وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

۵۶

رشد برهان

مجله ی ریاضی

فصلنامه ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

دوره ی متوسطه

• دوره ی هفدهم • شماره ی ۲ • زمستان ۱۳۸۶ • بها: ۳۵۰۰ ریال

- آجرهای پُرشیار
- رویکرد هندسی - رویکرد جبری در آموزش هندسه
- نخبه پروری نکنیم!
- مسائل و مباحثی پیرامون اعداد گویا وگنگ

ریاضیات و دانش‌های دیگر

کاربردهای ریاضیات، بی‌اندازه زیاد و بسیار گوناگون است. در واقع به‌کار بردن روش‌های ریاضی، مرزی نمی‌شناسد: همه‌ی شکل‌های حرکت ماده را می‌توان با روش ریاضی بررسی کرد. البته نقش و اهمیت روش ریاضی در حالت‌های گوناگون، متفاوت است. هیچ طرح معین ریاضی نمی‌تواند از عهده‌ی بیان همه‌ی ویژگی‌های پدیده‌های حقیقی برآید. وقتی می‌خواهیم پدیده‌ای را بررسی کنیم، شکل خاصی از آن را در معرض تحلیل منطقی قرار می‌دهیم. در ضمن می‌کوشیم، نکته‌هایی را بیابیم که در این شکل جدا شده از پدیده‌ی واقعی وجود ندارند و شکل‌های تازه‌ای پیدا کنیم که بیشتر و کامل‌تر، دربرگیرنده‌ی پدیده‌ی ما باشند.

مکانیک آسمانی، به‌ویژه مطالعه‌ی حرکت سیاره‌ها، نمونه‌ی روشنی از توانایی روش‌های ریاضی را به ما نشان دهد. قانون جاذبه‌ی عمومی که بیان ریاضی بسیار ساده‌ای دارد، به تقریب تمامی حوزه‌ی عملکرد پدیده را معین می‌کند. به‌جز حرکت ماه که برای مشاهده‌ی دقیق در دسترس ماست، جسم‌های آسمانی را به دلیل اندازه‌های کوچک ظاهری آن‌ها، «نقطه‌های ریاضی» به حساب می‌آورند. ولی حل مسئله‌ی مربوط به حرکت نقطه‌ی مادی زیر تأثیر نیروی جاذبه، حتی در حالت $n = ۳$، دشواری‌ها و پیچیدگی‌های زیادی را پدید می‌آورد. با وجود این، هر نتیجه‌ای که به یاری تجزیه و تحلیل ریاضی طرح پذیرفته شده، به دست آید، با دقت زیادی با آن‌چه در واقعیت پیش می‌آید، تطبیق می‌کند. از نظر منطقی، طرح ساده‌تر بهتر می‌تواند میدان انتخابی پدیده‌ها را بازتاب دهد و همه‌ی دشواری کار، به بیرون آوردن نتیجه‌های ریاضی از این طرح انتخابی مربوط می‌شود.

اگر از مکانیک به فیزیک برویم، نقش روش‌های ریاضی چندان کاهش نمی‌یابد، ولی پیچیدگی کاربرد این روش‌ها، به میزان زیادی افزایش می‌یابد. به تقریب، هیچ زمینه‌ای از فیزیک وجود ندارد که به دستگاه‌های پیشرفته‌ای نیازمند نباشد، ولی اغلب دشواری اصلی بررسی‌ها، به پیشرفته‌تر کردن نظریه‌های ریاضی مربوط نمی‌شود، بلکه به انتخاب شرط‌های لازم برای به ریاضی درآوردن موضوع، و به تفسیر نتیجه‌هایی که از راه‌های ریاضی به دست می‌آید، بستگی دارد.

نظریه‌ی آماری پراکندگی، بر بررسی جابه‌جایی تصادفی میکروسکوپی ذره‌ها، زیر تأثیر مولکول‌های ماده‌ی حلال، تکیه دارد. قانون دقیق این جابه‌جایی میکروسکوپی برای ما معلوم نیست. ولی نظریه‌ی ریاضی «احتمال»، به ما اجازه می‌دهد (از شرط‌های عمومی درباره‌ی جابه‌جایی ناچیز در فاصله‌ی زمانی کوچک و بدون ارتباط با جابه‌جایی ذره‌ها در دو فاصله‌ی زمانی پشت سرهم)، نتیجه‌ی کمیتی مشخصی به دست آوریم: تعیین قانون (تقریبی) احتمالی، برای جابه‌جایی ذره‌ها در فاصله‌ی زمانی بزرگ (ماکروسکوپی).

در دانش زیست‌شناسی، روش‌های ریاضی، نقش درجه دوم دارند. روش‌های ریاضی، بیشتر از زیست‌شناسی، در تحلیل پدیده‌های مربوط به «علوم انسانی» و «علوم اجتماعی»، با همه‌ی پیچیدگی‌هایی که دارند، جای خود را باز کرده است. کاربرد روش‌های ریاضی در زیست‌شناسی، علوم اجتماعی و علوم انسانی، بیشتر از راه «سیبرنتیک» انجام می‌گیرد. اهمیت ریاضیات برای قانون‌های اجتماعی (و دانش زیست‌شناسی)، به صورت یک دانش کمکی و از راه آمار ریاضی جلوه می‌کند. ولی در تحلیل آخر، پدیده‌های اجتماعی در لحظه‌های تغییر کیفی هر دوره‌ی تاریخی، چنان موضوع نیرومندی دارند که غالب روش‌های ریاضی را در صف عقب قرار می‌دهند.

منبع

فرهنگ ریاضیات. گروه ریاضیات انتشارات مدرسه. ناشر: مدرسه‌ی برهان

بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

رشد برهان ۵۶
مجله ی ریاضی
دوره ی متوسطه
فصلنامه ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
دوره ی هفدهم /شماره ی ۲/ زمستان ۱۳۸۶/شمارگان: ۲۵۰۰۰ نسخه

صندوق الکترونیکی سردبیر:
H66Amiri@yahoo.com
پیام گیر نشریات رشد: ۸۸۸۳۹۲۳۲-۸۸۳۰۱۴۸۲

- چاپ و صحافی: شرکت افست (سهامی عام)
- نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله: ۹-۸۸۸۳۱۱۶۰ داخلی ۳۹۷
تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶-۷۷۳۳۵۱۱۰
www.roshdmag.ir
ISSN 1735 - 4951

رشد برهان متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش آموزان عزیز را در زمینه های زیر به همکاری دعوت می کند:

- نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی دوره‌ی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمه‌ی مقاله‌های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه‌ی علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش کامپیوتر و ...)

رشد برهان متوسطه هر سه ماه، یکبار منتشر می شود.
مجلّه در حکّ، اصلاح، حذف و اضافه ی مقاله ها آزاد است.
مقاله های وارده، باید خوانا و حتی الامکان کوتاه باشد.
مقاله های رسیده مسترد نمی شود.
استفاده از مطالب مجلّه در کتاب ها یا مجله های دیگر با ذکر دقیق مأخذ بلامانع است.

یادداشت سردبیر

حرف اول

وقتی در ریاضیات با یک قضیه‌ی شرطی مواجه می‌شویم، شرط را به عنوان فرض می‌پذیریم و به دنبال رسیدن به حکم هستیم. سعی می‌کنیم از کوتاه‌ترین راه و با دقت کافی از فرض استفاده کنیم و درستیِ حکم را به اثبات برسانیم. در راه رسیدن به حکم، قطعاً از فرض و گاهی اوقات از معادلِ فرض استفاده می‌کنیم که اگر از فرض استفاده‌ای نکنیم و بتوانیم به حکم برسیم، یا راه ما اشکال داشته است، یا فرض اضافی به ما داده‌اند (که این جریان اصلاً منطقی نیست و هیچ‌گاه برای یک قضیه‌ی شرطی فرض اضافی درنظر نمی‌گیرند) و یا بدون آن‌که اطلاع داشته باشیم، از فرض (به صورت پنهانی) استفاده کرده‌ایم.

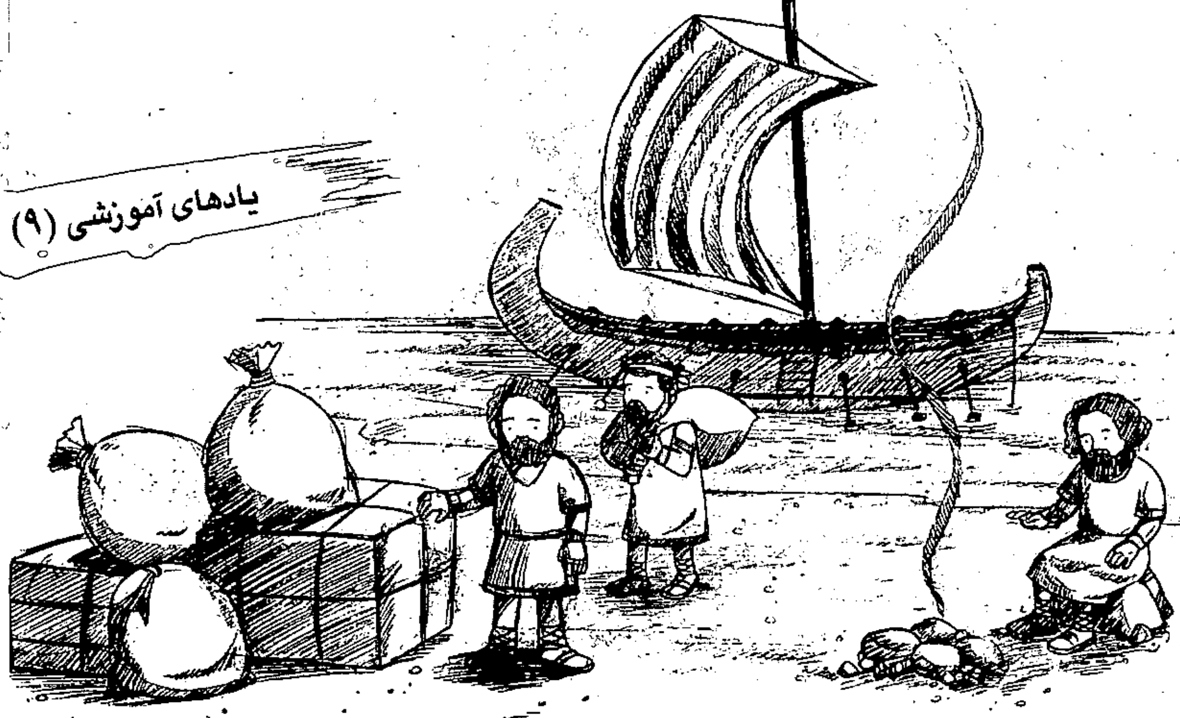
اگر در اثبات یک مسئله یا قضیه‌ی شرطی راه اضافی طی کنیم، باز دچار همین اشکال هستیم که از فرض قضیه یا مسئله به خوبی و به جا استفاده نکرده‌ایم. این نوع تفکر که برای رسیدن به حکم یا اثبات درستی حکم، می‌باید با استفاده از همه‌ی امکانات (فرضیات) کوتاه‌ترین مسیر را طی کرد، در استدلال به روش استنتاجی نیز به چشم می‌خورد. به عبارت دیگر، اگر درستیِ k گزاره را بپذیریم و بخواهیم درستی گزاره‌ای را ثابت کنیم، حتماً می‌باید با چینشی منطقی و دقیق از درستی هر k گزاره استفاده کنیم. به هر صورت، نوع استدلال کردن و به حکم رسیدن تابع قوانینی است که تأثیر آن‌ها را در زندگی روزمره نیز می‌توان مشاهده کرد.

شاید این سؤالات که: ریاضیات در زندگی به چه دردی می‌خورد؟ یادگیری قضیه‌های هندسه، حل معادله، رسم توابع و... به چه کار می‌آید؟ و... و آیا با مشتق‌گیری می‌توان فردی گرسنه را از مرگ نجات داد؟ شاید به گوش شما هم رسیده باشد، که البته جواب‌گویی به آن‌ها در حد تخصصِ فرد سؤال‌کننده نیست! اما آن‌چه بسیار آشکار است، تأثیر مثبت تفکر ریاضی در راه‌یابی به فهم مسائل، تجزیه و تحلیل و درنهایت حل مشکلات بسیار پیچیده است. اگر تفکر صحیح ریاضی فقط در همین حد در زندگی ما تأثیر داشته باشد که ما برای حل مشکلاتی که با آن‌ها مواجه می‌شویم، به بررسی همه‌ی امکانات موجود (فرضیات) بپردازیم، همه‌ی راه‌های موجود را بررسی کنیم و با انتخابی منطقی و مناسب (و با پیروی از قضیه‌ی «مسیر نور» یا همان قضیه‌ی حمار)، کوتاه‌ترین راه را برگزینیم، آیا ریاضیات به درد ما خورده است یا خیر؟

آیا شما کاربردها یا تأثیراتی از ریاضیات و تفکر ریاضی را در زندگی خودتان در جهان اطراف خود دیده یا شنیده‌اید؟ اگر مورد یا مواردی را می‌توانید مثال بزنید، برای ما یادداشت کنید و ارسال بفرمایید.

آجرهای پُرشیار

یادهای آموزشی (۹)



• پرویز شهریاری

۱.

فنیقی‌ها قومی دریانورد بودند و بسته به نیاز هر منطقه، کالای خود را که از جای دیگری «خریداری» کرده بودند، به جای دیگر می‌بردند و با کالای بومی آن سرزمین معاوضه می‌کردند. هرودوت، تاریخ‌نویس هزاره‌ی پیش از میلاد یونان، روایت جالبی درباره‌ی «خریدوفروش» فنیقی‌ها دارد. او می‌نویسد:

«فنیقی‌ها در ساحل لنگر می‌اندازند. کالای خود را به صورتی منظم در ساحل می‌چینند. سپس به کشتی باز می‌گردند و آتشی روشن می‌کنند که ما آماده‌ایم. مردم آن سرزمین با دیدن دود به سوی ساحل دریا می‌آیند، کالا را برآورد می‌کنند و مقداری طلا در آن‌جا می‌گذارند. ولی به کالاها دست نمی‌زنند و از آن‌جا دور می‌شوند. فنیقی‌ها از کشتی فرود می‌آیند و مقدار طلاها را بررسی می‌کنند. اگر مقدار طلا را با کالای خود مناسب دیدند، آن را برمی‌دارند و کشتی آن‌ها، راه برگشت را پیش می‌گیرد. ولی اگر ارزش طلا را کمتر از مقدار کالای خود احساس کنند، بدون این‌که دست به طلا یا کالای خود بزنند، به کشتی برمی‌گردند و منتظر می‌مانند. مردم بومی آن ناحیه باز می‌گردند و به مقدار طلا می‌افزایند... این وضع، آن‌قدر ادامه پیدا می‌کند تا ملوانان راضی شوند. در این‌جا هیچ‌کدام از دو طرف در اندیشه‌ی فریب طرف دیگر نیست. فنیقی‌ها به طلا دست نمی‌زنند تا هم‌ارز کالایشان شود. مردم هم تا زمانی که ملوانان طلا را برنداشته‌اند، دست به کالا نمی‌زنند.»

این رفتار و روحیه‌ی قوم‌ها در برخورد با هم، پیش از دوهزار و پانصدسال پیش بود. قوم‌ها و مردمی که یکدیگر را نمی‌شناختند و زبان یکدیگر را نمی‌فهمیدند، ولی به خاطر

نیاز باهم مراوده داشتند، از یکدیگر سود می‌بردند و در عین حال، با رفتار انسانی خود، در اندیشه‌ی غارت یا نابودی دیگری نبودند.

از سده‌ی هجدهم که به تدریج، نظام ارباب و رعیتی در اروپا و وارثان آن‌ها در آمریکا جای خود را به نظام استعماری داد و تجارت رونق گرفت. از یک طرف هجوم به کشورهای آسیایی، آفریقایی و آمریکای لاتین، برای مستعمره کردن آن‌ها آغاز شد و از طرف دیگر، دوران برده‌داری به شیوه‌ای بسیار ظالمانه، به ویژه در دو کشور انگلیس و آمریکا، به اوج خود رسید. دزدان دریایی به کشورهای آسیا و آفریقا، به‌ویژه آفریقا وارد می‌شدند، زن‌ها و مردها را می‌دزدیدند، به زنجیر می‌کشیدند، و با وضع اسف‌باری به انگلیس و آمریکا می‌رساندند تا به صاحبان زمین و صاحبان کارخانه‌ها و معدن‌ها بفروشند. بیش از دو سوم مردم در بند افتاده، در راه تلف می‌شدند و آن‌هایی هم که به مقصد می‌رسیدند، ناچار بودند تا سرحد مرگ برای صاحبان خود کار کنند. این انسان‌ها، از هیچ حقی، حتی حق ازدواج، برخوردار نبودند و اغلب در پایان جوانی از بین می‌رفتند.

نظریه‌پردازان جامعه‌ی استعماری، برای توجیه این رفتار ضد انسانی، نظریه‌ی نادرست و غیرعلمی «انسان متمدن» و «انسان وحشی» را ساختند. اربابان کشورهای استعماری «متمدن» بودند و حق داشتند برای «بقای تمدن»، جهان «وحشی» را به زنجیر بکشند و در واقع نابود کنند.

بسیاری از ملت‌ها، در گذشته‌های دور تاریخی خود، دوران بردگی و برده‌داری را از سر گذرانده بودند، ولی هرگز با فاجعه‌ای به بزرگی برده‌داری دوران استعماری اول روبه‌رو نشده بودند. باگذشت زمان، واژه‌های «استعمار» و «برده‌داری» به صورت ناسزا درآمد، ولی ماهیت عمل جهان استعماری تغییر نکرد و جنگ و آدم‌کشی سابقه‌ای گسترده‌تر پیدا کرد. آدم‌کشی تنها به رگبار بستن آدم‌ها نیست. به قول برتولت برشت، نویسنده و اندیشمند آلمانی: «آدم‌کشی انواع گوناگون دارد. می‌شود با چاقو شکم کسی را پاره کرد یا بیماری او را مداوا نکرد. می‌توان کسی را در دخمه‌ای جا داد یا تا سرحد مرگ به‌کار کشید. ممکن است کسانی را به خودکشی واداشت در حالی‌که تنها برخی از این آدم‌کشی‌ها ممنوع است.»

جهان استعماری به دنبال سود و سود بیشتر است و یکی از راه‌های کسب سود، ایجاد جنگ است تا هم سلاح‌های خود را بفروشد و هم ملت‌های فقیر را فقیرتر کند. نزدیک به ۳۰ سال پیش دکتر پتروال نوشت: «بنا بر برخی برآوردها، هر سال ۹۰۰ میلیارد دلار هزینه‌ی تسلیحات می‌شود، در حالی که تنها یک درصد از این منبع کافی است تا برای همه‌ی ملت‌های جهان آب تصفیه شده فراهم کنند. هزینه‌ی یک فروند جت جنگی برای ساختن و اداره‌ی ۴۰هزار داروخانه در نقطه‌های کوهستانی کفایت می‌کند. می‌توان با پول یک تانک، هزار کلاس درس برای آموزش ۳۰هزار دانش‌آموز فراهم کرد...»

هنوز میلیون‌ها کودک سیاره‌ی ما امکان تحصیل و رفتن به مدرسه را ندارد. جنگ‌های منطقه‌ای میلیون‌ها انسان را آواره کرده است، در حالی‌که هر سال صدها و صدها میلیارد دلار صرف ساختن سلاح می‌شود. بیش از ۷۰۰ میلیون نفر گرفتار گرسنگی مزمن‌اند و میلیون‌ها کودک به دلیل کم‌غذایی و بیماری در خطر مرگ هستند. جون دس برنارد، فیزیک‌دان انگلیسی و عضو جامعه‌ی سلطنتی لندن، رجل اجتماعی و مبارز راه صلح، نزدیک به ۵۰سال پیش نوشت:

«در زمان ما، مهم‌ترین چیز درک این موضوع است که سوءاستفاده از دانش برای خوشبختی مردم، آن‌قدر عظیم است که در مقایسه با آن، بحث‌ها و کشمکش‌هایی که در گذشته موجب جنگ شده‌اند و امروز پیمان‌های تدافعی و تهاجمی را آورده‌اند، بی‌معنا می‌نمایند. ثروتی که می‌توان با همین موفقیت‌های دانش موجود به‌دست آورد، بسیار بیشتر از همه‌ی چیزهایی است که در اثر تسخیر پربارترین سرزمین‌ها و حاکمیت بی‌رقیب بر سرچشمه‌های مواد خام، نفت و زغال عاید می‌شود. هدف‌های مادی دولت‌ها که به دلیل آن، آماده‌ی جنگ می‌شوند، در مقایسه با آن‌چه می‌توان در موقعیت صلح، آن هم خیلی زود، به‌دست آورد، ناچیز و احمقانه است.»

۲.

در سال ۱۳۷۹ خورشیدی بیانیه‌ای از سوی «مرکز پژوهش‌های آموزشی پیش از دبستان» با عنوان «به‌نام دوستدار کودکان» منتشر شد. در این بیانیه سفارش شده است، به کودکان خود از همان سال‌های نخست زندگی، روش انسانی زیستن را بیاموزیم تا یاد بگیرند، همه‌ی انسان‌ها را از هر نژاد، ملت، مذهب، رنگ پوست و... با حقوقی برابر در نظر بگیرند، خود را یا گروه ویژه‌ای را، بر دیگران برتری ندهند، از خشونت بپرهیزند و دیگران را از خشونت باز دارند. محیط زیست و زندگی انسان را نیالایند و دیگران را از آلودگی محیط زیست و گسترش آن باز دارند...

به این بیانیه‌ی «مرکز پژوهش‌های آموزشی پیش از دبستان»، ایراد کمی وارد نیست و تنها می‌توان با دیدی تحسین‌آمیز به آن نگریست و آرزومند توفیق گردانندگان آن مرکز شد. با همه‌ی این‌ها، بد نیست اگر به نکته‌هایی اشاره کنیم:

جنگ در سرشت نظام استعماری است. طبیعی است که با تلاش‌های شخصی و عادت دادن کودکان خود به دوستی و صلح‌خواهی نمی‌توان استعماری را از ادامه‌ی کار سنتی خود بازداشت. جنگ و جنگ‌طلبی جز با مبارزه‌ی جمعی انسان‌ها، از سیاره‌ی ما برنمی‌افتد. کودکان ما، به‌جز به‌دست آوردن اخلاق و رفتار انسانی، باید بدانند تنها با مبارزه‌ی بی‌وقفه‌ی ملت‌هاست که می‌توان نظام استعماری را از سنگر جنگ به عقب راند. ما در زمانی زندگی می‌کنیم که اگر «مروت با دوستان» لازمه‌ی زندگی انسان است، «مدارا با دشمنان» نباید و نمی‌تواند به معنای تسلیم به روحیه‌ی جنگ‌طلبی آن‌ها باشد. بنابراین، در آموزش پیش از دبستان، توجه دادن کودکان به مبارزه‌ی جمعی و بی‌امان با این جرثومه‌ی فساد، یعنی غارتگری جهان استعماری، باید جزو وظیفه‌های اصلی

هر پدر و مادر و هر مربی باشد.

این ضرب‌المثل چینی بسیار آموزنده است: «وقتی مردم با هم نفس بکشند، طوفان می‌شود و اگر باهم به زمین بکوبند، زلزله خواهد شد.» کودکان ما در ضمن باید با مضمون این پند ارسطو، شاگرد افلاطون آشنا باشند که: «استعمار خودکامه، تنها نابکاران را دوست دارد و تشنه‌ی گزافه گویی درباره‌ی خود است.» ولی هیچ انسان فرزانه‌ی آزاداندیشی خود را به زبونی تملق خودکامگان دچار نمی‌کند و به‌قول استاد سخن سعدی:

برتن چو هیچ جامه نباشند به اتفاق،

بهتر ز جامه‌ای که در آن هیچ مرد نیست

البته به شرطی که «مرد» را به مفهوم عام آن، یعنی «انسان» بپذیریم.

نکته‌ی دوم، به رفتار و روحیه‌ی ایرانی در طول تاریخ هزاران ساله‌ی خود مربوط می‌شود. ایرانی همیشه به دو جنبه از زندگی انسانی باور داشته است: مبارزه با شیوه‌های اهریمنی، و پذیرفتن و پراکندن روحیه‌ی انسانی. وقتی کورش به سرزمین بابل رسید، در حالی که جلوی لشکریان خود به نیایشگاه مردم بومی نزدیک می‌شد، با آن‌که باورهای دینی مردم آن سامان را نداشت، چندمتری مانده به نیایشگاه از اسب پیاده شد، در برابر نیایشگاه حالت احترام به خود گرفت، چند متر عقب‌عقب رفت و سپس دوباره بر اسب خود نشست. کورش در عهد عتیق، به عنوان «نجات‌دهنده» شناخته شده است، چرا که قوم «بنی‌اسرائیل»، را از بند چند ده‌ساله‌ی حاکمان سرزمین بابل نجات داد. در لوح‌های گلی تخت‌جمشید، که بعد از آتش زدن اسکندر پخته شده و تا امروز باقی مانده است، فرمانی از داریوش خطاب به حسابدار کل می‌بینیم که به‌خاطر فراهم نکردن موقعیت لازم برای قومی که اعتقادهای مذهبی ویژه‌ای داشته‌اند، مورد سرزنش قرار گرفته است.

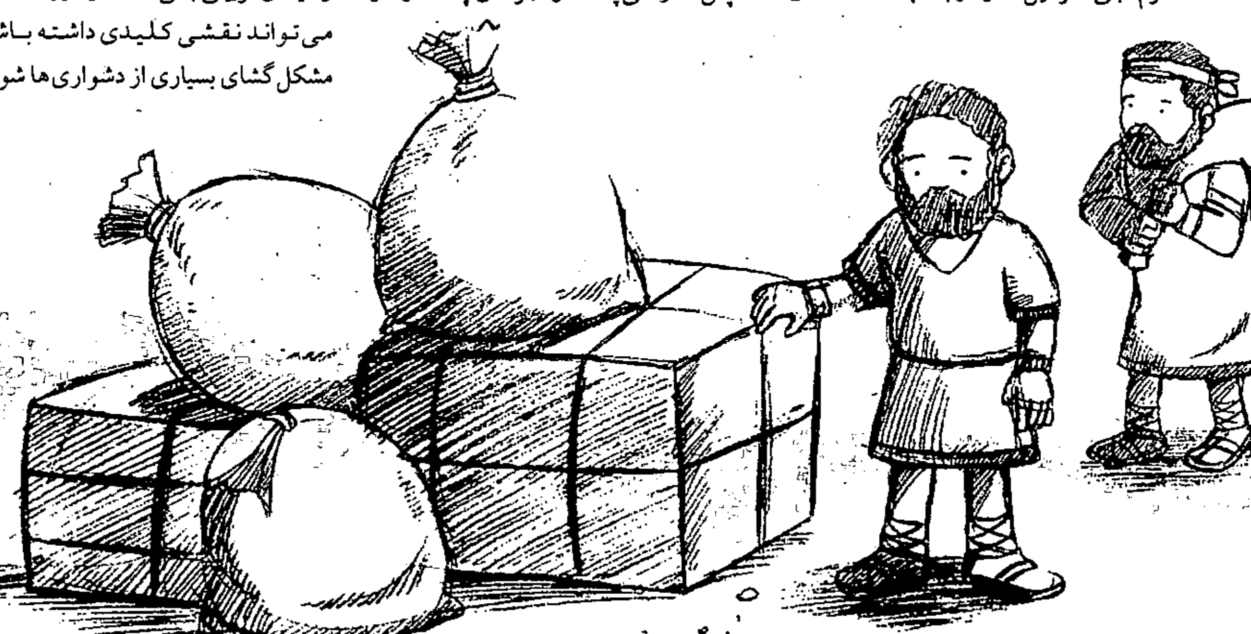
۳.

در هزاره‌های پیش از میلاد، تمدنی بزرگ در سرزمین میان دو رود (بین‌النهرین) بنیان گذاشته شده بود. قوم‌های زحمت‌کش و هنرمندی چون آشوری‌ها، کلدانی‌ها و سومری‌ها، با وجود نظام ستمگر برده‌داری و حاکمیت مستبد و مطلق شاهان خود، توانسته بودند به مرتبه‌ی بالایی از دانش و هنر برسند. همین دانش و هنر بابل باستان بود که با آگاهی‌های فنیقی و قبطی و ایرانی درهم آمیخت و سرانجام به یونان باستان رسید و سرچشمه دانش و فلسفه‌ی یونانی شد. سپس از آن‌جا به شرق آمد و در سرزمین‌های مستعد خاورمیانه و به‌ویژه ایران و هند بارور شد. دوباره به اروپای غربی و جنوبی مهاجرت کرد و سرانجام تمدن امروزی را، با همه‌ی تنوعی که در دانش، فلسفه، صنعت و هنر دارد، به‌وجود آورد. ولی شاهکار بابلی‌ها (وهم عیلامی‌ها که در جنوب و جنوب غربی ایران حکم می‌راندند)، در نحوه‌ی ثبت و نگاه‌داری آگاهی‌هایشان بود. آن‌ها آگاهی‌های خود را بر خشت خام می‌نوشتند. سپس آن را می‌پختند و آجرهای پخته را در کتاب‌خانه‌های خود جا می‌دادند. این هوشیاری بابلی‌ها در نگاه‌داری آگاهی‌های خود روی لوح‌های پخته‌ی گلی، موجب شد نوشته‌های آن‌ها، بعد از گذشت هزاران سال، سالم و دست‌نخورده به ما برسد.

نظام برده‌داری بابلی فرو ریخت و قوم‌های ساکن میان دو رود نابود یا آواره شدند، ولی نوشته‌های آن‌ها زیر خروارها خاک برای آیندگان باقی ماند تا بتوانند رازگشای توشه‌ای از کنش‌ها و کوشش‌های انسان درباره‌ی پرده برداشتن از قانون‌های حاکم بر طبیعت و جامعه باشد.

ولی مردمی که هزاران سال بعد و در همین سال‌های نزدیک، تمدن شهری خود را در نزدیکی و یا روی کتیبه‌های بابلی بنا می‌کردند، این‌جا و آن‌جا، به آجرهای محکم و خوش‌تراشی برخوردند که به‌نظر می‌آمد که در نتیجه‌ی گزند سال‌ها، «شیارهایی» در آن‌ها پدید آمده باشد. جهل آدمی موجب شد تا از این «آجرهای پرشیار» که هر کدامشان بیش از طلای هم‌وزن خود ارزش داشت، برای پر کردن لای ستون‌های ساختمان‌های خود استفاده کنند. به این ترتیب، مجموعه‌ی گران‌بهایی از ارثیه‌های پدران ما را، فدای جهل خود کردند. تنها در صدساله‌ی اخیر بود که به تدریج به اهمیت شیارهای روی آجرها پی بردند و آزمندان اروپایی با هجوم به «عراق»، آن‌چه را که باقی مانده بود، به موزه‌های کشورهای خود منتقل کردند.

گاهی حتی یک کتیبه، یک نقاشی یا یک وسیله‌ی تزیینی باقی مانده از دوران گذشته، می‌تواند نقشی کلیدی داشته باشد و مشکل‌گشای بسیاری از دشواری‌ها شود. به



سختی می‌توان اندیشید که اگر «کتیبه‌ی رزتا» در سال ۱۷۹۹ در مصب رود نیل پیدا نمی‌شد، ژان‌فرانسوا شامپولیون (۱۷۹۰-۱۸۳۲)، مهرشناس فرانسوی یا کس دیگری می‌توانست پرده از خط «هیروگلیف» بردارد. این، تنها کتیبه یا لوحی بود که به دو زبان مصری و یونانی نوشته شده بود و دانشمند فرانسوی توانست، به یاری زبان یونانی، راه خواندن زبان هیروگلیفی را پیدا کند.

گردن‌کشانی که هزاران سال برگرده‌ی ملت ما سوار بودند، کاری جز ویرانی اثرهای پیش از خود نداشته‌اند. هرکسی تنها می‌خواست، اثرهای شخصی او برای آیندگان بماند و به همین دلیل، اثرهای تاریخی گذشته را ویران می‌کرد، کتاب‌ها را می‌سوزاند و حتی دانشمندان و هنرمندان را با اندک بدگمانی به دم تیغ می‌سپرد و به گمان خود اثرهای «جاودان» عصر خود را بنیان می‌نهاد. ولی این اثرها هم، بعد از او به همان سرنوشتی دچار می‌شدند که اثرهای دیگر شده بودند.

یاکوب ادوارد پولاک، پزشک آلمانی دربار **ناصرالدین شاه**، در سفرنامه‌ی خود می‌نویسد: «ایرانی [منظور صاحبان زر و زور است] تمام کردن و کامل کردن را خوش ندارد. تنها در پی ایجاد چیز تازه است و آن‌چه را قدیمی است، با مسامحه و بی‌اعتنایی به دست نابودی می‌سپارد. به این ترتیب، مبالغ گزافی برای ساختن کاخ‌ها و منزل‌ها به مصرف می‌رسد. اما از پرداخت مبلغی ناچیز برای تعمیر و مرمت لازم پرهیز دارند... همین اصل نیز در اصفهان که مرکز شاهان صفوی بود، به‌کار بسته شد. کاخ‌های باعظمت که به سبکی بسیار دل‌پسند ساخته شده بودند، به‌خاطر غارت مصالح ساختمانی آن منهدم شدند یا به دست ویرانگی سپرده شدند...»

نگه‌داری اثرهای تاریخی و توجه به اثرهای باقی مانده از نسل‌های گذشته، کتیبه باشد یا کتاب یا یک نقاشی، به معنای تأیید نظام‌های گذشته نیست. این‌ها، نتیجه‌ی کار دانشمندان و هنرمندان مردم این سرزمین، و از طرف دیگر، زمینه‌ای برای تنظیم تاریخ اجتماعی گذشته‌ی پردرد این مردم است.

نگه‌داری یک کاخ سلطنتی یا حتی یک گورستان، نه به معنای پذیرش ظلم‌وجور شاهان، بلکه به معنای به نمایش گذاشتن این ظلم و جور است.

گذشته‌ی تاریخی مردم سرزمین ما، واقعیتی است غیرقابل تغییر، در یک طرف حکام ستمگر، و در طرف دیگر مردمی ستم‌کشیده نه تنها نباید گذشته را به فراموشی سپرد، بلکه باید با ترتیب دادن درست و منطقی موزه‌ها و نمایشگاه‌ها و تنظیم درست و آگاهانه‌ی بازدید مردم از کاخ‌ها و ابزارهای درون آن‌ها، آگاهی مردم را بالا برد و کینه‌ی آن‌ها را نسبت به ستمگران تیزتر کرد.

۴.

خیام، اندیشمند، ریاضی‌دان و اخترشناس نیشابوری در پیشگفتار رساله‌ی «فی براهین‌الجبر و المقابله» با دردی جانکاه می‌گوید: «... تعریف‌های زمان همواره با پیشامدهایی همراه بود... که برایم حال و مجال تکمیل بررسی‌هایی را که کرده بودم و دقت در آن‌ها را نمی‌گذاشت. چون ما در دورانی زندگی می‌کنیم که از اهل دانش، جز عده‌ی کمی که به هزاران رنج و محنت دچارشده‌اند، چیزی نمانده و آن‌ها نصیب خود را از دقیقه‌های ایام، صرف پژوهش‌های علمی می‌کنند. بسیاری از هم‌عصران متظاهر و علم‌فروش، حق را جامه‌ی باطل می‌پوشانند و گاهی از حد خودنمایی و تظاهر به علم و معرفت، پا را فراتر نمی‌گذارند و آن‌چه از راه دانش‌ها می‌دانند، تنها در غرض‌های جسمانی پست صرف می‌کنند.»

و ما این فریاد را در دو بیتی‌های زیبای خیام هم می‌بینیم که:

«چون چرخ به کام یک خردمند نگشت»

یا:

«ای چرخ فلک نه عقل داری نه هنر
هرگز نکنی به کار آزاده نظر»

یا:

«گر بر فلکم دست بدی چون یزدان
برداشتمی من این فلک را ز میان
از نو فلکی دگر چنان ساختمی،
کازاده به کام دل رسیدی آسان»

یا

«نا آمدگان، اگر بدانند که ما،
از دهر چه می‌کشیم، نایند دگر».

و این طبیعی است که در روزگار تسلط زر و زور، همه‌ی نیک‌اندیشان و آزاد فکران، و همه‌ی دانشمندان و هنرمندان، از دست «مهره‌فروشانِ گوهرشناس»، بنالند و به خاطر مصون بودن از قهر قهاران، گناه ناروایی‌ها را بر گردن «گردون» و «فلک» بگذارند. ولی در واقع، خطاب خیام به حکم‌رانان زمان خود است که می‌گوید: «نه عقل داری نه هنر».

هنر و دانش متعلق به مردم است و همه‌ی تلاش پر حماسه‌ی مردم، از جمله به این خاطر است که هنر را از کاخ‌ها بیرون بکشند، در خدمت خود قرار دهند و دانش را از وسیله‌ی کشتارجمعی به ابزار سازندگی تبدیل کنند. دانش باید با شناخت قانون‌های حاکم بر جامعه و طبیعت، وسیله‌ای برای مقابله با دشواری‌های موجود باشد، نه ابزاری در دست جهان سرمایه‌داری برای درهم کوفتن قهر ملت‌ها. و هنر با تخیل خود به عنوان ظریف‌ترین و زیباترین جنبه‌های روح بشری، باید به‌صورت یکی از برنده‌ترین سلاح‌ها، خشم مردم را تندتر کند و همه‌ی این‌ها، جز با به خدمت گرفتن دانش و هنر همه‌ی دانشمندان و هنرمندان مردمی ممکن نیست.

باید به یاد داشته باشیم، در زمان ما، هر ضربه‌ای که به یک انسان راستین وارد شود، ضربه‌ای است که به همه‌ی انسان‌ها، با هر آیین و اندیشه‌ای برمی‌گردد. به یاد داشته باشیم، زمان ما، زمانه‌ی سرنوشت است و بدون کنار گذاشتن «من‌ها»، نمی‌توان دشمن را، که با همه‌ی زبونی به اندازه‌ی کافی نیرومند است، به تاریخ سپرد. حرمت دانش و هنر را، هرجا که می‌یابیم، نگه‌داریم و اجازه ندهیم نیروی پرتوان دانشمندان و هنروران در دام حیله‌های دشمن، تباه شود.

بگذار از این پس، دورانی چون دوران خیام، امکان تکرار پیدا نکند و هم‌چون گله‌ای مربوط به دوران گذشته باقی بماند. این، امید همه‌ی اندیشمندان و هنروران روزگار ماست.

ب خ ش پ ذ ی ر ی

برای دانش‌آموزان پایه‌ی سوم ریاضی

● احمد قندهاری

اشاره

در این مقاله به بررسی بخش‌پذیری عبارت $P(x)$ بر عبارت $Q(x)$ خواهیم پرداخت، همچنین روش‌هایی برای یافتن باقی‌مانده تقسیم عبارت جبری $P(x)$ بر عبارت جبری $Q(x)$ را در می‌آوریم.

الف) شرط لازم و کافی برای این‌که عبارت $P(x)$ بر $(x-a)$ بخش‌پذیر باشد، آن است که: $P(a)=0$ و $P(a)$ را باقی‌مانده‌ی تقسیم گویند.

مثال ۱. اگر عبارت $P(x)=x^3-2ax+8$ بر $(x-2)$ بخش‌پذیر باشد، مقدار عددی a را بیابید.

حل: باید $P(2)=0$

$$P(2)=(2)^3-2a(2)+8=0$$

$$\Rightarrow 8-4a+8=0 \Rightarrow 4a=16 \Rightarrow \boxed{a=4}$$

ب) شرط لازم و کافی برای این‌که عبارت $P(x)$ بر $(x-a)(x-b)$ بخش‌پذیر باشد، این است که:

$$\begin{cases} P(a)=0 \\ P(b)=0 \end{cases}$$

تعمیم: شرط لازم و کافی برای این‌که عبارت $P(x)$ بر $(x-a)(x-b)(x-c)\cdots(x-k)$ بخش‌پذیر باشد این است که:

$$\begin{cases} P(a)=0 \\ P(b)=0 \\ P(c)=0 \\ \vdots \\ P(k)=0 \end{cases}$$

مثال ۲. a و b را چنان بیابید که عبارت $P(x)=ax^4+bx^3+4x-8$ بر (x^2-4) بخش‌پذیر باشد.

حل: روش اول

برای آن‌که $P(x)$ بر $x^2-4=(x-2)(x+2)$ بخش‌پذیر باشد، باید: $\begin{cases} P(2)=0 \\ P(-2)=0 \end{cases}$؛ پس:

$$\begin{cases} P(2)=a(2)^4+b(2)^3+4(2)-8=0 \\ P(-2)=a(-2)^4+b(-2)^3+4(-2)-8=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 16a+8b+8-8=0 \\ 16a-8b-8-8=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16a+8b=0 \\ 16a-8b=16 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 32a=16 \Rightarrow \boxed{a=\frac{1}{2}}$$

$$16a+8b=0 \Rightarrow 16(\frac{1}{2})+8b=0$$

$$\Rightarrow 8+8b=0 \Rightarrow \boxed{b=-1}$$

روش دوم (خیلی مهم است)

می‌توانیم بنویسیم $x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4$ و در عبارت $P(x)$، به جای هر x^2، عدد ۴ را قرار دهیم. عبارت حاصل را متحد با صفر قرار می‌دهیم.

$$P(x)=a(x^2)^2+bx(x^2)+4x-8$$

$$x^2=4$$

$$R=a(4)^2+bx(4)+4x-8=16a+4bx+4x-8$$

$$R = (4b+4)x + (16a-8) \equiv 0$$

$$\begin{cases} 4b+4=0 \Rightarrow \boxed{b=-1} \\ 16a-8=0 \Rightarrow \boxed{b=\frac{1}{2}} \end{cases}$$

تذکر: وقتی عبارتی از هر درجه متحد با صفر باشد، باید ضریب‌های همه‌ی جملات را مساوی صفر قرار دهیم. هم‌چنین عدد ثابت را هم مساوی صفر قرار دهیم.

مثال ۳. باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x) = x^{16} + x^9 - x^4 + 1$ را بر (x^3+1) بیابید.

حل: به روش دوم

$$x^3+1=0 \Rightarrow x^3=-1$$
$$P(x) = x(x^3)^5 + (x^3)^3 - x(x^3) + 1$$
$$R = x(-1)^5 + (-1)^3 - x(-1) + 1$$
$$R = -x - 1 + x + 1 \Rightarrow R = 0$$

مثال ۴. a و b را چنان بیابید که عبارت $P(x) = ax^3 + bx^2 + 4x - 3$ بر (x^2+2) بخش‌پذیر باشد.

حل: ناچاریم این مسأله را به روش دوم حل کنیم، چون (x^2+2) تجزیه نمی‌شود.

$$x^2+2=0 \Rightarrow x^2=-2$$

ممکن است سؤال کنید، آیا ممکن است x^2 برابر ۲- شود؟

در پاسخ باید عرض کنم: بله. زیرا در ریاضیات مجموعه‌ای وجود دارد به نام مجموعه‌ی اعداد مختلط که در آن x^2 می‌تواند مساوی ۲- باشد.

$$P(x) = ax(x^2) + b(x^2) + 4x - 3 \quad و \quad x^2=-2$$
$$R = ax(-2) + b(-2) + 4x - 3$$
$$R = -2ax - 2b + 4x - 3 \equiv 0$$
$$R = (4-2a)x - (2b+3) \equiv 0$$
$$\Rightarrow 4-2a=0 \Rightarrow \boxed{a=2}$$
$$2b+3=0 \Rightarrow \boxed{b=-\frac{3}{2}}$$

مثال ۵. اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم عبارت $(ax^8 + bx^4 + 1)$ بر (x^4+1) عدد ۱ باشد، آن‌گاه باقی‌مانده‌ی تقسیم عبارت (x^2+ax+b) بر $(x+2)$ را بیابید.

حل: به روش دوم

$$x^4+1=0 \Rightarrow x^4=-1$$
$$ax^8+bx^4+1 = a(x^4)^2 + b(x^4) + 1 \quad و \quad R_1 = 1$$
$$R_1 = a(-1)^2 + b(-1) + 1 = 1$$
$$\Rightarrow a-b+1=1 \Rightarrow a-b=0 \Rightarrow \boxed{a=b}$$

تعیین باقی‌مانده‌ی قسمت دوم:

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2$$
$$x^2+ax+2b$$
$$R_2 = (-2)^2 + a(-2) + 2b = 4 - 2a + 2b$$
$$a=b \Rightarrow \boxed{R_2 = 4}$$

ج) اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $(x-a)$ برابر R_1، باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $(x-b)$ برابر R_2، و باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $(x-a)(x-b)$ برابر $mx+n$ باشد، آن‌گاه m و n از دستگاه $\begin{cases} m(a)+n=R_1 \\ m(b)+n=R_2 \end{cases}$ به‌دست می‌آید.

اثبات: فرض می‌کنیم خارج‌قسمت تقسیم $P(x)$ بر $(x-a)(x-b)$، $Q(x)$ و باقی‌مانده‌ی تقسیم $mx+n$ باشد. می‌توان نوشت:

$$P(x) = (x-a)(x-b).Q(x) + mx + n \qquad (I)$$

در ضمن داریم: $P(a) = R_1$ و $P(b) = R_2$

در رابطه‌ی (I) به جای x، یک بار a و یک بار b را قرار می‌دهیم. خواهیم داشت:

$$\begin{cases} P(a) = (0)(x-b)\ \ Q(a) + m(a) + \pi \\ P(b) = (x-a)(0)\ \ Q(b) + m(b) + \pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_1 = m(a)+n \\ R_2 = m(b)+n \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} m(a)+n=R_1 \\ m(b)+n=R_2 \end{cases}$$

مثال ۶. اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $(x-1)$ برابر ۷ و باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $(x-2)$ برابر ۳ باشد، آن‌گاه باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ را بر $(x-a)(x-b)$ بیابید.

حل: فرض می‌کنیم باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $(x-1)(x-2)$ برابر $mx+n$ باشد. بنابه درس می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} m(a)+n=R_1 \\ m(b)+n=R_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m(1)+n=7 \\ m(2)+n=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -m-n=-7 \\ 2m+n=3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow m=-4, m+n=7 \Rightarrow -4+n=7 \Rightarrow n=11$$

پس باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $(x-1)(x-2)$، $(-4x+11)$ است.

مثال ۷. اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم عبارت‌های $x^4+ax^3+bx^2-4$ و $x^2-8x+12$ بر (x^2-2) یکی باشند، a و b را بیابید.

$$x^4+ax^3+bx^2-4 = (x^2)^2 + ax(x^2) + bx^2 - 4$$
الف) $x^2-2=0 \Rightarrow x^2=2$
$$R_1 = (2)^2 + ax(2) + b(2) - 4$$
$$R_1 = 4 + 2ax + 2b - 4 \Rightarrow R_1 = 2ax + 2b$$
ب) $x^2-8x+12 \quad x^2=2$
$$R_2 = 2 - 8x + 12 \Rightarrow R_2 = -8x + 14$$
$$R_1 \equiv R_2 \Rightarrow 2ax + 2b \equiv -8x + 14$$

$$\Rightarrow ۲a=-۸\Rightarrow \boxed{a=-۴}$$

$$۲b=۱۴\Rightarrow \boxed{a=۷}$$

مثال ۸. اگر $x=\sqrt{۲}$ یکی از صفرهای تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^۳-(۴+\sqrt{۲})x^۲+(۳+۴\sqrt{۲})x-۳\sqrt{۲}$ باشد، صفرهای دیگر تابع را بیابید.

حل: باید $f(x)$ را بر $(x-\sqrt{۲})$ تقسیم کنیم و سپس خارج‌قسمت را مساوی صفر قرار دهیم:

$$x^۳-۴x^۲-\sqrt{۲}x^۲+۳x+۴\sqrt{۲}x-۳\sqrt{۲}\ \Big|\ \frac{x-\sqrt{۲}}{x^۲-۴x+۳}$$

$$\text{خارج قسمت}=۰\Rightarrow x^۲-۴x+۳=۰$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ضرایب صفر است.}\ \begin{cases} x=۱ \\ x=\dfrac{c}{a}=۳ \end{cases}$$

پس $x=۱$ و $x=۳$ صفرهای دیگر تابع هستند.

آزمون ۱. اگر $f(۲)=f(-۲)=۵$، آن‌گاه کدام یک از عبارت‌های زیر بر $(x^۲-۴)$ بخش‌پذیر است؟

الف) $f(x)-۴$ ب) $f(x)-۵$

ج) $f(x)-۲$ د) $f(x)+۲$

حل: گزینه‌ی ب. زیرا عبارتی بر $(x^۲-۴)$ بخش‌پذیر است که به‌ازای $x=۲$ و $x=-۲$ برابر صفر شود. پس گزینه‌ی ب درست است.

آزمون ۲. اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $(x-۲)$ مساوی ۸ باشد، آن‌گاه باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x^۲-۷)$ بر $(x+۳)$ کدام است؟

الف) ۸ ب) ۷

ج) ۶ د) ۵

حل: گزینه‌ی الف. داریم:

$$f(۲)=۸$$
$$x+۳=۰\Rightarrow x=-۳\Rightarrow f(۹-۷)=f(۲)=۸$$

آزمون ۳. اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $(x^۲-۸)$ صفر باشد، آن‌گاه باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x^۳)$ بر $x^۴+۲x^۲+۴$ کدام است؟

الف) صفر ب) x

ج) $x-۱$ د) $۲x$

حل: گزینه‌ی الف.

$$f(x)=(x^۲-۸)Q(x)$$

$$x\xrightarrow{\text{تبدیل}}x^۳\Rightarrow f(x^۳)=(x^۶-۸)Q(x^۳)$$
$$\Rightarrow f(x^۳)=(x^۲-۲)(x^۴+۲x^۲+۴)Q(x^۳)\Rightarrow R_{\text{جدید}}=۰$$

تفریح اندیشه

رحیم خیرالله‌زاده

دبیر ریاضی ناحیه‌ی ۲ شهرری

اثبات اصل لانه کبوتری در حالت کلی

صورت قضیه: اگر n کبوتر در k لانه قرار گیرند، به‌طوری که هر لانه گنجایش n کبوتر داشته باشد، آن‌گاه لانه‌ای یافت می‌شود که حداقل دارای $\left[\frac{n-۱}{k}\right]+۱$ کبوتر باشد.

اثبات: فرض می‌کنیم تعداد کبوترها در لانه‌ی iام برابر x_i باشد که در آن: $۱\le i\le k$ و $۰\le x_i\le n$. در این صورت، حکم مسئله معادل این خواهد بود که ثابت کنیم:

$$\exists i: x_i\ge\left[\frac{n-۱}{k}\right]+۱$$

برای اثبات از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم حکم برقرار نباشد. در این صورت در تمام لانه‌ها، تعداد کبوترها کمتر از $\left[\frac{n-۱}{k}\right]+۱$ خواهد بود؛ یعنی:

$$\forall i: x_i<\left[\frac{n-۱}{k}\right]+۱ \qquad \text{(فرض خلف)}$$

حال نشان می‌دهیم که به تناقض می‌رسیم:

می‌دانیم $([x]\le x<[x]+۱)$

$$n=x_۱+x_۲+\ldots+x_k\le k\left[\frac{n-۱}{k}\right]\le k\left[\frac{n-۱}{k}\right]\le n-۱$$

هر x_i از ماکزیمم مقدار x_iها، یعنی: $\left[\frac{n-۱}{k}\right]$ کوچک‌تر یا با آن‌ها مساوی است.

به سادگی نتیجه می‌شود: $n\le n-۱$ که یک تناقض آشکار است.

بنابراین فرض خلف غلط است، یعنی حکم قضیه درست است و اثبات کامل می‌شود.

رویکرد هندسی- رویکرد جبری در آموزش هندسه

(قسمت اول)

● محمد هاشم رستمی

بین فلاسفه‌ی ریاضی و تاریخ‌دانان ریاضی، اختلاف نظر وجود دارد که آیا ابتدا مفاهیم مربوط به عدد در ریاضیات مطرح شد، یا مفاهیم مربوط به نقطه، خط، صفحه و پیوستارهای هندسی. ولی مسلم است که تکامل ریاضیات در ارتباط با پیشرفت‌های دو رشته‌ی حساب و هندسه صورت پذیرفته است؛ گرچه این دو عنصر اساسی ریاضیات همواره همدوش یکدیگر به پیش نرفته‌اند. چه بسیار اتفاق افتاده است که این دو با هم رقابت داشته‌اند.

اولین قدم واقعی ریاضی به‌وسیله‌ی هندسه برداشته شد. یونانیان سال‌های ۳۰۰ تا ۶۰۰ قبل از میلاد، به ریاضیات سازمان و رنگ تجرد و استدلال قیاسی دادند و ساختمان عظیم هندسه‌ی اصل موضوعی اقلیدسی را بنیان نهادند.

چون یونانیان به‌طور خالص پیرامون هندسه کار می‌کردند،

بنابراین هندسه‌ی اقلیدسی، جبری را که تا آن زمان شناخته شده بود، نیز دربر می‌گرفت؛ مثلاً حل معادله‌ی درجه‌ی دوم یک‌مجهولی به روش هندسی انجام می‌شد.

پس از ویرانی تمدن یونان به‌وسیله‌ی **اسکندر مقدونی** و انتقال آن به اسکندریه در مصر، دانشمندان اسکندریه، حساب و جبر را به هندسه‌ی اقلیدسی اضافه کردند تا به این وسیله بتوانند نتایج کمی به دست آورند.

بعد از ریاضی‌دانان اسکندریه، ریاضی‌دانان اسلامی و ایرانی در پیشرفت و تکامل ریاضیات نقش عمده‌ای داشته‌اند. **محمدبن موسی خوارزمی** بنیان‌گذار جبر و مقابله است که کلمه‌ی جبر یا الجبرا[1] از نام کتاب وی گرفته شده و واژه‌ی «الگوریتم» نیز شکل لاتینی شده‌ی نام **الخوارزمی** است. کتاب جبر و مقابله‌ی خوارزمی سال‌ها در مدارس اروپا و کشورهای اسلامی به‌عنوان کتاب درسی تدریس می‌شد؛ در واقع کتاب اصول اقلیدس، کتاب درسی هندسه و کتاب جبر و مقابله‌ی خوارزمی، کتاب درسی جبر در مدارس این کشورها بود.

در استاندارد ۸ مربوط به استانداردهای موضوعی NCTM که **«هندسه از دیدگاه جبری»** است، آمده است: «یکی از مهم‌ترین پیوندها و اتصال‌ها در همه‌ی ریاضیات، اتصال و ارتباط بین هندسه و جبر است.»

در تکامل هندسه که به پیدایش هندسه‌های جدید از جمله هندسه‌ی تحلیلی منجر شده است، ریاضی‌دانان ایرانی نقش مهمی داشته‌اند. **حکیم عمر خیام** (۴۳۹ـ۵۲۶ هـ. ق) اولین کسی است که در جبر و مقابله، معادلات را برحسب درجه‌ی مجهول مرتب و با روشی تحلیلی گونه حل و بحث کرد. خیام نخستین ریاضی‌دانی است که ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی سوم را به روش هندسی به‌دست آورد و مقدمات کاربرد جبر در هندسه، یعنی هندسه‌ی تحلیلی را طرح‌ریزی کرد. اما هندسه‌ی تحلیلی به طور رسمی توسط **رنه دکارت**[2] (۱۵۹۶ تا ۱۶۵۰) در سال ۱۶۱۹ به دنیا معرفی شد و **پی یر فرما**[3] (۱۶۰۱ تا ۱۶۶۵) نیز تقریباً هم‌زمان با دکارت، این هندسه را کشف کرد.

با پیدایش هندسه‌ی تحلیلی در قرن هفدهم میلادی، ریاضیات گام بزرگی به جلو برداشت، زیرا این امکان به‌وجود آمد که ایده‌های هندسی ریاضی‌دانان باستان، به زبان هندسه‌ی مختصاتی بیان شود و بسط و گسترش یابد و درنتیجه ابزار جدیدی برای حل دامنه‌ی وسیعی از مسأله‌ها فراهم شود.

در واقع، تناظری مستقیم بین مفاهیم و ایده‌های پایه‌ای هندسه در دو دیدگاه هندسی و جبری وجود دارد. نقطه، خط و صفحه، از مفاهیم اساسی و تعریف‌نشده‌ی هندسه هستند. اگرچه این موضوع‌ها تعریف نشده‌اند، ولی به وسیله‌ی اصول موضوعه‌ی معینی تبیین و توصیف شده‌اند. این مفهوم‌ها در دیدگاه جبری ارائه می‌شوند.

اینک ارتباط بین دو رویکرد هندسی و رویکرد جبری در صفحه (دو بعد) را بررسی می‌کنیم. اگر صفحه‌ی E به مفهوم هندسی را به یک دستگاه مختصات دکارتی [متعامد] متشکل از دو محور مختصات عمود بر هم و مجهز کنیم، یک تناظر یک‌به‌یک بین صفحه‌ی E و حاصل ضرب دکارتی $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ [ضرب دکارتی روی اعداد حقیقی] برقرار می‌شود. به این ترتیب که به هر نقطه‌ی P از صفحه‌ی E، یک زوج مرتب (y و x) از اعداد حقیقی نظیر می‌شود و برای هر زوج مرتب (y و x)، نقطه‌ای نظیر، در صفحه‌ی مختصات وجود خواهد داشت. درحقیقت، **دستگاه مختصات دکارتی، ابزار اصلی برای ایجاد ارتباط بین هندسه و جبر است** و تحت این شرایط:

نقطه‌ی P از صفحه‌ی E $\xleftrightarrow{\text{تناظر}}$ $\{(x,y)|x\in \mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}\}$

و این صفحه به مفهوم جبری است.

صفحه‌ی E به مفهوم هندسی $\xleftrightarrow[\text{تناظر}]{}$ $\{(x,y)|x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

خط L از صفحه‌ی E $\xleftrightarrow{\text{تناظر}}$ $\{L: ax+by+c=0|(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\}$

منحنی (C) از صفحه‌ی E $\xleftrightarrow{\text{تناظر}}$ $\{y=f(x)|(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\}$

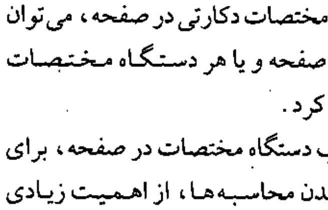
نکته‌ی ۱. به‌جای دستگاه مختصات دکارتی در صفحه، می‌توان از دستگاه مختصات قطبی در صفحه و یا هر دستگاه مختصات تعریف شده‌ی دیگری استفاده کرد.

نکته‌ی ۲. چگونگی نصب دستگاه مختصات در صفحه، برای ساده‌تر شدن و یا طولانی‌تر شدن محاسبه‌ها، از اهمیت زیادی برخوردار است؛ یعنی ما می‌توانیم با انتخاب دستگاه مختصات در صفحه، به‌نحوی مناسب، محاسبه‌ها را به حداقل برسانیم.

اکنون به چند مثال که با استفاده از دو رویکرد هندسی و جبری حل شده‌اند، توجه کنید.

مثال ۱. قضیه: ثابت کنید که در هر مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، واسطه‌ی هندسی بین دو قطعه‌ی ایجادشده روی وتر است.

اثبات با رویکرد هندسی: مثلث قائم‌الزاویه‌ی $ABC(\hat{A}=90^\circ)$ را در نظر می‌گیریم و ارتفاع AH را رسم می‌کنیم (شکل ۱). دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABH و ACH به دلیل برابری زاویه‌های متناظرشان، متشابه‌اند؛ زیرا داریم:



(شکل ۱)

$$\hat{H}_1=\hat{H}_2=90^\circ \quad \text{و} \quad \hat{A}_1+\hat{A}_2=90^\circ \qquad (1)$$

$$\hat{A}_1+\hat{B}=90^\circ \qquad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B}$$

از متشابه بودن این دو مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$\frac{AH}{BH} = \frac{CH}{AH} \Rightarrow AH^2 = BH.CH$$

و این، حکم مسئله است.

اثبات با رویکرد جبری: مثلث قائم‌الزاویه‌ی $ABC(\hat{A} = 90^\circ)$ را در نظر می‌گیریم و ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. H را مبدأ مختصات، محور xها را منطبق بر BC و محور yها را منطبق بر AH اختیار می‌کنیم. اگر $AH = h$ ، $BH = d$ و $CH = e$ فرض شود، خواهیم داشت:

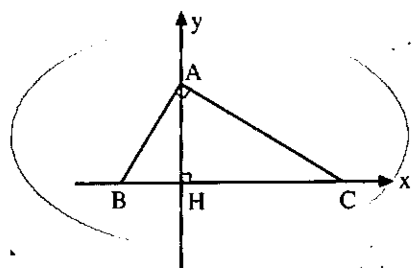
$A = (0,h)$ و $B = (-d,0)$ و $C = (e,0)$ $\qquad AB \perp AC$

$$m_{AB} = \frac{0-h}{-d-0} = \frac{h}{d} \quad \text{و} \quad m_{AC} = \frac{0-h}{e-0} = -\frac{h}{d}$$

$$m_{AB} \cdot m_{AC} = -1 \Rightarrow \frac{h}{d} \times \frac{-h}{e} = -1$$

$$\Rightarrow h^2 = de \Rightarrow AH^2 = BH.CH$$

(شکل ۲)

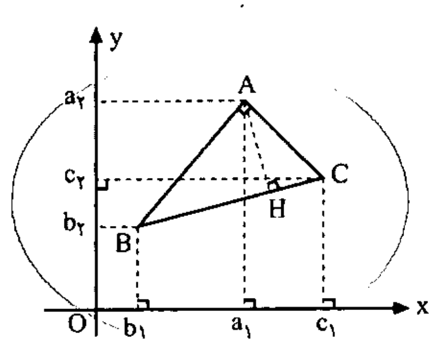


و این حکم مسئله است.

توجه کنید:

اگر دستگاه محورهای مختصات را به طور دل‌خواه در نظر بگیریم (شکل ۳)، رأس‌های مثلث قائم‌الزاویه‌ی $ABC(\hat{A} = 90^\circ)$ از این قرار خواهد بود: $A = (a_1,a_2)$ ، $B = (b_1,b_2)$ و $C = (c_1,c_2)$.

(شکل ۳)



ارتفاع وارد بر وتر، یعنی AH را رسم می‌کنیم. اکنون برای اثبات رابطه‌ی $AH^2 = HB.HC$ ، لازم است طول پاره‌خط‌های AH ، BH و CH را برحسب مختصات رأس‌های مثلث، یعنی برحسب مختصات نقطه‌های A ، B و C به‌دست آوریم و در این رابطه قرار دهیم و ثابت کنیم که این رابطه به ازای مقدارهای قرار داده شده به جای AH ، BH و CH همواره برقرار است.

اما نخست لازم است مختصات نقطه‌ی H، پای ارتفاع AH را برحسب مختصات رأس‌های A ، B و C محاسبه کنیم. برای این کار باید معادله‌ی خط AH و معادله‌ی خط BC را به‌دست آوریم و آن‌گاه، مختصات نقطه‌ی برخورد آن‌ها را تعیین کنیم. داریم:

$$B\begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \end{vmatrix} \; C\begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \end{vmatrix} \Rightarrow BC: y - b_2 = \frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1}(x - b_1)$$

$$\Rightarrow y = \frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1}x - b_1 \times \frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1} + b_2$$

$$m_{BC} = \frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1}, AH \perp BC \Rightarrow m_{AH} = -\frac{c_1 - b_1}{c_2 - b_2}$$

$$\Rightarrow AH: y - a_2 = -\frac{c_1 - b_1}{c_2 - b_2}(x - a_1)$$

معادله‌ی ارتفاع AH ،

$$\Rightarrow y = -\frac{c_1 - b_1}{c_2 - b_2}x + a_1 \times \frac{c_1 - b_1}{c_2 - b_2} + a_2$$

$$\begin{cases} BC: & y = \frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1}x - b_1 \times \frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1} + b_2 \\ AH: & y = -\frac{c_1 - b_1}{c_2 - b_2}x + a_1 \times \frac{c_1 - b_1}{c_2 - b_2} + a_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1}x - b_1 \times \frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1} + b_2 = -\frac{c_1 - b_1}{c_2 - b_2}x + a_1 \times \frac{c_1 - b_1}{c_2 - b_2} + a_2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1} + \frac{c_1 - b_1}{c_2 - b_2}\right)x = a_1 \times \frac{c_1 - b_1}{c_2 - b_2} + b_1 \times \frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1} + a_2 - b_2$$

$$\frac{(c_2 - b_2)^2 + (c_1 - b_1)^2}{(c_1 - b_1)(c_2 - b_2)}x = \frac{a_1(c_1 - b_1)^2 + b_1(c_2 - b_2)^2}{(c_2 - b_2) \times (c_1 - b_1)} + a_2 - b_2$$

$$\Rightarrow x = \frac{a_1(c_1 - b_1)^2 + b_1(c_2 - b_2)^2 + (a_2 - b_2)(c_1 - b_1)(c_2 - b_2)}{(c_2 - b_2)^2 + (c_1 - b_1)^2} = \alpha$$

طول نقطه‌ی H را α می‌گیریم. برای محاسبه‌ی عرض نقطه‌ی H داریم:

$$\Rightarrow y = \frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1} \times \alpha - b_1 \times \frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1} + b_2$$

$$\Rightarrow H\left|\begin{array}{l} x=\alpha \\ y=\dfrac{c_2-b_2}{c_1-b_1}\alpha-b_1\times\dfrac{c_2-b_2}{c_1-b_1}+b_2=\beta \end{array}\right.$$

از آن خواهیم داشت :

$$AH=\sqrt{(\alpha-a_1)^2+(\beta-a_2)^2}\ ,\ BH=\sqrt{(\alpha-b_1)^2+(\beta-b_2)^2}$$

$$CH=\sqrt{(\alpha-c_1)^2+(\beta-c_2)^2}$$

$$AH^2=BH.CH$$

$$\Rightarrow(\alpha-a_1)^2+(\beta-a_2)^2=\sqrt{(\alpha-b_1)^2+(\beta-b_2)^2}\times\sqrt{(\alpha-c_1)^2+(\beta-c_2)^2}$$

$$\Rightarrow\left[(\alpha-a_1)^2+(\beta-a_2)^2\right]^2=\left[(\alpha-b_1)^2+(\beta-b_2)\right]\times\left[(\alpha-c_1)^2+(\beta-c_2)^2\right]$$

با قرار دادن مقدار به جای α و β برحسب (a_1,a_2) ، (b_1,b_2) و (c_1,c_2) ، دو طرف این رابطه با هم برابر خواهند شد و این مطلب درستی رابطه‌ی $AH^2=BH.CH$ را نشان می‌دهد .

می‌بینید که با انتخاب دستگاه محورهای مختصات به این صورت، چه‌قدر محاسبه‌ها پیچیده و مشکل می‌شود . بنابراین اهمیت انتخاب مناسب دستگاه محورهای مختصات هرچه بیشتر نمایان می‌گردد .

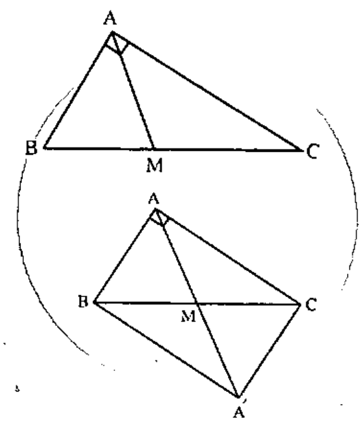
اینک به مثال‌های دیگری از حل یک مسئله با دو رویکرد هندسی و جبری توجه کنید .

مثال ۱ . ثابت کنید که در هر مثلث قائم‌الزاویه، میانه‌ی وارد بر وتر نصف وتر است .

اثبات

الف) روش هندسی

راه اول :



(شکل ۴)

مثلث قائم‌الزاویه‌ی $ABC(\hat{A}=90^\circ)$ را در نظر می‌گیریم و میانه‌ی AM را رسم می‌کنیم . می‌خواهیم ثابت کنیم که $AM=\frac{BC}{2}$ است . برای اثبات، میانه‌ی AM را به اندازه‌ی خود تا نقطه‌ی A' امتداد می‌دهیم؛ یعنی $AM=MA'$. سپس از A' به B و C وصل می‌کنیم . چهارضلعی $ABA'C$ متوازی‌الاضلاع است، زیرا قطرهایش یکدیگر را نصف کرده‌اند ($AM=MA'$ و $BM=MC$) .

از طرف دیگر، زاویه‌ی A از این متوازی‌الاضلاع 90° است، پس این متوازی‌الاضلاع مستطیل است . اما می‌دانیم که قطرهای هر مستطیل با هم مساوی‌اند، بنابراین: $AA'=2AM=BC$ و از آن‌جا: $AM=\frac{BC}{2}$. پس حکم مسئله ثابت شد .

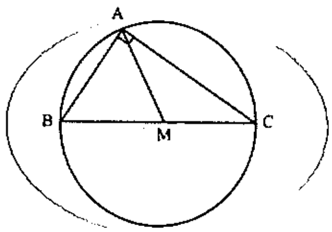
نکته : در این اثبات از قضیه‌های زیر استفاده شده است :

۱ . اگر قطرهای یک چهارضلعی یکدیگر را نصف کنند، آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است .

۲ . متوازی‌الاضلاعی که یک زاویه‌ی 90° داشته باشد، مستطیل است .

۳ . قطرهای هر مستطیل با هم مساوی‌اند .

راه دوم :



(شکل ۵)

مثلث قائم‌الزاویه‌ی $ABC(\hat{A}=90^\circ)$ را در نظر می‌گیریم و میانه‌ی AM را رسم می‌کنیم . می‌خواهیم ثابت کنیم : $AM=\frac{BC}{2}$.

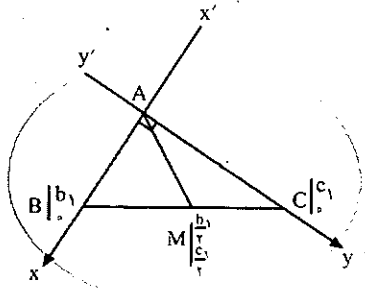
برای اثبات، دایره‌ای به قطر BC رسم می‌کنیم . می‌دانیم که این دایره از رأس A می‌گذرد، زیرا کمان درخور زاویه‌ی 90° روبه‌رو به یک پاره‌خط، دایره‌ای است که به قطر آن پاره‌خط رسم می‌شود . پس AM مساوی شعاع این دایره است؛ یعنی داریم :

$$AM=MB=MC\Rightarrow AM=\frac{BC}{2}$$

پس حکم مسئله ثابت شد .

ب) راه حل جبری

مثلث قائم‌الزاویه‌ی $ABC(\hat{A}=90^\circ)$ را در نظر می‌گیریم و میانه‌ی AM را رسم می‌کنیم . می‌خواهیم ثابت کنیم : $AM=\frac{BC}{2}$.



(شکل ۶)

دستگاه محورهای مختصات قائم را چنان اختیار می‌کنیم که A مبدأ مختصات، AB روی محور xها و AC روی محور yها باشد (شکل ۶). در این صورت، با فرض $AB = b_1$ و $AC = c_1$ خواهیم داشت:

$A = (0,0), B = (b_1,0), C = (0,c_1)$.

$$M \text{ وسط } BC \left| \begin{array}{l} x_M = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{b_1 + 0}{2} = \dfrac{b_1}{2} \\ y_M = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{0 + c_1}{2} = \dfrac{c_1}{2} \end{array} \right.$$

از آن‌جا:

$$BC = \sqrt{(0 - b_1)^2 + (c_1 - 0)^2} = \sqrt{b_1^2 + c_1^2} \qquad (1)$$

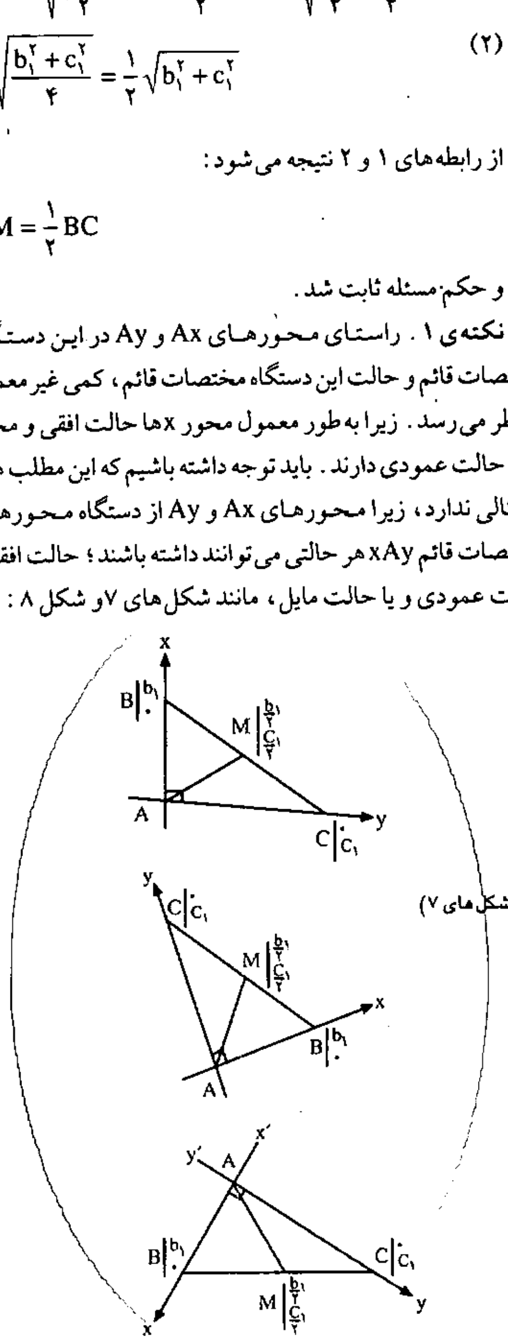
$$AM = \sqrt{(\frac{b_1}{2} - 0)^2 + (\frac{c_1}{2} - 0)^2} = \sqrt{\frac{b_1^2}{4} + \frac{c_1^2}{4}} = \sqrt{\frac{b_1^2 + c_1^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{b_1^2 + c_1^2} \qquad (2)$$

از رابطه‌های ۱ و ۲ نتیجه می‌شود:

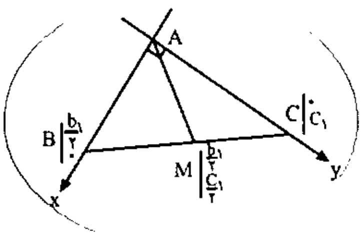
$$AM = \frac{1}{2} BC$$

و حکم مسئله ثابت شد.

نکته‌ی ۱. راستای محورهای Ax و Ay در این دستگاه مختصات قائم و حالت این دستگاه مختصات قائم، کمی غیرمعمول به نظر می‌رسد. زیرا به‌طور معمول محور xها حالت افقی و محور yها حالت عمودی دارند. باید توجه داشته باشیم که این مطلب هیچ اشکالی ندارد، زیرا محورهای Ax و Ay از دستگاه محورهای مختصات قائم xAy هر حالتی می‌توانند داشته باشند؛ حالت افقی، حالت عمودی و یا حالت مایل، مانند شکل‌های ۷ و شکل ۸:

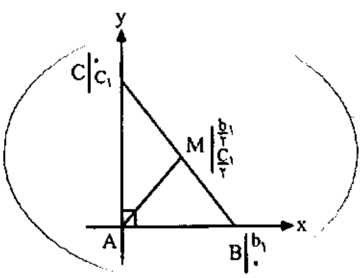


(شکل‌های ۷)



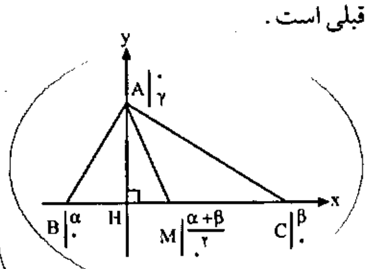
(شکل ۸)

در واقع، علت به‌وجود آمدن این حالت برای دستگاه مختصات xAy آن است که ما مثلث قائم‌الزاویه‌ی $ABC(\hat{A} = 90^\circ)$ را به صورت شکل روبه‌رو در نظر گرفتیم. حال اگر مثلث قائم‌الزاویه‌ی $ABC(\hat{A} = 90^\circ)$ را به صورت شکل ۹ در نظر بگیریم، دستگاه محورهای مختصات قائم xAy، دارای حالت معمول خود خواهد بود. یعنی محور Ax حالت افقی و محور Ay حالت عمودی خواهد داشت. اما همان‌طوری که قبلاً هم گفتیم، هیچ ضرورتی وجود ندارد که دستگاه محورهای مختصات قائم xAy، حالت معمول خود را داشته باشد.



(شکل ۹)

نکته‌ی ۲. در همین مسئله، برای حالتی که وتر BC حالت افقی دارد، می‌توانیم BC را روی محور xها و AH را روی محور yها در نظر بگیریم؛ یعنی نقطه‌ی H پای ارتفاع AH را مبدأ مختصات بگیریم. در این صورت، دستگاه محورهای مختصات xHy، حالت معمول خود را خواهد داشت و با فرض $B = (\alpha,0)$ ، $C = (\beta,0)$ و $A = (0,\gamma)$ ، نقطه‌ی M وسط وتر BC به مختصات $M = (\frac{\alpha + \beta}{2}, 0)$ خواهد بود و با محاسبه‌ی طول پاره‌خط‌های AM و BC برحسب α ، β و γ ، رابطه‌ی $AM = \frac{1}{2} BC$ ثابت می‌شود. بدیهی است که محاسبه در این دستگاه مختصات، قدری مفصل‌تر از حالت قبلی است.



(شکل ۱۰)

زیرنویس

1. Algebra 2. René Descartes 3. Pierre Feremat

احتمال شرطی در فضاهای هم‌شانس و غیرهم‌شانس

• حمیدرضا امیری

می‌دانیم، احتمال رخداد پیشامد A به شرط آن‌که پیشامد B (هر دو از فضای نمونه‌ای S) رخ داده باشد، از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$p(A|B)=\frac{p(A\bigcap B)}{p(B)}$$

از طرف دیگر می‌دانیم، اگر $S=\{s_1,s_2,\dots,s_n\}$ فضای نمونه‌ای یک پدیده یا آزمایش تصادفی باشد و $A\subseteq S$ پیشامدی تصادفی در فضای نمونه‌ای S باشد و فرض کنیم: $A=\{s_1,s_2,\dots,s_k\}$، در این صورت برای محاسبه‌ی $p(A)$ دو حالت در نظر گرفته می‌شود:

۱. اگر فضای نمونه‌ای S هم‌شانس باشد، یعنی برای هر i و j داشته باشیم: $p(\{S_i\})=p(\{S_j\})=\frac{1}{n}$، در این صورت:

$$p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{k}{n}$$

که در واقع، $\frac{k}{n}$ همان مجموع احتمال پیشامدهای ساده‌ی A است، یعنی:

$$p(A)=p(\{S_1\})+p(\{S_2\})+\dots+p(\{S_k\})=\frac{1}{n}+\dots+\frac{1}{n}=\frac{k}{n}$$

۲. اگر فضای نمونه‌ای S غیرهم‌شانس باشد، یعنی i و jای وجود داشته باشند، به قسمی که: $p(\{S_i\})\neq p(\{S_j\})$، در این صورت برای محاسبه‌ی $p(A)$ باید احتمال همه‌ی پیشامدهای ساده‌ی A را با هم جمع کنیم؛ یعنی:

$$p(A)=p(\{S_1\})+\dots+p(\{S_k\})$$

در واقع، از رابطه‌ی $p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ فقط در فضاهای هم‌شانس می‌توان استفاده کرد.

بنابراین، اگر فرمول احتمال شرطی را به صورت زیر ساده کنیم، یعنی بنویسیم:

$$p(A|B)=\frac{p(A\bigcap B)}{p(B)}=\frac{\frac{n(A\bigcap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}}=\frac{n(A\bigcap B)}{n(B)}$$

فقط زمانی حق داریم از ساده شده‌ی این فرمول استفاده کنیم که فضای نمونه‌ای S، فضایی هم‌شانس تعریف شده باشد.

به مثال زیر توجه کنید:

مثال: اگر $S=\{a,b,c,d\}$، به طوری که $p(\{a,b\})=\frac{1}{5}$ و $p(\{a\})=p(\{b\})$ و $p(\{c\})=p(\{d\})$، در این صورت مطلوب است محاسبه‌ی:

(الف) $p\big(\{a,b,c\}\,|\,\{b,c,d\}\big)$

(ب) $p\big(\{d\}\,|\,\{b,d\}\big)$

حل: واضح است که S فضایی غیر هم‌شانس است. پس ابتدا احتمال هر پیشامد ساده‌ی فضا را می‌یابیم (پیشامد ساده به پیشامدهای تک‌عضوی گفته می‌شود).

$$p\big(\{a,b\}\big)=p\big(\{a\}\big)+p\big(\{b\}\big)=\frac{1}{5}$$

$$\overset{\text{فرض}}{\Rightarrow} p\big(\{a\}\big)+p\big(\{a\}\big)=\frac{1}{5}\Rightarrow p\big(\{a\}\big)=\frac{1}{10}=p\big(\{b\}\big)$$

$$p(S)=1\Rightarrow p\big(\{a\}\big)+p\big(\{b\}\big)+p\big(\{c\}\big)+p\big(\{d\}\big)=1$$

$$\overset{\text{فرض}}{\Rightarrow} p\big(\{c\}\big)+p\big(\{c\}\big)=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}\Rightarrow p\big(\{c\}\big)=\frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow p\big(\{d\}\big)=\frac{2}{5}$$

(الف) $$p\big(\{a,b,c\}\,|\,\{b,c,d\}\big)=\frac{p\big(\{a,b,c\}\cap\{b,c,d\}\big)}{p\big(\{b,c,d\}\big)}$$

$$=\frac{p\big(\{b,c\}\big)}{p\big(\{b,c,d\}\big)}=\frac{p\big(\{b\}\big)+p\big(\{c\}\big)}{p\big(\{b\}\big)+p\big(\{c\}\big)+p\big(\{d\}\big)}$$

$$=\frac{\frac{1}{10}+\frac{2}{5}}{\frac{1}{10}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}}=\frac{\frac{5}{10}}{\frac{9}{10}}=\frac{5}{9}$$

(ب) $$p\big(\{d\}\,|\,\{b,d\}\big)=\frac{p\big(\{d\}\cap\{b,d\}\big)}{p\big(\{b,d\}\big)}=\frac{p\big(\{d\}\big)}{p\big(\{b\}\big)+p\big(\{d\}\big)}$$

$$=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{10}+\frac{2}{5}}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{5}{10}}=\frac{4}{5}$$

حال اگر به اشتباه بخواهیم از رابطه‌ی $p(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$ استفاده کنیم، خواهیم داشت:

(الف) $$p\big(\{a,b,c\}\,|\,\{b,c,d\}\big)=\frac{n\big(\{b,c\}\big)}{n\big(\{b,c,d\}\big)}=\frac{2}{3}$$

(ب) $$p\big(\{d\}\,|\,\{b,d\}\big)=\frac{n\big(\{d\}\big)}{n\big(\{b,d\}\big)}=\frac{1}{2}$$

که در هر دو مورد جواب غلط است. بنابراین، توجه به این مطلب اهمیت دارد که در فضاهای غیرهم‌شانس، هیچ‌گاه نباید از رابطه‌ی $p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ استفاده کرد.

منظور اصلی‌ام را از نوشتن این مقاله، با ذکر یک مثال و در واقع طرح یک سؤال و ایجاد چالشی بیان می‌کنم!

مثال: خانواده‌ای دو فرزند دارد. اگر بدانیم یکی از فرزندان این خانواده پسر است، چه‌قدر احتمال دارد فرزند دیگر هم پسر باشد؟

حل: واضح است که فضای نمونه‌ای این پدیده یک فضای هم‌شانس است. یعنی اگر

S = {(د و پ) و (پ و د) و (د و د) و (پ و پ)}

فضای نمونه‌ای باشد، همواره:

p({(پ و پ)}) = p({(د و د)}) = p({(پ و د)}) = p({(د و پ)}) = $\frac{1}{4}$

یعنی:

p({(پ و پ)}) = p(اولی پسر و دومی پسر) = $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

p({(پ و د)}) = p(اولی دختر و دومی پسر) = $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

قبل از این‌که بخواهیم مسئله را از طریق فرمول احتمال شرطی حل کنیم، به طور معمول و طبیعی چه جوابی برای مسئله به ذهن شما می‌رسد؟ احتمال پسر بودن یک فرزند چه‌قدر است؟ بله درست فکر کرده‌اید. احتمال $\frac{1}{2}$ است. در واقع اگر خانواده‌ای هر تعداد فرزند داشته باشد، احتمال آن که یکی از آن‌ها (فرق نمی‌کند کدام یکی، اولی، دومی، ... یا آخری) پسر باشد، همواره $\frac{1}{2}$ است.

حالا همین مسئله را از طریق احتمال شرطی حل می‌کنیم؛ یعنی با محدود کردن فضای نمونه‌ای. می‌دانیم که گذاشتن شرط روی هر مسئله‌ی احتمال، فضای نمونه‌ای را محدود می‌کند. در این مثال نیز چون شرط کرده‌ایم یکی از فرزندان این خانواده پسر است، پس حالت (د و د) از بین می‌رود. یعنی اگر فرض کنیم، B پیشامدی باشد که رخ داده است و A پیشامد مطلوبی که به دنبال محاسبه‌ی احتمال آن هستیم، خواهیم داشت:

A = {(پ و پ)} و B = {(پ و پ) و (پ و د) و (د و پ)}

$$\Rightarrow p(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{1}{3}$$

به نظر شما کدام جواب، جواب واقعی و صحیح است: $\frac{1}{3}$ یا $\frac{1}{2}$؟ اگر $\frac{1}{2}$ جواب صحیح است، اشتباه کجا صورت گرفته؟ حال اگر بخواهیم همین مسئله را از طریق «قانون بیز» حل کنیم، کدام یک از دو جواب تأیید می‌شود؟

فرض کنیم A پیشامد آن باشد که فرزند دیگر هم پسر باشد (هر دو پسر)، و B پیشامد آن باشد که یکی از فرزندان پسر باشد. پس به

دنبال همان $p(A|B)$ هستیم که طبق قانون بیز داریم:

$$p(A|B)=\frac{p(A)}{p(B)}\times p(B|A)$$

$$p(A)=\frac{1}{4} \text{ و } p(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \text{ و } p(B|A)=1$$

($p(B|A)$ یعنی احتمال آن‌که یکی پسر باشد. اگر بدانیم هر دو پسرند، همواره این احتمال ۱ است.)

$$p(A|B)=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}\times 1=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

بنابراین مشاهده می‌شود، همان عددی که قبل از حل مسئله نیز حدس زده بودید، برای این احتمال حاصل می‌شود. لذا باید اشتباهی در محاسبه‌ی عدد $\frac{1}{3}$ صورت گرفته باشد!

در واقع این اشتباه از آن‌جا ناشی می‌شود که ما توجه نکردیم، زمانی که شرطی روی یک مسئله گذاشته می‌شود و فضای نمونه‌ای محدود می‌شود، این امکان وجود دارد که شرط گذاشته شده، فضای نمونه‌ای را از حالت هم‌شانس خارج کند و فضای نمونه‌ای محدود شده، به یک فضای نمونه‌ای غیرهم‌شانس تبدیل شود. به عبارت دیگر، گاهی اوقات شرط گذاشته شده چنان است که دیگر در فضای نمونه‌ای حاصل، احتمال هر عضو فضای نمونه‌ای با اعضای دیگر برابر نیست.

در مثال فوق، ابتدا فضای نمونه‌ای به صورت زیر تعریف می‌شود.

S = {(پ و د) و (د و پ) و (د و د) و (پ و پ)}

وقتی شرط می‌کنیم که «یکی از فرزندان پسر است»، واضح است که حالت (د و د) از S حذف و فضای نمونه‌ای محدودشده به صورت S´ = {(د و پ) و (پ و د) و (پ و پ)} حاصل می‌شود. حال این سؤال پیش می‌آید که آیا با شرط اعمال شده، ´S یک فضای هم‌شانس است یا خیر؟ یعنی اگر ما بدانیم یکی از فرزندان پسر است، آیا شانس (د و پ) با شانس (پ و پ) یکسان است؟ مسلماً چنین نیست! در واقع، وقتی می‌دانیم یکی از فرزندان پسر است، شانس هر دو پسر از یکی پسر و یکی دختر بیشتر است. پس فضای غیرهم‌شانس تولید شده است و لذا حق نداریم در محاسبه‌ی احتمال، از رابطه‌ی $p(A)=\frac{n(A)}{n(S')}$ استفاده کنیم.

به یک مثال دیگر توجه کنید:

اگر سه کارت A_1 و A_2 و A_3 به ترتیب با این ویژگی که A_1 هر دو طرفش قرمز و A_2 یک طرف قرمز و یک طرف آبی و A_3 هر دو طرف آبی، مفروض باشند و این سه کارت را در یک کیسه بریزیم و یک کارت به تصادف خارج کنیم، به شرط آن‌که بدانیم یک طرف کارت قرمز است، چه‌قدر احتمال دارد طرف دیگر آن نیز قرمز باشد؟

برای حل این مسئله نیز اگر نکات ذکر شده و مطلب مهم در مسئله‌ی قبل را در نظر نگیریم، جوابی اشتباه خواهیم یافت. به این ترتیب که می‌گوییم چون می‌دانیم یک طرف کارت قرمز است، پس فضای نمونه‌ای حاصل و محدود شده به صورت $S'=\{A_1, A_2\}$ به دست می‌آید و احتمال آن‌که کارت A_1 (هر دو طرف قرمز) خارج شده است، برابر است با $\frac{1}{2}$ که این پاسخ اشتباه است. اما اگر به این نکته توجه کنیم که شرط گذاشته شده روی مسئله، فضای ´S را به فضایی غیرهم‌شانس تبدیل کرده است، از «قانون بیز» و قانون احتمال کل که در آن‌ها از $n(A)$ یا $n(S')$ استفاده نمی‌شود، کمک می‌گیریم و به جواب درست هم خواهیم رسید!

حال فرض کنیم A پیشامد آن باشد که هر دو طرف قرمز باشد (کارت A_1 انتخاب شود) و B پیشامد آن باشد که یک طرف کارت قرمز است. پس باید $p(A|B)$ را محاسبه کنیم. طبق قانون بیز داریم:

$$p(A|B)=\frac{p(A)}{p(B)}\times p(B|A)$$

هم‌چنین برای محاسبه‌ی $P(B)$ به دو طریق می‌توان عمل کرد: یکی آن‌که احتمال قرمز بودن یک طرف کارت را مستقیماً با توجه به این‌که در سه کارت مفروض، سه طرف آبی و سه طرف قرمز داریم، پس احتمال قرمز بودن یک طرف قرمز برابر است با $\frac{3}{6}$ یا $\frac{1}{2}$.

و راه دیگر، استفاده از قانون احتمال کل است. به این ترتیب که کارت انتخاب شده یا A_1 است یا A_2 و یا A_3. پس می‌توان نوشت:

$$p(B)=p(B|A_1)\times p(A_1)+p(B|A_2)\times p(A_2)+p(B|A_3)\times p(A_3)$$

$$\Rightarrow p(B)=1\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

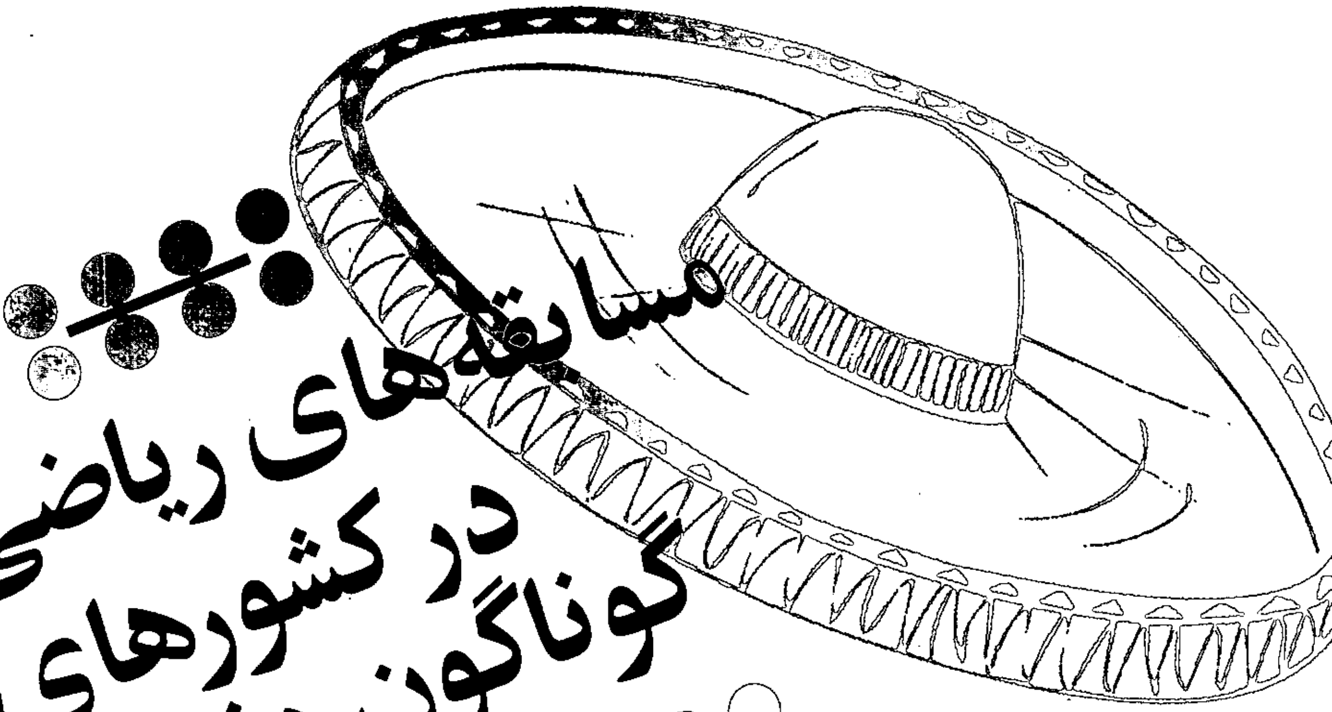
($p(B|A_1)$ یعنی احتمال آن‌که یک طرف قرمز باشد، به شرط آن‌که بدانیم کارت A_1 انتخاب شده که این احتمال ۱ است.)

مشاهده می‌کنید که از هر دو راه، احتمال قرمز بودن یک طرف کارت $\frac{1}{2}$ است. پس می‌توان نوشت:

$$p(A|B)=\frac{p(A)}{p(B)}\times p(B|A)=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}\times 1=\frac{2}{3}$$

($P(A)$ یعنی احتمال آن‌که کارت A_1 انتخاب شود و $P(B|A)$ یعنی احتمال آن‌که یک طرف قرمز باشد، به شرط آن‌که بدانیم A_1 انتخاب شده است.)

بنابراین، در حل مسائل احتمال شرطی باید به این نکته توجه کنیم که در مواردی ممکن است شرط اعمال‌شده روی مسئله، فضای نمونه‌ای محدود شده‌ی غیرهم‌شانس به‌وجود آورد که در این شرایط برای حل مسئله از قوانینی چون قانون بیز یا قانون احتمال کل استفاده خواهیم کرد.



مسابقه‌های ریاضی در کشورهای گوناگون دنیا (۸)

• هوشنگ شرقی

گزیده‌ای از سؤالات مسابقه‌ی ریاضی شهر نیومکزیکو

سؤالات

۱. کوچک‌ترین جمله‌ی دنباله‌ی زیر را به‌دست آورید:

$$\sqrt{\frac{7}{6}}+\sqrt{\frac{96}{7}},\ \sqrt{\frac{8}{6}}+\sqrt{\frac{96}{8}},\ \sqrt{\frac{9}{6}}+\sqrt{\frac{96}{9}},\ \dots,\ \sqrt{\frac{95}{6}}+\sqrt{\frac{96}{95}}$$

۲. الف) عددهای طبیعی a و b را چنان بیابید که داشته باشیم:

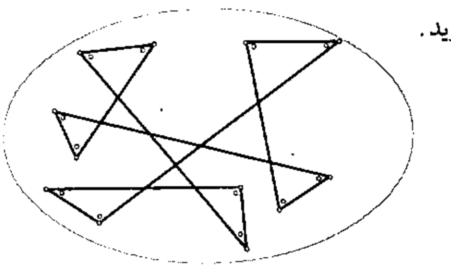
$$\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}=a+\sqrt{b}\ .$$

ب) نشان دهید که عبارت $(\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8})^n+(-\cot g\frac{3\pi}{8})^n$ به‌ازای هر عدد طبیعی n، همواره برابر یک عدد صحیح زوج است.

ج) برای هر عدد طبیعی n، فرض کنید $k_n=\left[(\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8})^n\right]$ ([] علامت جزء صحیح است). نشان دهید که همواره n و k_n زوجیت متفاوت دارند.

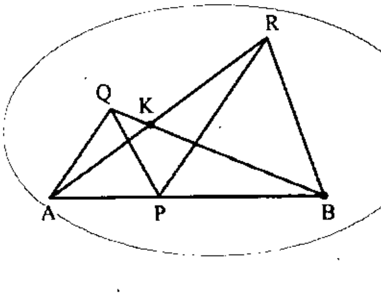
۳. یک شرط لازم و کافی برای پارامتر k بیابید، به‌طوری که معادله‌ی $2\sin\theta+k\cos\theta=\sqrt{7}$ دارای جواب باشد.

۴. مجموع دوازده زاویه‌ای را که در شکل مشخص شده‌اند، به‌دست آورید.

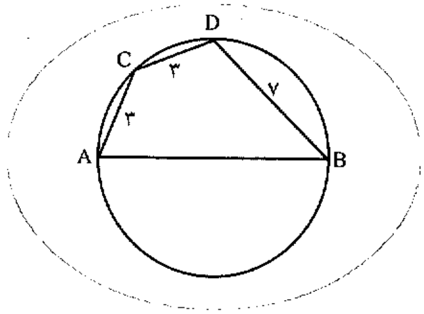


۵. فرض کنید P نقطه‌ای در صفحه‌ی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC باشد و هر سه مثلث PAB، PBC و PCA متساوی‌الساقین باشند. چند وضع برای نقطه‌ی P وجود دارد؟

۶. در شکل زیر، P نقطه‌ای متغیر روی پاره‌خط AB است و مثلث‌های QAB و RPB متساوی‌الاضلاع هستند. مکان هندسی نقطه‌ی K، محل برخورد AR و BQ را به‌دست آورید.



۷. در شکل زیر، AB قطر دایره است و $AC = DC = 3$ و $DB = 7$. اندازه‌ی شعاع دایره چیست؟



حل

۱. با توجه به نابرابری واسطه‌های حسابی- هندسی و جمله‌ی عمومی دنباله می‌توان نوشت:

$$a_n = \sqrt{\frac{n}{6}} + \sqrt{\frac{96}{n}} \ge 2\sqrt{\sqrt{\frac{n}{6}} \times \sqrt{\frac{96}{n}}} = 2\sqrt{4} = 4$$

یعنی کوچک‌ترین جمله‌ی دنباله مساوی ۴ است. و برای یافتن شماره‌ی این جمله، توجه می‌کنیم که برابری در نابرابری واسطه‌های حسابی- هندسی وقتی پیش می‌آید که $a = b$ باشد؛ یعنی:

$$\sqrt{\frac{n}{6}} = \sqrt{\frac{96}{n}} \Rightarrow n = \sqrt{6 \times 96} = 24$$

بنابراین کوچک‌ترین جمله‌ی این دنباله، جمله‌ی بیست‌وچهارم، یعنی $a_{24} = 4$ است.

۲. الف) به روش‌های گوناگونی می‌توان مقدار $tg\frac{3\pi}{8}$ را به‌دست آورد. یکی از آن‌ها، استفاده از اتحاد مثلثاتی $tg\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$ است که به‌عنوان تمرین می‌توانید به سادگی آن را اثبات کنید. می‌توان نوشت:

$$tg\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x} \Rightarrow tg\frac{3\pi}{8} = \frac{\sin\frac{3\pi}{4}}{1+\cos\frac{3\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{2})}{4-2} = \frac{2\sqrt{2}+2}{2} = \sqrt{2}+1$$

$$\Rightarrow a = 1, b = 2$$

ب) با توجه به نتیجه‌ی الف خواهیم داشت:

$$\cot g\frac{3\pi}{8} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1 \Rightarrow (tg\frac{3\pi}{8})^n + (-\cot g\frac{3\pi}{8})^n$$

$$= (1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n$$

حال اگر با استفاده از بسط دو جمله‌ای نیوتون به صورت زیر:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n}$$

پرانتزها را بسط دهیم، عبارت‌های گنگ با هم حذف و عبارت‌های گویای برابر، دو به دو با هم جمع می‌شوند و یک عبارت مضرب ۲ به‌دست می‌آید:

$$(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n = 2t$$

ج) با توجه به نتیجه‌ی ب خواهیم داشت:

$$(tg\frac{3\pi}{8})^n = (1+\sqrt{2})^n = 2t - (1-\sqrt{2})^n$$

و با توجه به این‌که $1-\sqrt{2}$ عددی منفی است، اگر n فرد باشد، $-(1-\sqrt{2})^n$ مثبت و اگر n زوج باشد، منفی خواهد بود. با توجه به این‌که قدر مطلق $1-\sqrt{2}$ کمتر از یک است، قدر مطلق $(1-\sqrt{2})^n$ نیز کمتر از یک خواهد بود. لذا $(tg\frac{3\pi}{8})^n$ تفاضل عدد زوج 2t از یک عدد، کمتر از یک است. بنابراین، اگر n فرد باشد، این مقدار از 2t تجاوز می‌کند و درنتیجه: $k_n = \left[(tg\frac{3\pi}{8})^n\right] = 2t$. و به ازای nهای زوج نیز: $k_n = 2t-1$. بنابراین n و k_n از نظر زوجیت نقطه‌ی مقابل یکدیگر هستند.

۳. این یک مسئله‌ی کاملاً شناخته شده و کلاسیک در مثلثات است. درواقع قضیه‌ای شناخته‌شده می‌گوید: شرط لازم و کافی برای آن‌که معادله‌ی $a\sin x + b\cos x = c$ دارای جواب باشد، آن است که: $a^2 + b^2 \ge c^2$.

به عنوان تمرین سعی کنید این رابطه را اثبات کنید. برای این منظور بنویسید:

$$a\sin x + b\cos x = c \Rightarrow \sin x + \frac{b}{a}\cos x = \frac{c}{a}$$

حال فرض کنید: $\frac{b}{a} = tg\varphi$ و از آن‌جا نتیجه بگیرید:

$$\sin x + tg\varphi\cos x = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{\sin x\cos\varphi + \cos x\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{c}{a}$$

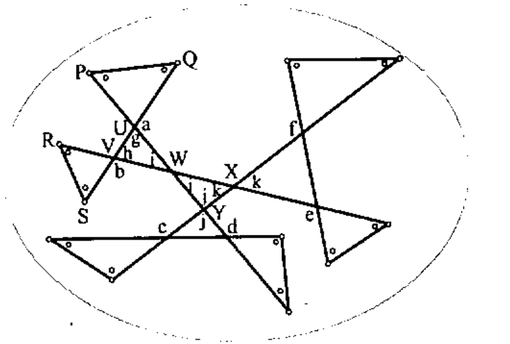
$$\Rightarrow \sin(x+\varphi) = \frac{c}{a}\cos\varphi$$

حال مقدار $\cos\varphi$ را برحسب a و b به‌دست آورید و با توجه به این‌که $|\sin(x+\varphi)| \le 1$، نتیجه‌ی فوق را اثبات کنید. اکنون با استفاده از این دستور، حل مسئله بسیار آسان می‌شود:

$$2\sin\theta + k\cos\theta = \sqrt{7}$$

$$\Rightarrow 2^2 + k^2 \ge (\sqrt{7})^2 \Rightarrow k^2 \ge 3 \Rightarrow k \ge \sqrt{3} \text{ یا } k \le -\sqrt{3}$$

۴. مسئله‌ی نسبتاً آسانی است! کافی است از ویژگی مجموع زوایای داخلی مثلث‌ها و زاویه‌های خارجی استفاده کنیم. اگر مطابق شکل زیر زوایا را نام‌گذاری کنیم، خواهیم داشت:



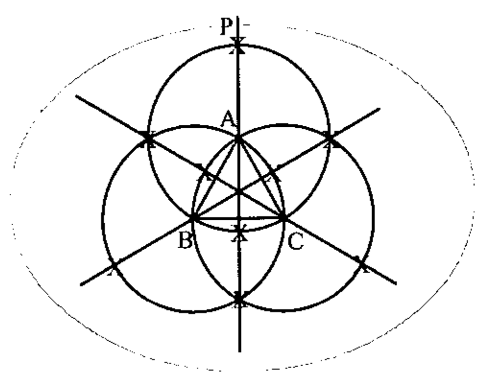
$g+h+i=180^\circ$ و $g+h+a+b=2\times180^\circ$

$\Rightarrow a+b=180^\circ+i$

به طریق مشابه نتیجه می‌شود: $c+d=j+180^\circ$ و $e+f=k+180^\circ$ و با توجه به ویژگی زاویه‌های خارجی در مثلث، به سادگی نتیجه می‌شود که مجموع دوازده زاویه‌ی مورد نظر برابر است با مجموع زوایای a، b، c، d، e و f:

$$a+b+c+d+e+f=\underbrace{(i+j+k)}_{180^\circ}+3\times180^\circ=4\times180^\circ=720^\circ$$

۵. کافی است به شکل زیر توجه کنید:

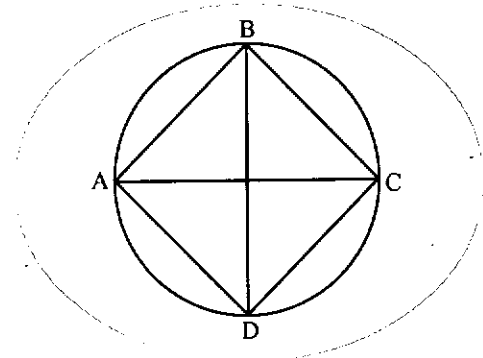


از آن‌جا ده جواب متمایز برای نقطه‌ی P را در شکل علامت بزنید.

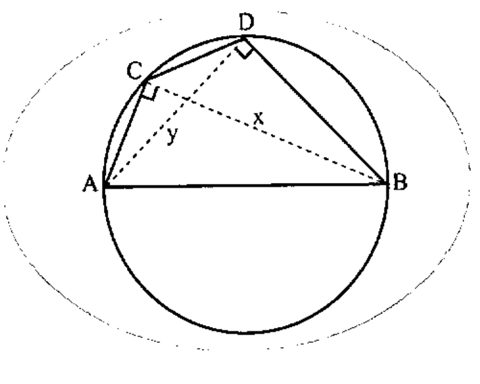
۶. یک ایده‌ی بسیار جالب برای حل مسئله، توجه به این نکته است که با در نظر گرفتن نقطه‌ی P به‌عنوان مرکز دوران، می‌توان Q را دوران‌یافته‌ی A حول P به اندازه‌ی 60° و B را دوران‌یافته‌ی R حول P و به اندازه‌ی 60° در نظر گرفت. لذا پاره‌خط BQ دوران‌یافته‌ی AR حول P به اندازه‌ی 60° است و از قضایای تبدیل‌های هندسی می‌دانیم، دوران‌یافته‌ی هر پاره‌خط، با آن زاویه‌ای مساوی زاویه‌ی دوران می‌سازد؛ یعنی: $\angle AKQ=60^\circ$.

درنتیجه: $\angle AKB=120^\circ$ و چون AB ثابت است، لذا مکان هندسی K، کمان درخور زاویه‌ی 120° تحت پاره‌خط AB است.

۷. مسئله‌ی خوبی است که راه‌های گوناگونی برای حل آن وجود دارد. یک راه، استفاده از قضیه‌ای موسوم به «قضیه‌ی بطلمیوس» در مورد چهارضلعی محاطی ABCD است. این قضیه می‌گوید: $AB\times CD+AD\times BC=AC\times BD$ (اثبات قضیه را می‌توان در بسیاری از کتاب‌های هندسه دید).



اکنون با توجه به این قضیه و با توجه به این‌که زاویه‌ی محاطی روبه‌رو به قطر مساوی 90° است و به کمک قضیه‌ی فیثاغورس، می‌توان نوشت:



$$AC\times BD+CD\times AB=BC\times AD$$
$$\Rightarrow 3\times7+(2R)=xy\Rightarrow xy=6R+21,$$
$$x=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{4R^2-9}$$
$$y=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{4R^2-49}\Rightarrow\sqrt{(4R^2-9)(4R^2-49)}$$
$$=6R+21\Rightarrow(2R-3)(2R+3)(2R-7)(2R+7)$$
$$=9(2R+7)^2\Rightarrow(2R-3)(2R+3)(2R-7)=9(2R+7)$$

و با فرض $t=2R$ و پس از ساده‌کردن رابطه‌ی فوق، به معادله‌ی $t^3-7t^2-18t=0$ می‌رسیم که از حل آن خواهیم داشت:

$$t(t^2-7t-18)=0$$
$$\Rightarrow t(t-9)(t+2)=0\Rightarrow t=9\Rightarrow R=\frac{9}{2}$$

اشاره

در شماره‌های قبل درباره‌ی اتحاد و معادله، تجزیه‌ی چند جمله‌ای دلخواه و مسئله‌های گوناگون درباره‌ی معادله‌ها بحث شد. اینک در ادامه‌ی مقاله‌ی شماره‌ی قبل بقیه‌ی مسئله‌های گوناگون درباره‌ی معادله‌ها را در پی می‌آوریم.

اتحاد و معادله (۱۴)

معادله‌های با توان مجهول و معادله‌های لگاریتمی

• پرویز شهریاری

۱۳. $4^{\sqrt{x-2}}+16-10\times 2^{\sqrt{x-2}}=0$.

حل: ۴ را به صورت 2^2 می‌نویسیم:

$$2^{2\sqrt{x-2}}-10\times 2^{\sqrt{x-2}}+16=0$$

که با فرض $y=2^{\sqrt{x-2}}$ ، به‌دست می‌آید:

$$y^2-10y+16=0\Rightarrow y_1=2 \text{ و } y_2=8$$

بنابراین:

$$2^{\sqrt{x-2}}=2 \text{ و } 2^{\sqrt{x-2}}=8=2^3$$

یعنی $\sqrt{x-2}=1$ و $\sqrt{x-2}=3$ و درنتیجه:

$$x_1=3 \text{ و } x_2=11$$

۱۴. $2\log 2+(1+\frac{1}{2x})\log 3-\log(\sqrt[x]{3}+27)=0$.

حل: معادله‌ی مفروض را می‌توان این طور نوشت:

$$\log 4+\log(3^{1+\frac{1}{2x}})=\log(\sqrt[x]{3}+27)$$

با اندکی تبدیل به‌دست می‌آید:

$$\log(4\times 3\times 3^{\frac{1}{2x}})=\log(3^x+27)$$

$$\Rightarrow 12\times 3^{\frac{1}{2x}}=3^x+27$$

$$\Rightarrow 3^{\frac{1}{x}}-12\times 3^{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2}}+27=0$$

اگر $3^{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2}}$ را y فرض کنیم، $3^{\frac{1}{x}}$ برابر y^2 می‌شود و به معادله‌ی درجه‌ی دوم زیر می‌رسیم:

$$y^2-12y+27=0\Rightarrow y_1=9 \text{ و } y_2=3$$

پاسخ: $x_1=\frac{1}{4}$ و $x_2=\frac{1}{3}$.

۱۵. $2x^{\log x}+3x^{-\log x}=5$.

حل: داریم:

$$2x^{\log x}+\frac{3}{x^{\log x}}=5$$

که به صورت این معادله در می‌آید:

$$2x^{2\log x}-5x^{\log x}+3=0$$

که نسبت به $x^{\log x}$ از درجه‌ی دوم است و بنابراین:

$$x^{\log x}=1 \text{ و } x^{\log x}=\frac{3}{2}$$

از حل معادله‌ی اول به‌دست می‌آید:

$$\log^2 x=0 \text{ و } x=1$$

و از حل معادله‌ی دوم:

$$\log^2 x=\log\frac{3}{2}\Rightarrow \log x=\pm\sqrt{\log\frac{3}{2}}$$

پاسخ: $x_1=1$ و $x_{2,3}=10^{\pm\sqrt{\frac{3}{2}}}$.

۱۶.
$$\sqrt{\log_a \sqrt[4]{ax}+\log_x \sqrt[4]{ax}}+\sqrt{\log_a \sqrt[4]{\frac{x}{a}}+\log_x \sqrt[4]{\frac{x}{a}}}=a$$

حل: داریم:

$$\sqrt{\frac{1}{4}(1+\log_a x)+\frac{1}{4}(1+\log_x a)}+\sqrt{\frac{1}{4}(\log_a x-1)+\frac{1}{4}(\log_x a-1)}=a$$

روشن است که $\log_x a=\frac{1}{\log_a x}$ ؛ بنابراین:

$$\sqrt{\frac{1}{4}(1+\log_a x)+\frac{1}{4}(1+\frac{1}{\log_a x})}+\sqrt{\frac{1}{4}(\log_a x-1)+\frac{1}{4}(\frac{1}{\log_a x}-1)}=a$$

که می‌توان آن را چنین نوشت:

$$\sqrt{\frac{(1+\log_a x)^2}{4\log_a x}}+\sqrt{\frac{(\log_a x-1)^2}{4\log_a x}}=a \qquad (1)$$

در حالتی که $\log_a x>1$ باشد، $a>1$ است و معادله‌ی (۱) چنین می‌شود:

$$\log_a x=a\sqrt{\log_a x}\Rightarrow \log_a x=a^2\Rightarrow x=a^{a^2}$$

در حالت $0<\log_a x\le 1$ ، $a>1$ و معادله‌ی (۱) چنین می‌شود:

$$\frac{1+\log_a x}{2\sqrt{\log_a x}}-\frac{\log_a x-1}{2\sqrt{\log_a x}}=a$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$1=a\sqrt{\log_a x}\Rightarrow \log_a x=\frac{1}{a^2}\Rightarrow x=a^{\frac{1}{a^2}}$$

پاسخ: $x_1=a^{a^2}$ و $x_2=a^{\frac{1}{a^2}}$.

۱۷.
$$\begin{cases}3^x-2^{y^2}=77\\ 3^{\frac{x}{2}}-2^{\frac{y^2}{2}}=7\end{cases}$$

حل: معادله‌ی اول دستگاه را به این صورت می‌نویسیم:

$$(3^{\frac{x}{2}})^2-(2^{\frac{y^2}{2}})^2=77$$

از تقسیم دو طرف این معادله بر دو طرف معادله‌ی دوم، به معادله‌ای می‌رسیم که با معادله‌ی دوم، این دستگاه را تشکیل می‌دهند:

$$\begin{cases}3^{\frac{x}{2}}+2^{\frac{y^2}{2}}=11\\ 3^{\frac{x}{2}}-2^{\frac{y^2}{2}}=7\end{cases}$$

پاسخ: $x_1=4$ ، $y_1=\sqrt{2}$ ، $x_2=4$ و $y_2=-\sqrt{2}$.

۱۸. $\begin{cases}x^y=y^x\\ x^m=y^n\end{cases}$ به شرط $m\ne n$.

حل: از معادله‌ی اول، x را به دست می‌آوریم:

$$x=y^{\frac{x}{y}}$$

که می‌توان آن را این‌طور نوشت:

$$x^m=y^{\frac{mx}{y}} \qquad (1)$$

از مقایسه‌ی این معادله با معادله‌ی دوم دستگاه به دست می‌آید:

$$y^n=y^{\frac{mx}{y}}$$

از این‌جا نتیجه می‌گیریم: یا $y=1$ و یا $\frac{mx}{y}=n$ ؛ یعنی:

$$y=\frac{mx}{n} \qquad (2)$$

برای $y=1$ ، به دست می‌آید $x=1$.

اگر مقدار y را از رابطه‌ی (۲) در معادله‌ی دوم دستگاه قرار دهیم:

$$x^m=x^n.(\frac{m}{n})^n$$

یا:

$$x^{m-n}=(\frac{m}{n})^n$$

که از آن‌جا، مقدار x به‌دست می‌آید:

پاسخ: $\begin{cases}x_1=1\\ y_1=1\end{cases}$ ، $\begin{cases}x_2=(\frac{m}{n})^{\frac{n}{m-n}}\\ y_2=(\frac{m}{n})^{\frac{m}{m-n}}\end{cases}$

۱۹. $\begin{cases} x^y = y^x \\ a^x = b^y \end{cases}$ با شرط $x > 0$ ، $y > 0$ ، $a > 0$ ، $b > 0$ ؛ $a \neq b$ ، $a \neq 1$ و $b \neq 1$.

راه‌حل اول: از دو طرف معادله‌ی دوم لگاریتم می‌گیریم:

$$x \log a = y \log b \qquad (1)$$

فرض می‌کنیم: $x = b^t$ و $y = a^z$. در این صورت معادله‌ی اول به این صورت درمی‌آید:

$$b^{yt} = a^{xz}$$

چون با توجه به معادله‌ی دوم $b^y = a^x$ است، بنابراین:

$$a^{tx} = a^{xz} \Rightarrow tx = xz \Rightarrow x(t-z) = 0$$

یعنی یا $x = 0$ و یا $t = z$.

برای $x = 0$ ، مقدار y مساوی صفر می‌شود که با شرط‌های مسئله نمی‌سازد. برای $z = t$ داریم:

$$x = b^z \text{ و } y = a^z \qquad (2)$$

که اگر در رابطه‌ی (۱) به جای x و y قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$b^z \log a = a^z \log b \Rightarrow (\frac{b}{a})^z = \frac{\log b}{\log a}$$

و از آن‌جا:

$$z = \frac{\log \frac{\log b}{\log a}}{\log \frac{b}{a}} = \frac{\log \frac{\log b}{\log a}}{\log b} \cdot \frac{\log b}{\log \frac{b}{a}}$$

نسبت لگاریتم‌های دو عدد، به مبنایی که لگاریتم در آن‌ها محاسبه شده است، مربوط نیست، بنابراین:

$$b^{\frac{\log \frac{\log b}{\log a}}{\log b}} = b^{\frac{\log_b \frac{\log b}{\log a}}{\log_b b}} = \frac{\log b}{\log a};$$

$$\frac{\log \frac{\log b}{\log a}}{\log b} \cdot \frac{\log b}{\log \frac{b}{a}} = (\frac{\log b}{\log a})^{\frac{\log b}{\log \frac{b}{a}}}$$

$$x = b^z = b$$

درنتیجه، با شرط $\frac{\log b}{\log a} > 0$ داریم:

$$x = (\frac{\log b}{\log a})^{\frac{\log b}{\log \frac{b}{a}}}$$

و به همین ترتیب:

$$y = (\frac{\log b}{\log a})^{\frac{\log a}{\log \frac{b}{a}}}$$

ولی با شرط $\frac{\log b}{\log a} < 0$ ، معادله بدون پاسخ است.

راه حل دوم: داریم:

$$y \log x = x \log y \qquad (1)$$

$$x \log a = y \log b \qquad (2)$$

از دو رابطه‌ی بالا، به این رابطه می‌رسیم:

$$\frac{\log y}{\log x} = \frac{\log a}{\log b} \qquad (3)$$

اگر از رابطه‌ی (۲)، یک‌بار دیگر لگاریتم بگیریم (با فرض $\log a > 0$ و $\log b > 0$)، به‌دست می‌آید:

$$\log x - \log y = \log \log b - \log \log a \qquad (4)$$

با حل دستگاه معادله‌های شامل (۳) و (۴)، مقدارهای $\log x$ و $\log y$ به‌دست می‌آید و پاسخ وقتی وجود دارد که $\frac{\log b}{\log a} > 0$ باشد.

و اینک، یک مسأله می‌شود:

۲۰. الف) زاویه‌های B و C یک مثلث را با معلوم بودن زاویه‌ی A و رابطه‌ی $\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = m$ به‌دست آورید $(m > 0)$.

ب) از بخش الف نتیجه بگیرید: $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$.

حل: الف) زاویه‌های B و C جواب‌های این دستگاه هستند:

$$\begin{cases} \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \\ \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = m \end{cases}$$

$(B > 0$ ، $C > 0)$. از معادله‌ی دوم دستگاه نتیجه می‌شود:

$$\cos \frac{B-C}{2} = 2m + \sin \frac{A}{2}$$

α را زاویه‌ی حاده‌ای در نظر می‌گیریم که کسینوس آن برابر $2m + \sin \frac{A}{2}$ باشد؛ یعنی: $\frac{B-C}{2} = \alpha$. آن‌وقت:

$$C = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} - \alpha; \quad B = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} + \alpha$$

شرط این‌که α وجود داشته باشد، این است که داشته باشیم:

$$2m + \sin \frac{A}{2} \leq 1$$

برای این که زاویه‌های B و C مثبت باشند، با فرض $B > C$ باید داشته باشیم:

$$\alpha < \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \quad \text{یا و} \quad \cos\alpha > \sin\frac{A}{2}$$

بنابراین، شرط وجود جواب عبارت است از:

$$\sin\frac{A}{2} < 2m + \sin\frac{A}{2} \le 1$$

از نابرابری سمت راست نتیجه می‌شود:

$$m \le \frac{1}{2}(1-\sin\frac{A}{2})$$

ب) از بحث بالا نتیجه می‌شود:

$$\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{2}(1-\sin\frac{A}{2})$$

دو طرف نابرابری را در $\sin\frac{A}{2} > 0$ ضرب می‌کنیم:

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{2}(1-\sin\frac{A}{2})\sin\frac{A}{2}$$

$(1-\sin\frac{A}{2})\sin\frac{A}{2}$، حاصل‌ضرب دو عامل مثبت به مجموع واحد است و حداکثر حاصل‌ضرب در حالت برابری آن‌ها به‌دست می‌آید؛ یعنی وقتی که $\sin\frac{A}{2} = \frac{1}{2}$ باشد. درنتیجه:

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$$

و این هم یک مسئله درباره‌ی محاسبه در مثلثات:

۲۱. حاصل این عبارت را محاسبه کنید:

$$f(\alpha) = \left(\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} - \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}\right) \times \left(\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} - \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}\right)$$

حل: $|\sin\alpha| \le 1$ و $|\cos\alpha| \le 1$. بنابراین $1 \pm \sin\alpha$ و $1 \pm \cos\alpha$، یعنی مقدارهای زیر رادیکال‌ها، همیشه مثبت هستند و می‌توان عمل‌های مربوط به رادیکال‌ها را درباره‌ی آن‌ها انجام داد:

$$\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} - \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} = \frac{(1-\sin\alpha)-(1+\sin\alpha)}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{2\sin\alpha}{|\cos\alpha|}$$

به همین ترتیب به دست می‌آید:

$$\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} - \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{2\cos\alpha}{|\sin\alpha|}$$

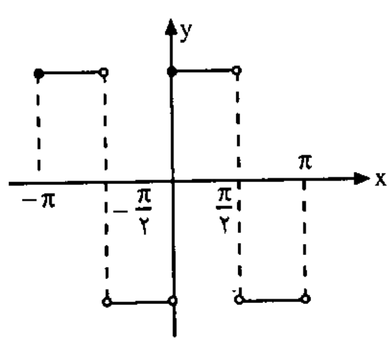
برای کمان‌هایی که انتهای آن‌ها در نیمه‌ی اول دایره باشد، $\sin\alpha$ مثبت و بنابراین $|\sin\alpha| = \sin\alpha$ است. و برای کمان‌هایی که انتهای آن‌ها در نیمه‌ی دوم دایره باشد، $\sin\alpha$ منفی و بنابراین $|\sin\alpha| = -\sin\alpha$ است.

همچنین، برای کمان‌هایی که انتهای آن‌ها در نیمه‌ی راست دایره باشد، $\cos\alpha$ مثبت و بنابراین $|\cos\alpha| = \cos\alpha$، و برای کمان‌هایی که انتهای آن‌ها در نیمه‌ی چپ دایره باشد، $\cos\alpha$ منفی و $|\cos\alpha| = -\cos\alpha$ است. بنابراین داریم:

$$f(\alpha) \begin{cases} 4 & \text{به شرطی که } 2k\pi < \alpha < 2k\pi + \frac{\pi}{2} \ (\text{مربع اول}) \\ -4 & \text{به شرطی که } 2k\pi + \frac{\pi}{2} < \alpha < (2k+1)\pi \ (\text{مربع دوم}) \\ 4 & \text{به شرطی که } (2k+1)\pi < \alpha < 3k\pi + \frac{3\pi}{4} \ (\text{مربع سوم}) \\ -4 & \text{به شرطی که } 2k\pi + \frac{3\pi}{2} < \alpha < (2k+2)\pi \ (\text{مربع چهارم}) \end{cases}$$

تابع $f(\alpha)$، تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب π است. نمایش تغییر این تابع در فاصله‌ی از $-\pi$ تا π در این‌جا رسم شده است.

نقطه‌های $\alpha = k\frac{\pi}{2}$، نقطه‌های ناپیوستگی تابع هستند:



مسائل و مباحثی پیرامون اعداد گویا و گنگ

$\frac{1}{17} = ۰/۰۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷$

$۱۰X - X = ۹/۹۹۹۹... - ۰/۹۹۹۹...$

● عنایت‌اله راستی‌زاده ـ دبیر ریاضی شیراز

اشاره

این مقاله در تکمیل بحث اعداد گویا و گنگ از کتاب ریاضیات سال اول متوسطه آمده است. با توجه به گستردگی و جالب بودن این بحث و سؤالات فراوان دانش‌آموزان علاقه‌مند، در این مقاله کوشش شده است، به طرح چند بحث دیگر همراه با حل تعدادی مسئله بپردازیم. لذا از ذکر تعریف‌ها و ویژگی‌های مقدماتی اعداد گویا و گنگ صرف نظر و بیشتر به مسائلی توجه کرده‌ایم که در کتاب درسی به وضوح به آن‌ها پرداخته نشده است.

۱. دستوری کلی برای یافتن هر تعداد عدد گویا بین دو عدد گویای مفروض

مجموعه‌ی اعداد گویا را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$Q = \left\{\frac{m}{n} \mid m \in z, n \in N : (m,n) = ۱\right\}$$

دو عدد گویای $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ را در نظر می‌گیریم. با فرض $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.

به‌راحتی دیده می‌شود که: $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$. از آن‌جا که

$\frac{a}{b} = \frac{na}{nb}$، پس: $\frac{na}{nb} < \frac{c}{d}$ و در نتیجه: $\frac{a}{b} < \frac{na+c}{nb+d} < \frac{c}{d}$ که $n \in N$.

به کمک دستور فوق می‌توانیم هر تعداد عدد گویا که بخواهیم، بین دو عدد گویای مفروض بیابیم. هم‌چنین درباره‌ی وضع نسبی این اعداد می‌توان ثابت کرد که:

$$\frac{a}{b} < \frac{na+c}{nb+d} < \cdots < \frac{۳a+c}{۳d+d} < \frac{۲a+c}{۲b+d} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

به این منظور فرض کنیم: $n'' > n'$. ثابت می‌کنیم: $\frac{n''a+c}{n''b+d} < \frac{n'a+c}{n'b+d}$ که با توجه به مثبت بودن مخرج‌ها خواهیم داشت:

$$n''n'ab + n''ab + n'bc + cd < n''n'ab + n''bc + n'ab + cd$$

$$\Leftrightarrow (n''-n')ad < (n''-n)bc \Leftrightarrow ac < bc \Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

۲. نوشتن عدد اعشاری دوره‌ای نامتناهی به صورت متعارفی

نشان دهید که هر عدد اعشاری دوره‌ای نامتناهی را می‌توان به‌صورت متعارفی نوشت.

حل: هر عدد اعشاری متناوب را می‌توانیم به این صورت بنویسیم:

$x = ۰/a_1a_2\cdots a_s\overline{b_1b_2\cdots b_t}$

که در آن: a_1، a_2، ... و a_s، تعداد s رقم متوالی در قسمت غیرتکراری، و b_1، b_2، ... و b_t، تعداد t رقم در قسمت تکراری را نشان می‌دهند. اگر ابتدا x را در ۱۰^s و سپس در ۱۰^{s+t} ضرب کنیم و بعد عمل تفریق را انجام دهیم، به‌دست می‌آوریم:

$$۱۰^s \times x = a_1a_2\cdots a_s + ۰/\overline{b_1b_2\cdots b_t}$$

$$۱۰^{s+t} \times x = a_1a_2\cdots a_sb_1b_2\cdots b_t + ۰/\overline{b_1b_2\cdots b_t}$$

و:

$$(۱۰^{s+t} - ۱۰^s)x = a_1a_2\cdots a_sb_1b_2\cdots b_t - a_1a_2\cdots a_s$$

بنابراین:

$$x = \frac{a_1a_2\cdots a_sb_1b_2\cdots b_t - a_1a_2\cdots a_s}{۱۰^{s+t} - ۱۰^s}$$

۳. عددهای گویای دارای دو نمایش اعشاری متفاوت

بین عددهای گویا مانند $\frac{a}{b}$، کدام یک دارای دو نمایش اعشاری اساساً متفاوت هستند؟

حل: پاسخ این است که: عددهای گویای $\frac{a}{b}$ (به ساده‌ترین صورت) با این ویژگی که b بر هیچ عدد اول دیگری غیر از ۲ و ۵ بخش‌پذیر نباشد و $a \neq ۰$. این حقیقت از آن‌جا ناشی می‌شود که بین اعداد اعشاری پایان‌دار ۱ و عدد اعشاری بی‌پایان ...۰/۹۹۹۹، تساوی برقرار است. اگر هر دو طرف تساوی $\frac{۱}{۳} = ۰/۳۳۳۳...$ را در ۳ ضرب کنیم، نتیجه‌ی به‌ظاهر عجیب $۰/۹۹۹۹... = ۱$ را به‌دست می‌آوریم. از دید دیگری نیز می‌توان به تساوی اخیر رسید.

فرض کنیم: $x = ۰/۹۹۹۹...$، پس: $۱۰x = ۹/۹۹۹۹...$. بنابراین:

$$۱۰x - x = ۹/۹۹۹۹... - ۰/۹۹۹۹...$$

در نتیجه: $۹x = ۹$ و $x = ۱$.

از این نتیجه می‌توان برای برگرداندن هر عدد اعشاری پایان‌دار به صورت بی‌پایان استفاده کرد. مثلاً:

$۲۱/۱ = ۲۱/۰۹۹۹۹...$ $\quad ۶/۸۱ = ۶/۸۰\overline{۹}$ $\quad ۰/۴۳ = ۰/۴۲\overline{۹}$

تذکر این مطلب ضروری است که علاوه بر نوشتن مثلاً ۰/۴۳ به‌صورت ...۰/۴۲۹۹۹۹، می‌توانیم این عدد را به صورت‌های زیر نیز بنویسیم:

۰/۴۳۰ , ۰/۴۳۰۰ , ۰/۴۳۰۰۰ , ۰/۴۳۰۰۰۰...

با وجود این، تفاوت این‌ها با خود ۰/۴۳ آن‌قدر جزئی است که ما آن‌ها را در ردیف نمایش‌های اساساً متفاوت نمی‌گذاریم. وقتی به‌صورت اعشاری و بی‌پایان عددی مانند ۰/۴۳ اشاره می‌کنیم، مقصودمان ...۰/۴۲۹۹۹ است و نه ...۰/۴۳۰۰۰.

گذری به تاریخ!

کارل فردریک گاوس، کسرهای اعشاری متناوب را مورد مطالعه قرار داد. او علی‌رغم نبوغ سرشار برای جست‌وجوهای آزمایشی خود، از سنگینی محاسبه‌ها و کار عظیم با عددها روی‌گردان نشد و مثلاً جدول کاملی از نمایش اعشاری هزار عدد گویای ۱ و $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ و... و $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ را تشکیل داد. (بعضی از این اعداد دوره‌ی گردشی به‌طول چند صد رقم دارند!) و بالاخره نظریه‌ی نسبتاً کاملی در مورد کسرهای اعشاری متناوب ارائه داد.

۴. ویژگی جالب بعضی از اعداد اعشاری دوره‌ای

به بسط اعشاری کسرهای زیر توجه کنید:

$\frac{۱}{۷} = ۰/\overline{۱۴۲۸۵۷}$ $\qquad ۱+۴+۲+۸+۵+۷=۲۷$

$\frac{۱}{۱۱} = ۰/\overline{۰۹}$ $\qquad ۰+۹=۹$

$\frac{۱}{۲۷۱} = ۰/\overline{۰۰۳۶۹}$ $\qquad ۰+۰+۳+۶+۹=۱۸$

$\frac{۱}{۳۷} = ۰/\overline{۰۲۷}$ $\qquad ۰+۲+۷=۹$

همان‌طور که دیده می‌شود، مجموع ارقام دوره‌ی تناوب در هر حالت بر ۹ بخش‌پذیر است. این مطلب اتفاقی نیست! ثابت می‌کنیم اگر n بر ۲، ۳ و ۵ بخش‌پذیر نباشد، مجموع ارقام دوره‌ی تناوب

کسر $\frac{1}{n}$ بر ۹ بخش‌پذیر خواهد بود.

خواهیم داشت:

$$\frac{1}{n}=0/\overline{a_1a_2\cdots a_t}$$

$$\Rightarrow 10^t\times\frac{1}{n}=a_1a_2\cdots a_t+0/\overline{a_1a_2\cdots a_t}$$

$$\Rightarrow \frac{10^t}{n}-\frac{1}{n}=a_1a_2\cdots a_t \Rightarrow (10^t-1)=n(a_1a_2\cdots a_t)$$

اما 10^t-1 عددی مضرب ۹ است، پس: $n(a_1a_2\cdots a_t)=9k$. چون n بر ۳ بخش‌پذیر نیست، پس n بر ۹ بخش‌پذیر نخواهد بود و در نتیجه: $a_1a_2\cdots a_t=9k'$. اما عددی بر ۹ بخش‌پذیر است که مجموع ارقامش بر ۹ بخش‌پذیر باشد. لذا: $a_1+a_2+\cdots+a_t$. یعنی مجموع ارقام دوره‌ی تناوب بر ۹ بخش‌پذیر است.

۵. یک ویژگی جالب دیگر بعضی از اعداد اعشاری دوره‌ای

این مطلب از کتاب «ابتکارهایی در ریاضیات»، تألیف راس هانسبرگر انتخاب شده است. اعداد گویایی با مخرج اول را بررسی می‌کنیم که طول دوره‌ی بسط‌های اعشاری آن‌ها زوج است. چند مثال از این گونه اعداد عبارت‌اند از:

$$\frac{1}{7}=0/\overline{142857}$$

$$\frac{1}{13}=0/\overline{076923}$$

$$\frac{1}{17}=0/\overline{0588235294117647}$$

$$\frac{1}{19}=0/\overline{052631578947368421}$$

در اولین نگاه، دوره‌هایی که در سمت راست دیده می‌شوند، چندان جالب به‌نظر نمی‌رسند. ولی با نگاه دقیق‌تر معلوم می‌شود، همه از این ویژگی برخوردارند که مجموع هر دو رقم از آن‌ها که به اندازه‌ی نصف طول دوره از هم فاصله دارند، ۹است. اگر در این مثال‌ها کوتاه‌ترین دوره‌ها را در نظر بگیریم و به دو قسمت تقسیم کنیم و این دو قسمت را، به صورت دو عدد معمولی، با هم جمع کنیم، در $\frac{1}{7}$ داریم: $\begin{array}{r}142+\\857\\\hline 999\end{array}$ ، در $\frac{1}{13}$ داریم: $\begin{array}{r}076+\\923\\\hline 999\end{array}$ ، در $\frac{1}{17}$ داریم: $\begin{array}{r}05882352+\\94117647\\\hline 99999999\end{array}$ و در $\frac{1}{19}$ داریم: $\begin{array}{r}052631578+\\947368421\\\hline 999999999\end{array}$

آیا این مثال‌ها از الگویی کلی پیروی می‌کنند؟ جواب «مثبت» است. اگر بسط اعشاری عدد گویای $\frac{n}{p}$ که در آن p عدد اولی مخالف ۲ و ۵ است، یک عدد اعشاری دوره‌ای، دارای کوتاه‌ترین دوره با تعداد زوجی از ارقام باشد، آن‌گاه همه‌ی رقم‌های مجموع دو نیمه‌ی آن دوره، که به صورت اعداد معمولی در نظر گرفته شوند، ۹ است. اثبات این مطلب از حوصله‌ی مقاله‌ی حاضر خارج است و علاقه‌مندان را به مرجع ذکر شده ارجاع می‌دهیم.

۶. کسرهای تحویل‌ناپذیر (ساده‌نشدنی)

ثابت کنید کسر $\frac{5n+2}{3n+1}$ به‌ازای همه‌ی مقادیر صحیح n، یک کسر تحویل‌ناپذیر (ساده‌نشدنی) است.

حل: باید نشان دهیم بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک صورت و مخرج کسر برابر یک است، یعنی نشان دهیم:

$$(5n+2,3n+1)=1$$

یکی از روش‌های یافتن ب.م.م روش نردبانی (روش تقسیمات متوالی) است. در این روش آخرین باقی‌مانده‌ی غیرصفر، همان ب.م.م است.

$$5n+2=(1)(3n+1)+(2n+1)$$
$$3n+1=(1)(2n+1)+(n)$$
$$2n+1=(2)(n)+1$$
$$n=n(1)+0$$

لذا $5n+2$ و $3n+1$ نسبت به‌هم اول‌اند.

روش دوم استفاده از این قضیه است که $(a,b)=1$ اگر و تنها اگر عددهای صحیح r و s به‌گونه‌ای یافت شوند که $ra+sb=1$. در این مسئله داریم:

$$3(5n+2)+(-5)(3n+1)=1$$

۷. کسرهای اعشاری تحقیقی

ثابت کنید کسر $\frac{1}{7a+1}$ به‌ازای بی‌شمار عدد طبیعی a، کسر اعشاری تحقیقی است.

حل: با توجه به اتحاد زیر داریم:

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})$$
$$8^k-1=(8-1)(8^{k-1}+8^{k-2}+\cdots+1)$$

پس: $8^k-1=7t$

یعنی: $7t+1=8^k$ و یا $7t+1=2^{3k}$.

بنابراین، کسر $\frac{1}{7a+1}$ به‌ازای بی‌شمار عدد طبیعی a که تساوی $7a+1=2^{3k}$ برقرار شود، یک کسر اعشاری تحقیقی است (چون $k\in N$ ، پس بی‌شمار a با این ویژگی می‌توان یافت).

گذری به تاریخ!

$\sqrt{2}$ گویا نیست. این واقعیت عملاً در حدود ۵۰۰ سال قبل از میلاد مسیح و احتمالاً توسط خود فیثاغورس اثبات شده است. در

تاریخ آمده است که فیثاغورس گنگ بودن $\sqrt{2}$ را به‌عنوان ناخوشایندترین واقعیت در اعتقادات فلسفی تلقی می‌کرد. زیرا نشان می‌داد، جهان به آن سادگی و هماهنگی که او می‌خواهد، نیست. گمان می‌رود او مقرر کرده بود که این واقعیت بین اعضای گروه فلسفی وی مخفی بماند و روایت است که دست‌کم یکی از دانشجویانش به علت پخش این خبر ناخوشایند کشته شد!

۸. گنگ بودن $\sqrt{6}$

فرض کنیم $\frac{a}{b} = \sqrt{6}$ که در آن $(a, b) = 1$. با مجذور کردن به‌دست می‌آوریم:

$$6 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 6b^2$$

$6b^2$ زوج است، بنابراین a^2 زوج است، پس a زوج است. فرض کنیم $a = 2k$، پس:

$$a^2 = 4k^2 \Rightarrow 4k^2 = 6b^2 \Rightarrow 2k^2 = 3b^2$$

از این تساوی برمی‌آید که $3b^2$ زوج است. پس b^2 زوج است و در نتیجه b زوج است. ولی فرض شده بود که a و b هر دو زوج نباشند، بنابراین $\sqrt{6}$ گنگ است.

۹. گنگ بودن $\sqrt{3} + \sqrt{2}$

روش اول: در این روش از گنگ بودن $\sqrt{6}$ استفاده می‌کنیم. فرض کنیم $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ گویا، مثلاً r باشد. بنابراین:

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = r$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = r^2 \Rightarrow 2\sqrt{6} = r^2 - 5 \Rightarrow \sqrt{6} = \frac{r^2 - 5}{2}$$

اما عددهای گویا نسبت به چهار عمل جمع، تفریق، ضرب و تقسیم (به‌جز تقسیم بر صفر) بسته هستند و لذا $\frac{(r^2 - 5)}{2}$ یک عدد گویاست. ولی $\sqrt{6}$ گنگ است و به تناقض می‌رسیم.

روش دوم: اگر $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ گویا باشد، با توجه به معادله‌ی $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$، باید $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ گویا باشد. معکوس هر عدد گویای غیرصفر عددی است گویا، بنابراین $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ گویا خواهد شد. اعداد گویا نسبت به جمع بسته هستند، لذا $2\sqrt{3} = (\sqrt{2} + \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2})$ باید گویا باشد. اما $\sqrt{3}$ گویا نیست و این یک تناقض است. بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم که $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ گنگ است.

تفریح اندیشه

● حسین نامی ساعی

ارثیه‌ی مرد عرب*

مرد عربی به سه فرزندش وصیت کرده بود که پس از مرگ او، ۱۷ شترش را میان خودشان طوری تقسیم کنند که به اولی $\frac{1}{2}$، به دومی $\frac{1}{3}$ و به سومی $\frac{1}{9}$ شترها برسد. چه‌طور این کار ممکن است؟ آیا به نظر شما این محال نیست؟!؛ چرا که نصف یا $\frac{1}{2}$ هفده شتر می‌شود ۸/۵ شتر، و نصف یک شتر هم که جان ندارد و به درد نمی‌خورد! شما برای تقسیم این ارثیه چه راه‌حلی به فکرتان می‌رسد؟

پاسخ

حل این معما بسیار آسان است. یک شتر از دوست مرد عرب قرض می‌کنیم تا حاصل جمع شترها به هجده برسد. به این ترتیب، $\frac{1}{2}$ هجده شتر می‌شود نُه شتر که به پسر اولی می‌دهیم. $\frac{1}{3}$ هجده شتر می‌شود ۶ شتر که به پسر دومی می‌دهیم. $\frac{1}{9}$ هجده شتر هم می‌شود ۲ شتر که به پسر سومی می‌دهیم. بنابراین، حاصل جمع ۹ و ۶ و ۲ می‌شود ۱۷. یک شتر باقی‌مانده را هم به صاحب آن پس می‌دهیم!

* این معما و حل آن منسوب به حضرت علی(ع) است.

ادب ریاضی

درباره‌ی «ابوریحان» آمده است که: آن‌گاه که بیرونی کتاب «قانون مسعودی» را تصنیف کرد، سلطان، او را پیلواری سیم جایزه فرستاد و وی آن مال را به خزانه بازگردانید و گفت: «من از آن بی‌نیازم؛ چه عمری را در قناعت گذارده‌ام و دیگر بار مرا ترک خوی و عادت سزاوار نیست...» دست و چشم و فکر او هیچ‌گاه از عمل بازنماند و دائم در کار بود، مگر به نوروز و مهرگان یا برای تهیه‌ی احتیاجات معاش...

یک اتحاد و کاربردهای آن

• حسین کریمی

این اتحاد را ثابت کنید:

برای هر سه بردار دلخواه a، b و c داریم:

$$(a\times b).(a\times c)+(a.b)(a.c)=|a|^2(b.c)$$

حل: با توجه به $|u+v|^2-|u-v|^2=4u.v$ داریم:

$$(a\times b).(a\times c)=\frac{1}{4}\left[|(a\times b)+(a\times c)|^2-|(a\times b)-(a\times c)|^2\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[|a\times(b+c)|^2-|a\times(b-c)|^2\right]$$

با توجه به $|u\times v|^2=|u|^2|v|^2-(u.v)^2$ داریم:

$$=\frac{1}{4}\left[|a|^2|b+c|^2-(a.(b+c))^2-|a|^2|b-c|^2+(a.(b-c))^2\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[|a|^2(|b+c|^2-|b-c|^2)-((a.b)+(a.c))^2+((a.b)-(a.c))^2\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[|a|^2(4b.c)-4(a.b)(a.c)\right]=|a|^2(b.c)-(a.b)(a.c)$$

$$\Rightarrow (a\times b).(a\times c)+(a.b)(a.c)=|a|^2(b.c)$$

مسئله‌ی۱: با فرض $|a|=|b|=|c|=1$ و $\angle(a,b)=\angle(a,c)=60°$ و $b\perp c$، مطلوب است، حاصل:

$$(a\times b).(a\times c)$$

حل:

$a.b=1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ و $a.c=1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ و $b.c=0$

$$\Rightarrow (a\times b).(a\times c)=|a|^2(b.c)-(a.b)(a.c)$$

$$=(1\times0)-(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})=-\frac{1}{4}$$

مسئله‌ی۲: با فرض $|a|=2$ و $|b|=3$ و $|c|=4$ و $\angle(a,b)=30°$ و $\angle(a,c)=45°$ و $\angle(b,c)=60°$، مطلوب است $(a\times b).(a\times c)$.

حل:

$a.b=2\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$ و $a.c=2\times4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=4\sqrt{2}$ و

$$b.c=3\times4\times\frac{1}{2}=6$$

$$\Rightarrow (a\times b).(a\times c)=|a|^2(b.c)-(a.b)(a.c)$$

$$=(4\times6)-(3\sqrt{3})(4\sqrt{2})=12(2-\sqrt{6})$$

مسئله‌ی۳: با فرض آن‌که بردار b بر هر دو بردار غیرموازی a و c عمود باشد، ثابت کنید دو بردار $(a\times b)$ و $(a\times c)$ بر هم عمودند.

حل:

$$a.b=0\ ,\ b.c=0$$

$$\Rightarrow (a\times b).(a\times c)=|a|^2(b.c)-(a.b)(a.c)$$

$$=(|a|^2\times0)-(0)(a.c)$$

$$\Rightarrow (a\times b).(a\times c)=0\Rightarrow (a\times b)\perp(a\times c)$$

مسئله‌ی۴: با فرض $\angle(a,b)=\alpha$، $\angle(a,c)=\beta$، $\angle(b,c)=\gamma$ و $\angle((a\times b),(a\times c))=\theta$ ثابت کنید $\sin\alpha\sin\beta\cos\theta+\cos\alpha\cos\beta=\cos\gamma$.

حل:

$$(a\times b).(a\times c)+(a.b)(a.c)=|a|^{۲}(b.c)$$
$$\Rightarrow |a\times b||a\times c|\cos\theta+(|a||b|\cos\alpha)(|a||c|\cos\beta)$$
$$=|a|^{۲}(|b||c|\cos\gamma)$$
$$\Rightarrow |a|^{۲}|b||c|\sin\alpha\sin\beta\cos\theta+|a|^{۲}|b||c|\cos\alpha\cos\beta$$
$$=|a|^{۲}|b||c|\cos\gamma$$
$$\Rightarrow \sin\alpha\sin\beta\cos\theta+\cos\alpha\cos\beta=\cos\gamma$$

مسئله‌ی۵: با فرض $\angle(a,b)=۳۰^\circ$ ، $\angle(a,c)=۴۵^\circ$ و $\angle(b,c)=۶۰^\circ$ ، اندازه‌ی زاویه‌ی بین دو بردار $(a\times b)$ و $(a\times c)$ را تعیین کنید.

حل: فرض کنیم زاویه‌ی بین دو بردار $(a\times b)$ و $(a\times c)$ به اندازه‌ی θ باشد، پس داریم:

$$\sin\frac{\pi}{۶}\times\sin\frac{\pi}{۴}\times\cos\theta+\cos\frac{\pi}{۶}\times\cos\frac{\pi}{۴}=\cos\frac{\pi}{۳}$$
$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\cos\theta+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \cos\theta=\sqrt{۲}-\sqrt{۳}$$
$$\Rightarrow \theta=\text{Arc}\cos(\sqrt{۲}-\sqrt{۳})$$

مسئله‌ی۶: با فرض این که دو بردار b و c عمود بر هم باشند و بردار a با آن دو بردار زوایای α و β را ساخته باشد. ثابت کنید $\cos\theta=-\text{cotg}\,\alpha\times\text{cotg}\,\beta$ که در آن θ اندازه‌ی زاویه بین دو بردار $(a\times b)$ و $(a\times c)$ است.

حل:

$$\sin\alpha\sin\beta\cos\theta+\cos\alpha\cos\beta=\cos\gamma$$
$$\Rightarrow \sin\alpha\times\sin\beta\cos\theta+\cos\alpha\cos\beta=۰\Rightarrow \cos\theta=-\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$$
$$\Rightarrow \cos\theta=-\text{cotg}\,\alpha\,\text{cotg}\,\beta$$

مسئله‌ی۷: با فرض این که دو بردار b و c عمود بر هم باشند و بردار a با آن دو بردار زوایای حاده‌ی α و β را ساخته باشد، ثابت کنید $\alpha+\beta\ge\frac{\pi}{۲}$.

حل: فرض کنیم چنین نباشد، یعنی $\alpha+\beta<\frac{\pi}{۲}$. پس $\alpha<\frac{\pi}{۲}-\beta$ و درنتیجه داریم: $\text{tg}\,\alpha<\text{cotg}\,\beta$

$$\Rightarrow -\text{tg}\,\alpha>-\text{cotg}\,\beta\Rightarrow -\text{tg}\,\alpha\,\text{cotg}\,\alpha>-\text{cotg}\,\alpha\,\text{cotg}\,\beta$$
$$\Rightarrow -۱>\cos\theta$$

و این غیرممکن است. پس فرض خلف، باطل است و داریم $\alpha+\beta\ge\frac{\pi}{۲}$.

تفریح اندیشه

حمید بهادری
دبیر ریاضی خمین

کاربرد دنباله‌ی فیبوناتچی

اگر $f(x)=\frac{۱}{x+۱}$ ، آن‌گاه $f^n(x)$ را محاسبه کنید در این جا منظور از $f^n(x)$ عبارت است از n مرتبه ترکیب f با خودش. آیا $\lim_{n\to\infty}f^n(x)$ وجود دارد این حد را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$f^{۲}(x)=f(f(x))=f(\frac{۱}{x+۱})=\frac{۱}{\frac{۱}{x+۱}+۱}=\frac{x+۱}{x+۲}$$

$$f^{۳}(x)=f(f^{۲}(x))=f(\frac{x+۱}{x+۲})=\frac{۱}{\frac{x+۱}{x+۲}+۱}=\frac{x+۲}{۲x+۳}$$

$$f^{۴}(x)=f(f^{۳}(x))=f(\frac{x+۲}{۲x+۳})=\frac{۱}{\frac{x+۲}{۲x+۳}+۱}=\frac{۲x+۳}{۳x+۵}$$

با استقراء روی n ثابت می‌شود $f^n(x)=\frac{u_{n-۱}x+u_n}{u_nx+u_{n+۱}}$ که $\{un\}_{n=۰}^{n=\infty}$ دنباله فیبوناتچی است.

یعنی $۱,۱,۲,۳,۵,۸,۱۳,۲۱,۳۴,۵۵,\cdots$ که $u_۱=۱$ و $u_۲=۱$ و $u_{n+۱}=u_n+u_{n-۱}$ برای $n>۲$.

می‌دانیم که هرچه مرتبه جملات دنباله فیبوناتچی بالاتر می‌رود نسبت بین دو جمله دنباله به عدد $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود.

یعنی: $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+۱}}{u_n}=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}=\alpha$ در این صورت می‌توان نوشت:

$$\lim_{n\to\infty}f^n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{u_{n-۱}}{u_n}x+۱}{x+\frac{u_{n+۱}}{u_n}}=\frac{\frac{۱}{\alpha}x+۱}{x+\alpha}=\frac{۱}{\alpha}$$

استدلال های ریاضی

(قسمت ۲)

• میرشهرام صدر
mir_sadr@ yahoo.com

برای دانش‌آموزان پایه‌ی سوم متوسطه

اشاره

در شماره‌ی قبل راجع به درک شهودی، استدلال های استقرایی و قیاسی و محدودیت های آن ها صحبت کردیم، اینک در ادامه‌ی آن، استدلال های دیگر ریاضی را مطرح می‌کنیم.

استدلال استنتاجی

گزاره: جمله‌ای خبری است که ممکن است درست یا نادرست باشد؛ هرچند درستی یا نادرستی آن هنوز برای ما معلوم نشده باشد. یک گزاره نمی‌تواند هم درست و هم نادرست باشد.

مثال: «۷ عددی فرد است» و «$\sqrt{2}$ عددی گنگ است»، نمونه هایی از گزاره‌های درست هستند.

مثال: «۳- عددی طبیعی است» و «۱۴ عددی اول است»، نمونه هایی از گزاره‌های نادرست هستند.

گزاره‌ی شرطی: فرض کنیم p و q دو گزاره باشند. گزاره‌ی «اگر p آن‌گاه q» را یک گزاره‌ی شرطی می‌گوییم و آن را با نماد «$p \Rightarrow q$» نمایش می‌دهیم. در گزاره‌ی شرطی $p \Rightarrow q$ ، p را فرض و q را نتیجه یا حکم می‌گوییم.

مثال: گزاره‌ی «اگر x و y دو عدد طبیعی باشند، آن‌گاه $x+y$ عددی طبیعی است»، یک گزاره‌ی شرطی است و می‌توان آن را به زبان نمادهای ریاضی نوشت:

گزاره‌ی p: x و y دو عدد طبیعی هستند. $(p: x, y \in \mathbb{N})$

گزاره‌ی q: $x+y$ عددی طبیعی است. $(q: x+y \in \mathbb{N})$

گزاره‌ی $(p \Rightarrow q)$: $x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow x+y \in \mathbb{N}$

مثال: گزاره‌ی «اگر باران ببارد، آن‌گاه زمین مرطوب می‌شود.» یک گزاره‌ی شرطی است و می‌توان آن را به زبان نمادهای ریاضی نوشت:

گزاره‌ی p: اگر باران ببارد.

گزاره‌ی q: زمین مرطوب می‌شود.

گزاره‌ی $(p \Rightarrow q)$: $\underbrace{\text{اگر باران ببارد}}_{p}$، آن‌گاه $\underbrace{\text{زمین مرطوب می‌شود}}_{q}$.

مثال: گزاره‌ی «خطوط موازی هیچ‌گاه یکدیگر را قطع نمی‌کنند» معادل گزاره‌ی «اگر خطوطی موازی باشند، آن‌گاه یکدیگر را قطع نمی‌کنند» است و به زبان نمادهای ریاضی می‌توان نوشت:

گزاره‌ی $(p \Rightarrow q)$:

$\underbrace{\text{اگر خطوطی موازی باشند}}_{p}$، آن‌گاه $\underbrace{\text{یکدیگر را قطع نمی‌کنند}}_{q}$.

تعریف استدلال استنتاجی: هرگاه گزاره‌ی q از درستی گزاره‌های p_1 و p_2 و... و p_n نتیجه شود. به این نوع نتیجه‌گیری از گزاره‌ها یا حقایقی که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم، استدلال استنتاجی می‌گوییم. به بیان دیگر، روش نتیجه‌گیری گزاره‌ی q با استفاده از حقایق یا فرض‌های درست p_1 و p_2 و... و p_n را استدلال استنتاجی می‌نامیم. یکی از قانون‌های مهم استنتاج، قانون انتزاع است.

قانون انتزاع: اگر گزاره‌های $(p \Rightarrow q)$ و p درست باشند، آن‌گاه گزاره‌ی q درست است و به زبان نمادهای ریاضی می‌توان نوشت:

$$[(p \Rightarrow q) \text{ و } p] \Rightarrow q$$

مثال: نتیجه‌ی استنتاج زیر را بنویسید.

(اگر m عددی فرد باشد، آن‌گاه m مضرب ۲ نیست.) و (m عددی فرد است).

حل: با فرض این‌که p و q را به صورت زیر در نظر بگیریم:

m مضرب ۲ نیست: q ؛ m عددی فرد باشد. : p

ملاحظه می‌کنیم که استنتاج به صورت p و $(p \Rightarrow q)$ است که طبق قانون انتزاع نتیجه q خواهد بود.

نتیجه: m مضرب ۲ نیست.

فعالیت: با استفاده از استدلال استنتاجی نتایج زیر را کامل کنید:

الف) خطوط موازی هیچ‌گاه یکدیگر را قطع نمی‌کنند. خطوط L_1 و L_2 موازی هستند.

نتیجه: $\boxed{\quad}$

ب) اگر مثلثی متساوی‌الساقین باشد، آن‌گاه دو زاویه‌ی مجاور به قاعده برابرند و مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

نتیجه: $\boxed{\quad}$

مثال: آیا نتایج زیر، از عبارت‌های داده شده حاصل می‌شوند؟ جواب خود را توضیح دهید.

الف) تمام افرادی که در بانک کار می‌کنند، تحصیل کرده هستند. پدر محمد در بانک کار می‌کند.

نتیجه: پدر محمد تحصیل کرده است.

حل: درست است، زیرا می‌توان عبارت بالا را به صورت زیر نوشت:

($\underbrace{\text{اگر فردی در بانک کار کند}}_{p}$، آن‌گاه $\underbrace{\text{تحصیل کرده است}}_{q}$) و ($\underbrace{\text{پدر محمد در بانک کار می‌کند}}_{p}$)

با زبان ریاضی، عبارت بالا به صورت p و $(p \Rightarrow q)$ است که طبق قانون انتزاع، نتیجه‌ی q است؛ یعنی:

نتیجه: پدر محمد تحصیل کرده است.

توجه: در این مثال، پدر محمد یکی از افرادی است که در بانک کار می‌کند، به همین دلیل گزاره‌ی «پدر محمد در بانک کار می‌کند» را همان p در نظر گرفتیم.

ب) بعضی از کارمندان بانک دارای مدرک فوق‌لیسانس هستند. پدر حسن در بانک کار می‌کند.

نتیجه: پدر حسن دارای مدرک فوق‌لیسانس است.

حل: نادرست است، زیرا ممکن است پدر حسن جزو کارمندانی نباشد که دارای مدرک فوق‌لیسانس هستند.

تذکر: به کلمه‌های «هر» در قسمت الف و «بعضی» در قسمت ب این مثال توجه کنید.

مثال: ثابت کنید که اگر x و y دو عدد مخالف با صفر باشند و $x + y = 1$ ، آن‌گاه $(1-\frac{1}{x})(1-\frac{1}{y}) = 1$.

حل:

$$x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$$

$$(1-\frac{1}{x})(1-\frac{1}{y}) = (1-\frac{1}{x})(1-\frac{1}{1-x})$$

$$= (\frac{x-1}{x})(\frac{1-x-1}{1-x}) = 1$$

مثال: ثابت کنید که عدد چهار رقمی $\overline{abcd}$ بر ۳ بخش‌پذیر است، هرگاه $(a+b+c+d)$ بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

حل: ابتدا عدد $\overline{abcd}$ را به صورت گسترده می‌نویسیم. در این عدد d رقم یکان، c رقم دهگان، b رقم صدگان و a رقم هزارگان است. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}\overline{abcd} &= 1000a + 100b + 10c + d \\ &= (999a + a) + (99b + b) + (9c + c) + d \\ &= (999a + 99b + 9c) + (a + b + c + d) \\ &= 3(333a + 33b + 3c) + (a + b + c + d)\end{aligned}$$

چون عبارت $3(333a + 33b + 3c)$ ، مضرب ۳ است، پس بر ۳ بخش‌پذیر خواهد بود. بنابراین، برای آن‌که $\overline{abcd}$ بر ۳ بخش‌پذیر باشد، باید $(a+b+c+d)$ بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

مثال: ثابت کنید عدد پنج‌رقمی $\overline{abcde}$ بر ۴ بخش‌پذیر است، هرگاه عدد دو رقمی $\overline{de}$ بر ۴ بخش‌پذیر باشد.

حل: ابتدا عدد $\overline{abcde}$ را به صورت گسترده می‌نویسیم:

$$\overline{abcde} = 10000a + 1000b + 100c + 10d + e$$
$$= 4\times 2500a + 4\times 250b + 4\times 25c + (10d + e)$$
$$= 4(2500a + 250b + 25c) + \overline{de}$$

چون عبارت $4(2500a + 250b + 25c)$، مضرب ۴ است، پس بر ۴ بخش‌پذیر است. بنابراین برای آن‌که $\overline{abcde}$ بر ۴ بخش‌پذیر باشد، باید $\overline{de}$ یا $(10d + e)$ بر ۴ بخش‌پذیر باشد.

مثال: در «پاپیروس رایند» آمده است: یک عدد دلخواه انتخاب کنید. آن را در ۳ضرب کنید، به حاصل آن ۶ را بیفزایید و حاصل را بر ۳ تقسیم کنید. سپس عددی را که از ابتدا انتخاب کرده بودید، از این نتیجه‌ی تقسیم کم کنید. چه عددی به‌دست می‌آید؟ آیا همیشه همین عدد به‌دست می‌آید؟ با چه نوع استدلالی به این نتیجه رسیدید؟

حل: فرض کنیم n عدد دلخواهی باشد که انتخاب کرده‌ایم. آن را در ۳ ضرب می‌کنیم که $3n$ به دست می‌آید. اکنون به $3n$، ۶ واحد اضافه می‌کنیم که $3n + 6$ حاصل می‌شود. سپس مقدار به‌دست آمده را بر ۳ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{3n+6}{3} = \frac{3(n+2)}{3} = n + 2$$

در مرحله‌ی آخر، از $n + 2$ عددی را که اول انتخاب کرده بودیم (یعنی n)، کم می‌کنیم:

$$(n+2) - n = 2$$

عدد ۲ به‌دست می‌آید. هر عددی را انتخاب کنیم و عملیاتی را که در پاپیروس رایند آمده است درباره‌ی آن تکرار کنیم، دوباره عدد ۲ به‌دست می‌آید. در این‌جا به کمک استدلال استنتاجی به این نتیجه رسیدیم، زیرا براساس درستی عملیات جمع، تفریق، ضرب و تقسیم عبارت‌های جبری به این نتیجه رسیدیم.

مثال: یک عدد سه رقمی انتخاب کنید و آن را دوباره بنویسید تا یک عدد شش‌رقمی تشکیل بدهد.

الف) نشان دهید که عدد شش‌رقمی حاصل بر ۱۳ بخش‌پذیر است.

ب) نشان دهید، هر عدد شش‌رقمی که از تکرار یک عدد سه‌رقمی حاصل می‌شود، همیشه بر ۱۳ بخش‌پذیر است.

حل:

الف) برای مثال عدد ۳۴۵ را انتخاب می‌کنیم و آن را دوبار می‌نویسیم تا عدد ۳۴۵۳۴۵ تشکیل شود. اکنون داریم:

$$345345 = \underline{3\times 10^5} + \underline{\underline{4\times 10^4}} + \underline{\underline{\underline{5\times 10^3}}} + \underline{3\times 10^2} + \underline{\underline{4\times 10}} + \underline{\underline{\underline{5}}}$$

با دسته‌بندی و فاکتورگیری داریم:

$$345345 = (3\times 10^5 + 3\times 10^2) + (4\times 10^4 + 4\times 10) + (5\times 10^3 + 5)$$
$$= 3\times 10^2(10^3 + 1) + 4\times 10(10^3 + 1) + 5(10^3 + 1)$$

با فاکتورگیری از پرانتز مشترک $(10^3 + 1)$ داریم:

$$345345 = (10^3 + 1)(3\times 10^2 + 4\times 10 + 5) = 1001\times 345$$

عدد ۱۰۰۱ بر ۱۳ بخش‌پذیر است. زیرا $13\times 77 = 1001$. پس ۳۴۵۳۴۵ بر ۱۳ بخش‌پذیر است.

ب) عدد شش‌رقمی دلخواه $\overline{abcabc}$ را که از تکرار عدد سه‌رقمی $\overline{abc}$ به‌دست آمده است، در نظر می‌گیریم و صورت گسترده‌ی آن را می‌نویسیم:

$$\overline{abcabc} = \underline{a\times 10^5} + \underline{\underline{b\times 10^4}} + \underline{\underline{\underline{c\times 10^3}}} + \underline{a\times 10^2} + \underline{\underline{b\times 10}} + \underline{\underline{\underline{c}}}$$

پس از دسته‌بندی و فاکتورگیری داریم:

$$\overline{abcabc} = (a\times 10^5 + a\times 10^2) + (b\times 10^4 + b\times 10) + (c\times 10^3 + c)$$
$$= a\times 10^2(10^3 + 1) + b\times 10(10^3 + 1) + c(10^3 + 1)$$
$$= (10^3 + 1)(a\times 10^2 + b\times 10 + c) = 1001\times \overline{abc}$$

چون $13\times 77 = 1001$، پس ۱۰۰۱ بر ۱۳ بخش‌پذیر است. در نتیجه عدد دلخواه $\overline{abcabc}$ بر ۱۳ بخش‌پذیر است.

مثال: ثابت کنید که حاصل‌ضرب هر دو عدد صحیح متوالی، مضرب ۲ است.

حل: دو عدد صحیح متوالی به صورت n و $n + 1$ هستند. حاصل‌ضرب آن‌ها $n(n + 1)$ است. برای n دو حالت وجود دارد: یکی این‌که ممکن است n عددی فرد باشد، یعنی: $n = 2k + 1 \;;\; k \in Z$. دیگر این‌که ممکن است n عددی زوج باشد، یعنی: $n = 2k \;;\; k \in Z$. بنابراین دو حالت زیر را داریم:

حالت اول: اگر $n = 2k + 1$، خواهیم داشت:

$$n(n+1) = (2k+1)(2k+1+1) = (2k+1)(2k+2)$$

$$= (2k+1)\times 2(k+1) = 2\left[\underbrace{(2k+1)(k+1)}_{k''\in Z}\right] = 2k''$$ (عددی زوج است.)

حالت دوم: اگر $n = 2k$، خواهیم داشت:

$$n(n+1) = 2k(2k+1) = 2\left[\underbrace{k(k+1)}_{k''\in Z}\right] = 2k''$$ (عددی زوج است.)

مثال: ثابت کنید مربع هر عدد فرد به شکل $8q + 1$ است.

حل: عدد فرد $n = 2k + 1$ که $k \in Z$ را در نظر می‌گیریم. برای محاسبه‌ی مربع آن، کافی است که آن را به توان ۲ برسانیم:

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = (4k^2 + 4k) + 1$$
$$= 4\underbrace{k(k+1)}_{2q} + 1 = 8q + 1$$

چون $k(k + 1)$ حاصل‌ضرب دو عدد صحیح متوالی است، پس طبق مثال قبل، حاصل آن عددی زوج است که ما آن را $2q$ در نظر گرفتیم.

مثال: با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید که مجموع سه

عدد زوج متوالی، مضرب ۳ است.

حل: سه عدد زوج متوالی به صورت $2k$, $2k+2$, $2k+4$ که $k \in Z$ هستند. اکنون آن‌ها را با یکدیگر جمع می‌کنیم:

$$2k+(2k+2)+(2k+4)=6k+6=3\underbrace{(2k+2)}_{k' \in Z}=3k' \quad \text{(مضرب ۳ است.)}$$

قضیه‌ی کلی

حکم‌هایی که همیشه و بدون محدودیت برقرارند، قضیه‌ی کلی هستند. برای مثال، همه‌ی اتحادهای جبری قضیه‌ی کلی هستند، زیرا به ازای همه‌ی مقادیری که جایگزین متغیرهای اتحاد می‌شوند، همواره برقرارند.

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2;(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2;(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

همچنین قضیه‌های هندسه، قضایای کلی هستند و همواره برقرارند، مانند قضیه‌های زیر:

قضیه: اگر در مثلث ΔABC داشته باشیم $MN \| BC$، آن‌گاه داریم:

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

قضیه: در هر مثلث، ضلع مقابل به زاویه‌ی بزرگ‌تر، از ضلع مقابل به زاویه‌ی کوچک‌تر، بزرگ‌تر است.

$$\hat{B}>\hat{C} \Rightarrow AC>AB$$

قضیه‌ی فیثاغورس: در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع وتر برابر است با مجموع مربعات دو ضلع دیگر.

$$BC^2=AB^2+AC^2$$

مثال نقض

به مثالی که کلیّت یک مطلب یا حدس را باطل می‌کند، مثال نقض گوییم. وقتی از مثال نقض استفاده می‌کنیم، در جست‌وجوی یک مثال هستیم که درستی حدس را باطل کند؛ یعنی با آوردن یک مثال نقض، ثابت می‌کنیم که حدس یا حکم مسئله درست نیست.

مثال: آیا به ازای هر عدد طبیعی n، عدد 2^n+3 عددی اول است؟

حل: برای باطل کردن این حکم، کافی است یک عدد طبیعی به جای n قرار دهیم و حاصل 2^n+3، عددی اول نباشد. بنابراین در این فرمول، چند عدد طبیعی به جای n قرار می‌دهیم:

$n=1\ ;\ 2^1+3=5$

$n=2\ ;\ 2^2+3=7$

$n=3\ ;\ 2^3+3=11$

$n=4\ ;\ 2^4+3=19$

$n=5\ ;\ 2^5+3=35$

در حالتی که $n=5$، ملاحظه می‌کنیم که ۳۵ عددی اول نیست. پس $n=5$ یک مثال نقض برای باطل کردن این حکم است.

مثال: آیا ضرب دو عدد گنگ، عددی گنگ است؟

حل: در صورتی که $x=\sqrt{2}$ و $y=3\sqrt{2}$ داریم:

$$xy=\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}=3\sqrt{4}=6 \notin Q^c$$

بنابراین $x=\sqrt{2}$ و $y=3\sqrt{2}$، مثال نقض برای باطل کردن این حکم است.

مثال: آیا برای هر $x \geq 0$، می‌توان نتیجه گرفت $\sqrt{x} \leq x$؟

حل: در صورتی که $x=\frac{1}{4}$ انتخاب کنیم:

$$\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2} \nleq \frac{1}{4}$$

بنابراین $x=\frac{1}{4}$، مثال نقض برای باطل کردن این حکم است.

مثال: بسیاری از دانش‌آموزانی که با اتحادها کار می‌کنند و هنوز در به کار بردن اتحادها کم‌دقتی دارند، موارد زیر را به‌اشتباه، جای اتحاد به کار می‌برند:

الف) $a+2a^3=3a^4$ ب) $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$

ج) $(a+b)^2=a^2+b^2$ د) $\frac{x+y}{x^2}=\frac{y}{x}$

با آوردن مثال نقض، به راحتی می‌توان درستی برابری‌های بالا را باطل کرد.

مثال: آیا مجموع دو عدد گنگ، عددی گنگ است؟ چرا؟

حل: خیر، دو عدد گنگ به صورت $a=\sqrt{2}$ و $b=1-\sqrt{2}$ را درنظر می‌گیریم و ملاحظه می‌کنیم که:

$$a+b=\sqrt{2}+1-\sqrt{2}=1 \in Q \quad \text{(عددی گویاست)}$$

تمرین: برای نقض هریک از گزاره‌های زیر، از مثال نقض استفاده کنید.

الف) اگر p عددی اول باشد، آن‌گاه $p+1$ عددی اول است.

ب) اگر p عددی اول باشد، آن‌گاه p^2+1 عددی اول است.

ج) اگر $a \leq b$ و $c \leq d$، آن‌گاه $ac \leq bd$.

د) اگر عددهای x و y هر دو مثبت باشند، آن‌گاه $\log xy=\log x \times \log y$.

هـ) برای دو عدد حقیقی x و y داریم: $|x+y|=|x|+|y|$.

و) برای دو عدد حقیقی x و y داریم: $[x+y]=[x]+[y]$.

ادامه دارد...

نخبه پروری نکنیم!

قسمت دوم

اشاره

در شماره ی قبل قسمت اول مصاحبه با استاد محمدهاشم رستمی را ملاحظه کردید، ایشان عضو هیأت تحریریه مجله ی برهان متوسطه و مؤلف کتاب درسی دوره ی متوسطه و عضو شورای برنامه ریزی درسی گروه ریاضی دفتر تألیف و برنامه ریزی درسی و مؤلف دایرةالمعارف هندسه ۱۷ جلد و... هستند که ۴۵ سال سابقه ی تدریس دارند. اینک در پی ادامه ی مصاحبه با ایشان را می آوریم.

■ **نقش هندسه در درک جهان چیست؟ چون شما به نقش هندسه در ماهواره‌ها اشاره کردید، پس هندسه از داخل و دور و بر کره‌ی زمین بیرون آمده است. آیا معتقدید که در درک جهان هم نقشی دارد؟**

○ درحقیقت آن‌چه که ما در زندگی با آن سر و کار داریم، به‌خصوص در دو بعد یا سه بعد، به نحوی با هندسه مربوط است؛ از نظر شکل هندسی و ویژگی‌هایی که دارد. هنگامی که در خیابان راه می‌روید، تابلوهای متفاوتی می‌بینید که نشانگر اشکال هندسی هستند. ساختمان‌هایی می‌بینید که احجام هندسی را نشان می‌دهند. در بازی فوتبال، توپ به شکل کره است که یک شکل هندسی است. می‌توانیم بگوییم که ما هم از نظر شهود، یعنی آن‌چه که در زندگی روزمره می‌بینیم با اشکال هندسی سروکار داریم و هم از نظر قوانین حاکم بر جهان، هندسه مهم است. در استانداردهای موضوعی هندسه آمده است: «هندسه ابزاری تقدیم می‌کند که به‌وسیله‌ی آن می‌توان جهان را توصیف، تجزیه، تحلیل و درک کرد؛ ابزاری برای دیدن و فهمیدن زیبایی موجود در ساختارها...»

■ **سؤال بعدی به وضع آموزش ریاضی در سال‌های قبل از انقلاب اسلامی برمی‌گردد؛ یعنی در واقع از همان زمانی که شما شروع کردید به تدریس یا تحصیل ریاضی، تا دوره‌ی قبل از انقلاب.**

○ از سال ۱۲۳۱ هجری شمسی، یعنی سال تأسیس دارالفنون، تا سال ۱۲۹۷، کتاب‌های درسی ایران، ترجمه‌ی کتاب‌های کشورهای غربی، به‌ویژه کشورهای اروپایی بود. در سال ۱۲۹۰ شمسی، شورای وزارت معارف، تدوین ریز مواد برنامه‌های درسی شش ساله‌ی دبستان را که در شهر، مکتب شهری و در روستاها، مکتب دهکده می‌نامیدند، آغاز کرد. در متن این ریز مواد، هدف‌هایی از آموزش و پرورش نیز گنجانده شده بود. این ریز مواد درسی در سال ۱۲۹۷ شمسی به تصویب مجلس شورای آن زمان رسید و پس از آن، ریز مواد برنامه‌ی درسی سیکل اول دبیرستان و دانش‌سراهای مقدماتی و دبیرستان‌های پسرانه و دخترانه تهیه شد. کتاب‌های تألیف شده در این دوره تا سال ۱۳۳۴ مورد استفاده قرار گرفتند.

در سال ۱۳۳۴، براساس اصل چهار ترومن (کمک به کشورهای در حال توسعه)، اهداف و ریز مواد برنامه‌های درسی برای دوره‌ی دبیرستان توسط هیئتی آمریکایی تهیه و کتاب‌های درسی بر این اساس نوشته شدند. یکی از ویژگی‌های این دوره، چندتألیفی بودن کتاب‌های درسی بود. یعنی برای هر درس در هر کلاس، دو یا سه کتاب وجود داشت و معلمین به انتخاب خود یکی از آن‌ها را برای تدریس انتخاب می‌کردند. چندتألیفی بودن کتاب‌ها در آن دوره، بیشتر از مفید بودن، معایبی داشت که رقابت‌های ناسالم مؤلفان کتاب‌ها برای انتخاب کتابشان توسط دبیران، و نقص محتوای بسیاری از این کتاب‌ها، دو نمونه از آن‌هاست.

در سال ۱۳۴۴، نظام آموزشی ایران و درنتیجه اهداف آموزشی و ریز مواد برنامه‌ی درسی تغییر کرد و دوره‌ی راهنمایی برای اولین‌بار جزو دوره‌های تحصیلی ایران قرار گرفت و دوره‌ی ابتدایی پنج سال تعیین شد. این برنامه‌ها نیز در سال ۱۳۵۴ مورد بازنگری

قرار گرفت. نکته‌ی مهمی که در ارتباط با اهداف آموزشی و ریز مواد کتاب‌های درسی ایران در این دوره‌ها می‌توان گفت این است که کتاب‌های درسی ایران، ترجمه یا اقتباسی از کتاب‌های کشورهای خارجی بودند. به بیان دیگر، دو نکته‌ی اساسی که در استانداردهای جهانی نیز آمده‌اند، یعنی این که برنامه‌های درسی کشور هنگامی موفق‌اند که هم به یافته‌های دانشی روز، و هم به سنت‌های خوب آموزشی کشور توجه کرده باشند، در برنامه‌های درسی ایران از سال ۱۲۳۱ شمسی تا سال ۱۳۵۷ مورد توجه قرار نداشتند. در مواردی هم، اگر به یافته‌های جدید دانش توجه شده، این توجه ناقص و یا افراطی بوده است. به بیان دیگر، ما تا قبل از انقلاب اسلامی، دانش و برنامه‌ی درسی را مونتاژ می‌کردیم و نه تولید.

بعد از انقلاب اسلامی، بهترین دوره‌ی برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌ها مربوط به سال ۱۳۵۹ است که کتاب‌های ابتدایی و راهنمایی تغییر کردند. در این دوره، ریز مواد درسی را خود «دفتر برنامه‌ریزی و تألیف» تهیه کرد و اهداف نیز به‌وسیله‌ی وزارت آموزش و پرورش و شورای عالی آموزش و پرورش مشخص شدند. آن‌گاه هدف‌های کلی آموزش ریاضی در دوره‌ی عمومی و سپس هدف‌های خاص آموزش ریاضی در ابتدایی و راهنمایی برای هر سال تحصیلی مشخص گردید و بر این اساس، ریز مواد درسی تهیه و کتاب‌ها تألیف شدند. آن‌گاه کتاب‌ها یک سال در تعدادی از مدارس تهران که به صورت تصادفی انتخاب شده بودند، آزمایش شدند و بعد به اجرای سراسری رسیدند. برای هر کتابی هم راهنمای معلم تألیف شد.

■ **یعنی کتاب‌های این دوره دیگر نه مونتاژ بودند نه ترجمه.**

○ بله، درحقیقت این بخش دیگر نه مونتاژ بود و نه ترجمه. البته در مواردی باز هم در تألیف کتاب‌های دبیرستانی نظام جدید، از ترجمه‌ی کتاب‌های خارجی استفاده شد، و بعضی جاها نوآوری‌هایی انجام گرفت که ناقص ماند و شاید برخی از مشکلات اخیر نظام جدید در متوسطه هم به همین مسائل برمی‌گردد.

■ **شما سؤال بعدی را هم جواب دادید؛ یعنی وضع آموزش ریاضی در حال حاضر. نظرتان درباره‌ی المپیادها چیست؟ آیا واقعاً تأثیر مثبتی دارند؟ اگر دارند چه قدر است؟**

○ در تکمیل سؤال قبلی مختصری عرض کنم، در برنامه‌ریزی دوره‌ی متوسطه در نظام جدید آموزشی، همان‌طوری که اشاره کردیم، یا به سنت‌های آموزشی خودمان توجه نشده، یا به یافته‌های جدید، و یا اگر شده، هر دو کم‌رنگ بوده‌اند. درحقیقت، دلیل بروز مشکلات هم در نظام جدید آموزشی همین است. اما لازم است بگویم که با سعی و تلاش، می‌توانیم آموزش ریاضی را در کشورمان به بهترین و بالاترین سطح مطلوب برسانیم. برای نیل به این هدف لازم است به تولید دانش بپردازیم. در این راستا، کاری که در حال حاضر در گروه ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی در حال انجام است، تهیه‌ی راهنمای برنامه‌ی درسی ملی ریاضی ایران است.

■ **در آینده؟**

○ در آینده. همان طور که گفتم، کاری که الان دارد انجام می‌شود، کاری است که به طرف تولید دانش پیش می‌رود. برنامه‌ی شورای ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف که من هم عضو آن هستم، این است که به جای تألیف کتاب‌های درسی، راهنمای تألیف کتاب‌ها را تهیه کنیم. نخست راهنمای برنامه‌ی درسی ملی ریاضی برای ایران تهیه شود و پس از بررسی آن در دوره‌های سراسری کشوری، برای هر کتاب، راهنمای تألیف تدارک ببینیم. این راهنماها در سراسر کشور در کلاس‌های سراسری به نظرخواهی گذاشته شوند. در مرحله‌ی تألیف هم، هر فرد یا گروهی که می‌تواند کتاب درسی بنویسد، مجاز است به صورت فردی یا گروهی، در تألیف کتاب‌ها مشارکت کند.

■ **یعنی چند تألیف داشته باشیم؟**

○ بله. البته از بین کتاب‌های یک موضوع درسی، شاید یک کتاب به‌عنوان تألیف برتر و به‌عنوان کتاب درسی انتخاب شود؛ این مطلب بعداً مشخص خواهد شد. ولی به هر حال، مؤلفین با توجه به راهنمای برنامه‌ی درسی، مجاز به تألیف کتاب می‌شوند.

■ **نظرتان را درباره‌ی المپیادها و این که تأثیرشان مثبت است یا منفی، می‌فرمایید؟**

○ طبیعتاً من نمی‌توانم بگویم نقش منفی دارند. المپیادها قشر خاصی از دانش‌آموزان را دربرمی‌گیرند و به نظر من در پیشرفت دانش ریاضی و به‌طور کلی سایر شاخه‌ها، مثل فیزیک و شیمی، مؤثرند. آن‌چه که قبول ندارم این است که نخبه‌پروری کنیم. مخاطب ما، مخاطب عام است.

■ **یعنی قهرمان‌پروری را قبول ندارید؛ حداقل در ریاضیات.**

○ ولی می‌پذیرم که باعث پیشرفت دانش ریاضی می‌شود و در این زمینه مؤثر است.

■ **نقش کتاب‌های کمک‌آموزشی در آموزش ریاضی چیست؟ امروزه کتاب‌های کمک‌آموزشی خیلی زیاد شده‌اند، قدیم‌ها خیلی کم بودند. در دوره‌ی شما، مثلاً شاید فقط همین کتاب‌های صفاری قربانی در زمینه‌ی هندسه یا جبر وجود داشتند. ولی الان ده‌ها، شاید صدها کتاب در هر رشته‌ای موجود است. آیا تعدادشان زیاد نیست؟ یا نه کم هم هستند؟ نقششان در پیشبرد ریاضی و کمک به دبیر یا معلم ریاضی چیست؟**

○ من وجود این همه کتاب را زائد می‌بینم. ما قبول داریم که کتاب درسی بسته است و به عبارت دیگر، تعداد صفحات محدودی دارد. از طرف دیگر، ساعت‌های تدریس این کتاب در دبیرستان یا مدارس نیز به‌طور کلی محدود است. بنابراین شاید ما نتوانیم آن‌چه را که لازم باشد، در کتاب درسی بیاوریم. درواقع ما ایده‌های مهم ریاضی را در کتاب درسی می‌آوریم. بنابراین لازم است، جاهایی که کتاب درسی محدودیت دارد، دست مؤلفان کتاب‌های کمک‌آموزشی باز باشد. اما به نظر من باز هم باید در کتاب راهنمای معلم و کتاب کار دانش‌آموز و از طریق مجلات ریاضی این محدودیت‌ها برطرف شوند.

■ مجله‌ی ریاضی برای این کار؟

○ در استانداردهای جدید آموزشی پیشنهاد شده است، یک بسته‌ی آموزشی شامل سه کتاب برای هر درس موجود باشد: یک کتاب، کتاب درسی دانش‌آموز است. دیگری کتاب کار دانش‌آموز است که هرجا کتب درسی بسته‌اند و به کار بیشتر یا تعریف بیشتری نیاز است، یا مطلب گفته شده محتاج مقدمه‌ای است که سال‌های قبل گفته شده، در این کتاب می‌آید. سومی هم کتاب راهنمای معلم است که بسیار فراتر از آن‌چه در کتاب درسی و کتاب کار آمده، به تعمیق مطالب می‌پردازد. این کتاب از بخش‌های متفاوتی تشکیل شده که یکی دانش‌افزایی است. در این کتاب در ارتباط با روش‌های یادگیری، ارزش‌یابی و سایر مسائل مربوط به آموزش ریاضی بحث می‌شود و چگونگی تدریس هر صفحه‌ی کتاب درسی به‌طور کامل، از شروع تا پایان، آموزش داده می‌شود. یعنی در راهنمای معلم، صفحه‌ی کتاب درسی عیناً می‌آید و گفته می‌شود که هدف از ارائه‌ی این مفهوم ریاضی یا این صفحه‌ی کتاب چیست؟ برای آن صفحه، تمرین‌هایی برای شاگردان قوی‌تر، تمرین‌هایی برای شاگردان متوسط و تمرین‌هایی برای شاگردان ضعیف وجود دارد. بنابراین، معلم با در دست داشتن کتاب راهنما با این شیوه، به‌راحتی قادر به تدریس موفق کتاب‌های درسی است.

■ آیا خودتان در این زمینه کارها یا نمونه‌هایی تألیف کرده‌اید یا نه؟

○ کتاب‌هایی که من نوشته‌ام، کتاب‌های درسی، کمک‌درسی و کمک‌آموزشی هستند.

■ نه، در این زمینه‌ای که فرمودید سه قسمت است و یک بسته‌ی آموزشی، آیا در این زمینه کار کرده‌اید؟

○ بخشی از آن را انجام داده‌ام. مثلاً کتاب کار هندسه(۱) و کتاب کار هندسه(۲) را نوشته‌ام و چاپ هم شده است. هم‌اکنون نیز در دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی وزارت آموزش و پرورش، کتاب راهنمای معلم هندسه را در دست تألیف داریم. تقریباً ۹۰ درصد مقاله‌هایش آماده است. درحقیقت این کتاب، اولین کتاب راهنمای معلم است که برای هندسه نوشته می‌شود. امیدوارم که ان‌شاءالله در آینده، سمت‌وسوی تألیف کتاب‌ها به این سمت برود که بسته‌ی آموزشی کامل باشد.

■ **سؤال بعدی ما درباره‌ی کار اصلی شما در تألیف کتاب‌های هندسه، یعنی دایرةالمعارف هندسه است که ظاهراً ۱۵ جلد است و چاپ هم شده. از کی به این فکر افتادید که ما به چنین دایرةالمعارفی نیاز داریم و این دایرةالمعارف در چه سطحی است؟ به درد شاگردان می‌خورد یا دانشجویان رشته‌ی ریاضی یا محققین؟ یا به درد همه؟**

○ دایرةالمعارف هندسه ۲۰ جلد پیش‌بینی شده است.

■ **یعنی بقیه دارد؟**

○ بله، ۱۵ جلد آن چاپ شده و ۲ جلد هم در چاپ‌خانه‌ی انتشارات مدرسه منتظر نوبت چاپ است. این ۲ جلد، جلدهای ۱۶ و ۱۷، مربوط به هندسه‌ی فضایی هستند. امیدوارم که هرچه زودتر چاپ شوند. جلد ۱۸ هندسه‌ی تحلیلی است و جلد ۱۹ مقاطع مخروطی. جلد ۲۰ هم هندسه‌های نااقلیدسی است.

■ **به هندسه‌ی تصویری نپرداخته‌اید؟**

○ هندسه‌ی تصویری را در دو بخش در تبدیلات هندسی در جلدهای ۸ و ۹ آورده‌ام. منتها از هندسه‌ای که در قدیم به اسم هندسه‌ی ترسیمی رقومی یا هندسه‌ی ترسیمی و رسم فنی بود، گرچه علاقه داشتم که جزو دایرةالمعارف هندسه باشد، ولی برای این‌که تعداد جلدها بیشتر نشود و ۲۰ جلد باشد، فعلاً صرف‌نظر کردم.

■ **هندسه‌ی رقومی ممکن است قابل صرف‌نظر کردن باشد، ولی هندسه‌ی ترسیمی نه.**

○ من اعتقاد دارم که هر شاخه‌ای از هندسه در جایگاه خودش اهمیت دارد و لازم است. من دایرةالمعارف هندسه را حدود ۲۵ جلد در نظر گرفته بودم که اگر توفیقی باشد، شاید جلدهای دیگری هم به نحوی تألیف شوند.

علاوه بر هندسه‌های رقومی و ترسیمی، بخش دیگری از هندسه، مثلثات است که در این ۲۰ جلد نیست.

اما این که فرمودید از کجا این نیاز را حس کردید. من از شروع معلمی، یعنی از سال ۱۳۴۱، وقتی تدریس هندسه را شروع کردم، می‌خواستم در هر جلسه‌ی درس، چند مسئله غیر از مسئله‌های کتاب درسی به دانش‌آموزان بدهم. هرجا که جست‌وجو می‌کردم، می‌دیدم غیر از یکی دو کتاب که تألیف آقای دکتر حسن صفاری و استاد ابوالقاسم قربانی بودند، کتاب هندسه‌ی دیگری وجود ندارد. آن‌ها هم در واقع حل‌المسائل هندسه بودند. بنابراین **نیاز به تألیف مجموعه‌ی کاملی از هندسه، شامل تعریف‌ها، قضیه‌ها، مسئله‌ها و تاریخ هندسه را از همان شروع شغل معلمی‌ای احساس کردم** تا علاقه‌مندان به این شاخه از ریاضی، با دست‌رسی به تمام مطالب مربوط به مباحث گوناگون هندسه و بررسی آن‌ها، به احاطه‌ای کامل بر هر مبحث دست پیدا کنند. به همین دلیل، از حدود ۴۵ سال قبل به جمع‌آوری تعریف‌ها، قضیه‌ها، مسئله‌ها و تاریخ هندسه‌ی موجود در کتاب‌های ریاضی به زبان فارسی، ترجمه شده به فارسی و کتاب‌های خارجی که در اختیار و یا در دست‌رس من بودند، پرداختم تا دایرةالمعارف هندسه را تألیف کنم. برای این کار تمام مطالب هندسه را براساس موضوع‌های زیر دسته‌بندی کردم:

- ویژگی‌های توصیفی شکل‌های هندسی در هندسه‌ی مسطحه؛
- رابطه‌های متری در هندسه‌ی مسطحه؛
- تبدیل‌های هندسی (انتقال، بازتاب، دوران، تجانس، انعکاس و...) در هندسه‌ی مسطحه؛
- مکان‌های هندسی در هندسه‌ی مسطحه؛
- رسم شکل‌های هندسی در هندسه‌ی مسطحه؛
- هندسه‌ی فضایی؛
- هندسه‌ی تحلیلی؛
- مقاطع مخروطی (دایره، بیضی، هذلولی

و سهمی)؛

● هندسه‌های نااقلیدسی.

هریک از این موضوع‌ها، با توجه به حجم مطالب، یک یا چند جلد از دایرةالمعارف هندسه را شامل می‌شود: برای مثال، رابطه‌های متری در هندسه‌ی مسطحه پنج جلد است و از جلد سوم شروع می‌شود که عبارت‌اند از:

جلد ۳. نسبت پاره‌خط‌ها در هندسه‌ی مسطحه (نسبت و تناسب، قضیه‌ی تالس، تشابه و...)

جلد ۴. رابطه‌های متری در دایره

جلد ۵. رابطه‌های متری در مثلث، و مثلث و دایره‌های محیطی و محاطی

جلد ۶. رابطه‌های متری در مثلث‌های ویژه (متساوی‌الساقین، قائم‌الزاویه، متساوی‌الاضلاع، مثلث با زاویه‌های حاده و مثلث با زاویه‌ی منفرجه)

جلد ۷. رابطه‌های متری در چندضلعی‌ها

در تمام جلدهای دایرةالمعارف هندسه:

● مطالب با نظم خاص آمده‌اند. مثلاً در هر بخش از هر جلد، ابتدا تعریف‌ها و قضیه‌های مربوط به آن بخش آمده‌اند.

● صورت مسئله‌ها جدا از حل مسئله‌ها آورده شده است تا دانشجویان قبل از مراجعه به حل یا راهنمایی قضیه‌ها و مسئله‌ها، خود به حل آن‌ها بپردازند و آن‌گاه راه‌حل خود را با راه‌حل موجود در دایرةالمعارف مقایسه کنند.

● مسئله‌ها از ساده به مشکل تنظیم شده‌اند.

● مسئله‌های المپیادهای ریاضی کشورهای گوناگون و المپیادهای بین‌المللی ریاضی، هر کدام در مبحث مربوط به خود آمده‌اند.

● قضیه‌ها و مسئله‌های مشهور و تاریخی هندسه، مانند قضیه‌ی پروانه، قضیه‌ی پاپوس، قضیه‌ی تالس، قضیه‌ی فیثاغورس، قضیه‌ی سوا، و... هر کدام با ذکر تاریخچه‌ای از زمان ارائه و راه‌حل آن‌ها، در جای مربوط به خود آمده‌اند.

● اکثر قضیه‌ها و مسئله‌ها حل شده‌اند و یا راهنمای حل دارند.

■ گروه مخاطبان را نفرمودید.

○ با توجه به این‌که ۱۳۰ منبع فارسی و لاتین جزو منابع دایرةالمعارف هندسه هستند و با توجه به این‌که تمام تعاریف، قضیه‌ها، مسئله‌ها و مسئله‌های المپیادهای ریاضی کشورهای گوناگون در این مجموعه آمده‌اند، مخاطبین آن شامل طیف وسیعی از دانش‌آموزان، دانشجویان رشته‌ی ریاضی دانشگاه‌ها و مراکز تربیت‌معلم، معلمان ریاضی، داوطلبان المپیادهای ریاضی و هر فرد علاقه‌مند به هندسه در ایران و دیگر کشورهای جهان است.

■ آیا تا به حال در جشنواره‌های کشوری، شما یا کتاب‌هایتان رتبه‌ای کسب کرده‌اید؟

○ بله:

- در دومین جشنواره‌ی کشوری معلمان مؤلف در اردیبهشت‌ماه سال ۱۳۸۱، دایرةالمعارف هندسه بین کتاب‌های علوم پایه حائز رتبه‌ی اول شد و لوح تقدیر و تندیس جشنواره را دریافت کردم.

- در سومین جشنواره‌ی رشد وزارت آموزش و پرورش در آذرماه سال ۱۳۸۱، دایرةالمعارف هندسه بین کتاب‌های علوم پایه حائز رتبه‌ی اول شد و لوح تقدیر و تندیس جشنواره را دریافت کردم.

- در چهارمین جشنواره‌ی کشوری معلمان مؤلف در اردیبهشت‌ماه سال ۱۳۸۱، جلد اول کتاب مکان هندسی بین کتاب‌های علوم پایه به رتبه‌ی اول دست یافت و علاوه بر دریافت لوح تقدیر و تندیس جشنواره، به افتخار سفر حج عمره به اتفاق همسرم نائل آمدم.

- در اولین جشنواره‌ی تقدیر از مؤلفان کتاب‌های درسی ایران که توسط وزارت آموزش و پرورش در دی‌ماه سال ۱۳۸۴ برگزار شد، به‌عنوان یکی از سه نفر مؤلف برگزیده‌ی کتاب‌های درسی ریاضی انتخاب شدم و لوح تقدیر و تندیس جشنواره را دریافت داشتم.

■ خب، سؤالات ما تمام شد. اگر خود شما نکته‌ای به نظرتان می‌رسد که تکمیل کنید، بفرمایید. تشکر می‌کنم. شما واقعاً دینتان را به جامعه ادا کرده‌اید؛ با سه دکتری که از فرزندانتان به جامعه داده‌اید و فرزندان معنویتان، به‌خصوص این دایرةالمعارف ۲۰ جلدی که صحبتش بود. با تشکر از وقتی که در اختیار مجله‌ی برهان، مجله‌ی خودتان درواقع، گذاشتید، اگر نکته‌ای به نظرتان می‌رسد که بحثمان را تکمیل می‌کند، بفرمایید.

○ می‌خواستم بار دیگر از دوستان بسیار گران‌قدر و بزرگوارم که نسبت به من لطف و محبت دارند، یعنی هیئت تحریریه‌ی مجله برهان که استاد شهریاری، استاد قندهاری، استاد یاسی‌پور، استاد حمیدرضا امیری، استاد صدر و استاد شرقی، استاد هاشمی موسوی هستند و من در خدمتشان بوده‌ام، تشکر و سپاس گزاری کنم. تشکر ویژه‌ای هم داشته باشم از آقای حمیدرضا امیری، سردبیر مجله‌ی برهان، و آقای میرشهرام صدر، مدیر داخلی مجله‌ی برهان که دو عامل تداوم انتشار مجله‌ی برهان و ایجاد همدلی میان اعضای هیئت تحریریه‌ی این مجله هستند که امیدوارم این همدلی ادامه داشته باشد.

من فکر می‌کنم بعد از مجله‌ی یکان که در جای خودش خدمت بزرگی به دانش‌آموزان و دانش ریاضی این مملکت کرد، مجله‌ی ریاضی برهان یکی از مجلاتی است که شاید هنوز بخشی از خدمت‌هایش ناشناخته مانده‌اند و جزو مجلاتی است که خدمات گران‌قدری به جامعه‌ی دانش‌آموزی ایران کرده است. آن‌چه من انجام داده‌ام، وظیفه‌ام بوده است و اکنون هم خودم را معلم کوچکی می‌دانم از دریای بیکران معلمین این مملکت و این سرزمین. کاری که انجام داده‌ام، کار کوچکی بوده است. از خدا توفیق همه‌ی همکاران و دوستان هیئت تحریریه‌ی مجله را خواستارم و امیدوارم این کار ناقابلی که انجام داده‌ام، مورد قبول جامعه‌ی دانش‌آموزی و معلمین کشورمان قرار گرفته باشد.

■ با تشکر مجدد از جناب‌عالی و آرزوی سلامت و تندرستی و عمر دراز برای شما و برای کارهای آینده‌تان، شما را به خدا می‌سپارم.

کشف فرمول اعداد اول و نتایج آن

(حل مسئله‌های لاینحل ۲۳۰۰ ساله)

قسمت ۵

• سید محمدرضا هاشمی موسوی

hashemi – moosavi@yahoo.com

اشاره

در قسمت اول تا چهارم مقاله، با سیر تکاملی کشف فرمول اعداد اول و نتایج آن که از اساسی‌ترین آن‌ها حل معادله‌های سیال مرتبه‌ی nام است، آشنا شدید. اکنون آخرین قسمت مقاله، از کتاب مرجع[1] به‌صورت چکیده ارائه می‌شود. برای اطلاع بیش‌تر از عناوین و موضوعات کتاب مذکور به سایت کاشف فرمول اعداد اول[2] مراجعه کنید.

حل معادله‌های سیال با قوای غیرمتشابه (برابری‌های چندگانه)

در معادله‌ی عمومی زیر، اگر p_1، p_2، ... و p_k عددهایی متمایز باشند، برای معادله می‌توان یک سلسله جواب عمومی با k پارامتر ارائه داد:

$$(p_1 \neq p_2 \neq p_3 \neq \cdots \neq p_k)$$

$$X_1^{p_1} + X_2^{p_1} + \cdots + X_k^{p_1} = Y_1^{p_2} + Y_2^{p_2} + \cdots + Y_k^{p_2} \qquad (1)$$

$$= \cdots = Z_1^{p_k} + Z_2^{p_k} + \cdots + Z_k^{p_k}$$

برای تعیین یک سلسلهٔ جواب عمومی برای معادله‌ی ۱ کافی است، آن را با اتحاد زیر مقایسه کنیم:

(۲)

$$(a_1^{p_2p_3\cdots p_k})^{p_1} + (a_2^{p_2p_3\cdots p_k})^{p_1} + \cdots + (a_k^{p_2p_3\cdots p_k})^{p_1} =$$

$$(a_1^{p_1p_3\cdots p_k})^{p_2} + (a_2^{p_1p_3\cdots p_k})^{p_2} + \cdots + (a_k^{p_1p_3\cdots p_k})^{p_2} = \cdots$$

$$(a_1^{p_1p_2\cdots p_{k-1}})^{p_k} + (a_2^{p_1p_2\cdots p_{k-1}})^{p_k} + \cdots + (a_k^{p_1p_2\cdots p_{k-1}})^{p_k}$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی۱ با اتحاد۲، یک سلسله جواب عمومی با k پارامتر دل‌خواه برای معادله‌ی ۱ حاصل می‌شود:

$$(۳)\left|\begin{array}{l} X_{۱} = a_{۱}^{p_{۲}p_{۳}\cdots p_{k}}, X_{۲} = a_{۲}^{p_{۲}p_{۳}\cdots p_{k}}, \cdots, X_{k} = a_{k}^{p_{۲}p_{۳}\cdots p_{k}} \\ Y_{۱} = a_{۱}^{p_{۱}p_{۳}\cdots p_{k}}, Y_{۲} = a_{۲}^{p_{۱}p_{۳}\cdots p_{k}}, \cdots, Y_{k} = a_{k}^{p_{۱}p_{۳}\cdots p_{k}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Z_{۱} = a_{۱}^{p_{۱}p_{۲}\cdots p_{k-۱}}, Z_{۲} = a_{۲}^{p_{۱}p_{۲}\cdots p_{k-۱}}, \cdots, Z_{k} = a_{k}^{p_{۱}p_{۲}\cdots p_{k-۱}} \end{array}\right.$$

مثال: یک سلسله جواب عمومی معادله‌ی زیر را بیابید: $(m \neq n \neq p \neq q)$

$$X_{۱}^{m} + X_{۲}^{m} = Y_{۱}^{n} + Y_{۲}^{n} = Z_{۱}^{p} + Z_{۲}^{p} = T_{۱}^{q} + T_{۲}^{q} \qquad (۳)$$

حل: برای تعیین یک سلسله جواب عمومی معادله‌ی۳ کافی است آن را با اتحاد زیر مقایسه کنیم:

$$\left(a^{npq}\right)^{m} + \left(b^{npq}\right)^{m} = \left(a^{mpq}\right)^{n} + \left(b^{mpq}\right)^{n} \qquad (۴)$$

$$= \left(a^{mnq}\right)^{p} + \left(b^{mnq}\right)^{p} = \left(a^{mnp}\right)^{q} + \left(b^{mnp}\right)^{q}$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی۳ با اتحاد۴، بلافاصله یک سلسله از جواب‌های معادله‌ی۳ نتیجه می‌شود:

$$X_{۱} = a^{npq} \;,\; X_{۲} = b^{npq} \;,\; Y_{۱} = a^{mpq} \;,\; Y_{۲} = b^{mpq} \;,$$
$$Z_{۱} = a^{mnq} \;,\; Z_{۲} = b^{mnq} \;,\; T_{۱} = a^{mnp} \;,\; T_{۲} = b^{mnp}$$

مثال: با شرط $m \neq n$، یک سلسله از جواب‌های عمومی معادله‌ی زیر را تعیین کنید:

$$X_{۱}^{m} + X_{۲}^{m} + X_{۳}^{m} = Y_{۱}^{n} + Y_{۲}^{n} + Y_{۳}^{n} \qquad (۵)$$

حل: کافی است معادله‌ی۵ را با اتحاد زیر مقایسه کنیم:

$$m \neq n:\; (a^{n})^{m} + (b^{n})^{m} + (c^{n})^{m} \qquad (۶)$$
$$= (a^{m})^{n} + (b^{m})^{n} + (c^{m})^{n}$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی۵ با اتحاد۶، یک سلسله از جواب‌های عمومی معادله حاصل می‌شود:

$$X_{۱} = a^{n} \;,\; X_{۲} = b^{n} \;,\; X_{۳} = c^{n} \;,\; Y_{۱} = a^{m} \;,$$
$$Y_{۲} = b^{m} \;,\; Y_{۳} = c^{m}$$

مثال: با شرط $m \neq n \neq p$، یک سلسله از جواب‌های عمومی معادله‌ی زیر را بیابید:

$$X_{۱}^{m} + X_{۲}^{m} + X_{۳}^{m} + X_{۴}^{m} = Y_{۱}^{n} + Y_{۲}^{n} + Y_{۳}^{n} + Y_{۴}^{n} \qquad (۷)$$
$$= Z_{۱}^{p} + Z_{۲}^{p} + Z_{۳}^{p} + Z_{۴}^{p}$$

حل: کافی است معادله‌ی ۷ را با اتحاد زیر مقایسه کنیم:

$$(a^{np})^{m} + (b^{np})^{m} + (c^{np})^{m} + (d^{np})^{m} \qquad (۸)$$
$$= (a^{mp})^{n} + (b^{mp})^{n} + (c^{mp})^{n} + (d^{mp})^{n}$$
$$= (a^{mn})^{p} + (b^{mn})^{p} + (c^{mn})^{p} + (d^{mn})^{p}$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی۷ با اتحاد۸، یک سلسله از جواب‌های عمومی معادله حاصل می‌شود:

$$X_{۱} = a^{np} \;,\; X_{۲} = b^{np} \;,\; X_{۳} = c^{np} \;,\; X_{۴} = d^{np} \;,$$
$$Y_{۱} = a^{mp} \;,\; Y_{۲} = b^{mp} \;,\; Y_{۳} = c^{mp} \;,\; Y_{۴} = d^{mp} \;,$$
$$Z_{۱} = a^{mn} \;,\; Z_{۲} = b^{mn} \;,\; Z_{۳} = c^{mn} \;,\; Z_{۴} = d^{mn}$$

مثال: معادله‌ی زیر را از نظر داشتن یا نداشتن جواب بررسی کنید:

$$X_{۱}^{۱۳۸۴} + X_{۲}^{۱۳۸۴} = Y_{۱}^{۱۷۳} + Y_{۲}^{۱۷۳} \qquad (۹)$$
$$= Z_{۱}^{۸} + Z_{۲}^{۸} = T_{۱}^{۴} + T_{۲}^{۴} = U_{۱}^{۲} + U_{۲}^{۲}$$

حل: ابتدا کوچک‌ترین مضرب مشترک بین قوای معادله را تعیین می‌کنیم:

$$۱۳۸۴ = ۲^{۳} \times ۱۷۳ = ۴ \times ۳۴۶ = ۲ \times ۶۹۲$$
$$[۱۳۸۴, ۱۷۳] = ۱۳۸۴ \;,\; [۱۳۸۴, ۸] = ۱۳۸۴$$

با توجه به این که کوچک‌ترین مضرب مشترک بین قوای معادله، عدد ۱۳۸۴ است، اتحاد زیر را می‌توان نوشت:

$$(a)^{۱۳۸۴} + (b)^{۱۳۸۴} = (a^{۸})^{۱۷۳} + (b^{۸})^{۱۷۳} \qquad (۱۰)$$
$$= (a^{۱۷۳})^{۸} + (b^{۱۷۳})^{۸} = (a^{۳۴۶})^{۴} + (b^{۳۴۶})^{۴}$$
$$= (a^{۶۹۲})^{۲} + (b^{۶۹۲})^{۲}$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی ۹ با اتحاد ۱۰، یک سلسله جواب عمومی با دو پارامتر دل‌خواه برای معادله‌ی ۹ حاصل می‌شود:

$$X_{۱} = a \;,\; X_{۲} = b \;,\; Y_{۱} = a^{۸} \;,\; Y_{۲} = b^{۸} \;,\; Z_{۱} = a^{۱۷۳} \;,$$
$$Z_{۲} = b^{۱۷۳} \;,\; T_{۱} = a^{۳۴۶} \;,\; T_{۲} = b^{۳۴۶} \;,\; U_{۱} = a^{۶۹۲} \;,$$
$$U_{۲} = b^{۶۹۲}$$

مثال: معادله‌ی زیر را از نظر داشتن یا نداشتن جواب بررسی کنید:

$$X_{۱}^{۳۰!+۱} + X_{۲}^{۳۰!+۱} = Y_{۱}^{۳۱} + Y_{۲}^{۳۱} \qquad (۱۳)$$

حل: با توجه به قضیه‌ی ویلسن و اتحاد H.M، می‌توان نوشت ($[\;]$: قسمت درست عدد):

$$p = ۳۱:\; (p-۱)!+۱ = p\left(۱+۲\left[\frac{(p-۱)!+۱}{۲p}\right]\right)$$
$$= ۳۱\left(۱+۲\left[\frac{۳۰!+۱}{۶۲}\right]\right)$$

بنابراین:

$$[۳۰!+۱, ۳۱] = ۳۰!+۱$$

پس این اتحاد برقرار است:

$$(a)^{30!+1} + (b)^{30!+1} = \left(a^{1+2\left[\frac{30!+1}{62}\right]}\right)^{31} + \left(b^{1+2\left[\frac{30!+1}{62}\right]}\right)^{31} \quad (14)$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی ۱۳ با اتحاد ۱۴، یک سلسله جواب عمومی معادله حاصل می‌شود:

$$X_1 = a \;,\; X_2 = b \;,\; Y_1 = a^{1+2\left[\frac{30!+1}{62}\right]} \;,\; Y_2 = b^{1+2\left[\frac{30!+1}{62}\right]}$$

در این جا، قضیه‌ی اساسی H.M را در رابطه با حل معادله‌های سیال با قوای غیرمتشابه (برابری‌های چندگانه) ارائه می‌دهیم.

قضیه‌ی H.M: معادله‌ی عمومی زیر، با فرض این‌که p_1، p_2، ...، p_k عددهایی متمایز باشند، همیشه دارای جواب است: $(p_1 \neq p_2 \neq p_3 \neq \cdots p_k)$

$$X_1^{p_1} + X_2^{p_1} + \cdots + X_k^{p_1} = Y_1^{p_2} + Y_2^{p_2} + \cdots + Y_k^{p_2}$$
$$= \cdots = Z_1^{p_k} + Z_2^{p_k} + \cdots + Z_k^{p_k}$$

قانون تحویل‌پذیری H.M برای معادله‌های سیال قوای متشابه

معادله‌ی سیال با قوای متشابه به صورت عمومی با اندیس k را در نظر می‌گیریم:

$$X_1^n + X_2^n + \cdots + X_k^n = X_{k+1}^n \quad (1)$$

این معادله به معادله‌هایی با اندیس $(k-1)N+k$ قابل تحویل است و از نظر داشتن یا نداشتن جواب، به این‌گونه معادله‌ها وابسته است و هیچ‌گونه استقلالی ندارد. در صورتی که یکی از معادله‌ها با اندیس $(k-1)N+k$ جواب نداشته باشد، معادله‌ی ۱ نیز جواب ندارد.

برای مثال، معادله‌ی زیر با اندیس $k = 2$ را در نظر می‌گیریم:

$$X^n + Y^n = Z^n \quad (2)$$

نشان می‌دهیم که معادله‌ی ۲ در حالت عمومی به معادله‌های ۱ قابل تحویل است و از نظر داشتن یا نداشتن جواب به این معادله‌ها وابسته است.

برای اثبات این مطلب کافی است معادله‌ی ۲ را به صورت $Y^n = Z^n - X^n$ بنویسیم، دو طرف این معادله را در عبارت زیر ضرب کنیم و سپس آن را به صورت ۱ بنویسیم:

$$(Z^{k-2})^n + (Z^{k-3}X)^n + \cdots + (ZX^{k-3})^n + (X^{k-2})^n$$

پس از انجام عملیات لازم به برابری زیر می‌رسیم:

$$(X^{k-1})^n + (X^{k-2}Y)^n + (X^{k-3}YZ)^n \quad (3)$$
$$+ (X^{k-4}YZ^2)^n + \cdots + (YZ^{k-2})^n = (Z^{k-1})^n$$

از برابری ۳، حکم مسلم زیر که حکمی اصلی و اساسی در رابطه با تحویل‌پذیری معادله‌ی ۲ است، نتیجه می‌شود.

حکم اساسی H.M: معادله‌ی ۲ در حالت عمومی، خاصیت تحویل‌پذیری به حالت خاص هر معادله از معادله‌های ۱ را دارد.

تبصره: حکم اساسی H.M قابل تعمیم است و به سادگی، حکم زیر نیز نتیجه می‌شود.

حکم اساسی تعمیم یافته‌ی H.M: معادله‌ی ۲ در حالت عمومی، خاصیت تحویل‌پذیری به حالت خاص هریک از معادله‌های عمومی زیر را دارد:

$$X_1^n + X_2^n + X_3^n + \cdots + X_k^n = Y_1^n + Y_2^n + \cdots + Y_s^n \quad (4)$$

توجه: معادله‌ی ۴ در واقع شامل همه‌ی معادله‌های قوای متشابه می‌شود و بدیهی است که معادله‌ی ۲ از نظر داشتن یا نداشتن جواب، به معادله‌های عمومی ۴ وابسته است و این واقعیت به قضایای زیر نیز منجر می‌شود.

قضیه‌ی اساسی اول H.M: اگر معادله‌ی ۲ به ازای هر n طبیعی جواب داشته باشد، آن‌گاه همه‌ی معادله‌ی قوای متشابه ۴ برای همان n دارای جواب هستند.

قضیه‌ی اساسی دوم H.M: اگر یکی از معادله‌های عمومی ۴ به ازای هر n طبیعی جواب نداشته باشد، معادله‌ی ۲ نیز برای همان n دارای جواب نیست.

نکته: می‌دانیم معادله‌ی ۲ برای هر $n \geq 3$ جوابی به جز صفر ندارد (قضیه یا در اصل حکم بزرگ فرما). بدیهی است که اگر معادله‌ی ۲ برای هر n طبیعی لااقل یک جواب خاص داشته باشد، همه‌ی معادلات قوای متشابه ۴ نیز برای همان توان دارای جواب هستند. از آن‌جا که معادله‌ی ۲ به ازای $n = 2$ دارای جواب عمومی است، معادله‌های ۴ نیز به ازای $n = 2$ دارای جواب‌اند. در این جا معلوم می‌شود که برای حل معادله‌ی ۲ بی‌نهایت شرایط لازم وجود دارد، یعنی همه‌ی معادله‌های قوای متشابه ۴ باید دارای جواب باشند. همین واقعیت امکان وجود جواب برای معادله‌ی ۲ را در حالت $n \geq 3$ به صفر می‌رساند.

در این جا برای نشان دادن کاربرد قانون تحویل‌پذیری H.M در حل معادله‌های قوای متشابه کافی است به بررسی معادله‌های زیر بپردازیم:

I) $X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_k^2 = X_{k+1}^2$

II) $X_1^3 + X_2^3 + \cdots + X_{2k+1}^3 = X_{2k+2}^3$

III) $X_1^3 + X_2^3 + \cdots + X_{3k+1} = X_{3k+2}^3$

IV) $X_1^4 + X_2^4 + \cdots + X_{2s+1}^4 = X_{2s+2}^4$

V) $X_1^5 + X_2^5 + \cdots + X_{3t+1}^5 = X_{3t+2}^5$

برای بررسی معادله‌های فوق از نظر وجود یا نبود جواب، کافی است یک جواب خاص برای هریک از معادله‌ها ارائه دهیم:

I) $a_1^2 + b_1^2 = c_1^2 \;;\; a_1 = 3 \;,\; b_1 = 4 \;,\; c_1 = 5 \;:\; 3^2 + 4^2 = 5^2$

$b_1^2 = c_1^2 - a_1^2 \;;$

$$b_1^2\left((c_1^2)^{k-1} + (c_1^2)^{k-2}a_1^2 + \cdots (a_1^2)^{k-1}\right) = (c_1^2)^k - (a_1^2)^k$$

با توجه به قانون تحویل‌پذیری H.M، معادله‌ی $a_1^2+b_1^2=c_1^2$ به معادله‌ی زیر تحویل می‌شود:

$$(a_1^k)^2+(b_1c_1^{k-1})^2+(a_1b_1c_1^{k-2})^2+\dots+(b_1a_1^{k-1})^2=(c_1^k)^2 \qquad (1)$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی I با اتحاد ۱، یک دسته جواب عمومی برای آن حاصل می‌شود:

$$X_1=a_1^k\ ,\ X_2=b_1c_1^{k-1}\ ,\ X_3=a_1b_1c_1^{k-2}\ ,\dots,$$
$$X_k=b_1a_1^{k-1}\ ,\ X_{k+1}=c_1^k$$

در صورتی که $a_1=u^2-v^2$، $b_1=2uv$ و $c_1=u^2+v^2$ اختیار شوند، یک سلسله جواب عمومی معادله‌ی I حاصل می‌شود:

$$\left((u^2-v^2)^k\right)^2+\left((2uv)(u^2+v^2)^{k-1}\right)^2$$
$$+\dots+\left((2uv)(u^2-v^2)^{k-1}\right)^2=\left((u^2+v^2)^k\right)^2$$
$$X_1=(u^2-v^2)^k\ ,\ X_2=(2uv)(u^2+v^2)^{k-1},\dots,$$
$$X_k=(2uv)(u^2-v^2)^{k-1}, X_{k+1}=(u^2+v^2)^k$$

یک جواب عددی خاص معادله‌ی I نیز چنین است:

$$X_1=3^k\ ,\ X_2=4\times5^{k-1}\ ,\ X_3=3\times4\times5^{k-2},\dots,$$
$$X_k=4\times3^{k-1}\ ,\ X_{k+1}=5^k$$

II) $a_2^3+b_2^3+c_2^3=d_2^3$; $a_2=3$, $b_2=4$, $c_2=5$, $d_2=6$: $3^3+4^3+5^3=6^3$

$$b_2^3+c_2^3=d_2^3-a_2^3\ ,$$
$$(b_2^3+c_2^3)\left((d_2^3)^{k-1}+(d_2^3)^{k-2}(a_2^3)+\dots+(a_2^3)^{k-1}\right)$$
$$=(d_2^3)^k-(a_2^3)^k$$

با توجه به قانون تحویل‌پذیری H.M معادله‌ی $a_2^3+b_2^3+c_2^3=d_2^3$ به معادله‌ی زیر تخویل می‌شود:

$$(a_2^k)^3+(b_2d_2^{k-1})^3+(c_2d_2^{k-1})^3+(b_2a_2d_2^{k-2})^3$$
$$+(c_2a_2d_2^{k-2})^3+\dots+(c_2a_2^{k-1})^3=(d_2^k)^3 \qquad (2)$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی II و اتحاد ۲، یک دسته جواب عمومی برای آن حاصل می‌شود:

$$X_1=a_2^k\ ,\ X_2=b_2d_2^{k-1}\ ,\ X_3=c_2d_2^{k-1}\ ,\dots,$$
$$X_{2k+1}=c_2a_2^{k-1}\ ,\ X_{2k+2}=d_2^k$$

یک جواب عددی برای معادله‌ی II نیز چنین است:

$$X_1=3^k\ ,\ X_2=4\times6^{k-1}\ ,\ X_3=5\times6^{k-1}\ ,\dots,$$
$$X_{2k+1}=5\times3^{k-1}\ ,\ X_{2k+2}=6^k$$

در صورتی که a_2، b_2، c_2 و d_2 را برحسب دو پارامتر دل‌خواه در نظر بگیریم:

$$\begin{cases}a_2=20u^2+10uv-3v^2\\ b_2=12u^2-10uv-5v^2\\ c_2=16u^2+8uv+6v^2\\ d_2=42u^2+7uv+4v^2\end{cases}$$

یک سلسله جواب عمومی معادله‌ی II حاصل می‌شود:

$$X_1=(20u^2+10uv-3v^2)^k$$
$$X_2=(12u^2-10uv-5v^2)(42u^2+7uv+4v^2)^{k-1},$$
$$\dots,\ X_{2k+1}=(16u^2+8uv+6v^2)(20u^2+10uv-3v^2)^{k-1},$$
$$X_{2k+2}=(42u^2+7uv+4v^2)^k$$

توجه: با تعویض متغیرها می‌توان به دسته جواب‌های جدیدتری رسید.

III) $a_3^3+b_3^3+c_3^3+d_3^3=h_3^3$;

$a_3=1$, $b_3=5$, $c_3=4$, $d_3=12$, $h_3=13$:

$$1^3+5^3+4^3+12^3=13^3$$
$$b_3^3+c_3^3+d_3^3=h_3^3-a_3^3\ ;$$
$$(b_3^3+c_3^3+d_3^3)\left((h_3^3)^{k-1}+(h_3^3)^{k-2}(a_3^3)+\dots+(a_3^3)^{k-1}\right)$$
$$=(h_3^3)^k-(a_3^3)^k$$

با توجه به قانون تحویل‌پذیری H.M، معادله‌ی $a_3^3+b_3^3+c_3^3+d_3^3=h_3^3$ به معادله‌ی زیر تحویل می‌شود:

$$(a_3^k)^3+(b_3h_3^{k-1})^3+(c_3h_3^{k-1})^3+(d_3h_3^{k-1})^3$$
$$+\dots+(d_3a_3^{k-1})^3=(h_3^k)^3 \qquad (3)$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی III و اتحاد ۳، یک دسته جواب عمومی برای آن حاصل می‌شود:

$$X_1=a_3^k\ ,\ X_2=b_3h_3^{k-1}\ ,\ X_3=c_3h_3^{k-1}\ ,$$
$$X_4=d_3h_3^{k-1}\ ,\dots,\ X_{3k+1}=d_3a_3^{k-1}\ ,\ X_{3k+2}=h_3^k$$

یک جواب عددی برای معادله‌ی III نیز چنین است:

$$X_1=1\ ,\ X_2=5\times13^{k-1}\ ,\ X_3=4\times13^{k-1}\ ,$$
$$X_4=12\times13^{k-1}\ ,\dots,\ X_{3k+1}=12\ ;\ X_{3k+2}=13^k$$

IV) $a_4^4+b_4^4+c_4^4=d_4^4$; $a_4=95800$,

$b_4=217519$, $c_4=414560$, $d_4=422481$:

$$(95800)^4+(217519)^4+(414560)^4=(422481)^4$$
$$b_4^4+c_4^4=d_4^4-a_4^4\ ,$$

$$(b_4^4+c_4^4)\left((d_4^4)^{k-1}+(d_4^4)^{k-2}(a_4^4)+\cdots+(a_4^4)^{k-1}\right)$$
$$=(d_4^4)^k-(a_4^4)^k$$

با توجه به قانون تحویل‌پذیری H.M، معادله‌ی $a_4^4+b_4^4+c_4^4=d_4^4$ به معادله‌ی زیر تحویل می‌شود:

(۴)
$$(a_4^k)^4+(b_4d_4^{k-1})^4+(c_4d_4^{k-1})^4+\cdots+(c_4a_4^{k-1})^4=(d_4^k)^4$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی IV و اتحاد۴، یک دسته جواب عمومی برای آن حاصل می‌شود:

$$X_1=a_4^k\ ,\ X_2=b_4d_4^{k-1}\ ,\ X_3=c_4d_4^{k-1},\ldots,$$
$$X_{2s+1}=c_4a_4^{k-1}\ ,\ X_{2s+2}=d_4^k$$

یک جواب عددی برای معادله‌ی IV نیز چنین است:

$$X_1=(95800)^k\ ,\ X_2=(217519)(422481)^{k-1}\ ,$$
$$X_3=(414560)(422481)^{k-1}\ ,\ldots,$$
$$X_{2s+1}=(414560)(95800)^{k-1}\ ,\ X_{2s+2}=(422481)^k$$

V) $a_5^5+b_5^5+c_5^5+d_5^5=h_5^5$; $a_5=27$, $b_5=84$, $c_5=110$, $d_5=133$, $h_5=144$:

$$(27)^5+(84)^5+(110)^5+(133)^5=(144)^5$$
$$b_5^5+c_5^5+d_5^5=h_5^5-a_5^5\ ,$$
$$(b_5^5+c_5^5+d_5^5)\left((h_5^5)^{k-1}+(h_5^5)^{k-2}(a_5^5)+\cdots+(a_5^5)^{k-1}\right)$$
$$=(h_5^5)^k-(a_5^5)^k$$

با توجه به قانون تحویل‌پذیری H.M، معادله‌ی $a_5^5+b_5^5+c_5^5+d_5^5=h_5^5$ به معادله‌ی زیر تحویل می‌شود:

(۵)
$$(a_5^k)^5+(b_5h_5^{k-1})^5+(c_5h_5^{k-1})^5+\cdots+(d_5a_5^{k-1})^5=(h_5^k)^5$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی V و اتحاد۵، یک دسته جواب خاص برای آن حاصل می‌شود:

$$X_1=(27)^k\ ,\ X_2=(84)(144)^{k-1}\ ,\ X_3=(110)(144)^{k-1},$$
$$\ldots,\ X_{3t+1}=(133)(27)^{k-1}\ ,\ X_{3t+2}=(144)^k$$

قضیه‌ی نهایی H.M: اگر معادله‌ی زیر دارای یک جواب خاص یا عمومی باشد:

$$x_1^n+x_2^n+x_3^n+\cdots+x_k^n=x_{k+1}^n \qquad (1)$$

آن‌گاه معادله‌ی زیر (با توجه به قانون تحویل‌پذیری H.M) دارای دسته جواب‌های خاص یا عمومی است ($k,N\in\mathbb{N}$, $k\ge 2$):

$$X_1^n+X_2^n+X_3^n+\cdots+X_{(k-1)N+1}^n=X_{(k-1)N+2}^n \qquad (2)$$

برهان: اثبات این قضیه را با استفاده از قانون تحویل‌پذیری انجام می‌دهیم.

در صورتی که یک دسته جواب معادله‌ی ۱ را خصوصی یا عمومی بدانیم، با در دست داشتن جواب و جای‌گزینی آن در معادله، به این برابری بدیهی می‌رسیم:

$$a_1^n+a_2^n+a_3^n+\cdots+a_k^n=a_{k+1}^n \qquad (3)$$
$$a_2^n+a_3^n+\cdots+a_k^n=a_{k+1}^n-a_1^n$$
$$(a_2^n+a_3^n+\cdots+a_k^n)\left((a_{k+1}^n)^{k-1}+(a_{k+1}^n)^{k-2}(a_1^n)+\cdots+(a_1^n)^{k-1}\right)$$
$$=(a_{k+1}^n)^k-(a_1^n)^k$$

با توجه به قانون تحویل‌پذیری H.M، معادله‌ی ۳ به معادله‌ی زیر تحویل می‌شود:

(۴)
$$(a_1^k)^n+(a_2a_{k+1}^{k-1})^n+(a_3a_{k+1}^{k-1})^n+\cdots+(a_ka_1^{k-1})^n=(a_{k+1}^k)^n$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی ۲ با اتحاد۴، یک دسته جواب خاص برای آن حاصل می‌شود:

$$X_1=a_1^k\ ,\ X_2=a_2a_{k+1}^{k-1}\ ,\ldots,X_{(k-1)N+1}=a_ka_1^{k-1}\ ,$$
$$X_{(k-1)N+2}=a_{k+1}^k$$

در این جا با دسته جواب فوق، برهان قضیه‌ی نهایی H.M کامل می‌شود.

تمرین:

با قانون تحویل‌پذیری H.M نشان دهید، معادله‌های زیر به ازای «n = ۲, ۳, ۴, ۵» دارای جواب هستند:

$$X_1^n+X_2^n+X_3^n+X_4^n+X_5^n+X_6^n+X_7^n=X_8^n \qquad (1)$$
$$X_1^n+X_2^n+\cdots+X_7^n=Y_1^n+Y_2^n+Y_3^n+\cdots+Y_7^n \qquad (2)$$

راهنمایی: برای تعیین جوابی برای معادله‌ی۱ کافی است با قانون تحویل‌پذیری H.M، اتحادهای عددی زیر را به حالت خاص معادله‌ی۱ تحویل دهیم. (برای تعیین جوابی برای معادله‌ی۲ کافی است از تعویض نقش اعداد استفاده کنیم):

$$2^2+3^2+6^2=7^2\ ,\ 3^3+4^3+5^3=6^3$$ و
$$(95800)^4+(217519)^4+(414560)^4=(422481)^4$$
$$(27)^5+(84)^5+(110)^5+(133)^5=(144)^5$$

برای مثال، پس از تحویل، به اتحاد عددی زیر می‌رسیم:

$$(729)^5+(12096)^5+(15840)^5$$
$$+(19152)^5+(2268)^5+(2970)^5+(3591)^5=(20736)^5$$

منابع

1. The discovery of prime numbers formula and its results & other top researches (Author: S.M.R.Hashemi Moosavi).

توضیح: این کتاب به زبان انگلیسی و فارسی در دست چاپ است.

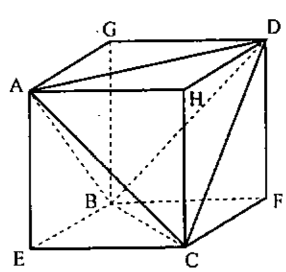
۲. سایت کاشف فرمول: www.primenumbersformula.com

با راهیان المپیادهای ریاضی (۸)

• دکتر غلامرضا یاسی‌پور

۱. چهاروجهی‌های محاط در متوازی السطوح‌ها

در صفحه، مثلث متساوی‌الاضلاعی با رأس‌هایی به مختصات صحیح موجود نیست، در حالی که در فضا، چهاروجهی با رأس‌های (۱،۰،۰)، (۰،۱،۰)، (۰،۰،۱) و (۱،۱،۱) منتظم است. بنابراین، همان‌گونه که در شکل ۱ می‌بینید، چهاروجهی منتظم محاط در مکعب واحد موجود است.



شکل ۱

به عنوان پیامد این گزاره، راهی کوتاه برای محاسبه‌ی حجم چهاروجهی منتظمی وجود دارد که یالش برابر a است. در این مورد، تمام کاری که باید انجام دهیم این است که حجم‌های چهار چهاروجهی‌ای را که می‌بُریم، از حجم مکعبی با یال برابر $a\sqrt{2}/2$ کم کنیم. بنابراین، حجم چهاروجهی منتظم مورد بحث عبارت است از:

$$a^3\sqrt{2}/4 - 4\times a^3\sqrt{2}/24 = a^3\sqrt{2}/12$$

با تغییر صورت شکل ۱ ملاحظه می‌کنیم، هر چهاروجهی را می‌توان به این طریق، در یک متوازی‌السطوح محاط کرد. در این بحث، به روابط بین ویژگی‌های چهاروجهی و متوازی‌السطوح وابسته به آن علاقه‌مندیم و در این مورد به بررسی دو حالت می‌پردازیم: یکی حالت چهاروجهی متعامد و دیگری حالت

چهاروجهی متساوی‌الساقین.

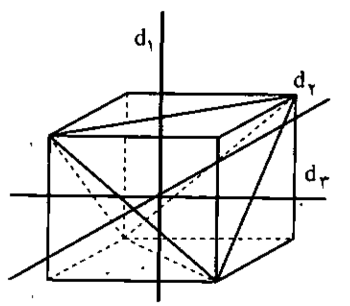
چهاروجهی را «متعامد»[1] می‌نامیم، اگر یال‌های مقابل آن متعامد باشند. درنتیجه، چهاروجهی وقتی متعامد است که اگر و تنها اگر متوازی‌السطوح وابسته به آن «لوزوی»[2] باشد؛ یعنی؛ جمیع وجه‌های آن لوزی باشد. در واقع، چهاروجهی متعامد است، اگر و تنها اگر دو قطر هر وجه متوازی‌السطوح مربوطه متعامد باشند. از طرف دیگر، متوازی‌الاضلاعی که قطرهای آن متعامد باشند، لوزی است و به این ترتیب نتیجه به‌دست می‌آید.

اما چهاروجهی **متساوی‌الساقین**[3] نوعی چهاروجهی است که در آن یال‌های مقابل برابر باشند. این چهاروجهی را گاهی «متساوی‌الوجوه»[4] نیز می‌نامند، زیرا وجه‌های آن، مثلث‌های هم‌نهشت‌اند. چهاروجهی متساوی‌الساقین است، اگر و تنها اگر قطرهای هر وجه متوازی‌السطوح وابسته به آن برابر باشند، و درنتیجه، اگر و تنها اگر متوازی‌السطوح وابسته، قائم[5] باشد.

اکنون نشان می‌دهیم که چگونه ملاحظات فوق در حل مسئله‌ی زیر به کار می‌روند؛ مسئله‌ای که در سال ۱۹۸۴، در تست انتخابی رومانیایی مربوط به المپیاد ریاضی بالکان داده شده است.

فرض می‌کنیم ABCD یک چهاروجهی و d_1، d_2 و d_3 به ترتیب، عمود مشترک AB و CD، AC و BD، و AD و BC باشند. ثابت کنید چهارضلعی متساوی‌الساقین است، اگر و تنها اگر d_1، d_2 و d_3 دو به دو متعامد باشند.

برای حل مسئله، توجه داریم که اگر چهاروجهی را چنان‌که در شکل ۲ می‌بینید، در یک متوازی‌السطوح محاط کنیم، آن‌گاه d_1، d_2 و d_3، به ترتیب، به قطرهای سه جفت وجه آن عمودند و درنتیجه بر خود این وجوه عمود می‌شوند. متوازی‌السطوح مورد بحث قائم است، اگر و تنها اگر هر دو وجه مشترک در یک یال آن متعامد باشند. از طرف دیگر، دو صفحه متعامدند، اگر و تنها اگر عمودهای وارد بر آن دو، متعامد باشند. درنتیجه، متوازی‌السطوح قائم است، اگر و تنها اگر d_1، d_2 و d_3 دوبه‌دو متعامد باشند که به این ترتیب، ادعا به اثبات می‌رسد.



شکل ۲

مسائل زیر، ویژگی‌هایی از چهاروجهی‌های متعامد و متساوی‌الساقین را توصیف می‌کنند که می‌توانند با استفاده از همین روش اثبات شوند:

۱. حجم یک چهاروجهی متساوی‌الساقین را بر حسب یال‌های آن بیان کنید.

۲. شعاع کره‌ی محیطی چهاروجهی متساوی‌الساقین را بر حسب یال‌های آن بیان کنید.

۳. فرض می‌کنیم ABCD یک چهاروجهی و M، N، P، Q، R و S، به ترتیب، وسط‌های AB، CD، AC، BD، AD و BC باشند. ثابت کنید قطعه‌های MN، PQ و RS متقاطع‌اند.

۴. ثابت کنید، اگر دو جفت یال‌های یک چهاروجهی متعامد باشند، چهاروجهی متعامد است.

۵. ثابت کنید در متوازی‌السطوح لوزوی $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$، عمود مشترک‌های جفت خطوط A_1C_1 و B_2D_2، A_1B_2 و C_1D_2، A_1D_2 و B_2C_1، متقاطع‌اند.

۶. ثابت کنید در یک چهاروجهی متعامد، ارتفاعات متقاطع‌اند.

۷. فرض می‌کنیم ABCD یک چهاروجهی متعامد باشد، ثابت کنید:

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$$

۸. حجم یک چهاروجهی متعامد را بر حسب یال‌های آن بیان کنید.

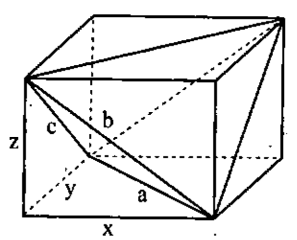
۹. ثابت کنید اگر جمیع چهار وجه یک چهاروجهی سطحی یکسان داشته باشند، آن‌گاه چهاروجهی، متساوی‌الساقین است.

۱۰. در یک چهاروجهی، جمیع ارتفاعات برابرند و یک رأس متعامداً بر محل تلاقی ارتفاعات وجه مقابل تصویر شده است. ثابت کنید چهاروجهی منتظم است.

***

حل

چهاروجهی‌های محاط در متوازی‌السطوح‌ها



شکل ۱

۱. در شکل ۱، چهاروجهی را در متوازی‌السطوحی محاط می‌کنیم. اگر x، y و z یال‌های متوازی‌السطوح و a، b و c یال‌های چهاروجهی باشند، از آن‌جا که متوازی‌السطوح قائم است، براساس قضیه‌ی فیثاغورس داریم:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$y^2 + z^2 = c^2$$

$$x^2 + z^2 = b^2$$

درنتیجه:

$$x=\sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}}\ ;\ y=\sqrt{\frac{a^2+c^2-b^2}{2}}\ ;\ z=\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}$$

حجم متوازی‌السطوح xyz، و حجم چهاروجهی یک سوم آن و برابر است با:

$$\frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)}$$

(H. Steinhaus, one hundred problems in elementary mathematics, Dover Publ. Inc., New York, 1979.)

۲. در صورتی که توجه کنیم، کره‌ی محیطی چهاروجهی، کره‌ی محیطی متوازی‌السطوح قائمی نیز هست که در آن محاط شده است، پاسخ بلافاصله به دست می‌آید.

شعاع محیطی متوازی‌السطوح قائم، نصف قطر اصلی آن است. اگر a، b و c طول‌های یال‌های چهاروجهی باشند، آن‌گاه یال‌های ycx و z متوازی‌السطوح در روابط زیر صدق می‌کنند:

$$x^2+y^2=a^2$$

$$y^2+z^2=b^2$$

$$x^2+z^2=c^2$$

طول قطر متوازی‌السطوح عبارت است از:

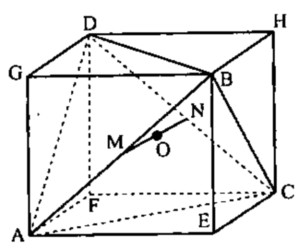
$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}}$$

بنابراین شعاع کره‌ی محیطی برابر است با:

$$\sqrt{(a^2+b^2+c^2)/8}$$

۳. چون در شکل ۲، چهاروجهی را در متوازی‌السطوح AECFGBHD محاط می‌کنیم، در این صورت M و N مراکز وجه‌های AEBG و CHDF هستند. بنابراین، O مرکز ثقل متوازی‌السطوح بر MN است. با تکرار این استدلال درمی‌یابیم که O در تقاطع MN، PQ و RS است. توجه داشته باشید که O مرکز ثقل ABCD نیز هست.

۴. چهاروجهی را در یک متوازی‌السطوح محاط می‌کنیم. از آن‌جا که یکی از قطرهای وجه AEBG قطر AB و دیگری موازی CD است، نتیجه می‌گیریم که AEBG متوازی‌الاضلاعی با اقطار متعامد، و درنتیجه لوزی است.



شکل ۲

استدلالی مشابه نشان می‌دهد که AECF نیز لوزی است. به این ترتیب:

$$BH=BG=BE$$

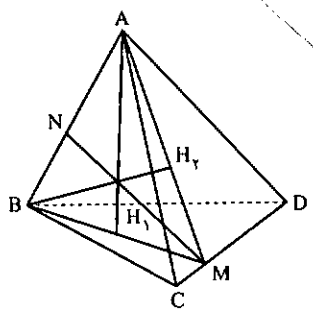
که نشان می‌دهد وجه BHCE نیز لوزی است و درنتیجه: $AD\perp BC$.

۵. این مسئله کاربردی از این قضیه است:

با مفروض بودن نقطه‌ی A و صفحه‌ای ناشامل A، فرض می‌کنیم L خطی در این صفحه، B تصویر A بر این صفحه و C نقطه‌ای در این صفحه باشد. BC بر L عمود است، اگر و تنها اگر AC بر L عمود باشد.

برای اثبات این نتیجه توجه داشته باشید که AB بر صفحه، و درنتیجه بر L عمود است. در این صورت، هریک از دو تعامد مستلزم این است که L بر صفحه‌ی ABC عمود باشد، و درنتیجه مستلزم تعامد دیگر است.

اکنون فرض می‌کنیم ABCD یک چهاروجهی باشد. اگر $AH_1\perp(BCD)$، که در آن $H_1\in(BCD)$ (شکل ۳ را ملاحظه کنید)، در این صورت، H_1 محل تلاقی ارتفاعات مثلث BCD است. در واقع، از آن‌جا که $AH_1\perp(BCD)$ و $AB\perp CD$، آن‌گاه بنابر قضیه‌ی فوق، $BH_1\perp CD$ و به همین ترتیب: $CH_1\perp BD$ و $DH_1\perp BC$.



شکل ۳

فرض می‌کنیم: $BH_1\cap CD=\{M\}$ و $H_2\in AM$ با $BH_2\perp AM$. از آن‌جا که $CD\perp AH_1$ و $CD\perp AB$، داریم: $CD\perp(ABM)$ و درنتیجه: $CD\perp BH_2$. این مطلب نشان می‌دهد که $BH_2\perp(ACD)$ و درنتیجه H_2 محل تلاقی ارتفاعات مثلث ACD است. بنابر نتیجه‌ای از این ساختار، AH_1 و BH_2 متقاطع می‌شوند و بنابر تقارن، اگر CH_3 و DH_4 ارتفاع‌های دیگر باشند، هر دو مورد با خطوط AH_1، BH_2، CH_3 و DH_4 تقاطع می‌کنند. از آن‌جا که هیچ سه مورد از این خط‌ها در یک صفحه قرار ندارند، نتیجه می‌گیریم که جمیع آن‌ها در یک نقطه متقاطع می‌شوند. نقطه‌ی تقاطع آن‌ها را معمولاً نقطه‌ی ارتفاعیه‌ی[۶] چهاروجهی می‌نامند.

۶. راه‌حل مسئله‌ی قبل را به خاطر می‌آوریم. اگر فرض کنیم N بر AB چنان باشد که $MN\perp AB$، آن‌گاه MN شامل نقطه‌ی ارتفاعیه‌ی چهاروجهی و عمود مشترک خطوط AB و CD است. چهاروجهی $A_1B_2C_1D_2$ متعامد است، درنتیجه عمود مشترک‌های

جفت‌های خطوط صورت مسئله، شامل نقطه‌ی ارتفاعیه‌ی چهاروجهی‌اند و درنتیجه متقاطع می‌شوند.

۷. اتحاد متوازی‌الاضلاع را به‌خاطر می‌آوریم که طبق آن، در متوازی‌الاضلاع MNPQ، چنین رابطه‌ای برقرار است:

$$MP^2+NQ^2=MN^2+NP^2+PQ^2+QM^2$$

چهاروجهی را در متوازی‌السطوح لوزی‌القاعده[7]ای با طول یال a محاط می‌کنیم. با نوشتن اتحاد متوازی‌الاضلاع در مورد هر وجه، به دست می‌آوریم:

$$AB^2+CD^2=4a^2=BC^2+AD^2=AD^2+BC^2$$

و مسئله به این ترتیب حل می‌شود.

۸. فرض می‌کنیم، ABCD چهاروجهی مفروض، محاط در متوازی‌السطوح لوزی‌القاعده‌ی AHDGECFB باشد. حجم چهاروجهی، یک‌سوم حجم متوازی‌السطوح است. از طرف دیگر، حجم متوازی‌السطوح شش برابر حجم چهاروجهی EABC است. بنابراین مورد اخیر را محاسبه می‌کنیم.

قرار می‌دهیم:

$AB=a$ و $BC=b$ و $AC=c$ و $EH=d$

همان‌گونه که در مسئله‌ی قبل ملاحظه می‌شود، این چهار یال به طور کامل دو یال باقی‌مانده را معین می‌کنند. سطح وجه ABC، بنابر فرمول هرو[8] برابر است با:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

که در آن: $p=(a+b+c)/2$.

از طرف دیگر، از آن‌جا که یال‌های EA، EB و EC برابرند، رأس E در O، مرکز محیطی وجه ABC تصویر می‌شود. برای محاسبه‌ی ارتفاع EO، توجه داشته باشید، از آن‌جا که وجه AECH لوزی است:

$$AE=1/2\sqrt{c^2+d^2}$$

و در مثلث ABC داریم:

$$AO=abc/(4s)=abc/(4\sqrt{p(p-a)(p-c)(p-c)})$$

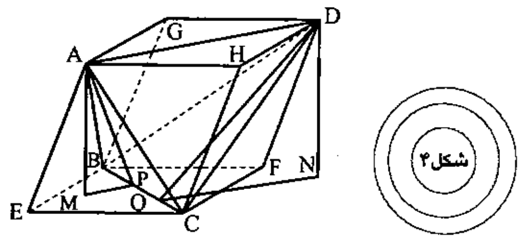
قضیه‌ی فیثاغورس مستلزم این است که:

$$EO=\sqrt{EA^2-AO^2}=\frac{1}{2}\sqrt{c^2+d^2-\frac{a^2+b^2+c^2}{4p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

درنتیجه، حجم چهاروجهی ABCD عبارت است از:

$$\frac{2}{3}EO.s=\frac{1}{6}\sqrt{4(c^2+d^2)p(p-a)(p-b)(p-c)-a^2b^2c^2}$$

۹. فرض می‌کنیم ABCD مانند قبل، چهاروجهی محاط در متوازی‌السطوح AHDGECFB باشد. نیز فرض می‌کنیم M و N تصاویر A و D بر صفحه‌ی "ECFB" باشند، و $MP\perp BC$ و $NQ\perp BC$ و $Q\in BC$ و P (شکل۴).



شکل۴

بنابر نتیجه‌ی مذکور در راه‌حل مسئله‌ی ۵، $AP\perp BC$ و $DQ\perp BC$ و از آن‌جا که مثلث‌های ABC و DBC دارای سطح یکسان‌اند، به‌دست می‌آوریم: $AP=DQ$. و این مستلزم آن است که مثلث‌های AMP و DNQ هم‌نهشت باشند. بنابراین $MP=NQ$.

به این ترتیب، M و N از BC به یک فاصله‌اند و از آن‌جا که A و D نیز به یک فاصله از GH قرار دارند، نتیجه می‌شود که BC تصویر GH روی صفحه‌ی "ECFB" است. درنتیجه صفحات "GBCH" و "ECFB" متعامدند.

این مطلب نشان می‌دهد که CH هم بر EC و هم بر CF عمود است. استدلالی مشابه، $CE\perp CF$ را به دست می‌دهد. به این ترتیب، متوازی‌السطوح AHDGECFB قائم است و درنتیجه چهاروجهی مورد بحث متساوی‌الساقین است.

۱۰. فرض می‌کنیم ABCD چهاروجهی باشد و A در H، نقطه‌ی ارتفاعیه‌ی مثلث BCD تصویر شود. نیز فرض می‌کنیم، CM ارتفاع این مثلث باشد. از آن‌جا که بنابر قضیه‌ی مذکور در راه‌حل مسئله‌ی ۵، AH عمود بر صفحه‌ی "BCD" است و $CM\perp BD$، نتیجه می‌شود که: $AC\perp BD$.

به همین ترتیب، $AD\perp BC$ و $AB\perp CD$. بنابراین، چهاروجهی مورد بحث متعامد است و این مستلزم آن است که متوازی‌السطوح وابسته لوزی‌القاعده باشد.

از طرف دیگر، فرمول حجم و برابری ارتفاع‌ها مستلزم برابری سطوح چهاروجه است و مسئله‌ی ۹ مستلزم آن است که چهاروجهی مزبور متساوی‌الساقین باشد. به این ترتیب، متوازی‌السطوح وابسته، قائم است. اما متوازی‌السطوح قائم لوزی‌القاعده‌ی مورد بحث، مکعب، و چهاروجهی وابسته‌اش منتظم است (المپیاد ریاضی رومانی، ۱۹۷۵؛ طرح از: N. Popescu).

زیرنویس

1. orthogonal
2. rhomboidal
3. isosceles
4. equifacial
5. right
6. orthocenter
7. rhomboidal parallelepiped
8. Hero

ریاضی را یاد بگیریم!

گفت‌وگو: آنیس خوش‌لهجه صدیق

اشاره

نوید نادری علیزاده متولد سال ۱۳۶۹، در شهر قائم‌شهر از توابع استان مازندران، در خانواده‌ای ۴ نفره زندگی می‌کند. گرچه آقای علیزاده بیشتر مجذوب درس و تحصیل است، اما در بین علاقه‌های او می‌شود به فوتبال و رایانه هم اشاره کرد. وی رتبه‌ی یک کنکور ریاضی در سال ۱۳۸۶ است. به این بهانه، گفت‌وگویی را با ایشان ترتیب دادیم.

از این که اهل قائم‌شهر هستید و رتبه‌ی یک ریاضی را از آن خود کرده‌اید، چه احساسی دارید؟

بسیار خوش‌حالم از این که توانستم نام قائم‌شهر را پس از سال‌ها احیا کنم و بار دیگر افتخاری برای شهرم و هم‌چنین استان مازندران کسب کنم.

چه کسی خبر قبولی را به شما داد؟

آقای ابراهیم خدایی، معاون سازمان سنجش، هشتم مرداد طی تماسی تلفنی این خبر را به من داد.

چه امکاناتی برای قبولی داشتید؟

محیط آرام خانواده، دبیران و مدرسه‌ی عالی، کتاب‌های کمک‌درسی و...

خواندن هم‌زمان برای کنکور و دوره‌ی پیش‌دانشگاهی را چه‌طور هماهنگ کردید؟

در سال‌های اول تا سوم سعی کردم تسلط خوبی بر درس‌های پایه پیدا کنم و در تابستان ۸۵ هم آن‌ها را به طور کامل مرور کردم. ضمن این که دوره‌ی پیش‌دانشگاهی مدرسه هم از تابستان شروع شده بود و من در تابستان، درس‌های پیش را هم مطالعه می‌کردم. ولی به‌طور جدی‌تر، از مهرماه با یک برنامه‌ریزی منسجم، به مطالعه‌ی درس‌های پیش (در کنار دروس پایه) پرداختم.

مطالعه‌ی آزاد هم داشتید؟

در طول یک سال آخر بیشتر روی درس تمرکز داشتم، ولی برخی مجلات و روزنامه‌ها را هم برای تنوع و رفع خستگی می‌خواندم.

برای رتبه درس می‌خواندید؟

نمی‌توانم بگویم نه، ولی از اول دبیرستان سعی کردم هر درسی را که می‌خوانم؛ به بهترین نحو مطالعه کنم. یعنی تمام نمرات من در طول دوران تحصیلم خوب بود، ولی به هر حال یکی از هدف‌های من از همان ابتدا، کسب رتبه‌ای خوب در کنکور سراسری بود.

نسبت به ریاضی چه احساسی دارید؟

یکی از زیباترین و شیرین‌ترین درس‌هایی است که از ابتدای دوران تحصیل تا انتها، همواره جزو درس‌های اصلی بوده و خواهد بود.

تعریف شما از این علم چیست؟ آیا ریاضی فقط علم اعداد و ارقام است؟

ریاضی علمی فهمیدنی است. علمی زیبا که تلاش سخت و پشتکار فراوان می‌خواهد. علمی نیست که در حفظ کردن چند عدد و رقم خلاصه شده باشد. علمی است که اگر آن را خوب بفهمیم، آن را یکی از زیباترین درس‌ها می‌یابیم. شاید بتوانیم بگوییم که ریاضی بازتابی از طبیعت و جهان اطراف ماست و احتمالاً بسیاری از پدیده‌های دنیا را می‌توان به زبان ریاضی توصیف کرد.

رویداد و یا جمله‌ای را که در زندگی شما تأثیر عمیقی بر جای گذاشته باشد به یاد دارید؟

در جایی جمله‌ای را دیدم که در خاطرم مانده و برایم جالب است: «اگر صخره‌ای در مسیر رود نبود، رود هیچ آوازی از خود سر نمی‌داد.»

از کدام مبحث ریاضی بیشتر لذت می‌برید؟

همه‌ی مباحث ریاضی، به‌خصوص مباحث هندسه.

ریاضی را چه‌طور مطالعه کردید؟

ریاضی بازتابی از طبیعت و جهان اطراف ماست، زیبا و فهمیدنی است

ریاضی را فقط با تمرین و تکرار و حل تست‌های گوناگون یاد بگیرم، نه با حفظ کردن فرمول‌ها و روابط. یعنی من ریاضی را حفظ نکردم، توانستم یاد گرفتم.

○ در این زمینه هم مطالعه‌ی آزاد داشتید؟

مطالعات من در درس ریاضی در چند سال اخیر: تقریباً حول مطالب کتاب درسی یا کمی فراتر از آن بود. فقط در سال‌های دوم و سوم، زمانی که در کلاس‌های المپیاد ریاضی شرکت می‌کردم، با مباحثی خارج از کتاب‌های درسی آشنا شدم.

○ در المپیاد مقامی هم کسب کردید؟

مقامی کسب نکردم. در سال دوم و سوم دوره‌ی متوسطه در آزمون مرحله‌ی اول المپیاد پذیرفته شدم. مطالعه برای المپیاد با کنکور متفاوت است و چون هدف من کنکور بود، بیشتر روی آن سرمایه گذاری کردم.

○ برای کنکور چه طور تست ریاضی زدید؟

در سال‌های اول و دوم بیشتر تشریحی کار می‌کردم. ولی از سال سوم، با توجه به گسترش مطالب ریاضی و نزدیک شدن به کنکور، از کتاب‌های کمک‌درسی متنوعی برای تست زدن استفاده کردم و در ابتدای دوره‌ی پیش‌دانشگاهی، بدون وقت گرفتن و صرفاً برای یادگیری مطالب، تست زدم. ولی در انتهای سال، برای تست‌ها زمان مشخصی درنظر می‌گرفتم تا خودم را به شرایط کنکور نزدیک کنم. در کنکور توانستم ریاضی را ۱۰۰ درصد بزنم.

○ شما در حل مسائل و تمرین‌ها از روش‌های ابتکاری نیز استفاده می‌کنید؟

بله. شاید روش‌های آسان‌تری مثل عددگذاری، مثال زدن، استفاده از گزینه‌ها برای رسیدن به جواب و... برای حل برخی تست‌ها وجود داشته باشد. ولی از همه‌ی این‌ها مهم‌تر: راه‌حل اصلی و تشریحی مسئله، و فراگیری آن راه است.

○ در جهت آموزش بهتر در زمینه‌ی ریاضی: چه پیشنهادی برای دبیران دارید؟

این که با عشق و علاقه، و با صبر و حوصله و نیز با اطلاعات کافی، در کلاس‌های درس به امر آموزش بپردازند و با حل مثال‌های متعدد و متنوع، این درس جذاب را به دانش‌آموزان علاقه‌مند بیاموزند. به نظر من بهتر است پس از ارائه‌ی مثال‌های گوناگون و طبق قاعده‌ی استدلال استقرایی: دانش‌آموزان را به پیدا کردن روابط و فرمول‌ها وادارند، نه این که ابتدا فرمول را بگویند و بعد از آن، مثال‌ها را مطرح کنند. در واقع دانش‌آموزان را هم برای پیدا کردن روابط دخالت دهند و در حل مسائل، آن‌ها را نیز درگیر کنند.

○ عامل موفقیت خودتان را چه می‌دانید؟

در مرتبه‌ی اول ایمان و اتکا به خدا، در مرتبه‌ی دوم حمایت خانواده، در مرتبه‌ی سوم محیط مدرسه و تلاش دبیران، و در انتها پشتکار و برنامه‌ریزی.

○ در دانشگاه، در کدام رشته تحصیل خواهید کرد؟ به چه انگیزه‌ای؟

به امید خدا، در رشته‌ی مهندسی برق دانشگاه صنعتی شریف تحصیل خواهم کرد و تا مدارج عالی پیش خواهم رفت تا در آینده بتوانم به این مرز و بوم، خدمت کنم.

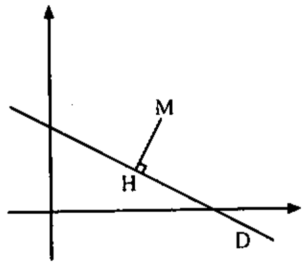
فاصله‌ی نقطه

● مهدی قربانی
دبیر ریاضی منطقه‌ی ۹ تهران

اشاره

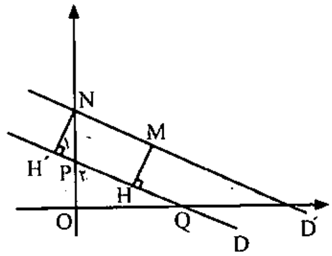
دستور محاسبه‌ی فاصله‌ی نقطه از خط، جزو آن دسته از روابطی است که در کتاب درسی سال اول دبیرستان مطرح شده، ولی اثبات آن نیامده است. در این جا به ارائه‌ی دو روش اثبات برای رابطه‌ی ذکر شده می‌پردازیم.

خط D به معادله‌ی $ax + by + c = 0$ و نقطه‌ی معلوم $M(x_0, y_0)$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم فاصله‌ی نقطه‌ی M را از خط D محاسبه کنیم. به این منظور باید طول عمودی را که از نقطه‌ی M بر خط D رسم می‌شود، محاسبه کنیم. در این جا صرف‌نظر از حالت‌های خاص معادله‌ی خط، حالت کلی معادله‌ی خط را در نظر می‌گیریم و به دو روش، فرمولی برای محاسبه‌ی فاصله‌ی نقطه از خط می‌یابیم.



روش اول

در شکل(۲)، از نقطه‌ی M خط D' را به موازات D رسم کرده‌ایم. فاصله‌ی این دو خط موازی، جواب مسئله خواهد بود. به منظور یافتن این فاصله، معادله‌ی خط D' را می‌نویسیم. این کار به سهولت انجام‌پذیر است، زیرا مختصات یک نقطه از آن، یعنی M معلوم و شیب آن نیز مساوی با شیب خط D است. پس می‌توان نوشت:



$$\left.\begin{array}{l} M(x_0, y_0) \\ m_D = m_{D'} = -\frac{a}{b} \end{array}\right\} \Rightarrow y - y_0 = m_{D'}(x - x_0)$$

$$\Rightarrow y = \frac{-a}{b}x + \frac{a}{b}x_0 + y_0$$

خط D' محور عرض‌ها را در N قطع کرده که مختصات آن به صورت زیر است:

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{a}{b}x_0 + y_0 = \frac{ax_0 + by_0}{b} \Rightarrow N(0, \frac{ax_0 + by_0}{b})$$

اکنون کافی است، طول پاره‌خط NH' را که برابر MH است، حساب کنیم. این محاسبه با استفاده از تشابه دو مثلث OPQ و $NH'P$ امکان‌پذیر است:

(۱)

$$\left.\begin{array}{l} \hat{P}_1 = \hat{P}_2 \\ \hat{H} = \hat{O} = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{OPQ} = \overset{\Delta}{NH'P} \Rightarrow \frac{PQ}{NP} = \frac{OQ}{NH'}$$

هریک از مقادیر PQ، NP و OQ را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$OQ = \left|\frac{-c}{a}\right|$$

$$PQ = \sqrt{OP^2 + OQ^2} = \sqrt{(\frac{-c}{a})^2 + (-\frac{c}{b})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{c^2}{a^2 . b^2}(a^2 + b^2)} = \frac{|c|}{|ab|}.\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$NP = ON - OP = \left|\frac{ax_0 + by_0}{b} - \frac{-c}{b}\right| = \left|\frac{ax_0 + by_0 + c}{b}\right|$$

با قرار دادن این مقادیر در تساوی ۱ خواهیم داشت:

از خط

$$\frac{\frac{|c|}{|a|.|b|}\sqrt{a^2+b^2}}{\frac{|ax_0+by_0+c|}{|b|}}=\frac{\frac{|c|}{|a|}}{MH}\Rightarrow\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|ax_0+by_0+c|}$$

$$=\frac{1}{MH}\Rightarrow MH=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

این رابطه نشان می‌دهد، برای محاسبه‌ی فاصله‌ی نقطه از خط، ابتدا معادله‌ی خط داده شده را به صورت $ax+by+c=0$ می‌نویسیم. سپس به جای x و y، مقادیر x_0 و y_0 را جای‌گزین می‌کنیم و قدر مطلق حاصل را بر $\sqrt{a^2+b^2}$ تقسیم می‌کنیم.

مثال: فاصله‌ی نقطه‌ی $A(-2,3)$ از خط به معادله‌ی $y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$ را به دست آورید.

حل:

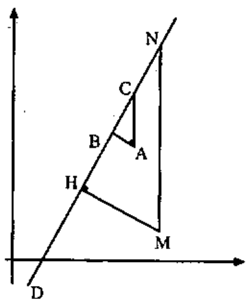
$$y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}\Rightarrow -3x+4y+2=0$$

$$d=\frac{|-3\times(-2)+4\times 3+2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{20}{5}=4$$

روش دوم

ابتدا از M خطی بر D عمود می‌کنیم تا آن را در نقطه‌ی H قطع کند. اندازه‌ی پاره‌خط MH، همان فاصله‌ی M از خط D است. سپس از نقطه‌ی M خطی به موازات محور عرض‌ها رسم می‌کنیم تا خط D را در نقطه‌ی N قطع کند (شکل ۳). مختصات نقطه‌ی N عبارت است از: $N(x_0,-\frac{ax_0+c}{b})$ (چرا؟) و طول MN چنین خواهد شد:

$$MN=|y_M-y_N|=\left|y_0+\frac{ax_0+c}{b}\right|=\frac{|ax_0+by_0+c|}{|b|}$$



اکنون مثلث ABC با اضلاع: $BC=\sqrt{a^2+b^2}$ ، $AC=|b|$ و $AB=|a|$ را چنان در نظر می‌گیریم که وتر BC بر NH منطبق و $AC \parallel MN$ باشد. دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی MHN و ABC متشابه‌اند (چرا؟) و می‌توان نوشت:

$$\frac{MH}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

با جای‌گذاری مقادیر معلوم در تساوی اخیر خواهیم داشت:

$$\frac{MH}{|b|}=\frac{\frac{|ax_0+by_0+c|}{|b|}}{\sqrt{a^2+b^2}}\Rightarrow MH=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

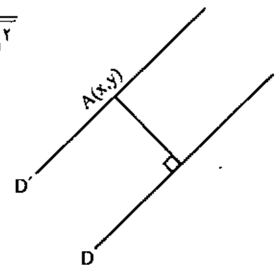
اثبات مطلب اخیر به همین دو روش ختم نمی‌شود. شما می‌توانید با به‌کارگیری استعداد و خلاقیت خود، روش‌های دیگری را ابداع کنید. پس قلم و کاغذ به‌دست بگیرید و شروع کنید. موفق باشید.

نتیجه‌ی۱: فاصله‌ی خط $ax+by+c=0$ از مبدأ مختصات برابر است با: $\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

نتیجه‌ی۲: فاصله‌ی دو خط موازی به معادلات

$\begin{cases} D: ax+by+c=0 \\ D': ax+by+c'=0 \end{cases}$ برابر است با:

$$\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



زیرا فاصله‌ی نقطه‌ی دلخواه $(x,y) \in D'$ از خط D برابر است با:

$$d = \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

اما $ax+by=-c'$ و بنابراین:

$$d = \frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

مثال: فاصله‌ی دو خط موازی $2x+y+3=0$ و $4x+2y+4=0$ برابر است با:

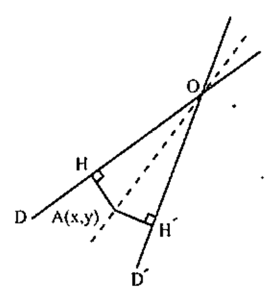
$$d = \frac{|3-2|}{\sqrt{4+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

نتیجه‌ی ۳: می‌دانیم نیم‌ساز زاویه، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که هر نقطه‌ی واقع بر آن، به فاصله‌های مساوی از اضلاع زاویه قرار دارد. با توجه به این مطلب، اگر دو خط به معادلات:

$$ax+by+c=0 \quad \text{و} \quad a'x+b'y+c'=0$$

متقاطع باشند، معادله‌ی خط نیم‌ساز زاویه‌ی بین آن‌ها به صورت زیر خواهد شد:

$$AH = AH' \Rightarrow \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|a'x+b'y+c'|}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$$



مثال: معادله‌ی نیم‌ساز بین دو خط $x+y+2=0$ و $-x+y-4=0$ را بیابید.

حل:

$$\frac{|x+y+2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|-x+y-4|}{\sqrt{1+1}} \Rightarrow x+y+2 = \pm(-x+y-4)$$

$$\Rightarrow x=-3 \quad , \quad y=1$$

Math2.org

معرفی سایت‌های ریاضی جهان

● احسان یارمحمدی

آدرس اینترنتی سایت: **http://math2.org**

این سایت را می‌توان بر روی CD و... ذخیره کرد. و در صفحه اصلی خود دارای فهرست‌های موضوعی زیر است.

الف. فهرست پیام ریاضی (The Math Message Board)

ب. آیا سؤال ریاضی دارید؟ (Have a Math Question)

پ. همکاری سایت ریاضی

(Web Math Collaboration مخفف WMC)

ت. پیوست‌ها (Links)

ث. منابع در دسترس دیگر (Other on-site Resources)

ج. فهرست‌های مرجع ریاضی (Math Reference Table)

این قسمت از سایت دارای عنوان‌های زیر است.

I. عمومی (General)

۱. نمادگذاری عدد (Number Notation)

۲. جدول ضرب (Multiplication Table)

۳. تبدیل کسر دهدهی (Fraction-Decimal Conversion)

۴. تبدیل واحد و اندازه

(Units & Measurment Conversion)

II. جبر (Algebra)

III. هندسه (Geometry)

VI. مثلثات (Trigonometry)

V. ریاضیات گسسته / جبر خطی

(Discrete Math/ Linear Algebra)

VI. آمار (Statistics)

VII. حساب دیفرانسیل و انتگرال (Calculus)

VIII. پیشرفته (Advanced)

مسائل برای حل

ریاضیات ۱

میر شهرام صدر

۱. مجموع سه عدد فرد طبیعی متوالی برابر با ۳۱۵ است، آن عددها را بیابید.

۲. اگر $M=\{x\in \mathbb{N} | x<10\}$ مجموعه مرجع و $A=\{x\in M |$ x عدد اول است$\}$ و $B=\{x\in M | x=3k, k\in \mathbb{N}\}$ و $C=\{x\in M |$ x عدد فرد است$\}$، در این صورت:

الف) آیا مجموعه‌های A' و $(B\cap C)$ جدا از هم هستند.

ب) نشان دهید دو مجموعه $(A\cap C)'$ و $(A'\cup C')$ برابرند.

۳. فرض کنید $A_n=\{3n+2, 3n+1\}$ مطلوب است محاسبه‌ی $\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$.

راهنمایی: $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$

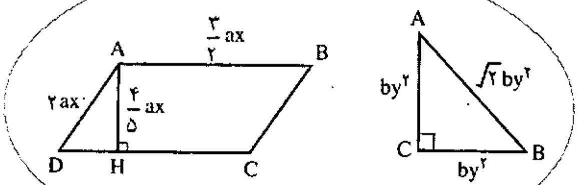
۴. اگر عدد $3^y\times 2^x$ مجذور کامل باشد، به‌ازای کدام مقادیر k عدد $3^{(3y+k)}\times 2^{(x+2)}$ نیز مجذور کامل است؟ چرا؟

۵. مقدار x را از برابری زیر به‌دست آورید:

$$\frac{3^{2x}+3^{2x-1}}{2\times 8^x+8\times 2^{3x}}=\frac{3}{20}$$

۶. به‌ازای کدام مقدار α کسر $\frac{5}{5a+1}$ مولد کسر ۰/۴۵ است؟

۷. محیط و مساحت هریک از شکل‌های زیر را بیابید.



۸. اگر به ازای هر x برابری زیر برقرار باشد، مقدار a+b را پیدا کنید.

$$x^3-x^2-4x+5=(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+1$$

۹. اگر $a+b-c=1$ آن‌گاه حاصل $a^2+b^2-c^2-1$ را بیابید.

۱۰. اگر $\frac{x}{x^2+x+1}=\frac{1}{7}$ آن‌گاه مقدار $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$ را بیابید.

۱۱. عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

الف) $x^2-2xy-3y^2-x+7y-2$

ب) x^4+4

۱۲. تساوی $\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}=\frac{8x+11}{(x-1)(x-2)}$ $(x\neq 1,2)$ به ازای جمیع مقادیر x برقرار است، حاصل $a\times b$ را بیابید.

۱. ریشه‌های حقیقی معادله‌های زیر را به‌دست آورید:

الف) $\frac{x-3}{x-2}+\frac{x-3}{x-1}=\frac{2x-3}{x+2}$

ب) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x}=\sqrt{2x-1}$

۲. مجموعه جواب نامعادله‌ی زیر را به‌دست آورید:

$$\frac{1}{x+2}+\frac{7}{x^2-4x}>\frac{2}{x^2-2x}$$

۳. حدود a را طوری بیابید که برای همه‌ی مقادیر x داشته باشیم:

$$(a-1)x^2+ax+a>0$$

۴. نمودار تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x-[x]}{[x]+1}$ را در بازه‌ی $[-2,2)$ رسم کنید.

۵. نمودار تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}x+1 & x>1\\ -x & -1\leq x\leq 1\\ x^2 & x<-1\end{cases}$ را رسم کنید و از روی این نمودار، یک به یک و پوشایی f را بررسی کنید. هم‌چنین، مقدار عددی $f(f(f(-2)))$ را به‌دست آورید.

۶. نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=\left|2\sin(x-\frac{\pi}{3})-1\right|$ را رسم کنید.

۷. ماتریس $A=\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}$ مفروض است. ماتریس 2×2 X را چنان بیابید که داشته باشیم:

$$A^2-A^1=5AX$$

۸. مقدار x را از معادله‌ی زیر به دست آورید:

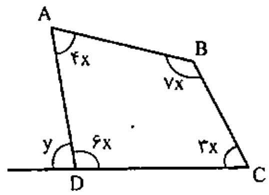
$$\log_4^x+\log_2^x=\log_8^x+1$$

ریاضیات ۲

هوشنگ شرقی

هندسه‌ی ۱

۱. مقدار x و y را در شکل ۱ تعیین کنید (ABCD چهارضلعی محدب است).

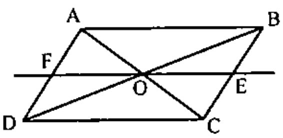


(شکل۱)

۲. با استفاده از سه پاره‌خط داده شده، خمی رسم کنید که:
الف) ساده و بسته باشد. ب) ساده باشد، ولی بسته نباشد.

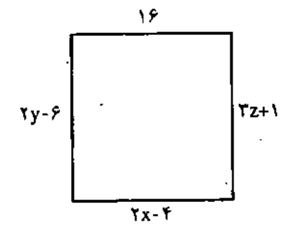
۳. تعداد قطرهای یک nضلعی محدب ۴۴ است. n را تعیین کنید.

۴. چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع و O نقطه‌ی برخورد قطرهای آن است (شکل۲). از نقطه‌ی O خطی رسم کرده‌ایم که دو ضلع BC و AD را در نقطه‌های E و F قطع کرده است. ثابت کنید که OE=OF است.



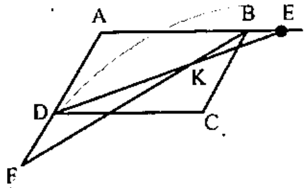
(شکل۲)

۵. چهارضلعی ABCD مربع است (شکل۳). اندازه‌های x، y و z را تعیین کنید.



(شکل۳)

۶. در متوازی‌الاضلاع ABC (شکل۴)، نقطه‌ی E را روی خط AB (B بین A و E) و نقطه‌ی F را روی خط AD (D بین A و F) رسم می‌کنیم و نقطه‌ی برخورد DE و BF را K می‌نامیم. ثابت کنید که مساحت دو چهارضلعی ABKD و CEKF با هم برابرند.



(شکل۴)

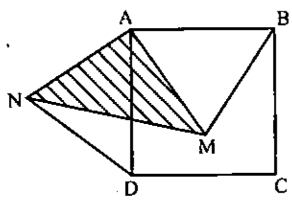
۷. قطر مستطیلی ۲۶ سانتی‌متر و دو ضلع آن به نسبت $\frac{۲}{۴}$ هستند. اندازه‌های مساحت این مستطیل را تعیین کنید.

۸. نسبت مساحت‌های دو مثلث مفروض را بیابید که ضلع‌های یکی، با میانه‌های مثلث دیگر برابر باشد.

۹. اندازه‌ی ارتفاع وارد بر قاعده‌ی مثلث متساوی‌الساقینی ۱۰ و محیط آن ۱۰۰ است. اندازه‌ی قاعده و ساق این مثلث را تعیین کنید.

۱۰. مساحت یک لوزی ۲۵۲ سانتی‌متر مربع و طول یک قطر آن ۱۸ سانتی‌متر است. اندازه‌ی ضلع این لوزی را تعیین کنید.

۱۱. چهارضلعی ABCD مربعی به ضلع ۱۲ سانتی‌متر و مثلث‌های ABM و ADN متساوی‌الاضلاع‌اند (شکل۵). اندازه‌ی مساحت مثلث AMN را تعیین کنید.



(شکل۵)

۱۲. اگر $۴(x+۲y)=۳(۲x-y)$ باشد، نسبت x به y را تعیین کنید.

---

۱. فرض کنید دامنه‌ی تابع f مجموعه‌ی $[۰,۱)$ باشد. دامنه‌ی تابع $g(x)=f\left(\frac{[x]}{x}\right)$ را بیابید.

۲. اگر داشته باشیم $af(x)+bf(-x)=cg(x)$ و $g(x)$ فرد باشد، در این صورت تابع $f(x)$ زوج است یا فرد؟

۳. ثابت کنید تابع $f(x)=x+[x]$ معکوس‌پذیر است و معکوس آن را به‌دست آورید.

۴. باقی‌مانده‌ی تقسیم $x^{۲۹}+۲$ بر $x^۲+x+۱$ را بیابید.

۵. اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $x^۲+x-۱=۰$ باشند، نشان دهید:

$$۵x_۱^۲+۳x_۲^۲=۸-۵x_۱-۳x_۲$$

۶. ثابت کنید: $\cos\frac{\pi}{۵}+\cos\frac{۳\pi}{۵}=\frac{۱}{۲}$

۷. مطلوب است محاسبه‌ی: $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{۲^x+۲^{۳-x}-۶}{\sqrt{۲^{-x}}-۲^{۱-x}}$

۸. مقادیر a و b را چنان بیابید که:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(ax+۱+\sqrt{x^۲+bx+۱}\right)=۲$$

۹. اگر خطوط $x=۲$ و $x=۴$ مجانب‌های قائم منحنی تابع $y=\frac{x^۲+a}{x^۲+(m+۲n)x+m}$ باشند، $m+n$ را به‌دست آورید.

۱۰. اگر $f(x)=\left[\sqrt{۵}x\right]$ باشد، تعداد نقاط ناپیوستگی این تابع را در بازه‌ی $[-۲,۲]$ به‌دست آورید.

حسابان ۱

جبر و احتمال

هوشنگ شرقی

۱. به کمک قضیه‌ی استقرای ریاضی ثابت کنید:

$$\text{(الف)}\quad \frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}=\frac{2^{n+1}-n-2}{2^n}$$

$$\text{(ب)}\quad n\geq 2:\ \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}>\frac{13}{24}$$

$$\text{(ج)}\quad n^3-n=6r\ (r\in Z)$$

۲. اولاً با استدلال استنتاجی ثابت کنید حاصلضرب هر دو عدد گویا عددی است گویا. ثانیاً نشان دهید حاصلضرب هر عدد گویا غیر صفر در هر عدد گنگ عددی است گنگ. ثالثاً بررسی کنید که آیا حاصلضرب هر دو عدد گنگ، عددی است گنگ یا خیر؟

۳. به کمک استدلال برگشتی ثابت کنید:

$(a^4+b^4)(a^5+b^5)\leq 2(a^9+b^9)$ (a و b عددهای حقیقی و مثبت هستند).

۴. فرض کنیم S زیر مجموعه‌ای از مجموعه اعداد طبیعی با ۱۵ عضو باشد. ثابت کنید تفاضل دو عضو از اعضای S مضرب ۱۴ می‌باشد.

۵. x و y را طوری پیدا کنید که داشته باشیم:

$$\{x+y,x-y,3\}=\{2,3\}$$

۶. مجموعه‌ی زیر را با استفاده از نمادهای ریاضی نمایش دهید:

$$A=\left\{\frac{1}{2},\frac{-1}{4},\frac{1}{8},\frac{-1}{16},\dots\right\}$$

هندسه‌ی ۲

محمدهاشم رستمی

۱. با استفاده از استدلال استقرایی، رابطه‌ای که تعداد قطرهای یک nضلعی محدب را بیان می‌کند، حدس بزنید و مراحل انجام کار را نیز شرح دهید.

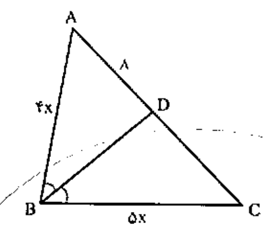
۲. در مثلث ABC، نقطه‌ی D ضلع AB و نقطه‌ی E ضلع AC را به نسبت K تقسیم کرده‌اند. آیا همواره DE موازی BC است؟

۳. در مثلث متساوی‌الساقین ABC(AB=AC)، اندازه‌ی ارتفاع AH برابر ۱۲ سانتی‌متر و اندازه‌ی قاعده‌ی BC مساوی ۱۰ سانتی‌متر است. مجموع فاصله‌های نقطه‌ی M واقع بر قاعده‌ی این مثلث از دو ساق آن را تعیین کنید.

۴. در شکل ۱، BD نیم‌ساز زاویه‌ی درونی B از مثلث ABC است.

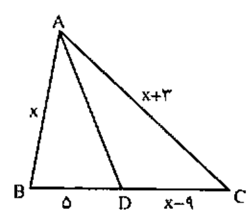
الف) اندازه‌ی ضلع AC را تعیین کنید.

ب) آیا اندازه‌ی ضلع‌های AB و BC را می‌توان تعیین کرد؟



(شکل۱)

۵. در شکل ۲، AD نیم‌ساز زاویه‌ی درونی A از مثلث ABC است. اندازه‌ی x و آن‌گاه اندازه‌ی محیط مثلث ABC را تعیین کنید.



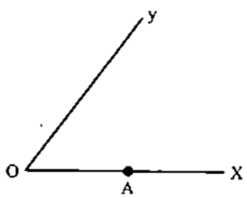
(شکل۲)

۶. با استفاده از برهان خلف ثابت کنید که در هر مثلث، هر دو میانه متقاطع هستند.

۷. یک ضلع از مثلثی ۶ سانتی‌متر و مجموع اندازه‌های دو ضلع دیگر که عددهایی صحیح هستند، کوچک‌تر از ۱۰ و قدرمطلق تفاضل آن دو ضلع ۱ سانتی‌متر است. اندازه‌ی این دو ضلع را تعیین کنید.

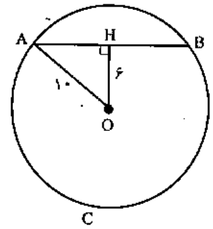
۸. اندازه‌های سه میانه‌ی مثلثی (m_c,m_b,m_a) داده شده‌اند. مثلث را رسم کنید.

۹. زاویه‌ی xoy و نقطه‌ی A روی ضلع ox داده شده است (شکل۳). نقطه‌ای از صفحه‌ی xoy را تعیین کنید که از نقطه‌ی A به فاصله‌ی معلوم R و از ضلع oy به فاصله‌ی معلوم l باشد.



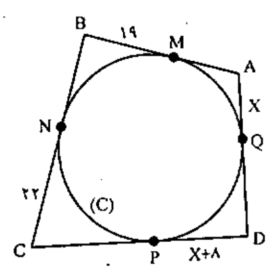
(شکل۳)

۱۰. دایره‌ی "C" به مرکز O داده شده است (شکل۴). AB وتر دایره و OH فاصله‌ی مرکز دایره از این وتر است. با توجه به شکل، اندازه‌ی وتر AB را به دست آورید.



(شکل۴)

۱۱. چهارضلعی ABCD در نقطه‌های M، N، P و Q بر دایره‌ی C مماس است (شکل۵). اگر محیط این چهارضلعی ۱۴۲ باشد، اندازه‌ی x را تعیین کنید.

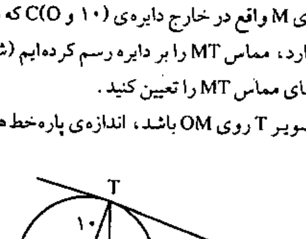


(شکل۵)

۱۲. از نقطه‌ی M واقع در خارج دایره‌ی (۱۰ و C(O که به فاصله‌ی ۲۶ از مرکز دایره قرار دارد، مماس MT را بر دایره رسم کرده‌ایم (شکل۶):

الف) اندازه‌های مماس MT را تعیین کنید.

ب) اگر H تصویر T روی OM باشد، اندازه‌ی پاره‌خط‌های OH و TH را به‌دست آورید.



(شکل۶)

پاسخ تشریحی مسائل

ریاضیات ۱

۱. در حالت کلی سه عدد فرد متوالی عبارتند از:

$2k+1\ ,\ 2k+3\ ,\ 2k+5$

چون مجموع آن‌ها برابر با ۳۱۵ است، بنابراین داریم:

$(2k+1)+(2k+3)+(2k+5)=315$

$\Rightarrow 6k=306 \Rightarrow k=51$

سه عدد فرد متوالی عبارتند از:

۱۰۳و۱۰۵و۱۰۷

۲. الف)

$M=\{1,2,3,\cdots,9\}\ ;\ A=\{2,3,5,7\}$

$B=\{3,6,9\}\ ;\ C=\{1,3,5,7,9\}$

$A'=\{1,4,6,8,9\}\ ;\ B\cap C=\{3,9\}$

$A'\cap(B\cap C)=\{9\}\neq\varnothing$

چون A' و $(B\cap C)$ عضو مشترک دارند، پس این دو مجموعه جدا از هم نیستند.

ب)

$A\cap C=\{3,5,7\}\ ;\ (A\cap C)'=\{1,2,4,6,8,9\}$ (۱)

$A'\cup C'=\{1,4,6,8,9\}\cup\{2,4,6,8\}$

$=\{1,2,4,6,8,9\}$ (۲)

از برابری (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که،

$(A\cap C)'=A'\cup C'$

۳. هرگاه هر عدد طبیعی را بر ۳ تقسیم کنیم، باقی‌مانده‌ی آن یکی از عددهای ۰، ۱، ۲ خواهد بود، یعنی هر عدد طبیعی به یکی از صورت‌های زیر است:

$3n, 3n+1, 3n+2$

در مجموعه‌ی $An=\{3n+2,3n+1\}$ عضو $3n$ نوشته شده است، پس در $\bigcup_{i=1}^{n} Ai$ عضوهای $3n$ یا به عبارت دیگر مضرب‌های عدد ۳ وجود ندارد، در نتیجه داریم:

$\bigcup_{i=1}^{n} Ai=\{1,2\}\cup\{4,5\}\cup\{7,8\}\cup\cdots\cup\{3n-2,3n-1\}$

$=\{n \mid n\neq 3k, n\in N\}$

۴. چون $3^y\times 2^x$ مجذور کامل است، پس x و y هر دو زوج هستند، از طرفی برای این‌که $3^{(3y+k)}\times 2^{(x+2)}$ مجذور کامل باشد، باید $(x+2)$ عددی زوج و عدد $(3y+k)$ نیز باید زوج باشد.

$x=2k \Rightarrow x+2=2k+2=2(\underbrace{k+1}_{k'\in Z})=2k'$ زوج است

$y=2k_1 \Rightarrow 3y+k=6k_1+k$

برای این‌که $6k_1+k$ عددی زوج باشد، باید k زوج باشد.

۵.

$$\frac{3^{2x}+\frac{3^{2x}}{3}}{2\times(2^3)^x+8\times 2^{3x}}=\frac{3}{20}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{3\times 3^{2x}+3^{2x}}{3}}{2\times 2^{3x}+8\times 2^{3x}}=\frac{3}{20}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{4}{3}\times(3^{2x})}{10\times(2^{3x})}=\frac{3}{20}$$

$$\Rightarrow (\frac{3^2}{2^3})^x=\frac{9}{8} \Rightarrow (\frac{9}{8})^x=\frac{9}{8} \Rightarrow x=1$$

۶.

$x=0/454545...$

$100x=45/454545...$

$99x=45 \Rightarrow x=\frac{45}{99}=\frac{5}{11}$

$\frac{5}{5a+1}=\frac{5}{11} \Rightarrow 5a+1=11$

$\Rightarrow a=2$

۷. الف)

مجموع سه ضلع = محیط مثلث

$=by^2+by^2+\sqrt{2}by^2=(2+\sqrt{2})by^2$

ارتفاع × قاعده= مساحت مثلث

$=by^2\times by^2=b^2y^4$

ب)

۲ × (مجموع دو ضلع مجاور) = محیط متوازی‌الاضلاع

$=(2ax+\frac{3}{2}ax)\times 2$

$=4ax+3ax=7ax$

ارتفاع × قاعده = مساحت متوازی‌الاضلاع

$=\frac{3}{2}ax\times\frac{4}{5}ax=\frac{6}{5}a^2x^2$

۸.

$(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+1$

$=x^3-3x^2+3x-1+ax^2-2ax+a$

$+bx-b+1$

$=x^3+(-3+a)x^2+(3-2a+b)x+a-b$ (۱)

اکنون برای این‌که عبارت زیر با عبارت (۱) برابر باشد، باید ضرایب جملات متناظر، با هم برابر باشند؛ یعنی ضرایب x^3 باهم، ضرایب x^2 با هم، ضرایب x با هم و عددهای ثابت با هم برابر باشند:

x^3-x^2-4x+5

بنابراین داریم:

$$\begin{cases}-3+a=-1\\ 3-2a+b=-4 \Rightarrow b=-3\ ,\ a=2\\ a-b=5\end{cases}$$

$\Rightarrow a+b=-1$

۹.

$a+b-c=1 \Rightarrow a+b=1+c$

$\Rightarrow (a+b)^2=(1+c)^2$

$\Rightarrow a^2+2ab+b^2=1+c^2+2c$

$\Rightarrow a^2+b^2-c^2-1=2c-2ab$

۱۰. $\frac{x}{x^2+x+1}=\frac{1}{7} \Rightarrow x^2+x+1=7x \Rightarrow x^2+1=6x$

$\Rightarrow \frac{x^2}{x}+\frac{1}{x}=6 \Rightarrow x+\frac{1}{x}=6$

$\Rightarrow (x+\frac{1}{x})^2=36 \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}+2=36$

$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}+1=35 \Rightarrow \frac{x^4+1+x^2}{x^2}=35$

$\Rightarrow \frac{x^2}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{35}$

۱۱. الف)

$$x^2+(-2xy-x)+(-3y^2+7y-2)$$
$$=x^2+(-2y-1)x+(-3y+1)(y-2)$$
$$=(x-3y+1)(x+y-2)$$

ب)

$$x^4+4=x^4+4+4x^2-4x^2$$
$$=(x^4+4x^2+4)-4x^2$$
$$=(x^2+2)^2-4x^2$$
$$=(x^2+2-2x)(x^2+2+2x)$$

۱۲.

$$\frac{a(x-2)+b(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\frac{8x+11}{(x-1)(x-2)}$$
$$\Rightarrow\frac{(a+b)x+(-2a-b)}{(x-1)(x-2)}=\frac{8x+11}{(x-1)(x-2)}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}a+b=8\\-2a-b=11\end{cases}\Rightarrow a=-19\ ,\ b=27$$
$$\Rightarrow a\times b=-19\times 27=-513$$

ریاضیات ۲

۱.

الف)
$$\frac{(x^2-4x+3)+(x^2-5x+6)}{(x-2)(x-1)}=\frac{2x-3}{x+2}$$
$$\Rightarrow\frac{2x^2-9x+9}{x^2-3x+2}=\frac{2x-3}{x+2}\Rightarrow(2x^2-9x+9)(x+2)=(x^2-3x+2)(2x-3)$$
$$\Rightarrow 2x^3+4x^2-9x^2-18x+9x+18$$
$$=2x^3-6x^2+4x-3x^2+9x-6$$
$$\Rightarrow 4x^2-22x+24=0\Rightarrow(2x-8)(2x-3)=0$$
$$\Rightarrow 2x-8=0\Rightarrow x=4\ ,\ 2x-3=0\Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

با توجه به دامنه‌ی معادله، یعنی: $D=\mathbb{R}-\{2,1,-2\}$، هر دو جواب قابل قبول هستند.

ب) طرفین معادله را مربع می‌کنیم:

$$(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})^2=2x-1\Rightarrow x+x-1+2\sqrt{x^2-x}=2x-1$$
$$\Rightarrow 2\sqrt{x^2-x}=0\Rightarrow x^2-x=0\Rightarrow x(x-1)=0$$
$$\Rightarrow x=0 \text{ یا } x=1$$

و با امتحان کردن جواب‌ها در معادله نتیجه می‌گیریم، جواب $x=0$ در دامنه‌ی معادله صدق نمی‌کند و غیرقابل قبول است و تنها جواب قابل قبول معادله، $x=1$ است.

۲.
$$\frac{1}{x+2}+\frac{7}{x(x-2)(x+2)}-\frac{2}{x(x-2)}>0$$
$$\Rightarrow\frac{x(x-2)+7-2(x+2)}{x(x-2)(x+2)}>0$$
$$\Rightarrow\frac{x^2-4x+3}{x(x-2)(x+2)}>0$$

x	−∞ تا −۲	−۲ تا ۰	۰ تا ۱	۱ تا ۲	۲ تا ۳	۳ تا +∞
x^2-4x+3	+	+	+	−	−	+
x	−	−	+	+	+	+
x−۲	−	−	−	−	+	+
x+۲	−	+	+	+	+	+
p	−	+	−	+	−	+

و با توجه به جدول بالا، مجموعه جواب نامعادله عبارت است از:

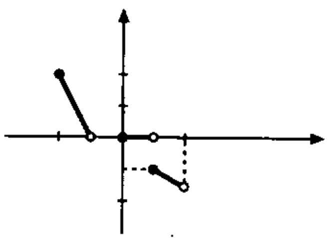
$-2<x<0$ یا $1<x<2$ یا $x>3$

۳.
$$\Delta=a^2-4a(a-1)<0\ ,\ a-1>0$$
$$\Rightarrow -3a^2+4a<0\Rightarrow a(-3a+4)<0\Rightarrow a>\frac{4}{3} \text{ یا } a<0 \text{ و}$$

$$a>1\Rightarrow\boxed{a>\frac{4}{3}}$$

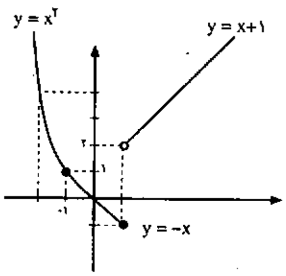
۴.

$$-2\le x<-1\Rightarrow[x]=-2\Rightarrow y=\frac{x+2}{-1}-x\Rightarrow y=-2x-2$$
$$-1\le x<0\quad\Rightarrow[x]=-1\Rightarrow[x]+1=0\Rightarrow y\notin\mathbb{R}$$
$$0\le x<1\quad\Rightarrow[x]=0\quad\Rightarrow y=\frac{x-0}{0+1}-x\Rightarrow y=0$$
$$1\le x<2\quad\Rightarrow[x]=1\quad\Rightarrow y=\frac{x-1}{1+1}-x\Rightarrow y=-\frac{x+1}{2}$$



۵. با توجه به نمودار، تابع f نه یک‌به‌یک است و نه پوشا.

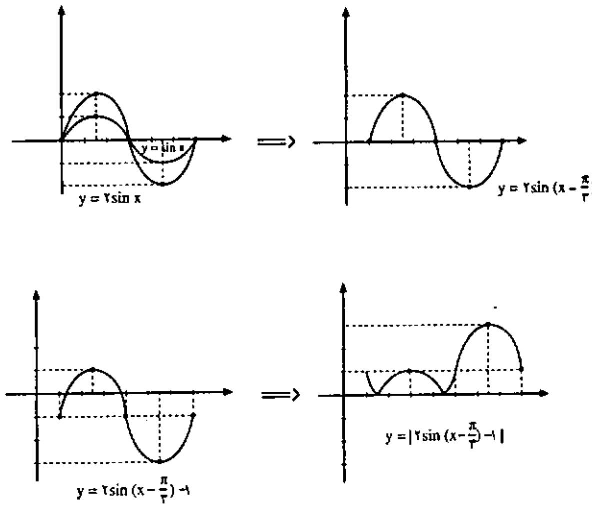
$$f(-2)=(-2)^2=4\Rightarrow f(f(-2))=f(4)=4+1=5$$
$$\Rightarrow f\big(f(f(-2))\big)=f(5)=5+1=6$$



۶. از نمودار $y=\sin x$ شروع می‌کنیم:

$y=2\sin x$ $\quad$ $y=2\sin(x-\frac{\pi}{3})$

$y=2\sin(x-\frac{\pi}{3})-1$ $\quad$ $y=\left|2\sin(x-\frac{\pi}{3})-1\right|$



۷. $A^۲=\begin{bmatrix}۲&۳\\۱&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&۳\\۱&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۷&۱۲\\۴&۷\end{bmatrix}\quad |A|=۴-۳=۱$

$\Rightarrow A^{-۱}=\begin{bmatrix}۲&-۳\\-۱&۲\end{bmatrix}\Rightarrow A^۲-A^{-۱}=\begin{bmatrix}۵&۱۵\\۵&۵\end{bmatrix}=۵\begin{bmatrix}۱&۳\\۱&۱\end{bmatrix}$

$\Rightarrow AX=\begin{bmatrix}۱&۳\\۱&۱\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}۲&۳\\۱&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۳\\۱&۱\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\begin{cases}۲a+۳c=۱\\a+۲c=۱\end{cases}\quad\begin{cases}۲b+۳d=۳\\b+۲d=۱\end{cases}\Rightarrow \begin{matrix}a=-۱\ ,\ c=۱\ ,\ b=۳\\ d=-۱\Rightarrow X=\begin{bmatrix}-۱&۳\\۱&-۱\end{bmatrix}\end{matrix}$

۸. $\log_{۲^۲}^{x}+\log_{۲}^{x}=\log_{۲^۳}^{x}+\log_{۲}^{۲}$

$\Rightarrow\frac{۱}{۲}\log_۲^x+\log_۲^x=\frac{۱}{۳}\log_۲^x+\log_۲^۲$

$\Rightarrow\frac{۷}{۶}\log_۲^x=\log_۲^۲\Rightarrow\log_۲^{x^{\frac{۷}{۶}}}=\log_۲^۲\Rightarrow x^{\frac{۷}{۶}}=۲$

$\Rightarrow x=۲^{\frac{۶}{۷}}\Rightarrow\boxed{x=\sqrt[۷]{۶۴}}$

هندسه ۱

۱. می‌دانیم که مجموع زاویه‌های درونی هر چهارضلعی محدب مساوی °۳۶۰ است. بنابراین داریم:

$\hat A+\hat B+\hat C+C\hat DA=۳۶۰°\Rightarrow ۴x+۷x+۳x+۶x=۳۶۰°$

$\Rightarrow ۲۰x=۳۶۰°\Rightarrow x=۱۸°$

اما $A\hat DC+A\hat DE=۱۸۰°$ است، پس داریم:

$۶x+y=۱۸۰°\Rightarrow ۶(۱۸°)+y=۱۸۰°$

$\Rightarrow ۱۰۸°+y=۱۸۰°\Rightarrow y=۱۸۰°-۱۰۸°\Rightarrow y=۷۲°$

۲. الف) شکل حاصل یک مثلث است.

(شکل۱)

ب) نمونه‌های متفاوتی را می‌توان رسم کرد. یک نمونه در زیر رسم شده است.

(شکل۲)

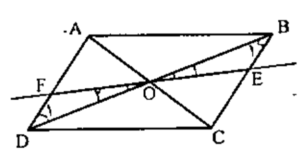
۳. می‌دانیم که تعداد قطرهای هر nضلعی محدب مساوی $\frac{n(n-۳)}{۲}$ است.
بنابراین داریم:

$\frac{n(n-۳)}{۲}=۴۴\Rightarrow n^۲-۳n=۸۸\Rightarrow n^۲-۳n-۸۸=۰$

$(n-۱۱)(n+۸)=۰\Rightarrow n=۱۱$ جواب، $n=-۸$ غیرقابل قبول

جواب قابل قبول $n=۱۱$ است.

۴. دو مثلث OBE و ODF به حالت (زض‌ز) همنهشت هستند (شکل۳)، زیرا:
$OB=OD$ و $\hat O_۱=\hat O_۲$ و $\hat B_۱=\hat D_۱$



(شکل۳)

از همنهشت بودن این دو مثلث نتیجه می‌شود که $OE=OF$ است.

۵. چهار ضلع مربع با هم مساوی‌اند، بنابراین داریم:

$\begin{cases}۲x-۴=۱۶\\۲y-۶=۱۶\\۳z+۱=۱۶\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۲x=۲۰\\۲y=۲۲\\۳z=۱۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=۱۰\\y=۱۱\\z=۵\end{cases}$

۶. اگر S مساحت متوازی‌الاضلاع باشد، آن‌گاه داریم:

$S_{ABK}+S_{KCD}=\frac{۱}{۲}S$

از طرف دیگر: $S_{DBC}=S_{EKC}+S_{KCD}=\frac{۱}{۲}S$

بنابراین: $S_{ABK}=S_{EKC}$

به همین ترتیب ثابت می‌شود که $S_{AKD}=S_{KCF}$ است.

با جمع کردن عضوهای متناظر دو تساوی اخیر با یکدیگر، نتیجه می‌شود:
$S_{ABKD}=S_{CEKF}$

۷. دو ضلع مستطیل را a و b می‌نامیم. داریم:

$a:b=۲/۴\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{۱۲}{۵}$ (۱)

$d=\sqrt{a^۲+b^۲}\Rightarrow ۲۶=\sqrt{a^۲+b^۲}$ (۲)

$\begin{cases}\frac{a}{b}=\frac{۱۲}{۵}\\\sqrt{a^۲+b^۲}=۲۶\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{۱۲}{۵}b\\a^۲+b^۲=۶۷۶\end{cases}\Rightarrow(\frac{۱۲}{۵}b)^۲+b^۲=۶۷۶$

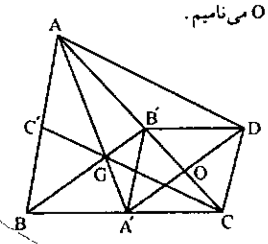
$\Rightarrow\frac{۱۶۹}{۲۵}b^۲=۶۷۶\Rightarrow b^۲=۱۰۰\Rightarrow b=۱۰cm$

$\Rightarrow a=\frac{۱۲}{۵}\times۱۰=۲۴cm$

$\Rightarrow$ مساحت مستطیل $=s=a.b=۲۴\times۱۰=۲۴۰cm^۲$

۸. مثلث ABC را درنظر می‌گیریم و میانه‌های AA'، BB' و CC' را رسم می‌کنیم (شکل۴).

از A'، پاره‌خط $A'D$ را موازی و مساوی میانه‌ی BB' رسم می‌کنیم و نقطه‌ی برخورد آن با AC را O می‌نامیم.



(شکل۴)

از D به A، B' و C، و از B' به B وصل می‌کنیم. چهارضلعی‌های $A'CDB'$، $BA'DB'$ و $CDAC'$ متوازی‌الاضلاع هستند، زیرا:

$A'D \| BB'$, $AD = BB'$

$\Rightarrow$ متوازی‌الاضلاع است $A'DB'B \Rightarrow B'D \| A'B$, B

$B'D = A'B \Rightarrow B'D \| A'C$, $B'D = A'C$

$\Rightarrow$ متوازی‌الاضلاع است $A'B'DC$

متوازی‌الاضلاع است $A'CDB' \Rightarrow CD \| A'B'$, $CD = A'B'$

اما AC' یا $A'B' \| AB$ و $A'B' = \frac{AB}{۲} = AC'$. پس داریم:

$CD \| A'B' \| AC'$ و $CD = A'B' = AC'$

$\Rightarrow$ متوازی‌الاضلاع است $CDAC'$

از آن‌جا نتیجه می‌شود که $AD = CC'$ است. پس مثلث $AA'D$ مثلثی است که سه ضلع آن میانه‌های مثلث ABC است؛ یعنی: $AA' = m_a$ ، $AD = CC' = m_c$ و $A'D = BB' = m_b$. بنابراین، با توجه به این که O نقطه‌ی برخورد قطرهای متوازی‌الاضلاع $A'CDB'$ است، داریم:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AA'D}} = \frac{S_{AA'C}}{S_{AA'O}} = \frac{AC}{OA} = \frac{۴}{۳}$$

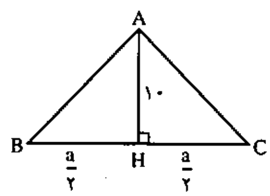
۹. قاعده‌ی مثلث متساوی‌الساقین ABC (AB=AC) را a می‌نامیم (شکل ۵).

با توجه به این که $AH = ۱۰$ است، داریم:

$$AB = \sqrt{AH^۲ + BH^۲} = \sqrt{۱۰^۲ + (\frac{a}{۲})^۲} = \sqrt{۱۰۰ + \frac{a^۲}{۴}}$$

$$\Rightarrow \text{محیط مثلث} = ۱۰۰ = BC + ۲AB = a + ۲\sqrt{۱۰۰ + \frac{a^۲}{۴}}$$

$$\Rightarrow a = ۴۸ \Rightarrow ۲AB = ۱۰۰ - ۴۸ = ۵۲ \Rightarrow AB = AC = ۲۶$$



(شکل ۵)

۱۰. لوزی ABCD را در شکل ۶ در نظر می‌گیریم و نقطه‌ی برخورد قطرهای آن را O می‌نامیم. داریم:

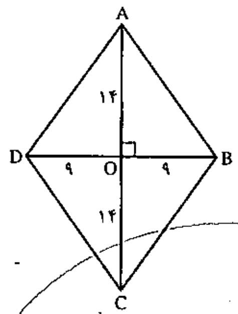
$$S = \frac{۱}{۲}AC.BD \Rightarrow ۲۵۲ = \frac{۱}{۲} \times AC \times ۱۸$$

$\Rightarrow AC = ۲۸$ قطر دیگر لوزی

$$\Rightarrow AO = \frac{AC}{۲} = \frac{۲۸}{۲} = ۱۴ \ ,\ BO = \frac{۱۸}{۲} = ۹$$

$$\Rightarrow AB^۲ = OA^۲ + OB^۲ \Rightarrow AB^۲ = ۱۴^۲ + ۹^۲ = ۲۵۶ + ۸۱ = ۳۳۷$$

$\Rightarrow AB = \sqrt{۳۳۷}$ اندازه‌ی ضلع لوزی



(شکل ۶)

۱۱. مثلث AMN قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است، زیرا:

$AM = AB = AD = AN \Rightarrow AM = AN = AB = ۱۲cm$

$M\hat{A}B = D\hat{A}N = ۶۰^\circ$ و

$M\hat{A}D = D\hat{A}B - M\hat{A}B = ۹۰^\circ - ۶۰^\circ = ۳۰^\circ$

$\Rightarrow M\hat{A}N = M\hat{A}D + D\hat{A}N = ۳۰^\circ + ۶۰^\circ = ۹۰^\circ$

از آن‌جا داریم:

$$S_{AMN} = \frac{۱}{۲}AM.AN = \frac{۱}{۲} \times ۱۲ \times ۱۲ = ۷۲cm^۲$$

۱۲. داریم:

$۴(x + ۲y) = ۳(۲x - y) \Rightarrow ۴x + ۸y = ۶x - ۳y$

$\Rightarrow ۸y + ۳y = ۶x - ۴x \Rightarrow ۱۱y = ۲x \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{۱۱}{۲}$

حسابان

۱. می‌دانیم $۱ \le \frac{[x]}{x} \le ۰$. در این صورت داریم:

الف) اگر $x \ge ۱ \Rightarrow ۰ \le \frac{[x]}{x} \le ۱ \Rightarrow ۱ =$

مجموعه‌ی $[۱, +\infty)$ جزء جواب است.

ب) اگر $۰ < x < ۱ \Rightarrow [x] = ۰ \Rightarrow$ غیر قابل قبول

ج) اگر $x < ۰$ و $x \notin Z \Rightarrow \frac{[x]}{x} > ۱ \Rightarrow$ غیر قابل قبول

مجموعه‌ی Z^- جزء جواب است.

د) اگر $x \in Z^- \Rightarrow \frac{[x]}{x} = ۱ \Rightarrow$ مجموعه‌ی Z^- جزء جواب است.

درنتیجه: $D_f = [۱ + \infty) \cup Z^-$

۲. $f(x)$ تابعی فرد است، زیرا:

$$\begin{cases} g(x) = \frac{a}{c}f(x) + \frac{b}{c}f(-x) \\ g(-x) = \frac{a}{c}f(-x) + \frac{b}{c}f(x) \end{cases}$$

فرد است. $g \Rightarrow g(x) + g(-x) = ۰$

$$\Rightarrow \frac{a}{c}f(x) + \frac{b}{c}f(-x) + \frac{a}{c}f(-x) + \frac{b}{c}f(x) = ۰$$

$$f(x)(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}) + f(-x)(\frac{b}{c} + \frac{a}{c}) = ۰$$

$$\Rightarrow (\frac{a}{c} + \frac{b}{c})(f(x) + f(-x)) = ۰$$

$$\Rightarrow f(x) + f(-x) = ۰$$

۳.

$$\left.\begin{matrix} f(x_۱) = f(x_۲) \Rightarrow x_۱ + [x_۱] = x_۲ + [x_۲] \Rightarrow x_۱ - x_۲ = [x_۲] - [x_۱] \\ [x_۲] - [x_۱] = k \in Z \end{matrix}\right\}$$

$\Rightarrow x_۱ - x_۲ = k$

$\Rightarrow x_۱ = x_۲ + k \Rightarrow x_۲ + k + [x_۲ + k] = x_۲ + [x_۲]$

$\Rightarrow x_۲ + [x_۲] + ۲k = x_۲ + [x_۲] \Rightarrow k = ۰$

$\Rightarrow x_۱ - x_۲ = ۰ \Rightarrow \ \Rightarrow x_۱ = x_۲$. تابع f یک به یک است.

$$\left.\begin{matrix} y = x + [x] \Rightarrow [y] = [x + [x]] = ۲[x] \Rightarrow [x] = \frac{[y]}{۲} \\ \left.\begin{matrix} y = x + [x] \\ [y] = ۲[x] \end{matrix}\right\} \Rightarrow y - [y] = x - [x] \end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow (x - [x]) + [x] = y - [y] + \frac{[y]}{۲}$$

$$\Rightarrow x = y - \frac{[y]}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = x - \frac{[x]}{2}$$

.۴

$$x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} (x-1)(x^2+x+1) = 0 \\ x^2 = -x-1 \end{cases}$$

$$R = (x^3)^4 \times x^2 + 2 = (1)^4 \times (-x-1) + 2 \Rightarrow R = -x+1$$

۵. x_1 و x_2 دو ریشه‌ی معادله هستند. بنابراین، در معادله صدق می‌کنند و داریم: $x_1^2 = 1 - x_1$ و $x_2^2 = 1 - x_2$.

بنابراین با توجه به: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -1$:

$$5x_1^2 + 3x_2^2 = 5(1-x_1) + 3(1-x_2)$$
$$= 8 - 3(x_1+x_2) - 2x_1 = 8 - 5x_1 - 3x_2$$

.۶

$$\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} = \frac{2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} + 2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{3\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}}$$

$$= \frac{\sin\frac{2\pi}{5} + \sin\frac{4\pi}{5} - \sin\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}$$

$$= \frac{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right)}{\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{\sin\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}} = 1$$

.۷

$$\lim_{x\to 2}\frac{2^x + 2^{3-x} - 6}{\sqrt{2^{-x} - 2^{1-x}}} \overset{2^x = t}{=} \lim_{t\to 4}\frac{t + \frac{8}{t} - 6}{\sqrt{\frac{1}{t} - \frac{2}{t}}} = \lim_{t\to 4}\frac{t^2 - 6t + 8}{\sqrt{t} - 2}$$

$$= \lim_{t\to 4}\frac{(\sqrt{t}-2)(\sqrt{t}+2)(t-2)}{(\sqrt{t}-2)} = 8$$

.۸

$$\lim_{x\to+\infty}\left(ax + 1 + \sqrt{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + 1}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(ax + 1 + \sqrt{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + 1 - \frac{b^2}{4}}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(ax + 1 + \left|x + \frac{b}{2}\right|\sqrt{1 + \frac{1 - \frac{b^2}{4}}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(ax + 1 + \left|x + \frac{b}{2}\right|\sqrt{1 + \frac{1 - \frac{b^2}{4}}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} ax + 1 + \left(x + \frac{b}{2}\right) = 2 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}(a+1)x + 1 + \frac{b}{2} = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+1 = 0 \Rightarrow a = -1 \\ 1 + \frac{b}{2} = 2 \Rightarrow b = 2 \end{cases}$$

۹. چون $x = 2$ و $x = 4$ مجانب‌های تابع هستند، بنابراین نمی‌توانند ریشه‌های صورت باشند. پس:

$$x = 2 \Rightarrow \begin{cases} \text{صورت} \quad x = 2 \Rightarrow (2)^2 + a \neq 0 \Rightarrow a \neq -4 \\ \text{مخرج} \quad x = 2 \Rightarrow (2)^2 + (m+2n)(2) + m = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3m + 4n = -4$$

$$x = 4 \Rightarrow \begin{cases} \text{صورت} \quad x = 4 \Rightarrow (4)^2 + a \neq 0 \Rightarrow a \neq -16 \\ \text{مخرج} \quad x = 4 \Rightarrow (4)^2 + (m+2n)(4) + m = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 5m + 8n = -16$$

با شرط $\begin{cases} x \neq -4 \\ x \neq -16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3m + 4n = -4 \\ 5m + 8n = -16 \end{cases} \Rightarrow m = 8,$

$$n = -7 \Rightarrow m + n = 1$$

.۱۰

$$\sqrt{5}x = k, k \in Z \Rightarrow x = \frac{k}{\sqrt{5}}, x \in [-2, 2]$$

$$\Rightarrow -2 \leq \frac{k}{\sqrt{5}} \leq 2 \Rightarrow -2\sqrt{5} \leq k \leq 2\sqrt{5} \Rightarrow -6 < k < 6$$

$$x = \frac{-5}{\sqrt{5}}, \frac{-4}{\sqrt{5}}, \cdots, \frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{5}{\sqrt{5}}$$

بنابراین، تابع در ۱۱ نقطه ناپیوستگی دارد.

جبر و احتمال

۱. (الف) $n = 1: \frac{1}{2^1} = \frac{2^2 - 1 - 2}{2^1} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

(فرض استقراء) $n = k: \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{k}{2^k} = \frac{2^{k+1} - k - 2}{2^k}$

(حکم استقراء)

$$n = k+1: \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{k}{2^k} + \frac{k+1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+2} - (k+1) - 2}{2^{k+1}}$$

به کمک فرض استقراء مجموع k جمله‌ی نخست را در حکم جایگذاری می‌کنیم:

$$\frac{2^{k+1} - k - 2}{2^k} + \frac{k+1}{2^{k+1}} = \frac{2(2^{k+1} - k - 2) + (k+1)}{2^{k+1}}$$

$$= \frac{2^{k+2} - 2k - 4 + k + 1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+2} - (k+1) - 2}{2^{k+1}}$$

(ب)

$$n = 2: \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+2} > \frac{13}{24} \Leftrightarrow \frac{7}{12} > \frac{13}{24} \Leftrightarrow \frac{14}{24} > \frac{13}{24}$$

(فرض استقراء) $n = k: \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{k+k} > \frac{13}{24}$

$$n = k+1: \frac{1}{(k+1)+1} + \frac{1}{(k+1)+2} + \cdots + \frac{1}{(k+1)+(k-1)}$$

(حکم استقراء) $+ \frac{1}{(k+1)+k} + \frac{1}{(k+1)+(k+1)} > \frac{13}{24}$

به دو طرف فرض کسرهای $\frac{1}{2k+1}$ و $\frac{1}{2k+2}$ را می‌افزاییم:

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{k+k} + \frac{1}{(k+1)+k} + \frac{1}{(k+1)(k+1)}$$

$$> \frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}+\frac{13}{24}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{(k+1)+k}+\frac{1}{(k+1)+(k+1)}$$

$$> \frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}-\frac{1}{k+1}+\frac{13}{24}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{(k+1)+(k+1)} > \frac{2k+2+2k+1-4k-2}{2(k+1)(2k+1)}+\frac{13}{24}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(k+1)+1}+\frac{1}{(k+1)+2}+\cdots+\frac{1}{(k+1)+(k+1)} > \frac{1}{2(k+1)(2k+1)}+\frac{13}{24}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(k+1)+1}+\frac{1}{(k+1)+2}+\cdots+\frac{1}{(k+1)+(k+1)} > \frac{13}{24}$$

(ج)

$n=1 :\ 1-1=6r \Leftrightarrow 0=6r\,(r=0)$

$n=k :\ k^3-k=6r'$ (فرض استقراء)

$n=k+1 :\ (k+1)^3-(k+1)=6r''$ (حکم استقراء)

$$(k+1)^3-(k+1)=k^3+3k^2+3k+1-k-1$$
$$=\underbrace{(k^3-k)}_{6r'}+3\underbrace{k(k+1)}_{2m}$$

چون عددهای k و $k+1$ عددهای طبیعی متوالی هستند، لذا یکی از آن‌ها زوج و درنتیجه حاصلضرب آن‌ها عددی زوج است و با توجه به فرض استقراء می‌توان نوشت:

$$(k+1)^3-(k+1)=6r'+6m=6\underbrace{(r'+m)}_{r''}=6r''$$

۲. اولاً:

$a=\frac{p}{q}\quad p,q\in Z\ ,\ q\neq 0\ ,\ b=\frac{p'}{q'}\ ,\ p',q'\in Z\ ,\ q'\neq 0$

$\Rightarrow a.b=\frac{p}{q}.\frac{p'}{q'}=\frac{pp'}{qq'}=\frac{p''}{q''}\ ,\ p'',q''\in Z\ ,\ q''\neq 0$

$\Rightarrow a.b\in Q$

ثانیاً: فرض می‌کنیم a عددی گویا و غیرصفر و b عددی گنگ باشد:

$a=\frac{m}{n}\ ,\ m,n\in Z\ ,\ m\neq 0\ ,\ n\neq 0$

حال فرض می‌کنیم ab گنگ نباشد (برهان خلف):

$ab\in Q\Rightarrow ab=\frac{p}{q}\ ,\ p,q\in Z\ ,\ q\neq 0$

$\Rightarrow \frac{m}{n}.b=\frac{p}{q}\Rightarrow b=\frac{p}{q}\times\frac{n}{m}=\frac{np}{mq}=\frac{m'}{n'}\ ,$

$m',n'\in Z\ ,\ n'\neq 0\Rightarrow b\in Q$

ثالثاً: با یک مثال نقض می‌توان نادرستی این حکم را نشان داد:

$a=\sqrt{2}\notin Q\ ,\ b=\sqrt{8}\notin Q\ ,\ ab=\sqrt{16}=4\in Q$

۳. $(a^4+b^4)(a^5+b^5)\leq 2(a^9+b^9)\Leftrightarrow$

$a^9+a^4b^5+b^4a^5+b^9\leq 2a^9+2b^9\Leftrightarrow$

$a^9+b^9-a^4b^5-b^4a^5\geq 0\Leftrightarrow a^4(a^5-b^5)-b^4(a^5-b^5)\geq 0$

$\Leftrightarrow (a^5-b^5)(a^4-b^4)\geq 0\Leftrightarrow$

$(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)\geq 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)\geq 0$

و با توجه به مثبت بودن a و b درستی نابرابری اخیر واضح بوده و همه‌ی مراحل نیز برگشت‌پذیر می‌باشند.

۴. اعضای S (و هر عدد طبیعی دیگر) در تقسیم بر ۱۴، ۱۴ نوع باقی‌مانده مختلف می‌توانند داشته باشند: $r=0,1,2,\cdots,13$

و چون S، ۱۵ عضو دارد، بنابراین طبق اصل لانه کبوتر لااقل دو عضو از اعضای S در تقسیم بر ۱۴ یک باقی‌مانده دارند، اگر این دو عضو را a و b بنامیم خواهیم داشت:

$a,b\in S, a=14q+r, b=14q'+r\Rightarrow a-b=14(q-q')$

$\Rightarrow a-b=14k$

۵. با توجه به برابری اعضا، حالت‌های زیر قابل تصور می‌باشد:

$$\begin{cases}x+y=2\\x-y=2\end{cases}\quad \begin{cases}x+y=2\\x-y=3\end{cases}\quad \begin{cases}x+y=3\\x-y=2\end{cases}$$

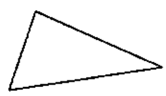
$$\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=0\end{cases}\ \text{یا}\ \begin{cases}x=\frac{5}{2}\\y=-\frac{1}{2}\end{cases}\ \text{یا}\ \begin{cases}x=\frac{5}{2}\\y=\frac{1}{2}\end{cases}$$

۶. $$A=\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$$

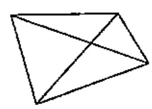
هندسه‌ی ۲

۱. یک سه‌ضلعی، یک چهارضلعی، یک پنج‌ضلعی، یک شش‌ضلعی و یک هفت‌ضلعی رسم می‌کنیم (شکل های۱) و قطرهای آن‌ها را رسم می‌کنیم. به طوری که دیده می‌شود،

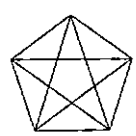
- سه‌ضلعی (مثلث) قطر ندارد.



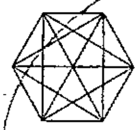
- چهارضلعی ۲ قطر دارد.



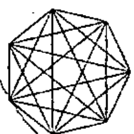
- پنج‌ضلعی ۵ قطر دارد.



- شش‌ضلعی ۹ قطر دارد.



- هفت‌ضلعی ۱۴ قطر دارد.



(شکل های۱)

بنابراین جدول زیر را داریم:

تعدادضلع‌ها	۳	۴	۵	۶	۷
تعدادقطرها	۰	۲	۵	۹	۱۴

حال بررسی می‌کنیم که تعداد ضلع‌های چندضلعی، چه رابطه‌ای با تعداد قطرهای آن دارد. برای این منظور، تعداد قطرهایی را که از هر رأس یک چندضلعی رسم می‌شوند، بررسی می‌کنیم. جدول زیر را خواهیم داشت:

تعداد ضلع‌های چند ضلعی	۳	۴	۵	۶	۷
تعدادقطرهای رسم شده از هر رأس	۰	۱	۲	۳	۴

تعداد قطرهای رسم‌شده از هر رأس چندضلعی‌های بالا را به صورت زیر می‌توان نوشت:

- تعداد قطرهای رسم شده از هر رأس سه‌ضلعی مساوی است با: $3-3=0$
- تعداد قطرهای رسم شده از هر رأس چهارضلعی مساوی است با: $4-3=1$
- تعداد قطرهای رسم‌شده از هر رأس پنج‌ضلعی مساوی است با: $5-3=2$
- تعداد قطرهای رسم‌شده از هر رأس شش‌ضلعی مساوی است با: $6-3=3$
- تعداد قطرهای رسم شده از هر رأس هفت‌ضلعی مساوی است با: $7-3=4$

اکنون با توجه به تعداد رأس‌های یک چندضلعی، تعداد قطرهای رسم‌شده از تمام رأس‌های چندضلعی‌های فوق را به صورت زیر می‌توان نوشت:

- قطرهای رسم‌شده از تمام رأس‌های سه‌ضلعی مساوی است با:

$3\times(3-3)=0$

- قطرهای رسم‌شده از تمام رأس‌های چهارضلعی مساوی است با:

$4\times(4-3)=4$

- قطرهای رسم‌شده از تمام رأس‌های پنج‌ضلعی مساوی است با:

$5\times(5-3)=10$

- قطرهای رسم‌شده از تمام رأس‌های شش‌ضلعی مساوی است با:

$6\times(6-3)=18$

- قطرهای رسم‌شده از تمام رأس‌های هفت‌ضلعی مساوی است با:

$7\times(7-3)=28$

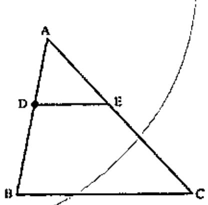
اما:

- تعداد قطرهای سه‌ضلعی (مثلث) برابر است با: $0=\frac{3(3-3)}{2}$
- تعداد قطرهای چهارضلعی برابر است با: $2=\frac{4(4-3)}{2}$
- تعداد قطرهای پنج‌ضلعی برابر است با: $5=\frac{5(5-3)}{2}$
- تعداد قطرهای شش‌ضلعی برابر است با: $9=\frac{6(6-3)}{2}$
- تعداد قطرهای هفت‌ضلعی برابر است با: $14=\frac{7(7-3)}{2}$

با توجه به نتایج به دست آمده، حدس می‌زنیم که تعداد قطرهای هر n ضلعی محدب مساوی $\frac{n(n-3)}{2}$ است.

۲. خیر، در صورتی DE موازی ضلع BC است که نقطه‌های D و E ترتیب ضلع‌های AB و AC را به نسبت‌های متناظر متناسب تقسیم کرده باشند (شکل ۲). یعنی داشته باشیم:

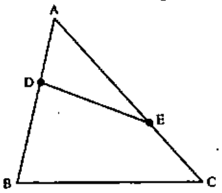
$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}=K$$



(شکل۲)

در صورتی که $\frac{AD}{DB}=\frac{CE}{EA}=K$ باشد (شکل ۳)، در این حالت DE موازی BC نیست، مگر آن‌که $K=1$ باشد.

بدیهی است که در حالت اخیر، در دو نسبت $\frac{AD}{DB}$ و $\frac{CE}{EA}$، پاره‌خط‌ها متناظر (نظیر هم) نیستند. پس باید توجه داشته باشیم که اگر: دو نقطه‌ی واقع بر دو ضلع یک مثلث، آن ضلع‌ها را به نسبت‌های متناظر متناسب تقسیم کنند، پاره‌خط واصل بین آن دو نقطه، با ضلع سوم مثلث موازی است.



(شکل۳)

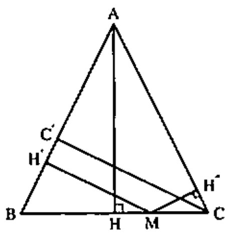
۳. مثلث متساوی‌الساقین ABC(AB = AC) را در نظر می‌گیریم. ارتفاع AH و یک ارتفاع وارد بر ساق، مثلاً ارتفاع CC' را رسم می‌کنیم (شکل ۴). می‌دانیم که مجموع فاصله‌های هر نقطه‌ی واقع بر قاعده‌ی یک مثلث متساوی‌الساقین از دو ساق آن، مساوی اندازه‌ی ارتفاع وارد بر ساق مثلث است، یعنی اگر M نقطه‌ای از قاعده‌ی BC باشد، $MH'+MH''=CC'=h_c$ است. بنابراین کافی است ارتفاع CC' را تعیین کنیم. داریم:

$AB^2=AH^2+HB^2, AH=12cm, HB=\frac{BC}{2}=\frac{10}{2}=5cm$

$\Rightarrow AB^2=12^2+5^2=169\Rightarrow AB=13cm$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}BC\times AH=\frac{1}{2}AB\times CC'\Rightarrow BC\times AH=AB\times CC'$

$\Rightarrow 10\times 12=13\times CC'\Rightarrow CC'=\frac{120}{13}\Rightarrow CC'=9\frac{3}{13}cm=h_C$



(شکل۴)

۴.

الف) بنا به ویژگی نیم‌ساز زاویه‌ی درونی مثلث داریم:

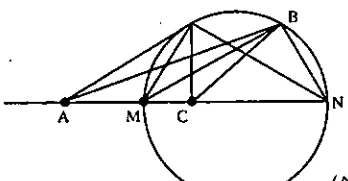
$\frac{DA}{DC}=\frac{AB}{BC}\Rightarrow\frac{8}{DC}=\frac{4x}{5x}\Rightarrow\frac{8}{DC}=\frac{4}{5}\Rightarrow DC=10$

از آن‌جا:

$AC=AD+DC=8+10=18$

ب) خیر، اندازه‌ی ضلع‌های AB و BC را نمی‌توان به دست آورد، زیرا تنها نسبت این دو ضلع معلوم است: $\frac{BA}{BC}=\frac{4x}{5x}=\frac{4}{5}$ و می‌دانیم که نسبت بین دو مقدار، فقط مشخص می‌کند که یک پاره‌خط چند برابر پاره‌خط دیگر است.

نکته. مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که نسبت فاصله‌اش از دو نقطه‌ی ثابت واقع در آن صفحه مقدار ثابت k است، دایره‌ای است که قطرش آن پاره‌خط ثابت را به نسبت k تقسیم می‌کند: $\frac{BA}{BC}=\frac{MA}{MC}=\frac{NA}{NC}=k$ (شکل ۵).



(شکل۵)

این مکان هندسی نشان می‌دهد که بی‌شمار نقطه در صفحه وجود دارد، به قسمی که نسبت فاصله‌شان از دو نقطه‌ی ثابت واقع در آن صفحه مقدار ثابتی مانند k باشد.

۵. بنا به ویژگی نیم‌ساز زاویه‌ی درونی مثلث داریم:

$\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow\frac{5}{x-9}=\frac{x}{x+3}\Rightarrow x^2-9x=5x+15$

$\Rightarrow x^2 - 14x - 15 = 0 \Rightarrow x = 15$ و $x = -1$ غیر قابل قبول

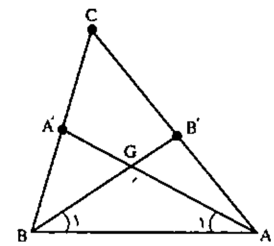
$\Rightarrow DC = x - 9 = 15 - 9 = 6 \Rightarrow BC = BD + DC = 5 + 6 = 11$

$AB = x = 15$ و $AC = x + 3 = 15 + 3 = 18$

$\Rightarrow$ محیط مثلث $= AB + BC + AC = 15 + 11 + 18 = 44$

۶. مثلث ABC را در نظر می‌گیریم و دو میانه از این مثلث، مثلاً میانه‌های AA' و BB' را رسم می‌کنیم. اگر این دو میانه متقاطع باشند، حکم مسئله درست است. در این صورت، میانه‌های AA' و BB' مطابق شکل ۶ درون مثلث قرار می‌گیرند و داریم:

$$\hat{A}_1 < \hat{A} \text{ و } \hat{B}_1 < \hat{B} \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{B}_1 < \hat{A} + \hat{B} \qquad (1)$$



(شکل۶)

اما در صورتی که دو میانه‌ی AA' و BB' یکدیگر را قطع نکنند، چون در یک صفحه قرار دارند، با هم موازی خواهند بود. در این حالت خواهیم داشت:

$$\hat{A}_1 + \hat{B}_1 = 180^\circ \qquad (2)$$

در این صورت رابطه‌ی ۱ به این صورت در خواهد آمد:

$180^\circ < \hat{A} + \hat{B}$ یا $\hat{A} + \hat{B} > 180^\circ$

این رابطه خلاف فرض مثلث بودن مثلث ABC است، زیرا در هر مثلث، مجموع سه زاویه مساوی 180° است. پس مجموع دو زاویه نمی‌تواند بیشتر از 180° باشد.

بنابراین دو میانه‌ی AA' و BB' نمی‌توانند موازی باشند و درنتیجه متقاطع‌اند.

به همین دلیل، هر دو میانه‌ی دیگر مثلث نیز متقاطع هستند.

۷. ضلع‌های مثلث را a، b و c می‌گیریم و فرض می‌کنیم $a = 6$ ، b و c اعداد صحیح هستند و $b + c < 10$ و با فرض $b > c$ ، $b - c = 1$ باشد.

می‌دانیم که $b - c < a < b + c$ است، پس:

$1 < 6 < b + c$

شرط $6 > 1$ برقرار است، پس باید شرط $6 < b + c$ نیز برقرار باشد. درنتیجه b و c جواب دستگاه نامعادله‌ی زیر هستند.

$$\begin{cases} b + c < 10 \\ b + c > 6 \end{cases}$$

بنابراین، با توجه به فرض مسئله که b و c عددهای صحیح هستند، داریم:

$b + c = 9$ یا $b + c = 8$ یا $b + c = 7$

با توجه به این که $b - c = 1$ است، خواهیم داشت:

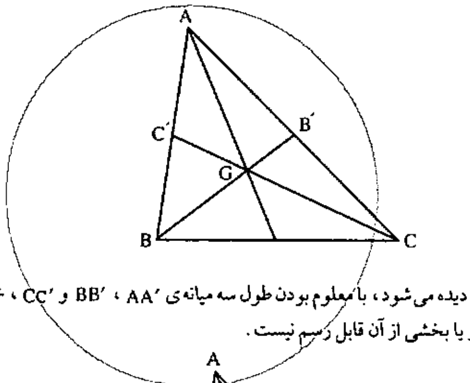
$$\begin{cases} b + c = 9 \\ b - c = 1 \end{cases} \Rightarrow b = 5 \text{ و } c = 4 \text{ قابل قبول}$$

$$\begin{cases} b + c = 8 \\ b - c = 1 \end{cases} \Rightarrow b = 4/5 \text{ غیر قابل قبول}$$

$$\begin{cases} b + c = 7 \\ b - c = 1 \end{cases} \Rightarrow b = 4 \text{ و } c = 3 \text{ قابل قبول}$$

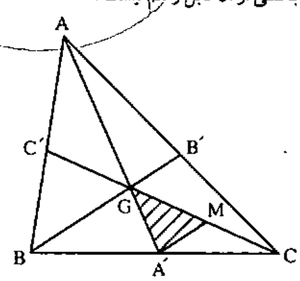
پس ضلع‌های مثلث جواب مسئله، $a = 6$ ، $b = 5$ ، $c = 4$ و یا $a = 6$ ، $b = 4$ و $c = 3$ است. یعنی مسئله دو دسته جواب دارد.

۸. فرض می‌کنیم مسئله حل شده و مثلث ABC با میانه‌های $AA' = m_a$ ، $BB' = m_b$ و $CC' = m_c$ جواب آن باشد. می‌دانیم که میانه‌های مثلث در یک نقطه مانند G همرسند و در این نقطه یکدیگر را به‌نسبت $\frac{1}{2}$ تقسیم می‌کنند؛ یعنی $GA = 2GA'$ ، $GB = 2GB'$ و $GC = 2GC'$ (شکل ۷).



(شکل۷)

طوری که دیده می‌شود، با معلوم بودن طول سه میانه‌ی AA' ، BB' و CC' ، خود مثلث ABC و یا بخشی از آن قابل رسم نیست.



(شکل۸)

بنابراین باید تغییرات مناسبی در مسئله ایجاد کنیم تا مثلاً مثلثی قابل رسم به دست آید. برای این کار، در این مسئله از نقطه‌ی A' وسط ضلع BC به نقطه‌ی M وسط پاره‌خط GC وصل می‌کنیم (شکل ۸).

در مثلث BCG، پاره‌خط $A'M$ وسط‌های دو ضلع BC و GC را به هم وصل کرده است (A' وسط BC و M وسط GC). بنابراین $A'M$ موازی BG و مساوی نصف آن است، یعنی:

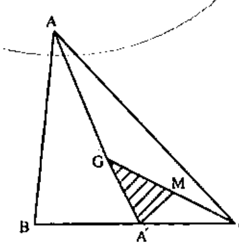
$$A'M = \frac{BG}{۲} = \frac{\frac{۲}{۳}BB'}{۲} = \frac{۱}{۳}BB' = \frac{۱}{۳}m_b$$

از طرف دیگر داریم:

$$GM = \frac{۱}{۲}GC = \frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۳}BB' = \frac{۱}{۳}BB' = \frac{۱}{۳}m_b \quad و \quad GA' = \frac{۱}{۳}AA' = \frac{۱}{۳}m_a$$

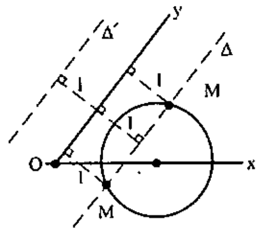
بنابراین اندازه‌ی سه ضلع مثلث $GA'M$ معلوم است. پس، این مثلث به دلیل معلوم بودن اندازه‌ی سه ضلعش قابل رسم است. بنابراین برای حل مسئله‌ی داده شده، یعنی برای رسم مثلث ABC، چنین عمل می‌کنیم:

مثلث $GA'M$ را چنان رسم می‌کنیم که اندازه‌ی سه ضلعش $GA' = \frac{۱}{۳}m_b$، $A'M = \frac{۱}{۳}m_b$ و $GM = \frac{۱}{۳}m_c$ باشد (رسم مثلثی با معلوم بودن اندازه‌ی سه ضلعش را در کتاب درسی هندسه‌ی ۲ دیده‌ایم). آن‌گاه $A'G$ را از طرف G به اندازه‌ی دو برابر خودش امتداد می‌دهیم تا نقطه‌ی A به‌دست آید. (می‌دانیم که $GA = ۲GA'$ است). GM را از طرف M به اندازه‌ی خودش امتداد می‌دهیم تا رأس C به‌دست آید. از C به A' وصل می‌کنیم و CA' را به اندازه‌ی خودش امتداد می‌دهیم تا رأس B حاصل شود. از A به B و C وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسئله است (شکل ۹).



(شکل۹)

نکته‌ی مهم: روش بالا، یعنی این‌که «مسئله را حل شده بگیریم»، یکی از راهبردهای بسیار مهم در حل مسئله‌هاست. در بسیاری از مسئله‌ها، تنها با استفاده از داده‌ها، نمی‌توانیم مسئله را حل کنیم (مثل مسئله ۴۹) و نیازمند اطلاعات جدیدی از آن هستیم. برای دست‌یابی به اطلاعات جدید، مسئله را حل‌شده می‌گیریم و به کاوش در ویژگی‌ها و رابطه‌های بین اجزای آن می‌پردازیم تا اطلاعات لازم و کافی برای حل مسئله را از میان آن‌ها استخراج کنیم. آن‌گاه به کمک داده‌های قبلی و یافته‌های جدید، مسئله را حل می‌کنیم.



(شکل ۱۰)

۹. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که از نقطه‌ی معلوم A به فاصله‌ی R است، دایره‌ای به مرکز A و به شعاع R است. این دایره را رسم می‌کنیم و آن را «C» می‌نامیم (شکل ۱۰). از طرف دیگر، مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که از خط ثابت oy به فاصله‌ی ثابت l قرار دارد، دو خط موازی oy، در دو طرف آن و به فاصله‌ی l از آن هستند. این مکان هندسی را نیز رسم می‌کنیم و آن‌ها را خط‌های Δ و $Δ'$ می‌نامیم. نقطه‌های برخورد Δ و $Δ'$ با دایره‌ی C جواب مسئله‌اند و به تعداد نقطه‌های برخورد، مسئله جواب دارد. پس مسئله حداکثر ۴ جواب دارد.

۱۰. می‌دانیم که قطر عمود بر هر وتر در یک دایره، عمودمنصف آن وتر است. بنابراین داریم:

$AH = \frac{AB}{۲}$ و $A\hat{H}O = ۹۰^\circ$ و $OA = ۱۰$ و $OH = ۶$

$$OH^۲ + AH^۲ = OA^۲ \Rightarrow ۶^۲ + AH^۲ = ۱۰^۲$$
$$\Rightarrow AH^۲ = ۱۰۰ - ۳۶$$
$$\Rightarrow AH^۲ = ۶۴ \Rightarrow AH = ۸ \Rightarrow AB = ۲AH = ۱۶$$

۱۱. با توجه به این‌که مماس‌های رسم‌شده از هر نقطه بر یک دایره مساوی‌اند، داریم:

$$\text{محیط چهارضلعی} = ۲(AQ + BM + CN + DP)$$

از آن‌جا:

$$۱۴۲ = ۲(x + ۱۹ + ۲۲ + x + ۸)$$
$$۷۱ = ۲x + ۴۹ \Rightarrow ۲x = ۲۲ \Rightarrow x = ۱۱$$

۱۲. مثلث OMT در رأس T قائم‌الزاویه است و TH ارتفاع وارد بر وتر این مثلث است و داریم:

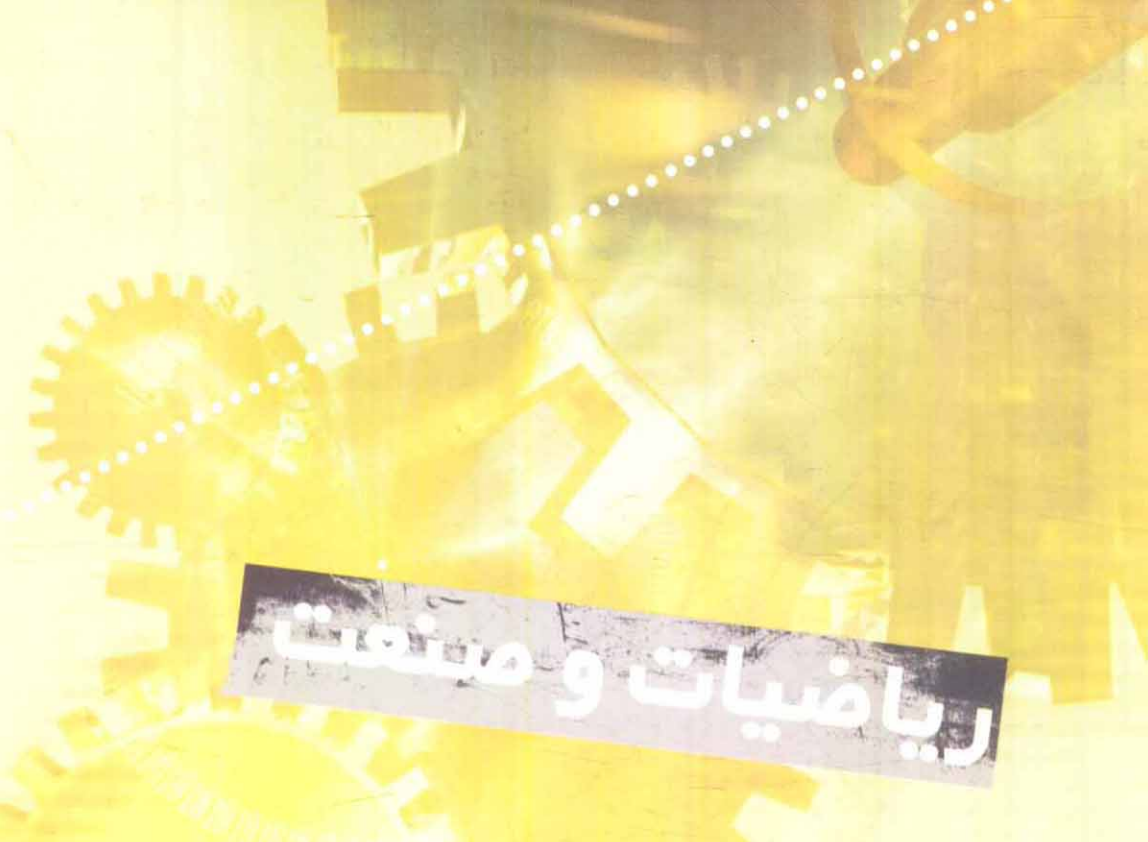
الف) $MT^۲ = OM^۲ - OT^۲$ و $OT = R = ۱۰$ و $OM = ۲۶$

$$\Rightarrow MT^۲ = ۲۶^۲ - ۱۰^۲ = ۶۷۶ - ۱۰۰ = ۵۷۶ \Rightarrow MT = ۲۴$$

ب) $OM^۲ = OH.OM \Rightarrow ۱۰^۲ = OH.۲۶ \Rightarrow OH = \frac{۱۰۰}{۲۶}$

$\Rightarrow OH = \frac{۵۰}{۱۳}$ و

$$TH.OM = OT \times TM = ۲S_{OMT} \Rightarrow TH \times ۲۶ = ۱۰ \times \frac{۵۰}{۱۳}$$
$$\Rightarrow TH = \frac{۲۵۰}{۱۶۹}$$



ریاضیات و صنعت

همان طور که از بررسی تاریخ برمی آید، آغاز حساب و هندسه‌ی مقدماتی، به‌طور کامل زیر تأثیر خواست‌های مستقیم زندگی و عمل بود. اندیشه‌ها و روش‌های تازه‌ی بعدی ریاضی هم، با توجه به خواست‌های عملی دانش‌های طبیعی (اخترشناسی، مکانیک، فیزیک و غیره) که پیوسته در حال پیشرفت بودند، شکل می گرفت. بستگی مستقیم ریاضیات با صنعت، غالباً به صورت به کار گرفتن نظریه‌های موجود ریاضی در مسئله‌های صنعتی جلوه می کند. با وجود این، از نمونه‌هایی یاد می کنیم که بر اثر خواست مستقیم صنعت نظریه‌های کلی ریاضی به وجود آمده‌اند. روش «کمترین مربع‌ها»، به دلیل نیازهای نقشه برداری پدید آمد. بسیاری از حالت‌های تازه‌ی معادله‌های دیفرانسیلی، برای نخستین بار برای حل مسئله‌های مربوط به صنعت، طرح و بررسی شد. روش‌های اپراتوری حل معادله‌های دیفرانسیلی، در رابطه با الکترونیک تکامل یافت و....

به خاطر نیازهای ارتباطی، شاخه‌ی تازه‌ای به نام «انفورماسیون»، در نظریه‌ی احتمال به وجود آمد. مسئله‌های مربوط به ترکیب دستگاه‌های مدیریت، به پیشرفت شاخه‌های تازه‌ای از منطق ریاضی منجر شدند. برای پیشرفت روش‌های تقریبی حل معادله‌های دیفرانسیل، به جز نیازهای اخترشناسی، مسئله‌های مربوط به صنعت هم نقش اساسی داشته‌اند. بسیاری از این روش‌ها، به‌طور کامل با تکیه بر زمینه‌های صنعتی و مهندسی پدید آمدند.

با پیچیده‌تر شدن صنعت و دشواری‌های ناشی از آن، موضوع به دست آوردن سریع جواب‌های عددی، اهمیت زیادی پیدا می کند. با امکان‌هایی که در نتیجه‌ی کشف ماشین‌های محاسبه برای حل عملی مسئله‌ها به وجود آمد، روش‌های محاسبه‌ای باز هم اهمیت بیشتری پیدا کردند. ریاضیات محاسبه‌ای، برای حل بسیاری از مسئله‌های عملی و از جمله مسئله‌های مربوط به انرژی اتمی و بررسی‌های فضایی، نقشی جدی به عهده دارد.

منبع
فرهنگ ریاضیات. گروه ریاضیات انتشارات مدرسه. ناشر: مدرسه‌ی برهان.

معلم • جوان • نوجوان • نوآموز • دانش‌آموز • کودک • مدیریت مدرسه • تکنولوژی آموزشی • قرآن • آموزش ابتدایی

آموزش زبان و ادب فارسی • آموزش زبان • آموزش جغرافیا • آموزش شیمی • آموزش زیست‌شناسی • زمین‌شناسی

آموزش معارف اسلامی • برهان • آموزش تاریخ • آموزش علوم اجتماعی • هنر

نشریات رشد

راهی مطمئن بسوی تقویت بنیه‌ی علمی دانش‌آموزان و معلمان

از کجا بخریم؟

همکاران محترم فرهنگی، دانشجویان و دانش‌آموزان عزیز می‌توانند محصولات دفتر انتشارات کمک آموزشی (نشریات رشد عمومی و تخصصی و کتاب‌های رشد) را از طریق زیر دریافت کنند:

- کلیه واحدهای آموزشی سراسر کشور
- تکمیل برگ اشتراک مجله‌های رشد و ارسال مدارک به امور مشترکین   تلفن: ۷۷۳۳۶۶۵۶
- نمایشگاه دائمی نشریات رشد واقع در فروشگاه مرکزی انتشارات مدرسه

تهران، خیابان کریم‌خان، ابتدای ایرانشهر شمالی، ساختمان شماره چهار آموزش و پرورش، کتاب فروشی انتشارات مدرسه   تلفن: ۸۸۸۲۲۶۶۸