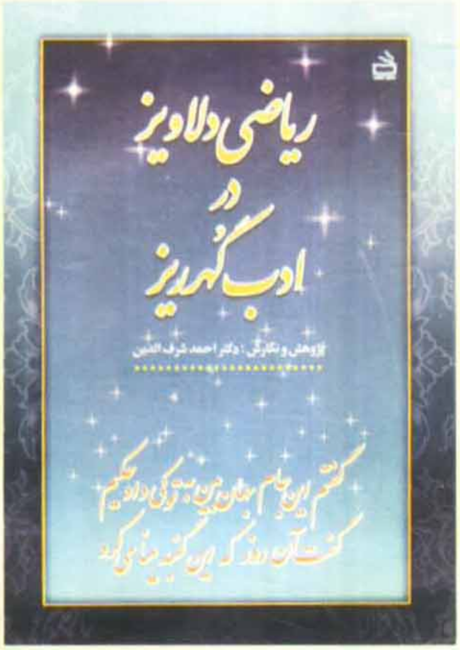
رشد برهان ۳۷

www.roshdmag.org

سال دوازدهم ،شماره اول ❖ ۱۳۸۱ ، بها: ۲۰۰۰ ریال

❖ برای دانش‌آموزان دوره متوسطه و پیش‌دانشگاهی

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی



تاکنون مسائل متعددی از آقای «شرف‌الدین» در مجله برهان منتشر کرده‌ایم، که مورد استقبال کامل خوانندگان قرار گرفته است. افزون بر این، از ایشان سه کتاب ارزنده در مجموعهٔ کتاب‌های انتشارات مدرسه به چاپ رسیده است. در سال ۱۳۷۳، کتابی از ایشان تحت عنوان «هندسهٔ تحلیلی چند محوری و چند رساله دیگر» منتشر شد. در آن کتاب، آقای شرف‌الدین یکی از تحقیقات خود را در هندسه عرضه کرده بودند که در حقیقت، یک نوع هندسهٔ تصویری جدید است. آقای شرف‌الدین در کتاب یاد شده، بسیاری از قضیه‌های هندسه را به راه‌های بسیار ساده اثبات کرده‌اند. کتاب هندسهٔ تحلیلی چند محوری، در پنج هزار نسخه به چاپ رسید و پس از یک سال، دوباره در پنج هزار نسخه تجدید چاپ شده است. این امر، میزان استقبال از کتاب یادشده را نشان می‌دهد. در سال ۱۳۷۷، انتشارات مدرسه از ایشان، کتاب «هندسهٔ دلپذیر» را چاپ کرد که اثری است بدیع و مورد استقبال کامل قرار گرفت.

انتشارات مدرسه در بهار امسال، کتاب «ریاضی دلاویز در ادب گهریز» را منتشر کرد. کتاب اخیر، اثری است بدیع و بسیار جذّاب. این کتاب می‌تواند مورد استفاده طیف وسیعی از خوانندگان، اعم از استاد، دبیر، دانشجو و دانش‌آموز قرار گیرد. در کتاب ریاضی دلاویز در ادب گهریز، موضوع‌های متنوّعی عرضه شده است؛ از آن جمله‌اند: به کارگیری منطق ریاضی برای درست خواندن بعضی عبارت‌های ادبی، توضیح نکته‌های فلسفی لطیف در بعضی اشعار شاعران ایران، جست‌وجوی مسائل ریاضی در دانستنی‌های همگانی (فولکلور) ایرانی، مثال‌های جذّاب از حساب ابجد، فرمول در ریاضیات و در ادبیات، سخنی از نیوتن و چند شاعر ایرانی، شاعر و ریاضی‌دان با آفرینندگی خود زنده‌اند، دلمشغولی‌های شاعر و ریاضی‌دان، سخنی از اینشتین و همانند آن از چند شاعر ایرانی، لف و نشر[1] در ادبیات و ریاضیات، مبحث تناقض در ادبیات و ریاضیات، حکمت و ریاضیات و حکمت در ادبیات فارسی، استدلال ریاضی و استدلال تمثیلی، آرایش معنوی کتاب‌ها، نکته‌های علمی در ادبیات فارسی، سخنی شعرگونه از چند ریاضی‌دان و فضای پرواز اندیشه در ریاضیات و ادبیات.

دربارهٔ ریاضی دلاویز در ادب گهریز

• اثر دکتر احمد شرف‌الدین

۱) لف و نشر، یک صنعت ادبی است.

رشد برهان ۳۷

❖ سال دوازدهم، شماره اول ❖ ۱۳۸۱
❖ بها: ۲۰۰۰ ریال ❖ تیراژ: ۴۰۰۰۰ نسخه
❖ برای دانش‌آموزان دوره متوسطه و پیش دانشگاهی

www.roshdmag.org

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

❖ مدیر مسؤول: علیرضا حاجیان زاده
❖ سردبیر: حمیدرضا امیری
❖ مدیر داخلی: میرشهرام صدر
❖ مدیر هنری: شاهرخ خره‌غانی
❖ اعضای هیأت تحریریه:
حمیدرضا امیری
محمد هاشم رستمی
احمد قندهاری
میرشهرام صدر
هوشنگ شرقی
سید محمدرضا هاشمی موسوی
غلامرضا یاسی پور
❖ و با تشکر از همکاری ارزندهٔ
آقای پرویز شهریاری
◆ چاپ و صحافی:
شرکت افست
(سهامی عام)

رشد برهان، تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه های زیر دعوت به همکاری می کند:

نگارش مقاله های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب های ریاضی متوسطه) **طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن ها** (برای دانش‌آموزان) **طرح مسائل مسابقه ای به همراه حل آن ها** (برای دانش‌آموزان) **طرح معماهای ریاضی** **نگارش یا ترجمهٔ مقاله های عمومی ریاضی** (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

رشد برهان، هر سه ماه یک شماره منتشر می شود.

مجلّه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافه مقاله ها آزاد است. مقاله های وارده باید خوانا و حتی الامکان کوتاه باشد.

مقاله های رسیده مسترد نمی شود. استفاده از مطالب مجلّه در کتاب ها یا مجله های دیگر با ذکر دقیق ماخذ بلامانع است.

نشانی دفتر مجلّه: صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن امور مشترکین: ۸۸۳۹۱۸۶

حرف اول

شاید شما اولین نوبتی است که مجله ای ریاضی به نام رشد برهان را مطالعه می کنید، مجله ای که در آستانهٔ دوازدهمین سال چاپ آن هستیم، مجله ای که توسط دفتر انتشارات کمک آموزشی وزارت آموزش و پرورش و منحصراً برای دانش آموزان دورهٔ متوسطه و پیش دانشگاهی طراحی ، چاپ و منتشر می شود.

تاکنون این مجله فقط در تعدادی معدود کتاب فروشی توزیع می شد، ولی بحمدلله و با تلاش مسؤولین انتشارات مدرسه برهان و دفتر انتشارات کمک آموزشی از این به بعد در مدارس و مراکز آموزشی به راحتی در اختیار شما علاقه مندان به ریاضی قرار خواهد گرفت. اگر شما بخواهید، می توانید با پر کردن فرم اشتراک که در انتهای مجله آمده است، مشترک شوید و شماره های بعدی و حتی شماره های قبل را تهیه کنید.

همان طور که در ابتدای مجله می خوانید، از هرگونه پیشنهاد و نظرات شما استفاده کرده و منتظر مقاله ها و مسائل طرح شده یا حل آنها از طرف شما هستیم تا با نام خودتان به چاپ برسانیم. در این زمینه می توانید از دبیر محترمتان کمک گرفته و راهنمایی های ارزندهٔ ایشان را در نوشتن مقاله های خود به کار ببرید.

در حال حاضر، این مجله به صورت فصلنامه چاپ می شود که امیدواریم بتوانیم فاصلهٔ چاپ هر مجله تا شمارهٔ بعدی را کمتر کنیم.

عزیزان دانش آموز، سال تحصیلی آغاز شد، به یاد داشته باشید که پیشرفت تحصیلی و موفقیّت در کسب علم و دانش پارامترهای زیادی داشته است که به طور اجمال به مهمترین آنها اشاره می کنیم.

سرآغاز همهٔ آنها توکّل به خداوند است و حرکت برای او و در جهت رضای او و سپس، کوشش و تلاش و پشت کار و برنامه ریزی که بدون آن احتمال تلف شدن و به بطالت گذشتن اوقات بسیار است، استفاده از منابع خوب و استاندارد کمک درسی و کمک آموزشی تا وسعت دیدمان نسبت به مطالب و موضوع های درسی افزایش یابد، حضور به موقع و پیوسته در کلاس های درس و استفاده هرچه بیشتر از دانش و تجربهٔ دبیران محترم و ایجاد یک ارتباط خوب با ایشان و بهره مندی از راهنمایی های ارزندهٔ ایشان.

دانش آموزان عزیز، همچنین از شما می خواهیم راجع به کتاب درسی ریاضی خودتان برای ما بنویسید، کدام بخش را خوب فهمیدید، کدام مبحث کمبودی دارد یا معلم بیان می کند برای شما سنگین بوده، راجع به چه موضوعی اطلاعات بیشتری می خواهید و کاربرد آن را نمی دانید و... تا ان شاءالله در حد توانمان شما را یاری دهیم، به امید دیدار نامه ها و مقاله های شما.

سردبیر

از تاریخ ریاضیات

پرویز شهریاری

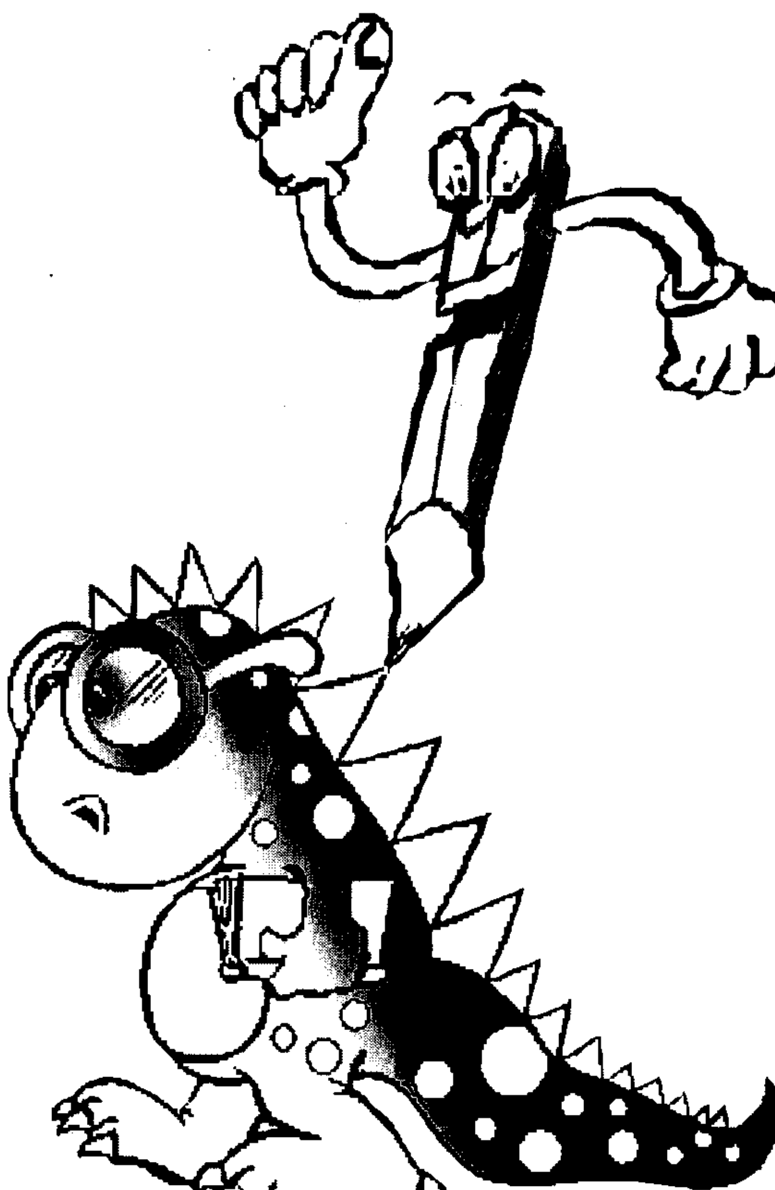
جمع بندی گذشته

تا این جا به بحث دربارهٔ تاریخ ریاضیات در بین ملت های کهن پرداختیم. دیدیم چگونه در دنیای کهن، به تدریج بر آگاهی های انسان در زمینهٔ ریاضیات افزوده می شد و چگونه به تدریج دانش ریاضی شکل می گرفت. در واقع، دوران نخستین تاریخ تکامل ریاضیات، طولانی ترین دورهٔ تاریخی به شمار می رود و از همان آغاز، پیدایش انسان تا سدهٔ ششم پیش از میلاد ادامه داشته است. در این دوره، همهٔ ملت ها دست اندرکار ساختمان این کاخ پرشکوهی که امروز ریاضیات نامیده می شود، سهیم بوده اند. هیچ ملتی از این گردونه خارج نبوده است. حتی وقتی پای اروپائیان به سرزمین امریکا رسید، با چنان فرهنگی روبه رو شدند که آنها را شگفت زده کرد؛ به ویژه قوم های «اینکاوآزتک»، درزمینه های مختلف، از هنر گرفته تا دانش، چنان پیش رفته بودند که بیرون از نظام اجتماعی حاکم بر آنها، کسانی که بر آنها هجوم برده بودند، دچار حیرت کرد. افسوس که تمام آثار هنری و علمی بومیان امریکا بوسیلهٔ غارتگران اسپانیایی و پرتغالی، به غارت رفت و نابود شد. آثار هنری که اغلب به صورت مجسمه بود، آب شد و به شکل شمش های طلا، به اسپانیا و پرتغال برده شد. کتاب های علمی آنها معدوم و خط و زبان آنها فراموش شد، تنها یادگارهای عظیمی از آنها باقی ماند که در روزگار ما تلاش می شود پرده از رازهای آنها برداشته شود و معلوم شده است، اغلب آنها رصدخانه هایی بوده اند که برای یافتن وقت و زمان به کار می رفته اند. از نظر ریاضی، می توانستند عمل هایی را انجام دهند، در بعضی جاها از مبنای ۵ برای عددشماری استفاده کنند و بدون تردید، برای محاسبه های اخترشناسی، نیاز به محاسبه های پیچیده ای داشتند، که از عهدهٔ آن

برمی‌آمدند.

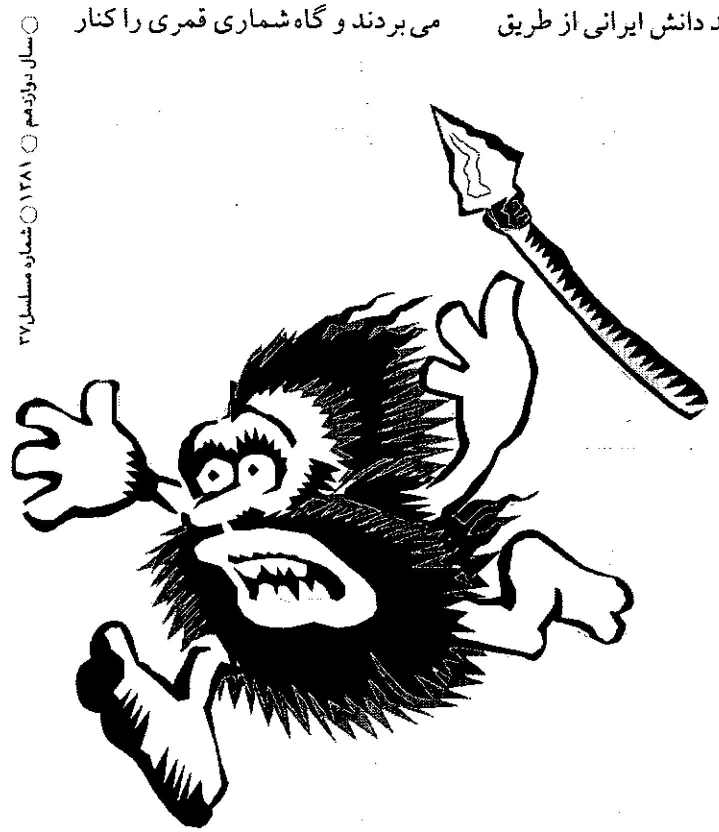
وقتی هم که از سرزمین بابل نام برده می‌شود، بابل و عیلام را به هم مخلوط کرده‌اندو از جمله «نیگه بادر» که از پژوهشگران جدّی است که دربارهٔ بابل کتابی دارد با دقت، کارهای ریاضی و اخترشناسی بابلی را مورد مطالعه قرار داده است، دانش عیلامی را (در جنوب و جنوب غربی ایران کنونی) در بیشتر جاها، با دانش بابلی درهم آمیخته است و از جمله، هندسهٔ عیلامی را، همان هندسهٔ بابلی دانسته است بابلی‌ها بیشتر روی محاسبه کار می‌کردند و عیلامی‌ها بیشتر به مباحث هندسه می‌پرداختند، ازجمله در زمینهٔ هندسه، به قضیهٔ فیثاغورس بسیار نزدیک شده و نمونه‌های متفاوتی از قضیهٔ فیثاغورس را آورده بودند و می‌خواستند ثابت کنند که در هر مثلث قائم‌الزاویه، مجذور وتر برابر است با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر (البته روی نمونه‌های مشخص).

وضع در کشورهای چین، هند، ژاپن و دیگر سرزمین‌هایی که انسان زندگی می‌کرد، به همین گونه بود. خصلت اصلی ریاضیات در این دوران طولانی، کار روی آن بود. در همه جا محاسبه برای نگهداری شمار جانوران و حساب فرزندان، و در دوره‌های جدیدتر، به منظور معامله و بازرگانی به کار می‌رفت، و هندسه به قصد اندازه‌گیری زمین و برپا داشتن خانه‌ها، نیایشگاه‌ها و قصرها به کار می‌رفت و جنبهٔ نخست ریاضیات، جنبهٔ کاربردی آن بود. در این دوره از تاریخ ریاضیات، البته با تدریج نکته‌هایی از ریاضیات نظری سر برمی‌آورد و در میان مسأله‌های معکوس و مسأله‌های دیگری که برای دانش‌آموزان مطرح می‌شد، نمایان می‌شد. از همین جا بود که مسأله‌های مربوط به حل معادله‌ها و تصاعدها بیرون آمد وبه تدریج جای خود را باز کرد، و پوستهٔ تنگ ریاضیات کاربردی را شکافت و به صورت ریاضیات نظری، که با منطق و استدلال درونی همراه بود، شکل گرفت. سرچشمهٔ ریاضیات یونانی

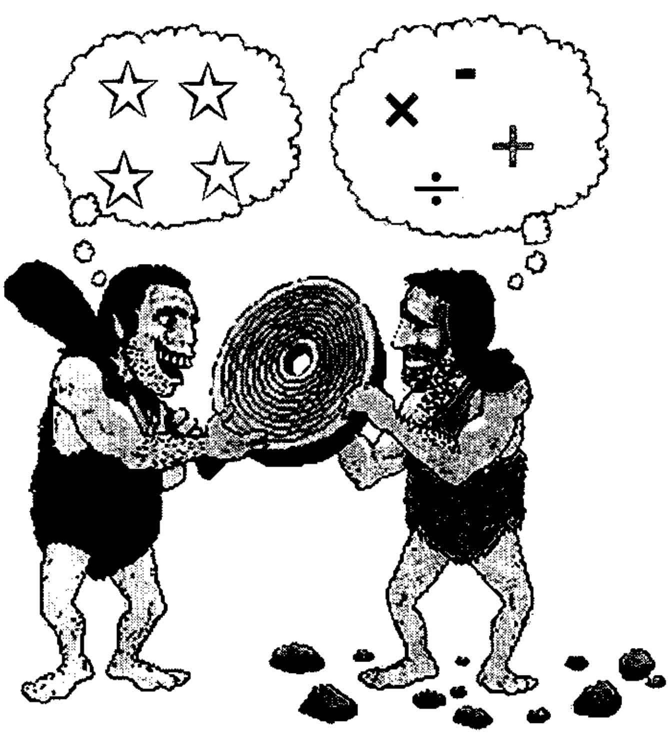


را باید در ریاضیات پیش از آن و به ویژه ریاضیات بابلی و ایرانی جست‌وجو کرد. ریاضیدانان یونانی، اغلب در مصر، بابل و ایران تحصیل کرده بودند و بسیاری از آنان مانند «تالس» و «اقلیدس»، در سرزمین‌هایی زندگی می‌کردند که در قلمرو ایران بود. در سدهٔ پنجم پیش از میلاد، در زمان خشایارشا، حکیمی به نام «استانس» از ایران، به مصر رفت و معلم بسیاری از پیشروان دانش یونان بود. فیثاغورس، دموکریت، هراکلیت و افلاتون تحت تأثیر او بودند. دموکریت «مُغ نامه» را به نام او نوشت. حتی «جابربن حیّان» و «زکریای رازی» در کتاب‌های خود از او نام می‌برند. او که به بزرگ مُغان و زرتشت ثانی مشهور بود، توانست بسیاری از فیلسوفان یونانی را تعلیم دهد. فیثاغورس شهرت داشت که دانش مغان را در بابل و ایران آموخته بود. هنوز در این باره که چگونه دانش مصری، بابلی و ایرانی به یونان نفوذ کرد، بحثی جدّی نشده است و سرچشمه‌های دانش یونانی شناخته نشده است. باید در این زمینه، بحثی جدّی درگیرد تا سرچشمه‌های دانش یونانی شناخته شود. از نظر فلسفی هم، این مسأله که یکباره، در یونان دانش می‌درخشد و بی هیچ زمینه‌ای رشد می‌کند و به درجات بالا می‌رسد، قابل توجیه نیست، به تازگی روشن شده است که در زمان ساسانیان، که گمان می‌کردند دانش ایرانی از طریق اوستا (اوستا یعنی نادانسته‌ها) به یونان منتقل شده و طی قرن‌ها تسلط یونانیان بر ایران، خود اوستا گم شده است، به ترجمهٔ آثار یونانی پرداختند تا از آن میان، اوستای گم شدهٔ خود را بیابند. معلوم شد که «هرمی توس» بیست جلد سروده‌های زرتشت را جمع کرده بود تا به تحصیل آنها بپردازد. معلوم شد در سدهٔ اوّل میلادی که آپولینوس به ایران سفر کرده بود، در ایران به محاسبهٔ شعاع زمین پرداخته بودند.

خود گاه‌شماری ایرانیان که قدمتی بسیار کهن دارد، نشانهٔ دیگری بر پیشرفت اخترشناسی در ایران است. در ایران از روزگاران قدیم، گاه‌شماری خورشیدی را به کار می‌بردند و گاه‌شماری قمری را کنار



گذاشته بودند، و این، همراه با پیدایش کشاورزی بود. وقتی انسان به کشاورزی روی آورد، نمی‌توانست با گاه‌شماری قمری بسازد. کشت محصول نیاز به زمان دقیق سال داشت، همچنین برداشت آن. دولت هم برای گرفتن مالیات، باید می‌دانست چه موقع مراجعه کند تا مالیات دهنده بتواند دین خود را بپردازد.



از این گذشته، فیلسوفان اولیهٔ یونانی، بیشتر درصدد نشر فلسفهٔ خود بودند و کمتر به مسائل علمی می‌پرداختند. یونان در نظام بردگی به سر می‌برد و جامعه به دو قشر آزاد و برده تقسیم شده بود. آزادها هیچ کاری نمی‌کردند، جز این که فلسفهٔ خود را نشر دهند. هر فیلسوفی برای خود فلسفه‌ای داشت؛ فیثاغورس و هواداران او مبنای همه چیز را عدد می‌دانستند، تالس مبنای همه چیز را آب می‌دانست، دموکریت مبنای همه چیز را ذره‌های غیرقابل تقسیم (اتم‌ها) می‌دانست و... یونانی‌ها حتی دانشی را که به کار عمل می‌خورد، تحقیر می‌کردند و دانش به حساب نمی‌آوردند، و اگر از استثناهایی مانند ارشمیدس بگذریم، که گویا خود برده‌های آزادشده بود، کار مربوط به دانش کاربردی را دانش برده‌ها به حساب می‌آوردند.

یونانی‌ها حتی عدد نویسی نداشتند و عدد ۲ را با حرف‌های الفبا می‌نوشتند. این از یک طرف کار محاسبه را پیچیده می‌کرد؛ به نحوی که ریاضیات محاسبه‌ای در یونان، به طور کلی پدید نیامد و از طرف دیگر، چون بیشتر محاسبه‌های خود را به کمک هندسه انجام می‌دادند و مقدارها را با پاره‌خط مشخص می‌کردند، در محاسبه‌ها دچار تقریب می‌شدند، و این، به بی‌دقت محاسبه کمک می‌کرد. یونانی هندسه را در رأس ریاضیات قرار می‌دادند و به همین دلیل، تا درون هندسهٔ عالی پیش رفتند؛ ولی در ریاضیات محاسبه‌ای ... حتی گامی برنداشتند.

تاریخ ریاضیات ر... باید از نو ساخت. برای این منظور نبایـ... ریاضیات کاربردی را از ریاضیات نظری جد... کرد. ریاضیات دو انگیزه برای پیشرفت خود دارد: ۱) انگیزهٔ بیرونی؛ یعنی آنچه از بیرون و به خاطر نیازهای زندگی و عملی به ریاضیات تحمیل می‌شود و ۲) انگیزهٔ درونی؛ یعنی آنچه از راه منطق و استدلال درونی ریاضیات، به وجود می‌آید. این دو عامل، تقریباً با هم و در طول تاریخ، به تناوب به پیشرفت ریاضیات یاری رسانده‌اند. گاهی این گاهی آن جلو افتاده است و دیگری را تحت تأثیر خود گرفته است؛ ولی از آن جا که نه عمل از نظریه و نه نظریه از عمل نتوانسته است خیلی فاصله بگیرد، همیشه آن که عقب مانده است، خود را به دیگری رسانده است. اکنون در دوران تفوّق کاربرد بر عمل زندگی می‌کنیم و هرچه در ریاضیات پدید می‌آید، به دنبال کاربرد آن هست یا از اوّل، اشکالی در یک مسألهٔ عملی پیدا می‌شود، و در نظریه به دنبال راه چاره برای آن می‌گردند.

اگر به این ترتیب تاریخ ریاضیات را بررسی کنیم، نه ملتی به کنار ی رود و نه سرزمینی از قلم می افتد. روشن می شود که همهٔ ملت های جهان، کم یا بیش، در ساختن این رهنگ باشکوه انسانی دست داشته اند و دیگر دانش و هنر از سرزمین کوچکی مانند یونان واقع در خاک اروپا آغاز نشده است. در دورهٔ سده های میانه، به خاطر تسلط جهل ر مردم، قریب هزارسال، ناتوان مانده و بعد دوباره در اروپا آغاز به شو و نما کرده است. این تفسیر، جز این که از روحیهٔ نژادپرستانه ای حکایت می کند، با اصل نفی در نفی در تاریخ نمی سازد و دیالکتیکی یست. تاریخ را باید همان گونه که هست، ورق زد.

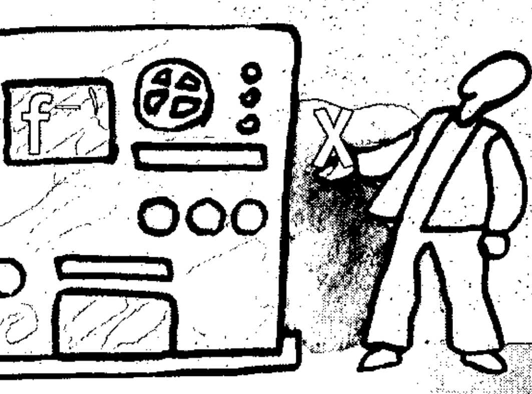
برای نمونه از ایران یاد کنیم . ایران در دورهٔ از سدهٔ دهم میلادی نا سدهٔ پانزدهم، یک دورهٔ تاریخی ریاضیات را ما به صورت کاربردی و با استفاده از همهٔ دستاوردهای دورهٔ کاربردی مصر، بابل، ایران و... و هم با استفاده از ریاضیات نظری یونان باستان (که قریب هزار سال طول کشید) فراهم کرد و در اساس ریاضیات کاربردی بود و به حلّ مسأله های عملی روز می پرداخت و هرجا که لازم بود، رخنه ها را پر می کرد، و برای کار خود ریاضیات را به جلو می برد. «محمد موسا خوارزمی» جبر را به دلیل نیاز کسانی که در زمینهٔ مسائل مربوط به ارث در فقه اسلامی نیاز داشتند، به وجود آورد و «ابوریحان بیرونی» و «ابوالوفای بوزجانی» مثلثات را به خاطر ساده تر کردن محاسبه های مربوط به اخترشناسی آوردند.

پس از این جا، تاریخ ریاضیات را به همین گونه بررسی می کنیم؛ یعنی ریاضیات را در کل خود، به صورت کاربردی و نظری، و به صورت یگانه خود مورد بررسی قرار می دهیم. این درواقع، فلسفهٔ تاریخ ریاضیات است، نه خود تاریخ. در این جا یک تاریخ مدوّن برای ریاضیات نمی بینید و بیشتر به فلسفهٔ تاریخ پرداخته ایم. از علت و چگونگی تبدیل ریاضیات کاربردی به ریاضیات نظری و بعکس آن، سخن گفته ایم و در هر مورد، مثال ها و شواهدی که در دست است، آورده ایم.

امید است که این بحث بتواند به روشن تر شدن مسیر تاریخ ریاضیات یاری رساند و از ابهام ها و نارسایی های موجود جلوگیری کند.

در تاریخ ریاضیات، به ندرت به مطالبی برمی خوریم که پس از آن نقض شده باشند. همیشه بر دقت ریاضیات افزوده شده و به حقیقت نزدیکتر شده است؛ ولی به ندرت قانونی یا دستوری نقض شده است. شما امروز می توانید از نوشته های ارشمیدس و آپولونیوس به خوبی استفاده کنید و تنها روشن تر و شفّاف تر شده اند؛ درحالی که در دانش های دیگر چنین نیست؛ ازجمله اخترشناسی به کلی دگرگون شده و دیگر نیازی به مطالعهٔ «المجسطی» (کتاب بزرگ بتلمیوس دربارهٔ اخترشناسی) نیست. این کتاب تنها از نظر تاریخی می تواند مفید باشد.

نکته ای را هم یادآور شویم. ریاضیات در قدیم مجموعهٔ بزرگتری را در برمی گرفته است و شامل موسیقی، اخترشناسی و... هم می شده است. ما در این جا، تنها از ریاضیات صحبت می کنیم؛ چه ریاضیات کاربردی و چه ریاضیات نظری، و به جنبه های دیگری که به کار ریاضیات می آید، تنها از جنبهٔ کاربرد ریاضیات در آنها، بحث کرده ایم.



احمد قندهاری

تابع معکوس: f^{-1}

برای دانش‌آموزان سال سوم

پیش از بحث دربارهٔ تابع معکوس، باید تابع یک به یک را یادآوری کنیم.

تابع $f: A \to B$ را یک به یک گوییم؛ هرگاه: هیچ دو زوج مرتّب متمایز آن، دارای مؤلّفه‌های دوّم برابر نباشد. برای مثال، اگر دو تابع f و g به صورت‌های زیر باشند:

$f = \{(1,4),(2,5),(3,7)\}$ و $g = \{(1,4),(2,5),(3,4)\}$ ،

آن‌گاه تابع f یک به یک است؛ ولی تابع g یک به یک نیست؛ زیرا در تابع g دو زوج اول و سوّم، دارای مؤلّفهٔ دوم برابرند.

۱. تابع یک به یک:

تابع f را در بازهٔ $[a,b] \subset D_f$ ، وقتی یک به یک گوییم که:

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b] \quad : \ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

مثال (۱): نشان دهید تابع f با ضابطهٔ $f(x) = x^3 + 5$ در $D_f = \mathbb{R}$ یک به یک است.

حل:

$$\forall x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^3 + 5 = x_2^3 + 5 \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2$$

پس تابع f در $\mathbb{R}$ یک به یک است.

مثال (۲): ثابت کنید تابع f با ضابطهٔ $f(x) = x^3 + 5x + 2$ در $D_f = \mathbb{R}$ یک به یک است.

حل:

$$\forall x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^3 + 5x_1 + 2 = x_2^3 + 5x_2 + 2 \Rightarrow$$

$$x_1^3 - x_2^3 + 5x_1 - 5x_2 = 0 \Rightarrow$$

$$(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2) + 5(x_1 - x_2) = 0$$

$$(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + 5) = 0$$

الف: $x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$

در این جا نمی‌توان نتیجه گرفت که تابع فوق، یک به یک است؛ بلکه باید ثابت شود معادلهٔ پرانتز دوم مساوی صفر، ریشهٔ حقیقی ندارد.

ب: $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + 5 = 0$

فرض می‌کنیم، مجهول معادلهٔ x_1 باشد؛ این معادله را بر حسب x_1 مرتّب می‌نویسیم.

$$x_1^2 + \underbrace{x_2}_{b} x_1 + \left(\underbrace{x_2^2 + 5}_{c}\right) = 0 \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = x_2 \\ c = x_2^2 + 5 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = x_2^2 - 4(x_2^2 + 5) = -3x_2^2 - 20 < 0$$

چون $\Delta < 0$ پس معادلهٔ پرانتز دوم مساوی صفر، ریشهٔ حقیقی ندارد؛ در نتیجه می‌توان گفت که تابع f در $\mathbb{R}$ ، یک به یک است.

مثال (۳): ثابت کنید تابع f با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{2x + 1 + 3\sqrt{2x - 1}}$ در دامنه‌اش یک به یک است.

$$\begin{cases}2x-1\ge 0\Rightarrow x\ge \frac{1}{2}\\ 2x+1+3\sqrt{2x-1}>0\end{cases}$$

$$D_f=\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$$

با شرط $x\ge\frac{1}{2}$ برقرار است

حال بررسی یک به یک بودن تابع :

$$\forall x_1,x_2\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right) \quad : f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow$$
$$\sqrt{2x_1+1+3\sqrt{2x_1-1}}=\sqrt{2x_2+1+3\sqrt{2x_2-1}}$$

فرض می‌کنیم

$$2x_1-1=a\Rightarrow 2x_1=a+1$$
$$2x_2-1=b\Rightarrow 2x_2=b+1$$

$$\sqrt{a+2+3\sqrt{a}}=\sqrt{b+2+3\sqrt{b}}\Rightarrow$$
$$a+2+3\sqrt{a}=b+2+3\sqrt{b}\Rightarrow$$
$$(a-b)+3\sqrt{a}-3\sqrt{b}=0\Rightarrow$$
$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)+3\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=0$$
$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\underbrace{\sqrt{a}+\sqrt{b}+3}\right)=0\Rightarrow\sqrt{a}-\sqrt{b}=0\Rightarrow$$

$$\sqrt{a}=\sqrt{b}\Rightarrow a=b\Rightarrow 2x_1-1=2x_2-1\Rightarrow$$
$$2x_1=2x_2\Rightarrow x_1=x_2$$

پس این تابع در $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$ ، یک به یک است.

بیان دیگر تابع یک به یک:

تابع مشتق‌پذیر f را در بازهٔ $[a,b]\subset D_f$ ، وقتی یک به یک گوییم که : در این بازه $f'(x)\ge 0$ یا $f'(x)\le 0$ ؛ به شرطی که معادلهٔ $f'(x)=0$ ، یا ریشه نداشته و یا ریشه‌های قابل شمارش داشته باشد.

مثال (۱) : تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^4+4x^2$ در $\mathbb{R}^+$ یک به یک است زیرا :

$$f'(x)=4x^3+8x=4x\left(x^2+2\right)\ge 0$$

$f'(x)=0\Rightarrow x=0$. $f'(x)=0$ یک ریشه دارد.

مثال (۲) : تابع با ضابطهٔ $f(x)=x+\mathrm{Cos}x$ در $\mathbb{R}$ ، یک به یک است زیرا :

$$f'(x)=1-\mathrm{Sin}x\ge 0$$

$$1-\mathrm{Sin}x=0\Rightarrow \mathrm{Sin}x=1\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\ ,\ (k\in z)$$

جواب‌هایی که از رابطهٔ $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ به دست می‌آید، قابل شمارش است؛ چون $f'(x)\ge 0$ ، پس این تابع در $\mathbb{R}$ ، یک به یک است.

مثال (۳) : اگر در تابع f داشته باشیم : $D_f=\mathbb{R}$ و

$$f'(x)=-x^2(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2\cdots(x-n)^n\ ,\ n\in N$$

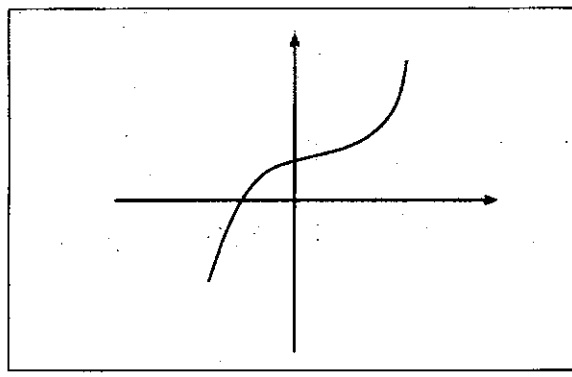
آن‌گاه : $f'(x)\le 0$ و معادلهٔ $f'(x)=0$ ، n تا ریشه دارد که

قابل شمارش است. پس تابع f در $\mathbb{R}$ ، یک به یک است.

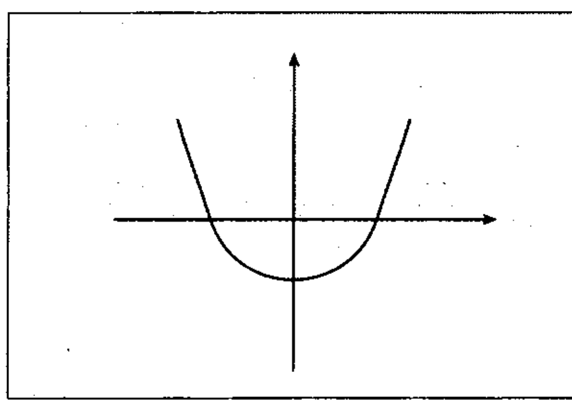
سؤال: نمودار یک تابع در چه صورت، نمودار یک تابع یک به یک است؟

جواب: وقتی که هر خط موازی محور xها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

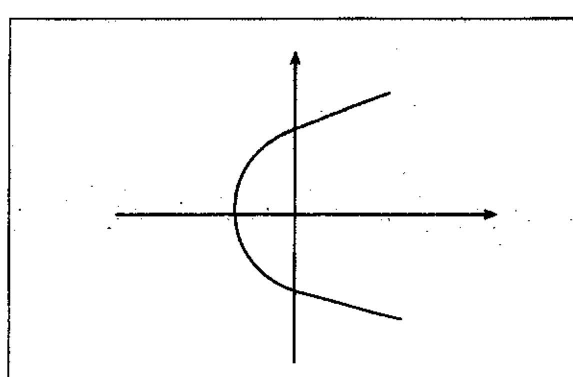
به نمودارهای زیر توجه کنید:



تابع هست، ولی یک به یک است



تابع هست، ولی یک به یک نیست



تابع نیست

۲. تابع معکوس:

اگر f تابعی به صورت $f=\{(1,a),(2,b),(3,c)\}$ و g تابعی به صورت $g=\{(a,1),(b,2),(c,3)\}$ باشند، آن‌گاه این دو تابع را معکوس یکدیگر گوییم. ملاحظه می‌کنیم که جای مؤلّفه‌های زوج مرتّب تابع f را عوض کرده‌ایم و تابع g به دست آمده است.

حال این سؤال مطرح می‌شود که: اگر در هر تابع، جای مؤلّفه‌های زوج مرتّب آن را عوض کنیم، آن‌گاه آیا تابع جدیدی به دست می‌آید که معکوس تابع اصلی است؟

پاسخ این سؤال منفی است؛ مگر این که تابع اصلی، یک به یک باشد.

تعریف: اگر f تابعی به صورت $f=\{(x,y) \mid y=f(x)\}$ ؛ چنانچه تابعی مانند g وجود داشته باشد، به طوری که $g=\{(y,x) \mid x=g(y)\}$ ؛ آن‌گاه دو تابع f و g را معکوس یکدیگر گوییم.

از این تعریف نتیجه می‌شود که تابع g وقتی وجود دارد که تابع f یک به یک باشد.

پس:

۱. تابع f را در بازهٔ $[a,b]\subset D_f$ وقتی معکوس‌پذیر گوییم که این تابع در این بازه یک به یک باشد.

۲. تابع معکوس تابع f را با نماد f^{-1} نشان می‌دهیم (توجه کنیم که $f^{-1}\neq \frac{1}{f}$)

۳. برای تعیین ضابطهٔ تابع معکوس یک تابع معکوس‌پذیر، باید متغیر را از تابع اصلی پیدا کرد، سپس جای تابع و متغیر را عوض کرد (شرایط مسأله را در آن درنظر می‌گیریم).

۴. اگر $A(x,y)$ یک نقطه از تابع f باشد، آن‌گاه $A'(y,x)$ متناظر نقطهٔ A روی تابع f^{-1} است.

۵. نمودارهای دو تابع f و f^{-1} قرینهٔ یکدیگر نسبت به خط $y=x$ هستند.

مثال: تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^2-2x \ ,\ x\geq 1$ مفروض است:

الف ـ تحقیق کنید f معکوس پذیر است.

ب ـ ضابطهٔ تابع معکوس تابع f را بیابید.

ج ـ نمودارهای هر دو تابع f و $f^{-۱}$ را در یک شکل رسم کنید.

حل الف. $f(x)=x^۲-۲x \quad , \quad x\ge ۱$

زیرا: $f'(x)=۲x-۲\ge ۰ \quad , \quad x\ge ۱$

چون $f'(x)\ge ۰$ و معادلهٔ $f'(x)=۰$، یک ریشه دارد، پس تابع f یک به یک است؛ در نتیجه معکوس پذیر است.

حل ب.

$$y=x^۲-۲x$$

$$x^۲-۲x+۱=y+۱ \Rightarrow (x-۱)^۲=y+۱\Rightarrow x-۱ \underset{x\ge ۱}{=} \sqrt{y+۱}\Rightarrow$$

$$x=\sqrt{y+۱}+۱$$

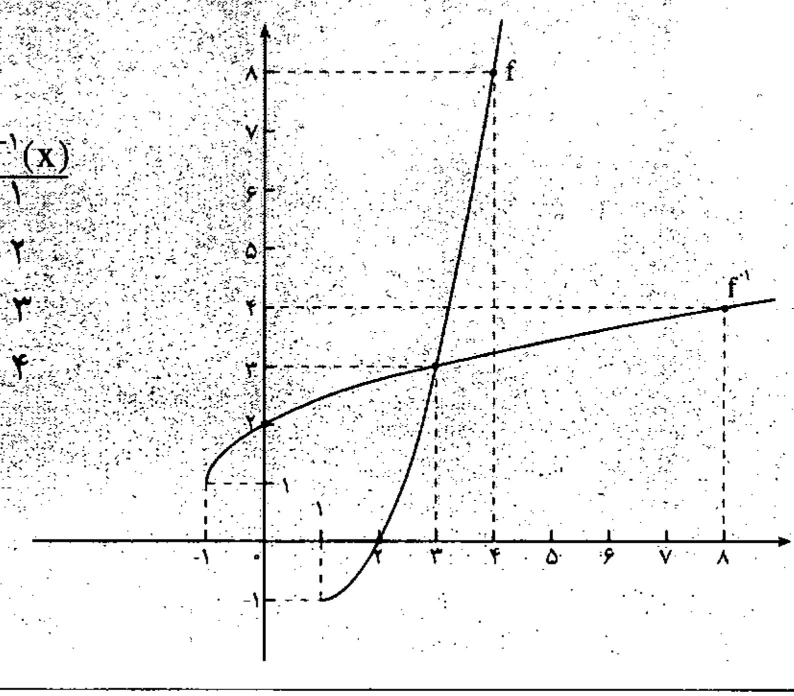
جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$y=\sqrt{x+۱}+۱=f^{-۱}(x) \quad , \quad x\ge -۱$$

حل ج.

x	f(x)
۱	-۱
۲	۰
۳	۳
۴	۸

x	$f^{-۱}(x)$
-۱	۱
۰	۲
۳	۳
۸	۴



مثال: تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^۴-۸x^۲$ با شرط $۰\le x\le ۲$ مفروض است:

الف. ثابت کنید این تابع در بازهٔ $[۰,۲]$ معکوس پذیر است.

ب. ضابطهٔ تابع معکوس، تابع f را بیابید.

حل الف.

$$f'(x)=۴x^۳-۱۶x=۴x(x^۲-۴)=۰\Rightarrow x=۰ \ , \ \pm ۲$$

چون معادلهٔ $f'(x)=۰$ در بازهٔ $[۰,۲]$ دو ریشه ۰ و ۲ دارد و در بازه (۲ و ۰) ریشه ندارند، پس عبارت $f'(x)$ در بازه $[۰,۲]$ مثبت و صفر یا منفی و صفر است. در هر دو صورت، تابع f در بازه $[۰,۲]$ یک به یک است، پس f در این بازه، معکوس پذیر است.

حل ب.

$$y=x^۴-۸x^۲\Rightarrow x^۴-۸x^۲+۱۶=y+۱۶\Rightarrow$$

$$(x^۲-۴)^۲=y+۱۶\Rightarrow x^۲-۴ \underset{۰\le x\le ۲}{=} -\sqrt{y+۱۶}\Rightarrow$$

$$x^۲=۴-\sqrt{y+۱۶} \underset{۰\le x\le ۲}{\Rightarrow} x=+\sqrt{۴-\sqrt{y+۱۶}}$$

حال جای x و y را با هم عوض می‌کنیم:

$$y=\sqrt{4-\sqrt{x+16}}=f^{-1}(x)\quad ,\quad -16\le x\le 0$$

مثال: تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^3-3x^2+3x-5$ مفروض است:

الف. ثابت کنید این تابع در $D_f=\mathbb{R}$ یک به یک است.

ب. ضابطهٔ تابع معکوس تابع f را بیابید.

حلّ الف.

$$f'(x)=3x^2-6x+3=3\left(x^2-2x+1\right)=3(x-1)^2\ge 0$$

پس $f'(x)\ge 0$، بنابراین f در $\mathbb{R}$ یک به یک است؛ پس f در $\mathbb{R}$ معکوس‌پذیر است.

حل ب.

$$y=x^3-3x^2+3x-5\Rightarrow$$
$$x^3-3x^2+3x-5=y\Rightarrow x^3-3x^2+3x-1=y+4\Rightarrow$$
$$(x-1)^3=y+4\Rightarrow x-1=\sqrt[3]{y+4}\Rightarrow x=1+\sqrt[3]{y+4}$$

حال جای x و y را عوض می‌کنیم، پس:

$$y=1+\sqrt[3]{y+4}=f^{-1}(x)\quad ,\quad x\in\mathbb{R}$$

تذکر: در تست‌ها برای تعیین ضابطهٔ تابع معکوس، از جایگذاری نقاط متناظر استفاده می‌کنیم؛ یعنی یک نقطه مانند A را از تابع f می‌یابیم، سپس A' را به دست می‌آوریم. نقطه A' در هر گزینه که صدق کرد، آن گزینه درست است. چنانچه نقطهٔ A' دو گزینه صدق کند، مختصات نقطهٔ دیگری مانند B را از تابع f درنظر می‌گیریم و B' را می‌یابیم و B' را در آن دو گزینه قرار می‌دهیم.

۶. اگر نمودارهای دو تابع f و f^{-1} متقاطع باشند، معمولاً نقطهٔ تقاطع روی خط، $y=x$ است؛ مگر این که تابع نقاط متناظرپذیر باشد، که در آن صورت، بعضی از نقاط تقاطع دو تابع f و f^{-1}، روی خط $y=x$ نیستند. معمولاً برای تعیین مختصات نقاط تقاطع دو تابع f و f^{-1}، معادلهٔ یکی از آنها را با خط $y=x$ تقاطع می‌دهیم.

مثال: مختصات نقطهٔ تقاطع تابع به معادلهٔ $f(x)=x^2-4x\ ,\ x\ge 2$ را با تابع معکوس آن بیابید.

حل: منحنی به معادلهٔ $y=x^2-4x$ را با خط $y=x$ تقاطع می‌دهیم؛ با شرط $x\ge 2$.

$$\begin{cases}y=x^2-4x\\ y=x\end{cases}\quad x^2-5x=0\Rightarrow\begin{cases}x=0 & \text{غیرقابل قبول}\\ x=5 & \text{قابل قبول}\end{cases}$$

$$x=5\Rightarrow y=5$$

نقطهٔ تقاطع دو تابع f و f^{-1}: $M(5,5)$

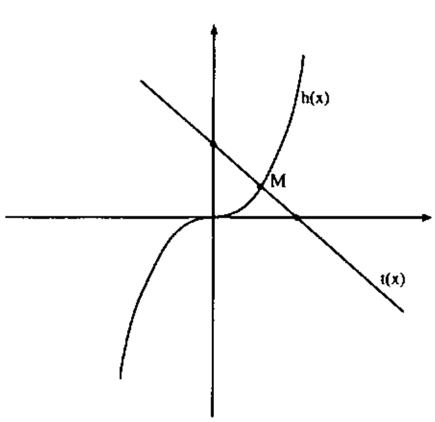
مثال: مختصات نقاط تقاطع تابع با ضابطهٔ $f(x)=-x^3+1$ را با تابع معکوس آن بیابید.

حل: منحنی به معادلهٔ $y=-x^3+1$ را با خط $y=x$ تقاطع می‌دهیم.

$$\begin{cases}y=-x^3+1\\ y=x\end{cases}\Rightarrow\ x^3+x-1=0\qquad (1)$$

این معادله به سادگی قابل حل نیست (حداّقل می‌توان گفت، در محدودهٔ ریاضی نظام جدید، قابل حلّ نیست)؛ ولی می‌توان ثابت کرد که یک ریشه دارد.

نمودارهای دو تابع $h(x)=x^3$ و $t(x)=-x+1$ را در یک شکل رسم می‌کنیم.



همان‌طوری که در شکل صفحهٔ قبل ملاحظه می‌کنید، نمودارهای دو تابع h و t یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند. پس معادلهٔ (۱) یک ریشه دارد، که یکی از نقاط تقاطع دو تابع f و f^{-1} است. برای تعیین مختصات نقاط تقاطع دیگر، به ناچار باید معادله‌های دو تابع f و f^{-1} را با یکدیگر تقاطع دهیم، پس معادلهٔ f^{-1} را به دست می‌آوریم.

$$y=-x^{3}+1 \Rightarrow x^{3}=1-y \Rightarrow x=\sqrt[3]{1-y}$$

جای x و y را با هم عوض می‌کنیم.

$$y=\sqrt[3]{1-x}=f^{-1}(x)$$

حال معادله‌های f و f^{-1} را با هم تقاطع می‌دهیم.

$$\begin{cases} y=-x^{3}+1 \\ \\ y=\sqrt[3]{1-x} \end{cases} \Rightarrow 1-x^{3}=\sqrt[3]{1-x} \Rightarrow$$

$$(1-x)\left(1+x+x^{2}\right)=\sqrt[3]{1-x}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{(1-x)^{3}}\left(1+x+x^{2}\right)-\sqrt[3]{1-x}=0$$

$$\sqrt[3]{1-x}\left(\sqrt[3]{(1-x)^{2}}\left(1+x+x^{2}\right)-1\right)=0$$

نقطهٔ تقاطع: $\sqrt[3]{1-x}=0 \Rightarrow 1-x=0 \Rightarrow x=1 : N\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$

$$\sqrt[3]{(1-x)^{2}}\left(1+x+x^{2}\right)-1=0 \Rightarrow \sqrt[3]{(1-x)^{2}}\left(1+x+x^{2}\right)=1$$

حلّ این معادله، از حوصلهٔ این مقاله خارج است؛ فقط باید گفت که $x=0$ یکی از ریشه‌های آن است، پس $P\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$ نیز یک نقطهٔ تقاطع است. ملاحظه می‌کنید که دو نقطهٔ تقاطع $N\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$ و $P\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$ روی دو منحنی f و f^{-1} قرار دارند (نقاط تقاطع آنها هستند)؛ ولی هیچ کدام روی خط $y=x$ قرار ندارد.

فقط با در دست داشتن نقطهٔ تقاطع $N\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$ می‌توان به نقطهٔ تقاطع $P\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$ دست یافت؛ زیرا:

$\Rightarrow$ روی منحنی تابع f است $N\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$

روی منحنی تابع f^{-1} است $N'\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$

$\Rightarrow$ روی منحنی تابع f است $N'\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$

روی منحنی تابع f^{-1} است $N\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$

پس نقاط N و N' هر دو روی هر دو تابع f و f^{-1} هستند، پس نقاط تقاطع آنهاست (که هیچ کدام روی خط $y=x$ نیستند).

۷. ترکیب دو تابع f و f^{-1}، تابعی همانی است؛ یعنی:

$$\left(fof^{-1}\right)(x)=x \qquad \left(f^{-1}of\right)(x)=x$$

۸. اگر از رابطهٔ $\left(f^{-1}of\right)(x)=x$ نسبت به x مشتق بگیریم، خواهیم داشت:

$$f'(x)\times\left(f^{-1}\right)'(f(x))=1 \Rightarrow \boxed{\left(f^{-1}\right)'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}}$$

مثال: شیب خط مماس بر منحنی تابع معکوس‌پذیر f در نقطهٔ $P(a,b)$، برابر m است. شیب خط مماس بر منحنی تابع f^{-1} در نقطهٔ $P'(a,b)$ را بیابید.

حل: $m=f'(a)$ و $P\left|\begin{matrix}a=x\\b=f(x)\end{matrix}\right.$

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x))=\frac{1}{f'(x)} \Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(b)=\frac{1}{f'(a)}=\frac{1}{m}$$

مثال: شیب خط مماس بر منحنی تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^{5}+x+1$ در نقطهٔ A به طول (۱)، برابر چه عددی است؟ از آن‌جا شیب خط مماس بر منحنی f^{-1} را در نقطهٔ A' متناظر نقطهٔ A بیابید.

$$x_A = 1 \Rightarrow y_A = 1+1+1 = 3 \quad A\left|\begin{matrix}1\\3\end{matrix}\right. \Rightarrow A'\left|\begin{matrix}3\\1\end{matrix}\right.$$

شیب خط مماس بر منحنی f در نقطهٔ A:

$$A\left|\begin{matrix}1 = a = x\\ 3 = b = f(x)\end{matrix}\right. \quad , \quad f'(x) = 5x^4 + 1 \Rightarrow f'(1) = 6$$

شیب خط مماس بر منحنی f^{-1} در نقطهٔ A':

$$\left(f^{-1}\right)'\left(f(x)\right) = \frac{1}{f'(x)} \Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{6}$$

نتیجهٔ (۱): اگر شیب خط مماس بر منحنی تابع معکوس‌پذیر f در نقطهٔ A، برابر m باشد، آن‌گاه شیب خط مماس بر منحنی تابع f^{-1} (تابع معکوس f) در نقطهٔ A' متناظر A، برابر $\frac{1}{m}$ است.

نتیجهٔ ۲: اگر شیب خط قائم بر منحنی تابع معکوس‌پذیر f در نقطهٔ A، برابر k باشد، آن‌گاه شیب خط قائم بر منحنی تابع f^{-1} در نقطهٔ A' متناظر A، برابر $\frac{1}{k}$ است.

۹ . خط مماس بر منحنی تابع f^{-1} در نقطهٔ A' متناظر نقطهٔ A، تابع معکوس خط مماس بر منحنی تابع معکوس‌پذیر f در نقطهٔ A است.

۱۰ . خط قائم بر منحنی تابع f^{-1} در نقطهٔ A' متناظر نقطهٔ A، تابع معکوس خط قائم بر منحنی تابع معکوس‌پذیر f در نقطهٔ A است.

مثال: اگر خط مماس بر منحنی تابع معکوس‌پذیر f در نقطهٔ A به صورت $y = 2x - 4$ باشد، آن‌گاه خط مماس بر منحنی تابع f^{-1} در نقطهٔ A' متناظر A، چنین است.

جای x و y را با هم عوض می‌کنیم

$$y = 2x - 4 \Rightarrow 2x = y + 4 \Rightarrow x = \frac{1}{2}y + 2$$

معادلهٔ خط مماس بر منحنی تابع f^{-1} در نقطهٔ A' متناظر A

$$y = \frac{1}{2}x + 2$$

۱۱ . اگر $x = a$ مجانب قائم تابع معکوس‌پذیر f باشد، آن‌گاه $y = a$ مجانب افقی تابع f^{-1} است.

۱۲ . اگر $y = b$ مجانب افقی تابع معکوس‌پذیر f باشد، آن‌گاه $x = b$ مجانب قائم تابع f^{-1} است.

۱۳ . اگر $y = ax + b$ مجانب مایل تابع معکوس‌پذیر f باشد، آن‌گاه $y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$ (تابع معکوس $y = ax + b$) مجانب مایل تابع f^{-1} است.

مثال: نکتهٔ (۱۳) را در تابع با ضابطه $y = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$ ، $x \geq -1$ تحقیق کنید.

۱۴ . اگر دو تابع f و g معکوس یکدیگر باشند، آن‌گاه $D_f = R_g$ و $R_f = D_g$ ، باید توجه داشت که این گزارهٔ شرطی است، نه دو شرطی؛ یعنی:

$$\text{دو تابع f و g معکوس یکدیگر باشند.} \Rightarrow \begin{cases} D_f = R_g \\ R_f = D_g \end{cases}$$

یعنی اگر در دو تابع f و g داشته باشیم $\begin{cases} D_f = R_g \\ R_f = D_g \end{cases}$ ، آن‌گاه نتیجه نمی‌شود که حتماً دو تابع f و g معکوس یکدیگرند.

۱۵ . تابع‌های چند ضابطه‌ای، وقتی معکوس‌پذیرند که:

اولاً: اشتراک دوبه‌دو بردهای ضابطه‌ها تابع تهی باشند.

ثانیاً: هرضابطه، معکوس‌پذیر باشد.

مثال: ضابطهٔ تابع معکوس تابع f به معادلهٔ $f(x) = \begin{cases} 2x & , \ x \geq 1 \\ x + 1 & , \ x < 1 \end{cases}$ را بیابید و آنها را در یک شکل رسم کنید.

حل:

$$f(x) = \begin{cases} y_1 = 2x & , \ x \geq 1 \Rightarrow y_1 \geq 2 \ \text{برد تابع} \\ y_2 = x + 1 & , \ x < 1 \Rightarrow y_2 < 2 \ \text{برد تابع} \end{cases}$$

به طوری که ملاحظه می‌شود $y \geq 2$ و $y < 2$ ، پس اشتراک بردها تهی است. در ضمن، هر ضابطهٔ تابع f معکوس‌پذیر است.

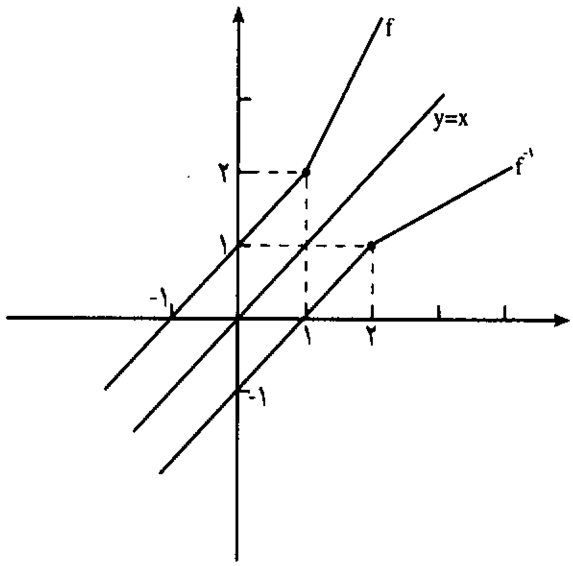
$$y_1 = 2x \Rightarrow x = \frac{y_1}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{2} \quad , \quad x \geq 2$$

$$y_2 = x + 1 \Rightarrow x = y_2 - 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = x - 1 \quad , \quad x < 2$$

پس ضابطهٔ تابع معکوس چنین است:

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2} & , \quad x\ge 2\\ x-1 & , \quad x<2\end{cases}$$

حال دو تابع f و f^{-1} را در یک شکل رسم می‌کنیم.



۱۶. اگر تابع معکوس‌پذیر f در بازهٔ $[a,b]$ صعودی اکید باشد، آن‌گاه تابع f^{-1} در بازهٔ $[f(a),f(b)]$ نیز صعودی اکید است.

چنانچه تابع معکوس‌پذیر f در بازهٔ $[a,b]$ نزولی اکید باشد، آن‌گاه تابع f^{-1} در بازهٔ $[f(b),f(a)]$ نیز نزولی اکید است.

۱۷. تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ ، $(c\neq 0)$ وقتی بر تابع معکوس خودش منطبق است که: $\boxed{a+d=0}$

زاویهٔ حادّه بین دو منحنی f و f^{-1} (f تابعی معکوس‌پذیر باشد) با بیان یک مثال، مطلب روشن خواهد شد.

مثال: تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^2-2x \; , \; x\ge 1$ مفروض است، زاویهٔ بین دو منحنی f و f^{-1} را در نقطهٔ تقاطع آنها بیابید.

حل:

$$\begin{cases} y=x^2-2x \\ \\ y=x \end{cases} \Rightarrow x^2-3x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 & \text{غیرقابل قبول، زیرا } x\ge 1 \\ x=3 & \text{طول نقطهٔ تقاطع دو تابع } f \text{ و } f^{-1} \end{cases}$$

شیب مماس بر منحنی f^{-1} ، $m'=\dfrac{1}{4}$ ، $f'(x)=2x-2 \Rightarrow f'(3)=4=m$

زاویهٔ بین دو منحنی f و f^{-1}:

$$\tan\alpha=\left|\frac{m-m'}{1+mm'}\right|=\left|\frac{4-\frac{1}{4}}{1+1}\right|=\frac{15}{8}\Rightarrow \alpha=\mathrm{Arc}\tan\frac{15}{8}$$

قسمت اول

مقاطع مخروطی

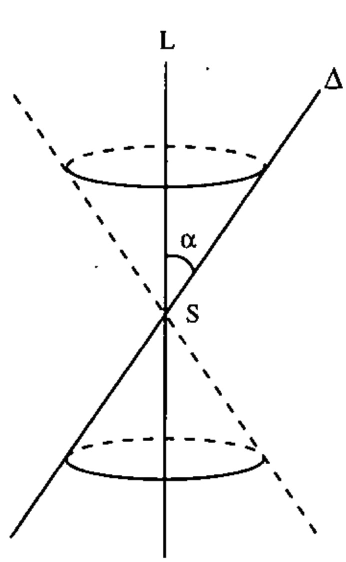
حمیدرضا امیری

برای دانش‌آموزان دورهٔ پیش دانشگاهی رشته ریاضی

تقریباً از زمان آپولونیوس (ریاضی‌دان بزرگ یونانی) به بعد شکل کلاسیک ۴ نوع منحنی مسطح به نام‌های دایره، بیضی، سهمی و هذلولی که ویژگی‌های بسیار مهم و کاربردی دارند، مورد توجه قرار گرفتند. در این مقاله به چگونگی ایجاد، فرمول و خواص هریک از این ۴ منحنی می‌پردازیم. هریک از منحنی‌های مذکور از تقاطع یک صفحه با یک سطح یا رویهٔ مخروطی حاصل می‌شوند.

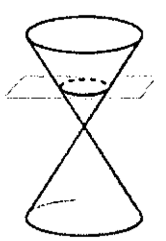
تعریف رویهٔ مخروطی

اگر مطابق شکل دو خط L و Δ در نقطهٔ S متقاطع و با هم زاویهٔ ($\alpha \neq 90^\circ$) داشته باشند و خط L را ثابت فرض کرده و خط Δ را در فضا حول خط L دوران دهیم، سطح یا رویهٔ حاصل از این دوران به رویهٔ مخروطی دوّار یا به اختصار رویهٔ مخروطی معروف است. خط Δ را مولّد، خط L را محور رویهٔ مخروطی و نقطهٔ S (محل تقاطع دو خط) را رأس رویهٔ مخروطی می‌نامیم.

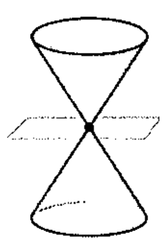


حال اگر یک صفحه در فضا این رویهٔ مخروطی را قطع کند بسته به این که با چه زاویه‌ای و در چه محلی این برخورد صورت پذیرد شکل‌های متفاوتی حاصل می‌شود که به مهمترین آنها خواهیم پرداخت:

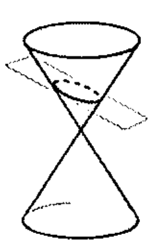
۱ـ دایره: هرگاه صفحه‌ای عمود بر محور رویهٔ مخروطی، آن را قطع کند فصل مشترک این صفحه با رویهٔ مخروطی یک دایره است. (مطابق شکل)

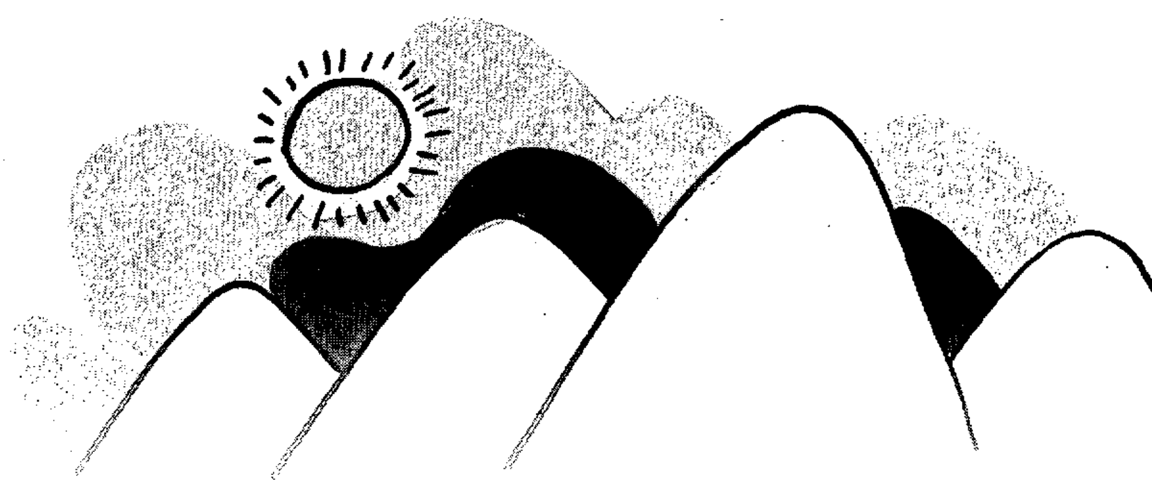


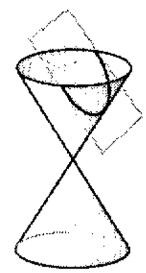
۲ـ هرگاه صفحه‌ای عمود بر محور رویهٔ مخروطی و در رأس با رویهٔ مخروطی تلاقی کند فصل مشترک حاصل یک نقطه است. (مطابق شکل)



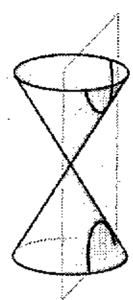
۳ـ هرگاه صفحه‌ای غیرعمود بر محور و غیرموازی با مولد در بالا یا پایین رأس، رویهٔ مخروطی را قطع کند شکل حاصل بیضی است. (مطابق شکل)



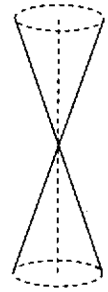




۴ـ اگر صفحه‌ای با مولد رویهٔ مخروطی موازی باشد فصل مشترک حاصل یک سهمی است. (مطابق شکل) (در حالت خاص که صفحه بر رویه مماس است شکل حاصل یک خط است.)



۵ـ هرگاه صفحه‌ای به موازات محور، رویهٔ مخروطی را قطع کند و از رأس عبور نکند، فصل مشترک حاصل، از دو منحنی تشکیل یافته که هذلولی نامیده می‌شود. (مطابق شکل)



۶ـ اگر صفحه‌ای به موازات محور، هردو قسمت بالا و پایین رأس را قطع کرده و از رأس رویهٔ مخروطی نیز عبور کند (شامل محور و رأس باشد)، فصل مشترک حاصل دو خط متقاطع است. (مطابق شکل)

حال به بررسی خواص و ویژگی های این مقاطع مخروطی پرداخته و با توجه به تعریف هندسی هریک فرمولهایی برای هر کدام به دست آورده و مسائلی را طرح و حل می‌کنیم.

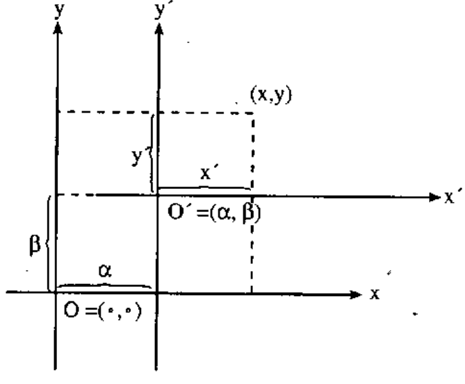
۱ـ دایره

تعریف. دایره مکان هندسی همه نقاطی از یک صفحه است که فاصلهٔ هریک از آن نقاط از یک نقطهٔ ثابت به نام مرکز، مقدار ثابتی است. به فاصلهٔ نقاط تا مرکز دایره، مقدار ثابت شعاع دایره گفته می‌شود.

در این قسمت، قبل از آن که بخواهیم معادلهٔ دایره را معرفی کنیم لازم است تا بحث راجع به انتقال محورهای مختصات را یادآوری کنیم تا بتوانیم معادلهٔ هریک از مقاطع مخروطی را در حالت کلّی بنویسیم.

انتقال محورهای مختصات: اگر مبدأ مختصات یعنی $O=(\cdot,\cdot)$ را به نقطهٔ $O'=(\alpha,\beta)$ منتقل کنیم به‌طوری که محورهای مختصات جدید و قدیم نظیر به نظیر موازی یکدیگر باشند، و نقطه‌ای دلخواه به مختصات (x,y) در دستگاه قدیم در نظر بگیریم این نقطه در دستگاه جدید (انتقال یافته) دارای مختصات (x',y') است که با توجه به شکل واضح است. رابطهٔ زیر بین مختصات جدید و قدیم برقرار است.

$$\begin{cases}x'=x-\alpha\\ y'=y-\beta\end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases}x=x'+\alpha\\ y=y'+\beta\end{cases}$$



مثال: اگر در دستگاه مختصات دکارتی معادلهٔ خط L به صورت $2x-y=3$ باشد و مبدأ مختصات را از نقطه $O=(0,0)$ به نقطهٔ $O'=(-1,2)$ منتقل کنیم معادلهٔ جدید خط یعنی L' را در دستگاه جدید بیابید.

اگر $P=(x,y)$ یک نقطهٔ دلخواه از خط L باشد پس از انتقال محورها، مختصات این نقطه یعنی P' به صورت $\begin{cases} x'=x-(-1) \\ y'=y-2 \end{cases}$ می‌باشد، پس $\begin{cases} x=x'-1 \\ y=y'+2 \end{cases}$ که با قرار دادن x و y برحسب x' و y' در معادلهٔ خط خواهیم داشت:

$$2x-y=3 \Rightarrow 2(x'-1)-(y'+2)=3 \Rightarrow 2x'-y'=7$$

همان‌طور که مشاهده کردید دو خط با هم موازی هستند یعنی در انتقال محورها به صورت موازی، زاویه تغییر نمی‌کند.

حال به بحث اصلی خودمان یعنی معادلهٔ مقاطع مخروطی برمی‌گردیم:

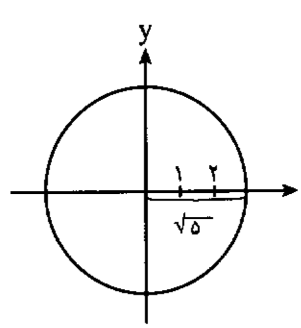
معادلهٔ دایره: می‌خواهیم معادلهٔ دایره‌ای را بیابیم که مرکز آن مبدأ مختصات $O=(0,0)$ و اندازهٔ شعاع آن r باشد.

واضح است که نقطهٔ $P=(x,y)$ روی دایرهٔ مذکور است اگر و فقط فاصلهٔ P تا O برابر با r باشد پس:

$$|OP|=r \Rightarrow \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=r \Rightarrow x^2+y^2=r^2$$

پس معادلهٔ دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات $O=(0,0)$ و به شعاع r به شکل زیر است:

$$x^2+y^2=r^2$$



مثال: دایره به معادلهٔ $x^2+y^2=5$ را رسم کنید.

حال اگر بخواهیم معادلهٔ دایره‌ای به شعاع r و به مرکز (α,β) را بنویسیم کافی است مبدأ مختصات را به نقطهٔ (α,β) انتقال دهیم که در این صورت اگر $P=(x',y')$ نقطهٔ دلخواهی از دایرهٔ مزبور باشد معادلهٔ آن به صورت $x'^2+y'^2=r^2$ می‌باشد که با توجه به انتقال محورها $\begin{cases} x'=x-\alpha \\ y'=y-\beta \end{cases}$ پس معادلهٔ دایره‌ای به شعاع r و به مرکز (α,β) به شکل روبرو است:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

مسألهٔ مهم: اگر $O=(\alpha,\beta)$ مرکز دایره‌ای به شعاع r باشد با استفاده از مطالب فصل بردارها معادلهٔ این دایره را بیابید.

حل: فرض کنیم $O=(\alpha,\beta)$ مرکز دایره و r شعاع آن باشد. شرط لازم و کافی برای آن که نقطهٔ $M=(x,y)$ روی دایره باشد (با توجه به تعریف دایره) آن است که $|\overrightarrow{OM}|=r$

پس خواهیم داشت:

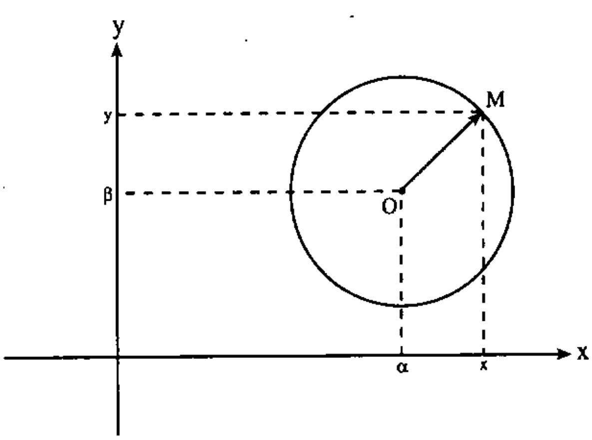
$$|\overrightarrow{OM}|=r \Rightarrow \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=r \Rightarrow$$

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \qquad \text{(معادله دایره)}$$

در حالت خاص اگر $O=(0,0)$ آنگاه:

$$|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=r \Rightarrow x^2+y^2=r^2$$

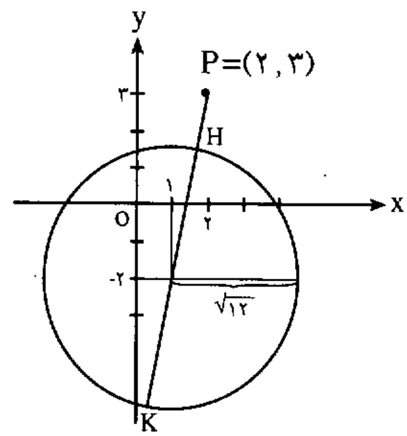
(معادله دایره به مرکز مبدأ مختصات)



مسائل حل شده و نکات مهم

مسألهٔ ۱: دایره به معادلهٔ $(x-1)^2+(y+2)^2=12$

مفروض است. نقطهٔ $P=(2,3)$ در داخل دایره قرار دارد یا در خارج آن؟



مرکز دایره $(1,-2)$ بوده و شعاع آن $\sqrt{12}$ می‌باشد.
همان‌طور که مشاهده می‌کنید نقطه در خارج دایره واقع است حال اگر مختصات نقطه را در معادلهٔ دایره قرار دهیم خواهیم داشت:

$$(2-1)^2+(3+2)^2=26>12$$

تذکر: با توجه به شکل واضح است که برای یافتن کمترین و بیشترین فاصلهٔ P از دایره کافی است از P به مرکز دایره وصل کرده و امتداد دهیم تا دایره را در دو نقطهٔ H و K قطع کند. طول PH و PK به ترتیب کمترین و بیشترین فاصلهٔ P از دایره است. برای مشخص کردن مختصات نقاط H و K معادلهٔ خط شامل O و P را با معادلهٔ دایره قطع می‌دهیم.

روش دوم برای یافتن اندازه‌های PH و PK که فرض کنیم $|OP|=d$ در این صورت:

$|PH|=|OP|-|OH|=|d-r|$ و

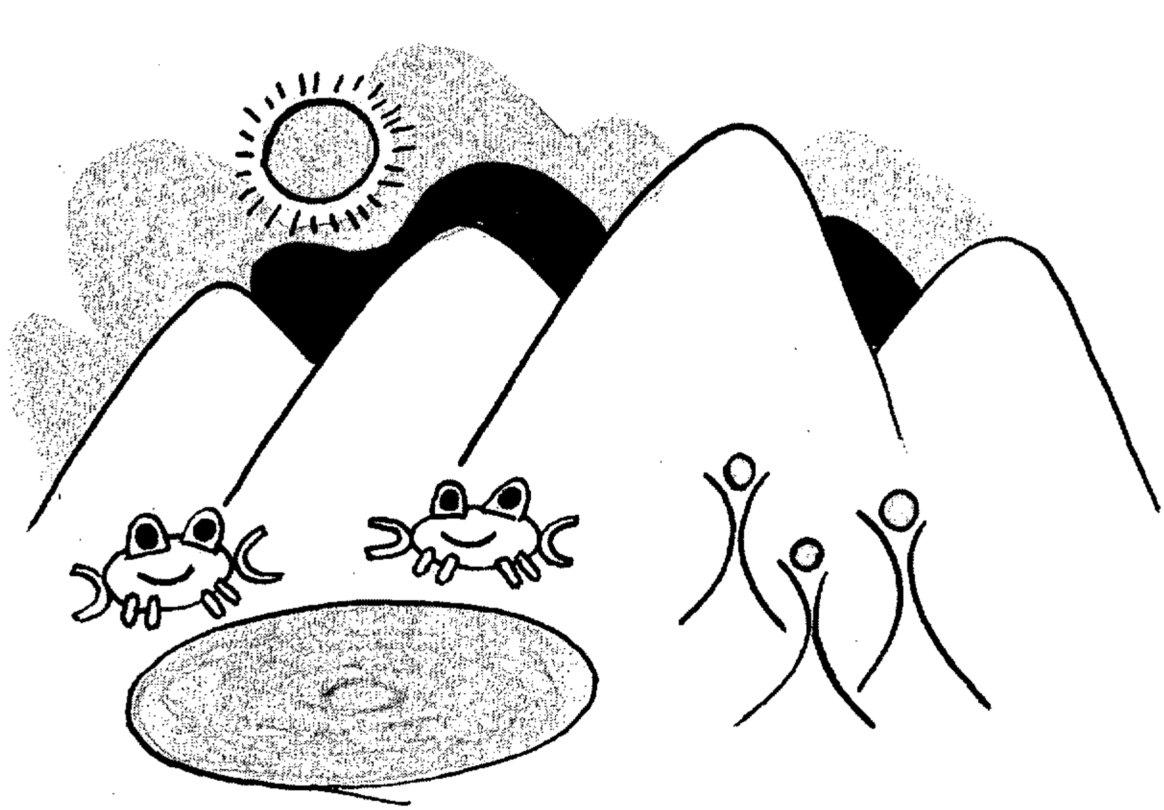
$|PK|=|OP|+|OK|=d+r$.

مسألهٔ ۲: مکان هندسی نقاطی از صفحه مانند $P=(x,y)$ را بیابید که فاصلهٔ آنها از نقطهٔ $H=(2,-1)$، $\sqrt{3}$ برابر فاصلهٔ آنها از نقطهٔ $K=(6,-3)$ باشد.

$$|HP|=\sqrt{3}|KP|$$

$$\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}=\sqrt{3}\sqrt{(x-6)^2+(y+3)^2}$$

$$\Rightarrow (x-2)^2+(y+1)^2=3\left[(x-6)^2+(y+3)^2\right]$$



$$\Rightarrow x^2-4x+4+y^2+2y+1=$$
$$3x^2-36x+108+3y^2+18y+27$$
$$\Rightarrow 2x^2-32x+2y^2+16y+130=0$$
$$\Rightarrow x^2-16x+y^2+8y+65=0$$
$$\Rightarrow (x-8)^2-64+(y+4)^2-16+65=0\Rightarrow$$
$$(x-8)^2+(y+4)^2=15$$

پس مکان هندسی مورد نظر دایره‌ای است به شعاع $\sqrt{15}$ و به مرکز $(8,-4)$.

نکتهٔ مهم: هرگاه بخواهیم عبارت $x^2 \pm mx$ را به عبارتی شامل یک عبارتِ مربع کامل تبدیل کنیم کافی است $\frac{m^2}{4}$ به آن اضافه و کم کنیم.

$$x^2 \pm mx = x^2 \pm mx + \frac{m^2}{4} - \frac{m^2}{4} = (x \pm \frac{m}{2})^2 - \frac{m^2}{4}$$
$$x^2+8x=(x+4)^2-\frac{64}{4}=(x+4)^2-16$$
$$x^2-5x=(x-\frac{5}{2})^2-\frac{25}{4}$$

مسألهٔ ۳: معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $P=(5,2)$ و از نقطهٔ $A=(2,-2)$ عبور کند.

برای حل این مسأله کافی است اندازهٔ شعاع دایره را به دست آوریم که همان فاصلهٔ نقطهٔ A تا مرکز یعنی P است.

$$r=|AP|=\sqrt{(5-2)^2+(2+2)^2}=\sqrt{25}=5$$

معادلهٔ دایره: $(x-5)^2+(y-2)^2=25$

مسألهٔ ۴: معادلهٔ خطی را بنویسید که در نقطهٔ $A=(3,-3)$ بر دایره به معادلهٔ $(x-1)^2+(y+3)^2=4$ مماس باشد.

حل: می‌دانیم شعاع وارد بر نقطهٔ تماس بر خط مماس عمود است بنابراین ابتدا ضریب زاویهٔ شعاع وارد بر نقطهٔ A را به‌دست می‌آوریم که اگر مرکز دایره را C بنامیم خواهیم داشت، $C=(1,-3)$.

$$m_{AC}=\frac{y_A-y_C}{x_A-x_C}=\frac{-3-(-3)}{3-1}=\frac{0}{2}=0$$

پس شعاع وارد بر نقطهٔ A موازی با محور xها بوده و درنتیجه خط مماس بر محور xها عمود است و چون باید از نقطهٔ $A=(3,-3)$ عبور کند معادلهٔ آن به صورت $x=3$ می‌باشد.

(توجه دارید که اگر شیب شعاع AC برابر $k\neq 0$ باشد و ضریب زاویهٔ خط مماس را m' بنامیم می‌بایست $m'\times m_{AC}=-1$ که در این صورت $m'=\frac{-1}{k}$ بوده و با داشتن مختصات نقطهٔ A از دایره معادلهٔ خط مماس نوشته می‌شود.)

مسألهٔ ۵: از نقطه $P=(4,0)$ دو مماس بر دایره به معادلهٔ $x^2+y^2=4$ رسم کرده‌ایم. اگر نقاط تماس A و B باشند، مختصات A و B و طول وتر AB را بیابید.

حل: مطابق شکل صفحهٔ بعد اگر فرض کنیم $A=(x_1,y_1)$ و $B=(x_2,y_2)$ در این صورت ضریب زاویهٔ شعاع وارد بر نقطهٔ A برابر است با $m_{OA}=\frac{y_1}{x_1}$ پس ضریب زاویهٔ خط مماس عبارت است از: $m_{\text{مماس}}=\frac{-x_1}{y_1}$

پس معادلهٔ خط مماس که از P عبور می‌کند برابر است با:

$$(y-0)=\frac{-x_1}{y_1}(x-4)\Rightarrow y=\frac{-x_1}{y_1}(x-4)$$

چون این خط باید از A عبور کند پس مختصات A نیز در آن صدق می‌کند یعنی:

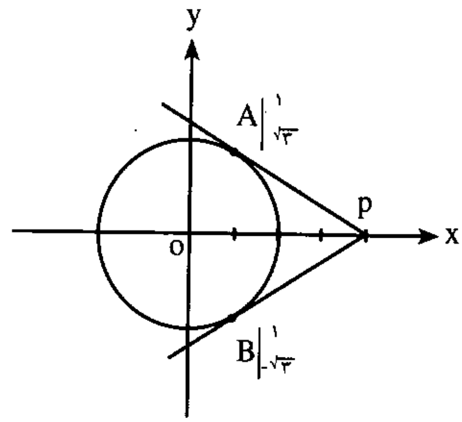
$$y_1=\frac{-x_1}{y_1}(x_1-4)\Rightarrow y_1^2=-x_1^2+4x_1 \quad (1)$$

از طرفی چون A روی دایره قرار دارد پس $x_1^2+y_1^2=4$ لذا معادلهٔ (۱) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$y_1^2+x_1^2=4x_1\Rightarrow 4=4x_1\Rightarrow x_1=1\overset{(1)}{\Rightarrow} y_1=\pm\sqrt{3}$$

پس مختصات دو نقطهٔ A و B به ترتیب به صورت $(1,\sqrt{3})$ و $(1,-\sqrt{3})$ به‌دست آمد.

$$|AB|=\sqrt{(1-1)^2+(\sqrt{3}+\sqrt{3})^2}\Rightarrow |AB|=2\sqrt{3}$$



مسألهٔ ۶ : معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که $A=(4,-1)$ و $B=(2,7)$ مختصات دو سر یک قطر این دایره باشد.

حل : چون قطر از مرکز دایره عبور می‌کند و فاصلهٔ مرکز تا دو نقطهٔ A و B برابر است پس مرکز دایره وسط AB قرار دارد بنابراین:

مرکز دایره $C=(\frac{4+2}{2},\frac{7-1}{2})\Rightarrow C=(3,3)$

$$r=|AC|=\sqrt{(3-4)^2+(3+1)^2}=\sqrt{17}$$

معادلهٔ دایره : $(x-3)^2+(y-3)^2=17$

مسألهٔ ۷ : معادلهٔ دایره‌ای را بیابید که مرکز آن $C=(1,-3)$ بوده و بر خط به معادلهٔ $2x-y=1$ مماس باشد.

حل : برای یافتن شعاع دایره کافی است فاصلهٔ مرکز دایره تا خط مماس را بیابیم:

$$r=|CH|=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|2\times1+(-1)\times(-3)-1|}{\sqrt{5}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$$

معادلهٔ دایره : $(x-1)^2+(y+3)^2=\frac{16}{5}$

مسألهٔ ۸ : معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که دو خط به معادله‌های $y=-x+1$ و $y=2x-5$ دو قائم بر آن بوده و بر خط $y=x$ مماس باشد.

حل : چون هر خط قائم بر دایره از مرکز دایره عبور می‌کند پس نقطهٔ تلاقی دو قائم مرکز دایره خواهد بود پس:

$$\begin{cases}y=-x+1\\ y=2x-5\end{cases}\Rightarrow C=(2,-1)$$

و فاصلهٔ مرکز تا خط مماس، شعاع دایره است یعنی:

$$r=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|1\times2+(-1)\times(-1)+0|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

معادلهٔ دایره : $(x-2)^2+(y+1)^2=\frac{9}{2}$

مسألهٔ ۹ : منحنی به معادلهٔ $x^2+y^2+ax+by+c=0$ مفروض است. این معادله با چه شرطی معادلهٔ یک دایره است؟

حل :

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$
$$\Rightarrow (x+\frac{a}{2})^2+(y+\frac{b}{2})^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c$$
$$\Rightarrow (x+\frac{a}{2})^2+(y+\frac{b}{2})^2=\frac{a^2+b^2-4c}{4}$$

شرط لازم و کافی برای آن که معادلهٔ اخیر معادلهٔ دایره باشد آن است که:

$\frac{a^2+b^2-4c}{4}=r^2>0$ یا $a^2+b^2>4c$

که در این صورت $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$ شعاع و $C=(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2})$ مرکز دایره خواهد بود.

نکتهٔ مهم : اگر در معادلهٔ $x^2+y^2+ax+by+c=0$ عدد حقیقی c صفر باشد یا منفی باشد همواره $a^2+b^2>4c$ خواهد بود و معادله یک دایره را مشخص می‌کند.

مسألهٔ ۱۰ : معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که از سه نقطه $A=(0,0)$ ، $B=(1,1)$ و $C=(2,3)$ عبور کند، سپس مرکز و شعاع دایره را مشخص کنید.

حل: اگر معادله دایره را به صورت $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ در نظر بگیریم باید مختصات این سه نقطه در معادلهٔ فوق صدق کند.

$A=(۰,۰)\Rightarrow ۰+۰+۰+۰+c=۰\Rightarrow c=۰$

$B=(۱,۱)\Rightarrow ۱^۲+۱^۲+a+b+۰=۰\Rightarrow a+b=-۲$

$C=(۲,۳)\Rightarrow ۲^۲+۳^۲+۲a+۳b+۰=۰\Rightarrow ۲a+۳b=-۱۳$

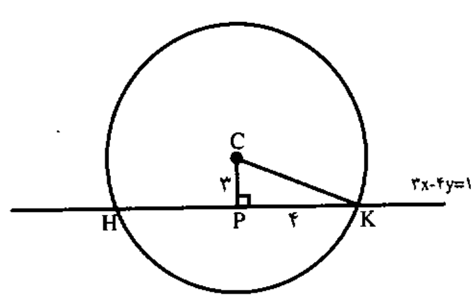
$$\begin{cases}a+b=-۲\\ ۲a+۳b=-۱۳\end{cases}\Rightarrow b=-۹, a=۷$$

معادلهٔ دایره : $x^۲+y^۲+۷x-۹y=۰$

مرکز دایره : $O=(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(-\frac{۷}{۲},\frac{۹}{۲})$

شعاع دایره : $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}=\frac{۱}{۲}=\sqrt{۴۹+۸۱}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۳۰}$

مسألهٔ ۱۱ : معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که $C=(۲,-۲)$ مرکز آن بوده و طول وتر حاصل از تقاطع خط به معادلهٔ $۳x-۴y=-۱$ با دایره برابر ۸ باشد.



حل: با توجه به شکل اگر خط، دایره را در دو نقطهٔ H و K قطع کند از نقطهٔ C مرکز دایره عمود CP را بر HK رسم کرده که در این صورت داریم:

$HK=۸\Rightarrow PK=۴$

$$|CP|=\frac{|ax_۱+by_۱+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۳\times۲+(-۴)\times(-۲)+۱|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{۱۵}{۵}=۳$$

$\overset{C\hat{P}K}{\Rightarrow}|CK|^۲=۳^۲+۴^۲\Rightarrow|CK|=r=۵$

معادلهٔ دایره : $(x-۲)^۲+(y+۲)^۲=۲۵$

مسألهٔ ۱۲ : معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن روی محور xها بوده و بر دو خط به معادله‌های $y=-x$ و $y=-x+۸\sqrt{۲}$ مماس باشد.

حل:

$$HH'=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۰+۸\sqrt{۲}|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}}=\frac{۸\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=۸$$

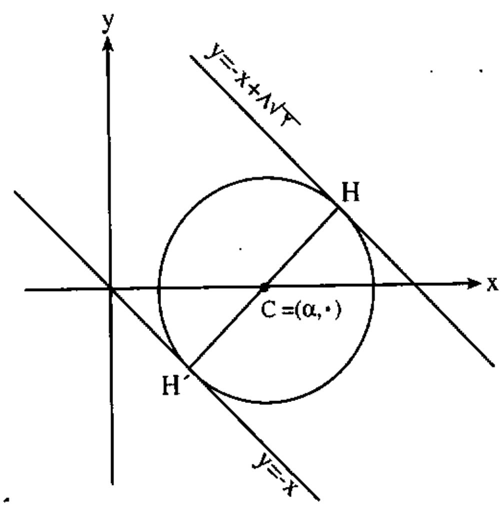
$۲r=۸\Rightarrow r=۴$

مرکز دایره $C=(\alpha,۰)$

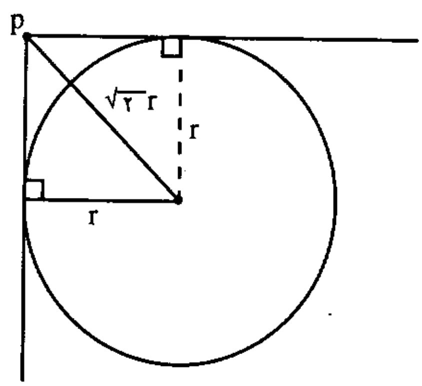
$$|CH'|=۴\Rightarrow\frac{|۱\times\alpha+(-۱)\times۰+۰|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}}=۴\Rightarrow\frac{|\alpha|}{\sqrt{۲}}=۴$$

$\Rightarrow|\alpha|=۴\sqrt{۲}$

معادلهٔ دایره : $(x-۴\sqrt{۲})^۲+y^۲=۱۶$



نکتهٔ مهم: شرط این که از نقطه‌ای خارج دایره به شعاع r بتوان دو مماس عمود بر هم بر دایره رسم کرد آن است که طول هر مماس برابر شعاع دایره یعنی r و فاصلهٔ آن نقطه تا مرکز دایره برابر با $\sqrt{۲}r$ باشد. (به شکل توجه کنید) در ضمن مکان هندسی همهٔ نقاطی چون P که می‌توان از آنها دو مماس عمود برهم بر دایره‌ای به شعاع r رسم کرد، دایره‌ای است هم‌مرکز با همان دایره و به شعاع $\sqrt{۲}r$.



نکته: اگر معادلهٔ دایره‌ای به شکل $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ مفروض باشد و نقطهٔ $A=(x_1,y_1)$ نیز در دست باشد و مختصات A را در معادلهٔ دایره قرار دهیم عددی چون k حاصل می‌شود که در این صورت:

۱ـ نقطه A روی دایره است اگر $k=r^2$

۲ـ نقطهٔ A در داخل دایره واقع است اگر $k<r^2$

۳ـ نقطه A در خارج دایره واقع است اگر $k>r^2$

حال اگر معادلهٔ دایره به صورت $x^2+y^2+ax+by+c=0$ مفروض باشد و مختصات A را در معادله (به جای x و y) قرار دهیم عددی چون k به دست می‌آید که در این صورت داریم:

۱ـ A روی دایره است اگر $k=0$

۲ـ A خارج دایره است اگر $k>0$

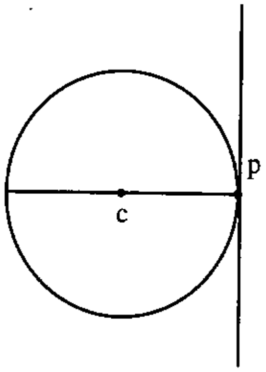
۳ـ A داخل دایره است اگر $k<0$

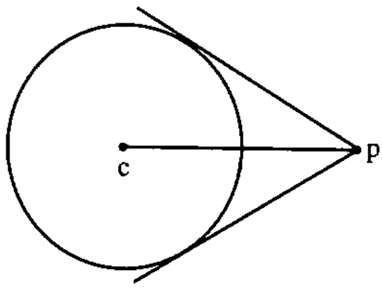
۴ـ A روی مرکز دایره است اگر $k=-r^2$

نکتهٔ مهم: اگر نقطهٔ P و دایره به مرکز C و به شعاع r مفروض باشد در این صورت تعداد مماس‌ها و قائم‌هایی که از P بر دایره می‌توان رسم کرد با توجه به مکان P به قرار زیر است:

۱) اگر P خارج دایره باشد، دو مماس و یک قائم می‌توان بر دایره رسم کرد.

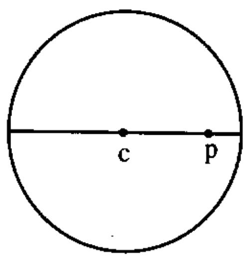
۲) اگر P روی دایره باشد، یک قائم و یک مماس می‌توان بر دایره رسم کرد.

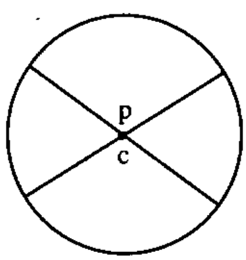




۳) اگر P داخل دایره باشد و روی مرکز نباشد فقط یک قائم می‌توان بر دایره رسم کرد و مماسی نمی‌توان رسم کرد.

۴) اگر P روی مرکز دایره باشد بی‌شمار قائم می‌توان بر دایره رسم کرد.





تذکر: توجه دارید که خط قائم بر دایره از مرکز دایره عبور کرده و در حالت (۱) طول دو مماس با هم برابر است.

محمّد طاهر معیّری

آزمون چند گزینه‌ای

هشدار!

در ارزشیابی دانش و توانایی ذهنی افراد، از روش‌های گوناگون استفاده می‌شود. امتحانات دوره‌ای و مقطعی، معمولی‌ترین آنهاست. در این جریان، نوع آزمون، اعتبار سؤال‌ها و زمان و ترتیب ارزشیابی، نقش قابل توجه دارند. چه بسا که شیوه و روش، جریان داوری را به کلّی مقلوب کند. اعتبار روش، مهمترین ضرورت ارزشیابی است.

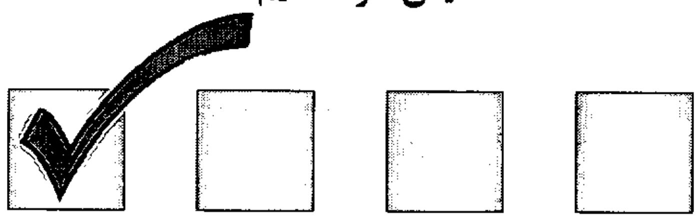
در مجموعهٔ عوامل مؤثر در نتیجهٔ ارزشیابی، نوع پرسش‌ها اهمیّت اساسی دارد. ارزشیابی نوشتاری را از لحاظ نوع سؤال به سه وجه مختلف می‌توان ترتیب داد:

۱. طرح سؤال‌های کلی که به هریک از آنها باید به صورت یک مقالهٔ جامع پاسخ بدهند. این گونه پرسش‌ها قهراً باید از حیث تعداد، معدود و از لحاظ وسعت، در قالب فرصتی باشد که برای جلسهٔ امتحان منظور می‌شود.

۲. سؤال‌های کوتاه و متعدّد که پاسخ گفتن به هریک از آنها به ذکر یک کلمه یا یک تاریخ، و حدّاکثر یک یا دو سطر اظهارنظر نیاز دارد. این گونه پرسش‌ها به صورت‌های مختلف مطرح می‌شوند. گاهی سؤال مستلزم اظهارنظری کوتاه و مشخص است، گاهی باید بین پاسخ‌های درست و نادرست، آن‌را که درست است، تشخیص داد و در پاسخ به سؤال، به نشانه‌گذاری اکتفا می‌شود، و گاهی قسمت‌هایی از یک متن از قبل تهیه شده را که جای آنها در ورقهٔ امتحانی برای اظهارنظر باقی است، باید تکمیل کرد، در هر حال، در این شیوهٔ امتحان، پرسش‌ها متعدّد جواب‌ها کوتاه است.

۳. وجه سوّم، ترکیبی از دو صورت قبلی است؛ به این معنا که پرسش امتحانی، آمیخته‌ای از سؤال‌های کلی و کوتاه است که ممکن است در دو جلسهٔ مختلف یا به توالی مطرح شوند. به این ترتیب که در مرحلهٔ اوّل، امتحان‌دهندگان با وقت محدود، به تعداد زیادی از سؤال‌ها، پاسخ کوتاه می‌دهند و در مرحلهٔ تکمیلی آزمایش، در مقابل چند سؤال کلی قرار می‌گیرند، تا بحال آن‌را داشته باشند دربارهٔ موضوع مورد ارزشیابی، هر قدر آگاهی و توانایی دارند، به کار گیرد و شایستگی

سؤال‌های کلی، به امتحان‌دهنده فرصت می‌دهد که همهٔ اطلاعات خود را دربارهٔ موضوع سؤال عرضه کند، ورقهٔ امتحانی را به سلیقه و تشخیص خود تنظیم کند.



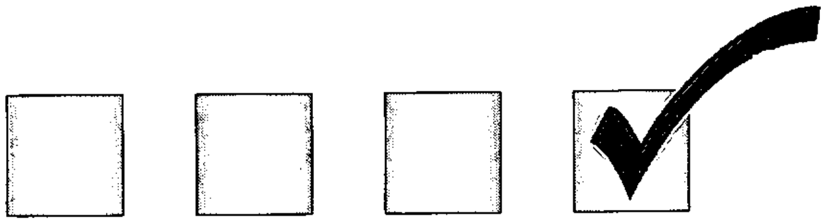
خود را نشان دهند؛ یعنی در پاسخ‌های نوع دوم، آنها که ممتاز شوند، جای خود را در میان گروه باز می‌یابند. گاهی آزمایش مرحلهٔ دوم، فقط در گروه قوی و ممتاز اجرا می‌شود تا برای تمیز بین خوب و بد، فرصت بهتری را فراهم کند و بر اساس این بازبینی مجدّد، شایسته‌ترین امتحان‌دهندگان شناخته شوند. مصاحبه و امتحان شفاهی هم برحسب مورد، ممکن است جای امتحان مرحلهٔ دوم را بگیرد، که جای بحث و انتقاد وسیع دارد و اعتبار آن به ملاک‌ها و نحوهٔ اجرایش وابسته است.

سؤال‌های کلی، به امتحان‌دهنده فرصت می‌دهد که همهٔ اطلاعات خود را دربارهٔ موضوع سؤال عرضه کند، ورقهٔ امتحانی را به سلیقه و تشخیص خود تنظیم کند، با آزادی و وقت کافی در هر موضوع اظهار نظر کند و وسعت دید خود را با ملاک‌های دقیق‌تری نشان دهد.

در پاسخ گفتن به سؤال‌های کلّی، که توصیف و بازشکافی مسائل را ایجاد می‌کنند، امتحان‌دهنده باید به همهٔ ابعاد مسأله توجه کند و این، مستلزم تسلط کافی بر مطلب است. در این روش، ورقهٔ امتحانی از صورت قالبی، فقط شامل رئوس مطالب مصون خواهد ماند، آنکه بیشتر می‌داند، بهتر و بیشتر به بحث می‌پردازد و ورقهٔ بهتری ارائه می‌دهد؛ نه آن‌که لقمه از پیش ساخته‌ای را بشناسد و ببلعد.

سؤال‌های کلی، جایی برای حدس و گمان باقی نمی‌گذارند و امتحان‌دهنده فقط وقتی می‌تواند به سؤال پاسخ دهد که دربارهٔ موضوع، علم و آگاهی قبلی داشته باشد و بر پیوستگی و تقدّم و تأخّر مطالب و نتیجه‌گیری قادر باشد.

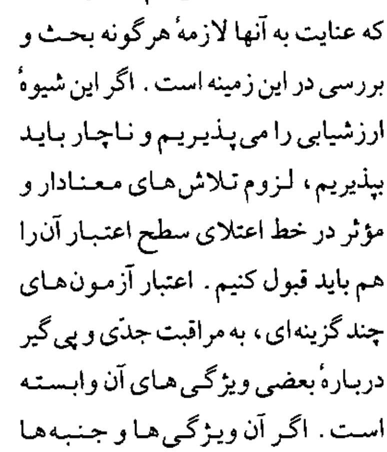
به هر حال، در اعتبار این گونه ارزشیابی، از بسیاری جهات تردید نیست. امّا افسوس که در مقیاس وسیع میلیونی آزمایش‌شوندگان و در سطح و حدّ تحصیلات یک دوره یا یک سال تحصیلی، به چنین روشی دسترسی نیست. آن‌گاه که تعداد امتحان‌کنندگان از حدّ متعارف، مثلاً صد تا پانصد نفر، بالاتر می‌رود، بررسی پاسخ‌های مربوط به سؤال‌های وصفی از حدّ امکانات عادی فراتر



می‌رود و صورت غیر عملی به خود می‌گیرد. در مقیاس وسیع تعداد امتحان‌دهندگان، تصحیح اوراق جز با استفاده از حسابگرها میسّر نخواهد بود. کاربرد رایانه فقط با استفاده از رمزهایی که بر پاسخ‌های کوتاه بنا می‌شود، می‌تواند عملی باشد. کدگذاری که لازمهٔ استفاده از حسابگرهاست، لزوماً پاسخ‌های کوتاه صریح و سریع را طلب می‌کند. پاسخ‌های کوتاه را نمی‌توان با پرسش‌های تفصیلی فراهم کرد. علاوه بر آن، پاسخ‌های کوتاه به تعداد زیاد و متعدّد جواب نیاز دارد و این، با معدود سؤال‌های تفصیلی میسّر نیست. بدین سبب، ارزشیابی و امتحان در مقیاس وسیع، پای روش و شیوه‌ای با تعداد سؤال کافی و پاسخ‌های کوتاه رمزپذیر را به میان می‌کشد که شناخته‌ترین شکل آن، همان آزمون‌های چند گزینه‌ای است.

در ارزشیابی با سؤال‌های متعدّد، که می‌توان به همهٔ بخش‌های هر مطلب رسید، برای عرضهٔ آگاهی‌ها، مجال بیشتری فراهم می‌شود. در این گونه ارزشیابی، آزمایشی به اظهارنظر دربارهٔ چند موضوع معیّن محدود نیست. اگر احیانا در موارد ضعف و کمبود داشته باشد، می‌تواند به دیگر قسمت‌ها بپردازد، و این بر دقّت ارزشیابی می‌افزاید و چه بسا که بیش از چند سؤال معدود، می‌تواند جانب حقّ افراد را ملحوظ دارد؛ زیرا کسی که در برخورد مثلاً با پنجاه تا صد پرسش کوتاه با مباحث گوناگون در همهٔ قسمت‌ها ناتوانی نشان دهد، به راستی ناتوان و ضعیف است و ورقهٔ امتحانی، به داوری قطعی‌تری می‌رسد.

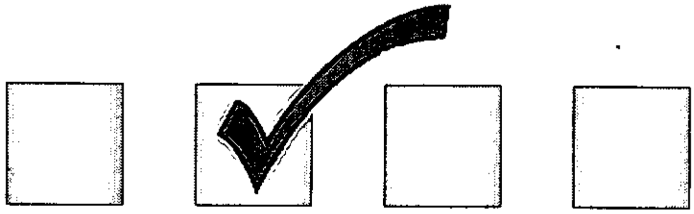
در مقابل این امتیازها، این گونه امتحان را نقاط ضعفی هم متصوّر است که عنایت به آنها لازمهٔ هرگونه بحث و بررسی در این زمینه است. اگر این شیوهٔ ارزشیابی را می‌پذیریم و ناچار باید بپذیریم، لزوم تلاش‌های معنادار و مؤثر در خط اعتلای سطح اعتبار آن‌را هم باید قبول کنیم. اعتبار آزمون‌های چند گزینه‌ای، به مراقبت جدّی و پی‌گیر دربارهٔ بعضی ویژگی‌های آن وابسته است. اگر آن ویژگی‌ها و جنبه‌ها دستخوش غفلت باشند، انحراف نتیجهٔ ارزشیابی را از خط مطلوب سبب می‌شوند. مباد که در عین الزام به



تمسک به چنین شیوهٔ امتحان، در حالی که مبتکران آن در این باره شک و تردید نشان می‌دهند و مُدام درصدد تغییر و اصلاح و تکمیل آن هستند، ما با تمام وجود به آنها تکیه کنیم و تصمیم‌های اساسی را آن‌چنان وابسته کنیم ک نبودش به ز بود باشد، و در نهایت، از داوری منصفانه و عادلانه در تشخیص ارزش‌ها دور بیفتیم و حق‌ها پایمال شود.

این ویژگی‌ها کدامند؟

آزمون‌های چند گزینه‌ای، شرایطی لازم است که در دو گروه اصلی و اساسی، یکی به خود پرسش‌ها باز می‌گردد و دیگری به لزوم بازسازی مستمر و حفظ و نگهداری سالم آنها. در آزمون‌های چند انتخابی، نخستین مسألهٔ مهم در تعداد انتخاب‌ها، در هر سؤال ظاهر می‌شود. در این گونه پرسش‌ها در مقابل هر موضوع، ممکن است دو یا سه یا چهار و... حالت مختلف مطرح شود، که فقط یکی از آن‌ها درست باشد. روشن است که به این ترتیب، هر قدر در هر سؤال تعداد انتخاب‌ها کمتر باشد، پاسخ گفتن مهم‌تر است و در مقابل جواب درست، آن‌که نادرست است، آشکار و صریح خود را نشان می‌دهد و مستلزم در نظر گرفتن حالت‌ها دیگر نیست، و این برای امتحان‌دهنده، از لحاظ صرف وقت و



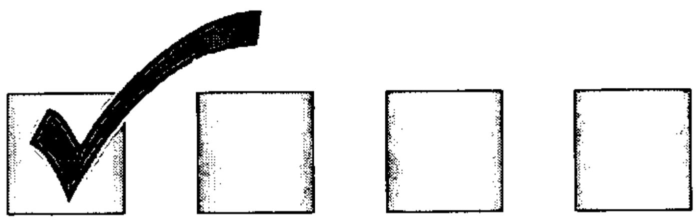
کوچک بودن دامنهٔ تفکر، تسهیلاتی فراهم می‌آورد و تهیه‌کنندهٔ سؤال را هم کمک مؤثری است که ناچار نخواهد بود برای یافتن گزینه‌های مناسب در هر مبحث، به جست‌وجوی وسیع بپردازد.

دیگر ضعف این آزمون‌ها در این است که به رغم بسیاری محاسن، خطر آن‌را دارد که به حق برجستگان گروه چنانکه باید، نرسد یا آنهایی را که ناتوانی مفرط دارند، در حد ضعف و کمبودشان، طبقه‌بندی نکند؛ زیرا که مجال بر آنها که توانایی بیشتر و عالی‌تر در هر زمینه، مباحث بسیاری برای طرح اطلاعات و دانش خود دارند، تنگ می‌کند و فقط به (آری و نه) دربارهٔ هر موضوع، محدود و موظّف می‌کند. به این سبب، این روش به مقیاس دیگر روش‌ها توانایی رده‌بندی گروه را در میدانی وسیع ندارد و عملاً دامنهٔ تغییرات نمره‌های امتحانی را محدود می‌کند. به همین دلیل است که گاهی پس از چنین آزمونی، در یک امتحان مکمّل، برای شناخت استعدادهای برتر، فرصت‌هایی فراهم می‌آورند تا خوب و بد را فاصله‌ای فراهم شود و برجستگان در گروه قوی و ممتاز قرار گیرند و تمیز خوب و بد به وجه بهتری میسّر شود.

نقطهٔ ضعف دیگر آزمون‌های چند گزینه‌ای، در این است که در آنها اصالت و عمق اطلاعات، دستخوش بی‌اعتنایی است. پرسش چند گزینه‌ای برای ابراز جنبه‌های بنیادی آگاهی‌ها، مجال باقی نمی‌گذارد. امتحان‌دهنده را وادار می‌کند که فقط در خطی حرکت کند که مطالب جزئی و احیاناً کوتاه و چه بسا کم‌اهمیتی را که می‌تواند در آزمون چند گزینه‌ای مطرح باشد، به خاطر بسپارد، و با پاره‌ای محفوظات قالبی برای مقابله با ضرورت‌های آزمون آماده شود. چنین است که با اجرای تدریجی این برنامه‌ها، معلمانی در کلاس مؤفق‌ترند که چکیده‌های سطحی برنامه‌ها را هرچه آشکارتر و مختصرتر مطرح کنند و به اصالت مطلب توجه نداشته باشند. بازار تهیه و فروش و اجرای این گونه آزمون‌ها رایج می‌شود و راه را بر توجه به عمق تحصیلات مدرسه‌ای می‌بندد. آن این گونه آزمون‌ها رایج و سرنوشت‌ساز باشد، داوطلب شرکت در امتحان، به کنجکاوی و تحلیل وسیع مطالب نیاز ندارد، با کوشش سازنده، تفکر دربارهٔ مباحث مختلف فاصله می‌گیرد و به تدریج عمق تحصیلات مدرسه‌ای از لحاظ وسعت آگاهی‌ها، به سطح نازلتری سقوط می‌کند.

انتخاب سؤال

در هرگونه آزمون، انتخاب سؤال مرحله‌ای حسّاس است. سؤال امتحانی باید با بیان صریح، روشن، قابل فهم، و حتی‌المقدور کوتاه مطرح شود تا امتحان دهندگان، به سادگی مقصود را درک کرده و پاسخ را تشخیص دهند. پرسش امتحانی باید با همهٔ آنچه که مورد توجه ارزشیابی است ـ مثلاً ما با همهٔ برنامهٔ تحصیلی دورهٔ مربوطه ـ ارتباط



داشته باشد و فقط روی یک یا چند بخش متمرکز نباشد. پرسش امتحانی باید با مقدار پیامد وقتی که برای جواب گفتن به آزمایشی اختصاصی داده می‌شود، مناسبت معقول داشته باشد. وقت زیاد و کم، هریک متضمّن پیامدهایی است که دقت و اعتبار ارزشیابی را ساقط می‌کند. سؤال‌های امتحانی باید با رشد ذهنی و سن، به خصوص با هدف ارزشیابی، مناسب داشته باشند. پرسش‌های امتحانی، باید حتی‌المقدور مستقل از هم باشند تا موجب دوباره کاری و اتلاف وقت نشوند. سؤال‌های امتحانی از لحاظ سهولت و دشواری، باید حالت متعادل و میانی داشته باشند؛ نه چنان پیچیده و دشوار باشند که دست اکثریت گروه را در تهیهٔ پاسخ ببندند و نه آن‌چنان سهل و روشن که همه به آنها، به آسانی جواب دهند و مجال را بر طبقه‌بندی درست امتحان دهندگان تهیه کند.

با توجه به این ضرورت‌ها، ببینیم در تهیهٔ دو گونه سؤال‌های توصیفی و کوته جواب، معمولاً چه مسائلی پیش می‌آید؟ در ارتباط با پرسش‌های چندگزینه‌ای، مسأله اساسی این است که تهیهٔ این گونه پرسش‌ها، خود به علم و آگاهی متناسب با شرایط آزمون نیاز دارد. هر پرسش چند گزینه‌ای، فقط باید یک پاسخ درست داشته باشد. نحوهٔ مطرح کردن این پاسخ در پاسخنامه، اهمیت اساسی دارد. مهمتر از آن، انتخاب سه یا چهار پاسخ نادرست برای هر پرسش است. انتخاب پاسخ‌های نادرست، از منابع مهم بروز نارسایی‌هاست. گاهی پیش می‌آید که پاسخ‌های نادرست، چنان پیش پا افتاده و بی محتوا در می‌آیند که تشخیص پاسخ درست، کمرنگ جلوه می‌کند و به صورت خود به خودی ظاهر می‌شود. گاهی آزمون‌ها یا جواب درست ندارد یا بیش از یک جواب درست دارد و یا چنان مبهم است که تشخیص درست و نادرست را دشوار می‌کند. گاهی سلیقه و برداشت تهیه‌کننده در پیش‌بینی مطالب، بیش از پراکندگی موضوع و محتوای مورد ارزشیابی در تهیهٔ سؤال‌ها رخنه می‌کند. و... بی شک بیشتر این موارد به لغزش و خطا در تهیهٔ سؤال‌ها باز می‌گردد، نه به متن و شیوهٔ امتحان. در این مقال، تأکید روی این حقیقت است که تهیهٔ

پرسش‌های چند گزینه‌ای، فی نفسه دشوار و نیازمند صلاحیت و تخصّص کافی است. با این همه، اکنون اجرای آزمون‌های چند گزینه‌ای، معمول و به حکم ضرورت‌های اجتناب ناپذیر، جای دیگر روش‌ها را گرفته است. در این صورت، باید به کوشش وسیع و معنادار برای بازسازی، بهسازی و پاکسازی آن از موانع و زواید پرداخت.

ارزشیابی پرسش‌های امتحانی

بی گمان نتیجه و بنابراین، اعتبار هر امتحان، تابع عوامل گوناگون است. انتخاب سؤال، نظم و انضباط اجرای، مأخذ درست نمره‌گذاری و تصحیح اوراق، همه در اعتبار ارزشیابی مؤثرند. اجرای برنامه‌های وسیع ارزیابی سؤال‌ها، به ویژه در مواردی چون آزمون‌های گزینش دانشجو، و آنها که ملاک اختصاص امتیازهای قابل توجهی هستند که با سرنوشت انبوه جوانان برخورد دارند، به مراقبت جدّی شدید و مستمر نیاز دارند، و این مستلزم اتخاذ راه و روند مناسب و معتبر برای ارزشیابی خود جریان و شیوهٔ ارزشیابی است.

تهیهٔ سؤال‌های مناسب امتحان مرحله‌ای، بسیار دشوار است و جنبهٔ حسّاس ارزشیابی دارد. هرچه را که بتوان پرسید، نمی‌توان گفت که سؤال امتحانی است. سؤال‌های امتحانی را

غربال و صافی‌های دقیق لازم است تا در ارتباط با همهٔ آثار امتحان، نارسایی‌ها را شناسایی کنند و به حداقل تقلیل دهند. به حکم همین ضرورت، سؤال‌های امتحانی باید نتیجهٔ ارزشیابی‌های متعدد و با مجال تراز شده و قابل استناد باشند.

و امّا پرسش‌های امتحانی را چگونه می‌توان ارزیابی کرد؟ خوشبختانه برای این منظور، معیارهای نسبتاً دقیق فراهم کرده‌اند. در اجرای این برنامه، در درجهٔ اول، طبقه‌بندی امتحان‌دهندگان در سه گروه قوی، متوسط و ضعیف، بر اساس نتیجهٔ کلی امتحان لازم است، که از نتیجهٔ مستقل کار هر گروه و مقایسهٔ آنها، می‌توان به ویژگی‌های معیّنی رسید. برای این گروه‌بندی از تعداد امتحان‌دهندگان، می‌توان در هر طرف درصد معینی در نظر گرفت. درآزمایش صعودی نتیجهٔ کلی امتحان مثلاً ۲۵ درصد افراد را در هر طرف به عنوان دو گروه ضعیف و قوی و ۵۰ درصد میانی را گروهی متوسط در نظر می‌گیریم. در ارزشیابی سؤال‌ها، آنها را یک به یک مورد توجه قرار می‌دهیم. هر سوال برای خود معیارهایی به دست می‌دهد. برای شناسایی سؤال‌های بهتر، می‌توان از ملاک‌های مختلف استناد کرد؛ سختی و آسانی، قدرت تمیز، سلامت سؤال از لحاظ موضوع و متن و... از جمله ضابطه‌های ارزشیابی هر سؤالند.

شاخص‌ها را بر اساس نتایجی که از کاربرد مکرّر سوال‌ها حاصل می‌شود، باید فراهم کرد. سؤال‌هایی که در مقیاس انبوه با پاسخ‌های ناکافی، نارسا و غیر مربوط برخورد می‌کنند، فی‌نفسه مصون از عیب و نقص نیستند. در حقیقت، ماهیت این گونه پرسش‌ها را نقصانی است که به صورت ناتوانی گروه در مقابله با آنها ظاهر شده است.

باری، در جامعهٔ امروز که نوجوانان برای سال‌های دراز و به مدت قابل ملاحظه، عمر خود را به حکم اجبار و به پیروی از رسم زمان، در کلاس درس می‌گذرانند و توجه آنان به خط واحدی از پیروزی، یعنی راه یافتن به تحصیلات دانشگاهی است، ملاک‌های انتخاب باید قوی، قابل دفاع، نفوذناپذیر و بنا شده بر پشتوانه‌های علمی منطقی و نوآور باشد. مبادا که در آخرین مرحلهٔ تحصیلات دبیرستانی، خدای ناکرده بی‌میزانی و معیار دست رد بر سینهٔ

بعضی گذاشته شود که نخیر، تو برای آنچه سال‌ها متر صد آن بوده‌ای، شایسته نیستی، و از این بدتر آن‌که، راه دیگری هم پیش پای آنها نگذاشته باشیم. از این مقوله بگذریم که، لُبّ سخن این که از ارزشیابی مستمر پرسش‌های امتحانی، قابل قبول‌ترین سؤال‌ها را از نقطه نظرهای مختلف باید شناسایی کنیم و در حفظ و سالم نگهداری آنها بکوشیم، و همواره همتراز و موازی این کوشش‌ها، درصدد آن باشیم که وقتی روش کار کهنه و شناخته شد، از شیوه‌های بهتر، مؤثرتر و سنجیده‌تری برای انتخاب به راستی بهترین‌ها سود بگیریم؛ در عین آن‌که برای دیگران نیز به فراخور شایستگی‌ها و توانایی‌هایشان، راه و خط‌های دیگری فراهم آورده باشیم.

به هر حال، سرنوشت را به خصوص آن‌گاه که نسل جوان، و در نهایت، جامعه، به نتیجهٔ آزمون‌های عمومی چشم دوخته‌اند و امیدها دارند، چشم بسته به پاره‌ای معیارهای نیم‌بند نباید سپرد. آزمون عمومی هم به ترازوهای دقیق و سالم نیاز دارد، هم‌وزنه‌ها و معیارهای موّحد و بدون شورش لازم است تا عدالت اجتماعی را مرعی دارد و انتخاب‌های شایسته‌تری را برای مقابله با شرایط فردا فراهم آورد. برای زندگی فردا مهارها را به دست آنهایی باید داد که به راستی مهارت‌پذیر باشند. ان‌شاءالله

گراف‌ها و کاربردهای آن

قسمت اول

برای دانش‌آموزان دورهٔ پیش دانشگاهی رشتهٔ ریاضی

«نظریهٔ گراف‌ها یکی از معدود رشته‌های ریاضی است که تاریخ دقیق پیدایش آن کاملاً مشخص است. نخستین مقالهٔ مربوط به گراف‌ها را لئونهارد اویلر ریاضی‌دان سوئیسی که یکی از تأثیرگذارترین افراد در تاریخ علوم است در سال ۱۷۳۶ میلادی نوشت و منتشر کرد، وی زمانی که سرگرم نوشتن مقاله‌اش دربارهٔ گراف‌ها بود بینایی یکی از چشمانش را از دست داد و به هنگام پیری کاملاً نابینا شد، ولی حتی این پیشامد موجب کاهش میزان نوشته‌های او نشد، اویلر مقاله خود دربارهٔ گراف‌ها رابا بررسی معمایی به نام مسأله پلهای کونیگسبرگ آغاز کرد و در نهایت این مسأله باعث بوجود آمدن گراف‌های اویلری شد.»[1]

آشنایی با گراف

فرض کنید مدرسه‌ای تعداد ۵ عدد رایانه دارد که می‌خواهد با ایجاد یک شبکه ارتباطی بین رایانه‌ها، دسترسی به اطلاعات و ارائه خدمات به دانش‌آموزان آسانتر شود، لذا با اتصالات زیر رایانه‌ها را به همدیگر متصل می‌کند:

رایانه A را به رایانه‌های B و C و E متصل می‌کند.

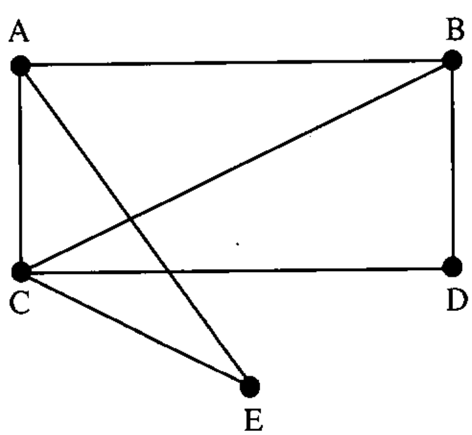
رایانه B را به رایانه‌های C و D متصل می‌کند.

رایانه C را به رایانه‌های A و B و D و E متصل می‌کند.

رایانه D را به رایانه‌های B و C متصل می‌کند.

رایانه E را به رایانه‌های A و C متصل می‌کند.

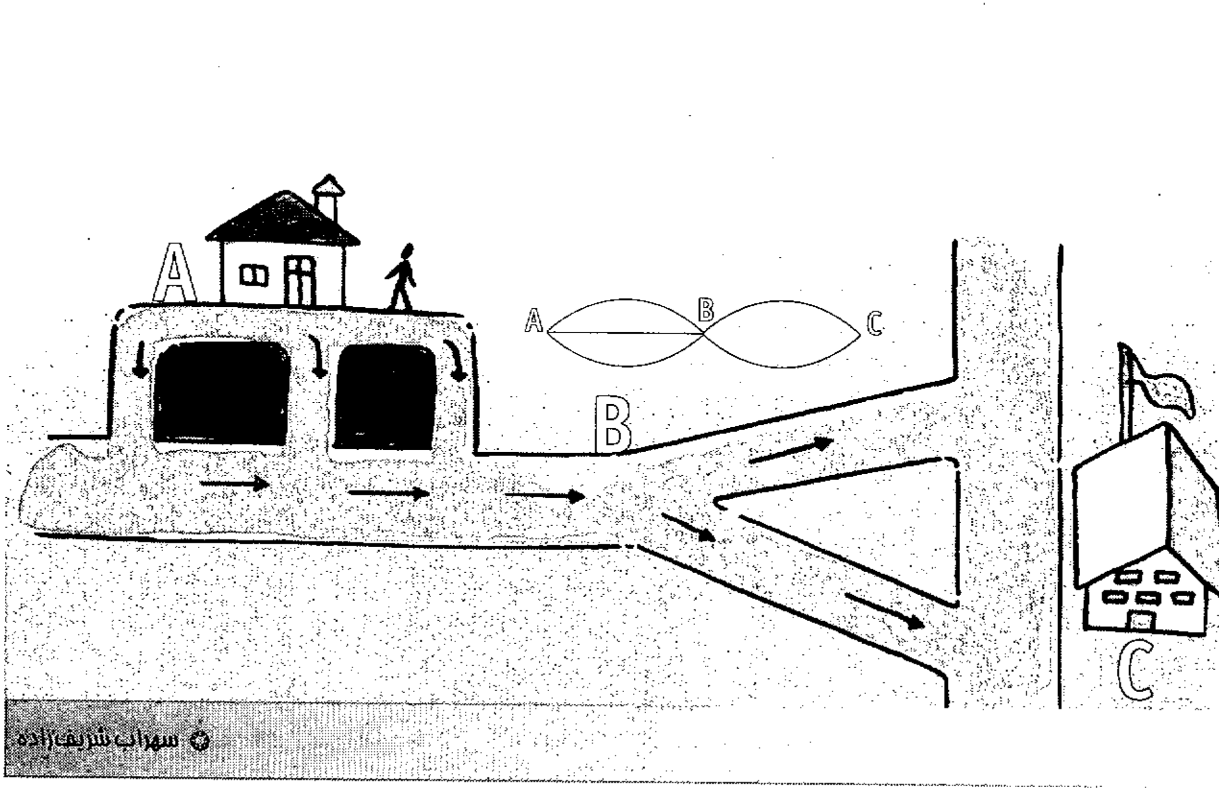
اتصالات بین رایانه‌ها را می‌توان به صورت نمودار زیر نمایش داد.

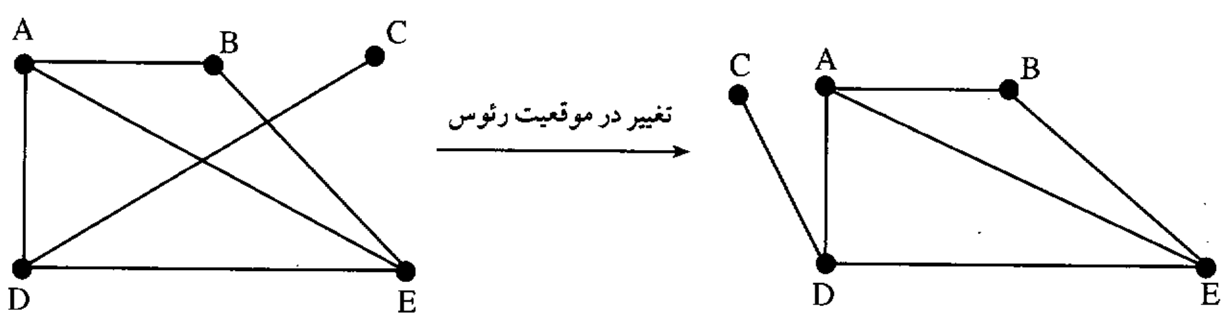


نمودار بالا را یک **گراف** می‌نامند، نقطه‌های A و B و C و D و E را **رأس‌های گراف** می‌گویند و پاره‌خط‌هایی که رأس‌های گراف را به هم متصل می‌کنند، **یال‌های گراف** می‌نامند، مانند: AB و CE و...

تذکر ۱: در هر گراف امکان دارد یال‌ها به صورت کمان یا منحنی نیز باشد.

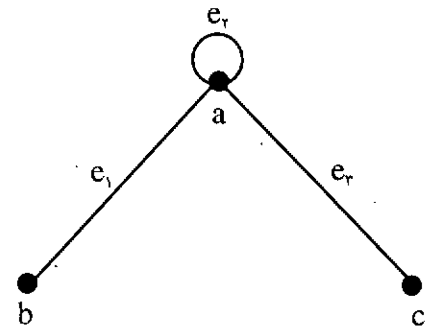
تذکر ۲: چون گراف را در صفحه رسم کرده‌ایم، امکان دارد یال‌های گراف یکدیگر را در نقاطی غیر از رئوس قطع کنند، لذا برای پرهیز از این مشکل، با تغییر در موقعیت رئوس می‌توان، آن را طوری رسم کرد که یال‌ها همدیگر را در نقطه‌ای غیر از رئوس قطع کنند.





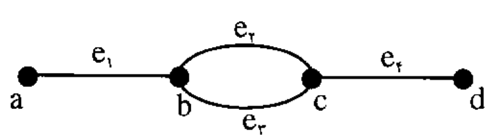
طوقه (حلقه)

یالی است که هر رأس را به خود آن رأس وصل می‌کنند، مانند یال e_2 در گراف زیر:



یال‌های موازی

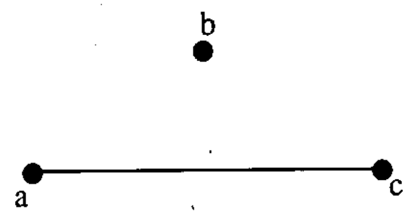
هرگاه بین دو رأس متمایز بیش از یک یال موجود باشد، به آن یال‌ها، یال‌های موازی می‌گویند، مانند یال‌های e_2 و e_3 در گراف زیر:



رأس تنها (ایزوله یا منفرد)

اگر رأسی با هیچ یالی به رأس دیگر متصل نباشد، آن رأس

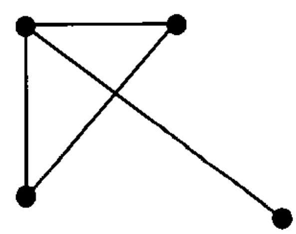
را رأس تنها می‌نامند، مانند رأس b در گراف زیر :



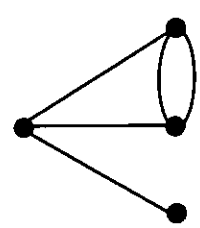
گراف ساده

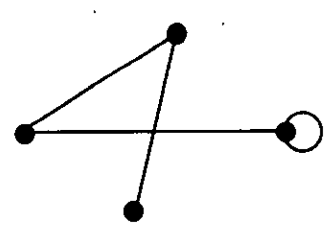
گراف‌هایی که دارای هیچ طوقه و یال موازی نمی‌باشند، گراف ساده می‌نامند.

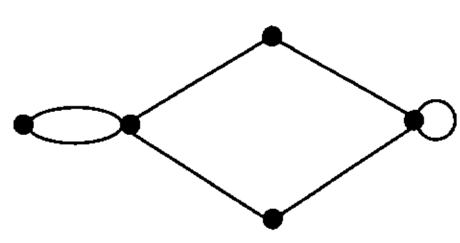
مثال۱) گراف زیر یک گراف ساده است، زیرا دارای طوقه و یال موازی نمی‌باشد.



مثال ۲) گراف‌های زیر ساده نمی‌باشد، زیرا دارای طوقه یا یال موازی و یا هر دو می‌باشند.



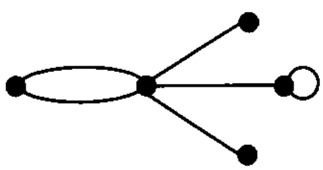


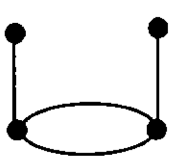


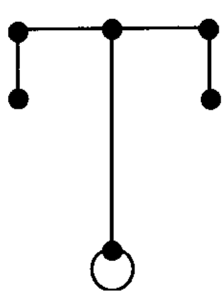
گراف چندگانه

گرافی که ساده نباشد یک گراف چندگانه است. به عبارت دیگر «گرافی که در آن، بین دو رأس بیش از یک یال موجود باشد یا این که رأسی به وسیله یک یال به خودش متصل باشد، گراف چندگانه می‌نامند»

مثال ۳) گراف‌های زیر چندگانه‌اند؟ (توجه کنید که در مثال ۲ نیز تمامی گراف‌ها چندگانه‌اند)



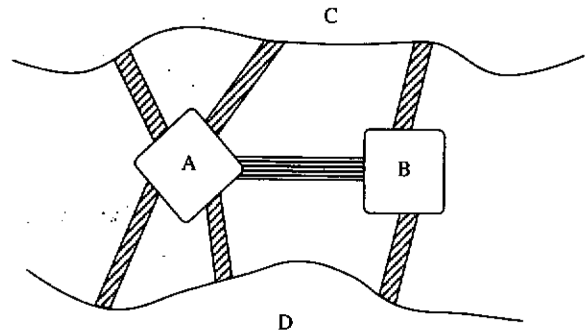




گراف مسأله شهر کونیگسبرگ یک گراف چندگانه است:

مسأله چنین است:

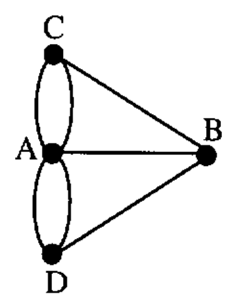
شهر کونیگسبرگ در کشور روسیه از دو ساحل رودخانه پرگل و دو جزیرهٔ مجزا تشکیل شده بود و هفت پل این دو جزیره را به صورت شکل صفحهٔ بعد، به هم وصل می‌کردند:



مسأله‌ای سال‌ها ذهن مردم را به خود مشغول کرده بود و آن مسأله این بود که:

«چگونه می‌توان با شروع از یک نقطه شهر و با گذشتن تنها یک بار از هر پل در شهر گشتی زد و به همان نقطه اولیه برگشت»

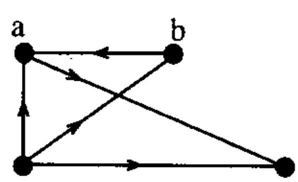
مردم این شهر سعی می‌کردند با قدم زدن و روش سعی و خطا این مسأله را حل کنند ولی در عمل نتیجه‌ای نمی‌گرفتند شهردار این شهر با نامه‌ای حل این مسأله را از اویلر درخواست می‌کند. اویلر بوسیلهٔ گراف زیر ثابت می‌کند که چنین کاری امکان‌پذیر نیست.



نمودار گراف مسأله این شهر یک گراف چندگانه است زیرا دارای یال‌های موازی می‌باشد.

گراف جهتدار

گرافی است که دارای یال‌های جهتدار می‌باشد، مانند گراف زیر:



تذکر: در گراف جهتدار به ازای هر دو رأس متمایز حداکثر دو یال جهتدار از یک رأس به رأس دیگر و بالعکس وجود دارد.

تعریف گراف ساده

تعریف: گراف ساده $G = (V,E)$ عبارت است از یک مجموعهٔ متناهی و غیرتهی V که اعضایش را رأس می‌نامیم و E زیرمجموعه‌ای است از مجموعه تمام زیرمجموعه‌های دو عضوی مجموعه V، که اعضایش را یال می‌نامیم.

تذکر ۱: مجموعه رئوس G را به $V(G)$ و مجموعه یال‌های آن را به $E(G)$ نیز نمایش می‌دهند.

تذکر ۲: برای هر دو عضو a و b از V اگر $\{a,b\} \in E$ آنگاه یالی بین a و b وجود دارد و اگر $\{a,b\} \notin E$ یعنی یالی بین a و b نیست.

تذکر ۳: در این مقاله هرجا از کلمه «گراف» استفاده شود منظور گراف ساده است مگر آنکه خلاف آن گفته شود.

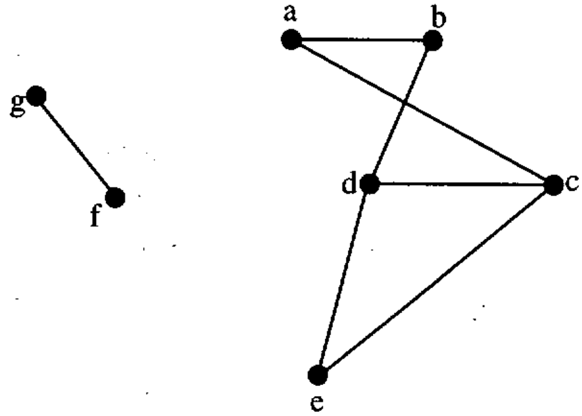
مثال ۴) قرار است بین هفت روستای a و b و c و d و e و f و g جاده‌هایی احداث گردد و به طوری که توسط این جاده‌ها:

روستای a با b و c و روستای f با g در ارتباط باشند.

روستای c با e و d و روستای d با b و e در ارتباط باشند.

گراف متناظر را رسم کنید.

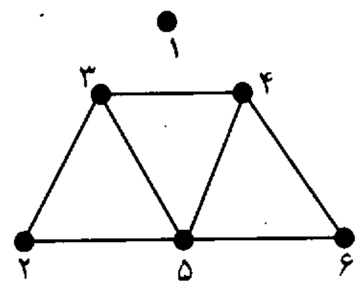
حل: نمودار گراف چنین است:



مثال ۵) اگر $V=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ و $E=\left\{\{x,y\}\middle|\frac{y}{x}\notin N, x,y\in V\right\}$ ، اعضای E را بنویسید و نمودار گراف ساده $G=(V,E)$ را رسم کنید.

حل:

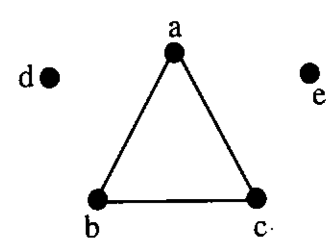
$$E=\{\{۲,۳\},\{۲,۵\},\{۳,۴\},\{۳,۵\},\{۴,۵\},\{۴,۶\},\{۵,۶\}\}$$



توجه: در گراف $G=(V,E)$ و $a,b,\in V$ به جای $\{a,b\}\in E$ ، برای سادگی از این به بعد می‌نویسیم: $ab\in E$

مثال ۶) فرض کنید G با $V(G)=\{a,b,c,d,e\}$ و $E(G)=\{ab,ac,bc\}$ داده شده باشد، گراف آن را رسم کنید.

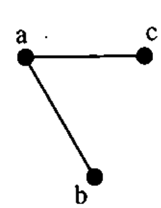
حل: نمودار گراف به صورت زیر است:



توجه: گراف بالا از سه بخش جدا از هم تشکیل شده است و همچنین گراف‌های داده شده در مثال‌های ۱ و ۲ هر کدام از دو بخش تشکیل شده‌اند.

دو رأس مجاور

دو رأس a و b در گراف $G=(V,E)$ را مجاور گوئیم هرگاه توسط یالی به هم متصل شده باشند. و رأس‌های a و b را دو سر یال ab می‌نامند. مثلاً در گراف مقابل دو رأس a و c مجاورند.



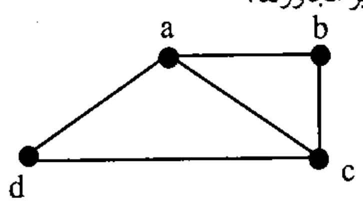
رأس مجاور به خود

در طوقه چون ابتدا و انتهای یک یال، یک رأس است به آن رأس، رأس مجاور به خود می گویند.

دو یال مجاور

هر دو یالی که محدود به یک رأس باشند، دو یال مجاور می‌نامند.

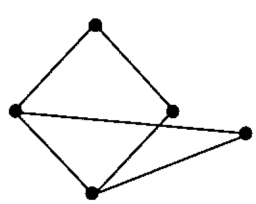
مثال در گراف زیر یال‌های ab و bc یال‌های مجاورند، زیرا هر دو یال به رأس b محدود هستند و امّا یال‌های ab و cd یال‌های غیر مجاورند.



مرتبه و اندازه در گراف

در گراف $G=(V,E)$ ، تعداد اعضای V را مرتبه G و تعداد اعضای E را اندازه G می‌نامند و آن‌ها را به ترتیب با p (یا p(G)) و q (یا q(G)) نمایش می‌دهند.

مثال۷) $q=۶$ ، $p=۵$



توجه کنید:

دیدیم در گراف ساده $G=(V,E)$ ، مجموعه E زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های دو عضوی V است. بنابراین در گراف G با p رأس و q یال حداکثر تعداد عضوهای E برابر $\binom{p}{۲}$ خواهد بود، لذا خواهیم داشت:

$$۰\le q\le\binom{p}{۲}=\frac{۱}{۲}p(p-۱)$$

آزمون۱ : کدام عدد نمی‌تواند برابر تعداد یال‌های یک گراف مرتبه ۱۰ باشد؟

۱) ۳۶   ۲) ۱۸

۳) ۴۵   ۴) ۴۸

حل: گزینه (۴)

$$0 \le q \le \binom{10}{2} = \frac{10\times 9}{2} = 45 \to q \in [0,45]$$

اعداد صحیحی که متعلق به بازه [۰,۴۵] می‌باشند، می‌توانند برابر تعداد یال‌های گراف مرتبه ۱۰ باشند.

نکته: در هر گراف ساده از مرتبه p و اندازه q:

$$p \ge \frac{1+\sqrt{1+8q}}{2}$$

آزمون۲ : اندازه یک گراف ساده برابر ۴۰ می‌باشد، حداقل مرتبه این گراف کدام است؟

۱) ۹   ۲) ۱۰

۳) ۱۲   ۴) ۱۵

حل: گزینه (۲)

$$q = 40 \to p \ge \frac{1+\sqrt{321}}{2} = 9/45 \xrightarrow{p\in N} P_{min} = 10$$

نکته۱ : تعداد گراف‌های ساده با p رأس برابر است با:

$$2^{\binom{p}{2}}$$

نکته۲ : تعداد گراف‌های ساده با p رأس و q یال برابراست با:

$$\binom{\binom{p}{2}}{q}$$

آزمون۳ : چند گراف متفاوت با رئوس $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{10}$. می‌توان تعریف کرد، که دارای دو یال باشند؟

۱) ۹۹۰   ۲) ۸۷۰

۳) ۴۹۰   ۴) ۷۸۰

حل: گزینه (۱)

$$\binom{\binom{10}{2}}{2} = \binom{45}{2} = \frac{45\times 44}{2} = 45\times 22 = 990$$

آزمون۴ : تعداد گراف‌های ساده p رأسی برابر 2^{10} است، p کدام است؟

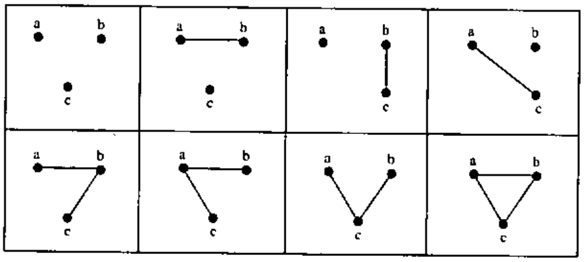
۱) ۱۰   ۲) ۵

۳) ۴   ۴) ۸

حل: گزینه (۲) $\quad 2^{\binom{p}{2}} = 2^{10} \to \binom{p}{2} = 10 \to p = 5$

مثال ۸) همه گراف‌های ساده با ۳ رأس را رسم کنید.

حل: تعداد $8 = 2^{\binom{3}{2}}$ گراف ساده با ۳ رأس می‌توان رسم کرد که عبارتند از:

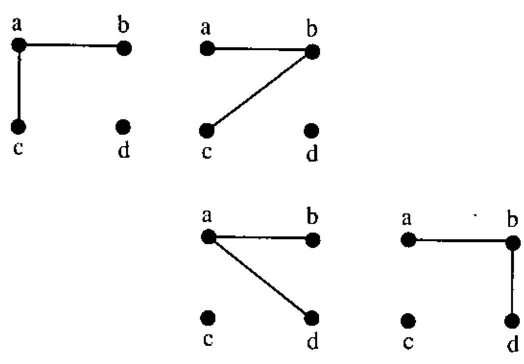


آزمون ۵ : چند گراف ساده با رئوس $\{a,b,c,d\}$ و دو یال می‌توان رسم کرد که یکی از یال‌های آن ab باشد؟

۱) ۲   ۲) ۳

۳) ۴   ۴) ۵

حل: گزینه (۳) مطابق گراف‌های زیر:



نکته۳ : تعداد گراف‌های جهتدار با p رأس برابر است با: 2^{p^2}

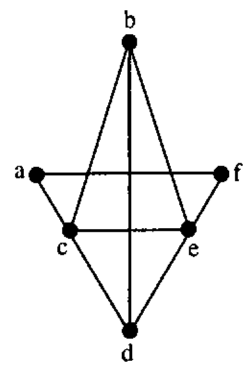
نکته۴ : تعداد گراف‌های جهتدار بدون طوقه با p رأس برابر است با: 2^{p^2-p}

درجه

در گراف $G=(V,E)$ که $a \in V$ ، درجه رأس a عبارتست از تعداد یال‌هایی که از رأس a می‌گذرند، این عدد با dega یا $\deg_G^a$ نمایش می‌دهند.

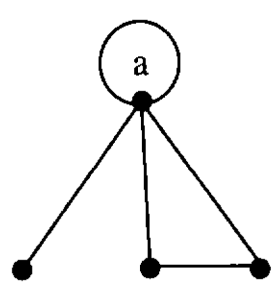
تذکر۱ : در گراف G درجه رأسی که فرد باشد رأس فرد و درجه رأسی که زوج باشد، رأس زوج می‌نامیم.

مثال ۹) $\begin{cases}\deg b = ۳\\ \deg d = ۳\end{cases}$ رئوس فرد $\begin{cases}\deg a = ۲\\ \deg c = ۴\\ \deg e = ۴\\ \deg f = ۲\end{cases}$ رئوس زوج



$G=(V,E)$

تذکر ۲ : اگر گرافی دارای یال طوقه باشد، در شمارش درجات رئوس، درجه آن رأس به ازای آن طوقه دوبار شمارش می‌شود.



مثال) $\deg a = ۵$

تذکر ۳ : در گراف $G=(V,E)$ از مرتبه p، به ازای هر $vi \in V$ ، $\circ \le \deg vi \le p-۱$
$i = ۱,۲,۳,\cdots,p$

قضیه (نخستین قضیه گراف‌ها)

اگر $V=\{v_۱,v_۲,\cdots,v_p\}$ مجموعه رئوس گراف G با اندازه q باشد آنگاه:

$$\sum_{i=۱}^{p} \deg vi = ۲q$$

اثبات : در شمارش درجات رئوس G چون هر یال دو سر دارد، بنابراین هر یال دوبار شمارش می‌شود.

نتیجه ۱ : مجموع درجات رئوس هر گراف، عددی زوج است.

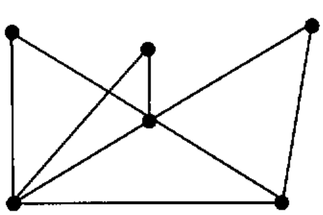
نتیجه ۲ : تعداد رئوس فرد در هر گراف، زوج است.

سئوال : آیا تعداد رئوس زوج در هر گراف همواره عددی زوج است؟

پاسخ : خیر ـ با توجه به اینکه مجموع درجات رئوس زوج عددی همواره زوج است، پس تعداد رئوس زوج در هر گراف می‌تواند فرد یا زوج باشد.

آزمون ۶ : در گراف مقابل مجموع درجات رئوس کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۸
۳) ۱۶ ۴) ۱۲



حل : گزینه (۲)

$$\sum_{i=۱}^{۶} \deg vi = ۲+۴+۲+۵+۳+۲ = ۱۸$$

آزمون ۷ : در گرافی که سه رأس زوج از درجه ۴ دارد، اندازه برابر ۲۰ است، مجموع درجات رئوس فرد کدام است؟

۱) ۲۸ ۲) ۳۰
۳) ۲۰ ۴) ۳۲

حل : گزینه (۱)

$$\sum \deg vi = ۲q = A + B \rightarrow ۲\times۲\circ = ۳\times۴ + B \rightarrow B = ۲۸$$

A: مجموع درجات رئوس زوج B: مجموع درجات رئوس فرد

آزمون ۸ : اگر گراف G از مرتبه ۱۴ ، دارای ۸ رأس از درجه یک، سه رأس از درجه ۳، یک رأس از درجه ۵ و ۲ رأس از درجه ۲ باشند، G چند یال دارد؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۳

۳) ۱۴ ۴) ۱۹

حل: گزینه (۲)

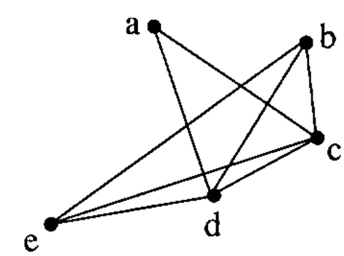
$$(8\times1)+(3\times3)+(1\times5)+(2\times2)=2q \to 8+9+5+4=2q \to q=13$$

ماکسیمم درجه و می‌نیمم درجه

در بین درجه‌های رئوس یک گراف بزرگترین عدد را ماکسیمم درجه و کوچک‌ترین عدد را می‌نیمم درجه آن گراف می‌نامیم، ماکسیمم درجه را به Δ یا $\Delta(G)$ و می‌نیمم درجه را به δ یا $\delta(G)$ نمایش می‌دهیم.

تذکر: رأس تنها دارای درجه صفر است.

مثال ۱۰) در گراف مقابل: $\Delta=4$, $\delta=2$



نکته: در هر گراف: $\Delta\le p-1$, $\delta\ge 0$

آزمون ۹ : در یک گراف $\Delta=12$ است، کمترین مقدار p کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲

۳) ۱۳ ۴) نمی‌توان مشخص کرد.

حل: گزینه (۳) $\Delta\le p-1 \to p\ge\Delta+1=12+1=13$

توجه کنید:

در هر گراف از مرتبه p و اندازه q: $\delta\le\frac{2q}{p}\le\Delta$

($\frac{2q}{p}$ را میانگین درجات رئوس گراف می‌نامند)

اثبات: فرض کنیم $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_p\}$ مجموعه رئوس گراف G باشد، داریم:

$$\delta\le\deg vi\le\Delta \longrightarrow \sum_{i=1}^{p}\delta\le\sum_{i=1}^{p}\deg vi\le\sum_{i=1}^{p}\Delta \to p\delta\le 2q\le p\Delta$$

$$\to \delta\le\frac{2q}{p}\le\Delta$$

آزمون ۱۰ : درجه هر رأس در گراف مرتبه ۱۵ حداکثر برابر ۶ می‌باشد، این گراف حداکثر چند یال دارد؟

۱) ۴۲ ۲) ۴۴

۳) ۴۵ ۴) ۴۸

حل:

$$\frac{2q}{p}\le\Delta \to q\le\frac{p\Delta}{2}=\frac{6\times15}{2}=45 \to \mathrm{Max}(q)=45$$

آزمون ۱۱ : (آزمون سوم پایندگان ـ ۷۹) در گرافی با ۱۸ یال حداقل درجه بین رئوس برابر ۳ است، کدام عدد **نمی‌تواند** برابر تعداد رئوس این گراف باشد؟

۱) ۹ ۲) ۱۲

۳) ۸ ۴) ۱۴

حل:

$$\begin{cases} p\ge\dfrac{1+\sqrt{1+8q}}{2}=\dfrac{1+\sqrt{1+8\times18}}{2}=6/5 \to p\ge 7 \\ p\le\dfrac{2q}{\delta}=\dfrac{2\times18}{3}=12 \qquad \to\ 7\le p\le 12 \end{cases}$$

پس اعدادی که در نامساوی بالا صدق می‌کنند، می‌توانند برابر مرتبه گراف مزبور باشند که بین گزینه‌ها عدد ۱۴ در نامساوی مزبور صدق نمی‌کند و نمی‌تواند برابر مرتبه این گراف باشد.

آزمون ۱۲ : در گراف G از مرتبه ۱۲ و اندازه ۴۸ کدام عدد **نمی‌تواند** برابر Δ باشد؟

۱) ۷ ۲) ۸

۳) ۱۰ ۴) ۱۱

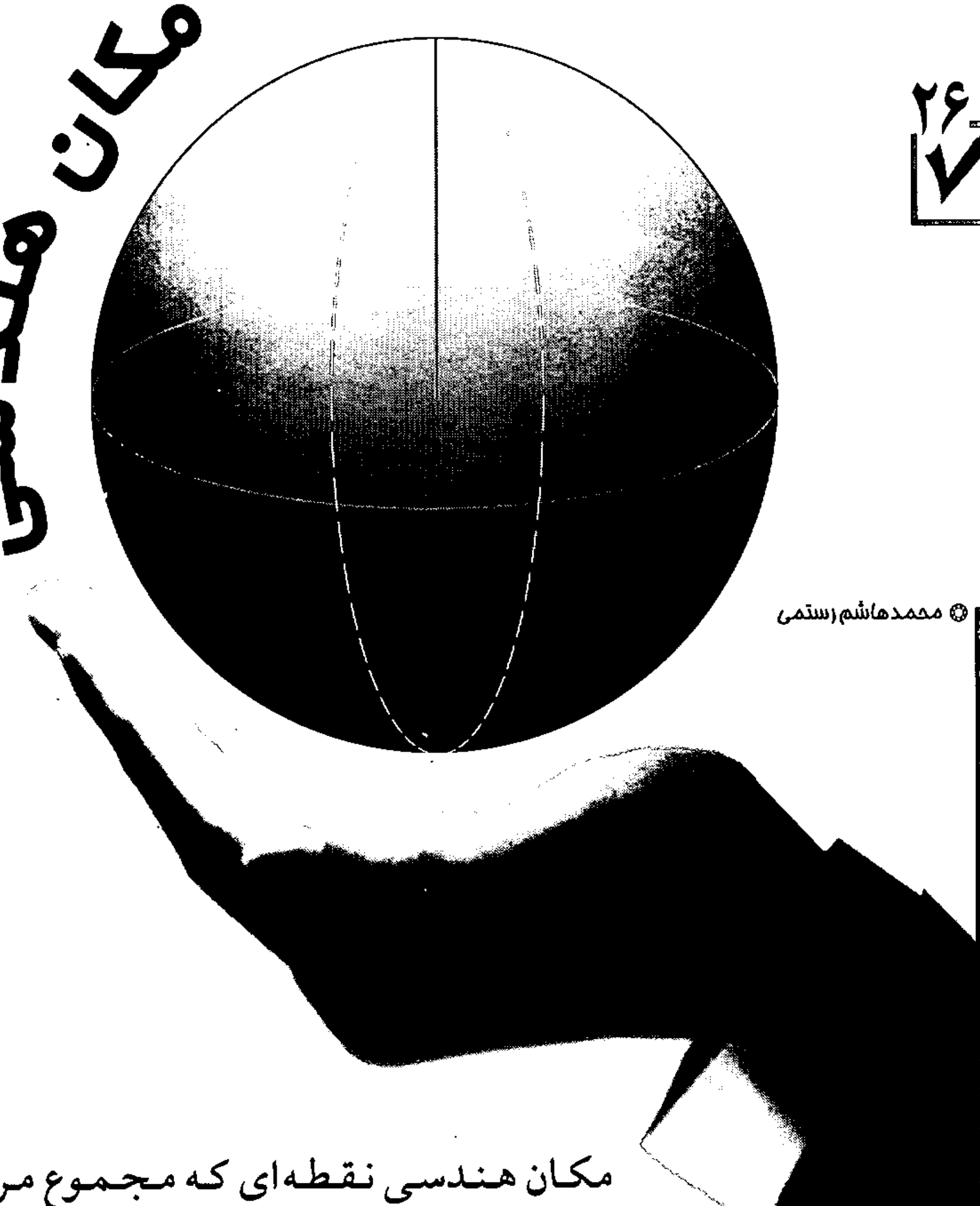
$$\frac{2q}{p}\le\Delta\le p-1 \to \frac{2\times48}{12}\le\Delta\le 12-1 \to 8\le\Delta\le 11$$

پس نمی‌تواند برابر ۷ باشد.

پانویس

۱ـ گراف و کاربردهای آن ـ اُیستین اُرـ ترجمهٔ منتخب

مکان هندسی



محمدهاشم رستمی

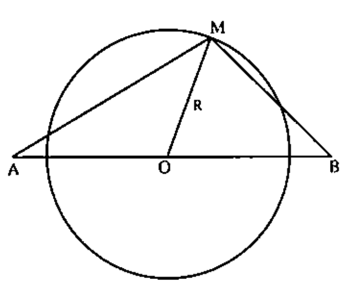
مکان هندسی نقطه‌ای که مجموع مربع‌های فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B مقدار ثابتی است

مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که مجموع مربع‌های فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B واقع در آن صفحه، مقدار ثابت k^2 باشد، دایره‌ای به مرکز وسط پاره‌خط AB است.

اثبات به روش هندسی. اگر نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB و AB=a و M نقطه‌ای از مکان هندسی مورد نظر باشد، داریم:

$$MA^2 + MB^2 = k^2 \qquad (1)$$

در مثلث MAB، پاره‌خط MO میانهٔ نظیر ضلع AB است



و بنا به رابطهٔ میانه‌ها در مثلث می‌توان نوشت:

$$MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \frac{AB^2}{2}$$

یا:

$$MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \frac{a^2}{2} \qquad (2)$$

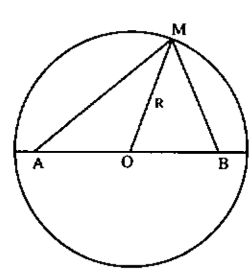
از مقایسهٔ رابطه‌های (۱) و (۲) داریم:

$$2MO^2 + \frac{a^2}{2} = k^2 \Rightarrow OM = \frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - a^2} \qquad (3)$$

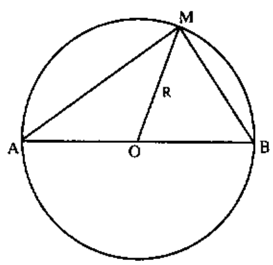
با توجه به ثابت بودن نقطهٔ O و مقدارهای k^2 و a، رابطهٔ (۳) نشان می‌دهد که مکان هندسی نقطهٔ M دایره‌ای به مرکز نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB و به شعاع $R = \frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - a^2}$ است. بعکس هر نقطه روی این دایره انتخاب کنیم، مجموع مربع‌های فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر مقدار ثابت k^2 است.

بحث. شرط امکان مسأله آن است که $2k^2 - a^2 \geq 0$ یا $k^2 \geq \frac{a}{2}$ باشد. در این صورت:

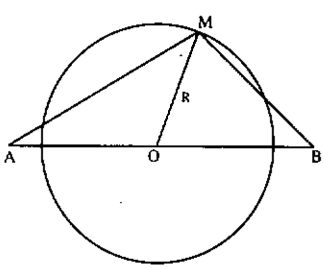
۱. اگر $k^2 > a^2$ باشد، $R > \frac{a}{2}$ و درنتیجه دو نقطهٔ A و B درون دایرهٔ مکان واقع می‌شوند.



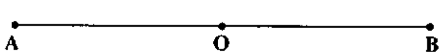
۲. اگر $k^2 = a^2$ باشد، $R = \frac{a}{2}$، و دایرهٔ مکان از دو نقطهٔ A و B می‌گذرد. درحقیقت در این حالت، دایرهٔ مکان، دایرهٔ به قطر پاره‌خط AB است.



۳. اگر $\frac{a^2}{2} < k^2 < a^2$ باشد، $R < \frac{a}{2}$ و دو نقطهٔ A و B در بیرون دایرهٔ مکان قرار می‌گیرد.

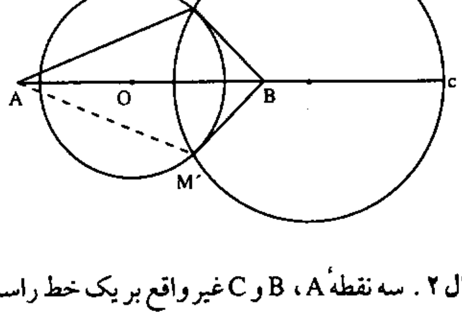


۴. اگر $k^2 = \frac{a^2}{2}$ باشد، $R = 0$ و درنتیجه تنها نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB، جواب مسأله است.

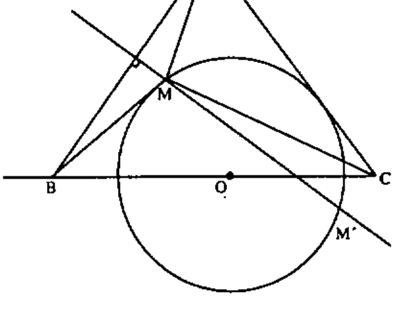


مثال۱. دو نقطهٔ A و B در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای از این صفحه را تعیین کنید که مجموع مربع‌های فاصله‌اش از این دو نقطه برابر k^2 و نسبت فاصله‌اش از همین دو نقطه برابر k' باشد.

حل. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که مجموع مربع‌های فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر k^2 است، دایره‌ای است به مرکز O وسط پاره‌خط AB و به شعاع $R = \frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - a^2}$ (دایرهٔ C). این دایره را رسم می‌کنیم. از طرفی مکان هندسی نقطه‌ای که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر مقدار ثابت k' باشد، دایره‌ای است که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت k' تقسیم می‌کند. این دایره را نیز رسم می‌کنیم و (C') می‌نامیم. نقطه‌های برخورد این دو دایره (در صورت وجود) جواب مسأله‌اند.

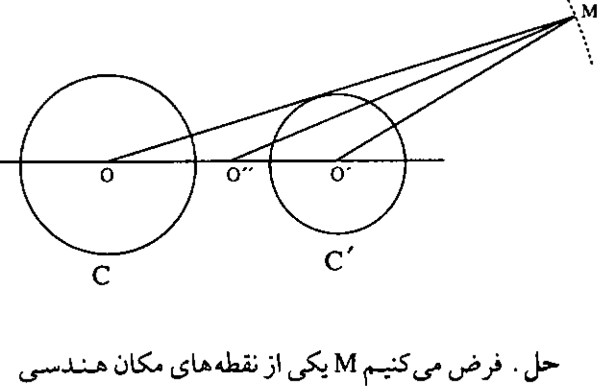


مثال ۲. سه نقطهٔ A، B و C غیر واقع بر یک خط راست در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای از این صفحه را بیابید که مجموع مربع‌های فاصله‌اش از دو نقطهٔ B و C برابر k^2 و از دو نقطهٔ A و B نیز به یک فاصله باشد.



حل. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که مجموع مربع‌های فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت B و C برابر مقدار ثابت k^2 باشد، دایره‌ای به مرکز نقطهٔ O وسط پاره‌خط BC و به شعاع $\frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - BC^2}$ است. این دایره را رسم می‌کنیم. از طرفی مکان هندسی نقطه‌ای که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله است، عمودمنصّف پاره‌خط AB است. این مکان را نیز رسم می‌کنیم. نقطه یا نقطه‌های برخورد این دو مکان (در صورت وجود) جواب مسأله است.

مثال ۳. دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ در یک صفحه داده شده‌اند، مکان هندسی نقطه‌ای از این صفحه را بیابید که مجموع قوت‌های آن نسبت به این دو دایره برابر مقدار ثابت k باشد.



حل. فرض می‌کنیم M یکی از نقطه‌های مکان هندسی مورد نظر باشد؛ یعنی داشته باشیم: $P_{M(C)} + P_{M(C')} = k$. با توجه به این که:

$P_{M(C')} = MO'^2 - R'^2$ و $P_{M(C)} = MO^2 - R^2$

است، با جایگذاری در رابطهٔ بالا داریم:

$$MO^2 - R^2 + MO'^2 - R'^2 = k$$
$$\Rightarrow MO^2 + MO'^2 = k + R^2 + R'^2 \quad (1)$$

رابطهٔ (۱) نشان می‌دهد که مجموع مربع‌های فاصلهٔ نقطهٔ M از دو نقطهٔ ثابت O و O' برابر مقدار ثابت $k + R^2 + R'^2$ است؛ بنابراین مکان هندسی این نقطه، دایره‌ای به مرکز وسط

پاره‌خط OO' و به شعاع $\frac{1}{2}\sqrt{2(k+R^2+R'^2)-\overline{OO'}^2}$ است.

مثال ۴. دو نقطهٔ $A(-1,3)$ و $B(2,-1)$ در دستگاه مختصات xOy داده شده‌اند. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از صفحهٔ این دستگاه مختصات را بیابید که مجموع مربع‌های فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر ۱۷ باشد.

حل. فرض می‌کنیم $M(x,y)$ یکی از نقطه‌های مکان هندسی خواسته شده باشد. در این صورت داریم:

$M(x,y)$ و $A(-1,3)$ و $B(2,-1)$ و

$$MA^2+MB^2=17$$

$$\Rightarrow (x+1)^2+(y-3)^2+(x-2)^2+(y+1)^2=17$$

$$\Rightarrow 2x^2+2y^2-2x-4y=2$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-x-2y=1 \Rightarrow (x-\frac{1}{2})^2+(y-1)^2=\frac{9}{4}$$

این معادله نشان می‌دهد که مکان هندسی مورد نظر، دایره‌ای به مرکز $O_1(\frac{1}{2},1)$ و به شعاع $R=\frac{3}{2}$ است.

مثال ۵. نقطه‌ای روی خط $\Delta: 2x+y-1=0$ بیابید که مجموع مربع‌های فاصله‌اش از دو نقطهٔ $A(-2,1)$ و $B(2,1)$ برابر ۱۶ باشد.

حل. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که مجموع مربع‌های فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر مقدار ثابت ۱۶ است، دایره‌ای به مرکز وسط پاره‌خط AB و به شعاع $R=\frac{1}{2}\sqrt{2k^2-AB^2}$ است. بنابراین معادلهٔ این دایره را نوشته، نقطه یا نقطه‌های برخورد آن، با خط Δ را به دست می‌آوریم:

$M(x,y)$ و $A(-2,1)$ و $B(2,1)$

$$MA^2+MB^2=16$$

$$\Rightarrow (x+2)^2+(y-1)^2+(x-2)^2+(y-1)^2=16$$

$$\Rightarrow 2x^2+2y^2-4y=6 \Rightarrow x^2+y^2-2y-3=0$$

$$\Rightarrow x^2+(y-1)^2=4$$ معادلهٔ دایرهٔ مکان هندسی

$$\begin{cases} x^2+(y-1)^2=4 \\ 2x+y-1=0 \end{cases} \Rightarrow 5x^2=4 \Rightarrow x^2=\frac{4}{5} \Rightarrow x=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

نقطه‌های جواب مسأله

$$\Rightarrow M_1(\frac{2\sqrt{5}}{5},1-\frac{4\sqrt{5}}{5}) \text{ و } \Rightarrow M_2(\frac{-2\sqrt{5}}{5},1+\frac{4\sqrt{5}}{5})$$

حل مسأله مسابقه‌ای برهان ۳۵

ثابت کنید مجموعه عددهای طبیعی به فرم 2^n-3 $(n\in N)$ که هر دو عضو آن نسبت به هم اول هستند، یک مجموعهٔ نامتناهی است، یعنی بی‌شمار عدد طبیعی به فرم 2^n-3 یافت می‌شوند که همگی دو به دو نسبت به هم اول باشند.

حل: اثبات به کمک برهان خلف انجام می‌شود. فرض کنیم مجموعهٔ این گونه عددها یک مجموعهٔ متناهی S با k عضو به صورت زیر باشند:

$$S=\{2^{m_1}-3, 2^{m_2}-3, \ldots, 2^{m_k}-3\}$$

و طبق فرض مسأله:

$$\forall 1\le i,j\ge k: (2^{m_i}-3, 2^{m_j}-3)=1$$

اکنون فرض می‌کنیم همهٔ عوامل اول این k عدد، عددهای اول P_1 و P_2 و ... و P_t باشند، عدد طبیعی $N=2^{(P_1-1)(P_2-1)\ldots(P_t-1)+1}$ را تشکیل می‌دهیم. روشن است که چون همهٔ عددهای به فرم 2^n-3، عددهایی فرد هستند (چرا؟)، لذا $P_i\neq 2$ $(1\le i\le k)$ و در نتیجه $(P_i,2)=1$ و طبق قضیهٔ کوچک فرما $\left((a,p)=1 \Rightarrow a^{p-1}\overset{p}{\equiv}1\right)$ خواهیم داشت:

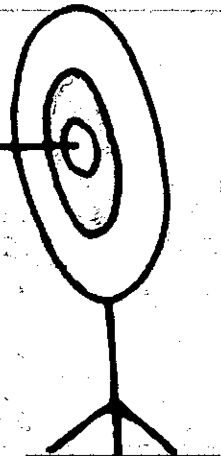
$$\forall 1\le i\le k: 2^{P_i-1}\overset{P_i}{\equiv}1$$

$$\Rightarrow \left[2^{(P_i-1)}\right]^{(P_1-1)(P_2-1)\ldots(P_t-1)}\overset{P_i}{\equiv}1 \Rightarrow 2^{(P_1-1)(P_2-1)\ldots(P_t-1)+1}\overset{P_i}{\equiv}2$$

$$\Rightarrow N\overset{P_i}{\equiv}2 \Rightarrow N-3\overset{P_i}{\equiv}-1$$

و لذا هیچ یک از عددهای اول p_1 و p_2 و ... و p_t عدد $N-3$ را نمی‌شمارند و در نتیجه $N-3$ نسبت به همهٔ عددهای عضو S اول است. ولی روشن است که $N-3$ نیز به فرم 2^n-3 بوده و عضو S نمی‌باشد، پس S نامتناهی است.

احتمال در فضای نم



• میر شهرام صدر

برای
دانش‌آموزان
سال سوم ریاضی

برای دانش‌آموزان دوره متوسطه و پیش‌دانشگاهی

با مفهوم احتمال در فضای نمونه‌ای گسسته آشنا شده‌اید، در این مقاله احتمال در فضای نمونه‌ای پیوسته را بررسی خواهیم کرد. در این نوع فضای نمونه‌ای، پیشامدی مانند A از فضای نمونه‌ای S وجود دارد به‌طوری که $A \neq S, A \subset S$ ولی $P(A) = P(S) = 1$، یا پیشامدی مانند $B \neq \varnothing$ موجود است به‌طوری که $P(B) = 0$. تصور چنین پیشامدهایی در فضای نمونه‌ای گسسته قابل باور نیست، اما با آوردن مثال‌هایی در فضای نمونه‌ای پیوسته، این نوع پیشامدها را بررسی می‌کنیم.

ابتدا فضاهای نمونه‌ای را بیان می‌کنیم، سپس با آوردن مثال‌هایی احتمال در فضای نمونه‌ای پیوسته را مطالعه می‌کنیم.

فضای نمونه‌ای

مجموعهٔ همهٔ حالت‌های ممکن در به‌وقوع پیوستن یک آزمایش تصادفی را، فضای نمونه‌ای آن آزمایش تصادفی گوییم. فضای نمونه‌ای، دو نوع گسسته و پیوسته دارد.

فضای نمونه‌ای گسسته

فضای نمونه‌ای که تعداد اعضای آن، با شمارش قابل اندازه‌گیری باشد، فضای نمونه‌ای گسسته است. به‌طور معمول، فضای نمونه‌ای گسسته را با حرف S و تعداد اعضای مجموعهٔ S را با $n(S)$ نمایش می‌دهیم.

فضای نمونه‌ای پیوسته

فضای نمونه‌ای که تعداد اعضای آن با شمارش قابل اندازه‌گیری نباشد، فضای نمونهٔ پیوسته است. برای محاسبهٔ اندازهٔ فضای نمونه‌ای پیوسته، سه حالت زیر را داریم:

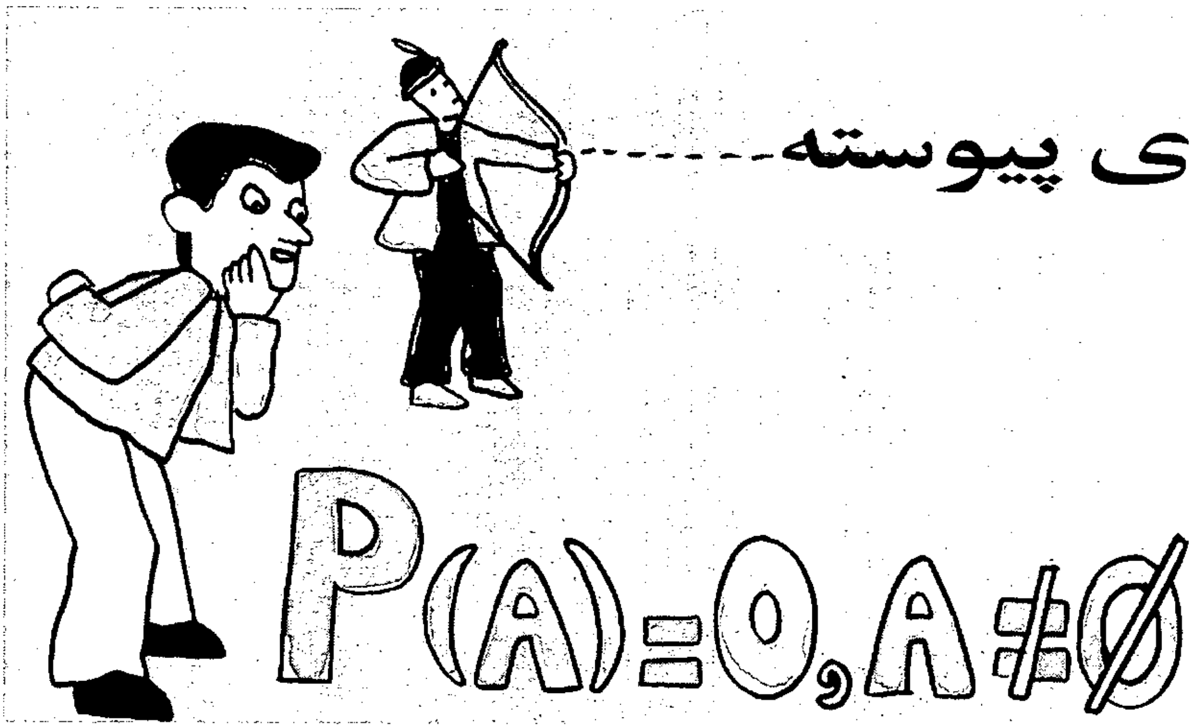
حالت اول. اگر فضای نمونه‌ای یک بازه باشد یا $S \subset \mathbb{R}$، در این حالت، اندازهٔ فضای نمونه‌ای، برابر طول بازه است و طول فضای نمونه‌ای را با L_S نمایش می‌دهیم.

مثال. یک عدد حقیقی بزرگ‌تر از ۳ و کوچک‌تر از ۸ را تصادفی انتخاب می‌کنیم، در این حالت، $S = (3,8)$ و $L_S = 5$.

مثال. قرار است بین ساعت ۵ تا ۵:۴۰ تصادفی دوست خود را ملاقات کنید، در این حالت داریم:

سال دوازدهم ○ ۱۳۸۱ ○ شماره مسلسل ۳۴

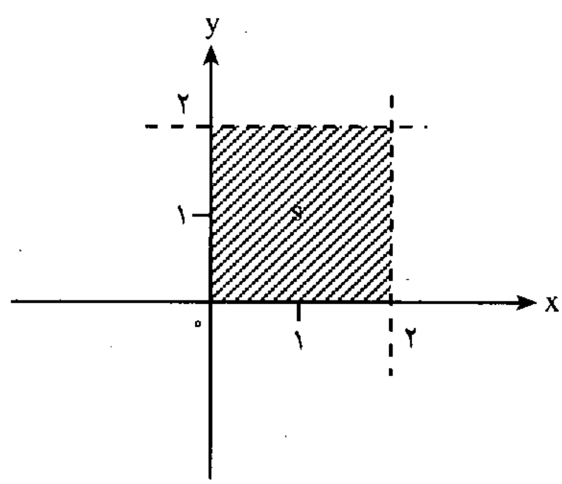
...ای پیوسته



$S = (5,5:40); L_S = 40$ یا دقیقه $L_S = 2400$ ثانیه

حالت دوم. اگر فضای نمونه‌ای یک شکل بسته در صفحه باشد یا $S \subset \mathbb{R}^2$، در این حالت، اندازهٔ فضای نمونه‌ای برابر با مساحت شکل است و مساحت فضای نمونه‌ای را با a_s نمایش می‌دهیم.

مثال. دو عدد حقیقی بین ۰ و ۲ را تصادفی انتخاب می‌کنیم. اندازهٔ فضای نمونه‌ای را بیابید؟



حل. یک عدد حقیقی بین ۰ و ۲ را روی محور طول‌ها و عدد حقیقی دیگر را بین ۰ و ۲ روی محور عرض‌ها انتخاب می‌کنیم:

$S = \{(x,y) | x \in (0,2)$ و $y \in (0,2)\}; a_s = 2 \times 2 = 4$

مثال) تیراندازی، به طرف یک هدف دایره‌ای شکل با قطر ۸۰ سانتیمتر تیراندازی می‌کند، اندازهٔ فضای نمونه‌ای را بیابید؟

حل. اندازهٔ فضای نمونه‌ای، برابر با مساحت هدف دایره‌ای شکل است:

$a_s = \pi r^2 = \pi (40)^2 = 1600\pi$

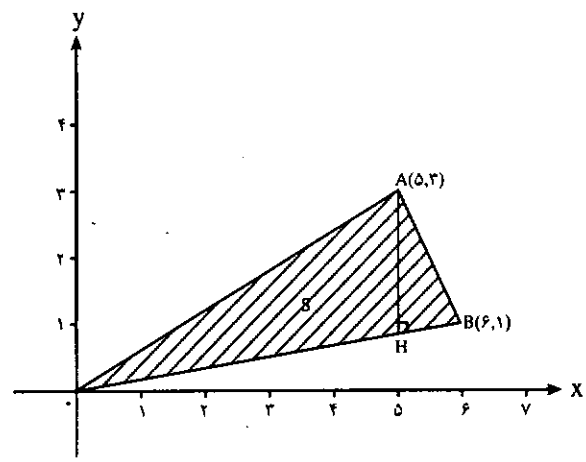
مثال) یک نقطه را تصادفی درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۴ انتخاب می‌کنیم. اندازهٔ فضای نمونه‌ای را بیابید؟

حل. اندازهٔ فضای نمونه برابری با مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع است. از طرفی چون مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a، برابر $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ است،

بنابراین داریم:

$$a_s = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(۴)^۲ = ۴\sqrt{۳}$$

مثال. یک نقطه (x,y) را تصادفی داخل یا روی مثلثی به رأس‌های (۰،۰)، (۵،۳) و (۶،۱) انتخاب می‌کنیم، اندازهٔ فضای نمونه‌ای را بیابید؟



حل.

$$a_s = \frac{AH \times OB}{۲};\ OB = \sqrt{۶^۲ + ۱^۲} = \sqrt{۳۷}$$

طول AH برابر با فاصلهٔ نقطه A تا ضلع OB است؛ بنابراین ابتدا معادلهٔ خط OB را می‌نویسیم، سپس فاصلهٔ نقطه A را تا این خط محاسبه می‌کنیم:

$$(y - y_۱) = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}(x - x_۱);\ (y - ۰) = \frac{۱ - ۰}{۶ - ۰}(x - ۰)$$

$$\Rightarrow x - ۶y = ۰$$

$$AH = \frac{|ax_۱ + by_۱ + C|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|۱ \times ۵ + (-۶) \times ۳|}{\sqrt{۱^۲ + ۶^۲}} = \frac{۱۳}{\sqrt{۳۷}}$$

$$a_s = \frac{\frac{۱۳}{\sqrt{۳۷}} \times \sqrt{۳۷}}{۲} = \frac{۱۳}{۲}$$

مثال. حمید و هوشنگ قرار گذاشتند که هنگام بازدید از موزه فرش ایران یکدیگر را بین ساعت ۳۰ : ۱۴ تا ۱۵ : ۱۵ ملاقات کنند، اندازهٔ فضای نمونه‌ای را پیدا کنید؟

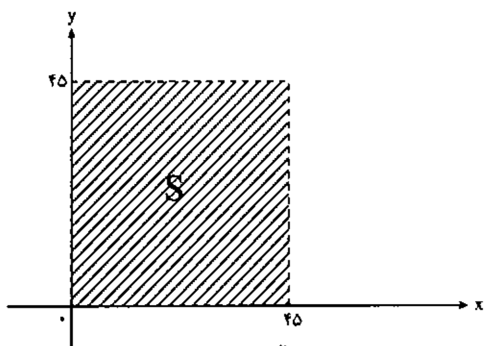
حل. اگر حمید x دقیقه بعد از ساعت ۳۰ : ۱۴ و هوشنگ y دقیقه بعد از ساعت ۳۰ : ۱۴، سر قرار حاضر شوند، درصورتی که زمان رسیدن دو نفر را به صورت زوج مرتب (x,y) نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$$۰ < x < ۴۵$$

$$,۰ < y < ۴۵$$

(زیرا x دقیقه و y دقیقه بعد از ساعت ۳۰ : ۱۴ تا ساعت ۱۵ : ۱۵، به صورت $۰ < x < ۴۵$ و $۰ < y < ۴۵$ است).

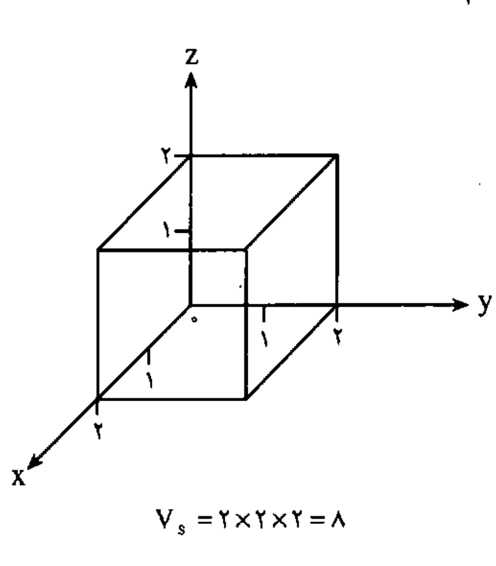
$$S = \{(x,y) | ۰ < x < ۴۵, ۰ < y < ۴۵\}$$



$$a_S = (۴۵)^۲$$

حالت سوم. اگر فضای نمونه‌ای حجم یک جسم در فضا باشد یا $S \subset \mathbb{R}^۳$، در این صورت، اندازهٔ فضای نمونه‌ای برابر حجم جسم است. در این حالت، حجم جسم را با V_s نمایش می‌دهیم.

مثال. سه عدد حقیقی را تصادفی در فاصلهٔ [۲ و ۰] انتخاب می‌کنیم، اندازهٔ فضای نمونه‌ای را بیابید؟



$$V_s = ۲ \times ۲ \times ۲ = ۸$$

پیشامد تصادفی

هر زیرمجموعه از یک فضای نمونه‌ای را، پیشامد تصادفی در آن فضا می‌نامیم. برای محاسبهٔ اندازهٔ پیشامد تصادفی در فضای نمونه‌ای پیوسته لازم است که حل نامعادلات خطی را در صفحه مختصات به‌خاطر داشته باشید و در حل مسائل به‌کار ببرید.

مثال. عددی را به تصادف بین $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۷}{۲}$ انتخاب می‌کنیم، اگر انتظار داشته باشیم که این عدد بین $\frac{۳}{۴}$ و ۳ باشد، مطلوب است:

الف. اندازهٔ فضای نمونه‌ای

ب. اندازهٔ پیشامد.

حل. الف. چون عدد x را در بازهٔ $(\frac{۱}{۲},\frac{۷}{۲})$ انتخاب می‌کنیم، پس $L_S = \frac{۷}{۲} - \frac{۱}{۲} = ۳$

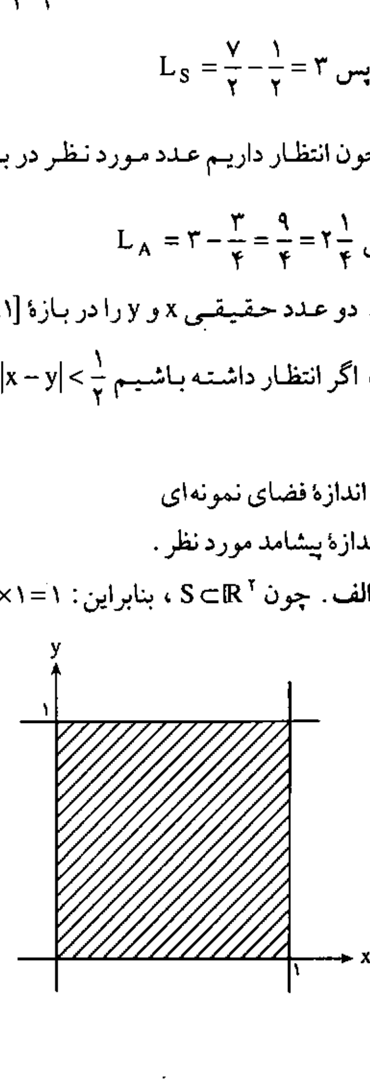
ب. چون انتظار داریم عدد مورد نظر در بازهٔ $(\frac{۳}{۴},۳)$ باشد، پس $L_A = ۳ - \frac{۳}{۴} = \frac{۹}{۴} = ۲\frac{۱}{۴}$

مثال. دو عدد حقیقی x و y را در بازهٔ $[۰,۱]$ در نظر می‌گیریم، اگر انتظار داشته باشیم $|x-y| < \frac{۱}{۲}$، مطلوب است:

الف. اندازهٔ فضای نمونه‌ای

ب. اندازهٔ پیشامد مورد نظر.

حل. الف. چون $S \subset \mathbb{R}^۲$، بنابراین: $a_S = ۱\times۱ = ۱$.



ب. $|x-y| < \frac{۱}{۲} \Rightarrow -\frac{۱}{۲} < x-y < \frac{۱}{۲} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x-y < \frac{۱}{۲} & (۱) \\ & \text{و} \\ x-y > -\frac{۱}{۲} & (۲) \end{cases}$$

برای محاسبهٔ اندازهٔ پیشامد، باید جواب نامعادله‌های (۱) و (۲) را در داخل فضای نمونه‌ای پیدا کنیم.

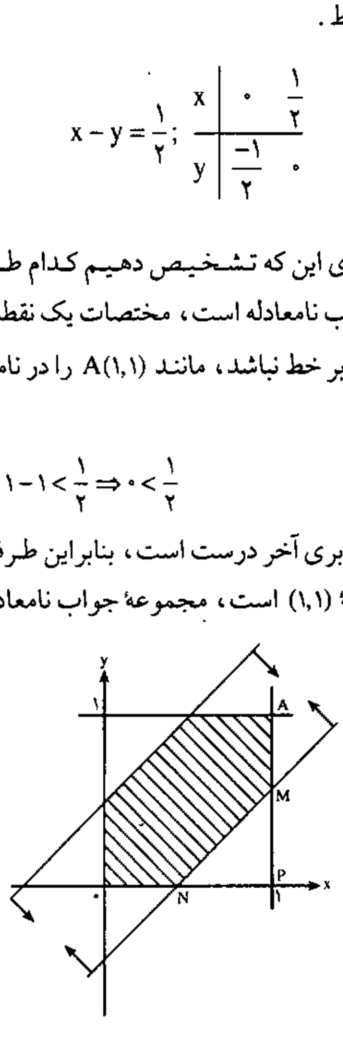
برای حلِّ نامعادلهٔ (۱)، ابتدا نمودار خط به معادلهٔ $x-y=\frac{۱}{۲}$ را رسم می‌کنیم. این خط، صفحهٔ مختصات $\mathbb{R}^۲$ را به سه ناحیه تقسیم می‌کند، که عبارتند از: ۱) مجموعهٔ نقاط روی خط ۲) مجموعهٔ نقاط طرف راست خط ۳) مجموعهٔ نقاط طرف چپ خط.

$$x-y=\frac{۱}{۲};\quad \begin{array}{c|cc} x & ۰ & \frac{۱}{۲} \\ \hline y & \frac{-۱}{۲} & ۰ \end{array}$$

اکنون برای این که تشخیص دهیم کدام طرف خط، مجموعهٔ جواب نامعادله است، مختصات یک نقطهٔ دلخواه از $\mathbb{R}^۲$ که واقع بر خط نباشد، مانند $A(۱,۱)$ را در نامعادله قرار می‌دهیم:

$A(۱,۱) \Rightarrow ۱-۱ < \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۰ < \frac{۱}{۲}$

چون نابرابری آخر درست است، بنابراین طرفی از خط که شامل نقطهٔ $(۱,۱)$ است، مجموعهٔ جواب نامعادله است:



در این مرحله، نامعادلهٔ (۲) را حل می‌کنیم، برای این منظور، ابتدا خط به معادلهٔ $x - y = \frac{-1}{2}$ را رسم می‌کنیم.

$$x - y = -\frac{1}{2};\quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & -\frac{1}{2} \\ \hline y & \frac{1}{2} & 0 \end{array}$$

$\frac{-1}{2} < 0$ درست است $A(1,1) \Rightarrow 0 > \frac{-1}{2}$ نقطهٔ دلخواه

مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $|x - y| < \frac{1}{2}$ از اشتراک مجموعهٔ جواب‌های دو نامعادلهٔ (۱) و (۲) در داخل فضای نمونه‌ای به‌دست می‌آید که در شکل قبل سایه خورده است. درنتیجه، اندازهٔ پیشامد برابر با مساحت ناحیهٔ سایه خورده است:

$$a_A = a_S - 2S_{\overset{\triangle}{MNP}} = 1 - 2 \times \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

احتمال در فضای پیوسته

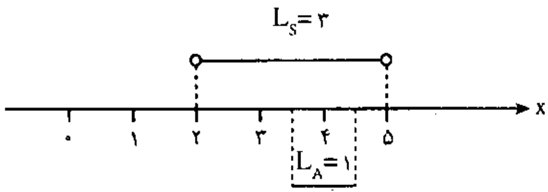
در ابتدا، فضاهای نمونه‌ای را ارائه کردیم که اعضای آنها با شمارش، قابل اندازه‌گیری نبود. این نوع فضاهای نمونه‌ای را فضای نمونه‌ای پیوسته نامیدیم؛ مانند بازه‌ها، شکل‌های بسته در صفحهٔ مختصات $\mathbb{R}^2$ و حجم یک جسم در $\mathbb{R}^3$. همچنین اندازهٔ پیشامدهای مختلفی را روی فضاهای نمونه‌ای پیوسته مطرح کردیم. اکنون احتمال وقوع یک پیشامد تصادفی را در این نوع فضاهای نمونه‌ای تعریف می‌کنیم.

حالت اول. اگر فضای نمونه‌ای یک بازه باشد یا $S \subset \mathbb{R}$، در این حالت، اندازهٔ فضای نمونه‌ای را با L_S و اندازهٔ مجموعهٔ پیشامد را با L_A نمایش می‌دهیم و احتمال وقوع پیشامد A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$P(A) = \frac{L_A}{L_S}$$

مثال. از میان اعداد حقیقی بین ۲ و ۵، یک عدد را تصادفی انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که این عدد بین ۳/۵ و ۴/۵ باشد، کدام است؟

حل.



$$P(A) = \frac{L_A}{L_S} = \frac{1}{3}$$

مثال. نقطه‌ای مانند x را تصادفی در بازهٔ (۱۰ و ۰) انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که این عدد در بازهٔ (۲,۴) یا در بازهٔ (۵,۸) باشد، کدام است.

حل.

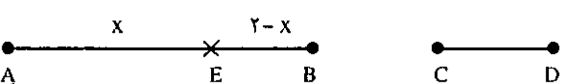
$S = (0,10) \Rightarrow L_S = 10;\ \ A = (2,4) \Rightarrow L_A = 2;$

$B = (5,8) \Rightarrow L_B = 3$

$$A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{2}{10} + \frac{3}{10} = \frac{1}{2}$$

مثال. دو قطعه چوب ۱ متری و ۲ متری داریم. چوب بزرگ‌تر را تصادفی به دو قسمت ارّه می‌کنیم. مطلوب است محاسبهٔ احتمال آن که سه قطعه چوب تشکیل مثلث دهند؟

حل. فرض کنیم قطعه چوب AB به طول ۲ متر باشد، اگر تصادفی آن را در نقطهٔ E اره کنیم، آن‌گاه دو قطعه چوب با طول‌های x و $2 - x$ و یک قطعه چوب به طول ۱ متر مانند CD داریم؛ بنابراین طبق اصل نابرابری‌ها در مثلث خواهیم داشت:



$$\begin{cases} AE + EB > CD \Rightarrow x + 2 - x > 1 \Rightarrow 2 > 1 \\ AE + CD > EB \Rightarrow x + 1 > 2 - x \Rightarrow 2x > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{2} \\ CD + EB > AE \Rightarrow 1 + 2 - x > x \Rightarrow 2x < 3 \Rightarrow x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

اشتراک مجموعهٔ جواب‌های نامعادله‌های خطی بالا، مجموعهٔ پیشامد را نشان می‌دهد:

$$\begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x < \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \Rightarrow L_A = 1$$

از طرفی $L_S = 2$ ، بنابراین داریم:

$$P(A) = \frac{L_A}{L_S} = \frac{1}{2}$$

مثال. عددی را تصادفی از بازهٔ $[0,8]$ انتخاب می‌کنیم، مطلوب است احتمال آن که الف) عدد ۲ انتخاب شود. ب) عدد در بازهٔ (۸ و ۰) باشد.

حل.

الف. اگر S فضای نمونه‌ای و $A = \{2\}$ پیشامد مطلوب باشد، داریم:

$L_S = 8;\ L_A = 0$ (طول نقطه، برابر صفر است.)

$P(A) = \frac{0}{8} = 0$ (توجه دارید که $A \neq \varnothing$ ؛ ولی $P(A) = 0$)

ب. $L_S = 8,\ L_A = 8$

$P(A) = \frac{8}{8} = 1$ (توجه دارید که $A \neq S, A \subset S$ ولی $P(A) = 1$)

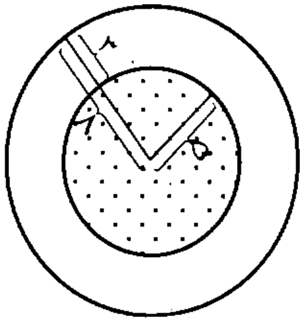
حالت دوم. اگر فضای نمونه‌ای یک شکل بسته در صفحه باشد یا $S \subset \mathbb{R}^2$ ، در این حالت، اندازهٔ فضای نمونه‌ای را با a_S و اندازهٔ مجموعه پیشامد را با a_A نمایش می‌دهیم و احتمال وقوع پیشامد A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$P(A) = \frac{a_A}{a_S}$$

مثال. سکه‌ای به شعاع ۳ روی صفحه‌ای دایره‌ای شکل به شعاع ۸ انداخته می‌شود. احتمال آن که سکه محیط دایره را قطع نکند، چه‌قدر است؟

حل. فضای نمونه‌ای، سطح صفحه دایره شکل به شعاع ۸ است؛ بنابراین:

$$a_S = 64\pi$$



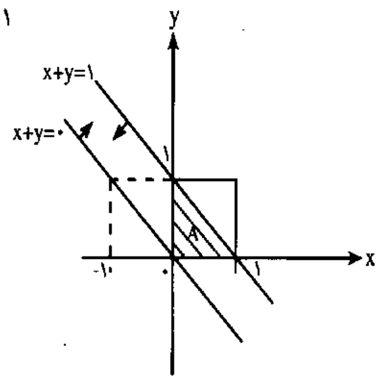
اگر بخواهیم سکه به شعاع ۳ محیط دایره را قطع نکند، باید مرکز سکه در فاصله‌ای بیشتر از ۳ از محیط دایره قرار بگیرد. درنتیجه، مجموعهٔ پیشامد، سطح دایره‌ای شکل هم مرکز با دایره بزرگ و شعاع $r = 8 - 3 = 5$ است:

$$a_A = 25\pi;\ \ p(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{25\pi}{64\pi} = \frac{25}{64}$$

مثال. دو عدد x و y را تصادفی در بازهٔ $[0,1]$ انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که $0 < x + y < 1$ را پیدا کنید؟

حل.

$$a_S = 1 \times 1 = 1$$

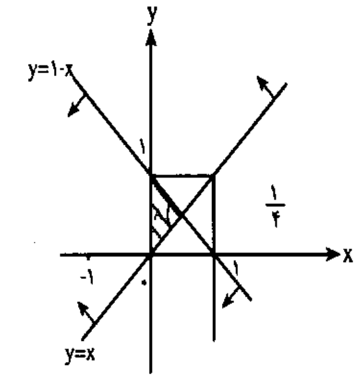


$$0 < x + y < 1 \Rightarrow \begin{cases} x + y < 1;\ x + y = 1 & \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & 1 & 0 \end{array} \\ x + y > 0;\ x + y = 0 & \begin{array}{c|cc} x & 0 & -1 \\ \hline y & 0 & 1 \end{array} \end{cases};$$

$$a_A = \frac{1}{2} \Rightarrow P(A) = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

مثال. نقطهٔ $A(x,y)$ را تصادفی از سطح مربع $S=\{(x,y) \mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$ انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که $x \le y \le 1-x$ را پیدا کنید؟

حل.



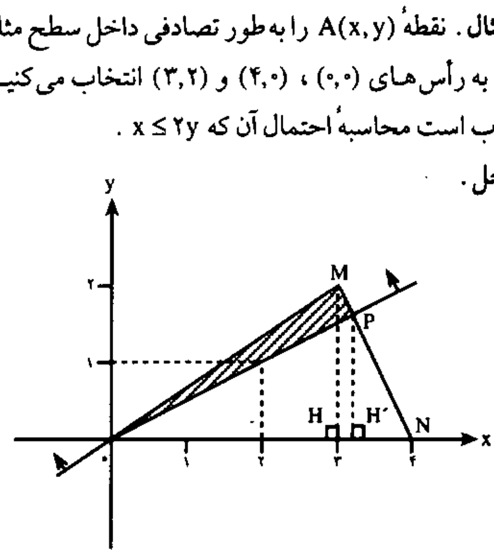
$$a_S = 1\times 1 = 1$$

$$\begin{cases} x\le y;\ x=y \\ y\le 1-x;\ y=1-x \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & 1 & 0 \end{array} \end{cases}$$

$$a_A=\frac{1}{4}a_S=\frac{1}{4}; P(A)=\frac{1}{4}$$

مثال. نقطهٔ $A(x,y)$ را به‌طور تصادفی داخل سطح مثلثی شکل به رأس‌های (۰،۰)، (۴،۰) و (۳،۲) انتخاب می‌کنیم. مطلوب است محاسبهٔ احتمال آن که $x \le 2y$.

حل.



$$a_S=\frac{MH\times ON}{2}=\frac{2\times 4}{2}=4$$

$$x<2y;\ \ x=2y \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 2 \\ \hline y & 0 & 1 \end{array}$$

اندازهٔ مجموعهٔ پیشامد، برابر مساحت مثلث $\overset{\Delta}{OMP}$ است، برای این منظور داریم:

$$S_{\overset{\Delta}{OMP}}=S_{\overset{\Delta}{OMN}}-S_{\overset{\Delta}{OPN}}=4-\frac{4\times PH'}{2}$$

با توجه به شکل، ملاحظه می‌کنیم $PH'=y_P$ ؛ بنابراین برای محاسبهٔ مختصات نقطهٔ P باید نقطهٔ تقاطع دو خط MN و OP را به‌دست آوریم.

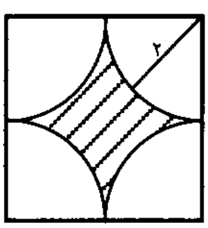
$$MN: y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)\Rightarrow y-0=\frac{2-0}{3-4}(x-4)$$

$$MN: y=-2x+8,\ \ OP: y=\frac{1}{2}x$$

$$\begin{cases} y=-2x+8 \\ y=\frac{1}{2}x \end{cases} \Rightarrow -2x+8=\frac{1}{2}x\Rightarrow x=\frac{16}{5}, y=\frac{8}{5}; p(\frac{16}{5},\frac{8}{5})$$

$$S_{\overset{\Delta}{OMP}}=4-\frac{4\times\frac{8}{5}}{2}=\frac{4}{5}\Rightarrow a_A=\frac{4}{5}; P(A)=\frac{a_A}{a_S}=\frac{\frac{4}{5}}{4}=\frac{1}{5}$$

مثال. نقطه‌ای را تصادفی داخل مربع به ضلع ۴ انتخاب می‌کنیم. احتمال آن را بیابید که فاصلهٔ این نقطه از هر رأس مربع بزرگ‌تر از ۲ باشد؟



حل. ابتدا از هر رأس مربع کمانی به شعاع ۲ رسم می‌کنیم، ناحیه سایه‌خورده، مجموعه پیشامد می‌باشد، برای محاسبه اندازهٔ مجموعهٔ پیشامد کافی است از مساحت مربع، مساحت دایره به شعاع ۲ را کم کنیم:

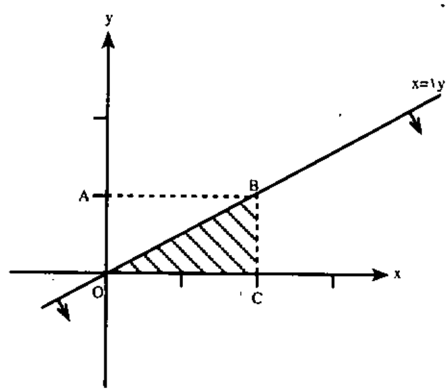
$$a_S=4\times 4=16$$

$$a_A=a_S-\pi(2)^2=16-4\pi=4(4-\pi);$$

$$p(A)=\frac{a_A}{a_S}=\frac{4(4-\pi)}{16}=\frac{4-\pi}{4}$$

مثال. نقطهٔ (x,y) را به طور تصادفی داخل یک مستطیل به رأس‌های $(۰,۰)$ ، $(۰,۱)$ ، $(۲,۰)$ و $(۲,۱)$ انتخاب می‌کنیم. مطلوب است محاسبهٔ احتمال آن که $x > ۲y$.

حل.



$a_S = ۲ \times ۱ = ۲$

$x > ۲y;\ x = ۲y \quad \begin{array}{c|cc} x & ۰ & ۲ \\ \hline y & ۰ & ۱ \end{array}$

$a_A = S_{OBC}^{\Delta} = \dfrac{۲ \times ۱}{۲} = ۱$

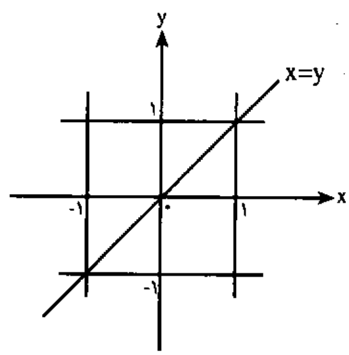
$P(A) = \dfrac{a_A}{a_S} = \dfrac{۱}{۲}$

مثال. نقطهٔ (x,y) را تصادفی در بازهٔ $[۱ \text{ و } ۱-]$ انتخاب می‌کنیم. مطلوب است محاسبهٔ احتمال آن که $x=y$.

حل. اگر S فضای نمونه‌ای و A پیشامد مطلوب باشد، داریم: (مساحت خط برابر صفر است)

$a_S = ۲ \times ۲ = ۴;\ a_A = ۰$

$P(A) = \dfrac{۰}{۴} = ۰$

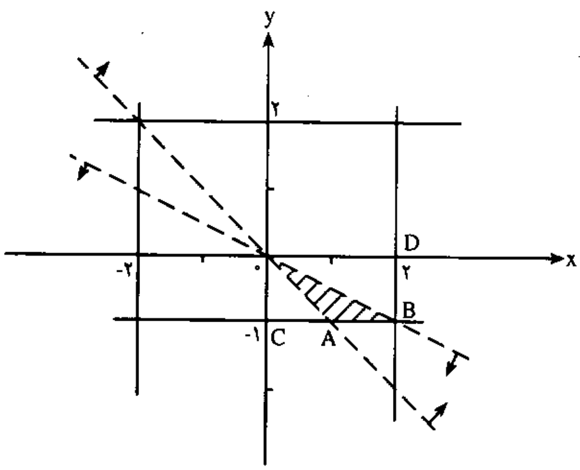


(توجه دارید که $A \neq \varnothing$ ولی $P(A) = ۰$)

مثال. در معادلهٔ $ax + b = ۰$ ، ضریب a به طور تصادفی عددی در بازهٔ $[۲ \text{ و } ۲-]$ و ضریب b نیز به طور تصادفی عددی در بازهٔ $[۲ \text{ و } ۱-]$ انتخاب شده است. احتمال این که جواب معادله بزرگتر از $\frac{۱}{۲}$ و کوچکتر از ۱ باشد.

حل. ضریب a را روی محور xها در بازهٔ $[۲ \text{ و } ۲-]$ و ضریب b را روی محور yها در بازهٔ $[۲ \text{ و } ۱-]$ در نظر می‌گیریم، بنابراین فضای نمونه‌ای به صورت زیر است:

$a_S = ۲ \times ۳ = ۶$



جواب معادله $ax + b = ۰$ برابر با $x = -\dfrac{b}{a}$ است که باید بین $\frac{۱}{۲}$ و ۱ باشد، بنابراین داریم:

$$\frac{۱}{۲} < -\frac{b}{a} < ۱ \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{b}{a} < ۱;\ -\dfrac{b}{a} = ۱ & \begin{array}{c|cc} a & ۰ & ۱ \\ \hline b & ۰ & -۱ \end{array} \\ -\dfrac{b}{a} > \dfrac{۱}{۲};\ -\dfrac{b}{a} = \dfrac{۱}{۲} & \begin{array}{c|cc} a & ۰ & ۲ \\ \hline b & ۰ & -۱ \end{array} \end{cases}$$

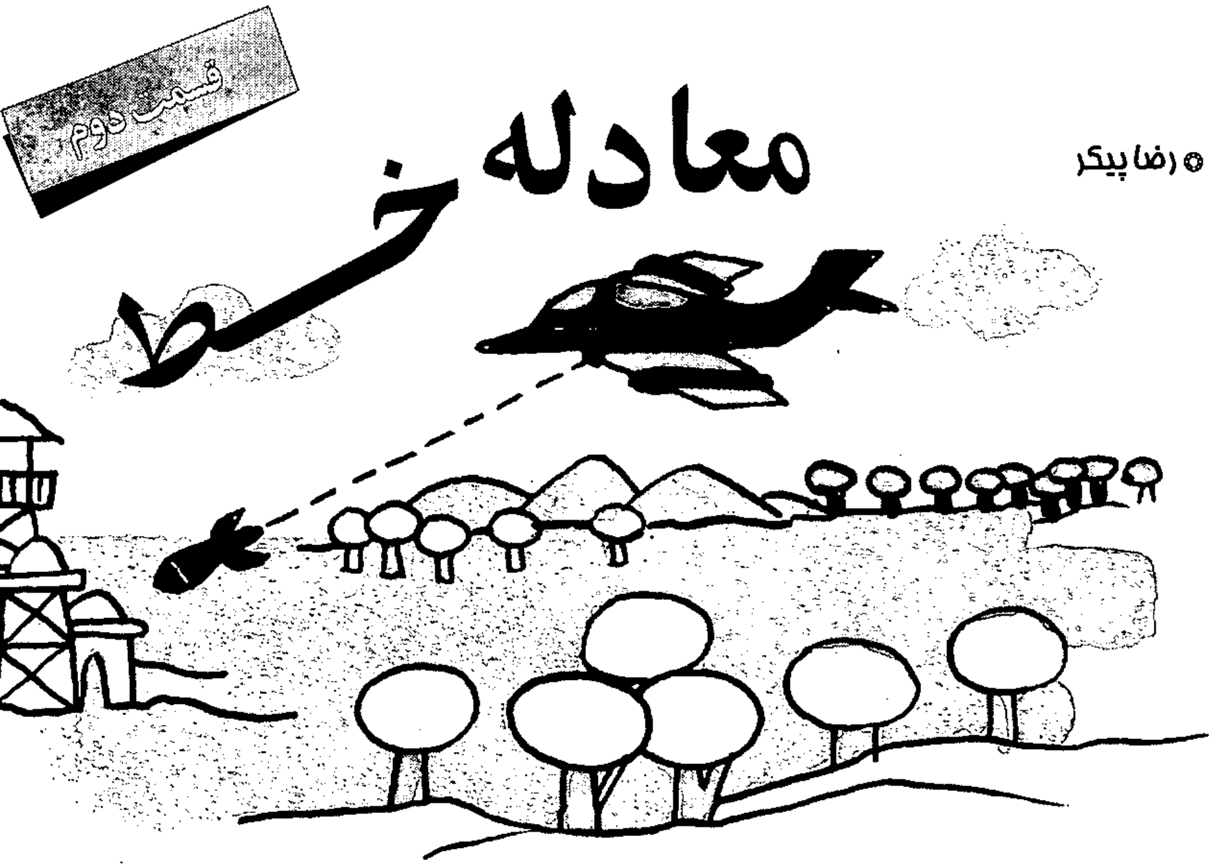
$$a_A = S_{ODBC}^{\square} - S_{OAC}^{\Delta} - S_{OBD}^{\Delta} = (۲ \times ۱) - (\frac{۱ \times ۱}{۲}) - (\frac{۲ \times ۱}{۲}) = \frac{۱}{۲}$$

$$P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{\frac{۱}{۲}}{۶} = \frac{۱}{۱۲}$$

قسمت دوم

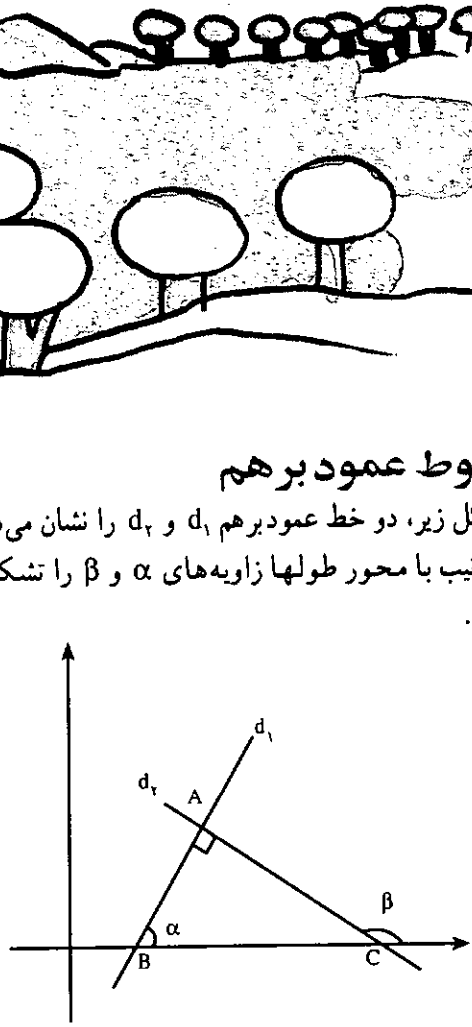
معادله خط

● رضا پیکر



خطوط عمود برهم

شکل زیر، دو خط عمود برهم d_1 و d_2 را نشان می‌دهد که به‌ترتیب با محور طولها زاویه‌های α و β را تشکیل داده‌اند.



اگر m_1 و m_2 به‌ترتیب شیبهای دو خط d_1 و d_2 باشند، شیب خط d_1 برابر با $tg\alpha$ و شیب خط d_2 برابر با $tg\beta$ است یا $m_1 = tg\alpha$ و $m_2 = tg\beta$، اکنون مثلث قائم‌الزاویه ABC را درنظر بگیرید. در این مثلث داریم :

$$tg(<ABC = tg\alpha) = \frac{AC}{AB}$$

$$tg(<ACB) = tg(۱۸۰-\beta) = \frac{AB}{AC}$$

از ضرب طرفین دو رابطهٔ بالا داریم :

$$tg\alpha . tg(۱۸۰-\beta) = ۱$$

و با توجه به تساوی $tg(۱۸۰-\beta) = -tg\beta$ داریم :

$$tg\alpha .(-tg\beta) = ۱ \Rightarrow tg\alpha . tg\beta = -۱$$

و با توجه به تساویهای $m_1 = tg\alpha$ و $m_2 = tg\beta$ می‌توانیم بنویسیم :

$$m_1 . m_2 = -۱ \quad \text{یا} \quad m_1 = \frac{-۱}{m_2}$$

بنابراین می‌توان گفت، حاصلضرب شیبهای دو خط عمود برهم، برابر با ۱- است یا شیبهای دو خط عمود برهم، قرینهٔ معکوس یکدیگرند.

مثال: نقاط $A\begin{bmatrix}۴\\۵\end{bmatrix}$، $B\begin{bmatrix}-۱\\-۵\end{bmatrix}$ و $C\begin{bmatrix}-۱۰\\۱۲\end{bmatrix}$ سه رأس یک مثلث می‌باشند. نشان دهید این مثلث در رأس A قائمه است.

حل: برای این منظور، باید نشان دهیم شیبهای خطوطی که ضلعهای AB و AC بر آن واقعند، قرینهٔ معکوس یکدیگرند.

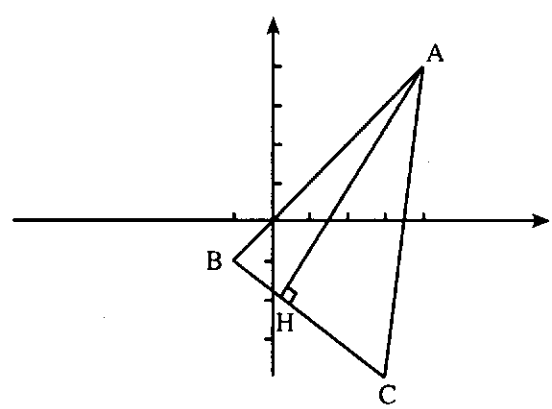
$$m_{AB}=\frac{۵-(-۵)}{۴-(-۱)}=\frac{۱۰}{۵}=۲$$

$$m_{AC}=\frac{۵-۱۲}{۴-(-۱۰)}=\frac{-۷}{۱۴}=-\frac{۱}{۲}$$

از آن‌جا که $m_{AB}.m_{AC}=-۱$، پس مثلث ABC در رأس A قائمه است.

مثال: نقاط $A\begin{bmatrix}۴\\۴\end{bmatrix}$، $B\begin{bmatrix}-۱\\-۱\end{bmatrix}$ و $C\begin{bmatrix}۳\\-۴\end{bmatrix}$ سه رأس مثلث ABC می‌باشند. معادلهٔ ارتفاع AH را بنویسید و مساحت مثلث را محاسبه کنید.

حل:



شیب ارتفاع AH قرینهٔ معکوس شیب ضلع BC است.

$$m_{BC}=\frac{-۴-(-۱)}{۳-(-۱)}=\frac{-۳}{۴}\Rightarrow m_{AH}=\frac{۴}{۳}$$

معادلهٔ AH : $(y-۴)=\frac{۴}{۳}(x-۴)$ یا $۳y=۴x-۴$

برای محاسبهٔ مساحت مثلث، اندازهٔ ضلع BC و ارتفاع AH لازم است و برای محاسبهٔ اندازهٔ ارتفاع AH مختصات نقطهٔ H موردنیاز است. برای به‌دست آوردن مختصات نقطهٔ H، دو خط AH و BC را در یک دستگاه حل می‌کنیم. معادلهٔ ضلع BC عبارت است از :

$$(y+۱)=\frac{-۳}{۴}(x+۱)\quad \text{یا}\quad ۴y=-۳x-۷$$

$$\begin{cases}۴y=-۳x-۷\\ ۳y=۴x-۴\end{cases}\Rightarrow\quad H\begin{bmatrix}-\frac{۱}{۵}\\ -\frac{۸}{۵}\end{bmatrix}$$

$$|AH|=\sqrt{(۴+\frac{۱}{۵})^۲+(۴+\frac{۸}{۵})^۲}=\sqrt{\frac{۱۲۲۵}{۲۵}}=۷$$

$$|BC|=\sqrt{(۳+۱)^۲+(-۴+۱)^۲}=\sqrt{۲۵}=۵$$

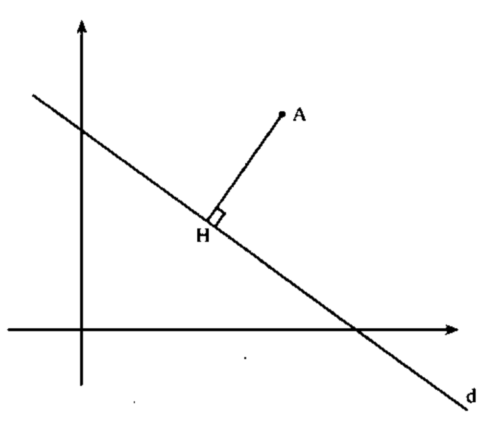
$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}\times|AH|\times|BC|=\frac{۱}{۲}\times۷\times۵=\frac{۳۵}{۲}$$

فاصلهٔ نقطه از خط

برای محاسبهٔ فاصلهٔ یک نقطه از خط راست، وقتی‌که مختصات نقطه و معادلهٔ خط راست معلوم باشد، می‌توان یک دستور به‌دست آورد.

برای به‌دست آوردن این دستور، از همان شیوه‌ای استفاده می‌کنیم که در مثال قبل، برای محاسبهٔ فاصلهٔ نقطهٔ H از خط BC استفاده کردیم.

برای به‌دست آوردن فاصلهٔ نقطهٔ $A\begin{bmatrix}x_۱\\y_۱\end{bmatrix}$ از خط معلوم $d:ax+by+c=۰$، ابتدا معادلهٔ خطی را می‌نویسیم که از نقطهٔ A بگذرد و بر خط d عمود باشد.



از آن‌جا که شیب خط d برابر با $\frac{-a}{b}$ است، شیب خط موردنظر برابر با $\frac{b}{a}$ می‌باشد. بدین‌ترتیب، معادلهٔ خط عمود بر d و گذرنده از نقطهٔ A عبارت است از :

$$d': y-y_1=\frac{b}{a}(x-x_1) \quad \Rightarrow \quad \frac{y-y_1}{b}=\frac{x-x_1}{a}$$

با درنظر گرفتن معادله‌های خطوط d و d' می‌توان مختصات نقطهٔ H (پای عمودی که از A بر خط d رسم می‌شود) را به‌دست آورد :

$$\begin{cases} \frac{y-y_1}{b}=\frac{x-x_1}{a} \\ ax+by+c=0 \end{cases}$$

برای سهولت کار فرض می‌کنیم :

$$\frac{y-y_1}{b}=\frac{x-x_1}{a}=k$$

داریم :

$$\begin{cases} x=ak+x_1 \\ y=bk+y_1 \end{cases}$$

(x و y همان مختصات نقطهٔ H می‌باشند.)

مقادیر x و y را در معادلهٔ خط d قرار می‌دهیم :

$$a(ak+x_1)+b(bk+y_1)+c=0$$

$$\Rightarrow \quad k=-\frac{ax_1+by_1+c}{a^2+b^2}$$

چنانچه $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ مختصات نقطهٔ H و $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ مختصات نقطهٔ Aباشند، می‌توانیم بنویسیم :

$$|AH|=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$$

$$|AH|=\sqrt{(aK+x_1-x_2)^2+(bK+y_1-y_1)^2}$$

$$|AH|=\sqrt{a^2K^2+b^2K^2}=|K|\sqrt{a^2+b^2}$$

با قرار دادن مقدار K در رابطهٔ بالا داریم :

$$|AH|=\left|\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$$

(AH همان فاصلهٔ نقطهٔA از خط d می‌باشد.)

مثال: فاصلهٔ نقطهٔ $A\begin{bmatrix} 5 \\ -5 \end{bmatrix}$ را از خط $8y=6x+5$ محاسبه کنید.

حل: ابتدا معادلهٔ خط را به‌صورت $8y-6x-5=0$ می‌نویسیم. اگر این فاصله برابر با h باشد، داریم :

$$h=\left|\frac{(8\times5)-6\times(-5)-5}{\sqrt{8^2+6^2}}\right|=\frac{65}{10}=6/5$$

مثال: دو خط $d_1: 3x-4y=5$ و $d_2: 3x-4y=10$ معادله‌های دو ضلع مقابل یک مربع هستند. مساحت این مربع را محاسبه کنید.

حل: برای محاسبهٔ مساحت مربع، فاصلهٔ یک نقطهٔ دلخواه متعلق به خط d_1 را از خط d_2 محاسبه می‌کنیم یا بعکس. این فاصله اندازهٔ یک ضلع مربع است. برای مثال، فاصلهٔ نقطهٔ $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ را که متعلق به خط d_1 می‌باشد، از خط d_2 محاسبه می‌کنیم. داریم :

$$h=\left|\frac{3\times3-4\times1-10}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}\right|=\left|\frac{-5}{5}\right|=1$$

بنابراین، مساحت این مربع، یک واحد مربع است.

فاصلهٔ دو خط موازی

دو خط موازی d و d' را درنظر بگیرید.

$$\begin{cases} d: ax+by+c=0 \\ d': ax+by+c'=0 \end{cases}$$

برای به‌دست آوردن فاصلهٔ این دو خط، نقطهٔ (x_1, y_1) را روی خط d' انتخاب می‌کنیم. در این‌صورت، فاصلهٔ این نقطه از خط d برابر است با :

$$H=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

و چون $\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\end{bmatrix}$ روی خط d' است، پس باید $ax_1+by_1+c'=0$ باشد. در نتیجه، $ax_1+by_1=-c'$.
با جایگذاری این رابطه در تساوی اخیر، رابطه به‌صورت زیر درمی‌آید :

$$H=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

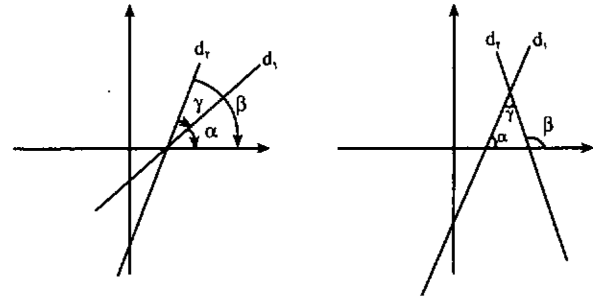
حل: مثال قبل از طریق دیگر :
چنانچه معادله‌های اضلاع مقابل را به‌صورت زیر بنویسیم، خواهیم داشت :

$$d_1: 3x-4y-5=0 \Rightarrow c=-5$$
$$d_2: 3x-4y-10=0 \Rightarrow c'=-10$$
$$H=\frac{|-5-(-10)|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{5}{5}=1$$

بنابراین، مساحت این مربع، یک واحد مربع است.

محاسبهٔ زاویهٔ بین دو خط

شکلهای زیر، دو خط d_1 و d_2 را نشان می‌دهند که با یکدیگر زاویه γ و با محور طولها به‌ترتیب زوایای α و β را تشکیل می‌دهند.



اگر m_1 و m_2 به‌ترتیب شیبهای خطوط d_1 و d_2 باشند، داریم : $m_1=tg\alpha$ و $m_2=tg\beta$.
با توجه به شکلها می‌توانیم بنویسیم :

$$\alpha+\gamma=\beta \Rightarrow \gamma=\beta-\alpha$$

از دو طرف رابطهٔ بالا تانژانت می‌گیریم :

$$tg\gamma=tg(\beta-\alpha) \Rightarrow tg\gamma=\frac{tg\beta-tg\alpha}{1+tg\alpha.tg\beta}$$

چنانچه مقادیر $tg\alpha$ و $tg\beta$ را بر حسب m_1 و m_2 قرار دهیم، داریم :

$$tg\gamma=\frac{m_2-m_1}{1+m_1.m_2} \Rightarrow \gamma=Arctg\frac{m_2-m_1}{1+m_1.m_2}$$

رابطهٔ بالا نشان می‌دهد، زاویهٔ بین دو خط d_1 و d_2 با شیبهای m_1 و m_2، زاویه‌ای است که تانژانت آن برابر است با : $\frac{m_2-m_1}{1+m_1.m_2}$

از آن‌جا که زاویهٔ دو خط را با زاویه‌ای که در فاصلهٔ $(0, \frac{\pi}{2})$ قرار داشته باشد، عنوان می‌کنند، رابطهٔ اخیر را به‌صورت زیر می‌نویسیم :

$$\gamma=Arctg\left|\frac{m_2-m_1}{1+m_1.m_2}\right|$$

مثال: دو خط زیر با هم چه زاویه‌ای تشکیل می‌دهند؟

$$d_1: y=\sqrt{3}x$$
$$d_2: y=-\sqrt{3}x$$

حل: اگر γ زاویهٔ بین این دو خط باشد، داریم :

$$m_{d_1}=\sqrt{3}\ ,\ m_{d_2}=-\sqrt{3}$$
$$\gamma=Arctg\left|\frac{\sqrt{3}-(-\sqrt{3})}{1+(\sqrt{3})(-\sqrt{3})}\right|$$
$$\gamma=Arctg\left|\frac{2\sqrt{3}}{-2}\right|=Arctg\left|-\sqrt{3}\right|=60^\circ$$

مثال: معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ $\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$ می‌گذرد و با خط $\frac{x}{5}-\frac{y}{2}=1$ زاویهٔ ۴۵ درجه می‌سازد.

حل: شیب‌خط $\frac{x}{5}-\frac{y}{2}=1$ برابر با $\frac{2}{5}$ است و اگر شیب‌خط موردنظر برابر با m باشد، داریم:

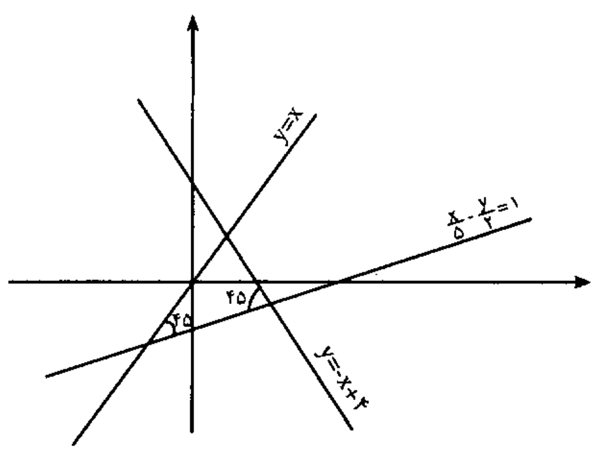
$$tg45^\circ=\left|\frac{m-\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}m}\right|$$

$$\left|\frac{m-\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}m}\right|=1\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{m-\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}m}=1\Rightarrow m=1\\[2ex]\dfrac{m-\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}m}=-1\Rightarrow m=-1\end{cases}$$

بنابراین معادلهٔ خط موردنظر عبارت است از:

$(y-2)=(x-2)\Rightarrow\ y=x$

$(y-2)=-(x-2)$ یا $\Rightarrow y=-x+4$



همان‌گونه که ملاحظه می‌کنید، مسأله دو جواب دارد.

مکان هندسی یک نقطهٔ متغیر

نقطهٔ $A(P,3)$ را درنظر بگیرید. نقطهٔA، نقطهٔ ثابتی روی صفحهٔ مختصات نیست و با تغییر مقدار P، مکان خود ر روی صفحه عوض می‌کند. عرض نقطهٔA مقدار ثابت می‌باشد و نقطهٔA تنها در مکانهایی می‌تواند باشد که عرض آ برابر با ۳ باشد. بنابراین نقطهٔA روی خط $y=3$ واقع است خط $y=3$ را مکان هندسی نقطهٔ A می‌نامیم.

در حالت کلی، وقتی طول و عرض یک نقطه شامل پارامت باشند، می‌توان با حذف پارامتر، رابطه‌ای بین طول و عرض نقطه و مستقل از پارامتر نوشت.

مثال: مکان هندسی نقطهٔ $M\begin{bmatrix}2m\\1-m\end{bmatrix}$ را با حذف پارامت m به‌دست آورید.

حل: پارامتر $2m$ معرّف طول نقطهٔM و پارامتر $1-m$ معرّف عرض نقطهٔ M می‌باشد، داریم:

$2m=x$

$1-m=y$

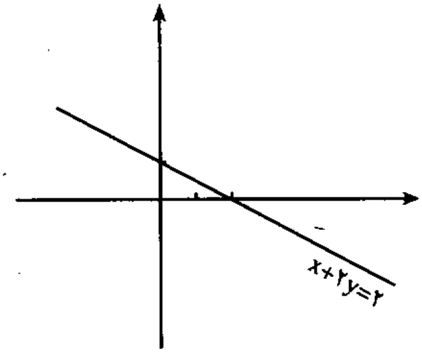
از تساوی $2m=x$، مقدار m را بر حسب x محاسب می‌کنیم. داریم:

$m=\frac{x}{2}$

در رابطهٔ $1-m=y$، مقدار m را بر حسب x قرا می‌دهیم.

$1-\frac{x}{2}=y\Rightarrow\ x+2y=2$

بنابراین مکان هندسی نقطهٔ $M\begin{bmatrix}2m\\1-m\end{bmatrix}$، خط $x+2y=2$ می‌باشد، یا به بیان دیگر، نقطهٔM به‌ازای هر مقدار m روی خط $x+2y=2$ قرار دارد. شکل صفحه بعد، مکان هندسی نقطهٔM را نشان می‌دهد.



مثال: نقاط $A\begin{bmatrix}-1\\4\end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$ مفروضند. مکان هندسی نقطهٔ M را تعیین کنید، اگر داشته باشیم:

$$|MA|^2-|MB|^2=8$$

حل: اگر مختصات M را $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ فرض کنیم، داریم:

$$|MA|^2=(x+1)^2+(y-4)^2$$
$$|MB|^2=(x-3)^2+(y+2)^2$$
$$\Rightarrow |MA|^2-|MB|^2=8x-12y+4$$

با برقرار کردن شرط مسأله داریم:

$$8x-12y+4=8 \Rightarrow 2x-3y=1$$

پس نقطهٔ M روی خط $2x-3y=1$ قرار دارد.

توانایی خود را با حلّ چند تمرین ارزیابی کنید.

۱. معادلهٔ اضلاع مثلثی را به‌دست آورید که مختصات یکی از رئوس آن $\begin{bmatrix}4\\-1\end{bmatrix}$ و معادله‌های ارتفاع و میانهٔ نظیر رأس دیگر آن به‌ترتیب $2x-3y+12=0$ و $2x=-3y$ است.

۲. معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ $A\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ گذشته و محورهای مختصات را در دو نقطه قطع کند که فاصلهٔ آن دو نقطه از مبدأ مختصات، برابر هم و مخالف صفر باشد.

۳. معادلهٔ خطی را بنویسید که با خط $8x-5y+15=0$ موازی بوده و از نقطهٔ $M\begin{bmatrix}-6\\-3\end{bmatrix}$ به فاصلهٔ ۴ باشد.

۴. نقاط $M_1\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$، $M_2\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}$ و $M_3\begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix}$ مختصات اوساط سه ضلع مثلثی هستند. معادلهٔ ضلعهای این مثلث را به‌دست آورید.

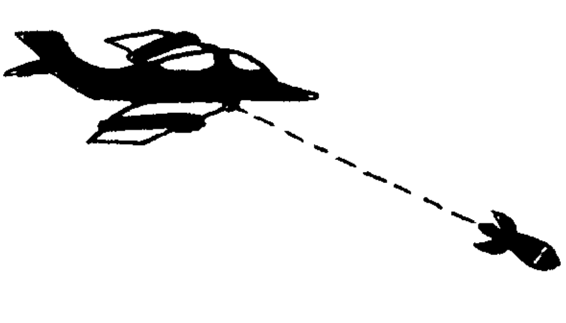
۵. نقاط $A\begin{bmatrix}-4\\a\end{bmatrix}$، $B\begin{bmatrix}-1\\6\end{bmatrix}$ و $C\begin{bmatrix}a\\-2\end{bmatrix}$ مفروضند. مقدار a را طوری تعیین کنید که در مثلث ABC زاویهٔ A قائمه باشد.

۶. معادله‌های اضلاع مثلثی عبارتند از: $x+5y=+7$، $3x-2y-4=0$ و $7x+y+19=0$، مساحت این مثلث را حساب کنید.

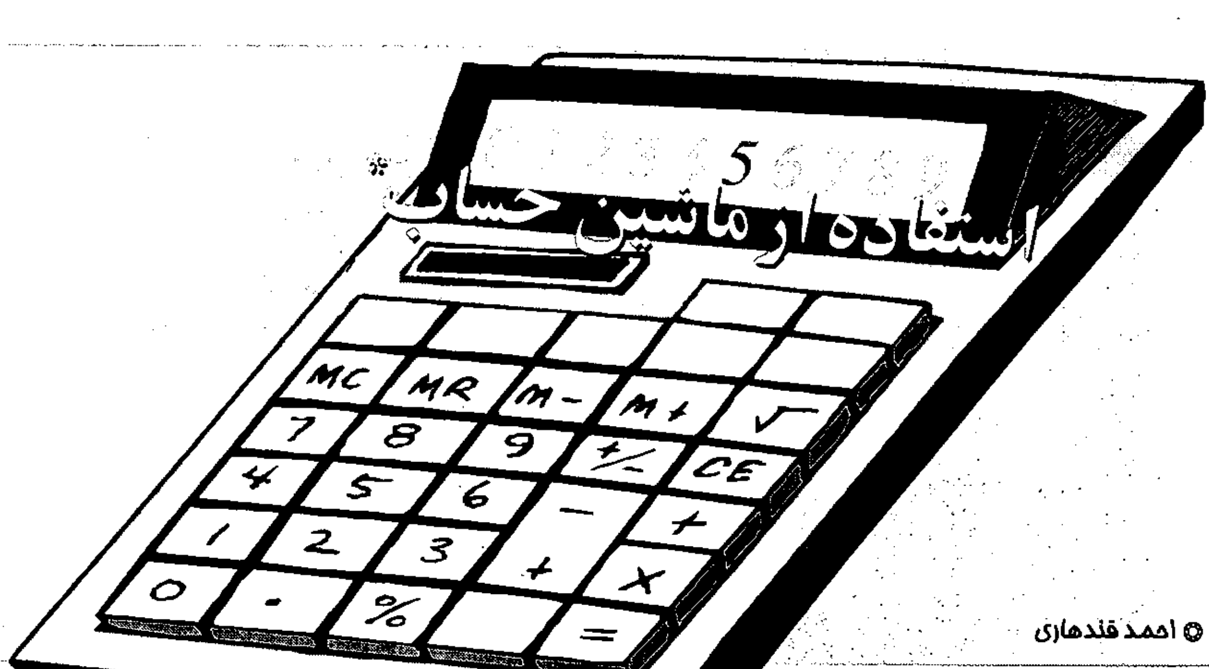
۷. مساحت مثلثی ۸ واحد مربع است و دو رأس آن عبارتند از $A\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$، و رأس سوّم آن روی خط $2x+y=2$ قرار دارد. مختصات رأس سوّم را به‌دست آورید.

۸. روی محور طولها، نقطه‌ای بیابید که مجموع مربعات فواصلش از دو نقطهٔ $M\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ و $N\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$ کمترین مقدار ممکن باشد.

۹. اگر معادله‌های قطرهای یک مستطیل $3x+2y-8=0$ و $4x+y-14=0$ باشند و مختصات یکی از رئوس مستطیل $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ باشد، معادلهٔ ضلعهای مستطیل را به‌دست آورید.



استفاده از ماشین حساب



◎ احمد قندهاری

برای دانش‌آموزان سال اول

استفاده از ماشین حساب علمی برای دانش‌آموزان دبیرستانها ضروری است. در طرح «تیمز»، ایران در ارزیابی پیشرفت تحصیلی ریاضی و علوم دورهٔ ابتدایی، درمیان ۴۲ کشور جهان، رتبهٔ ۳۸ و ۳۹ را به خود اختصاص داد و نتایج این طرح، توسط پژوهشکدهٔ (تعلیم و تربیت) در سه جلد منتشر شده است.

(همشهری، ۱۵ دیماه ۱۳۷۷)

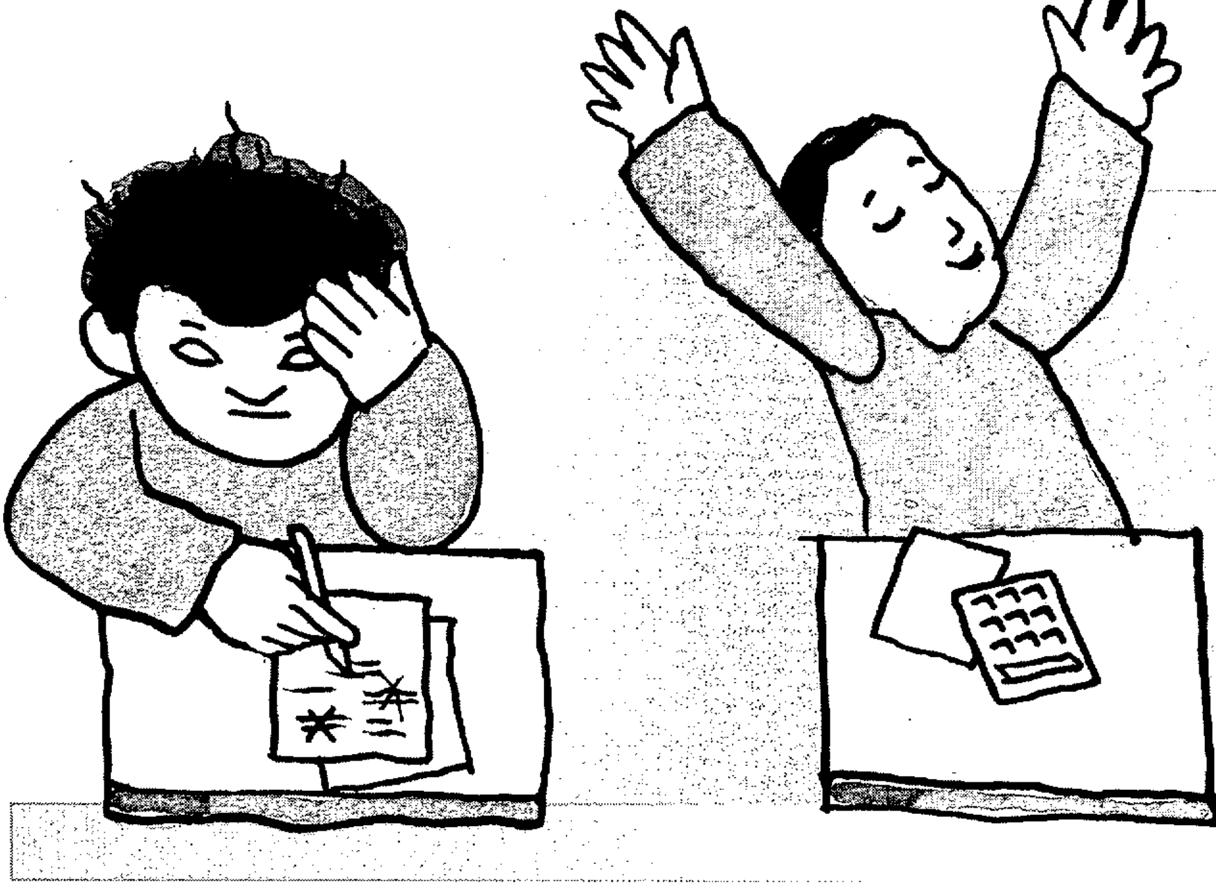
به طور مسلّم بابت این عقب‌ماندگی، عوامل بسیاری دخالت دارند، که عبارت است از: معلّم، ابزار آموزشی، روش آموزشی و روش ارزیابی و... که بررسی هریک از آنها، هم به زمان نیاز دارد و هم به بررسی کارشناسانه.

در محدودهٔ روش آموزشی که خود گسترهٔ وسیعی است، به یکی از نکات می‌پردازیم و آن به‌کارگیری ماشین حساب علمی و احیاناً استفاده از کامپیوترهای کوچک در محاسبه‌های تکراری ریاضی است.

متأسفانه ما عادت کرده‌ایم که با طرح مسائل خاص در یک مبحث، دانش‌آموز را خسته کنیم. (نمونه‌اش پلی‌کپیهای مسائل سنگین در بعضی از مدرسه‌های غیر انتفاعی و نیز مدارس خاصی است).

این که ما دانش‌آموزان را فقط و فقط برای موفقیت در کنکور آماده کنیم. بسیار تأسّف‌بار است و این طرز تفکر که تقریباً در کلّ جامعه وجود دارد، یک نوع آماده‌خواری فکری است. م به جای آن‌که دانش‌آموز را به تفکر وادار کنیم، او را ب ضبط صوت تبدیل می‌کنیم و با مسائل سنگین هم او را خست می‌کنیم. ما باید به گونه‌ای، خلاقیت و تفکر اصولی ریاضی را در دانش‌آموزان ایجاد کنیم. چون وقت دانش‌آموز در هر سال تحصیلی محدود است، باید محاسبه‌های عددی مسائل را به ماشین‌حساب واگذار کنیم تا دانش‌آموز، فرصت کافی برای اندیشیدن دربارهٔ مطالب بعدی را داشته باشد؛ بخصوص از طرف معلّم باید اندیشیدن دربارهٔ مطالب درسی، ا دانش‌آموز خواسته شود.

شاید در سالهای اوّل تحصیلی، لازم باشد که دانش‌آمو از ذهن خود برای عملکردهای ریاضی استفاده کند و در سالهای بالای تحصیلی متوسطه، لزومی ندارد محصّل را خسته کنیم او باید بتواند از فرصت‌های باقیماندهٔ خود، در حلّ مسائل جدید استفاده کند. چرا نیروی فکری دانش‌آموز را صرف جذ گرفتن و کعب گرفتن کنیم؛ دنیای تحصیلی از این مراحل گذشته است. محصّل باید بتواند به چراهای ریاضی، پاسخ منطقی بدهد. در اکثر کشورهای پیشرفتهٔ علمی، در کتاب



درسی، استفاده از ماشین حساب و کامپیوتر توصیه شده است و در انتهای هر مبحثی، برنامهٔ کامپیوتری محاسبه‌های آن مبحث و روش استفاده از ماشین حساب، بیان شده است.

با این مقدمه، طرز کار با ماشین حساب را شروع می‌کنیم.

در این مقایسه، دکمه‌های ماشین حساب را به علامت $\boxed{}$ نشان می‌دهیم.

۱ـ می‌خواهیم مقدار عددی عبارت $۳x^۲ - ۲x + ۵$ را وقتی $x = ۹/۷$ باشد، بیابیم.

می‌نویسیم.

$\boxed{C}$ ۳ $\boxed{\times}$ ۹/۷ $\boxed{x^۲}$ −۲ $\boxed{\times}$ ۹/۷ $\boxed{+}$ ۵ $\boxed{=}$ ۲۶۷/۸۷

تمرین: عبارت $۵x^۲ = ۱۱x + ۲/۳$ را به ازای $x = ۷/۲۵$ بیابید.

۲ـ اگر $\begin{cases} a = ۳/۶ \\ b = -۰/۵ \\ c = -۱/۳ \end{cases}$ مطلوب است محاسبه $ab - c$

روش اوّل:

$\boxed{C}$ ۳/۶ $\boxed{\times}$ ۰/۵ $\boxed{+/-}$ −۱/۳ $\boxed{+/-}$ ۹ $\boxed{=}$ −۰/۵

روش دوم:

$\boxed{C}$ ۳/۶ $\boxed{\times}$ ۰/۵ $\boxed{+/-}$ $\boxed{+}$ −۱/۳ $\boxed{=}$ −۰/۵

مثال: اگر $\begin{cases} a = ۱/۲۵ \\ b = -۱/۷۵ \\ c = -۱/۴ \\ d = ۱/۳۵ \end{cases}$ مطلوب است محاسبه $(abc - d)$

حل:

$\boxed{C}$ ۱/۲۵ $\boxed{\times}$ ۱/۷۵ $\boxed{+/-}$ $\boxed{\times}$ −۱/۴ $\boxed{+/-}$ $\boxed{-}$ ۱/۳۵ $\boxed{=}$ ۱/۷۱۲۵

تمرین اگر $\begin{cases} a = ۱/۱۲۵ \\ b = -۲/۰۰۲ \\ c = -۱/۰۱۵ \\ d = ۱/۰۲۷ \end{cases}$ مطلوب است محاسبه $(ab - cd)$

۳ـ می‌خواهیم حاصل $(۳٫۵)^۵$ را محاسبه کنیم، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$\boxed{C}$ ۳/۵ $\boxed{y^x}$ ۵ $\boxed{=}$ ۵۲۵/۲۱۸۷۵

تمرین: $(۲٫۷۵)^۵$، $(۱٫۰۹)^۹$ و $(۳٫۰۱۲)^۴$ را محاسبه کنید.

۴ـ می‌خواهیم، حاصل $\sqrt[۵]{۱۲}$ را محاسبه کنیم. به ترتیب زیر عمل می‌کنیم.

$$\sqrt[۵]{۱۲}=(۱۲)^{\frac{۱}{۲}}=(۱۲)^{۰/۲}$$

روش اوّل:

$\boxed{C}\ ۱۲\ \boxed{y^x}\ ۰/۲\ \boxed{=}\ ۱/۶۴۳۷۵۱۸$

روش دوم:

$\boxed{C}\ ۱۲\ \boxed{\sqrt[x]{y}}\ ۵\ \boxed{=}\ ۱/۶۴۳۷۵۱۸$

تمرین: $\sqrt[۵]{۲۱}$ و $\sqrt[۷]{۱۱}$ و $\sqrt[۱۱]{۱۳}$ را محاسبه کنید.

۵ـ مقدار $\frac{۱}{۵^{۳}}$ را بیابید.

روش اوّل:

$\boxed{C}\ ۵\ \boxed{y^x}\ ۳\ \boxed{+/-}\ \boxed{=}\ ۸-۰۳=۸\times۱۰^{-۱۰}$

روش دوم:

$\boxed{C}\ ۵\ \boxed{y^x}\ ۳\ \boxed{\frac{۱}{x}}\ \boxed{=}\ ۸-۰۳=۸\times۱۰^{-۱۰}$

تمرین: اعداد $\frac{۱}{۷^{۴}}$ و $\frac{۱}{۴^{۷}}$ و $\frac{۳}{۷^{۵}}$ را به صورت توان‌های علمی بنویسید. مثلاً $۱۰^{-۳}=۰/۰۰۳$ و $۲۱\times۱۰^{-۴}=۰/۰۰۲۱$

۶ـ حاصل عبارت $۳\sqrt{۵}+\frac{۱}{۵\sqrt{۲}}$ را به صورت اعشاری بیابید.

روش حل:

$\boxed{C}\ ۵\ \boxed{\times}\ ۲\ \boxed{\sqrt{\ }}\ =$

$\boxed{\frac{۱}{x}}\ \boxed{+}\ ۳\ \boxed{\times}\ ۵\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{=}\ ۶/۸۴۹۶۲۵۲۸۷$

مثال دیگر: حاصل $۷\sqrt{۱۳}+\frac{۱}{۵\sqrt{۱۱}}$

مانند مثال (۴):

$\boxed{C}\ ۵\ \boxed{\times}\ ۱۱\ \boxed{\sqrt{\ }}\ =$

$\boxed{\frac{۱}{x}}\ \boxed{+}\ ۷\ \boxed{\times}\ ۷\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{=}\ ۲۵/۲۹۹۱۶۱۱۸$

۷ـ حاصل $\frac{۵\sqrt{۱۰}}{۴\sqrt{۳}-۳\sqrt{۲}}$ را بیابید.

روش حل:

$\boxed{C}\ ۵\ \boxed{\times}\ ۱۰\ \boxed{\sqrt{\ }}\ =$

$\boxed{\div}\ \boxed{(}\ ۴\ \boxed{\times}\ ۳\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{-}\ ۳\ \boxed{\times}\ ۲\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{)}$

$\boxed{=}\ ۵/۸۸۷۵۵۱۶۹۶$

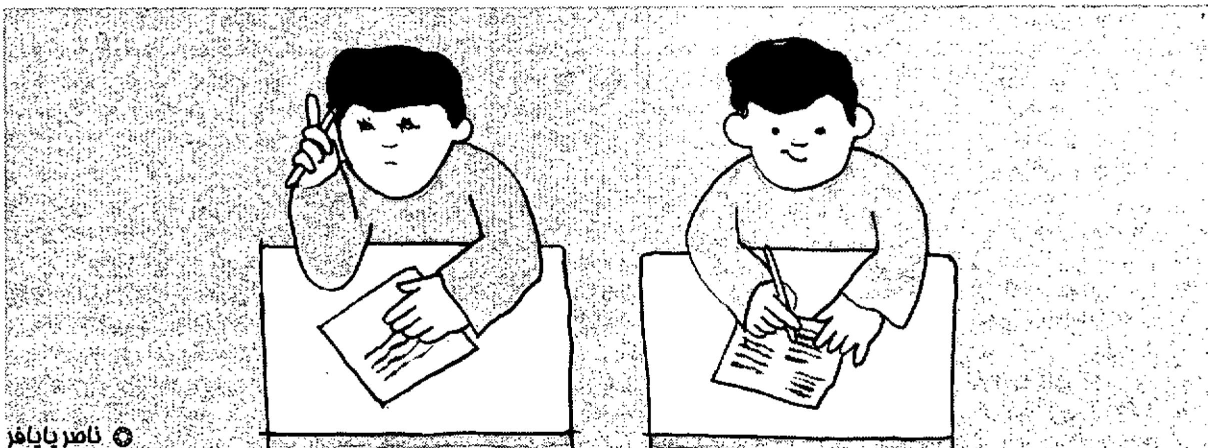
مثال دیگر: حاصل $\frac{۵\sqrt{۷}}{۵\sqrt{۲}-۲\sqrt{۳}}$

$\boxed{C}\ ۳\ \boxed{\times}\ ۷\ \boxed{\sqrt{\ }}\ =$

$\boxed{\div}\ \boxed{(}\ ۵\ \boxed{\times}\ ۲\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{-}\ ۲\ \boxed{\times}\ ۳\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{)}$

$\boxed{=}\ ۲/۲۰۰۵۳۴۶۰۴$

تمرین: حاصل $\left(۱۱\sqrt{۱۳}+\frac{۱}{۵\sqrt{۱۹}}\right)$ و $\left(\frac{۱۱\sqrt{۸}}{۶\sqrt{۵}-۵\sqrt{۳}}\right)$ و $\left(\frac{۲۱\sqrt{۱۱}}{۹\sqrt{۷}-۷\sqrt{۲}}\right)$ را حساب کنید.



ناصر پایافر

روش‌های محاسبه سریع

برای دانش‌آموزان دوره پیش دانشگاهی رشته ریاضی

ضرب خارجی دو بردار – دترمینان ماتریس‌های ۳×۳ ـ ماتریس الحاقی و ماتریس وارون یک ماتریس ۳×۳

وشی ساده برای محاسبه ضرب خارجی دو بردار

ابتدا دترمینان ماتریس‌های ۲×۲ را یادآوری می‌کنیم، اگر $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ آنگاه دترمینان A را با نماد $|A|$ یا $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}$ نشان ی دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$$

مثال:

$$\begin{vmatrix}۳ & ۵\\ -۲ & ۴\end{vmatrix}=۳\times۴-(-۲)\times۵=۱۲+۱۰=۲۲$$

حاسبه ضرب خارجی دو بردار

دو بردار $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ را درنظر ی گیریم، برای محاسبه ضرب خارجی دو برداری که آن را با ماد $\vec{a}\times\vec{b}$ نشان می‌دهیم، ابتدا دو بردار را در دو ستون یا دو سطر به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{vmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{vmatrix}\qquad \text{یا} \qquad \begin{matrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{matrix}$$

سپس برای محاسبه ضرب خارجی دو بردار، در سه مرحله به صورت زیر عمل می‌کنیم:

مرحله اول ـ مؤلفه‌های اول دو بردار را رها کرده و با مؤلفه‌های باقیمانده به صورت دترمینان ۲×۲ عمل می‌کنیم؛ عدد حاصل، مؤلفه اول بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ است:

$$\begin{vmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{vmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\ \text{--------}\\ \text{--------}\end{vmatrix}$$

مرحله دوم: این بار مؤلفه‌های دوم دو بردار را حذف کرده و با مؤلفه‌های باقیمانده به صورت دترمینان ۲×۲ عمل می‌کنیم، با این تفاوت که جواب حاصل، در این مرحله را باید قرینه کنیم تا مؤلفه دوم بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ به دست آید:

$$\begin{vmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{vmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}\text{--------}\\ -(a_1b_3-a_3b_1)\\ \text{--------}\end{vmatrix}$$

مرحله سوم: در این مرحله، مؤلفه‌های سوم دو بردار را حذف کرده و با مؤلفه‌های باقیمانده به صورت دترمینان ۲×۲ عمل می‌کنیم.

سال دوازدهم ● ۱۳۸۱ ● شماره مسلسل ۳۷

$$\begin{vmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-------\\-------\\a_1b_2-a_2b_1\end{vmatrix}$$

مثال: اگر $\bar{a}=(2,3,+1)$ و $\bar{b}=(3,2,4)$ ، حاصل $\bar{a}\times\bar{b}$ را محاسبه کنید.

حل:

مرحله اول

$$\begin{vmatrix}2\\3\\1\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}3\\2\\4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3\times4-1\times2=10\\---------\\---------\end{vmatrix}$$

مرحله دوم

$$\begin{vmatrix}2\\3\\1\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}3\\2\\4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-----------\\-(2\times4-3\times1)=-5\\-----------\end{vmatrix}$$

مرحله سوم

$$\begin{vmatrix}2\\3\\1\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}3\\2\\4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}----------\\----------\\2\times2-3\times3=-5\end{vmatrix}$$

نتیجه

$$\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)=\begin{vmatrix}10\\-5\\-5\end{vmatrix}$$

مثال: اگر $\bar{p}=(1,0,-2)$ و $\bar{q}=(4,-1,3)$ حاصل $\bar{p}\times\bar{q}$ را محاسبه کنید.

حل: در این روش مؤلفه‌های دو بردار را به صورت سطری نوشته و $\bar{p}\times\bar{q}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$1)\quad \begin{array}{ccc}1 & 0 & -2\\ 4 & -1 & 3\\ \hline \end{array}$$
$$0\times3-(-1)(-2)=-2$$

$$2)\quad \begin{array}{ccc}1 & 0 & -2\\ 4 & -1 & 3\\ \hline \end{array}$$
$$-(1\times3-(-2)\times4)=-(3+8)=-11$$

$$3)\quad \begin{array}{ccc}1 & 0 & -2\\ 4 & -1 & 3\\ \hline \end{array}$$
$$1(-1)-4\times0=-1$$

نتیجه: $\bar{p}\times\bar{q}=(-2,-10,-1)$

محاسبه دترمینان ماتریس‌های ۳×۳ به روشی ساد

با این روش مقدار دترمینان هر ماتریس ۳×۳ را در چن ثانیه می‌توان محاسبه کرد.

دترمینان ماتریس $A_{3\times3}$ را در نظر می‌گیریم.

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

برای محاسبه آن به صورت زیر عمل می‌کنیم.

۱ـ دو سطر (یا دو ستون) اول و دوم دترمینان را انتخا کرده و مؤلفه‌های اول این دو را حذف می‌کنیم، سپس جوا دترمینان ۲×۲ حاصل را در اولین مؤلفهٔ سطر (یا ستون) سو ضرب می‌کنیم.

۲ـ دو درایه دوم سطرها (یا ستون‌های) انتخاب شده حذف کرده و جواب دترمینان ۲×۲ را در مؤلفهٔ دوم سطر سو (یا ستون سوم) ضرب کرده و سپس حاصل را قرینه می‌کنی

۳ـ در این مرحله دو درایهٔ سوم سطرها (ستون‌ها) در نظ گرفته شده را حذف کرده و جواب دترمینان حاصل را در سومی درآیهٔ سطر (ستون) سوم ضرب می‌کنیم.

۴ـ مجموع عددهای حاصل در سه مرحله بالا، جوا دترمینان ۳×۳ است.

مثال: دترمینان زیر را محاسبه کنید.

$$|A|=\begin{vmatrix}3 & 2 & -1\\ 4 & -3 & 5\\ 2 & 1 & -2\end{vmatrix}$$

حل:

مرحله اول:

$$\begin{vmatrix}3 & 2 & -1\\ 4 & -3 & 5\\ 2 & 1 & -2\end{vmatrix}$$

$$\times\left(2\times5-(-3)(-1)\right)=2(10-3)=14$$

$$\begin{vmatrix}3 & 2 & -1\\ 4 & -3 & 5\\ 2 & 1 & -2\end{vmatrix}$$

$$1\times\left(3\times5-4(-1)\right)]=19$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$-2\times\left(3(-3)-4\times2\right)=-2\times(-9-8)=34$$

در نتیجه :

$$|A|=14-19+34=29$$

وشی ساده برای محاسبه ماتریس الحاقی و وارون ک ماتریس ۳×۳

در این روش بدون استفاده از کهاد و همسازه در زمانی سیار کوتاه می‌توان ماتریس الحاقی یک ماتریس ۳×۳ را حاسبه کرد.

برای محاسبه ماتریس الحاقی مانند محاسبه ضرب خارجی و بردار عمل می‌کنیم، به این ترتیب که :

مرحله ۱ـ سطر اول را حذف می‌کنیم و هریک از دو سطر وم و سوم را یک بردار درنظر گرفته و آنها رادرهم ضرب خارجی می‌کنیم. جواب‌های حاصل درایه‌های اولین ستون اتریس الحاقی است.

مرحله ۲ـ سطر دوم دترمینان را حذف کرده و با این فرض ه دو سطر اول و سوم، دو بردار است آنها را در هم ضرب خارجی می‌کنیم سپس جواب‌های بدست آمده را قرینه ی‌کنیم. به این ترتیب درایه‌های ستون دوم ماتریس الحاقی به ست می‌آید.

مرحله ۳ـ مرحله آخر سطر سوم را حذف کرده و سطرهای ل و دوم دترمینان را مانند دو بردار در نظر گرفته و آنها را رهم ضرب خارجی می‌کنیم. جواب‌های حاصل درایه‌های ستون سوم ماتریس الحاقی است.

مثال. وارون ماتریس $A=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix}$ را محاسبه کنید.

حل: می‌دانیم وارون ماتریس A از رابطه زیر به دست ی‌آید.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}$$

که در آن A^{*} را ماتریس الحاقی می‌گوئیم و برای محاسبه آن از دستور بالا استفاده می‌کنیم.

مرحله اول ـ محاسبه درآیه‌های ستون اول A^{*}

$$\begin{array}{lrrrl} & 1 & 4 & 0 \leftarrow & \text{سطر دوم } A \\ \text{س} & -2 & -3 & 1 \leftarrow & \\ \hline & -4 & 1 & -5 & \end{array}$$

از روش محاسبه ضرب خارجی دو بردار استفاده می‌کنیم تا درایه‌های ستون اول ماتریس الحاقی به دست آید.

مرحله دوم: در این مرحله عناصر ستون دوم ماتریس الحاقی محاسبه می‌شود.

$$\begin{array}{lrrrl} & -2 & 1 & 3 \leftarrow & \text{سطر اول } A \\ \text{ق} & -2 & -3 & 1 \leftarrow & \\ \hline 10\ \ -4\ \ 8 \longleftarrow & -10 & 4 & -8 & \end{array}$$

درایه‌های ستون دوم ماتریس الحاقی

مرحله سوم: برای محاسبه درایه‌های ستون سوم A^{*} از دو سطر اول و دوم A استفاده می‌کنیم

درایه‌های ستون سوم ماتریس A^{*} سطر اول

$$\begin{array}{lrrr} A & -2 & 1 & 3 \leftarrow \\ \text{سطر دوم} & 1 & 4 & 0 \leftarrow \\ \hline & 12 & -3 & 9 \end{array}$$

در نتیجه ماتریس الحاقی، ماتریس ۳×۳، A به صورت زیر است :

$$A^{*}=\begin{bmatrix} -5 & -8 & 9 \\ 1 & 4 & -3 \\ -4 & -10 & 12 \end{bmatrix}$$

برای محاسبه وارون ماتریس A به کمک روشی که ارائه شد دترمینان A را محاسبه می‌کنیم $|A|=9\times1-3(-3)+12(-2)=-6$

$$A^{-1}=\frac{1}{-6}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

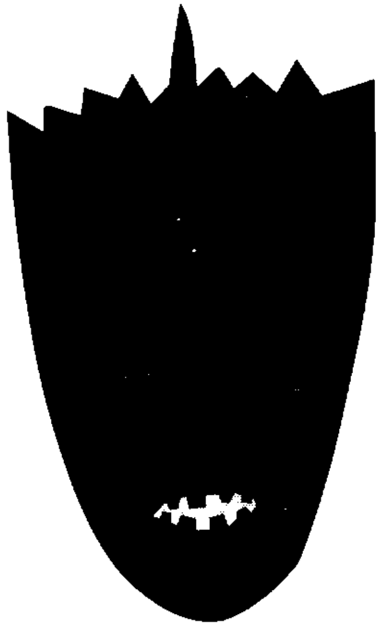
پرویز شهریاری

برخی قوم‌ها به‌عنوان ابزاری برای شمار، نه از انگشتان، بلکه از بندهای انگشتان خود استفاده می‌کردند. در این رابطه، گاهی به دستگاهی به اندازهٔ کافی سودمند و پایدار می‌رسیدند. در این‌جا فرایند محاسبه، به‌این ترتیب انجام می‌شد: انگشت شست یک دست «مأمور شمارش» بندهای بقیهٔ انگشتان این دست بود؛ از آن‌جا که در هریک از چهار انگشت دیگر این دست، سه بند وجود دارد، واحد مرتبهٔ بالاتر، برابر ۱۲ می‌شد. این روند گاهی در ۱۲ متوقف نمی‌شد؛ درضمن، هر انگشت دست دیگر، نمایندهٔ یک واحد از مرتبهٔ بالاتر (یعنی ۱۲) بود و وقتی همهٔ انگشتان دست دوم تمام می‌شد، واحد مرتبهٔ تازه، یعنی ۱۲ × ۵ به‌دست می‌آمد که برابر ۶۰ می‌شود. ممکن است چنین روندی برای شمار، در به‌وجود آمدن مبنای ۶۰ عدد شماری کمک کرده باشد که در سرزمین بابل، مورد استفاده قرار می‌گرفت و پس از آنها هم تا مدت‌ها، به‌وسیلهٔ ریاضیدانان ایرانی به‌کار می‌رفت. این انتخاب مبنای ۶۰، دلیل دیگری هم می‌تواند داشته باشد. عددشماری در مبنای ۱۰ برای عددی بزرگ که بابلی‌ها به‌ویژه در اخترشناسی به آنها نیاز داشتند، جای زیادی را می‌گرفت؛ درحالی که در مبنای ۶۰ تعداد رقم‌های عدد به سرعت پایین می‌آید.

ردّپای مبنای ۱۲ و مبنای ۶۰ برای عددشماری، تا امروز هم باقی مانده است. در مبنای ۱۲ «دوجین» را داریم که به معنای ۱۲ عدد است و «گروس» به معنای ۱۲ «دوجین»، یعنی ۱۴۴ عدد از مبنای ۶۰ هم هنوز در محاسبهٔ زمان استفاده می‌شو (ساعت = ۶۰ دقیقه؛ دقیقه و ثانیه و غیره) همچنین برای اندازه‌گیری زاویه‌ها و کمان د مبنای ۶۰ را به‌کار می‌برند (یک درجه زاوی یا کمان برابر است با ۶۰ دقیقه...).

به این ترتیب، با پیشرفت اقتصاد جامع و نیاز به شمردن و محاسبه، دستگاه‌های عددشماری به‌وجود آمد که از بین آنها دستگ با مبنای ۱۰ کم و بیش عمومی شد. همی شیوهٔ شمارش مقدماتی، سنگ بنای اصلی ریاضیات را گذاشت و آن را به جایی که امرو می‌بینیم رسانید.

اگر روندهای کار و اقتصاد، انسان ر وادار کرد عددها و نامگذاری آنها را کشف کند، رشد بعدی نیازهای اقتصادی انسان او را در مسیر گسترش و عمیق‌تر کردن مفهو



...دد انداخت؛ به‌ویژه، وقتی این پیشرفت ...رو گرفت و حرکت به جلو سریع‌تر شد که ...ولت و دستگاه دولتی کم یا بیش پیچیده ...وجود آمد. دولت‌ها نیاز داشتند حساب ...وال آنها نگهداری شود و دستگاه مالیاتی ...ر و صورت داده شود، و وقتی تبادل کالا ...کامل یافت و به مرحلهٔ مبادلهٔ پول رسید، ...ساب کالاهای تجاری تنظیم شد. این ...ضع، از یک طرف موجب شد تا عددنویسی ...رای ثبت عددها پدید آید و از طرف دیگر، ...مل‌های محاسبه‌ای، یعنی عمل روی ...ددها را ایجاب می‌کرد.

نوشتن عددها، در دورانی قدیمی‌تر از ...ندگی بشر، که دربارهٔ آنها صحبت کردیم، ...وجود آمد: گره‌ها، نشانه‌هایی که روی ...ستخوان یا درخت می‌گذاشتند یا سنگریزه‌ها ... غیره، چیزی جز تولد عددنویسی نبود. ...لی این شکل عددنویسی، پاسخ‌گوی ...ددهای بزرگ نبود؛ به‌ویژه وقتی که ...ی خواستند حساب کالاهای گستردهٔ تجاری ...ا یادداشت کنند. با وجود این، عمل‌های ...جاری محاسبهٔ پیچیده‌ای را طلب می‌کرد. ...زم بود عددها را با هم جمع، از یکدیگر ...م، درهم ضرب و برهم تقسیم کنند؛ ولی ...یوهٔ نوشتن برای این عمل‌ها، روش ...اده‌ای به دست نمی‌داد. در این دوران بود که انسان به تدریج روش نوشتن عددها را با استفاده از رقم‌ها آغاز کرد.

بجز این، باید یادآور شد که همراه با رشد نیازهای انسان در بستگی نزدیک با آن، به‌تدریج در جامعهٔ انسانی، بجز عدد و محاسبه، شاخه‌ای از اندیشه و فعالیت عملی رشد کرد که در تکامل بعدی خود، به دانش ریاضی یاری رساند. این، عبارت بود از پیدایش اندازه‌های مختلف و پیشرفت روش اندازه‌گیری. اگر مفهوم عدد به تکامل یکی از اساسی‌ترین شاخه‌های ریاضیات- یعنی حساب یاری رساند، مشاهدهٔ چیزهایی که دوروبر انسان بود، شکل آنها و پیشرفت روش‌های اندازه‌گیری‌های مختلف، به تولد شاخهٔ دیگری از ریاضیات- یعنی هندسه- یاری رساند.

ما در این جا به طور خلاصه، پیدایش مفهوم عدد را، که پایهٔ ساختمان محکم آنالیز به شمار می‌رود، بررسی کردیم؛ اما دربارهٔ پیدایش مفهوم‌هایی با خصلت هندسی، باید پیش از هر چیز، یادآوری کرد که در این رابطه و در آغاز، آشنایی انسان با شکل‌های مختلفی بود که دور و بر او وجود داشت.

ولی وقتی که این شکل‌ها برای ساختن ظرف، وسایل کشاورزی و... به کار رفت، لازم شد که اندازهٔ شکل‌های ساخته‌شده، در جهت‌های مختلف به‌دست آید و برای انسان، نخستین اندازه‌های طول، وزن و حجم شکل گرفت.

طبیعی است، نخستین اندازهٔ طول نزد انسان، مربوط به اندازه‌های بخشی از بدن خود او بود. برای نمونه، برای اندازه‌گیری طول، بیش از همه، اندازهٔ گام یک مرد بالغ مورد استفاده قرار می‌گرفت. هنوز هم ما برای اندازه‌گیری فاصله‌ها، از گام‌های خود استفاده می‌کنیم. اگر به اندازه‌های کوچکتری نیاز پیدا می‌کرد، مثل عددشماری‌ها از دست‌ها و پاهای خود استفاده می‌کرد. درضمن، واحد اندازه‌گیری برای او، ضخامت یک انگشت دست، طول انگشت شست، عرض کف دست، فاصلهٔ بین انگشت شست و انگشت نشانه یا انگشت میانه، فاصلهٔ بین آرنج تا انتهای انگشت میانه، اندازهٔ کف پا و... بود.

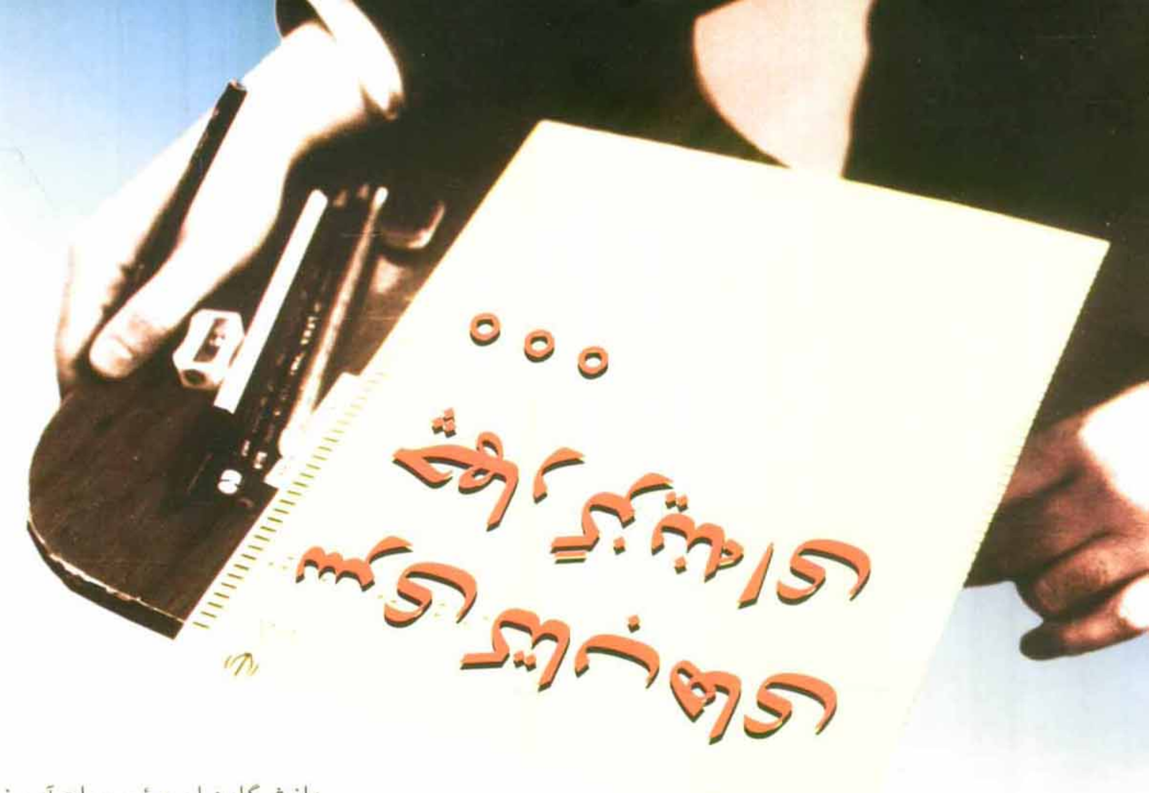
پیشرفت عددنویسی و اندازه‌گیری، رابطهٔ مستقیمی با پیشرفت جامعه داشته است، بنابراین، ملت‌هایی به سرعت پیش رفته‌اند که به دوران دولت‌داری و حکومت گام نهاده‌اند.

□

بین ملت‌های کرهٔ زمین، آنهایی که در تلاقی سه قارّه زندگی می‌کردند، شرایط مساعدتری برای زندگی اقتصادی و سیاسی داشتند. این سه قارّه عبارت بودند از اروپا، افریقا و آسیا؛ و همچنین آنها که در شبه‌جزیرهٔ هندوستان و سرزمین چین زندگی می‌کردند، شرایط طبیعی در این کشورها به‌شدت تغییر می‌کرد. ساحل دریا در این کشورها، گاهی خلیج‌های عمیق را به‌وجود آورده و گاهی روی یک خط پیش رفته است. در همسایگی ساحل، انبوهی از جزیره‌ها ایجاد کرده یا دریای بی‌کران و گسترده، در برابر چشم انسان‌ها قرار گرفته است. بیابان‌های بی‌آب، به‌تناوب با درّه‌های حاصلخیز و پر آب عوض می‌شوند؛ گاهی قارّه از کوهستان پوشیده است و گاهی صدها کیلومتر مرغزار یا مرداب به چشم می‌خورد. اینها زمینهٔ مساعدی برای رشد جامعه‌های انسانی به‌وجود آورد، و محیط زیست اجتماعی را برای مردم ساکن در آن آماده‌تر کرد.

در اعماق تاریخ، وقتی که انسان هنوز از لحاظ صنعتی پیش نرفته بود و قانون‌های طبیعت را نمی‌شناخت و نمی‌توانست بر طبیعت تسلط داشته باشد، تا اندازهٔ زیادی به طبیعت دوروبر خود وابسته بود. ولی حتی در آن زمان، شرایط طبیعی نمی‌توانست اهمیت تعیین‌کننده برای پیشرفت جامعهٔ انسانی نداشته باشد. نیروهای طبیعی در این دوران می‌توانست مانع رشد جامعهٔ انسانی باشد یا آن را به‌جلو ببرد و مسیر رشد را تندتر یا کندتر کند؛ ولی بی‌تردید، شرایط طبیعی تأثیر زیادی در پیشرفت زندگی اقتصادی ملت‌های کهن در آستانهٔ تشکیل نخستین دولت‌ها داشته‌اند؛ به‌ویژه در مناسبات اجتماعی آن‌ها تأثیر شگرفی به جای گذاشته است.

و در همین منطقه‌های کرهٔ زمین بود که دانش و ریاضیات به معنای امروزی خود به‌وجود آمد.



آزمون سراسری دانشگاه ها با تمام انتقادهایی که همراه خود دارد، در حال حاضر بهترین نوع گزینش دانشجو و بهترین راهکار شناسایی و انتخاب رشته ی دانشگاهی است که در سال های اخیر به ماراتُنی سنگین برای دانش پژوهانِ خواهانِ تحصیلات عالی تبدیل شده است. شرکت کنندگان در آزمون ورودی دانشگاه ها و مؤسسات آموزش عالی، برای موفقیت در این آزمون، نیازمند به استفاده و بهره گیری از منابع مطالعاتی مناسب و مفید هستند. انتشارات مدرسه برهان برای پاسخ گویی به این نیاز، در راستای رسالت آموزشی خود، پس از انتشار مجموعه کتاب های از مدرسه تا دانشگاه مجموعه جدیدی را در دستور کار خود قرار داده است.

در این مجموعه جدید برای هریک از کتاب های درسی که به عنوان منبع طرح پرسش در آزمون سراسری معرفی شده است، یک عنوان کتاب، تألیف و منتشر می شود. هدف از تولید این مجموعه جدید تکمیل کتاب های «از مدرسه تا دانشگاه» است که هر دانش آموز با حل تمرین های متنوع و متعدد این مجموعه به یک مهارت نسبی برای کسب موفقیت در آزمون سراسری دست یابد. در این کتاب ها، مطابق سرفصل ها و عناوین هر کتاب تعداد قابل توجهی پرسش های چهارگزینه ای وجود دارد. پاسخ های تشریحی مناسب و کافی ویژگی دیگر این مجموعه است که در این پاسخ ها علاوه بر بررسی مفاهیم درسی، نکته های لازم نیز ارائه شده است در بعضی از موارد گزینه های نادرست نیز برای تفهیم بیشتر مطالب درسی مورد بررسی قرار گرفته است. بیشتر پرسش های آزمون های ورودی دانشگاه ها و مؤسسات آموزش عالی (سراسری و آزاد) برای آشنایی دانش آموزان در این مجموعه گردآوری شده است. انتشارات مدرسه برهان امیدوار است که این مجموعه جدید در کنار کتاب درسی بتواند در جهت کسب مهارت و ایجاد تسلط بر محتوای آموزشی، شما دانش آموز عزیز را یاری کند.

کتاب های ریاضی این مجموعه توسط مؤلفین و دبیران ارزشمندی تدوین و تألیف شده است که در زیر عنوان کتاب ها آمده است:

۱ـ ریاضی سال دوم دبیرستان

۲ـ جبر و احتمال سوم ریاضی

۳ـ حسابان ۱و۲

۴ـ ریاضی سال سوم رشته تجربی

۵ـ ریاضی عمومی ۱ و ۲ رشته تجربی

۶ـ حساب دیفرانسیل و انتگرال ۱و۲

۷ـ ریاضیات گسسته

۸ـ جبر خطی و هندسه تحلیلی


انتشارات مدرسه برهان
منتشر کرده است
سری کتابهای
«از مدرسه تا دانشگاه»
هدف از چاپ سری کتابهای «از مدرسه تا دانشگاه» پر کردن خلأ موجود بین کتابهای کمک درسی و کتابهای آمادگی برای کنکور است.
دانش آموزان با مطالعهٔ این سری کتابها، اطلاعات لازم، اعم از مفاهیم درسی، نکته های پنهان در لابه لای این مفاهیم و قضیه ها و مسائل مهم را کسب کرده و با پرسشهای چهارگزینه ای و حل تشریحی آنها و آزمونهای چهارگزینه ای آشنا می شوند، تا هم برای پاسخ گویی به پرسشهای تشریحی و هم برای شرکت در کنکورهای سراسری آمادگی پیدا کنند.
از مدرسه تا دانشگاه
ریاضیات
حساب دیفرانسیل و انتگرال ۱و۲
جبر و احتمال
ریاضیات گسسته
(دوره پیش دانشگاهی رشته علوم ریاضی)
ریاضیات ۱و۲
هندسهٔ تحلیلی و جبر خطی
ریاضیات سال سوم
A∩B
B
Y=1
ناشر برگزیده سالهای ۷۵،۷۲
۷۹