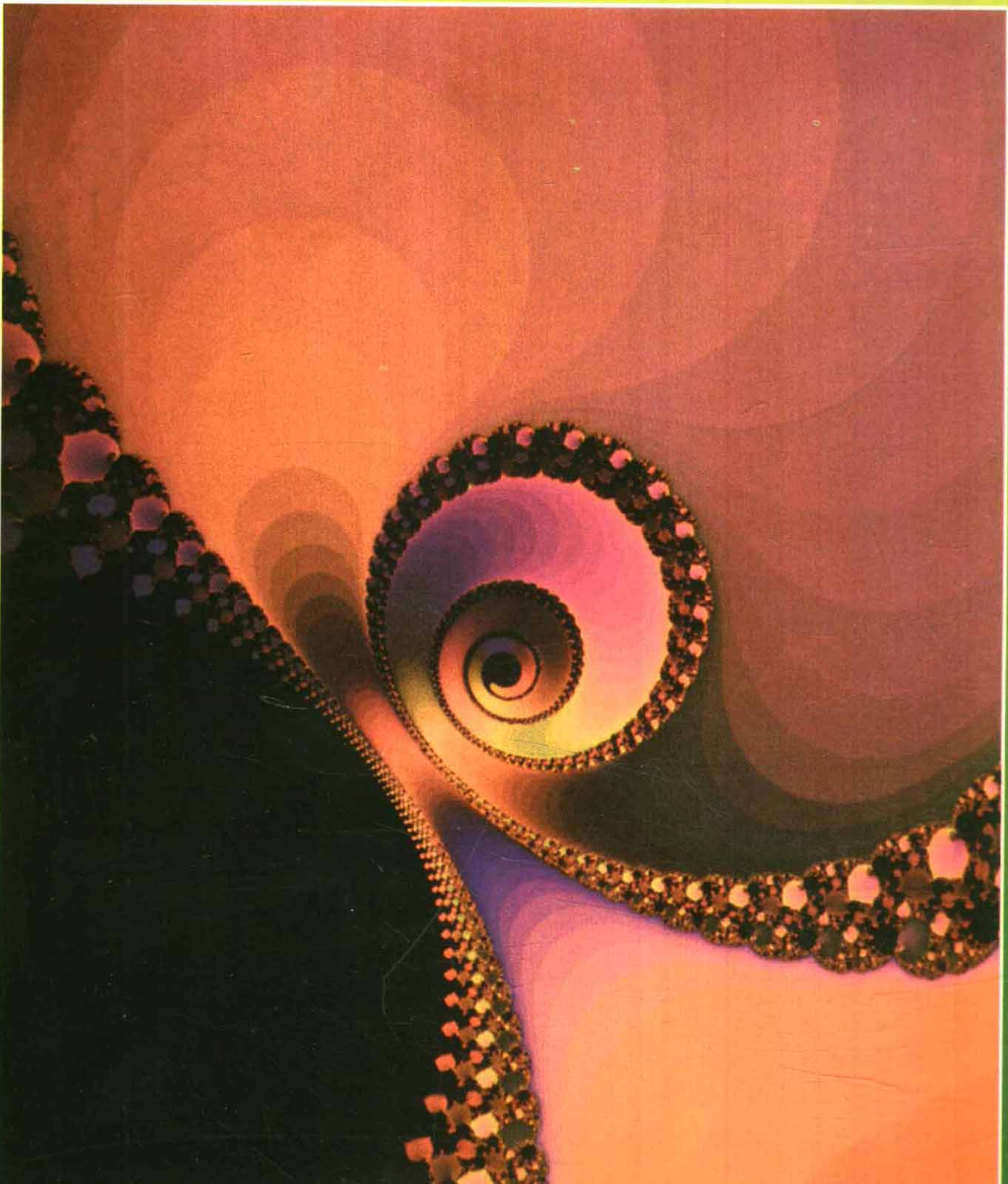
مجله ریاضی

برهان

برای دانش آموزان دبیرستان

۲۰



سال ششم ، بهار ۱۳۷۶ شمارهٔ سوم ، بها ۲۰۰۰ ریال

بسم الله الرحمن الرحیم

انتشارات مدرسه وابسته به وزارت آموزش و پرورش

صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه ❑ مدیر مسئول: محمود ابراهیمی

❑ سردبیر: حمیدرضا امیری ❑ مدیر داخلی: سیدمحمّدرضا هاشمی موسوی

مطالب این شماره

■ سال ششم، بهار ۱۳۷۶ شمارهٔ سوم،

برهان تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

۱ـ نگارش مقالات کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتب ریاضی راهنمایی) ۲ـ طرح مسائل کلیدی (برای دانش‌آموزان) به‌همراه‌حل آن ۳ـ طرح مسائل‌مسابقه‌ای (برای‌دانش‌آموزان) به‌همراه حل آن ۴ـ طرح‌معماهای‌ریاضی ۵ـ نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

■ هیئت تحریریه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافهٔ مقالات آزاد است. ■ مقالات مجله با رسم‌الخطِ انتشارات مدرسه به چاپ خواهد رسید.

■ مقالات وارده باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد. ■ مقالات رسیده مسترد نمی‌شود.

برهان هر ۳ ماه یک شماره منتشر می‌شود.

کد ۴۷۳/۱

نشانی: خیابان سپهبدقرنی، پل کریمخان‌زند، کوچه شهیدمحمودحقیقت‌طلب، پلاک ۳۶
تلفن: ۹ـ ۸۸۱۰۳۲۵، دورنویس (فاکس): ۸۸۲۰۵۹۹ صندوق‌پستی: ۱۴۱۵۵/۱۹۴۹

حرف اوّل

انسان موجودی هدف‌دار و آینده‌نگر است و همواره برای تحقق بخشیدن به آرمانها و ایده‌های خویش بـه دنـبال الگـوها و بهترینها می‌باشد. این الگوپذیری در واقع معیارهای سنجش ارزشهای خوب و بد انسانها قرار می‌گیرد.

در فرهنگ اصیل و جهانشمولِ اسلام و کتاب عظیم آن؛ قرآن کریم، همواره این الگوها در تمامی جنبه‌ها و ابعاد معرفی شده‌اند و علاوه بر آن امامان ما (علیهم‌السلام) که آینهٔ تمام نمای اسلام و قرآن هستند، بهترین الگوها و اسوه‌های بشری برای پیروان حق و حقیقت و رستگاریِ دنیا و آخرت هستند.

در قسمتی از آیهٔ ۲۱ در سورهٔ احزاب می‌خوانیم:

«رسول خدا برای شما الگویی شایسته است»

عزیزان دانش‌آموز! آیا شما از این حجّتهای آشکار و برحق الگو می‌گیرید؟ آیا تاکنون توانسته‌اید در جنبه‌های مـختلف زندگی خود از جمله برای دستیابی به ارزشهای مثبت و والای انسانی از وجود پرفیض و از سرچشمهٔ پربرکت و زلالِ ولایت استفاده کنید؟

بیایید از همینِ امروز و با تمسک به معصومین علیهم‌السلام و در پناه رهنمودها و بیاناتِ آن بزرگواران، همواره جزو بهترینها باشیم و در این مسیر ابتدا باید بهترینها را بشناسیم و توصیه‌های آنان را برای بهترین بودن به گوش جان بسپریم و -إن‌شاءا... - به آنها عمل کنیم.

نمونه‌هایی از سخنان گهربار معصومین علیهم‌السلام را در چند مورد خاصّ تقدیم رهروان و عاشقان آنها می‌کنیم باشد که با تمسک به گلواژه‌های پاکان زندگی خود را از انوار الهی آنها روشن سازیم.

بهترین انسان: پیامبراکرم صلی‌الله علیه و آله و سلم فرمودند: «بهترین انسانها، کسانی هستند که برای مردم سـودمندتر و مفیدتر باشند.»

بهترین بندگان خدا: امام علی علیه‌السلام فرمودند: «بهترین بندگان خدا، کسی است که وقتی کار نیک و خوب انجام دهد، شادمان باشد و اگر مرتکب خلافی شد از خدا طلب آمرزش کند.»

بهترین یاران: از رسول‌اکرم(ص) سؤال شد که بهترین یاور چه کسی است؟ ایشان فرمودند: «کسی است که وقتی خدا را یاد کردی تو را کمک کند و وقتی خدا را فراموش کردی، تو را به یاد خدا بیندازد.»

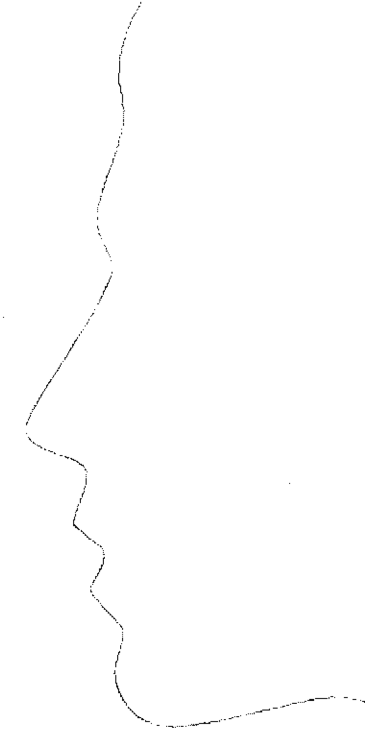
بهترین برادران: پیامبراکرم (ص) فرمودند: «بهترین برادران شما کسی است که عیبهایتان را به عنوان هدیه به شما بگوید.»

بهترین جوان: پیامبرگرامی اسلام (ص) فرمودند: «بهترین جوانان شما کسی است که از نظر متانت و وقار و دوراندیشی مثل پیرمردان باشد.»

بهترین مردان: پیامبراکرم (ص) فرمودند: «بهترین مردان شما کسی است که باتقوا، پرهیزکار، بخشنده و نگاهش پاک و نسبت به پدر و مادرش مهربان و نیک‌اندیش بوده و خانواده‌اش را به پناه بردن به دیگران واندارد.»

بهترین زیور برای زنان: رسول‌اکرم (ص) فرمودند: «پاکدامنی زیور زنان است.» و هم ایشان در جای دیگر فرمودند: «خدا زنان مردنما و مردان زن‌نما را لعنت کند و از رحمت خویش دور سازد.»

والسلام - سردبیر



شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۲۰)

○ پرویز شهریاری

نقش شکل در مسأله‌های هندسهٔ فضایی

اگر در هندسه روی صفحه، باید مراقبت کرد تا شکل درست و دقیق رسم شود و سپس با استدلال و با پیدا کردن رابطه‌های موجود بین عنصرهای شکل (زاویه‌ها و پاره‌خط‌های راست و غیره) درستی آن را تأیید کرد، در هندسه فضایی، اغلب خود رسم شکل، دشواری به وجود می‌آورد و پیدا کردن رابطه‌هایی که ممکن است بین عنصرهای شکل وجود داشته باشد، چندان ساده نیست. رسم برخی جسم‌های فضایی، مثل مکعب مستطیل، هرم یا منشور با قاعدهٔ سه ضلعی یا چهار ضلعی چندان دشوار نیست، ولی رسم جسم‌هایی مثل هرمی با قاعدهٔ هفت ضلعی، یا پیدا کردن شکلی که از برخورد یک صفحه با جسم فضایی یا دو جسم فضایی به دست می‌آید، یا تلاش برای یافتن «سایهٔ» یک جسم (یعنی تصویر مرکزی آن)، گاهی بسیار دشوار می‌شود. گذشته از رسم شکل، جست‌وجوی رابطه‌های لازم بین عنصرهای جسم هم اغلب سردرگمی به وجود می‌آورد.

در این‌جا با مثالهای مختلف، راهنمایی‌هایی برای رفع این دشواریها (تا آنجا که ممکن است) شده است، ولی تردیدی نیست، که ذهن خلاق جوانان، بهتر و بیشتر از این راهنماییها می‌تواند کارساز باشد. در آغاز برای نوع برخورد با مسأله‌های هندسه فضایی، سفارشی داریم و سپس به بحث دربارهٔ رفع دشواریهای مختلف مربوط به رسم شکل می‌پردازیم.

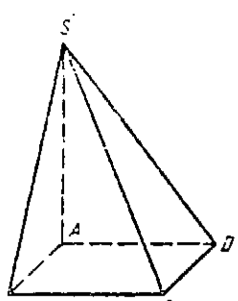
۱. از شکلی که رسم کرده‌اید، چه نتیجه‌هایی می‌گیرید؟

به این مسأله توجه کنید:

مسألهٔ ۱. در هرم SABCD می‌دانیم:

۱) قاعدهٔ ABCD یک مربع است؛

۲) یال جانبی SA بر صفحهٔ قاعده است.



شکل (۱)

اگر ضلع قاعده، طولی برابر a و یال SA طولی برابر b داشته باشد، مساحت سطح جانبی هرم را پیدا کنید.

موقعیت خاصی از یک هرم در برابر شماست. پیش از هر چیز، و بدون توجه به آن چه مسأله خواسته است، تلاش کنید، هر نتیجه‌ای را که می‌توان از موقعیت این مسأله گرفت، فهرست کنید و، سپس، به اثبات درستی آنها بپردازید. با هر مسأله‌ای،

چه در هندسه روی صفحه و چه در هندسهٔ فضایی می‌توان به این گونه عمل کرد، ولی به ویژه در هندسهٔ فضایی اهمیت بیشتری دارد. دربارهٔ مسألهٔ ۱، می‌توان این ویژگیها یا رابطه‌ها را نتیجه گرفت (با فرض وجود ویژگیهای ۱ و ۲) :

۳) یال SD برضلع CD از مربع قاعده عمود است :

۴) یال جانبی SB بر ضلع BC از قاعده عمود است :

۵) صفحهٔ SAD بر صفحهٔ SAB عمود است :

۶) دو صفحهٔ SAB و ABC بر هم عمودند :

۷) مثلث‌های SAD و SAB با هم برابرند :

۸) مثلث‌های SBC و SDC با هم برابرند :

۹) همهٔ وجه های جانبی هرم، مثلث‌های قائم‌الزاویه‌اند.

پیدا کردن این نتیجه‌ها، اهمیت بیشتری دارد تا اثبات آنها، زیرا اثبات آنها چندان دشوار نیست (نتیجه‌های ۳ و ۴ به یاری قضیهٔ سه عمود : ۵ و ۶ با توجه به معیار عمود بودن دو صفحه بر هم).

این بررسی به شما کمک می‌کند که، اگر مثلاً بخواهیم از رأس S، عمودهایی بر خط‌های راست DC و BC رسم کنیم، آنها را به اشتباه، غیر از SD و SB در نظر نگیریم. بدون این بررسی قبلی، ممکن است از این‌گونه اشتباهها پیش آید. درضمن، این بررسیها، حل مسألهٔ ۱ را کم و بیش حاضر و آماده در برابر ما قرار می‌دهد.

با تجزیه و تحلیل منطقی موقعیت شکل می‌توان به نتیجه‌های دیگری هم رسید. مثلاً، می‌توانیم در این‌باره بیندیشیم : آیا می‌توان جای گزاره‌های فرض را با گزاره‌های حکم عوض کرد؟ اندکی دقت نشان می‌دهد که می‌توان گزارهٔ ۲) را از گزاره‌های ۱) و ۵) و ۶) نتیجه گرفت، یعنی فرض ۲)، با دو فرض ۵) و ۶) هم‌ارز است. در این صورت مسأله ۱ را می‌توان به این صورت تغییر داد :

مسأله ۲. سطح جانبی هرم SABCD را پیدا کنید، به شرطی که قاعدهٔ ABCD مربع به ضلع برابر a باشد و وجه‌های SAB و SAD بر صفحهٔ قاعده عمود با ارتفاعی به طول برابر b باشند.

اگر شکل را بررسی کرده باشیم، متوجه می‌شویم که مسأله‌های ۱ و ۲)، دو مسألهٔ مختلف نیستند و می‌توان آنها را مسأله‌های هم ارز نامید.

مسأله را به صورت دیگری هم می‌توان مطرح کرد، که باز هم با مسأله‌های ۱ و ۲ هم‌ارز است.

مسألهٔ ۳. مطلوب است محاسبهٔ سطح جانبی هرم SABCD، به شرطی که ABCD، مربعی با ضلع به طول a باشد، همهٔ وجه‌های جانبی هرم،مثلث‌هایی قائم‌الزاویه باشند و ارتفاع هرم، طولی برابر b داشته باشد.

در این‌جا نتیجه گرفتن گزارهٔ ۲) از گزارهٔ ۹) اندکی دشوارتر است. برای برطرف کردن این دشواری، ابتدا این پرسش ساده را در برابر خود قرار می‌دهیم : آیا ممکن است دو یال جانبی هرم، بر قاعده عمود باشند؟ روشن است که، پاسخ این پرسش، منفی است : اگر دو یال جانبی هرم بر قاعده عمود باشند، آن وقت با هم موازی‌اند، در حالی که، همهٔ یال‌های جانبی، در رأس S به هم رسیده‌اند.

سپس، فرض می‌کنیم SBC، زاویه‌ای قائمه، یعنی خط راست SB بر خط راست BC عمود باشد. به این ترتیب، (BC) بر (SB) و بر (AB) عمود است، یعنی (BC) بر صفحهٔ SAB عمود می‌شود : ولی (BC) بر صفحه ABC واقع است، پس دو صفحهٔ SAB و ABC برهم عمودند. چون بنا بر فرض، مثلث SAB قائم‌الزاویه است، دو حالت ممکن وجود دارد :

اول $S\hat{B}A = 90^\circ$ به جز این (SB) هم بر (BC) عمود است، پس (SB) بر صفحهٔ ABC عمود است و، به این ترتیب ثابت می‌شود، یکی از یال‌های جانبی بر صفحهٔ قاعده عمود است.

دوم $S\hat{B}A \neq 90^\circ$و، در این صورت $S\hat{A}B = 90^\circ$، یعنی $(SA)\perp(AB)$ و چون دو صفحهٔ SAB و ABC برهم عمودند، بنابراین (SA) بر صفحهٔ ABC عمود می‌شود.

ممکن است پرسشی پیش آید : آیا حالت سومی وجود ندارد؟ آیا ممکن نیست زاویهٔ ASB قائمه باشد؟ ولی اگر در یک وجه جانبی، زاویهٔ رأس S قائمه، و بقیهٔ راس‌ها هم، مثلث‌هایی قائم‌الزاویه باشند، آن‌وقت باید همهٔ وجه‌های جانبی در راس S قائمه باشند، زیرا اگر تنها یکی از یال‌های جانبی بر ضلعی از قاعده عمود باشد، آن وقت، با توجه به تجزیه و تحلیلی که از

شکل کرده‌ایم، آن وقت هیچ یک از زاویه‌های قائمهٔ مثلث‌های جانبی، در رأس هرم قرار نمی‌گیرد. از طرف دیگر، هر چهار زاویهٔ رأس هرم، نمی‌توانند قائمه باشند، زیرا در این صورت، مجموع آنها برابر ۳۶۰ درجه می‌شود، که ممکن نیست.

به این ترتیب، ثابت می‌شود که از گزاره‌های ۱) و ۹) می‌توان گزارهٔ ۲) را نتیجه گرفت؛ یعنی مسألهٔ ۳ با مساله‌های ۱ و ۲ هم‌ارز است.

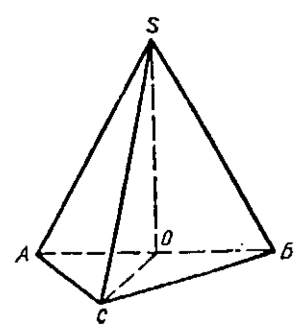
مثال دیگری از این گونه می‌آوریم.

مسألهٔ ۴. مطلوب است حجم هرم SABC، به شرطی که، در آن قاعدهٔ ABC مثلثی قائم‌الزاویه با وتر به طول c و زاویهٔ حاده برابر α باشد و در ضمن هر یال جانبی طولی برابر b داشته باشد.

بنابر فرض، در هرم SABC می‌دانیم:

۱) ABC مثلثی قائم‌الزاویه است ($\hat{C} = 90°$)؛

۲) یال‌های جانبی، طولی برابر دارند: $|SA| = |SB| = |SC|$ (شکل ۲).



شکل (۲)

اکنون باید به جست‌وجوی نتیجه‌های ناشی از دو فرض برویم، سیاههٔ این نتیجه‌ها را در این جا داده‌ایم:

۳) تصویر یال‌های جانبی بر صفحهٔ قاعده، طولی برابر دارند؛

$|AO| = |BO| = |CO|$

۴) SO، یعنی ارتفاع هرم، از نقطهٔ O، مرکز دایرهٔ محیطی قاعده می‌گذرد؛

۵) ارتفاع هرم، از وسط ضلع AB می‌گذرد؛

۶) صفحهٔ ASB بر صفحهٔ ABC عمود است؛

۷) مثلث‌های SAO، SBO و SCO قائم‌الزاویه‌اند؛

۸) مثلث‌های SAO، SBO و SCO برابرند؛

۹) همهٔ یال‌های جانبی، نسبت به صفحهٔ قاعده، شیبی برابر دارند:

$S\hat{A}O = S\hat{B}O = S\hat{C}O$

اثبات گزاره‌های ۳) تا ۹) دشوار نیست و، با توجه به آنها، مسألهٔ ۴، به سادگی حل می‌شود. در ضمن، ساختن مسأله‌هایی هم‌ارز با مسألهٔ ۴، چندان دشوار نیست. به عنوان نمونه:

مسألهٔ ۵. در هرم SABC، قاعدهٔ ABC، مثلثی است قائم‌الزاویه با وتر $|AB| = C$ و زاویهٔ حادهٔ $\hat{A} = \alpha$. در ضمن، وجه جانبی SAB بر صفحهٔ قاعده عمود است (یا ارتفاع هرم در صفحهٔ SAB قرار دارد، یا ارتفاع از وسط پاره‌خط راست AB، یا از مرکز دایرهٔ محیطی مثلث قاعده بگذرد و غیره) و طول یال جانبی SA برابر است با b. حجم هرم را محاسبه کنید.

می‌توان مسأله‌های هم‌ارز را با پیش‌فرض‌های ۱) و ۳) یا ۱) و ۴) یا ۱) و ۵) یا ۱) و ۶) یا ۱) و ۹) در نظر گرفت. حالت انتخاب ۴) و ۶) می‌تواند مسأله‌ای جالب باشد.

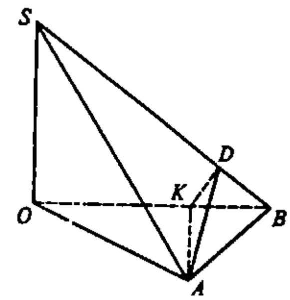
II. چگونه از یک شکل فضایی پیچیده، به شکل ساده‌تر و عملی‌تری برسیم؟ به این مسأله توجه کنید:

هرمی منتظم با قاعدهٔ شش ضلعی، که زاویهٔ مسطحهٔ رأس آن برابر α است، داده شده است. مقدار زاویهٔ دو وجهی بین دو وجه مجاور آن را پیدا کنید.

در این جا، رسم تمامی هرم، چندان ساده نیست. به جز آن، تعداد پاره‌خط‌های راست، صفحه‌ها، زاویه‌ها و زاویه‌های دو وجهی، چنان زیادند که انتخاب عنصرهای لازم را بر حل مساله دشوار می‌کند. ولی حقیقت این است که ما، به تمامی شکل نیازی نداریم و کافی است، بخش ساده‌ای از آن را انتخاب کنیم که هم رسم آن ساده باشد و هم شامل همهٔ عنصرهای لازم (برای حل) باشد.

هرمی با قاعدهٔ مثلثی شکل را در نظر می‌گیریم که $\frac{1}{6}$ هرم اصلی باشد: دو راس آن، دو انتهای ارتفاع هرم اصلی و یک

ضلع قاعدهٔ آن، ضلعی از قاعدهٔ هرم اصلی باشد (شکل ۳).



شکل (۳)

در این هرم (با توجه به نام‌گذاریهای شکل ۳)

$$|OB|=|OA| \;,\; B\hat{O}A=۶۰^\circ \;,\; A\hat{S}B=\alpha$$

در ضمن، پاره‌خط راست SO بر صفحهٔ ABC عمود است.

زاویهٔ دو وجهی بین صفحه‌های ASB و OBS (یا OAS) برابر است با نصف زاویهٔ دو وجهی مجهول (زاویهٔ دو وجهی مجهول را φ می‌نامیم).

از نقطهٔ A، عمودهای AD و AK را به ترتیب بر BS و OB فرود می‌آوریم؛ در این صورت $K\hat{D}A=\frac{\varphi}{۲}$. اگر $|OA|=|OB|=R$ بگیریم، خواهیم داشت:

$$|AK|=\frac{\sqrt{۳}}{۲}R \;,\; |AB|=R \;,\; |AD|=\frac{R}{\cos\frac{\alpha}{۲}} \;,$$

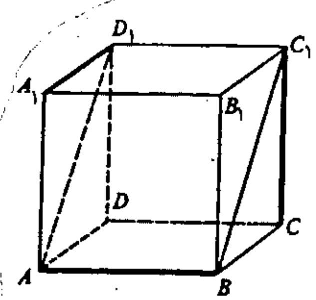
$$\sin\frac{\varphi}{۲}=\frac{|AK|}{|AD|}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲} \;.$$

$$\varphi=۲\arcsin\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}\right)$$

در برخی موردها باید برعکس با اضافه کردن عنصرهایی شکل فضایی را ملموستر کرده بویژه وقتی که در مسأله، تنها از خط‌ها و صفحه‌ها صحبت شده است، آنها را «بی‌پناه و سرگردان» در فضا رها نکنید و تلاش کنید یک جسم فضایی (که رسم آن ساده باشد) پیدا کنید که، این خط‌ها و صفحه‌ها وابسته به آن باشند. دو نمونه از این‌گونه می‌آوریم:

مسألهٔ ۶. سه خط راست در فضا داده شده است که دو به‌دو بر هم عمودند و فاصلهٔ بین هر دو تا از آنها برابر واحد است. مساحت متوازی‌الاضلاعی را پیدا کنید که، دو رأس آن، روی یکی از این خط‌های راست و، دو رأس دیگر آن، روی دو خط راست دیگر باشد.

مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ به ضلع واحد را به عنوان چند وجهی تکیه‌گاه در نظر می‌گیریم (شکل ۴). خط‌های راست AB، CC_1 و D_1A_1 دو به دو برهم عمودند و فاصله‌ای برابر ۱ دارند. متوازی‌الاضلاع ABC_1D_1 (که در عین حال، مستطیل است) با شرطهای مسأله می‌سازد و مساحتی برابر $\sqrt{۲}$ دارد. هر متوازی‌الاضلاع دیگری هم که با شرطهای مساله در نظر بگیریم، همین مساحت را دارد (خودتان این حکم را ثابت کنید).

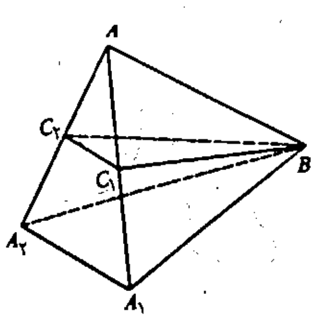


شکل (۴)

البته، همهٔ مساله‌ها به همین سادگی قابل تفسیر نیستند. به این مسأله توجه کنید:

مسألهٔ ۷. پرتو نور با زاویهٔ α بر یک آیینهٔ مسطح تابیده است. صفحهٔ آیینه به اندازهٔ زاویهٔ β دور تصویر پرتو بر آیینه دوران می‌کند. پرتو باز تابیده به اندازهٔ چه زاویه‌ای منحرف می‌شود؟

اندیشهٔ حل مسأله در این جاست، که به جای بازتاب پرتو از آیینه (یعنی به جای درک فیزیکی مساله) به قرینهٔ نقطهٔ نورانی نسبت به صفحهٔ آیینه (یعنی درک ریاضی آن) توجه کنیم. A را نقطهٔ سرچشمهٔ نور فرض کنید (شکل ۵). B را نقطه‌ای، که در



شکل (۵)

آن‌جا پرتو نوری به آینه تابیده است، A_1 و A_2 را قرینه‌های A به ترتیب نسبت به حالت نخستین و حالت دوران یافتهٔ آینه، C_1 را وسط پاره‌خط راست AA_1 (C_1، تصویر A بر آینه در حالت نخستین است) و C_2 را وسط AA_2 می‌گیریم. چون بازتاب پرتو در امتداد پاره‌خط‌های راست A_1B و A_2B است، بنابراین زاویهٔ مجهول برابر است با زاویهٔ A_1BA_2. خط‌های راست AC_1 و AC_2، به ترتیب بر حالت نخستین آینه و بر حالت دوران یافته آن عمودند، یعنی $C_1\hat{A}C_2 = A_1\hat{A}A_2 = \beta$ بنا به فرض $|AB| = |A_1B| = |A_2B| = a$. اگر $A\hat{B}C_1 = \alpha$ فرض کنیم، آن وقت

$$|AC_1| = a\sin\alpha \quad |C_1C_2| = |AC_1|\sin\beta = a\sin\alpha\sin\beta$$

($A\hat{C_2}C_1 = 90^\circ$، زیرا C_1C_2 متعلق به آینهٔ دوران یافته، و C_2 تصویر A بر آن است). به این ترتیب

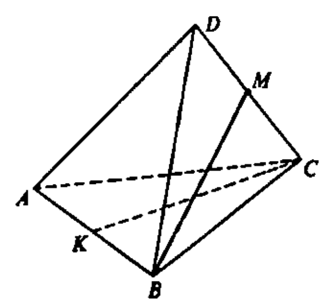
$$|A_1A_2| = 2|C_1C_2| = 2a\sin\alpha\sin\beta$$

اکنون با توجه به معلوم بودن طول ضلع‌های مثلث متساوی‌الساقین A_1BA_2 می‌توان مقدار زاویهٔ A_1BA_2 را به دست آورد. این زاویه برابر است با:

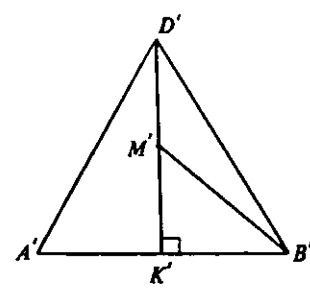
$$2\arcsin(\sin\alpha\sin\beta)$$

گاهی شکل فضایی تنها برای روشن کردن موقعیت لازم است (و گاهی برای این منظور هم لازم نیست) و می‌توان تمامی استدلال و محاسبه را روی یک شکل واقع بر صفحه انجام داد. به این مساله توجه کنید:

مسأله ۸. در چهار وجهی ABCD، همهٔ یال‌ها طولی برابر واحد دارند. نقطه‌های K و M را به ترتیب وسط پاره‌خط‌های راست AB و CD انتخاب کرده‌ایم. فاصلهٔ بین دو خط راست CK و BM را پیدا کنید.



شکل (۶)



شکل (۷)

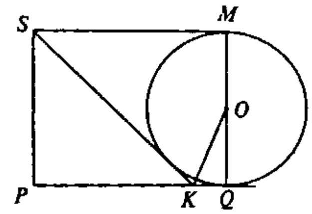
شکل ۶ موقعیت مسأله و بستگی بین عنصرهای آن را روشن می‌کند. از خط راست AB صفحه‌ای عمود بر خط راست CK می‌گذرانیم و سپس هرم را بر این صفحه تصویر می‌کنیم (شکل ۷). در این عمل، خط راست CK بر نقطهٔ K' تصویر می‌شود، که وسط پاره‌خط راست $A'B'$ است $|A'B'| = |AB| = 1$. ارتفاع $D'K'$ از مثلث $A'B'D'$ طولی برابر طول ارتفاع هرم دارد، یعنی $|D'K'| = \sqrt{\frac{2}{3}}$. M' وسط پاره‌خط راست $D'K'$، تصویر نقطهٔ M است. فاصلهٔ بین خط‌های راست CK و BM برابر است با فاصلهٔ از نقطهٔ K' تا خط راست $B'M'$ (چرا؟). با یک مسألهٔ ساده روی صفحه سر و کار پیدا می‌کنیم. مطلوب است طول ارتفاع وارد بر وتر، در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که، طول ضلع‌های مجاور به زاویهٔ قائمهٔ آن برابر $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$ و $\frac{1}{2}$ است. و این طول (یعنی فاصلهٔ مورد نظر مسأله) برابر $\frac{1}{\sqrt{10}}$ است.

شکلهای فضایی، که همراه با خط‌ها و سطح‌های منحنی هستند، جای ویژه‌ای دارند. در این حالتها اغلب می‌توان (و باید) از تلاش برای رسم تمامی شکل فضایی صرفنظر کرد و به شکلی (که ممکن است مسطحه یا فضایی باشد) متوسل شد که شامل مرکزها، محورها، نقطه‌های اصلی، مماس‌ها و سایر عنصرهای اصلی مساله باشد. مثلاً، اگر با چهار کرهٔ دو به‌دو مماس بر هم، سر و کار داشته باشیم، می‌توان یک چهار وجهی در نظر گرفت که یال‌های آن، طولی برابر قطرهای این کره‌ها داشته باشد و راس‌های آن، معرف مرکزهای این کره‌ها باشند. گاهی بهتر است شکل فضایی را در ذهن خود نگه داریم و تنها روی یک شکل سادهٔ مسطحه (و یا حتی بدون آن) استدلال خود را ادامه دهیم، زیرا علاوه بر آن که رسم شکل اصلی دشواریهایی ایجاد می‌کند، ممکن است از چارچوب صفحهٔ کاغذ ما هم تجاوز کند و یا آن قدر شلوغ شود، که نتوان عنصرهای لازم آن را دید. به یک مساله توجه کنیم:

مسألهٔ ۹. چهار کره با شعاع‌های برابر بر صفحه‌ای مماس‌اند؛ در ضمن، هر کره بر دو کرهٔ مجاور خود مماس است. مخروطی را در نظر می‌گیریم که قاعدهٔ آن روی صفحهٔ مماس بر کره‌ها باشد و ارتفاعی برابر قطر این کره‌ها

داشته باشد؛ در ضمن سطح جانبی مخروط بر هر یک از این کره‌ها مماس است. نسبت حجم‌های مخروط و کره‌ها را پیدا کنید.

اگر شعاع هر کره را برابر R بگیریم، آن وقت مرکزهای آنها، مربعی با ضلع به طول ۲R تشکیل می‌دهند. شکل ۸ برای حل



شکل (۸)

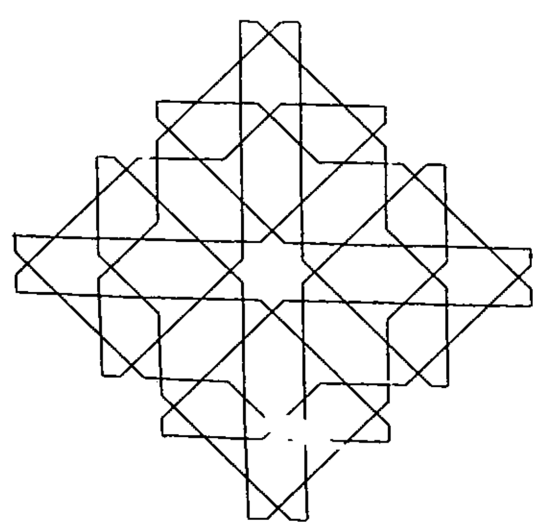
مساله کفایت می‌کند. در این شکل SP محور مخروط، MQ قطر یکی از کره‌ها (Q نقطهٔ تماس کره با صفحه است) و SK مولد مخروط مماس بر کره است. روشن است که $|SM| = R\sqrt{2}$ (نصف قطر مربع با ضلع به طول ۲R). اگر $M\hat{S}O = \varphi$، آن وقت $tg\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ یعنی

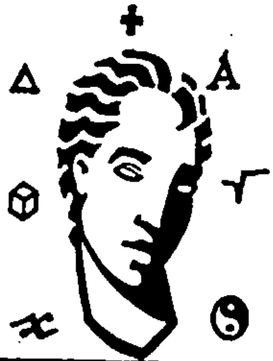
$$P\hat{S}K = 90^\circ - 2\varphi$$

$$|PK| = 2R\,tg(90^\circ - 2\varphi) = R\frac{1 - tg^2\varphi}{tg\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}}R$$

اکنون دیگر به سادگی نسبت مورد نظر به دست می‌آید که برابر است با $\frac{1}{4}$.

تا بعد





تفریح اندیشهٔ ۱

مربع وفقی

مربع وفقی زیر ظاهر ساده، اما در واقع بسیار غیر متعارف است. چون اعداد آن را به طور قائم، افقی، یا سطری جمع کنیم حاصل ۲۶۴ است.

در مربع وفقی چهار در چهاری چون این مربع می‌توان انتظار داشت که چهار مربع گوشه‌ای، چهار مربع میانی، و هریک از چهار مربع موجود به مجموع وفقی یکسانی برسند. تا اینجا مطلب شگفت‌انگیزی موجود نیست.

در این صورت ویژگی جالب این مربع وفقی چیست؟ این دقیقاً همان چیزی است که باید بیابید.

۱۸	۹۹	۸۶	۶۱
۶۶	۸۱	۹۸	۱۹
۹۱	۱۶	۶۹	۸۸
۸۹	۶۸	۱۱	۹۶

جواب در صفحه ۸۷

تغییرات و انتقال منحنی‌ها

● احمد قندهاری

تابع f به معادله $y = f(x)$ مفروض است.

می‌خواهیم نمودارهای تابع‌های به معادلات $y_1 = -f(x)$ و $y_2 = f(-x)$ و $y_3 = f(|x|)$ و $y_4 = |f(x)|$ و $y_5 = f(x-a)$ و $y_6 = b + f(x)$ و $y_7 = b + f(x-a)$ و $y_8 = f(kx)$ و $y_9 = kf(x)$ و نمودار رابطه $|y_{10}| = f(x)$ را رسم کنیم.

همچنین اگر منحنی‌های دو تابع f و g معلوم باشد، می‌خواهیم نمودارهای تابع‌های $f+g$ و $f-g$ را رسم کنیم.

۱ ــ رسم نمودار تابع به معادله $y_1 = -f(x)$.

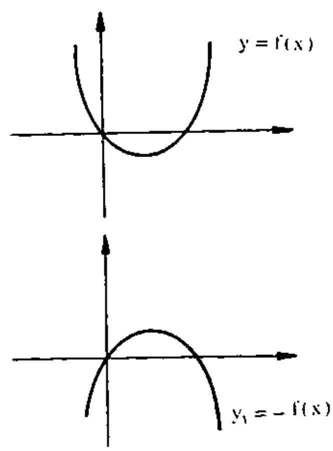
اگر نقطه $M\Big|_{y_0}^{x_0}$ ، نقطه‌ای از منحنی تابع به معادله $y = f(x)$ باشد، آنگاه نقطه $M'\Big|_{-y_0}^{x_0}$ ، نقطه ای از منحنی تابع به معادله $y_1 = -f(x)$ است.

و بالعکس :

اگر $M' \in y_1 \Rightarrow -y_0 = -f(x_0) \Rightarrow y_0 = f(x_0) \Rightarrow M\Big|_{y_0}^{x_0} \in f$

چون دو نقطه $M\Big|_{y_0}^{x_0}$ و $M'\Big|_{-y_0}^{x_0}$ قرینه یکدیگر نسبت به محور xها می‌باشند.

درنتیجه برای رسم نمودار تابع به معادله $y_1 = -f(x)$ باید قرینه منحنی تابع به معادله $y = f(x)$ را نسبت به محور xها رسم کنیم. در شکلهای زیر نمودار دو تابع $y = f(x)$ و $y_1 = -f(x)$ نشان داده شده است.



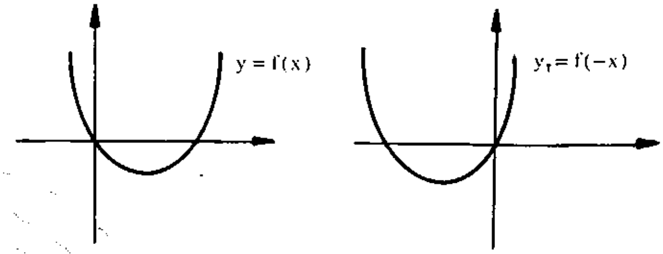
۲ ــ رسم تابع به معادله $y_2 = f(-x)$

اگر نقطه $M\Big|_{y_0}^{x_0}$ روی منحنی تابع f به معادله $y = f(x)$ باشد، آنگاه نقطه $M'\Big|_{y_0}^{-x_0}$ روی منحنی تابع به معادله $y_2 = f(-x)$ است و بالعکس :

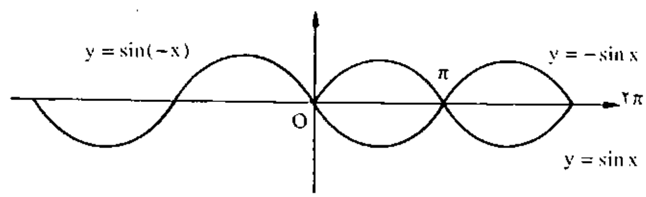
اگر $M'\Big|_{y_0}^{-x_0} \in y_2 \Rightarrow y_0 = f(-(-x_0)) \Rightarrow y_0 = f(x_0) \Rightarrow$

$M\Big|_{y_0}^{x_0} \in f$

چون نقطه $M\Big|_{y_0}^{x_0}$ و $M'\Big|_{y_0}^{-x_0}$ قرینه یکدیگر نسبت به محور yها می‌باشند، درنتیجه برای رسم نمودار تابع به معادله $y_2 = f(-x)$ باید قرینه نمودار تابع f به معادله $y = f(x)$ را نسبت به محور yها رسم کنیم. در شکلهای بعد نمودارها دو تابع به معادلات $y = f(x)$ و $y_2 = f(-x)$ رسم شده است.



مثال : نمودار تابع به معادله $y = \sin x$ ، $0 \le x \le 2\pi$ معلوم است. می‌خواهیم نمودارهای دو تابع به معادلات $y_1 = -\sin x$ و $y_2 = \sin(-x)$ را رسم کنیم.

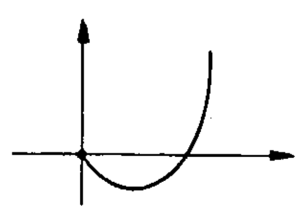


۳ ــ رسم تابع به معادله $y_3 = f(|x|)$

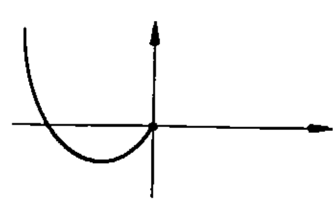
می‌دانیم $|x| = \begin{cases} +x \;, & x \ge 0 \\ -x \;, & x < 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_3 = f(x) \;, & x \ge 0 \\ y_3 = f(-x) \;, & x < 0 \end{cases}$$

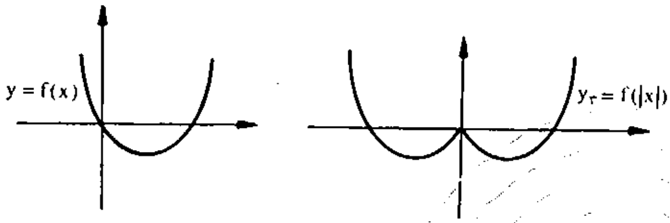
پس برای رسم تابع به معادله $y_3 = f(|x|)$ ، باید از نمودار تابع f قسمتی را انتخاب کرد، که $x \ge 0$ یعنی این قسمت :



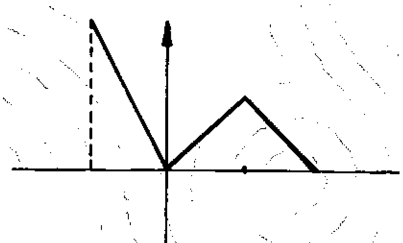
و از نمودار تابع به معادله $y_2 = f(-x)$ ، باید قسمتی را انتخاب کرد که $x < 0$ یعنی این قسمت :



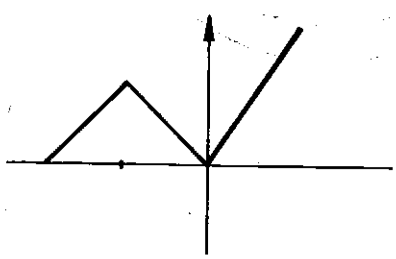
بنابراین نمودار تابع به معادله $y_3 = f(|x|)$ چنین خواهد شد.



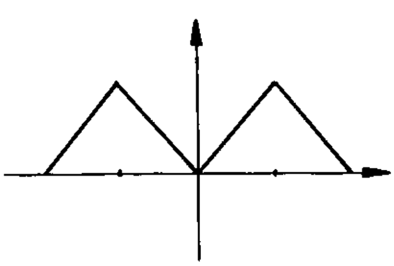
مثال : اگر نمودار تابع به معادله $y = f(x)$ به صورت زیر باشد



آنگاه نمودار تابع به معادله $y_2 = f(-x)$ چنین است :



و نمودار تابع به معادله $y_3 = f(|x|)$ چنین است



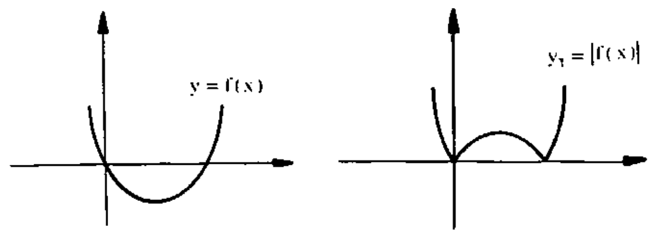
۴ ــ رسم تابع به معادله $y_4 = |f(x)|$

اگر نقطه $M\left|\begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix}\right.$ روی منحنی تابع به معادله $y = f(x)$ باشد، آنگاه نقطه $M'\left|\begin{matrix} x_0 \\ |y_0| \end{matrix}\right.$ روی منحنی تابع به معادله $y_4 = |f(x)|$ است.

چنانچه منحنی تابع f به معادله $y = f(x)$ تماماً بالا یا روی محور xها باشد آنگاه نمودار تابع به معادله $y_4 = |f(x)|$ نیز همان

نمودار تابع f است.

و اگر قسمتی یا تمام منحنی تابع f در زیر محور xها باشد، برای رسم تابع به معادله $y_4=|f(x)|$ باید قرینه این قسمت از منحنی را نسبت به محور xها رسم کنیم.



۵ ــ رسم تابع به معادله $y_5=f(x-a)$

اگر نقطه $M\Big|_{y_0}^{x_0}$ روی منحنی تابع به معادله $y=f(x)$ باشد، آنگاه نقطه $M'\Big|_{y_0}^{x_0+a}$ روی منحنی تابع به معادله $y_5=f(x-a)$ است و بالعکس:

اگر $M'\Big|_{y_0}^{x_0+a} \in y_5 \Rightarrow y_0=f(x_0+a-a)\Rightarrow$

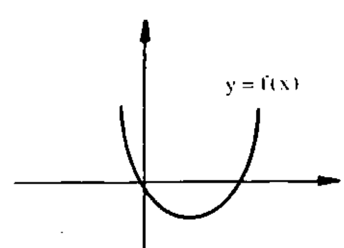
$y_0=f(x_0)\Rightarrow M\Big|_{y_0}^{x_0}\in f$

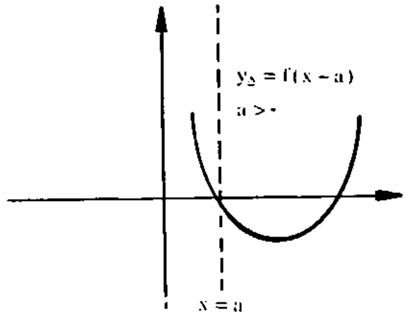
پس می‌توان گفت هر نقطه به طول x_0 واقع بر منحنی تابع f (بدون تغییر عرض) در منحنی به معادله $y_5=f(x-a)$ به نقطه‌ای به طول (x_0+a) تبدیل می‌شود.

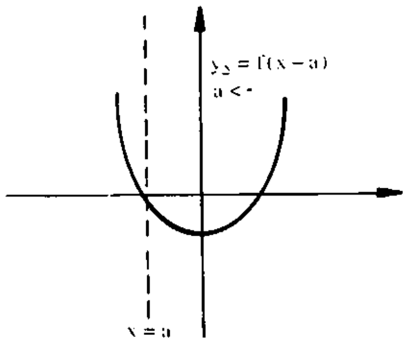
به‌عبارت دیگر می‌توان گفت هر نقطه از منحنی تابع f با بردار انتقال $\vec{V}(a,0)$ به نقطه‌ای از منحنی به معادله $y_5=f(x-a)$ تبدیل می‌شود.

بنابراین برای رسم تابع به معادله $y_5=f(x-a)$ کافیست کلیهٔ نقاط منحنی تابع f را به اندازه $x=a$ در راستای محور xها تغییر مکان می‌دهیم.

اگر $a>0$، آنگاه هر نقطه از منحنی تابع f به اندازه $x=a$ به سمت راست محور xها انتقال می‌یابد و اگر $a<0$، آنگاه هر نقطه از منحنی تابع f به اندازه $x=a$ به سمت چپ محور xها انتقال می‌یابد.







۶ ــ رسم تابع به معادله $y_6=b+f(x)$

اگر نقطه $M\Big|_{y_0}^{x_0}$ روی منحنی تابع به معادله $y=f(x)$ باشد، آنگاه نقطه $M'\Big|_{b+y_0}^{x_0}$ روی منحنی تابع به معادله $y_6=b+f(x)$ است و بالعکس

اگر $M'\Big|_{b+y_0}^{x_0} \in y_6 \Rightarrow b+y_0=b+f(x_0)\Rightarrow$

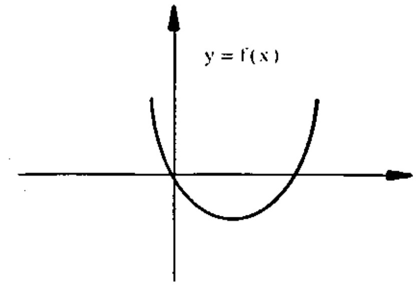
$y_0=f(x_0)\Rightarrow M\Big|_{y_0}^{x_0}\in f$

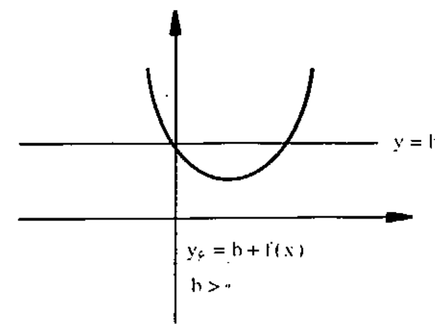
پس هر نقطه به عرض y_0 واقع بر منحنی تابع f (بدون تغییر طول) در منحنی به معادله $y_6=b+f(x)$ به عرض $b+y_0$ تبدیل می‌شود.

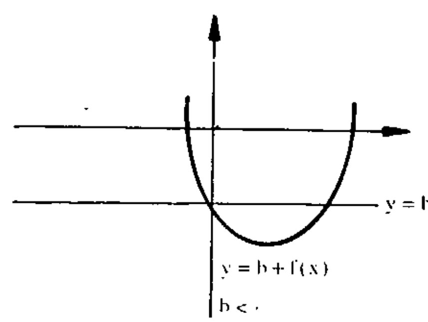
به عبارت دیگر می‌توان گفت هر نقطه منحنی تابع به معادله $y=f(x)$ با بردار انتقال $\vec{V}(0,b)$ به نقطه‌ای از منحنی به معادله $y_6=b+f(x)$ تبدیل می‌شود.

در نتیجه برای رسم تابع به معادله $y_6=b+f(x)$ کافیست کلیه نقاط منحنی تابع f را به اندازه $y=b$ در راستای محور yها تغییر مکان می‌دهیم.

اگر $b>0$، آنگاه هر نقطه از منحنی تابع f به اندازه $y=b$ به طرف بالای محور yها انتقال می‌یابد و اگر $b<0$، آنگاه هر نقطه از منحنی تابع f به اندازه $y=b$ به طرف پائین محور yها انتقال می‌یابد.







۷ ــ رسم تابع به معادله $y_{۷} = b + f(x-a)$

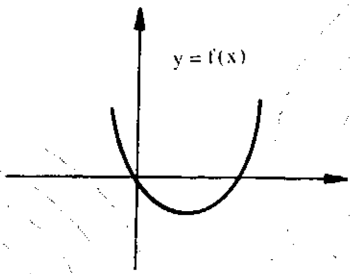
در حقیقت رسم این تابع ترکیبی از رسم دو تابع به معادلات $y_{۵} = f(x-a)$ و $y_{۶} = b + f(x)$ است.

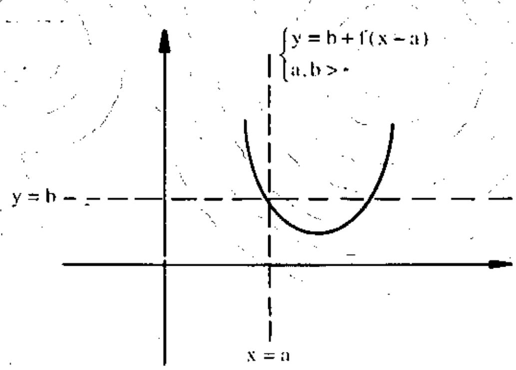
اگر نقطه $M\Big|^{x_\circ}_{y_\circ}$ روی منحنی تابع f باشد، آنگاه نقطه $M'\Big|^{x_\circ+a}_{y_\circ+b}$ ، روی منحنی تابع به معادله $y_{۷} = b + f(x-a)$ واقع است و بالعکس.

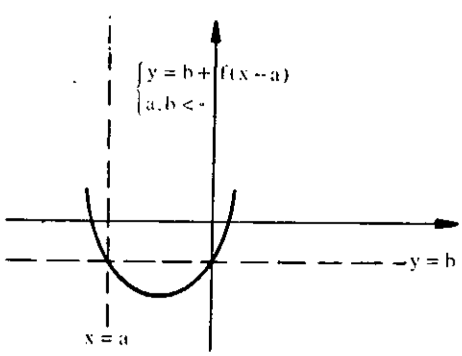
اگر $M'\Big|^{x_\circ+a}_{y_\circ+b} \in y_{۷} \Rightarrow y_\circ + b = b + f(x_\circ + a - a) \Rightarrow$

$$y_\circ = f(x_\circ) \Rightarrow M\Big|^{x_\circ}_{y_\circ} \in f$$

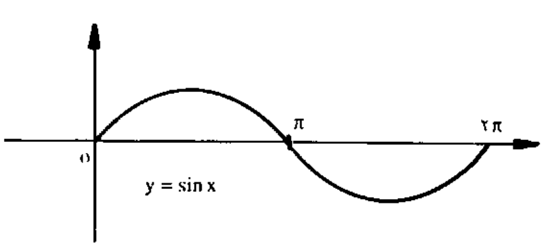
بنابراین برای رسم نمودار تابع به معادله $y_{۷} = b + f(x-a)$ ، هر نقطه از منحنی تابع f را به اندازه a در راستای محور xها و به اندازه b در راستای محور yها انتقال می‌دهیم. به عبارت دیگر هر نقطه منحنی تابع به معادله $y = f(x)$ با بردار انتقال $\vec{V}(a,b)$ به نقطه‌ای از منحنی تابع به معادله $y_{۷} = b + f(x-a)$ تبدیل می‌شود.

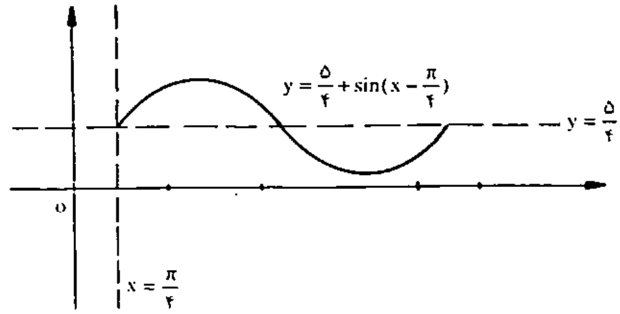


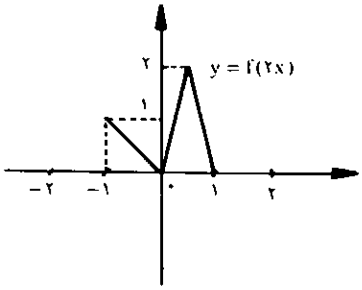




مثال : منحنی تابع به معادله $y = \sin x$ ، $۰ \le x \le ۲\pi$ مفروض است. نمودار تابع به معادله $y = \frac{۵}{۴} + \sin(x - \frac{\pi}{۴})$ را رسم کنید.







$D_{f(2x)} = [-1,1]$

۸ ــ رسم تابع به معادله $y_8 = f(kx)$

اگر نقطه $M\left|\begin{matrix}x_0\\y_0\end{matrix}\right.$ روی منحنی تابع f باشد، آنگاه نقطه $M'\left|\begin{matrix}\frac{x_0}{k}\\y_0\end{matrix}\right.$ روی منحنی تابع به معادله $y_8 = f(kx)$ است و بالعکس

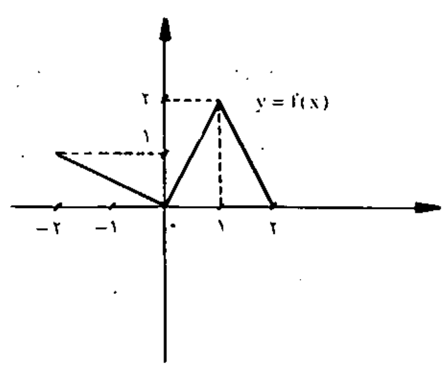
اگر $M'\left|\begin{matrix}\frac{x_0}{k}\\y_0\end{matrix}\right. \in y_8 \Rightarrow y_0 = f(k \times \frac{x_0}{k}) \Rightarrow y_0 = f(x_0) \Rightarrow$

$M\left|\begin{matrix}x_0\\y_0\end{matrix}\right. \in f$

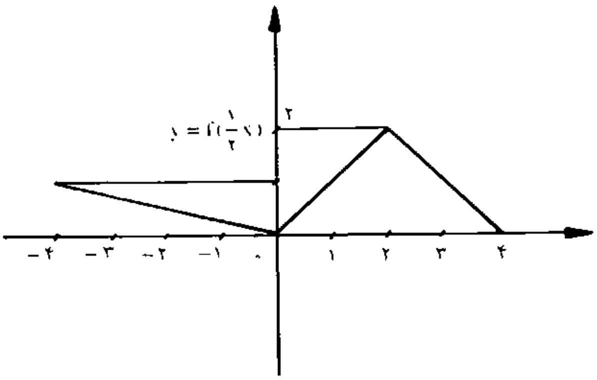
بنابراین برای رسم تابع به معادله $y_8 = f(kx)$ باید طول هر نقطه از منحنی f را (با حفظ مقدار عرض آن) بر عدد (K) تقسیم کنیم.

یعنی اگر $k = 2$، آنگاه نقطه $M\left|\begin{matrix}x_0\\y_0\end{matrix}\right.$ از منحنی تابع f به نقطه $M'\left|\begin{matrix}\frac{x_0}{2}\\y_0\end{matrix}\right.$ و اگر $k = \frac{1}{2}$ آنگاه نقطه $M\left|\begin{matrix}x_0\\y_0\end{matrix}\right.$ از منحنی تابع f به نقطه $M\left|\begin{matrix}2x_0\\y_0\end{matrix}\right.$ تبدیل می‌شود.

چنانچه حوزهٔ تعریف تابع f فاصله $[a,b] \subset \mathbb{R}$ باشد، آنگاه حوزه تعریف تابع به معادله $y_8 = f(kx)$، فاصله $\left[\frac{a}{k}, \frac{b}{k}\right] \subset \mathbb{R}$ خواهد شد.



$D_{f(x)} = [-2,2]$



$D_{f(\frac{1}{2}x)} = [-4,4]$

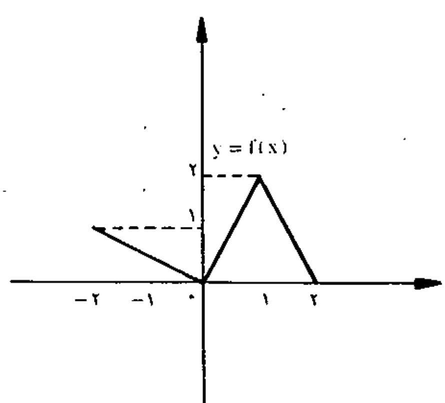
۹ ــ رسم نمودار تابع به معادله $y_9 = kf(x)$

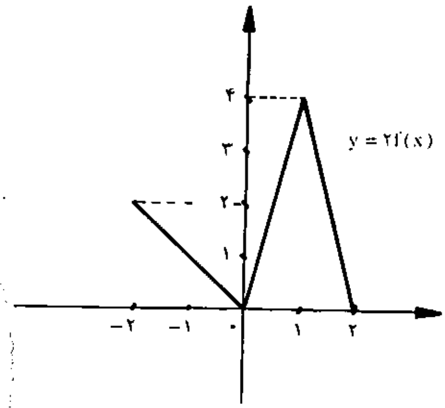
اگر نقطه $M\left|\begin{matrix}x_0\\y_0\end{matrix}\right.$ روی منحنی تابع به معادله $y = f(x)$ باشد، آنگاه نقطه $M'\left|\begin{matrix}x_0\\ky_0\end{matrix}\right.$ روی منحنی تابع به معادله $y_9 = kf(x)$ است. و بالعکس:

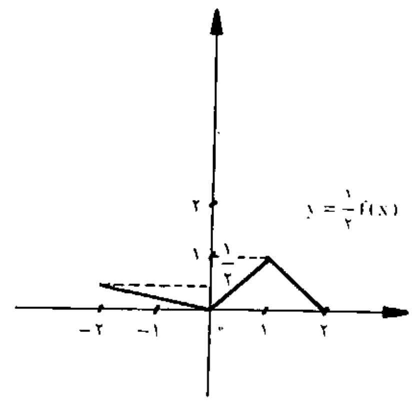
اگر $M'\left|\begin{matrix}x\\ky_0\end{matrix}\right. \in y_9 \Rightarrow ky_0 = kf(x_0) \Rightarrow y_0 = f(x_0) \Rightarrow$

$M\left|\begin{matrix}x_0\\y_0\end{matrix}\right. \in f$

پس برای رسم تابع به معادله $y_9 = kf(x)$ باید عرض هر نقطه از منحنی تابع f را (با حفظ طول آن) در عدد k ضرب کنیم.





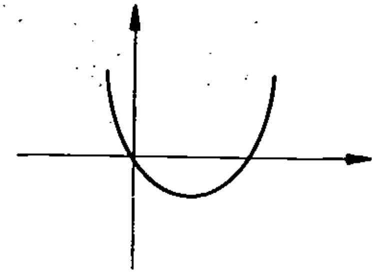


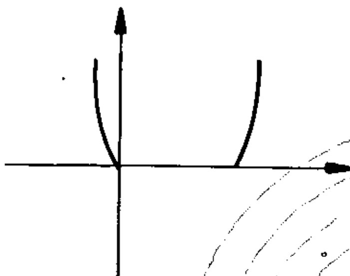
۱۰ ـ نمودار رابطه $|y_{1}| = f(x)$

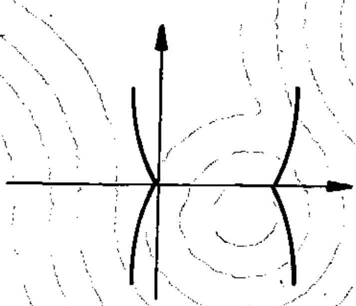
اولاً : $f(x) \geq ۰$ یعنی از منحنی تابع f باید قسمتهایی را انتخاب کرد که روی محور xها یا بالای محور xهاست،از طرفی :

$$|y_{1}| = f(x) \Rightarrow y_{1} = \pm f(x)$$

ثانیاً : باید قرینه همین قسمت از منحنی f که روی محور xها یا بالای محور xها قرار دارد را نسبت به محور xها هم رسم کنیم.







۱۱ ـ رسم تابع f+g

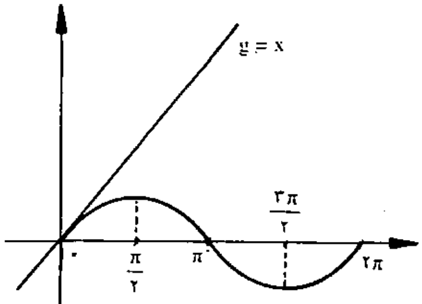
فرض می‌کنیم $y_{1} = f(x)$ و $y_{2} = g(x)$ و $D_f = D_g = [a,b] \subset \mathbb{R}$ اگر نقطه‌ای به طول x_{0} روی منحنی تابع f و روی منحنی تابع g باشد داریم :

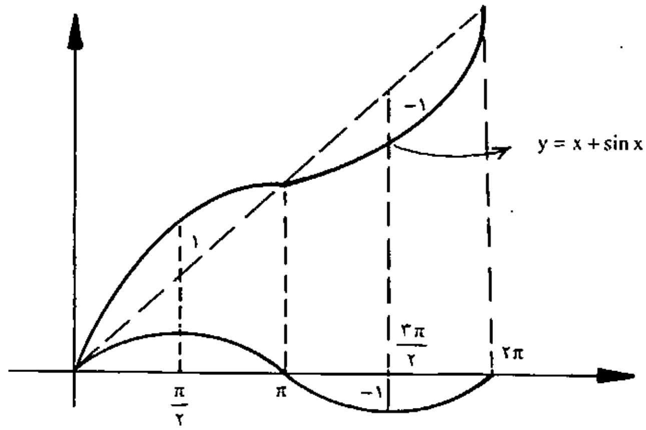
نقطه $M_{1}\Big|_{f(x_{0})}^{x_{0}}$ روی منحنی تابع f و نقطه $M_{2}\Big|_{g(x_{0})}^{x_{0}}$ روی منحنی تابع g است درنتیجه نقطه $M\Big|_{f(x_{0})+g(x_{0})}^{x_{0}}$ روی منحنی تابع f + g است. پس برای رسم منحنی تابع به معادله $y = f(x)+g(x)$ باید برای هر نقطه از منحنی این تابع عرضهای نقاط هم طول روی دو منحنی f و g را با هم جمع کرد.

مثال منحنی نمایش تابع به معادله $y = x+\sin x$ را وقتی $۰ \leq x \leq ۲\pi$ رسم کنید.

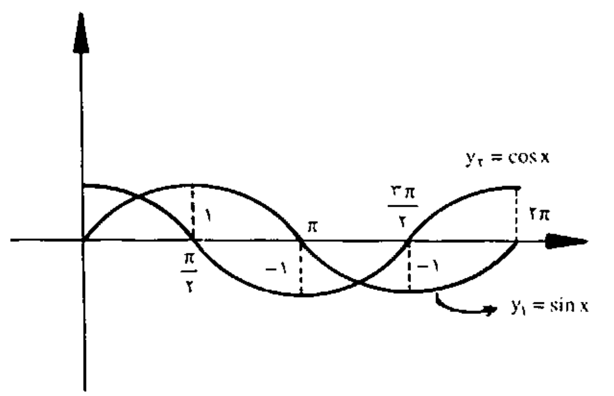
توجه :

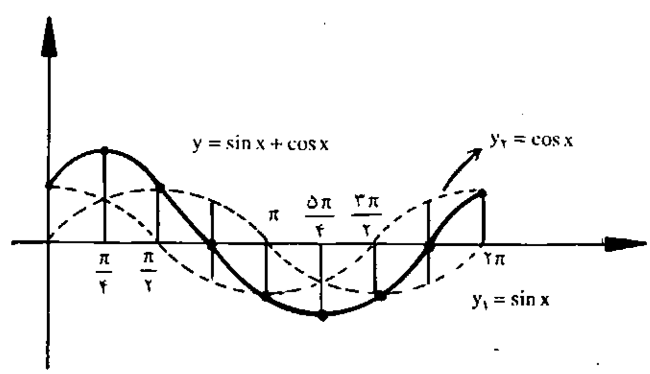
$$\text{اگر } x = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow y = \frac{\pi}{۲}+\sin\frac{\pi}{۲} = \frac{\pi}{۲}+۱ \Rightarrow M\Bigg|_{\frac{\pi}{۲}+۱}^{\frac{\pi}{۲}}$$





مثال : با در دست داشتن منحنی‌های به معادله $y_۱ = \sin x$ و $y_۲ = \cos x$ و $۰ \le x \le \pi$ آنگاه منحنی تابع به معادله $y = \sin x + \cos x$ ، $۰ \le x \le ۲\pi$ را رسم کنید.





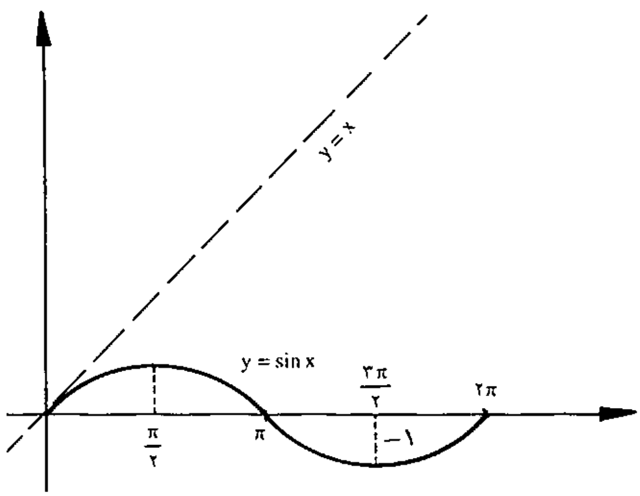
۱۲ ــ رسم تابع $f - g$

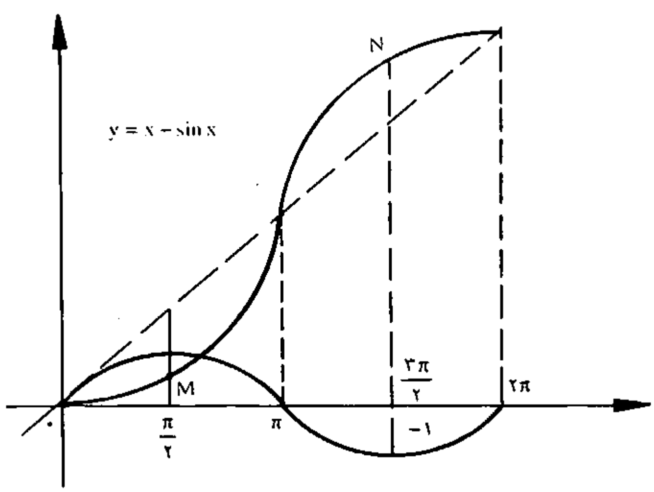
فرض می‌کنیم $y_۱ = f(x)$ و $y_۲ = g(x)$ و $D_f = D_g = [a,b] \subset \mathbb{R}$ اگر نقطه‌ای به طول x. روی منحنی‌های تابع‌های $y_۱ = f(x)$ و $y_۲ = g(x)$ باشد داریم :

نقطه $M_۱\Big|_{f(x_۰)}^{x_۰}$ روی منحنی تابع f و نقطه $M_۲\Big|_{g(x_۰)}^{x_۰}$ روی منحنی تابع g است درنتیجه نقطه $M\Big|_{f(x_۰)-g(x_۰)}^{x_۰}$ روی منحنی تابع به معادله $y = f(x) - g(x)$ قرار دارد.

پس برای رسم منحنی تابع به معادله $y = f(x) - g(x)$ باید برای هر نقطه از منحنی این تابع عرضهای نقاط هم طول روی دو منحنی f و g را از هم کم کرد.

مثال : منحنی نمایش تابع به معادله $y = x - \sin x$ ، $۰ \le x \le ۲\pi$ را رسم کنید.

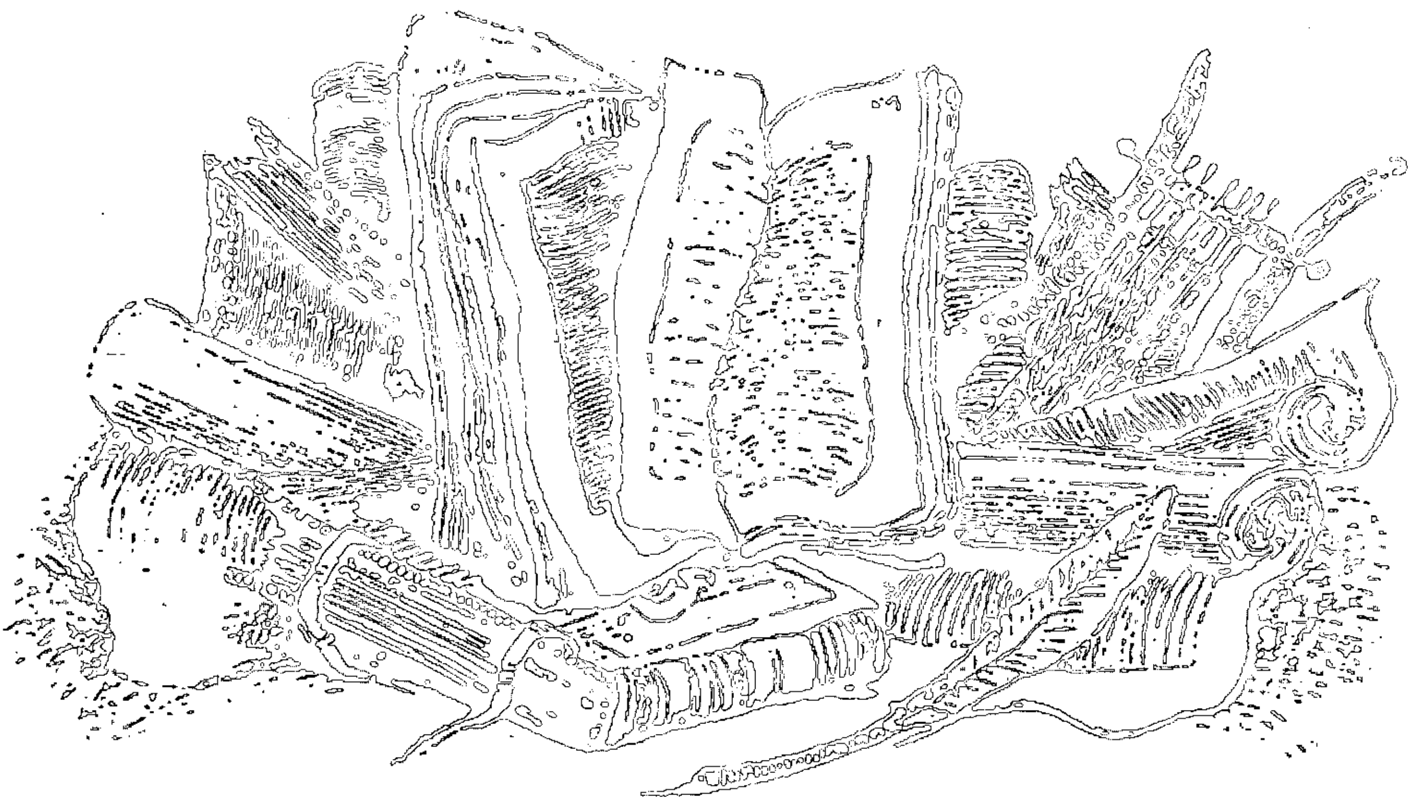




توجه :

$$x = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow y = \frac{\pi}{۲} - \sin\frac{\pi}{۲} = \frac{\pi}{۲} - ۱ \Rightarrow M\Big|_{\frac{\pi}{۲}-۱}^{\frac{\pi}{۲}}$$

$$x = \frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow y = \frac{۳\pi}{۲} - \sin\frac{۳\pi}{۲} = \frac{۳\pi}{۲} + ۱ \Rightarrow N\Big|_{\frac{۳\pi}{۲}+۱}^{\frac{۳\pi}{۲}}$$



تاریخچهٔ مجلات ریاضی در ایران (۱۹)

● غلامرضا یاسی‌پور

در شمارهٔ ۲۲ مجلهٔ یکان و در سر مقالهٔ آن که به مناسبت سالروز انتشار یکان نوشته شده چنین آمده است که :

اولین شمارهٔ مجله یکان در بهمن ماه دو سال قبل تقدیم علاقه‌مندان گردید. استقبالی که از این مجلهٔ صددرصد علمی به عمل آمد برای وی این امکان را فراهم ساخت، که قائم بالذات به حیات علمی خویش ادامه دهد و اتکای وی منحصراً به خوانندگان و علاقه‌مندان خویش باشد. کوششهایی که تاکنون به عمل آمده است تنها در راه بهبود وضع مجله در جهت مطلوب آن و در جهت تمایلات خوانندگان آن انجام گرفته است و غیر از آن، حتی برای شناساندن مجله به مقامات ذی‌نفوذ، کوچکترین اقدامی معمول نشده است، مگر آنچه که آیین‌نامه و قانون مطبوعات ایجاب می‌نموده است.

در همین شماره تحت عنوان : **بی‌آنکه عصبانی شوید این مسأله را حل کنید** مسألهٔ زیر را می‌خوانیم :

سه نفر از دانایان یونان قدیم در باغ آکادمی استراحت کرده و به خواب رفته بودند : رجاله‌ای که گذارش به آنجا افتاده بود پیشانی هر کدام از آنها را با دوده سیاه کرد، بعد در اثر صدایی که از ناحیه‌ای برخاست هر سه نفر از دانایان بیدار شده هر یک، از دیدن پیشانی دو نفر دیگر، شروع به خنده کردند. اما بعد از لحظه‌ای، هر سه نفر از خنده باز ایستادند، زیرا هر کدام دریافته بودند که پیشانی خود آنها نیز سیاه است. به چه دلیل منطقی؟

در شمارهٔ بعد، یعنی شمارهٔ ۲۲، که در تاریخ اسفند ماه ۱۳۴۴ منتشر شده مقاله‌ای از استاد **احمدبیرشک** تحت عنوان **توسعه‌طلبی ریاضی**، که مقاله‌ای کوتاه اما با کیفیت است، و ما برای استفادهٔ بیشتر خوانندگان کل این مقاله را در اینجا

می‌آوریم:

«میان هندسه و زیست‌شناسی اختلافی است ناشی از این واقعیت که خط راست ساختهٔ مجرد طرز تفکر نظری است و در طبیعت زنده همانند کاملی ندارد. چنین استنباط می‌شود که این طبیعت زنده، که در قالبی بسیار سخت که به اندازهٔ آن نیست قرار داده شده عاصی گردیده است و به زودی نشانه‌های رنج روحی در آن ظهور می‌کند». آنچه نوشتیم قسمتی است از یک مقالهٔ **دکتر برژ**، پزشک روانکاو و رییس «**مدرسهٔ والدین**» که در تازه‌ترین شمارهٔ مجلهٔ «**دفترهای زندگی**» چاپ شده است، و از نوعی طغیان در مقابل طرز تفکر ریاضی، که در تکامل علوم کنونی تأثیر دارد، حکایت می‌کند. بسیاری از دانشمندان، به ویژه زیست‌شناسان، و گاهی هم فیزیکدانان از نوعی توسعه‌طلبی ریاضی نگران هستند که بیم آن می‌رود که راه پیشرفت علم را در برخی رشته‌ها **کج کند** و در نتیجه اوضاع و شرایط حیات بشری را منحرف سازد.

در بیشتر مقالات و رسالات زیست‌شناسی و زمین‌شناسی (و همچنین پزشکی و کشاورزی) که از نظر من گذشته است، سطح ریاضیاتی که در آنها به کار رفته است از حدود محاسبات عددی دورهٔ شش سالهٔ ابتدایی تجاوز نمی‌کند. فقط در بعضی رشته‌ها مثلاً «علم توارث» (ژنتیک) ریاضیات به معنی واقعی وارد می‌شود اما همه جا علاقهٔ خاصی به «دقت» به چشم می‌خورد که از هیچ یک از محکمترین استدلالهای ریاضی پای کمی ندارد. راست است که ممکن است این سؤال پیش بیاید که آیا زیست‌شناسان و زمین‌شناسان مجبور نخواهند شد در کارهای پیشرفته‌تر خود با کمال صداقت، ریاضیات و طرز بیان آن را به کار برند؟

نتیجه برای من روشن است: همهٔ جوانانی که خود را برای پیش گرفتن رشته‌های زیست‌شناسی و زمین‌شناسی آماده می‌سازند و حتی «مرد شریف» آینده [نوع ظریف مردان قرن بیستم] باید سعی کنند که خود را به دقت (به اصطلاح ریاضی) و به استدلال معتاد سازند و فکر خود را در جهت علمی، یعنی سازنده پرورش دهنده آنان نمی‌توانند ریاضیات و فواید آن را نادیده انگارند.

می‌دانم چه ایرادی به من خواهند گرفت، خواهند گفت: «هر دانشجوی مشتاق علوم طبیعی دارای استعداد ریاضی نیست» این مطلب درست، اما آیا در رفتار این دانشجوی مشتاق هم دقت شده است؟ در هر لحظه استدلالی از نوع ریاضی به کار می‌برد و بالاتر از آن، همان‌طور که «**مسیو ژوردن**» نیز می‌گفت، مجردات مفاهیم ریاضی از این دانشجو تراوش می‌کند، او سرعت رشد بچهٔ قورباغه را از میزان دراز شدن روزانهٔ دم آن اندازه می‌گیرد و از بین رفتن دم نتیجه می‌گیرد که استحاله نزدیک است. در حقیقت او تغییرات تابع را از روی مقدار و علامت مشتق آن نتیجه می‌گیرد. آیا می‌توان تصور کرد که این جوان به راستی نسبت به ریاضی یاغی است؟

مجبور کردن او به محدود ماندن در یک تاریخ طبیعی عتیق، که روزی ارزشی داشته است، خطاست، بلکه بالاتر از خطاست. مطمئن هستم ریاضیاتی که به این آسانی بر مسائل دشوار غالب می شوند، به حل مسئلهٔ جوان دانشجویی که در این مورد به اصطلاح «از دست چپ بیدار شده است» نیز موفق خواهند شد و او را وادار خواهند کرد که اندکی چشمان خود را بمالد.

اندیشه‌های باریک‌بین از آن‌چه گذشت تصور خواهند کرد که من میل دارم توسعه‌طلبی ریاضی به صورت یک «قدرت روشنفکرانهٔ پدری» تکامل یابد. از کسانی که چنین می‌اندیشند خواهش می کنم که کمی دربارهٔ سطور زیر در «**خلقت علمی**» تألیف «**آ. مول**» به تفکر بپردازند: «از مجرای موارد استعمال فنی است که علم مجبور شده است از برج عاج پدیده‌های محض فرود آید و پیچیدگی را به عنوان یکی از اجزای اصلی جهان نوین بپذیرد و با آن نخست در ساخته‌های مغز بشری و سپس در طبیعت، که در آن در کمال وضوح وجود دارد، مواجه شود...» اما به نظر می‌رسد که هنوز مغز آدمی در جستجوی کمی و کیفی پیچیدگی پیشرفتی نکرده است... هنوز «فلسفهٔ پیچیدگی» به وجود نیامده است و فقدان این ابزار فکری اندک‌اندک احساس می‌گردد.

یکی از مشخصات طرز فکر علمی کنونی تمایل به دقت است، که حتی در نیروی خلاق تصور دیده می‌شود. تسلط بر

پیچیدگی، که به کار بستن علوم طبیعی موجب بسط آن است، صفت مشخصهٔ دوم است. و نیز صفات ممیزهٔ دیگر وجود دارد:

تصور این که «چون دانشجویی در ریاضیات قوی است طرز تفکر علمی دارد» درست نیست. و توزیع دانشجویان بین رشته‌های مختلف علوم بر مبنای ریاضی، و آموختن ریاضی به آنان، برای آن که بهتر بتوان بین آنان فرق قایل شد، راه‌حلی است تنبلانه، توأم با رنگ بی‌اطلاعی از ارزش تربیتی ریاضیات.

منحصر کردن قسمتهای به اصطلاح علمی به معدودی مواد متشکله، که ریاضیات در رأس آنها (حتی اگر علوم طبیعی هم افتخار محسوب شدن جزء این مواد معدود را داشته باشند) از جنبهٔ تربیتی عوام فریبی است:

با این ترتیب فکرها به غلط پرورده خواهد شد و نتایجی را که دکتر برژ از آنها می‌ترسید به بار خواهد آورد.

در همین شماره جواب مسألهٔ منطقی شمارهٔ قبل را که در آغاز این مقاله آوردیم، چنین می‌خوانیم:

هر یک از آنها چنین استدلال می‌کند: «هر کدام از ما (من، B و C) فکر می‌کند که پیشانیش تمیز می‌باشد. B که خیال می‌کند پیشانیش پاک باقی مانده است از دیدن پیشانی سیاه C به خنده می‌افتد. اما B چنانچه می‌دید که پیشانی من پاک است بایستی از خندهٔ C دچار تعجب شود، زیرا در چنین صورتی برای خندهٔ C علتی وجود نداشت. چون B از خندهٔ C دچار تعجب نشده است چنین استنباط می‌شود که وی خیال می‌کند به خاطر پیشانی سیاه شدهٔ من است که C می‌خندد، پیشانی من نیز سیاه شده است.»

با بررسی مطالب این شماره‌ها به این نتیجه‌گیری می‌رسیم که تعداد مقالات توصیفی مجله بسیار کم و در عوض تعداد مسائل امتحانی و مسائل جنب کتاب درسی بسیار زیاد شده است، که البته همراه با آن کیفیت مطالب مجله نیز پایین آمده است.

ادب ریاضی

مشهور است که زرگر متقلبی، که بنا بود تاجی از طلا برای هیرون بسازد، مقداری نقره در آن وارد کرده بود و پادشاه که تقلب صنعتگر را حدس زده بود، از ارشمیدس خواست که دربارهٔ حل این مسأله راه چاره‌ای بیابد.

امروزه هر محصل مدرسهٔ متوسطه می‌داند، که چه‌گونه می‌تواند با تجربه‌ای ساده و با حساب مختصری دربارهٔ وزن مخصوصها این مسأله را حل کند و نیز همهٔ مبتدیان جوان و مهندسان بحر پیمایی و کشتی‌سازی موارد استعمال بیشمار قانونی را که به اصل ارشمیدس معروف است می‌دانند. اما مردی که برای اولین بار توانست از تجربه‌ای عادی چنین قانونی را نتیجه بگیرد، در مقامی مطلقاً مافوق مشاهده‌کنندگان عادی قرار داشته است.

از این نکته اطلاعی نداریم که بالاخره زرگر را مقصر شناختند یا نه، اما به اتکای افسانهٔ مزبور معمولاً به این سؤال پاسخ مثبت داده می‌شود.

«داوید هیلبرت»

در حاشیهٔ تابع و مفهوم تابع
(قسمت دوم)
(ریاضی (۳) نظام جدید و حسابان ۱)

◄ حمیدرضا امیری

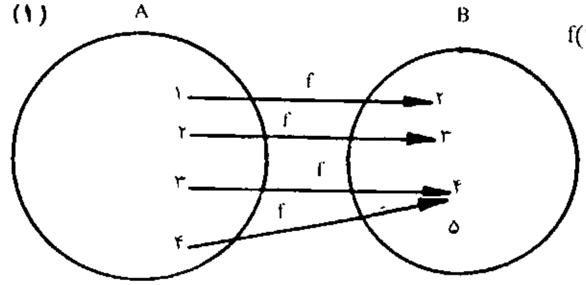
تشخیص تابع بودن یک رابطه:

در شمارهٔ قبل دیدیم که اگر رابطهٔ f از A در B یک تابع باشد، نباید هیچ دو زوج مرتب متمایزی با مؤلفه‌های اول برابر در آن یافت شود؛ به عبارت دیگر این مفهوم را می‌توان به صورتهای زیر تعبیر کرد:

الف) اگر نمودار پیکانی رابطهٔ f رسم شود (هر عضو دامنه را با یک فلش یا پیکان به عضو متناظرش در بُرد مرتبط کنیم)، و از هر عضو دامنه فقط و فقط حداکثر یک پیکان خارج شود در این صورت رابطه f تابع می‌باشد. به مثالهای زیر توجه کنید:

$f(۱)=۲$
$f(۲)=۳$
$f(۳)=۴$
$f(۴)=۳$

(۱)

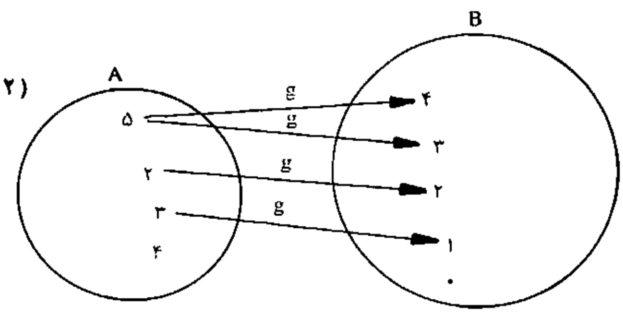


$D_f = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$, $R_f = \{۲, ۳, ۴\}$

$f = \{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۴),(۴,۴)\}$

f تابع است.

(۲)



$D_g = \{۵, ۲, ۳\}$

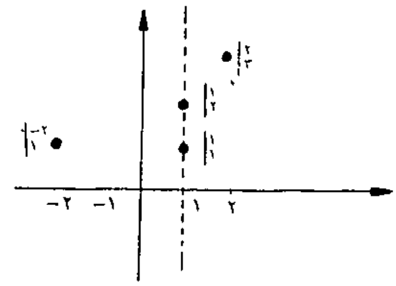
$R_g = \{۴, ۳, ۲, ۱\}$

در این مثال رابطهٔ g از A در B، یک تابع **نیست**، زیرا از ۵ که عضو دامنهٔ g می‌باشد دو پیکان خارج شده است. در واقع: $(۵,۴) \in g$ و $(۵,۳) \in g$ که با تعریف تابع تناقض دارد و درنتیجه، $g = \{(\underline{۵},۴),(\underline{۵},۳),(۲,۲),(۳,۱)\}$ تابع نیست.

ب) اگر نمودار مختصاتی رابطهٔ f را رسم کنیم (به هر زوج مرتب در f یک نقطه نسبت بدهیم، که مؤلفهٔ اول طول نقطه و مؤلفهٔ دوم عرض آن باشد) و هیچ دو نقطه‌ای روی خطی موازی با محور **yها** واقع نشوند، رابطهٔ f تابع است، به مثالهای زیر توجه کنید:

۱) اگر $f = \{(۱,۲)(۱,۱),(۲,۳)(-۲,۱)\}$ در این صورت نمودار مختصاتی رابطهٔ f به این صورت است.

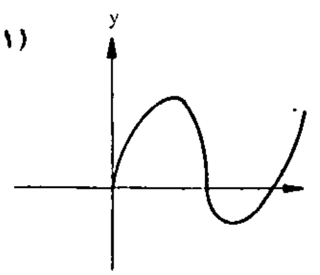
همان‌طور که مشاهده می‌کنید دو نقطه از این نقاط روی خطی موازی با محور yها قرار دارند (طول نقاط با هم برابر و



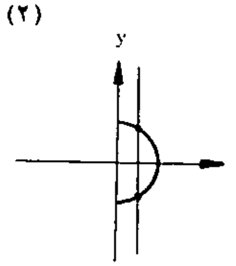
عرض آنها متمایز است) و لذا f تابع نیست.

لازم به تذکر است که عکس این مطلب برای تشخیص تابع بودن یک رابطه مورد استفاده قرار می‌گیرد، یعنی اگر نمودار یک رابطه مفروض باشد، برای تشخیص تابع بودن آن کافی است خطوطی موازی با محور yها رسم کنیم، اگر حتی یک خط نمودار رابطه را در بیش از یک نقطه قطع کند، رابطهٔ مزبور تابع نیست و اگر هیچ خطی نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع نکند، آن رابطه تابع است، به مثالهای زیر توجه کنید :

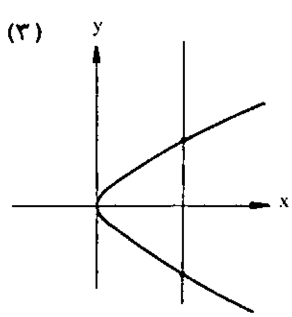
(۱)



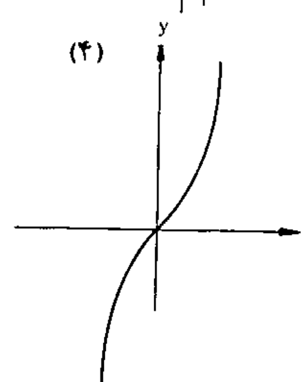
(۲)



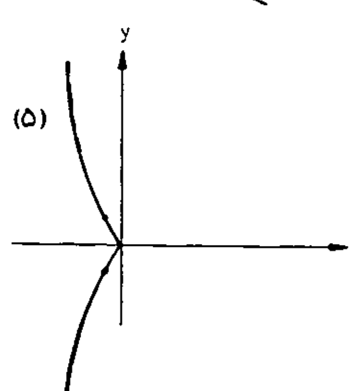
(۳)



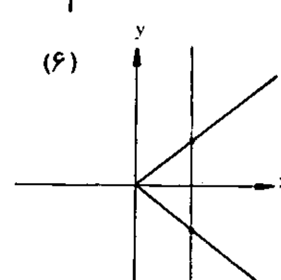
(۴)



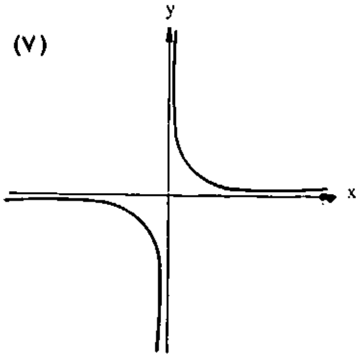
(۵)



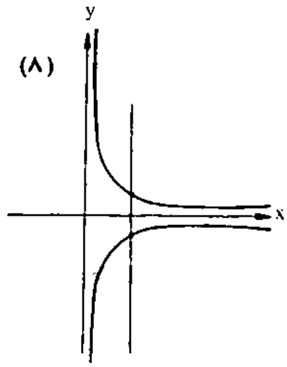
(۶)



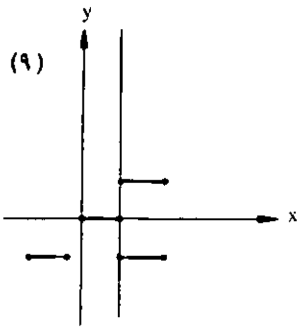
(۷)



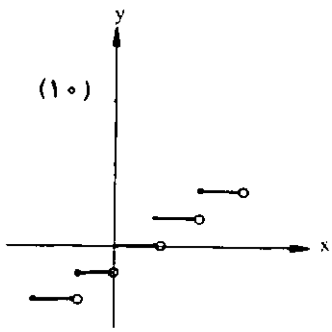
(۸)



(۹)



(۱۰)



با توجه به این مطالب مشاهده می‌کنید که نمودارهای (۲) و (۳) و (۵) و (۶) و (۸) و (۹) نمی‌توانند نمودار یک تابع باشند، زیرا در هر کدام از آنها می‌توانید خط یا خطوطی موازی با محور yها رسم کنید، به‌طوری که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند.

ج) اگر بخواهیم تعریفی به زبان ریاضی برای تابع f بیان کنیم می‌توانیم بنویسیم :

رابطهٔ f تابع است $\Leftrightarrow [(x_1,y_1)\in f \ , \ (x_1,y_2)\in f] \Rightarrow y_1 = y_2$

و تعریف فوق به این معنی است، که اگر رابطهٔ f تابع باشد، نباید دو زوج مرتب متمایز با مؤلفه‌های اول برابر داشته باشد، و اگر دو زوج مرتب با مؤلفه‌های اول برابر در f یافت شود، باید مؤلفه‌های دوم نیز برابر باشند، تا در واقع دو زوج متمایز نباشند.

حال اگر f را با ضابطه‌اش مشخص کنند، با استفاده از تعریف فوق می‌توان پی‌برد، که آیا f تابع است یا خیر؟

به مثالهای زیر توجه کنید :

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

۱) آیا رابطهٔ f با ضابطهٔ $f(x) = x^2$ تابع است؟

طبق فرض داریم $\rightarrow f(x) = y = x^2$

اگر $(x_1,y_1)\in f, (x_1,y_2)\in f \Rightarrow f(x_1) = y_1, f(x_1) = y_2$

$\Rightarrow x_۱^۲ = y_۱ \;,\; x_۱^۲ = y_۲ \Rightarrow y_۱ = y_۲ \Rightarrow$ f تابع است

$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

۲) آیا رابطهٔ f با ضابطهٔ $y = f(x) = ۲x^۳ + ۱$ تابع است؟

اگر $(x_۱, y_۱) \in f \;,\; (x_۱, y_۲) \in f \Rightarrow f(x_۱) = y_۱ \;,\; f(x_۱) = y_۲$

$\Rightarrow ۲x_۱^۳ + ۱ = y_۱ \;,\; ۲x_۱^۳ + ۱ = y_۲ \Rightarrow y_۱ = y_۲$

$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

۳) آیا رابطهٔ f با ضابطهٔ $y = f(x) = \pm\sqrt{x}$ تابع است؟

$f(x) = y = \pm\sqrt{x} \Rightarrow f(۲) = \pm\sqrt{۲}$

$\Rightarrow f(۲) = \sqrt{۲} \;,\; f(۲) = -\sqrt{۲}$

$\Rightarrow (۲, \sqrt{۲}) \in f \;,\; (۲, -\sqrt{۲}) \in f \Rightarrow$ f تابع نیست

تذکر مهم: هرگاه ضابطهٔ رابطهٔ f مفروض باشد برای تشخیص تابع بودن آن با استفاده از ضابطه، y را بر حسب x به دست می‌آوریم، اگر برای هر x حداکثر یک y حاصل شود، ضابطهٔ یک تابع است و در غیر این صورت تابع نیست.

۴) اگر : $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^۲ | x^۲ + y^۲ = ۴\}$ ، آیا رابطهٔ f یک تابع است؟

$x^۲ + y^۲ = ۴ \Rightarrow y^۲ = ۴ - x^۲ \Rightarrow y = \pm\sqrt{۴ - x^۲}$

اگر $x = ۱$ $y = \pm\sqrt{۳} \Rightarrow (۱, \sqrt{۳}) \in f$

$, (۱, -\sqrt{۳}) \in f \Rightarrow$ f تابع نیست

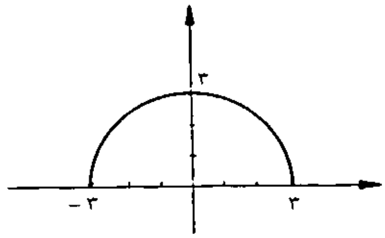
تذکر مهم: در مثال (۴) نمودار رابطهٔ f دایره‌ای است به مرکز مبدأ مختصات و شعاع $r = ۲$ ، و دیدیم که f تابع نبود، این مطلب را می‌توان به صورت کلی نیز پذیرفت که «نمودار هر رابطه که به شکل یک منحنی یا چند ضلعی بسته باشد، همواره مشخص کنندهٔ یک تابع نیست» (همواره در هر شکل بسته می‌توان خطی موازی محور yها چنان رسم کرد، که منحنی را در بیش از یک نقطه قطع کند.)

۵) اگر $g = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ | x^۲ + y^۲ = ۹\}$ ، آیا رابطهٔ g یک تابع است؟

$x^۲ + y^۲ = ۹ \Rightarrow y^۲ = ۹ - x^۲ \Rightarrow y = \pm\sqrt{۹ - x^۲} \;,\; y \geq ۰$

$\Rightarrow y = \sqrt{۹ - x^۲} \Rightarrow$ g تابع است

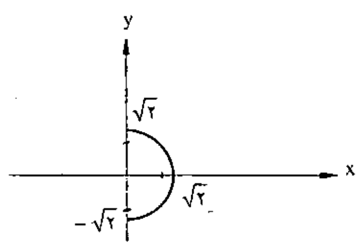
(توجه دارید، که اگر $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ در این صورت $x \in \mathbb{R}$ و $y \in \mathbb{R}^+$) نمودار تابع فوق در واقع قسمتی از دایرهٔ به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۳ است، که همهٔ نقاط واقع بر آن قسمت، عرض مثبت داشته باشند، مطابق شکل زیر :



۶) اگر $h = \{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} | x^۲ + y^۲ = ۲\}$ ، آیا رابطهٔ h یک تابع است؟

$x^۲ + y^۲ = ۲ \Rightarrow y^۲ = ۲ - x^۲ \Rightarrow y = \pm\sqrt{۲ - x^۲}$

مثلاً اگر قرار دهیم $x = ۱$ در این صورت $y = \pm ۱$ یعنی برای $x = ۱$ که عضوی از دامنه است دو عضو از برد $(y = \pm ۱)$ به دست می‌آید لذا h تابع نیست و نمودار آن به شکل زیر است (قسمتی از دایرهٔ به مرکز مبدأ و شعاع $\sqrt{۲}$ که هر نقطهٔ واقع بر آن دارای طول مثبت باشد)، مطابق شکل زیر :

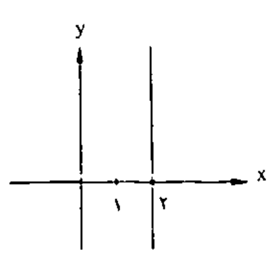


و همان‌طور که مشاهده می کنید، می‌توان خطی موازی محور yها چنان رسم کرد که نمودار این رابطه را در دو نقطه قطع کند.

۷) اگر $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^۲ | x = ۲\}$ ، آیا رابطهٔ f تابع است؟

در این رابطه y به x بستگی ندارد (واضح است که y تابع متغیر x نیست) و همواره می‌توان هر مقدار دلخواه برای y و به ازای هر یک مقدار x، در نظر گرفت مثلاً : $(۲,۱) \in f$ و $(۲,۲) \in f$ ، پس f تابع نیست.

نمودار رابطهٔ f خطی است موازی با محور yها و به فاصلهٔ ۲ واحد از مرکز، مطابق شکل زیر :



(خط $x = 2$ ، خودش موازی با محور yها است و بی‌شمار نقطه با طولهای مساوی را در بردارد.)

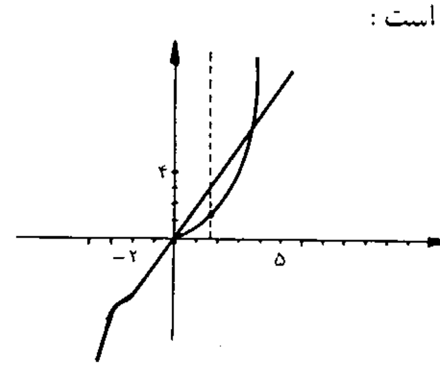
حال قبل از آن که به سراغ تعریف و خواص و کاربردهای انواع تابع‌ها برویم، ابتدا رابطه‌های چند ضابطه‌ای را معرفی می‌کنیم و به بررسی خاصیتهای آنها می‌پردازیم.

هرگاه دامنهٔ یک رابطه را چند قسمت کنیم (ممکن است این قسمتها با هم اشتراک داشته باشند) و روی هر قسمت ضابطه‌ای مجزا تعریف کنیم، در این صورت یک رابطهٔ چند ضابطه‌ای حاصل می‌شود.

مثال ۱) رابطهٔ f از $\mathbb{R}$ در $\mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x>0 \\ 2x & -2<x<5 \\ x^3 & x\le -2 \end{cases}$$

در این مثال و مثالهای مشابه آن همواره در قسمتهایی از دامنه که ضابطه‌ها با هم اشتراک دارند، برای یک مقدار x دو مقدار برای y می‌توان یافت که با تعریف تابع تناقض ایجاد می‌شود، در این مثال ضابطه‌های اوّلی و دومی در دامنه‌شان اشتراک دارند و مثلاً، $f(1)=1^2=1$ و $f(1)=2\times 1=2$ یعنی $(1,1)\in f$ و $(1,2)\in f$ پس f تابع نیست، نمودار این رابطه به صورت زیر است:

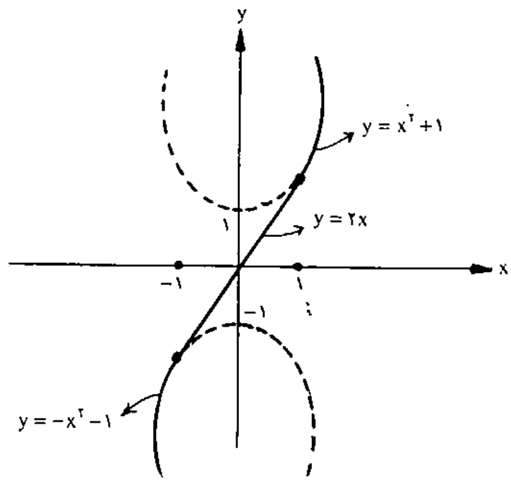


مثال ۲) رابطهٔ f از $\mathbb{R}$ در $\mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف شده آیا این رابطه تابع است؟

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x>1 \\ 2x & -1\le x\le 1 \\ -x^2-1 & x<-1 \end{cases}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید ضابطه‌های تعریف در این رابطه در دامنه‌هایشان عضو مشترک ندارند و در ضمن در هر قسمت، ضابطهٔ تعریف شده می‌تواند یک تابع را مشخص می‌کند (برای هر مقدار x فقط یک مقدار برای $f(x)$ به دست می‌آید).

اگر نمودار این رابطه را رسم کنیم به صورت زیر است:



با توجه به شکل واضح است که f یک تابع است و در واقع به تابع f یک **تابع چند ضابطه‌ای** می‌گویند.

تساوی دو تابع: دو تابع f و g مساوی یکدیگرند، هرگاه هر دو شرط زیر برقرار باشند:

الف) $D_f = D_g$

ب) برای هر $x\in D_g=D_f$ همواره $f(x)=g(x)$

مثال ۱) آیا دو تابع $f(x)=x+1$ و $g(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ مساوی یکدیگرند؟

اگر کمی بی‌توجهی کنیم و مثلاً تابع $g(x)$ را به صورت $g(x)=\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}}=(x+1)$ بنویسیم **شاید** گمان ببریم که $f=g$ است، **ولی** شرط اول تساوی دو تابع برای این تابعها برقرار نیست، زیرا: $D_f=\mathbb{R}$ و $D_g=\mathbb{R}-\{1\}$ و چون $D_f\neq D_g$ پس دو تابع مساوی نیستند.

مثال ۲) آیا دو تابع $f(x)=\sqrt{x^2}$ و $g(x)=|x|$ مساوی یکدیگرند؟

جواب مثبت است، زیرا اولاً: $D_f=D_g=\mathbb{R}$ و ثانیاً برای هر $x\in\mathbb{R}$ همواره:

$$f(x)=\sqrt{x^2}=|x|=g(x)$$

مثال ۳) آیا دو تابع $f(x)=x^2$ و $g(x)=x|x|$ مساوی یکدیگرند؟

خیر، زیرا شرط دوم تساوی بین دو تابع برای این تابعها برقرار نیست، در صورتی که: $D_f = D_g$ ، ولی مثلاً:

$f(-1)=1$ و $g(-1)=-1\times 1=-1$

$\Rightarrow f(-1)\neq g(-1)\Rightarrow$ پس دو تابع مساوی نیستند.

مثال ۴) دو تابع $f(x)=x^2-x$ و $g(x)=x^3+3x^2$ مفروض‌اند، با چه شرایطی می‌توان ادعا کرد که $f=g$ ؟

چون $D_f=\mathbb{R}$ و $D_g=\mathbb{R}$ است پس شرط اول تساوی دو تابع برقرار است، لذا می‌بایست برای هر $x\in\mathbb{R}$ داشته باشیم $f(x)=g(x)$ ، یعنی باید:

$$x^3+3x^2=x^2-x\Rightarrow x^3+2x^2+x=0$$

$$\Rightarrow x(x^2+2x+1)=0$$

$$\Rightarrow x(x+1)^2=0\Rightarrow x=0 \text{ یا } x=-1$$

در واقع مقدار دو تابع f و g فقط در $x=0$ و $x=-1$ با هم مساوی است، یعنی همواره:

$$f(0)=0\ ,\ g(0)=0\ ,\ f(-1)=2\ ,\ g(-1)=2$$

پس شرط تساوی این دو تابع آن است، که دامنه‌های آنها را از مجموعهٔ $\mathbb{R}$ به مجموعهٔ $D=\{0,-1\}$ محدود کنیم، در واقع این دو تابع در دامنهٔ تعریف خودشان مساوی نیستند و فقط در صورتی که دامنهٔ هر یک را $\{0,-1\}$ تعریف کنیم با هم مساویند.

انواع تابعها

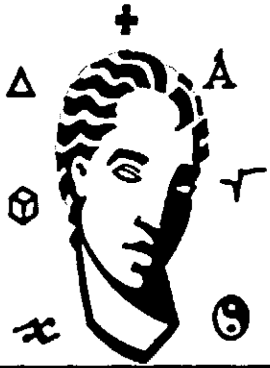
۱ ــ تابع چند ضابطه‌ای: هرگاه دامنهٔ یک تابع را به چند مجموعهٔ جدا از هم تقسیم کنیم، به‌طوری که اجتماع آن مجموعه‌ها برابر با دامنه باشد و روی هر مجموعه، ضابطه‌ای مجزا تعریف کنیم، در این صورت یک تابع با چند ضابطه یا اصطلاحاً یک **تابع چند ضابطه‌ای** به دست می‌آید، به مثالهای زیر توجه کنید:

مثال: تابع f به صورت زیر تعریف شده است، نمودار این تابع را رسم کنید.

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

$$f(x)=\begin{cases}2x & x>1\\ 2 & -1\leq x\leq 1\\ -2x & x<-1\end{cases}$$

برای رسم تابع فوق کافی است نمودار هر ضابطه از تابع را رسم کنیم و روی هر کدام از نمودارها قسمتهایی را که در دامنه‌اشان است، پررنگ کرده و بقیه را پاک کنیم.



تفریح اندیشهٔ ۲

بازی چینی

چند سال پیش دریک فیلم گیج‌کنندهٔ فرانسوی مردی در راهروهای قصری به‌این طرف و آن طرف می‌رفت و تمام اشخاص را در یک بازی ساده شکست می‌داد. در این بازی شانزده امتیاز شمار (به‌طور مثال چوب کبریت) در ردیفهای ۱، ۳، ۵ و ۷تایی قرار داده شده‌اند. دو بازیکن، به‌نوبت، می‌توانند از چوب کبریتها هر قدر که بخواهند انتخاب کنند. (چوب کبریتها برای انتخاب شدن نیاز به‌مجاور بودن ندارند؛ انتخاب آنها از وسط هر ردیف امتیاز نمی‌آورد.) برای بردن باید حریف را وادار کنید تا آخرین امتیاز شمار روی میز را بردارد.

بازی مزبور توسط چینیهای باستان اختراع شده، و برنده‌شدن در آن ـ اگر راه آن را بدانید ـ آسان است. برای شروع، آیا ابتدا خود عمل می‌کنید یا این امتیاز را به‌حریفتان می‌دهید؛ یا، این مطلب دارای اهمیت نیست؟ برای بردن چگونه بازی می‌کنید؟

جواب در صفحه ۸۷

(سوّم ریاضی نظام جدید و قدیم)

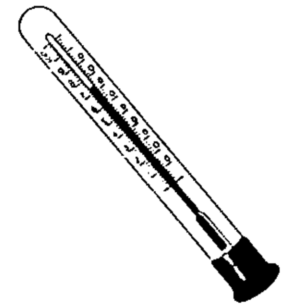
❑ حسین ابراهیم‌زادهٔ قُلزم

مبانی کامپیوتر ـ آشنایی با سخت‌افزار و نرم‌افزار

امروزه نقش کامپیوتر در زندگی روزمره بر همه روشن شده است. گسترش و فراگیر شدن آن به تنهایی بستر اصلی رشد جامعه بشری را فراهم ساخته است. مخالفتهای اولیه با کامپیوتر تبدیل به استفادهٔ همگانی و بیشتر از آن شده است، طوری که کامپیوتر به عنوان بخشی جداناپذیر از زندگی روزانه درآمده است. در پرتو دستاوردهایی که کامپیوتر به همراه داشت، عصر حاضر، عصر **انقلاب اطلاعاتی** نامیده شده است ؛ انقلابی که مانند **انقلاب صنعتی** تمام ارکان جوامع بشری را دگرگون ساخته است.

در این مقاله سعی می‌کنیم مطالب نظری مربوط به کامپیوتر را که از اهمیت بیشتری برخوردار است بیان کنیم و به همراه آن با ساختمان فیزیکی و قابل لمس کامپیوتر آشنا شویم، تا بتوانیم از این تکنولوژی معاصر، بهترین استفاده را به عمل آوریم.

در آغاز قبل از هر چیز به این پرسش پاسخ می‌دهیم که کامپیوتر چیست؟ در تعریف کلی و عام، **کامپیوتر** به هر وسیله یا ابزاری گفته می‌شود که می‌تواند داده‌هایی را به عنوان **ورودی** دریافت کند و سپس یک سری عملیات روی داده‌ها انجام می‌دهد، که به آن **پردازش** می‌گویند و در پایان نتیجهٔ عملیات انجام شده را در خروجی نشان می‌دهد. سرعت‌سنج (کیلومتر شمار) اتومبیل و دماسنج جیوه‌ای در منازل نمونه هایی از کامپیوتر هستند، زیرا سرعت‌سنج اتومبیل مقدار مسیر طی شده (دادهٔ ورودی) توسط حرکت دورانی چرخ اتومبیل را با ضرب تعداد دورهای چرخ، مثلاً طی یک ساعت در محیط هر چرخ محاسبه می‌کند (انجام عملیات یا پردازش)، آن را به یک عدد حقیقی تبدیل می‌کند و عدد به دست آمده را توسط عقربه‌های سرعت‌سنج (کیلومتر شمار) روی یک صفحه نشان می‌دهد (اطلاعات خروجی)، یا دماسنج جیوه‌ای در منزل، مقدار گرما یا سرمای اتاق را می‌گیرد (دادهٔ ورودی)، با توجه به میزان گرما یا سرما، جیوهٔ درون آن منبسط یا منقبض می‌شود (انجام عملیات یا پردازش) و در پایان شاخص دماسنج، عددی را به عنوان



مقدار دمای اتاق به ما نشان می‌دهد (اطلاعات خروجی).

همهٔ این مراحل به صورت دیگر، در کامپیوتر مدرن و الکترونیکی پیش‌بینی شده است و وجود دارد. ایدهٔ داشتن سه واحد ورودی، پردازش و خروجی برای نخستین بار در ماشین تفاضلی وتحلیلی **چارلز بابیج** طراحی شده بود، که به همین خاطر به وی پدر کامپیوترهای نوین می‌گویند.

اما داده چیست؟ **داده** به هرگونه اطلاعی گفته می‌شود، که در مورد یک چیز داده می‌شود. بیان مشخصات یک چیز، از قبیل اندازه، شکل، وزن و سن به منزلهٔ داده‌هایی در مورد آن چیز به شمار می‌روند. به عنوان مثال، نام یک دانش‌آموز، نام‌خانوادگی، سال تولد، نام مدرسه، نام درسهای اختیار شده توسط دانش‌آموز، شماره شناسنامه، نام پدر و مادر و محل سکونت عبارت از داده‌هایی در مورد آن دانش‌آموز هستند، هر یک از این داده‌ها، اطلاعات خام هستند و به تنهایی ارزشی ندارند. بنابراین به اطلاعات خام، که هیچ پردازشی روی آن انجام نشده باشد، **داده** می‌گویند.

پردازش یا به بیان صحیح‌تر **پردازش داده‌ها** به مجموعهٔ عملیاتی گفته می‌شود که روی داده‌ها انجام می‌شود، تا بتوان از داده‌ها برای انجام یک کار معین استفاده و بر روی نتایج آن تصمیم‌گیری کرد. در کامپیوتر بر روی داده‌ها، عملیات ریاضی و منطقی یا مقایسه‌ای انجام می‌شود.

اطلاعات چیست؟ در کامپیوتر به داده‌های پردازش شده **اطلاعات** می‌گویند.

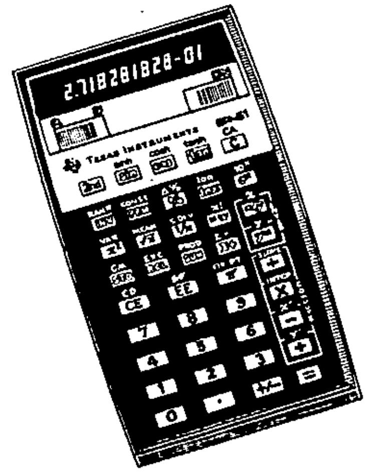
به مثال زیر که در مورد دادهٔ ورودی، پردازش و اطلاعات است توجه کنید: پنبهٔ خامی وارد کارخانهٔ پنبه‌زنی می‌شود (دادهٔ ورودی). در کارخانه دانه‌های پنبه و مواد اضافی آن گرفته می‌شود و به عنوان ضایعات از پنبه دور می‌شود (پردازش) و در نهایت پنبهٔ زده شده و تمیز و حتی ضدعفونی شده جهت مصرف در اختیار ما قرار می‌گیرد (اطلاعات خروجی). داده‌های کامپیوتری را اعداد، ارقام و حروف، تصاویر و صوت تشکیل می‌دهد، روی این داده‌ها عملیاتی انجام می‌شود تا بتواند مورد استفاده قرار گیرد. به این عمل **داده‌پردازی یا پردازش داده‌ها** می‌گویند.

مقایسهٔ انسان و کامپیوتر

انسان دارای عیبهای مختلفی به شرح زیر است که می‌توان این عیوب را با استفاده از کامپیوتر برطرف کرد:

۱ ـ انسان فراموش کار است حال آن که فراموشی در کامپیوتر معنی ندارد. ۲ ـ انسان در کارها سرعت عمل ندارد، در حالی که سرعت عمل در کامپیوتر در مقایسه با انسان بسیار بیشتر است. ۳ ـ اشتباه کاری در انسان زیاد است، در حالی که کامپیوتر بدون خطا عمل می‌کند. ۴ ـ انسان توانایی حفظ مقدار محدودی اطلاعات را در ذهن خود دارد، در حالی که کامپیوتر می‌تواند مقدار نامحدودی اطلاعات را ذخیره کند و در مورد آن تصمیم بگیرد. ۵ ـ انسان در انجام محاسبات طولانی و تکراری خستگی‌پذیر است، در حالی که کامپیوتر هیچ‌گاه خسته نمی‌شود. ۶ ـ بازیابی اطلاعات در انسان اکثراً با اشتباه همراه است، در حالی که در کامپیوتر این‌گونه نیست.

اما تنها مزیت انسان نسبت به کامپیوتر، داشتن هوش و قدرت تفکر است، اما کامپیوتر فقط می‌تواند داده‌های ورودی را بگیرد، اما قدرت تجزیه و تحلیل پردازش داده‌ها را ندارد، مگر آن که به کمک دستورهایی که گرفته است، نحوهٔ پردازش خود را مشخص کند و سپس از طریق خروجی، نتیجهٔ پردازش را دریافت کند.



آیا می‌دانید فرق یک ماشین حساب با کامپیوتر چیست؟ کامپیوتر می‌تواند دو یا چند چیز را با هم مقایسه کند، ولی ماشین حساب قدرت انجام مقایسه اعداد و حروف را ندارد.

کامپیوترها به سه دسته تقسیم می‌شوند : ۱ ــ کامپیوتر عددی ۲ ــ کامپیوتر قیاسی ۳ ــ کامپیوتر پیوندی

در **کامپیوتر عددی یا رقمی**، ورودی از اعداد، حروف، تصویر و صدا تشکیل می‌شود. خروجی آن نیز اعداد، حروف، تصویر و صدا است. در زندگی روزمره هم که از کامپیوتر صحبت می‌شود، منظور همین کامپیوتر عددی است. کامپیوترهای عددی مقادیر گسسته را که به صورت عدد هستند اندازه می‌گیرد.

کامپیوتر قیاسی، شبیه سرعت‌سنج اتومبیل و آمپرسنج است، که برای حالتهای خاص مورد استفاده قرار می‌گیرند و انعطاف‌پذیری آنها نسبت به سایر کامپیوترها کمتر است. محاسبهٔ حجم گازها، مقدار و فشار آب سدها توسط کامپیوترهای قیاسی اندازه‌گیری می‌شود و نتایج توسط علامت و گاهی اوقات عدد نشان داده می‌شود. کنتور برق مصرفی در خانه‌ها نمونه‌ای از کامپیوتر قیاسی است. به نوع ورودی و پردازش و خروجی کنتور برق توجه کنید. کامپیوترهای قیاسی مقادیر فیزیکی را که به صورت پیوسته است اندازه می‌گیرد.

کامپیوتر پیوندی یا دورگه ترکیبی از کامپیوتر عددی و قیاسی است. رادار هواپیما چه در برج مراقبت و چه در درون هواپیما نمونه‌ای از کامپیوتر پیوندی است. کنتور برق نیز نوعی کامپیوتر پیوندی است. چرا؟ از کامپیوتر معمولاً در امور آموزشی، علمی، تحقیقاتی، صنایع، بازرگانی، کتابخانه‌ها، امور حمل و نقل، امور پزشکی، اجرای قوانین، عرصهٔ هنر، در دانشگاهها و مدارس استفاده می‌شود.

کامپیوترها **از نظر اندازه و بزرگی** به چهار دستهٔ زیر تقسیم می‌شوند :

۱ ــ **اَبَر کامپیوتر** (Super Computer). از این کامپیوتر برای محاسبهٔ کارهای پیچیدهٔ علمی و فضایی استفاده می‌شود. این نوع کامپیوترها بسیار سریع عمل می‌کنند و از گرانترین کامپیوترها به شمار می‌روند. از ابر کامپیوترها می‌توان (cray-1) و (cray-2) را نام برد. اخیراً ژاپنیها با استفاده از یک ابر کامپیوتر تصمیم گرفته‌اند مقدار عدد π را تا شانزده میلیون رقم بعد از اعشار محاسبه کنند. cray نام یک دانشمند کامپیوتر است. سرعت محاسباتی این کامپیوترها ۱۰۰ تا ۱۴۰۰ میلیون دستور در ثانیه است.

۲ ــ **کامپیوترهای بزرگ** (Main frame). این نوع کامپیوترها سرعت پردازش و ظرفیت ذخیره‌سازی کمتری نسبت به ابر کامپیوترها دارند. این نوع کامپیوترها در بیشتر دانشگاهها و وزارتخانه‌ها برای پردازش اطلاعات مورد استفاده قرار می‌گیرد. نتیجهٔ کنکور دانشگاهها و اعلام نتایج توسط این نوع کامپیوترها انجام می‌شود. سرعت پردازش این کامپیوترها بین ۳ تا ۲۰ میلیون دستور در ثانیه است. کامپیوترهای IBM/370، IBM4341 از این نوع کامپیوتر هستند.

۳ ــ **کامپیوترهای کوچک** Mini Computer. در مراکزی که حجم اطلاعات و تنوع کارها برای پردازش، متوسط باشد به کار می‌رود. از این نوع کامپیوتر در مراکز تجاری و دولتی و دانشگاهی استفاده می شود. سرعت پردازش این نوع کامپیوترها بین ۰/۸ تا ۴ میلیون دستور در ثانیه است. برخی از انواع کامپیوترهای PDP از این نوع هستند.

۴ ــ **ریز کامپیوترها** Micro Computer. این کامپیوترها ابعاد کوچکی دارند و کم قدرت‌ترین کامپیوترهای موجود هستند. میکروکامپیوترها، کوچکترین و همگانی ترین کامپیوترها هستند. علت نام‌گذاری آن به **میکروکامپیوتر** این است که CPU این نوع کامپیوترها، فقط در یک تراشه یا چیپ chip فشرده بنام **میکروپرسسور یاریزپردازنده** قرار گرفته است. به

دلیل استفادهٔ شخصی از آن، به آنها اغلب کامپیوترهای شخصی PC می‌گویند. از کامپیوترهای شخصی می‌توان کامپیوترهای خانوادهٔ IBM/AT یا IBM/SX، IBM/DX و پنتیوم Pentium و کامپیوترهای خانواده Apple و همین‌طور کامپیوترهای خانگی مانند AMIGA و کمودور و کامپیوترهای قابل حمل و کیفی laptop را نام برد.

هنگام کار با کامپیوتر بلافاصله با دو مقولهٔ متفاوت روبرو می‌شویم که عبارتند از: ۱ ـ **سخت‌افزار** ۲ ـ **نرم‌افزار**

به کلیهٔ دستگاههای الکترومکانیکی و الکترونیکی کامپیوتر و دستگاههای جانبی متصل به آن **سخت‌افزار** کامپیوتر می‌گویند.

نرم‌افزار کامپیوتر در مقابل سخت‌افزار قرار گرفته است. نرم‌افزار قسمت نامریی و لمس نشدنی کامپیوتر را تشکیل می‌دهد. به برنامه‌های کامپیوتری نیز گاهی نرم‌افزار می‌گویند. پس نرم‌افزار به مجموعه اطلاعات یا برنامه‌هایی گفته می‌شود که در درون سخت‌افزار کامپیوتر قرار می‌گیرد و باعث می‌شود کامپیوتر کار مشخصی را انجام دهد.

سخت‌افزارها و نرم‌افزارها خود به اجزای مختلفی تشکیل می‌شوند. اجزای سخت‌افزار عبارتند از:

۱ ـ واحد ورودی

۲ ـ واحد محاسبه و منطق

۳ ـ واحد حافظه

۴ ـ واحد کنترل

۵ ـ واحد خروجی

نرم‌افزارها به چهار دستهٔ مهم زیر تقسیم می‌شوند:

۱ ـ سیستم عامل‌ها

۲ ـ زبانهای برنامه‌نویسی

۳ ـ مترجمها

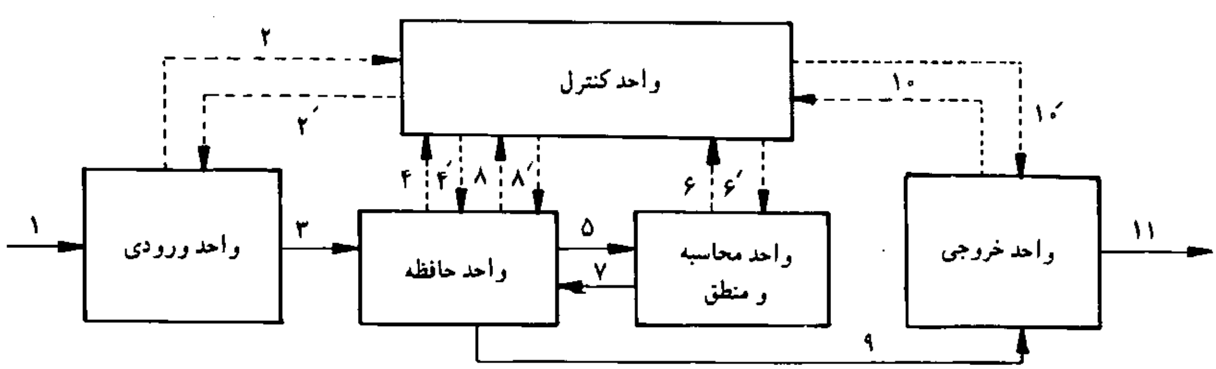
۴ ـ برنامه‌های کاربردی

جدول زیر چند مثال از سخت افزار و نرم‌افزار متناظر با آن را نشان می‌دهد:

سخت‌افزار	نرم‌افزار
کامپیوتر	برنامه‌ها
تلویزیون	فیلم و صدا
رادیو	صدا
دستگاه ویدئو	فیلم نوار ویدئو
انسان	روح و جان انسان
سیم برق	جریان برق
تاکسی	رانندهٔ تاکسی

توجه داشته باشید که فیلم سینما نرم‌افزار نیست، بلکه اطلاعات ذخیره شده در فیلم سینما نرم‌افزار محسوب می‌شود. رانندهٔ تاکسی! نرام‌افزار نیست، بلکه اعمالی که روی تاکسی انجام می‌دهد را می‌توان نرم‌افزار به حساب آورد.

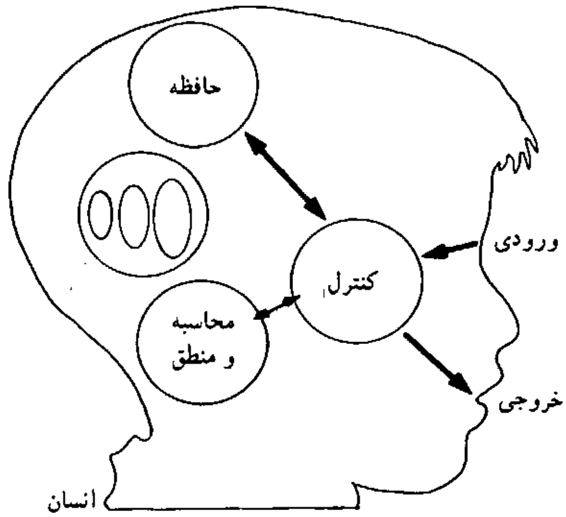
ابتدا راجع به سخت‌افزار و قسمتهای مختلف آن توضیح می‌دهیم. ارتباط بین اجزای سخت افزار را می‌توان با شکل زیر نشان داد:



هر واحد توسط دو جریان الکتریکی با واحد کنترل رابطه دارد که یکی جریان رفت و دیگری جریان برگشت است.

در شکل صفحه قبل اعداد بدون پریم جریان رفت به واحد کنترل یا واحد دیگر را نشان می‌دهد و اعداد پریم‌دار جریان برگشت از واحد کنترل را نشان می‌دهد.

آیا در ساخت کامپیوتر، از انسان الگو گرفته نشده است؟ شکل زیر را ببینید.



آیا چشم یا گوش انسان واحد ورودی وی نیست؟ داده‌های ورودی انسان با مشاهده و شنیدن دریافت می‌شود و با صدا و دهان و با دست به کمک نوشتن به دیگران منتقل می‌شود. در کامپیوتر، به سه واحد حافظه، محاسبه و منطق و واحد کنترل، **واحد پردازش مرکزی** یا **CPU** می‌گویند. امروزه واحد حافظه به صورت مستقل و به فاصلهٔ بسیار اندکی از واحد کنترل و واحد محاسبه و منطق قرار گرفته است. به این ترتیب گفته می‌شود CPU از دو واحد محاسبه و منطق و واحد کنترل تشکیل می‌شود.

۱ ــ واحد ورودی INPUT UNIT. اطلاعات و داده‌های مورد نیاز کامپیوتر از طریق واحد ورودی، وارد کامپیوتر می‌شود. داده‌ها به صورت حرف به حرف یا رقم‌به رقم وارد کامپیوتر می‌شود. مجموعه‌ای از حروف و ارقام، **کلمه** یا اعداد و مجموعه‌ای از کلمات با معنی **دستور** و مجموعه‌ای از چند دستور **برنامه** را تشکیل می‌دهند. از مهمترین وسایل ورودی می‌توان صفحه کلید، ماوس، اسکنر، دیجیتایزر، قلم‌نوری، دوربین، میکروفن را جهت دریافت صدا، کارت پانچ، دیسک گردان (DIsk Drive) و نوار خوان Tape reader را نام برد. تقریباً تمام وسایل ورودی الکترومکانیکی هستند.

صفحه کلید کامپیوتر با دو استاندارد QWERTY و Dvorak ساخته شده است که در زیر صفحه کلید QWERTY مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد.

از آنجا که صفحه کلید مهم‌ترین و متداول‌ترین وسیلهٔ ورودی است، آن را به طور کامل شرح می‌دهیم.

صفحه کلید یک صفحهٔ مستطیل شکل است، که مدل قدیمی آن ۸۳ کلیدی و مدلهای جدید آن ۱۰۱ کلیدی است. صفحه کلیدها شامل ارقام، حروف و علایم خاص و سایر علایم مورد استفاده در کامپیوتر است. **صفحه کلید ۱۰۱ کلیدی** یا **صفحه کلید پیشرفته** به **سه قسمت** و دو رنگ تقسیم شده است. رنگ سفید White و رنگ خاکستری GRAY. اجزای تشکیل‌دهندهٔ **صفحه کلید پیشرفته** عبارتند از: ۱ ــ کلیدهای ماشین تحریری ۲ ــ کلیدهای عملیاتی یا تابعی ۳ ــ کلیدهای عددی یا کلیدهای ماشین حسابی.

۱ ــ **کلیدهای ماشین تحریری**: به این کلیدها، **کلیدهای حرفی ــ عددی** نیز می‌گویند. در این قسمت از صفحه کلید، تمام حروف الفبای فارسی یا لاتین، ارقام ۰ تا ۹، علایم +، −، *، /، کلیدهای ESC و Tab، caps lock، shift، Ctrl، Alt و Enter ↵، Space Bar، کلید برگشت Back Space، کلید >، <، ?، .، و ،؛، "، '، :، {،}، [،]، (،)، ٪ و چند کلید دیگر تعبیه شده است که مجموعاً ۵۹ کلید است. در سمت راست این کلیدها، ۱۰ کلید Insert و Home و Page up و Delete و End و Page Down و ↑ و ← و ↓ و → وجود دارد که ما آن را جزء کلیدهای ماشین تحریری به حساب می‌آوریم. این ۱۰ کلید در ماشین تحریر وجود ندارد. همان‌گونه که ملاحظه می‌کنید، در این قسمت از صفحه کلید، برای راحتی برنامه‌نویس یا تایپیست دو کلید shift، دو کلید ctrl، دو کلید Alt وجود دارد.

اکنون مختصری راجع به کار هر یک از کلیدها توضیح

می‌دهیم:

کلید Esc : این کلید در گوشهٔ بالایی و در سمت چپ صفحه کلیدها قرار گرفته است. Esc سه حرف اول Escape به معنی گریز یا فرار یا «انصراف» است. این کلید در ماشین تحریر وجود ندارد. در کامپیوتر معمولاً برای انصراف Cancel از اجرای یک دستور، از کلید Esc استفاده می‌کنند.

مکان‌نما چیست؟ مکان‌نما، **خط کوچکی** به اندازهٔ **خط فاصله** یا **خط تیره** یا گاهی اوقات مربع یا مستطیل تو پری به صورت چشمک‌زن است که ستونی از صفحه نمایش را نشان می‌دهد، که قرار است در آن‌جا یک کاراکتر تایپ شود.

کلید TAB : این کلید در سمت چپ کلید Q و بالای کلید Caps Lock قرار دارد. TAB سه حرف اول کلمهٔ TABLE به معنی جدول یا پرش است. فشار بر روی این کلید مکان‌نما را یکباره به اندازهٔ چند فاصله مثلاً ۴ یا ۸ یا... به جلو یا سمت راست می‌برد. تعداد فاصله توسط نرم‌افزارها یا در Setup سیستم تعریف می‌شود. فشار همزمان بر روی دو کلید Shift و TAB مکان را به تعداد فاصلهٔ تعریف شده به سمت چپ برمی‌گرداند.

کلید Caps Lock : Caps مخفف Capitals به معنی **حرف بزرگ** یا **بزرگ** و Lock به معنی «قفل کردن» است. این دو کلمه یا کلید Caps Lock صفحه کلید را «در حالت تایپ حروف بزرگ» قرار می‌دهد. توجه داشته باشید که در حالت قراردادی default، با صفحه کلید می‌توان حروف کوچک الفبای انگلیسی را تایپ کرد. با فشار بر روی کلید Caps Lock ، که همزمان چراغ کلید Caps Lock در گوشهٔ بالایی و سمت راست روشن شده و به حالت روشن باقی می‌ماند، به راحتی می‌توانید حروف انگلیسی را با حرف بزرگ تایپ کنید. توجه کنید که این کلید فقط برای حروف الفبا به کار می‌رود. به جای استفاده از کلید Caps Lock برای تایپ حروف بزرگ، می‌توانید با فشار همزمان دو کلید shift و یک حرف انگلیسی، حرف بزرگ تایپ کنید. از کلید Caps Lock برای تایپ یک متن طولانی یا یک کلمه که همهٔ حرفهای آن با حروف بزرگ است استفاده می‌کنیم اما از فشار همزمان دو کلید shift و یک حرف برای تایپ یک یا چند حرف بزرگ در میان کلمه‌ای که همهٔ حرفهای آن کوچک است استفاده می‌کنیم.

کلید ⇧shift :در صفحه کلید، دوکلید shift وجود دارد که دقیقاً بالای کلید Ctrl قرار گرفته است. کلمهٔ shift به صورت تبدیل، مبدله،تغییر وضعیت ترجمه شده است. این کلید به تنهایی کاری انجام نمی‌دهد. اگر چراغ کلید Caps Lock روشن نباشد، با فشار همزمان بر روی این کلید و تایپ یک حرف، آن حرف به صورت بزرگ تایپ می‌شود و اگر چراغ کلید Caps Lock روشن باشد، با فشار همزمان بر روی کلید shift و تایپ یک حرف، آن حرف به صورت کوچک تایپ می‌شود.

بر روی کلیدهایی که دو علامت دارند مانند کلید 8* ، با فشار بر روی این کلید در حالت پیش‌فرض و قراردادی، عدد 8 تایپ می‌شود، اما اگر شما کلید shift را فشار دهید و به پایین نگهدارید به دنبال آن کلید 8* را فشار دهید، علامت ضرب یا * تایپ می‌شود. از کلید shift در حالت ترکیبی، مثلاً برای تولید Scan code نیز استفاده می‌شود که اندکی بعد راجع به آن توضیح می‌دهیم.

هر یک از دو کلید shift برای یک منظور مورد استفاده قرار می‌گیرند. کلید shift سمت چپ برای کار با دست چپ و کلید shift سمت راست برای کار با دست راست جهت راحتی تایپیست و ایجاد سرعت در کار طراحی شده‌اند.

با روشن کردن کامپیوتر و راه‌اندازی آن توسط فایلهای سیستم عامل، پس از مشاهدهٔ پیغام ...starting Ms - Dos با فشار ممتد بر روی کلید shift مستقیماً به پرامپت Dos می‌رویم.

کلید Ctrl : Ctrl مخفف Control است و کلید Ctrl را کلید کنترل می‌خوانند. این کلید در دو طرف کلید Alt و در پایین صفحه کلید قرار دارد. این کلید به تنهایی هیچ کاربردی ندارد. نوع کاربرد کلید Ctrl بستگی به نرم‌افزار مورد استفاده دارد. مثلاً در محیط Dos، برای قطع اجرای یک دستور از فشار همزمان دو کلید Ctrl و C یا Ctrl و Break استفاده می‌شود. علاوه بر این در همین محیط برای دیدن صفحه به صفحه اجرای یک دستور که محتوای آن در چند صفحه است

از فشار همزمان دو کلید Ctrl و S استفاده می‌شود. کلید Ctrl و Z برای ذخیره فایلی که با دستور Copy Con ایجاد می‌شود نیز به کار می‌رود. در محیط پاسکال و C برای کامپایل و اجرای یک برنامه از فشار همزمان دو کلید Ctrl و F9 استفاده می‌شود. در محیط Dos، فشار همزمان دو کلید Ctrl و P، محیط را برای استفاده از چاپگر PRN فراهم می‌آورد. علامت کلید Ctrl به همراه یک حرف، ^ است مانند ^C، که از فشار همزمان Ctrl و C ایجاد می‌شود.

کلیدهای Ctrl و Alt و Del برای راه‌اندازی مجدد سیستم یا Reset کردن سیستم به کار می‌رود.

از کلید Ctrl به همراه یک کلید دیگر صفحه کلید، برای تولید scan code نیز استفادهٔ زیاد می‌شود.

وجود دو کلید Ctrl در صفحه کلید، به همان تعبیر وجود دو کلید shift است که جهت سهولت و سرعت در کار است.

کلید Alt : Alt مخفف Alternate به معنی جانشین و جایگزین و حتی به معنی «حالت دوم» است. این کلید به تنهایی کاربردی ندارد و به صورت ترکیب با کلیدهای دیگر به کار می‌رود. مثلاً فشار همزمان سه کلید Alt و ctrl و del باعث راه‌اندازی مجدد سیستم یا Reset آن می‌شود. کلید Alt در دو طرف کلید **خط فاصله** Space bar قرار دارد. در محیط برنامه‌نویسی QBASIC، برای برجسته کردن رنگ منیوها menus از کلید Alt استفاده می‌شود، اما در محیط پاسکال و C برای باز شدن منیوها مثلاً فایل، همزمان دو کلید Alt و F فشار داده می‌شود.

کلید Alt به همراه کلیدهای دیگر، scan code مربوط به خود دارد که راجع به آن بعداً توضیح می‌دهیم.

با فشار بر روی کلید Alt و پایین نگهداشتن آن و تایپ یک عدد دو رقمی یا سه رقمی از قسمت عددی صفحه کلید، که در سمت راست آن است، کد اسکی کاراکترهای تعریف شده در صفحه کلید و کاراکترهای گرافیکی و نماد ریاضی یا یونانی ظاهر می‌شود. توجه داشته باشید که پس از تایپ یک عدد دو رقمی یا سه رقمی، کلیدها را آزاد کنید و دست خود را از روی آنها بردارید.

کلید Space bar : این کلید از نظر اندازه بزرگترین کلید روی صفحه کلید است و برای ایجاد یک فاصله space یا فضای خالی bolank به کار می‌رود. برای ایجاد یک یا چند فاصله بین نام و نام‌خانوادگی از کلید Space bar استفاده می‌شود.

کلید Enter : این کلید یکی از مهمترین کلیدهای صفحه کلید است. در محیط Dos پس از تایپ هر دستور، با فشار بر روی این کلید، علاوه بر اعلام پایان دستور، به کامپیوتر می‌گوییم دستور را اجرا کند. در محیط نرم‌افزارهای فارسی یا لاتین و در محیط زبانهای برنامه‌نویسی، فشار بر روی کلید Enter به معنی اعلام پایان خط و باز شدن سطر جدید برای تایپ است. همان طور که از شکل کلید Enter یعنی ↵ پیداست، این کلید از دو حرکت ↓ و ← تشکیل شده است به ↓ در کلید Enter، رفتن به خط بعد یا خط خور Line feed = LF و به ← در ↵، رفتن به سر سطر یا Carriage return = CR می‌گویند.

⇐ Line feed = LF

⇓

Carriage return = CR

کد اسکی LF، عدد دهدهی ۱۰ و کد اسکی CR عدد دهدهی ۱۳ است. بعضی از نرم‌افزارها عدد دهدهی ۱۳ را معادل Enter یا ↵ می‌گیرند و از LF صرف‌نظر می‌کنند.

کلید Enter با کلیدهای دیگر به صورت ترکیبی هم به کار می‌رود، که تعریف آن به نرم‌افزار مورد استفاده بستگی دارد.

کلید پس‌بر یا برگشت Backspace : این کلید به صورت ← در بالای کلید Enter قرار گرفته است. با هر بار فشار بر روی این کلید، کاراکترهای تایپ شدهٔ سمت چپ مکان‌نما پاک می‌شود و مکان نما را یک ستون به چپ انتقال می‌دهد.

کلیدهای دیگر این قسمت به جزء تایپ حروف و ارقام و علامتهای خاص به تنهایی یا با کلید shift، وظیفهٔ دیگری ندارند که احتیاج به توضیح بیشتر نیست.

کلید Insert : Insert به معنی «قرار دادن بین یا درج کردن بین» است. اگر کلید Insert را فشار دهید، مکان‌نما از حالت

خط تیره به صورت **مربع توپر** یا **مستطیل توپر** تبدیل می‌شود. در این حالت در محیط Dos ، با فشار بر روی یک کلید، کاراکتر آن کلید در همان ستونی که قرار داشت بین حروف کلمهٔ موجود قرار می‌گیرد. اگر یکبار دیگر کلید $\boxed{\text{Insert}}$ را فشار دهید مکان‌نما به صورت قراردادی یعنی خط تیره تبدیل می‌شود. در این حالت با فشار بر روی یک کلید، کاراکتر تایپ شده جای کاراکتر قبلی در همان ستون قرار می‌گیرد. در محیط QBASIC و پاسکال و C کار این کلید برعکس تعریف بالا است.

کلید $\boxed{\text{Home}}$: Home در صفحه کلید به معنی **ابتدا** یا **ابتدای سطر** است. در همهٔ محیطها با فشار بر روی کلید Home ، مکان نما در هر مکانی که باشد در ابتدای آن سطر یا آن خط قرار می‌گیرد.

کلید $\boxed{\text{Page up}}$: اگر اطلاعات محیط ویراستارها یا (editor)ها، بیشتر از یک صفحهٔ نمایش جا اشغال کند، فشار بر روی این کلید، شما را به یک صفحه بالاتر می‌برد. مثلاً اگر در صفحهٔ ۳ باشید شما را به صفحهٔ ۲ می‌برد.

کلید $\boxed{\text{Delete}}$: Delete به معنی حذف کردن یا پاک کردن است. با فشار بر روی این کلید، کاراکتری که مکان‌نما در زیر آن قرار دارد پاک می‌شود.

کلید $\boxed{\text{End}}$: End در صفحه کلید به معنی **انتها** یا **انتهای سطر** است. در همهٔ محیطها با فشار بر روی کلید End ، مکان‌نما در هر مکانی که باشد به انتهای آن سطر می‌رود.

کلید $\boxed{\text{Page Down}}$: در محیط ویراستار چند صفحه‌ای، فشار بر روی این کلید، شما را در وضعیت مشاهده مطالب صفحهٔ بعد قرار می‌دهد. مثلاً اگر در صفحهٔ ۳ باشید، با فشار بر روی کلید $\boxed{\text{Page Down}}$، به صفحهٔ ۴ می‌رود.

کلید $\boxed{\uparrow}$: در محیط ویراستارها با فشار بر روی کلید $\boxed{\uparrow}$، یک سطر به بالا می‌روید. در محیط Dos با اجرای Doskey و فشار بر روی کلید $\boxed{\uparrow}$ دستورات اجرای شده، از آخرین دستور، در پرامپت Dos، در اختیار شما قرار می‌گیرد.

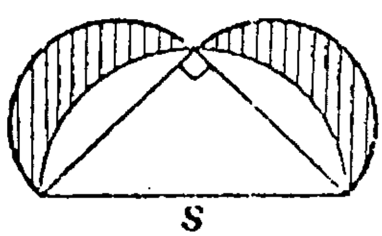
کلید $\boxed{\leftarrow}$: فشار بر روی این کلید شما را از محل مکان‌نما، در وضعیت یک ستون به چپ قرار می‌دهد.

کلید $\boxed{\downarrow}$: با فشار بر روی این کلید، در وضعیت یک سطر پایین قرار می‌گیرد.

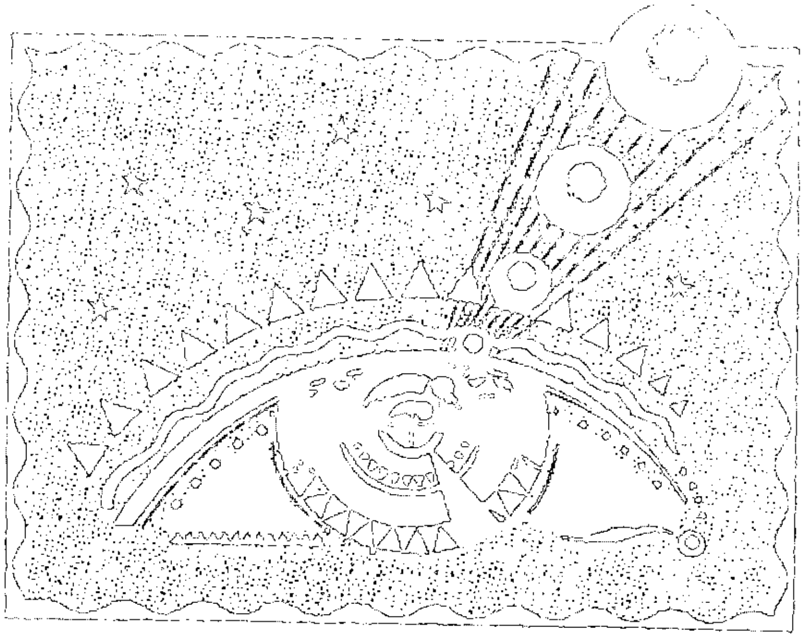
کلید $\boxed{\rightarrow}$: فشار بر روی این کلید شما را از محل مکان‌نما، در وضعیت یک ستون به راست قرار می‌دهد. دو قسمت دیگر صفحه کلید و وظایف هر کلید را در شمارهٔ بعد بخوانید:

تفریح اندیشهٔ ۳

هریک از نیمدایره‌های نمایش داده شده در شکل بر روی ساقها و قاعده یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین بنا شده‌اند. مساحت سطوح هاشورخورده را به‌صورت تابعی‌از S نمایش دهید.



جواب در صفحه ۸۷



دانش آموزان دبیرستان نظام قدیم و جدید

آموزش ترجمه متون ریاضی (١٦)

● محمدصادق عسگری

Limits of function

8.1 Limits from the left

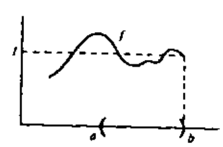
Suppose that f is defined on an interval (a, b). We say that $f(x)$ *tends* (or *converges*) to a *limit* l as x tends to b from the left and write

$$f(x) \to l \text{ as } x \to b-$$

or, alternatively,

$$\lim_{x \to b-} f(x) = l$$

if the following criterion is satisfied.



> Given any $\epsilon > 0$, we can find a $\delta > 0$ such that
> $|f(x) - l| < \epsilon$
> provided that $b - \delta < x < b$.

The number $|f(x) - l|$ is the distance between $f(x)$ and l. We can think of it as the error in approximating to l by $f(x)$. The definition of the statement $f(x) \to l$ as $x \to b-$ then amounts to the assertion that we can make the error in approximating to l by $f(x)$ as small as we like by taking x sufficiently close to b on the left.

۸. حدود توابع

۱. ۸) حدود از سمت چپ

فرض کنیم تابع f روی فاصله (a,b) تعریف شده باشد. می‌گوئیم $f(x)$ وقتی x از چپ به b نزدیک می‌شود به حد L میل می‌کند (همگراست) و نوشته می‌شود:

وقتی $x \longrightarrow b^-$، $f(x) \longrightarrow l$ یا به طور دیگر

$\lim\limits_{x \longrightarrow b^-} f(x) = L$ به شرط اینکه محک زیر برقرار باشد.

> به ازای هر $\varepsilon > 0$ بتوانیم $\delta > 0$ای را بیابیم به‌طوری که $|f(x) - L| < \varepsilon$ به شرط این که $b - \delta < x < b$

عدد $|f(x) - L|$ فاصله بین L و $f(x)$ است که ما این عدد را می‌توانیم به عنوان خطای تقریب عدد L به‌وسیله $f(x)$ در نظر بگیریم. تعریف گزاره، وقتی $x \longrightarrow b^-$ آنگاه $f(x) \longrightarrow L$، شامل این ادعا است، که ما می‌توانیم خطای تقریب عدد l به وسیله $f(x)$ را کوچکتر کنیم وقتی x به اندازه کافی از سمت چپ به b نزدیک شود.

نزدیک می‌شود به حد L میل می‌کند (همگراست) و نوشته می‌شود وقتی $x \longrightarrow \xi$ ، $f(x) \longrightarrow L$ یا بعبارت دیگر $\lim\limits_{x \longrightarrow \xi} f(x) = L$ در صورتی که محک زیر برقرار باشد.

> به ازای هر $\varepsilon > 0$ بتوانیم $\delta > 0$ای را بیابیم به‌طوری که $|f(x) - L| < \varepsilon$ به شرط این که $0 < |x - \xi| < \delta$

لغات و اصطلاحات

tends	گرائیدن ــ میل کردن
to Converge	همگرا بودن ــ متقارب بودن
from the left	از طرف چپ ــ از سمت چپ
alternately	بعبارت دیگر ــ متناوباً ــ به طور دیگر
Criterion	معیار ــ ضابطه ــ محک
Satisfied	بی‌نیاز ــ صادق ــ راضی ــ متقاعد
think of	در نظر گرفتن
Amount to	سرزدن به ــ بالغ شدن بر
Assertion	تأیید ادعا ــ اثبات ــ تأکید
We like	ــ میل داریم ــ
taking	صحبت کردن ــ گفتگو
sufficiently	به‌قدر کافی
Close to	نزدیک به
On the left	از سمت چپ
a gain	دوباره ــ باز
Provided that = Providing	به شرط اینکه = مشروط بر اینکه
as	وقتی که ــ چنانکه ــ به‌طوری که
except	بجز ــ مگر
Possibly	شاید ــ احتمالاً ــ به‌هیچ‌وجه
Often	غالباً ــ بارها ــ بیشتر اوقات ــ کراراً
useful	سودمند ــ مفید
note	در نظر گرفتن ــ ذکر کردن
equivalent	هم‌ارزش ــ هم‌ارز ــ معادل

8.2 Limits from the right

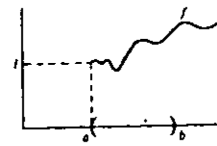
Suppose again that f is defined on an interval (a, b). We say that $f(x)$ tends (or converges) to a limit l as x tends to a from the right and write

$f(x) \to l$ as $x \to a+$,

or, alternatively,

$\lim\limits_{x \to a+} f(x) = l$

if the following criterion is satisfied.



> Given any $\varepsilon > 0$, we can find a $\delta > 0$ such that
> $|f(x) - l| < \varepsilon$
> provided that $a < x < a + \delta$.

۸ . ۲) حدود از سمت راست

باز فرض کنیم تابع f روی فاصله (a,b) تعریف شده باشد. در این صورت $f(x)$ وقتی x از راست به a نزدیک می‌شود به حد L میل می‌کند (همگراست) و نوشته می‌شود وقتی $x \longrightarrow a^+$ ، $f(x) \longrightarrow L$ یا به عبارت دیگر $\lim\limits_{x \longrightarrow a^+} f(x) = L$ هرگاه محک زیر برقرار باشد.

> به ازای هر $\varepsilon > 0$ بتوانیم $\delta > 0$ای را بیابیم به‌طوری که $|f(x) - L| < \varepsilon$ به شرط این که $a < x < a + \delta$

8.3 $f(x) \to l$ as $x \to \xi$

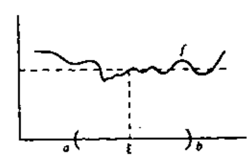
Suppose that f is defined on an interval (a, b) *except possibly* for some point $\xi \in (a, b)$. We say that $f(x)$ tends (or converges) to a limit l as x tends to ξ and write

$f(x) \to l$ as $x \to \xi$

or, alternatively,

$\lim\limits_{x \to \xi} f(x) = l$

if the following criterion is satisfied.



> Given any $\varepsilon > 0$, we can find a $\delta > 0$ such that
> $|f(x) - l| < \varepsilon$
> provided that $0 < |x - \xi| < \delta$.

۸ . ۳) وقتی $x \longrightarrow \xi$ ، $f(x) \longrightarrow L$

فرض کنیم تابع f روی فاصله (a,b) جز احتمالاً در نقطه $\xi \in (a,b)$ تعریف شده باشد می‌گوییم $f(x)$ وقتی x به ξ

بنابراین ــ پس ــ بدین‌معنی که ــ مثلاً	thus	یعنی ــ اقلاً	to say
جای چیزی را گرفتن ــ عوض کردن ــ جانشین شدن	replace	تبصره ــ نکته	remark
		ولو اینکه	even thought
سراسر ــ تماماً ــ به کلی ــ از هم‌جهت سرتاسر ــ در تمام مدت	through out by	کاملاً ــ خوب ِ خوب	Perfectly
		پیروی کردن ــ فهمیدن ــ نتیجه بردن	follow
عوض شود با	alternativeby		

تفریح اندیشهٔ ۴

کوتاهترین فاصله

پس از سالها جنگ و نزاع سخت در مورد حقوق برداشت آب در یک ده، مالکان دو گله‌داری L و K تصمیم به ساختن مخزن آبی با پمپ گرفتند، که به هر دو قسمت آب برساند، و در مورد جمیع جزئیات کار به استثنای مهمترین آنها، یعنی محل مخزن، دوستانه موافقت کردند.

K، که از ریاضیات اطلاع چندانی نداشت، و انجام امور را ساده در نظر می‌گرفت، گفت : ببین L، گله‌داری تو در سه مایلی جنوب رودخانه است، مال من در پایین رودخانه به فاصلهٔ شانزده مایل از گله‌داری تو و در فاصلهٔ نه مایلی جنوب رودخانه است، که به طرف مشرق بین زمینهای ما جاری است، بیا پمپ را در نقطه‌ای از ساحل رودخانه قرار دهیم که فاصلهٔ آن از هر دو گله‌داری یکی باشد. در این صورت به آسانی می‌شود محاسبه کرد که هزینهٔ آبرسانی برای هردومان برابر می‌شود.

L گفت : راه ارزانتری هم موجود است. محلی در امتداد ساحل وجود دارد که در صورتی که پمپ را در آنجا نصب کنیم، کل طول مسیر به هر دو گله‌داری کمتر از هر جای دیگر می‌شود. اگر هزینهٔ هر دو مسیر را به تساوی متقبل شویم هر دو پول کمتری پرداخت خواهیم کرد.

K جواب داد : بسیار خوب، اما این محل کجاست؟

L پاسخ داد : کمی وقت بده تا محاسبه کنم، در حال حاضر نیاز به یادآوری بعضی مطالب ریاضیات عالی دارم.

روز بعد با هم ملاقات کردند و L اقرار کرد که قادر به حل مسأله نشده است. وی گفت : بیا نقشهٔ تو را اجرا کنیم. می‌توانم آن را محاسبه کنم.

K گفت : اصلاً و ابداً. نقشهٔ تو بهتر از نقشهٔ من است و من می‌توانم بدون کمک گرفتن از ریاضیات عالی تو جای پمپ را مشخص کنم.

K چگونه مسأله را حل کرد؟

جواب در صفحه ۸۷

رادیکال

(قسمت چهارم)

● سید محمدرضا هاشمی موسوی

گویا کردن مخرج کسرها

برای گویا کردن مخرج کسرها می‌توان از اتحادهای زیر و نتایج آنها استفاده کرد:

اتحاد مزدوج (تفاضل مربع دو عبارت)

۱) $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

(تفاضل مکعب دو عبارت)

۲) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

(مجموع مکعب دو عبارت)

۳) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

(اتحاد لاگرانژ)

۴) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$
$=a^3+b^3+c^3-3abc$

با توجه به اتحاد (۴) بدیهی است که اگر $a+b+c=0$ باشد، آنگاه: $a^3+b^3+c^3=3abc$

(تفاضل توان n ام دو عبارت)

۵) $(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+b^{n-1})=a^n-b^n$

اگر n عددی فرد باشد، با تبدیل b به $-b$ از اتحاد (۵) به اتحاد زیر می‌رسیم:

(مجموع توان n ام دو عبارت)

۶) $(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots+b^{n-1})=a^n+b^n$

نتیجه ۱: اگر در اتحادهای (۵) و (۶)، $a=\sqrt[n]{x}$ و $b=\sqrt[n]{y}$ را قرار دهیم، به اتحادهای زیر می‌رسیم. در حالتی که n زوج باشد، x و y نمی‌توانند منفی باشند:

$x\ge 0$ و $y\ge 0$

۷) $(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{y})(\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-2}y}+\sqrt[n]{x^{n-3}y^2}+\cdots+\sqrt[n]{y^{n-1}})=x-y$

اگر n فرد باشد، داریم:

۸) $(\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{y})(\sqrt[n]{x^{n-1}}-\sqrt[n]{x^{n-2}y}+\sqrt[n]{x^{n-3}y^2}-\cdots+\sqrt[n]{y^{n-1}})=x+y$

نتیجه ۲: اگر در اتحاد (۴)، $a=\sqrt[3]{x}$ و $b=\sqrt[3]{y}$ و $c=\sqrt[3]{z}$ را قرار دهیم، به اتحاد زیر می‌رسیم.

۹) $(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{z^2}-\sqrt[3]{xy}-\sqrt[3]{xz}-\sqrt[3]{yz})=x+y+z-3\sqrt[3]{xyz}$

با توجه به اتحاد (۹)، بدیهی است که اگر $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}=0$ باشد، آنگاه: $x+y+z=3\sqrt[3]{xyz}$

نتیجه ۳: اگر در اتحادهای (۲) و (۳)، $a=\sqrt[3]{x}$ و $b=\sqrt[3]{y}$ را قرار دهیم، به اتحادهای زیر می‌رسیم.

(اتحاد (۷) به ازای $n=3$)

۱۰) $(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})=x-y$

(اتحاد (۸) به ازای $n=3$)

۱۱) $(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})=x+y$

نتیجه ۴: اگر در اتحاد (۱)، $a=\sqrt{x}$ و $b=\sqrt{y}$ (با فرض منفی نبودن x و y) را قرار دهیم به اتحاد زیر می‌رسیم.

۱۲) $(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})=x-y \quad (x\ge 0\ ,\ y\ge 0)$

۱ـ اگر مخرج کسر فقط شامل یک عبارت رادیکالی به

شکل $\sqrt[n]{a^m}$ باشد به صورت زیر عمل می‌کنیم.
(m و n عددهای طبیعی و k و s عددهای گویا و $a \neq 0$ و $s \neq 0$ می‌باشند.)

$$\frac{k}{s\sqrt[n]{a^m}} = \frac{k}{s\sqrt[n]{a^m}} \times \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}} = \frac{k\sqrt[n]{a^{n-m}}}{s\sqrt[n]{a^n}}$$

با فرض این که a عددی مثبت باشد، داریم:

$$\frac{k}{s\sqrt[n]{a^m}} = \frac{k\sqrt[n]{a^{n-m}}}{sa} \quad (a>0)$$

مثال: مخرج کسر $\frac{2}{5\sqrt[3]{-4}}$ به صورت زیر گویا می‌شود.

$$\frac{2}{5\sqrt[3]{-4}} = \frac{-2}{5\sqrt[3]{2^2}} \times \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{-2\sqrt[3]{2}}{5\sqrt[3]{2^3}} = \frac{-2\sqrt[3]{2}}{5\times 2} = -\frac{\sqrt[3]{2}}{5}$$

۲ ـ اگر مخرج کسر شامل دو عبارت رادیکالی با فرجه‌های زوج باشد. برای گویا کردن مخرج کسر به طور مکرر از اتحاد مزدوج (۱) یا (۱۲) استفاده می‌کنیم. مثال: با فرض $a>0$ و $b>0$، مخرج کسر $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ را گویا کنید.

$$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2}$$
$$= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a-b}$$

مثال ۱۸: مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

1) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ 2) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{3}}$

3) $\frac{7\sqrt{5}-4}{7\sqrt{5}+4}$ 4) $\frac{3\sqrt[4]{5}+4\sqrt[4]{2}}{3\sqrt[4]{5}-4\sqrt[4]{2}}$

حل: می‌دانیم دوجمله‌ایهای «$A-B$ و $A+B$» را مزدوج می‌گویند. همچنین دوجمله‌ایهایی نظیر «$a+\sqrt{b}$ و $a-\sqrt{b}$» و «$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ و $\sqrt{a}-\sqrt{b}$» و «$\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}$ و $\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}$» را مزدوج نامند. برای گویا کردن مخرج کسرها می‌توان صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب کرد.

1) $$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}$$
$$= \frac{\sqrt{15}-\sqrt{10}}{3-2} = \frac{\sqrt{15}-\sqrt{10}}{1} = \sqrt{15}-\sqrt{10}$$

2) $$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{3}} \times \frac{\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{3}} = \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{3})}{(\sqrt[4]{5})^2-(\sqrt[4]{3})^2}$$
$$= \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{3})}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{3}$$

3) $$\frac{7\sqrt{5}-4}{7\sqrt{5}+4} \times \frac{7\sqrt{5}-4}{7\sqrt{5}-4} = \frac{(7\sqrt{5}-4)^2}{(7\sqrt{5})^2-4^2}$$
$$= \frac{(7\sqrt{5}-4)^2}{245-16} = \frac{(7\sqrt{5}-4)^2}{229}$$

4) روش اول:
$$\frac{3\sqrt[4]{5}+4\sqrt[4]{2}}{3\sqrt[4]{5}-4\sqrt[4]{2}} \times \frac{3\sqrt[4]{5}+4\sqrt[4]{2}}{3\sqrt[4]{5}+4\sqrt[4]{2}}$$
$$= \frac{(3\sqrt[4]{5}+4\sqrt[4]{2})^2}{(3\sqrt[4]{5}-4\sqrt[4]{2})(3\sqrt[4]{5}+4\sqrt[4]{2})}$$
$$= \frac{(3\sqrt[4]{5}+4\sqrt[4]{2})^2}{(3\sqrt[4]{5})^2-(4\sqrt[4]{2})^2} = \frac{(3\sqrt[4]{5}+4\sqrt[4]{2})^2}{9\sqrt{5}-16\sqrt{2}} \times \frac{9\sqrt{5}+16\sqrt{2}}{9\sqrt{5}+16\sqrt{2}}$$
$$= \frac{(3\sqrt[4]{5}+4\sqrt[4]{2})^2(9\sqrt{5}+16\sqrt{2})}{(9\sqrt{5})^2-(16\sqrt{2})^2}$$
$$= \frac{(3\sqrt[4]{5}+4\sqrt[4]{2})^2(9\sqrt{5}+16\sqrt{2})}{-107}$$

روش دوم: می‌توان مستقیماً از اتحاد زیر که حالت خاصی از اتحاد (۷) می‌باشد، استفاده کرد.

$$(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{x^2y}+\sqrt[4]{xy^2}+\sqrt[4]{y^3}) = x-y$$
$$(x\geq 0, y\geq 0)$$

$$\frac{3\sqrt[4]{5}+4\sqrt[4]{2}}{3\sqrt[4]{5}-4\sqrt[4]{2}} = \frac{3\sqrt[4]{5}+4\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{3^4\times 5}-\sqrt[4]{4^4\times 2}}$$
$$= \frac{3\sqrt[4]{5}+4\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{405}-\sqrt[4]{512}} \times \frac{\sqrt[4]{(405)^3}+\cdots+\sqrt[4]{(512)^3}}{\sqrt[4]{(405)^3}+\cdots+\sqrt[4]{(512)^3}}$$

$$= \frac{(3\sqrt[4]{5}+4\sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{(405)^3}+\sqrt[4]{(405)^2(512)}+\sqrt[4]{(405)(512)^2}+\sqrt[4]{(512)^3})}{-107}$$

۳ ـ اگر مخرج کسر شامل بیش از دو رادیکال با فرجه‌های زوج یا شامل چند رادیکال با فرجهٔ زوج و یک عدد گویا باشد از اتحاد مزدوج می‌توان استفاده کرد.

مثال ۱۹: مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

1) $\frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}$ 2) $\frac{\sqrt{18}}{2\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

۳) $\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

حل :

۱) $\dfrac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}=\dfrac{4}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}\times\dfrac{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}$

$$=\frac{4(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{4(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{3+2\sqrt{2}-3}$$

$$=\frac{2(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{2}$$

$$=\sqrt{2}+2-\sqrt{6}$$

۲) $\dfrac{\sqrt{18}}{(2\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2})}\times\dfrac{(2\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(2\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})}$

$$=\frac{\sqrt{9\times 2}(2\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(2\sqrt{5}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{3\sqrt{2}(2\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})}{23+4\sqrt{15}-2}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}(2\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})}{21+4\sqrt{15}}\times\frac{21-4\sqrt{15}}{21-4\sqrt{15}}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}(2\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})(21-4\sqrt{15})}{201}$$

$$=\frac{\sqrt{2}(2\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})(21-4\sqrt{15})}{67}$$

۳) $\dfrac{1}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})-(\sqrt{3}+\sqrt{2})}\times\dfrac{(\sqrt{7}+\sqrt{5})+(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})+(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$

$$=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2-(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}$$

$$=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(7+2\sqrt{35}-2\sqrt{6})}\times\frac{(7+2\sqrt{35}+2\sqrt{6})}{(7+2\sqrt{35}+2\sqrt{6})}$$

$$=\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})(7+2\sqrt{35}+2\sqrt{6})}{(7+2\sqrt{35})^2-(2\sqrt{6})^2}$$

$$=\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})(7+2\sqrt{35}+2\sqrt{6})}{28\sqrt{35}+165}\times\frac{28\sqrt{35}-165}{28\sqrt{35}-165}$$

$$=\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})(7+2\sqrt{35}+2\sqrt{6})(28\sqrt{35}-165)}{215}$$

۴ ــ اگر مخرج کسر شامل دو رادیکال یا بیش از دو رادیکال با فرجه‌های فرد باشد از اتحادهای (۷) و (۸) و (۹) و (۱۰) و (۱۱) استفاده می‌کنیم. اگر مخرج کسر شامل رادیکالهایی با فرجه‌های فرد و زوج باشد از اتحادهای (۱) و (۲) و (۳) و (۴) و (۵) و (۶) نیز استفاده می‌کنیم.

مثال ۲۰ : مخرج کسر $\dfrac{a^2+b^2}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}$ را گویا کنید.

حل : با استفاده از اتحاد (۱۱) داریم :

$$\frac{a^2+b^2}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}\times\frac{\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{b^4}}$$

$$=\frac{(a^2+b^2)(\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{b^4})}{a^2+b^2}$$

$$=a\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{a^2b^2}+b\sqrt[3]{b}$$

مثال ۲۱ : مخرج کسر $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$ را گویا کنید.

حل : با استفاده از اتحاد (۱۰) داریم :

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}\times\frac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})}=\frac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{a-b}$$

مثال ۲۲ : مخرج کسر $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt{b}}$ را گویا کنید $(b>0)$.

حل : ابتدا از اتحاد (۱) و سپس از اتحاد (۲) استفاده می‌کنیم :

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt{b}}\times\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt{b}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt{b}}{\sqrt[3]{a^2}-(\sqrt{b})^2}\overset{(b>0)}{=}$$

$$\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt{b}}{\sqrt[3]{a^2}-b}\times\frac{\sqrt[3]{a^4}+b\sqrt[3]{a^2}+b^2}{\sqrt[3]{a^4}+b\sqrt[3]{a^2}+b^2}$$

$$=\frac{(\sqrt[3]{a}+\sqrt{b})(a\sqrt[3]{a}+b\sqrt[3]{a^2}+b^2)}{a^2-b^3}$$

مثال ۲۳ : مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

$$1)\ \frac{7}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}} \qquad 2)\ \frac{6-3\sqrt[3]{6}}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}$$

$$3)\ \frac{\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{5}} \qquad 4)\ \frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$$

حل : برای گویا کردن کسرهای فوق از اتحادهای (۱۱) (۱۰) و (۹) استفاده می‌کنیم :

$$1)\ \frac{7}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}}\times\frac{\sqrt[3]{3^2}-\sqrt[3]{3\times 4}+\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{3^2}-\sqrt[3]{3\times 4}+\sqrt[3]{4^2}}$$

$$=\frac{7(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{16})}{3+4}=\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{12}+2\sqrt[3]{2}$$

$$2)\ \frac{6-3\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}\times\frac{\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{6}}$$

$$=\frac{(6-3\sqrt[3]{6})(1+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{6})}{(\sqrt[3]{1})^3+(\sqrt[3]{2})^3+(\sqrt[3]{3})^3-3\sqrt[3]{6}}$$

$$=\frac{(6-3\sqrt[3]{6})(1+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{6})}{6-3\sqrt[3]{6}}$$

$$=1+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{6}$$

$$3)\ \frac{\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{5}}\times\frac{\sqrt[3]{7^2}+\sqrt[3]{7\times 5}+\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{7^2}+\sqrt[3]{7\times 5}+\sqrt[3]{5^2}}$$

$$=\frac{(\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{5})(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{35}+\sqrt[3]{25})}{7-5}$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{5})(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{35}+\sqrt[3]{25})$$

$$4)\ \frac{1}{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3\times 2}+\sqrt[3]{2^2}}\times\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{3-2}$$

$$=\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$$

مثال ۲۴ : حاصل عبارت زیر را پیدا کنید.

$$S=\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$$

$$(n\in\mathbb{N}, n\neq 1)$$

حل : با استفاده از تساوی

$(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})=1$ و یا :

$$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$$

خواهیم داشت :

$$S=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}-\sqrt{n-1}=\sqrt{n}-1$$

تبدیل رادیکال مرکب به حاصل جمع چند رادیکال ساده

اگر بخواهیم یک رادیکال مرکب، مانند : $\sqrt[n]{x+a\sqrt[m]{y}+b\sqrt[p]{z}+\cdots}$ را به صورت حاصل جمع چند رادیکال ساده بنویسیم، آن را مساوی عبارتی مانند : $K+A\sqrt[m]{y}+B\sqrt[p]{z}+\cdots$ قرار داده و سپس طرفین را به توان n می‌رسانیم. پس از مساوی قرار دادن اجزای گنگ و گویای متناظر، مقادیر K و A و B و ... را پیدا می‌کنیم. برای مثال، در مورد $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$ با فرض $b>0$, $(a\pm\sqrt{b})>0$ داریم:

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}\Rightarrow$$
$$a\pm\sqrt{b}=x+y\pm 2\sqrt{xy}\quad (x>0,\ y>0)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x+y=a\\ \sqrt{b}=2\sqrt{xy}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=a\\ xy=\dfrac{b}{4}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}\\ y=\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}\end{cases}\ (a^2-b\geq 0)$$

با فرض $a^2-b=c^2$ و $c\geq 0$، خواهیم داشت :

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+c}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-c}{2}}\qquad (1)$$

مثال ۲۵ : عبارت $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ را به جمع جبری دو رادیکال ساده تبدیل کنید.

حل : با استفاده از تساوی (۱) داریم :

$$c^2 = a^2 - b = 2^2 - 3 = 4 - 3 = 1 \Rightarrow c = 1$$

$$\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2+1}{2}} - \sqrt{\frac{2-1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{6}{4}} - \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

مثال ۲۶ : حاصل عبارت

$$A = \sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{2}$$

را حساب کنید.

حل : ابتدا عبارتهای $\sqrt{4+\sqrt{7}}$ و $\sqrt{4-\sqrt{7}}$ را با استفاده از تساوی (۱) ساده می‌کنیم :

$$c^2 = 4^2 - 7 = 16 - 7 = 9 \Rightarrow c = 3$$

$$\sqrt{4+\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{4+3}{2}} + \sqrt{\frac{4-3}{2}} = \sqrt{\frac{7}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sqrt{4-\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{4+3}{2}} - \sqrt{\frac{4-3}{2}} = \sqrt{\frac{7}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

بنابراین داریم :

$$A = \frac{\sqrt{14}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{14}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow \boxed{A = 0}$$

مثال ۲۷ : حاصل عبارت $B = \sqrt{3+\sqrt{4-2\sqrt{3}}} - \frac{\sqrt{6}}{2}$ را حساب کنید.

حل : ابتدا عبارت $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ یا $\sqrt{4-\sqrt{12}}$ را با استفاده از تساوی (۱) ساده می‌کنیم :

$$c^2 = 4^2 - 12 = 16 - 12 = 4 \Rightarrow c = 2$$

$$\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{4-\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{4+2}{2}} - \sqrt{\frac{4-2}{2}}$$

$$= \sqrt{3} - \sqrt{1} = \sqrt{3} - 1$$

بنابراین داریم :

$$B = \sqrt{3+\sqrt{3}-1} - \frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{2+\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{6}}{2}$$

همچنین عبارت $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ را با استفاده از تساوی (۱) ساده می‌کنیم :

$$c^2 = 2^2 - 3 = 4 - 3 = 1 \Rightarrow c = 1$$

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2+1}{2}} + \sqrt{\frac{2-1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

پس خواهیم داشت :

$$B = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{B = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

مسأله‌های زیر را حل کنید :

۱ ــ به ازای چه مقادیری از x عبارت $\sqrt[7]{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[5]{x^3-8}}}}$ دارای معنی است؟

۲ ــ عبارت $\sqrt[3]{7-5\sqrt[4]{4}}$ را به جمع جبری دو عبارت ساده بنویسید.

۳ ــ حاصل عبارت

$$D = \sqrt[5]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}} + \left(\sqrt[6]{\sqrt[5]{2}}\right)^9 - 2^{0/3} - \sqrt[20]{64}$$

$$+ \sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{3} - 3\sqrt[4]{3^{-4}}$$

را حساب کنید.

۴ ــ ثابت کنید برای هر $a \geq 0$ و $b \geq 0$، همواره داریم :

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$$

۵ ــ با فرض $a \geq 0$ و $b \geq 0$، عبارت زیر را ساده کنید :

$$P = -7a^3\sqrt{ab^4} \;.\; 4b^2\sqrt[4]{a^4b^2}$$

۶ ــ اگر n عدد طبیعی فرد و $n > 1$ و a و b عددهای حقیقی باشند، ثابت کنید :

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$$

۷ ــ اگر m عدد طبیعی و $\sqrt[n]{a}$ یک عدد حقیقی باشد، ثابت کنید :

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

۸ ــ مخرج کسر زیر را گویا کنید :

$$\frac{2}{\sqrt[3]{2} + \sqrt[5]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}} + (\sqrt[30]{2})^9 - 2^{0/3} - (\sqrt[20]{8})^2}$$

۹ ــ مخرج کسر زیر را گویا کنید :

$$\frac{14}{\sqrt[6]{4} + 5\sqrt[3]{16} - 7\sqrt[6]{4} + 2\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{54} + 4\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{16}}$$

۱۰ ـ اگر a و b عددهای نامنفی باشند، ثابت کنید:

$\sqrt{a^2+b^2}\le a+b$

۱۱ ـ اگر $a\ge 0$ و $b>0$ و n عدد طبیعی و $n>1$ باشد، ثابت کنید:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

۱۲ ـ معادله‌های زیر را حل کنید و جوابها را به ساده‌ترین صورت بنویسید:

1) $x^2+34=153$ 2) $3x^4-48=0$

3) $4x^2=7$ 4) $(x^2)^2+x^4=32$

5) $a^7+4^{21}=0$ 6) $x^{1375}+2^{1125}=0$

حل مسائل

حل:

۱ـ عبارت را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\sqrt[7]{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[5]{x^3-8}}}}=\sqrt[420]{x^3-8}$$

بنابراین باید داشته باشیم:

$x^3-8\ge 0\Rightarrow x^3\ge 8\Rightarrow x\ge 2$

درنتیجه عبارت به‌ازای هر عدد حقیقی $x\ge 2$ دارای معنی است.

۲ـ عبارت را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\sqrt[3]{7-5\sqrt[4]{4}}=\sqrt[3]{7-5\sqrt[4]{2^2}}=\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$$

در اینجا فرض می کنیم عبارت به شکل زیر تحویل می‌شود:

$\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}=x+y\sqrt{2}$ (۱)

دو طرف تساوی (۱) را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$7-5\sqrt{2}=(x+y\sqrt{2})^3=x^3+3x^2y\sqrt{2}+6xy^2+2y^3\sqrt{2}$$

$$7-5\sqrt{2}=x^3+6xy^2+(3x^2y+2y^3)\sqrt{2}$$

از مقایسهٔ طرفین تساوی، دستگاه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases}x^3+6xy^2=7\\ 3x^2y+2y^3=-5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x(x^2+6y^2)=1\times 7\\ y(3x^2+2y^2)=(-1)\times 5\end{cases}$$

اگر x و y عددهای درست باشند $x=1$ و $y=-1$ می‌تواند باشد. این مقادیر در دستگاه صدق می‌کنند؛ پس:

$$\sqrt[3]{7-5\sqrt[4]{4}}=1-\sqrt{2}$$

۳ـ داریم:

$$\sqrt[5]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}=\sqrt[5]{\sqrt[3]{2^3\times 2\sqrt{2}}}=\sqrt[15]{\sqrt{2^8\times 2}}=\sqrt[30]{2^9}$$

$$=2^{\frac{9}{30}}=2^{\frac{3}{10}}=2^{0/3}$$

$$\left(\sqrt[6]{\sqrt[5]{2}}\right)^9=\left(\sqrt[30]{2}\right)^9=\sqrt[30]{2^9}=2^{\frac{9}{30}}=2^{\frac{3}{10}}=2^{0/3}$$

$\sqrt[20]{64}=\sqrt[20]{2^6}=2^{\frac{6}{20}}=2^{\frac{3}{10}}=2^{0/3}$ و

$$3\sqrt[4]{3^{-4}}=3\times 3^{\frac{-4}{4}}=3\times 3^{-1}=3^0=1$$

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{1+3+2\sqrt{3}}=\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}=1+\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow D=2^{0/3}+2^{0/3}-2^{0/3}-2^{0/3}+1+\sqrt{3}-\sqrt{3}-1$$

$$=0\Rightarrow \boxed{D=0}$$

۴ـ با توجه به فرض: $a\ge 0$ و $b\ge 0$، می‌توان نوشت:

$(\sqrt{ab})^2=ab$ (۱)

و همچنین:

$(\sqrt{a}.\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2.(\sqrt{b})^2=ab$ (۲)

از تساویهای (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که عبارتهای $\sqrt{ab}$ و $\sqrt{a}.\sqrt{b}$ ریشهٔ دوم مثبت ab می‌باشند. چون ریشهٔ دوم مثبت یگانه است، پس:

$\sqrt{ab}=\sqrt{a}.\sqrt{b}$

۵ ـ با توجه به فرض: $a\ge 0$ و $b\ge 0$، می‌توان نوشت:

$$P=-7a^3\sqrt{ab^4}.4b^2\sqrt[4]{a^4b^2}$$
$$=(-7a^3)(4b^2)\sqrt{ab^4}.a\sqrt[4]{b^2}$$
$$=(-28a^4b^2).b^2\sqrt{a}.\sqrt{b}$$
$$=-28a^4b^4\sqrt{ab}$$

۶ ـ با توجه به فرض: n عدد طبیعی فرد و $n>1$ و a و b عددهای حقیقی هستند، می‌توان نوشت:

$\left(\sqrt[n]{ab}\right)^n=ab$ (۱)

و همچنین

$$(۲) \qquad \left(\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n.\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab$$

از تساویهای (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که عبارتهای $\sqrt[n]{ab}$ و $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$ ریشهٔ nام ab می‌باشند. چون ریشهٔ nام (درصورتی که n فرد باشد) یگانه است، پس: $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$

۷ــ با توجه به فرض: m عدد طبیعی و $\sqrt[n]{a}$ عدد حقیقی است، می‌توان نوشت:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \underbrace{\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{a}.\dots.\sqrt[n]{a}}_{m \text{ مرتبه}} = \sqrt[n]{\underbrace{a.a.\dots.a}_{m \text{ مرتبه}}} = \sqrt[n]{a^m}$$

پس:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

۸ ــ با توجه به حل مسأله (۳):

$$\sqrt[۵]{۲\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}} = ۲^{۰/۳} \quad \text{و} \quad \left(\sqrt[۳۰]{۲}\right)^۹ = ۲^{۰/۳} \quad \text{و}$$

$$\left(\sqrt[۲۰]{۸}\right)^۲ = \sqrt[۲۰]{۸^۲} = \sqrt[۲۰]{۲^۶} = ۲^{\frac{۶}{۲۰}} = ۲^{۰/۳}$$

پس می‌توان نوشت:

$$\frac{۲}{\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۵]{۲\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}}+\left(\sqrt[۳۰]{۲}\right)^۹-۲^{۰/۳}-\left(\sqrt[۲۰]{۸}\right)^۲}$$

$$= \frac{۲}{\sqrt[۳]{۲}+۲^{۰/۳}+۲^{۰/۳}-۲^{۰/۳}-۲^{۰/۳}} = \frac{۲}{\sqrt[۳]{۲}}$$

$$= \frac{۲}{\sqrt[۳]{۲}}\times\frac{\sqrt[۳]{۴}}{\sqrt[۳]{۴}} = \frac{۲\sqrt[۳]{۴}}{\sqrt[۳]{۸}} = \frac{۲\sqrt[۳]{۴}}{۲} = \sqrt[۳]{۴}$$

۹ــ ابتدا مخرج کسر را ساده می‌کنیم:

$$\sqrt[۶]{۴}+۵\sqrt[۳]{۱۶}-۷\sqrt[۶]{۴}+۲\sqrt[۳]{۱۶}-\sqrt[۳]{۵۴}+۴\sqrt[۳]{۲}-\sqrt[۳]{۱۶}=$$

$$\sqrt[۶]{۲^۲}+۵\sqrt[۳]{۲^۳\times۲}-۷\sqrt[۶]{۲^۲}+۲\sqrt[۳]{۲^۳\times۲}-\sqrt[۳]{۳^۳\times۲}$$

$$+۴\sqrt[۳]{۲}-\sqrt[۳]{۲^۳\times۲}=$$

$$\sqrt[۳]{۲}+۱۰\sqrt[۳]{۲}-۷\sqrt[۳]{۲}+۴\sqrt[۳]{۲}-۳\sqrt[۳]{۲}+۴\sqrt[۳]{۲}$$

$$-۲\sqrt[۳]{۲}=۷\sqrt[۳]{۲}$$

پس کسر را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\frac{۱۴}{۷\sqrt[۳]{۲}}\times\frac{\sqrt[۳]{۴}}{\sqrt[۳]{۴}} = \frac{۱۴\sqrt[۳]{۴}}{۷\sqrt[۳]{۸}} = \frac{۱۴\sqrt[۳]{۴}}{۱۴} = \sqrt[۳]{۴}$$

۱۰ــ با توجه به فرض: a و b عددهای نامنفی هستند، می‌توان دو طرف نامساوی را به توان ۲ رساند:

$$\sqrt{a^۲+b^۲} \le a+b \Rightarrow \left(\sqrt{a^۲+b^۲}\right)^۲ \le (a+b)^۲$$

$$\Rightarrow a^۲+b^۲ \le a^۲+b^۲+۲ab$$

$$\Rightarrow ۲ab \ge ۰ \Rightarrow ab \ge ۰$$

نامساوی $ab \ge ۰$ برای عددهای نامنفی a و b همواره درست است. بنابراین:

$$\sqrt{a^۲+b^۲} \le a+b$$

۱۱ــ راهنمایی: مشابه طریقهٔ حل مسألهٔ ۶ عمل کنید.

۱۲ــ داریم:

۱) $x^۲+۳۴=۱۵۳ \Rightarrow x^۲=۱۵۳-۳۴=۱۱۹$

$\Rightarrow x^۲=۱۱۹ \Rightarrow x=\pm\sqrt{۱۱۹}$

۲) $۳x^۴-۴۸=۰ \Rightarrow ۳x^۴=۴۸ \Rightarrow x^۴=۱۶=۲^۴$

$\Rightarrow x=\pm۲$

۳) $۴x^۲=۷ \Rightarrow x^۲=\frac{۷}{۴} \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{۷}}{۲}$

۴) $(x^۲)^۲+x^۴=۳۲ \Rightarrow x^۴+x^۴=۳۲ \Rightarrow ۲x^۴=۳۲$

$\Rightarrow x^۴=۱۶=۲^۴ \Rightarrow x=\pm۲$

۵) $a^۷+۴^{۲۱}=۰ \Rightarrow a^۷=-۴^{۲۱}$

$\Rightarrow a=-\sqrt[۷]{۴^{۲۱}}=-۴^{\frac{۲۱}{۷}}=-۴^۳=-۶۴$

۶) $x^{۱۳۷۵}+۲^{۱۲۵}=۰ \Rightarrow x^{۱۳۷۵}=-۲^{۱۲۵}$

$x^{۱۱\times۱۲۵}=-۲^{۱۲۵} \Rightarrow x=-\sqrt[۱۱]{۲}$

مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان (۱۷)

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

اعداد اول، تجزیه و رمزهای مخفی

(قسمت سوم)

در همایش اکتبر ۱۹۰۳ی انجمن ریاضی معتبر آمریکایی، نام فردریک *نلسون کول*[1] ریاضیدان در فهرست برنامهٔ انجمن به عنوان ارائه‌دهندهٔ مقاله‌ای با عنوان متواضعانهٔ «راجع به تجزیهٔ اعداد بزرگ[2]» آمده بود. هنگامی که نام *کول* را برای سخنرانی خواندند، وی به طرف تخته سیاه رفت و، بدون اظهار کلمه‌ای، محاسبهٔ ۲ به توان ۶۷ را انجام داد، و بعد از آن ۱ واحد از نتیجه کم کرد، و در حالی که همچنان چیزی نمی‌گفت به طرف قسمت نوشته نشده‌ای از تخته سیاه رفت و اعداد زیر را در هم ضرب کرد

۷۶۱ ۸۳۸ ۲۵۷ ۲۸۷ و ۱۹۳ ۷۰۷ ۷۲۱

پاسخهای دو محاسبه یکسان بودند. *کول* همچنان بی‌آن که کلمه‌ای ادا کند به جایش برگشت، و برای اولین و تنها دفعه جمیع حاضران در جلسهٔ انجمن آمریکایی ریاضی به پا خاسته ابراز احساسات کردند.

کاری که *کول* انجام داده بود (و ظاهراً بیست سال بعدازظهرهای یک‌شنبهٔ خود را صرف آن کرد) یافتن عاملهای اول عدد مرسن M_{67} بود. از ۱۸۷۶ مشخص بود که M_{67} مرکب است. اما این موضوع (توسط خود *ادوارد لوکاس*) با استفاده از آزمون *لوکاس* (اکنون *لوکاس ـ لمر*) کشف شده بود، که در ضمن این که پاسخی به این سؤال نیز می‌داد که عدد مرسن مفروضی اول یا مرکب است، اطلاعاتی در مورد عاملهای اعدادی که مرکب بودنشان را مشخص می‌کرد نمی‌داد. (این مطلب در مورد آزمون ARCL، چنانکه می‌توان از طرح قبلاً داده شدهٔ این روش دریافت، و در واقع در مورد هر تعداد روش سریع آزمون اول بودن اخیراً در دسترس، صادق است.)

اما چگونه می‌توان عاملهای عددی را که مرکب بودنش را می‌دانیم پیدا کرد؟ آزمایش و خطا واضحاً، به همان دلیل که در مورد آزمون اول بودن عملی نیست، کارا نیست. اما در عمل عنصری از تقسیم آزمایشی در جمیع اجراهای جاری روشهای آزمونهای اول بودن و تجزیه موجود است. و به علت سرعت انجام این کار، آغاز کردن عمل با، مثلاً، یک میلیون عدد اول اولیه معقول به نظر می‌رسد. در این صورت اگر مقسوم‌علیهی یافت شود، هر دو مسألهٔ اول بودن و تجزیه حل شده‌اند. و اگر نه، دست کم خواهیم دانست که عدد مورد نظر یا اول است، یا

اگر مرکب است، تنها عاملهای اول بزرگ دارد. کاربرد واقعیت اخیر با روش تجزیهٔ ساده‌ای انجام می‌گیرد که از *فرما* و به صورت زیر است.

فرض می‌کنیم $n = uv$ ، که در آن u و v هر دو اعداد بزرگ و فرد، با $u \le v$ ،اند. (این وضعیت، از آنجا که فرضمان بر این است که n تنها عاملهای اول بزرگ دارد، وضعیتی است که هنگامی با آن روبرو می‌شویم که می‌دانیم n مرکب است و مایل به یافتن عاملهای آنیم.) فرض می‌کنیم

$x = \frac{1}{2}(u+v)$ و $y = \frac{1}{2}(u-v)$

دراین‌صورت $x > y \ge 0$ و $u = x + y$ ، $v = x - y$ ، بنابراین

$$n = (x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

که می‌تواند به صورت زیر نوشته شود

$$y^2 = x^2 - n \qquad (1)$$

برعکس، اگر x و y در معادلهٔ (۱) صدق کنند، آنگاه n دارای تجزیهٔ زیر می‌شود

$$n = (x+y)(x-y) \qquad (2)$$

در نتیجه، تجزیهٔ n به حاصلضرب دو عدد هم‌ارز یافتن عددهای x و y ی است که در معادلهٔ (۱) صدق کنند، و در این حالت تجزیهٔ حاصل توسط معادلهٔ (۲) داده می‌شود. (توجه داشته باشید که این کار لزوماً تجزیهٔ *اول* n را به دست نمی‌دهد. اما زمانی که عددی به دو عامل تقسیم شود، ممکن است خود آن دو عامل به نوبت خود تجزیه شوند، و این کاری است که بدون استثنا بسیار ساده‌تر است زیرا هر چه عدد کوچکتر باشد تجزیه‌اش آسانتر است.)

برای یافتن x و y ، چنان که در معادلهٔ (۱) آمده است، با کوچکترین عدد اول k ، چنان که $k \ge \sqrt{n}$ ، آغاز می‌کنیم، و سپس، به نوبت، به بررسی مقادیر $x = k$ ، $x = k+1$ ، $x = k+2$ ، ... پرداخته ملاحظه می‌کنیم $x^2 - n$ مربع کامل است یا خیر. هنگامی که چنین x ی را یافتیم، تجزیه به گونه‌ای مؤثر کامل می‌شود. با این شرط که n دارای دو عامل تقریباً به یک اندازه باشد (و در نتیجه نزدیک به $\sqrt{n}$ که روشمان را از آن آغاز کردیم)، باید جواب را نسبتاً سریع به دست آوریم. (اگر مایل باشید که در این مرحله خودتان به بررسی این روش بپردازید، اعداد ۱۰۳۷۹ و ۹۳۳۴۳ مثالهای مناسبی به دست می‌دهند).

طرق گوناگونی در سرعت بخشیدن به فرایند فوق موجودند. به عنوان نمونه، اگر عمل مورد نظر را بدون استفاده از ابزار انجام می‌دهیم نیاز به محاسبهٔ ریشهٔ دوم $x^2 - n$ ، برای ملاحظهٔ عدد درست بودن آن، در هر حالت نداریم. از آنجا که هیچ مربع کاملی به یکی از ارقام ۲، ۳، ۷، یا ۸ ختم نمی‌شود، هرگاه مشخص شود $x^2 - n$ به یکی از چنین رقمهایی ختم می‌شود آن مقدار x را می‌توان بلافاصله کنار گذاشت.

خود *فرما* از این روش برای تجزیهٔ زیر استفاده کرد

$$۲۰۲۷۶۵۱۲۸۱ = ۴۴۰۲۱ \times ۴۶۰۶۱$$

اجراهای کامپیوتری برای «حذف بلافاصلهٔ» مقادیر غیرممکن x (فرایندی به دلایل آشکار معروف به *غربال کردن*) از روشهایی کاملاً پیچیده استفاده می‌کنند. در ۱۹۷۴، ریاضیدانهای دانشگاه *کالیفرنیا* در برکلی ۱۸۱ ـ SRS ، ابزار الکترونیکی به طور اختصاصی طرح شده‌ای را برای غربال کردن اعداد ساختند، که می‌توانست در هر ثانیه ۲۰ میلیون عدد را بررسی کند.

عددهای فرما

nامین عدد *فرما*[۳] با رساندن ۲ به توان n ، سپس با رساندن ۲ به توان این عدد و افزودن ۱ به نتیجه، حاصل می‌شود، یعنی،

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

به این ترتیب $F_0 = 3$ ، $F_1 = 5$ ، $F_2 = 17$ ، $F_3 = 257$ ، و (هم‌اکنون نمو سریع این اعداد نظر به کاربرد مکرر تابع نمایی مربوطه آشکار شده است)

$$F_4 = 2^{16} + 1 = 65537$$

علت توجه به این اعداد ادعایی است که توسط *فرما* در نامه‌ای که به مرسن در ۱۶۴۰ نوشته شده، انجام گرفته است. *فرما*، با توجه به این که هر یک از اعداد F_0 تا F_4 اول است چنین نوشته است: «دریافته‌ام اعداد به صورت $2^{2^n} + 1$ همواره عددهایی اول‌اند» و از آن زمان به بعد صدق این قضیه برای تحلیلگران دارای اهمیت شده است. این موضوع باید به عنوان

اخطاری به تمام کسانی باشد که بر مبنای مبالغ اندکی از اطلاعات به نتیجه‌گیری می‌پردازند. *فرما* با تمام تواناییهایش در مورد اعداد، در این اظهار به خطا رفته بود. این مطلب اولین‌بار به طور قاطع توسط لئونهارد اویلر[۴] ریاضیدان بزرگ سوئیسی در ۱۷۳۲ نشان داده شد: $F_5 = ۴۲۹۴۹۶۷۲۹۷$ اول نیست. شگفت اینجاست که گرچه *اویلر* این نتیجه را با استفاده از تقسیم آزمایشی به دست آورد. نتیجه‌ای مستقیم با استفاده از خود آزمون فرما موجود است که غیر اول بودن F_5 را مبرهن می‌کند. به یاد بیاورید که آزمون مزبور بر این است که اگر P اول باشد در این صورت $۳^{P-۱} \bmod P = ۱$، اما در مورد $P = F_5$ به دست می‌آوریم

$$۳^{P-۱} \bmod P = ۳۰۲۹۰۲۶۱۶۰$$

بنابراین F_5 نمی‌تواند اول باشد.

کارهای بعدی نشان داده که فرما تا چه حد به خطا بوده است. اکنون می‌دانیم F_n به ازای جمیع مقادیر n از ۵ تا ۱۶، نیز به ازای مقادیر گوناگون دیگر، مرکب است، و حدس فعلی این است که F_n به ازای جمیع مقادیر n بزرگتر از ۴ مرکب است.

اعداد فرما مثالی دیگر از عددهایی را به دست می‌دهند که صورت خاص آنها آزمون اول بودنشان را به طریقی کارا امکانپذیر می‌کند ــ یکی از روشهای معروف در این مورد *قضیهٔ* بروث[۵] است: عدد فرمای F_n اول است اگر، و تنها اگر

$$۳^{\frac{(F_n-۱)}{۲}} \bmod F_n = -۱$$

این دستاورد آزمون بسیار کارایی برای اول بودن اعداد فرما به دست می‌دهد. (این آزمون، همانگونه که ممکن است حدس زده باشید، رابطهٔ تنگاتنگی با آزمون *فرمای* قبلاً بحث شده دارد.) اما علاقهٔ ما در این مرحله به آزمون اول بودن اعداد فرما نیست، بلکه به تجزیهٔ اعدادی است که مرکب بودنشان مشخص است، زیرا در این زمینه است که در سالهای اخیر گسترشهای قابل توجهی انجام گرفته است، گسترشهایی که بدون کاربردهایی خارج از قلمرو ریاضیات نیستند. (بعداً بخش مربوط به رمزهای محرمانه را در این فصل ملاحظه کنید.)

همانطور که قبلاً توجه کردیم مرکب بودن عدد فرمای F_5 توسط *اویلر* به اثبات رسید. وی یک عامل اول آن، یعنی ۶۴۱، را نیز محاسبه کرد. مرکب بودن F_6 در ۱۸۸۰ توسط *لندری*[۶] ثابت شد، و بار دیگر عاملی اول به دست آمد: ۲۷۴۱۷۷. F_7 ماجرایی دگرگونه داشت. مرکب بودن آن در ۱۹۰۵ توسط مورهد[۷] و وسترن[۸] به اثبات رسید، اما تجزیهٔ آن تا سال ۱۹۷۱ زمانی که *بریلهارت*[۹] و موریسون[۱۰] (مجهز با کامپیوتر IBM.360-91) تجزیهٔ زیر را به دست آوردند میسر نشد

$$\begin{aligned} F_7 &= ۲^{۱۲۸}+۱ \\ &= ۳۴۰\ ۲۸۲\ ۳۶۶\ ۹۲۰\ ۹۳۸\ ۴۶۳\ ۴۶۳\ ۳۷۴\ ۶۰۷ \\ &\quad ۴۳۱\ ۷۶۸\ ۲۱۱\ ۴۵۷ \\ &= ۵۹\ ۶۴۹\ ۵۸۹\ ۱۲۷\ ۴۹۷\ ۲۱۷ \times ۵\ ۷۰۴\ ۶۸۹ \\ &\quad ۲۰۰\ ۶۸۵\ ۱۲۹\ ۰۵۴\ ۷۲۱ \end{aligned}$$

آنها برای انجام این کار از روشی استفاده کردند که مدتها قبل توسط *لمر* و *پاورز*[۱۱] مطرح و شامل کسرهای مسلسل بود. محاسبه ده ساعت و نیم طول کشید. نمونه‌های اصلاح شدهٔ روش *کسر مسلسل*[۱۲] (آن طور که امروزه نامیده می‌شود) بعضی از روشهای تجزیهٔ اخیراً در دسترس را به دست می‌دهند.

دو نفری که در ۱۹۰۵ مرکب بودن F_7 را نشان دادند، یعنی مورهد و وسترن، مرکب بودن F_8 را نیز در ۱۹۰۹ پیدا کردند. و تنها در ۱۹۸۱ بود که برنت[۱۳] و پولار[۱۴] تجزیهٔ آن را یافتند. محاسبهٔ این کار دو ساعت بر کامپیوتر یونیواک[۱۵] ۱۱۰۰/2 طول کشید. روش محاسبه، که توسط خود پولار اختراع شده بود، در آن زمان از این لحاظ غیرمعمول بود که، برخلاف اغلب روشهای ریاضیات، به دست دادن نتیجه را تضمین نمی‌کرد، و تنها چیزی که می‌توانست از ریاضیات زمینهٔ آن به دست آید این بود که اگر محاسبهٔ مشخصی انجام می‌گرفت، در این صورت احتمال بسیار وجود داشت که تجزیهٔ عدد طی طول معقولی از زمان به دست آید، اما امکان اندکی هم وجود داشت که این واقعه اتفاق نیفتد. بنابراین روش مزبور شبیه تقسیم آزمایشی نبود، که در آن شانس به دست آوردن پاسخ طی یک میلیارد سال اندک است. و گرچه همچنان عنصری از تصادف در روش پولار وجود دارد اما هوشمندانه بودن آن در این است که در آن شانس به مقدار زیادی به نفع تجزیه شدن

است.

در سالهای اخیر تعدادی از روشهای موسوم به روشهای مونت کارلو[۱۶]، از قبیل روش تجزیهٔ پولار موجود شده‌اند که ایقان یک نتیجه را با احتمال بالای نتیجه‌ای در زمانی بسیار کمتر تعویض کرده‌اند.

دو عامل اول F_8 (که دارای ۷۸ رقم است) عبارت‌اند از

۱ ۲۳۸ ۹۲۶ ۳۶۱ ۵۵۲ ۸۹۷

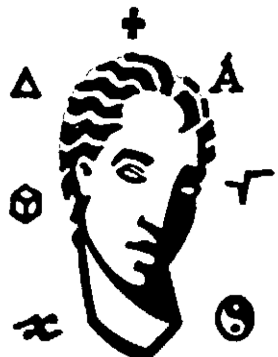
و

۹۳ ۴۶۱ ۶۳۹ ۷۱۵ ۳۵۷ ۹۷۷ ۷۶۹ ۱۶۳ ۵۵۸
۱۹۹ ۶۰۶ ۸۹۶ ۵۸۴ ۰ ۵۱ ۲۳۷ ۵۴۱ ۶۳۸
۱۸۸ ۵۸۰ ۲۸۰ ۳۲۱

از هنگام نوشتن F_9 کسی توانایی تجزیهٔ آن را نداشته است. شاید *کارل فردریش گاوس*[۱۷]، در صورتی که زنده بود، اکنون که کامپیوترهای سریع در دسترس‌اند، می‌توانست در این مورد کمک کند. وی محققاً شگفت‌آورترین نتیجه‌ها را در مورد اعداد فرما به دست داد، یعنی نتیجه‌ای که آنها را به مسألهٔ کلاسیک از هندسهٔ یونان متصل می‌کند، این دستاورد، همان‌گونه که بسیاری از کشفیات گاوس، شایستگی ورودی استثنائی به یکی از حیرت‌انگیزترین ذهنهای ریاضی‌ای را دارند که دنیا تاکنون شناخته است.

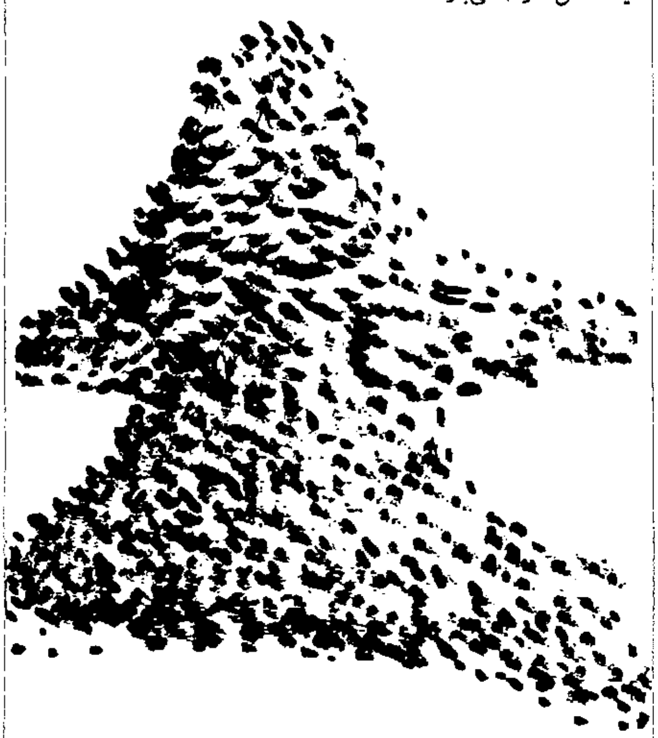
یادداشتها :

1 – Fredrick Nelson Cole
2 – On the factorization of large numbers
3 – Fermat numbers
4 – Leonhard Euler
5 – Proth's theorem
6 – Landry
7 – Morehead
8 – Western
9 – Brillhart
10 – Morrison
11 – Powers
12 – Continued fraction method
13 – Brent
14 – Pollard
15 – Univac
16 – Mont Carlo methods
17 – Karl Friedrich Causs

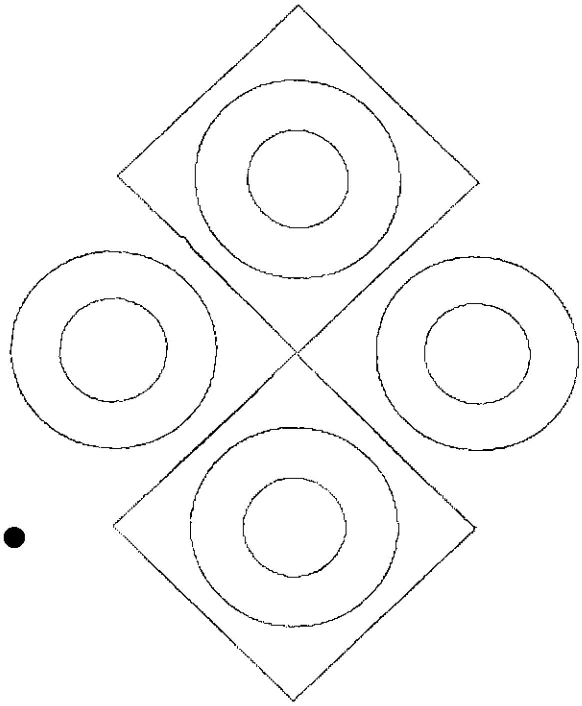


تفریح اندیشهٔ ۵

دو توده شن داریم. دو بازیکن به نوبت (۱) یکی از توده‌ها را از محل بازی برمی‌دارد و (۲) تودهٔ باقی‌مانده را به دو تودهٔ تقسیم می‌کند. بازیکنی که نتواند توده‌ای را تقسیم کند (زیرا تودهٔ مزبور تنها یک شن دارد) می‌بازد.



جواب در صفحه ۸۸



اصل ردّ و شمول

(قابل استفادهٔ دانش‌آموزان دورهٔ پیش‌دانشگاهی رشتهٔ ریاضی)

● امیرمنصور خانمحمد و امیرفرزاد از دبیرستان سروش

● ترجمه از کتاب ریاضیات گسسته گریمالدی

اصل ردّ و شمول

اصل ردّ و شمول بازگشتی به قوانین اساسی شمارش است. هدف از آن توسعه روشهای شمارش در مورد مسائل حل شده توسط نمودار «ون» است. به عنوان مثال یکی از کاربردهای این اصل شمارش تعداد توابع تعریف شده از A به B است $(f: A \to B)$ به شرط آن که: $N(A) = m$ و $N(B) = n$ و $m \geq n$ باشد. از کاربردهای اساسی این اصل حل مسائل مختلف شمارش بروش غیرمستقیم است.

بخش اول

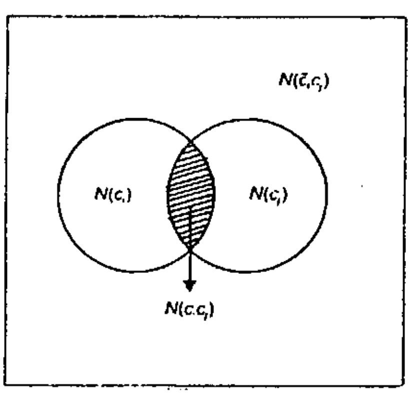
صورت اصل ردّ و شمول

در این قسمت ما نگارش جدیدی را تعریف کرده، سپس به خود اصل می‌پردازیم و در ادامه با بیان مثالهایی آن را توضیح می‌دهیم. فرض کنید s مجموعه‌ای باشد که $N(S) = m$ و $C_1, C_2, \dots, C_t$ زیرمجموعه‌های آن باشند؛ مشخص است که بعضی از آنها بیش از یک عضو دارند.

بدیهی است که $N(C_1' \cap C_2' \cap \dots \cap C_t')$ تعداد عضوهایی از s هستند، که در هیچ‌یک از زیرمجموعه‌های $C_1, C_2, \dots, C_t$ شرکت ندارند. لازم به تذکر است که این با $N(C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_t)'$ متفاوت است.

با توجه به شکل زیر اگر $N(C_i)$ تعداد اعضای مجموعه سمت چپ و $N(C_j)$ تعداد اعضای مجموعه سمت راست باشد، محدودهٔ هاشور خورده $N(C_i \cap C_j)$ خواهد بود (نمودار ون). با توجه به شکل زیر $N(C_i' \cap C_j')$ به این صورت محاسبه می‌گردد:

$$N(C_i' \cap C_j') = N(S) - \left[N(C_i) + N(C_j)\right] + N(C_i \cap C_j)$$



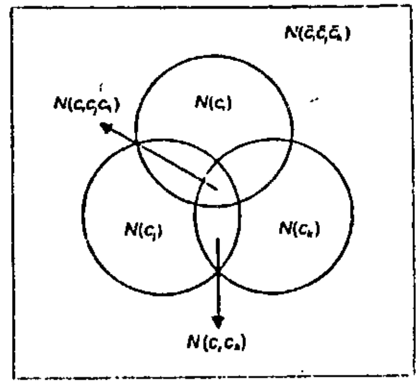
(شکل ۱)

(قسمت هاشور خورده در داخل کروشه دو بار کم شده که یک بار آن را اضافه می‌کنیم).

حالت سه‌تایی مثال فوق نیز صادق است:

$$N(C_i' \cap C_j' \cap C_k') = N(S) - \left[N(C_i) + N(C_j) + N(C_k)\right] +$$

$$[N(C_i\cap C_k)+N(C_i\cap C_j)+N(C_j\cap C_k)]-$$
$$N(C_i\cap C_j\cap C_k)$$



(شکل ۲)

(قسمتهای مشترک بین دو مجموعه در کروشه اوّل هر کدام دوبار کم شده‌اند، که در کروشه دوم این موضوع جبران شده است؛ قسمت مشترک بین هر سه مجموعه سه بار در کروشه اوّل کم شده و سه بار در کروشهٔ دوم اضافه شده لذا باید یکبار کم شود).

حال به کمک حالتهای دوتایی و سه‌تایی به بیان اصل می‌پردازیم.

قضیه یک:

یک مجموعه n عضوی با زیرمجموعه‌های $C_i\ (1\le i\le t)$ را در نظر بگیرید. تعداد اعضایی از این مجموعهٔ n عضوی (S) که در هیچیک از C_i ها حضور ندارند به صورت زیر نمایش داده می‌شوند:

$$N' = N(C_1'\cap C_2'\cap C_3'\cap\dots\cap C_t') =$$

قضیه ردّ و شمول بیان می‌دارد:

$$N' = N(C_1'\cap C_2'\cap C_3'\cap\dots\cap C_t') =$$
$$N(S)-[N(C_1)+N(C_2)+\dots+N(C_t)]$$
$$+[N(C_1\cap C_2)+N(C_1\cap C_3)+\dots+N(C_1\cap C_t)+$$
$$N(C_2\cap C_3)+\dots+N(C_{t-1}\cap C_t)]$$
$$-[N(C_1\cap C_2\cap C_3)+N(C_1\cap C_2\cap C_4)+\dots+$$
$$N(C_{t-2}\cap C_{t-1}\cap C_t)]$$
$$+\dots+(-1)^t N(C_1\cap C_2\cap C_3\cap\dots\cap C_t)$$
$$\Rightarrow N' = N(S)-\sum_{i=1}^{t}N(C_i)+\sum_{1\le i<j\le t}N(C_i\cap C_j)-$$
$$\sum_{1\le i<j<k\le t}N(C_i\cap C_j\cap C_k)+\dots+$$
$$(-1)^t N(C_1\cap C_2\cap\dots\cap C_t)$$

اثبات:

عضو دلخواه x از مجموعه S را در نظر می‌گیریم:

الف) یا این عضو در هیچیک از زیر مجموعه‌ها حضور ندارد؛ در این صورت در سمت چپ تساوی یکبار شمرده می‌شود و در سمت راست نیز فقط یکبار شمرده می‌شود که آن در $N(S)$ است.

ب) و یا اینکه عضو x در r تا از این زیر مجموعه‌ها $(1\le r\le t)$ حضور دارد؛ با توجّه به این مطلب این عضو در طرف راست تساوی:

۱) یکبار در $N(S)$ شمرده می‌شود.

۲) r بار در $\sum_{1\le i\le t}N(C_i)$ شمرده می‌شود.

۳) $\binom{r}{2}$ بار در $\sum_{1\le i<j\le t}N(C_i\cap C_j)$ شمرده می‌شود.

.
.
.

(r+1) $\binom{r}{r}$ بـار در $\sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_r\le t}N(C_{i_1}\cap C_{i_2}\cap\dots\cap C_{i_r})$ شمرده می‌شود.

پس تعداد دفعات شمارش عضو x در طرف راست تساوی برابر است با:

$$1-r+\binom{r}{2}-\binom{r}{3}+\dots+(-1)^r\binom{r}{r}=[1+(-1)]^r=0^r=0$$

که این صحّت اصل را تأیید می‌کند، زیرا این عضو در طرف راست تساوی نیز صفر بار شمرده می‌شود؛ چرا که ما به دنبال اعضایی هستیم که اشتراک متمم زیرمجموعه‌ها را برآورده سازند.

نتیجهٔ ۱:

طبق فرض قضیه ۱ نتیجه می‌شود که $N-N'$ مشخص‌کننده تعداد عضوهایی است که حداقل در یکی از C_i ها شرکت

دارند یعنی :

$$N(C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_t) = N - N'$$

قبل از حل چند مثال در این باب تعریف می‌کنیم :

$$S_0 = N(S)$$

$$S_1 = \left[N(C_1) + N(C_2) + \ldots + N(C_t)\right]$$

$$S_2 = \left[N(C_1 \cap C_2) + N(C_1 \cap C_3) + \ldots + N(C_1 \cap C_t) + N(C_2 \cap C_3) + \ldots + N(C_{t-1} \cap C_t)\right]$$

که در حالت کلی داریم :

$$S_k = \sum_{1 \le k \le t} N(C_{i_1} \cap C_{i_2} \cap \ldots \cap C_{i_k})$$

لازم به تذکر است تعداد جمله‌هایی، که در S_k با یکدیگر جمع می‌شوند $\binom{t}{k}$ است.

مثال ۱:

تعداد اعداد صحیح و مثبت را که بر ۲ و ۳ و ۵ بخش‌پذیر نیستند معین کنید. $(1 \le n \le 100)$

در اینجا $S = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ و $N(S) = 100$ است.

برای حل سه زیرمجموعه در S تعریف می‌کنیم :

الف ـ C_1 : اعدادی که بر ۲ بخشپذیرند.

ب ـ C_2 : اعدادی که بر ۳ بخشپذیرند.

ج ـ C_3 : اعدادی که بر ۵ بخشپذیرند.

بدیهی است که جواب مسأله $N(C_1' \cap C_2' \cap C_3')$ است.

برای حل این مسأله از تابع جزء صحیح کمک می‌گیریم :

$$N(C_1) = [\frac{100}{2}] = 50$$

$$N(C_2) = [\frac{100}{3}] = 33$$

$$N(C_3) = [\frac{100}{5}] = 20$$

$$N(C_1 \cap C_2) = [\frac{100}{6}] = 16$$

$$N(C_1 \cap C_3) = [\frac{100}{10}] = 10$$

$$N(C_2 \cap C_3) = [\frac{100}{15}] = 6$$

$$N(C_1 \cap C_2 \cap C_3) = [\frac{100}{30}] = 3$$

با بکار بردن اصل ردّ و شمول به دست می‌آید :

$$N(C_1' \cap C_2' \cap C_3') = S_0 - S_1 + S_2 - S_3$$
$$= N(S) - \left[N(C_1) + N(C_2) + N(C_3)\right] + \left[N(C_1 \cap C_2) + N(C_1 \cap C_3) + N(C_2 \cap C_3)\right] - N(C_1 \cap C_2 \cap C_3)$$
$$= 100 - [50 + 33 + 20] + [16 + 10 + 6] - 3 = 26$$

که این ۲۶ عدد عبارتند از :

۱ ـ ۷ ـ ۱۳ ـ ۱۷ ـ ۱۹ ـ ۲۳ ـ ۲۹ ـ ۳۱ ـ ۳۷ ـ ۴۱ ـ ۴۳ ـ ۴۷ ـ ۴۹ ـ ۵۳ ـ ۵۹ ـ ۶۱ ـ ۶۷ ـ ۷۱ ـ ۷۳ ـ ۷۷ ـ ۷۹ ـ ۸۳ ـ ۸۹ ـ ۹۱ ـ ۹۷.

مثال ۲:

با استفاده از ترکیب با تکرار می‌توانیم تعداد جوابهای صحیح غیرمنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$ را بیابیم. در اینجا مسأله را طور دیگری مطرح می‌کنیم و برای آن شرط $(1 \le i \le 4) x_i \le 7$ را قرار می‌دهیم. در اینجا $N(S)$ بر طبق آنچه از مسائل ترکیب با تکرار می‌دانیم برابر است با :

$$N(S) = \binom{4+18-1}{18} = \binom{21}{18}$$

باز هم برای بکارگیری اصل ردّ و شمول چهار زیرمجموعه تعریف می‌کنیم :

زیرمجموعهٔ $(1 \le i \le 4) C_i$ در بردارند کلیه جوابهای معادله فوق است وقتی که $x_i > 7$ یا آنکه $x_i \ge 8$ باشد. واضح است که جواب مسأله فوق با شرط اضافه شده عبارتست از :

$$N(C_1' \cap C_2' \cap C_3' \cap C_4')$$

اما در این مثال $N(C_1) = N(C_2) = N(C_3) = N(C_4)$ می‌باشد. بدیهی است که برای شمارش $N(C_1)$ باید جوابهای معادله $(x_1 = y_1 + 8 \Rightarrow y_1 \ge 0) y_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ را بیابیم ؛ که طبق توضیح داده شده در این معادله : $y_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$

با استفاده از مطالب آنالیز ترکیبی در مبحث ترکیب با تکرار :

$$N(C_i)=\binom{4+10-1}{10}=\binom{13}{10} \quad 1\le i\le 4$$

$$\Rightarrow\ S_1=\binom{4}{1}\binom{13}{10}$$

به همین ترتیب $N(C_1\cap C_2)$ برابر است با تعداد جوابهای معادله $(y_1,y_2,x_3,x_4\ge 0)y_1+y_2+x_3+x_4=2$ که برابر است با :

$$N(C_i\cap C_j)=\binom{5}{2}\ \Rightarrow\ S_2=\binom{5}{2}\binom{4}{2}$$

در حالت $N(C_1\cap C_2\cap C_3)$ ما به دنبال جوابهای معادله $(y_1,y_2,y_3,x_4\ge 0)y_1+y_2+y_3+x_4=-6$ هستیم، که نتیجه روشن است ؛ این معادله جواب ندارد لذا :

$$N(C_1'\cap C_2'\cap C_3'\cap C_4')=N(S)-S_1+S_2-S_3+S_4=$$

$$\binom{21}{18}-\binom{4}{1}\binom{13}{10}+\binom{4}{2}\binom{5}{2}-0+0=246$$

بنابراین از بین ۱۳۳۰ عدد مثبتی که جواب معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4=18$ هستند فقط ۲۴۶ تا از آنها هستند، که شرط $x_i\le 7(1\le i\le 4)$ را برآورده می‌سازند.

مثال ۳: یافتن تعداد توابع پوشا

مجموعه A و B را در نظر می‌گیریم. مجموعهٔ S را تمام توابع تعریف شده از A در B می‌نامیم. و داریم $N(S)=n^m$ زیرا از هر یک از عناصر دامنه می‌توان n فلش به سوی عناصر برد خارج نمود و چون عناصر دامنه m تا هستند بنا به اصل ضرب تعداد توابع تعریف شده از A در B، n^m خواهد بود.

$$A=\{a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_m\}$$

$$B=\{b_1,\ b_2,\ \dots,\ b_n\}\ (m\ge n)$$

باز هم برای بکارگیری اصل ردّ و شمول زیر مجموعه‌هایی تعریف می‌کنیم. بازای هر $1\le i\le n$ زیرمجموعه C_i از S را تعریف می‌کنیم بعنوان توابعی که در آن b_i بعنوان برد تابع تعریف نشده است. بدیهی است که $N(C_i')$ تعداد توابعی است که از A در B تعریف شده‌اند و b_i برد آنها است و در حالت کلی تعداد $f:A\to B$ برابر خواهد شد با :

$$N(C_1'\cap C_2'\cap C_3'\cap\dots C_n')$$

برای هر $1\le i\le n$ واضح است که $N(C_i)$ برابر خواهد شد با $(n-1)^m$ چرا که تمام اعضای B به جز b_i می‌توانند در برد تابع شرکت جویند ؛ با توجه به اینکه n عضو داریم پس S_1 بصورت زیر محاسبه می‌شود :

$$S_1=\left[N(C_1)+N(C_2)+\dots+N(C_n)\right]=$$

$$n(n-1)^m=\binom{n}{1}(n-1)^m$$

در حالتی دوتایی هم دو عضو b_i و b_j نمی‌توانند در برد متقابل شرکت کنند پس داریم :

$$S_2=\left[N(C_1\cap C_2)+N(C_1\cap C_3)+\dots+N(C_1\cap C_n)+\dots+N(C_{n-1}\cap C_n)\right]=\binom{n}{2}(n-2)^m$$

در حالت کلی بازای هر k و $(1\le k\le n)$ داریم :

$$S_k=\sum_{1\le i_1<i_2<\dots\le n}N(C_{i_1}\cap C_{i_2}\cap\dots\cap C_{i_k})=\binom{n}{k}(n-k)^m$$

پس بنا به اصل ردّ و شمول داریم :

$$N(C_1'\cap C_2'\cap\dots\cap C_n')=N-S_1+S_2-S_3+\dots+(-1)^n S_n$$

$$=n^m-\binom{n}{1}(n-1)^m+\binom{n}{2}(n-2)^m-\binom{n}{3}(n-3)^m+\dots+(-1)^n(n-n)^m$$

$$=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)^m=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{n-i}(n-i)^m$$

مثال ۴:

به چند حالت ۲۶ حرف الفبای انگلیسی می‌توانند مرتب شوند، به طوری که در این ترتیبها هیچ یک از کلمات زیر درست نشوند.

Car, dog, pun, byte

$C_i(1\le i\le 4)$ را مجموعه‌ای تعریف می‌کنیم که در آن این کلمات کنار هم تشکیل شوند. به عنوان مثال C_1 یعنی ترکیباتی که کلمه Car در آن ساخته شود. در واقع اگر Sرا مجموعه کلیه

ترتیبهای ۲۶ حرف بگیریم، هر کدام از مجموعه‌های C_i یک زیرمجموعه از S هستند. برای شمردن اعضای هر یک از C_iها هر یک از کلمات مطلوب را یک حرف فرض می‌کنیم. در نتیجه خواهیم داشت:

$$N(S) = 26!$$

$$N(C_1) = N(C_2) = N(C_3) = 24! \quad N(C_4) = 23!$$

$$N(C_1 \cap C_2) = N(C_1 \cap C_3) = N(C_2 \cap C_3) = 22!$$

$$N(C_i \cap C_4) = 21! \qquad (i \neq 4)$$

$$N(C_1 \cap C_2 \cap C_3) = 20! \qquad N(C_i \cap C_j \cap C_4) = 19!$$

$$(1 \leq i < j \leq 3) \qquad N(C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4) = 17!$$

با توجه به اصل ردّ و شمول تعداد ترتیبهای مطلوب برابر خواهد بود با:

$$N(C_1' \cap C_2' \cap C_3' \cap C_4') = 26! - [3(24!) + 23!] + [3(22!) + 3(21!)] - [20! + 3(19!)] + 17!$$

مثال بعدی در مورد نظریهٔ اعداد است. در این مثال تابع فی‌اولر معرفی و ساخته می‌شود.

مثال ۵:

عدد صحیح و مثبت n را در نظر می‌گیریم. تابع $\varphi(n)$ را به این صورت تعریف می‌نمائیم، که تعداد اعداد کوچکتر از n را به ما بدهد که نسبت به n اول هستند. واضح است که اگر m یکی از این اعداد باشد $1 \leq m \leq n$ می‌باشد. این تابع به تابع «فی اولر» مشهور است. برای مثال:

$$\varphi(2) = 1, \quad \varphi(3) = 2, \quad \varphi(4) = 2, \quad \varphi(5) = 4, \quad \varphi(6) = 2$$

بدیهی است که برای هر عدد اول مثل P: $\varphi(P) = P - 1$ زیرا کلیه اعداد کوچکتر از عدد اول P نسبت به آن اول هستند. ما به دنبال آن هستیم، که رابطه‌ای بین n و $\varphi(n)$ بیابیم و یک فرمول دقیق برای آن به دست آوریم. کاربرد اصل در این مثال مانند مثال یک است. می‌دانیم هر عدد صحیح قابل تجزیه به عوامل اول بصورت زیر است:

$$n = P_1^{a_1} P_2^{a_2} \ldots P_t^{a_t} \quad 1 \leq i \leq t \ (a_i \geq 1)$$

ما این رابطه را در حالتی که عدد m حداکثر به حاصلضرب چهار عامل اول تجزیه می‌گردد، به دست می‌آوریم؛ واضح است که در حالت کلی روش همین خواهد بود.

$$(m = P_1^{a_1} P_2^{a_2} \ldots P_4^{a_4})$$

مجموعه $S = \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ را در نظر می‌گیریم، بازای $1 \leq i \leq 4$ زیرمجموعه C_i شامل اعضایی از S است که بر P_i بخش‌پذیرند؛ بنابراین طبق تعریف تابع φ اولر خواهیم داشت: $\varphi(m) = N(C_1' \cap C_2' \cap C_3' \cap C_4')$

برای به دست آوردن اعضای مجموعه C_i کافیست، که m را بر عامل اول P_i تقسیم نماییم و همچنین برای به دست آوردن تعداد اعضای مجموعه $C_i \cap C_j$ نیز کافیست m را بر عاملهای اول P_i و P_j توأماً تقسیم نماییم و این برای بقیه ادامه می‌یابد:

$$N(C_i \cap C_j \cap C_k) = \frac{m}{P_i P_j P_k} (1 \leq i < j < k \leq 4),$$

$$N(C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4) = \frac{m}{P_1 P_2 P_3 P_4}$$

$$\rightarrow \varphi(m) = S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + S_4$$

$$= m - [\frac{m}{P_1} + \frac{m}{P_2} + \frac{m}{P_3} + \frac{m}{P_4}] + [\frac{m}{P_1 P_2} + \frac{m}{P_1 P_3} + \ldots + \frac{m}{P_3 P_4}] - [\frac{m}{P_1 P_2 P_3} + \ldots + \frac{m}{P_2 P_3 P_4}] + \frac{m}{P_1 P_2 P_3 P_4}$$

$$= m[1 - (\frac{1}{P_1} + \ldots + \frac{1}{P_4}) + (\frac{1}{P_1 P_2} + \frac{1}{P_1 P_3} + \ldots + \frac{1}{P_3 P_4}) - (\frac{1}{P_1 P_2 P_3} + \ldots + \frac{1}{P_2 P_3 P_4}) + \frac{1}{P_1 P_2 P_3 P_4}]$$

$$= \frac{m}{P_1 P_2 P_3 P_4} [(P_1 - 1)(P_2 - 1)(P_3 - 1)(P_4 - 1)]$$

$$= m \left(\frac{P_1 - 1}{P_1}\right) \left(\frac{P_2 - 1}{P_2}\right) \left(\frac{P_3 - 1}{P_3}\right) \left(\frac{P_4 - 1}{P_4}\right) =$$

$$m \prod_{i=1}^{4} (1 - \frac{1}{P_i})$$

با توجه به این مثال $\varphi(n)$ در حالت کلی بشکل زیر محاسبه می‌گردد:

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{t} (1 - \frac{1}{P_i})$$

برای مثال عدد ۲۳۱۰۰ را در نظر می‌گیریم. داریم:

$$\varphi(23100) = \varphi(2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7 \times 11) =$$

$$(23100)(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{5})(1 - \frac{1}{7})(1 - \frac{1}{11}) = 4800$$

مثال ۶:

یک مهندس تصمیم دارد بین ۵ دهکده راههایی ایجاد کند. به چند طریق او می‌تواند این کار را انجام دهد، به شرطی که در انتهای کار هیچ دهکده‌ای نباشد که به آن راهی وارد نشود؟ (ایزوله)

برای درک بهتر این مثال به شکلهای زیر توجه کنید. شکلهای «الف» و «ب» مطلوب ما هستند ولی شکل «ج» مورد قبول ما نیست؛ چرا که دهکده a در آن ایزوله شده است.

برای حلّ این مثال مجموعه تمام راههایی را که می‌توانیم بین این ۵ دهکده ایجاد نماییم با عنوان مجموعه S در نظر می‌گیریم. تعداد راههای موجود برابر با $۲^{۱۰}$ است. توضیح اینکه بین هر دو دهکده راه واصل می‌تواند وجود داشته باشد و می‌تواند موجود نباشد، که با توجه به اصل ضرب و قانون ترکیب تعداد راهها به این صورت محاسبه می‌شود:

$$N(S)=۲^{\binom{۵}{۲}}=۲^{۱۰}$$

زیرمجموعه‌های $C_i\,(۱\le i\le ۵)$ را در نظر می‌گیریم به طوری که هر یک از C_iها مجموعه راههایی هستند، که در آنها یک دهکده ایزوله شده است. واضح است که جواب مسأله برابر است با: $N(C'_۱\cap C'_۲\cap C'_۳\cap C'_۴\cap C'_۵)$

داریم:

$$N(C_۱)=۲^۶\Rightarrow S_۱=\binom{۵}{۱}\ ۲^۶$$

$$N(C_۱\cap C_۲)=۲^۳\Rightarrow S_۲=\binom{۵}{۲}\ ۲^۳$$

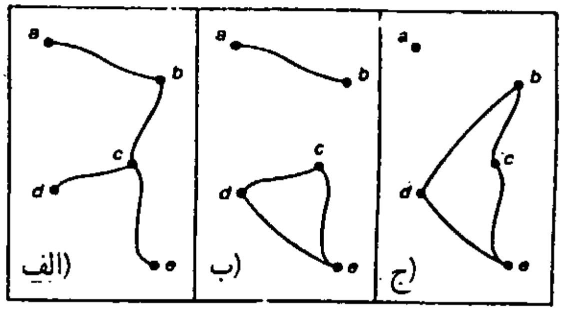
$$N(C_۱\cap C_۲\cap C_۳)=۲^۱\Rightarrow S_۳=\binom{۵}{۳}\ ۲^۱$$

$$N(C_۱\cap C_۲\cap C_۳\cap C_۴)=۲^۰\Rightarrow S_۴=\binom{۵}{۴}\ ۲^۰$$

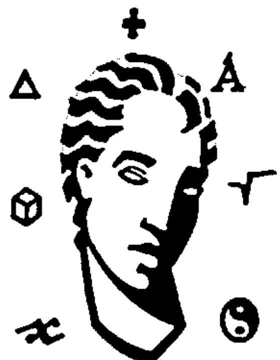
$$N(C_۱\cap C_۲\cap C_۳\cap C_۴\cap C_۵)=۲^۰\Rightarrow S_۵=\binom{۵}{۵}\ ۲^۰$$

طبق اصل ردّ و شمول:

$$N(C'_۱\cap\ldots\cap C'_۵)=۲^{۱۰}-\binom{۵}{۱}\ ۲^۶+\binom{۵}{۲}\ ۲^۳-\binom{۵}{۳}\ ۲^۱+\binom{۵}{۴}\ ۲^۰-\binom{۵}{۵}\ ۲^۰=۷۶۸$$



(شکل ۳)



تفریح اندیشهٔ ٦

خطهای متقاطع

در صورتی که شش خط در تکه‌ای کاغذ چنان رسم شوند که هر خط هر خط دیگر را قطع کند و هیچ سه خطی در یک نقطه متقاطع نباشند چند مثلث تشکیل می‌شود؟

تبصره: این معما توانایی خواننده را در شمارش روشندار امتحان می‌کند. در صورتی که در مورد آن عجولانه عمل کنید، ممکن است گیج شوید.

جواب در صفحه ۸۸

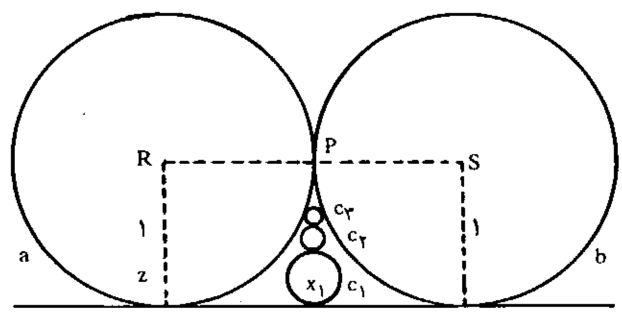
طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روشهای مقدماتی (۱۸)

از: 100 Great Problems of Elementary Mathematics

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

مسأله پرگار ماچرونی

تکرار ترسیمات هندسی[1] می‌تواند به تعدادی سری جالب منجر شود (شکل).



شکل، دو دایرهٔ a و b به شعاع ۱ مماس در نقطهٔ P را نشان می‌دهد. t مماس مشترک این دو دایره است که با a در z و با b در z_1 مماس است. c_1 دایره‌ای مماس بر a، b و t است؛ c_2 دایره‌ای مماس بر a، b و c_1 است؛ c_3 دایره‌ای مماس بر a، b و c_2 است.

شیوهٔ ترسیم دوایر مماس بر a، b و c_k، $k=1,2,3,\ldots$، می‌تواند به طور پایان ناپذیر ادامه یابد. d_1، d_2، ... قطرهای دوایر c_1، c_2، ... یک دنبالهٔ عددی نامتناهی[2] تشکیل می‌دهند. مجموع $S_k = d_1 + d_2 + \ldots + d_k$، چون k افزایش یابد، بزرگتر می‌شود ($d_1 < d_1 + d_2 < d_1 + d_2 + d_3 < \ldots$). واضح است که S_k هیچگاه از px_1، فاصلهٔ P از t، که ۱ است، بیشتر نمی‌شود؛ از طرف دیگر S_k هر اندازه که بخواهیم به px_1 نزدیک می‌شود.

به این ترتیب مجموع S_k به بینهایت میل کند، به ۱ میل می‌کند. مسأله این است:

d_1، d_2، d_3، ....، d_k جمله‌های سری عددی

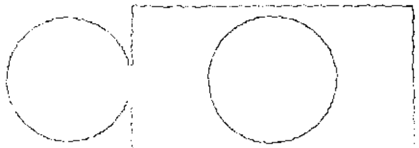
$$d_1 + d_2 + d_3 + \ldots 1$$

را بیابید.

تبصره. اعداد d_1، d_2، d_3، d_4، ... و مجموع آنان در مثلث همساز[3]، الگویی[4] عددی که توسط لایب‌نیتز[5] بررسی شده است، مشمول‌اند.

یادداشتها:

1. Geometric constructions
2. Infinite number sequence
3. harmonic triangle
4. Number Pattern
5. Leibnitz



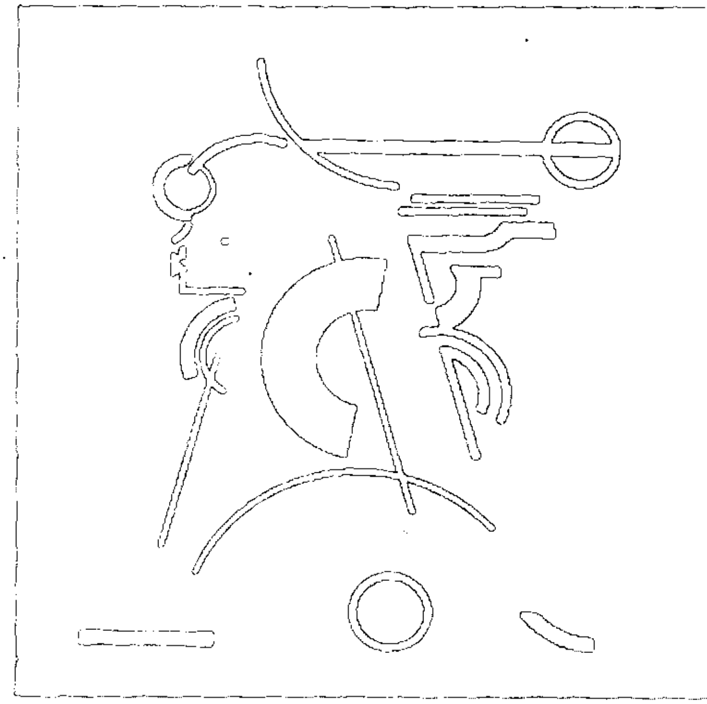
ریاضیات گسسته

قسمت پنجم

هم ارزی منطقی
قوانین منطق

(سوّم ریاضی و پیش‌دانشگاهی)

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور



در جمیع زمینه‌های ریاضیات نیاز به دانستن این داریم که چه وقت موجودات مورد بررسیمان مساوی یا اساساً یکسانند، برای مثال، در حساب و جبر می‌دانیم که دو عدد حقیقی و ناصفر، زمانی که دارای یک مقدار و یک علامت باشند مساوی‌اند. درنتیجه، به ازای دو عدد حقیقی و ناصفر x، y اگر $|x|=|y|$ و $xy > ۰$، داریم $x = y$، و برعکس (یعنی، اگر $x = y$، آنگاه $|x|=|y|$ و $xy > ۰$). در هندسه، هنگام سروکارداشتن با مثلثها، مفهوم همنهشتی رخ می‌دهد. در این جا مثلث ABC و مثلث DEF همنهشت‌اند اگر، برای مثال، اضلاع نظیر مساوی داشته باشند ــ یعنی، طول ضلع AB = طول ضلع DE، طول ضلع BC = طول ضلع EF، و طول ضلع CA = طول ضلع FD.

به مطالعهٔ منطقیمان غالباً به‌صورت **جبر گزاره**[1] (در مقابل جبر اعداد حقیقی) اشاره می‌شود. در این جبر، برای مطرح کردن این منظور که چه زمانی دو گزاره اساساً یکسان‌اند، از جداول ارزش گزاره‌ها استفاده می‌کنیم. کارمان را با مثالی آغاز می‌کنیم.

مثال ۱.

در جدول ۱ جداول ارزش گزاره‌های $\overline{p}\vee q$ و $p \to q$ را داریم. در این جدول

جدول ۱

p	q	$\overline{p}$	$\overline{p}\vee q$	$p \to q$
۰	۰	۱	۱	۱
۰	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۰	۰
۱	۱	۰	۱	۱

ملاحظه می‌کنیم که ارزشهای راستی $\overline{p}\vee q$ و $p \to q$ دقیقاً یکسان‌اند. □

این وضعیت به تعریف زیر منجر می‌شود.

تعریف ۱

به دو گزارهٔ S_1 و S_2 ***منطقاً هم‌ارز***[2] می‌گوییم، و می‌نویسیم $S_1 \Leftrightarrow S_2$، اگر جدولهای ارزش S_1 و S_2 دقیقاً یکسان باشند.

به عنوان نتیجه‌ای از این مفهوم، ملاحظه می‌شود که می‌توانیم رابط استلزام را بر حسب نقیض و ترکیب فصلی بیان کنیم. به همین ترتیب، از نتیجهٔ جدول ۲ داریم:

$$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \to q)\wedge(q \to p)$$

با استفاده از هم‌ارزی منطقی جدول ۱، می‌توان

$$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{p}\vee q)\wedge(\overline{q}\vee p)$$

را نیز نوشت. نتیجتاً، اگر چنین اختیار کنیم، می‌توانیم رابطهای $\to$ و $\leftrightarrow$ را از گزاره‌های مرکبمان کنار بگذاریم.

با بررسی جدول ۳، درمی‌یابیم که نقیض، همراه با رابطهای

∧ و ∨، کل مواردی است که برای جانشینی ***یای مانع***[3]، ⊻، به آنها نیاز داریم. درواقع، حتی می‌توان ∧ یا ∨ را حذف کرد. اما، به‌خاطر کاربردهای مورد بررسی، به ∧ و ∨ نیز نقیض نیازمندیم.

◀ جدول ۲

p	q	$p\to q$	$q\to p$	$(p\to q)\wedge(q\to p)$	$p\leftrightarrow q$
۰	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۱	۰	۰	۰
۱	۰	۰	۱	۰	۰
۱	۱	۱	۱	۱	۱

◀ جدول ۳

p	q	$p\veebar q$	$(p\vee q)$	$(\overline{p\wedge q})$	$(p\vee q)\wedge(\overline{p\wedge q})$
۰	۰	۰	۰	۱	۰
۰	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۱	۱	۱	۱
۱	۱	۰	۱	۰	۰

اکنون از مفهوم هم‌ارزی منطقی در بررسی بعضی از ویژگیهای مهمی که در جبر گزاره‌ها برقرارند استفاده می‌کنیم.

به ازای هر دو عدد حقیقی a، b، می دانیم که $-(a+b)=(-a)+(-b)$. آیا نتیجهٔ قابل مقایسه‌ای برای گزاره‌های p، q موجود است؟

مثال۲.

◀ جدول ۴

p	q	$p\wedge q$	$\overline{p\wedge q}$	$\bar p\vee\bar q$	$p\vee q$	$\overline{p\vee q}$	$\bar p\wedge\bar q$
۰	۰	۰	۱	۱	۰	۱	۱
۰	۱	۰	۱	۱	۱	۰	۰
۱	۰	۰	۱	۱	۱	۰	۰
۱	۱	۱	۰	۰	۱	۰	۰

در جدول ۴، جدولهای ارزش گزاره‌های $\overline{p\wedge q}$، $\bar p\vee\bar q$، $\overline{p\vee q}$ و $\bar p\wedge\bar q$ ستونهای ۴ و ۵ جدول فوق آشکار می‌کنند که $\overline{p\wedge q}\Leftrightarrow\bar p\vee\bar q$؛ ستونهای ۷ و ۸ آن نشان می‌دهند که $\overline{p\vee q}\Leftrightarrow\bar p\wedge\bar q$. این نتایج به ***قوانین دومورگان***[4] معروف‌اند، و شبیه قانون آشنای اعداد حقیقی

$$-(a+b)=(-a)+(-b)$$

هستند که نشان می‌دهد منفی یک مجموع مساوی مجموع منفیهای جمعوندهای آن است. اما، در این مورد تفاوتی قاطع ظاهر می‌شود: نقیض ***ترکیب عطفی*** دو گزارهٔ p، q به ***ترکیب فصلی*** نقیضهایشان، $\bar p$، $\bar q$ منجر می‌شود، درحالی که نقیض ***ترکیب فصلی*** p، q منطقاً هم ارز ***ترکیب فصلی*** نقیضهای $\bar p$، $\bar q$ است. □

در حساب اعداد حَقیقی، اعمال جمع و ضرب هردو در اصل موسوم به قانون توزیعپذیری ضرب روی جمع، آمده‌اند؛ به ازای هر سه عدد حقیقی a، b، c،

$$a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c)$$

مثال بعدی نشان می‌دهد که قانونی مشابه برای گزاره‌ها وجود دارد. قانون وابستهٔ دومی نیز برای گزاره‌ها موجود است که مشابهی در حساب اعداد حقیقی ندارد.

مثال ۳.

جدول ۵ شامل جدولهای ارزش گزاره‌های $p\wedge(q\vee r)$،

◀ جدول ۵

p	q	r	$p\wedge(q\vee r)$	$(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$	$p\vee(q\wedge r)$	$(p\vee q)\wedge(p\vee r)$
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰
۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰
۰	۱	۱	۰	۰	۱	۱
۱	۰	۰	۰	۰	۱	۱
۱	۰	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۱	۰	۱	۱	۱	۱
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

$(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$، $p\vee(q\wedge r)$ و $(p\vee q)\wedge(p\vee r)$ است. از این جدول نتیجه می‌شود که به ازای گزاره‌های دلخواه p، q و r،

قانون توزیعپذیری $\wedge$ روی $\vee$

$p\wedge(q\vee r)\Leftrightarrow(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$

قانون توزیعپذیری $\vee$ روی $\wedge$

$p\vee(q\wedge r)\Leftrightarrow(p\vee q)\wedge(p\vee r)$ $\square$

قانون توزیعپذیری دوم مشابهی در حساب اعداد حقیقی ندارد. یعنی، راست نیست که به ازای جمیع اعداد حقیقی a، b، و c،

$a+(b\times c)=(a+b)\times(a+c)$

به عنوان نمونه، به ازای $a=۲$، $b=۳$، و $c=۵$، $a+(b\times c)=۱۷$ اما $(a+b)\times(a+c)=۳۵$.

پیش از ادامهٔ مطلب، توجه می‌کنیم که، در حالت عمومی، اگر S_1 و S_2 دو گزاره باشند و $S_1\leftrightarrow S_2$ صادق باشد، آنگاه S_1 و S_2 باید دارای جداول ارزش یکسان باشند و $S_1\Leftrightarrow S_2$. هنگامی که S_1 و S_2 گزاره‌هایی منطقاً هم ارز باشند (یعنی، $S_1\Leftrightarrow S_2$)، آنگاه گزارهٔ مرکب $S_1\leftrightarrow S_2$ صادق است. تحت این شرایط، این نیز راست است که $\bar{S}_1\leftrightarrow\bar{S}_2$، و $\bar{S}_1\Leftrightarrow\bar{S}_2$ صادق است.

اگر S_1، S_2، و S_3 گزاره‌هایی باشند که در آنها $S_1\Leftrightarrow S_2$ و $S_2\Leftrightarrow S_3$، آنگاه $S_1\Leftrightarrow S_3$. هنگامی که دو گزارهٔ S_1 و S_2 منطقاً هم ارز نباشند، می‌توانیم برای مشخص کردن این وضعیت بنویسیم $S_1\not\Leftrightarrow S_2$.

با استفاده از مفاهیم هم‌ارزی منطقی، صادق، و کاذب، فهرست قوانین زیر را برای جبر گزاره‌ها بیان می‌کنیم.

قوانین منطق

به ازای هر گزارهٔ p، q، r.

۱. $\bar{\bar{p}}\Leftrightarrow p$ — قانون نقیض دوگانه [5]

۲. $\overline{p\vee q}\Leftrightarrow\bar{p}\wedge\bar{q}$
$\overline{p\wedge q}\Leftrightarrow\bar{p}\vee\bar{q}$ — قوانین دومورگان

۳. $p\vee q\Leftrightarrow q\vee p$
$p\wedge q\Leftrightarrow q\wedge p$ — قوانین تعویضپذیری [6]

۴. $p\vee(q\vee r)\Leftrightarrow(p\vee q)\vee r$
$p\wedge(q\wedge r)\Leftrightarrow(p\wedge q)\wedge r$ — قوانین شرکتپذیری [7]

۵. $p\vee(q\wedge r)\Leftrightarrow(p\vee q)\wedge(p\vee r)$
$p\wedge(q\vee r)\Leftrightarrow(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$ — قوانین توزیعپذیری [8]

۶. $p\vee p\Leftrightarrow p$
$p\wedge p\Leftrightarrow p$ — قوانین خودنمایی [9]

۷. $p\vee F_0\Leftrightarrow p$
$p\wedge T_0\Leftrightarrow p$ — قوانین همانی [10]

۸. $p\vee\bar{p}\Leftrightarrow T_0$
$p\wedge\bar{p}\Leftrightarrow F_0$ — قوانین تقابل [11]

۹. $p\vee T_0\Leftrightarrow T_0$
$p\wedge F_0\Leftrightarrow F_0$ — قوانین سلطه [12]

۱۰. $p\vee(p\wedge q)\Leftrightarrow p$
$p\wedge(p\vee q)\Leftrightarrow p$ — قوانین جذب [13]

برای اثبات جمیع مطالب فوق، می‌توانیم، همانگونه که در مثالهای ۲ و ۳ انجام دادیم، جدولهای ارزش آنها را نوشته به مقایسهٔ ارزشهای راستی هر حالت بپردازیم. اما، جمیع قوانین فوق، غیر از قانون نقیض دوگانه، به‌طور طبیعی به‌صورت جفت رخ می‌دهد. این مطلب به مفهوم زیر دلالت می‌کند.

تعریف ۲

اگر S گزاره‌ای (تنها شامل $-$، $\wedge$، و $\vee$) باشد، **دوگان**[14] S، به نمایش S^d، گزاره‌ای است که با قراردادن $\vee$ ($\wedge$) به‌جای هر ظهور $\wedge$ ($\vee$) در S و قراردادن F_0 (T_0) به جای هر ظهور T_0 (F_0) در آن به‌دست می‌آید.

گزاره‌های $p\vee\bar{p}$ و $p\wedge\bar{p}$ دوگان یکدیگرند، همانگونه که

گزاره‌های $p\vee T.$ و $p\wedge F.$ چنین‌اند.

اکنون به بیان و استفاده از قضیه‌ای، بدون اثبات آن، می‌پردازیم. اما، در آینده نتیجه‌ای را که در اینجا آشکار کرده‌ایم به اثبات می‌رسانیم.

قضیهٔ ۱

(اصل *دوگانی*[15]) فرض می‌کنیم s، t گزاره‌هایی، چنان که در تعریف ۲ آمده، باشند. اگر $s\Leftrightarrow t$، آنگاه $s^d\Leftrightarrow t^d$.

به عنوان نتیجه‌ای از این اصل، می‌توان قوانین ۲ تا ۱۰ فهرستمان را با اثبات یکی از قوانین هر جفت و بعد به استناد اصل مزبور، به اثبات رساند.

می‌توان با استفاده از *قواعد جانشینی*[16] زیر، هم‌ارزیهای منطقی بسیار دیگری را استخراج کرد.

۱. فرض می‌کنیم P گزارهٔ مرکبی را که صادق است نمایش دهد. اگر p گزاره‌ای باشد که در P ظاهر می‌شود و به جای هر ظهور p گزارهٔ یکسان q را قرار دهیم، آنگاه گزارهٔ مرکب P_1 نیز صادق است.

۲. فرض می‌کنیم P گزارهٔ مرکبی باشد که گزارهٔ p در آن ظاهر می‌شود، و فرض می‌کنیم q گزاره‌ای چنان باشد که $p\Leftrightarrow q$. فرض می‌کنیم در P به جای p، q را قرار دهیم. این جانشینی گزارهٔ مرکب P_2 را به‌دست می‌دهد. تحت این شرایط $P_1\Leftrightarrow P_2$.

این قواعد را در مثالهای زیر توضیح می‌دهیم.

مثال ۴.

a) از قانون اول دومورگان می‌دانیم که، به ازای هر دو گزارهٔ p، q، گزارهٔ مرکب

$$P:\overline{p\vee q}\longleftrightarrow(\bar{p}\wedge\bar{q})$$

صادق است. چون به جای هر ظهور p، $r\wedge s$ را قرار دهیم، از قاعدهٔ اول جانشینی نتیجه می‌شود که

$$P_1:\overline{(r\wedge s)\vee q}\longleftrightarrow\left[(\overline{r\wedge s})\wedge\bar{q}\right]$$

نیز صادق است. در توسیع یک مرحلهٔ دیگر این نتیجه، می‌توانیم به جای هر ظهور q، $t\to u$ را قرار دهیم. اکنون، قاعدهٔ جانشینی مذکور صادق

$$P_2:\overline{(r\wedge s)\vee(t\to u)}\leftrightarrow\left[(\overline{r\wedge s})\wedge(\overline{t\to u})\right]$$

و هم‌ارزی منطقی

$$P_2':\overline{(r\wedge s)\vee(t\to u)}\Leftrightarrow(\overline{r\wedge s})\wedge(\overline{t\to u})$$

را به‌دست می‌دهد.

b) قانون دوم سلطه بر این است که، به ازای هر گزارهٔ p، گزارهٔ مرکب

$$P:(p\wedge F.)\leftrightarrow F.$$

صادق است. اگر به جای p گزارهٔ دلخواه $[(q\vee r)\to s]$ را قرار دهیم، آنگاه همان قاعدهٔ اول جانشینی به صادق جدید

$$P_1:([(q\vee r)\to S]\wedge F.)\leftrightarrow F.$$

و هم‌ارزی منطقی

$$P_1':[(q\vee r)\to S]\wedge F.\Leftrightarrow F.$$

منجر می‌شود. □

مثال ۵.

a) برای کاربردی از قاعدهٔ دوم جانشینی، فرض می‌کنیم P گزارهٔ مرکب $(p\to q)\to r$ را نمایش دهد. از آنجا که $(p\to q)\Leftrightarrow\bar{p}\vee q$ (چنان که در مثال ۱ و جدول ۱ آمده است)، اگر P_1 نمایشگر گزارهٔ مرکب $(\bar{p}\vee q)\to r$ باشد آنگاه $P_1\Leftrightarrow P$.

b) اکنون گزارهٔ مرکب $p\to(p\vee q)$ را مطرح می‌کنیم. از آنجا که $p\Leftrightarrow\bar{\bar{p}}$ ، گزارهٔ مرکب $P_1:p\to(\bar{\bar{p}}\vee q)$ از P با قراردادن $\bar{\bar{p}}$ به جای ظهور دوم p (اما نه ظهور اول آن) استخراج می‌شود. قاعدهٔ دوم جانشینی همچنان بر این است که $P_1\Leftrightarrow P$. (توجه داشته باشید که $P_2:\bar{\bar{p}}\to(\bar{\bar{p}}\vee q)$ ، که از قراردادن $\bar{\bar{p}}$ به جای هردوظهور p استخراج شده است، نیز منطقاً هم ارز P است.) □

مثال بعدی مبرهن می‌کند که چگونه می‌توان مفهوم هم‌ارزی منطقی را همراه با قوانین منطق و قواعد جانشینی به کار برد.

مثال ۶.

گزارهٔ مرکب $(p\vee q)\to r$ را نقیض و ساده کنید.

۱. $(p\vee q)\to r\Leftrightarrow(\overline{p\vee q})\vee r$ (بنا به قاعدهٔ اول جانشینی، زیرا $(s\to t)\leftrightarrow(\bar{s}\vee t)$ به ازای هردو گزارهٔ s، t

صادق است.

۲. با نقیض کردن نتایج مرحلهٔ اول، داریم

$\overline{(p \vee q) \rightarrow r} \Leftrightarrow \overline{\overline{(p \vee q)} \vee r}$

۳. از قانون اول دومورگان و قاعدهٔ جانشینی اول،

$\overline{\overline{(p \vee q)} \vee r} \Leftrightarrow \overline{\overline{(p \vee q)}} \wedge \bar{r}$

۴. اکنون قانون نقیض دوگانه و قاعدهٔ جانشینی اول می‌دهد

$\overline{\overline{(p \vee q)} \vee r} \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \bar{r}$

از مراحل ۱ تا ۴ داریم

$\square\ \overline{(p \vee q) \rightarrow r} \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \bar{r}$

مثال ۷.

در تعریف ۲، S^d، دوگان گزارهٔ S، تنها به ازای گزاره‌های شامل نقیض و رابطهای پایه‌ای $\wedge$ و $\vee$ تعریف شده است. در این صورت چگونه می‌توان دوگان گزاره‌ای چون $S: p \rightarrow q$ را مشخص کرد؟

از آنجا که $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \bar{p} \vee q$، S^d منطقاً هم ارز گزارهٔ $(\bar{p} \vee q)^d$ است، که $\bar{p} \wedge q$ است. $\square$

در مثال بعد، به بررسی استلزام $p \rightarrow q$ و گزاره‌های خاص وابسته به آن می‌پردازیم.

مثال ۸.

جدول ۶ جدولهای ارزش گزاره‌های $p \rightarrow q$، $\bar{q} \rightarrow \bar{p}$، $q \rightarrow p$ و $\bar{p} \rightarrow \bar{q}$ را به‌دست می‌دهد.

◄ جدول ۶

p	q	$p \rightarrow q$	$\bar{q} \rightarrow \bar{p}$	$q \rightarrow p$	$\bar{p} \rightarrow \bar{q}$
۰	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۱	۱	۰	۰
۱	۰	۰	۰	۱	۱
۱	۱	۱	۱	۱	۱

ستونهای سوم و چهارم این جدول آشکار می کنند که

$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \rightarrow \bar{p})$

گزارهٔ $\bar{q} \rightarrow \bar{p}$ به **عکس نقیض**[17] استلزام $p \rightarrow q$ موسوم است. ستونهای ۵ و ۶، جدول مزبور نشان می‌دهند که

$(q \rightarrow p) \Leftrightarrow (\bar{p} \rightarrow \bar{q})$

گزارهٔ $q \rightarrow p$ **عکس**[18] $p \rightarrow q$ نامیده می‌شود؛ و $\bar{p} \rightarrow \bar{q}$ به *وارون*[19] $p \rightarrow q$ مصطلح است.

درحالتی که p و q گزاره‌های زیر را نمایش می‌دهند

p : چهارضلعی ABCD مربع است.

q : چهارضلعی ABCD متساوی‌الاضلاع است.

به‌دست می‌آوریم:

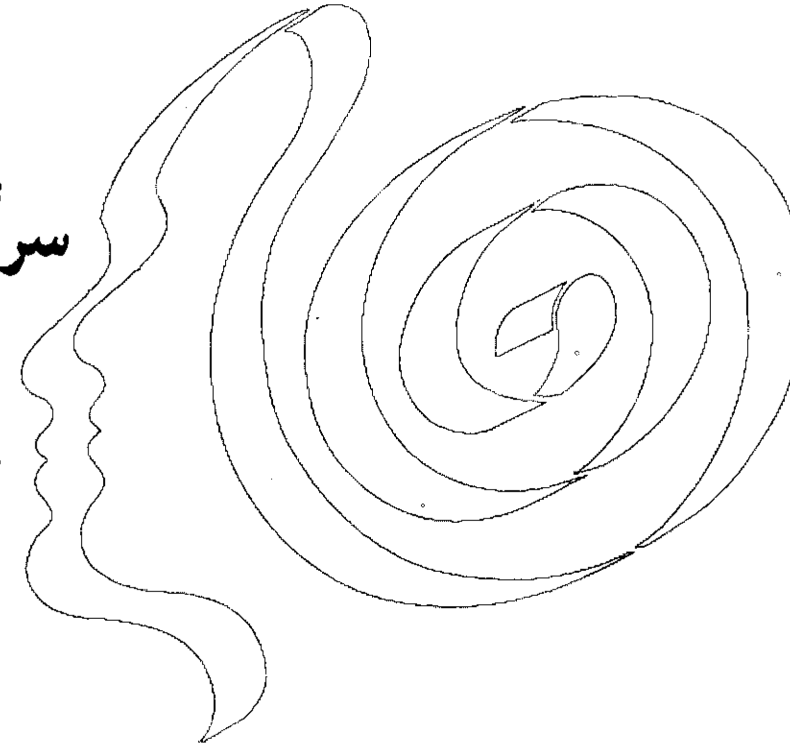
- (استلزام: $p \rightarrow q$) اگر چهارضلعی ABCD مربع باشد، آنگاه چهارضلعی ABCD متساوی الاضلاع است. (راست)
- (عکس نقیض: $\bar{q} \rightarrow \bar{p}$) اگر چهارضلعی ABCD متساوی‌الاضلاع نباشد، آنگاه مربع نیست. (بازهم راست)
- (عکس: $q \rightarrow p$) اگر چهارضلعی ABCD متساوی‌الاضلاع است، آنگاه چهارضلعی ABCD مربع است. (دروغ؛ هر لوزی که متساوی‌الزوایا نباشد همچنان متساوی‌الاضلاع است.)
- (وارون: $\bar{p} \rightarrow \bar{q}$) اگر چهارضلعی ABCD مربع نباشد، آنگاه متساوی‌الاضلاع نیست. (باز هم دروغ)

همانگونه که مثال خاص فوق نشان می‌دهد، باید از «استدلال با استفاده از عکس» اجتناب کنیم. این حقیقت که استلزام (یا قضیهٔ) خاص $p \rightarrow q$ ای راست است بر این نیست که عکس آن، یعنی، $q \rightarrow p$، نیز باید راست باشد. اما، راستی عکس نقیض آن، یعنی، $\bar{q} \rightarrow \bar{p}$، را ضروری می کند. $\square$

◆ یادداشتها:

1. Algebra of propositional
2. Logically equivalent
3. Exclusive or
4. De Morgaan's Laws
5. Law of Double Negation
6. Commutative Laws
7. Associative Laws
8. Distributive Laws
9. Idempotent Laws
10. Identity Laws
11. Inverse Laws
12. Domination Laws
13. Absorption Laws
14. Dual
15. The principle of Duality
16. Substitution Rules
17. Contrapositive
18. Converse
19. Inverse

سرگرمی برای اندیشه‌ورزی



* حسن نصیرنیا * اثر: جورج سامرز

بازی با منطق*

آقای احمد گلستان دو خواهر به نامهای بهاره و ستاره دارد. خانم فهیمهٔ برومند، که همکار آقای گلستان است، دو برادر به نامهای داوود و احسان دارد. اطلاعات ما دربارهٔ حرفهٔ اعضای این دو خانواده به شرح زیر است:

خانوادهٔ گلستان:

احمد: دکتر

بهاره: دکتر

ستاره: وکیل

خانوادهٔ برومند:

داوود: دکتر

احسان: وکیل

فهیمه: وکیل

بنا به دلیل نامعلومی، یکی از این شش نفر به دست یکی از پنج نفر دیگر به قتل می‌رسد. اطلاعات کلّی ما دربارهٔ قاتل و مقتول به شرح زیر است:

۱ ــ اگر قاتل و مقتول خویشاوند باشند، قاتل مرد است.

۲ ــ اگر قاتل و مقتول خویشاوند نباشند، قاتل دکتر است.

۳ ــ اگر قاتل و مقتول هم شغل باشند، مقتول مرد است.

۴ ــ اگر قاتل و مقتول شغلهای متفاوت داشته باشند، مقتول زن است.

۵ ــ اگر قاتل و مقتول همجنس باشند، قاتل وکیل است.

۶ ــ اگر قاتل و مقتول همجنس نباشند، مقتول دکتر است.

با توجه به اطلاعات مذکور، **قاتل کیست؟**

(**رهنمود:** برای دستیابی آسان به حل معمّا، با بررسی مقدمات (فرضها) و نتایج جمله‌های ششگانه، مشخص کنید که کدام یک از «مجموعه‌های سه‌تایی» ازجمله‌ها ممکن است، درست باشد).

پاسخ معمای بازی با منطق

با بررسی مقدمات (فرضهای) جمله‌ها درمی‌یابیم که فقط یکی از جمله‌های (۱) و (۲)، یکی از جمله‌های (۳) و (۴) و یکی از جمله‌های (۵) و (۶) درست است. از نتایج این جمله‌ها درمی‌یابیم که امکان ندارد، جمله‌های (۲) و (۵) هر دو درست

* منبع

Summers, George, *Test Your Logic*, Dover Publications Inc. New York.

باشند. بنابراین، یکی یا بیش از یکی از جمله‌های زیر درست هستند:

الف ـ (۱)، (۴) و (۵)	د ـ (۱)، (۳) و (۶)
ب ـ (۱)، (۳) و (۵)	هـ ـ (۲)، (۴) و (۶)
ج ـ (۱)، (۴) و (۶)	و ـ (۲)، (۳) و (۶)

اگر مجموعهٔ (الف) درست باشد، از نتیجهٔ جملهٔ (۱) درمی‌یابیم که قاتل مرد است؛ از نتیجهٔ جملهٔ (۴) درمی‌یابیم که مقتول زن است و از مقدمهٔ جملهٔ (۵) درمی‌یابیم که قاتل و مقتول همجنس هستند. چون این وضع ناممکن است، مجموعهٔ (الف) نباید درست باشد.

اگر مجموعهٔ (ب) درست باشد، از مقدمات جمله‌ها درمی‌یابیم که قاتل و مقتول خویشاوند، هم شغل و همجنس هستند. چون این وضع با ترکیب هر خانواده تناقض دارد، مجموعهٔ (ب) نباید درست باشد.

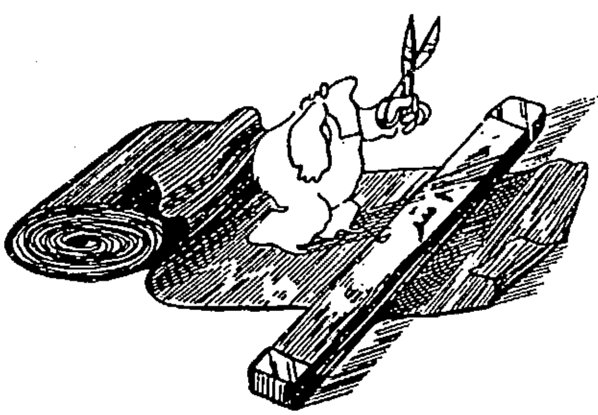
اگر مجموعهٔ (ج) درست باشد، از نتایج جمله‌ها درمی‌یابیم که قاتل، مرد و مقتول، دکتر زن است. در این صورت، از مقدمات جمله‌های (۱) و (۴) درمی‌یابیم که قاتل وکیل است و قاتل و مقتول خویشاوندند. چون این وضع با ترکیب هر خانواده تناقض دارد، مجموعهٔ (ج) نباید درست باشد.

اگر مجموعهٔ (د) درست باشد، از نتیجهٔ جملهٔ (۱) درمی‌یابیم که قاتل مرد است؛ از نتیجهٔ جملهٔ (۳) درمی‌یابیم که مقتول مرد است و از مقدمهٔ جملهٔ (۶) درمی‌یابیم که قاتل و مقتول همجنس نیستند. چون این وضع ناممکن است، مجموعهٔ (د) نباید درست باشد.

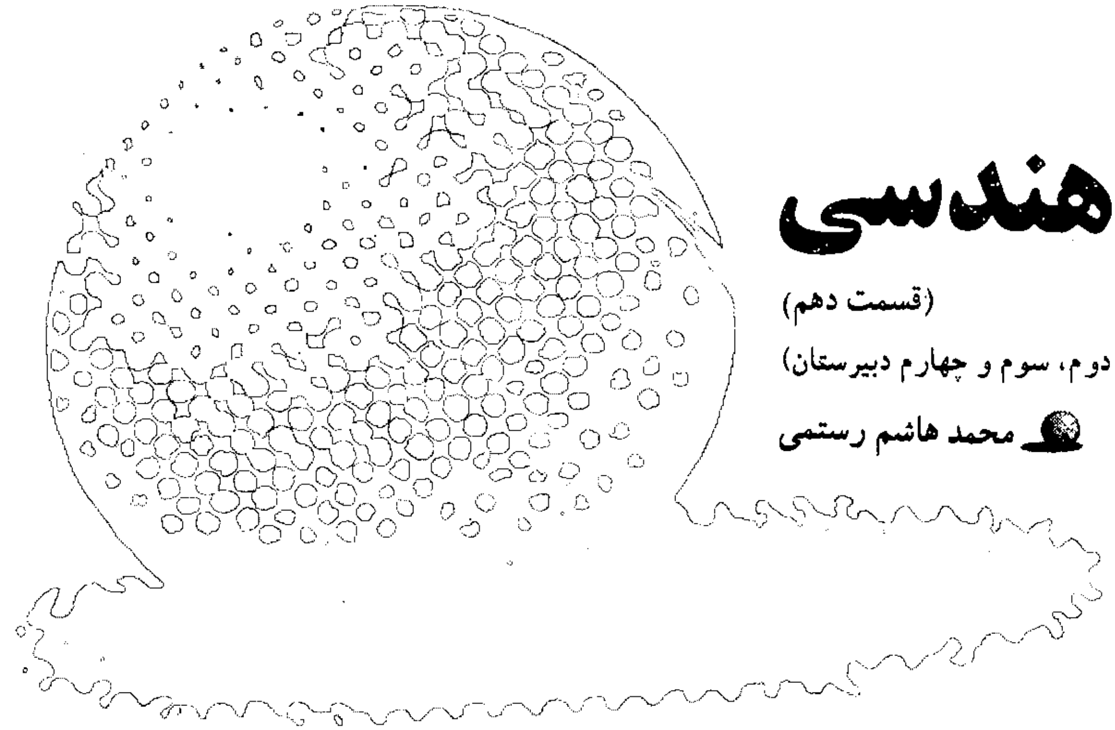
بنابراین، مجموعهٔ (و) درست است. از نتایج جمله‌های این مجموعه درمی‌یابیم که قاتل دکتر است و مقتول دکتر مرد است. سپس از مقدمهٔ جملهٔ (۶) درمی‌یابیم که قاتل زن است. آن‌گاه، با توجه به ترکیب خانوادهٔ مورد نظر درمی یابیم که **قاتل باید بهاره باشد.** مقدمهٔ جملهٔ (۲) نشان می‌دهد که داوود مقتول است. این وضع نشانگر آن است که مقدمهٔ جملهٔ (۳) با نتایج جمله‌های (۲) و (۶) همخوانی دارد.

تفریح اندیشهٔ ۷

پارچه‌فروشی می‌خواهد پارچه‌هایش را با ۴۰٪ سود بفروشد. اما وسیله‌ای که برای اندازه گیری به کار می‌برد طول مناسبی ندارد. به همین دلیل متوجه می‌شود که به جای ۴۰٪ سود فقط ۳۹٪ سود عایدش شده است. طول وسیله‌ای را که او برای اندازه گیری به کار برده است تعیین کنید.



جواب در صفحه ۸۸



مکان هندسی

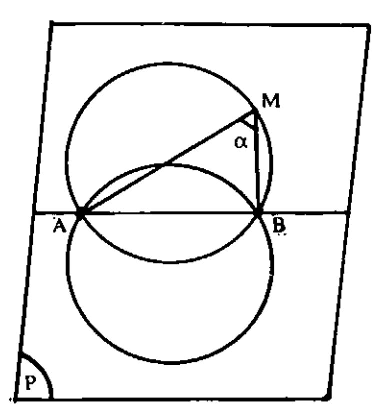
(قسمت دهم)

(اوّل، دوم، سوم و چهارم دبیرستان)

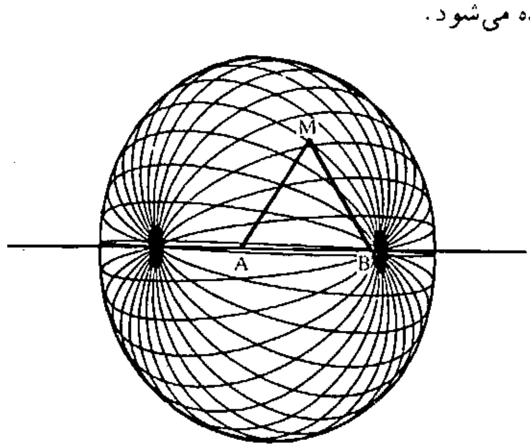
محمد هاشم رستمی

۶ــ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از آن نقطه پاره‌خط AB به زاویهٔ ثابت α دیده می‌شود، یک رویهٔ دوّار است که از دوران کمان در خور زاویهٔ α وابسته به پاره‌خط AB، حول خط AB به وجود می‌آید.

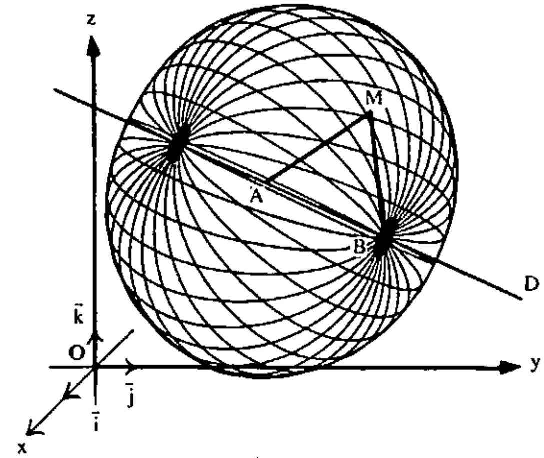
اثبات به روش هندسی ــ پاره‌خط AB را در صفحهٔ دلخواه P در نظر می‌گیریم و مکان هندسی نقطه‌ای از این صفحه را که از آن نقطه پاره‌خط AB به زاویهٔ α رؤیت می‌شود، یعنی کمان در خور زاویهٔ α وابسته به پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم.



واضح است که اگر نقطهٔ M را روی این کمان در خور اختیار کنیم، $A\hat{M}B=\alpha$ است. حال صفحهٔ P را حول خط راست AB دوران می‌دهیم. در این صورت از دوران کمان در خور زاویهٔ α یعنی از دوران کمان $\widehat{AMB}$ حول خط AB، سطحی منحنی (رویه‌ای دوار) به وجود می‌آید که این سطح، مکان هندسی نقطه‌ای از فضاست که از آن نقطه پاره‌خط AB به زاویهٔ α دیده می‌شود.



اثبات به روش تحلیلی ــ دو نقطهٔ $A(x_1,y_1,z_1)$ و $B(x_2,y_2,z_2)$ را در دستگاه مختصات $O-xyz$ در نظر می‌گیریم. اگر $M(x\ ,\ y\ ,\ z)$ یک نقطه از مکان هندسی مورد



نظر، یعنی نقطه‌ای باشد که $A\hat{M}B=\alpha$ است، خواهیم داشت:

$$A(x_1,y_1,z_1)\ ,\ B(x_2,y_2,z_2)\ ,\ M(x,y,z)$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AM}(x-x_1\ ,\ y-y_1\ ,\ z-z_1)$$
$$\overrightarrow{BM}(x-x_2\ ,\ y-y_2\ ,\ z-z_2)$$
$$\Rightarrow \mathrm{Cos}(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM})=\mathrm{Cos}\alpha=$$

$$\frac{(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+(z-z_1)(z-z_2)}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}\cdot\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2}}$$

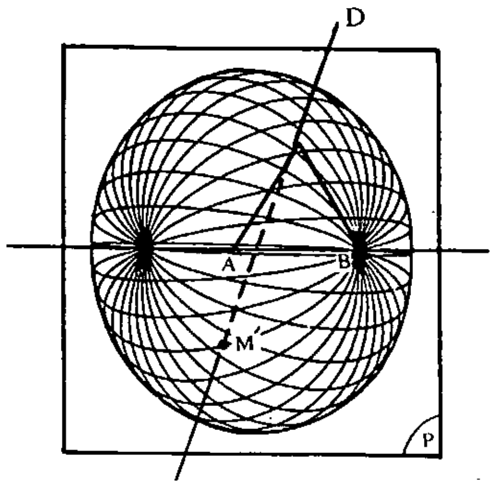
$$\Rightarrow\left[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2\right]\cdot$$
$$\left[(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2\right]\cos^2\alpha$$

$$=\left[(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+\right.$$
$$\left.(z-z_1)(z-z_2)\right]^2 \qquad (1)$$

بعکس هر نقطه‌ای از فضا که مختصاتش در معادلهٔ (۱) صدق کند، روی کمان در خور زاویهٔ α وابسته به پاره خط AB قرار دارد. این معادله را با استفاده از ویژگی دوران منحنیها در فضا حول یک خط راست (دوران کمان در خور زاویهٔ α حول خط AB) نیز می‌توان به‌دست آورد. برای ساده‌تر شدن محاسبه‌ها، می‌توان خط راست AB را منطبق بر یکی ازمحورهای دستگاه مختصات $O-xyz$ اختیار نمود.

مثال ۱ــ خط D و دو نقطهٔ A و B غیر واقع در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای روی خط D بیابید که از آن نقطه پاره‌خط AB به زاویهٔ α دیده شود.

حل ــ صفحهٔ دلخواه P را بر خط AB مرور می‌دهیم و کمان درخور زاویهٔ α وابسته به پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. سپس، این کمان درخور را حول خط AB دوران می‌دهیم تا

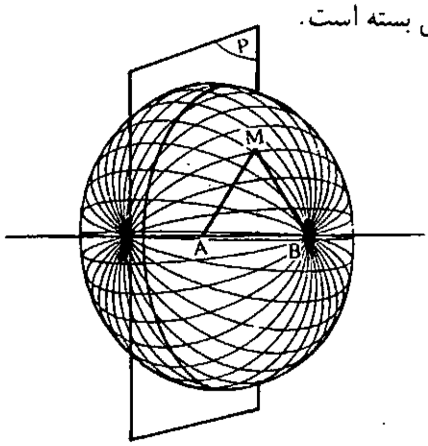


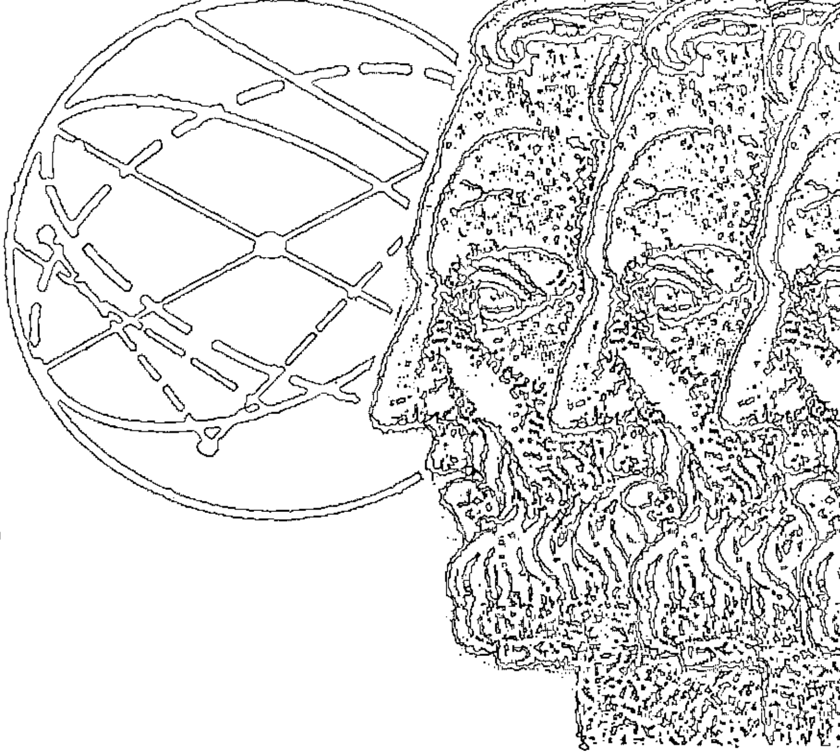
مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از آن نقطه پاره‌خط AB به زاویهٔ α رؤیت می‌شود، به‌دست آید. نقطهٔ برخورد این مکان هندسی با خط D جواب مسأله است و حداکثر دو جواب وجود دارد.

نکته ــ اگر هر دو نقطهٔ A و B روی خط D قرار داشته باشند، مسأله جواب ندارد.

مثال ۲ــ صفحهٔ P و دو نقطهٔ A و B داده شده‌اند. مکان هندسی نقطه‌ای از صفحهٔ P را تعیین کنید که از آن نقطه پاره‌خط AB به زاویهٔ α دیده شود.

حل ــ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را که از آن نقطه پاره‌خط AB به زاویهٔ α دیده می‌شود رسم می‌کنیم. فصل مشترک این مکان هندسی با صفحهٔ P جواب مسأله است (منحنی C). در صورتی که صفحهٔ P بر خط AB بگذرد جواب مسأله، کمان در خود زاویهٔ α وابسته به پاره‌خط AB واقع در صفحهٔ P است و اگر صفحهٔ P عمود بر خط AB باشد و رویهٔ مکان هندسی را قطع کند، جواب مسأله یک دایره است و اگر صفحه نسبت به خط AB مایل باشد و رویهٔ مکان هندسی را قطع کند، جواب یک منحنی بسته است.





مشاهیر ریاضی جهان

برگرفته از: فرهنگ ریاضیات آکسفورد

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

خوارزمی[1] (حدود ۸۰۰ میلادی). کلمهٔ «الگوریتم[2]» را از نام این ریاضیدان مکتب اسلام استخراج کرده‌ایم. عنوان اثرش، **الجبر و المقابله** نیز کلمهٔ «جبر[3]» را به ما داده است.

لاگرانژ، زوزف ـ لوئی[4] (۱۷۳۶ ـ ۱۸۱۳). لاگرانژ، با اویلر، شاید بزرگترین ریاضیدانهای قرن هجدهم باشند. گرچه در تورین[5] تولد یافت، و قسمت اولیهٔ حیات خود را در آنجا گذراند، سرانجام در پاریس اقامت گزید و معمولاً فرانسوی قلمداد می‌شود، اما ممکن است ایتالیاییها این را عادلانه تصور نکنند. غالب کارهای مهمش در برلین، که در آکادمی آن جانشین اویلر بود، انجام گرفت. آثارش، همراه با آثار مهمترین ریاضیدانهای آن زمان، تمامی برد ریاضیات را در برمی‌گیرد. احتمالاً بیشتر به عنوان پیشرو در توسعهٔ مکانیک **نظری**[6] مشهور است. به خصوص اساساً عهده‌دار روشهای حساب تغییرات[7] و روش لاگرانژی حاصل از آن در مکانیک است. در نظریهٔ ماکسیمم ـ می‌نیمم معمولی، باید مقدار xی را که، مثلاً، مقدار F(x) را می‌نیمم می‌کند، به دست آوریم. در صورت مبنایی حساب تغییرات، باید مسألهٔ بسیار مشکلتر به دست آوردن **تابع**[8] fی را که مقدار انتگرالی چون $\int_a^b F(x,f(x),f'(x))dx$ را می‌نیمم می‌کند، حل کنیم. یکی از مسائل مشهور این موضوع مسألهٔ یافتن منحنی و اصل دو نقطهٔ مفروض در صفحهٔ قائمی

لاگرانژ، زوزف ـ لوئی

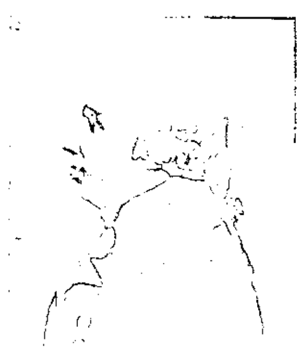
است، که ذره‌ای که در امتداد آن تحت نیروی ثقل می‌لغزد کمترین زمان را برای رسیدن از نقطهٔ بالایی به نقطهٔ پایینی بگیرد.

لاپلاس، پی‌یر ـ سیمون، مارکی دو[9] (۱۷۴۹ ـ ۱۸۲۷). لاپلاس فرانسوی، گرچه در طبقهٔ اشراف متولد نشد اما از شانسی که داشت در سیاست استاد بود. تحت زعامت ناپلئون وزیر داخله شد (بدون توفیق) اما به نظر می‌رسد که با پادشاهی احیا شده نیز به همین ترتیب ساخته باشد. بیشتر به خاطر اثرش در مورد حرکت سیاره‌ای که در **مکانیک آسمانی**[10] اش آمده، نیز سهم اساسی‌اش در نظریهٔ احتمال معروف است. این لاپلاس بود که نظریهٔ جاذبه‌ای نیوتن را در بررسی کل منظومهٔ شمسی به

لاپلاس، پی یر - سیمون، مارکی دو

کار برد. او این نظریهٔ قویاً جبری را که، هنگامی که **شرایط آغازی**[۱۱] یک دستگاه دینامیکی بسته، نظیر کیهان را بدانیم، تکامل آیندهٔ آن کاملاً مشخص می‌شود، گسترش داد.

لـژانـدر، آدرین ـ مـــاری[۱۲] (۱۷۵۲ ـ ۱۸۳۳). ســه ریاضیدان مشهور فرانسوی در ارتباط با دوران انقلاب فرانسه، در ارتبـاط با این واقـعیت کـه اسـامی هر سه‌شـان با L آغاز می‌شود، نیز هستند : لاگرانژ، لاپلاس، لژاندر. لژاندر در قرن نوزدهم به خاطر کتاب درسی هندسه‌اش که با استاندارد آن زمان «کارسرهٔ» اقلیدسی‌ای بود، بسیار معروف بود. اثر اساسی‌اش در ارتباط بسیار با حساب دیفرانسیل و انتگرال بود، به این ترتیب که مسئولیت رده‌بندی انتگرالهای بیضوی را به صـورتهای استانداردشان به عهده داشت. دانشجویان ریاضیات پیشرفته‌تر به زودی با چند جـمله‌ایهـای لژاندر، کـه در میـان مهـمترین توابع خاص قرار دارند، مواجه می شوند. لژاندر در زمینه‌ای کاملاً متفاوت، کاری اساسی در نظریهٔ اعداد انجام داد. قانون تقابل درجه دوم[۱۳] را همراه با اویلر حدس زد و جزئاً اثبات کرد. اثبات



لـژانـدر، آدرین ـ مـــاری

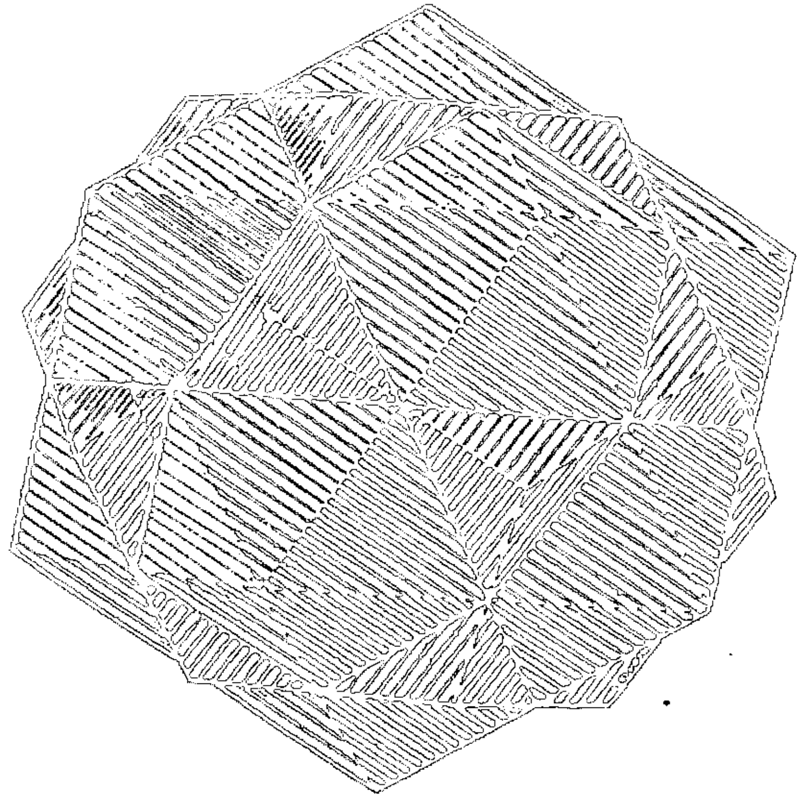
کامل این قانون در انتظار گاوس بود.

لایب‌نیـتـز، گـوتفـرید[۱۴] (۱۶۴۶ ـ ۱۷۱۶). لایب‌نیـتـز فیلسوف و ریاضیدان همه فن‌حریف و مشهور آلمانی است. در ریاضیات، همراه با نیوتن، واضع حساب دیفرانسیل و انتگرال است. نیز سهم عمده‌ای در گسترش منطق علامتی داشت، و این مسیری بود که تا پایان قرن نوزدهم دنبال نشد. در حدود ۱۷۱۲، نزاعی بین‌المللی، بر سر ادعاهای رقابت‌آمیز مخترع حساب دیفرانسیل و انتگرال بودن، بین نیوتن و لایب‌نیتز در گرفت. رفتار لایب‌نیتز در این برخورد، برخلاف نیوتن، و بر خلاف رفتار خودش با اسپینوزا، جوانمردانه بود.

لایب‌نیـتـز گـوتفـرید

یادداشتها:

1. al - Khwârizmi
2. algorithm
3. algebra
4. Lagrange, Joseph-Louis
5. Turin
6. theoretical
7. Calculus of Variations
8. function
9. Laplace, Pierre-Simon, Marquis de
10. Mécanique Céleste
11. starting conditions
12. Legendre, Adrien-Marie
13. Law of Quadratic Reciprocity
14. Leibniz, Gottfried



یک خاصیت مثلث قائم‌الزاویه و کاربرد آن در صنعت

● دکتر احمدشرف الدین

چکیده:

در زیر ابتدا یک خاصیت مثلث قائم‌الزاویه را ذکر می‌کنیم و سپس کاربرد آن را در صنعت شرح می‌دهیم. در پایان مسئله زیبایی را که ابوالوفای بوزجانی طرح کرده است و با مسئله هندسی یادشده بسیار نزدیک است شرح می‌دهیم.

۱ ــ خاصیت هندسی موردنظر

الف ــ قضیه ــ در مثلث قائم‌الزاویه طول میانه وارد بر وتر نصف طول وتر است.

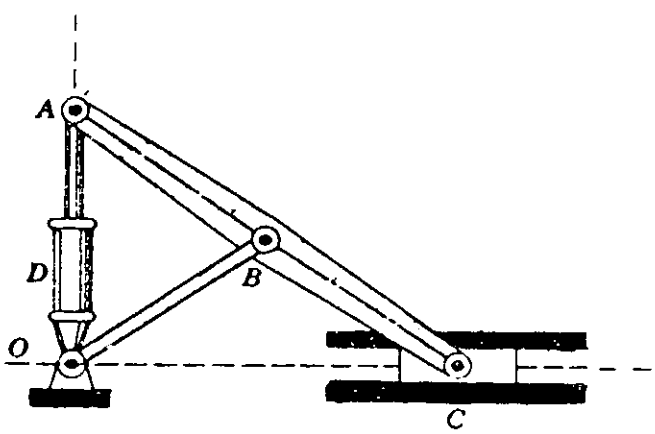
ب ــ عکس قضیه ــ اگر در مثلثی طول یک میانه نصف طول ضلع مقابل باشد، آن مثلث قائم‌الزاویه است. دو قضیه یاد شده در بالا در کتابهای هندسه ثابت شده است. از این‌رو به اثبات آنها نمی‌پردازیم.

۲ ــ کاربرد صنعتی

در زیر کاربرد صنعتی حکم (ب) را شرح می‌دهیم:

دستگاهی که در شکل زیر نموده شده است، یک حرکت مستقیم‌الخط را به یک حرکت مستقیم‌الخط عمود بر آن تبدیل می‌کند. در این شکل نقطه O نمایش یک پایه ثابت است و میله OB در نقطه O به این پایه لولا شده است. طول میله OB نصف

شکل (۱)



طول میله AC است. میله OB در نقطه B که وسط میله AC است به آن میله لولا شده است. کشو C می‌تواند روی خط راست افقی OL حرکت کند. هنگامی که کشو C حرکت می‌کند نقطه A انتهای میله BA مجبور است روی خط راستی که از نقطه A بر خط راست OL عمود است حرکت کند. این خط عمود را OK می‌نامیم. دستگاه را می‌توان طوری نصب کرد که خط OL افقی باشد و خط OK عمود بر صفحه افق باشد.

وقتی کشو C حرکت رفت‌وبرگشت انجام می‌دهد پیستون سیلندر روغنی D روی خط قائم Ok بالا و پایین می‌رود.

نقش سیلندر روغنی آن است که حرکت قائم به صورت آهسته و ملایم انجام می‌گیرد. دستگاه مذکور در بالابرها به‌کار می‌رود.

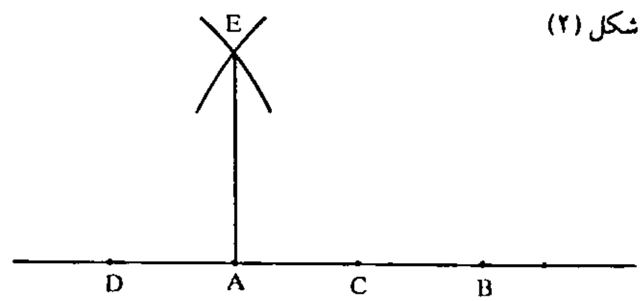
۳ ـ مسئله ابوالوفای بوزجانی

شکل بالا مسئله ابوالوفای بوزجانی را در خاطر احیا می‌کند. ابتدا رسم عمود بر یک خط راست از یکی از نقاط آن را شرح می‌دهیم :

الف ــ مسئله ــ از نقطه A واقع برخط AB عمود بر خط AB رسم کنید.

حل ــ روی خط AB و در دو طرف نقطه A دو طول مساوی AC و AD جدا می‌کنیم (با پرگار) سپس دو کمان به مرکزهای C و D و با شعاعی بزرگتر از AC رسم می‌کنیم. نقطه برخورد دو کمان را E می‌نامیم. از نقطه E به نقطه A وصل می‌کنیم. خط EA بر خط AB عمود است.

شکل (۲)

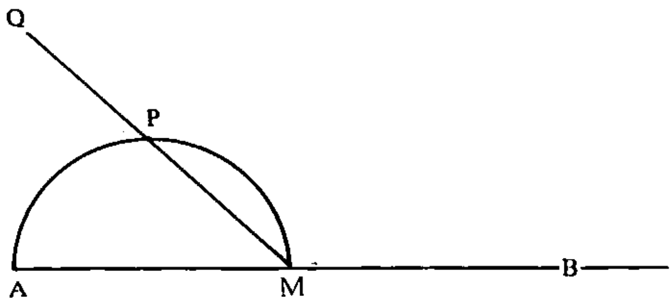


ب ــ مسئله طرح شدهٔ ابوالوفای بوزجانی ــ نقطه A از خط AB بسیار نزدیک به لبه کاغذ است. چگونه از نقطه A بر خط AB عمود رسم کنیم.

روشی که برای رسم عمود در قسمت (الف) از شماره (۳) ذکر کردیم در مسئله اخیر الذکر به‌کار نمی‌آید زیرا بنا به فرض نقطه A به لبه کاغذ بسیار نزدیک است. ابوالوفا حل زیر را عرضه می‌کند.

نقطه M را روی پاره‌خط AB اختیار می‌کنیم و سپس دایره‌ای به قطر AM رسم می‌کنیم. از نقطه M به نقطه P وسط کمان AB وصل می‌کنیم. پاره‌خط MP را در جهت از M به P به اندازه خود امتداد می‌دهیم، تا نقطه Q به‌دست آید. خط QA بر خط AB عمود است.

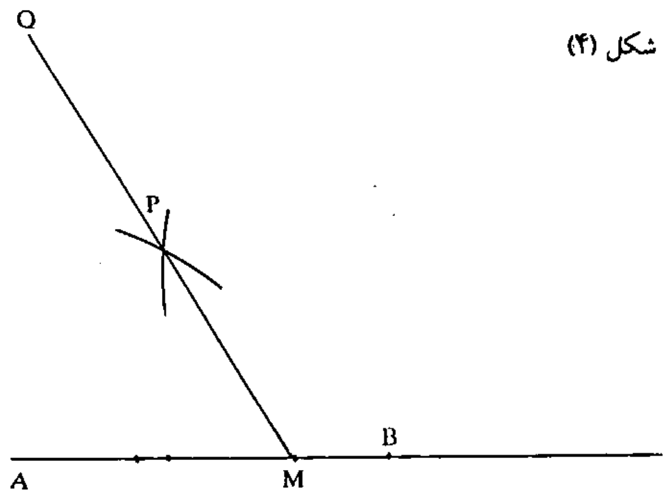
شکل (۳)



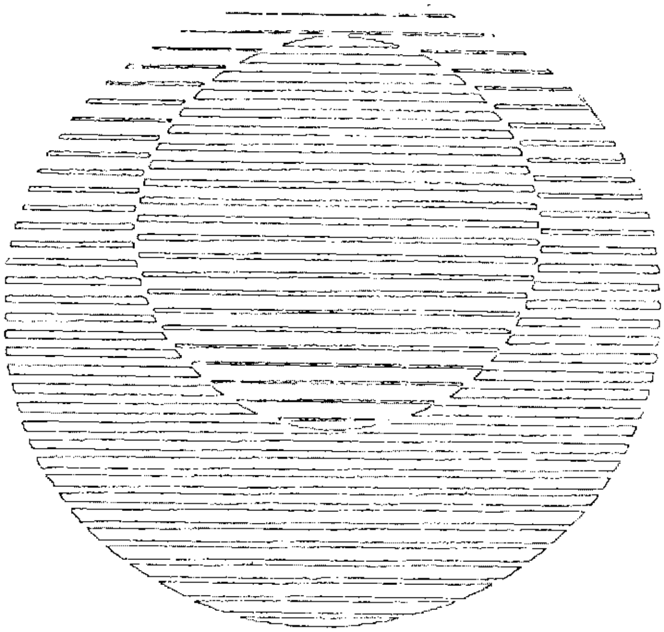
راه‌حل ابوالوفا با اندکی تغییری به‌صورت زیر در می‌آید :

بر پاره‌خط AB نقطه دلخواه M را اختیار می‌کنیم و سپس دو کمان به مرکزهای A و M و با شعاعی بزرگتر از نصف پاره‌خط AM رسم می‌کنیم. نقطه برخورد این دو کمان را P می‌نامیم. پاره‌خط MP را در جهت از M به P به اندازه خود امتداد می‌دهیم، تا نقطه Q به‌دست آید. خط AQ برخط AB عمود است.

شکل (۴)



شکل (۱) که طرح کلی یک بالابر است، شکل (۴) را که طرز ترسیم خط عمود بر یک خط از یک نقطه آن، به شیوه ابوالوفا است به‌خاطر می‌آورد.



بررسی وضع دو دایره نسبت به هم

● محمدهاشم رستمی

به‌دلیل محدود بودن صفحه‌های کتابهای درسی، امکان شرح و بسط کافی برای همهٔ مفهومهای موجود در این کتابها وجود ندارد ؛ از جملهٔ این مفهومها بررسی وضع دو دایرهٔ نسبت به‌هم است، که تنها در یک صفحه از کتاب هندسهٔ سال دوم دبیرستان رشته‌های ریاضی فیزیک و علوم تجربی نظام جدید آموزشی (صفحهٔ ۵۲) به‌صورت خلاصه آمده است. چون وضع دو دایره نسبت به‌هم، کاربردهای فراوانی در هندسه دارد، لذا به ارائه آن به‌صورت مشروحتری پرداخته‌ایم، برای درک بهتر مطلب :

۱ ــ این مفهوم به‌صورت فعالیت ارائه شده است، تا دانش‌آموزان با انجام این فعالیتها خود به کشف رابطه‌های مربوط به وضع نسبی دو دایره بپردازند.

۲ ــ شعاعهای دو دایره ثابت نگاه داشته شده و اندازهٔ خط‌المرکزین آنها تغییر یافته است.

نکته ــ در اینجا نیز از اثبات برخی مطالب که نیاز به اطلاعات بیشتری دارد خودداری شده است.

فعالیت ۱

۱ ــ پاره‌خط OO' را به طول ۴ سانتی‌متر رسم کنید.

۲ ــ یک دایره به مرکز O و به شعاع ۲ سانتی‌متر (دایرهٔ C)، و دایرهٔ دیگری به مرکز O' و به شعاع ۱ سانتی‌متر رسم نمایید (دایرهٔ C').

۳ ــ مجموع شعاعهای این دو دایره را به‌دست آورید و با اندازهٔ خط‌المرکزین آنها مقایسه کنید. کدام بیشتر است؟

در جاهای خالی زیر، عددها و علامت مناسب بگذارید.

$R+R'=\ldots+\ldots \qquad OO'=d=\ldots \qquad d\ldots R+R'$

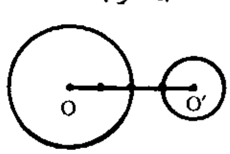
۴ ــ این دو دایره چند نقطهٔ مشترک دارند؟

تعریف ــ دو دایره که اندازهٔ خط‌المرکزین آنها از مجموع شعاعهایشان بیشتر باشد، دو دایرهٔ برون هم (متخارج)، نامیده می‌شوند.

در فعالیت ۱ دو دایرهٔ (C) و (C')، برون هم هستند.

در مورد دو دایرهٔ برون هم می‌توان گفت :

شرط لازم و کافی برای آن که دو دایرهٔ $C(O$ و $R)$ و $C'(O'$ و $R')$ برون هم (متخارج) باشند، آن است که اندازهٔ خط‌المرکزین آنها $(d=OO')$ از مجموع شعاعهایشان $(R+R')$ بیشتر باشد.



$d>R+R' \iff$ دو دایره برون هم (متخارج)

مثال ۱ ــ دو دایرهٔ $C(O$ و ۶$)$ و $C'(O'$ و $R')$ مفروضند.

اگر $OO'=۱۴$ باشد، حدود R' را چنان تعیین کنید که این دو دایره برون هم باشند.

حل ــ اگر نقطه را دایره‌ای به شعاع صفر در نظر بگیریم، نخست باید $R'\geq ۰$ باشد، آن‌گاه برای این‌که دو دایره برون هم باشند، لازم و کافی است، $d>R+R'$ باشد.

پس: $۱۴>۶+R' \Rightarrow R'<۸ \Rightarrow ۰\leq R'<۸$

مثال ۲ ــ دو دایره به شعاعهای $R=a+۳$ و $R'=۲a-۱$ و خط‌المرکزین $OO'=d=a+۱۲$ داده شده‌اند. حدود a را چنان تعیین کنید که این دو دایره برون هم باشند.

حل ــ با در نظر گرفتن نقطه به‌عنوان دایره‌ای به شعاع صفر، نخست باید:

$$\begin{cases} a+۳\geq ۰ \\ ۲a-۱\geq ۰ \\ a+۱۲>۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\geq -۳ \\ a\geq \frac{۱}{۲} \\ a>-۱۲ \end{cases} \Rightarrow a\geq \frac{۱}{۲}$$

از طرفی شرط برون هم بودن دو دایره آن است که $d>R+R'$ باشد، یعنی:

$$a+۱۲> a+۳+۲a-۱ \Rightarrow a<۵$$

بنابراین جواب مسأله $\frac{۱}{۲}\leq a<۵$ است.

فعالیت ۲

۱ ــ پاره‌خط OO' را به طول ۳ سانتی‌متر رسم کنید.

۲ ــ یک دایره به مرکز O و به شعاع ۲ سانتی‌متر (دایرهٔ C) و دایرهٔ دیگری به مرکز O' و به شعاع ۱ سانتی‌متر (دایرهٔ C') رسم نمایید.

۳ ــ مجموع شعاعهای این دو دایره را به‌دست آورید و با اندازهٔ خط‌المرکزین آنها مقایسه کنید.

نتیجهٔ مقایسه چیست؟

در جاهای خالی زیر، عددها و علامت مناسب بگذارید.

$R+R'=....+....$ $\quad OO'=d=....$ $\quad d....R+R'$

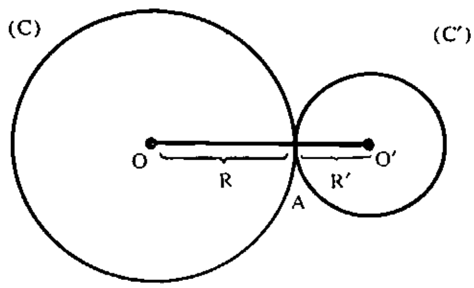
۴ ـ این دو دایره چند نقطهٔ مشترک دارند؟ ... نقطه. نام این نقطه مشترک چیست؟

تعریف ــ دو دایره که اندازهٔ خط‌المرکزینشان مساوی مجموع شعاعهایشان باشد، دو دایرهٔ مماس برون (مماس خارج) نامیده می‌شوند.

در فعالیت ۲ دو دایره مماس برون هستند.

در مورد دو دایرهٔ مماس برون به‌طورکلی می‌توان گفت:

شرط لازم و کافی برای آن که دو دایرهٔ C (O و R) و C' (O' و R') مماس برون (مماس خارج) باشند، آن است که اندازهٔ خط‌المرکزین آنها (d) مساوی مجموع شعاعهایشان ($R+R'$)، باشد.



دو دایرهٔ مماس برون (مماس خارج) $\Leftrightarrow d=R+R'$

مثال ۱ ــ اگر دو دایرهٔ C (O و ۵) و C' (O' و ۸) مماس برون باشند، اندازهٔ خط‌المرکزین آنها چه‌قدر است.

حل ــ شرط آن که دو دایره، مماس برون باشند، آن است که اندازهٔ خط‌المرکزین آنها برابر مجموع شعاعهای دو دایره باشد. بنابراین داریم:

$$d=OO'=R+R'\Rightarrow OO'=۵+۸=۱۳$$

مثال ۲ ــ مقدار R را چنان بیابید که دو دایرهٔ C (O و R) و C' (O' و ۷) مماس برون باشند، در صورتی که $OO'=۱۸$ باشد.

حل ــ با فرض $OO'=d$ داریم:

$$d=R+R'\Rightarrow ۱۸=R+۷\Rightarrow R=۱۱$$

مثال ۳ ــ مقدار m را چنان تعیین کنید که دو دایرهٔ به شعاعهای $R=m+۲$ ، $R'=m-۲$ با خط‌المرکزین $OO'=۳m-۱۲$ ، مماس برون باشند.

حل ــ با شرط این که نقطه را دایره‌ای به شعاع صفر در نظر بگیریم، مقدار قابل قبول برای m عبارت است از:

$$\begin{cases} m+۲\geq ۰ \\ m-۲\geq ۰ \\ ۳m-۱۲>۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\geq -۲ \\ m\geq ۲ \\ m>۴ \end{cases} \Rightarrow m>۴$$

و شرط این که دو دایره مماس برون باشند آن است که :

$$d = R + R' \Rightarrow ۳m - ۱۲ = m + ۲ + m - ۲ \Rightarrow m = ۱۲$$

پس جواب مسأله $m = ۱۲$ است.

فعالیت ۳

۱ ــ پاره‌خط OO' را به‌طول ۲/۵ سانتی‌متر رسم کنید.

۲ ــ یک دایره به مرکز O و به شعاع ۲ سانتی‌متر (دایرهٔ C) و دایرهٔ دیگری به مرکز O' و به شعاع ۱ سانتی‌متر (دایرهٔ C') رسم کنید.

۳ ــ مجموع شعاعهای این دو دایره چه قدر است؟

$R + R' = ... + ...$

قدرمطلق تفاضل شعاعهای این دو دایره چه‌قدر است؟

$|R - R'| = ...$

اندازهٔ خط‌المرکزین این دو دایره را با مجموع و تفاضل شعاعهای دو دایره مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای به‌دست می‌آید؟
جاهای خالی زیر را با عددها و علامتهای مناسب پر کنید.

$R + R' = ... + ... \quad OO' = d = ... \quad \Rightarrow d ... R + R'$

$|R - R'| = ... - ... \quad OO' = d = ... \quad \Rightarrow d ... |R - R'|$

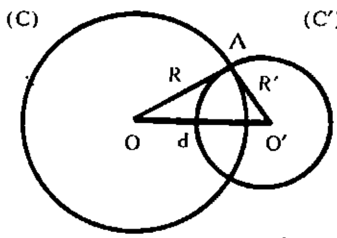
$\Rightarrow |R - R'| ... d ... R + R'$

۴ ــ این دو دایره چند نقطهٔ مشترک دارند؟ . . . نقطه.
نقطه‌های مشترک این دو دایره را A و B بنامید.
پاره‌خط AB را وتر مشترک دو دایره و خط AB را خط شامل وتر مشترک دو دایره و با مسامحه، وتر مشترک دو دایره می‌نامند.

تعریف ــ دو دایره که اندازهٔ خط‌المرکزینشان از مجموع شعاعهای دو دایره کمتر و از تفاضل شعاعهای آن دو دایره بیشتر باشد، دو دایرهٔ متقاطع می‌نامند. در **فعالیت ۳** دو دایرهٔ (C) و (C') متقاطعند.

در مورد دو دایرهٔ متقاطع به‌طورکلی می‌توان گفت :

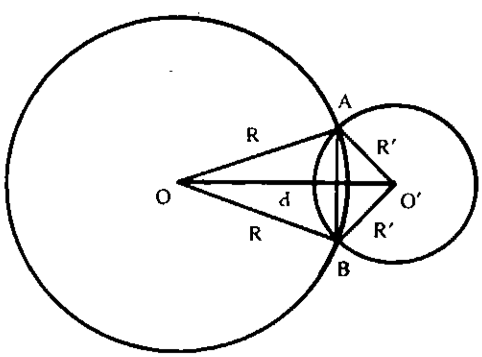
شرط لازم و کافی برای متقاطع بودن دو دایرهٔ (R و C(O و $(R'$ و C' $(O'$ آن است که اندازهٔ خط‌المرکزین آنها (d) از مجموع دو شعاع $(R + R')$، کمتر و از قدرمطلق تفاضل دو شعاع $(|R - R'|)$ بیشتر باشد.



$|R - R'| < d < R + R' \Leftrightarrow$ دو دایره متقاطع

زیرا با برقراری شرط بالا، همواره مثلث OAO' که ضلعهای آن $OA = R$، $O'A = R'$ و $OO' = d$ است، وجود دارد.

نکته: اگر A و B نقطه‌های برخورد دو دایرهٔ متقاطع (R و C (O و C' $(O'$ و R') باشند، چهار ضلعی $OAO'B$ شبه لوزی است. (چرا؟)، و در نتیجه OO' عمود منصف پاره‌خط AB است : یعنی در دو دایرهٔ متقاطع، خط‌المرکزین، عمود منصف وتر مشترک است.



مثال ۱ ــ اگر R و R' شعاعها و d خط‌المرکزین دو دایره باشد، تعیین کنید در کدام حالت از حالتهای زیر دو دایره متقاطعند.

الف ــ $R = ۴،\ R' = ۷،\ d = ۱۴$

ب ــ $R = ۸،\ R' = ۴،\ d = ۵$

ب ـ $R=۹ ، R'=۳ ، d=۱۲$

ت ـ $R=۶ ، R'=۵ ، d=۱۲$

حل ـ در حالت الف، دو دایره برون هم هستند؛ زیرا $۱۴>۴+۷$ یعنی $d>R+R'$ است. در حالت ب، دو دایره متقاطعند؛ زیرا $۸-۴<۵<۸+۴$ یعنی $|R-R'|<d<R+R'$ است. در حالت پ، دو دایره مماس برون می‌باشند چون $۳+۹=۱۲$ یعنی $d=R+R'$ است. در حالت ت، دو دایره برون هم هستند، زیرا $۱۲>۶+۵$ یعنی $d>R+R'$ است.

مثال ۲ ـ اگر $d=۱۲$ خط‌المرکزین دو دایرهٔ $C(O$ و $۷)$ و $C'(O'$ و $R')$ باشد، حدود R' را چنان بیابید که این دو دایره متقاطع باشند.

حل ـ شرط متقاطع بودن دو دایره را نوشته به جای **d** و **R** مقدارهای داده شده را قرار می‌دهیم.

$$|R-R'|<d<R+R' \Rightarrow |۷-R'|<d<۷+R'$$
$$\Rightarrow ۸<R'<۲۲$$

فعالیت ۴

۱ ـ پاره‌خط OO' را به طول ۱ سانتی‌متر رسم کنید.

۲ ـ به مرکز O و به شعاع ۲ سانتی‌متر یک دایره (دایرهٔ C) و به مرکز O' و به شعاع ۱ سانتی‌متر دایرهٔ دیگری (دایرهٔ C') را رسم کنید.

۳ ـ قدرمطلق تفاضل شعاعهای این دو دایره چه قدر است؟
آیا اندازهٔ خط‌المرکزین این دو دایره با قدرمطلق تفاضل شعاعهای آنها برابر است؟

جاهای خالی را با عددها و علامت مناسب پر کنید.

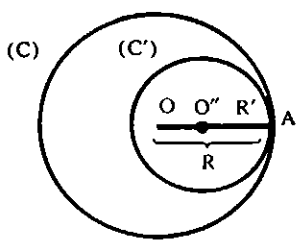
$$|R-R'|=\dots \quad OO'=d=\dots \quad d\dots|R-R'|$$

۴ ـ این دو دایره چند نقطه مشترک دارند؟ ... نقطه. نام این نقطه چیست؟

تعریف ـ دو دایره که اندازهٔ خط‌المرکزینشان مساوی قدرمطلق تفاضل شعاعهای آن دو دایره باشد، دو دایره مماس درون (مماس داخل) نامیده می‌شوند، در فعالیت ۴ دو دایرهٔ (C) و (C') مماس درون هستند.

در مورد دو دایرهٔ مماس در حالت کلی می‌توان گفت:

شرط لازم و کافی برای آن که دو دایرهٔ $C(O$ و $R)$ و $C'(O'$ و $R')$ مماس درون (مماس داخل) باشند، آن است که اندازهٔ خط‌المرکزین آنها (d) مساوی قدرمطلق تفاضل شعاعهایشان باشد. یعنی:



$d=|R-R'| \Leftrightarrow$ دو دایره مماس درون (مماس داخل)

نکته: با فرض $R>R'$ می‌توان نوشت: $d=R-R'$.

مثال ۱ ـ مقدار R را چنان بیابید که دایرهٔ $C(O$ و $R)$ با دایرهٔ $C'(O'$ و $۹)$ مماس درون باشد در صورتی که $OO'=۱۵$ خط‌المرکزین آنها باشد.

حل ـ داریم:

$$d=|R-R'|\Rightarrow ۱۵=|R-۹|\Rightarrow R=۲۴$$

مثال ۲ ـ اگر $d=۸$ خط‌المرکزین و $R=a-۳$ و $R'=۲a-۵$ شعاعهای دو دایره باشند، مقدار a را طوری تعیین کنید که این دو دایره مماس درون باشند.

حل ـ اگر نقطه را دایرهٔ به شعاع صفر در نظر بگیریم داریم:

$$\begin{cases} ۲a-۵\geq ۰ \\ a+۳\geq ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\geq \frac{۵}{۲} \\ a\geq -۳ \end{cases} \Rightarrow a\geq \frac{۵}{۲}$$

$$d=|R-R'|\Rightarrow ۸=|a-۳-۲a+۵|\Rightarrow$$
$$۸=|-a+۲|\Rightarrow \quad a=۱۰ \ , \ a=-۶<۰$$

جواب $a=-۶$ قابل قبول نیست.

فعالیت ۵

۱ ـ پاره‌خط OO' را به طول ۰/۵ سانتی‌متر رسم کنید.

۲ ـ به مرکز O و به شعاع ۲ سانتی‌متر یک دایره (دایرهٔ C) و به مرکز O' و به شعاع ۱ سانتی‌متر دایرهٔ دیگری (دایرهٔ C') رسم کنید.

۳ ــ تفاضل شعاعهای این دو دایره را تعیین کنید.

آیا اندازهٔ خط‌المرکزین این دو دایره از تفاضل شعاعهای دو دایره کمتر است؟

در جاهای خالی عددها و علامت مناسب بگذارید.

$R - R' = \ldots \quad OO' = d = \ldots \quad d \ldots R - R'$

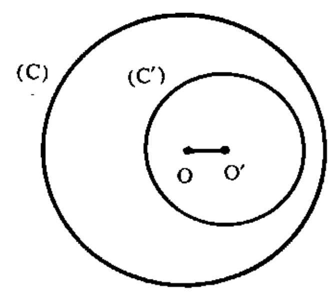
۴ ــ آیا این دو دایره، نقطهٔ مشترک دارند؟

تعریف ــ دو دایره که اندازهٔ خط‌المرکزینشان کمتر از قدرمطلق تفاضل شعاعهایشان باشد، دو دایرهٔ متداخل نامیده می‌شوند.

در فعالیت ۵ دو دایره، متداخل هستند.

در مورد دو دایرهٔ متداخل در حالت کلی می‌توان گفت :

شرط لازم و کافی برای آن که دو دایرهٔ $C(O$ و $R)$ و $C'(O'$ و $R')$ یکی درون دیگری (متداخل) باشند، آن است که اندازهٔ خط‌المرکزین آنها (d) از تفاضل شعاعهای دو دایره $(R - R')$ کمتر باشد.



یعنی : $d < R - R'$ ⟺ دو دایرهٔ درون هم (متداخل)

مثال ۱ ــ پاره‌خط OO' به طول ۶ سانتی‌متر خط‌المرکزین دو دایره است که شعاع یکی از آنها $R = 8$ سانتی‌متر است. حدود R' شعاع دیگری را چنان تعیین کنید، که این دو دایره یکی درون دیگری (متداخل) باشند.

حل ــ داریم :

$d < |R - R'| \Rightarrow 6 < |8 - R'|$

$\Rightarrow R' < 2$ و $6 < R' - 8 \Rightarrow R' > 14$

مثال ۲ ــ دایره‌های $C(O$ و $2m - 1)$ و $C'(O'$ و $2)$ با خط‌المرکزین $OO' = 3$ داده شده‌اند. حدود m را چنان بیابید که این دو دایره یکی درون دیگری (متداخل) باشد.

حل ــ داریم :

$d < |R - R'| \Rightarrow 3 < |2m - 1 - 2| \Rightarrow 3 < |2m - 3|$

$\Rightarrow m > 3$ و $m < 0$

$m < 0$ غیرقابل قبول است زیرا شرط حقیقی بودن R آن است، که

$2m - 1 \geq 0 \Rightarrow \boxed{m \geq \frac{1}{2}}$

فعالیت ۶

۱ ــ یک نقطه مانند O در نظر بگیرید.

۲ ــ به مرکز نقطهٔ O و به شعاع ۲ سانتی‌متر یک دایره (دایرهٔ C) و به مرکز O' و به شعاع ۱ سانتی‌متر دایرهٔ دیگری (دایرهٔ C') رسم کنید.

۳ ــ اندازهٔ خط‌المرکزین این دو دایره چه‌قدر است؟

۴ ــ این دو دایره چند نقطهٔ مشترک دارند؟

تعریف ــ دو دایره که اندازهٔ خط‌المرکزینشان برابر صفر باشد، یعنی مرکزهایشان برهم منطبق باشد، دو دایرهٔ هم مرکز نامیده می‌شوند.

در فعالیت ۶ دو دایره هم‌مرکز هستند.

در مورد دو دایرهٔ هم مرکز می‌توان گفت :

شرط لازم و کافی برای آن که دو دایره هم مرکز باشند آن است که اندازهٔ خط‌المرکزینشان برابر صفر باشد.

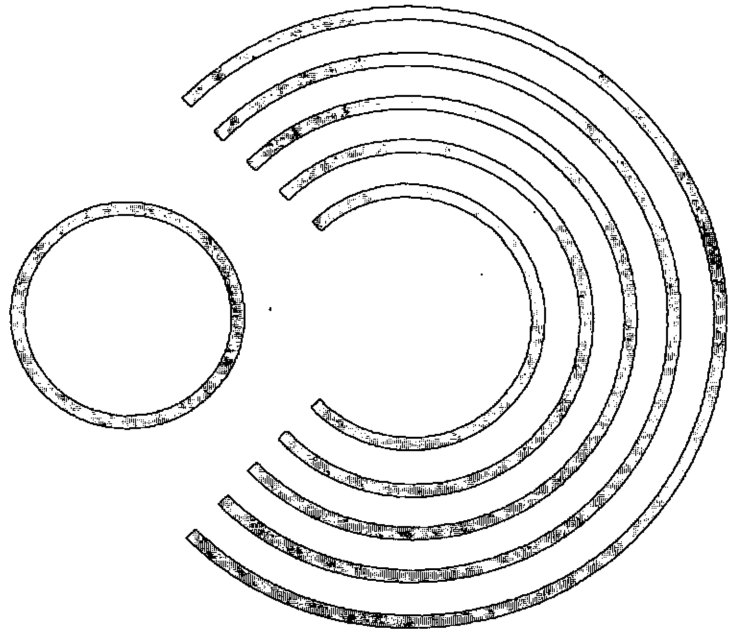
تمرین

دو دایرهٔ $C(O$ و $R)$ و $C'(O'$ و $R')$ داده شده‌اند. تعیین کنید که در چه حالتهایی دو دایره :

الف ــ غیرمتقاطع‌اند.

ب ــ مماس‌اند.

پ ــ متقاطع‌اند.

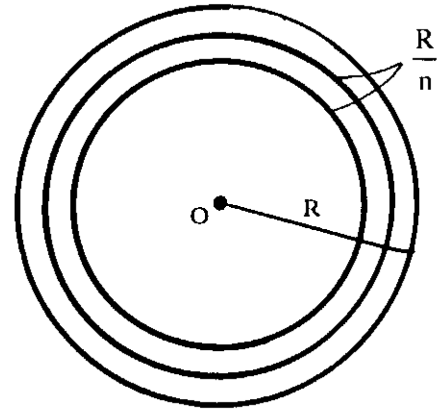


محاسبهٔ مساحت دایره

● سیدمحمدرضا هاشمی موسوی

برای محاسبهٔ مساحت دایره‌ای به شعاع R، ابتدا آن را مطابق شکل به نوارهای باریکی به عرض $\frac{R}{n}$ برش می‌دهیم تا حلقه‌های دایره ای شکل حاصل شود.

بدیهی است که اگر n را عددی بسیار بزرگ در نظر بگیریم، نوارهای بریده شده **مستطیلهایی** به عرض $\frac{R}{n}$ هستند. از حد مجموع مساحت برشهای حاصله به عرض $\frac{R}{n}$، وقتی n به سمت عددی طبیعی بی‌نهایت بزرگ میل کند؛ مساحت دایره به دست می‌آید:



$$S_n = \underbrace{2\pi R}_{\text{طول مستطیل}} \left(\underbrace{\frac{R}{n}}_{\text{عرض مستطیل}}\right) + 2\pi\left(R-\frac{R}{n}\right)\left(\frac{R}{n}\right) +$$

$$2\pi\left(R-\frac{2R}{n}\right)\left(\frac{R}{n}\right) + 2\pi\left(R-\frac{3R}{n}\right)\left(\frac{R}{n}\right) + \dots +$$

$$2\pi\left(R-\frac{nR}{n}\right)\left(\frac{R}{n}\right)$$

$$= \frac{2\pi R^2}{n}\left[\frac{1}{n} + \left(1-\frac{1}{n}\right) + \left(1-\frac{2}{n}\right) + \left(1-\frac{3}{n}\right) + \dots + \left(1-\frac{n}{n}\right)\right]$$

$$= \frac{2\pi R^2}{n}\left[\frac{1}{n} + n - \left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\frac{3}{n}+\dots+\frac{n}{n}\right)\right]$$

$$= \frac{2\pi R^2}{n}\left(\frac{1}{n} + n - \frac{1+2+3+\dots+n}{n}\right)$$

$$= \frac{2\pi R^2}{n}\left(\frac{1}{n} + n - \frac{n(n+1)}{2n}\right)$$

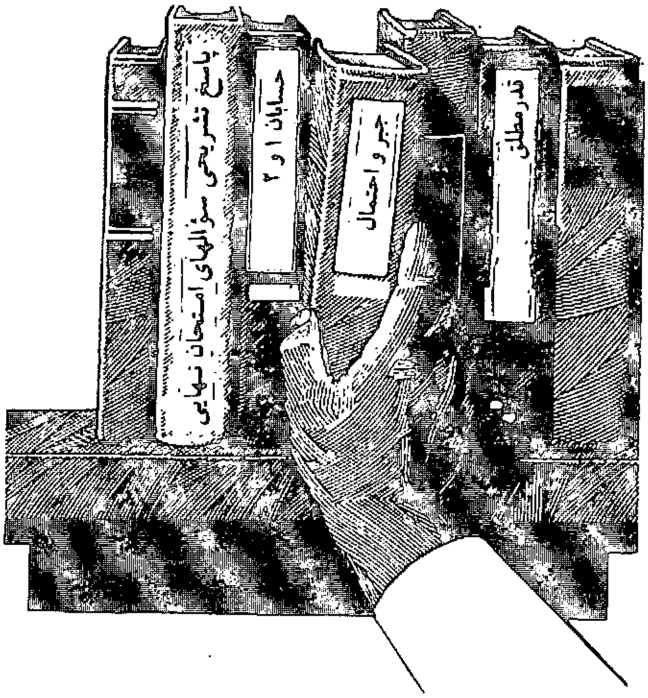
$$= \frac{2\pi R^2}{n}\left(\frac{1}{n} + n - \frac{n+1}{2}\right) = \frac{2\pi R^2}{n}\left(\frac{1}{n} + \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

با فرض این که S حد مجموع مساحت برشهای حاصله باشد:

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi R^2}{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right) = 2\pi R^2 \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right)$$

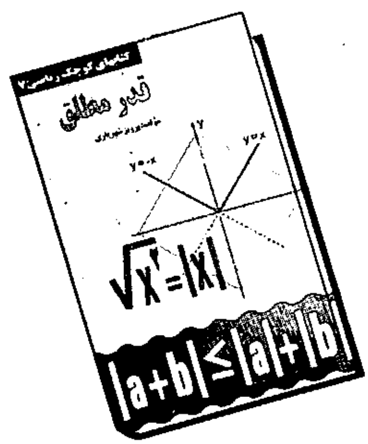
$$= 2\pi R^2\left(\frac{1}{2}\right) = \pi R^2 \Rightarrow \boxed{S = \pi R^2 (\text{مساحت دایره})}$$

معرفی کتاب



قدرمطلق

تألیف: پرویز شهریاری
ناشر: انتشارات مدرسه
چاپ اول، زمستان ۱۳۷۵



این کتاب هفتمین کتاب از سری کتابهای کوچک ریاضی می‌باشد که در آن به موضوع و مفهوم قدرمطلق در مجموعهٔ عددهای حقیقی پرداخته شده است.

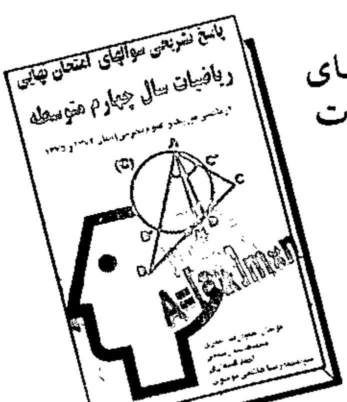
مؤلف محترم، در این کتاب سعی بر این داشته‌اند تا دشواریهای ناشی از عدم تمرکز این مفهوم در کتابهای درسی نظام جدید را رفع نموده و دانش‌آموزان و دبیران محترم همهٔ مطالب مربوط به مفهوم قدرمطلق را در یک کتاب مورد مطالعه و استفاده قرار دهند.

این کتاب شامل پنج فصل به قرار زیر می‌باشد:

فصل اوّل، تعریف‌ها و قراردادها. فصل دوم، معادله‌ها و نامعادله‌های شامل قدرمطلق. فصل سوم، نمودار تابع‌های شامل قدرمطلق. فصل چهارم، نمایش تحلیلی شکلهای هندسی. فصل پنجم، یادداشتی دربارهٔ دامنه و بُرد.

همچنین در آخر کتاب همهٔ مسائل و تمرینهای مطرح شده در متن کتاب به صورت تشریحی حل و راهنمایی شده‌اند. مطالعهٔ این کتاب را به همهٔ دانش‌آموزان دبیرستانی و دبیران محترم توصیه می‌کنیم.

پاسخ تشریحی سؤالهای امتحان نهایی ریاضیات سال چهارم متوسطه (ریاضی‌فیزیک‌وعلوم تجربی) سال ۱۳۷۴ و ۱۳۷۵



تألیف: حمیدرضا امیری، محمدهاشم رستمی، احمد قندهاری و سیدمحمدرضا هاشمی موسوی
ناشر: انتشارات مدرسه
چاپ اول، زمستان ۱۳۷۵

از آنجایی که همواره دانش‌آموزان سال آخر دورهٔ متوسطه با مسأله‌ای به نام امتحان نهایی مواجه بوده و همواره این عزیزان

در پی آشنایی بیشتر با نحوهٔ سؤالهای امتحان نهایی می‌باشند، گروه مؤلفین درصدد در دسترس قراردادن یک مجموعهٔ کامل از این امتحانها برآمده و به این منظور چند دوره از امتحانهای برگزار شده در سالهای ۱۳۷۴ و ۱۳۷۵ را با حل تشریحی کامل در اختیار علاقه‌مندان قرار داده است.

در این کتاب سعی شده است تا مسائل طرح شده به صورت کاملاً خودآموز و با توضیح کافی حل شده و حتی در بسیاری از موارد از چندین روش برای حل یک مسأله استفاده شده است.

از ویژگیهای این کتاب آن است که مؤلفین در حل تشریحی مسائل سعی بر این داشته‌اند که نکات لازم در حل مسائل گنجانده شود و در واقع نوعی آموزش در این میان موردنظر بوده است.

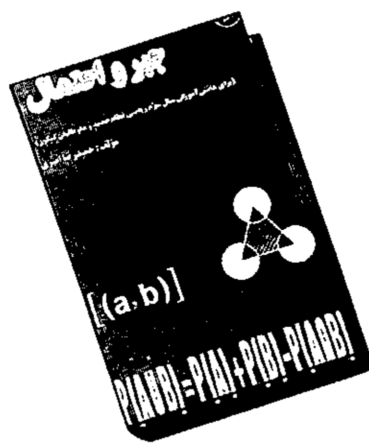
مطالعه این کتاب را به تمامی دانش‌آموزان سالهای سوم و چهارم متوسطه و دبیران محترم توصیه می‌کنیم.

جبر و احتمال

تألیف: حمیدرضا امیری

ناشر: محراب قلم

چاپ اول، زمستان ۱۳۷۵



حسابان ۱ و ۲

تألیف: احمد قندهاری

ناشر: محراب قلم

چاپ اول، زمستان ۱۳۷۵

برای اولین بار در ریاضیات دبیرستانی، شیوهٔ آموزش مفاهیم کتاب درسی از طریق طرح و حل تشریحی تستهای ۴گزینه‌ای در این کتابها به کار رفته است.

اصولاً آموزش از طریق حل مسأله جزء شیوه‌های شناخته شده در آموزش ریاضیات می‌باشد و در این راستا مسائل ۴ گزینه‌ای با توجه به تنوع در گزینه‌ها شاید به‌گونه‌ای بهتر و مفیدتر بتوانند، جوابگوی این شیوه باشند.

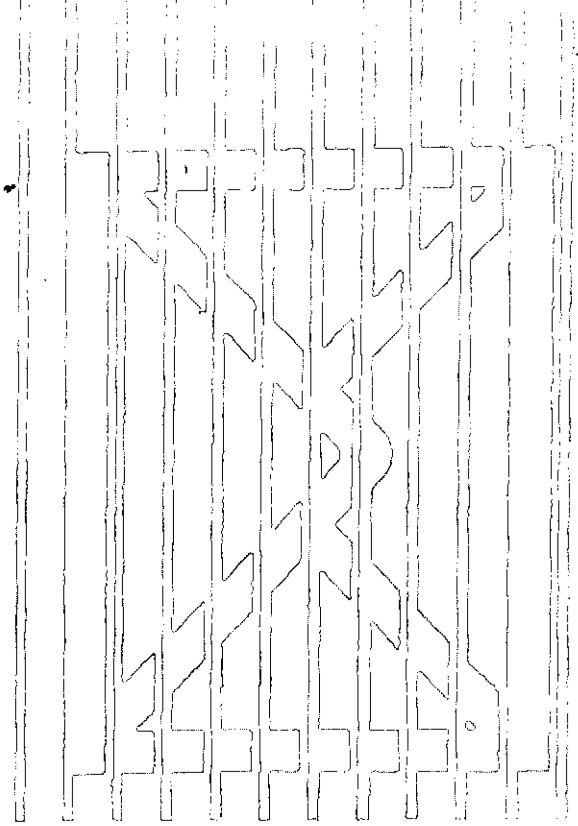
در این کتابها همهٔ مفاهیم، تعاریف، قضیه‌ها و حتی مثالها و تمرینهای کتاب درسی به صورت تستهای ۴گزینه مطرح و در حل تشریحی تستها این مفاهیم کاملاً توضیح داده شده و حتی در مواردی نکات پس از بیان، اثبات نیز شده‌اند.

در حل تشریحی تستها فقط به تشریح گزینهٔ موردنظر اکتفا نشده و حتی‌الامکان هر ۴ گزینه تشریح شده‌اند تا همهٔ نکات لازم بررسی شده باشند.

فصلهای این دو کتاب دقیقاً منطبق با فصلهای کتاب درسی جبر و احتمال و حسابان ۱ و ۲ است تا خواننده مبحث به مبحث که پیش می‌رود با برنامه درسی فاصله‌ای نداشته باشد.

در ابتدای هر فصل خلاصه‌ای از آنچه دانش‌آموز برای مطالعه آن فصل نیاز دارد به صورت فهرست‌وار، آورده شده است و در انتهای هر فصل نیز یک خودآزمایی قرار داده شده که کلید حل خودآزمایی‌ها نیز در انتهای کتاب آمده است.

مطالعهٔ این کتاب را به همهٔ دانش‌آموزان وداوطلبان کنکور سراسری و پیش دانشگاهی توصیه می‌کنیم.



جواب نامه‌ها

آقای ابراهیم کریمی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (سقز)

از این که حل تعدادی از مسایل برهان را ارسال کرده بودید، از شما متشکریم اما از این پس فقط حل مسایل مسابقه‌ای برهان را درزمان مقرر شده ارسال کنید.

آقای کیوان شهاب لواسانی؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (تهران)

ضمن تشکر از شما برای ارسال مسایلی همراه با حل به‌عرض می‌رسانیم که هر مسأله حل شده جالب که برای دانش‌آموزان مناسب و مفید تشخیص داده شود،را به‌اسم ارسال کننده به‌چاپ خواهیم رساند. گرچه ممکن است برخی از مسایل ارسال شده از کتابهای درسی و یا کتابهای کمک‌آموزشی انتخاب شده باشد. مسایل خوبی که در صورت و یا حل آن اشکالی جزیی وجود داشته باشد در حد امکان اصلاح و به‌چاپ خواهد رسید. مجلهٔ ریاضی برهان همیشه از مسایل و مقالات مفید و مناسب برای دانش‌آموزان استقبال می‌کند.

آقای حمیدرضا داوریان؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (شوشتر)

از شما برای ارسال حل مسایلی همراه با حل متشکریم. از آنان در شماره‌های آینده استفاده خواهیم کرد.

خانم سهیلا جعفری (داراب)

از شما برای ارسال مطالبی پیرامون «قاعده‌ای برای جذر اعداد» و «معادلهٔ درجه دوم» متشکریم. البته در شماره‌های قبل برهان می‌توانید مطالب کاملی دربارهٔ معادلهٔ درجه دوم پیدا کنید. مطالب دیگر شما نیز در صورت لزوم و در جای مناسب چاپ خواهد شد.

خانم سکینه سیدبنکدار، دانش‌آموز رشته تجربی (خوی)

از شما برای ارسال مطالبی پیرامون «محاسبهٔ $\sin(\alpha+\beta)$» و «برش طلایی» و یک پارادوکس و گنگ بودن $\sqrt{۲}$، متشکریم. درصورت امکان در جای مناسب از آنان استفاده خواهد شد.

روجا فرهادی، دانش‌آموز رشته تجربی (قائمشهر)

از شما برای ارسال مسایلی حل شده متشکریم. در صورت امکان از آنان استفاده خواهیم کرد.

آقای رضا عاقلی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (سیاهکل)

از شما برای ارسال مسایلی همراه با حل متشکریم. در صورت لزوم از آنان استفاده خواهیم کرد.

آقای ابوالفضل بادرستانی، دانش‌آموز رشته ریاضی (اراک)

از شما برای ارسال یک مسأله همراه با حل متشکریم. در صورت امکان از آن استفاده خواهیم کرد. متذکر می‌شویم که اگر مسایل ارسالی در سطح دانش‌آموزان باشد و از نکات خوبی برخوردار باشد حتماً به‌چاپ خواهد رسید.

آقای بهزاد کاظمی (اهواز)

از شما برای ارسال مسایلی همراه با حل متشکریم. از آنان در شماره‌های آینده استفاده خواهیم کرد.

آقای محمدرضا شهریاری، دانش‌آموز رشته ریاضی (تهران)

از شما برای ارسال مطلبی در رابطه با «حل دستگاه سه‌معادله و سه‌مجهولی» متشکریم. متذکر می‌شویم که الگوریتمها و روشهای پیشرفته‌ای مانند روش گاوس، کرامر و...برای حل دستگاههای n معادله و m مجهولی وجود دارد که در آینده با آنان آشنا خواهید شد.

آقای بهزاد بهنیا؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (بجنورد)

از شما برای ارسال مسایلی حل شده متشکریم. در شماره‌های آینده از آنان استفاده خواهیم کرد.

آقای حمیدرضا دیرند (یزد)

از شما برای ارسال حل مسایل برهان متشکریم. متذکر می‌شویم که ارسال حل مسایل برهان لزومی ندارد و شما می‌توانید حل مسایل مسابقه‌ای را در زمان معین شده ارسال کنید.

آقای مهدی نامور: دانش‌آموز رشته ریاضی (بجنورد)

از شما برای ارسال مسایلی همراه با حل متشکریم. در صورت لزوم از آنان استفاده خواهیم کرد.

آقای حسن جعفری؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (سلماس)

از شما برای ارسال یک مسأله همراه با حل متشکریم. در صورت لزوم از آن استفاده خواهیم کرد.

مسائل مسابقه‌ای

● محمدصادق عسگری

۱ـ نشان دهید برای هر عدد حقیقی x که $x\neq 0,1$ داریم،

$$1<\left(\frac{2^x-1}{x}\right)^{\frac{1}{x-1}}<2$$

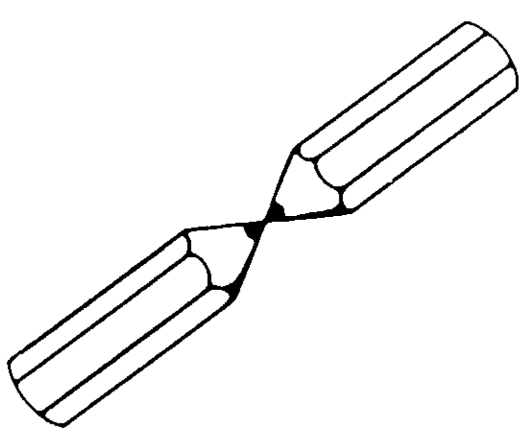
۲ـ فرض کنیم $p>5$ یک عدد اول باشد، قرار می‌دهیم

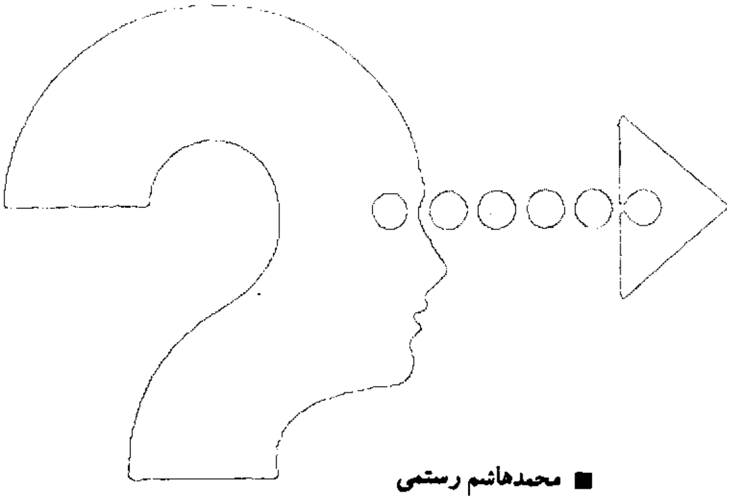
$$S=\{p-n^2:n\in Z^+,n^2<p\}$$

(برای‌مثال‌اگر $p=31$، دراین‌صورت $S=\{6,15,22,27,30\}$)

ثابت‌کنید S شامل‌دوعضو b,a است‌به‌طوری‌که $1<a<b$ و $a\mid b$.

تذکر: حل مسائل مسابقه‌ایِ برهان ۱۸ که باید در این شماره چاپ می‌شد به شمارهٔ بعد موکول گردید.





مسائل برای حل

■ محمدهاشم رستمی
■ احمد قندهاری
■ سیدمحمدرضا هاشمی موسوی
■ حمیدرضا امیری
■ حسین ابراهیم‌زادهٔ قلزم

سؤالهای امتحانی ریاضی (۱) پایان ترم

۱ ــ مجموعهٔ $M=\{1,3,5,7,9,12\}$ را به عنوان مجموعهٔ مرجع در نظر بگیرید. زیرمجموعه‌های زیر از M را مشخص کنید.

الف : زیرمجموعه‌ای که اعضای آن اعداد فرد باشد.

ب : زیرمجموعه‌ای که اعضای آن از ۹ بزرگتر باشد.

ج : زیرمجموعه‌ای از آن که مضربی از ۳ باشد.

۲ ــ طرف دوم تساویهای زیر را بنویسید.

الف : $A-\varnothing=?$

ب : $A-A=?$

۳ ــ اعداد زیر را به صورت نماد علمی بنویسید.

الف : ۰/۰۰۰۰۵

ب : ۰/۰۰۰۷۹۴۲

۴ ــ با استفاده از ضرب یک‌جمله‌ایها، مقدار صحیح r را در هر یک از تساویهای زیر تعیین کنید.

الف : $(14)^{2r+5}=14^{25}$

ب : $x^{10}.x^{18}=x^{32+r}$

۵ ــ عبارتهای زیر را ساده کنید.

الف : $(3x^2y^2)(-7xy)+(xy)(-5x^2y^2)$

ب : $(x^2-3x+5)+(2x^2+5x-4)-(3x^2-2x-1)$

۶ ــ عدد اعشاری زیر را به صورت کسر متعارفی بنویسید.

$0/6\overline{54}$

۷ ــ در هر یک از عبارتهای زیر به جای ... عبارتی قرار دهید که هر عبارت مربع کامل شود.

الف : $9x^2-4ax+\ldots$

ب : $4x^2+4ax+\cdots$

۸ ــ تقسیم زیر را انجام دهید.

$(x^4+3x^3-7x^2+2x+1):(x-1)$

۹ ــ اگر $x+y=p$ و $xy=q$ ، مطلوب است تعیین مقدار : x^3+y^3

۱۰ ــ حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\frac{a^2+ac}{a^2c-c^3}-\frac{a^2-c^2}{a^2c+2ac^2+c^3}+\frac{2c}{c^2-a^2}-\frac{3}{a+c}$$

۱۱ ــ حاصل عبارتهای زیر را به کمک اتحادها به دست آورید.

الف : $(a^n-b^3)(a^n+b^3)$

ب : $(x^2y^3-2)^3$

۱۲ ــ حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{81}\right)\left(1+\frac{1}{6561}\right)$$

۱۳ ـ عبارتهای زیر را به عاملهای اول تجزیه کنید.

الف : $x^2 - 8x + 12$

ب : $x^4y^2 - x^2y^4$

۱۴ ـ در صورتی که داشته باشیم :
$$\begin{cases} A = 3x - 6y + 9z \\ B = -x + y + 2z \\ C = 2x + 3y - z \end{cases}$$

حاصل عبارت $\frac{A}{3} + 2B - C$ را به دست آورید.

۱۵ ـ اگر $a > 1$ و a عدد گویا باشد، ثابت کنید :
$$1 < \frac{2a}{a+1} < a$$

سؤالهای امتحانی ریاضی (۲) پایان ترم

۱ ـ نقاط $A(-1,2)$ و $B(3,4)$ مفروضند، مختصات نقطهٔ C واقع بر محور طولها را طوری بیابید که فاصلهٔ آن از A و B برابر باشد.

۲ ـ نقاط $A\left|\begin{matrix} a+b \\ 3a-mb \end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix} ma-4b \\ b-2a \end{matrix}\right.$ به ازای چه مقادیری از m نمی‌توانند نسبت به نقطهٔ $M\left|\begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix}\right.$ قرینهٔ یکدیگر باشند.

۳ ـ نقاط $M\left|\begin{matrix} -2 \\ 2 \end{matrix}\right.$ و $N\left|\begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix}\right.$ و $P\left|\begin{matrix} -1 \\ 4 \end{matrix}\right.$ وسط ضلعهای یک مثلث قرار دارند، مختصات رأسهای مثلث را حساب کرده و سپس مجموع فاصله‌های مرکز ثقل مثلث (محل تلاقی میانه ها) را از رأسهای مثلث حساب کنید.

۴ ـ معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2 - 3x - 2 = 0$ مفروض است. الف) معادله‌ای تشکیل دهید که ریشه‌هایش ۵ واحد کمتر از ریشه‌های معادلهٔ مفروض باشد. ب) معادله‌ای تشکیل دهید که ریشه‌هایش عکس قرینهٔ ریشه‌های معادلهٔ مفروض باشد. ج) معادله‌ای تشکیل دهید که ریشه‌هایش مجذور ریشه‌های معادلهٔ مفروض باشد.

۵ ـ عبارت $p(x) = -x^2 - (m+1)x + m$ مفروض است. الف) حدود m را چنان تعیین کنید که $p(x)$ به ازای جمیع مقادیر x منفی شود. ب) m را چنان تعیین کنید که معادلهٔ $p(x) = 0$ دارای ریشهٔ حقیقی باشد.

۶ ـ اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم : $x^2 + x + 1 = 0$ باشند. حاصل عبارات زیر را محاسبه کنید.
$$A = \frac{x_1}{x_2}\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + \frac{x_2}{x_1}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}$$
$$B = x_1^{3n+2} + x_2^{3n+2} + \frac{1}{x_1^{3n+2}} + \frac{1}{x_2^{3n+2}}$$

۷ ـ عبارت زیر به ازای چه مقادیری از x عدد حقیقی است :
$$p(x) = \sqrt[74]{\frac{x^2-4}{x(x^2-1)}} + \sqrt[76]{\frac{x^2+1}{-x^3}}$$

۸ ـ در سهمی $y = 2x^2 + p^{75}x + p^{76}$ مقدار p را چنان تعیین کنید که خط $x = \frac{1}{2^{76}}$ محور تقارن آن باشد.

۹ ـ مخرج کسر زیر را گویا کنید :
$$\frac{1}{3\sqrt{8} + 2\sqrt[4]{4} + 2\sqrt[12]{64} + \sqrt[3]{2} - 11\sqrt{2}}$$

۱۰ ـ نمودار هر یک از معادلات زیر را رسم کنید.

الف) $(x^2 - y^2)(x + y - 1) = 0$

ب) $x^2y^2 + x^3y = x^2y$

۱۱ ـ درستی تساویهای زیر را تحقیق کنید.

الف) $(\sin x + \cos x)(\tan x + \cot x) = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$

ب)
$$\frac{4\tan 135^\circ + 2\sin 330^\circ + \cos 240^\circ + 5\cot 225^\circ}{20\sin 210^\circ + \cos 450^\circ - \cot 135^\circ + 10\tan 225^\circ} = -\frac{1}{2}$$

۱۲ ـ از برابری زیر مقدار $\cos x$ را حساب کنید.

$(x \neq k\pi)$
$$\left(\frac{\sin x}{1-\cos x}\right)^{2n-1} + 3\left(\frac{1+\cos x}{\sin x}\right)^{2n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-3}$$

۱۳ ـ بین دو رابطهٔ زیر پارامتر t را حذف کنید (معادلهٔ مستقل از t را بیابید) و سپس نمودار معادله را رسم کنید.
$$x = 2\sin t - 1 \quad , \quad y = 4\cos^2 t + 1$$

۱۴ ـ سه عدد متوالی چنان بیابید که حاصلضرب آنان ۵ برابر مجموعشان باشد.

۱۵ ـ ثابت کنید اگر x در ناحیهٔ اول یا چهارم باشد، نامساوی زیر برقرار است :
$$\operatorname{tg}x + \operatorname{cotg}x \geq 2$$

سؤالهای امتحانی ریاضی (۳) پایان ترم

۱ ـ نقاط $A(2\beta , \beta)$ و $B(\beta+3 , \beta-4)$ دو رأس مثلث ABC باشد و معادله میانه نظیر رأس C خط $y=5$ مختصات وسط AB را بدست آورید.

۲ ـ نقاط $A(2,1)$ و $B(-2,-1)$ و $C(-1,-1)$ در صفحه مختصات مفروضند نقطه D رأس چهارم متوازی‌الاضلاع ABCD را بقسمی تعیین کنید که AB وAD دو ضلع آن باشند ثانیاً اگر محورهای مختصات را به نقطهٔ R محل تلاقی اقطار متوازی‌الاضلاع منتقل کنیم مختصات B را در دستگاه جدید تعیین کنید.

۳ ـ معادله زیر را حل کنید.

$$\frac{2y}{x+y}-\frac{(x+y)}{(x-y)}+\frac{2x}{x^2-y^2}=3$$

۴ ـ عبارت زیر را ساده کنید.

الف) $\sqrt{3}(\sqrt{2}-3\sqrt{5}+2\sqrt{3})$

ب) $\sqrt{75}+\sqrt{48}+2\sqrt{8}+2\sqrt{32}$

ج) $\sqrt{4}+\sqrt{6}\div\sqrt{3}$

۵ ـ معادلهٔ $(a-3)^2=(a-3)+4$ را حل کنید.

۶ ـ کسر زیر را گویا کنید.

$$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+2\sqrt{5}}$$

۷ ـ تابع با ضابطهٔ $y=2x^2-3$ روی مجموعه اعداد حقیقی تعریف شده است. نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ را تشکیل دهید و آن را خلاصه نمائید.

۸ ـ منحنی نمایش $y=4x^2-2$ را رسم نمائید.

۹ ـ مطلوب است رسم نمودار $y=[3x+1]$ در فاصله $[-1,2]$.

۱۰ ـ تابع‌های f و g با ضابطهٔ $f(x)=4x-1$ و $g(x)=\sqrt{x^2-4}$ در $\mathbf{R}$ تعریف شده‌اند. اولاً با استفاده از نمودار ثابت کنید که تابع f یک تابع یک به یک است. ثانیاً مقدار عددی $g(f(2))$ را حساب کنید.

۱۱ ـ لگاریتم زیر را محاسبه کنید.

$2\log_2^{\sqrt{64}}-4\log_3^{81}+\log_5^{25}$

۱۲ ـ اگر $\log 2=a$ و $\log 3=b$ باشد $\log 12$ را حساب کنید.

۱۳ ـ اگر جمله اول یک تصاعد عددی m و جمله پنجم آن ۳ برابر جمله سوم باشد قدر نسبت آن را برحسب m بدست آورید.

۱۴ ـ اگر جمله‌های دوم و هشتم یک تصاعد هندسی برابر با ۶ و $\frac{1}{2}$ باشند جمله چهاردهم این تصاعد را حساب کنید.

سؤالهای امتحانی ریاضی (۴) پایان ترم

۱ ـ با توجه به اعداد روبرو $\{7,11,7,8,9,8,12,11,8\}$

الف) میانگین ـ میانه ـ مُد را مشخص کنید.

ب) جدول فراوانی و انحراف معیار را مشخص کنید.

۲ ـ حدود m را به طریقی تعیین کنید که نامساوی زیر به ازای جمیع مقادیر x برقرار باشد.

$(m+1)x^2-8x+(m+1)<0$

۳ ـ نامعادله زیر را حل کرده و مجموعه جواب را مشخص کنید.

$$\frac{(5x^2+4x+1)}{(5-x)(-x-x^2+6)}<0$$

۴ ـ اگر $\tan(\alpha+\beta)=\frac{-1}{2}$ و $\tan\alpha=3$ باشد، $\tan\beta$ را محاسبه کنید.

۵ ـ اگر $\vec{OA}=\begin{bmatrix}-3\\2\end{bmatrix}$ و $\vec{OB}=\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}$ و $\vec{OC}=\begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix}$ باشند مطلوبست تعیین $\vec{OX}$ با شرط $\vec{AX}=\vec{XB}+2\vec{AC}$

۶ ـ بردارهای $\vec{v}=3\vec{i}-2\vec{j}$ و $\vec{u}=2\vec{i}-4\vec{j}$ مفروضند،

الف) طول بردار $\vec{u}+\vec{v}$ را محاسبه کنید.

ب) ضرب درونی $\vec{u}.\vec{v}$ را محاسبه کنید.

۷ ـ به ازای چه مقادیری از m دستگاه زیر جواب ندارد.

$$\begin{cases}mx-y=6\\-4x+my=2\end{cases}$$

۸ ـ اگر $A=\begin{bmatrix}1&2\\-1&0\end{bmatrix}$ و $f(x)=x^2-x$ باشد، مطلوبست $f(A)$.

۹ ـ اگر $A=\begin{bmatrix}2&1\\4&3\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1&-1\\2&3\end{bmatrix}$ باشند، ثابت کنید:
$(AB)^{-1}=B^{-1}.A^{-1}$

۱۰ ــ الف) چند عدد طبیعی چهار رقمی وجود دارد؟

ب) چند عدد چهار رقمی طبیعی با ارقام مختلف وجود دارد؟

ج) چند عدد چهار رقمی که همهٔ ارقامش فرد باشد وجود دارد؟

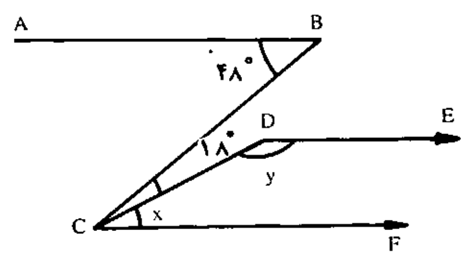
۱۱ ــ در یک کیسه ۵ مهره سفید و ۶ مهره سیاه موجود است. ۲ مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم مطلوبست احتمال اینکه:

الف) هر دو مهره سیاه باشد.

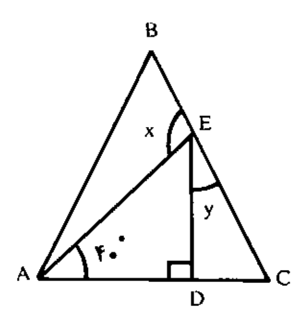
ب) یک مهره سیاه و یک مهره سفید باشد.

مسأله‌های هندسهٔ ۱ نظام جدید آموزشی

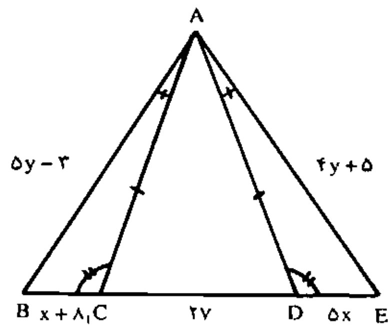
۱ ــ در شکل زیر، پیکانها خطهای موازی را مشخص می‌کنند. اندازهٔ x و y را بیابید.



۲ ــ مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است. اندازهٔ x و y را تعیین کنید.

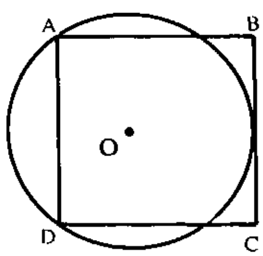


۳ ــ در دو مثلث متساوی ABC و ADE، ضلعها و زاویه‌های متناظر مشخص شده‌اند. اندازهٔ x و y و محیط مثلث ABE را تعیین کنید.



۴ ــ در مثلث ABC، ضلع $a = x - ۱$، ارتفاع $h_a = ۲x - ۶$ و مساحت مثلث $S = x^۲ - ۱۳$ است. الف ــ اندازهٔ ضلع a را به دست آورید. ب ــ اگر ضلع $b = ۲\sqrt{۲}$ باشد، اندازهٔ ضلع c و دو ارتفاع دیگر را تعیین کنید.

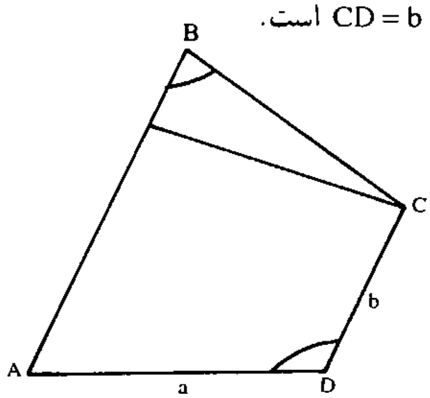
۵ ــ اندازهٔ ضلع مربع ABCD برابر ۸cm است. دایره‌ای که از رأسهای A و D گذشته بر ضلع BC مماس است.



اندازهٔ شعاع این دایره چه قدر است؟

«فرستنده آتوسا علی‌اکبری از تهران»

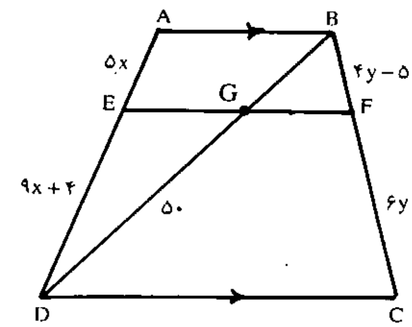
۶ ــ در ذوزنقه ABCD، $\hat{D} = ۲\hat{B}$ و ساق $AD = a$ و قاعدهٔ $CD = b$ است.



اندازهٔ AB را برحسب a و b تعیین کنید.

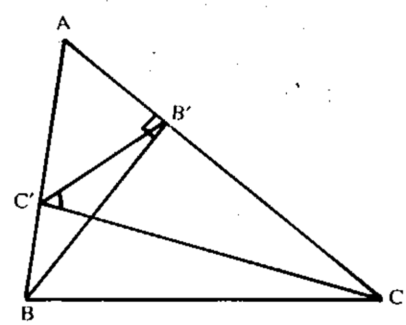
«فرستنده از نیشابور دانش‌آموز سروری»

۷ ـ با توجه به مقدارهای داده شده در ذوزنقه ABCD، اندازهٔ x و y و ساقهای ذوزنقه را تعیین کنید.



۸ ـ در مثلث ABC ارتفاعهای 'BB و 'CC را رسم کرده‌ایم:

الف ـ ثابت کنید دو مثلث 'ACC و 'ABB متشابه‌اند و رابطهٔ $AC'.AB = AB'.AC$ برقرار است.

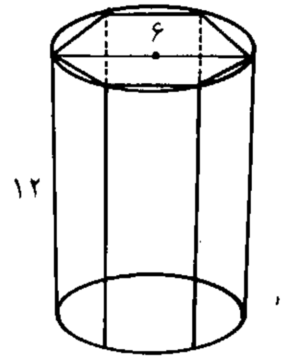


ب ـ ثابت کنید مثلث 'AB'C با مثلث ABC متشابه است.

پ ـ مثلثهای دیگری را که از رسم سه ارتفاع پدید می‌آیند و با مثلث ABC متشابه‌اند، مشخص کنید.

۹ ـ حجم مکعب مستطیلی به ابعاد a و b و c برابر ۶۴۸ سانتی‌متر مکعب و ابعاد آن در رابطهٔ $\frac{a}{۲} = \frac{b}{۳} = \frac{c}{۴}$ صدق می‌کنند. اندازهٔ قطر این مکعب مستطیل و سطح کل آن را تعیین کنید.

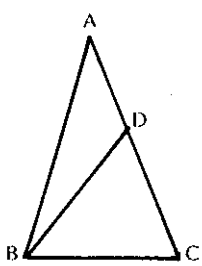
۱۰ ـ در استوانهٔ دواری به ارتفاع ۱۲ سانتی‌متر و شعاع قاعدهٔ ۸ سانتی‌متر منشور شش پهلوی منتظمی محاط کرده‌ایم. اندازهٔ حجم این منشور و نسبت سطح جانبی منشور به سطح جانبی استوانه را تعیین کنید.



مسأله‌های هندسهٔ ۲، نظام جدید آموزشی

۱ ـ ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آن که ذوزنقه‌ای محاطی باشد، آن است که متساوی الساقین باشد.

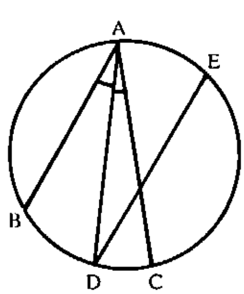
۲ ـ در مثلث متساوی الساقین $ABC(AB = AC)$، نقطهٔ B را به نقطهٔ D که روی ساق AC (بین دو نقطه A و C) است وصل می‌کنیم. ثابت کنید $BD > DC$ است.



۳ ـ حدود m را به قسمی بیابید که ۳ − ۲m و m − ۴ و ۳ ضلعهای یک مثلث باشند.

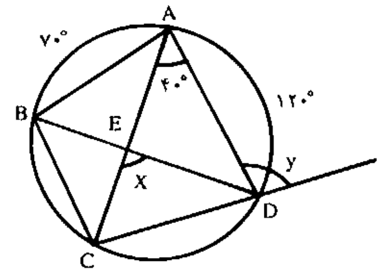
۴ ـ از مثلثی اندازهٔ سه میانه معلوم است. این مثلث را رسم کنید.

۵ ـ زاویهٔ BAC در یک دایره محاط است. نیمساز این زاویه دایره را در نقطهٔ D قطع می‌کند. ثابت کنید وتر DE که

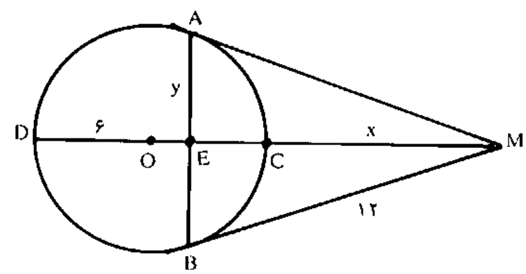


موازی AB رسم شود، با وتر AC برابر است.

۶ ـ اندازهٔ x و y را تعیین کنید (ABCD چهارضلعی محاطی و AC و BD قطرهای آن می‌باشند).



۷ ـ در شکل داده شده خطهای MA و MB در نقطه‌های A و B بر دایره مماسند، با توجه به مقدارهای داده شده اندازهٔ x و y را تعیین کنید.



۸ ـ دو دایره $C(O,۵)$ و $C'(O',۳)$ داده شده‌اند. اگر $OO'=۱۰$ باشد، نسبت اندازهٔ مماس مشترک درونی به اندازهٔ مماس مشترک برونی این دو دایره را تعیین کنید.

۹ ـ نقطه‌های $A=(۳,۰)$ و $B=(-۲,۴)$ و $C=(-۱,۲)$ رأسهای مثلث ABC می‌باشند.

الف ـ مختصات نقطهٔ G محل برخورد میانه‌های این مثلث را تعیین کنید (می‌توانید از رابطه‌های $y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{۳}$ و $x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{۳}$) استفاده کنید).

ب ـ مثلث ABC و تصویرش را تحت تبدیلی که رأس A را بر روی نقطهٔ G تصویر می‌کند رسم کنید.

پ ـ قاعدهٔ این نگاشت را بنویسید.

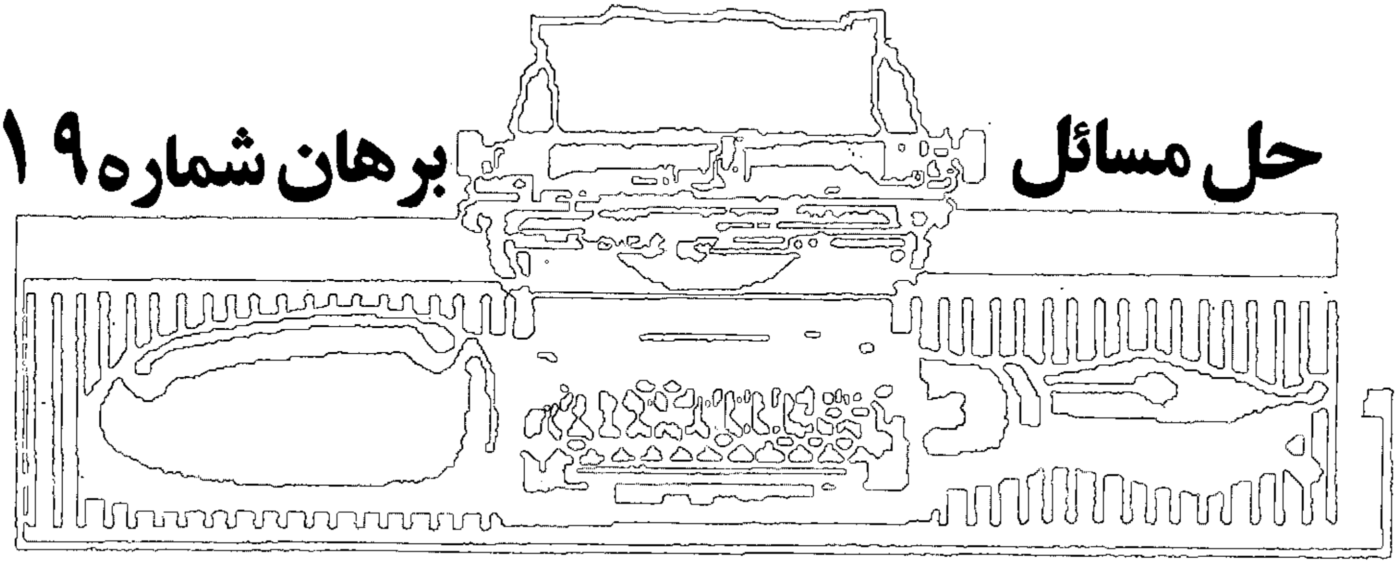
ت ـ مختصات نقطه‌های تبدیل یافتهٔ تحت انتقال بالا (مختصات رأسهای مثلث $A'B'C'$) را به دست آورید.

۱۰ ـ معادلهٔ خط D' تبدیل یافته خط $D:۲x+y-۳=۰$ را تحت تبدیل $T(x,y)=(۲x-۱,y+۲)$ به دست آورید. اگر A نقطه‌ای به طول ۲ و B نقطه‌ای به عرض ۳ روی خط باشند، مختصات نقطه‌های A' و B' تصویرهای این دو نقطه روی خط D' را تعیین کنید. طول پاره‌خطهای AB و $A'B'$ را محاسبه و با هم مقایسه کنید. آیا این تبدیل یک ایزومتری است؟

تمام مسائلی از ریاضیات که ذهن بزرگترین ریاضی‌دانان قرن هفدهم را مشغول می‌داشت امروزه در داخل تئوریهای بزرگتری مستهلک شده‌اند و یا وارد اطلاعات عمومی ریاضیات شده‌اند و هر محصل دبیرستانی قادر به درک آنها است، به جز مسائل تئوری اعداد. به طوری که امروزه اطلاعات ما دربارهٔ بسیاری از مسائلی که ذهن فرما را به خود مشغول کرده بود، بیش از آن نیست که در زمان فرما بوده است.

کتاب ریاضی‌دانان نامی،
یادداشت مترجم

حل مسائل برهان شماره ۱۹



حل مسایل ریاضیات ۲:

۱ـ از تلاقی معادلات خطوط دو قطر، مختصات مرکز مربع به‌دست می‌آید :

$$\begin{cases} y=-2x-1 \\ y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow -2x-1=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \Rightarrow x=-\frac{3}{5}\ ,\ y=\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow G\left(-\frac{3}{5}\ ,\ \frac{1}{5}\right) \quad \text{و} \quad OG=\sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$\Rightarrow OG=\frac{\sqrt{10}}{5}$$ (فاصلهٔ مرکز مربع از مبدأ مختصات)

۲ـ فاصلهٔ نقطهٔ $A(-1,2)$ از خط $2x-y+h=0$ چنین است :

$$AH=\frac{|-2-2+h|}{\sqrt{1+4}}=\frac{|h-4|}{\sqrt{5}} \quad \text{و}$$

$$AH=\frac{\sqrt{5}}{h} \Rightarrow \frac{|h-4|}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{h}$$

$$\Rightarrow h(h-4)=\pm 5 \Rightarrow h^2-4h-5=0 \Rightarrow h=2\pm\sqrt{4+5}$$

$$\Rightarrow h=2\pm\sqrt{9}=2\pm 3 \Rightarrow h=5 \text{ یا } h=-1$$

معادلهٔ $h^2-4h+5=0$ ریشهٔ حقیقی ندارد. بنابراین مقدار مثبت h چنین است :

$$\boxed{h=5}$$

۳ـ شیب خطی که از دو نقطهٔ A و B می‌گذرد :

$$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3} \quad \text{و} \quad A(-1,1) \Rightarrow$$

$$y-1=\frac{1}{3}(x+1) \Rightarrow 3y-3=x+1 \Rightarrow 3y-4=x$$

$$C\left(m, \frac{1}{3}\right):\ 3\left(\frac{1}{3}\right)-4=m \Rightarrow \boxed{m=-3}$$

۴ـ می‌دانیم :

$$\overline{AM}=x_M-x_A \text{ و } \overline{BM}=x_M-x_B \text{ و } x_A=-3 \text{ و } x_B=4$$

$$\Rightarrow \boxed{m=1} \text{ یا } \boxed{m=2}$$

بنابراین :

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}}=\frac{x_M+3}{x_M-4}=\frac{-5}{6} \Rightarrow 6x_M+18=-5x_M+20$$

$$\Rightarrow \boxed{x_M=\frac{2}{11}}$$

۵ـ با توجه به برابریهای زیر :

$$\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{2\times 2^3}=2\sqrt[3]{2} \quad \text{و} \quad \sqrt[6]{4}=\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{2\times 3^3}=3\sqrt[3]{2}$$

$$\frac{2\sqrt[3]{4}}{5\times 2\sqrt[3]{2}-7\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}+2\times 2\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2}}=\frac{2\sqrt[3]{4}}{4\sqrt[3]{2}}$$

$$=-\frac{\sqrt[3]{4}}{2\sqrt[3]{2}}=-\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{4}{2}}=\frac{-\sqrt[3]{2}}{2}$$

۶ـ الف) معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم :

$$3m^3x-27x=m^2 \Rightarrow (3m^3-27)x=m^2$$

$$\Rightarrow x=\frac{m^2}{3m^3-27}$$

معادله وقتی جواب ندارد که داشته باشیم :

$$\begin{cases} m^2\neq 0 \\ 3m^3-27=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m^3=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m=\sqrt[3]{9} \end{cases} \Rightarrow \boxed{m=\sqrt[3]{9}}$$

ب) معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم :

$$(m^2-3m+2)x=-2m-1 \Rightarrow x=\frac{-(2m+1)}{m^2-3m+2}$$

معادله وقتی جواب ندارد که داشته باشیم :

$$\begin{cases} 2m+1\neq 0 \\ m^2-3m+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\neq -\frac{1}{2} \\ (m-1)(m-2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\neq -\frac{1}{2} \\ m=1 \text{ یا } m=2 \end{cases}$$

۷ـ با توجه به شرط $0<x<\frac{\pi}{2}$، عبارت را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم :

$$\sqrt{1-\sin^2x}\left[\frac{\cos x}{1+\sin x}+\frac{1+\sin x}{\cos x}\right]$$

$$=\sqrt{\cos^2x}\left[\frac{\cos^2x+(1+\sin x)^2}{\cos x(1+\sin x)}\right]$$

$$=|\cos x|\left[\frac{\cos^2x+1+2\sin x+\sin^2x}{\cos x(1+\sin x)}\right]$$

$$\underline{\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)}\ \cos x\left[\frac{2+2\sin x}{\cos x(1+\sin x)}\right]$$

$$=\cos x\left[\frac{2(1+\sin x)}{\cos x(1+\sin x)}\right]$$

$$\underline{(1+\sin x\neq 0)}\ \cos x\left(\frac{2}{\cos x}\right)$$

$$=\frac{2\cos x}{\cos x}$$

$$\underline{(\cos x\neq 0)}\ 2$$

۸ـ با توجه به برابریهای زیر :

$$\sin(150^\circ)=\sin(180^\circ-30^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2} \quad \text{و}$$

$$\cos 120^\circ=\cos(180^\circ-60^\circ)=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}$$

خواهیم داشت :

$$(y-x)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2-(x+y)^2\left(-\frac{1}{2}\right)^2+xy=0 \qquad (1)$$

و یا :

$$\frac{1}{4}(y^2-2yx+x^2)-\frac{1}{4}(x^2+2xy+y^2)+xy=0$$

و یا :

$$\frac{y^2-2xy+x^2-x^2-2xy-y^2}{4}+xy=0$$

$$\Rightarrow \frac{-4xy}{4}+xy=0$$

و درنتیجه :

$-xy+xy=0$ (۲)

تساوی (۲) به‌ازای هر عدد حقیقی x و y همیشه درست است. بنابراین تساوی (۱) یک اتحاد است.

۹ـ معادلهٔ محور تقارن سهمی به معادلهٔ عمومی $y=ax^2+bx+c$ چنین است :

$$x=-\frac{b}{2a}$$

بنابراین معادلهٔ محور تقارن سهمی به معادلهٔ $y=x^2-mx$ چنین است :

$$x=-\frac{-m}{2}=\frac{m}{2} \quad \text{و} \quad x=2 \Rightarrow \frac{m}{2}=2 \Rightarrow \boxed{m=4}$$

حل مسایل ریاضیات ۴

۱ـ مجموعهٔ جوابهای مشترک از حل دستگاه نامعادلات توأم زیر به‌دست می‌آید :

$$\begin{cases}2x^2-6x>0\\ -3x^2-4x<1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x(x-3)>0\\ (x+1)(3x+1)>0\end{cases} \quad (1)$$

برای حل دستگاه نامعادلات (۱) جدول زیر را تشکیل می‌دهیم :

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{3}$	0	3	$+\infty$
$x(x-3)$	+	+	+	−	+	
$(x+1)(3x+1)$	+	−	+	+	+	
	جواب $x<-1$		جواب $-\frac{1}{3}<x<0$		جواب $x>3$	

از شرط $x^2<\frac{1}{16}$ نتیجه می‌شود :

$$|x|<\frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{4}<x<\frac{1}{4} \quad (2)$$

بنابراین مجموعهٔ جوابهای مشترک نامعادلات، با شرط (۲) چنین است :

$$\left\{x \mid x\in\mathbb{R} \ , \ -\frac{1}{4}<x<0\right\} = \text{مجموعهٔ جوابهای مشترک با شرط (۲)}$$

۲ـ برای این که عبارت P تعریف شده باشد، باید داشته باشیم :

$$\begin{cases}x+1\geq 0\\ x>0\\ x-\sqrt{x}\neq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\geq -1\\ x>0\\ x\neq 0 \ , \ x\neq 1\end{cases} \Rightarrow x>0 \ , \ x\neq 1$$

$$\Rightarrow \boxed{x\in\mathbb{R}^+-\{1\}}$$

۳ـ ابتدا ریشهٔ هر یک از عاملها را در صورت وجود به‌دست می‌آوریم :

$-x^2+3x-2=0 \Rightarrow x^2-3x+2=0$

$\Rightarrow (x-1)(x-2)=0$

$\Rightarrow x-1=0$ یا $x-2=0 \Rightarrow x=1$ یا $x=2$

$x=0$ و $x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

$x^3+1=0 \Rightarrow x^3=-1 \Rightarrow x=-1$

$x^2+1=0$ (ریشهٔ حقیقی ندارد)

اکنون جدول تعیین علامت را تشکیل می‌دهیم :

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$-x^2+3x-2$	−	−	−	+	−	
x	−	−	+	+	+	
x^2-1	+	−	−	+	+	
x^3+1	−	+	+	+	+	
x^2+1	+	+	+	+	+	
علامت P	−	−	+	+	−	
		تعریف نشده	$P=0$	مبهم	$P=0$	

۴ـ برای حل نامعادلهٔ دو حالت درنظر می‌گیریم :

$$1)\begin{cases}x-1\geq 0\\ \frac{x-1}{x+2}<1\end{cases} \qquad 2)\begin{cases}x-1<0\\ \frac{-(x-1)}{x+2}<1\end{cases}$$

$$1)\begin{cases}x\geq 1\\ \frac{x-1}{x+2}-1<0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\geq 1\\ \frac{-3}{x+2}<0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\geq 1\\ \frac{3}{x+2}>0\end{cases}$$

$x+2=0 \Rightarrow x=-2$

۱) از اشتراک $x\geq 1$ و $x>-2$، نتیجه می‌شود :

$x\geq 1$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$x+2$	−	+	
$\frac{3}{x+2}$	−	+	
		تعریف نشده	

$$2)\begin{cases}x<1\\ \frac{-x+1}{x+2}-1<0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x<1\\ \frac{-2x-1}{x+2}<0\end{cases}$$

$-2x-1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$

۲) از اشتراک $x<1$ و $x>-\frac{1}{2}$ و $x<-2$ نتیجه می‌شود :

x	$-\infty$	-2	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$-2x-1$	+	+	−	
$x+2$	−	+	+	
$\frac{-2x-1}{x+2}$	−	+	−	

$x<-2$ یا $-\frac{1}{2}<x<1$

بنابراین مجموعهٔ جواب نامعادله چنین است :

$$\left\{x \mid x\in\mathbb{R}, x<-2 \text{ یا } x>-\frac{1}{2}\right\} = \text{مجموعه جواب}$$

۵ـ ابتدا دو طرف نابرابری را در ۲ ضرب می‌کنیم :

$2a^2+2b^2+2c^2\geq 2ab+2bc+2ac$

سپس همهٔ جملات را به طرف اول نابرابری می‌آوریم :

$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac\geq 0$

نابرابری بالا را به‌صورت زیر می‌نویسیم :

$(a^2-2ab+b^2)+(a^2-2ac+c^2)+(b^2-2bc+c^2)\geq 0$

و یا :

$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\geq 0$

طرف اول نابرابری بالا همیشه نامنفی است. بنابراین نابرابری مورد نظر برای هر a و b و c حقیقی همیشه برقرار است.

۶ـ با استفاده از اتحادهای $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ و $\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}$، خواهیم داشت :

$$tg\frac{x}{2}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{\sin x}{1+\cos x}$$

۷ـ فرض کنیم :

$A: x_1, x_2, \dots, x_n$

$B: Kx_1+b, Kx_2+b, \dots, Kx_n+b$

می‌دانیم $\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$ و $S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{(n-1)}$ بنابراین برای داده‌های آماری مسألهٔ B داریم :

$$\bar{x}_B=\frac{\sum_{i=1}^{n}(Kx_i+b)}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}Kx_i+\sum_{i=1}^{n}b}{n}=K\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}+\frac{nb}{n}$$

$$\Rightarrow \bar{x}_B=K\bar{x}_A+b$$

$$S_B^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left[(Kx_i+b)-\bar{x}_B\right]^2}{(n-1)}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left[(Kx_i+\cancel{b})-K\bar{x}_A-\cancel{b}\right]^2}{(n-1)}$$

$$\Rightarrow S_B^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}K^2(x_i-\bar{x}_A)^2}{n-1}=K^2\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_A)^2}{(n-1)}=K^2S_A^2$$

$$\Rightarrow S_B^2=K^2S_A^2 \Rightarrow S_B=KS_A$$

۸ـ فرض کنیم $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}e & f\\ g & h\end{bmatrix}$ و طبق مفروضات مسأله داریم :

$$\begin{cases}a+c=b+d=3\\ e+g=f+h=3\end{cases}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix}ae+bg & af+bh\\ ce+dg & cf+dh\end{bmatrix} \quad \text{و}$$

$(ae+bg)+(ce+dg)=$

$=(a+c)e+(b+d)g$

$=3e+3g=3(e+g)=3\times 3=9$

۹ـ

$$\begin{cases}4x-5y=3\\ 3x+2y=4\end{cases} \quad A=\begin{bmatrix}4 & -5\\ 3 & 2\end{bmatrix}, \ X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}, \ B=\begin{bmatrix}3\\ 4\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow AX=B \Rightarrow A^{-1}(AX)=A^{-1}B \Rightarrow \underbrace{(A^{-1}A)}_{I}X=A^{-1}B$$

$$\Rightarrow X=A^{-1}B \quad (1)$$

$$A^{-1}=\frac{1}{(4\times 2)-(3\times -5)}\begin{bmatrix}2 & 5\\ -3 & 4\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{2}{23} & \frac{5}{23}\\ -\frac{3}{23} & \frac{4}{23}\end{bmatrix}$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{23} & \frac{5}{23}\\ \frac{-3}{23} & \frac{4}{23}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{26}{23}\\ \frac{7}{23}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x=\frac{26}{23}\ ,\ y=\frac{7}{23}$$

۱۰ـ دستگاه معادلات درصورتی فاقد جواب است که دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه مساوی با صفر باشد پس داریم:

$$\begin{cases}-mx+y=4\\2x-my=2\end{cases}\Rightarrow m^2-2=0\Rightarrow m^2=2\Rightarrow m=\pm\sqrt{2}$$

$$\begin{cases}2x-my=1\\2mx+y=2\end{cases}\Rightarrow 2+2m^2=0\Rightarrow 2m^2=-2$$

و معادلهٔ $2m^2=-2$ فاقد جواب است.
پس دستگاه مزبور همواره دارای جواب است.

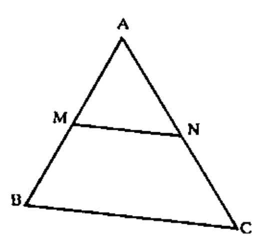
۱۱ـ

$$[1\quad 2\quad x]\begin{bmatrix}1&-1&-3\\0&1&2\\1&x&x^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}=6$$

$$\Rightarrow[1+x\quad 1+x^2\quad 1+x^3]\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}=6$$

$$\Rightarrow 2+2x+1+x^2=6\Rightarrow x^2+2x-3=0\Rightarrow x=1,\ x=-3$$

۱۲ـ با توجه به شکل اگر M وسط AB و N وسط AC باشد، می‌خواهیم ثابت کنیم $2\vec{MN}=\vec{BC}$
طبق فرض $\vec{BA}=2\vec{MA}$ و $\vec{AC}=2\vec{AN}$



$\vec{MA}+\vec{AN}=\vec{MN}$ (۱)

$\vec{BA}+\vec{AC}=\vec{BC}$ (۲)

(۱) $\Rightarrow 2\vec{MA}+2\vec{AN}=2\vec{MN}\overset{\text{فرض}}{\Rightarrow}\vec{BA}+\vec{AC}=2\vec{MN}$ (۳)

(۲) و (۳) $\Rightarrow 2\vec{MN}=\vec{BC}$

۱۳ـ ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ مفروض می‌باشند

الف) $\boxed{3}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{1}\overset{\text{۲ یا ۴}}{\boxed{2}}\quad 3\times3\times2\times1\times2=36$

$\boxed{4}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{1}\overset{\text{صفر}}{\boxed{1}}\quad 4\times3\times2\times1\times1=24$

$60=24+36$ = تعداد اعداد زوج ۵ رقمی که زوج هستند
(اعداد زوج را دو دسته کردیم، یکی زوج با رقم یکان ۲ یا ۴ و دیگری با رقم یکان صفر)

ب) $\overset{\text{۳ یا ۴}}{\boxed{2}}\boxed{4}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{1}\quad 2\times4!=48$
(اعداد بزرگتر از سی هزار، رقم یکان ۳ یا ۴ باید باشد)

ج) $\boxed{3}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{1}\boxed{1}\quad 3\times3!=18$
(رقم یکان فقط می‌تواند ۵ باشد تا عدد حاصل مضرب ۵ و فرد باشد)

۱۴ـ سه دانش‌آموز سال اول و چهار دانش‌آموز سال دوم داریم و سه نفر به تصادف انتخاب می‌کنیم در این صورت:

الف) $\dfrac{\binom{3}{3}+\binom{4}{3}}{\binom{7}{3}}$ (احتمال آنکه سه نفر همکلاسی باشند)

ب) $\dfrac{\binom{4}{2}\times\binom{3}{1}}{\binom{7}{3}}$ (فقط ۲ نفر از کلاس دوم)

ج) $\dfrac{\binom{3}{1}\times\binom{4}{2}+\binom{3}{2}\times\binom{4}{1}+\binom{3}{3}}{\binom{7}{3}}$ (لااقل ۱ نفر از کلاس اول باشد)

د) $\dfrac{\binom{4}{2}\times\binom{3}{1}+\binom{4}{1}\times\binom{3}{2}+\binom{3}{3}}{\binom{7}{3}}$ (حداکثر ۲ نفر از کلاس دوم باشند)

حل مسائل حسابان (۲)

۱ـ

$$f(x)=\begin{cases}ax^2+bx & x\ge 2\\2bx+4 & x<2\end{cases}$$

ابتدا از روی تعریف مشتق، مشتق راست و مشتق چپ را در نقطه $x_0=2$ محاسبه می‌کنیم سپس آنها را مساوی قرار می‌دهیم.

الف) $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{ax^2+bx-4a-2b}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{a(x^2-4)+b(x-2)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{a(x-2)(x+2)+b(x-2)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{(x-2)(ax+2a+b)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to2^-}(ax+2a+b)=2a+2a+b$

$=\boxed{4a+b=f'_+(2)}$ مشتق راست در نقطه $x_0=2$

ب) $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{2bx+4-4b-4}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{2b(x-2)}{x-2}=2b$

مشتق چپ در $x_0=2$ $\boxed{2b=f'_-(2)}\Leftarrow$

$4a+b=2b\Rightarrow\boxed{4a=b}$

چون تابع در $x_0=2$ مشتق‌پذیر است پس این تابع در $x_0=2$ پیوسته است پس حد دارد.

حد راست $x\to2^+\Rightarrow\lim f(x)=4a+2b$

حد چپ $x\to2^-\Rightarrow\lim f(x)=4b+4$

$\Rightarrow 4a+2b=4b+4\Rightarrow\boxed{4a-2b=4}$

$$\begin{cases}4a-b=0\\4a-2b=4\end{cases}\Rightarrow\boxed{b=-4\ ,\ a=-1}$$

۲ـ

$$y=\sqrt[3]{1-x^2}\Rightarrow y'=\frac{-2x}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}$$

$D_f=R$

$$y''=-\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt[3]{(1-x^2)^2}-\frac{-4x^2}{3\sqrt[3]{1-x^2}}}{\sqrt[3]{(1-x^2)^4}}$$

$$=-\frac{2}{3}\times\frac{\frac{3(1-x^2)+4x^2}{3\sqrt[3]{1-x^2}}}{\sqrt[3]{(1-x^2)^4}}$$

$$y''=-\frac{2}{3}\times\frac{3+x^2}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}=-\frac{2}{9}\times\frac{3+x^2}{(1-x^2)\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}$$

علامت y'' به علامت $(1-x^2)$ بستگی دارد.

$$y''=\frac{2(3+x^2)}{9(x^2-1)\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}$$

$$x^2-1=0\Rightarrow\begin{cases}x=1\in D_f\Rightarrow \underset{\text{مماس}}{m=-\infty}\\x=-1\in D_f\Rightarrow\underset{\text{مماس}}{m=+\infty}\end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
y''		+		−		+	
انحنای y		∪	عطف	∩	عطف	∪	

۳ـ

$f(x)=nx-[nx]\qquad D_f=R\ ,\ n\in N$

$f(x+T_1)=n(x+T_1)-[n(x+T_1)]$

$=nx+nT_1-[nx+nT_1]$

nT_1 باید عضو N باشد تا بتواند از جزء صحیح خارج شود و با nT_1 بیرون جزء صحیح حذف شود به این شکل

$f(x+T_1)=nx+\cancel{nT_1}-[nx]-\cancel{nT_1}$

کوچکترین مقدار nT_1، (۱) است پس

$nT_1=1\Rightarrow T_1=\frac{1}{n}$

حال این مقدار T_1 را T می‌نامیم پس

$\boxed{T=\frac{1}{n}}$

۴ـ

$y=\cos^2x-\cos x\qquad 0\le x\le 2\pi$

$y'=-2\sin x\cos x+\sin x=0$

$\sin x(-2\cos x+1)=0$

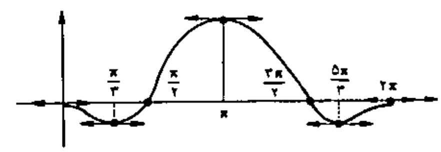
$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x=0 \Rightarrow x=K\pi \Rightarrow x=0,\pi,2\pi \\ -2\cos x+1=0 \Rightarrow \cos x=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3} \end{cases}$$

$x=0$ یا $2\pi \Rightarrow y=1-1=0$

$y=0 \Rightarrow \cos^2 x-\cos x=0 \Rightarrow \cos x(\cos x-1)=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2} \\ \cos x=1 \Rightarrow x=0,2\pi \end{cases}$$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{3}$		2π
y'		−	0	+		+	0	−		−	0	+	0
y	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	0	↗	2	↘	0	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	0



۵ـ این عبارت به‌صورت مبهم 1^∞ است

$$\lim_{x\to 1} (2-x)^{tg\frac{\pi x}{2}}$$ حد

می‌نویسیم

$y=(2-x)^{tg\frac{\pi x}{2}}$

$Lny=tg\frac{\pi x}{2}Ln(2-x) \Rightarrow \lim Lny$

$=\lim_{x\to 1} tg\frac{\pi x}{2}Ln(2-x)=\infty\times 0$

$\underset{x\to 1}{Lny}=\dfrac{Ln(2-x)}{\cot g\frac{\pi x}{2}}=\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{Ln(2-x)}{\cot g\frac{\pi x}{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{-1}{2-x}}{-\frac{\pi}{2}(1+\cot g^2\frac{\pi x}{2})}=\frac{-1}{-\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}$$

$\Rightarrow \lim_{x\to 1} Lny=\frac{2}{\pi} \Rightarrow \boxed{\lim y=e^{\frac{2}{\pi}}}$

۶ـ

$y=x^2e^x$

$y'=2xe^x+e^x.x^2=xe^x(x+2)=0$

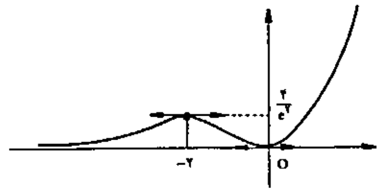
$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=0 \\ x=-2 \Rightarrow y=\frac{4}{e^2} \end{cases}$$

$x\to+\infty \Rightarrow y\to+\infty$

$$\begin{cases} x\to-\infty \Rightarrow \lim y=\infty\times 0 \\ \Rightarrow \lim y=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{\frac{1}{e^x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\frac{-1}{e^x}}=\lim_{x\to-\infty}-2xe^x=\infty\times 0 \\ =\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{\frac{1}{e^x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{-\frac{1}{e^x}}=\lim_{x\to-\infty}2e^x=0 \end{cases}$$

معادله مجانب افقی $\Rightarrow x\to-\infty \Rightarrow y\to 0 \Rightarrow \boxed{y=0}$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	0	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘	0	↗	$+\infty$



ـ۷

$y=e^{\frac{x}{Lnx}} \Rightarrow Lny=\frac{x}{Lnx}$ نسبت به x مشتق می‌گیریم.

$$\Rightarrow \frac{y'_x}{y}=\frac{Lnx+\frac{1}{x}\times x}{(Lnx)^2} \Rightarrow \frac{y'_x}{y}=\frac{Lnx+1}{(Lnx)^2}$$

$$\Rightarrow y'_x=y\times\frac{Lnx+1}{(Lnx)^2} \Rightarrow y'_x=e^{\frac{x}{Lnx}}\times\frac{Lnx+1}{(Lnx)^2}$$

ـ۸

$y=\log\frac{x}{x-1}$

$\frac{x}{x-1}>0 \Rightarrow D_f=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

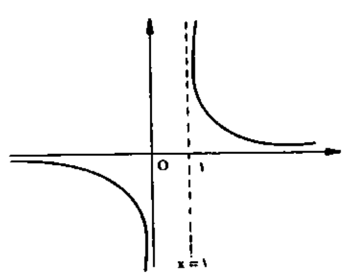
$$y'=\frac{\frac{-1}{(x-1)^2}}{\frac{x}{x-1}}\log e=\frac{-1}{x(x-1)}\log e<0$$

$x\to\pm\infty \Rightarrow y\to 0 \Rightarrow \boxed{y=0}$ معادله مجانب افقی

$x\to 0^- \Rightarrow y\to-\infty \Rightarrow \boxed{x=0}$ معادله مجانب قائم

$x\to 1^+ \Rightarrow y\to+\infty \Rightarrow \boxed{x=1}$ معادله مجانب قائم

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		−				−	
y	0	↘	$-\infty$		$+\infty$	↘	0



ـ۹

$4x^2-y^2-8x-2y-1=0$

$4x^2-8x-y^2-2y=1$

$4[x^2-2x]-[y^2+2y]=1$

$4[(x-1)^2-1]-[(y+1)^2-1]=1$

$4(x-1)^2-4-(y+1)^2+1=1$

$4(x-1)^2-(y+1)^2=4 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{1}-\frac{(y+1)^2}{4}=1$

$a^2=1 \Rightarrow a=1$

$b^2=4 \Rightarrow b=2$

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow c^2=5 \Rightarrow c=\sqrt{5}$

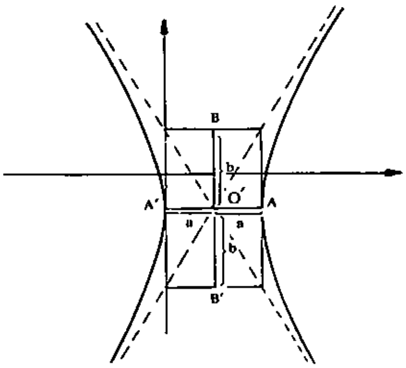
$O'\left|\begin{matrix} k=1 \\ h=-1 \end{matrix}\right.$ مرکز هذلولی

چون a^2 در مخرج کسر (x) است پس هذلولی افقی است.

$\frac{x-1}{1}=\pm\frac{y+1}{2}$ معادلات مجانبها

$\Rightarrow y+1=\pm 2(x-1)$

$\boxed{y=-1\pm 2(x-1)}$



$F\left|\begin{matrix} c+k=\sqrt{5}+1 \\ h=-1 \end{matrix}\right.$

$F'\left|\begin{matrix} -c+k=-\sqrt{5}+1 \\ h=-1 \end{matrix}\right.$

ـ۱۰

$$\int_0^2\frac{dx}{4+x^2}=\frac{1}{4}\int_0^2\frac{dx}{1+(\frac{x}{2})^2}=\frac{1}{2}\int_0^2\frac{\frac{1}{2}dx}{1+(\frac{x}{2})^2}=(\frac{1}{2}Arctg\frac{x}{2})_0^2$$

$$=(\frac{1}{2}Arctg1)-(\frac{1}{2}Arctg0)=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{4})-0=\frac{\pi}{8}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{8dx}{\sqrt{1-x^2}}=8\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=(8Arcsin\,x)_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=(8Arcsin\frac{1}{2})-(8Arcsin0)=8(\frac{\pi}{6})-0=\frac{4\pi}{3}$$

حل مسائل حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲)

ـ۱

$$f(x)=\begin{cases} x-1-1 & x>1 \text{ اگر} \\ -1 & x=1 \text{ اگر} \\ -x+1-1 & x<1 \text{ اگر} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 1 & x>1 \text{ اگر} \\ \text{وجود ندارد} & x=0 \\ -1 & x<1 \end{cases} \Rightarrow$$

این تابع در $x=1$ مشتق‌پذیر نیست

شرط مشتق‌پذیری قضیه رول برقرار نیست لذا نقطه‌ای مانند C بین دو عدد ۰ و ۲ وجود ندارد که $f'(c)=0$ به قضیه رول توجه کنید.

اگر تابع f روی بازه $[a,b]$ پیوسته و روی بازه (a,b) مشتق‌پذیر باشد و $f(a)=f(b)$ آنگاه حداقل یک نقطه به طول c، $a<c<b$ وجود دارد که $f'(c)=0$

۲ـ

$$f(x)=\frac{2x}{x^2+1} \qquad [0,2]$$

اول قضیه مقدار میانگین را بیان می‌کنیم: هرگاه تابع f روی بازه $[a,b]$ پیوسته و روی بازه (a,b) مشتق‌پذیر باشد، حداقل یک نقطه به طول c، $a<c<b$ وجود دارد که:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

حال قضیه مقدار میانگین را در این تابع مورد بررسی قرار می‌دهیم.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{\frac{4}{5}-0}{2}=\frac{2}{5}$$

$$f'(x)=\frac{2(x^2+1)-4x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2}{5}\Rightarrow\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}=\frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow (x^2+1)^2=5-5x^2\Rightarrow x^4+2x^2+1=5-5x^2$$

$$x^4+7x^2-4=0\Rightarrow x^2=\frac{-7\pm\sqrt{65}}{2}$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{-7+\sqrt{65}}{2}\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{-7+\sqrt{65}}{2}}$$

$$c_1=\sqrt{\frac{-7+\sqrt{65}}{2}} \quad \text{و} \quad c_2=-\sqrt{\frac{-7+\sqrt{65}}{2}}$$

۳ـ

$$f(x)=x^3(x-2)^2 \qquad [-1,3]$$

$$f'(x)=3x^2(x-2)^2+2x^3(x-2)$$

$$f'(x)=x^2(x-2)(3x-6+2x)$$

$$f'(x)=x^2(x-2)(5x-6)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x=2\\x=\frac{6}{5}\end{cases}$$

$x=0$ یک نقطه بحرانی است $\quad f(0)=0$

$x=2$ یک نقطه بحرانی است که اکسترمم نسبی است

$f(2)=0$

$x=\frac{6}{5}$ یک نقطه بحرانی است که اکسترمم نسبی است

$f(\frac{6}{5})=\frac{3456}{625}$

$x=-1$ یک نقطه بحرانی است که می‌نیمم مطلق است

$f(-1)=-1(-3)^2=-9$

$x=3$ یک نقطه بحرانی است که ماکزیمم مطلق است

$f(3)=27(1)^2=27$

توجه: نقطه بحرانی، نقطه‌ایست که در آن نقطه یا مشتق صفر است یا مشتق وجود ندارد.

۴ـ

آن دو عدد را a و b می‌نامیم داریم: $K>0$ ، $a.b=K^2$

$$\Rightarrow b=\frac{K^2}{a}$$

$$y=a+b=a+\frac{K^2}{a}=\frac{a^2+K^2}{a}$$

$$y'=\frac{2a^2-a^2-K^2}{a^2}=\frac{a^2-K^2}{a^2}=0$$

$$\Rightarrow a^2=K^2\Rightarrow a=\pm K$$

$$\Rightarrow a=K\ \Rightarrow b=K$$

۵ـ

$$f(x)=\frac{x-1}{x^2+2x}$$

$$x^2+2x\neq 0\Rightarrow x\neq 0,-2$$

$$f'(x)=\frac{x^2+2x-(2x+2)(x-1)}{(x^2+2x)^2}$$

$$=\frac{-x^2+2x+2}{(x^2+2x)^2}=0$$

$$-x^2+2x+2=0\ \Rightarrow x=1\pm\sqrt{3}$$

جدول رفتار تابع چنین است:

x		-2		$1-\sqrt{3}$		0		$1+\sqrt{3}$	
y'	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
y	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$

این تابع در بازه‌های $(-\infty,-2)$ و $(-2,1-\sqrt{3})$ و $(1+\sqrt{3},+\infty)$ اکیداً نزولی و در بازه‌های $(1-\sqrt{3},0)$ و $(0,1+\sqrt{3})$ اکیداً صعودی است. $x=1+\sqrt{3}$ یک نقطه بحرانی است و طول ماکزیمم نسبی تابع است و $x=1-\sqrt{3}$ یک نقطه بحرانی است و طول نقطه می‌نیمم نسبی است.

۶ـ

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x-\frac{x^3}{6}}{x^5}=\frac{0}{0}$$

هوپیتال تابع را با نماد H نشان می‌دهیم.

$$H_1:\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x-\frac{x^2}{2}}{5x^4}=\frac{0}{0}$$

$$H_2:\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{20x^3}=\frac{0}{0}$$

$$H_3:\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{60x^2}=\frac{0}{0}$$

$$H_4:\ \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{120x}\sim\lim_{x\to 0}\frac{-x}{120x}=-\frac{1}{120}$$

۷ـ

$$\int_{\frac{1}{4}}^{3}(x^3+6x^2-15x+1)dx$$

اگر m کران پایین تابع f و M کران بالای آن باشند داریم:

$$f(x)=x^3+6x^2-15x+1$$

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$$

$$f'(x)=3x^2+12x-15=0\Rightarrow\begin{cases}x=1\\x=-5\in\left[\frac{1}{4},3\right]\end{cases}$$

کران پایین = می‌نیمم نسبی و مطلق

کران بالا:
$$\begin{cases}f(1)=1+6-15+1=-7\\f(3)=37\\f(\frac{1}{4})=\frac{74}{64}\end{cases}$$

$$-7(3-\frac{1}{4})\le\int_{\frac{1}{4}}^{3}(x^3+6x^2-15x+1)dx\le 37(3-\frac{1}{4})$$

$$\Rightarrow-\frac{77}{4}\le\int_{\frac{1}{4}}^{3}(x^3+6x^2-15x+1)dx\le\frac{407}{4}$$

۸ـ

الف) $\int x^{18}(x^2+2x)^{10}(4x^5+6x^4)dx$

$$=\int x^{18}(x^2+2x)^{10}(x^2)(4x^3+6x^2)dx$$

$$=\int x^{20}(x^2+2x)^{10}(4x^3+6x^2)dx$$

$$=\int (x^2)^{10}(x^2+2x)^{10}(4x^3+6x^2)dx$$

$$=\int (x^4+2x^3)^{10}(4x^3+6x^2)dx$$

$$u=x^4+2x^3\Rightarrow du=(4x^3+6x^2)dx$$

$$=\int u^{10}du=\frac{u^{11}}{11}+c=\frac{(x^4+2x^3)^{11}}{11}+c$$

ب) $\int\frac{e^{tgx}dx}{\cos^2 x(e^{tgx}+e)}=\int\frac{(1+tg^2x)e^{tgx}}{e^{tgx}+e}dx$

$$u=e^{tgx}+e\Rightarrow du=(1+tg^2x)e^{tgx}dx$$

$$=\int\frac{du}{u}=Ln(u)+c=Ln(e^{tgx}+e)+c$$

ج) $\int\frac{4x^2+2x+2}{(x^2+1)(x+1)}dx \qquad x>0$

ابتدا کسر داخل انتگرال را تجزیه می‌کنیم.

$$\frac{4x^2+2x+2}{(x^2+1)(x+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x+1}$$

$$\Rightarrow\frac{4x^2+2x+2}{(x^2+1)(x+1)}=\frac{(A+c)x^2+(A+B)x+(B+C)}{(x^2+1)(x+1)}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+C=4\\A+B=2\\B+C=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C-B=2\\C+B=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C=2\\B=0\\A=2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\int\frac{4x^2+2x+2}{(x^2+1)(x+1)}dx=\int\frac{2x}{x^2+1}dx+\int\frac{2}{x+1}$$

$$=Ln(x^2+1)+2Ln(x+1)+C$$

د) $\int Arctgx dx$ روش جزء به جزء

$$\begin{cases} u = \mathrm{Arctg}x \Rightarrow du = \dfrac{1}{1+x^2}dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases}$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int \mathrm{Arctg}x\,dx = x\mathrm{Arctg}x - \int \frac{x}{1+x^2}dx$$

$$\int \mathrm{Arctg}x\,dx = x\mathrm{Arctg}x - \frac{1}{2}\mathrm{Ln}(1+x^2)+C$$

حل مسائل امتحان درس هندسه ۱ نظام جدید خرداد ۷۵ (بعدازظهر)

۱ـ الف : به یک فاصله‌اند ب : استقرایی پ : استنتاجی

۲ـ

$B_1 = C_1 = 30$

$\hat{O} = 180-(30+30)$

$\hat{O} = 120$

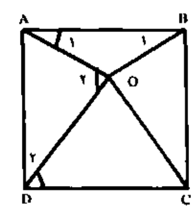
۳ـ

$\hat{D}_1 = 60 \quad \hat{O}_1 = 150$

$\hat{D}_2 = 30$

$\hat{A}_2 = \hat{O}_2 = \dfrac{180-30}{2} = 75$

$\hat{B}_1 = \hat{A}_1 = 15$

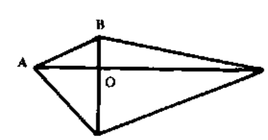


۴ـ

مساحت $ABC = \frac{1}{2}AC \times OB$

مساحت $ACD = \frac{1}{2}AC \times OD$

مساحت $ABCD = \frac{1}{2}AC(OB+OD) = \frac{1}{2}AC \times BD$



۵ـ

مساحت مثلث $SQB = \frac{1}{2}bh$

مساحت مثلث $SPQ = \frac{1}{2}ah$

مساحت ذوزنقه $SPQB = \frac{1}{2}bh + \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}h(a+b)$

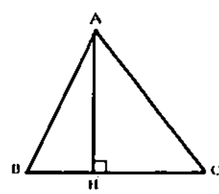
۶ـ

$AH^2 = AB^2 - BH^2$

$AH^2 = a^2 - \dfrac{a^2}{4}$

$AH = \sqrt{\dfrac{4a^2-a^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

$S = a \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2$



۷ـ

$AD = \sqrt{AQ^2+QD^2}$

$AD = \sqrt{a^2+b^2+c^2+a^2}$

$AD = \sqrt{2a^2+b^2+c^2}$

$2a^2+b^2+c^2 = (b+c)^2$

$2a^2+b^2+c^2 = b^2+c^2+2bc$

$a^2 = bc$

۸ـ

$DE \parallel FB \Rightarrow \dfrac{AD}{DF} = \dfrac{AE}{EB}$

$FE \parallel BC \Rightarrow \dfrac{AF}{FC} = \dfrac{AE}{EB}$

$\dfrac{AD}{DF} = \dfrac{AF}{FC}$

۹ـ

$\dfrac{AC}{OC} = \dfrac{AB}{OD} \qquad C_1 = C_2$

$\dfrac{50}{120} = \dfrac{30}{x}$ به حالت (ززز) $A\hat{C}B \sim O\hat{C}D$

$x = \dfrac{30 \times 120}{50} \qquad x = 72$

۱۰ـ

۲۱+۱۳/۵+۱۰/۵=۴۵

$\dfrac{\text{محیط } ABC}{\text{محیط } PQR} = K$

$\dfrac{45}{x} = \dfrac{10/5}{7} \qquad x = 30$

۱۱ـ

$d = \sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{9+16+25} = \sqrt{50}$

۱۲ـ فرض کنید قاعده‌های دو شکل بر روی یک خط قرار گرفته باشند اگر هر خطی موازی قاعده‌های دو شکل در آنها قطعه‌هایی با طولهای مساوی ایجاد کند مساحت‌های آن دو شکل برابر است.

۱۳ـ

$v_1 = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h$

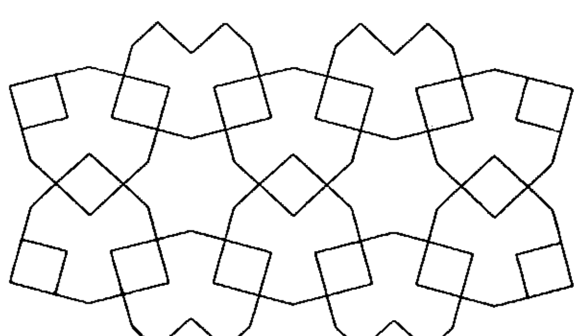
$v_2 = \dfrac{1}{3}\pi(9R^2)2h$

$\dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{\frac{1}{3}\pi \times 9R^2 \times 2h}{\frac{1}{3}\pi \times R^2 \times h} = 18$

۱۴ـ

$$\begin{cases} v = 4\pi R^2 = 113/04 \\ R^2 = 9 \Rightarrow R = 3 \end{cases}$$

$v = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = 113/04$



جوابهای تفریح اندیشه

جواب ۱:

هنگامی که مربع وفقی مورد بحث را سر و ته کنیم باز هم می‌تواند به عنوان یک مربع وفقی درنظر گرفته شود.

جواب ۲:

بگذارید حریفتان اول بازی کند. اگر ۲ یا بیش از دو چوب کبریت بردارد می‌توانید همیشه با حرکتی مقابله کنید که ترکیبی برنده از ردیفها را به‌جا می‌گذارد. ترکیبات برندهٔ ساده عبارت‌اند از ۱ـ۴ـ۵، ۱ـ۲ـ۳ و ۱ـ۱ـ۱. هر ترکیب از جفتها (۵ـ۵، ۱ـ۱ـ۴ـ۴، و غیره) نیز، با استثناهای آشکار ۱ـ۱، ۱ـ۱ـ۱ـ۱، برنده‌اند.

هنگام به‌جا گذاشتن ردیفهای جفت‌دار بسادگی حرکتهای حریفتان را چنان جور می‌کنید که فرصت به‌جا گذاشتن آخرین چوب کبریت را برای وی به‌دست خواهید آورد. به‌عنوان مثال، اگر ۱ـ۱ـ۵ـ۵ را به‌جا بگذارید، و ۱ و ۳ چوب کبریت از یک ردیف بردارد، شما ۳ چوب کبریت از ردیف جفتش برداشته ۱ـ۱ـ۲ـ۲ را به‌جا می‌گذارید، و بی‌توجه به‌حرکت بعدیش می‌توانید برنده باشید.

هر حرکتی که حریفتان بر ترکیبی ۱ـ۴ـ۵ می‌کند می‌تواند توسط شما به‌ترکیب ۱ـ۲ـ۳ یا ۱ـ۱ـ۱، یا ترکیبی جفت‌دار تبدیل شود. فایدهٔ ترکیبهای ۱ـ۲ـ۳ یا ۱ـ۱ـ۱ آشکار است.

اگر حریف هر بار تنها یک چوب کبریت بردارد، حرکاتش را با برداشتن هر بار یک چوب کبریت از ردیفی دست‌نخورده، تا زمانی که ۲ یا بیش از ۲ چوب کبریت از هر ردیف منفرد برداشته شود، تنظیم می‌کنید. وی همواره حرکت سرنوشت‌ساز را یا در بازی دوم یا در بازی سوم خود انجام می‌دهد. در این صورت، باز هم با اندکی فکر می‌توانید ترکیب برنده را یافته تا نتیجه‌ای موفقیت‌آمیز بازی کنید.

تبصره: آرایهٔ آغازکنندهٔ مسأله ۱ و ۳ و ۵ و ۷ ـ خود ترکیبی برنده است؛ به‌همین دلیل است که استراتژی بردن در این سرگرمی کوچک می‌خواهد که دوم بازی کنید.

جواب ۳:

$\frac{S^2}{2}$. مساحت هر یک از نیمدایره‌های کوچک برابر $\frac{\pi S^2}{8}$ است و مساحت مثلث قائم‌الزاویه برابر $\frac{S^2}{2}$ است. بنابراین مجموع مساحات این دو $(\frac{S^2}{4})(\pi+2)$ است. سطح نیمدایرهٔ بزرگتر برابر

$$\boxed{(\frac{1}{2})(\frac{\pi}{4})\times(S\sqrt{2})^2=\frac{(\pi S^2)}{4}}$$

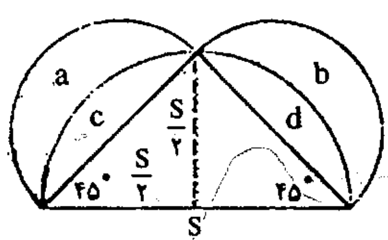
می‌باشد. چنانچه مجموع آن مساحتها را منهای این مقدار کنیم، دیده می‌شود که مقدار $\frac{S^2}{2}$ به‌دست می‌آید.

راه دیگر:

می‌دانیم که عموماً قضیهٔ فیثاغورس برای هر شکلی که وابسته به یک مثلث قائم‌الزاویه بنا شده باشد، قابل تعمیم است. بنابراین مساحت نیمدایرهٔ بنا شده روی وتر همواره برابر مجموع مساحتهای هر یک از دو نیمدایره‌ای است که بر روی قاعده‌ها واقعند. پس سطح قسمت هاشور خورده معادل مساحت مثلث قائم‌الزاویه است.

در اینجا: $A=(\frac{1}{2})S(\frac{S}{2})=\frac{S^2}{4}$

زیرا $a+b+c+d=c+d+e$ ، $a+b=e$.

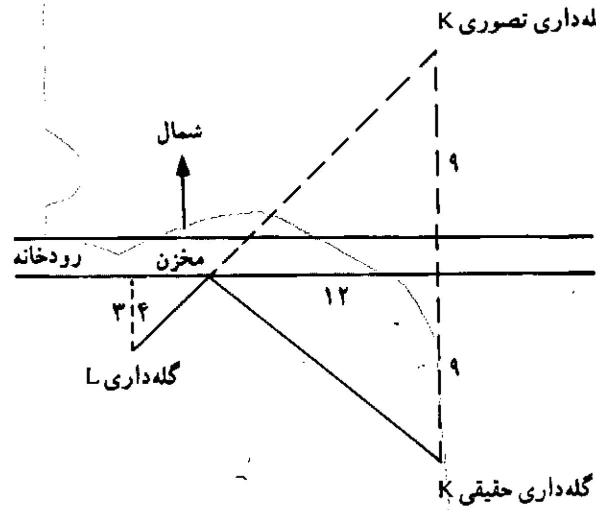


جواب ۴:

گله‌داری تصوری K را در ۱۸ مایلی شمال گله‌داری حقیقی او قرار می‌دهیم، در این صورت ساحل جنوبی رودخانه از وسط آنها می‌گذرد. توجه داشته باشید که مخزن مزبور بی‌توجه به قرار گرفتن محل آن در امتداد ساحل جنوبی از گله‌داری حقیقی و تصوری K دقیقاً به یک فاصله است. به این ترتیب، کل فاصلهٔ گله‌داری L از مخزن و هر یک از دو گله‌داری حقیقی و تصوری K یکسان است. از آنجا که کوتاه‌ترین فاصلهٔ L از گله‌داری تصوری K خط راست رسم شده بین آنهاست، مخزن را در محلی قرار می‌دهیم که این خط

ساحل جنوبی را قطع می‌کند.

از مثلثهای مشابه شکل ملاحظه می‌شود، که دو مسیر آب زاویه‌هایی مساوی با رودخانه تشکیل می‌دهند، و بنابراین مخزن در پایین رودخانه در ۴ مایلی گله‌داری L قرار دارد و طول کل مسیر ۲۰ مایل است.



جواب ۵:

اگر در مرحلهٔ اوّلیه هر دو توده «فرد» باشند (یعنی، شامل تعداد فردی شن باشند)، بازیکن اوّل می‌بازد، چه، بی‌توجه به اقدامی که می‌کند، دو توده، که حداقل یکی از آنها «زوج» است، به‌جا می‌گذارد، دراین صورت بازیکن دوم می‌تواند آن را به دو تودهٔ فرد تقسیم کرده، تودهٔ دیگر را کنار گذاشته، وضعیت اوّلیه را برقرار کند. اندکی تأمل نشان می‌دهد که این کار مستلزم این است که بازیکن دوم همواره می‌تواند اقدام کند.

اگر در ابتدا حداقل یکی از توده‌ها زوج باشد، دراین صورت بازیکن اوّل آن را به دو تودهٔ فرد تقسیم کرده (با توجه به استدلال فوق)، وضعیتی بازنده برای بازیکن دوم به‌وجود می‌آورد.

جواب ۶:

خطهای مورد بحث، بی‌توجه به چگونگی رسم آنها، در صورتی که شرایط مسأله را به جا آورند، ۲۰ مثلث تشکیل می‌دهند.

هر گروه سه خطی یک مثلث تشکیل می‌دهد. تعداد گروههای حاصل از ۶ خط در صورتی که هر بار ۳ خط آنها در نظر گرفته شود عبارت است از :

$$\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20 \text{ گروه}$$

در صورتی که بدون روش سعی در شمارش آنها کنید، احتمالاً بعضی از آنها را به شمارش نمی‌آورید.

جواب ۷:

فرض کنیم پول خرید یک متر پارچه یک تومان و طول وسیله‌ای که برای اندازه‌گیری مورد استفاده قرار گرفته است L باشد. هنگامی که پارچه‌فروش گمان می‌کند که یک متر پارچه فروخته است، در واقع L متر فروخته است و قیمت خرید آن L تومان می‌باشد. پس در واقع این مقدار پارچه را به ۱/۴۰ تومان فروخته است و L ـ ۱/۴۰ تومان برای L تومان خرید، سود برده است. بنابراین درصد سود او برابر است با:

$$\frac{39}{100}=\frac{1/40-L}{L}\Rightarrow L=\frac{140}{139}=1/0071$$

پس وسیلهٔ اندازه‌گیری او قدری بیشتر از ۷ میلیمتر، بزرگتر از یک متر بوده است.

Borhan
Vol. 6 No. 3
Serial numbers: 20 Spring 1997

In the name of God

Borhan is a mathematics journal published four times a year by Madrasse Publications. Each issue includes articles related to mathematics and its various topics specifically those concerning highschool education in Iran.

All communications should be sent to the editor at the following address:
Madrasse Publication - No. 36. Haghighat talab Street, Sepahbod gharany Ave, Tehran, Iran
Post code: 14155/1949

Contents:

روش ابراهیم بن سنان

ریاضیدان مشهور و مسلمان قرن سوم هجری در رسم سهمی

مورخین غربی تاریخ علم در مورد این دانشمند بزرگ که نوهٔ ثابت بن قره ریاضیدان مشهور و مسلمان، قرن دوم هجری قمری بوده، چنین می‌نویسند:

«گرچه روزگار ابراهیم‌بن سنان بر اثر یک غدّهٔ کبدی در سال ۳۲۵ هجری قمری در ۳۷ سالگی به سرآمد، ولی آثار باقی‌مانده از او شهرتش را به عنوان شخصیتی مهمّ در تاریخ ریاضیات ثبت می‌کند. روش او در یافتن مساحت یک قطعهٔ سهموی، ساده‌ترین روشی است که از دورهٔ پیش از رنسانس به ما رسیده است.

روش او در رسم سهمی نیز به نوبهٔ خود جالب و به صورت زیر می‌باشد:

روی خط AG پاره‌خط ثابت AB را جدا و BE را عمود بر AB رسم کنید. اینک بر BG نقاط H، D، Z، و... را به تعداد دلخواه انتخاب کنید. با شروع از H، نیمدایرهٔ به قطر AH را رسم، و فرض کنید که عمود BE آن را در T قطع کند. از T خطی به موازات AB و از H خطی به موازات BE رسم کنید. فرض کنید این خطها یکدیگر را در K قطع کنند.

سپس، نیمدایره‌ای به قطر AD رسم، و فرض کنید که این نیمدایره BE را در I قطع کند. مانند قبل، خطوطی از I و D به ترتیب به موازات AG و BE رسم، و فرض کنید که این دو خط یکدیگر را در L قطع کنند. همین عمل ترسیم را در مورد نقاط باقی‌ماندهٔ Z، ... انجام دهید تا نقاط متناظر را به‌دست آورید. در این صورت نقاط B، K، L، M، ... روی سهمی به رأس B، محور BG، و پارامتر AB قرار دارند. اگر K'، L'، M'، ... بر امتدادهای KH، LD، MZ، ... انتخاب شوند به طوری که $KH=HK'$، $LD=DL'$، $MZ=ZM'$، ...، در این صورت آنها هم روی سهمی قرار دارند.

روش ابراهیم بن سنان برای اثبات اینکه K روی سهمی‌ای است که رسم کرده، چنین است: اگر سهمی از نقطهٔ K نگذرد فرض کنید از نقطهٔ دیگری روی KH، مثلاً N بگذرد. در این صورت بنابر خاصیت سهمی، $NH^2=AB.BH$. از سوی دیگر، چون TB بر قطر نیمدایرهٔ ATH عمود است، از قضیهٔ ۱۴ مقالهٔ دوم اصول اقلیدس نتیجه می‌شود که $TB^2=AB.BH$. به‌علاوه، بنابر ترسیم، TBHK متوازی‌الاضلاع است لذا $TB=KH$. بنابراین $KH^2=TB^2=AB.BH=NH^2$، و لذا $KH=NH$ ، که یک تناقض است. بنابراین K روی سهمی‌ای که رسم کردیم قرار دارد، و همین برهان، با تعویض نامهای نقطه‌ها، در مورد L، M،... صادق است و لذا معتبربودن ترسیم‌رانشان داده‌ایم.

خواننده‌ای که می‌خواهد روش ابراهیم‌بن سنان را بیازماید، می‌تواند در موقع رسم نیمدایره‌های متوالی ماربر A به جای از پیش معلوم بودن قطرها، آنها را دلخواه بگیرد و این روش را ساده‌تر نماید. در این کار به نصف کردن خطوط AH و غیره نیازی پیدا نمی‌شود.