های خصوصی موجود در بازهٔ $(0,\pi)$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{24}$ و $\frac{13\pi}{24}$.

مثال ۶. ریشهٔ کلی معادلهٔ $\cot g(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2})+1=0$ و سپس ریشه‌های موجود در بازهٔ $(0,2\pi)$ را تعیین کنید.

حل: داریم:

$$\cot g(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2})+1=0\Rightarrow \cot g(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2})=-1=-\cot g\frac{\pi}{4}$$

$$=\cot g(-\frac{\pi}{4})\Rightarrow \frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}=k\pi+(-\frac{\pi}{4})\Rightarrow \frac{-x}{2}=k\pi-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{-x}{2}=k\pi-\frac{5\pi}{12}\Rightarrow x=-2k\pi+\frac{5\pi}{6}$$

جواب کلی معادلهٔ

برای تعیین جواب‌های خصوصی موجود در بازهٔ $(0,2\pi)$ به جای k، عددهای صحیح مناسب قرار می‌دهیم.

k	x	
-1	$2\pi+\frac{5\pi}{6}>2\pi$	
0	$\frac{5\pi}{6}$	جواب
1	$-\frac{7\pi}{6}<0$	

تنها جواب خصوصی موجود در بازهٔ داده شده، $x=\frac{5\pi}{6}$ است.

مثال ۷. معادلهٔ $tg\pi x-\sqrt{3}=0$ داده شده است.

الف. ریشهٔ کلی این معادله را به‌دست آورید.

ب. ریشه‌های خصوصی موجود در بازهٔ $(-1,1)$ را تعیین کنید.

حل: **الف**. داریم:

$$tg\pi x-\sqrt{3}=0\Rightarrow tg\pi x=\sqrt{3}=tg\frac{\pi}{3}\Rightarrow \pi x=k\pi+\frac{\pi}{3}$$

$\Rightarrow x=k+\frac{1}{3}$ جواب کلی معادلهٔ

k	x
-2	$-\frac{5}{3}<-1$
-1	$-\frac{2}{3}$
0	$+\frac{1}{3}$
1	$\frac{4}{3}>1$

به‌طوری که دیده می‌شود، جواب‌های خصوصی موجود در بازهٔ $(-1,+1)$ عبارت‌اند از: $-\frac{2}{3}$ و $+\frac{1}{3}$.

مثال ۸. معادلهٔ $\mathrm{tg}(2x+\frac{\pi}{3})+\cot g(\frac{\pi}{6}-3x)=0$ را حل کنید.

حل: این معادله را می‌توان به یکی از دو صورت $\mathrm{tg}X=\mathrm{tg}\alpha$ ، یا $\cot gX=\cot g\alpha$ تبدیل نمود و سپس حل کرد. ما آن را به صورت $\mathrm{tg}X=\mathrm{tg}\alpha$ تبدیل و سپس حل می‌کنیم. داریم:

$$\mathrm{tg}(2x+\frac{\pi}{3})+\cot g(\frac{\pi}{6}-4x)=0$$

$$\Rightarrow \mathrm{tg}(2x+\frac{\pi}{3})=-\cot g(\frac{\pi}{6}-4x)=\cot g(-\frac{\pi}{6}+4x)$$

$$\Rightarrow 2x+\frac{\pi}{3}=k\pi+(-\frac{\pi}{6}+4x)\Rightarrow 2x-4x=k\pi-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}$$

جواب کلی معادله

$$\Rightarrow -2x=k\pi-\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{-k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$$

مثال ۹. معادلهٔ $\mathrm{tg}(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{3})-3m+4=0$ داده شده است.

الف. حدود m را چنان بیابید که $\frac{2\pi}{9}<x<\frac{7\pi}{18}$ باشد.

ب. حدود m را چنان تعیین کنید که $\frac{7\pi}{18}<x<\frac{5\pi}{9}$ باشد.

پ. مقدار m را چنان تعیین کنید که یکی از جواب‌های معادله $x=\frac{13\pi}{18}$ باشد.

ت. مقدار m را چنان تعیین کنید که $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=1$ باشد.

ث. به ازای $m=\frac{5}{3}$ معادله را حل کنید.

حل: الف. داریم:

$$\mathrm{tg}(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{3})-3m+4=0\Rightarrow \mathrm{tg}(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{3})=3m-4$$

$$\frac{2\pi}{9}<x<\frac{7\pi}{18}\Rightarrow \frac{\pi}{3}<\frac{3x}{2}<\frac{7\pi}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}<\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{3}<\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow 0<\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{4}\Rightarrow \mathrm{tg}0<\mathrm{tg}(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{3})<\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow 0<3m-4<1\Rightarrow 4<3m<5\Rightarrow \frac{4}{3}<m<\frac{5}{3}$$

ب. داریم:

$$\frac{7\pi}{18}<x<\frac{5\pi}{9}\Rightarrow \frac{3}{2}\times\frac{7\pi}{18}<\frac{3x}{2}<\frac{5\pi}{9}\times\frac{3}{2}\Rightarrow \frac{7\pi}{12}<\frac{3x}{2}<\frac{5\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{3}<\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{3}<\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\Rightarrow \frac{\pi}{4}<\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}$$

$$\mathrm{tg}(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{3})>\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}=1\Rightarrow 3m-4>1\Rightarrow 3m>5$$

$$\Rightarrow m>\frac{5}{3}$$

پ. برای آن که $x=\frac{13\pi}{18}$ ، یکی از ریشه‌های معادلهٔ داده شده باشد، باید در این معادله صدق کند؛ یعنی داشته باشیم:

$$\mathrm{tg}(\frac{3}{2}\times\frac{13\pi}{18}-\frac{\pi}{3})-3m+4=0\Rightarrow \mathrm{tg}\frac{3\pi}{4}-3m+4=0$$

$$\Rightarrow -1-3m+4=0\Rightarrow -3m=-3\Rightarrow m=1$$

ت. یک ریشه از معادلهٔ $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=1$ را به دست آورده، در معادلهٔ داده شده قرار می‌دهیم. داریم:

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2}=1=\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}\Rightarrow \frac{x}{2}=k\pi+\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

$$k=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}\xrightarrow{\text{در معادلهٔ داده شده}}\mathrm{tg}(\frac{3\times\frac{\pi}{2}}{2}-\frac{\pi}{3})-3m+4=0$$

$$\Rightarrow \mathrm{tg}\frac{5\pi}{12}-3m+4=0\Rightarrow 2+\sqrt{3}-3m+4=0$$

$$\Rightarrow m=\frac{6+\sqrt{3}}{3}$$

ث. داریم:

$$m=\frac{5}{3}\xrightarrow{\text{در معادلهٔ داده شده}}\mathrm{tg}(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{3})-3\times\frac{5}{3}+4=0$$

$$\Rightarrow \mathrm{tg}(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{3})-5+4=0\Rightarrow \mathrm{tg}(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{3})=1=\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{3x}{2}-\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{4}\Rightarrow \frac{3x}{2}=k\pi+\frac{7\pi}{12}\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{7\pi}{18}$$

مثال ۱۰. معادلهٔ $3\cot g(2\pi x+\frac{\pi}{4})-2m-1=0$ داده شده است.

الف. حدود m را چنان تعیین کنید که $-\frac{1}{8}<x<0$ باشد.

ب. حدود m را چنان بیابید که $-\frac{1}{8}<x<\frac{1}{8}$ باشد.

پ. مقدار m را چنان بیابید که یکی از جواب‌های معادله $x=\frac{1}{2}$ باشد.

ت. به ازای $m=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$، معادله را حل کنید.

حل: الف.

$$3\cot g(2\pi x+\frac{\pi}{4})-2m-1=0\Rightarrow \cot g(2\pi x+\frac{\pi}{4})=\frac{2m+1}{3}$$

$$-\frac{1}{8}<x<0\Rightarrow -\frac{\pi}{4}<2\pi x<0\Rightarrow -\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}<2\pi x+\frac{\pi}{4}<0+\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow 0<2x+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}\Rightarrow \cot g(2x+\frac{\pi}{4})>1$$

$$\Rightarrow \frac{2m+1}{3}>1\Rightarrow 2m+1>3\Rightarrow m>1$$

ب. با توجه به این که $\cot g(2\pi x+\frac{\pi}{4})=\frac{2m+1}{3}$ است، داریم:

$$-\frac{1}{8}<x<\frac{1}{8}\Rightarrow -\frac{\pi}{4}<2\pi x<\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}<2\pi x+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow 0<2\pi x+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}\Rightarrow \cot g(2\pi x+\frac{\pi}{4})>0\Rightarrow \frac{2m+1}{3}>0$$

$$\Rightarrow 2m+1>0\Rightarrow 2m>-1\Rightarrow m>-\frac{1}{2}$$

پ. $x=\frac{1}{2}$، باید در معادله صدق کند. داریم:

$$x=\frac{1}{2}\xrightarrow{\text{در معادله}}3\cot g(\pi+\frac{\pi}{4})-2m-1=0$$

$$\Rightarrow 3\times 1-2m-1=0\Rightarrow 2m=2\Rightarrow m=1$$

ت. داریم:

$$m=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\xrightarrow{\text{در معادله}}3\cot g(2\pi x+\frac{\pi}{4})-2(\frac{\sqrt{3}-1}{2})-1=0$$

$$3\cot g(2\pi x+\frac{\pi}{4})-\sqrt{3}=0\Rightarrow 3\cot g(2\pi x+\frac{\pi}{4})=\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \cot g(2\pi x+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{3}}{3}=\cot g\frac{\pi}{3}\Rightarrow 2\pi x+\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow 2x+\frac{1}{4}=k+\frac{1}{3}\Rightarrow 2x=k+\frac{1}{12}\Rightarrow x=\frac{k}{2}+\frac{1}{24}$$

معماهای فــکری و منطقی

C، F، M و S در شهر کوچکی به‌عنوان معمار، بانکدار، داروساز و بقّال ـ گرچه نه لزوماً به این ترتیب ـ خدمت می‌کنند. درآمد هر شخص تعداد درستی دلار است.

داروساز دقیقاً دو برابر بقّال پول درمی‌آورد، معمار دقیقاً دو برابر داروساز و بانکدار دقیقاً دو برابر معمار.

گرچه C از هر کسی که بیش از F درآمد دارد، بزرگ‌تر است و F دو برابر C پول درنمی‌آورد.

S دقیقاً ۳۷۷۶ دلار بیش از M به دست می‌آورد.

شغل هر کس چیست؟

گفت و گو با استاد احمد قندهاری

ذات ریاضی صداقت است

استاد احمد قندهاری، معلم، مؤلف و پژوهنده‌ای است که شما خوانندگان عزیز مجله، آثار ایشان را در شماره‌های گذشته مطالعه کرده‌اید. به جهت آشنایی بیشتر؛ این مصاحبه را آقای غلامرضا یاسی‌پور تدوین کرده‌اند و البته اعضای هیأت تحریریه مجله هم در این مصاحبه شرکت داشته‌اند و سؤالاتی را از استاد قندهاری پرسیده‌اند.

❖ **یاسی‌پور: بسم‌الله الرحمن الرحیم و به نستعین، عَلَیْکَ بِحُسْنِ الخُلق انَّ اَحْسَنَ النّاس خُلُقاً اَحْسَنَهُمْ دیناً**

در حدیث آمده که جزو محاسن اصلی هر بشر، حُسن‌خلق است؛ یعنی خوشخو بودن؛ چرا که پیغمبر اکرم صلوات‌الله علیه، نشانهٔ دینداری را خوشخویی می‌دانند و فرموده‌اند که هر که خوشخوتر باشد، دینش برتر و بالاتر است. بالاترین دینداران، خوشخوترین افراد هستند. بنده هم اولین سؤالم را در مورد همین خوشخویی شروع می‌کنم که یکی از ویژگی‌های استاد قندهاری است؛ یعنی می‌خواهیم بدانیم که استاد قندهاری چطور پس از این همه سال تدریس، همچنان خوشخو و خوش‌خلق مانده‌اند؟

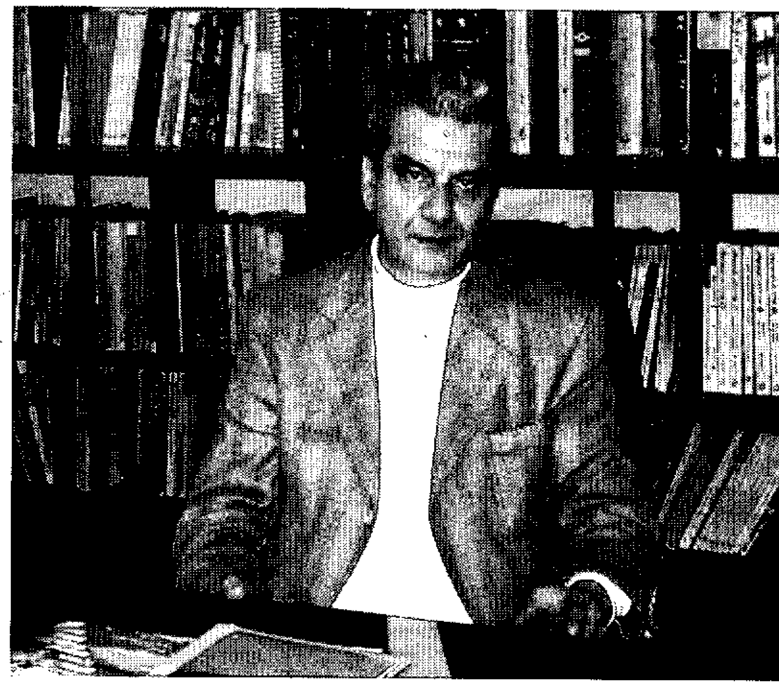
⚙ **استاد قندهاری:** بسم‌الله الرحمن الرحیم. من اصولاً سر کلاس فقط درس نمی‌دهم؛ بلکه زندگی می‌کنم؛ یعنی واقعاً دانش‌آموزان را مثل بچه‌های خودم یا الان که دیگر مثل نوه‌هایم هستند، با آنان رفتار می‌کنم. اگر مطلب خنده‌داری پیش بیاید، می‌گویم و اگر خسته شوم، به دانش‌آموزان می‌گویم حرف بزنند و کمی شوخی کنند تا خستگی‌مان درآید. این جوّ نشاط و شادی را در کلاس، من حاکم می‌کنم. رابطه‌ام با آنان، رابطهٔ شاگردی و معلمی سنّتی نیست که فقط معلم درس بدهد و شاگردان ساکت بنشینند و اجازهٔ صحبت نداشته باشند.

❖ **سؤال بعد این که، روحیهٔ طنزآمیز شما از کجا ناشی شده و آن را از چه زمانی شروع کرده‌اید؟ چون دیده شده که همیشه نکته‌های طنزآمیز هم در صحبت‌هایتان وجود دارد.**

⚙ من معمولاً با مطالعهٔ ادبیات و شعر، خستگی ریاضی را در می‌کنم؛ یعنی همیشه شعر می‌خوانم و در مورد مسائل اجتماعی و سیاسی مطالعه دارم. این است که طبعاً آن مقولهٔ طنز را به‌وجود می‌آورد و من این روحیه را در حوزهٔ روزمرّهٔ خودم و کار تدریس تلفیق می‌کنم.

❖ **آیا سر کلاس دربارهٔ مطالب ادبی هم صحبت می‌کنید؟**

⚙ بله، حتماً. خیلی وقت‌ها شده که من به دانش‌آموزان گفتم، امروز حالم خوب نیست، بگذارید اول یک شعر برایتان بخوانم.



من اصولاً سر کلاس فقط درس نمی‌دهم، بلکه زندگی می‌کنم

من معمولاً با مطالعهٔ ادبیات و شعر، خستگی ریاضی را درمی‌کنم

من اعتقاد دارم که ریاضی پلی است که یک طرفش محاسبات است و یک طرفش هنر

❖ این شعرها را هم من از شما شنیده‌ام. تا آن‌جایی که برخورد داشته‌ام، هم شعرهای شاعران قدیم بوده، هم شاعران جدید، و شما با حافظ کاملاً آشنا هستید.

۞ بله، همین‌طور است. من حتی مقاله‌ای هم دربارهٔ حافظ نوشته‌ام؛ حالا اگر قابل باشد، خدمت شما تقدیم می‌کنم. شاید من بیش از صد بار حافظ را خوانده‌ام. چون در هر زمانی، از حافظ برداشت خاصی می‌کنم. اصولاً کتاب حافظ، یک دوست زودآشنای دست‌نیافتنی است. زودآشناست به این علت که شعرش را هر کسی با هر بضاعتی بخواند، یک چیزی دریافت می‌کند؛ اما شما وقتی اطلاعاتتان بیشتر می‌شود، دقتتان هم بیشتر می‌شود و برداشت‌های جدیدی از شعر خواهید داشت. این است که حافظ خیلی زیاد به دلم می‌نشیند. غیر از حافظ، شعرهای **اخوان ثالث** را هم خیلی دوست دارم. اکثر شاعران نوپرداز، شعرهای زیبا دارند؛ مانند **فریدون مشیری**، که شعر «کوچه»اش بسیار زیباست، یا این غزل از **هوشنگ ابتهاج**:

امشب به قصهٔ دل من گوش می‌کنی
فردا مرا چو قصه فراموش می‌کنی

که بسیار زیباست و یا شاعرانی مانند **سیاوش کسرایی** با شعر **آرش کمانگیر**، **احمد شاملو** با شعرهای **پریاش و عموصحرایش**، **سهراب سپهری** با شعر **صدای پای آب**، **فروغ فرخزاد** با شعرهای **تولدی دیگرش** و بسیاری از شاعران معاصر دیگر.

❖ پس شما اعتقاد دارید که ریاضی جدا از شعر و هنر نیست؛ بلکه به عکس، با آن‌ها خیلی مرتبط است.

۞ من اعتقاد دارم که ریاضی پلی است که یک طرفش محاسبات است و یک طرفش هنر. وقتی شما خوب تدریس می‌کنید، به اعتقاد من، این حاکی از هنر شماست.

❖شرقی: استاد، من هم با عقیدهٔ شما مبتنی بر خوش‌خلقی و خنده‌رویی در کلاس درس موافقم و خودم هم از ابتدای تجربهٔ معلمی، سعی کرده‌ام همین گونه باشم؛ اما احساس می‌کنم ـ در میان نسل جدید، ظرفیت دانش‌آموزان برای این مسأله کمتر شده است. آیا با نظر اینجانب موافقید و چه راهنمایی‌ای برای ما دارید؟

۞ اصولاً به دلایلی که عرض می‌کنم،

معتقدم این طور نیست. برعکس تصور ما، در مجموع، هوش بچه‌های یک کلاس از هوش معلم بالاتر است. بنابراین معلم نباید کاری کند که تو ذوق دانش‌آموزان بخورد. مثلاً نباید از خودش تعریف کند؛ بلکه باید دیگران از او تعریف کنند.

❖ یعنی بچه‌ها تغییر نکرده‌اند و ظرفیتشان برای خندیدن کم نشده؟ چون این نکته از نظر اجتماعی و آسیب‌شناسی دانش‌آموزی، بسیار نکتهٔ مهمی است.

❂ من برخورد خاصی ندارم.

❖ یاسی‌پور: بله، این نکته‌ای که فرمودید بسیار مهم است؛ یعنی تمامیت. ما با این نکته در داستان انوشیروان و بزرگمهر در تاریخ ادبیاتمان برخورد کردیم، که وقتی سفیر روم به ایران آمده بود، انوشیروان برای این که به اصطلاح، پیش سفیر روم پُز بدهد، از بزرگمهر پرسید: «ای بزرگمهر تو همه چیز را می‌دانی؟» توقّع داشت که بگوید آری، می‌دانم، که او هم پُز بدهد که بله ما چنین وزیری داریم. ولی او به‌عکس، پاسخ منفی داد. گفت: «نه من همه چیز را نمی‌دانم.» خوب این پاسخ برای او خیلی گران تمام شد. سؤال بعدش این بود که پرسید: «پس همه چیز را که می‌داند؟» گفت: «همه چیز را همگان دانند و همگان هنوز از مادر نزاده‌اند.» این، به تمامیت اشاره دارد؛ زیرا اصطلاحی در ریاضیات داریم به نام تمامیت یا کلیت (Totality)، و این کلیت ماجرا خیلی مهم است. شما اشاره کردید که کل کلاس هوشش از معلم بیشتر است، قطعاً همین طور باید باشد. این همان مسألهٔ تمامیتی است که مطرح کردیم؛ ولی سؤالی که آقای شرقی کرده‌اند، سؤال بسیار مهمی بود که شما پاسخ قطعی به آن دادید و فرمودید که حداقل از نظر شما، این ماجرا و این مسأله تغییر نکرده است.

خوب، این جنبهٔ ادبی که شما فرمودید، بفرمایید در نوشته‌های ریاضی هم باید رعایت شود یا نه؟ یعنی آیا متن‌های ریاضی از ادبیات خاصی برخوردار باشند یا نه؟ زیرا در زبان‌های خارجی می‌بینیم که ریاضیات، فیزیک یا شیمی، از ادبیات و زبان خاصی برخوردارند. ما این زبان را گم کرده‌ایم؛ مثلاً ابوریحان بیرونی در «التفهیم»اش، که به زبان عربی نوشته و بعد خودش به زبان فارسی ترجمه کرده است، می‌گوید اگر من می‌خواستم این مطلب را به زبان خوارزمی، که زبان مادری و اصلی من بود، بنویسم، یک چیز مضحکی از آب درمی‌آمد. برای این که آن زبان، آمادگی این مطالب و اصطلاحاتش را نداشت. بنابراین من به زبان عربی نوشتم و بعد به زبان فارسی درآوردم، و این کتاب را برای یک دختر دوازده، سیزده ساله به نام «ریحانه» نوشته، که او بتواند بخواند؛ یعنی در این حد مطلب را ساده کرده است. آیا شما اعتقادتان بر این است که، با کتاب‌ها و مقالات متعددی که به زبان فارسی یا انگلیسی نوشته‌اید، آیا در آن‌ها ما باید یک زبان ادبی ریاضی داشته باشیم یا نه؟ و اگر باید داشته باشیم، باید تا چه حدّی باشد؟

❂ آنچه که مسلّم است این که، نویسندگانی که کتاب ریاضی می‌نویسند، باید با ادبیات ریاضی آشنا باشند؛ اما تا آن‌جا که من اطلاع دارم، چنین نیست. در مورد نوشته‌های خودم، من سعی می‌کنم برای بچه‌ها بنویسم و این، کار کوچکی نیست. کمااین که شما اگر کتابی برای کودکان می‌نویسید، این کار، کودکانه نیست؛ بنابراین از حساسیت خاصی برخوردار است. آنچه که مسلّم است، این که شما از لحاظ ریاضی باید مطلب را صحیح بگویید، حالا می‌خواهد با لغات ساده‌تر باشد یا سخت‌تر. تعاریف باید مانع و جامع، و دقیق باشد. از این نظر، من یک مقداری رعایت می‌کنم.

❖امیری: در ارتباط با ادبیات ریاضیات، من فکر می‌کنم دانستن منطق ریاضی، یکی از واجبات است؛ زیرا منطق ریاضی، دستور زبان ریاضی است. کسی که دستور زبان نداند، ممکن است جای فعل و فاعل را اشتباه کند. این است که آن ادبیات، شاید قسمت عمده‌اش به منطق ریاضی مربوط شود.

❖صدر: از دانش‌آموزان آقای قندهاری بارها شنیده‌ام که ایشان سر

در مجموع، هوش بچه‌های یک کلاس از هوش معلم بالاتر است؛ بنابراین معلم نباید کاری بکند که تو ذوق دانش‌آموزان بخورد

کلاس تا چه اندازه منظم هستند؛ تخته را به چند قسمت برابر تقسیم می‌کنند، خیلی مرتب می‌نویسند و شکل‌ها را با حوصله، زیبا و دقیق رسم می‌کنند، که این نکته‌ها هم بسیار مهم است؛ یعنی یک معلم نباید وقت کلاس را تلف کند و شکل را بد بکشد. این نکته‌ها خیلی مهم‌اند. سؤالم این است که چه هدف‌هایی را از این نظم دنبال می‌کنید و توقّع جناب‌عالی از دانش‌آموزان در برخورد با این مسأله چیست؟

❂ وقتی یادگیری به صورت تصویری است؛ یعنی شما صحبت‌هایتان را روی تخته منعکس می‌کنید، باید شکل را بسیار خوب و زیبا بکشید، این مسلّماً درصد یادگیری را بالا می‌برد. مضافاً این که، می‌دانیم خود ریاضی یک مقدار درس سنگین، سخت و ثقیلی است، اگر قرار باشد آن را بدخط، مغشوش و تو هم بنویسیم، واقعاً درصد یادگیری پایین می‌آید. بنابراین من پای تخته واقعاً زیبا می‌نویسم. وقتی که هندسه درس می‌دادم، واقعاً شکل‌ها را قشنگ و دقیق می‌کشیدم. در هندسهٔ تحلیلی عمومی، ابتدا پاره‌خط‌هایی را می‌کشیدم، بعد کم‌کم به یک شکل خیلی بزرگ تبدیل می‌شد؛ به‌طوری که وقتی روی تخته جا نمی‌شد که آن شکل‌ها را رسم کنم، آن‌ها را روی دیوار می‌کشیدم و به بچه‌ها می‌گفتم، صندلی‌هایتان را رو به دیوار کنید و شکل‌ها را بسیار زیبا روی دیوار می‌کشیدم. آن‌ها هم دلشان نمی‌آمد پاک کنند. خوب همین بودنش روی دیوار، باعث می‌شد که دانش‌آموزان زیاد نگاه کنند و این نگاه کردن مداوم و هر روزه، به اعتقاد من، باعث یادگیری بیشتر می‌شود.

ـ وقتی یادگیری به صورت تصویری است، شکل را بسیارخوب و زیبا بکشید و این درصد یادگیری را مسلماً بالا می برد

دکتر شفیعی کدکنی شعری دارد و می‌گوید:

تا کجا می‌کشد این نقشه به دیوار مرا
خوب، خیلی جاها می‌تواند ببرد.

در مورد سؤال دومتان، عرض کنم که به طور کلی رعایت نظم در زندگی روزمره بسیار مؤثر است و همین‌طور مسلّماً روی دانش‌آموزان هم اثر می‌گذارد، و در زندگی روزانه و آینده‌شان بی‌تأثیر نخواهد بود. توقّع دارم که آنان هم منظم باشند.

❖ **یاسی‌پور: این که فرمودید تأثیر چشم بیشتر است، در مثنوی ما داریم که می‌گوید:**

گفت شخصی با یکی کای خوش‌خصال
ده مرا از حق و باطل یک مثال
گوش را بگرفت و گفت این باطل است
چشم حق است و یقینش حاصل است

این همان عین‌اللهی است که عرفاً هم مطرح می‌کنند. عین‌اللهی با چشم آمده، نه گوش. شما هم پس به این اعتقاد دارید که تأثیر بصر، بیشتر از سمع است.

نکتهٔ دیگری که با نظم ارتباط پیدا می‌کند و ادامهٔ آن بحث است، این که، چند سال پیش‌تر، با مرحوم آذرنوش، که یکی از دبیران معروف ریاضی ایران بودند، همراه آقای امیری خدمت ایشان بودیم و مصاحبه می‌کردیم. ایشان به نکته‌ای اشاره کردند که بسیار مهم و آموزنده بود؛ گفتند: «من در چهل سال معلمی خود، به یقین می‌گویم که یک دقیقه دیر سر کلاس نرفتم و وقتی زنگ می‌خورد، یک دقیقه بیشتر شاگرد را در کلاس نگه نمی‌داشتم؛ یعنی درسم را طوری تنظیم می‌کردم که دانش‌آموز را یک دقیقه هم پس از وقت کلاس نگه ندارم.» چون می‌دانید که درس ریاضی را نمی‌توان نیمه‌کاره رها کرد. خوب، بعضی معلمان می‌گویند که پنج دقیقه بمانید تا ما تمام کنیم. خوب مرحوم آذرنوش معلم جبر و مثلثات بود و همهٔ این‌ها شکل و منحنی دارند؛ اما ایشان می‌گفت: «من به جرأت به شما می‌گویم که نه یک دقیقه دیر سر کلاس رفتم و نه یک دقیقه شاگرد را بیش از آن حدّی که باید سر کلاس باشد، نگه داشتم.» خوب این هم حکایت از نظمی می‌کند که ایشان داشتند؛ شما در این مورد چگونه هستید؟

❂ من هم همین‌طور هستم؛ یعنی ممکن است این ۴۲ سالی که تدریس می‌کنم، عدد و رقمش را دقیق به خاطر ندارم، ولی فکر می‌کنم شاید کمتر از ده بار پیش آمده باشد که من یک دقیقه بچه‌ها را نگه داشته باشم. من هم حتماً وقتم را تنظیم می‌کنم.

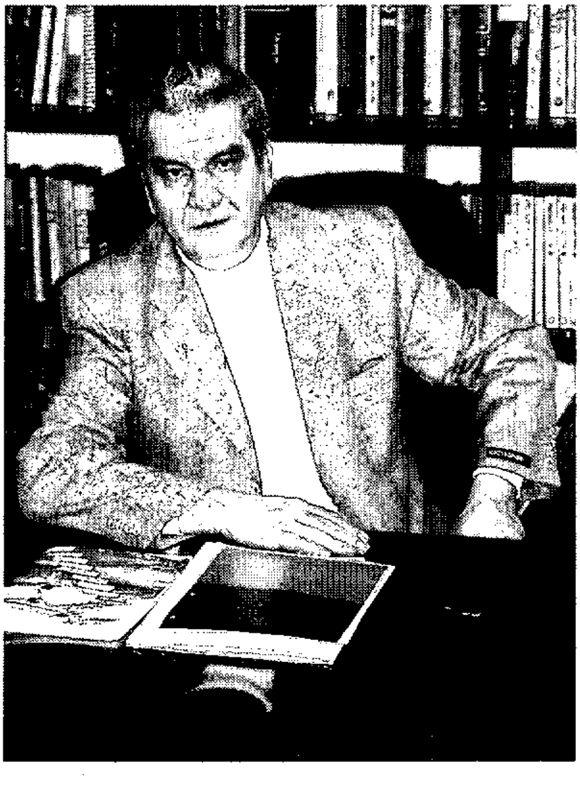
❖ **یاسی‌پور: نکته‌ای را از قول گودمان به خاطرم آمد که گفته، نخستین وظیفهٔ ریاضیدان، یافتن و تحویل دادن چیزی**

است که شاید امروز کمتر کسی طالب آن باشد (البته شاید او کمی بی‌مهری کرده، نمی‌دانم، ولی او این سخن را گفته) یعنی انسان. آیا واقعاً همین طور است؟ یعنی شما فکر می‌کنید در کار معلمی، اولین وظیفهٔ معلم ریاضی، تحویل دادن انسان است یا نه، تحویل دادن استدلال است؟ و یا انسان مستدل؟

❂ من فکر می‌کنم انسان مستدل باشد. در ضمن، کل ریاضی همیشه درستی را مطرح می‌کند؛ یعنی شما در ریاضی به چیز غلط نمی‌رسید. ممکن است حالا از برهان خلف یا راه دیگر اثبات کنید که این گزاره نادرست است، ولی کل مفاهیم ریاضی، مفاهیم درستی است. بنابراین به نظر من، ذات ریاضی صداقت است. شما وقتی جامعه‌شناسی درس می‌دهید، در مورد یک مطلب ممکن است پنج نظریهٔ مختلف و به‌ظاهر متضاد وجودداشته‌باشد و شاید هیچکدام هم رد نشده‌باشد؛ اما در ریاضی کسی نمی‌تواند بگوید این معادلهٔ درجهٔ دو، سه تا ریشه دارد. بنابراین صحّت و درستی‌اش دقیقاً موردنظر است. به همین علت، من فکر می‌کنم در ریاضیات، آنچه که مهم است، تفکر ریاضی است. متأسفانه در نظام جدید به‌علت این‌که کتاب‌ها شتابزده نوشته‌شده و اصولاً مسائل تشریحی وجودندارد و معمولاً هم این مطلب مطرح است که اگر p را داشته‌باشیم، ثابت کنید q وجوددارد، به‌اعتقاد من، این خیلی ریاضی نیست؛ بلکه باید بگویند اگر p را داریم، چه نتایجی می‌توان از آن بگیریم. این تفکر ریاضی را ایجاد می‌کند. اما این در کتاب‌های ما کمتر وجوددارد؛ ما در آموزش به‌طور اعمّ و در آموزش ریاضی به‌طور اخص، چند تا عامل اصلی داریم. یکی از آنها، عامل محیط و ابزار آموزشی است. شما ببینید در ایران، به‌خصوص در تهران، یک دبستان یا خانه را به دبیرستان و حتی یک خانه را به دانشگاه تبدیل می‌کنند.

❖ **یاسی‌پور: البته دبیرستان باید بزرگتر باشد؛ چون دانشجویان کمی آرام‌ترند و باز این قابل قبول‌تر است. دبیرستانی به‌هرحال می‌خواهد فوتبال بازی کند و نمی‌توان از او توقّع داشت که بازی نکند.**

❂ علاوه بر این، اگر شما در یک ساختمانی زندگی کنید که پنجرهٔ روبه‌رویتان به یک دیوار بازشود که احیاناً کثیف، شلوغ و بدرنگ باشد، شما را خسته می‌کند. ولی اگر پنجره‌تان روبه‌روی یک محیط باز و پارک باشد و هوای آزاد احساس کنید و آسمان را ببینید، خوب این‌ها در روحیهٔ شما اثر مثبتی می‌گذارد. در کلاس‌ها نور باید از سمت چپ به اتاق بتابد که انعکاس خاصی را در تخته ایجاد نکند و معلم به‌راحتی درس بدهد. خوب این چیزها اصلاً رعایت نمی‌شود. این مشکلات طبعاً به آموزش لطمه می‌زنند. این‌ها ابزار آموزشی هستند که بسیار مهم‌اند. از جملهٔ این ابزار کتاب و حقوق کافی برای معلم است. معمولاً ازسوی شاگردان ممتاز، برای معلمی استقبال خوبی نمی‌شود. متأسفانه در ایران ما، در زمینهٔ آموزش و پرورش خوب سرمایه‌گذاری نمی‌کنند.



❖ **یاسی‌پور: درمورد این که فرمودید، دانش‌آموز به هوای آزاد، تفریح و این گونه مسائل نیازدارد، داستانی را درمورد علّامه حلّی نقل می‌کنند. چون می‌دانید که ما در تاریخ فرهنگی‌مان، کمتر کسی را سراغ داریم که لقب علّامه داشته‌باشد، به‌هرحال، علّامه حلّی جزو بزرگان ماست. می‌گویند که ایشان در سنّ**

هفت سالگی به درجهٔ اجتهاد رسیده بود و کسی از شهری آمده بود و سؤالی داشت، و گفته بودند که این سؤال را فقط علّامه حلّی می تواند جواب دهد. آن مرد وقتی به محله ای که علّامه زندگی می کرد، رسید، دید که چند تا بچه درحال خاک بازی هستند و از آنان پرسید که خانهٔ علّامه کجاست. یکی از بچه ها خانه ای را نشان داد، رفت و نشست تا علّامه بیاید، دید که یک بچهٔ هفت ساله آمد. همان بچه ای که خاک بازی می کرد. عبا و لباس رسمی خودش را پوشیده بود. گفت: «بفرمایید مسأله تان را مطرح کنید. گفت: «مسأله این است؛ ولی غیر از این که یک مسألهٔ دیگری برایم مطرح شد.» شما الان توی کوچه داشتید خاک بازی می کردید و چه طور آمده اید این جا.»

به هرحال، آن طور که شایسته و بایسته بود و در تاریخ نوشته اند پاسخ سؤال های او را هم داد. نقل می کنند که علامه فرمود: من بچه هستم و باید بازی کنم و به هرحال نیاز به بازی دارم.

❖ امیری: جناب استاد، آیا تاکنون در کلاس درس به مسأله ای برخورد کرده اید که حل آن را فراموش کرده یا برای اولین بار با آن برخورد کرده باشید؟ و در این صورت، چه برخوردی با آن مسأله و کلاس داشته اید؟

◎ من اولاً به بچه ها می گویم که وقتی می نویسم، هوای من را داشته باشید، چون من معمولاً اشتباه می کنم. این صداقت من باعث می شود که این سخن به دل آنان بنشیند. خیلی وقت ها هم شده گفتم که من این را نمی دانم، لااقل تا آن جایی که اطلاع دارم، خیلی در ارتباط نیستم. حالا اگر اصرار دارید یادداشت کنید و به من بدهید. من می روم بررسی می کنم. بله، برای من پیش آمده که به راحتی بگویم، نمی دانم؛ یعنی اصلاً سختم نیست که بگویم نمی دانم.

❖ یاسی پور: پس شما با این مطالب برخورد کرده، و به راحتی از کنار آنها گذشته اید. واقعیت این است که معلم نباید کاری کند که شاگرد احساس ضعف کند؛ چون بعضی اوقات ما دیده ایم معلمی دنبال این است که شاگرد را متحیّر کند؛ یعنی کاری کند که شاگرد خلّاقیت خود را فراموش کند و این، بدترین نوع تدریس است؛ یعنی معلم کاری کند که شاگرد احساس کند نمی تواند کاری انجام دهد. مثلاً یک مسألهٔ مشکل را با راه های عجیب وغریب مطرح می کند که به شاگرد نشان دهد که تو نمی توانی حل کنی؛ درحالی که به عکس باید باشد. باید مسأله را طوری تنظیم کند که بگوید می توانی حل کنی.

❖ امیری: اگر دانش آموزی با روش بهتر و کوتاه تر مسأله ای را حل کند، با او چه برخوردی می کنید؟ درضمن تا حالا پیش آمده است یا نه؟

◎ سر یکی از کلاس ها یک مسألهٔ حدی بود؛ حدّ سینوس یک عبارت رادیکالی منهای سینوس یک عبارت دیگر. من خودم وقتی این را حل می کردم، به حاصل ضرب تبدیل و آن را حل می کردم. یک بار یکی از شاگردان این کلاس گفت: آقا این هم ارزی رادیکالی که خود شما توصیه کردید، اگر این جا استفاده کنیم، به این سادگی حل می شود. من آن دانش آموز را تشویقش کردم.

مرحوم آذرنوش می فرمود: من به جرأت به شما می گویم که طی چهل سال، نه یک دقیقه دیر سر کلاس رفتم و نه یک دقیقه شاگرد را پیش از آن حدّی که باید سر کلاس باشد، نگه داشتم

خلاصه، این امور، مجموعاً در راستای آموزش است. من حتی معتقدم امتحان هم باید در راستای آموزش باشد و شما که امتحان می کنید، اگر واقعاً مسأله، گنگی دارد، باید برای همه یک راهنمایی کلی بکنید. چون به اعتقاد من آموزش، شامل مجموعهٔ تدریس و امتحان هم می شود.

❖ یاسی پور: بله، کاملاً صحیح است، معلم نباید به دنبال متحیر کردن شاگرد باشد. مولوی می گوید مشکل ما همین است:

طالب حیرانی مردم شدی
دست طَمَعْ اندر الوهیت زدی

می گوید اصلاً مشکل ما این است و اصلاً این شریک بودن با خداست؛ زیرا خداوند دلیل المتحیرین است، اصلاً ما در دعا داریم «یا دلیل المتحیرین»، خداوند راهنمای متحیرین است و کسی که طالب حیرانی مردم باشد، درواقع در کار خدا شرکت کرده و این خلاف است. معلم نباید دنبال این باشد و این خلاف آموزش است.

ادامه دارد

دکتر محمّد علی فریبرزی عراقی
عضو هیأت علمی دانشگاه آزاد اسلامی
واحد تهران

اصل لانه کبوتری

مقدمه

یکی از روش‌های استدلال ریاضی که در اثبات مسائلی در ترکیبیات، نظریه و اعداد، هندسه و دیگر مباحث ریاضی استفاده می‌شود، اصل لانه کبوتری[1] است که گاهی اصل جعبه‌ها یا اصل حجره‌ها نیز نامیده می‌شود. دو صورت از این اصل در زیر آمده است:

۱. اگر m کبوتر n لانهٔ کبوتر را اشغال کنند و m>n، آن‌گاه حداقل یک لانه کبوتر دارای دو یا بیش‌تر کبوتر است.

۲. اگر $k+1$ شیء در k جعبه قرار گیرند، آن‌گاه جعبه‌ای وجود دارد که در آن حداقل دو شیء قرار دارد.

در این مقاله، به بررسی کاربردهای مختلفی از اصل لانه کبوتری می‌پردازیم. مسائلی که با استفاده از این اصل ثابت می‌شوند، در برخی موارد دارای راه‌حل‌های پیچیده‌ای به همراه ابتکار در حل هستند و در بسیاری از مسابقات ریاضی جهانی، مسائلی در این رابطه مطرح شده است. آنچه که در اثبات مسائلی که به کمک اصل لانه کبوتری انجام می‌گیرند قابل توجه است، آن است که در حل مسأله دو عامل کبوترها (اشیا) و لانه‌های کبوترها (جعبه‌ها) به طور مناسب انتخاب شوند؛ طوری که تعداد کبوترها حداقل یک واحد بیشتر از لانه‌ها باشد و سپس با استفاده از اصل لانه کبوتری، نتیجهٔ مطلوب را به دست می‌آوریم.

کاربرد در ارتباط بین افراد

مثال ۱. دبیرستانی دارای ۱۰۲۵ دانش‌آموز است. آیا می‌توان گفت دو دانش‌آموز وجود دارند که حروف اول و آخر نام فامیلی آنان یکسان است؟

حل: با توجه به آن که حرف اول و آخر نام فامیل هر دانش‌آموز یکی از ۳۲ حرف الفبای فارسی است، لذا تعداد نام‌های مختلفی که می‌توان به دست آورد، برابر است با $۳۲ \times ۳۲ = ۱۰۲۴$. حال لانه‌های کبوترها را این ۱۰۲۴ حالت به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

۱	۲	۳		۱۰۲۴
(الف)	اب	اپ	. . .	ی‌ی

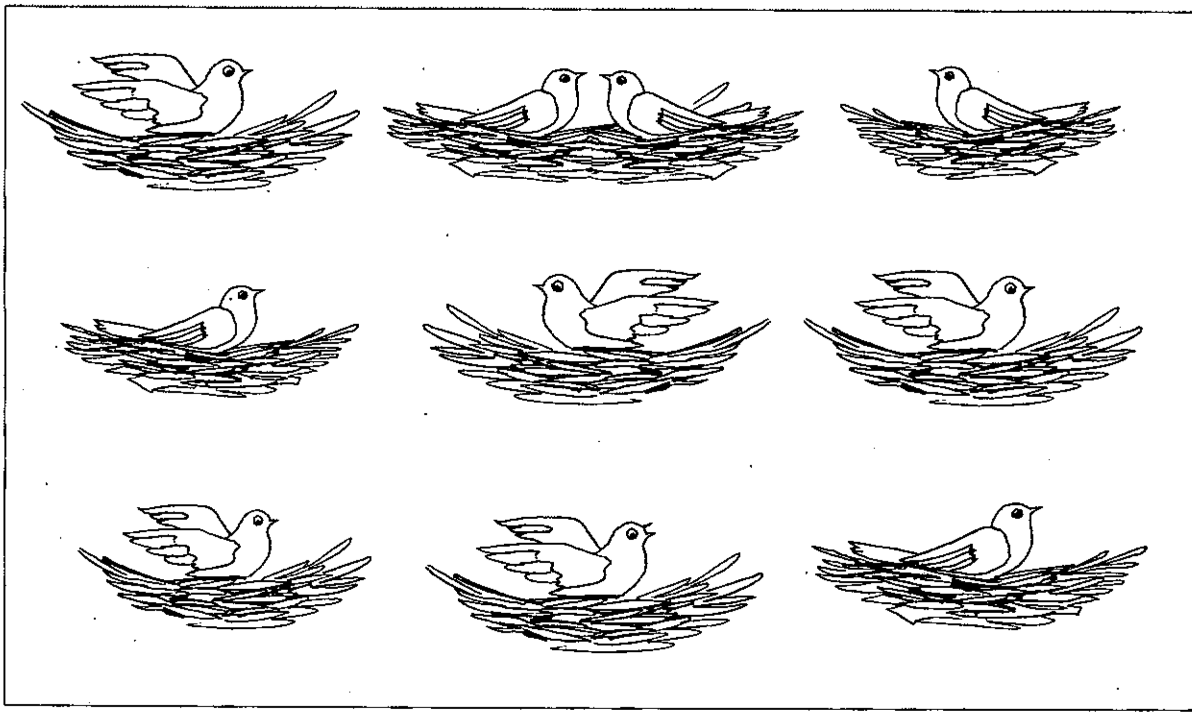
در هریک از این لانه‌ها دو حرف الفبا قرار دارد که به ترتیب حرف اول و آخر نام محصّلان است. حال اگر این ۱۰۲۵ محصل کبوترها فرض شوند، چون تعداد کبوترها یکی بیش‌تر از لانه‌های فوق است، بنابر اصل لانهٔ کبوتری، در یک لانه دو کبوتر قرار می‌گیرند و به عبارت دیگر، دو دانش‌آموز وجود دارند که دارای حرف اول و آخر نام فامیل یکسانی هستند.

مثال ۲. ثابت کنید در یک جمع $n>1$ نفری، حداقل دو نفر وجود دارند که دارای تعداد دوستان یکسانی هستند.

برهان. اگر به هر کدام از این n نفر برگه‌ای بدهیم و بخواهیم تعداد دوستان خود، در این جمع را درون این برگه بنویسند، روی هر برگه یکی از اعداد ۰، ۱، ۲، ... و $n-1$ نوشته می‌شود. حال لانه‌های کبوتر را به صورت زیر درنظر می‌گیریم:

۱	۲	۳		n
۰	۱	۲	. . .	n-۱

حال از این افراد می‌خواهیم برگهٔ خود را در لانهٔ متناظر عدد روی برگه قرار دهند. توجه می‌کنیم که لانه‌های ۱ و n نمی‌توانند همزمان دارای برگه‌ای باشند؛ زیرا اگر در این جمع کسی باشد که هیچ‌کس را نشناسد، ممکن نیست فردی باشد که همگی این افراد را بشناسد. بنابراین تنها $n-1$ لانه خواهیم داشت. در صورتی که این n نفر کبوترها باشند، ملاحظه می‌کنیم که بنابر اصل لانه کبوتری، حداقل دو نفر شمارهٔ برگهٔ



یکسانی دارند؛ یعنی تعداد دوستان آنان برابر است.

کاربرد در نظریهٔ اعداد

مثال ۳. ثابت کنید هر زیرمجموعهٔ ۶ عضوی مجموعهٔ $S=\{1,2,\dots,9\}$ شامل دو عضو است که مجموعشان ۱۰ است.

برهان. ۵ جعبه را به صورت زیر برچسب‌گذاری می‌کنیم:

۱ و ۹ برای جعبهٔ اول، ۲ و ۸ برای جعبهٔ دوم، ۳ و ۷ برای جعبهٔ سوم، ۴ و ۶ برای جعبهٔ چهارم و در نهایت ۵ برای جعبهٔ پنجم. حال ۶ عدد از مجموعهٔ S انتخاب می‌کنیم و آن‌ها را درون جعبه‌هایی که همان برچسب را دارند، قرار می‌دهیم. اگر در این انتخاب ۵ باشد، پنج عدد دیگر انتخابی درون ۴ جعبه باقی‌مانده قرار می‌گیرند و بنابر اصل لانه کبوتری، یکی از جعبه‌ها شامل حداقل دو عدد می‌شود که مجموع آن‌ها ۱۰ است. اگر در این انتخاب ۵ نباشد، ۶ عدد انتخابی باید درون ۴ جعبهٔ دیگر قرار گیرند و در این حالت نیز بنابر اصل لانه کبوتری، دو جعبه وجود خواهند داشت که شامل دو عدد با مجموع ۱۰ هستند.

مثال ۴. اگر ۱۱ عدد صحیح از مجموعهٔ $S=\{1,2,\dots,100\}$ انتخاب کنیم، نشان دهید حداقل دوتای آن‌ها چون x و y وجود دارند به طوری که $0<\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|<1$.

برهان. می‌دانیم اگر $1\le x\le 100$، آن‌گاه $1\le\sqrt{x}\le 10$ و در نتیجه $1\le\left[\sqrt{x}\right]\le 10$. بنابراین $\left[\sqrt{x}\right]$ عددی در مجموعهٔ $\{1,2,\dots,10\}$ است. حال اگر ۱۱ عدد از مجموعهٔ S انتخاب کنیم، بنابر اصل لانه کبوتری، حداقل دو تای آن‌ها نظیر x و y هستند که $\left[\sqrt{x}\right]=\left[\sqrt{y}\right]$. در این‌جا ۱۰ حالت عدد $\left[\sqrt{x}\right]$ شمارهٔ لانه‌های کبوتر و ۱۱ عدد انتخابی کبوترها هستند. لذا باید داشته باشیم: $0<\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|<1$.

مثال ۵. نشان دهید اگر ۱۰۱ عدد صحیح از مجموعهٔ $S=\{1,2,\dots,200\}$ انتخاب شوند، دو عدد صحیح بین آن‌ها وجود دارند که یکی بر دیگری بخش‌پذیر است.

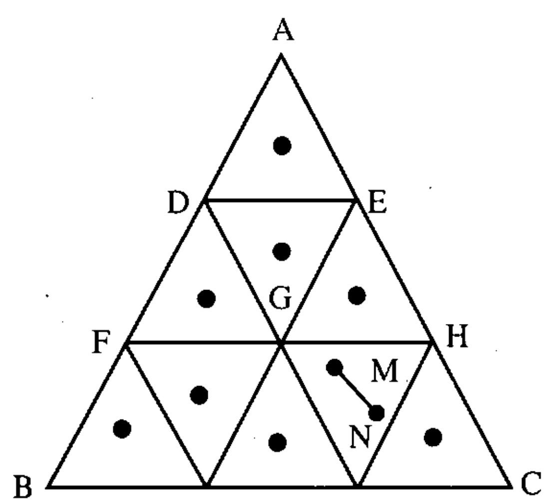
برهان. بنابر قضیهٔ اساسی حساب، هر عدد $n\in S$ را به طور منحصربه‌فردی می‌توان به شکل $n=2^k\times m$ که k عدد صحیح و نامنفی و m عدد مثبت فردی است، نوشت. اگر ۱۰۱ عدد از S انتخاب شوند، چون تنها ۱۰۰ عدد صحیح فرد در S وجود دارند، آن‌گاه بنابر اصل لانه کبوتری، دو عدد

صحیح در S چون n_1 و n_2 وجود دارند که $n_1 = 2^{k_1} \times m$ و $n_2 = 2^{k_2} \times m$ ، k_1 و k_2 اعداد صحیح و نامنفی هستند و $m \in \{1,3,5,\dots,199\}$. در این مثال، ۱۰۰ حالت عدد m برای لانه‌های کبوتر و ۱۰۱ عدد انتخابی به عنوان کبوترها درنظر گرفته می‌شوند. حال اگر $k_1 \geq k_2$ ، آن‌گاه $n_2 | n_1$ و در غیر این صورت $n_1 | n_2$.

کاربرد در هندسه

مثال ۶ . ثابت کنید اگر ۱۰ نقطه درون مثلثی متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱ واحد انتخاب کنیم، حداقل دو تای آن‌ها فاصله‌ای کم‌تر از $\frac{1}{3}$ از هم دارند.

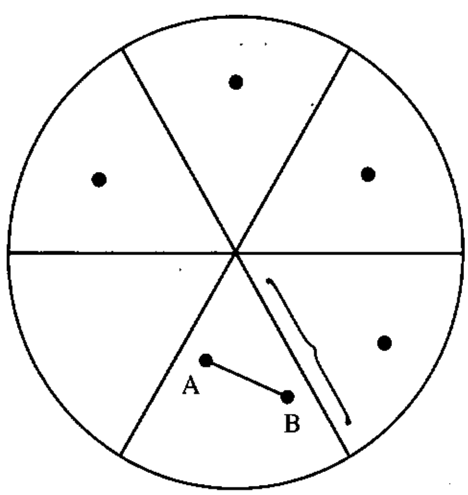
برهان . مطابق شکل زیر، مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع $AB = 1$ را به ۹ مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $\frac{1}{3}$ تقسیم می‌کنیم؛



حال اگر ۱۰ نقطه درون این مثلث انتخاب کنیم، (نقاط کبوترها و مثلث‌ها لانه‌ها هستند.) بنابر اصل لانه کبوتری، حداقل دوتای آن‌ها نظیر M و N در یک مثلث قرار می‌گیرند، لذا فاصله‌ای کم‌تر از $\frac{1}{3}$ دارند ($MN < \frac{1}{3}$) .

مثال ۷ . با یک تفنگ ۷ عدد گلوله به سمت یک تخته تیراندازی دایره‌ای شکل به شعاع ۱۰ واحد شلیک می‌شوند. ثابت کنید دو گلوله وجود دارند که حداکثر ۱۰ واحد با یکدیگر فاصله دارند.

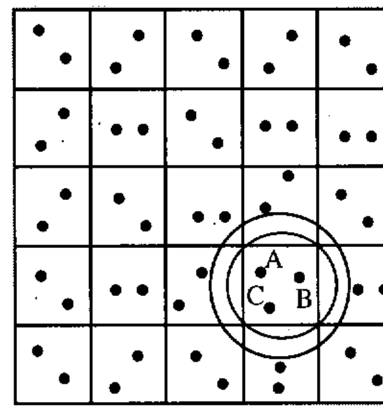
برهان . دایره را به ۶ قطاع مساوی طبق شکل مقابل تقسیم می‌کنیم.



هر قطاع را یک لانه کبوتر و هر گلوله را یک کبوتر می‌گیریم. بنابر اصل لانه کبوتری، قطاعی وجود دارد که دو گلوله چون A و B درون آن است. چون بزرگ‌ترین فاصلهٔ بین این دو نقطه ۱۰ است؛ یعنی $AB \leq 10$ ، لذا حکم ثابت می‌شود.

مثال ۸ . تعداد ۵۱ نقطه در یک مربع به ضلع ۱ واحد قرار دارند. ثابت کنید دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{7}$ وجود دارد که شامل سه تا از این نقاط است.

برهان . مربع را مطابق شکل مقابل، به ۲۵ مربع به ضلع



$\frac{1}{5}$ تقسیم می‌کنیم. در این صورت، باید در حداقل یکی از این لانه‌ها ۳ نقطه چون A، B و C باشد. در این حالت ۲۵ مربع کوچک لانه‌ها و ۵۱ نقطه کبوترها هستند. در صورتی که در هیچ کدام از لانه‌ها سه نقطه قرار نگیرد و به عبارت دیگر، در هر مربع کوچک، ۲ یا کم‌تر نقطه قرار گیرد، تعداد کل نقاط حداکثر $50 = 25 \times 2$ خواهد بود؛ در حالی که مجموع تعداد نقاط باید ۵۱ باشد. حال دایره‌ای محیط بر مربع شامل این سه نقطه در نظر می‌گیریم. اگر r شعاع دایرهٔ محیطی مربع مفروض باشد، آن‌گاه:

$$r^2 + r^2 = \frac{1}{25} \Rightarrow 2r^2 = \frac{1}{25} \Rightarrow r = \frac{1}{\sqrt{50}} < \frac{1}{\sqrt{49}} = \frac{1}{7}$$

بنابراین شعاع دایرهٔ مورد نظر می‌تواند $\frac{1}{7}$ باشد.

آخرین مثال از کاربرد اصل لانه کبوتری را به صورت زیر مطرح می‌کنیم:

مثال ۹. فرض کنید یک تیم فوتبال حداقل یک گل در هر ۲۰ بازی متوالی خود زده است. اگر این تیم در مجموع ۳۰ گل در این ۲۰ بازی بزند، ثابت کنید دنباله‌ای از بازی‌های متوالی وجود دارد که این تیم در این بازی‌ها دقیقاً ۹ گل زده است.

برهان. گیریم S_i مجموع تعداد گل‌های کسب شده در بازی‌های اول تا iام باشد $(1 \le i \le 20)$. مجموعهٔ $A = \{S_1, \dots, S_{20}, S_1 + 9, \dots S_{20} + 9\}$ را در نظر می‌گیریم. تمام اعضای A اعدادی صحیح و مثبت بین ۱ تا ۳۹ هستند. چون ۴۰ عضو در این مجموعه است، بنابر اصل لانه کبوتری، یکی از اعداد دو بار در مجموعهٔ A ظاهر می‌شود. چون این تیم در هر بازی حداقل یک گل می‌زند، لذا برای هر $i \ne j$، $S_i \ne S_j$ و در نتیجه برای هر $i \ne j$، $S_i + 9 \ne S_j + 9$؛ بنابراین باید i و j وجود داشته باشد که $S_i + 9 = S_j$ و $i < j$. بنابراین تعداد گل‌ها در بازی‌های $i+1$ ام تا jام برابر است با:

$S_j - S_i = 9$

تمرین ۱. ثابت کنید در هر گردایه از ۳۱ عدد صحیح متمایز بین ۱ تا ۶۰، دو عدد وجود دارد که یکی دیگری را عاد می‌کند.

تمرین ۲. ثابت کنید اگر ۷ عدد متمایز از مجموعهٔ $A = \{1, 2, \dots, 11\}$ انتخاب شوند، آن‌گاه مجموع دو تای آن‌ها ۱۲ است.

تمرین ۳. در یک جعبه، مدادهایی به شرح زیر وجود دارند: ۱۰ قرمز، ۸ آبی، ۸ سبز و ۴ زرد. با چشم بسته یکی یکی از این جعبه مداد خارج می‌کنیم. حداقل تعداد مدادهایی که باید برداریم تا مطمئن شویم حداقل ۴ مداد یک رنگ داریم، چند تا است؟

راهنمایی: برای هر رنگ یک لانه بگیرید.

تمرین ۴. ۱۱ عدد از بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰ انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید حداقل دو تا از این اعداد انتخابی نسبت به هم اول‌اند.

راهنمایی: هر دو عدد متوالی را در یک لانه قرار دهید.

تمرین ۵. تعداد $n^2 + 1$ نقطه درون مربعی به ضلع واحد انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید دو تا از این نقاط وجود دارند که فاصلهٔ آن‌ها کم‌تر از $\frac{\sqrt{2}}{n}$ است.

زیرنویس

1. The Pigeon hole Principle

اعداد فیبوناتچی

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

اشاره:

در شماره‌های قبل به معرفی اعداد فیبوناتچی پرداختیم، همچنین رابطه‌های بین اعداد فیبوناتچی را بررسی کردیم، در ادامه مطلب باز هم دربارهٔ رابطه‌های بین این اعداد بحث می‌کنیم.

اکنون دنبالهٔ vای را اختیار می‌کنیم که جواب معادلهٔ (۱ . ۱۳) است. این دنباله، آن‌چنان که قبلاً در بخش ۲ مقدمه خاطرنشان کرده‌ایم، به‌گونه‌ای یکتا توسط دو جملهٔ اول v_1 و v_2 اش تعریف شده است.

سپس دو ثابت c_1 و c_2 ای را چنان جست‌وجو می‌کنیم که:

$$c_1v_1' + c_2v_1'' = v_1$$

$$c_1v_2' + c_2v_2'' = v_2 \qquad (1\,.\,17)$$

به مجرد معین شدن c_1 و c_2 با استفاده از لم‌های ۱ و ۲، نتیجه می‌گیریم که $c_1v' + c_2v''$ برابر دنبالهٔ مفروض v است.

دستگاه معادلات (۱ . ۱۷) را، نظر به شرط (۱ . ۱۵) برای c_1 و c_2 و بدون توجه به مقدار اعداد v_1 و v_2، همواره می‌توان حل کرد؛ به‌خصوص به‌دست می‌آوریم.

$$c_1 = \frac{v_1v_2'' - v_2v_1''}{v_1'v_2'' - v_1''v_1'},\ \ c_2 = \frac{v_1'v_2 - v_2'v_1}{v_1'v_2'' - v_2''v_2'}$$

شرط (۱ . ۱۵) اطمینان می‌دهد که مخرج‌های دو کسر فوق مخالف صفرند. با قرار دادن مقادیر محاسبه‌شدهٔ c_1 و c_2 در (۱ . ۱۴) نمایش مطلوب دنبالهٔ v را به دست می‌آوریم.

به طور خلاصه، استدلال پیشین خاطرنشان می‌کند که برای تعیین جمیع جواب‌های معادلهٔ (۱ . ۱۳) کافی است که تنها دو جواب از آن را بیابیم که متناسب نیستند.

دو جواب چنین را در میان تصاعدهای هندسی جست‌وجو می‌کنیم و بنا به لم ۱، می‌توانیم جست‌وجویمان را به تصاعدهایی محدود کنیم که جملهٔ اولشان برابر ۱ است؛ بنابراین تصاعد هندسی:

$$1,\ q,\ q^2,\ \cdots$$

را در نظر می‌گیریم. این تصاعد به عنوان جواب معادلهٔ (۱ . ۱۳) در نظر گرفته می‌شود؛ اگر و تنها اگر:

$$q^{n-2} + q^{n-1} = q^n$$

به ازای هر n برقرار باشد، یا با تقسیم معادلهٔ فوق بر q^{n-2}، اگر و تنها اگر:

$$1 + q = q^2 \qquad (1\,.\,18)$$

ریشه‌های این معادلهٔ درجه دوم، یعنی $(1+\sqrt{5})/2$ و $(1-\sqrt{5})/2$ قدر نسبت‌های تصاعدهای هندسی مورد جست‌وجو هستند. آن‌ها را به‌ترتیب با α و β نمایش می‌دهیم. باید تأکید کنیم که α و β، به‌عنوان ریشه‌های معادلهٔ (۱ . ۱۸)، در شرط‌های $1+\alpha = \alpha^2$، $1+\beta = \beta^2$ و $\alpha\beta = -1$ صدق می‌کنند.

به این طریق دو تصاعد هندسی به دست آورده‌ایم که

جواب‌های معادله‌های (۱ . ۱۳) اند؛ بنابراین تمام دنباله‌ها به صورت:

(۱ . ۱۹)

$$c_1+c_2,\ c_1\alpha+c_2\beta,\ c_1\alpha^2+c_2\beta^2,\ \cdots$$

نیز جواب‌های همین معادله‌اند.

از آن‌جا که دو تصاعدی که یافته‌ایم، قدر نسبت‌های متفاوت دارند، متناسب نیستند؛ درنتیجه فرمول (۱ . ۱۹)، با ثابت‌های دلخواه c_1 و c_2، جمیع جواب‌های معادلهٔ (۱ . ۱۳) را به دست می‌دهد.

در حالت خاص، فرمول (۱ . ۱۹)، به ازای مقادیر مشخصی از c_1 و c_2 باید دنبالهٔ فیبوناتچی را به دست دهد. برای این کار، همان‌گونه که در بالا بیان کردیم، باید c_1 و c_2 را به عنوان جواب‌های یکتای معادله‌های:

$c_1+c_2=u_1$ و $c_1\alpha+c_2\beta=u_2$

یعنی جواب‌های دستگاه معادلات

$$c_1+c_2=1$$

$$c_1\frac{1+\sqrt{5}}{2}+c_2\frac{1-\sqrt{5}}{2}=1$$

تعریف کنیم.

با حل این دستگاه برای c_1 و c_2، حاصل می‌کنیم:

$$c_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}},\ c_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

و از آن:

$$u_n=c_1\alpha^{n-1}+c_2\beta^{n-1}$$

$$=\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

یعنی:

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \qquad (۱ . ۲۰)$$

فرمول (۱. ۲۰) به نام یکی از ریاضیدانان که آن را کشف کرد، به فرمول بینه «Binet's formula» موسوم است.

واضح است که می‌توان فرمول‌هایی مشابه برای بعضی از جواب‌های (۱ . ۱۳) استخراج کرد. از خواننده می‌خواهیم این کار را در مورد هریک از دنباله‌های معرفی‌شده در بخش ۲ مقدمه انجام دهد.

۱۷ . ملاحظه کردیم که:

$$\alpha^2=\alpha+1$$

بنابراین آشکارا نتیجه می‌شود که هر توان دیگر α با نمای صحیح و مثبت را می‌توان به صورت $a\alpha+b$، با ضرایب صحیح a و bای، بیان کرد. به این ترتیب:

$$\alpha^3=\alpha\alpha^2=\alpha(\alpha+1)=\alpha^2+\alpha=\alpha+1+\alpha=2\alpha+1$$

$$\alpha^4=\alpha\alpha^3=2\alpha^2+\alpha=2\alpha+2+\alpha=3\alpha+2$$

و غیره.

اکنون با استفاده از استقرا نشان می‌دهیم که:

$$\alpha^n=u_n\alpha+u_{n-1}$$

قبلاً این گزاره را به ازای $n=2$ و $n=3$ محقق کرده‌ایم. در این صورت، فرض می‌کنیم:

$$\alpha^k=u_k\alpha+u_{k-1}$$

$$\alpha^{k+1}=u_{k+1}\alpha+u_k$$

با جمع دو معادلهٔ اخیر، به دست می‌آوریم:

$$\alpha^k+\alpha^{k+1}=(u_k+u_{k+1})\alpha+(u_{k-1}+u_k)$$

یا:

$$\alpha^{k+2}=u_{k+2}\alpha+u_{k+1}$$

و بنابراین مرحلهٔ استقرایی نیز برقرار می‌شود و اثبات کامل است.

به گونه‌ای مشابه، از $\beta^2=\beta+1$ نتیجه می‌گیریم که:

$$\beta^n=u_n\beta+u_{n-1}$$

۱۸ . به کمک فرمول بینه، می‌توانیم مجموعه‌های گوناگونی را محاسبه کنیم که با اعداد فیبوناتچی مرتبط‌اند. به عنوان مثال، به محاسبهٔ مجموع زیر می‌پردازیم:

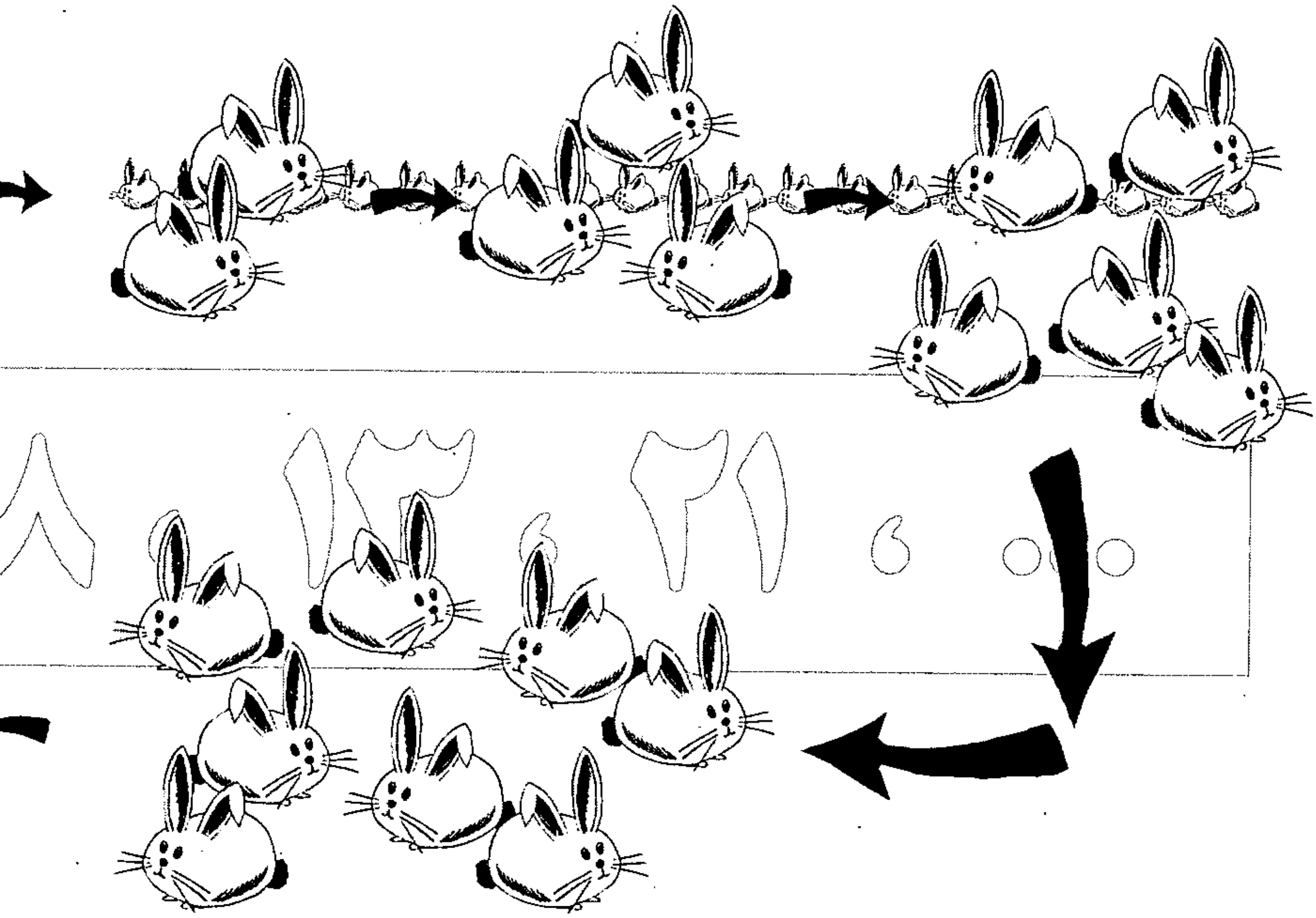
$$u_3+u_6+u_9+\cdots+u_{3n}$$

داریم:

$$u_3+u_6+\cdots+u_{3n}=\frac{\alpha^3-\beta^3}{\sqrt{5}}+\frac{\alpha^6-\beta^6}{\sqrt{5}}+\cdots+\frac{\alpha^{3n}-\beta^{3n}}{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^3+\alpha^6+\cdots+\alpha^{3n}-\beta^3-\beta^6-\beta^{3n}\right)$$

یا، پس از محاسبهٔ مجموع‌های دو تصاعد هندسی



مشمول در معادلهٔ پیشین:

$$u_3+u_6+\cdots+u_{3n}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^{3n+3}-\alpha^3}{\alpha^3-1}-\frac{\beta^{3n+3}-\beta^3}{\beta^3-1}\right)$$

اما:

$$\alpha^3-1=\alpha+\alpha^2-1=\alpha+\alpha+1-1=2\alpha$$

و، مشابهاً:

$$\beta^3-1=2\beta$$

بنابراین:

$$u_3+u_6+\cdots+u_{3n}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^{3n+3}-\alpha^3}{2\alpha}-\frac{\beta^{3n+3}-\beta^3}{2\beta}\right)$$

یا، بعد از مقداری حذف:

$$u_3+u_6+\cdots+u_{3n}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^{3n+2}-\alpha^2-\beta^{3n+2}+\beta^2}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^{3n+2}-\beta^{3n+2}}{\sqrt{5}}-\frac{\alpha^2-\beta^2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(u_{3n+2}-u_2\right)=\frac{u_{3n+2}-1}{2}$$

۱۹. اکنون به عنوان مثال دیگری از کاربرد فرمول بینه، به محاسبهٔ مجموع مکعبات n عدد اولیهٔ فیبوناتچی می‌پردازیم.

ابتدا توجه می‌کنیم که:

$$u_k^3=\left(\frac{\alpha^k-\beta^k}{\sqrt{5}}\right)^3=\frac{1}{5}\,\frac{\alpha^{3k}-3\alpha^{2k}\beta^k+3\alpha^k\beta^{2k}-\beta^{3k}}{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{\alpha^{3k}-\beta^{3k}}{\sqrt{5}}-3\alpha^k\beta^k\,\frac{\alpha^k-\beta^k}{\sqrt{5}}\right)=\frac{1}{5}\left(u_{3k}-(-1)^k3u_k\right)$$

$$=\frac{1}{5}\left(u_{3k}+(-1)^{k+1}3u_k\right)$$

بنابراین:

$$u_1^3+u_2^3+\cdots+u_n^3=\frac{1}{5}((u_3+u_6+\cdots+u_{3n})+$$

$$+3(u_1-u_2+u_3-\cdots+(-1)^{n+1}u_n))$$

یا با استفاده از فرمول (۱ . ۶) و نتیجهٔ بخش پیشین:

$$u_1^3+u_2^3+\cdots+u_n^3=\frac{1}{5}\left(\frac{u_{3n+2}-1}{2}+(-1)^{n+1}3u_{n-1}+3\right)$$

$$=\frac{u_{3n+2}+(-1)^{n+1}6u_{n-1}+5}{10}$$

۲۰. اکنون موقع مناسب طرح این پرسش است که: سرعت رشد اعداد فیبوناتچی با افزایش اندیس‌های آن‌ها چیست؟

۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ...

فرمول بینه به قدر کافی پاسخ کاملی به این پرسش می‌دهد. در این مورد می‌توان قضیهٔ زیر را به سادگی به اثبات رساند.

قضیه. n امین عدد فیبوناتچی، یعنی u_n، نزدیک‌ترین عدد صحیح به $\alpha^n / \sqrt{5}$، یعنی a_n، جملهٔ nام تصاعد هندسی‌ای است که جملهٔ اول آن $\alpha / \sqrt{5}$ و قدر نسبت آن برابر الف است.

اثبات. واضح است که در این مورد باید محقق کنیم که قدر مطلق تفاوت بین u_n و a_n، به ازای هر n، کم‌تر از ۱/۲ است. برای این مقصود، ابتدا توجه می‌کنیم که:

$$|u_n - a_n| = \left|\frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} - \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}\right| = \left|\frac{\alpha^n - \alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}\right| = \frac{|\beta|^n}{\sqrt{5}}$$

گذشته از این، به خاطر می‌آوریم که $\beta = -0.618\ldots$؛ بنابراین $|\beta| < 1$، در این صورت، به ازای هر n.

$$|\beta|^n < 1$$

و از آن‌جا که $\sqrt{5} > 2$.

$$|\beta|^n / \sqrt{5} < 1/2.$$

به این ترتیب، قضیه به اثبات می‌رسد.

خوانندهٔ آشنا با نظریهٔ حدود، می‌تواند با دستکاری مختصری در اثبات این قضیه، ثابت کند که:

$$\lim_{n\to\infty} |u_n - a_n| = 0$$

در این صورت، با استفاده از قضیهٔ هم‌اکنون به اثبات رسیده، محاسبهٔ اعداد فیبوناتچی با کمک ماشین حساب امکان‌پذیر است.

به عنوان نمونه، u_{14}، پاسخ مسألهٔ خرگوش‌های فیبوناتچی را محاسبه می‌کنیم. برای این کار، توجه می‌کنیم که:

$$\sqrt{5} = 2.2361, \quad \log\sqrt{5} = 0.34949$$

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180, \quad \log\alpha = 0.20898$$

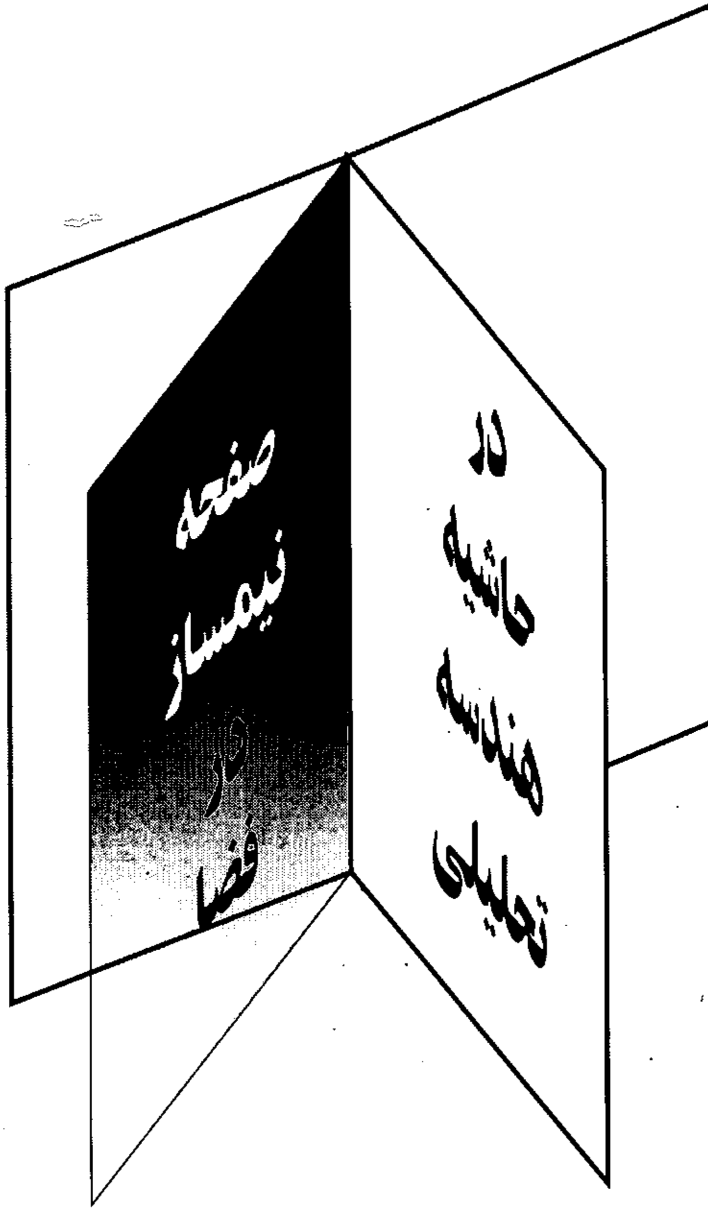
$$\log\frac{\alpha^{14}}{\sqrt{5}} = 14 \times 0.20898 - 0.34949 = 2.5762$$

$$\frac{\alpha^{14}}{\sqrt{5}} = 376.9$$

نزدیک‌ترین عدد صحیح به ۳۷۶.۹ عدد ۳۷۷ است؛ بنابراین $u_{14} = 377$.

روش مطرح شده در بالا، به زودی در مورد عددهای فیبوناتچی با اندیس‌های بزرگ، از کارایی می‌افتد؛ یعنی، دیگر نمی‌توانیم جمیع ارقام چنین عددی را با تکیه بر ماشین حساب محاسبه کنیم و تمام کاری که در این مورد می‌توانیم انجام دهیم، تعیین چند رقم اولیه است. بنابراین آشکار می‌شود که چنین محاسباتی تقریبی‌اند.

به عنوان تمرین، شما می‌توانید ثابت کنید که در دستگاه دهدهی، u_n، یعنی nامین عدد فیبوناتچی، به ازای $n \geq 17$، بیش‌تر از $n/4$ و کم‌تر از $n/5$ رقم ندارد. با این همه، پرسشی دیگر: u_{1000} دارای چند رقم است؟



برای
دانش‌آموزان
رشتهٔ ریاضی
پیش‌دانشگاهی

میرشهرام صدر

هندسه تحلیلی، اجتماع هندسه و جبر است، در این بخش از ریاضی، مفاهیم هندسی را به صورت جبری یعنی با یک معادله تجزیه و تحلیل می‌کنیم. همچنین معادله‌های مشخص جبری را به صورت هندسی تعبیر می‌کنیم. برای مثال؛ مکان هندسی نقاطی را که در معادلهٔ زیر صدق می‌کنند، یک صفحه در فضا تعبیر می‌کنیم که از نقطهٔ $A(x_0,y_0,z_0)$ می‌گذرد و بر بردار $\vec{N}=(a,b,c)$ عمود است.

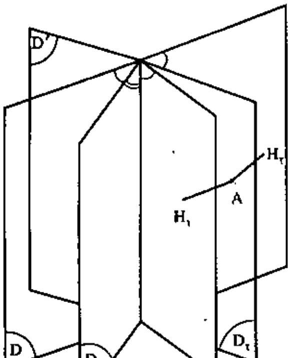
$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

رسم نمودار معادله‌های جبری و یافتن معادله‌هایی برای شکل‌های هندسی مشخص، دو موضوع مهمی است که در هندسه تحلیلی دربارهٔ آن‌ها بحث می‌شوند.

در این مقاله به موضوع صفحه نیمساز در فضا و یافتن معادلهٔ جبری آن می‌پردازیم و بحث خود را به این سه بخش تقسیم می‌کنیم.

۱. صفحه‌های نیمساز فرجه‌های بین دو صفحه

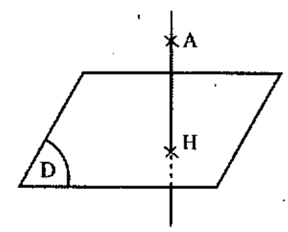
هرگاه $D: ax+by+cz+d=0$ و $D': a'x+b'y+c'z+d'=0$ معادله‌های دو صفحه متقاطع باشند، مکان هندسی نقاطی از فضا که از دو صفحه D و D' به یک فاصله باشند، دو صفحه متمایز است که صفحه‌های نیمساز فرجه‌های بین دو صفحه می‌باشند. برای یافتن معادله‌های صفحه‌های نیمساز، ابتدا فرض کنیم $A(x,y,z)$ نقطه‌ای از مکان هندسی باشد که فاصلهٔ A تا دو صفحه D و D' برابر است؛ یعنی $AH=AH'$.



(شکل ۱)

در هندسه تحلیلی پیش‌دانشگاهی به‌عنوان یک تمرین ثابت کرده‌اید که فاصله نقطهٔ $A(x_{۰},y_{۰},z_{۰})$ تا صفحهٔ D به معادلهٔ $ax+by+cz+d=۰$ برابر است با:

$$AH=\frac{|ax_{۰}+by_{۰}+cz_{۰}+d|}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}}} \qquad (۱)$$



(شکل ۲)

اکنون به کمک رابطه (۱) و این که $AH=AH'$ خواهیم داشت:

$$AH=AH' \Rightarrow \frac{|ax+by+cz+d|}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}}}=\frac{|a'x+b'y+c'z+d|}{\sqrt{a'^{۲}+b'^{۲}+c'^{۲}}}$$

که از این جا معادله‌های دو صفحه $D_۱$ و $D_۲$ (شکل ۱) یعنی صفحه‌های نیمساز به دست می‌آید.

مثال ۱. مکان هندسی نقاطی از فضا را بیابید که از دو صفحه به معادله‌های زیر به یک فاصله باشند.

$$D: ۴x-z+۱=۰$$
$$D': ۲x-۳y+۲z-۳=۰$$

حل. دو صفحه D و D' متقاطع هستند و مکان هندسی نقاطی که از دو صفحه به یک فاصله باشند، همان صفحه‌های نیمساز فرجه‌های بین دو صفحه است.

$$\frac{|۴x-z+۱|}{\sqrt{۱۷}}=\frac{|۲x-۳y+۲z-۳|}{\sqrt{۱۷}}$$
$$\Rightarrow ۴x-z+۱=\pm(۲x-۳y+۲z-۳)$$

معادله‌های صفحه‌های نیمساز عبارتند از:

$$\begin{cases} D_۱: ۲x+۳y-۳z+۴=۰ \\ D_۲: ۶x-۳y+z-۲=۰ \end{cases}$$

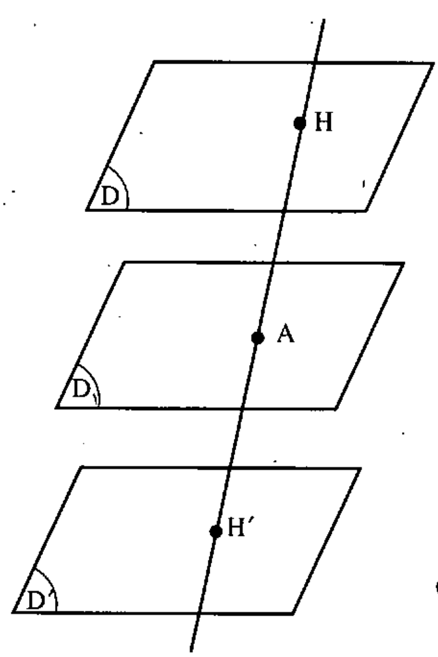
فعالیت ۱

در مثال قبل نقطهٔ دلخواه A را روی صفحه $D_۱$ و نقطهٔ دلخواه B را روی صفحه $D_۲$ در نظر بگیرید، سپس فاصلهٔ هریک آن از نقاط را تا دو صفحهٔ D و D' به دست آورید. نقاط دلخواه دیگری را روی صفحه‌های $D_۱$ و $D_۲$ در نظر بگیرید و فاصلهٔ آن‌ها را تا دو صفحهٔ D و D' محاسبه کنید. به چه نتیجه‌ای می‌رسید؟

۲. صفحه نیمساز دو صفحه موازی

دو صفحه موازی به معادله‌های $D: ax+by+cz+d=۰$ و $D': ax+by+cz+d'=۰$ را در نظر بگیرد. مکان هندسی نقاطی از فضا که از این دو صفحه به یک فاصله هستند، صفحه‌ای موازی با این دو صفحه است که درست در وسط دو صفحه موازی قرار دارد که آن را صفحه نیمساز دو صفحه موازی در نظر می‌گیریم. در این حالت معادلهٔ صفحه نیمساز برابر است با:

$$D_۱: ax+by+cz+\frac{۱}{۲}(d+d')=۰ \qquad (۲)$$



(شکل ۳)

فعالیت ۲

دو صفحه موازی به معادله‌های $D: ax+by+cz+d=۰$ و $D': ax+by+cz+d'=۰$ را در نظر بگیرید و به کمک رابطه (۱)، درستی رابطهٔ (۲) را تحقیق کنید.

مثال۲. مکان هندسی نقاطی از فضا را بیابید که از دو صفحه بر معادله های زیر به یک فاصله باشد.

$D: 3x - y + 2z - 1 = 0$

$D': -6x + 2y - 4z - 10 = 0$

حل. دو صفحه با هم موازیند، زیرا:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{N} = (3,-1,2)\\ \vec{N'} = (-6,2,-4)\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{N'} = -2\vec{N}$$

مکان هندسی فوق، صفحه‌ای است موازی با D و 'D به طوری که در وسط آن‌ها قرار دارد. برای یافتن معادلهٔ صفحهٔ نیمساز ابتدا بردارهای نرمال دو صفحه D و 'D را به یک صورت تبدیل کرده، سپس از رابطهٔ (۲) استفاده می کنیم.

دو طرف معادلهٔ خط 'D را بر ۲- تقسیم می کنیم،

$D': 3x - y + 2z + 5 = 0$

با مقایسه معادله های دو خط D و 'D و رابطه (۲) ملاحظه می‌کنیم که:

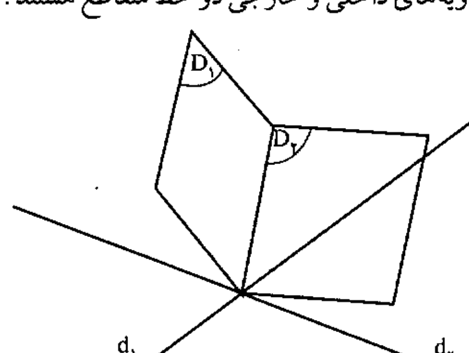
$a = 3$ و $b = -1$ و $c = 2, d = -1$ و $d' = 5$

در نتیجه معادلهٔ صفحه نیمساز به صورت زیر است:

$$D_1: 3x - y + 2z + \frac{1}{2}(-1+5) = 0$$
$$\Rightarrow D_1: 3x - y + 2z + 2 = 0$$

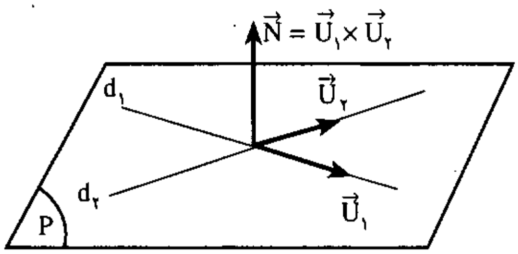
۳. صفحه نیمساز دو خط متقاطع در فضا

هرگاه d_1 و d_2 دو خط متقاطع در فضا باشند، مکان هندسی نقاطی از فضا که از این دو خط به یک فاصله باشند، دو صفحهٔ متمایز D_1 و D_2 است (شکل ۴) که صفحه‌های نیمساز زاویه های داخلی و خارجی دو خط متقاطع هستند.



(شکل ۴)

برای یافتن معادله های صفحه های نیمساز D_1 و D_2، ابتدا معادلهٔ صفحهٔ P را که شامل دو خط متقاطع است، پیدا می کنیم.

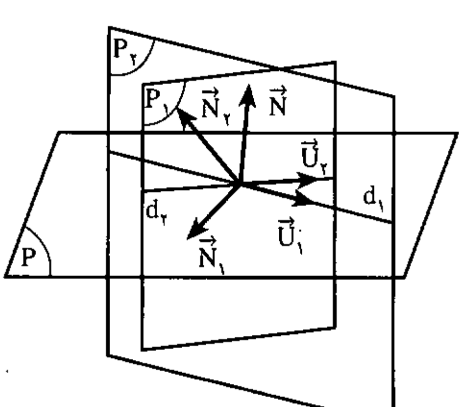


(شکل۵)

سپس معادله های دو صفحه P_1 و P_2 را که به ترتیب شامل خط های d_1 و d_2 و بر صفحهٔ p عمود هستند، محاسبه می‌کنیم. واضح است که d_1 و d_2 به ترتیب فصل مشترک دو صفحه P_1 و P_2 با صفحه p هستند. اگر $\vec{N}_1$ و $\vec{N}_2$ بردارهای نرمال دو صفحه P_1 و P_2 باشند و $\vec{N}$ بردار نرمال صفحه p و $\vec{U}_1$ و $\vec{U}_2$ به ترتیب بردارهای هادی دو خط d_1 و d_2 باشند، داریم:

$$\begin{cases}\vec{N}_1 \perp \vec{N}\\ \vec{N}_1 \perp \vec{U}_1\end{cases} \Rightarrow \vec{N}_1 = \vec{N} \times \vec{U}_1$$

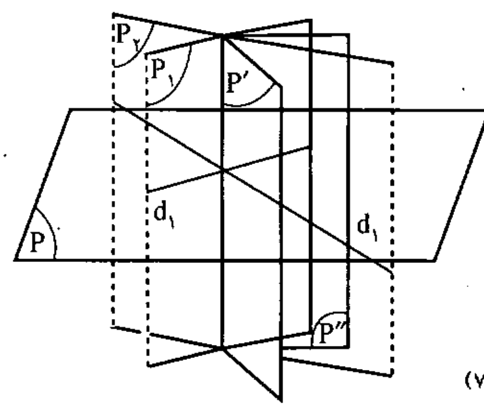
$$\begin{cases}\vec{N}_2 \perp \vec{N}\\ \vec{N}_2 \perp \vec{U}_2\end{cases} \Rightarrow \vec{N}_2 = \vec{N} \times \vec{U}_2$$



(شکل۶)

اکنون صفحه‌های نیمساز فرجه‌های بین دو صفحه P_1 و P_2 همان صفحه‌های نیمساز دو خط متقاطع d_1 و d_2 است.

در شکل (۷) دو صفحه p' و p'' صفحه‌های نیمساز دو خط d_1 و d_2 هستند



(شکل۷)

مثال: مکان هندسی نقاطی را از فضای R^3 بیابید که از دو خط به معادله‌های زیر به یک فاصله باشند؟

$$d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{-1}$$

$$d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{2}$$

ابتدا معادلهٔ صفحه p را به‌دست می‌آوریم که شامل دو خط متقاطع d_1 و d_2 است، برای این منظور بردار نرمال صفحه p را محاسبه می‌کنیم، اگر $\vec{U}_1$ و $\vec{U}_2$ به ترتیب بردارهای هادی دو خط d_1 و d_2 و $\vec{N}$ بردار نرمال صفحه p باشند، داریم:

$$\begin{cases}\vec{N}\perp\vec{U}_1\\ \vec{N}\perp\vec{U}_2\end{cases} \Rightarrow \vec{N} = \vec{U}_1 \times \vec{U}_2$$

$$\Rightarrow \vec{N} = (2,1,-1)\times(1,-2,2)$$

$$\Rightarrow \vec{N} = (0,-5,-5) \parallel (0,1,1)$$

اکنون با در نظر گرفتن نقطهٔ دلخواه $A(1,0,0)$ روی خط d_2 و بردار نرمال $\vec{N}$، معادلهٔ صفحه p را می‌نویسیم:

$$P: 0(x-1)+1(y-0)+1(z-0)=0 \Rightarrow P: y+z=0$$

در این مرحله باید معادله‌های دو صفحه P_1 و P_2 را پیدا کنیم که شامل دو خط d_1 و d_2 هستند و بر صفحه p عمود می‌باشند، برای این منظور اگر $\vec{N}_1$ و $\vec{N}_2$ بردارهای نرمال دو صفحه به ترتیب P_1 و P_2 باشند، داریم:

$$\begin{cases}\vec{N}_1\perp\vec{U}_1\\ \vec{N}_1\perp\vec{N}\end{cases} \Rightarrow \vec{N}_1 = \vec{N}\times\vec{U}_1$$

$$\Rightarrow \vec{N}_1 = (0,1,1)\times(2,1,-1)$$

$$\Rightarrow \vec{N}_1 = (-2,2,-2) \parallel (-1,1,-1)$$

$$\begin{cases}\vec{N}_2\perp\vec{U}_2\\ \vec{N}_2\perp\vec{N}\end{cases} \Rightarrow \vec{N}_2 = \vec{N}\times\vec{U}_2$$

$$\Rightarrow \vec{N}_2 = (0,1,1)\times(1,-2,2)$$

$$\Rightarrow \vec{N}_2 = (4,1,-1)$$

در این مرحله با نقطه دلخواه $B(2,-2,2)$ روی خط d_1 و بردار نرمال $\vec{N}_1$، معادلهٔ صفحهٔ P_1 و با نقطهٔ دلخواه $A(1,0,0)$ روی خط d_2 و بردار نرمال $\vec{N}_2$، معادلهٔ صفحهٔ P_2 را می‌نویسیم:

$$p_1: -x+y-z=-6$$

$$p_2: 4x+y-z=4$$

هم‌اکنون با داشتن معادلهٔ دو صفحه P_1 و P_2، معادله‌های صفحه‌های نیمساز فرجه‌های بین این دو صفحه را می‌نویسیم که این صفحه‌ها یعنی p' و p''، همان صفحه‌های نیمساز دو خط d_1 و d_2 هستند.

$$\frac{|-x+y-z+6|}{\sqrt{3}} = \frac{|4x+y-z-4|}{\sqrt{18}}$$

$$P': \sqrt{6}(-x+y-z+6) = 4x+y-z-4$$

$$\Rightarrow P': (-4-\sqrt{6})x + (\sqrt{6}-1)y + (1-\sqrt{6})z + 10 = 0$$

$$P'': \sqrt{6}(-x+y-z+6) = -(4x+y-z-4)$$

$$\Rightarrow P'': (4-\sqrt{6})x + (1+\sqrt{6})y - (\sqrt{6}+1)z + 2 = 0$$

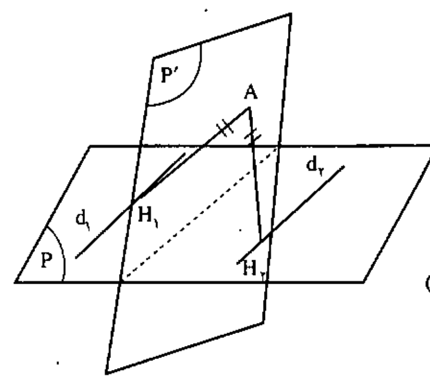
فعالیت ۳

در مثال قبل نقطهٔ دلخواه A_1 را روی صفحه p' و نقطهٔ دلخواه A_2 را روی صفحه p'' در نظر بگیرید، سپس فاصلهٔ

هریک از نقاط را تا دو خط d_1 و d_2 به‌دست آورید. نقاط دلخواه دیگری را روی صفحه‌های P' و P'' در نظر بگیرید و فاصلهٔ آن‌ها را تا دو خط d_2 و d_1 محاسبه کنید، به چه نتیجه‌ای می‌رسید؟

۴. صفحه نیمساز دو خط موازی

دو خط موازی d_1 و d_2 را در نظر بگیرید، مکان هندسی نقاطی از فضا که از این دو خط به یک فاصله باشند، صفحه‌ای است عمود بر صفحه P (صفحهٔ شامل دو خط d_1 و d_2) و درست در وسط دو خط و موازی آن‌ها قرار دارد که به آن صفحه نیمساز دو خط موازی می‌گوییم. در شکل (۸) صفحه نیمساز دو خط موازی d_1 و d_2 یعنی صفحه P'، رسم شده است.



(شکل۸)

مثال. مکان هندسی نقاطی از فضا را بیابید که فاصلهٔ آن تا دو خط به معادله‌های زیر برابر باشند؟

$$d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{-1}$$

$$d_2: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{-1}$$

حل. **یادآوری**: در هندسه تحلیلی پیش دانشگاهی آموخته‌ایم که برای محاسبه فاصلهٔ نقطهٔ A از خط d، ابتدا نقطهٔ دلخواه A_0 را روی خط d در نظر می‌گیریم، سپس با فرض این‌که $\vec{U}$ بردار هادی خط d باشد، رابطهٔ زیر فاصله نقطهٔ A را از خط d مشخص می‌کند:

$$D = \frac{\left|\overrightarrow{AA_0} \times \vec{U}\right|}{|\vec{U}|} \qquad (۳)$$

اکنون فرض کنیم $A(x,y,z)$ نقطه‌ای از مکان هندسی نقاطی باشند که فاصله آن‌ها از دو خط موازی d_1 و d_2 برابر باشند، بنابراین طبق شکل (۸) داریم:

$AH_1 = AH_2$

اکنون برای محاسبه AH_1 یعنی فاصلهٔ نقطهٔ $A(x,y,z)$ از خط d_1، ابتدا نقطهٔ دلخواه $A_0(1,-2,0)$ را روی d_1 در نظر می‌گیریم، سپس به کمک رابطهٔ (۳) داریم:

$$\overrightarrow{AA_0} = (x-1, y+2, z)\ ,\ \vec{u} = (1,-2,-1)$$

$$AH_1 = \frac{\left|\overrightarrow{AA_0} \times \vec{U}\right|}{|\vec{U}|} = \frac{|(-y+2z-2, z+x-1, -2x-y)|}{\sqrt{6}}$$

همچنین برای محاسبه AH_2، یعنی فاصلهٔ نقطهٔ $A(x,y,z)$ از خط d_2، نقطهٔ دلخواه $A_1(0,1,-1)$ را روی d_2 در نظر می‌گیریم، بنابراین داریم:

$$\overrightarrow{AA_1} = (x, y-1, z+1)\ ,\ \vec{u} = (1,-2,-1)$$

$$AH_2 = \frac{\left|\overrightarrow{AA_1} \times \vec{U}\right|}{|\vec{U}|} = \frac{|(-y+2z+3, z+x+1, -2x-y+1)|}{\sqrt{6}}$$

از آن‌جا که $AH_1 = AH_2$ و انجام عملیات جبری، معادلهٔ صفحه نیمساز دو خط موازی d_1 و d_2 به دست می‌آید:

$P': 2y - 4z = 1$

فعالیت ۴.

نقطه‌ای دلخواه روی صفحه P' در مثال قبل در نظر بگیرید و فاصلهٔ این نقطه را با استفاده از رابطهٔ (۳) تا دو خط d_1 و d_2 به‌دست آورید، سپس نقاط دلخواه دیگری را روی صفحه P' اختیار کنید و فاصله‌های آن‌ها را تا دو خط d_1 و d_2 محاسبه کنید. به چه نتیجه‌ای می‌رسید؟

ماتریس وقوع گراف جهت‌دار

احسان یارمحمدی

هنگامی که درمورد نظریه گراف[1] گفت‌وگویی صورت می‌گیرد، بدون شک اوّلین مطلبی که به ذهن مخاطبان می‌رسد، این است که گراف‌ها اغلب به صورت یک مدل ریاضی هستند که در قالب یک نمودار[2] یا طرح هندسی به نمایش درمی‌آیند، ولی در عمل برای نمایش تصویری یک گراف بر روی کاغذ با مرتبه و اندازهٔ بزرگ که شامل نقاط و خطوط بسیار متعددی است، دچار مشکل می شویم. استفاده از ماتریس‌ها این مشکل را از بین می‌برد و کمک ارزنده‌ای را در درک بهتر گراف و مفاهیم در رابطه با آن‌ها به خواننده عرضه می‌کند.

از جیمز ژوزف سیلوستر[3] (۱۸۹۷-۱۸۱۴) ریاضیدان برجستهٔ انگلیسی تبار، که نخستین مجلهٔ امریکایی مختص تحقیقات ریاضی را با نام American Journal of Mathematics بنیان نهاد و در پیشبرد نظریهٔ ماتریس‌ها[4] کارهای مهم و اساسی را انجام داد، می‌توان نام برد.

از اوایل سال‌های دههٔ سوم قرن بیستم میلادی، نگرشی جدید در سایهٔ یک نظم ریاضی که کاربرد فراوانی در زندگی روزمرهٔ دنیای مدرن داشت، بر نظریهٔ گراف ایجاد شد، که پیدایش و پیشرفت رایانه[5] و علوم مربوط به آن، زمینه را برای نمایان‌تر شدن کاربرد نظریهٔ گراف در عالم هستی فراهم کرد.

به هر گراف جهت‌دار $G=(V,E)$ از مرتبهٔ p و اندازهٔ q می‌توان ماتریس‌های گوناگونی را که با نمودار گراف G در تناظر است، نسب داد. یکی از این ماتریس‌ها، **ماتریس وقوع گراف جهت‌دار** G[6] بوده که موضوع این مقاله است؛ اما پیش از این‌که به این نوع از ماتریس‌ها و ویژگی‌های آن‌ها بپردازیم، لازم است که به برچسب‌گذاری در گراف‌ها اشاره داشته باشیم.

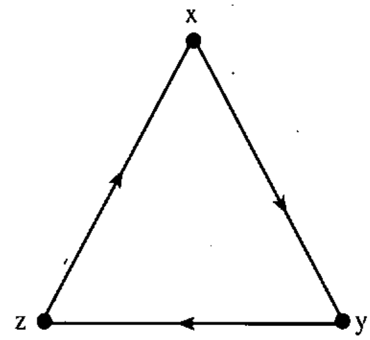
برای هر گراف $G=(V,E)$ از مرتبهٔ p و اندازهٔ q که دارای مجموعه رأس‌های $V=\{v_1,v_2,\dots,v_p\}$ و مجموعهٔ یال‌های $E=\{e_1,e_2,\dots,e_q\}$ است، نموداری متناظر با ویژگی‌های گراف G می‌توان رسم کرد که در آن نمودار هر رأس از مجموعهٔ رأس‌های $V=\{v_1,v_2,\dots,v_p\}$ و هر یال از مجموعه یال‌های $E=\{e_1,e_2,\dots,e_q\}$ انتخاب شده است. این عمل را در اصطلاح، برچسب‌گذاری رأس‌ها و یال‌های گراف G می‌نامیم.

فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف جهت‌دار از مرتبهٔ p و اندازهٔ q باشد، ماتریس وقوع گراف جهت‌دار G را که با $M(G)$ نمایش می دهیم، به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$M(G)=[mij]_{p\times q} \quad \text{و} \quad mij=\begin{cases} -1 & \text{اگر یال جهت‌دار } e_j \text{ از رأس } v_i \text{ خارج شود} \\ 1 & \text{اگر یال جهت‌دار } e_j \text{ بر رأس } v_i \text{ وارد شود} \\ 0 & \text{اگر یال جهت‌دار } e_j \text{ بر رأس } v_i \text{ واقع نباشد} \end{cases}$$

تذکر: این تعریف به صورت دیگری هم مطرح می‌شود، به گونه‌ای که جای ۱ و ۱- در بالا عوض شود.

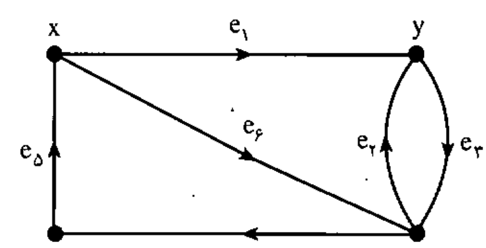
مثال. نمودار گراف جهت‌دار G=(V,E) شکل زیر است.



بنابراین ماتریس وقوع این گراف جهت‌دار به صورت

$$M(G)=\begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} (x,y) & (y,z) & (z,x) \end{array}\\ \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}\end{array}$$ است.

مثال. نمودار گراف جهت‌دار G=(V,E) شکل زیر است.



بنابراین ماتریس وقوع این گراف جهت‌دار به صورت زیر است:

$$M(G)=\begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \\ w \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc} e_۱ & e_۲ & e_۳ & e_۴ & e_۵ & e_۶ \end{array}\\ \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۱ & -۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}\end{array}$$

ویژگی‌های ماتریس وقوع گراف جهت دار G=(V,E)

۱. ممکن است تعداد سطرهای ماتریس وقوع گراف، با تعداد ستون‌های آن برابر باشد (مثال۱)؛ یعنی ماتریس وقوع گراف، مربعی باشد یا تعداد سطرهای ماتریس وقوع گراف، با تعداد ستون‌های آن برابر نباشد (مثال۲)؛ یعنی ماتریس وقوع گراف، مستطیلی باشد.

۲. چون در بررسی ماتریس وقوع گراف جهت‌دار موضوع بحث، از برچسب گذاری برای رأس‌ها و یال‌های گراف استفاده می‌کنیم، بنابراین درایه‌های ماتریس وقوع این گراف همواره ۰، ۱و۱- هستند.

اکنون که به ماتریس وقوع گراف جهت‌دار G و ویژگی‌های آن آشنا شدیم، در مورد این گراف و ماتریس وقوع مربوط به آن، چند قضیه را مطرح می‌کنیم.

قضیهٔ۱

گراف جهت‌دار G=(V,E) با درجهٔ ورودی $\text{In deg}(v_i)$ دارای ماتریس وقوع M(G) است؛ به طوری که مجموع درایه‌های ۱ در سطر iام ماتریس M(G)، برابر با درجهٔ ورودی رأس v_i است.

برهان

هر عدد ۱ که در سطر iام وجود دارد، نشان می‌دهد که بر رأس v_i یک یال وارد شده است. بنابراین تعداد یک‌های سطر iام، برابر تعداد یال‌هایی است که بر رأس v_i وارد شده‌اند. در نتیجه، مجموع این یک‌ها، درجهٔ ورودی رأس v_i را نشان می‌دهد.

قضیهٔ۲

گراف جهت‌دار G=(V,E) با درجهٔ خروجی $\text{Out deg}(v_i)$ دارای ماتریس وقوع M(G) است؛ به‌طوری که مجموع درایه‌های ۱- در سطر iام ماتریس M(G)، برابر با درجهٔ خروجی رأس v_i است.

برهان

هر عدد ۱- که در سطر iام وجود دارد، نشان می‌دهد که از رأس v_i یک یال خارج شده است. بنابراین تعداد منفی یک‌های سطر iام، برابر تعداد یال‌هایی است که از رأس v_i خارج شده‌اند. در نتیجه، مجموع این منفی یک‌ها، درجهٔ خروجی رأس v_i را نشان می‌دهد

قضیهٔ۳

گراف جهت‌دار $G=(V,E)$ از مرتبهٔ p، دارای ماتریس وقوع $M(G)$ است؛ به طوری که مجموع تمام درایه‌های یک سطرهای ماتریس $M(G)$ برابر $\sum_{i=1}^{p} \text{In}\deg(v_i)$ است.

برهان

مجموع درایه‌های یک سطر iام ماتریس $M(G)$ برابر با درجهٔ ورودی رأس v_i است. بنابراین مجموع تمام درایه‌های یک سطرهای ماتریس $M(G)$، برابر با $\sum_{i=1}^{p} \text{In}\deg(v_i)$ است.

قضیهٔ۴

گراف جهت‌دار $G=(V,E)$ از مرتبهٔ p دارای ماتریس وقوع $M(G)$ است؛ به‌طوری که مجموع تمام درایه‌های منفی یک سطرهای ماتریس $M(G)$، برابر $\sum_{i=1}^{p} \text{Out}\deg(v_i)$ است.

برهان

مجموع درایه‌های منفی یک سطر iام ماتریس $M(G)$، برابر با درجهٔ خروجی از رأس v_i است. بنابراین مجموع تمام درایه‌های منفی یک سطرهای ماتریس $M(G)$، برابر با $\sum_{i=1}^{p} \text{Out}\deg(v_i)$ است.

قضیهٔ۵

گراف جهت دار $G=(V,E)$ دارای ماتریس وقوع $M(G)$ است؛ به طوری که مجموع درایه‌های ستون jام ماتریس $M(G)$، برابر با صفر است.

برهان

هر عدد یک یا منفی یک که در ستون jام وجود دارد، نشان می دهد که به رأس v_i یک یال وارد یا از رأس v_i یک یال خارج شده است. بنابراین تعداد یک‌های ستون jام، برابر تعداد یال‌هایی است که به رأس v_i وارد شده‌اند و تعداد منفی یک‌های ستون jام، برابر تعداد یال‌هایی است که از رأس v_i خارج شده‌اند. چون هر یال فقط به یک رأس وارد یا فقط از یک رأس خارج می‌شود، در نتیجه مجموع این یک‌ها و منفی یک‌ها برابر با صفر است.

آزمون۱. ماتریس وقوع متناظر با گراف جهت‌دار G به صورت زیر است:

$$M(G) = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \\ w \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (x,y) & (z,y) & (w,y) & (z,w) \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

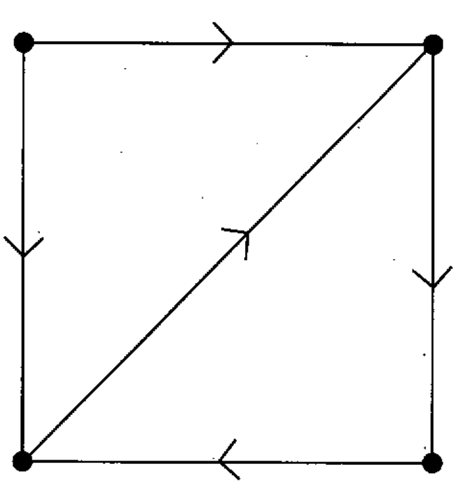
ماکزیمم درجهٔ ورودی رأس گراف G، کدام گزینه است؟

الف) x ‏ ب) y

ج) z ‏ د) w

جواب: گزینهٔ (ب) صحیح است؛ بنابر قضیهٔ ۱.

آزمون۲. تعداد درایه‌های یک ماتریس وقوع گراف جهت‌دار شکل زیر، کدام گزینه است؟



الف) ۱۰ ‏ ب) ۹

ج) ۵ ‏ د) ۴

جواب: گزینهٔ (ج) صحیح است؛ بنابر قضیه‌های ۲ و ۴.

آزمون۳. کدام‌یک از ماتریس‌های زیر، نشان‌دهندهٔ ماتریس وقوع گراف جهت‌دار است؟

الف) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

جواب: گزینهٔ (الف) صحیح است، بنابر قضیهٔ۵.

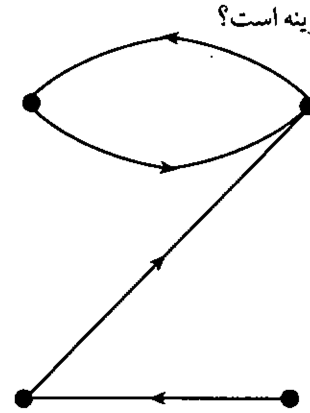
آزمون۴. ماتریس وقوع متناظر با گراف جهت‌دار G به صورت: $M(G)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ است. مجموع درجه‌های ورودی رئوس گراف G کدام گزینه است؟

الف) ۱۶ ب)۱۲

ج) ۸ د) ۴

جواب: گزینهٔ (د) صحیح است؛ بنابر قضیهٔ۳.

آزمون۵. تعداد درایه‌های منفی یک ماتریس وقوع گراف شکل زیر، کدام گزینه است؟



الف) ۱۶ ب) ۱۷

ج) ۴ د) ۳

جواب: گزینهٔ (ج) صحیح است، بنابر قضیهٔ ۳.

آزمون۶. ماتریس وقوع متناظر با گراف جهت‌دار G به صورت زیر است:

$$M(G)=\begin{array}{c|ccc} & (x,y) & (y,w) & (x,w) \\ \hline x & -1 & 0 & -1 \\ y & 1 & -1 & 0 \\ z & 0 & 0 & 0 \\ w & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

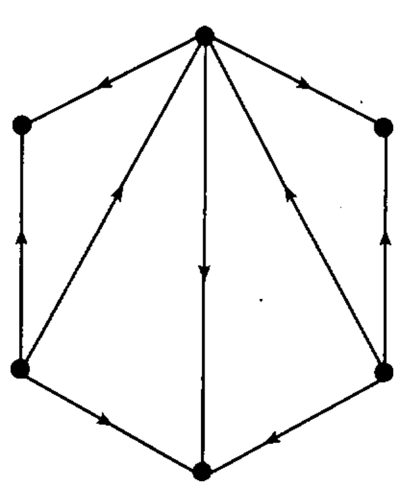
ماکزیمم درجهٔ خروجی رأس گراف G، کدام گزینه است.

الف) x ب) y

ج) z د) w

جواب: گزینهٔ (الف) صحیح است؛ بنابراین قضیهٔ ۲.

آزمون۷. تعداد درایه‌های صفر ماتریس وقوع گراف شکل زیر، کدام گزینه است؟



الف) ۴۵ ب) ۴۲

ج) ۴۸ د) ۳۶

جواب: گزینهٔ (د) صحیح است؛ بنابر قضیه‌های ۲ و ۴.

آزمون۸ . ماتریس مجاورت[7] متناظر با گراف جهت‌دار G به صورت زیر است :

$$A(G)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تعداد درایه‌های صفر ماتریس وقوع گراف G، کدام گزینه است؟

الف) ۸   ب) ۱۲

ج) ۱۶   د) ۲۰

جواب : گزینهٔ (الف) صحیح است؛ بنابر قضیه‌های ۲ و ۴ .

آزمون۹ . ماتریس وقوع متناظر با گراف جهت‌دار G به صورت زیر است :

$$M(G)=\begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} (x,z) & (z,x) \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

کدام گزینه بیانگر رأس ایزوله در گراف G است .

الف) w   ب) z

ج) y   د) x

جواب : گزینهٔ (ب) صحیح است؛ بنابر قضیه‌های ۱ و ۲ .

آزمون ۱۰ . ماتریس وقوع متناظر با گراف جهت‌دار G به صورت زیر است :

$$M(G)=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

اندازهٔ گراف G، کدام گزینه است؟

الف) ۱۰   ب) ۹

ج) ۵   د) ۴

جواب : گزینهٔ (ج) صحیح است؛ بنابر قضیه‌های ۲ و ۴ .

تمرین

۱ . قضیه گراف جهت‌دار $G=(V,E)$ با درجهٔ ورودی $\text{In deg}(v_i)$ و درجهٔ خروجی $\text{Out deg}(v_i)$ دارای ماتریس وقوع $M(G)$ است؛ به‌طوری که مجموع درایه‌های سطر iام ماتریس $M(G)$، برابر با $\text{In deg}(v_i) - \text{Out deg}(v_i)$ است .

۲ . آیا ماتریس وقوع متناظر با گراف جهت‌دار شامل طوقه، G از مرتبهٔ p و اندازهٔ q وجود دارد؟ استدلال خود را به تفصیل بیان کنید .

منابع

[۱] نظریهٔ گراف کلاسیک و مدرن، احسان یارمحمدی، انتشارات .

[۲] درآمدی بر نظریه گراف، رین . ج . ویلسون، ترجمه : جعفر بی‌آزار، انتشارات دانشگاه گیلان .

[3] O.Ore, and R.J.wilson, Graphs and their uses, The Mathematical Association of America, 1990.

[4] R..p.Grimaldi, Discrete and Combinatorial Mathematics: An Applied Introduction, Addison-Wesley 1989.

زیرنویس

1.Graph Theory

2. Diagram

3. James Joseph silvester

4. Matrices Theory

5. Computer

6. Incidence Matrix of a Directed Graph

7. Adjacency Matrix

۴

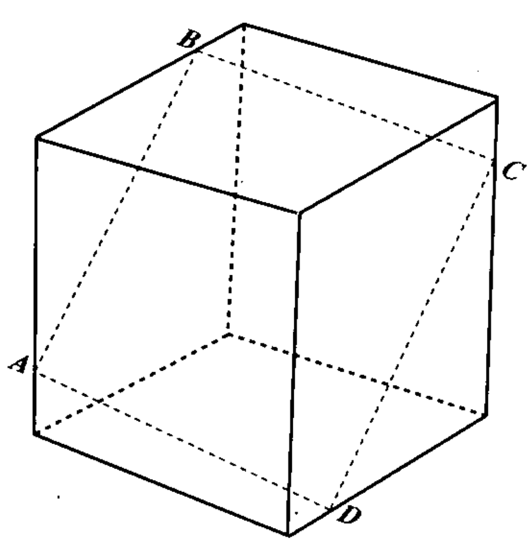
پرویز شهریاری

اتحادها و معادله ها

پیش از آن که به حل معادله و نامعادله بپردازیم، مسأله هایی را می‌آوریم و آن‌ها را حل می‌کنیم. برای حل این مسأله ها، هم از معادله یا دستگاه معادله ها استفاده کرده‌ایم و هم از نامعادله. درواقع، این مسأله ها باید با دقت در صورت آن‌ها و پیدا کردن رابطه‌ای که بین بخش‌های مختلف مسأله وجود دارد، حل می‌شود.

در آغاز به مسأله‌ای که به ظاهر عجیب است، توجه کنید: در زمان «آخرین برشویک سرباز» نوشتهٔ کارل چاپک، نویسندهٔ طنزپرداز چک، دیوانه‌ای وجود دارد که مدعی است در درون کرهٔ زمین، کرهٔ دیگری وجود دارد که به مراتب از کرهٔ زمین بزرگ‌تر است.

ما در این جا ادعای دیگری می‌کنیم که به ظاهر با ادعای «کارل چاپک» چندان تفاوتی ندارد و با وجود این، ادعای درستی است: در مکعب می‌توان تونلی ایجاد کرد که بتوان مکعب بزرگ‌تری را به آن وارد کرد.



چهارضلعی ABCD مربع است؛ زیرا دارای قطرها و ضلع هایی برابر است. نقطه‌های A، B، C و D، یال‌های مکعب اصلی را به نسبت ۳ : ۱ تقسیم می‌کنند. اگر ضلع

مکعب اصلی را واحد بگیریم، ضلع این مربع برابر می‌شود با:

$$\frac{۳}{۴}\sqrt{۲} \approx ۱/۰۶$$

در داخل این مربع می‌توان مربع دیگری ساخت که طول ضلع آن کوچک‌تر از AB و بزرگ‌تر از واحد، یعنی طول ضلع مکعب اصلی، باشد. همین مربع جدید را می‌توان مقطع تونل مورد نظر انتخاب کرد.

اکنون به سراغ مسأله‌هایی می‌رویم که برای حل آن‌ها، هم به معادله نیاز داریم و هم به نامعادله.

مسألهٔ ۱. کسری به صورت نسبت دو عدد طبیعی داریم که مخرج آن یک واحد از مجذور صورت آن کم‌تر است. اگر ۲ واحد به صورت و ۲ واحد به مخرج اضافه کنیم، کسری که به دست می‌آید، از $\frac{۱}{۳}$ بزرگ‌تر است. اگر هم از صورت و هم از مخرج ۳ واحد کم کنیم، کسر از $\frac{۱}{۱۰}$ کوچک‌تر می‌شود؛ ولی همچنان کسری مثبت باقی می‌ماند؛ این کسر را پیدا کنید.

حل: با فرض مثبت بودن m، کسر را برابر $\frac{m}{m^۲-۱}$ می‌گیریم. اگر به طور همزمان ۲ واحد به صورت مخرج اضافه کنیم، کسر حاصل از $\frac{۱}{۳}$ بزرگ‌تر می‌شود؛ یعنی:

$$\frac{m+۲}{m^۲+۱} > \frac{۱}{۳} \Rightarrow m^۲ - ۳m - ۵ < ۰$$

که پاسخ آن برای m عددهای ۱، ۲، ۳ و ۴ است. اگر از صورت و مخرج کسر اصلی ۳ واحد کم کنیم، کسری مثبت و کوچک‌تر از $\frac{۱}{۱۰}$ به‌دست می‌آید:

$$۰ < \frac{m-۳}{m^۲-۴} < \frac{۱}{۱۰}$$

که تنها $m = ۴$ (از جواب‌های پیش) در آن صدق می‌کند.

بنابراین کسر مطلوب برابر $\frac{۴}{۱۵}$ است.

مسألهٔ ۲. سربازان را می‌توان به ترتیبی منظم کرد که در هر ردیف ۲۴ سرباز جا داده شود ولی معلوم شد همهٔ سربازان حاضر نیستند. بنابراین تجدید سازمان کردند؛ به‌نحوی که تعداد ردیف‌ها ۲ واحد کم‌تر و تعداد سربازان هر ردیف ۲۶ نفر بیش‌تر از تعداد جدید ردیف‌ها بود. مطلوب است تعداد سربازان؛ به‌شرطی که اگر همهٔ سربازان گروهان را جمع کنیم، بتوانیم آنان را طوری مرتب کنیم که تعداد سربازان هر ردیف با تعداد ردیف‌ها برابر باشد.

حل: اگر تعداد ردیف‌ها را در تنظیم اول N بگیریم، تعداد سربازان ۲۴N می‌شود. در تجدید سازمان، ردیف‌ها برابر $N-۲$ است. چون در هر ردیف ۲۶ نفر بیش از تعداد ردیف‌ها، سرباز وجود دارد، تعداد سربازان هر ردیف $N+۲۴$ می‌شود. معادله را چه‌طور باید تشکیل داد؟ آیا مسأله تنها یک جواب دارد؟

از جای روشنی آغاز می‌کنیم. در حالت دوم، یعنی ضمن تجدید سازمان، تعداد سربازان کم‌تر است؛ یعنی:

$$۲۴N > (N-۲)(N+۲۴)$$

نامعادله را ساده و منظم می‌کنیم:

$$N^۲ - ۲N - ۴۸ < ۰$$

جواب‌های این نامعادله $۸ > N > -۶$ است. خوب، بعد چی؟ به فرض مسأله توجه می‌کنیم. هنوز از تمامی فرض استفاده نکرده‌ایم. معلوم است که تعداد ردیف‌های N، باید درست و مثبت باشد؛ یعنی جواب N در محدودهٔ تنگ‌تری قرار می‌گیرد: $۸ > N > ۰$

پس N می‌تواند یکی از هفت عدد ۱ تا ۷ باشد.

اکنون اگر شرط آخر را دربارهٔ تعداد سربازان گروهان در نظر بگیریم (تعداد سربازان هر ردیف برابر است با تعداد ردیف‌ها)، به این نتیجه می‌رسیم که تعداد کل سربازان، یعنی ۲۴N باید مجذور کامل باشد.

اگر N را به ترتیب برابر یکی از عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ بگیریم، روشن می‌شود که شرط اخیر تنها برای $N = 6$ برقرار است که در این صورت، تعداد سربازان ۱۴۴ می‌شود.

به این ترتیب، بدون این که معادله‌ای تشکیل داده باشیم، توانستیم تنها جواب آن را پیدا کنیم.

مسألهٔ ۳. برای جابه‌جایی اسب‌ها از چند واگن استفاده کرده‌ایم و در هر واگن ۱۲ اسب جا دادیم. ولی وقتی معلوم شد باید تعداد کم‌تری اسب جابه‌جا شود، ۲ واگن را کنار گذاشتیم و در بقیهٔ واگن‌ها آن‌ها را جا دادیم. تعداد اسب‌ها در هر واگن عددی اول و به اندازهٔ ۱۴ عدد بیش‌تر از تعداد واگن‌ها در حالت جدید شد. تعداد اسب‌ها و واگن‌ها را در حالت اول پیدا کنید.

حل: از آن‌جا که در بار دوم ۲ واگن را کنار گذاشتیم، پس باید تعداد واگن‌های بار اول از ۲ بیش‌تر باشد. تعداد واگن‌ها را در بار اول، برابر N می‌گیریم: $N > 2$. بنابراین تعداد اسب‌ها در بار اول باید برابر ۱۲N باشد. بار دوم ۲ واگن کم کرده‌ایم و در هر واگن ۱۴ اسب بیش‌تر از تعداد واگن‌ها در حالت جدید قرار دادیم؛ زیرا روشن است بار اول بیش‌تر از بار دوم اسب داشته‌ایم؛ پس:

$$12N > (W-2)[(N-2)+14]$$

که پس از ساده کردن به صورت نامعادلهٔ:

$$N^2 - 2N - 24 < 0$$

درمی‌آید که جواب‌های آن $-2 < N < 6$ است و با توجه به شرط $N > 2$ باید داشته باشیم:

$$2 < N < 6$$

یعنی N می‌تواند یکی از عددهای ۳، ۴ و ۵ باشد، که تنها به ازای $N = 5$ عدد $N + 12$، عددی اول است.

پاسخ. در حالت اول ۵ واگن انتخاب کردیم؛ چون گمان می‌کردیم ۶۰ اسب داریم.

مسألهٔ ۴. چند گروه کارگر، لباس‌های کار خود را از انبار گرفتند؛ هر نفر دو دست. هر گروه روی هم ۲۰ دست لباس، بیش‌تر از تعداد گروه‌ها گرفت. اگر تعداد گروه‌ها ۴ واحد بیش‌تر بود و هر گروه ۱۲ دست لباس می‌گرفت، به همه لباس نمی‌رسید. چند دست لباس در انبار وجود دارد؟

حل: تعداد گروه‌ها را x و تعداد کارگران هر گروه را N می‌گیریم. چون هر گروه، ۲۰ دست لباس بیش‌تر از تعداد گروه‌ها لباس گرفته است و به هر کارگر هم ۲ دست لباس رسیده است، پس: $2N = x + 20$

اگر تعداد گروه‌ها ۴ واحد بیش‌تر، یعنی $x + 4$ بود و هر گروه هم ۱۲ دست لباس می‌گرفت، روی هم:

$$12(x+4)$$

تعداد دست لباس می‌شد که مسأله گفته است به همه نمی‌رسید؛ یعنی از ۲Nx بیش‌تر می‌شد؛ بنابراین:

$$12(x+4) > 2Nx$$

به جای ۲N مقدارش $x + 20$ را می‌گذاریم، به دست می‌آید:

$$12(x+4) > (x+20)x$$

که از مرتّب کردن آن به این نامعادله می‌رسیم:

$$x^2 + 8x - 48 < 0$$

سمت چپ این نامعادله تجزیه می‌شود و بنابراین جواب نامعادله به دست می‌آید:

$$(x+12)(x-4) < 0$$

که با توجه به مثبت بودن مقدار x به این جواب می‌رسیم:

$$0 < x < 4$$

یعنی x می‌تواند یکی از عددهای ۱، ۲ و ۳ باشد. ولی پیش از این داشتیم:

$$2N = x + 20 \Rightarrow x = 2N - 20$$

x عددی زوج است: $x = 2(N-10)$، یعنی $x = 2$. تعداد گروه‌ها ۲ بوده است، از آن‌جا:

$$2N = x + 20 = 22 \Rightarrow N = 11$$

و تعداد دست لباس‌ها برابر $2Nx$، یعنی ۴۴ می‌شود.

مسألهٔ ۵. ۹۵ تومان سکه‌های ۵ و ۱۰ تومانی داریم که تعداد آن‌ها از ۱۴ تجاوز نمی‌کند. اگر به جای سکه‌های ۵ تومانی، سکه‌های ۱۰ تومانی و به جای ۱۰ تومانی، سکه‌های ۵ تومانی در اختیار داشتیم، مبلغ مجموع سکه‌ها از $\frac{2}{3}$ مبلغ اصلی بیش‌تر می‌شد. تعداد هر کدام از سکه‌های ۵ تومانی و ۱۰ تومانی را پیدا کنید.

حل: تعداد سکه‌های ۵ تومانی را n و ۱۰ تومانی را m می‌گیریم. باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} 5n + 10m = 95 \\ m + n \leq 14 \\ \frac{3}{2}(10n + 5m) \leq 95 \end{cases}$$

از معادلهٔ اول به دست می‌آید:

$$n = 19 - 2m$$

از نامعادلهٔ دوم، با در نظر گرفتن مقدار n به نتیجهٔ $m \geq 5$ می‌رسیم و از نامعادلهٔ سوم، با همان شرط برای n، به‌دست می‌آید: $m \geq \frac{76}{9}$. درضمن m نمی‌تواند از ۹ بیش‌تر باشد؛ چرا که در این صورت مبلغ کل از ۹۵ تومان بیش‌تر می‌شود.

پاسخ: $m = 9$ و $n = 1$ (۹ سکهٔ ۱۰ تومانی و یک سکهٔ ۵ تومانی).

مسألهٔ ۶. کاری را به یک تراشکار سفارش دادند. قرار شد ۹۰ قطعه از آن را استاد و ۳۵ قطعه را شاگرد انجام دهد. استاد ۳۰ قطعهٔ اول را با سرعتی دو برابر شاگرد خود انجام داد؛ ولی برای تهیهٔ ۶۰ قطعهٔ باقی‌مانده، سرعت کار خود را افزایش داد و هر ساعت دو قطعه بیش‌تر تهیه کرد و کار را دست‌کم یک ساعت بعد از شاگرد تمام کرد. ولی اگر ۳۰ قطعهٔ اول را با همان سرعت ۶۰ قطعه تهیه می‌کرد، کارش دست‌کم نیم ساعت بعد از شاگردش تمام می‌شد. شاگرد در هر ساعت چند قطعه تهیه می‌کند؟

حل: $x > 0$ را تعداد قطعه‌هایی می‌گیریم که شاگرد در هر ساعت آماده می‌کند. استاد ۳۰ قطعهٔ اول را با سرعتی ده برابر شاگرد خود کار می‌کند؛ یعنی آن‌ها را در $\frac{30}{2x}$ ساعت تمام می‌کند. او برای ۶۰ قطعهٔ دیگر، هر ساعت ۲ قطعه بیش‌تر کار می‌کند؛ یعنی ۶۰ قطعه را در $\frac{60}{x+2}$ ساعت تمام می‌کند. چون کار را دست‌کم یک ساعت بعد از شاگردش تمام می‌کند، این نابرابری را داریم:

$$\frac{30}{2x} + \frac{60}{2x+2} \geq \frac{35}{x} + 1 \qquad (1)$$

ولی اگر تمام قطعه‌ها را با همان سرعت آخر تهیه می‌کرد، دست‌کم نیم ساعت بعد از شاگردش از کار فراغت می‌یافت:

$$\frac{90}{2x+2} \geq \frac{35}{x} + \frac{1}{2} \qquad (2)$$

نامعادلهٔ (۱) به این صورت درمی‌آید (به یاد داشته باشیم که مخرج مشترک، یعنی $x(x+2)$ مقداری مثبت است):

$$x^2 - 9x + 20 \leq 0$$

که جواب آن در این نابرابری صدق می‌کند:

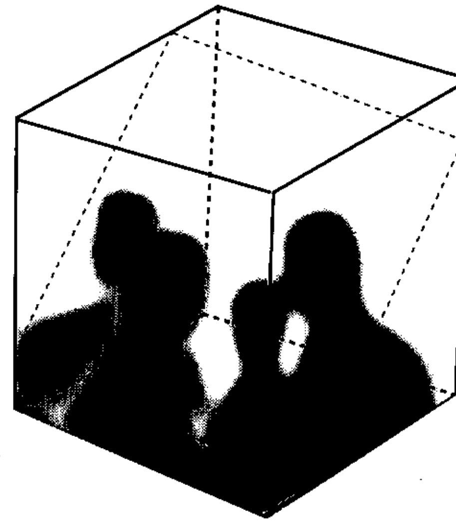
$$4 \leq x \leq 5$$

نامعادلهٔ (۲) به این صورت درمی‌آید:

$$x^2 - 19x + 70 \leq 0$$

که جواب آن چنین است:

$$5 \leq x \leq 14$$



جواب مشترک این دو نامعادله $x=5$ است.

پاسخ: شاگرد ساعتی ۵ قطعه می‌سازد.

مسألهٔ ۷ـ الف. روی تخته سیاه این معادله نوشته شده است:

$$ax^2-bx+c=0$$

دو نفر با هم بازی می‌کنند. اولی ۳ عدد نام می‌برد دومی به دلخواه خود، این عددها را به جای a، b و c می‌گذارد. آیا اولی می‌تواند ۳ عدد نام ببرد که وقتی دومی آن‌ها را به جای a، b و c گذاشت (این‌که چه عددی را به جای a، چه عددی را به جای b و چه عددی را به جای c قرار دهد، به‌عهدهٔ دومی است؛ ولی باید از بین همان سه عددی باشد که اولی نام برده است)، معادله دارای ۲ ریشهٔ گویا شود یا دومی می‌تواند در کار او اخلال ایجاد کند؟

ب. روی تخته سیاه، این معادله نوشته شده است:

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

بازیکن اول یک عدد نام می‌برد و بازیکن دوم آن را هرجا که مایل باشد، به جای یکی از ضریب‌های مجهول قرار می‌دهد. اولی عدد دیگری نام می‌برد و دومی آن را به جای یکی از دو حرف باقی مانده می‌گذارد. سرانجام اولی عددی به جای حرف سوم قرار می‌دهد. آیا اولی می‌تواند عددها را طوری انتخاب کند که معادله دارای ۳ ریشهٔ درست باشد؟

حل: الف. می‌تواند. بازیکن اول وقتی برنده می‌شود که برای a، b و c سه عدد متفاوت نام ببرد که مجموع آن‌ها برابر صفر باشد (مانند ۱، ۳- و ۲). در این صورت، یکی از ریشه‌های معادله برابر $x_1=1$ و دیگری $x_2=\frac{c}{a}$ خواهد بود.

ب) می‌تواند در این جا یکی از راه‌هایی را که بازیکن اول می‌تواند انتخاب کند، می‌آوریم. در آغاز عدد صفر را نام می‌برد. اگر دومی، عدد صفر را به جای c بگذارد، آن‌وقت معادله به صورت:

$$x^3+ax^2+bx=0$$

درمی‌آید. سپس اولی عدد ۲ را نام می‌برد و هر جا که دومی این عدد را بگذارد، اولی در جای باقی‌مانده، عدد ۳- را پیشنهاد می‌کند. معادله به یکی از این دو صورت درمی‌آید:

$$x(x-1)(x-2)=0$$

$$x(x-1)(x+3)=0$$

اگر دومی، صفر را به جای a قرار دهد، معادله چنین می‌شود:

$$x^3+bx+c=0$$

در این صورت اولی عدد $-(3\times4\times5)^2$ را نام می‌برد. اگر دومی آن را به جای b بگذارد، اولی برای c، عدد صفر را انتخاب می‌کند و اگر عددی را که اولی نام برده است، به جای c قرار دهد، اولی b را این مقدار انتخاب می‌کند:

$$b=3^2\times4^2-3^2\times5^2-4^2\times5^2$$

در این صورت، معادلهٔ مفروض به یکی از این حالت‌ها بدل می‌شود:

$$x(x+3\times4\times5)(x-3\times4\times5)=0$$

$$(x+3^2)\ (x+4^2)\ (x-5^2)=0$$

سرانجام، اگر دومی صفر را به جای b قرار دهد، معادله چنین می‌شود:

$$x^3+ax^2+c=0$$

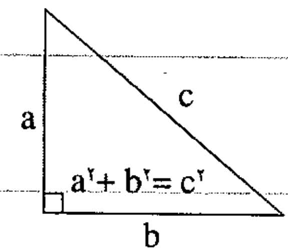
آن وقت، اولی عدد $6^2\times7^3$ را نام می‌برد و سپس برای a، عدد 7^2 یا برای c، عدد $6^8\times7^3$ را. در این صورت، معادله به یکی از این حالت‌ها تبدیل می‌شود:

$$(x+2\times7)\ (x-3\times7)\ (x-6\times7)=0$$

$$(x-3\times6^2\times7^2)\ (x+3\times6^2\times7^2)\ (x+6^3\times7^2)=0$$

امیرسامان ساوه‌درودی

اثبات قضیهٔ فیثاغورس



مقدمه

در هندسهٔ اقلیدسی، قضیهٔ فیثاغورس اهمیت بسیار زیادی دارد؛ زیرا اساس تعریف فاصلهٔ بین دو نقطه است. این مسأله به قدری حائز اهمیت و شایان توجه است که هر فردی که درس هندسه را در مقطع دبیرستان به پایان می‌رساند، برخلاف سایر مفاهیم هندسی، این مفهوم را هیچ‌گاه فراموش نمی‌کند. در مقالهٔ حاضر، اثبات قضیهٔ فیثاغورس ارائه شده است. پیش از آن‌که به اثبات قضیه بپردازیم، نظر خوانندگان محترم را به نکاتی چند پیرامون قضیهٔ فیثاغورس جلب می‌کنیم:

الف. قضیهٔ فیثاغورس روی لوحی از شهر قدیم بابل مربوط به سال‌های ۱۶۰۰ تا ۱۹۰۰ پیش از میلاد کشف شد. نمی‌توان به‌طور دقیق ادعا کرد که آیا این فیثاغورس (۵۶۰-۴۸۰ پیش از میلاد) بود که قضیهٔ مزبور را ثابت کرد یا فرد دیگری از ریاضیدانان معاصر وی. عکس قضیهٔ فیثاغورس نیز درست است؛ به این مضمون: مثلثی که رابطهٔ $a^2+b^2=c^2$ میان ضلع‌های آن برقرار باشد، قائم‌الزاویه است.

ب. در کتابی تحت عنوان «جهان ریاضی»، ۳۶۷ راه‌حل برای اثبات رابطهٔ فیثاغورس ارائه شده است. این کتاب در سال ۱۹۶۸ تجدید چاپ گردید.

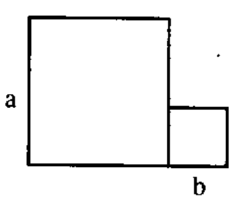
ج. قضیهٔ فیثاغورس را می‌توان به فضاهایی با ابعاد بسیار بسیار گسترده‌تر تعمیم داد. بعضی از صورت‌های تعمیمی آن در تصور نمی‌گنجد.

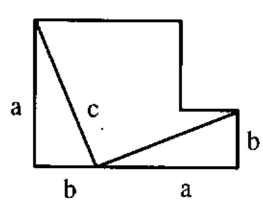
د. قضیهٔ فیثاغورس در مبحث مربوط به فاصلهٔ اقلیدسی و فضاهای هیلبرت و اقلیدسی، نقش مهمی در ریاضی ایفا می‌کند. بسیاری از مسائل و نکات ریاضی، با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس قابل اثبات هستند.

ح. اگر طول سه ضلع مثلث قائم‌الزاویه‌ای، اعداد صحیح باشند، رابطهٔ سه‌گانهٔ فیثاغورس در مورد طول اضلاع مصداق دارد.

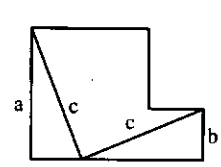
اثبات قضیهٔ فیثاغورس

ابتدا دو مربع به اضلاع a و b را در نظر بگیرید که در کنار یکدیگر قرار دارند. مساحت این دو مربع برابر است با a^2+b^2 (شکل‌های ۲ و ۳). در شکل اولیه مثلثی نبود؛ ولی اکنون در این شکل دو مثلث رسم می‌کنیم. هر دوی آن‌ها دارای ضلع‌های a و b و وتری به نام c هستند. خط مشترک بین دو مربع حذف شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، در این شکل که قدری عجیب به نظر می‌رسد، دو مثلث داریم:

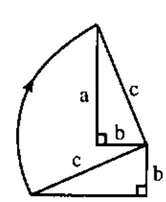




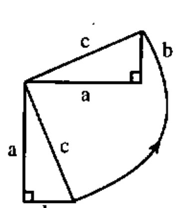
اکنون مثلث‌ها را به صورتی که شکل نشان می‌دهد، به اندازهٔ 90° درجه می‌چرخانیم. مثلث سمت راست را در جهت حرکت عقربه‌های ساعت و مثلث سمت چپ را در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌چرخانیم. همان‌گونه که نشان داده شده، شکل به‌دست آمده، مربعی است با ضلع‌های مجاور c و مساحت c^2.



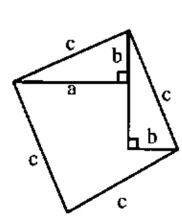
(۱)



(۲)

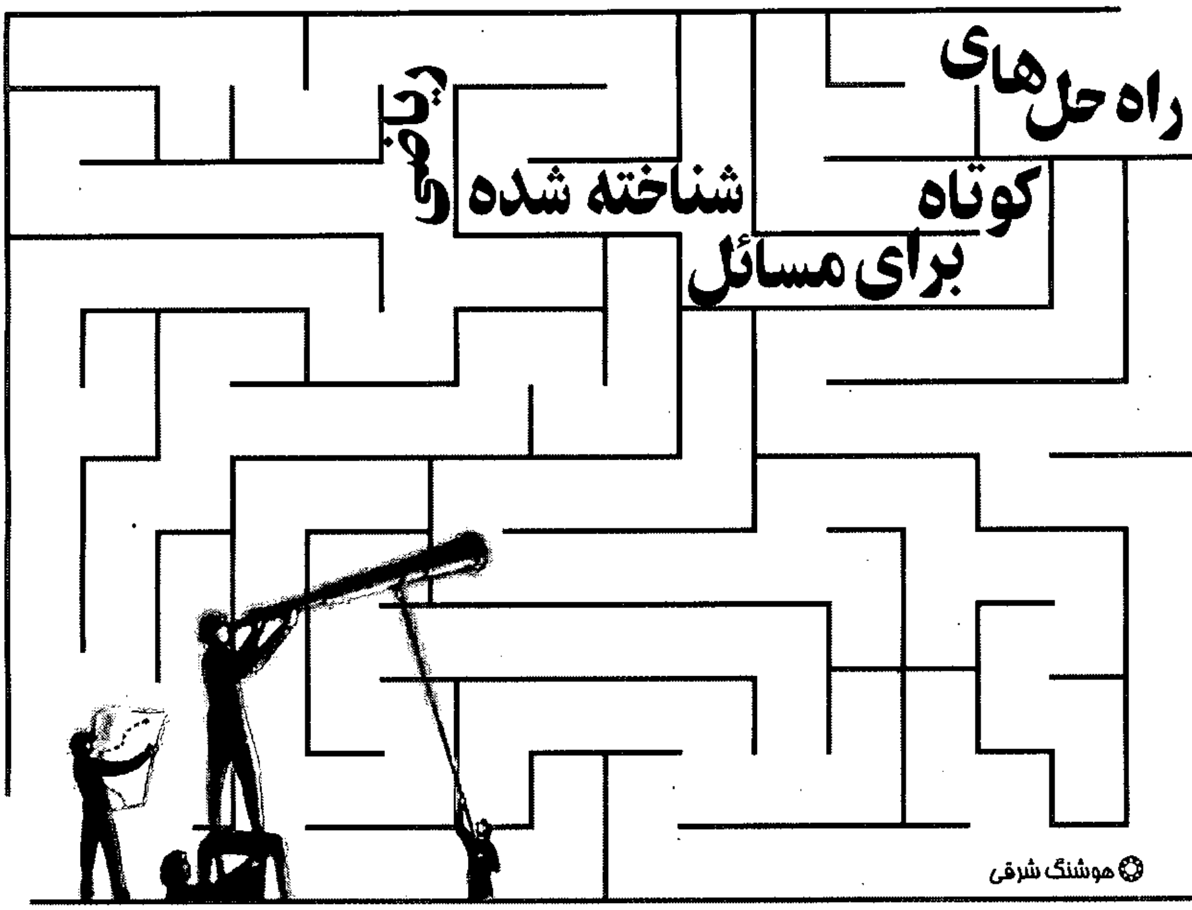


(۳)



(۴)

راه حل‌های کوتاه برای مسائل شناخته شده ریاضی

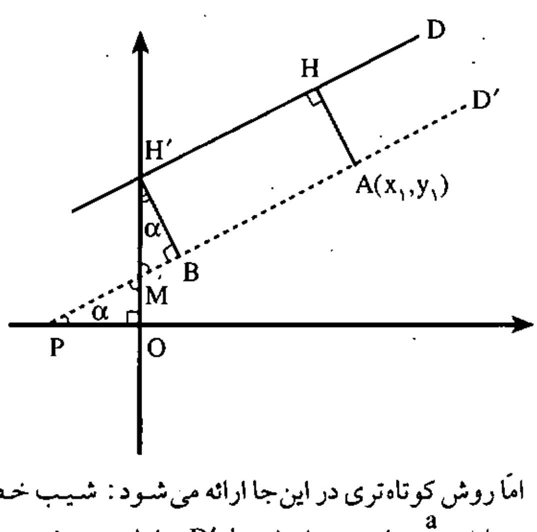


هوشنگ شرقی

بسیاری از مسأله‌های ریاضی را می‌توان با روش‌هایی ابتکاری و از راه‌هایی کوتاه‌تر از روش‌های معمولی حل کرد. توجه به این روش‌ها و اصولاً تلاش برای حل یک مسأله از چند راه مختلف می‌تواند باعث پرورش قوهٔ خلاقیت دانش‌آموز شود و از این حیث اهمیت خاصی دارد. در این‌جا سعی کرده‌ایم به نمونه‌هایی از این مسائل اشاره کنیم:

مثال۱. (محاسبهٔ فاصلهٔ یک نقطه از یک خط در دستگاه مختصات دو بعدی)

دستور تعیین فاصلهٔ نقطهٔ معلوم $A(x_1, y_1)$ از خط به معادلهٔ $D: ax + by + c = 0$ را تقریباً همهٔ دانش‌آموزان دبیرستانی می‌دانند، امّا چگونگی به‌دست آوردن این دستور در بیش‌تر کتاب‌های درسی و کمک‌درسی به شیوه‌ای دشوار بیان شده است. ابتدا معادلهٔ خط راستی که از A عمود بر D رسم می‌شود را نوشته و سپس مختصات نقطهٔ برخورد این خط و D (نقطهٔ H) را یافته و از آن‌جا طول AH را به کمک دستور تعیین طول پاره‌خط، به‌دست می‌آوریم. این روش معمولاً با محاسبات زیاد و دشوار همراه است.



امّا روش کوتاه‌تری در این‌جا ارائه می‌شود: شیب خط D، مساوی $-\frac{a}{b}$ است و از A خط D' را با همین شیب،

موازی D رسم می‌کنیم.

اگر نقطهٔ برخورد D و D′ را با محور yها H′ و M بنامیم و از H′ عمود H′B را بر D′ (و بر D) رسم کنیم، بدیهی است که: $H'B = AH = h$ همچنین زاویه‌ای که خط D′ با محور xها می‌سازد با زاویه‌ای که خط H′B با محور yها می‌سازد برابر است:

$$\angle P = \angle H' = \alpha \qquad \text{(چرا؟)}$$

حال برای یافتن OH′ و OM کافی است که در معادله‌های D و D′، x را مساوی صفر قرار دهیم:

$$ax + by + c = 0\ ,\ \ x = 0 \Rightarrow y = -\frac{c}{b} \Rightarrow OH' = -\frac{c}{b}$$

$$D' \text{ معادله}:\ y - y_1 = -\frac{a}{b}(x - x_1)\ ,\ \ x = 0 \Rightarrow y = y_1 + \frac{a}{b}x_1 \Rightarrow$$

$$OM = y_1 + \frac{a}{b}x_1 \Rightarrow MH' = |OH' - OM|$$

$$= \left|-\frac{c}{b} - y_1 - \frac{ax_1}{b}\right| = \left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{b}\right|$$

همچنین با توجه به شیب خط D واضح است که: $tg\alpha = -\frac{a}{b}$ و از آن‌جا داریم:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}} = \frac{|b|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Delta MH'B:\ \ BH' = MH'.\cos\alpha$$

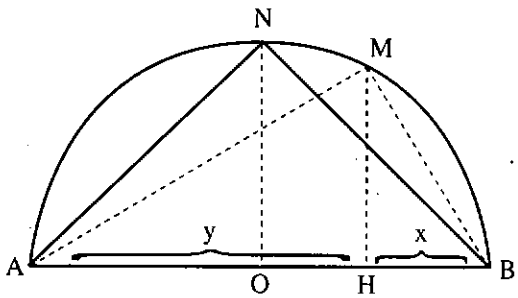
$$BH' = \left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{b}\right| \times \frac{|b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{h = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

مثال ۲. (اثبات نامساوی واسطه‌های حسابی ـ هندسی)

یکی از معروف‌ترین روابط نابرابری، نامساوی واسطه‌های حسابی ـ هندسی می‌باشد: برای هر دو عدد حقیقی و مثبت x و y، داریم $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$.

اثبات این نابرابری به طریقهٔ جبری در کتاب‌های مختلفی ذکر شده است. در این جا یک راه‌حل سادهٔ هندسی برای آن ارائه می‌دهیم.



پاره‌خط AB را به طول x+y در نظر گرفته و نیم‌دایره‌ای به قطر AB رسم می‌کنیم. بدیهی است که برای هر نقطهٔ دلخواه M روی محیط نیم‌دایره مثلث MAB در رأس M قائم‌الزاویه است (چرا؟) لذا اگر عمود MH را بر AB رسم کنیم، خواهیم داشت: $MH^2 = AH.BH$ و یا $MH = \sqrt{AH.BH}$ ، بنابراین MH همواره واسطهٔ هندسی بین AH و BH است. حال اگر O وسط AB باشد، بدیهی است که: $ON = OA = OB = \frac{AB}{2} = \frac{x+y}{2}$

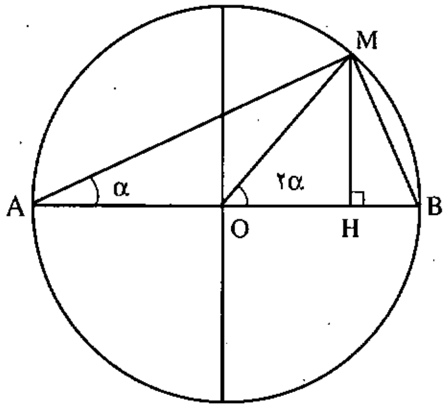
و در نتیجه ON نیز واسطه حسابی AH و BH است و بدیهی است که $ON \geq MH$ بنابراین: $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$

(سؤال: تساوی چه موقع اتفاق می‌افتد؟)

مثال۳. درستی اتحاد مثلثاتی $tg\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$ را نشان دهید.

حل: باز هم از روش هندسی کمک می‌گیریم. در دایرهٔ مثلثاتی شکل زیر می‌توان نوشت:

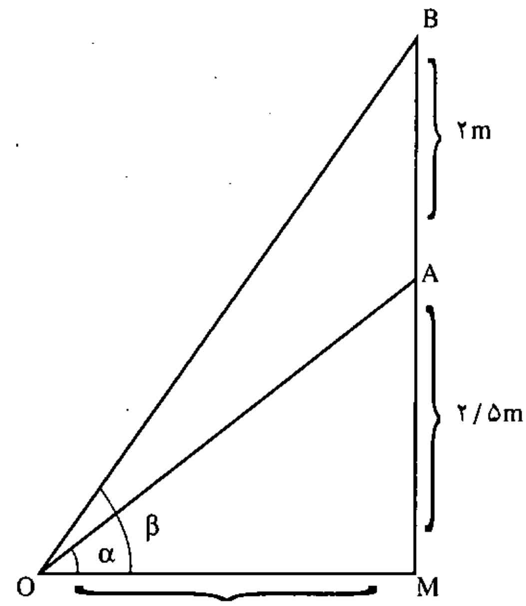
$$tg\alpha = \frac{MH}{AH} = \frac{MH}{OA + OH} = \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \qquad \text{(چرا؟)}$$



تمرین: درستی اتحاد فوق را به روش مثلثاتی ثابت کنید. سپس درستی اتحاد مثلثاتی $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ را به روش هندسی نشان دهید.

مثال ۴. (اثبات قضیهٔ فیثاغورس)

برای قضیهٔ فیثاغورس اثبات‌های بسیاری ارائه شده است، امّا شاید از این اثبات کوتاه‌تر وجود نداشته باشد!



در شکل بالا مربع ABCD به ضلع a و مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ همنهشت AMB، BNC، CPD و AQD به اضلاع زاویهٔ قائمهٔ b و c رسم شده‌اند. شش‌ضلعی MBCPDQ را با مربع ABCD مقایسه کنید. این دو شکل در بخشی ABCPD مشترکند و قسمت‌های دیگر آنها نیز دو مثلث قائم‌الزاویهٔ هم‌مساحت هستند. بنابراین مساحت‌های آنها با هم برابر است. امّا شش‌ضلعی فوق از دو مربع به اضلاع b و c تشکیل شده است، بنابراین: $a^2 = b^2 + c^2$! این روش بسیار زیبا منسوب به فضل حاتم نیریزی ریاضی‌دان ایرانی قرن سوّم هجری می‌باشد.

مثال ۵. (اثبات دو رابطهٔ معروف در آنالیز ترکیبی)

رابطه‌های الف) $c(n,r)=c(n,n-r)$ و ب) $c(n,r-1)+c(n,r)=c(n+1,r)$ که دومی موسوم به اتحاد پاسکال می‌باشد، از مسائل کتاب ریاضیات سال دوّم رشته ریاضی می‌باشند. معمولاً برای اثبات آنها روش مستقیم به کار می‌رود که به‌خصوص در مورد دومی طولانی می‌باشد. امّا در این جا با استفاده از یک روش ساده موسوم به دوگانه شماری مسأله را به سادگی حل می‌کنیم. برای اثبات (الف) می‌گوئیم: مجموعه‌ای از n شئ مختلف را در نظر بگیرید. با انتخاب هر زیرمجموعهٔ r عضوی از این n شئ خودبخود یک زیرمجموعهٔ n-r عضوی در سوی دیگر تشکیل می‌شود. بنابراین تعداد راه‌های انتخاب r شئ از این n شئ معادل است با تعداد راه‌های انتخاب n-r شئ از n شئ یعنی: $c(n,r)=c(n,n-r)$ برای اثبات (ب) فرض کنید n+1 شئ متمایز داشته و بخواهیم زیرمجموعه‌هایی r عضوی از آن انتخاب کنیم. بدیهی است که تعداد انتخاب‌های ما برابر است با: $c(n+1,r)$ امّا به طریقی دیگر می‌توانیم یکی از اشیاء (از n+1 شئ) را جدا کنیم. در این صورت زیرمجموعه‌های r عضوی دو دسته هستند: دسته‌ای که شامل این شئ جدا شده نیستند و تعداد آنها برابر است با:

$c(n,r)$ (چرا؟) و دسته‌ای که شامل این شئ هستند و تعداد آن‌ها برابر است با: $c(n,r-1)$ (چرا؟) بنابراین داریم:

$$c(n,r)+c(n,r-1)=c(n+1,r)$$

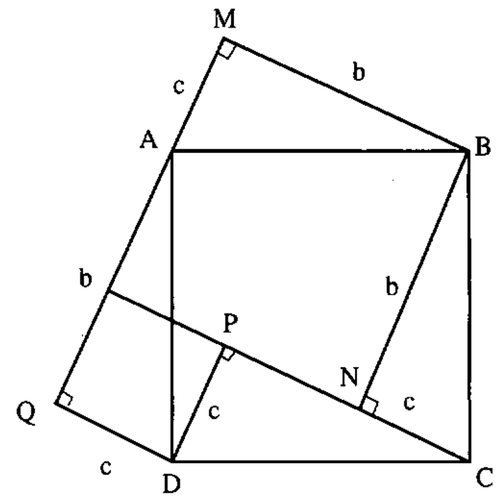
تمرین: اکنون دو شئ a و b را از n+1 شئ جدا کنید و از آن‌جا ثابت کنید:

$$c(n+1,r)=c(n-1,r)+2c(n,r-1)+c(n-1,r-2)$$

آیا می‌توانید دستور بالا را به کمک اتحاد پاسکال ثابت کنید؟

مثال ۶. (حل یک مسأله بهینه‌سازی از حسابان)

یکی از مسائل معروف در کتاب حسابان سال سوم ریاضی (تمرین صفحهٔ ۱۵۹) چنین است: تابلویی که ۲ متر بلندی دارد بر دیواری نصب شده است. پایین تابلو ۲/۵ متر بالاتر از سطح تراز چشم یک ناظر است. ناظر در چه فاصله‌ای از دیوار بایستد تا زاویه‌ای که درچشم ناظر توسط تابلو تشکیل می‌شود، حداکثر باشد؟



راه‌حل معمول، استفاده از تابع هدف و بهینه سازی آن به کمک مشتق می‌باشد. اگر چشم ناظر را نقطهٔ o در نظر بگیریم، تابع هدف زاویهٔ $B\hat{O}A$ است. برای محاسبهٔ این زاویه بر حسب متغیر x (فاصلهٔ ناظر تا دیوار) می‌نویسیم:

$$\angle BOA = \angle BOM = \hat{\beta} - \hat{\alpha}$$

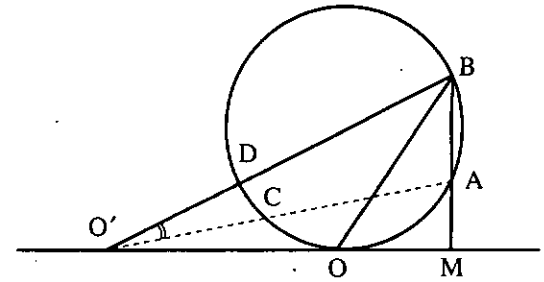
$$tg\alpha = \frac{AM}{OM} = \frac{۲/۵}{x} \ , \ tg\beta = \frac{MB}{OM} = \frac{۴/۵}{x}$$

$$\Rightarrow \alpha = \mathrm{Arctg}\frac{۲/۵}{x} \ , \ \beta = \mathrm{Arctg}\frac{۴/۵}{x}$$

$$\Rightarrow \angle BOA = t = \mathrm{Arctg}\frac{۴/۵}{x} - \mathrm{Arctg}\frac{۲/۵}{x}$$

$$\Rightarrow t' = \frac{-\frac{۴/۵}{x^۲}}{۱+\left(\frac{۴/۵}{x}\right)^۲} - \frac{-\frac{۲/۵}{x^۲}}{۱+\left(\frac{۲/۵}{x}\right)^۲} = ۰$$

و از حل معادلهٔ اخیر که محاسبات نسبتاً زیادی دارد نتیجه می‌شود: $x = \sqrt{۱۱/۲۵}$ امّا در کنار این راه حل، بد نیست که به راه‌حل هندسی زیبا و کوتاه این مسأله نیز اشاره شود.



مطابق شکل از نقاط A و B دایره‌ای می‌گذاریم که در نقطهٔ O بر سطح تراز مماس باشد. (چرا چنین دایره‌ای همواره قابل رسم است و طریقهٔ ترسیم آن چگونه است؟) حال اگر چشم ناظر در هر نقطه روی سطح تراز مانند O′ باشد، نتیجه می‌شود:

$$\angle O' = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}}{۲}$$

بنابراین برای آن‌که این زاویه ماکزیمم شود باید CD مساوی صفر باشد (زیرا کمان AB ثابت است) یعنی باید O′ بر O منطبق شود. از آنجا خواهیم داشت:

$$OM^۲ = MA.MB$$

$$\Rightarrow OM^۲ = ۲/۵ \times ۴/۵ = ۱۱/۲۵ \Rightarrow OM = \sqrt{۱۱/۲۵}$$

مثال۷. (یک مسأله مشهور از تئوری اعداد)

«حاصل ضرب هر n عدد طبیعی متوالی همواره بر n! بخش‌پذیر است.»

برای اثبات این مسأله روش‌های مختلف وجود دارد که اغلب طولانی و دشوار هستند. امّا یک راه کوتاه برای اثبات این مسأله در زیر ارائه می‌شود: عددهای متوالی $a+1, a+2, \ldots, a+n$ را در نظر می‌گیریم، به سادگی می‌توان نوشت:

$$x = (a+۱)(a+۲)\ldots(a+n)$$

$$= \frac{۱\times۲\times۳\times\ldots\times a(a+۱)(a+۲)\ldots(a+n)}{۱\times۲\times۳\times\ldots\times a}$$

$$= \frac{(a+n)!}{a!} = \frac{n!(a+n)!}{n!a!} = n!\binom{a+n}{a} \Rightarrow n!|x$$

مثال ۸. (یک مسأله دیگر از تئوری اعداد)

یکی از قضایای مشهور در تئوری اعداد این است: $(a,b) = 1 \Rightarrow (a^n, b^n) = 1$ برای اثبات این قضیه از روش‌های گوناگون و از جمله قضیهٔ استقرای ریاضی استفاده شده است. امّا یک استدلال ساده چنین است:

اگر $(a,b) = 1$ باشد، یعنی a و b نسبت به هم اول باشند، کسر $\frac{a}{b}$ تحویل‌ناپذیر است. بنابراین $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ نیز تحویل ناپذیر است، لذا $\frac{a^n}{b^n}$ تحویل‌ناپذیر است و در نتیجه: $(a^n, b^n) = 1$.

اشاره

در شمارهٔ قبل ثابت کریم که مقطع مخروطی در حالت کلی دارای معادلهٔ $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ است، سپس دربارهٔ نوع مقطع مخروطی با توجه به ضرایب معادله بالا بحث کردیم، اینک در ادامه داریم:

مقطع مخروطی به معادله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

اکنون دستگاه محورهای مختصات را به اندازهٔ α دوران می‌دهیم، خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\ Y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=X\cos\alpha-Y\sin\alpha\\ y=X\sin\alpha+Y\cos\alpha\end{cases}$$

$$A(X\cos\alpha-Y\sin\alpha)^2+2B(X\cos\alpha-Y\sin\alpha)\times$$
$$(X\sin\alpha+Y\cos\alpha)+C(X\sin\alpha+Y\cos\alpha)^2+$$
$$2D(X\cos\alpha-Y\sin\alpha)+2E(X\sin\alpha+Y\cos\alpha)+F=0$$

اگر معادلهٔ مقطع مخروطی را در دستگاه جدید به صورت زیر فرض کنیم:

$$A_1X^2+2B_1XY+C_1Y^2+2D_1X+2E_1Y+F=0$$

و معادله‌ای که پس از دوران به دست آمده است، ساده کنیم و با معادلهٔ بالا مقایسه کنیم و متحد قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\begin{cases}A_1=A\cos^2\alpha+B\sin2\alpha+c\sin^2\alpha\\ C_1=A\sin^2\alpha-B\sin2\alpha+c\cos^2\alpha\end{cases}$$

اگر طرفین دو رابطهٔ بالا را با هم جمع کنیم، خواهیم داشت:

$$A_1+C_1=A+C$$

یعنی با وجود آن که ضرایب X^2 و Y^2 و XY و X و Y در مقطع مخروطی تغییر کرده‌اند، مجموع $A+C$ در حالت تغییریافته نیز با A_1+C_1 برابر است. همچنین اگر مقدار Δ را در این حالت نیز حساب کنیم، با Δ در حالت اول برابر است. و خلاصه اگر مقدار $\delta=B^2-AC$ را و همچنین اگر

$$J=\begin{vmatrix}A & B\\ B & C\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}C & E\\ E & F\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}A & D\\ D & F\end{vmatrix}$$

را در این حالت حساب کنیم، دوباره مقدارش با حالت اول برابر است. از این رو چهار مقدار ($I=A+C$ و $\delta=B^2-Ac$ و Δ و J)، «اینوار یا نتها یا تغییرناپذیرهای مقاطع مخروطی» نامیده می‌شوند که نقش مهمی در تعیین نوع مقطع مخروطی دارند. در معادلهٔ مقطع مخروطی که پس از

دوران به دست آورده‌ایم، اگر ضریب xy را صفر کنیم، یعنی: $(C-A)\sin 2\alpha + 2BCos2\alpha = 0$، خواهیم داشت:

$$2B\cos 2\alpha = (A-C)\sin 2\alpha \Rightarrow tg2\alpha = \frac{2B}{A-c}$$

اگر از فرمول بالا مقادیر $\sin 2\alpha$ و $\cos 2\alpha$ را محاسبه کنیم، خواهیم داشت:

$$\sin 2\alpha = \pm\frac{2B}{\sqrt{4B^2+(A-C)^2}} \quad \cos 2\alpha = \pm\frac{A-C}{\sqrt{4B^2+(A-C)^2}}$$

با توجه به مقادیر A_1 و c_1 که پس از دوران دستگاه پیدا کرده‌ایم و با توجه به مقادیر $\sin 2\alpha$ و $\cos 2\alpha$ که در بالا محاسبه کردیم، خواهیم داشت:

$$A_1 - C_1 = \pm\sqrt{4B^2+(A-C)^2}$$

از طرف دیگر $A_1 - C_1 = A + C$، بنابراین داریم:

$$(A_1+C_1)^2 - (A_1-C_1)^2 = 4A_1C_1$$
$$\Rightarrow (A+C)^2 - 4B^2 - (A-C)^2 = 4A_1C_1$$
$$(A+C)^2 - (A-C)^2 = 4B^2 = 4A_1C_1$$
$$\Rightarrow 4AC - 4B^2 = 4A_1C_1$$
$$\Rightarrow A_1C_1 = AC - B^2 \quad , \quad A_1 + C_1 = A + C$$

ریشه‌های این معادله A_1 و C_1 هستند:

$$Z^2 - (A+C)Z + (AC-B^2) = 0$$

اکنون مثالی می‌زنیم تا کاربرد معادلهٔ بالا را مشاهده کنیم:

مثال: نوع مقطع مخروطی زیر را تعیین و سپس آن را رسم کنید:

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 + 22x - 6y + 21 = 0$$

حل: اول باید ببینیم که مرکزدار است یا خیر:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 11 \\ 3 & 5 & -3 \\ 11 & -3 & 21 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta = -704$$

چون $\Delta \neq 0$ است، پس مقطع مخروطی مرکزدار است.
حال مختصات مرکز آن را پیدا می‌کنیم:

مرکز مقطع:

$$\omega \left| \begin{array}{l} f'_x = 0 \Rightarrow \\ f'_y = 0 \Rightarrow \end{array} \right. \begin{cases} 10x + 6y + 22 = 0 \\ 6x + 10y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \omega \left| \begin{array}{l} -4 \\ 3 \end{array} \right.$$

پس از آن که $x \to (x-4)$ و $y \to y+3$ تبدیل کنیم، معادلهٔ مقطع مخروطی به صورت‌های زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases} (1) \quad 5x^2 + 6xy + 5y^2 + \dfrac{\Delta}{Ac - B^2} = 0 \\ (2) \quad 5x^2 + 6xy + 5y^2 + f(-4,3) = 0 \end{cases}$$

زیرا هر دو معادله یک حاصل را پدید می‌آورند:

$$f(-4,3) = -32$$

$$5x^2 + 6xy + 5y + \frac{-704}{25-9} = 0$$
$$\Rightarrow 5x^2 + 6xy + y^2 - 32 = 0$$

حال $\delta = B^2 - Ac$ را پیدا می‌کنیم:

$$\delta = B^2 - Ac = 9 - 25 \Rightarrow \delta = -16 < 0$$

چون $\Delta \neq 0$ است، پس مقطع مرکزدار و تجزیه‌نشده است و چون $\delta < 0$ است، مقطع از نوع بیضی است، حال برای پیدا کردن معادلهٔ بیضی در دستگاه قائم می‌توان به دو راه عمل کرد:

۱-

$$z^2 - (A+C)z + AC - B^2 = 0 \Rightarrow z^2 - 10z + 16 = 0$$

$$(z-8)(z-2) = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} z = 8 \\ z = 2 \end{array} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} A_1 = 8 \\ C_1 = 2 \end{array} \right.$$

معادله در دستگاه قائم به صورت زیر است:

$$A_1x^2 + C_1y^2 - 32 = 0$$

$$8x^2 + 2y^2 - 32 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$$ معادلهٔ بیضی در دستگاه قائم

همان‌طوری که مشاهده می‌شود، مقطع مخروطی بیضی قائم، است که به صورت زیر رسم می‌شود:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow o \left| \begin{array}{l} 0 \quad a^2 = 16 \Rightarrow a = 4 \; ; \; c^2 = 12 \Rightarrow c = 2\sqrt{3} \\ 0 \quad b^2 = 4 \Rightarrow b = 2 \end{array} \right.$$

$$A\left|\begin{array}{l}\alpha \\ \beta+a\end{array}\right. \quad A'\left|\begin{array}{l}\alpha \\ \beta-a\end{array}\right. \quad F\left|\begin{array}{l}\alpha \\ \beta+c\end{array}\right. \quad F'\left|\begin{array}{l}\alpha \\ \beta-c\end{array}\right. \quad B\left|\begin{array}{l}\alpha+b \\ \beta\end{array}\right. \quad B'\left|\begin{array}{l}\alpha-b \\ \beta\end{array}\right.$$

$$A\left|\begin{array}{l}0 \\ 4\end{array}\right. \quad A'\left|\begin{array}{l}0 \\ -4\end{array}\right. \quad F\left|\begin{array}{l}0 \\ 2\sqrt{3}\end{array}\right. \quad F'\left|\begin{array}{l}0 \\ -2\sqrt{3}\end{array}\right. \quad B\left|\begin{array}{l}2 \\ 0\end{array}\right. \quad B'\left|\begin{array}{l}-2 \\ 0\end{array}\right.$$

راه دوم: اگر دستگاه مختصات را با توجه به $tg2\alpha = \frac{2B}{A-c}$ که از آن‌جا مقدار α به صورت زیر به دست

می‌آید، دوران دهیم، خواهیم داشت:

$$tg2\alpha = \frac{6}{5-5} = \frac{6}{0} \quad \text{تعریف نشده} \quad \Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y) \end{cases}$$

یعنی به جای Y و X مقادیر جدیدی در معادلهٔ مقطع قرار می‌دهیم. داریم:

$$5\times\frac{2}{4}(X-Y)^2 + 6\times\frac{2}{4}(X^2-Y^2) + 5\times\frac{2}{4}(X+Y) - 32 = 0$$
$$5(X-Y)^2 + 6(X^2-Y^2) + 5(X+Y)^2 - 64 = 0$$
$$\Rightarrow 10(X^2+Y^2) + 6(X^2-Y^2) = 64$$
$$5X^2 + 5Y^2 + 3X^2 - 3Y^2 = 32 \Rightarrow 8X^2 + 2Y^2 = 32$$
$$\Rightarrow \frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{16} = 1$$

یعنی همان معادلهٔ بیضی قائمی که در بالا به دست آوردیم و رسم کردیم. گفتیم معادلهٔ کلی مقاطع مخروطی به صورت ضمنی به شکل زیر است:

$$Ax^2 + 2Bxy + cy^2 + 2Dx + 2Ey = F = 0$$

حال اگر این معادله را بر حسب y مرتب و حل کنیم، معادلهٔ صریح مقطع مخروطی به دست می‌آید. یعنی:

$$Cy^2 + 2(Bx+E)y + Ax^2 + 2Dx + F = 0$$

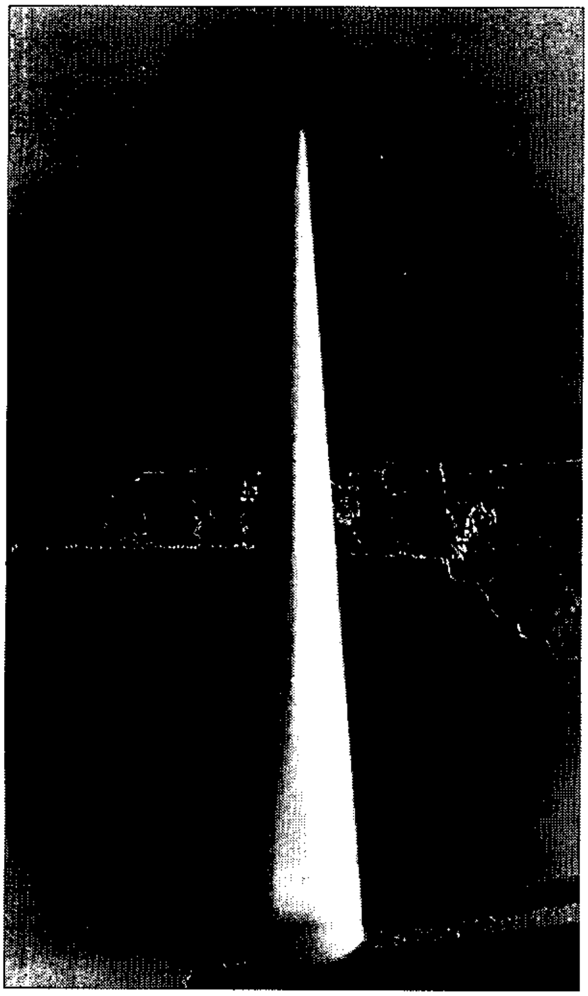
$$y = \frac{-(Bx+E) \pm \sqrt{(Bx+E)^2 - c(Ax^2 + 2Dx + E)}}{C}$$

چون زیر رادیکال را مرتب کنیم، داریم:

$$y = \frac{-(Bx+E) \pm \sqrt{(B^2-AC)x^2 + 2(BE-DC)x + E^2 - CE}}{C}$$

باز می‌توان بحث گذشته را روی مقطع صریح بالا پیاده کرد. این مقطع مخروطی وقتی می‌تواند یکی از مقاطع مخروطی چهارگانهٔ حقیقی باشد که، زیر رادیکال مجذور کامل نباشد و در ضمن دلتای زیر رادیکال بزرگ‌تر از صفر باشد. یعنی $(BE-DC)^2 - (B^2-Ac)(E^2-CE) > 0$ باشد.

و اگر زیر رادیکال مجذور کامل باشد، معادلهٔ دو خط را



داریم و اگر زیر رادیکال منفی باشد، یا دلتای زیر رادیکال منفی باشد، مقاطع مخروطی موهومی خواهیم داشت. حال اگر فرمول بالا را به صورت ساده‌تر بنویسیم، داریم:

$$y = -\underbrace{\frac{B}{C}}_{a}x - \underbrace{\frac{E}{C}}_{b} \pm \sqrt{\underbrace{(\frac{B^2-Ac}{C^2})}_{a'}x^2 + \underbrace{\frac{2(BE-DC)}{C^2}}_{b'}x + \underbrace{\frac{E^2-CE}{C^2}}_{c'}}$$

درنتیجه داریم: $y = ax + b \pm \sqrt{a'x^2 + b'x + c'}$ (به فرض این که زیر رادیکال مثبت باشد.)

۱. اگر $a' > 0$ آن‌گاه، مقطع مخروطی هذلولی است.

۲. اگر $a' < 0$ و $a' \neq -1$ آن‌گاه، مقطع بیضی است.

۳. اگر $a' = -1$ و $a = 0$ آن‌گاه، مقطع مخروطی دایره است.

۴. اگر $a' = 0$ آن‌گاه، مقطع مخروطی سهمی است.

۵. اگر زیر رادیکال مجذور کامل باشد آن‌گاه مقطع مخروطی به یک جفت خط تبدیل می‌شود.


وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی
دفتر انتشارات کمک آموزشی
بانک اطلاعات کتاب های آموزشی
طرح سامان بخشی کتاب های آموزشی با هدف به روز رسانی اطلاعات، از طریق منابع اطلاع رسانی به معرفی کتاب های آموزشی مناسب ویژهٔ دانش آموزان و معلمان می پردازد.
پایگاه اطلاع رسانی سامان کتاب
www.samanketab.com
کتابنامه رشد:
کتابنامه رشد
معرفی کتاب های آموزشی مناسب در پایان کتاب های درسی.
ریاضی
آموزش حرفه و فن
سال سوم
ریاضی
فارسی
دوم دبستان
ریاضی
تعلیمات اجتماعی
تهران: خیابان کریم خان زند
خیابان ایرانشهر شمالی
ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش
دفتر انتشارات کمک آموزشی
دبیرخانه طرح سامان بخشی کتاب های آموزشی
تلفن: ۸۳۰۶۰۷۱

تشریح آرم
هفتمین کنفرانس
آموزش ریاضی ایران

۱. هفتمین کنفرانس ریاضی

۲. کرد

۳. نماد رادیکال

۴. نماد خارج قسمت صحیح

۵. نماد تقسیم

۶. دلتا

۷. مساحت لوزی - چهار برابر مساحت هر یک از مثلث ها است.

۸. نماد قلم

۹. نماد بزرگتر مساوی

۱۰. نماد کوچکتر مساوی

۱۱. نماد ترکیب فصلی و عدد هفت

آرم هفتمین کنفرانس آموزش ریاضی توسط آقای مظفر غربی از فرهنگیان و فرهیختگان شهر سنندج طراحی شده که ایشان در طراحی آن، از مضامین ریاضی و فرهنگی بهره برده‌اند.