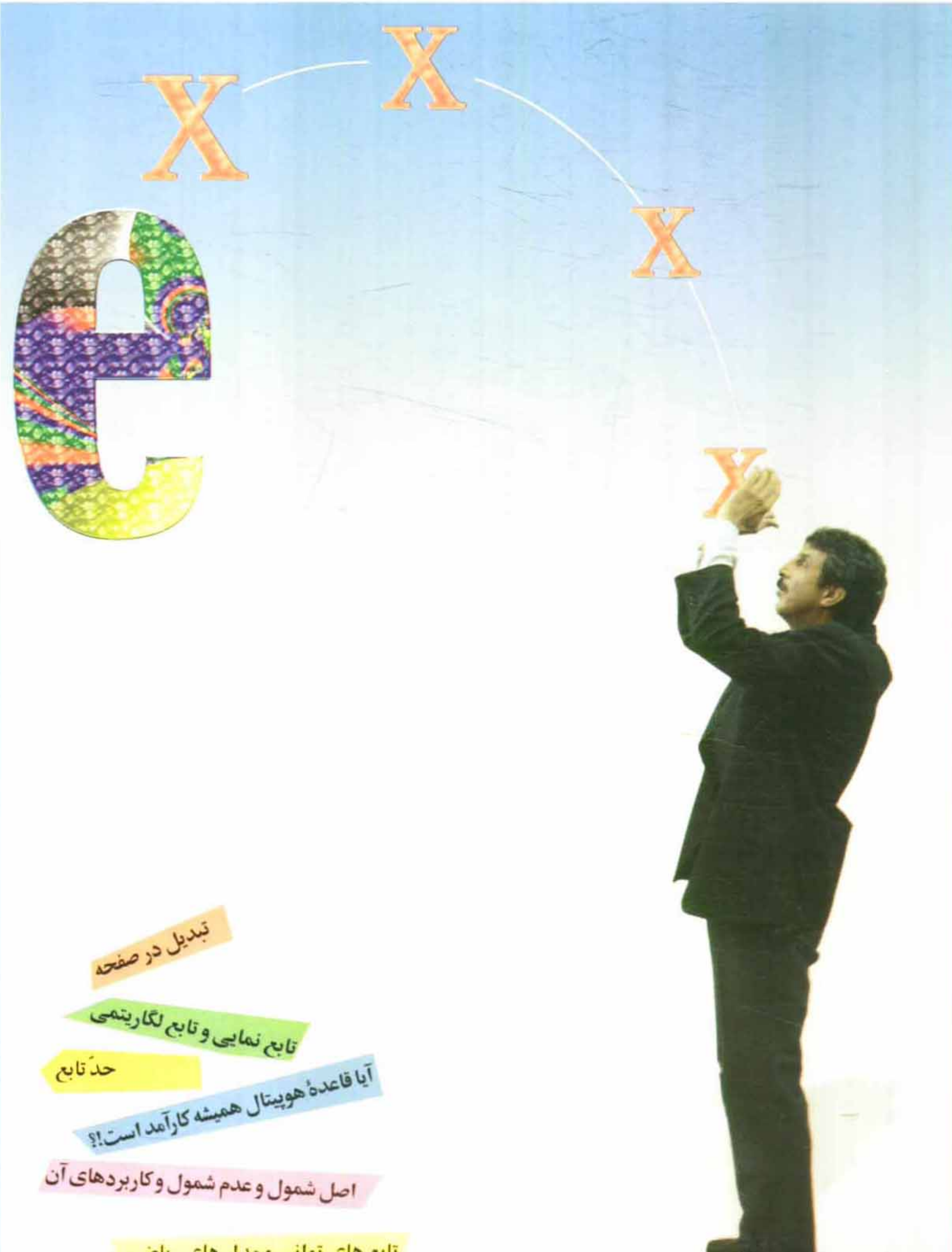
رشد برهان

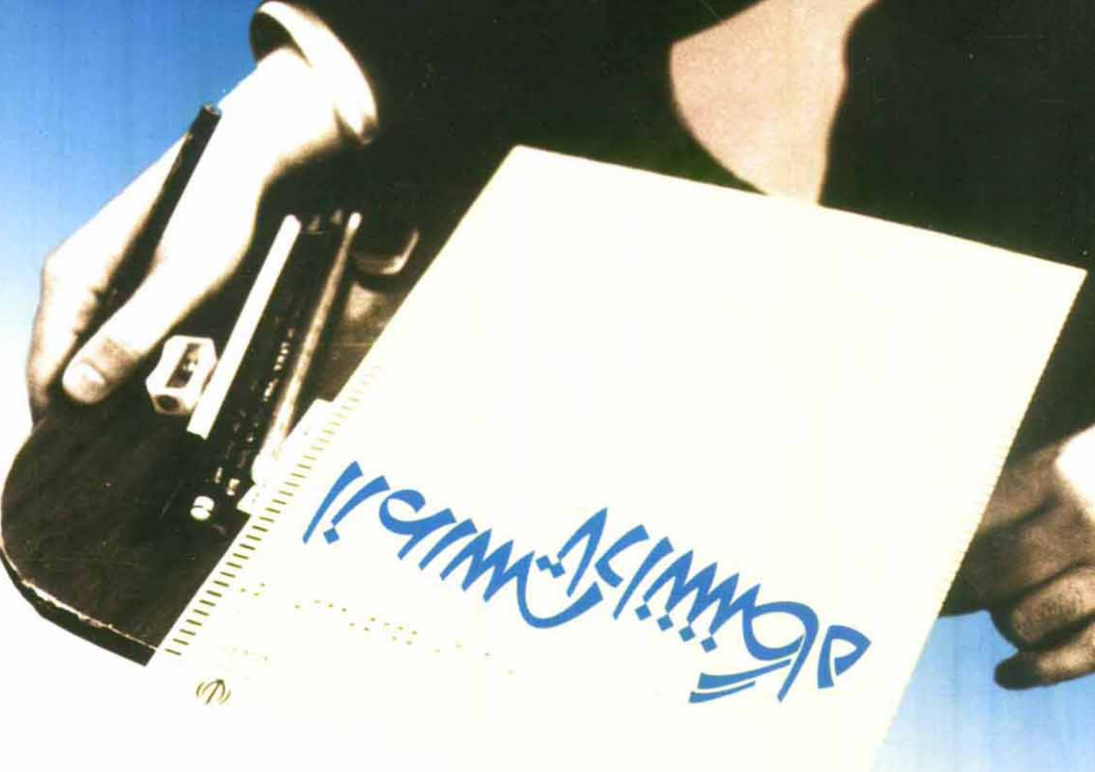
www.roshdmag.org

سال سیزدهم، شمارهٔ اول ❖ ۱۳۸۲، بها: ۲۰۰۰ ریال

❖ برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی





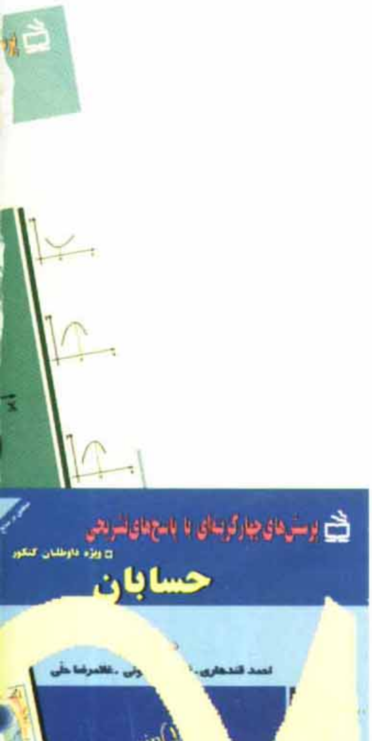
گروه ریاضی انتشارات مدرسهٔ برهان پس از تألیف کتاب‌های از مدرسه تا دانشگاه، اکنون برای پاسخگویی به نیاز دانش‌آموزان، به تألیف مجموعهٔ جدید کتاب‌های از مدرسه تا دانشگاه با عنوان «مجموعهٔ پرسش‌های چهار گزینه‌ای» اقدام کرده است.

در این مجموعهٔ جدید برای هریک از کتاب‌های درسی ریاضی که به‌عنوان منبع طرح پرسش در آزمون‌های سراسری معرفی شده است، یک عنوان کتاب تألیف و انتشار می‌یابد. هدف از تولید این مجموعه، تکمیل کتاب‌های از مدرسه تا دانشگاه است که دانش‌آموز با حل تمرین‌های متنوع و متعدد این مجموعه، برای کسب موفقیت در آزمون‌های سراسری به مهارتی نسبی دست می‌یابد.

در این کتاب‌ها، مطابق با سرفصل‌ها و عنوان‌های هر کتاب درسی، تعداد قابل توجهی پرسش‌های چهار گزینه‌ای وجود دارد. پاسخ‌های تشریحی مناسب و کافی ویژگی دیگر این مجموعه است که در آن‌ها، علاوه بر بررسی مفاهیم درسی، نکته‌های لازم نیز ارائه شده‌اند و در بعضی از موارد، گزینه‌های نادرست نیز برای تفهیم بیش‌تر مطالب درسی مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

در این مجموعه، بیش‌تر پرسش‌های آزمون‌های ورودی دانشگاه‌ها و مؤسسات آموزش عالی (سراسری و آزاد) برای آشنایی دانش‌آموزان و در پایان هر فصل، تعدادی پرسش چهار گزینه‌ای به‌عنوان آزمون با حل کلیدی آمده است.

انتشارات مدرسهٔ برهان امیدوار است که این مجموعهٔ جدید بتواند در کنار کتاب درسی، شما دانش‌آموزان عزیز را در کسب مهارت و ایجاد تسلط بر محتوای آموزشی یاری کند.



مجموعهٔ پرسش‌های چهار گزینه‌ای از مدرسه تا دانشگاه

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد برهان

❖ سال سیزدهم ،شمارهٔ اول ❖ ۱۳۸۲
❖ بها:۲۰۰۰ ریال ❖ تیراژ: ۱۲[illegible] نسخه
❖ برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه

www.roshdmag.org

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

❖ مدیر مسؤول: علیرضا حاجیان زاده
❖ سردبیر: حمیدرضا امیری
❖ مدیر داخلی: میرشهرام صدر
❖ طراح گرافیک: شاهرخ خره‌غانی

❖ و با تشکر از همکاری ارزندهٔ
آقای پرویز شهریاری
◆ چاپ:
شرکت افست (سهامی عام)

رشد برهان ،تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه های زیر دعوت به همکاری می کند:

✍ نگارش مقاله های کمک درسی(شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی متوسطه) ✍ طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها(برای دانش‌آموزان) ✍ طرح مسائل مسابقه ای به همراه حل آن‌ها(برای دانش‌آموزان) ✍ طرح معماهای ریاضی ✍ نگارش یا ترجمهٔ مقاله های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

رشد برهان ،هر سه ماه یک شماره منتشر می شود.

✍ مجلّه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافه مقاله ها آزاد است. ✍ مقاله های وارده ، باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.

✍ مقاله های رسیده مسترد نمی‌شود. ✍ استفاده از مطالب مجلّه در کتاب ها یا مجله های دیگر با ذکر دقیق ماخذ بلامانع است.

نشانی دفتر مجلّه: صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله: ۸۳۰۵۸۶۲
تلفن امور مشترکین: ۸۸۳۹۱۸۶

یادداشت سردبیر

دوستِ دانش‌آموز سلام! آغاز سال تحصیلی جدید را به شما تبریک می‌گوییم و آرزو می‌کنیم به یاری خداوند متعال و با تکیه بر سعی و تلاش، سال موفقیت‌آمیزی را در پیش رو داشته باشید. شاید شما اولین بار است که این مجله را از دبیرستان خود تهیه می‌کنید و با آن آشنا می‌شوید، از این آشنایی خوشبختیم و امیدواریم تا پایان دوره پیش‌دانشگاهی در کنار شما باشیم.

در هر شماره از این مجله می‌توانید مطالب متنوع درسی و غیر درسی که به شیوه‌ی غیرمستقیم به دروس ریاضی شما مربوط می‌شوند را مطالعه کنید. حتی اگر مقاله‌ای را مربوط به کلاس سوّم در مجله می‌بینید و شما کلاس دوم هستید، این مقاله حتماً سال بعد مورد استفاده‌ی شما خواهد بود، پس باید در حفظ و نگهداری هر شماره‌ی مجلّه کوشا باشید.

نظریات دبیران محترم خود را راجع به مطالب مجلّه جویا شده و حتی به کمک آنها مقاله، مسأله، تحقیق و یا پیشنهاد و انتقادهای خود را تنظیم و برای ما ارسال کنید.

آیا در درس ریاضی موفق هستی؟ یا دوست داری موفق باشی؟ اصلاً به ریاضیات علاقه داری؟ ریاضیات مادر علوم است و در تمام علوم دیگر کاربرد دارد. پس بهتر است علاقه داشته باشی! اگر می‌خواهی درس ریاضی را خوب بفهمی و در آن پیشرفت کنی باید **مفاهیم ریاضی** را درک کرده و با تمرین بسیار، به عمق آنها پی ببری. البته این فهم و درک لذّت‌بخش است و لازمه‌ی آن برنامه‌ریزی، مطالعه‌ی منابعی غیر از کتاب درسی و تلاش و پشتکار شماست.

یک پیشنهاد دیگر نیز داریم که امیدواریم آن را نیز جدی بگیرید و آن، این است که محور اصلیِ فعالیت‌های شما و آغاز برنامه‌ریزی‌ها باید کلاس درس باشد و شما باید غیرت و تعصّب درسی داشته باشید. به این معنی که مفاهیم و مطالب درسی را که دبیران محترم زحمت می‌کشند و به شما می‌آموزند و شما با گذران وقت و سرمایه آن را فرا می‌گیرید - در این چرخه عوامل بسیاری از جمله خانواده نقش دارند - نباید به راحتی از دست بدهید و برای حفظ و نگهداری آن باید تمرین و پشتکار داشته باشید. به امید دریافت نامه‌های شما و استفاده از خاطرات کلاس‌های درس ریاضی، مقاله‌ها، مسائل (با حل)، انتقادها وپیشنهادهای شما تلاشگران عرصه‌ی علم و دانش.

پرویز شهریاری

از تاریخ بیاموزیم

پاپیروس‌های مسکو و رایند

در شمارهٔ قبل دربارهٔ ریاضیات کاربردی به عنوان نخستین روش تاریخی در سازمان دادن آگاهی‌های ریاضی صحبت کردیم، اکنون در ادامه مطلب داریم:

دانش ریاضی به معنای ریاضیات نظری، در کارهای کاتبان همراه با عنصرهایی از دانش‌های دیگر، یک جا و به صورت یک واحد کامل تنظیم می‌شد و سمت‌گیری آن، کاربرد در نیازهای عملی بود. نخستین متن‌هایی که در آن‌ها عنصرهایی از دانش ریاضی وجود دارد، سندهای حقوقی و اقتصادی هستند. از این گونه سندها، هم از میان‌دورود[1] و هم از مصر[2]، به تعداد زیادی وجود دارد.

جایگاه ریاضیات کاربردی را باید در چندگونگی فعالیت‌های عملی و جدایی تدریجی آن‌ها به گروه‌های متعدد، دستاوردهایی دانست که خصلت اندازه‌ای و مقایسه‌ای داشتند. در مرحلهٔ اول (پیدایش گروه اجتماعی کاتبان)، هنوز ریاضیات عملی به عنوان یک واحد کامل شکل نگرفته بود؛ گرچه گروه اجتماعی کاتبان وجود داشت. آگاهی‌های ریاضی، در مجموعهٔ کلی‌تر و وسیع‌تری جا داده شده بود که می‌توان آن را «مجموعهٔ نوشته‌های مربوط به دستاوردهای فعالیت‌های اقتصادی» نامید.

در مرحلهٔ بعدی، دوباره این مجموعه تقسیم شد و ریاضیات کاربردی به عنوان آگاهی‌هایی از ریاضیات که برای ارضای نیازهای عملی کار می‌کند، شکل گرفت. به این ترتیب، متن‌های ریاضی خاصی پدید آمد که در آن‌ها، تنها مسأله‌های ریاضی جمع‌آوری شده بودند؛ مسأله‌هایی که از موضع دستاوردهای عمومی اقتصادی، و به مفهوم مجموعه‌های قبلی، مورد نیاز بودند. متن‌های اقتصادی، متن‌هایی مثل اندازه‌گیری سطح مفید مزرعه، محاسبهٔ درصد پرداخت وام، میزان درست مخلوط کردن گندم با شیرهٔ جو برای پختن نان، محاسبهٔ سهم ارث و غیره را در برمی‌گرفتند. گوناگونی و جدایی فعالیت‌ها، موجب گوناگونی و جدایی دستاوردها می‌شود، ولی تنها «مجموعه‌های نخستین ثبت دستاوردهای اقتصادی» را به همراه دارد و هنوز موجبی برای پیدایش نوشته‌های مربوط به دانش ریاضی کاربردی نیست؛ دانش ریاضی کاربردی نمی‌تواند نتیجهٔ مستقیم این مرحله از فعالیت آدمی باشد.

پیدایش متن‌های خاص ریاضی، به عنوان ابزار ثبت دستاوردهای ریاضی کاربردی برای فعالیت‌های «پیش‌ریاضی» ضرورتی نداشت. با وجود این، چنین متن‌هایی نتیجه‌های فرعی تقسیم کار هستند که نقش آن‌ها، یعنی تکرار یک نوع عمل، اهمیتی جدی داشت. تقسیم کار، در شرایط چند جانبه، به معنای پدید آمدن رگه‌های اجتماعی پایداری است که به نوبهٔ خود، موجب تحکیم این حوزه‌های فعالیت می‌شوند. برای تولید و باز تولید گونه‌های خاص فعالیت، نیاز مبرم به تکمیل و تکامل رگه‌های اجتماعی، یعنی **آموزش** به وجود می‌آید. همین که دستاوردها گروه‌بندی شوند، آموزش، موجبی برای

شکل‌گیری روش عملی تنظیم دانش ریاضی می‌شود.

آموزش به طور غیر مستقیم، موجب بالا رفتن سطح آگاهی، توانایی بیش‌تر در کارهای عملی و غیره می‌شود. آموزش وسیله‌ای برای تحکیم کار ریاضی مربوط به دستاوردهاست و متن‌های ریاضی، به نوبهٔ خود، امکان دقیق این وسیله (یعنی آموزش) را فراهم می‌کنند. در تدریس و آموزش، تخصص پدید می‌آید و همهٔ آگاهی‌های مربوط به یک رشته از فعالیت، در یک جا جمع‌آوری می‌شود. در شهرهای بزرگ و در کنار نیایشگاه‌ها و دربارها، مرکزهای ریاضی برای تنظیم توانایی‌های مختلف ایجاد شد که کاهنان و مغان، اخترشناسی و اخترشماری، ریاضیات، هندسه، پزشکی و تخصص‌های دیگر را می‌آموختند.

دانش ریاضی هم، مثل سایر شاخه‌ها، تخصص پیدا کرد. آموزش ریاضی، از دیگر انواع آموزش جدا شد و به صورت یک رشتهٔ مستقل درآمد و نخستین یادداشت‌های مربوط به حوزهٔ فعالیت ریاضیات عملی پدید آمد که شامل متن‌هایی مربوط به مسأله‌های ریاضی بود. قدیمی‌ترین متن‌های ریاضی شناخته شده عبارتند از: «پاپیروس مسکو»، «پاپیروس رایند» از مصر دورهٔ سلسلهٔ میانه (حدود ۲۰۰۰ تا ۱۷۸۵ سال پیش از میلاد)، جدول‌های بابلی سفالی زمان سلسلهٔ «اوا» (حدود ۲۱۱۲ تا ۱۹۹۷ پیش از میلاد). به اعتقاد ا. نیگه‌بادر، از زمان پیدایش خط تا پدید آمدن نخستین متن‌های ریاضی، نزدیک به ۱۵۰۰ سال طول کشید.

به این ترتیب، اگر خود فعالیت عملی در به‌وجود آمدن مجموعهٔ دستاوردهای عملی، نقش درجه اول را به عهده داشت، پدید آمدن گروه‌های اجتماعی، که خود موجب تحکیم بخش‌های فعالیت شد، انگیزه‌ای برای تقسیم فرعی مجموعهٔ دستاوردها بود. این تقسیم فرعی، نتیجهٔ روند آموزش بود. به‌ویژه همین آموزش، ریاضیات را به عنوان شکل معینی از فعالیت مشخص می‌کند؛ فعالیتی که به‌وسیلهٔ یک رگهٔ اجتماعی انجام می‌شود و با ثبت در متن‌های ریاضی تثبیت و تحکیم می‌یابد و از این به بعد، تأثیر خود را بر حوزهٔ دستاوردهای ریاضی که در جهت کاربردی سمت‌گیری دارد، به طور غیر مستقیم و از طریق آموزش ادامه می‌دهد.

ریاضیات کاربردی، به عنوان گونه‌ای از فعالیت که در جهت تحقق کارهای عملی معینی جهت‌گیری کرده است، به وجود می‌آید. برای این که روشن کنیم با این فعالیتی که آغاز شده بود، چگونه مواد ریاضی در یک جا جمع شد، به چه طریقی مسأله‌های ریاضی طبقه‌بندی شد و چگونه این طبقه‌بندی در جریان آموزش تغییر کرد، می‌توانیم پاپیروس و برخی جدول‌های ریاضی میان‌دو رود را تجزیه و تحلیل کنیم.

در متن‌های ریاضی مصری و بابلی، تقسیم به شاخه‌های مختلف، آن‌طور که ما از ریاضیات می‌شناسیم، یعنی تقسیم به بخش‌های هندسه و حساب (جبر)، وجود نداشت. از جمله، نیگه‌بادر یادآوری می‌کند: «اگر ما امروز ضمن طرح ریاضیات مصری، دربارهٔ حساب و هندسه و غیر آن صحبت می‌کنیم، در واقع یک طبقه‌بندی مصنوعی است و پاسخگوی تنظیم‌کنندگان این مسأله‌ها نیست... از دیدگاه ما محاسبهٔ حجم‌ها را باید مربوط به هندسه دانست. ولی در پاپیروس، بلافاصله در کنار مسأله‌های مربوط به حجم انبارها، مسأله‌هایی قرار دارند که در آن‌ها باید نوعی اندازه و مقیاس را به نوعی دیگر تبدیل کرد؛ یعنی مسأله‌هایی با خصلت خالص حسابی. روشن است که از دیدگاه تنظیم‌کنندگان مصری، نزدیکی مسأله‌ها به یکدیگر، نه از جهت مضمون ریاضی آن‌ها، بلکه تنها از نظر ارزش عملی آن‌ها، مورد توجه قرار می‌گرفت. در مثالی که آوردیم، مسأله‌هایی هم در یک جا جمع شده‌اند که برای نگهداری غله مورد نیازند. و این مطلب در درجهٔ دوم اهمیت قرار می‌گیرد که آیا برای این مسأله، به قاعده و قانونی از هندسه نیاز داریم یا نه!» [**سخنرانی‌هایی دربارهٔ تاریخ ریاضیات باستان، جلد اول، ریاضیات قبل از یونان**]. با این که در ریاضیات میان دورود، مسأله‌هایی وجود دارند که سمت‌گیری حسابی ـ جبری دارند و در برخی حالت‌ها، در سطحی بالا قرار گرفته‌اند، باز هم همان عدم تقسیم‌بندی ریاضیات به چشم می‌خورد.

در آن زمان هنوز، برای ریاضیات کاربردی،

تقسیم‌بندی نظری ریاضیات لزومی نداشت و مسأله‌ها زیر فشار مستقیم نیازهای عملی، تنظیم و با هم متحد می‌شدند. از جمله گونه‌های اصلی مسأله‌ها در پاپیروس رایند، چنین است:

۱) مسأله‌های مربوط به محاسبهٔ گنجایش انبارهای گندم؛

۲) مسأله‌های مربوط به محاسبهٔ مزرعه؛

۳) مسأله‌های مربوط به محاسبهٔ هرم؛

۴) مسأله‌های مربوط به اندازه‌گیری نان و آبگون‌ها؛ تقسیم نان بین تعدادی از افراد؛

۵) مسأله‌های مربوط به غذای چهارپایان و پرندگان. شبیه همین موقعیت در آگاهی‌های ریاضی «میان دوررود» هم دیده می‌شود.

به گروهی از مسأله‌های پاپیروس رایند می‌پردازیم که به محاسبهٔ هرم مربوط می‌شوند (نمودارهای شمارهٔ ۵۶ تا ۶۰) و همچنین مسأله‌های مربوط به کارهای زمینی در جدول‌های میخی. هر دو نوع مسأله‌ها از لحاظ کار عملی اهمیت داشتند؛ هر دو نوع کار عملی، به محاسبه‌هایی نیاز داشتند که پایهٔ اصلی این مسأله‌ها را تشکیل می‌دهند. روی نمونهٔ این مسأله‌ها می‌توان دقیق‌تر روشن کرد که در ریاضیات کاربردی چه نظامی حاکم بوده است و چگونه این نظام، به جریان آموزش تحول یافته است.

مسأله‌های مربوط به محاسبهٔ هرم جدول، VIII پاپیروس رِیند به این قرارند که چهار مسألهٔ اول (از پنج مسأله)، به آموزش هرم‌هایی اختصاص دارد که زاویه‌های رأس آن‌ها، از ۶۰ تا ۷۰ درجه است. در ضمن، در قاعدهٔ این هرم‌ها باید یک مربع قرار داشته باشد؛ این گونه هرم‌ها را "Semer" می‌نامیدند. پنجمین و آخرین مسأله به بررسی هرمی اختصاص دارد که زاویهٔ مسطحهٔ رأس آن، کم‌تر از ۶۰ درجه است. این هرم را «آن» (سنگ روی آرامگاه) می‌نامیدند. باید توجه کرد که بین ساختمان هرم‌ها و سنگ‌های آرامگاه، از نظر کارهای عملی، وجه اشتراکی وجود دارد، ولی نمی‌توان آن‌ها را یکسان دانست.

مسألهٔ شمارهٔ ۵۶ را می‌آوریم: «اگر هرمی ۲۵۰ اَرَش ارتفاع داشته باشد و ضلع قاعده‌اش برابر ۳۶۰ ارش باشد، نسبت آن‌ها چه‌قدر است؟» [منظور، نسبت نصف ضلع آن به ارتفاع است که آن را "Seked" می‌گفتند].

$\frac{۱}{۲}$ را از ۳۶۰ انتخاب کن، می‌شود ۱۸۰.

۲۵۰ را طوری ضرب کن که ۱۸۰ به دست آید.

این عبارت است از: $\frac{۱}{۲}$ $\frac{۱}{۵}$ $\frac{۲}{۵۰}$ ارش.[۳]

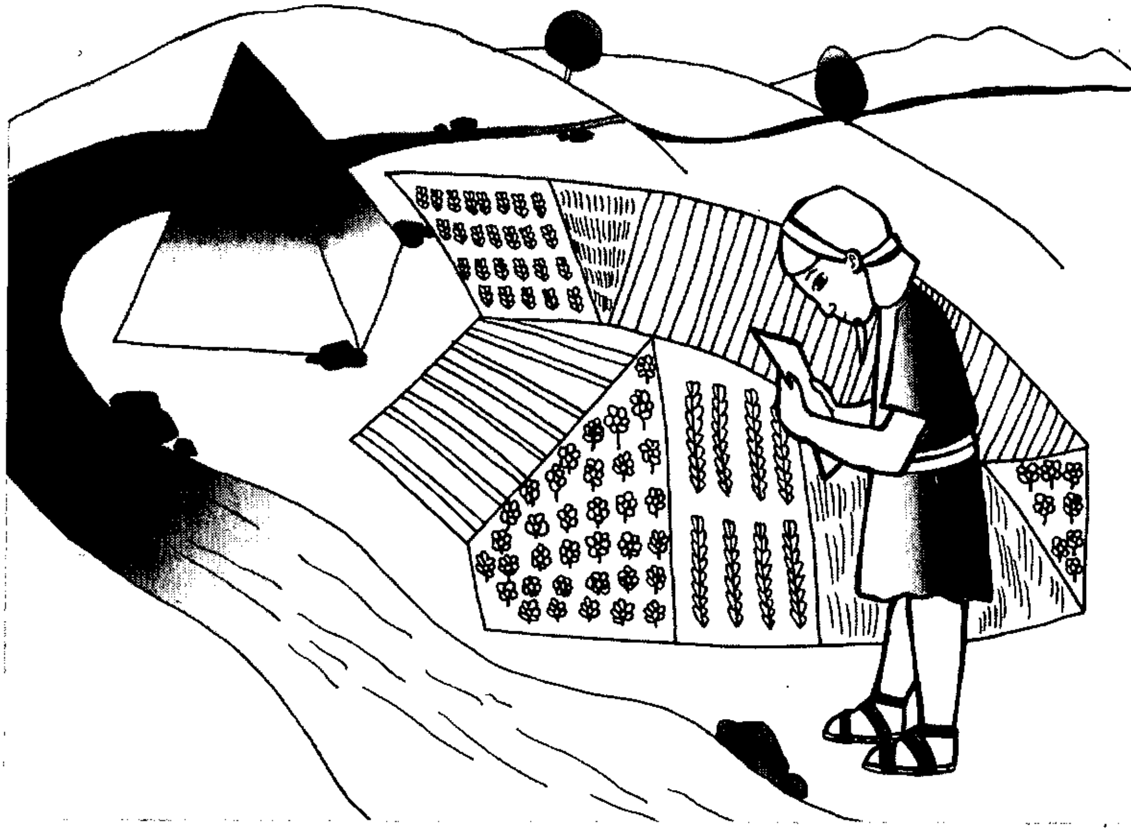
هر ارش برابر ۷ وجب است.

۷ را در $\frac{۱}{۲}$ $\frac{۱}{۵}$ $\frac{۲}{۵۰}$ ضرب کن:

۷	۱
$۳\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
$\frac{۱}{۱۵}$ $\frac{۱}{۳}$ ۱	$\frac{۱}{۵}$
$\frac{۱}{۲۵}$ $\frac{۱}{۱۰}$	$\frac{۱}{۵۰}$

نسبت برابر $۵\frac{۱}{۲۵}$ وجب است:[۴]

حل مسأله به صورتی جامد، نسخه‌وار و همراه با دستور داده شده است. اگر دستورها را دنبال کنیم، می‌توان نتیجه را به دست آورد و آن را با پاسخی که داده است، مقایسه کرد. طبیعی است که در چنین حالتی بدون هیچ تردیدی، باید راه‌حل و پاسخی را که در پایان آمده است، باور کرد. در این جا آن‌چه مهم است، اعتبار تنظیم‌کنندهٔ مسأله است؛ امضای کسی که مسأله را تنظیم کرده و همچنین، آن که مسأله را بازبینی و نسخه‌برداری کرده، ضامن درستی راه‌حل و پاسخ مسأله است. در آغاز پاپیروس رِیند یادآوری شده که بر اساس نمونه‌ای از نوشته‌های قدیمی زمان «نه ـ ماته ـ ره»، فرعون مصر علیا و سفلا و به وسیلهٔ **آهمس کاتب** تنظیم شده است. چون خود عمل‌ها و روش انجام آن‌ها را ضمن آموزش نمی‌آوردند، با بیانی جامد مخلوط می‌شد (به صورت فرمان و دستور)؛ بیانی که به یک شخصیت معتبر مربوط



می‌شود. سلسلهٔ مراتب اعتباری، وظیفهٔ هرکس را در برابر ردهٔ «بالای» خود معین می‌کرد. این سلسله مراتب از پایین، از کاهنان جوان و کم‌تجربه آغاز می‌شد و به کاهنان مسن‌تر و باتجربه‌تر و سرانجام به کاهنانی که در کنار نیروهای نظامی و در دربار فرعون کار می‌کردند، می‌رسید. این آخری‌ها که در رأس سلسله مراتب بودند، چنین اعتباری داشتند که نسخه و دستور آن‌ها، به خودی خود، درست تلقی می‌شدند. در زمینهٔ ریاضیات و اعتماد به درستی و دقت آن‌ها هم، همین سلسله مراتب برقرار بود. دقت بی‌چون و چرای نتیجه‌گیری‌ها و صلابت استدلال در درجهٔ اول، خاص فرعون بود.

موضوع ریاضیات کاربردی، عبارت است از آنچه که «اندازه‌پذیر» و «مقایسه‌پذیر» باشد، ولی در عین حال از فعالیت‌های مستقیم عملی جدا شده باشد. از همین جاست که علاوه بر تقسیم‌بندی‌های خاص مسأله‌ها به گونه‌های مختلف، شرح روش‌های حل مسأله‌ها هم پدید می‌آید.

و اگر توجه کنیم که هدف آموزش، تثبیت موقعیت قشرهایی بود که باید به یاری آموزش بازسازی می‌شد، این وضع قابل فهم خواهد شد. از آن‌جا که تقسیم کار موجب ناهمگونی در ترکیب جامعه می‌شود، آموزش هم به عنوان یک عامل پشتیبان، حفظ و تکمیل گوناگونی فعالیت‌های عملی را به عهدهٔ خود می‌گیرد. ولی راه‌های کهنه و قبلی چیزهای «اندازه‌پذیر» و «مقایسه‌پذیر» دیگر قابل اجرا نبودند. گرچه آموزش با این نتیجه‌گیری‌ها سروکار دارد و با آن‌ها، همچون یک داده برخورد می‌کند؛ ولی نتیجه‌هایی که از این راه به دست می‌آیند، سرآخر، با نتیجه‌های حاصل از فعالیت عملی متفاوت هستند: آموزش، اشتباه در اندازه‌گیری هرم را به حساب نمی‌آورد؛ به کارهای روی زمین‌های کشاورزی مراجعه نمی‌کند؛ روش مرزبندی زمین‌ها را نشان نمی‌دهد؛ و طغیان‌های نیل را به حساب نمی‌آورد. باید روش کار آن‌قدر تغییر داد و آموزش، به طریق ساده‌ای، این تغییر را انجام داد: شیوه‌های عملی، به بیان شفاهی آن‌ها تبدیل شدند و توضیح کلامی جای راه‌حل‌های عملی را گرفت؛ به نحوی که در واقع، منعکس کنندهٔ واقعیت عینی در ذهن، همراه با عنصر منطق شد.

طبیعی‌ترین شیوه در این‌جا (البته تا مدت زمانی)، عبارت است از توجه به عمل‌های ریاضی دربارهٔ کارهای عملی فرضی و تبدیل آن‌ها به «عمل‌های ریاضی رمزی».

در پاپیروس مسکو، پاپیروس رینند و جدول‌های روی صفحه‌های گل پخته، این عمل تحقق یافته است و در آن‌ها چنین می‌گویند: «این کار را بکن، این را به دست می‌آوری»؛ یعنی همچون «عمل‌های رمزی ریاضی» عرضه می‌شود. در پایان نیز همیشه این جمله دیده می‌شود: «باید این را به دست آوری»؛ «به جواب درست می‌رسی». درستی روش جدید و «دستوری» که تنها «نسخه» راه‌حل می‌دهد و تنها متکی بر «اعتبار» نویسندهٔ آن است، معرف کمال و تمامیت ریاضیات کاربردی است.

با وجود این در جریان آموزش، ریاضیات کاربردی زیر تأثیر نیروی درونی خود، دچار دگرگونی‌هایی شد: نوع مسأله‌ها به تدریج تغییر کرد و زمینه را برای تزلزل «اعتبار نسخه‌نویس» فراهم آورد. البته نوع مسأله‌ها بی‌تغییر ماند، ولی در هر نوع از آن‌ها، مسأله‌های تازه‌ای پدید آمد که نه ناشی از فعالیت عملی بود و نه با آموزش «مجاز» تطبیق می‌کرد. از این گونه می‌توان به **مسأله‌های معکوس** اشاره کرد. در مسأله شمارهٔ ۵۶ که پیش از این آوردیم و نخستین مسأله ازمساله‌های مربوط به هرم در پاپیروس رینند است، شرط به طور مستقیم داده شده است: باید نسبت بین ضلع قاعدهٔ هرم به ارتفاع آن را پیدا کنیم. طرح چنین مسأله‌ای ناشی از نیازی است که ضمن ساختن هرم ظاهر می‌شود. در تهیهٔ یک بلوک سنگی، یک آرش در ارتفاع اندازه‌گیری می‌شود و نسبت حاصل را روی افق یادداشت می‌کنند. در بسیاری حالت‌ها، نشانهٔ مربوط را می‌توان روی بلوک‌های سنگ دید. مسألهٔ شمارهٔ ۵۷ عکس مسألهٔ شمارهٔ ۵۶ است. در این مسأله، نسبت نصف ضلع قاعده به ارتفاع و اندازهٔ ضلع قاعده داده شده، و خواسته شده است، ارتفاع هرم را پیدا کنند. این مسأله ناشی از نیاز کارهای عملی نیست و در درون ریاضیات کاربردی و به دلیل آموزش (و تمایل به تحقیق درستی نتیجه) به وجود آمده است. این شیوهٔ برخورد با کارهای عملی را می‌توان در مسألهٔ ۵۸ هم دید که در واقع، مراجعهٔ مستقیم به مسأله ۵۷ است. در این جا، نصف قاعدهٔ هرم و ارتفاع آن داده شده و نسبت آن‌ها خواسته شده است. سرانجام مسألهٔ ۵۹، شامل دو بخش است. بخش اول شبیه مسألهٔ ۵۸ است. بخش دوم از بخش اول و از درون ریاضیات کاربردی ساخته شده است و در آن، با در دست داشتن نسبت نصف قاعده به ارتفاع و اندازهٔ قاعده، باید ارتفاع هرم را پیدا کرد. در این جا، تغییر درونی مسأله، ناشی از حرکت دوری در مسأله‌های مستقیم و معکوس است.

وجود مسأله‌های معکوس، از ویژگی‌هایی است که در سایر گونه‌های مسأله‌های ریاضیات کاربردی هم دیده می‌شود. از جمله، **ای. گ. باشماکوف**، در کتاب «به وجود آمدن جبر»، دربارهٔ آگاهی‌های ریاضی در بابل باستان می‌نویسد: «معادله‌های درجهٔ دوم چگونه پدید آمد؟ ضمن اندازه‌گیری زمین‌ها، به طور طبیعی چنین مسأله‌هایی مطرح شد: با اندازه‌گیری طول و عرض زمین، باید مساحت آن را به دست آورد. ولی در عمل هرگز چنین مسأله‌ای پدید نمی‌آید که: با در دست داشتن مساحت و محیط قطعه زمین، طول ضلع‌های آن را پیدا کنید». ضمن حل مسأله‌هایی که در درون فعالیت‌های عملی پدید می‌آید، مسأله‌هایی طرح می‌شود که ناشی از حرکت درونی مسأله‌های کاربردی است، ولی از فعالیت‌های عملی جدا شده‌اند. ریاضیات کاربردی هدف خود را حفظ می‌کند، ولی حرکت درونی، مضمون و محتوای آن را تغییر می‌دهد.

ولی بازسازی درونی گونه‌های مختلف مسأله‌ها و دور شدن آن‌ها از عمل، تنها به دلیل پدید آمدن مسأله‌های معکوس نیست، بلکه باید طبقه‌بندی و تقسیم گونه‌های مختلف مسأله‌ها را هم، به حساب آورد. باری را که بر دوش مسأله‌های ناشی از کارهای عملی است، می‌توان تا آن‌جا سبک کرد که در درون یک مسأله، گونه‌های مختلف مسأله‌های کوچک‌تر به وجود آید. ولی سمت‌گیری اخیر، در ریاضیات کاربردی در برابر هجوم توفانی آموزشی که به دنبال روش کلی است، عقب‌نشینی می‌کند. از جمله، مجموعه‌هایی از مسأله‌های یکسان وجود دارد که «گاه بیش از ۲۰۰ مسأله را در یک جدول، که اندازهٔ آن از یک صفحهٔ چاپی تجاوز نمی‌کند، جا داده شده است. در چنین

مجموعه‌هایی، مسأله‌ها را با دقت و با آغاز از مسأله‌های ساده‌تر مرتب کرده‌اند. به عنوان مثال، مبحث معادله‌های درجهٔ دوم به صورت عادی آغاز شده است و به تدریج به ترکیب‌های بغرنج‌تر رسیده است. با وجود این، مسأله‌های پیچیده‌تر چنانند که سرانجام به همان مسألهٔ عادی منجر می‌شوند. یکی از این گونه مجموعه‌ها، شرط $xy = ۶۰۰$ (۱۰) را ثابت نگه داشته و معادلهٔ دوم را به ترتیب تغییر داده است. چند جمله‌ای‌های تشکیل دهندهٔ معادلهٔ درجهٔ دوم به ترتیب پیچیده‌تر می‌شوند و با عبارتی به این صورت، پایان می‌یابند:

$$(۳x+۲y)^۲+\frac{۱}{۱۳}\left\{۴[\frac{۱}{۷}(۲x+۴y)-\right.$$
$$\left.-(\frac{۱}{۲}+۱)(x-y)]^۲+(x+y)^۲\right\}=۴(۴۵)۰$$

در همهٔ این معادله‌ها به یک جواب مشخص می‌رسیم: $x = ۳۰$، $y = ۲۰$. و این نشان می‌دهد که، برای معلم بی‌تفاوت بود که آیا شاگرد جواب را می‌داند یا نه[5]. روشن است که باید روش تبدیل این گونه عبارت‌های بغرنج، به عبارت‌های ساده‌تر یاد داده شود تا سرانجام پاسخ درست به دست آید» [اُ. نیگه‌بادر در کتاب «دانش‌های دقیق در باستان»].

به تدریج این گونه دستاوردهای ریاضی که ضمن عمل به وجود آمده بودند، برای هدف‌های ریاضیات کاربردی، ناکافی به نظر می‌رسیدند. شاید بتوان گفت که ضمن پیشرفت آگاهی‌های ریاضی، نوعی اختلاف سطح معرفتی به وجود آمد که به روش نظری تنظیم مطالب منجر شد. ناهماهنگی مطالبی که با روش عملی عرضه می‌شد، با آموزشی که خارج از عمل و فعالیت شکل گرفته بود، مانعی در راه پیشرفت آگاهی‌ها بود و لازم می‌آمد که از سر راه برداشته شده و شیوه‌هایی به وجود آمد که به یاری آن‌ها می‌شد، نتیجه‌های مشخص را، بدون توجه به جنبهٔ عملی آن‌ها به دست آورد. مسأله‌های معکوس پدید آمد و نخستین تلاش‌ها برای تحقق درستی جواب انجام شد؛ به این ترتیب که جواب را به عنوان فرض و فرض مسألهٔ مستقیم را به عنوان مجهول در نظر بگیریم. در ضمن به طور طبیعی از اهمیت و ارزش «ایمان به صاحبان اعتبار» کاسته شد. گونه‌های مختلف مسأله‌ها، لایه‌بندی و از هم جدا شدند.

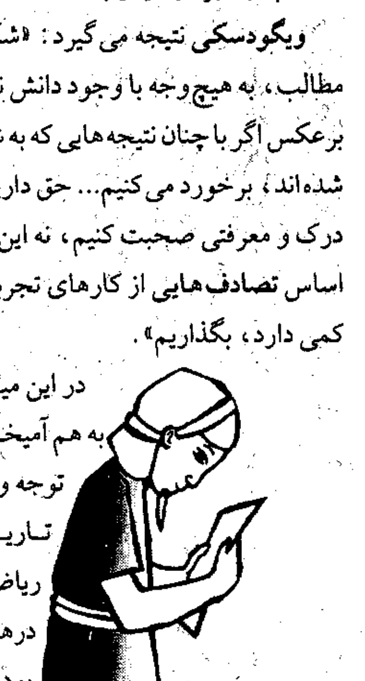
با وجود این، روش‌های خارج از کارها و فعالیت‌های جمعی، هنوز به صورت سنتی «نسخه» و «دستور» ادامه می‌یافتند. تجربهٔ درونی ریاضیات کاربردی، بیان بیرونی آن را زیر فشار گرفت: سنت‌ها دچار دگرگونی شدند. روش‌های کلی حل مسأله‌های یکسان (یعنی در واقع، روش‌های نظری)، ولی به صورت پنهانی و به صورت طرح راه‌حل‌های یکنواخت برای این گونه مسأله‌ها، پدیدار شدند. روش کلی حل در ریاضیات کاربردی، برای درک اهمیت آن، در درجهٔ دوم قرار دارد. این روش‌ها چیزی بیش از این نبودند که به کار آموزش کمک کنند تا گروه اجتماعی کاتبان بهتر تربیت شوند. ریاضیات کاربردی استخوان‌بندی بیرونی ـ فعالیت ساختاری ـ آن را تشکیل می‌داد و بنابراین، به عنوان چیزی جلوه می‌کرد که از نظر نمای بیرونی خود، از جهان مادی و فعالیت عملی جدا نشده است. آموزش داده‌ها، تفکر و برخورد ذهنی انسان‌ها، هنوز نتیجهٔ مستقیم برخورد مادی انسان‌ها بود.

مسألهٔ مربوط به ثبت و استواری ریاضیات کاربردی را می‌توان با پاسخ گفتن به این پرسش حل کرد که، آیا ممکن است تقسیم سنتی مسأله‌ها به گونه‌های مختلف و طرح سنتی «نسخه مانند راه‌حل» مسأله‌ها، با دگرگونی درونی گونه‌های مختلف مسأله‌ها با تلاش برای درستی راه‌حل‌ها و با نیازی که برای حل گروه کاملی از مسأله‌های مشابه به یاری روشی یکسان پدید آمده بود، سازگار باشند و آیا این آمیزش دوگانه، پایدار است؟ با همهٔ این‌ها، حتی در این شرایط که شکافی معرفتی در فعالیت‌های ریاضی پدید آمده است، آیا تبدیل ریاضیات به صورت نظری، ضرورت فوری پیدا نمی‌کند؟

این تبدیل در مصر و بابل باستان، با کندی بسیار وخیمی تحقق یافت. از زمان سلطنت میانه و پاپیروس‌های مسکو و ریند (در ضمن پاپیروس ریند از روی نسخه‌ای خیلی قدیمی‌تر برداشته شده است)، تا سندهای ریاضی دورهٔ

تیموریان، ریاضیات مصری، تغییر بسیار اندکی کرده است. همین وضع دربارهٔ ریاضیات کاربردی میان دورود هم صدق می‌کند، به نحوی که شیوهٔ طرح آن، کم و بیش بی‌تغییر باقی می‌ماند؛ اگرچه نوع «دستورنویسی» بغرنج‌تر هم می‌شود: حجم جسم‌های پیچیده‌تری مطرح می‌شود، حل معادله‌های درجهٔ دوم پیش می‌آید، دربارهٔ مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای بحث می‌شود که طول ضلع‌های آن‌ها غیر از ۳ و ۴ و ۵ است و غیره. «حتی دورهٔ هلنیستی، بخش عمده‌ای از تألیف‌های یونانی در زمینهٔ ریاضیات که در قلمرو مصر نوشته شده است، از نظر شکل طرح مطالب، به تقریب با متن‌های قدیمی مصری تفاوتی ندارد... نیروی ملت‌ها چه قدر باید بزرگ باشد که بر کارهای کسانی که روی آثار اقلیدس، ارشمیدس و آپولونیوس کار می‌کرده‌اند، اثر بگذارد» [م. یا. ویگودسکی در کتاب «حساب و جبر در دنیای باستان»].

ویگودسکی نتیجه می‌گیرد: «شکل دگماتیک طرح مطالب، به هیچ وجه با وجود دانش نظری منافات ندارد. برعکس اگر با چنان نتیجه‌هایی که به شکل دگماتیک مطرح شده‌اند، برخورد می‌کنیم... حق داریم دربارهٔ وجود چنین درک و معرفتی صحبت کنیم، نه این که فرضیهٔ خود را بر اساس **تصادف‌هایی** از کارهای تجربی که احتمال بسیار کمی دارد، بگذاریم».



در این میان، دو نوع استدلال به هم آمیخته است، وقتی که توجه و نتیجه‌گیری درست تاریخی، در مقابل ریاضیات نظری به حساب درهم‌جوشی و «تصادفی» بودن آگاهی‌های ناشی از تجربه گذاشته شده است.

روش‌های کلی در درون گونه‌های مسأله، به هیچ وجه با موقعیت نظری بیرونی آگاهی‌های ریاضی منطبق نیست؛ زیرا قبل از شکل‌گیری ریاضیات نظری، نه یک درهم‌جوشی ناهمگون، بلکه هدفی عملی وجود دارد که در آن، روش کار به پیوستگی و هماهنگی آگاهی‌ها کمک می‌کند. حالت نظری ریاضیات نمی‌تواند در چارچوب هدف‌های عملی نخستین پدیدار شود؛ زیرا چنین جنبه‌ای از ریاضیات، هنوز با هدف آن بیگانه است.

به این ترتیب، ریاضیات به عنوان معرفتی هدفمند و به عنوان حوزهٔ معینی از دستاوردهای ناشی از تجزیه و تقسیم فعالیت‌های عملی، هستی می‌یابد. این هدفمندی با ارتباط بخش‌های مختلف آن به یکدیگر، معین نمی‌شود. ریاضیات کاربردی، تابعی از فعالیت‌های عملی است که موجب هستی آن شده‌اند. با همهٔ این‌ها، ریاضیات کاربردی، دارای چنان امکانی است که می‌تواند آن را به سمت ریاضیات نظری هدایت کند. آمادگی این انتقال، به تدریج و از راه آموزش که در جهت بارآور کردن ریاضیات عملی کار می‌کند، فراهم می‌شود.

زیرنویس

۱. «نیازهای اقتصادی، دستگاه اندازه‌گیری و همچنین هندسه را به وجود آوردند. سندهای اقتصادی مربوط به آن‌ها، از حدود هزارهٔ سوم پیش از میلاد و بعد از آن، به تعداد زیادی به دست ما رسیده‌اند.» (ای. ان. وسه‌دسکی در کتاب «ریاضیات بابلی»].

۲. از دوران سلسلهٔ چهارم (نزدیک به هزار و پانصد سال پیش از میلاد)، تعداد زیادی یادگارهای خطی به ما رسیده است که سندهای حقوقی و نوشته‌هایی در زمینهٔ فعالیت‌های اقتصادی هستند و آن‌ها را باید از جملهٔ محاسبه‌های ریاضی دانست» [م. یا. ویگودسکی در کتاب: حساب و جبر در دنیای باستان].

۳. مصری‌ها از کسرهای با صورت برابر واحد استفاده می‌کردند. در این جا منظور آن است که اگر ۲۵۰ را در $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{50}$ ضرب کنیم، عدد ۱۸۰ به دست می‌آید.

۴. در واقع، نسبت نصف قاعده به ارتفاع برابر $\frac{18}{25}$ می‌شود که نویسندهٔ مسأله آن را بر حسب ارش در نظر می‌گیرد و ۷ برابر آن را محاسبه می‌کند تا به وجب تبدیل شود: $\frac{18}{25}\times 7 = 5\frac{1}{25}$.

۵. عددهای سمت راست این معادله‌ها، در عددنویسی بابلی، به معنای شصت در نظر گرفته شده است. در معادلهٔ اول ۰(۱۰)؛ به معنای $10\times 60+0$، یعنی ۶۰۰ و در معادلهٔ دوم ۰(۴۵)۴ به معنای $4\times 60^2+45\times 60+0$، یعنی ۱۷۱۰۰ است.

قسمت دوم

دکتر محمد علی فریبرزی عراقی
عضو هیأت علمی گروه ریاضی دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران

اصل شمول و عدم شمول و کاربردهای آن

در شماره قبل به بررسی صورت اصل شمول و عدم شمول و چند مثال از کاربردهای آن پرداختیم. در این قسمت، کاربردهای دیگری از این اصل تشریح می‌شوند.

مثال ۱

محاسبه تعداد توابع پوشا: فرض کنیم A و B مجموعه‌هایی به ترتیب m و n عضوی باشند؛ به طوری که $m \geq n$. در این صورت تعداد توابع پوشای $f: A \longrightarrow B$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{n-i}(n-i)^m \qquad (1)$$

اثبات: فرض کنیم $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$ و $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$. اگر S مجموعهٔ تمام توابع $f: A \longrightarrow B$ باشد، آن‌گاه، $|S|=n^m$. حال مجموعه‌های A_i، $1 \leq i \leq n$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A_i=\{f \in S | b_i \notin R_f\}$$

به عبارت دیگر، A_i زیرمجموعه‌ای از S است که در آن عضو b_i در بُرد f قرار ندارد. هدف یافتن $|\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n}|$ است. در واقع $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$، تعداد توابعی را که پوشا نیستند مشخص می‌کند. برای این منظور، از اصل شمول و عدم شمول به این صورت استفاده می‌کنیم:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{1\leq i<j\leq n}|A_i \cap A_j| + \sum_{1\leq i<j<k\leq n}|A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| \qquad (2)$$

ابتدا $|A_1|$ را می‌یابیم. مجموعهٔ A_1 به معنای زیر مجموعه‌ای از S است که در آن b_1 در بُرد f قرار ندارد. لذا کافی است تعداد توابعی را بیابیم که می‌توان از A در مجموعهٔ $\{b_2, b_3, \ldots, b_n\}$ نوشت. این تعداد برابر است با: $(n-1)^m$. به این ترتیب:

$$|A_1| = |A_2| = \cdots = |A_n| = (n-1)^m$$
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}|A_i| = \binom{n}{1}(n-1)^m$$

حال، $|A_1 \cap A_2|$ را می‌یابیم. مجموعهٔ $A_1 \cap A_2$ به معنای زیرمجموعه‌ای از S است که در آن b_1 و b_2 در بُرد f قرار ندارند. این به معنای یافتن تعداد توابعی است که می‌توان از A در مجموعهٔ $\{b_3, b_4, \ldots, b_n\}$ نوشت و برابر است با: $(n-2)^m$. چون تعداد اعضای اشتراک‌های دوتایی مجموعه‌های A_1 تا A_n برابرند، لذا:

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = \cdots = |A_{n-1} \cap A_n| = (n-2)^m$$

$$\Rightarrow \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| = \binom{n}{2}(n-2)^m$$

به همین ترتیب:

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = (n-3)^m$$

$$\Rightarrow \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| = \binom{n}{3}(n-3)^m$$

با ادامهٔ این روند، می‌توان سایر مجموعه‌های رابطهٔ (۲) را به دست آورد. در نتیجه با جایگذاری نتایج در رابطهٔ (۲):

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \binom{n}{1}(n-1)^m - \binom{n}{2}(n-2)^m + \binom{n}{3}(n-3)^m - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n}(n-n)^m$$

با توجه به این که: $|S| = n^m = \binom{n}{0}(n-0)^m$ ، لذا:

$$|\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n}| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}(n-i)^m$$

چون $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$ ، لذا:

$$|\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n}| = |\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_n| = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{n-i}(n-i)^m$$

به عنوان مثال، اگر $m = 4$ و $n = 3$، تعداد توابع پوشا از یک مجموعهٔ ۴ عضوی به یک مجموعهٔ ۳ عضوی برابر است با:

$$\sum_{i=0}^{3} (-1)^i \binom{3}{3-i}(3-i)^4 = \binom{3}{3}3^4 - \binom{3}{2}2^4 + \binom{3}{1}1^4 - \binom{3}{0}0^4 = 36$$

لازم به توضیح است که رابطهٔ (۲)، حتی اگر $m < n$، قابل محاسبه است، ولی در این حالت، حاصل رابطه برابر صفر است. در واقع در صورتی که $m < n$، تابع پوشایی از A در B وجود ندارد.

مثال ۲

تابع فی اویلر: فرض کنیم $m \in \mathbb{N}$ و $m = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \cdots P_n^{\alpha_n}$ ، تجزیهٔ m به حاصل ضرب عوامل اول باشد که در آن $P_1, P_2, \cdots, P_n$ اعداد اول و متمایز هستند. $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ طبیعی هستند، در این صورت، تعداد اعداد طبیعی بین ۱ تا m که نسبت به m اول هستند، برابر است با:

$$\phi(m) = m\left(1 - \frac{1}{P_1}\right)\left(1 - \frac{1}{P_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{P_n}\right) \qquad (3)$$

$\phi(m)$ را **تابع فی اویلر** می‌نامند. به منظور اثبات رابطهٔ (۳)، از اصل شمول و عدم شمول استفاده می‌کنیم. ابتدا مجموعه‌های A_i ، $1 \le i \le n$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A_i = \{1 \le k \le m : P_i | k\}$$

به عبارت دیگر، برای هر $1 \le i \le n$ ، A_i برابر است با مجموعهٔ اعداد طبیعی نابیش‌تر از m که عدد اول P_i آن‌ها را عاد می‌کند. هدف یافتن $|\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n}|$ است. در واقع اعضایی از مجموعهٔ $S = \{K \in \mathbb{N} | K \le m\}$ را می‌خواهیم که به هیچ یک از Aiها متعلق نباشند به این منظور چون،

$$|A_i| = \frac{m}{P_i} \quad \text{و} \quad 1 \le i \le n$$

$$|A_i \cap A_j| = \frac{m}{P_i P_j} \quad \text{و} \quad 1 \le i < j \le n$$

$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = \frac{m}{P_i P_j P_k}, 1 \le i < j < k \le n$$

و در نهایت، $\left|A_1\cap\ldots\cap A_n\right| = \dfrac{m}{P_1P_2\cdots P_n}$

لذا بنابر رابطهٔ (۲)،

$$\left|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n\right| = \sum_{i=1}^{n}\frac{m}{P_i} - \sum_{1\le i<j\le n}\frac{m}{P_iP_j} + \sum_{1\le i<j<k\le n}\frac{m}{P_iP_jP_k} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{m}{P_1P_2\cdots P_n}$$

در نتیجه با توجه به این که $|S| = m$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\left|\overline{A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n}\right| &= |S| - \left|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n\right| \\
&= m\Big(1 - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{P_i} + \sum_{1\le i<j\le n}\frac{1}{P_iP_j} - \sum_{1\le i<j<k\le n}\frac{1}{P_iP_jP_k} + \cdots + (-1)^n\frac{1}{P_1P_2\cdots P_n}\Big) \\
&= \frac{m}{P_1P_2\cdots P_n}\big[P_1P_2\cdots P_n - (P_2P_3\cdots P_n + P_1P_3\cdots P_n + \cdots + P_1P_2\cdots P_{n-1}) + \\
&\quad (P_3P_4\cdots P_n + P_2P_4P_5\cdots P_n + \cdots + P_1P_2\cdots P_{n-2}) - \cdots + \\
&\quad (-1)^{n-1}(P_n + P_{n-1} + \cdots + P_1) + (-1)^n\big] \\
&= \frac{m}{P_1P_2\cdots P_n}\big[(P_1-1)(P_2-1)\cdots(P_n-1)\big] \\
&= m\left[\frac{(P_1-1)}{P_1}\times\frac{(P_2-1)}{P_2}\times\cdots\times\frac{(P_n-1)}{P_n}\right] \\
&= m\left(1-\frac{1}{P_1}\right)\left(1-\frac{1}{P_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{P_n}\right)
\end{aligned}$$

مثال ۳

مسألهٔ منشی گیج: یک منشی n نامه و نشانی هریک از آن‌ها را روی n پاکت‌نامه تایپ کرده است و می‌خواهد هر نامه را در پاکت مربوطه قرار دهد. گیرنده‌های نامه‌ها و نشانی هریک از آن‌ها متفاوت هستند. به چند طریق ممکن است، این منشی هیچ نامه‌ای را در پاکت مربوط به خودش قرار ندهد؟

حل

فرض کنیم S مجموعهٔ مربوط به جای‌گشت‌های n شیء متمایز باشد. در این صورت، $|S| = n!$. به عبارت دیگر به $n!$ طریق می‌توان n نامهٔ متفاوت را در n پاکت نامه قرار داد. نامه‌ها و پاکت مربوط به هر کدام را از ۱ تا n شماره‌گذاری می‌کنیم. حال مجموعه‌های A_i، $1\le i\le n$، را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$A_i =$ {جای‌گشت‌هایی از S که نامه iام در پاکت iام قرار گیرد.}

هدف یافتن $\overline{A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n}$ است. می‌دانیم:

$$\left|A_i\right| = (n-1)! \text{ و } \left|A_i\cap A_j\right| = (n-2)! \text{ و } 1\le i<j\le n$$

$$\left|A_i\cap A_j\cap A_k\right| = (n-3)! \text{ و } 1\le i<j<k\le n$$

و در نهایت $\left|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n\right| = 1$. در نتیجه بنابر رابطهٔ (۲)، داریم:

$$\left|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n\right| = \binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \binom{n}{3}(n-3)! - \cdots + (-1)^{n-1}\times 1$$

بنابراین:

$$\left|\overline{A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n}\right| = n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \cdots + (-1)^n\times\binom{n}{n}\times 0! = n!\Big(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\Big) \qquad (۴)$$

به عنوان مثال، اگر بخواهیم بدانیم به چند طریق می‌توان ۵ نامهٔ متفاوت را در ۵ پاکت نامه طوری قرار داد که هیچ نامه‌ای در پاکت مربوط به خودش قرار نگیرد، کافی است رابطهٔ (۴) را به ازای $n = 5$ حساب کنیم. این مقدار برابر خواهد شد با:

$$120\Big(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\Big) = 44$$

مثال ۴

یک معلم ریاضی ۱۰ پرسش برای درس خود طرح کرده و ۱۰۰ امتیاز برای کل آن‌ها در نظر گرفته است. وی به چند طریق می‌تواند این ۱۰۰ امتیاز را به پرسش‌ها اختصاص

دهد، در صورتی که هر پرسش حداقل ۵ و حداکثر ۱۵ امتیاز داشته باشد.

حل:

هدف یافتن تعداد جواب‌های صحیح معادلهٔ $x_1+x_2+\cdots+x_{10}=100$ با شرط‌های $5\le x_i\le 15$، $1\le i\le 10$، است. به این منظور کافی است، تعداد جواب‌های صحیح معادلهٔ $x'_1+x'_2+\cdots+x'_{10}=50$ را که $x'_i=x_i-5$، $1\le i\le 10$، با شرط‌های $0\le x'_i\le 10$ به دست آوریم. اگر S تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی این معادله باشد، آن‌گاه $|S|=\binom{59}{50}$. مجموعه‌های A_i را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$A_i=\{$جواب‌های معادلهٔ فوق با شرط $x'_i>10\}$، $1\le i\le 10$.

به این ترتیب، هدف به دست آوردن $\left|\overline{A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_{10}}\right|$ است. بنابر اصل شمول و عدم شمول:

$$\left|\overline{A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_{10}}\right|=|S|-\left|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_{10}\right|$$
$$=\binom{59}{50}-\left[\binom{10}{1}\binom{48}{39}-\binom{10}{2}\binom{37}{28}+\binom{10}{3}\binom{26}{17}-\binom{10}{4}\binom{15}{6}+0\right]$$

مثال ۵

به چند طریق می‌توانیم ۱۰ نفر را که هر دوی آن‌ها از یک شهر آمده‌اند، دور یک میزگرد چنان بنشانیم که هیچ دو همشهری کنار یکدیگر قرار نگیرند؟

حل:

فرض کنیم S مجموعهٔ مربوط به جای‌گشت‌های ۱۰ شیء متمایز دور یک میزگرد باشد. در این صورت $|S|=9!$. مجموعه‌های A_i، $1\le i\le 5$ را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$A_i=\{$جای‌گشت‌هایی از S که در آن‌ها دو همشهری iام کنار یکدیگر قرار دارند.$\}$

بنابراین می‌خواهیم $\left|\overline{A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_5}\right|=\left|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\ldots\cap\bar{A}_5\right|$ را بیابیم.

$$|A_i|=2!\times 8!,\quad 1\le i\le 5\Rightarrow\sum_{i=1}^{5}|A_i|=\binom{5}{1}\times 2\times 8!$$

$$|A_i\cap A_j|=(2!)^2\times 7!,\ 1\le i<j\le 5$$
$$\Rightarrow\sum_{1\le i<j\le 5}|A_i\cap A_j|=\binom{5}{2}\times 4\times 7!$$
$$|A_i\cap A_j\cap A_k|=(2!)^3\times 6!,\ 1\le i<j<k\le 5$$
$$\Rightarrow\sum_{1\le i<j<k\le 5}|A_i\cap A_j\cap A_k|=\binom{5}{3}\times 8\times 6!$$

با ادامهٔ این روند: $|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_5|=(2!)^5\times 4!$.

در نتیجه بنا بر اصل شمول و عدم شمول:

$$\left|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\ldots\cap\bar{A}_5\right|=|S|-\left|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_5\right|$$
$$=9!-\left[\binom{5}{1}\times 2\times 8!-\binom{5}{2}\times 4\times 7!+\binom{5}{3}\times 8\times 6!-\binom{5}{4}\times 16\times 5!+\binom{5}{5}\times 32\times 4!\right]=112512$$

تمرین

۱. الف) تعداد جواب‌های صحیح معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4=19$ را با شرط‌های $-5\le x_i\le 10$، $1\le i\le 4$ به دست آورید.

ب) تعداد جواب‌های صحیح معادلهٔ فوق را با شرط‌های $0\le x_1\le 5$، $0\le x_2\le 6$، $3\le x_3\le 7$ و $3\le x_4\le 8$ به دست آورید.

۲. به چند طریق می‌توان سه x و سه y و سه z را چنان مرتب کرد که هیچ‌یک از حروف سه بار متوالی ظاهر نشود؟

۳. تعداد اعداد صحیح و مثبت نابیش‌تر از ۱۰۰۰ را که مجذور کامل، مکعب کامل یا توان چهارم کامل نباشند، به دست آورید.

۴. به چند طریق می‌توان اعداد صحیح ۱ و ۲ و ... و ۸ را در یک خط چنان مرتب نمود که هیچ یک از الگوهای ۱۲ و ۲۳ و ۳۴ و ... و ۷۸ و ۸۱ مشاهده نشود؟

حمیدرضا امیری

تبدیل در صفحه ۲

ماتریس های تبدیل و کاربرد آن ها

برای دانش آموزان دورهٔ پیش دانشگاهی رشتهٔ ریاضی

در شمارهٔ قبل، دربارهٔ «تبدیل در صفحه» مطالبی ارائه کردیم و به بررسی دو ماتریس تبدیل پرداختیم. در این مقاله، بررسی ماتریس های تبدیل را ادامه می دهیم.

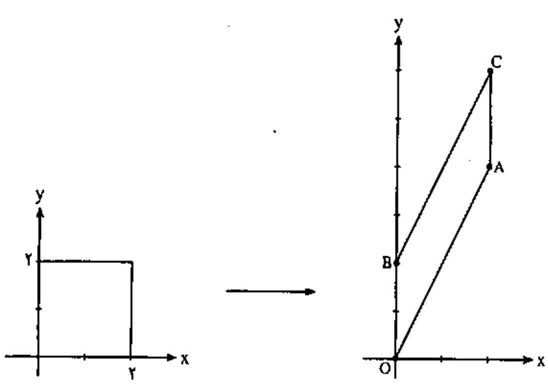
۳. ماتریس های بُرش

ماتریس های $T_۱ = \begin{bmatrix} ۱ & k \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و $T_۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ k & ۱ \end{bmatrix}$ به ترتیب ماتریس های بُرش در امتداد محور xها و yها هستند و چون همواره $|T_۱| = |T_۲| = ۱$، پس مساحت شکل حاصل از تأثیر این دو ماتریس نسبت به شکل اولیه، تغییر نمی کند.

مثال: مربع به طول ضلع ۲ با ماتریس نقاط $\begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۲ \end{bmatrix}$ تحت تأثیر ماتریس $T = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ به چه شکلی تبدیل می شود؟

مساحت آن را با مساحت مربع مقایسه کنید.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۶ & ۲ \end{bmatrix}$$



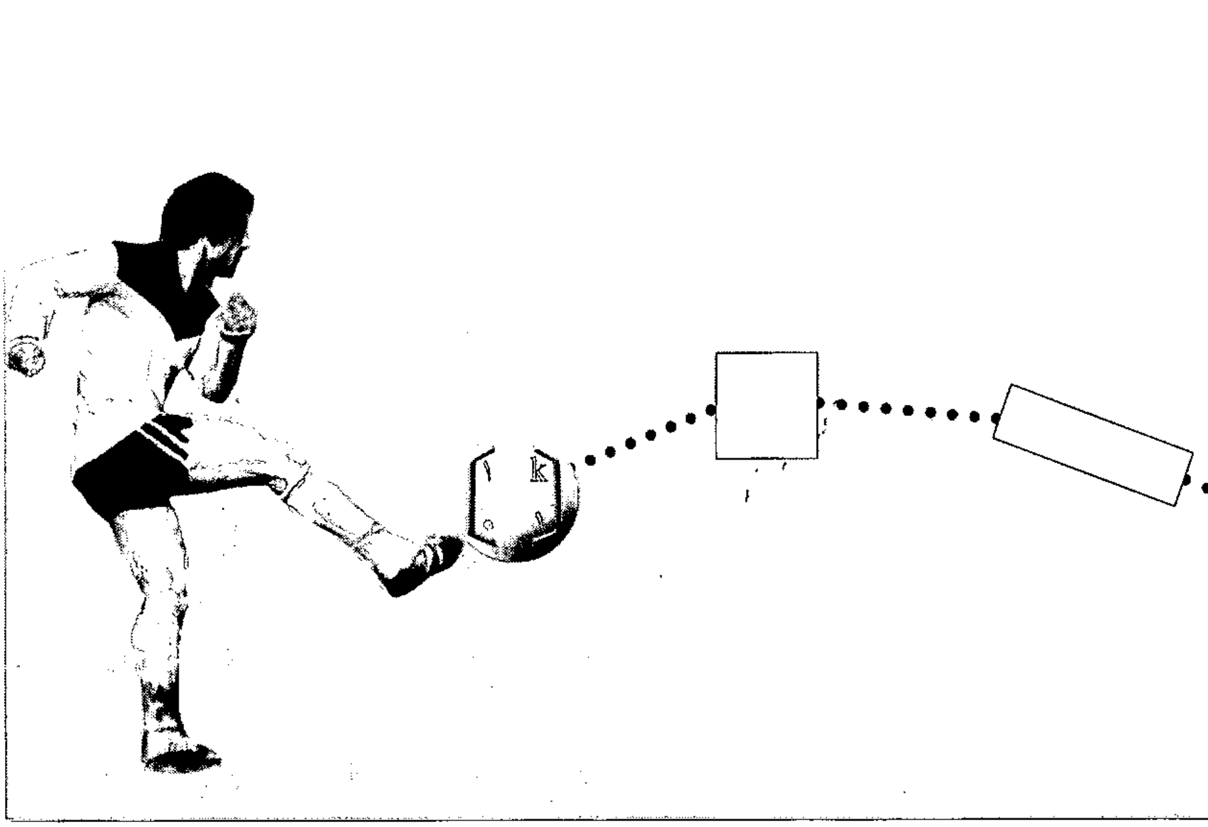
مساحت مربع قبل از تبدیل $S = ۲^۲ = ۴$ بود و مساحت متوازی الاضلاع حاصل با توجه به نکته‌ای که در مقاله شماره قبل بیان کردیم و با استفاده از سه نقطهٔ O و A و B برابر است با:

$$S_{OABC} = \left\| \begin{matrix} ۲-۰ & ۴-۰ \\ ۰-۰ & ۲-۰ \end{matrix} \right\| \Rightarrow S = ۲\times۲ - ۴\times۰ = ۴$$

واضح است، تبدیل های برشی نیز به این دلیل که شکل را تغییر می دهند، تبدیل های «غیر ایزومتری» هستند.

۴. ماتریس های تقارن

ماتریس های تقارن، ماتریس های تبدیلی هستند که هر نقطه‌ای در صفحه یا هر شکل هندسی را، روی قرینه اش



نسبت به یک خط یا یک نقطه، تصویر می‌کند و مهم‌ترین آن‌ها عبارتند از:

الف) ماتریس تقارن نسبت به محور xها: این ماتریس هر نقطه را نسبت به محور xها قرینه می‌کند. یعنی نقطهٔ $A=(x,y)$ را به نقطهٔ $A'=(x,-y)$ تبدیل می‌کند. در این حالت، عرض نقطه قرینه می‌شود. این ماتریس به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$A\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right. \to A'\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right. \qquad B\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right. \to B'\left|\begin{matrix}0\\-1\end{matrix}\right. \Rightarrow T=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$$

ب) ماتریس تقارن نسبت به محور yها: این ماتریس هر نقطه را نسبت به محور yها قرینه می‌کند. در این حالت x است که قرینه می‌شود:

$$A\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right. \to A'\left|\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right. \qquad B\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right. \to B'\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right. \Rightarrow T=\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

ج) ماتریس تقارن، نسبت به مبدأ مختصات: این ماتریس هر نقطه را نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌کند. در این حالت طول و عرض هر دو قرینه می‌شوند:

$$A\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right. \to A'\left|\begin{matrix}-x\\-y\end{matrix}\right.$$

$$A\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right. \to A'\left|\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right., \quad B\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right. \to B'\left|\begin{matrix}0\\-1\end{matrix}\right. \Rightarrow T=\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$$

د) ماتریس تقارن نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم (خط y=x): اگر نقطه‌ای نسبت به خط y=x قرینه شود، جای طول و عرض آن عوض می‌شود:

$$A\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right. \to A'\left|\begin{matrix}y\\x\end{matrix}\right.$$

$$A\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right. \to A'\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right. \qquad B\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right. \to B'\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right. \Rightarrow T=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

هـ) ماتریس تقارن نسبت به نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم (خط y=-x): اگر نقطه‌ای نسبت به خط y=-x قرینه‌شود، طول

و عرض آن هم قرینه می‌شوند و هم جایشان عوض می‌شود :

$$A\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right. \to A'\left|\begin{matrix}-y\\-x\end{matrix}\right.$$

$$\begin{matrix}A\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right. \to A'\left|\begin{matrix}0\\-1\end{matrix}\right.\\ A\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right. \to A'\left|\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right.\end{matrix} \Rightarrow T=\begin{bmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{bmatrix}$$

و) ماتریس دوران حول مبدأ به اندازهٔ زاویهٔ α : اگر نقطه‌ای تحت تأثیر این ماتریس قرار بگیرد، حول مبدأ به اندازهٔ زاویهٔ α دوران می‌کند. اگر دایرهٔ مثلثاتی (دایرهٔ به شعاع واحد و مرکز مبدأ مختصات) را در نظر بگیریم مطابق شکل، نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$ به نقطه $A'\left|\begin{matrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{matrix}\right.$ تبدیل می‌شود و نقطهٔ $B\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$ به نقطهٔ $B'\left|\begin{matrix}\cos\alpha(\frac{\pi}{2}+\alpha)\\ \sin\alpha(\frac{\pi}{2}+\alpha)\end{matrix}\right.$، یا $B'\left|\begin{matrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{matrix}\right.$:

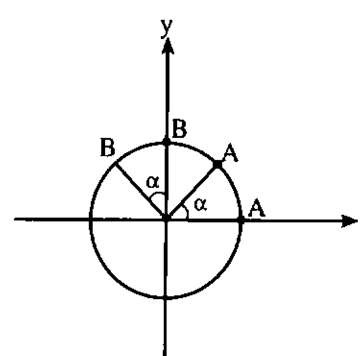
$$\Rightarrow T=R_\alpha=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$$

$$A\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right. \to A'\left|\begin{matrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{matrix}\right.$$

$$A\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right. \to A'\left|\begin{matrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{matrix}\right.$$

(محور xها را محور کسینوس‌ها و محور yها را محور سینوس‌ها در نظر می‌گیریم.)

مثال: دوران یافتهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}\sqrt{2}\\-2\sqrt{2}\end{matrix}\right.$ را حول مبدأ، به اندازهٔ زاویهٔ ۴۵° بیابید.



$$R\frac{\pi}{4}=\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4}\\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\ -2\sqrt{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$$

نکتهٔ مهم: ماتریس‌های دوران حول مبدأ همواره طول و زاویه را ثابت نگه می‌دارند؛ یعنی شکل حاصل از دوران بر شکل اولیه قابل انطباق است.

توجه دارید که اگر R_α ماتریس دوران و دلخواهی باشد، همواره $|R_\alpha|=1$ است و اگر هر ستون R_α را یک بردار فرض کنیم، همواره، طول هر بردار (بردار ستونی) در R_α نیز برابر ۱ است و دو بردار ستونی بر هم عمودند (ضرب داخلی آن‌ها صفر می‌شود.)

آزمون: دوران یافتهٔ منحنی به معادلهٔ $(x-1)^2+(y+2)^2=6$ حول مبدأ، به اندازهٔ زاویهٔ ۹۰° کدام است؟

الف) $(x-2)^2+(y+1)^2=6$

ب) $(x+2)^2+(y+1)^2=6$

ج) $(x-2)^2+(y-1)^2=6$

د) $(x+2)^2+(y-1)^2=6$

حل: گزینهٔ ج صحیح است؛ زیرا منحنی مفروض دایره‌ای است به مرکز $w\left|\begin{matrix}1\\-2\end{matrix}\right.$ و به شعاع $\sqrt{6}$ که با توجه به نکتهٔ قبل، شکل حاصل پس از دوران نیز دایره است و شعاع آن همان شعاع دایرهٔ قبلی است، پس برای نوشتن معادلهٔ آن کافی است مرکز دایرهٔ تبدیل یافته را با دوران دادنِ مرکز دایرهٔ مفروض به دست آوریم:

$$\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4}\\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=w'$$

معادلهٔ دایره $(x-۲)^۲+(y-۱)^۲=۶$

تذکر: هرگاه بخواهیم تأثیر ماتریس تبدیل T را روی یک خط یا یک منحنی به دست آوریم، کافی است T را روی نقطهٔ دلخواهی چون $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ اثر بدهیم و حاصل را به صورت $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ بنویسیم، سپس x و y را بر حسب ′x و ′y بیابیم و در معادلهٔ داده شده قرار دهیم تا معادلهٔ تبدیل یافته به دست آید.

مثال: منحنی به معادلهٔ $۲y-۳x^۲=۲$ مفروض است. این منحنی را حول مبدأ به اندازهٔ $\frac{\pi}{۶}$ دوران می‌دهیم. معادلهٔ منحنی حاصل را به دست آورید.

$$\alpha=\frac{\pi}{۶}\Rightarrow\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{۳}}{۲} & -\frac{۱}{۲}\\ \frac{۱}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۲}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\frac{\sqrt{۳}}{۲}x-\frac{۱}{۲}y=x'\\ \frac{۱}{۲}x+\frac{\sqrt{۳}}{۲}y=y'\end{cases}$$

طرفین معادلهٔ (۱) را در $\sqrt{۳}$ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{cases}\frac{۳}{۲}x-\frac{\sqrt{۳}}{۲}y=\sqrt{۳}x'\\ \frac{۱}{۲}x+\frac{\sqrt{۳}}{۲}y=y'\end{cases}\Rightarrow ۲x=\sqrt{۳}x'+y'$$

$$\Rightarrow x=\frac{\sqrt{۳}x'+y'}{۲}$$

طرفین معادلهٔ (۲) را در $-\sqrt{۳}$ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{cases}\frac{\sqrt{۳}}{۲}x-\frac{۱}{۲}y=x'\\ -\frac{\sqrt{۳}}{۲}x-\frac{۳}{۲}y=-\sqrt{۳}y'\end{cases}\Rightarrow -۲y=x'-\sqrt{۳}y'$$

$$\Rightarrow y=\frac{\sqrt{۳}y'+x'}{۲}$$

$$۲y-۳x^۲=۲\Rightarrow ۲(\frac{\sqrt{۳}y'-x'}{۲})-۳(\frac{\sqrt{۳}x'-y'}{۲})=۲$$

$$\Rightarrow \sqrt{۳}y'-x'-۳(\frac{۳x'^۲+y'^۲+۲\sqrt{۳}x'y'}{۴})=۲$$

$$\Rightarrow -۹x'^۲-۳y'^۱-۶\sqrt{۳}x'y'+۴\sqrt{۳}y'-۴x'=۸$$

معادلهٔ جدید منحنی

رابطه‌ای مهم در ماتریس‌های دوران

اگر R_α ماتریس دوران حول مبدأ به اندازهٔ α باشد، در این صورت داریم:

$$(R_\alpha)^n=R_{n\alpha}$$

اثبات به روش استقرا:

$$n=۱\Rightarrow (R_\alpha)^۱=R_{۱\times\alpha}\Rightarrow R_\alpha=R_\alpha$$

(حکم به ازای $n=۱$ برقرار است)

فرض استقرا $n=k\Rightarrow (R_\alpha)^k=R_{k\alpha}$

حکم استقرا $n=k+۱\Rightarrow (R_\alpha)^{k+۱}=R_{(k+۱)\alpha}$

$$(R_\alpha)^{k+۱}=(R_\alpha)^k\times R_\alpha \xrightarrow[\text{فرض}]{\text{طبق}} R_{k\alpha}\times R_\alpha$$

$$R_{k\alpha}\times R_\alpha=\begin{bmatrix}\cos k\alpha & -\sin k\alpha\\ \sin k\alpha & \cos k\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos k\alpha\cos\alpha-\sin k\alpha\sin\alpha & -(\cos k\alpha\sin\alpha+\sin k\alpha\cos\alpha)\\ \sin k\alpha\cos\alpha+\cos k\alpha\sin\alpha & \cos k\alpha\cos\alpha-\sin k\alpha\sin\alpha\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos(k\alpha+\alpha) & -\sin(k\alpha+\alpha)\\ \sin(k\alpha+\alpha) & \cos(k\alpha+\alpha)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos(k+۱)\alpha & -\sin(k+۱)\alpha\\ \sin(k+۱)\alpha & \cos(k+۱)+\alpha\end{bmatrix}=R_{(k+۱)\alpha}$$

تذکر مهم: با توجه به این که $R_{۲\pi}=\begin{bmatrix}\cos۲\pi & -\sin۲\pi\\ \sin۲\pi & \cos۲\pi\end{bmatrix}=I$، به راحتی می‌توان توان‌های بزرگ یک ماتریس دوران را به دست آورد و آن را محاسبه کرد، به این مثال توجه کنید:

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$ باشد، A^{1382} را حساب کنید.

$$A=R_{\frac{\pi}{3}} \Rightarrow A^{1382}=(R_{\frac{\pi}{3}})^{1382}=R_{1382\times\frac{\pi}{3}}$$

از طرفی:

$$A^{6}=(R_{\frac{\pi}{3}})^{6}=R_{6\times\frac{\pi}{3}}=R_{2\pi}=I, 1382=230\times 6+2$$

پس:

$$A^{1382}=(A^{6})^{230}\times A^{2}=(I)^{230}\times R_{2\frac{\pi}{3}}=I\times R_{\frac{2\pi}{3}}=R_{\frac{2\pi}{3}}$$

$$,R_{\frac{2\pi}{3}}=\begin{bmatrix}\cos(\pi-\frac{\pi}{3}) & -\sin(\pi-\frac{\pi}{3})\\ \sin(\pi-\frac{\pi}{3}) & \cos(\pi-\frac{\pi}{3})\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3} & -\cos\frac{\pi}{3}\end{bmatrix}\Rightarrow A^{1382}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

آزمون: حاصل ضرب ماتریسی زیر کدام است؟

$$\begin{bmatrix}\cos 35^\circ & -\sin 35^\circ\\ \sin 35^\circ & \cos 35^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos 20^\circ & \sin 20^\circ\\ -\sin 20^\circ & \cos 20^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos 75^\circ & -\sin 75^\circ\\ \sin 75^\circ & \cos 75^\circ\end{bmatrix}$$

الف)

ب) $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

د) $A=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$

حل: گزینهٔ ج صحیح است؛ زیرا با توجه به ماتریس تبدیل کل (تبدیل‌های متوالی)، حاصل ضرب ماتریسی مفروض را به صورت $R_{35^\circ}\times R_{-20^\circ}\times R_{75^\circ}$ می‌توان نوشت که در آن مجموع زاویه‌ها 90° است. در واقع ابتدا 75° دوران صورت گرفته است، سپس -20° درجه و سرانجام 35° درجه که در مجموع می‌شود، ۹۰ دوران. پس حاصل $R_{\frac{\pi}{2}}$ است.

آزمون: معادلهٔ منحنی $y^2-x^2=1$، پس از تبدیل توسط ماتریس $T=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ کدام است؟

الف) $x^2+y^2=1$

ب) $x^2-y^2=1$

ج) $x^2-y^2=-1$

د) $x^2+y^2=-1$

حل: روش اول:

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}y=x'\\ -x=y'\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-y'\\ y=x'\end{cases}$$

$$y^2-x^2=1\Rightarrow(x')^2-(-y')^2=1\Rightarrow x'^2-y'^2=1$$

پس گزینهٔ ب صحیح است.

روش دوم: منحنی مفروض یعنی $y^2-x^2=1$ یک بیضی قائم است و ماتریس T، ماتریس دوران حول مبدأ به اندازهٔ $-\frac{\pi}{2}$ است پس بیضی قائم با دوران -90° به یک بیضی افقی تبدیل می‌شود که بر بیضی قبل قابل انطباق است؛ یعنی بیضی به معادلهٔ $x^2-y^2=1$.

هـ) ماتریس تقارن نسبت به خط $y=mx$ یا $y=x\text{tg}\alpha$: می‌خواهیم با تبدیل‌های متوالی، ماتریس تبدیل کل را برای تقارن نسبت به خط $y=x\text{tg}\alpha$ بیابیم:

خط $y=x\text{tg}\alpha$ با جهت مثبت محور xها زاویهٔ α می‌سازد. حال اگر، ابتدا نقاط صفحه را به اندازهٔ $(-\alpha)$ دوران دهیم، خط مذکور بر محور xها منطبق می‌شود،

سپس قرینهٔ نقطه یا نقاط داده شده را نسبت به محور xها به دست می‌آوریم و سرانجام کل نقاط صفحه را به اندازهٔ α دوران می‌دهیم تا انحراف پدید آمدن جبران شود. ماتریس تبدیل کل از ضرب این سه ماتریس، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \text{cox}\,\alpha\end{bmatrix}$$ = ماتریس تقارن نسبت به خط

$$y = mx$$

$$\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix} \Rightarrow T = \begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos ۲\alpha & \sin ۲\alpha\\ \sin ۲\alpha & -\cos ۲\alpha\end{bmatrix}$$

مثال: نقطهٔ $A\Big|_{-۱}^{۲}$ را نسبت به خط $y = ۲x$ قرینه کنید و مختصات نقطهٔ حاصل را بیابید.

$$tg\alpha = ۲ \Rightarrow \cos ۲\alpha = \frac{۱ - tg^{۲}\alpha}{۱ + tg^{۲}\alpha} = \frac{۱-۴}{۱+۴} = \frac{-۳}{۵}$$

$$,\sin ۲\alpha = \frac{۲tg\alpha}{۱ + tg^{۲}\alpha} = \frac{۴}{۵}$$

$$\begin{bmatrix}-\frac{۳}{۵} & \frac{۴}{۵}\\ \frac{۴}{۵} & \frac{۳}{۵}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲\\ -۱\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-۲\\ ۱\end{bmatrix}$$

تذکر مهم: اگر T ماتریس تقارن نسبت به خط y=mx باشد و روی نقطه‌ای چون A اثر کند، نقطهٔ A' به دست می‌آید که قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به خط $y = mx$ است. حال اگر ماتریس T این‌بار روی A' اثر کند، چون آن را نسبت به همان خط $y = mx$ قرینه می‌کند، نقطهٔ A به دست می‌آید. در حالت کلی اگر تعداد تأثیرهای ماتریس T روی نقطهٔ A زوج باشد، قرینهٔ A بر خودش منطبق می‌شود و اگر این تأثیرها فرد باشند، بر A' منطبق می‌شود. پس می‌توان نوشت:

$$T^{۲k} = I \text{ و } T^{۲k+۱} = T$$

(ماتریس I یا تبدیل همانی، هر نقطه را بر خودش منطبق می‌کند، اما ماتریس T، A را بر A' منطبق می‌کند)

مثال: ماتریس‌های A و B و C به صورت زیر معرفی می‌شوند. حاصل $A^{۱۰۲} + B^{۴۸} + ۲C^{۱۳۸۱}$ را بیابید:

$$A = \begin{bmatrix}-\frac{۳}{۵} & \frac{۴}{۵}\\ \frac{۴}{۵} & \frac{۳}{۵}\end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۵}\\ \frac{\sqrt{۳}}{۵} & \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}\ C = \begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}$$

حل: A و B و C ماتریس‌های تقارن هستند. پس داریم:

$$A^{۱۰۲} = I\ ,\ B^{۴۸} = I\ ,\ C^{۱۳۸۱} = C\ ,\ C = -I$$

$$\Rightarrow A^{۱۰۲} + B^{۴۸} + ۲C^{۱۳۸۱} = I + I - ۲I = \overline{O} = \begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

لازم به یادآوری است که ماتریس‌های انتقالی که بتوانند هر نقطه مانند $A\Big|_{y}^{x}$ را به نقطهٔ $A'\Big|_{y+b}^{x+a}$ منتقل کنند، نمی‌توانند ۲×۲ باشند؛ زیرا برای مثال مبدأ مختصات یعنی $\Big|_{۰}^{۰}$ با هیچ ماتریس ۲×۲ قابل انتقال به $\Big|_{b}^{a}$ نیست $\left(\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰\\ ۰\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۰\\ ۰\end{bmatrix}\right)$ و می‌باید این انتقال در صفحه‌ای به موازات صفحه xy در $IR^{۳}$ و به ارتفاع واحد انجام پذیرد. یعنی ابتدا باید نقطهٔ مورد نظر مثلاً $A\Big|_{y}^{x}$، روی چنین صفحه‌ای تصویر شود و با یک ماتریس ۳×۳ که $T_{(a,b)} = \begin{bmatrix}۱ & ۰ & a\\ ۰ & ۱ & b\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$ نام دارد، به نقطهٔ $A'\Big|_{y+b}^{x+a}$ انتقال یابد و سپس روی صفحهٔ xy تصویر شود. این نوع تبدیل‌ها در صفحهٔ $IR^{۲}$ صورت نمی‌گیرند و فعلاً از بحث ما خارجند. ان‌شاءالله در مقاله‌های بعدی، به آن‌ها خواهیم پرداخت.

غلامرضا یاسی‌پور

تابع شایستگی

تابع شایستگی از فشار دادن دکمهٔ نظیر واقع بر واحد کنترل به دست می‌آید. این تابع مقدار شایستگی هر موجود معلوم را در «صورتِ فضا» نمایش می‌دهد؛ درحالی که طبق نمونهٔ کلی، به کمیتی یک بعدی فشرده شده، با ارتفاع به نمایش درمی‌آید. به این ترتیب، شایستگی به صورت نمودار این کمیت، در مقابل نقاطی از صورت فضا ارائه می‌شود. این کار دارای تأثیر جابه‌جا کردن صورت‌فضا در سوی قائم، به اندازهٔ مقداری متناسب با تابع شایستگی، است: عمل مزبور، از لحاظ ریاضی، متناظر با نمایش نمودار تابع شایستگی است. صفحهٔ غیابی مربوط به صورت‌فضا خمیده می‌شود، و در این حال، چشم‌انداز تنازع را نمایش می‌دهد. انواعی که برای باقی ماندن شایسته‌ترند، سطوح بالاتر این چشم‌انداز را اشغال می‌کنند.

وسیلهٔ متمرکز شدن اختیاری

با پیچاندن عقربهٔ واقع بر پل تکهٔ روی بینیِ ماشین زمان می‌توان مقیاس یا اندازهٔ محل‌ها یا موضع‌ها را برای به رؤیت درآوردن صورت‌های میکروسکوپی تغییر داد.

حالا مشخص شد که چرا بعضی از پشته‌ها خالی بودند! روی چند عددی از آن‌ها متمرکز شدم و چند باکتری پیدا کردم.

تازه متوجه شدم که ماشین تکامل "evolvoscope" چیست. این ماشین وسیله‌ای بود که عوامل ریاضی گوناگون تکامل داروین را قابل رؤیت می‌ساخت.

گرچه داروین نظریه‌های خود را به طور شفاهی بیان کرد، ولی می‌توان آن‌ها را به «مفاهیم ریاضی»[1] ترجمه، و به این ترتیب، تحلیل نامبهم نتایج آن‌ها را آسان‌تر کرد. البته، هر «الگوی ریاضی»[2] از تکامل داروین، تنها تقریبی

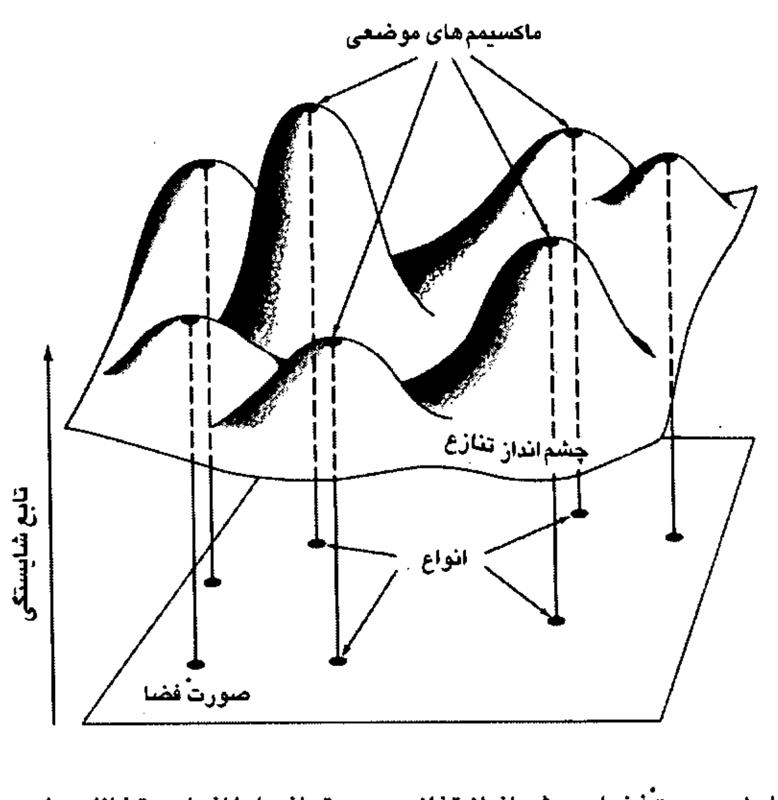
از شیء حقیقی است؛ با این فرض که شیء حقیقی موجود باشد، که باز هم البته، به اندازهٔ فرض هر چیز دیگر در این موضوع بحث‌انگیز است. اما تدوین‌های دقیق ریاضی کمک می‌کند که بین تفسیرهای گوناگون تمیز قائل شویم.

تدوین‌های مزبور می‌توانند ناسازگاری‌های موجود در تحلیل منطقی را نیز نشان دهند و این کار را با اعمال مثال‌های نقض[3] در مورد انواع خاصی از استدلال شفاهی به انجام می‌رسانند.

اشکال کلمات در این است که آن‌ها با پیشرفت استدلال منطقی معانی خود را زیرکانه تغییر می‌دهند، و به این ترتیب ممکن است نتایج به دست آمده نامعتبر شوند. ریاضیات، دقیق‌تر است و این امکان را فراهم می‌کند که همواره به مفروضات دقیقِ درنظر گرفته شده، توجه داشته باشیم.

در الگوی خاص تکاملی که در ماشین تکامل بنا شده بود، صورت‌های حیوان‌ها توسط نقطه‌ای در صورتْ‌فضا به نمایش در آمده بودند. این فضا نه تنها شامل تمام صورت‌های عملی و ماندنی، بلکه شامل جمیع صورت‌های تصوری[4] نیز بود. همچنین در آن، اندازهٔ شایستگی برای بقا، یعنی، تابع شایستگی، وجود داشت، و صورت‌هایی که می‌توانستند در تنازع بقا موفق باشند، آن‌هایی بودند که سطح شایستگی‌شان در حد امکان وسیع‌تر بود. انواع، متناظر با ماکسیمم‌های موضعیِ تابع شایستگی بودند؛ پشته‌های واقع در چشم‌انداز تنازع، یا تاقچه‌های محیط زیستی (شکل ۱)

این عمل به توضیح این مطلب کمک می‌کند که چرا انواع، با مفروض بودن بردی پیوسته از صورت‌های ممکن، به این موضوع تمایل دارند که به گونه‌ای واضح، جدا از یکدیگر باشند. به عنوان نمونه، تمام موش‌ها نسبتاً کوچکند؛ یعنی نمی‌توان برد عریض و پیوسته‌ای از اندازه‌های موجودات موش مانند به دست آورد.



شکل ۱. صورتْ‌فضا و چشم‌انداز تنازع پیوسته‌اند، اما انواع متناظر با ماکسیمم‌هایِ موضعیِ چشم‌انداز، و از این رو گسسته‌اند

صورتْ‌فضا پیوسته است، اما هر ماکسیمم موضعی توسط پشتهٔ خودش دربر گرفته شده، و پشته‌ها جدا از یکدیگرند؛ هم طاقچه‌ها هم نوع‌هایی که آن‌ها را اشغال کرده‌اند، گسسته‌اند.

پدیدهٔ دیگری که به خوبی جا می‌افتند، «تکامل همگرا»[5] است؛ یعنی، ظهور صورت‌هایی که مشابه‌اند، اما ژن‌هایی کاملاً متفاوت دارند. به عنوان مثال، مشابهت‌های تنگاتنگ حیرت‌انگیزی بین کیسه‌داران استرالیایی و پستانداران جفت جنینی قاره‌های دیگر وجود دارد.

پستانداران جفت جنینی	کیسه‌داران
گرگ	گرگ تاسمانیایی
سنجاب پرنده	موش‌خرمای پرنده
موش	موش کیسه‌دار
موش کور	موش‌کور کیسه‌دار
مورچه‌خوار	مورچه‌خوار کیسه‌دار
موش‌خرمای کوهی	کیسه‌دار استرالیایی

مسالهٔ ۱

دو مثال دیگر از *تکامل همگرا* به دست دهید.

در این مرحله ور رفتن با ماشین تکامل را کنار گذاشتم ـ هیچ ایده‌ای در این مورد که چه خصیصه‌ها (یا مخلوقاتی) را می‌توان پرورش داد نداشتم، و هیچ دلم نمی‌خواست در سیاره‌مان تخم خیارهای خوراکی جهش‌یافته، یا مواردی از این قبیل بکارم. اما پیش از این که پیش‌تر بروم، از ابتدا تا انتهای دست‌نوشته را خواندم. سپس، درحالی که از این مطلب راضی بودم که دستگاه مورد بحث صرفاً شبیه‌سازی می‌کند، و هیچ‌گونه تأثیری بر محیط دنیای خاکی‌مان نمی‌گذارد، شروع به آزمایش کردم. بخش بعدی دست‌نوشته دربارهٔ اصل استدلال داروین بود:

«برای نمایش دقیق وضعیت دقیق، دکمهٔ با علامت **جهش تصادفی** را بچرخانید. **اخطار!** اگر سطح جهش تصادفی را بیش از حد بالا ببرید، هرج و مرج ایجاد می‌شود. آزمایش را با چرخش **تدریجی** دکمه انجام دهید.»

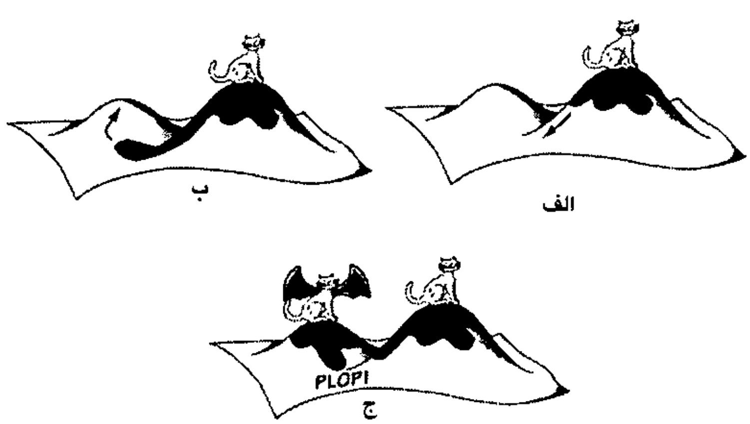
با احتیاط دکمه را چرخاندم؛ گربه‌ام حنایی رنگ شد. بعد خط‌دار، بعد سیاه، بعد دم‌کوتاه، دکمه را کمی بیش‌تر چرخاندم، و گربه پشمالو شد، و می‌لرزید.

برای واضح‌تر دیدن صحنه، دکمهٔ **حرکت آهسته** را فشار دادم. شکل گربه‌ام هرچند ثانیه کمی تغییر می‌یافت، و همین‌طور که تغییر می‌کرد، از چشم‌انداز تنازع بالاتر می‌رفت.

در پشتهٔ مربوطه، انواع گربه‌ها تجمع کرده بودند، و شکلشان را تغییر می‌دادند و با حرکاتی گیج‌کننده می‌گردیدند. گاه و بیگاه، تبدیلی بزرگ‌تر، گربه‌ام را بیش از حد متعارف تغییر می‌داد؛ اما معمولاً به طرف نوک پشته مربوط به خودش کشیده می‌شد. مثلاً، موقتاً گوش‌هایی مانند گوش فیل پیدا می‌کرد؛ اما توجه داشتم که در این صورت، کمی پائین‌تر از نوک پشته قرار می‌گرفت. احتمالاً «گوش فیلی» جهشی نامطلوب برای گربه بود، و موقعیت او را در تنازع تضعیف می‌کرد؛ زیرا تلاش برای همراه کشیدن گوش‌ها به این طرف و آن طرف، حرکتش را به مقدار قابل توجهی با کندی مواجه می‌کرد، و موش‌ها صدای به هم خوردن گوش‌ها را، زمانی که گربه با سروصدا به طرفشان هجوم می‌آورد، می‌شنیدند.

جهش‌هایی که گربه‌ها را به طرف پائین پشته می‌کشیدند، دیری نپاییدند. بار دیگر گربه‌ها، درحالی که انتخاب طبیعی شکل‌های ناپذیرفته‌تر را وجین می‌کرد و به صورت طبیعی‌تر گربه‌وار تغییر می‌داد، به طرف بالای پشته کشانده شدند.

دکهٔ **جهش** را بیش‌تر چرخاندم. پشته با جدیت در تلاطم بود، گربه‌های مرتعش مانند امواج دریایی توفانی در جوش و خروش بودند. ناگهان، حبابی پر از گربه، با صدای تالاپی



شکل ۲. تاثیر جهش تصادفی بر موجودات اشغال‌کننده یکی از تاقواره‌های محیط زیست.

الف) مجموعه‌ای از صورت‌های ممکن (حباب تاریک) محصور در تاقوارهٔ مربوطه.

ب) تغییرات تصادفی موجب می‌شود، مجموعهٔ مورد بحث به طرف یکی از تاقواره‌های اشغال نشدهٔ نزدیک، کشیده شود.

ج) قسمتی از مجموعه برای تشکیل نوع جدید شکسته می‌شود.

شنیدنی، به پائین پشته لغزید، در دره مکث کرد و از تپهٔ نزدیکی که تاکنون خالی مانده بود، بالا رفت (شکل ۲).

بار دیگر صحنه را آهسته کردم و به بررسی تازه‌آمدگان پرداختم.

مسحورکننده.

اولین گربه‌های پرندهٔ دنیا.

مسالهٔ ۲

در اولین وهله، برای بقا، گربهٔ پرنده مناسب‌تر از گربهٔ بدون بال به نظر می‌رسد. توضیح دهید، چرا عدم وجود گربه‌های پرنده در دنیای واقعی، با تکامل داروین ناسازگار نیست.

متوجه آنچه که می‌دیدم شدم: **تکامل یک نوع جدید**.

جهش‌های تصادفی، با نرخ بسیار بالا و متراکم در چند جهش، شکل جدیدی از موجودی زنده به وجود آورده بودند؛ نوعی که ـ برخلاف اغلب جهش‌ها ـ برای بقا مناسب بود.

مجموعهٔ گربه ـ شکل‌های ممکن، در تاقوارهٔ محیط‌زیستی تازه‌ای، یعنی، پشتهٔ جدیدی در چشم‌انداز تنازع، ریخته و آن را اشغال کرده بودند. جهش‌های تصادفی که به صورت «پارازیت» عمل می‌کردند، بخشی از نوع گربه را با فشار به خارج از ماکسی‌موم موضعی و به منطقه‌ای دیگر وارد کرده بودند!

آیا این وضع تغییرات ناگهانی موجود در آثار فسیلی را توضیح می‌داد؟

درواقع نه. جهش‌هایی از نوعی که شاهدشان بودم، بسیار نامعمولند؛ و این درواقع یکی از اعتراضات متعارف به نظریه‌های داروین است. مجموعهٔ کامل تغییرات شکلی که برای ایجاد نوعی واقعاً جدید در یک نوبت ضروری باشد، بسیار نادر است. من یا خیلی خوش‌شانس بودم یا دکمهٔ نرخ جهش را خیلی پیچانده بودم.

از این گذشته، به نظر می‌رسد زمانی که در آثار فسیلی تغییر ناگهانی نوع ایجاد می‌شود ـ آنچه که اغلب اتفاق می‌افتد ـ چندین نوع جدید در یک مرحله پدید می‌آیند، و به جای دوشاخه شدن شاخه‌های درخت تکامل، چندشاخه شدن یک زمان آن را ملاحظه می‌کنیم.

داروین به این نکته توجه داشت: درواقع، تنها یک نمودار در مبدأ نوع وجود دارد، و همین نمودار این نکتهٔ دقیق را توضیح می‌دهد. اگر تکامل نوعی جدید با موجودات نماینده‌ای رخ دهد که به تصادف از یک تاقواره به دیگری ریخته شده‌اند، آن‌گاه باید در هر موقعیت تنها یک نوع جدید ایجاد کرده باشد.

سرانجام، نوع اصلی، با این مکانیسم، باقی می‌ماند: هیچ نوعی از بین نمی‌رود، چندان موجه نیست. البته، ممکن است کل حباب گربه‌ها در تاقوارهٔ گربه‌های بالدار ریخته شوند، اما احتمال این موضوع حتی کم‌تر از احتمال رخ دادن قسمتی از آن است؛ باز هم نه خیلی موجه.

آنچه که من مایل به یافتنش در مدل ریاضی موردنظر بودم، روشی نیرومندتر برای تکامل نوع جدید بود. به‌زودی با خواندن دست‌نوشته، در مسیری اطمینان‌بخش از تحقیق افتادم.

تغییر محیط‌زیست

در دنیای واقعی، سطح شایستگی یک موجود وابسته به محیط‌زیست است. برای مثال، موجودی که برای خوردن برگ‌های درختان بلند، گردنی دراز تکامل داده است، در صورتی که خشکسالی ارتفاع درختان را کاهش دهد، امتیاز تنازع خود را از دست می‌دهد و به این ترتیب، شایستگی‌اش نیز کم‌تر می‌شود. اهرم **تغییر محیط** به کاربر این امکان را می‌دهد که انواع متفاوت تغییرات را، چه زمانی چه فضایی، آزمایش کند.

پیشنهاد می‌شود در کوشش‌های اولیه برای تغییر محیط، نرخ جهش تصادفی، برابر صفر یا مقداری بسیار کوچک قرار داده شود.

زیرنویس

1. mathematical concepts
2. mathematical model
3. counterexamples
4. imaginable forms
5. convergent evolution

۱ قسمت اول

هوشنگ شرقی

تابع های متناوب و روش های محاسبهٔ دورهٔ تناوب آن ها

برای دانش آموزان سال سوم متوسطه

مقدمه

توابع متناوب، کاربردهای بسیاری در سایر علوم نظیر فیزیک و مکانیک دارند و از این نظر، اهمیت زیادی دارند. بسیاری از فعالیت ها و یا پدیده ها، تکراری و یا به اصطلاح پریودیک هستند؛ مانند تعداد زنگ هایی که یک ساعت شماطه دار در زمان های متفاوت می زند. اگر زمان را از یک مبدأ دلخواه شروع کنیم، روشن است که اگر این مبدأ رأس ساعت ۱۲ یک روز باشد، یک ساعت بعد، این ساعت یک زنگ می زند، دو ساعت بعد دو زنگ و ۱۲ ساعت بعد، ۱۲ زنگ می زند. بدیهی است که ۱۳ ساعت بعد نیز یک زنگ می زند و چهارده ساعت بعد دو زنگ و تا آخر.

آیا می توانید تابعی معرفی کنید که تعداد زنگ های این ساعت را رأس ساعت T یعنی T ساعت بعد $(T \in N)$ نسبت به مبدأ مشخص کند؟ حتی اگر نتوانید ضابطه‌ای برای این تابع مشخص کنید، حداقل می توانید با اطمینان بگویید برای این تابع داریم: $f(T+12) = f(T)$ ؛ یعنی تکرارهای

این تابع هر ۱۲ ساعت یک بار است. برای مثال $\dots = f(۲۷) = f(۱۵) = f(۳)$ ؛ یعنی این ساعت، ۳ ساعت بعد، ۱۵ ساعت بعد و ۲۷ ساعت بعد، یک تعداد (یعنی سه بار) زنگ می‌زند. این مثالی از یک تابع متناوب با دورهٔ تناوب ۱۲ است.

تعریف: تابع f را متناوب گوییم، هرگاه برای هر عضو دامنهٔ آن مانند $x \in D_f$ ، مقداری ثابت و حقیقی مانند $T > ۰$ یافت شود؛ به قسمی که اولاً $(x+T) \in D_f$ و ثانیاً $f(x+T) = f(x)$ باشد. T را یک دورهٔ تناوب تابع می‌گوییم. به سادگی می‌توان دریافت که دورهٔ تناوب یک تابع متناوب منحصربه فرد نیست. درواقع، هیچ‌گاه این چنین نیست و ما این را با قضیه‌ای که در سطرهای بعد می‌آید، ثابت می‌کنیم. برای مثال تابع با ضابطهٔ $f(x) = \text{Sin}x$ که در $\mathbb{R}$ تعریف شده است، هم با دورهٔ تناوب ۲π متناوب است و هم با دورهٔ تناوب ۴π . زیرا:

$$\text{Sin}(x+۲\pi) = \text{Sin}(x+۴\pi) = \text{Sin}x$$

قضیه: اگر تابع f با دورهٔ تناوب T متناوب باشد، آن‌گاه با دورهٔ تناوب nT نیز متناوب است. $(n \in N)$

برهان: به کمک قضیهٔ استقرای ریاضی، مطلب به سادگی قابل اثبات است. به عبارت دیگر، قضیهٔ شرطی زیر را بایداثبات کنیم:

$$f(x+T) = f(x) \Rightarrow f(x+nT) = f(x)$$

درستی قضیه برای $n = ۱$ واضح است. فرض می‌کنیم قضیه برای $n = k$ نیز درست باشد؛ یعنی: $f(x+kT) = f(x)$. ثابت می‌کنیم قضیه برای $n = k+۱$ نیز درست است:

$$f(x+(k+۱)T) = f(x+kT+T)$$

$x + kT$ را مساوی y فرض می‌کنیم:

$$f(x+kT+T) = f(y+T) = f(y) = f(x+kT)$$

و طبق فرض استقراء می‌توان نوشت:

$$f[x+(k+۱)T] = f(x+kT) = f(x)$$

و حکم ثابت است.

از این قضیه، روشن می‌شود که برای هر دورهٔ تناوب T، همهٔ مضرب‌های طبیعی آن نیز دورهٔ تناوب تابع هستند. ولی ما کوچک‌ترین عدد مثبت T را که به ازای آن $f(x+T) = f(x)$ است، به عنوان دورهٔ تناوب اصلی می‌شناسیم و هدف یافتن آن است.

مثال: تابع با ضابطهٔ $f(x) = \text{Cos}\,ax$ با دورهٔ تناوب $T = \frac{۲\pi}{a}$ متناوب است $(a \neq ۰)$.

اثبات: مطابق تعریف تابع متناوب می‌نویسیم:

$$f(x+T) = \text{Cos}\,a(x+T) = \text{Cos}(ax+aT) = \text{Cos}\,ax$$

به کمک دستور حل معادله‌های مثلثاتی می‌نویسیم:

$$ax + aT = ۲k\pi \pm ax$$

به ازای علامت مثبت خواهیم داشت:

$$ax + aT = ۲k\pi + ax \Rightarrow T = \frac{۲k\pi}{a}$$

به ازای علامت منفی برای T یک مقدار حقیقی ثابت به دست نمی‌آید (عبارتی برحسب x به دست می‌آید). از این‌جا می‌توان نتیجه گرفت که تمام مضرب‌های صحیح و مثبت $\frac{۲\pi}{a}$ ، دورهٔ تناوب این تابع هستند و کوچک‌ترین آن‌ها به ازای $k = ۱$ ، $T = \frac{۲\pi}{a}$ می‌شود که همان دورهٔ

تناوب اصلی است.

مثال: تابع با ضابطهٔ $f(x)=[x]$ متناوب نیست.

فرض کنیم f با دورهٔ تناوب T متناوب باشد، در این صورت باید داشته باشیم:

$$f(x+T)=[x+T]=[x]$$

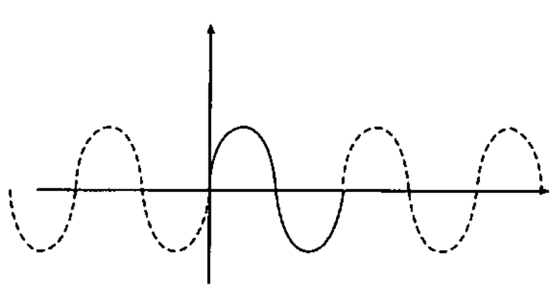
برابری فوق به ازای بعضی مقادیر x وبعضی مقادیر T برقرار است. برای مثال، اگر $x=1$ باشد، برابری فوق به صورت $[1+T]=1$ درمی‌آید که به ازای هر T متعلق به بازهٔ $[0,1)$ درست است. از این جا نتیجه می‌گیریم که مقدار معینی برای T به دست نمی‌آید و مقدار آن وابسته به x است. بنابراین تابع فوق متناوب نیست.

تمرین: نشان دهید توابع با ضابطه‌های $f(x)=x^2$ و $g(x)=e^x$، متناوب نیستند.

تمرین: ثابت کنید تابع با ضابطهٔ $f(x)=tg2x$ متناوب است. کوچک‌ترین دورهٔ تناوب آن را به دست آورید.

خاصیت هندسی تابع متناوب

با توجه به تساوی $f(x+T)=f(x)$ و آشنایی که دانش‌آموزان با رسم نمودار تابع $f(x+T)$ از روی نمودار $f(x)$ (انتقال یافتهٔ آن در جهت منفی محور xها به اندازهٔ T) دارند، نتیجه می‌گیریم که نمودار تابع متناوب در صورت جابه‌جایی با یک بردار انتقال به اندازهٔ T در هر جهت تغییر نمی‌کند. به بیان ساده‌تر، نمودار تابع متناوب از انتقال بخشی از آن که در یک فاصله به طول T رسم شده است، به دست می‌آید. مثلاً برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y=Sinx$ در $\mathbb{R}$، می‌توان نمودار آن را در یک فاصلهٔ دلخواه به طول 2π مانند $[0,2\pi]$ یا $[-\pi,\pi]$ رسم کرد و سپس با انتقال متناوب این نمودار، به نمودار کامل رسید.



روش‌های به دست آوردن دورهٔ تناوب اصلی توابع متناوب

به دست آوردن دورهٔ تناوب اصلی توابع متناوب از روی تعریف، همیشه کار آسانی نیست. برای سرعت بخشیدن به کار از قضیه‌های کلی استفاده می‌کنیم که به ترتیب آمده‌اند و بعضی را اثبات نیز کرده‌ایم و بقیه را به عنوان تمرین، به خوانندگان واگذار می‌کنیم. مثال‌هایی از کاربرد قضیه‌ها و چند تمرین نیز آورده‌ایم.

۱. دورهٔ تناوب توابعی که به صورت توان‌های فرد Sinax و Cosax $(a>0)$ هستند، برابر است با $T=\frac{2\pi}{a}$.

برهان: $f(x)=Sin^{2k+1}ax \Rightarrow f(x+T)=f(x)$

$$Sin^{2k+1}ax=Sin^{2k+1}a(x+T) \Rightarrow Sinax=Sin(ax+aT)$$

$$ax+aT=2k\pi+ax \Rightarrow T=\frac{2k\pi}{a} \quad k=1 \Rightarrow T=\frac{2\pi}{a}$$

$ax+aT=2k\pi+\pi-ax \Rightarrow$ مقدار ثابتی برای T به دست نمی‌آید

برای تابع با ضابطهٔ $f(x)=Cos^{2k+1}ax$ نیز به طریق مشابه استدلال می‌شود.

مثال: دورهٔ تناوب توابع با ضابطهٔ $f(x)=Sin^5 2x$ و $g(x)=3Cos^7 5x$ به ترتیب، مساوی با $T_1=\pi$ و $T_2=\frac{2\pi}{5}$ است.

۲. دورهٔ تناوب توان‌های زوج $Sin\,ax$ و $Cos\,ax$، $a>0$ مساوی است با: $T=\frac{\pi}{a}$.

برهان: $f(x)=Sin^{2k}ax \Rightarrow f(x+T)=f(x)$

$$Sin^{2k}a(x+T)=Sin^{2k}ax \Rightarrow Sin(ax+aT)=\pm Sin\,ax$$

$$Sin(ax+aT)=Sin\,ax \Rightarrow ax+aT=2k\pi\dagger ax \Rightarrow T=\frac{2k\pi}{a}$$

$$k=1 \Rightarrow T=\frac{2\pi}{a}$$

$ax+aT=2k\pi+\pi-ax \Rightarrow$ مقدار ثابتی برای T به دست نمی‌آید

$$\mathrm{Sin}(ax+aT)=-\mathrm{Sin}\,ax=\mathrm{Sin}(-ax)$$

مقداری ثابت برای T به دست نمی‌آید $\Leftarrow ax+aT=2k\pi-ax$

$$ax+aT=2k\pi+\pi+ax \Rightarrow T=\frac{(2k+1)\pi}{a} \quad k=0 \Rightarrow T=\frac{\pi}{a}$$

بین دو مقدار $\frac{2\pi}{a}$ و $\frac{\pi}{a}$ مقدار کوچک‌تر یعنی $T=\frac{\pi}{a}$، دورهٔ تناوب اصلی است. برای تابع با ضابطهٔ $f(x)=\mathrm{Cos}^{2k}ax$ نیز به همین شکل استدلال می‌کنیم.

مثال: دورهٔ تناوب توابع با ضابطه‌های $f(x)=\mathrm{Sin}^4 3x$ و $g(x)=\mathrm{Cos}^6 2x$ به ترتیب مساوی است با: $T_1=\frac{\pi}{3}$ و $T_2=\frac{\pi}{2}$.

۳. دورهٔ تناوب توان‌های فرد یا زوج $\mathrm{tg}\,ax$ و $\cot ax$ $(a>0)$ برابر است با $T=\frac{\pi}{a}$.

برهان به عهدهٔ خواننده است.

مثال: دورهٔ تناوب توابع با ضابطه‌های $y=\mathrm{tg}^3 5x$ و $y=\cot^4 2x$ به ترتیب مساوی است با: $T_1=\frac{\pi}{5}$ و $T_2=\frac{\pi}{2}$.

توضیح: در هریک از قضیه‌های ۱ و ۲ و ۳، می‌توان به سادگی نشان داد که در حالت کلی (برای مقادیر مثبت یا منفی a)، $T=\frac{2\pi}{|a|}$ یا $T=\frac{\pi}{|a|}$. از سوی دیگر به جای کمان ax، ممکن است کمان $ax+b$ به کار رفته باشد. برای مثال دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ $f(x)=\mathrm{Sin}^5(-3x+2)$، مساوی است با: $T=\frac{2\pi}{3}$.

۴. هرگاه دو تابع با ضابطه‌های $g(x)$ و $f(x)$ با دوره تناوب‌های T_1 و T_2 متناوب باشند، آن‌گاه تابع با ضابطهٔ $h(x)=af(x)+bg(x)$ با دورهٔ تناوب $[T_1,T_2]$ یعنی کوچک‌ترین مضرب مشترک T_1 و T_2، متناوب است.

برهان: فرض کنیم $T=[T_1,T_2]$ در این صورت روشن است که $T=k_1T_1=k_2T_2$. در نتیجه می‌توان نوشت:

$$h(x+T)=af(x+T)+bg(x+T)=af(x+k_1T_1)+bg(x+k_2T_2)$$

و چون f و g با دوره تناوب‌های T_1 و T_2 متناوبند، بنابراین:

$$h(x+T)=af(x)+bg(x)$$

اثبات این که T کوچک‌ترین دورهٔ تناوب است را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم (فرض کنید h با دورهٔ تناوب T' متناوب باشد، ثابت کنید $T\le T'$).

از این قضیه، در تعیین دورهٔ تناوب مجموع و تفاضل توابع متناوب نیز استفاده می‌شود.

مثال: تعیین دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ

$$f(x)=2\mathrm{Sin}^3 5x-4\mathrm{Cos}^2 3x$$

حل: دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ $\mathrm{Sin}^3 5x$ مطابق قضیهٔ ۱، مساوی $\frac{2\pi}{5}$ و دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ $\mathrm{Cos}^2 3x$ مطابق قضیهٔ ۲، مساوی $\frac{\pi}{3}$ است. برای تعیین کوچک‌ترین مضرب مشترک این دو کسر، آن‌ها را هم‌مخرج می‌کنیم و کوچک‌ترین مضرب مشترک ضریب عددی صحیح صورت‌ها را برمی‌گزینیم:

$$\left.\begin{array}{l} T_1=\frac{2\pi}{5}=\frac{6\pi}{15} \\ T_2=\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{15} \end{array}\right\} \Rightarrow T=\frac{30\pi}{15} \Rightarrow T=2\pi$$

مثال: تعیین دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ

$$f(x)=5\mathrm{tg}^3 4x-6\mathrm{tg}^4 3x+\mathrm{Cos}^4\frac{x}{3}.$$

حل: به همان ترتیب مثال قبل می‌نویسیم:

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \frac{\pi}{4} \\ T_2 &= \frac{\pi}{3} \\ T_3 &= \frac{\pi}{\frac{1}{3}} = 3\pi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} T_1 = \frac{3\pi}{12} \\ T_2 = \frac{4\pi}{12} \quad \Rightarrow T = \frac{36\pi}{12} = 3\pi \\ T_3 = \frac{36\pi}{12} \end{cases}$$

تمرین‌های قضیهٔ ۴

دورهٔ تناوب هریک از توابع معرفی شده در زیر را مشخص کنید:

الف) $f(x) = 4\sin^3 5x - 5\cos^4 2x + tg^2 x$

ب) $f(x) = 4\cos^2 5x - \sin^2 3x + \cot g 7x$

ج) $f(x) = tg\frac{x}{2} - 2\cot g^3 \frac{x}{3} + \sin^2 \frac{2x}{5}$

د) $f(x) = \sin^4 \frac{\pi x}{2} + \cos^3 \frac{\pi x}{3} - tg\pi x$

هـ) $f(x) = 2\sin^5 \frac{2\pi x}{3} - \cos^4 \frac{\pi x}{2} + tg^2 \frac{\pi x}{4}$

۵. هرگاه حاصل ضربی از توابع مثلثاتی داشته باشیم، برای تعیین دورهٔ تناوب تابع اصلی، ابتدا به کمک اتحادهای مثلثاتی، عبارت را به جمع تبدیل می‌کنیم و دورهٔ تناوب آن را به دست می‌آوریم.

مثال: $f(x) = \sin 5x \ \cos\frac{x}{2} \Rightarrow$

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[\sin\left(5x + \frac{x}{2}\right) + \sin\left(5x - \frac{x}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\sin\frac{11x}{2} + \frac{1}{2}\sin\frac{9x}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \frac{2\pi}{\frac{11}{2}} = \frac{4\pi}{11} = \frac{36\pi}{99} \\ T_2 &= \frac{2\pi}{\frac{9}{2}} = \frac{4\pi}{9} = \frac{44\pi}{99} \end{aligned}\right\} \Rightarrow T = \frac{396}{99} = 4\pi \quad T = 4\pi$$

مثال:

$f(x) = \sin^2 5x \ \cos^3 4x$

حل: از اتحادهای $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ و $\cos^3\alpha = \frac{\cos 3\alpha + 3\cos\alpha}{4}$ استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم:

$$f(x) = \frac{1-\cos 10x}{2} \times \frac{\cos 12x + 3\cos 4x}{4} = \frac{\cos 12x + 3\cos 4x - \cos 10x\cos 12x - 3\cos 10x\cos 4x}{8}$$

سپس حاصل ضرب‌های صورت کسر را به مجموع تبدیل می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{\cos 12x + 3\cos 4x - \frac{1}{2}[\cos 12x + \cos 2x] - \frac{3}{2}[\cos 14x + \cos 6x]}{8} \Rightarrow$$

$$f(x) = \frac{1}{8}\cos 12x + \frac{3}{8}\cos 4x - \frac{1}{16}\cos 22x - \frac{1}{16}\cos 2x - \frac{3}{16}\cos 14x - \frac{3}{16}\cos 6x$$

$$\left.\begin{matrix} T_1 = \frac{\pi}{6} & T_3 = \frac{\pi}{11} & T_5 = \frac{\pi}{7} \\ T_2 = \frac{\pi}{2} & T_4 = \pi & T_6 = \frac{\pi}{3} \end{matrix}\right\} \Rightarrow T = \pi$$

تمرین: دورهٔ تناوب هریک از توابع معرفی شده با ضابطه‌های زیر را به دست آورید:

الف) $f(x) = \sin 4x \ \sin 3x$

ب) $f(x) = \sin\frac{5x}{2} \ \cos\frac{3x}{4}$

ج) $f(x) = \sin^3 \frac{x}{2} \ \cos\frac{x}{3}$

د) $f(x) = tg^2 \frac{x}{2} \ \cot g^2 \frac{x}{3}$

هـ) $f(x) = \sin 3x \cos 2x \cos\frac{x}{2}$

۶. ترکیب توابع مثلثاتی و توابع غیرخطی $(ax + b)$، متناوب نیستند.

مثال: توابع با ضابطهٔ $f(x) = \sin x^2$ و $f(x) = \cos\sqrt{x}$ و $g(x) = tg\frac{1}{x}$ متناوب نیستند.

۷. مجموع، تفاضل، حاصل ضرب و تقسیم یک تابع

متناوب و یک تابع غیرمتناوب، تابعی غیرمتناوب است.

مثال: توابع با ضابطه‌های $f(x)=x^{2}+\mathrm{Sin}x$ و $g(x)=\mathrm{Sin}x+\mathrm{Sin}|x|$ متناوب نیستند.

۸. اگر g متناوب باشد، $fog(x)$ نیز متناوب است با همان دورهٔ تناوب تابع g.

برهان به عهدهٔ خواننده است.

مثال: تابع با ضابطهٔ $f(x)=\mathrm{Sin}(\mathrm{Cos}x)$ متناوب است و دورهٔ تناوب آن $T=2\pi$ است. تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt[3]{\mathrm{Sin}3x+\mathrm{Sin}2x}$ نیز متناوب و دورهٔ تناوب آن $T=2\pi$ است.

۹. اگر f تابعی زوج باشد، توابع با ضابطه‌های $f(\mathrm{Sin}ax)$ و $f(\mathrm{Cos}ax)$ با دورهٔ تناوب $\frac{\pi}{a}$ متناوب هستند.

برهان به عهدهٔ خواننده است.

مثال: توابع با ضابطه‌های $f(x)=|\mathrm{Sin}^{3}x|$ و $g(x)=\mathrm{Cos}(\mathrm{Sin}^{2}x)$ و $h(x)=\mathrm{Cos}^{6}5x$ به ترتیب با دوره تناوب‌های $T_1=\frac{\pi}{3}$ و $T_2=\frac{\pi}{2}$ و $T_3=\frac{\pi}{5}$ متناوب هستند.

۱۰. اگر f تابعی زوج باشد، تابع با ضابطهٔ $f(\mathrm{Sin}ax)+f(\mathrm{Cos}ax)$ با دورهٔ تناوب $T=\frac{\pi}{2a}$ متناوب است.

برهان به عهدهٔ خواننده است.

مثال: تابع های با ضابطهٔ $f(x)=|\mathrm{Sin}2x|+|\mathrm{Cos}2x|$ و $g(x)=\mathrm{Sin}^{4}x+\mathrm{Cos}^{4}x$ به ترتیب با دوره تناوب های $T_1=\frac{\pi}{4}$ و $T_2=\frac{\pi}{2}$ متناوب هستند.

۱۱. دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ $f(x)=\mathrm{tg}ax-\mathrm{cotg}ax$ و هر مضربی از آن مساوی $T=\frac{\pi}{2a}$ است.

برهان: به کمک اتحادهای مثلثاتی می‌نویسیم:

$$f(x)=\frac{\mathrm{Sin}ax}{\mathrm{Cos}ax}-\frac{\mathrm{Cos}ax}{\mathrm{Sin}ax}=\frac{\mathrm{Sin}^{2}ax-\mathrm{Cos}^{2}ax}{\mathrm{Sin}ax\mathrm{Cos}ax}=$$

$$\frac{-\mathrm{Cos}2ax}{\frac{1}{2}\mathrm{Sin}2ax}=-2\,\mathrm{cotg}2ax \Rightarrow T=\frac{\pi}{2a}$$

مثال: برای تابع با ضابطهٔ $f(x)=\mathrm{tg}3x-\mathrm{cotg}3x$ داریم: $T=\frac{\pi}{6}$

۱۲. در توابع کسری که صورت و مخرج آن‌ها شامل Sinax و Cosax هستند، در صورت امکان ساده شدن، قبل از محاسبهٔ دورهٔ تناوب، بهتر است صورت و مخرج کسر را بر Sinax یا Cosax (هرکدام مناسبترند)، تقسیم می‌کنیم و سپس دورهٔ تناوب آن را به دست می‌آوریم.

مثال: تعیین دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ

$$f(x)=\frac{\mathrm{Sin}x+2\mathrm{Cos}x}{\mathrm{Sin}x-\mathrm{Cos}x}$$

حل: از تقسیم صورت و مخرج کسر فوق بر Cosx یا Sinx (در این جا تفاوت نمی‌کند) خواهیم داشت:

$$f(x)=\frac{\mathrm{tg}x+2}{\mathrm{tg}x-1} \Rightarrow T=\pi$$

حال آن که اگر بدون این تبدیل، دوره تناوب را به دست می‌آوردیم، به مقدار $T=2\pi$ می‌رسیدیم که دورهٔ تناوب تابع f است، ولی کوچک‌ترین دورهٔ تناوب نیست. البته باید توجه داشت که تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{\mathrm{tg}x+2}{\mathrm{tg}x-1}$، با تابع اولیه برابر نیست. زیرا دامنهٔ تعریف آن‌ها یکی نیست (چرا؟) ولی دورهٔ تناوب آن‌ها یکی است.

تمرین: دورهٔ تناوب هریک از توابع معرفی شده در زیر را بیابید:

۱) $f(x)=\frac{\mathrm{Cos}x}{\mathrm{Sin}x+\mathrm{Cos}x}$

۲) $f(x)=\frac{\mathrm{Sin}2x}{2\mathrm{Sin}2x-3\mathrm{Cos}2x}$

۳) $f(x)=\frac{\mathrm{Sin}^{3}3x+3\mathrm{Cos}^{3}3x}{2\mathrm{Sin}^{3}3x-5\mathrm{Cos}^{3}3x}$

آیا قاعده هوپیتال همیشه کارآمد است؟!

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L \quad !??$$

برای دانش‌آموزان سال سوم و دورهٔ پیش دانشگاهی

قسمت اول

مجتبی معارف‌وند
دبیر ریاضی اسلامشهر

یوهان برنولی (۱۷۴۸ـ۱۶۶۷)، از جمله کسانی بود که حساب دیفرانسیل و انتگرال لایبنیتز را به‌طور کامل درک کرد و به قدرت اعجاب‌انگیز حسابان، پی‌برد. او یکی از موفق‌ترین معلمان زمان خود بود و حساب دیفرانسیل و انتگرال را به **هوپیتال**، شاگرد خود، آموخت. هوپیتال در سال (۱۶۹۶) درس‌های استاد خود را در کتابی به‌نام «تحلیل بی‌نهایت کوچک‌ها» که اولین کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال به‌شمار می‌رود، منتشر ساخت. در این کتاب، قاعده‌ای برای یافتن مقدار حدی یک کسر که صورت و مخرج آن به سمت صفر میل می‌کند، دیده می‌شود که در اصل متعلق به یوهان برنولی است، اما در متون درسی بعدی، حسابان به **غلط** به «**قاعدهٔ هوپیتال**» شهرت یافت.

مقدمه

یکی از هدف‌های آموزش ریاضی در دورهٔ متوسطه، تقویت قوهٔ خلاقیت و ابتکار دانش‌آموزان است. در بخشی از ریاضیات که به محاسبهٔ حدود و رفع ابهام در برخورد با صورت‌های مبهم می‌پردازد، دانش‌آموزان دست‌به عمل می‌زنند، می‌اندیشند، می‌نویسند و جلو می‌روند، شکست می‌خورند و دوباره، با اندیشه‌ای نو، به ستیز با مسأله

می‌پردازند. اما با کمال تأسف، عده‌ای از همکاران با معرفی قاعدهٔ هوپیتال در سال سوم متوسطه و همچنین، توصیه به استفادهٔ بیش از حد از آن در دوره پیش دانشگاهی، خصوصاً جهت پاسخگویی به سؤالات چند گزینه‌ای، دانش‌آموزان عزیز را به سمت سستی و کلیشه‌ای شدن راهنمایی می‌کنند. متأسفانه در این شرایط، هرگاه برای حل یک مسألهٔ مربوط به محاسبهٔ حد، قاعدهٔ هوپیتال کارساز نباشد یا شرایط استفاده از آن وجود نداشته باشد، بچه‌ها قدرت، توانایی و مهارت لازم برای حل آن را به کمک روش‌های دیگر ندارند. البته دانش‌آموزان نیز این قاعده را به راحتی پذیرفته، به آن دل بسته‌اند و بسیار از آن استفاده می‌کنند؛ زیرا کار کردن با مشتق‌گیری به جهت قواعد کلیشه‌ای آن، بسیار ساده‌تر و بی‌دردسرتر از بقیهٔ روش‌ها به نظر می‌رسد.

در این مقاله، سعی داریم، ضمن اشاره‌ای تاریخی به قاعدهٔ هوپیتال و بیان آن، بی‌دقتی‌های موجود در استفاده از آن را متذکر شویم و ناکارآمدی قاعدهٔ هوپیتال و زیبایی روش‌های دیگر را در پاره‌ای از مسائل نشان دهیم.

اشاره‌ای تاریخی

یکی از سرشناس‌ترین خانواده‌ها در تاریخ ریاضیات و علوم، خانوادهٔ **برنولی** از سوئیس است که از اواخر قرن هفدهم به بعد، حدود هشت ریاضیدان برجسته و توانا را پرورش داده است. مشهورترین آن‌ها **یاکوب برنولی** (۱۶۵۴ـ۱۷۰۵) و برادرش **یوهان برنولی** (۱۶۶۷ـ۱۷۴۸) بودند که همهٔ توجهشان را به ریاضیات بی‌نهایت کوچک‌ها معطوف کردند و نخستین کسانی بودند که حساب دیفرانسیل و انتگرال **لایبنیتز** را به طور کامل درک کردند و به قدرت اعجاب‌انگیز حسابان پی بردند.

از جمله کارهای یاکوب برنولی، می‌توان به مسألهٔ «هم‌محیط‌ها» (در بین شکل‌های مسطح بسته‌ای که طول محیط آن‌ها ثابت است، کدامیک بیش‌ترین مساحت را دارد.)، مسألهٔ «همزمان» (منحنی‌ای که جسمی در امتداد آن با سرعت عمودی یکنواختی سقوط می‌کند.)، توزیع برنولی و قضیهٔ برنولی در آمار و احتمال، معادلهٔ برنولی در معادلات دیفرانسیل، اعداد برنولی و چندجمله‌ای‌های برنولی در نظریهٔ اعداد، لمنیسکات برنولی در حسابان و... اشاره کرد.

یوهان برنولی در ریاضیات سهمی پربارتر از برادرش یاکوب داشت. از جمله کارهای یوهان می‌توان به پدیدهٔ نورشناختی مربوط به انعکاس و انکسار، تعیین مسیرهای متعامد خانوادهٔ منحنی‌ها، محاسبهٔ طول قوس منحنی‌ها، تعیین مساحت منحنی‌ها به کمک سری‌ها، مثلثات تحلیلی، حسابان توابع مجهول‌القوا و قضیهٔ طلایی «کوتاه‌ترین زمان» (تعیین منحنی ذرهٔ وزینی که در یک میدان جاذبه، بین دو نقطه مفروض حرکت می‌کند و طی آن سریع‌ترین نزول را دارد) و... اشاره کرد.

یوهان با لایبنیتز و **اویلر** دوست بود. ولی **نیوتن**، رقیب لایبنیتز را، چندان دوست نمی‌داشت. لایبنیتز، حساب انتگرال را «حساب مجموعات» نامیده بود و در سال ۱۶۹۶ لایبنیتز و یوهان برنولی موافقت کردند که آن را «حساب انتگرال» بنامند. اگرچه یوهان مردی حسود و بداخلاق بود، اما یکی از موفق‌ترین معلمان زمان خود بود. او به حسابان غنای زیادی بخشید و در شناساندن قدرت حسابان در برّ اروپا تأثیر زیادی داشت.

دو لوپیتال گیوم فرانسوا آنتوان (Giyom fransua antuan da lopital) (۱۶۶۱ـ۱۷۰۴)، اشراف‌زادهٔ فرانسوی، یکی از دانشجویان یوهان برنولی بود. یوهان حساب دیفرانسیل و انتگرال را به او آموخت و لوپیتال که در فارسی به اشتباه، هوپیتال نوشته شده و همین تلفظ رایج شده است (در این مقاله ما نیز عرف را رعایت می‌کنیم.)، در سال (۱۶۹۶)، براساس یک توافق‌نامهٔ مالی عجیب و غیرعادی، درس‌های استاد خود را در کتابی با نام «تحلیل بی‌نهایت کوچک‌ها» (Analyse de infiniment petits) که اولین کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال به‌شمار می‌رود،

منتشر ساخت.

در این کتاب، قاعده‌ای برای یافتن مقدار حدی یک کسر که صورت و مخرج آن به سمت صفر میل می‌کنند، ($\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=?$ درحالیکه $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$) دیده می‌شود که در اصل متعلق به یوهان برنولی است. اما در متون درسی بعدی، حسابان به غلط به «قاعده هوپیتال» شهرت سافت.

پیش نیازها

تعریف صورت‌های مبهم و رفع ابهام: فرض کنیم توابع f و g در یک همسایگی نقطهٔ a (aعددی حقیقی)، احتمالاً نه در نقطهٔ a، پیوسته باشند و $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$، در این صورت وجود یا عدم وجود مقدار $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ روشن نیست و اصطلاحاً این حالت را صورت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌نامند.

دیگر صورت‌های مبهم عبارتند از: $\infty-\infty$، $\infty\times 0$، 0^0، ∞^0، 1^∞.

یافتن مقدار واقعی صورت مبهم را «رفع ابهام» می‌نامند.

قضیهٔ (قاعدهٔ) هوپیتال: فرض کنیم توابع f و g در یک همسایگی نقطهٔ a (aعددی حقیقی زیرا ∞ همسایگی ندارد)، احتمالاً نه در نقطهٔ a، مشتق‌پذیر و g و g' در این همسایگی محذوف، مخالف صفر باشند و $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$. در این صورت اگر $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجود و برابر l،$(l\in R)$ باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ نیز موجود و برابر l است.

مثال ۱. مطلوب است محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$.

حل: فرض کنیم $f(x)=1-\cos x$ و $g(x)=\sin^2 x$. مشاهده می‌شود که توابع f و g در همسایگی محذوف نقطهٔ صفر مشتق‌پذیر و g و g' در این همسایگی مخالف صفر هستند و $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$. بنابراین، شرایط قاعدهٔ هوپیتال برقرار است و از آن‌جا که:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\sin x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos x}=\frac{1}{2}$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}=\frac{1}{2}$$

نکتهٔ ۱: اگر در قاعدهٔ هوپیتال $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\pm\infty$ (حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$) و $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجود و برابر $l\in R$ باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ نیز موجود و برابر l می‌باشد.

مثال ۲. مطلوب است محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$.

حل: شرایط قاعدهٔ هوپیتال برقرار است $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ است؛ بنابراین:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

نکتهٔ ۲: اگر در قاعدهٔ هوپیتال $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\pm\infty$ باشد، بازهم می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\pm\infty$$

مثال ۳. مطلوب است محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x^2}$.

حل: حد فوق، حالت مبهم $\frac{0}{0}$ است و شرایط قاعدهٔ هوپیتال را دارد؛ بنابراین:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{2x}=+\infty$$

نکتهٔ ۳: در استفاده از قاعدهٔ هوپیتال، گاه ممکن است $f'(a)=g'(a)=0$ یا $\pm\infty$ باشد در این حالت، در صورتی که f' و g' در یک همسایگی نقطهٔ a دارای مشتق باشند، مجدداً می‌توان از قاعدهٔ هوپیتال استفاده کرد و خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}=l$$

به عبارت دیگر در صورت برقراری شرایط قاعده، بیش از یک‌بار هم می‌توان از قاعدهٔ هوپیتال استفاده کرد.

مثال ۴. مطلوب است محاسبهٔ $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x-\sin x}$.

حل: حد فوق، حالت مبهم $\frac{0}{0}$ است و شرایط قاعدهٔ هوپیتال را دارد؛ بنابراین:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\tan^2 x-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{1-\cos x}$$

از آن‌جا که حد حاصل، هنوز حالت مبهم $\frac{0}{0}$ را دارد و شرایط قاعدهٔ هوپیتال نیز برای آن برقرار است، بنابراین قاعدهٔ هوپیتال را دوباره به کار می‌بریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\tan x(1+\tan^2 x)}{\sin x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2(1+\tan^2 x)}{\cos x}=2$$

و درنتیجه: $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x-\sin x}=2$.

تمرین ۱. با استفادهٔ مکرر از قاعدهٔ هوپیتال، حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^4}{x}$ ب) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{e^x}$

در استفاده از قاعدهٔ هوپیتال دقت کنید.

بسیار اتفاق می افتد که دانش‌آموزان و دانشجویان عزیز، در استفاده از قاعدهٔ هوپیتال به شرایط آن توجه نمی‌کنند و مرتکب اشتباهات بارزی در حل بعضی مسائل ساده می‌شوند. به نمونه‌هایی از این اشتباهات اشاره می‌کنیم.

مثال ۵. مطلوب است محاسبهٔ $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{1+x}$.

حل دانش‌آموز:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{1+x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\tan^2 x}{1}=1$$

درحالی که $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{1+x}$ مبهم نیست و کسر $\frac{\tan x}{1+x}$ در همسایگی صفر پیوسته است و $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{1+\cos x}=0$.

هشدار!
در استفاده از قاعدهٔ هوپیتال از مبهم بودن حد، اطمینان حاصل کنید. یعنی درستی شرط ∞ یا $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$ را تحقیق کنید.

مثال ۶. مطلوب است محاسبهٔ

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-x^2-x-2}{x^3-3x^2-3x-2}.$$

حل دانش‌آموز:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-x^2-x-2}{x^3-3x^2-3x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-2x-1}{3x^2-6x+3}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{6x-2}{6x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{6}{6}=1$$

درحالی که اعمال قاعدهٔ هوپیتال برای بارهای دوم و سوم مجاز نیست، زیرا $\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-2x-1}{3x^2-6x+3}$ مبهم نبوده و برابر $\frac{7}{3}$ است.

مثال ۷. مطلوب است محاسبهٔ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x+x^2}$.

حل دانش‌آموز :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1+2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$$

درحالی که اعمال قاعدهٔ هوپیتال برای دومین بار مجاز نیست و $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1+2x}$ مبهم نبوده و برابر صفر است.

هشدار!

در استفادهٔ مکرر از قاعدهٔ هوپیتال، در هر مرحله، از مبهم بودن حد اطمینان حاصل کنید.

هشدار!

در اعمال قاعدهٔ هوپیتال، به دام مشتق گیری از $\frac{f}{g}$ نیافتید؛ کسری که باید به‌کار رود $\frac{f'}{g'}$ است نه $(\frac{f}{g})'$.

مثال ۸ . مطلوب است محاسبهٔ $\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$.

حل دانش‌آموز : حد فوق، حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ را دارد و

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+\sin x)'}{(x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1}$$

$=1+\lim_{x\to\infty}\cos x\to$ موجود نیست

پس بنابر قاعدهٔ هوپیتال $\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$ نیز موجود نیست.

درحالی که حد مورد نظر موجود بوده و برابر ۱ می‌باشد زیرا :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{\sin x}{x})=1+0=1$$

بنابر قضیه فشردگی :

$$-1\le\sin x\le 1\xrightarrow{x>0}\frac{-1}{x}\le\frac{\sin x}{x}\le\frac{1}{x}\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$$

مثال ۹ . مطلوب است محاسبهٔ $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$.

حل دانش‌آموز :

بنابر قضیهٔ فشردگی داریم :

$$-1\le\sin\frac{1}{x}\le 1\Rightarrow -x\le x\sin\frac{1}{x}\le x\Rightarrow\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

درنتیجه :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin(\frac{1}{x})}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$$

$$=\frac{0-\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}}{1}$$

$=-\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}\to$ موجود نیست

پس بنابر قاعدهٔ هوپیتال $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ نیز وجود ندارد.

درحالی که حد مورد نظر موجود و برابر صفر است زیرا :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}\times\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=0\times 1=0$$

مثال ۱۰ . مطلوب است محاسبهٔ $\lim_{x\to 0}x\tan\frac{1}{x}$.

حل دانش‌آموز : حد فوق، حالت مبهم $\infty\times 0$ را دارد.

با تبدیل به حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ و استفاده از قاعدهٔ هوپیتال داریم :

$$\lim_{x\to 0}x\tan\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{x^2}(1+\tan^2(\frac{1}{x}))}{\frac{-1}{x^2}}$$

$=\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan^{2}(\frac{1}{x}))$ ← موجود نیست

بنابراین $\lim\limits_{x\to 0} x\tan\frac{1}{x}$ نیز موجود نیست.

درست است که $\lim\limits_{x\to 0} x\tan\frac{1}{x}$ واقعاً وجود ندارد، اما این نتیجه‌گیری با استناد به قاعدهٔ هوپیتال درست نیست. برهان صحیح زیر را ببینید.

برهان خلف: فرض می‌کنیم حد فوق موجود و برابر l باشد یعنی $\lim\limits_{x\to 0} x\tan\frac{1}{x} = L$ درنتیجه:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\tan\frac{1}{x}} = \frac{0}{L} = 0 \qquad (*)$$

درحالی که:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\tan\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\tan\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\cot\frac{1}{x} = +\infty$$

که با (*) متناقض است. بنابراین فرض خلف باطل بوده و $\lim\limits_{x\to 0} x\tan\frac{1}{x}$ موجود نیست.

منابع

۱. تلگینی، محمود و خردپژوه، فروزان و رجالی، علی وقیاسیان، احمد. حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱) و (۲). چاپ پنجم. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. ۱۳۷۸.

۲. هاورد و. ایوز. آشنایی با تاریخ ریاضیات. ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی اصل. جلد دوم. چاپ اول. مرکز نشر دانشگاهی تهران. ۱۳۶۸.

۳. تمپل بل، اریک. ریاضی‌دانان نامی. ترجمهٔ حسن صفاری. چاپ سوم. امیرکبیر. ۱۳۷۱.

۴. (زیر نظر) بیرشک، احمد. خلاصهٔ زندگینامهٔ علمی دانشمندان. چاپ اول. شرکت انتشارات علمی و فرهنگی بنیاد. دانشنامه فارسی. ۱۳۷۴.

۵. آیرس، فرانک. نظریه و مسائل حساب دیفرانسیل و انتگرال. ترجمهٔ علی‌اکبر عالم‌زاده و غلامرضا زباندان. چاپ اول. فارابی. ۱۳۷۲.

۶. جهانشاهی، محمد. اصول فراگیری و آموزش ریاضیات دبیرستانی و پیش‌دانشگاهی. چاپ اول. مدرسه. ۱۳۷۷.

۷. آپوستل، تام. م. حساب دیفرانسیل و انتگرال. ترجمهٔ علیرضا ذکایی و همکاران. جلد اول. چاپ چهارم. مرکز نشر دانشگاهی. ۱۳۶۹.

۸. نیکولسکی، اس. ام. دوره‌ای بر آنالیز ریاضی. ترجمهٔ بهمن هنری و همکاران. چاپ اول. دانشگاه امام رضا(ع). ۱۳۷۶.

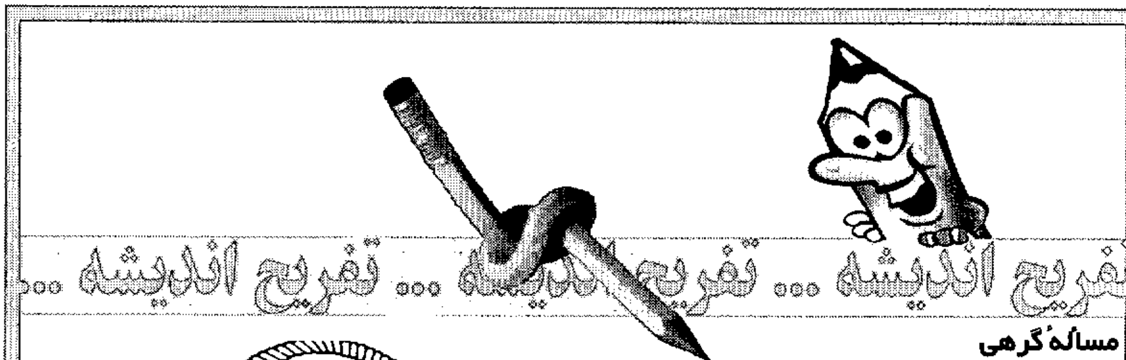
۹. استورات، جیمز. حسابگان دیفرانسیل و انتگرال. ترجمهٔ محمدحسین علامت‌ساز و همکاران. جلد اول. چاپ دوم. دانشگاه اصفهان. ۱۳۷۸.

۱۰. آذرپناه، فریبرز. روش‌های تحدید حد و تعویض متغیر در محاسبهٔ حد. رشد آموزش ریاضی. شمارهٔ ۴۹، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. پائیز ۱۳۷۶.

۱۱. پارزینسکی، ویلیام ر. وزیپس، فیلیپ. آشنایی با آنالیز ریاضی. ترجمهٔ سید محمود طالبیان. چاپ دوم. آستان قدس رضوی. ۱۳۷۵.

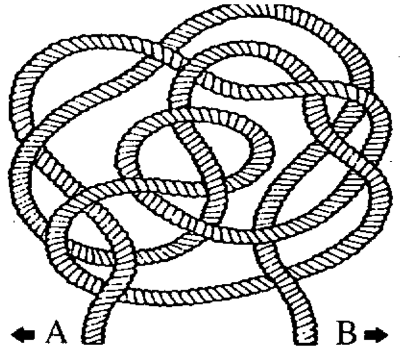
۱۲. توماس، جرج. بی و فینی، راس. ال. حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی. ترجمهٔ علی‌اکبر عالم‌زاده و داریوش بهمردی. جلد اول. چاپ چهارم. پژوهش. ۱۳۷۲.

۱۳. بارتل، رابرت. جی، دانلدر، شربرت. آشنایی با آنالیز حقیقی. ترجمهٔ دکتر طاهر قاسمی هنری و دکتر حکیمه ماهیار. چاپ اول. مبتکران. ۱۳۷۸.



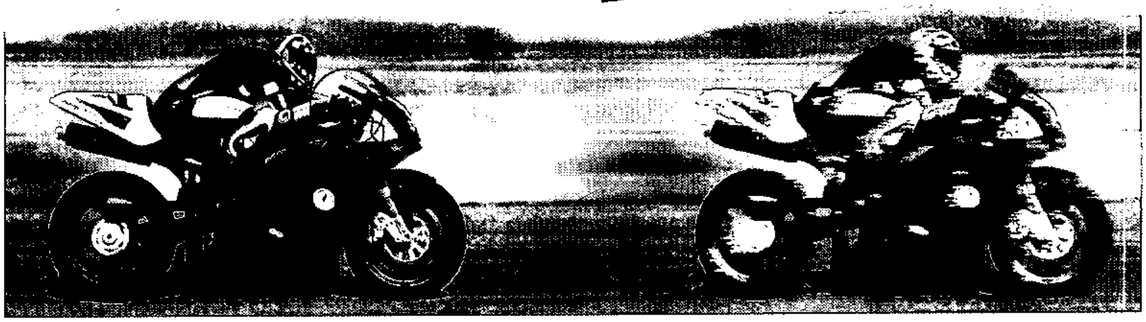
مسالهٔ گرهی

قطعه طنابی به شکلی که در روبرو می‌بینید، درهم پیچیده شده است. بدون استفاده از هیچ وسیله‌ای و تنها به کمک حافظه و ذهن خود، طناب را از دو انتهای A و B بگیرید و آن را به حدی بکشید که ساده‌ترین گره ممکن، به‌وجود آید. شکل گرهی را که ایجاد کرده‌اید، روی کاغذ رسم کنید و با جواب معما مقایسه کنید:



احمد قندهاری

حدّ تابع



وقتی دربارهٔ حد تابع بحث می‌کنیم، هدف ما بررسی رفتار تابع است، یعنی وقتی که متغیر آن به عدد مشخصی بسیار بسیار نزدیک شود، ولی هیچ‌گاه به آن نرسد. این مقاله بر سه مورد اساسی در مسائل حد تأکید می‌کند:

۱. مسائلی که با استفاده از تعریف حد، حل می‌شوند و بررسی این‌که چرا باید برگشت‌پذیری مسأله مورد توجه باشد و چرا در مباحث دیگر این عمل را انجام نمی‌دهیم.

۲. تعیین شعاع همسایگی مناسب در مسائل، به‌خصوص در مسائل کسری و رادیکالی.

۳. تعیین کران بالا و کران پائین یک عبارت در مسائل نسبتاً پیچیده.

حدود تغییرات $|x|$ در بازهٔ (a,b)

فرض می‌کنیم $a,b\in\mathbb{R}$ و $0\le a<b$

الف) $a<x<b \Rightarrow a<|x|<b$

ب) $-b<x<-a \Rightarrow a<|x|<b$

ج) $-a<x<b \Rightarrow 0\le|x|<b$

د) $-b<x<a \Rightarrow 0\le|x|<b$

مثال:

$-4<x<7 \Rightarrow 0\le|x|<7$

همسایگی

بنا بر تعریف، عضوی از مجموعهٔ اعداد حقیقی مانند x که در نامساوی $0<|x-a|<r$ یا در نامساوی $x\neq a$ و $a-r<x<a+r$ صدق کند، یک همسایگی متقارن محذوف به مرکز a و شعاع r است.

قرارداد: اعداد مثبت کوچک را با ε یا δ و اعداد مثبت بزرگ را با M و N نشان می‌دهیم.

تعریف حد تابع

فرض می‌کنیم، تابع f در یک همسایگی a تعریف شده باشد (ممکن است تابع f در خود a تعریف نشده باشد). می‌گوییم: حد $f(x)$ وقتی $x\to a$، برابر عدد حقیقی L است و می‌نویسیم: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$. اگر برای هر $\varepsilon>0$، هرچه‌قدر کوچک، عدد مثبتی مانند δ وجود داشته باشد که: $0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$.

یا می‌نویسیم:

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \ni 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

برای اثبات رابطهٔ بالا که آن را یک «استلزام منطقی» می‌نامیم (گزارهٔ شرطی همیشه درست)، به این صورت

عمل می‌کنیم که از نامساوی $|f(x)-L|<\varepsilon$ شروع می‌کنیم و به جای $f(x)$، مقدار آن را قرار می‌دهیم. پس از ساده کردن، به نامساوی $0<|x-a|<\delta$ می‌رسیم.

درواقع در این قسمت باید δ را بر حسب ε به‌دست آورد. پس از یافتن δ برحسب ε باید بتوان از نابرابری $0<|x-a|<\delta$، به نامساوی $|f(x)-L|<\varepsilon$ رسید.

این قسمت از حل را «برگشت‌پذیری» گویند.

مسألهٔ ۱. با استفاده از تعریف حد تابع ثابت کنید:

$$\lim_{x\to 2}(x^2-7x+7)=-3$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists\delta>0\quad ; 0<|x-2|<\delta \Rightarrow \left|(x^2-7x+7)+3\right|<\varepsilon$$

رابطهٔ (۱)

$$\left|x^2-7x+10\right|<\varepsilon \Rightarrow |(x-2)(x-5)|<\varepsilon \Rightarrow |x-2|.|x-5|<\varepsilon$$

چون $x\to 2$، فرض می‌کنیم: $0<|x-2|<1$؛ یعنی شعاع همسایگی را عدد ۱ فرض می‌کنیم:

$$0<|x-2|<1 \Rightarrow -1<x-2<1,\ x\neq 2 \Rightarrow 1<x<3,\ x\neq 2$$

درحالی که $1<x<3$ و $x\neq 2$، اکنون کران بالای $|x-5|$ را می‌سازیم.

$$1<x<3 \Rightarrow -4<x-5<-2 \Rightarrow 2<|x-5|<4$$

حال به رابطهٔ (۱) برمی‌گردیم. عبارت $|x-2|\times 4$ از عبارت $|x-2|.|x-5|$ بزرگ‌تر است، پس:

$$|x-2|\times 4<\varepsilon \Rightarrow |x-2|.|x-5|<\varepsilon \qquad \text{(۲) رابطهٔ}$$

$$|x-2|\times 4<\varepsilon \Rightarrow |x-2|<\frac{\varepsilon}{4}$$

$$\begin{cases} 0<|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{4} \\ 0<|x-2|<1 \end{cases} \qquad \delta\le \mathrm{Min}\left\{1,\frac{\varepsilon}{4}\right\}$$

حال به بررسی برگشت‌پذیری مسأله می‌پردازیم:

فرض می‌کنیم: $\mathrm{Min}\left\{1,\frac{\varepsilon}{4}\right\}=1$، پس خواهیم داشت:

$$0<|x-2|<1<\frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow |x-2|<\frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow |x-2|\times 4<\varepsilon$$

بنابر رابطهٔ (۲) می‌توان نوشت:

$$|x-2|\times 4<\varepsilon \Rightarrow |x-2|.|x-5|<\varepsilon \Rightarrow |(x-2)(x-5)|<4 \Rightarrow$$

$$\left|x^2-7x+10\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|(x^2-7x+7)+3\right|<\varepsilon$$

چرا باید مسأله برگشت‌پذیر باشد

در حل مسائل تعریف حد از نابرابری $|f(x)-L|<\varepsilon$ به نابرابری $0<|x-a|<\delta$ می‌رسیم و δ را پیدا می‌کنیم، مقدار δ به عدد شعاع همسایگی و احیاناً به مقدار کران بالا و پائین عبارت‌ها بستگی دارد. یافتن δ ی مناسب، یک تحقیق یا یک جست‌وجو است. پس از یافتن این δ، باید نشان دهیم که برای δ ی به‌دست آمده می‌توان از نابرابری $0<|x-a|<\delta$ به نابرابری $|f(x)-L|<\varepsilon$ رسید. برای مثال اگر شخص دیگری این مسأله را با شعاع همسایگی $\frac{1}{2}$ حل کند، δ ی دیگری به‌دست می‌آید.

و چنانچه شخص سومی شعاع همسایگی را $\frac{1}{10}$ بگیرد، δ سومی به‌دست می‌آید. به همین علت است که باید برای δ به‌دست آمده مسأله برگشت‌پذیر باشد.

نکته: اگر در حل همین مسأله دقت کنیم، می‌بینیم مشکل مسأله پس از یافتن رابطهٔ $|x-2|.|x-5|<\varepsilon$ شروع شده است. وقتی کران بالای $|x-5|$ را در شرایط $1<x<3$ و $x\neq 2$ یافتیم، رابطهٔ (۲) را نوشتیم که رابطهٔ کلیدی برگشت‌پذیری است. یعنی می‌توان به جای عمل برگشت‌پذیری چنین نوشت:

اگر $\delta\le \mathrm{Min}\left\{1,\frac{\varepsilon}{4}\right\}$ باشد، آن‌گاه از نابرابری $0<|x-2|<\delta$ با توجه به رابطهٔ (۲)، می‌توان نابرابری $\left|(x^2-7x+7)+3\right|<\varepsilon$ را نتیجه گرفت.

مسأله ۲. با استفاده از تعریف حد تابع ثابت کنید:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2}{5x-8}=3$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall\varepsilon<0\quad \exists\delta>0\quad ; 0<|x-2|<\delta \Rightarrow \left|\frac{x^2+2}{5x-8}-3\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{x^2+2}{5x-8}-3\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{x^2-15x+26}{5x-8}\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{(x-2)(x-13)}{5x-8}\right|<\varepsilon$$

رابطهٔ (۱) $\Rightarrow |x-2|\times\frac{|x-13|}{|5x-8|}<\varepsilon$

حال باید یک همسایگی متقارن محذوف به مرکز ۲ و شعاع r در نظر بگیریم و کران بالای $|x-13|$ و کران پائین $|5x-8|$ را پیدا کنیم. ممکن است کران پائین $|5x-8|$، صفر شود که در این صورت نمی‌توان حل را ادامه داد. نمی‌توانیم به‌طور تصادفی r مناسب را انتخاب کنیم که در این صورت ممکن است، از ما سؤال شود، از کجا فهمیدید شعاع همسایگی مناسب فلان عدد است. به همین علت، شعاع همسایگی را r فرض می‌کنیم و کران پائین مخرج را می‌سازیم و کران پائین را بزرگ‌تر از صفر قرار می‌دهیم تا شعاع همسایگی مناسب به‌دست آید. پس:

$$0<|x-2|<r \Rightarrow -r<x-2<r,\ x\neq 2 \Rightarrow$$
$$2-r<x<2+r,\ x\neq 2$$

حال عبارت $5x-8$ را می‌سازیم.

$$10-5r<5x<10+5r \Rightarrow 2-5r<5x-8<2+5r$$

اگر $2-5r>0$، آن‌گاه $r<\frac{2}{5}$، در این شرایط کران پائین مخرج، صفر نخواهد شد. پس برای ادامهٔ حل باید $r<\frac{2}{5}$ باشد. با این ملاک به‌دست آمده، مجازیم $r=\frac{1}{5}$ یا هر عدد کوچک‌تر از $\frac{2}{5}$ را r بنامیم. پس:

$$0<|x-2|<\frac{1}{5} \Rightarrow 1<\underset{x\neq 2}{5x-8}<3 \Rightarrow 1<|5x-8|<3$$

کران پائین مخرج با این شعاع همسایگی، عدد ۱ است. حال کران بالای صورت را می‌یابیم:

$$0<|x-2|<\frac{1}{5} \Rightarrow 2-\frac{1}{5}<x<2+\frac{1}{5} \quad x\neq 2$$
$$\Rightarrow -11-\frac{1}{5}<x-13<-11+\frac{1}{5} \Rightarrow -\frac{56}{5}<x-13<-\frac{54}{5} \Rightarrow$$
$$\frac{54}{5}<|x-13|<\frac{56}{5}$$

پس در این شرایط، کران بالای عبارت صورت $\frac{56}{5}$ است.

عبارت $|x-2|\times\frac{\frac{56}{5}}{1}$، از عبارت $|x-2|\times\frac{|x-13|}{|5x-8|}$ بزرگ‌تر است، پس:

رابطهٔ (۲) $|x-2|\times\frac{56}{5}<\varepsilon \Rightarrow |x-2|\times\frac{|x-13|}{5x-8}<\varepsilon$

این رابطه را که کلید برگشت‌پذیری است، رابطهٔ برگشت‌پذیری می‌نامیم.

$$|x-2|\times\frac{56}{5}<\varepsilon \Rightarrow |x-2|<\frac{5\varepsilon}{56} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 0<|x-2|<\frac{5\varepsilon}{56} \\ 0<|x-2|<\frac{1}{5} \end{cases},\quad \delta\le \mathrm{Min}\left\{\frac{1}{5},\ \frac{5\varepsilon}{56}\right\}$$

اگر $\delta\le \mathrm{Min}\left\{\frac{1}{5},\ \frac{5\varepsilon}{56}\right\}$ باشد، آن‌گاه از نابرابری $0<|x-2|<\delta$ با توجه به رابطهٔ (۲) که رابطهٔ برگشت‌پذیری است، به نابرابری $\left|\frac{x^2+2}{5x-8}-3\right|<\varepsilon$ خواهیم رسید.

مسأله ۳. با استفاده از تعریف حد تابع ثابت کنید:

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{x^2-3x+3}=1$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \ni 0<|x-1|<\delta \Rightarrow \left|\sqrt{x^2-3x+3}-1\right|<\varepsilon$$

$$\left|(\sqrt{x^2-3x+3}-1)\times\frac{\sqrt{x^2-3x+3}+1}{\sqrt{x^2-3x+3}+1}\right|<\varepsilon \Rightarrow$$

$$\left|\frac{x^2-3x+2}{\sqrt{x^2-3x+3}+1}\right|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\frac{(x-1)(x-2)}{\underbrace{\sqrt{x^2-3x+3}+1}_{\text{مثبت است}}}\right|<\varepsilon \Rightarrow |x-1|\times\frac{|x-2|}{\sqrt{x^2-3x+3}+1}<\varepsilon$$

اگر $y=x^2-3x+1$ فرض شود، از $y'_x=2x-3=0$ به‌دست می‌آید $x=\frac{3}{2}$.

بهتر است شعاع همسایگی را عددی انتخاب کنیم که $\frac{3}{2}$ در بازهٔ همسایگی قرار گیرد، چون $x=\frac{3}{2}$ طول می‌نیمم مطلق تابع، با ضابطهٔ $y=x^2-3x+3$ است.

اگر $r=1$ انتخاب شود نظر ما تأمین خواهد شد.

$$0<|x-1|<1\Rightarrow -1<x-1<1,\ x\neq 1\Rightarrow 0<x<2,\ x\neq 1$$

حال می‌گوئیم وقتی $0<x<2$ و $x\neq 2$، می‌نیمم مطلق عبارت مخرج به ازای $x=\frac{3}{2}$ حاصل می‌شود که برابر $(\frac{\sqrt{3}}{2}+1)$ است.

$$x=\frac{3}{2}\Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

پس مشکل مخرج به‌خوبی حل شد. برای تعیین کران بالای صورت حل را ادامه می‌دهیم.

$$0<x<2,\ x\neq 1\Rightarrow -2<x-2<0\Rightarrow 0<|x-2|<2$$

در این شرایط کران بالای صورت عدد ۲ است.

عبارت $|x-1|\times\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}+1}$ از عبارت $|x-1|\times\frac{|x-2|}{\sqrt{x^2-3x+3}+1}$ بزرگ‌تر است، پس:

$$|x-1|\times\frac{2}{\frac{\sqrt{3}+2}{2}}<\varepsilon\Rightarrow|x-1|\times\frac{|x-2|}{\sqrt{x^2-3x+3}+1}<\varepsilon$$

رابطهٔ برگشت‌پذیری

$$|x-1|\times\frac{2}{\frac{\sqrt{3}+2}{2}}<\varepsilon\Rightarrow|x-1|<\frac{\sqrt{3}+2}{4}\varepsilon$$

$$\begin{cases}0<|x-1|<\frac{\sqrt{3}+2}{4}\varepsilon\\ 0<|x-1|<1\end{cases};\quad \delta\le \mathrm{Min}\left\{\frac{\sqrt{3}+2}{4}\varepsilon,1\right\}$$

اگر $\delta\le \mathrm{Min}\left\{\frac{\sqrt{3}+2}{4}\varepsilon,1\right\}$ باشد، آن‌گاه از رابطهٔ $0<|x-1|<\delta$ با توجه به رابطهٔ برگشت‌پذیری، به نابرابری $\left|\sqrt{x^2-3x+2}-1\right|<\varepsilon$ خواهیم رسید.

مسأله ۴. به کمک تعریف حد تابع ثابت کنید:

$$\lim_{x\to 1}x^4=1$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\quad\ni 0<|x-1|<\delta\Rightarrow|x^4-1|<\varepsilon$$

$$|x^4-1|<\varepsilon\Rightarrow|(x-1)(x^3+x^2+x+1)|<\varepsilon\Rightarrow$$
$$|x-1|\times|x^3+x^2+x+1|<\varepsilon$$

$$0<|x-1|<1\Rightarrow -1<x-1<1,\ x\neq 1,\ 0<x<2,\ x\neq 1$$

باید کران بالای $|x^3+x^2+x+1|$ را وقتی $0<x<2$ و $x\neq 1$ پیدا کرد.

$$y=x^3+x^2+x+1\Rightarrow y'_x=3x^2+2x+1>0\quad \Delta<0,\ a>0$$

پس تابع y صعودی اکید است. وقتی $0<x<2$، کران بالای آن در $x=2$ به‌دست می‌آید:

$$x=2\Rightarrow y=8+4+2+1=15$$

عبارت $|x-1|\times 15$، از عبارت $|x-1|\times|x^3+x^2+x+1|$ بزرگ‌تر است، پس:

رابطهٔ برگشت‌پذیری

$$|x-1|\times 15<\varepsilon\Rightarrow|x-1|\times|x^3+x^2+x+1|<\varepsilon$$

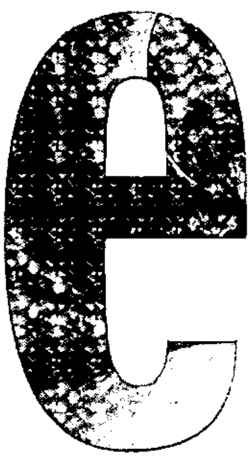
$$|x-1|\times 15<\varepsilon\Rightarrow|x-1|<\frac{\varepsilon}{15}$$

$$\begin{cases}0<|x-1|<\frac{\varepsilon}{15};\\ 0<|x-1|<1\end{cases}\qquad \delta\le \mathrm{Min}\left\{1,\frac{\varepsilon}{15}\right\}$$

اگر $\delta\le \mathrm{Min}\left\{1,\frac{\varepsilon}{15}\right\}$ باشد، آن‌گاه از نابرابری $0<|x-1|<\delta$ با توجه به رابطهٔ برگشت‌پذیری به نابرابری

قسمت دوم

احمد قندهاری



تابع نمایی و تابع لگاریتمی

برای دانش آموزان
دورهٔ پیش دانشگاهی رشتهٔ ریاضی

در شمارهٔ قبل، مطالبی راجع به تابع نمایی و لگاریتمی بیان کردیم. در این مقاله، مشتق تابع نمایی را با مثال‌های متعدد و متنوعی می‌آوریم، سپس جدول تغییرات و نمودار تابع‌های لگاریتمی را رسم می‌کنیم.

مشتق تابع نمایی

۱. $\boxed{y = e^{x} \Rightarrow y'_x = e^{x}}$

۲. $\boxed{y = e^{u} \Rightarrow y'_x = u'e^{u}}$

۳. $\boxed{y = a^{x} \Rightarrow y'_x = a^{x}\mathrm{Ln}(a)}$

۴. $\boxed{y = a^{u} \Rightarrow y'_x = u'a^{u}\mathrm{Ln}(a)}$

مثال. y'_x را در توابع به معادله‌های زیر بیابید.

۱. $y = e^{\mathrm{Sin}2x} \qquad u = \mathrm{Sin}2x \Rightarrow u'_x = 2\mathrm{Cos}2x$

$y = e^{u} \Rightarrow y'_x = u'e^{u} = 2\mathrm{Cos}2x\, e^{\mathrm{Sin}2x}$

۲. $y = a^{\tan x} \qquad u = \tan x \Rightarrow u'_x = (1+\tan^2 x)$

$y = a^{u} \Rightarrow y'_x = u'a^{u}\mathrm{Ln}(a) = (1+\tan^2 x)a^{\tan x}\mathrm{Ln}(a)$

۳. $y = x^{x}$: از طرفین تساوی، لگاریتم طبیعی می‌گیریم

$$Ln(y)=Ln(x)^x \Rightarrow Ln(y)=x\,Ln(x)$$

از طرفین تساوی، نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$\frac{y'_x}{y}=1\times Ln(x)+\frac{1}{x}\times x$$

$$\Rightarrow \frac{y'_x}{y}=1+Ln(x)\Rightarrow y'_x=y(1+Ln(x))$$

$$\Rightarrow y'_x=x^x(1+Ln(x))$$

۴. $y=x^{Sinx} \quad \Rightarrow Ln\,y=Ln(x)^{Sinx}$

$$\Rightarrow Ln\,y=Sinx\,Ln(x)$$

$$\Rightarrow \frac{y'_x}{y}=Cosx\,Ln(x)+\frac{1}{x}Sinx$$

$$\Rightarrow y'_x=y\left(Cosx\,Ln(x)+\frac{1}{x}Sinx\right)$$

$$\Rightarrow y'_x=x^{Sinx}\left(Cosx\,Ln(x)+\frac{1}{x}Sinx\right)$$

۵. $y=Sinx^{\tan x} \Rightarrow Ln\,y=Ln(Sinx)^{\tan x}$

$$\Rightarrow Ln\,y=\tan x\,Ln(Sinx)$$

$$\Rightarrow \frac{y'_x}{y}=(1+\tan^2 x)(Ln\,Sinx)+\frac{Cosx}{Sinx}.\tan x\ ,\ \ x\neq\frac{k\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{y'_x}{y}=\frac{Ln\,Sinx}{Cos^2x}+1 \ \Rightarrow y'_x=y\left(\frac{Ln\,Sinx}{Cos^2x}+1\right)$$

$$\Rightarrow y'_x=Sinx^{\tan x}\left(\frac{Ln\,Sinx}{Cos^2x}+1\right)$$

۶. $y=(Sinx)^x \quad \Rightarrow Ln\,y=Ln(Sinx)^x$

$$\Rightarrow Ln\,y=x\,Ln(Sinx) \ \Rightarrow \frac{y'_x}{y}=Ln\,Sinx+\frac{Cosx}{Sinx}.x$$

$$\Rightarrow \frac{y'_x}{y}=Ln\,Sinx+x\cot x \ \Rightarrow y'_x=y(Ln\,Sinx+x\cot x)$$

$$\Rightarrow y'_x=Sinx^x(Ln\,Sinx+x\cot x)$$

۷. $y=e^{x^2} \ \Rightarrow Ln\,y=Ln\,e^{x^2} \ \Rightarrow Ln\,y=x^2 Ln\,e$

$$\Rightarrow \frac{y'_x}{y}=2x\,Ln\,e\Rightarrow y'_x=y(2x\underbrace{Ln\,e}_{1})\Rightarrow y'_x=e^{x^2}(2x)$$

راه دیگر، استفاده از فرمول $y=e^u$ است که $y'=u'e^u$

$$\Rightarrow y=e^{x^2} \ \Rightarrow y'_x=2xe^{x^2}$$

۸. $y=x^{Lnx} \Rightarrow Ln\,y=Ln\,x^{Lnx}=(Lnx)^2$

$$\Rightarrow \frac{y'_x}{y}=2\left(\frac{1}{x}\right)Lnx\Rightarrow y'_x=y\left(\frac{2}{x}Lnx\right)$$

$$\Rightarrow y'_x=x^{Lnx}\left(\frac{2}{x}Lnx\right)$$

۹. $y=Sinx^{\log x} \Rightarrow Ln\,y=\log x\,Ln\,Sinx$

$$\Rightarrow \frac{y'_x}{y}=\frac{1}{x}\log e(Ln\,Sinx)+\frac{Cosx}{Sinx}\log x$$

$$y'_x=y\left(\frac{1}{x}\log e.Ln(Sinx)+\cot x\log x\right)$$

$$y'_x=Sinx^{\log x}\left(\frac{1}{x}\log e\,Ln\,Sinx+\cot x\log x\right)$$

۱۰. $y=e^x Sinx+2^x Cosx$

$$y'_x=e^x Sinx+Cosx\,e^x+2^x Ln2(Cosx)-Sinx(2^x)$$

$$y'_x=e^x(Sinx+Cosx)+2^x(Cosx\,Ln2-Sinx)$$

۱۱. $y=e^x.a^x Lnx$

$$y'_x=e^x(a^x Lnx)+a^x Lna(e^x.Lnx)+\frac{1}{x}(e^x.a^x)$$

۱۲. $y=Sinx^{(e^x)} \Rightarrow Lny=e^x Ln\,Sinx$

$$\frac{y'_x}{y}=e^x Ln\,Sinx+\frac{Cosx}{Sinx}.e^x=e^x(Ln\,Sinx+\cot x)$$

$$y'_x=ye^x(Ln\,Sinx+\cot x)$$

$$y'_x=Sinx^{(e^x)}.e^x(Ln\,Sinx+\cot x)$$

مسأله:

جدول تغییرات و نمودار توابع به معادله‌های زیر را رسم کنید.

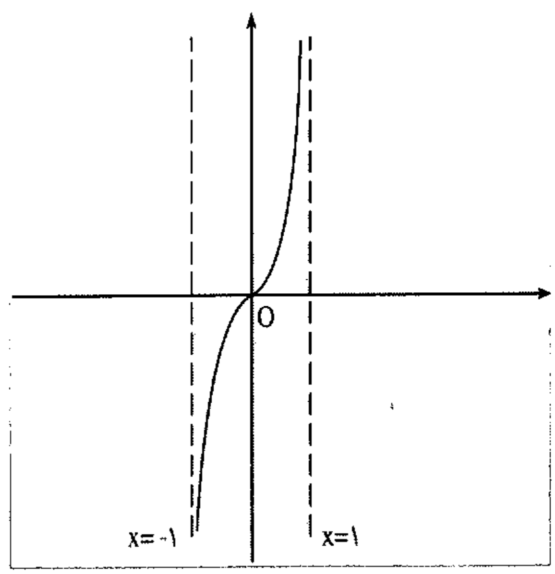
۱. $y=\log\frac{1+x}{1-x} \qquad \frac{1+x}{1-x}>0\Rightarrow D_f=(-1\ ,\ 1)$

$$y'_x = \frac{\frac{۲}{(۱-x)^۲}}{\frac{x+۱}{۱-x}}\log e = \frac{۲}{۱-x^۲}\log e > ۰$$

$x \longrightarrow -۱^+ \Rightarrow y \longrightarrow -\infty$

$x \longrightarrow ۱^- \Rightarrow y \longrightarrow +\infty$

x	−۱	۰	۱
y′	+		+
y	−∞	۰	+∞



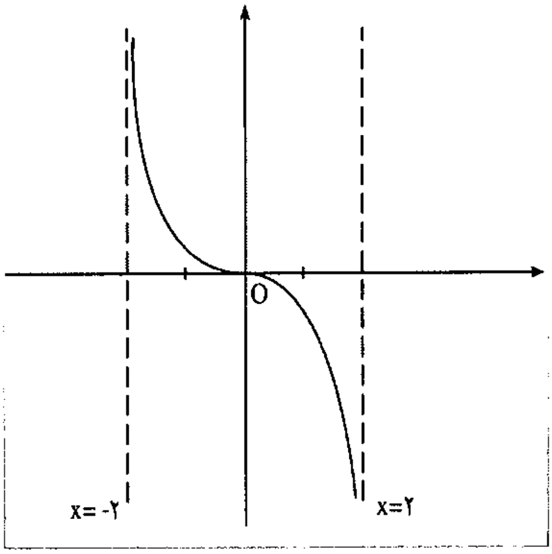
$۲.\ y = \mathrm{Ln}\frac{۲-x}{۲+x} \qquad \frac{۲-x}{۲+x} > ۰ \Rightarrow x = ۲\ ,\ -۲ \Rightarrow D_f = (-۲\ ,\ ۲)$

$$y' = \frac{\frac{-۴}{(x+۲)^۲}}{\frac{۲-x}{۲+x}} = \frac{-۴}{۴-x^۲} < ۰$$

$x \longrightarrow -۲^+ \Rightarrow y \longrightarrow +\infty$

$x \longrightarrow ۲^- \Rightarrow y \longrightarrow -\infty$

x	−۲	۰	۲
y′			
y	+∞	۰	−∞



$۳.\ y = \mathrm{Ln}\frac{x-۱}{x+۱} \qquad \frac{x-۱}{x+۱} > ۰ \Rightarrow x = ۱, -۱ \Rightarrow$

$D_f = (-\infty, -۱) \cup (۱, +\infty)$

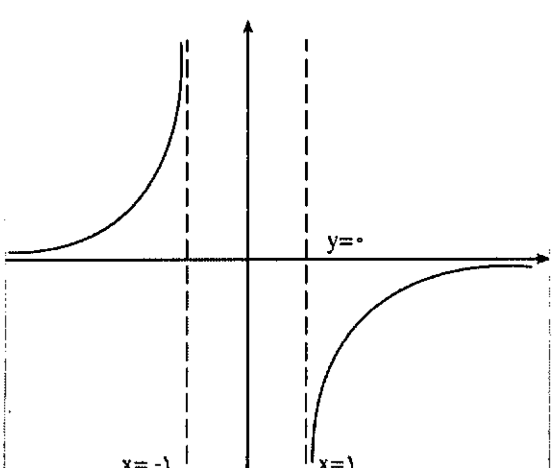
$$y' = \frac{\frac{۲}{(x+۱)^۲}}{\frac{x-۱}{x+۱}} = \frac{۲}{x^۲-۱} > ۰$$

$x \longrightarrow \pm\infty \Rightarrow y \longrightarrow ۰$

$x \longrightarrow -۱^- \Rightarrow y \longrightarrow +\infty$

$x \longrightarrow ۱^+ \Rightarrow y \longrightarrow -\infty$

x	−∞		−۱	۱		+∞
y′		+				+
y	۰	+∞		−∞		۰



مسأله: نامعادلهٔ $\log_5 \frac{5}{1-x} > \log_5 \frac{1}{2+x}$ را حل کنید.

$$\Rightarrow \frac{5}{1-x} > \frac{1}{2+x} \Rightarrow \frac{5}{1-x} - \frac{1}{2+x} > 0 \Rightarrow$$

$$\frac{9+6x}{(1-x)(2+x)} > 0 \begin{cases} x=-\frac{3}{2} \\ x=1\ ,-2 \end{cases}$$ ریشه‌های صورت و مخرج کسر

x	$-\infty$	-2	$-\frac{3}{2}$	1	$+\infty$
$\frac{9+6x}{(1-x)(2+x)}$	$+$	$-$	0	$+$	$-$

$x<-2 \qquad -\frac{3}{2}<x<1$

مسأله: نامعادلهٔ مقابل را حل کنید.

$$(0/2)^{-x^2+5x} < \frac{1}{625}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{-x^2+5x} < \frac{1}{5^4} \Rightarrow 5^{x^2-5x} < 5^{-4} \Rightarrow x^2-5x<-4 \Rightarrow$$

$$x^2-5x+4<0 \Rightarrow x=1,4$$

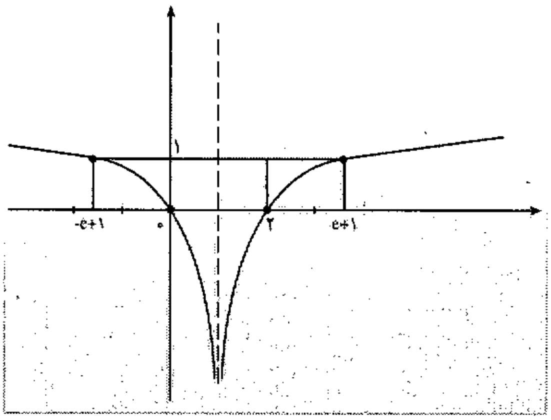
x	$-\infty$	1		4	$+\infty$
$x^2-5x+4<0$	$+$	0	$-$	0	$+$

جواب $1<x<4$

مسأله: تابع به معادلهٔ $y=\ln|x-1|$ را رسم کنید.

دامنهٔ تعریف این تابع $\mathbb{R}-\{1\}$ و برد آن $\mathbb{R}$ است.

$$y=\ln(u) \Rightarrow y'_x=\frac{u'_x}{u}$$



$$\begin{cases} y=|u| \Rightarrow y'_x=\frac{v'.v}{|v|} \\ y=|x-1| \Rightarrow y'_x=\frac{1(x-1)}{|x-1|} \end{cases}$$

$$y=\ln|x-1| \Rightarrow y'=\frac{\frac{x-1}{|x-1|}}{|x-1|}=\frac{x-1}{(x-1)^2}$$

$\Rightarrow$ اگر $x>1 \Rightarrow y'>0 \Rightarrow$ تابع اکیداً صعودی است

اگر $x<1 \Rightarrow y'<0 \Rightarrow$ تابع اکیداً نزولی است

x	$-\infty$	$-e+1$	0	1^-	1^+	2	$e+1$	$+\infty$
$\ln\lvert x-1\rvert$	$+\infty$	1	0	$-\infty$	$-\infty$	0	1	$+\infty$

مسأله: مطلوب است رسم تابع‌های به معادلهٔ زیر:

1. $y=x\ln x$

دامنهٔ تابع $=(0,+\infty)$

$$x\to 0^+ \Rightarrow \lim y=\lim x\ln x=0\times\infty=\lim\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\frac{-\infty}{+\infty}$$

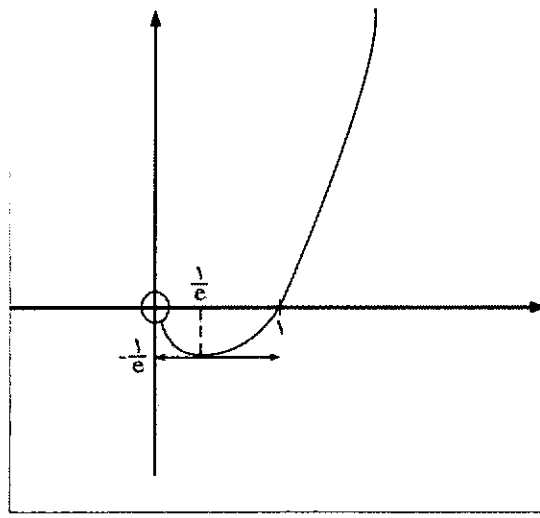
دستور هوپیتال $$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^2}{x}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$$

$$x\to+\infty \Rightarrow y\to+\infty$$

$$y'=1.\ln x+\frac{1}{x}.x=\ln x+1=0$$

$$\Rightarrow Lnx = -۱ \Rightarrow x = e^{-۱} = \frac{۱}{e}$$

x	$∘^{+}$		$\frac{۱}{e}$		۱		$+\infty$
y′		−	∘	+		+	
y	∘		$-\frac{۱}{e}$		∘		



۲. $y = \frac{۱}{x} Lnx$ دامنهٔ تابع $= (∘, +\infty)$

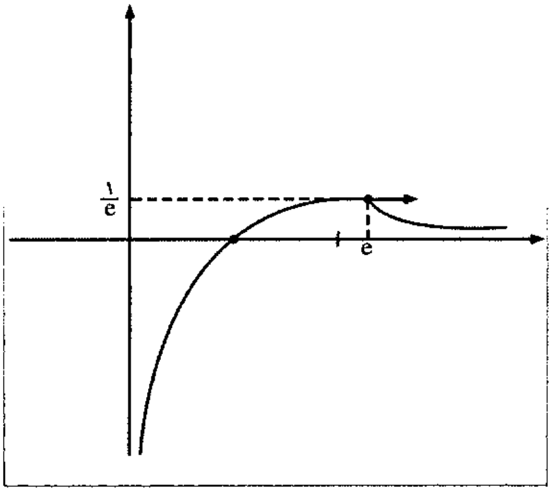
$x \to ∘^{+} \Rightarrow y \to (+\infty)(-\infty) = -\infty$,

$x' \to +\infty \overset{\text{حد}}{\Rightarrow} y = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to +\infty} \frac{Lnx}{x}$ دستور هوپیتال

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{۱}{x}}{۱} = \lim_{x \to +\infty} \frac{۱}{x} = ∘$$

$$y' = -\frac{۱}{x^{۲}} = Lnx + \frac{۱}{x}.\frac{۱}{x} = \frac{۱ = Lnx}{x^{۲}} = ∘ \Rightarrow Lnx = ۱ \Rightarrow x = e$$

x	$∘^{+}$		۱		e		$+\infty$
y′		+		+	∘	−	
y	$-\infty$		∘		$\frac{۱}{e}$		∘



۳. $y = x\,Lnx - x$ دامنه تابع $= (∘, +\infty)$

$$x \to ∘^{+} \Rightarrow \lim y = ∘ \times \infty = \lim \frac{Lnx}{\frac{۱}{x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

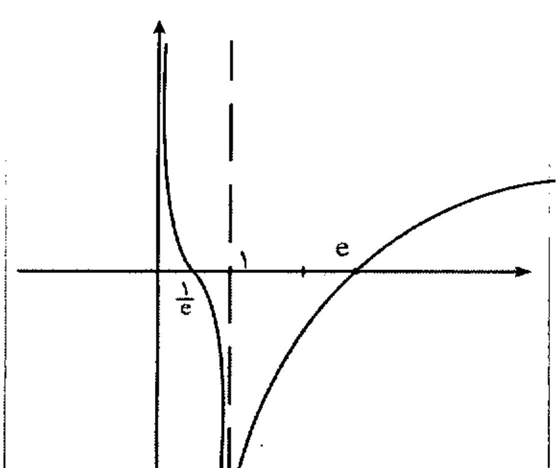
دستور: $\lim_{x \to ∘^{+}} \frac{\frac{۱}{x}}{-\frac{۱}{x^{۲}}} = \lim_{x \to ∘^{+}} \frac{-x^{۲}}{x} = \lim_{x \to ∘^{+}} (-x) = ∘$

هوپیتال

$x \to +\infty \Rightarrow y \to +\infty$

$$y' = ۱.Lnx + \frac{۱}{x}.x - ۱ = Lnx = ∘ \Rightarrow x = ۱$$

x	$∘^{+}$		۱		e		$+\infty$
y′		−	∘	+		+	
y	∘		-۱		∘		$+\infty$



۴. $y = \text{Ln}|\text{Ln}x|$ دامنهٔ تابع $= (۰, +\infty)$

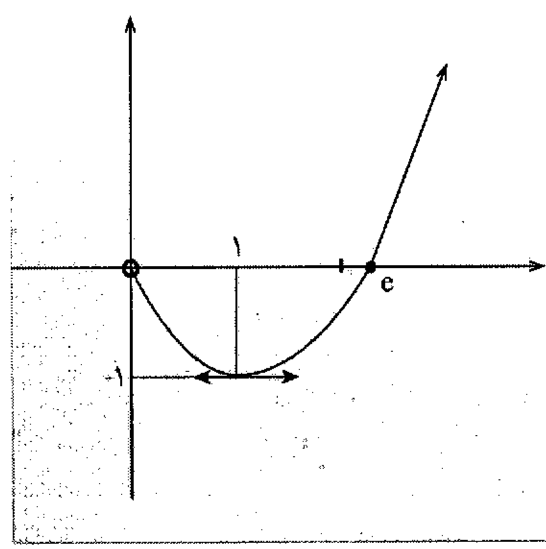
$x \to ۰^{+} \Rightarrow \lim y = \text{Ln}(+\infty) = +\infty$

$x \to +\infty \Rightarrow \lim y = \text{Ln}(+\infty) = +\infty$

$$y' = \frac{(\text{Ln}x)'}{\text{Ln}x} = \frac{\frac{۱}{x}}{\text{Ln}x} = \frac{۱}{x\,\text{Ln}x}$$

$x \to ۱ \Rightarrow \lim y = \text{Ln}\left|۰^{+}\right| \to -\infty$

x	۰		$\frac{۱}{e}$		۱		$+\infty$
y′		−		−			
y	$+\infty$		۰	$-\infty$	$-\infty$		$+\infty$



۵. $y = \frac{۱}{۲}\ \text{Ln}\left|\frac{۱+x}{۱-x}\right| \qquad D_f = R - \{\pm ۱\}$

اولاً: ثابت می‌کنیم این تابع فرداست، زیرا

$$f(x) = \frac{۱}{۲}\ \text{Ln}\left|\frac{۱+x}{۱-x}\right|$$

$$f(-x) = \frac{۱}{۲}\ \text{Ln}\left|\frac{۱-x}{۱+x}\right|$$

$$f(-x) + f(x) = \frac{۱}{۲}\left(\text{Ln}\left|\frac{۱+x}{۱-x}\right| + \text{Ln}\left|\frac{۱-x}{۱+x}\right|\right)$$

$$f(-x) + f(x) = \frac{۱}{۲}\left(\text{Ln}\left|\frac{۱+x}{۱-x}\right| \times \left|\frac{۱-x}{۱+x}\right|\right) = \frac{۱}{۲}\text{Ln}۱ = ۰$$

$$\Rightarrow f(-x) = -f(x) \Rightarrow$$

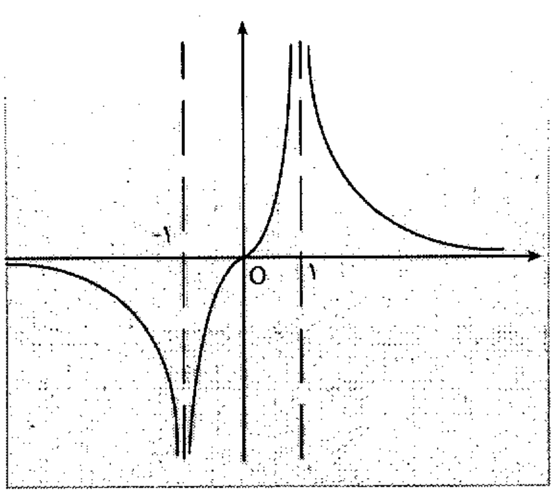
بنابراین تابع فرد است.

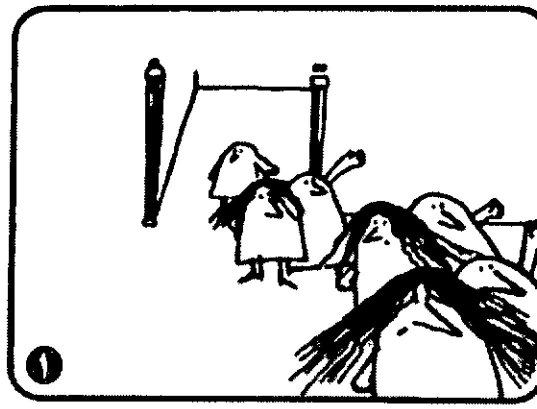
تابع را در نصف دامنهٔ آن، یعنی دربازه $[۰, +\infty)$ و سپس قرینهٔ شکل را نسبت به مبداء مختصات رسم می‌کنیم.

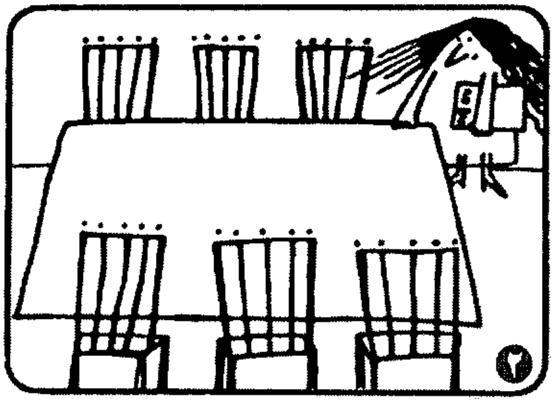
$$f'(x) = \frac{۱}{۲} \times \frac{\frac{۲}{(۱-x)^{۲}}}{\frac{۱+x}{۱-x}} = \frac{۱}{۱-x^{۲}} \begin{cases} x > ۱ \Rightarrow y' < ۰ \\ ۰ < x < \Rightarrow y' > ۰ \end{cases}$$

$x = ۰ \Rightarrow y = \frac{۱}{۲}\text{Ln}۱ = ۰\ ,\ \ x \to +\infty \Rightarrow y \to \frac{۱}{۲}\text{Ln}۱ = ۰$

x	۰		۱		$+\infty$
y′		+		−	
y	۰	$+\infty$		$+\infty$	۰







پارادوکس های ریاضیات و علوم

(سرگرمی برای اندیشه ورزی)

اثر دکتر مارتین گاردنر
ترجمهٔ حسن نصیرنیا

راز شش صندلی

❶ شش دانش‌آموز در رستورانی جا ذخیره کرده بودند. در دقیقهٔ آخر یک دانش‌آموز دیگر نیز به جمع شش نفری آن‌ها پیوست. سر پیشخدمت با خود می گوید:

❷ ـ «خدا را شکر که بچه‌ها بالاخره آمدند! من شش صندلی برای آن‌ها نگهداشته‌ام. آه، نه! هفت نفر می بینم!

❸ ـ باشد، مسأله‌ای نیست. دانش‌آموز اولی را روی صندلی می‌نشانم و به او اجازه می‌دهم برادر کوچک‌تر خود را که جزو شش دانش‌آموز دیگر است، چند دقیقه‌ای روی زانویش بنشاند.

❹ ـ حالا، سومین دانش‌آموز کنار دو نفر اول می‌نشیند و چهارمین دانش‌آموز کنار او قرار می‌گیرد. سپس پنجمین نفر در مقابل دانش‌آموزی که برادرش را روی زانویش گذاشته است، می‌نشیند و نفر ششمی کنار او جای می‌گیرد. به این ترتیب، شش دانش‌آموز می‌نشینند و هنوز یک صندلی خالی است!

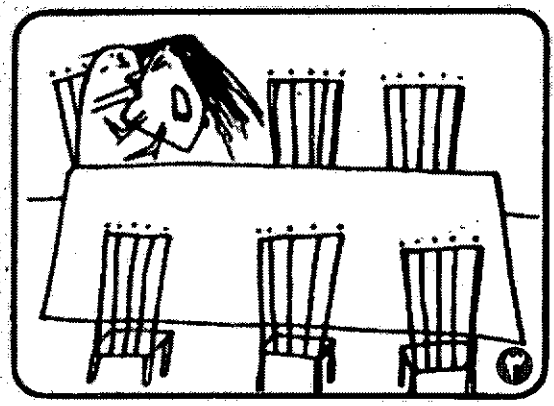
❺ ـ با این حساب، آخرین کاری که باید بکنم، این است که به هفتمین دانش‌آموز بگویم، از روی زانوی برادرش پائین بیاید، میز را دور بزند و روی صندلی خالی بنشیند!

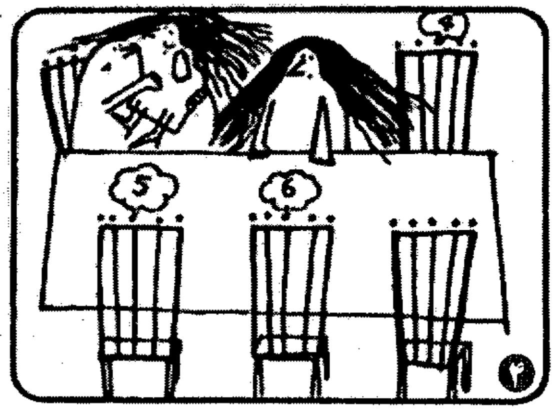
به نظر شما کجای این کار ایراد دارد؟ هفت نفر روی صندلی نشسته‌اند، یعنی برای هر نفر یک صندلی.

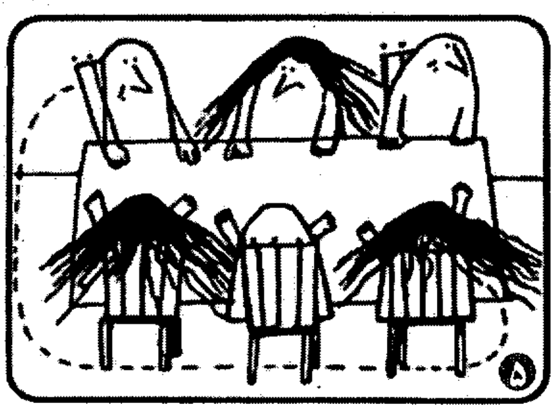
❊ ❊ ❊

شما نباید در تشخیص سفسطهٔ موجود در شکل قدیمی این پارادوکس، یعنی مهمانخانه‌داری که ۲۱ مهمان را در ۲۰ اتاق جا می‌دهد، هیچ مشکلی داشته باشید. حل این پارادوکس وقتی امکانپذیر می‌شود که متوجه شویم، شمارهٔ دانش‌آموزی که موقتاً روی زانوی برادرش نشسته، در واقع ۲ است و تا زمانی ششمین دانش‌آموز روی صندلی مستقر می‌شود، سرپیشخدمت شمارهٔ او را از یاد می‌برد و وی را شمارهٔ ۷ اعلام می‌کند. در واقع، هفتمین دانش‌آموز هرگز روی صندلی جای نمی‌گیرد. این شمارهٔ ۲ است که از روی زانوی برادرش پائین می‌آید، میز را دور می‌زند و روی ششمین صندلی می‌نشیند.

به نظر می‌رسد، این پارادوکس این قضیه را که یک







مجموعهٔ متناهی n عضوی فقط وقتی در تناظر یک‌به‌یک با سایر مجموعه‌ها قرار می‌گیرد که آن‌ها نیز n عضو داشته باشند، نقض می‌کند. در بخش پارادوکس «هتل بینهایت»، وقتی مجموعه‌های نامتناهی را مورد توجه قرار می‌دهیم، به این موضوع نیز خواهیم پرداخت. «راز شش صندلی» یک راه سرگرم‌کننده برای نشان دادن تفاوت میان مجموعه‌های متناهی و نامتناهی است.

یک مسألهٔ جالب

○ احمد فیروزنیا

۱. رابطه‌ای پیدا کنید که با کاربرد سه عدد ۲ و علامت‌های ریاضی* بتوان هر عدد دلخواه را به دست آورد.

حل: ابتدا مسأله را برای حالت‌های خاص حل می‌کنیم. عدد مفروض را ۳ می‌گیریم، در این صورت داریم:

$$3 = -\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$$

درستی این تساوی را به سادگی می‌توان بررسی کرد؛ زیرا:

$$-\log_2(\log_2 \sqrt[8]{2}) = -\log_2(\log_2 2^{\frac{1}{8}}) = -\log_2(\frac{1}{8}\log_2 2) =$$

$$-\log_2(\frac{1}{8}) = -(-3) = 3$$

و برای عدد ۵:

$$5 = -\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}} = -\log_2(\log_2 2^{\frac{1}{32}})$$

$$= -\log_2(\frac{1}{32}\log_2 2) = -\log(\frac{1}{32}) = -(-5) = 5$$

و بنابراین برای حالت کلی عدد مفروض N می‌توان نوشت:

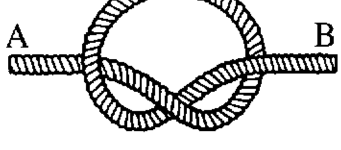
$$N = -\log_2 \log_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\dots\sqrt{\sqrt{2}}}}}_{\text{رادیکال } N}$$

به طوری که ملاحظه می‌شود، تعداد رادیکال‌ها برابر با عدد مفروض است.

* شامل توان، ریشگی و لگاریتم هم می‌شود.

جواب مسألهٔ گرهی

اگر به جواب درست رسیده‌اید، امتیاز کامل را به خود بدهید!



اما اگر آنچه را که رسم کرده‌اید، تصویر آینه‌ای این شکل باشد، جوابتان اشتباه است.

برای دانش آموزان دوره پیش دانشگاهی رشته ریاضی

گراف مکمل

اگر G یک گراف ساده باشد، مکمل گراف G را با $\overline{G}$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر می‌سازیم:

۱. مجموعهٔ رئوس $\overline{G}$ همان مجموعهٔ رئوس G است.

۲. بین دو رأس متمایز $\overline{G}$ یالی وجود دارد؛ اگر و تنها اگر یالی در G بین آن دو رأس نباشد.

تذکر: براساس تعریف بالا، هرگاه رأس‌هایی را که در گراف سادهٔ G به هم وصل نشده‌اند، به هم وصل کنیم، گراف مکمل آن گراف به دست می‌آید.

مثال: اگر گراف G به صورت  باشد، آن‌گاه $\overline{G}$ به صورت  تعریف می‌شود.

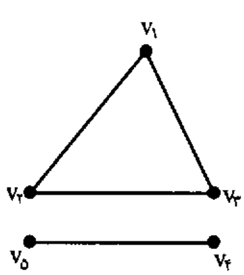
نکتهٔ ۱: از ترکیب گراف ساده و مکمل آن، یک گراف کامل تشکیل می‌شود.

نکتهٔ ۲: اگر $\overline{G}$ گراف مکمل گراف G از مرتبهٔ P باشد، آن‌گاه:

$$q(\overline{G})=\binom{p}{2}-q(G)$$

$$\Delta(G)+\delta(\overline{G})=p-1 \quad \text{و} \quad \Delta(\overline{G})+\delta(G)=p-1$$

مسأله: نمودار گراف G =(V,E) به صورت مقابل رسم شده است:



الف) مجموعه‌های V(G) و E(G) را با اعضا مشخص کنید.

ب) مجموعهٔ $\overline{E}=\{uv|u\neq v, uv\notin E\}$ را مشخص کنید.

ج) گراف $H=(V,E\cup\overline{E})$ را رسم و نام آن را

مشخص کنید. (امتحان هماهنگ کشوری ـ تیرماه ۷۴)

حل: **الف)**

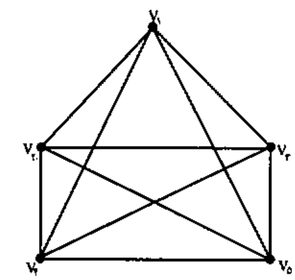
$E(G)=\{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_4v_5\}$ و

$V(G)=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

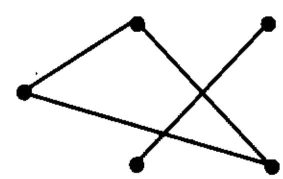
ب)

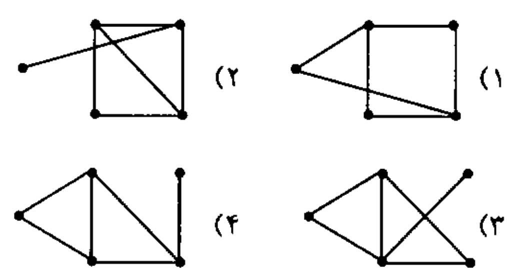
$\overline{E}=\{v_1v_4, v_1v_5, v_2v_5, v_3v_4, v_2v_4, v_3v_4\}$

ج) گراف H همان k_5 است.



آزمون ۳۰) مکمل گراف زیر کدام است؟





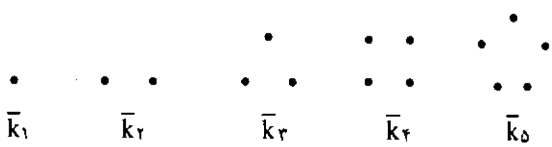
حل: گزینهٔ (۱). مکمل این گراف باید ۲ رأس درجهٔ ۳ و سه رأس درجهٔ ۲ داشته باشد که فقط گراف داده شده در گزینهٔ (۱) دارای این رأس‌هاست.

گراف تهی

گرافی را که دارای هیچ یالی نباشد، گراف تهی می‌نامند. هر گراف تهی مرتبهٔ p را به $\overline{k}_p$ نمایش می‌دهند.

تذکر ۱: گراف «۰ـ منتظم از مرتبهٔ p» را گراف تهی مرتبهٔ p می‌نامند.

مثال: گراف $\overline{k}_p$ به ازای $1 \le p \le 5$:



تذکر ۲: گراف k_p و $\overline{k}_p$ مکمل یکدیگرند.

آزمون ۳۱) در گراف $G=(V,E)$ داریم، $\sum_{i=1}^{p} \deg v_i = 56$، p کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۶

حل: گزینهٔ (۲): $2q = 56 \rightarrow q = 28$

تعداد یال‌های گراف G برابر تعداد یال‌های گراف k_8 است که در آن: $p = 8$

آزمون ۳۲) کدام یک از گراف‌های زیر وجود ندارد؟

۱) غیرکامل و منتظم ۲) کامل و غیرمنتظم

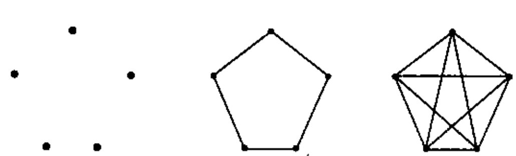
۳) کامل و منتظم ۴) غیرکامل و غیرمنتظم

حل: گزینهٔ (۲). با توجه به این که همهٔ گراف‌های کامل منتظمند، گراف کاملی وجود ندارد که منتظم نباشد.

سؤال: چند نوع گراف منتظم از مرتبهٔ ۵ وجود دارد؟ آن‌ها را رسم کنید.

پاسخ: $5r = 2q \rightarrow r = 0$ یا ۲ یا ۴

چون $2q$ زوج است، r می‌تواند اعداد ۰ یا ۲ یا ۴ را اختیار کند:



(۴ـ منتظم مرتبهٔ ۵) (۲ـ منتظم مرتبهٔ ۵) (۰ـ منتظم مرتبهٔ ۵)

سؤال: چند گراف منتظم با اندازهٔ ۱۲ وجود دارد؟

پاسخ:

$$\begin{cases} rp = 2q = 2\times 12 = 24 = 3\times 8 = 4\times 6 = 1\times 24 \\ r < p \end{cases}$$

گراف‌های منتظم با اندازهٔ ۱۲ عبارتند از:

«۲- منتظم مرتبهٔ ۱۲» و «۳- منتظم مرتبهٔ ۸» و «۴- منتظم مرتبهٔ ۶» و «۱- منتظم مرتبهٔ ۲۴»)

آزمون ۳۳) تعداد گراف‌های ۱۷ منتظم مرتبهٔ ۱۸ چند تاست؟

۱) ۰   ۲) ۱   ۳) ۲   ۴) ۳

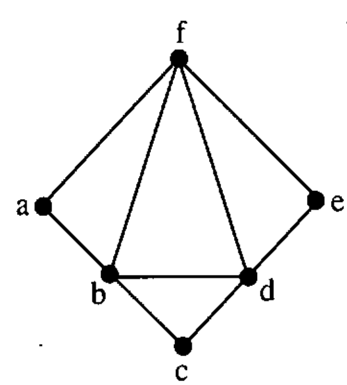
حل: گزینهٔ (۲). گراف مزبور، گراف کامل k_{18} است و فقط یک گراف کامل مرتبهٔ ۱۸ وجود دارد.

مسیر و دور در گراف

تعریف: در گراف سادهٔ $G=(V,E)$ یک مسیر از a به b، دنباله‌ای از رأس‌های متمایز G به صورت $(v_1 = a)v_2v_3\cdots(v_{n+1} = b)$ است؛ به طوری که هر دو رأس متوالی این دنباله، توسط یک یال به هم وصل شده باشند (مجاور باشند). تعداد یال‌های مسیر را **طول مسیر** می‌نامند که در این جا طول مسیر برابر n است.

تعریف: اگر در گراف $G=(V,E)$، دو سر یک مسیر فقط یک رأس باشد، آن را دور می‌نامند و طول دور هم برابر تعداد یال‌های تشکیل دهندهٔ آن دور است.

تذکر: دنبالهٔ شامل فقط یک رأس، مسیری به طول صفر است.



مثال: تعداد مسیرهای از a به b را مشخص کنید و آن‌ها را بنویسید.

حل: از رأس a به b تعداد ۸ مسیر وجود دارد که عبارتند از:

(adb), (afb) : مسیرهای به طول دو

(adcb), (adfb), (afdb), (afeb) : مسیرهای به طول سه

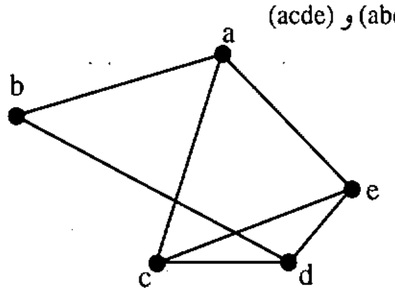
(afdcb), (adfeb) : مسیرهای به طول چهار

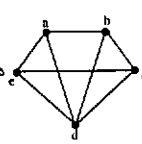
تذکر: در هر گراف مسیری به طول مرتبه وجود ندارد.

آزمون ۳۴) در گراف شکل زیر، چند مسیر به طول ۳ از a به e وجود دارد؟ (سراسری - ریاضی - ۷۵)

۱) ۵   ۲) ۴   ۳) ۳   ۴) ۲

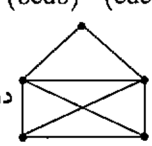
حل: گزینهٔ (۴). مسیرهای بین a و e به طول ۳ عبارتند از: (abde) و (acde)

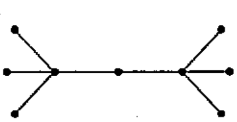


مثال ۱: در گراف  همهٔ دورهای به طول ۳ را مشخص کنید.

حل: دورهای به طول ۳ عبارتند از:

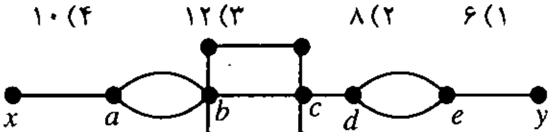
(aeda) - (abda) - (bcdb) - (edce)

مثال ۲: در گراف  دورهایی به طول ۳، ۴ و ۵ وجود دارد.

مثال ۳: در گراف  دوری وجود ندارد.

آزمون ۳۵) تعداد مسیرهای بین دو رأس x و y در گراف زیر کدام است؟

۱) ۶   ۲) ۸   ۳) ۱۲   ۴) ۱۰



حل: گزینهٔ (۳). بین دو رأس x و a یک مسیر، بین a و b دو مسیر، بین b و c سه مسیر، بین c و d یک مسیر و بین d و e دو مسیر و بین e و y یک مسیر وجود دارد، پس بنابر اصل ضرب:

$12 = 1\times2\times3\times1\times2\times1 =$ تعداد مسیرهای بین x و y

نکتهٔ ۱: هرگاه $\delta \ge k$، در این صورت گراف حداقل یک مسیر به طول k دارد.

نکتهٔ ۲: هرگاه $\delta \ge k$، در این صورت گراف حداقل یک دور به طول $k+1$ دارد.

نکتهٔ ۳: هرگاه $\delta \ge 2$، در این صورت گراف حداقل یک دور دارد.

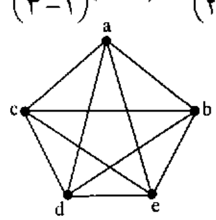
نکتهٔ ۴: تعداد مسیرهای به طول L بین دو رأس دلخواه و متمایز a و b در گراف کامل k_p برابر است با:

$$\binom{P-2}{L-1}(L-1)!$$

مثال ۱: چند مسیر به طول ۳ در گراف k_5 وجود دارد؟

حل: $\begin{matrix}P=5\\L=3\end{matrix} \longrightarrow$ تعداد مسیرهای به طول ۳ =

$$\binom{5-2}{3-1}(3-1)! = \binom{3}{2}2! = 3\times2 = 6$$



مثلاً در گراف کامل (روبه‌رو) مسیرهای به طول ۳ بین دو رأس a و b عبارتند از:

(acdb) – (aceb) – (adeb) – (adcb)

(aedb) – (aecb)

همان‌طور که توجه دارید، بین دو رأس a و b تبدیلات دوتایی از حروف d و e و c نوشته شده‌اند که تعداد آن‌ها برابر است با: $\binom{3}{2}2! = 6$

مثال۲. تعداد مسیرهای متفاوت بین دو رأس دلخواه a و b در گراف k_4 را مشخص کنید.

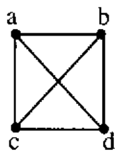
حل:

تعداد مسیرهای به طول یک از a به b: $\binom{2}{0}0! = 1$

تعداد مسیرهای به طول دو از a به b: $\binom{2}{1}1! = 2$

تعداد مسیرهای به طول سه از a به b: $\binom{2}{2}2! = 2$

پس تعداد کل مسیرهای به طول متفاوت از رأس a به رأس b برابر است با: $1+2+2=5$



مثلاً در گراف کامل (روبه‌رو)، مسیرهای متفاوت بین a و b عبارتند از:

adcb و acdb و adb و acb و ab

توجه کنید:

تعداد مسیرهای متفاوت بین دو رأس دلخواه و متمایز a و b در گراف کامل k_p برابر است با:

$$\binom{P-2}{0}0!+\binom{P-2}{1}1!+\cdots+\binom{P-2}{P-2}(P-2)! = \sum_{L=0}^{P-2}\binom{P-2}{L}L! = \sum_{L=0}^{P-2}(P-2)_L$$

که: $(n)_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

آزمون ۳۶) تعداد مسیرهای متفاوت از رأس a به رأس b در گراف k_6 کدام است؟

۱) ۵۰ ۲) ۵۵ ۳) ۶۰ ۴) ۶۵

حل: گزینهٔ (۴). روش اول:

$P=6 \longrightarrow$ b و a بین k_6 تعداد کل مسیرها در $= \sum_{L=0}^{4}\binom{4}{L}L!$

$$=\binom{4}{0}0!+\binom{4}{1}1!+\binom{4}{2}2!+\binom{4}{3}3!+\binom{4}{4}4!$$

$$=1+4+12+24+24=65$$

توجه کنید:

تعداد مسیرهای متفاوت بین دو رأس دلخواه و متمایز a و b در گراف k_p برابر است با: $[(P-۲)!e]$ ([ ] علامت جزء صحیح، $P>۲$ ، $e\simeq ۲/۷۲$)

روش دوم:

تعداد کل مسیرهای متفاوت در $k_۶$ بین a و b $\longrightarrow P=۶$

$=[۴!\times e]=[۲۴\times ۲/۷۲]=[۶۵/۲۸]=۶۵$

نکته: تعداد دورهای به طول k در گراف کامل k_p برابر است با: $\frac{۱}{۲}\binom{p}{k}(k-۱)!\quad (۳\le k\le p)$

آزمون ۳۷) گراف کامل مرتبهٔ ۵ چند دور به طول ۵ دارد؟

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۱۰

حل:

گزینهٔ (۲): $\frac{۱}{۲}\binom{۵}{۵}۴!=\frac{۱}{۲}\times ۱\times ۲۴=۱۲$

نکته: تعداد کل دورهای k_p برابر است با:

$$\frac{۱}{۲}\sum_{k=۳}^{p}\binom{P}{k}(k-۱)!$$

آزمون ۳۸) تعداد دورهای متمایز گراف $k_۴$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۷ ۴) ۹

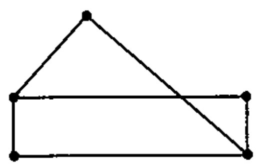
حل: گزینهٔ (۳):

$$\frac{۱}{۲}\sum_{k=۳}^{۴}\binom{۴}{k}(k-۱)!=\frac{۱}{۲}\binom{۴}{۳}(۲!)+\frac{۱}{۲}\binom{۴}{۴}۳!$$
$$=۴+۳=۷$$

آزمون ۳۹): دنبالهٔ درجه‌های رأس‌های گراف G به صورت ۲ و ۲ و ۲ و ۳ و ۳ : G است. اگر دو رأس با ماگزیمم درجه مجاور نباشند، تعداد دورهای به طول ۳ یال کدام است؟ (سراسری - ریاضی - ۷۹)

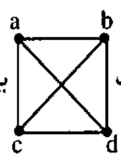
۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

حل: گزینهٔ (۱). گراف G به صورت مقابل است که مشاهده می‌شود و هیچ دوری به طول ۳ ندارد.



توجه کنید:

در هر گراف k_p ، تعداد $۲^{P-۲}$ مسیر بین هر دو رأس مشخص و متمایز وجود دارد.

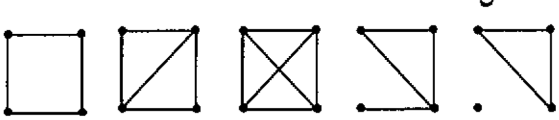
مثال ۱: در گراف  بین دو رأس a و b تعداد

$۴=۲^{۲}=۲^{۴-۲}$ مسیر متمایز وجود دارد که عبارتند از:

(ab) – (acb) – (adb) – (acdb)

مثال ۲: گراف‌های مرتبهٔ ۴ را که دارای دور هستند، رسم کنید.

حل:



توجه کنید:

در گراف k_p ، اگر p زوج باشد، تعداد دورهای زوج و تعداد دورهای فرد با طول‌های متفاوت برابر است با: $\frac{p-۲}{۲}$

اثبات: می‌دانیم طول‌های دورهای متفاوت در گراف k_p به صورت زیر است:

$۳,۴,۵,۶,\cdots,p$

چون p زوج است، لذا دورهای به طول زوج عبارتند از:

$\underbrace{۴,۶,۸,\cdots,p}_{\text{تا } n}$

و این یک تصاعد حسابی با قدرنسبت $d=۲$ است، پس:

$t_n = t_۱ + (n-۱)d \Rightarrow p = ۴ + (n-۱) \times ۲ \rightarrow$
$p = ۴ + ۲n - ۲ \rightarrow ۲n = p - ۲$

$\rightarrow \boxed{n = \frac{p-۲}{۲}}$

و همچنین، دورهای به طول فرد عبارتند از:

$\underbrace{۳,۵,۷,\cdots,p-۱}_{\text{تا } n}$

و این نیز یک تصاعد حسابی با قدرنسبت $d=۲$ است.

پس:

$t_n = t_۱ + (n-۱)d \rightarrow p - ۱ = ۳ + (n-۱) \times ۲ \rightarrow$
$p - ۱ = ۳ + ۲n - ۲$

$\rightarrow p - ۱ = ۲n + ۱ \rightarrow \boxed{n = \frac{p-۲}{۲}}$

توجه کنید:

در گراف کامل k_p اگر p فرد باشد، آن‌گاه:

الف) تعداد دورهای زوج با طول‌های متفاوت برابر است با: $\frac{p-۳}{۲}$

ب) تعداد دورهای فرد با طول‌های متفاوت برابر است با: $\frac{p-۱}{۲}$

اثبات: الف) $\underbrace{۴,۶,۸,\cdots,p-۱}_{\text{تا } n}$: تعداد دورهای به طول زوج (p فرد)

و این تصاعد حسابی با قدرنسبت $d=۲$ است. پس:

$$\begin{cases} d = ۲ \\ t_n = t_۱ + (n-۱)d \rightarrow p-۱ = ۴ + (n-۱) \times ۲ \rightarrow p-۱ = ۴ + ۲n - ۲ \end{cases}$$

$\rightarrow \boxed{n = \frac{p-۳}{۲}}$

ب) $\underbrace{۳,۵,۷,\cdots,p}_{\text{تا } n}$: تعداد دورهای به طول فرد p (فرد)

و این نیز یک تصاعد حسابی با قدرنسبت $d=۲$ است.

پس:

$$\begin{cases} d = ۲ \\ t_n = t_۱ + (n-۱)d \rightarrow p = ۳ + (n-۱) \times ۲ \rightarrow p = ۳ + ۲n - ۲ \end{cases}$$

$\rightarrow \boxed{n = \frac{p-۱}{۲}}$

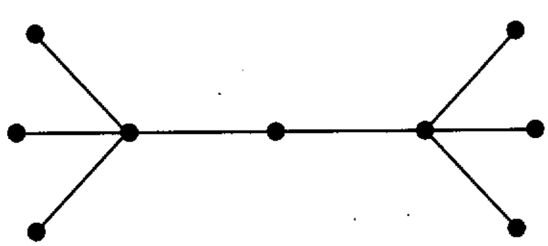
آزمون ۴۰) در گراف کامل مرتبهٔ ۱۹، تعداد دورهای زوج با طول‌های متفاوت، کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۶

حل: گزینه (۱):

$k_{۱۹}$ تعداد دورهای زوج در $= \frac{p-۳}{۲} = \frac{۱۹-۳}{۲} = \frac{۱۶}{۲} = ۸$

مسأله: نمودار گراف $G=(V,E)$ به صورت مقابل است،



الف) تمام دورهای گراف G را مشخص کنید.

ب) چه یالی از گراف G را حذف کنیم تا گراف حاصل ۲- منتظم از مرتبهٔ ۶ باشد.

(امتحان هماهنگ کشوری ـ ۷۷/۴/۳۱)

حل: الف) این گراف تنها دو دور دارد که عبارتند از:

$(v_۱v_۲v_۳v_۱)$ و $(v_۵v_۴v_۶v_۵)$

ب) با حذف یال $v_۳v_۴$ گراف ۲- منتظم مرتبهٔ ۶ می‌شود.

حلّ معادله‌های مثلثاتی

محمدهاشم رستمی

۱. حل معادله‌های سادهٔ مثلثاتی

الف) حل معادلهٔ $SinX = a, (-1 \le a \le +1)$

فرض می‌کنیم: $(-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2})$ ، $a = Sin\alpha$ باشد،

در این صورت داریم:

$$SinX = Sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} X = 2k\pi + \alpha \\ X = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}, \ (k \in z)$$

حالت خاص $SinX = 0 \Rightarrow X = k\pi, \ (k \in z)$

زیرا داریم:

$$SinX = 0 = Sin0 \Rightarrow \begin{cases} X = 2k\pi = \text{مضرب زوج } \pi \\ X = 2k\pi + \pi = (2k+1)\pi = \text{مضرب فرد } \pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow X = k\pi = \text{مضربی از } \pi$$

این جواب‌ها را جواب‌های عمومی یا جواب‌های کلی معادلهٔ بالا می‌نامند. هرگاه بخواهیم جواب‌های موجود در یک بازهٔ معین را به دست آوریم، باید به جای k عددهای مناسب قرار دهیم. این جواب‌ها را جواب‌های اختصاصی یا خصوصی معادله می‌نامند.

نکتهٔ اول

منظور از حل یک معادلهٔ مثلثاتی، پیدا کردن

جواب‌های کلی آن است. در صورتی که جواب‌های خصوصی معادله، خواسته شده باشد، باید بازهٔ مورد نظر داده شود:

مثال ۱. معادلهٔ $2Sinx - 1 = 0$ را حل کنید.

حل

داریم:

$$2Sinx - 1 = 0 \Rightarrow 2Sinx = 1 \Rightarrow Sinx = \frac{1}{2} = Sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

مثال ۲. جواب‌های کلی معادلهٔ $2Sinx + \sqrt{2} = 0$ و جواب‌های خصوصی موجود در بازهٔ $[0, 2\pi]$ را به دست آورید.

حل

داریم: $2Sinx + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow 2Sinx = -\sqrt{2} \Rightarrow$

$$Sinx = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -Sin\frac{\pi}{4} = Sin(-\frac{\pi}{4}) \Rightarrow$$

جواب‌های کلی معادله

$$\begin{cases} x = 2k\pi + (-\frac{\pi}{4}) \\ x = 2k\pi + \pi - (-\frac{\pi}{4}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

برای تعیین جواب‌های خصوصی بین ۰ و 2π به جای k، مقدارهای مناسب قرار می‌دهیم.

k	x
-1	$-\frac{9\pi}{4} < 0, \ -\frac{7\pi}{4} < 0$
0	$-\frac{\pi}{4} < 0, \ \frac{5\pi}{4}$ ج
1	$\frac{7\pi}{4}$ ج، $\frac{13\pi}{4} > 2\pi$
2	$\frac{15\pi}{4} > 2n, \ \frac{21\pi}{4} > 2\pi$

طوری که دیده می‌شود، جواب‌های خصوصی موجود در بازهٔ $[0, 2\pi]$، $\frac{5\pi}{4}$ و $\frac{7\pi}{4}$ هستند.

مثال ۳. معادلهٔ $2\text{Sin}(3x - \frac{\pi}{6}) - \sqrt{3} = 0$ را حل کنید.

حل

در این مسأله $X = 3x - \frac{\pi}{6}$ است، پس داریم:

$$2\text{Sin}(3x - \frac{\pi}{6}) - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \text{Sin}(3x - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \text{Sin}(3x - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \text{Sin}\frac{\pi}{3} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ 3x - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 3x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{5\pi}{18} \end{cases}$$ جواب‌های کلی معادله

مثال ۴. معادلهٔ $\text{Sin}(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}) - \text{Cos}(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}) = 0$ را حل کنید و جواب‌های اختصاصی موجود در بازهٔ $[-\pi \ \ +\pi]$ را بیابید.

حل

معادلهٔ داده شده را به صورت $\text{SinX} = \text{Sin}\alpha$ درمی‌آوریم و آن‌گاه از دستورهای مربوط به حل این معادله استفاده می‌کنیم. باید توجه داشت که در معادلهٔ $\text{SinX} = \text{Sin}\alpha$، x و α هردو می‌توانند عبارت‌هایی برحسب x (مجهول مسأله) باشند.

$$\text{Sin}(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}) - \text{Cos}(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}) = 0 \Rightarrow$$

$$\text{Sin}(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}) = \text{Cos}(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}) = \text{Sin}(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}) \Rightarrow$$

$$\text{Sin}(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}) = \text{Sin}(\frac{3\pi}{4} - \frac{x}{3}) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + (\frac{3\pi}{4} - \frac{x}{3}) \\ \frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \pi - (\frac{3\pi}{4} - \frac{x}{3}) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \\ \frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 2k\pi + \pi - \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{5x}{6} = 2k\pi + \frac{7\pi}{12} \\ \frac{x}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{12k\pi}{5} + \frac{7\pi}{10} \\ x = 12k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

k	x
-1	$-\frac{17\pi}{10} < -\pi, \ -\frac{23\pi}{2} < -\pi$
0	$\frac{7\pi}{10}$ ج، $\frac{\pi}{2}$ ج
1	$\frac{31\pi}{10} > \pi, \ \frac{25\pi}{2} > \pi$

مثال ۵. معادلهٔ $\text{Sin}(2x - \frac{\pi}{5}) = 0$ را حل کنید.

حل

با فرض $2x-\frac{\pi}{4}=X$ ، معادله به صورت $\sin X=0$ درمی‌آید که جواب آن $X=k\pi$ است. پس داریم:

$$\sin(2x-\frac{\pi}{4})=0 \Rightarrow 2x-\frac{\pi}{4}=k\pi \Rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{4} \Rightarrow$$
$$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$$

مثال ۶. معادلهٔ $\sin(2x+\frac{\pi}{3})=2m+3$ داده شده است.

الف) حدود m را چنان بیابید که این معادله دارای جواب باشد.

ب) مقدار m را چنان بیابید که یکی از جواب‌های این معادله $x=\frac{\pi}{12}$ باشد.

ج) به‌ازای $m=-\frac{5}{4}$ ، معادله را حل کنید.

حل

الف) شرط وجود جواب آن است که داشته باشیم:

$$-1\le 2m+3\le +1 \Rightarrow -4\le 2m\le -2 \Rightarrow -2\le m\le -1$$

ب) به شرط آن‌که $x=\frac{\pi}{12}$ یک ریشهٔ این معادله باشد، آن است که در این معادله صدق کند، یعنی داشته باشیم:

$$\sin(2\times\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3})=2m+3 \Rightarrow \sin\frac{\pi}{2}=2m+3 \Rightarrow$$
$$1=2m+3 \Rightarrow 2m=-2 \Rightarrow m=-1$$

ج) در ازای $m=-\frac{5}{4}$ داریم:

$$\sin(2x+\frac{\pi}{3})=2(-\frac{5}{4})+3 \Rightarrow \sin(2x+\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\sin(2x+\frac{\pi}{3})=\sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}2x+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{6}\\ 2x+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x=2k\pi-\frac{\pi}{6}\\ 2x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}x=k\pi-\frac{\pi}{12}\\ x=k\pi+\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

مثال ۷. معادلهٔ $(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin\pi(\frac{3x}{2}-2)-1=0$ را حل کنید و جواب‌های خصوصی موجود در بازهٔ $[0,3]$ را به‌دست آورید.

حل

داریم:

$$(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin\pi(\frac{3x}{2}-2)=1 \Rightarrow \sin\pi(\frac{3x}{2}-2)=$$
$$\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow \sin\pi(\frac{3x}{2}-2)=\sin\frac{5\pi}{12} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}\pi(\frac{3x}{2}-2)=2k\pi+\frac{5\pi}{12}\\ \pi(\frac{3x}{2}-2)=2k\pi+\pi-\frac{5\pi}{12}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{3x}{2}-2=2k+\frac{5}{12}\\ \frac{3x}{2}-2=2k+1-\frac{5}{12}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\frac{3x}{2}=2k+\frac{29}{12}\\ \frac{3x}{2}=2k+\frac{31}{12}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\frac{4k}{3}+\frac{29}{18}\\ x=\frac{4k}{3}+\frac{31}{18}\end{cases}$$ جواب‌های کلی معادله

k	x
-2	$\frac{-19}{18}<0,\ \frac{-17}{18}<0$
-1	$0<\frac{5}{18}<3\ ,\ 0<\frac{7}{18}<3$
0	$0<\frac{29}{18}<3\ ,\ 0<\frac{31}{18}<3$
1	$0<\frac{53}{18}<3\ ,\ \frac{55}{18}>3$
2	$\frac{77}{18}>3,\ \frac{79}{18}>3$

به‌طوری که دیده می‌شود، جواب‌های خصوصی موجود در بازهٔ $[0,3]$ عبارتند از:

$\frac{5}{18}$ ، $\frac{7}{18}$ ، $\frac{29}{18}$ ، $\frac{31}{18}$ و $\frac{53}{18}$

نکتهٔ دوم

معادلهٔ $\sin x=1$ دارای ریشهٔ مضاعف $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$

و معادلهٔ $\mathrm{Sin}x = -1$ دارای ریشهٔ مضاعف $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ (یا $x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$) است. زیرا داریم:

$$\mathrm{Sin}x = 1 = \mathrm{Sin}\frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}}$$

$$\mathrm{Sin}x = -1 = \mathrm{Sin}(-\frac{\pi}{2}) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + (-\frac{\pi}{2}) \\ x = 2k\pi + \pi - (-\frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

اما انتهای کمان‌های $-\frac{\pi}{2}$ و $+\frac{3\pi}{2}$ برهم منطبق هستند. بنابراین داریم:

$$\boxed{x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}}$$

مثال ۱. معادلهٔ $\mathrm{Sin}(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{6}) = 1$ را حل کنید.

حل

داریم:

$$\mathrm{Sin}(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{6}) = 1 \Rightarrow \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{3x}{2} = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{4k\pi}{3} + \frac{4\pi}{9}$$

مثال ۲. معادله $\mathrm{Sin}(2x + \frac{\pi}{12}) = -1$ را حل کنید.

حل

داریم:

$$\mathrm{Sin}(2x + \frac{\pi}{12}) = -1 \Rightarrow 2x + \frac{\pi}{12} = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow 2x = 2k\pi - \frac{7\pi}{12} \Rightarrow x = k\pi - \frac{7\pi}{24}$$

مثال ۳. معادلهٔ $\mathrm{Sin}(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}) = m - 1$ داده شده است.

الف) حدود m را چنان بیابید که این معادله دارای جواب باشد.

ب) مقدار m را چنان بیابید که $x = \frac{\pi}{2}$ ریشهٔ این معادله باشد.

ج) مقدار m را چنان بیابید که $x = -\frac{\pi}{2}$ ریشهٔ این معادله باشد.

د) به ازای $m = 2$ معادله را حل کنید.

حل

الف) شرط آن که معادلهٔ داده شده دارای جواب باشد، آن است که:

$$-1 \le m - 1 \le +1 \Rightarrow 0 \le m \le 2$$

ب) $x = \frac{\pi}{2}$ باید در معادله صدق کند؛ یعنی داشته باشیم:

$$\mathrm{Sin}(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}) = m - 1 \Rightarrow \mathrm{Sin}\frac{\pi}{3} = m - 1 \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = m - 1 \Rightarrow m = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ج) باید $x = -\frac{\pi}{2}$ در معادله صدق کند، یعنی داشته باشیم:

$$\mathrm{Sin}(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}) = m - 1 \Rightarrow \mathrm{Sin} = m - 1 \Rightarrow 0 = m - 1 \Rightarrow m = 1$$

د) در ازای $m = 2$ داریم:

$$\mathrm{Sin}(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}) = 2 - 1 = 1 = \mathrm{Sin}\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{x}{3} + \frac{\pi}{6} =$$

$$2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 6k\pi + \pi$$


مدل سازی مقدماتی ریاضی

تابع های توانی

و مدل های ریاضی

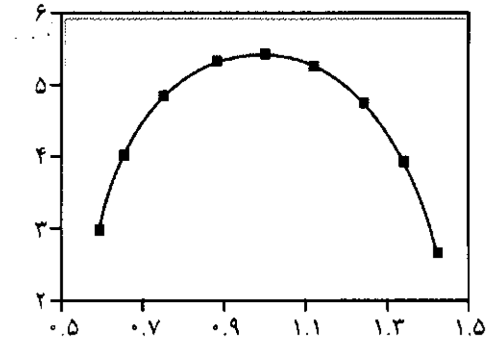
ترجمه و تألیف: میرشهرام صدر

برای دانش آموزان پایهٔ دوم متوسطه

وقتی توپی را در امتداد قائم به هوا پرتاب می کنید، چه اتفاقی می افتد؟ آیا توپ با سرعت ثابتی به طرف بالا می رود و بعد رو به پائین حرکت می کند؟ آیا توپ برای رسیدن به بالاترین نقطه (نقطه اوج)، زمان بیش تری را صرف می کند یا در برگشت و رسیدن به نقطهٔ اولیهٔ پرتاب؟

توپی را روی یک دستگاه حرکت سنج[1] به هوا پرتاب کرده ایم. شکل ۱، نمودار داده های به دست آمده در این آزمایش را نشان می دهد. حرکت سنج به دستگاهی وصل است که ارتفاع توپ (ارتفاع توپ تابعی از زمان است) را ثبت می کند. این نمودار چه اطلاعاتی دربارهٔ حرکت توپ به ما می دهد؟ ابتدا ملاحظه می کنیم که توپ از ارتفاع تقریباً ۳ فوتی رو به بالا پرتاب می شود و در ارتفاع کمی پائین تر از نقطهٔ پرتاب (قبل از برخورد با حرکت سنج) گرفته می شود. ثانیاً آهنگ سرعت توپ ثابت نیست، زیرا فاصلهٔ طی شده از ۰/۶ تا ۰/۷ ثانیه، بیش تر از فاصلهٔ طی شده از ۰/۹ تا ۱ ثانیه است و بالاخره ملاحظه می کنید که مدت زمانی که برای بالا رفتن توپ سپری شده است با مدت زمان پائین آمدن توپ یکسان است.

اگر بخواهیم مدل ریاضی رابطهٔ بین زمان و ارتفاع توپ را بنویسیم، به طور قطع مدل خطی (تابع درجهٔ اول) را انتخاب نمی کنیم، زیرا توپ در فاصلهٔ زمان های برابر، مسافت های مختلفی را طی کرده است. با استفاده از شکل ۱ ملاحظه می کنیم



شکل ۱ . حرکت سنج ارتفاع توپ را در هر ۰/۱ ثانیه اندازه‌گیری می کند.

که منحنی به صورت یک سهمی[۲] است که نمودارش شبیه به وارونه نمودار تابع درجهٔ دوم[۳] $f(x) = x^{۲}$ است. درواقع وضعیت توپ در حالت بالا رفتن یا پائین آمدن، با یک مدل ریاضی تابع درجهٔ دوم مشخص می‌شود.

در این مقاله، ابتدا توابع درجهٔ دوم و تابع‌های توانی را بررسی می‌کنیم. سپس رابطه‌هایی را مطالعه می‌کنیم که برای هرکدام از آن‌ها، مدل‌های مناسبی را ارائه خواهیم کرد.

ابتدا به طور خلاصه بعضی از توابع غیرخطی ساده‌ای را بررسی می‌کنیم که اطلاعاتی از دنیای پیرامون به ما می‌دهند. ضمناً توابع را به صورت مصور و با نمودار مطالعه می‌کنیم. درحقیقت هدف این است که شما دانش‌آموزان به تفاوت‌های اساسی که بین نمونه‌های مختلف توابع وجود دارند، پی ببرید.

توابع درجهٔ دوم و سهمی‌ها

فرض کنید که یک قطعه سنگ از بالای برجی به پائین افتاده باشد، جدول۱، فاصلهٔ (d برحسب فوت) قطعه سنگ را پس از پائین آمدن و بعد از t ثانیه نشان می‌دهد.

d (فوت)	t (ثانیه)
۰	۰
۱۶	۱
۶۴	۲
۱۴۴	۳
۲۵۶	۴
۴۰۰	۵

جدول ۱

توجه کنید که در ستون سمت چپ جدول، تفاوت بین دو زمان متوالی برابر با ۱ ثانیه است. اما در ستون سمت راست، تفاوت بین هر دو عدد متوالی یکسان نیست. از این‌رو نتیجه می‌گیریم که d تابعی درجهٔ اول و خطی برحسب t نیست. شما دانش‌آموزان می‌توانید تحقیق کنید که d تابعی از t است و از رابطهٔ $d = ۱۶t^{۲}$ به دست می‌آید. توجه داشته باشید که در این تابع متغیرِ زمان، توان‌دار است.

تابع درجهٔ دوم

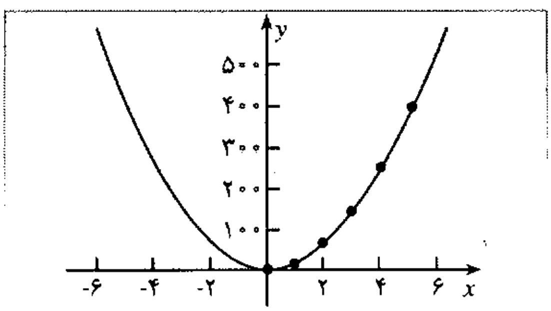
تعریف: تابع درجهٔ دوم به صورت کلی:

$$y = ax^{۲} + bx + c \quad (۱)$$

است که در آن: $a \neq ۰$. بنابراین این تابع شامل یک جملهٔ درجهٔ دوم، یک جملهٔ درجهٔ اول و یک جملهٔ ثابت است.

نمودار تابع درجهٔ‌دوم، سهمی است. در مثال زیر یک سهمی را در حالت خاص داریم.

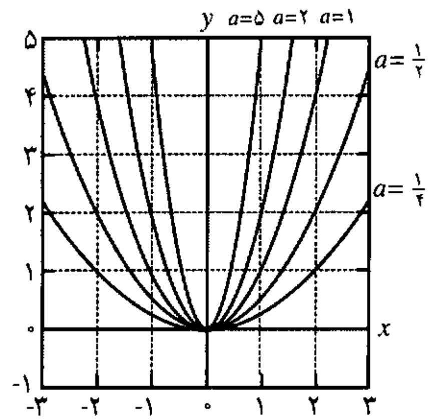
مثال۱ . شکل ۲، نمودار تابع درجهٔ دوم با ضابطهٔ $y = ۱۶x^{۲}$ (که در آن، با توجه به رابطهٔ ۱ داریم: $a = ۱۶$ و $b = c = ۰$) را نشان می‌دهد. با فرض این که t و d در صفحهٔ مختصات همان x و y باشند، نیمهٔ راست این سهمی متناظر با نمودار تابع مسافتِ پائین آمدن قطعه سنگ (جدول ۱) است. نقاطی به مختصات (x , y) که روی نمودار این تابع مشخص شده‌اند، متناظر با زوج مرتب (t , d) طبق جدول ۱ هستند.



شکل ۲ . نمودار. یک سهمی به معادله $y=۱۶x^{۲}$ است که نقاط (۰،۰) و (۱۶ ، ۱) و (۶۴ ، ۲) و (۱۴۴ ، ۳) و (۲۵۶ ، ۴) و (۴۰۰ ، ۵) روی آن مشخص شده است.

نمودار تابع با ضابطهٔ $y = -۱۶x^{۲}$، تقریباً شبیه نمودار شکل۲ است؛ با این تفاوت که دهانهٔ سهمی رو به بالا باز نمی‌شود، بلکه دهانهٔ آن رو به پائین باز می‌شود. به طور کلی، نمودار تابع به معادلهٔ: $y = ax^{۲}$ (۲) که در آن $a \neq ۰$، یک سهمی است که رأس[۴] آن (نقطه‌ای که جهت سهمی در آن

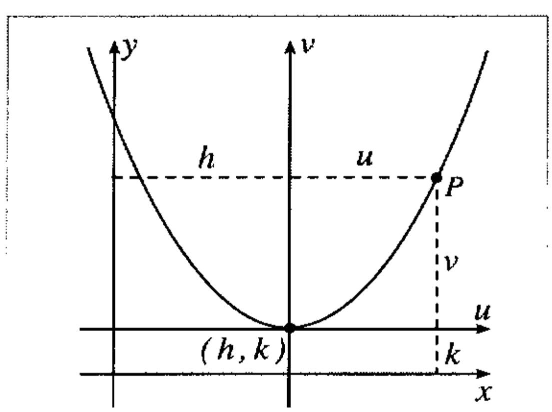
عوض می‌شود) مبدأ مختصات، یعنی نقطهٔ (۰،۰) است. در معادلهٔ ۲، اگر $a > 0$، آن‌گاه دهانهٔ سهمی رو به بالا و اگر $a < 0$، آن‌گاه دهانهٔ سهمی رو به پائین است. در معادلهٔ ۲، اندازهٔ ضریب a، عرض سهمی را مشخص می‌کند. به بیان دقیق‌تر، برای $a > 0$ هرچه مقدار a افزایش پیدا کند، شیب منحنی تندتر و عرض سهمی کم‌تر می‌شود. شکل ۳ را ملاحظه کنید.



شکل ۳. سهمی‌ها با عرض‌های متفاوت

در شکل ۴، یک سهمی را ملاحظه می‌کنید که رأس آن به جای مبدأ مختصات، نقطهٔ (h,k) است. معادلهٔ این سهمی در دستگاه مختصات uv به صورت $v = au^2$، و مانند معادلهٔ ۲ است؛ با این تفاوت که به جای x و y، متغیرهای u و v آمده است.

با توجه به شکل، واضح است که در دستگاه‌های



شکل ۴. سهمی انتقال داده شده

مختصات xy و uv داریم: $v = y - k$ و $u = x - h$

با جایگذاری این رابطه‌ها در معادلهٔ $v = au^2$، معادلهٔ انتقال‌یافتهٔ سهمی با رأس (h,k) را در دستگاه مختصات xy به دست می‌آوریم:

$$y - k = a(x - h)^2 \qquad (۳)$$

اگر معادلهٔ ۳ را ساده کنیم و آن را بر حسب x مرتب کنیم، ملاحظه خواهیم کرد که معادله، شامل یک جملهٔ درجهٔ دوم، یک جملهٔ درجهٔ اول و یک مقدار ثابت است.

در حالت کلی، نمودار تابع با ضابطه $y = ax^2 + bx + c$ که در آن $a \neq 0$، یک سهمی انتقال یافته است. در صورتی که این معادله را برحسب x مربع کامل کنیم، آن‌گاه معادله‌ای مانند معادلهٔ ۳ به دست می‌آوریم.

مثال۲. نمودار تابع با ضابطهٔ $y = 2x^2 - 4x - 1$ را رسم کنید.

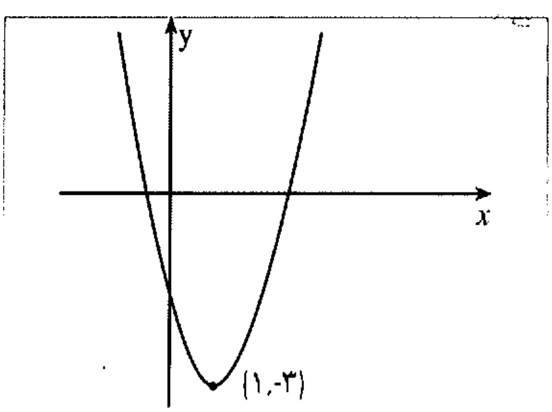
حل: ابتدا این معادله را برحسب x مربع کامل می‌کنیم:

$$y = 2(x^2 - 2x) - 1$$
$$= 2(x^2 - 2x + 1) - 2 - 1 = 2(x - 1)^2 - 3$$

در نتیجه داریم:

$$y + 3 = 2(x - 1)^2$$

با مقایسهٔ معادلهٔ اخیر و معادلهٔ ۳ ملاحظه می‌کنیم که $a = 2$، $h = 1$ و $k = -3$. در نتیجه شکل ۵ نمودار سهمی را نشان می‌دهد که دهانهٔ آن رو به بالا و رأس آن نقطهٔ $(1, -3)$ است.



شکل ۵

تابع‌های توانی

تابع خطی (درجه اول) با ضابطهٔ $f(x)=x$ و تابع درجهٔ دوم با ضابطهٔ $g(x)=x^2$ هر دو مثال‌هایی از تابع‌های توانی هستند.

تابع توانی[5]

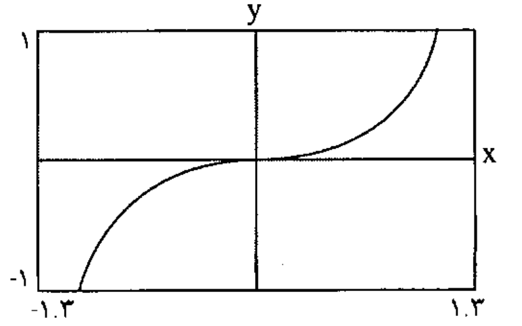
تعریف: ضابطهٔ تابع توانی در حالت کلی به‌صورت

$f(x)=x^k$ (۴)

که در آن، k عدد ثابتی است و می‌تواند مثبت یا منفی و صحیح یا گویا (حتی گنگ مانند $\sqrt{2}$ یا π) باشد.

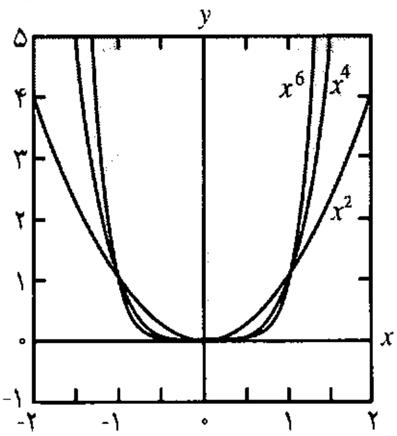
مثال ۳. در تابع توانی ۴، اگر $k=1$، آن‌گاه نمودار آن خطی با معادلهٔ $y=x$ (نیمساز ربع اول و سوم) است. درحالتی که $k=2$، نمودار آن سهمی با ضابطهٔ $y=x^2$ است. اگر $k=0$، آن‌گاه (چون $x^0=1$) تابع ثابت $f(x)=1$ به دست می‌آید و نمودار آن خط افقی با معادلهٔ $y=1$ است. اگر $k=3$ در این صورت، تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^3$ را داریم که نمودار آن در شکل ۶ نشان داده شده است.

مطلب بسیار مهمی که باید به آن دقت کرد این است که نمودارهای سهمی با معادلهٔ $y=x^2$ و تابع درجهٔ سوم[6] با معادلهٔ $y=x^3$، معیارهای خوبی برای رسم تابع توانی $f(x)=x^k$ با هر توان صحیح و مثبت k هستند. نمودارهای تابع‌های توانی با درجه‌های زوج[7]، یعنی x^2، x^4 و x^6 و به همین ترتیب از این به بعد، به صورت سهمی (کاسه با دهانهٔ رو به بالا) هستند که نمودارهای آن‌ها را در شکل ۷ ملاحظه می‌کنید (این نمودارها با نقطه‌یابی رسم شده‌اند).



شکل ۶. نمودار تابع با ضابطه $y=x^3$ که با نقطه‌یابی طبق جدول روبرو، رسم شده است:

x	-۱	۰	۱
y	-۱	۰	۱

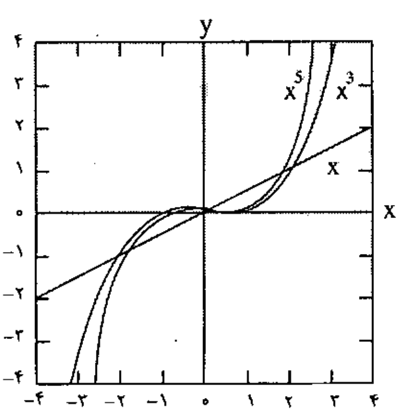


شکل ۷. نمودارهای تابع‌های توانی با درجه‌های زوج

با دقت در شکل ۷ ملاحظه می‌کنیم که هرچه توان‌های زوج بزرگ‌تر می‌شوند، نمودارهای تابع‌ها به سمت مبدأ نزدیک‌تر می‌شوند (دهانهٔ سهمی‌ها بسته‌تر می‌شوند و به طرف محور yها نزدیک‌تر می‌شوند).

نمودارهای تابع‌های توانی با درجه‌های فرد[8]، یعنی x، x^3 و x^5 و به همین ترتیب از این به بعد، شبیه نمودار تابع درجهٔ سوم هستند؛ نمودار همگی آن‌ها از جنوب غربی (ناحیهٔ سوم) تا شمال شرقی (ناحیه اول) هستند که نمودارهای آن‌ها را در شکل ۸ ملاحظه می‌کنید (این نمودارها با نقطه‌یابی رسم شده‌اند).

با دقت در شکل ۸ ملاحظه می‌کنید که هرچه توان‌های



شکل ۸. نمودارهای تابع‌های توانی با درجه‌های فرد

فرد بزرگ‌تر می‌شوند، نمودار تابع‌ها به سمت مبدأ نزدیک‌تر می‌شوند (شاخه‌های منحنی به طرف محور عرض‌ها نزدیک‌تر می‌شوند).

اگر در تابع توانی $f(x)=x^k$، k عدد صحیح نباشد، آن‌گاه حالت جدیدی از این تابع به دست می‌آید. هرگاه $k=\frac{p}{q}$ که p و $q\neq 0$ عددهای صحیحی هستند، در این صورت توان کسری x^k به صورت زیر تعریف می‌شود:

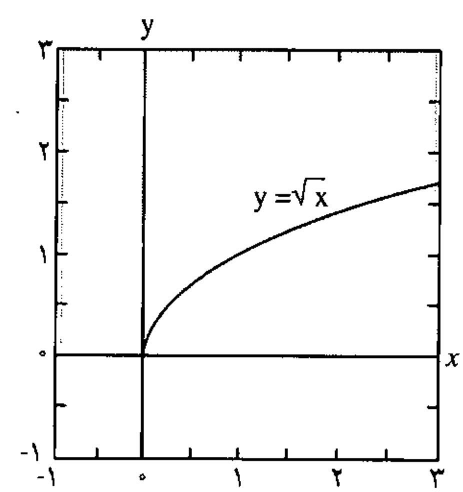
$$x^k = x^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p = \sqrt[q]{x^p} \qquad (۵)$$

یکی از راه‌هایی که به کمک آن بتوانیم نقش p و q را به خاطر بسپاریم (یعنی کدام توان و کدام ریشه هستند)، این است که بگوییم «صورت کسر یعنی p توان است» بنابراین q باید ریشه باشد.

مثال ۴. هرگاه در رابطهٔ ۵، $p=1$ و $q=2$ قرار دهیم، تابع ریشهٔ دوم[9] به دست می‌آید:

$$f(x)=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$$

نمودار تابع ریشهٔ دوم در شکل ۹ نشان داده شده است. چون عددهای حقیقی منفی، ریشه دوم ندارند، بنابراین تابع ریشهٔ دوم فقط برای $x\geq 0$ تعریف می‌شود. به همین دلیل است که شکل ۹ نمودار تابع را فقط در نیمهٔ راست صفحهٔ مختصات نشان می‌دهد.

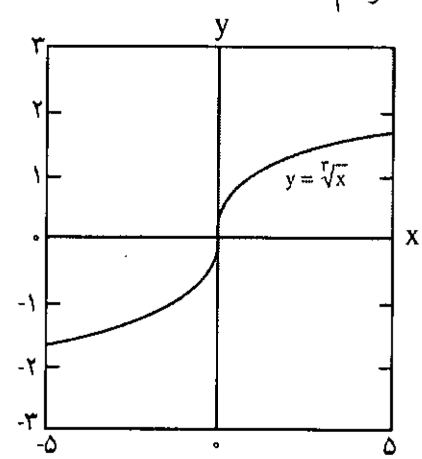


شکل ۹. نمودار تابع با ضابطه $y=x^{\frac{1}{2}}$

مثال ۵. هرگاه در رابطهٔ ۵، $p=1$ و $q=3$ قرار دهیم، تابع ریشهٔ سوم[10] به دست می‌آید:

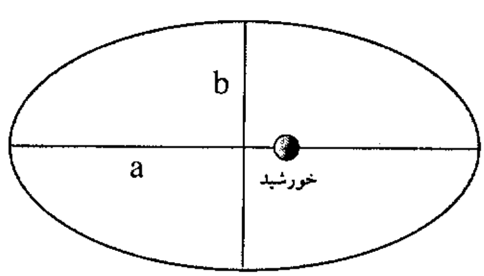
$$f(x)=x^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x}$$

نمودار تابع ریشهٔ سوم در شکل ۱۰ نشان داده شده است. عددهای حقیقی مثبت، ریشهٔ سوم مثبت دارند؛ مانند: $\sqrt[3]{8}=2$. همچنین عددهای حقیقی منفی، ریشهٔ سوم منفی دارند؛ مانند: $\sqrt[3]{-1}=-1$، زیرا $(-1)^3=-1$. به همین دلیل است که نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt[3]{x}$ در کل صفحهٔ مختصات (نیمهٔ راست و نیمهٔ چپ صفحه مختصات) رسم شده است.



شکل ۱۰. نمودار تابع با ضابطه $y=x^{\frac{1}{3}}$

مثال ۶. مدار حرکت یک سیاره به دور خورشید مانند یک بیضی[11] است که در شکل ۱۱ نشان داده شده است (همان‌طور که در شکل نشان داده شده است، خورشید خارج از مرکز این بیضی قرار دارد).



شکل ۱۱. مدار حرکت یک سیاره به دور خورشید تقریباً شبیه به بیضی است.

یک بیضی می‌تواند به صورت «دایرهٔ فشرده» با شعاع بزرگ [۱۲] a و شعاع کوچک [۱۳] b<a در نظر گرفته شود. در دایره، همهٔ شعاع‌ها با هم برابرند و این تفاوتی است که دایره با بیضی دارد. در سال ۱۶۱۹، ریاضیدان و ستاره‌شناس آلمانی، **جان کپلر**[۱۴] شعاع‌های بزرگ مدارهای شش سیاره را که تا آن زمان شناخته شده بودند، محاسبه کرد و همچنین دورهٔ تناوب (T) از گردش هر کدام از آن سیاره‌ها را به دور خورشید، در قالب یک جدول معرفی کرد. جدول ۲ شعاع‌های بزرگ اندازه‌گیری شده را با واحدهای ستاره‌شناسی (AUs) نشان می‌دهد (یک AU عبارت است از شعاع بزرگ مدار حرکت زمین به دور خورشید). دورهٔ تناوب هریک از سیاره‌ها در مقایسه با دورهٔ تناوب زمین آورده شده است.

با توجه به جدول ۲ ملاحظه می‌کنیم که دورهٔ تناوب گردش عطارد به دور خورشید کم‌تر از ۳ ماه است؛ زیرا دورهٔ تناوب گردش زمین به دور خورشید یک سال است، بنابراین در هرماه، زمین $\frac{۱}{۱۲}=۰/۰۸\overline{۳}$ سال روی مدار خود حرکت می‌کند. از طرف دیگر، دورهٔ تناوب عطارد نسبت به زمین ۰/۲۴۱ سال است. بنابراین عطارد به مدت $۳>۲/۹=\frac{۰/۲۴۱}{۰/۰۸\overline{۳}}$ ماه روی مدار خود به دور خورشید نسبت به زمین حرکت می‌کند تا یک دور کامل، مدار خود را طی کند. همچنین، دورهٔ تناوب گردش مشتری به دور خورشید نزدیک ۱۲ سال است؛ زیرا:

$$۱۲>۱۱/۸۶۲.$$

با در نظر گرفتن این که شعاع بزرگ، میانگین فاصلهٔ سیاره از خورشید است و با دقت در ستون دوم جدول ۲ ملاحظه می‌کنیم که زهره نسبت به زمین کم‌تر از $\frac{۳}{۴}$ (زیرا: $۰/۷۲۳<\frac{۳}{۴}$) دورتر از خورشید قرار دارد، در حالی که مریخ نسبت به زمین کمی بیش از یک‌ونیم برابر (زیرا: $۱/۵<۱/۵۲۴$) دورتر از خورشید است. قانون سوم **کپلر** دربارهٔ حرکت سیاره‌ای می‌گوید که (با واحدهایی که در جدول به کار رفته است): **مجذور دورهٔ تناوب حرکت یک سیاره به دور خورشید (T^2) با مکعب شعاع بزرگ (a^3) مدار حرکت سیاره به دور خورشید برابر است.** یعنی:

$$T^2=a^3$$

بنابراین (با استفاده از ریشهٔ سوم) ملاحظه می‌کنیم که شعاع بزرگ تابعی از دورهٔ تناوب است؛ به طوری که:

$$a=\sqrt[3]{a^3}=\sqrt[3]{T^2}=(T^2)^{\frac{1}{3}}=T^{\frac{2}{3}}$$

با استفاده از یک ماشین‌حساب، درستی رابطهٔ $a=T^{\frac{2}{3}}$ را برای هر کدام از سیاره‌های جدول ۲ تحقیق کنید.

اسحاق **نیوتن**[۱۵] نشان داد که رابطهٔ $a=T^{\frac{2}{3}}$ برای همهٔ سیاره‌ها و ستاره‌های دنباله‌دار برقرار است. فرض کنید ستاره‌ای کشف شده است که نسبت به زمین ۴ برابر دورتر از خورشید است. چه‌قدر طول می‌کشد تا این ستاره گردش خود را به دور خورشید کامل کند؟

سیاره	شعاع بزرگ a (بر حسب AU)	دورهٔ تناوب T (بر حسب سال)
عطارد	۰/۳۸۷	۰/۲۴۱
زهره	۰/۷۲۳	۰/۶۱۵
زمین	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰
مریخ	۱/۵۲۴	۱/۸۸۱
مشتری	۵/۲۰۱	۱۱/۸۶۲
زحل	۹/۵۳۸	۲۹/۴۵۶

جدول ۲

توجه: با دقت در جدول ۲، اگر شما در سیارهٔ عطارد یا زحل زندگی می‌کردید،

حدس می‌زنید نسبت به زمین چند ساله بودید!؟

تمرین‌ها

یک سهمی را به معادلهٔ $y = ax^2$، در نظر بگیرید. مقدار a را چنان به‌دست آورید که سهمی از نقطهٔ P با مختصات داده شدهٔ زیر عبور کند:

۱. P(۳ و ۱۸)

۲. P(-۲ و ۲۴)

۳. P(۴ و -۶۴)

۴. P(-۵ و -۲۵۰)

تابع درجهٔ دوم با ضابطهٔ $f(x) = x^2 + bx + c$ را در نظر بگیرید، مقدارهای b و c را چنان بیابید که نمودار این تابع از نقطه‌های P و Q با مختصات داده شدهٔ زیر عبور کند.

۵. P(-۱ و ۲) و Q(۱ و ۶)

۶. P(-۳ و -۱) و Q(۳ و ۲۳)

۷. P(-۴ و ۳۵) و Q(۴ و ۱۱)

۸. P(-۵ و ۱۵۰) و Q(۵ و ۵۰)

راهنمایی: اگر مختصات نقاط P و Q را در معادله تابع قرار دهیم، در این صورت دو معادله با دو مجهول به دست می آید که با حل یک دستگاه دو معادله و دو مجهولی، مقدارهای b و c به دست می آیند.

در تمرین‌های ۹ تا ۱۴، تابع‌های درجهٔ دوم با نمودارهایشان داده شده است. مشخص کنید، هر نمودار مربوط به کدام تابع است.

راهنمایی: از مقدار f(۰) و این‌که دهانهٔ سهمی رو به بالا یا رو به پائین باز می شود، استفاده کنید.

۹. $f(x) = x^2 + 1$

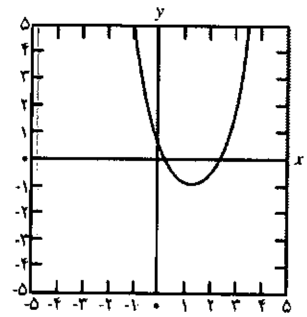
۱۰. $f(x) = 4 - x^2$

۱۱. $f(x) = -x^2 - 2x$

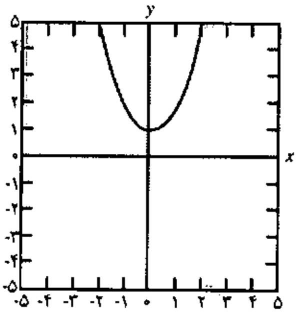
۱۲. $f(x) = x^2 - 2x$

۱۳. $f(x) = x^2 - 2x - 3$

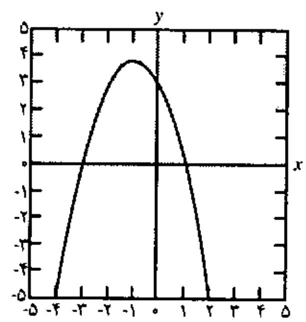
۱۴. $f(x) = 3 - 2x - x^2$



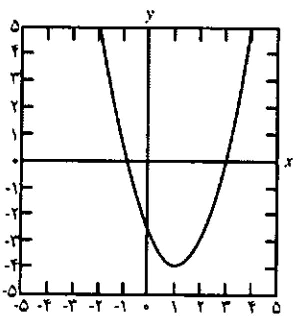
شکل ۱۱



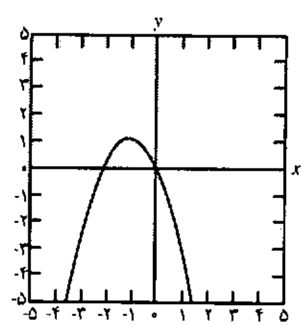
شکل ۱۴



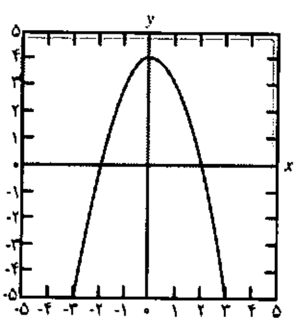
شکل ۱۲



شکل ۱۵



شکل ۱۳



شکل ۱۶

زیرنویس

1. motion detector
2. parabolic
3. quadratic function
4. vertex
5. power function
6. cubic function
7. even- degree
8. odd-degree
9. square root function
10. cube root function
11. ellipse
12. major radius
13. minor radius
14. johann kepler
15. Isaac Newton

منبع

Elementary Mathematics modeling/ Mary Ellen Davis (university of Georgia)
C. Henry Edwards (university of Georgia)
2001 by prentice- Hall (U.S.A)

کتاب‌های ریاضی «مجموعه پرسش‌های چهارگزینه‌ای از مدرسه تا دانشگاه» توسط مؤلفان و دبیران ارزشمندی تدوین و تألیف شده‌اند، عبارتند از:

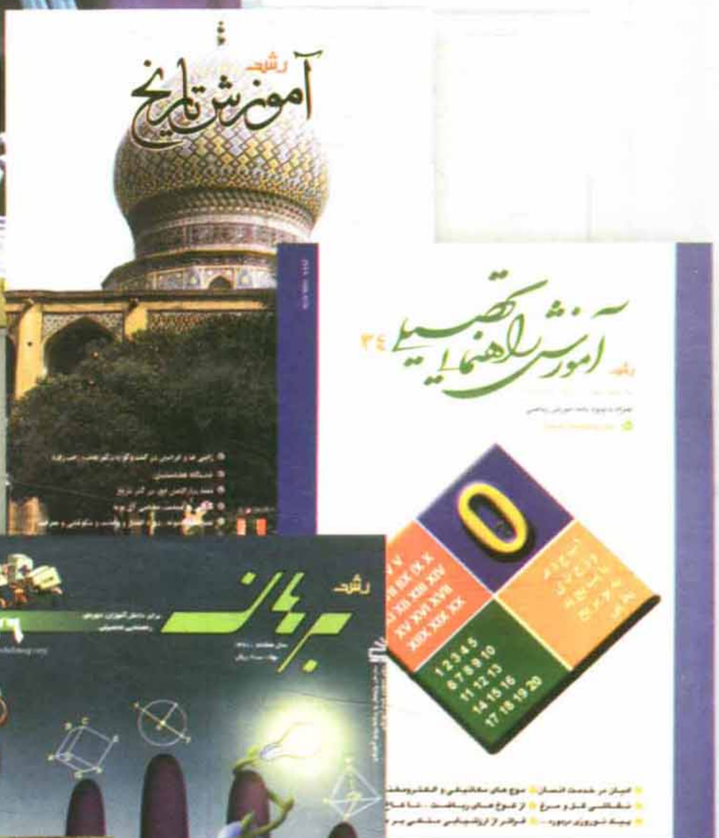
۱. ریاضی سال دوم دبیرستان
۲. جبر و احتمال سال سوم ریاضی
۳. حسابان ۱ و ۲
۴. ریاضی سال سوم رشتهٔ تجربی
۵. ریاضی عمومی ۱ و ۲ پیش‌دانشگاهی
۶. حساب دیفرانسیل و انتگرال
۷. ریاضیات گسسته
۸. جبر خطی و هندسهٔ تحلیلی
۹. هندسهٔ ۱
۱۰. هندسهٔ ۲

آیا

با دیگر نشریات

دفتر انتشارات کمک آموزشی

آشنایی دارید؟



دفتر
انتشارات کمک آموزشی
این مجلات را نیز
منتشر می کند:

رشد کودک
(ویژه‌ی پیش دبستان و دانش آموزان کلاس اول دبستان)

رشد نوآموز
(برای دانش آموزان دوم و سوم دبستان)

رشد دانش آموز
(برای دانش آموزان چهارم و پنجم دبستان)

رشد نوجوان
(برای دانش آموزان دوره‌ی راهنمایی)

رشد جوان
(برای دانش آموزان دوره‌ی متوسطه)

و مجلات:

معلم، تکنولوژی آموزشی
آموزش ابتدایی، آموزش قرآن
آموزش فیزیک، آموزش شیمی
آموزش زبان، آموزش تربیت بدنی
آموزش راهنمایی تحصیلی
آموزش ریاضی، آموزش زمین‌شناسی
آموزش زیست شناسی
آموزش جغرافیا، آموزش علوم اجتماعی
آموزش زبان وادب فارسی،
آموزش معارف اسلامی، آموزش تاریخ،
آموزش هنر، برهان راهنمایی
و برهان دبیرستان