مجله ریاضی

برهان

۲۴

برای دانش آموزان دبیرستان

سال هفتم ، شماره چهارم، بهار ۱۳۷۷ ، بها ۲۰۰۰ ریال

به همراه پرسشهای چهارگزینه‌ای
نظام جدید با حل تشریحی
برای آمادگی در کنکور

بسم الله الرحمن الرحیم

انتشارات مدرسه وابسته به وزارت آموزش و پرورش

صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه ❑ مدیر مسئول: محمود ابراهیمی
سردبیر: حمیدرضا امیری ❑ مدیر داخلی: میرشهرام صدر
اعضای هیئت تحریریه: آقایان: ❑ حمیدرضا امیری ❑ محمدهاشم رستمی ❑ احمد قندهاری ❑ میرشهرام صدر
سیدمحمدرضا هاشمی موسوی ❑ غلامرضا یاسی‌پور (با تشکر از همکاری ارزندهٔ آقای پرویز شهریاری)
مدیر فنی: هوشنگ آشتیانی ❑ طراح گرافیک: امیر بابایی ❑ چاپ و صحافی: چاپخانه مدرسه

مطالب این شماره

■ سال هفتم، بهار ۱۳۷۷، شمارهٔ چهارم

برهان تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:
● نگارش مقالات کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتب ریاضی دبیرستان) ● طرح مسائل کلیدی (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن ● طرح مسائل مسابقه‌ای (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن ● طرح معماهای ریاضی ● نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

■ هیئت تحریریه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافهٔ مقالات آزاد است.
■ مقالات وارده باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.
■ مقالات مجله با رسم‌الخط انتشارات مدرسه به چاپ خواهد رسید.
■ مقالات رسیده مسترد نمی‌شود.

برهان هر ۳ ماه یک شماره منتشر می‌شود.

نشانی: خیابان سپهبد قرنی، خیابان سپند شرقی، پلاک ۳۸
تلفن: ۸۸۴۹۹۰۴، دورنویس (فاکس): ۸۸۲۰۵۹۹، صندوق پستی: ۱۴۱۵۵/۱۹۴۹

کد ۶۳۰۱

حرف اوّل

این محرّم و صفر است که اسلام را، زنده نگه داشته است.

(امام خمینی ره)

در طول تاریخ اسلام، همواره مذهب مقدّس شیعه، مورد تهاجم و مظلومیّت قرار گرفته است. هر جا، دَم از پیروی علی و آل علی علیهم السّلام بوده است، دشمنان اهل بیت به عناوین گوناگون، قصد ضربه زدن به پیکر اسلام و نابود ساختن آن را داشته و دارند، که این گونه عداوت و دشمنی با اسلام و پیامبر اسلام و خاندان پاکنهاد آن حضرت ـ صلی الله علیه و آله ـ تاکنون هم ادامه دارد.

آنان به کوچکترین بهانه‌ای، قصد خلع سلاح امّت مسلمان و انقلابی ما را دارند. راستی، مگر سلاح ما چیست؟!

آیا چیزی جز ایمان به حقّ و حقیقت است؟ مگر نه با همین ایمان و باور، هشت سال دفاع مقدّس را پیروزمندانه پشت سر گذاشتیم؟

در دوران جنگ، امّت شهیدپرور ایران، با همهٔ توان جنگیدند؛ چه آنان که در خطّ مقدم جبهه با شعار «الله‌اکبر» به قلب دشمن حمله می‌بردند و چه آنان که در پشت جبهه، تدارکات و پشتیبانی رزمندگان اسلام را بر دوش می‌کشیدند.

به راستی که شهرهای ما، جبهه و هر خانه‌ای، خاکریزی شده بود تا دشمنِ یاری شده از سوی ابرقدرتها را از پای درآورند؛ و بحق می‌توان گفت که الگوی برجسته و بارز این همه ایثار و مقاومت، حضرت سیّدالشهدا ـ علیه السلام ـ و اهل بیت پاک و یاران باوفای آن حضرت هستند؛ و اگر چنین ادّعا کنیم که پیروزی ما، مدیونِ باور به «الله» و پیروی این الگوها و زاییدهٔ یکپارچگی و همدلی دوران جنگ می‌باشد، سخن به گزافه نگفته‌ایم.

امّا، شما ای عزیزان دانش‌آموز! هوشیار باشید که دشمن از مکر و حیله‌های جدید و نو دست برنداشته است و با سلاحهای مرئی، نامرئی و پیشرفتهٔ خود، سعی بر بمباران اعتقادات، ایمان، وحدت و ایثار ما را دارد و پی در پی بر حمله‌های تهاجمی خود با به کارگیری بمبهای خوشه‌ای ماهواره، رگبار فیلمهای ویدئویی، مینهای ضدنفرِ کتابی و موسیقیهای مبتذل گوش خراشِ خود، می‌افزاید. این، هشداری است بس بزرگ به جامعهٔ جوان و در حال رشد میهن اسلامی ما، که همهٔ اقشار آن، اعم از پدران، مادران، معلّمان، مدیران، دانش‌آموزان و ... باید احساس وظیفه کنیم و برای حفظ دستاوردهای عظیم این تحوّل بزرگ و بی‌نظیر، خط مقدّمِ جبههٔ فکر و اندیشه را رها نکنیم؛ و ـ ان شاء الله ـ با استمداد از حضرت ولیّ‌عصر ـ عجل‌اللّه تعالی فرجه الشریف ـ و رهنمودهای مقام معظم رهبری، حمله‌های فرهنگی دشمن را خنثی خواهیم کرد، که «ما پیروزیم».

والسلام ـ سردبیر

شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۲۴)

«...وآن که فرموده که مولانا بدرالدین، ریاضیات نیک می‌داند، در ریاضیات بی‌مسأله، چند از اقلیدس به یاد دارد و قطعاً به عمل در نمی‌تواند آورد. چنان است که کسی بعضی قواعد نحوی یاد دارد و هیچ ترکیب عربی نتواند کرد. چون مولانا بدرالدین سخنی چند از اقلیدس گفته باشد، او پنداشته که ریاضیات می‌داند...»

از نامهٔ جمشید کاشانی به پدرش

● پرویز شهریاری

غیاث‌الدین جمشید *کاشانی*، یکی از بزرگترین ریاضیدانان و اخترشناسان ایرانی است که در زمان حکومت تیموریان می‌زیسته و به خواست *الغ‌بیگ*، نوهٔ تیمور، به سمرقند رفته و با یاری چند ریاضیدان و اخترشناس دیگر، رصدخانهٔ بزرگ سمرقند را بنیان نهاده است. نوشته‌هایی از جمشید کاشانی، باقی‌مانده است که توان بی‌اندازهٔ او را در حل مسأله‌های ریاضی به خوبی نشان می‌دهد. همچنین نامه‌ای از کاشانی، که از سمرقند به پدرش در کاشان نوشته و یکی از پر ارزش‌ترین اثرهای ماندگار در تاریخ دانش است. به ظاهر، پدر جمشید، از بدرالدین نامی، به عنوان یک ریاضیدان یاد کرده است که پسرش جمشید، در پاسخ او، این چند سطر را نوشته است. اگر سخن کاشانی را به زبان ساده امروزی درآوریم، چنین گفته است: اگر کسی تنها برخی قضیه‌ها و دستورهای ریاضی را بداند و نتواند، مسأله‌های تازه‌ای که در ریاضیات و یا حالتهای کاربردی آن در برابر او قرار می‌گیرد، حل کند، ریاضیدان نیست. ریاضیدان کسی است که از عهدهٔ حل مسأله‌های تازه برآید.

ولی برای این که بتوان مسأله‌های تازهٔ ریاضی را حل کرد، پیش از هر چیز، باید با روشهای حل مسأله آشنا بود. این روشها، چندان زیادند که برای تجزیه و تحلیل همهٔ آنها، باید صفحه‌های زیادی را سیاه کرد. ولی نیازی به چنین بحث طولانی نداریم، به‌ویژه که در دورهٔ دبیرستان، با بسیاری از این روشها آشنا شده‌اید و ضمن حل مسأله، کاربردهای آنها را فراگرفته‌اید. در مقاله‌های گذشته هم، برخی از این روشها را به یاد آورده‌ایم و دربارهٔ آنها صحبت کرده‌ایم. در این جا، تنها از چند روش مبنایی، که به کار استدلال منطقی در ریاضیات می‌خورند، نام می‌بریم و با ذکر مثال، با نحوهٔ کاربرد آنها در حل مسأله‌های ریاضی آشنا می‌شویم.

§۱. شباهت مسأله با مسأله‌های ساده‌تر

مسأله‌ای در برابر شماست که راه حل آن را نمی‌دانید در برابر خود، این پرسشها را قرار دهید و تلاش کنید که پاسخ آنها را پیدا کنید آیا این مسأله، حالت یا حالتهای خاصی دارد؟ آیا

مسأله‌ای ساده‌تر که با این مسأله شباهت داشته باشد، به یادتان می‌آید؟ آیا می‌توانید با رسم شکلهای مختلف یا با آزمایش عددهای مختلف، مسأله را عینی‌تر و ملموس‌تر کنید؟ ... پرسشهایی از این‌گونه، می‌تواند شما را با مسأله آشناتر کند، به‌جز آن، مسأله‌های دیگری در برابر شما قرار گیرد که از مسأله اصلی ساده‌تر و احتمال حل آنها بیشتر است. و بعد، اگر این مسأله یا مسأله‌های ساده‌تر را حل کردید، از خود بپرسید : آیا می‌توان از همین راه حل، یا راه حلی شبیه آن، مسألهٔ اصلی را حل کرد؟ در راه حل مسأله ساده‌تر، چه تغییری بدهیم تا بتواند برای حل مسألهٔ ما مفید باشد؟ و ...

البته، در پیدا کردن مسأله‌های مشابه و یا به اصطلاح «شبیه‌سازی» باید هشیار بود. هر شباهتی ما را به نتیجه نمی‌رساند ؛ تنها شبیه بودن نمی‌تواند پایه‌ای برای نتیجه‌گیری باشد. بهتر است این نکته را از زبان یکی از برجسته‌ترین ریاضیدانان سدهٔ بیستم بشنویم.

آلکساندر خین چین (۱۸۹۴ ــ ۱۹۵۹ میلادی)، ریاضیدان بزرگ، مربی برجسته و عضو فرهنگستان علوم اتحاد شوروی، در زمینهٔ تابعهای با متغیر حقیقی، تابعهای اندازه‌پذیر، تعمیم مفهوم دیفرانسیل و انتگرال و نظریهٔ متری عددها، موفقیتهای چشمگیری به دست آورد، ولی شهرت اصلی او، به خاطر پایه‌گذاشتن نظریهٔ تازهٔ احتمال بود. در همایشی که در سال ۱۹۶۰، در برکلی امریکا، با شرکت گروه بزرگی از ریاضیدانان جهان، برای بحث در نظریهٔ احتمال و آمار ریاضی تشکیل شده بود، نشست ویژه‌ای به یاد خین‌چین اختصاص دادند و نقش او را در پیشرفت دانش گرامی داشتند.

آلکساندر خین‌چین، در یکی از مقاله‌های خود، با عنوان «نقش تربیتی درس‌های ریاضیات» می‌نویسد :

> «... نتیجه‌گیری از راه شباهت ــ چه در دانشهای تجربی و چه در زندگی روزمره ــ روش معمولی و قانونی، برای کشف قانون‌مندی‌های تازه است. اگر فرض کنیم، طبیعت شناسی متوجه شود، همهٔ گونه‌هایی که دارای نشانه‌های A و B هستند و تاکنون به آنها برخورده‌اند، در ضمن دارای نشانهٔ C هم هستند، آن وقت اگر گونهٔ تازه‌ای را پیدا کند که نشانه‌های A و B در آن وجود داشته باشد، به طور طبیعی نتیجه می‌گیرد که این گونهٔ تازه هم دارای نشانهٔ C است. این گونه نتیجه‌گیری از راه شباهت، موقعی قانع کننده‌تر می‌شود که افزون بر آزمایش، نوعی ملاحظهٔ نظری هم در این باره وجود داشته باشد که همراهی C با A و B تصادفی نیست و زمینه‌ای در خود این نشانه‌ها و یا در جای دیگری دارد (و بیشتر، می‌توان چنین ملاحظه نظری را پیدا کرد).
>
> تنها در ریاضیات، بر ضرورت این امر تأکید می‌شود که : این ملاحظهٔ نظری را باید، تا آخر و به طور کامل، ثابت کرد. باید با دقت کامل ثابت کنیم، وجود نشانه‌های A و B، همیشه به معنای وجود نشانهٔ C است، و اگر نتوانیم چنین اثباتی را پیدا کنیم، حق نداریم از روی نشانه‌های A و B، وجود نشانهٔ C را نتیجه بگیریم. ولی در حالت اول (یعنی وقتی این قضیه ثابت شود که « C نتیجه‌ای است از A و B»)، کاربرد ساده این قضیه را دیگر نمی‌توان «نتیجه‌گیری از راه شباهت» نامید. بنابراین، می‌توان گفت که در ریاضیات، نتیجه‌گیری از راه شباهت، به طور کلی منع شده است [و این، البته به معنای بی‌اعتباری نتیجه‌گیری‌های بزرگی که از راه تجربه به دست آمده‌اند، نیست] ، در حالی که در دانش‌های تجربی و فعالیتهای عملی، نتیجه‌گیری از راه شباهت، نقشی عظیم دارد و یکی از عمده‌ترین و اساسی‌ترین روش‌ها، برای پیدا کردن قانون‌مندیهای تازه است.
>
> به این ترتیب، دوباره در برابر پرسشی قرار می‌گیریم : در این رابطه، چه می‌توان کرد تا درس‌های ریاضیات، برای فرهنگ عمومی تفکر، نقشی تربیت کننده داشته باشد؟ پاسخ روشن است : تربیت ریاضی ذهن و خو گرفتن به این موضوع که ؛ نتیجه‌گیری و پایهٔ شباهت، تنها می‌تواند در خدمت روش‌های آزمایشی باشد و به خودی خود هیچ‌گونه نیروی استدلالی ندارد، به ناچار آدمی را وا می‌دارد تا در زمینه‌های دیگر اندیشه هم با احتیاط بیشتر نسبت به این گونه استنباط‌ها روبه‌رو شود و به یاد بیاورد که در هیچ حالتی، نمی‌توان بدون دقت کافی و بدون پیدا کردن نشانه‌های اساسی دیگر، تنها براساس شباهت داوری کرد.

هر کدام از ما، این ویژگی اندیشهٔ ریاضی را آزمایش کرده‌ایم و دریافته‌ایم که این تأثیر، چگونه موجب بالا رفتن «فرهنگ *اندیشیدن*» ما شده است. برخورد انتقادی با نتیجه‌گیری‌هایی که براساس شباهت به دست می‌آیند، یکی از بهترین و مهمترین نشانه‌ها، برای تشخیص اندیشهٔ رشد

یافتـهٔ علمی از اندیشـهٔ سطحی و سـاده لوحـانه است ؛ و دانش ریاضی خـواسـتگاهی مناسب برای تربیت اندیشهٔ ابتدایی و تکامل آن به سمت اندیشهٔ علمی است.

اگر بخواهیم، توصیه‌های خین‌چین را در نظر داشته باشیم، باید به یک نکته اساسی توجه کنیم که در مسأله‌های ریاضی، «شباهت» می‌تواند وسیله و راهنمای ما برای کشف مسأله‌های تازه و یا احتمال وجود یک ویژگی در یک شکل یا یک دستور باشد، ولی نمی‌تواند جانشین استدلال شود. در ریاضیات، برای پذیرفتن یک ویژگی یا یک قاعده، باید وجود و درستی آن، با استدلال منطقی ثابت شود.

به هر حال، «شباهت» یکی از انگیزه‌هایی است که می‌تواند ذهن جستجوگر را در جهت‌های گوناگون، به اندیشه وادارد و موجبی برای کشف‌های تازه و روشهای ساده‌تر باشد **یوهان کپلر** می‌گفت :

« ... من بیش از هر چیز، به شباهت‌ها، که بهترین معلمان من بوده‌اند، ارج می‌گذارم. آنها به همهٔ رازهای طبیعت آگاهی دارند و به‌ویژه در هندسه، نباید نسبت به آنها بی‌اعتنا بود...»

به مثالی از جبر توجه کنیم : آیا می‌توانیم از یک عبارت جبری جذر بگیریم .روش جذر گرفتن از عددهای طبیعی را می‌دانیم. آیا عبارت جبری، با عدد شباهتی دارد؟ وقتی با عدد طبیعی ۲۳۷۱۶ سر و کار داریم، می‌توان آن را به این صورت نوشت :

$$23716 = 2\times10^4 + 3\times10^3 + 7\times10^2 + 1\times10 + 6$$

در واقع، از آن جا که عددنویسی ما در مبنای ۱۰ است، توانستیم عدد را به صورت ضرب رقم‌ها در توان‌های ۱۰ بنویسیم، اگر همین عدد ۲۳۷۱۶ را در عددنویسی به مبنای ۹ به ما داده بودند، آن وقت به این صورت در می‌آمد :

$$(23716)_9 = 2\times9^4 + 3\times9^3 + 7\times9^2 + 1\times9 + 6$$

اکنون، اگر مبنای عددنویسی را x بگیریم، باید بنویسیم :

$$(23716)_x = 2x^4 + 3x^3 + 7x^2 + x + 6$$

پس، می‌توان عبارت جبری را (اگر شامل یک مجهول باشد)، عددی در مبنای آن مجهول به حساب آورد، ولی در این‌جا، یعنی پذیرفتن عبارت جبری به عنوان تعمیم مفهوم عدد، نکته‌های تازه‌ای وجود دارد که باید به آنها توجه کرد :

۱) در عدد طبیعی، هر یک از رقم‌ها از مبنای عددنویسی کوچکترند، در حالی که در عبارت جبری، مقدار ضریب‌ها، می‌توانند از مقدار x (که به جای مبنا پذیرفته‌ایم) بزرگتر باشد ؛

۲) در عـددنویسی عـادی، رقم‌ها، عـددهایی درست و مثبت‌اند ؛ در حالی که در عبارت جبری، ضریب‌ها می‌توانند منفی، کسری یا گنگ باشند.

همین دو نکته موجب می‌شود که، اگر بخواهیم از یک عبارت جبری، در شباهت با حساب و به کار گرفتن همان روش جذر گرفتن از عددهای طبیعی، جذر بگیریم، باید متوجه برخی اختلاف‌ها باشیم، از آن جمله :

۱) از عبارت جبری، وقتی می‌توان به شیوهٔ حساب جذر گرفت که از درجهٔ زوج باشد. در جبر از عبارت‌های با درجهٔ فرد (درجهٔ سوم، پنجم و غیره) نمی‌توان جذر گرفت.

۲) بهتر است در حالتی به فکر استفاده از روش حسابی، برای جذر گرفتن از عبارت‌های جبری بیفتیم، که ضریب بزرگترین درجه، مجذور کامل و سایر ضریب‌ها، عددهایی درست (مثبت، منفی یا صفر) باشند، اگرچه حالت‌هایی پیش می‌آید که با ضریب‌های کسری یا گنگ هم بتوان جذر گرفت.

مثال ۱: این معادلهٔ درجهٔ چهارم را حل کنید :

$$9x^4 - 12x^3 + 10x^2 - 4x - 288 = 0$$

آزمایش می‌کنیم، شاید به یاری جذر گرفتن از عبارت درجهٔ چهارم سمت چپ برابری، روزنه‌ای برای حل معادله پیدا شود. به‌این ترتیب :

$$\begin{array}{r|l}
\sqrt{9x^4 - 12x^3 + 10x^2 - 4x - 288} & 3x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2}
-9x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad & 6x^2 - 2x \\
 & \quad\;\; -2x \\ \hline
-12x^3 + 10x^2 \qquad\qquad & 6x^2 - 4x + 1 \\
12x^3 - 4x^2 \qquad\qquad & \qquad\quad\;\; 1 \\ \cline{1-1}
6x^2 - 4x - 288 & \\
-6x^2 + 4x - 1 & \\ \cline{1-1}
-289 \quad &
\end{array}$$

اگر دقت کنید، کاملاً شبیه جذر گرفتن از عدد، عمل کردیم : جذر $9x^4$ برابر $3x^2$ می‌شود، مجذور $3x^2$ را از عبارت اصلی کم کردیم و دو جملهٔ بعدی را پایین آوردیم. نخستین جملهٔ دوجـــمله‌ای $-12x^3 + 10x^2$ را بر دو برابر $3x^2$ ، یعنی $6x^2$ ،

تقسیم کردیم، نتیجهٔ تقسیم، یعنی $-2x$ را پهلوی $6x^2$ نوشتیم و حاصل ضرب عبارتی که به دست می‌آید، در $-2x$ را از دوجمله‌ای $-12x^3+10x^2$ کم کردیم و دو جملهٔ دیگر از عبارت اصلی را پایین آوردیم و ...

جذر عبارت، برابر $3x^2-2x+1$ و باقی‌مانده جذر برابر -289 می‌شود. بنابراین می‌توان نوشت:

$$9x^4-12x^3+10x^2-4x-288=$$
$$=(3x^2-2x+1)^2-289=$$
$$=(3x^2-2x-16)(3x^2-2x+18)$$

عبارت درجهٔ چهارم، به صورت ضرب دو عبارت درجهٔ دوم تجزیه شد و، بنابراین، معادلهٔ درجهٔ چهارم قابل حل است. معادلهٔ درجهٔ چهارم، دو ریشهٔ حقیقی و دو ریشه موهومی دارد. ریشه‌های حقیقی معادله -2 و $\frac{8}{3}$ اند.

البته، حالتهایی وجود دارد که با وجود ضریب‌های گنگ (یا کسری) و با وجود این که ضریب بزرگترین درجهٔ عبارت جبری، مجذور کامل نیست، بتوان همین روش را به کار برد.

مثال ۲: این معادله را حل کنید:

$$2x^4-2\sqrt{2}x^3-(4\sqrt{2}-1)x^2-4x-5=0$$

اگر از عبارت سمت چپ برابری جذر بگیریم، به عبارت $\sqrt{2}x^2+x-2$ و باقی ماندهٔ -9 می‌رسیم، یعنی

$$2x^4-2\sqrt{2}x^3-(4\sqrt{2}-1)x^2-4x-5$$
$$=(\sqrt{2}x^2+x-2)^2-9=(\sqrt{2}x^2+x+1)(\sqrt{2}x^2+x-5)$$

عبارت درجهٔ چهارم به صورت ضرب دو عبارت درجهٔ دوم تجزیه شد که یکی از آنها، ریشه‌های موهومی و دیگری ریشه‌های حقیقی دارد و به سادگی قابل محاسبه‌اند.

مثال ۳: این معادله را حل کنید:

$$x^4-2ax^3+a^2x^2-1=0$$

برای حل این معادله، به گونهٔ دیگری از «شباهت» استفاده می‌کنیم. معادله، نسبت به x از درجهٔ چهارم است، ولی نسبت به a از درجهٔ دوم، نسبت به a منظم می‌کنیم؛ البته به شرطی از این راه به نتیجه می‌رسیم که، معادلهٔ درجهٔ دوم نسبت به مجهول a، ریشه‌های گویا داشته باشد:

$$x^2a^2-2x^3a+x^4-1=0$$

که برای ریشه‌های آن به دست می‌آید:

$$a=\frac{x^2+1}{x}\ ,\ a=\frac{x^2-1}{x}$$

و بنابراین، به دو معادلهٔ درجهٔ دوم زیر می‌رسیم:

$$x^2-ax+1=0\ ,\ x^2-ax-1=0$$

که، پیدا کردن ریشه‌های آنها و یا بحث دربارهٔ وجود ریشه‌های حقیقی در آن‌ها، دشوار نیست.

گاهی چنین روشهای مشابهی ما را به جاهای جالب‌تر می‌کشاند. به این مثال توجه کنید:

مثال ۴: این معادلهٔ درجه سوم را حل کنید:

$$x^3-(2\sqrt{5}+1)x^2+(6+\sqrt{5})x-\sqrt{5}-1=0$$

معادله از درجهٔ سوم است. پارامتری هم وجود ندارد که، به‌احتمالی، نسبت به پارامتر قابل حل باشد... ولی اگر $\sqrt{5}$ را a بگیریم و در ضریب x، عدد ۶ را برابر ۱+۵، یعنی a^2+1 به‌حساب آوریم، به این معادله می‌رسیم:

$$x^3-(2a+1)x^2+(a^2+a+1)x-a-1=0$$

که نسبت به a، از درجهٔ دوم و به صورت زیر است:

$$xa^2-(2x^2-x+1)a+(x^3-x^2+x-1)=0$$

این معادله، ریشه‌های گویا دارد و مقدارهای a، بر حسب x، چنین می‌شود:

$$a=x-1\ ,\ a=\frac{x^2+1}{x}$$

که اگر، به جای a، مقدارش $\sqrt{5}$ را بگذاریم:

$$x=\sqrt{5}+1\ ,\ x^2-\sqrt{5}x+1=0$$

پاسخ: $x_1=\sqrt{5}+1$ ، $x_2=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ، $x_3=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

ولی استفاده از شباهت، بیش از هرجا برای کشف و حل مسأله‌ها یا قضیه‌های هندسهٔ فضایی به درد می‌خورد. وقتی قضیه‌ای یا مسأله‌ای دربارهٔ مثلث، در برابر ما باشد، می‌توان اندیشید که «شبیه فضایی» این قضیه یا مسأله، به‌چه صورتی در می‌آید! در این جا چند مسألهٔ مشابه را آورده‌ایم (در هندسهٔ روی صفحه و در هندسهٔ فضایی)؛ دربارهٔ اثبات یا حل آنها (چه مسألهٔ روی صفحه و چه مسألهٔ فضایی شبیه آن) بیندیشید و تلاش کنید که استدلال لازم را پیدا کنید.

مثال ۵: اگر r طول شعاع دایرهٔ محاطی و h_1 ، h_2 ، h_3 ، طول ارتفاع‌های یک مثلث باشند، داریم:

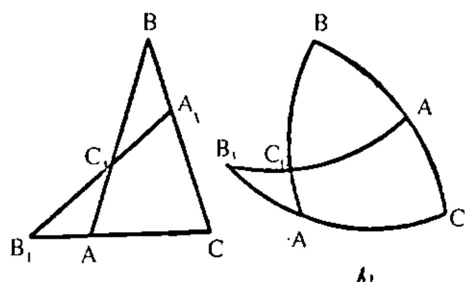
$$\frac{1}{r}=\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}$$

اکنون یک چهار وجهی در نظر می‌گیریم، طول شعاع کرهٔ

محاطی آن را r و طول ارتفاع‌های چهار وجهی را h_1، h_2، h_3، h_4، فرض می‌کنیم، در این صورت داریم :

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}$$

مثال ۶: قضیهٔ منه‌لائوس در صفحه و در فضا. مثلث ABC را روی صفحه (شکل ۱ ــ a) و مثلث کروی ABC را روی سطح کره (شکل ۱ ــ b) در نظر می‌گیریم (مثلث کروی، مثلثی است که، ضلع‌های آن، کمان‌هایی از دایره‌های عظیمهٔ کره باشد)،



شکل ۱

نقطه‌های A_1 و B_1 و C_1 را، به ترتیب، روی ضلعهای BC، AC و AB و یا امتداد آنها انتخاب کرده‌ایم. برای این‌که سه نقطهٔ A_1، B_1 و C_1، در حالت صفحه، روی یک خط راست و در حالت فضایی، روی کمانی از یک دایرهٔ عظیمه باشند، باید داشته باشیم :

برای مثلث روی صفحه :

$$\frac{|CA_1|}{|A_1B|}\cdot\frac{|AC_1|}{|C_1B|}=\frac{|CB_1|}{|B_1A|}$$

(و یا برابری‌های مشابه آن) :

برای مثلث کروی :

$$\frac{\sin\widehat{CA_1}}{\sin\widehat{A_1B}}\cdot\frac{\sin\widehat{AC_1}}{\sin\widehat{C_1B}}=\frac{\sin\widehat{CB}}{\sin\widehat{B_1A}}$$

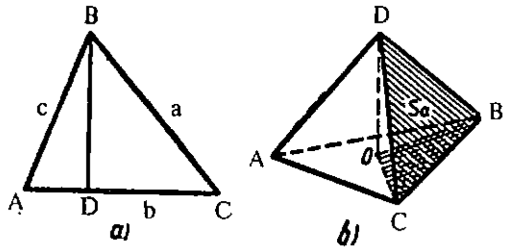
مثال ۷: هرم ABCD را متناظر با مثلث ABC می‌گیریم. فرض می‌کنیم :

$|BC|=a\ ,\ |AC|=b\ ,\ |AB|=c$

در این صورت داریم:

$a\cos\hat{B}+b\cos\hat{A}=c$

اکنون، اگر S_a را مساحت وجه روبه‌رو به رأس A، S_b را مساحت وجه روبه‌رو به رأس B و غیره، در چهار وجهی، فرض



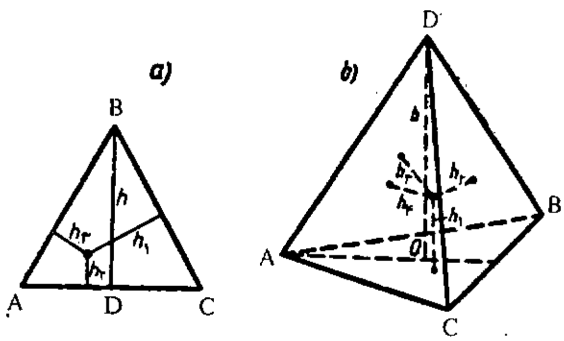
شکل ۲

کنیم (شکل ۲)، در ضمن زاویه‌های دو وجهی هرم را در یال‌های BC، AC و AB به ترتیب، برابر α، β و γ بگیریم، داریم :

$S_a.\cos\alpha+S_b.\cos\beta+S_c.\cos\gamma=S_d$

مثال ۸: اگر h_1، h_2 و h_3 فاصله‌های نقطهٔ دلخواهی از درون مثلث متساوی‌الاضلاع تا سه ضلع آن و h طول ارتفاع مثلث باشد، داریم :

$h_1+h_2+h_3=h$



شکل ۳

به همین ترتیب، اگر h_1، h_2، h_3 و h_4 را فاصله‌های نقطهٔ دلخواهی از درون چهاروجهی منتظم تا وجه‌های آن، و h را طول ارتفاع آن بگیریم، داریم (شکل ۳) :

$h_1+h_2+h_3+h_4=h$

مثال ۹: چهارضلعی روی صفحه را می‌توان، به مفهومی یک شش ضلعی دانست، به شرطی که دو قطر چهار ضلعی را هم، دو ضلع رو به‌روی آن به حساب آوریم. در این صورت، چهار وجهی، یک شش ضلعی فضایی می‌شود و به مفهومی، می‌توان آن را مشابه چهار ضلعیِ روی صفحه دانست و این دو قضیهٔ شبیه هم را خواهیم داشت :

قضیهٔ مربوط به صفحه برای چهار ضلعی: برای این که

قطرهای یک چهار ضلعی بر هم عمود باشند، لازم و کافی است که مجموع مجذورهای طول‌های دو ضلع روبه‌روی آن، با مجموع مجذورهای طول‌های دو ضلع روبه‌روی دیگر، برابر باشند.

قضیهٔ روی صفحه‌برای شش ضلعی: برای این که دو ضلع روبه‌رو در یک شش ضلعی، بر هم عمود باشند، لازم و کافی است که، مجموع مجذورهای طول‌های هر دو ضلع روبه‌روی دیگر، با هم برابر باشند.

قضیهٔ فضایی برای چهار وجهی: برای این که دو یال روبه‌رو در یک چهار وجهی بر هم عمود باشند، لازم و کافی است که، مجموع مجذورهای طول‌های هر دو یال روبه‌روی دیگر، با هم برابر باشند.

مثال ۱۰: در مثلث ABC، طول ضلع‌های روبه‌رو به‌رأس‌های A، B و C را، به ترتیب، a، b و c می‌گیریم.

در این صورت داریم (رابطهٔ کسینوس‌ها در مثلث) :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos \hat{A}$$

اکنون در چهاروجهی ABCD فرض می‌کنیم :

$$S_{BCD} = S_1 ,\ S_{ACD} = S_2 ,\ S_{ABD} = S_3 ,\ S_{ABC} = S_4$$

در ضمن، زاویه‌های دو وجهی مربوط به یال‌های AC، AD و AB را، α، β و γ می‌نامیم. در این صورت داریم :

$$S_1^2 = S_2^2 + S_3^2 + S_4^2 - 2S_2S_3\cos\alpha - 2S_2S_4\cos\beta - 2S_3S_4\cos\gamma$$

تا بعد ...

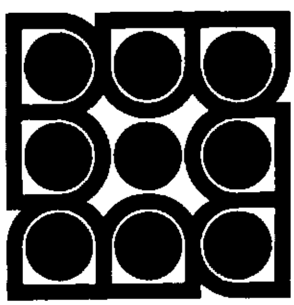
تفریح اندیشه ۱

پیک

این معما، معمایی کلاسیک در جبر است که در بسیاری از کتابها آمده و به دوران باستان باز می‌گردد. اگر آن را پیش از این ندیده‌اید، اکنون به آن توجه کنید.

پیکی از عقب ارتش متحرکی، ۱۰۰ کیلومتر به جلو حرکت می‌کند، پیام را می‌رساند، و بلافاصله به عقب برمی‌گردد و درمی‌یابد که ۱۰۰ کیلومتر جلوتر از نقطهٔ آغاز است.

مجموعاً چه‌قدر حرکت کرده است؟ البته، سرعت حرکت ارتش و پیک، همواره ثابت بوده است.

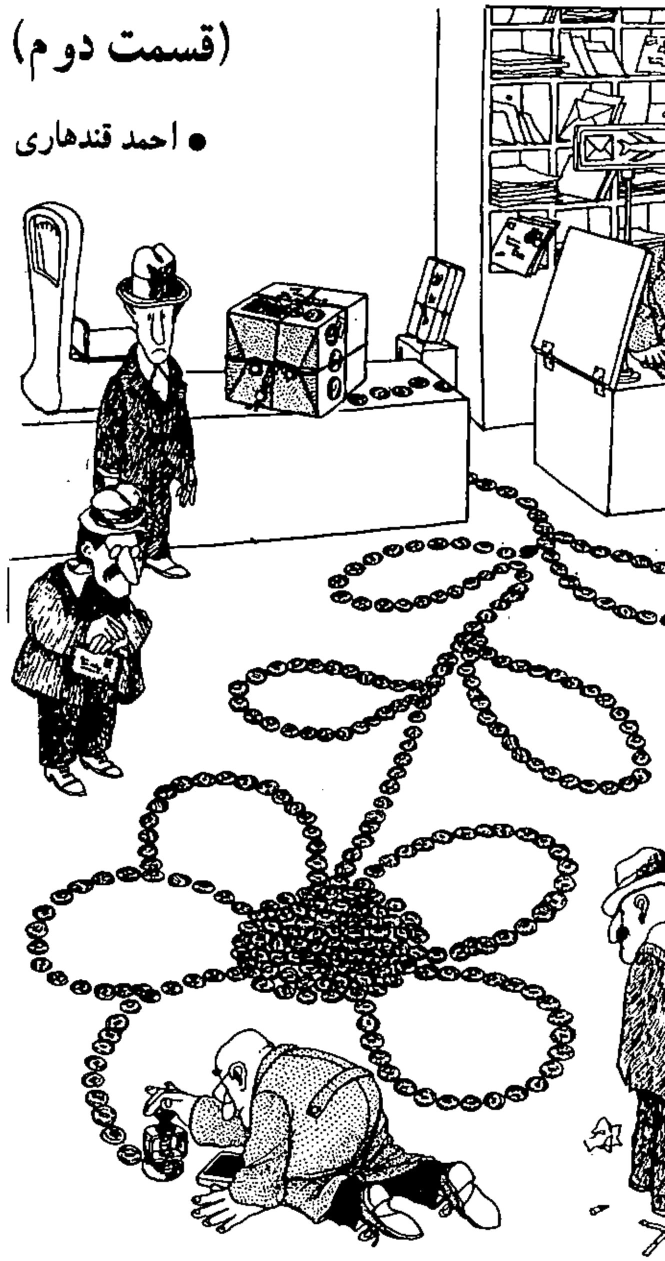


جواب در صفحه ۸۸

دنباله

(قسمت دوم)

● احمد قندهاری



دنباله‌ها یکی از مفاهیم اساسی آنالیز است. زیرا دنباله‌ها تابعهای ساده‌ای هستند که دامنه تعریف (حوزه تعریف) آنها مجموعه اعداد طبیعی یا قطعه‌ای از آن و برد آن‌ها زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی است، این تابعهای ساده می‌توانند مفهوم حدّ را دقیقاً نشان دهند.

تابع a با ضابطه $\begin{cases} a(n)=2n-5 \\ N \to R \end{cases}$ ، $n \in N$ را در نظر می‌گیریم.

در این تابع می‌توان نوشت.

$a_1=-3$

$a_2=-1$

$a_3=1$

$a_4=3$

$a_n=2n-5$

....

ملاحظه می‌کنیم که مجموعه $\{-3,-1,1,3,\dots,2n-5,\dots\}$ ، $n \in N$ برد این تابع است.

اعداد بی‌پایان $-3,-1,1,3,\dots,2n-5,\dots$ را یک دنباله نامتناهی گوییم، به‌طوری‌که قبلاً گفته شد، یک دنبالهٔ نامتناهی، مجموعه برد تابعی است که دامنه آن مجموعه N و برد آن زیر مجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد.

تابع a با ضابطهٔ $\begin{cases} a(n)=\frac{1}{n} \\ N \to R \end{cases}$ ، $n \in N$ را در نظر می‌گیریم.

برد این تابع مجموعه $\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots,\frac{1}{n},\dots\right\}$ ، $n \in N$ است.

اعداد $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots,\frac{1}{n},\dots$ را یک دنباله نامتناهی گوییم. همان طوری که قبلاً گفته شد. اگر دامنه تعریف این گونه تابعها، قطعه‌ای از مجموعهٔ N باشد، آن گاه برد تابع یک دنباله متناهی خواهد شد. مثلاً تابع با ضابطه

$$\begin{cases} a(n)=2n+5 \\ N \to R \ , \ n \in N \ , \ n<63 \end{cases}$$

برد این تابع مجموعهٔ $\{7,9,11,\dots,129\}$ است، اعداد $7,9,11,\dots,129$ را یک دنباله متناهی گوییم.

پس به طور خلاصه :

برد تابع a از N به R را یک دنباله نامتناهی گوییم.

مانند توابع زیر $n \in N$

۱) $\begin{cases} a(n)=5n-1 \\ N \to R \end{cases}$

۲) $\begin{cases} a(n)=2n+3 \\ N \to R \end{cases}$

$$3)\begin{cases} a(n)=\dfrac{n}{n+4} \\ N\to R \end{cases}$$

$$4)\begin{cases} a(n)=\sqrt{n(n+1)} \\ N\to R \end{cases}$$

توجه: از این به بعد هر جا دنباله‌ای مطرح می‌شود، منظور دنباله نامتناهی است مگر آن که قید متناهی بیان شود.

تابع a با ضابطه $\begin{cases} a(n)=\dfrac{n+1}{2n-1} \\ N\to R \end{cases}$ $n\in N$ را در نظر می‌گیریم.

در این تابع داریم :

$a_1=\dfrac{2}{1}=2$

$a_2=\dfrac{3}{3}=1$

$a_3=\dfrac{4}{5}$

....

$a_n=\dfrac{n+1}{2n-1}$

....

قبلاً گفتیم که جمله اول دنباله را با a_1 و جمله دوم دنباله را با a_2 و جمله سوم دنباله را با a_3 و ... و جمله (n)ام دنباله را با a_n نشان می‌دهیم و ... و این دنباله را چنین نشان می‌دهیم. $a_1,a_2,a_3,\dots,a_n,\dots$ سه نقطه‌ای که بعد از a_n در اعداد بالا نوشتیم، به این منظور است که تعداد جملات این دنباله نامتناهی است.

قبلاً گفتیم جمله عمومی دنباله را با a_n و خود دنباله را با نماد $\{a_n\}$ نشان می‌دهیم پس می‌توان نوشت :

$\{a_n\}=2,1,\dfrac{4}{5},\dots,\dfrac{n+1}{2n-1},\dots$

مثال: تصاعد عددی نوعی دنباله است، مانند تصاعد عددی زیر :

$$\begin{cases} a_1=5 \\ d=7 \end{cases} \Rightarrow a_n=a_1+(n-1)d=5+(n-1)\times 7=7n-2$$

اعداد $5,12,19,\dots,7n-2,\dots$ را یک دنباله گوییم.

مثال: تصاعد هندسی نوعی دنباله است، مانند تصاعد هندسی زیر :

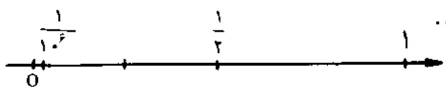
$$\begin{cases} a_1=3 \\ q=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow a_q=a_1q^{n-1}=3(\tfrac{1}{2})^{n-1}=\dfrac{3}{2^{n-1}}$$

در نتیجه اعداد $3,\frac{3}{2},\frac{3}{4},\dots,\frac{3}{2^{n-1}},\dots$ یک دنباله است.

تابع a با ضابطه $\begin{cases} a(n)=\dfrac{1}{n} \\ N\to R \end{cases}$ ، $n\in N$ را در نظر می‌گیریم :

$\{a_n\}=1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots\frac{1}{n},\dots$

جملات این دنباله به تدریج به عدد صفر نزدیک می‌شود، یعنی هر چه n بزرگتر باشد جمله nامی به صفر نزدیکتر است. مسلماً تمام جملات دنباله به صفر خیلی نزدیک نیست مثلاً اگر $n>10$، آن گاه $a_n<\frac{1}{10}$، اگر $n>100$، $a_n<\frac{1}{100}$ اگر $n=10^6$، آنگاه : $a_n<\frac{1}{10^6}$ یعنی $a_n<\frac{1}{1000000}$ می‌توان گفت اگر ۱۰۰۰۰۰۰ جملات اولیه این دنباله را کنار بگذاریم، بقیه جملات دنباله که تعدادشان نامتناهی است، همگی در بازه $I=(0,\frac{1}{10^6})$ قرار دارند یعنی $a_{10^6+1}\in I$ و $a_{10^6+2}\in I$ و $a_{10^6+3}\in I$ و ...



در اینجا می‌گوییم وقتی n بزرگ و بزرگتر شود مثلاً اگر $n>10^6$ ، آنگاه $0<a_n<\frac{1}{10^6}$ و اگر $n>10^{60}$، آنگاه $0<a_n<\frac{1}{10^{60}}$.

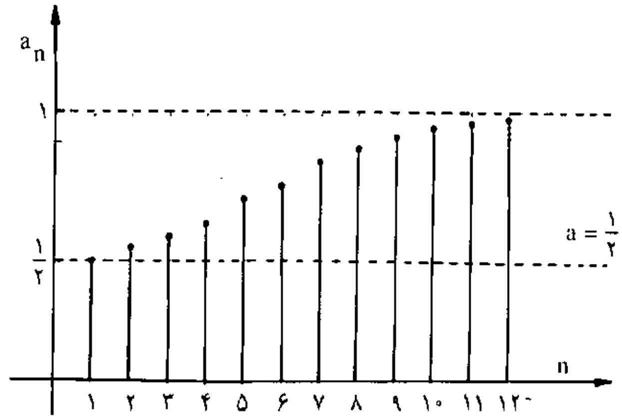
ملاحظه می‌کنیم وقتی n از عدد بزرگی مانند 10^{60} بزرگتر شود، بقیه جملات دنباله که تعدادشان بی‌نهایت است در بازه $(0,\frac{1}{10^{60}})$ قرار می‌گیرند و عدد $\frac{1}{10^{60}}$ خیلی خیلی به صفر نزدیک می‌شود و در اینجا می‌گوییم حدّ دنباله صفر است.

مثال: تابع a با ضابطه $\begin{cases} a(n)=\dfrac{n}{n+1} \\ N\to R \end{cases}$ ، $n\in N$ را در نظر می‌گیریم. می‌توان نوشت:

$a_1=\frac{1}{2}$ ، $a_2=\frac{2}{3}$ ، $a_3=\frac{3}{4}$ ، $a_4=\frac{4}{5}$ ، $a_5=\frac{5}{6}$ ،
$a_6=\frac{6}{7}$ ، $a_7=\frac{7}{8}$ ، $a_8=\frac{8}{9}$ ، $a_9=\frac{9}{10}$ ، $a_{10}=\frac{10}{11}$ ،
$a_{11}=\frac{11}{12}$ ، $a_{12}=\frac{12}{13}$ ، ...

و می‌دانیم که اعداد $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\dots,\frac{n}{n+1},\dots$ را یک دنباله می‌نامیم و می‌توان آن را به صورت زوج مرتب $\{(1,\frac{1}{2}),(2,\frac{2}{3}),(3,\frac{3}{4}),\dots\}$ نشان داد.

حال نمودار این تابع را رسم می‌کنیم.



در این نمودار ملاحظه می‌کنیم، هر قدر n بزرگتر شود، جملات دنباله به عدد (۱) نزدیکتر می‌شوند. می‌توانیم a_n را به عدد (۱) خیلی نزدیک کنیم به شرطی که عدد (n) را به اندازه کافی بزرگ اختیار کنیم.

مثلاً اگر $n=100$، آنگاه $a_{100}=\frac{100}{101}=0/990099$ و اگر $n=500$، آنگاه $a_{500}=\frac{500}{501}=0/9980039$ و اگر $n=1000$، آنگاه $a_{1000}=\frac{1000}{1001}=0/9990009$ خواهد شد. از این نوشته‌ها دو نتیجه می‌گیریم.

نتیجه اول: می‌توان گفت: اگر $n>100$، آنگاه بقیه جملات دنباله نزدیک عدد (۱) تجمع می‌کنند یا بقیه جملات دنباله در همسایگی عدد (۱) گرد هم می‌آیند. در این شرایط می‌گوییم این دنباله در عدد (۱) همگرا است.

نتیجه دوم: بیان دیگر نتیجه اول است و می‌توان گفت: حد دنباله عدد (۱) است و می‌نویسیم: $n\in N$ و

$$\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\right.$$

در این دنباله، همه جملات از عدد (۱) کوچکترند. اکنون می‌خواهیم a_n را به اندازه‌ای به عدد (۱) نزدیک کنیم تا اختلاف بین عدد (۱) و a_n از $\frac{1}{1000}$ کمتر باشد یعنی $1-a_n<\frac{1}{1000}$، در این صورت (n) را چه عددی باید انتخاب کنیم؟

به ترتیب زیر می‌نویسیم:

$$1-a_n<\frac{1}{1000}\Rightarrow 1-\frac{n}{n+1}<\frac{1}{1000}\Rightarrow\frac{n+1-n}{n+1}<\frac{1}{1000}$$
$$\Rightarrow\frac{1}{n+1}<\frac{1}{1000}\Rightarrow n+1>1000\Rightarrow n>999\Rightarrow n\geq 1000$$

پس اگر $n\geq 1000$ انتخاب شود، آنگاه a_n به قدری به عدد (۱) نزدیک می‌شود که $1-a_n<\frac{1}{1000}$.

می‌دانیم (ε) عدد مثبت کوچکی است، حال اگر بخواهیم a_n را به عدد (۱) به قدری نزدیک کنیم تا $1-a_n<\varepsilon$، در این صورت (n) را چه عددی باید انتخاب کنیم. نظیر عملیات قبل را تکرار می‌کنیم.

$$1-a_n<\varepsilon\Rightarrow 1-\frac{n}{n+1}<\varepsilon\Rightarrow\frac{n+1-n}{n+1}<\varepsilon\Rightarrow\frac{1}{n+1}<\varepsilon$$
$$\Rightarrow n+1>\frac{1}{\varepsilon}\Rightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}-1$$

می‌دانیم $\varepsilon>0$، ممکن است عدد $(\frac{1}{\varepsilon}-1)$ عددی اعشاری باشد مسلماً عدد $[\frac{1}{\varepsilon}-1]$ ([ ] نماد جزء صحیح است[1]) عدد صحیح است که ممکن است کوچکتر از $(\frac{1}{\varepsilon}-1)$ باشد ولی عدد $[\frac{1}{\varepsilon}]=[\frac{1}{\varepsilon}-1]+1$ بزرگتر از $(\frac{1}{\varepsilon}-1)$ است.

اگر $M\in N$ و $M=[\frac{1}{\varepsilon}]$ آن گاه می‌توان نوشت:

$$n>M\Rightarrow 1-a_n<\varepsilon$$

پس می‌توان گفت؛ برای هر $\varepsilon>0$ عددی مانند $M\in N$ وجود دارد که:

$$n>M\Rightarrow 1-a_n<\varepsilon$$

حال می‌گوییم حدّ این دنباله عدد (۱) است و می‌نویسیم:

$$\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\right.$$

در این صورت می‌گوییم دنباله $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ به عدد (۱) همگرا است.

توجه کنید دنباله‌ای را همگرا گوییم که حدّ جمله عمومی آن وقتی $n\to\infty$ برابر عددی مانند $L\in R$ باشد بعداً به‌صورت دقیق‌تر همگرایی تعریف می‌شود.

حال دنباله زیر را در نظر می‌گیریم :

$$\{a_n\} = ۲, \frac{۳}{۲}, \frac{۴}{۳}, \dots, \frac{n+۱}{n}, \dots$$

جمله عمومی این دنباله $a_n = \frac{n+۱}{n}$

$$n = ۱۰ \Rightarrow a_{۱۰} = \frac{۱۱}{۱۰} = ۱/۱$$

$$n = ۵۰ \Rightarrow a_{۵۰} = \frac{۵۱}{۵۰} = ۱/۰۲$$

$$n = ۱۰۰ \Rightarrow a_{۱۰۰} = \frac{۱۰۱}{۱۰۰} = ۱/۰۱$$

$$n = ۱۰۰۰ \Rightarrow a_{۱۰۰۰} = \frac{۱۰۰۰}{۱۰۰۱} = ۱/۰۰۱$$

حدس می‌زنیم که حدّ این دنباله نیز عدد (۱) است. حال ثابت می‌کنیم که این حدس درست است، جملات این دنباله همگی از عدد (۱) بزرگترند.

می‌خواهیم a_n را به عدد (۱) آن قدر نزدیک کنیم تا $a_n - ۱ < \varepsilon$ ، در این صورت n را چه عددی باید انتخاب کنیم؟

می‌نویسیم :

$$a_n - ۱ < \varepsilon \Rightarrow \frac{n+۱}{n} - ۱ < \varepsilon \Rightarrow \frac{n+۱-n}{n} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{۱}{\varepsilon} \Rightarrow$$ اگر $M \in N$, $M = [\frac{۱}{\varepsilon}] + ۱$

می‌توان گفت : برای هر $\varepsilon > ۰$ عددی طبیعی مانند M وجود دارد که $n > M \Rightarrow a_n - ۱ < \varepsilon$

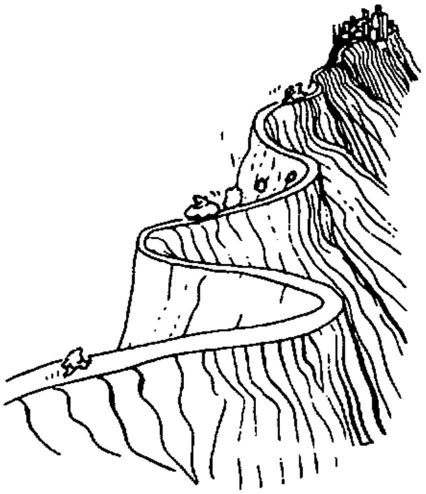
۱ـ نماد [x] را متأسفانه در بعضی از کتابها (براکت x) نوشته‌اند در حالی که براکت به معنی پرانتز یا کروشه است عبارت (جزء صحیح) هم فارسی است و هم مفهوم ریاضی را می‌رساند.

تفریح اندیشه ۲

مهرداد، علی و کیوان در یک زمان و از یک محلّ حرکت می‌کنند تا به شهری واقع در ۸ کیلومتری آنجا برسند.

مهرداد پیاده می‌رود و علی، کیوان را با اتومبیلش می‌برد. پس از مدتی کیوان از اتومبیل پیاده می‌شود و بقیهٔ راه را پیاده طی می‌کند، آن‌گاه علی به طرف مهرداد برمی‌گردد و او را سوار اتومبیل می‌کند و به شهر می‌رساند. هر سه دوست در یک زمان به مقصد می‌رسند.

مهرداد و کیوان در پیاده روی سرعتی یکسان برابر ۶ کیلومتر در ساعت دارند، و اتومبیل هم با سرعت ثابت ۳۰ کیلومتر در ساعت راه را طی کرده‌است. این مسافرت چند ساعت به طول انجامیده است؟



● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمهٔ سیمین‌دخت ترکپور

جواب در صفحهٔ ۸۸

• غلامرضا یاسی‌پور

تاریخچهٔ مجلات ریاضی در ایران (۲۳)

شمارهٔ ۲۷ مجلهٔ یکان را ورق می‌زنیم. در مقالهٔ «**مسائل حل نشدهٔ ریاضی**» ترجمهٔ **عبدالحسین مصحفی** چنین آورده شده است که:

«شاید حالا دیگر قبول کنید که بعضی احکام که در ظاهر امر مسلم به نظر می‌رسند در حقیقت مسائل مشکلی هستند. اصل اقلیدس، یعنی، اصل مربوط به خطوط متوازی از جملهٔ اینهاست. هندسهٔ اقلیدس مبتنی بر اصولی است که دوران درازی همچون حقایق مسلم به نظر می‌رسیدند. هر انسان واجد قوهٔ متفکره‌ای بر خود فرض می‌دانست که این اصول را به صورت حقایق مسلّم قبول کند.

اما اصل پنجم هندسهٔ اقلیدسی، که مربوط به خطوط متوازی است، به سادگی اصول دیگر قابل قبول نبود. بنا به این اصل می‌پذیریم که از نقطهٔ خارج خط بیش از یک خط به موازات آن نمی‌توان رسم کرد. برای محققین این فکر پیش آمد که، اگر این اصل درست باشد، باید بتوان آن را از اصول دیگری **نتیجه گرفت**، یعنی، آن را به صورت یک **قضیه** اثبات کرد. ریاضیدانها در طی چندین قرن کوشیدند تا این مسألهٔ مهیج را حل کنند[1]، اما توفیقی به دست نیاوردند. اصل پنجم در حقیقت یک اصل بود و از اصول دیگر استخراج نمی‌شد.

این استنباط که بیش از یک قرن قدمت دارد، زمانی حاصل شد که متوجه شدند که باید مسأله را به نحو دیگری مطرح کنند، یعنی به این صورت که، اگر این اصل است باید بتوان آن را با اصل دیگری جانشین کرد، و هندسهٔ از نوع دیگری، با همان استحکام هندسهٔ اقلیدسی بنا نهاد. این موضوع به حقیقت پیوست. آنچه در مدت دو هزار سال، فعالیت مربوط به حل مسأله را تباه ساخته بود، ابا، یا به عبارت دیگر ناتوانی، از درک هندسه‌های غیر اقلیدسی بود. به این ترتیب، ناگهان سد برداشته شد و پیشروی سریع به عمل آمد.

اشکال عمدهٔ بعضی از مسایل حل نشده‌ای که مدتهای مدیدی اذهان را به خود مشغول داشته، چگونگی طرح آن بوده است؛ به عبارت دیگر مسأله به گونه‌ای طرح شده که حل آن را غیر ممکن ساخته است.

اغلب، تغییر طرح یک مسأله به چنان حل ساده‌ای منجر شده که این سؤال را پیش آورده است که: چرا تاکنون این راه حل به ذهن کسی خطور نکرده است؟

حدود سی سال می‌گذرد[2] که **کورت گودل**[3] با ارائهٔ مسایل حل نشدهٔ از نوع جدید، جهان ریاضی را مبهوت کرده است.

قبلاً چنین می‌دانستند (و این خود استنباطی خطا بود) که

می‌توانند صحیح یا ناصحیح بودن یک قضیهٔ ریاضی را ثابت کنند. اما گودل نشان داد که قضیه‌های واقعی‌ای از ریاضیات وجود دارد که ممکن است صحیح باشند یا غلط، اما وسیله‌ای وجود ندارد که بتوان صحیح یا غلط بودن آنها را کشف کرد.

مسائلی از این نوع را که داشتن یا نداشتن جواب برای آنها قطعی نیست **غیرقطعی**[۴] می‌نامند. ریاضیدانها عقیده دارند که با مسایل لاینحل از آن نوع که گودل عنوان کرده است، به ندرت مواجه می‌شوند و طرح یک چنین مسائلی به سادگی انجام نمی‌پذیرد.»

مجله مطلب ثابت دیگری دارد با عنوان: «بی آنکه عصبانی شوید این مسأله را حل کنید» و در شمارهٔ ۲۷ خود این مسأله را آورده است:

«جوانی سوار بر قایق، سربالایی رودخانه‌ای را طی می‌کرد. در عبور از زیر یک پل، بطری نیمه پر آبی که بر دماغهٔ قایق گذاشته بود، در اثر تکان قایق و اصابت به پل به آب افتاد. جوان بیست دقیقه بعد از گذشتن از پل، متوجه مفقود شدن بطری خود شد، دور زد و در جهت جریان آب و بدون تغییر سرعت قایق به جستجوی بطری به راه افتاد. از زیر پل عبور کرد و درست در فاصلهٔ یک کیلومتری پل بطری را از آب گرفت. اگر زمان دور زدن قایق را نادیده بگیریم، می‌توانید بگویید سرعت جریان آب رودخانه چه‌قدر بوده است؟»

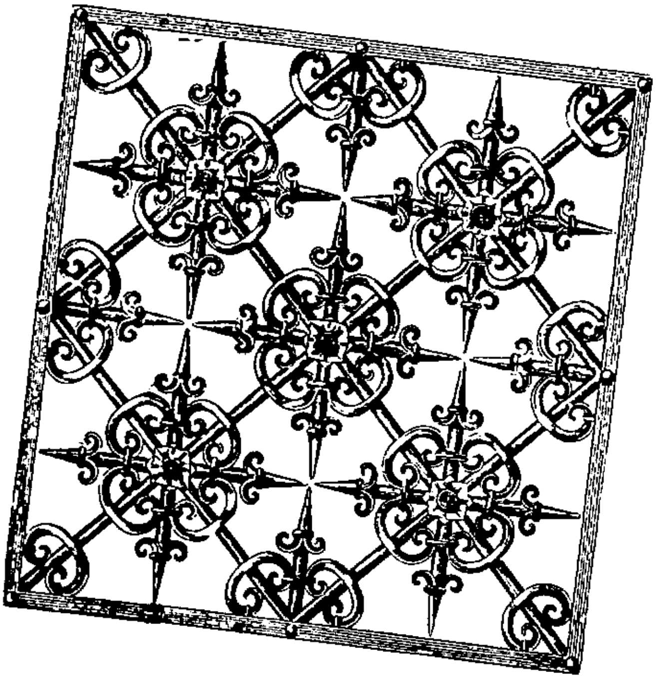
در اینجا به بررسی‌مان از شمارهٔ ۲۷ مجلهٔ یکان خاتمه می‌دهیم و پس از آوردن پاسخهای دو معمایی که صورتشان را در اینجا آوردیم و جوابشان را از شمارهٔ ۲۸ یکان برگرفته‌ایم، مقاله را ختم می‌کنیم:

«**پاسخ اختلاط چای:** یک مکعب به یال ۱۷/۲۹۹ و یک مکعب به یال ۲۵/۴۶۹ سانتیمتر رویهم حجمی برابر با ۲۱۶۹۷/۷۹۴۴۱۸۶۰۸ سانتیمتر مکعب خواهند داشت که دقیقاً برابر است با مجموع حجمهای ۲۲ مکعب با یال ۹/۹۵۴ سانتیمتر.

بنابراین نسبت اختلاط چای سیاه و چای سبز برابر است با ۱۷/۲۹۹ به ۲۵/۴۶۹.

پاسخ معمای جوان قایق سوار: چون سرعت قایق نسبت به آب تغییر نمی‌کند، می‌توانیم آب را ساکن فرض کنیم (و در مقابل، خشکی مثلاً پل را نسبت به آن متحرک در نظر بگیریم). اگر قایق بر سطح آب ساکن یک دریاچه حرکت می‌کرد و بطری ـ که بر لبهٔ قایق قرار داشت ـ به آب می‌افتاد، در این صورت بطری در همان محل سقوط ثابت باقی می‌ماند و اگر قایق سوار ۲۰ دقیقه بعد از سقوط بطری متوجه آن می‌شد، زمان لازم برای برگشت او تا محل بطری نیز برابر ۲۰ دقیقه می‌شد. بنابراین بطری ۴۰ دقیقه در سطح آب باقی مانده است و در این مدت، پل به اندازهٔ یک کیلومتر نسبت به آب جابه‌جا شده است. بنابراین سرعت پل نسبت به آب (یعنی، سرعت آب رودخانه نسبت به پل) برابر است با یک کیلومتر در ۴۰ دقیقه که می‌شود ۱/۵ کیلومتر در ساعت.»

۱. از جمله حکیم عمرخیام، شاعر و ریاضیدان معروف ایرانی.
۲. اکنون ۶۰ سال
۳. منطق‌دان بزرگ آلمانی و واضع نظریهٔ تشخیص‌ناپذیری (تصمیم ناپذیری) در منطق ریاضی.
۴. یا تشخیص‌ناپذیر.



آموزش ترجمهٔ متون ریاضی (۲۰)

● حمیدرضا امیری

از کتاب: Multiple choice tests in advanced mathematics

Test 4

Time allowed: 1¼ hours

SECTION I

(Twenty questions) Questions 1–20

تست ۴

وقت $۱\frac{۱}{۴}$ ساعت

بخش ۱

سؤالهای ۱ الی ۲۰ (بیست سؤال)

1. $p^x q^{2x} = r^3$, where $p, q, r \in \mathbb{R}^+$
$x =$

A $\frac{3 \ln r}{\ln p + 2 \ln q}$ B $\frac{\ln r}{\ln p + \ln q}$

C $\frac{1}{3}(3 \ln r - \ln p - 2 \ln q)$

D $\frac{3 \ln r}{2 \ln (pq)}$ E $\frac{r}{(pq^2)^{1/3}}$

۱. در صورتی که $p^x q^{۲x} = r^۳$ و $p, q, r \in \mathbb{R}^+$، x برابر است با:

۱) $\frac{۳\ln r}{\ln p+۲\ln q}$ ۲) $\frac{\ln r}{\ln p+\ln q}$

۳) $\frac{۱}{۳}(۳\ln r-\ln p-۲\ln q)$

۴) $\frac{۳\ln r}{۲\ln(pq)}$ ۵) $\frac{r}{(pq^۲)^{\frac{۱}{۳}}}$

2. $z = \frac{3 - 2i}{2 - 3i}$
$|z^*| =$

A 13 B $\sqrt{13}$ C $\frac{2}{3}$ D $\frac{3}{2}$ E 1

۲. اگر $Z=\frac{۳-۲i}{۲-۳i}$ ؛ در این صورت، مقدار $|Z^*|$ برابر است با:

۱) ۱۳ ۲) $\sqrt{۱۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$ ۵) ۱

3. The first 3 terms of the expansion of $(1 - 2x)^{-1/2}$ in ascending powers of x are

A $1, +x, -\frac{3}{2}x^2$ B $1, -x, -\frac{1}{2}x^2$

C $1, +x, -\frac{1}{2}x^2$ D $1, +x, +\frac{3}{2}x^2$

E $1, -x, +\frac{3}{2}x^2$

۳. اولین ۳ جملهٔ بسط $(۱-۲x)^{-\frac{۱}{۲}}$ در قوای صعودی برحسب x، عبارتند از:

۱) $۱,+x,-\frac{۳}{۲}x^۲$ ۲) $۱,-x,-\frac{۱}{۲}x^۲$

۳) $۱,+x,-\frac{۱}{۲}x^۲$ ۴) $۱,+x,+\frac{۳}{۲}x^۲$

۵) $۱,-x,\frac{۳}{۲}x^۲$

4. Given that α and β are the roots of the equation
$$px^2 + qx + r = 0,$$
where $pqr \neq 0$, then

$\frac{1}{\alpha^2\beta} + \frac{1}{\alpha\beta^2} =$

A $\frac{pq}{r^2}$ **B** $-\frac{pq}{r^2}$ **C** $\frac{q^2 - 2pr}{r^2}$

D $\frac{q^2 + 2pr}{r^2}$ **E** $-\frac{q}{r}$

۴. با فرض آن‌که α و β ریشه‌های معادلهٔ $px^۲+qx+r=۰$ بوده به طوری که $pqr \neq ۰$، در این صورت، حاصل $\frac{۱}{\alpha^۲\beta}+\frac{۱}{\alpha\beta^۲}$ برابر است با:

۱) $\frac{pq}{r^۲}$ ۲) $-\frac{pq}{r^۲}$

۳) $\frac{q^۲-۲pr}{r^۲}$ ۴) $\frac{q^۲+۲pr}{r^۲}$

۵) $-\frac{q}{r}$

5. Given that $f(x) = e^{x^3}$, $x \in \mathbb{R}^+$, then $f^{-1}(x) =$

A e^{-x^3} **B** e^{1/x^3} **C** $(\ln x)^{1/3}$

D $\frac{1}{3}\ln x$ **E** $\ln(x^{1/3})$

۵. با فرض آن‌که $f(x)=e^{x^۳}$ و $x \in \mathbb{R}^+$، در این صورت، حاصل $f^{-۱}(x)$ برابر است با:

۱) $e^{-x^۳}$ ۲) $e^{\frac{۱}{x^۳}}$

۳) $(\ln x)^{\frac{۱}{۳}}$ ۴) $\frac{۱}{۳}\ln x$

۵) $\ln(x^{\frac{۱}{۳}})$

6. $y = x^2\cos x$.

$\frac{dy}{dx} =$

A $2x\cos x$ **B** $-x^2\sin x$

C $x^2\cos x - 2x\sin x$ **D** $2x\cos x + x^2\sin x$

E $2x\cos x - x^2\sin x$

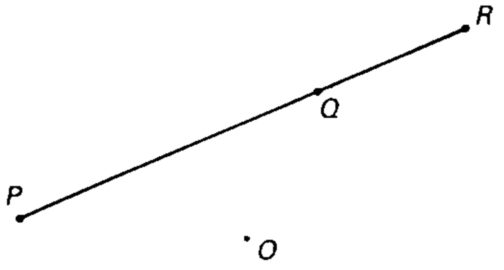
۶. اگر $y=x^۲\cos x$، حاصل $\frac{dy}{dx}$ برابر است با:

۱) $۲x\cos x$ ۲) $-x^۲\sin x$

۳) $x^۲\cos x - ۲x\sin x$ ۴) $۲x\cos x + x^۲\sin x$

۵) $۲x\cos x - x^۲\sin x$

7.



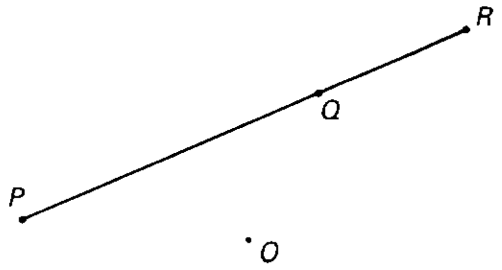
PQR is a straight line and $PQ = 2QR$.
$\overrightarrow{OQ} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, $\overrightarrow{OR} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$.
$\overrightarrow{OP} =$

A $-\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$ **B** $7\mathbf{i} - 12\mathbf{j}$

C $4\mathbf{i} - 10\mathbf{j}$ **D** $-4\mathbf{i} + 10\mathbf{j}$

E $-7\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$

۷. PQR خط راستی است و $PQ=۲QR$. (در صورتی که) $\overrightarrow{OQ}=۳i-۲j$ و $\overrightarrow{OR}=i+۳j$، مقدار $\overrightarrow{OP}$ برابر است با:



۱) $-i+۸j$ ۲) $۷i-۱۲j$

۳) $۴i-۱۰j$ ۴) $-۴i+۱۰j$

۵) $-۷i+۱۲j$

8. $\int \frac{1}{\sqrt{(9-4x^2)}}\,dx =$

A $\frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{3x}{2}\right)$ + constant

B $\frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right)$ + constant

C $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{3x}{2}\right)$ + constant

D $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right)$ + constant

E $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right)$ + constant

۸. حاصل $\int \frac{۱}{\sqrt{(۹-۴x^{۲})}}dx$ برابر است با :

۱) $\frac{۱}{۳}\sin^{-۱}(\frac{۳x}{۲})+c$

۲) $\frac{۱}{۳}\sin^{-۱}(\frac{۲x}{۲})+c$

۳) $\frac{۱}{۲}\sin^{-۱}(\frac{۳x}{۲})+c$

۴) $\frac{۱}{۲}\sin^{-۱}(\frac{۲x}{۳})+c$

۵) $\sin^{-۱}(\frac{۲x}{۳})+c$

9. The point $(-1, 3)$ is at one end of a diameter of the circle whose equation is

$$(x-3)^2 + y^2 = 25.$$

The coordinates of the other end of this diameter are

A $(7, -3)$ B $(7, 3)$

C $(9, 3)$ D $(6, -3)$

E $(1, -3)$

۹. نقطهٔ $(-۱,۳)$ در انتهای قطری از دایره به معادلهٔ $(x-۳)^{۲}+y^{۲}=۲۵$ قرار دارد. مختصات انتهای دیگر این قطر برابر است با :

۱) $(۷,-۳)$ ۲) $(۷,۳)$

۳) $(۹,۳)$ ۴) $(۶,-۳)$

۵) $(۱,-۳)$

10. The complete set of values of x for which

$$15x^2 \leqslant 12 - 11x,$$

where $x \in \mathbb{R}$, is

A $\{x : x \leqslant -\frac{4}{3}\} \cup \{x : x \geqslant \frac{3}{5}\}$

B $\{x : x \leqslant -\frac{3}{5}\} \cup \{x : x \geqslant \frac{4}{3}\}$

C $\{x : -\frac{4}{3} \leqslant x \leqslant \frac{3}{5}\}$

D $\{x : -\frac{3}{5} \leqslant x \leqslant \frac{4}{3}\}$

E $\{x : \frac{3}{5} \leqslant x \leqslant \frac{4}{3}\}$

۱۰. مجموعهٔ تمام مقادیر x برای (نابرابری) $۱۵x^{۲} \leq ۱۲-۱۱x$ که $x \in \mathbb{R}$، برابر است با :

۱) $\left\{x : x \leq -\frac{۴}{۳}\right\} \cup \left\{x : x \geq \frac{۳}{۵}\right\}$

۲) $\left\{x : x \leq -\frac{۳}{۵}\right\} \cup \left\{x : x \geq \frac{۴}{۳}\right\}$

۳) $\left\{x : -\frac{۴}{۳} \leq x \leq \frac{۳}{۵}\right\}$

۴) $\left\{x : -\frac{۳}{۵} \leq x \leq \frac{۴}{۳}\right\}$

۵) $\left\{x : \frac{۳}{۵} \leq x \leq \frac{۴}{۳}\right\}$

11. The lengths of the sides of a triangle are in the ratios 6 : 5 : 4. Then the cosine of the largest angle of the triangle is

A $-\frac{3}{4}$ B $-\frac{1}{8}$ C $\frac{1}{8}$ D $\frac{9}{16}$ E $\frac{3}{4}$

۱۱. طول ضلعهای مثلثی دارای نسبتهای ۴ :۵ :۶ هستند. در این صورت، کسینوس بزرگترین زاویهٔ این مثلث برابر است با :

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۹}{۱۶}$ ۵) $\frac{۳}{۴}$

12. Given that 3 is an approximation to the real root of the equation $f(x) = 0$, where

$$f(x) \equiv x^3 - x^2 - 19,$$

the next approximation obtained by the Newton–Raphson process is

A $2\frac{8}{9}$ B $3\frac{1}{9}$ C $3\frac{1}{10}$ D $2\frac{9}{10}$

E none of the above

۱۲. با فرض آن‌که ۳ یک تقریب برای ریشهٔ حقیقی معادلهٔ $f(x)=۰$ ، باشد که $f(x)\equiv x^{۳}-x^{۲}-۱۹$ ، نزدیکترین تقریب (که در معادلهٔ فوق صدق کند) توسط روش نیوتن ـ رافسون، برابر است با :

۱) $۲\frac{۸}{۹}$ ۲) $۳\frac{۱}{۹}$ ۳) $۳\frac{۱}{۱۰}$ ۴) $۲\frac{۹}{۱۰}$

۵) هیچ یک از موارد قبل

13. $\frac{i^{47}}{i^{29}} =$

A -1 B 1 C $-i$ D i E i^{-1}

۱۳. حاصل $\frac{i^{۴۷}}{i^{۲۹}}$ برابر است با :

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) $-i$ ۴) i ۵) $i^{-۱}$

14. Given that $(x + 1)$ and $(x - 2)$ are both factors of $(x^3 + ax^2 - 5x + b)$, where a and b are constants, then

A $a = -1$, $b = 5$ B $a = 1$, $b = -5$

C $a = -2$, $b = 10$ D $a = 2$, $b = -6$

E $a = -2$, $b = 6$

۱۴. با فرض آن‌که $(x+۱)$ و $(x-۲)$ هر دو عاملهای $(x^{۳}+ax^{۲}-۵x+b)$ باشند، که a و b ثابتهایی هستند، در این صورت :

۱) $a=-۱$ و $b=۵$ ۲) $a=۱$ و $b=-۵$

۳) $a=-۲$ و $b=۱۰$ ۴) $a=۲$ و $b=-۶$

۵) $a=-۲$ و $b=۶$

15. The sum to infinity of the geometric series

$$\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^5 - \dots$$

is

A $\frac{3}{10}$ B $\frac{3}{8}$ C $\frac{1}{2}$ D $\frac{9}{10}$ E $\frac{1}{4}$

۱۵. حاصل جمع نامتناهی سری هندسی $\dots-{(\frac{۱}{۳})}^{۵}+{(\frac{۱}{۳})}^{۳}-\frac{۱}{۳}$ برابر است با :

۱) $\frac{۳}{۱۰}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۹}{۱۰}$ ۵) $\frac{۱}{۴}$

16. Which one of the following curves does *not* have a point of inflexion at $x = 0$?

A $y = \sin x$ B $y = \tan x$

C $y = x^4$ D $y = x^3$

E $y = x^3 - x$

۱۶. کدام یک از منحنیهای زیر، فاقد نقطهٔ عطف در $x=۰$ می‌باشند؟

۱) $y=\sin x$ ۲) $y=\mathrm{tg}x$

۳) $y=x^{۴}$ ۴) $y=x^{۳}$

۵) $y=x^{۳}-x$

17. A solution of the differential equation

$$\frac{dy}{dx} = 2xy + 2x$$

is

A e^{x^2} B $e^{x^2} - 1$ C $e^{x^2} + 1$

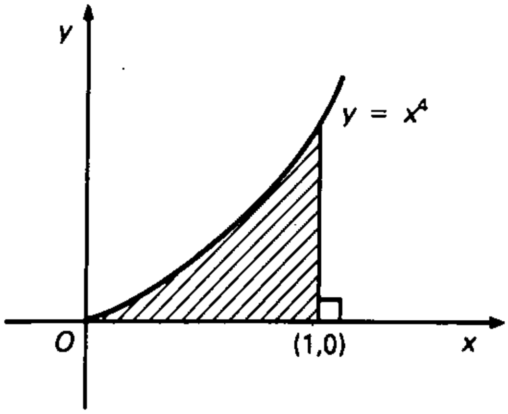
D $2e^{x^2} + 2$ E xe^{x^2}

۱۷. یک جواب برای معادلهٔ دیفرانسیل $\frac{dy}{dx}=۲xy+۲x$ برابر است با :

۱) $e^{x^{۲}}$ ۲) $e^{x^{۲}}-۱$ ۳) $e^{x^{۲}}+۱$

۴) $۲e^{x^{۲}}+۲$ ۵) $xe^{x^{۲}}$

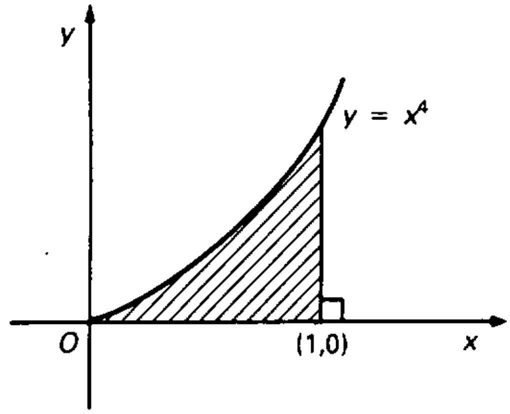
18.



The volume, in cubic units, of the solid generated when the shaded region is rotated completely about Oy is

A $\pi/9$ **B** $\pi/3$ **C** $2\pi/3$ **D** $\pi/15$ **E** $8\pi/9$

.۱۸



حجمِ (در واحد مکعب) جسمِ تولید شده، حاصل از دورانِ کاملِ ناحیهٔ هاشور خورده، حول محور oy برابر است با :

۱) $\frac{\pi}{۹}$ ۲) $\frac{\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۴) $\frac{\pi}{۱۵}$ ۵) $\frac{۸\pi}{۹}$

19. $2 \cos 2\theta \cos 4\theta \equiv$

A $\cos 2\theta - \cos 6\theta$ **B** $\cos 2\theta + \cos 6\theta$

C $\cos 6\theta - \cos 2\theta$ **D** $\sin 6\theta - \sin 2\theta$

E $\sin 6\theta + \sin 2\theta$

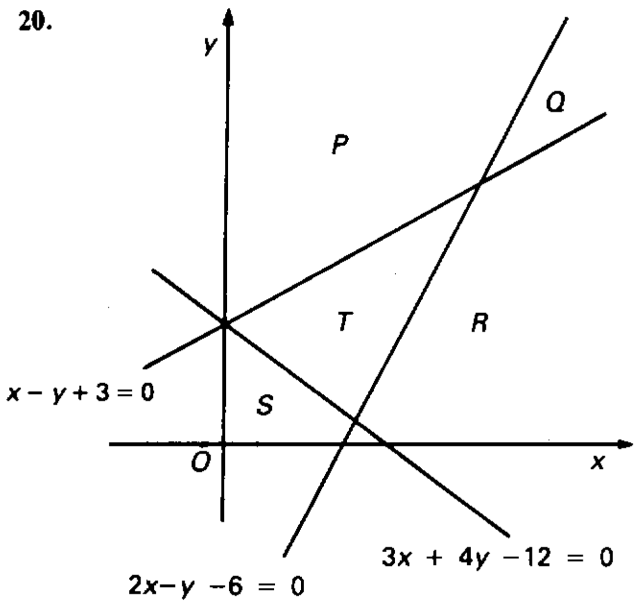
۱۹. حاصل $۲\cos ۲\theta \cos ۴\theta$ برابر است با :

۱) $\cos ۲\theta - \cos ۶\theta$ ۲) $\cos ۲\theta + \cos ۶\theta$

۳) $\cos ۶\theta - \cos ۲\theta$ ۴) $\sin ۶\theta - \sin ۲\theta$

۵) $\sin ۶\theta + \sin ۲\theta$

20.

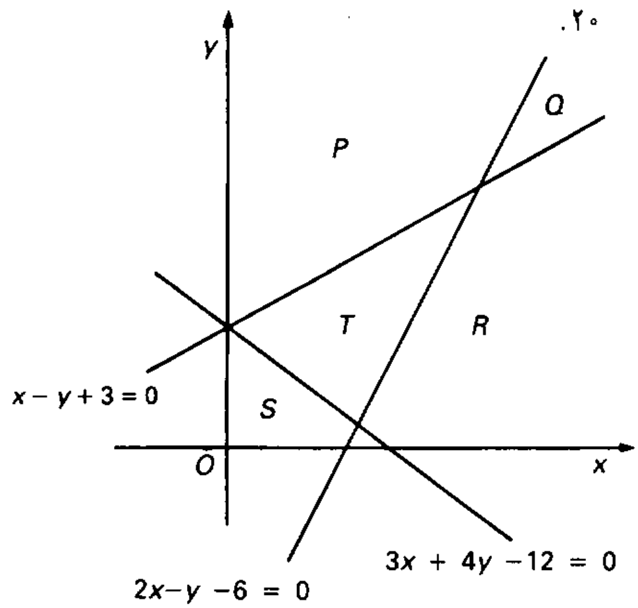


In which one of the labelled regions does the point with coordinates (4, 3) lie?

A *P* **B** *Q* **C** *R*

D *S* **E** *T*

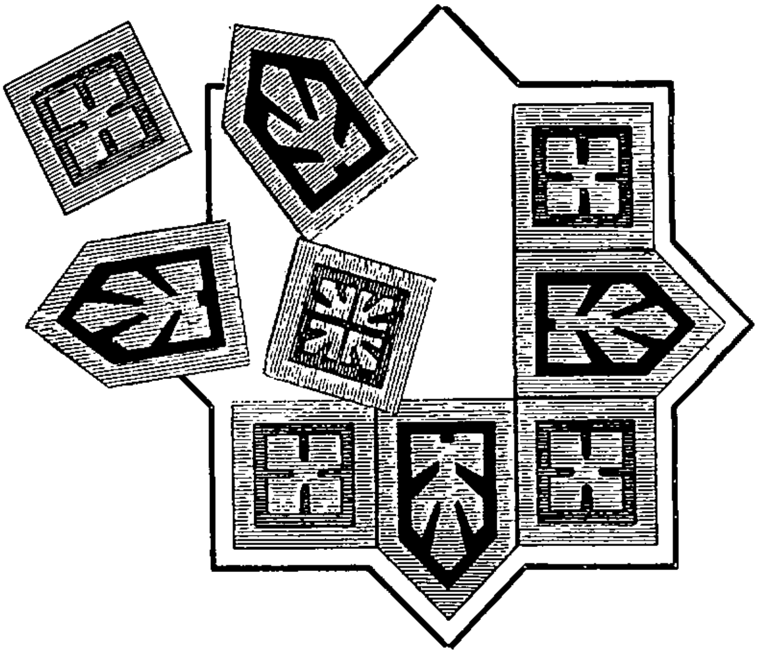
.۲۰



در کدام یک از ناحیه‌های مشخص شده، نقطه‌ای به مختصات (۳ و ۴) قرار دارد؟

۱) P ۲) Q ۳) R

۴) S ۵) T



تجزیه چندجمله‌ایها

(برای دانش‌آموزان سال اول نظام جدید)

● میرشهرام صدر

تجزیه در لغت به معنای جزء به جزء در آوردن است و در علم ریاضی منظور از تجزیه چندجمله‌ای، روشی است که در صورت امکان بتوان چندجمله‌ای را به صورت حاصلضرب چند عبارت (عامل) نوشت، مثلاً چندجمله‌ای $x^۲-۴$ را می‌توان به صورت حاصلضرب دو عامل $(x-۲)$ و $(x+۲)$ نوشت؛ یعنی $x^۲-۴=(x+۲)\ (x-۲)$.

تجزیه یکی از مباحث مهم جبر و حساب است و اهمیت آن ناشی از کاربردش در حل معادلات، تعیین (ب. م.م) و (ک. م.م) چندجمله‌ایها، کسرهای جبری گویا، خارج کردن عبارتی از زیر رادیکال و... است. در زیر روشهای تجزیه چندجمله‌ایها ارائه شده است.

۱. فاکتورگیری

برای استفاده از این روش ابتدا باید فاکتور را معرفی کنیم، بنا به تعریف فاکتور عاملی است که جملات چند جمله‌ای بر آن قابل قسمت هستند. برای تعیین فاکتور کافی است (ب. م.م) جملات را محاسبه کنیم. به عنوان مثال: فاکتور در چندجمله‌ای $۲x^۳+۴x^۲-۸x$ عامل $۲x$ است زیرا کلیه جملات این چندجمله‌ای بر $۲x$ قابل قسمت هستند، یا به تعبیر دیگر (ب. م.م) جملات این چندجمله‌ای عامل $۲x$ است. بعد از تعیین فاکتور برای تجزیه یک چندجمله‌ای به کمک روش فاکتورگیری کافیست هر یک از جملات را بر فاکتور تقسیم کنیم و خارج قسمت را در یک پرانتز به صورت زیر بنویسیم:

با شرط: $(x\neq ۰)$

$$۲x^۳+۴x^۲-۸x=۲x\left(\frac{۲x^۳}{۲x}+\frac{۴x^۲}{۲x}-\frac{۸x}{۲x}\right)=$$
$$۲x(x^۲+۲x-۴)$$

مثال ۱ ـ چندجمله‌ایهای زیر را تجزیه کنید.

الف) $A=۲x^۳y^۲+۸x^۷y^۵+۱۲x^۳y^۳$

حل: ابتدا بین $۲x^۳y^۲$ و $۸x^۷y^۵$ و $۱۲x^۳y^۳$ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک را تعیین می‌کنیم.

$$۲x^۳y^۲=۲\times x^۳\times y^۲$$
$$۸x^۷y^۵=۲^۳\times x^۷y^۵$$
$$۱۲x^۳y^۳=۲^۲\times ۳\times x^۳\times y^۳$$
$$(\text{ب.م.م})\ D=۲x^۳y^۲$$

یادآوری: (ب.م.م) عبارت است از حاصلضرب عوامل مشترک با نمای کمتر.

هر یک از جمله‌های $۲x^۳y^۲$ و $۸x^۷y^۵$ و $۱۲x^۳y^۳$ را بر $۲x^۳y^۲$ تقسیم می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$A=۲x^۳y^۲+۸x^۷y^۵+۱۲x^۳y^۳=$$
$$۲x^۳y^۲(۱+۴x^۴y^۳+۶y)$$

ب) $B=۷۰a^۳b^۳-۳۵a^۲b^۴+۲۱ab^۵$

$$۷۰a^۳b^۳=۲\times ۵\times ۷\times a^۳\times b^۳$$

$35a^2b^4 = 5\times 7\times a^2\times b^4$

$21ab^5 = 3\times 7\times a\times b^5$

(ب.م.م) $D = 7ab^3$

$B = 70a^3b^3 - 35a^2b^4 + 21ab^5 =$
$7ab^3(10a^2 - 5ab + 3b^2)$

ج) $C = -44ax^m - 286a^2x^{m+1} - 66a^3x^{m+2}$

$-44ax^m = -1\times 2^2\times 11\times a\times x^m$

$-286a^2x^{m+1} = -1\times 2\times 11\times 13\times a^2\times x^m\times x$

$-66a^3x^{m+2} = -1\times 2\times 3\times 11\times a^3\times x^m\times x^2$

(ب.م.م) $D = -1\times 2\times 11\times a\times x^m = -22ax^m$

$C = -44ax^m - 286a^2x^{m+1} - 66a^3x^{m+2} =$
$-22ax^m(2 + 13ax + 3a^2x^2)$

د) $E = a(x+1) + b(x+1)$

ابتدا بین $a(x+1)$ و $b(x+1)$ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک می‌گیریم، با کمی دقت ملاحظه می‌کنیم که $(x+1)$ عامل مشترک آنها است، درنتیجه :

$$E = a(x+1) + b(x+1) = (x+1)\left[\frac{a(x+1)}{(x+1)} + \frac{b(x+1)}{(x+1)}\right]$$

$E = (x+1)(a+b)$

با فرض : $(x+1 \neq 0)$

هـ) $F = 3x^2(x+y) - 2x(x+y) = (x+y)(3x^2 - 2x)$

(ب.م.م) بین $2x(x+y)$ و $3x^2(x+y)$ عامل $(x+y)$ می‌باشد.

۲. تجزیه دو جمله‌ایها

۲.۱ ـ کلیه عبارتهایی به شکل $a^2 - b^2$ به کمک اتحاد مزدوج بصورت زیر تجزیه می‌شوند.

$a^2 - b^2 = (a-b)\ (a+b)$

دوجمله‌ایهایی که اولاً به صورت تفاضل باشند، ثانیاً هر جمله آن مربع کامل باشند، به کمک اتحاد مزدوج با ضرایب صحیح تجزیه‌پذیر هستند یعنی :

$a^2x^{2m} - b^2y^{2n} = (ax^m - by^n)\ (ax^m + by^n)$

مثال ۲ ـ عبارتهای زیر را تجزیه کنید.

الف) $A = 16x^2 - 81$

چون هردو جمله مربع کامل و علامت بین آنها تفاضل است لذا به کمک اتحاد مزدوج آنرا تجزیه می‌کنیم ؛

$A = 16x^2 - 81 = (4x)^2 - (9)^2$
$= (4x - 9)\ (4x + 9)$

ب) $B = 4m^2 - 25m^4 = (2m)^2 - (5m^2)^2$
$= (2m - 5m^2)\ (2m + 5m^2)$

ج) $C = x^4 - 1 = (x^2)^2 - (1)^2 = (x^2 - 1)\ (x^2 + 1)$

دوجمله‌ای $(x^2 - 1)$ نیز به کمک اتحاد مزدوج تجزیه‌پذیر است. باید توجه داشته باشیم که تجزیه چندجمله‌ایها را تا مرحله‌ای ادامه می‌دهیم، که پرانتزها دیگر قابل تجزیه نباشند بنابراین :

$C = (x-1)\ (x+1)\ (x^2+1)$

د) $D = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2$
$= \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)$

هـ) $E = (2x - y)^2 - 9y^4 = (2x - y)^2 - (3y^2)^2$
$= \left[(2x - y) - 3y^2\right]\left[(2x - y) + 3y^2\right]$

۲.۲ ـ کلیه عبارتهایی به شکل $a^3 + b^3$ یا $a^3 - b^3$ به کمک اتحاد مجموع و تفاضل مکعبات دو جمله‌ای تجزیه‌پذیر هستند.

$a^3 + b^3 = (a+b)\ (a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a-b)\ (a^2 + ab + b^2)$

دوجمله‌ایهایی که هر جمله آن مکعب کامل[1] باشند، به کمک این نوع اتحادها با ضرایب صحیح تجزیه‌پذیر هستند، بنابراین :

$a^3x^{3m} + b^3x^{3n} = (ax^m + bx^n)$
$(a^2x^{2m} - abx^{m+n} + b^2x^{2n})$

$a^3x^{3m} - b^3x^{3n} = (ax^m - bx^n)$
$(a^2x^{2m} + abx^{m+n} + b^2x^{2n})$

مثال ۳ ـ عبارتهای زیر را تجزیه کنید :

الف) $A = 8x^3 - 27$

چنانچه ملاحظه می‌کنید $8x^3$ و ۲۷ را می‌توان به صورت $(2x)^3$ و $(3)^3$ نوشت، بنابراین هر جمله عبارت بالا مکعب کامل است ؛ در نتیجه به کمک اتحاد مجموع و تفاضل مکعبات دوجمله‌ای تجزیه می‌شود.

$$A=(2x)^3-(3)^3=(2x-3)\left((2x)^2+(2x)(3)+(3)^2\right)$$
$$=(2x-3)(4x^2+6x+9)$$

ب) $B=2x^4+54x$ ابتدا به کمک فاکتورگیری

$$=2x(x^3+27)$$

سپس به کمک اتحاد مجموع مکعبات دوجمله‌ای

$$=2x(x^3+3^3)=2x(x+3)(x^2-3x+9)$$

ج) $C=3ax^3y^6-192a^7y^3$ ابتدا به کمک فاکتورگیری

$$=3a(x^3y^6-64a^6y^3)$$

سپس به کمک اتحاد تفاضل مکعبات دوجمله‌ای

$$=3a\left((xy^2)^3-(4a^2y)^3\right)$$
$$=3a(xy^2-4a^2y)\left[(xy^2)^2+(xy^2)(4a^2y)+(4a^2y)^2\right]$$
$$=3a(xy^2-4a^2y)(x^2y^4+4a^2xy^3+16a^4y^2)$$

د) $E=(x-y)^3-64=(x-y)^3-(4)^3$

$$=\left[(x-y)-4\right]\left[(x-y)^2+4(x-y)+4^2\right]$$
$$=(x-y-4)(x^2+y^2-2xy+4x-4y+16)$$

۳. تجزیه سه‌جمله‌ایها

۳.۱ ـ سه‌جمله‌ایهایی به شکل $a^2+2ab+b^2$ یا $a^2-2ab+b^2$ به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای به صورت زیر تجزیه‌پذیر هستند:

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)=(a+b)(a+b)$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2=(a-b)(a-b)$$

سه جمله‌ایهایی به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای با ضرایب گویا تجزیه‌پذیرند، که دارای دو جمله مربع کامل هستند و جمله دیگر دو برابر حاصلضرب جذرجمله‌های مربع کامل است.

مثال۴ ـ چند جمله‌ایهای زیر را تجزیه کنید.

الف) $A=x^2-4x+4=(x)^2-2(x)(2)+(2)^2=$
$(x-2)^2=(x-2)(x-2)$

ب) $B=4ax^2+12axy+9ay^2$ ابتدا به کمک فاکتورگیری

$$=a(4x^2+12xy+9y^2)$$

سپس به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای

$$=a\left[(2x)^2+2(2x)(3y)+(3y)^2\right]=a(2x+3y)^2$$
$$=a(2x+3y)(2x+3y)$$

ج) $C=6ab-a^2b-9b$ ابتدا به کمک فاکتورگیری

$$=-b(a^2-6a+9)$$

بنابر اتحاد مربع دوجمله‌ای

$$=-b(a^2-2(3)a+3^2)=-b(a-3)^2$$
$$=-b(a-3)(a-3)$$

د) $a^2+\frac{1}{4}+a=a^2+2(a)(\frac{1}{2})+(\frac{1}{2})^2=(a+\frac{1}{2})^2$

$$=(a+\frac{1}{2})\ (a+\frac{1}{2})$$

هـ) $\frac{9x^2}{25}-2+\frac{25}{9x^2}=\left(\frac{3x}{5}\right)^2-2\left(\frac{3x}{5}\right)\left(\frac{5}{3x}\right)+\left(\frac{5}{3x}\right)^2$

$$=\left(\frac{3x}{5}-\frac{5}{3x}\right)^2=\left(\frac{3x}{5}-\frac{5}{3x}\right)\left(\frac{3x}{5}-\frac{5}{3x}\right)\qquad x\neq 0$$

۳.۲ ـ سه جمله‌ایهایی به شکل $x^2+(a+b)x+ab$ به کمک اتحاد یک جمله مشترک به صورت زیر تجزیه می‌شوند.

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$

سه‌جمله‌ایهایی که فقط یک جمله مربع کامل دارند یا اگر دو جمله آنها مربع کامل است آنگاه جمله دیگر دو برابر حاصلضرب جذر جمله‌های مربع کامل نباشد، به کمک اتحاد یک جمله مشترک در صورت امکان تجزیه‌پذیر هستند.

مثال۵ ـ عبارتهای زیر را تجزیه کنید.

الف) $A=x^2-8x+15$

سه جمله‌ای فوق را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم و آن را به کمک اتحاد یک جمله مشترک تجزیه کنیم.

$$A=x^2-8x+15=x^2+(-3+(-5))x+(-3)(-5)$$
$$=(x-3)(x-5)$$

در این مثال دو عدد پیدا می‌کنیم که جمعشان ۸- و ضربشان ۱۵ باشد، با کمی دقت درمی‌یابیم که آن دو عدد ۵- و ۳- هستند.

ب) $B=x^2+7xy+12y^2$

دو عدد پیدا می‌کنیم که جمع آنها $7y$ و ضرب آنها $12y^2$ باشد. با اندکی تأمل، ملاحظه می‌کنیم که آن دو عدد $3y$ و $4y$ می‌باشند بنابراین؛

$$B=x^2+7xy+12y^2=x^2+(3x+4y)x+(3y)(4y)$$

$$=(x+3y)(x+4y)$$

ج) $C = 4x^2 - 10x + 6$

سه جمله‌ای بالا شامل یک جمله مربع کامل است ($4x^2$) بنابراین در صورت امکان می‌توانیم آن را به کمک اتحاد یک جمله مشترک تجزیه کنیم، می‌دانیم که $4x^2$ مربع جمله مشترک است، بنابراین جمله مشترک $2x$ است. درنتیجه:

$$C = 4x^2 - 10x + 6 = (2x)^2 + (-5)\times 2x + 6$$

اکنون دو عدد پیدا می‌کنیم که جمع آنها ۵- و ضرب آنها ۶ باشد، که آن دو عدد ۲- و ۳- هستند، لذا:

$$C = (2x-2)(2x-3)$$
$$=(2x)^2 + (-2+(-3))2x + (-2)(-3)$$
$$=2(x-1)(2x-3)$$

۳.۳ـ روش تبدیل [2]

سه جمله‌ایهایی که به کمک دو روش قبل تجزیه‌پذیر نباشند و ضریب x^2 در آنها مربع کامل نباشد، در صورت امکان برای تجزیه آنها از روش تبدیل استفاده می‌کنیم. برای این کار ابتدا تمامی جملات سه جمله‌ای درجه دوم را در ضریب x^2 ضرب می‌کنیم، سپس با استفاده از اتحاد یک جمله مشترک آنرا تجزیه می‌کنیم و در مرحله نهایی حاصل را براولین ضریب x^2 تقسیم می‌کنیم.

مثال ۶ ــ عبارات زیر را تجزیه کنید.

الف) $A = 6x^2 - 5x - 6$

چون ضریب x^2 مربع کامل نیست، ابتدا عبارت فوق را در ضریب x^2 یعنی عدد ۶ ضرب می‌کنیم:

$$6A = 6\times(6x^2 - 5x - 6) = 36x^2 - 5(6x) - 36$$

اکنون به کمک اتحاد یک جمله مشترک و با توجه به اینکه جمله مشترک ($6x$) است، دو عدد پیدا می‌کنیم که جمعشان ۵- و ضربشان ۳۶- باشد. با کمی دقت درمی‌یابیم که آن دو عدد ۴+ و ۹- هستند، درنتیجه:

$$6A = (6x-9)(6x+4)$$

به کمک فاکتورگیری:

$$6A = 3\times(2x-3)\times 2(3x+2) = 6(2x-3)(3x+2)$$

در مرحله آخر طرفین را بر ۶ تقسیم می‌کنیم، لذا:

$$A = (2x-3)(3x+2)$$

ب) $B = 20b^2 - 24bc - 9c^2$

طرفین رابطه بالا را در ۲۰ ضرب می‌کنیم:

$$20B = 20\times(20b^2 - 24bc - 9c^2)$$
$$= 400b^2 - 24c(20b) - 180c^2$$

با توجه به اینکه جمله مشترک $20b$ می‌باشد و دو عددی که جمعشان $-24c$ و ضربشان $-180c^2$ است، به صورت $-30c$ و $+6c$ هستند خواهیم داشت:

$$20B = (20b+6c)(20b-30c)$$

به کمک فاکتورگیری داریم:

$$20B = 2\times(10b+3c)\times 10\times(2b-3c)$$

طرفین را بر ۲۰ تقسیم می‌کنیم.

$$20B = 20(10b+3c)(2b-3c)$$
$$B = (10b+3c)(2b-3c)$$

ج) $C = 6a^3x - 13a^2x^2 + 6ax^3$

ابتدا به کمک فاکتورگیری خواهیم داشت:

(1)

$$C = ax(6a^2 - 13ax + 6x^2)$$

اکنون به کمک روش تبدیل سه جمله‌ای $Q = 6a^2 - 13ax + 6x^2$ را تجزیه می‌کنیم. برای این کار در مرحله اول باید طرفین را در عدد ۶ ضرب کنیم، درنتیجه:

$$6Q = 6\times(6a^2 - 13ax + 6x^2)$$
$$6Q = 36a^2 - 13x(6a) + 36x^2$$

جمله مشترک در اینجا $6a$ است و دو عددی که جمع آنها $-13x$ و ضرب آنها $36x^2$ است به صورت $-9x$ و $-4x$ هستند، بنابراین:

$$6Q = (6a-9x)(6a-4x)$$

به کمک فاکتورگیری داریم:

$$6Q = 3\times(2a-3x)\times 2(3a-2x)$$
$$6Q = 6(2a-3x)(3a-2x)$$

چون در ابتدا طرفین را در ۶ ضرب کردیم، اکنون باید

طرفین را بر همان عدد ۶ تقسیم کنیم، لذا خواهیم داشت:

$Q=(2a-3x)(3a-2x)$

عبارت به دست آمده تجزیه، $6a^2-13ax+6x$ است. با جایگزینی در رابطه (۱) خواهیم داشت: $c=ax(2a-3x)(3a-2x)$

۴. تجزیه چهارجمله‌ایها

۴.۱ ـ چهارجمله‌ایهای تجزیه‌پذیری که سه جمله آنها به فرمهای $a^2+2ab+b^2$ یا $a^2-2ab+b^2$ باشند، با دسته‌بندی چنین سه‌جمله‌ایهایی در یک پرانتز و استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای و اتحاد مزدوج تجزیه‌پذیر هستند.

مثال ۷ ـ چندجمله‌ایهای زیر را تجزیه کنید.

ابتدا دسته‌بندی می‌کنیم:

الف) $A=x^2+2x-y^2+1=(x^2+2x+1)-y^2$

سپس به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای:

$=(x+1)^2-y^2$

بالاخره به کمک اتحاد مزدوج:

$=[(x+1)-y][(x+1)+y]$

ب) $B=m^4-x^2+2xp-p^2$

$=m^4-(x^2-2xp+p^2)$

سپس به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای:

$=m^4-(x-p)^2$

بالاخره به کمک اتحاد مزدوج:

$=(m^2-(x-p))(m^2+(x-p))$

$=(m^2-x+p)(m^2+x-p)$

ج) $C=4by-b^2+9x^2-4y^2$

$=9x^2-(b^2-4by+4y^2)$

سپس به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای $=9x^2-(b-2y)^2$

$=[3x-(b-2y)][3x+(b-2y)]$

بالاخره به کمک اتحاد مزدوج:

$=(3x-b+2y)(3x+b-2y)$

۴.۲ ـ چهارجمله‌ایهای تجزیه‌پذیری که سه جمله آنها به صورت قبل نباشند، آنها را طوری به دو دسته دو جمله‌ای دسته‌بندی می‌کنیم که پرانتزهای مشترک قابل فاکتورگیری به وجود آید، سپس با فاکتورگیری از پرانتز مشترک تجزیه چهارجمله‌ای به دست می‌آید.

مثال ۸ ـ چندجمله‌ایهای زیر را تجزیه کنید.

ابتدا دسته‌بندی می‌کنیم: الف) $A=x^2+ax+ab+bx$

$=(x^2+ax)+(ab+bx)$

$=x(x+a)+b(a+x)$

$=(x+a)(x+b)$

ب) $B=a^2-ab-b-1=(a^2-1)-(ab+b)$

$=(a-1)(a+1)-b(a+1)$

سپس با فاکتورگیری از پرانتز مشترک داریم:

$=(a+1)[(a-1)-b]$

$=(a+1)(a-1-b)$

ج) $C=a^5-a^3+a^2-1$

$=(a^5-a^3)+(a^2-1)$

$=a^3(a^2-1)+(a^2-1)$

از پرانتز مشترک فاکتور می‌گیریم:

$=(a^2-1)(a^3+1)$

تجزیه را تا مرحله آخر ادامه می‌دهیم:

$=(a-1)(a+1)(a+1)(a^2-a+1)$

د) $D=-5a^3+10x^3-25a^2x^2+2ax$

$=(-5a^3-25a^2x^2)+(10x^3+2ax)$

$=-5a^2(a+5x^2)+2x(5x^2+a)$

$=(5x^2+a)(-5a^2+2a)$

۵. تجزیه سه‌جمله‌ایها در حالت خاص [3]

برای تجزیه سه‌جمله‌ایهای تجزیه‌پذیری که به کمک روشهای قبل تجزیه نشوند، باید یک جمله آنها را به صورت جمع جبری دو جمله بنویسیم تا این که به چهارجمله‌ای تبدیل گردند. سپس به کمک روشهای تجزیه چهار جمله‌ایها آنها را به صورت حاصلضرب عوامل تجزیه کنیم.

مثال ۹ ـ چندجمله‌ایهای زیر را تجزیه کنید.

الف) $A=x^4+x^2+1$

ابتدا x^2 را به صورت $2x^2-x^2$ می‌نویسیم، یعنی

$A=x^4+2x^2-x^2+1$

$=(x^4+2x^2+1)-x^2$

حال با دسته‌بندی جملات آن را تجزیه می‌کنیم.

$$=(x^2+1)^2-x^2=\left[(x^2+1)-x\right]\left[(x^2+1)+x\right]$$

ب) $B=x^8+1+x^4$

ابتدا x^4 را به صورت $2x^4-x^4$ می‌نویسیم،

$$=x^8+1+2x^4-x^4$$

$$B=(x^8+2x^4+1)-x^4$$

$$=(x^4+1)^2-x^4=\left[(x^4+1)-x^2\right]\left[(x^4+1)+x^2\right]$$

با استفاده از مثال قبل خواهیم داشت:

$$B=(x^4+1-x^2)(x^2+1-x)(x^2+1+x)$$

ج) $C=a^3+3a^2-4$

ابتدا ۴- را به صورت ۱-۳- می‌نویسیم:

$$=a^3+3a^2-3-1$$

$$=(a^3-1)+(3a^2-3)$$

$$=(a-1)(a^2+a+1)+3(a-1)(a+1)$$

$$=(a-1)\left[(a^2+a+1)+3(a+1)\right]=(a-1)(a^2+4a+4)$$

$$=(a-1)(a+2)^2$$

$$=(a-1)(a+2)(a+2)$$

۶. تجزیه پنج‌جمله‌ایها و شش‌جمله‌ایها

۶.۱ ــ این‌گونه عبارات ممکن است شامل دو سه جمله‌ای بفرمهای $a^2+2ab+b^2$ یا $a^2-2ab+b^2$ باشند، در این حالت کافیست ابتدا سه‌جمله‌ایها را دسته‌بندی کنیم سپس به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای و اتحاد مزدوج آنرا تجزیه نماییم.

مثال۱۰ ــ عبارات زیر را تجزیه کنید.

الف) $A=x^2+4x-5-y^2-4y$

ابتدا ۵- را به صورت ۹-۴ می‌نویسیم، تا این که دو سه‌جمله‌ای به فرمهای بالا به وجود آیند، بنابراین:

$$A=x^2+4x+4-9-y^2-6y$$

سپس دو «سه‌جمله‌ای» دسته‌بندی می‌کنیم:

$$=(x^2+4x+4)-(9+y^2+6y)$$

$$=(x+2)^2-(3+y)^2$$

بنابر اتحاد مربع دوجمله‌ای داریم:

$$=\left[(x+2)-(3+y)\right]\left[(x+2)+(3+y)\right]$$

به کمک اتحاد مزدوج خواهیم داشت:

$$=(x-y-1)(x+y+5)$$

ب) $B=x^2-y^2+14x-6y+40$

ابتدا عدد ۴۰ را به صورت ۹-۴۹ می‌نویسیم:

$$B=x^2-y^2+14x-6y+49-9$$

سپس دو «سه‌جمله‌ای» دسته‌بندی می‌کنیم:

$$=(x^2+4x+49)-(y^2+6y+9)$$

بنابر اتحاد مربع دوجمله‌ای داریم:

$$=(x+7)^2-(y+3)^2$$

به کمک اتحاد مزدوج خواهیم داشت:

$$=\left[(x+7)-(y+3)\right]\left[(x+7)+(y+3)\right]$$

$$=(x-y+4)(x+y+10)$$

۶.۲ ــ پنج جمله‌ای یا شش‌جمله‌ای ممکن است به کمک اتحاد یک جمله مشترک تجزیه شوند، در این حالت جملات غیرمشترک بصورت چندجمله‌ای هستند، که به کمک دسته‌بندی و فاکتورگیری چنین عبارتی را تجزیه می‌کنیم.

مثال۱۱ ــ چندجمله‌ایهای زیر را تجزیه کنید.

الف) $A=x^2+x-6+13y-6y^2+xy$

ابتدا دسته‌بندی می‌کنیم:

$$=x^2+(x+xy)+(-6y^2+13y-6)$$

سپس هر پرانتز را تجزیه می‌کنیم.

$$=x^2+(1+y)x+(-2y+3)(3y-2)$$

با استفاده از اتحاد یک جمله مشترک و با توجه به اینکه جمله مشترک x و جمله‌های غیرمشترک $(3y-2)$ و $(-2y+3)$ هستند، خواهیم داشت:

$$A=(x-2y+3)(x+3y-2)$$

ب) $B=4x^2+6xy+2y^2+3my+2mx-2m^2$

ابتدا دسته‌بندی می‌کنیم:

$$=4x^2+(6xy+2mx)+(2y^2+3my-2m^2)$$

سپس هر پرانتز را تجزیه می‌کنیم:

$$=4x^2+(3y+m)\times 2x+(2y-m)(y+2m)$$

اکنون با استفاده از اتحاد یک جمله مشترک‌خواهیم داشت:

$$B=(2x+2y-m)(2x+y+2m)$$

ج) $C = x^2 + (5xy + x) + (4y^2 + y)$

ابتدا دسته‌بندی می‌کنیم:

$= x^2 + 4y^2 + 5xy + x + y$

سپس هر پرانتز را تجزیه می‌کنیم:

$C = x^2 + (5y + 1) \times x + y(4y + 1)$

اکنون با استفاده از اتحاد یک جمله مشترک خواهیم داشت

$= (x + y)(x + 4y + 1)$

۶.۳ ــ در این گونه عبارات ممکن است یک سه‌جمله‌ی به فرمهای $a^2 + 2ab + b^2$ یا $a^2 - 2ab + b^2$ و سه‌جمله‌ای دیگر به فرم $x^2 + (a+b)x + ab$ یا یک چهارجمله‌ای موجود باشد، در این صورت با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای و اتحاد یک جمله مشترک و به کمک روشهای دسته‌بندی در چهارجمله‌ایها و فاکتورگیری، عبارت را به حاصلضرب عوامل تجزیه می‌کنیم.

مثال ۱۲ ــ عبارات زیر را تجزیه کنید.

الف) $A = 6x^2 - 5x - 2xy + y + 1$

ابتدا $6x^2$ را به صورت $4x^2 + 2x^2$ و $-5x$ را به صورت $-4x - x$ می‌نویسیم، بنابراین:

$A = 4x^2 + 2x^2 - 4x - x - 2xy + y + 1$

حال با دسته‌بندی جملات داریم:

$= (4x^2 + 4x + 1) + (2x^2 - x - 2xy + y)$

با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای و روشهای تجزیه چهارجمله‌ایها خواهیم داشت:

$= (2x - 1)^2 + (2x - 1)(x - y)$

به کمک روش فاکتورگیری:

$= (2x - 1)[(2x - 1) + (x - y)]$

$= (2x - 1)(3x - y - 1)$

ب) $B = 6x^2 + 2xy - 3y + x - 15$

ابتدا $6x^2$ را به صورت $4x^2 + 2x^2$ و x را به صورت $4x - 3x$ می‌نویسیم، بنابراین:

$B = 4x^2 + 2x^2 + 2xy - 3y + 4x - 3x - 15$

اکنون با روش دسته‌بندی جملات داریم:

$= (4x^2 + 4x - 15) + (2x^2 + 2xy - 3x - 3y)$

با استفاده از اتحاد یک جمله مشترک و روشهای تجزیه چهارجمله‌ایها خواهیم داشت:

$B = (2x - 3)(2x + 5) + (2x - 3)(x + y)$

به کمک روش فاکتورگیری: $= (2x - 3)[(2x + 5) + (x + y)] =$

$= (2x - 3)(3x + y + 5)$

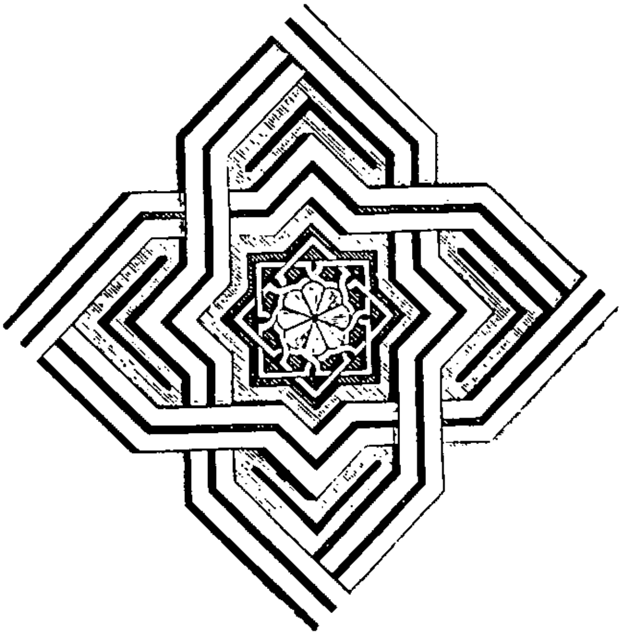
لازم به تذکر است که تجزیه پنج جمله‌ایها و شش‌جمله‌ایها، ذهن خلاق و مبتکری را می‌طلبد و دانش‌آموز باید با تیزبینی خاص و ترکیب مطالب خوانده شده درباره تجزیه چندجمله‌ایها مبادرت به تجزیه این گونه عبارات کند.

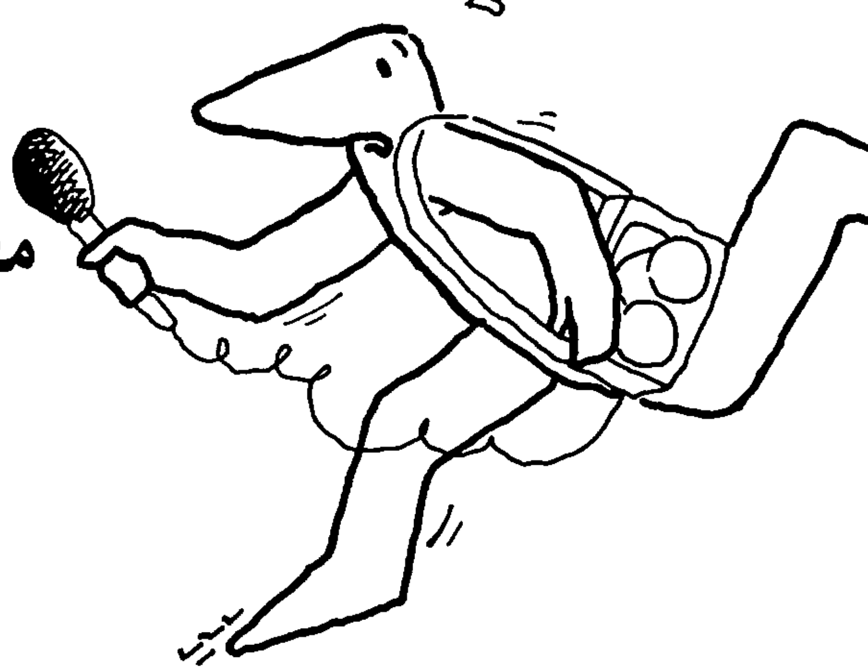
پانوشتها:

۱. هرجمله به فرم a^3 را مکعب کامل گویند. (که در آن $a \in z$) بعنوان مثال ۸ یا ۲۷ مکعب کامل هستند زیرا ۸ را می‌توان به صورت 2^3 یا ۲۷ را می‌توان به صورت 3^3 نوشت.

۲. دلیل نامگذاری «روش تبدیل» این که با انجام عملیاتی سه جمله‌ای را به اتحاد یک جمله مشترک تبدیل می‌کنیم، سپس آن را تجزیه می‌کنیم.

۳. این طریق تجزیه را روش شکستن جملات گویند.





مصاحبه با یک عدد

از: کلیفورد آ. پیکاور[1]

ترجمهٔ کریم احمدی دلیر

گروه ریاضی دانشگاه تربیت معلم تبریز

اگر عقیدهٔ آن رایس[2]، نویسندهٔ پرفروشترین رمانها را باور داشته باشیم، خون‌آشامان[3] از بسیاری جهات شبیه انسان هستند، امّا رازهای زنده‌ای که در میان ما به طور پنهانی زندگی می‌کنند و مرگبار هستند. خون‌آشام‌هایی هم در دنیای ریاضیات، اعداد، وجود دارند که اعدادی عادی به نظر می‌رسند امّا یک اختلاف پنهانی در بردارند. آنها در واقع حاصلضرب دو عدد اجداد خود هستند که هرگاه در هم ضرب شوند، با یکدیگر درمی‌آمیزند و در عدد خون‌آشام ابقا می‌شوند. یک چنین موردی را در نظر بگیرید: ۲۷×۸۱ = ۲۱۸۷ . ■ یک عدد خون‌آشام دیگر ۱۴۳۵ است که حاصلضرب ۳۵ و ۴۱ است.

من خون‌آشامان واقعی را مثل دو مثال قبلی چنین تعریف می‌کنم که دارای سه قاعده هستند: انها تعداد زوجی از ارقام را دربردارند. هر یک از اعداد اجدادی دارای نیمی از رقمهای خون‌آشام هستند. و سرانجام، یک عدد خون آشام واقعی به طور ساده با اضافه کردن صفرها به انتهای اعداد ایجاد نمی‌شود، مثل:

۲۷۰,۰۰۰×۸۱۰,۰۰۰ = ۲۱۸,۷۰۰,۰۰۰,۰۰۰

خون‌آشامان واقعی هرگز این‌چنین آشکار نمی‌توانستند باشند.

اعداد خون‌آشام به طور مرموز در دستگاه اعداد ما سُکنی گزیده‌اند، اما بیشتر آنها تاکنون کشف نشده‌اند. هنگامی که آینهٔ نقره‌ای و میخ‌چوبی‌ام را قاپیدم و شروع به جستجوی آنها کردم، علاوه بر دو عدد بالایی، پنج عدد خون‌آشام چهار رقمی دیگر نیز یافتم. آیا می‌توانید آنها را بیابید؟ آیا می‌توانید اعداد خون‌آشام با ارقام بیشتری را بیابید؟

پاسخها:

اعداد زیر پنج خون‌آشام واقعی چهار رقمی دیگر هستند:

۱۵×۹۳ = ۱۳۹۵   ۳۰×۵۱ = ۱۵۳۰   ۲۱×۶۰ = ۱۲۶۰

۸۰×۸۶ = ۶۸۸۰   ۲۱×۸۷ = ۱۸۲۷

در واقع اعداد خون‌آشام بسیار بزرگتری نیز وجود دارند. برای مثال ۱۵۵ عدد خون‌آشام شش رقمی موجودند. اخیراً، من دانشمندان کامپیوتر و ریاضیدانان سرتاسر جهان را برای ارائهٔ بزرگترین عدد خون‌آشامی که می‌توانستند بیابند به مبارزه طلبیدم. آخرین رکورد جهانی عبارت است از:

۱,۲۳۴,۵۵۴,۳۲۱×۹,۱۶۲,۳۶۱,۰۸۶ =
۱۱,۳۱۱,۴۳۲,۴۶۹,۲۸۳,۵۵۲,۶۰۶

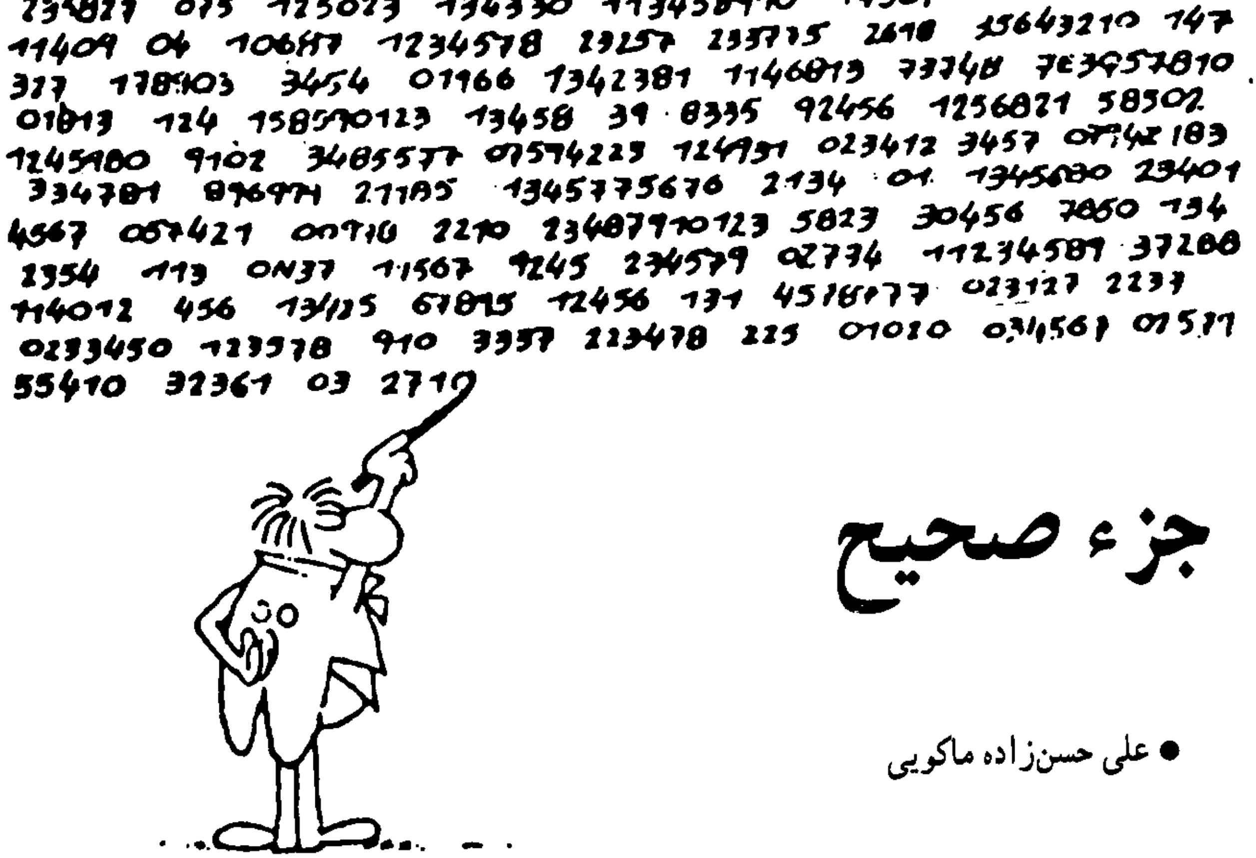
(اگر توانستید یک رکورد جهانی جدید بیابید، یا اگر مایل به دریافت اطلاعات بیشتری (شامل لیستی از اعداد خون‌آشام شش رقمی) هستید لطفاً به آدرس:

Clifford A. Pickover, c/o Discover, 114 Fifth Av. New York, N. Y. 10011-5690

نامه بنویسید.)

(برگردان از : مجله Discover June 1995)

1. Clifford A.Pickover.
2. Anne Rice.
3. Vampire.



جزء صحیح

● علی حسن‌زاده ماکویی

۱. هر عدد حقیقی مانند x را می‌توان به صورت مجموع یک عدد صحیح مانند n، ($n \in \mathbb{Z}$) و عدد دیگری مانند a ($۰ \le a < ۱$) نوشت.

مثال (۱) $x = ۷/۴ \;,\; n = ۷ \;,\; x = ۰/۴$

(۲) $x = -۱۲/۷ \;,\; n = -۱۳ \;,\; a = ۰/۳$

(۳) $x = \sqrt{۵} \;,\; n = ۲ \;,\; a = \sqrt{۵} - ۲$

(۴) $x = -\pi \;,\; n = -۴ \;,\; a = ۴ - \pi$

جزء صحیح هر عدد حقیقی مانند x را با نماد [x] نشان داده و آن را براکت می‌خوانند (Bracket)، x هرگاه $n \in \mathbb{Z} \;,\; n \le x < n+۱$ آنگاه:

$$[x] = n$$

با توجه به مطالب فوق [x] بزرگترین عدد صحیح موجود در x و نابزرگتر (کوچکتر یا مساوی) از آن است.

به مثالهای زیر توجه کنید.

(۱) $\left[\frac{۱۷}{۳}\right] = ۵$

(۲) $\left[-\frac{۱۷}{۳}\right] = -۶$

(۳) $\left[\left(\frac{۷}{۲}\right)^۲\right] = ۱۲$

(۴) $\left(\left[\frac{۷}{۲}\right]\right)^۲ = ۹$

(۵) $\left[-\left(\frac{۳}{\pi}\right)^۲\right] = -۱$

(۶) $-\left[\left(\frac{۳}{\pi}\right)\right] = ۰$

(۷) $\left[(\sqrt{۳} - ۲)^{۲k-۱}\right] = -۱$

(۸) $k \in \mathbb{N} \;,\; \left[(\sqrt{۳} - ۲)^{۲k}\right] = ۰$

زیرا $-۱ \le a < ۰ \Rightarrow [a] = -۱$ و $۰ \le b < ۱ \Rightarrow [b] = ۰$

و $-۱ < \sqrt{۳} - ۲ < ۰ \Rightarrow -۱ < (\sqrt{۳} - ۲)^{۲k-۱} < ۰$

و $۰ < (\sqrt{۳} - ۲)^{۲k} < ۱$

یادآوری می‌شود که در مواردی (مثلاً محاسبه‌های رایانه‌ای) به کوچکترین عدد صحیح موجود در x که ناکوچکتر (بزرگتر یا مساوی) از x است، نیازمندیم. روی این اصل، دو نوع جزء صحیح برای هر عدد حقیقی مانند x تعریف کرده‌اند، بزرگترین عدد صحیح نابزرگتر از x را با نماد $\lfloor x \rfloor$ یا [x] و کوچکترین عدد صحیح ناکوچکتر از x را با نماد $\lceil x \rceil$ نشان می‌دهند.

مثلاً

$$[۱/۴] = \lfloor ۱/۴ \rfloor = ۱ \;,\; \lceil ۱/۴ \rceil = ۲$$

$$[-۳/۹]=\lfloor -۳/۹\rfloor=-۴\ ,\ \lceil -۳/۹\rceil=-۳$$

$$[\sqrt{۲}-۱]=\lfloor \sqrt{۲}-۱\rfloor=۰\ ,\ \lceil \sqrt{۲}-۱\rceil=۱$$

$$[۱-\sqrt{۳}]=\lfloor ۱-\sqrt{۳}\rfloor=-۱\ ,\ \lceil ۱-\sqrt{۳}\rceil=۰$$

به طورکلی هرگاه، $n\in \mathbb{Z}\ ,\ n<x<n+۱$ آنگاه :

$$[x]=\lfloor x\rfloor=n\ ,\ \lceil x\rceil=n+۱$$

در بعضی از کتابهای ریاضی عدد $a-[a]$ (جزء ناصحیح a) را با نماد $\{a\}$ نشان می‌دهند، و به آن براسه (Brace) عدد a می‌گویند. واضح است که $۰<\{a\}<۱$.

۲. تابع $f(x)=[x]$ را که دامنهٔ آن مجموعهٔ عددهای حقیقی ($\mathbb{R}$) و بردش مجموعه عددهای صحیح نسبی و صفر($\mathbb{Z}$) است تابع جزء صحیح می‌گویند. به این ترتیب می‌توان نوشت :

$$f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{Z}\ ,\ f(x)=[x]$$

(در بعضی از کتابهای ریاضی تابع جزء صحیح را با نماد، $f(x)=E(x)$ نیز نشان داده‌اند).

۳. چند رابطه در مورد تابعهای جزء صحیح

(۱) $m\in\mathbb{Z}\ ,\ [x+m]=[x]+m$

زیرا : $n\in\mathbb{Z}\ ,\ n\le x<n+۱\Rightarrow[x]=n$

$n+m\le x+m<n+۱+m\Rightarrow[x+m]=$
$n+m=[x]+m$

مثال : $[-۷/۶+۱]=[-۶/۶]=-۷$

و $[-۷/۶+۱]=[-۷/۶]+۱=-۸+۱=-۷$

و $[۲۲/۴-۵]=[۱۷/۴]=۱۷$

$[۲۲/۴-۵]=[۲۲/۴]-۵=۲۲-۵=۱۷$

دقت کنید که اگر $m\in\mathbb{R}\ ,\ m\notin Z$

آنگاه $[x+m]\neq[x]+m$

زیرا $([x]+m)\notin Z\ ,\ [x+m]\in Z$

(۲)
$$[-x]=\begin{cases}-[x]\ ,\ x\in Z\\ -[x]-۱\ ,\ x\notin Z\end{cases}$$

زیرا $n\in Z\ ,\ x=n\Rightarrow[x]=n\ ,\ -x=-n\Rightarrow$
$[-x]=-n=-[x]$

و $n<x<n+۱\Rightarrow[x]=n\ ,\ -(n+۱)<-x<-n\Rightarrow$
$[-x]=-n-۱=-[x]-۱$

مثال : $[-۷]=-۷=-[x]$

$[-۱۲/۴]=-۱۳\ ,\ -[۱۲/۴]-۱=-۱۲-۱=-۱۳$

(۳) $[x+y]$ برابر است با : $[x]+[y]$ یا $[x]+[y]+۱$.

زیرا $m,n\in Z,\ \ m\le x<m+۱\Rightarrow[x]=m$

$n\le y<n+۱\Rightarrow[y]=n\ ,\ m+n\le x+y<m+n+۲$

الف $m+n\le x+y<m+n+۱\Rightarrow$
$[x+y]=m+n=[x]+[y]$

ب $m+n+۱\le x+y<m+n+۲\Rightarrow$
$[x+y]=m+n+۱=[x]+[y]+۱$

مثال : الف $[۲/۳+۷/۴]=[۹/۷]=۹$
$[۲/۳]+[۷/۴]=۲+۷=۹$

ب $[۵/۶+۱۱/۷]=[۱۷/۳]=۱۷$
$[۵/۶]+[۱۱/۷]+۱=۵+۱۱+۱=۱۷$

(۴) $[۲x]=[x]+\left[x+\frac{۱}{۲}\right]$

زیرا : $n\in Z\ ,\ n\le x<n+۱\Rightarrow[x]=n$

الف $n\le x<n+\frac{۱}{۲}\ ,\ n+\frac{۱}{۲}\le x+\frac{۱}{۲}<n+۱\Rightarrow$
$\left[x+\frac{۱}{۲}\right]=n$

$۲n\le ۲x<۲n+۱\Rightarrow[۲x]=۲n=[x]+\left[x+\frac{۱}{۲}\right]$

ب $n+\frac{۱}{۲}\le x<n+۱\ ,\ n+۱\le x+\frac{۱}{۲}<n+\frac{۳}{۲}$

و $۲n+۱\le ۲x<۲n+۲\ ,\ [x]=n\ ,\ \left[x+\frac{۱}{۲}\right]=n+۱$

$[۲x]=۲n+۱=[x]+\left[x+\frac{۱}{۲}\right]$

مثال : $[۲\times -۷/۸]=[-۱۵/۶]=-۱۶$

$[-۷/۸]=-۸\ ,\ \left[-۷/۸+\frac{۱}{۲}\right]=[-۷/۳]=-۸$

و $[۲\times ۶/۸]=[۱۳/۶]=۱۳$

$[۶/۸]=۶\ ,\ \left[۶/۸+\frac{۱}{۲}\right]=[۷/۳]=۷$

(۵) $[۳x]=[x]+\left[x+\frac{۱}{۳}\right]+\left[x+\frac{۲}{۳}\right]$

زیرا : $n+\frac{۲}{۳}\le x<n+۱$ یا $n+\frac{۱}{۳}\le x<n+\frac{۲}{۳}$ یا $n\in Z\ ,\ n\le x<n+\frac{۱}{۳}$ با توجه به بررسی رابطه ۴ به آسانی می‌توان رابطه فوق را اثبات کرد.

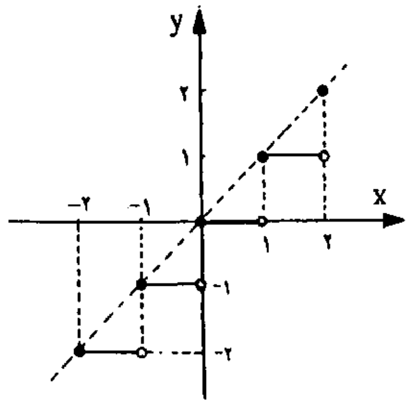
مثال : $[۳\times ۵/۴]=[-۱۶/۲]=-۱۷$

و $[-5/4]=-6$, $\left[-5/4+\frac{1}{3}\right]=\left[\frac{-76}{15}\right]=-6$

$\left[-5/4+\frac{2}{3}\right]=\left[\frac{-71}{15}\right]=-5$ $(-6)+(-6)+(-5)=-17$

۴. رسم نمودار تابع جزء صحیح

جهت آشنا شدن با رسم نمودار تابعهایی که دارای جزء صحیح هستند، به مثالهای زیر توجه کنید.



(۱) $y=[x]$, $x\in[-2,2]$

$-2\le x<-1\Rightarrow y=-2$

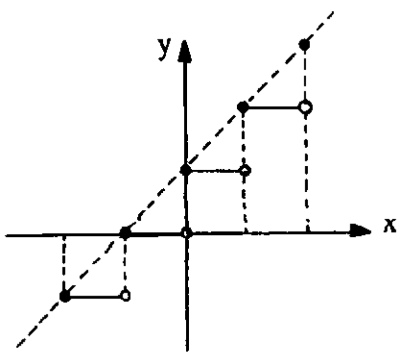
$-1\le x<0\Rightarrow y=-1$

$0\le x<1\Rightarrow y=0$

$1\le x<2\Rightarrow y=1$

$x=2\Rightarrow y=2$

نقطه‌های پرجزو نمودار هستند و نقطه‌های توخالی جزو نمودار نیستند.



(۲) $y=[x+1]$, $x\in[-2,2]$

$-2\le x<-1\Rightarrow y=-1$

$-1\le x<0\Rightarrow y=0$

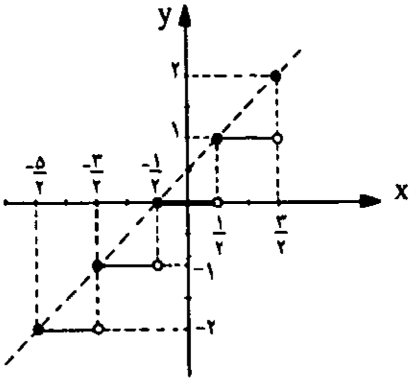
$0\le x<1\Rightarrow y=1$

$1\le x<2\Rightarrow y=2$

$x=2\Rightarrow y=3$

نمودار قبل‌همان نمودار $y=[x]$ است که به اندازهٔ یک واحد روی محور y ها تغییر مکان یافته است.

به طور کلی برای رسم نمودار $y=[x+n]=[x]+n$, $n\in Z$ کافی است نمودار $y=[x]$ را به اندازهٔ n واحد روی محور y ها تغییر مکان دهیم.



(۳) $y=\left[x+\frac{1}{2}\right]$, $x\in\left[-\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right]$

$-\frac{5}{2}\le x<-\frac{3}{2}\Rightarrow y=-2$

$-\frac{3}{2}\le x<-\frac{1}{2}\Rightarrow y=-1$

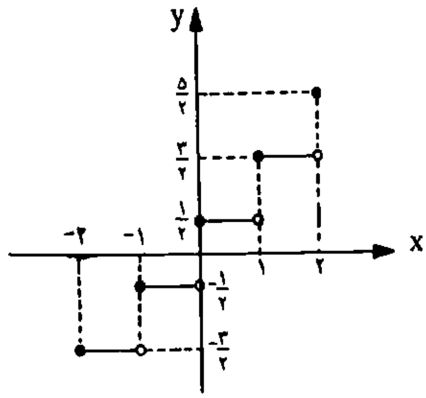
$-\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2}\Rightarrow y=0$

$\frac{1}{2}\le x<\frac{3}{2}\Rightarrow y=1$

$x=\frac{3}{2}\Rightarrow y=2$

ملاحظه می‌شود که نمودار فوق همان نمودار $y=[x]$ است که به اندازهٔ $(-\frac{1}{2})$ روی محور xها تغییرمکان داده شده است.

به‌طورکلی هرگاه m عدد صحیح نباشد $(m\notin Z)$ آنگاه برای رسم نمودار $y=[x+m]$ کافی است نمودار $y=[x]$ را به اندازهٔ قرینه m روی محور x ها تغییر مکان دهیم. یادآوری می‌شود که در حالت کلی برای رسم نمودار $y=f(x+\alpha)$ کافی است نمودار $y=f(x)$ را به اندازهٔ قرینه α روی محور xها تغییر مکان دهیم.



(۴) $y=[x]+\frac{1}{2}\ ,\ x\in[-2,2]$

$-2\leq x<-1\Rightarrow y=-\frac{3}{2}$

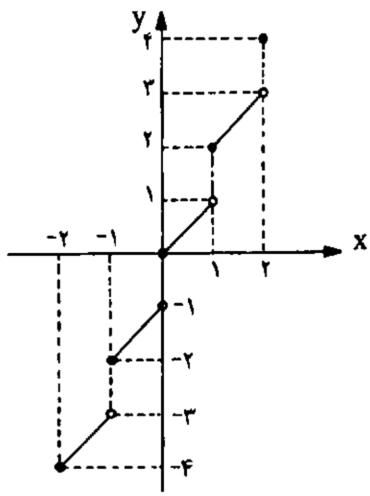
$-1\leq x<0\Rightarrow y=-\frac{1}{2}$

$0\leq x<1\Rightarrow y=\frac{1}{2}$

$1\leq x<2\Rightarrow y=\frac{3}{2}$

$x=2\Rightarrow y=\frac{5}{2}$

بطوری که ضمن مسأله ۲ بیان شد برای رسم نمودار تابع فوق کافی است نمودار $y=[x]$ به اندازه $\frac{1}{2}$ واحد روی محور y ها تغییر مکان دهیم.



(۵) $y=x+[x]\ ,\ x\in[-2,2]$

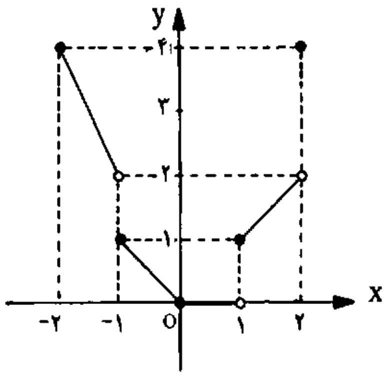
$-2\leq x<-1\Rightarrow y=x-2$

$-1\leq x<0\Rightarrow y=x-1$

$0\leq x<1\Rightarrow y=x$

$1\leq x<2\Rightarrow y=x+1$

$x=2\Rightarrow y=4$



(۶) $y=x.[x]\ ,\ x\in[-2,2]$

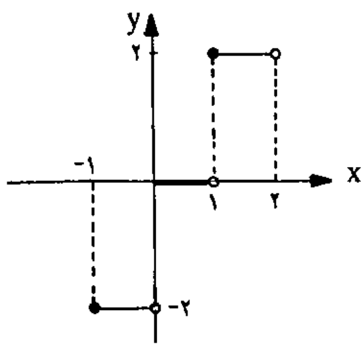
$-2\leq x<-1\Rightarrow y=-2x$

$-1\leq x<0\Rightarrow y=-x$

$0\leq x<1\Rightarrow y=0$

$1\leq x<2\Rightarrow y=x$

$x=2\Rightarrow y=4$

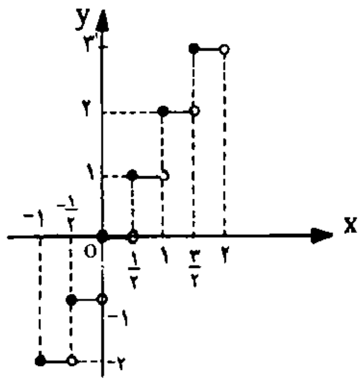


(۷) $y=2[x]\ ,\ x\in[-1,2)$

$-1\leq x<0\Rightarrow y=-2$

$0\leq x<1\Rightarrow y=0$

$1\leq x<2\Rightarrow y=2$



(۸)

$y=[۲x]\ ,\ x\in[-۱,۲)$

$-۱\le x<-\frac{۱}{۲}\Rightarrow y=-۲$

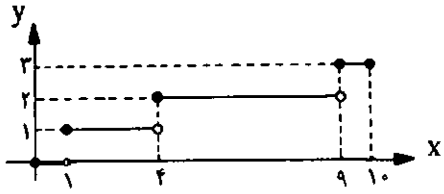
$-\frac{۱}{۲}\le x<۰\Rightarrow y=-۱$

$۰\le x<\frac{۱}{۲}\Rightarrow y=۰$

$\frac{۱}{۲}\le x<۱\Rightarrow y=۱$

$۱\le x<\frac{۳}{۲}\Rightarrow y=۲$

$\frac{۳}{۲}\le x<۲\Rightarrow y=۳$

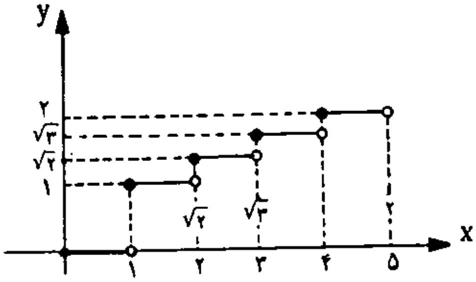


(۹)

$y=\left[\sqrt{x}\right]\ ,\ x\in[۰,۱۰]$

$۰\le x<۱\Rightarrow y=۰\ ,\ ۱\le x<۴\Rightarrow y=۱$

$۴\le x<۹\Rightarrow y=۲\ ,\ ۹\le x\le ۱۰\Rightarrow y=۳$



(۱۰)

$y=\sqrt{[x]}\ ,\ x\in[۰,۵)$

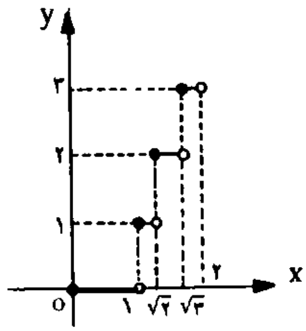
$۰\le x<۱\Rightarrow y=۰$

$۱\le x<۲\Rightarrow y=۱$

$۲\le x<۳\Rightarrow y=\sqrt{۲}$

$۳\le x<۴\Rightarrow y=\sqrt{۳}$

$۴\le x<۵\Rightarrow y=۲$



(۱۱)

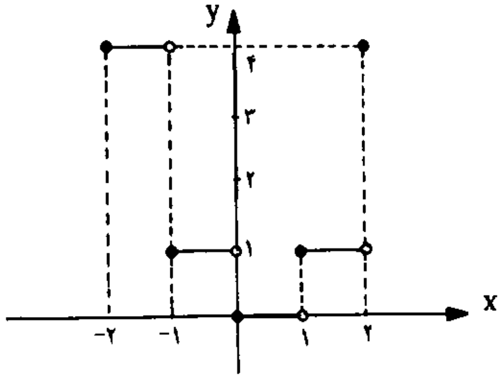
$y=\left[x^{۲}\right]\ ,\ x\in[۰,۲)$

$۰\le x<۱\Rightarrow y=۰$

$۱\le x<\sqrt{۲}\Rightarrow y=۱$

$\sqrt{۲}\le x<\sqrt{۳}\Rightarrow y=۲$

$\sqrt{۳}\le x<۲\Rightarrow y=۳$



(۱۲)

$y=([x])^{۲}\ ,\ x\in[-۲,۲]$

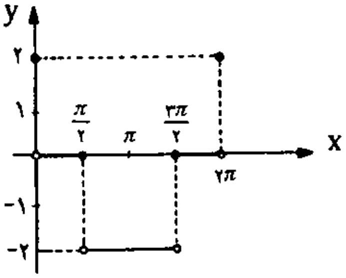
$-۲\le x<-۱\Rightarrow y=۴$

$-۱\le x<۰\Rightarrow y=۱$

$۰\le x<۱\Rightarrow y=۰$

$۱\le x<۲\Rightarrow y=۱$

$x=۲\Rightarrow y=۴$



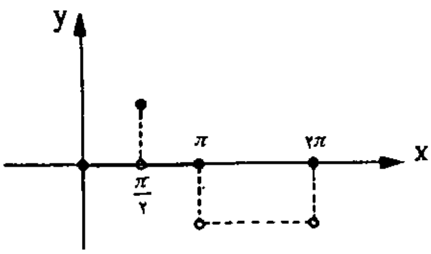
(۱۳)

$y=۲[\cos x]\ ,\ x\in[۰,۲\pi]$

$۰<x\le\frac{\pi}{۲}$ یا $\frac{۳\pi}{۲}\le x<۲\pi\Rightarrow[\cos x]=۰\Rightarrow y=۰$

$\frac{\pi}{۲}<x<\frac{۳\pi}{۲}\Rightarrow[\cos x]=-۱\Rightarrow y=-۲$

$x=۰$ یا $x=۲\pi\Rightarrow[\cos x]=۱\Rightarrow y=۲$

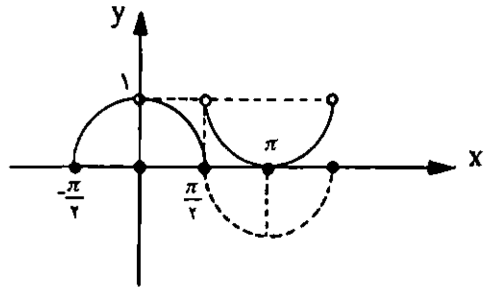


(۱۴) $y=\frac{۳}{۲}[\sin x]\ ,\ x\in[۰,۲\pi]$

$۰\le x<\frac{\pi}{۲}$ یا $\frac{\pi}{۲}<x\le\pi\Rightarrow[\sin x]=۰\Rightarrow y=۰$

$\pi<x<۲\pi\Rightarrow[\sin x]=-۱\Rightarrow y=-\frac{۳}{۲}$

$x=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow y=\frac{۳}{۲}\ ,\ x=۲\pi\Rightarrow y=۰$

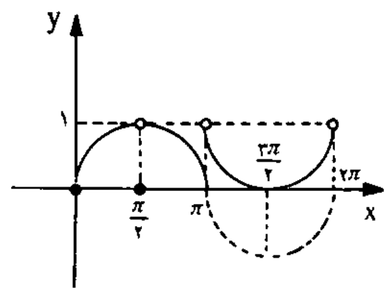


(۱۵) $y=\cos x-[\cos x]\ ,\ x\in\left[-\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}\right]$

$-\frac{\pi}{۲}\le x<۰$ یا $۰<x\le\frac{\pi}{۲}\Rightarrow ۰\le\cos x<۱\Rightarrow y=\cos x$

$\frac{\pi}{۲}<x<\frac{۳\pi}{۲}\Rightarrow -۱\le\cos x<۰\Rightarrow y=\cos x+۱$

$x=۰\Rightarrow\cos x=۱\Rightarrow y=۰\ ,\ x=\frac{۳\pi}{۲}\Rightarrow y=۰$



(۱۶) $y=\sin x-[\sin x]\ ,\ x\in[۰,۲\pi]$

$۰\le x<\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{\pi}{۲}<x\le\pi\Rightarrow y=\sin x, x=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow y=۰$

$\pi<x<۲\pi\Rightarrow y=\sin x+۱\ ,\ x=۲\pi\Rightarrow y=۰$

(۱۷) بررسی رسم نمودار چند رابطه

الف. $[x+y]=۳$ ب. $[x-y]=۲$ پ: $[x].[y]=۲$

$$[x+y]=۳\Rightarrow\begin{cases}x+y\ge۳ & D_۱:\ x+y=۳\\ x+y<۴ & D_۲:\ x+y=۴\end{cases}$$

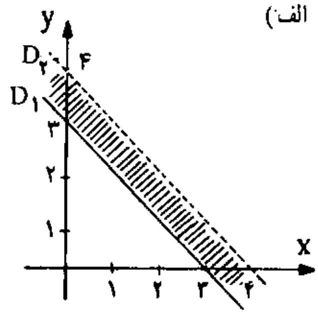
$$[x-y]=۲\Rightarrow\begin{cases}x-y\ge۲ & \Delta_۱:\ x-y=۲\\ x-y<۳ & \Delta_۲:\ x-y=۳\end{cases}$$

(۱). $[x]=\pm۲\ ,\ [y]=\pm۱$ (۲). $[x]=\pm۱\ ,\ [y]=\pm۲$

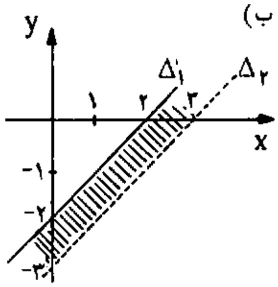
(۱) $\begin{cases}-۲\le x<-۱\\ -۱\le y<۰\end{cases}$ یا $\begin{cases}۲\le x<۳\\ ۱\le y<۲\end{cases}$

(۲) $\begin{cases}-۱\le x<۰\\ -۲\le y<-۱\end{cases}$ یا $\begin{cases}۱\le x<۲\\ ۲\le y<۳\end{cases}$

الف)



ب)

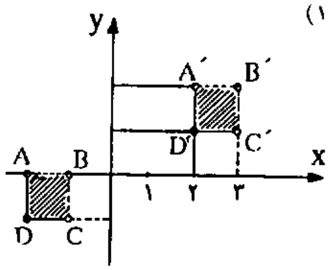


مجموعهٔ نقطه‌های هاشور خورده و خط $D_۱$ نمودار رابطهٔ الف است.

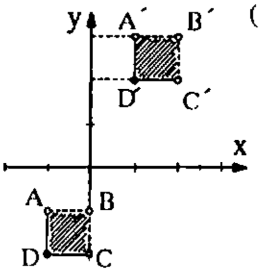
مجموعهٔ نقطه‌های هاشور خورده و خط $\Delta_۱$ نمودار رابطهٔ ب است.

پ)

۱)



۲)



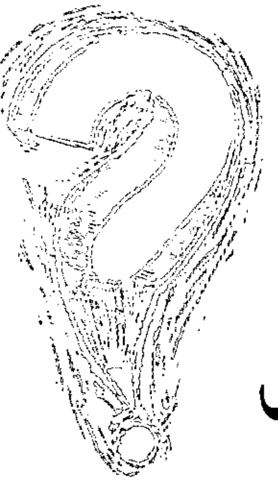
مجموعهٔ نقطه‌های مربعهای ABCD و A′B′C′D′ به غیر از قطعه خطهای AB و BC و A′B′ و B′C′ شکل (۱) یا شکل (۲) نمودار رابطه پ است.

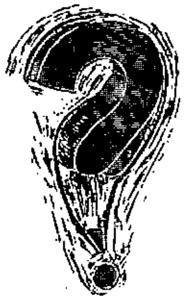
تمرین

۱. اگر $(۲+\sqrt{۳})^۵+(۲-\sqrt{۳})^۵=۷۲۴$، آنگاه $\left[(۲+\sqrt{۳})^۵\right]$ چقدر است؟

دامنه تعریف هریک از تابعهای زیر را تعیین کنید.

۲. $f(x)=\frac{[x]}{|x|}$ ۳ $g(x)=\frac{|x|}{[x]}$




• ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور

طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روش مقدماتی (۲۱)

فرض می‌کنیم A عددی به‌صورت زیر باشد، که در آن $a_n, \cdots, a_1, a_0$ اعداد صحیحی بین ۰ و ۹ از جمله ۹اند:

$$A = 10^n a_n + 10^{n-1}a_{n-1} + \cdots + 10a_1 + a_0$$

عدد A_1 را طبق قاعدهٔ زیر از A به‌دست آورید:

$$A_1 = D(A) = a_n + 2a_{n-1} + 2^2 a_{n-2} + \cdots + 2^{n-1}a_1 + 2^n a_0$$

ساخت فوق را برای به‌دست آوردن موارد زیر تکرار کنید:

$A_2 = D(A_1)$ و $A_3 = D(A_2)$ و...

(الف) ثابت کنید فرآیند فوق، به‌ازای هر عدد طبیعی A، به عدد $A_k < 20$ ای چنان منجر می‌شود که $D(A_k) = A_k$.

(ب) اگر $a = 19^{85}$، دنبالهٔ زیر را درنظر می‌گیریم.

$A_1 = D(A)$ و $A_2 = D(A_1)$ و ...

عدد A_k ای را تعیین کنید که به ازای آن $(D_k) = A_k$.

حل:

(الف) اگر A عددی یک رقمی باشد، آنگاه $D(A)=A$. اگر A دارای دو رقم باشد، آنگاه تفاضل

$$A - D(A) = 10a_1 + a_0 - (a_1 + 2a_0) = 9a_1 - a_0$$

جز هنگامی که $a_1 = 1$ و $a_0 = 9$، مثبت است. به‌این ترتیب، به‌ازای هر عدد دورقمی A ی غیر از ۱۹، عدد $D(A)$ کوچکتر از A است.

اگر A بیش از دو رقم داشته باشد (یعنی، $n > 1$)، آنگاه:

$$D(A) = a_n + 2a_{n-1} + \cdots + 2^n a_0 \le 9 + 2.9 + \cdots + 2^n.9$$
$$= 9(2^{n+1} - 1) < 18.2^n < 10^n < A$$

نتیجه می‌گیریم که اعداد مثبت A، A_1، A_2، ... دنبالهٔ نزولی‌ای تشکیل می‌دهند که به چنان عدد A_k ای ختم می‌شود که $D(A_k) = A_k$. دراین‌صورت A_k یا ۱۹ یا عددی یک رقمی است.

(ب) $D(A)$ هنگامی که A بر ۱۹ بخش‌پذیر باشد بر ۱۹ بخش‌پذیر است. برای نشان دادن این موضوع عبارت زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$2^n A - D(A) = (20^n - 1)a_n + 2.(20^{n-1} - 1)a_n + \cdots + 2^{n-1}(20 - 1)a_1$$

هر جمعوند واقع در سمت راست این برابری، بر ۱۹ بخش‌پذیر است. به این ترتیب، اگر A بر ۱۹ بخش‌پذیر باشد، آنگاه ۱۹ نیز باید $D(A)$ را بشمرد.

اگر $A = 19^{85}$، آنگاه: A، A_1، A_2، ...، A_k جمیعاً بر ۱۹ بخش‌پذیرند، بنابراین عدد A_k ی واقع در این دنباله، که به‌ازای آن $D(A_k) = A_k$، ۱۹ است.

n یا ۱-n

● دکتر عین‌الله پاشا
دانشگاه تربیت‌معلم

مبحث واریانس، ابهامهایی را در ذهنها به‌وجود آورده است. اغلب سؤال می‌شود که از کدام دستور زیر باید برای محاسبه واریانس استفاده شود :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \quad , \quad \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

ما در این مقاله سعی می‌کنیم به این سؤال پاسخ دهیم. این مقاله شامل دو بخش است، در بخش اوّل پارامترهای پراکندگی به‌ویژه واریانس بررسی می‌شوند و بخش دوم به موضوع برآورد می‌پردازد.

بخش اوّل: پراکندگی

فرض بر این است که پارامترهای مرکزی (میانگین) مد و نما به‌ویژه میانگین برای خواننده آشناست، با این همه، یادآوری می‌کنیم که این پارامترها محل تجمع داده‌ها را مشخص می‌کنند، وقتی که گفته می‌شود معدل دانش‌آموزی برابر ۱۴/۷۵ است این انتظار به‌وجود می‌آید که نمرات این دانش‌آموز حول و حوش ۱۴/۷۵ است. به‌ندرت ممکن است برای این دانش‌آموز نمره ۱۰ یا ۲۰ تصور کرد. هر نمره‌ای که به میانگین نزدیکتر باشد با اطمینان بیشتری می‌تواند جزء نمرات کسب شده به‌وسیله این دانش‌آموز باشد. همان‌طوری که ملاحظه کردید، این نتیجه‌گیریها براساس انتظار یا اطمینان بود و حکم‌ها قطعی نبودند. بنابراین امکان هر چیزی هست، یعنی نمرات ممکن است به میانگین خیلی نزدیک باشند و یا برعکس، ممکن است خیلی دور باشند.

در مبحث پراکندگی می‌خواهیم معیاری برای اندازه‌گیری پراکندگی و دور از هم بودن مقادیر به‌دست آوریم. ساده‌ترین و مقدماتی‌ترین معیاری که در این زمینه مطرح شده است دامنه تغییرات است.

دامنه تغییرات: فرض کنیم $x_1,\cdots,x_n$ مقادیر مورد نظر باشند و همچنین فرض کنید $a=\mathrm{Min}\{x_1,\cdots,x_n\}$ و $b=\mathrm{Max}\{x_1,\cdots,x_n\}$ در این صورت $R=b-a$ را *دامنهٔ تغییرات* می‌نامند و همان‌طوری که از ساختمان آن برمی‌آید، بزرگی آن نشان از اختلاف زیاد مقادیر و کوچکی آن نشان از اختلاف کم مقادیر دارد، درحالت خاص اگر $R=0$، آنگاه تمام مقادیر با هم برابرند و پراکنده نیستند. اشکالی که دامنه تغییرات دارد این است که اصطلاحاً می‌گویند : *نسبت به تمام مقادیر حسّاس نیست*. یعنی در مقابل حتی تغییرات بزرگ در مقادیر، ممکن است دامنهٔ تغییرات، تغییر نکند. به دو مثال زیر که دارای دامنهٔ تغییرات برابر هستند توجه کنید :

۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰

۱، ۴، ۴، ۵، ۵، ۵، ۶، ۶، ۶، ۱۰

در دستهٔ دوم بجز ۱ و ۱۰ سایر مقادیر به هم خیلی نزدیک هستند و پراکندگی در مقادیر دستهٔ اوّل محسوس‌تر است و حال آن‌که دامنهٔ تغییرات این ویژگی را نشان نمی‌دهد و از نظر این پارامتر، هر دو دسته مقادیر به یک اندازه پراکنده هستند. برای رفع این ضعف، باید معیار مورد استفاده به‌گونه‌ای باشد تا مقادیر ــ مستقیماً ــ در محاسبهٔ آن دخیل باشند. از این‌رو معیار زیر را که شاید بهتر از دامنهٔ تغییرات باشد معرفی کردند.

انحراف از میانگین: در این معیار، اختلاف مقادیر از میانگین درنظر گرفته می‌شود.

می‌دانیم که همواره $\sum_{i=0}^{n}(x_i - \text{میانگین}) = 0$ (ثابت کنید). یعنی مجموع این اختلاف‌ها اطلاعی دربارهٔ پراکندگی مقادیر نمی‌دهد. برای رهایی از این مشکل فاصلهٔ مقادیر از میانگین، یعنی $\sum_{i=0}^{n}|x_i - \text{میانگین}|$ به‌عنوان پارامتری برای پراکندگی مطرح شد. اشکال این دستور آن است که با افزایش تعداد مقادیر افزایش می‌یابد (جمله‌های مثبت جدیدی اضافه می‌شود). از این‌رو برای از بین بردن اثر تعداد مقادیر این عبارت را بر n تقسیم می‌کنند که به این صورت دستور انحراف از میانگین به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}|x_i - \text{میانگین}|$$

هر جایی که مجموع مقادیر به تعداد آنها تقسیم می‌شود، میانگین آن مقادیر حساب می‌شود. پس در عبارت بالا، میانگین مقادیر $|x_1 - \text{میانگین}|, \ldots, |x_n - \text{میانگین}|$ حساب شده است.

این دستور عیب دامنهٔ تغییرات را ندارد و پارامتر خوبی است، ولی اشکال آن در وجود قدرمطلق است. قدرمطلق با وجود سادگی، تابع سر به راهی نیست و کار کردن با آن مشکلاتی دارد و به همین دلیل قضایا و نتایج پیشرفته و خوبی دربارهٔ دستورهای حاصل از آن نمی‌توان استخراج کرد. برای رفع این مشکل چارهٔ زیر اندیشیده شد.

واریانس: قدرمطلق در دستور انحراف از میانگین صرفاً برای این در کار آمد تا جمله‌های دخیل در Σ را نامنفی کند تا از برابر صفر شدن مجموع آنها جلوگیری کند. می‌دانیم که تنها قدرمطلق نیست که می‌تواند این کار را انجام بدهد، با توان ۲ رساندن نیز می‌توان به این مقصود رسید. بنابراین دستور معیار اندازه‌گیری پراکندگی به‌صورت زیر اصلاح شد و آن را *واریانس* نامیدند.

$$\frac{1}{n}\sum(x_i - \text{میانگین})^2$$

یعنی واریانس برابر میانگین مجذور انحراف از میانگین است. این دستور نشان داده است که نه‌تنها نقاط ضعف دامنهٔ تغییرات و انحراف از میانگین را ندارد، بلکه نتایج و مفاهیم عمیقی را می‌توان براساس آن پی‌ریزی کرد و از این‌رو به‌عنوان مناسبترین پارامتر برای اندازه‌گیری پراکندگی شناخته شد.

پس تا اینجا معلوم شد که *واریانس* برابر *میانگین مجذور انحرافات از میانگین* است و دستور آن چنین است:

$$\text{واریانس} = \underbrace{\boxed{\frac{1}{n}\sum}}_{\text{میانگین}}(x_i - \text{میانگین})^2$$

مثال: واریانس مقادیر زیر را به‌دست آورید:

۱،۸،۶،۳،۲

حل: ابتدا میانگین را حساب می‌کنیم

$$\text{میانگین} = \frac{۱+۸+۶+۳+۲}{۵} = \frac{۲۰}{۵} = ۴$$

بنابراین

$$\text{واریانس} = \frac{(۱-۴)^۲ + (۸-۴)^۲ + (۶-۴)^۲ + (۳-۴)^۲ + (۲-۴)^۲}{۵}$$

$$= \frac{۹+۱۶+۴+۱+۴}{۵}$$

$$= \frac{۳۴}{۵} = ۶/۸$$

بخش دوم: برآورد

معمولاً در یک مسأله آماری می‌خواهیم پارامتری را در یک جامعهٔ آماری براساس یک نمونه، یعنی بخش ــ تقریباً ــ کوچکی از جامعه که با شرایط خاصی انتخاب می‌شود، تعیین کنیم. از آنجایی که ما نمی‌توانیم و یا نمی‌خواهیم از اطلاعات تمام جامعه استفاده کنیم، در تعیین این پارامتر با اطلاعات ناقصی که از نمونه به‌دست آورده‌ایم سر و کار داریم. با اطلاعات ناقص هم نمی‌توان دقیقاً پارامتر مورد مطالعه را به‌دست آورد. آنچه که از طریق نمونه حاصل می‌شود یک تقریب از پارامتر مورد نظر است که آن را *برآورد پارامتر* می‌نامند.

مثلاً می‌خواهیم در یک کلاس ۴۰ نفری بدانیم میانگین نمرهٔ درس ریاضی دانش‌آموزان چه‌قدر است. اگر تمام نمرات را در نظر بگیریم و آنها را با هم جمع و بر ۴۰ تقسیم کنیم، عدد حاصل، دقیقاً همان چیزی است که به‌دنبال آن هستیم ولی حالا فرض کنید که ۱۰ نفر از دانش‌آموزان کلاس را به تصادف

انتخاب کرده‌ایم و براساس نمرهٔ این ۱۰ دانش‌آموز می‌خواهیم بدانیم میانگین نمره کل کلاس در درس ریاضی (حدوداً) چه‌قدر است؟ چون اطلاعات ما از کلاس کامل نیست آنچه که براساس این ۱۰ نمره به‌دست خواهد آمد مقداری تقریبی است. تمام سعی و کوشش در آمار و احتمال آن است که محاسبهٔ روی این ۱۰ نمره به قسمی انجام شود که تقریب خوبی از میانگین نمرات کلاس به‌دست آید. آنچه از طریق نمونه برای پارامتر جامعه به‌دست می‌آید، *برآورد* آن پارامتر می‌نامند.

مثال: برای سهولت و درک بهتر، فرض می‌کنیم جامعهٔ ما شامل ۳ دانش‌آموز با نمرات ۱۴،۱۸،۱۶ باشد، می‌خواهیم براساس یک نمونهٔ ۲ تایی، میانگین نمرهٔ این ۳ دانش‌آموز را برآورد کنیم.

حل: به‌خاطر کوچکی جامعه می‌توانیم میانگین را حساب کنیم:

$$\text{میانگین کلاس} = \frac{۱۶+۱۸+۱۴}{۳} = \frac{۴۸}{۳} = ۱۶$$

ممکن است ما راههای مختلفی را برای به‌دست آوردن برآورد درنظر بگیریم، برخی از آنها عبارتند از:

الف. اگر x_1 و x_2 مقادیر حاصل از نمونه باشند، میانگین کلاس را به‌صورت ماکزیمم این دو نمره برآورد می‌کنیم:

$$\text{برآورد میانگین کلاس} = \mathrm{Max}\{x_1, x_2\}$$

حال اگر به دفعات مختلف از این کلاس یک نمونهٔ دوتایی (با جایگذاری) انتخاب کنیم، برآوردهای زیر حاصل می‌شوند:

نمونه	برآورد	خطای برآورد
۱۴،۱۴	۱۴	−۲
۱۴،۱۶	۱۶	۰
۱۴،۱۸	۱۸	۲
۱۶،۱۴	۱۶	۰
۱۶،۱۶	۱۶	۰
۱۶،۱۸	۱۸	۲
۱۸،۱۴	۱۸	۲
۱۸،۱۶	۱۸	۲
۱۸،۱۸	۱۸	۲

ملاحظه کنید که در این روش در اکثر مواقع ما به اندازهٔ دو واحد از میانگین جامعه فاصله داریم، میانگین خطای برآورد در اینجا عبارت است از:

$$\frac{-۲+۰+۲+۰+۰+۲+۲+۲+۲}{۹} = \frac{۸}{۹} = ۰/۸۸$$

پس در این روش، به‌طور متوسط، به اندازهٔ ۰/۸۸ با میانگین اختلاف خواهیم داشت، همچنین ملاحظه می‌شود که این میانگین مثبت است. یعنی برآورد ما در مجموع بیش از میانگین (پارامتر مورد نظر) بوده است.

ب. این‌بار برای اینکه جلوی برآورد اضافی را بگیریم، ممکن است برآورد را به‌صورت زیر انجام دهیم:

$$\text{برآورد میانگین کلاس} = \mathrm{Min}\{x_1, x_2\}$$

جدول زیر را داریم:

نمونه	برآورد	خطای برآورد
۱۴،۱۴	۱۴	−۲
۱۴،۱۶	۱۴	−۲
۱۴،۱۸	۱۴	−۲
۱۶،۱۴	۱۴	−۲
۱۶،۱۶	۱۶	۰
۱۶،۱۸	۱۶	۰
۱۸،۱۴	۱۴	−۲
۱۸،۱۶	۱۶	۰
۱۸،۱۸	۱۸	۲

میانگین خطا عبارت است از:

$$-\frac{۸}{۹} = -۰/۸۸$$

که در این حالت نیز تفاوت به اندازهٔ همان مقدار قبلی است، منتها منفی، یعنی برآوردهای ما در این روش در مجموع، پارامتر را کمتر از آنچه که هست برآورد می‌کند.

ج. ممکن است برآورد میانگین کلاس را به‌صورت زیر محاسبه کنیم:

$$\text{برآورد میانگین کلاس} = \frac{x_1 + x_2}{۲} = \text{میانگین مقادیر حاصل از نمونه}$$

در این مورد نیز می‌توانیم جدول زیر را تشکیل و میانگین خطای برآورد را حساب کنیم:

نمونه	برآورد	خطای برآورد
۱۴،۱۴	۱۴	−۲
۱۴،۱۶	۱۵	−۱
۱۴،۱۸	۱۶	۰
۱۶،۱۴	۱۵	−۱
۱۶،۱۶	۱۶	۰
۱۶،۱۸	۱۷	۱
۱۸،۱۴	۱۶	۰
۱۸،۱۶	۱۷	۱
۱۸،۱۸	۱۸	۲

در این حالت، میانگین خطای برآورد برابر صفر است. یعنی

این روش برآورد به‌گونه‌ای است که میانگین خطای این روش نه مثبت است و نه منفی. برآوردی که این ویژگی را داشته باشد، از اهمیت بالایی در مباحث آماری برخوردار است و اغلب کارشناسان آمار سعی می‌کنند برای پارامترها روشی برای محاسبهٔ برآورد بیابند که دارای این خاصیت باشد. به علت اهمیت این ویژگی به آن عنوان مستقلی داده‌اند که در زیر آن را تعریف می‌کنیم.

برآورد نااریب: برآورد یک پارامتر را *نااریب* می‌گوییم؛ هرگاه میانگین خطای برآورد، برابر ۰ باشد.

برآوردهای (الف) و (ب) نااریب نیستند، ولی برآورد (ج) نااریب است.

حال به مسألهٔ اصلی خود یعنی واریانس بازمی‌گردیم. فرض می‌کنیم واریانس جامعه معلوم نباشد و درنتیجه بخواهیم براساس یک نمونه آن را برآورد کنیم و با مقدمه‌ای که گذشت به دنبال *برآورد نااریب برای واریانس* هستیم. یعنی می‌خواهیم براساس مقادیر $x_۱,\ldots,x_n$ واریانس جامعه را به گونه‌ای برآورد کنیم که میانگین خطای برآورد، برابر ۰ باشد. در مباحث نیمه پیشرفتهٔ آمار، می‌توان ثابت کرد که یک *برآورد نااریب* برای واریانس جامعه از دستور زیر حساب می‌شود.

$$\frac{۱}{n-۱}\sum_{i=۱}^{n}(x_i - \text{میانگین})^۲$$

مثال: در مثال قبل، سعی می‌کنیم میانگین خطای برآورد را که از دستور بالا حساب می‌شود، به‌دست آوریم و مطابق انتظار نشان دهیم که برابر صفر است.

حل: قبلاً واریانس جامعه را حساب می‌کنیم:

$$\text{واریانس} = \frac{(۱۴-۱۶)^۲+(۱۶-۱۶)^۲+(۱۸-۱۶)^۲}{۳} = \frac{۴+۴}{۳}$$

$$= \frac{۸}{۳} = ۲/۶۶$$

خطای واریانس	برآورد واریانس	میانگین	نمونه
$\frac{۸}{۳}$	۰	۱۴	۱۴,۱۴
$\frac{۲}{۳}$	۲	۱۵	۱۴,۱۶
$-\frac{۱۶}{۳}$	۸	۱۶	۱۴,۱۸
$\frac{۲}{۳}$	۲	۱۵	۱۶,۱۴
$\frac{۸}{۳}$	۰	۱۶	۱۶,۱۶
$\frac{۲}{۳}$	۲	۱۷	۱۶,۱۸
$-\frac{۱۶}{۳}$	۸	۱۶	۱۸,۱۴
$\frac{۲}{۳}$	۲	۱۷	۱۸,۱۶
$\frac{۸}{۳}$	۰	۱۸	۱۸,۱۸

$\leftrightarrow \frac{۸}{۳}-۲=\frac{۸-۶}{۳}=\frac{۲}{۳}$

$\leftrightarrow \frac{۸}{۳}-۸=\frac{-۱۶}{۳}$

$$\text{میانگین خطای برآورد} = \frac{۸+۲-۱۶+۲+۸+۲-۱۶+۲+۸}{۹} = ۰$$

بنابراین همان‌طوری که در این مثال دیده شد، درحالت کلی هم با استفاده از مطالب نظری احتمال ثابت می‌شود، برآورد واریانس جامعه با استفاده از دستور

$$\frac{۱}{n-۱}\sum(x_i - \text{میانگین})^۲$$

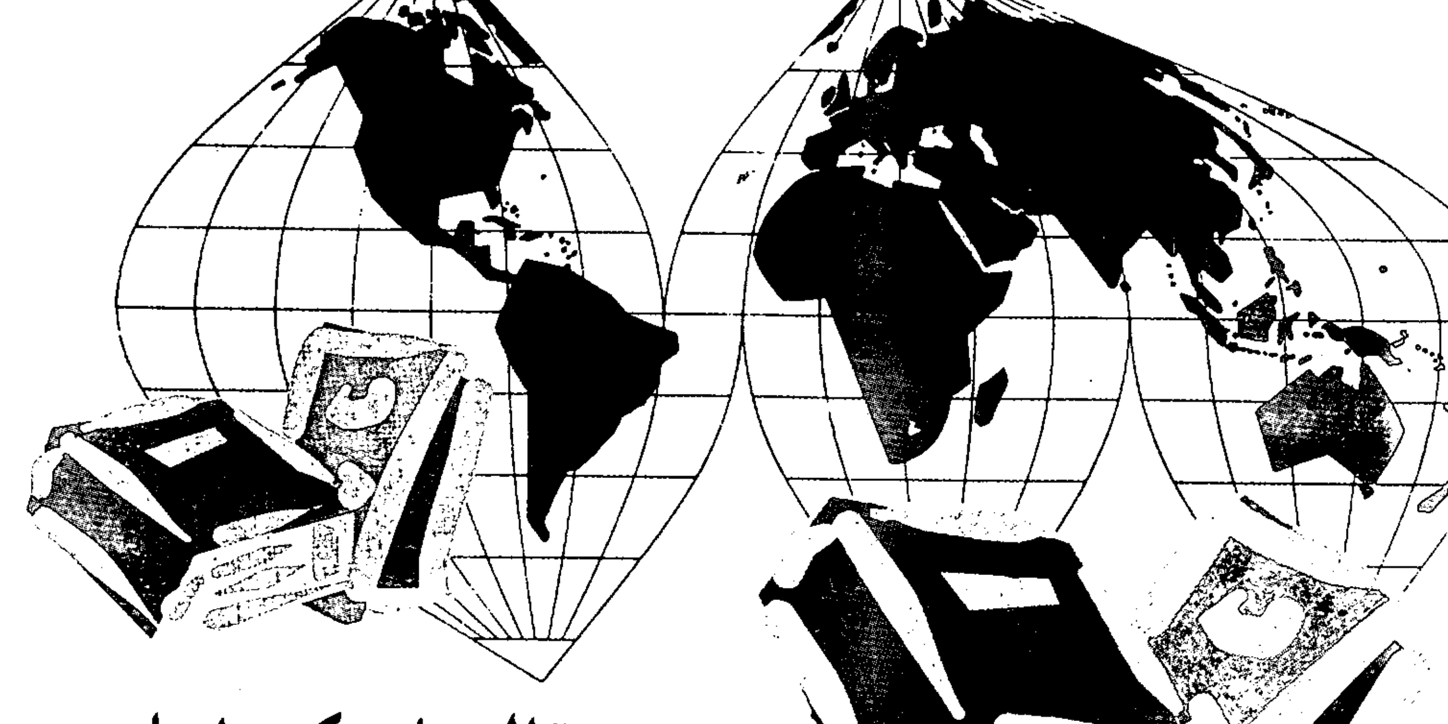
نااریب است. بنابراین دستور مناسبی برای برآورد واریانس (نه محاسبه واریانس) است.

در خاتمه: بنابر آنچه که گذشت، اگر بخواهیم واریانس را *حساب* کنیم از n استفاده می‌کنیم و اگر بخواهیم واریانس را به‌طور نااریب براساس یک نمونهٔ nتایی برآورد کنیم، از $n-۱$ استفاده می‌کنیم. و امّا آخرین نکته این‌که: اگر خوانندهٔ نکته‌سنج دقت کرده باشد، در سراسر این مقاله از به‌کار بردن اصطلاح *داده* که همان کمیتهای حاصل از نمونه است، خودداری شده است و همچنین هیچگاه از نمادی برای میانگین و یا واریانس استفاده نشده است. اگر از نمادهای مناسب استفاده می‌شد یا اصلاً ابهام n یا $n-۱$ درکار نمی‌آمد و یا این ابهام هم به ابهام قبلی اضافه می‌شد که کی از نماد μ و کی از نماد $\bar{x}$ برای میانگین استفاده کنیم.

جدول زیر، ضمن معرفی نمادها دستور محاسبه و ویژگی آنها را دربر دارد.

پارامتر	نماد	برآورد پارامتر	ویژگی برآورد	دستور محاسبه برآورد	
میانگین جامعه	μ	$\bar{x}$	نااریب	$\bar{x}=\frac{۱}{n}\sum x_i$	$\mu=\frac{\text{مجموع مقادیر جامعه}}{\text{تعداد آنها}}$
واریانس جامعه	$\sigma^۲$	$S^۲$	نااریب	$S^۲=\frac{۱}{n-۱}\sum(x_i-\bar{x})^۲$	$\sigma^۲=\frac{۱}{n}\sum(x_i-\mu)^۲$

برای توضیح بیشتر، اضافه می‌شود که μ نمادی است برای میانگین جامعه و برای محاسبهٔ آن باید تمام مقادیر جامعه را با هم جمع و بر تعداد افراد جامعه تقسیم کنیم. $\sigma^۲$ نمادی است برای واریانس در جامعه که برای محاسبهٔ آن باید میانگین انحرافات از میانگین (یعنی μ) را حساب کرد و لذا دستور آن به‌صورت $\sigma^۲=\frac{۱}{n}\sum(x_i-\mu)^۲$ است. $\bar{x}$ نمادی است برای میانگین مقادیر حاصل از نمونه (یعنی $\bar{x}$ میانگین داده‌هاست) و $S^۲$ نمادی است برای برآورد نااریب $\sigma^۲$ با دستور $\frac{۱}{n-۱}\sum_{i=۱}^{n}(x_i-\bar{x})^۲$. توجه کنید که $\frac{۱}{n}\sum(x_i-\bar{x})^۲$ برآورد نااریب $\sigma^۲$ نیست، بلکه واریانس داده‌ها را حساب می‌کند.



مقاله‌های کوتاه از مجله‌های معتبر جهان (۲۱)

قضایای سِوا، مِنِلائوس و اصل سطح (قسمت سوم)

●ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

قضیهٔ ۲ (قضیهٔ سوا در n ضلعیها). فرض می‌کنیم $P=[V_1,\dots,V_n]$ یک n ضلعی دلخواه، C نقطه‌ای معلوم، و k عدد صحیح و مثبتی چنان باشد که $1\le k< n/2$. به‌ازای $i=1,\dots,n$، فرض می‌کنیم W_i تقاطع خطوط CV_i و $V_{i-k}V_{i+k}$ باشد. آنگاه،

$$\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{V_{i-k}W_i}{W_iV_{i+k}}\right]=1 \qquad (۷)$$

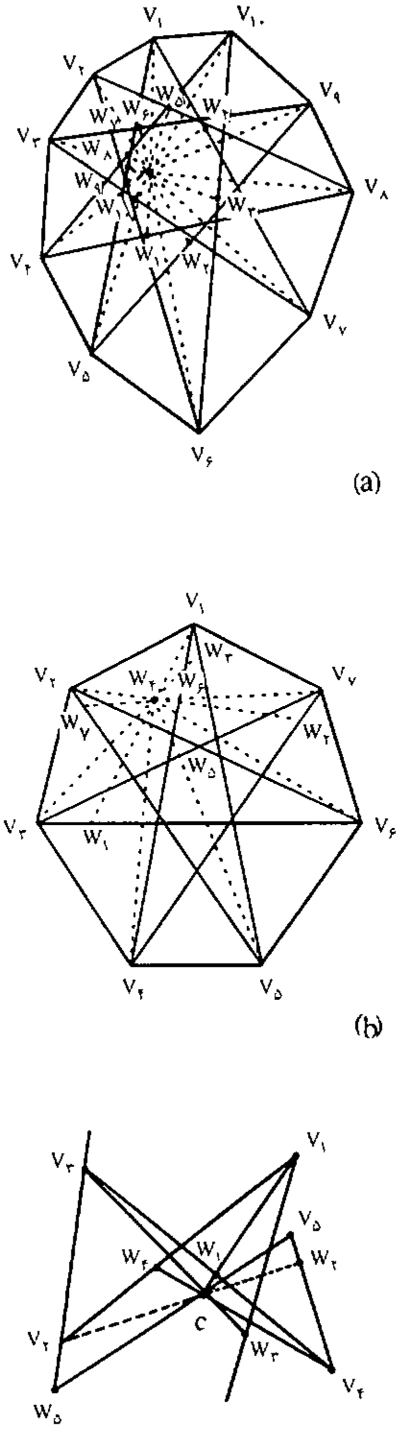
توجه داشته باشید که این نتیجه با قطر ـ نسبت‌ها، جز در حالتی که n فرد و $k=(n-1)/2$، ارتباط دارد. مورد اخیر، تنها تعمیمی از قضیهٔ سواست که توانسته‌ایم در کتابهای مربوطه بیابیم. اما، نتیجهٔ قضیهٔ ۲، به اندازه‌ای که در وهلهٔ نخست ملاحظه می‌شود عمومی نیست.

اگر n و k دارای بزرگترین عامل مشترک $d>1$ باشد آنگاه حاصل‌ضرب سمت چپ (۷) می‌تواند به d حاصل‌ضرب، هر یک با n/d عامل، تجزیه شود، و هر یک از این عاملها دارای مقدار ۱ باشد. اگر n و 2k نسبت به هم اول باشند، آنگاه می‌توان (با شماره‌گذاری مجدد رأسها چون در حالت قضیهٔ منلائوس) سمت چپ (۷) را به حاصل‌ضرب n یال ـ نسبت، در یک n ضلعی ستاره‌ای مناسب، تبدیل کرد. در نتیجه، تنها اظهار واقعاً تازهٔ قضیهٔ ۲ در حالتی است که در آن n زوج و k نسبت به n اول است. مثالی از این حالت: $(n=10, k=3)$ را در شکل ۷(a) نشان داده‌ایم. مثالهای دیگری را در شکل ۷(b) با قطرـ نسبت‌ها $(n=7,\ k=2)$ و شکل ۷(c) با یال ـ نسبت‌ها $(n=5,\ k=2)$ آورده‌ایم.

اثبات. اثبات این قضیه از مراحلی مشابه مراحل قضیهٔ ۱ تبعیت می‌کند. ملاحظه می‌کنیم که با به کار بردن اصل سطح در مثلثهای با قاعده $[C,V_i]$، به ازای $i=1,\dots,n$، به دست می‌آوریم.

$$\left[\frac{V_{i-k}W_i}{W_iV_{i+k}}\right]=\left[\frac{CV_iV_{i-k}}{CV_{i+k}V_i}\right]$$

با قرار دادن این جملات در سمت چپ (۶)، حاصل‌ضرب n جمله را حاصل می‌کنیم که هر یک از آنها خارج قسمت سطحهای مثلثهای مربوطه است. این جمله‌ها، چنانکه مطلوب است، مقدار ۱ را به‌دست می‌دهند.



شکل ۷. مثالهای قضیهٔ سوا در n ضلعیها در حالات (a) n = ۱۰، k = ۳؛ (b) n = ۷، k = ۲؛ و (c) n = ۵، k = ۲. در حالتهای (a) و (b) قضیه، به ترتیب، اظهاراتی دربارهٔ قطر ـ نسبت‌های $[V_iW_{i+3}/W_{i+3}V_{i+6}]$ و $[V_iW_{i+2}/W_{i+2}V_{i+4}]$ می‌گوید، و در(c) اظهاری دربارهٔ یال ـ نسبت‌های $[V_iW_{i+3}/W_{i+3}V_{i+1}]$ می‌کند.

در هر یک از قضایای فوق W_i را به صورت تقاطع یک ضلع یا یک قطر (**پایه** «basis») با خط CD (قاطع متناظر) تعریف می‌کنیم. قضیهٔ منلائوس متناظر با حالتی است که در آن C و D نقاط ثابتی، که رأس نیستند، می‌باشند، بنابراین قاطع CD در مورد تمام قاعده‌ها خطّی ثابت است. در قضیهٔ سوا، C نقطه‌ای ثابت و D رأس V_i ای از چند ضلعی P است. در این صورت W_i نقطهٔ تقاطع قاعدهٔ $V_{i-k}V_{i+k}$ با قاطع CV_i است. این ملاحظه‌ها این را مطرح می‌کنند که، زمانی که قاطع مورد بحث توسط دو رأس P مشخص شده باشد، می‌تواند نتایجی مشابه در مورد یال ـ نسبت‌ها یا قطر ـ نسبت‌ها موجود شود. در واقع، قضیه زیر را خواهیم داشت که به صورتی جدید ظاهر شده است:

قضیهٔ ۳ (قضیهٔ خود قاطع بودن). *فرض می‌کنیم j، r، s اعدادی صحیح و متمایز به پیمانهٔ n باشند و W_i نقطهٔ تقاطع قاعده (ضلع یا قطر) V_iV_{i+j} از n ضلعی $P=[V_1,\dots,V_n]$ با قاطع $V_{i+r}V_{i+s}$ باشد. در این صورت شرط لازم و کافی برای*

$$\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{V_iW_i}{W_iV_{i+j}}\right]=(-1)^n \qquad (8)$$

این است که یا (i) $n=2m$ زوج باشد، $j\equiv m$ و $s\equiv r+m$؛ یا n دلخواه باشد و یا (ii) $s\equiv 2r$ و $j\equiv 3r$؛ یا (iii) $r\equiv 2s$ و $j\equiv 3s$. تمام همنهشتیها به پیمانهٔ n اند.

در حالت (i) جملات واقع در (۸) دوبه‌دو حذف می‌شوند و در نتیجه صورت قضیه بدیهی می‌شود. حالتهای (ii) و (iii) در اصل یکسان‌اند، زیرا r و s در تعیین قاطع V_{i+r}، V_{i+s} نقشی متقارن ایفا می‌کنند و بنابراین می‌توانند با هم تعویض شوند.

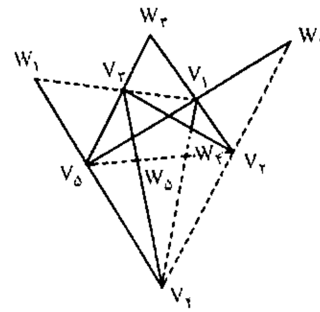
به‌عنوان مثال، در شکل ۸(a)، n = ۵، j = ۲، r = ۳، s = ۴، و در شکل ۸(b)، n = ۷، j = ۱، r = ۳، s = ۵ بنابراین هر یک از آنها مثالی از حالت (iii) اند.

از آنجاکه n فرد است، علامت سمت راست (۸) منفی است.

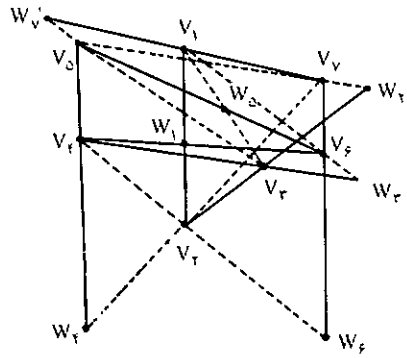
اثبات. با استفاده از اصل سطح در مورد مثلثهای به قاعدهٔ $[V_{i+r}\ ,\ V_{i+s}]$ و رأسهای V_i و V_{i+j}، به‌دست می‌آوریم.

$$\left[\frac{V_iW_i}{W_iV_{i+j}}\right]=-\left[\frac{V_iV_{i+r}\ V_{i+s}}{V_{i+j}V_{i+r}V_{i+s}}\right] \qquad (8a)$$

عبارات فوق را به جای هر یک از n عامل واقع در سمت



(a)



(b)

شکل ۸. مثالهایی از قضیهٔ خود قاطع بودن، به‌ازای (a) $n=5$، $j=2$، $r=3$، $s=4$ ؛ و (b) $n=7$، $j=1$، $r=3$، $s=5$. در هر حالت، قضیه نشان می‌دهد که حاصلضرب n نسبت $\left[V_iW_i/W_iV_{i+j}\right]$ (که در آن $i=1,\ldots,n$) برابر -1 است.

چپ (۸) قرار می‌دهیم و زمانی را که دقیقاً مثلثهایی یکسان در صورت و مخرج رخ می‌دهند مشخص می‌نماییم و بنابراین مساحتهای آنها را (که برحسب دترمینانها بیان شده‌اند) حذف می‌کنیم تا چنان‌که مطلوب است، اندازهٔ ± 1 به‌دست آید. ولی جملهٔ $V_i\ V_{i+r}\ V_{i+s}$ واقع در صورت با جملهٔ $V_{(i+h)+j}\ V_{(i+h)+r}\ V_{(i+h)+s}$ واقع در مخرج حذف می‌شود، اگر و تنها اگر، یا

(i) $h\equiv -j$، $r\equiv s-j$ و $s\equiv r-j$ ؛ یا

(ii) $h\equiv -r$، $r\equiv s-r$ و $s\equiv j-r$ ؛ یا

(iii) $h\equiv -s$، $s\equiv r-s$ و $r\equiv j-s$

سه شق فوق، نظیر سه حالتی هستند که در صورت قضیه داده شده‌اند. توجه داشته باشید که هر حذف، عامل -1 را در حالت (i) و عامل $+1$ را در دو حالت دیگر به دست می‌دهد که منجر به جملهٔ $(-1)^n$ در سمت راست (۸) می‌شود. به این ترتیب قضیه به اثبات می‌رسد.

در مورد قاعده‌ای معلوم، تعیین قاطعهای نظیری که قضیه به ازای آنها برقرار است، جالب است.

در این مورد، حالت (ii) را بررسی می‌کنیم. با نوشتن $j+t$ به جای r و $-u$ به جای s، به سادگی محقق می‌شود که شرط داده شده هم‌ارز است با

$$u\equiv t\ ,\ 2j+3t\equiv 0 \pmod{n}$$

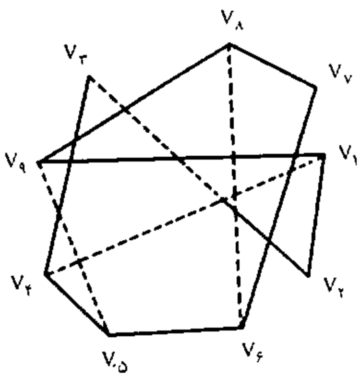
این دستگاه را می‌توان به‌طور صریح برای یافتن t برحسب j به‌طریق زیر حل کرد (و بنابراین r و s را به‌دست آورد):

(ii_a) اگر $n\equiv 3k+1$، آنگاه $t\equiv 2kj$
به‌ازای $j=1,2,\ldots,[(n-1)/2]$

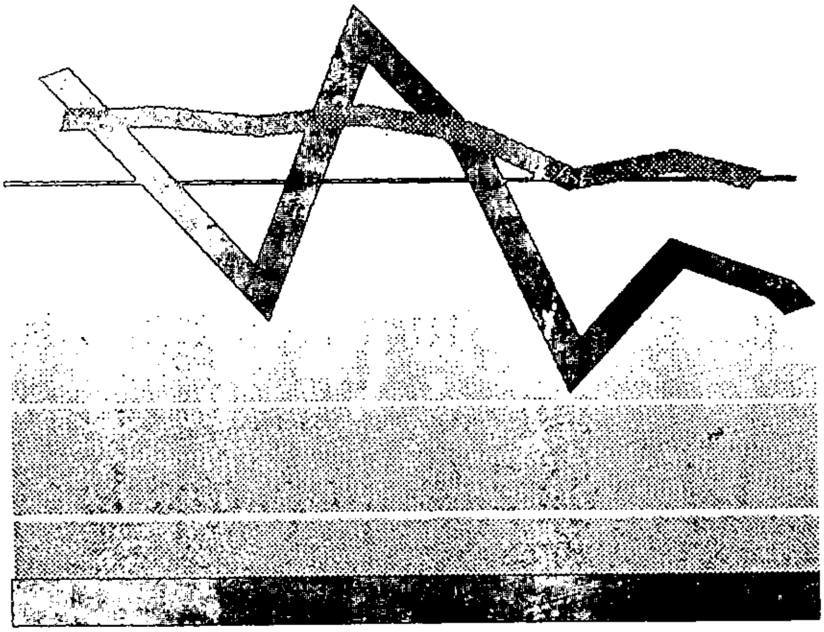
(ii_b) اگر $n\equiv 3k-1$، آنگاه $t\equiv (k-1)j$
به‌ازای $j=1,2,\ldots,[(n-1)/2]$

(ii_c) اگر $n\equiv 3k$، آنگاه $j\equiv 3i$ و
$t\equiv -2i$ ، $k-2i$ یا $2k-2i$
به‌ازای $i=1,2,\ldots,[(k-1)/2]$

به‌عنوان مثال، درشکل ۹ حالت $n=9$، $k=3$ و $i=1$ را نشان خواهیم داد. قاطعهای V_2V_3، V_6V_8 و V_5V_9 را با خط‌ـ‌نقطه و قاعدهٔ (پایه) V_1V_4 را با خط‌چین مشخص کرده‌ایم. تمام آنها شرایط قضیه را برقرار می‌کنند. (هشت قاعدهٔ (پایه) دیگری را که در (۸) رخ می‌دهند نشان نداده‌ایم، زیرا مشخص کردن آنها شکل را چنان پیچیده می‌کند که نامفهوم می‌شود.)



شکل ۹. سه قاطع V_2V_3، V_6V_8 و V_5V_9 از پایهٔ V_1V_4 که شرطهای قضیهٔ خود قاطع بودن را به‌ازای $n=9$ برقرار می‌کنند.



درحاشیه تابع

قسمت ششم

● حمید رضا امیری

تابعهای زوج و فرد

تعریف: اگر تابع f با D_f مفروض و برای هر $x \in D_f$ ، همواره $-x \in D_f$ در این صورت:

الف) تابع f را زوج می‌نامیم. اگر برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم: $f(-x)=f(x)$.

ب) تابع f را فرد می‌نامیم، اگر برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم: $f(-x)=-f(x)$.

مثال ۱: تابع با ضابطهٔ $f(x)=2x^4+x^2-3$ زوج است، زیرا:

$$D_f=\mathbb{R}, f(-x)=2(-x)^4+(-x)^2-3=2x^4+x^2-3=f(x)$$

مثال۲: تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^3-x$ فرد است، زیرا:

$$D_f=\mathbb{R} \quad , \quad f(-x)=(-x)^3-(-x)=-x^3+x=-f(x)$$

مثال ۳: تابع با ضابطهٔ $f(x)=\log\frac{x+1}{-x+1}$ فرد است، زیرا:

$$D_f=[-1,1) \quad ,$$

اگر $x \neq 1 \Rightarrow f(-x)=\log\frac{-x+1}{-(-x)+1}=\log\left(\frac{x+1}{-x+1}\right)^{-1}=$

$$(-1)\log\frac{x+1}{-x+1}=-f(x)$$

مثال ۴: تابع با ضابطهٔ $f(x)=-2$ زوج است، زیرا:

$$D_f=\mathbb{R} \quad , \quad f(-x)=-2=f(x)$$

مثال۵: اگر $f(x)=0$ در این صورت f تابعی هم زوج و هم فرد است، زیرا:

$$f(-x)=0=f(x)$$

$$f(-x)=0=-0=-f(x)$$

مثال ۶: تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^2-x$ نه زوج است و نه فرد، زیرا:

$$f(-x)=(-x)^2-(-x)=x^2+x \neq f(x)$$

و همین طور $f(-x) \neq -f(x)$

مثال ۷: تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^n$ ، گاهی زوج و گاهی فرد است، زیرا:

$$n=2k \Rightarrow f(-x)=(-x)^{2k}=x^{2k}=x^n=f(x)$$

$$n=2k+1 \Rightarrow f(-x)=(-x)^{2k+1}=-x^{2k+1}=-x^n=-f(x)$$

نکتهٔ مهم: اگر f تابعی فرد باشد و $0 \in D_f$ در این صورت همواره $f(0)=0$ زیرا برای هر $x \in D_f$ داریم $f(-x)=-f(x)$ پس باید:

$$f(-0)=-f(0) \Rightarrow f(0)=-f(0) \Rightarrow 2f(0)=0 \Rightarrow f(0)=0$$

نتیجه: اگر در تابعی $f(0) \neq 0$ آنگاه این تابع نمی‌تواند تابعی فرد باشد. البته توجه دارید که عکس نکتهٔ فوق برقرار نیست، یعنی اگر در تابعی $f(0)=0$ همواره نمی‌توان حکم کلی صادر کرد که؛ تابع f فرد است، به عنوان مثال درتابع با ضابطه $f(x)=x^2-x$ داریم $f(0)=0$ و این تابع فرد نیست.

مثال ۸: تابعهای سینوس و تانژانت و کتانژانت، فرد و تابع کسینوس زوج است (ثابت کنید).

نکات مهم:

۱ ـ اگر f و g هر دو تابعهایی زوج یا هر دو فرد باشند، در این صورت ترکیب آنهابه ترتیب، همواره زوج یا فرد است.

I) فرض کنیم $f(-x)=f(x)$ ، $g(-x)=g(x)$

$$(fog)(-x)=f(g(-x))=f(g(x))=(fog)(x)$$

II) فرض کنیم $f(-x)=-f(x)\ ,\ g(-x)=-g(x)$

$$(fog)(-x)=f(g(-x))=f(-g(x))=-f(g(x))=$$
$$-(fog)(x)$$

۲ ــ اگر f و g دو تابع و یکی زوج و دیگری فرد باشد، در این صورت همواره (fog) و (gof) زوج می‌باشند. (اثبات به عهدهٔ خودتان)

۳ ــ حاصل ضرب دو تابع فرد یا دو تابع زوج تابعی زوج است، اگر f و g هر دو فرد باشند داریم:

$$(f\times g)(-x)=f(-x)\times g(-x)=$$
$$=-f(x)\times -g(x)=f(x)\times g(x)=(f\times g)(x)$$

پس $(f\times g)$ تابعی زوج است.

برای حالتی که هر دو زوج باشند نیز مانند بالا ثابت می شود.

۴ ــ حاصل ضرب یک تابع زوج در یک تابع فرد، تابعی فرد است (ثابت کنید).

۵ ــ حاصل ضرب یک عدد حقیقی در یک تابع فرد، تابعی فرد و حاصل ضرب آن در یک تابع زوج تابعی زوج است (ثابت کنید).

۶ ــ مجموع و تفاضل دو تابع زوج، تابعی زوج و مجموع و تفاضل دو تابع فرد، تابعی فرد است (ثابت کنید).

۷ ــ اگر f یک تابع دلخواه و D_f نسبت به مبدأ متقارن باشد، در این صورت، همواره $h(x)=f(x)+f(-x)$ تابعی زوج و $k(x)=f(x)-f(-x)$ تابعی فرد می‌باشد و نیز همواره می‌توان هر تابع دلخواه که دامنهٔ متقارنی داشته باشد چون f را به‌صورت مجموع دو تابع نوشت که یکی از آنها زوج و دیگری فرد باشد، زیرا:

$$h(-x)=f(-x)+f(-(-x))=$$
$$=f(-x)+f(x)=f(x)+f(-x)=h(x)$$
$$k(-x)=f(-x)-f(-(-x))=$$
$$=f(-x)-f(x)=-(f(x))-f(-x)=-k(x)$$

از طرفی اگر f تابعی دلخواه باشد، همواره داریم:

$$f(x)=\frac{1}{2}[(f(x)+f(-x))+(f(x)-f(-x))]$$
$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}[h(x)+k(x)]=\underbrace{\frac{1}{2}h(x)}_{\text{زوج}}+\underbrace{\frac{1}{2}k(x)}_{\text{فرد}}$$

۸ ــ با توجه به تعریف تابع زوج و تابع فرد، نتیجه می‌گیریم که؛ اگر f تابعی زوج باشد چون با تغییر x به $(-x)$ معادلهٔ تابع تغییر نمی‌کند، پس محور y ها، محور تقارن f است و به همین قیاس اگر g تابعی فرد باشد، محور x ها، محور تقارن آن خواهد بود (به شرط آن که D_f و D_g نسبت به مبدأ، متقارن باشند).

۹ ــ اگر f تابعی فرد و مشتق‌پذیر باشد، آن گاه f' تابعی زوج و اگر f زوج و مشتق‌پذیر باشد f' فرد است.

تمرین

۱ ــ ثابت کنید، تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x+3|+|x-3|$ تابعی زوج و تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x+3|-|x-3|$ تابعی فرد است.

۲ ــ فرد یا زوج بودنِ هر یک از توابع زیر را بررسی کنید.

۱) $f(x)=\dfrac{|x|}{[x]-[-x]}$

۲) $g(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$

۳) $f(x)=\sqrt{|x-1|}+\sqrt{|x+1|}$

۴) $g(x)=|x|+\cos x$

۵) $f(x)=|x+1|-x|x|-|x-1|$

۶) $f(x)=[x]x$

۷) $f(x)=\begin{cases}-x^2 & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

۸) $g(x)=|x^2-1|+|-x|$

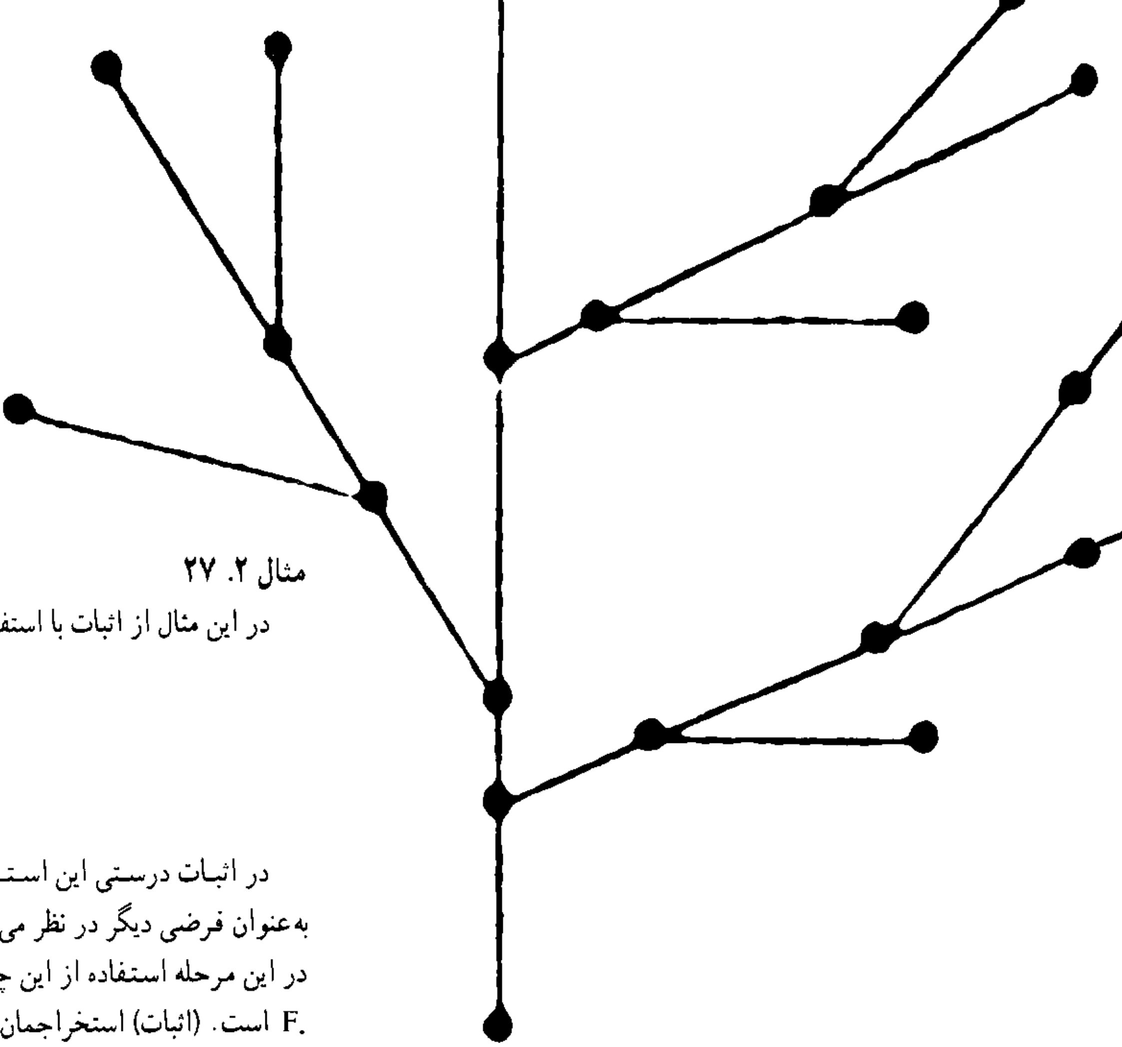
۹) $f(x)=\dfrac{[x]}{|x|x^3}$

۱۰) $f(x)=\sin(\cos x)$

۱۱) $g(x)=tg(\cos x)$

۱۲) $f(x)=\dfrac{x}{\mathrm{Arc\,cotg}x}$

۱۳) $g(x)=\log\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

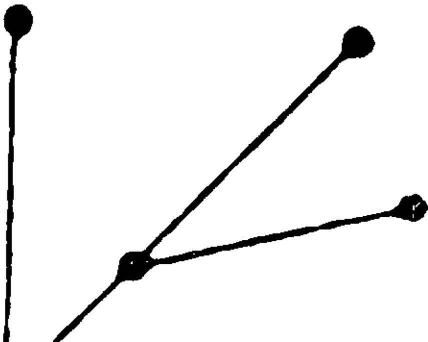


ریاضیات گسسته

قسمت نهم

RALPH P. GRIMALDI

• ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور



مثال ۲. ۲۷

در این مثال از اثبات با استفاده از کاذب بهره می‌بریم.

$$\begin{array}{l} \bar{p} \leftrightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \underline{\bar{r}} \\ \therefore p \end{array}$$

در اثبات درستی این استدلال، $\bar{p}$ ، نقیض نتیجهٔ p، را به‌عنوان فرضی دیگر در نظر می‌گیریم. در این صورت، هدفمان در این مرحله استفاده از این چهار فرض در استخراج کاذب F_0 است. (اثبات) استخراجمان به ترتیب زیر است.

مراحل	دلایل
(۱) $\bar{p} \leftrightarrow q$	فرض
(۲) $(\bar{p} \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \bar{p})$	(۱) و $[\bar{p} \leftrightarrow q] \Leftrightarrow [(\bar{p} \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \bar{p})]$
(۳) $\bar{p} \rightarrow q$	(۲) و قاعدهٔ تسهیل عطفی
(۴) $q \rightarrow r$	فرض
(۵) $\bar{p} \rightarrow r$	(۳)، (۴)، و قانون قیاس
(۶) $\bar{p}$	فرض (در نظر گرفته شده)
(۷) r	(۵)، (۶)، و قاعدهٔ انفصال
(۸) $\bar{r}$	فرض
(۹) $r \wedge \bar{r} (\Leftrightarrow F_0)$	(۷)، (۸)، و قاعدهٔ ترکیب عطفی
(۱۰) $\therefore p$	(۶)، (۹)، و اثبات با استفاده از کاذب

در صورتی که به بررسی بیشتر آنچه در اینجا رخ داده بپردازیم، درمی‌یابیم که

$$[(\bar{p} \leftrightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge \bar{r} \wedge \bar{p}] \Rightarrow F_0.$$

استلزام منطقی فوق طالب این است که ارزش راستی $[(\bar{p} \leftrightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge \bar{r} \wedge \bar{p}]$ صفر باشد. به علت این که

q ، $\bar{p} \leftrightarrow q$ ، $q \to r$ و $\bar{r}$ فرضهای داده شده‌اند، هر یک از آنها دارای ارزش راستی ۱ است. درنتیجه، برای این که:

$$[(\bar{p} \leftrightarrow q) \wedge (q \to r) \wedge \bar{r} \wedge \bar{p}]$$

دارای ارزش راستی ۰ باشد، باید گزارهٔ $\bar{p}$ دارای ارزش راستی ۰ باشد. بنابراین، p ارزش راستی ۱ دارد، و نتیجهٔ استدلال، یعنی، p، راست است.

□

مثالهای ۲.۲۴ ـ ۲.۲۷ راههایی در چگونگی اثبات درستی استدلال دادند. اکنون باید چگونگی تشخیص *نادرستی*[1] یک استدلال را بیاموزیم.

این وضعیت در استدلال

$$\begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \vdots \\ \underline{p_n} \\ \therefore q \end{array}$$

رخ می‌دهد که در آن هر یک از فرضهای p_1، p_2، p_3، ....، p_n راست است (ارزش راستی ۱ دارد.)، و با این همه نتیجهٔ q دروغ است (ارزش راستی ۰ دارد).

مثال بعدی، روش غیرمستقیمی را توضیح می‌دهد که با استفاده از آن می‌توان نشان داد استدلالی که *احساس می‌کنیم* نادرست است (شاید به این علت که نمی‌توانیم راهی برای نشان دادن درستی آن بیابیم) در واقع نادرست است.

مثال ۲.۲۸

استدلال زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{array}{l} p \\ p \vee q \\ q \to (r \to s) \\ \underline{t \to r} \\ \therefore \bar{s} \to \bar{t} \end{array}$$

برای نشان دادن نادرستی این استدلال، به چنان تخصیص ارزشهای راستی‌ای به هر یک از گزاره‌های p، q، r، s و t نیاز داریم که نتیجهٔ $\bar{s} \to \bar{t}$ دروغ باشد (ارزش راستی ۰ داشته باشد.) در حالی که هر چهار فرض استدلال راست باشد (ارزش راستی ۱ داشته باشد).

نتیجهٔ $\bar{s} \to \bar{t}$، تنها وقتی دروغ است که $\bar{s}$ راست و $\bar{t}$ دروغ باشد. این مطلب مستلزم این است که ارزش راستی s، ۰ و ارزش راستی t، ۱ باشد. برای اینکه فرض $p \vee q$ دارای ارزش راستی ۱ باشد، q می‌تواند راست (۱) یا دروغ (۰) باشد. بنابراین فرض $t \to r$ را در نظر می‌گیریم که در مورد آن می‌دانیم که t راست است. اگر قرار باشد $t \to r$ راست باشد، آنگاه r باید راست باشد (ارزش راستی ۱ داشته باشد). اما ارزش راستی فرض $q \to (r \to s)$، با r راست (۱) و s دروغ (۰)، تنها وقتی که q دروغ (۰) است ۱ می‌شود.

درنتیجه، تحت تخصیصات ارزش راستی:

$p : ۱ \qquad q : ۰ \qquad r : ۱ \qquad s : ۰ \qquad t : ۱$

هر چهار فرض

$p \qquad p \vee q \qquad q \to (r \to s) \qquad t \to r$

دارای ارزش راستی ۱ است، در حالی که نتیجهٔ

$\bar{s} \to \bar{t}$

ارزش راستی ۰ دارد. در این حالت نشان دادیم که استدلال داده شده نادرست است.

□

ارزشهای راستی

$p : ۱ \qquad q : ۰ \qquad r : ۱ \qquad s : ۰ \qquad t : ۱$

مثال ۲.۲۸ حالتی را به دست می‌دهد که آنچه را که می‌اندیشیدیم ممکن است قضیه باشد رد می‌کند. اکنون باید شروع به داشتن این مطلب داشته باشیم که در کوشش در اثبات این که گزاره‌ای به‌صورت $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n) \to q$ قضیه است، باید استدلالی عمومی برای همهٔ حالت‌هایی که فرضهای p_1، p_2، p_3، ....، p_n در آنها راست‌اند، ارائه دهیم. این استدلال، اساساً بر قواعد استنتاج و قوانین منطق بنا شده است، و در این مورد نمی‌توانیم از مثال خاصی به عنوان وسیلهٔ اثبات نتیجه‌ای عمومی استفاده کنیم. اما، زمانی که مایل به رد[2] گزاره‌ای خاص هستیم، تنها کاری که باید انجام بدهیم، یافتن نمونه‌ای است که گزارهٔ مورد نظر به‌ازای آن دروغ است. این نمونه را *مثال نقض*[3] می‌نامیم.

اکنون مثال دیگری را در نظر می‌گیریم و در آن به آزمایش رهیافت غیرمستقیم مثال ۲.۲۸ می‌پردازیم.

مثال ۲. ۲۹

در مورد درستی یا نادرستی استدلال زیر چه می‌توان گفت؟

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to s \\ r \to \bar{s} \\ \underline{\bar{p} \veebar r} \\ \therefore \bar{p} \end{array}$$

آیا نتیجهٔ $\bar{p}$، در حالی که هر چهار فرض راست‌اند، می‌تواند دروغ باشد؟ نتیجهٔ $\bar{p}$ هنگامی دروغ است که p دارای ارزش راستی ۱ باشد. بنابراین، برای این که فرض $p \to q$ راست باشد، باید ارزش راستی q چنین باشد. با توجه به ارزش فرض $q \to s$، ارزش q بر ارزش s مسلّط است. در این مرحله جمیع گزاره‌های p، q و s را با ارزش راستی ۱ داریم. با پرداختن به فرض $r \to \bar{s}$، در می‌یابیم که به علت ارزش راستی ۱ داشتن s، باید ارزش راستی r، ۰ باشد. در نتیجه r دروغ می‌شود. امّا با $\bar{p}$ ی دروغ و فرض $\bar{p} \veebar r$ راست، r را راست نیز داریم. بنابراین؛ درمی‌یابیم که $p \Rightarrow (\bar{r} \wedge r)$.

به این ترتیب در کوششمان برای یافتن مثالی نقض در مورد درستی استدلال داده شده با شکست مواجه شدیم. اما، این شکست به اثبات درستی استدلال مزبور ــ اثباتی بر مبنای اثبات با استفاده از کاذب ــ منجر شده است.

□

معرفی قواعد استنتاج و روشهای اثباتمان، فاصلهٔ زیادی تا جامع بودن دارد. کتابهای دیگر، موضوعات دیگری را به خواننده‌ای که میل به بررسی بیشتر این موضوع دارد، ارائه می‌دهند. در آینده، تکنیک اثبات بسیار مهمتری موسوم به *استقرای ریاضی*[۴] را به زرادخانه‌مان، برای یورش به اثباتهای قضایای ریاضی، خواهیم افزود.

کاربرد سورها

در بخش ۲. ۱ یادآور شدیم که چگونه لازم نیست، جمله‌هایی که با متغیری (چون x) سر و کار دارند، گزاره باشند. به عنوان مثال جملهٔ «عدد $x + 2$ عددی صحیح و زوج است» لزوماً راست یا دروغ نیست، مگر این که بدانیم چه مقداری به‌جای x قرار گرفته است. اگر انتخابهایمان را به اعداد صحیح محدود کنیم، در این صورت چون به جای x، ۵−، ۱− یا ۳ را قرار دهیم، گزارهٔ نتیجه دروغ است. در واقع، جملهٔ مزبور هرگاه به جای x عددی صحیح و فرد قرار دهیم دروغ است. اما، چون به جای x عددی صحیح و زوج قرار داده شود گزارهٔ نتیجه راست است.

به جملهٔ «عدد $x + 2$ عددی صحیح و زوج است» به عنوان *گزارهٔ باز*[۵] اشاره، و آن را به طور صوری به ترتیب زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲. ۵

جملهٔ خبری *گزارهٔ باز* است، اگر

۱. شامل یک یا بیش از یک متغیر باشد، و

۲. گزاره نباشد، امّا

۳. چون به جای متغیرهای آن انتخابهای مجاز خاصی بگذاریم، به گزاره تبدیل شود.

هنگامی که جملهٔ «عدد $x + 2$ عددی صحیح و زوج است» را در پرتو این تعریف بررسی کنیم، آن را گزارهٔ بازی ملاحظه می‌کنیم که شامل تک متغیر x است. در رابطه با سومین عنصر تعریف فوق، در بحث پیشین‌مان «انتخابهای مجاز خاص» را به اعداد صحیح محدود کرده‌ایم. این انتخابهای مجاز آنچه را که به *عالم*[۶] یا *عالم مقال*[۷] گزارهٔ باز موسوم است، تشکیل می‌دهند. عالم مزبور، شامل انتخابهایی است که مایل به در نظر گرفتن یا تجویزشان برای متغیرهای واقع در گزارهٔ باز مورد نظریم. (عالم مورد بحث، مثالی از مجموعه[۸] است، مفهومی که آن را در آینده به تفصیل مورد بررسی قرار می‌دهیم.)

در برخورد با گزاره‌های باز، نمادنویسی زیر را به کار خواهیم برد:

گزارهٔ باز «عدد $x + 2$ عددی صحیح و زوج است» را به $p(x)$ [یا $q(x)$، $r(x)$ و غیره] نمایش می‌دهیم. در این صورت $\overline{p(x)}$ «عدد $x + 2$ عددی صحیح و زوج نیست» خوانده می‌شود.

از $q(x,y)$ برای نمایش گزارهٔ بازی که شامل دو متغیر است استفاده می‌کنیم، چون $q(x,y)$: اعداد $y + 2$، $x - y$ و $x + 2y$ اعدادی صحیح و زوج‌اند.

در حالت $q(x,y)$، بیش از یک ظهور هر یک از متغیرهای x، y موجود است. باید دانست که چون به جای یکی از xها

انتخابی از عالممان را قرار می‌دهیم، به جای xهای دیگر، همان انتخاب را می‌گذاریم. به همین ترتیب، چون جانشینی‌ای (از عالم مربوطه) در مورد یک ظهور y انجام می‌گیرد، همان جانشینی در مورد جمیع ظهورات متغیر y به کار می‌رود.

با $p(x)$ و $q(x,y)$ چون فوق، و عالمی که همچنان اعداد صحیح را به‌عنوان تنها انتخابهای مجازمان مقرّر می‌کند، هنگامی که بعضی جانشینیها را برای متغیرهای x و y به کار می‌بریم، نتایج زیر را به دست می‌آوریم.

$p(۵)$: عدد ۷(=۲+۵) عددی صحیح و زوج است. (دروغ)

$\overline{p(۷)}$: عدد ۹ عددی صحیح و زوج نیست. (راست)

$q(۴,۲)$: اعداد ۴، ۲ و ۸ اعدادی صحیح و زوج‌اند. (راست)

نیز، به عنوان مثال، توجه می‌کنیم که $q(۵,۲)$ و $q(۴,۷)$ هر دو گزاره‌هایی دروغ‌اند، در حالی که $\overline{q(۵,۲)}$ و $\overline{q(۴,۷)}$ راست‌اند.

درنتیجه، ملاحظه می‌کنیم که در مورد $p(x)$ و $q(x,y)$، بعضی از جانشینیها به گزاره‌های راست و بعضی به گزاره‌های دروغ منجر می‌شوند. بنابراین می‌توانیم گزاره‌های راست زیر را تشکیل دهیم.

۱. به ازای بعضی xها، $p(x)$.

۲. به‌ازای بعضی xها و yها، $q(x,y)$.

توجه داشته باشید که در این حالت، گزاره‌های «به ازای بعضی xها، $\overline{p(x)}$» و «به ازای بعضی xها و yها، $\overline{q(x,y)}$» نیز راست‌اند.

گفته می‌شود که فرازهای «به ازای بعضی xها» و «به ازای بعضی xها و yها»، به ترتیب، گزاره‌های باز $p(x)$ و $q(x,y)$ را *سوردار* می‌کنند[9]. بسیاری از اصول موضوع، تعاریف، و قضایای ریاضی شامل گزاره‌هایی هستند که گزاره‌های باز سوردارند. اینها از دو نوع سور[10] نتیجه شده‌اند، که به *سورهای وجودی* و *عمومی*[11] موسوم‌اند.

گزارهٔ (۱) از سور وجودی «به ازای بعضی xها» استفاده می‌کند، که می‌تواند به صورت «به ازای حداقل یک x» یا «xی چنان موجود است که» نیز بیان شود. این سور در صورت نمادین به شکل $\exists x$ نوشته می‌شود. درنتیجه، گزارهٔ «به ازای بعضی xها، $p(x)$» در صورت نمادین به $\exists x\, p(x)$ تبدیل می‌شود.

گزارهٔ (۲) در صورت نمادین به $\exists x\, \exists y\, q(x,y)$ تبدیل می‌شود. از نماد $\exists x,y$ نیز می‌توان برای اختصار $\exists x\, \exists y\, q(x,y)$ به $\exists x,y\ q(x,y)$ استفاده برد.

سور عمومی با $\forall x$ نمایش‌داده و «به ازای جمیع xها»، یا «به ازای هر x» خوانده می‌شود.

با در نظر گرفتن $p(x)$ به صورت تعریف شده در قبل و استفاده از سورعمومی، می‌توانیم گزارهٔ باز $p(x)$ را به گزارهٔ (سوردار) $\forall x\, p(x)$، گزاره‌ای دروغ، تغییر دهیم.

اگر گزارهٔ باز $r(x)$: «۲x عددی صحیح و زوج است» را با همان عالم (جمیع اعداد صحیح) در نظر بگیریم، آنگاه گزارهٔ (سوردار) $\forall x\, r(x)$ گزاره‌ای راست است. هنگامی که می‌گوییم $\forall x\, r(x)$ راست است، مقصودمان این است که بی‌توجه به این که چه عدد صحیحی (از عالممان) به جای x قرار گرفته است، گزارهٔ نتیجه راست است. نیز توجه داشته باشید که گزارهٔ $\exists x\, r(x)$ گزاره‌ای راست است، در حالی که $\forall x\, \overline{r(x)}$ و $\exists x\, \overline{r(x)}$، هر دو، دروغ‌اند.

مثال زیر نشان می‌دهد که چگونه مفاهیم جدید مربوط به سورهای فوق را می‌توان با رابطهای منطقی به کار برد.

مثال ۲. ۳۰

در این مثال، عالممان شامل جمیع اعداد حقیقی است. گزاره‌های باز $p(x)$، $q(x)$، $r(x)$، و $s(x)$ در زیر داده شده‌اند.

$:p(x)$	$x \geq ۰$
$:q(x)$	$x^۲ \geq ۰$
$:r(x)$	$x^۲ - ۳x - ۴ = ۰$
$:s(x)$	$x^۲ - ۳ > ۰$

در این صورت گزاره‌های زیر راست‌اند.

۱

$\exists x[p(x) \wedge r(x)]$

این گزاره به این علت نتیجه می‌شود که، فی‌المثل، عدد حقیقی ۴، عضوی از عالم مربوطه و چنان است که هر دو گزارهٔ $p(۴)$ و $r(۴)$ راست‌اند.

۲.

$\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]$

اگر به جای x در $p(x)$ عدد حقیقی و منفی a را قرار دهیم، آنگاه $p(x)$ دروغ است، اما $p(a) \rightarrow q(a)$، بی‌توجه به ارزش

راستی $q(a)$، راست است. با قرار دادن عدد حقیقی نامنفی b به جـــای x در $p(x)$ و $q(x)$ ؛ $p(b)$ ، و $q(b)$ ، هر دو، را، همـــچنان کـه $p(b) \to q(b)$ ، راست می‌یابیم، درنتـیـجـه، $p(x) \to q(x)$ به ازای جمیع مقادیر x واقع در عالم تمام اعداد حقیقی، راست است، و گزارهٔ (سوردار) $\forall x[p(x) \to q(x)]$ راست است.

این گزاره را می‌توان به یکی از دو صورت زیر ترجمه کرد :

a) به ازای هر عدد حقیقی x، اگر $x \geq ۰$ ، آنگاه $x^{۲} \geq ۰$.

b) هر عدد نامنفی مربعی نامنفی دارد.

گزارهٔ $\exists x[p(x) \to q(x)]$ نیز راست است.

گزاره‌های مورد بررسی بعدی دروغ‌اند.

۱′.

$\forall x[q(x) \to s(x)]$

می‌خـواهیم نشـان دهیم کـه این گـزاره دروغ است، بنابراین لازم است که، به جایِ اثبات مطلبی به ازای جمیع x ها، چنان که در گزارهٔ (۲) انجام دادیم، تنها *مثالی نقض* ارائه دهیم ــ یعنی، *مقداری از* x که به ازای آن $q(x) \to s(x)$ دروغ است. با قرار دادن ۱ به‌جـای x ، مـلاحظه می‌کنیم کـه $q(۱)$ راست و $s(۱)$ دروغ است. بنابراین $q(۱) \to s(۱)$ دروغ است، و درنتـیـجـه، گزارهٔ (سوردار) $\forall x[q(x) \to s(x)]$ دروغ است. (توجه داشته باشید که $x = ۱$ تنها مثال نقض موجود را به دست نمی‌دهد : هر عدد حقیقی a ی بین $-\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۳}$ ، $q(a)$ را راست و $s(a)$ را دروغ می‌کند.)

۲′.

$\forall x[r(x) \vee s(x)]$

در این مورد، مثالهای نقض بسیاری، چون، ۱، $\frac{۱}{۲}$ ، $-\frac{۱}{۲}$ ، و ۰ مـوجـودند: امّـا، با تغـیـیـر سـور، درمی‌یابیم کـه گـزارهٔ $\exists x[r(x) \vee s(x)]$ راست است.

۳′.

$\forall x[r(x) \to p(x)]$

عدد حـقـیـقی ۱- جـواب معـادلهٔ $x^{۲} - ۳x - ۴ = ۰$ است، بنابراین $r(-۱)$ راست است. در حالی که $p(-۱)$ دروغ است.

بنابراین انتخاب ۱- مـثـال نقض یکـتـایی را به دست می‌دهد که برای رد این گزارهٔ (سوردار) به آن نیاز است.

گـزارهٔ (۳′) را می‌توان به یکی از دو صـورت زیر ترجـمـه کرد :

a) به ازای هر عدد حـقـیقی x، اگر $x^{۲} - ۳x - ۴ = ۰$ ، آنگاه $x \geq ۰$.

b) به ازای هر عـدد حـقـیـقی x، اگـر x جـواب مـعـادلهٔ $x^{۲} - ۳x - ۴ = ۰$ باشد، آنگاه $x \geq ۰$.

□

از مثال ۲. ۳۰ مـلاحظات زیر را به عـمل می‌آوریم. فـرض می‌کنیم $p(x)$ هر گزارهٔ باز (برحـسب مـتـغـیر x) با عـالم *ناتهی*[12] مشـخـصی را (یعنی، عالمی شامل حداقل یک موجـود) نمایش دهد. در این صورت اگر $\forall x\, p(x)$ راست باشد، $\exists x\, p(x)$ نیز چنین است، یا

$$\forall x\, p(x) \Rightarrow \exists x\, p(x)$$

نیز اگر $\exists x\, p(x)$ راست باشد، نتیجه نمی‌شود که $\forall x\, p(x)$ باید راست باشد. درنتیجه، $\exists x\, p(x)$ منطقاً مستلزم $\forall x\, p(x)$ نیست.

یادداشتها

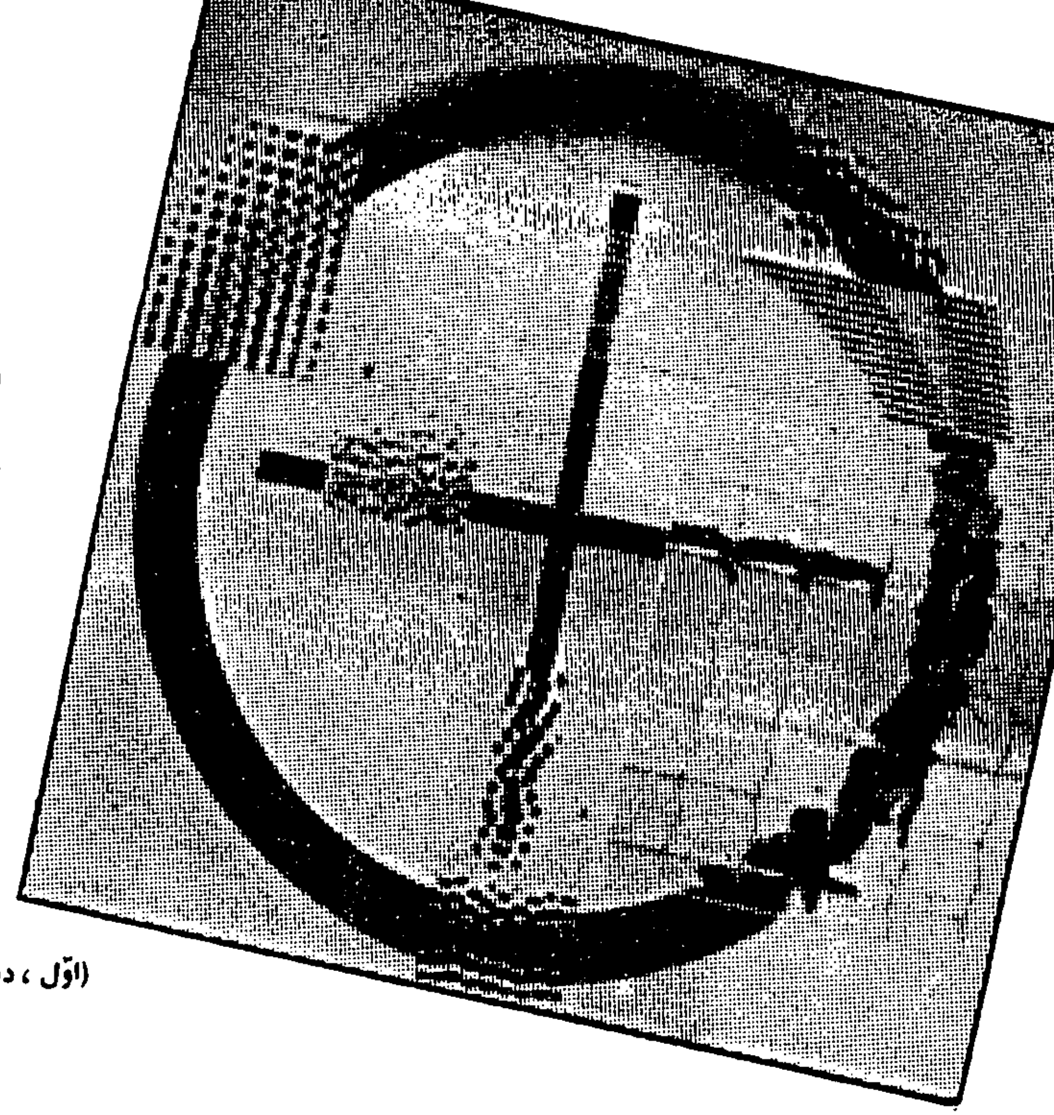
1. Invalid
2. Disprove
3. Counterexample
4. Mathematical induction
5. Open statement
6. Universe
7. Universe of discourse
8. Set
9. Quantify
10. Quantifiers
11. Existential and universal quantifiers
12. Nonempty

مکان هندسی

(قسمت سیزدهم)

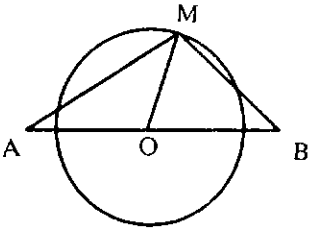
● محمدهاشم رستمی

(اوّل ، دوم ، سوم ، چهارم دبیرستان)



۹. مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که مجموع مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B واقع در آن صفحه مقدار ثابت k^2 باشد، دایره‌ای به مرکز وسط پاره‌خط AB است.

اثبات به روش هندسی. اگر نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB و $AB = a$ و M نقطه‌ای از مکان هندسی مورد نظر باشد، داریم :



$$MA^2 + MB^2 = k^2 \qquad (1)$$

در مثلث MAB، پاره‌خط MO میانهٔ نظیر ضلع AB است و بنا به رابطهٔ میانه‌ها در مثلث، می‌توان نوشت :

$$MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \frac{AB^2}{2}$$

و یا :

$$MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \frac{a^2}{2} \qquad (2)$$

از مقایسهٔ رابطه‌های (۱) و (۲) داریم :

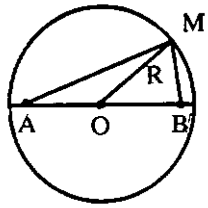
$$2MO^2 + \frac{a^2}{2} = k^2$$

$$\Rightarrow MO = \frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - a^2} \qquad (3)$$

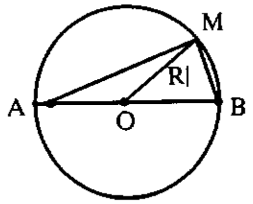
با توجه به ثابت بودن نقطهٔ O و مقدارهای k^2 و a، رابطهٔ (۳) نشان می‌دهد که مکان هندسی نقطهٔ M دایره‌ای به مرکز نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB و به شعاع $R = \frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - a^2}$ است. برعکس هر نقطه روی دایرهٔ بالا انتخاب کنیم، مجموع مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر مقدار ثابت k^2 است.

بحث. شرط امکان مسأله آن است که $2k^2 - a^2 \geq 0$ یا $k^2 \geq \frac{a^2}{2}$ باشد. در این‌صورت :

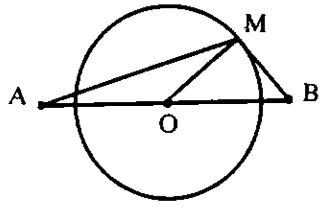
۱. اگر $k^2 > a^2$ باشد، $R > \frac{a}{2}$ و در نتیجه دو نقطهٔ A و B درون دایرهٔ مکان واقع می‌شوند.



۲. اگر $k^2 = a^2$ باشد، $R = \frac{a}{2}$ و دایرهٔ مکان از دو نقطهٔ A و B می‌گذرد. در حقیقت در این حالت دایرهٔ مکان دایرهٔ به قطر پاره‌خط AB است.

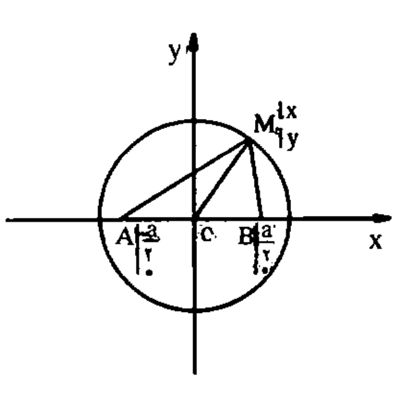


۳. اگر $\frac{a^2}{2} < k^2 < a^2$ باشد، $R < \frac{a}{2}$ و دو نقطهٔ A و B در برون دایرهٔ مکان قرار می‌گیرند.



۴. اگر $k^2 = \frac{a^2}{2}$ باشد، $R = 0$ و در نتیجه تنها نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB جواب مسأله است.

اثبات به روش تحلیلی. خط AB را محور xها و عمودمنصف پاره‌خط AB را محور yها اختیار می‌کنیم. در



این‌صورت با فرض $AB = a$، $A(-\frac{a}{2},0)$ و $B(\frac{a}{2},0)$ خواهد بود.[1] اگر $M(x,y)$ یک نقطه از مکان هندسی مورد نظر یعنی نقطه‌ای باشد که مجموع مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر k^2 است، داریم:

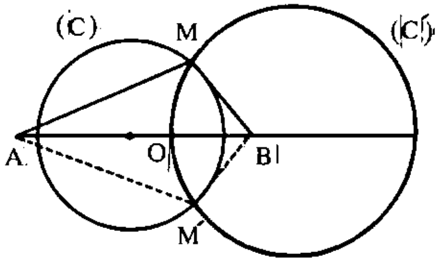
$$M(x,y) \text{ و } A(-\frac{a}{2},0) \text{ و } B(+\frac{a}{2},0) \text{ و } MA^2 \neq MB^2 = k^2$$

$$\Rightarrow (x+\frac{a}{2})^2 + y^2 + (x-\frac{a}{2})^2 + y^2 = k^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 = k^2 - \frac{a^2}{2} \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = \frac{1}{4}(2k^2 - a^2)} \quad (1)$$

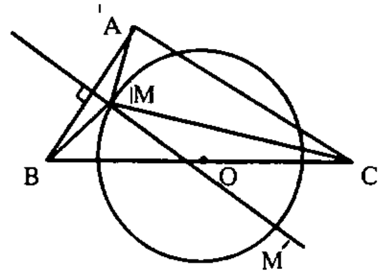
معادلهٔ (۱)، معادلهٔ دایره‌ای است که مرکز آن نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB و شعاع آن $R = \frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - a^2}$ است. بنابراین بحث جواب مسأله همانند روش هندسی است.

مثال ۱. دو نقطهٔ A و B در یک صفحه مفروضند. نقطه‌ای از این صفحه را تعیین کنید که مجموع مربعهای فاصله‌اش از این دو نقطه برابر k^2 و نسبت فاصله‌اش از همین دو نقطه برابر k' باشد.



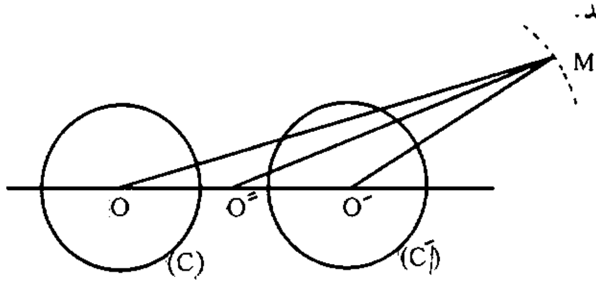
حل. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که مجموع مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر k^2 است، دایره‌ای است به مرکز نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB و به شعاع $R = \frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - a^2}$ (دایرهٔ C). این دایره را رسم می‌کنیم. از طرفی مکان هندسی نقطه‌ای که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر مقدار ثابت k' باشد، دایره‌ای است که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت k تقسیم می‌کند، دایرهٔ (C'). این دایره را نیز رسم می‌کنیم. نقطه‌های برخورد این دو دایره (در صورت وجود) جواب مسأله‌اند.

مثال ۲. سه نقطهٔ A، B و C غیرواقع بر یک خط راست در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای از این صفحه را بیابید که مجموع مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ B و C برابر k^2 و از دو نقطهٔ A و B نیز به یک فاصله باشد.



حل. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که مجموع مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت B و C برابر مقدار ثابت k^2 باشد، دایره‌ای به مرکز نقطهٔ O وسط پاره‌خط BC و به شعاع $\frac{1}{2}\sqrt{2k^2-BC^2}$ است. این دایره را رسم می‌کنیم. از طرفی مکان هندسی نقطه‌ای که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله است عمودمنصف پاره‌خط AB است. این مکان را نیز رسم می‌کنیم. نقطه یا نقطه‌های برخورد این دو مکان (در صورت وجود) جواب مسأله است.

مثال ۳. دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ در یک صفحه مفروضند. مکان هندسی نقطه‌ای از این صفحه را بیابید که مجموع قوتهای آن نسبت به این دو دایره برابر مقدار ثابت k باشد.



حل. فرض می‌کنیم M یکی از نقطه‌های مکان هندسی مورد نظر باشد یعنی داشته باشیم:

با توجه به اینکه $PA(C)=MO^2-R^2$ و $PA(C')=MO'^2-R'^2$ است. با جایگذاری در رابطهٔ بالا داریم:

$$MO^2-R^2+MO'^2-R'^2=k$$
$$\Rightarrow MO^2+MO'^2=k+R^2+R'^2 \qquad (1)$$

رابطهٔ (۱) نشان می‌دهد که مجموع مربعهای فاصلهٔ نقطهٔ M از دو نقطهٔ ثابت O و O' برابر مقدار ثابت $k^2+R^2+R'^2$ است. بنابراین مکان هندسی این نقطهٔ دایره‌ای به مرکز وسط پاره‌خط OO' و به شعاع $\frac{1}{2}\sqrt{2(k+R^2+R'^2)-\overline{OO'}^2}$ است.

مثال ۴. دو نقطهٔ $A(-1,3)$ و $B(2,-1)$ در دستگاه مختصات xoy مفروضند. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از صفحهٔ این دستگاه مختصات را بیابید که مجموع مربعهای فاصله‌اش از دو نقطه A و B برابر ۱۷ باشد.

حل. فرض می‌کنیم $M(x,y)$ یکی از نقطه‌های مکان هندسی خواسته باشد. در این صورت داریم:

$$B(2,-1) \text{ و } A(-1,3) \text{ و } M(x,y) \text{ و } MA^2+MB^2=17$$
$$\Rightarrow (x+1)^2+(y-3)^2+(x-2)^2+(y+1)^2=17$$
$$\Rightarrow 2x^2+2y^2-2x-4y=2$$
$$\Rightarrow x^2+y^2-x-2y-1=0 \Rightarrow \boxed{(x-\tfrac{1}{2})^2+(y-1)^2=\tfrac{9}{4}}$$

این معادله نشان می‌دهد که مکان هندسی مورد نظر، دایره‌ای به مرکز $O_1(\frac{1}{2},1)$ و به شعاع $R=\frac{3}{2}$ است.

مثال ۵. نقطه‌ای روی خط $\Delta: 2x+y-1=0$ بیابید که مجموع مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ $A(-2,1)$ و $B(2,1)$ برابر ۱۶ باشد.

حل. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که مجموع مربعهای فاصله‌اش از دونقطه A و B برابر مقدار ثابت ۱۶ است، دایره‌ای به مرکز وسط پاره‌خط AB و به شعاع $R=\frac{1}{2}\sqrt{2k^2-AB^2}$ است. بنابراین معادلهٔ این دایره را نوشته، نقطه یا نقاط برخورد آن، با خط Δ را به‌دست می‌آوریم.

$$M(x,y) \qquad A(-2,1) \qquad B(2,1)$$
$$MA^2+MB^2=16$$
$$\Rightarrow (x+2)^2+(y-1)^2+(x-2)^2+(y-1)^2=16$$
$$\Rightarrow 2x^2+2y^2-4y=6 \Rightarrow x^2+y^2-2y-3=0$$
$$\Rightarrow x^2+(y-1)^2=4 \qquad \text{معادلهٔ دایرهٔ مکان هندسی}$$

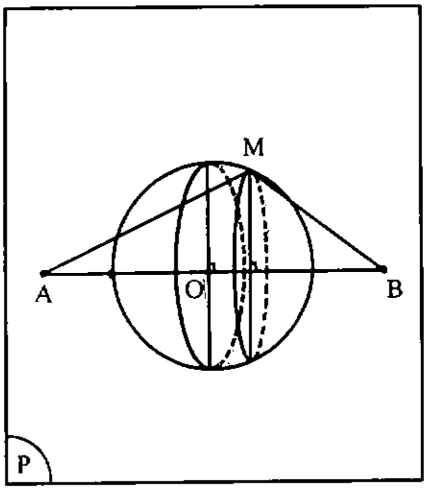
$$\begin{cases} x^2+(y-1)^2=4 \\ 2x+y-1=0 \end{cases} \Rightarrow 5x^2=4 \Rightarrow x^2=\frac{4}{5} \Rightarrow x=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow M_1\left|\begin{array}{l} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ 1-\frac{4\sqrt{5}}{5} \end{array}\right. \qquad M_2\left|\begin{array}{l} \frac{-2\sqrt{5}}{5} \\ 1+\frac{4\sqrt{5}}{5} \end{array}\right.$$

نقطه‌های جواب مسأله.

۱۰. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که مجموع مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B مقدار ثابت k^2 است، کره‌ای است که مرکزش وسط پاره‌خط AB است.

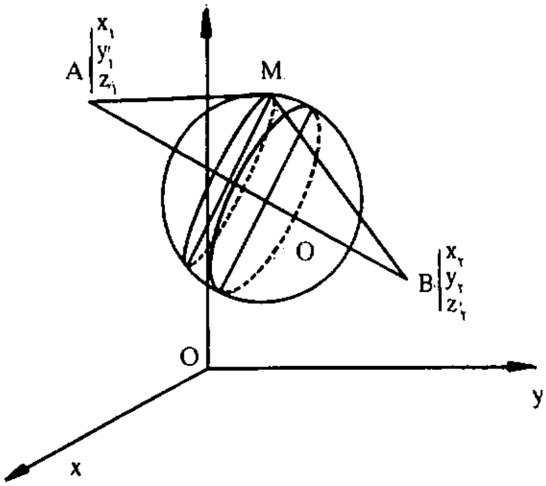
اثبات به روش هندسی. صفحهٔ دلخواه P را که بر دو نقطهٔ ثابت A و B می‌گذرد درنظر می‌گیریم. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای از صفحهٔ P که مجموع مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر مقدار ثابت k^2 باشد، دایرهٔ (C) به مرکز نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB و به شعاع $R=\frac{1}{2}\sqrt{2k^2-\overline{AB}^2}$ است.



این دایره را رسم می‌کنیم. واضح است که برای هر نقطهٔ M واقع بر دایرهٔ (C) داریم: $MA^2+MB^2=k^2$. حال صفحهٔ P را حول خط AB دوران می‌دهیم. از دوران دایرهٔ (C) واقع در این صفحه که همواره و در هر وضعی از صفحهٔ P، مکان هندسی نقطه‌ای است که مجموع مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر k^2 است، کره‌ای به قطر پاره‌خط AB پدید می‌آید، که این کره، مکان هندسی نقطه‌ای از فضاست که مجموع مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر مقدار ثابت k^2 است.

اثبات به روش تحلیلی. دو نقطهٔ ثابت $A(x_1,y_1,z_1)$ و $B(x_2,y_2,z_2)$ را در دستگاه مختصات قائم $O-xyz$ درنظر می‌گیریم. اگر $M(x,y,z)$ یک نقطه از مکان هندسی موردنظر، یعنی نقطه‌ای باشد که مجموع مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر k^2 باشد، داریم:

$$A(x_1,y_1,z_1) \text{ و } B(x_2,y_2,z_2) \text{ و } M(x,y,z)$$
$$\Rightarrow MA^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2 \text{ و }$$
$$MB^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2$$



$$MA^2+MB^2=k^2 \Rightarrow$$
$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2+(x-x_2)^2+$$
$$(y-y_2)^2+(z-z_2)^2=k^2$$
$$\Rightarrow 2x^2+2y^2+2z^2-2x(x_1+x_2)-2y(y_1+y_2)-$$
$$2z(z_1+z_2)+x_1^2+y_1^2+z_1^2+x_2^2+y_2^2+z_2^2=k^2$$
$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2-(x_1+x_2)x-(y_1+y_2)y-(z_1+z_2)z=$$
$$k^2-(x_1^2+y_1^2+z_1^2+x_2^2+y_2^2+z_2^2)$$
$$\Rightarrow\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2+\left(z-\frac{z_1+z_2}{2}\right)^2=$$
$$\frac{2k^2-(x_1-x_2)^2-(y_1-y_2)^2-(z_1-z_2)^2}{4} \qquad (1)$$

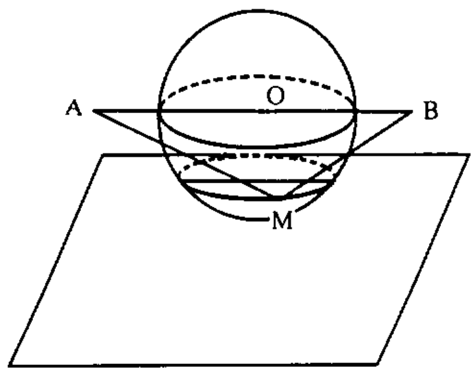
معادلهٔ (۱) معادلهٔ کره‌ای به مرکز $O_1\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$ و به شعاع $\frac{1}{2}\sqrt{2k^2-(x_1-x_2)^2-(y_1-y_2)^2-(z_1-z_2)^2}$ است.

بدیهی است هر نقطه‌ای که مختصاتش در معادلهٔ (۱) صدق کند مجموع مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت $A(x_1,y_1,z_1)$ و $B(x_2,y_2,z_2)$ برابر مقدار ثابت k^2 است.

بنابراین مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که مجموع مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر مقدار ثابت k^2 باشد، کره‌ای به مرکز نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB و به شعاع $\frac{1}{2}\sqrt{2k^2-AB^2}$ است.

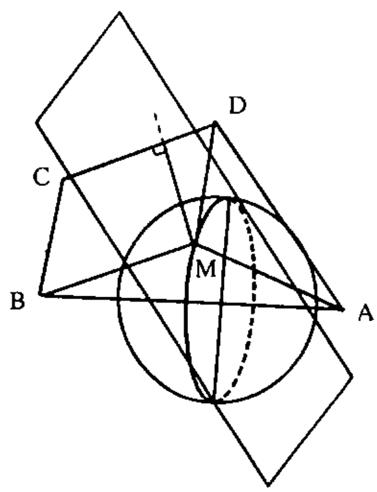
مثال ۱. صفحهٔ P و دو نقطهٔ A و B غیرواقع بر این صفحه مفروضند. مجموعهٔ نقطه‌هایی از صفحهٔ P را تعیین کنید که مجموع مربعهای فاصله‌شان از دو نقطه ثابت A و B برابر k^2 باشد.

حل. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که مجموع مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B مقدار ثابت k^2 باشد، کره‌ای به مرکز نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB و به شعاع $\frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - AB^2}$ است. این کره را رسم می‌کنیم. فصل مشترک این کره با صفحهٔ P (در صورت وجود) جواب مسأله است. بنا به مقدار k و وضع پاره‌خط AB نسبت به صفحهٔ P می‌توان وجود جواب را بررسی نمود.



مثال ۲. چهارضلعی چپ ABCD (چهارضلعی‌ای که رأسهایش در یک صفحه قرار ندارند) مفروض است. مجموعهٔ نقطه‌هایی از فضا را بیابید که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشند و مجموع مربعهای فاصله‌شان از دو نقطهٔ C و D برابر مقدار ثابت k^2 باشد.

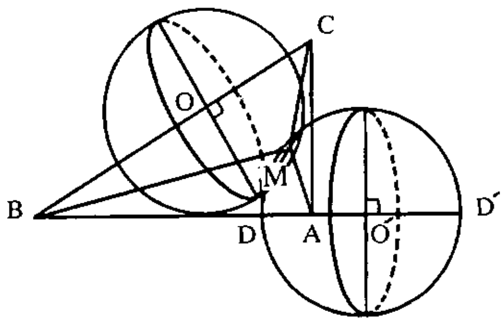
حل. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از دو نقطهٔ ثابت C و D به یک فاصله است، صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB است. این صفحه را رسم کرده آن را صفحهٔ (P) می‌نامیم. از طرفی، مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که مجموع مربعهای



فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت C و D برابر مقدار ثابت k^2 است. کره‌ای به مرکز نقطهٔ O وسط پاره‌خط CD و به شعاع $\frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - CD^2}$ است. این کره را نیز رسم می‌کنیم. فصل‌مشترک این کره با صفحهٔ P (درصورت وجود) جواب مسأله است. برحسب اندازهٔ k^2 و طول ضلعهای چهارضلعی می‌توان وجود جواب را بررسی کرد.

مثال ۳. سه نقطهٔ A، B و C مفروضند. مجموعه نقاطی از فضا را بیابید که نسبت فاصله‌شان از دو نقطهٔ A و B برابر k و مجموع مربعهای فاصله‌شان از دو نقطهٔ B و C برابر k'^2 باشد.

حل. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر k است، کره‌ای است که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت k تقسیم می‌کند (کرهٔ آپولونیوس) این کره را رسم می‌کنیم (کرهٔ S). از طرفی مکان هندسی نقطه‌ای که مجموع مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت B و C برابر k'^2 است کره‌ای به مرکز نقطهٔ O وسط پاره‌خط BC و به شعاع $\frac{1}{2}\sqrt{2k'^2 - BC^2}$ است (کرهٔ S′). این کره را نیز رسم می‌کنیم. فصل مشترک این دو کره (درصورت وجود) جواب مسأله است.



مثال ۴. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را بیابید که مجموع مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت $A(1,0,2)$ و $B(3,-1,0)$ برابر ۲۳ باشد.

حل. اگر $M(x,y,z)$ یک نقطه از مکان هندسی مورد نظر باشد، داریم:

$A(1,0,2)$ و $B(3,-1,0)$ و $M(x,y,z)$

$$MA^2 + MB^2 = 23$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 + (x-3)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 23$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 8x + 2y - 4z + 15 = 23$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2-4x+y-2z=4$$

$$\Rightarrow (x-2)^2+(y+\frac{1}{2})^2+(z-1)^2=\frac{37}{4} \qquad (1)$$

معادلهٔ (۱) معادلهٔ کره‌ای به مرکز $O_1(2,-\frac{1}{2},1)$ (که همان وسط پاره‌خط AB است) و به شعاع $\frac{1}{2}\sqrt{37}$ می‌باشد.

مـــثـــال ۵. دو نقطهٔ $A(2,-1,3)$ و $B(-2,1,1)$ و خط $\Delta: \frac{x}{2}=\frac{y}{3}=z-2$ داده شده‌اند. نقطه‌ای بر خط Δ بیابید که مجموع مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر ۴۰ باشد.

حل. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را که مجموع مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر ۴۰ است می‌نویسیم و با معادله خط Δ قطع می‌دهیم. داریم:

$A(2,-1,3)$ و $B(-2,1,1)$ و $M(x,y,z)$

$$MA^2+MB^2=40$$

$$\Rightarrow (x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2+(x+2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=40$$

$$2x^2+2y^2+2z^2-8z+20=40$$

معادلهٔ کرهٔ مکان هندسی (S) $\quad \Rightarrow x^2+y^2+z^2-4z-10=0$

$$\begin{cases} \Delta: & \frac{x}{2}=\frac{y}{3}=z-2=t \Rightarrow x=2t, y=3t, z=t+2 \\ (S): & x^2+y^2+z^2-4z-10=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4t^2+9t^2+(t+2)^2-4(t+2)-10=0$$

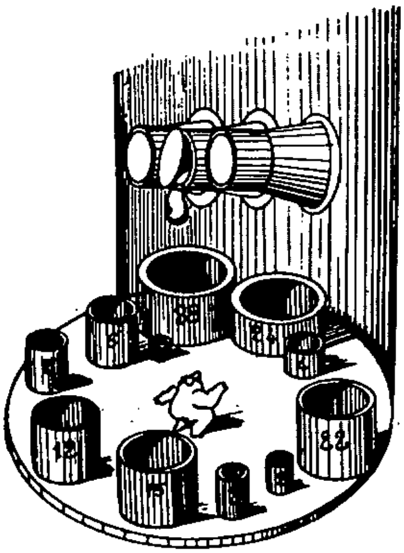
$$\Rightarrow 14t^2-14=0 \Rightarrow t^2=1 \Rightarrow t=\pm 1$$

$$\Rightarrow M_1(2,3,3) \text{ و } M_2(-2,-3,1)$$

نقطه‌های جواب مسأله.

تفریح اندیشه ۳

تاجری ۱۰ مخزن دارد که گنجایش آنها ۱، ۲، ۴، ۵، ۶، ۱۲، ۱۵، ۲۲، ۲۴ و ۳۸ لیتر است. هرکدام از این ظرفها پر از مایعات مختلف زیر است. بعضی پر از شیر، بعضی پر از آب و برخی پر از روغن هستند و فقط یک مخزن خالی است. مقدار آب موجود در مخزنها دو برابر مقدار شیر، و مقدار روغن، دو برابر مقدار آب است. هر مخزن از چه موادی پر شده است؟



● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمهٔ سیمین‌دخت ترکپور

جواب در صفحهٔ ۸۸

در باغ تجربه‌ها

(قسمت اول)

گفتگو با آقای میرزا جلیلی

□ **آقای جلیلی! لطفاً خودتان را معرفی کنید.**

■ بسم‌الله الرحمن الرحیم الحمدلله رب‌العالمین و به نستعین فبشّر عبادیَ الذین یستمعون القولْ و یتبعون اَحسنه.

میرزا جلیلی هستم، در اوّل اردیبهشت ماه ۱۳۱۲ در بوشهر متولد شدم. تحصیلات ابتدایی را در دبستان فردوسی و متوسطه را در دبیرستان سعادت آن شهر به پایان رساندم. پس از گذراندن دانشسرای مقدماتی شیراز، از دانشسرای عالی تهران فارغ‌التحصیل شدم. ۲۰ سال در شهرستان کازرون تدریس کردم، یک دورهٔ یکساله آموزش ریاضی در انستیتوی تربیتی دانشگاه لندن گذراندم و به دریافت دیپلم نایل آمدم، که بعدها از طرف وزارت علوم، فوق لیسانس شناخته شد. یک دورهٔ شش ماهه برنامه‌ریزی را در دانشگاه تگزاس در آسین گذراندم و پایان‌نامهٔ آن دوره را دریافت کردم.

از سال ۱۳۵۰، در دفتر برنامه‌ریزی و تألیف مشغول به کار هستم. با این همه کار تدریس را هیچ‌گاه رها نکرده‌ام و با معلّمان ریاضی کشور در تمام مقاطع تحصیلی، مرتب در تماس بوده‌ام و با جوّ آموزش کشور کاملاً آشنا هستم.

برنامه‌ریزی چندین مقطع تحصیلی را، از ابتدایی، راهنمایی، دبیرستان، دانشسرای مقدماتی، و مراکز تربیت معلم کارگردانی کرده‌ام و به تألیف رسانیده‌ام، که همگی کتابهای موفق ریاضی در مدارس بوده‌اند. در دو برنامه‌ریزی دبیرستان [از ۱۳۶۲ تا ۱۳۶۴ و از ۱۳۶۸ تا ۱۳۷۰] شرکت کردم و از مؤلفان کتابهای «ریاضیات جدید» دبیرستان هستم که برای اوّلین بار در ایران با همکاری کارشناسان، مفاهیم جدید و به روز ریاضی جهان، در سطح فهم دبیرستان، با زبان ساده و دانش‌آموزی، وارد کتابهای ریاضی کردیم. همچنین در تألیف کتابهای ریاضی ۱ تا ۴ نظام‌جدید نیز همکاری داشته‌ام. سالها مدیر داخلی مجلهٔ رشد آموزش ریاضی و جزو هیأت تحریریه آن بوده‌ام.

در کنگرهٔ بین‌المللی آموزش ریاضی[1] در استرالیا، همچنین در دو کنفرانس ریاضی در زمینهٔ آموزش ریاضی در سوتمتون و هلند، حضور داشتم و در توکیو و مسکو پای صحبت کارشناسان و مؤلفان و برنامه‌ریزان ریاضی نشسته‌ام و از آنها رهنمود برنامه‌ریزی گرفته‌ام.

□ **غیر از ریاضی، تخصص دیگری هم دارید؟**

■ به زبان انگلیسی مسلّط هستم و تاکنون چندین مقاله برای رشدِ آموزش ریاضی ترجمه کرده‌ام؛ از جمله مقالهٔ «شون فیلد» در زمینه «مسأله حل کردن در کلاس» همچنین کتاب هندسه فضایی المپیاد را با عنوان «مطالبی در هندسه» با همکار محترم آقای ابراهیم دارابی ترجمه کرده‌ام. متأسفانه

در ۱۰ یا ۱۲ سال گذشته به سبب ضعف بینایی، از ترجمه امساک می‌کنم.

□ **شما در آموزش ریاضی پیرو چه نظریه‌ای هستید؟**

■ پیرو که چه عرض کنم، ولی در این زمینه توضیحاتی را لازم می‌دانم:

گروهی از ریاضیدانان معتقدند که اشیای ریاضی، موجودات ذهنی انسان هستند. مثلاً، در مورد اینکه نقطه چیست؟ در ذهنمان به جای نقطه، اثر مداد یا قلم روی کاغذ فرض می‌کنیم. یعنی نقطهٔ هندسی، یک موجود ذهنی است که در عالم خارج وجود ندارد، ولی تصوری از آنچه در ذهن داریم، روی کاغذ نشان می‌دهیم. این مطلب در مورد خط نیز صدق می‌کند. مثلاً در ذهنمان به‌جای خط، تیرهای چراغ برق یا سیمهای تلفن و یا لبه‌های راست جوی و یا لبه میز در نظر می‌گیریم. یعنی خط نیز یک مخلوق ذهنی است که در جهان مادی وجود ندارد، بلکه آنچه به نام خط در هندسه فرض می‌کنیم، تصوّر ذهنی ماست.

مفهوم مجموعه نیز در ذهن خلق می‌شود و تصور و توصیفی از آن را چنین بیان می‌کنیم «دسته‌ای از اشیای دوبه‌دو متمایز» و یا در مثال می‌گوییم «مجموعهٔ ورزشی آزادی» و به کمک همین مجموعه، مفهوم عدد را آموزش می‌دهیم. وقتی مثلاً به عدد ۵ فکر می‌کنیم **جای عدد ۵، تصوری از خاصیت مشترک تمام مجموعه‌هایی که دارای ۵ عضو** هستند در نظر می‌گیریم.

در جهان خارج، پنج‌های مقیّد بسیاری هستند؛ مثل ۵ تا گنجشک، ۵ تا قلم، ۵ تا درخت، ۵ تا گل، ۵ تا گوسفند، ۵ تا اتوبوس، ... ولی شما نمی‌توانید عدد «۵» مطلق را در عالم خارج ببینید. یعنی عدد ۵ در عالم خارج وجود نداشته، بلکه وجودش در ذهن و تصور ماست. ممکن است این پرسش مطرح شود که اگر این اشیا، ذهنی است، ممکن است شیء ذهنی علی با شیء ذهنی رضا متفاوت باشد. مثلاً نقطه، خط، مجموعه یا عدد؟ با این حساب، معلم و دانش‌آموز چگونه می‌توانند با یکدیگر تبادل ذهنی انجام دهند و به یک مفهوم ریاضی مشترک برسند؟

جواب این است: همان‌طور که خداشناسی در ذات انسان وجود دارد این اشیا نیز در ذهن انسان وجود دارد. مثلاً: اعداد طبیعی در ذهن انسان وجود داشته و این ۵ که در ذهنها وجود دارد یکسان است و این یکسانی عاملی است که ایجاد تفاهم، تبادل و ارتباط و در نهایت مفهوم عدد یا شیء ریاضی دیگر می‌نماید که قابل انتقال به دیگری است.

□ **شما صحبت از اشیای ریاضی کردید ممکن است در این زمینه بیشتر توضیح دهید؟**

■ نقطه، خط، مجموعه، عدد، ... اشیای ریاضی هستند. **اشیای ریاضی، جوهر ریاضی هستند که در ذهن خلق می‌شوند و بعد شکلهایی از آنها به تصوّر درمی‌آید و یا متصوّر می‌شود.**

□ **آموزش ریاضی، چه نسبتی با این اشیای ریاضی دارد؟**

■ یادگیری ریاضی، چگونگی مطالعه تصوّر این اشیای خلق شده در ذهن و بررسی ارتباط آنهاست. و این یادگیری، مطالعه صرف یک دسته از اشیای ریاضی نیست، بلکه مطالعه رابطهٔ بین آنهاست و لذا می‌توان به جای یک دسته از اشیا، دستهٔ دیگر جایگزین نمود، به شرط آن که روابط میان آنها ثابت بماند و این خاصیت تعمیم ذهن است.

یادگیری ریاضی در ارتباط با اشیای خلق شدهٔ ذهنی و شکل دادن به آنها و اثبات احکامی دربارهٔ آنهاست، اگر احکام[۲] را ثابت نکنیم مسلماً چیزی از ریاضی را یاد نداده‌ایم. به عبارت دیگر، ذهن انسان، به قدرت خدای بزرگ، توانایی آن‌را دارد که اشیای ریاضی را خلق کند و شکل بدهد و آنچه خلق کرده، به‌تصور در بیاورد و تعمیم بدهد و میان آنها ارتباط برقرار کند و حکمی بسازد و سپس این حکم را ثابت کند و همین‌طور جلو برود، ... و آموزش کوشش دارد که بین این مخلوقات ذهنی و تصور آنها و ارتباط منطقی برقرار شده، ایجاد نظم کند و ارتباط‌ها را روشن ساخته، به مطالعهٔ ویژگیهای آنها بپردازد و هر چه این ارتباط با تصوّر و توصیف روشنتری ارائه گردد، آموزش آسانتر صورت می‌گیرد و تا آنجا پیش می‌رود که:

هر شیوهٔ منطقی خلق ذهنی اشیا را می‌توان متصوّر ساخت و ارتباط آنها را مطالعه کرد و احکام مربوط را با شیوه‌ای مستند و استدلالی اثبات نمود و ادامه داد... و از آنجا یک شاخه ریاضی را به‌وجود آورد و این مطالب را با همان مراحلی که پیموده شده و شکل گرفته آموزش داد.

□ **پس شیوهٔ «شهودی ــ تجربی» چیست؟**

■ در مقابل نظریه‌ای که اشاره شد گروهی نیز به شیوهٔ «شهودی‌ــ تجربی» اعتقاد دارند. بدین معنا که تأکید بر مشاهده، عمل، ارتباط و تعمیم دارند و یا به عبارت دیگر؛ همیشه در جستجوی واقعیت هستند. مثلاً در پی احکامی از این قبیل که «کوه هیمالیا بلند است»، «آب رودخانه روان است»، «زغال سیاه است» و ...

از نظر شهودی ــ تجربی یک حکم وقتی درست است که با واقعیت تطبیق داشته باشد و این با آنچه در پیش از این آمده قدری در ستیز و مجادله است.

□ **تا چه حد می‌توان در ارتباط بین تصورات اشیای ریاضی خلق شده در ذهن و تطبیق آن با واقعیت جلو رفت؟ و یا چگونه می‌توان از شهود و تجربه به تجرید رسید؟**

■ جواب، قابل تأمل است. عده‌ای معتقدند که این ارتباط، مربوط به ظرافت کار معلّم در کلاس و تجربهٔ عملی او با دانش‌آموزان است. بدین معنا که معلم با توجه به شرایط موجود کلاس خود (بویژه در دبیرستان) و توجه به هر دو مطلب، کوشش کند به آسانی دانش ریاضی را به بچه‌ها انتقال بدهد و هر روز در نحوهٔ این انتقال و پیشرفت کار خود مطالعه کند و خود بهترین روش انتقال را برای کلاس خویش تجربه و کشف کند. هر جا یک روش موجب پیشرفت می‌شود از آن استفاده کند و هر جا روش دیگری کارایی بیشتری دارد، از آن استفاده نماید. البته آموزگاران دوره ابتدایی و راهنمایی در این زمینه نیاز به راهنمایی و ارشاد بیشتری دارند.

تأکید بر تجربهٔ تنها، دانش‌آموز را از درک جوهر ریاضی باز می‌دارد و تأکید بر تجرید نیز ممکن است انتقال دانش را مشکل سازد.

نظریه‌های آموزش ریاضی نیز مبتنی بر تجربه و تأکید بر کار معلم در کلاس دارد. **کارشناسان آموزش ریاضی، همیشه به آنچه در این زمینه ارائه می‌دهند، اضافه می‌کنند (در دبیرستان و دانشگاه) که؛ این شیوه آموزش در شرایط و تجربهٔ کلاس درس ما می‌گنجد و کارایی دارد و توصیه می‌کنند که شما هم برای کلاس خود تجربه کنید، نه بپذیرید.** (در دبیرستان).

□ **نظر شما در مورد بحثهای روز که «کتابها محتوا محور است» چیست؟**

■ متأسفانه به علّت عدم وجود کار تحقیق و قرار نگرفتن افراد در جریان به روز جهان، وقتی مطلبی به دست ما می‌رسد یا به گوش ما می‌خورد و یا به ذهن ما می‌رسد یا در کتابی می‌بینیم، با وجودی که مطلب تازه هم نیست، خیلی زود شیفته و فریفته آن می‌شویم و تصمیم به پیاده کردن آن در آموزش کشور می‌کنیم. بدون آن‌که تأمل کنیم که ما در کجا هستیم؟ جایگاه ما در آموزش کدام است؟ سنت آموزشی ما چیست؟ تجربهٔ کار پیشینیان در این زمینه چه بوده است؟ شرایط کلاسها چگونه است؟ جوّ آموزش کشور چیست؟ شرایط معلمین کدام است؟ یا در اجرا چه می‌گذرد؟ و و و... مثلاً همان‌طورکه اشاره شد، اِعمال روانشناسی و روانکاوی در محتوای کتابها، بحث داغ روز عده‌ای است. به‌عبارت دیگر؛ شعار این است که :

«**کتابهای فعلی محتوا محورند» یعنی بیشتر به ارائه خود علم توجه کرده‌اند و به شیوهٔ آموزش ــ ظاهراً ــ توجه نشده است.**

این بحث، ظاهر قشنگی دارد، ولی عمل کردن به آن از یک‌طرف نیاز به تحقیق و تأمل فراوان دارد و از همه مهمتر نیازمند زمان است تا به‌تدریج جا بیفتد. در سالهای ۴۲ ــ ۱۳۳۶ طرح دکتر مهران وزیر آموزش و پرورش وقت در مدارس اجرا شد. کار گروهی در کلاس و حذف امتحانات سالهای ۱ تا ۴ ابتدایی ۱۰ سال بعد، سروصدای مردم از بیسوادی بچه‌ها بلند شد و مجبور شدند به سنّت برگردند.

از سوی دیگر، عنوان کردن این بحثها این مطلب را در ذهن متبادر می‌سازد که آیا قبلاً روانشناسی یادگیری، روانشناسی بلوغ، فن آموزش، فلسفه و اصول یادگیری، تاریخ آموزش و... وجود نداشته است؟

آیا نظریات *ارسطو*، *روسو*، *اسپنسر*، *جان دیویی*، *پیاژه* تازه به ایران وارد شده است؟ در حالی‌که همه می‌دانند که از ۵۰ سال پیش، *دکتر محمدباقر هوشیار*، *دکتر علی‌اکبر سیاسی*، *دکتر عیسیٰ صدیق*، *دکتر مهدی جلالی* و دیگران این مطالب را به دانش‌آموزان دانشسراها و دانشجویان تربیت معلم و سایر دانشجویان آموزش می‌دادند و مؤلفان کتابهای امروزی، در هر رشته درسی، پیش از این با این مطالب آشنایی داشته و کار کرده‌اند. از همه مهمتر، سالها

تجربه تدریس و کار در کلاس دارند، با دبیران ریاضی کشور در تماس مستقیم کلاسی هستند و بعد از سالیان دراز تدریس و کلاسداری، دست به تألیف زده‌اند.

□ شما تا چه حد و تا کجا بحث «محتوا محوری» را قبول دارید؟

■ به نظر من، بحث محتوا محوری و یا اعمال روش و روانشناسی آموزشی در کتابها، بیشتر تأکید روی کتابهای دوره ابتدایی و یا راهنمایی دارد. دلیل آن هم این است که در سطح بین‌المللی، روی آموزش ریاضی و شیوه‌ها در دورهٔ ابتدایی پژوهش بیشتری شده و کتابهای فراوانی تألیف شده است. و هنوز هم هر ماه، کتابهای تازه‌ای در این زمینه منتشر می‌شود، ولی روی آموزش ریاضی در دبیرستان ــ در دنیا ــ محدود کار شده است. حتی در دورهٔ راهنمایی! *پولیا* و یکی دو تا از شاگردان او مثل *شون فیلد*، *آلن اسمیت* در این زمینه کار کرده‌اند و شیوه‌هایی در آموزش و حل مسأله توصیه کرده‌اند بقیه مثل سرژلانگ، کار تجربی فرد یا افرادی در کلاس است که به خواننده توصیه می‌کند که این روشها در کلاس من یا ما موفق بوده، شما هم در کلاسهای خود تجربه کنید.

□ قرار شد شما از خاطراتتان هم صحبت کنید. برای تنوع، شاید در اینجا مناسب باشد.

■ خاطره‌ای از *استاد* بیرشک دارم. وقتی کتابهای هندسهٔ دبیرستان در سالهای ۵۳ ــ ۱۳۵۰ در دست تألیف بود، همکار آقای بیرشک اصرار داشت که از علایم تازه به دبیرستان وارد شده ؛مثل $\in, \subset, \cap, \cup, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \vee, \wedge$ نیز در هندسه استفاده شود تا چهرهٔ هندسه نیز نو گردد، ولی آقای بیرشک چندان موافق نبود و این ضرب‌المثل را ذکر می‌کرد:

به طرف گفتند: «از سر بام نیفتی»، او آن‌قدر عقب عقب رفت تا از آن سوی بام بر زمین افتاد.

حال امیدواریم با شعار «محتوا محوری» و «آموزش ریاضی» از این طرف بام نیفتیم.

□ به نظر شما، شیوهٔ کار در برنامه‌ریزی و تألیف باید چگونه باشد؟

■ به نظر کارشناسان برنامه‌ریزی، در تجدیدنظر در برنامه و کتابها لازم است رعایت اصولی بنماییم. مثلاً هرگاه خواسته باشیم ایده یا مطلب تازه‌ای را وارد آموزش کنیم ــ چه محتوا و چه شیوه ــ این کار باید «**تدریجی**» صورت گیرد، نه «جهشی». این تغییرات را بین ۱۵ تا ۲۰ درصد ذکر می‌کنند، تا بدون پیشینه و سابقهٔ ذهنی و بی‌مقدمه به ثبات آموزشی کشور لطمه وارد نکند (اگر به این مطلب اعتقاد داشته باشیم) و عده‌ای از دبیران خوب و ورزیده، یکباره خلع سلاح نشوند. چون دبیران با تجربه و موفق، به این سادگی به این تغییرات اعتقاد پیدا نمی‌کنند و قانع هم نمی‌شوند، لذا برخلاف میل و علاقه‌شان بعد از سالها تدریس و تجربه مفید و بازدهی خوب، دست از تدریس می‌کشند و کار به‌دست افراد بی‌تجربه می‌افتد ؛ که نتیجه آن مسلماً پایین آمدن کیفیت کار خواهد بود و همیشه ضررکننده اصلی در این تغییرات بی‌حساب و کتاب دانش‌آموزان بوده‌اند. حال آن که هدف ما استفاده از یک فکر نو جهت اعتلای علمی دانش‌آموزان بوده است.

□ به نظر شما برنامه‌ریزی یک مادّهٔ درسی در دورهٔ ۴ سالهٔ دبیرستان به چه صورت باید انجام گیرد؟

■ در برنامه‌ریزی یک مادّهٔ درسی دبیرستان، باید نخست دید که در دنیا چه می‌گذرد، به عبارت دیگر، یک مطالعهٔ تطبیقی بین‌المللی و بررسی همه جانبه در برنامهٔ آن درس در سطح جهان صورت گیرد بعد، باید برنامه و مطالب کتابهایی که تدریس می‌شود، دقیقاً ارزشیابی شود و قوت و ضعف کتابها و برنامه‌ها مشخص شود و در این کار به روایت چند نفر بسنده نکنیم، بلکه ارزشیابی علمی انجام بدهیم. دیگر آن که ؛ جوّ آموزشی کشور، شرایط دبیران، کلاسها و اجرا را مورد مطالعه قرار دهیم. آنگاه با توجه به نسبت و نیاز کشور، برنامهٔ دورهٔ ۴ ساله، یکپارچه و یکجا تهیه گردد. در هر قسمت، شیوهٔ آموزش و سقف بالا و پایین را تعیین کنیم. به عبارت دیگر ؛ ریز برنامه ابهام‌آمیز نباشد تا هر مؤلفی از آن برداشتی نماید، سپس این برنامه تنظیمی به نظرخواهی گذاشته شده، در مجلّه‌های ریاضی و یکی دو روزنامهٔ کثیرالانتشار چاپ و از خوانندگان درخواست شود که نظرات و انتقادات خود را ارسال دارند. پس از دریافت نظرات، اگر لازم بود یک بازنگری در برنامهٔ تنظیم شده انجام دهیم. سپس کل برنامه را در قالب زمان بریزیم، یعنی به ۴ (نظام سالی) یا ۸ قسمت

(نظام ترمی) کنیم. **از نظر اصول برنامه‌ریزی، این منطقی به‌نظر نمی‌رسد که ــ به ملاحظاتی یا با شعارهایی ــ یک مادهٔ درسی دبیرستان، در چند قسمت (مثلاً $\frac{1}{16}$ برنامه) تنظیم و تألیف گردد.** دربارهٔ شرایط تألیف نیز بنده با استفاده از بیست‌وچند سال برنامه‌ریزی و تألیف، یک سخنرانی در این زمینه در کنفرانس آموزش ریاضی کرمانشاه ایراد کردم که علاقه‌مندان می‌توانند به کتاب انتشار مقالات آن کنفرانس مراجعه کنند.

□ **نظرتان راجع به ریاضی دورهٔ راهنمایی چیست؟**

■ من در زمینهٔ ریاضیات دورهٔ راهنمایی، در اولین کنفرانس ریاضی آموزش اصفهان به‌طور مفصل سخنرانی کردم، که در کتاب مقالات کنفرانس چاپ شده است. امّا از نامه‌هایی که به دفتر می‌رسند و همچنین در تماس با دبیران راهنمایی، در گردهمایی‌های دورهٔ راهنمایی، چنین استنباط می‌شود که قسمتهای «کار در کلاس» با همهٔ محاسن خود، در دورهٔ راهنمایی موفق نبوده است. دبیران، اغلب به علت فرصت محدود کلاس مخصوصاً در سالهای اخیر که ساعات تدریس هفتگی ریاضی در سالهای دوم و سوم به ۴ ساعت در هفته تقلیل پیدا کرده است، امتحان ثلث که باید در محدودهٔ زمانی $\frac{1}{3}$ حجم کتاب تدریس شود، به قسمتهای کار در کلاس به دیدهٔ «تمرینات» نگریسته و از دانش‌آموز می‌خواهند که آنها را در خانه حل کند یا معلّم، خود ــ مثل سایر تمرینات ــ آنها را پای تخته حل می‌کند.

لذا کتاب به هدف آموزشی این قسمت که مشارکت دانش‌آموز در درس است، به علت فراهم نبودن شرایط به اجرا نرسیده است.

در کشورهای خارج، معلّم از اوّل برای آموزش چنین شیوه‌ای تربیت می‌شود و دانش‌آموز از همان سال اول تحصیل با این شیوه کار می‌کند و در درس مشارکت می‌کند. در نتیجه، هم دبیر و هم دانش‌آموز از آغاز تحصیل قدم‌به‌قدم با شیوهٔ کار آشنایی دارند. در آنجا محدودیتهای کلاسهای ما و یا امتحانات و یا مشکلات دیگری را که در اجرا بازدارنده است، ندارند.

ولی در کشوری که دانش‌آموز از آغاز تحصیل خود، با این شیوه کار نکرده و با این شیوه آشنا نیست و اعتقادی هم ــ به دلایل شرایط موجود کلاس ــ به آن ندارد، عنوان نمودن این‌گونه مطالب ــ بی‌هیچ سابقهٔ ذهنی ــ در کتابهای یک مقطع تحصیلی، مسلماً مشکلاتی داشته و در نتیجه سالها اُفت علمی به دنبال خواهد داشت تا جا بیفتد. همان‌طورکه قبلاً عرض شد، ایده‌های جدید و نو را باید به‌تدریج و در طول تعویض چند برنامه جایگزین کرد تا رفته رفته در فرهنگ آموزش ما جا پیدا کند و معلّم، دانش‌آموز، خانواده، رئیس و معاون مدرسه به آن شیوه اعتقاد پیدا کنند و برای اجرای آن کوشش نمایند. مخصوصاً در تغییر شیوه‌ها باید از مراکز تربیت معلم شروع کرد و معلم و دبیر را با روش جدید تربیت کرد و شرایط اجرا را هم فراهم آورد. وگرنه دو هزار سال پیش، افلاطون گفته است که آموزگار در کلاس نقش قابله را دارد و نقش اوّل با دانش‌آموزان است **یعنی این دانش‌آموز است که باید محور اصلی کار و فعالیت در کلاس باشد**، ولی همهٔ ما که درس خواندیم و پایان‌نامه گرفتیم، هیچ‌وقت اثری از حرف افلاطون را در کلاسها ندیدیم!

◇ادامه در شمارهٔ آینده

۱ــ $ICME_5$

۲ــ پیاژه معتقد است که بچه‌های یازده ساله (اول راهنمایی) می‌توانند مجرد بیندیشند و استدلال کنند و به آنچه پیش‌رو دارند و می‌بینند و تجربه می‌کنند قانع نشوند.

یک آلگوریتم برای حل معادلهٔ درجه ۳ [۱]

●علی عمیدی

این مقاله ترجمه‌ای است از مجلهٔ:

The mathematical gazette july 1995

این مقاله روش پیدا کردن ریشهٔ حقیقی برای یک معادله درجه «۳» را با استفاده از ریاضیات پیشرفته ارائه می‌دهد.

معادلهٔ $ax^3+bx^2+cx+d=0$ که در آن $a \neq 0$ در نظر بگیرید، با تقسیم دو طرف این تساوی بر a داریم:

$$X^3+\frac{b}{a}X^2+\frac{c}{a}X+\frac{d}{a}=0$$

که در آن

$$\begin{cases} \frac{b}{a}=P \\ \frac{c}{a}=Q \\ \frac{d}{a}=R \end{cases}$$

$$X^3+PX^2+QX+R=0$$

$$(X+\frac{P}{3})^3=\frac{P^2}{3}X+\frac{P^3}{27}-QX-R$$

طرفین را مکعب کامل می‌کنیم:

$$(X+\frac{P}{3})^3=(\frac{P^2}{3}-Q)X+(\frac{P^3}{27}-R)$$

با قرار دادن $K_1=\frac{P^2}{3}-Q$ و $K_2=\frac{P^3}{27}-R$ نتیجه می‌شود:

$$X+\frac{P}{3}=(K_1X+K_2)^{\frac{1}{3}}$$

حال λ و μ را طوری می‌یابیم که:

$$(K_1X+K_2)^{\frac{1}{3}}=\lambda^{\frac{1}{3}}+\mu^{\frac{1}{3}} \qquad (۱)$$

امّا

$$X+\frac{P}{3}=\lambda^{\frac{1}{3}}+\mu^{\frac{1}{3}} \qquad (۲)$$

رابطه (۱) را به‌توان ۳ می‌رسانیم:

$$K_1X+K_2=\lambda+\mu+3(\lambda\mu)^{\frac{1}{3}}(\lambda^{\frac{1}{3}}+\mu^{\frac{1}{3}}) \qquad (۳)$$

X را از رابطه (۲) پیدا کرده در رابطه (۳) قرار می‌دهیم:

$$K_1X+K_2=K_2-K_1\frac{P}{3}+K_1(\lambda^{\frac{1}{3}}+\mu^{\frac{1}{3}})$$

از مقایسه روابط (۳) و (۴) داریم:

$\lambda+\mu=K_2-K_1\frac{P}{3}$ و $\lambda\mu=K_1^3/27$

حال $K_3=K_2-K_1P/3$ و $K_4=K_1^3/27$ انتخاب می‌کنیم.

بنابراین λ و μ ریشه‌های معادلهٔ $Z^2-K_3Z+K_4=0$ می‌باشند به طوری که: $\lambda+\mu=K_3$ و $\lambda\mu=K_4$

دو حالت در نظر می‌گیریم: حالت اوّل را $K_3^2-4K_4 \geq 0$ وحالت دوّم $K_3^2-4K_4<0$ بگیریم، در حالت اوّل خواهیم داشت:

$$\mu=\frac{K_3-\sqrt{K_3^2-4K_4}}{2} \text{ و } \lambda=\frac{K_3+\sqrt{K_3^2-4K_4}}{2}$$

اما با در نظر گرفتن $K_5=\lambda^{\frac{1}{3}}$ و $K_6=\mu^{\frac{1}{3}}$ و با استفاده از رابطه «۲» داریم: $X=K_5+K_6-\frac{P}{3}$

در حالت دوم: $D=\sqrt{4K_4-K_3^2}$ می‌گیریم. پس $\lambda=\frac{1}{2}(K_3+Di)$ و $\mu=\frac{1}{2}(K_3-Di)$ اعداد مختلط هستند و

$$\lambda^{\frac{1}{3}}+\mu^{\frac{1}{3}}=((K_3+Di)/2)^{\frac{1}{3}}+((K_3+Di)/2)^{\frac{1}{3}}$$

حال با استفاده از مدل فرم قدرمطلق ـ فاز برای اعداد مختلط داریم:

$$\lambda^{\frac{1}{3}} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

همچنین داریم:

$$\lambda = (K_3 + Di)/2 = r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$$

و

$$\mu = (K_3 - Di)/2 = r^3(\cos 3\theta - i\sin 3\theta)$$

بنابراین:

$$\mu^{\frac{1}{3}} = ((K_3 - Di)/2)^{\frac{1}{3}} = r(\cos\theta - i\sin\theta)$$

از این رو $\lambda^{\frac{1}{3}} + \mu^{\frac{1}{3}} = 2r\cos\theta$ که در آن $r^6 = (K_3^2 + D^2)/4 = K_4$ و $tg3\theta = \frac{D}{K_3}$ اما $K_4 = \frac{K_1^3}{27}$

بنابراین $r = \sqrt{K_1/3}$ اگر $K_3 > 0$ باشد خواهیم داشت:

$$(7)X = 2\sqrt{(K_1/3)}\cos(\frac{1}{3}\mathrm{arctg}\, D/K_3) - P/3$$

اگر $K_3 < 0$ باشد داریم:

$$(8)X = 2\sqrt{(K_1/3)}\cos(\frac{1}{3}(\frac{\pi}{2} + \mathrm{arctg}\, D/K_3)) - P/3$$

حال $\frac{1}{3}\mathrm{arctg}\, D/K_3$ را جانشین $\frac{1}{3}(\frac{\pi}{2} + \mathrm{arctg}\, D/K_3)$ می‌کنیم؛ زیرا قسمت حقیقی[2] اعداد مختلط کمتر از «۰» است یا با به کار بردن $D/K_3 \pm \pi$ جوابهای دیگری نتیجه می‌شود.

اگر $K_3 = 0$ باشد نتیجه می‌شود $\mathrm{arctg}\, D/K_3 = \frac{\pi}{2}$

بنابراین: $X = 2\sqrt{(K_1/3)}.\sqrt{3}/2 - P/3$ و یا

$$X = \sqrt{K_1} - P/3$$

مسأله‌ای که باید به آن توجه داشت، این است که در حالت دوّم $K_1 < 0$ باشد. در این صورت ریشهٔ موهومی بدست می‌آید و این غیر ممکن است، زیرا اگر $K_1 < 0$ باشد، آنگاه $K_4 < 0$ و $K_3^2 - 4K_4 > 0$ خواهد بود. بنابراین باید حالت اول که در آن این امکان وجود ندارد را بررسی کرد.

مثال (۱): $X^3 + 3X^2 + X - 3 = 0$

که در آن $K_3^2 - 4K_4 > 0$ ، $K_4 = 8/27$ ؛ $K_3 = 2$ ؛

$K_1 = 2$ ؛ $K_2 = 4$

با استفاده از روابط (۵) و (۶) داریم: $X \simeq 0/7692293$

امتحان: $X^3 + 3X^2 + X - 3 \simeq 0$

مثال(۲):

$$10X^3 - 30X^2 + 20X - 1 = 0$$

$$K_1 = 1;\ K_2 = \frac{-9}{10};\ K_3 = \frac{1}{10};\ K_4 = \frac{1}{27}$$

که در آن $\begin{cases} D^2 < 0 \\ K_3 > 0 \end{cases}$ ، با استفاده از رابطه (۷) داریم:

$$X = 2/0468805$$

امتحان: $10X^3 - 3X^2 + 20X - 1 = 3 \times 10^{-10}$

مثال (۳): $X^3 + 3X^2 - X - 1 = 0$

$$K_1 = 4;\ K_2 = 2;\ K_3 = -2;\ K_4 = \frac{64}{27}$$

که در آن $\begin{cases} D^2 < 0 \\ K_3 < 0 \end{cases}$ با استفاده از رابطه (۸) داریم:

$$X = 0/6751308$$

امتحان: $X^3 + 3X^2 - X - 1 \approx 0$

مثال (۴):

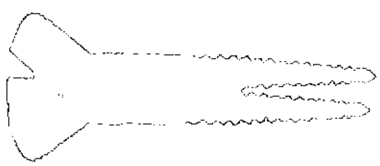
$$9X^3 + 9X^2 - 7X - 3 = 0 \Rightarrow X^3 + X^2 - \frac{7}{9}X - \frac{1}{3} = 0$$

$$K_1 = \frac{10}{9};\ K_2 = \frac{10}{27};\ K_3 = 0;\ K_4 = \frac{1000}{27}$$

که در آن $\begin{cases} D_2 < 0 \\ K_3 = 0 \end{cases}$ با استفاده از رابطهٔ (۹) خواهیم داشت:

$$X = 0/7207592$$

امتحان: $9X^3 + 9X^2 - 7X - 3 \approx -1/7 \times 10^{-10}$



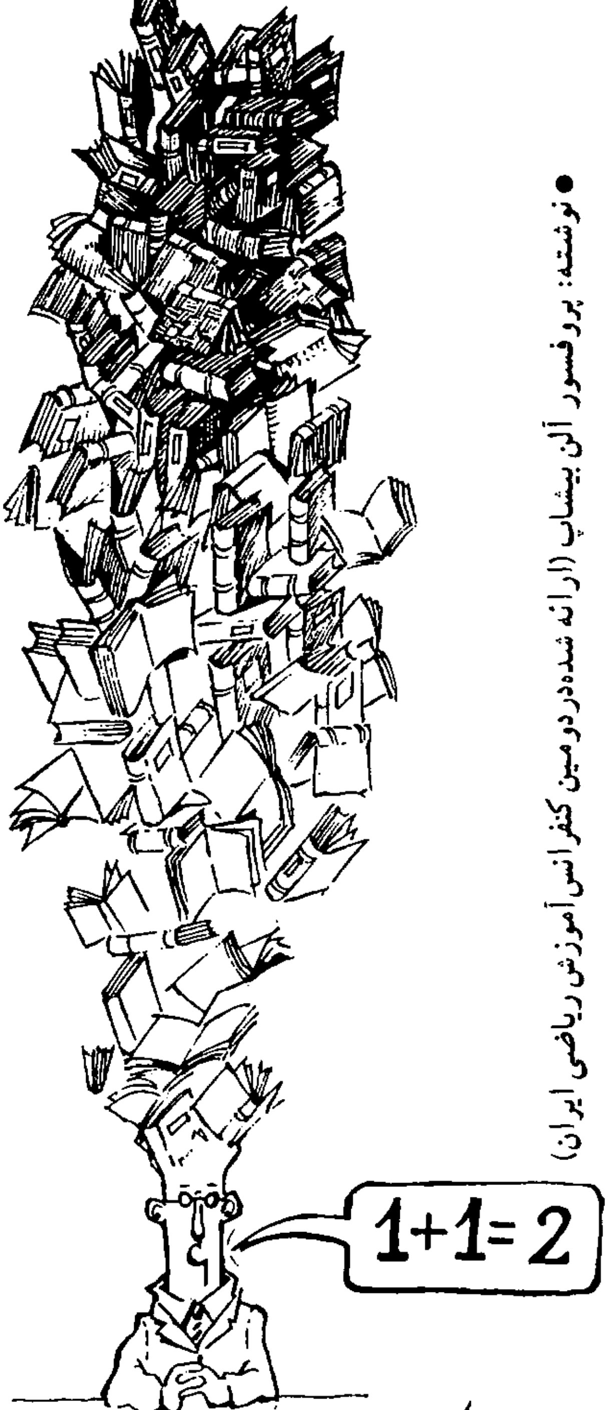
1) An algoritm for solving cubic equations

2 Real part

رابطه بین آموزش ریاضی و فرهنگ

● نوشتهٔ: پروفسور آلن بیشاپ (ارائه شده در دومین کنفرانس آموزش ریاضی ایران)

● ترجمه: پرویز امینی



مقدمه ــ چالش آموزش ریاضیات معنادار

یکی از موضوعات مهم در جوامع پیشرفته که آموزش آن مشکل به‌نظر می‌رسد، ریاضیات است. ریاضیات موضوعی است که خود را به شدت انتزاعی نشان می‌دهد، به‌طوری که کودکان هیچ‌گونه ارتباط منطقی با دنیای واقعی بیرون کلاس برقرار نمی‌کنند و به همین علت آن را بی‌معنا و بیهوده می‌پندارند. درنتیجه، کودکان در سراسر جهان خود را در رشته‌های ریاضی مغلوب می‌دانند، و حتی والدین آنان نیز ریاضیات را درک نمی‌کنند و معلمینشان ریاضیات را موضوعی سخت برای درک و فهم قلمداد می‌کنند.

اگر امروز به مردم بگویم، من به آموزگاران کودکان شما ریاضی آموزش می‌دهم، آنان تصوّر بدی درباره من خواهند داشت و به من به مانند یک موجود عجیب نگاه خواهند کرد. اگر بگویم، من از ریاضیات لذّت می‌برم، مردم فکر می‌کنند، من دیوانه شده‌ام و اگر بگویم من آماده هستم آنان را به ریاضیات علاقه‌مند کنم، مردم به حرفهای من گوش نخواهند کرد و حرفهایم را باور نمی‌کنند! نیمی از مردم از ریاضیات رنج می‌برند و آن را نوعی شکنجهٔ روحی می‌دانند! حتماً فکر خواهید کرد که آنان مایل هستند از برنامه آموزشی ریاضیات خلاصی پیدا کنند، امّا این‌طور نیست، آنان ریاضیات را خیلی مهم می‌دانند و همهٔ کودکان مدرسه‌ای باید آن را مطالعه کنند، حتی اگر از آن خوششان نیاید، چرا که ریاضیات برای آنان مفید است!

البته، همه به اهمیت مطالعه ریاضیات واقف هستیم و ما به‌عنوان آموزشگر باید مسئولیت یافتن روشهای حل این بی‌علاقگی را پذیرا باشیم. باید به برنامه دوره‌های تحصیلی، آموزش، مواد آموزشی و روشهای مناسب کارآموزی جهت اصلاح و بهبود آموزش ریاضی نگاه عمیق‌تری بیندازیم. آموزگاران ریاضی، کارآموزان، برنامه‌ریزان آموزشی، نویسندگان کتابهای درسی و دیگر کسانی که در آموزش ریاضی قدم برمی‌دارند در جرگهٔ آموزشگران ریاضی[1] قرار می‌گیرند و با توجه به دشواری مسئولیت‌شان در جوامع پیچیده، تقاضاهای زیادی نیز برای تدریس ریاضیات به کودکان به آنان پیشنهاد می‌شود. تمایل به فراگیری و آموزش مفاهیم ریاضی به‌طور بغرنجی درحال افزایش است، بنابراین در راستای این چالش‌ها، هدایت آموزشگران ریاضی در سراسر دنیا به مقداری بررسی و تحقیقات جدید نیاز دارد.

در صحبتهای امروز، اندیشه‌های جدیدی که در طول بیست و پنج سال گذشته انجام گرفته است را به شما معرفی خواهم کرد. من این بیست و پنج سال را در یک چشم به هم زدن نسبت به تاریخ غرورآفرین ایران مجسم می‌کنم و با تعمق می‌گویم که درحال حاضر نیز به مانند گذشته می‌توانیم آموزش معنادار ریاضی را به کودکانمان ارائه دهیم. این اندیشه‌ها از رشد «ابعاد اجتماعی[۲]» آموزش ریاضی نشأت می‌گیرد. (بیشاپ ۱۹۹۳)

این بعد تحقیقات را به دوره‌های مختلف هدایت می‌کند، که مهمترین آنها عبارتند از :

● دوره انفرادی[۳]، مربوط به یادگیرندگان انفرادی ریاضی است که هم به داخل کلاس و هم به خارج کلاس مربوط می‌گردد.

● دورهٔ پرورشی[۴]، به بسیاری از تقابلهای اجتماعی که در کلاس ریاضی به‌وجود می‌آید مربوط می‌گردد.

● دورهٔ رسمی[۵]، به هنجارهای اجتماعی و تقابلهای بین مدارسی که در آموزش ریاضی در کلاسهای درس اثر می‌گذارد، مربوط می‌گردد.

● دورهٔ اجتماعی[۶]، به روابط بین آموزش ریاضی و مؤسسات آموزشی در یک جامع گسترده مربوط می‌گردد.

● دورهٔ فرهنگی[۷]، به روابط بین آموزش ریاضی و فرهنگی با زمینه تاریخی هر اجتماع مربوط می‌گردد.

در این گفتگو مایلم به آخرین دوره و نتایج تحقیقات این دوره اشاره‌ای داشته باشم. صحبت اینجانب پیرامون اندیشه جدید «ریاضیات قومی[۸]» که آموزشگران ریاضی باید درباره بعضی از این اندیشه‌های مهم تعمق کنند، خلاصه می‌گردد :

● رویارویی‌های انسانی[۹]. ریاضیات قومی به فعالیتهای ریاضی در اجتماع که بیشتر به بیرون مدرسه محدود می‌گردد، مربوط می‌شود. ریاضیات قومی به نقشهایی که مردم به غیر از آموزگاران و یادگیرندگان بر آموزش ریاضی دارند توجه به‌سزایی دارد.

● مردم و ارزشها. ریاضیات قومی در شناسایی فعالیتهای ریاضی که شامل ارزشها، باورها و انتخاب‌های شخصی می‌شود، مفید است.

● رویارویی بین ریاضیات و زبان. زبان انتقال‌دهنده اصلی اندیشه‌های ریاضی است.

● تاریخ ریاضیات. دیدگاه فرهنگی در ریاضیات، توجه ما را به تاریخ ریاضیات و رشد اندیشه‌های ریاضی در جوامع مختلف برمی‌انگیزد.

● ریشه های فرهنگی[۱۰]. ریاضیات قومی ما را با بسیاری از دانستنیهای فرهنگی و اجتماعی که نقطه شروع رشد ریاضی بوده است، آشنا می‌کند.

سه رویکرد پژوهشی که در حوزهٔ ریاضیات قومی جا می‌گیرد و باید به‌صورت یک کل به آن اندیشید، عبارت است از : ریاضیات در جوامع سنتی، تاریخ ریاضیات و دانش ریاضی کودکان خارج از مدرسه. اگرچه بنده در این‌جا برای شرح، بررسی و تجزیه و تحلیل آنها را جداگانه بررسی می‌کنم امّا عده‌ای از پژوهشگران و جامعه‌شناسان هیچ شکافی بین آنها نمی‌بینند.

ریاضیات در جوامع سنتی[۱۱]

تحقیقات انجام شده، شکلهایی از دانش ریاضی در جوامع ابتدایی را نشان می‌دهد. (جوامع سنّتی به جامعه‌هایی گفته می‌شود که روابط ساده و بی‌تکلف دارند و از پیشرفتهای جدید تکنولوژی مبرّا هستند). دانش ریاضی فنی به‌وسیلهٔ پژوهشگران در کاوشهای انسان‌شناسی در گینه‌نو (*الین* ۱۹۹۳)، موزامبیک (جروس ۱۹۹۵)، مردم موری در زلاندنو (*بارتن و فیرهال* ۱۹۹۵)، بومیان استرالیایی (کوک ۱۹۹۰) و ناواجوها در آمریکای شمالی (پینکستن ۱۹۸۳) به‌دست آمده است.

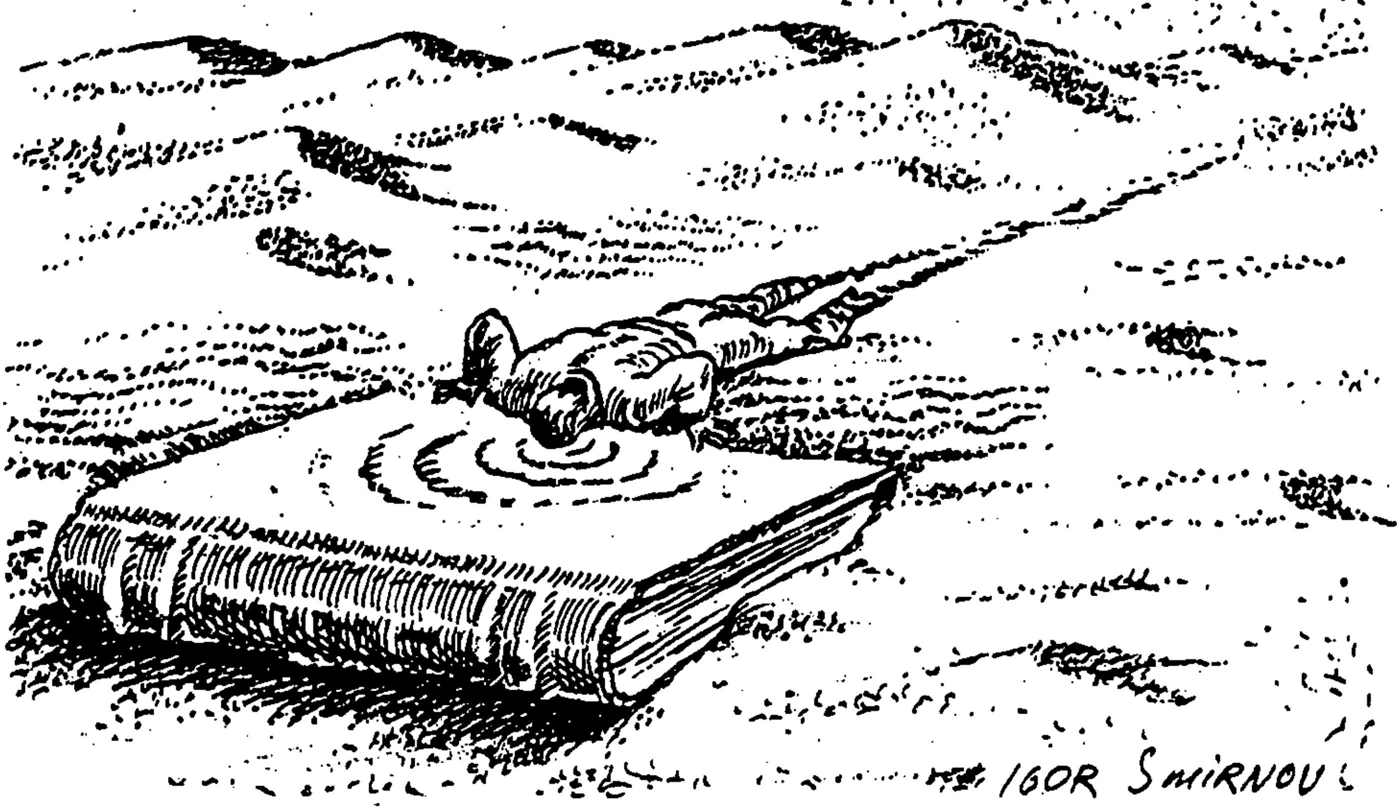
این پژوهش‌ها در تحقیق *جروس* (۱۹۹۶) و *بارتن* (۱۹۹۶) به‌دست آمده است. برای مثال، آیا می‌دانید که : بیش از دو هزار دستگاه عددنویسی در گینه‌نو و اقیانوسیه وجود دارد؟ (عده‌ای بر مبنای ۵ و عده‌ای دیگر نیز بر مبنای ۲ استفاده می‌کنند.) دستگاه‌های عددنویسی که نام عدد، نام قسمتی از بدن باشد نیز وجود دارد (شمارش انگشتی).

ـ روشهای مختلفی در جمع، تفریق، ضرب و تقسیم وجود دارد که هنوز هم به‌کار می‌رود.

ـ روشهای متفاوتی در پیدا کردن مساحت مستطیل است. یکی از این روشها که کشاورزان برزیلی برای به‌دست آوردن مساحت زمین خود به‌کار می‌برند، با پیدا کردن اندازه‌های متوسط (میانگین) اضلاع مخالف و ضربدر اندازه متوسط اضلاع دیگر به‌دست می‌آید.

ـ بازیها، معماها و ورزشهای متنوع که ارتباط ریاضی را در بین انسانها بیان می‌کند، فراوان یافت می‌شود.

ـ دورودگران، دریانوردان، ماهیگیران و ملوانان از دانش و



مهارت ریاضی متنوعی برخوردار هستند.

مطالعه گلندون لین (۱۹۹۵) درباره دستگاه عددنویسی بومیان گینه‌نو و اقیانوسیه نمونه‌ای از این تحقیق است.او با استفاده از تحقیق میدانی، مصاحبه‌های ضبط شده، اطلاعات جنبی و پرسشنامه‌هایی که به‌وسیله معلمین و دانش‌آموزان در دانشگاهها و مدارس کامل شدند، در حدود دو هزار دستگاه عددنویسی را به ثبت رساند. این دستگاههای عددنویسی را براساس ملاک سالزمن (۱۹۵۰) طبقه‌بندی کرد و افسانه‌ای ۱ـ۲ که انسانهای نخستین به آن معتقد بودند را نقض کرد و یادآوری کرد که «به زبان خاصی برنخوردم که فقط از رقمهای ۱ و ۲ برای شمارش دقیق استفاده شود و بر ۲ ختم شود.» البته این تعداد زیادی دستگاه عددنویسی بر مبنای ۲ (دستگاه عددنویسی که فقط از رقمهای ۱ و ۲ استفاده می‌شد) یافت امّا در همه موارد یافت شده، رقمهای بزرگتر نیز با ترکیب‌های متفاوتی از ۲ و ۱ دیده می‌شد. در گینهٔ نو و اقیانوسیه دستگاه عددنویسی بر مبنای (۲۰ و ۵) نیز رواج داشت و رقمهای یک تا پنج با نامهای دو دست و دو پا در شمارش‌های بالاتر (بالاتر از ۲۰) ترکیب و مورد استفاده قرار می‌گرفت. این دستگاه عددنویسی متفاوت از دستگاه عددنویسی که براساس اندام بدن تنظیم می‌شده است، رواج داشته است. چندین دستگاه عددنویسی دیگر نیز بر مبناهای ۴، ۵، ۶ و ۱۰ مورد استفاده قرار می‌گرفته است. حوزه این تحقیق قابل بسط در هر زمانی است و به مانند اطلاعات دیگر در ایجاد علاقه مؤثر بوده و ابزاری مفید برای حفظ ارزشهای فرهنگی نسبت به آموزش ریاضی وارداتی خواهد بود.

تاریخ ریاضیات

دومین پژوهش در ریاضیات بومی، از تحقیقات تاریخی حاصل می‌شود که بیش از اندازه به آن پرداخته شده و آموزشگران به اندازه کافی با آن آشنا هستند. درحال حاضر، فعالیتهای انجمن پژوهش تاریخی، جمع‌آوری اسناد تاریخی مختلف دربارهٔ ریاضی در قسمتهای مختلف دنیاست. نمونه‌ای از این تحلیلهای جدید مربوط به کتاب جوزف (۱۹۹۱) «تاج رنگارنگ ریشه‌های غیراروپایی ریاضی» است که به ذکر تنوع فرهنگ‌هایی که در اندوخته جهانی اندیشه‌های ریاضی غنی سهم دارد، مربوط می‌شود. برای مثال، تاریخ فرهنگی ایران و جهان اسلام مملو از اندیشه‌های ریاضی است و گرچه اکثر این روایات به دانش‌پژوهان معروف اسلامی ایران مربوط می‌گردد. برای مثال از تاریخ ریاضیات مسلمانان یاد گرفته‌ایم:

- قوانین وراثت
- طراحی مساجد و کاشی‌کاری آنها
- تعیین قبله و تعیین جهت مکه در قسمتهای مختلف دنیا
- نجوم
- گسترش براهین هندسی برای قضایای جبری
- و آثار ریاضیدانانی مانند خوارزمی، ثابت‌بن قره، کاشانی و خیام

با وجود اختلافات مشهودی که در بعضی از موضوع‌های ریاضی مانند دستگاههای شمار و روشهای محاسبه‌ای مختلف ریاضی دیده می‌شود ؛ پژوهش‌های تاریخی، شباهتهای جالبی مانند علاقه‌مندی انسان را در اثبات قضیه فیثاغورث نشان می‌دهد. این قضیه مشهور قبل از ریاضیدانان یونانی مورد علاقه چینی‌ها (رونان ۱۹۸۱) و آفریقائیها (جروس ۱۹۹۵) بوده است. همچنین ثابت‌بن قرّه، به قضیهٔ فیثاغورث پی برده بود.

دانش ریاضی کودکان خارج از مدرسه

جدیدترین پژوهش ریاضیات بومی به دانش ریاضی دانش‌آموزان خارج از مدرسه مربوط می‌شود. این پژوهش به‌وسیله ناتز (۱۹۹۲) در برزیل بر روی کودکانی که در خیابانهای برزیل دستفروشی می‌کنند، به‌دست آمده است. نمونهٔ دیگر با گستردگی بیشتر به پایان‌نامهٔ دکترای گیودا *داَبریو* (۱۹۹۳) مربوط می‌شود که مدارکی از ریاضیات بومی کشاورزان نیشکر رسیف (نام یک محل) را به ثبت رسانده است. (ابریو و کاراهر ۱۹۸۸)

اَبریو پژوهشی دربارهٔ روشهای ابتکاری کودکان و روابط بین ریاضیات مدرسه‌ای و ریاضیات خارج مدرسه، به عمل آورده است.

اولّین سؤال طرح تحقیق اَبریو این بود که «آیا کودکانی که در مدرسه موفق می‌شوند، وابستگی متفاوتی با ریاضیات خانگی نسبت به کودکان شکست‌خورده، نشان می‌دهند؟»

بسیاری از اطلاعات مهم این پژوهش به احساسات شدید کودکان دربارهٔ فقدان ارزش اجتماعی به دانش پدرانشان، مربوط می‌گردید.

برای مثال :

□ مصاحبه‌کننده : چرا آن مرد در تصویر، که روی تراکتور نشسته است، ریاضیات نمی‌داند؟

○ سوری‌نا : او نمی‌داند. او شغلی ندارد. او در مزرعه نیشکر کار می‌کند.

□ : آیا می‌توانی روشی که پدرت برای جمع کردن استفاده می‌کند، بگویی؟ آیا با روشی که تو در مدرسه یاد گرفته‌ای فرق می‌کند؟

○ : فرق می‌کند. او از دستهایش استفاده می‌کند و من از خودکار و کاغذ.

□ : فکر می‌کنی کدام بهتر است؟

○ : مدرسه

□ : فکر می‌کنی کدام صحیح است؟

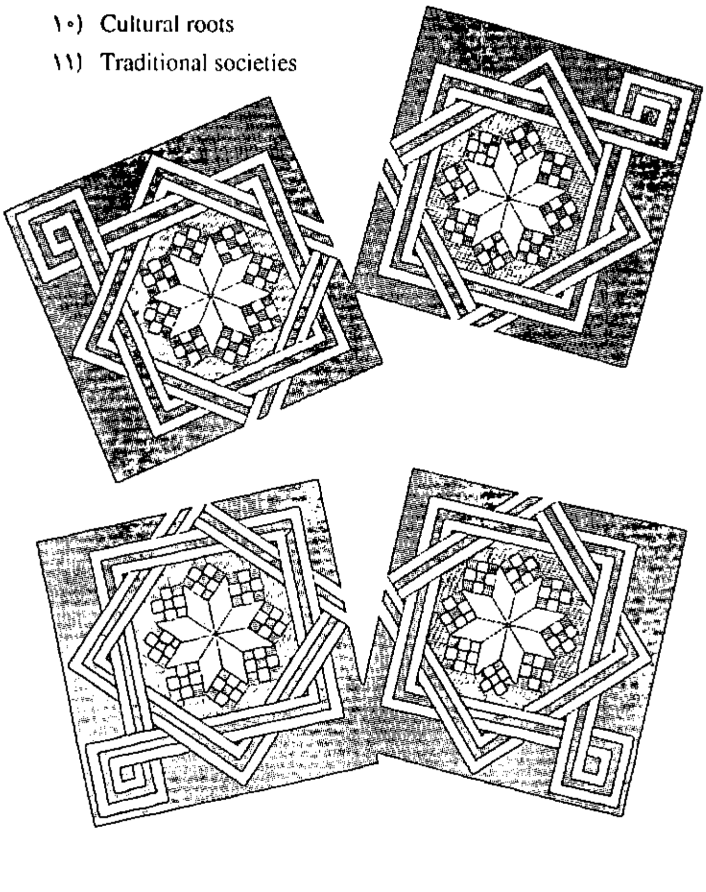
○ : پدرم!

با این شکافی که بین ریاضیات خانه و مدرسه مشاهده کردید، علت آن را باید در آموزش ریاضی کودکان به باورهایشان از حالات نسبی ریاضیات خانه و مدرسه جستجو کرد.

اَبریو پیشنهاد می‌کند، «چگونه تمرینهای مدرسه را نظم ببخشیم و فاصله بین ریاضیات مدرسه و خارج مدرسه را کاهش دهیم.»

پاورقیها

۱) Mathematics educators
۲) Social dimension
۳) Individual level
۴) Pedagogical level
۵) Institutional level
۶) Societal level
۷) Cultural level
۸) Ethnomathematics
۹) Human interactions
۱۰) Cultural roots
۱۱) Traditional societies



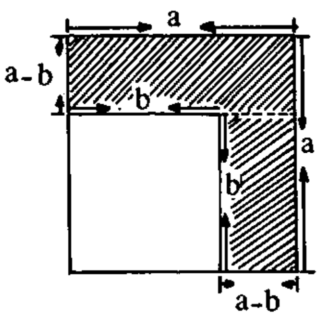
اثبات اتحاد

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

● سید محمّد رضا هاشمی موسوی

اثبات اتحاد $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ به‌کمک شکل و چند کاربرد از آن

دو مربع، یکی به ضلع a و دیگری به ضلع b را در نظر می‌گیریم (مطابق شکل (الف)).

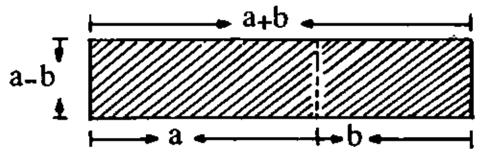


(الف)

سطحی را که برابر با تفاضل مساحت این دو مربع است، سایه می‌زنیم. واضح است که این سطح برابر است با :

(۱) a^2-b^2 = (سطح مربع a ضلعی) − (سطح مربع b ضلعی)

قسمت سایه خورده را جدا می‌کنیم و کنار هم می‌گذاریم (مطابق شکل (ب)).



واضح است که مساحت مستطیلی که به دست می‌آید، برابر است با :

(۲) $(a-b)(a+b)$ = طول × عرض

با توجه به شکلهای (۱) و (۲)، برای مساحت قسمت سایه خورده دو عبارت به دست آمده است که در نتیجه :

(۳) $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

این توضیح لازم است که عبارتهایی به صورتهای $a-b$ و $a+b$ را مزدوج یکدیگر می‌نامیم. به طور مثال $2-\pi$ و $2+\pi$، مزدوج یکدیگر و همچنین $2-\sqrt{2}$ و $2+\sqrt{2}$ مزدوج یکدیگرند. از طرفی چون رابطهٔ (۳) به ازای هر عدد حقیقی a و

b برقرار است، آن را **اتحاد** می‌نامیم. با توجه به این که طرف اوّل این اتحاد از حاصل‌ضرب دو عبارت مزدوج تشکیل یافته است، مناسب است که آن را «**اتحاد مزدوج**» نامگذاری کنیم.

کاربردهایی از رابطهٔ $(a-b)(a+b)=a^۲-b^۲$

۱) با استفاده از رابطهٔ (۳) می‌توان حکم زیر را ثابت کرد:

«در مستطیلهایی که محیط برابر دارند، مستطیلی دارای مساحت حداکثر است که طول و عرض برابر داشته باشد (یعنی مربعی با همان محیط).»

اثبات:

ضلع بزرگتر مستطیل را $a+b$ و ضلع کوچکتر آن را $a-b$ در نظر می‌گیریم. در این صورت، محیط مستطیل برابر با $۴a$، است، زیرا:

(محیط مستطیل) $۲(a+b)+۲(a-b)=۴a$

و مساحت آن برابر با $a^۲-b^۲$ است، زیرا:

(مساحت مستطیل) $(a-b)(a+b)=a^۲-b^۲$

واضح است که مساحت $a^۲-b^۲$، وقتی حداکثر است که $b=۰$ باشد. در این حالت، هر دو ضلع مستطیل برابر a و مستطیل به مربع تبدیل می‌شود.

مثال: ضلعهای مستطیل را ۵ و ۷ در نظر می‌گیریم؛ محیط مستطیل، برابر است با:

(محیط مستطیل) $۲\times۵+۲\times۷=۲۴=۴\times۶$

از بین مستطیلهایی که محیط آنها برابر ۲۴ است، مساحت حداکثر، متعلق به مربع به ضلع ۶ است. این نتیجه را می‌توان با جدول زیر آزمایش کرد:

طول	عرض	مساحت
۶	۶	۳۶
۷	۵	۳۵
۸	۴	۳۲
۹	۳	۲۷
....	....	....
....	....	....
۱۱	۱	۱۱

با توجه به جدول، نتیجه می‌گیریم که وقتی محیط مستطیل را ۲۴ در نظر بگیریم، هر چه اختلاف طول و عرض آن بیشتر باشد، مقدار مساحت آن، کوچکتر می‌شود. مشاهدهٔ جدول، حکمی را که به طور ریاضی ثابت کردیم، تأیید می‌کند:

«از بین مستطیلهای با محیط برابر، مساحت حداکثر، متعلق به مربع است.» بیان دیگری از این حکم چنین است:

«حاصل‌ضرب دو عاملی که مجموع آنها دو مقدار ثابتی است، وقتی حداکثر است که این دو عامل برابر باشند.»

۲) پیدا کردن سریع حاصل‌ضرب بعضی عددها به کمک رابطهٔ (۳)

$۶۵\times۷۵=(۷۰-۵)(۷۰+۵)=۷۰^۲-۵^۲=$
$۴۹۰۰-۲۵=۴۸۷۵$

$۳۴\times۴۶=(۴۰-۶)(۴۰+۶)=۴۰^۲-۶^۲=$
$۱۶۰۰-۳۶=۱۵۶۴$

$۹۸\times۱۰۲=(۱۰۰-۲)(۱۰۰+۲)=۱۰۰^۲-۲^۲=$
$۱۰۰۰۰-۴=۹۹۹۶$

$۱۰۰۵\times۹۹۵=(۱۰۰۰+۵)(۱۰۰۰-۵)=۱۰۰۰۰۰۰-۲۵$
$=۹۹۹۹۷۵$

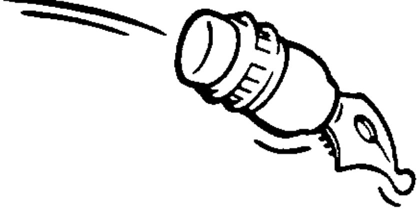
به همین ترتیب می‌توان حاصلضرب هر دو عددی که امکان نوشتن آنها به صورت مزدوج وجود داشته باشد را به سادگی به دست آورد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ = ۱۰۰

چگونه می‌توان تساوی بالا راباقراردادن علائم +، −، ×، : و ( ) بین ۹ رقم برقرار کرد؟

●**از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمهٔ سیمین‌دخت ترکپور**

جواب در صفحهٔ ۸۸



آنچه از دوست رسد ...

با اهداء سلام خدمت همگی دانش‌آموزان و خوانندگان مجلهٔ ریاضی برهان

هر روز نامه‌های پرمحتوا و دلگرم‌کننده شما عزیزان در دفتر مجله به دست ما می‌رسد، از خداوند بزرگ بسیار سپاسگزاریم که توانسته‌ایم تاحدی مشکلات درس ریاضی شما عزیزان را برطرف و شما را تا اندازه‌ای به ریاضیات علاقه‌مند سازیم. طبق قولی که در شماره قبل داده بودیم و طبق درخواستهای مکرر شما عزیزان در این شماره پرسشهای چهارگزینه‌ای همهٔ کتابهای ریاضی دبیرستانی و پیش‌دانشگاهی را با حل تشریحی آورده‌ایم، امیدواریم که خود را برای شرکت در امتحانات پایان سال و کنکور آماده کرده باشید واین مجموعه بتواند هرچند گامی کوچک در جهت بالا بردن سطح کیفی درس ریاضی شما بردارد. در لابه‌لای نامه‌هایی که برای ما ارسال کرده‌اید، با نامهٔ زیر برخورد کردیم و تصمیم گرفتیم که آن رابرای علاقه‌مندی بیشتر شما به ریاضی چاپ کنیم :

اینجانب سجاد پوررحیمی آذر اهل تبریز و یکی از خوانندگان تازه مجله ریاضی برهان دبیرستان می‌باشم. نحوه آشنایی من با این مجله از این قرار است که : عصر یکی از روزهای تعطیلات نوروزی به خانه می‌رفتم که از جلوی نمایندگی انتشارات مدرسه در شهرستان تبریز عبور می‌کردم و مجله برهان را دیدم. از آن روز به بعد هرچند وقت یکبار به آنجا سرمی‌زنم و مجله و کتابهای مورد نظرم را تهیه می‌کنم. من این مجله را دوست دارم و با اشتیاق زیاد از تمامی مطالب مجله استفاده و مسائل آن را حل می‌کنم. به دلیل حجم بالای نامه‌های ارسالی شما عزیزان و محدودیت صفحات مجله بر آن شدیم که نامه‌های شما را دسته‌بندی کنیم و پاسخی مشترک برای آنها بیاوریم و اسامی فرستندگان نامه‌ها را در مجله چاپ کنیم.

اسامی تعدادی از خوانندگان محترم مجله ریاضی برهان که برای ما نامه ارسال کرده‌اند:

آقایان : رضاقلی خدابخشی (تویسرکان)، صادق چائیچی (رشت)، مهدی حسنی (زنجان)، نظام اکبری (تهران)، سیروس اسلامی (دهدشت)، همکار ارجمند علی‌اکبر پژهان (مشهدمقدس)، امیر فرزاذ نجف‌آبادی (نجف‌آباد)، سهند شمس اسحاق (اهواز)، فریدون عبدی (کامیاران) و خانم فائزه شریف النبی (اصفهان) ؛ از همگی شما برای ارسال مسایل همراه با حل و مقاله‌های درسی و کمک‌درسی سپاسگزاریم. در صورت امکان از این مسأله‌ها در قسمت مسأله برای حل و مسایل مسابقه‌ای مجله استفاده خواهیم کرد و مقاله‌های شما را پس از تصویب در هیأت تحریریه چاپ خواهیم کرد.

سرکار خانم مریم ابوالقاسمی (ساری) از ارسال مسایل با حل سپاسگزاریم، انشاء ا... از این مسایل در قسمت تفریح اندیشه استفاده خواهیم کرد.

دوستان عزیز آقایان مهدیار انوری (گرگان)، محسن‌امان‌پور (سپیدان)، یاشار حبیب‌یار (زنجان)، روزبه شفیعی (گرگان)، اکبر بلوری (کاشان) و همکار گرامی مهدی رحمانی (دانشجوی دانشگاه فردوسی مشهد) ؛ از همگی شما برای ارسال پیشنهادات سازنده سپاسگزاریم و از آنها برای هرچه بهتر و کاملتر شدن مجله استفاده خواهیم کرد.

آقای کاووس قاجار (بناب) ؛ فرمولی را که برای جمع اعداد طبیعی به دست آورده‌اید، نخستین بار یکی از ریاضی‌دانان به نام گوس وقتی هنوز دانش‌آموز دبستان بود، موفق به کشف آن شد، و در برهان ۲۳ دبیرستان، مقاله‌ای درباره مجموع k عدد طبیعی اولیه آمده است.

آقای احمد بابایی (گیلان) ؛ از ارسال ۴ مسأله با حل متشکریم. از آن‌جا که مسائل ارسالی شما می‌تواند مورد استفاده دانش‌آموزان قرار گیرد، بنابراین یکی از آنها را با حل آورده‌ایم :

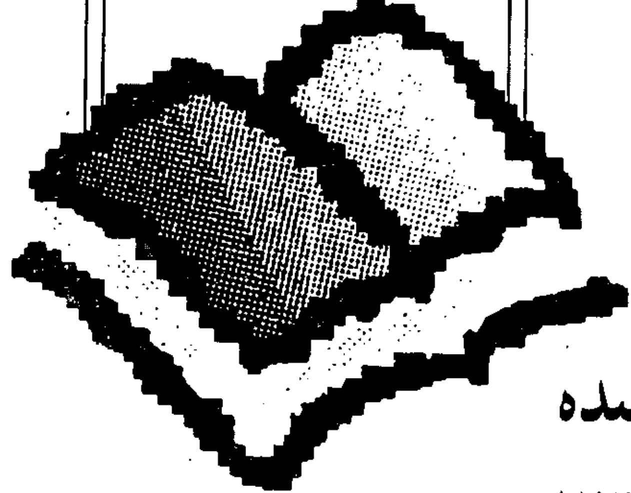
در صورتی که $y^{10}+y^5+1=0$ ، حاصل عبارت $y^{1995}+\frac{1}{y^{1995}}$ را به دست آورید.

حل. فرض کنیم $y^5=x$ ، با جایگذاری این رابطه در معادله داریم :

$$x^2+x+1=0 \Rightarrow x^2=-x-1$$
$$\Rightarrow x^3=-x^2-x=1 \Rightarrow x^3=1$$

$$y^{1995}+\frac{1}{y^{1995}}=x^{399}+\frac{1}{x^{399}}=(x^3)^{133}+\frac{1}{(x^3)^{133}}$$

$$=(1)^{133}+\frac{1}{(1)^{133}}=2 \qquad \Rightarrow y^{1995}+\frac{1}{y^{1995}}=2$$



فهرست الفبایی مقاله‌های چاپ شده در برهانهای شمارهٔ ۱ الی ۲۳

ف

ق

ک

گ

ل

م

ن

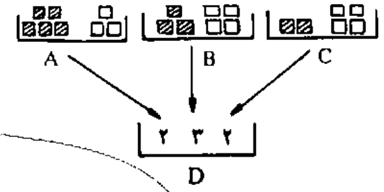
هـ

ی

حل مسائل مسابقه‌ای برهان ۲۲

مسألهٔ اول: (حسین منصوری دانشجوی سال اول ریاضی کاربردی دانشگاه هرمزگان)

۳ ظرف زیر را درنظر می‌گیریم. طبق صورت سؤال، از ظرفهای «A» و «B» و «C» به ترتیب ۲ و ۳ و ۲ مهره بیرون می‌آوریم و در ظرف «D» قرار می‌دهیم. حال یک مهره به تصادف از ظرف «D» بیرون می‌آوریم، می‌خواهیم احتمال این را بیابیم که مهره‌خارج شده از این ظرف، «قرمز» باشد. برای این منظور فرمول احتمال کل را می‌نویسیم (برای n = ۳) و محاسبات را انجام می‌دهیم:



$$P(A)=\sum_{i=1}^{۳}P(B_i)P(A/B_i)=\sum_{i=1}^{۳}P(A\cap B_i)$$

$$=P(B_1)P(A/B_1)+P(B_۲)P(A/B_۲)+P(B_۳)P(A/B_۳)$$

پیشامد این که مهره انتخابی از ظرف «D» قرمز باشد $= A$

پیشامد این که مهره انتخابی از ظرف «A» باشد $= B_1$

$$\to p(B_1)=\frac{۲}{۷}$$

پیشامد این که مهره انتخابی از ظرف «B» باشد $= B_۲$

$$\to p(B_۲)=\frac{۳}{۷}$$

پیشامد این که مهره انتخابی از ظرف «C» باشد $= B_۳$

$$\to p(B_۳)=\frac{۲}{۷}$$

پیشامد این که مهره انتخابی قرمز باشد به شرط این که از ظرف «A» باشد $(A/B_1)=$

$$\to p(A/B_1)=\frac{۳}{۸}$$

پیشامد این که مهره انتخابی قرمز باشد به شرط این که از ظرف «B» باشد $(A/B_۲)=$

$$\to p(A/B_۲)=\frac{۴}{۷}$$

پیشامد این که مهره انتخابی قرمز باشد به شرط این که از ظرف «C» باشد $(A/B_۳)=$

$$\to p(A/B_۳)=\frac{۴}{۶}$$

پس داریم؛

احتمال مطلوب؛

$$p(A)=\frac{۲}{۷}\times\frac{۳}{۸}+\frac{۳}{۷}\times\frac{۴}{۷}+\frac{۲}{۷}\times\frac{۴}{۶}=\frac{۳۱۹}{۵۸۸}$$

مسأله دوم: (شادی منصوری سال اول دبیرستان از شیراز)

۲ ـ عددی که تعداد مقسوم‌علیه‌هایش فرد باشد مربع کامل است، یعنی $Z=n^۲$ زیرا اگر $Z=p_1^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k}$ در این صورت تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت آن از رابطهٔ $(\alpha_1+1)(\alpha_۲+1)\dots(\alpha_k+1)$ به دست می‌آید پس باید α_i ها همگی زوج باشند یعنی Z مربع کامل است.

$$\Rightarrow Z=n^۲=۳۹k+1$$

$$\Rightarrow n^۲-1=۳۹k\Rightarrow(n-1)(n+1)=۳۹k=۳\times۱۳k$$

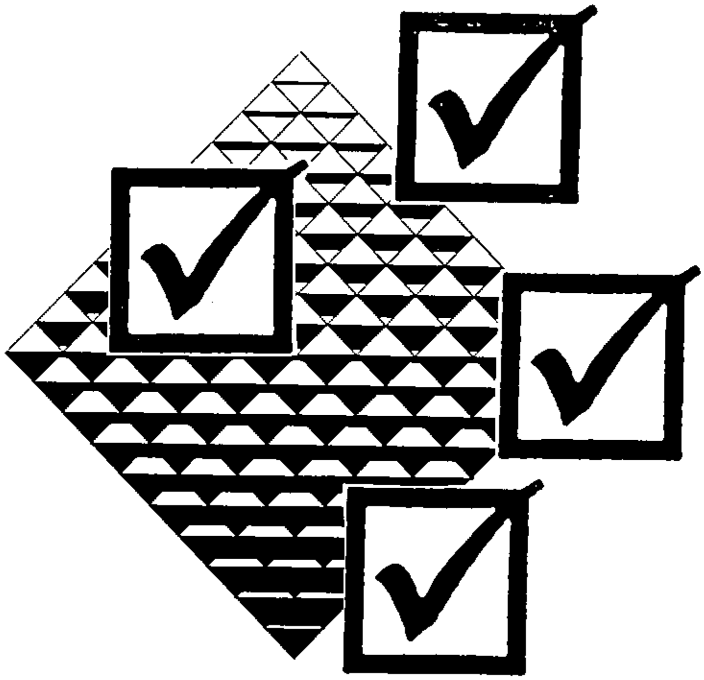
حالتهای زیر مطلوبست:

$$\begin{cases}\begin{cases}n-1=۳\ ,\ n+1=۱۳k\to n=۴\Rightarrow۱۳k=۵ & \text{غ ق ق}\\ n+1=۳\ ,\ n-1=۱۳k\to n=۲\Rightarrow۱۳k=1 & \text{غ ق ق}\end{cases}\\ \begin{cases}n-1=۳k\ ,\ n+1=۱۳\to n=۱۲\Rightarrow۳k=۱۱ & \text{غ ق ق}\\ n+1=۳k\ ,\ n-1=۱۳\to n=۱۴\Rightarrow۳k=۱۵\Rightarrow k=۵\end{cases}\\ \begin{cases}n-1=k\ ,\ n+1=۳\times۱۳\to n=۳۸\Rightarrow k=۳۷\\ n+1=k\ ,\ n-1=۳\times۱۳\to n=۴۰\Rightarrow k=۴۱\end{cases}\end{cases}$$

اگر $k=۵\to n^۲=Z=۳۹\times۵+1=\boxed{۱۹۶}$

اگر $k=۳۷\to Z=n^۲=\boxed{۱۴۴۴}$

اگر $k=۴۱\to Z=n^۲=\boxed{۱۶۰۰}$

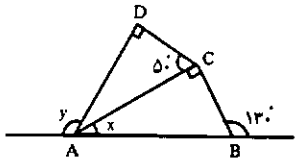


پرسشهای چهارگزینه‌ای با پاسخ تشریحی

هندسهٔ ۱

• محمدهاشم رستمی

۱ـ در شکل، $AC\perp CB$ و $AD\perp DC$ است. $2x+y$ چند درجه است؟

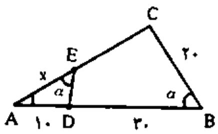


۱) ۱۲۰ ۲) ۱۵۰ ۳) ۱۸۰ ۴) ۲۱۰

۲ ـ مساحت شش ضلعی منتظمی $54\sqrt{3}\,cm^2$ است. اندازهٔ بزرگترین قطر در این شش ضلعی چقدر است؟

۱) ۱۲ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۳ ـ اندازهٔ x در شکل زیر چند سانتی‌متر است؟



۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۸ ۴) ۱۶

۴ ـ اندازهٔ مساحتهای دو مثلث متشابه $16cm^2$ و $64cm^2$ است. اگر محیط مثلث کوچکتر $2(8+\sqrt{10}+\sqrt{26})$ باشد، محیط مثلث دیگر چقدر است؟

۱) $(8+\sqrt{10}+\sqrt{26})$ ۲) $4(8+\sqrt{10}+\sqrt{26})$
۳) $2(16+\sqrt{10}+\sqrt{26})$ ۴) $32+\sqrt{26}+2\sqrt{10}$

۵ ـ حجم مکعبی که اندازهٔ قطر آن $2\sqrt{3}$ است، چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۶ ـ ابعاد مکعب مستطیلی متناسب با ۲، ۳ و ۴ است. اگر سطح کل این مکعب مستطیل برابر $208cm^2$ باشد، اندازهٔ حجم آن چقدر است؟

۱) $192cm^3$ ۲) $96cm^3$
۳) $48cm^3$ ۴) $288cm^3$

۷ ـ شعاعهای قاعده‌های دو استوانه قائم که مرکز قاعده‌های آنها یکی است، ۳cm و ۵cm و ارتفاع مشترک آنها ۱۲cm است. نسبت مساحت جانبی این دو استوانه کدام است؟

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{4}{5}$

۸ ـ قاعدهٔ هرم منتظمی شش ضلعی به ضلع ۵ و اندازهٔ هر یال آن ۱۳ است. حجم این هرم چند است؟

۱) $300\sqrt{3}$ ۲) $50\sqrt{3}$
۳) ۱۵۰ ۴) $150\sqrt{3}$

۹ ـ کره‌ای به شعاع ۵ سانتی‌متر را صفحه‌ای که به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر از مرکز آن قرار دارد، قطع کرده است. حجم مخروطی که این مقطع، قاعدهٔ آن و ارتفاعش فاصله مرکز کره از صفحه است، چند سانتی‌متر مکعب است؟

۱) 8π ۲) 16π ۳) 32π ۴) ۱۶

۱۰ ـ عدد حجم کره‌ای $\frac{1}{2}$ عدد سطح آن است. اندازهٔ حجم این کره چند است؟

۱) 3π ۲) $\frac{7\pi}{2}$ ۳) 4π ۴) $\frac{9\pi}{2}$

هندسهٔ ۲

• محمدهاشم رستمی

۱ ـ اندازه‌های دو ضلع مثلثی ۵ و ۸ است. کدام عدد می‌تواند اندازهٔ ضلع سوم این مثلث باشد؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) ۸

۲ ـ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از دو صفحهٔ متوازی به یک فاصله است، کدام شکل است؟

۱) یک خط راست موازی آن دو صفحه
۲) یک صفحه عمود بر آن دو صفحه
۳) یک خط عمود بر آن دو صفحه
۴) صفحه‌ای موازی آن دو صفحه و به یک فاصله از آن دو صفحه

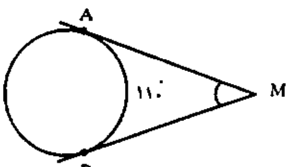
۳ ـ پاره‌خط AB به طول ۱۲ سانتی‌متر در یک صفحه مفروض است. چند نقطه در این صفحه وجود دارد که فاصله‌اش از هریک از نقطه‌های A و B برابر ۵ سانتی‌متر باشد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۴ ـ نقطه‌ای به فاصلهٔ ۶ سانتی‌متر از مرکز دایره‌ای به قطر ۲۰ سانتی‌متر واقع است. اندازهٔ کوچکترین وتری که از این نقطه در دایره رسم می‌شود چقدر است؟

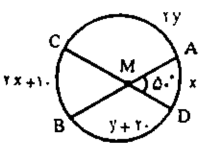
۱) ۱۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

۵ ـ اندازهٔ زاویهٔ AMB در شکل زیر چقدر است؟ (MA و MB در نقطه‌های A و B بر دایره مماسند.)



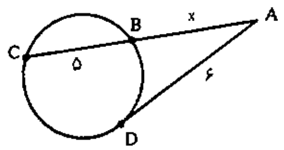
۱) ۷۰° ۲) ۱۰۰° ۳) ۱۴۰° ۴) ۶۰°

۶ ـ در شکل زیر، $3x-y$ چند درجه است؟



۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۳۰ ۴) ۴۰

۷ ـ اندازهٔ پاره‌خط AB در شکل داده شده چند است؟



(AD در نقطهٔ D مماس بر دایره است.)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۸ ـ تصویر نقطهٔ $A=(3,-2)$ تحت تبدیل $E(x,y)=(3x-4\ ,\ 5y+2)$ کدام نقطه است؟

۱) $(4,-5)$ ۲) $(8,-5)$
۳) $(5,-8)$ ۴) $(-5,8)$

۹ ـ تحت یک بازتاب، نقطهٔ $(3,2)$ تصویر نقطهٔ $(2,3)$ است. معادلهٔ محور تقارن این بازتاب کدام است؟

۱) $y=x+2$ ۲) $y=x$
۳) $y=-x$ ۴) $y=-x+3$

۱۰ ـ فاصلهٔ مجانس نقطهٔ $A=(3,-1)$ در تجانس $D(x,y)=(2x,2y)$ از مرکز تجانس چقدر است؟

۱) $4\sqrt{10}$ ۲) 10 ۳) $\sqrt{10}$ ۴) $2\sqrt{10}$

ریاضی ۱

● سید محمدرضا هاشمی موسوی

۱ ـ اگر $A=\{x\in\mathbb{R}\ |x\geq 3\}$ و $B=\{x\in\mathbb{R}\ |x<-2\}$، حاصل $A'\cap B'$ کدام است؟

۱) $\{x\in\mathbb{R}\ |-2<x\leq 3\}$ ۲) $\{x\in\mathbb{R}\ |-2<x<3\}$
۳) $\{x\in\mathbb{R}\ |-2\leq x\leq 3\}$ ۴) $\{x\in\mathbb{R}\ |-2\leq x<3\}$

۲ ـ اگر $A=\{2,\{2\},\{\{2\}\}\}$ ؛ آن‌گاه کدام گزینه نادرست است؟

۱) $\{\{2\}\}\subset A$ ۲) $\{2\}\not\subset A$
۳) $\{\{2\}\}\in A$ ۴) $\{2\}\in A$

۳ ـ اگر $A\subset B$ ؛ آن‌گاه حاصل $A\cup(B-A)$ کدام است؟

۱) A ۲) B ۳) A' ۴) B'

۴ ـ اگر تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعهٔ $(n+1)$ عضوی از تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعهٔ $(n+4)$ عضوی ۱۱۲ واحد کمتر باشد، مقدار n کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵ ـ حاصل عبارت $A=\frac{(a^2)^3(a^3)^4(b^3)^2(b^4)^3c^{15}.c^3}{(a^2b^2c^2)(abc)^{16}}$ کدام است؟ $(a,b,c\neq 0)$

۱) abc ۲) $(abc)^2$
۳) $(abc)^3$ ۴) 1

۶ ـ حاصل عبارت

$P=(\frac{3^4\times 2^3\times a^{-5}\times b^{-7}\times c^{-4}\times 14}{4a^{-3}\times 28b^{-2}\times 27c^{-1}})^{-3}$ کدام است؟

۱) $(abc)^3$ ۲) $(abc)^4$
۳) $(abc)^5$ ۴) $(abc)^6$

۷ ـ حاصل عبارت

$K=\frac{2^{1+2}+2^{1+2}-2^{1+3}+5\times 2^1}{9\times 2^1+3\times 2^{1+1}+3\times 2^{1+2}-15\times 2^{1+1}}$ کدام است؟

۱) $\frac{17}{7}$ ۲) $\frac{17}{9}$ ۳) $\frac{17}{15}$ ۴) $\frac{17}{21}$

۸ ـ اگر $K=x+\frac{1}{x}$، حاصل عبارت $(x-\frac{1}{x})^6$ کدام است؟

۱) $\sqrt[3]{K^2-4}$ ۲) $\sqrt{K^2-4}$
۳) $(K^2-4)^3$ ۴) $(K^2-4)^6$

۹ ـ اگر $x+y=\sqrt{2}$ و $y=\frac{1}{x}$، حاصل $(x^3+y^3)^2$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $-\sqrt{2}$ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) -2

۱۰ ـ دامنهٔ متغیر x در عبارت

$\sqrt{\frac{1}{x-3}}+\sqrt{\frac{1}{x-2}}+\sqrt{2x-6}$ کدام است؟

۱) $\{x\in\mathbb{R}|x>3\}$ ۲) $\{x\in\mathbb{R}|x>2\}$
۳) $\{x\in\mathbb{R}|x>0\}$ ۴) $\{x\in\mathbb{R}|2<x<3\}$

ریاضی ۲

● سید محمدرضا هاشمی موسوی

۱ ـ معادله‌های دو قطر مربعی به صورت $y=-2x-1$ و $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ است. فاصلهٔ مرکز مربع از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ۲) $\frac{\sqrt{10}}{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ ۴) $\sqrt{10}$

۲ ـ اگر خط به معادلهٔ $kx+ny=1$ بر خط به معادلهٔ $ky+x=n$ عمود باشد و از نقطهٔ $M(1,-2)$ نیز بگذرد حاصل $n+k$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) صفر ۴) 1

۳ ـ اگر $x=\sqrt[5]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}$، حاصل x^6 کدام است؟

۱) $2\sqrt[5]{2}$ ۲) $2\sqrt[5]{4}$ ۳) $2\sqrt[5]{8}$ ۴) $2\sqrt[5]{16}$

۴ ـ حاصل عبارت $P=\sqrt{\frac{20\sqrt{8}}{\sqrt{320}}}+\frac{3(\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2})}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}$ ۲) $\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{4}$
۳) $\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{5}$ ۴) $\sqrt[3]{10}-\sqrt[3]{2}$

۵ ـ حاصل عبارت

$K=\frac{5\cot 225^\circ+\cos 240^\circ+2\sin 330^\circ+4\tan 135^\circ}{10\tan 225^\circ+\cos 450^\circ-\cot 135^\circ+20\sin 210^\circ}$

کدام است؟

۱) -1 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) صفر ۴) 1

۶ ـ اگر $0<x<\frac{\pi}{2}$، حاصل عبارت

$P=(\frac{\cos x}{1+\sin x}+\frac{1+\sin x}{\cos x})\sqrt{1-\sin^2 x}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) 2 ۴) $2\sqrt{2}$

۷ ـ اگر نقطهٔ $S(-3,2)$ رأس سهمی به معادلهٔ $y=x^2+px+q$ باشد، حاصل $p+q$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۱ ۳) ۱۵ ۴) ۱۷

۸ ـ معادلهٔ $2x-x\sqrt{m}=x-4$ به ازای چه مقادیری از m جواب دارد؟

۱) $m\geq 0$ ۲) $m\in\mathbb{R}-\{1\}$
۳) $m\in\mathbb{R}-\{0,1\}$ ۴) $m\geq 0\ ,\ m\neq 1$

۹ ـ اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2-x-1=0$ باشند. حاصل عبارت $K=(\frac{1}{x_1})^3+(\frac{1}{x_2})^3+x_1^3x_2^3$ کدام است؟

۱) -1 ۲) -3 ۳) -5 ۴) -7

۱۰ ـ مجموعهٔ همهٔ جوابهای نامعادلهٔ $\frac{3\sqrt{x}+3}{6\sqrt{x}+2}\geq\frac{3}{4}$، کدام است؟

۱) $\{x\in\mathbb{R}|x\geq 0\}$ ۲) $\left\{x\in\mathbb{R}\middle|0\leq x\leq\frac{3}{2}\right\}$
۳) $\left\{x\in\mathbb{R}\middle|0\leq x\leq\sqrt{2}\right\}$ ۴) $\{x\in\mathbb{R}|0\leq x\leq 1\}$

ریاضی ۳

● میر شهرام صدر

۱ ـ مجموعه جواب نامعادله $\frac{2\sqrt{x}+2}{3\sqrt{x}+1}>1$ کدام گزینه است؟

۱) $(-\infty,1]$ ۲) $(-\infty,1)$
۳) $(0,1)$ ۴) $[0,1)$

۲ ـ کسر $P=\frac{\sin x+x^2\sin x}{1+x^2}$ در کدام بازهٔ همواره مثبت است؟

۱) $[0,\frac{3\pi}{2})$ ۲) $(0,\pi)$
۳) $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ ۴) $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$

۳ ـ در تابع $f(x)=\begin{cases}x^2+2ax & x\geq 1\\ ax+b & x<1\end{cases}$ ؛ اگر $f(2)=4$ و $f(-2)=0$ ؛ $a+b$ کدام گزینه است؟

۱) -3 ۲) -4 ۳) -2 ۴) -1

۴ ـ نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ برای تابع $y=\frac{x+1}{x-1}$ وقتی از Δx صرف‌نظر می‌کنیم، کدام گزینه است؟

۱) $\frac{-2x}{x-1}$ ۲) $\frac{-2}{x-1}$
۳) $\frac{-2}{(x-1)^2}$ ۴) $\frac{2x}{(x-1)^2}$

۵ ـ تابع $\begin{cases}f:R^+\to R\\ f(x)=x^2\end{cases}$ مفروض است، کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) تابع وارون‌پذیر است. ۲) تابع پوشا است.
۳) تابع وارون‌پذیر نیست. ۴) تابع دوسویی است.

۶ ـ اگر نقطهٔ A به مختصات $\begin{vmatrix}m+1\\ n-2\end{vmatrix}$ قرینه نقطه B به مختصات $\begin{vmatrix}2m\\ n-1\end{vmatrix}$ نسبت به نیمساز ناحیه دوم و چهارم باشد، m و n کدام هستند؟

۱) $m=2\ ,\ n=-2$ ۲) $m=-1\ ,\ n=-1$
۳) $m=1\ ,\ n=3$ ۴) $m=3\ ,\ n=-1$

۷ ـ منحنی $y^2=x^2-\sin x+\frac{6}{x}$ مفروض است. کدام گزینه صحیح است؟

۱) مرکز تقارن دارد. ۲) محور تقارن افقی دارد.
۳) محور تقارن قائم دارد. ۴) گزینه‌های (۲) و (۳)

۸ ـ هرگاه $A=\begin{bmatrix}0 & 3\\ \frac{1}{3} & 0\end{bmatrix}$ ؛ در این صورت A^{48} کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} 0 & 3^{28} \\ (\frac{1}{3})^{28} & 0 \end{bmatrix}$　۲) $\begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$　۴) $\begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}$

۹ـ مجموعه جواب نامعادله $\log\frac{x+2}{5} < -1$ کدام گزینه است؟

۱) $(-3, -\frac{5}{2})$　۲) $(-2, -\frac{3}{2})$

۳) $(\frac{3}{2}, 2)$　۴) $(\frac{5}{2}, 3)$

۱۰ـ اگر $\log 2 = a$ در این صورت مقدار $\log 0/25$ برحسب a کدام است؟

۱) $-2a$　۲) $-a$　۳) $1-a$　۴) $1+a$

۸ـ از بین ۱۲ نفر که دو نفر آنها برادر هستند، می‌خواهیم یک کمیته ۵ نفری تشکیل دهیم به طوری که حداقل یکی از برادرها در آن شرکت داشته باشند، به چند طریق می‌توان این کمیته را تشکیل داد؟

۱) ۴۵۰　۲) ۷۹۲　۳) ۵۴۰　۴) ۲۹۷

۹ـ دو مکعب را باهم پرتاب می‌کنیم، احتمال آن که مجموع شماره‌هایی که بر زمین می‌نشینند ۷ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{4}{36}$　۲) $\frac{5}{36}$　۳) $\frac{6}{36}$　۴) $\frac{7}{36}$

۱۰ـ با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۸ اعداد چهاررقمی کمتر از ۴۰۰۰ ساخته‌ایم و هریک از آن اعداد را جداگانه روی کارتهایی نوشته‌ایم، به طور تصادفی یک کارت انتخاب می‌کنیم، احتمال این که عدد روی این کارت بر ۵ بخش‌پذیر باشد، کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$　۲) $\frac{1}{5}$　۳) $\frac{1}{4}$　۴) $\frac{1}{3}$

۸ـ اگر منحنی نمایش تابع با ضابطهٔ مفروض $y = \frac{ax+b}{x+a}$ محور xها را در $x = -1$ قطع کند و خط $x+2=0$ مجانب منحنی باشد، اندازهٔ واسطهٔ هندسی a و b کدام است؟

۱) ۴　۲) ۲　۳) ۱　۴) صفر

۹ـ معادلهٔ $(x-1)^3 + \cdots + (x-76)^3 + (x-77)^3 = 0$ دارای چند ریشهٔ حقیقی است؟

۱) یک ریشهٔ حقیقی　۲) دو ریشهٔ حقیقی

۳) سه ریشهٔ حقیقی　۴) ریشهٔ حقیقی ندارد.

۱۰ـ معادلهٔ خط قائم بر منحنی نمایش تابع با معادله‌های پارامتری $(x = 2\sin\alpha - 3\ ,\ y = 2\cos\alpha + 2)$ در نقطه‌ای از آن که $\alpha = \frac{\pi}{2}$ باشد، کدام است؟

۱) $x = -1$　۲) $x = 2$

۳) $y = -1$　۴) $y = 2$

ریاضی ۴

● حمیدرضا امیری

۱ـ اگر s انحراف معیار داده‌های $x_1, x_2, \ldots, x_{20}$ باشد، انحراف معیار $(2x_1+5)$ و $(2x_2+5)$ و ... $(2x_{20}+5)$ کدام است؟

۱) $2s$　۲) $2s+10$　۳) $2s+5$　۴) $2s+100$

۲ـ با توجه به جدول فراوانی

حدود دسته	۲۳ − ۳۱	۳۱ − ۳۹	۳۹ − ۴۷	۴۷ − ۵۵
فراوانی	۳	۵	۹	۱۱

کدام یک از گزینه‌های زیر درست نیست.

۱) طول دسته برابر ۸ است.

۲) ۴۳ نشان دسته سوم است.

۳) دامنه تغییرات ۳۲ است.

۴) میانگین داده‌ها ۴۵ است.

۳ـ اگر $V_n = \frac{3n-1}{4n-1}$، جمله عمومی یک دنباله باشد، چندمین جمله این دنباله $\frac{11}{15}$ است؟

۱) ۳　۲) ۴　۳) ۵　۴) ۶

۴ـ جمله یازدهم یک تصاعد حسابی ۳۴ و مجموع ۸ جمله اول آن ۲۰ است، مجموع ۵۰ جمله نخستین این تصاعد کدام است؟

۱) 25×126　۲) 25×127

۳) 25×129　۴) 25×131

۵ـ اگر $\log a$، $\log b$ و $\log c$ به ترتیب سه جمله متوالی یک تصاعد حسابی باشند، آنگاه کدام یک از دنباله‌های زیر تشکیل تصاعد هندسی می‌دهند؟

۱) $\log a, \log b, \log c$　۲) $a, 2b, c$

۳) $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$　۴) $\frac{1}{\log a}, \frac{1}{\log b}, \frac{1}{\log c}$

۶ـ به ازای کدام مقدار x عبارت $A = \cos^2 x - \cos x$ در بازه $[0, \pi]$ کمترین مقدار را دارد؟

۱) $\frac{\pi}{3}$　۲) π　۳) $\frac{\pi}{6}$　۴) $\frac{5\pi}{6}$

۷ـ زاویه بین دو بردار $\vec{V_1} = \vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j}$ و $\vec{V_2} = -\sqrt{3}\,\vec{i} + \vec{j}$ کدام است؟

۱) 30°　۲) 40°　۳) 60°　۴) 90°

ریاضی ۵ رشته تجربی

● سید محمدرضا هاشمی موسوی

۱ـ دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{\frac{1-2x}{2x-2}} + \sqrt{\frac{2x-3}{1-2x}}$ کدام است؟

۱) $]1, \frac{3}{2}[$　۲) $]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$

۳) $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$　۴) $]\frac{1}{2}, 1[$

۲ـ برد تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{|1-x^2|}{|x+1|}$ کدام است؟ $\left(\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}\right)$

۱) $\mathbb{R}^+ - \{2\}$　۲) $\mathbb{R}^+ - \{-1\}$

۳) $[0, 2[\cup]2, +\infty[$　۴) $[0, +\infty[$

۳ـ توابع $f = \{(4,5), (3,1), (2,3)\}$ و $g = \{(4,6), (3,5), (1,2)\}$ مفروضند، اجتماع دامنه و برد تابع (fog) کدام است؟

۱) $\{1\}$　۲) $\{3\}$　۳) $\{1, 3\}$　۴) $\varnothing$

۴ـ در تابع با ضابطهٔ مفروض $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & x \le -1 \\ ax + b & -1 < x < 1 \\ 2x + 1 & x \ge 1 \end{cases}$، اگر $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ هردو موجود باشند، مقدار $(a.b)$ کدام است؟

۱) ۳　۲) -3

۳) صفر　۴) موجود نیست.

۵ـ حاصل $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$ کدام است؟

۱) صفر　۲) $\frac{1}{3}$　۳) $-\frac{1}{3}$　۴) $-\infty$

۶ـ حاصل $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x} - \sqrt{x^2 + 2x + 2}\right)$، کدام است؟

۱) -2　۲) صفر　۳) ۲　۴) $+\infty$

۷ـ تابع f با قانون $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{2}{x^2}) & x \ne 0 \\ & x = 0 \end{cases}$ در $x_0 = 0$ چگونه است؟

۱) پیوسته است.

۲) پیوسته نیست.

۳) فقط پیوستگی راست دارد.

۴) فقط پیوستگی چپ دارد.

حسابان ۱

● محمدصادق عسگری

۱ـ برد تابع $f(x) = \begin{cases} [x] + [-x] & x \in \mathbb{Z} \\ x - [x] & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ کدام است؟

۱) $(0, 1)$　۲) $(0, 1]$　۳) $[1, 2)$　۴) $[0, 1)$

۲ـ دامنه تابع $f(x) = \sqrt{\log(1 - [x])}$ ($[x]$ جزء صحیح x) کدام است؟

۱) $(-\infty, 1]$　۲) $(-\infty, 1)$　۳) $[0, 1)$　۴) $(1, +\infty)$

۳ـ اگر معادله درجه دوم $(m+2)x^2 + 4x + (m-1) = 0$ دارای دو جواب حقیقی باشد مقادیر m کدام است؟

۱) $-2 \le m \le 1$　۲) $1 \le m \le 2$

۳) $-2 \le m \le 2$　۴) $-3 \le m \le 2$

۴ـ اگر $f(x) = 3x - |x - 1|$ باشد آنگاه $f^{-1}(x)$ کدام است؟

۱) $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{4} & x \ge 3 \\ \frac{x-1}{2} & x < 3 \end{cases}$

۲) $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2} & x \ge 3 \\ \frac{x+1}{4} & x < 3 \end{cases}$

۳) $f^{-1}(x) = \begin{cases} x-1 & x \ge 3 \\ x+1 & x < 3 \end{cases}$

۴) $f^{-1}(x) = \begin{cases} x+1 & x \ge 3 \\ x-1 & x < 3 \end{cases}$

۵ـ حد عبارت $\frac{[x] - [2x]}{[x] - 2[x]}$ وقتی $x \to 0^-$ کدام است؟

۱) ۰　۲) -1　۳) ۱　۴) -2

۶ـ تابع $f(x) = \frac{x}{[x]}\sqrt{-x}$ برکدام مجموعه پیوسته است؟

۱) $[1, +\infty)$　۲) $(-\infty, 0]$　۳) $(-\infty, 0)$　۴) $\mathbb{R}$

۷ـ اگر $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(1+3h) - f(1+h)}{h} = 6$ آنگاه مشتق تابع $y = f(\frac{4}{x^2})$ در نقطه $x = 2$ کدام است؟

۱) ۶　۲) -6　۳) ۳　۴) -3

۸ـ اگر $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ آنگاه مقدار حد عبارت $\frac{f(5h) - f(2h)}{h}$ وقتی $h \to 0$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$　۲) $-\frac{3}{2}$　۳) $\frac{1}{2}$　۴) $-\frac{1}{2}$

۹ ـ اگر $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$ آنگاه $\lim\limits_{x\to 2^-} f^{-1}(x)$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$ ۳) 1 ۴) -1

۱۰ ـ اگر $f(x+2)=x-\sqrt{x+2}$ آنگاه حد $f(x)$ وقتی $x\to 0^-$ کدام است؟

۱) -2 ۲) وجود ندارد. ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $-\sqrt{2}$

حسابان ۲

● محمد صادق عسگری

۱ ـ به کدام دلیل تابع با ضابطه $y=x|x-1|$ در نقطه $x=1$ مشتق‌پذیر نیست؟

۱) مشتق چپ ندارد. ۲) مشتق راست ندارد.
۳) مشتق چپ و مشتق راست ندارد.
۴) مشتق چپ و راست دارد ولی برابر نیست.

۲ ـ تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases} ax^2 & x<1 \\ bx^3+2x & x\ge 1\end{cases}$ در نقطه $x=1$ مشتق‌پذیر است $a+b$ چقدر است؟

۱) -6 ۲) -4 ۳) 4 ۴) 6

۳ ـ ماکزیمم مقدار تابع با ضابطه $y=\frac{1-\sin x}{1-2\sin x}$ در فاصله $(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$ کدام است؟

۱) 0 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 2 ۴) ∞

۴ ـ مقدار مشتق تابع منحنی $y=\mathrm{Arctg}\,x+\mathrm{Arc\,cotg}\,y-\frac{\pi}{2}$ در نقطه $(0,0)$ کدام است؟

۱) 0 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) 2

۵ ـ می‌نیمم فاصله $y=4-x^2$ از نقطه $(0,2)$ کدام است؟

۱) 2 ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ ۴) $\frac{7}{2}$

۶ ـ فاصله مرکز دایره‌ای به شعاع $2\sqrt{3}$ از خطی که این دایره را با زاویهٔ $30°$ قطع می‌کند چقدر است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) 2 ۳) 3 ۴) $4\sqrt{3}$

۷ ـ مکان هندسی نقاط $M\left|\begin{matrix} x=\sin\theta+\cos\theta \\ y=\cos\theta-\sin\theta\end{matrix}\right.$ کدام است؟

۱) هذلولی باخروج از مرکز $\sqrt{2}$
۲) دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع $\sqrt{2}$
۳) پاره‌خط به فاصله $\sqrt{2}$ از مبدأ مختصات
۴) بیضی با اقطار ۲ و ۱

۸ ـ اگر $f(x)=\int_1^{\lg x}\frac{dt}{1+t^2}$ آنگاه مشتق تابع $y=f(\frac{1}{x})$ در $x=\frac{1}{2}$ کدام است؟

۱) 4 ۲) -4 ۳) -3 ۴) 3

۹ ـ اگر $f(x)=\int_0^x\frac{\cos t}{1+\sin t}dt$ آنگاه $f(\frac{\pi}{2})-f(0)$ کدام است؟

۱) $\mathrm{Ln}2$ ۲) $-\mathrm{Ln}2$ ۳) $\mathrm{Ln}3$ ۴) $-\mathrm{Ln}3$

۱۰ ـ مساحت محدود به سهمی $y=x^2-2$ و خط $y=x$ کدام است؟

۱) $\frac{9}{2}$ ۲) $\frac{9}{4}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{3}{4}$

جبر و احتمال رشته ریاضی

● میرشهرام صدر

۱ ـ اگر ۴۰۰ نفر در یک سالن حضور داشته باشند، کدام گزینه نادرست است؟

۱) حداقل دو نفر دارای تاریخ تولد یکسان هستند (بدون درنظر گرفتن سال تولد).
۲) حداقل دو نفر در یک ماه به‌دنیا آمده‌اند.
۳) حداقل دو نفر در یک هفته معین از سال به دنیا آمده‌اند.
۴) حداقل ۵۷ نفر در روز شنبه به‌دنیا آمده‌اند.

۲ ـ کدام یک از گزاره‌های زیر «قضیه دوشرطی» است؟

۱) اگر $x=y$ آنگاه، $x^2=y^2$
۲) اگر $x=y$ آنگاه، $\sin x=\sin y$
۳) اگر تعداد زیرمجموعه‌های ۲عضوی مجموعه‌ای ۲۸ باشد، آنگاه آن مجموعه ۸ عضو دارد.
۴) اگر $x=1$ آنگاه، $x^2=1$

۳ ـ اگر A و B دو مجموعه جدا ازهم باشند، $A\Delta B$ کدام است؟

۱) $\varnothing$ ۲) $A\cup B$ ۳) $A-B$ ۴) M

۴ ـ کدام گزینه نادرست است؟

۱) $a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow a^n\overset{m}{\equiv}b^n$
۲) $a\overset{m}{\equiv}b, b\overset{m}{\equiv}c\Rightarrow a\overset{m}{\equiv}c$
۳) $a\overset{m}{\equiv}b, c\overset{m}{\equiv}d\Rightarrow ac\overset{m}{\equiv}bd$
۴) $ac\overset{m}{\equiv}bc\Rightarrow a\overset{m}{\equiv}b$

۵ ـ روی ده کارت شماره‌های ۱ تا ۱۰ را می‌نویسیم و آنها را در کیسه‌ای می‌ریزیم. سپس دو کارت را به تصادف و یکی پس از دیگری و بدون جایگذاری مجدد از کیسه خارج می‌کنیم. احتمال آن که مجموع عددهای روی دو کارت فرد باشد کدام است؟

۱) $\frac{5}{9}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{5}{18}$ ۴) $\frac{2}{9}$

۶ ـ کیسه‌ای حاوی ۵ مهره قرمز و ۴ مهره سبز است. یک مهره را به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم و پس از مشاهدهٔ رنگ آن، به کیسه برمی‌گردانیم و سپس مهرهٔ دیگری از کیسه خارج می‌کنیم. احتمال آن که هردو مهره سبز باشند چقدر است؟

۱) $\frac{6}{8}$ ۲) $\frac{16}{81}$ ۳) $\frac{4}{5}$ ۴) $\frac{8}{9}$

۷ ـ یک تاس طوری ساخته شده که احتمال وقوع هر عدد متناسب با همان عدد است، احتمال عدد ۳ کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{7}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{9}$

۸ ـ به طرف دو دایرهٔ هم‌مرکز به شعاعهای ۵ و ۲ تیراندازی می‌شود. احتمال آن که تیر به دایرهٔ بزرگتر اصابت کند و به دایره کوچکتر اصابت نکند کدام است؟ (تیر همواره به دایرهٔ بزرگ اصابت می‌کند.)

۱) $\frac{20}{25}$ ۲) $\frac{4}{25}$ ۳) $\frac{21}{25}$ ۴) $\frac{22}{25}$

۹ ـ نقطه $A\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ را به تصادف از سطح مربع $M=\{(x,y)|0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$ انتخاب می‌کنیم احتمال این‌که $x\le y\le 1-x$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{5}$

۱۰ ـ صورت قطبی عدد مختلط $Z=2+2\sqrt{3}i$ کدام است؟

۱) $4(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$ ۲) $4(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$
۳) $2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$ ۴) $2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$

ریاضی گسسته پیش‌دانشگاهی

● حمیدرضا امیری

۱ ـ کدام گزینه نادرست است؟

۱) تعداد رأسهای فرد، در هر گراف، بر ۲ بخش‌پذیر است.
۲) در هر گراف از مرتبهٔ p و اندازه q همواره $0\le q\le\frac{p(p-1)}{2}$
۳) تعداد رأسهای زوج در هر گراف، زوج است.
۴) مجموع درجه‌های رأسهای هر گراف دو برابر اندازه گراف است.

۲ ـ گراف G، ۳ رأس از درجه ۴ و ۲ رأس از درجه ۳ دارد. اگر این گراف از مرتبهٔ ۵ باشد اندازهٔ G کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۲ ۳) ۶ ۴) ۹

۳ ـ اگر گراف G، ۴ـ منتظم باشد و $q=3p-2$، کدام گزینه درست است؟

۱) $q=4$ ، $p=2$
۲) $q=7$ ، $p=3$
۳) $q=10$ ، $p=4$
۴) $q=13$ ، $p=5$

۴ ـ اگر M ماتریس مجاورت گراف kp باشد و هر درایهٔ روی قطر اصلی M^2 برابر ۵ باشد، تعداد یالهای گراف، کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۳۰ ۳) ۲۵ ۴) ۳۶

۵ ـ کدام گزینه نادرست است؟

۱) عضو ابتدای هر مجموعه، در صورت وجود، بزرگترین کران پایین است.
۲) عضو انتهای هر مجموعه، در صورت وجود، کوچکترین کران بالا است.
۳) هر زیرمجموعه Z که از بالا کراندار باشد، عضو انتها دارد.
۴) اگر $A\subseteq R$ و از پایین کراندار نباشد، عضو ابتدا ندارد.

۶ ـ اگر باقیماندهٔ تقسیم عدد k بر ۱۷ برابر ۱۵ باشد باقیمانده تقسیم عدد $3k-1$ بر ۱۷ کدام است؟

۱) ۴۴ ۲) ۳۱ ۳) ۰ ۴) ۱۰

۷ ـ اگر $(a,b)=1$ و $(a-2b, 3a-b)=d$ در این صورت d کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۲

۸ ـ اگر دوعدد $(2a+7)$ و $(2-3a)$ رقم یکان مساوی داشته باشند، رقم یکان $(2a+5)$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۴ ۴) ۳

۹ ـ اگر $a=7k+5$ و $b=7k'-2$ در این صورت دستهٔ هم نهشتی $[a+2b]$ به پیمانه ۷ کدام است؟

۱) $[1]$ ۲) $[-4]$ ۳) $[5]$ ۴) $[6]$

۱۰ ـ معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4=27$ چند جواب صحیح با شرط $x_3>4$ دارد؟

۱) $\binom{24}{5}$ ۲) $\binom{25}{4}$ ۳) $\binom{24}{3}$ ۴) $\binom{25}{3}$

۱۱ ـ چند تابع پوشا از مجموعهٔ $A=\{1,2,3,4,5\}$ به روی مجموعهٔ $B=\{1,2\}$ وجود دارد؟ (دامنه همهٔ توابع را A بگیرید.)

۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۱۵ ۴) ۱۰

۱۲ ـ روی مجموعهٔ $A=\{1,2,3,4,5\}$ چند رابطه می‌توان تعریف کرد که پاد متقارن و متقارن باشند؟

۱) ۶۴ ۲) ۳۲ ۳) ۱۶ ۴) ۱۰

۱۳ ـ ماتریس یک رابطهٔ R به صورت $M=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ است. R کدام یک از خواص زیر را داراست؟

۱) بازتابی و پاد متقارن است.
۲) بازتابی و ترایایی است.
۳) متقارن و ترایایی است.
۴) پاد متقارن و ترایایی است.

۱۴ ـ جمله n ام یک دنباله عبارت است از $a_n=3n+1$ این دنباله در کدام یک از رابطه‌های بازگشتی زیر صدق می‌کند؟

۱) $a_n=3a_{n-1}-1$ ۲) $a_n=3a_{n-1}+1$
۳) $a_n=a_{n-1}+2$ ۴) $a_n=a_{n-1}+3$

۱۵ ـ کیسه‌ای شامل ۱۰ مهرهٔ سفید، ۵ مهرهٔ قرمز و ۱۰ مهرهٔ سیاه است. یک مهره به تصادف از این کیسه بیرون می‌کشیم و مشاهده می‌کنیم که سیاه نیست، احتمال این که این مهره قرمز باشد چقدر است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{15}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{2}{15}$

۱۶ ـ در کیسه‌ای ۳ مهرهٔ سفید و ۴ مهرهٔ سیاه است. مهره‌ها را یکی پس از دیگری از کیسه بیرون آورده و کنار هم ردیف می‌کنیم. احتمال اینکه مهره‌ها یک‌درمیان سفید و سیاه باشند، چقدر است؟

۱) $\frac{1}{35}$ ۲) $\frac{1}{12}$ ۳) $\frac{1}{70}$ ۴) $\frac{1}{81}$

۱۷ ـ در یک کلاس ریاضی در دانشکده‌ای ۱۵ عیالوار، ۳۰ مرد مجرد و ۲۰ خانم مجرد وجود دارد. از عیالوارها ۵ نفر و از مردان مجرد نیز ۵ نفر و از خانم‌های مجرد ۲ نفر، نمره بیست می‌گیرند. یک نفر را به تصادف انتخاب می‌کنیم، مشاهده می‌کنیم که نمره او بیست است. احتمال اینکه او عیالوار باشد چقدر است؟

۱) $\frac{5}{11}$ ۲) $\frac{3}{12}$ ۳) $\frac{24}{25}$ ۴) $\frac{5}{12}$

۱۸ ـ اگر متغیر تصادفی x دارای توزیع احتمالی به صورت $f_x(x)=a(\frac{1}{3})^x$ به ازای $x=0,1,2,\dots$ باشد، عدد حقیقی a کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{3}{8}$

۱۹ ـ اگر امید ریاضی جدول توزیع متغیر تصادفی زیر برابر ۳ باشد، $a-b$ کدام است؟

x_i	۱	۳	۴	۵
p_i	a	۰/۱	b	۰/۳

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۳ ۳) −۱ ۴) ۰

جبر خطی پیش دانشگاهی

● حمیدرضا امیری

۱ ـ همسازهٔ سطر سوم ستون دوم ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&-1&2\\3&1&4\\1&0&2\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۲ ۳) −۲ ۴) −۸

۲ ـ اگر A ماتریس ۳×۳ و وارون‌پذیر باشد در این صورت حاصل $\left|\frac{3}{|A|}A\right|$ کدام است؟

۱) $\frac{9}{|A|}$ ۲) $\frac{9}{|A|^2}$ ۳) $\frac{27}{|A|^2}$ ۴) $\frac{27}{|A|^3}$

۳ ـ اگر $A=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1&-1&0\end{bmatrix}$ در این صورت حاصل AB کدام است؟

۱) تعریف نمی‌شود

۲) $\begin{bmatrix}1&-1&0\\2&-2&0\\-1&1&0\end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&-2&2\\-1&1&-1\end{bmatrix}$

۴) $[-1]$

۴ ـ به ازای چه مقدار m مجموعه $H=\{(x,y)|2x+6y+(2m-1)=0\}$ یک زیر فضای برداری $\mathbb{R}^2$ است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۵ ـ ماتریس نگاشت خطی $f(x_1,x_2)=(2x_2,x_1+x_2,4x_1)$ از $\mathbb{R}^2$ به $\mathbb{R}^3$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}0&2\\1&1\\4&0\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}2&0\\1&1\\0&4\end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix}2&0&1\\0&1&4\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}0&1&4\\2&1&0\end{bmatrix}$

۶ ـ ماتریس $A=\begin{bmatrix}2&0\\-1&1\\1&4\end{bmatrix}$ ماتریس یک نگاشت خطی f است، بعد هستهٔ f کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۷ ـ اگر $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ یک نگاشت خطی باشد $f^{-1}(2,2,2)=\{(x,y)|y=3x-1\}$ در این صورت $f^{-1}(0,0,0)$ کدام است؟

۱) خط به معادلهٔ $x=0$
۲) خط به معادلهٔ $y=-\frac{1}{3}x-1$
۳) خط به معادلهٔ $y=-\frac{1}{3}x+1$
۴) خط به معادله $y=3x$

۸ ـ تبدیل یافته منحنی $x^2-y^2=1$ تحت ماتریس $\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $x^2-y^2=1$ ۲) $y^2-x^2=1$
۳) $x^2+y^2=1$ ۴) $y^2-x^2=-1$

۹ ـ اگر λ_1 و λ_2 مقادیر ویژه ماتریس $A=\begin{bmatrix}2&0\\4&-1\end{bmatrix}$ باشند در این صورت $\lambda_1^2+\lambda_2^2$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۱۰

۱۰ ـ ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$ نقطه x را به x' تبدیل می‌کند، کدام یک از ماتریسهای زیر x' را به x تبدیل می‌کند؟

۱) $\begin{bmatrix}4&-2\\-3&1\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}4&2\\3&1\end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&1\\\frac{3}{2}&-2\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

۱۱ ـ ماتریس نگاشت $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ عبارت است از $\begin{bmatrix}2&1\\3&-2\end{bmatrix}$ این نگاشت:

۱) فقط یک به یک است.
۲) نه یک به یک و نه پوشا است.
۳) یک به یک و پوشا است.
۴) فقط پوشا است.

هندسهٔ تحلیلی رشتهٔ ریاضی‌فیزیک پیش‌دانشگاهی

● محمدهاشم رستمی

۱ ـ اگر بردارهای $a=(m-1,2p+5,m+n)$ و $b=(3,m+p-1,4)$ مساوی باشند، $m+n+p$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲ ـ اگر $a=(m,2,m)$ باشد، به ازای کدام مقدار m، اندازهٔ بردار a برابر $3\sqrt{6}$ است؟

۱) ± 3 ۲) ± 4 ۳) ± 5 ۴) ± 6

۳ ـ زاویهٔ بردار $a=(2,-2,1)$ با محور xها کدام است؟

۱) $\mathrm{Arctg}\frac{2}{3}$ ۲) 60°
۳) $\mathrm{Arccos}\frac{1}{3}$ ۴) $\mathrm{Arccos}\frac{2}{3}$

۴ ـ اگر دو بردار $V_1=(m,2,m-5)$ و $V_2=(2,m+1,-2)$ بر هم عمود باشند $|\vec{V_2}|$ چقدر است؟

۱) $\sqrt{33}$ ۲) $\sqrt{23}$ ۳) $\sqrt{35}$ ۴) $\sqrt{37}$

۵ ـ قرینهٔ بردار $a=(1,2,-3)$ نسبت به راستای $b=(4,-2,3)$ کدام است؟

۱) $(\frac{-101}{29},\frac{-22}{29},\frac{33}{29})$ ۲) $(\frac{-91}{29},\frac{11}{29},\frac{-33}{29})$
۳) $(\frac{101}{29},\frac{22}{29},\frac{-33}{29})$ ۴) $(\frac{22}{19},\frac{11}{19},\frac{33}{19})$

۶ ـ اگر $a=(1,0,2)$ و $b=(-2,1,2)$ باشد، اندازهٔ جبری تصویر بردار $a\times b$ روی محور zها کدام است؟

۱) −۱ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) −۲

۷ ـ معادلهٔ خطی که از نقطهٔ $A=(1,1,2)$ به موازات خط

$D:\begin{cases}x=t-1\\y=2t\\z=4\end{cases}$ رسم می‌شود کدام است؟

۱) $\begin{cases}\frac{x}{2}=y+1\\z=2\end{cases}$
۲) $\begin{cases}x=\frac{y+1}{2}\\z=4\end{cases}$
۳) $\begin{cases}x=\frac{y+1}{2}\\z=2\end{cases}$
۴) $\begin{cases}\frac{x}{2}=y\\z=4\end{cases}$

۸ـ فاصلهٔ نقطهٔ $M(0,1,2)$ از خط $D:2x-1=y=4-z$ چقدر است؟

۱) $\frac{\sqrt{37}}{3}$ ۲) $\frac{\sqrt{34}}{4}$ ۳) $\frac{\sqrt{17}}{3}$ ۴) $\frac{\sqrt{34}}{2}$

۹ـ زاویهٔ بین خط $D:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+2}{5}$ و صفحهٔ $P:2x-3y+z-2=0$ چند درجه است؟

۱) ۰ ۲) ۴۵ ۳) ۶۰ ۴) ۹۰

۱۰ـ معادلهٔ صفحه‌ای که در نقطه‌ای به طول ۲ از خط $D:\begin{cases}x=t-1\\y=t+3\\z=-2t+1\end{cases}$ براین خط عمود می‌شود کدام است؟

۱) $x+2y-z=18$ ۲) $x-y-2z=18$
۳) $x+y+2z=18$ ۴) $x+y-2z=18$

دیفرانسیل و انتگرال ۱ پیش‌دانشگاهی

● احمد قندهاری

۱ـ معادله $\left|x^2-7x+6\right|=-x^2+7x-6$ وقتی $x\in z$، چند ریشه حقیقی متمایز دارد؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) بی شمار

۲ـ در دنباله $a_n=\begin{cases}k & , n=2k-1\\ \frac{1}{k+1} & , n=2k\end{cases}$، مجموع دو جمله هفتم و هشتم برابر کدام است؟

۱) $\frac{17}{5}$ ۲) $\frac{19}{5}$ ۳) $\frac{21}{5}$ ۴) $\frac{23}{5}$

۳ـ کدام یک از سری‌های زیر همگرا می‌باشند؟

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}$ ۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+n}$ ۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2+n}$

۴ـ $\lim\frac{5}{30+4^{\operatorname{tg}x}}$ وقتی $x\to\frac{\pi}{2}^+$ برابر است با:

۱) صفر ۲) $+\infty$ ۳) ۶ ۴) $\frac{1}{6}$

۵ـ $\lim\frac{(4e)^n+(8e)^n}{(3e)^n+(10e)^n}$ وقتی $n\to+\infty$ کدام است؟

۱) $2e$ ۲) $\frac{1}{2}e$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) صفر

۶ـ اگر $0<x\le 1$ و $f(x)=\sqrt{1-x}$، در این صورت $f(\operatorname{cotg}x)$ در کدام یک از بازه‌های زیر پیوسته است؟

۱) $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ ۲) $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$
۳) $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ ۴) $\left[\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right]$

۷ـ اگر برای هر عدد حقیقی x و y داشته باشیم $f(x+y)=f(x).f(y)$ و تابع f در R مشتق‌پذیر باشد، چنانچه $f(3)=1$، $f(0)=1$، $f'(0)=3$ آنگاه $f'(3)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) صفر

۸ـ تابع f به معادله $f(x)=\sqrt{(x-4)^2(x-1)}$ در نقطه $x_0=4$

۱) مشتق‌پذیر است. ۲) فقط مشتق راست دارد.
۳) فقط مشتق چپ دارد. ۴) مشتق‌پذیر نیست.

۹ـ حجم یک مکعب که طول ضلع آن x سانتی‌متر است برابر V می باشد. آهنگ متوسط تغییر حجم در هر سانتی‌متر تغییر طول ضلع آن وقتی x از ۲ تا ۲/۲ تغییر می کند کدام است؟

۱) ۱۲/۲۴ ۲) ۱۳/۲۴ ۳) ۱۴/۲۴ ۴) ۱۵/۲۴

۱۰ـ یک شرکت تولیدی رنگ، در روز $C(x)=0/2x^2+4x+5000$ تومان برای تولید (x) قوطی رنگ هزینه می‌کند. هزینه تولید (۵۰۱) امین قوطی رنگ چقدر است؟

۱) ۱۰۴ تومان ۲) ۲۰۴ تومان
۳) ۳۰۴ تومان ۴) ۴۰۴ تومان

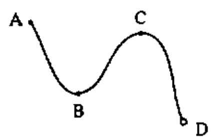
دیفرانسیل و انتگرال ۲ پیش‌دانشگاهی

● احمد قندهاری

۱ـ تابع f به معادله $f(x)=x^{\frac{6}{5}}+6x^{\frac{1}{5}}$ مفروض است، اعداد بحرانی این تابع کدام است؟

۱) $\{0,2\}$ ۲) $\{1,-1\}$ ۳) $\{0,1\}$ ۴) $\{0,-1\}$

۲ـ کدام گزاره برای نمودار زیر درست است.



۱) نقطه A ماکزیمم مطلق و نقاط B و C، اکسترمم نسبی و نقطه D می‌نیمم مطلق است.
۲) نقطه C هم ماکزیمم مطلق است و هم ماکزیمم نسبی.
۳) نقطه A ماکزیمم مطلق و نقاط B و C اکسترمم نسبی‌اند.
۴) نقطه A ماکزیمم مطلق و نسبی و نقطه D می‌نیمم نسبی است.

۳ـ کدام یک از گزاره‌های زیر درست است.

۱) اگر نقطه A اکسترمم نسبی یک تابع باشد، آنگاه $f'(x_A)=0$
۲) اگر $f'(x_A)=C\neq 0$، آن‌گاه نقطه A اکسترمم نسبی است.
۳) اگر $f'(x_A)=0$، آن‌گاه نقطه A اکسترمم نسبی است.
۴) نقطه A اکسترمم نسبی است اگر $f'(x_A)=0$ یا $f'(x_A)$ وجود نداشته باشند.

۴ـ منحنی تابع به معادله $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x}$ مفروض است، کدام گزینه درست است؟

۱) دو نقطه عطف و یک اکسترمم دارد.
۲) سه نقطه عطف و دو اکسترمم دارد.
۳) سه نقطه عطف دارد ولی اکسترمم نسبی ندارد.
۴) سه اکسترمم و دو عطف دارد.

۵ـ کدام یک از روابط زیر ریشه تقریبی معادله $f(x)=0$ را به روش نیوتن معلوم می‌کند؟

۱) $x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ ۲) $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
۳) $x_n=x_{n-1}-\frac{f'(x_n)}{f(x_n)}$ ۴) $x_{n+1}=x_n-\frac{f'(x_n)}{f(x_n)}$

۶ـ $\lim_{x\to b}\frac{\sin x-\sin b+\sin(x-b)}{\cos x-\cos b}$ برابر است با:

۱) $\operatorname{tg}\frac{b}{2}$ ۲) $-\operatorname{tg}\frac{b}{2}$ ۳) $\operatorname{cotg}\frac{b}{2}$ ۴) $-\operatorname{cotg}\frac{b}{2}$

۷ـ اگر $a<b<c<d$ و $a,b,c,d\in R$ و دو به دو مخالف یکدیگر باشند منحنی تابع به معادله $y=(x-a)(x-b)(x-c)^2(x-d)^3$ دقیقاً چه اکسترمم‌هایی دارد؟

۱) یک ماکزیمم نسبی و دو می‌نیمم نسبی دارد.
۲) دو ماکزیمم نسبی و یک می‌نیمم نسبی دارد.
۳) دو ماکزیمم نسبی و دو می‌نیمم نسبی دارد.
۴) دو ماکزیمم نسبی و سه می‌نیمم نسبی دارد.

۸ـ حاصل $\int \operatorname{Arctg}x\,dx$ کدام است؟

۱) $x\operatorname{Arctg}x+\frac{1}{2}\operatorname{Ln}(1+x^2)+c$
۲) $x\operatorname{Arctg}x-\frac{1}{2}\operatorname{Ln}(1+x^2)+c$
۳) $x\operatorname{Arccotg}x+\frac{1}{2}\operatorname{Ln}(1+x^2)+c$
۴) $x\operatorname{Arccotg}x-\frac{1}{2}\operatorname{Ln}(1+x^2)+c$

۹ـ حاصل $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{\sin(\operatorname{Arctg}x)}+c$ ۲) $\frac{1}{\sin(\operatorname{Arctg}x)}+c$
۳) $\frac{-1}{\cos(\operatorname{Arctg}x)}+c$ ۴) $\frac{1}{\cos(\operatorname{Arctg}x)}+c$

۱۰ـ حاصل $\int\frac{dx}{1+\sin x}$ کدام است؟

۱) $\operatorname{tg}x+\frac{1}{\cos x}+c$ ۲) $\operatorname{tg}x+\frac{1}{\sin x}+c$
۳) $\operatorname{tg}x-\frac{1}{\cos x}+c$ ۴) $\operatorname{tg}x-\frac{1}{\sin x}+c$

ریاضی عمومی ۱ پیش‌دانشگاهی (رشتهٔ تجربی)

۱ـ اگر $u_n=(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n+(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$ که در آن $n=1,2,3,\cdots$ آنگاه $\lim_{k\to\infty}\frac{u_{k+1}}{u_k}$ برابر است با:

(آ) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (ب) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (ج) ۱ (د) $+\infty$

۲ـ اگر $u_n=(\frac{1+\sqrt{3}}{2})^n+(\frac{1-\sqrt{3}}{2})^n$ که در آن $n=1,2,3,\cdots$ آنگاه u_{2k} برابر است با:

(آ) $\left[(\frac{1+\sqrt{3}}{2})^{2k}\right]$ (ب) $\left[(\frac{1+\sqrt{3}}{2})^{2k}\right]+1$
(ج) $\left[(\frac{1+\sqrt{3}}{2})^{2k}\right]-1$ (د) هیچکدام

۳ـ اگر n یک عدد طبیعی باشد آنگاه $\left[\sqrt[4]{n^4+4n^3+6n^2+4n}\right]$ برابر است با:

(آ) $n+1$ (ب) n

(ج) $n-1$ (د) هیچکدام

۴ـ فرض می‌کنیم $u_n=\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$ که در آن $n=1,2,3,\cdots$ آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ برابر است با:

(آ) e (ب) $\frac{1}{e}$

(ج) 0 (د) $+\infty$

۵ـ اگر $\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}^{16}=\begin{pmatrix}610&987\\987&1597\end{pmatrix}$ آنگاه $\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}^{8}$ برابر است با:

(آ) $\begin{pmatrix}13&21\\21&34\end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix}21&34\\13&21\end{pmatrix}$

(ج) $\begin{pmatrix}21&13\\34&21\end{pmatrix}$ (د) هیچکدام

۶ـ اگر $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$ آنگاه A^2-A-I_2 که در آن $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ برابر است با:

(آ) A (ب) A^2

(ج) $\left(\underset{2\times 2}{0}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right)$ (د) هیچکدام

۷ـ منحنی نمایش تابع $y=\frac{\pi}{2}x-x\cos^{-1}x$ در مبدأ مختصات

(آ) برمحور xها مماس است

(ب) با محور xها زاویه 45° می‌سازد

(ج) بر محور yها مماس است

(د) هیچکدام

۸ـ فرض می‌کنیم $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ که در آن ضرایب $a_0, a_1, \ldots, a_n$ اعداد ثابت هستند، آنگاه $y^{(n)}$ برابر است با:

(آ) 0 (ب) $n!a_0$

(ج) $\frac{a_0}{n!}$ (د) هیچکدام

۹ـ مکان هندسی نقاطی از صفحه که حاصلضرب فواصلشان از دو خطّ متقاطع این صفحه ثابت است.

(آ) یک بیضی است (ب) یک سهمی است

(ج) یک هذلولی است (د) یک دایره است

۱۰ـ مکان هندسی مراکز دسته دوایری که از یک نقطهٔ ثابت می‌گذرند و بر یک خطّ ثابت مماس هستند

(ا) یک بیضی است (ب) یک هذلولی است

(ج) یک سهمی است (د) یک دایره است

۱۱ـ منحنی مسطح(C) به معادله $y=e^x+e^{-x}$ مفروض، است که در آن $-5\le x\le 5$، حجم حاصل از دوران این منحنی حول محور xها برابر است با:

(آ) $\pi(e^{10}-e^{-10}+20)$ (ب) $\pi(e^{10}-e^{-10}+10)$

(ج) $\pi(e^{10}-e^{-10})$ (د) $\pi(e^{10}-e^{-10}-20)$

۱۲ـ (C) یک منحنی مسطح است که معادلات آن $x=\sin^2 t$ ، $y=\cos^{10} t$ می‌باشد که در آن $0\le t\le\frac{\pi}{2}$، مساحت محصور بین این منحنی محور xها و دو خطّ مستقیم $x=0$ و $x=1$ برابر است با:

(آ) $\frac{\pi}{2}$ (ب) $\frac{1}{12}$

(ج) $\frac{1}{6}$ (د) π

۱۳ـ اگر A و B مستقل باشند و $P(A)=0/3$ و $P(B)=0/6$ ، $P(A-B)$ کدام است؟

(الف) ۰/۱۲

(ب) ۰/۸

(ج) ۰/۴

(د) ۰/۲

۱۴ـ اگر در یک نمونه‌گیری داده‌ها را در عددی مانند a ضرب کنیم نمودار دایره‌ای چه تغییری می کند؟

(آ) بزرگتر می‌شود

(ب) تغییر نمی‌کند

(ج) کوچکتر می‌شود

(د) بعضی از زاویه‌ها بزرگتر و برخی کوچکتر می‌شوند.

۱۵ـ ظرفی شامل a مهره است. مهره‌ای از آن خارج کرده پس از علامت گذاشتن روی آن، آن را در داخل ظرف قرار داده و سپس یک مهره به تصادف خارج می‌کنیم احتمال آنکه همان مهره خارج شود کدام است؟

(آ) $\frac{1}{a^2}$ (ب) $\frac{1}{a(a-1)}$

(ج) $\frac{1}{a}$ (د) $\frac{1}{a-1}$

ریاضی عمومی ۲ پیش دانشگاهی

• میرشهرام صدر

۱ـ معادله خط مماس برمنحنی $e^x+e^y-x^2-y^2-e=0$ در نقطه $A(1,0)$ کدام است؟

۱) $y+e^x=3x+e-3$ ۲) $y-e^x=3x+e+3$

۳) $y+e^x=3x-e+3$ ۴) $y+e^x=-3x+e+3$

۲ـ توابع f و g با ضابطه‌های

$f(x)=\log(\sqrt{4x^2+5}-2x)$

و $g(x)=\log(\sqrt{4x^2+5}+2x)$

موجود هستند، کدام یک از رابطه‌های زیر بین $f'(x)$ و $g'(x)$ همواره برقرار است؟

۱) $f'(x)=g'(x)$ ۲) $f'(x)+g'(x)=\log 4$

۳) $f'(x)\times g'(x)=0$ ۴) $f'(x)=-g'(x)$

۳ـ هرگاه شعاع یک کره با خطای ممکن ۰/۰۱ سانتیمتر برابر ۱۰ سانتیمتر است، خطای ماکزیمم ممکن در حجم و سطح کره به ترتیب برابر است با:

۱) 4π , $0/8\pi$

۲) $\pm 4\pi$, $\pm 0/8\pi$

۳) 8π , $1/6\pi$

۴) $\pm 8\pi$, $\pm 16\pi$

۴ـ فرض کنید تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر و x_1 و x_2 که $x_1<x_2$ نقاط بحرانی f باشند، در این صورت کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) اگر $f''(x_1)f''(x_2)>0$ ، آنگاه f بین x_1 و x_2 نقطه بحرانی دیگری دارد.

۲) اگر $f''(x_1)f''(x_2)<0$ ، آنگاه f بین x_1 و x_2 نقطه بحرانی دیگری دارد.

۳) اگر $f''(x_1)f''(x_2)=0$ ، آنگاه نمودار f یک نقطه عطف دارد.

۴) اگر $f''(x_1)=f''(x_2)$ ، آنگاه f بین x_1 و x_2 نقطه بحرانی دیگری دارد.

۵ـ کمترین فاصله مبدأ مختصات از تابع با ضابطه $y=x^2-1$ ، کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) 1

۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

۶ـ منحنی با ضابطه

$3x^2(x-1)+2xy(x+1)+y^2(x^2-1)=0$

دارای چند مجانب قائم و افقی است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۷ـ اگر $f(x)=[2x+1]$ در این صورت $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ کدام گزینه است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 2

۳) $\frac{5}{2}$ ۴) 4

۸ـ مساحت ناحیه محدود به $y=\frac{\sqrt{2\tan x}}{\cos x}$ و محور xها و دو خط $x=0$ و $x=\frac{\pi}{4}$ را حول محور xها دوران کامل می‌دهیم، حجم حاصل از این دوران کدام است؟

۱) π ۲) 4π

۳) 2π ۴) 3π

۹ـ زاویه بین دو دایره $C_1:x^2+y^2-2x-2y=0$ و $C_2:x^2+y^2+4x-4y=0$ کدام گزینه است؟

۱) $\frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{\pi}{6}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{4}$

۱۰ـ بیضی H به معادله $5x^2+8y^2=40$ مفروض است. معادله بیضی دیگری که طول قطر کوچک آن برابر با فاصله کانونی بیضی H بوده و مرکز آن بر مرکز H منطبق و قطر بزرگ آن همان قطر کوچک H باشد، کدام است؟

۱) $3x^2+5y^2=15$ ۲) $3x^2+8y^2=24$

۳) $5x^2+3y^2=15$ ۴) $8x^2+3y^2=24$

ریاضی پایه پیش‌دانشگاهی

• میرشهرام صدر

۱ـ هرگاه $z>u+a$ و $x+a\ge y$ و $y=z$ ، کدام گزینه درست است؟

۱) $x>u$ ۲) $x\ge u$

۳) $x=u$ ۴) u

۲ـ نسبت مجموع n عدد طبیعی نخست متوالی، به مجموع n عدد زوج طبیعی نخست متوالی، کدام گزینه است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) ۱

۳ـ اگر جمله عمومی دنباله‌ای $a_n=\frac{4^{3n}}{4}$ باشد، 2^{76} جملهٔ چندم آن است؟

۱) هشتم ۲) دهم ۳) یازدهم ۴) سیزدهم

۴ـ جواب معادله $\log_2(\log_3(\log x))=0$ کدام گزینه است؟

۱) $x=10$ ۲) $x=100$
۳) $x=1000$ ۴) $x=10000$

۵ـ شدت زلزله سال ۱۳۶۹ رودبار ۷/۲ الی ۷/۶ ریشتر گزارش شد. مقدار تقریبی انرژی آزاد شده برحسب ژول حداقل کدام است؟

۱) $E=10^{13/7}$ ۲) $E=10^{14/7}$
۳) $E=10^{15/3}$ ۴) $E=10^{15/7}$

۶ـ استخری حداکثر ظرفیت ۲۰۰۰۰ عدد ماهی را دارد، اگر تعداد ماهیها در حال حاضر ۲۰۰۰ باشد و آهنگ رشد تعداد آنها ۲٪ در سال باشد، بعد از چند سال تعداد ماهیها به ۲۰۰۰۰ می‌رسد؟

۱) $\frac{1}{\log 1/02}$ ۲) $\log_{1/02}^{200}$ ۳) $\log_{1/02}^{18000}$ ۴) $\log_{1/02}^{100}$

۷ـ یک کارگاه عروسک‌سازی می‌تواند هریک از عروسکهای خود را ۲۰۰ تومان بفروشد، اگر در هر روز x واحد عروسک تولید کند و به فروش برساند، معادله هزینه آن $c(x)=x^2+40x+1000$ است، چند عروسک در روز تولید کند تا بیشترین سود را داشته باشد؟

۱) ۶۰ ۲) ۷۰ ۳) ۸۰ ۴) ۹۰

۸ـ سکه‌ای در پرتاب طوری سنگینی می‌کند که احتمال آمدن «رو» برای آن دو برابر «پشت» است، احتمال وقوع هردوبار «رو» در دوبار پرتاب سکه کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{2}{9}$ ۴) $\frac{4}{9}$

۹ـ فرض کنیم S فضای نمونه یک آزمایش و A و B دو پیشامد ناتهی در S باشند، اگر $P(A)=\frac{3}{8}$ و $P(B)=\frac{1}{2}$ و $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$، در این صورت $P(A'\cap B')$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{5}{8}$ ۳) $\frac{7}{8}$ ۴) $\frac{3}{8}$

۱۰ـ جمله ششم در بسط $(2x^3+y^2)^7$ کدام است؟

۱) $84x^6y^{10}$ ۲) $84x^{10}y^6$ ۳) $84x^8y^8$ ۴) $84x^4y^{12}$

پاسخ تشریحی پرسشهای چهارگزینه‌ای

پاسخ تشریحی پرسشهای هندسهٔ ۱

۱ ـ گزینهٔ (۳) درست است.

۲ ـ گزینهٔ (۱) درست است. زیرا مساحت شش ضلعی منتظم به ضلع a برابر است با $\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$ پس داریم:

$$\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}=54\sqrt{3}\Rightarrow a^2=36\Rightarrow a=6$$

امّا بزرگترین قطر در شش ضلعی منتظم به ضلع a، برابر $2a$ است. پس $d=2a=2\times 6=12$

۳ ـ گزینهٔ (۴) درست است. از تشابه دو مثلث ADE و ABC داریم:

$$\frac{AE}{AB}=\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AC}\Rightarrow\frac{x}{40}=\frac{8}{20}\Rightarrow x=16$$

۴ ـ گزینهٔ (۲) درست است. زیرا نسبت مساحت دو مثلث متشابه برابر مجذور نسبت تشابه و نسبت محیطها، برابر نسبت تشابه است. پس

$$K^2=\frac{S}{S'}=\frac{16}{64}=\frac{1}{4}\Rightarrow K=\frac{1}{2},\ \frac{2P}{2P'}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\frac{2(\sqrt{26}+\sqrt{10}+8)}{2P'}=\frac{1}{2}\Rightarrow 2P'=4(\sqrt{26}+\sqrt{10}+8)$$

۵ ـ گزینهٔ (۴) درست است. زیرا اگر یال مکعب را a فرض کنیم، داریم:

$$a\sqrt{3}=2\sqrt{3}\Rightarrow a=2\Rightarrow \text{حجم مکعب}=a^3=2^3=8$$

۶ ـ گزینهٔ (۱) درست است. ابعاد مکعب را $2k$، $3k$ و $4k$ فرض می‌کنیم مساحت کل این مکعب برابر است با:

$$2(2k+3k)(4k)+2(3k\times 2k)=52k^2$$

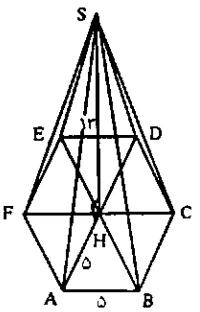
$$\Rightarrow 52k^2=208\Rightarrow k^2=4\Rightarrow k=2$$

$$\Rightarrow \text{ابعاد مکعب مستطیل}=4,\ 6,\ 8$$

$$\Rightarrow \text{حجم مکعب مستطیل}=4\times 6\times 8=192\,cm^3$$

۷ ـ گزینهٔ (۳) درست است. زیرا به‌دلیل مساوی بودن ارتفاع دو استوانه سطح جانبی آنها به نسبت شعاعهای دو قاعدهٔ آنهاست و این نسبت در داده‌های مسأله تنها $\frac{3}{5}$ است.

۸ ـ گزینهٔ (۴) درست است. زیرا قاعدهٔ هرم منتظم، شش ضلعی منتظم است. با معلوم بودن اندازهٔ یال و شعاع ۶ ضلعی منتظم، اندازهٔ ارتفاع هرم برابر است با:



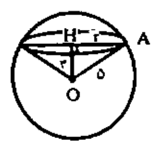
$$SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=\sqrt{169-25}=12 \quad \text{ارتفاع هرم}$$

$$\text{قاعده }S=\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}=\frac{3\sqrt{3}\times 5^2}{2}=\frac{75\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{حجم}=\frac{1}{3}\text{ سطح قاعده}\times\text{ارتفاع}=\frac{1}{3}\times\frac{75\sqrt{3}}{2}\times 12$$

$$\Rightarrow \text{حجم هرم}=150\sqrt{3}$$

۹ ـ مقطع دایره‌ای به شعاع ۴ سانتی‌متر است. زیرا در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHA داریم:



$$AH=\sqrt{OA^2-OH^2}=\sqrt{25-9}=4=r$$

ارتفاع مخروط موردنظر برابر ۳ سانتی‌متر است. پس:

$$\text{حجم هرم}=\frac{1}{3}\text{مساحت قاعده}\times\text{ارتفاع}=\frac{1}{3}\times(16\pi)\times 3=16\pi$$

پس گزینه (۲) درست است.

۱۰ ـ گزینه (۴) درست است. زیرا داریم:

$$\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{1}{2}\times 4\pi R^2\Rightarrow R=\frac{3}{2}\Rightarrow V=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{9\pi}{2}$$

پاسخ تشریحی پرسشهای هندسهٔ ۲

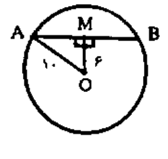
۱ ـ گزینه (۲) درست است. زیرا اگر ضلع سوم مثلث را a بنامیم، حدود a به‌صورت زیر است:

$$8-5<a<8+5\Rightarrow 3<a<13$$

۲ ـ گزینهٔ (۴) درست است.

۳ ـ گزینهٔ (۱) درست است.

۴ ـ کوچکترین وتری که از یک نقطه در دایره رسم می‌شود وتری است که بر قطر گذرنده از آن نقطه عمود است. بنابراین از نقطهٔ M عمودی بر OM رسم می‌کنیم تا دایره را در دو نقطهٔ A و B قطع کند از A به O وصل می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAM با توجه به این که شعاع این دایره $OA=10$ است، داریم:



$$MA=\sqrt{OA^2-OM^2}=\sqrt{100-36}=8\Rightarrow AB=16$$

پس گزینهٔ (۴) درست است.

۵ ـ گزینهٔ (۱) درست است. زیرا قوس بزرگ AB برابر $360^\circ-110^\circ=250^\circ$ و از آن‌جا:

$$\hat{M}=\frac{250^\circ-110^\circ}{2}=\frac{140^\circ}{2}=70^\circ$$

۶ ـ گزینهٔ (۱) درست است. زیرا داریم:

$$50^\circ=\frac{x+2x+10^\circ}{2}\Rightarrow x=30^\circ$$

و

$$130^\circ=\frac{y+20^\circ+2y}{2}\Rightarrow y=80^\circ$$

$$\Rightarrow 3x-y=90^\circ-80^\circ=10^\circ$$

۷ ـ گزینهٔ (۳) درست است. زیرا داریم:

$$AD^2=AB.AC\Rightarrow 6^2=x(5+x)\Rightarrow x^2+5x-36=0$$

$$\Rightarrow x=4$$

۸ ـ گزینهٔ (۳) درست است. زیرا داریم:

$E(3,-2)=(9-4,-10+2)=(5,-8)$

۹ ـ مختصات نقطه‌های داده شده، (۲, ۳) و (۳, ۲) نشان می‌دهد که محور تقارن این بازتاب نیمساز ربع اول و سوم یعنی $y=x$ است. پس گزینهٔ (۲) درست است.

۱۰ ـ گزینه (۴) درست است. زیرا مرکز این تجانس مبدأ مختصات یعنی نقطهٔ (۰،۰) است و مجانس نقطهٔ $A(3,-1)$ در تبدیل داده شده نقطهٔ $A'(6,-2)$ است و فاصلهٔ این نقطه از مبدأ مختصات $OA'=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{36+4}=2\sqrt{10}$ است.

پاسخ تشریحی پرسشهای ریاضی ۱

۱ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$A=\{x\in\mathbb{R}|x\ge 3\}$; $A'=\{x\in\mathbb{R}|x<3\}$

$B=\{x\in\mathbb{R}|x<-2\}$; $B'=\{x\in\mathbb{R}|x\ge -2\}$

$\Rightarrow A'\cap B'=\{x\in\mathbb{R}|-2\le x<3\}$

۲ ـ گزینهٔ (۲)، زیرا:

$2\in A\Rightarrow\{2\}\subset A$

۳ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$A\cup(B-A)=A\cup(B\cap A')=(A\cup B)\cap(A\cup A')$

$=(A\cup B)\cap M=A\cup B\xrightarrow{(A\subset B)}B$

۴ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$2^{n+4}-112=2^{n+1}\Rightarrow 2^4\times2^n-2\times2^n=112$

$\Rightarrow(16-2)\times2^n=112\Rightarrow 2^n=\frac{112}{14}$

$\Rightarrow 2^n=8\Rightarrow 2^n=2^3\Rightarrow n=3$

۵ ـ گزینه (۴) صحیح است، زیرا:

$$A=\frac{a^6.a^{12}.b^6.b^{12}.c^{18}}{(abc)^2.(abc)^{16}}=\frac{a^{18}.b^{18}.c^{18}}{(abc)^{18}}=\frac{(abc)^{18}}{(abc)^{18}}=1$$

۶ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$P=\left(\frac{3^3\times2^3\times a^{-5}\times b^{-4}\times c^{-3}\times 14}{4a^{-3}\times28b^{-2}\times27c^{-1}}\right)^{-3}$$

$$=\left(a^{-2}b^{-2}c^{-2}\right)^{-3}=(abc)^6$$

۷ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$K=\frac{2^4\times2^x+2^2\times2^x-2^3\times2^x+5\times2^x}{9\times2^x+3\times2\times2^x+3\times2^3\times2^x-15\times2\times2^x}$$

$$=\frac{(16+4-8+5)2^x}{(9+6+24-30)2^x}=\frac{17\times2^x}{9\times2^x}=\frac{17}{9}$$

۸ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$ و $a=x\ ,\ b=\frac{1}{x}$

$\Rightarrow(x+\frac1x)^2-(x-\frac1x)^2=4x(\frac1x)$

$\Rightarrow(x-\frac1x)^2=(x+\frac1x)^2-4$

و $x+\frac1x=k\Rightarrow(x-\frac1x)^2=k^2-4$

$\Rightarrow(x-\frac1x)^6=(k^2-4)^3$

۹ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$x+y=\sqrt2\ ,\ xy=1$: $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=(\sqrt2)^3-3(1)(\sqrt2)=-\sqrt2$

۱۰ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$\begin{cases}2x-6\ge0\\x-2>0\\x-3>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge3\\x>2\\x>3\end{cases}\xrightarrow{\text{(از اشتراک نامعادله‌ها)}}\{x\in\mathbb{R}|x>3\}$$

پاسخ تشریحی پرسشهای ریاضی ۲

۱ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$\begin{cases}y=-2x-1\\y=\frac12x+\frac12\end{cases}\Rightarrow-2x-1=\frac12x+\frac12\Rightarrow x=\frac{-3}{5}\ \text{و}\ y=\frac15$$

$G(\frac{-3}{5},\frac15)$: $OG=\sqrt{(\frac{-3}{5})^2+(\frac15)^2}=\frac{\sqrt{10}}{5}$

۲ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$mm'=-1$ (شرط عمود بودن) , $m=-\frac1k$,

$m'=-\frac{k}{n}\Rightarrow$

$mm'=(-\frac1k)(\frac{-k}{n})=\frac1n=-1\Rightarrow n=-1$

$M(1,-2)\ ,\ n=-1$: $k(-2)+1=-1\Rightarrow k=1$

$\Rightarrow n+k=-1+1=0$

۳ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

روش اول:

$x=\sqrt[5]{2\sqrt[3]{2\sqrt2}}\Rightarrow x^5=2\sqrt[3]{2\sqrt2}\Rightarrow x^{15}=16\sqrt2$

$\Rightarrow x^{30}=2^9\Rightarrow(x^6)^5=2^5\times2^4\Rightarrow x^6=2\sqrt[5]{16}$

روش دوم:

$x=\sqrt[5]{2\sqrt[3]{2\sqrt2}}\Rightarrow x=\sqrt[5]{\sqrt[3]{2^4\sqrt2}}=\sqrt[15]{\sqrt{2^9}}$

$\Rightarrow x=\sqrt[30]{2^9}\Rightarrow x^6=\sqrt[5]{2^9}=2\sqrt[5]{16}$

۴ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt{\frac{20\sqrt8}{\sqrt{320}}}=\sqrt{20\sqrt{\frac{8}{320}}}=\sqrt{\frac{20}{\sqrt{40}}}=\sqrt{\frac{\sqrt{400}}{\sqrt{40}}}$$

$$=\sqrt{\sqrt{\frac{400}{40}}}=\sqrt[4]{10}$$

$$\frac{3(\sqrt[3]5+\sqrt[3]2)}{\sqrt[3]4+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25}}\times\frac{\sqrt[3]5-\sqrt[3]2}{\sqrt[3]5-\sqrt[3]2}=\frac{3(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]4)}{5-2}$$

$$=\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]4\Rightarrow P=\sqrt[4]{10}+\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]4$$

۵ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$K=\frac{5\cot45^\circ-\cos60^\circ-2\sin30^\circ-4\tan45^\circ}{10\tan45^\circ+\cos90^\circ+\cot45^\circ-20\sin30^\circ}$$

$$=\frac{5-\frac12-1-4}{10+0+1-10}=\frac{-1}{2}$$

۶ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$P=\frac{\cos^2x+(1+\sin x)^2}{(1+\sin x)\cos x}|\cos x|$$

$$=\frac{\cos^2x+1+2\sin x+\sin^2x}{(1+\sin x)\cos x}|\cos x|$$

$$=\frac{2+2\sin x}{1+\sin x}=\frac{2(1+\sin x)}{1+\sin x}=2\Rightarrow P=2$$

۷ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$y=x^2+px+q$; $(x+\frac{p}{2})^2-\frac{p^2}{4}=y-q$;

$(x+\frac{p}{2})^2=(y+\frac{p^2-4q}{4})$, $S(-\frac{p}{2},-\frac{p^2-4q}{4})$,

$$S(-3,2)\Rightarrow\begin{cases}\frac{4q-p^2}{4}=2\\-\frac{p}{2}=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{vmatrix}p=6\\q=11\end{vmatrix}\Rightarrow p+q=17$$

۸ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$2x-x\sqrt m=x-4\Rightarrow x(1-\sqrt m)=-4\Rightarrow x=\frac{-4}{1-\sqrt m}$

$1-\sqrt m\ne0,\ m\ge0\Rightarrow\sqrt m\ne1,\ m\ge0\Rightarrow m\ne1,\ m\ge0$

۹ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$x_1+x_2=1\ ,\ x_1x_2=-1\ ,\ k=\frac{1}{x_1^3}+\frac{1}{x_2^3}+(x_1x_2)^3\Rightarrow$

$k=\frac{x_2^3+x_1^3}{x_1^3x_2^3}+(-1)^3$

$$=\frac{(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)}{(x_1x_2)^3}-1$$

$$=\frac{(1)^3-3(-1)(1)}{(-1)^3}-1=\frac{4}{-1}-1=-5$$

۱۰ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$\frac{3\sqrt x+3}{6\sqrt x+2}\ge\frac34$; $\frac{3(\sqrt x+1)}{2(3\sqrt x+1)}\ge\frac34$; $\frac{\sqrt x+1}{3\sqrt x+1}\ge\frac12$

$\frac{2\sqrt x+2}{3\sqrt x+1}\ge1$; $\frac{2\sqrt x+2}{3\sqrt x+1}-1\ge0$; $\frac{2\sqrt x+2-3\sqrt x-1}{3\sqrt x+1}\ge0$

$\frac{1-\sqrt x}{3\sqrt x+1}\ge0$, $3\sqrt x+1>0\Rightarrow1-\sqrt x\ge0$; $\sqrt x\le1$

$\Rightarrow x\ge0\ ,\ x\le1\ \Rightarrow\ 0\le x\le1$

مجموعه جوابهای نامعادله $=\{x\in\mathbb{R}|0\le x\le1\}$

پاسخ تشریحی پرسشهای ریاضی ۳

۱ ـ گزینه (۴) صحیح است؛ زیرا:

نامعادله زیر را برای $x\ge0$ حل می‌کنیم؛ در صورتی که طرفین نامعادله را در $3\sqrt x+1$ ضرب کنیم:

$2\sqrt x+2>3\sqrt x+1\Rightarrow1>\sqrt x\Rightarrow x<1$

$$\begin{cases}x<1\\\text{و}\\x\ge0\end{cases}\Rightarrow0\le x<1\Rightarrow x\in[0,1)$$

۲ ـ گزینه (۲) صحیح است؛ زیرا:

$$P=\frac{(1+x^2)\sin x}{x^2+1}=\sin x$$

می‌دانیم که $\sin x$ در ربعهای اول و دوم همواره مثبت است؛ در نتیجه P در فاصله $(0,\pi)$ همواره مثبت است.

۳ ـ گزینه (۱) صحیح است؛ زیرا:

$f(2)=2^3+2a\times2=4\Rightarrow\ 8+4a=4\Rightarrow a=-1$

$f(-2)=a(-2)+b=0\Rightarrow-1(-2)+b=0\Rightarrow b=-2$

$\Rightarrow a+b=-3$

۴ ـ گزینه (۳) صحیح است؛ زیرا:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\frac{x+\Delta x+1}{x+\Delta x-1}-\frac{x+1}{x-1}$$

$$=\frac{\cancel{x^2}-\cancel{x}+x\cancel{\Delta x}-\Delta x+\cancel{x}-\cancel{1}-\cancel{x^2}-x\cancel{\Delta x}+\cancel{x}-\cancel{x}-\Delta x+\cancel{1}}{(x+\Delta x-1)(x-1)}$$

$$\Delta y=\frac{-2\Delta x}{(x+\Delta x-1)(x-1)}\ \Rightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-2}{(x+\Delta x-1)(x-1)}$$

اگر از Δx صرف نظر کنیم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-2}{(x-1)^2}$$

۵ ـ گزینه (۱) صحیح است؛ زیرا تابع $f(x)$ یک به یک است پس وارون‌پذیر است:

چون دامنه تابع R^+ است، داریم:

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1^2=x_2^2\Rightarrow x_1=x_2$

۶ ـ گزینه (۱) صحیح است؛ زیرا قرینه نقطه A نسبت به خط $y=-x$ نقطه $A'\begin{vmatrix}-(n-2)\\-(m+1)\end{vmatrix}$ است:

$(-n+2,-m-1)=(2m,n-1)$

$$\Rightarrow\begin{cases}-n+2=2m\\-m-1=n-1\end{cases}\Rightarrow m=2\ ,n=-2$$

۷ ـ گزینه (۲) صحیح است؛ زیرا:

$x\to-x\Rightarrow y^2=(-x)^2-\sin(-x)+\frac{6}{-x}$

$\Rightarrow y^2=x^2+\sin x-\frac{6}{-x}$ محور تقارن قائم ندارد.

$y \to -y = (-y)^2 = x^2 - \sin x + \frac{6}{x}$

$\Rightarrow y^2 = x^2 + \sin x - \frac{6}{x}$ محور تقارن افقی دارد.

۸ ـ گزینه (۲) صحیح است : زیرا :

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ \frac{1}{3} & \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^2 = I \Rightarrow (A^2)^{24} = (I)^{24} \Rightarrow A^{48} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۹ ـ گزینه (۲) صحیح است : زیرا :

$$\frac{x+2}{5} > 0 \Rightarrow x > -2$$

$$\log\frac{x+2}{5} < -1 = \log\frac{1}{10} \Rightarrow \frac{x+2}{5} < \frac{1}{10} \Rightarrow 2x+4 < 1$$

$$\Rightarrow 2x < -3 \to x < -\frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} x > -2 \\ x < -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow x \in (-2, -\frac{3}{2})$$

۱۰ ـ گزینه (۱) صحیح است : زیرا :

$$\log 0/25 = \log\frac{25}{100} = \log 25 - \log 100 = 2\log 5 - 2$$
$$= 2\log\frac{10}{2} - 2 = 2\log 10 - 2\log 2 - 2$$
$$= 2 - 2a - 2 = -2$$

پاسخ تشریحی پرسشهای ریاضی ۴

۱ ـ گزینه (۱) صحیح است، زیرا اگر داده‌های آماری را k برابر کنیم، انحراف معیار k برابر می‌شود و اگر به هر داده آماری k' را اضافه کنیم، انحراف معیار تغییر نمی‌کند، پس انحراف معیار جدید برابر ۲s است.

۲ ـ گزینه (۴) صحیح است : زیرا درستی سه گزینه دیگر با توجه به جدول واضح است.

۳ ـ گزینه (۲) صحیح است : زیرا :

$$\frac{3n-1}{4n-1} = \frac{11}{15} \Rightarrow 44n - 11 = 45n - 15 \Rightarrow n = 4$$

۴ ـ گزینه (۴) صحیح است : زیرا :

$$\begin{cases} a_{15} = 34 \\ s_8 = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 14d = 34 \\ 4(2a + 7d) = 20 \end{cases} \Rightarrow d = 3 \ , \ a = -8$$

$$s_{50} = 25(2 \times (-8) + 49 \times 3) = 25 \times 131$$

۵ ـ گزینه (۳) صحیح است : زیرا :

$$\log b = \frac{\log a + \log c}{2} \Rightarrow 2\log b = \log a + \log c$$

$$\Rightarrow b^2 = ac \Rightarrow \frac{1}{b^2} = \frac{1}{ac} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{c}$$

در نتیجه، $\frac{1}{a}$ ، $\frac{1}{b}$ و $\frac{1}{c}$ تشکیل تصاعد هندسی می‌دهند.

۶ ـ گزینه (۱) صحیح است : زیرا :

$$A = \cos^2 x - \cos x = \cos^2 x - \cos x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} =$$
$$(\cos x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$$

کمترین مقدار A وقتی به دست می‌آید که $(\cos x - \frac{1}{2})^2 = 0$

بنابراین

$$\cos x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

۷ ـ گزینه (۴) صحیح است : زیرا :

$$\vec{V}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} \ , \ \vec{V}_2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \vec{V}_1 . \vec{V}_2 = 1 \times (-\sqrt{3}) + \sqrt{3} \times 1 = 0$$
$$\cos\theta = \frac{\vec{V}_1 . \vec{V}_2}{|\vec{V}_1| \, |\vec{V}_2|} = \frac{0}{|\vec{V}_1| \, |\vec{V}_2|} = 0$$
$$\Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = 90$$

۸ ـ گزینه (۳) صحیح است : زیرا حداقل یکی از برادرها در کمیته باشند یعنی یک برادر یا دو برادر در کمیته شرکت داشته باشند :

$$\binom{10}{4} \times \binom{2}{1} + \binom{10}{3} \times \binom{2}{2} = 210 \times 2 + 120 \times 1 = 540$$

۹ ـ گزینه (۳) صحیح است : زیرا :

$$n(s) = 36 \ , \ A = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$$
$$\Rightarrow n(A) = 6 \Rightarrow P(A) = \frac{6}{36}$$

۱۰ ـ گزینه (۳) صحیح است : زیرا :

$\boxed{2}\boxed{4}\boxed{3}\boxed{2}$

$\Rightarrow$ تعداد اعداد کمتر از ۴۰۰۰ $n(s) = 2 \times 4 \times 3 \times 2 = 48$

$n(A)$ تعداد اعداد کمتر از ۴۰۰۰ و بخش‌پذیر بر ۵

$\boxed{2}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{1}$

$$n(A) = 2 \times 3 \times 2 \times 1 = 12$$
$$\Rightarrow P(A) = \frac{12}{48} = \frac{1}{4}$$

پاسخ تشریحی پرسشهای ریاضی ۵ تجربی

۱ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است : زیرا :

$$\begin{cases} \frac{1-2x}{2x-2} \ge 0 \\ \frac{2x-3}{1-2x} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow D_f =]\tfrac{1}{2}, 1[$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$\frac{2x-3}{1-2x}$		$-$		$+$		$+$		$-$	
$\frac{1-2x}{2x-2}$		$-$		$+$		$-$		$-$	
جواب		تعریف نشده		$\frac{1}{2} < x < 1$		تعریف نشده			

۲ ـ گزینه (۳) صحیح است : زیرا :

$$D_f = \mathbb{R} - \{-1\} : f(x) = \frac{|1-x^2|}{|x+1|} = \frac{|x^2-1|}{|x+1|}$$
$$= \frac{|x-1||x+1|}{|x+1|} = |x-1|$$
$$\Rightarrow f(-1) = |-1-1| = |-2| = 2 \ , \ f(x) \ge 0$$
$$\Rightarrow R_f = [0, 2[\cup]2, +\infty[$$

۳ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است : زیرا :

$$f = \{(4,5),(3,1),(2,3)\} \ , \ g = \{(4,6),(3,5),(1,2)\}$$

$4 \xrightarrow{g} 6 \xrightarrow{f} ? \ , \ 3 \xrightarrow{g} 5 \xrightarrow{f} ? \ ,$

$\overbrace{1 \xrightarrow{g} 2 \xrightarrow{f} 3}^{fog}$

$$fog = \{(1,3)\} \Rightarrow D_{fog} = \{1\} \ , \ R_{fog} = \{3\}$$
$$\Rightarrow D_{fog} \cup R_{fog} = \{1,3\}$$

۴ ـ گزینه (۳) صحیح است : زیرا :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}(2x+1) = \lim\limits_{x\to 1^-}(ax+b) \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to -1^+}(ax+b) = \lim\limits_{x\to -1^-}(2x^3-1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(1)+1 = a(1)+b \Rightarrow a+b = 3 \\ a(-1)+b = 2(-1)^3 - 1 \Rightarrow -a+b = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b = 3 \\ -a+b = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow b = 0 \ , \ a = 3 \Rightarrow a.b = 3(0) = 0$$

۵ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است : زیرا :

$$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}) = \lim_{x\to 0}(\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x})$$
$$\sim \lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)(x+\sin x)}{x^2 . x^2}$$
$$\sim \lim_{x\to 0}\frac{(\frac{x^3}{6})(x+x)}{x^4}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x^4}{6x^4} = \frac{1}{3}$$

۶ ـ گزینه (۱) صحیح است : زیرا :

$$\lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2-2x} - \sqrt{x^2+2x+2}) \sim \lim_{x\to +\infty}(|x-1| - |x+1|)$$
$$= \lim_{x\to +\infty}(x-1-x-1) = -2$$

۷ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است : زیرا :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(x^2 \sin(\frac{2}{x^2})) = 0$$

(چون به ازای هر x حقیقی: $-1 \le \sin(\frac{2}{x^2}) < 1$)

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$ (تابع f در $x_0 = 0$ ، پیوسته است)

۸ ـ گزینه (۲) صحیح است : زیرا :

در توابع همو گرافیک با ضابطهٔ عمومی $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ $(c \ne 0)$ خط $cx+d=0$ مجانب قائم و خط $y = \frac{a}{c}$ مجانب افقی است، بنابراین برای تابع با ضابطهٔ $y = \frac{ax+b}{x+a}$ می‌توان نوشت :

$$\begin{cases} x+a = 0 \\ x+2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -a \\ x = -2 \end{cases} \Rightarrow -a = -2 \Rightarrow a = 2$$

از طرفی چون منحنی محور xها را در $x_0 = -1$ قطع می‌کند سپس نقطهٔ $A(-1, 0)$ متعلق به منحنی است :

$$\frac{2(-1)+b}{(-1)+2} = 0 \Rightarrow b - 2 = 0 \Rightarrow b = 2$$

واسطهٔ هندسی a و b $= \sqrt{ab} = \sqrt{2 \times 2} = \sqrt{4} = 2$

۹ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است : زیرا :

$$y = (x-1)^3 + (x-2)^3 + \cdots + (x-76)^3 + (x-77)^3$$
$$y' = 3(x-1)^2 + 3(x-2)^2 + \cdots + 3(x-77)^2 > 0$$

مشتق y همواره مثبت است، پس تابع همواره صعودی است. بنابراین منحنی نمایش تابع با ضابطهٔ (۱) همواره محور

xها را در یک نقطه قطع می‌کند و در نتیجه معادلهٔ مورد نظر فقط دارای یک ریشهٔ حقیقی است.

۱۰ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ زیرا :

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\alpha}}{\frac{dx}{d\alpha}}=\frac{y'_\alpha}{x'_\alpha}=\frac{-2\sin\alpha}{2\cos\alpha}=-\tan\alpha$$

$$\alpha=\frac{\pi}{2}: A(x=2\sin\frac{\pi}{2}-3\ ,\ y=2\cos\frac{\pi}{2}+2)$$

$$\Rightarrow A(-1,\ 2)\ ,\ m=-\tan(\frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow m'=\cot(\frac{\pi}{2})=0$$ (ضریب زاویهٔ خط قائم)

ضریب زاویهٔ خط قائم صفر است. بنابراین معادلهٔ خط قائم به صورت زیر است :

$$y-2=0\ :\ y=2$$

پاسخ تشریحی پرسشهای حسابان ۱

۱ ـ گزینه (۴) صحیح است، زیرا می‌دانیم اگر $x\in\mathbb{Z}$ همواره داریم $[x]+[-x]=0$ و اگر $x\notin\mathbb{Z}$ داریم $0<x-[x]<1$ بنابراین :

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ x-[x] & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow 0\le f(x)<1$$

$$\Rightarrow R_f=[0\ ,\ 1)$$

۲ ـ گزینه (۲) صحیح است، زیرا : $f(x)=\sqrt{\log(1-[x])}$

$$\begin{cases}\log(1-[x])\ge0\\ 1-[x]>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1-[x]\ge1\\ [x]<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}[x]\le0\\ [x]<1\end{cases}\Rightarrow x<1$$

$$D_f=(-\infty,1)$$

۳ ـ گزینه (۴) صحیح است، زیرا شرط وجود دو ریشه حقیقی برای یک معادله درجه دوم آن است که $\Delta'\ge0$

$$(m+2)x^2+4x+(m-1)=0$$

$$\Delta'=4-(m+2)(m-1)\ge0\Rightarrow -m^2-m+6\ge0$$

$$-m^2-m+6=0\Rightarrow\begin{cases}m=2\\ m=-3\end{cases}$$

$$\Rightarrow -3\le m\le2$$

m	$-\infty$	-3		2	$+\infty$
$-m^2-m+6$	$-$		$+$		$-$

۴ ـ گزینه (۲) صحیح است، زیرا برای حل این گونه تستها دو نقطه اختیاری از تابع f را در نظر می‌گیریم. در این تابع نقاط $(-1,0)$ و $(3,1)$ را در نظر می‌گیریم، حال باید نقاط $(0,-1)$ و $(1,3)$ در ضابطهٔ f^{-1} صدق کنند. هر گزینه‌ای که این دو نقطه در آن صدق کند جواب مسأله است.

۵ ـ گزینه (۱) صحیح است ؛ زیرا :

$$x\to0^-\Rightarrow x<0\Rightarrow[x]=-1$$

$$x\to0^-\Rightarrow 2x\to0^-\Rightarrow 2x<0\Rightarrow[2x]=-1$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{[x]-[2x]}{[x]-2[x]}=\lim_{x\to0^-}\frac{-1+1}{-1+2}=\frac{0}{1}=0$$

۶ ـ گزینه (۳) صحیح است، زیرا : $f(x)=\frac{x}{[x]}\sqrt{-x}$

دامنه پیوستگی f زیر مجموعه ای از اعداد حقیقی است که به ازای هر عضو آن :

$$\begin{cases}[x]\ne0\\ \text{و}\\ -x\ge0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<0 \text{ یا } x\ge1\\ \text{و}\\ x\le0\end{cases}\Rightarrow x<0$$

۷ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است. در این مسأله از تعریف مشتق تابع f به شکل زیر استفاده می‌کنیم :

$$f'(x_0)=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+nh)-f(x_0+mh)}{(n-m)h}$$

داریم :

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1+h)}{h}=6\Rightarrow\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1+h)}{2h}=3$$

$$\Rightarrow f'(1)=3$$

$$y=f(\frac{4}{x^2})\Rightarrow y'=-\frac{8}{x^3}f'(\frac{4}{x^2})$$

$$\Rightarrow y'(2)=-\frac{8}{8}f'(1)=-f'(1)$$

$$\Rightarrow y'(2)=-3$$

۸ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}\Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{-1}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{(x+1)^3}}$$

$$\Rightarrow f'(0)=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(5h)-f(2h)}{h}=3f'(0)=-\frac{3}{2}$$

۹ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است.

$$y=f(x)=\frac{2x-1}{x+1}\Rightarrow y(x+1)=2x-1\Rightarrow yx+y=2x-1$$

$$\Rightarrow x(y-2)=-y-1\Rightarrow x=\frac{-y-1}{y-2}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{-x-1}{x-2}$$

$$\lim_{x\to2^-}f^{-1}(x)=\lim_{\substack{x\to2\\ x<2}}\frac{-x-1}{x-2}=+\infty$$

۱۰ ـ گزینه (۲) صحیح است، زیرا :

$$f(x+2)=x-\sqrt{x+2}\Rightarrow\begin{cases}x+2=t\\ x=t-2\end{cases}\Rightarrow f(t)=t-2-\sqrt{t}$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{\substack{x\to0^-\\ x<0}}(x-\sqrt{x}-2)$$

این حد وجود ندارد زیرا $\sqrt{x}$ برای $x<0$ تعریف نمی‌شود.

پاسخ تشریحی پرسشهای حسابان ۲

۱ ـ گزینه (۴) صحیح است، زیرا درتابع حقیقی $y=|f(x)|$ همواره ریشه‌های ساده معادله $f(x)=0$ نقاط زاویه‌دار نمودار f هستند. بنابراین در تابع $y=x|x-1|$ نقطه $x=1$ نقطهٔ زاویه‌دار می‌باشد. یعنی در نقطه $x=1$ مشتق چپ و راست وجود دارند ولی باهم برابر نیستند.

۲ ـ گزینه (۴) صحیح است، زیرا f در $x=1$ مشتق‌پذیر است. بنابراین در این نقطه پیوسته است. بنابراین :

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^-}f(x)$$

$$\begin{cases}\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}ax^2=a\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\Rightarrow a=b+2\\ \lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}(bx^3+2x)=b+2\end{cases}$$

f در $x=1$ مشتق‌پذیر است در نتیجه داریم :

$$f'(x)=\begin{cases}2ax & x<1\\ 3bx^2+2 & x\ge1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f'_-(1)=2a\\ \qquad\Rightarrow 2a=3b+2\\ f'_+(1)=3b+2\end{cases}$$

$$\begin{cases}a=b+2\\ 2a=3b+2\end{cases}\Rightarrow 2b+4=3b+2\Rightarrow b=2\Rightarrow a=4$$

$$a+b=6$$

۳ ـ گزینه (۱) صحیح است، زیرا :

$$\begin{cases}y=\frac{1-\sin x}{1-2\sin x}\\ \frac{\pi}{6}<x<\frac{5\pi}{6}\end{cases}\Rightarrow y'=\frac{\cos x}{(1-2\sin x)^2}$$

$$y'=0\Rightarrow\frac{\cos x}{(1-2\sin x^2)}=0$$

$$\Rightarrow\cos x=0\xRightarrow{\frac{\pi}{6}<x<\frac{5\pi}{6}}x=\frac{\pi}{2}$$

$$Maxy=f(\frac{\pi}{2})=\frac{1-\sin\frac{\pi}{2}}{1-2\sin\frac{\pi}{2}}=0\Rightarrow Maxy=0$$

۴ ـ گزینه (۲) صحیح است، زیرا:

$$y=Arctg\,x+Arc\cot g\,y-\frac{\pi}{2}$$

$$y'=\frac{1}{1+x^2}+\frac{-y'}{1+y^2}$$

$$(0,0)\Rightarrow y'=1+\frac{-y'}{1}\Rightarrow y'=1-y'\Rightarrow 2y'=1\Rightarrow y'=\frac{1}{2}$$

۵ ـ گزینه (۳) درست است، زیرا اگر فرض کنیم (x,y) نقطه‌ای از منحنی $y=4-x^2$ باشد. تابع فاصله بین دو نقطه (x,y) و (۰،۲) را می‌نویسیم :

$$d=\sqrt{x^2+(y-2)^2}\xrightarrow{x^2=4-y}d=\sqrt{4-y+(y-2)^2}$$

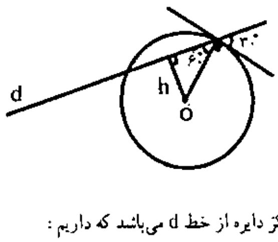
$$d=\sqrt{y^2-5y+8}\Rightarrow d'=0\Rightarrow\frac{2y-5}{2\sqrt{y^2-5y+8}}=0$$

$$\Rightarrow 2y-5=0\Rightarrow y=\frac{5}{2}$$

$$d=\sqrt{y^2-5y+8}\Rightarrow d=\sqrt{\frac{25}{4}-\frac{25}{2}+8}=\sqrt{8-\frac{25}{4}}$$

$$d=\sqrt{\frac{32-25}{4}}=\sqrt{\frac{7}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$$

۶ ـ گزینه (۳) صحیح است، زیرا اگر فرض کنیم خط d دایره C را به زاویهٔ ۳۰° قطع کند. بنابراین زاویه بین خط و مماس بر دایره در نقطه تقاطع برابر با ۳۰° است. داریم :



h فاصله مرکز دایره از خط d می‌باشد که داریم :

$$h=R\sin60^\circ=2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$$

۷ ـ گزینه (۲) صحیح است، زیرا :

$$M\left|\begin{array}{l}x=\sin\theta+\cos\theta\\ y=\cos\theta-\sin\theta\end{array}\right.$$

$$x^2+y^2=(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\cos\theta-\sin\theta)^2$$

$$=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\cancel{\sin\theta}\cos\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cancel{\cos\theta}+\sin^2\theta$$

$\Rightarrow x^2+y^2=2$ دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع $\sqrt{2}$

۸ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا :

$$f(x)=\int_1^{tgx}\frac{dt}{1+t^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{1+tg^2x}\times(1+tg^2x)=1$$

$$\Rightarrow f'(x)=1\Rightarrow f'(\frac{1}{x})=1$$

$$y=f(\frac{1}{x})\Rightarrow y'=-\frac{1}{x^2}f'(\frac{1}{x})$$

$$\Rightarrow y'=-\frac{1}{x^2}\Rightarrow y'(\frac{1}{2})=-4$$

۹ ـ گزینه (۱) صحیح است، زیرا :

$$F(x)=\int_0^x\frac{\cos t}{1+\sin t}dt$$

$$F(\frac{\pi}{2})-F(0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{1+\sin t}dt=Ln(1+\sin t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=Ln2-Ln1=Ln2$$

۱۰ ـ گزینه (۱) صحیح است، زیرا :

$$\begin{cases}y=x\\ y=x^2-2\end{cases}\Rightarrow x^2-2=x\Rightarrow x^2-x-2=0\Rightarrow\begin{cases}x=2\\ x=-1\end{cases}$$

$$S=\left|\int_{-1}^{2}(y_1-y_2)dx\right|=\left|\int_{-1}^{2}(x^2-2-x)dx\right|$$

$$=\left|\left[\frac{1}{3}x^3-2x-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{2}\right|=\left|(\frac{8}{3}-4-2)-(-\frac{1}{3}+2-\frac{1}{2})\right|$$

$$=\left|\frac{8}{3}-6+\frac{1}{3}-2+\frac{1}{2}\right|=\left|3-8+\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{1}{2}-5\right|=\left|-\frac{9}{2}\right|=\frac{9}{2}$$

پاسخ تشریحی پرسشهای جبر و احتمال

۱ ـ گزینه (۴) : زیرا اگر ۴۰۰ نفر را کبوترها و روزهای یکسال را (۳۶۵ روز) لانه‌ها فرض کنیم طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۲ نفر دارای تاریخ تولد یکسان هستند و به همین دلیل چون درسال فقط ۱۲ ماه وجود دارد حداقل دونفر در یک ماه از سال متولد شده‌اند و نیز چون سال دارای ۵۲ هفته است، حداقل دونفر در یک هفته معین ازسال متولد شده‌اند.

۲ ـ گزینه (۳) صحیح است : زیرا در صورتی که عکس یک قضیه شرطی برقرار باشد (یعنی یک قضیه شرطی باشد)، قضیه دوشرطی ساخته می‌شود. در گزینه (۱) از این که $x^2=y^2$ نمی‌توان نتیجه گرفت x=y و در گزینه (۲) از $\sin x=\sin y$ نمی‌توان نتیجه گرفت x=y و در گزینه (۴) اگر $x^2=1$ نمی‌توان نتیجه گرفت $x=1$.

۳ ـ گزینه (۲) صحیح است : زیرا اگر A و B دو مجموعه جدا ازهم باشند :

$$\begin{cases}A-B=A\\ B-A=B\end{cases}\Rightarrow A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)=A\cup B$$

۴ ـ گزینه (۴) زیرا :

$$5\times3\overset{9}{\equiv}2\times3\Rightarrow5\overset{9}{\not\equiv}2$$

۵ ـ گزینه (۱) صحیح است : زیرا توجه داریم که دراین مسأله وقتی کارتی را از کیسه خارج می‌کنیم و به کیسه برنمی‌گردانیم، از فضای نمونه‌ای یک عضو کم می‌شود. حال چون می‌خواهیم مجموع دو عدد فرد باشد باید اولی زوج و دومی فرد یا اولی فرد و دومی زوج باشد، پس

$$P(A)=(\frac{5}{10}\times\frac{5}{9})+(\frac{5}{10}+\frac{5}{9})=\frac{5}{9}$$

۶ ـ گزینه (۲) صحیح است : زیرا احتمال آن که مهرهٔ اول که خارج می‌شود، سبز باشد $\frac{4}{9}$ است و احتمال آن که مهرهٔ دوم نیز سبز باشد $\frac{4}{9}$ است (چون مهره اول را به کیسه برمی‌گردانیم، فضای نمونه تغییری نمی‌کند) :

$$P(A)=\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}=\frac{16}{81}$$

۷ ـ گزینه (۲) صحیح است : زیرا طبق فرض مسأله اگر احتمال وقوع عدد ۱ را x بنامیم، احتمال وقوع عدد ۲، 2x است و ... احتمال وقوع عدد ۶، 6x است. ازطرفی باید

$$P(1)+P(2)+\cdots+P(6)=1$$

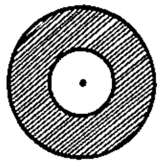
بنابراین :

$$x+2x+3x+\cdots+6x=1\Rightarrow x=\frac{1}{21}$$

احتمال وقوع عدد ۳ $P=3x=\frac{3}{21}=\frac{1}{7}$

۸ ـ گزینه (۳) صحیح است : زیرا طبق شکل فضای نمونه سطح دایره بزرگتر است که اگر آن را S بنامیم، $S=25\pi$ و قسمت سایه خورده سطح مورد نظر است که اگر آن را A بنامیم : $A=25\pi-4\pi=21\pi$ بنابراین :

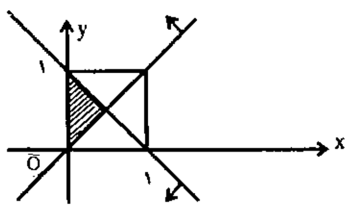
$$P(A)=\frac{A}{S}=\frac{21\pi}{25\pi}=\frac{21}{25}$$



۹ ـ گزینه (۳) صحیح است : زیرا مربع واحد همان مربع مزبور است که در شکل زیر مشخص شده است که با توجه به نابرابریهای $y\leq1-x$ و $x\leq y$ و مجموعه جواب این نامعادلات که در شکل سایه خورده است داریم :

$$P(A)=\frac{\text{مساحت مثلث سایه‌خورده}}{\text{مساحت مربع}}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{1\times1}$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{1}{4}$$



۱۰ ـ گزینه (۲) صحیح است : زیرا :

$$Z=2+2\sqrt{3}i\Rightarrow r=\sqrt{4+12}=4$$

$$\tan\theta=\frac{a}{b}=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow Z=4(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$$

حل تشریحی پرسشهای ریاضیات گسسته پیش‌دانشگاهی

۱ ـ گزینه (۳) : زیرا گزینه‌های (۱) ، (۲) و (۴) هرکدام بیانگر تعریف یا قضیه‌ای ازکتاب درسی بوده و از طرفی راجع به زوج بودنِ تعداد رأسهای زوج نمی‌توان حکم کلّی صادر کرد.

۲ ـ گزینه (۴) صحیح است : زیرا :

$$2q=\sum\deg v_i=(3\times4)+(2\times3)=18\Rightarrow2q=18$$
$$\Rightarrow q=9$$

۳ ـ گزینه (۱) صحیح است : زیرا اگر گراف G دارای P رأس باشد، چون هر رأس آن از درجهٔ ۴ است پس مجموع درجه‌های رأسهای G برابر است با 4p و چون $\sum\deg v_i=2q$ پس $4p=2q$ یا $q=2p$ که اگر در رابطهٔ $q=3p-2$ به‌جای q، 2p قرار دهیم :

$$q=3p-2\Rightarrow2p=3p-2\Rightarrow p=2\Rightarrow q=4$$

۴ ـ گزینه (۱) صحیح است : زیرا هر درایهٔ روی قطر اصلی ماتریس M^2 مربوط به گراف کامل k_p برابر است با درجه رأس متناظر با آن درایه و چون در k_p همه رأسها هم درجه و از درجه $(p-1)$ می‌باشند، پس $p-1=5$ یا $p=6$ پس $2q=\sum\deg v_i=6\times5=30$ و لذا $q=15$.

۵ ـ گزینه (۳) : زیرا اگر A زیرمجموعه Z باشد و از بالا کراندار باشد، به شرط این‌که تهی نباشد، می‌توان گفت که عضو انتها دارد.

۶ ـ گزینه (۴) صحیح است : زیرا :

$$k=17q+15\Rightarrow3k=51q+45\Rightarrow3k-1=51q+44$$
$$\Rightarrow3k-1=51q+34+10=17(3q+2)+10\Rightarrow r=10$$

۷ ـ گزینه (۲) صحیح است : زیرا :

$$(a-2b,3a-b)=d\Rightarrow d|a-2b,d|3a-b$$
$$\Rightarrow d|-3(a-2b)\Rightarrow d|-3a+6b\Rightarrow d|(3a-b)+$$
$(-3a+6b)\Rightarrow d|5b\Rightarrow d|5\Rightarrow d=1$ یا $d=5$

۸ ـ گزینه (۴) صحیح است : زیرا دو عدد وقتی رقم یکانِ برابر به پیمانهٔ ۱۰ دارند، با یکدیگر هم‌نهشت هستند و برعکس، پس :

$$2a+7\overset{10}{\equiv}3a-2\Rightarrow a\overset{10}{\equiv}9\Rightarrow a=9$$
$$\Rightarrow2a+5=2\times9+5=23\overset{10}{\equiv}3$$

۹ ـ گزینه (۱) صحیح است :زیرا :

$$a=7k+5,b=7k'-2\Rightarrow a\overset{7}{\equiv}5\ .$$
$$b\overset{7}{\equiv}-2\Rightarrow2b\overset{7}{\equiv}-4$$
$\Rightarrow a+2b\overset{7}{\equiv}1\Rightarrow[a+2b]=[1]$ (به پیمانه ۷)

۱۰ـ گزینه (۴) صحیح است : زیرا هر جواب صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+(x_4+5)=27$ نظیر یک جواب صحیح معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4=27$ با شرط $x_4>4$ است. پس باید تعداد جوابهای صحیح نامنفی معادله $x_1+x_2+x_3+x_4=27-5$ را به‌دست آورد.

تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادلهٔ اخیر برابر است با :

$$\binom{22+4-1}{4-1}=\binom{25}{3}$$

۱۱ـ گزینه (۲) صحیح است : زیرا از A به B، 2^5 تابع وجود دارد که از این میان فقط ۲ تای آنها پوشا نیست. یکی از آنها تابع ثابت $f(x)=1$ و دیگری تابع ثابت $f(x)=2$ است. درنتیجه تعداد توابع پوشا از A به روی B برابر با $2^5-2=30$ است.

۱۲ـ گزینه (۲) صحیح است : زیرا فقط زیرمجموعه‌های رابطه همانی روی A، رابطه‌هایی هستند که هم‌متقارنند و هم پادمتقارن. چون در اینجا I_A، ۵ عضو دارد. پس $32 = 2^5$ رابطه در A وجود دارد که هم‌متقارن و هم پادمتقارن است.

۱۳ـ گزینه (۴) صحیح است : زیرا $m_{11} = 0$، پس رابطه R بازتابی نیست. ماتریس مزبور متقارن نیست، بنابراین رابطه R متقارن نیست، چون درایه‌های m_{12} و m_{13} و m_{23} برابر ۱ می‌باشند، ولی درایه‌های m_{21} و m_{31} و m_{32} برابر ۱ نیستند، پس R پادمتقارن است. چون $a_{12}=1$ و $a_{23}=1$ و $a_{13}=1$، پس رابطهٔ R ترایایی هم هست.

۱۴ـ گزینه (۲) صحیح است : زیرا :

$$a_n - a_{n-1} = 3n+1-[3(n-1)+1] = 3n+1-3n+3-1 = 3$$

۱۵ـ گزینه (۱) صحیح است : زیرا اگر R پیشامد «قرمز بودن مهره» و B پیشامد «سیاه بودن مهره» باشد آنگاه باید $P(R|B')$ را به‌دست آورد. چون $R\cap B' = R$، پس :

$$P(R\cap B') = P(R) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5} \quad \text{و}$$

$$P(B') = 1 - P(B) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

درنتیجه :

$$P(R|B') = \frac{P(R\cap B')}{P(B')} = \frac{P(R\cap B')}{P(B')} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{3}$$

۱۶ـ گزینه (۱) صحیح است : زیرا تعداد روشهای چیدن ۳ مهرهٔ سفید و ۴ مهرهٔ سیاه کنار هم برابر !۷ است. تعداد روشهای چیدن ۳ مهرهٔ سفید و ۴ مهرهٔ سیاه یک در میان کنار هم برابر !۴×!۳ است، پس احتمال مورد نظر برابر است با :

$$\frac{3!\times 4!}{7!} = \frac{1}{35}$$

۱۷ـ گزینه (۴) صحیح است : زیرا :

$$A = P(\text{عیالوار})P(\text{نمره‌بیست}|\text{عیالوار}) + P(\text{مردمجرد})P(\text{نمره‌بیست}|\text{مردمجرد}) + P(\text{زن‌مجرد})P(\text{نمره‌بیست}|\text{زن‌مجرد})$$

$$P(\text{عیالوار}|\text{نمره بیست}) = \frac{P(\text{عیالوار})P(\text{نمره‌بیست}|\text{عیالوار})}{A}$$

$$= \frac{\frac{5}{15}\times\frac{15}{65}}{\frac{5}{15}\times\frac{15}{65}+\frac{5}{30}\times\frac{30}{65}+\frac{2}{20}\times\frac{20}{65}} = \frac{5}{12}$$

۱۸ـ گزینه (۱) صحیح است : زیرا باید دانسته باشیم $\sum f_x(x) = 1$. برای این کار $\sum_{x=0}^{\infty} a(\frac{1}{3})^x = 1$

$$a\left[1+\frac{1}{3}+(\frac{1}{3})^2+\cdots\right] = 1 \Rightarrow a\times\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 1 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

۱۹ـ گزینه (۱) صحیح است : زیرا باید دانسته باشیم $\sum Pixi = 1$ و $E(X) = 3$، پس

$$1\times a + 3\times(0/1) + 4b + 5(0/3) = 3 \quad \text{و}$$

$$a + 0/1 + b + 0/3 = 1$$

درنتیجه $a+b = 0/6$ و $a+4b = 1/2$، درنتیجه $a = 0/4$ و $b = 0/2$، بنابراین :

$$a - b = 0/2$$

حل تشریحی پرسشهای جبر خطی

۱ـ گزینه (۲) صحیح است : زیرا اگر $A = \begin{bmatrix}1&-1&2\\3&1&4\\1&0&2\end{bmatrix}$، همسازهٔ نظیر سطر سوم ستون دوم A به‌صورت زیر به‌دست می‌آید :

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\times\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix} = (-1)\times(-2) = 2$$

۲ـ گزینهٔ (۳) صحیح است : زیرا :

$$\left|\frac{3}{|A|}\times A\right| = (\frac{3}{|A|})^3|A| = \frac{27}{|A|^2}$$

۳ـ گزینهٔ (۲) صحیح است : زیرا :

$$\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&-1&0\\2&-2&0\\-1&1&0\end{bmatrix}$$

۴ـ گزینهٔ (۴) صحیح است : زیرا :
زیر فضاهای برداری $\mathbb{R}^2$ فقط به‌صورت خطهایی هستند که از مبدأ مختصات عبور می‌کنند پس :

$$2x+6y+(2m-1)=0 \xrightarrow{\text{باید از مبدأ عبور کند}} 2m-1=0$$

$$\Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

۵ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است : زیرا :
نگاشت از $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ است. پس ماتریس این نگاشت ماتریسی ۲×۳ است :

$$\begin{cases}y_1 = 0 + 2x_2\\ y_2 = x_1 + x_2\\ y_3 = 4x_1 + 0\end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix}0&2\\1&1\\4&0\end{bmatrix}$$

۶ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است : زیرا :
چون ماتریس نگاشت خطی f ماتریسی ۳×۲ است پس f نگاشتی است از $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ بنابراین :

$$\begin{bmatrix}2&0\\-1&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}2x = 0\\-x+y=0\\x+2y=0\end{cases} \Rightarrow x = y = 0$$

بنابراین فقط $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ در هستهٔ f واقع است و بُعد آن صفر است.

۷ـ گزینه (۴) صحیح است : زیرا :
f نگاشتی خطی است لذا f^{-1} نیز نگاشتی خطی است از طرفی طبق قضیه برای هر $b\in\mathbb{R}^2$، $f^{-1}(b)$ (به شرطی که تهی نباشد) یک زیرفضای $\mathbb{R}^3$ و موازی و هم‌بُعد با هستهٔ f است و می‌دانیم $f^{-1}(0,0,0)$ همان هستهٔ f را مشخص می‌کند لذا چون $f^{-1}(2,2,2)$ خطی به معادلهٔ $y = 3x-1$ را مشخص می‌کند لذا هستهٔ f باید خطی موازی با این خط باشد.

۸ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است : زیرا :

$$\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}-y = x\\ x = y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y = -x\\x = y\end{cases}$$

$$x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow y^2 - (-x)^2 = 1 \Rightarrow y^2 - x^2 = 1$$

۹ـ گزینهٔ (۳) صحیح است : زیرا :

می‌دانیم اگر λ_1 و λ_2 مقادیر ویژهٔ ماتریس $A = \begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ باشند در این صورت $\lambda_1\lambda_2 = |A|$ و $\lambda_1+\lambda_2 = a+d$ پس اگر

$$A = \begin{bmatrix}2&0\\4&-1\end{bmatrix}$$

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = (\lambda_1+\lambda_2)^2 - 2\lambda_1\lambda_2 = (1)^2 - 2\times(-2) = 5$$

۱۰ـ گزینهٔ (۴) صحیح است : زیرا :
اگر A را ماتریس نگاشت خطی f تصور کنیم که $f(x) = x'$ در این صورت نگاشت خطی f^{-1} می‌تواند x' را به x تبدیل کند که ماتریس آن A^{-1} است پس :

$$A = \begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{bmatrix}4&-2\\-3&1\end{bmatrix},\ A^{-1} = \frac{1}{|A|}\times A^*,$$

$$|A| = -2$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

۱۱ـ گزینهٔ (۳) صحیح است : زیرا :
ابتدا هستهٔ f و بُعد آن را تعیین می‌کنیم

$$\begin{bmatrix}1&2\\-2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x+2y=0\\-2x+3y=0\end{cases} \Rightarrow x = y = 0$$

پس $k_f = \{(0,0)\}$ و بُعد آن صفر است. بنابراین طبق قضیهٔ f یک به یک است و نیز طبق قضیه اگر $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ یک به یک باشد پوشا نیز می‌باشد.

پاسخ تشریحی پرسشهای هندسهٔ تحلیلی پیش‌دانشگاهی

۱ـ گزینه (۲) درست است : زیرا برای برابری دو بردار باید مؤلفه‌های نظیر دو بردار برابر باشند. پس داریم :

$$\begin{cases}m-1=3\\2p+5=m+p-1\\m+n=4\end{cases}$$

از حل این دستگاه، $m=4$، $n=0$ و $p=-2$ به‌دست می‌آید که از آنجا $m+n+p=2$ به‌دست می‌آید.

نکته: از جمع طرفهای نظیر سه رابطهٔ دستگاه بالا $m+n+p=+2$ به‌دست می‌آید.

۲ـ گزینه (۳) درست است : زیرا :

$$3\sqrt{6} = \sqrt{m^2+4+m^2} \Rightarrow 2m^2+4 = 54 \Rightarrow m = \pm 5$$

۳ـ گزینه (۴) درست است : زیرا بردار یکهٔ محور xها $i = (1,0,0)$ است : پس :

$$\cos(\hat{ox, a}) = \frac{i.a}{|\vec{i}||\vec{a}|} = \frac{2}{1\times\sqrt{4+4+1}} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow (\hat{ox, a}) = \mathrm{Arccos}\frac{2}{3}$$

۴ـ گزینه (۱) درست است : زیرا داریم :

$$V_1 \perp V_2 \Rightarrow V_1.V_2 = 0 \Rightarrow 2m+2m+2-2m+10 = 0$$

$$\Rightarrow m = -6$$

$$\Rightarrow V_2 = (2,-5,-2) \Rightarrow |\vec{V_2}| = \sqrt{4+25+4} = \sqrt{33}$$

۵ ـ گزینهٔ (۱) درست است : زیرا قرینهٔ بردار a نسبت به راستای b از دستور زیر به‌دست می‌آید.

$$a'' = \frac{2(a.b)}{b.b}b - a$$

$$\Rightarrow a'' = \frac{2(4-4-9)}{16+4+9}(4,-2,3) - (1,2,-3)$$

$$\Rightarrow a'' = \frac{-18}{29}(4,-2,3) - (1,2,-3) = (\frac{-101}{29}, \frac{-22}{29}, \frac{33}{29})$$

۶ ـ گزینهٔ (۲) درست است : زیرا داریم :

$$a\times b = \begin{vmatrix}i&j&k\\1&0&2\\-2&1&2\end{vmatrix} = -2i-6j+k$$

۷ـ گزینهٔ (۳) درست است ؛ زیرا پارامترهای هادی خط D، ($r=0$ و $q=2$ و $p=1$) است. بنابراین معادلهٔ خط خواسته شده به‌صورت زیر است :

$$\begin{cases}\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}\\ z=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{y+1}{2}\\ z=2\end{cases}$$

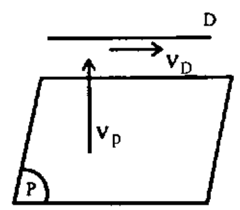
۸ ـ گزینهٔ (۳) درست است ؛ زیرا داریم :

$$A\in D\begin{vmatrix}x=1\\y=1\\z=3\end{vmatrix}\quad M\begin{vmatrix}0\\1\\2\end{vmatrix}\Rightarrow \vec{AM}\begin{vmatrix}-1\\0\\-1\end{vmatrix}$$

$$V_D=(1,2,-2),\ \vec{AM}\wedge\vec{V}_D=(2,-3,-2)$$

$$MH=\frac{\left|\vec{AM}\wedge\vec{V}\right|}{|\vec{V}|}=\frac{\sqrt{4+9+4}}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{\sqrt{17}}{3}$$

۹ـ بردار هادی خط $V_D=(2,3,5)$، و بردار نرمال صفحه $V_P=(2,-3,1)$ است. پس اگر زاویهٔ بین خط و صفحه را α بنامیم. داریم :



$$\sin\alpha=\frac{V_D.V_P}{\left|\vec{V_D}\right|\left|\vec{V_P}\right|}=\frac{4-9+5}{\sqrt{4+9+25}.\sqrt{4+9+1}}$$

$\sin\alpha=0\Rightarrow\alpha=0$ خط موازی صفحه است.

بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

۱۰ـ گزینهٔ (۴) درست است ؛ زیرا داریم :

$$x=t-1\ ,\ x=2\Rightarrow t-1=2\Rightarrow t=3$$
$$\Rightarrow A=(2,6,-5)$$
$$V_D=(1,1,-2)=V_P$$
$$\Rightarrow a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$
$$\Rightarrow 1(x-2)+1(y-6)-2(z+5)=0$$
$$\Rightarrow x+y-2z-18=0$$
$$\Rightarrow x+y-2z=18$$

پاسخ تشریحی پرسشهای دیفرانسیل و انتگرال ۱

۱ـ گزینهٔ (۳) درست است ؛ زیرا :

$$x^2-7x+6=0\Rightarrow\begin{cases}x=1\\x=6\end{cases}$$

اگر $1\le x<6\Rightarrow -x^2+7x-6=-x^2+7x-6\Rightarrow 0=0$

درنتیجه کلیه xهای عدد صحیح که در بازه $[1,6)$ قرار دارد جواب مسأله است.

$$\text{اگر}\begin{cases}x<1\\ \text{یا}\\ x\ge 6\end{cases}\Rightarrow x^2-7x+6=-x^2+7x-6$$

$$\Rightarrow x^2-7x+6=0\Rightarrow\begin{cases}x=1\\x=6\end{cases}$$

پس $x=6$ جواب معادله است، پس جوابها عبارتند از : $\{1,2,3,4,5,6\}$

۲ـ گزینهٔ (۳) درست است ؛ زیرا :

$$a_7: n=7\Rightarrow 7=2k-1\Rightarrow k=4\Rightarrow a_7=4$$
$$a_8: n=8\Rightarrow 8=2k\Rightarrow k=4\Rightarrow a_8=\frac{1}{5}$$
$$\Rightarrow a_7+a_8=4+\frac{1}{5}=\frac{21}{5}$$

۳ـ گزینهٔ (۳) درست است ؛ زیرا :

گزینه (۱) بنا بر متن کتاب درسی واگراست و حدّ جملهٔ عمومی گزینه (۲) مساوی $\frac{1}{2}$ است پس واگرا است و حدّ جملهٔ عمومی (۴) برابر ۱ است پس واگرا است. بنابراین گزینه (۳) درست است و امّا دلیل آن :

داریم : $0<\frac{1}{2^n+n}<\frac{1}{2^n}$

چون سری با جمله عمومی $\frac{1}{2^n}$ یا $(\frac{1}{2})^n$ یک سری هندسی با قدر نسبت $(\frac{1}{2})$ است همگرا می‌باشد، بنابراین سری با جملهٔ عمومی $\frac{1}{2^n+n}$ همگرا است.

۴ـ گزینه (۴) درست است ؛ زیرا :

$$x\to\frac{\pi}{4}^+\Rightarrow tgx\to-\infty$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{5}{30+4^{tgx}}=\frac{5}{30+4^{-\infty}}=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$$

۵ ـ گزینه (۴) درست است ؛ زیرا :

$$0<a<b<c\Rightarrow\begin{cases}a^n+b^n+c^n\sim c^n\\ n\to+\infty\end{cases}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(4e)^n+(8e)^n}{(3e)^n+(10e)^n}\sim\lim\frac{(8e)^n}{(10e)^n}=\lim_{n\to+\infty}(\frac{8}{10})^n\to 0$$

۶ ـ گزینه (۴) درست است ؛ زیرا :

$$\Rightarrow 0<\cot gx\le 1\Rightarrow\begin{cases}\frac{\pi}{4}\le x<\frac{\pi}{2}\\ \text{یا}\\ \frac{5\pi}{4}\le x<\frac{3\pi}{2}\end{cases}$$

۷ـ گزینه (۲) درست است ؛ زیرا :

$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(3).f(h)-1}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=f'(0)=3$$

۸ ـ گزینه (۴) درست است ؛ زیرا :

$$f(x)=|x-4|\sqrt{x-1}$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{|x-4|\sqrt{x-1}}{x-4}$$

$$x\to 4^+\Rightarrow\lim\frac{(x-4)\sqrt{x-1}}{x-4}=\sqrt{3}=f'_+(4)$$

$$x\to 4^-\Rightarrow\lim\frac{-(x-4)\sqrt{x-1}}{x-4}=-\sqrt{3}=f'_-(4)$$

۹ـ گزینه (۲) درست است ؛ زیرا :

$$V=x^3$$
$$\text{آهنگ متوسط تغییر حجم}=\frac{V(x+\Delta x)-V(x)}{\Delta x}$$

$$=\frac{V(2.2)-V(2)}{0.2}=\frac{10.648-8}{0.2}=\frac{2.648}{0.2}=13.24$$

۱۰ـ گزینه (۲) درست است ؛ زیرا :

$$C'(x)=0.4x+4$$
$$C'(500)=0.4(500)+4=204\ \text{تومان}$$

پس هزینه (۵۰۱) امین قوطی رنگ (۲۰۴) تومان است.

حل تشریحی پرسشهای دیفرانسیل و انتگرال ۲

۱ـ گزینه (۴) درست است ؛ زیرا :

$$f'(x)=\frac{6}{5}x^{\frac{1}{5}}+\frac{6}{5}x^{-\frac{4}{5}}=\frac{6}{5}x^{-\frac{4}{5}}(x+1)$$

$$=\frac{6(x+1)}{5x^{\frac{4}{5}}}=\frac{6(x+1)}{5\sqrt[5]{x^4}}$$

$\Rightarrow x=0\ ,\ x=-1$ (نقاط بحرانی)

چون $x=0$ عضو دامنه تابع هست پس نقاط بحرانی $\{0,-1\}$ است.

۲ـ گزینه (۳) درست است ؛ زیرا بنا بر تعریف اکسترمم نسبی، نقاط B و C اکسترمم نسبی و بنا به تعریف اکسترمم مطلق نقطه A ماکزیمم مطلق است. چون طول نقطه D عضو دامنه نیست پس نقطه D نمی‌تواند می‌نیمم مطلق باشد. بنابراین گزینه (۳) درست است.

۳ـ گزینه (۳) درست است ؛ زیرا بنا بر نتایج تعریف اکسترمم نسبی در کتاب درسی برقرار است.

۴ـ گزینه (۲) درست است ؛ زیرا ریشه‌های ساده داخل رادیکال تابع به معادله $f(x)=\sqrt[2n+1]{ax^n+bx^{n-1}+\cdots}$ طولهای نقاط عطف است پس $x^3-3x=0$ درنتیجه $x=0,\pm\sqrt{3}$ طولهای نقاط عطف است و $f'(x)=\frac{3x^2-3}{3\sqrt[3]{(x^3-3x)^2}}$ ، $3x^2-3=0$ ، آنگاه $x=\pm 1$ ، ریشه‌های ساده $f'(x)=0$ است که طولهای نقاط اکسترمم نسبی تابع است. پس منحنی این تابع سه نقطه عطف و دو اکسترمم دارد.

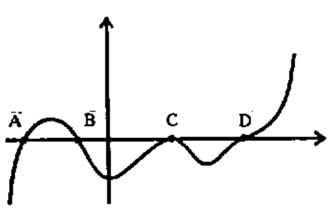
۵ـ گزینه (۲) بنا به متن کتاب درسی درست است.

۶ـ گزینه (۴) درست است ؛ زیرا :

$$\text{حد}_{x\to b}\frac{\cos x+\cos(x-b)}{-\sin x}\ \text{: هوپیتال}=\frac{\cos b+1}{-\sin b}$$

$$=\frac{2\cos^2\frac{b}{2}}{-2\sin\frac{b}{2}\cos\frac{b}{2}}=-\cot g\frac{b}{2}$$

۷ـ گزینه (۳) درست است ؛ زیرا منحنی این تابع محور طولها را در سه نقطه به طولهای a,b,d قطع می‌کند، ضمناً به علت وجود جمله $(x-c)^2$ ، منحنی در نقطه $x=c$ بر محور xها مماس است و چون معادله منحنی دارای جملهٔ $(x-d)^3$ است $x=d$ نقطه عطف منحنی تابع است به نمودار توجه کنید. منحنی دو ماکزیمم و دو می‌نیمم دارد. (نمودار با استفاده از قضیه مقدار میانگین قابل درک است.)



۸ـ گزینه (۲) درست است : زیرا این انتگرال به روش جزء به جزء حل می‌شود.

$$\int \mathrm{Arctg}\,x\,dx$$
$$u=\mathrm{Arctg}\,x \Rightarrow du=\frac{dx}{1+x^2}$$
$$dv=dx \Rightarrow v=x$$

داریم : $\int u\,dv = uv-\int v\,du$

$$\int \mathrm{Arctg}\,x\,dx = x\,\mathrm{Arctg}\,x-\int\frac{x\,dx}{1+x^2}=x\,\mathrm{Arctg}\,x-\frac{1}{2}\int\frac{2x\,dx}{1+x^2}$$
$$=x\,\mathrm{Arctg}\,x-\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(1+x^2)+C$$

۹ـ گزینه (۱) درست است : زیرا این انتگرال به روش تغیر متغیر حل می‌شود.

$$I=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$$

فرض می‌شود

$$x=\mathrm{tg}\,\alpha \Rightarrow dx=(1+\mathrm{tg}^2\alpha)d\alpha \quad (-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2})$$
$$\Rightarrow I=\int\frac{(1+\mathrm{tg}^2\alpha)d\alpha}{\mathrm{tg}^2\alpha\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}=\int\frac{\frac{1}{\cos^2\alpha}d\alpha}{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\times\frac{1}{\cos\alpha}}$$
$$=\int\frac{\cos\alpha\,d\alpha}{\sin^2\alpha}=-\frac{1}{\sin\alpha}+C$$
$$=-\frac{1}{\sin(\mathrm{Arctg}\,x)}+C$$

۱۰ـ گزینه (۳) درست است : زیرا :

$$\int\frac{dx}{1+\sin x}=\int\frac{dx}{1+\sin x}\times\frac{1-\sin x}{1-\sin x}=\int\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx$$
$$=\int\frac{1}{\cos^2 x}dx-\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx=\mathrm{tg}\,x-\frac{1}{\cos x}+C$$

پاسخ پرسشهای ریاضی عمومی ۱ پیش‌دانشگاهی (رشتهٔ تجربی)

۱ـ (ب)	۹ـ (ج)
۲ـ (آ)	۱۰ـ (ج)
۳ـ (ب)	۱۱ـ (آ)
۴ـ (ج)	۱۲ـ (ج)
۵ـ (آ)	۱۳ـ (آ)
۶ـ (ج)	۱۴ـ (ب)
۷ـ (آ)	۱۵ـ (ج)
۸ـ (ب)	

پاسخ تشریحی پرسشهای ریاضی عمومی ۲

۱ـ گزینه (۱) صحیح است : زیرا :

$$\frac{dy}{dx}=y'=-\frac{e^x-3x^2}{e^y-2y}\Rightarrow m_A=-\frac{e-3}{1}=3-e$$
$$y-y_A=m_A(x-x_A)\Rightarrow y=(3-e)(x-1)$$
$$y=3x-ex-3+e \qquad y+ex=3x+e-3$$

۲ـ گزینه (۴) صحیح است : زیرا :

$$f(x)+g(x)=\log(\sqrt{4x^2+5}-2x)$$
$$+\log(\sqrt{4x^2+5}+2x)$$
$$=\log(\sqrt{4x^2+5}-2x)(\sqrt{4x^2+5}+2x)$$
$$=\log(4x^2+5-4x^2)$$
$$\Rightarrow f(x)+g(x)=\log 5\Rightarrow f'(x)+g'(x)=0$$
$$\Rightarrow f'(x)=-g'(x)$$

۳ـ گزینه (۳) صحیح است : زیرا :

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3\Rightarrow \Delta V=4\pi r^2\Delta r$$
$$\Rightarrow \Delta V=4\pi(10)^2(\pm 0/01)=\pm 4\pi$$

خطای ماکزیمم حجم $=4\pi-(-4\pi)=8\pi$

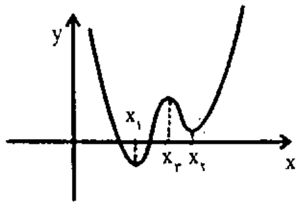
$$S=4\pi r^2\Rightarrow \Delta S=8\pi r\Delta r=8\pi(10)(\pm 0/01)=\pm 0/8\pi$$

خطای ماکزیمم سطح $=0/8\pi-(-0/8\pi)=1/6\pi$

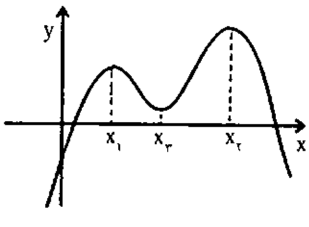
۴ـ گزینه (۲) صحیح است : زیرا :

$$f''(x_1)f''(x_2)>0\Rightarrow \begin{cases} f''(x_1)>0\ ,\ f''(x_2)>0 & (1)\\ f''(x_1)<0\ ,\ f''(x_2)<0 & (2)\end{cases}$$

در حالت (۱) چون x_1 و x_2 نقاط بحرانی تابع f بوده، بنابر آزمون مشتق دوم x_1 و x_2 هر دو نقاط می‌نیمم نسبی تابع f هستند، بنابراین تابع f بین x_1 و x_2 نقطه بحرانی دیگری دارد.



درحالت (۲) چون x_1 و x_2 نقاط بحرانی تابع f بوده، بنابر آزمون مشتق دوم x_1 و x_2 هر دو نقاط ماکزیمم نسبی تابع f هستند، بنابراین تابع f بین x_1 و x_2 نقطه بحرانی دیگری دارد.



۵ـ گزینه (۳) صحیح است : زیرا فرض کنیم نقطه (x,y) جواب مسأله باشد :

$$D=d^2=x^2+y^2\ ,\ y=x^2-1\Rightarrow D=x^2+(x^2-1)^2$$
$$D'_x=2x+4x(x^2-1)=0\Rightarrow x_1=0, x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}, x_3=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

بنابر آزمون مشتق دوم چون $f''(\frac{\sqrt{2}}{2})>0$ و $f''(-\frac{\sqrt{2}}{2})>0$ پس نقاطی با طولهای x_2 و x_3 مینیمم نسبی تابع هستند. یعنی نقاطی که روی منحنی واقع باشند و کمترین فاصله را تا مبدأ مختصات داشته باشند، عبارتند از :

$$A\left|\begin{matrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{1}{2}\end{matrix}\right. \qquad A'\left|\begin{matrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{1}{2}\end{matrix}\right.$$

$$d^2=x^2+y^2\Rightarrow d^2=(\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{1}{2})^2\Rightarrow d=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۶ـ گزینه (۲) صحیح است : زیرا برای یافتن مجانب افقی کافی است ضابطه منحنی بالا را نسبت به x مرتب کنیم، سپس با تقسیم دو طرف برابری بر بزرگترین توان x و حدگیری وقتی $x\to\pm\infty$، مجانب افقی را بیابیم :

$$3x^3-3x^2+2x^2y+2xy+x^2y^3-y^3=0$$
$$\Rightarrow 3x^3+(-3+2y+y^3)x^2+2xy-y^3=0$$
$$3+\frac{-3+2y+y^3}{x}+\frac{2y}{x^2}-\frac{y^3}{x^3}=0$$

با حدگیری از دو طرف برابری وقتی $x\to\pm\infty$ خواهیم داشت :

$$3=0$$

رابطه آخری غیرممکن است، بنابراین وقتی $x\to\pm\infty$ مقداری برای y به دست نمی‌آید، پس منحنی مجانب افقی ندارد.

اکنون برای یافتن مجانب قائم، ضابطه منحنی را نسبت به y مرتب می‌کنیم. سپس با تقسیم دو طرف برابری بر بزرگترین توان y وقتی $y\to\pm\infty$، مجانب قائم را می‌یابیم :

$$y^3(x^2-1)+2xy(x+1)+3x^2(x-1)=0$$
$$\Rightarrow x^2-1+\frac{2x(x+1)}{y^2}+\frac{3x^2(x-1)}{y^3}=0$$

با حدگیری از دو طرف برابری بالا وقتی $y\to\pm\infty$ خواهیم داشت :

$$x^2-1=0\Rightarrow x=1\ ,\ x=-1$$

درنتیجه تابع فوق دارای دو مجانب قائم است.

۷ـ گزینه (۲) صحیح است : زیرا :

$$f(x)=[2x+1]=[2x]+1\Rightarrow f(x)=\begin{cases}-1 & -1\le x<-\frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{1}{2}\le x<0\\ 1 & 0\le x<\frac{1}{2}\\ 2 & \frac{1}{2}\le x<1\end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}(-1)dx+\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(0)dx+\int_{0}^{\frac{1}{2}}(1)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2)dx$$
$$=-x\Big|_{-1}^{-\frac{1}{2}}+C\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0}+x\Big|_{0}^{\frac{1}{2}}+2x\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}$$
$$=|\frac{1}{2}-1|+0+|\frac{1}{2}-0|+|2-1|=2$$

۸ـ گزینه (۴) صحیح است : زیرا :

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\pi y^2dx=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\tan x}{\cos^2 x}dx$$
$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\tan^2 x)\tan x\,dx$$
$$=\pi\cot^2 x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=3\pi$$

۹ـ گزینه (۳) صحیح است ؛ زیرا :

$C_1: x^2+y^2-2x-2y=0 \Rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=2$

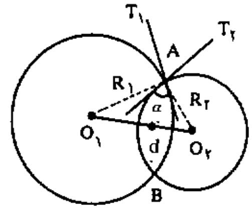
$\Rightarrow O_1(1,1)\ ,\ R_1=\sqrt{2}$

$C_2: x^2+y^2+4x-4y=0 \Rightarrow (x+2)^2+(y-2)^2=8$

$\Rightarrow O_2(-2,2)\ ,\ R_2=2\sqrt{2}$

طول خط‌المرکزین

$d=O_1O_2=\sqrt{(1+2)^2+(1-2)^2}=\sqrt{10}$



$$\cos\alpha=\frac{d^2-(R_1^2+R_2^2)}{2R_1R_2}=\frac{10-(2+8)}{2\times\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=0\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{2}$$

۱۰ـ گزینه (۳) صحیح است ؛ زیرا :

$5x^2+8y^2=40\Rightarrow\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{5}=1$ بیضی افقی

$C(0,0)\ ,\ a^2=8\Rightarrow a=2\sqrt{2}, b^2=5\Rightarrow b=\sqrt{5}=a'$

$C^2=a^2-b^2=8-5=3\Rightarrow C=\sqrt{3}=b'$

$C'(0,0)$ بیضی قائم است $\Rightarrow\frac{y^2}{a'^2}+\frac{x^2}{b'^2}=1\Rightarrow\frac{y^2}{5}+\frac{x^2}{3}=1$

$\Rightarrow 5x^2+3y^2=15$

پاسخ تشریحی پرسشهای ریاضی پایه پیش‌دانشگاهی

۱ـ گزینه (۱) صحیح است ؛ زیرا :

$$\begin{cases}x+a\geq y\\ y=z\end{cases}\Rightarrow x+a\geq z$$

$$\begin{cases}x+a\geq z\\ z>u+a\end{cases}\Rightarrow x+a>u+a\Rightarrow x>u$$

۲ـ گزینه (۲) صحیح است ؛ زیرا :

$S=1+2+3+\cdots+n$

$S'=2+4+6+\cdots+2n=2(1+2+3+\cdots+n)$

$\Rightarrow S'=2S\Rightarrow\frac{S}{S'}=\frac{1}{2}$

۳ـ گزینه (۴) صحیح است ؛ زیرا :

$a_n=\frac{4^{3n}}{4}=4^{3n-1}=(2^2)^{3n-1}=2^{6n-2}$

$2^{6n-2}=2^{76}\Rightarrow 6n-2=76\Rightarrow 6n=78\Rightarrow n=13$

۴ـ گزینه (۳) صحیح است ؛ زیرا :

$\log_2(\log_3(\log x))=0\Rightarrow\log_2(\log_3(\log x))=\log_2^1$

$\Rightarrow\log_3(\log x)=1=\log_3^3\Rightarrow\log x=3\Rightarrow x=10^3=1000$

۵ـ گزینه (۳) صحیح است ؛ زیرا :

$M=\frac{2}{3}\log\frac{E}{E_0}\Rightarrow E=E_0\times10^{\frac{3M}{2}}$

$E_0=10^{4.4}$ (ژول) , $M=7.2$ ریشتر

$E=10^{4.4}\times10^{\frac{3(7.2)}{2}}=10^{4.4}\times10^{10.8}=10^{15.2}$ (ژول)

۶ـ گزینه (۱) صحیح است ؛ زیرا :

$A_t=A_0(1+r)^t\Rightarrow 20000=2000(1+0.02)^t$

$\Rightarrow 10=(1.02)^t$

$\Rightarrow t=\log_{1.02}^{10}=\frac{\log10}{\log1.02}=\frac{1}{\log1.02}$

۷ـ گزینه (۳) صحیح است؛ زیرا اگر در روز x واحد عروسک تولیدکند و هرکدام‌از آنها را ۲۰۰ تومان بفروشد، معادله درآمد آن به‌صورت $R(x)=200x$ می‌باشد :

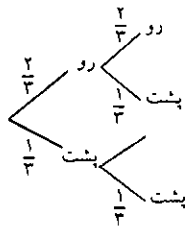
سود = درآمد − هزینه $\Rightarrow P(x)=R(x)-C(x)$

$P(x)=200x-x^2-40x-1000=-x^2+160x-1000$

$x=-\frac{b}{2a}=\frac{-160}{-2}=80$ ماکزیمم

۸ـ گزینه (۴) صحیح است ؛ زیرا اگر احتمال آمدن «پشت» را x درنظر بگیریم، احتمال آمدن «رو»، 2x می‌باشد :

$x+2x=1\Rightarrow 3x=1\Rightarrow x=\frac{1}{3}$



چون پیشامد اتفاق افتادن هر دوبار «رو» مستقل از هم می‌باشند :

$P=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$

۹ـ گزینه (۴) صحیح است ؛ زیرا :

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$

$A'\cap B'=(A\cup B)'\Rightarrow P(A'\cap B')=P(A\cup B)'$

$=1-P(A\cup B)$

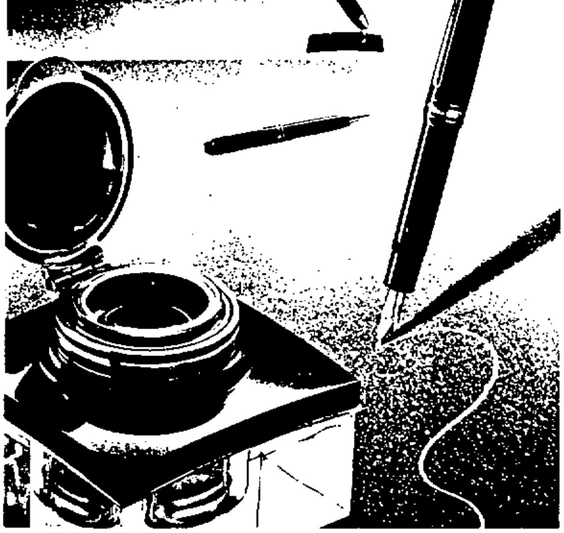
$\Rightarrow P(A'\cap B')=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$

۱۰ـ گزینه (۱) صحیح است ؛ زیرا :

$t_k=\binom{n}{k-1}(2x^3)^{n-(k-1)}(y^2)^{k-1}$ جمله kام

$t_6=\binom{7}{5}(2x^3)^{7-5}(y^2)^5$

$=\frac{7!}{5!\times2!}(2x^3)^2(y^2)^5=21(4x^6)(y^{10})=84x^6y^{10}$



جوابهای تفریح اندیشه

پاسخ (۱)

ساده‌ترین راه حل این مسأله، استفاده از این حقیقت است که نسبت فاصله‌های پیموده شده توسط پیک و ارتش در یک زمان، برابر نسبت سرعتهای آنهاست.

نمودار زیر، مکانهای نسبی پیک و ارتش را در آغاز، هنگامی که پیام تحویل داده شده، و زمانی که پیک به عقب ارتش بازگشته است نشان می‌دهد.

زمانی که پیک می‌رسد، جلو ارتش x کیلومتر، و پیک $x + ۱۰۰$ کیلومتر راه رفته است. در زمانی که ارتش، با تکمیل مارش ۱۰۰ کیلومتری خود، $۱۰۰ - x$ کیلومتر حرکت می‌کند، پیک x کیلومتر به عقب بازمی‌گردد. به این ترتیب، پیک مجموعاً $۱۰۰ + 2x$ کیلومتر حرکت می‌کند.

از آنجا که نسبت سرعتهای آنها ثابت است:

$$x : ۱۰۰ + x :: ۱۰۰ - x : x$$

که می‌شود

$$x^{۲} = ۵۰۰۰$$

$$x = \sqrt{۵۰۰۰}$$

$$x = ۷۰/۷۱$$

بنابراین، کل مسافتی که پیک پیموده عبارت است از:

$$۱۰۰ + ۲(۷۰/۷۱) = ۲۴۱/۴۲$$ کیلومتر

پاسخ (۲)

مسافتی را که مهرداد پیموده است L می‌نامیم، چون هر سه نفر همزمان به مقصد رسیده‌اند. پس مهرداد و کیوان زمانی را که پیاده طی کرده‌اند و مسافتی را که هر یک پیموده‌اند مساوی است. زمانی را که کیوان پیاده طی کرده است $\frac{L}{۶}$ ساعت است. در این مدت علی $2L - ۸$ کیلومتر راه را برای پیدا کردن مهرداد پیموده است (یعنی طول مسافت L که به وسیله مهرداد پیموده شده است و L فاصله‌ای که به وسیله کیوان طی شده است).

همچنین علی $L - ۸$ کیلومتر را با مهرداد تا شهر پیموده است که جمعاً $3L - ۱۶$ کیلومتر می‌شود. بنابراین علی $\frac{۱۶ - 3L}{۳۰}$ ساعت راه رفته است و مهرداد و کیوان نیز همین قدر ساعت راهپیمایی کرده‌اند پس می‌توان نوشت:

$$\frac{L}{۶} = \frac{۱۶ - 3L}{۳۰}$$

که از آنجا $L = ۲\,km$ و مجموع زمان مسافرت $\frac{L}{۶} + \frac{۱۶ - 3L}{۳۰}$ است که اگر به جای L مقدارش را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\frac{۲}{۶} + \frac{۱۶ - ۶}{۳۰} = \frac{۲}{۳}$$ ساعت = ۴۰ دقیقه

پاسخ (۳)

حجم شیر، آب و روغن به نسبت ۱، ۲ و ۴ است که مجموع این نسبتها ۷=۴+۲+۱ می‌باشد، بنابراین حجم مایعات ریخته شده در ظروف، مضرب ۷ می‌باشد، حال آنکه مجموع ظرفیت (گنجایش) ظرفها برابر ۱۲۹ است که مضربی از ۷ با باقیماندهٔ ۳ است (۱۲۹=۱۸×۷+۳). پس گنجایش ظرف خالی، مضربی از ۷ به اضافهٔ ۳ لیتر می‌باشد، بنابراین ظرف خالی یا ۲۴ لیتری یا ۳۸ لیتری است. اگر ظرف ۳۸ لیتری خالی باشد، مجموع حجم ظرفهای پر شده ۹۱ لیتر خواهد بود که در این صورت حجم شیر ۱۳ لیتر خواهد بود و این ممکن نیست (زیرا ظرف ۱۳ لیتری نداریم). بنابراین ظرف ۲۴ لیتری خالی است که در این صورت تنها جواب ممکن عبارت است از:

- شیر: در ظرف ۱۵ لیتری؛
- آب: در ظرفهای ۱، ۲، ۴، ۶ و ۱۲ لیتری؛
- روغن: در ظرفهای ۲۲ و ۳۸ لیتری.

پاسخ (۴)

$$۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + (۸ \times ۹) = ۱۰۰$$

Borhan

In the name of God

Vol. 7 No. 4

Serial numbers: 24 Spring 1998

Borhan is a mathematics journal published four times a year by Madrasse Publicatios.
Each issue includes articles related to mathematics and its various topics specifically those concerning high school education in Iran.

All communications should be sent to the editor at the following address:
Madrasse Publication - No. 38. Sepand Street, Sepahbod ghrany Ave, Tehran, Iran, Post code: 14155/1949

Contents:

بوزجانی

ابوالوفا محمدبن یحیی بن اسماعیل بوزجانی ریاضیدان و منجم مسلمان ایرانی (۳۲۸ ـ ۳۸۸)یکی از مفاخر علمی ایران و از بزرگترین ریاضیدانان دورهٔ اسلامی بوده است. بنا به گفتهٔ ابن ندیم وی در روز چهارشنبه اول ماه رمضان سال ۳۲۸ در شهر بوزجان (تربت جام فعلی) تولد یافت. علم عدد و هندسه را نزد عموی خود ابوعمر و مغازلی و دایی خود ابوعبدالله محمدبن عَنْبَسه آموخت. در سال ۳۴۸ یعنی در سن بیست سالگی به عراق مهاجرت کرد و تا آخر عمر در بغداد می‌زیست.

بوزجانی بدون تردید یکی از مشهورترین منجمان و مهندسان زمان خود بوده است و این مطلب از قضاوتی که معاصران وی و مورخان بعدی دربارهٔ او کرده‌اند کاملاً پیداست.

بوزجانی گاهی در کارهای علمی با معاصر خود، بیرونی به وسیلهٔ مکاتبه تشریک مساعی می‌کرده است. بیرونی در کتاب تحدید نهایات الاماکن نوشته است که در سال ۳۸۷ هنگامی که او در خوارزم و بوزجانی در بغداد بوده کسوفی را با قرارداد قبلی با هم رصد کرده و نتیجه را مقایسه کرده‌اند.

ابوعلی حبوبی که معاصر بوزجانی بوده و ظاهراً در حدود خوارزم می‌زیسته نیز با بوزجانی مکاتبه داشته و دستوری برای محاسبهٔ مساحت مثلث از او خواسته بوده و بوزجانی جواب او را در رسالهٔ مختصری داده بوده است.

اهمیت آثار ریاضی بوزجانی: مثلثات

اهمیت آثار ریاضی بوزجانی بیشتر به واسطهٔ سهم بسزایی است که وی در پیشرفت علم مثلثات دارد. کتاب اعمال هندسی وی نیز بدیعترین و جالبترین اثری است که در دورهٔ اسلامی دربارهٔ هندسهٔ عملی پدید آمده است.

بخش مهمی از کتاب مجسطی بوزجانی را می‌توان کتاب جامعی دربارهٔ علم مثلثات دانست که در آن دستورهای مهم مثلثات چه در مثلثات مسطح و چه در مثلثات کروی ثابت شده و در مسایل متعدد و متنوع مورد استعمال قرار گرفته است.

در مثلث مسطح، بوزجانی صحَت روابط زیر را ثابت کرده و آنها را به کار بسته است:

$$\frac{2R - \text{وتر}(180 - \alpha)}{\text{وتر}\frac{\alpha}{2}} = \frac{\text{وتر}\frac{\alpha}{2}}{R} \qquad (1)$$

در این دستور R شعاع دایرهٔ محیطی و α بر حسب درجه است. این دستور معادل است با دستور کنونی:

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha$$

$$\frac{\text{وتر}\,\alpha}{\text{وتر}\frac{\alpha}{2}} = \frac{\text{وتر}(180 - \frac{\alpha}{2})}{R} \qquad (2)$$

این دستور معادل است با دستور کنونی:

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

برای محاسبهٔ جیب مجموع و تفاضل دو قوس، دو استدلال هندسی بیان کرده که یکی از آنها به دستور پیچیدهٔ زیر منجر می‌شود:

$$\sin(a \pm b) = \sqrt{\sin^2 a - \sin^2 a \sin^2 b} \pm \sqrt{\sin^2 b - \sin^2 a \sin^2 b}$$

و نتیجهٔ استدلال دومی چنین است:

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$

در مثلث کروی غیر قائم‌الزاویه نیز بوزجانی رابطهٔ زیر را که در مثلث مسطح زیر صادق است به دست آورده و مورد استفاده قرار داده است:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} \qquad (3)$$