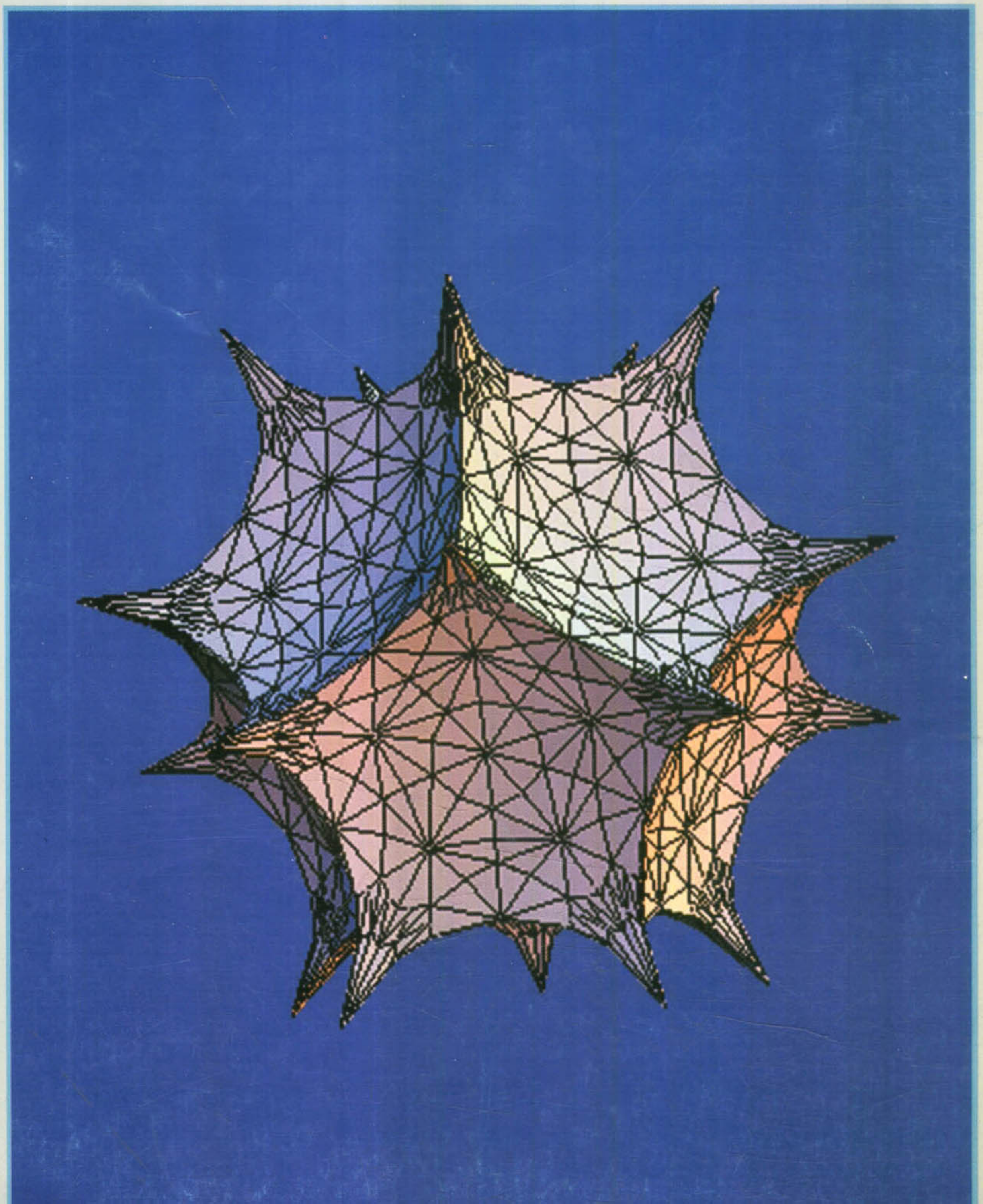
مجلّه ریاضی

برهان

۳۳

برای دانش آموزان دبیرستان

سال دهم، شماره دوم، پاییز ۱۳۷۹، بها ۲۰۰۰ ریال



بسم الله الرحمن الرحیم

سال دهم، پاییز ۱۳۷۹، شمارهٔ دوم

صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه

مدیر مسؤول: عبدالعظیم فریدون

سردبیر: حمیدرضا امیری

مدیر داخلی: میرشهرام صدر

طراح و صفحه آرا: فرشید پیمان پو

طراح جلد: مرضیه رضایی

اعضای هیأت تحریریه:

آقایان: حمیدرضا امیری

احمد قندهاری

هوشنگ شرقی

غلامرضا یاسی پور

محمدهاشم رستمی

میرشهرام صدر

سیدمحمدرضا هاشمی موسوی

(با تشکر از همکاری ارزندهٔ آقای پرویز شهریاری)

مدیر فنی: هوشنگ آشتیانی

چاپ و صحافی: چاپخانه مدرسه

برهان

◀ نشانی: خیابان سپهبدقرنی ،خیابان سپند شرقی ، پلاک ۳۸

◀ تلفن ۶ـ۸۸۹۶۷۶۵ ، ۷۱ـ۸۸۰۴۵۶۸ ، دور نویس(فاکس) : ۸۸۲۰۵۹۹ ، صندوق پستی : ۱۹۴۹/ ۱۴۱۵۵

◀ تلفن امور مشترکین: ۹ـ۸۸۰۰۳۲۴

انتشارات مدرسه

وابسته به وزارت آموزش و پرورش

برهان تمامی دبیران محترم و دانش آموزان عزیز را در زمینه های زیر دعوت به همکاری می کند:

● نگارش مقاله های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتابهای ریاضی دبیرستان) ● طرح مسائل کلیدی (برای دانش آموزان) به همراه حل آنها ● طرح مسائل مسابقه ای (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آنها ● طرح معماهای ریاضی ● نگارش یا ترجمهٔ مقاله های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

برهان هر سه ماه یک شماره منتشر می‌شود

■ هیأت تحریریه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافه مقاله ها آزاد است.

■ مقاله های مجله با رسم الخط انتشارات مدرسه به چاپ خواهد رسید.

■ مقاله های وارده باید خوانا و حتی الامکان کوتاه باشد.

■ مقاله های رسیده مسترد نمی‌شود.

■ استفاده از مطالب مجلّه در کتابها یا مجلّه های دیگر با ذکر دقیق مأخذ بلامانع است.

حرف اوّل

فصل زمستان همیشه، زمستان سال ۵۷ را به یاد می آورد، زمستانی که بهار پیروزی را زودتر از بهار طبیعت به ارمغان آورد. یاد فداکاریها، ایثارها، یکدلی ملّتی که از ظلم و ستم رژیم منفور پهلوی به ستوه آمده و دست به دست هم با مشتهای گره شده در مقابل آتش دژخیمان چون کوه ایستادگی می کردند. راستی شما در آن سال هنوز متولد نشده بودید. ای کاش بودید و قدرت عظیم رهبری امام خمینی و اتحاد و اطاعت مردم از رهبری را می دیدید. مردم حال و هوای عجیبی داشتند هیچ کس فقط به فکر خودش نبود، دست به دست یکدیگر مشکلات هم را برطرف می کردند و اعلامیه های امام خمینی دست به دست می شد و هر روز در مقابل حیله های رژیم تدابیر جدیدی پی ریزی می شد. احساس می کردیم همواره امام (ره) مراقب اوضاع است و اعتماد و توکّل قویی سراپای مردم را فرا گرفته بود. همین اتحاد و یکپارچگی در زمان جنگ تحمیلی و دفاع مقدس به وجود آمد و ملّت، سراپا مقاومت شد و ایثار، سراپا گوش به فرمان امام خمینی و همان مشتها این بار نارنجک و تفنگ در دست گرفتند و از انقلاب خود دفاع کردند، امروز هم باید این اتحاد و اطاعت از رهبری حرف اول را بزند.

باید دستهایمان علاوه بر قلم و کتاب با سلاح نیز آشنا باشد و گوش به فرمان رهبرمان در سازندگی و حفظ ارزشهای انقلاب اسلامیمان کوشا باشیم. باید دست در دست یکدیگر نهیم و نگذاریم انقلاب به دست نااهلان و بیگانگان تضعیف شود. باید هشیار باشیم، خیلی بیشتر از گذشته، دشمن می خواهد از راه فرهنگ به ما ضربه بزند، این بار این راه را پیش گرفته ولی نمی تواند عزم و اراده و ایمان ملت ما را بشکند. فرهنگ اسلامی و ایرانی ما اجازهٔ ورود فرهنگ سراپا فساد و تباهی غرب را نداده و نخواهد داد. جوان ایرانی اصالت خود را از دست نمی دهد و این بار هم با یاری خداوند و عنایت حضرت ولی عصر (عج) دشمن شکست خورده است.

شما جوانان برومند در خط مقدم این جبهه قرار دارید، بیایید با بینشی صحیح، با مطالعه، با مشورت، با امر به معروف و نهی از منکر و ارشاد یکدیگر و با ایمان و پیروی از رهنمودهای رهبر حکیم انقلاب، سپری محکم و قوی در این جبهه باشیم.

پیشاپیش فرا رسیدن سال نو را به همهٔ شما عزیزان دانش آموز و جامعهٔ فرهنگی ایران اسلامی تبریک و تهنیت می گوییم و سرافرازی و موفقیت شما را خواهانیم.

والسلام ـ سردبیر

● پرویز شهریاری

آگاهیهایی دربارهٔ ریاضیات محاسبه‌ای در چین باستان (از: ای. برزکینا)

در دهه‌های اخیر، آگاهیهای تازه و جالبی دربارهٔ تاریخ کسرهای دهدهی به‌دست آمده است. ضمن بررسی یکی از رساله‌های کهن چینی، یعنی «رسالهٔ ریاضی سون تسه‌زی» که به نزدیکیهای سدهٔ سوم میلادی مربوط می‌شود، روشن شده است که در آن زمان، کسرهای دهدهی را می‌شناخته‌اند. و این خیلی دیرتر از زمانی است که به‌طور معمول از کاربرد کسرهای دهدهی سخن می‌گویند.

از نویسندهٔ این رساله اطلاعی نداریم. رساله یک بخش از ده بخش کتابی است که در مجموعهٔ «ده کتاب ریاضی» در عصر «تان» (سده‌های هفتم تا نهم میلادی) وارد شده است. این مجموعه به‌عنوان کتاب درسی تنظیم شده بود. در کتابهای تاریخ ریاضیات، اغلب سال پدید آمدن کسرهای دهدهی را ۱۵۸۵ میلادی، یعنی سالی که «سیمون سته وَن» (۱۵۴۸ ــ ۱۶۲۰)، کتاب خود را منتشر کرد، می‌دانند. از این زمان، کسرهای دهدهی به طور جدّی وارد ریاضیات شد و در دسترس هر کسی که به تحصیل مدرسه‌ای مشغول بود، قرار گرفت.

با بررسی تاریخ، این هم روشن شده است که پیش از سته وَن، در کشورهای خاور، از کسرهای دهدهی استفاده می‌کرده‌اند. جمشید کاشانی، ریاضیدان ایرانی، در کتاب «رازگشای شمار» (مفتاح‌الحساب) خود، در ۱۴۲۷ میلادی، شرح کاملی از عمل با کسرهای دهدهی را می‌دهد.

مقایسهٔ روش ساختن کسرهای دهدهی در چین، با روشی که کاشانی و ریاضیدانان اروپایی به‌کار برده‌اند، روشن می‌کند که سندهای چینی برای تاریخ دانش، برتری ویژه‌ای دارد. کاشانی و ریاضیدانان اروپایی، کسرهای دهدهی شبیه عددنویسی شصت‌شصتی ساختند؛ در حالی که در چین، به‌طور مستقل و بدون استفاده از کسرهای شصت شصتی (که هرگز در چین به‌کار

نمی‌بردند) پدید آمد. از مدتها پیش از آن هم، دستگاه عددشماری دهدهی در چین به‌وجود آمده بود. بنابراین، مسیر پدید آمدن کسرهای دهدهی در تاریخ ریاضیات چین، به‌صورت «خاص» خود بوده است.

کشف دستگاه عددنویسی موضعی شصت شصتی، مربوط به بابلی‌هاست. آنها در آغاز، نمادی برای صفر نداشتند و عددی را که می‌نوشتند، می‌شد به‌عنوان عددی درست یا عددی کسری خواند. بعدها اخترشناسان دورهٔ الینی، از نوعی عددنویسی استفاده می‌کردند که آمیزه‌ای از عددنویسی دهدهی و عددنویسی شصت شصتی بود ؛ بخش درست عدد را با دستگاه غیرموضعی دهدهی و بخش کسری آن را با دستگاه شصت شصتی. در هند، ایران و اروپای غربی سده‌های میانه، با این کسرها آشنا بودند ؛ ولی از آن‌جا که در همهٔ جهان، دستگاه عددنویسی موضعی دهدهی بتدریج عمومی شده بود، ریاضیدانان به این سمت کشیده شدند که به‌جای کسرهای بابلی، از کسرهای در مبنای ۱۰ استفاده کنند. چینی‌ها، در آغاز، تعداد واحدهای یک مرتبه را با رقمهای هیروگلیفی و سپس خود مرتبه را با همان رقمها می‌نوشتند. این روش، ساده و راحت بود و به دستگاه عددنویسی موضعی امروزی بسیار نزدیک است. کافی است در عددنویسی چینی، نام مرتبه را حذف و نماد صفر را وارد کنیم، تا همان عددنویسی امروزی به‌دست آید.

«رسالهٔ ریاضی سون تسه‌زی» که آن را در این‌جا بررسی می‌کنیم، به ما امکان می‌دهد مرحله‌های اساسی راه پرپیچ و خم پیدایش این مفهوم تازهٔ ریاضی را روشن کنیم ؛ درست مثل دیرین‌شناسی که با بررسی حیوان فسیل شده، مرحله‌های سنگ شدن آن را مطالعه می‌کند، به تجدید ساختمان مفهوم کسر دهدهی در دوره‌های مختلف تکامل آن می‌پردازیم. درک چینی، با توجه به منحصر بودن آن، اهمیت زیادی دارد.

پیش از همه، پرسشی طرح می‌کنیم ؛ در حالی که کسرهای متعارفی را می‌شناختند، چه نیازی به کسرهای دهدهی بود؟ چه اختلافی بین کسر متعارفی و کسر دهدهی وجود دارد؟ آیا این اختلاف مربوط به نوع نوشتن آنهاست یا اختلاف را باید در مضمون این دو مفهوم جست‌وجو کرد؟

کسر متعارفی، عدد گویایی است که می‌تواند به‌صورت کسر دهدهی محدود یا دوره‌ای و نامحدود نوشته شود. ولی هر کسر دهدهی را نمی‌توان به‌صورت کسر متعارفی نوشت. برای نمونه، می‌توان از عدد $\sqrt{۲}$ نام برد که با هیچ کسر متعارفی گویایی قابل بیان نیست ؛ در حالی که هر عدد گنگی را می‌توان با کسر دهدهی بی‌پایان و غیر دوره‌ای نشان داد. روشن است که دو مفهوم متعارفی و دهدهی، هم‌ارز نیستند. عضوهای دو مجموعه کسرهای متعارفی و کسرهای دهدهی را نمی‌توان درتناظر یک به یک قرار داد.

اما در این جا، این مطلب برای ما مهم است که اختلاف بین دو نوع نوشتن عدد را، نه از دیدگاه نظریهٔ مجموعه‌ها، بلکه بیشتر از نظر گستردگی و استحکام مفهوم خود عدد، تا آن‌جا که به شکل نوشتن آن مربوط می‌شود، بررسی کنیم. کسر متعارفی در ماهیت خود، وسیلهٔ مناسبی است برای نشان دادن عددهای گویا (و تنها عددهای گویا). به یاری کسرهای دهدهی هم می‌توان عددهای گویا را بیان کرد ؛ ولی بجز آنها، هر عدد دیگری را هم می‌توان با کسر دهدهی نشان داد. کسر متعارفی معرّف عددهای گویاست ؛ در حالی که کسر دهدهی معرّف همهٔ عددهای حقیقی است و این، به آن دلیل است که در نمایش عددها به یاری کسرهای دهدهی، اختلافی بین عددهای گویا با عددهای گنگ وجود ندارد ؛ چه در حالت تقسیم و چه در حالت ریشه گرفتن. باید بنابر قانونی که وجود دارد، عمل را به اندازهٔ لازم ادامه داد و رقمهای مربوط به یکدهم، یکصدم، یکهزارم و غیره را به‌دست آورد.

به این ترتیب که، پرسشی که طرح کردیم، می‌توان این طور پاسخ داد : کسرهای دهدهی در حوزهٔ عددهای حقیقی عمل می‌کنند و بنابراین، با پیدایش کسرهای دهدهی، حوزهٔ عددهای حقیقی مطرح شد و سرچشمهٔ چینی کسرهای دهدهی، می‌تواند گواهی بر این مطلب باشد.

بررسی «ریاضیات در نُه کتاب» نشان می‌دهد که دانشمندان چینی دورهٔ هان (سدهٔ دوم پیش از میلاد تا سدهٔ دوم بعد از میلاد)، به‌طور کامل، با مجموعهٔ عددهای گویا کار می‌کردند. در این رساله، قانونهای عمل با کسرهای متعارفی، تقریباً شبیه آن چه امروز معمول است، آمده است. در همین زمان، مفهوم کوچکترین مضرب مشترک و قاعدهٔ امروزی تقسیم کسرها هم وجود دارد که تنها در سدهٔ شانزدهم میلادی، در کتابهای درسی اروپا وارد شد. در چین، آن زمان، عددهای منفی هم کشف شده بود.

با در اختیار داشتن عددهای گویا، ریاضیدان چینی، از عهدهٔ بیان هر کمیتی که با اندازه‌گیری مستقیم یا از راه محاسبهٔ حاصل می‌شد، برمی‌آمد. آنها پاسخ مسأله را، در حالتهایی هم که بی‌معنا به‌نظر می‌رسید، پیدا می‌کردند، برای نمونه، انجام یک کار، نیاز به $۲۵۸\frac{۳۷۲۶}{۱۰۰۶۳}$ نفر دارد (مسألهٔ ۲۲ از کتاب پنجم)، یا حرکت دادن

یک وزنه، در یک فاصلهٔ زمانی، به تعداد $57\frac{1629}{2603}$ مرتبه (مسألهٔ ۸ از کتاب ششم).

دربارهٔ عددهایی مثل π یا ریشه‌های گنگ چه می‌کردند؟ در این حالتها، از مقدارهای تقریبی استفاده می‌کردند: مساحت دایره یا حجم کره را با فرض $\pi = 3$ به‌دست می‌آوردند و ریشه گرفتن را تنها دربارهٔ ریشه‌های دوم و سوم عددهای گویا انجام می‌دادند.

در دو متنی که تاریخ نوشتن آنها به ما نزدیکتر است و نزدیک به پنج سدهٔ بعد نوشته شده‌اند، مطلب به گونهٔ دیگری بیان می‌شود. این دو متن، شامل حاشیه‌های مستقلی است که «لیوهوئه» بر «ریاضیات در نُه کتاب» نوشته است و همین بررسی او (و رسالهٔ «سون تسه‌زی») به ما رسیده است.

لیوهوئه، نارضایتی خود را از قاعدهٔ ریشه گرفتن ـ که محدود به حالت مقدارهای گویاست ـ و همچنین مقدار تقریبی عدد $\pi = 3$ بیان می‌کند و در یادداشتهای خود، این دستورهای تقریبی را برای ریشهٔ دوم عددهای گنگ

$$a+\frac{1}{2b+1}<\sqrt{a^2+b}<a+\frac{1}{2b}$$

و مقدار دقیقتر $\pi = 3/14$ را به یاری چندضلعیهای منتظم محاطی به‌دست می‌آورد. برای ریشه گرفتن سفارش می‌کند، وقتی ریشه منجر به مقدار درست نمی‌شود، از مرتبه‌های دهدهی استفاده کنیم. او نمادهای دهدهی را «وی» (یعنی کوچکترین) می‌نامد؛ ولی مثالی نمی‌آورد.

از بحثی که لیوهوئه دربارهٔ محاسبهٔ عدد π کرده است، می‌توان متوجه شد، چگونه کسرهای دهدهی را نمایش داده است. در این‌جا، او پاره‌خطهای راست را به یاری بخش‌بندی دهدهی بیان می‌کند؛ واحدهایی که برای طول (چی) به‌کار می‌برد، چنین هستند: تسون، فن، لی، هااو، میااو، هو؛ و اگر عددی در حدّ این واحد قابل بیان نباشد، باقیمانده را با کسر متعارفی نشان می‌دهد. مثال:

۹ تسون، ۷ فن، ۷ لی، ۸ هااو، ۵ میااو، ۸ هو و $\frac{9}{10}$ هو

و این، کسری است شبیه دستگاه متری، که در آن، هر بخش نام خاصی دارد. در ضمن، در هر حالت، نوع اندازه‌گیری ذکر می‌شود: طول، وزن یا گنجایش. بسته به نوع انتخاب واحد درست، نامهای بعدی پشت سر هم، بخشهای یکدهم، یکصدم، یکهزارم و غیره، از این واحد درست را معرفی می‌کنند. به این ترتیب، واحد یکدهم، درحالتی ممکن است واحد عدد درست یا واحد یکصدم باشد و نماد ممیّز می‌تواند جای خود را تغییر دهد: اگر در عبارت لیوهوئه، واحد اصلی را «چی» بگیریم، کسر برابر ۰/۹۷۷۸۵۸۹ و اگر «تسون» را واحد اصلی بگیریم، برابر ۹/۷۷۸۵۸۹ می‌شود.

از این گونه کسرها، در رسالهٔ سون‌تسه زی فراوان است. ولی در آن‌جا، کسرهای پیچیده‌ای از نوع آن چه از رسالهٔ «ریاضیات در نُه کتاب» آوردیم، دیده نمی‌شود. در رسالهٔ سون تسه‌زی، عددهای ساده‌ای برای مسأله‌ها انتخاب شده است و چنان هستند که منجر به پاسخهای کوچک و ساده می‌شوند. مقدارهای این دستگاه «شبه متری» به یاری دستگاه گسترده‌ای از واحدها بیان می‌شود؛ به نحوی که کسرهای متعارفی، در حالتی که رقمهای دهدهی ناشی از تقسیم محدود است، بتواند به آنها تبدیل شود. مثالی می‌آوریم:

مسأله‌ای وجود دارد که در هر دو رسالهٔ «ریاضیات در نُه کتاب» و «رسالهٔ ریاضی سون تسه‌زی» آمده است. مسأله مربوط به داد و ستد غلّه است:

۷ «دوی» و ۹ «شه نو» ارزن داریم. آنها را با چه مقدار گندم می‌توانیم عوض کنیم؟

حلّ مسأله ساده است؛ در جدول ویژه‌ای (که در آغاز بخش دوم کتاب «ریاضیات» آمده است) سه رابطه بین گونه‌های مختلف غلّه، از نظر هم‌ارزی قیمت داده شده است (رابطهٔ مربوط به مسأله ما، با عددهای ۵۰ و ۲۱ داده شده است). مقدار گندم به این ترتیب محاسبه می‌شود:

$$\frac{\text{۷ «دوی» و ۹ «شه نو»}}{50}\times 21$$

از محاسبه معلوم می‌شود:

۱ «هو» = ۱۰ «دوی»

۱ «دوی» = ۱۰ «شه نو»

واحد اصلی چینیها «دوی» است که تقریباً برابر ۱۰/۳۵ لیتر است. با توجه به این واحدها، پاسخ مسأله چنین است:

۳ «دوی»، ۳ «شه نو» و $\frac{9}{50}$ «شه نو»

در «ریاضیات در نُه کتاب» هم، همین پاسخ داده شده است. کسرهای لیوهوئه، با بیانی مشابه، ولی کوتاهتر است. او تنها از سه واحدی که در عمل به‌کار می‌رود، استفاده کرده است؛ البته بخشهای کوچکتری را هم وارد کرده است. این بخشها در محاسبه‌های اقتصادی، کاربرد نداشتند؛ اما به این دلیل درست شده بودند که بتوان مقدارهای کمتر از واحد را در دستگاه دهدهی بیان کرد.

به این ترتیب، به نظر می‌رسد که لیوهوئه، از کسرهایی با منطق

دستگاه متری استفاده می‌کرد ؛ در حالی که در «ریاضیات» هنوز خبری از این کسرها نیست. در «رسالهٔ ریاضی سون تسه زی»، کاربرد منطقی‌تری از کسرهای دهدهی وجود دارد. به نظر می‌رسد، سون‌تسه‌زی، با برداشتن مسأله‌ای از «ریاضیات در نُه کتاب» تلاش می‌کند، بویژه ثابت کند، مقدار مجهول را می‌توان به‌صورت کسر کامل دهدهی نشان داد : ۳ «دوی»، ۳ «شه نو»، ۱ «که» و ۸ «شائو».

و برای این کسر متعارفی را به کار نبرد، از واحدهای کوچکتر از «شه‌نو» ـ که خودش یکدهم واحد گنجایش است ـ استفاده می‌کند.

این مسأله را می‌توان، به‌عنوان مسألهٔ ویژه‌ای که سون‌تسه‌زی را به کسرهای دهدهی (با نظم دستگاه متری) هدایت می‌کند، بررسی کرد. برای این منظور، او برخلاف لیوهوئه، از روش کلی پیدا کردن جواب پیروی نمی‌کند ؛ بلکه از روش کلی تقسیم استفاده می‌کند ؛ یعنی مفهوم مرتبه‌های کسرهای دهدهی را به همان صورتی که امروز معمول است، مطرح می‌کند.

برای این منظور، به دنبال این مسأله، سه مسأله دیگر را می‌آورد. این سه مسأله هم، از «ریاضیات در نُه کتاب» برداشته شده است که در آن‌جا هم با همین ردیف آمده‌اند. با این مسأله‌ها، حالتهای مختلف تقسیم عددهای درست مطرح شده است ؛ به نحوی که جواب در یک حالت عددی درست، در حالت دوم کسر مرکب ساده نشدنی و در حالت سوم کسر مرکب ساده شدنی به‌دست می‌آید. در حالت چهارم ، تقسیم دارای باقیمانده است و به بهانهٔ آن، کسر دهدهی را معرفی می‌کند که، از دید منطقی، منجر به موضوع تازه‌ای در ریاضیات می‌شود.

کسرهای دهدهی در مسأله‌های سون‌تسه‌زی، تنها برای بیان مقدارهای مجهول به‌کار نمی‌رود (یعنی حالتهایی که ضمن محاسبه به دست می‌آید، آن‌طور که در مسأله مشخص قبل دیدیم) ؛ بلکه در داده‌های مسأله‌ها هم وارد می‌شود. به یاری آنها، ضریب تبدیل واحدها هم شرح داده شده است. این ضریب، عبارت است از ۱ «چی»، ۶ «تسون» و ۲ «فن» (این اندازه‌ها در متنهای کهنتر چینی وجود ندارد. این عددها به معنای حجم ۱ «دوی» از مایعی است که ظرف مکعب مستطیل شکل به قاعدهٔ ۱ «چیِ مربع» و ارتفاع ۱/۶۲ «چی» را پر کرده باشد).

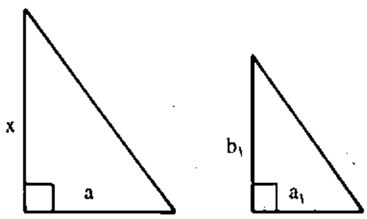
در «ریاضیات در نُه کتاب»، که در آن‌جا تنها از سه واحد طول، یعنی ۱ «چژان» = ۱۰ «چی» و ۱ «چی» = ۱۰ «تسون»، استفاده شده ، این ضریبها با کسر متعارفی داده شده است : ۱ «چی»، ۶ «تسون» و $\frac{۱}{۵}$ «تسون».

گونهٔ محاسبه‌ای که از مسأله‌های سون تسه‌زی استنباط می‌شود، نشان می‌دهد که می‌توانستند روی این کسرهای دهدهی عملهای مربوط را انجام دهند. عملهای پیچیده‌ای مثل ضرب و تقسیم را با روشی انجام می‌دادند که در اساس، همان روش امروزی ماست. اختلاف، تنها مربوط به شکل نوشتن این عددهاست. یک مثال می‌آوریم.

مسألهٔ ۲۵ از کتاب آخر سون‌تسه‌زی را، که برای هدف ما مناسب است، انتخاب می‌کنیم (سون‌تسه‌زی، سه کتاب داشته است : کتاب نخست، کتاب میانه و کتاب آخر) :

دیرکی با اندازهٔ نامعلوم وجود دارد. سایهٔ آن را اندازه گرفته‌ایم، ۱ «چژان» و ۵ «چی» شده است. جدا از این یک دیرک ستونی وجود دارد که طول آن ۱ «چی» و ۵ «تسون» است. سایهٔ این ستون ۵ «تسون» شده است. طول دیرک اوّل چه‌قدر است؟

پاسخ : ۴ «چژان» و ۵ «چی».



مقدار مجهول، جملهٔ چهارم تناسبی است که سه جملهٔ معلوم آن، ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمه دو مثلث متشابه قائم‌الزاویه را تشکیل می‌دهند :

$$x = \frac{a.b_1}{a_1}$$

در این جا، راه‌حلّ مسأله که ساده است، برای ما جالب نیست ؛ آن چه جالب است، روشهای محاسبه است. اگر واحد درست را «چژان» بگیریم، حلّ چینی مسأله، با نوع نوشتن امروزی، چنین است :

$$x = \frac{۱/۵ \times ۰/۱۵}{۰/۰۵} = \frac{۰/۲۲۵}{۰/۰۵} = \frac{۲۲/۵}{۵} = ۴/۵$$

در واقع در نوشتهٔ چینی گفته شده است :

برقرار می‌کنم سایهٔ دیرک را به ۱ «چژان» و ۵ «چی». این مقدار را در طول ستون، یعنی در ۱ «چی» و ۵ «تسون» ضرب می‌کنم. به مرتبهٔ سمت چپ حرکت می‌دهم، به‌دست می‌آید : ۲۲ «چژان» و ۵ «چی»، این مقدار را بر سایهٔ ستون، یعنی بر ۵ «تسون» تقسیم می‌کنم و مجهول را به‌دست می‌آورم.

پیش از آن که، به روشن کردن قانونهایی بپردازیم که با جمله‌هایی مثل «برقرار می‌کنم» و «حرکت می‌دهم» بیان شده است، با وسیله‌ای آشنا شویم که در چین باستان، برای محاسبه از آن استفاده می‌کرده‌اند. این وسیله، نوعی تخته یا چُرتکه محاسبه‌ای بود که در پیشرفت روشهای محاسبه‌ای در ریاضیات چینی، نقش اساسی داشته است. از ساختمان این وسیله، آگاهی دقیقی نداریم؛ ولی عددها روی آن، به‌وسیلهٔ چوب خطهای محاسبه‌ای در دستگاه عددشماری به مبنای ۵ نشان داده می‌شد. تا عدد ۵ را، به‌طور ساده، با کنار هم گذاشتن چوب خطها نشان می‌دادند (برای نمونه، عدد ۴ به‌صورت |||| نشان داده می‌شد)؛ ولی برای نشان دادن عددهای از ۶ تا ۹، چوب خطی عمود بر دیگران و در بالای آنها می‌گذاشتند و مقدار آن را ۵ به‌حساب می‌آوردند (برای نمونه، عدد ۸ به صورت $\overline{|||}$ نشان داده می‌شد). روی تخته، چوب خطها را به‌صورت افقی و قائم و با استفاده از ویژگی موضعی بودن رقمها منظم می‌کردند؛ جای خالی بین رقمها، به معنای این بود که در آن مرتبه، رقمی وجود ندارد. صفر را روی تخته لازم نداشتند. به این ترتیب، دست‌کم در چهار سده پیش از میلاد، چینیها از همان دستگاه دهدهی موضعی، که ما امروز به‌کار می‌بریم، استفاده می‌کرده‌اند؛ یعنی روش مشخص کردن عددهای درست و کسری را، تقریباً بدون تفاوت با روش امروزی، انجام می‌دادند. دربارهٔ حلّ یک مسأله، برنامه‌ای کلی برای عملهای لازم روی تختهٔ محاسبه طرح می‌کردند که می‌توان آن را با برنامه‌ای که امروز برای حلّ مسأله‌ها به رایانه می‌دهند، مقایسه کرد.

طرح عملهای لازم روی تختهٔ محاسبه را در این‌جا روشن می‌کنیم. عمل از ردیفهای بزرگتر به طرف ردیفهای کوچکتر انجام می‌شد:

۱) ۱ چژان × ۱ چی = ۱ چی

۲) ۵ چی × ۱ چی = ۵ تسون

۳) ۱ چژان × ۵ تسون = ۵ تسون

۴) ۵ چی × ۵ تسون = ۲۵ دهم تسون = ۵ فن و ۲ تسون

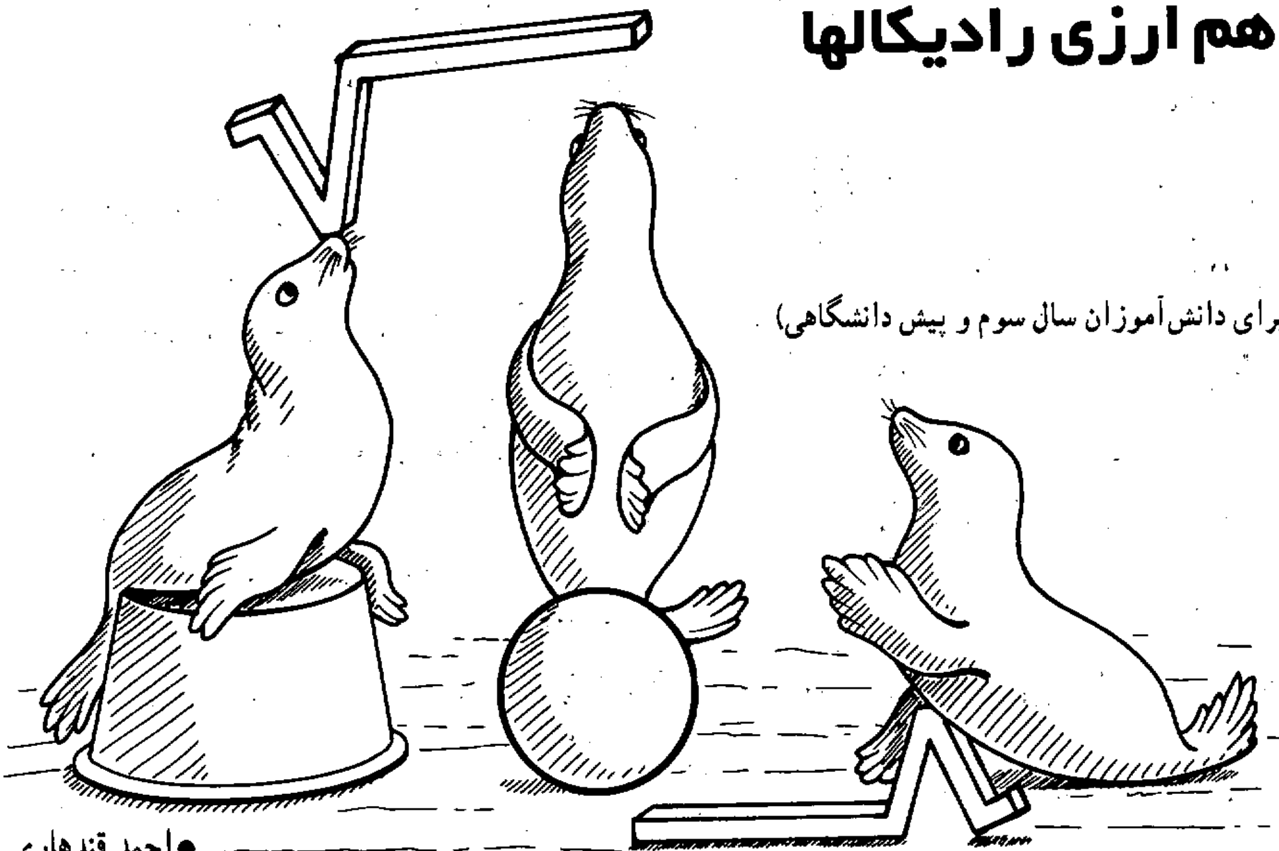
در این‌جا بخشهای یکدهم تسون وارد شده است (فن)، ولی قاعدهٔ آن را شرح نداده‌اند (قاعده‌های چینی، بدون توضیح داده می‌شد و اغلب یا بعضی بسیار کوتاه).

به این ترتیب می‌بینیم، ریاضیدانان چینی، با قاعدهٔ ضرب ردیفهای دهدهی آشنا بوده‌اند: «چژان» را در «چی» ضرب می‌کردند و «چی» به‌دست می‌آوردند و غیره:

		تسون	چی	چژان	
عامل اول ضرب			۵	۱	
عامل دوم ضرب		۵	۱		
حاصلضربهای جزئی	۵	۵ ۵ ۲	۱		
حاصلضرب	۵	۲	۲		
خارج قسمت			۵	۴	
بخشی			۵	۲	۲
بخشیاب				۵	

نتیجه ضرب که برابر ۲ چی، ۲ تسون و ۵ فن است، به سمت چپ برده شده است؛ مثل این که آن را در ۱۰۰ ضرب کرده باشند. روشن است، این عمل برای تقسیمی لازم است که بعد باید انجام شود؛ تقسیم ۲۲ چژان و ۵ چی بر ۵ تسون (در واقع باید گفت بر ۵ چژان؛ زیرا مخرج هم در ۱۰۰ ضرب شده است. در تختهٔ حساب حرکت بخشیاب انجام شده است؛ ولی ضمن بیان قاعده، دربارهٔ تبدیل بخشیاب، صحبتی به میان نیامده است). خارج قسمت برابر ۴ چژان و ۵ چی می‌شود.

هم ارزی رادیکالها



(برای دانش‌آموزان سال سوم و پیش دانشگاهی)

● احمد قندهاری

دو تابع هم‌ارز

اگر حد دو تابع حقیقی f و g، وقتی $x \to a$، برابر ۰ یا ∞ شود، چنانچه $g(x) \neq 0$ و $\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = 1$، آن‌گاه دو تابع f و g را هم‌ارز گویند. a می‌تواند هر عدد حقیقی یا $+\infty$ یا $-\infty$ باشد.

می‌دانیم اگر $n \in N$ و ضرایب a و b و c و c' و ... اعداد حقیقی باشند، داریم:

$$\begin{cases} ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots + k \sim ax^n \\ x \to \pm\infty \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} ax^n + bx^{n-1} + c'x^{n-2} + \cdots + L \sim ax^n \\ x \to \pm\infty \end{cases} \qquad (2)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots + k \sim ax^n \\ +bx^{n-1} + c'x^{n-2} + \cdots + L \\ x \to \pm\infty \end{cases} \qquad (3)$$

توجه داشته باشیم، دو جمله از بزرگترین درجات عبارت سمت چپ با دو جمله از بزرگترین درجات عبارت سمت راست برابر است.

هم‌ارزی (۳) اساس هم‌ارزی رادیکالهاست.

هم‌ارزی رادیکالها

زوج

$$\sqrt[n]{ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots + k} \sim \pm\sqrt[n]{a}\left(x + \frac{b}{an}\right), a > 0$$

اگر n فرد باشد، برای هر $a \in \mathbb{R}$ هم‌ارزی بالا برقرار است؛ ولی سمت راست (±) لازم نیست.

اثبات: دو طرف را به توان n می‌رسانیم، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots + k \sim a\left(x + \frac{b}{an}\right)^n \\ x \to \pm\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots + k \sim a\left(x^n + \frac{b}{a}x^{n-1} + \cdots\right) \\ x \to \pm\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots+k \sim ax^n \\ +bx^{n-1}+c'x^{n-2}+\cdots+L \\ x\to\pm\infty \end{cases}$$

این هم‌ارزی بنا به (۳) برقرار است.

مثال:

$$1)\ \sqrt{4x^2-24x+3} \sim \pm\sqrt{4}\left(x+\frac{-24}{4\times 2}\right)=\pm 2(x-3) \quad x\to\pm\infty$$

$$2)\ \sqrt{9x^2+18x+1} \sim \pm\sqrt{9}\left(x+\frac{18}{9\times 2}\right)=\pm 3(x+1) \quad x\to\pm\infty$$

$$3)\ \sqrt[3]{8x^3-48x^2+27x+4} \sim \sqrt[3]{8}\left(x+\frac{-48}{8\times 3}\right)=2(x-2) \quad x\to\pm\infty$$

$$4)\ \sqrt[4]{16x^4+128x^3+x+2} \sim \pm\sqrt[4]{16}\left(x+\frac{128}{4\times 16}\right) \quad x\to\pm\infty$$

$$=\pm 2(x+2)$$

$$5)\ \sqrt{x^2-7x+5} \sim \pm\left(x-\frac{7}{2}\right) \quad x\to\pm\infty$$

کاربرد هم‌ارزی رادیکالها

هم‌ارزی رادیکالها کاربردهای فراوانی در تعیین حد تابع وقتی $x\to\pm\infty$ و ابهام مسأله به‌صورت $(+\infty,-\infty)$ است، دارد.

همچنین در تعیین مجانبهای افقی و مایل بسیاری از تابعها به‌کار می‌رود.

مثال: حدّ عبارتهای زیر را بیابید.

$$1)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+1}-x+5\right)$$

$$\sim \lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{4}{2}-x+5\right)=-2+5=3$$

$$2)\ \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-9x^2+5x-1}+\sqrt{4x^2-12x}+x+1\right)$$

$$\sim \lim_{x\to-\infty}\left(x-\frac{9}{3}-\sqrt{4}\left(x-\frac{12}{8}\right)+x+1\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}(x-3-2x+3+x+1)=1$$

$$3)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{16x^4-64x^3+x}-\sqrt{x^3+6x^2+1}\right.$$

$$\left.-\sqrt{x^2-8x}\right)$$

$$\sim \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{16}\left(x+\frac{-64}{64}\right)-\left(x-\frac{6}{3}\right)-\left(x-\frac{8}{2}\right)\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(2x-2-x+2-x+4)=4$$

$$4)\ \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[8]{x^8+8x}+\sqrt[6]{x^6+6x}+\sqrt[5]{x^5+10x^4}\right.$$

$$\left.+\sqrt[3]{x^3+6x}+\sqrt{x^2-2x}-x+10\right)$$

$$\sim \lim_{x\to-\infty}\left(-\left(x+\frac{8}{8}\right)-\left(x+\frac{6}{6}\right)+\left(x+\frac{10}{5}\right)+\right.$$

$$\left.(x+0)-\left(x-\frac{2}{2}\right)-x+10\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}(-x-1-x-1+x+2+x-x+1-x+10)=11$$

$$5)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[250]{x^{250}+500x^{249}+1}-x+7\right)$$

$$\sim \lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{500}{250}-x+7\right)=2+7=9$$

مسأله: اگر $\left\{\lim_{x\to-\infty}\left(ax+b+\sqrt{4x^2-24x+1}\right)=3\right.$، آن‌گاه a و b را بیابید.

حل:

$$\left\{\lim_{x\to-\infty}\left[ax+b-2\left(x+\frac{-24}{8}\right)\right]\right.$$

$$=\left\{\lim_{x\to-\infty}[(a-2)x+b+6]\equiv 3\right.$$

$$\Rightarrow\begin{cases} a-2=0\Rightarrow a=2 \\ b+6=3\Rightarrow b=-3 \end{cases}$$

کاربرد در تعیین مجانبهای افقی و مایل

معادله‌های مجانبهای افقی و مایل هر یک از تابعهای به معادله‌های زیر را بیابید.

$$1)\ y=2x+1+\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$x \to +\infty \Rightarrow y=\lim\left(2x+1+\frac{x^2}{+x}\right)$$

معادلهٔ مجانب مایل $y=3x+1$

$$x \to -\infty \Rightarrow y=\lim\left(2x+1+\frac{x^2}{-x}\right)$$

معادلهٔ مجانب مایل $y=x+1$

۲) $y=2x-1+\sqrt{4x^2-8x+5}$

$$x \to +\infty \Rightarrow y=\lim\left(2x-1+2\left(x-\frac{8}{8}\right)\right)$$

معادلهٔ مجانب مایل $y=4x-3$

$$x \to -\infty \Rightarrow y=\lim\left(2x-1-2\left(x-\frac{8}{8}\right)\right)$$

معادلهٔ مجانب افقی $y=1$

مثال ۵۴ (صفحهٔ ۹۳ کتاب درسی):

$$y=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$$

معادله‌های مجانبهای مایل $x \to \pm\infty \Rightarrow y=\frac{x^2}{\pm x} \Rightarrow y=\pm x$

معادله‌های مجانبهای افقی و مایل تابع به معادلهٔ

$$y=\frac{2x+\sqrt{4x^2-16x}}{3x-\sqrt{9x^2+8x}}$$

$$x \to +\infty \Rightarrow y=\frac{2x+2(x-2)}{3x-3(x+1)}=\frac{4x-2}{-3}$$

مجانب مایل $y=-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$

$$x \to -\infty \Rightarrow y=\frac{2x-2(x-2)}{3x+3(x+1)}=\frac{+4}{6x+3}=0$$

$\boxed{y=0}$ مجانب افقی.

مسأله: اگر منحنی تابع به معادلهٔ

$$y=2x+1+\sqrt{ax^2-24x+3}$$

مجانب افقی داشته باشد، معادلهٔ مجانب مایل آن را بیابید.

حل: منحنی این تابع وقتی مجانب افقی دارد که $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2x+1+\sqrt{ax^2-24x+3}\right)$$

$$\sim \lim_{x\to-\infty}\left(2x+1-\sqrt{a}\left(x+\frac{-24}{2a}\right)\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left((2-\sqrt{a})x+1+\frac{24}{2\sqrt{a}}\right)$$

معادلهٔ مجانب $y=(\underbrace{2-\sqrt{a}})x+1+\frac{24}{2\sqrt{a}}$

$$2-\sqrt{a}=0 \Rightarrow a=4$$

معادلهٔ تابع: $y=2x+1+\sqrt{4x^2-24x+3}$

$$x \to +\infty \Rightarrow y=2x+1+2\left(x-\frac{24}{8}\right)$$

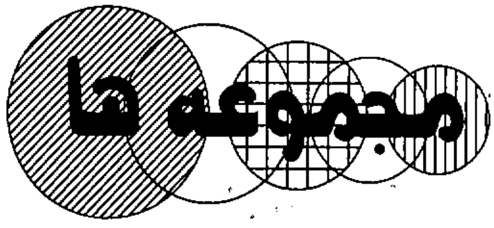
$\Rightarrow y=4x-2$ معادلهٔ مجانب مایل

ادب ریاضی

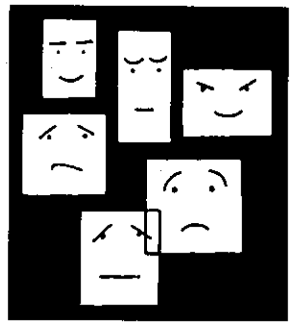
«فرما» پس از آن‌که قسمت مهمی از اوقات خود را مصروف هندسهٔ تحلیلی و حساب دیفرانسیل و انتگرال کرد و در عین حال، زندگی شرافتمندانه و روش پر کوششی را برای امرار معاش خویش گذرانید، باز هم فرصت یافت که مابقی انرژی و فعالیت خویش را در بهترین سرگرمی که به آن علاقه داشت، به‌کار برد و آن، ریاضیات خالص بوده است و بزرگترین اثر جاودان خویش را در این زمینه باقی گذاشت و آن عبارت از بنای «تئوری اعداد» یا حساب عالی است، که حقّ مطلق و غیرقابل بحث او در این مورد منکری ندارد، و نام وی را برای ابد، جاویدان ساخته است.

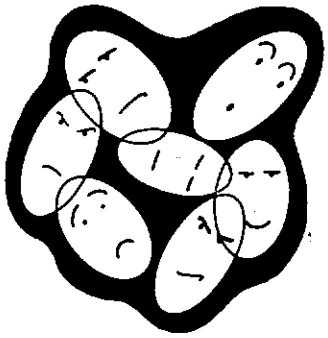
داستان واقعی فرما، داستان اکتشافات وی است که در حقیقت، تفریحات او بوده‌اند و داستان عشق خالصی است که به ریاضیات داشته است. این اکتشافات، چنان ساده است (اشتباه نشود، فقط بیان آن ساده است ؛ ولی نه ایجاد آن) که هر شاگرد مدرسه‌ای که دارای استعداد متوسط باشد، درخور آن است که از مفهوم آنها آگاه شود و زیبایی آنها را بشناسد و بستاید.

(ریاضیدانان نامی، اثر اریک تمپل‌بل، ترجمهٔ حسن صفاری)



(برای دانش‌آموزان سال اوّل)





● حمیدرضا امیری

وقتی کلمهٔ مجموعه را می‌شنویم، بلافاصله در ذهنمان دسته‌ای از اشیا تصور می‌شود، و اگر بخواهیم تعبیری برای مجموعه بیان کنیم، تقریباً با تصور ذهنی خودمان مطابقت دارد و می‌گوییم:

«**مجموعه**، به دسته‌ای از اشیای دو به دو متمایز و کاملاً مشخص، گفته می‌شود».

در این تعبیر، منظور از شیء، هر موجودی می‌تواند باشد و در واقع، در هر مبحث، موجودات آن بحث، اشیای آن بحث را تشکیل می‌دهند: یعنی وقتی بحث اعداد است، هر عدد، یک شیء ریاضی محسوب می‌شود. وقتی بحث انسانهاست، هر انسان یک شیء است و در بحث مجموعه‌ها هر مجموعه می‌تواند یک شیء باشد و ...

جملهٔ دو به دو متمایز، به معنای تکراری نبودن اشیاست و کاملاً مشخص به معنای آن است که باید دقیقاً و بدون هیچ شبهه‌ای معین و شناخته شده باشند. معمولاً مجموعه‌ها را با حروف بزرگ انگلیسی نمایش داده و *اعضای* یک مجموعه را با دو آکلاد محصور می‌کنند.

به مثالهای زیر توجه کنید:

مثال ۱: مجموعهٔ اعداد طبیعیِ زوج و کمتر از ۸:

$A = \{۲, ۴, ۶\}$

مثال ۲: مجموعهٔ اعداد زوج و اوّل: $B = \{۲\}$

مثال ۳: چهار عدد طبیعی و زوج که متوالی باشند، مجموعه‌ای تشکیل نمی‌دهند؛ زیرا اعضای آن مشخص نیستند؛ یعنی این اعداد می‌توانند ۲، ۴، ۶ و ۸ یا ۴، ۶، ۸ و ۱۰ یا ۱۰، ۱۲، ۱۴ و ۱۶ یا ... باشند.

مثال ۴: مجموعهٔ حروف صدادار در زبان انگلیسی:

$D = \{a, e, i, o, u\}$

مثال ۵: مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج: $E = \{۲, ۴, ۶, ...\}$

همان‌طور که در مثال ۵ مشاهده کردید، نوشتن همهٔ اعضای مجموعه E میسّر نبوده و از سه نقطه، به معنای ادامهٔ اعضای مجموعه استفاده کردیم. به چنین مجموعه‌هایی که برای آنها پایانی نمی‌توانیم در نظر بگیریم، **مجموعه‌های نامتناهی** گفته می‌شود؛ مثلاً مجموعهٔ اعداد صحیح منفی؛ یعنی $\{-۱, -۲, -۳, ...\}$ نیز نامتناهی است.

قرارداد: مجموعه‌ای که فاقد عضو باشد، **مجموعه تُهی** نامیده می‌شود و مجموعهٔ تهی را با نماد { } یا ∅ نمایش می‌دهند.

هر مجموعه که نامتناهی نباشد، متناهی است؛ یعنی اگر مجموعه‌ای تعداد اعضای مشخصی داشته باشد و مثلاً n عضو داشته باشد یا تُهی باشد، **متناهی** نامیده می‌شود. (n هر عدد صحیح و غیرمنفی می‌تواند باشد.)

به مثالهای زیر توجه کنید:

مثال ۱: مجموعهٔ اعداد طبیعی بین ۵- و ۲-، تُهی است.

مثال ۲: اگر A مجموعهٔ اعداد اوّل و منفی باشد، در این صورت $A = \varnothing$.

مثال ۳: اگر C مجموعهٔ اعداد حقیقی بین صفر و یک باشد، در این صورت C مجموعه‌ای نامتناهی است. (ثابت می‌شود بین هر دو عدد حقیقی، بی‌نهایت عدد حقیقی وجود دارد.)

مفهوم عضویت

اگر A یک مجموعه و a عضوی از مجموعهٔ A باشد، می‌نویسیم $a \in A$، یعنی a متعلق به مجموعهٔ A است و اگر مثلاً b متعلق به A نباشد یا b عضوی از A نباشد، می‌نویسیم $b \notin A$.

در مثال قبل دیدیم که $\sqrt{۲} \notin Z$ و $-\sqrt{۲} \notin Z$.

تذکر مهم: اعضای یک مجموعه، خودشان می‌توانند مجموعه باشند؛ مثلاً مجموعهٔ دبیرستان که از کلاسها تشکیل شده است و هر کلاس خودش مجموعه‌ای است از دانش‌آموزان. به مثال زیر توجه کنید:

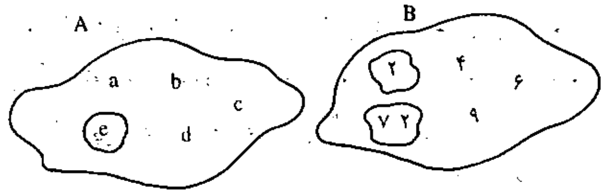
مثال ۱: اگر فرض کنیم $A = \{a, \{a\}, \{a, b\}, \{b\}\}$ در این

صورت خواهیم داشت :

$a\in A$, $\{a\}\in A$, $\{a,\{a\}\}\notin A$; $b\notin A$

$\{a,\{b\}\}\notin A$, $\{a,b\}\in A$, $\{b\}\in A$, $\{\{a\}\}\notin A$

مثال ۲: با توجه به نمایش مجموعه‌ها به‌صورت نموداری (نمودار ون) خواهیم داشت :



$a\in A$, $c\in A$, $e\in A$, $۲\in B$,
$۷۲\in B$, $۴\in B$, $۸\notin B$, $k\notin A$

تست: کدام گزینه **نادرست** است؟

۱) $\{a\}\in\{a,\{a\}\}$

۲) $\{a\}\in\{a,\{a\},\{a\}\}$

۳) $\{a\}\notin\{a,\{a,\{a\}\}\}$

۴) $\{\{a\}\}\in\{a,\{a\}\}$

حل: گزینهٔ (۴) ؛ زیرا شیء $\{\{a\}\}$ به این صورت، در مجموعهٔ موردنظر وجود ندارد.

تست: کدام گزینه درست است؟

۱) $۵\notin\{۲,۴,۶,۵\}$

۲) $۲\notin\{۱,۲,۳,۵,۷\}$

۳) $\varnothing\in\{a,\{b\},\{\ \}\}$

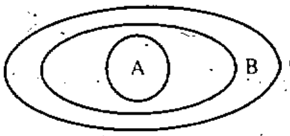
۴) $\varnothing\in\{a,b,\{\varnothing\},\{a\}\}$

حل: گزینهٔ (۳) صحیح است ؛ زیرا مجموعهٔ $\{\ \}$ همان مجموعهٔ تهی است که به عنوان یک عضو در مجموعهٔ موردنظر وجود دارد.

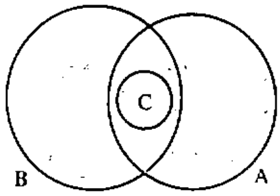
مفهوم زیرمجموعه (جزئیت)

اگر A و B دو مجموعه باشند و هر عضو مجموعهٔ A، عضوی از مجموعهٔ B باشند، در این صورت می‌گوییم A زیرمجموعهٔ B است یا A جزئی از B است و می‌نویسیم $A\subset B$[1]. به مثالهای زیر توجه کنید :

مثال ۱: در شکلهای زیر داریم :



شکل (۱)



شکل (۲)

در شکل (۱) داریم :

$A\subset B$, $A\subset C$, $B\subset C$, $C\not\subset A$, $B\not\subset A$

و در شکل (۲) داریم :

$A\not\subset B$, $B\not\subset A$, $C\subset A$, $C\subset B$

مثال ۲: اگر فرض کنیم $A=\{۱,۲,۳,۵\}$ ، $B=\{۲,۳,۴\}$ و $C=\{۳,۴,۵,۲\}$ در این صورت خواهیم داشت :

$B\not\subset A$ $(۴\in B\ ,\ ۴\notin A)$

$A\not\subset B$ $(۱\in A\ ,\ ۱\notin B)$

$C\not\subset B$ $(۵\in C\ ,\ ۵\notin B)$

$B\subset C$ (همهٔ اعضای B در C نیز هستند)

$A\notin C$ $(۱\in A\ ,\ ۱\notin C)$

مثال ۳: مجموعه، $A=\{a,\{a,\{a\}\},\{a\},\{b\}\}$ را در نظر می‌گیریم، در این صورت :

$\{a\}\subset A$ $(a\in A)$

$\{a,\{a\}\}\subset A(a\in A\ ,\ \{a\}\in A)$

$\{b\}\not\subset A$ $(b\notin A)$

$\{a,\{b\}\}\subset A(a\in A\ ,\ \{b\}\in A)$

$\{\{a\},\{b\},\{a,b\}\}\not\subset A$ $(\{a,b\}\notin A)$

تست: اگر $A=\{b,\{b\},\{b,\{b\}\}\}$ کدام گزینه **نادرست** است؟

۱) $b\subset A$

۲) $\{\{b\}\}\subset A$

۳) $\{b,\{b\}\}\subset A$

۴) $\{b,\{b\}\}\in A$

۱ـ نماد $\subseteq$ نیز برای نمایش زیر مجموعه بودن به‌کار می‌رود ؛ یعنی می‌توان نوشت، $A\subseteq B$.

حل: گزینهٔ (۱)؛ زیرا علامت زیرمجموعه، همواره بین دو مجموعه به کار می‌رود. در بقیهٔ گزینه‌ها هر عضو مجموعهٔ سمت چپ عضو مجموعهٔ A نیز می‌باشد.

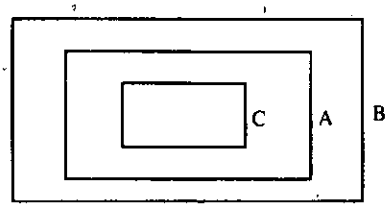
نکات مهم

نکتهٔ ۱: اگر مجموعهٔ A زیر مجموعهٔ B نباشد؛ یعنی $A \not\subset B$، باید حداقل یک عضو در A باشد که آن عضو در B نباشد. مثلاً اگر فرض کنیم $A=\{۲,۴,۶,۸\}$ و $B=\{۴,۶,۸,۱۰\}$ در این صورت $A \not\subset B$؛ زیرا $۲\in A$ و $۲\notin B$.

نکتهٔ ۲: با توجه به تعریف زیرمجموعه، واضح است که هر مجموعه، زیرمجموعهٔ خودش می‌باشد؛ یعنی اگر A مجموعه‌ای دلخواه باشد، همواره $A\subset A$.

نکتهٔ ۳: مجموعهٔ تهی، زیرمجموعهٔ هر مجموعه می‌باشد؛ یعنی اگر A مجموعه‌ای دلخواه باشد، همواره $\varnothing\subset A$. (زیرا طبق نکتهٔ ۱ در صورتی می‌توان ادعا کرد که $\varnothing\not\subset A$ که عضوی در $\varnothing$ بتوان یافت و آن عضو، عضوی از A نباشد و چون $\varnothing$ اصلاً عضوی ندارد، چنین عضوی یافت نمی‌شود.)

نکتهٔ ۴: اگر $A\subset B$ و $C\subset A$، در این صورت $C\subset B$. مثلاً اگر فرض کنیم $A=\{۱,۲,۳\}$، $B=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $C=\{۱,۲\}$ واضح است که $A\subset B$ و $C\subset A$، و همان‌طور که مشاهده می‌کنید $C\subset B$. این نکته در شکل زیر نیز، نمایش داده شده است:



تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه

در حالت کلّی، ثابت می‌شود که «اگر مجموعهٔ A دارای k عضو باشد، تعداد همهٔ زیرمجموعه‌های آن، برابر است با ۲^k» که البته $\varnothing$ و A نیز جزو این زیرمجموعه‌ها می‌باشند.

مثال: اگر فرض کنیم $A=\{۲,۴,۶\}$، در این صورت تعداد زیرمجموعه‌های A طبق رابطهٔ مذکور، باید $۸=۲^۳$ باشد، که این زیرمجموعه‌ها عبارت است از:

$$\underbrace{\{\ \}}_{\varnothing},\ \{۲\},\ \{۴\},\ \{۶\},\ \{۲,۴\},\ \{۲,۶\},\ \{۴,۶\},\ \underbrace{\{۲,۴,۶\}}_{A}$$

تست: اگر یک عضو به اعضای مجموعهٔ A اضافه کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن چه تغییری می‌کند؟

۱) ۴ برابر می‌شود.
۲) ۲ واحد به آن اضافه می‌شود.
۳) ۱ واحد به آن اضافه می‌شود.
۴) دو برابر می‌شود.

حل: گزینهٔ (۴) صحیح است؛ زیرا اگر فرض کنیم مجموعهٔ A، ابتدا k عضو داشته است، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۲^k بوده و اگر یک عضو به اعضای آن اضافه شود، تعداد زیرمجموعه‌های آن به $۲^{k+۱}$ می‌رسد و با توجه به رابطهٔ زیر داریم:

$$۲^k\times ۲=۲^{k+۱}$$

تست: اگر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ $(k+۱)$ عضوی، ۲۴ واحد کمتر از تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعهٔ $(k+۳)$ عضوی باشد، k کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

حل: گزینهٔ (۲) صحیح است؛ زیرا با توجه به فرض، اختلاف تعداد زیرمجموعه‌های دو مجموعه برابر با ۲۴ است؛ یعنی:

$$۲^{k+۳}-۲^{k+۱}=۲۴\Rightarrow ۲^k\times ۲^۳-۲^k\times ۲=۲۴\overset{۲^k=x}{\Rightarrow}$$
$$۸x-۲x=۲۴\Rightarrow ۶x=۲۴\Rightarrow x=۴\Rightarrow ۲^k=۴\Rightarrow k=۲$$

تساوی بین دو مجموعه

دو مجموعهٔ A و B را مساوی می‌نامیم؛ هرگاه تمام اعضای A عضو B بوده و تمام اعضای B عضو A باشند. به عبارت دیگر و با توجه به تعریف زیرمجموعه، «اگر $A\subset B$ و $B\subset A$، آن‌گاه $A=B$ و اگر $A=B$، آن‌گاه $A\subset B$ و $B\subset A$».

تذکر: وقتی می‌گوییم دو مجموعهٔ A و B با هم مساوی هستند، در واقع آنها یک مجموعه بوده و فقط به دو نام مختلف نامیده شده‌اند. مثلاً مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳\}$ فقط با مجموعهٔ $\{۱,۲,۳\}$ می‌تواند مساوی باشد، که اگر برای آن، نام دیگری چون B اختیار کنیم، می‌توانیم بنویسیم $A=B$.

تست: اگر $A=\{۲,(x+۲y),۴\}$ و $B=\{۴,\ ۵,\ (x-y)\}$ و $A=B$ در این صورت کدام گزینه درست است؟

۱) $y=۲\ ,\ x=۱$ ۲) $y=-۲\ ,\ x=-۱$
۳) $y=۱\ ,\ x=۳$ ۴) $y=۱\ ,\ x=-۳$

حل: گزینهٔ (۳) صحیح است؛ زیرا با توجه به تعریف تساوی

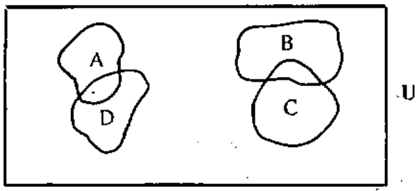
بین دو مجموعه داریم :

$$\{۲,\ (x+۲y),\ ۴\} = \{۴,۵,\ (x-y)\} \Rightarrow \begin{cases} x+۲y=۵ \\ x-y=۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow x=۳\ ,\ y=۱$$

مجموعهٔ مرجع

در هر مبحث، مجموعه‌ای که تمام مجموعه‌های مطرح شده در آن بحث زیرمجموعه‌اش باشند، مجموعهٔ مرجع نامیده شده و با U نمایش داده می‌شود. مثلاً وقتی از اعداد طبیعی و کوچکتر از ۱۰۰ صحبت می‌کنیم، $U=\{۱,۲,...,۱۰۰\}$ مجموعهٔ مرجع است و یا مثلاً اگر A، B، C و D مجموعه‌هایی بوده و بخواهیم دربارهٔ آنها بحث کنیم، طبق شکل زیر، مجموعهٔ مرجع باید شامل همهٔ آنها باشد.



متمّم یک مجموعه

اگر A مجموعه‌ای دلخواه و U مجموعهٔ مرجع A باشد؛ یعنی $A \subset U$، در این صورت، اعضایی از U که در A نباشند، مجموعه‌ای را تشکیل می‌دهند که متمّم مجموعهٔ A نامیده می‌شود و آن را با A' نمایش می‌دهند.

مثال: اگر $U=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸\}$، $A=\{۲,۴,۶\}$ و $B=\{۲,۳,۴,۵,۶\}$ در این صورت A' و B' را بیابید.

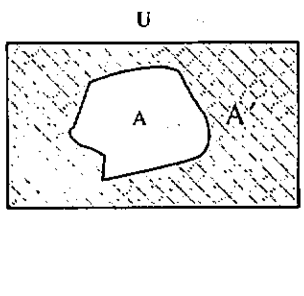
$$A'=\{x \in U | x \notin A\}=\{۱,۳,۵,۷,۸\}$$

(برای مشخص کردن A'، کافی است اعضای A را از U برداریم.)

$$B'=\{x \in U | x \notin B\}=\{۱,۷,۸\}$$

با استفاده از نمودار نیز می‌توان یک مجموعه و متمّم آن را نمایش داد. به نمودار زیر توجه کنید:

(A' هاشورخورده است.)



تست: اگر $U=\{۱,۲,۳,...,k\}$، $(k>۵)$ در این صورت متمّم مجموعهٔ $A=\{۳,۴,...,(k-۳)\}$ کدام است؟

۱) $\{۱,۲,...,k-۴\}$

۲) $\{۱,\ (k-۴),\ (k-۵),...,k\}$

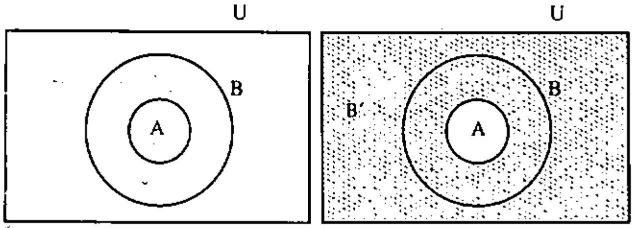
۳) $\{۳,۴,...,(k-۴)\}$

۴) $\{۱,۲,\ (k-۲),\ (k-۱),\ k\}$

حل: گزینه (۴) صحیح است؛ زیرا مجموعهٔ U را می‌توان به‌صورت $U=\{۱,۲,...,k-۴,k-۳,k-۲,k-۱,k\}$ نوشت، که با برداشتن اعضای A از U، مجموعهٔ ذکر شده در گزینهٔ (۴) به‌دست می‌آید.

نکتهٔ مهم: اگر A و B دو مجموعه و A' و B' به ترتیب متمّم A و B باشند، در این صورت داریم:

$$A \subset B \Leftrightarrow B' \subset A'$$

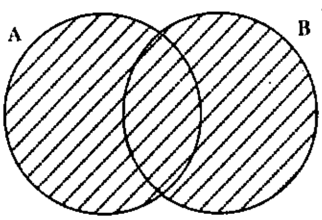


اعمال بین مجموعه‌ها

الف) اجتماع دو مجموعه

اگر A و B دو مجموعه باشند، اجتماع دو مجموعهٔ A و B با نماد $(A \cup B)$ نمایش داده می‌شود و آن، مجموعه‌ای است که اعضای آن، یا متعلق به A یا متعلق به B یا متعلق به هر دو می‌باشد. به مثالها و شکل زیر توجه کنید:

(قسمتهای هاشورخورده، $(A \cup B)$ را تشکیل می‌دهند.)



مثال: اگر $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $B=\{۳,۴,۵,۶,۷\}$

در این صورت: $A \cup B=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$

توجه دارید که:

$$۵ \in B\ ,\ ۵ \notin A \Rightarrow ۵ \in (A \cup B)$$

$$۷ \notin A\ ,\ ۷ \in B \Rightarrow ۷ \in (A \cup B)$$

$$۳ \in A\ ,\ ۳ \in B \Rightarrow ۳ \in (A \cup B)$$

نکات مهم

نکتهٔ ۱: همان‌طور که در شکل مشاهده می‌کنید و با استفاده از تعریف اجتماع دو مجموعه داریم :

$A \subset (A \cup B)\ ,\ B \subset (A \cup B)$

نکتهٔ ۲: اگر A مجموعه‌ای دلخواه باشد، همواره داریم :

$\varnothing \cup A = A \cup \varnothing = A$

(مجموعهٔ تُهی برای عمل اجتماع، عضو خنثی محسوب می‌شود.)

نکتهٔ ۳: اگر A مجموعه‌ای دلخواه باشد، همواره داریم :

$A \cup A = A$

نکتهٔ ۴: اگر A مجموعه‌ای دلخواه و A' متمّم آن باشد، همواره داریم :

$A \cup A' = A' \cup A = U$ (U مجموعهٔ مرجع است.)

نکتهٔ ۵: اگر A مجموعه‌ای دلخواه و U مجموعهٔ مرجع باشد، داریم :

$A \cup U = U \cup A = U$

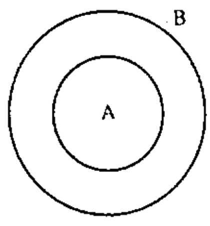
نکتهٔ ۶: برای هر سه مجموعهٔ دلخواه مانند A، B و C داریم :

(خاصیت جابه‌جایی) $A \cup B = B \cup A$

(خاصیت شرکت‌پذیری) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

قضیهٔ مهم: اگر A و B دو مجموعه و داشته باشیم $A \subset B$، آن‌گاه همواره داریم: $A \cup B = B$.

(عکس قضیه نیز برقرار است : یعنی هرگاه $A \cup B = B$، آن‌گاه $A \subset B$.)



(قسمت هاشورخورده یعنی B، همان $(A \cup B)$ است.)

تست: اگر $A \subset B$ و $B \cup C = C$ کدام گزینه درست است؟

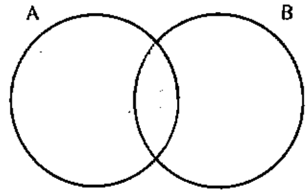
۱) $A \cup C = A$ ۲) $C \subset B$

۳) $A \cup C = C$ ۴) $A = C$

حل: گزینهٔ (۳) صحیح است ؛ زیرا از $B \cup C = C$. طبق عکس قضیهٔ قبل، نتیجه می‌گیریم که $B \subset C$ و طبق فرض داشتیم $A \subset B$ ؛ بنابراین نتیجه می‌گیریم $A \subset C$ که بنابر قضیه از $A \subset C$ نیز نتیجه می‌شود $A \cup C = C$.

ب) اشتراک دو مجموعه

اگر A و B دو مجموعه باشند، اشتراک دو مجموعهٔ A و B با نمادْ $(A \cap B)$ نمایش داده می‌شود و آن، مجموعه‌ای است که اعضای آن، هم متعلق به A و هم متعلق به B می‌باشد. به مثالها و شکل زیر توجه کنید :



(قسمت هاشورخورده، $(A \cap B)$ است.)

مثال: اگر $A = \{۱,۲,۳,۴\}$ و $B = \{۳,۴,۵,۶,۷\}$

در این صورت : $A \cap B = \{۳,۴\}$

توجه دارید که : $۳ \in A,\ ۳ \in B \Rightarrow ۳ \in (A \cap B)$

$۴ \in A,\ ۴ \in B \Rightarrow ۴ \in (A \cap B)$

نکات مهم

نکتهٔ ۱: همان‌طور که در شکل مشاهده می‌کنید و با استفاده از تعریف اشتراک دو مجموعه داریم :

$(A \cap B) \subset A\ ,\ (A \cap B) \subset B$

نکتهٔ ۲: اگر A مجموعه‌ای دلخواه باشد، همواره داریم :

$\varnothing \cap A = A \cap \varnothing = \varnothing$

نکتهٔ ۳: برای هر مجموعهٔ دلخواه مانند A داریم :

$A \cap A = A$

نکتهٔ ۴: اگر A مجموعه‌ای دلخواه و A' متمّم آن باشد، همواره داریم :

$A \cap A' = A' \cap A = \varnothing$

نکتهٔ ۵: اگر A مجموعه‌ای دلخواه و U مجموعهٔ مرجع باشد، داریم :

$A \cap U = U \cap A = A$

نکتهٔ ۶: برای هر سه مجموعهٔ دلخواه مانند A، B و C داریم :

(خاصیت جابه‌جایی) $(A \cap B) = (B \cap A)$

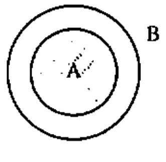
(خاصیت شرکت‌پذیری) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

قضیه مهم

اگر A و B دو مجموعه و داشته باشیم $A \subset B$، آن‌گاه همواره داریم : $A \cap B = A$

(عکس قضیه نیز برقرار است ؛ یعنی هرگاه $A \cap B = A$، آن‌گاه $A \subset B$.)

(قسمت هاشورخورده $(A \cap B)$ است.)



تست: اگر $A\cap C=A$ و $B\cup C=B$ کدام گزینه **نادرست** است؟

۱) $A\cup C=C$ ۲) $B\cap C=C$

۳) $A\cup B=B$ ۴) $A\cap B=B$

حل: گزینهٔ (۴)؛ زیرا با توجه به قضیه‌های ذکر شده و عکس آنها داریم :

$A\cap C=A\Rightarrow A\subset C$ (۱)

$B\cup C=B\Rightarrow C\subset B$ (۲)

(بنابر خاصیت تعدی) (۳) $(۱)\ ,\ (۲)\Rightarrow A\subset B$

گزینهٔ (۱) درست است. $(۱)\Rightarrow A\cup C=C$

گزینهٔ (۲) درست است. $(۲)\Rightarrow B\cap C=C$

گزینهٔ (۳) درست است. $(۳)\Rightarrow A\cup B=B$

یک خاصیت مشترک برای اجتماع و اشتراک (خاصیت توزیع‌پذیری یا پخشی)

برای هر سه مجموعهٔ دلخواه مانند A، B و C داریم :

I) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

II) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

تست: حاصل عبارت $(A\cap B')\cup(A\cap B)$ کدام است؟

۱) $\varnothing$ ۲) A ۳) B ۴) U

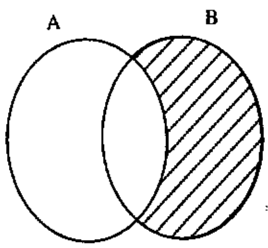
حل: گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ زیرا طبق عکس خاصیت پخشی (فاکتورگیری) داریم :

$$\left[(A\cap B')\cup(A\cap B)\right]=\left[A\cap\underbrace{(B'\cup B)}_{U}\right]=(A\cap U)=A$$

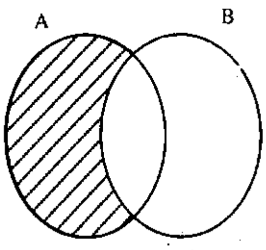
تذکر: اگر A و B دو مجموعه و $A\cap B=\varnothing$ ، می‌گوییم A و B دو مجموعهٔ جدا از هم هستند.

ج) تفاضل دو مجموعه

اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند، $(A-B)$ مجموعه‌ای است شامل تمام اعضایی از A که متعلق به B نباشند. به شکل و مثالهای زیر توجه کنید :



(قسمت هاشور خورده (B-A) است.)



(قسمت هاشور خورده (A-B) است.)

مثال: اگر $A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ ، $B=\{۱,۲,۷,۹\}$ و $C=\{۱,۲,۷,۹,۶\}$ در این صورت داریم :

$A-B=\{\cancel{۱},\cancel{۲},۳,۴,۵,۶\}-\{۱,۲,۷,۹\}=\{۳,۴,۵,۶\}$

$B-A=\{\cancel{۱},\cancel{۲},۷,۹\}-\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}=\{۷,۹\}$

$A-C=\{\cancel{۱},\cancel{۲},۳,۴,۵,\cancel{۶}\}-\{۱,۲,۷,۹,۶\}=\{۳,۴,۵\}$

$C-A=\{\cancel{۱},\cancel{۲},۷,۹,\cancel{۶}\}-\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}=\{۷,۹\}$

$B-C=\{\cancel{۱},\cancel{۲},\cancel{۷},\cancel{۹}\}-\{۱,۲,۷,۹,۶\}=\{\ \}=\varnothing$

$C-B=\{\cancel{۱},\cancel{۲},\cancel{۷},\cancel{۹},۶\}-\{۱,۲,۷,۹\}=\{۶\}$

تذکر: برای محاسبهٔ $(A-B)$ کافی است اعضایی از B که در A نیز هستند، (در صورت وجود) از مجموعهٔ A حذف کنیم.

نکات مهم

نکتهٔ ۱: همان‌طور که از شکل، مشخص است و با استفاده از تعریف تفاضل داریم :

$(A-B)\subset A\ ,\ (B-A)\subset B$

نکتهٔ ۲: اگر A مجموعه‌ای دلخواه باشد، داریم :

$A-\varnothing=A\ ,\ \varnothing-A=\varnothing$

نکتهٔ ۳: برای هر مجموعهٔ دلخواه مانند A داریم :

$A-A=\varnothing$

نکتهٔ ۴: اگر A مجموعه‌ای دلخواه و A' متمّم آن باشد، داریم :

$A-A'=A\ ,\ A'-A=A'$

نکتهٔ ۵: اگر A مجموعه‌ای دلخواه و U مجموعهٔ مرجع باشد، داریم :

$A-U=\varnothing\ ,\ U-A=A'$

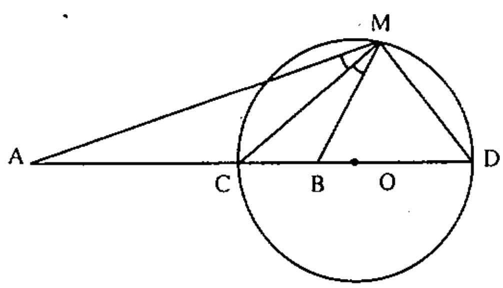
مکان هندسی

(قسمت بیست و دوم)

● محمدهاشم رستمی

دایرهٔ آپولونیوس. مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B واقع در آن صفحه مقدار ثابت k‏($k \neq 0$ و $k \neq 1$) باشد، دایره‌ای است که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت k تقسیم می‌کند.

اثبات به روش هندسی. دو نقطهٔ ثابت A و B را روی صفحهٔ P در نظر گرفته، خط راست AB را رسم می‌کنیم و روی این خط دو نقطهٔ C و D را چنان اختیار می‌کنیم که پاره‌خط AB را به نسبت k تقسیم کنند، یعنی، (۱) $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = k$ باشد. دایرهٔ به



قطر CD مکان هندسی مورد نظر، یعنی مکان هندسی نقطه‌ای است که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر k است. زیرا :

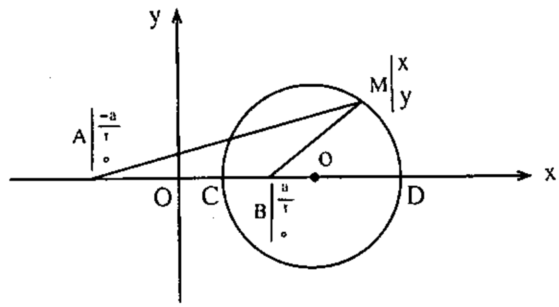
اولاً. هر نقطه مانند M که روی این دایره قرار داشته باشد، نسبت فاصله‌اش از A و B برابر k است. زیرا اگر از M به نقطه‌های A، B، C و D وصل کنیم، چون (ABCD) یک تقسیم توافقی است. پس دستگاه M−ABCD دستگاهی توافقی می‌باشد و چون دو شعاع غیرمتوالی این دستگاه توافقی یعنی MC و MD بر هم عمود می‌باشند (زاویهٔ $C\hat{M}D$ محاطی روبه‌رو به قطر و برابر $90°$ است)، پس این دو شعاع نیمسازهای زوایای داخلی و خارجی زاویه‌های بین دو شعاع دیگر می‌باشند. یعنی MC نیمساز زاویهٔ داخلی AMB و MD نیمساز زاویهٔ خارجی AMB است. از طرفی می‌دانیم نیمسازهای هر زاویه ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت دو ضلع دیگر تقسیم می‌کنند. پس داریم :

$$\frac{CA}{CB} = \frac{MA}{MB} = k$$

ثانیاً. هر نقطه مانند M که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر مقدار ثابت k، یعنی (۲) $\frac{MA}{MB} = k$ باشد، روی دایرهٔ به قطر CD قرار دارد. زیرا اگر از M به نقطه‌های A، B، C و D وصل کنیم، از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $\frac{MA}{MB} = \frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = k$، اما این رابطه نشان می‌دهد که MC و MD بترتیب نیمسازهای زاویه‌های داخلی و خارجی رأس M از مثلث AMB می‌باشند که چون این دو نیمساز بر هم عمودند، پس $C\hat{M}D = 90°$ و در نتیجه نقطهٔ M روی دایرهٔ به قطر CD واقع است.

این دایره را دایرهٔ آپولونیوس (Appolonieus of Perga) می‌نامند.

اثبات به روش تحلیلی. دو نقطهٔ ثابت A و B را در صفحهٔ P در نظر می‌گیریم. خط AB را محور xها و عمودمنصف پاره‌خط



AB را محور yها اختیار می‌کنیم. اگر $M(x,y)$ نقطه‌ای از مکان هندسی مورد نظر، یعنی نقطه‌ای باشد که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B مقدار ثابت k است، با فرض $AB = a$ داریم:

$$A(-\frac{a}{2},0)\ ,\ B(\frac{a}{2},0)\ ,\ M(x,y)$$

$$\Rightarrow MA = \sqrt{(x+\frac{a}{2})^2 + y^2}$$

$$MB = \sqrt{(x-\frac{a}{2})^2 + y^2}\ ,$$

$$\frac{MA}{MB} = k \Rightarrow \sqrt{\frac{(x+\frac{a}{2})^2 + y^2}{(x-\frac{a}{2})^2 + y^2}} = k$$

$$\Rightarrow (x+\frac{a}{2})^2 + y^2 = k^2(x-\frac{a}{2})^2 + k^2y^2$$

$$\Rightarrow (k^2-1)x^2 + (k^2-1)y^2 - a(k^2+1)x + (k^2-1)\frac{a^2}{4} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{a(k^2+1)}{k^2-1}x + \frac{a^2}{4} = 0 \qquad (1)$$

معادلهٔ (۱) معادلهٔ دایره‌ای است که مرکزش نقطهٔ $O_1(\frac{a(k^2+1)}{2(k^2-1)},0)$ و شعاعش $R = \left|\frac{ak}{k^2-1}\right|$ است.

بعکس ثابت می‌شود هر نقطه‌ای که مختصاتش در معادلهٔ (۱) صدق کند، نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر k است.

قطر CD از این دایره، پاره‌خط AB را به نسبت k تقسیم می‌کند، زیرا داریم:

$$O_1A = \left|\frac{a(k^2+1)}{2(k^2-1)} + \frac{a}{2}\right|\ ,\ O_1B = \left|\frac{a(k^2+1)}{2(k^2-1)} - \frac{a}{2}\right|\ ,$$

$$O_1C = O_1D = R = \left|\frac{ak}{k^2-1}\right|.$$

$$\Rightarrow O_1C^2 = O_1D^2 = \overline{O_1A}.\overline{O_1B} \Rightarrow \frac{a^2k^2}{(k^2-1)^2}$$

$$= \left|\frac{a(k^2+1)}{2(k^2-1)} + \frac{a}{2}\right| . \left|\frac{a(k^2+1)}{2(k^2-1)} . \frac{a}{2}\right|$$

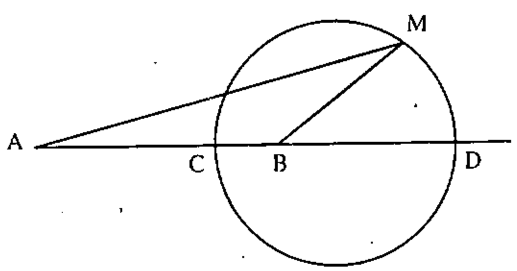
$$\Rightarrow \frac{a^2k^2}{(k^2-1)^2} = \frac{a^2}{4}\left(\frac{(k^2+1)^2}{(k^2-1)^2} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \frac{a^2k^2}{(k^2-1)^2} = \frac{a^2k^2}{(k^2-1)^2}$$

بنابراین، مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B واقع در آن صفحه برابر مقدار ثابت k است، دایره‌ای است که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت k تقسیم می‌کند.

مثال ۱. پاره‌خط AB به طول ۱۲ سانتیمتر در یک صفحه داده شده است. مکان هندسی نقطه‌ای از این صفحه را بیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر ۲ است.

حل. نقطه‌های C و D را روی پاره‌خط AB و در امتداد آن چنان اختیار می‌کنیم که این پاره‌خط را به نسبت ۲ تقسیم کنند.

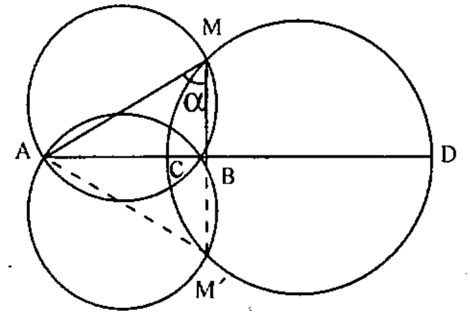


یعنی $2 = \frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$ باشد. دراین‌صورت $CA = 8$، $CB = 4$، $DA = 24$ و $DB = 12$ سانتیمتر است. حال دایرهٔ به قطر CD را رسم می‌کنیم. این دایره مکان هندسی مورد نظر است.

مثال ۲. دو نقطهٔ A و B در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای

از این صفحه را تعیین کنید که از آن نقطه پاره‌خط AB به زاویهٔ α دیده می‌شود، و نسبت فاصلهٔ آن نقطه از دو نقطهٔ A و B برابر مقدار ثابت k باشد.

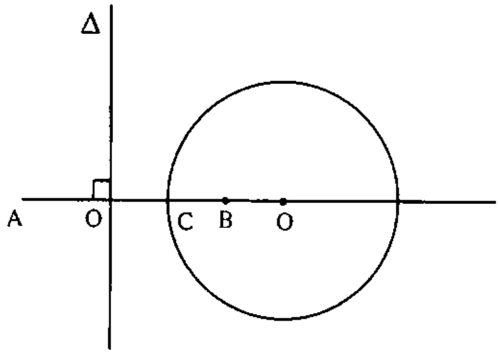
حل. کمان درخور زاویهٔ α وابسته به پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. سپس مکان هندسی نقطه‌ای از این صفحه را که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر k است، رسم می‌نماییم. نقطه‌های



برخورد این دو مکان هندسی جواب مسأله‌اند و مسأله همواره دو جواب دارد.

مثال ۳. دو نقطهٔ A و B در یک صفحه داده شده‌اند. آیا نقطه‌ای وجود دارد که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر عدد ثابت k باشد و این نقطه از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد؟

حل. نقطه‌های C و D را روی پاره‌خط AB و در امتداد آن چنان اختیار می‌کنیم که پاره‌خط AB را به نسبت k تقسیم کنند، سپس دایرهٔ به قطر CD را رسم می‌کنیم (دایرهٔ آپولونیوس). از طرفی مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که از دو نقطهٔ A و B به



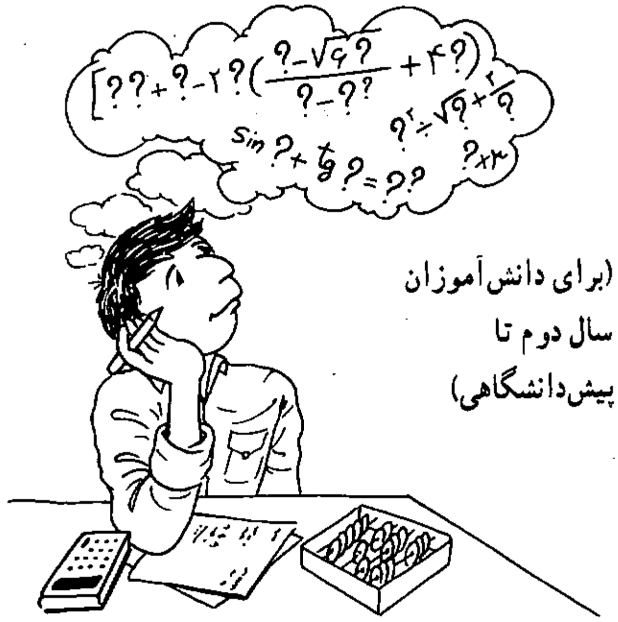
یک فاصله است، خط Δ عمودمنصف پاره‌خط AB است، که این خط را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن با AB را که وسط پاره‌خط AB است O می‌نامیم. اما می‌دانیم بنا به رابطهٔ نیوتن در تقسیم توافقی، دو نقطهٔ C و D در یک طرف نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB قرار دارند (ABCD یک تقسیم توافقی است). بنابراین عمودمنصف پاره‌خط AB، دایرهٔ آپولونیوس یعنی مکان هندسی نقطه‌ای را که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر k است، هیچ‌گاه قطع نمی‌کند، پس مسأله دارای جواب نیست.

تفریح اندیشه

سعید که آدم عجولی است، از پله‌برقی متحرک واقع در مسیرش با نرخ یک پله در هر ثانیه بالا می‌رود و پس از بیست پله به آن می‌رسد. روز بعد، باز هم درحالی که پله‌برقی در حرکت است، با نرخ دو پله در ثانیه از آن بالا می‌رود و در سی‌ودو پله به بالای آن می‌رسد. درصورتی که پلکان برقی متوقف باشد، چند پله از پایین تا بالا دارد؟

آنالیز ترکیبی

(قسمت دوم)



(برای دانش‌آموزان سال دوم تا پیش‌دانشگاهی)

● میرشهرام صدر

جایگشت، تبدیل و ترکیب

جایگشت

فرض کنیم n شیء داریم، هر یک از حالتهای کنار هم قرار گرفتن این n شیء را یک جایگشت از آن n شیء گوییم. تعداد جایگشتهای n شیء را با نماد P_n نمایش می‌دهیم. برای مثال، جایگشتهای سه شیء a، b و c به صورت زیر است :

abc, acb, bca, bac, cab, cba

همچنین جایگشتهای دو شیء از سه شیء a، b و c عبارت است از :

ab, ba, ac, ca, bc, cb

فاکتوریل

فرض کنید n عددی حسابی باشد، n! (بخوانید n فاکتوریل) تابعی است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود :

$$f:\mathbb{N}\cup\{0\}\to\mathbb{N}$$

$$f(n)=n!=\begin{cases}1 & n=0 \text{ یا } 1\\ 1\times2\times...\times n & n>1\end{cases}$$

بنابراین، طبق این تعریف داریم :

$$0!=1!=1\ ,\ \ 6!=1\times2\times...\times6=720$$

محاسبهٔ تعداد تبدیلات

۱. اگر n شیء متمایز داشته باشیم، تعداد جایگشتهای این n شیء برابر با n! است؛ یعنی: $P_n=n!$

مثال. ۵ دانش‌آموز، به چند طریق می‌توانند روی یک ردیف نیمکت بنشینند.

حل.

$$n=5\Rightarrow P_n=5!=1\times2\times3\times4\times5=120$$

مثال. با حروف کلمهٔ flower چند کلمهٔ شش حرفی معنادار یا بی‌معنا، بدون تکرار حروف می‌توان ساخت؟

حل.

$$n=6\Rightarrow P_n=6!=1\times2\times...\times6=720$$

۲. تعداد جایگشتهای (تبدیلهای) r شیء از n شیء $(r\le n)$

فرض کنیم n شیء متمایز داریم، هر جایگشت (تبدیل) r تایی از این n شیء که در آن $r\le n$ ، عبارت است از دسته‌هایی r تایی از این n شیء، به‌طوری که در هر دسته، ترتیب قرار گرفتن این r شیء دارای اهمیت باشد و با تعویض جای آنها، شیء جدیدی حاصل شود. تعداد تبدیلهای r تایی را با $P(n,r)$ نشان می‌دهیم و مقدار آن را طبق فرمول زیر به‌دست می‌آوریم :

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}\ ;\ (r\le n)$$

اثبات. چون r خانه و n شیء داریم، بنابراین خانهٔ اوّل با n شیء، خانهٔ دوم با $(n-1)$ شیء، ... و خانهٔ rام با $(n-r)+1$ شیء پُر می‌شود ؛ بنابراین طبق اصل ضرب داریم :

خانه rام		خانه سوم	خانه دوم	خانه اول
$(n-r)+1$	...	$n-2$	$n-1$	n

$$P_n=n(n-1)(n-2)\times...\times[(n-r)+1]$$

با ضرب طرف راست برابری بالا در

$$\frac{(n-r)(n-r-1)\times...\times3\times2\times1}{(n-r)(n-r-1)\times...\times3\times2\times1}$$

داریم :

$$P_n=\frac{n(n-1)\times...\times[(n-r)+1]\times(n-r)(n-r-1)\times...\times3\times2\times1}{(n-r)(n-r-1)\times...\times3\times2\times1}$$

$$P_n=\frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال. با حروف کلمهٔ CHAIR، چند کلمهٔ سه حرفی بدون تکرار حروف می‌توان نوشت؟

$$n=۵\ ,\ r=۳\ ;\ P(۵,۳)=\frac{۵!}{(۵-۳)!}=\frac{۵!}{۲!}=۶۰$$

تست. با رقمهای ۳، ۵، ۱، ۲، ۶ و ۸ چند عدد چهار رقمی می‌توان نوشت؟ (بدون تکرار رقمها)

۱) ۱۲۰ ۲) ۳۶۰ ۳) ۱۸۰ ۴) ۳۰۰

حل. گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ زیرا :

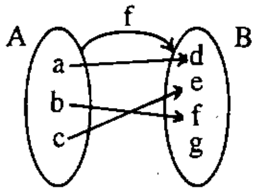
$$n=۶\ ,\ r=۴\ ;\ P(۶,۴)=\frac{۶!}{(۶-۴)!}=\frac{۶!}{۲!}=۳۶۰$$

مثال: با حروف کلمهٔ TRIANGLE چند کلمهٔ سه حرفی می‌توان نوشت؟ (بدون تکرار حروف)

حل.

$$n=۸,\ r=۳\ ;\ P(۸,۳)=\frac{۸!}{۵!}=۳۳۶$$

محاسبهٔ تعداد نگاشتهای یک به یک از یک مجموعهٔ n عضوی به یک مجموعهٔ m عضوی $(m \le n)$



نگاشت رو به‌رو را از مجموعهٔ $A=\{a,b,c\}$ به $B=\{d,e,f,h\}$ در نظر بگیرید.

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، نگاشت $f:A \to B$ (مفهوم نگاشت را در شمارهٔ قبل بیان کرده‌ایم)، تابعی یک به یک است ؛ یعنی اگر نگاشت f را به‌صورت مجموعه‌ای از زوجهای مرتّب بنویسیم، آن‌گاه مؤلفه‌های دوم زوجهای مرتّب، با یکدیگر متمایزند.

$$f=\{(a,d),(b,f),(c,e)\}$$

تذکر. اگر A یک مجموعهٔ n عضوی و B یک مجموعهٔ m عضوی باشد و $n>m$، در این صورت، از A به B نگاشت یک‌به‌یک نمی‌توان تعریف کرد. بنابراین برای این که بتوان از مجموعهٔ n عضوی A به مجموعهٔ m عضوی B، نگاشت یک‌به‌یک تعریف کرد، باید داشته باشیم $n \le m$.

فرض کنید $A=\{a_۱,a_۲,\dots,a_n\}$ و $B=\{b_۱,b_۲,\dots,b_m\}$ و $n \le m$، می‌خواهیم تعداد نگاشتهای یک به یک $f:A \to B$ را محاسبه کنیم. برای این منظور، ابتدا تابع f را روی $a_۱$ اثر می‌دهیم ؛ $f(a_۱)$ می‌تواند برابر $b_۱$ یا $b_۲$ یا ... یا b_m باشد ؛ یعنی برای $f(a_۱)$، m انتخاب داریم. فرض کنیم $f(a_۱)=b_j$ که $۱ \le j \le m$. در مرحلهٔ بعد، f را روی $a_۲$ اثر می‌دهیم. برای این که نگاشت f یک به یک باشد، باید $f(a_۲) \ne b_j$ ؛ یعنی برای $f(a_۲)$، $(m-۱)$ انتخاب داریم. به همین ترتیب، برای $f(a_۳)$، $(m-۲)$ انتخاب و ... و برای $f(a_n)$، $(m-n+۱)$ انتخاب داریم ؛ بنابراین طبق اصل ضرب داریم :

$f(a_۱)$	$f(a_۲)$	$f(a_۳)$		$f(a_n)$
m	$m-۱$	$m-۲$	...	$(m-n)+۱$

تعداد نگاشتها (یک به یک از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B)

$$=m(m-۱)(m-۲)\dots(m-n+۱)$$

$$=P(m,n)=\frac{m!}{(m-n)!}$$

مثال. از مجموعهٔ دو عضوی A به مجموعهٔ هفت عضوی B، چند نگاشت یک به یک می‌توان تعریف کرد؟

حل.

$$P(۷,۲)=\frac{۷!}{(۷-۲)!}=\frac{۷!}{۵!}=\frac{۷\times۶\times۵!}{۵!}=۴۲$$

۳. تعداد تبدیلهایی که شامل یک شیء مشخص هستند

n شیء متمایز $a_۱,a_۲,\dots,a_n$ را در نظر می‌گیریم، تعداد تبدیلهای r تایی از این n شیء که در همهٔ آنها $a_۱$ به‌کار رفته است، از فرمول زیر محاسبه می‌شود :

$$r\times P(n-۱,\ r-۱)=\frac{r(n-۱)!}{(n-r)!}$$

مثال. با حروف کلمهٔ CHAIR چند کلمهٔ ۳ حرفی می‌توان ساخت ؛ به‌طوری که شامل حرف A باشد؟

حل.

$$n=۵,\ r=۳;\ ۳\times P(۵-۱,\ ۳-۱)$$

$$=۳\times P(۴,۲)\ =\frac{۳\times۴!}{۲!}=۳۶$$

۴. تعداد تبدیلهایی که فاقد یک یا چند شیء مشخص هستند

n شیء متمایز $a_۱,a_۲,\dots,a_n$ را در نظر می‌گیریم، تعداد تبدیلهای r تایی از این n شیء که فاقد شیء $a_۱$ هستند، از فرمول زیر محاسبه می‌شود : $(r<n)$

$$P(n-۱,\ r)=\frac{(n-۱)!}{(n-۱-r)!}$$

همچنین تعداد تبدیلهای r تایی از n شیء که فاقد k شیء مشخص

باشند، برابر است با :

با شرط $(n > k + r)$ $\qquad P(n-k,\ r) = \dfrac{(n-k)!}{(n-k-r)!}$

۵. تعداد تبدیلهای یک در میان قرار دادن اشیا

الف: هرگاه دو دستهٔ n تایی از اشیای متمایز داشته باشیم و بخواهیم آنها را یک در میان قرار دهیم، تعداد تبدیلهای یک در میان آنها برابر است با :

$P_n = ۲ \times n! \times n!$

مثال. سه کتاب ریاضی متمایز و سه کتاب فیزیک متفاوت داریم، به چند طریق می‌توان این کتابها را به‌صورت یک در میان در یک طبقه کتابخانه قرار داد؟

$n = ۳;\ P_n = ۲ \times ۳! \times ۳! = ۷۲$

ب: در صورتی که بخواهیم اشیای دو دسته، یکی n تایی و دیگری $(n-۱)$ تایی را یک در میان کنار هم قرار دهیم، تعداد تبدیلهای یک در میان برابر است با :

$P_n = n! \times (n-۱)!$

مثال. سه سرباز و دو افسر، به چند طریق می‌توانند یک در میان در یک ردیف بنشینند؟

حل. $P_n = ۳! \times ۲! = ۱۲$

سرباز	افسر	سرباز	افسر	سرباز
۱	۱	۲	۲	۳

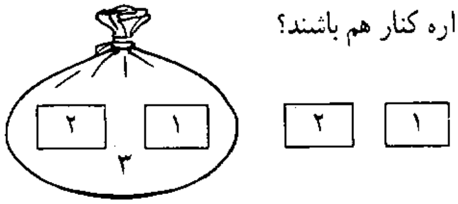
۶. تعداد تبدیلهایی که در آنها دو یا چند شیء کنار هم قرار دارند

برای یافتن تعداد تبدیلهای n شیء، به شرط آن که r تا از آنها کنار هم قرار گیرند، از فرمول زیر استفاده می‌کنیم :

$P_n = (n - r + ۱)! \times r!;(r \le n)$

مثال. به چند طریق می‌توانند سه دانش‌آموز که دو نفر آنها برادر هستند، کنار هم روی یک ردیف نیمکت بنشینند ؛ به‌طوری که دو برادر همواره کنار هم باشند؟

حل.



$P_n = (۴ - ۲ + ۱)! \times ۲! = ۳! \times ۲! = ۱۲$

دو برادر به !۲ حالت کنار هم قرار می‌گیرند، اگر اکنون دو برادر را یک گروه، نفر سوم را یک گروه و نفر چهارم را یک گروه در نظر بگیریم، آن‌گاه این سه گروه به !۳ حالت کنار هم قرار می‌گیرند ؛ بنابراین طبق اصل ضرب داریم : $P_n = ۳! \times ۲! = ۱۲$

حالت کلی. اگر k دسته شیء داشته باشیم ؛ به‌طوری که دستهٔ اول شامل $n_۱$ شیء متمایز، دستهٔ دوم شامل $n_۲$ شیء متمایز، ... و دستهٔ kام شامل n_k شیء متمایز باشند، در این صورت، تعداد کلّ حالتهایی که این اشیا کنار هم قرار می‌گیرند ؛ به‌طوری که اشیای هر دسته کنار هم واقع باشند، برابر است با :

$P_n = n_۱! \times n_۲! \times \ldots \times n_k! \times k!$

مثال. ۴ مداد، ۵ خودکار و ۷ خودنویس، به چند طریق می‌توانند کنار هم قرار گیرند، به‌طوری که همواره مدادها، خودکارها و خودنویسها کنار هم باشند.

حل.

$P_n = ۴! \times ۵! \times ۷! \times ۳!$

زیرا ۴ مداد به !۴ حالت، ۵ خودکار به !۵ حالت و ۷ خودنویس به !۷ حالت می‌توانند کنار هم قرار گیرند و اگر ۴ مداد را یک گروه، ۵ خودکار را یک گروه و ۷ خودنویس را یک گروه در نظر بگیریم، آن‌گاه این سه گروه به !۳ حالت می‌توانند کنار هم قرار گیرند ؛ بنابراین طبق اصل ضرب داریم :

$P_n = ۴! \times ۵! \times ۷! \times ۳!$

۷. تعداد تبدیلهایی که n شیء متمایز به صورت حلقه قرار می‌گیرند

n شیء متمایز با $(n-۱)!$ حالت می‌توانند یک حلقه تشکیل دهند یا دور میز گردی قرار بگیرند.

مثال. به چند طریق ۵ دانش‌آموز می‌توانند دور میزگردی بنشینند یا به چند طریق ۵ دانش‌آموز می‌توانند دستهای یکدیگر را گرفته و تشکیل یک حلقه دهند؟

حل.

$P_n = (۵ - ۱)! = ۴! = ۲۴$

۸. تبدیل با تکرار

فرض کنیم n شیء داشته باشیم که در آنها k نوع شیء متمایز وجود داشته باشد ؛ به‌طوری که $n_۱$ تا از آنها از نوع اول، $n_۲$ تا از آنها نوع دوم، ... و n_k تا از آنها از نوع kام باشند و $n_۱ + n_۲ + \ldots + n_k = n$. در این صورت، تعداد تبدیلهای متمایز این n شیء برابر است با :

$$P_n = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \ldots \times n_k!}$$

مثال. با حروف کلمهٔ MATHEMATICS چند کلمهٔ ۱۱ حرفی می‌توان ساخت؟

حل. چون در این کلمه، M دو بار، A دو بار و T دو بار تکرار شده است؛ بنابراین داریم:

$$P_n = \frac{11!}{2! \times 2! \times 2!}$$

تست. ۷ نفر مسافر به چند طریق می‌توانند در یک اتاق سه تخته و دو اتاق دو تخته قرار گیرند؟

۱) ۳۶۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۲۱۰ ۴) ۱۸۰

حل. گزینهٔ (۳) صحیح است؛ زیرا:

$$P_n = \frac{7!}{3! \times 2! \times 2!} = 210$$

ترکیب

سه شیء a، b و c را در نظر می‌گیریم، تعداد تبدیلهای دوتایی از این سه شیء، برابر ۶ است.

C(۳,۲) ; ترکیب دوتایی از سه شیء	تبدیل دوتایی از سه شیء P(۳,۲)
{a , b}	ab , ba
{a , c}	ac , ca
{b , c}	bc , cb

هرگاه در انتخاب دوتایی از این سه شیء، **ترتیب** قرار گرفتن اشیاء را در نظر نگیریم، به عبارت دیگر، زیرمجموعه‌های دو عضوی از این سه شیء را بنویسیم، طبق تعریف، یک ترکیب ۲تایی از ۳ شیء داریم و آن را با نماد C(۳,۲) نمایش می‌دهیم. همان‌طور که طبق جدول بالا ملاحظه می‌کنید، تعداد تبدیلها، !۲ برابر تعداد، ترکیبهاست؛ بنابراین:

$$2! \times C(3,2) = P(3,2) \Rightarrow C(3,2) = \frac{P(3,2)}{2!}$$

به‌طورکلی، هر ترکیب، انتخاب اشیایی از میان چند شیء، بدون در نظر گرفتن ترتیب برای آنهاست. به عبارت دیگر، هر زیرمجموعهٔ r عضوی از یک مجموعهٔ n عضوی $(r \le n)$ را یک ترکیب rتایی از n شیء گوییم. تعداد این ترکیبها را با یکی از نمادهای $C(n,r)$ یا $\binom{n}{r}$ نشان می‌دهیم و تعداد تبدیلهای r شیء از n شیء، !r برابر تعداد ترکیبهای r شیء از n شیء است؛ بنابراین داریم:

$$r! \times C(n,r) = P(n,r)$$

$$\Rightarrow C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$$

در نتیجه داریم:

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

برای مثال، تعداد ترکیبهای سه حرفی از چهار حرف a، b، c و d یا تعداد زیرمجموعه‌های سه عضو از مجموعهٔ $A = \{a,b,c,d\}$ برابر است با:

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$$

این چهار زیرمجموعه، عبارت است از: $\{a,b,c\}$، $\{a,b,d\}$، $\{a,c,d\}$ و $\{b,c,d\}$، ملاحظه می‌کنیم که اگر در هر یک از این زیرمجموعه‌ها، ترتیب عضوها را عوض کنیم، زیرمجموعهٔ جدیدی به‌دست نمی‌آید.

مثال. داخل جعبه‌ای ۵ مهرهٔ قرمز و ۳ مهرهٔ سبز وجود دارد. به چند طریق می‌توان تصادفی و یکجا ۴ مهره از این جعبه خارج کرد؟

حل. داخل جعبه ۸ مهره داریم و می‌خواهیم یک زیرمجموعهٔ ۴ عضوی انتخاب کنیم؛ بنابراین داریم:

$$\binom{8}{4} = \frac{8!}{4! \times 4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70$$

تست. به چند طریق می‌توان کمیته‌ای ۳ نفری از بین ۷ دانشجو و ۵ دانش‌آموز انتخاب کرد؟

۱) ۱۱۰ ۲) ۳۳۰ ۳) ۴۴۰ ۴) ۲۲۰

حل. گزینهٔ (۴) صحیح است؛ زیرا می‌خواهیم از بین ۱۲ نفر، یک زیرمجموعهٔ ۳ عضوی انتخاب کنیم:

$$\binom{12}{3} = \frac{12!}{3! \times 9!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9!}{3 \times 2 \times 1 \times 9!} = 220$$

حاصل برخی از مقادیر $\binom{n}{r}$؛ $(r \le n)$

۱) $\binom{n}{0} = 1$ ۲) $\binom{n}{1} = n$

$$۳)\ \binom{n}{n}=۱ \qquad ۴)\ \binom{n}{n-۱}=n$$

$$۵)\ \binom{n}{r}=\binom{n}{n-r} \qquad ۶)\ \binom{n+۱}{r}=\binom{n}{r-۱}+\binom{n}{r}$$

مثال. به چند طریق می‌توان از بین ۳ دانش‌آموز، ۵ دانشجو و ۴ کارمند، کمیته‌ای سه نفری تشکیل داد ؛ به‌طوری که :

الف. سه نفر انتخاب شده دارای شغلهای متمایز باشند.

ب. از سه نفر انتخاب شده، دو نفر دانش‌آموز باشند.

ج. از سه نفر انتخاب شده، حداقل دو نفر دانش‌آموز باشند.

د. از سه نفر انتخاب شده، حداکثر دو نفر دانش‌آموز باشند.

حل. الف. برای این که سه نفر انتخاب شده، دارای شغلهای مختلف باشند ؛ بنابراین از هر کدام یک نفر انتخاب می‌کنیم :

$$T=\underset{\text{دانش‌آموز}}{\binom{۳}{۱}}\times\underset{\text{دانشجو}}{\binom{۵}{۱}}\times\underset{\text{کارمند}}{\binom{۴}{۱}}=۳\times۵\times۴=۶۰$$

ب. دو حالت پیش می‌آید ؛ حالت اوّل، دو دانش‌آموز و یک نفر دانشجو، حالت دوم، دو دانش‌آموز و یک نفر کارمند، جواب مسأله از مجموع جوابهای حالتهای اول و دوم به‌دست می‌آید :

$$T=\underset{\text{دانش‌آموز}}{\binom{۳}{۲}}\times\underset{\text{دانشجو}}{\binom{۵}{۱}}+\underset{\text{دانش‌آموز}}{\binom{۳}{۲}}\times\underset{\text{کارمند}}{\binom{۴}{۱}}=۳\times۵+۳\times۴=۲۷$$

ج. در صورتی که از سه نفر انتخاب شده، حداقل دو نفر آنها دانش‌آموز باشند، بنابراین می‌تواند دو نفر دانش‌آموز یا سه نفر دانش‌آموز انتخاب کنند ؛ بنابراین دو حالت پیش می‌آید، حالت اول، دو نفر دانش‌آموز و نفر سوم می‌تواند دانشجو یا کارمند باشد و حالت دوم، هر سه نفر دانش‌آموز هستند ؛ بنابراین :

$$T=\underbrace{\binom{۳}{۲}\times\binom{۵}{۱}+\binom{۳}{۲}\times\binom{۴}{۱}}_{\text{دو نفر دانش‌آموز هستند}}+\binom{۳}{۳}=۱۵+۱۲+۱=۲۸$$

د. در صورتی که از سه نفر انتخاب شده، حداکثر دو نفر آنها دانش‌آموز باشند، بنابراین می‌تواند دو نفر دانش‌آموز یا یک نفر دانش‌آموز یا اصلاً دانش‌آموز انتخاب نکند. در این قسمت، فقط حالتی که هر سه نفر دانش‌آموز باشند، در نظر گرفته نشده است ؛ بنابراین می‌توان نوشت :

تعداد ترکیبهایی که حداکثر ۲ نفر از سه نفر دانش‌آموز باشند برابر است با تعداد کل ترکیبهای ۳ عضوی از ۱۲ عضو، منهای تعداد ترکیبهایی که هر سه نفر دانش‌آموز باشند.

$$T=\underset{\text{کل}}{\binom{۱۲}{۳}}-\underset{\text{دانش‌آموز}}{\binom{۳}{۳}}\times\underset{\text{دانشجو}}{\binom{۵}{۰}}\times\underset{\text{کارمند}}{\binom{۴}{۰}}=۲۲۰-۱=۲۱۹$$

تعداد ترکیبهایی که فاقد k شیء مشخص هستند

تعداد ترکیبهای r تایی از n شیء متمایز که فاقد k شیء مشخص‌اند، برابر با $T=\binom{n-k}{r}$ است.

مثال. چند تا از زیرمجموعه‌های ۵ عضوی مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,...,۱۰\}$ فاقد عضوهای ۴، ۵ و ۶ هستند؟

حل.

$$n=۱۰,\ r=۵,\ k=۳;\ \binom{۱۰-۳}{۵}=\binom{۷}{۵}=\frac{۷!}{۵!\times۲!}=۲۱$$

تعداد ترکیبهایی که شامل k شیء مشخص هستند

تعداد ترکیبهای r تایی از n شیء متمایز که شامل k شیء مشخص‌اند، برابر با $\binom{n-k}{r-k}$ است. $(k\le r\le n)$

مثال. چند تا از زیرمجموعه‌های ۴ عضوی مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,...,۱۰\}$ شامل عضوهای ۵ و ۷ هستند؟

حل.

$$n=۱۰, r=۴, k=۲;\binom{۱۰-۲}{۴-۲}=\binom{۸}{۲}=\frac{۸!}{۲!\times۶!}=۲۸$$

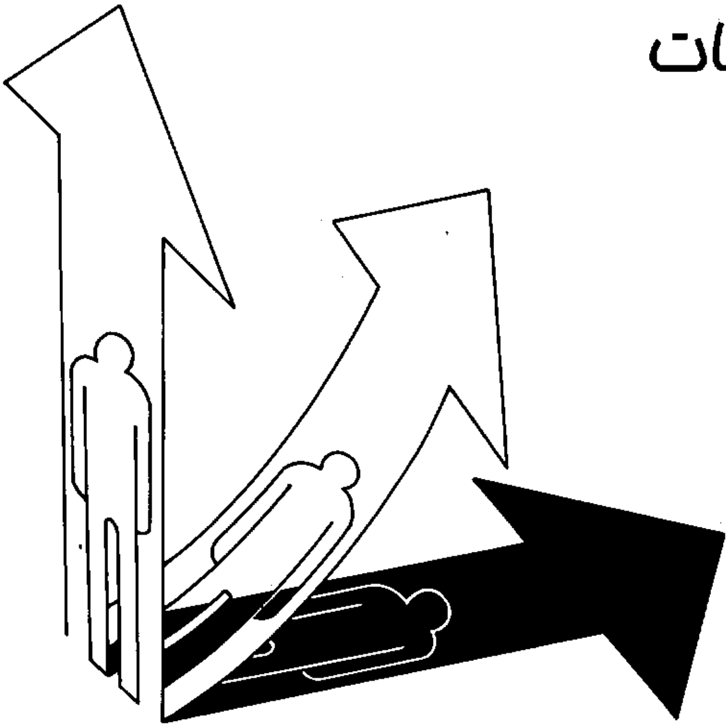
تست. از بین ۸ دانش‌آموز که ۲ نفر آنها برادر هستند، به چند طریق می‌توان کمیته‌ای ۵ نفری تشکیل داد که شامل هر دو برادر باشند.

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۳۰ ۴) ۴۰

حل. گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ زیرا :

$$n=۸,\ r=۵,\ k=۲;\binom{۸-۲}{۵-۲}=\binom{۶}{۳}=\frac{۶!}{۳!\times۳!}=۲۰$$

گشت و گذاری در ریاضیات معاصر



تاریخچه‌ای از نظریهٔ منطق فازی:
(Fuzzy Logic)

● تهیه و تنظیم: محمدعلی فریبرزی عراقی
عضو هیأت علمی دانشگاه آزاد اسلامی
واحد تهران

مفهوم «فازی» بودن، به معنای چند ارزشی یا چند مقداری بودن است. در حالت فازی برای پاسخ به یک سؤال، فقط با دو انتخاب «درست» یا «نادرست» و «بلی» یا «خیر» مواجه نیستیم و حالت میانه نیز موردنظر است. در واقع، به جای حالت دودویی صفر ـ یک، با اعدادی از صفر تا یک سروکار داریم و به‌جای داشتن جهان سیاه و سفید، جهانی با سایه‌های خاکستری از سیاه تا سفید را داریم. «ارسطو»، فیلسوف بزرگ یونانی معتقد بود: «هر چیزی یا باید باشد یا نباشد، چه در حال حاضر و چه در آینده.» در این جهان‌بینی، همواره بین تضادها و بودن یا نبودنها تمایز قائل می‌شویم. در جهان دو ارزشی ارسطو، باید گفت یا «A» یا «نه A». «بودا» در هندوستان، پنج قرن پیش از میلاد مسیح و حدود دو قرن پیش از ارسطو، اولین قدم در دوری از جهان سیاه و سفید را برداشت. هدف وی، نگریستن به جهان به‌صورتی که هست، بود. به نظر بودا، باید جهان را سراسر تناقض دید؛ جهانی که در آن هم «A» و هم «نه A» را داریم و این همان جدایی از جهان سیاه و سفید ارسطو و ورود به جهان خاکستری است و به عبارت دیگر، جدایی از فضای دو ارزشی و ورود به فضای چند ارزشی.

پدیده‌های واقعی تا اندازه‌ای مبهم و غیردقیق هستند و نوعی عدم قطعیت بر آنها حاکم است. در جهان فازی، همه چیز به‌طور نسبی درست یا نادرست است؛ نه به‌طور یقین. در اوایل دههٔ ۱۹۲۰، اولین بار منطق چند ارزشی توسط «لوکاسیه ویچ» لهستانی در مقابل منطق ارسطویی مطرح شد. در همین زمان، یعنی اوایل قرن بیستم، «برتراند راسل» با ارائه پارادوکسهای خود، بنیانهای منطقی برای منطق ابهام یا فازی را نهاد؛ ولی موضوع را ادامه نداد. به عقیدهٔ راسل، هر چیزی درجه‌ای از ابهام را دارد و تا سعی در واضح و روشن کردن آن نکنید، آن را درک نخواهید کرد.

در اواخر دههٔ ۱۹۲۰، ورنر هایزنبرگ با ارائه اصل عدم قطعیت خود در «مکانیک کوانتمی» گامی در ارائه منطق چند ارزشی را برداشت. در این اصل، برای هر کمیّت فیزیکی، یک منحنی زنگی شکل که معرّف تغییر در دانش یا اطمینان ماست، وجود دارد. هر چه این منحنی پهن‌تر باشد، ما کمتر می‌دانیم و به عبارت دیگر، قطعیت کمتر می‌شود، و بعکس، هر چه این منحنی باریکتر باشد، ما دانش بیشتری دربارهٔ آن کمیّت داریم و به عبارت دیگر، فازی بودن کمتر می‌شود. اصل عدم قطعیت می‌گوید که وقتی یک منحنی زنگ پهن‌تر می‌شود، منحنی زنگ دیگری نازکتر می‌شود؛ مانند منحنیهای زنگ مربوط به زمان و انرژی یا سرعت و مکان. در سال ۱۹۳۷ «ماکس بلَک» مقاله‌ای روی مجموعه‌های مبهم منتشر کرد و سرانجام در سال ۱۹۶۵ نظریهٔ مجموعه‌های فازی توسط پروفسور «لطفی عسگرزاده»، دانشمند ایرانی تبار و استاد دانشگاه «کالیفرنیا» در «برکلی» عرضه شد. لطفی نام فازی را روی این

مجموعه‌های چند ارزشی نهاد ؛ علت این نامگذاری، آن بود که مفهوم فازی را از منطق دودویی که در زمان وی مطرح بود، دور کند.

در نظریهٔ مجموعه‌های معمولی، اگر یک ویژگی خوش تعریف باشد یک مجموعهٔ متناظر آن وجود دارد که هر شیء از مجموعهٔ مرجع در آن مجموعه یا قرار دارد یا قرار ندارد. برای مثال، ویژگی «بزرگتر از ۵ بودن» در اعداد حقیقی، بیانگر مجموعه‌ای چون $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > ۵\}$ است که هر عدد حقیقی، یا به A تعلق دارد یا به A تعلق ندارد. برای مثال، $۲ \notin A$ و $۸ \in A$. ولی ویژگی «بزرگ بودن» در اعداد حقیقی، یک ویژگی مبهم است و این سؤال مطرح است : در مجموعهٔ اعداد بزرگ، عددی چون ۱۰۰ یا ۱۰۰۰ یا $۱۰^۶$ قرار دارد یا ندارد؟ لطفی پیشنهاد کرد که به هر عدد از مجموعهٔ اعداد حقیقی، عددی از [۱ و ۰] را به‌عنوان درجهٔ بزرگی آن عدد نسبت دهیم. هر قدر عدد بزرگتر باشد، عدد متناظر برای عضویت آن در این مجموعه، به یک نزدیکتر باشد و هر قدر عدد کوچکتر باشد، عدد مربوط به عضویت آن در این مجموعه، به صفر نزدیکتر باشد. برای مثال، برای عدد ۱۰۰۰ گفته شود این عدد با درجهٔ عضویت ۰/۶، عضو مجموعهٔ اعداد بزرگ است. لازم به ذکر است، اعطای درجهٔ عضویت به یک شیء، فقط به نظر فرد بستگی دارد، لذا ما برای مفاهیم فازی چون «بزرگ بودن»، «جوان بودن» یا «بلند قد بودن» و امثالهم، می‌توانیم مجموعه‌های فازی مختلفی را بسازیم.

امروزه کشورهای صنعتی چون ژاپن، با استفاده از قوانین منطق فازی، دست به ساخت محصولات فازی نظیر ماشین لباسشویی، خشک‌کن، اجاقهای مایکروویو، دوربینهای عکاسی و فیلمبرداری، دستگاه کپی، تلویزیون، جاروبرقی، یخچال و ماشین ظرفشویی فازی کرده‌اند. برای مثال، در ماشین لباسشویی فازی، براساس نوع الیاف، بار، کثیفی و سطح آب، ماشین روش شستشو را تعیین می‌کند یا در دوربینهای عکاسی و فیلمبرداری فازی، دوربین نوسانات، دست فیلمبردار را حذف می‌کند و دوربین، عمل خودتنظیمی را براساس موضوع موجود در کادر انجام می‌دهد. همچنین تلویزیون فازی، نور و ساختار تصویر را بر اساس هر فریم و صدا را براساس فاصلهٔ تماشاچی تنظیم می‌کند.

در اوایل دههٔ ۱۹۹۰، کاربرد نظریهٔ فازی در صنعت، به پیشرفتهای شگرفی رسید. در ژاپن مهندسان منطق فازی را در افزایش ضریب هوشمندی ماشینی دستگاه‌های الکترونیکی استفاده کردند. امروزه، نظریهٔ فازی به حدّی پیشرفت نموده که سالیانه بیش از دویست کتاب و هزار مقالهٔ علمی در این زمینه به چاپ می‌رسد و جهان علم به اهمیت این شاخهٔ جدید علمی پی برده است.

مأخذ: «تفکر فازی»، نوشتهٔ بارت کاسکو، ترجمهٔ دکتر علی غفاری و دیگران.

تفریح اندیشه

چهار تیم هاکی زیر یک‌بار با هم مسابقه داده و نتایج زیر را به‌دست آورده‌اند :

تیم	بازیهای انجام‌شده	برد	باخت	تساوی	گل‌زده	گل‌خورده
M	۳	۳	۰	۰	۷	۱
B	۳	۱	۱	۱	۲	۳
T	۳	۱	۱	۱	۳	۳
N	۳	۰	۳	۰	۱	۶

درصورتی که تیم M تیم B را ۰-۳ شکست داده باشد، نتیجهٔ بازی تیم T و تیم B چیست؟

عدم وجود حد

(برای دانش آموزان پیش دانشگاهی)

● مجتبی معارف‌وند ـ
دبیر ریاضی اسلام شهر

مقدمه

در کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱) و (۲) دورهٔ پیش‌دانشگاهی و اکثر کتابهای ریاضی عمومی، مبحث حدّ توابع با دقّت خاصی مطرح می‌شود ؛ اما در خصوص عدم وجود حد توابع، به اختصار اشاره‌ای شده و بدون ارائه راهکارهای مناسب برای اثبات و مثالهای کافی، از آن سهل و آسان می‌گذرند ؛ در حالی که در اثبات بسیاری از مسائل مربوط به ناپیوستگیهای رفع نشدنی، کاربرد فراوان دارد.

در این مقاله، سعی بر آن شده است که این راهکارها معرفی و با ارائهٔ مثالهای کافی، تا حدی حق مطلب ادا شود.

قرارداد: در این مقاله فرض بر آن است که $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}^+$.

تعریف: فرض می‌کنیم تابع f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد، گوییم :

تابع f در نقطهٔ a حدی برابر L دارد ؛ اگر و تنها اگر :

$$\forall \varepsilon\ \exists \delta\ \forall x (۰ < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon)$$

۱. همان‌طور که در تعریف می‌بینیم، اولّین و اساسی‌ترین شرط وجود حدّ تابع f در نقطهٔ a این است که تابع f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد ؛ بنابراین اگر تابع f در هیچ همسایگی محذوف a تعریف نشده باشد، در آن نقطه حد ندارد.

مثال (۱): ثابت کنید $\lim\limits_{x\to ۱} \sqrt{x^۲ - ۲x + ۳}$ وجود ندارد.

اثبات: با تعیین علامت چندجمله‌ای درجهٔ ۲ زیر رادیکال می‌بینیم که برای هر $۰ < \delta < ۱$، دامنهٔ تابع f با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{x^۲ - ۲x + ۳}$ ، شامل همسایگی $(۱-\delta, ۱+\delta)$ نمی‌باشد و درنتیجه $\lim\limits_{x\to ۱} \sqrt{x^۲ - ۲x + ۳}$ وجود ندارد.

x	-۱		۱		۳	
$x^۲ - ۲x + ۳$	+	⋮	−	⋮	+	

مثال (۲): ثابت کنید $\lim\limits_{x\to ۵} \dfrac{x}{۲ - [\frac{x}{۲}]}$ وجود ندارد.

اثبات: با تعیین دامنهٔ تابع f با ضابطهٔ $f(x) = \dfrac{x}{۲ - [\frac{x}{۲}]}$

$$۲ - [\tfrac{x}{۲}] = ۰ \Rightarrow [\tfrac{x}{۲}] = ۲ \Rightarrow ۲ \le \tfrac{x}{۲} < ۳ \Rightarrow ۴ \le x < ۶$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{x | ۴ \le x < ۶\}$$

درمی‌یابیم که تابع f در هیچ همسایگی محذوف ۵ تعریف نشده است و درنتیجه $\lim\limits_{x\to ۵} \dfrac{x}{۲ - [\frac{x}{۲}]}$ وجود ندارد. ■

۲. اگر حد چپ یا راست تابع f در نقطهٔ a موجود نباشد، آن‌گاه f در نقطهٔ a حد ندارد.

مثال (۱): ثابت کنید $\lim\limits_{x\to ۰} \sqrt{x}$ وجود ندارد.

اثبات: از آن‌جا که تابع $f(x) = \sqrt{x}$ برای مقادیر منفی تعریف نشده است، لذا حدّ چپ تابع f $(\lim\limits_{x\to ۰^-} \sqrt{x})$ موجود نمی‌باشد، بنابراین $\lim\limits_{x\to ۰} \sqrt{x}$ وجود ندارد. ■

مثال (۲): ثابت کنید $\lim_{x\to 0}\frac{x}{[x]}$ موجود نیست.

اثبات: برای هر $0<\delta<1$ وقتی $x\to 0^+$، ناگزیریم از محدودهٔ $(0,\delta)$ گذر کنیم که در این صورت، چون برای هر $x\in(0,\delta)$ عامل $[x]$ صفر می‌شود، تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x}{[x]}$ برای مقادیر $x\in(0,\delta)$ تعریف نشده و درنتیجه، حدّ راست تابع f $(\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{[x]})$ وجود ندارد؛ بنابراین $\lim_{x\to 0}\frac{x}{[x]}$ وجود ندارد. ■

۳. اگر حد چپ و راست تابع f در نقطهٔ a موجود باشند، ولی مقادیر آنها مساوی نباشد، آن‌گاه f در نقطهٔ a حد ندارد.

مثال (۱): ثابت کنید $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ وجود ندارد.

اثبات:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0^+}1=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=\lim_{x\to 0^-}(-1)=-1$$

تابع $f(x)=\frac{|x|}{x}$ در همسایگی صفر تعریف شده و حد چپ و راست دارد؛ اما مقادیر آنها برابر نیستند. بنابراین f در نقطهٔ صفر حد ندارد. ■

مثال (۲): ثابت کنید $\lim_{x\to a}[x]$، $(a\in z)$ وجود ندارد.

اثبات: قرار می‌دهیم $I=(a-\delta,a+\delta)$، $0<\delta<1$، حال بنا بر قضیهٔ زیر که به قضیهٔ «تحدید» معروف است، داریم:

[**قضیه:** هرگاه قلمرو تابع f شامل یک همسایگی محذوف a مانند I باشد و $g=f|_I$، آن‌گاه $\lim_{x\to a}f(x)=L$؛ اگر و تنها اگر $\lim_{x\to a}g(x)=L$.]

این قضیه را برای حدهای یک طرفه نیز داریم؛ بنابراین:

$$\lim_{x\to a^+}[x]=\lim_{x\to a^+}[x]|_{I_1}=\lim_{x\to a^+}a=a \qquad I_1=(a,a+\delta)$$

$$\lim_{x\to a^-}[x]=\lim_{x\to a^-}[x]|_{I_2}=\lim_{x\to a^-}(a-1)$$

$$=a-1 \qquad I_2=(a-\delta,a)$$

حدهای چپ و راست تابع $f(x)=[x]$ وجود دارند؛ ولی با هم برابر نیستند، بنابراین f در نقطهٔ a حد ندارد. ■

۴. قضیه: اگر تابع f در نقطهٔ a حد داشته باشد، آن‌گاه:

$$\exists M>0\ \exists\delta\ \forall x(0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)|<M)$$

به‌عبارت دیگر، تابع f در یک همسایگی نقطهٔ a کراندار است.

اثبات: f در نقطهٔ a حد دارد؛ یعنی

$$\exists L\ \lim_{x\to a}f(x)=L$$

قرار می‌دهیم $\varepsilon=1$ و بنابر تعریف حد داریم:

$$\exists\delta\ \forall x(0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<1)$$

$$|f(x)|-|L|\le|f(x)-L|<1\Rightarrow|f(x)|<1+|L|$$

قرار می‌دهیم $M=1+|L|$، پس:

$$\exists M\ \exists\delta\ \forall x(0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)|<M)$$ ■

بنابر قانون عکس نقیض ترکیب شرطی داریم:

نتیجه: اگر $\forall M\ \forall\delta\ \exists x(0<|x-a|<\delta\wedge|f(x)|\ge M)$ آن‌گاه تابع f در نقطهٔ a حد ندارد.

مثال (۱): ثابت کنید $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ وجود ندارد.

اثبات: فرض می‌کنیم M و δ به دلخواه و مثبت داده شده‌اند، قرار می‌دهیم: $x_0=\min\{\frac{\delta}{2},\frac{1}{M}\}$ و درنتیجه داریم:

$$|x_0|\le\frac{\delta}{2}<\delta$$

$$|x_0|\le\frac{1}{M}\Rightarrow\left|\frac{1}{x_0}\right|\ge M$$

پس داریم:

$$\forall M>0\ \forall\delta>0\ \exists x_0(0<|x_0|<\delta\wedge\left|\frac{1}{x_0}\right|\ge M)$$

و درنتیجه $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ وجود ندارد. ■

مثال (۲): ثابت کنید $\lim_{x\to 0}2^{\frac{1}{x}}$ وجود ندارد.

اثبات: فرض می‌کنیم M و δ به‌دلخواه و مثبت داده شده‌اند، قرار می‌دهیم: $x_0=\min\{\frac{\delta}{2},\frac{\mathrm{Ln}2}{|\mathrm{Ln}M|}\}$ و درنتیجه داریم:

$$|x_0|\le\frac{\delta}{2}<\delta$$

$$|x_\circ| \le \frac{\ln 2}{|\ln M|} \Rightarrow x_\circ \le \frac{\ln 2}{|\ln M|} \Rightarrow \frac{1}{x_\circ} \ge \frac{|\ln M|}{\ln 2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_\circ}.\ln 2 \ge |\ln M|$$

$$\Rightarrow \ln 2^{\frac{1}{x_\circ}} \ge |\ln M| \ge \ln M$$

$$\Rightarrow 2^{\frac{1}{x_\circ}} \ge M \Rightarrow |2^{\frac{1}{x_\circ}}| \ge M$$

پس داریم: $\forall M > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x_\circ (0 < |x_\circ| < \delta$ و $|2^{\frac{1}{x_\circ}}| \ge M)$

و در نتیجه $\lim\limits_{x \to 0} 2^{\frac{1}{x}}$ وجود ندارد. ■

۵. استفاده از تعریف حد: فرض می‌کنیم f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد، گوییم f در نقطهٔ a حد دارد، اگر و تنها اگر:

$$\exists L \forall \varepsilon \exists \delta \forall x (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

با توجه به عکس نقیض ترکیب دو شرطی و نقیض ترکیب شرطی داریم:

f در نقطهٔ a حد ندارد، اگر و تنها اگر:

$$\forall L \exists \varepsilon \forall \delta \exists x (0 < |x - a| < \delta, |f(x) - L| \ge \varepsilon)$$

مثال: ثابت کنید $\lim\limits_{x \to 0} \sin\frac{1}{x}$ وجود ندارد.

اثبات: فرض می‌کنیم L به‌دلخواه داده شده باشد. دو حالت زیر را درنظر می‌گیریم.

الف) $L \neq 0$. قرار می‌دهیم $\varepsilon = \frac{|L|}{2}$. حال برای هر δ، بنابر خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی، [هرگاه $x > 0, y \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$، آن‌گاه عدد طبیعی n یافت می‌شود؛ به‌طوری که $nx > y$]. برای $y = 1$ و $x = \delta$ عدد طبیعی n یافت می‌شود، به‌طوری که $\frac{1}{n} < \delta$. با قرار دادن $x = \frac{1}{2n\pi}$ داریم: $\frac{1}{2n\pi} < \frac{1}{n} < \delta$،

پس $0 < |x| < \delta$ و:

$$\left|\sin\frac{1}{x} - L\right| = |\sin(2n\pi) - L| = |0 - L| = |L| \ge \frac{|L|}{2}$$

ب) $L = 0$. قرار می‌دهیم $\varepsilon = \frac{1}{2}$. حال برای هر δ، بنابر خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی، عدد طبیعی n یافت می‌شود که $\frac{1}{n} < \delta$. قرار می‌دهیم:

$$x = \frac{1}{(4n+1)\frac{\pi}{2}} < \frac{1}{n} < \delta$$

در نتیجه:

$$0 < |x| < \delta \wedge \left|\sin\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\sin(4n+1)\frac{\pi}{2}\right| = 1 \ge \frac{1}{2}$$

بنابراین:

$$\forall L \exists \varepsilon \forall \delta \exists x (0 < |x| < \delta \wedge \left|\sin\frac{1}{x} - L\right| \ge \varepsilon)$$

و در نتیجه $\lim\limits_{x \to 0} \sin\frac{1}{x}$ وجود ندارد. ■

۶. استفاده از برهان غیرمستقیم (برهان خُلف): در این روش، فرض می‌کنیم حد تابع موجود است و با توجه به نوع تابع، ε را به گونه‌ای اختیار می‌کنیم که در پایان به تناقضی آشکار برسیم و نتیجه بگیریم که فرض اولیه (وجود حد) نادرست بوده و موجب تناقض شده است.

مثال (۱): ثابت کنید $\lim\limits_{x \to +\infty} (-1)^{[x]}$ موجود نیست.

اثبات: فرض می‌کنیم: $\lim\limits_{x \to +\infty} (-1)^{[x]} = L$

قرار می‌دهیم $\varepsilon = \frac{1}{4}$ و بنابر تعریف حد، عدد طبیعی M وجود دارد؛ به‌طوری که:

$$x \ge M \Rightarrow \left|(-1)^{[x]} - L\right| < \frac{1}{4}$$

اگر $x \ge M$ و $[x]$ زوج باشد، داریم:

$$|1 - L| < \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{4} < 1 - L < \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{5}{4} < -L < -\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} < L < \frac{5}{4} \qquad (1)$$

اگر $x \ge M$ و $[x]$ فرد باشد، داریم:

$$|-1 - L| < \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{4} < -1 - L < \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{3}{4} < -L < \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow -\frac{5}{4} < L < -\frac{3}{4} \qquad (2)$$

آشکارا روابط ۱ و ۲ در تناقض‌اند پس نتیجه می‌گیریم که

$\lim\limits_{x\to+\infty}(-1)^{[x]}$ وجود ندارد. ■

مثال (۲): ثابت کنید تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}1 & x\in Q\\ 0 & x\notin Q\end{cases}$ در هیچ نقطه‌ای حد ندارد.

اثبات: فرض می‌کنیم

$$(a\in\mathbb{R})\exists L\ \lim_{x\to a}f(x)=L$$

قرار می‌دهیم $\varepsilon=\frac{1}{4}$ و بنابر تعریف حد، δ وجود دارد که:

$$\forall x(0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\tfrac{1}{4})$$

بنابر خاصیت اعداد حقیقی، x_1 گویا و x_2 گنگ متعلق به بازهٔ $(a-\delta,a+\delta)$ وجود دارد؛ پس:

$$|f(x_1)-L|=|1-L|<\frac{1}{4}\quad \text{و}$$

$$|f(x_2)-L|=|0-L|=|L|<\frac{1}{4}$$

و در نتیجه داریم:

$$1=|1-L+L|\le|1-L|+|L|<\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\Rightarrow 1<\frac{1}{2}$$

و این نابرابری، تناقضی آشکار می‌باشد، بنابراین $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ وجود ندارد. ■

۷. قضیه: فرض کنید $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$، دنبالهٔ حقیقی $\{a_n\}$ به a همگرا باشد و برای هر n، $a_n\neq a$، آن‌گاه دنبالهٔ $\{f(a_n)\}$ نیز به L همگراست.

اثبات: فرض ε دلخواه داده شده است. بنابر تعریف حد داریم:

$$\exists\delta\,\forall x(0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\varepsilon)\qquad(*)$$

حال برای همین δ یافت شده، بنابر همگرایی دنبالهٔ $\{a_n\}$ داریم:

$$\exists M\in N(n\ge M\Rightarrow|a_n-a|<\delta)\quad(1)$$

بنابر رابطهٔ (*) داریم:

$$|a_n-a|<\delta\Rightarrow|f(a_n)-L|<\varepsilon\qquad(2)$$

از روابط (۱) و (۲) و بنابر قانون قیاس داریم:

$$\forall\varepsilon\exists M\in N(n\ge M\Rightarrow|f(a_n)-L|<\varepsilon)$$

و درنتیجه $\lim\limits_{n\to+\infty}f(a_n)=L$. ■

نتیجه: اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنبالهٔ همگرا به a باشند و برای هر n، $a_n\neq a$ و $b_n\neq a$؛ ولی دنباله‌های $\{f(a_n)\}$ و $\{f(b_n)\}$ به‌ترتیب به L_1 و L_2 همگرا شده و $L_1\neq L_2$، آن‌گاه f در نقطهٔ a حد ندارد.

مثال (۱): ثابت کنید $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\right]|x|$ وجود ندارد.

اثبات: قرار می‌دهیم $a_n=\frac{1}{n}$ و $b_n=\frac{-1}{n}$، دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ هر دو به صفر همگرا بوده و شرایط نتیجه را دارند. برای $f(x)=[\frac{1}{x}]|x|$ داریم:

$$f(a_n)=f(\tfrac{1}{n})=\left[\frac{1}{\frac{1}{n}}\right]\left|\frac{1}{n}\right|=\frac{[n]}{n}=\frac{n}{n}=1$$

دنبالهٔ $\{f(a_n)\}$ به ۱ همگراست.

$$f(b_n)=f(\tfrac{-1}{n})=\left[\frac{1}{\frac{-1}{n}}\right]\left|\frac{-1}{n}\right|=\frac{[-n]}{n}=\frac{-n}{n}=-1$$

دنبالهٔ $\{f(b_n)\}$ به ۱- همگراست.

از آن‌جا که $-1\neq 1$ پس $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\right]|x|$ وجود ندارد. ■

مثال (۲): $f(x)=\begin{cases}x+1 & x\in Q\\ x & x\notin Q\end{cases}$ و $\alpha\in\varnothing$ ثابت کنید f در نقطهٔ α حد ندارد.

اثبات: دنباله‌های $\left\{\alpha+\frac{1}{n}\right\}$ و $\left\{\alpha+\frac{\sqrt{2}}{n}\right\}$ به‌ترتیب دنباله‌هایی از اعداد گویا و گنگ را درنظر می‌گیریم که هر دو به α همگرا هستند؛ ولی $f(\alpha+\frac{1}{n})=\alpha+\frac{1}{n}+1$ و دنبالهٔ $\left\{f(\alpha+\frac{1}{n})\right\}$ به $\alpha+1$ همگراست و $f(\alpha+\frac{\sqrt{2}}{n})=\alpha+\frac{\sqrt{2}}{n}$ و دنبالهٔ $\{f(\alpha+\frac{\sqrt{2}}{n})\}$ به α- همگراست. چون $\alpha\neq\alpha+1$؛ پس $\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)$ وجود ندارد. ■

۸. قضیه: اگر f در نقطهٔ a حد داشته باشد، آن‌گاه :

$$\forall \varepsilon \exists \delta \forall x_1, x_2 (0<|x_1-a|<\delta \wedge 0<|x_2-a|<\delta$$
$$\Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon)$$

اثبات: چون f در نقطهٔ a حد دارد، پس $\exists L \lim\limits_{x\to a} f(x)=L$

فرض ε به دلخواه داده شده است. بنا بر تعریف حد داریم :

بنابراین : $\exists \delta \forall x (0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\frac{\varepsilon}{2})$

$$\exists \delta \forall x_1, x_2 (0<|x_1-a|<\delta \wedge 0<|x_2-a|<\delta$$
$$\Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|=|f(x_1)-L+L-f(x_2)|\le$$
$$|f(x_1)-L|+|L-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\ )$$

پس نتیجه می‌گیریم که :

$$\forall \varepsilon \exists \delta \forall x_1, x_2 (0<|x_1-a|<\delta, 0<|x_2-a|<\delta \Rightarrow$$
$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon) \blacksquare$$

حال بنا بر قانون عکس نقیض ترکیب شرطی داریم :

نتیجه: اگر

$$\exists \varepsilon \forall \delta \exists x_1, x_2 (0<|x_1-a|<\delta, 0<|x_2-a|<\delta \wedge$$
$$|f(x_1)-f(x_2)|\ge\varepsilon)$$

آن‌گاه f در نقطهٔ a حدّ ندارد.

مثال (۱): ثابت کنید $\lim\limits_{x\to 0}(-1)^{\left[\frac{1}{x}\right]}$ وجود ندارد.

اثبات: قرار می‌دهیم $\varepsilon=1$ و فرض می‌کنیم δ به‌دلخواه داده شده است. بنابر خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی nی یافت می‌شود که $\frac{1}{2n+1}<\frac{1}{2n}<\delta$. حال قرار می‌هیم :

$$x_1=\frac{1}{2n}, x_2=\frac{1}{2n+1}$$

$$0<|x_1|<\delta, 0<|x_2|<\delta, |f(x_1)-f(x_2)|=$$
$$|(-1)^{2n}-(-1)^{2n+1}|=|1-(-1)|=2>1$$

بنابراین $\lim\limits_{x\to 0}(-1)^{\left[\frac{1}{x}\right]}$ وجود ندارد. ■

مثال (۲): ثابت کنید $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ وجود ندارد.

اثبات: قرار می‌دهیم $\varepsilon=\frac{1}{2}$ و δ به‌دلخواه داده شده است.

بنابر خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی nی یافت می‌شود که :

$$\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}<\frac{1}{2n\pi}<\delta$$

قرار می‌دهیم $x_1=\frac{1}{2n\pi}$ و $x_2=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$

$$0<|x_1|<\delta \wedge 0<|x_2|<\delta \wedge |f(x_1)-f(x_2)|=$$
$$|1-0|=1>\frac{1}{2}$$

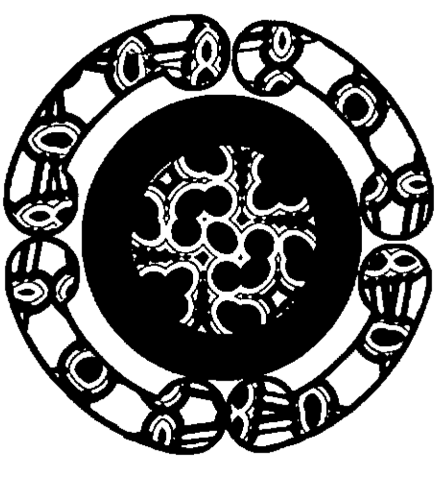
پس بنابر نتیجه $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ وجود ندارد. ■

مثال (۳): ثابت کنید تابع $f(x)=\begin{cases}1 & x\in Q\\ 0 & x\notin Q\end{cases}$ در هیچ نقطه‌ای حد ندارد.

اثبات: فرض می‌کنیم $a\in\mathbb{R}$ عددی دلخواه باشد. قرار می‌دهیم $\varepsilon=\frac{1}{2}$ و δ به‌دلخواه داده شده است. بنابر خواص اعداد حقیقی، عدد گویای x_1 و عدد گنگ x_2 یافت می‌شوند ؛ به قسمی که :

$$0<|x_1-a|<\delta \wedge 0<|x_2-a|<\delta \wedge$$
$$|f(x_1)-f(x_2)|=|1-0|=1>\frac{1}{2}$$

پس بنابر نتیجه $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ وجود ندارد. ■



نشستی با هیأت تحریریهٔ مجله برهان و گروه ریاضی انتشارات مدرسه

● تهیه و تنظیم: میرشاهین صدر

گروه ریاضی انتشارات مدرسه در راستای اهداف سال جهانی ریاضیات، اقدام به تألیف و چاپ آثار برگزیدهٔ ریاضی برای مقطعهای دبیرستانی و پیش‌دانشگاهی، و تألیف فرهنگ ریاضیات کرده است. همچنین به‌همین منظور، جلسه‌ای مشترک بین اعضای گروه ریاضی و هیأت تحریریهٔ مجله برهان تشکیل داده است که مشروح مذاکرات این جلسه، خدمت شما خوانندگان محترم مجلهٔ برهان و مسؤولان آموزش و پرورش تقدیم می‌شود.

در این جلسه، ابتدا آقای «امیری» موضوع بحث این جلسه را مطرح کرده و سپس گزارشی از آزمون «تیمز» و راهکارهایی برای رفع مشکلات و کمبودهایی که در این آزمون برای دانش‌آموزان ایرانی وجود داشت، توضیح دادند.

آقای امیری: جلسهٔ امروز دربارهٔ تهیهٔ مقاله‌ای برای سال جهانی ریاضیات، برای درج در مجلهٔ برهان است و در واقع، موضوع بحث روی دو محور است:

۱. بررسی هدفهای سال جهانی و این که جامعهٔ ریاضی، برنامه‌های درسی و آموزشی، نظام آموزش و پرورش و کتابهای درسی، تا چه اندازه به این هدفها نزدیک هستند.

۲. ارائه راهکارها و پیشنهادهایی برای نزدیکترکردن جامعهٔ ریاضی به این هدفها.

کشور ایران، شاید جزو کشورهایی باشد که مقداری با تأخیر، در برنامه‌های سال جهانی ۲۰۰۰ نسبت به کشورهای دیگر حرکت کرده است و کمی هم دیرتر اهمیت آن برای ما روشن شده است؛ امّا در این زمینه کارهایی در حال انجام است. اگر چه روند کُندی دارد؛ ولی به هر صورت، فعالیتهایی در این زمینه انجام می‌شود.

مدتی قبل در همایش آزمون تیمز شرکت کرده بودم؛ این آزمون، حرکت خوبی در بعضی از کشورها و ایران ایجاد کرده است. خلاصه‌ای از نتایج این آزمون چنین است: «سنگاپور» جزو پنج کشور اوّل است و دارای نظام آموزشی ۱۰۰ درصد متمرکز است. از طرف دیگر، انگلیس هم جزو پنج کشور اوّل است و دارای نظام آموزشی ۱۰۰ درصد غیرمتمرکز است؛ بنابراین دو کشور با نظامهای آموزشی متفاوت ـ یکی متمرکز و دیگری غیرمتمرکز ـ هر دو نتیجهٔ خوبی را کسب کرده‌اند. کشور ایران که نظام آموزشی ۱۰۰ درصد متمرکز دارد، جزو سه یا چهار کشور آخر است و امریکا که نظام آموزشی ۱۰۰ درصد غیرمتمرکز دارد، جزو پنج کشور اوّل نیست؛ ولی نتیجهٔ خوبی را کسب کرده است. درنتیجه، دو کشور با نظامهای آموزشی متمرکز و غیر متمرکز، یکی نتیجهٔ خوب و دیگری نتیجهٔ بد را کسب کرده‌اند.

در این همایش، کمیته‌هایی برای بررسی آزمون تیمز کشور ایران تشکیل و برگزار شد؛ بنده در کمیته‌ای شرکت کردم که هدف از تشکیل آن، یافتن راهکارهایی برای نتیجهٔ بهتر در چنین آزمونهایی بود. در این کمیته پیشنهادهای خود را از طرف گروه ریاضی انتشارات مدرسه به‌صورت زیر بیان کردم.

آزمون تیمز از استانداردهایی برخوردار نبود که بتوانیم دربارهٔ وضعیت دانش‌آموزان ایرانی، با توجه به استانداردهای این آزمون تصمیم بگیریم؛ زیرا همان‌طور که گفته شد، کشوری با نظام آموزشی متمرکز و کشور دیگری با نظام آموزشی غیرمتمرکز، هر دو نتیجهٔ خوب یا بد را کسب کرده‌اند. از آن گذشته، آیا در آموزش یا به‌طورکلی، در چرخهٔ آموزش، فقط تخلیهٔ اطلاعاتی دانش‌آموز اهمیت دارد؟ یعنی در چرخهٔ آموزش، هرگز آمادگی اوّلیه مهم نیست؟ نباید از آموزشگر، آزمون گرفته می‌شد؟ نباید فضاهای آموزشی و اقلیمی در نظر گرفته می‌شد؟

به نظر من در حال حاضر، نمی‌توانیم دربارهٔ مملکت خودمان روی این آزمون تصمیم بگیریم؛ چون این آزمون برای کشور ما، آزمونی استاندارد نبوده است. در ژاپن یا انگلیس که نتیجه خوب بوده است، آیا معلمان ریاضی آن کشورها، همان استانداردهای معلمان ریاضی کشور ما را با توجه به برنامه‌های درسی ایران دارا هستند؟ در ایران ما هنوز کلاسهای پنج‌پایه‌ای یا چندپایه‌ای داریم و اکنون براساس نتیجهٔ این آزمون، چگونه می‌توان تصمیم گرفت؟

آزمون تیمز جرقه‌ای بود که ما را به خودمان آورد؛ اما بهتر است در حال حاضر و در این کمیته، طرحها و پروژه هایی را برای تحقیق پیشنهاد دهیم؛ نه این که اوّل تحقیق کنیم، سپس راهبردهایی را پیشنهاد دهیم. باید براساس تحقیقی که در کشور خودمان انجام می‌دهیم، استانداردهایی را استخراج کنیم، سپس براساس آن استانداردها، در سطح استانهای کشور، هم برای دانش‌آموزان و هم برای معلّمان، آزمون برگزار کنیم. سپس نتیجهٔ این آزمون را با نتیجهٔ آزمون تیمز مقایسه کنیم و در آن مرحله، تصمیم‌گیری کنیم.

در جلسهٔ اختتامیهٔ این همایش، پروفسور «رویتال» از دانشگاه کلمبیا و مسؤول کلی طرح آزمون سخنرانی کردند. ایشان اظهار داشتند: «ما در کشور امریکا پس از آزمون تیمز، یک چنین آزمونی برای ایالتهای مختلف برگزار خواهیم کرد؛ چون می‌خواهیم آزمون طبق شرایط کشور خودمان باشد.» همچنین ایشان گفتند: «ژاپن در سال جهانی ۲۰۰۰، می‌خواهد تغییراتی را روی سیستم آموزشی کشورش انجام دهد و قرار است سال ۲۰۰۵، روزهای درسی در ژاپن که شش روز در هفته است، به پنج روز در هفته تقلیل یابد، و همچنین قرار است برنامه‌های ساعت درس، ۱۰ درصد کاهش یابد. از هم‌اکنون، روی این تغییر نظام، در حال تحقیق و آزمایش هستند که برای سال ۲۰۰۵ تغییراتی در برنامهٔ درسی و نظام آموزشی ایجاد کنند.

همچنین در این جلسه، پروفسور رویتال به دو نکته دربارهٔ دانش‌آموزان ایرانی اشاره کردند که عبارتند از:

۱. دانش‌آموزان ایرانی در این آزمون، به سؤالهایی پاسخ مثبت داده بودند که جزو برنامهٔ درسی آنها نبود. برای مثال، در مقطع راهنمایی، به سؤالهای آمار و احتمال پاسخ درست داده بودند و در این مباحث، جزو شش کشور اوّل جهان بودند؛ یعنی چیزی را که آموزش ندیده بودند و در کتابهای درسی با آن برخورد نداشته‌اند، از مطالب درسی و آموزش دیده، بهتر پاسخ داده بودند.

۲. دانش‌آموزان ایرانی از نظر تئوری، بسیار قوی هستند؛ ولی نمی‌توانند از آنها درست استفاده کنند.

در ادامهٔ بحث، از سروران گرامی تقاضا دارم نظرات خود را دربارهٔ موضوعات مطرح‌شده، اعلام فرمایند و ابتدا از استاد ارجمند، جناب آقای «پرویز شهریاری» خواهش می‌کنم که نظرات خود را بفرمایند.

استاد شهریاری: به نظر من، برنامه‌هایی که کمیتهٔ بین‌المللی ریاضیات برای سال ۲۰۰۰ تعیین کرده، خوب است و هیچ اشکالی در آنها نیست. مانند: عمومی‌کردن ریاضیات، تاریخ ریاضیات، به ریاضیات اهمیت‌دادن، که همگی خوب هستند، منتها به‌خاطر داشته باشیم که کمیتهٔ بین‌المللی سال ۲۰۰۰ براساس وجه مشترک تمام کشورها و احتمالاً براساس آنچه که در کشورهای جهان اوّل وجود دارد یا ندارد، این برنامه را تنظیم کرده است. همان‌طور که آقای امیری فرمودند، ما در داخل کشور خودمان، مشکلات خاص کشور خودمان را هم داریم. کمیتهٔ ملی برگزارکننده سال ۲۰۰۰،

برنامهٔ کارش را براساس همان هدفهایی قرار داده که کمیتهٔ جهانی تعیین کرده است، که این اشکالی ندارد و یک گام هم به پیش است. به هر حال، یک حرکتی ایجاد شده و کمیتهٔ ملی و در رأس آن هم انجمن ریاضی ایران، تلاشهایی کرده و تا حالا بی‌فایده هم نبوده است ؛ اما به نظر من، کمیتهٔ ملی برگزارکننده سال ۲۰۰۰،

باید یک برنامهٔ ملی هم در کنار برنامهٔ جهانی داشته باشد ؛ یعنی علاوه بر این که به آنها می‌پردازد باید کمیته‌هایی هم تشکیل دهند و در این زمینه‌ها کار کنند تا ببینیم دشواریهای داخل کشور خودمان از نظر آموزشی، چیست؟ چه بسا اگر درست بحث کنیم، متوجه می‌شویم که برخی زمینه‌ها هم هست که دامنگیر همهٔ کشورهاست و به آن توجهی نشده است ؛ یعنی نباید گمان کنیم که این قطعنامهٔ کمیتهٔ جهانی بدون تغییر است. آنچه که به نظر من می‌رسد و ما باید به کمیتهٔ ملی مراسم سال ۲۰۰۰ پیشنهاد کنیم، در درجهٔ اوّل این است که، تصور را بر این نگذارند که هر کاری را که می‌خواهند انجام دهند، در قبل یا در جریان سال ۲۰۰۰ باشد و زمانی که سال ۲۰۰۰ تمام شد، دیگر کاری نداشته باشند. همان طوری که آقای امیری گفتند، مثلاً ژاپن برنامه‌ای تنظیم کرده است که در سال ۲۰۰۵ به فلان هدف برسد، طبیعی هم همین است که بسیاری از چیزهایی که کمیتهٔ جهانی تعیین کرده یا ما می‌خواهیم تعیین کنیم، اینها چیزهایی نیست که بشود در ظرف چند ماه یا یک سال به نتیجه رسید. بنابراین باید سال ۲۰۰۰ را سال آغاز بسیاری از بحثها در زمینهٔ رفع دشواریهای آموزش ریاضی در ایران دانست.

کمیتهٔ ملی برگزارکننده سال ۲۰۰۰ که احتمالاً از سازمانهای مختلفی مانند وزارت علوم، انجمن ریاضی ایران و برخی سازمانهای دیگر تشکیل شده، نباید گمان کنند که سال ۲۰۰۰ به هر ترتیبی پایان می‌یابد و وظیفهٔ آنها هم تمام می‌شود. من هم این پیشنهادها را به انجمن ریاضی ایران می‌کنم ؛ انجمن ریاضی ایران در واقع باید سردمدار حلّ مشکلات ریاضی ایران باشد ؛ چه این مشکلات ریاضی در دبستان باشد یا در راهنمایی یا دبیرستان یا دانشگاه و یا در سطح عام. انجمن ریاضی ایران باید فعالتر شود و باید پیش از همه، کمیته یا کمیته‌هایی را تشکیل دهد که دشواریهای خاص مملکت ما را بررسی کند. به نظر من اگر این کار در سال ۲۰۰۰ به پایان برسد، موفقیت بزرگی خواهد بود، که ما اوّل درد را بشناسیم و بعد ببینیم که چطور می‌توان معالجه کرد، امّا آن دردهایی که ما در زمینهٔ آموزش داریم، به نظر من چند چیز است :

یکی این که در ایران تفکر نخبه‌پروری وجود دارد، چند هزار نفر شرکت می‌کنند و در آزمایش اوّل از بین آنها مثلاً هزار نفر را انتخاب می‌کنند. در آزمایش دوم، از بین آنها دویست نفر را انتخاب می‌کنند و در مرحلهٔ سوّم مثلاً صد نفر را انتخاب می‌کنند، سپس برای آنها کلاس می‌گذارند و دو ماه و نیم تا سه ماه به‌سختی با اینها کار می‌کنند، آن وقت از بین آنها شش نفر انتخاب می‌کنند و به مسابقه می‌فرستند و در المپیاد موفق می‌شوند. خیال می‌کنند وظیفهٔ ایران تمام شده است. اوّلاً باید توجه کنیم که در شرایط امروز جهان و روابطی که بین ریاضیات و سایر دانشها وجود دارد ما بیشتر از چهار، پنج یا حتی پنجاه نفر ریاضیدان احتیاج داریم ؛ در حقیقت ما به انبوه ریاضیدانان احتیاج داریم. اگر قرار باشد فاصلهٔ خودمان را با جهان کم کنیم یا از بین ببریم، ما به انبوه ریاضیدانان در ایران نیاز داریم ؛ نه چهار یا پنج‌تایی که در المپیاد موفق می‌شوند. احتمالاً این افراد هم چون نباید کنکور بدهند، رشته‌های غیرریاضیات را انتخاب می‌کنند ؛ مثلاً پزشکی را انتخاب می‌کنند ؛ چون تصور می‌کنند در زمینهٔ ریاضی امکانات تحقیق وجود ندارد و زندگی‌شان اداره نمی‌شود. من از یکی از آنها که چهار سال پیش در المپیاد شرکت کرده بود، پرسیدم : «چرا رشتهٔ پزشکی را انتخاب کردی؟ تو که به ریاضی علاقه‌مند بودی؟» گفت : «اگر ریاضی را انتخاب کنم، باید معلم بشوم و اگر خیلی خوب باشم وضع من تازه مثل شما می‌شود، وگرنه زندگی‌ام لنگ است.» خوب این جا مسألهٔ دیگری مطرح می‌شود و آن وضع زندگی معلمان است.

آموزش، پایهٔ همهٔ پیشرفتها در مملکت می‌باشد. تا مسألهٔ آموزش و در کنارش وضع معلمان حل نشود، بقیهٔ مشکلات حل نمی‌شود. اکنون فرض کنید که ما بنا را بر پرورش انبوه ریاضیدانان هم گذاشتیم، این ریاضیدانان که پرورده می‌شوند، باید راهکارهای ارتباط با یکدیگر را بدانند. امروز دیگر نشستن در خانه، و در را به روی خود بستن و تحقیق کردن، به هیچ جا نمی‌رسد. ریاضیدانان جهان از کشورهای مختلف هم به‌طور دائم با هم تماس دارند که

کارها مخلوط نشود. کاری که دیگری کرده، دنباله‌اش را بگیرند؛ دیگر نمی‌شود افراد جدا از هم کار کنند.

بنابراین مشکل دومی که در مملکت ما مطرح می‌شود این است که ما به دانش‌آموزان خودمان راهکار گروهی و همکاری را یاد ندادیم. در حال حاضر، مدرسهٔ تیزهوشان داریم، معنای مخالفش این است که در کنارش مدرسهٔ کُندهوشان داشته باشیم. شما به بچه‌ای می‌گویید، در مدرسهٔ تیزهوشان پذیرفته نشدی! یعنی این که تو تیزهوش نیستی؛ کُندهوشی! از یک پسر یا دختر نوجوانی که به او می‌گوییم تو نمی‌توانی بفهمی! دیگر چه انتظاری از او داریم! با این برخورد گروهی و اجتماعی کارکردن را به کلی ویران کردیم. بچه‌ای که در مدرسهٔ تیزهوشان ثبت نام کرده است، خودش را یک سر و گردن بالاتر از همه می‌داند؛ واقعاً فکر می‌کند که بچه‌های دیگر اصلاً ارزشی ندارند. شیوهٔ آزمون و آزمایش ما هم بر ۰/۵ و ۰/۲۵ نمره‌هاست. در خانه هم مورد مؤاخذه قرار می‌گیرد که چرا ۱۸/۵ گرفتی؟ چرا ۲۰ نگرفتی؟ و او تمام تلاشش را می‌کند که حداقل ۰/۵ نمره از رقیبش بیشتر بگیرد. دانش‌آموز باید همان ساعتهایی که پشت میزهای دبستان نشسته، کار گروهی و همکاری و همفکری با همسالان خودش را یاد بگیرد، تنها از این راه است که اگر هم ریاضیدان شد در آخر می‌تواند دچار این توهم نشود که من هر کاری می‌کنم، از دیگران پنهان کنم تا به نام من ثبت شود. بنابراین این مسأله هم مطرح می‌شود که باید دربارهٔ تقسیم‌بندی مدارس به نوعهای مختلف بیشتر بیندیشیم، و ضررها و نفعها را با هم مقایسه کنیم. آیا واقعاً راه درستی می‌رویم؟ من محکوم نمی‌کنم؛ چون در این زمینه بحث نشده، که باید بحث شود.

به نظر من، مسألهٔ رقابت ناسالمی که به خاطر آزمونهای ناسالم کنکور به‌وجود آمده، در مدارس تشدید می‌شود و اصلاً این سیستم کنکور (راهیابی به دانشگاه)، دانش مملکت را به‌کلی ویران می‌کند. من روی این مسأله که آیا با تست می‌توان ارزشیابی کرد، بحث نمی‌کنم! فرض کنیم با تست، بهترینها انتخاب می‌شوند ـ که من تردید دارم! ـ اگر هم این طور باشد، ما در واقع، بچه‌ها و خانواده‌های آنها را از سالهای آخر دبستان و سالهای اوّل راهنمایی، درگیر تشویش و اضطراب کرده‌ایم و دانش‌آموز نمی‌خواهد به طور عمیق درسهای ریاضی را یاد بگیرد. از آن‌جا که کنکور تشریحی نیست، بلکه تستی است، او کاری خارج از کار مدرسه نمی‌کند. از این گذشته، اگر روی هنری کار می‌کرد مثلاً نقاشی کار می‌کرد، آن را هم رها می‌کند؛ برای این که از کنکور عقب می‌افتد. حتی به رغم میل باطنی‌اش، با خانواده‌اش به میهمانی نمی‌رود و در اتاقش را به روی خود می‌بندد تا از کنکور عقب نیفتد. به هرحال همهٔ آنچه که برای یک انسان و به خصوص یک جوان لازم است، رها می‌کند و فقط به صورت یک‌بُعدی درمی‌آید؛ که حالا این از دو حال خارج نیست، یا قبول می‌شود و وارد دانشگاه می‌شود که سرگردانی‌اش، چهار سال عقب می‌افتد؛ یا قبول نمی‌شود و از همین حالا سرگردانی‌اش چهار سال جلو می‌افتد!

بنده مسألهٔ کنکور را یک معضل در راه دانش مملکت و از جمله ریاضیات می‌دانم اما از این مسائل اساسی که تا حالا عرض کردم، بگذریم، بعضی دشواریهای جدّی دیگری در زمینهٔ آموزش وجود دارد. من بارها از زبان مسؤولان شنیده‌ام که باید دانش‌آموزان را وادار کرد که به کار تحقیقی عادت کنند؛ تحقیق کنند، پژوهش کنند و یاد بگیرند. حالا ببینیم اگر دانش‌آموز بخواهد در زمینهٔ ریاضیات (محدودش می‌کنیم) یا در زمینهٔ فقط تاریخ ریاضی (محدودترش می‌کنیم) در زمینهٔ تاریخ ریاضیات مملکت خودش پژوهش کند، از کجا و چه چیزی در اختیارش می‌گذاریم!

در حال حاضر، کتابهای ریاضیدانان ایرانی و جهانی را به‌صورت ترجمهٔ روان در اختیار نداریم؛ ولی از جوانان می‌خواهیم که پژوهش کنند؛ بر چه اساسی و از کجا؟ باید به رهبری انجمن ریاضی ایران، یک کمیتهٔ جدّی و فعال در این زمینه تشکیل شود که کتابهای ریاضیدانان ایرانی و جهانی را به زبان فارسی امروزی و قابل مطالعه در اختیار دانش‌آموزان قرار دهند. از این مطلب هم بگذریم، آیا واقعاً برنامهٔ آموزشی ما از دبستان تا پایان دبیرستان (حالا حدّاقل، من در دانشگاه دخالت نمی‌کنم) صحیح است؟ به نظر بنده، باید یک کمیسیون در این زمینه تشکیل و معلوم شود که دانش‌آموزان چه چیزی نیاز دارند؟ یک انسان امروزی چه مقدار ریاضی احتیاج دارد؟ و کلاسهای خاص را برای کسانی بگذاریم که می‌خواهند در رشتهٔ ریاضی یا فنی ادامه تحصیل دهند.

آقای قندهاری: مسائلی را که جناب آقای شهریاری مطرح کردند، دقیقاً درست است. مسائل آموزشی و ابزارهای آموزشی به هم پیوسته است؛ یعنی کتاب، فضای آموزشی و معلم به هم پیوسته‌اند. در جامعه‌ای که زندگی می‌کنیم، نباید معلم مشکل مالی داشته باشند تا از او انتظار داشته باشیم خوب کار کند، تحقیق کند یا کارهای دیگری انجام دهد. معلم باید زندگی‌اش تأمین باشد، شما به معلمان حقوق خوب بدهید و شرایط خوب برای معلم ایجاد کنید! تا بهترین شاگردان مملکت رشتهٔ دبیری انتخاب کنند و دبیر شوند. در این صورت از نظر آموزش حداقل ضعف نخواهیم

داشت و بهترینها می‌آیند کتاب می‌نویسند، درنتیجه از نظر یک ابزار مهم آموزشی ما ضعف کمتری داریم.

سرمایه‌گذاری در آموزش و پرورش بیشترین بازدهی را برای مملکت دارد. ظاهر آن نشان نمی‌دهد؛ امّا بیشترین بهره را می‌تواند داشته باشد. تغییر نظام آموزشی، یک پهنهٔ خیلی گسترده‌ای دارد که تحقیقات زیادی باید دربارهٔ آن انجام شود؛ باید بررسیهای تطبیقی با کشورهای دیگر صورت بگیرد، مسائل درون جامعه را ببینیم و ابزارهای آموزشی کشور خودمان را هم در نظر بگیریم که چه هست؟ ما در کشوری زندگی می‌کنیم که بسیاری ازمدرّسان، دو وقته یا سه وقته کار می‌کنند. نظر «پولیا» ـ که یکی از بهترین کارشناسان آموزش و پرورش امریکاست ـ درست است؛ منتها نه برای جامعهٔ ایران ما؛ او برای جامعهٔ خودش حرف زده یا حداقل برای جامعه‌ای که مشکلات فعلی ما را ندارد. ما در این جا در کشوری زندگی می‌کنیم که یک وزیر تصمیم می‌گیرد نظام آموزشی را عوض کند. حالا پس از چند سال دیگر، معاون وزیر تصمیم می‌گیرد، کتابها را عوض کند! اصلاً چنین چیزی نداریم! هم کار اولی بدون برنامه‌ریزی و تحقیق خطاست و هم کار دومی.

در مورد کنکور، استاد شهریاری درست می‌گویند؛ منتها واقعیت این است که مشکلات آموزشی عدیده‌ای داریم و با شرایط فعلی، اصلاً قابل حل نیستند. از این گفتهٔ من، به این نتیجه نرسیم که خوب، پس ما هم دست روی دست بگذاریم؛ نه این درست نیست؛ ولی اگر مسألهٔ کنکور را به همین شکل بپذیریم باید اصلاحاتی در آن صورت بگیرد، که این مسألهٔ تست، حداقل با این شکل و قیافه از بین برود. چه ایرادی دارد به جای این که کنکور در یک روز برگزار شود، در سه روز برگزار شود. به جای این که مثلاً سؤالهای ریاضی ۶۰ تا باشد، ۱۲۰ تا باشد. بعد به جای این که سؤالها تستی باشد، سؤالهای تشریحی بگذارند؛ منتها پاسخهایش را در چهار گزینه قرار دهند که از نظر تصحیح، مشکلی نداشته باشند. مثلاً فرض کنید در درس ریاضی، از ۱۰۰ سرفصل آزمون به عمل بیاید، شما باید از همهٔ اینها سؤال بدهید! دانش‌آموز از این دو کتاب، ممکن است یکی را خوانده باشد و ازکتاب بعدی هم نصف آن را خوانده باشد، شما باید طوری سؤال بدهید که تمام کتاب را پوشش دهد، تا هر کسی هر چیزی را که خوانده، بتواند ارائه کند. ممکن است که بگویند ما هزینهٔ این کار را نداریم؛ وقتی ثبت‌نام می‌کنند، نفری پنج هزار تومان بگیرند. یک خانواده، از وقتی که بچه‌اش وارد مقطع راهنمایی می‌شود، در فکر کنکور است. بعد از این چند سال، می‌خواهد چهار یا پنج هزار تومان شهریه بدهد، مسأله‌ای نیست؛ واقعاً باید کنکور خوب و صحیح برگزار شود.

آقای دکتر پاشا: مطالبی که تا به حال گفته شد واقعاً مسائل اساسی بودند و ما هم استفاده کردیم؛ منتها می‌خواستم برگردم به آن مسألهٔ آزمون تیمز که اول صحبتها به آن اشاره کردید که مقایسه‌ای بود دربارهٔ کشورهایی با نظام آموزشی متمرکز و غیرمتمرکز. من نکته‌ای را در این جا عرض می‌کنم؛ مثلاً یک کشوری مانند سنگاپور و انگلیس که گفتید وضعیت آنها خوب است یا امریکا که انتظار داشتیم وضعیتش بهتر باشد. امریکا اگر وضعیتش خوب است، شاید به این خاطر است که وارث علم اروپا است؛ یعنی آن اوایل که شکل گرفت، خیلی از دانشمندان از سراسر اروپا به آن‌جا رفتند، یک چیزهایی را پی‌ریزی کردند، یک کارهای عمده‌ای را انجام دادند و بالاخره امریکا شهرتی را برای خود کسب کرد. ولی خود امریکاییان و آموزش آنها نبود که بتواند یک چنین محصولی را تحویل دهد. حالا کم کم دارند هویّتی برای خودشان تأسیس می‌کنند؛ اما اگر انگلیس و سنگاپور موفق می‌شوند، به این دلیل است که آنها زمانی را برای خود اعلام کردند، که در عرض بیست سال مثلاً باید در علم و صنعت کامپیوتر سرآمد باشیم؛ برنامه‌ریزی کردند وموفق هم شدند. الان تمام بازارهای دنیا پر از کامپیوترهای سنگاپوری است و نرم‌افزارهایشان به همین طریق تمام کارهای کامپیوتر را انجام می‌دهند. نمونهٔ دیگر ژاپن است، که توانسته برای خودش هویتی بسازد. من در سخنرانیهای گذشته‌ام که صحبت کردم، گفتم که ما هم باید سعی کنیم به نوعی، در یکی از جاهایی که زمینهٔ مساعد داریم، برای خودمان یک نوع هویت بسازیم. علوممان هویّت ایرانی پیدا کند. همه باید بدانند که ایرانیها دارند روی مسأله‌هایی کار می‌کنند.

از این رو اولین برنامه‌ای که پیشنهاد می‌شود، این است که

باید ریشه‌های ریاضی این مملکت روشن شود. همان طوری هم که آقای شهریاری در صحبتهایشان اشاره کردند، ما باید بدانیم تاریخ ریاضیات چیست و ثانیاً این ریشه‌ها اگر مشخص شود، باز هم رشد نخواهیم کرد؛ برای این که جامعهٔ ما و صنعت ما منطبق با علم و ریاضیات پیش نمی‌رود، یک صنعت مونتاژ است و در نهایت، صرفاً وارداتی است. تا زمانی که صنعت مونتاژ داریم علممان راه به جایی نمی‌برد. باید کارخانه‌دار نیازش را سفارش دهد و بیاید بگوید که مثلاً دانشگاه تهران، یک قطعه، با چنین ویژگیهایی نیاز دارد... در این صورت است که بخشهای مختلف مانند گروه‌های ریاضی، فیزیک، مهندسی و ... فعال می‌شوند.

نکتهٔ دیگری هم که در این‌جا به ذهن من می‌رسد، این است که علم ما عین صنعتمان است و به خاطر نداشتن هویت، علممان وارداتی است. در حال حاضر ما می‌بینیم مثلاً در خارج روی مجموعهٔ فازی کار می‌کنند ما هم می‌بینیم در هر گوشه کناری نشسته‌اند و درمورد مجموعه فازی حرف می‌زنند. در خارج می‌بینیم مثلاً دارند روی معادلات دیفرانسیل با ضرایب آن جوری کار می‌کنند. ما هم فردا کمیته‌هایی تشکیل می‌دهیم و شروع به بحث می‌کنیم و دنبال این طور کارها رفتن. علم وارداتی هم، مثل صنعت وارداتی است؛ نه تنها مشکل‌گشای کار ما نیست؛ بلکه ممکن است مزاحمت ایجاد کند.

ما انبوهی از مشکلات در یک گوشه‌ای داریم و انبوهی از دانش ریاضی در گوشه‌ای دیگر؛ اما ارتباط بین اینها را نمی‌توانیم برقرار کنیم. نمی‌توانیم بگوییم آقا برای این مشکل، یک فرم ریاضی بدهید. آن وقت می‌آییم و می‌خواهیم این مشکل را به کمک این دانش ریاضی که داریم، حل کنیم. همان‌طورکه آقای شهریاری گفتند، کار ما در این زمینه‌ها، فقط راه‌اندازی مسابقه است. به هر حال، چنین مسابقات بی‌پایانی را شروع می‌کنیم.

دربارهٔ آموزشمان صحبتی که آقایان قندهاری و شهریاری کردند، من فقط یک بیت از مولانا که در مقاله‌ای هم در آموزش ریاضی نوشتم، این جا عنوان می‌کنم. واقعاً ما داریم همین کار را می‌کنیم که مولانا در جلد دوم مثنوی می‌گوید: «ما که کورانه عصاها می‌زنیم/ لاجرم قندیلها را بشکنیم» آموزش ما به جای این که افراد را پرورش دهد و شکوفا کند، استعدادهای ما را زیر دست و پا له می‌کند؛ برای مثال، این مسابقاتی که می‌گذاریم تا پنج یا شش نفر را برای المپیاد انتخاب کنیم، می‌دانید چه جمع عظیمی را از نظر روحی و روانی از دست می‌دهیم. آنها را دلسرد و زده می‌کنیم. به چه قیمتی ما داریم همه این کارها را می‌کنیم و بعد چه استفاده‌ای می‌خواهیم از آن ببریم. بنابراین، مشکلات آموزشی ما فراوان است. هرگز بین جامعهٔ آموزگاران و صنعت ما، ارتباط منطقی ایجاد نمی‌شود. الان آموزشی را که ما می‌دهیم، به‌خاطر ناهماهنگ‌بودن جامعه با محیطهای علمی، گاهی اوقات نتایج معکوس هم می‌گیریم. من یک داستانی دارم، این را خیلی جاها هم گفته‌ام، حالا هم شما شاید یک طوری بتوانید بنویسید که ثبت شود و شاید هم شنیده باشید. داستان از این قرار است. دو تا شاگرد همکلاس بودند، که یکی از آنها به دلیل عدم توانایی در تحصیل، از مدرسه اخراج می‌شود. (در کلاس پنجم، ششم دبستان) و دیگری موفّق به ادامه تحصیل می شود. بعد از بیست سال دوباره به هم می‌رسند. وقتی به هم رسیدند، یکی ازدیگری می‌پرسد: «تو کجا می‌روی؟» می‌گوید: «این جا یک سمینار است! (مثلاً جناب آقای قندهاری در مورد ریشه‌های معادله درجهٔ سوم صحبت می‌کنند.) من می روم آن‌جا بهره‌ای ببرم.» بعد یکی می‌پرسد: «تو چه کار می‌کنی؟» می‌گوید: «ما شرکتی داریم و اجناس را با یک قیمتی می‌خریم، بعد با چند درصدی سود می‌فروشیم.» وقتی کلمهٔ درصد را می‌شنود، به یاد می‌آورد که او در مدرسه، دربارهٔ درصد مشکل داشت، حالا چه قشنگ در مورد آن صحبت می‌کند. برای این‌که اطمینان حاصل کند، می‌گوید: «خوب شما بفرمایید این کالا را چند می‌خرید و چند می‌فروشید؟» حالا او با شگردهای خاص بازاری که دارد، مقدمه‌ای می‌چیند و بعد می‌گوید: «اینها را ما ۱۰۰ تومان می‌خریم، با ۳۰ درصد سود، می‌فروشیم ۳۰۰ تومان!»

آقای رستمی: از صحبتهای اساتید بزرگوار و دانشمند استفاده کردیم و مطالب لازم گفته شد. دو نکته است که من اضافه می‌کنم.

از نظر من، نقد کتابهای درسی، یک گوشه‌ای از آن هدفهایی است که مورد نظر ما و برای بهبود آموزش ریاضی در کشور است

و به آن نیاز داریم. در ابتدا همان‌طوری که گفته شد، باید اهداف مشخص شود؛ اهدافی که سال جهانی ریاضیات دارد، باید با سیستمی که در ایران قابل پیاده شدن است، منطبق شود. ممکن است تغییر نظام آموزشی یا اصلاح نظام آموزشی لازم باشد. به‌طور قطع، از آن موارد، اصلاح کتابهای درسی، روشهای آموزشی و ارزشیابی کتابها است. یکی دیگر، تهیهٔ مجله‌های ریاضی است.

از جمله مجله‌های ریاضی که برای مقطع دبیرستان منتشر می‌شود، یکی مجلهٔ «ریاضی برهان» است. آیا این مجله کافی است؟ یعنی نیاز معلم، دانش‌آموز و والدین را برآورده می‌کند؟ به نظر من، حتی همان نیاز دانش‌آموزان را هم در حدّی که لازم است، برآورده نمی‌کند. چه بسا لازم است یک مجله یا مجله‌های جدیدی وجود داشته باشد تا به هدفهایمان برسیم. نه تنها برای مقطع دبیرستان، بلکه حتی برای والدین، باید از پیش‌دبستان و دبستان مجله‌های ریاضی تهیه کرد. نکتهٔ دیگری که می‌خواستم بگویم، این است، همان‌طوری که استاد شهریاری هم در یک زمینهٔ کلی‌تری اشاره فرمودند، ما نباید به یک سال اکتفا بکنیم، خوب آن در بعد کلی است. حالا من در بعد دیگری می‌خواهم بگویم، ما نباید به یک ویژه‌نامه برای سال جهانی ۲۰۰۰ و اهداف آن اکتفا کنیم، به‌نظر من، اگر لازم است یک مجله در کنار این مجله، برای رسیدن به آن اهدافی که مورد نظر است، باید ایجاد شود.

آقای صدر: به نظر بنده دو نکته شایان ذکر است. اوّل این که کتابهای درسی باید با چه شیوه‌ها و مطالبی نوشته شود که با اهداف سال جهانی ریاضیات همسو باشد. همچنین کتابهای کمک‌آموزشی که هم‌اکنون وجود دارد، آیا این کتابها ویژگیهای همسو با اهداف سال جهانی ریاضی را دارد؟ اگر چنین است که ما ادّعا می‌کنیم این را انجام داده‌ایم؛ در غیر این صورت، راهبردهایی برای رسیدن به این اهداف باید پیدا کنیم. در حال حاضر، کتابهای درسی و کمک‌درسی که وجود دارد، از نظر مطالب مدل‌سازی و کاربرد ریاضی، ضعیف است؛ یعنی مطالب به گونه‌ای است که همیشه این سؤال برای دانش‌آموز به وجود می‌آید که مثلاً در جبر خطی فصل فضای برداری به چه دردی می‌خورد؟ حالا یا واقعاً به درد نمی‌خورد و یا اگر کاربردی دارد، حتماً ذکر شود. این گونه مطالب کاربردی، باید به مطالب مجله‌های ریاضی و کتابهای ریاضی افزوده گردد.

دومین مسألهٔ مهمی که به نظر من می‌رسد، البته نمی‌دانم در کمیتهٔ سال جهانی ریاضی مطرح شده است یا نه؟ هدف، پرورش آموزش ریاضی است؛ یعنی کاری کنیم که دانش‌آموز قدرت اتکای به نفس پیدا کند و بتواند خودش مشکلاتش را حل کند. در حال حاضر، عمده‌ترین مشکلی که در مدارس داریم، مشکل کمبود وقت است و معلم در کلاس، فرصت حل همهٔ مسائل را پیدا نمی‌کند؛ بنابراین، دانش‌آموز در حل مسأله دچار مشکل می‌شود. اکنون اگر دانش‌آموز قدرت اتکای به‌نفس در حل مسائل داشته باشد، تا حدّی این مشکل جبران می‌شود. البته وجود کتابهای کمک‌آموزشی استاندارد، می‌تواند در حل مسأله و تفکر برای حل مسأله، به دانش‌آموز کمک کند.

اما مشکل دیگری که وجود دارد، این است که دانش‌آموزان ما فرهنگ کتابخوانی ندارند. بنابراین چه باید کرد؟ باید کاری کرد که دانش‌آموز قدرت حل مسأله و خواندن کتاب را بیابد و مطالعه و تحقیق کند، تا چنین مشکلاتی به این صورت پیش نیاید.

آقای شرقی: چند مطلب را خدمتتان عرض می‌کنم. البته اکثر موضوعات در صحبتهای اساتید گفته شد؛ به خصوص عمدهٔ موضوعات را آقای شهریاری مطرح کردند. اما یک بخش و یک فراز از صحبتهای ایشان را من روی آن تأکید دارم و آن، مسألهٔ اطلاع‌رسانی و جریان داشتن اطلاعات و رسیدن این صحبتها به

گوش مسؤولان و پاسخگو بودن آنهاست. اکنون یک مجموعه نظرات ویک سری انتقادات داریم. اینها را مطرح می کنیم؛ مثل همان مطلبی که آقای شهریاری در رابطه با کنکور سراسری گفتند. خوب آنها مطالب کوچکی نیستند. ایشان قویاً می گویند که کنکور سراسری، ویران‌کننده است. حالا من نمی گویم حتماً این مطلب صددرصد صحیح است؛ ولی می گویم اقلاً قابل بحث است. همان‌طوری که ایشان گفتند، اگر این مطلب واقعیت داشته باشد ـ که من هم معتقد هستم واقعیت دارد ـ ببینید هزینهٔ آن برای یک ملّت چه‌قدر زیاد است، خوب این باید یک طوری به گوش مسؤولان برسد. آنها خودشان را موظّف بدانند که پاسخگو باشند و حدّاقل ازکاری که انجام می‌دهند دفاع کنند. من مجبور هستم یک کتاب درسی را در مدت کوتاهی (حالا فعلاً که نظام ترمی است) در مدت سه ماه تمام کنم؛ آن هم موضوعی که می‌دانم حجم و زمانی که در اختیار دارم، تکاپوی نصف آن بحث را هم نمی‌کند. مجبورم نصف موضوعات را یک طوری سریع بگویم و تمرینات را کم کنم. در نتیجه مطالب خوب جا نمی‌افتد. بنابراین دانش‌آموزانی ممکن است حد بگیرند، مشتق بگیرند و منحنی رسم کنند؛ آن وقت یک معادله درجهٔ دوم را نمی‌توانند حل کنند. چرا این گونه شده؟ به دلیل همین موضوع؛ یعنی فشرده‌بودن مباحث و نبودن زمان به اندازهٔ کافی. آقای امیری ابتدای جلسه فرمودند که برای عمومی‌کردن ریاضیات کار کنیم؛ خوب عمومی‌کردن ریاضیات یعنی چه؟ یعنی دانش‌آموز کاربردهای ریاضیات را عملاً ببیند و حس کند و زیباییها و خلاقیتهای در ریاضی را تجربه کند.

آقای عابدی: عمومی‌کردن ریاضیات، یعنی این که به مردم فکر ریاضی بدهیم. اگر ما به مردم فکر ریاضی بدهیم، خیلی از مشکلات حل می‌شود. ولی با وجود کنکور، امکان ندارد؛ چون وقتی که من در کلاس مدرسه‌ای درس می‌دهم، هنوز قضیه نگفته‌ام، می‌گویند آقا روش تستی آن‌را بگو؛ یعنی می‌خواهند ریاضی فکر نکنند. علت آن هم، این است که فکر می‌کنم بیشتر یک جنبهٔ مدرک‌گرایی دارد؛ یعنی الان مُد شده، با وجودی که همه می‌دانند واقعاً اگر در رشتهٔ پزشکی فارغ‌التحصیل شوند، کار ندارند؛ ولی می‌خواهد پُز بدهد و بگوید من خانم یا آقای دکتر هستم. من چون که در سیستم اقتصادی کار می‌کنم؛ یعنی دست‌اندرکار هستم، خیلی وقتها می‌بینم یک بازاری که می‌نشیند و صحبت می‌کند، او فکر ریاضی دارد. یک وقت مثلاً وقتی قیمت تمام شدهٔ یک کالا را که حساب می‌کند، می‌بینم در مدت دو یا سه دقیقه، خیلی خوب حساب می کند. این، یعنی او فکر ریاضی دارد.

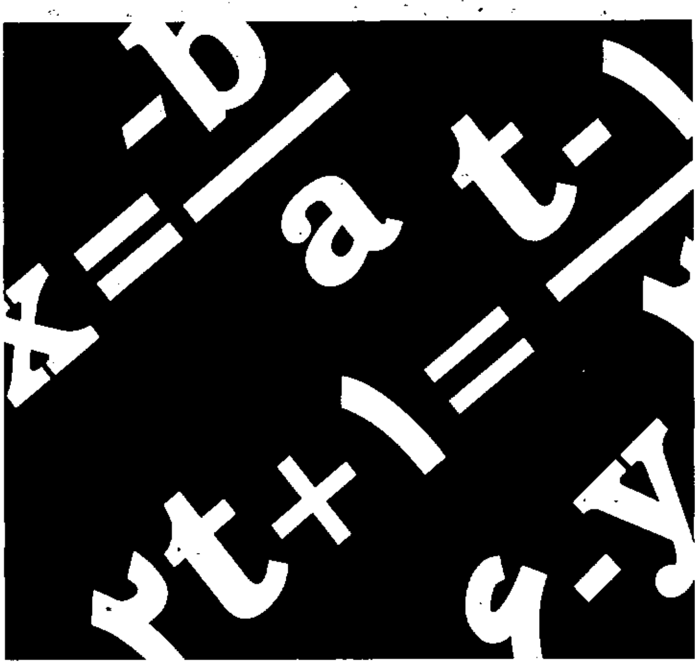
عیب اساسی دیگر این است که مسأله معیشت معلمان باید حل شود. من از خود شما جناب شهریاری سؤال می‌کنم، شما واقعاً معلم شدید، به خاطر پولش بوده یا به معلمی علاقه داشتید! ولی الان این طور نیست. در حال حاضر شما نگاه کنید، هر کس از هر کجا که فارغ‌التحصیل می‌شود، می‌رود معلم می‌شود. نظامی در کار نیست. ما نظام پزشکی داریم! ولی نظام معلّمی نداریم! می‌بینیم برخی از معلمها مهندس یا دکترند. این‌گونه افراد دورهٔ کلاس تربیت معلّمی و تدریس را ندیده‌اند و کارآموزی نکرده‌اند. هر طوری خوششان می‌آید، درس می‌دهند. همین مهندسان و ... هستند که می‌روند درس می‌دهند و روشهای تستی بدون پشتوانهٔ ریاضی را به خورد بچه‌های مردم می‌دهند. متأسفانه هیچ جایی در این مملکت نیست که جلوی اینها را بگیرد، که آقا شما چطوری معلم شدید؟ مدرک شما چیست؟ کار شما چیست؟ شاید ۸۰ تا ۹۰ درصد معلمان کلاسهای کنکور، اشخاصی هستند که اصلاً کار معلمی نکرده‌اند؛ ولی حُقّه‌بازیها و روش تست‌زنی را می‌دانند. تا وقتی که مسألهٔ کنکور در ایران حل نشود و این مدرک‌گرایی ـ آقای دکتر، آقای مهندس و ... ـ حل نشود، ریاضیات را نمی‌توانیم عمومی کنیم. بنابراین اوّلاً باید روش کنکور را در مملکت عوض کنند، ثانیاً باید انتخاب معلم درست باشد. الان شما می‌دانید، هر کسی از هر جایی آمده، برای خودش معلمی می‌کند و هیچ کس هم نیست که جلوی آنها را بگیرد.

معادله درجه اول

(قسمت اول)

(برای دانش آموزان سال اول)

● هوشنگ شرقی



معادله چیست؟

یکی از مفاهیم بسیار رایج در شاخه‌های مختلف ریاضی، مفهومی به نام معادله است. آشنایی دقیق با مفاهیم ریاضی، از ضرورتهای آموزش آن می‌باشد. بدون اطلاع از مفهوم دقیق و عمیق یک واژهٔ ریاضی، نمی‌توان مسائل مربوط به آن را بدرستی حل نمود. بنابراین، در این بحث ابتدا باید ببینیم معادله چیست و تفاوت آن با اتحاد چه می‌باشد.

معادله: هر تساوی جبری که به‌ازای بعضی مقادیر متغیرها (مجهولها) برقرار (درست) باشد، معادله نامیده می‌شود. معادله ممکن است یک یا چند مجهول داشته باشد؛ مثلاً تساوی $a+b=2$ یک معادله با دو مجهول می باشد و هرچند این تساوی، به‌ازای بی‌شمار جفت عددهای حقیقی a و b برقرار می‌باشد؛ ولی چون به‌ازای همهٔ عددهای حقیقی a و b درست نیست، بنابراین یک اتحاد نمی‌باشد. مجموعهٔ مقادیری را که به‌ازای آنها معادله برقرار می‌باشد، مجموعهٔ جوابها یا ریشه‌های معادله می‌گوییم. مثلاً مجموعهٔ جوابهای معادلهٔ $x^2=1$ برابر با $\{-1,1\}$ می‌باشد؛ چرا که تنها مربع این دو عدد، مساوی یک است. بنابراین اتحاد، معادله‌ای است که مجموعهٔ جوابهای آن، مجموعهٔ اعداد حقیقی، یعنی $\mathbb{R}$ باشد؛ مانند اتحاد $x+1=1+x$ که به‌ازای هر عدد حقیقی x برقرار می‌باشد. منظور از حل معادله، پیدا کردن مجموعهٔ جوابها یا ریشه‌های معادله می‌باشد؛ یعنی مجموعهٔ مقادیری را که به‌ازای آنها معادله برقرار می‌باشد، به‌دست می‌آوریم.

درجهٔ یک معادله: بزرگترین درجهٔ مجهول (مجهولهای) معادله را درجهٔ معادله می‌گوییم. مثلاً معادلهٔ $x^4-x-2=0$، معادله‌ای از درجهٔ ۴ با یک مجهول (x) می‌باشد.

در این بحث، هدف ما ارائه راه‌حلهایی برای حل معادله‌های یک مجهولی درجهٔ اول و دوم می‌باشد.

معادلهٔ یک مجهولی درجهٔ اول

در این نوع معادله، بزرگترین درجهٔ مجهول معادله یک می‌باشد. هریک از معادله‌های زیر، معادله‌ای از این نوع هستند:

$$\frac{y+4}{3}-\frac{y-1}{2}=y+3 \qquad \frac{x+2}{3}-\frac{x-1}{4}=x+1$$

$$2t+1=\frac{t-1}{2}-1$$

برای حل این نوع معادله‌ها چه باید کرد؟

بیایید با یک مثال شروع کنیم.

مثال: حل معادله درجهٔ اول $2x+1=0$.

برای حل این معادله، درواقع باید به این سؤال پاسخ دهیم: دو برابر کدام عدد حقیقی به‌اضافهٔ ۱، مساوی صفر می‌شود؟

مثل این که قدری مشکل است! مثال را از این هم ساده‌تر می‌کنیم.

مثال: حل معادلهٔ درجهٔ اول $x+1=0$.

حل: در این‌جا با سؤال ساده‌تری مواجه هستیم: مجموع کدام

عدد حقیقی با ۱، مساوی صفر می‌شود؟ یعنی یک عدد حقیقی بگویید که با ۱ جمع شده و حاصل مساوی صفر شود. پاسخ ساده است: $x=-1$ ؛ زیرا می‌دانیم: $0=1+(-1)$.

اکنون می‌توانیم حل مثال اوّل را نیز انجام دهیم: اگر $2x$ را یک مجهول درنظر بگیریم، با همین روش نتیجه می‌شود: $2x=-1$، حال باید به این سؤال پاسخ دهیم: دو برابر کدام عدد حقیقی، مساوی -1 است؟ این نیز با قدری فکر به‌دست می‌آید: $x=-\frac{1}{2}$ (زیرا می‌دانیم $2\times(-\frac{1}{2})=-1$).

حال می‌خواهیم معادلهٔ $ax+b=0$ را در حالت کلی حل کنیم: بدیهی است که در این معادله، a و b اعدادی حقیقی بوده و $a\neq 0$ می‌باشد. اگر ax را به‌عنوان یک مجهول درنظر بگیریم، باید به این سؤال پاسخ دهیم: کدام عدد حقیقی به اضافهٔ b، مساوی صفر می‌شود؟ با کمی جست‌وجو و توجه به برابری $b+(-b)=0$ نتیجه می‌شود که $ax=-b$. اکنون برای یافتن x باید به این سؤال پاسخ دهیم: حاصلضرب کدام عدد حقیقی در a، می‌شود $-b$، که این نیز با توجه به تساوی $a(-\frac{b}{a})=-b$، نتیجه می‌دهد: $x=\frac{-b}{a}$؛

بنابراین جواب معادلهٔ $ax+b=0$ برابر است با $x=\frac{-b}{a}$. مثلاً جواب معادلهٔ $2x+3=0$ می‌شود: $x=-\frac{3}{2}$. اکنون یک نوع بیان سنتی برای رسیدن به جواب معادله را به‌کار می‌بریم: همان‌طور که دیدیم از تساوی $ax+b=0$ به تساوی $ax=-b$ رسیدیم. در این‌جا می‌گوییم، b را به‌طرف دوم تساوی می‌بریم و با این کار، علامت آن عوض می‌شود. پس از این، قرارداد می‌کنیم که هر عبارت جبری یا عدد حقیقی که از یک طرف معادله، به‌طرف دیگر آن برود، علامت آن قرینه بشود. حال از تساوی $ax=-b$ نتیجه گرفتیم که: $x=-\frac{b}{a}$، یعنی عدد ثابت را بر ضریب مجهول (a) تقسیم کردیم و مجهول x را پیدا کردیم. پس از این نیز همین کار را می‌کنیم: یعنی هروقت به تساوی $ax=k$ رسیدیم، بلافاصله می‌نویسیم $x=\frac{k}{a}$. مثلاً از تساوی $2x=5$، نتیجه می‌شود: $x=\frac{5}{2}$ یا از تساوی $3x=-6$، نتیجه می‌گیریم: $x=-\frac{6}{3}=-2$. به این ترتیب، یک راه حل کلی برای حل معادله‌های یک مجهولی درجهٔ اول پیدا می‌شود؛ ابتدا همهٔ مجهولها را به یک طرف معادله و معلومها را به‌طرف دیگر می‌بریم. با این شرط که، هر عبارتی که از یک طرف به‌طرف دیگر برود، تغییر علامت می‌دهد؛ پس، از جمع و تفریق مجهولها با هم و معلومها نیز با هم، به تساوی مانند $ax=k$ می‌رسیم و از آن جا مقدار x به‌صورت $x=\frac{k}{a}$ به‌دست می‌آید.

مثال: حل معادلهٔ $3x+7-5x=4+2x$.

حل: همهٔ مجهولها را به‌سمت راست و همهٔ عددها (معلومها) را به سمت چپ تساوی می‌بریم (این کار اختیاری است و می‌توانستیم بعکس عمل کنیم): $7-4=2x+5x-3x$

چون $-5x$ و $3x$ و عدد ۴ تغییر مکان داده‌اند، پس تغییر علامت داده‌اند؛ ولی $2x$ و ۷ تغییر علامت نداده‌اند؛ زیرا تغییر مکان نداشته‌اند. اکنون از جمع جبری عبارتهای سمت راست و چپ تساوی، نتیجه می‌شود: $3=4x$

و براساس دستور گفته شده: $\boxed{x=\frac{3}{4}}$

مثال: حل معادلهٔ $4y-14=-2y+2-y+5$.

حل: به همان روش عمل می‌کنیم (به‌ترتیب اعمال زیر دقت کنید):

$$4y+2y+y=14+2+5$$

$$\Rightarrow 7y=21\Rightarrow y=\frac{21}{7}=3\Rightarrow \boxed{y=3}$$

تمرین: اکنون شما نیز با همین روش، هریک از معادله‌های زیر را حل نموده و مجهول معادله را به‌دست آورید:

1) $4x+3x-11=2x-1$

2) $5t-2t-1=3t+t-3$

3) $5y-2=4y-3$

حال، معادله را قدری پیچیده‌تر کنیم.

مثال: معادلهٔ $\frac{4x-1}{3}=\frac{x+1}{4}$ را حل کنید.

حل: به کمک خاصیت «طرفین ـ وسطین» نمودن تناسبها که می‌گوید از تساوی $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ برابری $ad=bc$ نتیجه می‌شود

$(\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow ad=bc)$ می‌توان معادلهٔ حاصل را به‌صورت زیر تغییر داد :

$$\frac{4x-1}{3}=\frac{x+1}{4}\Rightarrow 4(4x-1)=3(x+1)$$

حال با ضرب ضرایب ۴ و ۳ در پرانتزها به‌دست می‌آید :

$$16x-4=3x+3$$

و این، معادله‌ای از همان نوع قبل می‌باشد که بسادگی حل می‌شود :

$$16x-3x=4+3\Rightarrow 13x=7\Rightarrow x=\frac{7}{13}$$

مثال: حل معادلهٔ درجهٔ اول : $\frac{3x-2}{5}=\frac{2x+1}{3}$.

حل: به همان روش، بترتیب می‌نویسیم :

$$3(3x-2)=5(2x+1)\Rightarrow 9x-6=10x+5$$

$$\Rightarrow 9x-10x=6+5\Rightarrow -x=11\Rightarrow \boxed{x=-11}$$

تمرین: هریک از معادله‌های زیر را حل کنید.

1) $\frac{4x-1}{3}=\frac{2x+5}{2}$ 2) $\frac{5x+1}{2}=\frac{3x-1}{4}$

3) $\frac{x+1}{7}=\frac{4x-1}{3}$ 4) $\frac{2t+3}{3}=\frac{3t+2}{2}$

5) $\frac{7y-1}{6}=\frac{6y-1}{7}$

اکنون مسأله را قدری جلوتر می‌بریم.

مثال: حل معادلهٔ $\frac{x+1}{2}+\frac{x-1}{3}=\frac{3x-1}{4}-\frac{x-2}{5}$.

حل: ابتدا با جمع و تفریق کسرهای دو طرف تساوی، هر طرف را به یک کسر تبدیل می‌کنیم (در دو طرف، با مخرج مشترک‌گیری، عمل جمع یا تفریق را انجام می‌دهیم) :

$$\frac{3(x+1)+2(x-1)}{6}=\frac{5(3x-1)-4(x-2)}{20}$$

حال، اعمال جبری را در صورتهای دو کسر انجام داده و مخرج دو کسر را نیز به عدد ۲ ساده می‌کنیم :

$$\frac{3x+3+2x-2}{3}=\frac{15x-5-4x+8}{10}$$

$$\Rightarrow\frac{5x+1}{3}=\frac{11x+3}{10}$$

حال مسألهٔ ما به مسأله‌ای مشابه حالت پیش تبدیل می‌شود :

$$10(5x+1)=3(11x+3)\Rightarrow 50x+10=33x+9$$

$$\Rightarrow 50x-33x=9-10\Rightarrow 17x=-1\Rightarrow x=-\frac{1}{17}$$

مثال: معادلهٔ $\frac{2t+1}{3}-\frac{t-1}{2}+1=\frac{t}{2}+t$ را حل کنید.

حل: به‌ترتیب می‌توان نوشت :

$$\frac{2(2t+1)-3(t-1)+6}{6}=\frac{t+2t}{2}$$

$$\Rightarrow\frac{4t+2-3t+3+6}{3}=\frac{3t}{1}\Rightarrow\frac{t+11}{3}=\frac{3t}{1}$$

$$\Rightarrow t+11=9t$$

$$\Rightarrow 11=9t-t\Rightarrow 11=8t\Rightarrow\boxed{t=\frac{11}{8}}$$

مثال: حلّ معادلهٔ

$$\frac{7z+1}{4}-\frac{2z-3}{2}-\frac{z-1}{3}=\frac{5z}{2}-\frac{3z-1}{5}-1$$

حل:

$$\frac{3(7z+1)-6(2z-3)-4(z-1)}{12}=\frac{25z-2(3z-1)-10}{10}$$

$$\Rightarrow\frac{21z+3-12z+18-4z+4}{6}=\frac{25z-6z+2-10}{5}$$

$$\Rightarrow\frac{5z+25}{6}=\frac{19z-8}{5}\Rightarrow 5(5z+25)=6(19z-8)$$

$$\Rightarrow 25z+125=114z-48$$

$$\Rightarrow 25z-114z=-125-48$$

$$\Rightarrow -89z=-173\Rightarrow z=\frac{173}{89}$$

تمرین: هریک از معادله‌های زیر را حل کنید.

1) $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}=\frac{x+1}{5}-1$

2) $\frac{x+1}{4}-\frac{2x-1}{2}=\frac{x-1}{3}-\frac{x-1}{2}$

3) $\frac{3x-1}{2}-\frac{5x-1}{5}=\frac{x+1}{4}+\frac{x-1}{3}-x$

4) $\frac{4y+1}{3}-\frac{2-y}{2}-\frac{y-1}{3}=\frac{5y+1}{2}-1$

5) $\frac{2m+4}{3}-\frac{m-1}{5}-m-1=\frac{3m-4}{2}-\frac{m-1}{6}+1$

اکنون به معادله‌هایی می‌پردازیم که در آنها عبارتهای درجهٔ دوم و بیشتر ظاهر می‌شوند ؛ ولی با حذف آنها معادله‌ای درجهٔ اوّل به‌دست می‌آید.

مثال: ریشه‌های معادلهٔ $\frac{x+3}{x+2}=\frac{3x-1}{3x-2}$ را به‌دست آورید.

حل: از طرفین ـ وسطین کردن این تناسب، به تساوی زیر می‌رسیم :

$$(x+3)(3x-2)=(x+2)(3x-1)$$

و از ضرب پرانتزها در یکدیگر، به برابری زیر می‌رسیم :

$$3x^2-2x+9x-6=3x^2-x+4x-2$$

اکنون اگر همهٔ عبارتهای شامل مجهول x را به یک طرف و عددهای معلوم را به طرف دیگر ببریم، تساوی به این صورت تغییر می‌کند :

$$3x^2-2x+9x-3x^2+x-6x=-2+6$$

در اینجا عبارت درجهٔ دوم $3x^2$ با $-3x^2$ حذف شده و یک معادلهٔ درجهٔ اوّل به‌دست می‌آید : $2x=4$ که از حلّ آن نتیجه می‌شود :

$$\boxed{x=2}$$

البته در حل این‌گونه معادله‌ها که x در مخرج کسرها قرار دارد، باید دقت نمود که ریشهٔ معادله، مخرج هیچ یک از کسرها را صفر نکند و در این جا چنین نیست ؛ زیرا ریشه‌های مخرج کسرها به‌صورت زیر به دست می‌آیند :

$$x+2=0\Rightarrow x=-2,\ 3x-2=0\Rightarrow 3x=2\Rightarrow x=\frac{2}{3}$$

که هیچ یک مساوی ۲ نمی‌باشند. در حقیقت، در معادله‌هایی که مجهول معادله در مخرج هریک از کسرها باشد، ابتدا باید ریشهٔ مخرج همهٔ کسرها را به‌دست آورد و این ریشه‌ها را از مجموعهٔ اعداد حقیقی کم کرد، مجموعهٔ حاصل را دامنهٔ معادله می‌نامیم ؛ مثلاً در معادلهٔ اخیر دامنهٔ معادله، مجموعهٔ $D=\mathbb{R}-\left\{-2,\frac{2}{3}\right\}$ می‌باشد.

مثال: دامنهٔ معادلهٔ $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-2}{x+1}=2$ را به‌دست آورده و سپس معادله را حل کنید.

حل: از صفر قرار دادن مخرج کسرها جوابهای زیر به‌دست می‌آیند :

$$x-1=0\Rightarrow x=1$$

$$x+1=0\Rightarrow x=-1$$

بنابراین، دامنهٔ معادله $D=\mathbb{R}-\{1,-1\}$ می‌باشد، یعنی ریشهٔ معادله، نباید مساوی یکی از این دو مقدار باشد. اکنون با جمع کسرهای سمت چپ تساوی، حلّ معادله را آغاز می‌کنیم :

$$\frac{(x+1)^2+(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}=2$$

$$\Rightarrow\frac{x^2+2x+1+x^2-3x+2}{x^2-1}=2$$

$$\Rightarrow\frac{2x^2-x+3}{x^2-1}=\frac{2}{1}$$

اکنون با طرفین ـ وسطین کردن، تناسب بالا به‌دست می‌آید :

$$2x^2-x+3=2x^2-2$$

$$\Rightarrow 2x^2-x-2x^2=-2-3$$

$$\Rightarrow -x=-5\Rightarrow x=5$$

جواب به‌دست آمده در دامنهٔ معادله صدق نموده، لذا قابل قبول است.

تمرین: دامنهٔ هریک از معادله‌های زیر را به‌دست آورده و سپس معادله را حل کنید و درستی جواب را براساس دامنه، تحقیق کنید.

۱) $\frac{4x-1}{3x+1}=\frac{4x+1}{3x-1}$ ۲) $\frac{5x+2}{x-1}=\frac{5x+3}{x+1}$

۳) $\frac{x+2}{x-2}-\frac{x-1}{2x-1}=\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}=\frac{2}{x+2}$

معادلهٔ غیر ممکن و معادلهٔ مبهم

هرگاه پس از ساده کردن یک معادله، برای حل آن، مجهول معادله حذف شده و یک تساوی نادرست عددی حاصل شود، معادلهٔ مزبور را معادله‌ای غیرممکن می‌نامیم. معادلهٔ غیرممکن، ریشهٔ حقیقی ندارد.

مثال: معادلهٔ $\frac{x+2}{3}+\frac{x-2}{2}=\frac{5x+1}{6}$ را حل کنید.

حل: مطابق روشهای گفته شده، طرفین تساوی را ساده کنیم :

$$\frac{2(x+2)+3(x-2)}{6}=\frac{5x+1}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{2x+4+3x-6}{6}=\frac{5x+1}{6}$$

$$\Rightarrow 5x-2=5x+1 \Rightarrow 5x-5x=2+1 \Rightarrow 0=3$$

که برابری آخر نادرست می‌باشد، لذا معادلهٔ اولّیه غیر ممکن است و هیچ عدد حقیقی x، در تساوی فوق صدق نمی‌کند. حال اگر پس از ساده شدن طرفین معادله، x حذف شده و یک تساوی درست حاصل شود، معادلهٔ مزبور را معادلهٔ مُبهم گوییم. معادلهٔ مبهم دارای بی‌شمار ریشهٔ حقیقی است.

مثال: معادلهٔ $\frac{x+2}{5}-\frac{x-1}{2}=1-\frac{3x+1}{10}$ را حل کنید.

حل: پس از ساده کردن طرفین تساوی، نتیجه می‌شود:

$$\frac{2(x+2)-5(x-1)}{10}=\frac{10-(3x+1)}{10}$$

$$\Rightarrow 2x+4-5x+5=10-3x-1$$

$$\Rightarrow 2x-5x+3x=10-1-4-5 \Rightarrow 0=0$$

و تساوی آخر صحیح می‌باشد. و از آن‌جا نتیجه می‌شود معادلهٔ فوق یک معادلهٔ مبهم بوده و بی‌شمار ریشهٔ حقیقی دارد. به‌عبارت دیگر، تساوی فوق به ازای هر عدد حقیقی x برقرار می‌باشد؛ یعنی برابری $\frac{x+2}{5}-\frac{x-1}{2}=1-\frac{3x+1}{10}$ یک اتحاد جبری می‌باشد.

معادله‌های حرفی

معادله‌های حرفی، معادله‌هایی می‌باشند که معلومهای معادله، عدد حقیقی نمی‌باشند و به‌صورت حرفی می‌باشند. مانند معادلهٔ $\frac{x+a}{b}=\frac{x+b}{a}$ که در آن x مجهول معادله بوده و a و b دو مقدار معلوم می‌باشند، برای حلّ این گونه معادله‌ها به همان ترتیبی عمل می‌کنیم که در مورد معادله‌های عددی دیدیم: یعنی همهٔ عبارتهای شامل مجهول معادله را به یک طرف تساوی و سایر عبارتها را به طرف دیگر معادله می‌بریم. سپس از مجهول معادله فاکتور می‌گیریم. آن‌گاه مجهول معادله برابر می‌شود با مجموع عبارتهای معلوم تقسیم بر ضریب مجهول. برای شروع، حلّ معادله‌ای را که مثال زده شد، انجام می‌دهیم:

$$\frac{x+a}{b}=\frac{x+b}{a}$$

با طرفین ـ وسطین کردن تناسب بالا به تساوی زیر می‌رسیم:

$$a(x+a)=b(x+b) \Rightarrow ax+a^2=bx+b^2$$

و با بردن عبارتهای مجهول و معلوم به یک طرف، نتیجه می‌شود:

$$ax-bx=b^2-a^2$$

و اگر در سمت چپ، از x فاکتور بگیریم:

$$x(a-b)=b^2-a^2 \Rightarrow x=\frac{b^2-a^2}{a-b}$$

و به این ترتیب، x برحسب a و b به‌دست می‌آید. حال با فرض $a \neq b$ (که با این فرض، مقدار مخرج کسر، مخالف صفر بوده و کسر تعریف شده می‌باشد) می‌توان مقدار x را ساده‌تر نمود:

$$x=\frac{b^2-a^2}{a-b}=\frac{-(a^2-b^2)}{a-b}=\frac{-(a-b)(a+b)}{(a-b)}$$

$$=-(a+b) \Rightarrow x=-(a+b)$$

با یک مثال دیگر از این نوع، موضوع روشنتر می‌شود.

مثال: از تساوی $b^2(b-a)=c^2(c-a)+a(b-c)$ مقدار a را برحسب b و c به‌دست آورید.

حل: با ملاحظهٔ این برابری، واضح است که معادلهٔ فوق، برحسب مجهول a، از درجهٔ اول می‌باشد. برای حلّ آن مانند مثال قبل، پس از ضرب و ساده کردن پرانتزها، همهٔ عبارتهای شامل مجهول a را به یک طرف معادله برده و سایر عبارتها را به طرف دیگر آن می‌بریم و a را به‌دست می‌آوریم:

$$b^3-b^2a=c^3-c^2a+ab-ac \Rightarrow$$

$$b^3-c^3=b^2a-c^2a+ab-ac \Rightarrow$$

$$b^3-c^3=a(b^2-c^2+b-c) \Rightarrow a=\frac{b^3-c^3}{b^2-c^2+b-c}$$

با تجزیهٔ عبارتهای صورت و مخرج کسر، می‌توان مقدار a را ساده‌تر نمود:

$$a=\frac{(b-c)(b^2+bc+c^2)}{(b-c)(b+c)+(b-c)}=\frac{(b-c)(b^2+bc+c^2)}{(b-c)(b+c+1)}$$

$$\Rightarrow a=\frac{b^2+bc+c^2}{b+c+1}$$ با شرط $(b \neq c)$

و این مقدار a را برحسب b و c به ما می‌دهد.

مثال: از تساوی $a^2+ab=ac+bc+1$ مقادیر b و c را برحسب سایر مجهولها به‌دست آورید.

حل: یک بار b را مجهول اصلی فرض نموده و آن را برحسب سایر عبارتها به دست می‌آوریم:

$$ab - bc = ac - a^2 + 1 \Rightarrow b(a-c) = ac - a^2 + 1$$

$$\Rightarrow b = \frac{ac - a^2 + 1}{a - c}$$

و یک بار دیگر، c را مجهول اصلی فرض نموده و آن را برحسب a و b به‌دست می‌آوریم :

$$a^2 + ab - 1 = ac + bc \Rightarrow a^2 + ab - 1 = c(a+b)$$

$$\Rightarrow c = \frac{a^2 + ab - 1}{a + b}$$

در انتهای این بخش، یادآور می‌شویم که حلّ معادله‌های حرفی و به‌دست آوردن هریک از مجهولها در یک تساوی، برحسب سایر مجهولها، کاربردهای زیادی در سایر علوم و بخصوص در محاسبه‌های مربوط به فیزیک و الکترونیک دارد. در این‌جا به چند نمونه توجه می‌کنیم.

مثال: قانون حرکت متحرّکی که با حرکت شتابدار، طی مسیر می‌کند، به‌صورت $x = \frac{1}{2}at^2 + V_\circ t$ بیان می‌شود که در این تساوی، a شتاب حرکت، t زمان و $V_\circ$ سرعت اولّیه می‌باشد و از آن‌جا x مسافت طی شده به‌دست می‌آید. از این تساوی، مقدار شتاب حرکت را برحسب زمان حرکت، سرعت اولیه و مسافت به‌دست آورید.

حل: به ترتیب می‌توان نوشت :

$$x = \frac{1}{2}at^2 + V_\circ t \Rightarrow x - V_\circ t = \frac{1}{2}at^2$$

$$\Rightarrow a = \frac{x - V_\circ t}{\frac{1}{2}t^2} \Rightarrow a = \frac{2x - 2V_\circ t}{t^2}$$

مثال: ظرفیت یک خازن مسطح، از دستور $C = \varepsilon_\circ \frac{kA}{d}$ به‌دست می‌آید.

که در این دستور، C ظرفیت خازن، k عددی ثابت به نام ثابت دی الکتریک، $\varepsilon_\circ$ نیز یک عدد ثابت بوده و A مسافت صفحات خازن و d فاصلهٔ دو صفحه از یکدیگر می‌باشد. از این دستور، مقدار ثابت دی‌الکتریک را برحسب سایر متغیرها و مقادیر ثابت به‌دست آورید.

حل: بسادگی می‌توان نوشت :

$$C = \frac{\varepsilon_\circ kA}{d} \Rightarrow \varepsilon_\circ kA = C.d \Rightarrow k = \frac{C.d}{\varepsilon_\circ . A}$$

تمرین: در هریک از معادله‌های حرفی زیر، متغیر خواسته شده را برحسب سایر مجهولها به‌دست آورید :

۱) $a^2(x-1) - b^2(x+1) + 2ab = 0 \quad (x = ?)$

۲) $x^2(y-x) + xy + y + 1 = 0 \quad (y = ?)$

۳) $a^2b + c^2 - b + 1 = b + c \quad (b = ?)$

۴) $(a+b)(a+x) = (b+x)(b-a) \quad (x = ?)$

۵) $\frac{x+n}{m} + \frac{x+m}{n} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \quad (x = ?)$

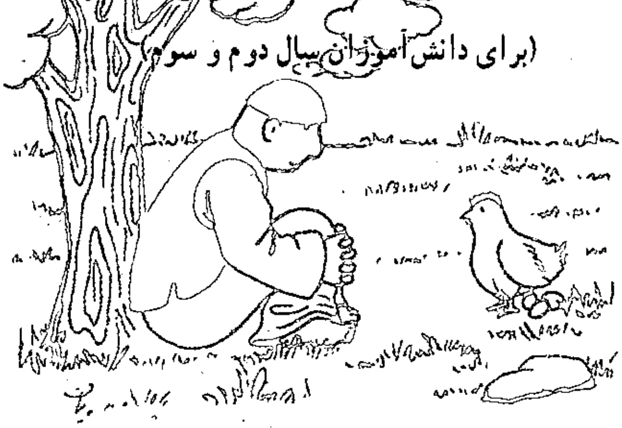
تمرین: به هر جسم با جرم m که بر دایره‌ای به شعاع r و با سرعت V دوران کند، نیرویی معادل F وارد می‌شود ؛ به قسمی که : $F = \frac{mV^2}{r}$. از این دستور، مقدار شعاع دایره (r) را برحسب سایر متغیرها به‌دست آورید.

تمرین: دو بار الکتریکی با اندازه‌های q_1 و q_2 که به فاصلهٔ r از یکدیگر قرار داشته باشند، نیرویی به اندازهٔ F به یکدیگر وارد می کنند ؛ به‌طوری که : $F = \frac{k q_1 q_2}{r^2}$

که در این دستور، k مقدار ثابتی می‌باشد. برای محاسبهٔ این مقدار ثابت، دو بار معلوم q_1 و q_2 را در فاصلهٔ معین r از یکدیگر قرار داده و نیروی بین آنها (F) را اندازه گرفته‌ایم. مقدار k را برحسب q_1 ، q_2 ، r و F به دست آورید.

آیا استدلال تمثیلی، یک استدلال ریاضی است؟

(برای دانش‌آموزان سال دوم و سوم)



● علیرضا عین‌اللهی

تمثیل "Analogy" در لغت، به معنای مثل آوردن، نمایش دادن، نمایندگی و... است. اما از دیدگاه منطق کلاسیک، تمثیل به معنای «**از جزئی به جزئی دیگر پی بردن است.**» به عبارت دیگر، توسط تمثیل بین مفاهیم گوناگون، به نوعی شباهت و یکسانی دست می‌یابیم.

به مثالهای زیر توجه کنید:

مثال (۱): عدد $(۲^{۵})$ از عدد $(۵^{۲})$ بزرگتر است. از راه مشابهت نتیجه می‌شود که عدد $(۳^{۵})$ از عدد $(۵^{۳})$ نیز بزرگتر است.

مثال (۲): می‌دانیم که گزارهٔ «هر انسان یک سَر دارد» درست است و چون «فردوسی یک انسان است» پس از راه مشابهت نتیجه می‌شود که «فردوسی یک سَر دارد».

مثال (۳): با توجه به درست بودن دو گزارهٔ «هر مستطیل یک متوازی‌الاضلاع است» و «مربع نوع خاصی از مستطیل است» می‌توان نتیجه گرفت که: «مربع یک متوازی‌الاضلاع است».

مثال (۴): یک مربع با یک مکعب مشابه است. چون مساحت یک مربع به ضلع a برابر (a^{2}) است، از این مشابهت می‌توانید نتیجه بگیرید که حجم یک مکعب به ضلع a برابر (a^{3}) است.

مثال (۵): لطفاً درستی برابری زیر را توسط ماشین‌حساب بررسی کنید:

$$۱۲۳۴۵۶۷۹ \times ۹ = ۱۱۱۱۱۱۱۱۱$$

$$۱۲۳۴۵۶۷۹ \times ۱۸ = ۲۲۲۲۲۲۲۲۲$$

آیا بدون محاسبه کردن می‌توانید برابری زیر را کامل کنید؟

$$۱۲۳۴۵۶۷۹ \times ۲۷ = ...$$

درستی پاسخ خودتان را با استفاده از ماشین‌حساب تحقیق کنید.

بسیاری از نتیجه‌گیریهای علمی و غیرعلمی که بنا بر تمثیل بیان می‌شوند، نادرستند؛ زیرا روش استدلال تمثیل، یک روش علمی نیست. بنابراین استفاده از این روش، برای اثبات درستی یک مسأله پذیرفته نیست. با وجود این، دیده می‌شود که تمثیل در طرز تفکر، در سخن گفتن روزمرّه، نتیجه‌گیریهای متعارف و نیز در تعبیرات هنری و در عالیترین دستاوردهای علمی ما نفوذ دارد و در ترازهای مختلف به‌کار می‌رود. به کمک تمثیل ممکن است راه‌حلهای مناسبی را برای حلّ یک مسأله کشف کرد. حتی می‌توان توسط آن، گزاره‌های جدید را بیان و سپس درستی آنها را بررسی کرد. به همین دلیل، نباید از هیچ نوع تمثیل غافل بمانیم.

فعالیت (۱)

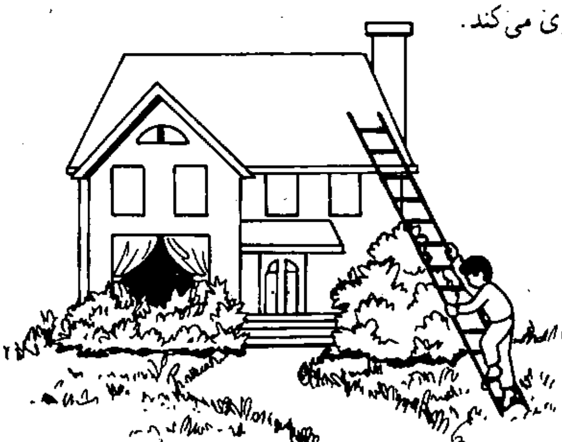
هدف ما از این فعالیت، استفاده از تمثیل برای درک بهتر ضرب اعداد صحیح، بخصوص ضرب اعداد مثبت در منفی و منفی در منفی است. ابتدا قراردادهای زیر را می‌پذیریم:

قرارداد اوّل: کلمه **قبل** را با نماد «−» و کلمه **بعد** را با نماد «+» نمایش می‌دهیم. برای مثال، ۳ ثانیه قبل، یعنی ۳− و ۳ ثانیه بعد، یعنی ۳+.

قرارداد دوم: از پله بالا رفتن را با نماد «+» و از پله پایین آمدن را با نماد «−» نمایش می‌دهیم. برای مثال، ۲ پله بالا رفت؛ یعنی ۲+ و ۲ پله پایین آمد؛ یعنی ۲−.

قرارداد سوم: یک دانش‌آموز به نام علی می‌تواند در هر ثانیه ۲ پله بالا برود.

علی دانش‌آموز سال اوّل دبستان، در حیاط منزلشان با نردبان بازی می‌کند.



I. اگر علی بخواهد از نردبان بالا برود، در این صورت، بعد از ۳ ثانیه، چند پله بالا می‌رود؟ آیا می‌توان نوشت؟

$(+۳)\times(+۲)=(+۶)$

II. فرض کنید علی از نردبان بالا می‌رود. به‌نظر شما ۳ ثانیه قبل، علی چند پله پایین بوده است؟ آیا می‌توان نوشت؟

$(-۳)\times(+۲)=(-۶)$

III. اگر علی بخواهد از نردبان پایین بیاید، در این صورت ۳ ثانیه بعد، او چند پله پایین آمده است؟ آیا می‌توان نوشت؟

$(+۳)\times(-۲)=(-۶)$

IV. فرض کنید علی از نردبان پایین می‌رود. به‌نظر شما ۳ ثانیه قبل، علی چند پله بالا بوده است؟ آیا می‌توان نوشت؟

$(-۳)\times(-۲)=(+۶)$

در توضیح بیان شده در (I) توجه دارید که:

+۳ یعنی ۳ ثانیه بعد

+۲ یعنی علی در یک ثانیه ۲ پله بالا می‌رود

در این صورت، از ضرب این دو عدد صحیح، می‌توانیم تعداد پله‌هایی را که علی بعد از سه ثانیه بالا می‌رود، به‌دست آوریم؛ بنابراین:

+۶ یعنی تعداد پله‌هایی که بعد از ۳ ثانیه بالا می‌رود.

اکنون از شما می‌خواهیم که برابری موجود در قسمتهای (II)، (III) و (IV) را توضیح دهید.

فعالیت (۲)

هدف ما از این فعالیت، استفاده از تمثیل در کشف راه‌حلهای مناسب برای حلّ مسائل است. قرارداد زیر را می‌پذیریم:

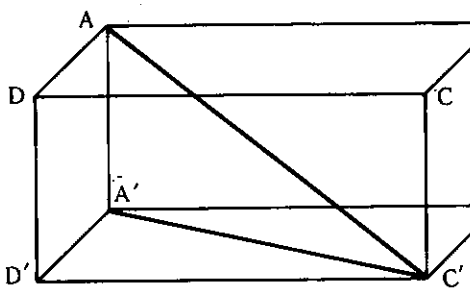
قرارداد: محسن دانش‌آموز دورهٔ راهنمایی تحصیلی است. وی مثلث قائم‌الزاویه و کار با آن را دقیقاً می‌شناسد. همچنین با معلوم بودن دو ضلع از اضلاع مثلث قائم‌الزاویه، می‌تواند ضلع سوم را حساب کند.

یکی از روزهای هفته در کلاس ریاضی، معلم ریاضی، مسألهٔ زیر را پای تخته برای بچه‌ها نوشت:

«**مسأله:** قطر یک مکعب مستطیل به ابعاد ۳، ۴ و ۵ را به‌دست آورید.»

معلم از بچه‌ها خواست که با استفاده از معلومات ریاضی‌شان که تا به حال کسب کرده‌اند، به حلّ این مسأله بپردازند.

محسن برای حلّ این مسأله، ابتدا توسط خط‌کش دقیقی، یک مکعب مستطیل را رسم کرد و یکی از قطرهای آن را نیز کشید. (شکل (۱) را ببینید.)



شکل (۱)

محسن همراه با نگاه کردن به شکل رسم شده، به‌دنبال راه‌حلّی برای حلّ مسأله داده شده بود. همچنین خطوطی فرضی در شکل مکعب رسم و در مورد اشکال پدید آمده فکر می‌کرد. در همین زمان، با رسم پاره‌خط $A'C'$ توجه محسن به مثلث $AA'C'$ جلب شد. با شباهت‌سازی بین شکل مکعب مستطیل رسم شده با کلاس درس، محسن متوجه شد که مثلث $AA'C'$ در رأس A' قائمه است. (چگونه؟) بنابراین با توجه به شناختی که محسن از مثلث قائم‌الزاویه داشت، احساس کرد که می‌تواند قطر مکعب (یعنی AC') را بیابد؛ ولی با کمی دقت، دریافت که این کار میسّر نیست؛ چرا که در این مثلث (یعنی $AA'C'$) تنها یک ضلع AA' معلوم است.

پیش از ادامهٔ بحث، از شما می‌خواهیم سعی کنید تمثیلهایی را که محسن از آنها استفاده کرده است، بیابید و توضیح دهید.

پس از این هدف محسن، حلّ مسألهٔ جدید و آن هم یافتن طول پاره‌خط $A'C'$ بود. اینک برای حلّ این مسألهٔ جدید، باز هم محسن می‌تواند از استدلال تمثیل استفاده کند.

آیا مثلث قائم‌الزاویه‌ای که شامل پاره‌خط $A'C'$ باشد، در شکل رسم شده وجود دارد؟ سرانجام محسن طول $A'C'$ را چگونه به‌دست می‌آورد؟

فعالیت (۳)

با نگاهی دقیق و متفکرانه به سخنان گهروار پروردگار در قرآن کریم، درمی‌یابیم که خداوند بسیاری از نکات را توسط استدلال تمثیلی برای ما روشن ساخته است. از جمله در سورهٔ «نور» آیهٔ ۳۵ خداوند متعال می‌فرماید: اللّه نور السّموات والارض....

علامهٔ طباطبایی در کتاب «تفسیر المیزان» می‌فرماید که مراد از این جمله، این است: «خدای سبحان نوری است که به‌وسیلهٔ او، آسمانها و زمین ظهور یافته‌اند.» و نیز می‌فرماید: «مراد به نور در جمله، نور خداست که از آن نور عالم منشأ می‌گیرد: نوری که هر چیزی به‌وسیلهٔ آن روشن می‌شود، با وجود هر چیزی مساوی

است و عبارت اُخریٰ آن است و این همان رحمت عامّهٔ الهیه است.» در جای دیگر می‌فرماید: «مراد به آن نور، نوری است خاص که خدای تعالی آن را تنها به مؤمنین اختصاص داده و آن، به‌طوری که از کلام استفاده می‌شود، حقیقت ایمان است.» همچنین خداوند در ادامهٔ آیهٔ (۳۵) می‌فرماید: «*مثل نور کمشکوة فیها مصباح المصباح فی زجاجة الزجاجة کانّها کوکب درّیّ...*» بنابراین پروردگار در ادامهٔ آیهٔ شریفهٔ نور، خود را توصیف می‌کند؛ بدین‌صورت که: «مثل نور او، چون محفظه‌ای است که در آن چراغی باشد و چراغ در شیشه‌ای؛ شیشه‌هایی که گویی ستاره‌ای است درخشان...»

با مراجعه به قرآن و تفسیر المیزان، از شما می‌خواهیم تا کلیهٔ استدلالهای تمثیل به‌کار رفته در این آیه را استخراج کنید.

۱ـ۲) سؤالهای دوره‌ای

۱. یک دانش‌آموز، راه‌حلّ مسأله زیر را می داند:

مسأله: می‌خواهیم ۱۵ متر پارچه را بین سه خیاط تقسیم کنیم. به هر یک چند متر پارچه می‌رسد؟

از دانش‌آموز می‌خواهیم که مسألهٔ زیر را حل کند:

مسأله: می‌خواهیم ۱۵ شیشه شیر را بین سه خانواده به‌طور مساوی تقسیم کنیم، به هر خانواده چند شیشه شیر می‌رسد؟

آیا دانش‌آموز ما از استدلال تمثیل برای حلّ این مسأله می‌تواند استفاده کند؟ چگونگی آن را توضیح دهید.

۲. آیا گزارهٔ «کبوتر بال دارد و پرواز می‌کند» درست است؟ آیا گزارهٔ «مرغ بال دارد» درست است؟ آیا از این‌جا می‌توان نتیجه گرفت که مرغ پرواز می‌کند؟ آیا استدلال تمثیل در این‌جا مؤثر است؟

۳. یک معلم برای محاسبهٔ اعداد $۳۵^{۲}$ و $۶۵^{۲}$ به‌صورت زیر عمل کرده است:

$۳۵^{۲}: ۳\times ۴ = ۱۲ \Rightarrow$ جواب $= ۱۲۲۵$

$۶۵^{۲}: ۶\times ۷ = ۴۲ \Rightarrow$ جواب $= ۴۲۲۵$

آیا جوابهایی که معلم به‌دست آورده است، صحیح می‌باشد؟ آیا از راه مشابهت می‌توانید حاصل عدد $۷۵^{۲}$ را به‌دست آورید؟ درستی پاسخ خود را با ماشین‌حساب بررسی کنید.

۴. یک دانش‌آموز برای محاسبهٔ اعداد $(۳\frac{۱}{۲})^{۲}$ و $(۶\frac{۱}{۲})^{۲}$ به صورت زیر عمل می‌کند:

$(۳\frac{۱}{۲})^{۲}: ۳\times ۴ = ۱۲ \Rightarrow$ جواب $= ۱۲\frac{۱}{۴}$

$(۶\frac{۱}{۲})^{۲}: ۶\times ۷ = ۴۲ \Rightarrow$ جواب $= ۴۲\frac{۱}{۴}$

به روش متعارف، حاصل توانهای $(۳\frac{۱}{۲})^{۲}$ و $(۶\frac{۱}{۲})^{۲}$ را به‌دست آورده و با جوابهای دانش‌آموز مقایسه کنید. آیا جوابهایی که دانش‌آموز به‌دست آورده است، صحیح است؟ آیا به روش تمثیل می‌توانید حاصل $(۷\frac{۱}{۲})^{۲}$ را به‌دست آورید؟ درستی پاسخ خود را به روش متعارف محاسبهٔ کسرها بررسی کنید.

۵. آیا مشابهتی بین روشهای معلم و دانش‌آموز در سؤالهای (۳) و (۴) وجود دارد؟ توضیح دهید.

۶. آیا می‌توانید بگویید کدام‌یک از اعداد $\sqrt{۲}$ و $\sqrt[۵]{۷}$ بزرگتر است؟ با داشتن یک ماشین‌حساب تقریباً مجهز، می‌توانید به راحتی به این سؤال پاسخ دهید. ما برای پاسخ به این سؤال، ابتدا هر دو عدد را به توان (۱۰) می‌رسانیم، خواهیم داشت: $(\sqrt{۲})^{۱۰} = ۲^{۵} = ۳۲$ و $(\sqrt[۵]{۷})^{۱۰} = ۷^{۲} = ۴۹$ و چون $۳۲ < ۴۹$، ما نتیجه می‌گیریم که $\sqrt{۲} < \sqrt[۵]{۷}$.

اینک از طریق مشابهت، بزرگترین عدد را از بین اعداد داده شده در هر قسمت، به‌دست آورید:

آ. ($\sqrt{۲}$ و $\sqrt[۵]{۵}$) ب. ($\sqrt[۳]{۳}$ و $\sqrt[۴]{۵}$) ج. ($\sqrt[۷]{۷}$ و $\sqrt[۴]{۴}$)

۷. خداوند در آیهٔ (۵) از سورهٔ «جمعه» و «صف» حال آنان را که تحمل (علم) تورات کرده و خلاف آن عمل نمودند، در مثل به حماری تشبیه می‌کند. از شما می‌خواهیم که این استدلال تمثیل را که خداوند بیان فرموده است، بیشتر توضیح دهید.

۸. یک نتیجه‌گیری علمی (غیرعلمی) نادرست که بر پایهٔ استدلال تمثیل باشد، مثال بزنید.

۹. آیا روش استدلال تمثیل، یک روش علمی است؟ می‌دانید که $۲^{۵} < ۵!$. (چرا؟) آیا از روش مشابهت می‌توان نتیجه گرفت: $۲^{۳} < ۳!$؟ (چرا؟)

۱۰. آیا این جمله که «توسط تمثیل می‌توان گزاره‌های جدید را بیان و سپس درستی آنها را بررسی کرد.» در فعالیت (۲) دیده می‌شود؟ توضیح دهید.

۱۱. یک دانش‌آموز از درستی برابری:

$۹۸۷۶۵۴۳۲۱\times ۹ = ۸۸۸۸۸۸۸۸۸۹$

با استفاده از استدلال تمثیل، برابری زیر را نتیجه می‌گیرد:

$۹۸۷۶۵۴۳۲۱\times ۱۸ = ۷۷۷۷۷۷۷۷۷۸$

آیا نتیجه‌گیری این دانش‌آموز صحیح است؟ چرا؟

برنامه‌نویسی به زبان پاسکال (۷)

● محمّد رحیم

مقدمه

در شمارهٔ پیش ابتدا چند تابع کتابخانه‌ای و سپس دستور if را به تفصیل بیان کردیم. در این شمارهٔ نیز ابتدا چند تابع کتابخانه‌ای را معرفی کرده و سپس حلقه‌های[1] for و while را توضیح می‌دهیم.

معرفی چند تابع کتابخانه‌ای

توابع مثلثاتی sin(x)، cos(x) و arctan(x): ورودی توابع sin(x) و cos(x) زاویه برحسب رادیان است و عددی بین ۱- تا ۱ را برمی‌گردانند. ورودی تابع arctan(x) یک عدد حقیقی است و مقدار بازگشتی آن، زاویه برحسب رادیان می‌باشد.

توجه: اگر در برنامه‌ای که می‌نویسید، زوایا برحسب درجه باشند، ابتدا باید آنها را به رادیان تبدیل کرده و سپس از توابع sin(x) و cos(x) استفاده کنید.

تابع Exp(x): از این تابع برای محاسبهٔ e^x استفاده می‌شود که e عدد نپر[2] و برابر با ... ۲/۷۱۷۸ است.

تابع Ln(x): از این تابع برای محاسبهٔ لگاریتم طبیعی[3] (یا نپرین) استفاده می‌شود.

توجه: لگاریتم طبیعی دارای همان خواص لگاریتم معمولی است ؛ ولی پایهٔ آن عدد نپر (e) است.

نکته: مترجم پاسکال، دارای عملگر توان (که مثلاً در زبان Basic به‌صورت ^ است) نیست و نیز تابع کتابخانه‌ای مشخصی برای محاسبهٔ یک عبارت توانی نظیر a^x ندارد. بنابراین لازم است که این نقیصه رفع شود. به محاسبات ریاضی زیر توجه کنید :

$$y = a^x \Rightarrow Lny = Lna^x$$
$$\Rightarrow Lny = xLna$$
$$\Rightarrow y = e^{xLna}$$

بنابراین با شرط $a > 0$ داریم : $a^x = e^{xLna}$

این بدان معناست که به جای محاسبهٔ a^x می‌توان e^{xLna} را محاسبه کرد و محاسبهٔ عبارت اخیر در مترجم پاسکال امکان‌پذیر است ؛ چون توابع کتابخانه‌ای Exp(x) و Ln(x) موجود هستند. بنابراین دستور زیر a^x را محاسبه می‌کند :

```
y:= Exp(x*Ln(a));
```

تابع length(s): ورودی این تابع، یک رشته[4] است و این تابع طول آن را محاسبه می‌کند.

تابع random: این تابع یک عدد اتفاقی بین ۰ تا ۱ را تولید می‌کند.

تابع random(M): ورودی این تابع، عدد صحیح M است و خروجی آن یک عدد اتفاقی صحیح بین ۰ تا M می‌باشد.

تابع randomize: این تابع کتابخانه‌ای از نوع procedure است و مقدار بازگشتی ندارد و فقط فراخوانی[5] می‌شود. از این تابع کتابخانه‌ای، هنگامی استفاده می‌کنیم که تابع random (با پارامتر یا بدون پارامتر) بخواهد در درون یک حلقه قرار گیرد. لذا باید randomize را پیش از اجرای حلقه فراخوانی کنیم ؛ در غیر این صورت تابع random یا random(M) در درون حلقه درست عمل نمی‌کند و همواره مقدار ثابتی را می‌دهد.

مثال (۱): برنامهٔ زیر، یک عدد اتفاقی تولید می‌کند و

در صورت برقراری شرط، عدد را گرد کرده و در خروجی چاپ می‌کند.

```
Var
    R:reali
    I:Integer;
Begin
    R:= Random*50000.0;
    Writeln ('R = ',R:0:5);
    if(-32768 <= R)and(R <= 32767+)then
    begin
        I: = Round (R);
        Writeln('I = ',I);
    end
    else
        Writeln('out of Range').
End.
```

مثال (۲): برنامهٔ زیر، ده عدد اتفاقی بین صفر تا ۳۲۷۶۷ را یافته و در خروجی چاپ می‌کند. برای آن که ده عدد اتفاقی یکسان نباشند، از تابع کتابخانه‌ای randomize قبل از حلقه استفاده شده است.

```
Var
    I:Integer;
BEGIN
    Randomize;
    for I: = 1 To 10 Do
        Write (Random (MaxInt): 8);
    Writeln;
END.
```

توجه: در مثال فوق، از تابع کتابخانه‌ای MaxInt استفاده شده که بزرگترین مقدار صحیح، مربوط به تایپ Integer، یعنی ۳۲۷۶۷ را برمی‌گرداند.

دستورهای حلقه

دستورهای حلقه، دستورهایی هستند که یک سری فرامین را چندین بار تکرار می‌کنند. مترجم پاسکال دارای ۳ دستور حلقه به نامهای for، while و Repeat...until می‌باشد. حال، هریک از این دستورها را شرح می‌دهیم.

الف) دستور for

این دستور، یک سری فرامین را به تعداد دفعات مشخص تکرار می‌کند. شکل دستور چنین است:

for متغیر حلقه = : مقدار اولّیه To مقدار نهایی Do
    دستور;

حلقهٔ فوق‌الذکر، یک حلقهٔ افزایشی است؛ چون متغیر حلقه از یک مقدار اولّیه (مقدار کوچکتر) به مقدار نهایی (مقدار بزرگتر) می‌رسد. درصورت لزوم، می‌توان حلقهٔ کاهشی هم داشت:

for متغیر حلقه = : مقدار نهایی Downto مقدار اولّیه Do
    دستور;

به نکات زیر توجه کنید:

۱. متغیر حلقه، مقدار اولّیه و مقدار نهایی باید از نوع ترتیبی[۶] (نوع عددی صحیح، نوع کارکتری و...) باشند.

۲. متغیر حلقه را نباید در درون حلقه مقداردهی یا کم و زیاد کرد.

۳. دستور for همانند دستور if، فقط یک دستور را تحت پوشش قرار می‌دهد و درصورتی که بخواهیم دستورهای بیشتری تکرار شوند، باید از بلوک فرعی استفاده کنیم و دستورهای موردنظر را در داخل بلوک آوریم:

for متغیر حلقه = : مقدار اولّیه To مقدار نهایی Do
begin
        دستور ۱;
        دستور ۲;
            :
        دستور n;
end;

۴. می‌توان حلقه‌های for متداخل[۷] هم داشت.

مثال (۳): حلقهٔ زیر، عبارت test of for را ده مرتبه در خروجی چاپ می‌کند.

```
Var
    i:integer;
BEGIN
    for i: = 1 To 10 Do
        Writeln ('test of for');
END.
```

مثال (۴): برنامهٔ صفحهٔ بعد، با استفاده از حلقه‌های متداخل،

جدول ضرب ۱۰ در ۱۰ را در خروجی چاپ می‌کند.

```
Var
  i,j:integer;
BEGIN
  for i: = 1 To 10 Do
  begin
    Writeln;
  for j: = 1 To 10 Do
    Write(i*j:4);
  end;
END.
```

ب) دستور While

این دستور یک سری فرامین را تا زمان برقراری شرایط ادامه می‌دهد. شکل دستور چنین است :

```
While شرط Do
  دستور;
```

به نکات زیر توجه کنید:

۱. حلقهٔ While برخلاف حلقهٔ for، دارای مقدار اولیه و نهایی نیست و فقط با شرط کنترل می‌شود.

۲. تمام مطالبی که در مورد شرط دستور if گفته شد، در این‌جا نیز صادق است.

۳. شرط حلقهٔ While می‌تواند همانند متغیر حلقه در دستور for عمل کند. در این صورت متغیر حلقه باید پیش از حلقهٔ While دارای مقدار اولیه باشد و نیز این متغیر باید به نحوی در داخل حلقه افزایش یا کاهش داده شود ؛ لذا باید بلوک فرعی تشکیل داد.

۴. می‌توان حلقه‌های While متداخل[8] هم داشت.

مثال (۵): مثال (۳) را با استفاده از حلقهٔ While می‌نویسیم :

```
var
  i:integer;
BEGIN
  i: = 1;
  While i< = 10 Do
  begin
     Writeln('test of While');
     Inc(i);    {i:= i+1 ;}
  end;
END.
```

مثال (۶): برنامهٔ زیر ب.م.م دو عدد m و n را محاسبه و در خروجی چاپ می‌کند.

```
var
  m,n,k:Word;
BEGIN
  Readln (m,n);
  if (m=0) or (n=0) Then
     Halt (0);
  if m<n Then
  begin
     k:=m;
     m:=n;
     n:=k;
  end;
  k:=m mod n;
  While k < >  0 Do
  begin
     m:=n;
     n:=k;
     k:=m mod n;
  end;
  Writeln ('B.M.M.=',n);
END.
```

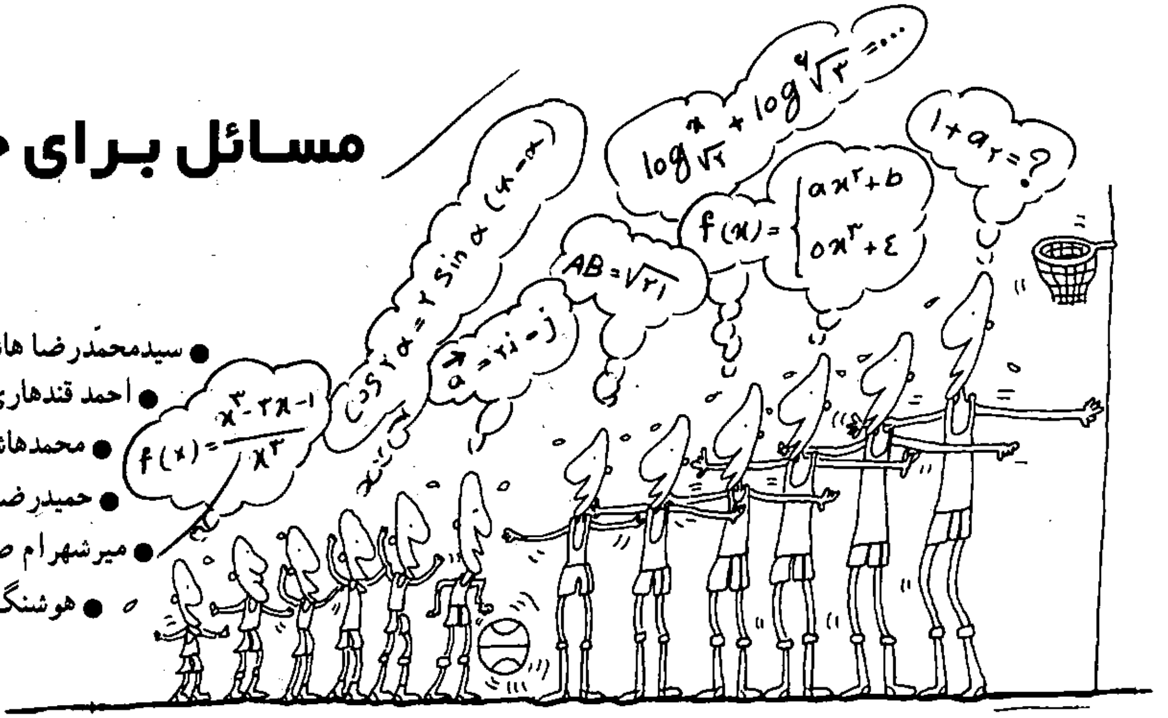
توجه: در برنامهٔ فوق، دستور Halt سبب قطع اجرای برنامه می‌شود.

واژه‌نامهٔ ریاضی و کامپیوتر

1. Loop
2. Neper → Napier
3. Natural Logarithm
4. String
5. Call
6. Ordinal
7. Nested - for
8. Nested - While

مسائل برای حل

● سیدمحمّدرضا هاشمی موسوی
● احمد قندهاری
● محمدهاشم رستمی
● حمیدرضا امیری
● میرشهرام صدر
● هوشنگ شرقی



ریاضیات ۲

۱. نقطهٔ $M(\text{۸}m-\text{۳}\ ,\ \text{۴}m+\text{۱})$، به ازای چه مقدار m روی نیمساز ناحیهٔ اول و سوم واقع است؟

۲. اگر $AB=\sqrt{\text{۵۰}}$ و $A(\text{۶}n-\text{۱}\ ,\ \text{۳})$ و $B(\text{۲}\ ,\ \text{۶}n)$، مقادیر n را بیابید.

۳. دو خط به معادله‌های $y=ax-\text{۱}$ و $y=bx+\text{۱}$ مفروض‌اند، a و b را چنان بیابید که این دو خط عمود باشند و از نقطه‌ای به طول ۱- بگذرند.

۴. معادله‌های دو قطر مربعی $\text{۴}x+\text{۲}y+\text{۱}=\text{۰}$ و $\text{۲}x-\text{۴}y+\text{۱}=\text{۰}$ است؛ فاصلهٔ مرکز مربع از خط $x+y=\text{۱}$ کدام است؟

۵. به‌ازای چه مقادیری از m، دو خط به معادله‌های $\text{۴}x+my=\text{۶}$ و $\text{۲}mx+\text{۲}y=\text{۵}$، متقاطع نیستند.

۶. اگر $x^{\text{۴}}+x^{\text{۲}}-\text{۱}=\text{۰}$، حاصل $(x^{\text{۱۰}}+\text{۱})$ را بیابید.

۷. حاصل عبارت $\sqrt[\text{۴}]{\dfrac{\text{۷}-\text{۴}\sqrt{\text{۳}}}{(\sqrt{\text{۳}}-\text{۲})^{\text{۲}}}}$ را بیابید.

۸. معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$\frac{\text{۸}x}{\text{۲}x-\text{۱}}+\frac{\text{۱۶}x}{\text{۴}x+\text{۲}}=\text{۸}x$$

۹. اگر $x_{\text{۱}}$ و $x_{\text{۲}}$ ریشه‌های معادلهٔ $x^{\text{۲}}+x-\text{۱}=\text{۰}$ باشند، حاصل عبارت $S=\dfrac{\text{۱}}{x_{\text{۱}}^{\text{۳}}}+\dfrac{\text{۱}}{x_{\text{۲}}^{\text{۳}}}$ را بیابید.

۱۰. مجموعهٔ جواب دستگاه نامعادله‌های زیر را بیابید.

$$\begin{cases}\dfrac{\text{۳}x+\text{۲}}{\text{۳}}\geq\dfrac{\text{۳}x+\text{۱}}{\text{۲}}\\[2mm] \dfrac{\text{۳}x}{\text{۲}}-\dfrac{\text{۲}}{\text{۳}}>\dfrac{\text{۳}x-\text{۲}}{\text{۶}}\end{cases}$$

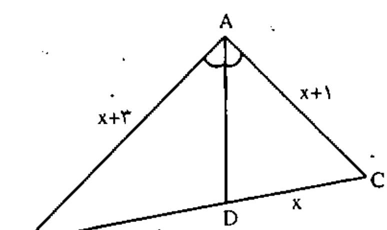
۱۱. اگر نقطهٔ $S(-\text{۴},\text{۲})$ رأس سهمی به معادلهٔ $y=x^{\text{۲}}+ax+b$ باشد، مقادیر a و b را بیابید.

۱۲. حاصل عبارت $T=(\sin x+\cos x)^{\text{۴}}-(\sin x-\cos x)^{\text{۴}}$ رابیابید.

هندسهٔ ۲

۱. تعداد قطرهای یک چند ضلعی ۵۴ است. مجموع زاویه‌های این چند ضلعی را تعیین کنید.

۲. در مثلث ABC، AD نیمساز زاویهٔ درونی A است. اندازهٔ ضلعهای این مثلث را تعیین کنید.

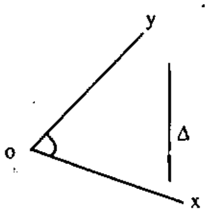


۳. سه نقطهٔ A، B و C چنان داده شده‌اند که $AB=\text{۲}a-\text{۱}$ ، $AC=\text{۱۲}$ و $BC=a-\text{۲}$ است.

الف. مقدار a را چنان تعیین کنید که این سه نقطه روی یک خط راست باشند.

ب. حدود a را چنان بیابید که این سه نقطه رأسهای یک مثلث باشند.

۴. زاویهٔ xOy و امتداد Δ داده شده است. پاره‌خطی به طول l به موازات امتداد Δ بر دو ضلع این زاویه متکی کنید.

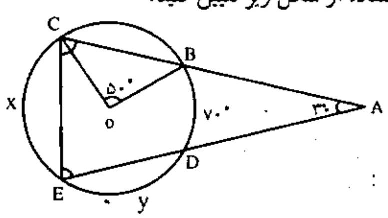


۵. خط Δ، دایرهٔ $C(O,R)$ و نقطهٔ A داده شده‌اند. نقطه‌ای روی دایرهٔ (C) بیابید که قرینه‌اش نسبت به نقطهٔ A، روی خط Δ واقع شود.

۶. دایرهٔ $C(O,\text{۳})$ داده شده است. از نقطهٔ P که به فاصلهٔ ۶ سانتیمتر از مرکز این دایره قرار دارد مماس PT را بر دایره رسم کرده‌ایم. طول این مماس را تعیین کنید.

۷. ثابت کنید که در هر چند ضلعی، هر ضلع از مجموع ضلعهای دیگر کوچکتر است.

۸. اندازهٔ x و y و اندازهٔ زاویهٔ ACE را با استفاده از شکل زیر تعیین کنید.



۹. اندازهٔ a و b را چنان بیابید که نقطهٔ $A'=(a+b-2\ ,\ 3a-3)$ ، تصویر نقطهٔ $A=(3a-b-2\ ,\ a+2b+4)$ تحت تبدیل $T(x,y)=(x+2\ ,\ 2y-3)$ باشد.

۱۰. سه نقطهٔ $A=(2,-3)$ ، $B=(3,5)$ و $C=(-1,2)$ رأسهای مثلث ABC داده شده‌اند. تصویر این نقطه‌ها را تحت تبدیل $R(x,y)=(-y,x)$ پیدا کنید. طول ضلعهای دو مثلث ABC و $A'B'C'$ را به‌دست آورید و با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ شیب ضلع AB و شیب ضلع $A'B'$ را محاسبه و با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ریاضی ۴

۱. جمله پنجم یک تصاعد حسابی ۱۶ و جمله هشتم آن ۲۵ است. مجموع ده جمله اول این تصاعد را به‌دست آورید.

۲. قدر نسبت تصاعد هندسی را به‌دست آورید که در آن $S_{12}=17S_6$ است.

۳. نقاط $A(1,2)$ و $B(-1,3)$ مفروض‌اند. به کمک خواص بردارها روی محور xها نقطه‌ای مانند C به‌دست آورید که زاویه $A\hat{C}B$ مساوی 45° باشد.

۴. بردارهای $\vec{a}=2i-j$ و $\vec{b}=3i+2j$ و $\vec{c}=2i-3j$ مفروض‌اند. مقدار $[(\vec{a}.\vec{b})\vec{c}].[(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}]$ را به‌دست آورید.

۵. با حروف کلمه یادگار چند کلمه (با معنا و یا بی‌معنا) ۵ حرفی بدون نقطه (بدون حق تکرار حرف) می‌توان نوشت؟

۶. می‌خواهیم از بین ۲۰ زوج ساکن یک مجتمع آپارتمانی یک هیأت مدیرهٔ ۷ نفری انتخاب کنیم. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد، اگر قید شود که هیچ زنی بدون همسر خود نمی‌تواند عضو هیأت مدیره شود؟

۷. ۶ دانش‌آموز که دو نفر آنها برادر یکدیگرند، در یک ردیف ایستاده‌اند و عکس می‌اندازند. مطلوب است تعیین احتمال آن‌که:

الف) دو برادر در تصویر کنار هم باشند.

ب) دو برادر در دو طرف بقیه افراد قرار داشته باشند.

۸. می‌خواهیم از بین ۴ دانش‌آموز سال اول و ۵ دانش‌آموز سال دوم و ۶ دانش‌آموز سال سوم دو دانش‌آموز را برای شرکت در مسابقه علمی منطقه اعزام کنیم. همچنین تمام دانش‌آموزان سال اول و دو نفر از دانش‌آموزان سال دوم و نصف دانش‌آموزان سال سوم از دانش‌آموزان ممتاز هستند. مطلوب است تعیین احتمال آن‌که هر دو دانش‌آموز منتخب سال سومی یا ممتاز باشند.

۹. اولاً درستی تساوی $\cos 3\alpha=4\cos\alpha\cos(60-\alpha)\cos(60+\alpha)$ را برای هر زاویه α ثابت کنید، ثانیاً مقدار $A=\cos20\cdot\cos40\cdot\cos80$ را به‌دست آورید.

۱۰. مجموعه جواب معادله مثلثاتی $tg2x\,tg4x=1$ را به‌دست آورید و تعداد جوابهای این معادله را که در بازهٔ $[0,2\pi]$ هستند، مشخص کنید.

جبر و احتمال

۱. اولاً، به کمک استدلال برگشتی ثابت کنید برای هر عدد حقیقی و نامنفی x، نامساوی $x+1\geq 2\sqrt{x}$ درست است. ثانیاً، به کمک این موضوع و با استدلال استنتاجی نشان دهید، اگر a_1 و a_2 و ... و a_n اعداد حقیقی مثبت بوده و در رابطهٔ $a_1a_2...a_n=1$ صدق کنند، آن‌گاه:

$$(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n)\geq 2^n$$

۲. به کمک قضیهٔ استقرای ریاضی ثابت کنید:

$$\frac{1}{(1)(3)}+\frac{1}{(2)(4)}+...+\frac{1}{[(n)(n+2)]}<\frac{n}{n+1}$$

۳. ۵ عدد حقیقی و متمایز مفروض‌اند. ثابت کنید برای لااقل دو عدد حقیقی x و y از میان آنها داریم:

$$0<\frac{x-y}{1+xy}<1$$

۴. ثابت کنید هرگاه برای مجموعه عددهای A ، B و C داشته باشیم:

$(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)$ ، آن‌گاه $C\subseteq A$

۵. ثابت کنید رابطهٔ R که در زیر معرفی شده است، یک رابطه هم‌ارزی است و کلاسهای هم‌ارزی آن را مشخص کنید:

$$\begin{cases} R:\mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y)R(z,t) \Leftrightarrow (x-z)=3(y-t) \end{cases}$$

۶. رقم سمت راست $17^{17}-22^{22}$ را به دست آورید.

۷. در یک کیسه سه مهره سفید و دو مهره قرمز و یک مهره سیاه وجود دارد. دو مهره را به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. فضای نمونه این تجربه و نیز پیشامد تصادفی آن‌که دو مهره همرنگ باشند را بنویسید.

۸. یک سکه سالم را ده بار پرتاب کرده‌ایم. مطلوب است تعیین احتمال آن که:

الف) دقیقاً ۵ بار رو بیاید.

ب) اقلاً ۶ بار رو بیاید.

۹. از بین مستطیلهایی که ابعاد آنها کوچکتر از ۴ واحد است، یکی را به تصادف انتخاب کرده‌ایم، احتمال آن‌که محیط آن بزرگتر از ۶ باشد را به‌دست آورید.

۱۰. اگر شانس وقوع پیشامد A و عدم وقوع پیشامد B، ۰/۳ باشد و شانس وقوع A یا B ۰/۷ باشد، شانس عدم وقوع B را به‌دست آورید.

حسابان ۲

۱. تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases} ax^3+b & , x\geq 1 \\ 3x^2+4 & , x<1 \end{cases}$ در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است، a و b را بیابید.

۲. سوی تقعر و نقاط عطف منحنی تابع به معادله $y=\frac{2x}{x^2+1}$ را بررسی و تعیین کنید.

۳. نمودار تابع به معادله $y=Arcsin(x+1)$ را رسم کنید.

۴. نزدیکترین فاصله منحنی به معادله $y^2=4x+13$ را از مبدأ مختصات بیابید.

۵. نمودار تابع به معادله $y=\log\frac{1+x}{1-x}$ را رسم کنید.

۶. اگر $\log^x_{\sqrt{3}}+\log^x_{\sqrt[4]{3}}+\log^x_{\sqrt[6]{3}}=12$ ، x را بیابید.

۷. تناوب اصلی تابع به معادله $f(x)=\tan2x.\cot2x$ را بیابید.

۸. با استفاده از دومین قضیه بنیادی، انتگرالهای مُعین، حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{3}}-(\sin^2x-2\cos^2x)dx$ را بیابید.

۹. سطح محصور بین منحنی به معادله $y=4\sqrt{x}$ و محور xها و خط $x=4$ را محاسبه کنید.

۱۰. مطلوب است محاسبه

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(x^2+1)+\sqrt{1-x^2}}{(x^2+1).\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

حساب دیفرانسیل و انتگرال ۲

۱. تابع با ضابطه $f(x)=\lfloor x\rfloor - x$ را در بازه $[-1,3]$ رسم کنید، تعداد نقاط اکسترمم نسبی و مطلق آن را مشخص کنید.

۲. اگر $0<x<1$ ثابت کنید:

$$x-\frac{x^3}{3}<\operatorname{Arctan} x$$

۳. تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}x+2 & , \quad x<-1\\ x^2-2x & , \quad -1\le x\le 2\end{cases}$ را رسم کنید و نقاط بحرانی آن را بیابید.

۴. از سیمی به طول l یک‌بار یک مربع و یک بار یک دایره می‌سازیم. ثابت کنید، مساحت دایره بیشتر از مساحت مربع است.

۵. در حلّ معادله $x^3-3x-1=0$ اگر $x_1=2$، به روش نیوتن x_2 را بیابید.

۶. مطلوب است رسم جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع با ضابطه $y=\frac{-x}{(x-2)^2}$.

۷. Cهای قضیه رل را در تابع با ضابطه $f(x)=4x^3-16x$ در بازه $[-2,2]$ بیابید.

۸. ثابت کنید سوی تقعّر منحنی به معادله $f(x)=Ln(x)$ به سمت پایین است و از آن‌جا نتیجه بگیرید اگر $0<a<b$، آن‌گاه:

$$Ln\frac{a+b}{2}>\frac{Lna+Lnb}{2}$$

۹. مطلوب است محاسبه $\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\,dt}{x^3}$

۱۰. ثابت کنید:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+2)^2}+\frac{n}{(n+3)^2}+\dots+\frac{n}{(n+n)^2}\right)=\frac{1}{2}$$

۱۱. به کمک حدّ مجموع بالاریمان ثابت کنید:

$$\int_0^2 2x^2dx=\frac{16}{3}$$

۱۲. مطلوب است محاسبه $\int\frac{x^5+x+1}{x^2+1}dx$.

ریاضی عمومی ۲

۱. معادله خط مماس بر منحنی تابع با ضابطهٔ $y=\frac{\sqrt{x}}{x+1}$ در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر منحنی را بنویسید.

۲. اگر $f(2)=-3$ و $f'(2)=4$ و $g(x)=\frac{1}{x}f(x)$، در این صورت $g'(2)$ را به‌دست آورید.

۳. ضرایب a، b و c را چنان تعیین کنید که تابع با ضابطهٔ $f(x)=ax^2+bx+c$ در $(1,7)$ ماکزیمم نسبی داشته باشد و نمودار تابع از نقطه $(2,-2)$ بگذرد.

۴. نقاط ماکزیمم و می‌نیمم مطلق تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^4-8x^2+16$ را روی بازهٔ $[0,3]$ به‌دست آورید.

۵. نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^3-3x-2}{x^2}$ را رسم کنید.

۶. ثابت کنید محل برخورد مجانبهای تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$، مرکز تقارن این تابع است.

۷. ثابت کنید منحنی با معادلهٔ $\begin{cases}x=x_0+a\cos t\\ y=y_0+b\sin t\end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$ بیضی است.

$(a>b>0)$

۸. در صورتی که $A(2,6)$ و $A'(2,-6)$ رأسهای حقیقی یک هذلولی و خروج از مرکز آن $e=\frac{5}{3}$ باشد، معادلهٔ هذلولی را بنویسید.

۹. ابتدا نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=[x](x-2)$ را در فاصلهٔ $[0,4]$ رسم کنید، سپس حاصل انتگرال زیر را تعیین کنید:

$$\int_0^4[x](x-2)dx$$

۱۰. حاصل انتگرالهای زیر را به‌دست آورید:

الف) $\int\frac{7x^{13}dx}{\sqrt{x^7-1}}$ ب) $\int\frac{\sin^6\sqrt[3]{x}\cos\sqrt[3]{x}\,dx}{\sqrt[3]{x}}$

ریاضیات گسسته

۱. اگر درخت T تنها دارای یک رأس درجهٔ ۵ و دو رأس درجهٔ ۳ و یک رأس درجهٔ ۲ و x رأس از درجهٔ یک باشد، x را پیدا کنید.

۲. گراف همبند G با p رأس و q یال مفروض است، ثابت کنید تعداد یالهایی که باید حذف شود تا گراف حاصل به یک درخت تبدیل شود از رابطهٔ $m=q-p+1$ به‌دست می‌آید.

۳. ثابت کنید اگر R یک رابطهٔ بازتابی روی مجموعهٔ متناهیA باشد ROR نیز روی A یک رابطه بازتابی خواهد بود.

۴. مطلوب است تعداد شمارهٔ شناسنامه‌های چهار رقمی که در آنها هر یک از ارقام ۲، ۴ و ۶ حداقل یک‌بار وجود داشته باشند.

۵. عدد طبیعی و سه رقمی k را دو بار کنار هم نوشته‌ایم تا عدد شش رقمی t به‌دست آید، اگر t را بر عدد ۱۱ و حاصل تقسیم را بر ۱۳ و حاصل تقسیم را بر ۷ تقسیم کنیم عدد ۲۴۱ به‌دست می‌آید، k را به‌دست آورید.

۶. عدد ۱۳۲ در مبنای a به‌صورت ۲۴۶ نمایش داده می‌شود، a را به‌دست آورید.

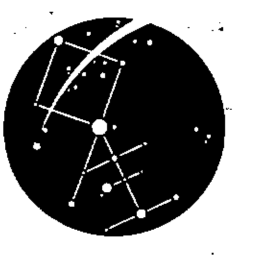
۷. باقیمانده تقسیم 1380^{2001} را بر عدد ۷ به‌دست آورید.

۸. اگر $p\ge q\ge 5$ و p و q اعداد اول باشند ثابت کنید عدد (p^2-q^2) همواره بر ۲۴ بخش‌پذیر است.

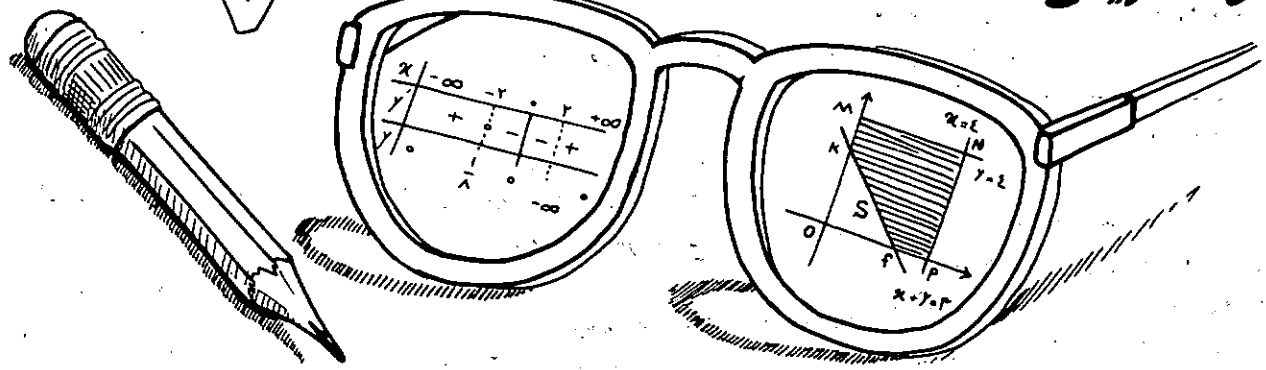
۹. دو عدد طبیعی متمایز بیابید که حاصلضرب آنها مربع کامل بوده و کوچکترین مضرب مشترکشان ۴۸ باشد.

۱۰. سکه‌ای را که یک طرف آن عدد ۲ و طرف دیگرش عدد ۳ حک شده است، سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر متغیر تصادفی x را مجموع اعداد ظاهر شده در سه پرتاب تعریف کنیم، جدول توزیع احتمال را تشکیل دهید.

۱۱. سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر رو بیاید تاسی را می‌ریزیم و اگر پشت بیاید سکه را دوبار دیگر پرتاب می‌کنیم، اولاً فضای نمونه‌ای این بدیده را تشکیل دهید، ثانیاً احتمال آن را حساب کنید که سکّه فقط یک‌بار پشت بیاید.



حل تشریحی مسائل همین شماره برهان



حل مسائل ریاضیات ۲

۱. معادلهٔ نیمساز ناحیهٔ اول و سوم $y=x$ است. پس، هرنقطه به مختصات $M(x,x)$ روی نیمساز ناحیه اول و سوم واقع است:

$$M(8m-3,4m+1):\ 8m-3=4m+1;$$
$$4m=4;\ \boxed{m=1}$$

۲. می‌دانیم فاصلهٔ دو نقطه به مختصات $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$، چنین است:

$$AB=\sqrt{50}$$
$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2};$$
$$50=(2-6n+1)^2+(6n-3)^2;$$
$$2(6n-3)^2=50;\ (6n-3)^2=25;$$
$$6n-3=\pm5;$$
$$6n=3\pm5;\ n=\frac{3\pm5}{6}$$
$$\boxed{n=\frac{4}{3}};\ \boxed{n=-\frac{1}{3}}$$

۳. مختصات نقطه‌ای به طول ۱- در معادلهٔ هر دو خط صدق می‌کند و همچنین حاصلضرب ضریب زاویهٔ دو خط برابر ۱- است، پس:

$$\begin{cases}y=a(-1)-1\\ y=b(-1)+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a-b=-2\\ ab=-1\end{cases}$$
$$\Rightarrow ab=(b-2)b=b^2-2b=-1;$$
$$b^2-2b+1=0;\ (b-1)^2=0;$$
$$\boxed{b=1},\ \boxed{a=-1}$$

۴. ابتدا محلّ برخورد دو قطر مربع (مرکز مربع) را از حلّ دستگاه زیر تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases}4x+2y+1=0\\ 2x-4y+1=0\end{cases};\ x=\frac{-3}{10},\ y=\frac{1}{10};$$
$$O'(\frac{-3}{10},\frac{1}{10})$$

فاصلهٔ مرکز مربع (O') از خط $x+y=1$ را d می‌نامیم، پس:

$$O'D=d=\frac{\left|\frac{-3}{10}+\frac{1}{10}-1\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{6}{5\sqrt2};$$
$$\boxed{d=\frac{3\sqrt2}{5}}$$

۵. دو خط $ax+by=c$ و $a'x+b'y=c'$ با شرط $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}\neq\frac{c'}{c}$، متقاطع نیستند:

$$\begin{cases}4x+my=6\\ 2mx+2y=5\end{cases};\ \frac{2m}{4}=\frac{2}{m}\neq\frac{5}{6};$$
$$m^2=4;\ \boxed{m=\pm2}$$

۶. با فرض $x^2+x^4=1$، خواهیم داشت:

$$x^{10}=x^8.x^2=(x^4)^2.x^2=(1-x^2)^2.x^2$$
$$=(1-2x^2+x^4).x^2$$
$$=(1-2x^2+1-x^2).x^2=(2-3x^2).x^2$$
$$=2x^2-3x^4=2x^2-3(1-x^2)$$
$$=5x^2-3;\ \boxed{x^{10}+1=5x^2-2}$$

۷. با توجه به قوانین رادیکالها:

$$\sqrt[4]{\frac{7-4\sqrt3}{(\sqrt3-2)^2}}=\frac{\sqrt[4]{7-4\sqrt3}}{\sqrt[4]{(\sqrt3-2)^2}}$$
$$=\frac{\sqrt[4]{3+4-4\sqrt3}}{\sqrt[4]{(2-\sqrt3)^2}}=\frac{\sqrt[4]{(2-\sqrt3)^2}}{\sqrt{2-\sqrt3}}$$
$$=\frac{\sqrt{2-\sqrt3}}{\sqrt{2-\sqrt3}}=1$$

۸. حوزهٔ تعریف x، چنین است:

$$x\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$$

با توجه به حوزهٔ تعریف، معادله را ساده می‌کنیم:

$$\frac{8x}{2x-1}+\frac{16x}{4x+2}=8x\ ;\ 2(2x-1)(2x+1)$$
$$\left[\frac{8x}{2x-1}+\frac{16x}{4x+2}=8x\right];$$
$$16x(2x+1)+16x(2x-1)=16x(4x^2-1);$$
$$16x(2x+1+2x-1-4x^2+1)=0;$$
$$16x(-4x^2+4x+1)=0;$$
$$16x=0;\ \boxed{x_1=0},\ 4x^2-4x-1=0;$$
$$x=\frac{2\pm\sqrt8}{4}=\frac{1\pm\sqrt2}{2}$$

پس معادله دارای سه ریشهٔ حقیقی است.

$$\boxed{x_2=\frac{1+\sqrt2}{2}},\ \boxed{x_3=\frac{1-\sqrt2}{2}}$$

۹. با توجه به معادلهٔ مفروض، یعنی $x^2+x-1=0$، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}x_1+x_2=-1\\x_1x_2=-1\end{cases};\quad S=\frac{1}{x_1^3}+\frac{1}{x_2^3}=\frac{x_1^3+x_2^3}{x_1^3x_2^3}$$

$$=\frac{(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)}{(x_1x_2)^3}$$

$$S=\frac{(-1)^3-3(-1)(-1)}{(-1)^3}=\frac{-1-3}{-1}=\frac{-4}{-1}=4;$$

$$\boxed{S=4}$$

۱۰. از حلّ هر یک از نامعادله‌ها، نتیجه می‌شود:

$$6\left(\frac{3x+2}{3}\ge\frac{3x+1}{2}\right);\ 6x+4\ge 9x+3;$$

$$3x\le 1;\ x\le\frac{1}{3}$$

$$6\left(\frac{3x}{2}-\frac{2}{3}>\frac{3x-2}{6}\right);\ 9x-4>3x-2;$$

$$6x>2;\ x>\frac{1}{3}$$

اشتراک مجموعهٔ جوابهای نامعادله‌ها، مجموعه تهی (∅) است. پس دستگاه جواب ندارد.

۱۱. معادلهٔ سهمی $y=x^2+ax+b$ را به شکل استاندارد $y-\frac{4b-a^2}{4}=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2$ می‌نویسیم، پس از مقایسه S با رأس این سهمی:

$$S(-4,2):-\frac{a}{2}=-4;\ \boxed{a=8}.$$

$$\frac{4b-a^2}{4}=2;\ \boxed{b=18}$$

۱۲. با استفاده از اتحاد مزدوج و اختصار لازم:

$$T=2(2\sin 2x)=4\sin 2x$$

حل مسأله‌های هندسهٔ ۲

۱. تعداد قطرهای یک n ضلعی برابر $\frac{n(n-3)}{2}$ است. پس داریم:

$$\frac{n(n-3)}{2}=54\Rightarrow n^2-3n-108=0$$

$$\Rightarrow n=12, n=-9<0$$

پس چند ضلعی موردنظر، ۱۲ ضلعی است. از طرفی داریم:

قائمه $(2n-4)$ = مجموع زاویه‌های داخلی n ضلعی

$\Rightarrow$ $4-12\times 2$ = مجموع زاویه‌های داخلی ۱۲ ضلعی $\Rightarrow$ قائمه $20=$

۲. چون AD نیمساز زاویهٔ درونی A است، پس داریم:

$$\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow\frac{x+1}{x}=\frac{x+3}{x+1}\Rightarrow x^2+3x=x^2+2x+1$$

$$\Rightarrow x=1\Rightarrow AB=4,\ AC=2,$$

$$BC=2x+1=3$$

۳. با توجه به این که باید $\begin{cases}2a-1>0\\a-2>0\end{cases}$ یا $\begin{cases}a>\frac{1}{2}\\a>2\end{cases}$ و در نتیجه $a>2$ باشد:

الف) سه حالت وجود دارد:

۱. نقطهٔ B بین دو نقطهٔ A و C باشد.

A ——— B ——— C

در این صورت داریم:

$$AB+BC=AC\Rightarrow 2a-1+a-2=12$$

$$\Rightarrow 3a=15\Rightarrow a=5$$

۲. نقطهٔ C بین دو نقطهٔ A و B باشد.

A ——— C ——— B

در این صورت داریم:

$$AC+BC=AB\Rightarrow 12+a-2=2a-1$$

$$\Rightarrow a=11$$

۳. نقطهٔ A، بین دو نقطهٔ B و C باشد.

B ——— A ——— C

در این صورت داریم:

$$AB+AC=BC\Rightarrow 2a-1+12=a-2\Rightarrow a=-13<0\Rightarrow$$ این حالت ممکن نیست

ب) باید دستگاه نامساوی $\begin{cases}AB+BC>AC\\AC+BC>AB\\AB+AC>BC\end{cases}$ و یا، نامساوی مضاعف زیر برقرار باشد.

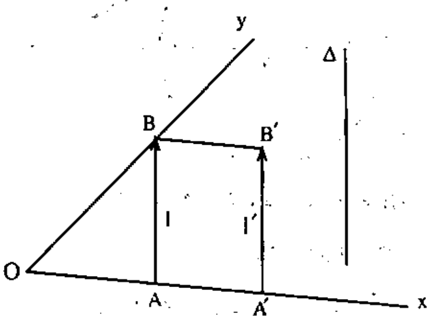
$$|AB-BC|<AC<AB+BC$$

پس خواهیم داشت:

$$\begin{cases}2a-1+a-2>12\\12+a-2>2a-1\\2a-1+12>a-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a>5\\a<11\\a>-13\end{cases}$$

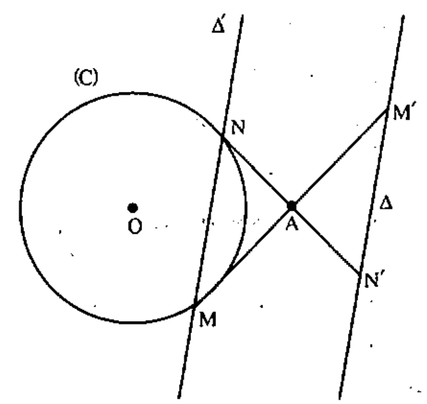
با توجه به این که $a>2$ باید باشد. پس جواب مشترک، $5<a<11$ است.

۴. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و پاره‌خط AB به‌طول l و موازی امتداد Δ جواب مسأله باشد. در این صورت می‌توان گفت که نقطهٔ B واقع بر Oy انتقال‌یافتهٔ نقطهٔ A واقع بر Ox به‌اندازهٔ بردار $\vec{AB}$ (با طول l و امتداد موازی Δ) است، پس برای حل مسأله با استفاده از انتقال چنین عمل می‌کنیم:



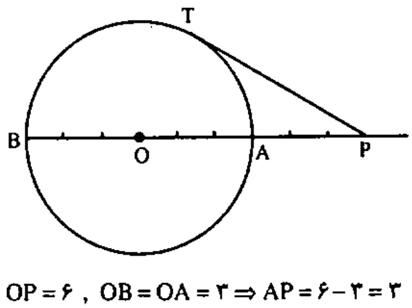
ضلع Ox از زاویهٔ xOy را به‌اندازهٔ بردار AB انتقال می‌دهیم. برای این کار از نقطهٔ اختیاری ′A واقع بر Ox بردار $\vec{A'B'}$ را مساوی l و موازی امتداد Δ رسم می‌کنیم. آن‌گاه از نقطهٔ ′B خطی موازی Ox رسم می‌کنیم تا Oy را در نقطهٔ B قطع کند. از B خطی موازی Δ (یا ′A′B) رسم می‌کنیم تا Ox را در نقطهٔ A قطع کند. پاره‌خط AB جواب مسأله است.

۵. فرض می‌کنیم مسأله حل شده باشد و نقطهٔ M واقع بر دایرهٔ (C) جواب مسأله باشد. از M به A وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا خط Δ را در نقطهٔ ′M قطع کند. دو نقطهٔ M و ′M نسبت به نقطهٔ A



بازتاب (قرینهٔ) مرکزی یکدیگرند. پس نقطهٔ M روی قرینهٔ مرکزی خط Δ نسبت به نقطهٔ A است؛ یعنی این نقطه محل برخورد قرینهٔ مرکزی خط Δ نسبت به نقطهٔ A با دایرهٔ (C) می‌باشد. بنابراین برای حل مسأله، خط ′Δ قرینهٔ مرکزی خط Δ نسبت به نقطهٔ A را رسم می‌کنیم. نقطه یا نقطه‌های برخورد این خط با دایرهٔ (C) یعنی نقطه‌های M و N جواب مسأله‌اند، و به تعداد نقطه‌های برخورد ′Δ با دایرهٔ (C)، مسأله دارای جواب است.

۶. قطری از دایره را که از نقطهٔ P می‌گذرد، یعنی قطر PAB را رسم می‌کنیم. داریم:



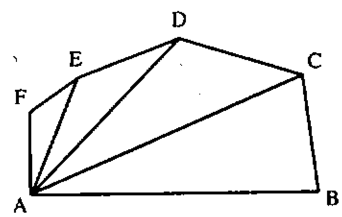
$OP = ۶\ ,\ OB = OA = ۳ \Rightarrow AP = ۶ - ۳ = ۳$

$PB = PO + OB = ۶ + ۳ = ۹$

$PT^۲ = PA.PB \Rightarrow PT^۲ = ۳ \times ۹ = ۲۷$

$\Rightarrow PT = ۳\sqrt{۳}$

۷. چند ضلعی ABCDE...N و به‌عنوان مثال شش ضلعی ABCDEF را در نظر می‌گیریم. اگر بزرگترین ضلع آن AB باشد، از A به رأسهای غیر مجاورش یعنی C، D و E وصل می‌کنیم. در مثلثهای ABC، ACD، ADE و AEF داریم:



$AB < BC + AC \quad (۱)$

$AC < CD + AD \quad (۲)$

$AD < DE + AE \quad (۳)$

$AE < EF + AF \quad (۴)$

از جمع کردن عضوهای متناظر نامساویهای (۱)، (۲)، (۳) و (۴) داریم:

$AB < BC + CD + DE + EF + FA$

۸. داریم:

زاویهٔ مرکزی، $B\hat{O}C = \overset{\frown}{BC} \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = ۵۰^\circ$

زاویهٔ برونی $\hat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{CE} - \overset{\frown}{BD}}{۲} \Rightarrow ۳۰^\circ = \dfrac{x - ۷۰^\circ}{۲}$

$\Rightarrow x = ۱۳۰^\circ$

$x + y + \overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{BC} = ۳۶۰^\circ$

$\Rightarrow ۱۳۰^\circ + y + ۷۰^\circ + ۵۰^\circ = ۳۶۰^\circ$

$\Rightarrow y = ۱۱۰^\circ$

زاویهٔ محاطی، $A\hat{E}C = \dfrac{\overset{\frown}{CD}}{۲} = \dfrac{۷۰^\circ + ۵۰^\circ}{۲} = ۶۰^\circ$

۹. با توجه به تبدیل داده شده داریم:

$$\begin{cases}(۳a - b - ۲) + ۲ = a + b - ۲ \\ ۲(a + ۲b + ۴) - ۳ = ۳a - ۳\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}۲a - ۲b = -۲ \\ -a + ۴b = -۸\end{cases}$$

$\Rightarrow a = -۴\ ,\ b = -۳$

۱۰. با توجه به تبدیل $R(x,y) = (-y,x)$ داریم:

$A = (۲,-۳) \Rightarrow A' = (+۳,۲)$

$B = (۳,۵) \Rightarrow B' = (-۵,۳)$

$C = (-۱,۲) \Rightarrow C' = (-۲,-۱)$

$AB = \sqrt{(۳-۲)^۲ + (۵+۳)^۲} = \sqrt{۶۵},$

$AC = \sqrt{(۲+۱)^۲ + (-۳-۲)^۲} = \sqrt{۳۴}$

$BC = \sqrt{(۳+۱)^۲ + (۵-۲)^۲} = ۵$

$A'B' = \sqrt{(۳+۵)^۲ + (۲-۳)^۲} = \sqrt{۶۵},$

$A'C' = \sqrt{(۳+۲)^۲ + (۲+۱)^۲} = \sqrt{۳۴},$

$B'C' = \sqrt{(-۵+۲)^۲ + (۳+۱)^۲} = ۵$

$\Rightarrow A'B' = AB = \sqrt{۶۵}, A'C' = AC = \sqrt{۳۴},$

$B'C' = BC = ۵$

پس تبدیل داده شده، یک ایزومتری است.

$m/AB = \dfrac{۵+۳}{۳-۲} = ۸,\ m/A'B' = \dfrac{۳-۲}{-۵-۳}$

$= -\dfrac{۱}{۸}$

$m/AB \neq m/A'B'$ است. بنابراین تبدیل داده شده شیب خطها را حفظ نمی‌کند.

نکتهٔ ۱. داریم:

$m/AB.m/A'B' = ۸(-\dfrac{۱}{۸}) = -۱$

پس $A'B' \perp AB$ است. همچنین می‌توان ثابت کرد که $A'C' \perp AC$ و $B'C' \perp BC$ است.

نکتهٔ ۲. تبدیل داده شده یک دوران به مرکز مبدأ مختصات و زاویهٔ ۹۰° است.

حل مسائل ریاضی ۴

۱. با توجه به مفروضات مسأله می‌توان نوشت:

$$a_۵ = ۱۶\ ,\ a_۸ = ۲۵ \Rightarrow \begin{cases}a_۱ + ۴d = ۱۶ \\ a_۱ + ۷d = ۲۵\end{cases}$$

$\Rightarrow ۳d = ۹ \Rightarrow d = ۳,\ a_۱ = ۴$

$S_n = \dfrac{n}{۲}[۲a_۱ + (n-۱)d] \Rightarrow S_{۱۰}$

$= ۵[۸ + (۱۰-۱) \times ۳] = ۱۷۵$

۲.

$S_{۱۲} = ۱۷S_۶ \Rightarrow a_۱\dfrac{q^{۱۲}-۱}{q-۱} = ۱۷ \times a_۱\dfrac{q^۶-۱}{q-۱} \Rightarrow$

$q^{۱۲} - ۱ = ۱۷(q^۶ - ۱) \Rightarrow (q^۶-۱)(q^۶+۱)$

$= ۱۷(q^۶-۱) \Rightarrow$

$q^۶ + ۱ = ۱۷ \Rightarrow q^۶ = ۱۶ \Rightarrow$

$q = \pm\sqrt[۶]{۱۶} = \pm\sqrt[۳]{۴}$

۳. فرض می‌کنیم نقطهٔ $C(x,۰)$ نقطهٔ مطلوب باشد، در این صورت داریم:

$\overrightarrow{CA} = (۱-x,۲)\ ,\ \overrightarrow{CB} = (-۱-x,۳)$

و اگر $A\hat{C}B = \alpha$ فرض شود، به کمک ضرب نقطه‌ای بردارها می‌توان نوشت:

$$\cos\alpha = \cos\frac{\pi}{۴} = \frac{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}|.|\overrightarrow{CB}|} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{(۱-x)(-۱-x)+۶}{\sqrt{(۱-x)^۲+۴} \times \sqrt{(-۱-x)^۲+۹}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{x^۲+۵}{\sqrt{x^۲-۲x+۵} \times \sqrt{x^۲+۲x+۱۰}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{(x^۲+۵)^۲}{(x^۲-۲x+۵)(x^۲+۲x+۱۰)} = \frac{۱}{۲}$$

$\Rightarrow ۲x^۴ + ۵۰ + ۲۰x^۲ = x^۴ + ۲x^۳ + ۱۰x^۲ -$

$۲x^۳ - ۴x^۲ - ۲۰x + ۵x^۲ + ۱۰x + ۵۰$

$\Rightarrow x^۴ + ۹x^۲ + ۱۰x = ۰$

$\Rightarrow x(x^۳ + ۹x + ۱۰) = ۰$

$\Rightarrow x = ۰$ یا $x^۳ + ۹x + ۱۰ = ۰$

$\Rightarrow (x^۳ + ۱) + (۹x + ۹) = ۰$

$\Rightarrow (x+۱)(x^۲ - x + ۱) + ۹(x+۱) = ۰$

$\Rightarrow (x+۱)(x^۲ - x + ۱۰) = ۰$

$\Rightarrow x = -۱$ یا $x^۲ - x + ۱۰ = ۰\ ,$

$\Delta = ۱ - ۴۰ < ۰$

بنابراین دو نقطهٔ $C_۱$ و $C_۲$ به طولهای صفر و ۱− دارای ویژگی فوق هستند.

۴. $\vec{a}=۲i-j\ ,\ \vec{b}=۳i+۲j\Rightarrow\vec{a}\,.\,\vec{b}$

$=۶-۲=۴,$

$(\vec{a}\,.\,\vec{b})\,\vec{c}=۴\,\vec{c}=۸i-۱۲j$

$\vec{a}=۲i-j\ ,\ \vec{c}=۲i-۳j\Rightarrow\vec{a}\,.\,\vec{c}=۴+۳$

$=۷\Rightarrow(\vec{a}\,.\,\vec{c})\,\vec{b}=۷\,\vec{b}$

$=۲۱i+۱۴j\Rightarrow\left[(\vec{a}\,.\,\vec{b})\,\vec{c}\right].\left[(\vec{a}\,.\,\vec{c})\,\vec{b}\right]$

$=(۸i-۱۲j)(۲۱i+۱۴j)$

$=۱۶۸-۱۶۸=۰$

۵. پنج جای خالی را می‌خواهیم پر کنیم. جاهای خالی در واقع مکان حروف کلمهٔ پنج حرفی هستند. اولین حرف سمت راست را به پنج طریق و دومین حرف را به چهار طریق و سومین حرف را به سه طریق و چهارمین حرف را به دو طریق می‌توان نوشت. ولی پنجمین حرف را نیز به دو طریق می‌توان نوشت زیرا «ی» وقتی در آخر واقع شود، بدون نقطه می‌باشد، بنابراین تعداد کلمات برابر است با :

$۵\times۴\times۳\times۲\times۲=۲۴۰$

۶. به چهار روش کلی می‌توان با حفظ شرط فوق هیأت مدیره را تشکیل داد.

الف) همه اعضای هیأت مدیره مرد باشند، در این صورت تعداد روشهای انتخاب برابر است با :

$C(۲۰,۷)$

ب) یک زوج (زن و شوهر) و ۵ مرد در هیأت مدیره باشند که در این صورت تعداد روشهای انتخاب اعضا برابر است با :

$C(۱۰,۱)\times C(۱۹,۵)$

ج) دو زوج و ۳ مرد در هیأت مدیره باشند و در این حالت تعداد انتخابها برابر است با :

$C(۱۰,۲)\times C(۱۸,۳)$

د) سه زوج و یک مرد در هیأت مدیره باشند. در این حالت تعداد انتخابها برابر است با :

$C(۱۰,۳)\times C(۱۷,۱)$

بنابراین تعداد کل روشهای انتخاب اعضا با شرط فوق برابر است با :

$C(۲۰,۷)+C(۱۰,۱)\times C(۱۹,۵)+C(۱۰,۲)\times$
$C(۱۸,۳)+C(۱۰,۳)\times C(۱۷,۱)$

۷. برای قسمت (الف) به دو برادر یک مکان می‌دهیم و بقیهٔ افراد هر کدام یک جا می‌گیرند. پس تعداد اعضای پیشامد مطلوب برابر است با تعداد جایگشتهای ۵ شیء ضرب در !۲ (زیرا دو برادر می‌توانند کنار هم جابه‌جا شوند) و تعداد اعضای فضای نمونه هم برابر است با تعداد جایگشتهای ۶ شیء (یعنی تعداد همهٔ عکسها، بدیهی است که در اینجا جابه‌جایی اشیاء مهم است) بنابراین داریم :

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۵!\times۲!}{۶!}=\frac{۵!\times۲}{۶\times۵!}=\frac{۱}{۳}$$

در قسمت (ب) چون جای دو برادر در طرفین است، لذا بقیه به !۴ طریق می‌توانند جابه‌جا شوند و دو برادر نیز می‌توانند جای خود را عوض کنند ؛ لذا می‌توان نوشت :

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۴!۲!}{۶!}=\frac{۴!\times۲}{۶\times۵\times۴!}=\frac{۱}{۱۵}$$

۸. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$$=\frac{\binom{۶}{۲}}{\binom{۱۵}{۲}}+\frac{\binom{۹}{۲}}{\binom{۱۵}{۲}}-\frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۱۵}{۲}}$$

$$=\frac{۱۵+۳۶-۳}{۱۰۵}=\frac{۴۸}{۱۰۵}=\frac{۱۶}{۳۵}$$

۹. $۴\cos\alpha\cos(۶۰-\alpha)\cos(۶۰+\alpha)$

$=۴\cos\alpha(\cos۶۰\cos\alpha+\sin۶۰\sin\alpha)$

$(\cos۶۰\cos\alpha-\sin۶۰\sin\alpha)$

$=۴\cos\alpha(\cos^۲۶۰\cos^۲\alpha-\sin^۲۶۰\sin^۲\alpha)$

$=۴\cos\alpha(\frac{۱}{۴}\cos^۲\alpha-\frac{۳}{۴}\sin^۲\alpha)$

$=\cos^۳\alpha-۳\sin^۲\alpha\cos\alpha$

$=\cos^۳\alpha-۳(۱-\cos^۲\alpha)\cos\alpha$

$=۴\cos^۳\alpha-۳\cos\alpha=\cos۳\alpha,\ \alpha=۲۰^\circ$

$\Rightarrow۴\cos۲۰\cos(۶۰-۲۰)\cos(۶۰+۲۰)$

$=\cos۶۰^\circ\Rightarrow۴\cos۲۰\cos۴۰\cos۸۰=\frac{۱}{۲}$

$\Rightarrow A=\cos۲۰\cos۴۰\cos۸۰=\frac{۱}{۸}$

۱۰. $tg۲x\,tg۴x=۱\Rightarrow tg۴x=\frac{۱}{tg۲x}$

$=cotg۲x=tg(\frac{\pi}{۲}-۲x)$

$\Rightarrow tg۴x=tg(\frac{\pi}{۲}-۲x)\Rightarrow۴x=k\pi+\frac{\pi}{۲}-۲x$

$\Rightarrow۶x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\ ,\ x=\frac{k\pi}{۶}+\frac{\pi}{۱۲}\ ,$

$k=۰,۱,۲,۳,\ldots,۱۱$

تعداد جوابهای بین ۰ و ۲π معادله فوق ۱۲ جواب می‌باشد.

حل مسائل جبر و احتمال

۱. $x+۱\ge۲\sqrt{x}\Rightarrow(x+۱)^۲\ge۴x$

$\Rightarrow x^۲+۲x+۱\ge۴x$

$\Rightarrow x^۲-۲x+۱\ge۰\Rightarrow(x-۱)^۲\ge۰$

نامساوی آخر همواره صحیح است و همهٔ مراحل برگشت‌پذیرند (چرا؟). اکنون براساس نامساوی اخیر برای عددهای مثبت $a_۱$ و $a_۲$ و ... و a_n می‌توان نوشت :

$a_۱+۱\ge۲\sqrt{a_۱}\ ,\ a_۲+۱\ge۲\sqrt{a_۲},\ldots,a_n+۱\ge$
$۲\sqrt{a_n}\Rightarrow$

$(a_۱+۱)(a_۲+۱)\ldots(a_n+۱)\ge۲^n\ \sqrt{\underbrace{a_۱a_۲\ldots a_n}_{۱}}$

$\Rightarrow(a_۱+۱)(a_۲+۱)\ldots(a_n+۱)\ge۲^n$

۲. $n=۱:\ \frac{۱}{۱\times۳}<\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{۱}{۳}<\frac{۱}{۲}$

$n=k:\ \frac{۱}{۱\times۳}+\frac{۱}{۲\times۴}+\ldots+$

$\frac{۱}{k(k+۲)}<\frac{k}{k+۱}$ (فرض استقرا)

$n=k:\ \frac{۱}{۱\times۳}+\frac{۱}{۲\times۴}+\ldots+$

$\frac{۱}{(k+۱)(k+۳)}<\frac{k+۱}{k+۲}$ (حکم استقرا)

برای اثبات حکم از روی فرض، کافی است به طرفین فرض جمله $\frac{۱}{(k+۱)(k+۳)}$ را اضافه کنیم :

$\frac{۱}{۱\times۳}+\frac{۱}{۲\times۴}+\ldots+\frac{۱}{k(k+۲)}+$

$\frac{۱}{(k+۱)(k+۳)}<\frac{k}{k+۱}+\frac{۱}{(k+۱)(k+۳)}$

اکنون برای رسیدن به حکم کافی است ثابت کنیم :

$\frac{k}{k+۱}+\frac{۱}{(k+۱)(k+۳)}<\frac{k+۱}{k+۲}$

و برای اثبات نامساوی اخیر نیز از روش برگشتی استفاده می‌کنیم :

$\frac{k(k+۳)+۱}{(k+۱)(k+۳)}<\frac{k+۱}{k+۲}\Rightarrow\frac{k^۲+۳k+۱}{(k+۱)(k+۳)}<$

$\frac{k+۱}{k+۲}$

$\Rightarrow (k^2+3k+1)(k+2)<(k+1)^2(k+3)\Rightarrow$

$k^3+2k^2+3k^2+6k+k+2<k^3+3k^2+$

$2k^2+6k+k+3\Rightarrow 2<3$

تمام مراحل برگشت‌پذیرند (به‌عنوان تمرین انجام دهید).

۳. هر عدد حقیقی را می‌توان تانژانت یک زاویه معیّن در بازهٔ $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ در نظر گرفت (چرا؟) لذا ۵ عدد فوق را می‌توان تانژانتهای ۵ زاویهٔ نامعین α_1، α_2، α_3، α_4 و α_5 همگی متعلق به بازه $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ دانست.

اکنون اگر بازهٔ $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ را به چهار بازهٔ $(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4})$، $[-\frac{\pi}{4},0)$، $[0,\frac{\pi}{4})$ و $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ افراز کنیم، طبق اصل لانه کبوتری لااقل دو زاویه از ۵ زاویه فوق متعلق به یکی از این چهار بازه هستند و در نتیجه تفاضل زاویه بزرگتر از زاویه کوچکتر بین ۰ و $\frac{\pi}{4}$ می‌باشد، بنابراین برای دو تا از این زوایا که آنها را α_i و α_j می‌نامیم، می‌توان نوشت: $0<\alpha_i-\alpha_j<\frac{\pi}{4}$ و در نتیجه:

$0<\frac{tg\alpha_i-tg\alpha_j}{1+tg\alpha_i tg\alpha_j}<1\Leftarrow 0<tg(\alpha_i-\alpha_j)<1$ و

با فرض $tg\alpha_i=x$ و $tg\alpha_j=y$ خواهیم داشت: $0<\frac{x-y}{1+xy}<1$.

۴. از فرض مسأله داریم: $(A\cup C)\cap(B\cup C)=A\cap(B\cup C)$ حال با فرض $B\cup C=X$ داریم: $(A\cup C)\cap X=A\cap X$ و یا: $(A\cap X)\cup(C\cap X)=(A\cap X)$ و از آنجا به دست می‌آید: $(C\cap X)\subseteq(A\cap X)$ و بنابراین:

$C\cap(B\cup C)\subseteq A\cap(B\cup C)$,

$C\cap(B\cup C)=C$ (قانون جذب)

$\Rightarrow C\subseteq A\cap(B\cup C)\Rightarrow C\subseteq(A\cap X)$

$\Rightarrow C\subseteq A$

۵. $(x,y)R(x,y):(x-x)=3(y-y)$:

$0=3\times 0$ (خاصیت انعکاسی)

$(x,y)R(z,t)\Rightarrow(x-z)=3(y-t)\Rightarrow(z-x)$

$=3(t-y)\Rightarrow(z,t)R(x,y)$ (خاصیت تقارنی)

$$\left.\begin{matrix}(x,y)R(z,t)\\(z,t)R(m,n)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{cases}(x-z)=3(y-t)\\(z-m)=3(t-n)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-z=3y-3t\\z-m=3t-3n\end{cases}\Rightarrow$$

$x-m=3y-3n=3(y-n)$

$\Rightarrow(x,y)R(m,n)$ خاصیت تعدی

چون رابطه فوق سه خاصیت انعکاسی، تقارنی و تعدی را دارد، بنابراین یک رابطهٔ هم‌ارزی است. کلاس هم‌ارزی عضو معین (α,β) برابر است با:

$(\alpha,\beta)R(x,y)\Rightarrow\alpha-x=3(\beta-y)$

$\Rightarrow x-3y=\alpha-3\beta$

$[(\alpha,\beta)]=\{(x,y)|x,y\in\mathbb{R},\ x-3y=\alpha-3\beta\}$

بنابراین دسته‌های هم‌ارزی این رابطه، دسته خطوطی موازی با شیب $\frac{1}{3}$ می‌باشد.

۶. رقم سمت راست هر عدد باقیمانده تقسیم آن عدد بر ۱۰ می‌باشد.

$22\overset{10}{\equiv}2\Rightarrow 22^{22}\overset{10}{\equiv}2^{22}$ ، $2^{10}=1024\overset{10}{\equiv}4$

$\Rightarrow 2^{20}\overset{10}{\equiv}16$,

$2^{22}\overset{10}{\equiv}64\overset{10}{\equiv}4\Rightarrow 22^{22}\overset{10}{\equiv}4$ (I)

$17\overset{10}{\equiv}7\Rightarrow 17^2\overset{10}{\equiv}49\overset{10}{\equiv}-1\Rightarrow 17^{16}\overset{10}{\equiv}1$

$\Rightarrow 17^{17}\overset{10}{\equiv}17\Rightarrow 17^{17}\overset{10}{\equiv}7$ (II)

(I) ، (II) $\Rightarrow 22^{22}-17^{17}\overset{10}{\equiv}4-7=-3\overset{10}{\equiv}7$

بنابراین رقم سمت راست $22^{22}-17^{17}$ مساوی ۷ است.

۷. اگر مهره‌های قرمز را با R_1 و R_2 و مهره‌های سفید را با W_1، W_2 و W_3 و مهره سیاه را با B نمایش دهیم، فضای نمونه انتخاب دو مهره برابر است با:

$S=\{(R_1,R_2),(R_1,W_1),(R_1,W_2),$

$(R_1,W_3),(R_1,B),(R_2,W_1),(R_2,W_2),$

$(R_2,W_3),(R_2,B),(W_1,W_2),$

$(W_1,W_3),(W_1,B),$

$(W_2,W_3),(W_2,B),(W_3,B)\}$

و تعداد اعضای S برابر است با: $\binom{6}{2}=15$. پیشامد تصادفی همرنگ بودن دو مهره نیز به صورت زیر نوشته می‌شود:

$A=\{(R_1,R_2),(W_1,W_2),(W_1,W_3),$

$(W_2,W_3)\}$

۸. الف) تعداد اعضای فضای نمونه برابر است با 2^{10} (در هر پرتاب دو حالت ممکن است) و تعداد اعضای پیشامد مطلوب $\binom{10}{5}$ می‌باشد (چرا؟).

بنابراین: $P(A)=\frac{\binom{10}{5}}{2^{10}}$

ب) مانند مثال قبل عمل می‌کنیم و مجموع احتمالهای آن را به‌دست می‌آوریم که شش بار یا هفت‌بار یا هشت یا نه و یا ده بار سکه رو بیاید:

$$P(B)=\frac{\binom{10}{6}}{2^{10}}+\frac{\binom{10}{7}}{2^{10}}+\frac{\binom{10}{8}}{2^{10}}+\frac{\binom{10}{9}}{2^{10}}+\frac{\binom{10}{10}}{2^{10}}$$

۹. اگر طول و عرض مستطیلهای فوق را x و y فرض کنیم، فضای نمونه این پیشامد برابر است با:

$S=\{(x,y)|x,y\in\mathbb{R},\ 0<x,y<4\}$

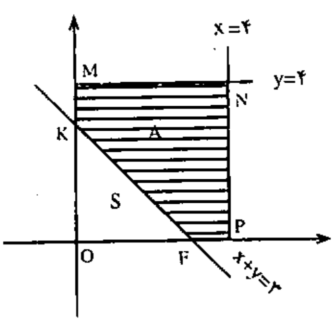
و پیشامد مطلوب برابر است با:

$A=\{(x,y)|(x,y)\in S,\ 2x+2y>6$ یا

$x+y>3\}$

و با رسم نمودارهای A و S احتمال مزبور را از تقسیم مساحتهای دو ناحیه فوق به‌دست می‌آوریم:

$$P(A)=\frac{S_{KMNPF}}{S_{OMNP}}=\frac{16-\frac{9}{2}}{16}=\frac{23}{32}$$



۱۰. براساس مفروضات مسأله داریم: $P(A-B)=0/3$ و $P(A\cup B)=0/7$ و $P(B')$ را می‌خواهیم. به کمک قضایای احتمال داریم:

$$\left.\begin{matrix}P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0/7\\P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=0/3\end{matrix}\right\}$$

$\Rightarrow P(B)=0/4$

$\Rightarrow P(B')=1-P(B)=0/6$

حل مسائل حسابان ۲

۱. برای آن که این تابع در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد، باید این تابع در ۱ مشتق‌پذیر باشد، پس اوّل باید این تابع در ۱ پیوسته باشد.

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^-} f(x)=f(۱)$$

$$a+b=۳+۴=a+b\Rightarrow a+b=۷ \qquad (۱)$$

پس تابع باید در ۱ مشتق‌پذیر باشد ؛ یعنی :

$$f'_+(۱)=f'_-(۱)$$

$$f'_+(۱)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱^+}\frac{ax^۳+b-a-b}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{a(x^۳-۱)}{x-۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱^+}\frac{a\cancel{(x-۱)}(x^۲+x+۱)}{\cancel{x-۱}}=۳a=f'_+(۱)$$

$$f'_-(۱)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱^-}\frac{۳x^۲-۴-۳+۴}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{۳(x^۲-۱)}{x-۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱^-}\frac{۳(x-۱)(x+۱)}{x-۱}=۶=f'_-(۱)$$

$$۳a=۶\Rightarrow\boxed{a=۲}$$

$$a+b=۷\Rightarrow ۲+b=۷\Rightarrow\boxed{b=۵}$$

۲. $y=\frac{۲x}{x^۲+۱}\Rightarrow y'=\frac{۲-۲x^۲}{(x^۲+۱)^۲}$

$$\Rightarrow y''=\frac{-۴x(۳-x^۲)}{(x^۲+۱)^۳}=۰$$

طولهای نقاط عطف $x=۰\ ,\ \pm\sqrt{۳}$

x	$-\infty$	$-\sqrt{۳}$		۰		$\sqrt{۳}$	$+\infty$
y''	$-$		$+$		$-$		$+$
انحنای y	$\cap$	$\frac{-\sqrt{۳}}{۲}$	$\cup$		$\cap$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\cup$

نقاط عطف $\begin{vmatrix}-\sqrt{۳}\\ -\frac{\sqrt{۳}}{۲}\end{vmatrix}$ ، $\begin{vmatrix}۰\\ ۰\end{vmatrix}$ ، $\begin{vmatrix}\sqrt{۳}\\ \frac{\sqrt{۳}}{۲}\end{vmatrix}$

۳. $y=\text{Arcsin}(x+۱)$

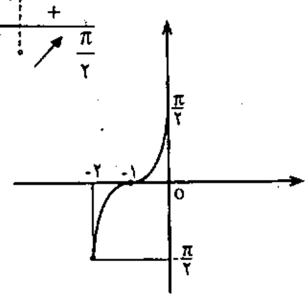
$$-۱\le x+۱\le ۱\Rightarrow -۲\le x\le ۰\Rightarrow D_f=[-۲,۰]$$

$$y'_x=\frac{۱}{\sqrt{۱-(x+۱)^۲}}>۰$$

اگر $-۲<x<۰$ ، تابع صعودی اکید است.

$$x=-۱\Rightarrow y=\text{Arcsin}۰=۰$$

x	۰۲-		۱-		۰
y'		$+$		$+$	
y	$-\frac{\pi}{۲}$	$\nearrow$		$\nearrow$	$\frac{\pi}{۲}$



۴. فرض می‌کنیم $A\begin{vmatrix}x\\ y\end{vmatrix}$ روی منحنی به معادلهٔ $y^۲=۴x+۱۳$ باشد.

$$OA=\sqrt{x^۲+y^۲}=\sqrt{x^۲+۴x+۱۳}$$

$$=\sqrt{\underbrace{(x+۲)^۲}_{Min=۰}+۹}\Rightarrow MinOA=\sqrt{۹}=۳$$

۵. $y=\log\frac{۱+x}{۱-x}$

$$\frac{۱+x}{۱-x}>۰\Rightarrow x=-۱\ ,\ ۱\ \Rightarrow D_f=(-۱,۱)$$

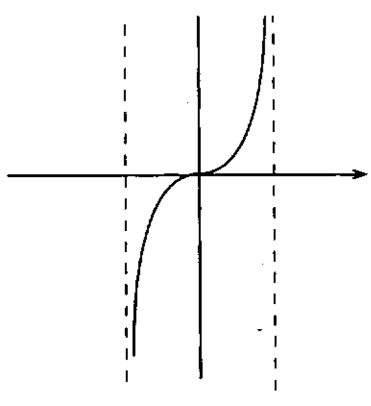
تابع صعودی اکید است

$$y'_x=\frac{\frac{۲}{(۱-x)^۲}}{\frac{۱+x}{۱-x}}\log e=\frac{۲}{۱-x^۲}\log e>۰$$

$$x\to -۱^+\Rightarrow y\to -\infty$$

$$x\to ۱^-\Rightarrow y\to +\infty$$

x	۱-		۰		۱
y'		$+$		$+$	
y	$-\infty$				$+\infty$



۶. $\log^x_{\sqrt{۳}}+\log^x_{\sqrt[۳]{۳}}+\log^x_{\sqrt[۶]{۳}}=۱۲$

فرمول : $\log^a_b=\log^{a^۲}_{b^۲}=\log^{a^۳}_{b^۳}=\cdots=\log^{a^p}_{b^p}$

$$\log^x_{\sqrt{۳}}=\log^{x^۲}_۳$$

$$\log^x_{\sqrt[۳]{۳}}=\log^{x^۳}_۳$$

$$\log^x_{\sqrt[۶]{۳}}=\log^{x^۶}_۳$$

$$\Rightarrow \log^{x^۲}_۳+\log^{x^۳}_۳+\log^{x^۶}_۳=۱۲$$

$$\Rightarrow \log^{x^{۱۱}}_۳=۱۲$$

$$x^{۱۲}=۳^{۱۲}\Rightarrow\boxed{x=۳}$$

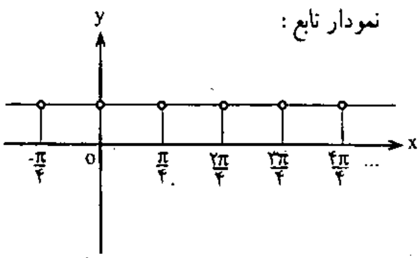
۷. $f(x)=\frac{\sin۲x}{\cos۲x}+\frac{\cos۲x}{\sin۲x}$

$$=\frac{۲\sin۲x\cos۲x}{۲\sin۲x.\cos۲x}=\frac{\sin۴x}{\sin۴x}=۱$$

یا $\sin۴x\ne ۰\Rightarrow ۴x\ne k\pi\Rightarrow x\ne\frac{k\pi}{۴}$

$$x\ne\frac{\pi}{۴},\frac{۲\pi}{۴},\frac{۳\pi}{۴},\cdots\Rightarrow T=\frac{\pi}{۴}$$

نمودار تابع :



۸. $-\int_۰^{\frac{\pi}{۳}}(\sin^۲x-۲(۱-\sin^۲x))dx$

$$=-\int_۰^{\frac{\pi}{۳}}(۳\sin^۲x-۲)dx$$

$$=-\int_۰^{\frac{\pi}{۳}}(\frac{۳}{۲}(۱-\cos۲x)-۲)dx$$

$$=-\int_۰^{\frac{\pi}{۳}}(-\frac{۱}{۲}-\frac{۳}{۲}\cos۲x)dx$$

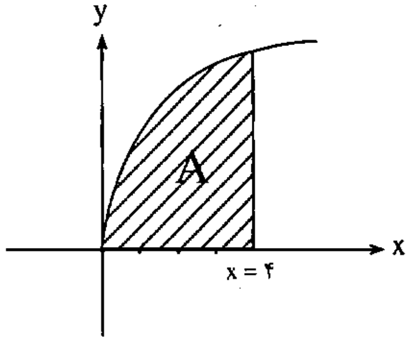
$$=(+\frac{۱}{۲}x+\frac{۳}{۴}\sin۲x)\Big|_۰^{\frac{\pi}{۳}}$$

$$=+\frac{۱}{۲}\times\frac{\pi}{۳}+\frac{۳}{۴}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{+۴\pi+۹\sqrt{۳}}{۲۴}$$

۹. $y=۴\sqrt{x}$

$$A=\int_۰^۴ ۴\sqrt{x}dx=۴\int_۰^۴ x^{\frac{۱}{۲}}dx$$

$$A=\left(۴\times\frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}}\right)_۰^۴=\frac{۸}{۳}(۴)^{\frac{۳}{۲}}=\frac{۸}{۳}(۲)^۳=\frac{۶۴}{۳}$$



۱۰.
$$\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}\frac{(x^۲+۱)+\sqrt{۱-x^۲}}{(x^۲+۱)\sqrt{۱-x^۲}}dx$$

$$=\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}\frac{x^۲+۱}{(x^۲+۱)\sqrt{۱-x^۲}}dx+$$

$$\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}\frac{\sqrt{۱-x^۲}}{(x^۲+۱)\sqrt{۱-x^۲}}dx$$

$$=\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}dx+\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}\frac{۱}{۱+x^۲}dx$$

$$=(\operatorname{Arcsin}x+\operatorname{Arctan}x)_۰^{\frac{\pi}{۴}}$$

$$=\operatorname{Arcsin}\frac{\pi}{۴}+\operatorname{Arctan}\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}+۱$$

حل مسائل حساب دیفرانسیل و انتگرال ۲

۱. $f(x)=\lfloor x\rfloor-x \quad x\in[-۱,۳]$

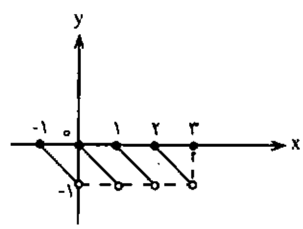
$-۱\le x<۰\Rightarrow\lfloor x\rfloor=-۱\Rightarrow f(x)=-۱-x$

$۰\le x<۱\Rightarrow\lfloor x\rfloor=۰\Rightarrow f(x)=-x$

$۱\le x<۲\Rightarrow\lfloor x\rfloor=۱\Rightarrow f(x)=۱-x$

$۲\le x<۳\Rightarrow\lfloor x\rfloor=۲\Rightarrow f(x)=۲-x$

$x=۳\Rightarrow f(۳)=۳-۳=۰$



این تابع در نقاط ۱− ، ۰ ، ۱ ، ۲ و ۳ ماکزیمم مطلق و در نقاط ۰ ، ۱ و ۲ ماکزیمم نسبی است.

۲. فرض می‌کنیم $f(x)=x-\frac{x^۳}{۳}-\operatorname{Arctan}x$ ، داریم:

$$f'(x)=۱-x^۲-\frac{۱}{۱+x^۲}=\frac{۱-x^۴-۱}{۱+x^۲}$$

$$=\frac{-x^۴}{۱+x^۲}\Rightarrow f'(x)<۰\ ،\ ۰<x<۱$$

این تابع در $\mathbb{R}$ پیوسته است، پس در $(۰،۱)$ نیز پیوسته است.

$$f(۰)=۰\ ,\ f(۱)=۱-\frac{۱}{۳}-\frac{\pi}{۴}<۰$$

پس وقتی $۰<x<۱$ ، $f(x)<۰$

$$f(x)<۰\Rightarrow x-\frac{x^۳}{۳}-\operatorname{Arctan}x<۰$$

$$\Rightarrow x-\frac{x^۳}{۳}<\operatorname{Arctan}x$$

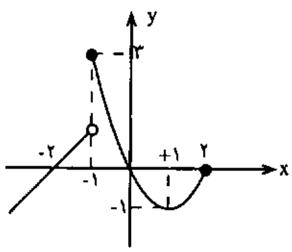
۳. $f'(x)=۲x-۲=۰\Rightarrow x=۱\in[-۱,۲]$

$f(۱)=-۱\ ,\ f'(۱)=۰$

$f(-۱)=۳\ ,\ f'(-۱)$ وجود ندارد

$f(۲)=۰\ ,\ f'(۲)$ وجود ندارد

اعداد ۱− ، ۱ و ۲ طولهای نقاط بحرانی‌اند.



۴. در مورد مربع داریم:

ضلع مربع $=x$

$l=۴x\Rightarrow x=\frac{l}{۴}$

مساحت مربع $=x^۲=\frac{l^۲}{۱۶}$

در مورد دایره:

شعاع دایره $=R$

$l=۲\pi R\Rightarrow R=\frac{l}{۲\pi}$

مساحت دایره $=\pi R^۲=\pi\times\frac{l^۲}{۴\pi^۲}=\frac{l^۲}{۴\pi}$

$\pi<۴\Rightarrow ۴\pi<۱۶\Rightarrow\frac{۱}{۴\pi}>\frac{۱}{۱۶}$

$\Rightarrow\frac{l^۲}{۴\pi}>\frac{l^۲}{۱۶}\Rightarrow$ مساحت مربع < مساحت دایره

۵. $f(x)=x^۳-۳x-۱$

$f'(x)=۳x^۲-۳\ ،\ x_۱=۲$

$$x_{n+۱}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\ :\ x_۲=x_۱-\frac{f(x_۱)}{f'(x_۱)}$$

$$x_۲=۲-\frac{f(۲)}{f'(۲)}=۲-\frac{۱}{۹}=\frac{۱۷}{۹}$$

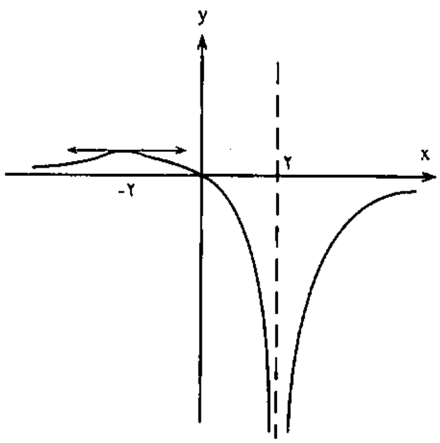
۶. $y=\frac{-x}{(x-۲)^۲}$

$y\to\infty\Rightarrow x=۲$ مجانب قائم

$x\to\pm\infty\Rightarrow y=۰$ مجانب افقی

$$y'=\frac{x+۲}{(x-۲)^۳}=۰\Rightarrow x=-۲\ ,\ x=۰\Rightarrow y=۰$$

x	$-\infty$		-۲		۰		۲		$+\infty$
y'		+		−		−	‖	+	
y	۰	↗	$\frac{۱}{۸}$	↘		↘ $-\infty$	‖	$-\infty$ ↗	۰



۷. بازهٔ $[-۲،۲]$ را به دو زیربازهٔ $[۰،۲]$ و $[-۲،۰]$ تبدیل می‌کنیم و داریم:

$f(-۲)=f(۰)=۰\ ,\ f(۰)=f(۲)=۰$

این تابع در $\mathbb{R}$ پیوسته و مشتق‌پذیر است، پس در بازه‌های $[۰،۲]$ و $[-۲،۰]$ هم پیوسته و در بازه‌های $(۰،۲)$ و $(-۲،۰)$ مشتق‌پذیر است.

$$f'(x)=۱۲x^۲-۱۶=۰\Rightarrow x^۲=\frac{۴}{۳}$$

$$\Rightarrow x=\pm\frac{۲}{\sqrt{۳}}=C_۱\ ,\ C_۲$$

عدد $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ در بازهٔ $(۰،۲)$ و عدد $\frac{-۲}{\sqrt{۳}}$ در بازهٔ $(-۲،۰)$ است.

۸. $f(x)=\operatorname{Ln}(x)\Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{x}$,

$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$

پس سوی تقعّر منحنی به طرف پایین است. قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $f(x) = Lnx$ را درنظر می‌گیریم.

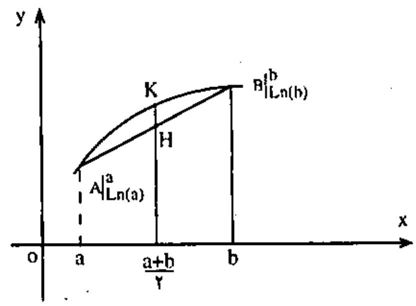
با توجه به شکل داریم:

$$y_H = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{Ln(a) + Ln(b)}{2}$$

$$y_K = f(\frac{a+b}{2}) = Ln(\frac{a+b}{2})$$

با توجه به شکل: $y_K > y_H$

$$\Rightarrow Ln\frac{a+b}{2} > \frac{Ln(a) + Ln(b)}{2}$$



۹. $\lim_{x \to 0^+} \frac{2x\sin|x|}{3x^2} \sim \lim_{x \to 0^+} \frac{2x|x|}{3x^2}$:هوپیتال تابع

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{2x^2}{3x^2} = \frac{2}{3}$$

۱۰.

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{n^2(1+\frac{1}{n})^2} + \frac{n}{n^2(1+\frac{2}{n})^2} + \frac{n}{n^2(1+\frac{3}{n})^2} + \cdots + \frac{n}{n^2(1+\frac{n}{n})^2} \right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} + \frac{1}{(1+\frac{2}{n})^2} + \frac{1}{(1+\frac{3}{n})^2} + \cdots + \frac{1}{(1+\frac{n}{n})^2} \right) \quad , \quad f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}\left(f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + f(\frac{3}{n}) + \cdots + f(\frac{n}{n}) \right)$$

$$= \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}dx$$

$$= (\frac{-1}{1+x})\Big|_0^1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

۱۱.

$f(x) = 2x^2 \Rightarrow f'(x) = 4x \geq 0 \ , \ 0 \leq x \leq 2$

بازهٔ $[0,2]$ را به n زیربازهٔ مساوی افراز می‌کنیم، $\Delta x = \frac{2}{\pi}$.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & 1(\Delta x) & 2(\Delta x) & & (i-1)\Delta x & i\Delta x & & 2 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{i-1} & x_i & \cdots & x_n \end{array}$$

در بازه کلّی $[x_{i-1} \ , \ x_i]$ ماکزیمم مطلق تابع f، $f(x_i)$ است.

$$f(u_i) = f(x_i) = f(i\Delta x) = f(\frac{2i}{n}) = \frac{8i^2}{n^2}$$

$$\int_0^2 2x^2 dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(u_i)\Delta x$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{8i^2}{n^2} \times \frac{2}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{16}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{16}{n^3} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sim \lim_{n \to \infty} \frac{16(2n^3)}{6n^3} = \frac{16}{3}$$

۱۲. $\int \frac{x^5 + x + 1}{x^2 + 1} dx$

$$\begin{array}{l|l} x^5 + x + 1 & x^2 + 1 \\ \hline 2x + 1 & x^3 - x \end{array}$$

$$\frac{x^5 + x + 1}{x^2 + 1} = x^3 - x + \frac{2x + 1}{x^2 + 1}$$

$$= x^3 - x + \frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$\int \frac{x^5 + x + 1}{x^2 + 1} dx = \int x^3 dx - \int x dx + \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx + \int \frac{dx}{x^2 + 1}$$

$$\int \frac{x^5 + x + 1}{x^2 + 1} = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + Ln(x^2 + 1) + Arctan\, x + C$$

حل مسائل ریاضی عمومی ۲

۱. $y = \frac{\sqrt{x}}{x+1} ; y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1) - \sqrt{x}}{(x+1)^2}$

$m = y'(1) = 0$

$x = 1 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{1}}{(1+1)} = \frac{1}{2} ; A(1, \frac{1}{2})$

معادله‌خط‌مماس: $(y - \frac{1}{2}) = 0(x - 1) \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

۲. $g'(x) = (\frac{1}{x})'f(x) + (\frac{1}{x})f'(x)$

$$g'(x) = \frac{-f(x)}{x^2} + \frac{f'(x)}{x}$$

$$g'(2) = \frac{-f(2)}{(2)^2} + \frac{f'(2)}{2} = \frac{-(-3)}{4} + \frac{4}{2} = \frac{11}{4}$$

۳. $f(x) = ax^2 + bx + c; \ f'(x) = 2ax + b$

چون تابع در $(1,7)$ ماکزیمم نسبی دارد، بنابراین داریم:

$f'(1) = 0 \Rightarrow 2a + b = 0 \qquad (1)$

$f(1) = 7 \Rightarrow a + b + c = 7 \qquad (2)$

چون نمودار تابع از نقطهٔ $(2,-2)$ می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در f صدق می‌کند؛ یعنی:

$f(2) = -2 \Rightarrow 4a + 2b + c = -2 \qquad (3)$

با استفاده از رابطه‌های (۱)، (۲) و (۳)، ضرایب a، b و c را به‌دست می‌آوریم:

$$-1 \times \begin{cases} a + b + c = 7 \\ 4a + 2b + c = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a - b - c = -7 \\ 4a + 2b + c = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3a + b = -9$$

$$\begin{cases} 3a + b = -9 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -9, b = 18, c = -2$$

۴. ابتدا نقاط بحرانی f را در فاصله $[0,3]$ به‌دست می‌آوریم:

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$$

$$\Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 16x = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \in [0,3] & \text{نقطه بحرانی} \\ x = 2 \in [0,3] & \text{نقطه بحرانی} \\ x = -2 \notin [0,3] & \text{غیرقابل قبول} \end{cases}$$

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 16$

$x = 2 \Rightarrow f(2) = 0$

$x = 3 \Rightarrow f(3) = 25$

با مقایسه $f(0)$، $f(2)$ و $f(3)$ داریم:

ماکزیمم مطلق $Max\{16, 0, 25\} = 25$

می‌نیمم مطلق $Min\{16, 0, 25\} = 0$

۵. $f(x) = \frac{x^3 - 3x - 2}{x^3} ; D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

$$\begin{cases} x \to \pm\infty \\ y \to 1 \end{cases} ;\ y=1 \quad \text{مجانب افقی}$$

$$\begin{cases} y \to \pm\infty \\ x \to 0 \end{cases} ;\ x=0 \quad \text{مجانب قائم}$$

$$y=0 \Rightarrow x^3-3x-2=0$$

$$\Rightarrow (x^3-x)-(2x+2)=0$$

$$\Rightarrow x(x-1)(x+1)-2(x+1)=0$$

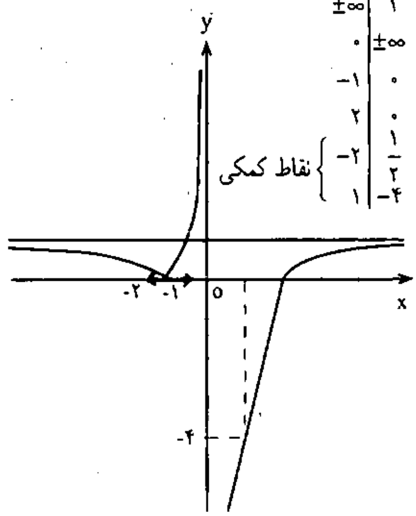
$$\Rightarrow (x+1)(x^2-x-2)=0 \Rightarrow x=-1 \ ,\ x=2$$

$$f'(x)=\frac{6x+6}{x^4}=0 \Rightarrow x=-1$$

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
f'	−	−	+	‖ +	+	+	
f	$1 \searrow$	$\frac{1}{2} \searrow$	$0 \nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty \nearrow$	$-4 \nearrow$	$0 \nearrow$	1

x	y
$\pm\infty$	1
0	$\pm\infty$
-1	0
2	0
-2	$\frac{1}{2}$
1	-4

نقاط کمکی



۶.
$$y=\frac{2x+1}{x-1}$$

$$\text{مجانب افقی} \quad \begin{cases} x \to \pm\infty \\ y \to 2 \end{cases} \Rightarrow y=2$$

$$\text{مجانب قائم} \quad \begin{cases} y \to \pm\infty \\ x \to 1 \end{cases} \Rightarrow x=1$$

بنابراین محل برخورد مجانبها، نقطه $A(1,2)$ است. اکنون برای این که ثابت کنیم، نقطهٔ A مرکز تقارن منحنی است، ابتدا مبدأ مختصات را به نقطه A منتقل می‌کنیم، سپس با تبدیل $X \to -X$ و $Y \to -Y$ ملاحظه می‌کنیم که ضابطهٔ تابع f تغییر نخواهد کرد، بنابراین نقطهٔ A مرکز تقارن منحنی است:

$$\begin{cases} X=x-\alpha \\ Y=y-\beta \end{cases} ; \begin{cases} X=x-1 \\ Y=y-2 \end{cases} ; \begin{cases} x=X+1 \\ y=Y+2 \end{cases}$$

$$Y+2=\frac{2(X+1)+1}{(X+1)-1} \Rightarrow Y=\frac{3}{X}$$

$$\begin{cases} X \to -X \\ Y \to -Y \end{cases} \Rightarrow -Y=\frac{3}{-X} \Rightarrow Y=\frac{3}{X}$$

۷.
$$\begin{cases} x=x_0+a\cos t \Rightarrow \dfrac{x-x_0}{a}=\cos t \\ y=y_0+b\sin t \Rightarrow \dfrac{y-y_0}{b}=\sin t \end{cases}$$

$$\sin^2 t+\cos^2 t=1$$

$$\Rightarrow \frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

معادلهٔ (۱) معادلهٔ بیضی افقی به مرکز (x_0,y_0) است.

۸. چون $A'A \parallel y'y$ ، پس هذلولی قائم است و معادله آن به‌صورت $\frac{(y-\beta)^2}{a^2}-\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}=1$ است. مرکز هذلولی یعنی نقطه V وسط پاره‌خط $A'A$ است، بنابراین:

$$V \left| \begin{array}{l} \alpha=\dfrac{2+2}{2}=2 \\ \beta=\dfrac{6+(-4)}{2}=1 \end{array} \right. ;\ A'A=2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{(2-2)^2+(-4-6)^2}=2a \Rightarrow a=5$$

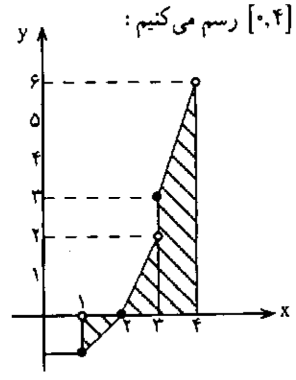
$$e=\frac{c}{a} \Rightarrow \frac{5}{3}=\frac{c}{5} \Rightarrow c=\frac{25}{3}$$

$$a^2+b^2=c^2 \Rightarrow b^2=c^2-a^2=\frac{625}{9}-25$$

$$\Rightarrow b=\frac{20}{3}$$

$$\frac{(y-1)^2}{25}-\frac{(x-2)^2}{\frac{400}{9}}=1$$

۹. نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=[x](x-2)$ را در فاصلهٔ $[0,4]$ رسم می‌کنیم:



$$0 \le x<1 \Rightarrow [x]=0 \Rightarrow y=0$$

$$1 \le x<2 \Rightarrow [x]=1 \Rightarrow y=x-2;$$

x	1	2
y	−1	0

$$2 \le x<3 \Rightarrow [x]=2 \Rightarrow y=2(x-2);$$

x	2	3
y	0	2

$$3 \le x<4 \Rightarrow [x]=3 \Rightarrow y=3(x-2);$$

x	3	4
y	3	6

$$\int_0^4 [x](x-2)dx=\int_0^1 [x](x-2)dx+\int_1^2 [x](x-2)dx+\int_2^3 [x](x-2)dx+\int_3^4 [x](x-2)dx$$

$$=0+\left(\frac{-1\times 1}{2}\right)+\frac{1\times 2}{2}+\frac{3+6}{2}\times 1=5$$

۱۰. الف.

$$\int \frac{7x^{13}dx}{\sqrt{x^7-1}}=\int (x^7-1)^{-\frac{1}{2}}\times 7x^{13}dx$$

$$\begin{cases} u=x^7-1 \Rightarrow x^7=u+1 \\ du=7x^6dx \end{cases}$$

با جایگزینی رابطه‌های بالا در مسأله، خواهیم داشت:

$$\int (x^7-1)^{-\frac{1}{2}}\times x^7\times 7x^6dx=$$

$$\int u^{-\frac{1}{2}}(u+1)du=\int u^{\frac{1}{2}}du+\int u^{-\frac{1}{2}}du$$

$$=\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+2u^{\frac{1}{2}}+c$$

$$=\frac{2}{3}(x^7-1)\sqrt{x^7-1}+2\sqrt{x^7-1}+c$$

ب.

$$\begin{cases} u=\sin\sqrt[3]{x} \\ du=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\cos\sqrt[3]{x}dx \Rightarrow \dfrac{\cos\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}}=3du \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$\int \frac{\sin^6\sqrt[3]{x}\cos\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}}=$$

$$\int \sin^6 \sqrt[3]{x} \times \frac{\cos\sqrt[3]{x}\,dx}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$= \int u^6 \times 3du = \frac{3}{7}u^7 + c = \frac{3}{7}\sin^7 \sqrt[3]{x} + c$$

$$= \frac{-1}{5}\cot^5 x + \frac{1}{3}\cot^3 x - \cot x - x + c$$

حل مسائل ریاضیات گسسته

۱. اگر درخت T از مرتبهٔ p و اندازهٔ q باشد همواره داریم $p = q+1$ یا $q = p-1$. از طرفی تعداد رأسهای این درخت طبق فرض برابر است با:

$p = 1+2+1+x \Rightarrow q = (4+x)-1$

طبق قضیه مجموع درجه‌های رأسهای هر گراف برابر با $2q$ می‌باشد، پس:

$$5+2\times 3+2+x\times 1 = 2[(4+x)-1]$$

$$\Rightarrow 13+x = 6+2x \Rightarrow x = 7$$

۲. فرض می‌کنیم m یال از گراف G حذف شود تا G به‌درخت تبدیل شود. بنابراین با توجه به‌رابطه $p = q+1$ در درخت داریم:

$p = (q-m)+1 \Rightarrow m = q-p+1$

۳. اگر ماتریس مجاورت رابطهٔ R را $M(R)$ بنامیم، می‌دانیم $M^2 = M(ROR)$ و برای این که ثابت کنیم ROR خاصیت بازتابی دارد کافی است ثابت کنیم درآیه‌های روی قطر اصلی M^2 همگی برابر ۱ می‌باشند، حال اگر فرض کنیم $M = [a_{ij}]$ و $M^2 = [b_{ij}]$، در این صورت داریم:

$$b_{ii} = a_{i1}\odot a_{1i} \oplus a_{i2}\odot a_{2i} \oplus \ldots \oplus a_{ii}\odot a_{ii}$$
$$\oplus \ldots \oplus a_{ip}\odot a_{pi}$$

می‌دانیم رابطهٔ R بازتابی است پس $a_{ii} = 1$ بنابراین $a_{ii}\odot a_{ii} = 1$ و در نتیجه با توجه به تعریف عمل جمع بولی باید $b_{ii} = 1$.

۴. سه مجموعهٔ A_1، A_2 و A_3 را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$A_1 =$ {اعداد چهار رقمی | رقم ۲ را شامل نیستند}

$A_2 =$ {اعداد چهار رقمی | رقم ۴ را شامل نیستند}

$A_3 =$ {اعداد چهار رقمی | رقم ۶ را شامل نیستند}

حال کافی است $\left|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}\right|$ یا $(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3})$ را حساب کنیم:

$|S| = 9\times 10^3$

$|A_1| = |A_2| = |A_3| = 8\times 9^3$

$|A_1\cap A_2| = |A_1\cap A_3| = |A_2\cap A_3| = 7\times 8^3$

$|A_1\cap A_2\cap A_3| = 6\times 7^3$

$\Rightarrow \left|\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}\right| = 9\times 10^3 -$

$\left[3(8\times 9^3) - 3\times(7\times 8^3) + 6\times 7^3\right]$

۵. اگر فرض کنیم $k = \overline{abc}$ در این صورت $t = \overline{abcabc}$ خواهد بود. با توجه به فرض مسأله داریم:

$$\frac{100000a+10000b+1000c+100a+10b+c}{11\times 13\times 7} = 241$$

$$\Rightarrow \frac{100100a+10010b+1001c}{1001} = 241$$

$$\Rightarrow 100a+10b+c = 241 \Rightarrow \overline{abc} = 241$$

$$\Rightarrow k = 241$$

۶. طبق فرض داریم: $132 = (246)_a$

$(246)_a = 132 \Rightarrow 2\times a^2 + 4\times a + 6 = 132$

$\Rightarrow 2a^2 + 4a - 126 = 0 \Rightarrow a^2 + 2a - 63 = 0$

$\Rightarrow (a+9)(a-7) = 0 \Rightarrow a = -9$ یا $a = 7$

و با توجه به این‌که مبنا عددی است طبیعی و بزرگتر از یک پس $a = 7$.

۷. با توجه به این‌که ۷ عددی اول و $7 \nmid 1380$ پس طبق قضیهٔ فرما داریم:

$1380^6 \overset{7}{\equiv} 1$, $2001 = 6\times 333 + 3$

$\Rightarrow (1380^6)^{333} \times 1380^3 \overset{7}{\equiv} 1\times 1380^3$,

$1380 \overset{7}{\equiv} 1 \Rightarrow 1380^3 \overset{7}{\equiv} 1$

$\Rightarrow 1380^{2001} \overset{7}{\equiv} 1$

۸. برای اثبات این‌که $24 | p^2 - q^2$ کافی است ثابت کنیم $(p^2 - q^2)$ بر ۳ و ۸ بخش‌پذیر است.

$p \geq 5 \Rightarrow$ اول p فرد است $\Rightarrow p^2 = 8k+1$

(مربع هر عدد فرد به شکل $(8k+1)$ است.)

$q \geq 5 \Rightarrow$ اول q فرد $\Rightarrow q^2 = 8k'+1$

$\Rightarrow p^2 - q^2 = (8k+1) - (8k'+1)$

$= 8(k-k') \Rightarrow 8 | p^2 - q^2$ (۱)

$$\left.\begin{array}{l} 3,\ (3,p)=1 \Rightarrow p^2 \overset{3}{\equiv} 1 \text{ اوّل است} \\ 3,\ (3,q)=1 \Rightarrow q^2 \overset{3}{\equiv} 1 \text{ اوّل است} \end{array}\right\} \Rightarrow p^2 - q^2 \overset{3}{\equiv} 0$$

$\Rightarrow 3 | p^2 - q^2$ (۲)

$$(1) \text{ و } (2) \overset{(3,8)=1}{\Longrightarrow} 24 | p^2 - q^2$$

۹. فرض کنیم آن دو عدد a و b باشند. در این صورت طبق فرض داریم:

$ab = k^2$, $[a,b] = c = 48$, $(a,b) = d$

$\Rightarrow a'b'd^2 = k^2$, $a'b'd = 48$

$\Rightarrow a'b' = \frac{k^2}{d^2}$, $a'b' = \frac{48}{d}$

چون $a'b'$ باید مربع کامل باشد پس $d = 3$ و $a'b' = 16$ و چون $(a',b') = 1$ پس $a' = 1$ و $b' = 16$، بنابراین:

$a = a'd = 1\times 3 = 3$, $b = b'd = 16\times 3 = 48$

۱۰. حالتهای ممکن در سه پرتاب به‌صورت زیر است:

(۲,۲,۲) , (۲,۳,۲) , (۳,۲,۲) , (۲,۲,۳) ,

(۳,۳,۲) , (۳,۲,۳) , (۲,۳,۳) , (۳,۳,۳)

و حاصل جمع اعداد رو شده یکی از اعداد ۶ یا ۷ یا ۸ یا ۹ می‌تواند باشد، پس داریم:

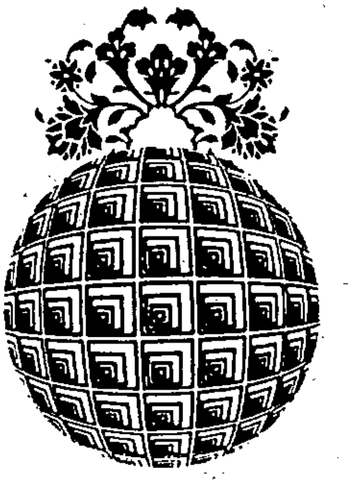
x_i	۶	۷	۸	۹
P_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

۱۱. طبق فرض فضای نمونه‌ای به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$S = \{(H,1),(H,2),\ldots,(H,6),(T,T,T),$
$(T,H,T),(T,T,H),(T,H,H)\}$

$\Rightarrow |S| = 6+4 = 10$, $A = \{(T,H,H)\}$

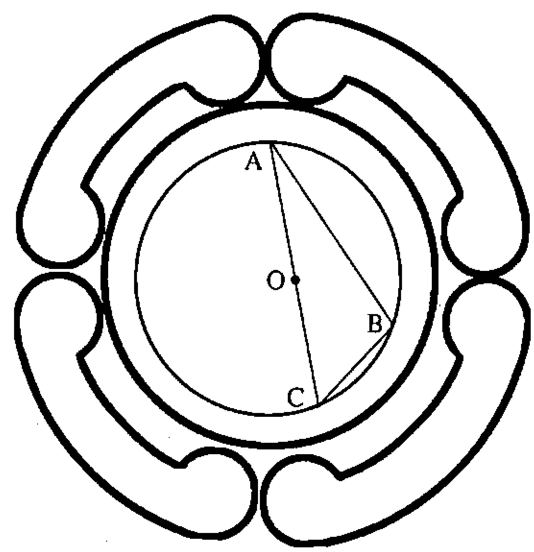
$\Rightarrow P(A) = \frac{1}{10}$



مسأله مسابقه‌ای / طراح احمد فیروزنیا

کاربرد ریاضی در نیازمندیها:

بر محیط میدان دایره شکلی سه برج نگهبانی در نقطه‌های A و B و C قرار دارد به طوری که $AB = d$ و $BC = d'$ است. $(d > d')$ مطلوب است تعیین نقطه D بر محیط میدان برای ساختن چهارمین برج نگهبانی به طوری که $AB + CD = AD + BC$ باشد.



جواب تفریح اندیشه صفحهٔ ۱۸

جواب : ۸۰

حل: زمانی که سعید با نرخ یک پله در هر ثانیه، از پله برقی بالا می‌رود، برای رسیدن به بالای پلکان، به ۲۰ ثانیه نیاز دارد. هنگامی که با نرخ دو پله در ثانیه بالا می‌رود، برای رسیدن به بالای پلکان، ۱۶ ثانیه وقت می‌خواهد ؛ بنابراین :

(۱+ نرخ پله‌برقی) ۲۰ = (نرخ پله‌برقی +۲)۱۶

با حلّ این معادله، به‌دست می‌آوریم :

۳ پله در ثانیه= نرخ پله‌برقی

بنابراین، فاصلهٔ پایین تا بالای پله‌برقی برابر است با :

پله ۸۰ = ۲۰(۱+۳)

جواب تفریح اندیشه صفحهٔ ۲۵

جواب : ۰-۰

حل: از آن‌جا که تیم M سه گل به تیم B زده است، هیچ گل دیگر به تیم B زده نشده است و بازی T-B یک تساوی بدون گل بوده است.

حل مسأله مسابقه‌ای برهان ۳۱

می‌خواهیم عدد صحیح مثبت x را پیدا کنیم. به طوری‌که $x \equiv k(\bmod (k+1))$ برای هر $k = 1, 2, \ldots, 5$ ؛ و $x \equiv 0 (\bmod 7)$.
توجه کنید که چون همه پیمانه‌ها متباین نیستند، مستقیماً نمی‌توانید از قضیه باقیمانده چینی استفاده کنید. اما با توجه به طبیعت خاص همنهشتی‌ها، می‌توان استدلال ساده‌ای برای آن اقامه کرد.

پنج همنهشتی اول را می‌توانید به صورت ساده $x \equiv -1 (\bmod 2,3,4,5,6)$ درآورید. بنا به قضیه (در حالت کلی اگر $a \equiv b (\bmod m_i)$ و $i = 1, 2, \ldots, r$ ، آنگاه داریم $a \equiv b (\bmod m)$ که در آن $m = [m_1, m_2, \ldots, m_r]$)، جواب این دستگاه فوراً از همنهشتی $x \equiv -1 (\bmod 60)$ به دست می‌آید (چون که ۶۰، کوچکترین مضرب مشترک این پنج عدد می‌باشد).

پس، می‌خواهیم دستگاه $x \equiv -1 (\bmod 60)$ و $x \equiv 0 (\bmod 7)$ را حل کنیم یا اگر قرار دهیم $x = 7y$ ، می‌خواهیم همنهشتی $7y \equiv -1 (\bmod 60)$ را حل کنیم. بنا به الگوریتم اقلیدس $y = 17$ ، یک جواب این همنهشتی است. لذا $x = 119$ یک جواب دستگاه اصلی است. چون جواب‌های دیگر این دستگاه همنهشتی‌ها، حداقل $7.60 = 420$ اختلاف دارند، پس $x = 119$ کوچک‌ترین جواب ممکن است.

معرفی کتابهای ریاضی انتشارات مدرسه

ورودی به آمار

مؤلف: دکتر عینا... پاشا / ناشر: انتشارات مدرسه

به آمار راهنمای دنیای ناشناخته ها گفته اند. به کمک مباحث آمار می آموزیم که چگونه با استفاده از اطلاعات ناقص، پی به واقعیتها ببریم. از زمانهای دور در زبان فارسی، ضرب المثلی که به خوبی راهکارهای آمار را نشان می دهد، «مشت نمونهٔ خروار است» رایج شده است. دنیای امروز دنیای انفجار اطلاعات است و از هر سو با اطلاعات مختلف، بمباران می شویم. اگر بتوانیم بر این اطلاعات مسلط شویم و از آنها استفاده کنیم پیشرفت خواهیم کرد. در غیر این صورت در زیر تلی از اطلاعات مدفون خواهیم شد. ما در این کتاب سعی کرده ایم اصول و مقدمات این علم را همراه با مثالهای متنوع بیان کنیم.

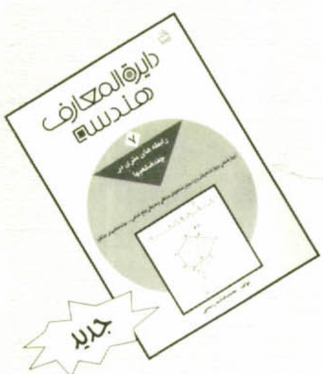
مکان هندسی / جلد (۱)

مؤلف: محمدهاشم رستمی / ناشر: انتشارات مدرسه

مکان هندسی از بخشهای مهم و جالب و پرکاربرد در هندسه است و یکی از ابزارهای مفید، مؤثر و لازم برای رسم شکلهای هندسی یا ساختمانهای هندسی است. این کتاب اولین جلد از سری کتابهای مکان هندسی است و در این کتاب مکانهای هندسی وابسته به یک نقطه ثابت و مکانهای هندسی وابسته به دو نقطه ثابت و مکانهای هندسی وابسته به سه نقطه ثابت و بیشتر آمده است.

دایرة المعارف هندسه جلد ۷

مؤلف: محمدهاشم رستمی / ناشر: انتشارات مدرسه



این سری کتابها، مجموعهٔ کاملی است از تعریفها، قضیه ها، مسأله ها و تاریخ هندسه که با بهره گیری از منابع متعدد ایرانی و خارجی تدوین و تألیف شده است. جلد هفتم دایرة المعارف هندسه، رابطه های متری در چندضلعیهاست که شامل ۵ بخش رابطه های متری در چهارضلعی، چهارضلعیهای ویژه، چهارضلعیهای محاطی و محیطی، پنج ضلعی و شش ضلعی و چندضلعیهای منتظم است.

آموزش المپیاد ریاضی

مؤلفان: هوشنگ شرقی، حسین شفیع‌زاده، ابراهیم ریحانی / ناشر: انتشارات مدرسه

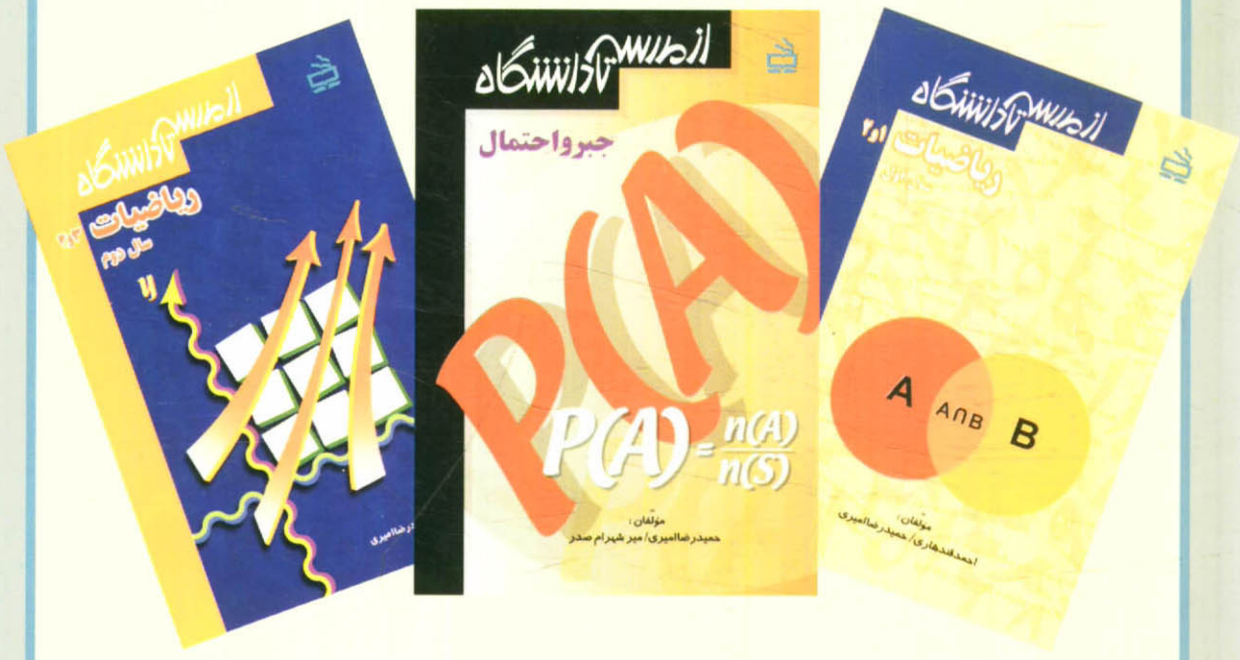
این کتاب، اولین جلد از سری کتابهایی است که زیر عنوان کلّی «کتابهای آموزش المپیاد ریاضی» توسط انتشارات مدرسه منتشر می شود. این کار اگرچه کمی دیر انجام شده است، اما به هر تقدیر، حرکتی ضروری است که تاکنون انجام نشده و جای کتابهای این چنین در میان کتابهای آموزشی، به خصوص شاخهٔ المپیاد ریاضی تا حال خالی بوده است.

ناشر برگزیده
سالهای ۷۳ و ۱۳۷۵

انتشارات مدرسه منتشر کرده است
سری کتابهای «از مدرسه تا دانشگاه»

هدف از چاپ سری کتابهای «از مدرسه تا دانشگاه» پر کردن خلأ موجود بین کتابهای کمک درسی و کتابهای آمادگی برای کنکور است.

دانش‌آموزان با مطالعهٔ این سری کتابها، اطلاعات لازم، اعم از مفاهیم درسی، نکته‌های پنهان در لابه‌لای این مفاهیم و قضیه‌ها و مسائل مهم را کسب کرده و با پرسشهای چهارگزینه‌ای و حل تشریحی آنها و آزمونهای چهارگزینه‌ای آشنا می‌شوند، تا هم برای پاسخ‌گویی به پرسشهای تشریحی و هم برای شرکت در کنکورهای سراسری آمادگی پیدا کنند.



کتابهای زیر از این سری در دست چاپ است:

۱- ریاضی عمومی ۱ و ۲ پیش دانشگاهی رشته علوم تجربی
۲- حسابان ۱ و ۲
۳- حساب دیفرانسیل ۱ و ۲
۴- ریاضیات سال سوم تجربی
۵- ریاضیات گسسته
۶- هندسه تحلیلی و جبر خطی

انتشارات مدرسه

کد ۹۲۴/۱