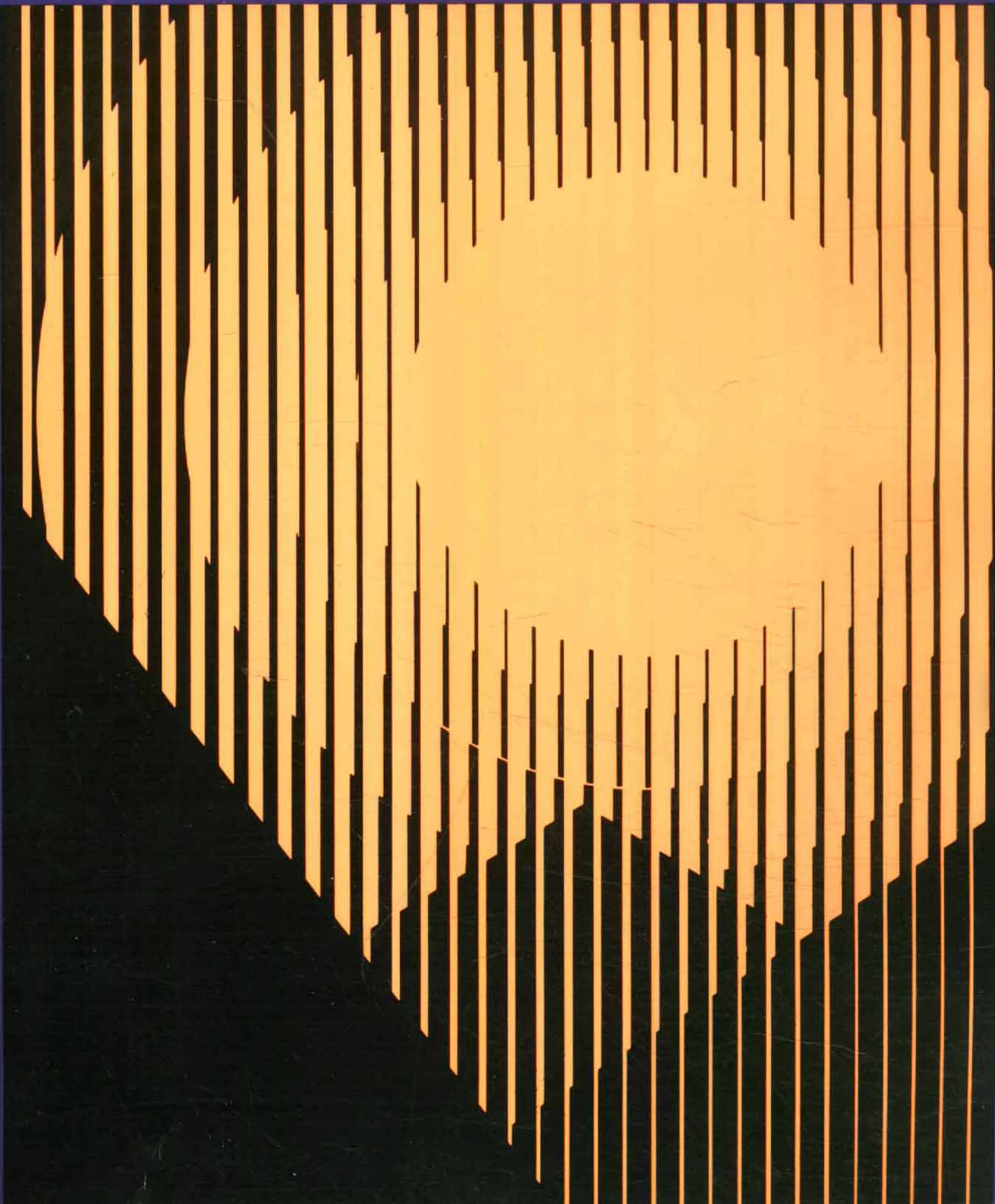
مجلهٔ ریاضی

برهان

برای دانش آموزان دبیرستان

۱۴

سال چهارم، تابستان ۱۳۷۴، شمارهٔ چهارم، بها ۱۵۰۰ ریال



بسم الله الرحمن الرحیم

انتشارات مدرسه
وابسته به
وزارت آموزش و پرورش

سال چهارم، تابستان ۱۳۷۴، شمارهٔ چهارم

برهان تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:
۱ـ نگارش مقالات کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتب ریاضی دبیرستان)
۲ـ طرح مسائل کلیدی (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن
۳ـ طرح مسائل مسابقه‌ای (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن
۴ـ طرح معماهای ریاضی
۵ـ نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)
• هیئت تحریریه درحکّ واصلاح وحذف و اضافهٔ مقالات آزاد است.
• مقالات وارده باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.
• مقالات مجله بارسم‌الخطِ انتشارات مدرسه به چاپ خواهد رسید.
• مقالات رسیده مسترد نمی‌شود.

برهان هر ۳ ماه یک شماره منتشر می‌شود.

مطالب این شماره

■ نشانی: تهران، خیابان سپهبد قرنی، پل کریمخان زند، کوچه شهید محمود حقیقت‌طلب، پلاک ۳۶
تلفن: ۴-۸۸۹۷۷۷۳، ۸۹۳۸۰۹، ۸۸۰۲۳۳۶، ۸۸۰۲۳۴۷، ۸۸۰ فاکس: ۸۸۲۰۵۹۹ صندوق‌پستی: ۱۴۱۵۵/۱۹۴۹

● امیرالمؤمنین علی (ع) می‌فرمایند:

«بر شما باد به طلب علم، زیرا طلب علم واجب است، علم مایهٔ پیوند میان برادران و راهنما به مروّت و جوانمردی است، تحفهٔ مجالس و همنشین در مسافرت و مایهٔ انس و رهایی از تنهایی، در غربت است[1]».

آری عزیزانِ دانش‌آموز، طلب علم و «دانش‌آموزی» وظیفه‌ای است واجب و چه خوب است که شما به این واجب و انجام آن توجه خاص مبذول داشته تا از عواقب خوب آن نیز بهره‌مند شوید. آیا هر علمی و طلب آن علم را می‌توان وظیفه واجب شمرد و چه علمی ره‌گشا و نجات‌دهنده است؟ جواب این سؤال را نیز از زبان امام علی(ع) بشنویم که می‌فرمایند:

«بهترین علم، آن علمی است که به وسیلهٔ آن راه رشد و هدایتت را اصلاح کنی، و بدترین علم، علمی است که توسط آن آخرت خود را تباه گردانی[2]».

حال این سؤال پیش می‌آید که فایدهٔ این علم، همان که مولا علی(ع) آن را بهترین علم نامیدند چیست؟ ایشان می‌فرمایند:

«نتیجه و فایدهٔ علم و دانش، نیکوکاری است[3]».

یعنی میوهٔ درخت علم، عملِ نیک است و این میوه به ثمر نمی‌رسد جز با زحمت و صبر و استقامت در راه کسب علم و رسیدن به بالاترین درجات آن که در این زمینه نیز امیرالمؤمنین علی (ع) می‌فرمایند:

«ای جویندهٔ علم! عالم و دانشمند حقیقی دارای سه علامت است: دانایی، بردباری و سکوتِ به جا و به‌مورد[4]».

آیا شما نیز دارای این ویژگیها می‌باشید؟ آیا هدف از علم‌آموزی را همانگونه که امامان ما علیهم‌السلام تشریح نموده‌اند، در پیش رو دارید؟ آیا با افزونی علم در خودتان احساس قدرت می‌کنید یا ضعف یا هر دو، هر کدام در جهتی؟ حرف اوّل را با سخنی از پیامبراسلام (ص) به نقل از ولیّ و وصیّ بر حقشان علی(ع) به پایان می‌بریم:

ـ «کسی که علم را برای خدا طلب کند، به هیچ بخشی از آن نرسد مگر شکسته نفسی‌اش بیشتر، و فروتنی‌اش در میان مردم زیادتر و خداترسی‌اش افزونتر و جهد و کوشش او در دین بیشتر شود، و این است آن کسی که از علم و دانایی برخوردار است، پس (تا می‌تواند بیشتر) بیاموزد[5]».

والسلام ـ سردبیر

---

(۱) بحارالانوار / ج ۱، صفحه ۱۸۳

(۲) غررالحکم / فصل ۲۹، حدیث ۷۵

(۳) غررالحکم حرف (غ)

(۴) الحیاة / ج ۲، ص ۳۱۰

(۵) کنزالعمال / ج ۱۰، حدیث ۲۹۳۸۴

شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۱۴)

پرویز شهریاری

ژوزف فوریه (۱۷۶۸ ـ ۱۸۳۰ میلادی)، یکی از بزرگترین ریاضی‌دانان فرانسه، در کتاب خود به نام «نظریهٔ تحلیلی گرما» (۱۸۲۹)، مجموع رشتهٔ نامتناهی

$$S = ۱ - ۱ + ۱ - ۱ + \dots$$

را، برابر $\frac{۱}{۲}$ دانسته است. او این‌طور استدلال می‌کرد:

$$S = ۱+۱-۱+۱-۱+\dots = ۱-(۱-۱+۱-۱+\dots)$$

چون داخل پرانتز، همان مقدار S است، بنابراین:

$$S = ۱ - S \implies S = \frac{۱}{۲}$$

چند سال بعد برنارد بولتانو (۱۷۸۱ ـ ۱۸۴۸ میلادی)، ریاضی‌دان و فیلسوف چک، برای اثبات نادرستی نتیجه‌گیری فوریه، با استدلالی شبیه به استدلال فوریه، دو مقدار دیگر برای S پیدا کرد:

$$S = (۱ - ۱) + (۱ - ۱) + (۱ - ۱) + \dots = ۰$$

$$S = ۱ - (۱ - ۱) - (۱ - ۱) - (۱ - ۱) - \dots = ۱$$

برای نتیجه‌گیری فوریه، به نحو دیگری هم می‌توان «استدلال» کرد: اگر در تقسیم ۱ بر $x - ۱$، جمله‌های خارج قسمت را برحسب توان‌های صعودی x بنویسیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱}{۱ - x} = ۱ + x + x^۲ + x^۳ + \dots \qquad (۱)$$

سمت راست برابری، به ازای $x = -۱$، برابر همان S و سمت چپ برابری برابر $\frac{۱}{۲}$ می‌شود. گمان می‌کنم، حدس زده باشید که فوریه اشتباه کرده است. دربارهٔ برابری (۱)، باید گفت که، این برابری تنها وقتی درست است که داشته باشیم $|x| < ۱$ (مثلاً، روشن است که، برای $x > ۱$، سمت چپ برابری، عددی منفی می‌شود، در حالی که در سمت راست برابری، عددی مثبت به‌دست می‌آید). برابری (۱)، در حالت $|x| = ۱$ هم برقرار نیست.

دربارهٔ نادرست بودن نتیجه‌گیری فوریه، حتی می‌توان به این «استدلال عامیانه» متوسل شد که، چطور ممکن است از مجموع جبری عددهای درست، عددی کسری به‌دست آید؟ ولی اساس مطلب، از این جدی‌تر است. وقتی با تعدادی نامتناهی از عددها سروکار داریم که با عمل «جمع» یا «توان» و یا عمل دیگری به‌هم مربوط شده‌اند، تنها وقتی می‌توان دربارهٔ نتیجهٔ این عملها صحبت کرد که، به‌نحوی ثابت کرده‌باشیم چنین‌نتیجه‌ای وجود دارد. ولی رشتهٔ

$$S = ۱ - ۱ + ۱ - ۱ + \dots$$

تن به چنین برآوردی نمی‌دهد و، بنابراین، به سمت عدد معینی میل نمی‌کند. چنین رشته‌هایی را «تباهده» یا «واگرا» می‌گویند. نمونهٔ دیگری از یک عبارت عددی که قابل محاسبه نیست و حد معینی ندارد عبارت عددی به‌صورت

$$A = \sqrt{۲}^{\sqrt{۲}^{\sqrt{۲}^{\cdots}}}$$

است، زیرا اگر آن را برابر x فرض کنیم، به‌شرط وجود x، باید داشته باشیم:

$$\sqrt{۲}^{x} = x$$

ولی این معادله، دست‌کم دو جواب دارد: $x = ۲$ و $x = ۴$؛ و این، یک تناقض است، زیرا A نمی‌تواند هم برابر ۲ و هم برابر ۴ باشد.

اکنون به مثالهایی از جبر دبیرستانی می‌پردازیم.

مثال ٦. وضع خط راست $۳x + y + ۱ = ۰$ را نسبت به منحنی (c) پیدا کنید، به‌شرطی که منحنی (c) با معادلهٔ زیر داده شده باشد:

$$۲x^۲ - y^۲ + xy + ۲x + ۵y - ۴ = ۰$$

برای پی‌بردن به موقعیت یک خط راست، نسبت به یک منحنی، باید نقطه‌های مشترک آنها را (اگر وجود داشته باشند)، پیدا کنیم. برای این منظور، معادلهٔ خط راست و معادلهٔ منحنی را، مثل یک دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی حل می‌کنیم. از معادلهٔ خط راست به دست می‌آید: $y = -۳x - ۱$. این مقدار را، به‌جای y، در معادلهٔ (c) قرار می‌دهیم؛ بعد از عملهای ساده، به این معادلهٔ درجه دوم (نسبت به x) می‌رسیم:

$$-۱۰(x+۱)^۲ = ۰$$

که یک ریشهٔ مضاعف (دو ریشهٔ برابر) دارد. اگر این مقدار ریشه ($x = -۱$) را در معادلهٔ خط راست، یا معادلهٔ منحنی (c) قرار دهیم، به جواب $y = ۲$ می‌رسیم (با قرار دادن $x = -۱$ در معادلهٔ منحنی (c)، برای y، ریشهٔ مضاعف ۲ به‌دست می‌آید). تکلیف روشن شد: خط راست و منحنی (c) یک نقطهٔ مشترک دارند و، در این نقطه، برهم مماس‌اند، زیرا از حل معادله‌های آنها با یکدیگر، به معادله‌ای با ریشهٔ مضاعف رسیدیم. مسأله حل شد.

ولی اشتباه می‌کنیم؛ معادله‌ها ما را فریب داده‌اند . . . اندکی بیشتر دقت کنیم. معادلهٔ منحنی (c)، به‌صورت منحنی داده‌شده است. باوجود این، می‌توانیم مشتق y را نسبت به x پیدا کنیم. اگر خط راست مفروض، بر منحنی (c) مماس باشد، باید مقدار y' به ازای مختصات نقطه تماس، یعنی به ازای $x = -۱$ و $y = ۲$، با ضریب‌زاویه خط مماس، یعنی -۳ برابر شود. مشتق y نسبت به x در معادلهٔ منحنی (c) چنین می‌شود:

$$y' = \frac{۴x + y + ۲}{۲y - x - ۵}$$

ولی این کسر، به‌ازای $x = -۱$ و $y = ۲$، به صورت $\frac{۰}{۰}$ درمی‌آید و معلوم نیست، چگونه باید از آن رفع ابهام کرد. خود این مطلب، ما را، دربارهٔ درستی جواب، به تردید می‌اندازد.

معادلهٔ (c) را به‌صورت «صریح» درمی‌آوریم (یعنی y را برحسب x محاسبه می‌کنیم). اگر معادلهٔ (c) را برحسب توانهای نزولی y منظم کنیم، به این معادلهٔ درجه دوم، نسبت به y، می‌رسیم:

$$y^۲ - (x + ۵)y - (۲x^۲ + ۲x - ۴) = ۰$$

که از آن‌جا، بسادگی به‌دست می‌آید:

$$y = \frac{x + ۵ \pm (۳x + ۳)}{۲}$$

معلوم می‌شود، (c) یک منحنی نیست، بلکه دو خط راست است:

$$y = ۲x + ۴ \quad \text{و} \quad y = -x + ۱ \qquad (*)$$

که در نقطهٔ $(-۱ , ۲)$ یکدیگر را قطع می‌کنند. خط راست $۳x + y + ۱ = ۰$ هم از همین نقطه می‌گذرد و چون با هریک از خطهای راست (*) در نقطهٔ $(-۱ , ۲)$ برخورد دارد، بنابراین روشن است که چرا، در ابتدا، دوبار ریشهٔ $x = -۱$ به‌دست آمد. موضوع کاملاً روشن شد. معادلهٔ (c) و وجود ریشهٔ مضاعف، به‌کمک هم، ما را فریب داده بودند.

مفهوم مماس بودن یک خط راست بر منحنی (یا دو منحنی بر هم) را، دقیقتر بررسی کنیم.

اگر ضمن حل دستگاه شامل دو معادلهٔ خط راست و منحنی (یا دو منحنی) به ریشهٔ مضاعف رسیدیم، همیشه به معنای آن نیست که آنها برهم مماس‌اند. **یک خط راست وقتی بریک منحنی مماس است که مشتق تابع معرف منحنی در نقطه مشترک خود با خط راست، برابر با ضریب زاویهٔ خط راست باشد. همچنین، دو منحنی وقتی در نقطه‌ای مثل A برهم مماس‌اند که در این نقطه مماس مشترک داشته باشند.** به این مثال هم توجه کنید:

مثال ۷. خط راست $۴x + y = ۲$، **نسبت به منحنی (c) با معادلهٔ زیر چه وضعی دارد:**

$$y = x^۳ - ۴x^۲ - x + ۱$$

از حل معادله‌های خط راست و منحنی درجهٔ سوم، با تبدیل‌های ساده‌ای، به این معادله می‌رسیم:

$$x^۳ - ۳x^۲ + ۳x - ۱ = ۰ \implies (x - ۱)^۳ = ۰$$

بسیار خوب! چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟ خط راست و منحنی (c)، در نقطهٔ به طول ۱، مشترک‌اند. ولی آیا خط راست منحنی را قطع کرده یا بر آن مماس است؟

معیار مطمئن ما، محاسبهٔ ضریب‌زاویهٔ مماس بر منحنی (c) در نقطهٔ به طول واحد است. داریم:

$$y' = ۳x^۲ - ۶x - ۱$$

که به ازای $x = ۱$، برابر -۴ می‌شود؛ و -۴ ضریب‌زاویه خط راست ماست: خط راست $۴x + y = ۲$ نقطهٔ $(۱ , -۲)$ بر منحنی (c) مماس است. البته، چون:

$$x^۳ - ۳x^۲ + ۳x - ۱ = (x - ۱)^۳$$

نقطهٔ $x = ۱$، تغییر علامت می‌دهد، به معنای آن است که خط راست مماس، در نقطهٔ تماس از منحنی عبور می‌کند: نقطهٔ $(۱ , -۲)$، نقطهٔ عطف منحنی است و به همین دلیل، در این نقطه، منحنی (c) در دو طرف خط راست مماس واقع می‌شود (خط راست مماس بر منحنی

در نقطهٔ عطف آن، در نقطهٔ تماس، از منحنی عبور می‌کند).
به این مثال هم توجه کنید:

مثال ۸. سهمی $y = -x^2 - 2$، نسبت به دایرهٔ $x^2 + y^2 = 4$ چه وضعی دارد؟

اگر بین معادله‌های سهمی و دایره، x را حذف کنیم، به معادلهٔ درجه‌دوم

$$y^2 - y - 6 = 0 \qquad (**)$$

می‌رسیم که دو ریشه دارد: ۳ و ۲− . نقطهٔ به عرض ۳، در بیرون دایره است و، بنابراین، نمی‌تواند نقطهٔ برخوردی از دایره و سهمی را مشخص کند. $y = -2$، منجر به $x = 0$ می‌شود. $y = -2$، ریشهٔ سادهٔ معادله (**) بود (نه ریشهٔ مضاعف). آیا باید نتیجه گرفت، سهمی و دایره، در نقطهٔ $(0, -2)$ یکدیگر را قطع کرده‌اند؟ ولی، این نتیجه‌گیری، با تصوری که از سهمی و دایره داریم، سازگار نیست: دایره و سهمی، اگر برهم مماس نباشند، یا در چهار نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند، یا در دو نقطه؛ و یا نقطهٔ برخوردی ندارند.

ضریب‌زاویهٔ مماس بر سهمی و بر دایره را در نقطه $(0, -2)$ محاسبه می‌کنیم. برای دایره داریم: $y' = -\frac{x}{y}$ که در نقطه $(0, -2)$ برابر صفر می‌شود. همین‌طور، برای سهمی $y' = -2x$ که باز هم در نقطهٔ به طول صفر، برابر صفر است. سهمی و دایره، در این نقطه مماس مشترک دارند، یعنی برهم مماس‌اند.

می‌بینید، گاهی رسیدن به ریشهٔ ساده (و نه مضاعف)؛ به معنای مماس بودن دو نمودار بریکدیگر است. ولی، در این‌جا، به نکتهٔ دیگری اشاره کنیم. گفتیم سهمی و دایره، در حالت کلی، در چهار نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند؛ بنابراین، برای رسیدن به این چهار نقطه (حقیقی یا موهومی)، باید خودمان را به یک معادلهٔ درجهٔ چهارم برسانیم؛ و این، وقتی حاصل می‌شود که بین معادله‌های سهمی و دایره، y را و (نه x را) حذف کنیم. دراین‌صورت، به‌معادلهٔ‌درجهٔ چهارم

$$x^4 + 6x^2 = x^2(x^2 + 6) = 0$$

می‌رسیم که ریشهٔ مضاعف $x = 0$ را دارد و دو ریشهٔ دیگر آن، عددهای موهومی‌اند. چون $x = 0$، ریشهٔ مضاعف این معادلهٔ درجهٔ چهارم است، بنابراین سهمی و دایره، در نقطهٔ به طول صفر برهم مماس‌اند و نقطهٔ $(0, -2)$، نقطهٔ تماس آنهاست.

مثال ۹. از نقطهٔ $A(-1, 0)$، مماسهایی بر نمودار تابع $y = 1 - \sqrt{x+1}$ رسم کرده‌ایم. معادلهٔ مماسها را پیدا کنید.

اگر ضریب زاویهٔ مماس را m بگیریم، معادلهٔ خط راست مماس، به‌صورت

$$y = mx + m$$

درمی‌آید. برای به‌دست آوردن معادله‌ای که، ریشه‌های آن، نقطه‌های برخورد این خط راست با نمودار تابع باشد، باید معادله‌های آنها را، در یک دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی قرار دهیم و با هم حل کنیم. با حذف y در این دستگاه، به معادلهٔ درجه دوم

$$m^2x^2 + (2m^2 - 2m - 1)x + (m^2 - 2m) = 0 \qquad (1)$$

می‌رسیم، یعنی در حالت کلی، خط راستی که از نقطهٔ A می‌گذرد، نمودار ما را در دو نقطه قطع می‌کند و این، به شرطی است که معادلهٔ اخیر، دو ریشهٔ حقیقی داشته باشد. اگر این معادله، ریشه‌های موهومی داشته باشد، خط راست، نمودار را قطع نمی‌کند. در ضمن در حالت حقیقی بودن ریشه‌های این معادلهٔ درجه دوم، ریشه‌ای از آن قابل قبول است که، به ازای آن، مقدار $x + 1$ مثبت باشد، در غیر این‌صورت، تابع $y = 1 - \sqrt{x+1}$ موهومی می‌شود. ولی ما می‌خواهیم خط راست بر منحنی مماس باشد، پس باید معادلهٔ (۱)، ریشهٔ مضاعف داشته باشد:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4m + 1 = 0 \implies m = -\frac{1}{4}$$

اگر این نتیجه را بپذیریم، باید بگوییم: از نقطهٔ $A(-1, 0)$، تنها یک مماس برنمودار تابع مفروض می‌توان رسم کرد. معادلهٔ این مماس به صورت:

$$y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \quad \text{یا} \quad x + 4y + 1 = 0$$

و مختصات نقطهٔ تماس $(3, -1)$ است.

در این‌جا هم فریب خورده‌ایم. اگر مسأله را به کمک مشتق حل می‌کردیم، دو نقطهٔ تماس و دو خط راست مماس به‌دست می‌آمد. اگر طول نقطهٔ تماس را α بگیریم، عرض آن برابر $(1 - \sqrt{\alpha+1})$ می‌شود. ضریب زاویهٔ مماس، برابر است با مشتق تابع، به ازای طول نقطهٔ تماس، یعنی $\frac{-1}{2\sqrt{\alpha+1}}$. اگر دیگر خط راست مماس، از دو نقطهٔ

$$A(-1, 0) \quad , \quad T(\alpha, 1 - \sqrt{\alpha+1})$$

می‌گذرد. پس ضریب‌زاویهٔ مماس برابر است با $\frac{1 - \sqrt{\alpha+1}}{\alpha+1}$

این دو مقداری که برای ضریب‌زاویهٔ مماس به دست آمده است، با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$\frac{1-\sqrt{\alpha+1}}{\alpha+1} = \frac{-1}{2\sqrt{\alpha+1}}$$

این معادله دو جواب دارد: $\alpha = 3$ و $\alpha = -1$. از نقطهٔ A، دو مماس بر نمودار تابع می‌توان رسم کرد.

نقطه‌های تماس $T_1(3, -1)$ و $T_2(-1, 1)$ و معادله‌های خطهای مماس چنین است:

$$x + 4y + 1 = 0 \quad \text{و} \quad x = -1$$

چرا با روش اوّل، جواب به دست نیامد؟ معادلهٔ یکی از مماسها به‌صورت $x = -1$ درآمده، یعنی خط راستی است موازی با محور عرض. این مماس، با محور طول، زاویه‌ای برابر ۹۰ درجه می‌سازد و، بنابراین، ضریب‌زاویه‌ای برابر بی‌نهایت دارد. از طرف دیگر، هروقت یکی از ریشه‌های یک معادلهٔ چند جمله‌ای به سمت بی‌نهایت میل کند، ضریب بزرگترین درجهٔ آن، به سمت صفر میل می‌کند. به همین مناسبت، برای به‌دست آوردن m (ضریب‌زاویه)، با صفر شدن ضریب درجه دوم، به معادله‌ای درجه اول رسیدیم و یکی از جوابها، از دست رفت.

مثال ۱۰. مطلوب است $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

به ترتیب می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right) = 0$$

چون حد $\frac{\sin x}{x}$، وقتی x به سمت صفر میل کند، برابر است با واحد، بنابراین: حد عبارت $\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ با حد $\frac{1}{x^2}$ برابر است.

ولی فریب خورده‌ایم. اگر برای رفع ابهام، از قاعدهٔ هوپیتال استفاده کنیم، داریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$$

حد عبارت، برابر $\frac{1}{6}$ است نه صفر.

در واقع، وقتی x به سمت صفر میل کند، x و sinx، بی‌نهایت کوچکهایی هم‌درجه‌اند، ولی با هم برابر نیستند. اگر بسط sinx را برحسب توانهای x بدانیم:

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots$$

معلوم می‌شود که، وقتی x بی‌نهایت کوچک باشد، x^3 و x^5 و ... نسبت به x قابل صرف نظر کردن هستند و sinx با x برابر می‌شود. ولی ما با $x - \sin x$ سروکار داریم و

$$x - \sin x = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{5040}x^7 - \dots$$

و در نتیجه:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5 + \dots}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{120}x^2 + \frac{1}{5040}x^4 - \dots\right) = \frac{1}{6}$$

گمان می‌کنم همین ۱۰ مثال، شما را به‌درستی این مطلب قانع کرده باشد که: معادله، یک مُدل ریاضی است و نمی‌توان از آن، «چشم بسته» به‌جای استدلال استفاده کرد. در مقالهٔ بعد، مطلب را دربارهٔ شکلهای هندسی دنبال می‌کنیم.

تفریح اندیشه ۱

مجموع سه عدد ۱، ۲، و ۳ مساوی حاصل‌ضربشان است. آیا سه‌تاییهای دیگری از این‌گونه در میان اعداد صحیح موجودند؟

$$1 \times 2 \times 3 = 1 + 2 + 3$$

جواب در صفحهٔ ۸۸

حدّ: تعریف حدّ تابع

(قسمت دوّم)

◆ احمد قندهاری

۷ـ۱. بنا به قرارداد، اعداد مثبت فوق‌العاده بزرگ را با M یا N نشان می‌دهیم. اگر x یا y به سمت ∞+ میل کند، می‌گوییم x یا y ضمن زیاد شدن از هر عدد مثبت فوق‌العاده بزرگ مفروضی بزرگتر است یعنی:

$$\begin{cases} x \to +\infty \Rightarrow x > M \\ y \to +\infty \Rightarrow y > N \end{cases}$$

اگر x یا y به سمت (∞−) میل کند، می‌گوییم x یا y ضمن کم شدن از هر عدد منفی فوق‌العاده کوچک مفروضی، کوچکتر است، یعنی:

$$\begin{cases} x \to -\infty \Rightarrow x < -M \\ y \to -\infty \Rightarrow y < -N \end{cases}$$

اگر x یا y به سمت (∞) میل کند، می‌گوییم |x| یا |y| به سمت ∞+ میل می‌کند. پس می‌توان نوشت:

$$x \to \infty \Rightarrow |x| \to +\infty \Rightarrow |x| > M$$

$$y \to \infty \Rightarrow |y| \to +\infty \Rightarrow |y| > N$$

۸ـ۱. **حالات حدّ:** فرض می‌کنیم، تابع f به معادله $y = f(x)$ را داشته باشیم. در این صورت ممکن است x به سمت عدد (a) میل کند یا به سمت (∞+) میل کند یا به سمت (∞−) میل کند یا به سمت ∞ میل کند.

وقتی x به سمت عدد a میل می‌کند، آنگاه ممکن است f(x) به سمت عدد (b) میل کند یا به سمت (∞+) میل کند یا به سمت (∞−) میل کند یا به سمت (∞) میل کند. اگر کمی دقت کنیم مسائل حدّ می‌تواند (۱۶) حالت باشد، که در نمودار زیر نشان داده شده است.

$y = f(x)$

x

$a \Rightarrow f(x)$	b	(۱)
	$+\infty$	(۲)
	$-\infty$	(۳)
	∞	(۴)
$+\infty \Rightarrow f(x)$	b	(۵)
	$+\infty$	(۶)
	$-\infty$	(۷)
	∞	(۸)
$-\infty \Rightarrow f(x)$	b	(۹)
	$+\infty$	(۱۰)
	$-\infty$	(۱۱)
	∞	(۱۲)
$\infty \Rightarrow f(x)$	b	(۱۳)
	$+\infty$	(۱۴)
	$-\infty$	(۱۵)
	∞	(۱۶)

مسائلی که قبلاً حل شد از مسأله (۱) تا مسأله (٦) همگی از حالت اوّل می‌باشند.

۹ـ۱. تعریف حدّ تابع، در حالتهای دوم تا شانزدهم

۲: $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$

$$\forall N > 0 \ \exists \sigma > 0 \ : \ 0 < |x - a| < \sigma \Rightarrow f(x) > N$$

۳: $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

$$\forall N > 0 \ \exists \sigma > 0 \ : \ 0 < |x - a| < \sigma \Rightarrow f(x) < -N$$

۴: $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

$$\forall N > 0\ \exists \sigma > 0 \quad : \quad 0 < |x - a| < \sigma \Rightarrow |f(x)| > N$$

۵: $\begin{cases} \text{حد} f(x) = b \\ x \to +\infty \end{cases}$

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists M > 0 : \quad x > M \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

۶: $\begin{cases} \text{حد} f(x) = +\infty \\ x \to +\infty \end{cases}$

$$\forall N > 0\ \exists M > 0 \quad : \quad x > M \Rightarrow f(x) > N$$

۷: $\begin{cases} \text{حد} f(x) = -\infty \\ x \to +\infty \end{cases}$

$$\forall N > 0\ \exists M > 0 \quad : \quad x > M \Rightarrow f(x) < -N$$

۸: $\begin{cases} \text{حد} f(x) = \infty \\ x \to +\infty \end{cases}$

$$\forall N > 0\ \exists M > 0 \quad : \quad x > M \Rightarrow |f(x)| > N$$

۹: $\begin{cases} \text{حد} f(x) = b \\ x \to -\infty \end{cases}$

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists M > 0 \quad : \quad x < -M \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

۱۰: $\begin{cases} \text{حد} f(x) = +\infty \\ x \to -\infty \end{cases}$

$$\forall N > 0\ \exists M > 0 \quad : \quad x < -M \Rightarrow f(x) > N$$

۱۱: $\begin{cases} \text{حد} f(x) = -\infty \\ x \to -\infty \end{cases}$

$$\forall N > 0\ \exists M > 0 \quad : \quad x < -M \Rightarrow f(x) < -N$$

۱۲: $\begin{cases} \text{حد} f(x) = \infty \\ x \to -\infty \end{cases}$

$$\forall N > 0\ \exists M > 0 \quad : \quad x < -M \Rightarrow |f(x)| > N$$

۱۳: $\begin{cases} \text{حد} f(x) = b \\ x \to \infty \end{cases}$

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists M > 0 \quad : \quad |x| > M' \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

۱۴: $\begin{cases} \text{حد} f(x) = +\infty \\ x \to \infty \end{cases}$

$$\forall N > 0\ \exists M > 0 \quad : \quad |x| > M \Rightarrow f(x) > N$$

۱۵: $\begin{cases} \text{حد} f(x) = -\infty \\ x \to \infty \end{cases}$

$$\forall N > 0\ \exists M > 0 \quad : \quad |x| > M \Rightarrow f(x) < -N$$

۱۶: $\begin{cases} \text{حد} f(x) = \infty \\ x \to \infty \end{cases}$

$$\forall N > 0\ \exists M > 0 \quad : \quad |x| > M \Rightarrow |f(x)| > N$$

۹ـ۱ . اینک مسائلی از حالت دوم تا شانزدهم مطرح می‌کنیم.
برای آن‌که شمارهٔ مسأله با حالتهای تعریف حدّ تابع هماهنگ باشد، شمارهٔ مسأله را شمارهٔ حالت تعریف حدّ تابع می‌گذاریم.

مسألهٔ دوم (از حالت دوم): با استفاده از تعریف حدّ تابع ثابت کنید:

$$\begin{cases} \text{حد}\dfrac{4}{(x-1)^2} = +\infty \\ x \to 1 \end{cases}$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall N > 0\ \exists \sigma > 0 \quad : \quad 0 < |x - 1| < \sigma \Rightarrow \frac{4}{(x-1)^2} > N$$

$$\frac{4}{(x-1)^2} > N \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{4} < \frac{1}{N} \Rightarrow (x-1)^2 < \frac{4}{N}$$

با مقایسه با گزاره مقدّم استلزام منطقی $\Rightarrow |x-1| < \dfrac{2}{\sqrt{N}}$

می‌توان نوشت: $\sigma \le \dfrac{2}{\sqrt{N}}$

مسألهٔ سوم (از حالت سوم): با استفاده از تعریف حدّ تابع ثابت کنید:

$$\begin{cases} \text{حد}\dfrac{-2}{(x-2)^4} = -\infty \\ x \to 2 \end{cases}$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall N > 0\ \exists \sigma > 0 \quad : 0 < |x - 2| < \sigma \Rightarrow \frac{-2}{(x-2)^4} < -N$$

$$\frac{-2}{(x-2)^4} < -N \Rightarrow \frac{2}{(x-2)^4} > N \Rightarrow \frac{(x-2)^4}{2} < \frac{1}{N}$$

$$\Rightarrow (x-2)^4 < \frac{2}{N} \Rightarrow |x-2| < \sqrt[4]{\frac{2}{N}}$$

با مقایسه با گزارهٔ مقدّم استلزام منطقی نتیجه می‌گیریم: $\sigma \le \sqrt[4]{\frac{2}{N}}$

مسألهٔ چهارم (از حالت چهارم): با استفاده از تعریف حدّ تابع ثابت کنید:

$$\lim_{x \to 1} \frac{5}{(x-1)^3} = \infty$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall N>0\ \exists \sigma>0 :\quad 0<|x-1|<\sigma \Rightarrow \left|\frac{5}{(x-1)^3}\right| > N$$

$$\left|\frac{5}{(x-1)^3}\right| > N \Rightarrow \left|\frac{(x-1)^3}{5}\right| < \frac{1}{N} \Rightarrow \frac{|(x-1)^3|}{5} < \frac{1}{N}$$

$$\Rightarrow |(x-1)^3| < \frac{5}{N} \Rightarrow |x-1| < \sqrt[3]{\frac{5}{N}}$$

با مقایسه با رابطه گزارهٔ مقدّم استلزام منطقی نتیجه می‌گیریم:

$$\sigma \le \sqrt[3]{\frac{5}{N}}$$

مسألهٔ پنجم (از حالت پنجم): با استفاده‌از تعریف حدّ تابع ثابت کنید:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2-1}{x^2-1} = 2$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists M>0 : x>M \Rightarrow \left|\frac{2x^2-1}{x^2-1} - 2\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{2x^2-1}{x^2-1} - 2\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{2x^2-1-2x^2+2}{x^2-1}\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|x^2-1|} < \varepsilon \Rightarrow |x^2-1| > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$x \to +\infty \Rightarrow |x^2-1| = x^2-1 \Rightarrow x^2-1 > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow x^2 > \frac{1}{\varepsilon}+1 \Rightarrow |x| > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}+1}$$

$$x \to +\infty \Rightarrow |x| = x \Rightarrow x > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}+1}$$

با مقایسه با رابطه گزاره مقدّم استلزام منطقی نتیجه می‌گیریم:

$$M \ge \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}+1} \quad \text{یا} \quad M = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}+1}$$

توجه: برگشت‌پذیری این مسأله را بررسی می‌کنیم:

$$x > M \ge \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}+1} \Rightarrow x > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}+1} \Rightarrow |x| > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}+1}$$

$$\Rightarrow x^2 > \frac{1}{\varepsilon}+1 \Rightarrow x^2-1 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |x^2-1| > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|x^2-1|} < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{x^2-1}\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\frac{2x^2-1-2x^2+1}{x^2-1}\right) < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{2x^2-1}{x^2-1} - 2\right| < \varepsilon$$

مسألهٔ ششم (از حالت ششم): با استفاده از تعریف حدّ تابع ثابت کنید:

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 6x + 1) = +\infty$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall N>0\ \exists M>0 :\quad x>M \Rightarrow x^2-6x+1 > N$$

$$x^2-6x+1 > N \Rightarrow x^2-6x+9 > N+8$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 > N+8 \Rightarrow |x-3| > \sqrt{N+8}$$

$$x \to +\infty \Rightarrow |x-3| = x-3$$

$$\Rightarrow x-3 > \sqrt{N+8} \Rightarrow x > \sqrt{N+8}+3$$

با مقایسه با رابطه گزاره مقدّم استلزام منطقی نتیجه می‌گیریم:

$$M \ge \sqrt{N+8}+3$$

مسألهٔ هفتم (از حالت هفتم): ثابت کنید (با استفاده از تعریف حدّ تابع)

$$\lim_{x \to +\infty} -\sqrt{x^2-2x+3} = -\infty$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall N>0\ \exists M>0 :\ x>M \Rightarrow -\sqrt{x^2-2x+3} < -N$$

$$-\sqrt{x^2-2x+3} < -N \Rightarrow \sqrt{x^2-2x+3} > N$$

$$\Rightarrow x^2-2x+3 > N^2 \Rightarrow x^2-2x+1 > N^2+2$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 > N^2+2 \Rightarrow |x-1| > \sqrt{N^2+2}$$

$$x \to +\infty \Rightarrow |x-1| = x-1$$

$$\Rightarrow x-1 > \sqrt{N^2+2} \Rightarrow x > \sqrt{N^2+2}+1$$

با مقایسه با گزاره مقدّم استلزام منطقی نتیجه می‌گیریم:

$$M \geq \sqrt{N^2+2}+1$$

مسألهٔ هشتم (از حالت هشتم): با استفاده از تعریف حدّ تابع ثابت کنید:

$$\begin{cases} \text{حد } (-1)^x\,(x^2-4x+1)=\infty \\ x \to +\infty \end{cases}$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall N>0 \quad \exists M>0 \ : x>M \Rightarrow |(-1)^x(x^2-4x+1)|>N$$

توجه:

$$\begin{cases} (-1)^x = +1 \text{ یا } -1 \quad \text{و} \quad |\pm 1| = 1 \\ x \to +\infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow |(-1)^x\,(x^2-4x+1)|>N \Rightarrow |x^2-4x+1|>N$$

$$x \to +\infty \Rightarrow |x^2-4x+1| = x^2-4x+1$$

$$\Rightarrow x^2-4x+1>N \Rightarrow x^2-4x+4>N+3$$

$$\Rightarrow (x-2)^2>N+3 \Rightarrow |x-2|>\sqrt{N+3}$$

$$x \to +\infty \Rightarrow |x-2| = x-2$$

$$\Rightarrow x-2>\sqrt{N+3} \Rightarrow x>\sqrt{N+3}+2$$

با مقایسه با گزارهٔ مقدّم استلزام منطقی نتیجه می‌گیریم.

$$M \geq \sqrt{N+3}+2$$

مسألهٔ نهم (از حالت نهم): با استفاده از تعریف حدّ تابع ثابت کنید:

$$\begin{cases} \text{حد } \dfrac{2x^2+4}{x^2+1} = 2 \\ x \to -\infty \end{cases}$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists M>0 \quad : x<-M \Rightarrow \left|\frac{2x^2+4}{x^2+1}-2\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{2x^2+4}{x^2+1}-2\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{2x^2+4-2x^2-2}{x^2+1}\right|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\frac{2}{x^2+1}\right|<\varepsilon \Rightarrow \frac{2}{x^2+1}<\varepsilon \Rightarrow \frac{x^2+1}{2}>\frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow x^2+1>\frac{2}{\varepsilon} \Rightarrow x^2>\frac{2}{\varepsilon}-1 \Rightarrow |x|>\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}-1}$$

$$x \to -\infty \Rightarrow |x| = -x$$

$$\Rightarrow -x>\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}-1} \Rightarrow x<-\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}-1}$$

با مقایسه با گزارهٔ مقدّم استلزام منطقی نتیجه می‌گیریم:

$$M \geq \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}-1}$$

مسألهٔ دهم (از حالت دهم): با استفاده از تعریف حدّ تابع ثابت کنید:

$$\begin{cases} \text{حد } \sqrt{x^2-3x} = +\infty \\ x \to -\infty \end{cases}$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall N>0 \quad \exists M>0 \ : x<-M \Rightarrow \sqrt{x^2-3x}>N$$

$$\sqrt{x^2-3x}>N \Rightarrow x^2-3x>N^2$$

$$\Rightarrow x^2-3x+\frac{9}{4}>N^2+\frac{9}{4} \Rightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^2>N^2+\frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \left|x-\frac{3}{2}\right|>\sqrt{N^2+\frac{9}{4}}$$

$$x \to -\infty \Rightarrow \left|x-\frac{3}{2}\right| = -x+\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow -x+\frac{3}{2}>\sqrt{N^2+\frac{9}{4}} \Rightarrow -x>\left(\sqrt{N^2+\frac{9}{4}}-\frac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow x<-\left(\sqrt{N^2+\frac{9}{4}}-\frac{3}{2}\right)$$

با مقایسه با گزارهٔ مقدّم تعریف حدّ تابع نتیجه می‌گیریم:

$$M \geq \sqrt{N^2+\frac{9}{4}}-\frac{3}{2}$$

مسألهٔ یازدهم (از حالت یازدهم): با استفاده از تعریف حدّ تابع ثابت کنید:

$$\begin{cases} \text{حد } -\sqrt{x^2+6x} = -\infty \\ x \to -\infty \end{cases}$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall N>0 \quad \exists M>0 : x<-M \Rightarrow -\sqrt{x^2+6x}<-N$$

$$-\sqrt{x^2+6x}<-N \Rightarrow \sqrt{x^2+6x}>N \Rightarrow x^2+6x>N^2$$

$$\Rightarrow x^2+6x+9>N^2+9 \Rightarrow (x+3)^2>N^2+9$$

$$\Rightarrow |x+3|>\sqrt{N^2+9} \qquad x \to -\infty \Rightarrow |x+3| = -x-3$$

$$\Rightarrow -x-3>\sqrt{N^2+9}\Rightarrow -x>\sqrt{N^2+9}+3$$

$$\Rightarrow x<-(\sqrt{N^2+9}+3)$$

با مقایسه با گزارهٔ مقدّم تعریف حدّ تابع نتیجه می‌گیریم:

$$M\ge\sqrt{N^2+9}+3$$

مسألهٔ دوازدهم (از حالت دوازدهم): با استفاده از تعریف حدّ تابع ثابت کنید:

$$\lim_{x\to-\infty}(-1)^{[x]}(x^2-2x)=\infty$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall N>0\quad \exists M>0:\ x<-M\Rightarrow |(-1)^{[x]}(x^2-2x)|>N$$

$$|(-1)^{[x]}(x^2-2x)|>N\quad,\quad (-1)^{[x]}_{x\to+\infty}=+1$$

یا $-1\ ,\ |\pm1|=1$

$$\Rightarrow |x^2-2x|>N\quad,\quad x\to-\infty\Rightarrow |x^2-2x|=x^2-2x$$

$$\Rightarrow x^2-2x>N\Rightarrow x^2-2x+1>N+1\Rightarrow (x-1)^2>N+1$$

$$\Rightarrow |x-1|>\sqrt{N+1}\ ,\ x\to-\infty\Rightarrow |x-1|=-x+1$$

$$\Rightarrow -x+1>\sqrt{N+1}\Rightarrow -x>\sqrt{N+1}-1$$

$$\Rightarrow x<-(\sqrt{N+1}-1)$$

با مقایسه با رابطه گزارهٔ مقدّم تعریف حدّ تابع نتیجه می‌گیریم:

$$M\ge\sqrt{N+1}-1$$

مسألهٔ سیزدهم (از حالت سیزدهم): با استفاده از تعریف حدّ تابع ثابت کنید:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+5}{x-1}=2$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists M>0:\ |x|>M\Rightarrow \left|\frac{2x+5}{x-1}-2\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{2x+5}{x-1}-2\right|<\varepsilon\Rightarrow\left|\frac{2x+5-2x+2}{x-1}\right|<\varepsilon\Rightarrow\left|\frac{7}{x-1}\right|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow\frac{7}{|x-1|}<\varepsilon\Rightarrow\frac{|x-1|}{7}>\frac{1}{\varepsilon}\Rightarrow |x-1|>\frac{7}{\varepsilon}$$

تذکر مهم: در سال سوم داشتیم:

$$\boxed{|a|-|b|\le|a\pm b|}$$

پس می‌توان نوشت: $|x|-|1|\le|x-1|$

اگر $|x|-|1|>\frac{7}{\varepsilon}\Rightarrow |x-1|>\frac{7}{\varepsilon}$

اگر عبارت کوچکتر از $\frac{7}{\varepsilon}$ بزرگتر باشد مسلماً عبارت بزرگتر هم از $(\frac{7}{\varepsilon})$ بزرگتر خواهد بود.

$$\Rightarrow |x|>\frac{7}{\varepsilon}+|1|\Rightarrow |x|>\frac{7}{\varepsilon}+1$$

با مقایسه با گزارهٔ مقدّم تعریف حدّ تابع نتیجه می‌گیریم:

$$M\ge\frac{7}{\varepsilon}+1$$

مسألهٔ چهاردهم (از حالت چهاردهم): با استفاده از تعریف حدّ تابع ثابت کنید:

$$\lim_{x\to\infty}(x^2+4x-1)=+\infty$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall N>0\quad \exists M>0:\ |x|>M\Rightarrow x^2+4x-1>N$$

$$x^2+4x-1>N\Rightarrow x^2+4x+4>N+5$$

$$\Rightarrow (x+2)^2>N+5\Rightarrow |x+2|>\sqrt{N+5}$$

داریم: $|a|-|b|\le|a\pm b|$

اگر $|x|-|2|>\sqrt{N+5}\Rightarrow |x+2|>\sqrt{N+5}$

$$\Rightarrow |x|>\sqrt{N+5}+|2|\Rightarrow |x|>\sqrt{N+5}+2$$

با مقایسه با گزارهٔ مقدّم تعریف حدّ تابع نتیجه می‌شود:

$$M\ge\sqrt{N+5}+2$$

مسألهٔ پانزدهم (از حالت پانزدهم): با استفاده از تعریف حدّ تابع ثابت کنید:

$$\lim_{x\to\infty}-(x^2+6x)=-\infty$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall N>0 \quad \exists M>0 \;:\; |x|>M \Rightarrow -(x^2+6x)<-N$$

$$-(x^2+6x)<-N \Rightarrow x^2+6x>N \Rightarrow x^2+6x+9>N+9$$

$$\Rightarrow (x+3)^2>N+9 \Rightarrow |x+3|>\sqrt{N+9}$$

داریم:

$$|a|-|b| \le |a\pm b|$$

اگر $|x|-|3|>\sqrt{N+9} \Rightarrow |x+3|>\sqrt{N+9}$

$$\Rightarrow |x|>\sqrt{N+9}+|3| \Rightarrow |x|>\sqrt{N+9}+3$$

با مقایسه باگزارهٔ مقدّم تعریف حدّ تابع نتیجه می‌شود:

$$M\ge \sqrt{N+9}+3$$

مسألهٔ شانزدهم (از حالت شانزدهم): با استفاده از تعریف حدّ تابع ثابت کنید:

$$\lim_{x\to\infty} (x^3+4)=\infty$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall N>0 \quad \exists M>0 \;:\; |x|>M \Rightarrow |x^3+4|>N$$

داریم:

$$|a|-|b| \ge |a\pm b|$$

اگر $|x^3|-|4|>N \Rightarrow |x^3+4|>N$

$$\Rightarrow |x^3|>N+|4| \Rightarrow |x^3|>N+4 \Rightarrow |x|>\sqrt[3]{N+4}$$

با مقایسه باگزارهٔ مقدم تعریف حدّ تابع می‌توان نوشت:

$$M\ge \sqrt[3]{N+4}$$

یک مسأله دیگر از حالت ششم: با استفاده از تعریف حدّ تابع ثابت کنید:

$$\lim_{x\to+\infty} (x^8+x^7+x+1)=+\infty$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall N>0 \; \exists M>0 \;:\; x>M \Rightarrow x^8+x^7+x+1>N$$

اگر $x\to+\infty \Rightarrow x^8+x^7+x+1>x^8$

اگر $x^8>N \Rightarrow x^8+x^7+x+1>N$

$$\Rightarrow x^8>N \Rightarrow |x|>\sqrt[8]{N} \quad , \quad x\to+\infty \Rightarrow |x|=x$$

$$\Rightarrow x>\sqrt[8]{N}$$

با مقایسه باگزارهٔ مقدم تعریف حدّ تابع نتیجه می‌گیریم:

$$M\ge \sqrt[8]{N}$$

برگشت‌پذیری:

$$x>M\ge \sqrt[8]{N} \Rightarrow x>\sqrt[8]{N} \Rightarrow x^8>N \Rightarrow x^8+x^7+x+1>N$$

۱۰ـ۱. اگر $x\to 2^+$ می‌گوییم x از طرف اعداد بزرگتر از (۲) به عدد۲،آن‌قدر نزدیک می‌شود به‌طوری‌که $(x-2)$ از هر عدد مثبت فوق‌العاده کوچک مفروضی کوچکتر است (ضمناً می‌دانیم $x\neq 2$) یعنی: $0<x-2<\sigma$

در حالت کلّی اگر $x\to a^+$ می‌گوییم، x از طرف اعداد بزرگتر از (a) به عدد (a) آن‌قدر نزدیک می‌شود به‌طوری که $(x-a)$ از هر عدد مثبت فوق‌العاده کوچک‌مفروضی‌کوچکتر است، یعنی: $(x\neq a)$.

$$x\to a^+ \Rightarrow 0<x-a<\sigma$$

مثال: $x\to 5^+ \Rightarrow 0<x-5<\sigma$

$$x\to -1^+ \Rightarrow 0<x+1<\sigma$$

اگر $x\to 2^-$ می‌گوییم x از طرف اعداد کوچکتر از (۲) به عدد (۲) آن‌قدر نزدیک می‌شود به‌طوری که $(2-x)$، از هر عدد مثبت فوق‌العاده کوچک مفروضی کوچکتر است یعنی: $(x\neq 2)$.

در حالت کلی اگر $x\to a^-$، می‌گوییم، x از طرف اعداد کوچکتر از a به عدد a آن‌قدر نزدیک می‌شود به‌طوری که $(a-x)$ از هر عدد مثبت فوق‌العاده کوچک مفروضی کوچکتر است، یعنی: $(x\neq a)$

$$x\to a^- \Rightarrow 0<a-x<\sigma$$

مثال: $x\to 2^- \Rightarrow 0<2-x<\sigma$

$$x\to 1^- \Rightarrow 0<1-x<\sigma$$

توجه: فاصلهٔ همسایگی مثلاً وقتی $x\to 2^+$ یک طرفه است، یعنی:

اگر $\begin{cases} x\to 2^+ \\ r=1 \end{cases} \Longrightarrow 2<x<3$

در حالت کلّی داریم:

اگر $\begin{cases} x\to a^+ \\ r=\text{شعاع همسایگی} \end{cases} \Longrightarrow a<x<a+r$

همچنین فاصلهٔ همسایگی وقتی $x\to 2^-$ یک طرفه است

اگر $\begin{cases} x \to 2^- \\ r = 1 \end{cases} \Longrightarrow 1<x<2$

در حالت کلیّ

اگر $\begin{cases} x \to a^- \\ r = \text{شعاع همسایگی} \end{cases} \Longrightarrow a - r<x<a$

۱۱ـ۱. تعریف حدّ تابع به معادله $y = f(x)$ وقتی $x\to a^+$ یا $x\to a^-$

$$\begin{cases} \text{حد}\ f(x) = b \\ x \to a^+ \end{cases}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \sigma > 0 \quad : 0<x - a<\sigma \Rightarrow |f(x) - b|<\varepsilon$$

$$\begin{cases} \text{حد}\ f(x) = b \\ x \to a^- \end{cases}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \sigma > 0 \quad : 0<a - x<\sigma \Rightarrow |f(x) - b|<\varepsilon$$

مسأله: با استفاده از تعریف حدّ تابع ثابت کنید:

$$\begin{cases} \text{حد}\ \dfrac{x^3-1}{|x-1|} = 3 \\ x\to 1^+ \end{cases}$$

حل: باید ثابت کنیم، برای هر $\varepsilon>0$ یک عدد مثبت مانند σ وجود دارد به‌طوری‌که

$$0<x-1<\sigma \Rightarrow \left|\frac{x^3-1}{|x-1|} - 3\right|<\varepsilon$$

$$x\to 1^+ \Rightarrow |x-1| = x-1$$

$$\left|\frac{x^3-1}{|x-1|} - 3\right| <\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{+(x-1)} - 3\right| <\varepsilon$$

$$\Rightarrow |x^2+x+1-3|<\varepsilon \Rightarrow |x^2+x-2|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow |(x-1)(x+2)|<\varepsilon \Rightarrow |x-1|\times|x+2|<\varepsilon$$

یک همسایگی به مرکز (۱) و شعاع (۱) در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} x \to 1^+ \\ r = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} 1 < x < 2 \\ 2 \quad\ 2 \quad\ 2 \\ \hline 3<x + 2<4 \end{array} \Rightarrow 3<|x + 2|<4$$

کران بالای $|x + 2|$ عدد (۴) است. و عبارت $4 \times |x - 1|$ از عبارت $|x + 2| \times |x - 1|$ بزرگتر است.

اگر $|x - 1| \times 4<\varepsilon \Rightarrow |x - 1| \times |x + 2|<\varepsilon$

$\Rightarrow |x - 1| \times 4<\varepsilon \Rightarrow |x - 1| < \frac{\varepsilon}{4}$

$x \to 1^+ \Rightarrow |x - 1| = x - 1$

$\Rightarrow 0<x - 1< \frac{\varepsilon}{4}$ با مقایسه باگزاره مقدم استلزام $\Rightarrow \sigma = \frac{\varepsilon}{4}$

یا $\sigma = \text{Min}\ \{1 \text{ و } \frac{\varepsilon}{4}\}$

مسأله: با استفاده از تعریف حدّ تابع ثابت کنید:

$$\begin{cases} \text{حد}\ \dfrac{x^3-1}{|x-1|} = -3 \\ x\to 1^- \end{cases}$$

حل: باید ثابت کنیم برای هر $\varepsilon>0$، عدد مثبتی مانند σ وجود دارد به‌طوری‌که:

اگر $0<1-x<\sigma \Rightarrow \left|\dfrac{x^3-1}{|x-1|} + 3\right| <\varepsilon$

$$\left|\frac{x^3-1}{|x-1|} + 3\right| <\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{-(x-1)} + 3\right| <\varepsilon$$

$$x\to 1^- \Rightarrow |x-1| = -(x-1)$$

$$\Rightarrow |-x^2-x-1+3|<\varepsilon \Rightarrow |x^2+x-2|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow |(x-1)(x+2)|<\varepsilon \Rightarrow |x-1|\times|x+2|<\varepsilon$$

یک همسایگی به مرکز (۱) و شعاع (۱) در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} x \to 1^- \\ r = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} 0 < x < 1 \\ 2 \quad\ 2 \quad\ 2 \\ \hline 2<x + 2<3 \end{array} \Rightarrow 2<|x + 2|<3$$

کران بالای $|x + 2|$ عدد (۳) است و عبارت $3\times|x - 1|$ از عبارت $|x + 2|\times|x - 1|$ بزرگتر است.

اگر $|x - 1| \times 3<\varepsilon \Rightarrow |x - 1| \times |x + 2|< \varepsilon$

$\Rightarrow |x - 1| \times 3<\varepsilon \Rightarrow |x - 1|<\frac{\varepsilon}{3}\ x \to 1^- \Rightarrow |x - 1| = 1 - x \Rightarrow 0< 1 - x < \frac{\varepsilon}{3}$

با مقایسه باگزارهٔ مقدّم استلزام $\Rightarrow \sigma = \frac{\varepsilon}{3}$

یا: $\sigma = \text{Min}\ |1 \text{ و } \frac{\varepsilon}{3}|$

تاریخچه مجلات ریاضی در ایران (۱۳)

به گشت و گذارمان در مجلهٔ **یکان** ادامه می‌دهیم. در شمارهٔ ۷ یکان مقاله‌ای است تحت عنوان **توپولوژی عمومی و پیدایش آن** به قلم **مهدی بهزاد**. در این مقاله چنین می‌خوانیم:

یکی از مشخصات ریاضیات جدید این است که نظریات قدیم را چون ماشینی در هم می‌ریزد، هر قسمت را به تنهایی مطالعه می‌کند. این قسمتها را مجدداً به روشهای تازه و ترکیبات جالبی روی هم سوار می‌نماید و به مطالعهٔ این ترکیبات می‌پردازد.

سلسلهٔ اعداد حقیقی مثال خوبی در این باره است. برای این‌که اهمیت این سیستم آشکار گردد نکات زیر را یادآور می‌شویم:

الف) سیستم اعداد حقیقی یک سلسلهٔ متری است: یعنی مجموعه‌ای است که به هر دو نقطهٔ آن عددی به نام فاصلهٔ آن دو نقطه نسبت داده می‌شود. این فاصله دارای خواص معینی می‌باشد، مثلاً شرط لازم و کافی برای این‌که فاصلهٔ دو عدد حقیقی صفر باشد این است که آن دو عدد با هم مساوی باشد.

ب) سلسله اعداد حقیقی یک سیستم جبری است: یعنی مجموعه‌ای است که روی آن اعمال جبری معینی چون جمع و ضرب تعریف شده و این اعمال دارای خواص معینی مانند شرکت‌پذیری (Associativity) می‌باشد.

ج) سیستم اعداد حقیقی یک سیستم مرتب شده (ORDERD) است. یعنی مجموعه‌ای است که در آن یک رابطهٔ ترتیب (مانند $>$) تعریف شده و این رابطه دارای خواصی مانند: خاصیت انتقالی (Transitivity) است.

اهمیت این سلسله تنها وابسته به این جنبه‌های مجزای آن نیست بلکه مربوط به روابط بین آنها نیز می‌باشد. مثلاً اصل این‌که اگر a، b و c سه عدد حقیقی باشند و $a<b$ داریم: $a + c< b + c$ یکی از خواص این سلسله است که در آن جنبه‌های «جبری» و «ترتیب» هر دو به کار بسته می‌شوند.

البته مطالعهٔ جنبه‌های مختلف این سلسله به طور مجزا دارای فوایدی نیز می‌باشد. شاید بزرگترین فایدهٔ آن استفاده کامل از دسترنج جمع شده ریاضی‌دانان باشد. مثلاً اگر قضیه‌ای در مورد سلسلهٔ اعداد حقیقی، تنها به خاطر متری بودن آن ثابت شده این قضیّه نه تنها معلومات ما را در بارهٔ سلسلهٔ اعداد حقیقی بالا می‌برد بلکه در مورد سایر سیستمهای ریاضی که از نظر متری بودن شبیه اعداد حقیقی هستند نیز قابل عرضه می‌باشد. بنابراین ممکن است یک چنین قضیّه‌ای بسیاری از سیستمهای ریاضی را شامل شود و ریاضی‌دان را از تکرار اثبات در هر سیستم به‌طور جداگانه رهایی بخشد.

به‌طور کلی، به کمک مجرد کردن یک ایدهٔ آشنا و معمول ریاضی در یک و یا چند جهت ممکن است قضایایی را کشف نمود که از نظرات مختلفی قابل استفاده باشند. مثلاً: ممکن است ما را با طرحهای ساخته و پرداخته‌ای مجهز کنند که به کمک آنها بتوانیم اقلاً جزیی از عقاید آشنای دیگر ریاضی و یا نظریّات کاملاً تازه‌ای را مورد تحلیل و بررسی قرار دهیم و یا این‌که این قضایا به خودی خود جالب باشند. اکثریت قریب به اتفاق ریاضی‌دانان در چندین ده سال گذشته وقت خود را به وضع و تحصیل قضایای عمومی از این نوع اختصاص داده‌اند.

در مقالهٔ **دانشنامهٔ علائی** همین شماره از قول **ابوعبیدجوزجانی** شاگرد ابن‌سینا چنین آمده است که:

آنگاه که من به خدمت خواجه رئیس قدس... روحه بودم حریص بودم بر جمع کردن تصانیف او و به دست آوردن آن زیرا که خواجه رئیس را عادت چنان بود که آنچه تصنیف کردی بدان کس دادی که از او خواسته بودی و از بهر خویش نتیجه نگرفتی، و از بزرگ تصانیف او **دانشنامهٔ علائی** است و آنچه از او در ریاضیات بکرد ضایع شده بود و به دستم نیفتاد و مرا دشخوار آمد ناتمامی این کتاب (یعنی دانشنامه) ولیکن از رساله‌ها که خواجه کرده بود در این باب رسالتی داشتم که در اصلهای هندسه کرده بود و در او چندانی یادکرده بود از این علم که هر که آن بداند راه یابد دانستن مجسطی و این رسالت چون مختصری است از کتاب اقلیدس و جای جای در او راه عمل درست رفته است و بدان (مجسطی) راه پدید کرده است.

رابطه هم‌نهشتی ـ خواص و کاربردهای آن در Z

(مورد استفاده دانش‌آموزان سال چهارم رشته ریاضی و سال سوّم ریاضیِ نظام جدید)

● حمیدرضا امیری

در این مقاله و به دنبال مقالهٔ قبل در برهان ۱۳ تحت عنوانِ رابطهٔ هم‌ارزی و... می‌خواهیم به بررسی وتجزیه و تحلیل یکی از همین رابطه‌های هم‌ارزی یعنی رابطهٔ هم‌نهشتی پرداخته و کاربردهای آن را در Z مورد بحث قرار دهیم.

در سرتاسر این مقاله از اثبات قضایایی که در کتابهای درسی اثبات شده‌اند خودداری شده و بیشتر روی بُعد کاربردهای قضایا و نتایج حاصل از آنها کار شده است در ضمن در لابه‌لای مقاله از تستهای متنوعی به همراه حل تشریحی آنها استفاده شده است.

در این مقاله هر کجا صحبت از عدد است منظور عدد صحیح می‌باشد حال چه قید کنیم و چه قید نکنیم، برای شروع ناچاریم رابطهٔ بخش‌پذیری یا عاد کردن را تعریف کنیم.

تعریف: طبق قضیهٔ تقسیم در تئوری اعداد هرگاه a و b اعدادی صحیح بوده و $b \neq 0$ در این صورت اعدادی صحیح و منحصر به فرد مانند r و q یافت می‌شوند به قسمی که $a = bq + r$ و $0 \leq r < |b|$، که a را مقسوم، b را مقسوم‌علیه، q را خارج‌قسمت و r را باقیماندهٔ تقسیم a بر b می‌نامند.

حال اگر در تقسیم a بر $b \neq 0$، باقیمانده صفر باشد یعنی $a = bq$ در این‌صورت می‌گوییم a بر b بخش‌پذیر است و می‌نویسیم $b|a$ و می‌خوانیم، «b عاد می‌کند a را» یا «b می‌شمارد a را» پس در حالت کلّی:

$$\boxed{b|a \Leftrightarrow a = bq}$$

خواص رابطهٔ عاد کردن

۱) رابطهٔ عاد کردن دارای خاصیت انعکاسی است زیرا:

$\forall a \in Z\,;\ (a \neq 0)\ a = a \times 1 \Rightarrow a \mid a$

۲) رابطهٔ عاد کردن خاصیت تقارنی ندارد زیرا:

$4 \nmid 2$ ولی $2 \mid 4$

۳) رابطهٔ عاد کرد در Z خاصیت پاد تقارنی ندارد زیرا:

$4 \neq -4$ ولی $4 \mid -4$ و $-4 \mid 4$

(این رابطه در N خاصیت پاد تقارنی دارد!)

۴) رابطهٔ عاد کردن خاصیت تعدی دارد زیرا:

فرض کنیم $a|b$ و $b|c \Rightarrow b = aq_1$ و $c = bq_2$

$\Rightarrow c = (aq_1)\,q_2 \Rightarrow c = a(q_1q_2) = aq_3$

$\Rightarrow q|c$

۵) $a|b \Rightarrow a|-b$ و $-a|b$ و $-a|-b$

یکی از حالتهای فوق را اثبات می‌کنیم:

$$a|b \Rightarrow b = aq \Rightarrow b = (-a)\underbrace{(-q)}_{q_1} \Rightarrow -a|b$$

۶) $a|b$ و $a|c \Rightarrow a|b \pm c$ و $a|bc$

۷) $a|b \Rightarrow a|mb$

۸) $a|b \Leftrightarrow a^n\,|b^n$

۹) $a|b \Rightarrow |a| \leq |b|$

۱۰) $a|b$ و $b|a \Rightarrow a = \pm b$

۱۱) $\forall a \in Z\,;\ a|0 \qquad (a \neq 0)$

۱۲) $\forall a \in Z\,;\ 1|a$

۱۳) $a|1 \Rightarrow a = \pm 1$

اثبات خواص فوق تقریباً آسان بوده و به عهدهٔ خواننده واگذار می‌شود.

حال به سراغ بحث اصلی خود یعنی رابطه هم‌نهشتی و خواص و کاربردهای آن برمی‌گردیم. لازم به تذکر است که قضایا و نتایجی که

اثبات آنها در کتاب درسی موجود است، فقط بیان و از آنها استفاده شده است.

تعریف. رابطهٔ $\overset{m}{\equiv}$ (هم‌نهشتی به سنج m) روی Z به شکل زیر تعریف می‌شود: $(m \in IN)$

$$\forall a , b \in Z ; a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow m|a - b \text{ یا } a - b = mk$$

قضیه. رابطهٔ هم‌نهشتی به سنج m روی Z یک رابطهٔ هم‌ارزی است، یعنی:

۱) $\forall a , b \in Z ; a \overset{m}{\equiv} a$ (زیرا $\rightarrow m|\underbrace{a - a}_{0}$)

۲) $\forall a , b \in Z ; a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow b \overset{m}{\equiv} a$ (زیرا $m|a-b \Leftrightarrow m|b-a$)

۳) $\forall a , b , c \in Z ; (a \overset{m}{\equiv} b \wedge b \overset{m}{\equiv} c) \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} c$

(زیرا $\rightarrow m|a - b \wedge m|b - c \rightarrow m|(a - b) + (b - c)$
$\Rightarrow m|a - c$)

نکته. چون رابطه $\overset{m}{\equiv}$ روی Z یک رابطه هم‌ارزی می‌باشد پس هر عضو Z مانند a دارای یک دسته هم‌ارزی یا یک کلاس هم‌ارزی است که به شکل [a] نمایش داده می‌شود و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[a] = \{x \in Z \mid x \overset{m}{\equiv} a\}$$

مثلاً: در هم‌نهشتی به سنج ۴ داریم:

$$[۲] = \{x \in Z \mid x \overset{۴}{\equiv} ۲\} = \{x \in Z|x - ۲ = ۴k\}$$
$$= \{x \in Z \mid x = ۴k + ۲\}$$
$$= \{..., -۱۰ , -۶ , -۲, ۲ , ۶ , ۱۰ , ۱۴ ,...\}$$

نکته. رابطهٔ هم‌نهشتی به سنج m دارای m دستهٔ هم‌ارزیِ [۰] و [۱] و... و [m − ۱] می‌باشد. که این دسته‌های هم‌ارزی Z را افراز می‌کنند بنابراین خواص زیر برای دسته‌های هم‌ارزی به سنج m برقرار می‌باشد.

الف) $\forall\ ۱ \le k \le m - ۱ ، [k] \neq \phi$

ب) $\forall\ k_i$ و $k_j ، [k_i] \cap [k_j] = \phi$

ج) $[۰] \cup [۱] \cup ... \cup [m - ۱] = Z$

د) $b \in [a] \Leftrightarrow [a] = [b]$

قضیه. هرگاه a و $b \neq ۰$ دو عدد صحیح باشند و a را بر b تقسیم کنیم طبق‌قضیهٔ تقسیم داریم: $a = bq + r$ در این صورت همواره، $a \overset{b}{\equiv} r$

زیرا $\rightarrow a = bq + r \Rightarrow a - r = bq \Rightarrow b|a - r \Rightarrow a \overset{b}{\equiv} r$

نتیجه. هرگاه بخواهیم محاسبه کنیم که عدد a به سنج b با چه عددی هم‌نهشت است؛ کافی است a را بر b تقسیم کنیم، در این حالت باقی‌مانده تقسیم یعنی r عددی است که به دنبال آن بودیم.

مثلاً: می‌خواهیم ببینیم که هم‌نهشتی $x \overset{۲۳}{\equiv} ۴۸$ برای چه x ای می‌تواند برقرار باشد، پس کافی است ۴۸ را بر ۲۳ تقسیم کنیم که باقی مانده تقسیم ۲ است بنابراین: $۴۸ \overset{۲۳}{\equiv} ۲$.

قضیهٔ اساسی هم‌نهشتیها. شرط لازم و کافی برای آن‌که $a \overset{m}{\equiv} b$ آن است که باقی‌مانده تقسیم a بر m و b بر m، برابر باشد.

تذکر. هرگاه $a<m$ در این‌صورت باقی مانده تقسیم a بر m با خودِ a برابر است. مثلاً باقی‌مانده تقسیم ۴ بر ۹ برابر است با ۴.

مثال. هرگاه $a \overset{۱۴}{\equiv} ۳۲$، باقی‌مانده تقسیم a بر ۱۴ را بیابید.

بنابر قضیهٔ اساسی و با توجه به این‌که $a \overset{۱۴}{\equiv} ۳۲$، کافی است باقی‌مانده تقسیم ۳۲ را بر ۱۴ بیابیم که $۳۲ = ۲ \times ۱۴ + ۴$ پس باقی‌مانده تقسیم a بر ۱۴ حتماً ۴ است.

خواص رابطهٔ هم‌نهشتی

الف) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm c$

ب) $a \overset{m}{\equiv} b \rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$

ج) $a \overset{m}{\equiv} b \wedge c \overset{m}{\equiv} d \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bd\ (I) , a + c \overset{m}{\equiv} b + d\ (II)$

(اثبات ج (I)
$$\left.\begin{array}{l} m|a - b \Rightarrow m|c(a - b) \Rightarrow m|ac - bc \\ m|c - d \Rightarrow m|b(c - d) \Rightarrow m|bc - bd \end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow m|ac - bd$$

د) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$

نتیجه. هرگاه $a \overset{m}{\equiv} b$ می‌توان به یک طرف این رابطه عدد m یا هر مضربی از m را اضافه کرد و رابطه برقرار خواهد ماند، زیرا:

می‌دانیم $m|km \Rightarrow m|km - ۰ \Rightarrow km \overset{m}{\equiv} ۰$ و $a \overset{m}{\equiv} b$

$$\xRightarrow{\text{بنابر (ج)}} a + km \overset{m}{\equiv} b \text{ یا } a \overset{m}{\equiv} b + km$$

(از این نتیجه در حل معادلات هم‌نهشتی استفاده خواهیم کرد.)

قضیه. هرگاه $ac \overset{m}{\equiv} bc$ و $(m , c) = d$ در این‌صورت $a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$

مثلاً $3 \times 4 \overset{12}{\equiv} 9 \times 4$ پس $3 \overset{\frac{12}{4}}{\equiv} 9$ زیرا، ۴=(۴ و ۱۲)

نتیجه. هرگاه $ac \overset{m}{\equiv} bc$ و $(m , c) = 1$ دراین صورت $a \overset{m}{\equiv} b$.

تست. هرگاه باقی‌ماندهٔ تقسیم ۳۲ بر k برابر با یک باشد، باقی‌مانده تقسیم 2^{1374} بر k کدام است؟ (در صورتی‌که بدانیم $k>19$ باشد.)

۱) ۲ ۲) ۱۶ ۳) ۹ ۴) ۴

حل. گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$32 \overset{k}{\equiv} 1 \Rightarrow 2^5 \overset{k}{\equiv} 1 \Rightarrow (2^5)^{274} \overset{k}{\equiv} 1 \Rightarrow 2^{1370} \overset{k}{\equiv} 1 \Rightarrow$$

$$2^{1370} \times 2^4 \overset{k}{\equiv} 1 \times 2^4 \Rightarrow 2^{1374} \overset{k}{\equiv} 16$$

و چون $k>19$ پس $k>16$ بنابراین باقی ماندهٔ تقسیم ۱۶ بر k برابر با ۱۶ است که همان‌باقی‌مانده تقسیم 2^{1374} بر k است.

مثال. باقی‌مانده تقسیم $4 \times (1000)^{451}$ را بر ۷ بیابید.

حل. در حقیقت باید محاسبه کنیم که معادله هم‌نهشتی $4 \times (1000)^{451} \overset{7}{\equiv} x$ برای چه x مثبت و کوچکتر از ۷ برقرار است.

ابتدا ۱۰۰۰ را بر ۷ تقسیم می‌کنیم که باقی‌مانده ۶ است پس $1000 \overset{7}{\equiv} 6$ و چون: $6 \overset{7}{\equiv} -1$ پس بنابر تعدی نتیجه می‌گیریم که $1000 \overset{7}{\equiv} -1$ پس $(1000)^{451} \overset{7}{\equiv} -1$ بنابراین:

$4 \times (1000)^{451} \overset{7}{\equiv} -1 \times 4$ یا $4 \times (1000)^{451} \overset{7}{\equiv} -4$ و چون $-4 \overset{7}{\equiv} 3$ پس $4 \times (1000)^{451} \overset{7}{\equiv} 3$ پس باقی‌مانده تقسیم ۳ است.

مثال. نشان دهید $3^{113} + 43$ بر ۱۳ بخش‌پذیر است.

حل. باید نشان دهیم $3^{113} + 43 \overset{13}{\equiv} 0$

$$3^3 = 27 \overset{13}{\equiv} 1 \Rightarrow (3^3)^{37} \overset{13}{\equiv} 1 \Rightarrow 3^{111} \overset{13}{\equiv} 1$$

$$\Rightarrow 3^{111} \times 3^2 \overset{13}{\equiv} 3^2$$

$$\Rightarrow 3^{113} \overset{13}{\equiv} 9 \text{ و } 43 \overset{13}{\equiv} 4 \Rightarrow 3^{113} + 43 \overset{13}{\equiv} 9 + 4 \overset{13}{\equiv} 0$$

تست. عدد ۲۰۹− به کدام دسته هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۱۲ تعلق دارد؟ (سراسری ۷۱)

۱) [۹−] ۲) [۷] ۳) [۷−] ۴) [۹]

حل. گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

باید x را چنان بیابیم که $-209 \overset{12}{\equiv} x$ لذا کافی است ۲۰۹− را بر ۱۲ تقسیم کرده و باقی‌مانده تقسیم همان x است.

$$-209 = 12 \times (-17) - 5 \Rightarrow -209 \overset{12}{\equiv} -5 \text{ و } -5 \overset{12}{\equiv} 7 \Rightarrow$$

$$-209 \overset{12}{\equiv} 7$$

تست. دستهٔ هم‌نهشتی [۱۳۷۳] در Z_{16} مساوی با کدام دستهٔ هم‌نهشتی است.

۱) [۱] ۲) [۳] ۳) [۱۳−] ۴) [۳−]

حل. باقی‌مانده تقسیم ۱۳۷۳ بر ۱۶ عبارت است از ۱۳، پس:

$$1373 \overset{16}{\equiv} 13 \text{ و } 13 \overset{16}{\equiv} -3 \Rightarrow 1373 \overset{16}{\equiv} -3$$

$$\Rightarrow [1373] = [-3]$$

نکته. هرگاه $a \overset{m}{\equiv} b$ و $a \overset{n}{\equiv} b$ و $(m , n) = 1$ آنگاه $a \overset{mn}{\equiv} b$.

زیرا: طبق قضیه‌ای در تئوری اعداد اگر $a|c$ و $b|c$ و $(a , b) = 1$ در این‌صورت $ab|c$ یعنی اگر عددی بر دو عدد بخش‌پذیر باشد و آن دو عدد نسبت به هم اول باشند یا بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک آنها ۱ باشد، در این‌صورت آن عدد بر حاصل‌ضربِ آنها نیز بخش‌پذیر است پس در این نکته داریم:

$$\left.\begin{array}{l} a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m|a-b \\ a \overset{n}{\equiv} b \Rightarrow n|a-b \end{array}\right\} \overset{(m,n)=1}{\Rightarrow} mn|a-b \Rightarrow a \overset{mn}{\equiv} b$$

مثلاً: $8 \overset{3}{\equiv} 2$ و $8 \overset{2}{\equiv} 2$ و چون: $(3 , 2) = 1$ پس $8 \overset{6}{\equiv} 2$.

نکته. اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ و $n|m$ $(n \in \mathbb{N})$ در این‌صورت $a \overset{n}{\equiv} b$. زیرا:

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m|a-b ,\ n|m \overset{\text{تعدی}}{\Longrightarrow} n|a-b \Rightarrow a \overset{n}{\equiv} b$$

قواعد مربوط به یافتن باقیماندهٔ تقسیم

۱. باقی‌مانده تقسیم هر عدد بر ۲، ۵ و ۱۰ عبارت است از: باقی‌مانده تقسیم رقم یکان آن عدد بر ۲، ۵ و یا ۱۰. مثلاً باقی‌مانده تقسیم ۴۵۳۶ به ترتیب بر ۲ و ۵ و ۱۰ عبارت است از: صفر و ۱ و ۶.

زیرا اگر عدد $A = a_{n-1}a_{n-2}\dots a_2a_1a_0$ یک عدد n رقمی باشد می‌توان A را به شکل زیر در مبنای اعشاری (مبنای ده دهی) بسط داد.

$$A = 10^{n-1}a_{n-1} + 10^{n-2}a_{n-2} + \dots + 10a_1 + a_0$$

از طرفی می‌دانیم $10 \overset{10}{\equiv} 0$ و $10 \overset{5}{\equiv} 0$ و $10 \overset{2}{\equiv} 0$ پس،

$10^k \overset{2}{\equiv} 0$ و $10^k \overset{5}{\equiv} 0$ و $10^k \overset{10}{\equiv} 0$ ، $\forall k \in \mathbb{N}$

مثلاً برای بخش‌پذیری بر ۵ و مشخص کردن باقی‌مانده داریم:

$$10^{n-1} \overset{5}{\equiv} 0 \Rightarrow 10^{n-1} a_{n-1} \overset{5}{\equiv} 0$$
$$10^{n-2} \overset{5}{\equiv} 0 \Rightarrow 10^{n-2} a_{n-2} \overset{5}{\equiv} 0$$
$$10 \overset{5}{\equiv} 0 \Rightarrow 10 a_1 \overset{5}{\equiv} 0$$
و $a_0 \overset{5}{\equiv} a_0$ (با جمع طرفین هم‌نهشتی‌ها)
$$A \overset{5}{\equiv} a_0$$

پس طبق قضیهٔ اساسی هم‌نهشتی‌ها باقیماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۵ برابراست با باقیمانده تقسیم رقم یکان آن بر ۵ و به همین قیاس برای ۲ و ۱۰ نیز روابط و نتیجه‌گیریِ فوق صادق می‌باشد.

نتیجه. چون رقم‌یکان هر عدد همواره از ۱۰ کوچکتر است، باقی‌مانده تقسیم آن بر ۱۰ همان رقم یکان می‌باشد، بنابراین برای یافتن رقم یکان هر عدد کافی است باقی‌ماندهٔ تقسیم آن عدد را بر ۱۰ بیابیم یا تحقیق کنیم که آن عدد به سنج ۱۰ با چه عددی هم‌نهشت است و به همین قیاس برای تعیین دو رقم یا سه رقم سمت راستِ یک عدد، هم‌نهشتی به سنج ۱۰۰ و ۱۰۰۰ را مورد بررسیْ قرار می‌دهیم.

طریقهٔ محاسبهٔ رقم یکان اعداد توانی به شکل a^n

نکتهٔ ۱. هرگاه عدد a به ۱ یا ۵ یا ۶ یا ۰ ختم شود، هر توان آن نیز به ترتیب به ۱ یا ۵ یا ۶ یا ۰ ختم می‌شود.

نکتهٔ ۲. (قضیهٔ نیوتن) هر عددکه به توان برسد هر چهار بار یک مرتبه رقم سمت راست توانهای آن تکرار می‌شود.

نکتهٔ ۳. هرگاه بخواهیم باقی‌ماندهٔ تقسیم a^n را بر ۱۰ بیابیم، یعنی: رقم سمت راستش راتعیین کنیم؛ کافی است ابتدا باقی‌ماندهٔ توان یعنی n را بر ۴ بیابیم، اگر این باقی‌مانده صفر شود: یعنی $n = 4k$ ، آن را برابر با ۴ در نظرگرفته و رقم یکان a را به‌توان ۴ می‌رسانیم و رقم یکان عدد حاصل همان رقم یکان a^n خواهد بود و اگر باقی‌مانده r باشد که $4 > r > 0$ در این‌صورت نیز رقم یکان a را به توان r می‌رسانیم و رقم یکان عدد حاصل همان رقم یکانِ a^n است و...

مثال. رقم یکان $A = (493623)^{4938}$ را بیابید.

$$493623 \overset{10}{\equiv} 3 \Rightarrow (493623)^{4938} \overset{10}{\equiv} 3^{4938}$$
$$4938 = 1234 \times 4 + 2 \Rightarrow r = 2$$

رقم یکان A = رقم یکان $3^2 = 9$ ← پس A به ۹ ختم می‌شود.

نکته. هرگاه عددی به ۹ ختم شود در این‌صورت رقم یکانِ توانهای زوج آن به یک ختم شده و رقم یکان توانهای فرد آن بـه ۹ خـتم می‌شوند زیرا:

$$9 \overset{10}{\equiv} -1 \Rightarrow \begin{cases} 9^k \overset{10}{\equiv} 1 & \text{(K زوج باشد)} \\ 9^k \overset{10}{\equiv} -1 \overset{10}{\equiv} 9 & \text{(K فرد باشد)} \end{cases}$$

نکته. هرگاه عددی به ۴ ختم شود، رقم یکان توانهای زوج آن به ۶ و رقم یکانِ توانهای فرد آن به ۴ ختم می‌شود، زیرا:

$$4^2 \overset{10}{\equiv} 6 \Rightarrow (4^2)^k \overset{10}{\equiv} 6^k \overset{10}{\equiv} 6 \Rightarrow 4^{2k} \overset{10}{\equiv} 6 \text{ و } 4^{2k}\times 4 \overset{10}{\equiv} 24 \overset{10}{\equiv} 4$$
$$\Rightarrow 4^{2k+1} \overset{10}{\equiv} 4$$

تست. رقم سمت راست عـبارت 7×4^{762} کـدام است؟ (کـنکور سراسری)

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

حل. گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

۷۶۲ زوج است. $\rightarrow 4^{762} \overset{10}{\equiv} 6 \Rightarrow 7 \times 4^{762} \overset{10}{\equiv} 7 \times 6 = 42 \overset{10}{\equiv} 2$

تست. مانده تقسیم عدد $379^3 - 387^3$ بر ۵ برابر است با: (کنکور سراسری)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

حل. گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$\left.\begin{array}{l} 387 \overset{5}{\equiv} 2 \Rightarrow 387^3 \overset{5}{\equiv} 2^3 \overset{5}{\equiv} 3 \\ 379 \overset{5}{\equiv} 4 \Rightarrow 379^3 \overset{5}{\equiv} 4^3 \overset{5}{\equiv} 4 \end{array}\right\} \Rightarrow 387^3 - 379^3 \overset{5}{\equiv} 3 - 4 \overset{5}{\equiv} 4$$

تست. بـاقی‌مانده تـقسیم $2^{3n+1} + 13^{2n+1}$ بـر ۷ کـدام است؟ $(n \in \mathbb{N})$ (کنکور سراسری)

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) ۵ ۴) ۶

حل. گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$\left.\begin{array}{l} 2^3 = 8 \overset{7}{\equiv} 1 \Rightarrow 2^{3n} \overset{7}{\equiv} 1 \Rightarrow 2^{3n+1} \overset{7}{\equiv} 2 \\ 13 \overset{7}{\equiv} -1 \Rightarrow 13^{2n} \overset{7}{\equiv} 1 \Rightarrow 13^{2n+1} \overset{7}{\equiv} 13 \end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow 2^{3n+1} + 13^{2n+1} \overset{7}{\equiv} 15 \overset{7}{\equiv} 1$$

تست. رقم یکان $((19)^2)^{70}$ برابر است با: (کنکور سراسری)

۱) ۹ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) هیچ‌کدام

حل. گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$((19)^2)^{70} = (19)^{140} \overset{10}{\equiv} \overset{\text{۱۴۰ زوج است}}{9^{140}} \Rightarrow 9^{140} \overset{10}{\equiv} 1$$

تست. باقی‌مانده تقسیم 65^{40} بر عدد ۹ کدام است؟

(کنکور سراسری)

۱) ۷ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۲

حل. گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$65 \overset{9}{\equiv} 2 \Rightarrow 65^3 \overset{9}{\equiv} 2^3 \overset{9}{\equiv} -1 \Rightarrow (65^3)^{13} \overset{9}{\equiv} -1^{13} = -1$$

$$\Rightarrow 65^{39} \overset{9}{\equiv} -1 \Rightarrow 65^{40} \overset{9}{\equiv} -65 \overset{9}{\equiv} -2 \overset{9}{\equiv} 7$$

تست. رقم یکان عدد حاصل از: $A = 1^{101} + 2^{101} + 3^{101} + 4^{101}$ کدام است؟ (کنکور سراسری)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

حل. گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

می‌دانیم $101 = 4 \times 25 + 1 \Rightarrow r = 1$

$$\Rightarrow 1^{101} \overset{10}{\equiv} 1^1 \text{ و } 4^{101} \overset{10}{\equiv} 4^1 \text{ و } 3^{101} \overset{10}{\equiv} 3^1 \text{ و } 2^{101} \overset{10}{\equiv} 2^1$$

$$\Rightarrow A \overset{10}{\equiv} 1 + 2 + 3 + 4 = 10 \overset{10}{\equiv} 0$$

مثال. اگر باقی‌مانده‌های تقسیم عددهای ۶۸ و ۱۴۵ بر m مساوی باشند؛ و $m \neq 1$ باقی‌مانده تقسیم ۱۶۰ بر m کدام است؟ (کنکور سراسری)

۱) صفر ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۱۱

حل. گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

با توجه به فرض و قضیه اساسی $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 68 \overset{m}{\equiv} r \\ 145 \overset{m}{\equiv} r \end{array}\right\} \Rightarrow 145 - 68 \overset{m}{\equiv} 0 \Rightarrow 77 \overset{m}{\equiv} 0$

$$\Rightarrow 2 \times 77 \overset{m}{\equiv} 2 \times 0 \Rightarrow 154 \overset{m}{\equiv} 0 \Rightarrow 154 + 6 \overset{m}{\equiv} 0 + 6$$

$$\Rightarrow 160 \overset{m}{\equiv} 6$$

مثال. اگر باقی‌مانده‌های تقسیم a و b بر ۳۷ به‌ترتیب برابر ۱۵ و ۲۹ باشد، باقی‌مانده تقسیم $a - b$ بر ۳۷ کدام است؟ (کنکور سراسری)

۱) ۲۸ ۲) ۲۳ ۳) ۱۴ ۴) ۷

حل. گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

با توجه به قضیه اساسی $\Rightarrow \quad \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a \overset{37}{\equiv} 15 \\ b \overset{37}{\equiv} 29 \end{array}\right\} \Rightarrow a - b \overset{37}{\equiv} -14 \overset{37}{\equiv} 23$

۲. باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۳ و ۹ برابر است با باقی‌ماندهٔ مجموع ارقام آن عدد بر ۳ و یا ۹.

۳. باقی‌مانده تقسیم هر عدد بر ۴ برابر است با باقی‌ماندهٔ تقسیم ۲ برابر رقم دهگان به علاوهٔ رقم یکانِ آن عدد، بر ۴.

$$493667 \overset{4}{\equiv} 2 \times 6 + 7 \overset{4}{\equiv} 19 \overset{4}{\equiv} 3$$

۴. باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۸ برابر است با باقی‌ماندهٔ تقسیم ۴ برابر رقم صدگان به علاوهٔ ۲ برابر رقم دهگان به علاوهٔ رقم یکان آن عدد، بر ۴:

$$548391 \overset{8}{\equiv} 4 \times 3 + 2 \times 9 + 1 \overset{8}{\equiv} 31 \overset{8}{\equiv} 7$$

۵. برای یافتن باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۷ و ۱۳ از سمت راست سه رقم سه رقم جدا کرده و یک درمیان از هم کم و با هم جمع می‌کنیم، عددی حاصل می‌شود که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن عدد بر ۷ یا ۱۳ همان باقی‌ماندهٔ مطلوب است.

مثال: $64823459 \overset{7}{\equiv} 459 - 823 + 64$

$$= -300 \overset{7}{\equiv} -42 \times 7 - 6 \Rightarrow -300 \overset{7}{\equiv} -6 \overset{7}{\equiv} 1$$

پس باقی‌مانده تقسیم ۱ است.

۶. برای محاسبهٔ باقی‌مانده تقسیم یک عدد بر ۱۱ کافی است ارقام آن را از رقم یکان به‌صورت یک در میان از هم کم و با هم جمع کنیم و باقی‌ماندهٔ عدد حاصل را بر ۱۱ بیابیم.

مثال: $234968 \overset{11}{\equiv} 8 - 6 + 9 - 4 + 3 - 2 = 8 \overset{11}{\equiv} 8$

اثبات ۵ و ۶: باقی‌ماندهٔ تقسیم 10^3 بر ۷ و ۱۳ به‌ترتیب ۶ و ۱۲ می‌باشد یعنی:

$$10^3 \overset{7}{\equiv} 6 \Rightarrow 10^3 \overset{7}{\equiv} -1 \Rightarrow \begin{cases} (10^3)^k \overset{7}{\equiv} 1 & (\text{k زوج}) \\ (10^3)^k \overset{7}{\equiv} -1 & (\text{k فرد}) \end{cases}$$

$$10^3 \overset{13}{\equiv} 12 \Rightarrow 10^3 \overset{13}{\equiv} -1$$

از طرفی عدد $A = \overline{a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0}$ را در مبنای اعشاری می‌توان به‌صورت $A = \overline{a_2 a_1 a_0} + 10^3 \overline{a_5 a_4 a_3} + 10^6 \overline{a_8 a_7 a_6} + \dots$ بسط داد بنابراین با توجه به مطالب فوق‌الذکر داریم:

$$A \overset{7}{\equiv} \overline{a_2 a_1 a_0} - \overline{a_5 a_4 a_3} + \overline{a_8 a_7 a_6} - \dots$$

و به همین ترتیب برای بخش‌پذیری بر ۱۳ و یافتن باقی‌مانده کافی است سه رقم سه رقم جدا کرده و یک درمیان از هم کم و با هم جمع کنیم و باقیماندهٔ عدد حاصل را بر ۱۳ بیابیم.

اثبات قسمتهای ۲ و ۳ و ۴ به عهدهٔ خواننده واگذار می‌شود.

مثال. ثابت کنید هر عدد به صورت $A = \overline{abcabc}$ همواره بر ۷ و ۱۳ و ۱۱ بخش‌پذیر است.

$$A \overset{۷}{\equiv} abc - abc = ۰ \text{ و } A \overset{۱۳}{\equiv} abc - abc = ۰ \text{ و}$$

$$A \overset{۱۱}{\equiv} a - b + c - a + b - c = ۰$$

مثلاً عدد (۴۷۲۴۷۲) همواره بر ۷ و ۱۳ و ۱۱ بخش‌پذیر است.

نکته. هرگاه a و b اعداد صحیح و مثبت باشند، داریم:

الف) $(a + b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n + b^n$

ب) $(a - b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n - b^n$ اگر n فرد باشد

ج) $(a - b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n + b^n$ اگر n زوج باشد

اثبات الف) $(a + b)^n$

$$= a^n + na^{n-۱}b + \frac{n(n-۱)}{۲}a^{n-۲}b^۲ + \dots + b^n$$

چون همهٔ جملات به جز جملهٔ اول و آخر، عامل ab دارند پس:

$$\Rightarrow (a + b)^n = a^n + abQ + b^n$$

$$\Rightarrow (a + b)^n - (a^n + b^n) = abQ \Rightarrow (a + b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n + b^n$$

تست. باقی‌ماندهٔ تقسیم $۲ + (۱۳^n - ۷^n - ۶^n)$ بر ۴۲ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۸

حل. گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

با توجه به نکتهٔ قبل اگر قرار دهیم $a = ۷$ و $b = ۶$ داریم:

$$(۷ + ۶)^n \overset{۴۲}{\equiv} ۷^n + ۶^n \Rightarrow ۱۳^n - ۷^n - ۶^n \overset{۴۲}{\equiv} ۰$$

$$\Rightarrow (۱۷^n - ۷^n - ۶^n) + ۲ \overset{۴۲}{\equiv} ۲$$

تعریف دستهٔ کامل مانده‌ها به سنج m

دیدیم که رابطهٔ هم‌نهشتی به سنج m روی Z یک رابطهٔ هم‌ارزی بوده و دارای m دستهٔ هم‌ارزیی $[۰]$ و $[۱]$ و ... و $[m-۱]$ می‌باشد. حال اگر از هر دستهٔ هم‌ارزیِ یک عدد صحیح انتخاب کرده و در یک مجموعه قرار دهیم، مجموعهٔ حاصل که دارای m عضو می‌باشد یک دستهٔ کامل مانده‌ها (د.ک.م.) به سنج m است.

مثلاً: مجموعهٔ $\{۰,۱,۲,۳,۴\}$ یک د.ک.م. به سنج ۵ است.

قضیه. هرگاه $A = \{c_۱ , c_۲ , \dots , c_m\}$ و هیچ دو عضو A به سنج m با یکدیگر هم‌نهشت نباشند، A یک د.ک.م. به سنج m است و برعکس.

قضیه. اگر $A = \{c_۱ , c_۲ , \dots , c_m\}$ یک د.ک.م. به سنج m باشد و $(a , m) = ۱$ و $b \in Z$، در این‌صورت $B = \{ac_۱ + b, ac_۲ + b , \dots, ac_m + b\}$ نیز یک د.ک.م. به سنج m است.

نتیجه. اگر در قضیه بالا $b = ۰$ در این‌صورت $B = \{ac_۱ , ac_۲ , \dots , ac_m\}$ یک د.ک.م. به سنج m خواهد بود. ($(a,m) = ۱$).

تست. کدام مجموعه یک دستگاه کامل مانده‌ها به سنج ۴ است؟

۱) $\{۰,۲,۶,۵\}$ ۲) $\{۱,۲,۳,۵\}$

۳) $\{۲,۴,۶,۸\}$ ۴) $\{۱,۶,۳,۰\}$

حل. گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

در گزینهٔ (۱) $۶ \overset{۴}{\equiv} ۲$ و در گزینهٔ (۲) $۵ \overset{۴}{\equiv} ۱$ ودر گزینهٔ (۳) $۸ \overset{۴}{\equiv} ۴$ ولی در مجموعهٔ مربوط به گزینهٔ (۴) هیچ دو عضوی به سنج ۴ با یکدیگر هم‌نهشت نیستند.

قضیهٔ فرما. اگر p عددی اوّل بوده و $p \nmid a$ یا $(p , a) = ۱$ در این‌صورت:

$$\boxed{a^{p-۱} \overset{p}{\equiv} ۱}$$

نتیجهٔ قضیهٔ فرما. به ازای هر عدد صحیح مانند a و عدد اوّل p داریم:

$$a^p \overset{p}{\equiv} a$$

اثبات: فرض کنیم p عددی اول بوده و $a \in Z$، در این‌صورت برای p و a دو حالت در نظر می‌گیریم و در هر دو حالت قضیه اثبات می‌شود:

I) اگر $p \nmid a$ پس $(p , a) = ۱$ لذا طبق قضیهٔ فرما $a^{p-۱} \overset{p}{\equiv} ۱$ و اگر طرفین رابطهٔ هم‌نهشتیِ اخیر را در a ضرب کنیم خواهیم داشت:

$$\boxed{a^p \overset{p}{\equiv} a}$$

II) اگر $p|a$ پس باید $p|a(\underbrace{a^{p-۱} - ۱}_{m})$، بنابراین $p|a^p - a$ و طبق تعریف هم‌نهشتی داریم، $a^p \overset{p}{\equiv} a$.

قضیهٔ ویلسون. هرگاه p عددی اول باشد در این‌صورت:

$$(p - ۱)! \overset{p}{\equiv} -۱$$

تست. باقی‌مانده تقسیم عدد $A = ۱^{۱۲} + ۲^{۱۲} + \dots + ۱۲^{۱۲}$ بر ۱۳ کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

حل. گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$\left.\begin{array}{l} (۱۳ \text{ و } ۱) = ۱ \overset{\text{فرما}}{\Rightarrow} ۱^{۱۲} \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \\ (۱۳ \text{ و } ۲) = ۱ \overset{\text{فرما}}{\Rightarrow} ۲^{۱۲} \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \\ \vdots \\ (۱۳ \text{ و } ۱۲) = ۱ \overset{\text{فرما}}{\Rightarrow} ۱۲^{۱۲} \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \end{array}\right\} \Rightarrow A \overset{۱۲}{\equiv} \overbrace{۱+۱+...+۱}^{۱۲ \text{ بار}} = ۱۲$$

تست. باقی‌مانده تقسیم عدد $A = ۱^{۱۳} + ۲^{۱۳} + ... + ۱۳^{۱۳}$ بر ۱۳ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱۱ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

حل. گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$\left.\begin{array}{l} ۱^{۱۳} \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \\ ۲^{۱۳} \overset{۱۳}{\equiv} ۲ \\ \vdots \\ ۱۲^{۱۳} \overset{۱۳}{\equiv} ۱۲ \\ ۱۳^{۱۳} \overset{۱۳}{\equiv} ۱۳ \end{array}\right\} \Rightarrow A \overset{۱۳}{\equiv} ۱ + ۲ + ... + ۱۳$$

$$= \frac{۱۳\times(۱۳+۱)}{۲} = ۱۳ \times ۷ \overset{۱۳}{\equiv} ۰$$

تست. باقی‌مانده تقسیم $۵۶۳^{۱۷}$ بر ۱۷ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

حل. گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا

۱۷ اول است. $\Rightarrow ۵۶۳^{۱۷} \overset{۱۷}{\equiv} ۵۶۳ = ۳۳ \times ۱۷ + ۲ \overset{۱۷}{\equiv} ۲$

تست. باقی‌ماندهٔ تقسیم $۳^{۴۰۱}$ بر ۱۰۱ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

حل. گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

۱۰۱ اوّل است. و $(۳,۱۰۱) = ۱ \overset{\text{فرما}}{\Rightarrow} ۳^{۱۰۰} \overset{۱۰۱}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۳^{۴۰۰} \overset{۱۰۱}{\equiv} ۱$

$$\Rightarrow ۳^{۴۰۱} \overset{۱۰۱}{\equiv} ۳$$

حل معادلات خطی و دو مجهولی در Z ـ حل معادلات هم‌نهشتی

قضیه. شرط لازم و کافی برای آن‌که معادله $ax + by = c$ در Z دارای جواب باشد، ($x_۰$ و $y_۰$ای در Z یافت شوند به قسمی که $ax_۰ + by_۰ = c$) آن است که بزرگترین شمارندهٔ مشترک a و b، c را بشمارد یعنی: $(a , b)|c$ (منظور از (a , b) همان ب.م.م. است)

نتیجه. اگر $(a , b) = ۱$ در این صورت معادله $ax + by = c$ همواره در Z دارای جواب است.

مثال. معادله $۱۲x - ۷y = ۸$ را حل کنید. (یکی از دسته جوابها را بیابید.)

معادله دارای جواب است $(۱۲ , ۷) = ۱ \mid ۸ \rightarrow$

$$۱۲x - ۷y = ۸ \Rightarrow y = \frac{۱۲x - ۸}{۷} = \frac{۱۴x - ۲x - ۷ - ۱}{۷}$$

$$= ۲x - ۱ - \frac{(۲x + ۱)}{۷}$$

از طرفی چون $y \in Z \Rightarrow \frac{۲x + ۱}{۷} = t$

$$\Rightarrow ۲x + ۱ = ۷t \Rightarrow x = \frac{۷t - ۱}{۲} \Rightarrow x = \frac{۶t + t - ۱}{۲}$$

$$= ۳t + \frac{t - ۱}{۲}$$

چون $x \in Z \Rightarrow \frac{t - ۱}{۲} = k \Rightarrow t = ۲k + ۱$

اگر $k = ۰ \rightarrow t = ۱ \Rightarrow x = ۳ \Rightarrow y = ۴$

قضیه. هرگاه $x_۰$ و $y_۰$ جوابهایی برای معادله $ax + by = c$ باشند و $(a , b) = d$ در این‌صورت بقیهٔ جوابهای معادلهٔ فوق از رابطه‌های زیر به دست خواهند آمد:

$$\begin{cases} x = x_۰ - k\frac{b}{d} \\ y = y_۰ - k - \frac{a}{d} \end{cases}$$

نکته. همواره هر معادلهٔ هم‌نهشتی‌مانند: $ax \overset{m}{\equiv} b$ را می‌توان به شکل یک معادلهٔ خطی و به‌صورت $ax + my = b$ نوشت.

قضیه. (با توجه به نکته قبل و قضیهٔ قبل) شرط لازم و کافی برای آن‌که معادلهٔ هم‌نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ در Z دارای جواب باشد آن است که $(a.m)|b$.

نتیجه. در صورتی‌که $(a , m) = ۱$ معادلهٔ هم‌نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ همواره در Z جواب خواهد داشت.

تست. به ازای کدام مقدار b معادلهٔ $(۱۵ + b)x + by = ۲۰$ در مجموعهٔ اعداد صحیح جواب دارد؟ (سراسری ۷۱)

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۱۵ ۴) ۳۰

حل. گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

شرط جواب: $(۱۵ + b , b) | ۲۰ \overset{b = ۵}{\Longrightarrow} (۲۰ \text{ و } ۵) = ۵ | ۲۰$

نکته. دیدیم که اگر $(a , m) = ۱$ معادلهٔ $ax \overset{m}{\equiv} b$ همواره دارای

جواب است. برای حل این گونه معادلات هرگاه بتوانیم معادلهٔ هم‌نهشتی را به‌صورت: $ax \overset{m}{\equiv} ak$ در آوریم با توجه به این‌که $(a , m) = 1$ به‌راحتی می‌توان a را از طرفین حذف کرده و جوابی برای x به‌صورت $x \overset{m}{\equiv} k$ به‌دست آوریم.

تست. جواب کلی معادلهٔ $5x \overset{6}{\equiv} 2$ کدام است؟ $(k \in Z)$

۱) $x = 6k + 4$ ۲) $x = 6k - 4$

۳) $x = 6k + 3$ ۴) $x = 4k + 6$

حل. گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$5x \overset{6}{\equiv} 2 \Rightarrow 5x \overset{6}{\equiv} \overset{0 \overset{6}{\equiv} 18}{18} + 2 \Rightarrow 5x \overset{6}{\equiv} 5 \times 4 \Rightarrow x \overset{6}{\equiv} 4$$

$$\Rightarrow x - 4 = 6k \Rightarrow x = 6k + 4$$

تست. معادلهٔ $91x - 65y = 11$ در مجموعهٔ اعداد صحیح: (کنکور سراسری)

۱) فقط یک جواب دارد ۲) جواب ندارد

۳) بی‌شمار جواب دارد ۴) دو جواب دارد

حل. گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$(91 , 65) = 13 \nmid 11$$

مثال. باقی‌مانده تقسیم $5 \times 18!$ را بر ۱۹ بیابید.

حل. طبق قضیهٔ ویلسون داریم:

$$18! = (19-1)! \overset{19}{\equiv} -1 \Rightarrow 5 \times 18! \overset{19}{\equiv} -5 \overset{19}{\equiv} 14 \rightarrow r = 14$$

حل چند مسأله نمونه

۱ـ هرگاه یک‌سال با روز سه‌شنبه آغاز شود در این‌صورت:

الف) اول مهرماه همان سال چه روزی است؟

ب) ۲۲ بهمن همان سال چه روزی است؟

حل. برای حل این‌گونه مسائل همواره ۶ ماه اول سال را ۳۱ روز و ۵ ماهِ بعد را ۳۰ روز و ماهِ اسفند را ۲۹ روز در نظر می‌گیریم و برای شروع به حل ابتدا، روزِ تعیین شده در فرض مسأله را مبدأ گرفته (متناظر با عدد صفر) و بقیهٔ روزهای هفته را به‌ترتیب با اعداد ۱ ، ۲ ، ۳ ، ... ، ۶ متناظر می‌گیریم و سپس فاصلهٔ تاریخ داده شده و تاریخ موردِ سؤال را محاسبه کرده و هم‌نهشتی عددِ حاصل را به سنج ۷ به‌دست آورده و در جدول، روز متناظر با آن عدد همان روزِ مطلوب مسأله خواهد بود.

حل الف) چون سال نو با سه‌شنبه آغاز شده پس:

دوشنبه	یکشنبه	شنبه	جمعه	پنج‌شنبه	چهارشنبه	سه‌شنبه
۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰

از اول فروردین تا اول مهرماه (و خود اول مهرماه) $(1 + 31 \times 5 + 30)$ روز است بنابراین:

$$30 + 5 \times 31 + 1 = 186 \overset{7}{\equiv} 4$$

که عدد ۴ در جدول متناظر با شنبه است یعنی اول مهرماه شنبه خواهد بود.

ب)

فاصلهٔ اول فروردین تا ۲۲ بهمن $= (22 + 4 \times 30 + 5 \times 31 + 30)$

$$= 327$$

و $327 \overset{7}{\equiv} 5$

یعنی ۲۲ بهمن روز یکشنبه خواهد بود.

۲ـ ثابت کنید اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ در این‌صورت برای $c \in Z$ داریم:

$$ac \overset{m}{\equiv} bc$$

حل: طبق فرض داریم:

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m|a - b \Rightarrow m|c(a - b)$$

$$\Rightarrow m|ac - bc \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$$

۳ـ باقیمانده تقسیم 4^{1375} را بر ۷ بیابید.

حل:

$$4^3 = 64 \overset{7}{\equiv} 1 \Rightarrow 4^3 \overset{7}{\equiv} 1$$

حال ۱۳۷۵ را بر ۳ تقسیم می‌کنیم:

$$1375 = 458 \times 3 + 1$$

$$\Rightarrow (4^3)^{458} \times 4 \overset{7}{\equiv} 1^{458} \times 4 \Rightarrow 4^{1375} \overset{7}{\equiv} 4$$

پس باقیمانده تقسیم ۴ است.

۴ـ رقمهای سمت راستِ $(13)^{1996}$ و $(27)^{1417}$ را بیابید.

حل: براساس مطالبِ گفته شده کافی است باقیماندهٔ تقسیم توانهایِ اعداد داده شده را بر عدد ۴ بیابیم و رقم یکانِ پایه را به توان باقیمانده برسانیم (اگر $r = 0$ آن را برابر با ۴ فرض می‌کنیم):

$$1996 = 4 \times 499 \Rightarrow r = 0$$

$$13^{1996} \overset{10}{\equiv} 3^4 = 81 \overset{10}{\equiv} 1 \Rightarrow 13^{1996} \overset{10}{\equiv} 1$$

$$1416 = 354 \times 4 + 1 \Rightarrow r = 1$$

$$27^{1417} \overset{10}{\equiv} 7^1 \Rightarrow (27)^{1417} \overset{10}{\equiv} 7$$

۵ـ نشان دهید باقیماندهٔ تقسیم عدد $A = ٦^{٣٧} - ١٢$ بر ۱۳، ۷ است.

حل: چون ۱۳ اوّل بوده و ۱ = (۱۳و۶) پس طبق قضیهٔ فرما داریم:

$$٦^{١٢} \overset{١٣}{\equiv} ١ \Rightarrow (٦^{١٢})^{٣} \overset{١٣}{\equiv} ١ \Rightarrow ٦^{٣٦} \times ٦ \overset{١٣}{\equiv} ٦$$

$$\Rightarrow ٦^{٣٧} \overset{١٣}{\equiv} ٦ \Rightarrow ٦^{٣٧} - ١٢ \overset{١٣}{\equiv} -٦ \overset{١٣}{\equiv} ٧ \Rightarrow ٦^{٣٧} - ١٢ \overset{١٣}{\equiv} ٧$$

٦ـ ثابت کنید $٢^{٦n} - ١$ بر ۷ بخش‌پذیر است.

حل: ۷ اول بوده و ۱=(۷ و ۲) پس طبق قضیهٔ فرما داریم:

$$٢^{٦} \overset{٧}{\equiv} ١ \Rightarrow (٢^{٦})^{n} \overset{٧}{\equiv} ١^{n} \Rightarrow ٢^{٦n} \overset{٧}{\equiv} ١ \Rightarrow ٢^{٦n} - ١ \overset{٧}{\equiv} ٠$$

۷ـ به روش استقراء ثابت کنید $A = ٢^{٢n} + ٦n - ١ \overset{٩}{\equiv} ٠$.

حل:

$p(١): ٢^{٢\times١} + ٦ \times ١ - ١ = ٩ \overset{٩}{\equiv} ٠ \Rightarrow p(١) \equiv T$ (گام اول)

فرض استقراء $p(k) \equiv T \to ٢^{٢k} + ٦k - ١ \overset{٩}{\equiv} ٠$ (گام دوم)

حکم استقراء $p(k+١): ٢^{٢k+٢} + ٦k + \underbrace{٦ - ١}_{٥} \overset{٩}{\equiv} ٠$ (گام سوّم)

طرفین فرض استقراء را در $٢^{٢}$ ضرب می‌کنیم

$$\Rightarrow ٢^{٢k+٢} + ٢٤k - ٤ \overset{٩}{\equiv} ٠$$

$$\Rightarrow ٢^{٢k+٢} + ٦k + ١٨k + ٥ - ٩ \overset{٩}{\equiv} ٠$$

$$\Rightarrow ٢^{٢k+٢} + ٦k + ٥ \overset{٩}{\equiv} ٩ - ١٨k$$

و چون: $٩ - ١٨k = ٩(١ - ٢k) \overset{٩}{\equiv} ٠$

$$\Rightarrow ٢^{٢k+٢} + ٦k + ٥ \overset{٩}{\equiv} ٠$$

۸ـ ثابت کنید اگر n مضرب ۳ نباشد عدد $A = ١٧^{٢n} + ١٧^{n} + ١$ بر ۳۰۷ بخش‌پذیر است. $(١٧^{٢n} + ١٧^{n} + ١ \overset{٣٠٧}{\equiv} ٠)$

حل: اگر n مضرب ۳ نباشد دو حالت ممکن است:

I) $n = ٣k + ١$ که در این حالت داریم:

$$A = ١٧^{٦k+٢} + ١٧^{٣k+١} + ١ = (١٧^{٣})^{٢k} \times ١٧^{٢} + (١٧^{٣})^{k} \times ١٧ + ١$$

از طرفی چون $١٧^{٣} \overset{٣٠٧}{\equiv} ١$ و $١٧^{٢} \overset{٣٠٧}{\equiv} -١٨$ پس،

$$A \overset{٣٠٧}{\equiv} (١)^{٢k}(-١٨) + (١)^{k} \times ١٧ + ١ = -١٨ + ١٧ + ١ = ٠$$

II) اگر $n = ٣k + ٢$ در این‌حالت داریم:

$$A = ١٧^{٦k+٤} + ١٧^{٣k+٢} + ١ = (١٧^{٣})^{٢k} \times ١٧^{٣} \times ١٧ + (١٧^{٣})^{k} \times ١٧^{٢} + ١ \Rightarrow A \overset{٣٠٧}{\equiv} (١)^{٢k} \times ١ \times ١٧ + (١)^{k} \times (-١٨) + ١ = ١٧ - ١٨ + ١ = ٠$$

۹ـ رقم یکان عدد $A = ٤^{٤k+٢} + ١٧^{٨k+٣}$ را بیابید.

حل: چون توان عدد ۴ زوج است طبق مطالب گفته شده همواره عدد $٤^{٤k+٢}$ به ازای هر $k \in \mathbb{N}$ به ۶ ختم می‌شود و از طرفی چون توان ۱۷ را می‌توان به شکل $٤k + ٣$ نوشت پس رقم یکان $١٧^{٨k+٣}$ برابر است با رقم یکان $٧^{٣}$ که ۳ است (باقیماندهٔ تقسیم $٨k + ٣$ بر ۴، ۳ است) بنابراین:

$$A = ٤^{٤k+٢} + ١٧^{٨k+٣} \overset{١٠}{\equiv} ٦ + ٣ = ٩$$

یعنی همواره عدد A به ۹ ختم می‌شود.

۱۰ـ ثابت کنید عدد $A = ٥^{٢n+١} + ٢^{n+٤} + ٢^{n+١}$ بر ۲۳ بخش‌پذیر است.

$$٥^{٢} \overset{٢٣}{\equiv} ٢ \Rightarrow (٥^{٢})^{n} \overset{٢٣}{\equiv} ٢^{n} \Rightarrow ٥^{٢n+١} \overset{٢٣}{\equiv} ٢^{n} \times ٥$$

$$\Rightarrow A \overset{٢٣}{\equiv} ٢^{n} \times ٥ + ٢^{n} \times ١٦ + ٢^{n} \times ١ = ٢٣ \times ٢^{n} \overset{٢٣}{\equiv} ٠$$

قضیه. رابطهٔ هم‌نهشتی به سنج m روی Z یک رابطهٔ هم‌ارزی است،

$$١) \forall a, b \in Z ; a \overset{m}{\equiv} a \ (\text{زیرا} \to m | \underbrace{a - a}_{٠})$$

$$٢) \forall a, b \in Z ; a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow b \overset{m}{\equiv} a \ (\text{زیرا}\ m | a-b \Leftrightarrow m | b-a)$$

مثلاً: می‌خواهیم ببینیم که هم‌نهشتی $x \overset{٢٣}{\equiv} ٤٨$ برای چه xای می‌تواند تقسیم $٢^{١٣٧٤}$ بر kکدام است؟ (در صورتی‌که بدانیم $k > ١٩$ باشد.)

$$٢^{١٣٧٠} \times ٢^{٤} \overset{k}{\equiv} ١ \times ٢^{٤} \Rightarrow ٢^{١٣٧٤} \overset{k}{\equiv} ١٦$$

و چون $k > ١٩$ پس $k > ١٦$ بنابراین باقی ماندهٔ تقسیم ۱۶ بر k برابر با ۱۶ است که همان‌باقی‌مانده تقسیم $٢^{١٣٧٤}$ بر k است.

$$\left.\begin{array}{l} ٣٨٧ \overset{٥}{\equiv} ٢ \Rightarrow ٣٨٧^{٣} \overset{٥}{\equiv} ٢^{٣} \overset{٥}{\equiv} ٣ \\ ٣٧٩ \overset{٥}{\equiv} ٤ \Rightarrow ٣٧٩^{٣} \overset{٥}{\equiv} ٤^{٣} \overset{٥}{\equiv} ٤ \end{array}\right\} \Rightarrow ٣٨٧^{٣} - ٣٧٩^{٣} \overset{٥}{\equiv} ٣ - ٤ \overset{٥}{\equiv} ٤$$

$$\left.\begin{array}{l} ٢^{٣} = ٨ \overset{٧}{\equiv} ١ \Rightarrow ٢^{٣n} \overset{٧}{\equiv} ١ \Rightarrow ٢^{٣n+١} \overset{٧}{\equiv} ٢ \\ ١٣ \overset{٧}{\equiv} -١ \Rightarrow ١٣^{٢n} \overset{٧}{\equiv} ١ \Rightarrow ١٣^{٢n+١} \overset{٧}{\equiv} ١٣ \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow ٢^{٣n+١} + ١٣^{٢n+١} \overset{٧}{\equiv} ١٥ \overset{٧}{\equiv} ١$$

$$((19)^2)^{70} = (19)^{140} \overset{10}{\equiv} 9^{140} \Rightarrow \underbrace{9^{140}}_{\text{۱۴۰ زوج است}} \overset{10}{\equiv} 1$$

تست. باقی‌مانده تقسیم 65^{40} بر عدد ۹ کدام است؟
(کنکور سراسری)

$$\left.\begin{array}{l} 68 \overset{m}{\equiv} r \\ 145 \overset{m}{\equiv} r \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{با توجه به فرض و قضیه اساسی}}$$

$$\Rightarrow 145 - 68 \overset{m}{\equiv} 0 \Rightarrow 77 \overset{m}{\equiv} 0$$

$$\left.\begin{array}{l} a \overset{37}{\equiv} 15 \\ b \overset{37}{\equiv} 29 \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{با توجه به قضیه اساسی}} a - b \overset{37}{\equiv} -14 \overset{37}{\equiv} 23$$

چون همهٔ جملات به جز جملهٔ اول و آخر عامل ab دارند پس:

$B = \{ac_1 + b, ac_2 + b, ..., ac_m + b\}$ نیز یک د.ک.م. به سنج m است.

$$\left.\begin{array}{l} (1 \text{ و } 13) = 1 \Rightarrow 1^{12} \overset{13}{\underset{\text{فرما}}{\equiv}} 1 \\ (2 \text{ و } 13) = 1 \Rightarrow 2^{12} \overset{13}{\underset{\text{فرما}}{\equiv}} 1 \\ \vdots \\ (12 \text{ و } 13) = 1 \Rightarrow 12^{12} \overset{13}{\underset{\text{فرما}}{\equiv}} 1 \end{array}\right\} \Rightarrow A \overset{12}{\equiv} \overbrace{1 + 1 + ... + 1}^{\text{۱۲ بار}} = 12$$

شرط جواب: $(15 + b, b) \mid 20 \xRightarrow{b=5} (5 \text{ و } 20) = 5 \mid 20$

تست. جواب کلی معادلهٔ $5x \overset{6}{\equiv} 2$ کدام است؟ $(k \in Z)$

$$2^6 \overset{7}{\equiv} 1 \Rightarrow (2^6)^n \overset{7}{\equiv} 1^n \Rightarrow 2^{6n} \overset{7}{\equiv} 1 \Rightarrow 2^{6n} - 1 \overset{7}{\equiv} 0$$

حکم استقراء (گام سوم) $p(k+1): 2^{2k+2} + 6k + \frac{6-1}{5} \equiv 0$

ادب ریاضی

عملاً، ریشه‌های تمام ریاضیاتی که با آن آشنایید به طریقی به طبیعت مربوط می‌شود. حساب و جبر به‌علت احتیاج بشر به شمارش تکامل یافته‌اند، مدیریت مالی و دیگر عملیات سادهٔ زندگی روزمره، هندسه و مثلثات از مسائل اندازه‌گیری زمین پیشرفت کرده‌اند، و مساحی، و نجوم، و حساب جامع و فاضل برای کمک به حل مسائل معینی در فیزیک اختراع شده‌اند. در سالهای اخیر اشکال جدیدی از ریاضیات برای کمک به: «از عهدهٔ مسائلی در علوم اجتماعی، تجاری، زیست‌شناسی، و جنگی برآمدن» ، اختراع شدند و مطمئناً از سایر مطالب ناشی از کوششهای بشر، موضوعات ریاضی جدیدی به‌وجود خواهند آمد. در این صورت تمام این سرچشمه‌های مفاهیم ریاضی را روی هم می‌ریزیم و آنها را طبیعت می‌خوانیم.

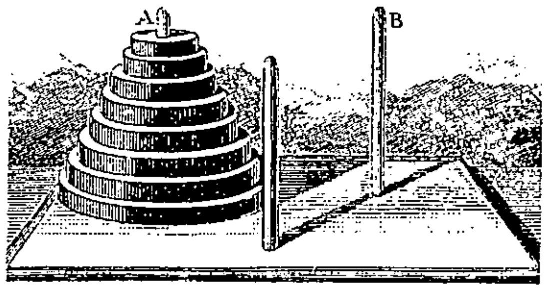
اصول ریاضی: غلامرضا یاسی‌پور

طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روشهای مقدماتی (۱۲)

مسائل بازگشتی

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور — از: Concrete Mathematics

در این مقاله به بررسی مسألهٔ برج هانوی[1] که توسط ریاضی‌دان فرانسوی **ادوارد لوکاس**[2] درسال ۱۸۸۳ ، ابداع شده‌است، می‌پردازیم. در مسألهٔ مورد بحث برجی با هشت قرص[3] نامساوی داریم که آغاز کار به‌ترتیبی نزولی بر یکی از سه میلهٔ قائم واقع برصفحه‌ای، مطابق شکل زیر، برهم قرار گرفته‌اند:



هدفمان انتقال کل برج به یکی از دو میلهٔ دیگر است، و چنان که هربار تنها یک قرص را حرکت دهیم و هیچ‌گاه قرص بزرگتری را روی قرص کوچکتری (البته بااستفاده از هر دومیلهٔ باقی‌مانده) نگذاریم.

لوکاس سرگرمیش را با افسانه‌ای تخیلی درمورد برج بس مرتفع‌تر براهما[4]، که بنابه‌فرض، ۶۴ صفحهٔ مدور طلای خالص متکی برسه میلهٔ الماسین داشت، بیاراست. و چنین گفت که خدای متعال، در ازل، صفحه‌های طلایی مزبور را بر میلهٔ اوّل مکان داد و سپس امر فرمود که طبقه‌ای از کاهنان، آنها را، طبق قواعد فوق، به‌میله سوم منتقل کنند. کاهنان شب و روز به کارشان مشغلند و چون آن را پایان دهند، برج فرو می‌ریزد و دنیا به آخر می‌رسد.

در وهلهٔ اوّل به نظر نمی‌رسد که معمای موردبحث دارای جواب باشد. اما اندکی تفکر (یا درصورتی که مسأله را قبلاً ملاحظه کرده‌باشیم) متقاعدمان می‌کند که پاسخ دارد. و اکنون این سؤال مطرح می‌شود که: بهترین کاری که در این مورد می‌توان کرد کدام است؟ و به‌عبارت دیگر، برای انجام این کار، چند حرکت لازم و کافی است؟

بهترین طریق پرداختن به مسأله‌ای از این سنخ، اندکی تعمیم‌دادن به آن است. برج براهما ۶۴ قرص دارد و برج هانوی ۸ ؛ دراین‌صورت اگر n قرص برجا باشد چه رخ می‌دهد؟

یکی از مزایای تعمیم مذکور این است که در این صورت می‌توانیم مقیاس مسأله را حتی نازلتر کنیم. در واقع، در این کتاب مکرراً ملاحظه خواهیم کرد که نافعتر آن است که ابتدا **به‌حالات مختصرتر بپردازیم**. در این صورت ملاحظهٔ چگونگی انتقال برجی که تنها شامل یک یا دوقرص باشد آسان است، و مبلغ قلیلی تجربه چگونگی نقل برجی با سه قرص را نیز نشان می‌دهد.

در وهله دوم در حل مسألهٔ مورد بحث، معرفی نمادی مناسب است، چه گفته‌اند که: **نامش نه و دامش نه**[5]. در این صورت فرض می‌کنیم که T_n کمترین تعداد حرکاتی باشد که تحت قواعد لوکاس n قرص از یک میله را به میلهٔ دیگر انتقال می‌دهد. به این ترتیب T_1 واضحاً است، و T_2 برابر ۳.

می‌توان پاره معلوم دیگری را نیز، با بررسی کوچکترین جمیع حالات، بدون صرف کمترین هزینه‌ای به‌دست آورد: واضح است که $T_0 = 0$. زیرا در انتقال برجی از $n = 0$ قرص، به‌هیچ حرکتی نیاز نیست!

ریاضی‌دانهای زیرک از زیرک‌اندیشی شرم ندارند، زیرا درک نمونه‌های عمومی چون ابتداییترین حالات (حتی زمانی که جزیی‌اند) دانسته شوند، آسانتر است.

اکنون منظرمان را تغییر داده جهد در درشت اندیشی می‌کنیم؛ دراین‌صورت چگونه می‌توان برج عظیمی را انتقال داد؟ آزمون با سه قرص نشان‌می‌دهد که طرح برنده، انتقال دوقرص رویین به‌میلهٔ وسط، حرکت سومین، و بعد آوردن آن دو دیگر برآن است. این طرح سررشتهٔ انتقال n قرص درحالت کلی‌را به دست می‌دهد: ابتدا $n-1$ قرص کوچکتر را به‌میله‌ای دیگر نقل می‌کنیم (که به T_{n-1} حرکت محتاج است.)، سپس بزرگترین آنها را حرکت می‌دهیم (که یک حرکت لازم دارد)، و سرانجام $n-1$ قرص کوچکتر را بر این بزرگترین برمی‌گردانیم (که به T_{n-1} حرکت نیازمند است). به‌این ترتیب، می‌توانیم n قرص را (به‌ازای $n>0$)* با حداکثر $2T_{n-1}+1$ حرکت انتقال دهیم:

$$T_n \le 2T_{n-1}+1 \text{ ،} \quad \text{به‌ازای} \quad n>0$$

فرمول فوق علامت «$\le$» را به‌این علت به‌جای «$=$» به‌کار می‌برد که طرز ساخت‌مان تنهاکفایت $2T_{n-1}+1$ حرکت را ثابت می‌کند؛ این‌که $2T_{n-1}+1$ حرکت هم لازم است، را هنوز نشان نداده‌ایم. در این مرحله ممکن است که شخص شاطری توان اندیشیدن به راهی میان بر را داشته باشد.

اما طریق سریعتری هست؟ عملاً خیر. چه بالاخره در مرحله‌ای باید قرص بزرگترین را حرکت دهیم، و چون چنین کنیم، باید $n-1$ قرص کوچکتر برمیلهٔ واحدی باشند، و قرار دادن آنها در آن، حداقل T_{n-1} حرکت گرفته است. ممکن است، اگر خیلی زیرک نباشیم، بزرگترین قرص را بیش از یکبار حرکت دهیم. اما پس از آن‌که بزرگترین قرص را برای آخرین بار حرکت دادیم، باید $n-1$ قرص را (که باید باردیگر برمیلهٔ واحدی باشند) به‌جای اوّلینشان برقرص بزرگترین منتقل کنیم؛ و این کار نیز به T_{n-1} حرکت نیاز دارد. درنتیجه،

$$T_n \ge 2T_{n-1}+1 \text{ ،} \quad \text{به‌ازای} \quad n>0$$

این دو نامساوی، همراه باجواب کم مایهٔ به‌ازای $n=0$ ،

$$T_0 = 0 \qquad (1.1)$$

$$T_n = 2T_{n-1}+1 \qquad \text{به‌ازای } n>0$$

را به دست می‌دهند. (توجه‌داشته باشید که فرمولهای فوق با مقادیر معلوم $T_1=1$ و $T_2=3$ سرسازگاری دارند. به‌این ترتیب، تجربه‌مان با حالات خرد نه تنها به کشف فرمولی عام مددمان رساند، بلکه طریقی آسان، در بررسی این‌که مبادا خطای ابلهانه‌ای انجام داده‌باشیم، فراهم می‌کند. بررسیهای چنین، بخصوص هنگامی که در فصول بعد به طرحهای پیچیده‌تر می‌رسیم، ارجمند خواهند بود.)

مجموعه‌ای از نامساویهایی چون (۱.۱) را مجموعه‌ای بازگشتی[6] می‌نامیم. (به نسبت بازگشتی نیز معروف است). نسبت مذکور مقداری مرزی و معادله‌ای در مورد مقدار عمومی برحسب مقادیر قبلی به دست می‌دهد. گه‌گاه تنها به معادلهٔ عمومی مذکور به‌عنوان نسبت بازگشتی اشاره می‌کنیم، گرچه این موضوع از لحاظ فنی برای کامل شدن نیازمند مرزی است.

بازگشتی مزبور دستمان را باز می‌گذارد که T_n را به‌ازای هرمقدار n ی که مایل باشیم حساب کنیم. اما هیچ کس در واقع میل ندارد که هنگامی که n بزرگ است، از فرمولی بازگشتی محاسبه کند. چرا که وقت زیادی می‌گیرد. بازگشتی مذکور تنها اطلاعات «موضعی» غیرمستقیم به‌دست می‌دهد. پاسخی به بازگشتی موصوف دلخوشترمان می‌کند. به‌عبارت دیگر «صورت محدود» و ظریف و شسته رفته‌ای برای T_n می‌طلبیم که بگذارد آن را، حتی در مورد n های بزرگ، بسرعت محاسبه کنیم. باصورت محدود می‌توان دریافت که T_n واقعاً چیست.

اما چگونه یک فرمول بازگشتی را حل کنیم؟ یک طریق، حدس جواب صحیح و سپس اثبات صحت حدس است. و برای حدس جواب، (بازهم) بیشترین امیدمان به ملاحظهٔ حالات خرد است. بنابراین، به‌طور متوالی به محاسبهٔ موارد زیر می‌پردازیم:

$T_3 = 2.3+1$ ؛ $T_4 = 2.7+1 = 15$ ؛ $T_5 = 2.15+1 = 31$ ؛
$T_6 = 2.31+1 = 63$

ها! به‌نظر می‌رسد که جواب مطلوب

$$T_n = 2^n - 1 \qquad \text{به ازای } n \ge 0 \qquad (1.2)$$

باشد، این جواب، حداقل، به ازای $n \le 6$ به‌کار آید.

استقرای ریاضی[7] طریق عمومی اثبات این است که گزاره‌ای در مورد عدد صحیح n ی، به‌ازای جمیع n های $\ge n_0$ راست است.

دراین مورد، ابتدا گزارهٔ موردنظر را، هنگامی که n کوچکترین مقدار خود، n_0 ، را داراست، اثبات می‌کنیم؛ این به مرحلهٔ مبنائی[8] موسوم است.

استقرای ریاضی روشی عمومی برای اثبات این مطلب است که گزاره‌ای دربارهٔ عدد صحیح n ، به‌ازای جمیع مقادیر $n \ge n_0$ ، راست است. در این‌مورد، ابتدا گزارهٔ مورد نظر را، هنگامی که n کوچکترین مقدار خود، یعنی n_0 ، را داراست. اثبات می‌کنیم؛ این مرحله مبنا[9] نامیده می‌شود. بعد، گزاره را به‌ازای $n > n_0$ ، بافرض این‌که به‌ازای جمیع مقادیر بین n_0 و $n-1$ ، از جمله خود $n-1$ ، ثابت شده، اثبات می‌کنیم؛ این مرحله به استقرا[10] موسوم است. چنین

اثباتی بی‌شمار نتیجه را در ازای مقدار محدودی کار به‌دست می‌دهد.

بازگشتها مطلوب استقرای ریاضی درنظر گرفته شده‌اند. فی‌المثل، درحالت موردبحث، (۲ . ۱) به آسانی از (۱ . ۱) نتیجه می‌شود: مرحلهٔ مبنایی ساده است، زیرا $0 = 1 - 2^0$. و مرحله استقرایی به‌ازای $n > 0$، درصورتی‌که فرض‌کنیم‌که (۲ . ۱)، چون به‌جای n، $n - 1$ قرار داده شود، برقرار است، به‌دست می‌آید:

$$T_n = 2T_{n-1} + 1 = 2(2^{n-1} - 1) + 1 = 2^n - 1$$

در نتیجه (۲ . ۱) به‌ازای n نیز برقرار است.

البته کار راهبان داستانمان به پایان نرسیده، و آنها همچنان وظیفه مدارانه به‌کار حرکت دادن قرصها مشغول‌اند، و تا آن‌جاکه آشکار است برای زمانی دراز نیز چنین خواهند کرد، زیرا به‌ازای $n = 64$، $2^{64} - 1$ حرکت (درحدود ۱۸ کوئین تی‌لیون[11]) موجود است. و حتی با نرخ غیرممکن یک حرکت در میکرو ثانیه، برای برج براهما به بیش از ۵۰۰۰ قرن نیاز خواهند داشت. معمای اوّل لوکاس اندکی عملیتر است. چه به $2^8 - 1 = 255$ حرکت، که با دستی چابک در حدود چهار دقیقه وقت می‌گیرد، نیاز دارد.

مسألهٔ بازگشتی برج هانوی، نمونه‌ای از موارد بسیاری است که با هر نوع کاربردی رخ می‌نماید. در پیداکردن عبارتی بسته ـ صورت[12] در مورد کمیت مورد توجهی چون T_n از سه مرحله می‌گذریم:

۱ ـ به حالات ساده می‌نگریم. این عمل بینشی در مورد مسأله می‌دهد و در مراحل ۲ و ۳ به کمکمان می‌آید.

۲ ـ برای کمیت موردنظر عبارتی ریاضی پیدا و اثبات می‌کنیم. در مورد مسألهٔ برج‌هانوی، این بازگشتی (۱ . ۱) است که، با مفروض بودن زمینهٔ کار، محاسبهٔ T_n را به ازای هر n روا می‌دارد.

۳ ـ برای عبارت ریاضیمان، صورتی بسته پیدا و اثبات می‌کنیم. این صورت در مورد مسألهٔ برج هانوی، جواب بازگشتی (۲ . ۱) است.

مرحلهٔ سوم همان است که در سراسر کتاب برآن متمرکز می‌شویم. در واقع، اغلب مراحل ۱ و ۲ را حذف می‌کنیم، زیرا عبارت ریاضی را در آغاز کار می‌دهند. اما با این حال به مسائلی فرعی برمی‌خوریم که راه حلشان از هر سه مرحلهٔ مذکور می‌گذرد.

تحلیلمان از مسألهٔ برج هانوی گرچه به پاسخ درست منجر شد، به «پروازی استقرایی[13]» نیاز داشت؛ چه در مورد پاسخ آن به حدسی سعد اعتماد کردیم. یکی از اهداف اصلی مقالهٔ حاضر توضیح این مطلب است که چه‌گونه شخص می‌تواند بی‌آن‌که بصیر باشد بازگشتیهارا حل‌کند. به‌عنوان‌مثال، ملاحظه‌می‌کنیم که‌بازگشتی (۱ . ۱) را می‌توان با افزودن ۱ به‌طرفین معادلات آن ساده کرد:

$$T_0 + 1 = 1$$

$$T_n + 1 = 2T_{n-1} + 2 \qquad \text{به‌ازای } n > 0$$

اکنون اگر فرض می‌کنیم $U_n = T_n + 1$، داریم:

$$U_0 = 1\ ;$$

$$U_n = 2U_{n-1} \qquad \text{به‌ازای } n > 0 \qquad (۱ . ۳)$$

دراین صورت کشف این مطلب که جواب این بازگشتی، درست $U_n = 2^n$ است، و درنتیجه: $T_n = 2^n - 1$، قریحهٔ بسیار نمی‌خواهد. حتی یک کامپیوتر هم می‌تواند چنین کند.

یادداشتها:

1. tower of Hanoi
2. Edouard lucas
3. disk

۳. تعبیر را از سعدی گرفته‌ایم: قرص خورشید در سیاهی شد ـ یونس‌اندر دهان ماهی شد.

4. Brahma
5. name and conquer

* سیاق کلام نشان می‌دهد که n متعلق به مجموعهٔ اعداد طبیعی است، بنابراین آوردن این شرط لازم نیست، اما اگر بخواهیم محکم کاری کنیم و این شرط را بیاوریم دیگر تنها آوردن آن کافی نیست و برای کفایت باید شرط $n \in N$ را نیز به آن بیافزاییم.

6. recurrence
7. mathematical induction
8. basis
9. basis step
10. induction
11. quintillon
12. closed - form expression
13. inductive leap

حل یک مسئله جالب هندسه به کمک تابع همنگار (هموگرافیک)

● دکتر احمد شرف‌الدین

خلاصه. در این مقاله دربارهٔ تابع همنگار (هموگرافیک) توضیحاتی بیان می‌کنیم. سپس به کمک تابع همنگار یک مسئله بسیار جالب هندسه را حل می‌کنیم. در پایان مقاله حالتهای خاص از مسئله را مطرح می‌کنیم.

۱. تابع همنگار

۱.۱ تابع

$$y=\frac{ax+b}{cx+d} \qquad (۱)$$

که در آن a ، b ، c ، d اعداد حقیقی‌اند تابع همنگار نامیده می‌شود. دامنه تغییرات x عبارت است از $R-\{\frac{-d}{c}\}$ و دامنه تغییرات y عبارت است از $R-\{\frac{a}{c}\}$.

۱ . ۲. اگر یک رابطه جبری بین دو متغیر حقیقی x و y برقرار باشد بطوری که به‌ازای هر مقدار x یک و فقط یک مقدار برای y حاصل شود و به‌ازای هر مقدار y یک و فقط یک مقدار برای x حاصل شود در این‌صورت آن رابطه به‌صورت زیر است (دقت به این نکته ضروری است که x و y نباید هیچ مقدار مختلطی اختیار کنند یا به عبارت دیگر رابطهٔ جبری بین x و y نباید به ازای مقادیر غیرحقیقی برقرار باشد):

$$Axy+Bx+Cy+D=0 \qquad (۲)$$

رابطه (۲) یک رابطه همنگار به صورت (۱) می‌باشد.
باید توجه داشت که در رابطه (۲)، دو متغیر x و y از درجه اول‌اند.
برای توضیح بیشتر مثالهایی ذکر می‌کنیم.

مثال ۱. تابع $y=\sqrt{x}$ یک تابع جبری یک‌به‌یک است. اما در این تابع متغیر x نمی‌تواند هر مقدار حقیقی را اختیار کند (x فقط اعداد نامنفی اختیار می‌کند) و همین‌طور y نمی‌تواند مقدار منفی اختیار کند.

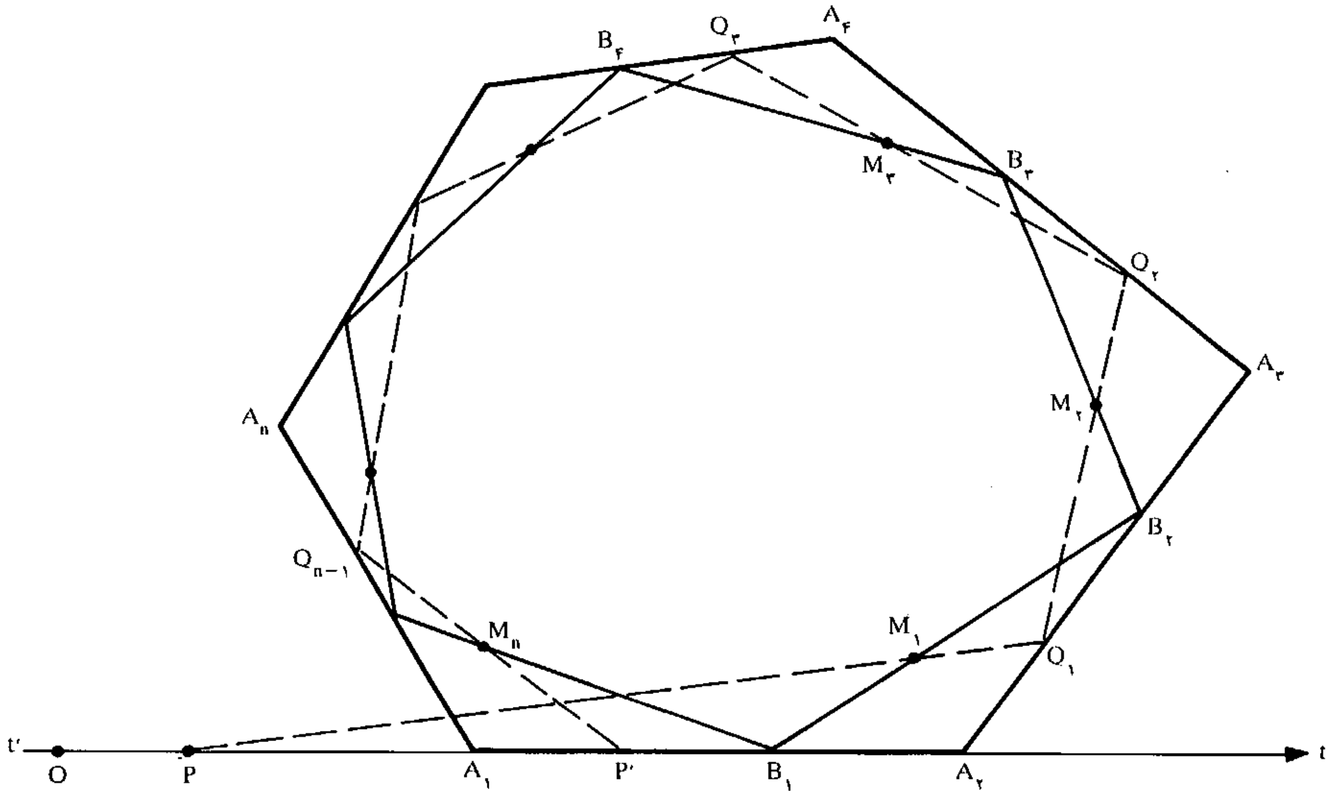
مثال ۲. تابع $y=x^3$ یک تابع جبری یک‌به‌یک است. اما به‌ازای هر مقدار y (بجز صفر) برای x سه مقدار متمایز حاصل می‌شود که یکی حقیقی و دو دیگر مختلط است. مثلاً اگر $y=1$ باشد برای x سه مقدار $x_1=1$ و $x_2=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ و $x_3=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ حاصل می‌شود. (این سه مقدار جوابهای معادله $x^3-1=0$ اند.)

تبصره. توجه داشته باشید که در شماره (۲.۱) گفته‌ایم دو متغیر x و y حقیقی‌اند بطوری که به‌ازای هر مقدار x . . . و به‌ازای هر مقدار y . . .

۲. یک مسئله جالب هندسه

در صفحهٔ π، n ضلعی $A_1A_2\ldots A_n$ و n نقطه M_1، M_2، ...، و M_n را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم یک n ضلعی $B_1B_2\ldots B_n$ در n ضلعی $A_1A_2\ldots A_n$ محاط کنیم بطوری که رأسهای B_1، B_2، . . . و B_n به ترتیب بر خطهای A_1A_2، A_2A_3، . . . و A_nA_1 قرار گیرند.

حل. محور $t't$ را منطبق بر خط A_1A_2 اختیار می‌کنیم و مبدأ آن را Q می‌نامیم. نقطهٔ دلخواه P را روی محور $t't$ در نظر می‌گیریم. خط راست Pm_1 را رسم می‌کنیم و نقطه برخورد آن را با خط A_2A_3 نقطهٔ Q_1 می‌نامیم. سپس خط راست Q_1M_2 را رسم می‌کنیم و نقطه



برخورد آن را با خط A_3A_4 نقطه Q_2 می‌نامیم. بعد خط راست Q_2M_3 را رسم می‌کنیم و نقطه برخورد آن را با خط A_4A_5 نقطه Q_3 می‌نامیم و این عمل ترسیمات متوالی را ادامه می‌دهیم تا به نقطه Q_{n-1} واقع بر خط A_nA_1 برسیم. اکنون خط راست $Q_{n-1}M_n$ را رسم می‌کنیم و نقطه برخورد آن را با خط A_1A_2 نقطه P' می‌نامیم.
اکنون توجه خود را به دو نکته مذکور در زیر متمرکز می‌کنیم.

الف. اگر روی محور $t't$، نقطه P را در جایی انتخاب کنیم تا نقطه P' حاصل از ترسیمات متوالی بر نقطهٔ P منطبق شود آنگاه خط شکسته بسته $PQ_1Q_2 \ldots Q_{n-1}P'$ همان چند ضلعی محاطی مطلوب $B_1B_2 \ldots B_m$ می‌باشد.

ب. با اجرای ترسیمات متوالی مذکور، به‌ازای هر نقطه P از محور $t't$ یک و فقط یک نقطه P' از محور $t't$ حاصل می‌شود و برعکس به‌ازای هر نقطه P' از محور $t't$ با اجرای ترسیمات متوالی مذکور در جهت عکس، یک و فقط یک نقطه P از محور $t't$ حاصل می‌شود. (منظور از اجرای ترسیمات در جهت عکس آن است که یک نقطهٔ دلخواه P' روی محور $t't$ اختیار می‌کنیم و سپس خط $P'M_n$ را رسم می‌کنیم و نقطه برخورد آن را با خط A_1A_n تعیین می‌کنیم و آن نقطه را Q_{n-1} می‌نامیم. سپس خط $Q_{n-1}M_{n-1}$ را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن را با خط A_nA_{n-1} نقطه Q_{n-2} می‌نامیم و ...)

حال قرار می‌دهیم:

$$\overline{oP} = x \qquad \text{و} \qquad \overline{oP'} = y$$

چون به‌ازای هر نقطه P از محور $t't$ یک و فقط یک نقطه P' از همان محور حاصل می‌شود و برعکس پس یک رابطه

$$f(x, y) = 0 \qquad (۳)$$

بین x و y وجود دارد که یک به یک است.

حال ثابت می‌کنیم که معادله (۳) یک معادله جبری است. برای این منظور یک دستگاه مختصات $xo'y$ در نظر می‌گیریم و ابتدا با معلوم بودن مختصات نقطه‌های P ، M_1 ، A_2 ، A_3 معادله‌های دو خط PM_1 و A_2A_3 را می‌نویسیم. دستگاه حاصل از معادله‌های این دو خط مختصات نقطه Q_1 را به‌دست‌می‌دهد. چون معادلات خطهای راست جبری‌اند و اعمالی که روی آنها انجام می‌گیرد تا مختصات نقطه برخورد آن دو خط به‌دست آید جبری‌اند پس Y_{Q_1} برحسب X_{Q_1} با یک عبارت جبری بیان می‌شود.

حال با معلوم بودن مختصات نقاط Q_1 ، M_2 ، A_3 ، A_4 معادله‌های دو خط Q_1M_2 و A_3A_4 را می‌نویسیم و به کمک معادلات این دو خط مختصات نقطه برخورد آنها یعنی نقطه Q_2 را حساب می‌کنیم. با بکارگیری همان استدلال قبل می‌گوییم که Y_{Q_2}

برحسب X_{Q_2} با یک عبارت جبری بیان می‌شود.

به همین ترتیب معادلات زوجهای خطوط مناسب را می‌نویسیم و معادلات حاصل را حل می‌کنیم تا سرانجام مختصات نقطه P' بدست آید. چون معادلات خطوط جبری‌اند و اعمالی که برای بدست آوردن مختصات نقاط برخورد آنها انجام می‌گیرد جبری‌اند پس y (یعنی اندازه جبری $\overline{oP}$ روی محور $t't$) برحسب x (یعنی اندازه جبری $\overline{oP'}$ روی محور $t't$) با یک عبارت جبری بیان می‌شود.

از مطالب اخیرالذکر نتیجه می‌شود که:

یک رابطه جبری بین x و y وجود دارد. (I)

از نکتهٔ مذکور در (ب) نتیجه می‌شود که:

رابطه بین x و y یک‌به‌یک است. (II)

اکنون توجه کنیم که نقطه P می‌تواند هر نقطه از محور $t't$ باشد بجز نقطه‌ای که برای آن نقطه، خط $M_n Q_{n-1}$ موازی محور $t't$ می‌شود. این نقطه را K و اندازه جبری $\overline{OK}$ را k می‌نامیم. همین‌طور نقطه P' می‌تواند هر نقطه از محور $t't$ باشد بجز نقطه‌ای که برای آن نقطه، خط M_1Q_1 موازی محور $t't$ می‌شود. این نقطه را L و اندازهٔ جبری $\overline{OL}$ را l می‌نامیم. از مطالب اخیرالذکر که نتیجه می‌شود که:

x و y می‌توانند به ترتیب هر عدد از دو مجموعه $R-\{k\}$ و $R-\{l\}$ را اختیار کنند و هیچ مقدار مختلطی اختیار نمی‌کنند. (III)

از سه نکته، (I)، (II)، (III) نتیجه می‌شود که رابطه بین x و y به‌صورت زیر است:

$$(۴) \quad Axy + Bx + Cy + D = 0$$

به عبارت دیگر y برحسب x یک تابع همنگار به‌صورت زیر است:

$$(۵) \quad y = \frac{px + q}{rx + s}$$

صورت و مخرج کسر (۵) را به یکی از چهار پارامتر p، q، r، یا s بخش می‌کنیم مثلاً بر s و قرار می‌دهیم $\frac{p}{s} = P$ و $\frac{q}{s} = Q$ و $\frac{r}{s} = R$ و معادله (۵) را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$(۶) \quad y = \frac{Px + Q}{Rx + 1}$$

اکنون به تعیین مقادیر P، Q و R می‌پردازیم. برای این منظور سه نقطهٔ دلخواه p، p_1، و p_2 را بطور دلخواه روی محور $t't$ اختیار می‌کنیم و نظیرهای این سه نقطه را که پس از اجرای ترسیمات یاد شده، روی محور $t't$ حاصل می‌شوند به‌ترتیب P'، P'_1، و P'_2 می‌نامیم. اندازه‌های جبری $\overline{oP}$، $\overline{oP'}$، $\overline{oP_1}$، $\overline{oP'_1}$، $\overline{oP_2}$، $\overline{oP'_2}$ را اندازه می‌گیریم. زوجهای مرتب $(\overline{oP}, \overline{oP'})$، $(\overline{oP_1}, \overline{oP'_1})$ و $(\overline{oP_2}, \overline{oP'_2})$ باید در معادله (۵) صدق کنند. در معادله (۵) به جای x و y به‌ترتیب مختص اول و مختص دوم هریک از سه زوج مرتب اخیرالذکر را می‌گذاریم. سه معادله حاصل می‌شود. از حل دستگاه حاصل از سه معادله مورد نظر مقایر P، Q، و R حاصل می‌شود. مقادیر حاصل را به ترتیب P_1، Q_1، و R_1 می‌نامیم. معادله (۶) به صورت زیر درمی‌آید:

$$(۷) \quad y = \frac{P_1x + Q_1}{R_1x + 1}$$

اکنون یادآور می‌شویم که هدف، آن بود که نقطه P را روی محور $t't$ جایی انتخاب کنیم تا نقطهٔ P' بر آن منطق شود. با توجه به نکته اخیرالذکر هنگامی که دو نقطه P و P' برهم قرار گیرند مقدار $\overline{oP} = u$ در معادله زیر صدق می‌کند:

$$(۸) \quad u = \frac{P_1u + Q_1}{R_1u + 1}$$

جوابهای این معادله مواضع نقطه مطلوب P را روی محور $t't$ مشخص می‌کنند. جوابهای این معادله مواضع نقطهٔ B_1 را روی محور $t't$ مشخص می‌کنند.

تبصره. می‌توان با معلوم بودن سه نقطه P، P_1، و P_2 و سه نقطه نظیر آنها یعنی P'، P'_1، و P'_2 موضع نقطهٔ B_1 را با ترسیم هندسی مشخص کرد (یعنی بدون نوشتن سه معادله برای تعیین P_1، Q_1، و R_1).

تبصره. مسئله‌مذکور در شماره (۲) را می‌توان به‌صورت کلیتر زیر مطرح کرد.

در صفحهٔ π، n خط راست d_1، d_2، ...، و d_n و n نقطه M_1، M_2، ...، و M_n را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم یک n ضلعی $B_1B_2 \dots B_n$ رسم کنیم. بطوری که رأسهای B_1، B_2، ...، و B_n به ترتیب بر خطهای d_1، d_2، ...، و d_n قرار گیرند.

چون در مسئله اخیرالذکر بخشی از مجموعه خطوط $\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ می‌توانند موازی و یا متقارب باشند مسئله کلیتر می‌شود.

بـــردارهــا

(قسمت سوم)

سیدمحمدرضا هاشمی موسوی

➤ این قسمت را با حل چند مسأله آغاز می‌کنیم:

۱ـ ثابت کنید که اندازهٔ زاویه محاطی مقابل به قطر هر دایره برابر با $\frac{\pi}{۲}$ است.

حل: نقطهٔ دلخواه M را روی پیرامون دایره به مرکز o و به قطر AB در نظر می‌گیریم، داریم:

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{Mo} + \overrightarrow{oA} \qquad (۱)$$

$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{Mo} + \overrightarrow{oB} \qquad (۲)$$

از ضرب روابط (۱) و (۲)، نتیجه می‌شود:

$$\overrightarrow{MA} \,.\, \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{Mo} + \overrightarrow{oA})(\overrightarrow{Mo} + \overrightarrow{oB})$$

$$= \overrightarrow{Mo}^{۲} + (\overrightarrow{oA} + \overrightarrow{oB})\, \overrightarrow{Mo} + \overrightarrow{oA} \,.\, \overrightarrow{oB}$$

تساویهای $|\overrightarrow{oM}| = |\overrightarrow{oA}| = |\overrightarrow{oB}|$ و $\overrightarrow{oA} = -\overrightarrow{oB}$ بدیهی است. بنابراین داریم:

$$\overrightarrow{MA} \,.\, \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{Mo}^{۲} + (-\overrightarrow{oB} + \overrightarrow{oB})\, \overrightarrow{Mo} - \overrightarrow{oB} \,.\, \overrightarrow{oB}$$

$$= \overrightarrow{Mo}^{۲} - \overrightarrow{oB}^{۲} = \overrightarrow{Mo}^{۲} - \overrightarrow{Mo}^{۲} = ۰$$

در نتیجه: $\widehat{AMB} = \frac{\pi}{۲}$

۲ـ در متوازی الاضلاع ABCD از رأس C عمودهای CE و CF را به ترتیب بر قطر BD و ضلع AB وارد می‌کنیم، ثابت کنید:

$$\overrightarrow{BE} \,.\, \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BF} \,.\, \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}^{۲}$$

حل: داریم:

$$\overrightarrow{BE} \,.\, \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BD} \,.\, \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BD} \,.\, (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE})$$

$$= \overrightarrow{BD} \,.\, \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} \,.\, \overrightarrow{CE}$$

با توجه به فرض $\overrightarrow{CE} \perp \overrightarrow{BD}$، داریم: $\overrightarrow{BD} \,.\, \overrightarrow{CE} = ۰$

همچنین $\overrightarrow{BD}$ قطر متوازی‌الاضلاع است، پس می‌توان نوشت:

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$$

پس:

$$\overrightarrow{BD} \,.\, \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BD} \,.\, \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) \,.\, \overrightarrow{BC}$$

$$= \overrightarrow{BC}^{۲} + \overrightarrow{BA} \,.\, \overrightarrow{BC}$$

از طرفی می‌توان نوشت: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FC}$

بنابراین داریم:

$$\overrightarrow{BD} \,.\, \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC}^{۲} + \overrightarrow{BA}\, (\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FC})$$

$$= \overrightarrow{BC}^{۲} + \overrightarrow{BA} \,.\, \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BA} \,.\, \overrightarrow{FC}$$

با توجه به فرض $CF \perp AB$، داریم:

$$\overrightarrow{BA} \,.\, \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{CF} = ۰$$

پس خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{BD} \,.\, \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC}^{۲} + \overrightarrow{BA} \,.\, \overrightarrow{BF}$$

و یا:

$$\overrightarrow{BE} \,.\, \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BF} \,.\, \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}^{۲}$$

۳ـ اگر نقطهٔ o در صفحهٔ سه بر ABC واقع باشد، ثابت کنید:

$$\overrightarrow{oA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{oB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{oC}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \qquad (1)$$

و از آن‌جا نتیجه بگیرید که در هر سه‌بر، سه ارتفاع از یک نقطه می‌گذرند.

حل: داریم:

$$\overrightarrow{oA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{oB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{oC}\cdot\overrightarrow{AB}$$

$$=\overrightarrow{oA}\cdot\overrightarrow{BC}+(\overrightarrow{oA}+\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{CA}+(\overrightarrow{oA}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}$$

$$=\overrightarrow{oA}\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$$

$$=\overrightarrow{oA}\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC})$$

$$=\overrightarrow{oA}\cdot\vec{o}+\overrightarrow{AB}\cdot\vec{o}=0+0=0$$

در این‌جا اگر نقطه o را بر نقطهٔ H محل برخورد ارتفاعات AA' و BB' منطبق بگیریم، خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{oA}\cdot\overrightarrow{BC}=0 \quad \text{و} \quad \overrightarrow{oB}\cdot\overrightarrow{CA}=0$$

و با توجه به تساوی (۱) داریم: $\overrightarrow{oC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

یعنی: oC بر AB عمود است و در نتیجه ارتفاع CC' نیز از نقطهٔ H می‌گذرد.

۴ـ ثابت کنید که در متوازی‌الاضلاع ABCD داریم:

$$\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CD}^2+\overrightarrow{DA}^2=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{BD}^2$$

حل: داریم:

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}$$

و یا:

$$\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{BD}^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$$

$$+\overrightarrow{CD}^2+\overrightarrow{DA}^2-2\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{DA}$$

چون: $\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{AB} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{BC}$

پس: $2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{DA}=0$

در نتیجه:

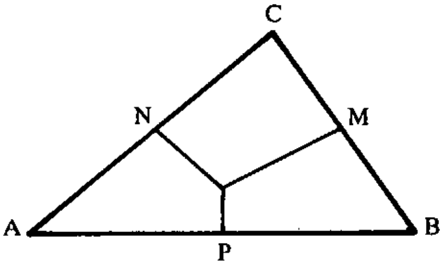
$$\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CD}^2+\overrightarrow{DA}^2=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{BC}^2$$

۵ـ ثابت کنید که عمود میانه‌های اضلاع یک سه‌بر از یک نقطه می‌گذرند.

حل: فرض می‌کنیم عمود میانه‌های دو ضلع AB و AC در نقطهٔ o برخورد کنند.

اگر این عمود میانه‌ها را oP و oN بنامیم، خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{oP}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \quad \text{و} \quad \overrightarrow{oN}\cdot\overrightarrow{AC}=0$$



همچنین: $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{NC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{AP}=\overrightarrow{PB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

در این‌جا اگر نقطهٔ میانهٔ ضلع BC را M بنامیم، کافی است ثابت کنیم که oM بر BC عمود است یعنی: $\overrightarrow{oM}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

اما داریم: $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$

و همچنین با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\overrightarrow{oM}=\overrightarrow{oN}+\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CM}$$

یا $\overrightarrow{oM}=\overrightarrow{oN}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=$

$$\overrightarrow{oN}+\frac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}}{2}=\overrightarrow{oN}+\frac{\overrightarrow{AB}}{2}$$

پس:

$$\overrightarrow{oM}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{oN}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})$$

$$=\overrightarrow{oN}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{oN}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$

و چون $\overrightarrow{oN}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ است، پس:

$$\overrightarrow{oM}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}\cdot(\overrightarrow{oN}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA})$$

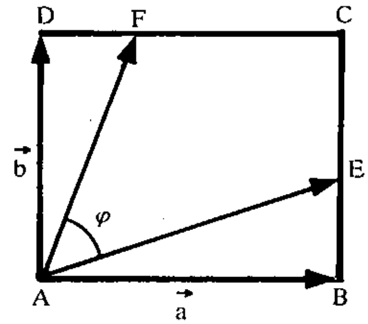
$$= \vec{BA}\cdot(\vec{oN}+\vec{AP}+\vec{NA})$$

$$= \vec{BA}\cdot(\vec{oN}+\vec{NA}+\vec{AP})$$

$$= \vec{BA}\cdot\vec{oP} = 0 \implies \boxed{\vec{oM}\cdot\vec{BC}=0}$$

یعنی oM بر $\vec{BC}$ عمود است. و در نتیجه oM عمود میانهٔ BC است.

۶ـ در مربع ABCD دو نقطهٔ E و F به ترتیب روی اضلاع BC و CD داده شده‌اند به طوری که $BE=\frac{1}{2}BC$ و $DF=\frac{1}{3}DC$. زاویهٔ $\widehat{EAF}$ را حساب کنید.



حل: برای محاسبهٔ زاویهٔ $\widehat{EAF}=\varphi$، کافی است حاصل‌ضرب اسکالر دو بردار $\vec{AE}$ و $\vec{AF}$ را حساب کنیم که از آن $\cos\varphi$ و در نتیجه φ به دست خواهد آمد. و با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\vec{AE}=\vec{AB}+\vec{BE}=\vec a+\frac12\vec b \quad \text{و} \quad \vec{AF}=\vec{AD}+\vec{DF}=\vec b+\frac13\vec a$$

و از آن‌جا داریم:

$$\vec{AE}\cdot\vec{AF}=(\vec a+\frac12\vec b)\cdot(\frac13\vec a+\vec b)$$

$$=\frac13\vec a^2+\vec a\cdot\vec b+\frac16\vec a\cdot\vec b+\frac12\vec b^2$$

و چون: $|\vec a|=|\vec b|$ و $\vec a\cdot\vec b=0$

پس خواهیم داشت:

$$\vec{AE}\cdot\vec{AF}=\frac13\vec a^2+\frac12\vec b^2=\frac13\vec a^2+\frac12\vec a^2=\frac56\vec a^2$$

از طرف دیگر داریم:

$$\vec{AE}\cdot\vec{AF}=|\vec{AE}|\cdot|\vec{AF}|\cos\varphi$$

و همچنین:

$$\vec{AE}=\vec a+\frac12\vec b\Rightarrow \vec{AE}^2=(\vec a+\frac12\vec b)^2=\vec a^2+\vec a\vec b+\frac14\vec b^2$$

$$\Longrightarrow \vec{AE}^2=\vec a^2+\frac14\vec b^2=\vec a^2+\frac14\vec a^2=\frac54\vec a^2$$

$$\Longrightarrow |\vec{AE}|=\frac{\sqrt5}{2}|\vec a|$$

$$\vec{AF}=\frac13\vec a+\vec b\Rightarrow\vec{AF}^2=(\frac13\vec a+\vec b)^2=\frac19\vec a^2+\frac23\vec a\cdot\vec b+\vec b^2$$

$$\Longrightarrow \vec{AF}^2=\frac19\vec a^2+\vec b^2=\frac19\vec a^2+\vec a^2=\frac{10}{9}\vec a^2$$

$$\Longrightarrow|\vec{AF}|=\frac{\sqrt{10}}{3}|\vec a|$$

پس:

$$\vec{AE}\cdot\vec{AF}=\frac{\sqrt5}{2}|\vec a|\times\frac{\sqrt{10}}{3}|\vec a|\cos\varphi=\frac56\vec a^2$$

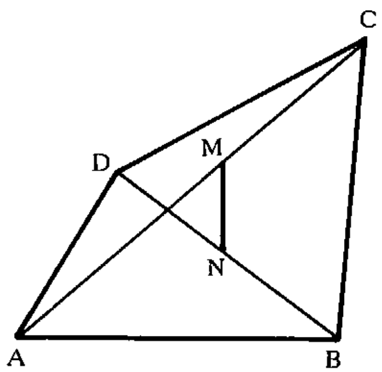
که از آن نتیجه می‌شود: $\sqrt{50}\cos\varphi=5$

و یا: $\cos\varphi=\frac{\sqrt2}{2}$

و بنابراین خواهیم داشت: $\varphi=\frac{\pi}{4}=45^\circ$

۷ـ اگر M و N نقاط میانهٔ قطرهای چهاربر (چپ یا راست) ABCD باشند، ثابت کنید:

$$\vec{AB}^2+\vec{BC}^2+\vec{CD}^2+\vec{DA}^2=\vec{AC}^2+\vec{BD}^2+4\vec{MN}^2$$



حل: چون M و N نقاط میانهٔ قطرهای AC و BD هستند، داریم:

$$\vec{AM}=\frac12\vec{AC} \quad \text{و} \quad \vec{BN}=\frac12\vec{BD}$$

پس:

$$\vec{MN}=\vec{MA}+\vec{AB}+\vec{BN}=\frac12\vec{CA}+\vec{AB}+\frac12\vec{BD}$$

با توجه به تساویهای: $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$

داریم:

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD})$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{BD}^2+4\overrightarrow{MN}^2 = \overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{BD}^2+4\left[\frac{1}{4}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD})^2\right]$$

$$= \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BD}^2 + \overrightarrow{CB}^2 + \overrightarrow{AD}^2 + 2\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AD}$$

$$= (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})^2 + (\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})^2 + \overrightarrow{CB}^2 + \overrightarrow{AD}^2 + 2\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AD}$$

$$= \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CD}^2$$

$$+ 2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{DA}^2 + 2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DA}$$

$$= \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CD}^2 + \overrightarrow{DA}^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$$

$$+ 2\overrightarrow{BC}^2 + 2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DA}$$

$$= \overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CD}^2+\overrightarrow{DA}^2+2\overrightarrow{BC}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})$$

و چون داریم: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = 0$

پس خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BD}^2 + 4\overrightarrow{MN}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CD}^2 + \overrightarrow{DA}^2$$

تمرین:

۱ ـ اگر P و Q و R نقاط میانهٔ اضلاع سه‌بر ABC باشند، ثابت کنید که برای هر نقطهٔ دلخواه o برابری زیر برقرار است:

$$\overrightarrow{oA} + \overrightarrow{oB} + \overrightarrow{oC} = \overrightarrow{oP} + \overrightarrow{oQ} + \overrightarrow{oR}$$

(راهنمایی: از روابط زیر استفاده کنید:)

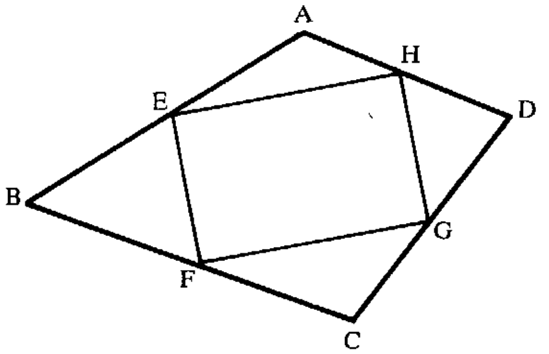
($\overrightarrow{oC} + \overrightarrow{oA} = 2\overrightarrow{oR}$ و $\overrightarrow{oB} + \overrightarrow{oC} = 2\overrightarrow{oQ}$ و $\overrightarrow{oA} + \overrightarrow{oB} = 2\overrightarrow{oP}$)

۲ ـ در متوازی‌الاضلاع ABCD قرار می‌دهیم، $\overrightarrow{AC}=\vec{a}$ و $\overrightarrow{BD}=\vec{b}$، بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ را برحسب $\vec{a}$ و $\vec{b}$ پیدا کنید.

(راهنمایی: از روابط $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a}$ و

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} = \vec{b}$ استفاده کنید.)

۳ ـ ثابت کنید که اگر در چهار ضلعی (چپ یا راست) نقاط میانهٔ اضلاع پی‌درپی را به هم وصل کنیم، شکل به‌دست آمده یک متوازی‌الاضلاع است.



(راهنمایی: با فرض $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ و $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ و $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$ و $\overrightarrow{DA} = \vec{d}$، و در صورتی که نقاط میانی اضلاع را E و F و G و H بنامیم. بااستفاده از روابط زیر:

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ یا $\vec{a} + \vec{b} = -\vec{d} - \vec{c}$

$\overrightarrow{EB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\vec{a}$ و $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\vec{b}$ و

$\overrightarrow{DG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = -\frac{1}{2}\vec{c}$ و $\overrightarrow{HD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\vec{d}$ نتیجه بگیرید: $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$.)

ادامه دارد...

آموزش ترجمه متون ریاضی (۱۰)

● حمید رضاامیری

Definition 2.31. Order of an element :
Let G be a group and let $a \in G$. Then a is said to be of *finite order n*, if n is the least positive integer such that $a^n = e$, the identity of G.
If for no positive integer k, $a^k = e$, then a is said to be of *infinite order*.
The symbol $o(a)$ shall denote the order of a.

تعریف ۲.۳۱. مرتبهٔ یک عضو

فرض کنیم G یک گروه و $a \in G$ باشد. دراین‌صورت a از مرتبهٔ متناهیِ n خوانده می‌شود، اگر n کوچکترین عدد صحیح و مثبتی باشد که $a^n = e$، و e عضو همانیِ G است.

اگر برای هیچ عدد صحیح و مثبت مانند k، $a^k = e$ برقرار نباشد، در این صورت a را از مرتبهٔ نامتناهی می‌گوییم.

نماد $o(a)$ برای نمایش مرتبهٔ a به کار می‌رود.

Definition 2.32. Cyclic Subgroup : A group G is said to be a cyclic group if there exists an element $b \in G$, such that every element of G is a power of b. Then b is called a *generator* of G and we denote G by $< b >$.
If the composition in G were denoted additively then we could say that G is a cyclic group if there exists an element a of G such that every element of G is of the form na where n is an integer.

تعریف ۲.۳۲. زیرگروه دوری

گروه G را یک گروه دوری می‌گوییم اگر عضوی چون $b \in G$ وجود داشته باشد، به قسمی که هر عضوِ G توانی از b باشد. دراین‌صورت b را مولد گروه G نامیده و G را به‌صورت $< b >$ نشان می‌دهیم.

هرگاه عمل تعریف شده در G یک عمل جمعی باشد، دراین‌صورت اگر عضوی از G مانند a وجود داشته‌باشد به قسمی که هر عضوِ G به شکل na که n یک عدد صحیح است، نوشته شود، می‌توانیم G را یک گروه دوری بنامیم.

EXAMPLE 22. Let $G_n = \left\{ e^{\frac{2\pi ri}{n}} \mid r = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \right\}$ be the group of nth roots of unity. Let $a = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, then $a \in G$. Since for any integer r, $e^{\frac{2\pi ri}{n}} = \left(e^{\frac{2\pi i}{n}} \right)^r = a^r$, every element of G is a power of a. Hence G_n is a cyclic group generated by a.

مثال ۲۲. فرض‌کنیم $G_n = \{ e^{\frac{2\pi ri}{n}} \mid r = ۰, ۱, ۲, \ldots, n-۱ \}$ گروهی حاصل از n امین ریشه‌های واحد باشد. فرض‌کنیم $a = e^{\frac{2\pi i}{n}}$، در این صورت $a \in G$. چون برای هر عدد صحیح r، $e^{\frac{2\pi ri}{n}} = (e^{\frac{2\pi i}{n}})^r = a^r$، هر عضو از G توانی از a است. بنابراین G_n یک گروه دوری تولید شده توسط a است.

EXAMPLE 23. The additive group **Z** is a cyclic group generated by 1, since $1 \in \mathbf{Z}$ and for every integer n, we have $n = n\,1$.

مثال ۲۳. گروه‌جمعی Z یک‌گروه دوریِ تولید شده توسط ۱ است، زیرا $۱ \in Z$ و برای هرعدد صحیح‌مانند n، داریم: $n = n \times ۱$.

Theorem 2.33. Order of a cyclic group is equal to the order of its generator.

قضیهٔ ۲.۳۳. مرتبهٔ یک گروه دوری با مرتبهٔ مولّدش برابر است.[1]

---

(۱) به‌دلیل طولانی بودنِ اثبات و نامحدودی قابل استفاده نبودن آن برای دانش‌آموزان از آوردن اثبات خودداری شده‌است.

Now let G be any group and $a \in G$. Let $H=\{a^n \mid n$ is any positive integer$\}$. Consider any two elements $x=a^n$, $y=a^m$ in H. We find that $xy^{-1}=a^na^{-m}=a^{n-m} \in H$. This implies that H is subgroup of G. Clearly H is a cyclic group generated by a. This subgroup is called a *cyclic subgroup* of G generated by a and we write $H= < a >$.

حال فرض کنیم G گروهی دلخواه بوده و $a \in G$. فرض کنیم $H = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ دو عضو دلخواه مانند $x = a^n$ و $y = a^m$ در H در نظر می‌گیریم. در می‌یابیم که $xy^{-1} = a^na^{-m} = a^{n-m} \in H$ این ثابت می‌کند که H یک زیر گروه G است. واضح است که H یک گروه دوری تولید شده توسط a می‌باشد. این زیر گروه یک زیر گروه دوری از G نامیده می‌شود که توسط a تولید شده، می‌نویسیم $H = < a >$.

Theorem 2.34. If G is a finite group then order of any element of G divides the order of G.

Proof: Let G be a finite group and $a \in G$. Let $H= < a >$ be the cyclic subgroup of G generated by a

Then $o(H)=o(a)$ (Theorem 2.33).

By Lagrange's theorem $o(H) \mid o(G)$. Hence $o(a) \mid o(G)$. ■

قضیّهٔ ۲.۳۴. اگر G یک گروهِ متناهی باشد در این صورت مرتبهٔ هر عضو از G مرتبهٔ G را عاد می‌کند (می‌شمارد).

اثبات: فرض کنیم G یک گروه متناهی و $a \in G$. فرض کنیم $H = < a >$ یک زیر گروه دوریِ G و تولید شده توسط a باشد.

در این صورت $o(H) = o(a)$ (قضیّهٔ ۲.۳۳).

از طرفی طبق قضیّهٔ لاگرانژ[۲] $o(H) \mid o(G)$. بنابراین $o(a) \mid o(G)$. ■

Corollary 2.35. If G is a finite group then for any $a \in G$

$$a^{o(G)}=e.$$

Proof: Let $o(a)=n$ and $o(G)=N$.

Because of Theorem 2.3 , $N=nm$ for some positive integer m. Then $a^N=(a^n)^m=e^m=e$.

Hence the corollary. ■

نتیجهٔ ۲.۳۵. اگر G یک گروه متناهی باشد در این صورت برای هر $a \in G$، $a^{o(G)} = e$.

اثبات: فرض کنیم $o(G) = N$ ، $o(a) = n$.

طبق قضیّهٔ ۲.۳۴ ، $(o(a) \mid o(G) \Rightarrow n \mid N \Rightarrow N=nm)N = nm$ به‌ازای عددی صحیح و مثبت مانند m. پس $a^N=(a^n)^m = e^m = e$

بنابراین نتیجه حاصل شد. ■

Theorem 2.36. In a group G, following hold:

(1) For any two elements $a, x \in G$, $o(a)=o(x^{-1}ax)$.

(2) If for any $a \in G$, $o(a)$ is finite; then for any integer m, $a^m=e$ implies $o(a) \mid m$.

(3) For any two elements $a, b \in G$, $o(ab)=o(ba)$.

(4) If $o(a)=n$ and a positive integer $k \mid n$, then

$$o(a^k)=\frac{n}{k}.$$

قضیّهٔ ۲.۳۶. در یک گروه مانند G گزاره‌های زیر صدق می‌کنند.

(۱) برای هر دو عضو از G مانند x و a، $o(a) = o(x^{-1}ax)$

(۲) اگر برای هر $a \in G$، $o(a)$ متناهی باشد، در این صورت برای هر عدد صحیح m، که $a^m = e$، ایجاب می‌کند اینکه $o(a) \mid m$.

(۳) برای هر دو عضو از G مانند a و b، $o(ab) = o(ba)$.

(۴) اگر $o(a) = n$ و عددی صحیح و مثبت مانند k، n راعاد کند $(k \mid n)$، در این صورت $o(a^k) = \dfrac{n}{k}$.

Proof: (1) Let n be any positive integer

$$a^n=e \Leftrightarrow x^{-1}a^nx=x^{-1}ex=e \Leftrightarrow (x^{-1}ax)^n=e,$$

since $(x^{-1}ax)^n=x^{-1}a^nx$.

Consequently $o(a)=o(x^{-1}ax)$.

(2) Let $o(a)=n$ and let m be any integer such that $a^m=e$.

اثبات: (۱) فرض کنیم n عددِ صحیحِ مثبت و دلخواهی باشد ($a^n = e$ و).

$$a^n = e \Leftrightarrow x^{-1}a^n x = x^{-1}ex = e \Leftrightarrow (x^{-1}ax)^n = e$$

زیرا $(x^{-1}ax)^n = x^{-1}a^n x$ (به‌استقراء می‌توان ثابت کرد).

بدین ترتیب (ثابت شد) $o(a) = o(x^{-1}ax)$.

(۲) فرض کنیم، $o(a) = n$ و فرض کنیم m عددی صحیح و دلخواه باشد به قسمی که $a^m = e$.

---

(۲) طبق قضّیهٔ لاگرانژ مرتبهٔ زیر گروه هر گروه، مرتبهٔ آن گروه راعاد می‌کند.

Now by Euclid's algorithm $m=nq+r$ for some integers q and r with $0 \leq r < n$.
Then $e=a^m=(a^n)^q a^r=e^q a^r=ea^r=a^r$.
But n is the least positive integer such that $a^n=e$ and $r<n$.
Hence $r=0$ and so $m=nq$ *i.e.*, $o(a)=n \mid m$. This proves (2).
(3) Since $ab=b^{-1}(ba)b$, $o(ab)=o(ba)$ by part (1).
(4) follows from (2).■

حال باتوجه به الگوریتم اقلیدسی داریم، $m = nq + r$ که r و q اعدادی صحیح و $0 \leq r < n$.

بنابراین: $e = a^m = (a^n)^q \cdot a^r = e^q a^r = ea^r = a^r$. (ثابت شد $a^r = e$) اما از طرفی n کوچکترین عدد صحیح و مثبتی است (طبق تعریف مرتبه برای a) که $a^n = e$ و $r < n$.

بنابراین باید $r = 0$ پس $m = nq$ یعنی، $o(a) = n \mid m$. این مطلب (۲) را اثبات می‌کند.

(۳) چون $ab = b^{-1}(ba)b$، باتوجه به (۱) $o(ab) = o(ba)$.

(۴) از (۲) نتیجه می‌شود. ■

EXAMPEE 24. Consider the group $G=\{1, -1, i, -i\}$ where $i=\sqrt{-1}$. Now $o(G)=4$.

مثال ۲۴. گروه $G = \{1, -1, i, -i\}$ را که در آن $i = \sqrt{-1}$، در نظر می‌گیریم. حال می‌دانیم $o(G) = 4$.

(*i*) $i^4=1$ but for no positive integer $m < 4$ $i^m=1$. This means $o(i)=4$. Trivially $4 \mid o(G)$.
(*ii*) Now $(-1)^2=1$ and $(-1)^1\neq 1$. This implies $o(-1)=2$. Clearly $o(-1) \mid o(G)$.
(*iii*) Since $1=i^4$, $-1=i^2$, $-i=i^3$, $i=i$ we see that G is a cyclic group generated by i. Notice that G is also generated by $-i$ But -1 or 1 do not generate G.

I) $i^4 = 1$، اما برای اعدادی مثبت چون $m < 4$، $i^m = 1$ برقرار نیست. این به معنی آن است که $o(i) = 4$. بدیهی است که $4 \mid o(G)$.

II) حال داریم، $(-1)^2 = 1$ و $(-1)^1 \neq 1$. این ایجاب می‌کند که $o(-1) = 2$. واضح است که $o(-1) \mid o(G)$.

III) از آن‌جایی که $i^4 = 1$ و $i^2 = -1$ و $i^3 = -i$ و $i = i$، مشاهده می‌کنیم که G گروهی است دوری، تولید شده توسط i. توجه داریم که همچنین G توسط $-i$ می‌تواند تولید شود امّا -1 یا 1 نمی‌توانند G را تولید کنند.

مسائل مسابقه‌ای

با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید:

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

(می‌دانیم: $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$)

تفریح اندیشه ۲

عدد 606 را بر تکه کاغذی نوشته‌ایم. برای این که عدد مزبور $\frac{3}{2}$ مرتبه بزرگتر شود چه عملی باید انجام گیرد؟

606

جواب در صفحهٔ ۸۸

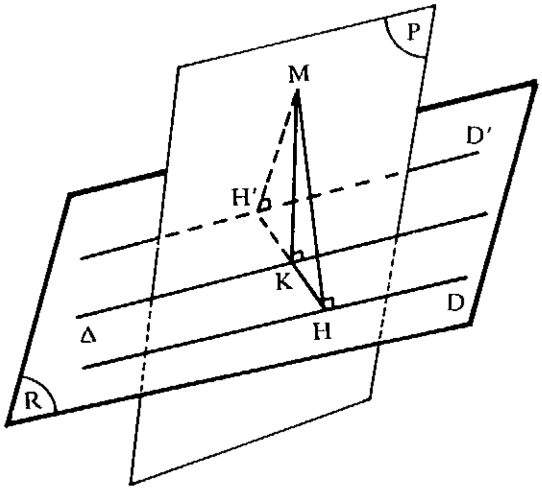
مکان هندسی

(قسمت پنجم)

محمدهاشم رستمی

این مقاله، یک مقاله تحقیقی است. به این جهت از دانش‌آموزان و دانشجویان ارجمند، اساتید محترم دانشگاهها، و دیگر ریاضیدانان و صاحبنظران درخواست می‌شود، مطالب و نظریات خود را که برای تکمیل و یا تصحیح این مقاله می‌تواند مؤثر و مفید باشد، همچنین کتابی که در مورد مکان هندسی در اختیار دارند و یا مشخصات آن کتاب را به نشانی مجلهٔ ریاضی برهان ارسال فرمایند، که قبلاً از این لطف و همکاری، صمیمانه سپاسگزاری می‌شود.

۶ـ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از دو خط متوازی D و D′ به یک فاصله است، صفحه‌ای است عمود بر صفحهٔ دو خط D و D′، که بر خط متساوی‌الفاصله از این دو خط واقع در صفحهٔ آنها (خط Δ) می‌گذرد.



اثبات به روش هندسی ـ بر دو خط متوازی D و D′ صفحهٔ R را می‌گذرانیم و خط Δ را به یک فاصله از D و D′ در این صفحه رسم می‌کنیم. آنگاه صفحه P را چنان بر خط Δ مرور می‌دهیم که بر صفحهٔ R عمود باشد. این صفحه مکان هندسی نقطه‌ای از فضا است که از دو خط متوازی D و D′ به یک فاصله می‌باشد، زیرا:

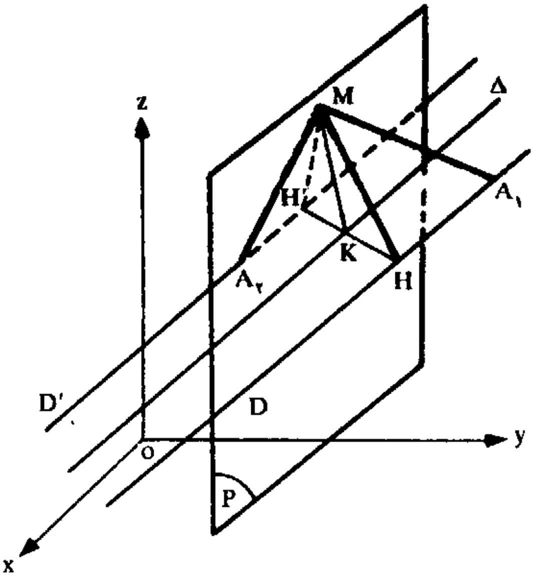
اوّلاً: هر نقطه دلخواه مانند M از این صفحه، از دو خط D و D′ به یک فاصله است چون اگر از M عمودهای MH و MH′ را به ترتیب بر خطهای D و D′ فرود آوریم، صفحهٔ HMH′ بر خط Δ نیز عمود است و این خط را در نقطهٔ K وسط پاره‌خط HH′ قطع می‌کند. در مثلث MHH′ خط MK عمودمنصف HH′ می‌باشد، بنابراین این مثلث متساوی‌الساقین است یعنی؛ $MH = MH'$ است.

ثانیاً: هر نقطه‌ای که از دو خط D و D′ به یک فاصله باشد، روی صفحهٔ P واقع است. زیرا از متساوی‌الساقین بودن مثلث HMH′ و میانه بودن MK نتیجه می‌شود که MK عمود منصف HH′ است و چون MK عمود بر Δ نیز می‌باشد (Δ بر دو خط متقاطع MH و MH′ از صفحه HMH′ عمود است، پس بر این صفحه و در نتیجه بر MK عمود می‌باشد)، بنابراین نقطهٔ M روی صفحه‌ای قرار دارد که بر خط Δ می‌گذرد و بر صفحه R عمود است، یعنی نقطهٔ M روی صفحه P واقع است.

اثبات به روش تحلیلی ـ دو خط متوازی D و D′ به معادله‌های:

$$D: \frac{x - x_1}{p} = \frac{y - y_1}{q} = \frac{z - z_1}{r}$$

$$D': \frac{x-x_2}{p}=\frac{y-y_2}{q}=\frac{z-z_2}{r}$$



را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم M (x ، y ، z) نقطه‌ای از مکان هندسی مورد نظر باشد. در این صورت اگر $A_1(x_1 ، y_1 ، z_1)$ نقطه‌ای از خط D و $A_2(x_2 \text{ و } y_2 \text{ و } z_2)$ نقطه‌ای واقع بر خط D' باشد و از نقطهٔ M عمودهای MH و MH' را به ترتیب بر خطهای D و D' فرود آوریم، داریم:

$$\vec{V}\left|\begin{array}{l}p\\q\\r\end{array}\right. ,\quad M\left|\begin{array}{l}x\\y\\z\end{array}\right. ,\quad A_1\left|\begin{array}{l}x_1\\y_1\\z_1\end{array}\right. ,\quad A_2\left|\begin{array}{l}x_2\\y_2\\z_2\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{A_1M}\left|\begin{array}{l}x-x_1\\y-y_1\\z-z_1\end{array}\right. ,\quad \overrightarrow{A_2M}\left|\begin{array}{l}x-x_2\\y-y_2\\z-z_2\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\vec{V}\wedge\overrightarrow{A_1M}\left|\begin{array}{l}-q(z-z_1)+r(y-y_1)\\-r(x-x_1)+p(z-z_1)\\-p(y-y_1)+q(x-x_1)\end{array}\right.$$

$$\vec{V}\wedge\overrightarrow{A_2M}\left|\begin{array}{l}-q(z-z_2)+r(y-y_2)\\-r(x-x_2)+p(z-z_2)\\-p(y-y_2)+q(x-x_2)\end{array}\right.$$

$$MH=MH' \Rightarrow \frac{|\overrightarrow{A_1M}\wedge\vec{V}|}{|\vec{V}|}=\frac{|\overrightarrow{A_2M}\wedge\vec{V}|}{|\vec{V}|} \Rightarrow$$

$$|\overrightarrow{A_1M}\wedge\vec{V}|^2=|\overrightarrow{A_2M}\wedge\vec{V}|^2 \Rightarrow$$

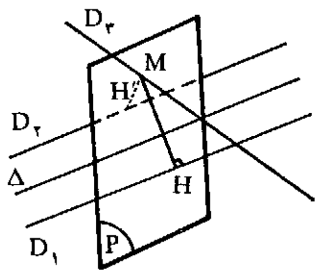
$$[q(z-z_1)-r(y-y_1)]^2+[r(x-x_1)-p(z-z_1)]^2$$
$$+[p(y-y_1)-q(x-x_1)]^2$$
$$=[q(z-z_2)-r(y-y_2)]^2+[r(x-x_2)-p(z-z_2)]^2$$
$$+[p(y-y_2)-q(x-x_2)]^2$$

پس از انجام محاسبات لازم و ساده کردن، معادلهٔ صفحه‌ای به‌صورت $Ax+By+Cz+D=0$ به‌دست می‌آید که در آن A و B و C و D برابرند با: $A=2\left[pr(z_1-z_2)+pq(y_1-y_2)-(p^2+q^2)(x_1-x_2)\right]$ و . . .

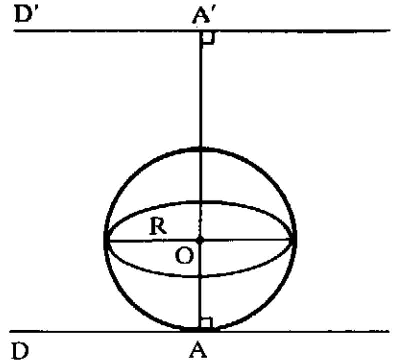
ثابت می‌شود که این صفحه بر صفحهٔ R عمود و شامل خط Δ است. و بالعکس می‌توان ثابت کرد هر نقطه‌ای که مختصاتش در معادلهٔ این صفحه صدق کند، از دو خط D و D' به یک فاصله است. بنابراین مکان هندسی نقطهٔ متساوی‌الفاصله از دو خط متوازی در فضا صفحه‌ای است عمود بر صفحهٔ آن دو خط موازی،که بر خط متساوی‌الفاصله از این دو خط در آن صفحه می‌گذرد.

مثال ۱: دو خط متوازی D_1 و D_2 و خط D_3 غیرموازی با آنها مفروض است. نقطه‌ای روی خط D_3 بیابید که از دو خط D_1 و D_2 به یک فاصله باشد. (به جای خط D_3 می‌تواند یک شکل دیگر مانند یک صفحه یا . . . باشد.)

حل: صفحهٔ P مکان هندسی نقطهٔ متساوی‌الفاصله از دو خط D_1 و D_2 را رسم می‌کنیم. نقطهٔ تقاطع این صفحه با خط D_3 جواب مسأله است، و به تعداد نقاط تلاقی، مسأله جواب دارد. (یک، هیچ یا بی‌شمار نقطه جواب مسأله است بنابرآنکه خط D_3 به ترتیب، متقاطع یا موازی با صفحهٔ P و یا روی صفحهٔ P باشد.)



مثال ۲: کرهٔ (R و O) S و خط D مماس بر آن و خط D' موازی خط D و به فاصلهٔ ۳R از آن واقع در صفحه (O و D) مفروض‌اند.



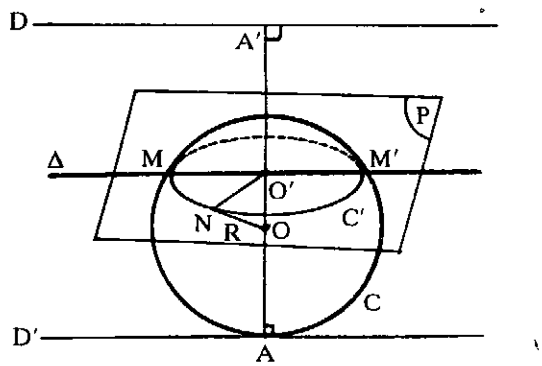
اوّلاً ـ مکان هندسی نقطه‌ای از این کره را بیابید که از دو خط متوازی D و D' به یک فاصله است.

ثانیاً ـ چند نقطه روی کرهٔ فوق وجود دارد که در صفحهٔ دو خط D و D' واقع‌اند و از دو خط D و D' نیز به یک فاصله‌اند؟

ثالثاً ـ اگر خط D' در صفحهٔ (O و D) قرار نداشته باشد، مسأله به چه صورت درمی‌آید.

حل: نقطهٔ تماس خط D با کره را A می‌نامیم و بر دو خط متوازی D و D' صفحهٔ Q را می‌گذرانیم. این صفحه، کره (R و O) S را در دایرهٔ عظیمه‌ای که از نقطهٔ A می‌گذرد قطع می‌کند که آن را دایرهٔ (R و O) C می‌نامیم. می‌دانیم مکان هندسی نقطهٔ متساوی‌الفاصله از دو خط متوازی D و D' صفحه‌ای مانند P است که بر صفحه Q عمود است و بر خط Δ که به فاصلهٔ $\frac{۳R}{۲}$ از هر یک از خطوط D و D' و در صفحهٔ Q قرار دارد، می‌گذرد. این صفحه کره را در دایره‌ای به مرکز O' قطع می‌کند به قسمی که $OO' = \frac{R}{۲}$ (O' نقطه تقاطع AO با صفحه P است) و شعاع آن برابر است با:

$$R' = \sqrt{R^۲ - \frac{R^۲}{۴}} = \frac{R\sqrt{۳}}{۲}$$



این دایره مکان هندسی نقطه‌ای از سطح کره است که از دو خط متوازی D و D' به یک فاصله است.

ثانیاً ـ نقطهٔ تقاطع دو دایره (R و O)C و $(\frac{R\sqrt{۳}}{۲}$ و $C'(o'$ جواب است (دو نقطه) یعنی تنها دو نقطه روی کره وجود دارد که هم در صفحهٔ Q واقع‌اند و هم از دو خط D و D' به یک فاصله‌اند (باید توجه داشت که این دو نقطه همان نقاط تقاطع خط Δ با کرهٔ مفروض می‌باشند).

ثالثاً ـ در صورتی که خط D' در صفحهٔ (O و D) قرار نداشته باشد وجود جواب بستگی به آن دارد که کرهٔ (R و O) S صفحهٔ P را قطع کند و یا مماس بر آن باشد و یا آن‌را قطع نکند، و این مطلب نیز با مقایسهٔ شعاع کره با فاصلهٔ مرکز کره از صفحهٔ P مشخص می‌شود.

مثال ۳: دو خط متوازی $D : \frac{x}{۲} = \frac{y}{۳} = \frac{z-۲}{-۱}$ و

$$D': \begin{cases} x = ۲t - ۱ \\ y = ۳t \\ z = -t + ۴ \end{cases}$$

مفروض‌اند. معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ متساوی‌الفاصله از این دو خط را به‌دست آورید.

حل: معادلهٔ کانونیک خط D' را مشخص می‌سازیم داریم:

$$D' : \frac{x+۱}{۲} = \frac{y}{۳} = \frac{z-۴}{-۱}$$

بردار هادی این دو خط $\vec{V}$ (۱− و ۳ و ۲) است. برای پیدا کردن معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ متساوی‌الفاصله از دو خط D و D'، فرض می‌کنیم (z و y و x) M یک نقطه از این مکان باشد، در این صورت با اختیار کردن نقطهٔ $A_۱$ روی خط D و نقطهٔ $A_۲$ روی خط D' داریم:

$$A_۱ \in D \; (x_۱ = ۰ , y_۱ = ۰ , z_۱ = ۲) \quad و$$

$$A_۲ \in D' \; (x_۲ = -۱ , y_۲ = ۰ , z_۲ = ۴)$$

$$\Longrightarrow \; \overrightarrow{A_۱M}\,(x , y , z-۲) \; و \; \overrightarrow{A_۲M}\,(x+۱ , y , z-۴) \quad و$$

$$\vec{V}\,(۲ , ۳ , -۱)$$

$$\Longrightarrow \; \overrightarrow{A_۱M} \wedge \vec{V}\,(-۳z - y + ۶ \; و \; x + ۲z - ۴ \; و \; -۲y + ۳x)$$

$$\overrightarrow{A_2M} \wedge \vec{V}\ (-3z-y+12 \text{ و } +x+2z-7 \text{ و } -2y+3x+3)$$

$$MH = MH' \Rightarrow \frac{|\overrightarrow{A_1M} \wedge \vec{V}|}{|\vec{V}|} = \frac{|\overrightarrow{A_2M} \wedge \vec{V}|}{|\vec{V}|} \Rightarrow$$

$$|\overrightarrow{A_1M} \wedge \vec{V}|^2 = |\overrightarrow{A_2M} \wedge \vec{V}|^2 \Rightarrow$$

$$(3z + y - 6)^2 + (-x - 2z + 4)^2 + (2y - 3x)^2$$

$$= (3z+y-12)^2 + (-x-2z+7)^2 + (2y-3x-3)^2$$

$$\Longrightarrow \boxed{-2x+4y+8z-25=0}$$

معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ متساوی‌الفاصله از دو خط D و 'D

تبصره: با قرار دادن مقادیر ($r = -1$ و $q = 3$ و $p = 2$) و ($z_1=2$ و $y_1=0$ و $x_1=0$) و ($z_2=4$ و $y_2=0$ و $x_2=-1$) در معادلهٔ کلی مکان‌هندسی نقطهٔ متساوی‌الفاصله از دو خط در فضا یعنی:

$$[q\,(z-z_1) - r\,(y-y_1)]^2 + [r\,(x-x_1) - p(z-z_1)]^2$$

$$+ [p\,(y - y_1) - q\,(x - x_1)]^2$$

$$= [q\,(z-z_2) - r\,(y-y_2)]^2 + [r\,(x-x_2) - p(z-z_2)]^2$$

$$+ [p\,(y - y_2) - q\,(x - x_2)]^2$$

نیز می‌توان معادلهٔ مکان‌هندسی مورد نظر را به‌دست آورد.

$$[3\,(z-2) + 1\,(y-0)]^2 + [-1\,(x-0) - 2(z-2)]^2$$

$$+ [2\,(y-0) - 3\,(x-0)]^2 = [3\,(z-4) + 1\,(y-0)]^2$$

$$+ [-1\,(x+1) - 2(z-4)]^2 + [2\,(y-0) - 3\,(x+1)]^2$$

$$\Longrightarrow \boxed{-2x + 4y + 8z - 25 = 0}$$

مثال ۴: معادله مکان هندسی نقطه‌ای از صفحهٔ $Q: 3x-12y+z+3=0$ را تعیین کنید که از دو خط متوازی

$$D: \begin{cases} \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+1}{2} \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad D': \begin{cases} x = -2t \\ y = 4t-3 \\ z = 2 \end{cases}$$

بـه یک فاصله باشد.

حل: معادلهٔ صفحهٔ مکان‌هندسی نـقطهٔ مـتساوی الفـاصله از دو خط D و 'D را پیدا می‌کنیم و فـصل مشـترک آن را بـا صـفحهٔ Q به‌دست می‌آوریم.

$$D: \begin{cases} \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+1}{2} \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \vec{V}_1 \left| \begin{array}{l} p = -1 \\ q = 2 \\ r = 0 \end{array} \right.$$

$$D': \begin{cases} x = -2t \\ y = 4t-3 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \vec{V}_2 \left| \begin{array}{l} p' = -2 \\ q' = 4 \\ r' = 0 \end{array} \right.$$

$$\frac{p}{p'} = \frac{q}{q'} = \frac{r}{r'} \Rightarrow \frac{-1}{-2} = \frac{2}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\vec{V}_1 \parallel \vec{V}_2 \Rightarrow \vec{V}(p = -1\ ,\ q = 2\ ,\ r = 0)\ ,$$

$$A_1 \in D(2\,,\,-1\,,\,1)\ ,\ A_2 \in D'(0\,,\,-3\,,\,2)$$

$$[q\,(z-z_1) - r\,(y-y_1)]^2 + [r\,(x-x_1) - p(z-z_1)]^2$$

$$+ [p\,(y - y_1) - q\,(x - x_1)]^2$$

$$= [q\,(z-z_2) - r\,(y-y_2)]^2 + [r\,(x-x_2) - p(z-z_2)]^2$$

$$+ [p\,(y - y_2) - q\,(x - x_2)]^2$$

$$\Longrightarrow [2\,(z-1) - 0(y+1)]^2 + [0(x-2) + 1(z-1)]^2$$

$$+ [-1\,(y+1) - 2\,(x-2)]^2 = [2\,(z-2) - 0(y+3)]^2$$

$$+\left[0(x-0)+1(z-2)\right]^2+\left[-1\,(y+3)-2\,(x-0)\right]^2$$

$$\Longrightarrow 4(z-1)^2+(z-1)^2+(-2x-y+3)^2$$

$$=4(z-2)^2+(z-2)^2+(-2x-y-3)^2$$

$$\Longrightarrow 24x+12y-10z+15=0$$

معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ متساوی‌الفاصله از D و ′D

$$\begin{cases}24x+12y-10z+15=0\\ 3x-12y+z+3=0\end{cases}\Rightarrow 27x-9z+18=0$$

$$\Rightarrow 27x=9(z-2)\Rightarrow \frac{x}{9}=\frac{z-2}{27}\Rightarrow \boxed{x=\frac{z-2}{3}}\quad (1)$$

$$10\begin{cases}24x+12y-10z+15=0\\ 3x-12y+z+3=0\end{cases}\Rightarrow 54x-108y+45=0$$

$$\Rightarrow 54x=108y-45\Rightarrow 54x=108\left(y-\frac{5}{12}\right)\Rightarrow$$

$$\frac{x}{108}=\frac{y-\frac{5}{12}}{54}\Rightarrow \boxed{x=\frac{y-\frac{5}{12}}{\frac{1}{2}}}\quad (2)$$

$$(1)\text{و}(2)\Rightarrow \frac{x}{1}=\frac{y-\frac{5}{12}}{\frac{1}{2}}=\frac{z}{3}\Rightarrow \boxed{\frac{x}{2}=\frac{y-\frac{5}{12}}{1}=\frac{z}{6}}$$

معادلهٔ کانونیک خط جواب مسأله

تمرین: برای هر مکان‌هندسی که تاکنون ارائه شده‌است، مسأله‌هایی مطرح شده است (به ترتیب ارائه مکانها). در صورتی که شما مسأله‌های دیگری دربارهٔ این مکانهای هندسی سراغ دارید، به نشانی مجله ریاضی برهان ارسال فرمایید تا برای تکمیل مسأله‌ها مورد استفاده قرار گیرد. از لطف شما قبلاً سپاسگزاری می‌شود.

۱ـ صفحهٔ P و دو خط متوازی D_1 و D_2 غیرواقع برآن مفروضند. مکان هندسی نقطه‌ای از صفحهٔ P را بیابید که از دو خط D_1 و D_2 به یک فاصله باشند (بحث کنید).

۲ـ خطهای متوازی D و ′D و نقاط A و B غیر واقع در یک صفحه مفروضند. نقطه‌ای مانند C متساوی‌الفاصله از D و ′D چنان بیابید که مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد.

۳ـ دو خط متوازی D و ′D و دو نقطهٔ A و B واقع بر خط D مفروضند. نقطه‌ای مانند C در فضا متساوی‌الفاصله از D و ′D چنان تعیین کنید که مثلث ABC در رأس C قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین باشد.

۴ـ منشور مثلث‌القاعدهٔ ′ABCA′B′C مفروض است. ۱) مکان هندسی نقطهٔ متساوی‌الفاصله از یالهای این منشور (′AA و ′BB و ′CC) را تعیین کنید. ۲) نقطه‌ای روی مقطع قائم ″A″B″C از این منشور را تعیین کنید که از سه یال آن به یک فاصله باشد.

۵ـ معادلهٔ مکان هندسی نقاط متساوی‌الفاصله از دو خط متوازی $D:\frac{x}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{-1}$ و $D':\frac{x+2}{-2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+1}{1}$ را تعیین کنید.

۶ـ خطهای $D_1:\begin{cases}x=t+1\\ y=-2t+3\\ z=2t-1\end{cases}$ و $D_2:\begin{cases}2x+y=0\\ y+z=-1\end{cases}$ و $D_3:\frac{x+2}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{4}$ مفروضند. نقطه‌ای روی خط D_3 بیابید که از دو خط D_1 و D_2 به یک فاصله باشد.

۷ـ دو نقطهٔ $A(1\,,2\,,-1)$ و $B(0\,,1\,,1)$ و خطهای موازی $D: x=y=z$ و $D': x-1=y+1=z-3$ مفروضند. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را تعیین کنید که از دو نقطهٔ A و B، همچنین از دو خط متوازی D و ′D به یک فاصله باشد.

اثبات درستی قوانین مقدماتی تسویر

■ غلامرضا یاسی‌پور

قضیّهٔ «$Fa \wedge Gb$» را می‌توان به صورت مثال جانشینی از «$Fx \wedge Gy$»، که خود تابعی گزاره‌ای و شامل دو متغیر مختلف[1] است درنظر گرفت. تا این مرحله تنها یک متغیر فردی، یعنی حرف «x» را به‌طور صریح پذیرفته‌ایم. اما، درکاربرد قبلی‌مان از حرف «y» برای نمایش دادن هر متغیر به‌دلخواه انتخاب شده، به کار استفاده از آن به‌عنوان متغیر، بدون پذیرفتن این حقیقت بودیم. و در معرفی حرفی توسط EI، برای نمایش فرد خاص دارای صفتی معین، بدون این‌که واقعاً بدانیم کدام فرد توسط آن نمایش داده‌شده‌است، نیز در کار استفاده از آن حرف به عنوان متغیر بودیم. اکنون اقدام به شناخت صریح آنچه به‌طور ضمنی در کاربرد گذشته‌مان بود می‌پردازیم. بعضی از توابع گزاره‌ای ممکن است شامل دو یا بیشتر از دو متغیر فردی متفاوت باشند. در این‌صورت در دسترس داشتن مخزن وسیعی از متغیرات فردی به سهولت کار کمک می‌کند، و بنابراین قراردادهای علامتیمان را تکمیل کرده، شامل حروف «u»، «v»، «w»، «x»، «y»، و «z» به‌عنوان متغیرهای فردی می‌کنیم. دراین‌حالت توابع گزاره‌ای شامل عباراتی چون «Fu»، «$Fu \vee Gw$»، «$(Fx \wedge Gy) \Rightarrow Hz$»، «$Fx \vee (Gy \wedge Hx)$» و نظایر آن هستند.

در جانشین کردن ثوابت به‌جای متغیرات برای به‌دست آوردن قضیّه از تابع گزاره‌ای، به‌جای هر ظهور آزاد یک متغیر یکسان یک ثابت یکسان باید قرار داده شود. بنابراین در میان مثالهای جانشین تابع گزاره‌ای $Fx \vee (Gy \wedge Hx)$ داریم:

$$Fa \vee (Gb \wedge Ha), Fa \vee (Gc \wedge Ha), Fa \vee (Gd \wedge Ha), \ldots$$
$$Fb \vee (Ga \wedge Hb), Fb \vee (Gc \wedge Hb), Fb \vee (Gd \wedge Hb), \ldots$$
$$Fc \vee (Ga \wedge Hc), Fc \vee (Gb \wedge Hc), Fc \vee (Gd \wedge Hc), \ldots$$
....

در حالی که قضایایی چون $Fa \vee (Gb \wedge Hc)$ را نداریم. از طرف دیگر، یک ثابت می‌تواند به‌جای ظهورات آزاد متغیرات مختلف بنشیند، البته به شرطی که اگر به‌جای هر ظهور آزاد از متغیری قرارمی‌گیرد به جای جمیع ظهورات آزاد آن متغیر قرارگیرد. به‌این‌ترتیب مثالهای جانشین اضافی تابع گزاره‌ای «$Fx \vee (Gy \wedge Hx)$» عبارت‌از «$Fa \vee (Ga \wedge Ha)$»، «$Fb \vee (Gb \wedge Hb)$»، «$Fc \vee (Gc \wedge Hc)$»، ... می‌باشند.

اکنون با پذیرفتن حروف «u»، «v»، «w»، «y»، و «z» و به عنوان متغیرهای فردی علاوه‌بر «x»، علامت‌گذاریمان را درموردتسویرعمومی و وجودی‌برای تطبیق‌کردن‌بامخزن وسعت یافتهٔ متغیراتمان تعدیل می‌کنیم. قضیّهٔ «جمیع F ها G هستند» را می‌توان متناوباً به صورت «$(u)[Fu \Rightarrow Gu]$»، «$(v)[Fv \Rightarrow Gv]$»، «$(w)[Fw \Rightarrow Gw]$»، «$(x)[Fx \Rightarrow Gx]$»، «$(y)[Fy \Rightarrow Gy]$»، یا «$(z)[Fz \Rightarrow Gz]$» علامتی‌کرد. به‌همین ترتیب قضیّهٔ «بعضی H ها موجودند» رامی‌توان متناوباًبه‌صورت «$(\exists u)Hu$»، «$(\exists v)Hv$»، «$(\exists w)Hw$»، «$(\exists x)Hx$»، «$(\exists y)Hy$»، یا «$(\exists z)Hz$» علامتی کرد. تفاوت بین «$(x)Fx$» و «$(y)Fy$» (چون تفاوت بین «$\exists x\, Gx$» و «$\exists y\, Gy$») تفاوتی صرفاً علامتی است و هریک را می‌توان به‌جای دیگری هرجاکه روی دهد نوشت. البته جایی که تابعی گزاره‌ای شامل ظهور آزاد دو یا بیشتر از دو متغیر متفاوت، چون «$Fx \wedge Gy$» باشد، دو تابع گزاره‌ای‌یی که از تسویر به طور متفاوت آن به صورت $(x)[Fx \wedge Gy]$ و $(y)[Fx \wedge Gy]$ حاصل می‌شوند در واقع بسیار متفاوتند، و تفاوتشان بیش از تفاوتی صرفاً علامتی است.

مثالهای جانشین اوّلی عبارت‌اند از:

$(x)\ [Fx \wedge Ga]\ ,\ (x)\ [Fx \wedge Gb]\ ,\ (x)\ [Fx \wedge Gc]\ , \ldots$

درحالی که مثالهای جانشین دومی عبارت‌اند از:

$(y)\ [Fa \wedge Gy]\ ,\ (y)\ [Fb \wedge Gy]\ ,\ (y)\ [Fc \wedge Gy]\ , \ldots$

دراین صورت اگر هرفردی دارای صفت F باشد، و بعضی اما نه همهٔ افراد صفت G داشته‌باشند، بعضی مثالهای جانشین اوّلی قضایایی راست هستند، درحالی که جمیع مثالهای جانشین دومی دروغ می‌شوند که تفاوتی قابل ملاحظه است. این مثال برای اشاره به لزوم نه تنها گفتگو از «تسویر عمومی (یا وجودی) یک تابع گزاره‌ای» بلکه گفتگو از «تسویر عمومی (یا وجودی) یک تابع گزاره‌ای نسبت **به‌متغیر** « x »» یا «تسویر عمومی (یا وجودی) یک تابع گزاره‌ای **نسبت به‌متغیر** « y »» و غیره به‌کار می‌رود.

باید واضح باشد که از آن‌جا که « $(x)\ [Fx \Rightarrow Gx]$ » و « $(y)\ [Fy \Rightarrow Gy]$ » ترجمه‌های متناوب قضیّهٔ «هرچیز که F باشد G نیز هست» می‌باشند، تسویر عمومی « $Fx \Rightarrow Gx$ » نسبت به « x » دارای همان معنی است و منطقاً معادل تسویر عمومی نسبت به « y » تابع‌گزاره‌ای حاصل از جانشینی جمیع ظهورات آزاد « x » در « $Fx \Rightarrow Gx$ » توسط y است ـ زیرا نتیجهٔ این جانشینی « $Fy \Rightarrow Gy$ » است. در مراحل اوّلیهٔ کارمان مطلوب آن است که حداکثر یک تسویر نسبت به‌متغیری معلوم در قضیّه‌ای منفرد، داشته باشیم. این مطلب اکیداً لازم نیست. اما در جلوگیری از سردرگمی مفید است. بنابراین اوّلین قضیّهٔ عمومی چندگانهٔ مورد بررسی قرار گرفتهٔ «اگر جمیع سگها گوشتخوارند دراین صورت بعضی حیوانات گوشتخوارند» مناسبتر است که به‌صورت

$$(x)\ [Dx \Rightarrow Cx] \Rightarrow (\exists\ y)\ [Ay \wedge Cy]$$

علامتی شود تا این‌که به‌صورت

$$(x)\ [Dx \Rightarrow Cx] \Rightarrow (\exists\ x)\ [Ax \wedge Cx]$$

علامتی گردد، گرچه هیچ یک از این دو صورت **ناصحیح**[۲] نیست.

خاطر نشان کردیم که هیچ قضیّه‌ای نمی‌تواند شامل ظهور آزادی از متغیری باشد. در نتیجه در علامتی کردن هرگونه قضیّه‌ای باید دقت کنیم که هر ظهور هر متغیر به‌کار رفته در برد یک سور نسبت به آن متغیر قرار گیرد. چند مثال زیر به وضوح این موضوع کمک می‌کنند.

اگر چیزی در خانه غلط رفته‌است. دراین صورت هرکس که در خانه هست شکایت می‌کند.

به درستی به‌صورت شرطی‌ای که مقدّم و تالیش شامل سورهای متفاوتند علامتی می‌شود:

(∃ x) [x در خانه غلط رفته است] ⇒ (y)
[(y کسی است که در خانه هست) ⇒ (y شکایت می‌کند)] .

دراین‌جا برد سور اولی از علامت استلزام اصلی نمی‌گذرد. اما اگر به قضیّهٔ دیگری که شباهتی ظاهری به قضیّهٔ اوّل دارد توجه کنیم:

اگر چیزی غلط باشد در این صورت باید اصلاح شود.

علامتی کردن آن به‌صورت:

(∃ x) [x غلط است] ⇒ (x باید اصلاح شود)

ناصحیح است. زیرا از آن‌جا که برد سور اوّل در علامت استلزام پایان می‌پذیرد، ظهور « x » در تالی **نمی‌تواند** رجوع به‌این سور داشته باشد زیرا در برد آن قرار نمی‌گیرد. دراین حال ظهور آزاد متغیری داریم، که بدین معنی است که علامتی شده موردبحث، قضیّه، و بنابراین ترجمهٔ مناسب گزارهٔ داده شده نیست. این خطا را نمی‌توان **به‌طور ساده** بابسط برد سور اول تا آخر پرانتز دوم اصلاح کرد، زیرا عبارت علامتی:

(∃ x) [(x غلط است) ⇒ (x باید اصلاح شود)]

گرچه قضیّه‌است، به‌همان معنی قضیّهٔ اوّل در فارسی نیست، و به‌جای آن صرفاً چنین می‌گوید که حداقل یک چیز موجود است که درصورتی که غلط است باید اصلاح شود، درحالی که مفهوم جملهٔ فارسی به‌طور واضح این است که **هرچیز** که غلط است باید اصلاح شود. در نتیجه علامتی شدهٔ صحیح، هیچ یک از دو علامتی شدهٔ قبل نیست، بلکه

(x) [(x غلط است) ⇒ (x باید اصلاح شود)]

است.

وضعیت هنگامی پیچیده‌تر، اما نه متفاوت در اصل، می‌شود که سوری **در برد سوری دیگر** رخ دهد. در این مورد باید همان زنگ خطر علیه متغیرهای سرگردان یا بی تسویر[۳] به‌صدا درآید. قضیّهٔ

اگر چیزی گم شده است در این صورت اگر کسی به پلیس اطلاع ندهد کسی ناراحت خواهدشد.

به‌طور صحیح به صورت:

(∃ x) [x گم شده است.] ⇒
{(y) [(y شخصی است) ⇒ ~ (y به پلیس اطلاع می‌دهد)] ⇒
(∃ z) [(z شخصی است) ∧ (z ناراحت خواهد شد)]}

علامتی می‌شود. درحالی که قضیّهٔ بعد، که شباهت ظاهری با آن دارد.

اگر چیزی گم شده‌است در این‌صورت اگر کسی به پلیس اطلاع ندهد پیدا نخواهدشد.

نباید به‌صورت:

(∃ x) [x گم شده است] ⇒ { (y) [(y شخصی است) ⊃ ~
(y به پلیس اطلاع می‌دهد)] ⇒ ~ (x پیدا خواهدشد) }

علامتی شود زیرا ظهور اخیر متغیر « x » خارج از برد سور اوّل، و سرگردان مانده‌است. این صورت را نمی‌توان تنها با دوباره پرانتز قراردادن به‌صورت زیر تصحیح کرد:

(∃ x) {(x گم شده‌است) ⇒ {(y) [(y شخصی است) ⇒ ~
(y به‌پلیس اطلاع می‌دهد)] ⇒ ~ (x پیدا خواهدشد)}}

زیرا این عبارت، به‌همان طریق مثال قبل و به‌طور مساوی باآن از حفظ مفهوم جملهٔ فارسی قاصر است. این مفهوم بافرمول:

(x) {(x گم شده‌است) ⇒ {(y) [(y شخصی است) ⇒ ~
(y به پلیس اطلاع می‌دهد)] ⇒ ~ (x پیدا خواهدشد)}}

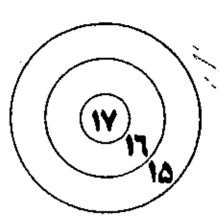
که علامتی شدهٔ صحیحی از قضیهٔ مفروض است بیان می‌شود.

مرجع:

Symbolic Logic . Irving M. Copi

یادداشتها:

1. Two different variables
2. Incorrect
3. Unquantified



تفریح اندیشه ۳

چند مرتبه باید به هدف واقع در شکل تیراندازی شود و به کدام دوایر باید اصابت کند، تا دقیقاً ۱۰۰ امتیاز به‌دست آید؟

جواب در صفحهٔ ۸۸

مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان (۱۲)

اصول جدید هندسه با نظریهٔ کامل موازیها

(اقتباس)

از مجلهٔ: QUANTOM

■ ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

عموماً چنین در نظر گرفته می‌شود که نظریّه موازیها در هندسه تاکنون ناقص باقی مانده است. کوششهای بی‌فایده‌ای که از زمان اقلیدس به بعد، در دوره‌ای دو هزار ساله، انجام گرفته‌اند به این گمانم انداخت که مفاهیم مفروض، شامل حقیقتی، که اشخاص سعی در اثبات آن داشته‌اند، نیست و این مطلب را می‌توان مانند قوانین فیزیکی دیگر، تنها با استفاده از تجربه ـ فی‌المثل، با رصدهای نجومی ـ محقق کرد. سرانجام از درستی حدسم متقاعد شدم، و در حالی‌که این مسألهٔ مشکل را به‌طور کامل حل شده در نظر گرفته بودم، در سال ۱۸۲۶ مقاله‌ای راجع به این موضوع نوشتم[۱]. کاربرد این نظریّه جدید در هندسهٔ تحلیلی را می‌توان در مقالاتی تحت عنوان «راجع به اصول هندسه» «On the Elements of Geometry» چاپ شده در خلاصهٔ مذاکرات دانشگاه قازان مربوط به سالهای ۱۸۲۹ و ۱۸۳۰ ، نیز یافت. نتیجهٔ اصلی‌ای که من، با فرض اینکه خطوط وابسته به زوایایند، به آن رسیدم، موجودیت هندسه‌ای در مفهومی وسیعتر از آنچه که ابتدا توسط اقلیدس ارائه شده، را مجاز می‌کند. دانش مضمون در این صورت توسیع یافته را هندسهٔ انگاری نامیدم. این هندسه، شامل هندسهٔ عملی با محدودیت واقع در مفروضات معمول مورد نیاز در اندازه‌گیری واقعیش، به‌صورت حالت خاصی از آن، است. اثبات کفایت اصول جدید[۲] را در اثری، که اندکی پیش از این، در خلاصهٔ مذاکرات دانشگاه قازان به چاپ رسیده، به عهده گرفتم. در آن ایام، در حالی‌که مایل به رسیدن به این هدف، اگر نه از طریقی مستقیم، حداقل از کوتاه‌ترین مسیر قهقرایی، بودم، ترجیح می‌دادم که از طریق بنیادهای فرضی به معادلات مربوط به جمیع روابط و عبارات مربوط به هر کمیتی هندسی، اقدام کنم. و در صورتی که کشف من، فایده‌ای جز ترمیم نقصی در تز اصلی نمی‌داشته، دست کم، توجهی که به‌طور دائم به این موضوع مبذول می‌شده، وادارم می‌کند که شرحی مستوفا ارائه دهم. در این‌صورت کار را با بررسی نظریّه‌های قبلی آغاز می‌کنم.

به‌سادگی اثبات می‌شود که دو خط مستقیم، متمایل با زاویه‌ای یکسان نسبت به خط سوم، از آن‌جا که بدین‌ترتیب، بر یک خط عمودند، هیچ‌گاه تلاقی نمی‌کنند. در مقابل، اقلیدس بر این فرض بود، دو خط به‌طور نامساوی متمایل نسبت به خط سوم، باید همواره متقاطع شوند. اشخاص به‌خاطر متقاعد شدن در مورد درستی گزارهٔ اخیر، از وسایل متفاوتی، از قبیل کوشش پیشاپیش در یافتن مجموع زوایای مثلث، یا مقایسهٔ صفحات نامتناهی در دهانه‌های زوایای مورد بحث و بین عمودها[۳]، یا مجاز شمردن وابستگی زوایا تنها به مقدار اضلاع[۴]، یا، سرانجام، دادن ویژگیهای جدیدی، علاوه بر تعریف خط راست، به آن، استفاده به عمل آوردند. گرچه بعضی از براهین مزبور را می‌توان زیرکانه نامید، اما جمیع آنها نادرستند ـ ناکافی در اساس و فاقد دقت مطلوب ـ؛ برهانی در میان آنها وجود ندارد که، با ترکیب کردن سادگی و قاطعیت؛ بتواند به مبتدیان معرفی شود.

لژاندر، در سال ۱۸۰۰، سومین پرداختهٔ هندسه‌اش را، که در آن این قضیّه را که مجموع زوایای واقع در هر مثلث نمی‌تواند بیشتر از π ـ یعنی، دو زاویهٔ قائمه ـ باشد نتیجه گرفته بود، به چاپ رساند. در آن‌جا این را نیز به اثبات رسانده بود که مجموع زوایای مذکور نمی‌توانند کمتر از π باشند، اما او از این واقعیت غفلت کرده بود که خطوط مزبور می‌توانند از یکدیگر، بدون تشکیل مثلثی، بگذرند و در این‌صورت اندازهٔ مجموع زوایای مورد بحث، مستخرج از روش دیگر، نوعی یاوه می‌شود. بنا به همین علت است که لازم نمی‌دانم وارد تفصیلات خطایی شوم که خود لژاندر آن را با گفتن اینکه، در

حالی که مبناهای انتخاب شده جای اعتراض ندارند پذیرفته است، با بعضی از موانعی که نتوانسته بر آنها غالب آید مواجه شده است. لژاندر در *Compte rendus* * آکادمی فرانسه در ۱۸۳۳ این قضیّه را اضافه کرده که مجموع زوایای مزبور، در صورتی که در مثلثی π باشد، باید در جمیع مثلثها π باشد. برایم لازم بوده که همین مطلب را در نظریّه‌ای، که در حدود ۱۸۲۶ نوشتم، ثابت کنم. حتی تصور می‌کنم که لژاندر چندین بار خود را بر همان مسیری که من با چنان توفیق اختیار کرده‌ام یافته است؛ اما شک نیست که طرفداری تعصب‌آمیز از مفروضات عموماً پذیرفته شده، به‌طور مداوم او را وادار به گرفتن نتیجه‌ای یا پر کردن رخنه‌های حاصل به طریقی که حتی با فرض جدید ناپذیرفتنی بوده، ساخته است...

اندیشهٔ قبول این مفهوم که زوایای مثلث باید به مقدار اضلاع بستگی داشته باشند، به عنوان اساس نظریّه موازیها پدیدار شد. در نظر اوّل چنین فرضی به اندازهٔ لازم بودنش ساده می‌نماید؛ اما چون در مفاهیممان غور کنیم و دریابیم که بر مبنای چه بنا شده‌اند، آنگاه وادار خواهیم شد که آنها را به همان اندازهٔ جمیع موارد دیگری که قبلاً در اختیار داشته‌ایم، دلخواه بنامیم. در طبیعت، به‌طور مستقیم، تنها حرکت را، که بدون آن نمی‌توان هیچ چیز را از طریق حواس درک کرد، درمی‌یابیم. بنابراین جمیع مفاهیم دیگر ـ و فی‌المثل، مفاهیم هندسی ـ توسط ذهنمان و به گونه‌ای مصنوعی ایجاد و به‌صورت جنبه‌هایی از حرکت در نظر گرفته شده‌اند؛ بنابراین، فضا به خودی خود، و به‌طور جداگانه، برایمان وجود ندارد. بنابراین، هنگامی که فرض می‌کنیم، بعضی از نیروهای واقع در طبیعت از یک هندسه و نیروهای دیگر از هندسهٔ خاص خودشان پیروی می‌کنند، تناقضی در ذهنمان پدید نمی‌آید.[5] برای واضحتر کردن ایدهٔ مورد بحث، فرض می‌کنیم که، چنان که غالب مردم عقیده دارند، نیروهای جاذبه چون در امتداد کره‌ای انتشار یابند، ضعیف شوند. در هندسه عملی مساحت کره، به ازای نیم‌قطر r، به‌صورت $4\pi r^2$ در نظر گرفته می‌شود، بنابراین نیروی مورد بحث باید در مقدار، به‌صورت معکوس مربع فاصله کاهش یابد. در هندسهٔ انگاری‌ای که بنا می‌نهم رویهٔ کره

$$\pi(e^r - e^{-r})^2$$

است، و ممکن است چنین باشد که نیروهای مولکولی‌ای که اختلافشان وابسته به عدد e (همواره بی‌نهایت بزرگ) است، از هندسه‌ای چنین تبعیت کنند[6]. ...

اگر قرار باشد که مسألهٔ مشکل توازی از لحاظ تجربی حل شود، در این صورت، باید بدون هیچ شکی روش طرح شده توسط لژاندر ـ شش بار قرار دادن یک نیم‌قطر حول یک دایره ـ ناکافی در نظر گرفته شود. در اصول هندسه «*Elements of Geometry*» ام، با استفاده از رصدهای نجومی، ثابت کرده‌ام که در مثلثی، با اضلاع به بزرگی فاصلهٔ زمین از خورشید، مجموع زوایای داخلی نمی‌تواند از دو زاویهٔ قائمه به اندازه‌ای بیش از ۰/۰۰۰۰۰۳ ثانیه از یک درجه اختلاف داشته باشد. اختلاف مزبور از لحاظ هندسی با اضلاع مثلث مورد بحث تغییر می‌کند، و بنابراین هندسهٔ عملی قبلاً به کار رفته، همان گونه که پیش از این هم متذکر شدم، چیزی بیش از کافی برای اندازه‌گیریهای واقعی است. شخص می‌تواند به چنین نتیجه‌ای، با استفاده از قضایایی که به قدر کفایت ساده و با اساس این دانش سازگارند، برسد، گرچه نظریّه‌ای کامل بر این خواست است که توالی مسیر تعلیم تغییر یابد و مثلثات به آن افزوده شود.

از کم‌آمدهای نظریّهٔ موازیها تعریف خود توازی است. اما کم‌آمد مزبور، برخلاف گمان نابه‌جای لژاندر، به هیچ وجه، نه به هر گونه نقصی در تعریف خط، نه بر نقصهایی که ـ خود افزوده‌ام و ـ در مفاهیم اوّلیّه پنهان‌اند و من در صدد خاطرنشان کردن و در حد توانایی، تصحیح‌شان هستم، وابسته‌اند.

معمولاً شخص هندسه را با دادن سه کشیدگی به اجسام، دو کشیدگی به رویه‌ها، یک کشیدگی به خطوط، و هیچ کشیدگی به نقطه آغاز می‌کند. اشخاص، با طول، عرض، و ارتفاع نامیدن سه کشیدگی مزبور، و به معنی سه مختص در نظر گرفتن این اسامی، در انتقال این مفهوم نابهنگام با کلماتی که زبان روزمره به آنها معنی معینی می‌دهد که برای علوم دقیقه غیرقطعی است، تعجیل روا می‌دارند. در واقع، چگونه شخص می‌تواند بدون دانستن اینکه خط مستقیم چیست، اندازه‌گیری طول را تصور کند[7]؟ وچگونه شخص می‌تواند بدون اینکه پیشاپیش سخنی در مورد عمودها، یا صفحات، یا در مورد عمودهای در یک صفحه و در صفحات مختلف، گفته باشد، چیزی در مورد عرض یا ارتفاع بیان کند؟ سرانجام، در صورتی که در نقطه به هیچ وجه کشیدگی‌ای موجود نیست، آن وقت چه چیزی در آن باقی می‌ماند تا نقطه را موضوع بررسی قرار دهد؟ بگذارید چنین تقریر کنیم که هر آدمی به گونه‌ای آشکار خط مستقیم را به تصور در می‌آورد، بدون اینکه توضیحی در مورد چگونگی آن دهد؛ اما اکنون، شخص با به کار بردن خط مستقیم، چگونه به کار تخصیص دادن یک کشیدگی به خط خمیده و دو کشیدگی به رویهٔ خمیده می‌پردازد؟

سخنی درست است که لزومی ندارد بخواهیم تا طول، عرض، و

ارتفاع دو به دو متعامد باشند: کافی است که آنها را به صورت خطوطی در سوهای مختلف در نظر بگیریم. اما این حالت، مشکلات خاص خود را به همراه می‌آورد. با حفظ این قاعده که از مفاهیمی که باید بعداً مطرح شوند استفادهٔ پیشاپیش نکنیم، این سؤال پیش می‌آید: چگونه باید این خواسته را که سه بعد اجسام به سه خط راست واقع در صفحات مختلف متعلق باشند، بیان کنیم؟ به علاوه، سوهای متفاوت دو پاره‌خط، از نقطه‌ای که خط در آن می‌شکند، نباید با کشیدگی دوگانهٔ واقع در صفحه اشتباه شود. و سرانجام، چگونه باید به گونه‌ای کفایت‌آمیز، آنچه را که از «سو» یا «زاویه» مقصود داریم، تعریف کنیم؟ در مجموع: فضا، کشیدگی، مکان، جسم، رویه، خط، نقطه، سو، و زاویه کلماتی‌اند که هندسه با آنها آغاز می‌شود، اما هیچ‌گاه درکی واضح با آنها همراه نبوده است.

اما، ممکن است که جمیع این اشیا از جهتی دیگر نظر بیفکنیم. در این‌جا شخص باید به خاطر داشته باشد که ابهام موجود در این مفاهیم به علت تجریدی است که، چون آنها را در اندازه‌گیریهای واقعی به کار بریم، زائد می‌شود. و، بنابراین، به دلایلی که مناسبت نداشته‌اند داخل نظریه شده‌اند. رویه‌ها، خطوط، و نقاط، چنان که در هندسه تعریف شده‌اند، تنها در تصورمان موجودند، اما هنگامی که اندازه‌گیریهای واقعی رویه‌ها و خطوط را انجام می‌دهیم، از اجسام استفاده می‌کنیم. به این علت است که باید دربارهٔ رویه‌ها، خطوط، و نقاط تنها آن‌گونه که در اندازه‌گیریهای واقعی دانسته می‌شود، سخن گوییم، و در این صورت می‌توانیم مفاهیمی را نگه داریم که در ذهنمان به‌طور مستقیم با مفهوم اجسام در ارتباطند، و تصورمان با آنها خو کرده است، و می‌توانیم در طبیعت به‌طور مستقیم و بدون در بر گرفتن سایر مفاهیمی که مصنوعی و بیگانه‌اند، محققشان کنیم. اما علم مورد بحث، با مفاهیم جدید مزبور، از همان ابتدا مسیر تازه‌ای به دست می‌آورد که از آن تا زمانی که به هندسهٔ تحلیلی حرکت کند، پیروی می‌کند. بنابراین روش آموزش جنبه‌ای کاملاً متفاوت به خود می‌گیرد. و من بر این جهدم که توضیح دهم که این تبدیل چه نوع تبدیلی است.

دو رهیافت در ریاضیات موجودند: تحلیل و ترکیب. جنبهٔ متمایزکنندهٔ تحلیل عبارت از معادلاتی است که به عنوان اوّلین اساس هر اظهار به کار می‌رود و به جمیع نتایج منجر می‌شود. ترکیب، یا روش ترسیم، آن نمایشی را می‌خواهد که در ذهنمان به‌طور مستقیم با اوّلین مفاهیم (یعنی، مفاهیم اساسی) مرتبط است. فایدهٔ اصلی تحلیل این است که، با شروع از معادلات، شخص همواره به‌طور مستقیم به‌سوی هدف در نظر گرفته شده حرکت می‌کند. ترکیب تابع هیچ قاعدهٔ کلی‌ای نیست، اما شخص لزوماً باید از ترکیب، در حالی که معادله‌ای به دست آورده، برای رسیدن به خط مرزی آغاز کند که پس از آن همه چیز به‌سوی دانش اعداد رو می‌آورد. به عنوان مثال، شخص در هندسه اثبات می‌کند که دو خط عمود تقاطع نمی‌کنند؛ یا اگر بعضی از اجزای مثلثها مساوی باشند، آنگاه آن مثلثها مساوی می‌شوند. اما سعی در بررسی تحلیلی حالاتی چنین، یا کل نظریهٔ موازیها بی‌فایده است. رهیافتی چنین، هیچ‌گاه موفقیت‌آمیز نخواهد بود، درست همان‌گونه که شخص نمی‌تواند در اندازه‌گیری صفحات با خطوط راست مشخص شده، یا در اندازه‌گیری اجسام با صفحات مشخص شده، از ترکیب اجتناب کند. این موضوع اثبات می‌کند که در ترکیب شخص باید برای کمک به تحلیل رو آورد؛ با وجود این، مسلم است که تحلیل هیچ‌گاه نمی‌تواند تنها وسیله در اساسیات هندسه و مکانیک باشد. هندسه تا اندازه‌ای، همواره شامل چیزی مطلقاً هندسی است که نمی‌تواند از آن جدا شود. شخص می‌تواند برد ترکیب راتحدید کند، اما حذف کامل آن غیرممکن است. اما حتی در کوشش برای قرار دادن تحلیل به جای ترکیب، شخص نبایستی تا آن اندازه عجول باشد که هر دفعه، زمانی که تنها امکان داشته باشد که یک وابستگی را بی‌دانستن آن‌که شامل چیست، و به کنار از چگونگی بیان کردنش، پیش‌بینی کند، به معرفی توابع بپردازد. باتحدید بر تحلیل فوق، هدف درست و مکان صحیح را برای روش دیگری مشخص می‌کنیم که دانش مورد بحث را صرفاً بر چنان مفاهیمی بنیاد می‌نهد، که عمل برهان با استفاده از آن، جمیع موارد دیگر را، با استنتاج داده‌های جدید از داده‌های اصلی و با وسیع کردن حدود معرفت به گونه‌ای نامتناهی و در تمام جهات، استخراج می‌کند. داده‌های اصلی مورد بحث، بدون شک مفاهیمی هستند که در طبیعت از طریق حواسمان به دست می‌آوریم، و ذهنمان می‌تواند و باید آنها را به کمترین تعداد، چنان که بتوانند به عنوان بنیانی استوار به خدمت دانش درآیند، تحویل کند. اما معمولاً کسی رهیافت ترکیبی از این دست را، با تبعیت از جمیع قواعد مذکور در این‌جا، پیروی نمی‌کند؛ مردم ترجیح می‌دهند که تحلیل را حتی اگر نابه‌هنگام باشد، بپذیرند، و توسعهٔ البته ناکامل، مفاهیمی را پذیرا شوند که ذهن طبیعیمان را می‌سازند و نیاز به داشتن نامهایی دارند، و این کار را بدون وارد شدن به توضیحات بسیار و دردسر کشیدن از دقیق شدن تعریف آنها انجام می‌دهند. اما اگر سهولت و سادگی وادارمان می‌کند که چنان روش تعلیمی را اختیار کنیم، حقیقت متین و استوار همواره مزیت خود را که

گه‌گاه به‌کار بردنش ضروری است، دارد.

یادداشتها:

۱. اوّلین صورت هندسهٔ لُباچوِشکی در سال ۱۸۲۳ تکمیل شد، اما اولیای دانشگاه قازان اجازهٔ نشر آن را ندادند. در بیست و سوم فوریهٔ ۱۸۲۶، لباچوسکی گزارشی تحت عنوان «بیانیهٔ مختصری راجع به اصول هندسه همراه با اثبات دقیق قضیهٔ مربوط موازیها» «A Brief Statement of the Elements of Geometry with a Rigorous Proof of the Theorem on Parallels» در جلسهٔ دپارتمان فیزیک و ریاضی ارائه داد، اما این گزارش نیز به چاپ نرسید. تنها در سال ۱۸۲۹ بود که اثری که اقتباس این مقاله از آن است، در خلاصهٔ مذاکرات دانشگاه قازان «*Proceedings of Kazan University*» چاپ شد.

۲. در این‌جا «ابتداها»، همان‌گونه که از یونانی اقلیدس به انگلیسی ترجمه شد، به‌صورت «اصول» به ترجمه آمده است؛ در جاهای دیگر، هر جا که زمینهٔ بحث اقتضا کند، آن را به صورت «بنیادها» ترجمه کرده‌ایم.

۳. «perpendicule» که صورت قدیمیتر عبارت «perpendicular» است.

۴. مقدار ضلع.«content of a side» در این‌جا به معنی طول ضلع به کار رفته است.

* نشریه‌ای که در آن شرح و معرفی کتابهاست.

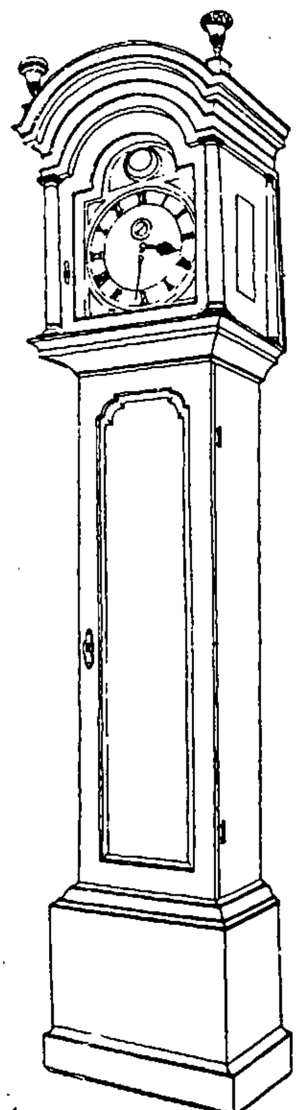
۵. این کلمات را می‌توان به‌عنوان پیشگویی در نظر گرفت: چنان‌که اکنون بخوبی آشکار شده، فضای ذرات نسبیتی ـ یعنی، ذرات متحرک با سرعتی نزدیک بسرعت نور ـ از احکام هندسهٔ لُباچوِشکی تبعیت می‌کنند.

۶. در این‌جا لُباچوِشکی حرف e را برای نمایش مبنای دستگاه لگاریتمهای طبیعی به کار نمی‌برد، بلکه، e عددی است که، توسط فرمول r= ۱ lne ، با دایره‌ای به شعاع r مربوط است.

۷. نواقص تعریف «ساده‌لوحانهٔ» اقلیدسی («خط طولی است بدون پهنا»، و غیره) از مدتها پیش مشخص شده بودند. انتقادهای سازندهٔ آغاز قرن بیستم در میان مطالب بسیار دیگر، موضوعات غیرمتعارفی چون خم پئانو را، که از جمیع نقاط یک مربع می‌گذرد، و خمهایی را که در هیچ جا مشتق‌پذیر نیستند، مطرح کرد.

تفریح اندیشه ۴

برای این که یک ساعت دیواری سه ضربه بزند چهار ثانیه لازم دارد. برای این‌که ساعت مزبور ۹ ضربه بزند به چه مدت نیاز دارد؟



جواب در صفحهٔ ۸۸

مبانی کامپیوتر و برنامه‌نویسی با BASIC (۳)

● حسین ابراهیم‌زادهٔ قُلزم

تبدیلات و محاسبات ریاضی در مبناهای ۲ و ۸ و ۱۶

همان‌گونه که می‌دانید برای نمایش[1] اعداد در مبنای ۱۰ از رقمهای[2] صفر تا ۹ استفاده می‌کنیم و هر عدد در مبنای[3] ۱۰ با ترکیبی از این ده رقم ساخته می‌شود. در مبنای ۲ تنها از دو رقم ۰ و ۱ استفاده می‌شود. در سیستم دهدهی[4] ارزش مکانیِ[5] رقم ستون اوّل از سمت راست برابر یک و ارزش مکانی رقم ستون بعدی به اندازهٔ ده برابر ستون قبلی‌اش است. بطور کلی در این مبنای، ارزش مکانی هر ستون از سمت راست دو برابر ستون قبلی‌اش است. ستونهای مبنای دو از سمت راست به چپ به صورت یکان، دوگان، چهارگان، هشت‌گان، شانزده‌گان و ... نامگذاری می‌شوند.

نمایش اعداد ۵ و ۱۳ و ۳۱ در مبنای ۲ و ۱۰؛ به‌ترتیب زیراست:

مبنای ۲					مبنای ۱۰
یکان	دوگان	چهارگان	هشت‌گان	شانزدگان	
۱	۰	۱			۵
۱	۰	۱	۱		۱۳
۱	۱	۱	۱	۱	۳۱

تبدیل اعداد از مبنای ۱۰ به‌مبنای ۲

برای تبدیل[6] اعدادِ مبنای ۱۰ به مبنای ۲ می‌توان از دو روش مختلف موسوم به روشِ استفاده از تقسیمهای متوالی[7] و روشِ استفاده از تفریقهای متوالی استفاده کرد.

الف ـ روشِ استفاده از تقسیمهای متوالی. در این روش بااستفاده از تقسیمهای متوالی عدد بر ۲، تا زمانی که باقی‌مانده[8] و خارج قسمت[9] تقسیمها کوچکتر از ۲ نشده‌است می‌توان معادل یک عدد در مبنای ۱۰ را در مبنای ۲ به دست آورد. بعداز به پایان رسیدن عملیات تقسیم، باقی‌مانده‌ها و خارج قسمت را به‌ترتیب از پائین به بالا و از چپ به راست در کنار هم قرار می‌دهیم. عدد حاصل معادل دودویی عددِ مبنای ۱۰ است. توجه دارید که در این روش باقی‌ماندهٔ اوّلین تقسیم بر ۲، همیشه سمت راست‌ترین[10] رقم آن عدد مبنای ۲ و خارج قسمت آخرین تقسیم، سمت چپ‌ترین[11] رقم آن عدد در مبنای ۲ را تشکیل می‌دهد.

مثال ۱ : معادل عدد[12] (۳۶۷)$_{۱۰}$ را در مبنای ۲ به‌دست آورید.

حل :

اولین رقم از سمت راست ۱ = باقی‌مانده	۳۶۷ : ۲ = ۱۸۳
۱ = باقی‌مانده	۱۸۳ : ۲ = ۹۱
۱ = باقی‌مانده	۹۱ : ۲ = ۴۵
۱ = باقی‌مانده	۴۵ : ۲ = ۲۲
۰ = باقی‌مانده	۲۲ : ۲ = ۱۱
۱ = باقی‌مانده	۱۱ : ۲ = ۵
۱ = باقی‌مانده	۵ : ۲ = ۲
اولین رقم از سمت چپ ۰ = باقی‌مانده	۲ : ۲ = ۱

در نتیجه: $(۳۶۷)_{۱۰} = (۱۰۱۱۰۱۱۱۱)_{۲}$

ب ـ روش استفاده از تفریقهای متوالی : بایک مثال روش تبدیل اعداد از مبنای ۱۰ به مبنای ۲ را بااستفاده از تفریقهای متوالی[13] توضیح می‌دهیم.

مثال ۲ : معادل عدد (۳۶۷)$_{۱۰}$ را بااستفاده از روش تفریقهای متوالی به مبنای ۲ به‌دست آورید.

حل: ابتدا توانهای مختلف عدد ۲ را می‌نویسیم:

$$۲^۰ = ۱ \qquad ۲^۶ = ۶۴$$
$$۲^۱ = ۲ \qquad ۲^۷ = ۱۲۸$$
$$۲^۲ = ۴ \qquad ۲^۸ = ۲۵۶$$
$$۲^۳ = ۸ \qquad ۲^۹ = ۵۱۲$$
$$۲^۴ = ۱۶ \qquad ۲^{۱۰} = ۱۰۲۴$$
$$۲^۵ = ۳۲ \qquad ۲^{۱۱} = ۲۰۴۸$$

حال باتوجه به این‌که عدد ۳۶۷ بین دو عدد ۲۵۶ و ۵۱۲ است عمل تفریق را از کوچکترین عدد این فاصله یعنی عدد $۲۵۶ = ۲^۸$ شروع می‌کنیم. در روش تفریقهای متوالی برای تبدیل عدد داده شده عدد ۳۶۷ را به‌ترتیب از $۲۵۶ = ۲^۸$ و توانهای پایینتر از هشتِ عدد ۲ کم می‌کنیم و در هر قسمت که مفروق[14] از مفروق منه[15] بیشتر شد عمل تفریق را انجام می‌دهیم و برای آن مرحله، عدد ۱ را ثبت می‌کنیم. درغیر این‌صورت عمل تفریق را انجام نمی‌دهیم و برای آن قسمت عدد ۰ را ثبت می‌کنیم. این‌کار را تا آن‌جا ادامه می‌دهیم تا به پایین‌ترین توان غیر منفیِ عدد ۲ یعنی به توان صفر برسیم. آنگاه اعداد ثبت شده در مراحل بالایی را به‌ترتیب از سمت چپ به راست کنار هم قرار می‌دهیم. عدد حاصل، معادلِ عدد داده شده در مبنای ۲ است.

حال باتوجه به مطالب گفته شدهٔ بالا داریم:

سمت چپ‌ترین رقم

۱ = عدد ثبت شده	$۳۶۷ - ۲^۸ = ۳۶۷ - ۲۵۶ = ۱۱۱$
۰ = عدد ثبت شده	$۱۱۱ - ۲^۷ = ۱۱۱ - ۱۲۸ =$
۱ = عدد ثبت شده	$۱۱۱ - ۲^۶ = ۱۱۱ - ۶۴ = ۴۷$
۱ = عدد ثبت شده	$۴۷ - ۲^۵ = ۴۷ - ۳۲ = ۱۵$
۰ = عدد ثبت شده	$۱۵ - ۲^۴ = ۱۵ - ۱۶ =$
۱ = عدد ثبت شده	$۱۵ - ۲^۳ = ۱۵ - ۸ = ۷$
۱ = عدد ثبت شده	$۷ - ۲^۲ = ۷ - ۴ = ۳$
۱ = عدد ثبت شده	$۳ - ۲^۱ = ۳ - ۲ = ۱$
۱ = عدد ثبت شده	$۱ - ۲^۰ = ۱ - ۱ = ۰$

سمت راست‌ترین رقم

در نتیجه:

$$(۳۶۷)_{۱۰} = (۱۰۱۱۰۱۱۱۱)_۲$$

تبدیل اعداد از مبنای ۲ به‌مبنای ۱۰

برای تبدیل اعداد از مبنای ۲ به‌مبنای ۱۰ کافی است تک تک ارقام عدد داده شده در مبنای ۲ را در ارزش مکانی آن رقم ضرب کرده، سپس حاصل ضربها را باهم جمع کنیم. یعنی اگر: $d_۰ d_۱ \ldots N_۱$ d_{m-} = یک عدد در مبنای ۲ باشد معادل این عدد در مبنای ۱۰ عبارت است از:

$$M = \sum_{i=۰}^{m-۱} d_i \times ۲^i \qquad ، \qquad d_i \in \{۰ , ۱\}$$

مثال ۳: معادل عدد $(۱۰۱۱۰۱۱۱۱)_۲$ را در مبنای ۱۰ به‌دست آورید.

حل:

$$\begin{aligned}(۱۰۱۱۰۱۱۱۱)_۲ &= ۱ \times ۲^۰ + ۱ \times ۲^۱ + ۱ \times ۲^۲ + ۱ \\ &\times ۲^۳ + ۰ \times ۲^۴ + ۱ \times ۲^۵ + ۱ \times ۲^۶ \\ &+ ۵ \times ۲^۷ + ۱ \times ۲^۸ \\ &= ۱ + ۲ + ۴ + ۸ + ۰ + ۳۲ + ۶۴ \\ &+ ۰ + ۲۵۶ \\ &= ۳۶۷ = (۳۶۷)_{۱۰}\end{aligned}$$

بنابراین:

$$(۱۰۱۱۰۱۱۱۱)_۲ = (۳۶۷)_{۱۰}$$

تبدیل‌اعداد ازمبنای ۲به‌مبنای ۸بدون‌استفاده‌ازمبنای ۱۰

در این روش تبدیل از رابطهٔ برابری $۸^۱ = ۲^۳$ استفاده می‌کنیم. به‌این معنی که در این تبدیلِ مبنا، هر سه رقم مبنای ۲ از سمت راست معادل یک رقم در مبنای ۸ است.

روش کار به این صورت است که برای تبدیل یک عدد از مبنای ۲ به مبنای ۸، عدد دو دویی[16] داده‌شده را از سمت راست به چپ، به‌دسته‌های سه‌تایی تقسیم می‌کنیم و هر دستهٔ سه‌تایی را به‌طور مستقل به یک عدد در مبنای ۱۰ تبدیل می‌کنیم. به‌این ترتیب عدد داده شده از مبنای ۲ به مبنای ۸ تبدیل می‌شود.

مثال ۴: معادل عدد $(۱۱۰۱۰۱۱۱۱)_۲$ را در مبنای ۸ به‌دست آورید.

حل: ابتدا عدد ۱۱۰۱۰۱۱۱۱ را از سمت راست به چپ به دسته‌های سه‌تایی تقسیم می‌کنیم، داریم:

$$(۱۱۰/۱۰۱/۱۱۱)_۲ \equiv (\boxed{۱۱۰}\ \boxed{۱۰۱}\ \boxed{۱۱۱})_۲$$

حال هر دسته را به‌طور مستقل به مبنای ۱۰ تبدیل می‌کنیم:

$$(۱۱۱)_۲ = ۱ \times ۲^۰ + ۱ \times ۲^۱ + ۱ \times ۲^۲ = ۱ + ۲ + ۴ = ۷$$
$$(۱۰۱)_۲ = ۱ \times ۲^۰ + ۰ \times ۲^۱ + ۱ \times ۲^۲ = ۱ + ۰ + ۴ = ۵$$

$$(۱۱۰)_۲ = ۰ \times ۲^۰ + ۱ \times ۲^۱ + ۱ \times ۲^۲ = ۰ + ۲ + ۴ = ۶$$

به‌این ترتیب:

$$(۱۱۰۱۰۱۱۱۱)_۲ = (\boxed{۱۱۰}_۲ \ \boxed{۱۰۱}_۲ \ \boxed{۱۱۱}_۲)_۸$$
$$= (۶۵۷)_۸$$

تبدیل اعداد از مبنای ۸ به مبنای ۲ بدون استفاده از مبنای ۱۰

در این روش تبدیل، ابتدا هر رقمِ عدد داده‌شده در مبنای ۸ را به‌طور مستقل به‌مبنای ۲ تبدیل می‌کنیم به‌طوری که در تبدیل برای هر رقم مبنای ۸، سه رقم در مبنای ۲ ایجاد شود. به‌این صورت:

$(۱)_۸ = (۰۰۱)_۲$ $\qquad (۵)_۸ = (۱۰۱)_۲$

$(۲)_۸ = (۰۱۰)_۲$ $\qquad (۶)_۸ = (۱۱۰)_۲$

$(۳)_۸ = (۰۱۱)_۲$ $\qquad (۷)_۸ = (۱۱۱)_۲$

$(۴)_۸ = (۱۰۰)_۲$

و به‌دنبال تبدیل اوّلیهٔ بالا، ارقام دستهٔ سه‌تاییِ مبنای ۲ را در کنار هم قرار می‌دهیم و حاصل تبدیل عدد داده‌شده از مبنای ۸ به‌مبنای ۲ است.

مثال ۵ : معادلِ عدد $(۲۰۳۴۷)_۸$ را در مبنای ۲ به‌دست آورید.

حل : ابتدا ارقام عدد داده‌شده در مبنای ۸ را از سمت راست به چپ به‌طور مستقل به‌مبنای ۲ تبدیل می‌کنیم:

$(۷)_۸ = (۱۱۱)_۲$

$(۴)_۸ = (۱۰۰)_۲$

$(۳)_۸ = (۰۱۱)_۲$

$(۰)_۸ = (۰۰۰)_۲$

$(۲)_۸ = (۰۱۰)_۲$

حال در عدد ۲۰۳۴۷ به‌جای هر رقم، معادل دو دویی آن را می‌نویسیم و داریم:

$$(۲۰۳۴۷)_۸ = (\boxed{۰۱۰}_۲ \boxed{۰۰۰}_۲ \boxed{۰۱۱}_۲ \boxed{۱۰۰}_۲ \boxed{۱۱۱}_۲)$$
$$= (۰۱۰۰۰۰۰۱۱۱۰۰۱۱۱)_۲$$
$$= (۱۰۰۰۰۰۱۱۱۰۰۱۱۱)_۲$$

تبدیل اعداد ممیزدار از مبنای ۲ به‌مبنای ۱۰

هر عدد ممیزدار[17] مبنای ۲ از دو قسمت صحیح[18] و کسری[19] (یا قسمت بعداز ممیز) تشکیل‌شده‌است. برای تبدیل این‌گونه اعداد از مبنای ۲ به‌مبنای ۱۰، کافی است هرقسمت را به‌طور مستقل به‌مبنای ۱۰ تبدیل کرده، آنگاه نتیجه‌ها را باهم جمع کنیم یا در کنار هم بنویسیم.

به‌یاد داشته‌باشید که ارزش اوّلین رقمِ بعداز ممیز یک عدد در مبنای ۲، درتبدیل به‌مبنای ۱۰، $۲^{-۱}$ و ارزش n امین رقم بعداز ممیز در این تبدیل ۲^{-n} است.

مثال ۶ : معادل عدد $(۱۱۰۱/۱۱۱۰)_۲$ را در مبنای ۱۰ به‌دست آورید.

حل : داریم:

$$(۱۱۰۱/۱۱۱۰)_۲ = (۱۱۰۱)_۲ + (۰/۱۱۱۰)_۲$$

که در تساوی بالا، عدد ۱۱۰۱ قسمت صحیح و عدد ۰/۱۱۱۰ قسمت کسری یا ممیزدار عدد ۱۱۰۱/۱۱۱۰ ۱/ تشکیل می‌دهد.

اکنون هرقسمت را به‌طور مستقل در مبنای ۱۰ می‌نویسیم:

$$(۱۱۰۱)_۲ = ۱ \times ۲^۰ + ۰ \times ۲^۱ + ۱ \times ۲^۲ + ۱ \times ۲^۳$$
$$= ۱ + ۰ + ۴ + ۸ = ۱۳$$

$$(۰/۱۱۱۰)_۲ = ۱ \times ۲^{-۱} + ۱ \times ۲^{-۲} + ۱ \times ۲^{-۳}$$
$$+ ۰ \times ۲^{-۴} = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} + ۰$$
$$= ۰/۵ + ۰/۲۵ + ۰/۱۲۵ = ۰/۸۷۵$$

درنتیجه :

$$(۱۱۰۱/۱۱۱۰)_۲ = ۱۳ + ۰/۸۷۵ = ۱۳/۸۷۵ = (۱۳/۸۷۵)_{۱۰}$$

تبدیل اعداد اعشاری از مبنای ۱۰ به مبنای ۲

می‌دانیم هر عدد اعشاریِ مبنای ۱۰ از دو قسمت صحیح و قسمت اعشاری تشکیل شده‌است. برای تبدیل این‌گونه اعداد از مبنای ۱۰ به‌مبنای ۲، کافی است هر قسمت را به‌طور مستقل به‌مبنای ۲ تبدیل کرده آنگاه نتیجه‌ها را با هم جمع کنیم یا در کنار هم بنویسیم.

روش تبدیل قسمت صحیح یک عدد اعشاری از مبنای ۱۰ به‌مبنای ۲، کار ساده‌ای است که شرح آن در اوّلین قسمت این بخش آمده‌است.

اما برای تبدیل قسمت اعشاری عددِ مبنای ۱۰ به‌مبنای ۲، قسمت اعشاری عدد داده شده را به‌طور متوالی در عدد ۲ ضرب کرده، پس از انجام عمل ضرب، قسمت صحیح حاصل ضرب راکه صفر یا یک است به عنوان یک رقم قسمت ممیزدارِ این تبدیل یادداشت می‌کنیم و به‌دنبال آن قسمت اعشاریِ عدد اخیر را در ۲ ضرب می‌کنیم و این کار را تا چند مرحله ادامه می‌دهیم.

مثال ۷: معادل عدد $(۳۶۷/۶۸۴۳)_{۱۰}$ را به‌مبنای ۲ به‌دست آورید.

حل: داریم: $(۳۶۷/۶۸۴۳)_{۱۰} = (۳۶۷)_{۱۰} + (۰/۶۸۴۳)_{۱۰}$

حال هر قسمت را بطور مستقل به‌مبنای ۲ تبدیل می‌کنیم.

با مراجعه به مثال ۱ این بخش داریم:

$$(۳۶۷)_{۱۰} = (۱۰۱۱۰۱۱۱۱)_{۲}$$

اما: $(۰/۶۸۴۳)_{۲} = (\ ?\ )_{۲}$

حال در تبدیل مبنا، قسمت اعشاری عدد داده شده یعنی ۰/۶۸۴۳ را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$۰/۶۸۴۳ \times ۲ = ۱/۳۶۸۶$$

۱ را به‌عنوان اوّلین رقمِ این تبدیل در سمت راست نقطهٔ دو دویی یادداشت می‌کنیم یعنی: ۰/۱.

اکنون نیز قسمت اعشاری عدد بالا را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$۰/۳۶۸۶ \times ۲ = ۰/۷۳۷۲$$

۰ را به‌عنوان دومین رقم این تبدیل، در سمت راست رقم قبلی یادداشت می‌کنیم یعنی: ۰/۱۰

و همینطور برای: $۰/۷۳۷۲ \times ۲ = ۱/۴۷۴۴$

۱ را به‌عنوان سومین رقم این تبدیل، در سمت راستِ رقم قبلی یادداشت می‌کنیم یعنی: ۰/۱۰۱

و $۰/۴۷۴۴ \times ۲ = ۰/۹۴۸۸$

۰ را به‌عنوان چهارمین رقم این تبدیل، درسمت راست رقم قبلی یادداشت می‌کنیم یعنی: ۰/۱۰۱۰

و $۰/۹۴۸۸ \times ۲ = ۱/۸۹۷۶$

۱ را به‌عنوان پنجمین رقم این تبدیل، درسمت راست رقم قبلی یادداشت می‌کنیم یعنی: ۰/۱۰۱۰۱

و $۰/۸۹۷۶ \times ۲ = ۱/۷۹۵۲$

۱ را به‌عنوان ششمین رقم این تبدیل، در سمت راست رقم قبلی یادداشت می‌کنیم یعنی به‌صورت ۰/۱۰۱۰۱۱. عمل ضرب در ۲ را می‌توان تاچند مرحلهٔ دیگر نیز ادامه داد که ما تا همین ۶ رقمِ بعداز اعشار بسنده می‌کنیم.

در نتیجه داریم: $(۰/۶۸۴۳)_{۱۰} = (۰/۱۰۱۰۱۱)_{۲}$

بدین ترتیب در نهایت داریم:

$$\begin{aligned}(۳۶۷/۶۸۴۳)_{۱۰} &= (۳۶۷)_{۱۰} + (۰/۶۸۴۳)_{۱۰}\\ &= (۱۰۱۱۰۱۱۱۱)_{۲} + (۰/۱۰۱۰۱۱)_{۲}\\ &= (۱۰۱۱۰۱۱۱۱/۱۰۱۰۱۱)_{۲}\end{aligned}$$

توجه دارید که اعداد در کامپیوتر به صورت مبنای ۲ نمایش داده می‌شوند. از آن‌جا که در کامپیوتر طول خانهٔ حافظه[۲۰] برای نمایش اعداد اعشاری محدود است از این رو طبق محاسبات انجام شده در تبدیل بالا، اعداد اعشاری را نمی‌توان به‌طور دقیق در مبنای ۲ نمایش داد به عبارت دیگر اعداد اعشاری به‌صورتِ تقریبی، در حافظهٔ کامپیوتر ذخیره می‌شوند. این‌گونه نمایش نادقیق اعداد اعشاری در حافظهٔ کامپیوتر یکی از منابع ایجاد خطا[۲۱] در محاسبات[۲۲] کامپیوتری است.

با ارائه چند مثال متنوع بحث این قسمت را به پایان می‌رسانیم:

مثال: اگر هر کلمهٔ حافظه از ۱۶ بیت تشکیل شده باشد نمایش هریک از اعداد صحیح زیر را در یک کلمه بنویسید:

الف) $۲^{۱۵} - ۱ = (۲ - ۱)(۲^{۱۴} + ۲^{۱۳} + \dots + ۲^{۱} + ۱)$

زیرا از ریاضیات داریم:

$$x^{n} - ۱ = (x - ۱)(x^{n-۱} + x^{n-۲} + \dots + x + ۱)$$

که دراین جا $x = ۲$ و $n = ۱۵$. بنابراین

$$\begin{aligned}۲^{۱۵} - ۱ &= ۲^{۱۴} + ۲^{۱۳} + \dots + ۲ + ۱ = ۱ \times ۲^{۱۴} + ۱\\ &\times ۲^{۱۳} + \dots + ۱ \times ۲^{۱} + ۱ \times ۲^{۰}\\ &= \underbrace{(۱۱۱ \dots ۱۱)_{۲}}_{\text{۱۵ رقم}}\end{aligned}$$

که نمایش بیتی آن چنین است:

بیت علامت	$۲^{۱۴}$	$۲^{۱۳}$	$۲^{۱۲}$	$۲^{۱۱}$	$۲^{۱۰}$	$۲^{۹}$	$۲^{۸}$	$۲^{۷}$	$۲^{۶}$	$۲^{۵}$	$۲^{۴}$	$۲^{۳}$	$۲^{۲}$	$۲^{۱}$	$۲^{۰}$
۰	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

ب) $۱ - ۲^{۱۵}$

داریم: $۱ - ۲^{۱۵} = -(۲^{۱۵} - ۱)$

چون عدد $(۲^{۱۵} - ۱) -$ یک عدد منفی است پس عدد داده‌شده دارای همان نمایش $۲^{۱۵} - ۱$ است با این تفاوت که عدد داده شده یک عدد منفی است یعنی بیت علامت آن یک می‌باشد.

بیت علامت															
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

این عدد منفی است پس در بیت علامتِ عدد، یک داریم:

ج) $-۲^{۱۳}$

$$-۲^{۱۳} = ۱ \times ۲^{۱۳} + ۰ \times ۲^{۱۲} + ۰ \times ۲^{۱۱} + \dots + ۰ \times ۲^{۱} + ۰ \times ۲^{۰}$$

$$= -\underbrace{(۱۰۰۰ \dots ۰۰)_{۲}}_{\text{۱۴ رقم}}$$

بیت علامت

↓

۱	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰

د) -۱۲۷

$$-۱۲۷ = -۱۲۸ + ۱ = -(۱۲۸ - ۱) = -(۲^{۷} - ۱)$$

$$= -(۲^{٦} + ۲^{۵} + ۲^{۴} + ۲^{۳} + ۲^{۲} + ۲^{۱} + ۱)$$

$$= -(۱ \times ۲^{٦} + ۱ \times ۲^{۵} + ۱ \times ۲^{۴} + ۱ \times ۲^{۳} + ۱ \times ۲^{۲} + ۱ \times ۲^{۱} + ۱ \times ۲^{۰})$$

$$= -\underbrace{(۱۱۱۱۱۱۱)_{۲}}_{\text{۷ رقم}}$$

نمایش بیتی عدد ۱۲۷− در دو بایتِ حافظه چنین است:

۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

↑

بیت علامت

هـ) -۲۵٦

$$-۲۵٦ = -۲^{۸} = -(۱ \times ۲^{۸} + ۰ \times ۲^{۷} + \ldots + ۰ \times ۲^{۱} + ۰ \times ۲^{۰})$$

$$= -\underbrace{(۱۰۰۰ \ldots ۰۰)}_{\text{۹ رقم}}$$

باتوجه به مثالهای حل شدهٔ بالا، براحتی می‌توانید عدد داده‌شده را در حافظه نمایش دهید.

و) ۱۰۲۳

$$۱۰۲۳ = ۱۰۲۴ - ۱ = ۲^{۱۰} - ۱ = ۲^{۹} + ۲^{۸} + \ldots + ۲^{۱} + ۲^{۰}$$

$$= \underbrace{(۱۱۱ \ldots ۱۱)_{۲}}_{\text{۱۰ رقم}}$$

ز) -۴۰۹٦

$$-۴۰۹٦ = -۲^{۱۲} = -(۱ \times ۲^{۱۲} + ۰ \times ۲^{۱۱} + \ldots + ۰ \times ۲^{۱} + ۰ \times ۲^{۰}) = -\underbrace{(۱۰۰۰ \ldots ۰۰)_{۲}}_{\text{۱۳ رقم}}$$

تمرین: برابریهای ۱ و ۲ زیر را باتوجه به مثالهای حل شده ثابت کنید.

۱ـ بااستفاده از روش تقسیمهای متوالی

$(۲۵٦)_{۱۰} = (۱۰۰۰۰۰۰۰۰)_{۲}$

۲ـ ب: بااستفاده از روش تفریقهای متوالی

$(٦۴۰)_{۱۰} = (۱۰۱۰۰۰۰۰۰۰)_{۲}$

۳ـ ثابت کنید: $(۱۰۰۱۰۰۱۰۰)_{۲} = (۲۹۲)_{۱۰}$

۴ـ ثابت کنید: $(۱۰۱۱۰۱۱۰۱۱۰۱)_{۲} = (۲۹۲۵)_{۱۰}$

۵ـ ثابت کنید: $(۱۱۰۱۰۱۱۱۰)_{۲} = (٦۵٦)_{۸}$

٦ـ ثابت کنید: $(۱۵۷)_{۸} = (۱۱۰۱۱۱۱)_{۲}$

۷ـ ثابت کنید: $(۱۱۰۰۱/۱۰۱۱۱۱)_{۲} = (۲۵/۷۳۴۳۷۵)_{۱۰}$

۸ـ ثابت کنید: $(۲۵/۳۷۵)_{۱۰} = (۱۱۰۰۱/۰۱۱)_{۲}$

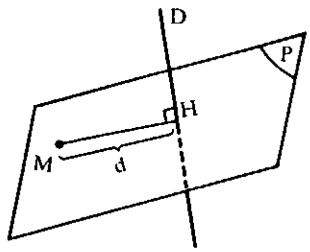
* واژه‌نامهٔ ریاضی و کامپیوتر

1 - Representation
2 - Digit
3 - Base
4 - Decimal system
5 - Place value
6 - Conversion
7 - Successive Division
8 - Remainder
9 - Quotient
10 - Rightmost
11 - Leftmost
12 - Equivalent
13 - Successive Subtraction
14 - Subtrahend
15 - Minuend
16 - Binary
17 - Floating Point
18 - Integer Part
19 - Fractional Part
20 - Memory
21 - Error
22 - Computations

فاصلهٔ نقطه از خط در فضا

● محمد هاشم رستمی

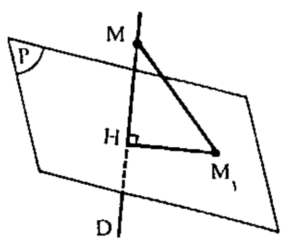
نقطهٔ M و خط D را در نظر می‌گیریم.از نقطهٔ M صفحهٔ P را بر خط D عمود می‌کنیم و پای عمود را نقطهٔ H می‌نامیم. از M به H وصل می‌کنیم. پاره‌خط MH را فاصلهٔ نقطهٔ M از خط D می‌نامند. به‌طور کلی می‌توان گفت:



فاصلهٔ یک نقطه از یک خط در فضا، طول پاره‌خطی است محصور بین آن نقطه و نقطهٔ تقاطع آن خط با صفحه‌ای که از آن نقطه بر آن خط عمود می‌شود.

محاسبهٔ فاصلهٔ نقطه از خط ـ برای محاسبهٔ فاصلهٔ نقطه $M_۱(x_۱ , y_۱ , z_۱)$ از خط $D: \frac{x-x_۰}{p}=\frac{y-y_۰}{q}=\frac{z-z_۰}{r}$ به یکی از راه‌های زیر می‌توان عمل کرد:

راه اوّل: معادلات پارامتری خط D را به دست می‌آوریم. این معادلات مختصات یک نقطه مانند $M(x , y , z)$ از این خط می‌باشند. آنگاه طول پاره‌خط $M_۱M$ را محاسبه کرده، به کمک مشتق، کمترین مقدار آن را محاسبه می‌کنیم.



$$D:\frac{x-x_۰}{p}=\frac{y-y_۰}{q}=\frac{z-z_۰}{r}=t\Rightarrow M\left|\begin{array}{l}x=pt+x_۰\\y=qt+y_۰\\z=rt+z_۰\end{array}\right., M_۱\left|\begin{array}{l}x_۱\\y_۱\\z_۱\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow d=M_۱M$$

$$=\sqrt{(pt+x_۰-x_۱)^۲+(qt+y_۰-y_۱)^۲+(rt+z_۰-z_۱)^۲}\Rightarrow d'=\dots$$

مثال: فاصلهٔ نقطهٔ $M_۱$ (۱,۲,۳) رااز خط $D: \frac{x-۱}{۲}=\frac{y+۱}{۲}=\frac{z-۲}{۱}$ به‌دست آورید.

حل:

$$\frac{x-۱}{۲}=\frac{y+۱}{۲}=\frac{z-۲}{۱}=t\Rightarrow M\left|\begin{array}{l}x=۲t+۱\\y=۲t-۱\\z=t+۲\end{array}\right. , M_۱\left|\begin{array}{l}۱\\۲\\۳\end{array}\right.$$

$$d=M_۱M=\sqrt{(۲t+۱-۱)^۲+(۲t-۱-۲)^۲+(t+۲-۳)^۲}$$

$$\Rightarrow M_۱M=d=\sqrt{۹t^۲-۱۴t+۱۰}$$

$$\Rightarrow (M_۱M)'=d'=\frac{۱۸t-۱۴}{۲\sqrt{۹t^۲-۱۴t+۱۰}}$$

$$,d'=۰\Rightarrow ۱۸t-۱۴=۰\Rightarrow t=\frac{۷}{۹}\Rightarrow \boxed{d=\frac{\sqrt{۴۱}}{۳}}$$

و پای عمود نقطهٔ $H(\frac{۲۳}{۹} , \frac{۵}{۹} , \frac{۲۵}{۹})$ است.

راه دوم: معادلهٔ صفحه‌ای را که از نقطهٔ $M_۱$ بر خط D عمود می‌شود می‌نویسیم و با معادلهٔ خط D قطع می‌دهیم تا مختصات نقطهٔ H پای عمود مرسوم از $M_۱$ بر خط D به‌دست آید. آنگاه طول پاره‌خط $M_۱H$ را محاسبه می‌کنیم.

حل: بردار هادی خط D .

$$D: \frac{x-۲}{۳} = \frac{y}{۲} = \frac{z+۱}{۴} \Rightarrow \vec{V}(۳ , ۲ , ۴)$$

$$\Rightarrow |\vec{V}| = \sqrt{۹+۴+۱۶} = \sqrt{۲۹} \qquad A \in D , x = ۲$$

$$\Rightarrow y = ۰ \ , z = -۱$$

$$\Rightarrow A(۲ , ۰ , -۱) , M_۱(-۱ , ۲ , -۳) \Rightarrow \overrightarrow{M_۱A}(۳ , -۲ , ۲)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{M_۱A} \wedge \vec{V}(-۱۲ , -۶ , ۱۲)$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{M_۱A} \wedge \vec{V}| = \sqrt{۱۴۴+۳۶+۱۴۴} = ۱۸$$

$$\Rightarrow M_۱H = \frac{|\overrightarrow{M_۱A} \wedge \vec{V}|}{|\vec{V}|} = \frac{۱۸}{\sqrt{۲۹}} = \frac{۱۸\sqrt{۲۹}}{۲۹}$$

$$\Rightarrow \boxed{M_۱H = \frac{۱۸\sqrt{۲۹}}{۲۹}}$$

مثال ۲: فاصلهٔ نقطهٔ $A(۲, ۳, -۱)$ رااز خط $D: \begin{cases} x = t+۱ \\ y = t+۲ \\ z = ۴t+۱۳ \end{cases}$ به‌دست آورید.

حل:

$$t = -۱ \Rightarrow A_۱ \in D \left| \begin{array}{l} x = ۰ \\ y = ۱ \\ z = ۹ \end{array} \right. , A \left| \begin{array}{l} ۲ \\ ۳ \\ -۱ \end{array} \right. \Rightarrow \overrightarrow{A_۱A} \left| \begin{array}{l} ۲ \\ ۲ \\ -۱۰ \end{array} \right. , \vec{V} \left| \begin{array}{l} ۱ \\ ۱ \\ ۴ \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{A_۱A} \wedge \vec{V} \left| \begin{array}{l} ۱۸ \\ -۱۸ \\ ۰ \end{array} \right. \Rightarrow AH = \frac{|\overrightarrow{A_۱A} \wedge \vec{V}|}{|\vec{V}|} = \frac{\sqrt{۱۸^۲+۱۸^۲}}{\sqrt{۱+۱+۱۶}}$$

$$= \frac{۱۸\sqrt{۲}}{۳\sqrt{۲}} = ۶$$

مثال ۳: ثابت کنید که دو خط $D: \frac{x+۳}{۳} = \frac{y-۲}{-۱} = \frac{z-۶}{۴}$ و $D': \begin{cases} ۲x+۲y-z-۱۰=۰ \\ x-y-z-۲۲=۰ \end{cases}$ متوازی‌اند و فاصلهٔ بین این دو خط موازی را حساب کنید.

حل: معادلهٔ کانونیک خط D' را به‌دست می‌آوریم.

$$۲ \begin{cases} ۲x+۲y-z-۱۰=۰ \\ x-y-z-۲۲=۰ \end{cases} \Rightarrow ۴x-۳z-۵۴=۰ \Rightarrow \frac{x}{۳} = \frac{z+۱۸}{۴}$$

$$- \begin{cases} ۲x+۲y-z-۱۰=۰ \\ x-y-z-۲۲=۰ \end{cases} \Rightarrow x+۳y+۱۲=۰ \Rightarrow \frac{x}{۳} = \frac{y+۴}{-۱}$$

بردار هادی خط D' $\Rightarrow \frac{x}{۳} = \frac{y+۴}{-۱} = \frac{z+۱۸}{۴} \Rightarrow \vec{V'} \left| \begin{array}{l} ۳ \\ -۱ \\ ۴ \end{array} \right.$

بردار هادی خط D $\quad D: \frac{x+۳}{۳} = \frac{y-۲}{-۱} = \frac{z-۶}{۴} \Rightarrow \vec{V} \left| \begin{array}{l} ۳ \\ -۱ \\ ۴ \end{array} \right.$

$$\vec{V} \| \vec{V'} \Rightarrow D \| D' \quad \text{یا} \quad \frac{p}{p'} = \frac{q}{q'} = \frac{r}{r'} \Rightarrow \frac{۳}{۳} = \frac{-۱}{-۱} = \frac{۴}{۴} \Rightarrow D \| D'$$

برای محاسبهٔ فاصلهٔ بین دو خط متوازی کافی است فاصلهٔ نقطه‌ای دلخواه از یک خط را، از خط دیگر به‌دست آوریم.

$$M_۱ \in D(-۳ , ۲ , ۶) , A \in D'(۰ , -۴ , -۱۸)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{M_۱A}(۳ , -۶ , -۲۴) \Rightarrow M_۱H = \frac{|\overrightarrow{M_۱A} \wedge \vec{V}|}{|\vec{V}|}$$

فاصلهٔ بین دو خط موازی D و D' $= \frac{۳\sqrt{۱۰۶۵}}{\sqrt{۲۶}}$

مثال ۴: مقدار m را به قسمی‌بیابید که فاصلهٔ نقطهٔ $M_۱(m , ۲ , -۱)$ از خط $D: \frac{x}{۲} = \frac{y}{-۱} = \frac{z+۳}{۲}$ برابر $۲\sqrt{۲}$ باشد.

حل:

$$M_۱(m , ۲ , -۱) , A \in D(۰ , ۰ , -۳)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{M_۱A}(-m , -۲ , -۲)$$

$$\vec{V}(۲ , -۱ , ۲) \Rightarrow \overrightarrow{M_۱A} \wedge \vec{V}(-۶ , ۲m-۴ , m+۴)$$

$$M_۱H = \frac{|\overrightarrow{M_۱A} \wedge \vec{V}|}{|\vec{V}|} \Rightarrow ۲\sqrt{۲}$$

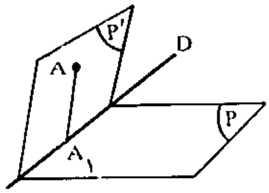
$$= \frac{\sqrt{۳۶+(۲m-۴)^۲+(m+۴)^۲}}{\sqrt{۴+۱+۴} = ۳} \Rightarrow$$

$$۵m^۲ - ۸m - ۴ = ۰ \Rightarrow m = ۲ \text{ و } m = -\frac{۲}{۵}$$

مثال ۵: فاصلهٔ نقطهٔ $A(۰ , ۰ , ۳)$ رااز خط $D: \begin{cases} x-۲y+z-۱=۰ \\ ۳x+y-z+۳=۰ \end{cases}$ به‌دست آورید.

حل: با استفاده از روشهای گفته شده می‌توان فاصلهٔ نقطهٔ A از خط D را محاسبه کرد. امّا اگر $x-۲y+z-۱=۰$ معادلهٔ صفحهٔ P و $۳x+y-z+۳=۰$ معادله صفحهٔ P' باشد، اوّلاً، نقطهٔ A روی

صفحهٔ P' ، واقع‌است زیرا مختصاتش‌در معادلهٔ این‌صفحه صدق می‌کند. $A(۰,۰,۳) \xrightarrow{\text{در معادلهٔ } P'} ۰ + ۰ - ۳ + ۳ = ۰ \Rightarrow ۰ = ۰$



ثانیاً، این دو صفحه بر هم عمودند زیرا:

$$P : x - ۲y + z - ۱ = ۰ \Rightarrow a = ۱ , b = -۲ , c = ۱$$
$$P' : ۳x + y - z + ۳ = ۰ \Rightarrow a' = ۳ , b' = ۱ , c' = -۱$$
$$\Rightarrow aa' + bb' + cc' = ۰ \Rightarrow ۳ - ۲ - ۱ = ۰ \Rightarrow ۰ = ۰$$
$$\Rightarrow P \perp P'$$

بنابراین فاصلهٔ نقطهٔ A از خط D ، همان فاصلهٔ نقطهٔ A از صفحهٔ P است، لذا داریم:

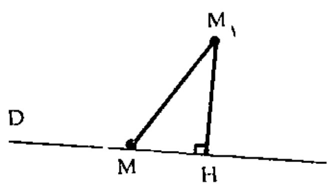
$$AA_۱ = d = \frac{|ax_۱ + by_۱ + cz_۱ + d|}{\sqrt{a^۲ + b^۲ + c^۲}}$$

$$\Rightarrow AA_۱ = d = \frac{|۰ - ۰ + ۳ - ۱|}{\sqrt{۱ + ۴ + ۱}} = \frac{۲}{\sqrt{۶}} = \frac{۲\sqrt{۶}}{۶} = \frac{\sqrt{۶}}{۳}$$

مثال ٦: فاصلهٔ نقطهٔ $M_۱(-۱, ۱, +۲)$ را از خط $D: ۳x - ۶ = -y + ۱ = ۲z$ با روشهای مختلف محاسبه کنید.

حل:

راه اوّل: معادلهٔ پارامتری خط D را به‌دست می‌آوریم.



$$D: \frac{x - ۲}{۲} = \frac{y - ۱}{-۶} = \frac{z}{۳} = t$$

$$\Rightarrow (x = ۲t + ۲ , y = -۶t + ۱ , z = ۳t)$$

$$\Rightarrow M \left| \begin{array}{l} x = ۲t + ۲ \\ y = -۶t + ۱ \\ z = ۳t \end{array} \right. \quad M_۱ \left| \begin{array}{l} -۱ \\ ۱ \\ +۲ \end{array} \right.$$

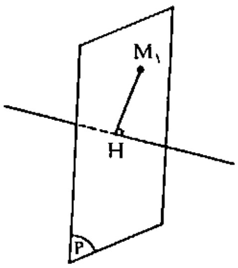
$$\Rightarrow M_۱M = d = \sqrt{(۲t + ۳)^۲ + (-۶t)^۲ + (۳t - ۲)^۲}$$

$$\Rightarrow d = M_۱M = \sqrt{۴۹t^۲ + ۱۳} \Rightarrow d'$$

$$= (M_۱M)' = \frac{۹۸t}{۲\sqrt{۴۹t^۲ + ۱۳}}$$

$$d' = ۰ \Rightarrow t = ۰ \Rightarrow d = \sqrt{۱۳} \Rightarrow \boxed{M_۱H = \sqrt{۱۳}}$$

راه دوم: معادلهٔ صفحه‌ای را که از نقطهٔ $M_۱$ بر خط D عمود می‌شود می‌نویسیم. داریم:



$$D: \frac{x - ۲}{۲} = \frac{y - ۱}{-۶} = \frac{z}{۳} \quad \Rightarrow \vec{V}(۲, -۶, ۳)$$

$$M_۱(-۱, ۱, ۲) \Rightarrow ۲(x + ۱) - ۶(y - ۱) + ۳(z - ۲) = ۰$$

$$\Rightarrow P: ۲x - ۶y + ۳z + ۲ = ۰$$

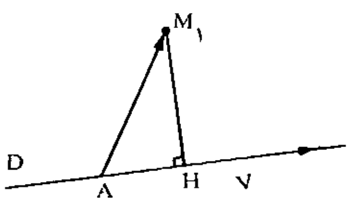
$$\begin{cases} ۲x - ۶y + ۳z + ۲ = ۰ \\ \frac{x - ۲}{۲} = \frac{y - ۱}{-۶} = \frac{z}{۳} = t \end{cases} \Rightarrow ۲(۲t + ۲) - ۶(-۶t + ۱) + ۳(۳t) + ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow t = ۰ \Rightarrow H(۲, ۱, ۰) \Rightarrow d = M_۱H$$

$$= \sqrt{(۲ + ۱)^۲ + (۱ - ۱)^۲ + (۰ - ۲)^۲}$$

$$\Rightarrow d = M_۱H = \sqrt{۱۳}$$

راه سوم: نقطهٔ دلخواه A به‌طول ۴ را روی خط D اختیار می‌کنیم. داریم:

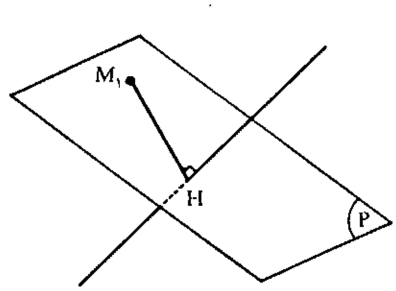


$$A \in D \left| \begin{array}{l} x = ۴ \\ y = -۵ \\ z = ۳ \end{array} \right. \quad M_۱ \left| \begin{array}{l} -۱ \\ ۱ \\ ۲ \end{array} \right. , \quad \vec{V} \left| \begin{array}{l} ۲ \\ -۶ \\ ۳ \end{array} \right. \Rightarrow \overrightarrow{AM_۱} \left| \begin{array}{l} -۵ \\ ۶ \\ -۱ \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{AM_۱} \cdot \vec{V} = -۱۰ - ۳۶ - ۳ = -۴۹ \ , \ |\vec{V}| = \sqrt{۴ + ۳۶ + ۹} = ۷$$

$$\Rightarrow AH = \frac{|\overrightarrow{AM_۱} \cdot \vec{V}|}{|\vec{V}|} = \frac{۴۹}{۷} = ۷ , AM_۱ = \sqrt{۲۵ + ۳۶ + ۱}$$

$$= \sqrt{۶۲} \quad \Rightarrow M_۱H = \sqrt{AM_۱^۲ - AH^۲} = \sqrt{۶۲ - ۴۹} = \sqrt{۱۳}$$



مثال: فاصلهٔ نقطهٔ $M_1(۰ , ۲ , ۱)$ را از خط $D: \frac{x}{۲} = \frac{y-۱}{۱} = \frac{z+۲}{۳}$ محاسبه کنید.

حل: معادلهٔ صفحه‌ای که از نقطهٔ M_1 بر خط D عمود می‌شود به‌صورت $۲(x-۰)+۱(y-۲)+۳(z-۱)=۰$ یا $۲x+y+۳z-۵=۰$ است. زیرا پارامترهای هادی خط D همان تصاویر بردار عمود بر صفحهٔ P می‌باشند. یعنی: $(a=۲ ، b=۱ ، c=۳)$. حال نقطهٔ تقاطع این صفحه با خط D را پیدا می‌کنیم.

$$\begin{cases} P: & ۲x+y+۳z-۵=۰ \\ D: & \frac{x}{۲}=y-۱=\frac{z+۲}{۳}=t \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x=۲t , y=t+۱ , z=۳t-۲)$$

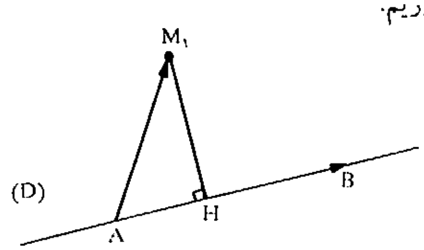
$$\Rightarrow ۲(۲t)+۱(t+۱)+۳(۳t-۲)-۵=۰ \Rightarrow t=\frac{۵}{۷} \Rightarrow$$

$$H\left(\frac{۱۰}{۷},\frac{۱۲}{۷},\frac{۱}{۷}\right) \Rightarrow M_1H$$

$$=\sqrt{\left(\frac{۱۰}{۷}-۰\right)^۲+\left(\frac{۱۲}{۷}-۲\right)^۲+\left(\frac{۱}{۷}-۱\right)^۲} \quad \Rightarrow M_1H=\frac{۲\sqrt{۳۵}}{۷}$$

فاصلهٔ نقطهٔ M از خط D

راه سوم: دو نقطهٔ اختیاری A و B را روی خط D در نظر می‌گیریم. از نقطهٔ M_1 به نقطهٔ A وصل می‌کنیم و از M_1 عمود M_1H را بر خط D فرود می‌آوریم.



در مثلث قائم‌الزاویهٔ AM_1H طول وتر AM_1 با معلوم بودن مختصات دو نقطهٔ A و M_1 (یا تصاویر $\overrightarrow{AM_1}$) و طول ضلع AH به کمک حاصل‌ضرب عددی دو بردار $\overrightarrow{AM_1}$ و $\overrightarrow{AB}$ قابل محاسبه است. زیرا می‌دانیم که حاصل‌ضرب درونی دو بردار برابر است با حاصل‌ضرب اندازهٔ یک بردار در اندازهٔ جبری تصویر بردار دیگر بر روی همان بردار.

$$\overrightarrow{AM_1} . \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| . \overline{AH} \Rightarrow \overline{AH} = \frac{\overrightarrow{AM_1} . \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} \Rightarrow$$

$$AH = \frac{|\overrightarrow{AM_1} . \overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}|}$$

بنابراین طول ضلع M_1H یعنی فاصلهٔ نقطهٔ M_1 از خط D برابر است با:

$$\boxed{M_1H=\sqrt{AM_1^۲-AH^۲}}$$

مثال: فاصلهٔ نقطهٔ $M_1(۲ , -۱ , ۱)$ از خط $D: ۲x+۴=۳y-۳=-z+۳$ را به‌دست آورید.

حل: نقطهٔ A به‌طول ۲− و نقطهٔ B به‌طول ۱ را روی خط D اختیار می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$A\in D \left| \begin{array}{l} x=-۲ \\ y=۱ \\ z=۳ \end{array} \right. \qquad B\in D \left| \begin{array}{l} x=۰ \\ y=\frac{۷}{۳} \\ z=-۱ \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \left| \begin{array}{l} ۰+۲=۲ \\ \frac{۷}{۳}-۱=\frac{۴}{۳} \\ -۱-۳=-۴ \end{array} \right. , \quad M_1 \left| \begin{array}{l} ۲ \\ -۱ \\ ۱ \end{array} \right. \Rightarrow \overrightarrow{AM_1} \left| \begin{array}{l} ۲+۲=۴ \\ -۱-۱=-۲ \\ ۱-۳=-۲ \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM_1} . \overrightarrow{AB} = (۴)(۲)+(-۲)\left(\frac{۴}{۳}\right)+(-۲)(-۴)=\frac{۴۰}{۳}$$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{۴+\frac{۱۶}{۹}+۱۶}=\sqrt{\frac{۱۹۶}{۹}}=\frac{۱۴}{۳}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{|\overrightarrow{AM_1} . \overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}|}$$

$$\Rightarrow AH=\frac{\frac{۴۰}{۳}}{\frac{۱۴}{۳}}=\frac{۲۰}{۷} , |\overrightarrow{AM_1}|=\sqrt{۱۶+۴+۴}=\sqrt{۲۴}=۲\sqrt{۶}$$

$$\Rightarrow M_1H=\sqrt{AM_1^۲-AH^۲}=\sqrt{۲۴-\frac{۴۰۰}{۴۹}}=\frac{۲\sqrt{۱۹۴}}{۷}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{M_1H=\frac{۲}{۷}\sqrt{۱۹۴}}$$ فاصلهٔ نقطه M_1 از خط D

تبصره: به‌جای بردار $\overrightarrow{AB}$ می‌توان بردار هادی خط D را در نظر

گرفت. در این مسأله معادلهٔ کانونیک خط D به‌صورت $\frac{x+۲}{۳}=\frac{y-۱}{۲}=\frac{z-۳}{-۶}$ است، پس بردار هادی خط $\vec{V}(۳,۲,-۶)$ است. بنابراین داریم:

$$A(-۲,۱,۳)\ ،\ M_۱(۲,-۱,۱) \Rightarrow \overrightarrow{AM_۱}(۴,-۲,-۲)$$

$$\overrightarrow{AM_۱}\cdot\vec{V}=(۴)(۳)+(-۲)(۲)+(-۲)(-۶)=۲۰\ ,$$

$$|\vec{V}|=\sqrt{۹+۴+۳۶}=۷ \Rightarrow AH=\frac{|\overrightarrow{AM_۱}\cdot\vec{V}|}{|\vec{V}|}=\frac{۲۰}{۷}\ ,$$

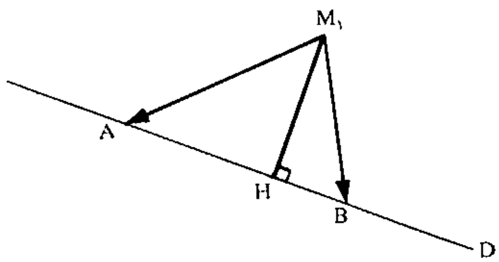
$$|\overrightarrow{AM_۱}|=\sqrt{۱۶+۴+۴}=۲\sqrt{۶}\Rightarrow$$

$$M_۱H=\sqrt{AM_۱^۲-AH^۲}=\sqrt{۲۴-\frac{۴۰۰}{۴۹}}=\frac{۲\sqrt{۱۹۴}}{۷}$$

$$\Rightarrow \boxed{M_۱H=\frac{۲\sqrt{۱۹۴}}{۷}}$$

راه چهارم: دو نقطهٔ دلخواه A و B را روی خط (D) اختیار کرده، از $M_۱$ به A و B وصل می‌کنیم. پاره‌خط $M_۱H$ ارتفاع نظیر ضلع AB از مثلث $M_۱AB$ است. لذا داریم:

$$۲S_{\overset{\Delta}{M_۱AB}}=M_۱H\ .\ AB$$



از طرفی اندازه حاصل‌ضرب خارجی $\overrightarrow{M_۱A}\wedge\overrightarrow{M_۱B}$، دو برابر مساحت مثلث $M_۱AB$ است، $|\overrightarrow{M_۱A}\wedge\overrightarrow{M_۱B}|=۲S_{\overset{\Delta}{M_۱AB}}$ پس:

$$۲S_{\overset{\Delta}{M_۱AB}}=M_۱H.AB=|\overrightarrow{M_۱A}\wedge\overrightarrow{M_۱B}|$$

$$\boxed{\Rightarrow M_۱H=\frac{|\overrightarrow{M_۱A}\wedge\overrightarrow{M_۱B}|}{|\overrightarrow{AB}|}}$$

مثال: فاصلهٔ نقطهٔ $M_۱(-۲,۱,۳)$ را از خط $D:\frac{x+۱}{۲}=\frac{y}{-۱}=\frac{z-۱}{۲}$ محاسبه کنید.

حل: دو نقطهٔ دلخواه A و B از خط D را اختیار می‌کنیم. فرض می‌کنیم $x_A=۱$ و $x_B=-۱$ باشد، در این‌صورت داریم:

$$x=۱\xrightarrow{\text{در معادلهٔ D}}\frac{۱+۱}{۲}=\frac{y}{-۱}=\frac{z-۱}{۲}$$

$$\Rightarrow y=-۱ \text{ و } z=۳ \Rightarrow A(۱,-۱,۳)$$

$$x=-۱\xrightarrow{\text{در معادلهٔ D}}\frac{-۱+۱}{۲}=\frac{y}{-۱}=\frac{z-۱}{۲}$$

$$\Rightarrow y=۰ \text{ و } z=۱ \Rightarrow B(-۱,۰,۱)$$

$$AB=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲+(z_۲-z_۱)^۲}$$

$$=\sqrt{(-۱-۱)^۲+(۰+۱)^۲+(۱-۳)^۲}=۳\Rightarrow\boxed{AB=۳}$$

$$M_۱\left|\begin{matrix}-۲\\۱\\۳\end{matrix}\right.\Rightarrow\ \overrightarrow{M_۱A}\left|\begin{matrix}۱+۲=۳\\-۱-۱=-۲\\۳-۳=۰\end{matrix}\right.\ ,\ \overrightarrow{M_۱B}\left|\begin{matrix}-۱+۲=۱\\۰-۱=-۱\\۱-۳=-۲\end{matrix}\right.$$

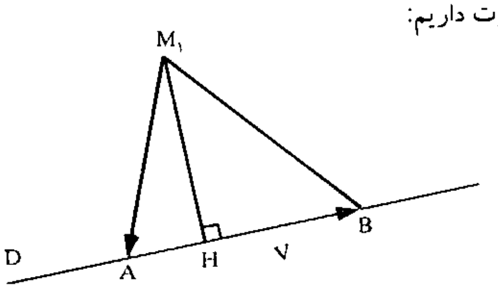
$$\Rightarrow\overrightarrow{M_۱A}\wedge\overrightarrow{M_۱B}(۴-۰,۰+۶,-۳+۲)$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{M_۱A}\wedge\overrightarrow{M_۱B}(۴,۶,-۱)$$

$$\Rightarrow|\overrightarrow{M_۱A}\wedge\overrightarrow{M_۱B}|=\sqrt{۱۶+۳۶+۱}=\sqrt{۵۳}$$

$$\Rightarrow M_۱H=\frac{|\overrightarrow{M_۱A}\wedge\overrightarrow{M_۱B}|}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{\sqrt{۵۳}}{۳}$$

راه پنجم: اگر $\vec{V}(p,q,r)$ بردار هادی خط D باشد و دو نقطهٔ A و B را روی این خط چنان اختیار کنیم که $\overrightarrow{AB}=\vec{V}$ باشد، در این‌صورت داریم:



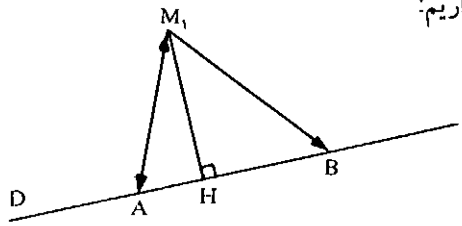
$$۲S_{M_۱AB}=|\overrightarrow{M_۱A}\wedge\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{M_۱A}\wedge\vec{V}|$$

$$=|\overrightarrow{AB}|\ .\ M_۱H=|\vec{V}|\ .\ M_۱H\Rightarrow\boxed{M_۱H=\frac{|\overrightarrow{M_۱A}\wedge\vec{V}|}{|\vec{V}|}}$$

مثال ۱: فاصلهٔ نقطهٔ $M_۱(-۱,۲,-۳)$ را از خط $D:\frac{x-۲}{۳}=\frac{y}{۲}=\frac{z+۱}{۴}$ به‌دست آورید.

$$\Rightarrow \boxed{M_1H=\sqrt{13}}$$

راه چهارم: دونقطهٔ A به‌طول ۲ و B به‌طول ۰ را روی خط D اختیار می‌کنیم. داریم:



$$A\in D \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \\ z=\frac{3}{2} \end{cases} \quad B\in D \begin{cases} x=0 \\ y=7 \\ z=-3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow AB=\sqrt{(0-3)^2+(7+2)^2+\left(-3-\frac{3}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{9+81+\frac{81}{4}}=\frac{21}{2}$$

$$M_1 \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{M_1A} \begin{vmatrix} 4 \\ -3 \\ -\frac{1}{2} \end{vmatrix} ,\overrightarrow{M_1B} \begin{vmatrix} 1 \\ 6 \\ -5 \end{vmatrix}$$

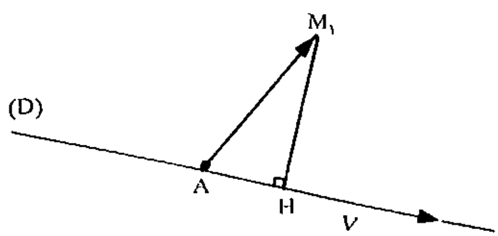
$$\Rightarrow \overrightarrow{M_1A}\wedge\overrightarrow{M_1B} \begin{vmatrix} 18 \\ \frac{39}{2} \\ 27 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow M_1H=\frac{|\overrightarrow{M_1A}\wedge\overrightarrow{M_1B}|}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{\sqrt{324+\frac{1521}{4}+729}}{\frac{21}{2}}$$

$$=\frac{\frac{21\sqrt{13}}{2}}{\frac{21}{2}}=\sqrt{13} \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_1H=\sqrt{13}}$$

راه پنجم: نقطهٔ دلخواه A به‌طول ۱ − را روی خط D اختیار می‌کنیم.

بردار هادی این خط $\vec{V}(2, -6, 3)$ است. پس داریم:



$$A\in D\left(x=-1, y=10, z=\frac{-9}{2}\right) \quad M_1(-1,1,2)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM_1}\left(0,-9,\frac{13}{2}\right), \vec{V}(2,-6,3)\Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AM_1}\wedge\vec{V}(12, 13, 18), |\vec{V}|=\sqrt{4+36+9}=7$$

$$\Rightarrow M_1H=\frac{|\overrightarrow{AM_1}\wedge\vec{V}|}{|\vec{V}|}=\frac{\sqrt{144+169+324}}{7}$$

$$=\frac{7\sqrt{13}}{7}\Rightarrow \boxed{M_1H=\sqrt{13}}$$

تمرین

۱ـ فاصلهٔ نقطهٔ M از خط D را در هریک از حالتهای زیر محاسبه کنید:

الف) $M(-2, 1, 0) \quad , D: \frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-2}$

ب) $M(-1, 0, 2)$, $D: 3x+6=5-2z=y+2$

پ) $M(-1,0,1) \quad , \quad D: \begin{cases} x+2y-z=3 \\ 2x+y=1 \end{cases}$

ت) $M(3,-1,0) \quad , \quad D: \begin{cases} 2x-3=3y-2 \\ z=2 \end{cases}$

ث) $M(-2,3,-1) \quad , \quad D: \begin{cases} x=-3t+1 \\ y=t-2 \\ z=-t+3 \end{cases}$

۲ـ مختصات تصویر قائم نقطهٔ $A(-2, 1, 3)$ روی خط $D: \begin{cases} x=3t \\ y=5t-7 \\ z=2t+2 \end{cases}$ را تعیین کنید.

۳ـ مختصات قرینهٔ نقطهٔ $A(4, 1, 6)$ نسبت به خط $D: \begin{cases} x-y-4z+12=0 \\ 2x+y-2z+3=0 \end{cases}$ را بیابید.

۴ـ مقدار m را چنان‌بیابید که فاصلهٔ نقطهٔ $A(m-1, 3, 0)$ از خط $D: \begin{cases} x-2=3y-6 \\ z=1 \end{cases}$ برابر $\sqrt{6}$ باشد.

۵ـ فاصلهٔ نقطهٔ $M(2, 4, -3)$ از محورهای مختصات را تعیین کنید.

۶ـ فاصلهٔ نقطهٔ $M_1(x_1, y_1, z_1)$ از محورهای مختصات را بیابید.

۷ـ فاصلهٔ بین دو خط متوازی $D: \frac{x+1}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{2}$ و $D': \begin{cases} x=1-4t \\ y=2t+1 \\ z=4t-3 \end{cases}$ را پیدا کنید.

پاسخهای مربوط به مقالهٔ پیش‌گویی و عدد جادویی هفت

● ترجمهٔ حسن نصیرنیا

من پیشاپیش به شما بگویم که پاسخ شما شامل یک ۱، یک ۲، یک ۴، یک ۵، یک ۷ و یک ۸ است که به‌ترتیبی نامشخص در کنار هم قرار گرفته‌اند. عدد مورد نظر شامل هیچ یک از ارقام ۶، ۳ یا ۹ نخواهد بود. اما چگونه من این پاسخ را دریافته‌ام؟ یک روش آن بود که همهٔ محاسبات ارقام ۱ تا ۶ را صرفاً انجام داده، از نتیجه آگاه می‌شدم. اما برای دست یافتن به‌پاسخ می‌توان از یک راه حل کم‌زحمت‌تر سود جست، به این ترتیب:

اگر طبق دستورها عمل کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{7} \times 999{,}999 \times d = \frac{d}{7}(10^6 - 1)$$

$$= \frac{d}{7} \times 10^6 - \frac{d}{7}$$

که در آن d یکی از ارقام ۱ تا ۶ است که به‌دلخواه برگزیده‌ایم. تقسیم ۱/۷، عدد ۰/۱۴۲۸۵۷ را به‌دست می‌دهد و خط افقی بالای آن به این معناست که رشتهٔ رقمهای تشکیل دهندهٔ عدد تکرار می‌شود. ضمن انجام عمل تقسیم دریافتیم که شش باقی‌ماندهٔ نخست (که هیچ یک از آنها صفر نیست) همان شش رقم انتخابی هستند و ششمین باقی‌مانده عدد ۱ است. از آن پس باقی‌مانده‌ها و رقمها همچنان تکرار خواهند شد.

اما در مورد تقسیم ۲/۷، مراحل محاسبه و ارقام به‌دست آمده درست مانند مراحل تقسیم ۱/۷ پس از رسیدن به باقی‌ماندهٔ ۲ است. در آن‌جا دومین باقی‌مانده ۲ بود و در تقسیم ۲/۷ داریم:

۰/۲۸۵۷۱۴ = ۲/۷. چنانچه می‌بینیم، رقمها و ترتیب آنها مانند تقسیم ۱/۷ است، با این تفاوت که رشتهٔ ارقام به‌جای ۱ با ۲ شروع می‌شود. این امر در مورد تقسیمهای ۳/۷، ... و ۶/۷ نیز صدق می‌کند.

حال به این مورد توجه کنید:

۱۰۰۰۰۰۰÷ ۷=۱۴۲۸۵۷/۱۴۲۸۵۷۱۴...

اگر عدد ۱/۷ را که نمایانگر رشته رقمهای بعد از ممیز است، از حاصل کم کنیم، خواهیم داشت ۱۴۲۸۵۷ = ۹۹۹,۹۹۹/۷. با استفاده از مشاهداتمان دربارهٔ محاسبات ۲/۷، ... و ۶/۷ نتیجه می‌گیریم که ۹۹۹,۹۹۹/۷ × ۲ و جز آن، همگی توسط جایگشتهای دوری ۱۴۲۸۵۷ نشان داده می‌شوند. حتی می‌دانیم کدام جایگشت دوری عدد ۱۴۲۸۵۷ است؛ i/۷ آن جایگشت دوری عدد ۱۴۲۸۵۷ است که با i امین رقم کوچکتر این شش رقم شروع می‌شود.

توجه داشته باشید که از ما خواسته شده بود که فقط ثابت کنیم که هر یک از رقمهای ۱ و ۲ و ۴ و ۵ و ۷ و ۸ درست یک‌بار در پاسخ شش رقمی می‌آیند. ما در ضمن ارائهٔ راه‌حل به اطلاعات دقیقتری دربارهٔ آن دست یافتیم. حال اگر جزئیات امر در صورت مسأله بوضوح قید شده بود و مسأله در این قالب نسبتاً کلی و نارسا مطرح نمی‌شد، مخاطب با سهولت بیشتری به‌پاسخ می‌رسید، چه ارائه شرح و بیان تفصیلی روشنتر، سر نخ نهفته در آن ـ یعنی یک دورهٔ تناوب منحصر ـ را آشکار می‌کرد.

شرط عمود بودن و مماس بودنِ یک خط بر مقاطع مخروطی

◆ سیامک جعفری

* دایره

برای پیدا کردن شرطی که بنا به آن خط $y = mx + b$ بر مقطع مخروطی، دایره مماس باشد چنین عمل می‌کنیم. معادله دایره را $x^2 + y^2 = R^2$ بگیرید.

اگر (α , β) نقطه تماس باشد، کاملاً مشخص است که خط $x\alpha + y\beta = R^2$ از نقطه (α , β) می‌گذرد و در همین نقطه بر دایره مماس است. حال اگر با $y = mx + b$ متحد قرار دهیم با مقایسه ضرایب خواهیم داشت:

$$\frac{\alpha}{m} = \frac{\beta}{-1} = \frac{-R^2}{b}$$

نتیجه می‌دهد:

$$\alpha = -\frac{R^2 m}{b} \quad , \quad \beta = \frac{R^2}{b}$$

که در معادله دایره صدق می‌کند.

$$\alpha^2 + \beta^2 = R^2 \Rightarrow (\frac{R^4 m^2}{b^2}) + (\frac{R^4}{b^2}) = R^2$$
$$\Rightarrow R^2(1 + m^2) = b^2$$

رابطه اخیر شرط مماس بودن خط مذکور است و $(-\frac{R^2 m}{b} , \frac{R^2}{b})$ نقطه تماس خواهد بود.

** بیضی

از قبل می‌دانیم معادله مماس بر بیضی در نقطه (x_1 , y_1)، $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$ می‌باشد. این خط باید با $y = mx + h$ متحد باشد و با مقایسه ضرایب خواهیم داشت.

$$\frac{x_1}{a^2 m} = \frac{y_1}{-b^2} = \frac{-1}{h}$$

که نتیجه می‌دهد: $x_1 = -\frac{a^2 m}{h}$ و $y_1 = \frac{b^2}{h}$

این نقطه در معادله بیضی صدق می‌کند:

$$\frac{1}{a^2}(\frac{a^2 m}{h})^2 + \frac{1}{b^2}(\frac{b^2}{h})^2 = 1$$

و نتیجه می‌دهد: $h^2 = a^2 m^2 + b^2$

از رابطه اخیر که شرط تماس خط با بیضی خواهد بود، ملاحظه می‌کنید که

$$y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$$

این شرط را در بر می‌گیرد و بر بیضی مماس می‌شود. نقاط تماس برای خطوط $y = mx + \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$ و $y = mx - \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$ بترتیب به‌صورتِ

$$\left(\frac{a^2 m}{\sqrt{a^2 m^2 + b^2}} , \frac{-b^2}{\sqrt{a^2 m^2 + b^2}}\right) , \left(-\frac{a^2 m}{\sqrt{a^2 m^2 + b^2}} , \frac{b^2}{\sqrt{a^2 m^2 + b^2}}\right)$$

خواهند بود.

*** هذلولی

این شرط برای هذلولی با توجه به شباهتی که با رابطه بیضی دارد به همان ترتیب به‌دست می‌آید: $h^2 = a^2 m^2 - b^2$

**** سهمی

اگر خط $y = mx + h$ بر سهمی $y^2 = 4Rx$ در (x_1 , y_1) مماس باشد، می‌دانیم معادله خط مماس در این حالت بر سهمی در نقطه‌ای واقع بر آن به شکل $yy_1 = 2k(x + x_1)$ می‌باشد که با خط

مذکور متحد خواهد شد، از مقایسه ضرایب نتیجه زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{y_1}{1} = \frac{2k}{m} = \frac{2kx_1}{h}$$

در سهمی صدق می‌کند: $x_1 = \frac{h}{m}$, $y_1 = \frac{2k}{m}$

$$\left(\frac{2k}{m}\right)^2 = 4k\left(\frac{h}{m}\right) \Rightarrow h = \frac{k}{m}$$

معادله خط مماس $y = mx + \frac{k}{m}$ بوده و نقطه تماس $\left(\frac{k}{m^2}\ ,\ \frac{2k}{m}\right)$ می‌باشد.

تست ۱

مرکز یک دایره بر مبدأ مختصات منطبق و این دایره بر خط $3x - 4y + 20 = 0$ مماس است. معادله دایره را پیدا کنید.

۱) $x^2 + y^2 + 16 = 0$

۲) $x^2 + y^2 - 16 = 0$

۳) $x^2 + y^2 - 20 = 0$

۴) $x^2 + y^2 + 20 = 0$

حل:

$$R^2(1+m^2)=b^2 \Rightarrow R^2 = \frac{b^2}{1+m^2} = \frac{\left(\frac{20}{4}\right)^2}{1+\left(-\frac{3}{-4}\right)^2}$$

$$\Rightarrow R = 4$$

جواب ۲ درست است.

تست ۲

خط $x - y - 5 = 0$ بر یک بیضی به کانونهای $F(3\ ,\ 0)$ و $F'(-3\ ,\ 0)$ مماس است. معادله این بیضی را بنویسید.

۱) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{17} = 1$

۲) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$

۳) $\frac{x^2}{17} + \frac{y^2}{8} = 1$

۴) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5} = 1$

حل:

$$h^2=a^2m^2+b^2 \Rightarrow (-5)^2=a^2(1)^2+b^2 \Rightarrow \begin{cases} 25=a^2+b^2 \\ 9 = a^2-b^2 \end{cases}$$

فاصله کانونی C $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{matrix} a^2 = 17 \\ b^2 = 8 \end{matrix}$$

جواب ۳ درست است.

تست ۳

یک هذلولی به معادله $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{8} = -1$ مفروض است. بر این هذلولی مماسهای موازی با خط $2x + 4y - 5 = 0$ مرور داده‌ایم؛ فاصله آنها را حساب کنید.

۱) $2\sqrt{\frac{2}{5}}$

۲) $2\sqrt{\frac{5}{2}}$

۳) $5\sqrt{\frac{2}{5}}$

۴) $2\sqrt{10}$

حل:

$$h^2 = a^2m^2 - b^2 \Rightarrow h^2 = 64\times\left(\frac{2}{4}\right)^2 - 8 = 8$$

$$\Rightarrow h = \pm\sqrt{8}$$

$$d = \frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow d = \frac{|2\sqrt{8}|}{\sqrt{20}} = 2\sqrt{\frac{2}{5}}$$

جواب ۱ درست است.

تست ۴

در چه نقطه‌ای از سهمی به معادله $y^2 - x + 1 = 0$ خط مماس بر آن به موازات خط $2y - x + 1 = 0$ است.

۱) $(2\ \text{و}\ -1)$

۲) $(-2\ \text{و}\ -1)$

۳) $(-2\ \text{و}\ 1)$

۴) $(2\ \text{و}\ 1)$

حل: $y^2 = (x + 1) \Rightarrow k = \frac{1}{4}$

و می‌دانیم که $m = \frac{1}{2}$.

$$\frac{y_1}{1} = \frac{2k}{\frac{1}{2}} = \frac{2k(x_1-2)}{h} \begin{cases} \to y_1 = 4k & \Rightarrow y_1 = 1 \\ \to x_1 = 2h + 2 \end{cases}$$

$$(4k)^2 = (2h+2-1) \Rightarrow 16k^2 = 2h + 1$$

چون $k = \frac{1}{4} \Rightarrow h = 0 \Rightarrow x_1 = 2$

جواب ۴ درست است.

برای پیدا کردن شرط قائم بودن یک خط بر مقطع مخروطی، این مقاطع را مانند حالتی که در بحث مماس ملاحظه کردید جداگانه و در حالت ساده‌ای بررسی می‌کنیم که تعمیم آن مشکل نیست.

* دایره:

برای دایره‌ای به معادله $x^2 + y^2 + 2fx + 2fy + k = 0$ می‌دانیم که خط قائم، $y = mx + b$ از مرکز این مقطع می‌گذرد. پس $(-g , -f)$ در معادله این خط صدق می‌کند: $-f = m(-g) + b$

نتیجه می‌دهد $mg - f = b$

** بیضی:

اگر فرض کنیم خط $y = mx + h$ در نقطه (x_1 , y_1) بر بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ عمود باشد آنگاه معادلات زیر متحد هستند:

خط مورد نظر $y = mx + h$

$c^2 = a^2 - b^2$ و خط قائم بر بیضی $\frac{a^2x}{x_1} - \frac{b^2y}{y_1} = c^2$

با مقایسه ضرایب

$$\frac{a^2}{mx_1} = \frac{b^2}{y_1} = \frac{b^2 - a^2}{h}$$

مختصات نقطه تماس به‌دست می‌آید:

$$x_1 = \frac{ha^2}{m(b^2 - a^2)} \quad , \quad y_1 = \frac{hb^2}{b^2 - a^2}$$

امّا نقطه (x_1 , y_1) روی بیضی است.

$$\frac{h^2a^2}{m^2(b^2 - a^2)^2} + \frac{h^2b^2}{(b^2 - a^2)^2} = 1$$

نتیجه می‌دهد

$$h^2 = \frac{m^2(a^2 - b^2)^2}{a^2 + m^2b^2}$$

که همان شرط مورد نظر است.

و دو خط قائم به‌دست می‌آید:

$$y = mx \pm \frac{m\left(a^2 - b^2\right)}{\sqrt{a^2 + m^2b^2}}$$

*** هذلولی:

در این حالت مشابه بیضی، اگر معادله هذلولی به‌صورت $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ باشد آنگاه

$$h^2 = \frac{m^2(a^2 + b^2)^2}{a^2 - m^2b^2}$$

و دو معادلهٔ خط قائم می‌شوند:

$$y = mx \pm \frac{m(a^2 + b^2)}{\sqrt{a^2 - m^2b^2}}$$

** سهمی:

فرض کنیم خط $y = mx + h$ بر سهمی به معادله $y^2 = 4kx$ در نقطه (x_1 , y_1) قائم باشد. آنگاه دو معادله زیر متحد هستند.

$$y = mx + h \quad , \quad y - y_1 = -\frac{y_1}{2k}(x - x_1)$$

با مقایسه ضرایب به‌دست می‌آید:

$$\frac{y_1}{m} = \frac{2k}{-1} = \frac{-2ky_1 - x_1y_1}{h}$$

چون $y_1^2 = 4kx_1$ داریم: $h = -(2km + km^3)$

که رابطه اخیر شرط قائم بر سهمی است.

تست ۱

معادله قطر دایره $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 17 = 0$ را که بر خطی به معادله $5x + 2y - 13 = 0$ عمود است پیدا کنید.

۱) $y = \frac{2}{5}x + \frac{19}{5}$ ۳) $y = -\frac{2}{5}x - 2$

۲) $y = \frac{5}{2}x - \frac{19}{5}$ ۴) $y = -\frac{5}{2}x - 2$

حل:

$$m' = -\frac{5}{2} \Rightarrow m = \frac{2}{5}$$

$$mg - f = b \Rightarrow \frac{2}{5} \times 2 + 3 = b \Rightarrow b = \frac{19}{5}$$

نتیجه اینکه خط مورد نظر می‌شود.

$$y = \frac{2}{5}x + \frac{19}{5}$$

یا با ساده کردن

$$2x - 5y + 19 = 0$$

جواب ۱ درست است.

تست ۲

در خط $y = -x + h$ مقدار h را طوری بدست آورید که خط بر بیضی $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$ عمود باشد.

۱) $h = -3$ ۲) $h = \sqrt{3}$ ۳) $h = -\sqrt{3}$ ۴) $h = \pm 3$

حل:

$$h^2=\frac{m^2\left(a^2-b^2\right)^2}{a^2+m^2b^2} \Rightarrow h^2=\frac{(20-5)^2}{20+5}$$

$$\Rightarrow h^2=\frac{15^2}{25}$$

$$\Rightarrow h=\pm 3$$

جواب ۴ درست است.

تست ۳

خط ۰ = ۴ − x − y بر یک هذلولی به کانونهای (۰ و ۲−)F′ و (۰ و ۲)F عمود است. معادله هذلولی را بنویسید.

۱) $\frac{5x^2}{2}-\frac{5y^2}{3}=-1$　　۳) $\frac{2x^2}{5}-\frac{2y^2}{3}=1$

۲) $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}=1$　　۴) $\frac{2x^2}{5}+\frac{2y^2}{3}=1$

حل: $m=-1$ و $h=-4$ و $a^2+b^2=c^2=4$

$$h^2=\frac{m^2(a^2+b^2)^2}{a^2-m^2b^2} \Rightarrow 16=\frac{16}{a^2-b^2}$$

دستگاه زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases}a^2-b^2=1\\ a^2+b^2=4\end{cases} \Rightarrow a^2=\frac{5}{2}\ ,\ b^2=\frac{3}{2}$$

خواهد شد:

$$\frac{x^2}{\frac{5}{2}}-\frac{y^2}{\frac{3}{2}}=1 \Rightarrow \frac{2x^2}{5}-\frac{2y^2}{3}=1$$

پس جواب ۳ درست است.

تست ۴

بر سهمی به معادله $y^2=12x$ خطی به معادله $y=mx+9$ قائم است. مطلوب است شیب خط و مختصات نقطه تماس:

۱) $m=-1\ ,\ x_1=-3\ y_1=6$　　۳) $m=1\ ,\ x_1=3\ y_1=-6$

۲) $m=-1\ ,\ x_1=3\ y_1=6$　　۴) $m=1\ ,\ x_1=-3\ y_1=6$

حل: $k=3$ و $h=+9$

حدس زده می‌شود که $m=-1$ جواب معادله است.

$$h=-(2km+km^3) \Rightarrow 9=-(6m+3m^3)$$

$$m=-1$$

$$\frac{y_1}{m}=\frac{2k}{-1} \Rightarrow y_1=6$$

$$\Rightarrow y^2=12x \Rightarrow 36=12x \Rightarrow x=3$$

جواب ۲ درست است.

منابع

۱ ـ جبر تحلیلی　غلامرضا عسجدی

۲ ـ جبر پایه　محمد هاشم رستمی

۳ ـ هندسه تحلیلی　کیندل

۴ ـ مجله یکان

۵ ـ مجله برهان

ادب ریاضی

ریاضیات همواره به سبب دو عامل پیشرفت کرده و گسترش یافته است، یکی عامل بیرونی که همانا، نیازهای بشر بوده و کاربرد ریاضیات در علوم دیگر نمایانگر این عامل است و دیگری عامل درونی که همانا، زیبایی ریاضیات است و روابط منطقی حاکم بر اجزای آن که پیدایش نظریه‌ها و شاخه‌های محض در ریاضیات نمایانگر این عامل است که غالباً از آنها نیز مدتی بعد کاربردهایی در علوم دیگر مشاهده می‌شود.

در پیرامون منظومهٔ شمسی*

(یک معمای شگفت‌انگیز، قسمت اول)

● نوشتهٔ مارتین‌گاردنر ● ترجمهٔ حسن نصیرنیا

در این شماره یک حقهٔ سحرآمیز ریاضی - تخیلی را بررسی و آن را به شکل معما مطرح می‌کنیم. پرسشی که در این زمینه مطرح می‌شود، این است که چرا معمای حاضر همواره مصداق دارد؟ اما گفتنی است که شما می‌توانید این معما را به عنوان یک کار برجسته و حیرت‌آور حس ششم خود به دوستان عرضه کنید.

شیوهٔ کلی انجام این سرگرمی در نظر حاضران چنین است: در حالی که شما پشت به حاضران ایستاده‌اید، از یکی از آنان می‌خواهید یک سکهٔ پنج ریالی در یکی از نه خانهٔ نشان داده شده در تصویر زیر بگذارد. بی‌آن‌که صورت خود را برگردانید، با دادن دستورهایی به بازیکن می‌گویید؛ سکهٔ پنج ریالی را به طور تصادفی در خانه‌های مختلف ماتریس مزبور چنان حرکت دهد که گویی این سکه مانند یک سفینهٔ فضایی در منظومهٔ شمسی گشت می‌زند. همگام با صورت گرفتن این حرکتهای تصادفی به بازیکن می‌گویید که برخی از خانه‌ها را با یک سکهٔ دو ریالی مسدود کند. این روند تا بدان‌جا ادامه می‌یابد که سرانجام هشت خانه به وسیلهٔ سکه‌های دو ریالی اشغال می‌شود. در حالی که همچنان پشت به حاضران ایستاده‌اید، می‌توانید به آنان بگویید که هم‌اکنون «سفینهٔ فضایی» در کدام یک از نه سیارهٔ یاد شده مستقر شده است.

حال شما خوانندهٔ عزیز را فرا می‌خوانیم که در این‌جا تأمل کنید و یک سکهٔ پنج ریالی و هشت سکهٔ دو ریالی فراهم آورید تا بازی را جزء به جزء با هم انجام دهیم. البته به جای سکه‌های دو ریالی می‌توانید از دکمه یا هر شیء مشابه دیگر نیز استفاده کنید. اینک من به عنوان افسونگر و شما در نقش ناظر و بازیکن وارد عمل می‌شویم:

عطارد	اورانوس	زهره
مریخ	مشتری	زحل
نپتون	ماه	پلوتون

یکی از نه خانهٔ ماتریس را درنظر بگیرید و سکهٔ پنج ریالی را در آن بگذارید. در انتخاب این خانه شما کاملاً آزادید و آشکار است که من نباید هیچ اطلاعی از آن داشته باشم. هرگاه من دستور حرکت دادن سکهٔ پنج ریالی را دادم، شما فقط می‌توانید هر بار آن را به یکی از خانه‌های مجاور در جهت افقی یا عمودی منتقل کنید. هرگونه حرکت سکه در امتداد قطرها ممنوع است. در هر بار حرکت سکهٔ پنج ریالی، یک حرف خانه‌ای را که اوّل بار سکه را در آن قرار دادید، بلند و شمرده بر زبان می‌آورید. برای مثال، چنانچه بازی را با گذاشتن سکه بر خانهٔ مریخ آغاز کرده‌اید، با تأنی می‌گویید: م - ر - ی - خ. به عبارت دیگر این کلمه را به تفکیک حروف تلفظ می‌کنید و همزمان با ادای هر حرف، سکه را یک خانه به بالا، پایین، راست و یا چپ آن

خانه می‌برید. توجه داشته باشید که با تلفظ هر حرف، تنها یکبار سکه را باید حرکت دهید.

وقتی که کار تلفظ حرفهای کلمهٔ نخستین خانهٔ انتخابی را به پایان رسانیدید، یک سکهٔ دو ریالی در خانهٔ زهره بگذارید. البته من شرط می‌بندم که سکهٔ پنج ریالی، قطع نظر از این‌که شما بازی را از کدام خانه آغاز کنید و یا این‌که در نخستین حرکت آن را به کدام خانه منتقل کنید، هرگز به خانهٔ زهره نخواهد رفت.

از این لحظه به بعد، در هر یک از مرحله‌های «گردش» در منظومهٔ شمسی، «سفینه» را بدون توجه به نام خانه‌ای که سکه در آن جای می‌گیرد، تنها هفت بار حرکت دهید. این حرکتها، مانند مورد پیشین، برحسب تصادف صورت می‌گیرد و فقط محدود به خانه‌هایی هستند که قبلاً اشغال نشده‌اند. پیداست که همگام با گذاشتن سکه‌های دو ریالی روی ماتریس، رفته‌رفته از شمار خانه‌های خالی کاسته می‌شود.

پس از هفت بار حرکت دادن سکهٔ پنج ریالی، یک سکهٔ دو ریالی در مریخ بگذارید. هفت حرکت دیگر انجام بدهید و یک سکهٔ دو ریالی در عطارد بگذارید. آیا تاکنون همهٔ سکه‌های دو ریالی روی خانه‌ها قرار گرفته‌اند؟

- هفت حرکت انجام بدهید. یک سکهٔ دو ریالی در اورانوس بگذارید.
- هفت حرکت انجام بدهید. یک سکهٔ دو ریالی در نپتون بگذارید.
- هفت حرکت انجام بدهید. یک سکهٔ دو ریالی در زحل بگذارید.
- هفت حرکت انجام بدهید. یک سکهٔ دو ریالی در مشتری بگذارید.
- هفت حرکت انجام بدهید. یک سکهٔ دو ریالی در ماه بگذارید.

اگر به دستورات مو به مو عمل کرده باشید، حال باید سکهٔ پنج ریالی روی پلوتون باشد!

همان‌گونه که پیشتر گفتیم، به هنگام اجرای بازی و دادن دستورات باید پشت به بازیکن بایستید. می‌توانید بر جنبهٔ اسرارآمیز بودن بازی تأکید بگذارید؛ به این ترتیب که به ناظر اجازه دهید در هر بار حرکت سکه به جای شمردن تا هفت، کلمهٔ هفت به زبان انگلیسی را (Seven) تلفظ کند؛ یعنی بخواند S-e-v-e-n. پس از گذاشتن یک سکهٔ دو ریالی روی ماه می‌توانید، بی‌آن‌که سر خود را برگردانید، بگویید که سکهٔ پنج ریالی روی پلوتون است.

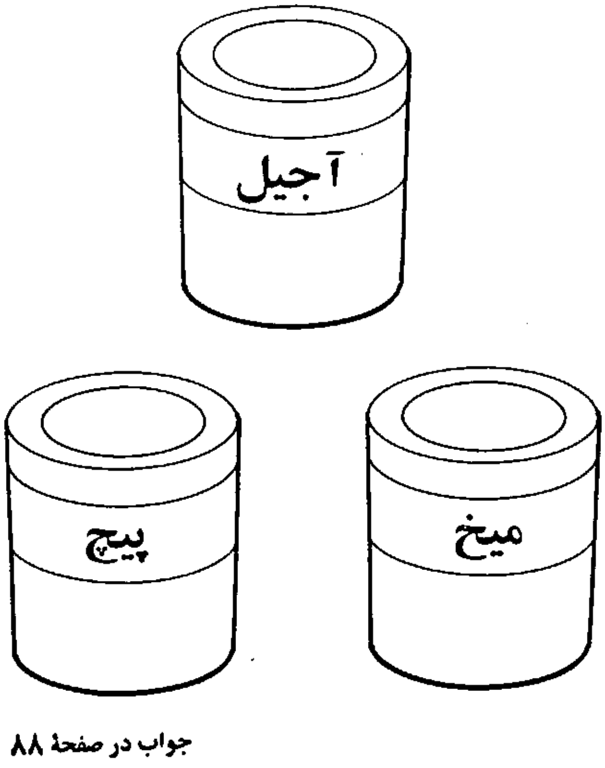
اما چرا این امر همواره مصداق می‌یابد؟ پاسخ این معما معرف مفهوم همپایگی برای شما خواهد بود. مفهوم همپایگی هم از نظر ریاضیات ترکیبیاتی و هم از نظر فیزیک ذرّه‌ای جدید حائز اهمیت فراوان است. برای آگاهی بیشتر در این زمینه و پی‌بردن به پاسخ، شمارهٔ بعدیِ مجله را مطالعه کنید.

مرجع:

* برگرفته شده از کتاب «معماهای ابوالهول»، نوشتهٔ مارتین گاردنر، ترجمه حسن نصیرنیا، مرکز نشر دانشگاهی، چاپ اوّل ۱۳۷۰. ص ۱۴.

تفریح اندیشه ۵

یک قوطی میخ، یک قوطی پیچ، و یک قوطی آجیل داریم. هر قوطی برچسبی دارد که از داخل آن خبر می‌دهد. برادر کوچکم برچسبها را چنان با هم عوض کرده که هیچ‌یک از آنها نظیر محتویات قوطیش نیست. آیا امکان دارد پس از باز کردن تنها یکی از آنها مشخص کنیم که در هر قوطی چیست؟



جواب در صفحهٔ ۸۸

معرفی کتاب

دایرة المعارف مسائل هندسه (جلد اول)

تألیف: محمد هاشم رستمی

انتشارات مدرسه، چاپ اول، بهار ۱۳۷۴

دایرة المعارف مسائل هندسه مجموعه‌ای است که نظیر آن تا به حال در جوامع ریاضی منتشر نشده است. مؤلف این کتاب از حدود سی سال قبل به جمع آوری مسائل هندسهٔ موجود در کتابهای ریاضی به زبان فارسی و یا ترجمه شده به فارسی و مسائل کتابهای هندسه کشورهای مختلف جهان و نیز مسائل المپیادهای بین‌المللی ریاضی و المپیادهای ریاضی کشورهای دیگر، برای تألیف دایرة‌المعارفی از مسائل هندسه، اقدام نموده است.

جلد اول این دایرةالمعارف بیش از هشتصد مسأله دارد که فقط مربوط به خواص توصیفی اشکال هندسی (نقطه، خط، زاویه، مثلث، چند ضلعی و دایره) است و شامل ۷ بخش زیر است:

بخش ۱ ـ پیدایش هندسه، نقش هندسه در علوم، صنعت زندگی و کاربرد هندسه.

بخش ۲ ـ نقطه، خط، زاویه. **بخش ۳** ـ مثلث. **بخش ۴** ـ خطوط راست متوازی، خطوط راست عمود بر هم. **بخش ۵** ـ چهار ضلعیها. **بخش ٦** ـ مساحتها. **بخش ۷** ـ دایره.

هر بخش خود شامل زیر بخشهایی است مثلاً بخش ۳ (مسائل مربوط به مثلث)، شامل زیربخشهای زیر است: ۳ـ ۱ ـ تساوی مثلثها. ۳ ـ ۲ ـ مثلث متساوی‌الساقین ۳ ـ ۳ ـ مثلث متساوی‌الاضلاع. ۳ ـ ۴ ـ مثلث قائم‌الزاویه. ۳ ـ ۵ ـ مثلث غیر مشخص. ۳ ـ ٦ ـ نامساویها در مثلث.

در هر یک از زیر بخشهای فوق نیز مسائل با نظم خاصی مرتب شده‌اند.

مسائل آسان دایرةالمعارف حل نشده‌اند. مسائل نیمه مشکل، برای حل، راهنمایی گردیده‌اند و مسائل مشکل حل شده‌اند. مسأله‌های تاریخی هندسه نیز مانند: مسأله پروانه (دو بال و سه بال)، مسأله اشتینر ـ لموس، مسأله مورلی، دایرهٔ فویرباخ، خط اولرخط سمسن و ... با ذکر تاریخچه‌ای از آنها حل گردیده‌اند.

در ضمن سایر مباحث هندسه. مانند: رابطه‌های متری در مثلث، چند ضلعیها و دایره، مکانهای هندسی و ترسیمات هندسی و ... در جلدهای دیگر دایرةالمعارف در دست تهیه برای چاپ است.

دایرةالمعارف مسائل هندسه برای دانش‌آموزان رشته ریاضی و تجربی، دانشجویان رشته ریاضی و مراکز تربیت معلم، معلمین و هر فرد علاقمند به داشتن مجموعه‌ای کامل از مسائل هندسه برای هر مبحث از آن، مفید و قابل استفاده است.

نام کتاب: مبانی کامپیوتر و برنامه‌نویسی با BASIC

تألیف: مهندس حسین ابراهیم زادهٔ قلزم

مهندس محمد جواد عظیمی

ناشر: نشر روز ـ تهران ـ بهار ۱۳۷۴

کتاب **مبانی کامپیوتر و برنامه‌نویسی با BASIC** به‌منظور آشنا ساختن دانش‌آموزان دبیرستان نظام جدید و قدیم با مفاهیم اساسی مبانی کامپیوتر، الگوریتم و فلوچارت و برنامه‌نویسی با BASIC، به‌گونه‌ای تألیف شده است که می‌تواند به مشکلات و مسائل متعدد یک تازه کار در مسائل کامپیوتری مرحله به مرحله پاسخ دهد و علاوه بر این می‌تواند نخستین کتاب کامپیوتر جهت کسب آگاهی و اطلاعاتِ دانش

کامپیوتر باشد.

کتاب فوق در واقع مجموعه‌ای از مطالب سه کتاب مختلف کامپیوتر با عناوین ۱ـ مبانی کامپیوتر ۲ ـ برنامه‌نویسی با BASIC ۳ ـ برنامه نویسی گرافیکی با BASIC می‌باشد. در قسمت مبانی کامپیوتر این کتاب، راجع به اجزاء مختلف سخت افزار و نرم افزارهای مهم با تصویر به‌طور مشروح بحث شده است. در فصل ۲ از مبانی کامپیوتر در زمینهٔ تبدیلات و محاسبات ریاضی در مبناهای ۲ و ۸ و ۱۶ با مثالهای متعدد و جالب گفتگو شده است. اَلگوریتم و فلوچارت و انواع روشهای مرتب سازی در فصل ۳ کتاب با بیانی بسیار ساده و روان آمده است. فصل ۴ کتاب شامل مطالبی در زمینه برنامه نویسی با BASIC می‌باشد. قسمت برنامه‌نویسی گرافیکی با BASIC که فصل ۵ کتاب را تشکیل می‌دهد شامل مطالبی راجع به امکانات متعدد گرافیکی BASIC و دستورات SCREEN ، TAB، LOCATE ، LINE ، DRAW ، PAINT و دیگر دستورات BASIC است. در این فصل از کتاب، روش رسم و برنامهٔ انواع توابع جبری و مثلثاتی نظیر $Y = \frac{2X^2 - 3X}{X^2 + X + 2}$ و $Y = \frac{\sin X}{X}$ و

همچنین برنامهٔ رسم‌توابعی نظیر $\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$ که در کتب دبیرستانی کمترمورد بررسی قرار می‌گیرد در مختصات دکارتی به‌صورت طبیعی و دقیق ارائه شده است.

مطالب کتاب با بیش از ۶۰۰ مثال و برنامهٔ کامپیوتری در ۵۱۰ صفحه به همراه حل مسائل و اجرای برنامه‌ها به سبکی بسیار روان نوشته شده است. استفاده از این کتاب را به دبیران محترم کامپیوتر و دانش‌آموزان دبیرستان، سال سوم نظام قدیم و جدید توصیه می‌کنیم.

نام کتاب: برنامه نویسی با پاسکال

ترجمهٔ: حسین ابراهیم‌زادهٔ قلزم

تالیف: جینوا ـ ج ـ بلفورد ـ چانگ. ل. لیو

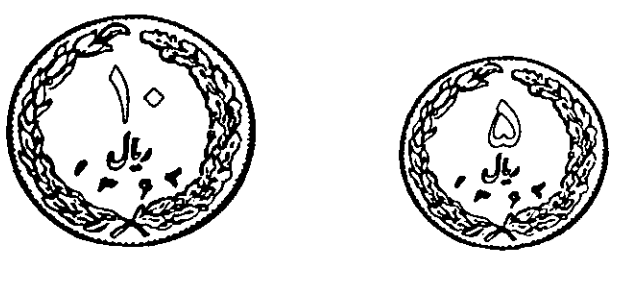
ناشر: دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران) ـ چاپ دوم ـ بهار ۱۳۷۴

کتاب برنامه‌نویسی با پاسکال نوشتهٔ جینیوا بلفورد ولیو، استادان دانشگاه ایلینوی یکی از مناسب‌ترین و مفیدترین کتابهای موجود در زمینهٔ برنامه‌نویسی با پاسکال است که تاکنون منتشر شده است. این کتاب به گونه‌ای تألیف شده است که خواننده می‌تواند پس از مطالعه دو فصل اول کتاب، به‌سرعت و براحتی برنامه‌های ساده بنویسد و از کامپیوتر خود استفاده کند. در این کتاب روش برنامه‌نویسی ساختیافته و نمودار جریان کار به روش ناسی ـ شنایدرمن ارائه شده است. در کتاب فوق برای اینکه از برنامه‌نویسی در هم و بر هم و نامرتب جلوگیری به عمل آید از هرگونه استفاده از دستورات Goto و Label خودداری شده است، کتاب مذکور دارای ۱۶ فصل و شامل مطالبی راجع به دستورات Write و Writeln ، دستورات جایگزینی و عبارات محاسباتی، دستورات Read و Readln ، بحث و بررسی حلقه‌های تکرار FOR ، While و Repeat - until ، دستورات شرطی IF و Case بررسی متغیرهای رشته‌ای و کاراکتری، زیر برنامه‌های FUNCTION و PROCEDURE، زیر برنامه‌های بازگشتی Recursive و تعریف داده‌های ساختیافته ساده و شمارشی، تعریف نوع دادهٔ مجموعه‌ای، استفاده از رکوردها و فایل‌ها در برنامه، اشاره‌گرها و لیست‌های پیوندی می‌باشد.

علاوه بر این مترجم کتاب، در انتهای هر فصل مجموعاً بیش از ۷۰ برنامهٔ متنوع پاسکال نوشته همگی آنها راکامپایل و اجرا نموده و به همراه خروجی برنامه‌ها ارائه داده است.

تفریح اندیشه ۶

دو سکه به ارزش کل ۱۵ ریال در جیب داریم. آیا امکان دارد که یکی از آنها ده ریالی نباشد؟



جواب در صفحهٔ ۸۸

جواب نامه‌ها

آقای رامین معتمد؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (رامسر)

از تستهای حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. إن شاءا... از آنان در (قسمت مسائل برای حل) شماره‌های بعدی مجله استفاده می‌کنیم. در ضمن باید بگوییم که تکرار صورت مسأله در قسمت جواب مسائل مقدور نیست، زیرا حجم مجله بالا می‌رود و همچنین جای یک سری مطالب ضروری را اشغال می‌کند.

آقای عبدالرحمن آرمین؛ دانش‌آموز هنرستان (مهاباد)

از مسائل حل شده ارسالی شما متشکریم. درصورت لزوم از آنان استفاده خواهیم کرد.

.آقای قدیر فتح‌الهی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (شیروان)

ضمن تشکر از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما به عرض می‌رسانیم که مسائل خود را در سطح مطلوبتری ارائه دهید. و قبل از طرح مسائل، قسمت مسائل برای حل مجلات قبلی برهان را مشاهده نمایید تا از طرح مسائل تکراری جلوگیری شود و همچنین سطح مسائل برایتان مشخص شود.

آقای محمد شاهرخ محبتی؛ دانش آموز رشته ریاضی (اصفهان)

از نامهٔ ارسالی شما که حاوی مطلبی در رابطه با «محاسبه $\cos\frac{\pi}{2^k}$» می‌باشد متشکریم.

مطلب شما را (هر چند در برخی از کتابهای ریاضی موجود است) عیناً در اینجا می‌آوریم:

داریم:
$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\cos\alpha + 1}{2}}$$

$$\alpha=\frac{\pi}{4} : \quad \cos\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{2^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\alpha=\frac{\pi}{8} : \cos\frac{\pi}{8}=\cos\frac{\pi}{2^3}=\sqrt{\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

به همین ترتیب:

$$\alpha=\frac{\pi}{16} : \cos\frac{\pi}{16}=\cos\frac{\pi}{2^4}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

... و

$$\alpha=\frac{\pi}{32} : \cos\frac{\pi}{32}=\cos\frac{\pi}{2^5}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

و به‌طور کلی:
$$\cos\frac{\pi}{2^k}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}$$

$(k\in N, k\neq 1)$

توجه: تعداد رادیکالها $(k-1)$ مرتبه می‌باشد.

آقای یونس قره‌داغی؛ دانشجوی برق ـ قدرت تبریز

از مقالهٔ ارسالی شما تحت عنوان «آیا می‌دانید که «انتگرال» چیست» متشکریم. امید است امکان درج آن در شُماره‌های بعدی در جای مناسب به‌وجود آید.

آقای مهدی مهدوی پور؛ دانشجوی رشته ریاضی (نیشابور)

از نامه ارسالی شما که حاوی دو مطلب در رابطه با «بازی با اعداد» می‌باشد متشکریم. امید است امکان درج آن در شماره‌های بعدی مجله به‌وجود آید.

آقای علیرضا فاضلی؛ دانش آموز رشته ریاضی (رامسر)

ضمن تشکر و قدردانی از مطلب ارسالی شما تحت عنوان «محاسبهٔ مشتق n ام برخی از توابع» به عرض می‌رسانیم که مطلب شما در حد یک مقاله نیست ولی از مسائل آن در قسمت مسائل برای حل استفاده خواهیم کرد. موفق و پیروز باشید.

*** خانم سمیرا قائم مقامی؛ دانش آموز**

ضمن تشکر از مسأله حل شده ارسالی شما به عرض می‌رسانیم که ان‌شاءالله از آن برای شماره‌های بعد استفاده خواهیم کرد. و در رابطه با حل مسألهٔ «اگر $x + y + z = \pi$ باشد، ثابت کنید: $tgx+tgy+tgz=tgxtgytgz$» باید بگوییم که حل صحیح این مسأله را در شماره‌های قبلی مجلهٔ برهان می‌توانید مشاهده کنید.

آقای کوروش خانجانزاده؛ دانش آموز رشته ریاضی (نوشهر)

ضمن قدردانی و تشکر از نامهٔ شما به عرض می‌رسانیم که ایراد شما در رابطه با یک تست که در شمارهٔ ۲ برهان آمده است به جا است. زیرا در صورت تست اشکالی رخ داده است که با عرض پوزش در اینجا شکل صحیح آن را به اطلاع عموم می‌رسانیم:

اگر دامنهٔ $y = f(x)$ فاصلهٔ (۱ و ۰) باشد، دامنهٔ عبارت $f(\log x)\,|x+1|$ کدام است؟

۱) [۱ و ۰) ۲) (۱۰ و ۱] ۳) (۱۰ و ۱) ۴) [۱۰ و ۱)

خانم لاله تراب‌نژاد؛ دانش آموز رشته ریاضی (تبریز)

از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. امید است از آنان برای شماره‌های بعدی مجله استفاده کنیم.

آقای علی بلوکی؛ دانش آموز رشته ریاضی (تبریز)

از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. درصورت لزوم از آنان در جای مناسب استفاده می‌کنیم. سعی کنید مسائل را در سطح مطلوبتری برای دانش‌آموزان دبیرستان، ارائه دهید.

*** آقای سید شهاب بنی‌هاشمی؛ دانش آموز رشته ریاضی نظام جدید (لنگرود)**

از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. امید است از آنان برای شماره‌های آتی مجله استفاده کنیم.

*** آقای ابوالفضل کریمایی؛ دیپلمه ریاضی (شهریار)**

ضمن تشکر از نامه محبت آمیز شما، به عرض می‌رسانیم که از مسائل شما برای شماره‌های آینده مجله انتخاب خواهیم کرد.

آقای سهیل خوشبین‌فر؛ دانش آموز رشته ریاضی (رشت)

از مسأله حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. درصورت لزوم از آن استفاده خواهیم کرد. سعی کنید مسائل را در سطح مطلوبتری برای دانش‌آموزان ارائه دهید.

*** آقای رضا لقایی؛ دانش آموز رشتهٔ ریاضی (تکاب)**

از ارسال مسائل و تستهای حل شدهٔ شما متشکریم. ان‌شاءالله برای شماره‌های بعدی از آنان استفاده خواهیم کرد.

آقای علیرضا مرادی؛ دانش آموز رشتهٔ ریاضی (تهران)

از مسائل و تستهای حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. امید است از آنان در قسمت مسائل برای حل شماره‌های بعدی مجله استفاده کنیم.

آقای حمید رضا محمدی؛ دانش آموز رشته ریاضی دبیرستان علامه حلی (اراک)

ضمن تشکر و قدردانی از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما به اطلاع می‌رسانیم که از آنان برای شماره‌های بعدی مجله استفاده خواهیم کرد. موفق و پیروز باشید.

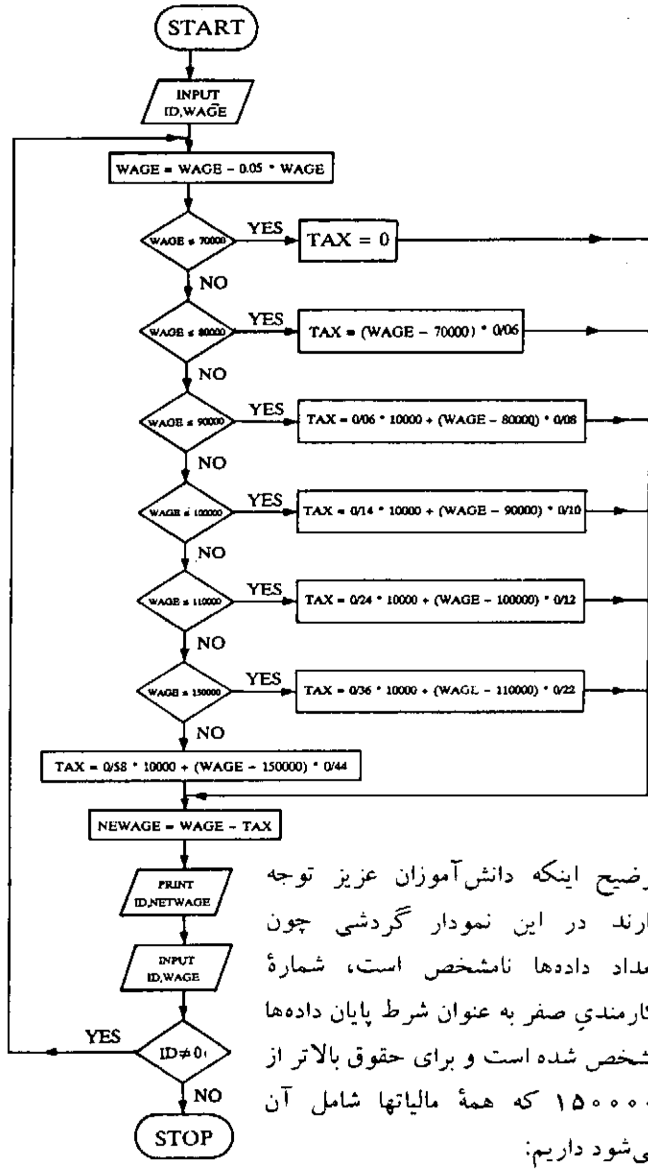
آقای رامین معتمد چابکی؛ دانش آموز رشته ریاضی (رامسر)

ضمن تشکر از نامهٔ شما به اطلاع می‌رسانیم که پاسخهای مسائل المپیادها را می‌توانید در شماره‌های آتی رشد آموزش ریاضی مشاهده کنید. ضمناً به عرض می‌رسانیم که کار در رابطه با المپیادها جزو اهداف مجله نیست و شما می‌توانید به کتب و مجلات منتشر شده در این زمینه مراجعه کنید.

خانم مینا رحیمی؛ دانشجوی رشته ریاضی (تهران)

از نامه ارسالی شما متشکریم. به عرض می‌رسانیم که برای دریافت مجله می‌توانید با ارسال فرم اشتراک، مشترک شوید و یا از شعبه انتشارات مدرسه واقع در ایرانشهر شمالی تهیه نمایید. ضمناً از سه مسألهٔ حل شده شما نیز تشکر می‌کنیم و اِن شاءا.. برای شماره‌های آتی از آن استفاده خواهیم کرد.

حل مسائل مسابقه‌ایِ برهانِ ۱۲



توضیح اینکه دانش‌آموزان عزیز توجه دارند در این نمودار گردشی چون تعداد داده‌ها نامشخص است، شمارهٔ کارمندیِ صفر به عنوان شرط پایان داده‌ها مشخص شده است و برای حقوق بالاتر از ۱۵۰۰۰۰ که همهٔ مالیاتها شامل آن می‌شود داریم:

۰/۵۸=۰/۰۶+۰/۰۸+۰/۱۰+۰/۱۲+۰/۲۲

حقوق = WAGE   شماره‌کارمندی = ID

حقوق خالص = NETWAG   مالیات = TAX

برنامه:

```
10 INPUT "ENTER IDENTIFICATION NO. &  WAGE ";ID,WAGE
15 WAGE=WAGE-WAGE*.05
20 IF WAGE <= 70000! THEN TAX=0
25 IF WAGE >70000!  AND WAGE<=80000!  THEN TAX=(WAGE-70000!)*.06
30 IF WAGE >80000!  AND WAGE<=90000!  THEN TAX=.06*10000+(WAGE-80000!)*.08
35 IF WAGE >90000!  AND WAGE<=100000! THEN TAX=.14*10000+(WAGE-90000!)*.1
40 IF WAGE >100000! AND WAGE<=110000! THEN TAX=.24*10000+(WAGE-100000!)*.12
45 IF WAGE >110000! AND WAGE<=150000! THEN TAX=.36*10000+(WAGE-110000!)*.22
50 IF WAGE >150000! THEN TAX=10000*.58+(WAGE-150000!)*.44
55 NETWAGE=WAGE-TAX
60 PRINT "IDENTIFICATION NO. = ";ID;"NETWAGE = ";NETWAGE
65 INPUT "ENTER IDENTIFICATION NO. & WAGE ";ID,WAGE
70 IF ID <> 0 THEN 15
75 END
```

اجرای برنامه:

```
ENTER IDENTIFICATION NO. &  WAGE ? 14500,3000
IDENTIFICATION NO. =  14500 NETWAGE =  2850
ENTER IDENTIFICATION NO. & WAGE ? 14501,75000
IDENTIFICATION NO. =  14501 NETWAGE =  71175
ENTER IDENTIFICATION NO. & WAGE ? 14502,100000
IDENTIFICATION NO. =  14502 NETWAGE =  93100
ENTER IDENTIFICATION NO. & WAGE ? 14503,140000
IDENTIFICATION NO. =  14503 NETWAGE =  124340
ENTER IDENTIFICATION NO. & WAGE ? 14504,160000
IDENTIFICATION NO. =  14504 NETWAGE =  145320
ENTER IDENTIFICATION NO. & WAGE ? 14541,200000
IDENTIFICATION NO. =  14541 NETWAGE =  166600
ENTER IDENTIFICATION NO. & WAGE ? 14542,170000
IDENTIFICATION NO. =  14542 NETWAGE =  150640
ENTER IDENTIFICATION NO. & WAGE ? 0,0
```

اسامی افرادی که مسأله مسابقه‌ای برهان ۱۲ را صحیح حل کرده‌اند:

۱ـ زهرا حاتمی ـ کرمان
۲ـ محمدرضا صدیق ـ گلپایگان
۳ـ شاقیک آتاکارامیانس ـ تهران
۴ـ سامان جاوید ـ پیرانشهر

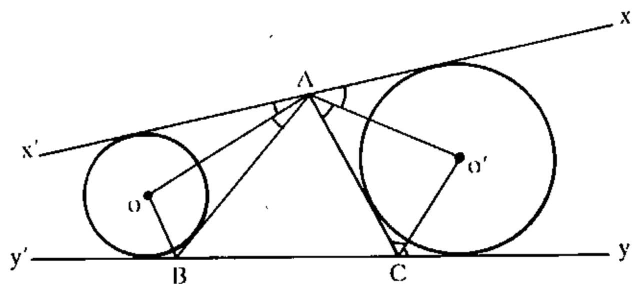
مسائل برای حل

- هندسه: محمدهاشم رستمی
- ریاضیات جدید: حمیدرضا امیری
- جبر و مثلثات: احمد قندهاری ـ محمدرضا هاشمی ـ مهدی قمصری
- کامپیوتر: حسین ابراهیم‌زاده قلزم

◇ مسائل ریاضیات سال اول

۱ ـ مثلث متساوی‌الاضلاع ABC مفروض است. از رأس A خط $X'X$ را در خارج مثلث رسم می‌کنیم. اگر نقطهٔ O مرکز دایرهٔ مماس بر ضلع AB و نیم‌خط AX' و امتداد ضلع BC، و O' مرکز دایرهٔ مماس بر ضلع AC و نیم‌خط AX و امتداد ضلع BC باشد، ثابت کنید، $OB+O'C$ مقدار ثابتی است.

(فرستنده: آقای محمد معصومی از اراک)



۲ ـ **اولاً:** ثابت کنید که در هر مثلث، میانهٔ وارد بر یک ضلع از نصف مجموع دو ضلع دیگر کوچکتر و از نصف قدرمطلق تفاضل آن دو ضلع بزرگتر است.

ثانیاً: اگر P نصف محیط مثلث ABC باشد ثابت کنید:

$$\frac{۳P}{۲} < m_a + m_b + m_c < ۲P$$

۳ ـ ثابت کنید گزارهٔ $[p \Rightarrow (q \Rightarrow p)]$ همواره دارای ارزش درست است.

۴ ـ اگر ارزش گزارهٔ $[p \Leftrightarrow (r \Leftrightarrow p)]$ درست بوده و ارزش گزارهٔ $(s \vee q)$ نادرست باشد، ارزش گزارهٔ $(p \sim \Rightarrow \sim r) \Leftrightarrow \sim q$ را تعیین کنید.

۵ ـ اگر $P(A)$ مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های A بوده (مجموعهٔ توانی A) و $P(B)$ نیز چنین باشد، ثابت کنید:

الف) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \subseteq P(B)$

ب) $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

(فرستنده: آقای مسعود فرون‌بال سال چهارم ریاضی از تهران)

۶ ـ بدون استفاده از روش عضوگیری ثابت کنید:

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

۷ ـ کسر مقابل را گویا کنید:

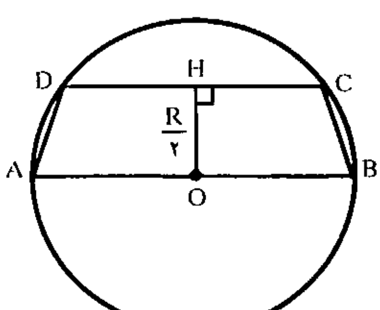
$$\frac{۲}{۲(\sqrt[۳]{۲} + ۱) + \sqrt[۳]{۴}}$$

۸ ـ به‌ازای مقادیر مختلف m در تعداد ریشه‌های معادله زیر بحث‌کنید:

$$(x - ۱)\, m^۲ + (۵ - ۳x)\, m + (۲x - ۶) = ۰$$

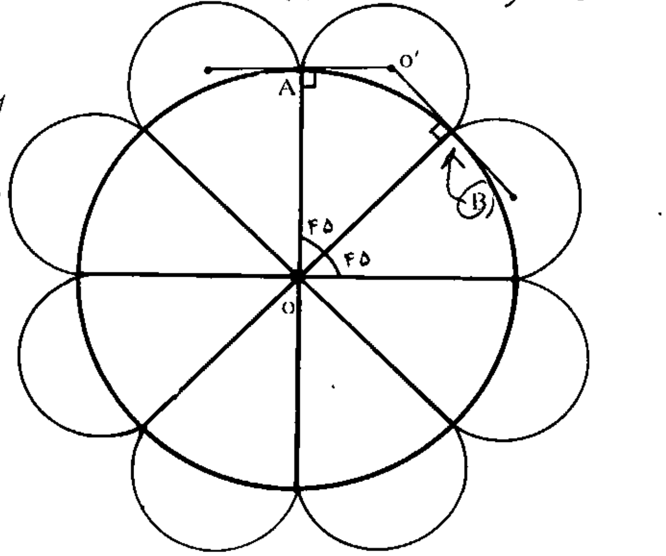
◇ مسائل ریاضیات سال دوم ریاضی

۱ ـ ذوزنقه متساوی‌الساقین ABCD در دایره‌ای به شعاع R چنان محاط است که AB قطر دایره و ارتفاع این ذوزنقه $\frac{R}{۲}$ می‌باشد. محیط و مساحت این ذوزنقه را بر حسب R محاسبه کنید.



۲ ـ محیط دایره‌ای به شعاع R را به ۸ قسمت متساوی تقسیم و ۸ شعاع واصل به این نقاط را که با هم زاویهٔ °۴۵ می‌سازند رسم می‌کنیم. سپس دایره‌هایی مماس به هر دو شعاع متوالی در انتهای این شعاعها رسم می‌کنیم. محیط شکل حاصل (شکل شبیه گلسرخ) را حساب کنید.

راهنمایی: $AB = C_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$ است



۳ ـ اگر f_1 ، f_2 و . . . و f_n توابعی یک‌به‌یک و حقیقی باشند ثابت کنید $(f_1 \cap f_2 \cap \ldots \cap f_n)$ نیز یک‌به‌یک است.

(فرستنده: آقای مسعود فزون‌بال سال چهارم ریاضی از تهران)

۴ ـ تابعی دوسویی از مجموعهٔ $A = \{x \in IR \mid a < x < b\}$ به B یا به عکس از B به A تعریف کنید که
$B = \{x \in IR \mid 0 < x < 1\}$

۵ ـ اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $\text{دترمینانِ } A = |A| = ad - bc = 0$ باشد ثابت کنید $A^2 = (a + d)A$.

(فرستنده: خانم مریم مردانی سال دوم نظام جدید از تهران)

۶ ـ ثابت کنید هر گروه که دارای ۴ عضو باشد حتماً آبلی است.

۷ ـ اندازهٔ محیط مثلث قائم‌الزاویه‌ای 30^{cm} و اندازه وتر آن $(13)^{cm}$ است. اضلاع مثلث را بیابید.

۸ ـ ثابت کنید اگر ریشه‌های معادله $ax^4 + bx^2 + c = 0$ تصاعد عددی بسازند، داریم: $9b^2 = 100ac$

۹ ـ انتهای کمان α در کدام ناحیه باشد تا عبارت $\dfrac{tg\alpha + \sin\alpha}{cotg\alpha + \cos\alpha}$ همواره مثبت باشد.

(فرستنده: آقای علی لاری دانش‌آموز رشته ریاضی (تهران))

۱۰ ـ حداقل و حداکثر عبارت زیر را به‌دست آورید.

$A = \cos\alpha\,(2\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha + 1)$

فرستنده: آقای همایون نادرشاهی دانش‌آموز رشته ریاضی (کرمانشاه)

۱۱ ـ صحت تساوی $\dfrac{1}{\sin 10^\circ} - \dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = 4$ را تحقیق کنید.

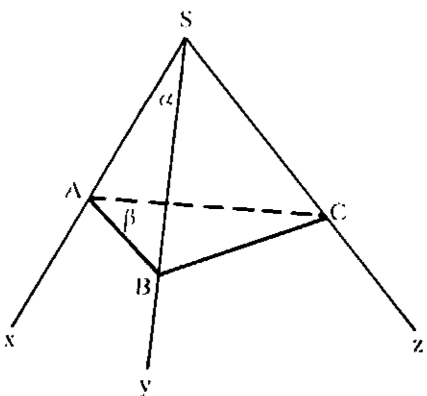
فرستنده: خانم سمیرا قائم‌مقامی دانش‌آموز (سمیرم)

۱۲ ـ معادلهٔ $tg^{73}x\, tg^{73}2x + 1 = 0$ در فاصلهٔ $[0, 2\pi]$ ، دارای چند جواب حقیقی است؟

◇ مسائل ریاضیات سال سوم ریاضی

۱ ـ در یک کنج منتظم سه‌وجهی اندازهٔ هر زاویه برابر α° و اندازهٔ هر فرجه برابر β° است. ثابت کنید $\cos\beta = \dfrac{\cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$.

فرستندگان: آقایان علی صبحی‌پور از اهواز و علیرضا رمضانی‌فر از ملایر



۲ ـ مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A} = 90^\circ)$ مفروض است. اولا: ثابت کنید $r_a = P$ (P نصف محیط مثلث است.) ثانیا: اگر $r_a = 6$ و $h = 3$ باشد، اندازهٔ r_c را حساب کنید.

راهنمایی: $r_a = \frac{S}{p-a}$ است

(فرستنده: آقای علیرضا خسروی فروشانی، از اهواز)

۳ ـ در مثلث ABC می‌دانیم که $\hat{A} = 120^\circ$ است. ثابت کنید که:

الف) $d_b d_c = 3Rd_a$

ب) $8(m_b^2 + m_c^2) - 4m_a^2 = 9a^2$

۴ ـ هرگاه بردارهای V_1 و V_2 و V_3 مستقل خطی باشند، چه رابطه‌ای بین a و b باید برقرار باشد تا بردارهای $(V_1-V_2-V_3)$ و $(aV_1+bV_2+V_3)$ و $(V_1-2aV_2+bV_3)$ نیز مستقل خطی باشند.

۵ ـ عبارت بولی $T = xyz + xyz' + xy'z + xy'z' + x'yz$ را پس از ساده کردن توسط عضوهای منطقی رسم کنید.

۶ ـ حروف کلمهٔ کمال‌الملک را به تصادف در کنار یکدیگر قرار می‌دهیم مطلوب است:

الف) احتمال آن‌که در کلمهٔ بوجود آمده حروف ل کنار هم باشند.

ب) بین دو حرف ک دقیقاً سه حرف دیگر واقع شده باشد.

۷ ـ m کتاب تاریخ و n کتاب جغرافیا به چند طریق می‌توانند کنار هم قرار بگیرند هرگاه بخواهیم هیچ یک از کتب جغرافیا کنار هم نباشند.

(آقای محمد صادق عسگری دبیر ریاضی از تهران)

۸ ـ به ازای مقادیر مختلف m در تعداد و علامت ریشه‌های معادله $x^3 - 3x^2 + 1 - m = 0$ بحث کنید.

۹ ـ اگر $y = \sqrt{\frac{1}{\cos 2x}}$ و $\cos 2x > 0$ ثابت کنید $y+y''=3y^5$

۱۰ ـ اگر $f(x) = \sin x + \cos x + \sin 3x + \cos 3x$ باشد، ثابت کنید: $f(12°) = 2\sqrt{2}\cos 12° \cos 21°$

فرستنده: آقای رامین معتمد دانش‌آموز رشته ریاضی (رامسر)

۱۱ ـ دستگاه معادلات زیر در فاصلهٔ $[0 \text{ و } 2\pi]$ ، دارای چند جواب حقیقی است؟

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} \\ \sin x \sin y = 1 \end{cases}$$

فرستنده: آقای رضا لقایی دانش‌آموز رشته ریاضی (تکاب)

۱۲ ـ نوع مثلثی را تعیین کنید که در آن رابطهٔ $b + c = 4R\cos\frac{\hat{A}}{2}$ برقرار باشد.

فرستنده: آقای بهزاد کاظمی (اهواز)

۱۳ ـ جوابهای عمومی معادلهٔ زیر را به‌دست آورید:

$15\operatorname{tg}^2 x + 8\cos 2x = 9$

فرستنده: آقای ابوالفضل کریمایی دیپلمه ریاضی (شهریار)

۱۴ ـ معادلهٔ زیر را حل کنید:

$\sin^3 x + \cos^3 x = 1$

فرستنده: آقای علی لاری دانش‌آموز رشته ریاضی (تهران)

◇ مسائل کامپیوتر سال سوّم ریاضی

۱۵ ـ برنامه‌ای به زبان BASIC بنویسید تا ابتدا مقادیر X و N را از ورودی دریافت کرده (N عدد صحیح است و می‌تواند مثبت، منفی و صفر باشد و x یک مقدار دلخواه صحیح یا اعشاری است) سپس مقدار X^N را محاسبه کرد، نتیجه را با پیغام مناسب در خروجی چاپ کند.

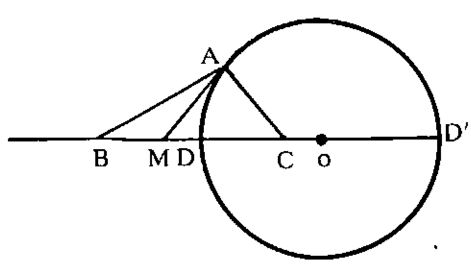
۱۶ ـ برنامه‌ای به زبان BASIC بنویسید تا عدد صحیح و مثبت N و مقدار X را از Keyboard بخواند و مقدار y را از رابطهٔ رادیکال مرکب زیر محاسبه کرده، نتیجه را با پیغام مناسب در خروجی چاپ کند.

$$y = \underbrace{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{\dots + \sqrt{x}}}}}}_{N \text{ بار}}$$

۱۷ ـ برنامه‌ای به زبان BASIC بنویسید تا ابتدا عدد N را از Keyboard دریافت کند. آنگاه دوجمله‌ای $(x + y)^N$ را بسط دهد.

◇ مسائل ریاضیات سال چهارم ریاضی

۱ ـ در مثلث ABC ، نقاط D و D′ پای نیمسازهای داخلی و خارجی زاویهٔ A می‌باشند. در صورتی که میانهٔ AM از این مثلث بر دایرهٔ به قطر DD′ مماس باشد، ثابت کنید که این مثلث در رأس A قائم‌الزاویه است.



۲ ـ کرهٔ به معادلهٔ $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 9$ محورهای مختصات را در سه نقطه به طول و عرض و ارتفاع مثبت قطع می‌کند، اندازهٔ مساحت مثلث حاصل را محاسبه کنید.

۳ـ اولاً: معادلهٔ دسته صفحه‌ای را بنویسید که برخط
$$D:\begin{cases}x = t - 1\\ y = 3 - 2t\\ z = 3t + 4\end{cases}$$
می‌گذرد.

ثانیاً: معادلهٔ صفحه‌ای از این دسته را تعیین کنید که با صفحهٔ $P: 2x - y - 2z = 3$ زاویهٔ 60° می‌سازد.

۴ـ هرگاه عکس نقیض گزارهٔ دوشرطی $p \Leftrightarrow q$ را به‌صورت $\sim p \Leftrightarrow \sim q$ نشان دهیم ثابت کنید، این دو گزاره با هم، هم‌ارز می‌باشند.

۵ـ اگر در حلقهٔ یکدارِ R، a عضوی از R بوده و پوچ توان از مرتبهٔ ۳ باشد ($a^3 = \bar{0}$). ثابت کنید $(1 - a)$ وارون‌پذیر بوده و داریم:
$$(1 - a)^{-1} = a^2 + a + 1$$
(a پوچ توان از مرتبهٔ m است هرگاه $a^m = \bar{0}$ و اگر $k < m$ آنگاه $a^k \neq \bar{0}$)

۶ـ با استفاده از استقراء ثابت کنید، تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی برابر است با 2^n.

۷ـ ثابت کنید عدد چهار رقمی $A = \overline{xyxy}$ مربع کامل نیست.

۸ـ ثابت کنید رقم یکانِ توانهای هر عدد، هر ۴ بار یک مرتبه با هم برابرند یعنی رقم یکان a^n و a^{n+4} برابر می‌باشند.

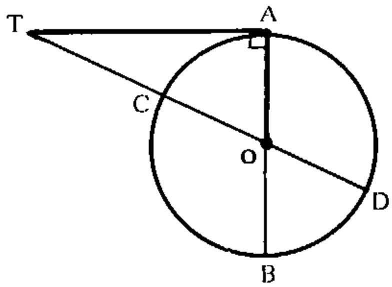
۹ـ فرض کنید $f(x) = x^5 - 3x^2 + 7x - 1$ و M یک ماتریس مربعی وارون‌پذیر و D هم مرتبه با M باشد ثابت کنید:
$$f(MDM^{-1}) = M f(D) M^{-1}$$
(فرستنده: آقای بهروز بیرامی دانش‌آموز سال چهارم ریاضی از نقده)

۱۰ـ منحنی نمایش تغییرات رابطه به معادله $y^2 + x^4 = a^2x^2$ ، $a > 0$ را رسم کنید.

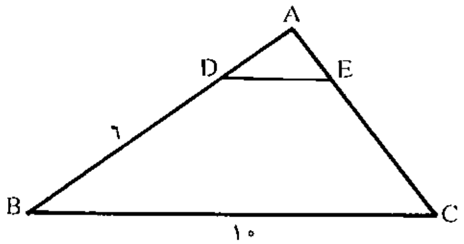
۱۱ـ منحنی نمایش تغییرات تابع به معادلهٔ $y = \dfrac{\sin 2x}{1 - \sin x}$ را در فاصله $[0, 2\pi]$ را رسم کنید.

◇ مسائل ریاضیات سال دوم تجربی

۱ـ روی خط مماس در نقطهٔ A بر دایرهٔ به قطر $AB = 2R$ طول $AT = 2R$ را اختیار می‌کنیم. از T به O وصل می‌کنیم تا دایره را در نقاط C و D قطع کند. اندازهٔ پاره‌خطهای TC و TD را برحسب R محاسبه کنید.



۲ـ در مثلث ABC ، نقاط D و E به ترتیب روی اضلاع AB و AC چنان قرار دارند که $AD = \dfrac{a}{5}$ و $DB = 6$ و $AE = \dfrac{a}{10} + \dfrac{1}{2}$ و $EC = \dfrac{2a}{5} + \dfrac{1}{2}$ و $BC = 10$ است. در صورتی که $DE \parallel BC$ باشد، اولاً: مقدار a را بیابید، ثانیاً: ثابت کنید که مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه است. ثالثاً: مساحت ذوزنقه $BCED$ را بیابید.



۳ـ معادلهٔ $6m^2x - 2m^4 = 54x$ به‌ازای چه مقادیری از m جواب ندارد؟

۴ـ اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2 - 2x - 2 = 0$ باشند، مقدار عبارت $\left(\dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2}\right)\left(\dfrac{1}{x_1^3} + \dfrac{1}{x_2^3}\right)$ را حساب کنید.

۵ـ معادلهٔ زیر چند ریشه حقیقی دارد؟
$$\sqrt{(2x - 2x^5)^{73}} + (x - x^{73})^{74} + |x^3 + 3x^2 + 2x| = 0$$

۶ـ به ازای چه مقادیری از m معادلهٔ $2x^2 - 4mx + 2 = 0$ ریشهٔ حقیقی ندارد؟

۷ـ مجموعه جوابهای نامعادلهٔ $(5x^{32} - 5)(2 - 2x^{16}) \geq 0$ را به دست آورید.

۸ـ مجموعه جوابهای مشترک دو نامعادلهٔ $18x^2 + 24x + 6 < 0$ و $24x - 12x^2 < 0$ را با شرط $0 < x + 1 < 3$ به دست آورید.

۹ـ اگر مجموع و حاصل‌ضرب سه عدد طبیعی متوالی برابر باشد، معدل آن سه عدد چقدر است؟

۱۰ـ جملهٔ عمومی یک تصاعد هندسی $\frac{1}{2^{n-2}}$ است، حد مجموع جملات این تصاعد را حساب کنید.

۱۱ـ در یک تصاعد حسابی جملهٔ دوم ۲۳ و جملهٔ پنجم ۳۸ است، جملهٔ بیستم آن را حساب کنید.

۱۲ـ اگر $\log 7 = k$ باشد، عبارت $\log \sqrt[2k]{4900}$ را برحسب k حساب کنید.

۱۳ـ مقدار x را از معادلهٔ زیر به‌دست آورید:

$$\log(\sin 3^\circ \log_9 (81)^{10})^x + \log(\cos 6^\circ \log_8 (64)^5)^x = \log\left(\frac{3\sqrt{3}}{64}\right)^{x-1}$$

(فرستنده: آقای عمران ایدی‌زاده از شهرستان ایلام)

۱۴ـ اگر $\log 2 = 0/301$ باشد، 8^{10} چند رقمی است.

۱۵ـ هرگاه $\sin x \cos x = \frac{1}{6}$ باشد، مقدار عبارت $y=\sin x+\cos x$ را حساب کنید.

فرستنده: آقای رامین معتمد دانش‌آموز رشته ریاضی (رامسر)

۱۶ـ عبارت زیر را ساده کنید و سپس مقدار عبارت را به ازای $\theta=\frac{\pi}{8}$ حساب کنید.

$$P = (\cos\theta + \sin\theta)^4 - (\cos\theta - \sin\theta)^4$$

فرستنده: آقای سیدشهاب بنی‌هاشمی دانش‌آموز رشته ریاضی نظام جدید (لنگرود)

۱۷ـ معادلهٔ زیر دارای چند جواب است؟

$$\text{Arc tg}\,(2t+1) = \text{Arc cos}\,\frac{1}{t+1}$$

فرستنده: آقای ابوالفضل کریمایی دیپلمه ریاضی (شهریار)

◇ مسائل ریاضیات سال سوم تجربی

۱ـ اگر $|a| = 5$ و $a\,.\,(a+b) = 16$ و $(a,b) = \frac{2\pi}{3}$ باشد، مطلوب است محاسبهٔ $|\vec{b}|$.

۲ـ مساحت صفحهٔ قطری مکعبی برابر $9\sqrt{2}$ است اندازهٔ حجم این مکعب را تعیین کنید.

۳ـ اندازهٔ قطر قاعدهٔ هرم مربع‌القاعدهٔ منتظمی $16\sqrt{2}$ و اندازهٔ سهم آن ۱۰ است. اولاً: حجم این هرم را به‌دست آورید.
ثانیاً: اگر صفحه‌ای موازی قاعدهٔ هرم و به فاصلهٔ $\frac{1}{4}$ ارتفاع از سطح قاعدهٔ هرم رسم کنیم، حجم هرم ناقص ایجاد شده را محاسبه کنید.

۴ـ معادلات دو ضلع مقابل مربعی به صورت $4x - 2y + 3 = 0$ و $0 = 12 - 12x - 6y$ است. اندازهٔ قطر مربع را حساب کنید.

۵ـ خطی که از دو نقطهٔ A(۳ و ۵) و B(۴ و ۴) می‌گذرد با محور xها چه زاویه‌ای می‌سازد؟

۶ـ مطلوب است تعیین مقادیر a و b به شرط آنکه تابع با قانون مفروض زیر در نقطه‌ای به طول $x_0 = 0$ پیوسته باشد:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos ax}{1-\cos bx} - 4 & x > 0 \\ \dfrac{x^3 - a^3}{x - a} - 1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

فرستنده: آقای فرزاد نصیری دانش‌آموز رشته ریاضی (اراک)

۷ـ مشتق n ام تابع با ضابطهٔ $y = \frac{1}{ax+b}$ را به‌دست آورید.
(a و b پارامتر می‌باشند و متعلق به اعداد حقیقی هستند.)

فرستنده: آقای علیرضا فاضلی دانش‌آموز رشته ریاضی (رامسر)

۸ـ ضریب زاویهٔ خط مماس بر منحنی نمایش تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt[5]{x^3+9}$ در نقطهٔ تقاطع خط $x + y + 2 = 0$ با محور طولها را حساب کنید:

۹ـ کمترین و بیشترین مقدار عبارت $A = 4\sin x + 3 - 2\sqrt{5}\cos x$ چقدر است؟

فرستنده: آقای رامین معتمد دانش‌آموز رشته ریاضی (رامسر)

۱۰ـ معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \sin^4 x = \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x$$

فرستنده: آقای ابوالفضل کریمایی دیپلمه ریاضی (شهریار)

۱۱ ـ ثابت کنید:

$$\sin^2 18^\circ + \sin^2 54^\circ = \frac{3}{4}$$

فرستنده: آقای سعید اقبالی دیپلمه ریاضی (تهران)

۱۲ ـ معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$\operatorname{Arc}\cos(1 - 2t^2) = 2\operatorname{Arc}\sin t^2$$

فرستنده: آقای بهزاد کاظمی (اهواز)

◇ مسائل ریاضیات سال چهارم تجربی

۱ ـ مقدار k را چنان پیدا کنید که دو خط به معادلات $6x+2y=40$ و $kx+y=2$ روی نیمساز ناحیهٔ اول و سوم متقاطع باشند.

۲ ـ معادلهٔ خط مماس بر منحنی تابع با ضابطهٔ $y=2\sin x-\cos 3x$ را در محل تلاقی منحنی با محور yها بنویسید.

۳ ـ تابع با ضابطهٔ $y=x^3+ax+b$ مفروض است، مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که منحنی تابع روی محور yها با خط $y=x+1$ مماس باشد.

۴ ـ مطلوب است تعیین مختصات مرکز، کانونها، رئوس و معادلات مجانبهای هذلولی به معادلهٔ زیر:

$$9x^2-16y^2 = 64y+18x-89$$

۵ ـ تابع اولیه تابع با ضابطهٔ $f(x) = 72\cos 7x \sin 3x$ را به‌دست آورید.

۶ ـ معادلات زیر را حل کنید:

۱) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - \operatorname{cotg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 0$

۲) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$

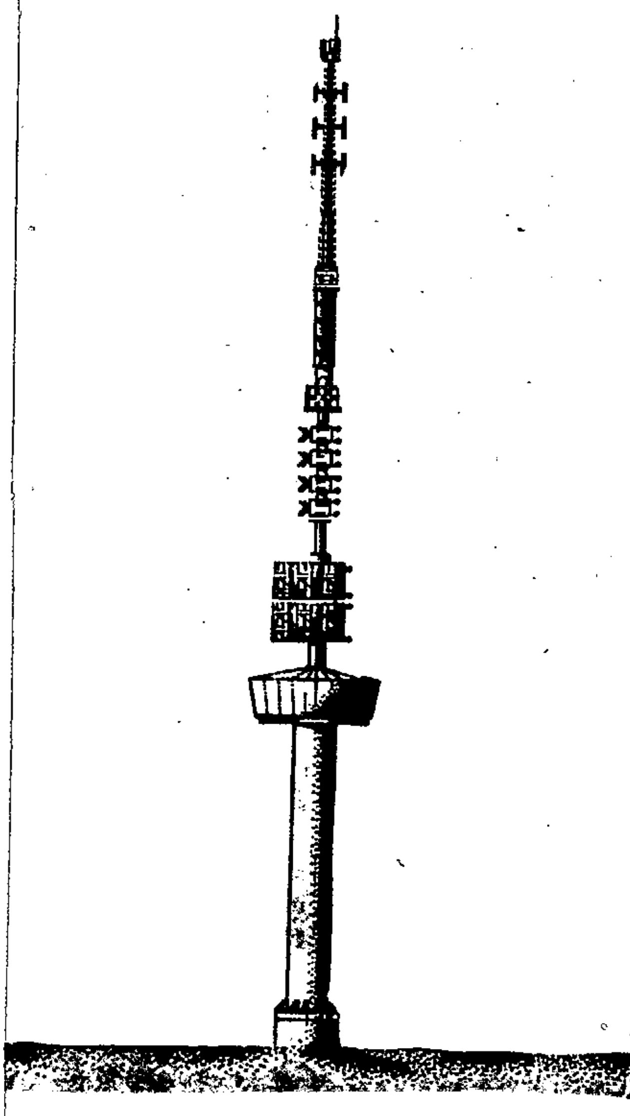
۳) $4\sin^2 x + 2\sin 2x + 12\cos^2 x = 10$

۷ ـ در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ داریم $a^2+bc = b^2+c^2$، اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A}$ را تعیین کنید. در صورتی که داشته باشیم $R=\sqrt{3}$، اندازهٔ ضلع a را بیابید.

تفریح اندیشه ۷

برج تلویزیون مسکو ۵۳۰ متر ارتفاع و ۳۰۰۰۰ تن وزن دارد. مدل به مقیاس کوچکتر ساخته شده از همان ماده، درصورتی که ۵۳ سانتی‌متر ارتفاع داشته باشد، چند گرم وزن دارد؟

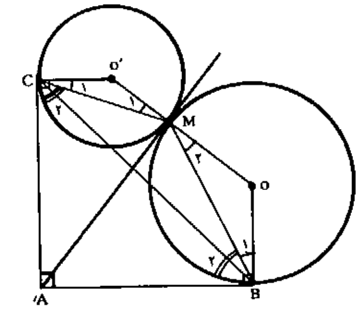
جواب در صفحهٔ ۸۸



حل مسائل برهان شماره ۱۳

□ حل مسائل ریاضیات سال اول ریاضی

۱ ـ الف) مراکز دوایر مماس بر ضلعهای AB و AC را به‌ترتیب O و O′ می‌نامیم. از O به B و از O′ به C و از O به O′ همچنین از M به نقاط B و C وصل می‌کنیم. با توجه به این‌که OO′ از نقطهٔ M می‌گذرد،



داریم:

$$B\hat{M}C = ۱۸۰^\circ - (\hat{M}_۱ + \hat{M}_۲) = ۱۸۰^\circ - (\hat{C}_۱ + \hat{B}_۱)$$

امّا $\hat{C}_۱ = ۹۰^\circ - \hat{C}_۲$ و $\hat{B}_۱ = ۹۰^\circ - \hat{B}_۲$ است. پس:

$$B\hat{M}C = ۱۸۰^\circ - (۹۰^\circ - \hat{C}_۲ + ۹۰^\circ - \hat{B}_۲) = \hat{B}_۲ + \hat{C}_۲$$

از طرفی چون در چهارضلعی ACMB ، اندازهٔ زاویهٔ A برابر ۹۰° است پس:

$$B\hat{M}C + \hat{C}_۲ + \hat{B}_۲ = ۲۷۰^\circ$$

در نتیجه داریم: $B\hat{M}C + B\hat{M}C = ۲۷۰ \Rightarrow ۲B\hat{M}C = ۲۷۰$

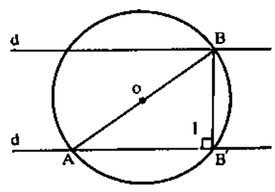
$$\Rightarrow B\hat{M}C = ۱۳۵^\circ$$

بنابراین مکان هندسی نقطه M وقتی دوایر تغییر می‌کنند (با شرطهای داده شده در مسأله) کمان درخور زاویهٔ ۱۳۵° مقابل به پاره‌خط ثابت BC است.

ب) چون $B\hat{M}C = ۱۳۵^\circ$ و $B\hat{A}C = ۹۰^\circ$ است، پس مکان هندسی نقطهٔ M بخشی از دایرهٔ به مرکز A و به شعاع AB است. یعنی $AM = AB = AC$ بنابراین AM بر دو دایرهٔ O و O′ مماس است.

ج) چون AM مماس بر دایره است پس $AM \perp OO'$ است بنابراین خط المرکزین OO′ بر دایره‌ای به مرکز A و شعاع $AB = AC$ مماس است.

۲ ـ فرض می‌کنیم مسأله حل شده و دو خط متوازی d و d′ که به فاصله l از یکدیگر واقعند جواب مسأله باشند. از B عمود BB′ را بر خط d فرود می‌آوریم، مثلث قائم‌الزاویهٔ ABB′ با معلوم بودن اندازه وتر و یک ضلع قابل رسم است. بنابراین برای حل مسأله، ابتدا به قطر پاره‌خط AB یک دایره رسم می‌کنیم. آنگاه به مرکز B و به شعاع l قوسی می‌زنیم تا دایره را در نقطهٔ B′ قطع کند. از B′ به A وصل می‌کنیم خط AB′ یا d یکی از خطوط جواب مسأله است. حال از نقطهٔ B خط d′ را به موازات خط d رسم می‌کنیم تا خط دیگر جواب مسأله نیز مشخص شود.



تمرین: شرط وجود جواب را بررسی کنید.

۳ ـ طبق فرض $(\sim q \Rightarrow p)$ ارزش نادرست دارد پس $\sim q \equiv T$ و $p \equiv F$ می‌باشد. از طرفی چون طبق فرض $(q \Rightarrow S) \Leftrightarrow (p \vee \sim r)$ ارزش درست دارد پس $(q \Rightarrow S) \equiv (p \vee \sim r)$ و چون $\sim q \equiv T$ باید $p \equiv F$ بوده و گزارهٔ $(q \Rightarrow S)$ به انتفای مقدم ارزش درست داشته و باید $(P \vee \sim r)$ نیز درست باشد که چون، $p \equiv F$ پس باید $\sim r \equiv T$ لذا $\sim p \equiv T$ و $r \equiv F$ بنابراین ارزش گزارهٔ $r \Leftrightarrow (\sim p \Rightarrow S)$ با توجه به نتایج حاصل همواره با $(\sim S)$ هم ارزش می‌باشد.

اگر $S \equiv T \rightarrow [r \Leftrightarrow (\sim p \Rightarrow S)] \equiv F$

اگر $S \equiv F \rightarrow [r \Leftrightarrow (\sim p \Rightarrow S)] \equiv T$

۴ ـ اگر تعداد اعضای مجموعهٔ A را x و تعداد اعضای مجموعهٔ B را y فرض کنیم طبق مفروضات مسأله داریم:

$$۲^x = ۶۴ \times ۲^y \Rightarrow \frac{۲^x}{۲^y} = ۶۴ \Rightarrow ۲^{x-y} = ۶۴ \Rightarrow x - y = ۶$$

از طرفی $x + y = ۱۰ \Rightarrow \begin{cases} x+y=۱۰ \\ x-y=۶ \end{cases} \Rightarrow x = ۸ , y = ۲$

۵ ـ طبق فرض مسأله داریم $A' \cap B' = \varnothing$ و $A'UB' = M$ از طرفی می‌دانیم $A' \cap A = \varnothing$ و $A'UA = M$ بنابراین،

پس: $\begin{cases} A' \cap B' = A' \cap A \\ A' \cup B' = A' \cup A \end{cases}$

$$B' = \underbrace{B' \cup (A' \cap B')}_{\text{جذب}} = B' \cup (A' \cap A) = (B' \cup A') \cap (B' \cup A)$$

$$= (A' \cup A) \cap (B' \cup A) = (A' \cap B') \cup A = \underbrace{(A' \cap A) \cup A = A}_{\text{جذب}}$$

۶ ـ

$$\left[(A-B)' \cup (B-A)'\right] \cup (A' \cup B')$$
$$= \left[(A \cap B')' \cup (B \cap A')'\right] \cup (A' \cup B')$$
$$= \left[(A' \cup B) \cup (B' \cup A)\right] \cup (A' \cup B')$$
$$= \left(A' \cup \left[B \cup (B' \cup A)\right]\right) \cup (A' \cup B')$$
$$= \left(A' \cup \left[(B \cup B') \cup A\right]\right) \cup (A' \cup B')$$
$$= \left[A' \cup (\underbrace{M \cup A}_{M})\right] \cup (A' \cup B')$$
$$= (A' \cup M) \cup (A' \cup B') = M \cup (A' \cup B') = M$$

۷ ـ

$$\frac{۲}{۲\sqrt[۳]{۲} + ۲ + \sqrt[۳]{۴}} = \frac{۲}{\sqrt[۳]{۲^۴} + \sqrt[۳]{۲^۳} + \sqrt[۳]{۲^۲}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = ۲^۲ = ۴ \\ b = ۲ \\ ab = ۲^۳ = ۸ \end{cases}$$

$$= \frac{۲}{\sqrt[۳]{۴^۲} + \sqrt[۳]{۴ \times ۲} + \sqrt[۳]{۲^۲}} \times \frac{\sqrt[۳]{۴} - \sqrt[۳]{۲}}{\sqrt[۳]{۴} - \sqrt[۳]{۲}}$$

$$= \frac{۲(\sqrt[۳]{۴} - \sqrt[۳]{۲})}{۴ - ۲} = \sqrt[۳]{۴} - \sqrt[۳]{۲}$$

۸ ـ

$$\sqrt[۳]{a^۲\sqrt{a^۳\sqrt[۳]{a^۳\sqrt{a}}}} = \sqrt[۳]{\sqrt{a^۷\sqrt[۳]{a^۳\sqrt{a}}}}$$

$$= \sqrt[۳]{\sqrt{\sqrt[۲]{a^{۳۱}\sqrt{a}}}} = \sqrt[۳]{\sqrt{\sqrt[۳]{\sqrt{a^{۶۳}}}}}$$

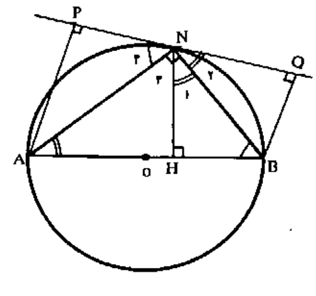
$$= \sqrt[۴۸]{a^{۶۳}} = \sqrt[۱۶]{a^{۲۱}} = a^{\frac{۲۱}{۱۶}} = (۲^۷)^{\frac{۲۱}{۱۶}}$$

$$= a^{\frac{۳}{۱۶}} \qquad a = ۱۲۸ = ۲^۷$$

□ حل مسائل ریاضیات سال دوم ریاضی

۱ ـ (حل از آقای محمود کدخدایی از اصفهان). از نقطه N به نقاط A و B وصل می‌کنیم. مثلث ANB در رأس N قائم‌الزاویه است و داریم:

$$\hat{A}_۱ = \hat{N}_۱ = \hat{N}_۲ \quad \text{و} \quad \hat{B}_۱ = \hat{N}_۲ = \hat{N}_۴$$



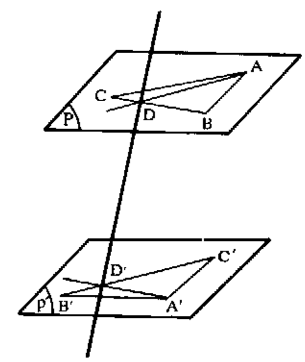
بنابراین: $\Delta NBQ = \Delta NBH$ و $\Delta NAP = \Delta NHA$ در نتیجه $HB = BQ$ و $HA = AP$ است. امّا در مثلث ANB داریم:

$$NH^2 = HA.HB$$

با جایگذاری $HA = AP$ و $HB = BQ$ خواهیم داشت:

$$\Rightarrow NH^2 = AP.BQ$$

۲ ـ صفحهٔ $A'BC$ صفحه P را در فصل مشترک BC قطع می‌کند و صفحهٔ P' را در فصل مشترکی قطع می‌کند که از نقطهٔ A' موازی BC رسم می‌شود. این خط موازی، خط $B'C'$ از صفحهٔ $AB'C'$ را در نقطه‌ای مانند D' قطع می‌کند که یک نقطه از فصل مشترک مورد نظر است. همچنین D نقطهٔ تلاقی BC با خطی که از A به موازات $B'C'$ رسم می‌شود دومین نقطهٔ فصل مشترک مورد نظر می‌باشد. پس خط راست DD' فصل مشترک خواسته شده در مسأله است.



۳ ـ فرض کنیم $B \subseteq C$ ثابت می‌کنیم $A\times B \subseteq A\times C$، برای این منظور عضوی دلخواه از $A\times B$ گرفته و ثابت می‌کنیم عضو $A\times C$ نیز می‌باشد:

$$\text{فرض کنیم}\ (x, y) \in (A\times B) \Rightarrow x\in A \wedge y\in B \overset{B\subseteq C}{\Rightarrow} x\in A \wedge y\in C \Rightarrow (x, y) \in A\times C \Rightarrow (A\times B) \subseteq A\times C$$

۴ ـ شرط لازم: فرض کنیم R رابطه‌ای هم ارزی باشد، در این‌صورت طبق تعریف واضح است که رابطهٔ R بازتابی است از طرفی،

$$\text{اگر}: aRb \wedge bRc \overset{R\ \text{متعدی است}}{\Longrightarrow} aRc \overset{R\ \text{متقارن است}}{\Longrightarrow} cRa$$

شرط کافی: حال فرض کنیم دو شرط الف) و ب) برقرار باشند یعنی داشته باشیم:

الف) R بازتابی است

ب) $\forall a,b,c \in A ; aRb\wedge bRc \Rightarrow cRa$

ثابت می‌کنیم رابطهٔ R هم‌ارزی است.

با توجه به فرض (الف) برای اثبات هم ارزی بودن باید دو خاصیت تقارنی و تعدی را بررسی کنیم:

$$\text{I)}\ \text{فرض کنیم}\ aRb \overset{R\ \text{بازتابی}}{\Longrightarrow} aRb \wedge bRb \overset{\text{شرط (ب)}}{\Longrightarrow} bRa$$

$$\text{II)}\ \text{فرض کنیم}\ aRb \wedge bRc \overset{\text{شرط (ب)}}{\Longrightarrow} cRa \overset{R\ \text{متقارن است}}{\Longrightarrow} aRc$$

۵ ـ می‌دانیم اگر دایره‌ای را دوران دهیم شکل حاصل دوباره دایره خواهد بود بنابراین برای به‌دست آوردن معادلهٔ جدید دایره کافی است مختصات مرکز جدید را پس از دوران به اندازهٔ $\pi/4$ محاسبه کنیم.

چون مرکز دایره قبل از دوران $w\left|\begin{matrix}2\\-3\end{matrix}\right.$ می‌باشد پس:

$$\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow w'\left|\begin{matrix}\frac{5\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{matrix}\right. \quad \text{مرکز جدید}$$

و لازم به تذکر است که در دورانِ هر دایره، شعاع دایره نیز تغییر نمی‌کند که این موضوع را بعداً در کتاب ریاضیات جدید سال چهارم ملاحظه خواهید کرد: پس معادلهٔ دایرهٔ جدید به قرار زیر است:

$$\left(x-\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(y+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 4$$

٦ ـ چون G نسبت به عمل * شرکت‌پذیر است و دارای عضو خنثی چون e می‌باشد لذا برای اثبات گروه بودنِ G می‌بایست خاصیت عضو متقابل را با توجه به شرطِ داده شده بررسی کنیم. از طرفی طبق شرط داریم:

$$\forall x\in G\ \exists !\ y\in G ،\ xy=e$$

پس کافی است ثابت کنیم:

$$\forall x\in G\ \exists !\ y\in G ،\ yx=e$$

حال فرض کنیم x عضو دلخواهی از G باشد طبق فرضِ مسأله y ای منحصر به فرد در G هست که:

$xy=e$ و چون $y\in G$ طبق همان فرض y' ای منحصر بفرد هست که $yy' = e$ بنابراین:

$$xy = e \Rightarrow y(xy) = ye$$

$$\overset{\text{شرکت‌پذیری}}{\Longrightarrow} (yx)y = y \Rightarrow [(yx)y]\, y' = yy'$$

$$\overset{\text{شرکت‌پذیری}}{\Longrightarrow} (yx)(yy')=e \Rightarrow (yx)\, e = e$$

$$\Rightarrow yx = e$$

پس y متقابلِ x است.

۷ ـ

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

اگر ریشهٔ معادلهٔ مفروض را x و ریشهٔ معادلهٔ جدید را y بنامیم داریم:

$$y = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y}$$

در معادله به‌جای x قرار می‌دهیم:

$$\Rightarrow \sqrt[3]{y^2} - 2\sqrt[3]{y} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{y^2} - 2\sqrt[3]{y} = 1$$

طرفین را به توان (۳) می‌رسانیم:

$$y^2 - 8y - 3\left(\sqrt[3]{y^2}\right)\left(2\sqrt[3]{y}\right)(1) = 1$$

$$\Rightarrow y^2 - 8y - 6y = 1$$

$$\Rightarrow y^2 - 14y - 1 = 0 \quad \text{معادلهٔ جدید}$$

$$x'^6 + x''^6 = y_1^2 + y_2^2 = S^2 - 2P$$

$$= (14)^2 - 2(-1) = 198$$

۸ ـ فرمول:

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$$

$$S_{10} = S_6 \Rightarrow \frac{10}{2}\left[2a_1 + 9d\right] = \frac{6}{2}\left[2a_1 + 5d\right]$$

$$\Rightarrow 5(2a_1 + 9d) = 3(2a_1 + 5d)$$

$$\Rightarrow 10a_1 + 45d = 6a_1 + 15d$$

$$\Rightarrow 4a_1 + 30d = 0 \Rightarrow 2a_1 + 15d = 0$$

$$S_{16} = \frac{16}{2}\left[2a_1 + 15d\right] = \frac{16}{2}[0] = 0$$

۹ ـ با توجه به اتحادهای مثلثاتی:

$$\sin a = 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}$$

$$1 + \cos a = 2\cos^2\frac{a}{2} \quad \text{و} \quad \cos a = \sin(\frac{\pi}{2} - a) \quad \text{و} \quad \sin a = \cos(\frac{\pi}{2} - a)$$

داریم:

$$\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x) = 2\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})$$

$$1 + \sin x = 1 + \cos(\frac{\pi}{2} - x) = 2\cos^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})$$

$$\Rightarrow \frac{\cos x}{1+\sin x} = \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos x}{1+\sin x} = tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$$

۱۰ ـ

$$\cot g\left(\frac{\pi}{3}\cos 2\pi x\right) = \sqrt{3}$$

$$\cot g\left(\frac{\pi}{3}\cos 2\pi x\right) = \cot g\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{3}\cos 2\pi x = k\pi + \frac{\pi}{6} \quad \cos 2\pi x = 3k + \frac{1}{2}$$

می‌دانیم $-1 \le \cos a \le 1$، پس داریم:

$$-1 \le 3k + \frac{1}{2} \le 1 \Rightarrow -\frac{3}{2} \le 3k \le \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \le k \le \frac{1}{6}$$

$\overset{(k\in z)}{\Rightarrow}$

$K=0$

$\Rightarrow \cos 2\pi x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow 2\pi x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \boxed{x = k \pm \frac{1}{6}\ ,\ k\in Z}$

۱۱-

$36\sqrt{2}\ \mathrm{Arcsin}\sqrt[3]{x} = 12\pi\cos\frac{\pi}{4}$

پس از اختصار لازم داریم:

$3\sqrt{2}\ \mathrm{Arcsin}\sqrt[3]{x} = \pi\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\mathrm{Arcsin}\sqrt[3]{x} = \frac{\pi}{6}$

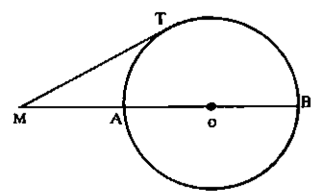
$\Rightarrow \sqrt[3]{x} = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \sqrt[3]{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{8}}$

□ **حل مسائل ریاضیات سال سوم ریاضی**

۱- فرض می‌کنیم نقطه M یکی از نقاط مورد نظر باشد، دو سر قطر دایره، گذرنده از نقطهٔ M را A و B می‌نامیم، و از این نقطهٔ مماس MT را بر دایره رسم می‌کنیم. بنا به فرض مسأله $\frac{MA}{MT} = k$ است. از طرفی می‌دانیم که: $MT^2 = MA.MB$. به‌جای MT در این رابطه با استفاده از فرض مسأله مقدار می‌گذاریم، خواهیم داشت:

$MT = \frac{MA}{K} \Rightarrow \frac{MA^2}{K^2} = MA.MB \Rightarrow \frac{MA}{MB} = K^2 \Rightarrow$

$\frac{MA}{K^2} = \frac{MB}{1} = \frac{MB-MA}{1-K^2} = \frac{AB}{1-K^2} = \frac{2R}{1-K^2}$

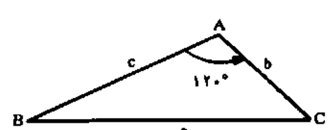


$=\frac{MA+MB}{K^2+1} = \frac{2OM}{K^2+1}$

$\Rightarrow OM = \frac{R(1+K^2)}{1-K^2} = Cte$ مقدار ثابت

بنابراین مکان هندسی نقطهٔ M دایره‌ای به مرکز O و به شعاع مقدار ثابت فوق است.

۲- می‌دانیم که اگر در مثلث ABC، $\hat{A} = 120°$ باشد، داریم: $a^2 = b^2 + c^2 + bc$. با توجه به این نکته خواهیم داشت:



الف) $r_b + r_c = R \Rightarrow \frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-c} = R \Rightarrow$

$s\left(\frac{p-c+p-b}{(p-b)(p-c)}\right) = \frac{abc}{4s} \Rightarrow \frac{as}{(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{4s}$,

$\Rightarrow 4s^2 = bc(p-b)(p-c)$

$4P(p-a)(p-b)(p-c) = bc(p-b)(p-c)$

$\Rightarrow (a+b+c)(b+c-a) = bc$

$\Rightarrow b^2+c^2+2bc-a^2 = bc \Rightarrow a^2+bc-a^2 = bc$

$\Rightarrow \boxed{bc = bc}$

ب) $h_b.h_c = \frac{3}{4}bc \Rightarrow \frac{2s}{b}\times\frac{2s}{c} = \frac{3}{4}bc \Rightarrow$

$16s^2 = 3b^2c^2 \Rightarrow$

$16p(p-a)(p-b)(p-c) = 3b^2c^2$

$\Rightarrow (a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c) = 3b^2c^2$

$\Rightarrow (b^2+c^2+2bc-a^2)\left[a^2-(b^2+c^2-2bc)\right]$

$=3b^2c^2$

$\Rightarrow (bc)(3bc) = 3b^2c^2 \Rightarrow \boxed{3b^2c^2 = 3b^2c^2}$

۳- برای اثبات زیر فضا بودن چون $R\neq\emptyset$ و $R\subseteq M_{n\times n}$ کافی است ثابت کنیم مجموعهٔ R یعنی، $R = \{A|AB_0 = B_0A\}$ (مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای $n\times n$ که ضرب آنها با B_0 جابجایی دارد) نسبت به جمع و ضرب اسکالر بسته است.

I) $A_1, A_2 \in R \Rightarrow A_1B_0 = B_0A_1 \wedge A_2B_0 = B_0A_2$

برای این که ثابت کنیم $(A_1 + A_2)$ عضو R است باید با B_0 تعویض‌پذیر باشد

$(A_1+A_2)B_0 = A_1B_0+A_2B_0 = B_0A_1+B_0A_2 = B_0(A_1+A_2)$

II) فرض کنیم $r \in IR\ ,\ A \in R \Rightarrow AB_0 = B_0A$

مجدداً برای اثبات این که R نسبت به ضرب اسکالر بسته است باید ثابت کنیم rA با B_0 تعویض‌پذیر است تا بتوانیم نتیجه بگیریم $rA \in R$

$(rA)B_0 = r(AB_0) = r(B_0A) = B_0(rA)$

۴- با توجه به شکل، ۲ نفر خاص را اگر a و b بنامیم یکی از حالتهای مطلوب آن است که a در مکان ۱ و b در مکان ۸ قرار بگیرد و یا به ترتیب در مکانهای ۲ و ۷ یا ۳ و ۶ یا ۴ و ۵ که چهار حالت امکان‌پذیر است و در هر حالت ۶ صندلی دیگر توسط ۶ نفر باقی مانده به !۶ طریق می‌تواند پُر شود و در ضمن در هر حالت جای a و b می‌تواند با هم عوض شود بنابراین در قسمت اولاً جواب عدد !۶ × ۲ × ۴ بوده و در قسمت ثانیاً دو نفر در کنار یکدیگر در مکانهای ۱ و ۲ یا ۲ و ۳ یا ... یا ۷ و ۸ می‌توانند قرار بگیرند که ۶ حالت داشته پس جواب به شکل (۶ × !۶ × ۲) می‌باشد.

۴	۳	۲	۱
۵	۶	۷	۸

۵- در حالت کلّی اگر r شیئی متمایز را بین n خانه به تصادف توزیع کنیم احتمال آن که در یک خانهٔ معین k شیئی جا داده شده باشد از رابطهٔ $P = \frac{\binom{k}{r}\times(n-1)^{r-k}}{n^r}$ ،

در این مسأله $\rightarrow\ n = 3\ ,\ r = 12\ ,\ k = 3$

$\Rightarrow P = \frac{\binom{12}{3}\times 2^9}{3^{12}}$

۶- طبق فرض مسأله داریم:

$\frac{\sum x_i}{50} = 16 \Rightarrow \sum x_i = 800$

$19 - 9 = 10 \Rightarrow$ میانگین واقعی $= \frac{800-10}{50} = 15/8$

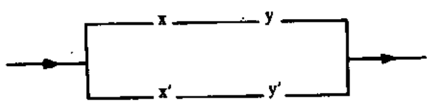
۷- چون جبر گزاره‌ها همراه با دو عمل فصلی (∨) و عطفی (∧) نیز یک جبر بول است و در این جبر داریم:

$p \Leftrightarrow q \equiv (p\wedge q) \vee \sim(p\vee q)$

بنابراین

$x \Leftrightarrow y \equiv (xy) + (x+y)' \equiv xy + (x'.y')$

که مدار آن به شکل زیر خواهد بود



۸-

$f(x) = \sin\frac{\pi}{2}x + \sqrt{-\sin^2\pi[x]}$

$-\sin^2\pi[x] \geq 0 \Rightarrow \sin\pi[x] = 0$

$\Rightarrow \pi[x] = k\pi$

$\Rightarrow [x] = k\ ,\ k\in Z \Rightarrow \boxed{D_f = R}$

$\Rightarrow f(x) = \sin\frac{\pi}{2}x + \sqrt{0}\ ,\ x\in R$

$\Rightarrow -1 \leq \sin\frac{\pi x}{2} \leq +1$

$\Rightarrow \boxed{R_f = R}$

۹-

فرض می‌کنیم: $M\left|\begin{matrix}x_1\\y_1\end{matrix}\right.$ یک نقطه از مکان باشد. و ضریب زاویه مماسها را m فرض می‌کنیم.

معادله فرضی مماس. $y-y_1 = m(x-x_1) \Rightarrow y = mx-mx_1+y_1$

$\begin{cases} y = mx - mx_1 + y_1 \\ y = \frac{x^2+1}{x} \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2+1}{x} = \frac{mx-mx_1+y_1}{1}$

$\Rightarrow (m-1)x^2 + (y_1-mx_1)x - 1 = 0$ معادله تقاطع خط و منحنی

برای آن‌که خط بر منحنی مماس باشد باید معادله تقاطع ریشه مضاعف داشته باشد.

پس باید $\Delta = ۰$

$$\Delta = (y_۱ - mx_۱)^۲ + ۴(m-۱) = ۰$$

$$\Rightarrow x_۱^۲m^۲ + (۴ - ۲x_۱y_۱)m + (y_۱^۲ - ۴) = ۰$$

چون دو مماس بر هم عمودند. پس: $m'.m'' = -۱$.

$$m'.m'' = -۱ \Rightarrow \frac{c}{a} = -۱ \Rightarrow \frac{y_۱^۲ - ۴}{x_۱^۲} = -۱$$

معادله مکان نقطه M. $\Rightarrow y_۱^۲ - ۴ = -x_۱^۲ \Rightarrow \boxed{x_۱^۲ + y_۱^۲ = ۴}$

۱۰- $A = \sin\frac{\pi}{۵}\sin\frac{۲\pi}{۵}\sin\frac{۳\pi}{۵}\sin\frac{۴\pi}{۵}$

$$= \left(\sin\frac{\pi}{۵}\sin\frac{۴\pi}{۵}\right)\left(\sin\frac{۲\pi}{۵}\sin\frac{۳\pi}{۵}\right)$$

$$= \left(\sin\frac{\pi}{۵}\sin(\pi - \frac{\pi}{۵})\right)\left(\sin\frac{۲\pi}{۵}\sin(\pi - \frac{۲\pi}{۵})\right)$$

$$= \sin^۲\frac{\pi}{۵}\sin^۲\frac{۲\pi}{۵} = \sin^۲ ۳۶^\circ \sin^۲ ۷۲^\circ$$

$$= (۱ - \cos^۲ ۳۶^\circ)(۱ - \cos^۲ ۷۲^\circ)$$

$$\Rightarrow A = ۱ - (\cos^۲ ۳۶^\circ + \cos^۲ ۷۲^\circ) + \cos^۲ ۳۶^\circ \cos^۲ ۷۲^\circ$$

از طرفی داریم:

$$\cos ۳۶^\circ \cos ۷۲^\circ = \frac{\cos ۳۶^\circ \cos ۷۲^\circ \times ۲ \times ۲\sin ۳۶^\circ}{۲ \times ۲\sin ۳۶^\circ}$$

$$= \frac{۲\sin ۷۲^\circ \cos ۷۲^\circ}{۴\sin ۳۶^\circ} = \frac{\sin ۱۴۴^\circ}{۴\sin ۳۶^\circ} = \frac{\sin(۱۸۰^\circ - ۳۶^\circ)}{۴\sin ۳۶^\circ}$$

$$= \frac{\sin ۳۶^\circ}{۴\sin ۳۶^\circ} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \cos ۳۶^\circ \cos ۷۲^\circ = \frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow A = ۱ - \left(\frac{۱ + \cos ۷۲^\circ}{۲} + \frac{۱ + \cos ۱۴۴^\circ}{۲}\right) + \frac{۱}{۱۶}$$

$$= \frac{۱}{۱۶} - \frac{\cos ۷۲^\circ + \cos ۱۴۴^\circ}{۲} = \frac{۱}{۱۶} - \frac{\cos ۷۲^\circ - \cos ۳۶^\circ}{۲}$$

$$= \frac{۱}{۱۶} + \frac{۲\sin ۵۴^\circ \sin ۱۸^\circ}{۲} = \frac{۱}{۱۶} + \sin ۵۴^\circ \sin ۱۸^\circ$$

$$= \frac{۱}{۱۶} + \cos ۳۶^\circ \cos ۷۲^\circ = \frac{۱}{۱۶} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} = \frac{۵}{۱۶}$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \frac{۵}{۱۶}}$$

۱۱- داریم:

$$tg(۲\alpha - \alpha) = \frac{tg ۲\alpha - tg\alpha}{۱ + tg\alpha\, tg ۲\alpha} \Rightarrow tg\alpha = \frac{tg ۲\alpha - tg\alpha}{۱ + tg\alpha\, tg ۲\alpha}$$

$$\Rightarrow tg\alpha\, tg ۲\alpha = \frac{tg ۲\alpha - tg\alpha}{tg\alpha} - ۱$$

$$tg(۳\alpha - ۲\alpha) = \frac{tg ۳\alpha - tg ۲\alpha}{۱ + tg ۳\alpha\, tg ۲\alpha}$$

$$\Rightarrow tg ۲\alpha\, tg ۳\alpha = \frac{tg ۳\alpha - tg ۲\alpha}{tg\alpha} - ۱$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$S = \frac{tg ۲\alpha - tg\alpha}{tg\alpha} - ۱ + \frac{tg ۳\alpha - tg ۲\alpha}{tg\alpha}$$

$$- ۱ + \dots + \frac{tgn\alpha - tg(n-۱)\alpha}{tg\alpha} - ۱$$

$$= \frac{tg ۲\alpha - tg\alpha + tg ۳\alpha - tg ۲\alpha + \dots + tgn\alpha - tg(n-۱)\alpha}{tg\alpha} - n$$

پس از اختصار لازم داریم:

$$S = \frac{tgn\alpha - tg\alpha}{tg\alpha} - n$$

۱۲- $\cos^{۱۰}x + \sin^{۱۰}x = \frac{۲۹}{۱۶}\cos^۲ ۲x$

$$(\cos^۲ x)^۵ + (\sin^۲ x)^۵ = \frac{۲۹}{۱۶}\cos^۲ ۲x$$

$$\Rightarrow \left(\frac{۱ + \cos ۲x}{۲}\right)^۵ + \left(\frac{۱ - \cos ۲x}{۲}\right)^۵ = \frac{۲۹}{۱۶}\cos^۲ ۲x$$

$$\Rightarrow (۱ + \cos ۲x)^۵ + (۱ - \cos ۲x)^۵ = ۵۸\cos^۲ ۲x$$

با توجه به اتحاد:

$$(a \pm b)^۵ = a^۵ \pm ۵a^۴b + ۱۰a^۳b^۲ \pm ۱۰a^۲b^۳ + ۵ab^۴ \pm b^۵$$

و اختصار لازم داریم:

$$۲۴\cos^۴ ۲x - ۱۰\cos^۲ ۲x - ۱ = ۰ \Rightarrow \cos^۲ ۲x = \frac{۵ \pm ۷}{۲۴}$$

جواب مورد قبول چنین است:

$$\cos^۲ ۲x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos ۲x = \pm\frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \cos ۲x = \frac{\sqrt{۲}}{۲},$$

$$\cos ۲x = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos ۲x = \cos\frac{\pi}{۴}$$

$$\Rightarrow ۲x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{۸},$$

$$\cos ۲x = \cos\frac{۳\pi}{۴} \Rightarrow ۲x = ۲k\pi \pm \frac{۳\pi}{۴}$$

$$\Rightarrow x = k\pi \pm \frac{۳\pi}{۸}$$

۱۳- با توجه به تساویهای $b = ۲R\sin\hat{B}$ و $c = ۲R\sin\hat{C}$ داریم:

$$b^۲ + c^۲ = ۸R^۲\cos\hat{B} \Rightarrow ۴R^۲\sin^۲\hat{B} + ۴R^۲\sin^۲\hat{C}$$

$$= ۸R^۲\cos\hat{B}$$

$$\Rightarrow \sin^۲\hat{B} + \sin^۲\hat{C} = ۲\cos\hat{B}$$

و با استفاده از اتحاد $\sin^۲\hat{C} = \frac{۱ - \cos ۲\hat{C}}{۲}$ و شرط مسأله $\hat{B} = ۲\hat{C}$، خواهیم داشت:

$$\sin^۲\hat{B} + \frac{۱ - \cos\hat{B}}{۲} = ۲\cos\hat{B}$$

$$\Rightarrow ۱ - \cos^۲\hat{B} + \frac{۱ - \cos\hat{B}}{۲} = ۲\cos\hat{B}$$

$$\Rightarrow ۲\cos^۲\hat{B} + ۵\cos\hat{B} - ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow \cos B = \frac{-۵ \pm ۷}{۴}$$

و جواب مورد قبول چنین است:

$$\cos\hat{B} = \frac{-۵ + ۷}{۴} = \frac{۱}{۲} = \cos ۶۰^\circ \Rightarrow \hat{B} = ۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{C} = \frac{\hat{B}}{۲} = \frac{۶۰}{۲} = ۳۰^\circ$$

$$, \ \hat{A} = ۱۸۰^\circ - (۳۰^\circ + ۶۰^\circ) = ۹۰^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A} = ۹۰^\circ, \ \hat{B} = ۶۰^\circ, \ \hat{C} = ۳۰^\circ$$

□ حل مسائل کامپیوتر سال سوّم ریاضی

۱- اولاً: قرار دهید $F(x) = (2x+1)^2 - 4\cos\pi x$، چون $F(\frac{1}{4}) < ۰$ و $F(\frac{1}{3}) > ۰$ است و از آنجاکه $F(x)$ در فاصلهٔ داده شده پیوسته است بنابراین یک x در فاصلهٔ $[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$ وجود دارد که در آن $F(x) = ۰$.

خوانندگان دقیق توجه دارند دنباله‌هایی که با روش نیوتن - رفسون برای x_nها ایجاد می‌شود زمانی منتهی به جواب می‌شود که این دنباله همگرا باشد. بحث کامل و پیشرفتهٔ این روش را که مشتمل بر برقراری دو شرط:

۱- به ازای تمام مقادیر x در فاصلهٔ $[a,b]$ بایستی $|g'(x)| < 1$ باشد.

۲- به ازای تمام مقادیر x در فاصلهٔ $[a,b]$ بایستی $a \le g(x) \le b$ باشد، است؛ می‌توانید در هر کتاب مقدماتی آنالیز عددی بیابید.

ثانیاً: برنامه:

```
10  REM NEWTON - RAPHSON METHOD FOR SOLVING NONLINEAR EQUATIONS
20  LET PI=4*ATN(1)
30  INPUT"ENTER A NUMBER BETWEEN 1/4 & 1/3 PLEASE : ";X
40  LET Y=X-((2*X+1)^2-4*COS(PI*X))/(4*(2*X+1)+4*PI*SIN(PI*X))
50  WHILE ABS(Y-X) > .000001
60    LET X      = Y
70    LET FX     = (2*X+1)^2-4*COS(PI*X)
80    LET FPRIME = 4*(2*X+1)+4*PI*SIN(PI*X)
90    LET Y      = X-FX/FPRIME
100 WEND
110 PRINT"APPROXIMATE ROOT OF (2*X+1)^2-4*COS(PI*X) = 0 EQUALS X=";Y
120 END
```

۵-

$1)\ s \Rightarrow p$

$2)\ p \Rightarrow (p\wedge r)$

$3)\ \sim q \wedge (s \vee t)$

$\therefore\ t$

$4)\ s \Rightarrow (q\wedge r)$ از (۱) و (۲) و قیاس

$5)\ (s \vee t)$ از (۳) و حذف عاطف

$6)\ (\sim t \Rightarrow s)$ از (۵) و تبدیل فصلی به شرطی

$7)\ \sim t \Rightarrow (q\wedge r)$ از (۶) و (۵) و قیاس

$8)\ \sim q$ از ۳ و حذف عاطف

$9)\ (\sim q \vee \sim r)$ از (۸) و ادخال فاصل

$10)\ \therefore t$ از ۷ و ۹ و نقیض انتزاع

۶- چون طبق فرض در حلقهٔ یکدار R داریم $ab=1$ پس $b\neq 0$ و $a\neq 0$ از طرفی:

$$(ab)\times 1 = ab \overset{ab=1}{\Longrightarrow} (ab)\,ab = ab$$

$$\Rightarrow a(ba)b = ab \Rightarrow a(ba)\,b - ab = 0$$

$$\Rightarrow a(ba-1)b = 0 \overset{\text{R مقسوم علیه صفر ندارد}}{\Longrightarrow} (ba-1)=0 \Rightarrow ba=1$$

۷- می‌خواهیم به استقراء ثابت کنیم: $2^{n-1}(x^n+y^n) \ge (x+y)^n$

$n=1 \rightarrow 2^0(x+y) \ge (x+y) \Rightarrow p(1)\equiv T$

فرض استقراء $n=k \rightarrow 2^{k-1}(x^k+y^k) \ge (x+y)^k$

حکم استقراء $n=(k+1) \rightarrow 2^k(x^{k+1}+y^{k+1}) \ge (x+y)^{k+1}$

طرفین فرض را در $(x+y)$ ضرب می‌کنیم که خواهیم داشت:

$$2^{k-1}(x^k+y^k)(x+y) \ge (x+y)^{k+1}$$

حال با توجه به رابطهٔ به‌دست آمده و حکم استقراء کافی است ثابت کنیم:

$$2^{k-1}(x^k+y^k)(x+y) \le 2^k(x^{k+1}+y^{k+1})$$

$$\overset{\text{بر } 2^{k-1} \text{ تقسیم}}{\Longleftrightarrow} (x^{k+1}+x^ky+y^kx+y^{k+1}) \le 2(x^{k+1}+y^{k+1})$$

$$\Longleftrightarrow x^{k+1}+y^{k+1}+x^ky+y^kx \ge 0 \Leftrightarrow x^k(x+y)+y^k(y+x) \ge 0$$

$$\Longleftrightarrow (x+y)(x^k+y^k) \ge 0$$

نامساوی آخر برقرار است زیرا طبق فرض x و y اعداد مثبت بوده پس x^k و y^k نیز مثبت بوده بنابراین $(x+y)$ و (x^k+y^k) هر دو مثبت می‌باشند.

۸- از روش نردبانی استفاده کرده و قسمت اولاً را ثابت می‌کنیم:

	۱	۲	۱	۳	
15a+4b	11a+3b	4a+b	3a+b	a	b
4a+b	3a+b	a	b		

$(15a+4b \text{ و } 11a+3b)=(a,b) \Longleftarrow$ طبق الگوریتم اقلیدسی

ثانیاً:

$$3^4 = 81 \overset{17}{\equiv} (-4) \Rightarrow (3^4)^{n+1} \overset{17}{\equiv} (-4)^{n+1}$$

$$4^3 = 64 \overset{17}{\equiv} -4 \Rightarrow (4^3)^{n+1} \equiv (-4)^{n+1}$$

$$\Rightarrow 3^{4n+4} - 4^{3n+3} \overset{17}{\equiv} (-4)^{n+1} - (-4)^{n+1} = 0$$

۹- چون $(9n+7 \text{ و } 5n+4)=1$ لذا معادلهٔ $(9n+7)x+(5n+4)y=8$ همواره در Z دارای جواب است و اگر قرار دهیم $n=1$ معادله به شکل $16x+9y=8$ ظاهر می‌شود که داریم:

$$y = \frac{8-16x}{9} = \frac{9-1-18x+2x}{9} = 1-2x+\frac{2x-1}{9}$$

چون $y\in Z \Rightarrow \frac{2x-1}{9} = t \Rightarrow 2x-1 = 9t \Rightarrow x = \frac{9t+1}{2}$

$$\Rightarrow x = \frac{8t+t+1}{2} = 4t+\frac{t+1}{2}$$

اگر $\frac{t+1}{2} = k \Rightarrow t+1 = 2k \Rightarrow t = 2k-1$

اگر $k=0 \Rightarrow t=-1 \Rightarrow \boxed{x=-4}$ و $\boxed{y=8}$

۱۰- چون $|A|=k$ و با توجه به این که اگر A ماتریسی $n\times n$ باشد همواره $|\alpha A| = \alpha^n|A|$ داریم:

$$||A|A|A| = ||kA|A| = |k^n|A|A|$$

$$= |k^{n+1}A| = (k^{n+1})^n\ |A| = k^{n^2+n}\times k = k^{n^2+n+1}$$

۱۱- ماتریس تبدیل کل از ضرب این دو ماتریس تبدیل در یکدیگر حاصل می‌شود یعنی:

$$\text{ماتریس تبدیل کل} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\sqrt{3/2} & 0 \\ \sqrt{3/2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 2 \\ \sqrt{3/2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حال برای نوشتن معادلهٔ خط حاصل کافی است ماتریس تبدیل کل را روی نقطه‌ای دلخواه از خط اثر داده و تبدیل یافته آن را یافته و روی معادلهٔ خط إعمال کنیم:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\sqrt{3/2} & 2 \\ \sqrt{3/2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x & -\sqrt{\frac{3}{2}}y & +2 \\ \sqrt{3/2}\,x & +\frac{1}{2}y & -1 \\ & 1 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 2 = X \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - 1 = Y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{matrix} \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y = X-2 & 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = Y+1 & 2 \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{2}X - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}Y + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}X + \frac{\sqrt{3}}{2}Y + \frac{\sqrt{3}-2}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}y = Y + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$\Rightarrow y = 2Y+2-\sqrt{3}x$$

$$= 2Y+2-\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}X + \frac{\sqrt{3}}{2}Y + \frac{\sqrt{3}-2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow y = 2Y+2-\frac{\sqrt{3}}{2}X - \frac{3}{2}Y + \frac{2\sqrt{3}-3}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}Y - \frac{\sqrt{3}}{2}X + \frac{2\sqrt{3}+1}{2}}$$

حال در معادلهٔ خط داده شده یعنی $2x-y=4$ به‌جای x و y تبدیل یافته‌های آنها را قرار می‌دهیم که خواهیم داشت:

$$2\left(\frac{1}{2}X + \frac{\sqrt{3}}{2}Y + \frac{\sqrt{3}-2}{2}\right)$$

$$-\left(\frac{1}{2}Y - \frac{\sqrt{3}}{2}X + \frac{2\sqrt{3}+1}{2}\right) = 4$$

$$\Rightarrow \left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)X + \left(\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)Y$$

$= \frac{13}{2}$ معادلهٔ جدید خط

۱۲-

$$y = \frac{ax^2+bx}{x^2+x+3} \qquad b<0$$

$$y' = \frac{(a-b)x^2+6ax+3b}{(x^2+x+3)^2} = 0$$

$$\Rightarrow (a-b)x^2 + 6ax + 3b = 0$$

$$x_1+x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow -\frac{12}{5} = \frac{-6a}{a-b} \Rightarrow \boxed{3a=-2b}$$

$y = \frac{ax^2+bx}{x^2+x+3} \Longrightarrow$ طرفین وسطین می‌کنیم:

$$\Longrightarrow (y-a)x^2 + (y-b)x + 3y = 0$$

$$\Delta = (y-b)^2 - 12y(y-a) = 0$$

$$\Rightarrow -11y^2 + (12a-2b)y + b^2 = 0$$

$$y_1 y_2 = \frac{c}{a} \Longrightarrow -\frac{9}{11} = \frac{b^2}{-11}$$

$\Longrightarrow b^2 = 9 \Longrightarrow \boxed{b=-3}$ و $\boxed{a=2}$

۱۳-

$$I = \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$x = t^4 \Rightarrow dx = 4t^3dt$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{\sqrt[3]{1+t}}{t^2}\left(4t^3\right)dt = 4\int t\,\sqrt[3]{1+t}\,dt$$

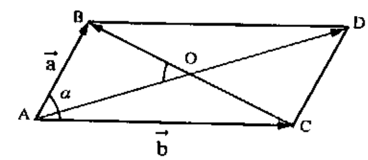
۲ ـ برنامه:

```
10   REM NEWTON - RAPHSON METHOD FOR SOLVING NONLINEAR EQUATIONS
20   INPUT"  ENTER A NUMBER BETWEEN (0) & 2 PLEASE : ";X
30   LET Y=X-(2*SIN(X)-X)/(2*COS(X)-1)
40   WHILE ABS(Y-X) > .000001
50     LET  X       = Y
60     LET FX       = 2*SIN(X)-X
70     LET FPRIME   = 2*COS(X)-1
80     LET Y        = X-FX/FPRIME
90   WEND
100  PRINT"APPROXIMATE ROOT OF 2*SIN(X)-X = 0 EQUALS X=";Y
110  END
```

```
10   REM  SOLVING X^3+X-1=0 BY NEWTON - RAPHSON METHOD
20   INPUT"ENTER A NUMBER BETWEEN 0 & 1 PLEASE :";X
30   LET Y=X-(X^3+X-1)/(3*X^2+1)
40   WHILE ABS(Y-X) > .000001
50     LET  X       = Y
60     LET FX       = X^3+X-1
70     LET FPRIME   = 3*X^2+1
80     LET Y        =  X-FX/FPRIME
90   WEND
100  PRINT"  X= ";Y;" IS A ROOT OF X^3+X-1=0 "
110  END
```

☐ حل مسائل ریاضیات سال چهارم ریاضی

۱ ـ الف) اگر $\vec{a} = \vec{AB}$ و $\vec{b} = \vec{AC}$ اختیار شود، $\vec{AD} = \vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{CB} = \vec{a} - \vec{b}$ خواهد بود. با فرض $(\vec{a}, \vec{b}) = \alpha$ در مثلث ABD داریم:



$$\hat{ABD} = ۱۸۰ - \alpha,\ AB = |\vec{a}| = ۴,\ BD = |\vec{b}| = ۶,$$

$$AD = |\vec{a} + \vec{b}| = ۲\sqrt{۱۹}$$

$$\Rightarrow \cos \hat{ABD} = \cos(۱۸۰ - \alpha) = \frac{AB^۲ + BD^۲ - AD^۲}{۲AB.BD}$$

$$= \frac{۱۶ + ۳۶ - ۷۶}{۲ \times ۴ \times ۶} = \frac{-۲۴}{۴۸} = \frac{-۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{۱}{۲} = \cos\frac{\pi}{۳} \Rightarrow \alpha = (\hat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\pi}{۳}$$

ب) در متوازی‌الاضلاع ABDC داریم:

$$AD^۲ + BC^۲ = ۲(AB^۲ + AC^۲)$$

$$\Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}|^۲ + |\vec{a} - \vec{b}|^۲$$

$$= ۲(|\vec{a}|^۲ + |\vec{b}|^۲)$$

$$\Rightarrow (۲\sqrt{۱۹})^۲ + |\vec{a} - \vec{b}|^۲ = ۲(۱۶ + ۳۶)$$

$$\Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}|^۲ = ۲۸ \Rightarrow \boxed{|\vec{a} - \vec{b}| = ۲\sqrt{۷}}$$

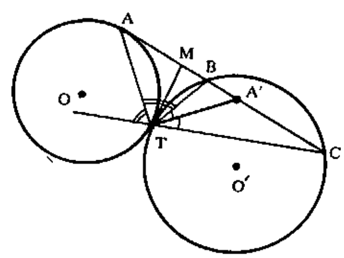
ج) درمثلث AOB داریم: $OA = \sqrt{۱۹}, OB = \sqrt{۷}, AB = ۴$.
با فرض $\hat{AOB} = \theta$ خواهیم داشت:

$$\cos\theta = \frac{OA^۲ + OB^۲ - AB^۲}{۲OA.OB} = \frac{۱۹ + ۷ - ۱۶}{۲\sqrt{۱۹} \times \sqrt{۷}}$$

$$= \frac{۵}{\sqrt{۱۳۳}} \Rightarrow$$

زاویهٔ حادهٔ بین دو قطر $\theta = \text{Arccos}\frac{۵}{\sqrt{۱۳۳}} = (\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b})$

۲ ـ حالتی را در نظر می‌گیریم که دو دایره مماس خارجند. مماس مشترک داخلی دو دایره را رسم می‌کنیم تا خط AB را در نقطهٔ M قطع کند. قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به نقطه M را به‌دست آورده A' می‌نامیم.



بنا به روابط طولی در دایره داریم: $MT^۲ = MB.MC$

امّا $MA' = MA = MT$. پس $MA^۲ = MA'^۲ = MB.MC$. باتوجه به اینکه نقطهٔ M وسط پاره‌خط AA' است، رابطه فوق نشان می‌دهد که (AA'BC) یک تقسیم توافقی و T-AA'BC یک‌دستگاه توافقی است که چون دو شعاع TA و TA' بر هم عمودند (زیرا در مثلث AA'T داریــــــم $MA' = MT = MA$)، پس TA و TA' نیمسازهای زوایای داخلی و خارجی زاویهٔ BTC می‌باشد که در این حالت TA نیمساز زاویهٔ خارجی BTC است در حالتی که دو دایره مماس داخل باشند به روش مشابه ثابت می‌شود که TA نیمساز زاویهٔ داخلی BTC است.

۳ ـ معادلهٔ دسته صفحه گذرنده بر خط $D: ۳x - ۱ = y = z - ۳$ را می‌نویسیم و از بین صفحات این دسته صفحه، صفحه‌ای را انتخاب می‌کنیم که بر صفحهٔ $P: x + ۲y + z = ۰$ عمود باشد.

$$D: \begin{cases} ۳x - ۱ - y = ۰ \\ y - z + ۳ = ۰ \end{cases}$$

معادلهٔ دسته صفحه گذرنده بر خط D:

$$\alpha(۳x - y - ۱) + \beta(y - z + ۳) = ۰$$

$$\Rightarrow ۳\alpha x + (\beta - \alpha)y - \beta z - \alpha + ۳\beta = ۰ \Rightarrow$$

بردار نرمال دسته صفحه $\vec{V}(۳\alpha, \beta - \alpha, -\beta)$

بردار نرمال صفحهٔ P $(۱ و ۲ و ۱)\ \vec{V'} \Leftarrow P: x + ۲y + z = ۰$

شرط عمود بودن دو صفحه $aa' + bb' + cc' = ۰$

$$\Rightarrow ۱(۳\alpha) + ۲(\beta - \alpha) + ۱(-\beta) = ۰$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = ۰ \Rightarrow \alpha = -\beta \Rightarrow -۳\beta x + ۲\beta y - \beta z + ۴\beta = ۰$$

معادلهٔ صفحهٔ موردنظر (صفحهٔ P') $\Rightarrow \boxed{-۳x + ۲y - z + ۴ = ۰}$

$P: x + ۲y + z = ۰$ و $P': -۳x + ۲y - z + ۴ = ۰$

$$\alpha(x + ۲y + z) + \beta(-۳x + ۲y - z + ۴) = ۰$$

$$\Rightarrow (\alpha - ۳\beta)x + (۲\alpha + ۲\beta)y + (\alpha - \beta)z + ۴\beta = ۰$$

معادله دسته صفحهٔ شامل دو صفحهٔ P و P'.

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ - ۲x + ۴y = ۴ \Rightarrow (x - ۱)^۲ + (y + ۲)^۲ + z^۲ = ۹$$

شعاع کره $R = ۳ \Leftarrow R^۲ = ۹$ ، مرکز کره $(۰ و ۲- و ۱)\ O_۱ \Leftarrow$

شرط مماس بودن صفحه بر کره آن است که فاصلهٔ مرکز کره از صفحه، برابر شعاع کره باشد، یعنی:

$$۳ = \frac{|\alpha - ۳\beta - ۴\alpha - ۴\beta + ۴\beta|}{\sqrt{(\alpha - ۳\beta)^۲ + (۲\alpha + ۲\beta)^۲ + (\alpha - \beta)^۲}}$$

$$= \frac{۳|\alpha + \beta|}{\sqrt{۶\alpha^۲ + ۱۴\beta^۲}}$$

$$\Rightarrow |\alpha + \beta| = \sqrt{۶\alpha^۲ + ۱۴\beta^۲} \Rightarrow \alpha^۲ + \beta^۲ + ۲\alpha\beta$$

$$= ۶\alpha^۲ + ۱۴\beta^۲ \Rightarrow ۵\alpha^۲ - ۲\alpha\beta + ۱۳\beta^۲ = ۰$$

جواب ندارد. $\Leftarrow \Delta' = \beta^۲ - ۶۵\beta^۲ = -۶۴\beta^۲ < ۰$

بنابراین هیچ صفحه‌ای از دسته صفحه بالا نمی‌تواند بر کره داده شده مماس باشد. علت آن است که خط $D': \frac{x}{۲} = \frac{y+۱}{۱} = \frac{z-۲}{-۴}$ فصل مشترک دو صفحه p و p' با کره متقاطع است بنابراین هر صفحه‌ای که بر D' بگذرد کره را قطع خواهد کرد.

۴ ـ

$$[(\sim s \wedge p) \vee (p \wedge s)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow q]$$

$$\equiv \left[p \wedge \left(\underbrace{\sim s \vee s}_{(T)}\right)\right] \Rightarrow [\sim(p \Rightarrow q) \vee q]$$

$$\equiv (p \wedge T) \Rightarrow [(p \wedge \sim q) \vee q] \equiv p \Rightarrow (p \vee q)$$

$$\equiv \sim p \vee (p \vee q) \equiv (\sim p \vee p) \vee q \equiv T \vee q \equiv T$$

$$1+t=u \Rightarrow \begin{cases} du=dt \\ t=u-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I=4\int (u-1)\,u^{\frac{1}{3}}\,du$$

$$=4\int u^{\frac{4}{3}}\,du-4\int u^{\frac{1}{3}}\,du$$

$$=4\times\frac{3}{7}u^{\frac{7}{3}}-3u^{\frac{4}{3}}+c$$

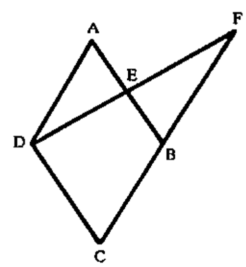
$$=\frac{12}{7}(1+t)^{\frac{7}{3}}-3(1+t)^{\frac{4}{3}}+c$$

$$=\frac{12}{7}(1+\sqrt[3]{x})^{\frac{7}{3}}-3(1+\sqrt[3]{x})^{\frac{4}{3}}+c$$

☐ حل مسائل ریاضیات سال دوم تجربی

۱ـ در مثلث FDC، EB||DC است لذا داریم:

$$\frac{CF}{CB}=\frac{DF}{DE} \qquad (1)$$



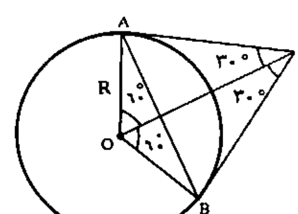
از طرفی دلیل موازی بودن AD و FB می‌توان نوشت:

$$\frac{AB}{AE}=\frac{DF}{DE} \qquad (2)$$

از روابط (۱) و (۲) با توجه به اینکه CB = CD و AB = AD است نتیجه می‌شود که:

$$\frac{CF}{CD}=\frac{AD}{AE}$$

۲ـ از نقطه P به نقطه O مرکز دایره و از A به B وصل می‌کنیم. می‌دانیم که OP عمودمنصف AB و همچنین نیمساز زوایای APB و AOB است. بنابراین در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOP داریم:



$\hat{A}=90°$ و $A\hat{P}O=30°$ و $A\hat{O}P=60°$

و $OA=R$ پس: $OP=2R$ و $AP=R\sqrt{3}$ زیرا: $OA^2+AP^2=OP^2$

بنابراین نقطهٔ P را روی مماس مرسوم بر دایره از نقطهٔ A چنان باید اختیار کنیم که $AP=R\sqrt{3}$ باشد. برای محاسبهٔ طول وتر AB ابتدا AH را محاسبه می‌کنیم:

$$AH.OP=OA.AP \Rightarrow AH\times 2R=R\times R\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$AH=\frac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB=R\sqrt{3}$$

نکته: مثلث APB متساوی‌الساقین با زاویهٔ رأس ۶۰° است، پس متساوی‌الاضلاع است و در نتیجه $AB=AP=PB=R\sqrt{3}$ است.

۳ـ معادلهٔ درجه دومی با ریشه‌های $2+\sqrt{3}$ و $2-\sqrt{3}$ تشکیل می‌دهیم:

$$x^2-4x+1=0$$

در اینجا F(x) را بر عبارت x^2-4x+1 تقسیم می‌کنیم:

$$F(x)=(x^2-4x+1)(x^5-x^3+x^2-7)+2x-4$$

$$x=2+\sqrt{3}\ :\ f(2+\sqrt{3})=2(2+\sqrt{3})-4=2\sqrt{3}$$

۴ـ داریم:

$$a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$$

$$\Rightarrow 2(a^2+b^2+c^2)=2(ab+ac+bc)$$

$$\Rightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc=0$$

$$\Rightarrow a^2+a^2+b^2+b^2+c^2+c^2-2ab-2ac-2bc=0$$

$$\Rightarrow (a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2=0$$

هر سه عبارت سمت چپ تساوی اخیر مثبت می‌باشند پس حاصل جمع آنها صفر نخواهد بود مگر هر کدام از عبارتها صفر باشند:

$(a-b)^2=0$ و $(a-c)^2=0$ و $(b-c)^2=0$

$\Rightarrow a=b$ و $a=c$ و $b=c \Rightarrow a=b=c$

$$A=\frac{1}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-\sqrt[n]{c}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{a}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt[n]{a}}=\frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{a}$$

۵ـ

$$(1+x+x^2+\dots+x^n)^2-x^n$$

$$=\left(\frac{(x-1)(x^n+x^{n-1}+\dots+1)}{x-1}\right)^2-x^n$$

$$=\frac{(x^{n+1}-1)^2}{(x-1)^2}-x^n$$

$$=\frac{x^{2n+2}-2x^{n+1}+1-x^n(x^2-2x+1)}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{x^{2n+2}-2x^{n+1}+1-x^{n+2}+2x^{n+1}-x^n}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{(x^{2n+2}-x^{n+2})-(x^n-1)}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{(x^n-1)(x^{n+2}-1)}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+1)}{x-1}\ .$$

$$\frac{(x-1)(x^{n+1}+x^n+\dots+1)}{x-1}$$

$$=(1+x+x^2+\dots+x^{n-1})$$

$$(1+x+x^2+\dots+x^{n+1})$$

۶ـ با فرض $x=X^3$ و $y=Y^3$ داریم:

$$a=\sqrt{X^6+\sqrt[3]{X^{12}Y^6}}+\sqrt{Y^6+\sqrt[3]{X^6Y^{12}}}$$

$$=\sqrt{X^4(X^2+Y^2)}+\sqrt{Y^4(Y^2+X^2)}$$

$$=(X^2+Y^2)\sqrt{X^2+Y^2}=(X^2+Y^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow X^2+Y^2=a^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2+\left(y^{\frac{1}{3}}\right)^2=a^{\frac{2}{3}} \Rightarrow x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$

۷ـ

$$P=\sqrt{3-\sqrt{3}+\underbrace{\sqrt{3+\underbrace{\sqrt{13+4\sqrt{3}}}_{a}}}_{b}}$$

$$a=\sqrt{13+4\sqrt{3}}=\sqrt{12+1+2\sqrt{12}}$$

$$=\sqrt{(1+\sqrt{12})^2}=1+\sqrt{12}=1+2\sqrt{3}$$

$$b=\sqrt{3+1+2\sqrt{3}}=\sqrt{1+2\sqrt{3}+3}$$

$$=\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}=1+\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow P=\sqrt{3-\sqrt{3}+1+\sqrt{3}}=\sqrt{4}=2 \Rightarrow \boxed{P=2}$$

۸ـ

$$\frac{(x^2+1)(x^2-3x+2)(x^3+2x^2)}{(x^5+x^4)(x^2+x+1)(x^2-4)}=0$$

$\Rightarrow (x^2+1)(x^2-3x+2)(x^3+2x^2)=0$

و $(x^5+x^4)(x^2+x+1)(x^2-4)\neq 0$

$\Rightarrow x^2+1=0$ ریشهٔ حقیقی ندارد.

$x^2-3x+2=0 \Rightarrow (x-1)(x-2)=0 \Rightarrow x=1$ یا $x=2$

$x^3+2x^2=0 \Rightarrow x^2(x+2)=0 \Rightarrow x^2=0$ یا $x+2=0$

$\Rightarrow x=0$ یا $x=-2$

مخرج کسر را به ازای ریشه‌های صورت محاسبه می‌کنیم. بدیهی است ریشه‌هایی که مخرج کسر را صفر نکند ریشهٔ معادله به‌حساب می‌آیند، پس از جایگزین کردن ریشه‌ها در مخرج کسر نتیجه می‌شود که معادله فقط یک ریشه دارد و آن $x=1$ می‌باشد.

۹-

$$A=\sqrt{\sqrt[۲]{x^۲-۱}}+\sqrt{\sqrt[۵]{۱-x^۲}}$$
$$\Rightarrow A=\sqrt[۴]{x^۲-۱}+\sqrt[۱۰]{۱-x^۲}$$

A وقتی تعریف شده است که عبارتهای زیر رادیکال، مثبت یا صفر باشند.

$$\Rightarrow \begin{cases} x^۲-۱\geq ۰ \\ ۱-x^۲\geq ۰\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^۲\geq ۱ \\ x^۲\leq ۱\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq ۱ \text{ یا } x\leq -۱ \\ -۱\leq x\leq ۱\end{cases}$$

از اشتراک نامعادلات دستگاه اخیر نتیجه می‌شود: $x=\pm ۱$

بنابراین عبارت A به ازای $x=\pm ۱$ تعریف شده است:

$x=\pm ۱ \Rightarrow A=۰$

۱۰-

$$S=۱-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۱۶}-\frac{۱}{۳۲}+\dots$$
$$S=(۱+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۱۶}+\dots)-(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۳۲}+\dots)$$
$$S=(۱+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۱۶}+\dots)-\frac{۱}{۲}(۱+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۱۶}+\dots)$$
$$S=\frac{۱}{۲}(۱+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۱۶}+\dots)$$
$$S'=۱+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۱۶}+\dots \Rightarrow \begin{cases} S'-۱=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۱۶}+\dots \\ \frac{S'}{۴}=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۱۶}+\dots\end{cases}$$
$$\Rightarrow S'-۱=\frac{S'}{۴} \Rightarrow S'=\frac{۴}{۳},\ S=\frac{۱}{۲}S'=\frac{۱}{۲}(\frac{۴}{۳})=\frac{۲}{۳}$$
$$\Rightarrow \boxed{S=\frac{۲}{۳}}$$

۱۱- عبارت A را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$A=(۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\dots+\frac{۱}{۲^{n-۱}}+\dots)+(۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۹}+\dots+\frac{۱}{۳^{n-۱}}+\dots)+(۱+\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۲۵}+\dots+\frac{۱}{۵^{n-۱}}+\dots)$$

هر یک از پرانتزها یک تصاعد هندسی نامتناهی با قدر نسبت مثبت و کوچکتر از یک می‌باشد. بنابراین داریم:

$$A=\frac{a_۱}{۱-q_۱}+\frac{a_۲}{۱-q_۲}+\frac{a_۳}{۱-q_۳}=\frac{۱}{۱-\frac{۱}{۲}}+\frac{۱}{۱-\frac{۱}{۳}}+\frac{۱}{۱-\frac{۱}{۵}}$$
$$\Rightarrow A=۲+\frac{۳}{۲}+\frac{۵}{۴}=\frac{۱۹}{۴} \Rightarrow \boxed{A=\frac{۱۹}{۴}}$$

۱۲- صورت و مخرج کسر یک تصاعد هندسی نامتناهی با قدر نسبت مثبت کوچکتر از یک می‌باشد. بنابراین داریم:

$$\frac{\frac{۱}{۱-x}}{\frac{۱}{۱-۲x}}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۱-۲x}{۱-x}=\frac{۱}{۲}$$
$$\Rightarrow ۲-۴x=۱-x \Rightarrow ۳x=۱$$
$$\Rightarrow \boxed{x=\frac{۱}{۳}}$$

۱۳- اگر $\log_۲\log_۳\log_۴^x=۰$ باشد، داریم:

$$\log_۲\log_۳\log_۴^x=۰ \Rightarrow \log_۳\log_۴^x=۱$$
$$\Rightarrow \log_۴^x=۳ \Rightarrow x=۴^۳ \Rightarrow \boxed{x=۶۴}$$

۱۴-

$$\sin x\cos x=-\frac{۱}{۴} \Rightarrow ۲\sin x\cos x=-\frac{۱}{۲}$$
$$\Rightarrow ۱+۲\sin x\cos x=۱-\frac{۱}{۲} \Rightarrow \sin^۲x+\cos^۲x+۲\sin x\cos x=\frac{۱}{۲}$$
$$\Rightarrow (\sin x+\cos x)^۲=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \boxed{\sin x+\cos x=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}}$$

۱۵-

$$\sin x\cos^۳x-\cos x\sin^۳x=\frac{۱}{۴} \Rightarrow \sin x\cos x(\cos^۲x-\sin^۲x)=\frac{۱}{۴}$$
$$\Rightarrow ۲\sin x\cos x\cos ۲x=\frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲\sin ۲x\cos ۲x=۱ \Rightarrow \boxed{\sin ۴x=۱}$$

۱۶-

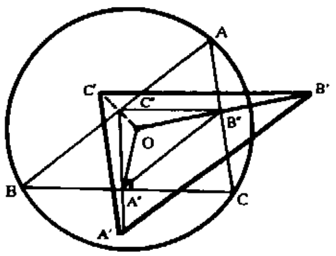
$$\frac{۱+tg۲۳^\circ}{۱-tg۲۳^\circ}=\frac{tg۴۵^\circ+tg۲۳^\circ}{tg۴۵^\circ-tg۲۳^\circ}=\frac{\frac{\sin(۴۵^\circ+۲۳^\circ)}{\cos۴۵^\circ\cos۲۳^\circ}}{\frac{\sin(۴۵^\circ-۲۳^\circ)}{\cos۴۵^\circ\cos۲۳^\circ}}$$
$$=\frac{\sin۶۸^\circ}{\sin۲۲^\circ}=\frac{\cos(۹۰^\circ-۲۲^\circ)}{\sin۲۲^\circ}=\frac{\cos۲۲^\circ}{\sin۲۲^\circ}=cotg\,۲۲^\circ$$

۱۷-

$$\sqrt{۲}\cos x=\cos^۳x+\sin^۳x+\sin x\cos^۲x+\cos x\sin^۲x$$
$$=\cos^۳x+\sin x\cos^۲x+\sin^۳x+\cos x\sin^۲x$$
$$=\cos^۲x(\cos x+\sin x)+\sin^۲x(\sin x+\cos x)$$
$$=(\cos x+\sin x)\underbrace{(\cos^۲x+\sin^۲x)}_{۱}$$
$$=\cos x+\sin x$$
$$\Rightarrow \sqrt{۲}\cos x=\cos x+\sin x$$
$$\Rightarrow \sin x=\sqrt{۲}\cos x-\cos x$$
$$\Rightarrow \sin x=\cos(\sqrt{۲}-۱)$$
$$\Rightarrow tgx=\sqrt{۲}-۱=tg۲۲/۵^\circ$$
$$\Rightarrow x=k\pi+۲۲/۵^\circ$$

□ حل مسائل ریاضیات سوّم تجربی

۱- نقاط تقاطع OA'، OB' و OC' با اضلاع BC، AC و AB را به‌ترتیب A"، B" و C" می‌نامیم و این سه نقطه را به هم وصل می‌کنیم. می‌دانیم که A" وسط ضلع BC (قطر عمود بر وتر، وتر و کمان مقابلش را نصف می‌کند) و A" وسط OA' است (زیرا A' قرینهٔ نقطهٔ O نسبت به ضلع BC است) و B" وسط ضلع AC و C" وسط ضلع AB می‌باشند بنابراین: $B"C"=\frac{BC}{۲}$ و $B"C"=\frac{B'C'}{۲}$ پس $B'C'=BC$ و به همین دلیل $A'B'=AB$ و $A'C'=AC$ است، پس دو مثلث ABC و A'B'C' با هم برابرند و اضلاع نظیرشان نیز متوازی‌اند، زیرا B"C"||BC و B"C"||B'C'، پس B'C'||BC، و به همین ترتیب A'B'||AB و A'C'||AC است.



۲- می‌دانیم که: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})$

$$(\vec{a}+\vec{b})^۲=|\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲+۲\vec{a}\cdot\vec{b}$$

پس داریم: $(\vec{a}+\vec{b})^۲=۲۵+۱۶+۲\times۵\times۴\cos\frac{۲\pi}{۳}$

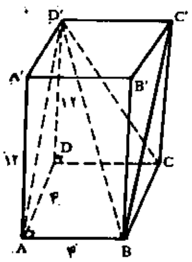
$$(\vec{a}+\vec{b})^۲=۴۱-۲۰=۲۱$$

۳- اولاً: با توجه به اندازه قطر در مکعب مستطیل به ابعاد a و b و c داریم:

$$d=\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲} \Rightarrow D'B=\sqrt{۱۶+۱۶+۱۴۴}$$
$$\Rightarrow D'B=\sqrt{۱۷۶}=۴\sqrt{۱۱}$$

ثانیاً: $A'D=\sqrt{۱۶+۱۴۴}=\sqrt{۱۶۰}=۴\sqrt{۱۰}$

$$\Rightarrow S_{ABC'D'}=AB.AD'=۴\times۴\sqrt{۱۰}=۱۶\sqrt{۱۰}$$



صفحه ABC'D' صفحه‌ای قطری است که حجم منشور را به دو قسمت برابر بخش می‌کند.

ثالثاً:

$$\text{حجم هرم}=V=\frac{۱}{۳}S_{ABCD}\times DD'$$
$$=\frac{۱}{۳}\times۱۶\times۱۲=۶۴$$

۴- ابتدا نقطهٔ عطف منحنی را به‌دست می‌آوریم:

$$y+f(x)=۳x^۲-x^۳ \Rightarrow y'=۶x-۳x^۲ \Rightarrow y"=۶-۶x$$
$$\Rightarrow y"=۰ \Rightarrow ۶-۶x=۰ \Rightarrow ۶x=۶ \Rightarrow x=۱,\ f(۱)=۳-۱=۲$$

و A (۲ و ۱) نقطه عطف

ضریب زاویه خط مماس $m=f'(۱)=۶-۳=۳$

$$\Rightarrow m'=-\frac{۱}{m} \Rightarrow \boxed{\text{ضریب زاویهٔ خط قائم: } m'=-\frac{۱}{۳}}$$

۵- $y = x^3 - 3ax^2+3x \Rightarrow y' = 3x^2-6ax+3$

$\Rightarrow y'\geq 0 \Rightarrow 3x^2-6ax+3\geq 0 \Rightarrow x^2-2ax+1\geq 0$

ضریب x^2 مثبت است، بنابراین باید داشته باشیم: $\Delta' = a^2-1\leq 0$

$\Rightarrow a^2-1\leq 0 \Rightarrow a^2\leq 1 \Rightarrow \boxed{-1\leq a\leq 1}$

۶- دامنه تابع چنین است:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow D_f=\{x \mid x+1\geq 0 \;,\; 1-x^2>0\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1\geq 0 \\ 1-x^2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq -1 \\ x^2<1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x\geq -1 \\ -1<x<1 \end{cases} \Rightarrow -1<x<1$$

$\Rightarrow D_f=\{x|-1<x<1\}=]-1$ و $1[\Rightarrow \boxed{D_f=(-1 \text{ و } 1)}$

۷-

$f(x)=\frac{1}{x}$, $(fog)(x)=f\big(g(x)\big) = \sqrt{x^2+1}$ (۱)

در ضابطهٔ تابع f تبدیل $x \to g(x)$ را انجام می‌دهیم:

$f(g(x)) = \frac{1}{g(x)}$ (۲)

بنابراین از (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{1}{g(x)}=\sqrt{x^2+1} \Rightarrow g(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\xRightarrow{(x\to x^3)} \boxed{g(x^3)=\frac{1}{\sqrt{x^6+1}}}$$

۸- شرایط پیوستگی در نقطهٔ $A\Big|{0 \atop 1}$ چنین است:

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} (kx^2+s) = s$

و $\lim_{x\to 0^-} (\sin x+k-1)=k-1$ و $f(0)=1 \Rightarrow s=k-1=1$

$$\Rightarrow s=1 \;,\; k=2 \Rightarrow f(x)=\begin{cases}\sin x+1 & x<0 \\ 2x^2+1 & x\geq 0\end{cases}$$

$\Rightarrow f(1) = 2(1)^2+1 = 2+1 = 3$

$x<0 : f(x) = \sin x+1 \Rightarrow f'(x) = \cos x \Rightarrow f''(x) = -\sin x$

$x = \frac{-\pi}{2} : f''\left(\frac{-\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

$\Rightarrow f(1)f''\left(\frac{-\pi}{2}\right) = 1\times 3 = 3 \Rightarrow \boxed{f(1)f''\left(\frac{-\pi}{2}\right)=3}$

۹- مرکز تقارن تابع درجهٔ سوم با ضابطهٔ $f(x) = x^3-3x^2+1$ منطبق بر نقطهٔ عطف آن است. بنابراین داریم: $f'(x)= 3x^2-6x$

$\Rightarrow f''(x) = 6x-6 \Rightarrow 6x-6=0 \Rightarrow x=1$ و $f(1)=-1$

نقطه عطف یا مرکز تقارن $A(1$ و $-1)$ و $x-y+k=0$

$$d=\frac{|1-(-1)+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|k+2|}{\sqrt{2}}$$

$=\sqrt{2} \Rightarrow |k+2| = 2$

$\Rightarrow k+2 = \pm 2 \Rightarrow k = -2\pm 2 \Rightarrow \boxed{k=0 \text{ یا } k=-4}$

۱۰-

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x-2\cos^2 x}{x\,tgx} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x\,tgx}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\lim_{x\to 0}\sin x \sim \lim_{x\to 0} x \\ \lim_{x\to 0} tgx \sim \lim_{x\to 0} x\end{cases}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{-x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\left(\frac{3x}{2}\right)\left(\frac{-x}{2}\right)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{3x^2}{2}}{x^2} = \frac{3}{2}$$

۱۱- داریم: $\cos 3a = 4\cos a\cos(60°-a)\cos(60°+a)$

$a = 10°$: $\cos 30° = 4\cos 10°\cos 50°\cos 70°$

$$tgx = \frac{\cos^2 10°}{\cos 20°\cos 30°} = \frac{\cos^2 10°}{4\cos 10°\cos 50°\cos 70°\cos 20°}$$

$$= \frac{\cos 10°}{4\cos 50°\cos 70°\cos 20°}$$

$$=\frac{\cos 10°}{4\cos 50°\sin 20°\cos 20°}=\frac{\cos 10°}{(2\cos 50°)(2\sin 20°\cos 20°)}$$

$$=\frac{\cos 10°}{2\cos 50°\sin 40°}=\frac{\sin 80°}{2\sin 40°\sin 40°}=\frac{2\sin 40°\cos 40°}{2\sin^2 40°}$$

$$=\frac{\cos 40°}{\sin 40°}$$

$tgx = cotg40° = tg50° \Rightarrow tgx = tg50° \Rightarrow x=k\pi+50°$

۱۲- داریم:

$4x\cos^{72}x + 4x = 0$ یا $\sin^{74}x + |\sin x| + \sqrt{\sin x} = 0$

$4x\cos^{72}x+4x=0 \Rightarrow 4x\left(\cos^{72}x+1\right)=0 \Rightarrow 4x=0$ یا

$\cos^{72}x+1=0$

$\Rightarrow \boxed{x=0}$ یا $\cos^{72}x=-1 \Rightarrow \cos x=-1=\cos\pi$

$\Rightarrow \boxed{x=2k\pi\pm\pi}$

عبارتهای $\sqrt{\sin x}$ و $|\sin x|$ و $\sin^{74}x$ همواره مثبت و یا صفر می‌باشند، بنابراین باید داشته باشیم:

$\sin^{74}x=0 \;,\; |\sin x|=0 \;,\; \sqrt{\sin x}=0$

از هر سه معادله نتیجه می‌شود: $\sin x = 0 \Rightarrow \boxed{x = k\pi}$

بنابراین مجموعهٔ جواب معادله چنین است:

مجموعه جواب $=\{x \mid x=0, x=2k\pi\pm\pi, x=k\pi, k\in Z\}$

مجموعه جواب $=\{x \mid x=k\pi \;,\; k\in Z\}$

۱۳- معادله را با استفاده از اتحاد $Arccos(-x)+Arccosx=\pi$، ساده می‌کنیم:

$48Arcsin\sqrt[3]{x} = 8Arccos(-x)+8Arccosx$

$\Rightarrow 48Arcsin\sqrt[3]{x} = 8\left(Arccos(-x)+Arccosx\right)$

$\Rightarrow 6Arcsin\sqrt[3]{x} = \pi \Rightarrow Arcsin\sqrt[3]{x} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow$

$\sqrt[3]{x} = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \sqrt[3]{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{8}}$

۱۴- با استفاده از رابطهٔ $cotg\alpha = tg(90°-\alpha)$ می‌توان نوشت:

$A = tg70°cotg40°cotg80° = tg70°tg50°tg10°$

و با توجه به اتحاد مثلثاتی: $tgx\,tg(60°-x)tg(60°+x) = tg3x$ داریم:

$x=10°$: $tg10°\,tg50°\,tg70° = tg30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow \boxed{A=\frac{\sqrt{3}}{3}}$

$B=\sin 42°-\cos 12°+\sin 18°=\sin 42°+\sin 18°-\cos 12°$

$=2\cos 12°\sin 30°-\cos 12°=2(\frac{1}{2})\cos 12°-\cos 12°$

$=\cos 12°-\cos 12° = 0 \Rightarrow \boxed{B=0}$

۱۵-

$tg7n^4x\,cotg5x = -1 \Rightarrow \frac{tg7n^4x}{tg5x} = -1$

$\Rightarrow tg7n^4x = tg(-5x) \Rightarrow 7n^4x = k\pi-5x$

$7n^4x+5x = k\pi \Rightarrow (7n^4+5)x = k\pi \Rightarrow \boxed{x=\frac{k\pi}{7n^4+5}}$

۱۶- داریم:

$\frac{3a^3+3b^3+3c^3}{3a+3b+3c}=\frac{3a^2}{3} \Rightarrow a^3+b^3+c^3 = a^2(a+b+c)$

$\Rightarrow a^3+b^3+c^3 = a^3+a^2b+a^2c \Rightarrow b^3+c^3=a^2(b+c)$

$\Rightarrow (b+c)(b^2-bc+c^2) = a^2(b+c)$

$\Rightarrow b^2+c^2-bc = b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$

$\Rightarrow \cos\hat{A}=\frac{1}{2} \Rightarrow \cos\hat{A}=\cos 60° \Rightarrow \boxed{\hat{A}=60°}$

□ حل مسائل ریاضیات چهارم تجربی

۱- مشتق توابع ضمنی با ضابطهٔ عمومی $f(x,y)=c$ چنین است:

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

$x^3+y^3-3xy-x-y=4 \Rightarrow y' = -\frac{3x^2-3y-1}{3y^2-3x-1}$

۲- داریم: $y'_x = u'_x \cdot y'_u$

$y = 7u^3+7u^4+1 \Rightarrow y'_u = 21u^2+28u^3$

$u = \cos^2 2x \Rightarrow u'_x = -2\times 2\cos 2x\sin 2x = -2\sin 4x$

$y'_x = u'_x y'_u = -2\sin 4x\,(21\cos^4 2x + 28\cos^6 2x)$

$x=\frac{\pi}{8} : y'_x\left(\frac{\pi}{8}\right)$

$= -2\sin\frac{\pi}{2}\left(21\cos^4\frac{\pi}{4} + 28\cos^6\frac{\pi}{4}\right)$

$= -2\left(21\left(\frac{1}{4}\right)+28\left(\frac{1}{8}\right)\right) = -2\left(\frac{42+28}{8}\right) = -\frac{70}{4} = -\frac{35}{2}$

$\Rightarrow \boxed{y'_x\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\frac{35}{2}}$

۳- نقطهٔ تقاطع خط با محور طولها چنین است:

$y+x+2=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow x+2=0 \Rightarrow x=-2 ,\ A(-2 و 0)$

$f(x) = \sqrt[3]{x^3+8} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2}{3\sqrt[3]{(x^3+8)^2}}$

$\Rightarrow m = f'(-2)$

توجه: m ضریب زاویهٔ خط مماس بی‌نهایت شود خط مماس موازی محور yها می‌باشد. $f'(-2) = tg\alpha \Rightarrow \alpha = 90^\circ$

بنابراین خطی که عمود بر محور طولها است و از نقطهٔ $A(-2 و 0)$ می‌گذرد، خط مطلوب است: $\boxed{x = -2 : \text{معادله خط مماس}}$

۴- $y = x^4-2x^3+mx^2-1 \Rightarrow y' = 4x^3-6x^2+2mx$

$\Rightarrow y'=0 \Rightarrow 4x^3-6x^2+2mx=0 \Rightarrow 2x(2x^2-3x+m)=0$

شرط این که تابع فوق دارای سه اکسترمم باشد؛ این است که معادلهٔ اخیر سه ریشهٔ حقیقی داشته باشد:

$2x=0 \Rightarrow x=0$ یا $2x^2-3x+m=0 \Rightarrow \Delta = 9-8m>0$

$\Rightarrow 8m<9 \Rightarrow \boxed{m<\frac{9}{8}}$

۵- $4x^2+4y^2-8x+8y=8 \Rightarrow x^2+y^2-2x+2y=2$

$(x^2-2x)+(y^2+2y)=2 \Rightarrow (x-1)^2-1+(y+1)^2-1=2$

$\Rightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=4 \Rightarrow R=2$ و $S=\pi R^2 \Rightarrow \boxed{S=4\pi}$

٦- می‌دانیم محل تلاقی قطرهای بیضی مرکز تقارن آن است:

$2x-6=0 \Rightarrow x=3$ و $3y+12=0 \Rightarrow y=-4$

$\Rightarrow O'(3 و -4)$

چون بیضی فوق بر محورهای مختصات مماس است، پس $a=4$ و $b=3$ و در نتیجه بیضی قائم است و داریم:

$\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+4)^2}{16}=1$

۷- $18x^2-32y^2-36x+64y-302=0$

$\Rightarrow 9x^2-16y^2-18x+32y-151=0$

$9(x^2-2x)-16(y^2-2y)=151 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{16}-\frac{(y-1)^2}{9}=1$

$\Rightarrow a^2=16 \Rightarrow a=4 ,\quad b^2=9 \Rightarrow b=3$

$\Rightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$

$e=\frac{\sqrt{9+16}}{4}=\frac{\sqrt{25}}{4}=\frac{5}{4} \Rightarrow \boxed{e=\frac{5}{4}\ \text{خروج از مرکز هذلولی}}$

۸- $\begin{cases} y=x^2 \\ y=ax \end{cases} \Rightarrow x^2=ax \Rightarrow x=0$ یا $x=a$

$V=\pi\int_0^a (y_1^2-y_2^2)\,dx = \pi\int_0^a (x^4-a^2x^2)\,dx$

$= \left|\pi\left[\frac{x^5}{5}-\frac{a^2}{3}x^3\right]_0^a\right| = \pi\left(\frac{2a^5}{15}\right)$

$\Rightarrow \frac{2\pi a^5}{15}=\frac{2\pi}{15} \Rightarrow a^5=1 \Rightarrow \boxed{a=1}$

۹- $tg\frac{\pi}{16}+2tg\frac{\pi}{8}+4tg\frac{\pi}{4}=cotg\frac{\pi}{16}$

پس از استفاده از اتحاد مثلثاتی $tgx=cotgx-2cotg2x$ ، داریم:

طرف اول $= cotg\frac{\pi}{16}-2cotg\frac{\pi}{8}+2(cotg\frac{\pi}{8}-2cotg\frac{\pi}{4})$
$+4(cotg\frac{\pi}{4}-2cotg\frac{\pi}{2}) = cotg\frac{\pi}{16}-8cotg\frac{\pi}{2}$
$= cotg\frac{\pi}{16}$

۱۰- $4(\sin x\cos x+m\cos^2x)=1+\sin^2x$

از تقسیم طرفین معادله بر $\cos^2x$ و استفاده از اتحاد $\frac{1}{\cos^2x}=1+tg^2x$ ، داریم:

$4tgx+4m=1+tg^2x+tg^2x$

$\Rightarrow 2tg^2x-4tgx+1-4m=0$

شرط وجود جواب: $\Delta'=4-2(1-4m)\ge 0$

$\Rightarrow 4-2+8m\ge 0 \Rightarrow 8m\ge -2 \Rightarrow \boxed{m\ge -\frac{1}{4}}$

۱۱- پس از بسط $\sin(x-\alpha)$ و اختصار لازم، به معادلهٔ کلاسیک نوع اول زیر می‌رسیم:

$m\sin(x-\alpha)+\sin\alpha-\sin x=0$

$\Rightarrow (m\cos\alpha-1)\sin x-m\sin\alpha\cos x=-\sin\alpha$

معادلهٔ کلاسیک $a\sin x+b\cos x=c$ وقتی دارای جواب حقیقی است که داشته باشیم:

$a^2+b^2\ge c^2 \quad (1)$

بنابراین داریم: $(m\cos\alpha-1)^2+(-m\sin\alpha)^2\ge(-\sin\alpha)^2$

$\Rightarrow m^2\cos^2\alpha-2m\cos\alpha+1+m^2\sin^2\alpha\ge\sin^2\alpha$

$\Rightarrow m^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)-2m\cos\alpha+1-\sin^2\alpha\ge 0$

$\Rightarrow m^2-2m\cos\alpha+\cos^2\alpha\ge 0 \Rightarrow (m-\cos\alpha)^2\ge 0$

شرط (۱) به ازای جمیع مقادیر m برقرار است، بنابراین معادله به ازای هر $m\in IR$ همواره دارای جواب است.

۱۲- $A = 1+\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x+\cos 8x$

$= 1+\cos 2x+\cos 6x+\cos 4x+\cos 8x$

$= 1+2\cos 4x\cos 2x+2\cos 6x\cos 2x$

$= 1+2\cos 2x(\cos 4x+\cos 6x)$

$= 1+2\cos 2x\,(2\cos 5x\cos x)$

$= 1+4\cos x\cos 2x\cos 5x = 1+\frac{4\sin x\cos x\cos 2x\cos 5x}{\sin x}$

$= 1+\frac{2\sin 2x\cos 2x\cos 5x}{\sin x} = 1+\frac{\sin 4x\cos 5x}{\sin x}$

$x=\frac{\pi}{9} : A = 1+\frac{\sin\frac{4\pi}{9}\cos\frac{5\pi}{9}}{\sin\frac{\pi}{9}}$

$= 1+\frac{\frac{1}{2}\sin\frac{10\pi}{9}}{\sin\frac{\pi}{9}} = 1+\frac{\frac{1}{2}\sin\left(\frac{-\pi}{9}\right)}{\sin\frac{\pi}{9}}$

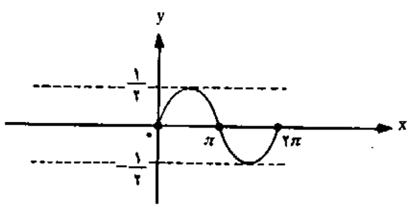
$= 1-\frac{\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{9}}{\sin\frac{\pi}{9}} = 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{A=\frac{1}{2}}$

۱۳- ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$y = \frac{\sin x\cos^2x+\sin x}{2+2\cos^2x} = \frac{\sin x(\cos^2x+1)}{2(1+\cos^2x)}$

داریم $\cos^2x+1\neq 0$ ، پس می‌توان نوشت:

$y=\frac{\sin x}{2}$ و $T=[0 و 2\pi]$



جوابهای تفریح اندیشه

جواب ۱: بله، موجودند ـ به عنوان نمونه (۳− , ۲− , ۱−)، یا (a− , ۰ , a) به ازای هرعدد صحیح a .

جواب ۲: عدد را سروته کنید.

جواب ۳: باید ٦ بار تیراندازی کرد و چهار بار ۱۷ و دوبار ۱٦ را به دست آورد.

جواب ۴: ۱٦ ثانیه. فاصلهٔ بین دو ضربه ۲ ثانیه است. تعداد فواصل یکی کمتر از تعداد ضربه‌هاست.

جواب ۵: بله. اگر، مثلاً، در قوطی با برچسب «میخ» پیچها را پیدا کنید، در این صورت قوطی با برچسب «آجیل» باید دارای میخ باشد، و قوطی دارای برچسب «پیچ» دارای آجیل.

جواب ٦: البته که دارد: سکه‌ای که ده ریالی نیست پنج ریالی است، اما دیگری در واقع ده ریالی است!

جواب ۷: ۳۰ گرم. از این حقیقت استفاده می‌کنیم که نسبت جرمها (یعنی، حجمها)ی اشکال متشابه به مکعب نسبت اضلاع آن اشکال است.

سپیده دم نزدیک است

پیروزی درخشان دانش‌آموزان ایرانی را در کسب رتبهٔ اوّلِ بیست و هفتمین المپیاد جهانی شیمی در میان ۱۲۰ کشور و موفقیت پرافتخار دانش‌آموزان شرکت کننده در المپیاد جهانی ریاضی و دستیابی به رتبهٔ اول در رشتهٔ هندسه و نیز موفقیت دانش‌آموزان شرکت کننده در المپیادهای کامپیوتر و فیزیک را به حضور رهبر خردمند انقلاب اسلامی حضرت آیةا... خامنه‌ای و به این عزیزان و خانواده‌های محترمشان و معلمین دلسوز و جامعهٔ فرهنگی و تمام مردم ایران تبریک می‌گوییم.

از خداوند متعا ل می خواهیم این پیروزیها را طلیعهٔ پیروزیهای بزرگتر برای نظام مقدسِ جمهوری اسلامی قرار دهد.

In the name of God

Borhān

VOL. 4. No. 4

Serial numbers : 14

Summer 1995

Borhan is a mathematics journal published four times a year by Madrasse Publications. Each issue includes articles related to mathematics and its various topics specifically those concerning highschool education in Iran.

All communications should be sent to the editor at the following address:

Madrasse Publication - No. 36. Haghighat talab Street, Sepahbod gharany Ave, Tehran, Iran

Post code: 14155/1949

Contents:

برهان خواجه نصیرالدین طوسی برای قانون سینوسها

خواجه نصیرالدین طوسی،متولد سال ۵۷۹ هـ. ش. در شهر طوس خراسان و در سال ۶۵۲ هـ. ش. در کاظمین درگذشت.

منجم، ریاضیدان، محقق، مفسر و فیلسوف وزیر هلاکو و هنرمندی ابزارساز بود که ۱۲ دستگاه و ابزار رصدخانه‌مراغه را با ابداع و ابتکار خاص خود به وجود آورد به‌طوری‌که تیکوبراهه منجم هلندی کارهای او را برای رصدخانه اورانین‌برگ تقلید نمود. حدود ۸۰ کتاب و رساله در علم حساب، هندسه، مثلثات، فلسفه، تفسیر و مسائل اجتماعی نوشت و از کارهای معروف او تنظیم جدولهای نجومی، وضع مثلثات و قضایای هندسه کروی، تفهیم بی‌نهایت کوچکها و تکمیل نظریه ارشمیدس است. تأسیس رصدخانه مراغه یکی از شاهکارهای مراکز علمی قرون وسطی جهان بود. و به همین علت نام این مرد دانشمند ایرانی به افتخار کارهای ریاضی و نجومی‌اش بر کره ماه ثبت شده است.

نصیرالدین قانون سینوسهای مثلثهای مسطحه را برای تهیهٔ یک ابزار اساسی در حل مثلثها مطرح می‌کند، و خواهیم دید که او چگونه این قانون را ثابت می‌کند و چگونه آن را برای پیداکردن اجزای مجهول مثلثی برحسب اجزای معلوم آن به کار می‌برد.

قانون سینوسها. اگر ABC مثلث دلخواهی باشد آن‌گاه $c/b = \sin C/\sin B$.

شکل الف حالتی را نشان می‌دهد که یکی از زاویه‌های B یا C منفرجه است، و شکل ب حالتی را نشان می‌دهد که نه B منفرجه است و نه C، و بنابراین یکی از آنها حاده است. در هر مورد، CA را تا D و BA را تا T امتداد دهید به طوری‌که طول هریک ۶۰ واحد طول باشد. به مرکزهای B، C کمانهای مستدیر TH و DE را رسم کنید. حال اگر عمودهای TK و DF را بر قاعدهٔ BC، یا درصورت لزوم بر امتداد آن، وارد کنیم آن‌گاه $TK = \sin B$ و $DF = \sin C$. حال AL را بر BC عمود کنید. چون مثلثهای ABL، TBK متشابه‌اند، $AB/AL = TB/TK$، و چون مثلثهای ACL و DCF متشابه‌اند، $AL/AC = DF/DC$ اما $TB = ۶۰ = DC$. لذا، اگر طرفهای چپ و راست این تناسبها را به ترتیب درهم ضرب کنیم، تناسب $AB/AC = DF/TK$ را به‌دست می‌آوریم. بنابراین $c/b = \sin C/\sin B$، و این، قانون سینوسها را ثابت می‌کند.

چون تابع سینوس نصیرالدین صرفاً ۶۰ برابر سینوس کنونی است، قضیهٔ بالا در مورد تابع سینوس‌کنونی نیز برقراراست. می‌توانیم قضیه‌را به‌صورت $c/\sin C = b/\sin B = a/\sin A$ بنویسیم، که شکل امروزی آن اغلب به این صورت است، و می‌توان آن را با بیان اینکه در هر مثلث مفروض نسبت هر ضلع به سینوس زاویهٔ مقابلش ثابت است، به آسانی در خاطر داشت.

برگرفته از کتاب گوشه‌هایی از ریاضیات دورهٔ اسلامی (انتشارات فاطمی)