وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

ISSN:1735-4951

رشد برهان ۵۱

دوره ی متوسطه

مجله ریاضی

فصلنامه ی آموزشی،
تحلیلی،اطلاع رسانی
دوره‌ی شانزدهم • شماره‌ی ۱
پاییز ۱۳۸۵ • بها ۳۰۰۰ ریال

www.roshdmag.org

ابوجعفر محمدبن حسین صاغانی خراسانی خازن

ابوجعفر محمدبن حسین صاغانی خراسانی خازن، ریاضیدان و منجم ایرانی، یکی از بزرگ‌ترین رجال ریاضی و نجوم در نیمه‌ی اول قرن چهارم است. در اواخر عمر و یا در تمام عمر، در شهر ری می‌زیست و نوشته‌اند که در دستگاه رکن‌الدوله‌ی دیلمی صاحب مقام و عزت بوده است. عمر طولانی یافت و بین سال‌های ۳۵۰ و ۳۶۰ درگذشت.

ابوجعفر خازن علاوه بر مقام بلندی که در نجوم و ریاضیات داشت، در ساختن آلات نجومی و به کار بردن آن‌ها مهارت کامل داشت و در زمان خود در این فن مشهور بود، به طوری که ریاضیدانان بزرگ مانند **ابونصر عراق**، **ابوریحان بیرونی**، **ابوالجود**، **عمر خیام** و **نصیرالدین طوسی**، بارها در نوشته‌های خود از وی و آثارش گفت‌وگو کرده‌اند. **ابوزید احمدبن سهل بلخی**، کتاب «شرح صدر کتاب السماء و العالم ارسطو» را به نام وی تألیف کرده است.

بیرونی در کتاب «تحدید نهایات الاماکن»، از رصدی که **ابوالفضل هروی** با حضور ابوجعفر خازن در سال ۳۴۸ در شهر ری انجام داده گفت‌وگو کرده است. هم او در کتاب «استخراج الاوتار»، استدلالی از ابوجعفر خازن برای یک قضیه‌ی هندسی ذکر کرده است. همچنین، در قانون مسعودی از کتاب «فی الابعاد والاجرام» و در آثارالباقیه از کتاب «المدخل الکبیر الی علم النجوم» که هر دو از تألیفات ابوجعفر خازن هستند و به ظاهر از بین رفته‌اند، مطالبی نقل کرده است. همچنین بیرونی، در کتاب «مقالید علم الهیئة» از تفسیری که ابوجعفر خازن بر کتاب مجسطی نوشته، گفت‌وگو کرده است.

عمر خیام در کتاب جبر و مقابله‌ی خود نوشته است، معادله‌ی درجه‌ی سوم $x^3 + a = cx^2$ را که ماهانی نتوانسته بود حل کند و آن را ممتنع انگاشته بود، ابوجعفر خازن به وسیله‌ی قطوع مخروطی حل کرد.

معادله‌ی بالا مربوط است به مسأله‌ی ارشمیدس؛ یعنی: تقسیم کره به دو جزء به وسیله‌ی یک صفحه به قسمی که حجم‌های آن‌ها به نسبت معینی باشد.

آثار ریاضی موجود وی

۱. تفسیر صدرالمقالة العاشرة من کتاب اقلیدس؛

۲. رسالة فی البرهان علی انه لایمکن ان یکون ضلعا عددین مربعین یکون مجموعهما مربعا فردین بل یکونان زوجین او احدهما زوج والاخر فرد؛ موضوع این رساله اثبات حکم زیر است:

«مجموع مربعات دو عدد که هر دو فرد باشند، نمی‌تواند مربع کامل باشد، بلکه باید هر دو عدد زوج و یا یکی از آن‌ها زوج و دیگری فرد باشد تا مجموع مربعات آن‌ها مربع کامل شود».

۳. رسالة فی انشاء المثلثات القائمة الزوایا المنطقة الاضلاع؛ موضوع این رساله عبارت است از یافتن عددهای صحیحی که ریشه‌ی یکی از معادلات $x^2 + y^2 = z^2$ یا $x^2 + (y^2)^2 = z^2$ یا $x^2 + y^2 = (z^2)^2$ باشند و نیز یافتن عدد منطق (گویا) x به وجهی که $x^2 + k$ مربع یک عدد منطق باشد.

۴. فی استخراج خطین بین خطین متوالیة متناسبة من طریق الهندسة الثابته؛ موضوع این رساله ترسیم دو واسطه‌ی هندسی است بین دو پاره‌خط مفروض.

۵. اصلاح کتاب المخروطات؛ فقط قسمتی از این کتاب، درباره‌ی مسأله‌ی تثلیث زاویه، موجود است.

آثار ریاضی مفقود وی

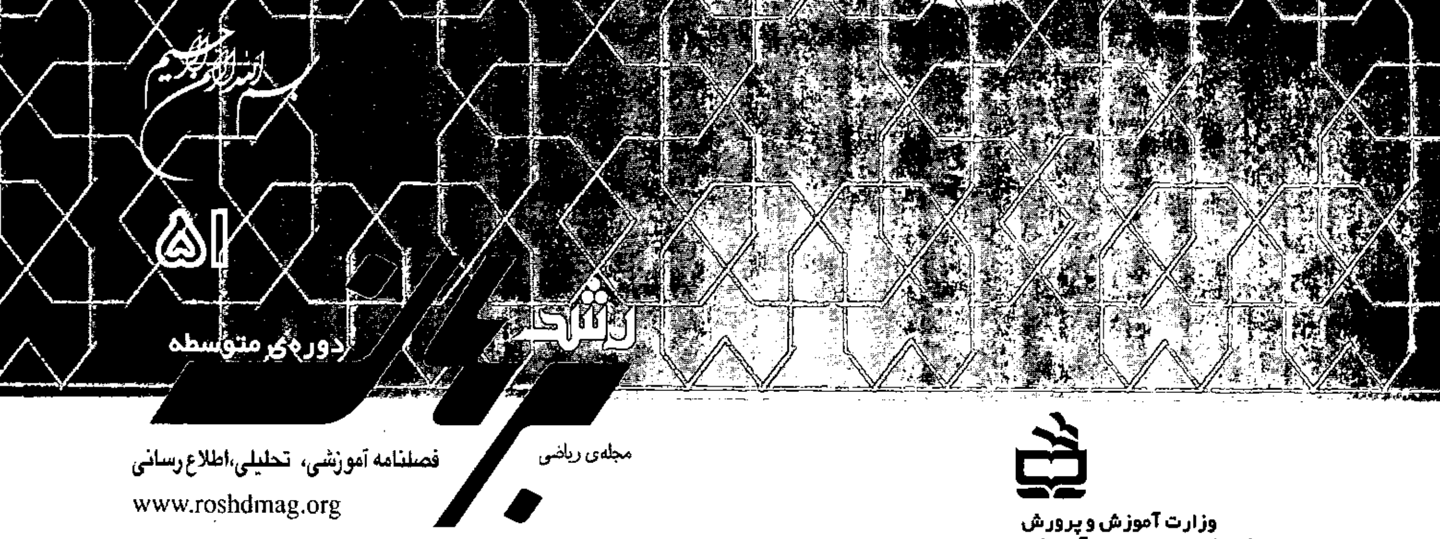
۱. کتاب المسائل العددیة؛

۲. کتاب فی میل الاجزاء؛

۳. تفسیر المجسطی؛

۴. زیج الصفایح.

برگرفته از کتاب زندگی‌نامه ریاضی‌دانان دوره‌ی اسلامی / ابوالقاسم قربانی



مجله‌ی ریاضی

فصلنامه آموزشی، تحلیلی،اطلاع رسانی

www.roshdmag.org

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش وبرنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

◆ دوره‌ی شانزدهم ◆ شماره‌ی۱ ◆پاییز ۱۳۸۵ ◆شمارگان: ۱۳۰۰۰ نسخه

◆ مدیر مسؤول: علیرضا حاجیان زاده ◆ سردبیر: حمیدرضا امیری ◆ مدیر داخلی: میرشهرام صدر ◆ طراح گرافیک:سید علی موسوی

◆ ویراستار ادبی: کبری محمودی ◆ اعضای هیأت تحریریه: حمیدرضا امیری ، محمد هاشم رستمی ، احمد قندهاری ، میرشهرام صدر ، هوشنگ شرقی

سید محمدرضا هاشمی موسوی ، غلامرضا یاسی‌پور و با تشکر از همکاری ارزنده‌ی استاد پرویز شهریاری ◆ چاپ و صحافی: شرکت‌افست (سهامی عام)

ISSN 1606 - 9099

رشد برهان متوسطه،تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر به همکاری دعوت می‌کند.

■ نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی دوره‌ی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)
■ طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
■ طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
■ طرح معماهای ریاضی
■ نگارش یا ترجمه‌ی مقاله‌های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه‌ی علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش کامپیوتر و ...)

رشد برهان متوسطه هر سه ماه، یکبار منتشر می‌شود.

نشانی دفتر مجلّه: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵ تلفن دفتر مجله: ۹ـ ۸۸۸۲۱۱۶ داخلی ۳۹۷ تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ ـ ۷۷۳۳۵۱۱

یادداشت سردبیر

ما و پیامبر اعظم(ص)

سال تحصیلی ۸۶ـ۸۵ را در شرایطی آغاز می‌کنیم که مزین به نام مبارک پیامبر اعظم(ص) است؛ پیامبر رحمت، رحمت پایان‌ناپذیر خداوند. پیامبری که بنابر کلام خدا، اسوه‌ی حسنه می‌باشد و ما همواره در تمامی مراحل زندگی می‌توانیم با تأسی به سیره و اخلاق ایشان حرکت خود را به سمت تعالی و آینده‌ای روشن، جهت بخشیم و پیرو دستورات این پیامبر عظیم‌الشأن باشیم.

پیامبر بزرگ اسلام(ص) برای تمامی اقشار جامعه الگوها و نمونه‌هایی بارز و قابل اجرا در جهت رشد و تکامل بر جای گذاشته‌اند که عمل به هریک از آن‌ها برای ما خیر دنیا و آخرت را به همراه خواهد داشت. ایشان در طول ۲۳ سال که رهبری امت اسلامی را به‌عهده داشتند، برای هر سن و سالی و هر صنفی از جامعه، دستوراتی باقی نهاده، و با سیره‌ی عملی و بیان شیوای خود چنان تأثیری بر جامعه‌ی زمان خود و نیز جوامع پس از خود گذاشته‌اند که بررسی این تأثیرات به تحقیق و مطالعات فراوان نیاز دارد.

اما آنچه برای ما و شما دانش‌آموزان عزیز بسیار اهمیت دارد، آن قسمت از سیره و فرمایشاتی است که پیامبر اعظم(ص) در ارتباط با علم و علم‌آموزی برای ما به ارمغان آورده و به‌جای گذاشته‌اند. احادیث و روایات نبوی در زمینه‌ی دانش و دانش‌آموزی بسیار فراوانند و هریک از آن‌ها، از دریچه‌ای و نگاهی مجزا از بقیه، به این موضوع مهم می‌نگرد. وقتی می‌خوانیم که پیامبر اعظم(ص) فرمودند: «علم را بیابید، اگرچه در چین باشد»، به اهمیت علم‌آموزی پی می‌بریم و این که برای یافتن آن هرقدر زحمت بکشیم، جا دارد و نیز به این که علم را از غیر مسلمان نیز می‌توان فراگرفت.

زمانی که به حدیث نبوی اطلبوا العلم من المهد الی اللحد «ز گهواره تا گور دانش بجوی» می‌رسیم، به این نکته‌ی مهم پی می‌بریم که فرا گرفتن علم به سن و سال و خلاصه به زمان خاصی وابسته نیست، و وقتی این دو حدیث شریف را در کنار هم قرار دهیم، به این نکته‌ی مهم می‌رسیم که فرا گرفتن علم، به زمان خاص و مکان خاصی وابسته نیست. از پیامبر عظیم‌الشأن اسلام(ص) احادیث فراوانی در زمینه‌ی وظیفه‌شناسی و احساس مسؤولیت در قبال جامعه وجود دارد که اگر شما بخواهید آن‌ها را الگو و سرمشق خود قرار دهید، در درجه‌ی اول می‌باید به وظایف خود آشنا باشید و در مرحله دوم به نحو احسن به آن‌ها عمل کنید تا سهم خود را نسبت به پیشرفت جامعه‌ی اسلامی که در آن زندگی می‌کنید، ادا کرده باشید.

شما دانش‌آموز هستید. وظایف دانش‌آموز چیست؟ و چگونه باید به این وظایف عمل کرد؟ پاسخ به سؤال اول بسیار ساده است. وظیفه‌ی دانش‌آموزان، دانش آموختن است (که البته اگر در این راه سختی هم بکشند، جا دارد). اما چگونگی عمل به این وظیفه و شرایط استفاده از این آموخته‌ها، حرف دیگری است.

شما دانش‌آموز عزیز، آیا به وظیفه‌ی اصلی خود که همانا دانش آموختن است، به نحو احسن عمل می‌کنید؟ آیا شرایط کافی از طرف جامعه و خانواده برای عمل به این وظیفه برای شما فراهم است؟ آیا تاکنون به روایات بسیاری با این مضمون که علم خالی از عمل، خالی از فایده است، برخورد کرده‌اید؟ به نظر شما، عمل به علمِ حاصل، اشاره به چه نوع عملی است؟ اگر نگاه دقیق‌تر و عمیق‌تری به روایات در زمینه‌ی علم و علم‌آموزی داشته باشیم، قطعاً به جواب‌های صحیح و مطمئنی برای سؤال‌های فوق دست خواهیم یافت و این نیز جزو حرکت‌های شماست که با مطالعه، بررسی و تحقیق روی چنین روایاتی، و از همه مهم‌تر به کار بستن و الگو قرار دادن سیره‌ی عملی پیامبر اعظم(ص)، به وظایف خود پی ببرید و شرایط عمل به این وظایف را دریابید.

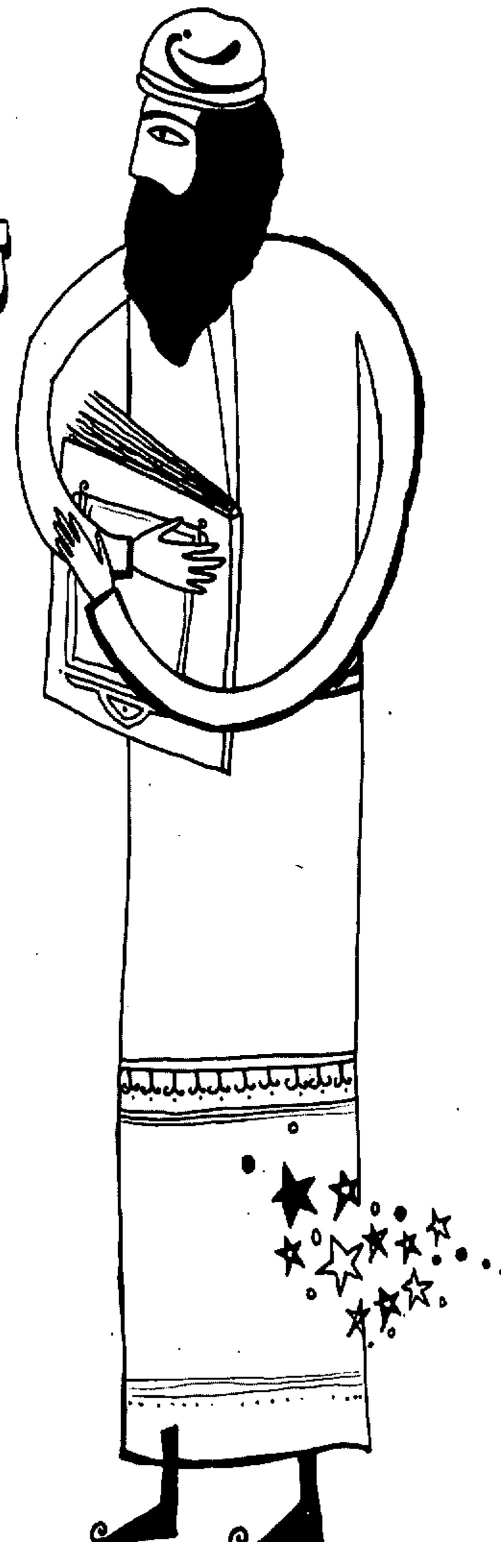
والسلام ـ سردبیر

۴

یادهای آموزشی

تاریخ دانش، خود دانش است

پرویز شهریاری



۱

«مسأله‌ی زیر توسط **محمد ابوموسی الخوارزمی** مطرح شده است. الخوارزمی، اولین نویسنده‌ی مشهور ریاضی در میان عرب‌ها بود. یکی از کتاب‌های او، اولین کتابی بود که واژه‌ی الجبر[1] در عنوانش آمده بود. بنابراین، واژه‌ی جبر کنونی از او گرفته شده است.»

این چند سطر «یادداشت تاریخی» را از صفحه‌ی ۱۸۸ کتاب درسی ریاضیات ۱ و ۲ که از سوی وزارت آموزش و پرورش، برای سال اول نظام جدید آموزش متوسطه در سال تحصیلی ۱۳۷۳ چاپ شده است، برداشته‌ایم.

باید گفت: نام او «محمدابوموسی الخوارزمی» نیست، بلکه محمد، فرزند موسی، مشهور به خوارزمی است. موسی پدر خوارزمی است، نه کنیه‌ی او یا فرزند او. شهرت به خوارزمی دارد، یعنی اهل خوارزم در «فرارود» (ماوراءالنهر) بوده است و «اَل» حرف تعریفی است که در زبان عربی به آن اضافه شده است. جالب است که در «یادداشت تاریخی»، برعکس روی جلد کتاب خوارزمی که به وسیله‌ی زنده‌یاد خدیو جم برگردانده و چاپ شده، نوشته شده است: «محمدبن موسی خوارزمی». اما جمله‌ی بعدی این «یادداشت تاریخی» جالب‌تر است. نویسندگان کتاب کشف کرده‌اند: «الخوارزمی، اولین نویسنده‌ی مشهور ریاضی درمیان عرب‌ها بود.»

دیده‌ایم و می‌بینیم که قبطیان شمال آفریقا و بربرهای شمال شرقی آفریقا را «عرب» می‌دانند و این به خاطر آن است که این قوم‌ها، هم زبان خود را فراموش کرده‌اند و به زبان «عربی» صحبت

می‌کنند، و هم با قوم عرب در آمیخته‌اند. ولی تا کنون نشنیده بودیم که مردم خوارزم و «فرارود»، آن هم در سده‌ی سوم هجری قمری (پایان سده‌ی هشتم میلادی) عرب بوده‌اند. بحث بر سر قوم و نژاد و ملت نیست، همه‌ی قوم‌ها، همه‌ی ملت‌ها و همه‌ی نژادها در ساختن تمدن و فرهنگ کنونی، کم یا زیاد، سهم داشته‌اند و هیچ ملت و نژادی را نمی‌توان برتر یا فروتر از دیگران دانست. این کار نظریه‌پردازان جهان استکباری است که برای توجیه غارتگری‌های خود، بیهوده تلاش می‌کنند، ملت‌های جهان را به دو گروه «متمدن» و «وحشی» تقسیم کنند. بحث ما بر سر حقیقت تاریخی و درستی یا نادرستی نوشته‌ای است برای دانش‌آموزان ایرانی تا آن‌ها به یاد بسپارند و بیاموزند.

اگر نویسندگان کتاب درسی می‌نوشتند که خوارزمی کتاب‌های خود و از جمله کتاب جبر خود را («جبر» و نه «الجبر») به زبان عربی و به احتمال زیاد در بغداد نوشته است، ایرادی وارد نبود؛ نه این که جمله را طوری تنظیم کنند که این تصور را به وجود آورد که خوارزمی «عرب» بوده است.

خوارزمی در پیش گفتار کتاب جبر خود، دانشمندان و پژوهشگران را به سه گونه بخش کرده است: «... یا مردی است که برای نخستین بار، دانشی ناشناخته را می‌شناسد... یا مردی است که نوشته‌های باقی‌مانده‌ی پیشینیان را شرح و تفسیر می‌کند... و یا مردی است که در برخی از کتاب‌ها به نادرستی و آشفتگی بر می‌خورد، پس نادرستی‌ها را اصلاح می‌کند و آشفتگی‌ها را سامان می‌بخشد...»

۲

شنبه ۷ مرداد ۱۳۷۴، شب هنگام، در برنامه‌ی «شب‌های تابستان» که از سیما پخش می‌شد، از دختر جوان با استعدادی که در المپیاد جهانی ریاضیات درخشیده و مدال زرین المپیاد را گرفته بود، پرسیدند: «آیا شما **جمشید کاشانی** را می‌شناسید؟» و او پاسخ داد: «چیزهایی درباره‌ی او شنیده‌ام.» مصاحبه کننده توضیح می‌دهد: «جمشید کاشانی عدد پی را کشف کرد.»

جمشید کاشانی کاشف عدد پی نبود، بلکه او توانست عدد پی را تا ۱۶ رقم بعد از ممیز محاسبه کند. حتی روش محاسبه‌ی او، در اساس، با روش **ارشمیدس** تفاوتی نداشت و تنها، کار او بسیار جلوتر از کار ارشمیدس رفت. در «تورات» هم به گونه‌ای، از عدد پی یاد شده است و آن را برابر ۳ دانسته‌اند.

درست است که جمشید کاشانی در محاسبه‌های خود بسیار دقیق بود و با هوشمندی کار می‌کرد، ولی افتخار جمشید کاشانی را بیش‌تر باید در جاهای دیگری جست و جو کرد. او برای پیدا کردن روشی که مقدار سینوس یک درجه را به ما می‌دهد، راه حل جبری معادله‌ی درجه‌ی سوم را پیدا کرد. او نخستین کسی است که عددنویسی دهدهی (اعشاری) را معمول کرد؛ چیزی که به نادرستی، در کتاب‌های تاریخ ریاضیات غالباً به نام **سته‌وَن** (سیمون، ۱۶۲۰ - ۱۵۴۸) هلندی که ده‌ها سال بعد از مرگ کاشانی می‌زیسته، ثبت شده است.

۳

پنجشنبه ۱۲ مرداد ۱۳۷۴ در برنامه‌ی رادیوی سراسری در ساعتی بین ۴:۳۰ و ۵، در معرفی دانشمندان گذشته، کشف لگاریتم را به خوارزمی نسبت دادند.

لگاریتم را نه خوارزمی کشف کرد و نه هیچ ایرانی دیگری. لگاریتم را جان نپر (۱۶۱۷ ـ ۱۵۵۰)، ریاضیدان اسکاتلندی کشف کرد. ولی چرا این اشتباه پیش آمده است؟ خوارزمی کتابی داشته است به نام «حساب هندی». این کتاب بعدها به زبان لاتین برگردانده می‌شود. برگرداننده یا برگردانندگان کتاب، لاتینی شده‌ی اسم خوارزمی را روی کتاب می‌گذارند: «الخوارزمی» می‌شود «الگوریتموس». چون حرف «خ» نداشتند، به جای آن حرف «گ» می‌گذارند، حرف تعریف «اَل» را هم نگه دارند و «اوس» هم به آخر آن اضافه می‌کنند. تا مدت‌ها در اروپای غربی و جنوبی آن را به معنای «حساب» و «محاسبه» می‌گرفتند. این که به جای کتاب، نام مؤلف را روی کتاب بگذارند، بسیار معمول بود. همین چند سال پیش هم کتابی به فارسی برگردانده شد که مربوط به دانش طبیعت بود، ولی برگرداننده‌ی کتاب (آقای تدین)، نام کتاب را گذاشته بود: «تاریخ طبیعی یا پُلبر فارسی».

پُلبر نام نویسنده‌ی فرانسوی این کتاب بود و چون کتاب مدت درازی کتاب درسی بود، دانش‌آموزان آن را با نام «کتاب پُلبر» می‌شناختند.

به هر حال در اروپای غربی و جنوبی به تدریج متوجه شدند، الگوریتموس نام نویسنده‌ی کتاب است، نه موضوع کتاب. بعدها، برای حرمت گذاشتن به خوارزمی و پاسداری از کارهای او، که برای نخستین بار روش‌های کلی را برای حل معادله‌ی درجه‌ی دوم آورده بود، هر گونه روش کلی حل را در ریاضیات

«الگوریتم» نامیدند که هنوز هم در «منطق ریاضی» به کار می‌رود. الگوریتم (در واقع یعنی الخوارزمی)، به معنای روش یا دستور کلی برای حل گروه بزرگی از مسأله‌ها، مثل الگوریتم ضرب که مشخص کننده‌ی راه ضرب عددهای چند رقمی در یکدیگر است و با لگاریتم هیچ نسبتی ندارد.

۴

شنبه بیست و پنجم مهر ماه ۱۳۷۴، بین ساعت‌های ۱۹ و ۲۰، شبکه‌ی دوم سیما به مناسبت خورشید گرفتگی دوم آبان برنامه‌ای داشت که ضمن آن، جمله‌ای به این مضمون گفته شد: «**آل بیرونی** هم در نیشابور کسوفی را رصد کرد.»

با شگفتی، در کتاب‌های مرجع به جست و جوی «آل بیرونی» رفتم. گوینده‌ی سیما هیچ اشاره‌ای به تاریخ رصد نکرد یا شناسه‌ی دیگری از این اخترشناس، که نام یک خاندان یا یک قوم را برخود داشت، نیاورد.

«آل» واژه‌ای عربی و به معنای خاندان است (البته به جز آل افسانه‌ای که گمان می‌کنند، شب ششم تولد فرزند، به سراغ مادر او می‌رود تا جگرش را بدرد و بخورد). آل‌های زیادی در تاریخ داریم و خیلی از تاریخ‌نویسان ما هم، عادت دارند بگویند، آل طاهر (به جای طاهریان)، آل صفار (به جای صفاریان)، آل بویه (به جای دیلمیان)، آل اسحاق (به جای سلجوقیان) و ... تا بخواهید در کتاب‌های تاریخ به این «آل»ها بر می‌خوریم.

ولی این «آل بیرونی» با همه‌ی آن‌ها فرق دارد، چرا که یک خاندان یا یک دودمان نیست؛ یک نفر است، اختر شناس است و در نیشابور «خورشید گرفتگی» را رصد کرده است.

روشن است که نویسنده‌ی مطلب، «اَلْ بیرونی» نوشته و گوینده آن را «آل بیرونی» خوانده است. ولی نمی‌دانم چرا حرف تعریف «اَل» را که مربوط به نام‌های عربی است، بر سر واژه‌ی فارسی «بیرونی» باید گذاشت. **ابوریحان بیرونی** اهل خوارزم بوده است و در «بیرون» خوارزم به دنیا آمده است؛ از این جهت او را بیرونی و گاهی بیرونی خوارزمی می‌نامند. چرا باید بگوییم «اَلْ بیرونی»؟ مگر اگر کسی اهل بوشهر است، او را «اَل بوشهری» می‌نامیم؟ به جز این، من تردید دارم که ابوریحان در طول زندگی خود، به نیشابور رفته باشد تا چه رسد که در آن‌جا «خورشید گرفتگی» را هم رصد کرده باشد.

تا آن‌جا که می‌دانیم، ابوریحان بیرونی پیش از اسیر شدن به دست لشکریان **محمود غزنوی**، سه بار ماه‌گرفتگی (و نه خورشید گرفتگی) را برای اصلاح قانون‌هایی که تا آن زمان برای حرکت ماه می‌شناختند، رصد کرد و در یک مورد، ضمن مکاتبه با **ابوالوفای بوزجانی** (بوزجان نزدیک تربت‌جام) که در رصد خانه‌ی «بیت الحکمه»ی بغداد، به سرپرستی **سهل کوهی** کار می‌کرد، قرار گذاشت نتیجه‌ی رصدهای خود را درباره‌ی ماه‌گرفتگی، برای یکدیگر بفرستند تا بتوان به نتیجه‌های دقیق‌تری رسید. ابوالوفا دربغداد بود و ابوریحان در خوارزم؛ یک همکاری پژوهشی بسیار جالب و بی‌سابقه. کاش نویسنده‌ی مقاله‌ای که در سیما خوانده شد، روشن کرده بود که این آقای «آلِ بیرونی» چه زمانی در نیشابور بوده و کدام «خورشید گرفتگی» را رصد کرده است.

۵

حتی یک کتاب بزرگ هم، برای شناخت ابوریحان بیرونی کافی نیست. اوج فعالیت بیرونی در سال‌های نزدیک به سال هزار میلادی بود؛ زمانی که بر اساس پیش‌بینی کلیسا، سال هزار میلادی باید پایان جهان باشد. **استفان تسوایک** (۱۹۴۲ ـ ۱۸۸۷)، زندگی‌نامه‌نویس و داستان‌نویس اتریشی، در کتاب خود به نام «سرگذشت یک اشتباه تاریخی»، درباره‌ی نتیجه‌ی این پیش‌بینی می‌نویسد: «مردمی که عقل خود را از دست داده‌بودند، با لباس‌های پاره و شمع به دست، در دسته‌های عظیمی در هم می‌لولیدند. دهقانان زمین‌های خود را ترک می‌کردند. کالاها و محصول خود را می‌بخشیدند و به تاراج می‌دادند. آخر فردا [روز اول ژانویه‌ی سال ۱۰۰۱ میلادی] آن‌ها می‌آیند. سواران شیطان که بر اسب‌های سفید سوارند. روز رستاخیز بزرگ نزدیک می‌شود... دسته‌های هزاران نفری از راه می‌رسیدند، زانوها را خم می‌کردند، می‌خواستند آخرین شب زندگی خود را در کلیسا بگذرانند و در انتظار سیاهی ابدی باشند...»

ولی در این گوشه از جهان، بزرگ مردی فعالیت می‌کرد که می‌توان او را یکی از بزرگ‌ترین‌ها، در تمام روزگاران دانست. ابوریحان بیرونی، ریاضیدان، اخترشناس، فیلسوف، تاریخ‌نویس، پژوهشگر و بالاتر از همه، یک انسان بود. به ایران و ایرانی بودن خود افتخار می‌کرد و وقتی برای فرار از دست لشکریان محمود غزنوی، پیشنهاد رفتن به بغداد را به او دادند، نپذیرفت. در «آثارالباقیه»ی خود نوشت: «... اهل

خوارزم، شاخه‌ای از ایرانیانند و جوانه‌ای از درخت برومند آن ...»

همیشه کار می‌کرد. حتی وقتی محمود در لشکرکشی به هندوستان او را همراه خود برد، به جمع دانشمندان هندی پیوست، به آنان آموخت و خود از آنان یاد گرفت. همیشه بی‌وقفه کار می‌کرد.

ابوریحان بیرونی در زادگاه خود که «مامونیان» بر آن حکومت می‌کردند، کارهای علمی خود را آغاز کرد. چندی به دربار **شمس‌المعالی قابوس وشمگیر** رفت و «آثار الباقیه» را در آن‌جا نوشت. دوباره به خوارزم برگشت و در لشکرکشی محمود به خوارزم، همراه استاد خود، **ابونصر منصور**، فرزند علی، معروف به «ابن عراق»، ریاضیدان و اخترشناس ایرانی که در نیمه‌ی دوم سده‌ی چهارم و آغاز سده‌ی پنجم هجری در خوارزم می‌زیست، به دست محمود غزنوی دستگیر شد. استادش را کشتند و خود او را به غزنه (دربار محمود) بردند. در زمان مسعود توانست به زادگاه خود برود و در غزنه در سن ۷۷ سالگی مرد. با بزرگان زمان خود، همچون **پورسینا** و ابوالوفای بوزجانی مکاتبه داشت ... کارها و نوشته‌هایش چنان ژرف و جالبند که هنوز بعد از هزار سال در بسیاری موضوع‌ها، تازگی و درستی خود را از دست نداده‌اند.

آن وقت ما او را نمی‌شناسیم و به نام «آل بیرونی» از او یاد می‌کنیم.

گفته‌ام و باز هم می‌گویم، **تاریخ دانش، خوددانش است**. بدون درک حرکت اندیشه‌ی بشر در گذشته، نمی‌توان دانش امروز و مسیر آینده‌ی آن را شناخت. دست‌کم به دانشمندان گذشته‌ی سرزمین خود توجه بیش‌تری داشته باشیم. همه‌جا کوپرنیک و نظریه‌ی او را آغاز اخترشناسی نو می‌دانند، ولی من در این راه، ابوریحان بیرونی را پیشگام می‌دانم.

آیا می‌توان امیدوار بود، روزی برسد که دست کم، ترجمه‌ی پاکیزه‌ای از نوشته‌های دانشمندان خود به زبان فارسی، در اختیار داشته باشیم؟

۶

نویسنده‌ی محترم کتاب «هدایت طلاب به دانش استرلاب» (چاپ ۱۳۷۲، کتابی که از دیدگاه بررسی‌های تاریخی سودمند است)، آرزو می‌کند، به زمان ابوریحان بیرونی برگردیم و با صرف‌نظر کردن از رایانه و دوربین اخترشناسی و ما هواره، به استفاده از استرلاب رو آوریم. بخوانید:

«جای بسی تأسف است که در قرون اخیر، در نتیجه‌ی اختراعات مدرن و ساخت تلسکوپ‌های قوی و نیز بر اثر بی‌توجهی به هنرهای دستی و از میان رفتن علما و هنرمندان قدیمی، این دستگاه عظیم [یعنی استرلاب] به فراموشی سپرده شود و ده‌ها کتاب مربوط به این دانش و فن، آن هم به صورت خطی، در کنج کتابخانه‌ها، متروک و بلااستفاده بماند و استرلاب‌های مانده نیز، در پشت ویترین‌های موزه‌ها قرار گیرند و بینندگان نیز، بدون اطلاع از ماهیت و کارایی آن‌ها ... گاهی [آن‌ها را] با رمل مترادف و مشتبه گیرند. اخیراً به لطف باری تعالی، امر اخترشناسی و استخراج تقویم ... کار قدما را آسان‌تر از کار متجددان یافتم ... و در تعقیب آن مطلع شدم که دانش استرلاب باید احیا شود.»

۷

نه در دبیرستان‌ها و نه در دانشگاه‌های ما، روزنه‌ای برای آشنایی با «تاریخ دانش» وجود ندارد. در کتاب‌های تاریخ عمومی هم، درباره‌ی همه‌ی رویدادهای واقعی و غیر واقعی صحبت می‌شود، ولی درباره‌ی زیباترین تجلی اندیشه‌ی آدمی، یعنی دانش، سکوت شده است.

اجازه بدهید نمونه‌ای بیاورم تا ببینیم در جاهای دیگر با یک پژوهشگر تاریخی چگونه رفتار می‌کنند.

آنکتیل دوپه‌رون فرانسوی (۱۸۰۵-۱۷۳۱)، وقتی که جوان بود، با صفحه‌هایی از یک قطعه‌ی اوستا که در آکسفورد انگلستان نگهداری می‌شد، آشنا شد. نه خط آن را می‌شناخت و نه معنای آن را می‌فهمید و نه از سرچشمه‌ی آن آگاهی داشت. تصمیم گرفت به هند برود تا به یاری پارسیان در این باره آگاهی‌هایی به دست آورد، ولی چگونه؟ رفتن به هند در نیمه‌ی سده‌ی ۱۸ ساده نبود. مطلع شد که قرار است، گروهی سرباز فرانسوی به هند اعزام شود. داوطلب شد و وارد گروهان موزیک سربازان شد (سال ۱۷۵۴ میلادی). ولی دولت فرانسه از نیت او مطلع شد. بلافاصله او را از کار در گروهان معاف کرد و امکان‌های لازم را در اختیار او گذاشت تا بتواند به هند برود و با خیال آسوده پژوهش خود را آغاز کند. آنکتیل دوپه‌رون نخستین برگرداننده‌ی اوستا به زبان‌های اروپایی است.

اوستا و اوستاشناسی ربطی به فرهنگ گذشته و حال فرانسه نداشت. تنها می‌توانست پژوهشی باشد که با معیار انسانی و جهانی ارزشمند است. با وجود این، دولت فرانسه این شانس را به دوپه‌رون داد که نخستین پژوهشگر زبان اوستایی در اروپای غربی باشد.

زیرنویس

1. aljebr

برای دانش‌آموزان پایه‌ی اول

تفریح اندیشه

حسین نامی ساعی

مسأله‌ی فروشنده‌ی پسته‌ی مخلوط

فروشنده‌ای دو نوع پسته دارد. نوع اول کیلویی ۵۰۰۰ تومان و نوع دوم کیلویی ۳۵۰۰ تومان است. او می‌خواهد با مخلوط کردن این دو نوع پسته، ۷۰ کیلوگرم پسته با قیمت ۴۰۰۰ تومان به دست آورد. برای این منظور، از هر نوع پسته چند کیلوگرم لازم دارد؟

حل: فرض می‌کنیم x کیلوگرم پسته از نوع اول و y کیلوگرم پسته از نوع دوم انتخاب کرده باشد. x و y مجهول‌های مسأله هستند. با استفاده از جدول زیر می‌توان یک دستگاه دو معادله دو مجهولی تشکیل داد:

نوع پسته‌ها / ارزش و وزن پسته‌ها	نوع اول	نوع دوم	مخلوط
ارزش هر کیلوگرم پسته	۵۰۰۰ تومان	۳۵۰۰ تومان	۴۰۰۰ تومان
وزن	x کیلوگرم	y کیلوگرم	۷۰ کیلوگرم

$$\begin{cases} x + y = ۷۰ \\ ۵۰۰۰x + ۳۵۰۰y = ۴۰۰۰ \times ۷۰ \end{cases}$$

با حل دستگاه خواهیم داشت:

$$\begin{cases} -۳۵۰۰x - ۳۵۰۰y = -۳۵۰۰ \times ۷۰ \\ ۵۰۰۰x + ۳۵۰۰y = ۴۰۰۰ \times ۷۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۱۵۰۰x = ۵۰۰ \times ۷۰$$

$$\Rightarrow x = \frac{۵۰۰ \times ۷۰}{۱۵۰۰} = \frac{۷۰}{۳} \simeq ۲۳/۳۳$$ کیلوگرم

$$x + y = ۷۰ \Rightarrow ۲۳/۳۳ + y = ۷$$

$y \simeq ۴۶/۶۷$ کیلوگرم

پس باید ۲۳/۳۳ کیلوگرم پسته‌ی نوع اول و ۴۶/۶۷ کیلوگرم پسته‌ی نوع دوم را با هم مخلوط کند تا ۷۰ کیلوگرم پسته‌ی ۴۰۰۰ تومانی به دست آورد.

مطالعه تاریخ ریاضیات و نقش آن در آموزش ریاضیات

حمیدرضا امیری

مقدمه

انگیزه‌ی این که در کتاب درسی ریاضی دبیرستان یک کشور، شرح‌حال بزرگان ریاضی همچون، **خوارزمی**، **خیام**، **کاشانی** و **بیرونی** بیان می‌شود، چیست؟

بیانیه‌ی ریودوژانیرو در ششم ماه مه سال ۱۹۹۲ و اعلام سال ۲۰۰۰ به عنوان سال جهانی ریاضیات توسط **پروفسور ژاک لویی لیون**، رئیس اتحادیه‌ی بین‌المللی ریاضی (IMV) در مؤسسه‌ی ریاضیات محض و کاربردی برزیل، شاید پاسخی به این سؤال باشد. در این بیانیه، علاوه بر اعلام سال جهانی ریاضیات، به نظر می‌رسد علم ریاضی و دانشمندان گذشته و حال این شاخه از دانش بشری را متعلق به تمام جهان می‌داند.

ریاضیات به عنوان یک رشته‌ی مادر، دارای اهمیت فراوان است و بالطبع تاریخ آن و اثری که شرح حال این دانش بشری بر سال‌ها می‌گذارد نیز اهمیت دارد. تأثیرپذیری و هدایت نسل هوشمند دنیا، بر گذشته بنا نهاده شده است، زیرا تاریخ آینده براساس گذشته رقم می‌خورد و تجربه‌ی گذشته را به همراه دارد. این تأثیرپذیری دارای جنبه‌های مثبت و شگرفی است که بذر آن در نوجوانی کاشته می‌شود تا به عنوان کاربرد، انتقال و پیشبرد مرزهای دانش ریاضی آینده، به آن بنگرند و در آن تأمل کنند. کاشت این بذر به عهده‌ی شما دانش‌پژوهان و رسولان علم ریاضی است و با دست توانا و نگرش عمیق و فهیمانه‌ی شما پرورش می‌یابد.

نوجوانان امروز، دانشمندان آینده‌ی ریاضی خواهند بود که با توانمندی خود، ابزار قابل فهم بودن و به کار بستن بیش‌تر این علم را برای اغلب مردم جهان فراهم و عرضه خواهند کرد. تاریخ ریاضی از آن جهت نیز اهمیت دارد که به وسیله‌ی آن می‌توانیم، زمان گذشته‌ی علم ریاضی را دریابیم و درک کنیم که آغاز آن از کجا و چگونه بوده، توسعه، اوج و انحطاط آن کدام سرزمین، در چه زمانی و به‌وسیله‌ی چه کسانی بوده است و می‌توانیم با تمام دانشمندان گذشته، هم‌زمان و هم‌سخن شده و با کوتاهی عمر، از آزموده‌ها و یافته‌های نسل‌های متعدد بهره‌مند شویم. به طور کلی در یک جمله می‌توان گفت، ریاضیات عمدتاً مطالعه‌ی اندیشه‌هاست و فهم صحیح اندیشه‌ها بدون تحلیل سرچشمه‌های آن‌ها مقدور نیست. به طور کلی، انگیزه‌های یاددهی و یادگیری تاریخ ریاضیات را می‌توان در راستای شش محور اصلی جست‌وجو کرد:

۱. خودباوری دانش‌آموزان و باور هویت ریاضی ایران در ارتباط با تأثیر آن بر ریاضیات جهان.

۲. آشنایی با شیوه‌های تدریس ریاضیات. (چرا امروزه افرادی چون خیام نداریم؟)

۳. ارتباط بین ریاضیات قدیم و جدید و استفاده از تجربیات و یافته‌های نسل‌های قبل.

۴. اعتماد به نفس و در نظر داشتن این که ریاضیدانان بزرگ نیز دچار اشتباهاتی بزرگ شده‌اند.

۵. تأثیرگذار بودن در هر سن و سالی، از نوجوانی به بعد. سن و سال چندان اهمیتی در یافته‌ها و کشفیات ریاضی ندارد.

۶. غیرواقعی بودن تاریخ ریاضی نگارش شده توسط غربی‌ها و بی‌انصافی آن‌ها.

۱. خودباوری دانش آموزان و باور هویت ریاضی ایران در ارتباط با تأثیر آن بر ریاضیات جهان

۱ـ۱. جمشید غیاث‌الدین کاشانی در کتاب «مفتاح الحساب»، قاعده‌ای کلی برای استخراج ریشه‌های nام ارائه کرده که همان روش «روفینی ـ هورنر» است که در سده‌ی ۱۹ میلادی در اروپا ارائه شد.

۱ـ۲. **شرف‌الدین تاج‌الزمان حسین بن حسن سمرقندی**، ریاضیدان مسلمان ایرانی قرن سیزدهم میلادی که تاکنون در تاریخ ریاضیات کشور ما ناشناخته مانده است، در اثری با عنوان «رساله فی طریق المسایل العددیه»، روش‌های بکر و بدیعی به کار برده است که در ارتباط با سایر متون تاریخی و هم‌عصر او در اروپا، می‌توان به میزان نبوغ او پی برد.

۱ـ۳. **چهارضلعی خیام** که زوایای مجاور قاعده‌ی ۹۰ درجه و اضلاع قائم آن برابرند، به «چهارضلعی ساکی‌بری» معروف شده است. خیام این چهارضلعی را به خاطر اثبات اصل توازی اقلیدس، حداقل پانصد سال قبل از ساکی به‌کار برده است. به دنبال وی، ۱۵۰ سال بعد **خواجه نصیر طوسی** نیز همان چهارضلعی را برای اثبات اصل توازی به کار می‌برد. پنج قرن بعد که کارهای ریاضیدانان درباره‌ی اصل توازی توسط **جان والیس** و دیگران به دست دانشمندان اروپایی می‌رسد، ساکی‌بری، **لامبرت** و **لباچفسکی** کارهای دانشمندان مسلمان را دنبال و همین چهارضلعی را بررسی می‌کنند و زمینه‌های تولد هندسه‌های نااقلیدسی فراهم می‌شود.

درواقع، دانشمندان مسلمان از قبیل: **ابن هیثم**، **ثابت بن قره**، خیام و خواجه نصیر، پیش‌قراولان کشف هندسه‌های نااقلیدسی محسوب می‌شوند.

۱ـ۴. تاریخچه‌ی معادلات دیفرانسیل که مقادیر «بی‌نهایت کوچک» در آن نقش مهمی دارند، به زمانی برمی‌گردد که روش‌های نقشه‌برداری برای ساختن آبراه‌ها و آب‌بندها و توزیع زمین نیاز بودند. در گذشته تصور می‌رفت، در این حرکت، بابلیان، یونانیان، مصریان و چینیان پیشگام بودند و اروپاییان این بحث را تا قرن نوزدهم پرورانیده‌اند، ولی خاورشناسان اروپایی با توجه به پژوهش‌هایی گسترده درباره‌ی آثار دانشمندان مسلمان، به‌ویژه کار روی آثار ابن هیثم، با ابراز شگفتی، توانایی‌های ریاضیدانان اسلامی را در این زمینه والا شمرده‌اند.

۱ـ۵. مدل نجومی معروف خواجه نصیرالدین یا «جفت طوسی» نقش به‌سزایی در تاریخ نجوم داشته که منشأ مطالعات بسیاری در تجزیه و تحلیل این مدل بوده است. جفت طوسی اصطلاحی است که تاریخ‌نگاران جدید وضع کرده‌اند. این مدل از دو دایره‌ی مماس بر یکدیگر تشکیل یافته است، به گونه‌ای که دایره‌ی کوچک‌تر با شعاعی نصف دایره‌ی بزرگ‌تر و سرعتی دو برابر آن، مماس و درون آن حرکت می‌کند. درنتیجه، هر نقطه از دایره‌ی کوچک‌تر، در امتداد قطری از دایره‌ی بزرگ‌تر نوسان می‌کند و حرکت دورانی به حرکت خطی تبدیل می‌شود. در دهه‌های گذشته، پژوهش‌های قابل توجهی پیرامون «جفت طوسی» در غرب صورت گرفته است و در برخی از آن‌ها مسأله به شکل بسیار تخصصی و از دیدی کاملاً ریاضی بررسی شده است.

۱ـ۶. ثابت‌بن قره در قرن سوم دستوری برای یافتن دسته‌ای از عددهای متحاب بیان کرده است (دو عدد طبیعی در صورتی متحاب نامیده می‌شوند که مجموع شمارنده‌های مثبت کوچک‌تر از هر عدد، مساوی با دیگری باشد). **کمال‌الدین فارسی** در رساله‌ای که هدف آن اثبات درستی دستور ثابت‌بن قره بوده است، حالت کلی قضیه، یعنی حالتی که b مساوی با یکی از شمارنده‌های a باشد را در نظر گرفته و در این حالت نیز دستور محاسبه‌ای اجزای حاصل‌ضرب ab را بیان و اثبات کرده است.

کمال‌الدین فارسی نخستین کسی بود که در قرن هفتم و اوایل قرن هشتم ق، دستور محاسبه‌ی اجزای حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی را در حالت کلی بیان و ثابت کرد.

$$(a, b) = 1 \Rightarrow S(ab) = S(a)b + S(b) \times a + S(a) \times S(b)$$

($S(a)$ مجموع اجزای عدد a است.)

دکارت در حدود بیش از سیصد سال بعد از درگذشت کمال‌الدین، همین دستور را در اروپا به دست آورد. با این تفاوت که کمال‌الدین فارسی حالتی کلی که a و b نسبت به هم اول نباشند را نیز در نظر گرفته و آن را ثابت کرده بود. همچنین کمال‌الدین فارسی پس از اثبات درستی دستور ثابت‌بن قره، آن را به کار بسته و دو عدد متحاب ۱۷۲۹۶ و ۱۸۴۱۶ را به دست آورد که متحاب بودن این دو عدد در اروپا، نخستین بار توسط **فرما**، ریاضیدان فرانسوی، در سال ۱۶۳۶ یعنی ۳۱۸ سال پس از مرگ کمال‌الدین فارسی به دست آمد.

۷ـ۱. غیاث‌الدین کاشانی معادله‌ی درجه سوم را به طور کامل حل کرد و سال‌ها بعد، **کاردان** روش حل آن را ارائه کرد که هم‌اکنون نیز حل معادله‌ی درجه سوم (حتی در کتاب‌های ریاضی نظام قدیم) به نام فرمول کاردان ثبت شده است.

۸ـ۱. ریاضیدانانی چون **خوارزمی، ابوریحان، ابوالوفای بوزجانی، کوشیار گیلی و ابومحمد خجندی**، باعث رشد و تکامل علم مثلثات شدند. خوارزمی جدول سینوس‌ها را درست کرد و از کلمه‌ی جیب به معنی گریبان که معادل آن سینوس می‌شود، استفاده کرد.

۹ـ۱. **ابونصر فارابی** با نوشتن کتاب «موسیقی الکبیر»، در سه جمله تمامی موسیقی زمان خودش را با نت که البته به صورت عدد بود، نوشت. از جمله ابتکارات علمی فارابی که قرن‌ها بعد از وی اروپاییان به آن دست یافتند، تقسیم‌بندی علوم بود و او اولین کسی است که ریاضیات و موسیقی را در یک دسته قرار داد.

۲. آشنایی با شیوه‌های تدریس ریاضیات (چرا امروزه افرادی چون خیام نداریم؟)

۱ـ۲. افرادی چون خیام با پیمودن صدها کیلومتر مسافت، آن هم با پای پیاده و یا با استفاده از اسب، برای دست یافتن به یک کتاب و استفاده از آن، و با تحمل زحمات فراوان توانستند، به علوم زمان خود دست پیدا کنند و در زمان خود و حتی بعد از آن تأثیرگذار باشند (به دنبال لقمه‌ی آماده و حتی جویده نبودند).

۲ـ۲. ارج نهادن به علم، عالم و متعلم، از دیگر دلایل به ظهور رسیدن افرادی چون **غیاث‌الدین کاشانی**، ابوریحان، خیام و خوارزمی بوده است. بها دادن به علم و عالم و فراهم کردن بستر مناسب برای رشد فرهیختگان، از عوامل مؤثر در پیدایش افرادی چون خیام بوده و هست؛ چیزی که دین اسلام روی آن تأکید فراوان داشته و دارد.

۳ـ۲. شاید هم‌اکنون یکی از دلایل بسیار آشکار وجود نداشتن دانشمندان ریاضی در ایران که در حد جهانی تأثیرگذار باشند، وجود همین ایرانیان در خارج از ایران و به عنوان تبعه‌ی کشورهایی چون آمریکا، کانادا و آلمان است؛ همان که امروزه به فرار مغزها مشهور است. چه‌بسا ایرانیانی که باعث پیدایش شاخه‌ای جدید در ریاضیات شده و حتی آن را رشد داده باشند، ولی به عنوان یک شهروند آمریکایی از آن‌ها یاد می‌شود.

۳. ارتباط بین ریاضیات قدیم و جدید و استفاده از تجربیات و یافته‌های نسل‌های قبل

۱ـ۳. مشکل می‌توان گفت که فقط مطالعه و مشاهده‌ی ظاهری تاریخ ریاضی، مورد علاقه‌ی ریاضیدانان باشد. آن‌ها معمولاً به این افتخار می‌کنند که علم ریاضی بیش از هر علم دیگری دقیق و کامل است و همواره ریاضیات قدیم و دستاوردهای گذشته‌ی ریاضی برای ریاضیات جدید و حال سودمند بوده و هست. شیمیدانان ممکن است گاه با لبخندی معنی‌دار به نتایج و دستاوردهای به اصطلاح کودکانه‌ی کیمیاگران و شیمیدانان قدیم بنگرند، ولی ریاضیدانان همیشه با تعجب و حیرت به عواید و یافته‌های یونانیان در هندسه و ایرانیان و هندی‌ها در محاسبات می‌نگرند.

۲ـ۳. غیاث‌الدین جمشید کاشانی در مسأله‌ی محیطیه‌ی خود، گرچه ذکری از مفهوم حد نمی‌کند، اما این مفهوم را با تسلط تمام و در شکل دقیق آن، برای محاسبه‌ی عدد π به کار

می‌گیرد و به نوعی بحث حد و مفهوم آن را از گذشته به حال پیوند می‌دهد. او در جمله‌ی بسیار زیبایی، با زبانی ریاضی «به نام خدا» را به این شکل بیان می‌کند:

«به نام او که از اندازه‌ی نسبت محیط دایره به قطرش آگاه است.» در این جمله به نوعی اذعان می‌دارد که انسان از فهم و محاسبه‌ی دقیق عدد π ناتوان است.

۴. اعتماد به نفس و توجه به این مطلب که ریاضیدانان بزرگ نیز دچار اشتباهاتی بزرگ شده‌اند

۴ـ۱. **پی‌یر دوفرما** می‌پنداشت، اعدادی به صورت $۲^n + ۱$ که n به صورت توانی از ۲ باشد یا $(۲^{۲^n} + ۱)$، همگی اول هستند. ولی **اویلر** در سال ۱۷۳۲ ثابت کرد که $۲^{۳۲} + ۱$ اول نیست.

$$۲^{۳۲} + ۱ = ۴۲۹۴۹۶۷۲۹۷ = ۶۴۱ \times ۶۷۰۰۴۱۷$$

که هر دو عدد سمت راست اول هستند.

۴ـ۲. **مرسن** در سال ۱۶۴۴ چنین حکم کرد که عدد $M_p = ۲^p - ۱$ به ازای اعداد اول ۲۵۷، ۱۲۷، ۶۷، ۳۱، ۱۹، ۱۷، ۱۳، ۲، ۵، ۳، ۷ اول است و به ازای سایر اعداد اول چون p که از ۲۵۷ کوچکترند، اول نیست. این حکم اشکال دارد، زیرا $M_{۶۷}$ مرکب و $M_{۶۱}$ و $M_{۸۹}$ و $M_{۱۰۷}$ اول هستند.

۵. تأثیرگذار بودن در هر سن و سالی، از نوجوانی به بعد. سن و سال چندان اهمیتی در یافته‌ها و کشفیات ریاضی ندارد

۵ـ۱. غیاث‌الدین جمشید کاشانی در سن ۴۲ سالگی از دنیا رفته است. بنابراین یافته‌های باارزش وی در دوران جوانی او صورت گرفته و درواقع وی یک ریاضیدان جوان بوده است.

۵ـ۲. **ابراهیم‌بن سنان** که نوه‌ی ثابت‌بن قره بوده است، در قرن سوم هجری می‌زیسته و مورخان غربی درباره‌ی وی چنین می‌نویسند: «گرچه روزگار ابراهیم‌بن سنان بر اثر یک غده‌ی کبدی، در سال ۳۲۵ هجری قمری در ۳۷ سالگی به سر آمد، ولی آثار باقی‌مانده از او، شهرتش را به عنوان شخصیتی مهم در تاریخ ریاضیات ثبت می‌کند». روش او در یافتن مساحت یک قطعه‌ی سهموی، ساده‌ترین روشی است که از دوره‌ی پیش از رنسانس به ما رسیده است.

۶. غیرواقعی بودن تاریخ ریاضی نگارش شده توسط غربی‌ها و بی‌انصافی‌های آن‌ها

باید به این نکته اشاره کنیم که اغلب مورخان دانش، حتی با انصاف‌ترین آن‌ها نتوانسته‌اند مقام ریاضیات ایرانی را، در مجموعه‌ی تاریخ ریاضیات، به‌درستی و روشنی ارزیابی کنند. اغلب آن‌ها، ریاضیدانان ایرانی را تا حد مترجمان ساده‌ی نوشته‌های یونانی پائین آورده‌اند که این ترجمه‌ها هم، به موقع خود به صاحبان اصلی، یعنی اروپاییان برگشت داده شده است. به این ترتیب، مورخان ریاضی، آغاز ریاضیات را در اروپا (یونان) می‌دانند. بعد از سقوط مکتب اسکندریه در سده‌های سوم و چهارم میلادی، دوران رکودی به وجود می‌آید که تا سده‌ی پانزدهم میلادی ادامه دارد و سپس با دسترسی اروپاییان به نوشته‌های یونانی (از راه ترجمه‌ی عربی آن‌ها) دوباره دنبال کار را می‌گیرند و آن را به امروز می‌رسانند. درنتیجه‌ی این نوع برخورد، همه‌ی ملت‌های جهان، به جز ساکنان اروپا، در تمامی طول تاریخ در خواب غفلت بوده‌اند و هرچه امروز دارند، نتیجه‌ی تلاش فکری و عملی مردم اروپاست. این درحالی است که ریاضیدانان ایرانی، از سده‌ی هشتم تا سده‌ی پانزدهم میلادی، پرچم‌دار ریاضیات جهان بوده‌اند؛ به نحوی که این دوره، یک دوره‌ی کامل از تاریخ ریاضیات را تشکیل می‌دهد.

منابع:

۱. مقاله‌های ارائه شده در کنفرانس تاریخ ریاضیات/ دانشگاه هرمزگان

۲. زندگی‌نامه ریاضی‌دانان دوره‌ی اسلامی/ ابوالقاسم قربانی/ مرکز نشر دانشگاهی

۳. تاریخ ریاضیات/ ترجمه‌ی دکتر محمدقاسم وحیدی‌اصل/ مرکز نشر دانشگاهی

بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم پارامتری

محمدهاشم رستمی

الف) بحث در وجود ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم پارامتری

اگر مبین معادله‌ی درجه دوم یک مجهولی $ax^۲ + bx + c = ۰$ را Δ بنامیم، یعنی $\Delta = b^۲ - ۴ac$ باشد، می‌دانیم که:

۱. اگر $\Delta > ۰$ باشد، معادله دو ریشه‌ی متمایز دارد.

۲. اگر $\Delta = ۰$ باشد، معادله ریشه‌ی مضاعف دارد.

۳. اگر $\Delta < ۰$ باشد، معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

بنابراین برای بحث در وجود ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم یک مجهولی پارامتری، کافی است، $\Delta = b^۲ - ۴ac$ (یا $\Delta' = b'^۲ - ac$) را تعیین علامت کنیم. برای این کار Δ را برحسب پارامتر موجود در معادله (مثلاً بر حسب m) به دست می‌آوریم و علامت آن را در یک جدول که بر حسب مقدارهای صعودی پارامتر تشکیل می‌دهیم، مشخص می‌سازیم. آن‌گاه با توجه به علامت به‌دست آمده برای Δ، وجود ریشه‌های معادله را در هریک از بازه‌های جدول بررسی می‌کنیم.

به این مثال‌ها توجه کنید:

مثال۱. در وجود ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم پارامتری $(۲m - ۱)x^۲ - mx + m - ۳ = ۰$ به‌ازای مقدارهای مختلف m بحث کنید.

حل:

Δ را محاسبه و تعیین علامت می‌کنیم، داریم:

$$a = ۲m - ۱,\ \ b = -m,\ \ c = m - ۳,$$

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = (-m)^۲ - ۴(۲m - ۱)(m - ۳)$$
$$= m^۲ - ۴(۲m^۲ - ۷m + ۳)$$

$$\Rightarrow \Delta = m^۲ - ۸m^۲ + ۲۸m - ۱۲ \Rightarrow \Delta = -۷m^۲ + ۲۸m - ۱۲$$

$$\Delta = ۰ \Rightarrow -۷m^۲ + ۲۸m - ۱۲ = ۰$$

$$\Rightarrow m = \frac{-۲۸ \pm \sqrt{۷۸۴ - ۳۳۶}}{-۱۴}$$

$$\Rightarrow m = \frac{-۲۸ \pm \sqrt{۴۴۸}}{-۱۴} = \frac{-۲۸ \pm ۸\sqrt{۷}}{-۱۴} = \frac{-۱۴ \pm ۴\sqrt{۷}}{-۷}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{-۱۴ + ۴\sqrt{۷}}{-۷} = \dfrac{۱۴ - ۴\sqrt{۷}}{۷} \\ m = \dfrac{-۱۴ - ۴\sqrt{۷}}{-۷} = \dfrac{۱۴ + ۴\sqrt{۷}}{۷} \end{cases}$$

m	$-\infty$		$\frac{۱۴-۴\sqrt{۷}}{۷}$		$\frac{۱۴+۴\sqrt{۷}}{۷}$		$+\infty$
Δ		−	۰	+	۰	−	
		ریشه ندارد	معادله ریشه‌ی مضاعف دارد	دو ریشه‌ی متمایز دارد	معادله ریشه‌ی مضاعف دارد	ریشه ندارد	

بنابراین وقتی $\frac{۱۴-۴\sqrt{۷}}{۷} < m < \frac{۱۴+۴\sqrt{۷}}{۷}$ باشد، معادله دو ریشه‌ی متمایز دارد. به ازای $m = \frac{۱۴-۴\sqrt{۷}}{۷}$ و $m = \frac{۱۴+۴\sqrt{۷}}{۷}$ معادله یک ریشه‌ی مضاعف ذارد و هنگامی که $m < \frac{۱۴-۴\sqrt{۷}}{۷}$ یا $m > \frac{۱۴+۴\sqrt{۷}}{۷}$ باشد، معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

مثال ۲. معادله‌ی درجه‌ی دوم پارامتری زیر داده شده است. به ازای مقدارهای مختلف پارامتر m، در وجود ریشه‌های این معادله بحث کنید.

$$(m-۲)x^۲ - ۲(m+۳)x + m + ۴ = ۰$$

حل:

Δ یا Δ' را محاسبه و تعیین علامت می‌کنیم، داریم:

$$a = m-۲,\ \ b = -۲(m+۳) \Rightarrow b' = \frac{b}{۲} = -(m+۳),$$
$$c = m+۴,$$
$$\Delta' = b'^۲ - ac = (m+۳)^۲ - (m-۲)(m+۴)$$
$$= m^۲ + ۹ + ۶m - m^۲ - ۲m + ۸$$
$$\Rightarrow \Delta' = ۴m + ۱۷,\ \ \Delta' = ۰ \Rightarrow ۴m + ۱۷ = ۰ \Rightarrow m = -\frac{۱۷}{۴}$$

m	$-\infty$		-۱		$+\infty$
Δ'		−	۰	+	
R		ریشه ندارد	ریشه‌ی مضاعف دارد	دو ریشه‌ی متمایز دارد	

به‌طوری که دیده می‌شود، به ازای $m < -\frac{۱۷}{۴}$ معادله دارای ریشه‌ی حقیقی نیست، به ازای $m = -\frac{۱۷}{۴}$ معادله یک

ریشه‌ی مضاعف دارد و به ازای $m > -\frac{۱۷}{۴}$ معادله دو ریشه‌ی متمایز دارد.

مثال ۳. به ازای همه‌ی مقدارهای پارامتر m، در وجود ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم پارامتری زیر بحث کنید.

$$mx^۲ + ۲(m-۱)x + ۲ = ۰$$

حل:

Δ یا 'Δ را محاسبه و تعیین علامت می‌کنیم. داریم:

$$a = m,\ \ b = ۲(m-۱) \Rightarrow b' = (m-۱),\ \ c = ۲,$$

$$\Delta' = b'^۲ - ac = (m-۱)^۲ - m \times ۲ = m^۲ - ۲m + ۱ - ۲m$$

$$= m^۲ + ۱,$$

$\Delta' = ۰ \Rightarrow m^۲ + ۱ = ۰$ ریشه ندارد

m	$-\infty$		$+\infty$
Δ'	+	+	+
R			

معادله همواره دو ریشه‌ی متمایز دارد

به طوری که دیده می‌شود، در معادله‌ی داده شده، $\Delta' = m^۲ + ۱$ همواره به ازای همه‌ی مقدارهای پارامتر m مثبت است. پس این معادله به ازای همه‌ی مقدارهای پارامتر m دو ریشه‌ی متمایز دارد.

مثال ۴. معادله‌ی درجه‌ی دوم پارامتری زیر داده شده است. به ازای همه‌ی مقدارهای پارامتر m، در وجود ریشه‌های این معادله بحث کنید.

$$۲x^۲ - ۲(m-۱)x + m^۲ + ۱ = ۰$$

حل:

'Δ را محاسبه و تعیین علامت می‌کنیم، داریم:

$$a = ۲,\ \ b = -۲(m-۱) \Rightarrow b' = -(m-۱),\ \ c = m^۲ + ۱,$$

$$\Delta' = b'^۲ - ac \Rightarrow \Delta' = (m-۱)^۲ - ۲(m^۲ + ۱)$$

$$= m^۲ - ۲m + ۱ - ۲m^۲ - ۲$$

$$\Rightarrow \Delta' = -m^۲ - ۲m - ۱ = -(m+۱)^۲,\ \ \Delta' = ۰ \Rightarrow (m+۱)^۲ = ۰$$

$$\Rightarrow m + ۱ = ۰ \Rightarrow m = -۱$$

m	$-\infty$	-۱	$+\infty$
Δ'	—	۰	+
R	ریشه ندارد	ریشه‌ی مضاعف دارد	ریشه ندارد

به طوری که دیده می‌شود، این معادله فقط به ازای $m = -۱$ ریشه‌ی مضاعف دارد و به ازای هیچ مقدار دیگری از m ریشه ندارد.

مثال ۵. در وجود ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم پارامتری زیر، به ازای مقدارهای متفاوت پارامتر m بحث کنید.

$$(m^۲ + ۲)x^۲ + ۲mx + ۳ = ۰$$

حل:

'Δ را محاسبه و تعیین علامت می‌کنیم. داریم:

$$a = m^۲ + ۲,\ \ b = ۲m \Rightarrow b' = m,\ \ c = ۳,\ \ \Delta' = b'^۲ - ac$$

$$\Rightarrow \Delta' = m^۲ - (m^۲ + ۲) \times ۳ \Rightarrow \Delta' = -۲m^۲ - ۶,\ \ \Delta' = ۰$$

$\Rightarrow -۲m^۲ - ۶ = ۰ \Rightarrow m^۲ = -۳ < ۰$ ریشه ندارد

m	$-\infty$		$+\infty$
Δ'	—	—	—
R			

ریشه ندارد

به طوری که دیده می‌شود، به ازای هر مقداری از پارامتر m، مبین ('Δ) معادله‌ی داده شده منفی است، پس به ازای هیچ مقداری از پارامتر m، این معادله ریشه ندارد.

نکته: بدون تشکیل جدول نیز مشخص می‌شود که در این معادله، 'Δ همواره منفی است، زیرا سه جمله‌ای درجه دوم $\Delta' = -۲m^۲ - ۶$ ریشه ندارد، پس علامت آن همواره موافق علامت ضریب $m^۲$ (یعنی ۲-) است یعنی همواره $\Delta' < ۰$ است.

مثال ۶. پارامتر a را چنان تعیین کنید که معادله‌ی $۳x^۲ + ۶x + a = ۰$

الف) همیشه دو ریشه‌ی حقیقی داشته باشد؛

ب) دارای ریشه‌ی مضاعف باشد؛

پ) ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد.

حل:

الف) باید $\Delta > ۰$ باشد، یعنی داشته باشیم:

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = (۶)^۲ - ۴(۳)(a) > ۰$$

$$\Rightarrow ۳۶ - ۱۲a > ۰ \Rightarrow a < ۳$$

ب) باید $\Delta = ۰$ باشد، یعنی داشته باشیم:

$$\Delta = ۳۶ - ۱۲a = ۰ \Rightarrow ۳۶ = ۱۲a \Rightarrow a = ۳$$

پ) باید $\Delta < ۰$ باشد، یعنی داشته باشیم:

$$\Delta = ۳۶ - ۱۲a < ۰ \Rightarrow ۳۶ < ۱۲a \Rightarrow a > ۳$$

مثال ۷. در معادله‌ی $3ax^2+(3a+2)x-2=0$ برای چه مقدارهایی از پارامتر a معادله دارای ریشه‌ی مضاعف است؟

حل:

شرط آن که معادله‌ی بالا ریشه‌ی مضاعف داشته باشد، آن است که $\Delta=0$ باشد، یعنی داشته باشیم:

$$\Delta=0\Rightarrow(3a+2)^2-4(3a)(-2)=0\Rightarrow$$
$$9a^2+4+12a+24a=0\Rightarrow 9a^2+36a+4=0\Rightarrow$$
$$a=\frac{-18\pm\sqrt{324-36}}{9}=\frac{-18\pm\sqrt{288}}{9}=\frac{-18\pm12\sqrt{2}}{9}$$
$$\Rightarrow a=\frac{-6\pm4\sqrt{2}}{3}\Rightarrow a=\frac{-6+4\sqrt{2}}{3},\ a=\frac{-6-4\sqrt{2}}{3}$$

آزمون‌ها

۱. به ازای چه مقدارهایی از m، معادله‌ی $x^2+mx+m=0$ ریشه‌ی مضاعف دارد؟

۱) ۲ و ۰ ۲) ۳ و ۰ ۳) ۴ و ۰ ۴) ۵ و ۰

حل:

داریم:

$$\Delta=b^2-4ac=0\Rightarrow m^2-4m=0\Rightarrow m(m-4)=0\Rightarrow$$
$$\boxed{m=0},\ m-4=0\Rightarrow\boxed{m=4}$$

پس گزینه‌ی (۳) درست است.

۲. برای آن که معادله‌ی $mx^2+(2m-1)x+m+3=0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز باشد، حدود پارامتر m کدام است؟

۱) $m<\frac{1}{16}$ ۲) $m>\frac{1}{16}$

۳) $m=\frac{1}{16}$ ۴) $m\le\frac{1}{16}$

حل: باید $\Delta>0$ باشد، یعنی داشته باشیم:

$$\Delta=b^2-4ac>0\Rightarrow(2m-1)^2-4m(m+3)>0\Rightarrow$$
$$4m^2+1-4m-4m^2-12m>0\Rightarrow-16m+1>0\Rightarrow$$
$$-16m>-1\Rightarrow m<\frac{1}{16}$$

پس گزینه‌ی (۱) درست است.

۳. حدود پارامتر a برای آن که معادله‌ی زیر ریشه نداشته باشد، کدام است؟

$x^2-2ax+a+2=0$

۱) $-2<a<1$ ۲) $a>-2$

۳) $-1<a<2$ ۴) $a<1$

حل:

باید $\Delta<0$ باشد. داریم:

$$a=1,\ b=-2a,\ c=a+2,\ \Delta'=b'^2-ac<0\Rightarrow$$
$$a^2-(a+2)<0\Rightarrow a^2-a-2<0$$

اکنون باید a^2-a-2 را تعیین علامت کنیم. داریم:

$$a^2-a-2=0\Rightarrow(a-2)(a+1)=0\Rightarrow a=2,\ a=-1$$

m	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
Δ		+	0	−	0	+	
R		دو ریشه‌ی متمایز دارد	ریشه‌ی مضاعف دارد	ریشه ندارد	ریشه‌ی مضاعف دارد	دو ریشه‌ی متمایز دارد	

به طوری که دیده می‌شود، وقتی $-1<a<2$ باشد، $\Delta'<0$ است و معادله‌ی درجه دوم داده شده ریشه ندارد. پس گزینه‌ی ۳ درست است.

۴. در کدام بازه‌ی متعلق به m، معادله‌ی زیر دارای ریشه است؟

$x^2+(m-1)x+1=0$

۱) $m\le-1,\ m\ge2$ ۲) $[-1,\ 3[$

۳) $m<-1,\ m>2$ ۴) $[-1,3]$

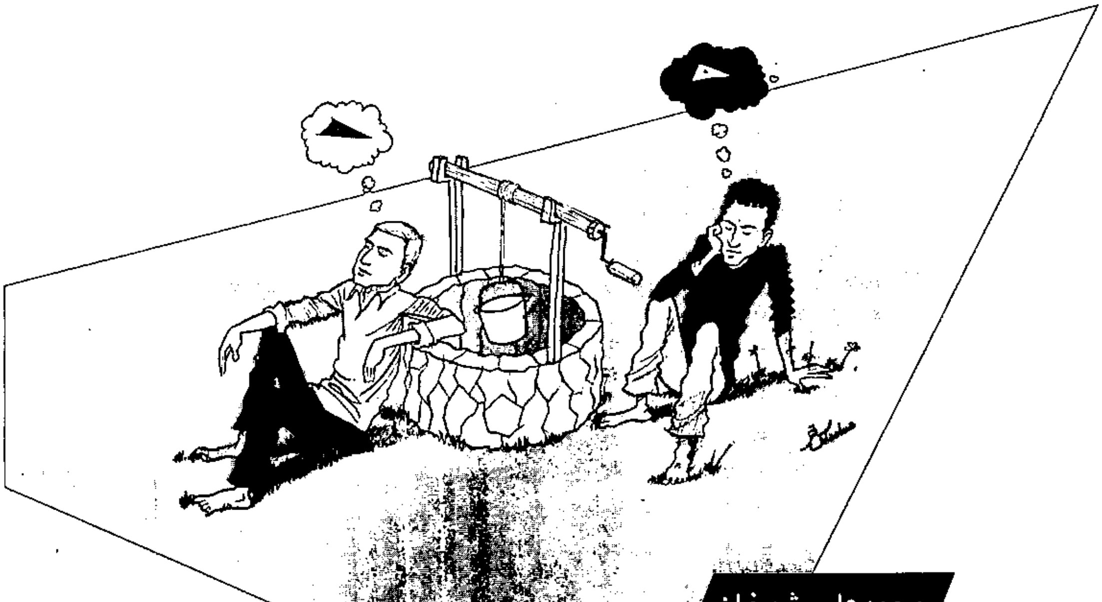
حل:

باید $\Delta\ge0$ باشد، داریم:

$$a=1,\ b=m-1,\ c=1,\ \Delta=b^2-4ac\Rightarrow$$
$$\Delta=(m-1)^2-4(1)(1)\ge0\Rightarrow m^2-2m-3\ge0$$
$$\Rightarrow m^2-2m-3=0\Rightarrow(m-3)(m+1)=0$$
$$\Rightarrow m=3,\ m=-1$$

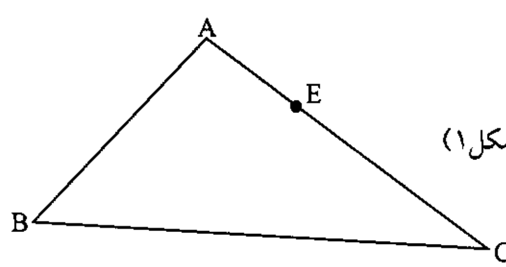
m	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
Δ'		+	0	−	0	+	
R		دو ریشه‌ی متمایز دارد	ریشه‌ی مضاعف دارد	ریشه ندارد	ریشه‌ی مضاعف دارد	دو ریشه‌ی متمایز دارد	

به طوری که جدول نشان می‌دهد، وقتی $m\ge3$ یا $m\le-1$ باشد، معادله ریشه دارد، پس گزینه‌ی (۱) درست است.



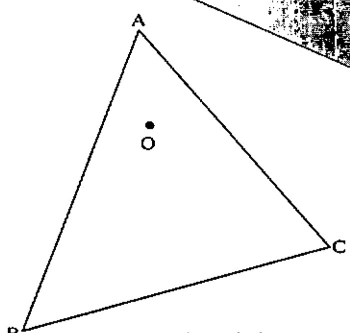
هندسی فکر کنیم

۱. دو برادر از پدرشان مزرعه‌ای مثلثی‌شکل به ارث برده‌اند که چاه آبی روی یکی از اضلاع آن وجود دارد. زمین را به دو قسمت معادل چنان تقسیم کنید که خط تقسیم از مرکز دهانه‌ی چاه بگذرد. به عبارت دیگر، چاه بین دو قطعه زمین مشترک باشد (شکل ۱).



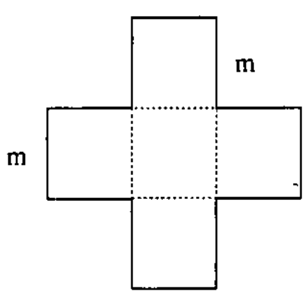
(شکل۱)

۲. مسأله‌ی فوق را برای حالتی که چاه در داخل مثلث قرار داشته باشد، به صورت زیر حل کنید: مثلث را بین سه برادر به قسمت‌های معادل چنان تقسیم کنید که چاه بینشان مشترک باشد (شکل ۲).

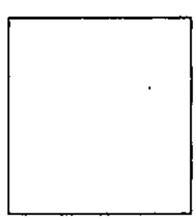


(شکل۲)

۳. با اجتماعی از پنج مربع متساوی، شکل ۳ تشکیل شده است. به کمک دو برش با قیچی، آن را چنان تقسیم کنید که با اجزای به‌دست آمده بتوان، یک مربع معادل آن ساخت (شکل ۴). ضمناً طول ضلع مربع را برحسب m (اندازه‌ی ضلع مربع) محاسبه کنید.



(شکل۳)

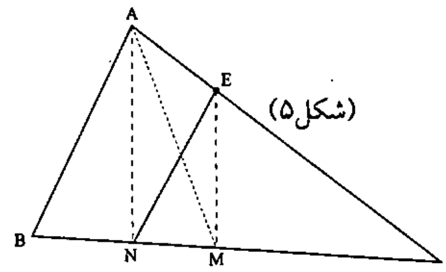


(شکل۴)

در مورد حل مسأله‌ها، به رأس‌های کلی راه‌حل اشاره شده است، تفصیل آن را خود بررسی کنید. ضمناً چون فرض بر آن گذاشته شده که عملاً کار تقسیم میسر است، از بحث صرف‌نظر شد.

حل ۱:

AM میانه‌ی نظیر ضلع BC را رسم کنید. خط AN را موازی خط ME بکشید (N روی BC است). خط NE مرز مشترک دو زمین مطلوب است (شکل ۵).



(شکل۵)

حل ۲:

کافی است ابتدا مثلث مفروض ABC را به وسیله‌ی خطی که از O می‌گذرد (در (شکل۶) خط EF) طوری تقسیم کنیم که مساحت مثلث AEF مساوی نصف مساحت چهارضلعی BEFC باشد. آن‌گاه چهارضلعی اخیر را به وسیله‌ی خط OD به دو شکل معادل تقسیم می‌کنیم (O محل استقرار چاه فرض شده است).

اما رسم خط EOF ـ ابتدا بین سه طول معلوم AH (ارتفاع نظیر رأس A)، l (فاصله‌ی O از مثلاً ضلع AB) و $\frac{1}{6}BC$، طولی مانند x چنان می‌سازیم که $\frac{1}{6}BC.AH = l.x$ باشد. (در شکل $HA' = \frac{1}{6}BC$ در امتداد ارتفاع AH و l=HL روی BC انتخاب شد و دایره‌ای از سه نقطه‌ی A' و L و A گذشت، به‌منظور تعیین $HG' = x$). حال روی AB طول x=GA را برگزیدیم و GK و KOP را به‌ترتیب موازی AC و AB کشیدیم. بدیهی است، مساحت متوازی‌الاضلاع AGKP مساوی l.AG یعنی $\frac{1}{3}S_{ABC}$ است. چون مثلث قائم‌الزاویه‌ی ONK را به وتر OK و به ضلع ON=OP بسازیم و GE را در امتداد AG روی ضلع AB مساوی NK انتخاب کنیم، خط EOF خط مطلوب اولی است.

زیرا با توجه به شکل و نامگذاری‌هایی که شده است، داریم:

$$\overline{OK}^2 = \overline{ON}^2 + \overline{NK}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{NK}^2 \qquad (1)$$

و از تشابه مثلث‌های EGM و OKM و OPF داریم:

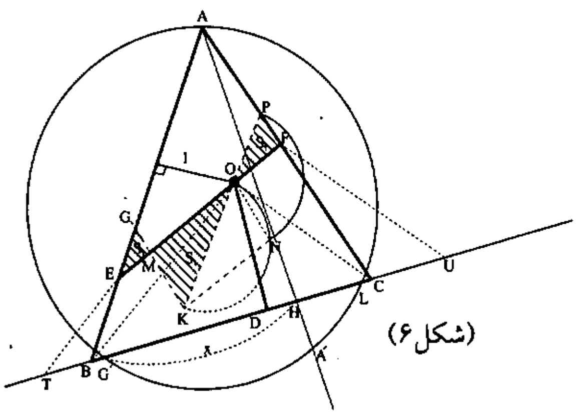
$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\overline{GE}^2}{\overline{OK}^2} = \frac{\overline{NK}^2}{\overline{OK}^2} \qquad (2)$$

$$\frac{S_3}{S_1} = \frac{\overline{OP}^2}{\overline{OK}^2} \qquad (3)$$

از جمع طرفین رابطه‌های ۲ و ۳ و با در نظر گرفتن رابطه‌ی ۱ خواهیم داشت: $S_1 = S_2 + S_3$ و این یعنی: $S_{AEF} = \frac{1}{3}S_{ABC}$.

برای رسم OD، ابتدا OC و OB را وصل می‌کنیم آن‌گاه FU و ET را به ترتیب موازی OC و OB می‌کشیم (نقاط U و T روی ضلع BC هستند) اگر D وسط TU باشد، OD خط مطلوب است. یعنی دو شکل BEOD و DOFC معادل هم هستند (می‌توانید با رسم خط OU و OT به معادل بودن آن‌ها دست یابید).

درنتیجه $S_{AEF} = S_{BEOD} = S_{DOFC} = \frac{1}{3}S_{ABC}$ است و چاه بین زمین‌ها مشترک است.

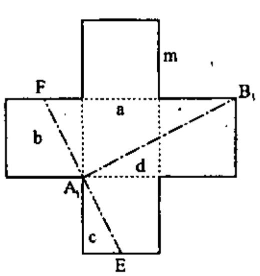


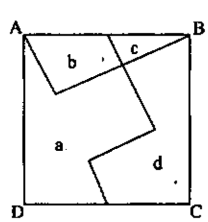
(شکل۶)

حل ۳:

دو برش در امتداد A_1B_1 و EF هستند (نقاط E و F وسط ضلع‌ها هستند).

قطعات حاصل، a و b و c و d در شکل ۲ چیده شده‌اند و مربع ABCD تشکیل شده است.





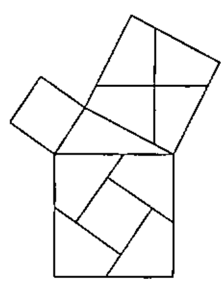
اندازه‌ی ضلع مربع حاصل $m\sqrt{5}$ است (محاسبه کنید).

با راهیان المپیادهای ریاضی ۴

ترجمه: دکتر غلامرضا یاسی پور

۱. تجزیه‌ی رویه‌های چندضلعی

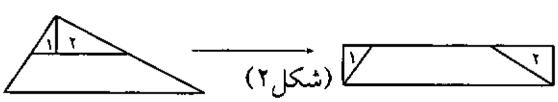
اثبات نموداری زیر (شکل۱) از قضیه‌ی فیثاغورس نشان می‌دهد، می‌توان دو مربع را به تکه‌هایی، به تعداد متناهی، برید و آن‌ها را برای به دست آوردن یک مربع، پهلوی هم قرار داد. در واقع، قضیه عمومی‌تر از این است.



(شکل۱)

در هر دو رویه‌ی چندضلعی با سطح یکسان، می‌توان با بریدن اولی به تکه‌هایی به تعداد متناهی، و قرار دادن آن‌ها در رویه‌ی چندضلعی دوم، یکی را به دیگری تبدیل کرد.

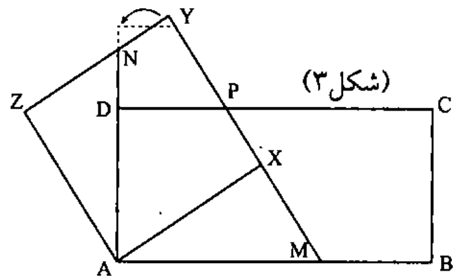
این ویژگی توسط بولیایی[۱] (۱۸۳۳) و گروین[۲] (۱۸۳۵) به‌طور مستقل از هم به اثبات رسید. صورت سه‌بعدی آن، توسط هیلبرت[۳] در فهرست ۲۳ مسأله‌ای قرار داده شد که او در کنگره‌ی بین‌المللی ریاضی‌دانان به سال ۱۹۰۰ میلادی ارائه داد. هیلبرت بیان کرد، این ویژگی در مورد چندوجهی‌ها برقرار نیست و مسأله را در مورد تغییرناپذیر کاملی مطرح کرد که مانع تبدیل یک چندوجهی به دیگری می‌شود. مسأله‌ی مزبور توسط دن[۴] که تغییرناپذیر مطلوب را به دست داد، حل شد.



(شکل۲)

قضیه‌ی بولیایی- گروین را اثبات می‌کنیم. ابتدا توجه می‌کنیم

که با استفاده از قطرها، می‌توان هرچندضلعی را به تعدادی متناهی مثلث برید. مثلث را می‌توان، همان طور که در شکل ۲ نشان داده‌ایم، به یک مستطیل تبدیل کرد. نشان دادیم که می‌توان دو مربع را برید و بریده‌ها را در یک مربع منفرد جمع کرد. به این ترتیب، کافی است نشان دهیم که از یک مستطیل می‌توان یک مربع ساخت.



(شکل۳)

فرض می‌کنیم ABCD یک مستطیل باشد. با بریدن مستطیل ABCD به مستطیل‌های کوچک‌تر و انجام ترسیم زیر در مورد هریک از آن‌ها، می‌توان فرض کرد که:

$AB / ۴ < BC < AB / ۲$

مربع AXYZ را با سطحی یکسان با سطح مستطیل، چنان اختیار می‌کنیم که XY، CD را در نقطه‌ی وسط آن قطع کند (شکل۳). و فرض می‌کنیم، M تقاطع AB و XY باشد و N تقاطع AD و YZ. مثلث‌های AZN و AXM هم‌نهشت هستند. بنابراین، چهارضلعی‌های MBCP و DNYP سطحی یکسان دارند. با عمل برش و پهلوی هم قرار دادن، به تبدیل چهارضلعی دوم به ذوزنقه‌ای هم‌نهشت با اولی رهنمون می‌شویم. (دو مورد مزبور هم‌نهشت هستند، زیرا:

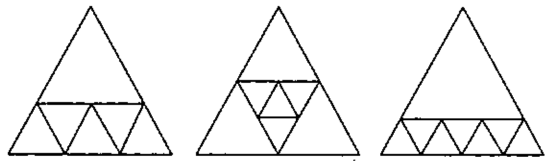
$PC = PD \ , \ \angle DPY = \angle CPM$

و هر دو سطح‌هایی یکسان دارند.)

ثابت کردیم که هر چندضلعی را می‌توان به مربعی تبدیل کرد. اما می‌توان به قهقرا، از مربع به چندضلعی نیز رفت، درنتیجه می‌توان هر چندضلعی را با کمک مربعی به عنوان واسطه، به هر چندضلعی دیگر مبدل ساخت.

مثال: نشان دهید، به ازای $n \geq ۶$، می‌توان یک مثلث متساوی‌الاضلاع را به n مثلث متساوی‌الاضلاع تجزیه کرد.

هر مثلث متساوی‌الاضلاع را چنان‌که در شکل ۴ نشان داده شده است، می‌توان به شش، هفت و هشت مثلث متساوی‌الاضلاع تجزیه کرد. نتیجه‌ی مطلوب با استفاده از استدلال استقرایی، با توجه به این مطلب به دست می‌آید که اگر مثلث را بتوان به n مثلث متساوی‌الاضلاع تجزیه کرد. آن‌گاه می‌توان آن را با استفاده از تجزیه‌ی یکی از مثلث‌های تجزیه شده به چهار مثلث، به $n + ۳$ مثلث تجزیه کرد.



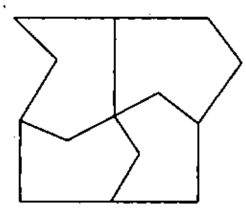
(شکل۴)

تمرین

۱. سه مربع با ضلع‌هایی برابر ۲، ۳ و ۶ مفروضند، با تنها دو برش، ۵ تکه‌ی حاصل را به مربعی با ضلع برابر ۷ تبدیل کنید (مقصود از برش، خطی است که چندضلعی را به دو تکه‌ی متصل تقسیم می‌کند).

۲. ثابت کنید هر مربع را می‌توان به ذوزنقه‌های متساوی‌الساقینی تقسیم کرد که مستطیل نیستند.

۳. با درنظر داشتن هشت‌ضلعی شکل ۵، می‌توان ملاحظه کرد که چگونه آن را به ۴ چندضلعی هم‌نهشت تقسیم می‌کنند. آیا می‌توان آن را به ۵ چندضلعی هم‌نهشت تقسیم کرد؟



(شکل۵)

۴. نشان دهید هر چهارضلعی دوری را می‌توان به ازای $n \geq ۴$، به n چهارضلعی دوری تجزیه کرد.

۵. نشان دهید هر مربع را می‌توان، به ازای هر $n \geq ۶$، به n مربع تجزیه کرد. ثابت کنید، این عمل را به ازای $n = ۵$ نمی‌توان انجام داد.

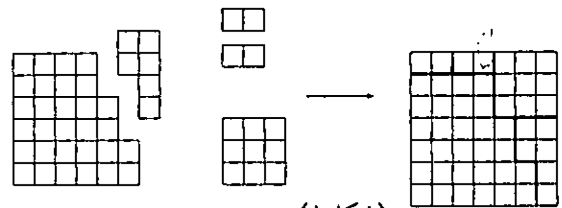
۶. نشان دهید هرمکعب را می‌توان، به ازای $n \geq ۵۵$، به n مکعب تجزیه کرد.

۷. تمام چندضلعی‌های محدبی را تعیین کنید که می‌توانند به متوازی‌الاضلاع‌هایی تجزیه شوند.

۸. ثابت کنید با معلوم بودن هر 2n نقطه‌ی واقع در درون یک چندضلعی محدب، تجزیه‌ای از آن چندضلعی به $n + ۱$ چندضلعی محدب، چنان موجود است که 2n نقطه‌ی مزبور بر مرزهای این چندضلعی‌ها قرار داشته باشند.

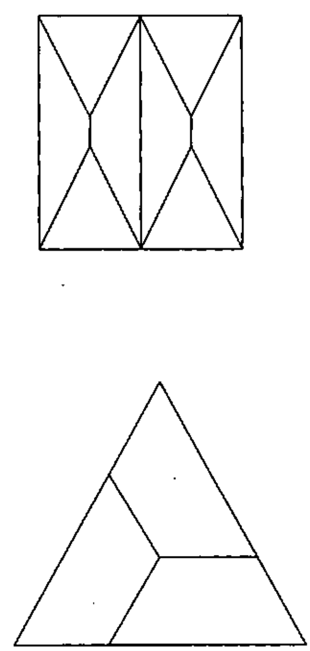
تجزیه‌ی رویه‌های چندضلعی

۱ . در این‌جا یکی از چند امکان را آورده‌ایم . برش‌ها و شبیه‌ها در شکل۱ نشان داده شده‌اند .



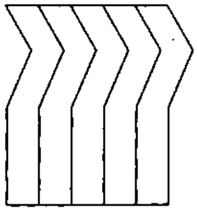
(شکل۱)

۲ . شکل ۲ چگونگی تجزیه‌ی یک مربع را به ذوزنقه‌های متساوی‌الساقین و مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ، و نیز چگونگی تجزیه‌ی یک مثلث متساوی‌الاضلاع را به سه ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین نشان می‌دهد (طرح از : kvant (Quantum), A. sivatski, v.Lev) .



(شکل۲)

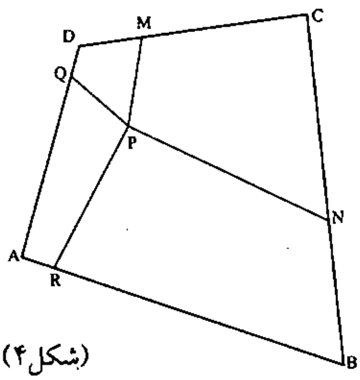
۳ . پاسخ موجبه است! یک تجزیه در شکل۳ آورده شده است (P. Boychev) .



(شکل۳)

۴ . ثابت می‌کنیم که تجزیه‌ای به ۴ چهارضلعی دوری ، با ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین بودن یکی از آن‌ها ، موجود است . از آن‌جا که یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین را می‌توان به تعداد دلخواهی ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین برید ، گزاره‌ی موردنظر در مورد هر $n \geq 4$ به اثبات می‌رسد .

فرض می‌کنیم ، ABCD چهارضلعی مورد بحث باشد (شکل۴) . در صورتی که این چهارضلعی مستطیل باشد ، تجزیه آسان است . اما در صورتی که چنین نباشد ، بدون از دست دادن عمومیت مسأله ، می‌توان فرض کرد که $\hat{D}$ منفرجه است .



(شکل۴)

P را در درون ، M را بر CD ، و N را بر BC چنان اختیار می‌کنیم که PNCM اضلاعی موازی اضلاع ABCD داشته باشد . اگر P را به قدر کافی نزدیک به ضلع AD اختیار کنیم ، آن‌گاه نقطه‌ی Qای بر AD چنان وجود دارد که PMDQ ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین است . توجه داشته باشید که زاویه‌ی PQA حاده است .

اگر P را به قدر کافی نزدیک به ضلع AB اختیار کنیم ، آن‌گاه می‌توان نقطه‌ی R_1 ی نزدیک به A چنان یافت که :

$$P\hat{R}_1A + P\hat{Q}A > 180^\circ$$

نیز ، تحت همین شرط ، می‌توان نقطه‌ی R_2 ای نزدیک به B با $P\hat{R}_2A < 90^\circ$ ، و درنتیجه با $P\hat{Q}A + P\hat{R}_2A < 180^\circ$ یافت . استدلالی مداوم ، $R \in AB$ را با

$P\hat{Q}A + P\hat{R}A = 180^\circ$ ، و درنتیجه با ARPQی دوری به دست می‌دهد.

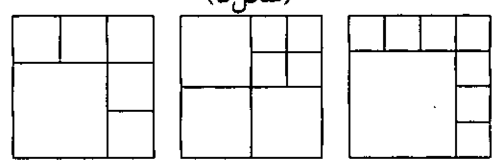
سرانجام:

$$R\hat{P}N = 360^\circ - R\hat{P}Q - Q\hat{P}M - M\hat{P}N = 360^\circ - (180^\circ - \hat{A})$$
$$- (180^\circ - \hat{D}) - (180^\circ - \hat{C}) = 180^\circ - \hat{B}$$

که نشان می‌دهد، RCNP نیز دوری است. این مطلب تجزیه‌ی مطلوب را به دست می‌دهد (چهاردهمین IMO، ۱۹۷۲).

۵. به طور استقرایی ثابت خواهیم کرد که یک مربع را می‌توان به ازای $n \geq 6$ ، به n مربع تقسیم کرد. حالت‌های $n = 6$ ، ۷ ، و ۸ را در شکل ۵ نشان داده‌ایم.

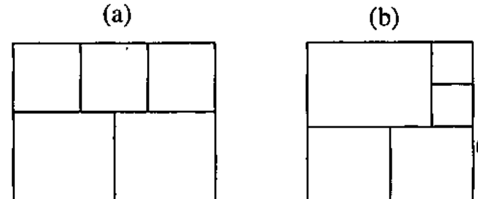
(شکل۵)



نتیجه‌ی مورد نظر، اکنون از استدلال استقرایی حاصل می‌شود؛ زیرا اگر ویژگی مورد بحث، به ازای kی خاصی برقرار باشد، آن‌گاه با تقسیم یکی از مربع‌های تجزیه به چهار مورد، سه مربع دیگر اضافه می‌کنیم. بنابراین، ویژگی مزبور، به ازای $k + 3$ نیز برقرار خواهد بود.

اکنون نشان می‌دهیم که نمی‌توان یک مربع را به پنج مربع تقسیم کرد. فرض می‌کنیم، چنین تجزیه‌ای وجود دارد. در این صورت، هریک از اضلاع مربع اولیه، درست با دو مربع تجزیه مماس می‌شود، و مربع‌هایی که به یک ضلع مماس باشند، به ضلع مقابل آن مماس نمی‌شوند. درنتیجه، یک ضلع مربعمان موجود است که دقیقاً با دو مربع تجزیه مماس است. اگر این دو مربع برابر باشند، آن‌گاه بالای آن‌ها سه مربع دیگر داریم که یا برابرند، و درنتیجه، چنانچه در شکل ۶ - a نشان داده‌ایم، تا اندازه‌ای کوچک‌ترند، یا چون در شکل ۶ - b قرار می‌گیرند:

(a) (b)



(شکل۶)

در حالت اول، ضلع مربع اولیه، از یک طرف، دو برابر طول ضلع یکی از مربع‌های بزرگ است، و از طرف دیگر، برابر مجموع طول‌های اضلاع یک مربع کوچک و یک مربع بزرگ می‌شود که غیرممکن است.

حالت دوم، به وضعیتی تحویل می‌شود که در آن، دو مربع با اندازه‌های متفاوت، به یک ضلع مماس می‌شوند. این دو مربع تکه‌ای L شکل را به‌جا می‌گذارند که تنها می‌تواند با دو مربع برابر با مربع کوچک‌تر، و یک مربع برابر با مربع بزرگ‌تر پوشیده شود، و بار دیگر با توجه به شکل ۶ - a ، با ترکیبی غیرممکن مواجه می‌شویم.

۶. این مسأله مشابه مسأله‌ی پیشین است. مکعب C را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم P(n) این گزاره باشد که C می‌تواند به n مکعب افراز شود.

اگر P(k) به ازای kای راست باشد، آن‌گاه با تقسیم یکی از مکعب‌های افراز به هشت مکعب با صفحاتی که موازی وجوه آن هستند و از مرکزش می‌گذرند، نتیجه می‌شود که $P(k + 7)$ نیز راست است. در این صورت، مسأله به بررسی حالات زیر تحویل می‌شود:

P(۵۶) ، P(۵۷) ، P(۵۸) ، P(۵۹) ، P(۶۰) ، P(۶۱) و P(۵۵)

C : P(۵۵) را به ۲۷ مکعب و هریک از چهار مورد از آن‌ها را به هشت مکعب تقسیم می‌کنیم. این کار، تقسیمی از C را به ۵۵=(۴×۷)+۲۷ مکعب به دست می‌دهد.

C : P(۵۶) را به هشت مکعب، و هریک از چهار مورد از آن‌ها را، با تعیین مربعی بر وجه Fای از C، به ۲۷ مکعب تقسیم می‌کنیم. سپس هشت مکعب (از نه مورد) دارای یک نهم F به عنوان قاعده، تشکیل شده از اتصال هشت مکعب کوچک به یک مکعب منفرد، را در نظر می‌گیریم. در این صورت، C را به ۵۶=(۸×۷)-(۴×۲۶)+۸ مکعب تقسیم کرده‌ایم.

C : P(۵۷) را به ۶۴ مکعب تقسیم می‌کنیم. آن‌گاه هشت مورد از آن‌ها را وصل می‌کنیم تا مکعبی جدید تشکیل شود. این عمل ۵۷=۷-۶۴ مکعب به دست می‌دهد.

C : P(۵۸) را به ۲۷ مکعب تقسیم می‌کنیم و هشت مورد از آن‌ها را، برای تشکیل مکعبی جدید، متصل می‌کنیم. سپس همین کار را با دو مکعب افراز انجام می‌دهیم. این عمل ۵۸=(۲۶-۷)×۲+۷-۲۷ مکعب به دست می‌دهد.

C : P(۵۹) را به ۶۴ مکعب تقسیم، و ۲۷ مورد از آن‌ها را، برای تشکیل مکعبی جدید، به هم وصل می‌کنیم. سپس هریک از مکعب‌های باقیمانده را به هشت مکعب تقسیم می‌کنیم. به این ترتیب، C را به ۵۹=(۳×۷)+۲۶-۶۴ مکعب تقسیم کرده‌ایم.

C : P(۶۰) را به هشت مکعب، و سپس هریک از دو مورد از آن‌ها را به ۲۷ مکعب، تقسیم می‌کنیم و به دست می‌آوریم:

۸+(۲×۲۶)=۶۰

C : P(۶۱) را به ۲۷ مکعب تقسیم، و هشت مکعب از آن‌ها را، برای تشکیل مکعبی جدید، متصل می‌کنیم. سپس چهار مورد از مکعب‌های باقیمانده را در نظر می‌گیریم که در قسمتی از یک وجه C مشترکند. این قسمت را P می‌نامیم، و هریک از آن‌ها را به ۲۷ مکعب تقسیم می‌کنیم.

۹ مکعبی را در نظر می‌گیریم که نهمین قسمت P را به عنوان یک وجه دارند و از وصل هشت مکعب کوچک به مکعبی منفرد به دست آمده‌اند. در این صورت، Cرا به ۶۱ مکعب تقسیم کرده‌ایم؛ زیرا:

۲۷-۷+(۴×۲۶)-(۹×۷)=۶۱

از آن‌جا که P(۵۵)، P(۵۶)، ... و P(۶۱) راست هستند، با استفاده از استدلال استقرایی و مرحله‌ی ۷ درمی‌یابیم که P(k)، به ازای هر k ≥ ۵۵، راست است (امتحان انتخابی IMO رومانی، ۱۹۷۸).

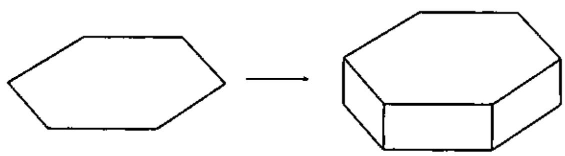
۷. ثابت می‌کنیم که تنها چندضلعی دارای مرکز تقارن، این شرط را برقرار می‌کند. برای رسیدن به این مقصود، فرض می‌کنیم P یک چندضلعی باشد که بتواند به متوازی‌الاضلاع‌هایی تجزیه شود، و L یکی از ضلع‌های آن باشد.

لایه‌ای از متوازی‌الاضلاع‌ها را در نظر می‌گیریم که دارای یک ضلع واقع بر L هستند. لایه‌ی بعدی متوازی‌الاضلاع‌ها، با اضلاعی واقع بر ضلع‌هایی از متوازی‌الاضلاع‌های لایه‌ی اولی که موازی L هستند، دارای مجموع طول‌های اضلاعی موازی با L و برابر با طول L است.

با ادامه‌ی این طریق، سرانجام به لایه‌ای از متوازی‌الاضلاع‌ها برمی‌خوریم که جمیع اضلاعشان بر ضلع دیگری از P واقعند (برای دقت بیش‌تر، توجه داشته باشید که بعضی از متوازی‌الاضلاع‌های لایه‌ی آخری می‌توانند، به قطعه خط‌هایی تباهیده شوند). درنتیجه، P دارای ضلعی موازی L و به همان اندازه‌ی آن است.

این استدلال نشان می‌دهد که اضلاع P، دو به دو موازی و هم‌نهشت هستند، و این موضوع حاکی از آن است که P دارای اضلاعی به تعداد زوج است، و بنا به محدب بودن، اضلاع مقابل آن، اضلاعی اند که موازی و هم‌نهشت هستند. درنتیجه، P دارای مرکز تقارن (وسط قطرهای بزرگ آن) است.

برعکس، با استفاده از استقرا اثبات می‌کنیم که هر چندضلعی دارای مرکز تقارن را می‌توان به موازی‌الاضلاع‌هایی تجزیه کرد. این مطلب، در مورد یک چهارضلعی (یعنی، یک متوازی‌الاضلاع) آشکار است، و مرحله‌ی استقرایی را در شکل ۷ مشخص کرده‌ایم. (kvant (Quantum))



(شکل ۷)

۸. در این‌جا اثباتی با استفاده از استقرا بر n به دست می‌دهیم. به ازای n = ۱ تجزیه‌ای را انتخاب می‌کنیم که توسط خط گذرنده، از دو نقطه‌ی مورد نظر گذشته است.

اکنون فرض می‌کنیم این ویژگی، به ازای جمیع چندضلعی‌های دارای ۲(n - ۱) نقطه‌ی درونی برقرار است، و آن را در مورد یک چندضلعی با ۲n نقطه اثبات می‌کنیم. خط dای را در نظر می‌گیریم که این چندضلعی را قطع نکند. فرض می‌کنیم، A نزدیک‌ترین نقطه به d باشد و B را در میان نقاط باقیمانده چنان اختیار می‌کنیم که زاویه‌ی حاصل از خطوط AB و d مینیمال باشد (این زاویه می‌تواند سرانجام صفر شود).

خط AB چندضلعی را به دو چندضلعی محدب P_1 و P_2 چنان تقسیم می‌کند که P_1 در درون خود شامل هیچ‌یک از ۲n نقطه نباشد و P_2 در درون خود، دارای حداکثر ۲n - ۲ نقطه از این نقاط باشد.

با به کار بردن فرض استقرا نتیجه می‌گیریم که P_2 می‌تواند به n چندضلعی تقسیم شود که شامل ۲n - ۲ نقطه‌ی باقیمانده بر مرزهای خود باشند. این چندضلعی‌ها، همراه با P_1 تجزیه‌ی مطلوب را به دست می‌دهند.

زیرنویس

1. F. Bolyai
2. Gerwin
3. Hilbert
4. M. Dehn

برای دانش آموزان پایه‌ی سوم

۴ معادله‌ی درجه دوم

رابطه‌ی Sها در معادله‌ی درجه دوم

احمد قندهاری

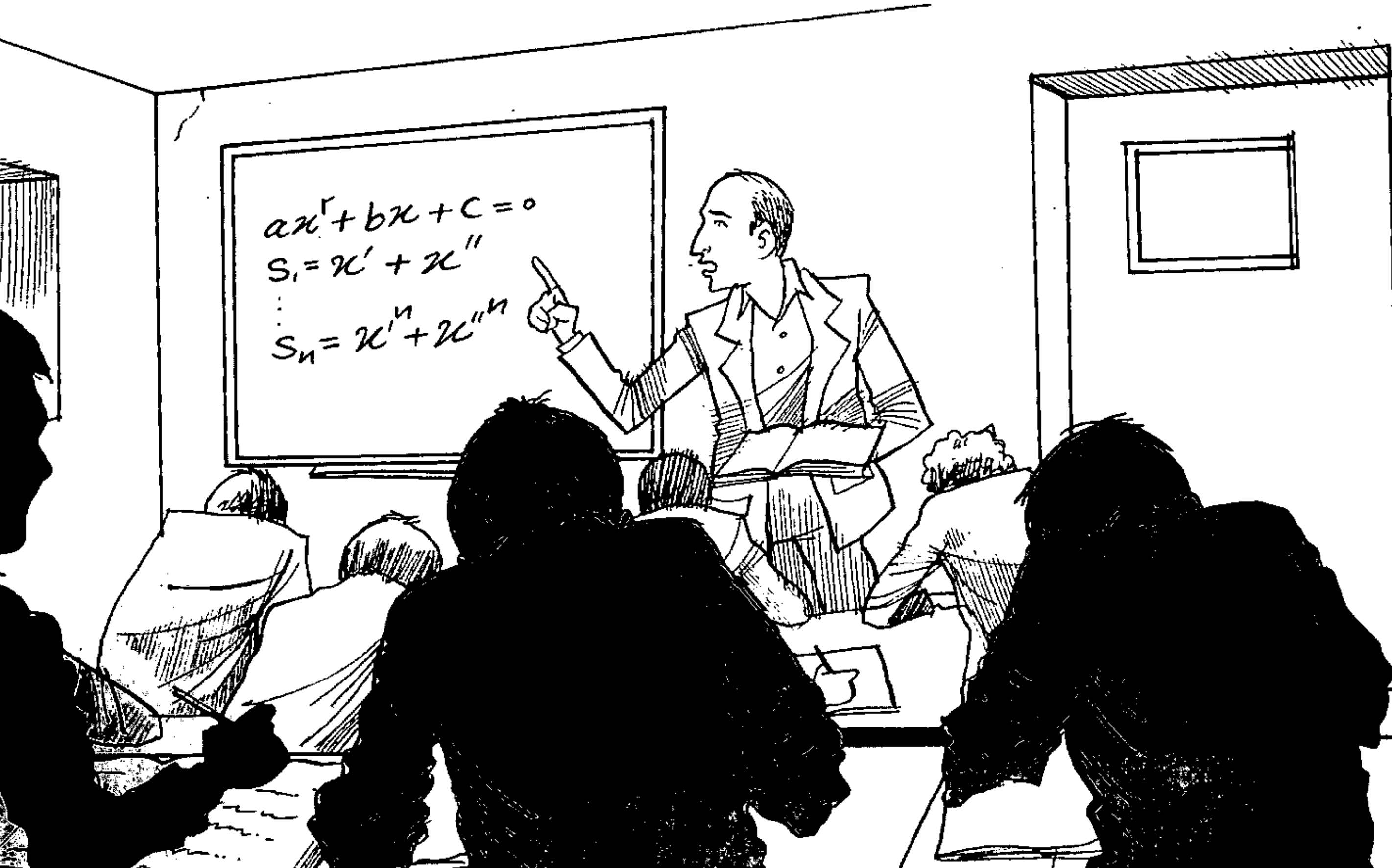
اشاره:
در قسمت اول معادله‌ی درجه دوم، پس از بررسی حالت‌های ناقص معادله و اثبات فرمول‌های حل آن، چند نکته‌ی مفید نیز مطرح شد. در قسمت دوم، تجزیه و تعیین علامت سه جمله‌ای درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ و بحث در تعداد و علامت ریشه‌ها آمد. در قسمت سوم، روابط بین ضریب‌ها و ریشه‌ها و تشکیل معادله در حالت‌های گوناگون بررسی شد و اینک قسمت چهارم.

فرض می‌کنیم:

$$S_1 = x' + x''$$
$$S_2 = x'^2 + x''^2$$
$$S_3 = x'^3 + x''^3$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$S_n = x'^n + x''^n$$

دو طرف معادله‌ی درجه‌ی دوم را در x^{n-2} ضرب می‌کنیم $(n \in N)$:

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} = 0$$



حال در این معادله، یک بار به جای x، x' و یک بار به جای x، x'' را قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} ax'^{n} + bx'^{n-1} + cx'^{n-2} = 0 \\ ax''^{n} + bx''^{n-1} + cx''^{n-2} = 0 \end{cases}$$

این دو معادله را نظیر به نظیر با هم جمع می‌کنیم:

$$a(x'^{n} + x''^{n}) + b(x'^{n-1} + x''^{n-1}) + c(x'^{n-2} + x''^{n-2}) = 0$$

با مفروضات اولیه می‌توان نوشت:

$$\boxed{aS_n + bS_{n-1} + cS_{n-2} = 0}$$

که به آن رابطه‌ی Sها در معادله‌ی درجه دوم می‌گوییم. S_{300}

مسأله‌ی ۱: در معادله‌ی $x^2 - 2x - 1 = 0$ مطلوب است محاسبه‌ی $S_5 = x'^5 + x''^5$

حل: رابطه‌ی S ها را برای این معادله می‌نویسم:

$$S_n - 2S_{n-1} - S_{n-2} = 0$$

می‌دانیم:

$$\begin{cases} S_1 = 2 \\ S_0 = x'^0 + x''^0 = 1 + 1 = 2 \end{cases}$$

$$n = 2 \Rightarrow S_2 - 2S_1 - S_0 = 0$$
$$S_2 - 2(2) - 2 = 0 \Rightarrow S_2 = 6$$

$$n = 3 \Rightarrow S_3 - 2S_2 - S_1 = 0$$
$$S_3 - 2(6) - 2 = 0 \Rightarrow S_3 = 14$$

$$n = 4 \Rightarrow S_4 - 2S_3 - S_2 = 0$$
$$S_4 - 2(14) - 6 = 0 \Rightarrow S_4 = 34$$

$$n = 5 \Rightarrow S_5 - 2S_4 - S_3 = 0$$
$$S_5 - 2(34) - 14 = 0 \Rightarrow S_5 = 82$$

مسأله‌ی ۲. در معادله‌ی $x^2 - 4x - 1 = 0$ اگر $S_{100} = K$، آن‌گاه S_{300} را بیابید.

حل:

$$S_{100} = K$$

$$x'^{100} + x''^{100} = K$$

فرض می‌کنیم: $a = x'^{100}$ و $b = x''^{100}$ پس: $a + b = K$

دو طرف را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$a^3 + b^3 + 3ab(a+b) = K^3$$

$$a^3 + b^3 + 3ab(K) = K^3$$

$$\underbrace{x'^{300} + x''^{300}}_{S_{300}} + 3(x'^{100})(x''^{100})(K) = K^3$$

$$S_{300} + 3K(x'x'')^{100} = K^3$$

$$S_{300} + 3K(-1)^{100} = K^3$$

$$S_{300} + 3K = K^3 \Rightarrow S_{300} = K^3 - 3K$$

چند مسأله درباره‌ی معادله‌های درجه دوم

مسأله‌ی ۱. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشند، آن‌گاه حاصل $K = (\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^3})$ را بیابید.

حل:

$$\alpha.\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow \alpha.\beta = 1 \Rightarrow \beta = \frac{1}{\alpha}$$

$$K = \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + \beta + \beta^2 + \beta^3$$
$$= (\alpha^3 + \beta^3) + (\alpha^2 + \beta^2) + (\alpha + \beta)$$

$$K = (S^3 - 3PS) + (S^2 - 2P) + (S)$$

داریم:

$$\begin{cases} S = -\frac{b}{a} = 3 \\ P = \frac{c}{a} = 1 \end{cases}$$

$$K = (27 - 9) + (9 - 2) + 3 = 18 + 7 + 3 = 28$$

مسأله‌ی ۲: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 5x + 2 = 0$ باشند، با فرض $\alpha > \beta$ حاصل $K = 5\alpha^2 + 3\beta^2 - 5\sqrt{17}$ را بیابید.

حل:

$$K = 5\alpha^2 + 3\beta^2 - 5\sqrt{17}$$

$$K = 4\alpha^2 + \alpha^2 + 4\beta^2 - \beta^2 - 5\sqrt{17}$$

$$K = 4(\alpha^2 + \beta^2) + (\alpha^2 - \beta^2) - 5\sqrt{17}$$

$$K = 4(\alpha^2 + \beta^2) + (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) - 5\sqrt{17}$$

$$K = 4(S^2 - 2P) + \frac{\sqrt{\Delta}}{a}(S) - 5\sqrt{17}$$

داریم:

$$\begin{cases} S = 5 \\ P = 2 \end{cases}$$

$$K = 4(25 - 4) + \frac{\sqrt{25 - 8}}{1}(5) - 5\sqrt{17}$$

$$K = 4(21) + 5\sqrt{17} - 5\sqrt{17} \Rightarrow K = 84$$

مسأله‌ی ۳: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 3x - 1 = 0$ باشند، آن‌گاه حاصل عبارت $K = \alpha^3 + 3\beta^2 + \beta$ را بیابید.

حل:

$$x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 3x + 1$$

$$x = \beta \Rightarrow \beta^2 = 3\beta + 1 \qquad (1)$$

$$K = \alpha^3 + 3\beta^2 + \beta = \alpha^3 + \beta(3\beta + 1)$$

$$K = \alpha^3 + \beta(\beta^2) = \alpha^3 + \beta^3$$

داریم:

$$\begin{cases} S = 3 \\ P = -1 \end{cases}$$

$$K = S^3 - 3PS = 27 - 3(3)(-1) = 27 + 9 = 36$$

مسأله‌ی ۴. اگر a یک ریشه‌ی معادله‌ی $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشد، آن‌گاه حاصل $K = a^4 + \frac{1}{a^4}$ را بیابید.

حل: a ریشه‌ی معادله است، پس در معادله به جای x، a قرار می‌دهیم و دو طرف را بر $a \neq 0$ تقسیم می‌کنیم.

$$a^2 - 3a + 1 = 0$$

$$a - 3 + \frac{1}{a} = 0 \Rightarrow a + \frac{1}{a} = 3$$

دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 = 9 \Rightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} = 7$$

دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$a^4 + \frac{1}{a^4} + 2 = 49 \Rightarrow a^4 + \frac{1}{a^4} = 47 \Rightarrow K = 47$$

مسأله‌ی ۵. اگر a و b و c و d اعداد حقیقی مخالف صفر باشند و c و d ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + ax + b = 0$ و a و b ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + cx + d = 0$ باشند، آن‌گاه مقدار عددی $(a+b+c+d)$ را بیابید.

حل: $x^2 + ax + b = 0 \quad \begin{cases} x' = c \\ x'' = d \end{cases}$

$$\begin{cases} x' + x'' = -a \Rightarrow c + d = -a \Rightarrow a + c + d = 0 & (1) \\ x'.x'' = b \Rightarrow c.d = b & (2) \end{cases}$$

$$x^2 + cx + d = 0 \quad \begin{cases} x' = a \\ x'' = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' + x'' = -c \Rightarrow a + b = -c \Rightarrow a + b + c = 0 & (3) \\ x'.x'' = d \Rightarrow ab = d & (4) \end{cases}$$

رابطه‌ی (۱) = رابطه‌ی (۳) $\Rightarrow a + c + d = a + b + c \Rightarrow \boxed{b = d}$

رابطه (۲): $c.d = b$ و $b = d \Rightarrow \boxed{c = 1}$

رابطه (۴): $ab = d$ و $b = d \Rightarrow \boxed{a = 1}$

رابطه (۱): $a + c + d = 0 \Rightarrow 1 + 1 + d = 0 \Rightarrow \boxed{d = -2}$, $\boxed{b = -2}$

$$\Rightarrow a + b + c + d = 1 - 2 + 1 - 2 = -2$$

مسأله‌ی ۶. اگر $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 4x + m - 2 = 0$ باشند، آن‌گاه حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$k = \cos^4 a - \sin^4 a$$

حل: $\begin{cases} x' = \tan\alpha \\ x'' = \cot\alpha \end{cases}$

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} \Rightarrow \tan\alpha + \cot\alpha = 4 \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 4$$

$$\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha.\cos\alpha} = 4 \Rightarrow \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} = 4 \Rightarrow 4\sin\alpha.\cos\alpha = 1$$

$$\Rightarrow 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\cos^2 2\alpha = 1 - \sin^2 2\alpha = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos 2\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$K = \cos^4\alpha - \sin^4\alpha = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)$$

$$K = (\cos 2\alpha)(1) = \cos 2\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

معادلات تبدیل‌پذیر به معادله‌ی درجه دوم

الف) هر معادله‌ای که به صورت $ax^{2n} + bx^n + c = 0$، $n \in Q$ باشد، با فرض $y = x^n$ به معادله‌ی درجه دوم تبدیل می‌شود و قابل حل است.

مثال ۱: معادله‌ی $16x^8 - 17x^4 + 1 = 0$ را حل کنید.

حل: فرض می‌کنیم $y = x^4$ پس:

مجموع ضریب‌های این معادله صفر است.

$$16y^2 - 17y + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = \frac{1}{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^4 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ x^4 = \frac{1}{16} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2} \end{cases}$$

مثال ۲. معادله‌ی $x^{\frac{1}{4}} - 4x^{\frac{1}{8}} - 2 = 0$ را حل کنید.

حل:

$$x^{\frac{1}{4}} - 4x^{\frac{1}{8}} - 2 = 0 \Rightarrow \sqrt[4]{x} - 4\sqrt[8]{x} - 2 = 0 \qquad x > 0$$

$$y = x^{\frac{1}{8}} \Rightarrow y^2 = x^{\frac{1}{4}} \qquad x > 0 \Rightarrow y > 0$$

$$y^2 - 4y - 2 = 0$$

$$y = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 2}}{1} = 2 \pm \sqrt{6}$$

$$y > 0 \Rightarrow y = 2 + \sqrt{6}$$

$$x^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{x} = 2 + \sqrt{6} \Rightarrow x = (2 + \sqrt{6})^8$$

ب) معادلاتی که به صورت $(P(x) + m)(P(x) + n) = K$ باشند؛ با فرض $P(x) = y$ به معادله‌ی درجه دوم تبدیل می‌شوند.

مثال. معادله‌ی $(x^2 + x - 5)(x^2 + x - 3) = 8$ را حل کنید.

حل: فرض می‌کنیم $y = x^2 + x$ پس:

$$(x^{2}+x-5)(x^{2}+x-3)=8 \Rightarrow (y-5)(y-3)=8 \Rightarrow$$

$$y^{2}-8y+15=8 \Rightarrow y^{2}-8y+7=0$$

مجموع ضریب‌ها صفر است

$$\Rightarrow y=1,\ \ y=7$$

الف) $y=1 \Rightarrow x^{2}+x=1 \Rightarrow x^{2}+x-1=0 \Rightarrow$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2} \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

ب) $y=7 \Rightarrow x^{2}+x=7 \Rightarrow x^{2}+x-7=0$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+28}}{2} \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{29}}{2}$$

ج) معادلاتی که به صورت $P(x)+\frac{m}{P(x)}=K$ باشند، با فرض $P(x)=y$ به معادله‌ی درجه دوم تبدیل می‌شوند.

مثال ۱. معادله‌ی $\frac{(x^{2}+x+1)^{2}+4}{x^{2}+x+1}=6$ را حل کنید.

حل: $x^{2}+x+1$ همواره مثبت است، زیرا $\Delta<0$ و $a>0$

کسر را تفکیک می‌کنیم:

$$\frac{(x^{2}+x+1)^{2}}{x^{2}+x+1}+\frac{4}{x^{2}+x+1}=6$$

$$x^{2}+x+1+\frac{4}{x^{2}+x+1}=6$$

فرض می‌کنیم: $y=x^{2}+x+1$

$$y+\frac{4}{y}=6 \Rightarrow y^{2}+4=6y \Rightarrow y^{2}-6y+4=0$$

$$y=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^{2}-ac}}{a}=\frac{3\pm\sqrt{9-4}}{1}=3\pm\sqrt{5}$$

الف) $y=3+\sqrt{5}$

$$x^{2}+x+1=3+\sqrt{5} \Rightarrow x^{2}+x-(2+\sqrt{5})=0$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+4(2+\sqrt{5})}}{2}$$

ب) $y=3-\sqrt{5}$

$$x^{2}+x+1=3-\sqrt{5} \Rightarrow x^{2}+x-(2-\sqrt{5})=0$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+4(2-\sqrt{5})}}{2}$$

مثال ۲. معادله‌ی $(2-\sqrt{3})^{\sin x}+(2+\sqrt{3})^{\sin x}=2$ را حل کنید.

حل:

$$2+\sqrt{3}=\frac{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{2-\sqrt{3}}=\frac{4-3}{2-\sqrt{3}}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}$$

بنابراین داریم:

$$(2-\sqrt{3})^{\sin x}+\frac{1}{(2-\sqrt{3})^{\sin x}}=2$$

فرض می‌شود: $y=(2-\sqrt{3})^{\sin x}$ در نتیجه:

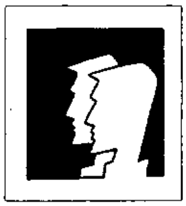
$$y+\frac{1}{y}=2 \Rightarrow y^{2}+1=2y \Rightarrow y^{2}-2y+1=0 \Rightarrow$$

$$(y-1)^{2}=0 \Rightarrow y-1=0 \Rightarrow y=1$$

$$(2-\sqrt{3})^{\sin x}=y$$

$$(2-\sqrt{3})^{\sin x}=1 \Rightarrow (2-\sqrt{3})^{\sin x}=(2-\sqrt{3})^{0}$$

$$\Rightarrow \sin x=0 \Rightarrow x=k\pi$$



معمای فکری و منطقی

۱. در میان صد نفر متقاضی برای شغل فنی خاصی، مشخص شد که ده نفر هیچ‌گاه دوره‌ی شیمی یا فیزیک را نگذرانده‌اند. هفتاد و پنج نفر دست‌کم یک دوره در شیمی گذرانده‌اند. هشتاد و سه نفر هم دست‌کم یک دوره در فیزیک گذرانده‌اند.

چند نفر از متقاضیان، هم در شیمی هم در فیزیک، کاری انجام داده‌اند؟

***

[illegible]

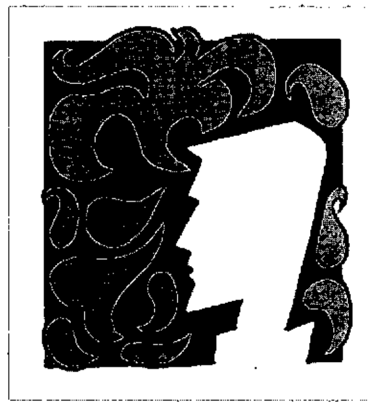
۲. B، H، J، و T روزی برای سرگرمی به مسابقه‌ی طناب‌کشی پرداختند. گرچه به سختی، اما H توانست B و J را با هم بکشد و H و B با هم توانستند T و J را نگهدارند و هیچ جفتی نتوانست دیگری را حرکت دهد. اما اگر J و B جایشان عوض می‌شد، آن‌وقت T و B مسابقه را نسبتاً به آسانی می‌بردند.

از این چهار، کدام یک قوی‌ترین است و به ترتیب نفرات بعدی کدامند؟

***

[illegible]

[illegible]



برای دانش‌آموزان پایه‌ی دوم

تفریح اندیشه

حسین نامی ساعی

دو چوپان با هم ۳۵ رأس گوسفند را فروختند و از فروش آن‌ها مبالغ برابر برداشت کردند. چوپان اول به چوپان دیگر گفت: «اگر من گوسفندهای تو را به قیمت گوسفندهای خودم فروخته بودم، ۴۵۰ هزار تومان به دست می‌آوردم.»

و چوپان دوم گفت: «اگر گوسفندهای تو را من به قیمت گوسفندهای خودم فروخته بودم، ۸۰۰ هزار تومان نصیبم می‌شد.»

بگویید، هر کدام چند رأس گوسفند داشتند؟

حل: فرض می‌کنیم تعداد گوسفندهای چوپان اول x باشد. در این صورت، تعداد گوسفندهای چوپان دوم $۳۵ - x$ است. اگر تعداد گوسفندهای اولی برابر تعداد گوسفندهای دومی بود، یعنی $۳۵ - x$ رأس، آن گاه ۴۵۰ هزار تومان به دست می‌آورد. به عبارت دیگر، هر رأس گوسفند را به قیمت $\frac{۴۵۰}{۳۵ - x}$ هزار تومان می‌فروخت و اگر چوپان دوم به تعداد گوسفندهای چوپان اول، یعنی x رأس گوسفند داشت، آن گاه ۸۰۰ هزار تومان به دست می‌آورد. به عبارت دیگر، هر رأس گوسفند را به قیمت $\frac{۸۰۰}{x}$ هزار تومان می‌فروخت. بنابراین، چوپان اول؛ $x \times \frac{۴۵۰}{۳۵ - x}$ هزار تومان و چوپان دوم؛ $(۳۵ - x) \times \frac{۸۰۰}{x}$ هزار تومان کسب کرده‌اند و چون پول به دست آمده برای هر دو یکسان بوده است، می‌توان نوشت:

$$(۳۵ - x) \times \frac{۸۰۰}{x} = x \times \frac{۴۵۰}{۳۵ - x}$$

$$۰/۳۵x^۲ - ۵۶x + ۹۸۰ = ۰$$

درنتیجه داریم:

$$\Delta = (-۵۶)^۲ - ۴ \times ۰/۳۵ \times ۹۸۰ = ۱۷۶۴$$

$$x = \frac{۵۶ \pm \sqrt{۱۷۶۴}}{۲ \times ۰/۳۵}$$

$$x_۱ = ۱۴۰$$

$$x_۲ = ۲۰$$

اگر تعداد گوسفندهای چوپان اول ۱۴۰ رأس باشد، تعداد گوسفندهای چوپان دوم $۳۵ - ۱۴۰ = -۱۰۵$ است که قابل قبول نیست. پس $x_۱ = ۱۴۰$ قابل قبول نیست.

اگر تعداد گوسفندهای چوپان اول ۲۰ باشد، تعداد گوسفندهای چوپان دوم $۳۵ - ۲۰ = ۱۵$ است که جواب $x_۲ = ۲۰$ قابل قبول است.

بنابراین، چوپان اول ۲۰ رأس گوسفند و چوپان دوم ۱۵ رأس گوسفند داشته است.

مسأله‌ی فواره‌ها و زیرآب

اشاره:

همکار گرامی، آقای دکتر شرف‌الدین، اثری تحت عنوان «تاریخ ریاضیات در ایران از عهد صفوی تا تأسیس مدرسه‌ی دارالفنون» شامل ۱۱۰ صفحه، در کتاب «علوم محضه از صفویه تا تأسیس دارالفنون» عرضه کرده‌اند. کتاب یاد شده بیش از ۴۵۰ صفحه دارد که به تازگی از طرف «انجمن آثار و مفاخر فرهنگی ایران» منتشر شده است. ما در این جا یک مطلب از اثر آقای شرف‌الدین را نقل می کنیم. این مطلب درباره مسأله‌ای است که با عنوان «مسأله‌ی فواره‌ها و زیرآب»، سال‌ها در ایران تدریس می‌شد و سپس چند سالی مورد انتقاد بعضی قرار گرفت.

آقای شرف‌الدین در کتاب خود درباره‌ی این مسأله توضیحاتی داده‌اند. ایشان در ابتدای مطلب اظهار داشته‌اند که این مسأله در کتاب‌های قدیم از جمله «کشکول» شیخ بهایی آمده است. سپس نظر خود را درباره‌ی آن اظهار داشته‌اند.

«حوضی است که سه فواره دارد. یکی از آن دو فواره، آن را در یک چهارم روز پر می‌کند و فواره‌ی دوم در یک ششم روز و سومی در یک هفتم و حوض را فاضلابی است که در یک هشتم روز حوض را تخلیه می‌کند. تعیین کنید، با باز کردن هر سه فواره و فاضلاب، حوض در چه زمان پر می‌شود؟

راه حل آن است که بدانیم، هر سه فواره در یک روز چند برابر حوض را پر می‌کنند. تا روی هم هفده حوض را پر کنند. فاضلاب نیز در یک روز، هشت برابر حوض را خالی می‌کند. بنابراین با کسر کردن این از آن، حاصل نه می‌ماند. پس حوض در یک نهم روز پر خواهد شد.[1]»

بازبینی ارزش مسأله

هنگامی که دانش‌آموز بودم، در درس حساب، مسائلی مانند مسأله‌ی بالا داده می‌شد؛ مسأله‌ای فکری و لذت‌بخش. از این رو، دانش‌آموزان باهوش را جذب می‌کرد. البته، مسائلی که در حساب داده می‌شد، کاملاً متنوع بود و این مسأله تنها یکی از آن‌ها بود که به منظور تقویت استدلال دانش‌آموز داده می‌شد. چند سالی گذشت و مسأله‌ی یاد شده مورد انتقاد و اعتراض قرار گرفت. بعضی از معترضان حتی می گفتند:

این مسأله بیهوده است. منظور آن‌ها این بود که هیچ‌کس فواره‌ها و فاضلاب یک حوض را با هم باز نمی‌کند. بنابراین چرا باید چنین مسأله‌ای به دانش‌آموزان داده شود.

من از خود می‌پرسم، چرا باید مسأله‌ای که قرن‌ها مطرح بوده است (در زمان شیخ‌بهایی و پیش و بعد از او) بیهوده نامیده شود؟ بنابراین کاملاً لازم می‌دانم، درباره‌ی ارزش آن توضیح بدهم:

اکنون سه مسأله در زمینه‌ی بحثی که داریم، ذکر می‌کنم.

۱. حوضی دارای دو فواره است. اگر یکی از آن‌ها به تنهایی باز باشد، حوض در مدت سه ساعت پر می‌شود و اگر فواره‌ی دیگر، به تنهایی باز باشد، حوض در مدت چهار ساعت پر می‌شود. تعیین کنید اگر دو فواره با هم باز باشند، حوض در چه مدتی پر می‌شود؟

حل:

چون فواره‌ی اول در سه ساعت حوض را پر می‌کند، پس این فواره در مدت یک ساعت، یک سوم حوض را پر می‌کند. با دلیل مشابه می‌گوییم، فواره‌ی دوم در مدت یک ساعت، یک چهارم حوض را پر می‌کند. پس اگر دو فواره با هم باز باشند، در مدت یک ساعت، هفت دوازدهم حوض پر می‌شود. بنابراین اگر دو فواره با هم باز باشند، حوض در مدت $\frac{12}{7}$ ساعت پر می‌شود.

۲. حوضی دارای دو فواره‌ی B, A و یک فاضلاب C است. اگر فواره‌ی A به تنهایی باز باشد، حوض در مدت ۳ ساعت پر می‌شود. اگر فواره‌ی B به تنهایی باز باشد، حوض در مدت ۴ ساعت پر می‌شود. اگر حوض پر باشد، فاضلاب در مدت ۲ ساعت حوض را تخلیه می‌کند. تعیین کنید، اگر حوض پر از آب باشد و دو فواره و فاضلاب با هم باز شوند، حوض در چه مدتی تخلیه می‌شود؟

حل:

در مدت یک ساعت، $\frac{۳۳}{۶۰}$ حوض تخلیه می‌شود. پس حوض در مدت $\frac{۶۰}{۳۳}$ ساعت تخلیه می‌شود.

۳. حوضی دارای دو فواره‌ی B،A و یک فاضلاب C است. فواره‌ی A در مدت سه ساعت و فواره‌ی B در مدت ۴ ساعت حوض را پر می‌کنند. اگر حوض پر باشد، فاضلاب در مدت ۲ ساعت حوض را تخلیه می‌کند. اگر آب حوض تا نیمه باشد، آن‌گاه دو فواره و فاضلاب را باز کنیم، حوض در چه مدت تخلیه می‌شود؟

حل این مسأله مانند حل مسأله‌ی ۲ است.

اهمیت استدلالی که در حل مسأله‌ی فواره‌ها به کار گرفته شد

روش استدلالی که در حل این سه مسأله به کار بردیم، در حل تعداد زیادی از مسائل ریاضی به کار می‌رود. در سطرهای بعد، چند مسأله را مطرح می‌کنیم که با همین شیوه‌ی استدلالی حل می‌شوند.

باید توجه داشت، روش‌های استدلال بسیار مهم هستند، چرا که به کمک آن‌ها می‌توان، بسیاری از قضیه‌ها را اثبات کرد. برای مثال، از برهان خلف و روش استقراء یاد می‌کنیم که به کمک آن‌ها می‌توان قضیه‌های زیادی را اثبات کرد.

الف) مثال۱: شبکه‌ی الکتریکی متشکل از مولد G و دو مقاومت موازی R_1، R_2 را در نظر می‌گیریم. مقاومت معادل این دو مقاومت را R می‌نامیم. مقدار R چه‌قدر است؟

راه حلی که در اکثریت قریب به اتفاق کتاب‌های فیزیک مشروح است، مبتنی بر به کارگیری فرمول $i=\frac{V}{R}$ است که ما از ذکر آن خودداری می‌کنیم.

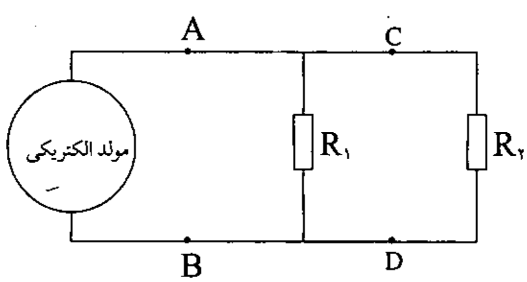
روشی که اکنون برای حل مسأله شرح می‌دهیم، همان روشی است که در حل مسأله‌ی فواره‌ها (مسأله‌ی ۱) به کار گرفته شد. می‌گوییم، چون در شبکه‌ی الکتریکی مورد نظر، در مقابل جریان الکتریسیتهٔ بین دو نقطه‌ی A و B، مقاومت R_1 وجود دارد، پس برای عبور جریان الکتریسیته بین دو نقطه‌ی A و B، پذیرایی $\frac{1}{R_1}$ وجود دارد. همچنین چون در مقابل عبور جریان الکتریسیته بین دو نقطه‌ی C و D، مقاومت R_2 وجود دارد، پس برای عبور جریان الکتریسیته بین دو نقطه‌ی C و D پذیرایی $\frac{1}{R_2}$ وجود دارد.

بنابراین، پذیرایی قسمتی از مدار که از دو مقاومت موازی R_1 و R_2 تشکیل شده است، عبارت است از $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$. حال اگر دو مقاومت R_1 و R_2 را برداریم و به جای آن‌ها مقاومت معادل R را بگذاریم، بین دو نقطه‌ی M و N، برای جریان الکتریسیته، پذیرایی $\frac{1}{R}$ وجود دارد، بنابراین چنین داریم:

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$$

توجه می‌کنید که در این جا نیز همان روش استدلالی حل مسأله فواره‌ها به کار آمد.

ب) مثال ۲: دو تراکتور را در نظر می‌گیریم. یکی از آن‌ها در مدت سه روز زمینی را شخم می‌زند و دیگری در مدت چهار روز. اگر هر دو با هم کار کنند، زمین در چه مدت شخم زده می‌شود.



این مسأله را نیز با همان روشی که برای حل مسأله‌ی فواره‌ها گفتیم، می‌توان حل کرد.

توضیح درباره‌ی اعتبار مسأله‌ی یاد شده

مسأله‌ای که درباره‌ی اعتبار آن اعتراض‌هایی می‌شد، به چند دلیل با ارزش است:

نخست آن که مسأله‌ی یاد شده مسأله‌ای فکری است که برای تقویت استدلال و تشخیص استعداد دانش‌آموزان مناسب است.

دوم این که مسأله‌ی فوق فقط در همان زمان اعتراض‌هایی داشته و پیش از آن و پس از آن به کار می‌رفته است. در این مورد توضیح می‌دهیم:

اگر بخواهیم یک زمین زراعتی را با جوی آبی که آبدهی[2] آن اندک است و زمین در دوردست واقع است، آب دهیم، یا جریان آب به علت نفوذ در زمین، به مقصد نمی‌رسد یا مقدار اندکی از آن به مقصد می‌رسد. برای رفع این مشکل، آب جوی را در استخری وارد می‌کنند و پس از آن که آب استخر به مقدار کافی انباشته شد، زیر آب استخر را می‌زنند. بدین ترتیب، آب استخر را با دبی کافی به مقصد می‌رسانند.

مسأله‌ی زیر همانند مسأله‌ی حوض با فواره و زیر آب مذکور در شماره‌ی (۲) است، اما به طور مناسب‌تر طرح شده است:

استخری دارای مجرای آبی است که آن را در دو روز پر می‌کند و زیر آبی که آن را در چهار ساعت تخلیه می‌کند. به فرض آن که آب در استخر تا نیمه باشد و مجرای آب باز باشد، اگر زیر آب استخر را باز کنیم، استخر در چه مدت تخلیه می‌شود؟

زیرنویس

۱. نقل از کتاب کشکول شیخ بهایی

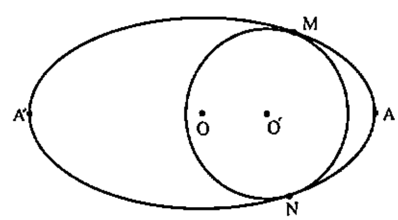
2. Debit

برای دانش‌آموزان دوره‌ی پیش‌دانشگاهی

دایره‌های محاط در بیضی

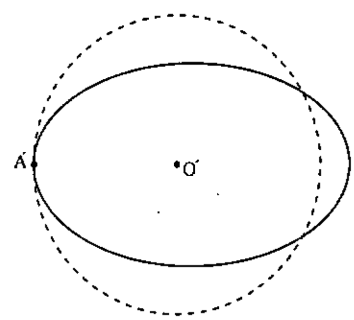
حسین کریمی

مسأله. بیضی با خروج از مرکز e مفروض است. مطلوب است، احتمال پیدا کردن نقطه‌ای بین دو رأس کانونی که بتوان دایره‌ای به مرکز آن نقطه رسم کرد تا بر بیضی در دو نقطه مماس باشد. (شکل۱)



(شکل۱)

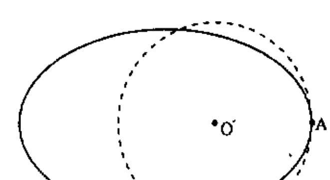
پیش‌نیاز: برای حل مسأله یادآوری چهار مطلب لازم است. اما قبل از بیان آن‌ها ضرورت دارد، به این نکته توجه کنیم که اگر می‌خواستیم دایره در حداقل یک نقطه و یا حداکثر دو نقطه بر بیضی مماس باشد، هر نقطه بین دو رأس کانونی را می‌توانستیم به عنوان مرکز دایره فرض کنیم. زیرا اگر O' نقطه‌ای غیر از مرکز بیضی و بین دو رأس کانونی A و A' باشد، آن‌گاه دایره‌هایی به مرکز O' و به شعاع‌های $O'A$ و $O'A'$ دایره‌هایی بودند که بر بیضی در یک نقطه مماس می‌شوند. در این صورت، احتمال مورد نظر برابر ۱ می‌شد. (شکل‌های ۲، ۳ و ۴)



(شکل۲)

۱. زاویه‌ی بین دو منحنی، زاویه‌ای است که بین خطوط مماس بر دو منحنی در نقطه‌ی تماس حاصل می‌شود. بدین‌ترتیب، دو منحنی را مماس بر هم گوییم، هرگاه در نقطه‌ی تماس، دارای خط مماس مشترک باشند. (شکل‌های ۵ و ۶)

۲. اگر M نقطه‌ای از بیضی به کانون‌های F و F' باشد، خطوط مماس و قائم که بر بیضی از نقطه‌ی M رسم شده‌اند، به ترتیب نیمساز زاویه خارجی و داخلی $F'\hat{M}F$ خواهند بود (خاصیت انعکاسی در بیضی). (شکل۷)



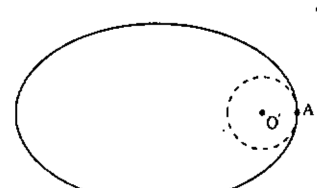
(شکل۳)

۳. در هر مثلث، نیمساز هر زاویه، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت دو ضلع زاویه قطع می‌کند. (شکل۸)

$$\frac{F'O'}{O'F}=\frac{MF'}{MF}$$

۴. اگر M نقطه‌ای از بیضی به کانون F باشد، در این صورت: $MF \geq a-c$ و $MF \leq a+c$.

با توجه به مطالب گفته شده به حل مسأله می‌پردازیم.

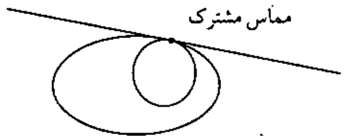


(شکل۴)

حل: فرض کنیم دایره‌ی $C(O',R)$ بر بیضی در دو نقطه‌ی M و N مماس است که در آن، O' (مرکز دایره) نقطه‌ای از قطر اصلی بیضی (بین دو رأس کانونی) است.

با توجه به پیش‌نیاز۱، خط Δ در نقطه‌ی M بر هر دو منحنی مماس و خط Δ' در آن نقطه بر هر دو منحنی قائم است. همچنین، با توجه به پیش‌نیاز۲، Δ' نیمساز زاویه‌ی $F'\hat{M}F$ است و با توجه به پیش‌نیاز۳ داریم: $\frac{F'O'}{O'F} = \frac{MF'}{MF}$ (شکل۹)

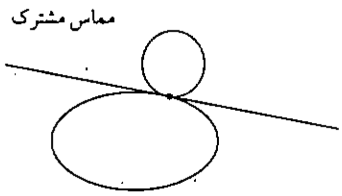
حال اگر فاصله‌ی O' را تا O (مرکز بیضی) برابر با x، و فاصله‌ی هر کانون را از مرکز بیضی، c در نظر بگیریم، داریم:



(شکل۵)

$$\begin{cases} F'O' = c + a \\ O'F = c - x \end{cases}$$

پس:



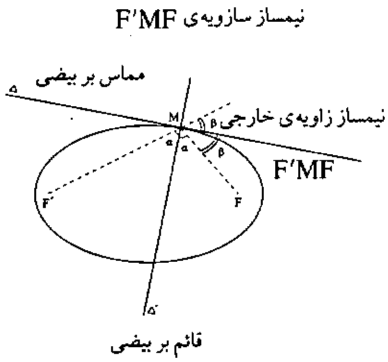
(شکل۶)

$$\frac{F'O'}{O'F} = \frac{MF'}{MF} \Rightarrow \frac{c+x}{c-x} = \frac{MF'}{MF} \Rightarrow \frac{c+x+c-x}{c-x} = \frac{MF'+MF}{MF}$$

با توجه به این‌که M نقطه‌ای از بیضی است، بنابراین:

$$MF' + MF = 2a$$

$$\Rightarrow \frac{2c}{c-x} = \frac{2a}{MF} \Rightarrow ac - ax = c.MF \Rightarrow a - \frac{a}{c}x = MF$$

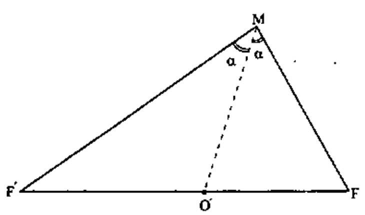


(شکل۷)

که با توجه به پیش‌نیاز۴ داریم:

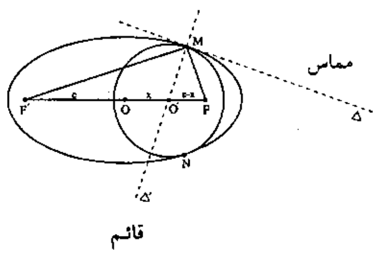
$$a - \frac{a}{c}x \geq a - c \Rightarrow x \leq \frac{c^2}{a}$$

و این نشان می‌دهد که فاصله‌ی O' (مرکز دایره) از O (مرکز بیضی) حداکثر برابر $\frac{c^2}{a}$ است. توجه شود که برای مثال، هرگز نمی‌توان دایره‌ای به مرکز کانون بیضی رسم کرد که بر بیضی در دو نقطه مماس باشد. پس اگر احتمال مورد نظر مسأله را با P نشان دهیم و بدون آن‌که خللی به کلیت مسأله وارد شود، فرض کنیم محور طول‌ها، محور کانونی و مبدأ مختصات، مرکز بیضی باشد که با توجه به: $|OO'| = x \leq \frac{c^2}{a}$ داریم: $\frac{-c^2}{a} \leq \overline{OO'} \leq \frac{c^2}{a}$، پس خواهیم داشت:



(شکل۸)

$$P = \frac{\text{طول بازه‌ی ساعد}}{\text{طول بازه‌ی ممکن}} = \frac{\left|\left[\frac{-c^2}{a}, \frac{c^2}{a}\right]\right|}{\left|[-a, a]\right|} = \frac{\frac{2c^2}{a}}{2a} = \frac{c^2}{a^2} = e^2.$$



(شکل۹)

تذکر: بدیهی است، اگر می‌خواستیم O' بین دو کانون F و F' انتخاب شود، در آن صورت احتمال برابر با e می‌شد؛ زیرا: $P = \frac{\left|\left[-\frac{c^2}{a}, \frac{c^2}{a}\right]\right|}{\left|[-c, c]\right|} = \frac{\frac{2c^2}{a}}{2c} = \frac{c}{a} = e$.

سلسله درس‌هایی از ۵ ریاضیات گسسته

توزیع اعداد اول

سیدمحمدرضا هاشمی موسوی

می‌دانیم که بی‌نهایت عدد اول وجود دارد، توزیع اعداد اول در مجموعه‌ی اعداد طبیعی بسیار پر رمز و راز است و به ظاهر هیچ قاعده و قانونی ندارد. آن‌ها مانند علف‌های هرز در میان اعداد طبیعی رشد می‌کنند و هیچ کس نمی‌تواند پیش‌بینی کند، عدد اول بعدی کجا سبز خواهد شد. چاپ مقاله‌ای با عنوان «نخستین ۵۰ میلیون عدد اول»[1]، دید اندیشمندان و محققان ریاضی را به کلی عوض کرد و نظر فعلی آن‌ها چنین است: «اعداد اول از نظم حیرت‌آوری پیروی می‌کنند. قوانینی بر چگونگی رفتار آن‌ها حکمفرماست و این اعداد، تقریباً با انضباطی نظامی از این قوانین تبعیت می‌کنند.»

می‌دانیم که به جز نخستین دو عدد اول، یعنی ۲ و ۳، هیچ دو عدد اولی متوالی نیستند؛ زیرا همه‌ی اعداد اول غیر از ۲، فردند. بنابراین، اختلاف دو عدد اول متوالی حداقل برابر ۲ است. برای بیان این حالت، تعریف زیر را می‌آوریم:

تعریف: دو عدد اول متوالی که اختلاف آن‌ها برابر ۲ باشد را در اصطلاح «جفت دوقلو» می‌نامیم. برای مثال، جفت‌های دوقلوی «۵ و ۷»، «۱۱ و ۱۳»، «۱۷ و ۱۹»، «۲۹ و ۳۱» و «$10^{12}+61$ و $10^{12}+63$» نمونه‌هایی از جفت اعداد دوقلو هستند.

تاکنون در مورد نامتناهی یا متناهی بودن جفت‌های دوقلو به نتیجه‌ای دست نیافته‌اند. با استفاده از محاسبه‌گرها، تعداد ۱۵۲۹۸۲ جفت دوقلوی کوچک‌تر از 3×10^{7} و بین 10^{12} و $10^{12}+10000$، ۲۰ جفت عدد دوقلو یافته‌اند که این واقعیت نشانگر رشد افزایشی ولی بسیار کند این اعداد در مجموعه‌ی

اعداد طبیعی است. به‌علاوه، نشان می‌دهند که اعداد اول تا چه حد می‌توانند نزدیک به هم باشند.

از طرف دیگر، در میان اعداد اول شکاف‌های پهناوری وجود دارند؛ شکاف‌هایی به اندازه‌ی دلخواه بزرگ در مجموعه‌ی اعداد اول. به بیان دیگر، برای هر عدد طبیعی n، به تعداد n عدد متوالی وجود دارند که همگی مرکبند؛ زیرا n عدد متوالی زیر همگی مرکبند:

$$(n+1)!+2 = 1\times2\times3\times\ldots\times(n+1)+2 = 2k_1+2 = 2(k_1+1)$$
$$(n+1)!+3 = 1\times2\times3\times\ldots\times(n+1)+3 = 3k_2+3 = 3(k_2+1)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(n+1)!+(n+1) = 1\times2\times3\times\ldots\times(n+1)+(n+1) = (n+1)k_n+(n+1) = (n+1)(k_n+1)$$

بنابراین، در این‌جا ثابت شد که به ازای هر k با شرط $2 \le k \le n+1$، عدد $(n+1)!+k$ مرکب و بر k بخش‌پذیر است. پس برای مثال، اگر بخواهیم ۴۰ عدد متوالی نشان دهیم که در میان آن‌ها هیچ عدد اولی موجود نباشد، به‌راحتی می‌توان ۴۰ عدد: $41!+2$، $41!+3$، ... و $41!+41$، را پیشنهاد داد. با مشاهده‌ی جدول‌های اعداد اول می‌توان پذیرفت که هیچ دلیل روشنی برای این‌که چرا عددی اول است و عدد دیگری مرکب، وجود ندارد.

با مشاهده‌ی این اعداد، انسان خود را در برابر یکی از رازهای غیرقابل توضیح آفرینش می‌بیند. تلاش پیگیر ریاضیدانان هم سالیان سال است که نتوانسته است رمز و راز این اعداد مرموز را بشکافد. ریاضیدانان به دنبال اعداد اولی هستند که از اعداد اول شناخته شده‌ی قبلی بزرگ‌تر باشد. برای مثال، در سال ۱۸۷۶، **لوکاس** ثابت کرد که عدد $(2^{127}-1)$ اول است. مدت ۷۵ سال، این عدد بزرگ‌ترین عدد اول شناخته شده بود. دیدن این عدد ممکن است، این واقعه‌ی تاریخی را برای ما ملموس‌تر کند؛ زیرا این عدد، یک عدد ۳۹ رقمی است:

$$2^{127}-1=\overbrace{170141183460\ldots\ldots\ldots7}^{\text{۳۹ رقم}}$$

از سال ۱۹۴۱، با ظهور ماشین‌های محاسبه‌گر الکترونیکی، اعداد اول بزرگ‌تری کشف شدند. از جمله کسانی که به عددهای اول بزرگ‌تری رسیدند، می‌توان **فرید، میلر، ویلر، لمر، رابینسون، ریول، هورویتس، سلفویج، گیلیس، تاکرمن، نول، نیکل، اسلووینسکی، نلسون و دمبارت** را نام برد. بزرگ‌ترین عدد اولی که تا سال ۱۹۸۵ شناخته شده بود، عددی ۶۵۰۵۰ رقمی بود که دمبارت آن را چنین $(2^{216091}-1)$ نمایش داد (برای آشنایی با اعداد بزرگ اول، به مقاله‌ی ارزشمند «نخستین ۵۰ میلیون عدد اول» از دان‌زاگیر رجوع کنید).

در حال حاضر (۲۰۰۶) عدد $(2^{30402457}-1)$ (یعنی مرسن۴۳) بزرگ‌ترین عدد شناخته شده است.

توابع مولد اعداد اول

هر عدد اول فرد به یکی از صورت‌های $4k\pm1$ یا $6n\pm1$ و... می‌تواند ظاهر شود. در واقع، با هریک از این دستورها می‌توان، همه‌ی اعداد اول را تولید کرد. ولی مسأله‌ی اصلی در این‌جا، یافتن دستوری است که به ازای هر عدد طبیعی دلخواه، یک عدد اول تولید کند. یعنی دستوری یا قانونی ارائه دهیم که فقط عدد اول توزیع کند. می‌دانیم تا به حال انسان به چنین دستوری دست نیافته و فقط دستورهای خاصی نظیر: $f(n)=n^2+n+11$، $F(n)=n^2-n+41$ (دستور اویلر) و... را به‌دست آورده است که هیچ‌یک از این دستورها جوابگوی مسأله‌ی «تابع مولد اعداد اول» نخواهد شد. زیرا، اولین دستور به‌ازای $1\le n\le 9$، و دومین دستور به ازای $1\le n\le 40$، عددی اول است، ولی $f(10)=11^2$ و $F(41)=41^2$، اعداد اول نیستند و همین یک نمونه برای هریک از این دستورها کافی است تا آن‌ها را از درجه‌ی اعتبار ساقط کند.

دیریکله[2] ثابت کرد، اگر a و b نسبت به هم اول باشند، عبارت $ak+b$ به ازای اعداد طبیعی k، بی‌نهایت عدد اول تولید می‌کند. با این همه، تا به حال هیچ عبارتی به صورت $ak+b$، شناخته نشده است که فقط اعداد اول تولید کند.

مسأله: ثابت کنید، هیچ چندجمله‌ای با ضرایب صحیح وجود ندارد که مولد اعداد اول باشد.

اثبات: فرض می‌کنیم $f(n)$ چندجمله‌ای مولد اعداد اول باشد؛ یعنی به ازای هر n طبیعی، فقط اعداد اول تولید کند:

(a_iها اعداد صحیح و $a_k \neq 0$)

$$f(n)=a_kn^k+\ldots+a_1n+a_0$$

به ازای عدد ثابتی مثل n_1، $f(n_1)$ عددی اول است:

$$f(n_1)=p$$

حال عبارت $f(n_1+pm)$ را به ازای اعداد صحیح m درنظر می‌گیریم. بنابراین:

$$f(n_1+pm)=a_k(n_1+pm)^k+\ldots+a_1(n_1+pm)+a_0$$

$$= (a_k n_1^k + \ldots + a_1 n_1 + a_0) + pT(m)$$
$$= p + pT(m)$$
$$= p(1 + T(m))$$

$T(m)$ یک چندجمله‌ای با ضرایب صحیح است. بنابراین، $f(n)$ به ازای بی‌نهایت عدد صحیح، اعداد مرکب تولید می‌کند و این با فرض مسأله تناقض دارد.

توجه: هر چندجمله‌ای از درجه‌ی k، بیش از k مرتبه (به عدد درجه‌ی خود) نمی‌تواند یک مقدار خاص را به خود اختصاص دهد. بنابراین، $f(n)$ و حالت خاص آن $f(n_1 + pm)$، به ازای همه‌ی اعداد صحیح نمی‌توانند برابر مقدار خاصی مثل صفر یا $\pm p$ شوند.

در سال‌های اخیر، ریاضیدانان به موفقیت‌هایی در زمینه‌ی توابع مولد اعداد اول دست یافته‌اند که از همه‌ی آن‌ها مهم‌تر، قضیه‌ی میلز[3] است که ثابت می‌کند، عدد حقیقی مثبتی مثل r یافت می‌شود که در دستور زیر قرار می‌گیرد و دستور زیر:

$$n \in N:\ f(n) = \left\lfloor r^{3^n} \right\rfloor \quad (\lfloor\ \rfloor : \text{قسمت درست عدد})$$

به ازای هر n طبیعی، فقط عدد اول تولید می‌کند[4]. بدیهی است که این دستور فقط وقتی ارزش دارد که عدد حقیقی r معلوم شود؛ زیرا با این دستور، حتی یک عدد اول هم نمی‌توان ساخت.

اعداد فرما

در این‌جا، نوع خاصی از اعداد را معرفی می‌کنیم که محرکی برای پژوهش و تحقیقات فراوان در زمینه‌ی اعداد اول شده است. این نوع اعداد خاص به صورت $(2^m + 1)$ هستند. ابتدا به بررسی مسأله‌ی زیر می‌پردازیم.

مسأله: در صورتی که $(2^m + 1)$ عددی اول باشد، ثابت کنید m باید به صورت توانی از ۲ باشد:

$$\text{عدد اول} = 2^m + 1 \Rightarrow m = 2^n$$

اثبات: با فرض این که m توانی از ۲ نباشد، به تناقض خواهیم رسید. زیرا، اگر m دارای یک شمارنده‌ی فرد مثل $2k+1$ $(k \ge 1)$ باشد:

$$m = (2k+1)s$$

بنابراین، می‌توان نوشت:

$$2^m + 1 = 2^{(2k+1)s} + 1 = (2^s)^{2k+1} + 1$$
$$= (2^s + 1)(2^{2ks} - 2^{(2k-1)s} + \ldots + 2^{2s} - 2^s + 1)$$

یعنی $2^m + 1$، در صورتی که m دارای شمارنده‌ی فرد باشد، دارای تجزیه‌ی نابدیهی است و این خلاف اول بودن $2^m + 1$ است.

تعریف: هر عدد به صورت $F_n = 2^{2^n} + 1$ $(n \ge 0)$ را «عدد فرما» گویند و اگر F_n اول باشد، آن را عدد اول فرما می‌نامند.

نکته: همه‌ی اعدادی که به صورت $(n^{n^n} + 1)$ هستند، به ازای هر $n > 1$ (طبیعی) وقتی اولند که n به صورت $2^{2^k} (k \ge 0)$ باشد. فرما، که اغلب حدس‌هایش مورد توجه ریاضیدانان بوده است، مشاهده کرد که F_n به ازای $n \in \{0,1,2,3,4\}$، عددی اول است:

$$F_0 = 2^{2^0} + 1 = 3,\quad F_1 = 2^{2^1} + 1 = 5,\quad F_2 = 2^{2^2} + 1 = 17$$
$$F_3 = 2^{2^3} + 1 = 257,\quad F_4 = 2^{2^4} + 1 = 65537$$

بنابراین، تصور کرد که همه‌ی F_nها اولند. فرما در نامه‌ای که به مِرسِن نوشت، متذکر شد که من اعدادی به صورت $2^{2^n} + 1$ یافته‌ام که همیشه اولند و ریاضیدانان سال‌های بعد درستی آن را خواهند فهمید. در سال ۱۷۳۲، اویلر نشان داد که عدد F_5 مرکب است و عدد F_5 بر ۶۴۱ بخش‌پذیر است:

$$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4294967297 = 641 \times 6700417$$

در سال‌های بعد، ثابت شد که F_6 و F_7 نیز مرکب است. در مورد عدد F_8 و عددهای بعدی[5] نیز همچنان مبارزه ادامه داشت، تا این که ثابت شد، F_8 نیز مرکب است، ولی مدت‌ها قادر به تجزیه‌ی آن نشده بودند تا سرانجام با عرضه‌ی ماشین‌های محاسبه‌گر جدید، این مشکل هم مرتفع شد.

تا امروز معلوم نشده است که آیا تعداد اعداد اول فرما محدود است یا نامحدود. در خاتمه، درباره‌ی اعداد اول فرما همین بس که تا به حال یک عدد اول بزرگ‌تر از F_4 هم یافت نشده است.

اعداد مرسن

در ریاضیات، اعداد به صورت $M_n = 2^n - 1$ را به نام کشیش فرانسوی، مارین مرسن[6] [۱۶۴۸ـ۱۵۸۸] «اعداد مرسن» نامیده‌اند؛ چرا که مرسن در زمینه‌ی اول بودن این نوع اعداد، اظهارنظری نادرست اما محرک کرده بود که سبب پژوهش‌ها و تحقیقات بسیاری در رابطه با اعداد اول شد.

تعریف: هر عدد به صورت $M_n = 2^n - 1$ که اول باشد را، عدد اول مرسن می‌نامند. در سال ۱۶۴۴، مرسن اظهار داشت که عدد $M_p = 2^p - 1$ به ازای اعداد اول زیر:

$$p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257$$

عددی اول و به ازای سایر اعداد $p < 257$ عدد M_p مرکب است.

ریاضیدانان معتقدند که به یقین، مرسن همه‌ی اعدادی را که ادعا کرده بود اول هستند، آزمایش نکرده بود. سال‌ها بعد، اویلر ثابت کرد که عدد $M_{31} = 2^{31} - 1$ اول است. ولی نظری روی اعداد M_{67}، M_{127} و M_{257} نداشت، زیرا این اعداد بسیار بزرگ و دور از دسترس او بودند. در حال حاضر می‌دانیم که مرسن ۵ خطا داشته است؛ یعنی M_{67} و M_{257} را به خطا تصور کرده بود اول هستند و M_{61}، M_{89} و M_{107} را از زمره‌ی اعداد اول حذف کرده بود.

در اکتبر سال ۱۹۰۳، ریاضیدانی آمریکایی به نام **نلسون کول**[7] مقاله‌ای تحت عنوان «تجزیه‌ی اعداد بزرگ» به «انجمن ریاضی آمریکا» ارایه داد. پس از آن که او را به جایگاه سخنرانی دعوت کردند، پیش چشم حاضران روی تخته‌ی سیاه، عدد ۲ را ۶۷ بار در خودش ضرب کرد و به دقت یک واحد از آن کم کرد. در واقع عدد $M_{67} = 2^{67} - 1$ را حساب کرد. سپس بدون این که کلمه‌ای بگوید در گوشه‌ی دیگر تخته‌ی سیاه، حاصل ضرب زیر را نوشت:

$$193707721 \times 761838257287$$

این حاصل ضرب به طور دقیق برابر عددی بود که از محاسبه‌ی $2^{67} - 1$ به دست آورده بود. مدت‌ها بعد، به یکی از دوستانش گفته بود که او ۲۰ سال تمام عصر یکشنبه‌های خود را صرف یافتن عوامل عدد $M_{67} = 2^{67} - 1$ کرده بود (همان‌طور که ثابت شد و دیدیم که اگر $2^p - 1$ اول باشد، p اول است).

مسأله: ثابت کنید که عدد $M_{237} = 2^{237} - 1$، مرکب است. سپس یکی از عامل‌های نابدیهی آن را بیابید.

اثبات: چون $3|p = 237$، پس M_{237} عددی مرکب است. یکی از عامل‌های نابدیهی آن از تجزیه‌ی M_{237} به دست می‌آید:

$$M_{237} = 2^{237} - 1 = (2^3)^{79} - 1 = (2^3 - 1)\underbrace{\left[(2^3)^{78} + (2^3)^{77} + \dots + (2^3) + 1\right]}_{k}$$

$$M_{237} = 2^{237} - 1 = 7k \Rightarrow 7 \mid M_{237} = 2^{237} - 1$$

پس، عامل نابدیهی آن، عدد ۷ است.

تمرین: یکی از عامل‌های نابدیهی M_{202}، M_{91} و M_{21} را بیابید و نشان دهید M_{11} و M_{23} اولند.

زیرنویس ----------------------------------

۱. خلاصه‌ای از این مقاله، در مجله‌ی نشر ریاضی، سال۱، شماره‌ی ۳ آذرماه ۱۳۶۷ درج شده است.

2. Dirichlet

3. W.H.Mills

(برهان این قضیه در جلد دوم، قسمت دوم، تئوری اعداد دکتر مصاحب آمده است.)

۴. در حالت کلی قضیه برای $f(n) = \left\lfloor \theta^{c^n} \right\rfloor$، به ازای هر n طبیعی و هر $c > \frac{61}{23}$ (ناکم‌تر از ۳) برقرار است.

۵. هر مقسوم‌علیه عدد $F_n (n > 1)$ به صورت $2^{n+2}k + 1$ است (قضیه‌ی لوکا).

6. Marin Mersenne

7. Nelson Cole

8. Faber

9. Worldwide

۱۰. چنین فرمولی در تاریخ ۱۳۸۲/۵/۱۴ (سال ۲۰۰۳ میلادی) توسط مؤلف کشف شده است که نتایج بسیاری را در بر داشته است. از جمله «حل معادله‌ی زتای ریمان» است (این مسأله یکی از هفت مسأله‌ی لاینحل جهانی است) -.

برای اطلاع بیشتر از این اکتشاف بزرگ قرن (مسأله لاینحل ۲۳۰۰ ساله) می‌توانید به کتابی تحت عنوان «کشف فرمول اعداد اول و نتایج آن» که توسط مؤسسه (انتشاراتی) استاندارد بین‌المللی (ISI) به نام Brill/VSP کشور هلند (VSP آمریکا) به چاپ خواهد رسید، رجوع شود.

همچنین می‌توانید به سایت مؤلف نیز رجوع کنید:

www.primenumbersformula.com

سایت‌های انتشارات Brill/VSP:

www.brill.nl

www.vsppub.com

نام کتاب: (این کتاب به توسط انتشارات معراج قلم چاپ شده است).

"The discovery of prime numbers formula and its results"

(ISBN: 964-93227-7-9)

یکی از فرمول‌های اعداد اول که با توجه به قضیه‌ی ویلسن توسط مؤلف ارائه شده است را می‌آوریم:

$$H(m) = 2\left(\frac{2m+1}{2}\right)^{\left\lfloor \frac{2m+1}{(2m)!+1}\left\lfloor \frac{(2m)!+1}{2m+1} \right\rfloor \right\rfloor}$$

$$D_H = \mathbb{N}, \quad R_H = \mathbb{P} = \{3,5,7,2,11,13,2,17,19,\dots\}$$
$$= \{2,3,5,7,11,13,17,19,\dots\}$$
$$= \left\{ n \in \mathbb{N} : H(m) = 2\left(\frac{2m+1}{2}\right)^{\Delta_m} \right\}$$

مقاله‌ای تحت عنوان «کشف فرمول اعداد اول و نتایج آن» در ادامه مطالب ارائه خواهد شد و از فرمول‌های اصلی و نتایج آن که در مجله‌ی ISI به نام "Acta Applicandae Mathematicae" به چاپ خواهد رسید با اطلاع خواهید شد.

۳

مسابقه‌های ریاضی در کشورهای مختلف دنیا

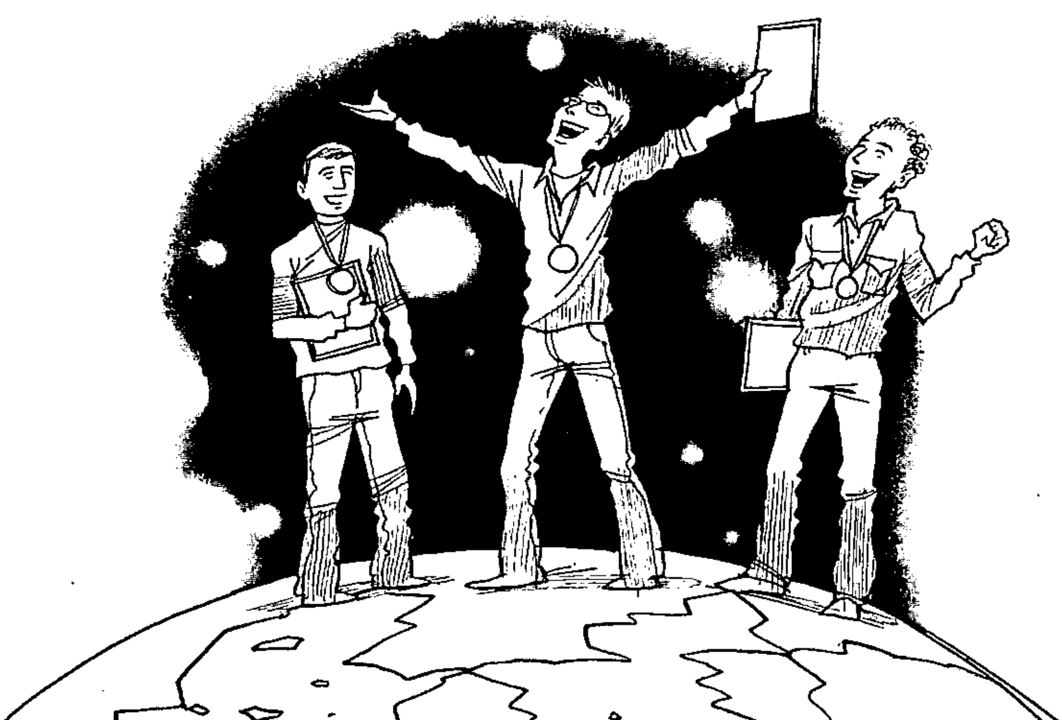
مسابقه‌ی ریاضی اسکاتلند/ رقابت ریاضی ۲۰۰۲ - ۲۰۰۱

هوشنگ شرقی

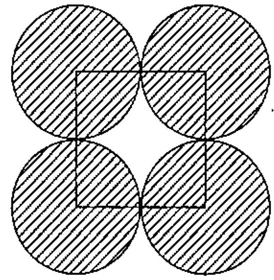
مسابقات ریاضی مدرسه‌های اسکاتلند، هر سال یک‌بار در دو سطح متفاوت برگزار می‌شوند. دانش‌آموزان به صورت انفرادی و بدون کمک و با استفاده از کتاب‌های راهنما باید در این آزمون شرکت کنند و پاسخ سؤالات باید کامل و با تشریح همراه باشد. پاسخ‌های بدون توضیح هیچ امتیازی ندارند. در این جا سؤالات سطح دوم را که مناسب‌تر بوده‌اند، از آزمون سال ۲۰۰۲ - ۲۰۰۱، همراه با حل تشریحی آن‌ها برای شما آورده‌ایم. سعی کنید قبل از دیدن راه‌حل‌ها به اندازه‌ی کافی با مسائل درگیر شوید!

صورت سؤال‌ها

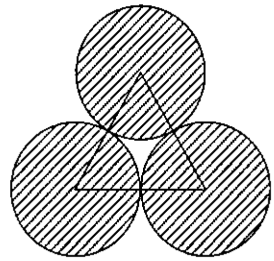
۱. دو صفحه‌ی نامتناهی، شامل قرص‌های



دایره‌ای شکل، مطابق شکل صفحه‌ی بعد هستند.



(شکل ۱)

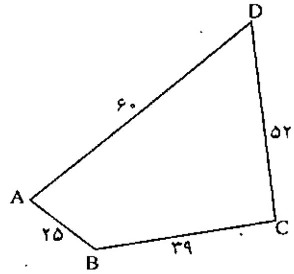


(شکل ۲)

در (شکل ۱)، مرکزهای قرص‌ها روی گوشه‌های یک مربع و در (شکل ۲) مرکزها روی گوشه‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع هستند. نسبت مساحت بخش‌هایی که هاشور زده نشده‌اند را در هر حالت، به مساحت قرص به دست آورید.

۲. عدد ۱۳، عامل هر سه عدد ۱۲۳۱۲۳ , ۵۳۶۵۳۶ و ۸۷۰۸۷۰ است. نشان دهید که عدد ۱۳، همه‌ی آن عددهای شش‌رقمی را می‌شمارد که سه رقم نخست آن‌ها با سه رقم بعدی یکسان است. آیا می‌توانید، همه‌ی اعدادی (به غیر از ۱) را بیابید که همه‌ی عددهای ۸رقمی مانند ۱۲۳۴۱۲۳۴ و ۳۷۵۲۳۷۵۲ را می‌شمارند، به طوری که چهار رقم نخست آن‌ها با چهار رقم بعدی برابر باشد؟ نظرتان راجع به عددهای چهاررقمی مانند ۱۲۱۲ و ۴۷۴۷ چیست؟

۳. در چهارضعلی ABCD مطابق شکل زیر، همه‌ی زوایای داخلی کم‌تر از ۱۸۰° هستند (یعنی چهارضلعی محدب است. مترجم) و طول اضلاع AB، BC، CD و DA به‌ترتیب مساوی ۲۵ , ۳۹, ۵۲ و ۶۰ واحد است. ثابت کنید، اگر BCD∠ کم‌تر از ۹۰° باشد، DAB∠ نیز کم‌تر از ۹۰° است.



۴. دو رقم در عدد ۹رقمی ۲۴۷ـ ـ ۳۲۱۳ مفقود شده‌اند. عددهای مفقودشده را چنان پیدا کنید که این عدد بر ۱۶۹ بخش‌پذیر باشد.

۵. شکل زیر یک مربع ۵×۵ را نشان می‌دهد:

۴	۱	۴	۲	۴
۱				۲
۴				۲
۴				۵
۲	۳	۳	۵	۲

مربع‌های اضلاع بیرونی با عددهایی که مشاهده می‌کنید، پر شده‌اند. ثابت کنید با پر کردن مربع‌های دیگر، فقط با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ نمی‌توان این مربع را به مربع وفقی (جادویی) تبدیل کرد، به طوری که مجموع عددهای واقع بر تمام ردیف‌ها و ستون‌ها و دو قطر اصلی مربع با یکدیگر برابر باشند.

حل مسائل

۱. این یک مسأله‌ی تکراری است که بارها و بارها در کتاب‌ها، مجلات و مسابقه‌های گوناگون مطرح شده است. در هر دو مورد، با کمی دقت درمی‌یابید که طول ضلع مربع وسط و یا مثلث متساوی‌الاضلاع وسط، مساوی قطر دایره‌ها (دو برابر شعاع آن‌ها) است. بنابراین در شکل اول، مساحت مربع وسط برابر است با: $S_{۱} = a^{۲} = (۲R)^{۲} = ۴R^{۲}$ و در شکل دوم: $S_{۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(۲R)^{۲} = \sqrt{۳}R^{۲}$.

اما در شکل اول، اگر قسمت هاشور نزده را از مربع وسط برداریم، چهار قطاع باقی می‌ماند که با هم برابر و زاویه‌های آن‌ها ۹۰° است. از کنار هم قرار دادن این چهار قطاع یک دایره‌ی کامل به وجود می‌آید (مرکزهای چهار قطاع را روی هم بگذارید و شعاع‌های آن‌ها را دوبه‌دو بر هم منطبق کنید). بنابراین، مساحت ناحیه‌ها هاشور نزده برابر است با مساحت مربع منهای مساحت یک دایره:

$$S'_{۱} = S_{۱} - \pi R^{۲} = ۴R^{۲} - \pi R^{۲} = (۴ - \pi)R^{۲}$$

و نسبت آن به مساحت قرص برابر است با:

$$\frac{S'_1}{S} = \frac{(4-\pi)R^2}{\pi R^2} = \frac{4-\pi}{\pi} = \frac{4}{\pi} - 1 \approx 0/27$$

و در حالت دوم، با استدلالی مشابه، سه قطاع داریم که زاویه‌ی آن‌ها $60°$ است و اگر آن‌ها را کنار هم بگذاریم، یک نیم‌دایره حاصل می‌شود. درنتیجه داریم:

$$S'_2 = S_2 - \frac{\pi R^2}{2} = \sqrt{3}R^2 - \frac{\pi R^2}{2} = (\sqrt{3} - \frac{\pi}{2})R^2 \Rightarrow$$

$$\frac{S'_2}{S} = \frac{(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2})R^2}{\pi R^2} = \frac{\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}}{\pi} = \frac{\sqrt{3}}{\pi} - \frac{1}{2} \approx 0/051$$

۲. درواقع باید تمام عددهای شش‌رقمی به شکل $\overline{abcabc}$ را بیابیم که بر ۱۳ بخش‌پذیر باشند. پس می‌نویسیم:

$$\overline{abcabc} = c + 10b + 100a + 1000c + 10000b + 100000a =$$
$$1001c + 10010b + 100100a = 1001(100a + 10b + c) =$$
$$13 \times 11 \times 7 \times \overline{abc} = 13k$$

یعنی همه‌ی عددهای شش‌رقمی به این صورت، بر ۱۳ بخش‌پذیرند. در مورد عددهای هشت‌رقمی داریم:

$$\overline{abcdabcd} = d + 10c + 100b + 1000a + 10000d + 100000c +$$
$$1000000b + 10000000a = 10001000a + 1000100b +$$
$$100010c + 10001d = 10001(1000a + 100b + 10c + d) =$$
$$73 \times 137 \times \overline{abcd}$$

پس می‌توان گفت، این‌گونه عددها همواره بر ۷۳ و ۱۳۷ بخش‌پذیرند. در مورد عددهای چهاررقمی نیز می‌توان نوشت:

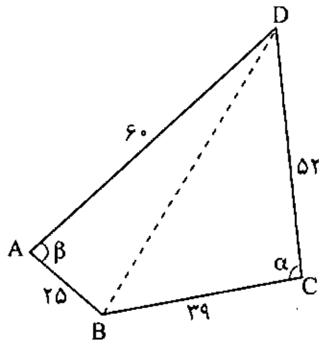
$$\overline{abab} = b + 10a + 100b + 1000a = 1010a + 101b$$
$$= 101(10a + b) = 101\overline{ab}$$

و چون ۱۰۱ عددی است اول، درنتیجه می‌توان گفت، فقط این‌گونه اعداد همواره بر ۱۰۱ بخش‌پذیرند.

۳. مطابق شکل و به کمک قضیه‌ی کسینوس‌ها در مثلث‌های BCD و ABD می‌توان نوشت:

$$\Delta BCD: \alpha < 90° \Rightarrow \cos\alpha > 0$$
$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC.CD.\cos\alpha =$$
$$1521 + 2704 - 4056\cos\alpha = 4225 - 4056\cos\alpha$$
$$\Delta DAB: BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2AD.AB\cos\beta =$$
$$3600 + 625 - 3000\cos\beta = 4225 - 3000\cos\beta \Rightarrow$$
$$4225 - 4056\cos\alpha = 4225 - 3000\cos\beta \Rightarrow$$
$$\cos\beta = \frac{4056\cos\alpha}{3000}$$

و $\cos\alpha > 0 \Rightarrow \cos\beta > 0 \Rightarrow B < 90°$



۴. در مسأله‌ی ۲، دیدیم که $1001 = 13 \times 77$ و درنتیجه: $13 | 1001$ و از آن‌جا: $1000 \overset{13}{\equiv} -1$، و بنابراین:

و $10^6 \overset{13}{\equiv} 1$ و $10^5 \overset{13}{\equiv} 30 \overset{13}{\equiv} 4$ و $10^4 \overset{13}{\equiv} -10 \overset{13}{\equiv} 3$ و $10^3 \overset{13}{\equiv} -1$

$10^8 \overset{13}{\equiv} -4$ و $10^7 \overset{13}{\equiv} -3$

و به همین ترتیب داریم:

و $10^6 \overset{169}{\equiv} 27$ و $10^5 \overset{169}{\equiv} -48$ و $10^4 \overset{169}{\equiv} 29$ و $10^3 \overset{169}{\equiv} -14$

$10^8 \overset{169}{\equiv} -4$ و $10^7 \overset{169}{\equiv} -68$

و چون $13^2 = 169$، اگر عدد نه‌رقمی فوق را مساوی a و دو رقم مفقود را به‌ترتیب x و y بنامیم (از سمت چپ)، به کمک حساب هم‌نهشتی‌ها داریم:

$$a \overset{13}{\equiv} -12 - 6 + 1 + 12 + 3x - y - 8 - 12 + 7 = 3x - y - 18 \Rightarrow$$
$$a \overset{13}{\equiv} 3x - y - 5 \overset{13}{\equiv} 0 \Rightarrow 3x - y - 5 = 13k \Rightarrow 3x - y = 13k + 5$$

و چون x و y رقم‌های یک عددند و $0 \le x$ و $y \le 9$، تنها $k = 0$ و ۱ قابل قبول است و از آن‌جا: $3x - y = 5$ یا ۱۸ و برای (x و y) هفت زوج مرتب زیر به‌دست می‌آید:

و (۷ و ۳) و (۶ و ۰) و (۴ و ۷) و (۳ و ۴) و (۲ و ۱)
(۸ و ۶) و (۹ و ۹)

همچنین، با استفاده از هم‌نهشتی به پیمانه‌ی ۱۶۹ داریم:

$$a \overset{169}{\equiv} -12 - 136 + 27 - 144 + 29x - 14y + 200 + 40 + 7$$
$$= 29x - 14y - 18 \Rightarrow 29x - 14y - 18 \overset{169}{\equiv} 0$$
$$\Rightarrow 29x - 14y = 169k + 18$$

و با امتحان کردن مقادیر بالا در این تساوی نتیجه می‌گیریم که تنها زوج مرتب (۴ و ۷) در این تساوی صدق می‌کند:

$$29x - 14y = 29 \times 4 - 14 \times 7 = 18 (k = 0)$$

درنتیجه، عدد نه‌رقمی فوق تنها می‌تواند مساوی ۳۲۱۳۴۷۲۴۷ باشد و نیز داریم:

$$321347247 = 169 \times 1901463$$

۵. فرض کنید که این کار مقدور باشد و با قرار دادن عددهای x_1 و x_2 و... و x_9 در خانه‌های جدول، مربع وفقی به‌دست آید. در این صورت طبق خاصیت مربع وفقی داریم:

۴	۱	۴	۲	۴
۱	x_1	x_2	x_3	۲
۴	x_4	x_5	x_6	۲
۴	x_7	x_8	x_9	۵
۲	۳	۳	۵	۲

(توجه کنید که عدد اصلی مربع وفقی مساوی ۱۵ است. یعنی مجموع سطرها، ستون‌ها و قطرها مساوی ۱۵ می‌باشد.)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 12 & (1) \\ x_4 + x_5 + x_6 = 9 & (2) \\ x_7 + x_8 + x_9 = 6 & (3) \\ x_1 + x_4 + x_7 = 11 & (4) \\ x_2 + x_5 + x_8 = 8 & (5) \\ x_3 + x_6 + x_9 = 8 & (6) \\ x_1 + x_5 + x_9 = 9 & (7) \\ x_3 + x_5 + x_7 = 9 & (8) \end{cases}$$

اکنون ابتدا x_1 را از دستگاه معادلات بالا حذف می‌کنیم. به این منظور، معادله‌ی (۱) را یک بار از معادله‌ی (۴) و یک بار از معادله‌ی (۷) کم می‌کنیم:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 - x_4 - x_7 = 1 & (1) \\ x_2 + x_3 - x_5 - x_9 = 3 & (2) \\ x_4 + x_5 + x_6 = 9 & (3) \\ x_7 + x_8 + x_9 = 6 & (4) \\ x_2 + x_5 + x_8 = 8 & (5) \\ x_3 + x_6 + x_9 = 8 & (6) \\ x_3 + x_5 + x_7 = 9 & (7) \end{cases}$$

حال در دستگاه جدید x_2 را حذف می‌کنیم. برای این کار، معادله‌ی (۲) را یک بار از معادله‌ی (۱) و یک بار از معادله‌ی (۵) کم می‌کنیم:

$$\begin{cases} -x_5 - x_9 + x_4 + x_7 = 2 & (1) \\ 2x_5 - x_3 + x_8 + x_9 = 5 & (2) \\ x_4 + x_5 + x_6 = 9 & (3) \\ x_7 + x_8 + x_9 = 6 & (4) \\ x_3 + x_6 + x_9 = 8 & (5) \\ x_3 + x_5 + x_7 = 9 & (6) \end{cases}$$

سپس در این دستگاه x_3 را حذف می‌کنیم. به این منظور، معادله‌ی (۲) را یک بار با معادله‌ی (۵) و یک بار با معادله‌ی (۶) جمع می‌کنیم:

$$\begin{cases} 2x_5 + x_8 + 2x_9 + x_6 = 14 & (1) \\ 3x_5 + x_8 + x_9 + x_7 = 14 & (2) \\ -x_5 - x_9 + x_4 + x_7 = 2 & (3) \\ x_4 + x_5 + x_6 = 9 & (4) \\ x_7 + x_8 + x_9 = 6 & (5) \end{cases}$$

در این دستگاه، معادله‌ی (۴) را از معادله‌ی (۳) کم، و x_4 را حذف می‌کنیم:

$$\begin{cases} 2x_5 + x_6 + x_9 - x_7 = 7 & (1) \\ 2x_5 + x_8 + 2x_9 + x_6 = 13 & (2) \\ 3x_5 + x_8 + x_9 + x_7 = 14 & (3) \\ x_7 + x_8 + x_9 = 6 & (4) \end{cases}$$

حال در این دستگاه، معادله‌ی (۳) را از معادله‌ی (۴) کم می‌کنیم:

$$3x_5 = 8 \Rightarrow x_5 = \frac{8}{3}$$

و این غیرقابل قبول است!

قرینه یابی درفضا

درس هایی از هندسه‌ی تحلیلی

۱

برای دانش آموزان دوره‌ی پیش دانشگاهی رشته‌ی ریاضی

میرشهرام صدر

اشاره

دانش‌آموزان دوره‌ی پیش‌دانشگاهی، معمولاً در آزمون‌های متعددی شرکت می‌کنند و در بعضی از آن‌ها با مسائلی از درس هندسه‌ی تحلیلی روبه‌رو می‌شوند که به‌طور مستقیم از کتاب درسی طرح نشده‌اند، ولی با توجه به مطالبی که در کتاب درسی وجود دارد، می‌توانند به این‌گونه مسائل پاسخ دهند. یکی از این مباحث، قرینه‌یابی در فضاست. در این سلسله مقاله‌ها سعی می‌کنیم، قرینه‌یابی در فضا را با شرح و بسط کامل ارائه دهیم. سپس مسائل آن را هم به روش تشریحی و هم با روش کوتاه، حل خواهیم کرد.

مختصات نقطه‌ی وسط پاره‌خط

اگر $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ ، آن‌گاه مختصات نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB برابر است با:

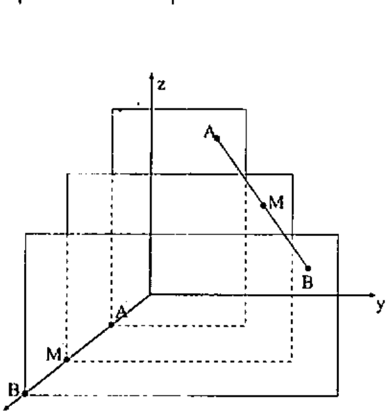
$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}, z_M = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

اثبات ـ روش اول: از نقطه‌های A و B و M سه صفحه بر محور xها عمود می‌کنیم تا این محور را به ترتیب در A' و B' و M' قطع کنند. می‌دانیم که $x_1 = \overline{oA'}$ و $x_2 = \overline{oB'}$ و $x_M = \overline{oM'}$. بنا به قضیه‌ی تالس در فضا، چون AM=MB ، پس $A'M' = M'B'$ ، یعنی نقطه‌ی M' وسط پاره‌خط $A'B'$ است. بنابراین داریم:

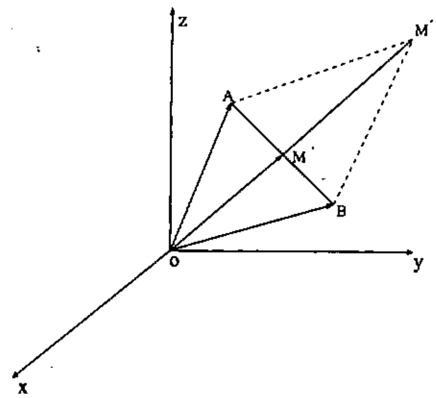
$$x_{M'} = \frac{x_{A'} + x_{B'}}{2} \Rightarrow x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

به روش مشابه ثابت می‌شود که:

$$y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}, z_M = \frac{z_1 + z_2}{2}$$



روش دوم:



با توجه به جمع بردارها به روش متوازی‌الاضلاع داریم:

$\vec{oM'} = \vec{oA} + \vec{oB}$

از طرف دیگر $\vec{oM'} = 2\vec{oM}$ و در نتیجه داریم:

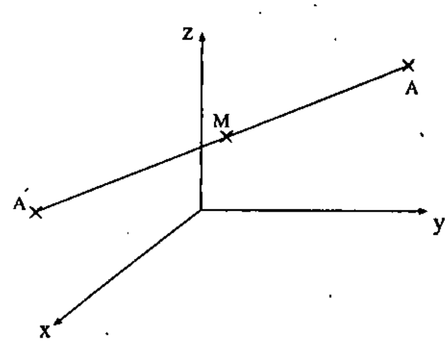
$$2\vec{oM} = \vec{oA} + \vec{oB} \Rightarrow \vec{oM} = \frac{\vec{oA} + \vec{oB}}{2}$$

$$\Rightarrow \vec{oM} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

قرینه‌ی یک نقطه نسبت به نقطه‌ی دیگر

برای یافتن قرینه‌ی نقطه‌ی $A(x_0, y_0, z_0)$ نسبت به نقطه‌ی $M(a,b,c)$، ابتدا خطی از A به M وصل می‌کنیم. سپس از M روی همان امتداد به اندازه‌ی AM پاره‌خطی را جدا می‌کنیم تا نقطه‌ی A' به‌دست آید. بنا به تعریف، A' را قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به مرکز M می‌نامیم. برای یافتن مختصات نقطه‌ی A'، به این نکته توجه می‌کنیم که M وسط پاره‌خط AA' است. در نتیجه خواهیم داشت:



$$x_M = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \Rightarrow x_{A'} = 2x_M - x_A$$

$$y_M = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \Rightarrow y_{A'} = 2y_M - y_A$$

$$z_M = \frac{z_A + z_{A'}}{2} \Rightarrow z_{A'} = 2z_M - z_A$$

بنابراین، مختصات A' برابر است با:

$$A' \begin{vmatrix} 2a - x_0 \\ 2b - y_0 \\ 2c - z_0 \end{vmatrix}$$

مسأله‌ی ۱: قرینه‌ی نقطه‌ی $A(1,2,3)$ نسبت به نقطه‌ی M، روی صفحه‌ای به معادله‌ی $D: x + y + z = 2$ قرار دارد. مکان هندسی نقطه‌ی M را به‌دست آورید.

حل: چنانچه $A'(x_{A'}; x_{B'}, x_{C'})$ قرینه‌ی نقطه‌ی $A(1,2,3)$ نسبت به نقطه‌ی $M(x_M, y_M; z_M)$ باشد، چون A' روی صفحه‌ی D واقع است، بنابراین خواهیم داشت:

$$A' \in D \Rightarrow x_{A'} + y_{A'} + z_{A'} = 2 \qquad (1)$$

از طرف دیگر داریم:

$$\begin{cases} x_{A'} = 2x_M - 1 \\ y_{A'} = 2y_M - 2 \\ z_{A'} = 2z_M - 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_{A'} + y_{A'} + z_{A'} = 2(x_M + y_M + z_M) - 6 \qquad (2)$$

با توجه به (۱) و (۲) داریم:

$$x_M + y_M + z_M = 4$$

در نتیجه مکان هندسی نقطه‌ی M، صفحه‌ای به معادله‌ی $D_1: x + y + z = 4$ است.

تمرین. در مسأله‌ی ۱ سه نقطه روی صفحه‌ی D_1 در نظر بگیرید. سپس تحقیق کنید که قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به این نقاط روی صفحه‌ی D واقع است.

تصویر قائم نقطه روی خط

برای یافتن تصویر قائم نقطه‌ی $A(x,y,z)$ نسبت به خط به معادله‌ی $d: \frac{x-a}{p} = \frac{y-b}{q} = \frac{z-c}{r}$، از A عمودی بر d رسم می‌کنیم تا این خط را در نقطه‌ی H قطع کند. بنابه تعریف، H را تصویر قائم نقطه‌ی A روی خط d می‌گوییم. برای یافتن مختصات H کافی است این مراحل را انجام دهیم:

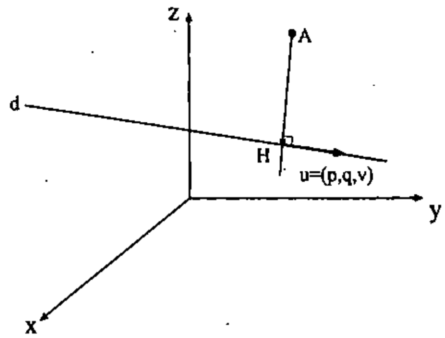
مرحله‌ی ۱: معادله‌ی پارامتری خط d را می‌نویسیم:

$$d: \begin{cases} x = pt + a \\ y = qt + b \\ z = rt + c \end{cases}$$

مرحله‌ی ۲: چون $H \in d$، بنابراین مختصات پارامتری

H را می‌نویسیم :

$$H \in d \Rightarrow \exists t' \in \mathbb{R}: H \left| \begin{array}{l} pt' + a \\ qt' + b \\ rt' + c \end{array} \right.$$



مرحله‌ی ۳: معادله‌ی برداری $\overrightarrow{AH}$ را می‌نویسیم :

$$\overrightarrow{AH} = (pt' + a - x, qt' + b - y, rt' + c - z)$$

مرحله‌ی ۴: از آن‌جا که امتداد بردار $\overrightarrow{AH}$ بر امتداد بردار هادی خط یعنی $\vec{u} = (p, q, r)$ عمود است، داریم :

$$\overrightarrow{AH} \perp \vec{u} \Rightarrow \overrightarrow{AH}.\vec{u} = 0$$

از رابطه‌ی $\overrightarrow{AH}.\vec{u} = 0$ مقدار پارامتری t' محاسبه می‌شود. در نتیجه مختصات نقطه‌ی H به‌دست می‌آید.

مسأله‌ی ۲: تصویر قائم نقطه‌ی $A(1, -1, 2)$ را روی خط d به معادله‌ی $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{2}$ به‌دست آورید.

حل

مرحله‌ی ۱: معادله‌ی پارامتری خط d را می‌نویسیم :

$$d: \begin{cases} x = t \\ y = -t + 2 \\ z = 2t - 3 \end{cases}$$

مرحله‌ی ۲: مختصات پارامتری نقطه‌ی H را می‌نویسیم :

$$H \in d \Rightarrow \exists t' \in \mathbb{R}: H \left| \begin{array}{l} t' \\ -t' + 2 \\ 2t' - 3 \end{array} \right.$$

مرحله‌ی ۳: معادله‌ی برداری $\overrightarrow{AH}$ را می‌نویسیم :

$$\overrightarrow{AH} = (t' - 1, -t' + 2 + 1, 2t' - 3 - 2)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AH} = (t' - 1, -t' + 3, 2t' - 5)$$

مرحله‌ی ۴:

$$\overrightarrow{AH}.u = 0$$

$$\Rightarrow (t' - 1, -t' + 3, 2t' - 5).(1, -1, 2) = 0$$

$$\Rightarrow t' - 1 + t' - 3 + 4t' - 10 = 0$$

$$\Rightarrow t' = \frac{7}{3}$$

اکنون $t' = \frac{7}{3}$ را در مختصات پارامتری نقطه‌ی H قرار می‌دهیم در نتیجه داریم :

$$H(\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3})$$

اکنون همین مسأله را به صورت یک تست می‌آوریم و راه‌حلی کوتاه برای آن ارائه می‌کنیم :

تست: تصویر قائم نقطه‌ی $A(1, -1, 2)$ روی خط به معادله‌ی $d: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{2}$ کدام است؟

۱. $H(-\frac{7}{3}, \frac{13}{3}, -\frac{23}{3})$ ۲. $H(\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3})$

۳. $H(\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{5}{3})$ ۴. $H(+\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3})$

حل: گزینه‌ی ۲ صحیح است. زیرا اگر H تصویر نقطه‌ی A روی خط d باشد، آن‌گاه الف) $H \in d$ (یعنی مختصات H در معادله‌ی خط d صدق می‌کند). ب) $\overrightarrow{AH}.\vec{u} = 0$ و این رابطه‌ها فقط در گزینه‌ی ۲ صدق می‌کند.

الف. $H \in d$ ، زیرا مختصات آن در معادله‌ی خط d صدق می‌کند.

ب. $\overrightarrow{AH} = (\frac{7}{3} - 1, -\frac{1}{3} + 1, \frac{5}{3} - 2) = (\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$

$$\overrightarrow{AH}.\vec{u} = (\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}).(1, -1, 2) = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$$

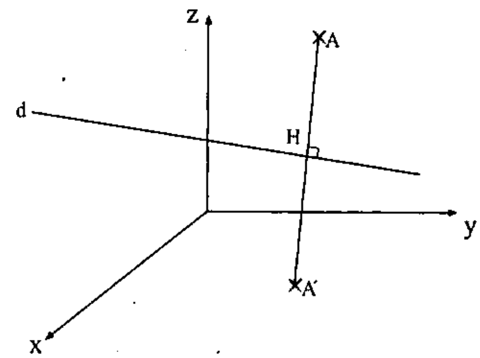
قرینه‌ی نقطه نسبت به یک خط

برای یافتن قرینه‌ی نقطه‌ی $A(x_0, y_0, z_0)$ نسبت به خط به معادله‌ی $d: \frac{x-a}{p} = \frac{y-b}{q} = \frac{z-c}{r}$ از A عمودی بر خط d رسم می‌کنیم تا H یعنی تصویر قائم نقطه‌ی A روی خط d به دست آید. سپس AH را به اندازه‌ی خودش امتداد می‌دهیم تا نقطه‌ی A' به دست آید. بنابه تعریف، A' را قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به خط d می‌نامیم. برای یافتن مختصات نقطه‌ی A' این مراحل را انجام می‌دهیم :

مرحله‌ی ۱: مختصات H یعنی تصویر قائم نقطه‌ی A روی خط d را به دست می‌آوریم.

مرحله‌ی ۲: چون H وسط AA' است، بنابراین با توجه به مختصات وسط پاره‌خط می‌توان مختصات A' را محاسبه کرد:

$$A'\begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_0 \\ y_{A'} = 2y_H - y_0 \\ z_{A'} = 2z_H - z_0 \end{cases}$$



مسأله: قرینه‌ی نقطه‌ی $A(1,-1,0)$ را نسبت به خط به معادله‌ی $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ به‌دست آورید.

حل:

مرحله‌ی ۱: ابتدا مختصات تصویر نقطه‌ی A روی خط d را به‌دست می‌آوریم. برای این منظور داریم:

الف)
$$d:\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}$$

ب)
$$H \in d \Rightarrow \exists t' \in Z:\ H\begin{cases} t' \\ 2t' \\ 3t' \end{cases}$$

ج)
$$\vec{AH} = (t'-1, 2t'+1, 3t')$$

د)
$$\vec{AH}.\vec{u} = 0$$

$$\Rightarrow (t'-1, 2t'+1, 3t').(1,2,3) = 0$$

$$\Rightarrow t' - 1 + 4t' + 2 + 9t' = 0 \Rightarrow t' = -\frac{1}{14}$$

$$t' = -\frac{1}{14} \Rightarrow H(-\frac{1}{14}, -\frac{2}{14}, -\frac{3}{14})$$

مرحله‌ی ۲: H وسط AA' است. بنابراین داریم:

$$x_{A'} = 2x_H - x_A = \frac{-2}{14} - 1 = \frac{-16}{14} = \frac{-8}{7}$$

$$y_{A'} = 2y_H - y_A = \frac{-4}{14} + 1 = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

$$z_{A'} = 2z_H - z_A = \frac{-6}{14} - 0 = \frac{-3}{7}$$

$$\Rightarrow A'(\frac{-8}{7}, \frac{5}{7}, \frac{-3}{7})$$

اکنون همین مسأله را به صورت تست می‌آوریم و راه‌حلی کوتاه برای آن ارائه می‌کنیم.

تست: قرینه‌ی نقطه‌ی $A(1,-1,0)$ نسبت به خط به معادله‌ی $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ کدام است؟

۱. $A'(\frac{8}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{3}{7})$
۲. $A'(\frac{8}{7}, -\frac{5}{7}, -\frac{3}{7})$
۳. $A'(\frac{8}{7}, \frac{5}{7}, \frac{3}{7})$
۴. $A'(-\frac{8}{7}, \frac{5}{7}, -\frac{3}{7})$

حل: گزینه‌ی ۴ صحیح است، زیرا اگر A' قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به خط d باشد، در این صورت:

الف) بردار $\vec{AA'}$ بر خط d عمود است، یعنی $\vec{AA'}.\vec{u} = 0$. ب) مختصات وسط $\vec{AA'}$ یعنی H در معادله‌ی خط d صدق می‌کند. و این روابط فقط در گزینه‌ی ۴ برقرار است.

الف)
$$\vec{AA'} = (-\frac{8}{7} - 1, \frac{5}{7} + 1, -\frac{3}{7} - 0)$$

$$\Rightarrow AA' = (-\frac{15}{7}, \frac{12}{7}, -\frac{3}{7})$$

$$AA'.u = (-\frac{15}{7}, \frac{12}{7}, -\frac{3}{7}).(1,2,3) = -\frac{15}{7} + \frac{24}{7} - \frac{9}{7} = 0$$

ب) مختصات وسط AA' یعنی H را به دست می‌آوریم:

$$H\begin{cases} \dfrac{-\frac{8}{7}+1}{2} = -\frac{1}{14} \\ \dfrac{\frac{5}{7}-1}{2} = -\frac{2}{14} \\ \dfrac{-\frac{3}{7}-0}{2} = -\frac{3}{14} \end{cases}$$

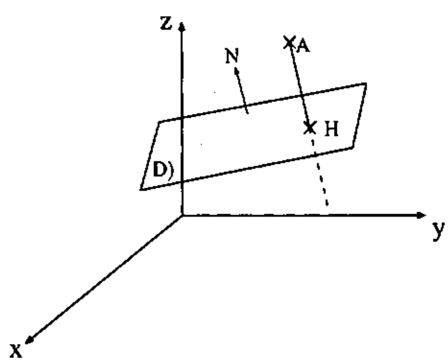
ملاحظه می‌کنیم که مختصات H در معادله‌ی خط d صدق می‌کند، زیرا:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3},\ H(-\frac{1}{14}, -\frac{2}{14}, -\frac{3}{14})$$

$$\Rightarrow \frac{-\frac{۱}{۱۴}}{۱} = \frac{-\frac{۲}{۱۴}}{۲} = \frac{-\frac{۳}{۱۴}}{۳} \Rightarrow -\frac{۱}{۱۴} = -\frac{۱}{۱۴} = -\frac{۱}{۱۴}$$

تصویر قائم نقطه روی یک صفحه

برای یافتن تصویر قائم نقطه‌ی $A(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ روی صفحه به معادله‌ی $D: ax + by + cz = d$ ، از A عمودی بر صفحه‌ی D رسم می‌کنیم تا این صفحه را در نقطه‌ی H قطع کند. بنابر تعریف، H را تصویر قائم نقطه‌ی A روی صفحه‌ی D می‌گوییم. برای یافتن مختصات نقطه‌ی H کافی است، مراحل زیر را انجام دهیم:



مرحله‌ی ۱ : بردار نرمال صفحه، یعنی $\vec{N} = (a, b, c)$ را مشخص می‌کنیم.

مرحله‌ی ۲ : معادله‌ی خطی را می‌نویسیم که از نقطه‌ی A می‌گذرد و بر صفحه‌ی D عمود است. برای این منظور کافی است بردار هادی خط را برابر با بردار نرمال صفحه در نظر بگیریم. بنابراین داریم:

$$A(x_\circ, y_\circ, z_\circ), \quad \vec{u} = \vec{N} = (a, b, c)$$

$$AH: \frac{x - x_\circ}{a} = \frac{y - y_\circ}{b} = \frac{z - z_\circ}{c}$$

مرحله‌ی ۳ : از تقاطع خط AH با صفحه‌ی D، مختصات نقطه‌ی H به دست می‌آید. برای این منظور، معادله‌ی خط AH را به صورت پارامتری تبدیل می‌کنیم. سپس مختصات پارامتری نقطه‌ی H را در معادله‌ی صفحه‌ی D قرار می‌دهیم تا پارامتر مورد نظر به دست آید. از آن‌جا مختصات نقطه‌ی H به دست می‌آید.

مسأله : تصویر قائم نقطه‌ی $A(۳, -۲, -۳)$ را روی صفحه به معادله‌ی $D: x - ۲y + ۴z = ۱۶$ به دست آورید.

حل :

مرحله‌ی ۱ : $N = (۱, -۲, ۴)$ بردار نرمال صفحه.

مرحله‌ی ۲ : معادله‌ی خط عمود بر صفحه را می‌نویسیم:

$$A(۳, -۲, -۳), \quad \vec{u} = \vec{N} = (۱, -۲, ۴)$$

$$\Rightarrow AH: \frac{x - ۳}{۱} = \frac{y + ۲}{-۲} = \frac{z + ۳}{۴}$$

مرحله‌ی ۳ : از تقاطع خط AH با صفحه‌ی D مختصات H به دست می‌آید:

$$AH: \begin{cases} x = t + ۳ \\ y = -۲t - ۲ \\ z = ۴t - ۳ \end{cases}$$

$$H \in AH \Rightarrow \exists t' \in \mathbb{R}: \ H \begin{vmatrix} t' + ۳ \\ -۲t' - ۲ \\ ۴t' - ۳ \end{vmatrix}$$

$$H \in D \Rightarrow t' + ۳ - ۲(-۲t' - ۲) + ۴(۴t' - ۳) = ۱۶$$
$$\Rightarrow t' = ۱$$

$$t' = ۱ \Rightarrow H \begin{vmatrix} ۱ + ۳ \\ -۲ - ۲ \\ ۴ - ۳ \end{vmatrix} \Rightarrow H(۴, -۴, ۱)$$

اکنون همین مسأله را به صورت تست می‌آوریم و راه‌حلی کوتاه برای آن ارائه می‌کنیم:

تست : تصویر قائم نقطه‌ی $A(۳, -۲, -۳)$ روی صفحه به معادله‌ی $D: x - ۲y + ۴z = ۱۶$ کدام است؟

۱. $(۴, ۴, ۱)$ ۲. $(-۴, ۴, ۱)$

۳. $(۴, -۴, ۱)$ ۴. $(-۴, ۴, -۱)$

حل : گزینه‌ی ۳ صحیح است. اگر H تصویر قائم نقطه‌ی A روی صفحه‌ی D باشد، آن‌گاه **الف)** مختصات H در معادله‌ی صفحه‌ی D صدق می‌کند. **ب)** بردار $\vec{AH}$ با بردار نرمال صفحه، یعنی N موازی است. و این رابطه‌ها فقط در گزینه‌ی ۳ صدق می‌کند.

الف. $H \in d$ زیرا: $\quad ۴ - ۲(۴) + ۴(۱) = ۰$

ب. $\vec{AH} = (۴ - ۳, -۴ + ۲, ۱ + ۳) = (۱, -۲, ۴) = \vec{N}$

قرینه‌ی نقطه نسبت به یک صفحه در فضا

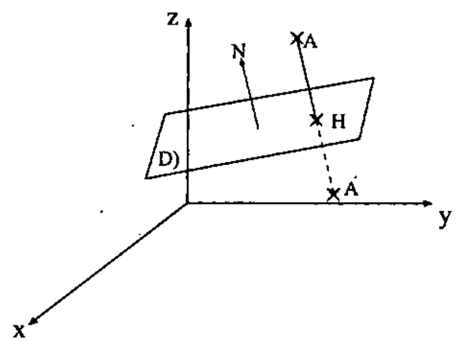
برای یافتن قرینه‌ی نقطه‌ی $A(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ نسبت به صفحه به معادله‌ی $D: ax + by + cz = d$ ، از A عمودی بر صفحه‌ی D رسم می‌کنیم تا H یعنی تصویر قائم نقطه‌ی A روی صفحه‌ی

D به دست آید. سپس AH را به اندازه‌ی خودش امتداد می‌دهیم تا نقطه‌ی A' به دست آید، بنا به تعریف A' را قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به صفحه‌ی D می‌نامیم. برای یافتن مختصات نقطه‌ی A' مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

مرحله‌ی ۱: مختصات H یعنی تصویر قائم نقطه‌ی A روی صفحه‌ی D را به دست می‌آوریم.

مرحله‌ی ۲: چون H وسط AA' است، بنابراین با توجه به مختصات وسط پاره‌خط می‌توان، مختصات A' را محاسبه کرد.

$$A'\begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_0 \\ y_{A'} = 2y_H - y_0 \\ z_{A'} = 2z_H - z_0 \end{cases}$$



مسأله: قرینه‌ی نقطه‌ی $A(0,-2,1)$ را نسبت به صفحه به معادله‌ی $D: 2x - 3y + z + 7 = 0$ به دست آورید.

حل:

مرحله‌ی ۱: ابتدا مختصات تصویر قائم نقطه‌ی A روی صفحه‌ی D را به دست می‌آوریم. برای این منظور داریم:

الف) $N = (2,-3,1)$ بردار نرمال صفحه.

ب) معادله‌ی خط عمود بر صفحه را می‌نویسیم:

$$A(0,-2,1),\quad \vec{u} = \vec{N} = (2,-3,1)$$

$$AH: \frac{x}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-1}{1}$$

ج) از تقاطع خط AH با صفحه‌ی D مختصات H به دست می‌آید:

$$AH: \begin{cases} x = 2t \\ y = -3t - 2 \\ z = t + 1 \end{cases}$$

$$H \in AH \Rightarrow \exists t' \in \mathbb{R}: \ H\begin{cases} 2t' \\ -3t' - 2 \\ t' + 1 \end{cases}$$

$$H \in D \Rightarrow 2(2t') - 3(-3t' - 2) + t' + 1 + 7 = 0$$
$$\Rightarrow t' = -1$$

$$t' = -1 \Rightarrow H\begin{cases} -2 \\ 3 - 2 \\ -1 + 1 \end{cases} \Rightarrow H(-2,1,0)$$

مرحله‌ی ۲: H وسط AA' است، بنابراین داریم:

$$x_{A'} = 2x_H - x_A = -4 - 0 = -4$$
$$y_{A'} = 2y_H - y_A = 2 + 2 = 4$$
$$z_{A'} = 2z_H - z_A = 0 - 1 = -1$$
$$\Rightarrow A'(-4,4,-1)$$

تست: قرینه‌ی نقطه‌ی $A(0,-2,1)$ نسبت به صفحه به معادله‌ی $D: 2x - 3y + z + 7 = 0$ کدام است؟

۱. $A'(-4,4,1)$ ۲. $A'(-4,4,-1)$

۳. $A'(4,-4,-1)$ ۴. $A'(-4,-4,-1)$

حل: گزینه‌ی ۲ صحیح است، زیرا اگر A' قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به صفحه‌ی D باشد، در این صورت:

الف) بردار $\vec{AA'}$ با بردار نرمال صفحه‌ی D موازی است.

ب) مختصات وسط $\vec{AA'}$ یعنی H در معادله‌ی صفحه صدق می‌کند و این روابط فقط در گزینه‌ی ۲ برقرارند.

الف)

$$\vec{AA'} = (-4 - 0, 4 + 2, -1 - 1) = (-4,6,-2)$$

$$\vec{N} = (2,-3,1) \Rightarrow \vec{AA'} = -2\vec{N} \Rightarrow \vec{AA'} \parallel \vec{N}$$

ب) مختصات وسط $\vec{AA'}$ یعنی H را به دست می‌آوریم:

$$H\begin{cases} \frac{-4+0}{2} = -2 \\ \frac{4-2}{2} = 1 \\ \frac{-1+1}{2} = 0 \end{cases}$$

ملاحظه می‌کنیم که مختصات H در معادله‌ی صفحه‌ی D صدق می‌کند، زیرا:

$$2x - 3y + z + 8 = 0,\quad H(-2,1,0)$$
$$\Rightarrow 2(-2) - 3(1) + 0 + 7 = 0 \Rightarrow -7 + 7 = 0$$

ادامه دارد...

۱۰ معادله‌های مثلثاتی

اتحاد و معادله

برای دانش‌آموزان پایه‌ی سوم

پرویز شهریاری

همان‌طور که در بحث مربوط به معادله‌های جبری دیدیم، درباره‌ی معادله‌های مثلثاتی هم، به راه‌حل‌ها و دستورهای معادله‌های ساده یا معادله‌های رسمی نمی‌پردازیم، زیرا می‌توان این دستورها را در کتاب‌های دبیرستانی یا سلسله مقاله‌های معادله‌های مثلثاتی در همین مجله پیدا کرد. گرچه در برنامه‌های درسی تازه به مثلثات اهمیت داده نشده است، ولی می‌توان با مراجعه به کتاب‌های قدیمی‌تر، رابطه‌های مربوط به آن را پیدا کرد. پرداختن به مثلثات و معادله‌های مثلثاتی، از این جهت برای هر ایرانی سودمند است که به تقریب، همه‌ی دستورها و رابطه‌های مثلثاتی در ایران سده‌های سوم تا نهم هجری خورشیدی به دست آمده است و کسانی همچون خوارزمی، ابوالوفای بوزجانی، ابوریحان بیرونی و غیاث‌الدین جمشید کاشانی در تنظیم آن‌ها دخالت داشته‌اند. ایران، در آن قرون، بعد از دوران ریاضیات نظری یونان، در دوران ریاضیات کاربردی به سر می‌برد و مثلثات را هم به خاطر نیازهای اخترشناسی پدید آورد. خواجه نصیر

توسی با نوشتن کتاب «کشف القناع» خود، در واقع نخستین کتاب مثلثات را نوشت که در آن، همه‌ی تلاش‌های ایرانیان را در زمینه‌ی مثلثات جمع کرده است. یکی از دشواری‌های مثلثات پیدا کردن سینوس یک درجه بود. تا سینوس کمان سه درجه برای آن‌ها قابل محاسبه بود (زیرا تابع‌های مثلثاتی سه درجه را از روی تابع‌های مثلثاتی ۱۸ درجه و ۱۵ درجه می‌دانستند، و لازم بود از روی سینوس سه درجه، خود را به سینوس یک درجه برسانند). جمشید کاشانی با حل جبری معادله‌ای که سینوس یک درجه را با معلوم بودن سینوس سه درجه به دست می‌داد، پیدا کرد و با این روش توانست معادله‌ی درجه سوم را سال‌ها پیش از کاردان حل کند.

دراین‌جا به حل چند معادله‌ی مثلثاتی که تا حدی نامتعارف و غیرعادی هستند، می‌پردازیم:

مسأله اول. $\sin\frac{x}{4}+2\cos\frac{x-2\pi}{3}=3$

حل تابع‌های $\sin\frac{x}{4}$ و $2\cos\frac{x-2\pi}{3}$، تنها می‌توانند، بیشترین مقدار ممکن خود را، اولی برابر ۱ و دومی برابر ۲، اختیار کنند. در این صورت سمت چپ برابر ۲ +۱، یعنی ۳ می‌شود. به این ترتیب، معادله‌ی مفروض به صورت این دستگاه درمی‌آید.

$$\begin{cases}\sin\frac{x}{4}=1\\ \cos\frac{x-2\pi}{3}=1\end{cases}$$

با حل هر کدام از معادله‌های دستگاه، x به دست می‌آید:

$$\begin{cases}x=2(4k+1)\pi,\ \ k=0,\pm1,\pm2,\ldots\\ x=2(3n+1)\pi,\ \ n=0,\pm1,\pm2,\ldots\end{cases}$$

این دستگاه، تنها وقتی پاسخ دارد که معادله‌ی

$4k+1=3n+1$

جواب‌های درست داشته باشد. از این معادله $4k=3n$ نتیجه می‌شود که از آن‌جا $k=\frac{3}{4}n$. اگر $n=4t$ (t می‌تواند ۰، ±۱، ±۲ و... باشد)، $k=3t$ عددی درست می‌شود و در این صورت:

$x=2(12t+1)\pi, t=0,\pm1,\pm2,\ldots$

و این برابری شامل همه‌ی جواب‌های معادله‌ی مفروض است.

مسأله‌ی دوم. $\cos 2x-\cos\frac{x}{3}=2$

حل. می‌دانیم $\cos 2x\le 1$ و $-\cos x\le 1$، در این صورت تنها وقتی برابری معادله برقرار است که $\cos 2x=1$ و $-\cos\frac{x}{3}=1$، زیرا با توجه به شرط داریم:

$\cos 2x-\cos\frac{x}{3}\le 2$. به این ترتیب، معادله‌ی مفروض هم‌ارز این دستگاه است.

$$\begin{cases}\cos 2x=1\\ -\cos\frac{x}{3}=1\end{cases}$$

از آن‌جا داریم:

$$\begin{cases}x=k\pi, k=0,\pm1,+2,\ldots\\ x=3(2n+1)\pi, n=0,\pm1,\pm2,\ldots\end{cases}$$

که حل آن، منجر به حل معادله‌ی $k=3(2n+1)$ در مجموعه‌ی عددهای درست می‌شود. از آن‌جا که n عددی درست است، k هم عددی درست می‌شود و همه‌ی جواب‌های معادله‌ی مفروض با این دستور مشخص می‌شود:

$x=3(2n+1)\pi,\ \ n=0,\pm1,\pm2,\ldots$

مسأله‌ی سوم. $3^{\left|x-\frac{1}{4}\right|+2}-4\sin 2\pi x=5$

حل. برای همه‌ی xها داریم:

$3^{\left|x-\frac{1}{4}\right|+2}\ge 9, -4\sin 2\pi x\ge -4$

بنابراین تابع‌های سمت چپ برابری با حداقل مقدار آن‌ها برابرند؛ از آن‌جا، به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases}3^{\left|x-\frac{1}{4}\right|+2}=9\\ -4\sin 2\pi x=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{4}\\ x=k+\frac{1}{4}\\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots\end{cases}$$

این دستگاه، در نتیجه معادله‌ی مفروض، تنها یک جواب دارد: $x=\frac{1}{4}$.

مسأله‌ی چهارم.

$$2\cos(\pi x^3)+\frac{6}{\pi}\arcsin(x^2-2)+x^2-2x+6=0$$

حل. به سادگی می‌توان روشن کرد که برای هر

$x\in[-\sqrt{3},-1]\cup[1,\sqrt{3}],$

$2\cos(\pi x^3)\ge -2; \frac{6}{\pi}\arcsin(x^2-2)\ge -3;$

$x^2-2x+6=(x-1)^2+5\ge 5$

مجموع کمترین مقدارهای جمله‌های سمت چپ معادله،

برابر صفر می‌شود. بنابراین به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} 2\cos(\pi x^3) = -2 \\ \dfrac{6}{\pi}\arcsin(x^2-2) = -3 \\ x^2 - 2x + 5 = 5 \end{cases}$$

که از آن‌جا به دست می‌آید:

$$\begin{cases} x = \sqrt[3]{2k+1}, k = 0 \pm 1, \pm 2, \dots \\ x = \pm 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

یعنی، دستگاه، تنها یک جواب دارد: $x=1$.

مسأله‌ی پنجم. $\sin^2(\pi x) + [\log_2(x^2-2x+1)]^2 = 0$

حل. مجموع توان‌های دوم چند عدد حقیقی، تنها وقتی برابر صفر می‌شود که هر کدام از آن‌ها برابر صفر باشند. بنابراین به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} \sin(\pi x) = 0 \\ \log_2(x^2-2x+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ x = 0, 2 \end{cases}$$

جواب‌های معادله‌ی اصلی $x_1 = 0$ ، $x_2 = 2$ است.

مسأله‌ی ششم. $\sin x + 2\sin 2x = 3 + \sin 3x$

حل. بعد از تبدیل‌های روشن، به دست می‌آید:

$$2\cos 2x \sin x - 2\sin 2x + 3 = 0$$

در سمت چپ این معادله $\sin^2 x, \cos^2 2x + \sin^2 2x$ را یک‌بار اضافه و بار دیگر کم می‌کنیم که پس از آن، معادله‌ی مفروض، به این صورت درمی‌آید:

$$(\cos 2x + \sin x)^2 + (\sin 2x - 1)^2 + \cos^2 x = 0$$

از آن‌جا، به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} \cos 2x + \sin x = 0 \\ \sin 2x - 1 = 0 \\ \cos x = 0 \end{cases}$$

از معادله‌ی آخر دستگاه به دست می‌آوریم:

$$x = k\pi + \frac{\pi}{2}, (\text{عددی درست است } k)$$

این مقدار x را در معادله‌ی دوم دستگاه می‌گذاریم، به دست می‌آید: $\sin(2k\pi + \pi) - 1$ که مخالف صفر است. یعنی معادله‌های دوم و سوم دستگاه، جواب مشترکی ندارند و درنتیجه دستگاه ما بی‌جواب است، پس معادله‌ی مفروض، جوابی ندارد.

مسأله‌ی هفتم. جواب‌های حقیقی این معادله‌ی دومجهولی را پیدا کنید.

$$x^2y^4 - 16xy^3 - 4xy + x^2 + 68y^2 = 0$$

حل. روشن است که $x = y = 0$ در معادله صدق می‌کند. برای پیدا کردن جواب‌های دیگر، سمت چپ معادله را به صورت مجذورهای کامل درمی‌آوریم:

$$(xy^2 - 8y)^2 + (x - 2y)^2 = 0$$

از این‌جا، به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} xy^2 - 8y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

این دستگاه، به جز جواب (۰ ، ۰)، دو جواب دیگر هم دارد: (۲و۴) و (۲- و ۴-). بنابراین، معادله‌ی مفروض سه جواب دارد:

(۲-و۴-) و (۲ و ۴) و (۰ و۰)

مسأله‌ی هشتم. همه‌ی جواب‌های این معادله را پیدا کنید:

$$\cos(x-y) - 2\sin x + 2\sin y = 3$$

حل. سمت چپ معادله را به صورت مجموع توان‌های دوم، تبدیل می‌کنیم:

$$1 - \cos(x-y) + 2(\sin x - \sin y) + 2 = 0\ ;$$

$$2\sin^2\frac{x-y}{2} + 4\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} + 2 = 0$$

اکنون داریم:

$$\sin^2\frac{x-y}{2} + 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} + \cos^2\frac{x+y}{2} + \sin^2\frac{x+y}{2} = 0$$

و سرانجام:

$$\left(\sin\frac{x-y}{2} + \cos\frac{x+y}{2}\right)^2 + \sin^2\frac{x+y}{2} = 0$$

که از آن‌جا به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} \sin\dfrac{x-y}{2} + \cos\dfrac{x+y}{2} = 0 \\ \sin\dfrac{x+y}{2} = 0 \end{cases}$$

از معادله‌ی دوم این دستگاه به دست می‌آید:

$$\frac{x+y}{2} = k\pi\ ,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

این مقدار $\frac{x+y}{2}$ را در معادله‌ی اول دستگاه قرار می‌دهیم، به‌دست می‌آید:

$$\sin\frac{x-y}{2} = (-1)^{k+1}\ ,\ \ k=0,\ \pm1,\pm2\ ,\dots$$

دو حالت را درنظر می‌گیریم:

الف) $k=2n$ ، در این صورت داریم:

$$\begin{cases}\frac{x+y}{2}=2n\pi\\ \sin\frac{x-y}{2}=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x+y}{2}=2n\pi\\ \frac{x-y}{2}=2m\pi-\frac{\pi}{2}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=2(n+m)\pi-\frac{\pi}{2}\\ y=2(n-m)\pi+\frac{\pi}{2}\\ n,m=0,\pm1,\pm2,\dots\end{cases} \qquad (I)$$

ب) اگر $k=2n-1$ ، آن وقت:

$$\begin{cases}\frac{x+y}{2}=(2n-1)\pi\\ \sin\frac{x-y}{2}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x+y}{2}=(2n-1)\pi\\ \frac{x-y}{2}=2m\pi+\frac{\pi}{2}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=2(n+m)\pi-\frac{\pi}{2}\\ y=2(n-m-1)\pi+\frac{\pi}{2}\\ n,m=0,\pm1,\pm2,\dots\end{cases} \qquad (II)$$

دستورهای (I) و (II) را با هم مقایسه می‌کنیم. در (I) برای هر عدد درست n و m، عددهای (n+m) و (n-m) یا هر دو زوج‌اند یا هر دو فرد؛ ولی در (II)، عددهای (n+m) و $(n-m-1)$ ، یکی زوج و دیگری فرد است. بنابراین، می‌توان دو دستور (I) و (II) را، به این ترتیب، یکی کرد:

$$\begin{cases}x=2p\pi-\frac{\pi}{2}\\ y=2q\pi+\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

که در آن‌ها، p و q عددهای درست دلخواهی هستند. اگر p و q هر دو زوج یا هر دو فرد باشند جواب‌های (I) و اگر یکی زوج و دیگری فرد باشد، جواب‌های (II) به دست می‌آید. و این دستورها، تمام جواب‌های معادله را می‌دهند.

مسأله‌ی نهم. همه‌ی جواب‌های x و y را در این معادله به‌دست آورید:

$$\left(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)^2+\left(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)^2=12+\frac{1}{2}\sin y$$

حل. از آن‌جا که $-1\le \sin y\le 1$ است، بنابراین

$$11\frac{1}{2}\le 12+\frac{1}{2}\sin y\le 12\frac{1}{2}$$

بنابراین سمت راست معادله از $12\frac{1}{2}$ بیشتر نیست، این بیشترین مقدار آن است.

برای $x=\frac{\pi}{4}$ ، سمت چپ معادله برابر $12\frac{1}{2}$ می‌شود.

اگر x به سمت $k\pi$ یا $k\pi+\frac{\pi}{2}$ میل کند (k برابر ۰، ۱±، ۲±، ...)، آن‌گاه سمت چپ معادله به صورت نامحدود رشد می‌کند. ثابت می‌کنیم، برای همه‌ی xها، سمت چپ معادله از $12\frac{1}{2}$ کمتر نمی‌شود، یعنی این نابرابری را ثابت می‌کنیم:

$$\left(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)^2+\left(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)\ge 12\frac{1}{2} \qquad (1)$$

چون $\sin^2\frac{\pi}{4}=\cos^2\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}$ ، برای ادامه‌ی کار بهتر

است فرض کنیم: $\sin^2 x = \frac{1}{2} + \alpha$ و چون در این‌جا $0 < \sin^2 x < 1$ است، بنابراین $0 < \frac{1}{2} + \alpha < 1$ و از آن‌جا $-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$. به جز این $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = \frac{1}{2} - \alpha$.

در رابطه‌ی (۱) به جای $\sin^2 x$ و $\cos^2 x$، برحسب α قرار می‌دهیم، به دست می‌آید:

$$\left(\frac{1}{2}+\alpha+\frac{1}{\frac{1}{2}+\alpha}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\alpha+\frac{1}{\frac{1}{2}-\alpha}\right)^2 \geq 12\frac{1}{2} \qquad (2)$$

سمت چپ رابطه‌ی (۲) را تبدیل می‌کنیم:

$$\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)^2+2+\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)^2}+\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)^2+2+\frac{1}{\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)^2}=$$

$$=4\frac{1}{2}+2\alpha^2+\frac{\frac{1}{2}+2\alpha^2}{\left(\frac{1}{4}-\alpha^2\right)^2}$$

در حالت $\alpha = 0$ سمت چپ برابر $12\frac{1}{2}$ می‌شود؛ اگر $\alpha \neq 0$، آن وقت $\alpha^2 > 0$ و در این صورت روشن است که سمت چپ (۲) چنین خواهد شد:

$$4\frac{1}{2}+2\alpha^2+\frac{\frac{1}{2}+2\alpha^2}{\left(\frac{1}{4}-\alpha^2\right)^2} > 4\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{4}\right)^2}=$$

$$=4\frac{1}{2}+8=12\frac{1}{2}$$

بنابراین سمت چپ معادله‌ی مفروض از $12\frac{1}{2}$ کمتر نیست؛ این، کمترین مقدار آن است که برای $\alpha = 0$، یعنی برای

$$\sin^2 x = \cos^2 x = \frac{1}{2}$$

درست است.

چون سمت چپ معادله‌ی اصلی، کمتر و سمت راست آن بیشتر از $12\frac{1}{2}$ نیست، بنابراین برابری تنها وقتی برقرار است که هر دو طرف برابر $12\frac{1}{2}$ باشند، یعنی معادله‌ی مفروض، هم‌ارز با دستگاه زیر است.

$$\begin{cases}\cos^2 x = \frac{1}{2}\\ 12+\frac{1}{2}\sin y = 12\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}\\ \sin y = 1\end{cases}$$

بنابراین $x = (2k+1)\frac{\pi}{4}$ و $y = (4\pi+1)\frac{\pi}{2}$، که در آن‌ها k و n می‌توانند عددهای ۰, ±۱, ±۲, ... را اختیار کنند. این دستورها شامل همه‌ی جواب‌های معادله‌اند.

چند معادله در این‌جا برای تمرین آورده‌ایم. داخل کروشه، جواب را داده‌ایم (k و n همه‌جا، برابر ۰, ±۱, ±۲, ... است).

تمرین

۱. $5^{|1-4x^2|} = \sin \pi x$. $\left[x = \frac{1}{2}\right]$.

۲. $3\sin^2\frac{x}{3} + 5\sin^2 x = 8$. $\left[x = (3k+1)\frac{\pi}{3}\right]$.

۳. $2\sin\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}\right) - 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 5$.

[جواب ندارد].

۴. $4\sin 2x - \tan^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 4$. $\left[x = (4k+1)\frac{\pi}{4}\right]$.

۵. $1 + \cos 2x \cos 3x = \frac{1}{2}\sin^2 3x$. $\left[x = (2k+1)\pi\right]$.

۶. $\sin^6 x + \sin^4 x + \cos^6 x + \cos^4 x + \sin\frac{x}{2} = 3$.
$[x = (4n+1)\pi]$

۷. $2 + 4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2 x + 5\sin^2\frac{x}{2} = 8\sin^2\frac{x}{2}\sin^2 5x$.

[جواب ندارد].

۸. $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13 = 0$. $\left[y = 2, x = 3\right]$.

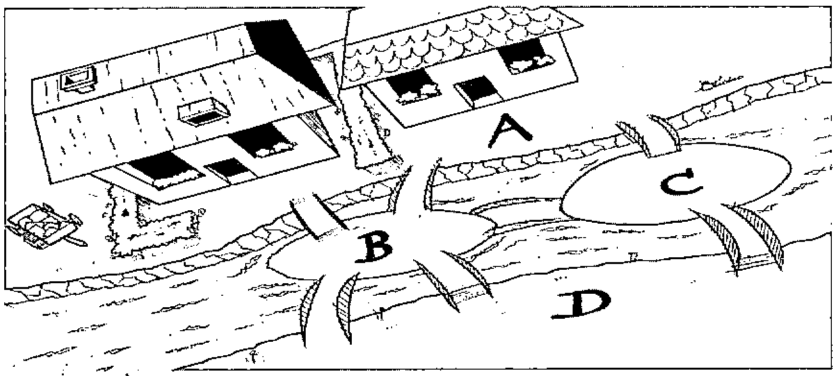
۹. $4 + \sin^2 x \cos^2 2x = 5\sin^2 x \sin^2 y$

$\left[y = (2n+1)\frac{\pi}{2}, x = (2k+1)\frac{\pi}{2}\right]$

برای دانش‌آموزان دوره‌ی پیش دانشگاهی

گراف اویلری

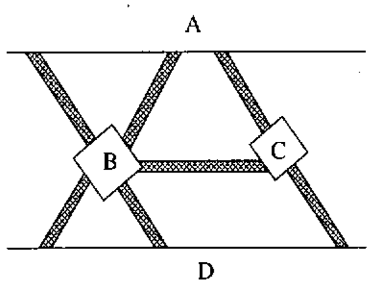
احسان یارمحمدی

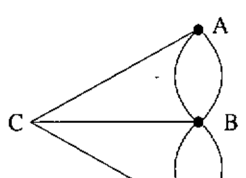


در قرن هجدهم میلادی، شهر کونیگسبرگ[۱] از دو ساحل یک رودخانه و دو جزیره واقع در این رودخانه تشکیل شده بود که در آن زمان، این مناطق چهارگانه به وسیله‌ی هفت پل به یکدیگر متصل بودند. این سؤال که آیا امکان دارد با شروع از یکی از این مناطق چهارگانه در شهر گشتی زد، از هر پل یک‌بار و فقط یک‌بار عبور کرد و به مکان اول بازگشت؟ سالیان متوالی ذهن اهالی این شهر به حل این مسأله معطوف شده بود. سرانجام شهردار شهر کونیگسبرگ، طبق نامه‌ای که برای لئونارد اویلر[۲] (۱۷۸۳-۱۷۰۷) ریاضیدان متولد شهر بازل[۳]، سوئیس[۴] فرستاد، او را از این مسأله آگاه ساخت و از وی خواست که برای این مسأله‌ی به ظاهر بغرنج راه‌حلی پیدا کند. اویلر جوان در سال ۱۷۳۶ میلادی توانست پاسخ مناسبی را در جواب سؤال مطرح شده ارائه دهد. لئونارد اویلر به هر یک از این مناطق چهارگانه، نقطه‌ای از صفحه‌ی دکارتی اختصاص داد و به‌ازای هر پل، پاره‌خطی بین دو نقطه‌ی متناظر با آن نقاط رسم کرد. در حقیقت اویلر از درک شهودی[۵] برای حل این مسأله یاری جست و با ارائه یک مدل ریاضی[۶] (شکل ۱)، بنیانگذار یک شاخه از ریاضیات محض[۷] شد که بیانگر نوعی از ریاضی تصویری[۸] است؛ که این ابداع بعدها تأثیر شایانی در علوم گوناگون مانند پزشکی، ژنتیک، باستان‌شناسی و رایانه گذاشت و آن را به دلیل تصویری بودنش، نظریه گراف[۹] نامیدند.

پاسخ اویلر منفی بود؛ بدین معنا که هیچ‌گاه نمی‌توان از یکی از مناطق چهارگانه شروع به حرکت کرد و از هر پل، یک و فقط یک‌بار عبور کرد و دوباره به مکان شروع حرکت بازگشت.

اویلر جواب خود را در قالب قضیه‌ای[۱۰] مطرح کرد که پس از بیان چند تعریف و ارائه چند مثال، آن را به تفصیل مورد بررسی قرار خواهیم داد.





(شکل ۱)

مسیر اویلری[۱۱]

در گراف همبند[۱۲] G=(V,E)، مسیری را که از همه‌ی یال‌های گراف عبور کند و از هر یالی بیش از یک‌بار عبور نکند، مسیر اویلری می‌نامیم.

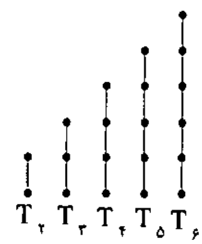
مدار اویلری[۱۳]

در گراف همبند G=(V,E)، اگر مسیر اویلری یک دور[۱۴] باشد، آن را مدار اویلری می‌نامیم.

گراف اویلری[۱۵]

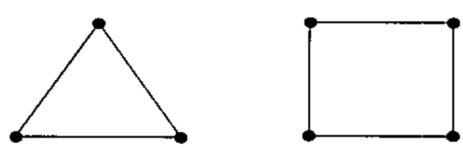
گراف همبند $G=(V,E)$، را که شامل مدار اویلری است، گراف اویلری می‌نامیم.

مثال. در هر گراف همبند و بدون دور[۱۶] G از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q که دقیقاً دو رأس از درجه‌ی یک دارد، یک مسیر اویلری وجود دارد که طول آن برابر $p-1$ است. چون گراف G همبند و بدون دور است، بنابراین درخت[۱۷] است. از طرفی چون این درخت دقیقاً دو رأس از درجه یک دارد، بنابراین دارای $p-2$ رأس از درجه حداقل ۲ است. پس به ازای pهای متفاوت، می‌توان مدل‌های ریاضی متناظر با p را برای این نوع درخت‌ها به‌صورت زیر ارائه کرد.



با مقداری دقت در نمودار این نوع از درخت‌ها، درخواهیم یافت که هر کدام از آن‌ها دارای مسیر اویلری هستند و طول هر کدام از این مسیرهای اویلری در این نوع درخت از مرتبه‌ی p، برابر با $p-1$ است.

مثال. هر یک از گراف‌های زیر دارای مدار اویلری هستند.



روشن است، برای این‌که گراف $G=(V,E)$ دارای مدار اویلری باشد، الزاماً باید همبند باشد، از طرفی دیگر، چون مدار اویلری به تعداد دفعاتی که وارد رأسی از گراف G می‌شود، از همان رأس گراف G نیز خارج می‌شود، بنابراین لازم است که درجه‌ی تمام رئوس گراف اویلری G زوج باشد.

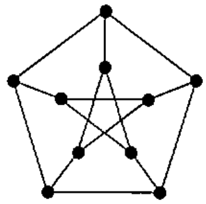
نتیجه: دو شرط لازم برای این که گراف $G=(V,E)$ اویلری باشد، عبارت‌اند از:

۱. گراف G همبند باشد.

۲. همه‌ی رئوس گراف G زوج باشند.

مثال. نمودار گراف «پترسن»[۱۸] (شکل ۲) است. آیا این گراف اویلری است؟ چرا؟

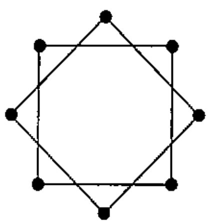
خیر؛ هرچند که گراف «پترسن» شرط اوّل اویلری بودن گراف را دارد، ولی چون درجه‌ی هر رأس آن عدد فرد ۳ است، بنابراین گراف «پترسن» اویلری نیست.



(شکل ۲)

مثال. نمودار گراف G شکل زیر است. آیا این گراف اویلری است؟ چرا؟

خیر؛ هرچند درجه‌ی تمام رئوس گراف G، عدد زوج ۲ است، ولی چون این گراف همبند نیست، بنابراین اویلری نیست.



اکنون اگر مدل ریاضی را که اویلر برای پل کونیگسبرگ[۱۹] اختصاص داده بود، در نظر بگیریم، درخواهیم یافت که آن مدل ریاضی که بیانگر گرافی از مرتبه‌ی ۴ و اندازه‌ی ۷ است، همبند بوده و از طرفی $\deg(A)=\deg(C)=\deg(D)=3$ و $\deg(B)=5$ است. بنابراین گراف مربوطه اویلری نیست و این بدان معناست که نمی‌توان از یکی از مناطق چهارگانه حرکت را آغاز کرد و از هر پل، یک‌بار و فقط یک‌بار عبور کرد و دوباره به مکان شروع حرکت بازگشت.

اکنون که با تاریخچه‌ی شکل‌گیری گراف اویلری و ویژگی‌های آن آشنا شدیم، در مورد این گراف، چند قضیه را مطرح می‌کنیم.

قضیه‌ی ۱. گراف کامل[۲۱] k_p از مرتبه‌ی فرد p، اویلری است.

برهان: چون گراف k_p، کامل و از مرتبه‌ی فرد p است، بنابراین همبند و درجه‌ی هر رأس آن برابر با $p-1$، که عددی زوج است؛ بنابراین گراف کامل k_p از مرتبه‌ی فرد p، اویلری است.

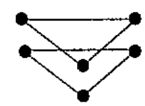
نتیجه: گراف کامل k_p از مرتبه‌ی زوج p، اویلری نیست.

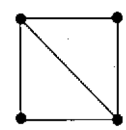
قضیه‌ی ۲. گراف همبند r ـ منتظم[22] (r زوج) از مرتبه‌ی p، اویلری است.

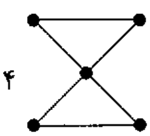
برهان: چون این گراف همبند و درجه‌ی هر رأس آن، برابر با r زوج است. از طرفی چون گراف r ـ منتظم از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q است، بنابر رابطه‌ی $rp = 2q$، می‌تواند مرتبه‌ی گراف هر عدد طبیعی باشد.

نتیجه: گراف r ـ منتظم (r فرد) از مرتبه‌ی p، اویلری نیست.

آزمون۱. کدام‌یک از گراف‌های زیر، گراف اویلری است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) هرسه مورد

جواب. گزینه‌ی ۳ صحیح است؛ زیرا گراف گزینه‌ی ۱ ناهمبند، گراف گزینه‌ی ۲ دارای دو رأس از درجه‌ی سه است و گراف گزینه‌ی ۳ همبند و درجه‌ی تمام رئوس آن زوج است.

آزمون۲. کدام‌یک از دنباله‌های زیر، دنباله‌ی گرافیکال[23] یک گراف اویلری است؟

۱) S:۵,۵,۵,۵,۵,۵

۲) S:۲,۲,۲,۲,۲,۲

۳) S:۲,۲,۲,۲,۱,۱

۴) S:۳,۲,۲,۱

جواب. گزینه‌ی ۲ صحیح است. زیرا، درجه‌ی رئوس هر گراف اویلری زوج است.

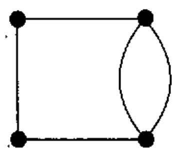
آزمون۳. در مورد گراف شکل زیر، کدام گزینه صحیح است؟

۱) دارای دور اویلری است.

۲) دارای دور اویلری نیست.

۳) گراف اویلری است.

۴) هیچ‌کدام.



جواب: گزینه‌ی ۲ صحیح است.

آزمون۴. کدام‌یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

۱) گراف همبند و بدون دور G، مدار اویلری دارد.

۲) گراف تهی[24] K_p، مدار اویلری دارد.

۳) گراف تهی K_p، مسیر اویلری دارد.

۴) هر سه مورد.

جواب. گزینه‌ی ۴ صحیح است.

چون گزینه‌ی ۱ درخت است و در درخت دور وجود ندارد، بنابراین مداری وجود نخواهد داشت. گزینه‌های ۲ و ۳ گراف تهی فاقدیال هستند، بنابراین دارای مسیر و دور نیستند.

زیرنویس:

1. Konigsberg City
2. Leonhard Euler
3. Basel
4. Switzerland
5. Intuitive Understanding
6. Model of Math
7. Pure Mathematics
8. The Graphic Math
9. Graph Theory
10. Theorem
11. Eulerian path
12. Connected Graph
13. Eulerian cycle
14. Cycle
15. Eulerian Graph
16. Acyclic
17. Tree
18. Petersen Graph
19. konigsberg Bridge
20. Even Vertexes
21. Complete Graph
22. r-Regular Graph
23. Graphical Sequence
24. Empty Graph

منابع

[1] M.Behzad, G.Chartrand. and L.Lesniak Foster, Graphs and Digraphs Wadsworth International Group.

[2]. O.Ore and R.G.wilson, Graphs and Their Uses The Mathematical Association of America.

۳. رالف. پ. گریمالدی؛ ریاضیات گسسته و ترکیباتی، ترجمه‌ی محمدعلی رضوانی و بیژن شمس، انتشارات فاطمی.

یک قضیه و چند نتیجه

ابراهیم دارابی

قضیه‌ی اصلی: در هر مثلث مانند ABC برای هر نقطه مانند D واقع بر ضلع AB و متمایز از A و B، رابطه‌ی زیر همواره برقرار است:

$$\frac{DA}{DB}=\frac{AC}{BC}\cdot\frac{\sin\angle ACD}{\sin\angle DCB}$$

اثبات: بر حسب این که نقطه‌ی D بین A و B و یا خارج آن باشد، دو حالت اتفاق می‌افتد.

حالت اول: فرض کنیم، مطابق شکل ۱ نقطه‌ی D بین A و B باشد. عمودهای AA_1 و BB_1 را بر خط شامل CD فرود می‌آوریم. در مثلث‌های AA_1C و BB_1C می‌توان نوشت:

$$\sin\angle ACD=\frac{AA_1}{AC}\ ,\ \sin\angle DCB=\frac{BB_1}{BC}$$

از تقسیم طرفین این دو تساوی بر یکدیگر نتیجه می‌شود:

$$\frac{\sin\angle ACD}{\sin\angle DCB}=\frac{AA_1}{BB_1}\cdot\frac{BC}{AC}\qquad(۱)$$

از تشابه مثلث‌های ADA_1 و BDB_1 داریم:

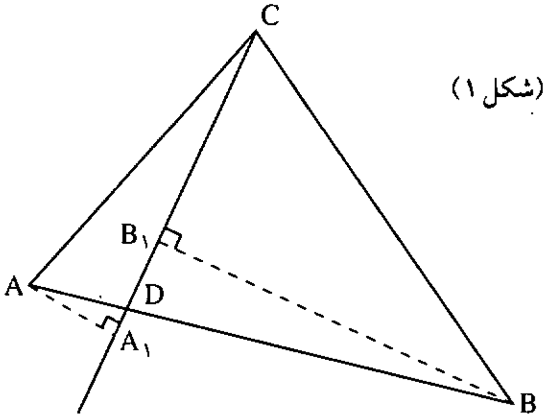
$$\frac{AA_1}{BB_1}=\frac{DA}{DB}\qquad(۲)$$

از مقایسه‌ی تساوی‌های ۱ و ۲ نتیجه می‌شود:

$$(۱),(۲)\Rightarrow\frac{\sin\angle ACD}{\sin\angle DCB}=\frac{DA}{DB}\cdot\frac{BC}{AC}$$

$$\Rightarrow\frac{DA}{DB}=\frac{AC}{BC}\cdot\frac{\sin\angle ACD}{\sin\angle DCB}$$

اثبات کامل است.



(شکل ۱)

در حالت خاص که نقطه‌ی D پای نیمساز باشد، داریم:

$\sin\angle ACD=\sin\angle DCB$

و از آن‌جا:

$$\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{BC}$$

که این تساوی، همان قضیه‌ی نیمساز در مثلث ABC است که با آن آشنایی داریم.

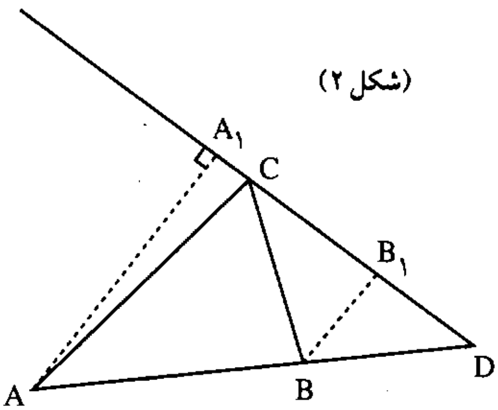
حالت دوم: فرض می‌کنیم مطابق شکل، نقطه‌ی D خارج پاره‌خط AB و در امتداد آن باشد (شکل ۲). مانند حالت اول داریم:

$$\frac{AA_1}{BB_1}=\frac{AD}{BD} \qquad (۱)$$

در مثلث‌های AA_1C و BB_1C می‌توان نوشت:

$$\sin\angle ACD=\sin\angle ACA_1=\frac{AA_1}{AC}$$

$$\sin\angle DCB=\frac{BB_1}{CB}$$



(شکل ۲)

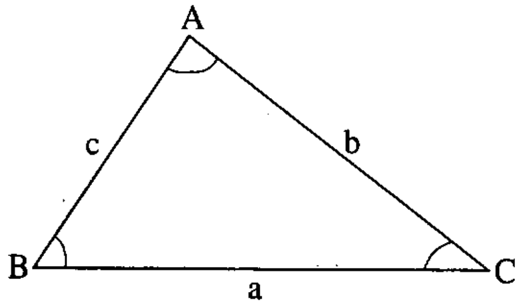
از تقسیم طرفین دو تساوی بر یکدیگر نتیجه می‌شود:

$$\frac{DA}{DB}=\frac{AC}{CB}\cdot\frac{\sin\angle ACD}{\sin\angle DCB}$$

دانش‌آموزان می‌دانند که سه میانه‌ی مثلث، در نقطه‌ی تقاربشان با چه نسبتی به دو قسمت تقسیم می‌شوند و با اثبات آن هم آشنایی دارند. در این جا با استفاده از قضیه‌ی سینوس‌ها، هم تعیین می‌کنیم که میانه‌های مثلث با چه نسبتی یکدیگر را قطع می‌کنند، و هم این که هر یک از سه ارتفاع و سه نیمساز مثلث، در نقطه‌ی تقاربشان با چه نسبتی به دو قسمت تقسیم می‌شوند.

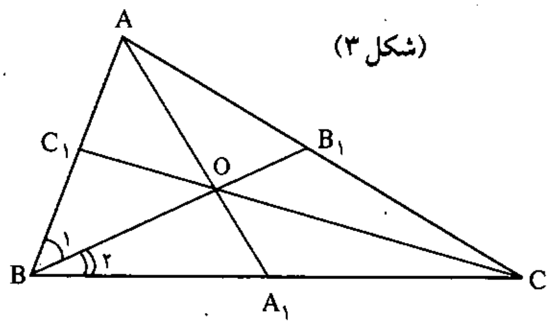
قضیه سینوس‌ها: در هر مثلث $A\overset{\Delta}{B}C$ داریم:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$



۱. هر یک از میانه‌های مثلث توسط میانه‌های دیگر به نسبت ۲ بر ۱ با شروع از راس تقسیم می‌شوند.

مطابق شکل (۳) در مثلث ABC میانه‌های AA_1 و BB_1 و CC_1 در نقطه‌ی O یکدیگر را قطع کرده‌اند. بنابر قضیه‌ی اصلی، در مثلث ABA_1 داریم:



(شکل ۳)

$$\frac{AO}{OA_1}=\frac{AB}{BA_1}\cdot\frac{\sin\angle B_1}{\sin B_2}$$

قرار می‌دهیم:

BC=a,AC=b,AB=c

از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$\frac{AO}{OA_1}=\frac{c}{\frac{a}{2}}\cdot\frac{\sin B_1}{\sin B_2} \qquad (۱)$$

بنابر قضیه سینوس ها داریم:

$$\begin{cases}\Delta ABB_1 \Rightarrow \dfrac{\sin B_1}{\frac{b}{2}}=\dfrac{\sin A}{BB_1}\\[2ex] \Delta BCB_1 \Rightarrow \dfrac{\sin B_2}{\frac{b}{2}}=\dfrac{\sin C}{BB_1}\end{cases} \Rightarrow \frac{\sin B_1}{\sin B_2}=\frac{\sin A}{\sin C} \qquad (۲)$$

از مقایسه‌ی تساوی‌های ۱ و ۲ نتیجه می‌شود:

$$\frac{AO}{OA_1}=\frac{2c}{a}\cdot\frac{\sin A}{\sin C}=2\left(\frac{c}{\sin C}\cdot\frac{\sin A}{a}\right)=2$$

زیرا بنابر قضیه‌ی سینوس‌ها داریم:

$$\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}$$

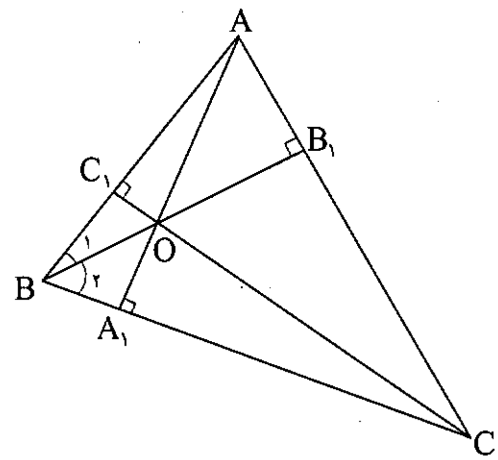
به طریق مشابه ثابت می‌شود:

$$\frac{BO}{OB_1}=\frac{CO}{OC_1}=2$$

۲. هریک از ارتفاع‌های مثلث، توسط ارتفاع‌های دیگر به چه نسبتی تقسیم می‌شوند؟

برای تعیین این نسبت‌ها، مثلث ABC را مطابق شکل (۴) در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم، سه ارتفاع AA_1 و BB_1 و CC_1 در آن، یکدیگر را در نقطه‌ی O قطع کرده باشند. بنابر قضیه‌ی اصلی در مثلث ABA_1 می‌توان نوشت:

$$\frac{AO}{OA_1}=\frac{AB}{BA_1}\cdot\frac{\sin B_1}{\sin B_2} \qquad (1)$$



در مثلث ABA_1 داریم:

$BA_1=AB.\cos B$

همچنین:

$\sin B_1=\cos A,\ \sin B_2=\cos C$

اگر این مقادیر را در تساوی ۱ قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\frac{AO}{OA_1}=\frac{\cos A}{\cos B.\cos C}$$

به طریق مشابه ثابت می‌شود:

$$\frac{BO}{OB_1}=\frac{\cos B}{\cos A.\cos C}$$

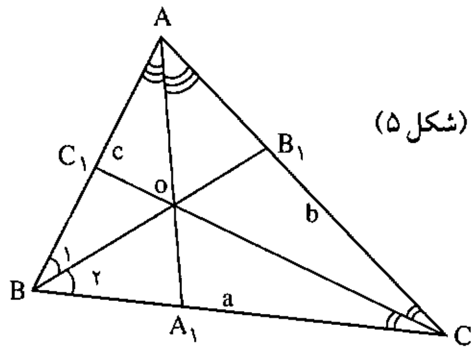
$$\frac{CO}{OC_1}=\frac{\cos C}{\cos A.\cos B}$$

اگر یکی از زاویه‌های مثلث منفرجه باشد، در آن صورت در تساوی‌های بالا به جای کسینوس زاویه، قدر مطلق کسینوس آن را قرار می‌دهیم.

۳. هر یک از نیمسازهای مثلث، توسط نیمسازهای دیگر به چه نسبتی تقسیم می‌شوند؟

برای تعیین این نسبت‌ها در مثلث ABC، مطابق شکل (۵) نیمسازهای AA_1 و BB_1 و CC_1 را رسم می‌کنیم. فرض می‌کنیم، نقطه‌ی تلاقی آن‌ها نقطه‌ی O باشد.

در مثلث ABA_1 بنابر قضیه‌ی اصلی داریم:



(شکل ۵)

$$\frac{AO}{OA_1}=\frac{AB}{BA_1}\cdot\frac{\sin B_1}{\sin B_2}$$

$$B_1=B_2\Rightarrow \sin B_1=\sin B_2$$

$$\Rightarrow\frac{AO}{OA_1}=\frac{AB}{BA_1} \qquad (1)$$

بنابر خاصیت نیمساز در مثلث ABC می‌توان نوشت:

$$\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{c}{b}\Rightarrow\frac{BA_1}{BA_1+A_1C}=\frac{c}{b+c}$$

$$\Rightarrow BA_1=\frac{ac}{b+c} \qquad (2)$$

اگر در تساوی ۱ به جای BA_1 از تساوی ۲ مقدار قرار دهیم، نتیجه می‌شود:

$$\frac{AO}{OA_1}=\frac{c}{\frac{ac}{b+c}}=\frac{b+c}{a}$$

$$\Rightarrow\frac{AO}{OA_1}=\frac{b+c}{a}$$

به طریق مشابه ثابت می‌شود:

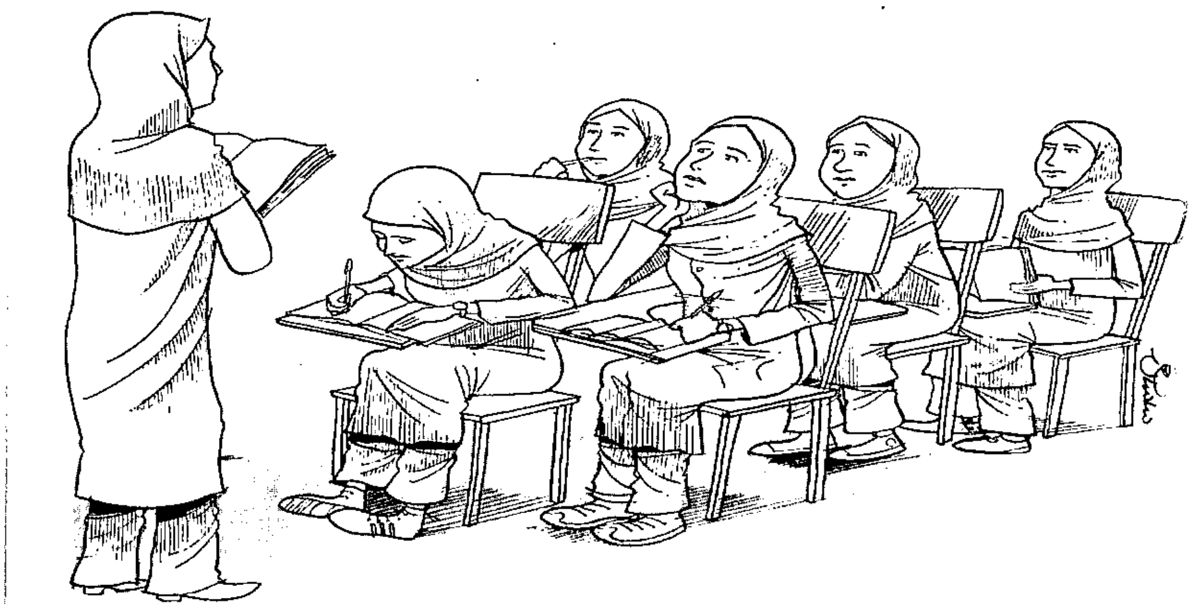
$$\frac{BO}{OB_1}=\frac{a+c}{b}$$

$$\frac{CO}{OC_1}=\frac{a+b}{c}$$

برای دانش‌آموزان پایه‌ی اول

یک مسأله‌ی ترکیبی از معادله‌ی خط در صفحه

احمد قندهاری



مسأله:

نقاط A(۴ و ۰) و B(۴- و ۴) و C(۰ و ۴-) سه رأس مثلث ABC هستند.

۱. معادله‌های ضلع‌های AB، BC و AC را بنویسید.

۲. معادله‌های میانه‌های AM (M وسط BC)، BN (N وسط AC) و CK (K وسط AB) را بنویسید.

۳. معادله‌های سه ارتفاع AH، BH′ و CH″ را بنویسید.

۴. معادله‌های سه عمود منصف ضلع‌های AB، AC و BC را بنویسید.

۵. ثابت کنید سه میانه‌ی مثلث ABC در یک نقطه همرسند.

۶. ثابت کنید سه ارتفاع مثلث ABC در یک نقطه همرسند.

۷. ثابت کنید سه عمود منصف مثلث ABC در یک نقطه همرسند.

۸. اندازه‌ی مساحت مثلث ABC را بیابید.

۹. طول شعاع دایره‌ی محیطی مثلث ABC را بیابید.

۱۰. شکل را به طور کامل رسم کنید.

حل

۱.

$A\left|\begin{matrix}0\\4\end{matrix}\right. \quad , \quad B\left|\begin{matrix}4\\-4\end{matrix}\right.$

معادله‌ی ضلع AB:

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) \Rightarrow$$

$$y - 4 = \frac{-4-4}{4-0}(x-0) \Rightarrow y - 4 = -2x \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} y = -2x + 4 \\ \text{معادله‌ی ضلع AB} \end{matrix}}$$

$B\left|\begin{matrix}4\\-4\end{matrix}\right. \quad , \quad C\left|\begin{matrix}-4\\0\end{matrix}\right.$

معادله‌ی ضلع BC:

$$y - y_B = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}(x - x_B) \Rightarrow$$

$$y + 4 = \frac{0+4}{-4-4}(x-4) \Rightarrow y + 4 = -\frac{1}{2}(x-4)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} y = -\frac{1}{2}x - 2 \\ \text{معادله‌ی ضلع BC} \end{matrix}}$$

$A\left|\begin{matrix}0\\4\end{matrix}\right. \quad , \quad C\left|\begin{matrix}-4\\0\end{matrix}\right.$

معادله‌ی ضلع AC:

$$y - y_A = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}(x - x_A) \Rightarrow$$

$$y - 4 = \frac{0-4}{-4-0}(x-0) \Rightarrow y - 4 = x \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} y = x + 4 \\ \text{معادله‌ی ضلع AC} \end{matrix}}$$

۲.

$B\left|\begin{matrix}4\\-4\end{matrix}\right. \quad , \quad C\left|\begin{matrix}-4\\0\end{matrix}\right.$ ؛ نقطه‌ی M وسط BC است،

بنابراین:

$$\begin{matrix} x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{4-4}{2} = \frac{0}{2} = 0 \\ y_N = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-4-0}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \end{matrix} \Rightarrow M(0,-2)$$

$A\left|\begin{matrix}0\\4\end{matrix}\right. \quad , \quad C\left|\begin{matrix}-4\\0\end{matrix}\right.$ ؛ نقطه‌ی N وسط AC است، بنابراین:

$$\begin{matrix} x_N = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{0-4}{2} = -2 \\ y_N = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{4+0}{2} = 2 \end{matrix} \Rightarrow N(-2,2)$$

$A\left|\begin{matrix}0\\4\end{matrix}\right. \quad , \quad B\left|\begin{matrix}4\\-4\end{matrix}\right.$ ؛ نقطه‌ی K وسط AB است، بنابراین:

$$\begin{matrix} x_K = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{0+4}{2} = 2 \\ y_K = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{4-4}{2} = 0 \end{matrix} \Rightarrow K(2,0)$$

الف) معادله‌ی AM، $A\left|\begin{matrix}0\\4\end{matrix}\right. \quad , \quad M\left|\begin{matrix}0\\-2\end{matrix}\right.$

چون دو نقطه‌ی A و M روی محور yها قرار دارند، پس معادله‌ی AM، همان معادله‌ی محور yهاست، در نتیجه:

$$\boxed{\begin{matrix} x = 0 \\ \text{معادله AM} \end{matrix}}$$

ب) معادله‌ی BN، $B\left|\begin{matrix}4\\-4\end{matrix}\right. \quad , \quad N\left|\begin{matrix}-2\\2\end{matrix}\right.$

$$y - y_B = \frac{y_N - y_B}{x_N - x_B}(x - x_B) \Rightarrow$$

$$y + 4 = \frac{2+4}{-2-4}(x-4) \Rightarrow y + 4 = -1(x-4) \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} y = -x \\ \text{معادله BN} \end{matrix}}$$

توجه کنید که نقاط B و N هر دو روی خط $y = -x$ قرار دارند، زیرا طول و عرض آن‌ها قرینه‌ی یکدیگرند. پس می‌توانستیم بدون عمل بالا بگوییم، معادله‌ی BN، $y = -x$ است.

ج) معادله‌ی CK، $C\left|\begin{matrix}-4\\0\end{matrix}\right. \quad , \quad K\left|\begin{matrix}2\\0\end{matrix}\right.$

به طوری که ملاحظه می‌کنید، دو نقطه‌ی C و K روی محور xها قرار دارند، پس معادله‌ی CK، همان معادله‌ی محور xهاست، در نتیجه:

$$\boxed{\begin{matrix} y = 0 \\ \text{معادله‌ی CK} \end{matrix}}$$

۳.

الف) معادله‌ی ارتفاع AH

ارتفاع AH بر ضلع BC عمود است. معادله‌ی ضلع BC به

صورت $y=-\frac{1}{2}x-2$ است، پس شیب آن $-\frac{1}{2}$ می‌شود.
درنتیجه شیب ارتفاع وارد بر آن ۲ است.

$$A\Big|_{4}^{0} \quad , \quad m=2$$

$$y-y_A=m(x-x_A)$$

$$y-4=2(x-0)\Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} y=2x+4 \\ \text{AH معادله‌ی ارتفاع} \end{array}}$$

ب) معادله‌ی ارتفاع 'BH

ارتفاع 'BH بر ضلع AC عمود است. معادله‌ی ضلع AC به صورت $y=x+4$ است، پس شیب آن عدد ۱ و شیب ارتفاع وارد بر آن ۱- است.

$$B\Big|_{-4}^{4} \quad , \quad m=-1$$

$$y-y_B=m(x-x_B)$$

$$y+4=-1(x-4)\Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} y=-x \\ \text{BH' معادله‌ی ارتفاع} \end{array}}$$

سؤال: چرا معادله‌ی ارتفاع 'BH با معادله‌ی BN یکی شده است؟

ج) معادله‌ی ارتفاع "CH

ارتفاع "CH بر ضلع AB عمود است، معادله‌ی ضلع AB به صورت $y=-2x+4$ است، پس شیب آن ۲- و در نتیجه شیب ارتفاع وارد بر آن $\frac{1}{2}$ است.

$$C\Big|_{0}^{-4} \quad , \quad m=\frac{1}{2}$$

$$y-y_C=m(x-x_C)$$

$$y-0=\frac{1}{2}(x+4)\Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} y=\frac{1}{2}x+2 \\ \text{CH'' معادله‌ی ارتفاع} \end{array}}$$

۴.

الف) عمودمنصف AB

عمودمنصف AB خطی است که در وسط ضلع AB بر AB عمود شود. معادله‌ی AB به صورت $y=-2x+4$ است و شیب آن ۲-. پس شیب عمودمنصف مانند شیب ارتفاع وارد بر AB، $\frac{1}{2}$ است.

قبلاً درقسمت ۲ داشتیم $K\Big|_{0}^{2}$ وسط AB است.

$$K\Big|_{0}^{2} \quad , \quad m=\frac{1}{2}$$

$$y-y_K=m(x-x_K)\Rightarrow$$

$$y-0=\frac{1}{2}(x-2)\Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} y=\frac{1}{2}x-1 \\ \text{AB معادله‌ی عمودمنصف} \end{array}}$$

ب) عمودمنصف BC

عمودمنصف BC خطی است که در وسط ضلع BC بر ضلع BC عمود باشد. معادله‌ی ضلع BC به صورت $y=-\frac{1}{2}x-2$ است، پس شیب آن $-\frac{1}{2}$ و در نتیجه شیب عمودمنصف، مانند شیب ارتفاع وارد بر آن ۲ است.

قبلاً در قسمت ۲ داشتیم $M\Big|_{-2}^{0}$ وسط ضلع BC است.

$$M\Big|_{-2}^{0} \quad , \quad m=2$$

$$y-y_M=m(x-x_M)\Rightarrow$$

$$y+2=2(x-0)\Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} y=2x-2 \\ \text{BC معادله‌ی عمودمنصف ضلع} \end{array}}$$

ج) عمودمنصف AC

معادله‌ی عمودمنصف ضلع AC به صورت $y=-x$ است، چرا؟

۵. باید ثابت کنیم سه میانه‌ی مثلث ABC یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.

AM معادله‌ی میانه‌ی : $x=0$
BN معادله‌ی میانه‌ی : $y=-x$ $\quad \Rightarrow O\Big|_{0}^{0}$
CK معادله‌ی میانه‌ی : $x=0$ $\quad$ محل تلاقی سه میانه‌ی مثلث

۶. می‌خواهیم ثابت کنیم، سه ارتفاع مثلث یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.

AH معادله‌ی ارتفاع : $y=2x+4$
'BH معادله‌ی ارتفاع : $y=-x$
"CH معادله‌ی ارتفاع : $y=\frac{1}{2}x+2$

باید معادله‌ی دو ارتفاع را مانند دستگاه دو معادله‌ی دو

مجهولی با هم حل کنیم تا x و y محل تلاقی آن‌ها به دست آید. آن‌گاه مختصات این نقطه را در معادله‌ی ارتفاع سومی قرار می‌دهیم. اگر دو طرف تساوی برابر شد، آن‌گاه می‌گوییم، آن نقطه محل تلاقی سه ارتفاع است.

$$\begin{cases} y = ۲x + ۴ \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow ۲x + ۴ = -x \Rightarrow ۳x = -۴ \Rightarrow x = -\frac{۴}{۳}$$

$$x = -\frac{۴}{۳},\ y = -x \Rightarrow y = \frac{۴}{۳} \Rightarrow P\left|\begin{matrix} -\frac{۴}{۳} \\ \frac{۴}{۳} \end{matrix}\right. \text{محل تلاقی دو ارتفاع}$$

$y = \frac{۱}{۲}x + ۲$ و $P(-\frac{۴}{۳}, \frac{۴}{۳})$

$$\frac{۴}{۳} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{-۴}{۳}\right) + ۲ \Rightarrow \frac{۴}{۳} = \frac{-۲}{۳} + ۲ \Rightarrow \frac{۴}{۳} = \frac{۴}{۳}$$

چون مختصات نقطه‌ی P محل تلاقی دو ارتفاع AH و BH′ در معادله‌ی ارتفاع سومی CH″ صدق کرد، در نتیجه نقطه‌ی $P(-\frac{۴}{۳}, \frac{۴}{۳})$ محل تلاقی سه ارتفاع است.

۷. می‌خواهیم ثابت کنیم، سه عمودمنصف مثلث ABC یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.

AB معادله‌ی عمودمنصف : $y = \frac{۱}{۲}x - ۱$

BC معادله‌ی عمودمنصف : $y = ۲x - ۲$

AC معادله‌ی عمودمنصف : $y = -x$

مانند حل قسمت ۶، باید معادله‌ی دو عمودمنصف را با هم تقاطع دهیم تا مختصات نقطه‌ی تقاطع آن‌ها به دست آید. اگر مختصات این نقطه در معادله‌ی عمودمنصف سومی صدق کرد، آن‌گاه می‌گوییم سه عمودمنصف در یک نقطه متقاربند یا همرسند.

$$\begin{cases} y = ۲x - ۲ \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow ۲x - ۲ = -x \Rightarrow ۳x = ۲ \Rightarrow x = \frac{۲}{۳}$$

$$x = \frac{۲}{۳},\ y = -x \Rightarrow y = -\frac{۲}{۳} \Rightarrow Q\left|\begin{matrix} \frac{۲}{۳} \\ -\frac{۲}{۳} \end{matrix}\right.$$

$y = \frac{۱}{۲}x - ۱$ ، $Q(\frac{۲}{۳}, -\frac{۲}{۳})$

$$-\frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۲}{۳}\right) - ۱ \Rightarrow -\frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۳} - ۱ \Rightarrow -\frac{۲}{۳} = -\frac{۲}{۳}$$

چون مختصات نقطه‌ی Q محل تلاقی دو عمودمنصف، در معادله‌ی عمودمنصف سومی صدق کرد، بنابراین می‌گوییم سه عمودمنصف این مثلث در نقطه متقاربند.

۸. اندازه‌ی مساحت مثلث ABC

روش اول

مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$\frac{\text{طول ضلع}\,AC \times \text{طول ارتفاع}\,BH'}{۲}$$

$$A\left|\begin{matrix} ۰ \\ ۴ \end{matrix}\right. \quad , \quad C\left|\begin{matrix} -۴ \\ ۰ \end{matrix}\right.$$

$$\text{طول ضلع}\ AC = \sqrt{(x_C - x_A)^۲ + (y_C - y_A)^۲} = \sqrt{(-۴-۰)^۲ + (۰-۴)^۲}$$

$$\text{طول ضلع}\ AC = \sqrt{۱۶+۱۶} = \sqrt{۱۶ \times ۲} = ۴\sqrt{۲}\ \text{واحد}$$

محاسبه‌ی طول ارتفاع BH′

$$\text{معادله‌ی ضلع}\,AC:\ y = x + ۴\ \text{یا}\ x - y + ۴ = ۰ \quad \begin{cases} a = ۱ \\ b = -۱ \\ c = ۴ \end{cases},\ B\left|\begin{matrix} ۴ = x_۱ \\ -۴ = y_۱ \end{matrix}\right.$$

$$\text{اندازه‌ی طول ارتفاع}\ BH' = \frac{|ax_۱ + by_۱ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|۴+۴+۴|}{\sqrt{۱+۱}} = \frac{۱۲}{\sqrt{۲}}$$

$$\text{اندازه‌ی مساحت مثلث}\ ABC = S_{ABC} = \frac{\text{طول ضلع}\,AC \times \text{طول ارتفاع}\,BH}{۲} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{۴\sqrt{۲} \times \frac{۱۲}{\sqrt{۲}}}{۲} = \frac{۴۸}{۲} = ۲۴\ \text{واحد مربع}$$

روش دوم

اگر $A\left|\begin{matrix} ۰ = x_۱ \\ ۴ = y_۱ \end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix} ۴ = x_۲ \\ -۴ = y_۲ \end{matrix}\right.$ ، $C\left|\begin{matrix} -۴ = x_۳ \\ ۰ = y_۳ \end{matrix}\right.$ سه رأس مثلث ABC باشند، اندازه‌ی مساحت مثلث ABC از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}|x_۱y_۲ + x_۲y_۳ + x_۳y_۱ - y_۱x_۲ - y_۲x_۳ - y_۳x_۱|$$

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}|۰ + ۰ - ۱۶ - ۱۶ - ۱۶ + ۰|$$

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}|-۴۸| = \frac{۱}{۲} \times ۴۸ = ۲۴\ \text{واحد مربع}$$

۹ . دایره‌ی محیطی مثلث ABC دایره‌ای است که از سه رأس مثلث ABC می‌گذرد . برای تعیین طول شعاع دایره‌ی محیطی مثلث ABC ، ابتدا باید مرکز دایره‌ی محیطی مثلث را پیدا کنیم . برای این کار لازم است نقطه‌ای درون مثلث ABC بیابیم که از سه رأس مثلث به یک فاصله باشد . این نقطه محل تلاقی سه عمودمنصف مثلث است .

در حل ۷ داشتیم $Q(\frac{۲}{۳}, -\frac{۲}{۳})$ محل تلاقی سه عمودمنصف مثلث ABC است .

برای تعیین اندازه‌ی شعاع دایره‌ی محیطی کافی است طول پاره‌خط AQ را بیابیم .

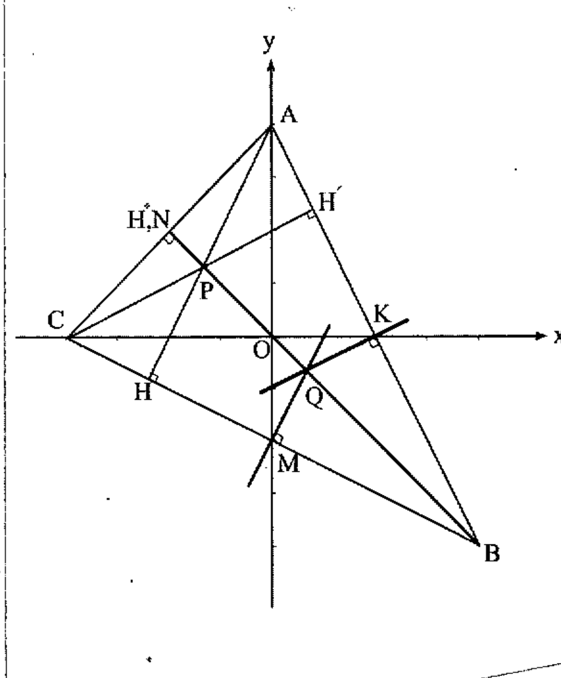
$$A\left|\begin{matrix}۰\\۴\end{matrix}\right. \quad , \quad Q\left|\begin{matrix}\frac{۲}{۳}\\-\frac{۲}{۳}\end{matrix}\right.$$

$$R=AQ \text{ اندازه‌ی } = \sqrt{(x_A - x_Q)^۲ + (y_A - y_Q)^۲} = \sqrt{(۰-\frac{۲}{۳})^۲ + (۴+\frac{۲}{۳})^۲}$$

$$R = \sqrt{\frac{۴}{۹} + (\frac{۱۴}{۳})^۲} = \sqrt{\frac{۴}{۹} + \frac{۱۹۶}{۹}} = \sqrt{\frac{۲۰۰}{۹}} = \sqrt{\frac{۱۰۰ \times ۲}{۹}}$$

$$\boxed{R = \frac{۱۰}{۳}\sqrt{۲}}$$

. ۱۰



برگ اشتراک مجله های رشد

شرایط

۱ـ واریز مبلغ ۲۰/۰۰۰ ریال به ازای هر عنوان مجله درخواستی، به صورت علی الحساب به حساب شمارهٔ ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت شعبه سه راه آزمایش (سرخه حصار) کد ۳۹۵ در وجه شرکت افست.

۲ـ ارسال اصل رسید بانکی به همراه برگ تکمیل شده اشتراک.

- **نام مجله :** ....
- **نام و نام خانوادگی:**..
- **تاریخ تولد:** ....
- **میزان تحصیلات:** ....
- **تلفن:** ....
- **نشانی کامل پستی:**

استان: .... شهرستان: ....

خیابان: ....

....

پلاک: .... کدپستی: ....

- **مبلغ واریز شده:**..
- **شماره و تاریخ رسید بانکی:**................................
- **آیا مایل به دریافت مجله درخواستی به صورت پست پیشتاز هستید؟ بله☐ خیر☐ .**

امضا:

نشانی: تهران ـ صندوق پستی مشترکین ۱۶۵۹۵/۱۱۱

نشانی اینترنتی: www.roshdmag.org

پست الکترونیک: Email:info@roshdmag.org

☎ امور مشترکین: ۱۴ـ۷۷۳۳۶۶۵۶ـ۷۷۳۳۹۷۱۳

☎ پیام گیر مجلات رشد: ۸۸۳۰۱۴۸۲ ـ ۸۸۸۳۹۲۳۲

یادآوری:

- هزینه برگشت مجله در صورت خوانا و کامل نبودن نشانی، بر عهده مشترک است.
- مبنای شروع اشتراک مجله از زمان وصول برگ اشتراک است.
- برای هر عنوان مجله برگ اشتراک جداگانه تکمیل و ارسال کنید (تصویر برگ اشتراک نیز مورد قبول است).

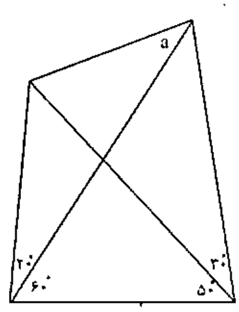
حل مسأله ی مسابقه‌ای برهان ۵۰

مسأله : زاویه مشخص شده a در شکل ۱ را پیدا کنید؟

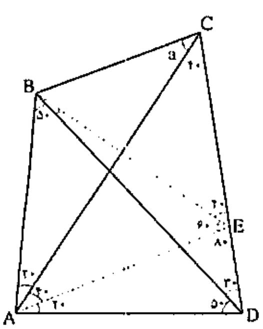
حل : چهارضلعی ABCD را درنظر بگیرید و خط AE را چنان رسم کنید که رأس A با افق زاویه‌ای 20° بسازد (شکل ۲).

زوایای $A\hat{B}D$ و $A\hat{D}B$ هر دو 50° هستند (زیرا در مثلث $A\overset{\Delta}{B}D$ داریم: $\hat{A}=80^\circ$ و $\hat{D}=50^\circ$ درنتیجه $\hat{B}=50^\circ$) بنابراین $|AD|=|AB|$ هم‌چنین در مثلث $A\overset{\Delta}{E}D$ داریم: $A\hat{D}E=80^\circ$ و $E\hat{A}D=20^\circ$ درنتیجه $A\hat{E}D$ برابر با 80° است، بنابراین $|AD|=|AE|$، درنتیجه $|AB|=|AE|$ و از آن‌جا مثلث $B\overset{\Delta}{A}E$ متساوی‌الاضلاع می‌شود، زاویه $\hat{A}$ در این مثلث 60° است، می‌دانیم که $A\overset{\Delta}{B}E$ نیز یک مثلث متساوی‌الاضلاع است درنتیجه $|AE|=|BE|$؛ بعلاوه از آن‌جایی که زوایای $E\hat{A}C$ و $E\hat{C}A$ هر دو 40° هستند، می‌دانیم که $|AE|=|CE|$ و بنابراین $|BE|=|CE|$ بنابراین $B\overset{\Delta}{E}C$ متساوی‌الساقین است.

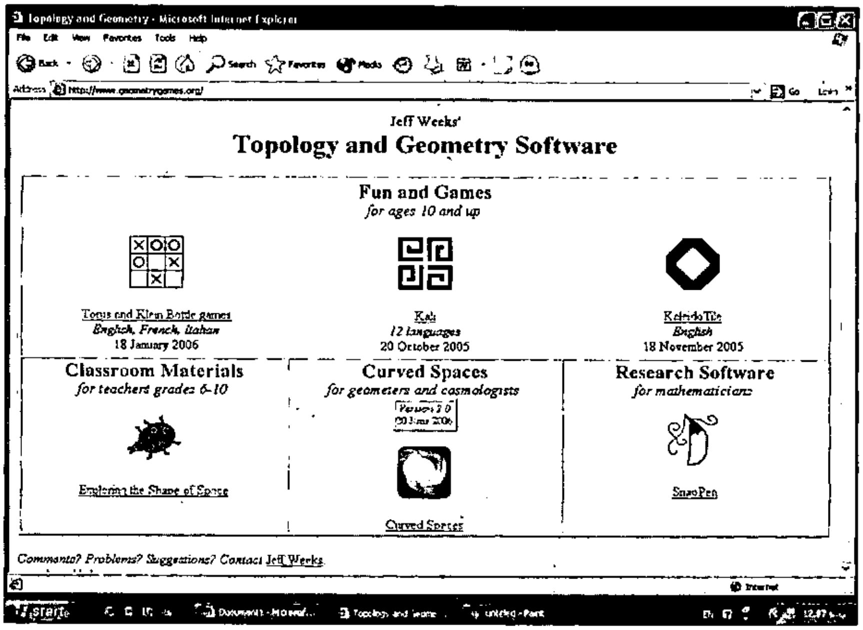
همچنین می‌دانیم که زاویه $B\hat{E}C$ برابر با 40° درجه است (چون که $B\hat{E}A$ برابر با 60° است و $A\hat{E}D$ برابر با 80° است). بنابراین زوایای مجاور به قاعده مثلث متساوی‌الساقین $B\overset{\Delta}{E}C$ هر دو برابر با 70° هستند، درنتیجه زاویه $\hat{a}=B\hat{C}A$ برابر با 30° است.



شکل ۱



شکل ۲



پرویز قراگوزلو/ احسان یارمحمدی

۱.

http://mathworld.wolfram.com

این سایت اینترنتی یکی از بزرگ‌ترین سایت‌ها به عنوان منبع در علم ریاضی محسوب می‌شود. فهرست موضوعی این سایت که هر یک از آن‌ها نیز شامل عنوان‌های گوناگونی دارد، به صورت زیر است:

- جبر (Algebra)
- ریاضیات کاربردی (Applied Mathematics)
- حساب دیفرانسیل و آنالیز (Calculus and Analysis)
- ریاضیات گسسته (Discrete Mathematics)
- اصول ریاضیات (Foundations of Mathematics)
- هندسه (Geometry)
- تاریخ و لغات تخصصی (History and Terminology)
- نظریه‌ی اعداد (Number Theory)
- احتمال و آمار (Probability and Statistics)
- ریاضیات تفریحی (Recreational Mathematics)
- توپولوژی (مکان‌شناسی) (Topology)

زبان حال
ریاضی دانان

■ کتاب بزرگ طبیعت را با علائم ریاضی نگاشته‌اند.

گالیلئو گالیله

■ کسی که هندسه نمی‌داند، از این در وارد نشود. (کتیبه‌ی سردر ورودی آکادمی افلاطون)

■ از قدیمی‌ترین دوران تاکنون، دو نوع گرایش بر پیشرفت عمومی ریاضیات حاکم بوده است که گاه کمک‌های متقابلی به یکدیگر کرده‌اند. این دو گرایش را می‌توان به اسامی **پیوسته** و **گسسته** موسوم ساخت.

ای. تی. بل

برگرفته از کتاب زبان حال ریاضی‌دانان به روایت دکتر علی‌اکبر عالم‌زاده