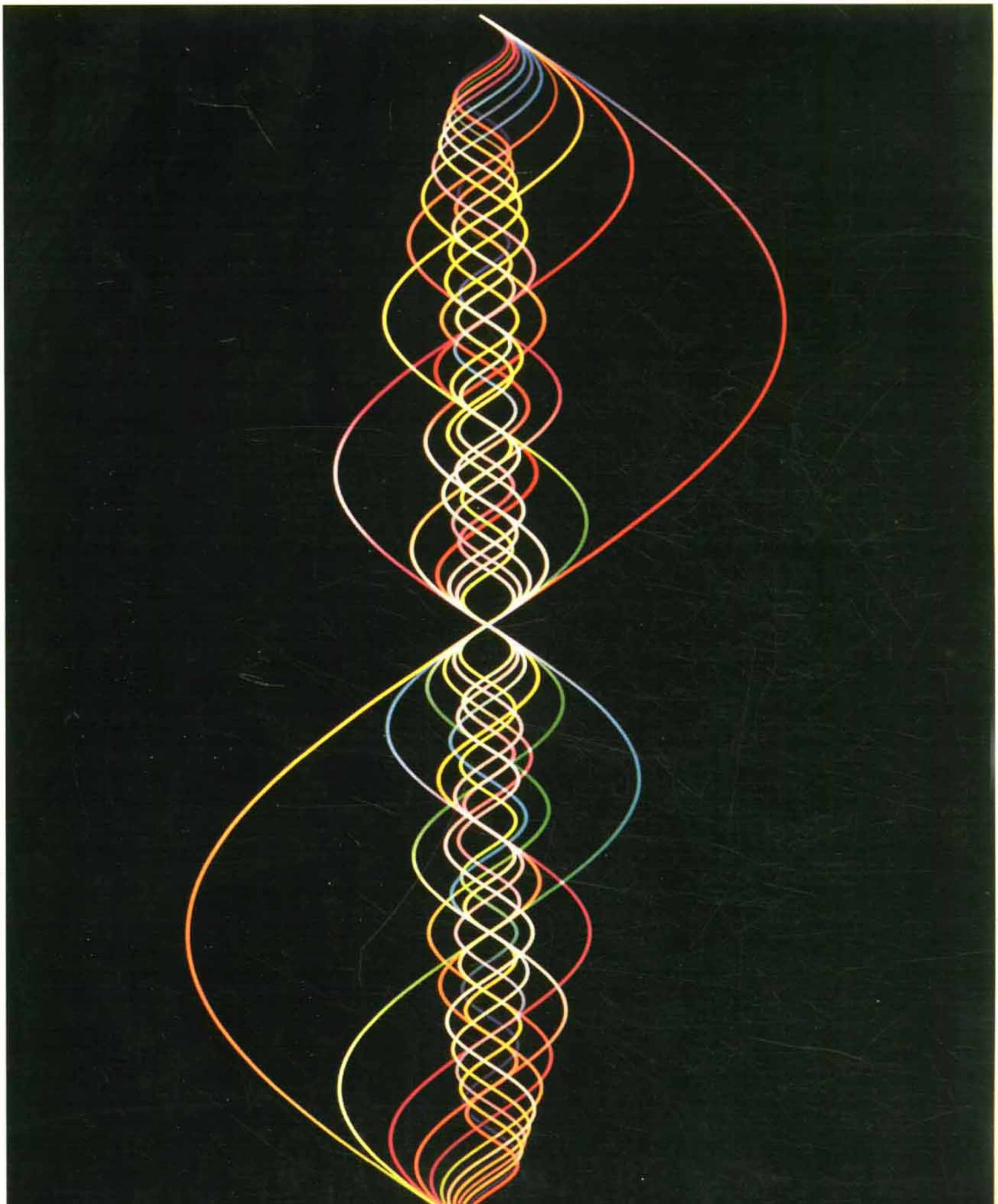
مجلهٔ ریاضی

برهان

برای دانش آموزان دبیرستان

۱۳

سال چهارم، بهار ۱۳۷۴، شمارهٔ سوم، بها ۱۵۰۰ ریال



بسم الله الرحمن الرحیم

انتشارات مدرسه
وابسته به
وزارت آموزش و پرورش

• صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه
• مدیر مسئول: محمود ابراهیمی
• سردبیر: حمیدرضا امیری

اعضای هیئت تحریریه:
آقایان: • حمیدرضا امیری • احمد قندهاری • غلامرضا یاسی‌پور
• سیدمحمدرضا هاشمی موسوی • محمدهاشم رستمی

(با تشکر از همکاری ارزندهٔ آقایان پرویز شهریاری و مهدی قمصری و با تشکر از آقای حسین ابراهیم‌زاده قُلزم در بخش کامپیوتر مجله)

• مسئول فنی: هوشنگ آشتیانی • صفحه‌آرا و رسام: احمد پیرحسینلو
• حروفچینی: یگانه • چاپ و صحافی: چاپخانه مدرسه

سال چهارم، بهار ۱۳۷۴، شمارهٔ سوم

برهان تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

۱ـ نگارش مقالات کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتب ریاضی دبیرستان)
۲ـ طرح مسائل کلیدی (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن
۳ـ طرح مسائل مسابقه‌ای (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن
۴ـ طرح معماهای ریاضی
۵ـ نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

• هیئت تحریریه درحکّ واصلاح وحذف و اضافهٔ مقالات آزاد است.
• مقالات وارده باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.
• مقالات مجله بارسم‌الخطِ انتشارات مدرسه به چاپ خواهد رسید.
• مقالات رسیده مسترد نمی‌شود.

برهان هر ۳ ماه یک شماره منتشر می‌شود.

مطالب این شماره

■ نشانی: تهران، خیابان سپهبدقرنی، پل کریمخان‌زند، کوچه شهید محمود حقیقت‌طلب، پلاک ۳۶
تلفن: ۴ـ۸۸۹۷۷۷۳، ۸۹۳۸۰۹، ۸۸۰۲۳۳۶، ۸۸۰۲۳۴۷ فاکس: ۸۸۲۰۵۹۹ صندوق‌پستی: ۱۴۱۵۵/۱۹۴۹

چاپ سیزدهمین شمارهٔ مجله ریاضی برهان تقریباً مصادف است با ایام فرخنده هفتهٔ معلم و بجاست که **حرف اوّل** را در ستایش مقام معلم و از زبانِ ثمرهٔ این درختِ پُربار یعنی یکی از دانش‌آموزان، و در قالبِ نثری آمیخته با ریاضیات، بشنویم:

تو باشکوه‌ترین لحظهٔ موعودی، همواره دوستت خواهم داشت چرا که:

به من آموختی که باید، سپیدیها را مجذور کرد و از سیاهیها جذر گرفت، زیباییها را در ده به توان ده ضرب کرد و زشتیها را بر آن تقسیم کرد. به من آموختی تا منحنی اکیداً نزولیِ پشتِ خمیدهٔ آن پیرزن دردمند را بر صفحهٔ کاهگلی دیوار کلبه‌اش همواره به خاطر داشته باشم. تو عدالت را در تساوی اضلاع مثلث متساوی‌الاضلاع، استواری را در مثلث قائم‌الزاویه و نظم را در قالب تمامی «n» ضلعیهای منتظم به ما نمایاندی.

در محضر بزرگوارت آموختیم که باید از همهٔ بدیهای دیگران فاکتور گرفت. آموختیم که اعداد حقیقی با دربرداشتن اعداد گنگ زیباترند، چرا که حقیقت زیباست و آموختیم که هر روزمان باید نقطهٔ عطفی باشد برای تغییر علامت از منفی به مثبت بی‌نهایت، از سرازیری به سمت اعلا و از اکیداً نزولی به سمت اکیداً صعودی، به سمت مثبتِ بی‌نهایت، به سمت آن حقیقت نامتناهی.

آموختیم که همه چیز را در قالب اعداد مثبت و در ناحیهٔ اوّل مثلثاتی که ناحیهٔ مثبتهاست، بررسی کنیم و «اکسترمم» لطف و صمیمیت، پاکی و صفا را «ماکزیمم» درنظر بگیریم و در همان حال، کینه و نفرت را به سمت «صفر» میل دهیم.

تو را تا همیشه تاریخ سپاس خواهم گفت چرا که در محضر تو آموختم چگونه انسان باشم و در خدمت به دیگران از پارامترهای موجود پافراتر نهم و در بی‌نهایت عشق ورزیدن غوطه‌ور گردم. تو درس زندگی را در قالب فرمولها و روابط منطقی ریاضی به من آموختی و مرا با هنر ریاضی ورزیدن، مأنوس کردی، پس: تو را ای بزرگ شخصیت فداکار، تا ابد دوست خواهم داشت و دعای خیرم را نثار راهت خواهم کرد.

(دانش‌آموز سال چهارم ریاضی-فیزیک، دبیرستان فرزانگان تهران، منطقه ۴)

والسلام

شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۱۳)

پرویز شهریاری

□ مسأله‌های ریاضی را چگونه حل کنیم؟

اکنون به یکی از اساسیترین بخشهای خود می‌رسیم و تلاش می‌کنیم، ضمن چند مقاله، به این پرسش حیاتی پاسخ دهیم که: با مسأله‌های ریاضی چگونه برخورد کنیم تا بالاترین بهره را برده باشیم؟

هر کسی که فعالیت می‌کند ـ چه علمی و چه اجتماعی ـ همیشه با «مسأله‌هایی» رو به رو می‌شود که، برای ادامهٔ کار خود، ناچار است آنها را «حل» کند. همهٔ ما باید این توانایی را داشته باشیم که از موقعیتها و پیش‌آمدهای تازه نهراسیم و بتوانیم راه خروج از «بن‌بستها» را بیابیم. برای این منظور، باید قبل از هر چیز، موقعیت مسألهٔ خود را مورد بررسی انتقادی قرار دهیم و، با تجزیه و تحلیل دقیق آن، «داده‌ها» و «خواستها»ی مسأله را بخوبی بشناسیم، یعنی؛ برای خود روشن کنیم: چه هدفهایی را در نظر گرفته‌ایم و، برای رسیدن به آنها، چه امکانهایی در اختیار داریم؟

در این جا، «تجزیه و تحلیل» را بجای «آنالیز» گرفته‌ایم، چرا که در زبان فارسی، بهتر از واژهٔ تنهای «تجزیه» مقصود را بیان می‌کند. خود واژهٔ «آنالیز» از زبان یونانی کهن گرفته شده و به‌معنای «روش مطالعهٔ پدیده‌ها، براساس تجزیهٔ آن به بخشهای جداگانه» است. وقتی یک پژوهشگر با پدیده‌ای بغرنج که جنبه‌های گوناگونی دارد (یعنی با یک «پدیدهٔ کامل») رو به رو می‌شود، تلاش می‌کند، بخشهای جداگانه‌ای از این «پدیدهٔ کامل» را مورد بررسی قرار دهد و، سپس، در ارتباط با این بخشها، نتیجه‌گیری خود را دربارهٔ ساختار «پدیدهٔ کامل» ارائه دهد. عمل تقسیم «پدیدهٔ کامل» به جنبه‌های مختلف خود، «تجزیه»؛ و تلفیق این نتیجه‌ها به‌هم و به‌دست آوردن داوری کلی دربارهٔ تمامی پدیده، «تحلیل» و مجموعهٔ آنها، «تجزیه و تحلیل» است.

در این رشته مقاله‌ها، فعلاً به بررسی مفهوم دقیق «تجزیه و تحلیل» در مسأله‌های ریاضی، که منجر به حل مسأله می‌شود، نمی‌پردازیم و فرض را بر این می‌گیریم که مسأله را حل کرده‌ایم. در این جا، به این پرسش پاسخ می‌دهیم که: آیا بعد از حل مسأله، کار را تمام شده بدانیم و به سراغ مسأله‌ای دیگر یا کاری دیگر برویم یا دور و بر همان مسأله به جست و جو بپردازیم و در پی کشف نکته‌های تازه‌ای باشیم؟

گرچه خود حل مسأله، اگر با نیروی اندیشه و نه با یاری دیگران انجام گیرد، در تکامل خلاقیت ذهن و شکوفا شدن نیروی اندیشه، اهمیت جدی دارد، ولی مهمتر از آن، توجه به نکته‌های جنبی مسأله و پرداختن به «چیزهایی» است که به‌ظاهر از ما نخواسته‌اند:

- آیا مسأله، راه حل یا راه حلهای دیگری دارد؟
- چه مسأله‌هایی در شباهت با این مسأله حل می‌شوند؟
- آیا عکس مسأله معنا دارد و آیا قابل حل است؟
- آیا مسأله، حالتهای خاص دارد؟
- آیا می‌توان مسأله را تعمیم داد؟ و غیره و غیره.

در این رشته مقاله‌ها، با تفصیل بیشتر و با آوردن مثال، در این باره‌ها صحبت می‌کنیم.

□ معادله و شکل، مُدلهای آزمایشی‌اند؛ مواظب باشید، شما را فریب ندهند.

معادله و شکل، ابزار حل مسأله‌اند، برای حل یک مسأله از «حساب» یا «جبر»، تلاش می‌کنیم؛ خود را به «معادله» یا «دستگاهی از معادله‌ها» برسانیم و، به‌کمک آن، مجهول یا مجهولها را به‌دست آوریم. همچنین عادت کرده‌ایم، برای حل یک مسألهٔ هندسی، از

«شکل» استفاده کنیم. شکلی تقریبی رسم می‌کنیم و روی آن، هدف خود را جست و جو می‌کنیم.

این کار (چه در حساب و جبر و چه در هندسه)، روش درستی است. هر وقت بتوانیم، برای مشکل خود و برای حل مسألهٔ موردنظر خود، مُدلی بسازیم، آزمایش روی آن، کار ما را ساده‌تر و ملموستر می‌کند و، در نتیجه، رابطهٔ بین هدف و امکانهای موجود را، بهتر و روشنتر درک می‌کنیم. ذهن آدمی، بدون «مُدل سازی»، حتی نمی‌تواند کار استدلال را آغاز کند. اگر بخواهید دو عدد ساده را در ذهن خود با هم جمع کنید، بدون تجسم نماد دو عدد، به هیچ نتیجه‌ای نمی‌رسید و، نماد عدد، نوعی مُدل برای عدد است. در هندسه، بهترین مُدل و بهترین دستگیرهٔ مادی برای استدلال ذهنی، شکل است.

توجه کنید: کار روی مُدل نوعی آزمایش است و آزمایش نمی‌تواند جانشین استدلال ریاضی شود. ممکن است آزمایش روی یک مُدل موفقیت‌آمیز باشد، ولی مُدل دیگر، ما را به بن‌بست بکشاند. یکی از علتهای این وضع آن است که مُدل، تنها بخشی از حقیقت موضوع مورد نظر ما را، منعکس می‌کند، نه تمامی آن‌را. مُدل کاریکاتوری از حقیقت است و ممکن است بسیاری از جنبه‌های حقیقت را پنهان کرده باشد.

مُدل مسأله‌های جبری و هندسی، یعنی معادله و شکل هم، از این خصلت دور نیستند. به‌ویژه، در شکلهای هندسی، عدم دقت در رسم، عدم توجه به «ماهیت وجودی شکل» و یا جست و جو نکردن حالتهای ممکن دیگر، ممکن است آن را از حقیقت دور کند. وقتی برای حل یک مسأله هندسی، می‌خواهیم شکلی را رسم کنیم، علاوه بر توانایی در تجسم شکل، به‌ویژه شکلهای فضایی، باید همواره خود را در برابر این پرسشها قرار دهیم:

- آیا چنین شکلی می‌تواند وجود داشته باشد؟
- آیا شکلی که رسم کرده‌ایم، دست کم تا حد معقول، درست و دقیق است؟
- آیا شکل، معرف حالت خاصی از مسأله است یا حالت کلی آن؟

و...

شبیه چنین پرسشهایی را می‌توان دربارهٔ معادله‌ای که تشکیل داده‌ایم، مطرح کرد.

عدم توجه به این پرسشها و تنها متوسل شدن به آزمایش، روی مُدل ناقص خود، ممکن است ما را به نتیجه‌ای کاملاً دور از واقع برساند.

با مثال می‌توان مطلب را روشنتر کرد.

مثال ۱. پیاده و دوچرخه‌سواری، در یک‌لحظه، از نقطهٔ A به‌سوی نقطهٔ B حرکت کردند.در همان لحظهٔ حرکت این دو نفر، سومی با اتومبیل، از نقطهٔ B به‌سوی نقطهٔ A حرکت کرد، یک ساعت بعد از آغاز حرکت به دوچرخه‌سوار و بعد از پیمودن $\frac{۱۴۲}{۱۷}$ کیلومتر دیگر، به پیاده رسید. او را بلافاصله سوار کرد، برگشت و خود را به دوچرخه سوار رساند. می‌دانیم فاصلهٔ بین دو نقطهٔ BA برابر ۱۰۰ کیلومتر است و پیاده، ساعتی ۵ کیلومتر راه می‌رود. سرعت اتومبیل چند کیلومتر در ساعت است؟

اگر سرعت اتومبیل را u کیلومتر در ساعت و سرعت دوچرخه را v کیلومتر در ساعت بگیریم، آن‌وقت $u + v = ۱۰۰$؛ و با توجه به شرط رسیدن اتومبیل به‌پیاده، بعد از تبدیل‌ساده، معلوم‌می‌شود که u ، ریشهٔ این معادله است:

$$۱۷x^۲ - ۱۳۷۵x + ۱۲۰۰ = ۰$$

این معادله دو ریشه دارد: ۸۰ و $\frac{۱۵}{۱۷}$، یعنی سرعت اتومبیل یا ۸۰ کیلومتر در ساعت است و یا $\frac{۱۵}{۱۷}$ کیلومتر در ساعت.

روشن است که هنوز مسأله حل نشده است، زیرا نمی‌دانیم اتومبیل با کدام یک از این سرعتها حرکت کرده است! البته، موقعیت عملی به ما تلقین می‌کند که، سرعت اتومبیل، نمی‌تواند $\frac{۱۵}{۱۷}$ کیلومتر در ساعت باشد (که در نتیجه، سرعت دوچرخه $۹۹\frac{۲}{۱۷}$ کیلومتر در ساعت می‌شود). ولی، این استدلال، خصلت ریاضی ندارد و نمی‌توان به دلیل تجربه‌های روزانه، «شرایط عملی» را در انتخاب جواب دخالت داد.

صورت مسأله را مرور می‌کنیم. آیا سرعت $\frac{۱۵}{۱۷}$ کیلومتر در ساعت، با فرضهای مسأله تناقض پیدا نمی‌کند؟ همهٔ فرضهای مسأله را، با دقت و از آغاز، از نظر می‌گذرانیم: جملهٔ اوّل، چیزی دربارهٔ سرعت اتومبیل به‌ما نمی‌دهد. بعد، اتومبیل، در $\frac{۱۵}{۱۷}$ کیلومتری نقطهٔ B به دوچرخه سوار می‌رسد و سپس (بعد از ۱۶ ساعت) با پیاده روبه رو می‌شود. ولی روشن است، اگر پیاده در این وضع، سوار اتومبیل بشود و دوچرخه سوار را دنبال کند، هرگز به دوچرخه سوار نمی‌رسد. بنابراین، سرعت اتومبیل نمی‌تواند $\frac{۱۵}{۱۷}$ کیلومتر در ساعت باشد.

تأکید این مطلب لازم است که، این نتیجه (یعنی، اتومبیل با سرعت ۸۰ کیلومتر در ساعت حرکت کرده است)، نیازی به تحقیق و بررسی ندارد، زیرا می‌دانیم سرعت اتومبیل، تنها می‌تواند یکی از دو

عدد $\frac{۱۵}{۱۷}$ یا ۸۰ باشد؛ عدد $\frac{۱۵}{۱۷}$ کنار رفت، یعنی در پذیرفتن عدد دوم، هیچ تردیدی نباید داشت. مسأله به‌طور کامل حل شد.

مثال ۲. شخصی برای رسیدن به مقصد، ۱۰۰ کیلومتر را با اتومبیل و ۶۰ کیلومتر را با قایق موتوری رفت. در ضمن، زمان حرکت او در خشکی، ۱۵ دقیقه بیشتر از زمان حرکت او در آب بود. اگر سرعت اتومبیل، ۲۰ کیلومتر در ساعت، بیشتر از سرعت قایق باشد، سرعت اتومبیل را پیدا کنید.

اگر سرعت اتومبیل را x کیلومتر در ساعت فرض کنیم، به‌سادگی معلوم می‌شود که، x، در معادلهٔ زیر صدق می‌کند:

$$\frac{100}{x} - \frac{60}{x - 20} = \frac{1}{4}$$

این معادله، دو ریشه دارد: ۱۰۰ و ۸۰. مثل مثال ۱، این پرسش پیش می‌آید: سرعت اتومبیل در واقع، کدام یک از این دو عدد است؟ و مهمتر از آن: آیا مثل مثال ۱؛ به نکته‌ای از فرض توجه نکرده‌ایم؟

برای پاسخ دادن به این پرسش، به‌سراغ صورت مسأله می‌رویم و سرعتهای ۱۰۰ کیلومتر و ۸۰ کیلومتر را با جزء جزء فرض، ارزیابی می‌کنیم. این ارزیابی ما را قانع می‌کند، هر دو جواب، با همهٔ بخشهای فرض سازگارند. بنابراین، به این نتیجه می‌رسیم که: سرعت اتومبیل می‌تواند ۱۰۰ کیلومتر در ساعت و یا ۸۰ کیلومتر در ساعت باشد.

به این ترتیب، در این مثال، آنچه به عنوان فرض داده شده است، برای تعیین جوابی مشخص و منحصر، کافی نیست، به زبان دیگر، سرعت اتومبیل، به‌صورتی یک ارزشی، به‌دست نمی‌آید. با وجود این، توضیحهایی که در این جا آوردیم، برای کامل کردن حل مسأله لازم است. وقتی شرطهای مسأله، برای حل یک ارزشی آن کافی نیست، باید با بررسی مسأله، کافی نبودن شرط را روشن کنیم، در غیر این‌صورت، حل مسأله کامل نیست.

مثال ۳. می‌خواهیم در باکهای سه اتومبیل، ۵۰ لیتر بنزین بریزیم. چند لیتر بنزین باید در باک اوّل ریخت، تا در آن ۱۰ لیتر بیشتر از باک دوم باشد و، در ضمن، اگر ۲۶ لیتر بنزین از باک اوّل در باک سوم بریزیم، مقدار بنزین در باک سوم برابر با مقدار بنزین در باک اوّل بشود؟

اگر فرض کنیم، باید در باک اتومبیل اوّل a لیتر بنزین بریزیم، بسادگی روشن می‌شود که a، ریشهٔ معادلهٔ زیر است:

$$50 - (2x - 10) + 26 = x - 10$$

این معادله، تنها یک ریشه دارد: $x = 32$. به‌نظر می‌رسد که مسأله حل شده است. ولی بیشتر دقت کنیم.

نمی‌توان اطمینان داشت، برای برقرار بودن همهٔ شرطها، باید ۳۲ لیتر بنزین در باک اتومبیل اوّل ریخت. در واقع، واژهٔ «باید» که در اینجا به‌کار می‌بریم، مفهومی نزدیک به مفهوم اصطلاح ریاضی «لازم و کافی است» دارد، در حالی که، در این‌جا، تنها یکی از دو شرط را در نظر گرفته‌ایم: شرط لازم، یعنی؛ اگر بخواهیم شرطهای مسأله برقرار باشند لازم است در باک اتومبیل اوّل ۳۲ لیتر بنزین ریخته شود. هنوز معلوم نیست، این شرط، کافی هم باشد، یعنی اگر در باک اتومبیل اوّل ۳۲ لیتر بنزین ریخته شده باشد، آن‌وقت شرطهای مسأله برقرارند.

اگر استدلال را ادامه دهیم، معلوم می‌شود، برای برقراری شرطهای مسأله، باید در باک اتومبیل سوم «۴−» لیتر بنزین وجود داشته باشد که ممکن نیست. بنابراین، می‌توان به این نتیجه رسید که با فرضهای مسأله، نمی‌توان ۵۰ لیتر بنزین را بین سه باک اتومبیل تقسیم کرد، یعنی **مسأله جواب ندارد.**

مثال ۴. دو آلیاژ شامل مس و قلع در اختیار ماست. اوّلی ۳ کیلوگرم وزن دارد با ۴۰٪ مس، و دومی ۷ کیلوگرم وزن دارد با ۳۰٪ مس. از هر کدام این دو آلیاژ چند کیلوگرم انتخاب کنیم تا، به‌کمک آنها، آلیاژ تازه‌ای به‌وزن ۸ کیلوگرم با r٪ مس به‌دست آید؟

فرض می‌کنیم با a کیلوگرم از آلیاژ اوّل و $(8 - a)$ کیلوگرم از آلیاژ دوم، آلیاژ تازه‌ای که شامل r٪ مس است، به‌دست آورده باشیم. در این‌صورت، a، ریشهٔ این معادله است:

$$40x + 30(8 - x) = 8r$$

این معادله، یک ریشه دارد: $0/8x - 24$ [sic]

حل مسأله تمام نشده است. باید تحقیق کنیم، اگر $(0/8r - 24)$ کیلوگرم از آلیاژ اول و $(32 - 0/8r)$ کیلوگرم از آلیاژ دوم انتخاب کنیم، آلیاژ تازه‌ای با عیار r٪ مس به‌دست می‌آید؟ و مهمتر از آن: آیا چنین انتخابی ممکن است؟

این مقدارها را از دو آلیاژ تنها وقتی می‌توان انتخاب کرد که داشته باشیم:

$$0 \le 0/8r - 24 \le 3 \quad و \quad 0 \le 32 - 0/8r \le 7$$

حل این دستگاه نامعادله‌ها، ما را به این جواب، برای r، می‌رساند:

$$31/25 \le r \le 33/75 \qquad (*)$$

یعنی، اگر r ، با شرط (*) سازگار نباشد، آلیاژ مورد نظر مسأله را نمی‌توان تهیّه کرد و اگر r با شرط (*) سازگار باشد، آن‌وقت چنین آلیاژی قابل تهیّه است.

مثال ۵. اگر بدانیم در سه باک اتومبیل، روی هم ۵۰ لیتر بنزین و در باک اوّل ۱۰ لیتر بیشتر از باک دوم وجود دارد و، در ضمن، اگر ۲۶ لیتر بنزین از باک اوّل در باک سوم بریزیم، مقدار بنزین در باکهای دوم و سوم برابر می‌شود. در ابتدا در باک سوم، چند لیتر بنزین بوده است؟

ظاهر این مسأله، با مسألهٔ مثال سوم تفاوتی ندارد. اگر فرض کنیم، در باک سوم a لیتر بنزین بوده است، آن‌وقت a ، ریشهٔ معادلهٔ زیر است:

$$x + (x + 26) + (x + 36) = 50.$$

این معادله یک ریشه دارد: $x = -4$.

آیا مسأله حل شده و این جواب قابل قبول است؟ بله! برای روشن شدن مطلب، نیاز به اندکی توضیح داریم.

گزاره‌های شرطی را می‌شناسید: «اگر A ، آنگاه B» یا «اگر A و B و C ، آنگاه D» در حالتی که جزء اوّل این گزارهٔ شرطی، نادرست باشد، تمامی گزاره درست است. مثلاً می‌توان گفت:

«اگر $5 < 2$ ، آن‌وقت $-4 < -1$»

این گزاره از نظر «ایجاب منطقی»، (یا «استلزام منطقی») درست است، ولو این‌که، هر یک از بخشهای آن (یعنی، فرض و حکم) هر دو نادرست است.

در مسألهٔ مثال ۳، کاری را از ما خواسته بودند که عملی نبود؛ در حالی که در مثال مسألهٔ ۵، صحبت بر سر یک نتیجه‌گیری منطقی است؛ مسألهٔ ۵ می‌گوید: اگر در سه باک ۵۰ لیتر بنزین وجود داشته و اگر ... چه نتیجه‌ای برای باک سوم به دست می‌آید. در این‌جا، نمی‌خواهیم «عملی» را انجام دهیم، تنها باید به یک «نتیجه‌گیری منطقی» بپردازیم. و نتیجهٔ منطقی همان است که به‌دست آوردیم: «اگر در سه باک روی هم ۵۰ لیتر و اگر در باک اوّل ۱۰ لیتر بیشتر از باک دوم باشد و اگر بار نخستین ۲۶ لیتر از باک اوّل در باک سوم بریزیم، مقدار بنزینهای دو باک دوم و سوم برابر شود، آن وقت باید در باک سوم «۴– لیتر» بنزین وجود داشته باشد مسأله‌ای غیر عملی است، ولی نتیجه‌گیری ما، از نظر منطقی، درست است.»

مثالهایی که در این‌جا آوردیم، بسیار ساده و مقدماتی بود. در ادامهٔ مطلب، ابتدا مسأله‌های جدیتر و دشوارتری را از معادله‌های جبری و، سپس ، نمونه‌هایی از شکلهای هندسی را، یعنی مُدلهایی‌را که ممکن است موجب فریب ما بشوند، می‌آوریم.

در این‌جا باز هم تأکید می‌کنم، هر قدر وقت برای حل یک مسأله صرف کنید، زیان نمی‌بینید، زیرا ثمر آن، بارور شدن اندیشهٔ شماست. این پند دانشمند ایرانی را همیشه به یاد داشته باشید که «راه چه یک فرسنگ و چه هزار فرسنگ، جز با رفتن به انجام نرسد» و تلاش کنید، خودتان راه را پیدا کنید، با اندیشهٔ خودتان و با کار مداوم خودتان، چراکه به‌قول کاپیتسا فیزیکدان بزرگ قرن بیستم «کار خوب را، با دست دیگران نمی‌توان انجام داد». از دیگران یاد بگیرید و، سپس، با اندیشهٔ خودتان، دربارهٔ آن‌چه یاد گرفته‌اید و یا به شما گفته‌اند، به ارزیابی بپردازید. همان‌طور که «گوت گری» گفته است «تنها کسانی در هیچ چیز تردید نمی‌کنند که چیزی نمی‌دانند» به یاد داشته باشید که یادگیری، بدون این که با خلاقیت همراه باشد، ارزش چندانی ندارد. «تحصیل کرده، تنها به‌معنای آن است‌که، خیلی چیزها، به او یاد داده‌اند، ولی هنوز این معنا را نمی‌دهد که او هم چیزی یاد گرفته است» [گ.لیختن برگ].

تا بعد

تفریح اندیشه ۱

با استفاده از ارقام ۱ ، ۱ ، ۹ و ۹ چند عدد چهار رقمی متفاوت می‌توان ساخت؟

جواب در صفحهٔ ۳۹

حدّ: تعریف حدّ تابع

(قسمت اوّل)

◆ احمد قندهاری

۱ـ۱. تغییرات $|x|$ وقتی x در فواصل مختلف واقع باشد.

فرض می‌کنیم: $a,b \in R$ و $۰<a<b$

اگر ۱: $a<x<b \Rightarrow a<|x|<b$

مثال: اگر $۲<x<۵ \Rightarrow ۲<|x|<۵$

اگر ۲: $-b<x<-a \Rightarrow a<|x|<b$

مثال: اگر $-۵<x<-۲ \Rightarrow ۲<|x|<۵$

اگر ۳: $-a<x<b \Rightarrow \begin{cases} ۰\le x<b \Rightarrow ۰\le |x|<b \\ \text{یا} \\ -a<x<۰ \Rightarrow ۰<|x|<a \end{cases} \Rightarrow ۰\le |x|<b$

مثال: اگر $-۲<x<۵ \Rightarrow \begin{cases} ۰\le x<۵ \Rightarrow ۰\le |x|<۵ \\ -۲<x<۰ \Rightarrow ۰<|x|<۲ \end{cases} \Rightarrow ۰\le |x|<۵$

اگر ۴: $-b<x<a \Rightarrow \begin{cases} ۰\le x<a \Rightarrow ۰\le |x|<a \\ -b<x<۰ \Rightarrow ۰<|x|<b \end{cases} \Rightarrow ۰\le |x|<b$

مثال: اگر $-۶<x<۲ \Rightarrow \begin{cases} ۰\le x<۲ \Rightarrow ۰\le |x|<۲ \\ -۶<x<۰ \Rightarrow ۰<|x|<۶ \end{cases} \Rightarrow ۰\le |x|<۶$

۱ـ۲ همسایگی: فرض می‌کنیم: $a\in R$ و $r\in R^+$

داریم: ۱: $|x|<r \Rightarrow -r<x<r$

مثال: $|x|<۲ \Rightarrow -۲<x<۲$

۲: $|x-a|<r \Rightarrow -r<x-a<r$ یا $a-r<x<a+r$

بنا به‌تعریف، مجموعهٔ اعدادی مانند x که در نامساوی $a-r<x<a+r$ صدق می‌کند، یک همسایگی به مرکز (a) و شعاع (r) است که آن را به‌صورت $N(a,r)$ هم نشان می‌دهند.

مثال: $|x-۳|<۱ \Rightarrow -۱<x-۳<۱$ یا $۲<x<۴$

مجموعهٔ اعدادی مانند x که در نامساوی $۲<x<۴$ صدق می‌کند یک همسایگی به مرکز (۳) و شعاع (۱) است. یا $N(۳,۱)$.

اگر $a-r<x<a+r$ و $x\neq a$، آنگاه این فاصله را یک همسایگی بدون مرکز به مرکز a و شعاع r گوییم. گاهی این همسایگی را محذوف نیز گویند. (کلمهٔ محذوف در این‌جا یعنی؛ مرکز همسایگی حذف شده است.)

مثال: اگر $۲<x<۴$ و $x\neq ۳$، آنگاه این فاصله را یک همسایگی بدون مرکز یا محذوف گوییم.

فرض کنید $x \to a$ و عدد a را مرکز همسایگی به شعاع r در نظر بگیریم. بعداً خواهیم گفت که x هیچ‌وقت به a نمی‌رسد پس همسایگی $a-r<x<a+r$ بدون مرکز باید باشد.

مثال:

$$\begin{cases} x\to ۲ \\ r=۱ \end{cases} \Rightarrow ۲-۱<x<۲+۱ \quad \text{یا} \quad ۱<x<۳\,,\ x\neq ۲$$

فاصلهٔ (۳ و ۱) را یک همسایگی بدون مرکز، به مرکز (۲) و شعاع (۱) گوییم.

قرارداد: اعداد مثبت فوق‌العاده کوچک را با α یا β یا ε یا σ نشان می‌دهیم و اعداد مثبت فوق‌العاده بزرگ را با M یا N نشان می‌دهیم.

۱ـ۳. فرض کنیم $x\to ۲$ یا حدّ x عدد (۲) باشد، در این‌صورت x ضمن تغییرات به عدد (۲) از دو طرف نزدیک می‌شود.

الف: $x = ۱/۹$ و $۱/۹۹$ و $۱/۹۹۹$ و $۱/۹۹۹۹$ و ...

ب: $x = ۲/۱$ و $۲/۰۱$ و $۲/۰۰۱$ و $۲/۰۰۰۱$ و ...

در قسمت الف: هرقدر تعداد (۹) های عدد اعشاری ۱/۹۹۹۹ را اضافه کنیم، اعداد حاصل به عدد (۲) نزدیکتر می‌شوند ولی هیچ‌وقت به (۲) نمی‌رسند.

در قسمت ب: هرقدر تعداد صفرهای بعداز ممیز و قبل از (۱) عدد اعشاری ۲/۰۰۰۱ را زیادتر کنیم اعداد حاصل به عدد (۲) نزدیکتر می‌شوند ولی هیچ‌وقت به عدد (۲) نمی‌رسند.

بنابراین وقتی $x \to ۲$ یا حدّ x برابر (۲) باشد حتماً $x \neq ۲$.

۴ ـ ۱. تعریف حدّ متغیر x: حدّ متغیر x عدد (a) است هرگاه $|x-a|$ از هر عدد مثبت فوق‌العاده کوچک مفروضی کوچکتر باشد ($x \to a$) پس $x \neq a$ و $|x-a|>۰$) یعنی؛ $۰<|x-a|<\sigma$ ⇐ $x \to a$ اگر

سؤال: اگر $x \to ۲$، نشان دهید $۰<|x-۲|<\frac{۱}{۱۰۰۰}$

جواب: اگر به قسمت (۳ ـ ۱) درس برگردیم چنانچه در وضع الف، $x = ۱/۹۹۹۹$ و در وضع ب: $x = ۲/۰۰۰۱$ را در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$|x-۲| = \left| \begin{matrix} ۱/۹۹۹۹-۲ \\ \text{یا} \\ ۲/۰۰۰۱-۲ \end{matrix} \right| = \frac{۱}{۱۰۰۰۰} < \frac{۱}{۱۰۰۰}\ ,\ x \neq ۲$$

$$\Rightarrow ۰<|x-۲|<\frac{۱}{۱۰۰۰}$$

پس همواره می‌توان نوشت:

اگر $x \to a \Rightarrow ۰<|x-a|<\sigma$

اگر $x \to ۲ \Rightarrow ۰<|x-۲|<\sigma$

اگر $x \to ۴ \Rightarrow ۰<|x-۴|<\sigma$

اگر $x \to -۳ \Rightarrow ۰<|x+۳|<\sigma$

اگر $x \to ۰ \Rightarrow ۰<|x|<\sigma$

۵ـ۱. تابع f به معادله $f(x) = ۳x + ۱$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم x به‌سمت عدد (۲) میل کند.

x را به‌عدد (۲) نزدیک و نزدیکتر می‌کنیم. می‌خواهیم بدانیم که $f(x)$ به چه عددی نزدیک می‌شود. جدول زیر را برای این منظور تنظیم کرده‌ایم.

x	f(x) = ۳x + ۱	x	f(x)=۳x+۱
۱/۹	۶/۷	۲/۱	۷/۳
۱/۹۹	۶/۹۷	۲/۰۱	۷/۰۳
۱/۹۹۹	۶/۹۹۷	۲/۰۰۱	۷/۰۰۳
۱/۹۹۹۹	۶/۹۹۹۷	۲/۰۰۰۱	۷/۰۰۰۳
۱/۹۹۹۹۹	۶/۹۹۹۹۷	۲/۰۰۰۰۱	۷/۰۰۰۰۳

به‌طوری‌که جدول نشان می‌دهد وقتی x به عدد (۲) خیلی نزدیک می‌شود آنگاه، $f(x)$ به عدد (۷) نزدیک می‌شود.

به‌نظر می‌آیدکه وقتی $x \to ۲$، آنگاه: حدِّ $f(x)$ برابر (۷) است ولی نمی‌توان به‌طور قاطع گفت که وقتی $x \to ۲$، حدِّ $f(x)$ برابر (۷) است زیرا نمی‌توان مطمئن بود برای مقادیری که در جدول آورده نشده است وضع چه خواهد شد.

این ادعاکه وقتی $x \to ۲$، آنگاه ($f(x) = ۷$ حد) نیاز به یک استدلال ریاضی دارد.

از جدول داده شده نتایج زیر به دست می‌آید.

اگر $|x-۲|<۰/۱ \Rightarrow |f(x)-۷|<۰/۳$

اگر $|x-۲|<۰/۰۱ \Rightarrow |f(x)-۷|<۰/۰۳$

اگر $|x-۲|<۰/۰۰۱ \Rightarrow |f(x)-۷|<۰/۰۰۳$

اگر $|x-۲|<۰/۰۰۰۱ \Rightarrow |f(x)-۷|<۰/۰۰۰۳$

اگر $|x-۲|<۰/۰۰۰۰۱ \Rightarrow |f(x)-۷|<۰/۰۰۰۰۳$

ملاحظه می‌کنیم که اگر بخواهیم $|f(x)-۷|<۰/۰۰۰۰۳$ باید $|x-۲|<۰/۰۰۰۰۱$.

اگر بخواهیم $|f(x)-۷|<۰/۰۰۰۳$ باید $|x-۲|<۰/۰۰۰۱$

اگر بخواهیم $|f(x)-۷|<۰/۰۰۳$ باید $|x-۲|<۰/۰۰۱$

و...

دوباره تابع f به معادله $f(x) = ۳x + ۱$ را وقتی $x \to ۲$ را در نظر بگیریم به گفتگوی جالب بین $f(x)$ و x توجه کنید.

$f(x)$ بـه x می‌گوید: می‌خواهم به عدد (۷) آن‌قدر نزدیک شوم تا $|f(x)-۷|$ کوچکتر از (۰/۰۰۳) شود. تو چه‌قدر باید به عدد (۲) نزدیک شوی؟ x می‌گوید اگر $|f(x)-۷|$ بخواهد کوچکتر از (۰/۰۰۳) باشد، من‌باید به‌عدد (۲) آن‌قدرنزدیک‌شوم تا $|x-۲|$ کوچکتر از (۰/۰۰۱) شود. دوباره $f(x)$ به x می‌گوید: می‌خواهم به عدد (۷) آن‌قدر نزدیک شوم تا $|f(x)-۷|$ کوچکتر از (۰/۰۰۰۳) شود. تو چه‌قدر باید به عدد (۲) نزدیک شوی؟ x می‌گوید اگر $|f(x)-۷|$ بخواهد کوچکتر از (۰/۰۰۰۳) باشد، من باید به عدد (۲) آن‌قدر نزدیک شوم تا $|x-۲|$ کوچکتر از (۰/۰۰۰۱) شود. به‌همین ترتیب برای هر خواست $f(x)$، x باید شرایط مناسب این خواست را ایجاد کند.

۶ ـ ۱ . تعریف حدّ تابع: فرض می‌کنیم $f(x)$ در فاصله‌ای شامل (a) تعریف شده باشد (ممکن است $f(x)$ در خود (a) تعریف نشده باشد).

$$\lim_{x\to a} f(x)=b$$ هرگاه به‌ازای هر $\varepsilon>0$ داده‌شده، عدد مثبتی مانند σ وجود داشته باشد به‌طوری‌که:

$$\underbrace{0<|x-a|<\sigma}_{\text{گزارهٔ مقدم}} \Rightarrow \underbrace{|f(x)-b|<\varepsilon}_{\text{گزارهٔ تالی}}$$

تعریف فوق را به‌صورت زیر می‌نویسند:

$$\boxed{\forall \varepsilon>0\ \exists \sigma>0:\ \underbrace{0<|x-a|<\sigma}_{\text{گزارهٔ مقدم}} \Rightarrow \underbrace{|f(x)-b|<\varepsilon}_{\text{گزارهٔ تالی}}\quad (I)}$$

در این‌جا $f(x)$ می‌گوید می‌خواهم به عدد (b) آن‌قدر نزدیک شوم تا $|f(x)-b|$ از (ε) کوچکتر شود. با حل مسأله تعیین کنید برای این خواست $f(x)$، x را چه‌قدر باید به عدد (a) نزدیک کنیم. رابطهٔ (I) را استلزام منطقی گویند. همان طوری‌که می‌دانید، به گزارهٔ شرطی همیشه درست استلزام منطقی گویند.

گزاره $0<|x-a|<\sigma$ را گزارهٔ مقدّم و گزارهٔ $|f(x)-b|<\varepsilon$ را گزارهٔ تالی گوییم.

باید قسمت $|f(x)-b|<\varepsilon$ را حل کرد تا به قسمت $|x-a|<\sigma$ رسید. منظور از حل کردن پیدا کردن (σ) برحسب (ε) است، پس از پیدا کردن (σ) باید نشان دهیم؛ از گزارهٔ $|x-a|<\sigma$ می‌توان گزارهٔ $|f(x)-b|<\varepsilon$ را نتیجه گرفت. معمولاً به این قسمت حل می‌گویند برگشت پذیری مسأله.

مسأله ۱: با استفاده از تعریف حدّ تابع ثابت کنید:

$$\lim_{x\to 2}(3x+1)=7$$

حل: باید ثابت کنیم برای هر $\varepsilon>0$، دست‌کم یک عدد مثبت مانند σ وجود دارد به‌طوری‌که

اگر $\underbrace{0<|x-2|<\sigma}_{p} \Rightarrow \underbrace{|3x+1-7|<\varepsilon}_{b}$

اگر $|3x+1-7|<\varepsilon \Rightarrow |3x-6|<\varepsilon \Rightarrow 3|x-2|<\varepsilon$
$\Rightarrow |x-2|<\frac{\varepsilon}{3}$

با مقایسهٔ این رابطه با گزارهٔ مقدّم (p)، ملاحظه می‌کنیم: $\sigma=\frac{\varepsilon}{3}$
حال اگر $\varepsilon=0/03$، آنگاه $\sigma=0/01$، اگر $\varepsilon=0/003$، آنگاه $\sigma=0/001$، اگر $\varepsilon=0/0003$، آنگاه $\sigma=0/0001$
پس به‌ازای هر $\varepsilon>0$، یک $\sigma>0$ به‌دست آمده است.

دقّت کنید، اگر $\sigma\le\frac{\varepsilon}{3}$ باشد باز هم درست است و جواب کاملتری است. حال برگشت‌پذیری مسأله را بررسی می‌کنیم:

اگر $|x-2|<\sigma$ و $\sigma\le\frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow |x-2|<\frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow 3|x-2|<\varepsilon$
$\Rightarrow |3x-6|<\varepsilon \Rightarrow |3x+1-7|<\varepsilon$

توجه:
اگر در حلّ مسائل تعریف حدّ تابع، درست استدلال کنیم، حل ما می‌تواند شامل برگشت‌پذیری باشد. یا به عبارت دیگر باید برگشت‌پذیری مسأله در حل مُستتر باشد. به مسائل زیر دقت کنید:

مسألهٔ ۲: با استفاده از تعریف حدّ تابع ثابت کنید:

$$\lim_{x\to 1}(x^2-5x)=-4$$

حل: باید ثابت کنیم، برای هر $\varepsilon>0$ دست کم یک عدد مثبت مانند σ وجود دارد به‌طوری‌که

اگر $0<|x-1|<\sigma \Rightarrow |x^2-5x+4|<\varepsilon$
اگر $|x^2-5x+4|<\varepsilon \Rightarrow |(x-1)(x-4)|<\varepsilon$
$\Rightarrow |x-1|\times|x-4|<\varepsilon$

در این‌جا فاصلهٔ همسایگی را مطرح می‌کنیم و کران بالای $|x-4|$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{cases} x\to 1 \\ r=1 \end{cases} \Rightarrow 0<x<2$$
$$\frac{\quad -4\quad -4\quad -4\quad}{-4<x-4<-2} \Rightarrow 2<|x-4|<4$$

عدد (۴) از $|x-4|$ در این شرایط بزرگتر است. این عدد را کران بالای $|x-4|$ می‌گوییم. پس عبارت $|x-1|\times 4$ از عبارت $|x-1|\times|x-4|$ بزرگتر است.

حال می‌توان گفت؛ اگر عبارت بزرگتر از ε کمتر باشد، مسلماً عبارت کوچکتر هم از ε کمتر خواهد شد. یعنی:

٤

اگر $|x-1|\times 4<\varepsilon \Rightarrow |x-1|\times|x-4|<\varepsilon$

همین رابطهٔ برگشت‌پذیری را مسلّم می‌کند.

$\Rightarrow |x-1|\times 4<\varepsilon \Rightarrow |x-1|<\frac{\varepsilon}{4}$

با مقایسهٔ این رابطه با گزارهٔ مقدم استلزام منطقی داریم: $\sigma=\frac{\varepsilon}{4}$ یا $\sigma\le\frac{\varepsilon}{4}$
از طرفی چون شعاع همسایگی را عدد (۱) انتخاب کردیم، پس
$0<\sigma\le 1$

بنابراین بهتر است بنویسیم: $\sigma = \text{Min}\{1, \frac{\varepsilon}{4}\}$. اگر $\frac{\varepsilon}{4}$ بیشتر از (۱) باشد آنگاه $\sigma = 1$ در غیراین‌صورت $\sigma \le \frac{\varepsilon}{4}$.

توجه (۱): به طوری‌که ملاحظه شد جواب مسأله یعنی؛ $\sigma \le \frac{\varepsilon}{4}$ به مقدار شعاع همسایگی بستگی دارد. اگر در این مسأله شعاع همسایگی را عددی مانند $(\frac{1}{2})$ انتخاب می‌کردیم آنگاه برای σ جواب: $\sigma \le \frac{2\varepsilon}{7}$ به دست می‌آمد.

توجه (۲): اگر به نوع حل مسأله (۲) دقت کنیم، برگشت‌پذیری مسأله در آن مستتر است و نیازی به حلّ عملی برگشت‌پذیری نیست.

مسألهٔ ۳: با استفاده از تعریف حدّ تابع ثابت کنید:

$$\lim_{x\to 2}(x^4+x-1)=17$$

حل: باید ثابت کنیم برای هر $\varepsilon>0$، دست‌کم یک عدد مثبت مانند σ وجود دارد به‌طوری که

اگر $0<|x-2|<\sigma \Rightarrow |x^4+x-1-17|<\varepsilon$

$|x^4+x-18|<\varepsilon$

می‌دانیم عبارت (x^4+x-18) باید تجزیه شود، یکی از دو عامل تجزیه $(x-2)$ است پس این عبارت را بر $(x-2)$ تقسیم می‌کنیم تا تجزیه شود.

$$\begin{array}{l|l} x^4+x-18 & x-2 \\ \hline 0 & x^3+2x^2+4x+9 \end{array}$$

$\Rightarrow |x^4+x-18|<\varepsilon \Rightarrow |(x-2)(x^3+2x^2+4x+9)|<\varepsilon$

$\Rightarrow |x-2|\times|x^3+2x^2+4x+9|<\varepsilon$

در این‌جا فاصلهٔ همسایگی را مطرح می‌کنیم و کران بالای (x^3+2x^2+4x+9) را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} x\to 2 \\ r=1 \end{cases} \Rightarrow 1<x<3$$

می‌خواهیم کران بالای (x^3+2x^2+4x+9) را پیدا کنیم. اگر فرض کنیم $y=x^3+2x^2+4x+9$ آنگاه $y'=3x^2+4x+4$ و معادله $y'=0$ ریشهٔ حقیقی ندارد و تابع y اکیداً صعودی است بنابراین: کران بالای این تابع با شرط $1<x<3$ وقتی پیدامی‌شود که به‌جای x عدد (۳) را قراردهیم. درنتیجه کران‌بالای آن (۶۶) می‌شود:

اگر $|x-2|\times 66<\varepsilon \Rightarrow |x-2|\times|x^3+2x^2+4x+9|<\varepsilon$

$\Rightarrow |x-2|\times 66<\varepsilon \Rightarrow |x-2|<\frac{\varepsilon}{66}$

با مقایسهٔ این رابطه باگزارهٔ مقدّم استلزام منطقی نتیجه می‌شود:

$\sigma = \text{Min}\,\{1 \text{ و } \frac{\varepsilon}{66}\}$

مسأله ۴: با استفاده از تعریف حدّ تابع ثابت کنید:

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\right)=2$$

حل: باید ثابت کنیم، برای هر $\varepsilon>0$ دست‌کم یک عدد مثبت σ وجود دارد به‌طوری‌که

اگر $0<|x-\frac{1}{2}|<\sigma \Rightarrow |\frac{1}{x}-2|<\varepsilon$

$$|\frac{1}{x}-2|<\varepsilon \Rightarrow |\frac{1-2x}{x}|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{-2(x-\frac{1}{2})}{x}\right|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow 2\left|\frac{x-\frac{1}{2}}{x}\right|<\varepsilon \Rightarrow |x-\frac{1}{2}|\times\frac{2}{|x|}<\varepsilon$$

حال همسایگی به مرکز $\frac{1}{2}$ و شعاع $(\frac{1}{4})$ را در نظر می‌گیریم و کران پایین $|x|$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} x\to \frac{1}{2} \\ r=\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}-\frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}<x<\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{4}<|x|<\frac{3}{4}$$

کران پایین $|x|$، $(\frac{1}{4})$ است.

اگر $|x-\frac{1}{2}|\times\frac{2}{\frac{1}{4}}<\varepsilon \Rightarrow |x-\frac{1}{2}|\times\frac{2}{|x|}<\varepsilon$

$$\Rightarrow |x-\frac{1}{2}|\times 8<\varepsilon \Rightarrow |x-\frac{1}{2}|<\frac{\varepsilon}{8}$$

با مقایسهٔ این رابطه باگزارهٔ مقدّم استلزام منطقی نتیجه می‌شود:

$\sigma = \text{Min}\,\{1, \frac{\varepsilon}{8}\}$

مسألهٔ ۵: با استفاده از تعریف حدّ تابع ثابت کنید:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2}{x-2}=7$$

حل: باید ثابت کنیم برای هر $\varepsilon>0$ دست‌کم یک عدد مثبتی مانند σ وجود دارد به‌طوری‌که

اگر $0<|x-3|<\sigma \Rightarrow |\frac{x^2-2}{x-2}-7|<\varepsilon$

$$|\frac{x^۲-۲}{x-۲}-۷|<\varepsilon \Rightarrow |\frac{x^۲-۷x+۱۲}{x-۲}|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow |\frac{(x-۳)(x-۴)}{x-۲}|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow |x-۳|\times\frac{|x-۴|}{|x-۲|}<\varepsilon$$

حال همسایگی به مرکز (۳) و شعاع ($\frac{۱}{۲}$) را در نظر می‌گیریم و کران بالای $|x-۴|$ و کران پایین $|x-۲|$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{cases} x\to۳ \\ r=\frac{۱}{۲}\end{cases} \Rightarrow \frac{۵}{۲}<x<\frac{۷}{۲}$$

$$-۴\quad -۴\quad -۴$$

$$-\frac{۳}{۲}<x-۴<-\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲}<|x-۲|<\frac{۳}{۲}$$

$$\frac{۵}{۲}<x<\frac{۷}{۲}$$

$$-۲\quad -۲\quad -۲$$

$$\frac{۱}{۲}<x-۲<\frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲}<|x-۲|<\frac{۳}{۲}$$

کران بالای $|x-۴|$، $\frac{۳}{۲}$ و کران پایین $|x-۲|$، ($\frac{۱}{۲}$) است. توجه کنید، عبارت $|x-۳|\times\frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۱}{۲}}$ از عبارت $|x-۳|\times\frac{|x-۴|}{|x-۲|}$ بزرگتر است. حال می‌نویسیم:

اگر $|x-۳|\times\frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۱}{۲}}<\varepsilon \Rightarrow |x-۳|\times\frac{|x-۴|}{|x-۲|}<\varepsilon$

$$\Rightarrow |x-۳|\times ۳<\varepsilon \Rightarrow |x-۳|<\frac{\varepsilon}{۳}$$

با مقایسهٔ این رابطه با گزاره مقدّم نتیجه می‌شود: $\sigma = \text{Min}\{\frac{۱}{۲},\frac{\varepsilon}{۳}\}$

مسألهٔ ٦: به کمکِ تعریف حدّ تابع ثابت کنید:

$$\lim_{x\to۱}\sqrt{x^۲-۳x+۳}=۱$$

حل: باید ثابت کنیم، برای هر $\varepsilon>۰$، دست‌کم عدد مثبتی مانند σ وجود دارد به‌طوری که

اگر $۰<|x-۱|<\sigma \Rightarrow |\sqrt{x^۲-۳x+۳}-۱|<\varepsilon$

عبارت داخل قدر مطلق را در مزدوج خودش ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$|\sqrt{x^۲-۳x+۳}-۱|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow |(\sqrt{x^۲-۳x+۳}-۱)\times\frac{\sqrt{x^۲-۳x+۳}+۱}{\sqrt{x^۲-۳x+۳}+۱}|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow |\frac{x^۲-۳x+۲}{\sqrt{x^۲-۳x+۳}+۱}|<\varepsilon \Rightarrow |\frac{(x-۱)(x-۲)}{\underbrace{\sqrt{x^۲-۳x+۳}+۱}_{\text{مثبت است}}}|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow |x-۱|\times\frac{|x-۲|}{\sqrt{x^۲-۳x+۳}+۱}$$

همسایگی به مرکز (۱) و شعاع (۱) را در نظر می‌گیریم. و کران بالای $|x-۲|$ و کران پایین عبارت $(\sqrt{x^۲-۳x+۳}+۱)$ رامحاسبه می‌کنیم.

$$\begin{cases} x\to۱ \\ r=۱\end{cases} \Rightarrow ۰<x<۲$$

$$-۲\quad -۲\quad -۲$$

$$-۲<x-۲<۰ \Rightarrow ۰<|x-۲|<۲$$

عدد (۲) کران بالای $|x-۲|$ است.

در مورد کران پایین $\sqrt{x^۲-۳x+۳}+۱$ باید نکاتی را رعایت کنیم. عبارت $x^۲-۳x+۳$ به ازاء $x=\frac{۳}{۲}$ که در فاصله همسایگی $۰<x<۲$ هم واقع است و جواب مشتق عبارت $(x^۲-۳x+۳)$ است کمترین مقدار را دارد.

$$x=\frac{۳}{۲}\Rightarrow\sqrt{x^۲-۳x+۳}=\sqrt{\frac{۹}{۴}-\frac{۹}{۲}+۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

کران پایین عبارت $\sqrt{x^۲-۳x+۳}+۱$ وقتی $۰<x<۲$ باشد برابر $(\frac{\sqrt{۳}}{۲}+۱)$ است.

توجه کنید که عبارت $|x-۱|\times\frac{۲}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}+۱}$ از عبارت $|x-۱|\times\frac{|x-۲|}{\sqrt{x^۲-۳x+۳}+۱}$ بزرگتر است حال می‌گوییم:

اگر $|x-۱|\times\frac{۲}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}+۱}<\varepsilon\Rightarrow|x-۱|\times\frac{|x-۲|}{\sqrt{x^۲-۳x+۳}+۱}<\varepsilon$

$$\Rightarrow |x-۱|\times\frac{۴}{\sqrt{۳}+۲}<\varepsilon\Rightarrow|x-۱|<\frac{(\sqrt{۳}+۲)\varepsilon}{۲}$$

با مقایسهٔ این رابطه با گزارهٔ مقدّم استلزام منطقی نتیجه می‌گیریم:

$$\sigma=\text{Min}[۱,\frac{(\sqrt{۳}+۲)\varepsilon}{۲}]$$

ادامه دارد

تاریخچهٔ مجلات ریاضی در ایران (۱۲)

گفتیم که مجلهٔ ریاضی یکان به‌طور ماهانه منتشر می‌شد و همین موضوع نشان دهندهٔ کوشش بسیار صاحب امتیاز آن است که مدیر و سردبیر آن نیز بود. در شمارهٔ ۷ این مجله مصاحبه‌ای با **دکتر محسن هشترودی** انجام گرفته است که نظر به معروفیتی که هنوز هم مرحوم هشترودی دارد تمام آن‌را در این‌جا می‌آوریم. در مطالعهٔ این مصاحبه باید در نظر داشته باشیم که اولاً: مصاحبه در متجاوز از سی سال قبل انجام گرفته است و بنابراین بعضی از مطالب آن‌که در آن ایام نو به‌نظر می‌رسیده است؛ اکنون لباس کهنگی بر تن کرده است، ثانیاً: بعضی از پیشنهادهای واقع در آن نه تنها در حال حاضر جامهٔ عمل پوشیده بلکه از آن مراحل نیز فراتر رفته است. ثالثاً: بعضی از دانشمندانی که در آن زمان توسط مرحوم هشترودی به‌عنوان معاصر معرفی شده‌اند، اکنون چهره در نقاب خاک پوشیده‌اند و جای خود را به دانشمندان جوانتر داده‌اند. خود استاد هشترودی نیز از این جهان فانی به‌سرای باقی شتافته است.

ـ جناب استاد، بیوگرافی جناب‌عالی گوشه‌ای از تاریخ ریاضیات معاصر ایران خواهد بود، از این جهت تقاضا دارد مختصری از شرح حال خود، سابقهٔ تحصیلات در ایران و خارج، استادانی که در پیشرفت مقام علمی آن جناب مؤثر بوده‌اند، بیان فرمایید.

ـ در ۲۲ دی ماه ۱۲۸۶ در تبریز متولد شده‌ام. تحصیلات ابتدایی را در مدارس اقدسیه و سیروس و متوسطه را در دارالفنون گذراندم. در سال ۱۳۰۴ امتحان دارالفنون را داده، چند سال تحصیل طب نمودم. سفر اوّل؛ به اروپا رفتم. در مراجعت در دانشسرای عالی (دارالمعلمین مرکزی) که تأسیس شده بود، رشتهٔ ریاضی را انتخاب نمودم و از فارغ‌التحصیلان دومین دورهٔ آن می‌باشم. سفر دوم؛ به فرانسه رفتم، از دانشکدهٔ علوم پاریس درجهٔ لیسانس و در ۱۹۳۷ از دانشگاه سوربن درجهٔ دکترای دولتی اخذ نمودم. در ۱۳۱۵ به ایران مراجعت نموده، با سمت دانشیاری در دانشکدهٔ علوم و دانشسرای عالی به‌تدریس مشغول شدم، در ۱۳۲۰ استاد شدم و بعد از آن علاوه بر سمت استادی دانشگاه دارای مشاغل زیر بوده‌ام: در ۱۳۲۱ رئیس فرهنگ تهران، در ۱۳۳۰ رئیس دانشگاه تبریز، در ۱۳۳۶ یک دورهٔ ریاست دانشکدهٔ علوم. در ۱۳۲۳ ازدواج نموده‌ام و صاحب سه فرزند یک پسر و دو دختر می‌باشم.

از جملهٔ معلمین من: در درجهٔ اول برادرم مرحوم محمدضیاءِ هشترودی که بنیان تعلیم من از اوست. مرحوم غلامحسین رهنما که بیشتر استادان و معلمین به‌طور کلی تربیت شدهٔ او هستند. و از معلمینی که زنده هستند همه در مبنای پرورش من سهیم‌اند. بخصوص آقای عبدالعظیم قریب استاد دانشگاه که مراتب علم و ادب، آن اندازه که دارم، از اوست. مخصوصاً تربیت روحی ما بیشتر محصلین از این رادمرد است. روحاً و اخلاقاً به همهٔ معلمین و مربیان خود مدیون می‌باشم.

آقای کیهان علاوه بر سمت تعلیم، در زمان معاونت دانشگاهی خود، دوران درازی، نظر تربیت را بر من داشتند.

خارج از هیأت تعلیمیّه، بسیاری از توفیقهای من (که خیلی بی‌قدر و ناچیز است) مدیون توجهات رهبر من آقای دکتر سیاسی است که همه می‌دانند در بنیان دانشگاه تهران و بزرگداشت استادان چه حق و وظیفه‌ای بر گردن داشتند که مأجور و ارجمند است و هنوز نیز رهبر و راهنمای جویندگانی مثل من می‌باشند.

از جمله استادان دانشگاهی من: در مرحلهٔ اوّل، مرحوم الی کارتان

بنیان‌گذار ریاضیات جدید که تقریباً همهٔ شؤون ریاضی به او مدیون است و استاد و راهنمای رساله و به‌طور کلی مربی علمی من بود. استادان فعلی دانشگاه پاریس که اغلب شاگردان همین استاد فقیدند از همدوره‌های تحصیلی و راهنمای من بوده‌اند مثل: پروفسور ازرمن در سوربن - پروفسور لیش‌له رووپچ در کلژدوفرانس - استاد فقید پروفسور وایل در پرینستون آمریکا (که در دوره‌ای که در پرینستون به مطالعه مشغول بودم راهنما و معلم من بود) - پروفسور سخوتن در رلفت هلند (که اکنون رئیس مرکز ریاضیات آمستردام است) - پروفسور وینوگرادف و استاد فقید فینی کف، استادان دانشگاه مسکو و چند نفر دیگر.

- رسالهٔ دکترای جناب‌عالی در چه مقوله‌ای تنظیم شده است و استاد راهنما که بوده است؟ چه تألیفات و مقاله‌ها تاکنون از جناب‌عالی چاپ شده است؟

- موضوع رسالهٔ دکترای من راجع به فضاهای تصویری عنصر (نقطه و خط یا صفحه) با التصاقهای هنجاری بوده است و استاد راهنما، همان‌طور که قبلاً بیان شد، استاد فقید الی‌کارتان بود.

از تألیفات و مقاله‌ها آنچه مربوط به ریاضیات است: چندین مقاله راجع به هندسهٔ اینفینی تزیمال - فضاهای عمومی بخصوص فضاهای غیر هلنوم - چند مقاله راجع به هندسهٔ فضاهای عادی و اشکال با مشابهت درونی - چند مقاله راجع به مکانیک تحلیلی و مسیرهای دینامیک - چند مقاله راجع به معادلات دیفرانسیل - تعمیم قضایای اولر در کسرهای مسلسل - به‌کار بستن کسرهای زنجیری در حل معادلات دیفرانسیل و بخصوص تشخیص حالات قابل حل معادلهٔ ریکاتی - قانون جبر دوگانه در مکانیک فضاهای عالی - فضاهای وایل با التصاق قائم - فضاهای سخوتن با انواریانهای ثابت و چند مقالهٔ دیگر. برخی از این مقالات به‌صورت مجموعه‌هایی به زبان فرانسه و از طرف دانشگاه تهران چاپ و منتشر شده است.

- با چه دانشمندان و مشاهیر علمی مکاتبه و مراوده داشته و تاکنون در چند کنگرهٔ بین‌المللی ریاضی‌دانان شرکت فرموده‌اید؟

- تاکنون در چهار کنگرهٔ بین‌المللی ریاضی‌دانان شرکت نموده‌ام: هاروارد، کمبریج آمریکا - آمستردام هلند - ادینبورگ انگلستان - نیس (کنگره ریاضی‌دانان زبان لاتین). علاوه بر شرکت در کنگره‌ها بنا به دعوت مجامع علمی کشورهای مختلف در این مجامع حضور یافته و سخنرانیهایی نموده‌ام از قبیل: دعوت آکادمی علوم شوروی - دعوت آکادمی علوم بخارست - دعوت دانشگاه مسکو و مجدداً دعوت آکادمی علوم شوروی - دعوت انستیتو ریهووت اسرائیل و معارفه با استادان این انستیتو - دعوت کنگرهٔ علمی پاکستان - دعوت دانشکدهٔ علوم پاریس برای ایراد سخنرانی.

با دانشمندانی که مکاتبه و مراوده دارم، علاوه بر استادانی که ذکر شد: پروفسور استرویک (استاد M.I.T آمریکا) - پروفسور زاریسکی‌چرن (شیکاگو) - پروفسورآلبرت (آمریکا) - پروفسور ایشلینسکی(مسکو) - آلکساندرف (لنینگراد) - کالوژنین (کیف) - جواد مقصوداف (باکو) - زگره‌و بومپیانی (ایتالیا) - چند نفر از استادان لندن و منچستر - پروفسور هایموویجی (دوبرادر - بخارست) - موی‌سیل، وران چانو (بخارست) - پروفسور استوی‌لف رئیس آکادمی ریاضی بخارست - دبیر کل آکادمی بخارست.

- دانشمندان ریاضی ایرانی که معروفیت بین‌المللی داشته و در ایران به‌سر نمی‌برند چه کسانند؟

- پروفسور رضا، آمریکا، دانشگاه سیراکوز نیویورک - دکتر خسرو شادان، مرکز اتمی ساکله پاریس - دکتر آوانیسیان، دانشگاه استراسبورگ (اخیراً از ایران رفته است) - دکتر اکبر زاده، پاریس (قرار است بزودی به ایران مراجعت کنند) - دکتر مرآت، مرکز تحقیقات فرانسه (دکتر شادان، دکتر اکبرزاده، دکتر مرآت، و خانم دکتر غزنوی استادان مرکز تحقیقات فرانسه هستند.) در فرانسه چند نفر دیگر هستند که اسامی آنها را فعلاً نمی‌دانم. در آمریکا: دکتر امیر معز، دکتر آبیان (تدریس می‌کنند)، دکتر علی اصغرزاده (استاد قدیمی دانشگاه کلمبیا) و چند نفر دیگر.

- مهمترین تحولی که در عصر حاضر در علوم ریاضی به عمل آمده است چیست و برنامه‌های دانشگاهی ایران تا چه حد با این تحول تطبیق شده است؟

- مهمترین تحول ریاضی، عنوان شدن علوم به‌صورت جدید که بی‌سابقه بوده و در نتیجهٔ اندیشه‌های کانتور و کلاین (مکتب آلمانی) پیش آمده است، مثل توپولوژی جبر مجرد - تئوری نمودارها - تئوری انفرماسیون - و به‌طور کلی نمونه و مُدل ریاضی برای فنون دیگر(ریاضیات عملی) - بخصوص توجه به میکرواستروکتورها که درپیشرفت فیزیک بسیار مؤثر بوده است.

در دانشگاه ایران مقدمات بعضی از این مواد تدریس می‌شود و امسال در نظر است که با مراجعت دکتر اکبرزاده و بعضی استادان دیگر، تدریس آنها تکمیل گردد.

- آیا تدریس ریاضیات جدید در دانشگاه، تجدید نظر در برنامهٔ

ریاضیات متوسطه را ایجاب می‌کند و در صورت لزوم، چه مقام علمی برای این تجدیدنظر صالحتر است؟

ـ برنامهٔ متوسطهٔ ایران باید با برنامه‌های ممالک دیگر هماهنگی داشته باشد و شاید ضرورت داشته باشد محصلین از دورهٔ دوم دبیرستان با مفاهیم جدید آشنایی یابند. جوانان را باید با توجه به احتیاجات علمی کشور و استعدادهای آنان راهنمایی کرد، و در قسمت زبان و ادبیات فارسی و زبان خارجه باید تعلیمات را خیلی ریشه‌دارتر و عمیقتر کرد، به‌طوری که هر محصل یک زبان خارجی را خوب بیاموزد زیرا مطالعه یا تحقیق و حتی تحصیل بی‌دانستن زبان خارجه و اقلاً دو زبان، میسر نیست.

صالحترین مقام برای تجدیدنظر در برنامه، دبیران مجرب فرهنگ می‌باشند که خود در جریان تحول و پیشرفت علوم‌اند و البته استادان دانشگاه نیز باید از تجربیات چندین سالهٔ خود نتیجه‌گیری کرده، نقاط ضعف تعلیمات متوسطه و احتیاجات اساسی دانش‌آموزان را گوشزد کنند.

ـ برای توسعهٔ سطح اطلاعات علمی دانش‌آموزان و آشنایی دبیران با مواد جدیدی که قرار است در برنامه گنجانیده شود چه راهی را پیشنهاد می‌فرمایید؟

ـ بد نیست که مسابقات عمومی در هر رشته بین محصلین برگزار شود و دانش‌آموزان ممتاز شناخته شوند و تشویق شوند و در تحصیل آنان مساعدت شده، حتی برای تحصیلات عالی در رشته‌ای که ممتاز هستند و ورود به دانشگاه، برای آنها تسهیلات لازم فراهم شود. نکتهٔ مهم آن‌که نباید همهٔ توجه را فقط به تهران داشت، چه بسیار محصلین ممتاز که در ولایات هستند و وقتی به تهران می‌آیند امکان اظهار وجود برای آنها فراهم نیست. بهتر آن است که این محصلین در دوران تحصیل شناخته شوند. دانشگاه‌های ولایات را باید مجهز کرد و امر (تشکیل کلاسهای مشترک در شهرستانها) که وزارت فرهنگ در نظر گرفته است تعقیب شود. از دبیران مجرب برای تدریس در این کلاسها استفاده شود و این کاری است که در کشورهای خارجی مورد رعایت است: معلمین و دبیران متوسطه را در دانشگاه‌ها به کارآموزی می‌گمارند که هم مربی جوانان می‌شوند و هم خودشان برای تدریس در دانشگاه آماده می‌گردند و به‌طور خلاصه معلم باید از صنف خودش تربیت شود، استاد خوب دانشگاه همان معلم خوب متوسطه است که راه کمال را طی کرده است. بسیاری از دبیرانی را که با آنها آشنایی دارم، می‌شناسم که مرتب مشغول مطالعه و تحصیل‌اند و بهترین کمک تدریس هم برای قسمتهای عالی، دبیران بوده‌اند چنان‌که در دانشکدهٔ علوم و دانشسرای عالی از وجود آنها استفاده می‌شود.

به محاذات ایجاد مسابقات درس بین محصلین، برای معلمین هم باید یک نوع انجمنها یا سمینارها تشکیل شود تا در پیشرفت اطلاعات علمی به آنان کمک کند و هم یک نوع ارتقای معنوی (و حتی اجتماعی) برای آنان پیش آورد. تشکیل کنگره‌های علمی و شرکت معلمین در آنها واجد کمال اهمیت می‌باشد. در کنگره‌های بین‌المللی ریاضی‌دانان، یک قسمت بحث مربوط به تعلیم ریاضی است که راجع به روشهای تدریس تبادل‌نظر به عمل می‌آید. (گزارشی از کنگرهٔ بین‌المللی ۱۹۶۱ دربارهٔ روش تعلیم ریاضی در شمارهٔ ۳ و ۴ مجله درج شده است.)

ـ با چه مطبوعات علمی جهان همکاری دارید و مهمترین نشریهٔ ریاضی دنیا کدام است؟

ـ در جهان بیش از پانصد مجلهٔ ریاضی منتشر می‌شود که هر کدام در رشته‌ای تخصصی شده‌اند و ذکر نام همهٔ آنها میسر نیست. در ایران باید دانشگاه یا مؤسسه‌های ریاضی که تأسیس می‌شود همهٔ آنها را مشترک شود و در دسترس هر طالبی قرار دهد. مجله‌هایی هست مخصوص بررسی مقالات علمی که خلاصهٔ تمام مقالات علمی مجلات در آنها درج می‌شود و طالب می‌تواند احتیاجات خود را مرتفع کند. برای نمونه؛ معروفترین آنها MATHEMATICAL REVIEWS آمریکاست و در روسیه به زبان روسی مجله‌های معتبر منتشر می‌شود، و در همهٔ این مجله‌ها خلاصهٔ مقالات مجله‌های دیگر را نیز ذکر می‌کنند، در ایران هم اگر مؤسسه‌ای تشکیل شد؛ باید مترجمینی داشته باشد که این مقالات را ترجمه کنند و در اختیار طالبین بگذارند.

[a]

رابطه‌های هم‌ارزی و کلاسهای هم‌ارزی

(برای دانش آموزان سال دوم ریاضی فیزیک و سوّم ریاضی نظام جدید)

● **حمیدرضا امیری**

دیدیم که رابطهٔ R روی مجموعهٔ نا تهی A می‌تواند دارای خواص بازتابی (انعکاسی)، تقارنی، پادتقارنی یا تعدی (ترا‌گذری) باشد. به‌عنوان مثال اگر $A = \{a , b , c , d\}$ و رابطهٔ R را به‌صورتِ:

$$R = \{(a , a) , (b , b) , (c , c) , (d , d) , (a , b) , (b , a)\}$$

تعریف کنیم، مشاهده می‌شود که رابطهٔ R ؛ ۳ خاصیتِ: انعکاسی، تقارنی و تعدی دارد. در حالت کلّی به چنین رابطه‌هایی که هر ۳ خاصیت انعکاسی، تقارنی و تعدی را باهم داشته‌باشند یک رابطهٔ هم‌ارزی می‌گویند. لازم است، یادآوری کنیم که اگر رابطهٔ R ، ۳ خاصیت فوق را دارا بوده و علاوه بر آن مثلاً خاصیت پادتقارنی نیز داشته باشد بازهم یک رابطهٔ هم ارزی نامیده می‌شود.

مثال: رابطهٔ R روی Z به شکل زیر تعریف می‌شود، ثابت کنید این رابطه یک رابطهٔ هم‌ارزی است. (m عددی صحیح و ثابت است)

$$\forall x , y \in Z ، xRy \Leftrightarrow x - y = mk \qquad (k \in z)$$

حل: می‌دانیم صفر مضرب هرعدد است؛ بخصوص $۰ = m \times ۰$ $(k = ۰)$ پس:

۱) $\forall x \in Z ، x - x = ۰ = m \times ۰ \Leftrightarrow xRx$ (خاصیت انعکاسی)

۲) $\forall x , y \in Z ، xRy \Rightarrow x - y = mk_۱$

$$\xRightarrow{\text{طرفین درمنفی ضرب}} y - x = m(-k_۱) \xRightarrow{-k_۱ = k_۲} y - x = mk_۲ \Rightarrow yRx$$

یعنی؛ بافرض این که xRy ثابت کردیم: yRx پس، خاصیت تقارنی نیز برقرار است.

۳) $\forall x , y , z \in Z ، xRy \wedge yRz \Rightarrow x - y = mk_۱ \wedge$

$$y - z = mk_۲ \xRightarrow{\text{طرفین دوتساوی را جمع می‌کنیم}} x - z = m \underbrace{(k_۱ + k_۲)}_{k_۳}$$

$$\Rightarrow x - z = mk_۳ \Rightarrow xRz$$ (خاصیت تعدی دارد)

بنابراین رابطهٔ R یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

(لازم است توضیح دهیم که رابطهٔ R در مثال قبل به رابطهٔ هم نهشتی به پیمانهٔ m معروف است.)

خواصِ انعکاسی، تقارنی و تعدی دریک رابطهٔ هم‌ارزی مانند: R که روی مجموعهٔ A تعریف شده و ارتباط بین این ۳ خاصیت می‌تواند بینِ اعضایی از A که باهم رابطهٔ R داشته باشند، ارتباط خاصی برقرار کند. به‌عنوان مثال اگر درمثال قبل قرار دهیم، $m = ۳$ داریم:

$$\forall x , y \in Z ، xRy \Leftrightarrow x - y = ۳ \qquad (k \in z)$$

درحقیقت اعدادی از Z باهم رابطهٔ R دارند که تقاضل آنها مضرب ۳ باشد مثلاً: $۶R۱۵$ زیرا $۶ - ۱۵ = -۹$ یا $۶ - ۱۵ = ۳ \times (-۳)$

حال اگر a عضوی از Z بوده و همهٔ اعداد صحیح که با a رابطهٔ R دارند (تفاضل هریک از آنها با a مضرب ۳ باشد) را درنظر بگیریم، مجموعه‌ای حاصل می‌شود که آن را **کلاس هم‌ارزیِ a** می‌نامند و بانماد [a] نمایش می‌دهند، درحالت کلّی:

اگر R یک رابطهٔ هم‌ارزی روی مجموعهٔ A باشد و $a \in A$، کلاسِ هم ارزی a را بانماد [a] نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$[a] = \{x \in A \mid x R a\}$$

به‌عبارت دیگر: $x \in [a] \Leftrightarrow xRa$

مثلاً در رابطهٔ $xRy \Leftrightarrow x - y = ۳k$ داریم:

$$[a] = \{x \in Z \mid x R a\} = \{x \in Z \mid x - a = ۳k\}$$

اگر $a = ۱$ در این صورت:

$$[۱] = \{x \in z \mid x - ۱ = ۳k \text{ یا } x = ۳k + ۱\}$$

$\Rightarrow [1] = \{..., -5, -2, 1, 4, 7, ...\}$

حال اگر رابطهٔ هم ارزیِ R روی مجموعهٔ A^2 تعریف‌شده باشد، $(R \subset A^2 \times A^2)$ در این‌صورت‌برای هر $(a, b) \in A^2$ کلاس هم‌ارزیِ (a, b) یا $[(a, b)]$ مطابق تعریفِ اصلی به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$[(a, b)] = \{(x, y) \in A^2 \mid (x, y) R (a, b)\}$$

مثال: رابطهٔ هم‌ارزیِ R روی IR^2 به‌صورت زیر تعریف شده است اوّلاً، نـوعِ نـمودار کلاسهای هم ارزی را مشخص کنید. ثانیاً، $[(1, \sqrt{2})]$ را به صورت مجموعه‌ای تشکیل دهید.

$$\forall (a, b), (c,d) \in IR^2, (a, b) R (c,d) \Leftrightarrow a + d = b + c$$

حل: بانوشتن یک کلاس هم ارزیِ دلخواه مانند : $[(a, b)]$ نمودار هرکلاسِ هم ارزی مشخص می‌شود:

$$[(a, b)] = \{(x, y) \in IR^2, (x, y)R (a, b)\}$$
$$= \{(x, y) \in IR^2 \mid x + b = y + a\}$$
$$= \{(x, y) \in IR^2 \mid y = x + (b - a)\}$$
$$\Rightarrow [(1, \sqrt{2})] = \{(x, y) \in IR^2 \mid y = x + (\sqrt{2} - 1)\}$$

و همان‌طور که مشاهده می‌شود نمودار دسته‌های هم ارزی این رابطه خطوطی به شکل $y = x + (b - a)$ است که می‌بینیم a و b نقشی در ضریب زاویه این خطوط نداشته و فقط عرض از مبدأ را تعیین می‌کنند یعنی؛ نمودار همهٔ کلاسهای هم ارزی خطوطی موازی باهم می‌باشند.

مثال: رابطهٔ R را روی مجموعهٔ $A = \{2, 4, 6, 8\}$ به شکل زیر تعریف می‌کنیم :

$$R = \{(2, 2), (4, 4), (6, 6), (8, 8), (4, 6), (6, 4)\}$$

واضح است که رابطهٔ R یک رابطهٔ هم ارزی است.

حال کلاسهای هم ارزیِ این رابطه را تشکیل می‌دهیم:

$$[2] = \{x \in A \mid xR2\} = \{2\}$$
$$[4] = \{x \in A \mid xR4\} = \{4, 6\}$$
$$[6] = \{x \in A \mid xR6\} = \{6, 4\}$$
$$[8] = \{x \in A \mid xR8\} = \{8\}$$

همان‌طور که مشاهده مـی‌کنید: اولاً، هیچ‌کدام از کلاسهای هم ارزیِ این رابطهٔ هم ارزی تهی نیست. ثانیاً، کلاسهای هم ارزی یا از هم جدا هستند و عضو مشترکی ندارند و یا این که مساوی یکدیگرند ($[4] = [6]$) و ثالثاً، اجتماع کلاسهای هم ارزیِ رابطهٔ R، برابر با مجموعهٔ A است یعنی:

$$[2] \cup [4] \cup [8] = \{2\} \cup \{4, 6\} \cup \{8\} = \{2, 4, 6, 8\} = A$$

دراین‌جا خواصی را که راجع به کلاسهای هم ارزی در مثال قبل مشاهده کردید در حالت کلّی و به‌عنوان یک قضیّه مطرح و اثبات می‌کنیم.

قضیّه: اگر رابطهٔ R روی مجموعهٔ ناتهی A یک رابطهٔ هم ارزی باشد، در این صورت:

الف) کلاسهای هم ارزیِ رابطهٔ R، ناتهی‌اند.

ب) اگر $b \in [a]$ آنگاه $[a] = [b]$.

ج) اجتماع همهٔ کلاسهای هم ارزیِ رابطهٔ R، مساوی با مجموعهٔ A است.

اثبات:

الف) فرض کنیم: $[a]$ یک کلاس هم‌ارزیِ دلخواه باشد، چون رابطهٔ R هم‌ارزی است پس خاصیت انعکاسی دارد لذا aRa بنابراین طبق تعریف کلاسهای هم‌ارزی $a \in [a]$ پس، $[a] \neq \phi$.

ب) برای این‌که ثابت کنیم $[a] = [b]$، (بافرض $b \in [a]$) کافی است ثابت کنیم، $[a] \subset [b]$ و $[b] \subset [a]$.

$$x \in [a] \Rightarrow xRa \xRightarrow{b \in [a]} xRa \wedge aRb \xRightarrow{\text{متعدی‌است } R} xRb$$ فرض کنیم

$$\Rightarrow x \in [b] \Rightarrow [a] \subset [b] \qquad (1)$$

حال اگر: $$x \in [b] \Rightarrow xRb \xRightarrow{b \in [a]} xRb \wedge bRa \xRightarrow{\text{متعدی‌است } R} xRa$$

$$\Rightarrow x \in [a] \Rightarrow [b] \subset [a] \qquad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow [a] = [b]$$

تذکر: قسمت (ب) نشان می‌دهد که هر دو کلاس هم ارزی یا مساوی یکدیگرند و یا هیچ اشتراکی ندارند.

ج) اجتماع همهٔ کلاسهای هم ارزی را با E نشان می‌دهیم. چون طبق تعریف کلاسهای هم ارزی، هر کلاسِ هم ارزی زیر مجموعهٔ A است پس اجتماع این کلاسهای هم ارزی یعنی؛ E نیز زیر مجموعهٔ A است بنابراین؛ $E \subseteq A$. حال اگر فرض کنیم: $x \in A$ واضح است که $x \in [x]$، پس هر عضو از A دریکی از کلاسهای هم ارزیِ رابطهٔ R وجود دارد و بنابراین در اجتماع کلاسها یعنی؛ E وجود خواهد داشت یعنی؛ $A \subseteq E$ و در کلّ ثابت شد، $A = E$.

مثال: مجموعهٔ $A = \{x \in IR \mid 0 \leq x \leq 1\}$ را درنظر می‌گیریم و رابطهٔ R را روی A^2 به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\forall (x, y), (z, t) \in A^2, (x, y) R (z, t) \Leftrightarrow y = t$$

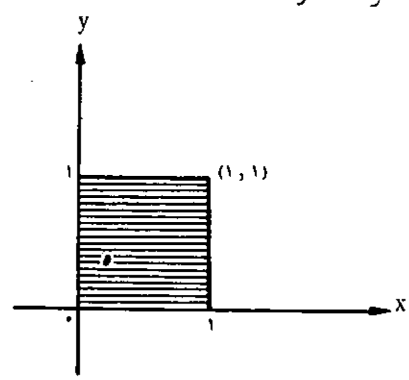
که: $A^2 = A \times A = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

(مجموعهٔ $\{x \in IR \mid 0 \le x \le 1\} = A$ را به شکل $A = [0 , 1]$ نیز نشان می‌دهند.)

اولاً: براحتی می‌توان ثابت کرد که رابطهٔ R یک رابطهٔ هم‌ارزی است (اثبات به عهدهٔ خواننده). ثانیاً: همان طور که مشاهده می‌کنید؛ مجموعهٔ A^2 یعنی $[0,1] \times [0,1]$ سطح مربع واحد را نشان می‌دهد و اگر بخواهیم نمودار هر کلاس هم ارزیِ این رابطه را بشناسیم، داریم:

$$[(a , b)] = \{(x , y) \in A^2 \mid (x , y) \; R \; (a , b)\}$$
$$= \{(x , y) \in A^2 \mid y = b\}$$

یعنی: نمودار هر کلاس هم ارزی پاره خطی است در داخل سطح مربع واحد و موازی با محور x ها که هیچ کدام از این پاره‌خطها یکدیگر را قطع نمی‌کنند! زیرا، هریک از این پاره‌خطها به یک کلاس هم‌ارزی تعلق دارد و می‌دانیم (ثابت شده) که کلاسهای هم ارزی عضو مشترک ندارند.



مثال: رابطهٔ R را روی IR^2 به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\forall (x , y) , (z , t) \in IR^2 ، (x,y) \; R \; (z,t) \Leftrightarrow y - x^2 = t - z^2$$

الف) ثابت کنید، R رابطهٔ هم ارزی است.

ب) نمودار هرکلاس هم ارزی در این رابطه چه شکلی را در صفحهٔ مختصات معین می‌کند؟

اثبات:

اثبات ، قسمت (الف) به‌عهدهٔ خواننده.

ب) برای مشخص کردن نمودار هرکلاس هم ارزی یک کلاس هم‌ارزی دلخواه مانند: $[(a , b)]$ را درنظر می‌گیریم:

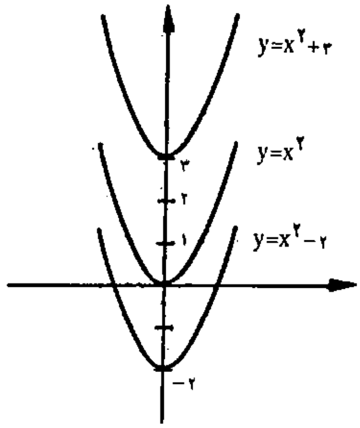
$$[(a , b)] = \{(x , y) \in IR^2 \mid (x , y) \; R \; (a , b)\}$$
$$= \{(x , y) \in IR^2 \mid y - x^2 = b - a^2\}$$
$$= \{(x , y) \in IR^2 \mid y = x^2 + (b - a^2)\}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید نمودارهای کلاسهای هم ارزیِ این رابطه سهمیهایی به شکل $y = x^2 + (b - a^2)$ است مثلاً، نمودارِ $[(1 , 2)]$ سهمیِ $y = x^2 + 1$ است.

$[(1 , 1)] \rightarrow y = x^2$

$[(0 , 3)] \rightarrow y = x^2 + 3$

$[(-1 , -1)] \rightarrow y = x^2 - 2$



در این‌جا به تعریف **افراز** یک مجموعه می‌پردازیم، هرگاه A یک مجموعهٔ ناتهی بوده و بتوانیم تعدادی متناهی از زیر مجموعه‌های متمایز A مانند، A_1 ، A_2 ، ... ، A_n بیابیم به قسمی که اوّلاً، هریک از زیر مجموعه‌ها ناتهی باشند. ثانیاً، هیچ دوتایی از آنها باهم اشتراکی نداشته باشند (دو به دو از هم جدا باشند) و ثالثاً، اجتماع این زیرمجموعه‌ها برابر باخودِ مجموعهٔ A شود، در این صورت می‌گوییم: مجموعه‌هایِ A_1 ، A_2 ، ... ، A_n مجموعه‌های افراز کنندهٔ مجموعهٔ A بوده و مجموعهٔ $E = \{A_1, A_2, \ldots , A_n\}$ یک افراز n عضوی از مجموعهٔ A است.

تبصره: در حالتی که $n = 1$ یعنی E یک افراز یک عضوی از مجموعهٔ A باشد، داریم: $E = \{A\}$. حال اگر بخواهیم تعریف افراز یک مجموعه را توسط نمادهای ریاضی یا به زبان ریاضی بیان کنیم می‌گوییم:

مجموعهٔ $E = \{A_1, A_2, \ldots , A_n\}$ یک افراز n عضوی برای مجموعهٔ ناتهیِ A است هرگاه،

۱) $\forall i ، A_i \neq \phi \qquad 1 \le i \le n$

۲) $\forall i , j ، A_i \cap A_j = \phi \qquad 1 \le i , j \le n$

۳) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$

مثال: یک افراز ۴-عضوی، یک افراز ۳ عضوی و یک افراز ۲ عضوی برای مجموعهٔ $A = \{1 , 2 , 3 , 4\}$ بنویسید.

حل:

۱. اگر فرض کنیم: $A_۱ = \{۱\}\ ,A_۲=\{۲\}\ ,\ A_۳=\{۳\}\ ,\ A_۴=\{۴\}$
در این صورت: $E_۱ = \{A_۱\ ,\ A_۲\ ,\ A_۳\ ,\ A_۴\}$ یک افراز ۴ عضوی برای A است.

۲. اگر فرض کنیم: $B_۱ = \{۱\ ,\ ۴\}$ و $B_۲ = \{۲\}$ و $B_۳ = \{۳\}$
دراین‌صورت $E_۲ = \{B_۱\ ,\ B_۲\ ,\ B_۳\}$ یک افراز ۳ عضوی برای A است.

۳. و بالاخره اگر فرض کنیم: $C_۱ = \{۱\ ,\ ۲\}$ و $C_۲ = \{۳\ ,\ ۴\}$
در این صورت $E_۳ = \{C_۱\ ,\ C_۲\}$ یک افرازِ ۲ عضوی از A است.

مثال: برای مجموعهٔ اعداد حقیقی می‌توان به‌صورت $E = \{IR^+\ ,\ IR^-\ ,\ \{۰\}\}$ یک افراز ۳ عضوی نوشت.

مثال: اگر مجموعهٔ اعداد صحیح زوج را با Z_E و مجموعهٔ اعداد صحیح‌فرد را با Z_O نمایش‌دهیم، دراین‌صورت، $E = \{Z_E\ ,\ Z_O\}$ یک افراز ۲ عضوی برای Z است.

حال با توجه به قضیّه‌ای که راجع به کلاسهای هم ارزی یک رابطهٔ هم‌ارزی مانند R اثبات شد و باتوجه به تعریف افراز؛ بدیهی است که:

اگر R رابطه‌ای هم‌ارزی روی مجموعهٔ ناتهیِ A باشد، مجموعهٔ کلاسهایِ هم‌ارزیِ رابطهٔ R یک افراز برای مجموعهٔ A است. (طبق قضیّهٔ کلاسهای هم‌ارزی هر سه خاصیتِ افراز را دارند.)

مثال: دیدیم که رابطهٔ $xRy \Leftrightarrow x - y = ۳k$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی z بوده و کلاسهای هم‌ارزیِ این رابطه به قرار زیر ند:

$$[۰] = \{\ ...\ ,-۶\ ,-۳\ ,\ ۰\ ,\ ۳\ ,\ ۶\ ,\ ...\ \}$$
$$[۱] = \{\ ...\ ,-۵\ ,-۲\ ,\ ۱\ ,\ ۴\ ,\ ۷\ ,\ ...\ \}$$
$$[۲] = \{\ ...\ ,-۴\ ,-۱\ ,\ ۲\ ,\ ۵\ ,\ ۸\ ,\ ...\ \}$$

و واضح است که $[۰] \cup [۱] \cup [۲] = Z$ یعنی: $E = \{[۰]\ ,\ [۱]\ ,\ [۲]\}$ یک افراز Z است.

پس ثابت شد کلاسهای هم‌ارزی هر رابطهٔ هم‌ارزی مانند R روی مجموعهٔ A، یک افراز برای A است.

حال این سؤال پیش می‌آید که آیا عکس مطلب فوق نیز برقرار است؟ یعنی آیا به ازای هر افراز برای A، رابطه‌ای هم‌ارزی روی A می‌توان تعریف کرد که این افراز همان کلاسهای هم‌ارزی آن رابطه باشند؟ جواب مثبت است که این سؤال و جواب آن را به‌صورتِ مسأله‌ای بیان و توضیح می‌دهیم.

مسأله: هرگاه $E = \{A_۱\ ,\ A_۲\ ,\ ...\ A_n\}$ یک افراز برای مجموعهٔ A باشد و رابطهٔ R را روی مجموعهٔ A به‌صورت زیر تعریف کنیم:

$$\forall x\ ,\ y \in A\ ،xRy \iff \exists A_i \in E\ ،\ x\ ,\ y \in A_i$$

ثابت کنید: رابطهٔ R هم‌ارزی بوده و سپس نشان دهید مجموعهٔ کلاسهای هم ارزیِ رابطهٔ R، برابر است با E.

اثبات: ابتدا ثابت می‌کنیم که رابطهٔ R روی A، هم‌ارزی است.

الف) چون A_i ها مجموعهٔ A را افراز می‌کنند، پس: هر $x \in A$ می‌بایست دریکی و فقط یک A_i باشد، بنابراین: xRx.

ب) باتوجه به تعریف رابطهٔ R داریم:

$$\text{اگر} \to xRy \Rightarrow \exists A_i \in E\ ،x\ ,\ y \in A_i \Rightarrow y,x \in A_i \Rightarrow yRx$$

ج) برای اثبات خاصیت تعدی فرض می‌کنیم: xRy و yRz و ثابت می‌کنیم xRz.

$$xRy \Rightarrow \exists A_i \in E\ ،x\ ,\ y \in A_i \qquad (۱)$$
$$yRz \Rightarrow \exists A_j \in E\ ،y\ ,\ z\ E\ A_j \qquad (۲)$$

بنابراین y، هم در A_i و هم در A_j بوده و طبق تعریف افراز چون A_i و A_j جزء مجموعه‌های افراز کننده هستند، نمی‌توانند عضو مشترک داشته‌باشند مگر آن که $A_i = A_j$؛ در این صورت، باتوجه به رابطه‌های (۱) و (۲) داریم، $x\ ,\ z \in A_i$ و طبق تعریفِ رابطهٔ R، xRz.

حال ثابت می‌کنیم مجموعهٔ کلاسهای هم‌ارزیِ رابطهٔ R یعنی؛ $F = \{[a]\ |\ a \in A\}$ همان مجموعهٔ E است و یا به عبارت دیگر هر A_i یکی از کلاسهای هم‌ارزیِ رابطهٔ R است.

فرض کنیم: [x] یک کلاس هم‌ارزیِ دلخواه از رابطهٔ R باشد بنابراین:

$$[x] = \{a \in A|\ xRa\} = \{a \in A|\exists A_i \in E\ ،x\ ,\ a \in A_i\} = A_i$$

(چون A_k ها دو به دو عضو مشترکی ندارند لذا $x \in A_i$ نمی‌تواند در هیچ‌یک از $A_{k \neq i}$ ها باشد) یعنی هر کلاس هم‌ارزیِ رابطهٔ R یکی از A_i ها است. حال اگر فرض کنیم: $A_i \in E$، طبق تعریف افراز باید $A_i \neq \phi$ پس:

$$\exists x \in A \text{ و } x \in A_i$$

وچون‌طبق‌تعریف‌رابطهٔ R هرعضو A_i با x رابطه‌دارد، پس $A_i = [x]$.

روش عملی یافتن رابطهٔ هم‌ارزی R با در دست داشتن افرازی از A

طبق مسألهٔ قبل دیدیم که اگر $E = \{A_۱, A_۲, \dots, A_n\}$ یک افراز برای مجموعهٔ A باشد رابطهٔ R که به‌صورتِ $(xRy \Leftrightarrow \exists A_i \in E ، x , y \in A_i)$ تعریف می‌شود رابطه‌ای هم‌ارزی روی A بوده و A_iها همان کلاسهای هم‌ارزیِ این رابطه خواهندبود، از طرفی می‌دانیم؛ $R \subseteq A \times A$ یعنی، رابطهٔ R مجموعه‌ای است از زوجهای مرتب که طبق تعریف رابطهٔ R در بالا زوج مرتبِ (x , y) زمانی در R است که هر دو مؤلفهٔ آن متعلق به یکی از مجموعه‌های افرازکننده باشند، مثلاً : $x , y \in A_k$ پس: طبق تعریف حاصل‌ضرب، $(x , y) \in A_k \times A_k$ ، پس: رابطهٔ R را به صورت زیر نیز می‌توان تعریف کرد:

$$\forall x , y \in A ، xRy \Leftrightarrow \exists A_i \in E ، (x , y) \in A_i \times A_i$$

این تعریف ما را به این واقعیت می‌رساند که هرگاه بخواهیم رابطهٔ R را به‌صورت مجموعه‌ای از زوجهای مرتب داشته باشیم؛ کافی است، هریک از مجموعه‌های افراز کننده را در خودش ضرب کنیم و اجتماعِ مجموعه‌هایِ به‌دست آمده همان رابطهٔ R خواهدبود. به مثال زیر توجه کنید:

مثال: هرگاه $E = \{\{۱\} , \{۲,۳\} , \{۴,۵\}\}$ یک افراز برای مجموعهٔ $A = \{۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵\}$ باشد رابطه‌ای هم‌ارزی چون R ، روی A بیابید و نشان دهید که هریک از اعضای E یکی از کلاسهای هم‌ارزی این رابطه است.

$$E_۱ = \{۱\} \times \{۱\} = \{(۱ , ۱)\}$$

$$E_۲ = \{۲ , ۳\} \times \{۲,۳\} = \{(۲,۲) , (۲,۳) , (۳,۲) (۳,۳)\}$$

$$E_۳ = \{۴, ۵\} \times \{۴,۵\} = \{(۴,۴), (۴,۵), (۵ ,۴), (۵ ,۵)\}$$

$$R = E_۱ \cup E_۲ \cup E_۳ \Rightarrow$$

$$R = \{(۱ , ۱) , (۲ , ۲) , (۲ , ۳) , (۳ , ۲) , (۳ , ۳) , (۴ , ۴) , (۴ , ۵) , (۵ , ۴) , (۵ , ۵)\}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید؛ R رابطه‌ای هم‌ارزی بوده و اگر کلاسهای هم‌ارزیِ این رابطه را تشکیل دهیم؛ خواهیم داشت:

$$[۱] = \{۱\}$$
$$[۲] = \{۲ , ۳\} = [۳]$$
$$[۴] = \{۴ , ۵\} = [۵]$$

ادب ریاضی

ریاضی‌دان، بعدازاین‌که قضایا اثبات شدند، در جستجوی کاربرد آنها در طبیعت می‌افتد، و مسائل را حل می‌کند و جوابهای عددی سؤالاتی را که در طول تحقیقاتش مطرح شده‌اند، به‌دست می‌آورد.

تفریح اندیشه ۲

اگر عمل تعریف شده با $a . b = a^b + b$ را تعریف کند، ۳.(۱.۲) را بیابید.

جواب در صفحهٔ ۳۹

اثبات نادرستی

«ادامهٔ منطق ریاضی»

● غلامرضا یاسی‌پور

□ دنبالهٔ مطالب قبل

مثال دیگر عبارت است از:

D	P
بعضی ایرانیها	مسلمانند.
	S
بعضی ایرانیها	باهوشند

بنابراین، بعضی مسلمانها باهوشند.

که به‌صورت زیر علامتی می‌شود:

$(\exists x)[\, Dx \wedge Px \,]$

$(\exists x)[\, Dx \wedge Sx \,]$

$\therefore\ (\exists x)[\, Px \wedge Sx \,]$

این استدلال به ازای مُدلی شامل تنها یک فرد a منطقاً معادل:

$Da \wedge Pa$

$Da \wedge Sa$

$\therefore\ Pa \wedge Sa$

است‌که درست‌است. اما به‌ازای مدلی‌شامل‌دو فرد a و b معادل‌است با:

$(Da \wedge Pa) \vee (Db \wedge Pb)$

$(Da \wedge Sa) \vee (Db \wedge Sb)$

$\therefore\ (Pa \wedge Sa) \vee (Pb \wedge Sb)$

که با نسبت دادن ارزش راستی T به «Da»، «Db»، «Pa»، «Sb» و ارزش راستی F به «Pb» و «Sa» ثابت می‌شود که نادرست است. در این‌جا نیز استدلال اصلی نادرست است، زیرا مدلی وجود دارد که به ازای آن منطقاً معادل یک استدلال تابع ارزش نادرست است.

استدلال نادرست شامل سورها می‌تواند به ازای هر مدل دارای کمتر از k فرد درست باشد، هرچند که باید به ازای هر مدل شامل k یا بیشتر از k فرد نادرست باشد. در نتیجه دراستفاده ازاین روش برای اثبات نادرستی استدلالی شامل سورها ممکن است لازم شود که مُدلهای بزرگتر و بزرگتر را بررسی کنیم، و طبیعتاً این سؤال مطرح می‌شود که: در سعی در اثبات نادرستی استدلالی از این نوع، مدلی با چه بزرگی را باید بررسی کنیم؟ برای این سؤال پاسخی از لحاظ تئوری رضایت بخش به‌دست آمده است. به این ترتیب که اگر استدلالی شامل n علامت محمولی مختلف باشد در این صورت اگر به ازای مدلی شامل ۲^{n} فرد درست باشد، به ازای هر مدل درست است، یا از لحاظ عمومی درست است. این نتیجه تنها به ازای توابع گزاره‌ای یک متغیری برقرار است. و در مورد محمولات نسبی صادق نیست. این جواب گرچه از لحاظ تئوری رضایت‌بخش است از لحاظ عملی چندان مفید نیست، چه اگر می‌خواستیم در مورد درستی یا نادرستی هر یک از استدلالات مورد بحث قرار گرفته در این بخش، حالت از لحاظ تئوری قطعی را بررسی کنیم بایستی مُدلهای شامل هشت فرد را بررسی می‌کردیم.

□ قضایای عمومی چندگانه

تا کنون توجه‌مان را به قضایای عمومی شامل تنها یک سور معطوف کرده‌ایم. قضیّهٔ عمومیی که دقیقاً شامل یک سور باشد به قضیّهٔ عمومی یگانه[1] موسوم است. اکنون به قضایای عمومی چندگانه[2] که شامل دو یا بیشتر از دو سورند، می‌پردازیم. در کاربردمان از این عبارت، هر گزارهٔ مرکب که مؤلفه‌هایش قضایای عمومی‌اند یک

قضیهٔ عمومی چندگانه به‌حساب می‌آید. به‌عنوان مثال، شرطی «اگر تمام سگها گوشتخوار باشند در این صورت بعضی حیوانات گوشتخوارند» که به‌صورت:

$$(x)[Dx \Rightarrow Cx] \Rightarrow (\exists x)[Ax \wedge Cx]$$

علامتی می‌شود، یک قضیهٔ عمومی چندگانه است. قضایای عمومی چندگانهٔ دیگر مرکبترند و به علامت‌نویسی پیچیده‌تری نیاز دارند. برای توسعهٔ علامت نویسی جدید باید بار دیگر به مفهوم تابع گزاره‌ای بازگردیم.

جمیع توابع گزاره‌ای که تاکنون مورد بررسی قرار گرفته‌اند به‌عنوان مثالهای جانشین، یا قضایای ساده یا ترکیبات تابع ارزشی قضایای فردی دارندهٔ موضوعات یکسان را دارا بوده‌اند. اگر گزارهٔ مرکبی را که مؤلفه‌هایش قضایای سادهٔ دارای موضوعات مختلف، چون «$Fa \wedge Gb$» می‌باشند، مورد رسیدگی قرار دهیم؛ می‌توانیم آن را به‌عنوان مثال جانشین تابع گزاره‌ای «$Fx \wedge Gx$» یا تابع گزاره‌ای «$Fa \wedge Gx$» در نظر بگیریم. ملاحظه می‌کنیم که بعضی توابع گزاره‌ای می‌توانند شامل قضایای فردی به‌صورت اجزایشان باشند. و در صورتی‌که گزارهٔ مرکبی را که در آن یک مؤلفه قضیهٔ عمومی است و مؤلفهٔ دیگر قضیهٔ فردی، چون «اگر تمام سگها گوشتخوارند، در این صورت راور «Rover» گوشتخوار است» که به‌صورت «$(x)[Dx \Rightarrow Cx] \Rightarrow Cr$» علامتی می‌شود، بررسی کنیم، می‌توانیم آن‌را به‌صورت مثال جانشین تابع گزاره‌ای:

$$(x)[Dx \Rightarrow Cx] \Rightarrow Cx$$

در نظر بگیریم. به این ترتیب ملاحظه می‌کنیم که بعضی توابع گزاره‌ای می‌توانند شامل قضایای عمومی به‌صورت اجزایشان باشند.

در این مرحله دو عبارت فنی جدید را می‌توان به‌طور کامل معرفی کرد. ظهور متغیر «x» را که در سور عمومی یا وجودی «(x)» یا «$(\exists x)$» ظاهر نمی‌شود یا در برد آن قرار نمی‌گیرد؛ ظهور آزاد [3] آن متغیر می‌نامیم. از طرف دیگر، ظهور متغیر «x» که یا قسمتی از یک سور است یا در برد سور «(x)» یا «$(\exists x)$» قرار می‌گیرد ظهور مقیّد [4] آن متغیر نامیده می‌شود. [5] به این ترتیب در عبارت:

$$(x)\ [Dx \Rightarrow Cx] \Rightarrow Cx$$

ظهور اول متغیر «x» جزئی از یک سور است و بنابراین مقید در نظر گرفته می‌شود. ظهورات دوم و سوم نیز ظهورات مقیدند، در صورتی‌که ظهور چهارم ظهوری آزاد است. به این ترتیب ملاحظه می‌کنیم که توابع گزاره‌ای می‌توانند شامل ظهور آزاد و مقید متغیرات باشند. از طرف دیگر، جمیع ظهورات متغیرات در قضایا باید مقید باشند، زیرا هر قضیه‌ای باید راست یا دروغ باشد.

هر تابع گزاره‌ای باید دست‌کم یک ظهور آزاد از یک متغیر را در بر داشته باشد، در حالی‌که هیچ قضیه‌ای نمی‌تواند شامل ظهور آزاد متغیری باشد.

مرجع: Symbolic Logic
Irving M. Copi

یادداشتها:

1. singly general proposition
2. multiply general propositions
3. free occurrence
4. bound occurrence

۵. به طریق دیگر، اصطلاحات کمتر متداول متغیرهای «حقیقی» «real variables» در مورد متغیرهای آزاد و متغیرهای «ظاهری» «apparent variables» در مورد متغیرهای مقید به‌کار می‌رود.

تفریح اندیشه ۳

مجموع یک عدد طبیعی و چهار عدد طبیعی متوالی بعدی آن ۱۰۵ است. حاصل تفاضل میانگین این اعداد را از میانهٔ آنها بیابید.

جواب در صفحهٔ ۳۹

آموزش ترجمه متون ریاضی (۹)

● حمید رضاامیری

3. Subgroups

Let H be a non-void set and $*$ be a binary composition on H; let A be a non-void subset of H. We recall that A is said to be *closed subset* of H with respect to the binary composition $*$, if for each pair $a, b \in A$, $a * b \in A$. In that case the mapping $f: A \times A \rightarrow A$ in which $f(a, b) = a * b$ is called a *binary composition on A induced by* $*$.

Let G be a group and let A be a non-void subset of G. It may happen that A is closed with respect to the binary composition on G and A itself is a group under the induced composition. Such a situation occurs quite often. This leads to the following concept.

۳. زیرگروهها

فرض کنیم H مجموعه‌ای ناتهی بوده و * یک ترکیب دوتایی روی H؛ و فرض کنیم A زیرمجموعه‌ای ناتهی از H باشد. یادآوری می‌کنیم که مجموعهٔ A یک زیر مجموعهٔ بسته از مجموعهٔ H، نسبت به ترکیب دوتایی * گفته می‌شود، اگر برای هر دو عضو $b \in A$ و a داشته باشیم، $a * b \in A$.

در آن‌حالت‌نگاشتِ $f: A \times A \rightarrow A$ که در آن $f(a, b) = a * b$ یک ترکیب دوتاییِ القاء شده توسط *، روی A نامیده می‌شود.

فرض کنیم G یک گروه بوده و A یک زیرمجموعهٔ ناتهی از G باشد. ممکن است این امر رُخ دهد که A نسبت به ترکیب دوتاییِ تعریف شده روی G بسته بوده و خودِ A تحت القایِ این ترکیب یک گروه باشد. در چنین صورتی اغلب یک حالت مناسب رخ می‌دهد. این موضوع ما را به مفهوم زیر هدایت می‌کند.

Definition 2.14. Subgroup.

Let G be a group under a binary composition $*$ and let H be a non-void subset of G. Then H is called a *subgroup* of G if it satisfies the following:

(1) H is closed with respect to $*$. (Closure Property).

(2) H is a group under the binary composition of H induced by $*$.

Let e be the identity of a group G. Then trivially G and $\{e\}$ are subgroups of G. These subgroups are called *Improper subgroups* of G. A subgroup H of a group G, is called a *Proper subgroup* if it is different from G as well as from $\{e\}$.

If G is a group and H is a subgroup of G, for the sake of convenience we shall usually denote the induced binary composition of H by the same symbol which denotes the binary composition on G.

تعریف ۲.۱۴. زیرگروه

فرض کنیم G تحت ترکیبِ دوتاییِ * یک گروه بوده و H زیرمجموعه‌ای ناتهی از G باشد. در این صورت H را یک زیرگروه G می‌نامیم اگر در شرایط زیر صدق کند:

(۱) H نسبت به ترکیب دوتاییِ * بسته باشد (خاصیت بسته بودن).

(۲) H تحت ترکیب دوتاییِ القاء شده توسط * یک گروه باشد.

فرض کنیم e عنصر همانیِ (عضو خنثی) گروه G باشد. در این صورت بدیهی است که G و {e} زیرگروههای G می‌باشند. این زیرگروهها زیرگروههای ناسَرهِ G نامیده می‌شوند. زیرگروهی چون H از گروه G زیرگروه سَره نامیده می‌شود، هرگاه با G و {e} اختلاف داشته باشد ($H \neq e$, $H \neq G$).

اگر G یک گروه و H زیرگروهِ G باشد، برای راحتی، جهت نمایش ترکیبِ دوتایی H از نمادی شبیه به نمادی که برای نمایش ترکیب دوتایی روی G به‌کار می‌رود، استفاده می‌کنیم.

Examples of Subgroups

EXAMPLE 16. The set E of all even integers is a subgroup of additive group $\mathbf{Z}$.

EXAMPLE 17. The set $\mathbf{Z}$ is a subgroup of the additive group $\mathbf{Q}$.

EXAMPLE 18. Let $G=\{1, -1, i, -i\}$, $H=\{1, -1\}$ where $i^2=-1$.

Then G is a group under usual multiplication of complex numbers and H is a subgroup of G.

مثالهایی از زیرگروهها

مثال ۱۶. مجموعهٔ E شامل همهٔ اعداد صحیحِ زوج یک زیرگروه از گروه جمعیِ Z است.

مثال ۱۷. مجموعهٔ Z یک زیرگروه از گروه جمعی Q است.

مثال ۱۸. فرض کنیم $G = \{1, -1, i, -i\}$ و $H = \{1, -1\}$ که $i^2 = -1$.

در این صورت G تحت ضربِ معمولیِ اعداد مختلط یک گروه بوده و H زیرگروهی از G می‌باشد.

EXAMPLE 19. Let G be the multiplicative group of all non-singular 2×2 matrices over complex numbers. Let H be the set of the following eight matrices

$$\pm\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \quad \pm\begin{bmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{bmatrix}, \quad \pm\begin{bmatrix}0 & i\\ i & 0\end{bmatrix}, \quad \pm\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

Clearly $H \subseteq G$. As was claimed in Example 8, H is a group under matrix mul iplication. Hence H is a subgroup of G.

مثال ۱۹. فرض کنیم G گروه ضربیِ شامل همهٔ ماتریسهای نامنفرد ۲ × ۲ روی اعداد مختلط باشد. فرض کنیم H مجموعهٔ شاملِ هشت ماتریسِ زیر:

$$\pm\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \pm\begin{bmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{bmatrix}, \pm\begin{bmatrix}0 & i\\ i & 0\end{bmatrix}, \pm\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

واضح است که $H \subseteq G$. برطبق آنچه در مثال ۸ ثابت شد، H تحت ضرب ماتریسی یک گروه است. بنابراین H یک زیرگروه G است.

EXAMPLE 20. The set Q^+ of all positive rational numbers is a subgroup of the multiplicative group Q^* of all non-zero rational numbers.

From the fact that a group has only one idempotent [Prob. 1 § 2], and the inverse of any element of G is unique, the following is immediate.

مثال ۲۰. مجموعهٔ Q^+ شامل همهٔ اعداد گویای مثبت یک زیرگروهِ ضربیِ گروه Q^* است (Q^* شاملِ همهٔ اعداد گویای ناصفر است).

با توجه به این واقعیت که یک گروه فقط دارای یک عنصر همانی بوده و وارون هر عضو از G منحصر به فرد است، بلافاصله می‌توان لِم زیر را نتیجه گرفت.

Lemma 2.15. If G is a group and H is a subgroup of G, then
(1) *e, the identity of G, is also the identity of H,*
(2) *for each $a \in H$, $a^{-1} \in H$.* ■

We now prove a theorem which supplies us a criterion to check whether a given subset of a group is a subgroup or not.

لِم ۲.۱۵. اگر G یک گروه و H زیرگروهی از G باشد، در این صورت (۱) e، عضو همانیِ G، عضو همانیِ H نیز می‌باشد،

(۲) برای هر $a \in H$، $a^{-1} \in H$. ■

حال قضیه‌ای ثابت می‌کنیم که توسط آن محکی به‌دست می‌آوریم برای چک کردن این که زیرمجموعه‌ای از یک گروه زیر گروه آن می‌باشد یا خیر.

Theorem 2.16. A non-void subset H of a group G is a subgroup of G if and only if $a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$.

Proof: Let H be a subgroup of G and let $a, b \in H$. By lemma 2.15, (2), $b^{-1} \in H$. Consequently by the closure property of H, $ab^{-1} \in H$.

Conversely let H be a non-void subset of G such that for all $a, b \in H$; $ab^{-1} \in H$.

(I) Since H is non-void, there exists $a \in H$.
Thus $aa^{-1} \in H$ i.e., $e \in H$. So H contains identity.
(II) Let $b \in H$. As $e \in H$, eb^{-1} i.e., $b^{-1} \in H$.
Hence $b \in H \Rightarrow b^{-1} \in H$.
(III) $a, b \in H \Rightarrow a$ and $b^{-1} \in H$ by (II)

$$\Rightarrow a(b^{-1})^{-1} \in H$$

i.e. $\quad ab \in H$, since $(b^{-1})^{-1} = b$.

Consequently H is a closed subset of G.

Trivially the induced binary composition on H is associative because the binary composition on G is associative. Hence H is a subgroup of G. ■

قضیهٔ ۲.۱۶. زیرمجموعه‌ای ناتهی از یک گروه مانند G زیرگروهی از G است اگر و فقط اگر $a,b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$.

اثبات: فرض کنیم H زیرگروه G بوده و $a,b \in H$. با توجه به لِم ۲.۱۵، (۲)، داریم، $b^{-1} \in H$. بلافاصله با توجه به خاصیت بسته بودنِ H نتیجه می‌شود، $ab^{-1} \in H$.

برعکس فرض کنیم H یک زیرمجموعهٔ ناتهی از G بوده به‌طوری که برای هر $a,b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$.

(I) چون H ناتهی است، عضوی چون $a \in H$ موجود است. بنابراین $aa^{-1} \in H$ یعنی، $e \in H$. بنابراین H شامل عضو همانی می‌باشد.

(II) فرض کنیم $b \in H$. از آنجایی که $e \in H$، $eb^{-1} \in H$ یعنی، $b^{-1} \in H$.

بنابراین $b^{-1} \in H \Leftarrow b \in H$.

$a,b^{-1} \in H \Leftarrow a,b \in H$ (III) (با توجه به (II))

$\Rightarrow a(b^{-1})^{-1} \in H$

یعنی $ab \in H$، زیرا $(b^{-1})^{-1}=b$.

بنابراین H زیرمجموعه‌ای بسته از G می‌باشد.

بدیهی است ترکیب دوتایی القاء شده روی H شرکت‌پذیر است زیرا ترکیب دوتایی روی G شرکت‌پذیر است. پس H یک زیرگروه G است. ■

Theorem 2.17. *Let G be a group and H be a finite non-void subset of G. Then H is a subgroup of G if and only if $ab \in H$ for all $a, b \in H$.*

Proof: If H is a subgroup of G then by definition

$$a, b \in H \Rightarrow ab \in H.$$

Conversely let H be a finite non-void subset of G such that

$$a, b \in H \Rightarrow ab \in H.$$

Thus H is finite semi-group. Further the cancellation laws hold in H since the same hold in G. Hence H is a subgroup (Theorem 2.6). ■

قضیهٔ ۲.۱۷. فرض کنیم G یک گروه بوده و H یک زیرمجموعهٔ ناتهیِ متناهی از G باشد. در این صورت H یک زیرگروهِ G است اگر و فقط اگر برای هر $a,b \in H$، $ab \in H$.

اثبات: اگر H یک زیرگروه G باشد در این صورت طبق تعریف

$$a,b \in H \Rightarrow ab \in H$$

برعکس فرض کنیم H یک زیرمجموعهٔ ناتهیِ متناهی از G بوده به قسمی که $a,b \in H \Rightarrow ab \in H$.

در این صورت H یک نیم‌گروه متناهی می‌باشد. به علاوه چون قانون حذف در G برقرار است لذا در H نیز برقرار می‌باشد. بنابراین H یک زیرگروه است (با توجه به قضیهٔ ۲.۶). ■

ادب ریاضی

همسازی درونی به این معنی که بر هر چه می‌خواهی بناکن اما در این صورت باید آداب و ترتیب‌دان باشی و دیگر نمی‌توانی به خواست دلت عمل کنی و هرچه دل تنگت می‌خواهد بگویی. کار حساب و کتاب دارد و قدر و اندازه، و به این ترتیب به منطق می‌رسیم و نطق پا به میان می‌گذارد و سکه به نام کیمیای سخن زده می‌شود.

پس ریاضیات هم علم است و هم هنر. علم بدین معنی که کشف می‌کند و هنر بدان مفهوم که می‌آفریند. نیز علم به این معنی که آداب و تربیت دارد و هنر به آن مفهوم که زیباست، و در این صورت هم زبان می‌خواهد و هم منطقی در آن زبان، و نیاز به منطقی که این دو را توأمان داشته باشد و به یک کرشمه دو کار کند، پیدا می‌کند. و به این ترتیب منطق نمادین یا ریاضی پا به عرصهٔ ظهور می‌گذارد و در زمرهٔ حضور جای می‌گیرد و چنان می‌شود که به قول راسل و وایتهد، در نهایت با ریاضیات یکی می‌شود و در واقع ریاضیات به صورت شاخه‌ای از منطق روی می‌نماید.

از مقاله سامان ریاضی:

از مجلهٔ مجموعه مقالات و مسائل ریاضی

حل یک مسأله به‌روشهای جبری، هندسی، مثلثاتی، هندسه تحلیلی، و آنالیز

● دکتر احمد شرف‌الدین

در سطور آینده، یک مسألهٔ ریاضی را به چند روش با بهره‌گیری از مفاهیم جبر، هندسه، مثلثات، هندسهٔ تحلیلی، و آنالیز حل می‌کنیم. این شیوه حل، علاوه بر آن که جاذبه و زیبایی حل را بیشتر می‌کند چنین القا می‌کند که نباید تصور کنیم یک مسألهٔ معین، منحصراً به مبحثی خاص مربوط است.

مسأله. ثابت کنید مجموع هر عدد مثبت و عکس آن حداقل برابر (۲) است

باید ثابت کرد به‌ازای هر عدد $x > 0$ رابطه زیر برقرار است:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

۱. حلهای جبری. در سطور آینده شش حل جبری برای اثبات رابطهٔ بالا ارائه می‌دهیم.

۱.۱. حل جبری یک. معادلهٔ زیر را که در آن m یک پارامتر است در نظر می‌گیریم:

$$x + \frac{1}{x} = m \qquad (1)$$

بررسی می‌کنیم به‌ازای چه مقادیری از پارامتر m، معادله (۱) دارای جوابهای حقیقی است. معادلهٔ (۱) را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$x^2 - mx + 1 = 0 \qquad (2)$$

شرط وجود جواب چنین است:

$$\Delta = m^2 - 4 \geq 0$$

جواب این نامعادله چنین است: $|m| \geq 2$. پس اگر در عبارت $\left(x + \frac{1}{x}\right)$ به‌جای x عددی مثبت بگذاریم مقدار حاصل حداقل برابر (۲) می‌شود.

۲.۱. حل جبری دوم. به‌ازای هر عدد حقیقی x چنین داریم:

$$(x-1)^2 \geq 0$$

و یا:

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$x^2 + 1 \geq 2x \qquad (3)$$

دو طرف نامعادله (۳) را بر x بخش می‌کنیم. با توجه به این‌که بنا به‌فرض مسأله، مقدار x مثبت است حاصل می‌شود:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

۳.۱. حل جبری سوم. به‌ازای مقادیر $x \geq 2$ بالبداهه چنین داریم:

$$x + \frac{1}{x} > 2$$

پس کافی است ثابت کنیم که به‌ازای $0 < x < 2$ نامساوی $x + \frac{1}{x} \geq 2$ مسلّم است. می‌گوییم هر عدد x متعلق به‌فاصلهٔ باز (۲ و ۰) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$x = 1 - y \quad \text{و} \quad |y| < 1$$

وقتی x در فاصلهٔ (۲ و ۰) تغییر می‌کند چنین داریم:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1-y} = 1 + y + \frac{y^2}{1-y}$$

پس به‌ازای $0 < x < 2$ چنین داریم:

$$x + \frac{1}{x} = (1-y) + \left(1 + y + \frac{y^2}{1-y}\right) = 2 + \frac{y^2}{1-y}$$

اما مقدار کسر $\frac{y^2}{1-y}$ به‌ازای $y = 0$ برابر صفر است و به‌ازای

$1 > |y| > 0$ مثبت است پس حداقل مقدار تابع $x + \frac{1}{x}$ برابر ۲ است. (یادآور می‌شویم که $x > 0$ است.)

۴.۱. حل جبری چهارم. می‌گوییم دو تابع مذکور در زیر دارای یک مینیمم‌اند. (یادآور می‌شویم که $x > 0$ است.)

$$x + \frac{1}{x} \qquad (۴)$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} \qquad (۵)$$

زیرا هر یک از این دو تابع مجموع یک متغیر مثبت و عکس آن را نشان می‌دهد.

حال رابطهٔ مسلّم زیر را می‌نویسیم:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \qquad (۶)$$

اگر مقدار مینیمم هر یک از دو تابع مذکور در شماره‌های (۴) و (۵) را m بنامیم از رابطهٔ (۶) نتیجه می‌شود:

$$m^2 = m + 2$$

جواب مثبت معادله اخیرالذکر ۲ است که مقدار مینیمم تابع $x + \frac{1}{x}$ است.

۵.۱. حل جبری پنجم. نامساوی مشهور زیر را به‌کار می‌گیریم:

$$\frac{u + v}{2} \geq \sqrt{u . v} \qquad (۷)$$

یعنی میانگین حسابی دو عدد مثبت بزرگتر یا مساوی است با میانگین هندسی آن دو عدد. اگر در رابطهٔ (۷) به‌جای u و v به‌ترتیب x و $\frac{1}{x}$ بگذاریم، رابطهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq \sqrt{x . \frac{1}{x}} = 1 \qquad (۸)$$

از رابطهٔ (۸)، رابطهٔ زیر نتیجه می‌شود:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \qquad (۹)$$

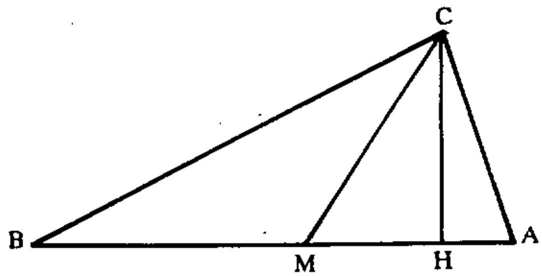
۶.۱. حل جبری ششم. از قضیّه زیر استفاده می‌کنیم:

قضیّه. هرگاه حاصل‌ضرب دو تابع مثبت مقداری ثابت باشد، آنگاه مجموع آن دو تابع هنگامی مینیمم خود را احراز می‌کند که آن دو تابع مساوی شوند.

اکنون می‌گوییم که حاصل ضرب دو تابع x و $\frac{1}{x}$ ثابت است $\left(x . \frac{1}{x} = 1\right)$ پس مجموع آن دو تابع یعنی تابع $\left(x + \frac{1}{x}\right)$ وقتی مینیمم خود را احراز می‌کند که $x = \frac{1}{x}$ باشد. جواب مثبت معادله $x = \frac{1}{x}$ برابر یک است و لذا مینیمم تابع $\left(x + \frac{1}{x}\right)$ برابر ۲ است.

۲. حلّ هندسی. به کمک هندسه می‌توان حلهای متعددی برای مسأله مورد بحث ارائه کرد. در سطور زیر فقط به‌ذکر دو حل اکتفا می‌کنیم.

۱.۲. حلّ اوّل. پاره خط HA را به طول دلخواه x در نظر می‌گیریم و عمود HC را بر خط HA رسم می‌کنیم و بر آن طول HC را برابر یک اختیار می‌کنیم و سپس عمود CB را بر خط CA رسم می‌کنیم و محل برخورد آن را با خط HA، نقطهٔ B می‌نامیم.



در مثلث قائم‌الزاویه ABC چنین داریم:

$$\overline{HC}^2 = \overline{HA} . \overline{HB} \qquad (۱۰)$$

از رابطهٔ (۱۰) با توجه به این‌که $\overline{HA} = x$ و $\overline{HC} = 1$ نتیجه می‌شود:

$$\overline{HB} = \frac{1}{x}$$

و بنابراین:

$$\overline{AB} = \overline{HA} + \overline{HB} = x + \frac{1}{x} \qquad (۱۱)$$

اکنون میانه CM را رسم می‌کنیم و با توجه به این که در هر مثلث قائم‌الزاویه میانه وارد بر وتر نصف وتر است چنین می‌نویسیم:

$$\overline{AB} = 2\,\overline{CM} \qquad (۱۲)$$

همچنین رابطهٔ مسلّم زیر را می‌نویسیم:

$$\overline{CM} \geq \overline{CH} \qquad (۱۳)$$

زیرا خط CH بر خط AB عمود است و خط CM نسبت به خط AB مایل است و می‌دانیم که طول عمود کوچکتر از طول مایل است. تساوی دو پاره‌خط CM و CH موقعی برقرار می‌شود که $\overline{CA} = \overline{CB}$ باشد، در این صورت مثلث CAB متساوی الساقین می‌شود و میانه CM بر ارتفاع CH منطبق می‌شود. چون $\overline{CH} = 1$ است پس از رابطهٔ (۱۳) نتیجه می‌شود که $\overline{CM} \geq 1$ و سپس از رابطهٔ (۱۲) نتیجه

می‌شود که $\overline{AB} \ge ۲$. بنابراین از رابطهٔ (۱۱) رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$x + \frac{۱}{x} \ge ۲$$

۲.۲. **حل هندسی دوم.** قرار می‌دهیم:

$$x = \frac{a}{b}$$

پس:

$$\frac{۱}{x} = \frac{b}{a}$$

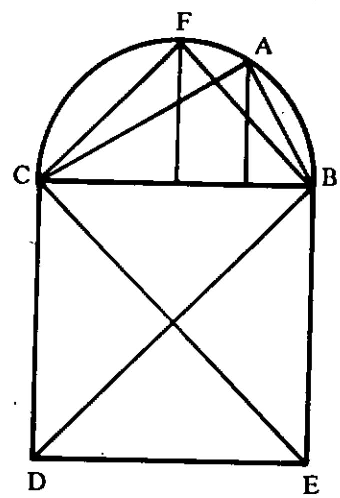
و بنابراین

$$x + \frac{۱}{x} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^۲ + b^۲}{ab}$$

حال ثابت می‌کنیم هنگامی‌که $\frac{a}{b} > ۰$ است یعنی؛ $ab > ۰$ است چنین داریم:

$$\frac{a^۲ + b^۲}{ab} \ge ۲ \qquad (۱۴)$$

مثلث قائم‌الزاویه ABC را با معلومات $A = \frac{\pi}{۲}$ ، $\overline{AB} = a$ ، و $\overline{AC} = b$ می‌سازیم.



مربع BCDE را روی وتر BC می‌سازیم. بنابر قضیهٔ فیثاغورس مساحت مربع BCDE که آن‌را S می‌نامیم چنین است:

$$S = a^۲ + b^۲$$

از طرفی مساحت مثلث قائم‌الزاویه ABC که آن‌را $S_۱$ می‌نامیم چنین است:

$$S_۱ = \frac{۱}{۲} ab$$

برای اثبات درستی رابطهٔ (۱۴) کافی است رابطهٔ زیر را ثابت کنیم:

$$S \ge ۴S_۱ \qquad (۱۵)$$

اگر نقطهٔ F وسط نیمدایره به‌قطر BC باشد چنین داریم:

(۱۶) مساحت‌مثلث‌قائم‌الزاویه OBC = مساحت‌مثلث‌قائم‌الزاویه BCF

اکنون حکم می‌کنیم که مساحت مثلث FBC بزرگتر یا مساوی مساحت مثلث ABC است زیرا این دو مثلث دارای قاعده مشترک BC اند ولی بین دو ارتفاع FM و AH از دو مثلث مفروض رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\overline{FM} \ge \overline{AH}$$

زیرا:

$$\overline{FM} = \overline{MA} \ge \overline{AH}$$

تساوی $\overline{AH}$ و $\overline{FM}$ هنگامی برقرار می‌شود که نقطه A بر نقطه F منطبق شود. از تساوی (۱۶) نتیجه می‌شود که

(۱۷) (مساحت مثلث ABC) ۴ ≥ مساحت مربع BCDF

رابطهٔ (۱۷) همان رابطهٔ (۱۵) است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۳. **حل مثلثاتی.** زاویه α را طوری تعیین می‌کنیم که داشته باشیم:

$$x = \operatorname{tg} \alpha$$

پس:

$$x + \frac{۱}{x} = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha$$

عبارت سمت راست تساوی بالا را به‌صورت زیر تبدیل می‌کنیم:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{۱}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{۲}{\sin ۲\alpha}$$

مختصر آن‌که

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha = \frac{۲}{\sin ۲\alpha}$$

پس به جای آن‌که مینیمم تابع $x + \frac{۱}{x}$ را حساب کنیم، مینیمم تابع $\frac{۲}{\sin ۲\alpha}$ را حساب می‌کنیم. اما تابع $\frac{۲}{\sin ۲\alpha}$ هنگامی مینیمم است که مخرج آن یعنی؛ $\sin ۲\alpha$ ماکزیمم باشد و این به ازای $۲\alpha = \frac{\pi}{۲}$ حاصل می‌شود، یعنی؛ به‌ازای $\alpha = \frac{\pi}{۴}$. پس تابع: $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha)$ به‌ازای $\alpha = \frac{\pi}{۴}$ مینیمم است و چون $\operatorname{tg} \frac{\pi}{۴} = \operatorname{cotg} \frac{\pi}{۴} = ۱$ پس مینیمم تابع $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha)$ برابر (۲) است. بنابراین مینیمم تابع $(x + \frac{۱}{x})$ برابر (۲) است.

۴. **حل با هندسه تحلیلی.** منحنی C نمایش هندسی تابع

$$y = \frac{۱}{x} \quad x > ۰$$

را در نظر می‌گیریم. نقطه M به طول یک را روی منحنی C در نظر می‌گیریم. چنین داریم:

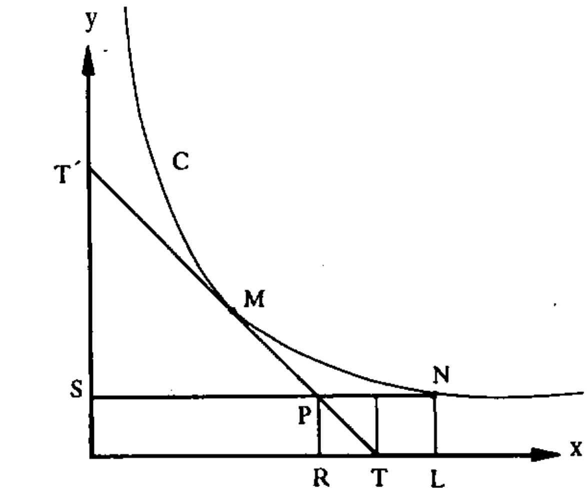
$$x_M + \frac{۱}{x_M} = ۲ \qquad (۱۸)$$

اکنون نقطهٔ دلخواه $N \neq M$ را روی منحنی C اختیار می‌کنیم و ثابت می‌کنیم که رابطهٔ زیر مسلّم است:

$$x_N + \frac{۱}{x_N} > ۲$$

و نتیجه می‌گیریم که به ازای جمیع مقادیر $x > ۰$ رابطهٔ زیر برقرار است.

$$x + \frac{۱}{x} \geq ۲$$



معادلهٔ خط TT' مماس بر منحنی C در نقطهٔ M چنین است:

$$x + y = ۲$$

پس مختصات هر نقطه $P\ (x_p\ ,\ x_p\ )$ از خط TT' در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند:

$$x_p + y_p = ۲$$

تصاویر نقطهٔ N را روی دو محور ox و oy به‌ترتیب L و S می‌نامیم و نقطهٔ برخورد خط SN را با خط TT' به P نشان می‌دهیم و همچنین تصویر نقطهٔ P بر محور ox را R می‌نامیم. رابطهٔ زیر را می‌نویسیم:

$$x_N + y_N = x_N + \frac{۱}{x_N} = \overline{OL} + \overline{OS}$$

اما $\overline{OL} = \overline{OR} + \overline{RL}$

و $\overline{L_N} = \overline{RP} = \overline{OS}$

پس: $\overline{OL} + \overline{OS} > \overline{SP} + \overline{RP}$

از طرفی $\overline{SP} + \overline{RP} = x_p + y_p = ۲$

پس: $\overline{OL} + \overline{OS} > ۲$

با توجه به رابطهٔ اخیرالذکر و رابطهٔ (۱۸)، نتیجه می‌شود که به ازای $x > ۰$ رابطهٔ زیر برقرار است:

$$x + \frac{۱}{x} \geq ۲$$

۵. حل با آنالیز. در سطر زیر با به‌کارگیری مشتق مسألهٔ مورد بحث را حل می‌کنیم. به کمک آنالیز راه حلهای دیگری نیز می‌توان ارائه کرد که از حوصله این مقاله خارج است.

مشتق تابع:

$$f(x) = x + \frac{۱}{x}$$

چنین است:

$$f'(x) = ۱ - \frac{۱}{x^۲}$$

مشتق‌به‌ازای $x = ۱$ صفر شده و تغییر علامت می‌دهد. به‌ازای $x = ۱$ تابع $f(x)$ مینیمم خود راکه (۲) است، به‌دست می‌آورد.

تفریح اندیشه ۴

به چند طریق می‌توان چهار کلیدقطع و وصل را پهلوی هم قرار داد اگر هیچ دو کلید مجاوری نتواند خاموش باشد؟

در صورتی x و y دو رقم متفاوت باشند و z عدد طبیعی دلخواهی باشد، به ازای چند ترکیب x و y عدد $x + y\ (۱۰^z)$ می‌تواند بر ۹ بخش‌پذیر باشد.

جواب در صفحهٔ ۳۹

بـردارهـا
(قسمت دوم)

سید محمدرضا هاشمی موسوی

اندازهٔ جبری تصویر یک بردار بر یک محور

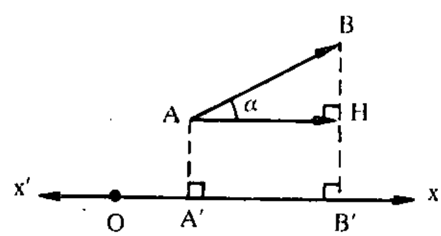
بردار $\overrightarrow{AB}$ و محور $x'ox$ واقع در یک صفحه را در نظر می‌گیریم، $\overrightarrow{A'B'}$ تصویر بردار $\overrightarrow{AB}$ روی $x'ox$ را مشخص می‌کنیم. اگر زاویهٔ بردار $\overrightarrow{AB}$ با محور $x'ox$ برابر α باشد، از A پاره‌خط AH را موازی محور رسم می‌کنیم، در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHB داریم:

$$|\cos\alpha| = \frac{AH}{AB} \Longrightarrow AH = AB\,|\cos\alpha|$$

و با توجه به رعایت جهت خواهیم داشت:

$$\overline{A'B'} = |\overrightarrow{AB}|\cos\alpha$$

یعنی؛ اندازهٔ جبری تصویر یک بردار بر یک محور برابر است با حاصل‌ضرب اندازهٔ بردار در کسینوس زاویهٔ بین بردار و محور.



حالات خاص

۱. $\alpha = 0 \Longrightarrow \cos\alpha = 1 \Longrightarrow \overline{A'B'} = |\overrightarrow{AB}|$

۲. اگر $0 \le \alpha < 90^\circ$ باشد جهت $\overrightarrow{A'B'}$ با جهت مثبت محور یکی خواهد بود و در نتیجه اندازهٔ جبری $\overrightarrow{A'B'}$ مثبت خواهد بود و هنگامی‌که $90^\circ < \alpha \le 180^\circ$ باشد، جهت $\overrightarrow{A'B'}$ با جهت مثبت محور یکی نیست و $\overline{A'B'}$ منفی خواهد بود.

۳. $\alpha = 90^\circ \Longrightarrow \cos\alpha = \cos 90^\circ = 0 \Longrightarrow \overline{A'B'} = 0$

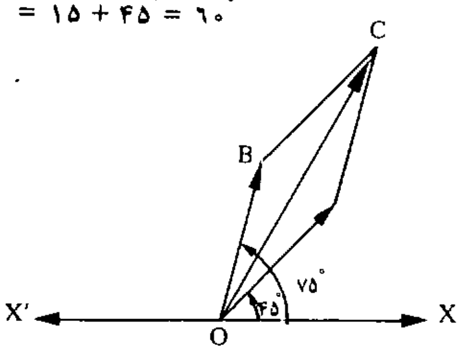
مثال ۱۲: دو بردار $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ به طولهای مساوی با محور OX به ترتیب زوایای 45° و 75° می‌سازند. زاویهٔ بردار $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ با محور OX چند درجه است؟

حل: اگر $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ باشد، چون $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}|$ است، پس چهار ضلعی OACB لوزی است و قطر $\overrightarrow{OC}$ آن مجموع هندسی بردارهای $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ است، و نیمساز زاویهٔ $B\hat{O}A$ نیز می‌باشد. اما داریم:

$$B\hat{O}A = B\hat{O}X - A\hat{O}X = 75^\circ - 45^\circ = 30^\circ$$

پس $C\hat{O}A = 15^\circ$ و در نتیجه خواهیم داشت:

$$C\hat{O}X = 15^\circ + 45^\circ = 60^\circ$$

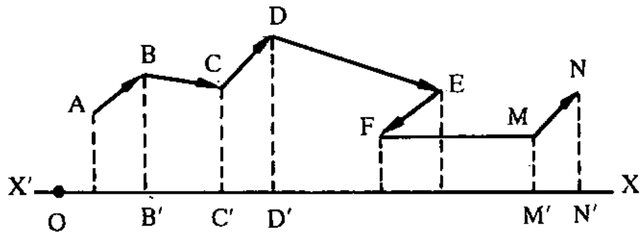


➤ تصویر مجموع هندسی چند بردار بر یک محور

هرگاه $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + ... + \overrightarrow{MN}$ و تصویر نقاط A و B و C و D و E و ... و M و N بر محور X'OX را A' و B' و C' و D' و E' و ... و M' و N' بنامیم بین اندازه‌های جبری تصاویر بردارهای فوق بر محور X'OX رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\overline{A'N'} = \overline{A'B'} + \overline{B'C'} + \overline{C'D'} + \overline{D'E'} + ... + \overline{M'N'}$$

بنابراین اندازهٔ جبری تصویر مجموع هندسی چند بردار بر یک محور، برابر است با جمع جبری تصاویر آن بردارها بر آن محور.



مثال ۱۳: $|\vec{a}| = ۲\sqrt{۳}$ و $|\vec{b}| = ۳\sqrt{۲}$ و $|\vec{c}| = ۵$ و $|\vec{d}| = \sqrt{۳}$ و زوایای آنها با محور X'OX به‌ترتیب ۳۰° و ۴۵° و ۹۰° و ۱۵۰° است.

۱. بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$، $\vec{c}$ و $\vec{d}$ را به مبدأ نقطهٔ O رسم و مجموع آنها را بیابید.

۲. اندازهٔ جبری تصویر هر بردار را بر محور X'OX تعیین کنید.

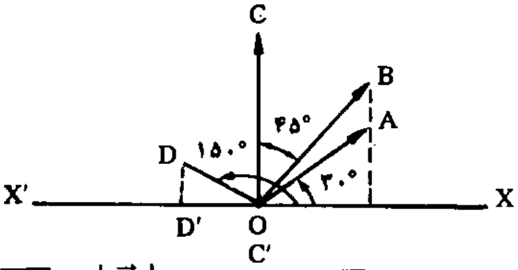
۳. اندازهٔ جبری تصویر مجموع هندسی این بردارها بر محور X'OX را بیابید.

حل: بردارهای $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ و $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ و $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ و $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$ را با شرایط مشخص شده رسم می‌کنیم و تصاویر نقاط A و B و C و D را روی محور X'OX به‌ترتیب A' و B' و C' و D' می‌نامیم. در این‌صورت خواهیم داشت: (منظور از $\bar{a}$، اندازهٔ جبریِ تصویر بردار $\vec{a}$ روی محور X'OX است.)

$$\bar{a} = \overline{OA'} = |\vec{a}| \cos ۳۰° = ۲\sqrt{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۳$$

$$\bar{b} = \overline{OB'} = |\vec{b}| \cos ۴۵° = ۳\sqrt{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۳$$

$$\bar{c} = \overline{OC'} = |\vec{c}| \cos ۹۰° = ۵ \times ۰ = ۰$$



$$\bar{d} = \overline{OD'} = |\vec{d}| \cos ۱۵۰° = \sqrt{۳} \cos(۱۸۰° - ۳۰°)$$

$$= -\sqrt{۳} \cos ۳۰° = -\frac{۳}{۲}$$

طبق قضیه اگر $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{R}$ یعنی؛ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{R}$ باشد، داریم:

$$\overline{OA'} + \overline{OB'} + \overline{OC'} + \overline{OD'} = \bar{R}$$

پس می‌توان نوشت:

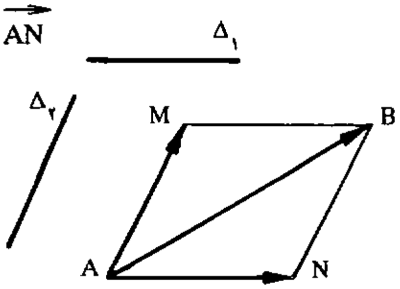
$$\bar{R} = ۳ + ۳ + ۰ - \frac{۳}{۲} = \frac{۹}{۲}$$ (اندازهٔ جبری تصویر بردار برآیند)

تذکر: اندازهٔ جبری یک بردار وقتی معنی دارد که بردار را هم‌راستای یک محور در نظر بگیریم. بنابراین اگر بردار AB هم‌راستای محور X'OX باشد آنگاه اندازهٔ جبری بردار $\overrightarrow{AB}$ را با علامت $\overline{AB}$ نشان می‌دهیم.

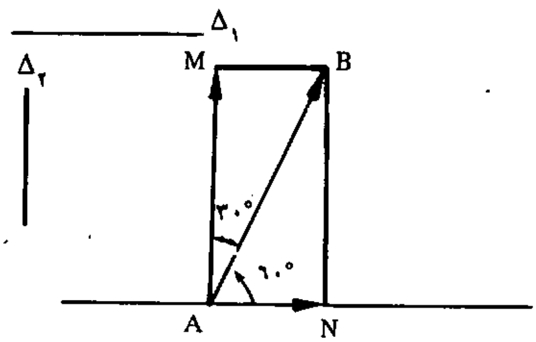
➤ تجزیه یک بردار به دو بردار با راستاهای معین

برای تجزیهٔ بردار $\overrightarrow{AB}$ به دو مؤلفه در راستاهای $\Delta_۱$ و $\Delta_۲$ از A و B خطوطی به موازات این دو امتداد رسم می‌کنیم تا متوازی‌الاضلاع AMBN به‌وجود آید. بردارهای $\overrightarrow{AN}$ و $\overrightarrow{AM}$ را مؤلفه‌های بردار $\overrightarrow{AB}$ در راستاهای $\Delta_۱$ و $\Delta_۲$ می‌نامند.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}$$



مثال ۱۴: بردار $\overrightarrow{AB}$ به‌طول ۵ سانتی‌متر را به دو مؤلفه در راستاهای عمود بر هم $\Delta_{۱}$ و $\Delta_{۲}$ تجزیه کنید در صورتی‌که راستای $\Delta_{۲}$ با AB زاویهٔ °۳۰ بسازد، آنگاه اندازهٔ مؤلّفه‌ها را از طریق محاسبه پیدا کنید.



حل: از نقاط B و A خطوطی موازی $\Delta_{۱}$ و $\Delta_{۲}$ رسم می‌کنیم تا مستطیل AMBN به‌وجود آید. $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AN}$ مؤلّفه‌های بردار $\overrightarrow{AB}$ در دو راستای $\Delta_{۱}$ و $\Delta_{۲}$ می‌باشند، زیرا: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}$

برای محاسبهٔ اندازهٔ این مؤلّفه‌ها در مثلث قائم‌الزاویهٔ ANB داریم:

$$\left|\overrightarrow{AN}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cos ۶۰° = ۵ \times \frac{۱}{۲} = \frac{۵}{۲}$$

$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AN}\right| = \frac{۵}{۲}$$

$$\left|\overrightarrow{NB}\right| = \left|\overrightarrow{AM}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cos ۳۰°$$

$$= ۵ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۵\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AM}\right| = \frac{۵\sqrt{۳}}{۲}$$

در این جا برای آشنایی با مسائل بردارها مسائل متنوعی را همراه با حلّ آنان ارائه می‌دهیم.

➤ **مسائل با حل:**

۱. از نقطهٔ O مرکز مربع ABCD (مطابق شکل زیر) به رأسهای آن وصل می‌کنیم. نشان دهید که چرا مجموع چهار بردار $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OC}$ و $\overrightarrow{OD}$ برابر بردار صفر است.

حل: داریم:

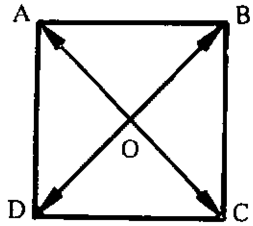
$$\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OC} \Longrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{O} \qquad (۱)$$

$$\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OD} \Longrightarrow \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{O} \qquad (۲)$$

با استفاده از تساویهای (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})+(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})$$

$$=\vec{O}+\vec{O}=\vec{O}$$



۲. به‌طریق هندسی نشان دهید که:

$$\vec{a} - (-\vec{b}) = \vec{a} + \vec{b}$$

حل: در متوازی‌الاضلاع ABCD می‌توان نوشت:

$$\overrightarrow{BC} = \vec{a} - (-\vec{b})$$

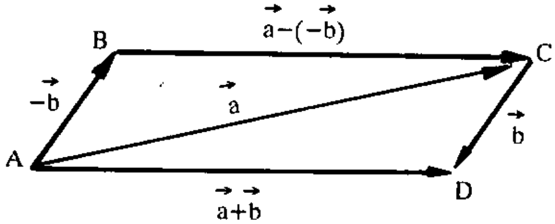
و

$$\overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b}$$

هَمچنین داریم: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

پس رابطهٔ مطلوب نتیجه می‌شود:

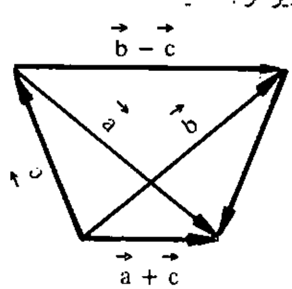
$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow \vec{a} - (-\vec{b}) = \vec{a} + \vec{b}$$



تمرین: به‌طریق هندسی نشان دهید که:

$$\vec{a} - (\vec{b} - \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{c}) - \vec{b}$$

راهنمایی: به شکل زیر توجه کنید:



۳. به طریقهٔ برداری نشان دهید هرگاه خطی اوساط دو ضلع یک مثلث را به‌هم وصل کند، موازی با ضلع سوم و مساوی نصف آن است.

حل: در مثلث ABC داریم:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MN} \qquad (۱)$$

طرفین این تساوی را در عدد ۲ ضرب می‌کنیم:

$$2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{MN}$$

ولی طبق فرض داریم:

$$2\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BA} \quad \text{و} \quad 2\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC}$$

بنابراین از تساوی (۱) تساوی زیر نتیجه می‌شود:

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{MN} \qquad (2)$$

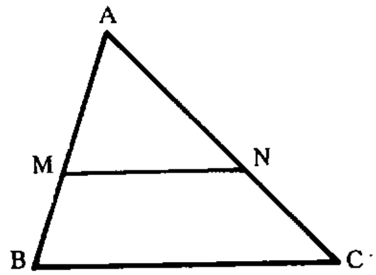
از طرفی در مثلث ABC داریم:

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} \qquad (3)$$

از مقایسهٔ روابط (۲) و (۳) رابطهٔ مطلوب به‌دست می‌آید:

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC} \Longrightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

باتوجه به تعریف ضرب یک عدد حقیقی در یک بردار نتیجه می‌شود که $\overrightarrow{MN}$ موازی $\overrightarrow{BC}$ بوده و طول آن نصف $\overrightarrow{BC}$ است.



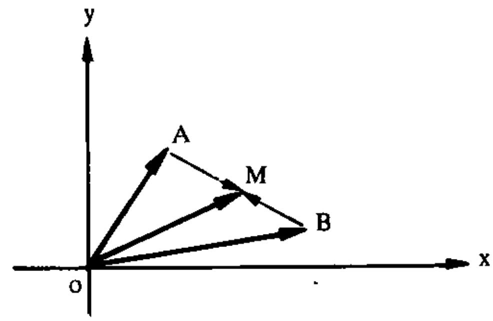
۴. در شکل زیر فرض می‌کنیم:

$$\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}} = \frac{m}{n}$$

(m و n اعداد حقیقی می‌باشند)

نشان دهید که:

$$n\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB} = (m+n)\overrightarrow{OM}$$



حل: در مثلث OAM داریم:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} \qquad (1)$$

همچنین در مثلث OBM می‌توان نوشت:

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{OM} \qquad (2)$$

طرفین تساویهای (۱) و (۲) را به‌ترتیب در n و m ضرب می‌کنیم:

$$n\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{AM} = n\overrightarrow{OM} \quad \text{و} \quad m\overrightarrow{OB} + m\overrightarrow{BM} = m\overrightarrow{OM}$$

در این‌جا دو تساوی بالا را نظیر به نظیر جمع می‌کنیم:

$$n\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{AM} + m\overrightarrow{OB} + m\overrightarrow{BM} = (m+n)\overrightarrow{OM} \qquad (3)$$

اما طبق فرض داریم:

$$n\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{MB} \quad \text{یا} \quad n\overrightarrow{AM} - m\overrightarrow{MB} = \vec{O}$$

و با توجه به $\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{BM}$، می‌توان نوشت:

$$n\overrightarrow{AM} + m\overrightarrow{BM} = \vec{O} \qquad (4)$$

اگر در تساوی (۳) رابطهٔ (۴) را اثر دهیم، خواهیم داشت:

$$n\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB} = (m+n)\overrightarrow{OM} \qquad (5)$$

تساوی (۵) را می‌توان به‌صورت زیر نیز نوشت:

$$n\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB} - (m+n)\overrightarrow{OM} = \vec{O}$$

تساوی (۵) رابطهٔ مطلوب است که آن را می‌توان به‌شکل زیر نیز نوشت:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{n\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}}{n+m}$$

بدیهی است اگر M وسط AB باشد $(m = n)$، خواهیم داشت:

$$m = n \; : \; \overrightarrow{OM} = \frac{n\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}}{n+n} = \frac{n(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})}{2n} =$$

$$= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} \Longrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} \qquad (6)$$

تساوی (۶) بردار مکان نقطهٔ وسط یک بردار را بر حسب بردار مکان ابتدا و انتهای آن به‌دست می‌دهد.

تمرین: هرگاه نقطهٔ M وسط پاره‌خط AC باشد (مطابق شکل) ثابت کنید:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

راهنمایی:

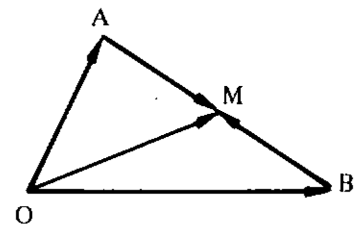
در مثلث OAM داریم: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} \quad (1)$

در مثلث OBM داریم: $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{OM}$ (۲)

طبق فرض چون M وسط AB است پس داریم:

$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}=\vec{O}$ یا $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$

از جمع روابط (۱) و (۲) و استفاده از فرض رابطهٔ مطلوب را نتیجه بگیرید.



۵. متوازی‌الاضلاع OABC مفروض است، روی قطر AC نقطهٔ M طوری واقع است که $\overrightarrow{AM}=۲\,\overrightarrow{MC}$، ثابت کنید:

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{۳}$$

حل: طبق فرض مسأله داریم:

$$\overrightarrow{AM}=۲\,\overrightarrow{MC}$$

پس می‌توان نوشت:

$$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=۲(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OM})$$

و یا:

$$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=۲\overrightarrow{OC}-۲\overrightarrow{OM}\Longrightarrow ۳\overrightarrow{OM}=۲\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}$$

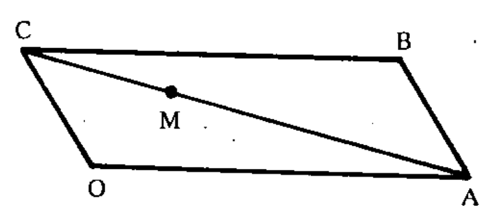
$$\Longrightarrow ۳\,\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\qquad (۱)$$

اما با توجه به شکل و استفاده از قانون متوازی‌الاضلاع داریم:

$$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}\qquad (۲)$$

بنابراین با اثر دادن رابطهٔ (۲) در (۱) خواهیم داشت:

$$۳\,\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}\Longrightarrow \overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}}{۳}$$



۶. در تساوی برداری زیر مقدار K را چنان تعیین کنید که نقاط P و Q بر هم منطبق شوند:

$$\overrightarrow{QB}+۲\overrightarrow{QP}=(K-۲)\,\overrightarrow{PB}$$

حل: به‌ترتیب می‌توان نوشت:

$$\overrightarrow{QB}+۲\overrightarrow{QP}=(K-۲)\,\overrightarrow{PB}$$

$$\overrightarrow{QB}+۲\overrightarrow{QP}=K\,\overrightarrow{PB}-۲\overrightarrow{PB}$$

$$\overrightarrow{QB}+۲\overrightarrow{QP}+۲\overrightarrow{PB}=K\,\overrightarrow{PB}$$

$$\overrightarrow{QB}+۲(\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{PB})=K\,\overrightarrow{PB}$$

$$\overrightarrow{QB}+۲\overrightarrow{QB}=K\,\overrightarrow{PB}$$

$$۳\overrightarrow{QB}=K\,\overrightarrow{PB}$$

بنابه‌فرض مسأله نقاط P و Q بر هم منطبق هستند، بنابراین: $\overrightarrow{QB}=\overrightarrow{PB}$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$۳\,\overrightarrow{PB}=K\,\overrightarrow{PB}\Longrightarrow K=۳$$

۷. هرگاه داشته باشیم: $\overrightarrow{OA}=\begin{bmatrix}۷\\۳\end{bmatrix}$ و $\overrightarrow{OB}=\begin{bmatrix}۴\\۷\end{bmatrix}$ و $\overrightarrow{OC}=\begin{bmatrix}۳\\۴\end{bmatrix}$، بردار $\vec{a}=\frac{۱}{۳}(\overrightarrow{AB}+۴\overrightarrow{AC})$ را تعیین کنید.

حل:

$$\vec{a}=\frac{۱}{۳}(\overrightarrow{AB}+۴\overrightarrow{AC})=\frac{۱}{۳}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+۴\overrightarrow{OC}-۴\overrightarrow{OA})$$

$$=\frac{۱}{۳}(\overrightarrow{OB}+۴\overrightarrow{OC}-۵\overrightarrow{OA})=\frac{۱}{۳}\left(\begin{bmatrix}۴\\۷\end{bmatrix}+۴\begin{bmatrix}۳\\۴\end{bmatrix}-۵\begin{bmatrix}۷\\۳\end{bmatrix}\right)$$

$$=\frac{۱}{۳}\left(\begin{bmatrix}۴\\۷\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱۲\\۱۶\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۳۵\\-۱۵\end{bmatrix}\right)=\frac{۱}{۳}\left(\begin{bmatrix}۴+۱۲-۳۵\\۷+۱۶-۱۵\end{bmatrix}\right)$$

$$=\frac{۱}{۳}\begin{bmatrix}-۱۹\\۸\end{bmatrix}\Rightarrow \vec{a}=\begin{bmatrix}-\frac{۱۹}{۳}\\\frac{۸}{۳}\end{bmatrix}$$

تمرین: هرگاه A(۴ , ۵) و B(۳ , −۱) و C(−۲ , ۲) باشد؛ مطلوب است تعیین مختصات نقطهٔ X از تساوی زیر:

$$\overrightarrow{XA}=\overrightarrow{BC}$$

راهنمایی:

داریم: $\overrightarrow{XA}=\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$

و همچنین $\overrightarrow{OA}=\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}$ و $\overrightarrow{OB}=\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$ و $\overrightarrow{OC}=\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}$

با جایگزینی بردارهای ستونی در تساوی داده شده، بردار $\overrightarrow{OX}$ را تعیین کنید.

۸. بردار $3\vec{i}+4\vec{j}$ را به‌صورت ترکیب خطی دو بردار $2\vec{i}+\vec{j}$ و $\vec{i}+2\vec{j}$ بنویسید.

حل: با توجه به فرض مسأله باید داشته باشیم:

$$3\vec{i}+4\vec{j}=X(2\vec{i}+\vec{j})+Y(\vec{i}+2\vec{j})$$
$$=2X\vec{i}+X\vec{j}+Y\vec{i}+2Y\vec{j}$$
$$=(2X+Y)\vec{i}+(X+2Y)\vec{j}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}2X+Y=3\\X+2Y=4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}X=\frac{2}{3}\\[4pt]Y=\frac{5}{3}\end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$3\vec{i}+4\vec{j}=\frac{2}{3}(2\vec{i}+\vec{j})+\frac{5}{3}(\vec{i}+2\vec{j})$$

تمرین: بردار $7\vec{i}+4\vec{j}$ را به‌صورت ترکیب‌خطی دوبردار $3\vec{i}+4\vec{j}$ و $2\vec{i}+3\vec{j}$ بنویسید.

راهنمایی: $7\vec{i}+4\vec{j}=X(3\vec{i}+4\vec{j})+Y(2\vec{i}+3\vec{j})$

از مقایسهٔ طرفین تساوی، مقادیر X و Y را به‌دست آورید.

۹. سه نقطهٔ A و B و C مفروضند و نقطهٔ M بردار $\overrightarrow{BC}$ را به‌نسبت $\frac{2}{3}$ قطع می‌کند. بردار $\overrightarrow{AM}$ را برحسب دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ بنویسید.

حل: داریم:

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}$$
$$3\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BM} \qquad (1)$$

و

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}$$
$$2\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{CM} \qquad (2)$$

طرفین رابطه‌های (۱) و (۲) را نظیر به نظیر جمع می‌کنیم:

$$5\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{BM}+2\overrightarrow{CM} \qquad (3)$$

از طرفی طبق فرض مسأله داریم:

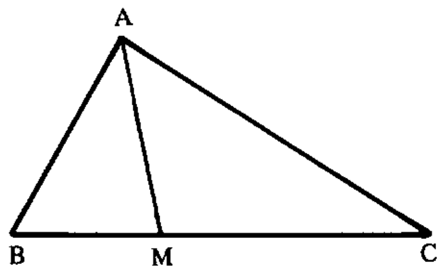
$$\frac{\overrightarrow{BM}}{\overrightarrow{MC}}=\frac{2}{3} \Rightarrow 3\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MC} \Rightarrow 3\overrightarrow{BM}-2\overrightarrow{MC}=\vec{O}$$
$$\Rightarrow 3\overrightarrow{BM}+2\overrightarrow{CM}=\vec{O} \qquad (4)$$

با اثر دادن رابطهٔ (۴) در رابطهٔ (۳) داریم:

$$5\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$$

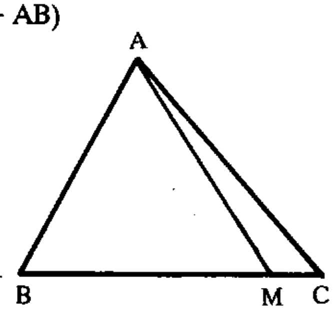
بنابراین $\overrightarrow{AM}$ بر حسب دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ چنین است:

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM}=\frac{3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}}{5}$$



۱۰. هر گاه M پاره‌خط BC را به نسبت $\frac{1}{10}$ تقسیم کند (مطابق شکل) ثابت کنید:

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{11}(10\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})$$



حل: در مثلث AMC داریم:

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AM} \Rightarrow 10\overrightarrow{AC}+10\overrightarrow{CM}=10\overrightarrow{AM} \qquad (1)$$

و در مثلث ABM داریم:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM} \qquad (2)$$

از جمع روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$11\overrightarrow{AM}=10\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}+10\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{BM} \qquad (3)$$

اما طبق فرض مسأله داریم:

$$\frac{\overrightarrow{CM}}{\overrightarrow{MB}}=\frac{1}{10} \Longrightarrow 10\,\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{MB} \Longrightarrow 10\,\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{MB}=\vec{O}$$

$$\Longrightarrow 10\,\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{BM}=\vec{O} \qquad (۴)$$

با اثر دادن رابطهٔ (۴) در رابطهٔ (۳) داریم:

$$11\,\overrightarrow{AM}=10\,\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB} \Longrightarrow \overrightarrow{AM}=\frac{1}{11}(10\,\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})$$

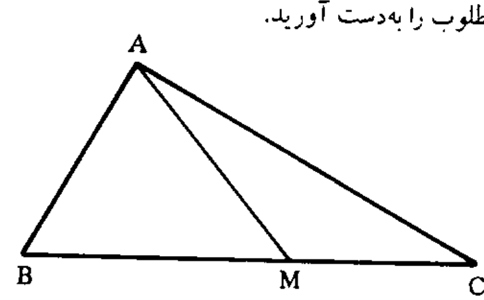
تمرین: هرگاه M پاره‌خط BC را به نسبت $\frac{3}{2}$ تقسیم کند (مطابق شکل) ثابت کنید:

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{5}(2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC})$$

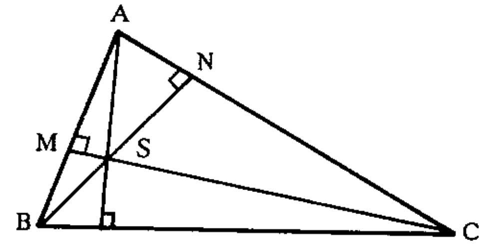
راهنمایی: در مثلث ABM داریم: (۱) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}$

و در مثلث ACM داریم: (۲) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AM}$

طرفین رابطهٔ (۱) را در عدد ۲ و طرفین رابطهٔ (۲) را در عدد ۳ ضرب کنید و سپس رابطه‌های به‌دست آمده را با هم جمع کنید. پس از استفاده از فرض مسأله یعنی؛ $\frac{\overrightarrow{BM}}{\overrightarrow{MC}}=\frac{3}{2}$ یا $2\overrightarrow{BM}+3\overrightarrow{CM}=\vec{O}$، رابطهٔ مطلوب را به‌دست آورید.



۱۱. به‌طریقهٔ برداری ثابت کنید که ارتفاعات هر مثلث همدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند (متقارب‌اند).



حل: فرض می‌کنیم ABC مثلثی است که ارتفاعات BN و CM آن در نقطهٔ S همدیگر را قطع می‌کنند. خطی از A و S می‌کشیم که BC را در نقطهٔ H قطع کند. می‌خواهیم ثابت کنیم که AH بر BC عمود است.

فرض می‌کنیم که $\overrightarrow{CS}$ و $\overrightarrow{BS}$ و $\overrightarrow{AS}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AB}$ نمایشهای بردارها باشند. چون BN ارتفاع مثلث است، بنابراین حاصل‌ضرب داخلی دو بردار $\overrightarrow{BS}$ و $\overrightarrow{AC}$ صفر است:

$$\overrightarrow{BS}\,.\,\overrightarrow{AC}=0 \qquad (۱)$$

همچنین از این که CM ارتفاع مثلث است، می‌توان نوشت:

$$\overrightarrow{CS}\,.\,\overrightarrow{AB}=0 \qquad (۲)$$

برای اثبات این‌که AH بر BC عمود است، نشان می‌دهیم:

$$\overrightarrow{AS}\,.\,\overrightarrow{BC}=0 \qquad (۳)$$

با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC} \qquad (۴)$$

با استفاده از تساوی (۴) رابطهٔ (۳) را می‌توان به‌شکل زیر نوشت:

$$\overrightarrow{AS}\,.\,\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AS}\,.\,(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})$$

$$=\overrightarrow{AS}\,.\,\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AS}\,.\,\overrightarrow{AC} \qquad (۵)$$

همچنین با توجه به شکل داریم:

$$\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CS} \qquad (۶)$$

و

$$\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BS} \qquad (۷)$$

با جایگزینی تساویهای (۶) و (۷) در رابطهٔ (۵) داریم:

$$\overrightarrow{AS}\,.\,\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CS})\,.\,\overrightarrow{BA}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BS})\,.\,\overrightarrow{AC}$$

$$=\overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CS}\,.\,\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BS}\,.\,\overrightarrow{AC}$$

با تعویض $\overrightarrow{BA}$ با $-\overrightarrow{AB}$ و استفاده از (۱) و (۲) داریم:

$$\overrightarrow{AS}\,.\,\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{AB}+0+\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}+0$$

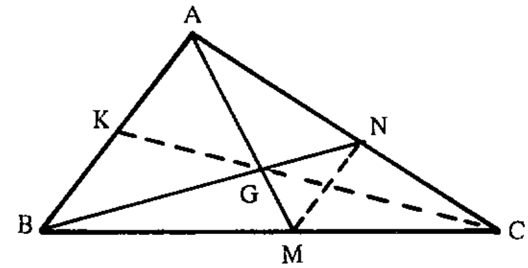
$$=-\overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{AB}=0$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{AS}\,.\,\overrightarrow{BC}=0 \qquad (۸)$$

از رابطهٔ (۸) نتیجه می‌شود که AH نیز بر BC عمود است. و در نتیجه ارتفاعات BN و CM و AH در یک نقطه برخورد دارند.

۱۲. به‌طریقهٔ برداری ثابت کنید سه میانهٔ هر مثلث در نقطه‌ای

همدیگر را قطع می‌کنند که فاصلهٔ آن از هر رأس، $\frac{2}{3}$ طول میانهٔ نظیر آن رأس است.



حل: فرض کنیم نقطهٔ G محل تلاقی میانه‌های AM و BN باشد، بنابراین داریم:

$$\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$$

$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$$

$$\overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB})$$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} \qquad (1)$$

تساوی (۱) را نسبت به مبدأ G می‌توان چنین نوشت:

$$\overrightarrow{GN} - \overrightarrow{GM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB})$$

و یا:

$$\overrightarrow{GN} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GA} \qquad (2)$$

در تساوی (۲) اگر طرف دوم مخالف صفر باشد، برداری در راستای AM است و طرف اوّل برداری در راستای $\overrightarrow{BN}$ خواهد بود و چون این دو بردار متقاطعند، نمی‌توانند برابر باشند. بنابراین لازم است که داشته باشیم:

$$\overrightarrow{GM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GA} = \vec{O} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{GN} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GB} = \vec{O}$$

و یا:

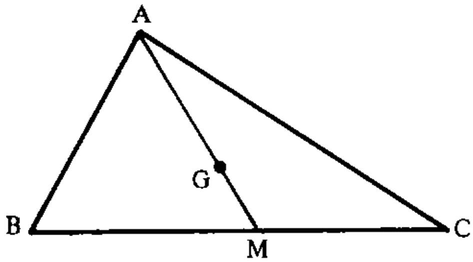
$$\overrightarrow{GM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AG} \qquad (3)$$

$$\overrightarrow{GN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BG} \qquad (4)$$

تساویهای (۳) و (۴) نشان می‌دهند که میانهٔ AM میانهٔ BN را به نسبت ۲ تقسیم می‌کند و همین‌طور میانهٔ BN میانهٔ AM را به نسبت ۲ تقسیم می‌کند. با همین استدلال ثابت می‌شود که میانهٔ CK نیز میانهٔ AM را به نسبت ۲ تقسیم می‌کند و در نتیجه میانهٔ CK نیز از نقطهٔ G می‌گذرد که در این‌جا حکم ثابت می‌شود.

تمرین ۱: مثلث ABC مفروض است، اگر G محل تلاقی سه میانهٔ مثلث و O نقطهٔ دلخواهی از صفحهٔ ABC باشد، ثابت کنید:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$$



راهنمایی: با توجه به شکل داریم:

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MC} \quad (\text{پاره‌خط AM میانه است})$$

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM}$$

$$2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \qquad (1)$$

همچنین بنا به خاصیت برخورد میانه داریم:

$$\frac{\overrightarrow{AG}}{\overrightarrow{GM}} = 2 \Longrightarrow 3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OM} \qquad (2)$$

بین رابطه‌های (۱) و (۲) بردار OM را حذف کنید و رابطهٔ مطلوب را نتیجه بگیرید.

تمرین ۲: اگر G_1 و G_2 به‌ترتیب مراکز ثقل (محل تلاقی سه میانه) مثلثهای ABC و XYZ باشند، ثابت کنید:

$$\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{BY} + \overrightarrow{CZ} = 3\overrightarrow{G_1G_2}$$

راهنمایی: با توجه به تمرین (۱) می‌توان نوشت:

$$\overrightarrow{OG_1} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3} \qquad (1)$$

و

$$\overrightarrow{OG_2} = \frac{\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{OY}+\overrightarrow{OZ}}{3} \qquad (2)$$

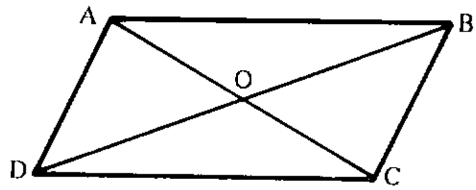
از تفاضل رابطهٔ (۱) و (۲) و با توجه به تساویهای زیر:

$$\overrightarrow{OG_2} - \overrightarrow{OG_1} = \overrightarrow{G_1G_2} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AX}$$

$$\overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BY} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{OZ} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CZ}$$

رابطهٔ مطلوب را نتیجه بگیرید.

۱۳. به‌طریقهٔ برداری ثابت کنید، در هر متوازی‌الاضلاع، اضلاع متقابل با هم برابر و قطرها همدیگر را نصف می‌کنند.



حل: در شکل مقابل چون AB با DC موازی است، داریم:

$$\overrightarrow{AB} = m\,\overrightarrow{DC} \qquad (۱)$$

و چون AD با BC موازی است، بنابراین:

$$\overrightarrow{BC} = n\,\overrightarrow{AD} \qquad (۲)$$

از جمع تساویهای (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = m\,\overrightarrow{DC} + n\,\overrightarrow{AD} \qquad (۳)$$

از طرفی با توجه به حاصل جمع بردارها داریم:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} \qquad (۴)$$

از تساویهای (۳) و (۴) نتیجه می‌شود:

$$m\,\overrightarrow{DC} + n\,\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$$

و یا:

$$(m - ۱)\,\overrightarrow{DC} = (۱ - n)\,\overrightarrow{AD}$$

اگر فرض کنیم $۱ - n \neq ۰$ ، در این‌صورت داریم:

$$\overrightarrow{AD} = \frac{m - ۱}{۱ - n}\,\overrightarrow{DC}$$

یعنی؛ $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{DC}$ هم‌راستا می‌باشند، که خلاف فرض است، بنابراین

لازم است $۱ - n = ۰$ ، یعنی؛ $n = ۱$ و چون $\overrightarrow{DC} \neq \overrightarrow{O}$ ، پس:

$m - ۱ = ۰$ و در نتیجه $m = ۱$ و بنابراین:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$$

برای اثبات قسمت دوم؛ اگر O محل تلاقی اقطار باشد، داریم:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$$

و چون $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ؛ بنابراین داریم:

$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$$

و یا:

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} \qquad (۵)$$

در تساوی (۵) اگر $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} \neq \overrightarrow{O}$ ، در این‌صورت طرف دوم تساوی (۵) برداری مخالف صفر در راستای $\overrightarrow{AC}$ و طرف اوّل برداری در راستای $\overrightarrow{BD}$ است و این محال است، زیرا دو راستای AC و BD متقاطعند، پس لازم است داشته باشیم:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{O} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{O}$$

و یا:

$$\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CO} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{DO}$$

که در این‌جا حکم ثابت می‌شود.

تمرین: به‌طریقهٔ برداری ثابت کنید اضلاع لوزی با هم برابرند و قطرها همدیگر را نصف می‌کنند.

راهنمایی: مطابق راه حل مسألهٔ (۱۳) عمل کنید.

۱۴. ثابت کنید، X و Y بر هم منطبق هستند؛ هرگاه داشته باشیم:

$$\overrightarrow{BY} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AY} + \overrightarrow{XY}$$

حل: داریم:

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{BY} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AY} + \overrightarrow{XY}\\
\Rightarrow\ &\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AY} = \overrightarrow{XY} - \overrightarrow{BY}\\
\Rightarrow\ &\overrightarrow{YA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YB}\\
\Rightarrow\ &\overrightarrow{YB} = \overrightarrow{XB}
\end{aligned}$$

از رابطهٔ اخیر نتیجه می‌شود که X و Y بر هم منطبق هستند.

تمرین: ثابت کنید، $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{ZY}$ مساوی‌اند، اگر داشته باشیم:

$$\overrightarrow{SQ} = \overrightarrow{ZY} + \overrightarrow{SP}$$

راهنمایی: از رابطهٔ داده شده نتیجه بگیرید:

$$\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SQ} = \overrightarrow{ZY} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{ZY}$$

مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان (۱۱)

ادامهٔ مقالهٔ فروشندهٔ دوره‌گرد، **روش مرزی نیکلسون**[۹]

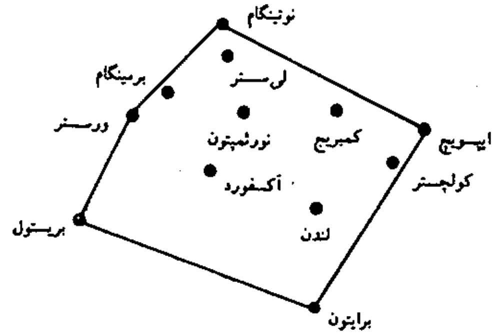
MICROMATH
Summer 1992
David Green
Lought borough University of Technology

■ ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

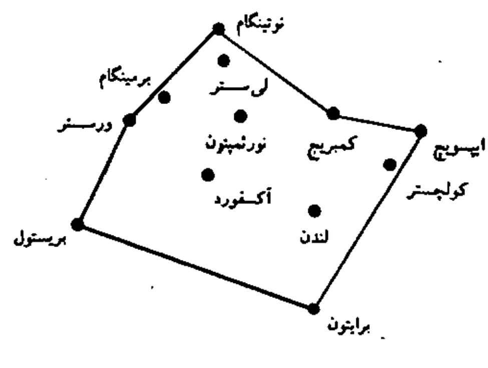
روش ساده اساساً هندسی تی. ای. جی. نیکلسون [۲] به یافتن مسیری داخل شهرهای «مرزی» وابسته است.

دراین‌صورت، هریک از شهرهای «داخلی»، به‌نوبت خود، به مسیر موردبحث چنان افزوده می‌شوند که مسیر مزبور را تاحدامکان کوتاه کنند. بعضی از مرحله‌های حل مسألهٔ ۱۲ شهر را در زیر نشان داده‌ایم:

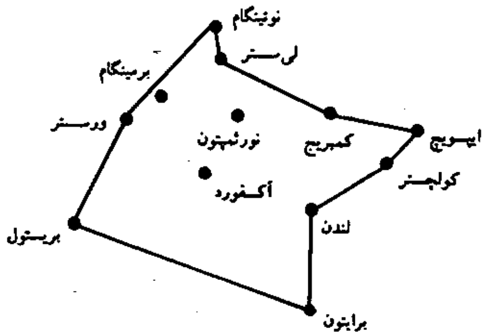
◆ **شهرهای مرزی تشکیل دهندهٔ مسیر اوّلیّه**



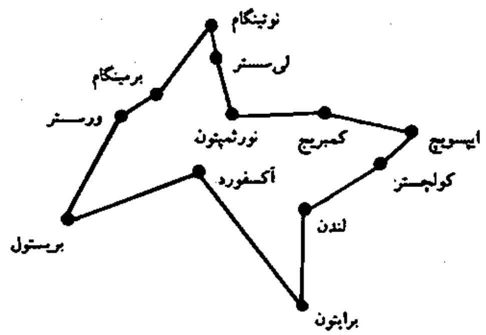
مسیر مرزی برای اضافه کردن اوّلین شهر داخلی (کمبریج) تغییر شکل می‌دهد:



مسیر مرزی برای اضافه کردن شهرهای بیشتر تغییر شکل می‌دهد:



مسیر کامل شده توسط روش مرزی (۵۲۸ مایل)



روش مرزی نیکلسون دریافتن مسیر مرزی (۵۲۸ مایل) این مسأله توفیق یافت، اما این اتفاق غیرمعمول است.

یکی از راه‌های اصلاح روش نیکلسون بررسی به‌نوبت جمیع شهرهای داخلی باقی‌مانده پیش‌از داخل کردن موردی از آنهاست. اما،

این کار، درصورتی که n شهر موجود باشند، روش نیکلسون را از مربع در n بودن (مانند روش اساسی نزدیکترین مکان بعدی) به مکعب در n تغییر می‌دهد، که زحمت محاسبه را برای دستاوردی بسیار اندک افزایش می‌دهد.

◆ طرح در کلاس درس

زمانی که نقشه‌ای نشان دهندهٔ (مثلاً) ده شهر ارائه و از کلاس خواسته شود که مسیر بهینه را بیابند می‌توان بحثهای زیادی را مطرح کرد.

می‌توان دانش‌آموزان را به یافتن روشهای مخصوص خودشان تشویق کرد. آنها را می‌توان بادست، بر مجموعه‌های داده‌های کوچک آزمون، و محاسبه و اصلاح کرد. تنها بعد از این کار است که به روشهای پیشنهادی معلم، برای بررسی کردن نیاز است.

در این مورد ممکن است قاعده‌هایی عمومی چون قاعدهٔ زیر ظاهر شوند: «اگر دو مسیر متقاطع شوند آنگاه تبدیل مسافرت با تغییر حلقه‌های مزبور همواره ممکن است». این کار می‌تواند به روش ۲ - بهینهٔ‌لین[۱۰] منجر شود.

روش کار درنظر گرفتن مسیری دلخواه و اصلاح آن با تعویض باهم مکان دو شهر واقع در دنبالهٔ مرتب مسافرتها (یاتعویض دو حلقه) است.

مثالی در دومین شکل این مقاله وجود دارد که، در آن تعویض حلقه‌ها به برمینگام و ورستر اصلاحی آشکار است.

این روش را می‌توان به روش ۳- بهینه[۱۱] توسیع داد که طبق گزارش دارای نتیجه‌هایی عالی است.

می‌توان نرم‌افزاری را که بتواند جوابهایی مناسب (اما نه لزوماً بهینه) بیابد در مورد بعضی‌از درسهای زنده تدارک دید. شاید کلاس بتواند کاراتر از کامپیوتر باشد؟ شاید کامپیوتر بتواند راه‌حل مناسبی ارائه دهد که کلاس بتواند آن را اصلاح کند؟ یا برعکس؟ راه‌حل مناسب چیست؟ یا روش مناسب؟ آیا روشی که زیر - بهینه[۱۲] است اصلاً دارای فایده است؟

تبادل بین کامپیوتر و استفاده کننده از آن یکی از ویژگیهای طبیعی این مسأله است. به کامپیوتر با روش زیر - بهینه نمی‌توان اعتماد کرد و در این مورد به رهیافتی انتقادی نیاز است که قطعی باشد.

قاعده این است که در مورد تغییرات جزئی در داده‌ها حساسیت داشته‌باشیم. چه گاهی تغییری کوچک (در مکان مختصاتی یا عددهای گرد شده) می‌تواند به‌طور شگفت‌آوری دارای تأثیری مهم باشد.

تبدیل جدول مختصات به جدول فاصله‌ها می‌تواند به پیداشدن مسیری متفاوت منجر شود - و بنابراین به‌ظاهر یک مسأله می‌تواند دو راه حل متفاوت را به دست دهد، و این درس سودمند دیگری است.

◆ مسألهٔ ۴۲ - شهر

در این‌جا مکان کافی برای به‌دست دادن جزئیات کامل ۴۲ شهر آمریکایی به کار رفته در این مسألهٔ مشهور موجود نیست. در مورد این مسأله، روش نزدیکترین مکان بعدی مکرر مسیری ۲۳٪ دورتر به دست آورده است درحالی که روش مرزی نیکلسون مسیری تنها ۱٪ دورتر یافته‌است.

◆ مسأله‌های کلی

روش نیکلسون به نقشه و دستگاه مختصاتی نیازمنداست. این خواسته در مورد داده‌های مربوط به شهرهای انگلیسی مشکلی ایجاد نمی‌کند. اما، اگر مایل به توسعهٔ بحث و ایجاد اشکالی در زندگی معمولی باشید، از دانش‌آموزان بخواهید تا مختصاتی در مورد جمیع پایتختهای ایالات متحده تهیّه کنند (باشد، می‌توانید آلاسکا را حذف کنید!). در این مورد خمیدگی زمین دارای اهمیت بسیار می‌شود و تنها پرداختن به‌همین مسأله می‌تواند به تحقیقاتی بسیار ثمربخش (یا بی‌ثمر) منجر شود.

◆ چه کسی به کامپیوتر نیازمند است؟

با در دست داشتن نقشه‌ای ساده با مجموعه‌ای از شهرهای واقع برآن، می‌توان بااستفاده از دستها و بدون محاسبه‌های پرزحمت، کارهای اکتشافی مفید بسیاری را انجام داد. (این‌کار درصورتی که از کلاس بخواهیم که مسأله را ابتدا با چشم حل کند انگیزهٔ بیشتری به‌دست می‌دهد).

روش نزدیکترین مکان‌بعدی را می‌توان بسرعت، بااستفاده از یک پرگار، یک خط‌کش و یک ماشین حساب، انجام داد.

به‌طریق دیگر، می‌توان جدولی از فاصله‌ها را تهیّه کرد. نقطه‌های آغازی مختلف را می‌توان به‌آسانی به دانش‌آموزان مختلف تخصیص داد و نتیجه‌ها را تقسیم کرد. در این صورت بنا به تجربهٔ من، باید توسط کلاس به‌آزمون بعضی از بهترین مسیرهای یافت شده پرداخت!

انجام روش مرزی نیکلسون حتی از این نیز ساده‌تر است و کار

مربوطه را می‌توان، با تخصیص شهرهای داخلی متفاوت، برای اضافه شدن در ابتدای کار، تقسیم کرد.

در مورد مسأله‌های مبتنی برجدول، برنامه‌ای کامپیوتری برای جمع مجموعه‌های داده‌ها، به‌استثنای مجموعه‌های داده‌های بسیار کوچک، اساسی است. مؤلف برای علاقه‌مندان دیسکی را تهیّه کرده‌است.

* * *

◆ نتیجه

مسألهٔ فروشندهٔ دوره‌گرد آسان درک و مناسب بررسی در راه‌های وسیع گوناگون، برای برد وسیعی از سنها و قابلیتهاست.

مسألهٔ مزبور را می‌توان بدون کامپیوتر معرفی کرد. استفاده از کامپیوتر در این مورد می‌تواند مفید باشد و می‌توان مطالب بسیاری در مورد این مسألهٔ ریاضی مهم، نیز قوت و ضعف کامپیوترها آموخت.

یادداشتها

9. Nicholson's Boundary Method
10. Lin's 2 - optimal method
11. 3 - optimal method
12. sub - optimal

مرجعها:

References

[1] Williams, H.P. (1990) *Optimisation and Operational Research.* Bulletin I.M.A. 26, 76-85.

[2] Nicholson, T.A.J. (1968) *A Boundary Method for Planar Travelling Salesman Problems.* Operational Research Quarterly, 19, 4, 445-452.

ادب ریاضی

قضایای ریاضی عامند اما عامه‌پسند نیستند و به تعبیری دیگر «در هندسه راه شاهانه وجود ندارد» با این همه قضایای ریاضی از آنِ همهٔ مردمند و اختصاص به شخص خاص یا مملکت خاص ندارند. در تاریخ ریاضیات چنین می‌خوانیم که انجمنی که فیثاغورس بنایش را نهاده بود، نه تنها مردان که زنان را هم به عضویت خویش می‌پذیرفت و نه تنها عیالمندان را که مجردان را نیز؛ و تنها مقررهٔ صعب آن، ذیحق نبودن اعضا به آنچه که کشف می‌کرده‌اند بوده است، یعنی کشف هریک از اعضا از آنِ همهٔ اعضا بود و کسی را به گونهٔ خاص حق مالکیت بر آن نبود. از آن مهمتر از پرده برون افتادن راز را مصلحت نمی‌دانستند و هر خبر که در مجلسشان به گوش می‌رسید، در همان‌مجلس می‌ماند و چون راه‌گنج برهمه کس آشکاره نمی‌شد.

از مقاله سامان ریاضی:

از مجلهٔ مجموعهٔ مقالات و مسائل ریاضی

جوابهای تفریح اندیشه

جواب ۱. شش: ۱۱۹۹، ۱۹۱۹، ۱۹۹۱، ۹۹۱۱، ۹۱۹۱، ۹۱۱۹.

جواب ۲. ۳۰. $a . b = a^b + b$

$(۱.۲) = ۱^۲ + ۲ = ۳ \qquad (۳.۳) = ۳^۳ + ۳$

جواب ۳. ۰. میانگین و میانهٔ یک مجموعه از اعداد طبیعی متوالی برابرند.

جواب ۴. هشت. اگر O = وصل و F = قطع باشد، ترتیبهای زیر امکان‌پذیرند:

OOOO OOOF OOFO OFOO FOOO

FOFO FOOF OFOF

جواب ۵. نه. عددی بر ۹ بخش‌پذیر است که مجموع ارقامش بر ۹ بخش‌پذیر باشد. ملاحظه می‌کنیم که z بر این مسأله تأثیری ندارد، زیرا تنها ۰ های اضافی به‌دست می‌دهد. برای مثال:

$(۱۰^۱)۳ + ۵ = ۳۵$

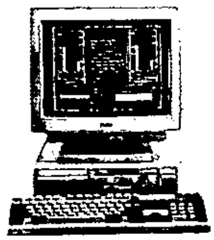
$(۱۰^۲)۳ + ۵ = ۳۰۵ \qquad (۱۰^۳)۳ + ۵ = ۳۰۰۵$

به این ترتیب $x + y$ باید برابر ۹ یا ۱۸ باشد:

$(x , y) = \{(۱ , ۸)$ و $(۸ , ۱)$ و $(۲ , ۷)$ و $(۷ , ۲)$ و $(۳ , ۶)$

$(۶ , ۳)$ و $(۴ , ۵)$ و $(۵ , ۴)$ و $(۹ , ۹)\}$

مبانی کامپیوتر و برنامه‌نویسی با BASIC (۲)



● حسین ابراهیم‌زادهٔ قُلزم

○ کامپیوترهای خانوادهٔ MARK

هـوارد آیکـن (۱۹۷۳ ـ ۱۹۰۰) استاد ریاضیات دانشگاه هاروارد اولین ماشین الکترونیکی همه منظوره[۱] رقمی[۲] را در سال ۱۹۳۷ اختراع کرد. وی در سال ۱۹۴۴ کامپیوتر رقمی الکترونیکی‌اش را کامل کرد و آن‌را MARK I نامید. این کامپیوتر ۱۵/۳ متر طول، ۲/۴ متر ارتفاع و ۳۱۵۰۰ کیلوگرم وزن داشت و در آن بیش از ۸۰۰ کیلومتر سیم بکار رفته بود. این کامپیوتر را باید اولین کامپیوتری دانست که بر اساس ماشین تحلیلی[۳] بابیج ساخته شد. ورودی[۴] کامپیوتر MARK I، نوار منگنهٔ[۵] کاغذی بود. دستگاههای رله، کلیدها و چرخ و دیگر عناصرالکتریکی‌بکار رفته در MARK I بالغ بر ۷۶۰۰۰۰ قطعه می‌شد. کامپیوتر MARK I براساس سیستم دهدهی[۶] اعداد کار می‌کرد و محاسبات ریاضی آن تا ۲۳ رقم دقت داشت. سرعت آن، سه عمل جمع در ثانیه بود. این ماشین قادر بود عملیات جمع، ضرب، تقسیم، تفریق، محاسبهٔ لگاریتم، توان[۷]های مختلف، ریشه‌گیری[۸] و محاسبهٔ توابع مثلثاتی[۹] را انجام دهد. ساخت این ماشین ۵ سال طول کشید و در سال ۱۹۹۴ تکمیل گردید. مدل MARK II این کامپیوتر در سال ۱۹۴۷ کامل شد و شروع به‌کار کرد و مدلهای MARK III و MARK IV، در مدت کوتاهی بعد از آن ساخته شدند. حافظهٔ کامپیوتر MARK IV به‌صورت طبلهٔ مغناطیسی[۱۰] بود. همزمان باکار آیکن و همکارانش بر روی کامپیوتر MARK I، جان آتاناسوف، جان ماچلی و پراسپر اِکِرت و جان فون نویمان (۱۹۵۷ ـ ۱۹۰۳) روی کامپیوترهای الکترونیکی کار می‌کردند که در آن از لامپهای خلأ[۱۱] استفاده شد و قدرتی به‌مراتب بیشتر نسبت به کامپیوترهای الکترومکانیکی داشت.

○ کامپیوتر ABC

دکتر آتاناسوف استاد فیزیک و ریاضی که در دانشگاه آیووا با یک دانشجوی فوق لیسانس بنام Berry کار می‌کرد در سال ۱۹۴۲ کامپیوتری ساخت که در آن به‌جای استفاده از رله‌های الکترومکانیکی، که در کامپیوتر MARK I بکار رفته بود، از لامپهای خلأ استفاده کرد و از این‌رو سرعت آن صدها بار بیشتر از کامپیوتر MARK I گردید. این کامپیوتر که توسط آتاناسوف و بری ساخته شد کامپیوتر ABC یا Atanasoff- Berry Computer نامیدند. از کامپیوتر ABC فقط در حل معادلات[۱۲] استفاده می‌شد.

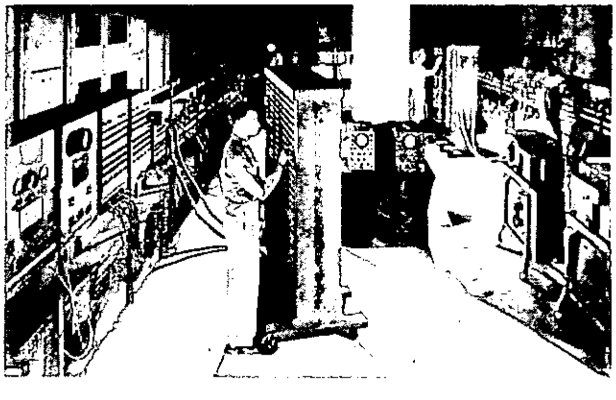
دکتر جان وینست آتاناسوف

○ کامپیوتر ENIAC

در سال (۴۶-) ۱۹۴۴ توسط ماچلی و اِکِرت اولین کامپیوتر تمام الکترونیکیِ همه منظوره در دانشگاه پنسیلوانیا ساخته شد. بودجهٔ طراحی و ساخت آن از سوی ارتش امریکا تأمین شده بود و به‌منظور

محاسبهٔ جداول پرتاب گلوله، پیش‌بینی وضع هوا و محاسبات انرژی اتمی بکار گرفته شد. این کامپیوتر ENIAC نامیده شد که بزرگترین ماشین محاسب زمان خودش نیز بود. این ماشین از ۴۷ بخش الکترونیکی تشکیل می‌شد، دارای ۹ فوت بلندی، ۲ فوت عرض و ۱ فوت طول بود و فضایی به وسعت ۱۵ × ۹ متر را اشغال می‌کرد. کامپیوتر ENIAC بیش از ۳۰ تُن وزن داشت و در ساختمان آن ۱۸۰۰۰ لامپ خلأ، ۷۰۰۰۰ مقاومت[۱۳]، ۱۰۰۰۰ خازن[۱۴] و ۵۰۰۰۰۰ اتصال[۱۵] بکار رفته بود. این کامپیوتر قادر بود ۵۰۰۰ عمل جمع را در مدت یک ثانیه انجام دهد. ENIAC نخستین کامپیوتری بود که تمام کارهای درونی[۱۶]اش به‌صورت الکترونیکی انجام می‌شد. این کامپیوتر دارای حافظهٔ[۱۷] داخلی و فوق‌العاده سریع‌تر از کامپیوتر MARK بود و از آن فقط در حل مسائل ریاضی استفاده می‌شد. این کامپیوتر از نوعِ کامپیوتر تک منظوره[۱۸] بود و از آن، همانگونه که گفته شد در حل مسائل ریاضی مربوط به امور موشکی و فضایی در ارتش استفاده می‌شد. ابعاد این کامپیوتر ۲ × ۱۲ × ۶ متر و وزن آن ۳۰ تُن بود.

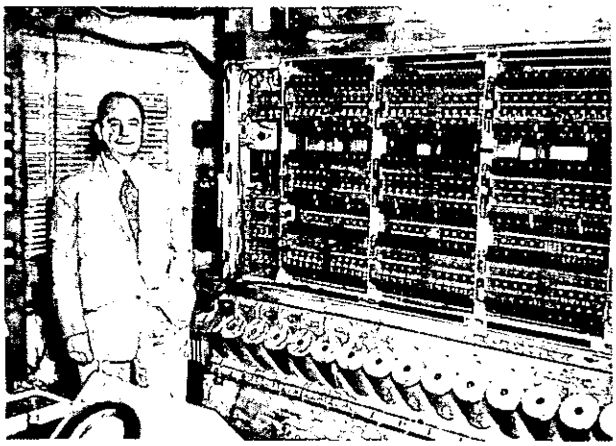
کامپیوترها اساساً دستگاههایی جهت انجام محاسبات با سرعتهای بالا و دقت بسیار زیاد هستند. ولی قبل از استفاده، کامپیوتر باید برنامه‌نویسی شود یا مجموعه‌ای از دستورات[۱۹] صریح یا برنامه[۲۰] به آن داده شود تا بتواند وظیفه[۲۱]اش را انجام دهد. برای برنامه‌نویسی ENIAC لازم بود صدها سیم را وصل نموده و هزاران کلید را بطریق مناسبی قرار دهند. در سال ۱۹۴۶ میلادی دکتر جان فون نویمان از دانشگاه پرینستون مفهوم کامپیوتر با برنامهٔ ذخیره شده[۲۲] را ارائه داد که دستورالعملهای یک برنامه، به‌جای جابه‌جا کردن سیمها و کلیدها[۲۳]، در حافظهٔ آن ذخیره می‌شود. ایدهٔ فون نویمان در طراحی کامپیوتر، اساس ساخت کامپیوترهای رقمی امروزی قرار گرفت.



نمای کلی کامپیوتر ENIAC

کامپیوتر EDVAC

در اواخر دههٔ ۱۹۴۰، تحقیقات دامنه‌داری در جهت یافتن پدیدهٔ فیزیکی‌ای صورت گرفته بود تا بتوانند با استفاده از آن، اطلاعات را در حافظهٔ کامپیوتر ذخیره کنند. دکتر جان فون نویمان در مقاله‌ای که آن‌را در سال ۱۹۴۷ منتشر کرد مفهوم کامپیوتر با برنامهٔ ذخیره شده را به‌همراه ذخیرهٔ داده‌ها به صورت سیستم دو دویی[۲۴] (باینری) ارائه داد. وی در این مقاله اظهار داشت جهت افزایش کار کامپیوتر لازم است تا برنامهٔ کار کامپیوتر در حافظهٔ داخلی آن ذخیره شود. از این‌رو کامپیوتر EDVAC با بهره‌گیری از این ایده در خلال سالهای ۱۹۴۶-۱۹۵۲ توسط گروهی موسوم به EDVAC ساخته شد. علاوه بر این، طرح بابیج در مورد کامپیوترها نیز در این کامپیوتر به‌طور کامل پیاده‌سازی شد. این کامپیوتر از اجزای مجزایی بنام واحد حافظه[۲۵]، واحد محاسبهٔ مرکزی[۲۶]، واحد کنترل مرکزی[۲۷] تشکیل می‌شد و دارای واحد ورودی[۲۸] و خروجی[۲۹] بود. کامپیوتر EDVAC را باید اولین کامپیوتری دانست که براساس برنامهٔ ذخیره شده طراحی[۳۰] شد و از این‌رو به آن، کامپیوتر با برنامهٔ ذخیره شده - Stored - Program Computer می‌گویند. این کامپیوتر در دانشگاه پنسیلوانیا برای استفاده در نیروی زمینی امریکا ساخته شد. کلیهٔ عملیات محاسباتی در این کامپیوتر در مبنای دو (باینری) انجام می‌شد.



دکتر جان فون نویمان

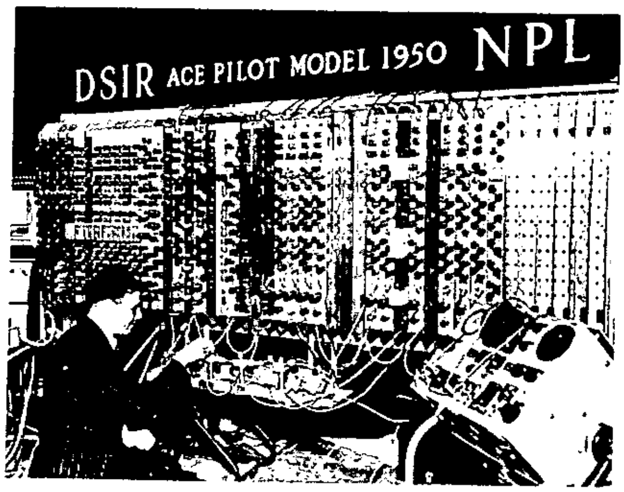
کامپیوتر EDSAC

این کامپیوتر در سال ۱۹۴۹ توسط M.V.WILKS ساخته شد که دارای خط تعویق جیوه‌ای[۳۱] بود. با طراحی خطوط تعویق جیوه‌ای در EDSAC قابلیت انتقال ضربان الکتریکی[۳۲] به ۵۰۰۰۰۰ ضربه در ثانیه رسید و نسبت به کامپیوتر EDVAC مشکل کمبود حافظه

نداشت. عیب آن، این بود که هر خط تعویق در آن فقط قادر بود تنها نصف اطلاعات[۳۳] را نگهداری کند. اساس کار کامپیوتر EDSAC بر نظریهٔ نویمان یعنی ذخیرهٔ داده‌ها به‌صورت سیستم دودویی و ذخیرهٔ برنامهٔ کار کامپیوتر و بطور کلی ذخیرهٔ برنامه‌ها در حافظهٔ کامپیوتر استوار بود.

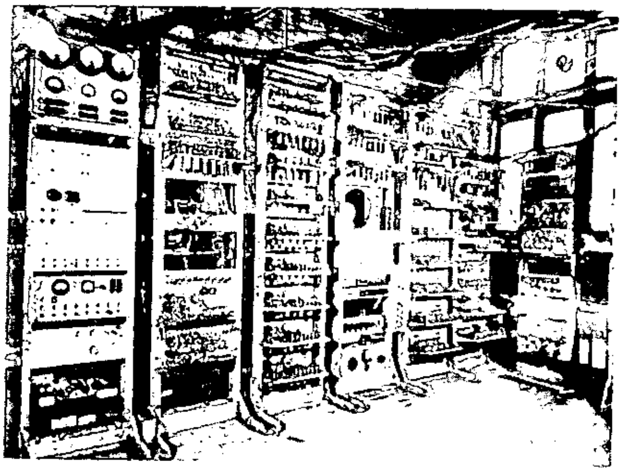
○ کامپیوتر ACE

در انگلستان گروهی تحت سرپرستی آلن تیورینگ، در سال ۱۹۴۷، در آزمایشگاه تحقیقات فیزیکی کار می‌کردند، این گروه توانستند طرح منحصر به‌فردی[۳۴] را ارائه دهند که در آن برای حافظهٔ کامپیوتر از خط تعویق جیوه‌ای استفاده شود. این کامپیوتر پس از ماشین محاسب تحلیلی بابیج، ACE یا Analytic Computing Engine نامیده شد. کار ساخت نمونهٔ اولیهٔ ACE در سال ۱۹۴۷ شروع شد و تا سال ۱۹۵۱ ادامه یافت. نمونه تجاری[۳۵] ACE، توسط یک شرکت انگلیسی بنام DEUCE به بازار عرضه شد.



○ کامپیوتر منچستر

در سال ۱۹۴۷، F.C. Williams، روشی را برای ذخیرهٔ اطلاعات بر اساس ایجاد تغییرات نقطه‌ای در لامپ اشعهٔ کاتدی[۳۶] استاندارد ابداع نمود. وی این روش را در کامپیوتر خود بنام کامپیوتر ویلیامز که در دانشگاه منچستر انگلستان ساخته شد پیاده کرد. این کامپیوتر نخستین کامپیوتری بود که در ساختمانش از ثبات شاخص[۳۷] بنام ثبات B و از انباره[۳۸] بنام ثبات A استفاده شد. بر روی این کامپیوتر بود که در سال ۱۹۴۸ مسئله تعیین اعداد اول اجرا شد و ۵۲ دقیقه طول کشید تا خروجی برنامه ارائه شد. نمونهٔ تجاری این کامپیوتر در سال ۱۹۵۱ به دانشگاه منچستر اهدا شد.



کامپیوتر منچستر

○ کامپیوتر IAS

گروهی تحت سرپرستی جان فون نویمان، در مؤسسهٔ مطالعات پیشرفتهٔ (IAS یا Institute of Advanced Study) در دانشگاه پرینستون امریکا، ساخت کامپیوتری را طراحی کردند که برای حافظهٔ کامپیوتر قرار بود از لامپهای خاصی بنام SELECTRON استفاده کنند. در هنگام تولید این لامپ، با مشکل عملی زیادی روبه رو شدند و از این‌رو به‌جای آن در ساختمان کامپیوتر از لامپ ویلیامز استفاده کردند. با استفاده از طرح IAS در دانشگاه ایلی نویز کامپیوتر ORDVAC و بعدها کامپیوتر ILLIAC ساخته‌شد. نمونهٔ دیگری از این کامپیوتر بین‌سالهای ۱۹۵۲ - ۱۹۴۰ بنام MANIAC در لوس‌آلاموس[۳۹] ساخته شد و شرکت RAND کامپیوتر JOHNIAC و آزمایشگاه[۴۰] آرگون، کامپیوتر ORACLE را ساخت.

○ کامپیوتر SEAC و SWAC

پروژهٔ کامپیوتر SEAC یا NBS EASTER[۴۱] AUTOMATIC COMPUTER در سال ۱۹۴۷ بر اساس طرح EDVAC برای دفتر استانداردهای ملی NBS، ساخته شد و در آن برای حافظهٔ کامپیوتر از خطوط تعویق استفاده شد. این دفتر در سال ۱۹۵۰ کامپیوتر دیگری ساخت که حافظهٔ آن‌را لامپ ویلیامز تشکیل می‌داد و آن‌را SWAC یا NBS WESTERN AUTOMATIC COMPUTER نامیدند. این کامپیوتر از سریع‌ترین کامپیوتر در زمان خودش به‌شمار می‌رفت و قادر بود عمل جمع دوتایی مانند $C = A + B$ را در ۶۴ مایکرو ثانیه و عمل ضرب را در مدت ۳۸۴ مایکرو ثانیه انجام دهد.

○ کامپیوترهای طبلهٔ مغناطیسی

طرح مطالعاتی ساخت کامپیوترهایی با طبلهٔ مغناطیسی در سال ۱۹۴۸، تقدیم انجمن تحقیقات مهندسی امریکا شد. نمونهٔ تجاری این کامپیوتر اندکی بعد بنام ۱۱۰۱ به بازار عرضه شد. پُل‌نورتن Paul Norton در دانشگاه برکلی کالیفرنیا، کامپیوتر طبله‌ای را طراحی کرد و آن را CARDIC نامید. نمونه‌های مختلف دیگری از این کامپیوتر با نامهای IBM ۶۵۰ ، LGP ۳۰ ، BENDIX G ۱۵ نیز به بازار عرضه شد.

○ کامپیوتر UNIVAC

به‌منظور تشکیل شرکتی بنام شرکت کامپیوتری اِکِرت و ماچلی، این دو در سال ۱۹۴۶ دانشگاه پنسیلوانیا را ترک کردند و بعدها پس از تأسیس شرکت، شرکت خود را به Remington - Rand فروختند. Remington - Rand اولین کامپیوتر تجاری را که برای کاربردهای علمی[42] و تجاری[43] طراحی شده بود ساختند و نام این کامپیوتر را UNIVAC گذاشتند. UNIVAC قادر بود داده‌های عددی و حرفی را بطور همزمان پردازش[44] کند. سرعت این کامپیوتر ۴۰۰۰ عملِ جمعِ اعداد چهار رقمی[45] در مدت یک ثانیه بود. اولین نمونه از کامپیوتر UNIVAC در سال ۱۹۵۱ به ادارهٔ سرشماری[46] امریکا فروخته شد. کامپیوتر UNIVAC I را بایستی نخستین کامپیوتر الکترونیکی دانست که برای فروش به بازار عرضه گردید. از این کامپیوتر در امور غیر علمی نیز استفاده می‌شد. این کامپیوتر برای ورودی و خروجی از نوار مغناطیسی[47] استفاده می‌کرد.

دکتر ماچلی (سمت چپ) و دکتر اکرت

نسلهای مختلف کامپیوترهای الکترونیکی

کامپیوترهای نسل اول (۱۹۵۸ - ۱۹۴۴)

مشخصهٔ اصلی این نسل[48] از کامپیوترهای الکترونیکی، در استفادهٔ زیاد از لامپهای خلأ در آن است که به همین دلیل، به این نسل از کامپیوتر، کامپیوترهای الکترونیکیِ دارای لامپ خلأ نیز می‌گویند. این نسل از کامپیوتر در بین سالهای ۱۹۵۸ - ۱۹۴۰ توسعه و تکامل یافت. کامپیوتر الکترونیکی ENIAC که در سال ۱۹۴۴ در دانشگاه پنسیلوانیا ساخته شد جزء کامپیوترهای نسل اول به‌شمار می‌رود. کامپیوترهای این نسل، حجم بسیار بزرگی داشتند و نیازمند برق بسیار قوی بودند، حرارت زیاد تولید می‌کردند و از این‌رو چند ساعت بیشتر در روز کارایی نداشتند. علاوه بر این سرعت و دقت کمی داشتند. برخی از این کامپیوترها، توانایی ذخیرهٔ برنامه را در حافظهٔ خود داشتند. داده‌های ورودی[49] را از طریق نوار کاغذی[50] یا کارت منگنه‌شده[51] دریافت می‌کردند. در کامپیوتر ENIAC از این نسل، ۱۸۰۰۰ لامپ خلأ بکار رفته بود و به بیش از ۱۲۰۰۰۰ وات برق احتیاج داشت، ۱۵۰ متر مربع فضا را اشغال می‌کرد و سرعت آن ۳۵۰ عمل ضرب و بین ۳۰۰۰ تا ۵۰۰۰ عمل جمع در ثانیه بود و این توانایی را داشت تا ۱۰۰ دستورالعمل را در ثانیه محاسبه کند. برنامهٔ این کامپیوتر به زبان ماشین[52] یا به‌صورت دو دویی (باینری) نوشته می‌شد، و ظرفیت حافظهٔ آن به ۴۰۰۰ کلمه محدود می‌شد و در آن از لامپ خلأ و دستگاههای رلهٔ زیادی استفاده شده بود. از کامپیوترهای این نسل در کارهای علمی و محاسبات ریاضی استفاده می‌کردند. کامپیوتر UNIVAC نیز متعلق به این نسل از کامپیوترها است. از کامپیوتر ENIAC و UNIVAC بیشتر در ارتش، بخصوص در نیروی زمینی استفاده می‌کردند.

○ کامپیوترهای نسل دوم (۱۹۶۴ - ۱۹۵۸)

اولین کامپیوتر نسل دوم در سال ۱۹۵۸ بنام IBM ۷۰۹۰ معرفی شد. ترانزیستور که در سال ۱۹۴۸ توسط آزمایشگاه بل اختراع شده بود در کامپیوترهای نسل دوم جایگزین لامپهای خلأ گردید. از این‌رو به کامپیوترهای نسل دوم، کامپیوترهای ترانزیستوری[53] نیز می‌گویند. ترانزیستور توانایی انجام بسیاری از کارهای لامپ خلأ را داشت، برق بسیار کمی مصرف می‌کرد و حرارت کمی تولید می‌نمود. قابلیت اطمینان بالایی داشت و در ساختمان آن برای حافظه از حلقه‌های مغناطیسی[54] استفاده شد. به‌وسایل خنک کنندهٔ قوی احتیاج نداشت و فضای کمتری را نسبت به کامپیوترهای نسل اول اشغال می‌کرد. سرعت آن با مایکروثانیه یا 10^{-6} ثانیه سنجیده می‌شد. برنامه‌های آن به زبان سطح بالا[55] مانند فرترن بود. کامپیوتر IBM ۱۶۲۰ از جمله کامپیوترهای نسل دوم است و در سال ۱۳۴۱ شمسی در شرکت نفت ایران نیز بکار گرفته

شد. سرشماری سال ۱۳۴۵ ایران نیز با استفاده از کامپیوتر نسل دوم IBM ۱۴۰۱ انجام شد. در بین سالهای ۱۹۶۴ ـ ۱۹۵۸ تعداد بسیار زیادی از این کامپیوترها ساخته شد و به بازار عرضه گردید. سرعت واحدهای ورودی و خروجی این کامپیوترها بسیار زیاد بود. کامپیوترهای نسل دوم توانایی آن را داشتند تا داده‌ها و برنامه‌ها را در فاصله بسیار دور از کامپیوتر از طریق خطوط تلفن دریافت کنند. سرعت این کامپیوترها به محاسبهٔ ۲۰۰۰ تا ۵۰۰۰۰ عمل جمع در ثانیه می‌رسید و قادر بود ۱۰۰۰۰۰ دستورالعمل را در یک ثانیه پردازش کند.

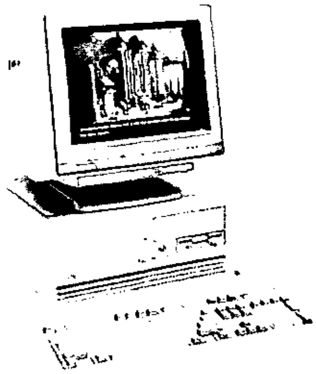
○ کامپیوترهای نسل سوم (۱۹۷۰ ـ ۱۹٦۴)

در اواخر دهۀ ۱۹۵۰ دانشمندان به این نتیجه رسیدند که اندازۀ فیزیکی یک ترانزیستور هیچ‌گونه تأثیری در توانایی آن ندارد و یک قطعه سیلی‌کان Silicon که می‌تواند دارای اندازه‌ای بسیار بسیار کوچکتر از یک ترانزیستور باشد قادر خواهد بود همان کار ترانزیستور را انجام دهد. در سال ۱۹۵۷ اولین مدار یکپارچه[٥٦] یا IC معرفی شد که ترکیبی از مدارها، هادیها، مقاومتها، دیودها و ترانزیستورها بود. این مجموعه در یک تراشهٔ[٥٧] بسیار کوچکی از سیلی‌کان به‌صورت یکپارچه بنام IC جمع شده بودند. اندازهٔ یک تراشه $\frac{1}{16}$ اینچ مربع و با وزن کسر کوچکی از یک اونس بود. در ساختمان کامپیوترهای نسل سوم از IC و حلقه‌های مغناطیسی استفاده شد. به کامپیوترهایی که در ساختمان آنها از IC یا مدارهای یکپارچه استفاده گردید کامپیوترهای نسل سوم یا کامپیوترهای دارای مدار یکپارچه می‌گویند. این کامپیوترها ابعاد به مراتب کوچکتری از کامپیوترهای دو نسل قبلی داشتند و فضای کمی را اشغال می‌کرد، مصرف برق بسیار کمی داشت و هزینهٔ تولید آن نیز بسیار پایین بود. سرعت[٥٨] عملیات در این نوع کامپیوترها با نانو ثانیه یا 10^{-9} ثانیه سنجیده می‌شد. ظرفیت حافظه در این نوع کامپیوترها بسیار افزایش یافت، سرعت عملیات در این نسل از کامپیوتر به بیش از ۱۰ میلیون عملِ جمع در ثانیه رسید. کامپیوتر IBM ۳٦۰ که در سال ۱۹٦۴ توسط شرکت IBM ساخته شد و به بازار عرضه گردید اولین کامپیوتر از نسل سوم بود. عدد ۳ در ۳٦۰ معرف نسل سوم بودن این نوع کامپیوترها و عدد ٦۰ معرف ساخته شدن آن در دهۀ ۱۹٦۰ است. کامپیوترهای نسل سوم دارای جستجوگرهای نوری[٥٩]، کاراکترخوانهای جوهر مغناطیس[٦۰] بودند. در این کامپیوترهای امکان پردازش داده‌ها از راه دور توسط دستگاهی شبیه ماشین‌تحریر بنام ترمینال با به‌کارگیری مادِم Madem وجود داشت. با این کامپیوترها چند نفر بطور همزمان می‌توانستند به‌صورت اشتراک زمانی Time Sharing کار کنند. کامپیوتر PDP، DATA GENERAL، MICRO DATA، CRAY و CYBER نیز به این نسل از کامپیوترها تعلق دارند.

○ کامپیوترهای نسل چهارم (... ـ ۱۹۷۰)

دهۀ ۱۹۷۰ شاهد عرضهٔ ریز پردازنده‌ها Microprocessors بود که خود واحد پردازندهٔ مرکزی[٦١] کامپیوتر را تشکیل می‌داد. این ریزپردازنده‌ها توانایی آن را داشتند تا برنامه‌ها را در حافظهٔ خود ذخیره کنند. و از هزاران قطعهٔ الکترونیکی نظیر ترانزیستور تشکیل می‌شدند. به‌عنوان مثال در ریز پردازنده هیولت پاکارو HP، که در سال ۱۹۸۱ به بازار عرضه شد ۴۵۰۰۰۰ تراشهٔ ترانزیستور وجود داشت، یکپارچگی مدارهای الکترونیکی در چنین مقیاس وسیعی، مشخصهٔ اصلی کامپیوترهای نسل چهارم یا کامپیوترهای دارای مدار یکپارچه در مقیاس وسیع را تشکیل می‌دهد. این ریزتراشه‌ها در دهۀ ۱۹۸۰ باعث انقلابی بزرگ در دنیای کامپیوتر گردیدند. در این نسل از کامپیوترها، شبکه‌های کامپیوتری عرضه شد و با تراکم بیشتر مدارهای یکپارچه یا IC ابعاد این نسل از کامپیوترها بسیار کوچک گردیدند و بدین‌ترتیب بود که کامپیوترهای‌شخصی‌نظیر IBM PC، APPLE، COMMODORE به بازار عرضه شدند، کاربردهای همگانی پیدا کردند و به خانه‌ها راه یافتند.

در مقام مقایسهٔ نسلهای مختلف کامپیوتر، باید متذکر شویم که در کامپیوترهای نسل اول در هر متر مربع ٦۰۰۰ عنصر الکترونیکی[٦٢] وجود داشت که در نسل دوم این تعداد به ۱۰۰۰۰۰ عنصر الکترونیکی و در نسل سوم به بیش از یک میلیون و در نسل چهارم به ۱۰ میلیون عنصر الکترونیکی افزایش یافت. در نتیجه ضربانهای الکترونیکی به‌علت کوتاه‌تر شدن فاصله، در مدت کمتری فاصله را طی می‌کردند و در نتیجه سرعت کامپیوتر به چند میلیون برابر کامپیوترهای نسل اول رسید. هزینهٔ تهیهٔ حافظهٔ داخلی[٦٣] برای یک عدد در سیستم دودویی یا یک بیت در سال ۱۹۵۰، ۲/٦۱ دلار، در سال ۱۹٦۰، ۸۵ سنت و در سال ۱۹٦۵، ۲۰ سنت بود. در سال ۱۹۷۰ این هزینه بین ۵ تا ۱۰ سنت و در سال ۱۹۷۵ این عدد به ۰/۵ سنت رسید و امروزه با استفاده از تراشه‌ها، هزینه‌ها بسیار کمتر شده است.



○ کامپیوترهای نسل پنجم

در آوریل ۱۹۸۲ یک مؤسسه تحقیقاتی در ژاپن با شروع به‌کار، وظیفهٔ ساخت کامپیوترهای نسل پنجم را به‌عهده گرفت. با ایجاد اصلاحات زیاد بر روی کامپیوترهای نسل چهارم، کامپیوترهای نسل پنجم ساخته می‌شوند که ساختمان آن بر اساس طرح فون نویمان استوار است. این کامپیوترها دارای ساختمانی جدیدتر و سازمان حافظه‌ای نوین خواهند بود و با زبان برنامه‌نویسی جدیدی کار خواهند کرد. در این نسل از کامپیوترها، مفاهیمی از قبیل هوش مصنوعی[۶۴] مورد توجه بسیار است و توانایی آن را دارند تا با زبانهای انسانی با انسان گفتگو کنند، صحبتها و تصاویر[۶۵] را به آسانی درک می‌کنند، قدرت یادگیری دارند، قادر به تصمیم‌گیری هستند و صداهای مختلف را از هم تمیز می‌دهند و قادر به شناسایی کلام می‌باشند. به کامپیوترهای نسل پنجم، سیستمهای پردازندهٔ اطلاعات علوم بشری نیز می‌گویند. این نسل از کامپیوتر، چه از نظر مفاهیم و چه از نظر نوع کار با کامپیوترهای چهار نسل قبل تفاوت خواهند داشت.

ـ **تصحیح**: برنامهٔ مثال آخر صفحهٔ ۶۴ از برهان ۱۰ براین اصل متکی است که در یک همسایگی بسیار کوچک نقطهٔ ماکزیمم و مینیمم نسبی، مشتق تغییر علامت می‌دهد. شعاع همسایگی تابع برنامه را $r = 0.01$ گرفتیم. در نقطهٔ ماکزیمم نسبی تغییر علامت مشتق از مثبت به منفی است و در نقطهٔ مینیمم نسبی تغییر علامت مشتق از منفی است به مثبت. با این توضیحات، برنامهٔ مثال آخر صفحهٔ ۶۴ از برهان ۱۰ و خروجی آن را به صورت زیر اصلاح کنید:

به جای خط 60 بنویسید:
```
60 LET Y1 = X1^2-X1-2
```
به جای خط 70 بنویسید:
```
70 LET Y2 = X2^2-X2-2
```

با اعمال تغییرات ذکر شده در مثال، خروجی برنامه را پس از اجرا، به صورت زیر ملاحظه خواهید کرد:

خروجی برنامه:

```
AT X= -1 Y=  14 IS MAXIMUM
AT X=  2 Y= -13 IS MINIMUM
```

★ واژه‌نامهٔ ریاضی و کامپیوتر

1- All - Purpose
2- Digital
3- Analytic Engine
4- Input
5- Punched tape
6- Decimal System
7- Power
8- Extracting Root
9- Trigonometric Function
10- Magnetic Drum
11- Vacuum Tube
12- Solving Equations
13- Resistor
14- Capacitor
15- Joint
16- Internal
17- Memory
18- Single - Purpose
19- Statement
20- Program
21- Task
22- Stored Program
23- Switch
24- Binary
25- Memory Unit
26- Central Arithmetic Unit
27- Central control Unit
28- Input Unit
29- Output Unit
30- Design
31- Mercury Delay Line
32- Pulse
33- Information
34- Unique Design
35- Commercial
36- Cathode Ray Tube (CRT)
37- Index Register
38- Accumulator
39- Los Alamos
40- Laboratory
41- National Bureau of Standards
42- Scientific
43- Business
44- Process
45- Four - Digit numbers
46- Census
47- Magnetic Tape
48- Generation
49- Input Data
50- Paper Tape
51- Punched Card
52- Machine Language
53- Transistorized Computer
54- Magnetic Core
55- High Level
56- Integrated Circuit
57- Chip
58- Speed
59- Optical Scanner
60- Magentic Ink
61- Central Processing Unit
62- Element
63- Internal Memory
64- Artificial Inteligence
65- Image

مکان هندسی

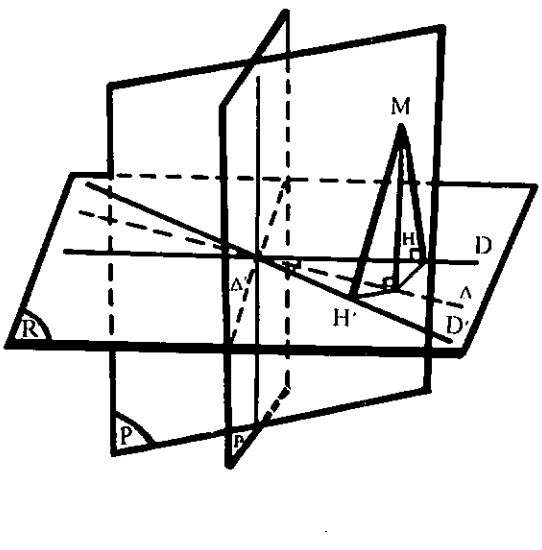
(قسمت چهارم)

محمدهاشم رستمی

این مقاله، یک مقاله تحقیقی است. به این جهت از دانش‌آموزان و دانشجویان ارجمند، اساتید محترم دانشگاهها، و دیگر ریاضیدانان و صاحبنظران درخواست می‌شود، مطالب و نظریات خود را که برای تکمیل و یا تصحیح این مقاله می‌تواند مؤثر و مفید باشد، همچنین کتابی که در مورد مکان هندسی در اختیار دارند و یا مشخصات آن کتاب را به نشانی مجلهٔ ریاضی برهان ارسال فرمایند، که قبلاً از این لطف و همکاری، صمیمانه سپاسگزاری می‌شود.

۵. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از دو خط راست متقاطع D و D′ به یک فاصله است، دو صفحه است که برخطهای Δ و Δ′ نیمسازهای زوایای بین دو خط D و D′ می‌گذرند و برصفحهٔ حاصل از دو خط D و D′ عمودند.

اثبات: خطهای متقاطع D و D′ را درنظر می‌گیریم و خطهای Δ و Δ′ نیمسازهای زوایای بین این دوخط را رسم می‌کنیم و دو صفحهٔ P و P′ را برخطهای Δ و Δ′ چنان می‌گذرانیم که برصفحهٔ دوخط D و D′ (صفحهٔ R) عمود باشد.



اولاً: اگر M نقطه‌ای دلخواه از یکی از این دو صفحه مثلاً نقطه‌ای از صفحهٔ P باشد و از M عمودهای MH و MH′ را بر دو خط D و D′ فرود آوریم $MH = MH'$ است. زیرا اگر از M عمود MK را بر صفحه R فرود آوریم (K روی Δ است)، دو مثلث قائم‌الزاویهٔ MHK و MH′K به حالت تساوی دو ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه متساوی‌اند ($KH=KH'$ و $MK=MK$ و $\hat{K}_1=\hat{K}_2=90^\circ$) پس $MH = MH'$ است.

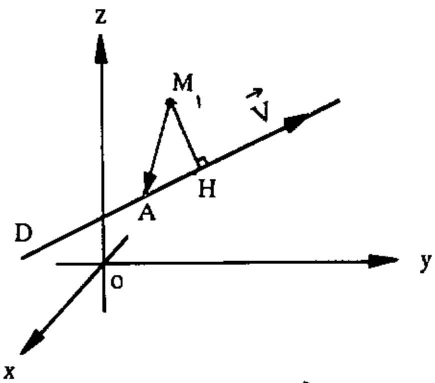
ثانیاً: ثابت می‌شود هرنقطه‌ای از فضا که از دو خط D و D′ به یک فاصله باشد روی یکی از دو صفحه، P یا P′ قرار دارد. زیرا اگر از M عمودهای MH و MH′ را به ترتیب بر D و D′ و عمود MK را برصفحهٔ R فرود آوریم و از K به H و H′ وصل کنیم، دو مثلث MHK و MH′K باهم برابرند ($MH = MH'$ و $MK = MK$ و $\hat{K}_1 = \hat{K}_2 = 90^\circ$)

پس: $KH = KH'$ یعنی $K \in \Delta$ یا $K \in \Delta'$ و چون MK برصفحهٔ R عمود است، پس نقطهٔ M روی یکی از دو صفحهٔ P یا P′ واقع است.

اثبات به روش تحلیلی: می‌دانیم که اگر $\vec{V}(p, q, r)$ بردارهادی و

$A(x_0, y_0, z_0)$ یک نقطه از خط $D: \frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$ باشند، فاصلهٔ نقطهٔ $M_1(x_1, y_1, z_1)$ از خط $D: \frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$ از دستور زیر محاسبه می‌شود:

$$\boxed{M_1H = \frac{|\vec{V} \wedge \overrightarrow{AM_1}|}{|\vec{V}|}}$$



باتوجه‌به‌این‌که $\vec{V}(p, q, r)$ و $\overrightarrow{AM_1}(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ است داریم:

$$\vec{V} \wedge \overrightarrow{AM_1} \left| \begin{array}{l} q(z_1 - z_0) - r(y_1 - y_0) \\ r(x_1 - x_0) - p(z_1 - z_0) \\ p(y_1 - y_0) - q(x_1 - x_0) \end{array} \right.$$

در نتیجه:

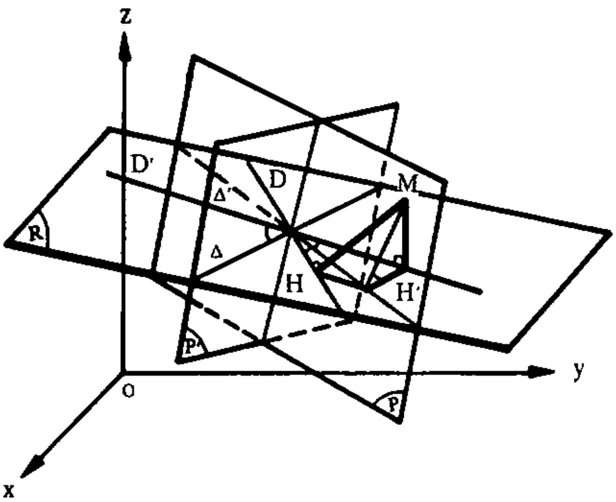
$$M_1H = \frac{\sqrt{[q(z_1-z_0)-r(y_1-y_0)]^2+[r(x_1-x_0)-p(z_1-z_0)]^2+[p(y_1-y_0)-q(x_1-x_0)]^2}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

با توجه به دستور فوق، فرض می‌کنیم $M(x, y, z)$ یک نقطه از مکان هندسی فوق باشد. یعنی نقطه‌ای که از دو خط

$$D': \frac{x-x_0}{p'} = \frac{y-y_0}{q'} = \frac{z-z_0}{r'} \text{ و } D: \frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$$

به یک فاصله است، در این صورت اگر نقطهٔ $A(x_0, y_0, z_0)$ نقطهٔ تقاطع دو خط D و D' اختیار شود (برای سهولت محاسبه)، داریم:

$$M \left| \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right., A \left| \begin{array}{l} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{array} \right. \Rightarrow \overrightarrow{AM} \left| \begin{array}{l} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{array} \right., \vec{V} \left| \begin{array}{l} p \\ q \\ r \end{array} \right., \vec{V'} \left| \begin{array}{l} p' \\ q' \\ r' \end{array} \right. \Rightarrow$$



$$MH = \frac{\sqrt{[q(z-z_0)-r(y-y_0)]^2+[r(x-x_0)-p(z-z_0)]^2+[p(y-y_0)-q(x-x_0)]^2}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

$$MH' = \frac{\sqrt{[q'(z-z_0)-r'(y-y_0)]^2+[r'(x-x_0)-p'(z-z_0)]^2+[p'(y-y_0)-q'(x-x_0)]^2}}{\sqrt{p'^2+q'^2+r'^2}}$$

$MH = MH' \Rightarrow$

$$\frac{\sqrt{[q(z-z_0)-r(y-y_0)]^2+[r(x-x_0)-p(z-z_0)]^2+[p(y-y_0)-q(x-x_0)]^2}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} = \frac{\sqrt{[q'(z-z_0)-r'(y-y_0)]^2+[r'(x-x_0)-p'(z-z_0)]^2+[p'(y-y_0)-q'(x-x_0)]^2}}{\sqrt{p'^2+q'^2+r'^2}}$$

و یا:

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{[q(z-z_0)-r(y-y_0)]^2+[r(x-x_0)-p(z-z_0)]^2}{p^2+q^2+r^2} \\ \dfrac{+[p(y-y_0)-q(x-x_0)]^2}{p^2+q^2+r^2} = \dfrac{[q'(z-z_0)-r'(y-y_0)]^2}{p'^2+q'^2+r'^2} \\ \dfrac{+[r'(x-x_0)-p'(z-z_0)]^2+[p'(y-y_0)-q'(x-x_0)]^2}{p'^2+q'^2+r'^2} \end{array}}$$

معادلهٔ بالا، پس‌از انجام اعمال لازم و محاسبهٔ یک مجهول برحسب دو مجهول دیگر و یا تبدیل آن به‌صورت $(ax + by + cz + d)(a'x + b'y + c'z + d') = 0$، معادلهٔ دو صفحه است که برنیمسازهای زوایای بین دو خط D و D' (خطوط Δ و Δ') می‌گذرند و شامل نقطهٔ $A(x_0, y_0, z_0)$ می‌باشند و برصفحه R عمودند، و هر نقطه آنها، از دو خط D و D' به یک فاصله می‌باشد. به عکس ثابت می‌شود هر نقطه‌ای که مختصاتش در معادلهٔ

بالا صدق کند از دو خط D و D' به یک فاصله است، بنابراین معادلهٔ فوق، معادلهٔ مکان‌هندسی نقاطی از فضا است که از دو خط D و D' به یک فاصله‌اند.

مثال ۱ : معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را بیابید که از دو خط $D: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-2} = z$ و $D': \frac{x-1}{-2} = y+2 = \frac{z}{2}$ به یک فاصله است.

حل: باتوجه به معادلهٔ دوخط D و D' نقطهٔ $A(1, -2, 0)$ نقطهٔ تقاطع این دوخط، $\vec{V}(2,-2,1)$ بردارهادی خط D و $\vec{V'}(-2,1,2)$ بردارهادی خط D' است. بنابراین باتوجه به معادلهٔ مکان هندسی نقاط متساوی‌الفاصله از دو خط داریم:

$$\frac{|1(z-0)-2(y+2)|^2+|2(x-1)+2z|^2+|-2(y+2)-1(x-1)|^2}{4+1+4} = \frac{|-2(z-0)-1(y+2)|^2+|1(x-1)-2z)|^2+|2(y+2)+2(x-1)|^2}{4+4+1} \Rightarrow (z-2y-4)^2+$$

$$(2x+2z-2)^2+(-x-2y-3)^2=(-2z-y-2)^2+(x-2z-1)^2+(2y+2x+2)^2 \Rightarrow (z-2y-4)^2$$

$$+(2x+2z-2)^2+(x+2y+3)^2-(2z+y+2)^2-(x-2z-1)^2-(2y+2x+2)^2=0 \Rightarrow -3y^2+3z^2$$

$$+4xy+8yz-12xz+8x-16y+28z-20=0$$

$$\Rightarrow -3y^2+4(x+2z-4)y+3z^2-12xz+8x+28z-20=0$$

$$\Rightarrow y=\frac{-2(x+2z-4)\pm\sqrt{4(x+2z-4)^2+3(3z^2-12xz+8x+28z-20)}}{-3}$$

$$\Rightarrow y=\frac{-2(x+2z-4)\pm\sqrt{4x^2+25z^2-20xz-8x+20z+4=(2x-5z-2)^2}}{-3}$$

$$\Rightarrow y=\frac{-2(x+2z-4)\pm(2x-5z-2)}{-3} \Rightarrow y=\frac{-9z+6}{-3}=+3z-2 \quad ،$$

$$y=\frac{-4x+z+10}{-3} \Rightarrow$$

$$\boxed{y-3z+2=0} \quad \text{و} \quad \boxed{4x-3y-z-10=0}$$

معادله‌های صفحات مکان‌هندسی مطلوب.

نکته: به‌روش دیگری نیز می‌توان معادلهٔ صفحات بالا را به‌دست آورد. بدین ترتیب که ابتدا معادلهٔ دوصفحه‌ای را که برخطهای D و D' گذشته و بر صفحهٔ R (صفحهٔ گذرنده بردو خط D و D') عمودند، پیدا می‌کنیم، آنگاه معادلات صفحات منصف فرجه‌های حاصل بین این دو صفحه را به‌دست می‌آوریم. درمورد همین مسأله داریم:

بردارهادی خط D $\quad \vec{V}(2,-2,1)$

بردارهادی خط D' $\quad \vec{V'}(-2,1,2)$

بردارنرمال صفحهٔ R $\quad \Rightarrow \vec{V}\wedge\vec{V'}(-5,-6,-2) \Rightarrow \vec{W}(5,6,2)$

بردارنرمال صفحهٔ P_1 $\quad \Rightarrow \vec{V}\wedge\vec{W}(10,-1,-22)$

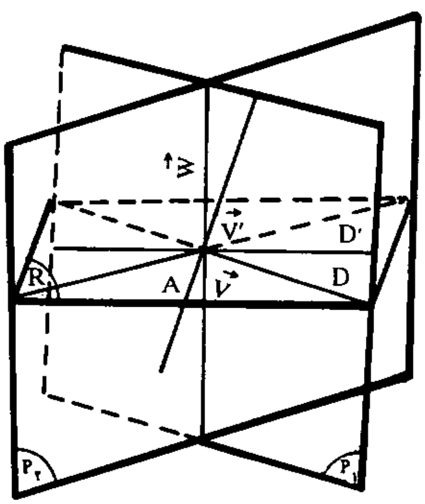
بردارنرمال صفحهٔ P_2 $\quad \Rightarrow \vec{V'}\wedge\vec{W}(10,-14,17)$

$$10(x-1)-1(y+2)-22(z-0)=0 \Rightarrow$$

معادلهٔ صفحهٔ P_1 $\quad \boxed{10x-y-22z-12=0}$

$$10(x-1)-14(y+2)+17z=0 \Rightarrow$$

معادلهٔ صفحهٔ P_2 $\quad \boxed{10x-14y+17z-38=0}$



$$\Rightarrow \frac{|10x-y-22z-12|}{\sqrt{100+1+484}=\sqrt{585}}$$

$$=\frac{|10x-14y+17z-38|}{\sqrt{100+196+289}=\sqrt{585}}$$

معادلات صفحات منصف فرجه‌های بین دو صفحهٔ $P_۱$ و $P_۲$.

$\Rightarrow |۱۰x - y - ۲۲z - ۱۲| = |۱۰x - ۱۴y + ۱۷z - ۳۸|$

$\Rightarrow ۱۰x - y - ۲۲z - ۱۲ = ۱۰x - ۱۴y + ۱۷z - ۳۸$

$\Rightarrow ۱۳y - ۳۹z + ۲۶ = ۰$

معادلهٔ یک صفحهٔ مکان : P $\quad \boxed{\Rightarrow y - ۳z + ۲ = ۰}$

$۱۰x - y - ۲۲z - ۱۲ = -۱۰x + ۱۴y - ۱۷z + ۳۸$

$\Rightarrow ۲۰x - ۱۵y - ۵z - ۵۰ = ۰$

معادلهٔ صفحهٔ دیگر مکان: P' $\quad \boxed{\Rightarrow ۴x - ۳y - z - ۱۰ = ۰}$

مثال ۲: نقطه‌ای از خط $\Delta: \dfrac{x}{۳} = \dfrac{y-۳}{۲} = z$ را تعیین کنید که از دو خط

$$D: \begin{cases} x - ۲ = \dfrac{y+۱}{-۲} \\ z = ۰ \end{cases} \quad \text{و} \quad D': \begin{cases} x = ۱ \\ y = t + ۱ \\ z = ۲t \end{cases}$$

بـــه یک فاصله باشد.

حل: ابتدا معادلهٔ مکان هندسی نقاطی را که از دو خط D و D' به یک فاصله‌اند به دست می‌آوریم و سپس نقطهٔ تقاطع این مکان هندسی با خط Δ را تعیین می‌کنیم.

دو خط D و D' در نقطهٔ $A(۱,۱,۰)$ متقاطعند. صفحهٔ گذرنده بر D و D' را R و صفحهٔ گذرنده بر D و عمود بر R را $P_۱$ و صفحهٔ گذرنده بر D' و عمود بر R را $P_۲$ می‌نامیم. داریم:

$$D: \begin{cases} x - ۲ = \dfrac{y+۱}{-۲} \Rightarrow \\ z = ۰ \end{cases} \begin{cases} ۱ - ۲ = \dfrac{t+۱+۱}{-۲} \Rightarrow t = ۰ \\ ۲t = ۰ \qquad \Rightarrow t = ۰ \end{cases}$$

نقطهٔ تقاطع D و D' $\quad \Rightarrow t = ۰ \Rightarrow A(۱,۱,۰)$

بردارهادی خط D' $\vec{V'}(۰,۱,۲)$، بردارهـادی خط D $\vec{V}(۱,-۲,۰)$

بردار قائم صفحهٔ R $\quad \vec{W} = \vec{V} \wedge \vec{V'} \ (-۴,-۲,۱)$

بردار قائم صفحهٔ $P_۱$ $\quad \vec{V} \wedge \vec{W} \ (۲,۱,۱۰)$

بردار قائم صفحهٔ $P_۲$ $\quad \vec{V'} \wedge \vec{W} \ (-۵,۸,-۴)$

$\Rightarrow$ معادلهٔ کلی صفحه $\quad a(x - x_۰) + b(y - y_۰) + c(z - z_۰) = ۰$

$۲(x - ۱) + ۱(y - ۱) + ۱۰(z - ۰) = ۰ \Rightarrow$

معادلهٔ صفحهٔ $P_۱$: $\quad \Rightarrow \boxed{۲x + y + ۱۰z - ۳ = ۰}$

$-۵(x - ۱) + ۸(y - ۱) - ۴(z - ۰) = ۰ \Rightarrow$

معادلهٔ صفحهٔ $P_۲$: $\quad \boxed{-۵x + ۸y - ۴z - ۳ = ۰}$

$$\frac{|۲x + y + ۱۰z - ۳|}{\sqrt{۴ + ۱ + ۱۰۰} = \sqrt{۱۰۵}} = \frac{|-۵x + ۸y - ۴z - ۳|}{\sqrt{۲۵ + ۶۴ + ۱۶} = \sqrt{۱۰۵}}$$

معادلهٔ صفحات نیمساز فرجه‌های بین دو صفحهٔ $P_۱$ و $P_۲$ (صفحات مکان هندسی مورد نظر).

$\Rightarrow (۲x + y + ۱۰z - ۳) = \pm(-۵x + ۸y - ۴z - ۳) \Rightarrow$

$۲x + y + ۱۰z - ۳ = -۵x + ۸y - ۴z - ۳$

$\Rightarrow ۷x - ۷y + ۱۴z = ۰ \Rightarrow \boxed{x - y + ۲z = ۰}$

معادلهٔ یک صفحهٔ مکان هندسی: P

$۲x + y + ۱۰z - ۳ = ۵x - ۸y + ۴z + ۳ \Rightarrow$

$-۳x + ۹y + ۶z - ۶ = ۰$

معادلهٔ صفحهٔ دیگر مکان هندسی: P' $\quad \Rightarrow \boxed{x - ۳y - ۲z + ۲ = ۰}$

$$\begin{aligned} P&: \begin{cases} x - y + ۲z = ۰ \\ \dfrac{x}{۳} = \dfrac{y-۳}{۲} = z = t \end{cases} \Rightarrow ۳t - (۲t + ۳) + ۲t \\ \Delta&: \end{aligned}$$

$= ۰ \Rightarrow t = ۱ \Rightarrow$

یک نقطهٔ جواب مسأله $M_۱(۱ \text{ و } ۵ \text{ و } ۳)$

$$\begin{aligned} P'&: \begin{cases} x - ۳y - ۲z + ۲ = ۰ \\ \dfrac{x}{۳} = \dfrac{y-۳}{۲} = z = t \end{cases} \Rightarrow ۳t - ۳(۲t + ۳) - ۲t + ۲ = ۰ \\ \Delta&: \end{aligned}$$

$\Rightarrow t = \dfrac{-۷}{۵} \Rightarrow M_۲\left(\dfrac{-۲۱}{۵}, \dfrac{۱}{۵}, \dfrac{-۷}{۵}\right)$

نقطهٔ دیگر جواب مسأله

پیش‌گویی و عدد جادویی هفت*

● نوشتهٔ مارتین گاردنر ● ترجمهٔ حسن نصیرنیا

در اینجا گروهی از بازیهای جالب توجه بر اساس حقه‌های عددی را ارائه می‌کنیم که اگر با یک ماشین حساب کوچک انجام دهید، متحیر می‌شوید. پیش از این‌که دنبالهٔ مطلب را بخوانید یک ماشین حساب جیبی یا رومیزی فراهم کنید و بازیها را به‌ترتیبی که می‌آیند، انجام دهید. توجه داشته باشید که همهٔ آنها به عدد ۷ مربوط می‌شوند و ۷ عددی است که عرفای دوران باستان و قرون وسطی معمولاً آن‌را سرشار از خواص جادویی می‌پنداشتند. اگرچه در انجام این بازیها از شما خواسته می‌شود که برخی اعداد را به‌طور اتفاقی برگزینید ولی من خواهم کوشید با استفاده از نیروی خارق‌العادهٔ خود، نتیجهٔ دقیق محاسبات شما را در هر مورد پیشگویی کنم.

برای آغاز بازی، عدد اسرار آمیز ۱۵۸۷۳ را بر قسمت بازخوانی ماشین حساب قرار دهید سپس یکی از ارقام ۱ تا ۹ را انتخاب و ۱۵۸۷۳ را در آن ضرب کنید. حال حاصل‌ضرب را ۷ برابر کنید. قسمت بازخوانی نشان می‌دهد که عدد به دست آمده (که عدد ۶ رقمی است) متشکل از شش بار تکرار رقم انتخابی شماست.

اما چرا حاصل محاسبات چنین می‌شود؟ سبب آن است که ۷ برابر ۱۵۸۷۳، عدد ۱۱۱,۱۱۱ می‌شود و این عدد اگر در هر عدد یک رقمی یکی از ارقام مذکور ضرب شود، طبیعتاً عددی شش رقمی به‌دست می‌آید که شامل شش بار تکرار همان عدد یک رقمی موردنظر است. برای به‌دست آوردن یک رشتهٔ طولانیتر از ارقام، عدد ۱۲,۳۴۵,۶۷۹ (توجه کنید که ۸ در این عدد حذف شده است) را در یک عدد یک رقمی مثبت دلخواه ضرب کنید و سپس حاصل را ۹ برابر کنید. علت مؤثر واقع شدن آن است که ۹ برابر عدد ۱۲,۳۴۵,۶۷۹ عدد ۱۱۱,۱۱۱,۱۱۱ می‌شود.

حال به‌موردی دیگر از این بازیهای عددی می‌پردازیم که توجیه آن چندان آسان نخواهد بود. به‌فرض این‌که شما بیشتر از ۹ و کمتر از ۱۰۰ سال داشته باشید، عدد معرف سن خود را در قسمت بازخوانی ماشین حساب قرار دهید و آن‌را در عدد جادویی ۱۴۴۳ ضرب کنید. بعد اگر حاصل‌ضرب را ۷ برابر کنید، به این نتیجهٔ شگفت‌آور می‌رسید که عدد به‌دست آمده شامل سه بار تکرار عدد معرف سن شماست! این امر همواره مصداق دارد، چه ۱۴۴۳ برابر عدد ۷، عدد ۱۰۱۰۱ می‌شود. به آسانی می‌توان دریافت که اگر عدد اخیر را در هر عدد دو رقمی ضرب کنیم، حاصل عددی شش رقمی می‌شود که از سه بار تکرار آن عدد دو رقمی تشکیل شده است.

حال به حقه‌ای دیگر در مورد اخیر می‌پردازیم و کار را با قرار دادن یک عدد سه رقمی دلخواه در قسمت بازخوانی ماشین حساب آغاز می‌کنیم. سه تا از دگمه‌های ماشین حساب متناظر با ۳ رقم عدد انتخابی را فشار دهید و این عمل را تکرار کنید تا عددی شش رقمی به شکل ABCABC درست شود، که متفاوت بودن ارقام A و B و C ضرورتی ندارد. چنانچه این عدد را بر ۱۳ تقسیم کنید، باقی‌مانده‌ای نخواهد داشت. بار دیگر خارج‌قسمت را بر ۱۱ بخش کنید، تقسیم بدون باقی‌مانده خواهد بود! سرانجام اگر خارج قسمت را بر ۷ تقسیم کنید، خواهید دید که همان عدد سه رقمی نخست در قسمت بازخوانی ماشین حساب ظاهر می‌شود.

برای پی بردن به علت امر، ۷ را در ۱۱ و سپس در ۱۳ ضرب کنید، حاصل ۱۰۰۱ می‌شود و آشکار است که اگر ۱۰۰۱ در هر یک از شکلهای عدد ABC ضرب شود، حاصل ABCABC خواهد شد. چنانچه این عملیات را برعکس انجام دهیم، حقهٔ کار آشکار می‌شود؛ به این ترتیب که اگر ABCABC بر اعداد ۷، ۱۱ و ۱۳ (یا در واقع بر ۱۰۰۱) تقسیم شود، عدد ABC به‌دست می‌آید. براحتی می‌توان این عملیات را تعمیم داد و عددهایی بزرگتر از این دست به‌وجود آورد. برای مثال، آیا می‌دانید چرا عدد ABCDABCD را اگر بر ۱۳۷ و سپس بر ۷۳ بخش کنیم، حاصل عدد ABCD خواهد شد؟

برای آگاهی از حقهٔ بعد، عدد ۹۹۹,۹۹۹ را در قسمت بازخوانی ماشین حساب بگذارید. یکی از ارقام ۱ تا ۶ را به اختیار انتخاب کنید و ۹۹۹,۹۹۹ را در آن ضرب و سپس حاصل را بر ۷ تقسیم کنید. حال اگر به «بخش پاسخها» رجوع کنید، درخواهید یافت که پیش‌بینی من در مورد نتیجهٔ نهایی کار چگونه است.

پاسخها را در شمارهٔ آینده ملاحظه کنید.

*برگرفته شده از کتاب: **معماهای ابوالهول**، نوشتهٔ مارتین گاردنر، ترجمهٔ حسن نصیرنیا، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۷۰، ص ۵.

دربارهٔ مسأله‌های ساختمانی در هندسهٔ فضایی

● پرویز شهریاری

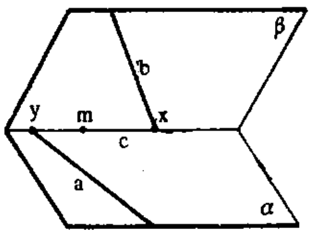
برای حل مسأله‌های هندسهٔ فضایی، باید قبل از هر چیز، از دو مانع عبور کرد: ۱) تجسم فضایی جسم؛ ۲) رسم آن روی صفحه. بدون گذشتن از این دو مانع، حتی نمی‌توان حل مسأله را آغاز کرد. برای رسیدن به این هدف، علاوه بر اطلاع از قانونهای رسم و تمرین مستمر، باید به سرچشمهٔ مسأله مراجعه کرد. بیشتر مسأله‌های هندسهٔ فضایی، دربارهٔ چندوجهیهاست، ولی اگر بتوانیم صورت مسأله را بخوبی تجزیه و تحلیل کنیم، چه بسا به مسألهٔ ساده‌ای برسیم که هم تجسم آن و هم رسم آن روی صفحه (و در نتیجه، حل آن) ساده باشد. البته،که عکس این روش هم گاهی می‌تواند کارساز باشد، یعنی نقطه‌ها خطهای راست و صفحه‌هایی را که در فضا، و به‌ظاهر بی‌ارتباط با هم مطرح کرده‌اند، به یک چندوجهی ساده (مثل چهاروجهی، مکعب مستطیل و غیره) مربوط کنیم تا بستگی آنها با یکدیگر، برایمان روشنتر شود.

در این مقاله، مسأله‌ای ساده را، که در بیشتر کتابهای درسی وجود دارد، حل می‌کنیم و سپس، همین مسأله را، وقتی روی چندوجهیها داده شده است، دنبال می‌کنیم. خواهید دید، هم مسألهٔ اصلی می‌تواند به حلّ مسأله‌های مربوط به چند وجهیها کمک کند و هم مسأله‌های نوع دوم، ماهیت مسألهٔ اصلی را روشنتر می‌کنند.

مسألهٔ اصلی: از نقطهٔ مفروض M، خط راستی بگذرانید که دو خط راست متنافر و مفروض a و b را قطع کند. نقطهٔ M، متعلق به هیچ کدام از خطهای راست a و b نیست.

حل. c را خط راست مجهول می‌گیریم. صفحه‌ای را که از خطهای راست a و c می‌گذرد α، و صفحه‌ای را که از خطهای راست b و c می‌گذرد β می‌نامیم.

شکل ۱



چون M روی خط راست c $(M\in c)$ و c فصل مشترک دو صفحهٔ α و β $(c = \alpha\cap\beta)$ است، پس نقطهٔ M به هر دو صفحهٔ α و β تعلق دارد ($M\in\alpha$ و $M\in\beta$). بنابراین، اگر مسأله جواب داشته باشد، باید داشته باشیم: $c = \alpha\cap\beta$ که در آن $\alpha = (M,a)$ و $\beta = (M,b)$. روی شکل ۱، خط راست مجهول c، خطهای راست a و b را، به‌ترتیب، در نقطه‌های Y و X قطع کرده است.

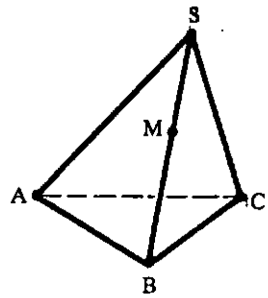
آیا مسأله یک جواب دارد؟ آیا ممکن است، مسأله جواب نداشته باشد؟

خط راست مجهول، روی دو صفحهٔ α و β است (ولی از این‌جا نمی‌توان نتیجه گرفت که، خط راست مجهول، تنها از همین راه و به کمک صفحه‌های α و β به‌دست می‌آید؛ خواهید دید روش دیگری هم برای پیدا کردن خط راست c وجود دارد). این، به‌معنای آن است که هر خط راستی که غیر از فصل مشترک دو صفحهٔ α و β انتخاب شود، نمی‌تواند پاسخ مسأله باشد. α و β نمی‌توانند بر هم منطبق باشند، زیرا خطهای راست a و b متنافرند و نمی‌توانند روی یک صفحه قرار گیرند. بجز این، $M\in\alpha\cap\beta$، یعنی $\alpha\cap\beta$ خط راست مورد نظر است. از این‌جا نتیجه می‌شود که مسأله بیش از یک جواب ندارد.

ممکن است، یکی از دو خط راست a یا b، موازی خط راست c درآید که در این‌صورت، مسأله جواب ندارد.

شاید تجسم فضایی این راه حل، برایتان دشوار باشد و نتوانید براحتی بستگی متقابل خطهای راست a، b و c را با صفحه‌های α و β در ذهن خود تصور کنید. در این‌صورت می‌توانید برای خودتان یک مُدل مقوایی بسازید و یا نقطهٔ M و خطهای راست a و b را مثلاً روی یک چهاروجهی (مثل چهاروجهی S ABC، شکل ۲) در نظر بگیرید. باید خط راستی پیدا کنیم که از نقطهٔ M بگذرد و دو خط راست SA و BC را (که نسبت به هم متنافرند) قطع کند.

شکل ۲



به‌سادگی می‌توان متوجه شد که SB همان خط راست مجهول است. ویژگیهای این خط راست را روشن کنیم: خط راست SB فصل مشترک دو صفحهٔ SAB و SBC است؛ یعنی (SB) فصل مشترک دو صفحهٔ α و β است (α از نقطهٔ M و خط راست SA و β از نقطهٔ M و خط راست BC گذشته است).

وقتی راه حل مسأله را بررسی می‌کنید، پاسخ دادن به این پرسشها، اهمیت جدی دارد:

۱) از کجا نتیجه می‌شود: مسأله بیش از یک جواب ندارد؟

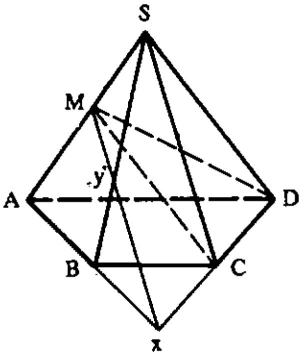
۲) با چه شرطی مسأله جواب دارد؟

۳) با آن که خط راست c به‌عنوان فصل مشترک دو صفحهٔ α و β همیشه وجود دارد، ممکن است مسأله جواب نداشته باشد. چرا؟

۴) آیاممکن است، بامفروض بودن نقطهٔ M و خطهای راست a و b، مسأله جواب نداشته باشد؟ اکنون، همین مسأله را، به‌صورتهای دیگری و روی چند وجهیها، مطرح و حل می‌کنیم.

مسألهٔ ۱: هرم SABCD و نقطهٔ M روی یال SA داده شده است، از نقطهٔ M خط راستی بگذرانید که خطهای راست متنافر SB و CD را قطع کند.

شکل ۳



حل: همان‌طورکه درحل مسألهٔ اصلی‌دیدیم، خط راست مجهول، تنها می‌تواند فصل مشترک دو صفحهٔ $\alpha = (MSB)$، $\beta = (MCD)$ باشد. برای به‌دست آوردن این خط راست کافی است نقطهٔ برخورد خط راست CD را با صفحهٔ α پیدا کنیم (شکل ۳). ساختمان، به این ترتیب انجام می‌شود:

$$(AB)\cap(CD) = X \;;\; X = (CD)\cap(MSB);$$

در این‌صورت MX خط راست مورد نظر است.

این مسأله، راه حلِ دیگری از مسألهٔ اصلی را به ما تلقین می‌کند.

فرض کنید صفحهٔ α از نقطهٔ M و خط راست a بگذرد و خط راست b صفحهٔ α را در X قطع کند. در این‌صورت (MX) خط راست مجهول است، به‌شرطی که

$$(MX) \cap a \neq \phi$$

روی شکل ۱: $(MX) \cap a = Y$.

برای این که نقطهٔ X را پیدا کنیم، کافی است صفحهٔ دلخواه γ را از خط راست b بگذرانیم. اگر d فصل مشترک دو صفحهٔ γ و α باشد، آن‌وقت $X = b\cap d$. و در مسألهٔ ۱:

$$a=(SB) \;;\; b=(CD) \;;\; \alpha=(MSB) \;;\; \gamma=(ABCD) \;;\; d=(AB)$$

به دو نتیجه‌ای که ناشی از دو روش راه حل برای مسألهٔ اصلی است توجه کنیم:

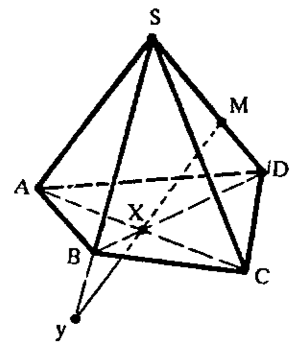
۱) اگر مسألهٔ اصلی جواب داشته باشد، آن وقت $c = \alpha \cap \beta$ خط راست مجهول است.

۲) اگر مسأله جواب داشته باشد، آن وقت $C = (MX)$، جواب مسأله است که در آن $X = b\cap d$.

این دو نتیجه متناقض نیستند، زیرا $\alpha \cap \beta = (MX)$.

مسألهٔ ۲: هرم SABCD مفروض است. از نقطهٔ M واقع بر یال SD ، خط راستی بگذرانید که دو خط راست SB و AC را قطع کند.

شکل ۴



حل: برای پیدا کردن خط راست مجهول، کافی است نقطهٔ برخورد خط راست AC را با صفحهٔ $\alpha = (SBD)$ پیدا کنیم.

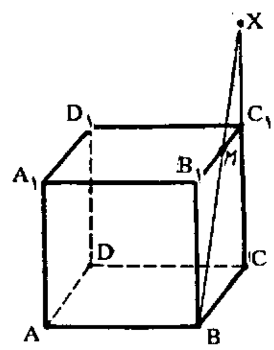
نقطهٔ $X = (AC) \cap (BD)$ را به دست می‌آوریم (شکل ۴). در این صورت $X = (AC) \cap \alpha$ که با شرط $(MX) \cap (SB) \neq \phi$ خط راست MX ، خط راست مجهول است.

مسألهٔ ۳: مکعب مستطیل $ABCDA_1B_1C_1D_1$ و نقطهٔ M روی یال B_1C_1 مفروضند. خط راستی رسم کنید که از نقطهٔ M بگذرد و خطهای راست AB و CC_1 را قطع کند.

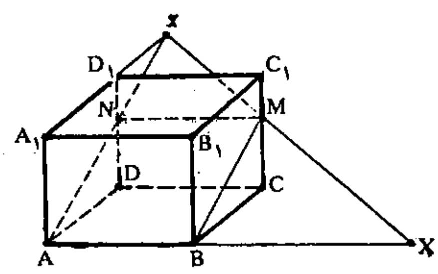
حل: (MB) ، خط راست مورد نظر است (شکل ۵). در واقع

$$(MB) \cap (AB) = B \quad ; \quad (MB) \cap (CC_1) = X$$

شکل ۵



شکل ۶



مسألهٔ ۴: مکعب مستطیل $ABCDA_1B_1C_1D_1$ و نقطهٔ M واقع بر یال C_1C داده شده است. خط راستی رسم کنید که از نقطهٔ M بگذرد و خطهای راست AB و A_1D_1 را قطع کند.

حل: اگر از راه حل دوم مسألهٔ اصلی استفاده کنیم، به این نتیجه می‌رسیم که خط راست مجهول MX است که در آن $X = (A_1D_1) \cap (MBA)$.

برای رسم، به این ترتیب عمل می‌کنیم (شکل ٦):

$$۱)\ (AN) = (MBA) \cap (AA_1D_1D) \ ;\ N \in [D_1D] \ ;$$

$$۲)\ X = (AN) \cap (A_1D_1) \ ;\ X = (A_1D_1) \cap (MBA) \ ;$$

در این‌صورت، (MX) خط راست مجهول است. روی شکل ٦ داریم:

$$(MX) \cap (A_1D_1) = X \quad ; \quad (MX) \cap (AB) = Y$$

با هر انتخاب M ، بین C و C_1 ، مسأله جواب دارد.

برای تمرین شما، سه مسألهٔ اصلی دیگر و، برای هریک، دو مسألهٔ اضافی آورده‌ایم.

مسألهٔ اصلی ۲: خط راستی رسم کنید که با خط راست مفروض a موازی باشد و دو خط راست متنافر b و c را قطع کند.

مسألهٔ ۱: مکعب مستطیل $ABCDA_1B_1C_1D_1$ مفروض است. خط راستی رسم کنید که موازی با (A_1D_1) باشد و خطهای راست (BC) و (A_1B_1) را قطع کند.

مسألهٔ ۲: مکعب مستطیل $ABCDA_1B_1C_1D_1$ داده شده است. خط راستی رسم کنید که با (A_1C_1) موازی باشد و (BB_1) و (AD) را قطع کند.

مسألهٔ اصلی ۳: از نقطهٔ مفروض، خط راستی بگذرانید که با دو صفحهٔ متقاطع مفروض موازی باشد.

مسألهٔ ۱: هرم SABCD و نقطهٔ M واقع بر یال SD مفروضند. از نقطهٔ M خط راستی عبور دهید که با صفحه‌های SAB و SCD موازی باشد.

مسألهٔ ۲: مکعب مستطیل $ABCDA_1B_1C_1D_1$ داده شده است. از رأس A_1 ، خط راستی موازی با صفحه‌های AB_1D_1 و BB_1C_1C رسم کنید.

مسألهٔ اصلی ۴: از نقطهٔ مفروض، صفحه‌ای بگذرانید که با دو خط راست متنافر مفروض، موازی باشد.

مسألهٔ ۱: چهاروجهی SABC و نقطهٔ M واقع بر یال SC مفروضند. از

نقطهٔ M، صفحه‌ای عبور دهید که با خطهای راست SA و BC موازی باشد.

مسألهٔ ۲: مکعب مستطیل $ABCDA_1B_1C_1D_1$ و نقطهٔ M واقع بر یال C_1D_1 مفروضند. از نقطهٔ M صفحه‌ای بگذرانید که با خطهای راست و AA_1 موازی باشد.

تجربه نشان داده است که با وجود درک و حلّ مسألهٔ اصلی، ممکن است در حل مسأله‌های فرعی مربوط به آن، دشواریهایی، چه از نظر تجسم فضایی و چه از نظر رسم پدید آید، از طرف دیگر حل این مسأله‌های تکمیلی، نوعی تکرار برای مسألهٔ کلی است.

حلِّ دقیق این مسأله‌ها، بویژه، برای مسأله‌هایی مفید است که، در آنها، باید مقطع یک چندوجهی را (مثل هرم، منشور و غیره) پیدا کرد و می‌دانیم جست و جو و رسم مقطع، یکی از اساسیترین بحثها در هندسهٔ فضایی است.

تفریح اندیشه ۶

هنگامی که مهرداد سن کنونی پدرش را داشته باشد، خواهرش دو برابر سن فعلی خود را خواهد داشت. و وقتی که خواهرش به سن فعلی پدرش برسد، سن پدرش ۲ برابر سن فعلی مهرداد خواهد بود. اگر اکنون مجموع سن این سه نفر ۱۰۰ سال باشد، سن هریک را تعیین کنید.

از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی
ترجمهٔ سیمین‌دخت ترکپور

جواب در صفحهٔ ۸۸

آشنایی با اعدادِ مختلط

(قسمت اوّل)

(قابل استفاده دانش آموزان سال سوّم ریاضی نظام جدید)

● روح الله جهانی‌پور

§۱. پیدایش

نگاهی گذرا به تاریخ ریاضیات تمدنهای مختلف در اعصار گذشته نشان می‌دهد که بسیاری از مسائل ریاضی که با آن مواجه بودند، در قالب حل معادلات درمی‌آمد. طبیعی است که تا مدتهای مدیدی، بشر تنها اعدادی را که برای شمارش به کار می‌روند، می‌شناخت: ۱، ۲، ۳، ... و از این رو عمدهٔ معادلات جبری یاد شده، دارای جوابهای صحیح مثبت بودند. لیکن این وضع دوام چندانی نداشت و با مطرح شدن مسائلی از قبیل تقسیم‌بندی قطعه زمینها، یا جیرهٔ غذایی روزانهٔ کارگران، مثلاً در مصر قدیم، معادلات جبری با جوابهایی مثل: $\frac{1}{2}$، $\frac{4}{5}$، ... پابه عرصهٔ وجود گذاشتند. در همین راستا هر چند اعداد صحیح منفی یا اعدادی مثل $-\frac{1}{2}$ یا $-\frac{4}{5}$ در عمل مفید واقع می‌شوند لیکن بیشتر جنبهٔ نظری دارند. واضح است که در مرحلهٔ اوّل اعداد منفی برای شمارش مفید نیستند و در واقع می‌توان گفت که منفی بیشتر جنبهٔ قرارداد دارد و تعبیر کاهش، نزول و خلاف جهت را دارد، مثلاً شتاب منفی در حرکت یک جسم یعنی؛ کاهش سرعت، یا درجات دمایی منفی نشان دهندهٔ کاهش دما هستند.

اعدادی مثل $\frac{1}{2}$، $-\frac{4}{5}$ یا به صورت کلی $\frac{p}{q}$، که p و q اعداد صحیحند و در ضمن $q \neq 0$ را اعداد گویا می‌نامند. یونانیان باستان نیز همچون دیگر اقوام قدیم درگیر مسائل عملی بودند که منجر به مطرح شدن مسائل ریاضی می‌شد. لیکن آنها عمدهٔ توجهٔ خویش را معطوف جنبهٔ نظری آنها کرده بودند. بیایید با فیثاغورسیان باستان همراه شویم و ببینیم چه‌طور می‌توانیم با دیدی صرفاً نظری، اعداد را کشف کنیم.

معادلهٔ $2x - 2 = 0$ را شاید غارنشینان هم بتوانند حل کنند، زیرا جواب آن $x = 1$ است و یک نخستین عدد از سلسلهٔ اعدادی است که آنها را برای شمارش به کار می‌بردند، مثلاً: شمارش افراد قبیله یا شمارش تعداد شکارهای انجام شده در یک روز. با این حال آنها نمی‌توانستند معادلهٔ $x + 2 = 0$ را حل کنند. چرا؟ زیرا هیچ‌کدام از اعدادی که آنها می‌شناختند یعنی؛ اعداد شمارشی یا طبیعی در این معادله صدق نمی‌کند. آیا یونانیان هم نمی‌توانستند آن را حل کنند؟ شاید آری، شاید نه. امروزه می‌دانیم که جواب این معادله $x = -2$ است و -2 عددی است صحیح که اگر با ۲ جمع شود، حاصل صفر خواهد شد. به این ترتیب توانسته‌ایم اعداد دیگری علاوه بر آنچه غارنشینان هم می‌دانستند به دست آوریم. باز هم جلوتر می‌رویم و معادلهٔ $2x - 1 = 0$ را در نظر می‌گیریم. این بار مجموعهٔ اعداد وسیعتری که به دست آورده‌ایم هم نمی‌تواند جواب این معادله را دربرداشته باشد. لکین جواب این معادله $x = \frac{1}{2}$ است، و به این ترتیب این عدد یا توسط معادلات دیگری از این دست، اعداد جدیدتری بر مجموعهٔ اعداد اوّلیه‌مان افزوده می‌شود و اینها همان اعداد گویا هستند که ذکرشان رفت. فیثاغورسیان این اعداد را می‌شناختند و حتی بیشتر از اینها ادعا کردند و گفتند که تمام اعداد از این نوعند یعنی؛ گویا هستند. اما وقتی متوجه شدند که این‌طور نیست و اعدادی هم وجود دارند که گویا نیستند تصور کردند که به اصطلاح افتضاح بار آمده است و اگر بخواهیم نامی برآن بگذاریم، می‌توانیم بگوییم: رادیکال گیت (به اقتباس از واترگیت) به وجود آمد و این بحران یک قربانی هم داد و شخصی از مکتب فیثاغورسیان که این موضوع را فاش کرده بود، مجازات شد و به دریا انداخته شد تا به سزای عملش برسد!!

آنچه آنها دریافته بودند چه بود؟ بد نیست این مطلب را تحت

عنوان یک قضیّه بیاوریم:

قضیّه: $\sqrt{۲}$ گنگ است، یعنی گویا نیست.

برهان: فرض کنیم $\sqrt{۲}$ گویا باشد. پس اعداد صحیح p و q موجودند که $q \neq ۰$ و

$$\sqrt{۲} = \frac{p}{q} \qquad (۱)$$

فرض می‌کنیم p و q هیچ عامل مشترکی نداشته باشند چه در این صورت می‌توان آن را از صورت و مخرج کسر حذف کرد. با این شرط کسر فوق را تحویل‌ناپذیر می‌نامند. حال با این فرضها پیش می‌رویم و به تناقض می‌رسیم. دو طرف (۱) را به توان ۲ می‌رسانیم. آنگاه

$$۲ = \frac{p^۲}{q^۲}$$

یا:

$$p^۲ = ۲q^۲$$

پس $p^۲$ زوج است و در نتیجه p زوج است. بنابراین عدد صحیح k موجود است که

$$p = ۲k$$

لیکن در این صورت داریم:

$$۴k^۲ = ۲q^۲ \Longrightarrow q^۲ = ۲k^۲$$

یعنی؛ $q^۲$ و در نتیجه q زوج است. پس p و q هر دو زوجند یعنی؛ ۲ در هر دو عامل مشترک است و این با فرض تحویل‌ناپذیر بودن $\frac{p}{q}$ در تناقض است. بنابراین $\sqrt{۲}$ گویا نیست. ■

به این ترتیب مجموعهٔ باز هم وسیعتری به دست می‌آوریم مرکب از اعداد گویا و گنگ بر روی یکدیگر. این مجموعه را مجموعهٔ اعداد حقیقی می‌نامند. باز هم جلوتر می‌رویم. می‌دانیم (از جبر دبیرستانی) که مربع هر عدد حقیقی،عدد حقیقی نامنفی است. به زبان دیگر اگر IR نشان دهندهٔ مجموعهٔ اعداد حقیقی و $x \in IR$ دلخواه باشد، آنگاه

$$x^۲ \geq ۰$$

بنابراین برای هر $x \in IR$

$$x^۲ + ۱ \geq ۱$$

پس هیچ عدد حقیقی در معادلهٔ $x^۲ + ۱ = ۰$ صدق نمی‌کند چه در غیر این صورت به نابرابری $۱ \leq ۰$ می‌رسیم که ممتنع هستند. می‌بینیم که با این‌که مجموعهٔ اعداد بسیار وسیعی به دست آورده‌ایم با این حال هنوز هم معادلاتی می‌توانیم بنویسیم که جوابی در این مجموعه ندارند. منشأ عدم وجود جواب برای این معادله یا معادلاتی از این دست، آن است که ریشهٔ دوم اعداد منفی در IR تعریف نشده است. سؤال این است که اگر ریشهٔ دوم‌گیری از اعداد منفی را نیز مجاز بدانیم چه پیش می‌آید. این‌جاست که مجموعه‌ای باز هم گسترده‌تر، مجموعه‌ای که در آن هر معادلهٔ چند جمله‌ای مثل $x^۲ + ۱ = ۰$ جواب دارد، به وجود می‌آید. در خلق این مجموعه که شبیه سلسله مراتب طی شده تاکنون، شامل IR نیز است، معادلهٔ $x^۲ + ۱ = ۰$، نقش اساسی را ایفا می‌کند. هرچند رهیافت کاملاً دقیقی در جبر وجود دارد که به خلق این مجموعه از اعداد منتهی می‌گردد، لکن ما همین مسیر نسبتاً نادقیق را پی می‌گیریم. جواب معادلهٔ

$$x^۲ + ۱ = ۰$$

را با حرف i نشان می‌دهیم. در واقع i دارای این ویژگی بنیادی است که

$$i^۲ = -۱$$

یا با اصطلاحات حقیقی $i = \sqrt{-۱}$. این عدد را به مجموعهٔ اعداد حقیقی می‌افزاییم. خاصیت‌های خوبی که می‌خواهیم یک مجموعه از اعداد داشته باشد، یکی این است که نسبت به عملهای معینی، بویژه جمع و ضرب، بسته باشد. پس می‌خواهیم مجموعهٔ جدیدمان که البته هنوز جمع و ضرب آن را به طور دقیق تعریف نکرده‌ایم، دارای ویژگیهایی‌مثل‌شامل بودن عدد $i + i = ۲i$، $-۱i$، $\sqrt{۲}.i$، ... باشد. به این ترتیب اندک‌اندک به سوی نمایش شکل کلی اعداد یا اعضای این مجموعه جدید رهنمون می‌گردیم. شکل کلی این اعداد به صورت

$$a + bi \qquad (۲)$$

است که در آن a و b اعداد حقیقی‌اند. مجموعهٔ جدید را مجموعهٔ اعداد مختلط می‌نامیم. در نمایش (۲) چیزهای تعیین کنندهٔ عدد فقط a و b هستند. یعنی در دست داشتن a و b عدد فوق را به ما می‌دهد و تمایز بین دو عدد از این نوع در نتیجه تمایز a ها و b های مختلف است. اعداد مختلط را به رسم با حروفی از قبیل t، w، ... یا با اندیس مثل $z_۱$، $z_۲$، ... نمایش می‌دهیم. یک عدد نوعی به صورت $z = a + bi$ نشان داده می‌شود. به این ترتیب اگر $z_۱ = a + bi$ و $z_۲ = c + di$ که در آن a، b، c و d اعداد حقیقی‌اند تنها و تنها وقتی مساوی‌اند که $a = c$ و $b = d$.

تاکنون تنها ویژگی که از i ذکر کردیم این است که $i^۲ = -۱$.

حال بیایید به عدد مختلط $a + bi$ به چشم یک چندجمله‌ای بر حسب i نگاه کنیم و ویژگی فوق را در نظر داشته باشیم. با این کار چیز خاصی را از دست نداده‌ایم، بلکه حتی می‌توانیم چیزهای نویی هم به دست آوریم. ضرب چندجمله‌ای‌ها را به یاد بیاورید. $z = a + bi$ و $w = c + di$ را دو چندجمله‌ای بر حسب i بگیرید و مطابق ضرب چندجمله‌ای‌ها آنها را در هم ضرب کنید:

$$z \cdot w = (a + bi)(c + di) = ac + (ad + bc)i + i^2bd$$

اما $i^2 = -1$ لذا

$$z \cdot w = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

پس عجالتاً توانستیم فرمولی برای ضرب دو عدد مختلط به قیاس با چند جمله‌ایها ارائه کنیم. خواهیم دید که این طرز تعریف ضرب، ویژگیهای معمول ضرب را دارد. حال که برای ضرب می‌توانیم این کار را بکنیم، طبعاً برای جمع نیز باید بتوانیم ویژگی جمع چند جمله‌ایها را به کاربریم. بنابراین تعریف می‌کنیم:

$$z + w = (a + c) + (b + d)i$$

حال به همهٔ آنچه تاکنون گفتیم رسمیت می‌بخشیم و تعریف زیر را ارائه می‌کنیم:

تعریف ۱: مجموعهٔ C، اعداد مختلط، مجموعه‌ای است مرکب از اعدادی به شکل نوعی

$$a + bi \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

که تساوی، جمع و ضرب در آن به صورت زیر تعریف می‌گردند:

$$a + bi = c + di \iff a = c \text{ و } b = d$$

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

در عدد مختلط $a + bi$، اگر $b = 0$، عدد حقیقی a را به دست می‌آوریم و این مصداق این واقعیت است که اعداد حقیقی زیرمجموعهٔ اعداد مختلطند. عدد مختلط $-z = -a - bi$ را قرینهٔ عدد مختلط $z = a + bi$ و عدد مختلط $0 + 0i$ را صفر مختلط یا به اختصار صفر می‌نامیم. به این ترتیب می‌توانیم تفاضل دو عدد مختلط z و w را به صورت مجموع z و $-w$ تعریف کنیم، یعنی

$$z - w = z + (-w)$$

باز هم دو اصطلاح دیگر داریم: عدد مختلط $\bar{z} = a - bi$ را مزدوج عدد مختلط z می‌نامیم و مقدار $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ را قدر مطلق عدد مختلط $z = a + bi$. اصطلاح قدر مطلق به این دلیل است که اگر $b = 0$ آنگاه $r = |a|$، که با حالت حقیقی خود توافق دارد. منشأ هندسی این موضوع را نیز بعداً خواهیم گفت.

دیدیم که در مشخص کردن یک عدد مختلط $z = a + bi$ فقط a و b نقش دارند و با معلوم شدن دو عدد حقیقی a و b، z کاملاً معین می‌شود. این مطلب، این اندیشه را در ذهن به وجود می‌آورد که هر عدد مختلط z به صورت فوق را با زوج مرتب

$$(a, b) \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

متناظر قرار دهیم. مرتب از آن جهت که دو عدد مختلط $a + bi$ و $b + ai$ با هم فرق دارند. بنابراین می‌توانیم به جای گفتگو دربارهٔ اعدادی به شکل $a + bi$ صرفاً از زوج مرتبهای اعداد حقیقی یعنی (a, b) سخن بگوییم و حتی نام اعداد مختلط را هم نبریم و جمع و ضرب یاده شده در بالا را روی زوج مرتبها تعریف کنیم، یعنی تعریف کنیم:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \qquad (۳)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) \qquad (۴)$$

بنابراین به تعریف جدیدی از اعداد مختلط دست می‌یابیم که در آن ذکری از معادله یا چیزی به نام i نیامده است. این رهیافت را روش اصل موضوعی در ابداع اعداد مختلط می‌نامند.

تعریف ۲: مجموعهٔ C، اعداد مختلط، مجموعه‌ای است مرکب از زوج مرتبهای به شکل

$$(a, b) \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

که از دو قانون جمع و ضرب با علامتهای $+$ و $.$ به صورت ۳ و ۴ تبعیت می‌کنند. ●

در این طریقهٔ نمایش، عدد حقیقی a، همان زوج مرتب $(a, 0)$ است و معمولاً به جای $(a, 0)$، a می‌گذارند. حال می‌بینید که

$$(a_1, 0) + (a_2, 0) = (a_1 + a_2, 0)$$

و

$$(a_1, 0)(a_2, 0) = (a_1a_2, 0)$$

و این نشان می‌دهد که اعمال جمع و ضرب ۳ و ۴ روی اعداد مختلط تعمیم جمع و ضرب روی اعداد حقیقی‌اند. حال زوج مرتب $(0, 1)$ را با i نشان می‌دهیم. در این صورت

$$i^2 = i \cdot i = (0,1)(0,1) = (0-1, 0+0) = (-1, 0) = -1$$

و نیز اگر $z = (a, b)$ عدد مختلط دلخواهی باشد، داریم:

$$(a , b) = a(1 , 0) + b(0 , 1) = a . 1 + bi = a + bi$$

و بدینسان از طریق دقیق اصل موضوعی به همان نمایش قبلی می‌رسیم.

در روش نمایش زوج مرتبی، اگر $z = (a , b)$ آنگاه

$$\bar{z} = (a , -b)$$

$$-z = (-a , -b)$$

و برای $w = (c , d)$ داریم: $z - w = (a - c , b - d)$ و $0 = (0 , 0)$. حال ویژگیهای جمع و ضرب اعداد مختلط را در قالب یک قضیّه به صورت زیر گردآوری می‌کنیم.

قضیّه: (ویژگیهای جمع و ضرب اعداد مختلط)

(I) $\forall z_1 , z_2 \in C : z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ ویژگی جابه‌جایی جمع

(II) $\forall z_1 , z_2 , z_3 \in C : (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

ویژگی شرکت‌پذیری جمع

(III) $\forall z \in C : z + 0 = 0 + z = z$ ویژگی عنصر خنثی جمع

(IV) $\forall z \in C : z + (-z) = (-z) + z = 0$

ویژگی عنصر وارون جمعی

(I') $\forall z_1 , z_2 \in C : z_1 z_2 = z_1 . z_2$ ویژگی جابه‌جایی ضرب

(II') $\forall z_1 , z_2 , z_3 , \in C : (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$

ویژگی شرکت‌پذیری ضرب

(III') عنصری که آن را با ۱ نشان می‌دهیم وجود دارد به طوری که برای هر $z \in C$

$$z . 1 = 1 . z = z$$

(IV') برای هر $z \in C$ ، $z \neq 0$ ، عنصری که آن را با z^{-1} نشان می‌دهیم موجود است که

$z . z^{-1} = z^{-1} . z = 1$

(V') قانون توزیع‌پذیری از چپ و راست

تبصرهٔ ۱: عنصر ۱ موجود، در ویژگی III' را عنصر خنثی ضرب یا واحد ضرب می‌نامیم و در قالب نمایش زوج مرتبی همان عدد (۰ و ۱) است. و عنصر z^{-1} در IV' را وارون ضربی $z \neq 0$ گویند.

تبصرهٔ ۲: مجموعهٔ کلی F همراه با دو عمل + و . که آنها را به ترتیب جمع و ضرب می‌نامیم و از ویژگیهای I تا V' تبعیت می‌کنند را یک میدان می‌نامند. بنابراین C، اعداد مختلط، همراه با جمع و ضرب تعریف شده در فوق یک میدان تشکیل می‌دهد که آن را میدان اعداد مختلط می‌نامند.

برهان: برهان این قضیّه بسیار ساده است و با توسل به هر کدام از دو نوع نمایش اعداد مختلط می‌توان تمام بندهای آن را ثابت کرد. برای نمونه ما مثلاً بند I' را ثابت می‌کنیم. فرض کنید:

$$z_1 = (a , b)$$

$$z_2 = (c , d)$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید روش زوج مرتبی را برای نمایش z_1 و z_2 به کار برده‌ایم. آنگاه داریم:

$$z_1 z_2 = (ac - bd , ad + bc) = (ca - db , cb + da) = z_2 z_1$$

در ضمنِ اثبات از ویژگی جابه‌جایی ضرب اعداد حقیقی استفاده شده است. برهان بقیّه بندهای قضیّه را به خواننده واگذار می‌کنیم. ■

در قضیّهٔ فوق شیء جدیدی با نام وارون ضربی پا به عرصهٔ وجود گذاشت. سؤال این است که اگر $z = (a , b)$ یا $z = a + bi$، z^{-1} را چگونه می‌توان بر حسب a و b و به صورت شکلِ نوعیِ اعداد مختلط نوشت. خوب! $w = z^{-1}$ چه خاصیتی دارد؟ اگر فرض کنیم:

$$w = (x , y)$$

آنگاه

$$z . w = 1 \quad (z \neq 0)$$

یا:

$$(a , b)(x , y) = (ax - by , ay + bx) = (1 , 0)$$

بنابراین برای یافتن x و y باید دستگاه دو معادله ـ دو مجهول

$$ax - by = 1$$

$$ay + bx = 0$$

را حل کنیم. دستگاه اخیر در صورتی جواب دارد که دترمینان ضرایب یعنی؛ $a^2 + b^2$ مخالف صفر باشد. و این فرض محقق است زیرا فرض بر این است که $z \neq 0$ و در نتیجه $|z| \neq 0$. جواب این دستگاه عبارت است از:

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad \text{و} \quad y = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

و بنابراین:

$$z^{-1} = w = \left(\frac{a}{a^2 + b^2} \ \text{و} \ \frac{-b}{a^2 + b^2}\right) \qquad (a^2 + b^2 \neq 0)$$

به کمک وارون ضربی یک عدد مختلط می‌توان تقسیم دو عدد مختلط را تعریف کرد:

$$\forall z_1 , z_2 \in C \quad , \quad z_2 \neq 0 : \frac{z_1}{z_2} = z_1 . z_2^{-1}$$

با این تعریف ملاحظه می‌کنیم که به ازای $z_1 = 1$ و $z_2 = z$، داریم:

$$\frac{1}{z} = z^{-1}$$

در ضرب دو یا چند عدد مختلط، عوامل ضرب می‌توانند مساوی هم باشند. به این ترتیب به تعریف توان صحیح مثبت برای هر عدد مختلط z نایل می‌شویم. این تعریف به صورت استقرایی انجام می‌گیرد. یعنی؛ ابتدا z^1 و آنگاه برای هر $n \geq 2$ ، z^n را تعریف می‌کنیم:

$$z^1 = z \quad \text{و} \quad z^n = z z^{n-1} \quad n \geq 2$$

تا این‌جا اطلاعات نسبتاً خوبی به دست آوردیم. به کمک این اطلاعات می‌توانیم مسائل متنوعی را در اعداد مختلط حل کنیم. حال برای آشنایی بیشتر با نحوهٔ کاربرد این مفاهیم ونیز کشف ویژگیهای جدید و در عین حال جالب از اعداد مختلط چند مسأله را در قالب مثال می‌آوریم.

مثال ۱: ثابت کنید اگر $z = -z$، آنگاه $z = 0$ و اگر $z = \bar{z}$ آنگاه $z \in IR$.

حل: فرض کنیم $z = (a , b)$ و $z = -z$. در این صورت

$$(a , b) = (-a , -b)$$

و بنا بر تعریف برابری دو عدد مختلط: $a = -a$ و $b = -b$ که از آن‌جا به دست می‌آید $a = b = 0$، یعنی؛ $z = (a , b) = 0$.

حال اگر $z = \bar{z}$ آنگاه

$$(a , b) = (a , -b)$$

و بنابراین $b = -b$ یعنی $b = 0$ یا $z = (a , 0)$ پس $z \in IR$.

مثال ۲: ثابت کنید برای هر عدد مختلط z، $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ و برای هر $z_1 , z_2 \in C$ و $z_2 \neq 0$،

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}$$

حل: فرض کنیم $z = (a , b)$. آنگاه طبق تعریف قدر مطلق داریم: $|z|^2 = a^2 + b^2$. اما دیدیم که

$$z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2} , \frac{-b}{a^2+b^2}\right) = \frac{1}{a^2+b^2}(a , -b)$$

$$= \frac{1}{|z|^2} . \bar{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

و نیز برای $z_1 , z_2 \in C$ با $z_2 \neq 0$ داریم:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 . z_2^{-1} = z_1 . \frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{z_1 . \bar{z}_2}{|z_2|^2}$$

مثال ۳: ویژگی پخشی اعداد مختلط را ثابت کنید، یعنی؛ نشان دهید برای هر $z_1 , z_2 , z_3 \in C$ داریم: $z_1(z_2 \pm z_3) = z_1 z_2 \pm z_1 z_3$.

حل: قرار می‌دهیم:

$$z_1 = (a_1 , b_1) \quad \text{و} \quad z_2 = (a_2 , b_2) \quad \text{و} \quad z_3 = (a_3 , b_3)$$

آنگاه برای + داریم:

$$z_1 (z_2 + z_3) = (a_1 , b_1)(a_2 + a_3 , b_2 + b_3) =$$
$$= (a_1a_2 + a_1a_3 - b_1b_2 - b_1b_3 , a_1b_2 + a_1b_3 + b_1a_2 + b_1a_3)$$
$$= [(a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1a_3 - b_1b_3) , (a_1b_2 + b_1a_2) + (a_1b_3 + b_1a_3)]$$
$$= (a_1a_2 - b_1b_2 , a_1b_2 + b_1a_2) + (a_1a_3 - b_1b_3 , a_1b_3 + b_1a_3)$$
$$= z_1z_2 + z_1z_3$$

برای منفی نیز وضع به همین ترتیب است.

مثال ۴: از قانون پخشی نتیجه بگیرید که برای $z \neq 0$ و $z_1 , z_2 \in C$

$$\frac{z_1 \pm z_2}{z} = \frac{z_1}{z} \pm \frac{z_2}{z}$$

حل: طبق قانون پخشی داریم:

$$(z_1 \pm z_2)\frac{1}{z} = z_1 . \frac{1}{z} \pm z_2 . \frac{1}{z} = \frac{z_1}{z} \pm \frac{z_2}{z}$$

مثال ۵: محاسبه کنید:

(الف) $(1 + 2i) + (3 - i) = 4 + i$

(ب) (بنابر مثال ۲) $\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} . \frac{1+i}{1+i} = \frac{2i}{2} = i$

(ج) $(1+2i) . (3-i) = (3+2) + (-1+6)i = 5 + 5i$

(د) $i^2 = -1 \Rightarrow i^3 = i . i^2 = -i \Rightarrow i^4 = i . i^3 = -i^2 = 1$

(ه) برای هر عدد صحیح نامنفی k داریم:

$$i^{4k} = (i^4)^k = 1^k = 1 \quad , \quad i^{4k+1} = 1 . i = i$$

$$i^{4k+2} = 1 \,.\, i^2 = -1 \quad , \quad i^{4k+3} = 1 \,.\, i^3 = -i$$

مثال ۶: ثابت کنید برای هر دو عدد مختلط z_1 و z_2، داریم:

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2} \quad , \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 . \bar{z}_2 \quad , \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

حل: قرار می‌دهیم:

$$z_1 = (a , b) \quad , \quad z_2 = (c , d)$$

آنگاه داریم:

$$z_1 \mp z_2 = (a \mp c , b \mp d) \Rightarrow \overline{z_1 \mp z_2} = \left(a \mp c \ \ -(b \mp d)\right)$$
$$= (a , -b) \mp (c , -d) = \bar{z}_1 \mp \bar{z}_2$$

به همین نحو برای ضرب داریم:

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{(ac - bd , ad + bc)} = \left(ac - bd , -(ad + bc)\right)$$
$$= \left(ac - (-b)(-d) , a(-d) + b(-c)\right) = \bar{z}_1 . \bar{z}_2$$

و چون برای هر $0 \neq z \in C$ ، داریم:

$$z = (a,b) \Rightarrow \overline{z^{-1}} = \overline{\left(\frac{a}{a^2+b^2} \ , \ \frac{-b}{a^2+b^2}\right)}$$
$$= \left(\frac{a}{a^2+b^2} \ , \ \frac{b}{a^2+b^2}\right) = \frac{z}{|z|^2}$$

لذا

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{(z_1 z_2^{-1})} = \bar{z}_1 \overline{(z_2^{-1})} = \bar{z}_1 . \left(\frac{z_2}{|z_2|^2}\right)$$
$$= \frac{\bar{z}_1 . z_2}{\bar{z}_2 . z_2} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

مثال ۷: ثابت کنید برای هر $z \in C$، $z\bar{z} = |z|^2$.

حل: فرض کنیم $z = (a , b)$، آنگاه

$$z\bar{z} = (a,b)(a,-b) = (a^2+b^2, -ab+ba) = (a^2+b^2, 0)$$
$$= a^2 + b^2 = |z|^2$$

مثال ۸: ثابت کنید برای هر دو عدد مختلط z_1 و z_2

$$|z_1 z_2| = |z_1| \, |z_2| \quad , \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

که در مورد تقسیم فرض اضافی $z_2 \neq 0$ را نیز در نظر می‌گیریم.

حل: از مثال ۷ و ویژگی جابه‌جایی ضرب اعداد مختلط استفاده می‌کنیم. داریم:

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = (z_1 z_2)(\bar{z}_1 . \bar{z}_2) = (z_1 \bar{z}_1)(z_2 \bar{z}_2)$$
$$= |z_1|^2 \, |z_2|^2$$

حال از دو طرف ریشهٔ دوم می‌گیریم و دقت می‌کنیم که قدر مطلق همواره نامنفی است. به همین نحو برای تقسیم داریم:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|^2 = \frac{z_1}{z_2} . \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{z_1}{z_2} . \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{z_1 . \bar{z}_1}{z_2 . \bar{z}_2} = \frac{|z_1|^2}{|z_2|^2}$$

و بار دیگر ریشه دوم می‌گیریم و نتیجه را به دست می‌آوریم.

تبصرهٔ ۳: نمایش عدد مختلط z به صورت

$$z = a + bi$$

را نمایش جبری و در آن a را بخش حقیقی z و b را بخش موهومی آن می‌نامیم و با نمادهای $a = Rez$ و $b = Imz$ نشان می‌دهیم.

مثال ۹: ثابت کنید، برای هر عدد مختلط z،

$$Rez \le |Rez| \le |z| \quad \text{و} \quad Imz \le |Imz| \le |z|$$

حل: داریم:

$$z = a + bi = Rez + i \, Imz$$

و $|z^2| = (Rez^2 + (Imz)^2$ بنابراین:

$$(Rez)^2 \le |z|^2 \Rightarrow |Rez| \le |z| \Rightarrow Rez \le |Rez| \le |z|$$
$$(Imz)^2 \le |z|^2 \Rightarrow |Imz| \le |z| \Rightarrow Imz \le |Imz| \le |z|$$

مثال ۱۰: نابرابری مثلث را ثابت کنید. یعنی؛ نشان دهید برای هر z_1 و z_2 در C داریم:

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

تعبیر هندسی این نامساوی را بعداً خواهیم گفت.

حل: داریم بنابر مثال ۷ و سپس ۶ و آنگاه مثال ۹ و بعد مثال ۸:

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) =$$
$$z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 = |z_1|^2 + z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2}$$
$$+ |z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2Re(z_1\bar{z}_2)$$

$$\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1|\,|z_2|$$
$$= (|z_1| + |z_2|)^2$$

حال از دو طرف ریشهٔ دوم می‌گیریم و حکم را به دست می‌آوریم.

مثال ۱۱ : مطلب موجود در میان برهان مثال بالا را ثابت کنید. یعنی؛ نشان دهید برای هر عدد مختلط z، داریم:

$$\mathrm{Re}\,z = \frac{z+\bar z}{2} \quad , \quad \mathrm{Im}\,z = \frac{z-\bar z}{2}$$

حل : فرض کنیم :
$z = (a\,,\,b)$

آنگاه $\bar z = (a, -b)$ و داریم :

$$z+\bar z = (a,b)+(a,-b) = (2a,0) = 2a = 2\mathrm{Re}\,z$$
$$z-\bar z = (a,b)-(a,-b) = (0,2b) = 2b = 2\mathrm{Im}\,z$$

با تقسیم این روابط بر ۲ حکم به دست می‌آید. بویژه اگر قرار دهیم $z = z_1\bar z_2$، آنگاه

$$z+\bar z = z_1\bar z_2 + \overline{z_1\bar z_2} = z_1\bar z_2 + \bar z_1 z_2$$
$$= 2\mathrm{Re}\,z_1\bar z_2$$

مثال ۱۲ : نابرابری کوشی رابرای $n = 2$ ثابت کنید، یعنی؛ نشان دهید برای هر چهار عدد حقیقی a_1، b_1 و a_2، b_2، داریم :

$$|a_1b_1 + a_2b_2| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\,.\,\sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

حل : بنابر مثال ۸ ، برای هر دو عدد مختلط z_1 و z_2 داریم :

$$|z_1z_2| = |z_1||z_2|$$

و همچنین بنابر مثال ۹ :

$$|\mathrm{Re}\,z_1z_2| \leq |z_1z_2|$$

حال دو عدد مختلط z_1 و z_2 را با استفاده از چهار عدد فوق به صورت زیر در نظر می‌گیریم :

$z_1 = (a_1\,,\,a_2)$ و $z_2 = (b_1\,,\,-b_2)$

آنگاه

$$\mathrm{Re}\;z_1z_2 = a_1b_1 + a_2b_2$$

بنابراین :

$$|a_1b_1+a_2b_2| \leq |z_1|\,|z_2| = \sqrt{a_1^2+a_2^2}\,.\,\sqrt{b_1^2+b_2^2}$$

مثال ۱۳ : ثابت کنید، ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم مختلط

$$az^2 + bz + c = 0 \qquad a \neq 0$$

که در آن a، b و c اعداد مختلطند، از فرمول مشابه حالت حقیقی به دست می‌آید.

حل : دراین‌جا نیز عیناً همان کاری را که در حالت حقیقی انجام می‌دادیم، عمل می‌کنیم :

$$az^2+bz+c = a\left(z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}\right) = 0$$

بنابراین :

$$a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right] = 0 \Rightarrow z = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

که در آن $\Delta = b^2 - 4ac$.

مثال ۱۴ : ثابت‌کنیداگر $a, b, c \in \mathbb{R}$ و t یک‌ریشهٔ معادلهٔ درجه‌دوم

$$az^2 + bz_1 + c = 0 \qquad (5)$$

باشد آنگاه ریشهٔ دیگر آن $\bar z_1$ یعنی مزدوج z_1 است.

حل : چون z_1 ریشهٔ معادلهٔ (۵) است، بنابراین در آن صدق می‌کند؛ یعنی :

$$az_1^2 + bz_1 + c = 0$$

حال از دو طرف این رابطه مزدوج می‌گیریم و دقت می‌کنیم که هرگاه $z \in \mathbb{R}$، آنگاه $z = \bar z$ بنابراین :

$$0 = \bar 0 = \overline{at_1^2+bt_1+c} = \overline{at_1^2}+\overline{bt_1}+\bar c = a\bar t_1^{\,2} + b\bar t_1 + c$$

و چون بنابر قضیّهٔ اساسی جبر، معادلهٔ (۵) حداکثر دو ریشه در C دارد، پس تنها ریشه‌های آن z_1 و $\bar z_1$ هستند. بدین ترتیب ثابت کردیم ریشه‌های هر معادلهٔ درجهٔ دوم مختلط با ضرایب حقیقی ، مزدوج هم هستند.

در اثبات مطلب فوق از دو تعمیم استفاده کردیم. یکی تعمیم مثال ۶ ـ جمع و دیگری تعمیم مثال ۶ ـ ضرب است. یعنی؛ برای هر تعداد متناهی اعداد مختلط z_1، z_2، ...، z_k داریم :

$$\overline{z_1z_2\ldots z_k} = \bar z_1\bar z_2\ldots\bar z_k$$

و

$$\overline{z_1+z_2+\ldots+z_k} = \bar z_1+\ldots+\bar z_k$$

بویژه اگر $z_1 = z_2 = \ldots = z_k$، آنگاه $\left(\overline{z_1^k}\right) = \left(\bar z_1\right)^k$

ادامه دارد

طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روشهای مقدماتی (۱۱)

یک مسألهٔ معروف هندسه (مسألهٔ مماس آپولونیوس)

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

دایره‌ای رسم کنید که بر سه دایرهٔ مفروض مماس باشد.

دوایر مزبور می‌توانند شامل دوایر تبهگن[1]، یعنی، نقاط یا خطوط مستقیم نیز باشند.

مسألهٔ معروف فوق توسط بزرگترین ریاضی‌دان دنیای باستان بعداز اقلیدس و ارشمیدس، یعنی؛ آپولونیوس پرگایی[2] (حدود ۱۷۰ - ۲۶۰ ق. م.)، که اثر عظیمش به نام K wvrká[3] معرفت به‌طور طبیعی اندک از مقاطع مخروطی آن دوران را با جامعیت شگفت‌انگیزی وسعت بخشید، مطرح شده است. متأسفانه مقالهٔ آپولونیوس، یعنی، *De Tactionibus*، که حاوی راه‌حل مسألهٔ مماس مورد بحث بوده، از دست رفته است. فرانسوا ویت[4] موسوم به ویتا[5]، بزرگترین ریاضی‌دان فرانسوی قرن شانزدهم (۱۵۴۰ - ۱۶۰۳)، در حدود ۱۶۰۰ کوشش در بازسازی مقالهٔ آپولونیوس کرد و مسألهٔ مماس را با استفاده از جداگانه درنظر گرفتن هریک از ده حالت خاص آن، و استخراج هرمورد بعدی از حالت قبلی آن، حل کرد. درمقابل این راه حل، راه‌حلهای گاوس[6] *(Complete Works, vol, IV, P. 399)*، ژرگون[7] *(Annales de Mathématiques vol.IV)*، و پترسون[8] *(Methoden und Theorien)* به حل مسألهٔ عمومی پرداختند.

در این‌جا کار خود را محدود به‌طرح راه حل ظریف ژرگون می‌کنیم، و از آن‌جاکه اثبات مزبور علاوه برقضایای محور اصلی[9]، از خواص نقاط توافقی[10] و قطبیها[11] استفاده می‌کند، موضوع را با بحث مختصری از این دو آغاز می‌کنیم.

نقاط توافقی

مقصودمان از اشاره به نقاط توافقی برونی[12] یا مثبت و درونی[13] یا منفی (البته به ترتیب) دو دایرهٔ R و R′ با مراکز M و M′ واشعهٔ r و r′، به‌ترتیب، نقاط A و J ی واقع بر خط MM′، واصل مراکز دو دایره، است که در مورد آنها و به ترتیب:

$$\frac{MA}{M'A} = +\frac{r}{r'} \quad \text{و} \quad \frac{MJ}{M'J} = -\frac{r}{r'}^{*}$$

از قضیهٔ اشعهٔ موازی به‌طور مستقیم نتیجه می‌شود که:

خط واصل نقاط انتهایی دوشعاع موازی (در سوهای مخالف) دو دایره، از نقطهٔ توافقی برونی (درونی) مربوطه می‌گذرد.

بخصوص، مماسهای مشترک[15] برونی (درونی) دو دایره از نقطهٔ توافقی برونی (درونی)شان می‌گذرند. نقطهٔ توافقی برونی دوایر R و R′ را به‌صورت +RR′، و نقطهٔ توافقی درونی آنها را به‌صورت −RR′ مشخص می‌کنیم، و، اگر علامت مربوطه مشخص نشده باشد، نقطهٔ توافقی را به‌صورت εRR′ درنظر می‌گیریم. نماد ... εε′ε″ را باید هنگامی که تعداد علامتهای منفی ظاهر در میان نمادهای ε، ε′، ε″، ... زوج است به معنی بعلاوه و هنگامی که فرد است به معنی منها بدانیم.

◄ شکل ۱

نقاط تشابه سه دایره را با قضیهٔ زیر توصیف می‌کنیم:

قضیهٔ دالامبر** [16]: اگر سه دایرهٔ 𝒜، ℬ، 𝒞 را به صورت جفتهای (𝒜,ℬ)، (ℬ,𝒞)، و (C ,𝒜) درنظر بگیریم؛ نقاط تشابه برونی سه جفت دایرهٔ مزبور برخطی مستقیم واقع می‌شوند؛ و، به

* نسبت پاره‌خطی AX : BX[14] مثبت درنظرگرفته می‌شود اگر X بیرون AB، و منفی اگر درون آن قرار گرفته باشد.

** دالامبر (۱۷۱۷ - ۱۷۸۳)، ریاضی‌دان فرانسوی.

همین ترتیب، نقطهٔ تشابه برونی یک جفت و دو نقطهٔ تشابه درونی دو جفت دیگر برخطی مستقیم، موسوم به محور تشابه[۱۷] سه دایره، قرار می‌گیرند.

به‌گونهٔ مختصرتر: اگر $\alpha\beta\gamma$ بعلاوه‌باشد، سه‌نقطهٔ تشابه $\alpha\mathcal{BC}$، $\beta\mathcal{CA}$، $\gamma\mathcal{AB}$ برخطی مستقیم واقعند.

اثبات مونژ[۱۸]: فرض می‌کنیم مراکز دوایر $\mathcal{A}$، $\mathcal{B}$، $\mathcal{C}$ به‌ترتیب A، B، C، ونقاط تشابه برونی جفتهای $(\mathcal{B},\mathcal{C})$، $(\mathcal{C}, A)$، $(\mathcal{A}$، B)، به‌ترتیب، P، Q، R باشند. اگر جفت دایره‌ای $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$، با مماسهایی برونی از آن‌که از P می‌گذرند، حول محور PBC دوران کنند، کره‌های[۱۹] $\mathcal{B}$ و $\mathcal{C}$ و مخروط مماس[۲۰] با رأس $\mathcal{P}$[۲۱] آنها را به‌دست می‌آوریم. حالت مربوط به دو جفت دایره‌ای دیگر به همین ترتیب است.

صفحات E_1 و E_2 به کره‌های A، $\mathcal{B}$، $\mathcal{C}$ به‌چنان طریقی مماسند که کره‌های مزبور همواره بریک طرف صفحهٔ مربوطه قرار دارند، و هر دو صفحه شامل نقطهٔ P اند، زیرا این نقطه برمماس برونی $(\mathcal{A}$، $\mathcal{B})$ در داخل E_1 $[E_2]$ واقع است. صفحات مزبور، به همین ترتیب شامل نقاط Q و R اند.

به این ترتیب سه نقطهٔ P، Q، R بر فصل مشترک[۲۲] صفحه‌های E_1 و E_2 قرار می‌گیرند.

اگر به نقطه‌های تشابه درونی زوجهای $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$، $(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ و نقطهٔ تشابه برونی $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ سروکار داشته‌باشیم، باید صفحه‌های مماسی[۲۳] را طوری اختیار کنیم که $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ دریک طرف چنین صفحه‌ای واقع باشند درحالی که $\mathcal{C}$ برطرف دیگر آن قرار داشته‌باشد.

فرض می‌کنیم؛ دایرهٔ دلخواه $\mathfrak{D}$ با مرکز X به‌طور همگن (به‌طور ناهمگن) به دو دایرهٔ ثابت R و R′، با مراکز K و K′ و شعاعهای K و K′، در P و Q′ مماس باشد. فرض می‌کنیم؛ نقاط تقاطع خط مستقیم PQ′ با دوایر R و R′ و خط KK′ واصل مراکز آنها P، Q؛ P′، Q′ و S باشند.

▸ شکل ۲

از آن‌جا که زوایای قاعده‌ای مثلثهای متساوی‌الساقین KPQ[۲۴]، K′P′Q′، و XPQ′ در P و Q′ زوایای متقابل به رأس نیز هستند، هر شش زاویهٔ قاعده‌ای مزبور برابرند. از آن‌جاکه دو زاویهٔ قاعده‌ای واقع در P و P′ برابرند، شعاعهای KP و K′P′ موازی‌اند. درنتیجه، S نقطهٔ تشابه برونی (درونی) R و R′ است. از این مطلب نتیجه می‌شود که:

$$\frac{SP}{SP'} = \pm\frac{K}{K'} \qquad \frac{SQ}{SQ'} = \pm\frac{K}{K'}$$

به این ترتیب دو حاصل‌ضرب SP. SQ′ و SQ.SP′ برابرند. اگر مقدار مشترک آنها را w بنامیم، آنگاه:

$$w^2 = SP.\ SQ'.\ SQ.\ SP' = SP.\ SQ.\ SP'.\ SQ'$$

یعنی؛ w^2 برابر حاصل‌ضرب قوتهای[۲۵] Π و Π' از دوایر R و R′ در S است. در نتیجه،

$$SP.SQ' = w = \sqrt{\Pi\Pi'}$$

یعنی: قوت (SP .SQ′) ازدایرهٔ $\mathfrak{D}$ در S ثابت $(\sqrt{\Pi\Pi'})$ است.

▸ شکل ۳

نتیجهٔ ملاحظاتمان به صورت زیراست:

قضیّهٔ تماس: نقطهٔ تشابه برونی (درونی) دو دایرهٔ ثابت نقطه‌ای است که در آن جمیع دوایر به طور همگن (به‌طور ناهمگن) مماس به دوایر ثابت مزبور دارای قوت یکسان‌اند و در آن جمیع قاطعهای تماس[۲۶] (که با نقاط تماس به دایره‌های ثابت مزبور مشخص شده‌اند) تقاطع می‌کنند.

◆ قطب و قطبی

دو نقطهٔ P و P′ که برشعاعی بیرون آمده از O، مرکز دایرهٔ R ی به شعاع r، چنان قرار داشته‌باشند که

$Op.\ Op' = r^2$

مزدوج[۲۷] یکدیگر نسبت به آن دایره نامیده می‌شوند. از دو نقطهٔ مزدوج یکی داخل دایره و دیگری خارج آن قرار دارد.

مزدوج نقطهٔ برونی A، J، نقطهٔ تقاطع منصف دایرهٔ[۲۸] گذرنده از A با وتر تماس[۲۹] مشخص‌شده با مماسهای AT_1 و AT_2 از A بردایره است.

مزدوج نقطهٔ درونی J، A، نقطهٔ تقاطع مماسهایی است که از نقاط انتهایی T_1 و T_2 از وتر گذرنده از J و عمود بر منصف دایرهٔ گذرنده از J می‌گذرند.

▸ شکل ۴

(از مثلث قائم‌الزاویهٔ OAT_1 به‌طور مستقیم نتیجه می‌گیریم که $r^2 = OAOJ$.)

منظور از قطبی[۳۰] نقطهٔ P خط P ای است که بر منصف دایرهٔ

گذرندهٔ از P عمود است و از مزدوج P می‌گذرد.

برعکس، منظور از قطب[31] خط P نقطهٔ P ای است که مزدوج نقطهٔ پایه‌ای[32] عمود وارد از مرکز دایره به خط مزبور است.

به‌این ترتیب رابطهٔ بین قطب و قطبی دو جانبه است:

اگر p قطبی P باشد، در این صورت P قطب p است، و برعکس.

◄ شکل ۵

اکنون فرض می‌کنیم Q نقطهٔ دلخواهی بر P، قطبی P (که از P'، مزدوج P، می‌گذرد) و Q' مُزدوج Q باشد. در این صورت:

$$OP.\ OP' = OQ.\ OQ'\ (= r^2)$$

و درنتیجه $PP'QQ'$ یک چهار ضلعی محاط در دایره است. از آن‌جا که در این مورد زاویهٔ در P' برابر $90°$ است زاویهٔ در Q' نیز باید $90°$ باشد، یعنی؛ PQ' باید بر OQ عمود باشد. بنابراین : PQ' قطبی q از Q است، و قضیهٔ زیر را داریم:

قضیهٔ قطب و قطبی : اگر Q برقطبی P قرار داشته‌باشد، P نیز برقطبی Q قرار خواهد داشت. یا نیز: اگر P از قطب q بگذرد، q نیز از قطب p می‌گذرد.

اکنون به راه‌حل ژرگان در مورد مسألهٔ تماس می‌پردازیم.

در حالت کلی، تعدادی دایره موجودند که به سه دایرهٔ مفروض $\mathcal{A}$، $\mathcal{B}$، $\mathcal{C}$ مماسند. راه حل ژرگان مبتنی برجست وجوی دوایر مجهول به‌صورت جفت جفت، و نه تک تک، است؛ و در حالت خاص، شخص همواره جفت $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ ای را جست وجو می‌کند که به‌طور همگن یا ناهمگن بر هر یک از دوایر مفروض مماسند.

برای سادگی کار، تماسهای همگن را مثبت (+) و تماسهای ناهمگن را منفی (−) می‌نامیم و ترکیباتی چون $\varepsilon\varepsilon'$ از علامات تماس ε و ε' را مطابق با این قاعده در نظر می‌گیریم که «علامتهای مشابه بعلاوه و علامتهای نامشابه منها به‌دست می‌دهند.»

فرض می‌کنیم؛ دوایر E و $\mathcal{F}$، به‌ترتیب، بردوایر $\mathcal{A}$، $\mathcal{B}$، $\mathcal{C}$، به‌ترتیب، در نقاط P، Q، R و p، q، r، مماس باشند، و تماسها به‌ترتیب دارای علامات A، B، C و a، b، c باشند. در این صورت:

$$Aa = Bb = Cc = \varepsilon$$

و

$$BC = bc = \alpha \quad , \quad CA = ca = \beta \quad , \quad AB = ab = \gamma$$

و

$$\alpha\beta\gamma = +$$

ابتدا ($\mathcal{F}$ و $\mathcal{E}$) را به‌صورت جفت مماس به دوایر A و B و C درنظر می‌گیریم. بنا به قضیهٔ تماس، $\varepsilon\mathcal{E}\mathcal{F}$، نقطهٔ تشابه $\mathcal{E}$ و $\mathcal{F}$، نقطهٔ O، مرکز قوت سه دایرهٔ $\mathcal{A}$، $\mathcal{B}$، $\mathcal{C}$ و نقطهٔ تقاطع سه وتر تماس Pp، Qq، Rr است.

سپس به طور متوالی $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$، $(\mathcal{C}, \mathcal{A})$، $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ را به‌عنوان جفت مماس به دوایر E و $\mathcal{F}$ در نظر می‌گیریم. در این صورت بنا به قضیهٔ مماس، دوایر E و F در نقطهٔ تشابه $\alpha\mathcal{B}\mathcal{C} \equiv I$، نیز در نقطهٔ تشابه $\beta\mathcal{C}\mathcal{A} \equiv II$، و نقطه تشابه $\gamma\mathcal{A}\mathcal{B} \equiv III$ دارای قوتهای یکسان‌اند. و از آن‌جا که $\alpha\beta\gamma$ برابر + است، سه نقطهٔ I، II، III، بنابه قضیهٔ دالامبر، برمحور تشابه $\mathcal{A}$، $\mathcal{B}$، $\mathcal{C}$ قرار می‌گیرند. به‌این ترتیب محور تشابه $I\ \ II\ \ III$، X، وتر دوایر $\mathcal{E}$ و $\mathcal{F}$ است.

گذشته از این، اگر S نقطهٔ تقاطع مماسهای بر $\mathcal{A}$ در P و p را نمایش دهد، در این صورت $sP = sp$. از آن‌جا که این مماسها به $\mathcal{E}$ و $\mathcal{F}$ نیز مماس می‌شوند، S بر X، وتر $\mathcal{E}$ و $\mathcal{F}$ واقع می‌شود.

ولی s قطب وتر تماس Pp نسبت به دایرهٔ $\mathcal{A}$ نیز هست. بنابراین، از آن‌جا که X از قطب Pp می‌گذرد، از قضیهٔ قطب و قطبی نتیجه می‌شود که Pp از قطب X می‌گذرد. از آن‌جا که همین نتیجه را می‌توان نسبت به وترهای تماس Qq و Rr نیز بیرون کشید، قضیهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم:

وترهای تماس Pp، Qq، و Rr، به‌ترتیب، از قطبهای خط $X \equiv I\,II\,III$ نسبت به دایره‌های $\mathcal{A}$، $\mathcal{B}$، $\mathcal{C}$ می‌گذرند.

◄ شکل ۶

از سه قضیه‌ای که در سه بند اخیر با حروف ایرانیک مشخص کردیم؛ به‌طور مستقیم به‌دست می‌آوریم:

ترسیم ژرگون : O، مرکز قوت دوایر مفروض و محور تشابه $I\ II\ III \equiv X$ را رسم می‌کنیم، قطبهای ۱، ۲، ۳ ی X نسبت به دوایر مفروض را مشخص و آنها را به O وصل می‌کنیم. خطوط واصل‌حاصل با دوایر مفروض در نقاطی برخورد می‌کنند که در آنها با دوایر مطلوب مماسند.

مرجع :

100 Great Problems of
Elementary Mathematics

یادداشتها:

1. degenerate circles
2. Apollonius of Perga
3. Kwrcká
4. Francois Viéte
5. Viéta
6. Gàuss
7. Gergone
8. Peterson
9. chordal
10. similarity points
11. polars
12. external simIlarity points
13. internal
14. segment ratio
15. common tangents
16. D'Alembert
17. similarity axis
18. Monge
19. sphere
20. tangent cone
21. apex
22. line of intersection
23. tangential planes
24. isosceles triangles
25. powers
26. tangency secants
27. conjugate
28. circle bisector
29. tangency chord
30. polar
31. pole
32. base point

تفریح اندیشه ۷

موتور سواری مسیری را می‌پیماید که از چهارقسمت به طول مساوی تشکیل شده است. در اولین قسمت، جاده صاف و هموار است، و سرعت او ۱۰ کیلومتر در ساعت می‌باشد. در قسمت دوم، تپه‌ای است، که سرعتش در این مسیر به ۵ کیلومتر در ساعت می‌رسد. در قسمت سوم، یک سراشیبی است و سرعتش ۳۰ کیلومتر در ساعت است و در آخرین قسمت جاده صاف و هموار است و باد هم از پشت سر می‌وزد و در نتیجه سرعتش به ۱۴ کیلومتر در ساعت می‌رسد. سرعت متوسط این موتورسوار در این مسیر چقدر است؟

از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی
ترجمهٔ سیمین‌دخت ترکپور

جواب در صفحهٔ ۸۸

جواب نامه‌ها

آقای اسماعیل مهدوی دانش‌آموز رشته تجربی (آمل)

با تشکراز زحمات بی‌دریغ شما و برای مسائل حل شدهٔ فراوانی که برای مجله ارسال داشتید. موفقیت و پیروزی شما را از خداوند متعال خواستاریم و امیدواریم در همکاری با مجله ثابت قدم باشید.

آقای بهمن اصلاح‌پذیر دبیر ریاضی (تهران)

ضمن تشکر از نامهٔ ارسالی شما به عرض می‌رسانیم که هیأت تحریریهٔ مجله از پاسخ دادن به سؤالات خصوصی معذور است. ولی برای راهنمایی، روش تحلیلی را پیشنهاد می‌کنیم که بدین قرار است:

ابتدا معادلات (خطوط) اضلاع مثلث مفروض را با معادلهٔ دایره

$x^{2} + y^{2} + ax + by + c = 0$

قطع می‌دهیم که در این صورت سه معادلهٔ درجه دوم حاصل خواهد شد که مبین این سه معادله باید مثبت باشد. بدیهی است که از حل دستگاه توأم حاصله شرایط اساسی برای حل مسئله به دست می‌آید.

آقای جواد یوسف‌زاده دانش‌آموز رشته ریاضی (نقده)

ضمن تشکر از نامهٔ محبت‌آمیز شما و مسائل حل شدهٔ ارسالی شما به عرض می‌رسانیم که امید است در شماره‌های بعدی از آنان استفاده شود.

آقای حسن اسماعیلی دانشجوی رشته ریاضی (زنجان)

ضمن تشکر از مقالهٔ تاریخی شما تحت عنوان «نظری گذرا بر زندگی ملامحمد باقریزدی ریاضیدان بزرگ اسلامی» به اطلاع می‌رسانیم که امید است امکان درج آن در شماره‌های بعدی مجله در جای مناسب به‌وجود آید.

آقای حسن بای (مازندران)

از مسائل ارسالی شما متشکریم. امید است مسائل را در سطح مطلوب‌تری ارائه دهید و از ارسال مسائل تکراری بپرهیزید.

آقای امید خاتین‌زاده دانش‌آموز رشته ریاضی (اهواز)

از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. امید است در شماره‌های بعدی مجله از آنان استفاده شود.

آقای مسعود فلاح دانش‌آموز رشته ریاضی (اصفهان)

با تشکر از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما، امید است در شماره‌های بعدی مجله از آنان استفاده شود.

آقای حسین پیروتی نژاد؛ دانش آموز رشتهٔ ریاضی (پیرانشهر)

از مسألهٔ حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. ان شاءا... آن‌را در شماره‌های آتی مجله درج می‌کنیم.

آقای محمود رحیمی؛ دانش آموز رشتهٔ تجربی (تهران)

ضمن تشکر از نامهٔ ارسالی شما، به‌عرض می‌رسانیم که به علت بالا رفتن قیمت کاغذ، قیمت مجله‌ها از جمله مجلهٔ برهان افزایش یافته است و مسؤولین محترم تا آن‌جا که ممکن است می‌کوشند تا قیمت مجله را ثابت نگه دارند. در جواب سؤال دیگر شما در مورد مطرح نکردن تست در مجله باید بگوییم که دیگر با وجود ویژه‌نامه‌های کنکور (۱ و ۲) برهان، نیازی به‌طرح تست نیست. از دو مسألهٔ حل شدهٔ ارسالی شما نیز متشکریم.

آقای محمد وفایی‌پور؛ دیپلمهٔ ریاضی (کرج)

ضمن تشکر از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما، به عرض می‌رسانیم که إن شاءا... از آنها برای شماره‌های آینده استفاده می‌کنیم. در جواب نامهٔ شما مطالعهٔ سلسله مقالات آقای «پرویز شهریاری» با عنوان «شما

هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید» را به شما توصیه می‌کنیم.

آقای حسین خدا دوست؛ دانش آموز رشتهٔ ریاضی (خراسان)

ضمن تشکر از نامهٔ ارسالی شما به‌عرض می‌رسانیم که آخرین حکم‌فرما «معادلهٔ $x^n + y^n = z^n$ برای هر $n > 2$ در سیستم اعداد صحیح غیر صفر ممتنع است» توسط وایلز حل شد و راه حلّ وی هنوز تحت بررسی است. باید به استحضار برسانیم که در ابتدای اثبات، شما فرض کرده‌اید: $(x, y) = (x, z) = (y, z) = 1$ که این فرض اشتباه است زیرا x و y و z دچار محدودیت شده‌اند و در واقع از عمومیت مسأله کاسته شده است. برای اطلاع بیشتر در این زمینه می‌توانید به شمارهٔ ۴۰ «رشد آموزش ریاضی» مراجعه کنید.

آقای محمود یلوه‌ای؛ دانش‌آموز سال اوّل دبیرستان (کرمانشاه)

با تشکر از ارسال یک سرگرمی تحت عنوان «تعیین تعداد ارقام صحیح ریشهٔ n ام یک عدد طبیعی» به عرض می‌رسانیم که ان شاءا... در جای مناسب از آن استفاده می‌شود.

آقای شاهرخ شهسواری؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (رامسر)

از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. ان‌شاءا... برای شماره‌های آینده مجله از آنها استفاده می‌کنیم.

خانم طاهره خواجوند زریری؛ دانش آموز رشته ریاضی (رامسر)

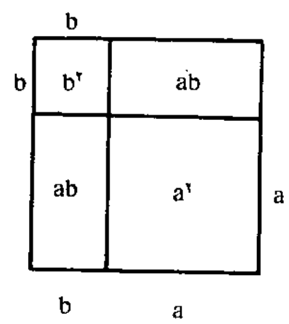
ضمن تشکر از نامهٔ شما در جواب باید بگوییم که شکل هندسی عبارتهای $(a + b)^2$ و $(a + b)^3$ را می‌توان با توجه به اتحادهای زیر رسم کرد:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (1)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \qquad (2)$$

با توجه به شکل داریم:

$$(a + b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2$$



با الهام از تعبیر هندسی $(a + b)^2$، برای تعبیر هندسی عبارت $(a+b)^3$ نیز می‌توان مکعبی به ضلع a را در نظر گرفت و اضلاع یک گوشه آن‌را به اندازهٔ b امتداد داد. با تکمیل پوشش مکعب اوّلیه با حجم a^3، سه مکعب مستطیل به حجم a^2b و سه مکعب مستطیل به حجم ab^2 که تیغه‌ها را تشکیل می‌دهند نیز به‌وجود می‌آیند. در گوشهٔ مکعب اوّلیه نیز مکعبی به حجم b^3 نیز وجود دارد که از مجموع مکعبها داریم:

$$(a+b)^3=a^3+(a^2b+a^2b+a^2b)+(ab^2+ab^2+ab^2)+b^3$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

به‌طریق مشابه احتمال دارد عبارتهای: $(a + b)^4$ و $(a + b)^5$ و ... را نیز بتوان توسط شکلهای فضایی پیچیده‌تری تعبیر کرد.

آقای رضا کهکشانی؛ دانش آموز رشتهٔ ریاضی (کاشان)

ضمن تشکر از نامهٔ ارسالی شما که حاوی مقاله‌ای تحت عنوان «بحثی پیرامون عدد اصلی مجموعه» است، به‌عرض می‌رسانیم که ان‌شاءا... از آن برای شماره‌های بعدی مجله در جای مناسب استفاده می‌کنیم.

آقای سید محمد نوید پور؛ دانش آموز رشتهٔ ریاضی (بابلسر)

ضمن تشکر از نامهٔ ارسالی شما که حاوی مقاله‌ای تحت عنوان «محاسبهٔ نسبتهای مثلثاتی زوایای مرکب» است، به‌عرض می‌رسانیم که ان‌شاءا... در شماره‌های آتی در جای مناسب از آن استفاده خواهیم کرد.

آقای محمد مهدی تنباکوزاده؛ دانش آموز رشتهٔ ریاضی (اصفهان)

از مسألهٔ حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. ان‌شاءا... از آن برای شماره‌های آینده مجله در قسمت مسائل برای حل استفاده می‌کنیم.

آقای امیر حسین اثنی عشری؛ دانش‌آموز (تهران)

از مسائل حل شدهٔ شما متشکریم. ان شاءا... مسائل را در سطح مطلوبتری ارائه دهید. از خداوند منان موفقیت شما را خواهانیم. سعی کنید قبل از طرح و حل مسأله، شماره‌های قبلی برهان را مطالعه کنید و با توجه به قسمت مسائل برای حل و مسائل مسابقه‌ای، مسائل جدید و غیر تکراری طرح کنید.

معرفی کتاب

❑ تفریح اندیشه با بازیهای عددی
مترجم: سیمین‌دخت ترکپور
ناشر: انتشارات محراب قلم

این‌کتاب ترجمه‌ای‌است از کتاب ۱۰۰ بازی عددی (100 Jeux Numériques) تألیف پیربرلوکن نویسندهٔ معاصر فرانسوی در زمینهٔ بازیهای ریاضی، که مارتین گاردنر نویسنده بزرگ سرگرمیها و بازیهای ریاضی و پارادوکسها در مقدمه‌ای بر یکی از کتابهای پیربرلوکن او را به عنوان نویسنده‌ای توانا و بزرگ در این زمینه ستوده است.

ترجمهٔ این کتاب بسیار خوب و روان است و نمونه‌هایی از مسائل آن در مجلهٔ برهان شماره‌های ۸ و ۹ و ۱۰ چاپ شده است.

کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی شامل ۱۰۰ مسأله ریاضی در زمینه‌های مختلف است. حل مسائل آن نیازی به داشتن معلومات وسیع ریاضی ندارد. همچنین لازم نیست که متخصص در حل معماها و اعمال مشکل ریاضی باشید، بلکه کافی است از هوش خود بهره بگیرید و فکر خود را به‌کار اندازید.

مطالب کتاب طوری تنظیم شده‌اند که شما را به‌تدریج و نامحسوس از حل مسائل آسان به حل مسائل مشکل‌تر رهنمون می‌شوند.

در زمانی که مسابقات و تستها برای تحصیل و تعیین شغل نقش مهم، قاطع و تعیین‌کننده‌ای دارند، کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی، شما را در کسب سرعت، و مهارتهای هوشی لازم برای پاسخ دادن به تستها و حل مسأله‌ها یاری می‌دهد، ضمن آنکه جنبهٔ تفریح و سرگرمی نیز دارد.

این کتاب برای دانش‌آموزان دورهٔ راهنمایی تحصیلی، دبیرستان و برای داوطلبان کنکور، همچنین دانشجویان و هر فرد علاقمند به ریاضی سودمند است.

❑ ویژه‌نامه برهان، شماره‌های ۱ و ۲
ویژهٔ کنکور سراسری مرحله اول و دوم (تجربی و ریاضی)
ناشر: انتشارات مدرسه

این ویژه‌نامه‌ها شامل تستهای متنوع و مناسب در دو شماره چاپ شده که تستها با حل تشریحی بسیار گویا و مفید توأم می‌باشند.

ویژه‌نامهٔ شمارهٔ ۱ کنکور شامل حدوداً ۳۷۰ تست می‌باشد و برای **مرحلهٔ دوم** کنکور طرح ریزی شده است. در این ویژه‌نامه از سال اول تا چهارم در دروس جبر و آنالیز ـ مثلثات ـ ریاضیات جدید ـ هندسه و ریاضیات تجربی، تستهایی طرح و حل شده‌اند.

ویژه‌نامه شمارهٔ ۲ کنکور شامل ۵۰۰ تست و مخصوص **مرحلهٔ اول** کنکور می‌باشد. در این ویژه‌نامه فقط از دروس ریاضی سال چهارم ریاضی و تجربی تستهایی طرح و حل شده‌اند.

در حل تشریحی تستها سعی شده است تا همهٔ نکات لازم ذکر شود تا دانش‌آموزان در حل تشریحی بتوانند به‌نوعی آموزش نیز دست یابند.

مطالعه و استفاده از این ویژه‌نامه‌ها را به تمامی دانش‌آموزان و علاقه‌مندان به ریاضیات و نیز دبیران محترم توصیه می‌کنیم.

ویژه‌نامه برهان، شمارهٔ ۳

ویژهٔ امتحانات نهایی (ریاضی و تجربی)

ناشر: انتشارات مدرسه

اعضای هیئت تحریریه مجله ریاضی برهان برای آشناشدن دانش‌آموزان عزیز با نحوه و نوع سؤالات امتحانات نهایی در دروس جبر و آنالیز ـ ریاضیات جدید ـ هندسه و ریاضیات تجربی و مهمتر از آن با چگونگی جوابگویی به سؤالات مطرح شده اقدام به تألیف این ویژه‌نامه نموده‌اند.

این ویژه‌نامه که شامل آخرین امتحانات برگزار شده در سال ۱۳۷۳ می‌باشد دربرگیرندهٔ حل تشریحی مناسب برای هر سؤال بوده و مؤلفین سعی کرده‌اند هر مسأله را حتی‌الامکان از ۲ یا حتی ۳ روش حل کرده و در حل آنها نکته‌های لازم را متذکر شده تا علاوه بر دسترسی دانش‌آموزان به حل صحیح و مناسبِ سؤالات به نوعی، آموزش برخی از مفاهیم درسی نیز صورت گرفته باشد.

اعضای هیئت تحریریه مجله ریاضی برهان، مطالعه و استفاده از این ویژه‌نامه را برای دانش‌آموزان سال چهارم و دبیران ریاضی توصیه کرده و در نظر دارد هر ساله با اضافه کردن سؤالات امتحانات نهاییِ همان سال این ویژه‌نامه را تکمیل‌تر نماید.

بخش‌پذیری در جبر

تألیف: پرویز شهریاری

انتشارات مدرسه، چاپ اول

دومین کتاب از سری کتابهای کوچک ریاضی می‌باشد. در این کتاب به جز متن درسی، ۳۴ مسأله (در داخل متن) و ۷۰ تمرین حل شده است. (حل تمرینها در پایان کتاب آمده است.)

برای این‌که از طولانی‌شدن متن پرهیز شود، بسیاری از نکته‌های لازم، ضمن حل مسأله‌ها یا تمرینها آمده است. هیچ مسأله یا تمرینی بدون دلیل نیامده و تنها با مطالعهٔ **کامل** تمامی این کتاب کوچک، می‌توان به همهٔ نکته‌های لازم پی برد.

در این کتاب تلاش شده از مسأله‌ها و تمرینهایی استفاده شود که در کتابهای دیگر وجود نداشته باشد، مگر مسأله‌ها یا تمرینهایی که صورت کلاسیک پیدا کرده و در هر کتاب درسی یا کمک درسی دیده می‌شوند.

مطالعهٔ این کتاب را به تمامی دانش‌آموزان دبیرستانی (تجربی و ریاضی) و معلمین دلسوز پیشنهاد می‌کنیم.

هندسه تحلیلی چند محوری و چند رساله دیگر

تألیف: احمد شرف‌الدین

انتشارات مدرسه، چاپ اول

این کتاب، پژوهش و تحقیقی است که در قالب هندسهٔ تحلیلیِ چند محوری و چند رسالهٔ دیگر مطرح شده است.

کتاب فوق‌الذکر شاملِ چهار بخش مستقل است. بخش اول آن «هندسه چندضلعیها» نام گرفته و روشهایی جدید برای اثبات قضایای هندسی در این بخش ارائه گردیده است. در این فصل در حدود هشت قضیه از طرف مؤلف ابداع گردیده است.

مؤلف در بخش دوم کتاب تحت عنوان «تقارن nتایی» بعضی از خواص اشکالی را که دارای چند محور تقارنِ غیرمتقارب‌اند بررسی نموده‌اند که قضایایی نیز راجع به اشکال با تقارن nتایی عرضه نموده‌اند.

در بخش سوم کتاب تحت عنوان «تعمیم قضایا» نویسنده چند حکم هندسی را تعمیم داده است، از جمله: تعمیم قضیهٔ آپولونیوس، تعمیم کلّی دربارهٔ پنج ضلعی منتظم، تعمیم قضیهٔ برهماگوپتا.

در بخش چهارم کتاب تحت عنوان «اثبات قضایا» نویسنده چند حکم کلّی را به راههای تازه اثبات نموده‌اند که از آن جمله‌اند:

قضیهٔ قوت نقطه دایره، قضایای مثلث قائم‌الزاویه، قضیهٔ نیمساز مثلث، قضیهٔ بطلمیوس، رابطهٔ بین میانگین حسابی و هندسی چند عدد مثبت.

مطالعه این کتاب را به همهٔ علاقه‌مندان به هندسه و دانش‌آموزان، دبیران و دانشجویان رشتهٔ ریاضی توصیه می‌کنیم.

تفریح اندیشه ۸

چگونه می‌توان با قراردادن علائم مناسب +، −، ×، ( ) در هر سطر تساوی برقرار نمود؟

۱۰ =	۸	۸	۸	۸
۱۵ =	۸	۸	۸	۸
۵۶ =	۸	۸	۸	۸
۸۰ =	۸	۸	۸	۸
۱۲۰ =	۸	۸	۸	۸
۱۹۲ =	۸	۸	۸	۸
۵۲۰ =	۸	۸	۸	۸

از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمهٔ سیمین‌دخت ترکپور

جواب در صفحهٔ ۸۸

حل مسائل مسابقه‌ایِ برهانِ ۱۱

۱ـ فرض کنیم $k > ۱$ و $P=k^{۲}(۲k^{۴}+۳k^{۳}-k^{۲}-۳k-۱)$، برای اینکه ثابت کنیم $۳۶ \mid P$ چون $(۴,۹) = ۱$ و $۳۶ = ۴ \times ۹$ کافی است ثابت کنیم $۴ \mid P$ و $۹ \mid P$.

از طرفی: $P = k^{۲}(k^{۴} - k^{۲} + ۳k^{۳} - ۳k + k^{۴} - ۱)$

$$\Rightarrow P=k^{۲}[k^{۲}(k^{۲}-۱)+۳k(k^{۲}-۱)+(k^{۲}-۱)(k^{۲}+۱)]$$

$$=k^{۲}(k^{۲}-۱)(۲k^{۲}+۳k+۱)=k^{۲}(k-۱)(k+۱)^{۲}(۲k+۱)$$

حال اگر k زوج باشد $k^{۲}$ بر ۴ بخش‌پذیر است و اگر k فرد باشد $(k + ۱)$ زوج بوده و $(k + ۱)^{۲}$ بر ۴ بخش‌پذیر است پس P همواره مضرب ۴ است یعنی $۴ \mid P$.

از طرفی اگر k مضرب ۳ باشد که $k^{۲}$ مضرب ۹ است و اگر k مضرب ۳ نباشد لذا ماندهٔ تقسیم آن بر ۳ یا ۱ است و یا ۲ پس باید به یکی از دو صورت $(k - ۱)$ یا $(k + ۱)$ باشد که در هر دو صورت یک‌بار $(k + ۱)^{۲}$ مضرب ۹ است و در حالتی‌که به‌شکل $(k - ۱)$ باشد چون $(۲k + ۱)$ نیز مضرب ۳ است پس $(k - ۱)(۲k + ۱)$ مضرب ۹ است پس همواره $۹ \mid P$ و حکم ثابت است.

۲ـ می‌خواهیم ثابت کنیم عدد $A = ۳^{۴۰} - ۱$ بر عدد $B = ۳۹۶۸۸۰$ بخش‌پذیر است، برای این‌کار چون، $B = ۲^{۴} \times ۵ \times ۱۱^{۲} \times ۴۱$ پس کافی است ثابت کنیم عدد A بر $۲^{۴}$ و ۵ و $۱۱^{۲}$ و ۴۱، جداگانه بخش‌پذیر است (اعداد فوق دو به دو نسبت به‌هم اولند):

الف) $A = (۳^{۵} - ۱)(۳^{۵} + ۱)(۳^{۱۰} + ۱)(۳^{۲۰} + ۱) \quad (۱)$

از طرفی $۳^{۵} = ۱۲۱ \times ۲+۱$ پس، $۳^{۵}-۱=۱۲۱\times ۲=۱۱^{۲}\times ۲$

بنابراین A بر $۱۱^{۲}$ بخش‌پذیر است.

ب) $(۳,۴۱) = ۱ \xRightarrow{\text{فرما}} ۳^{۴۰} \overset{۴۱}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۴۱ \mid (۳^{۴۰}-۱)=A$

ج) $(۳,۵)= ۱ \xRightarrow{\text{فرما}} ۳^{۴} \overset{۵}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۳^{۸} \overset{۵}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۳^{۱۰} \overset{۵}{\equiv} ۹ \overset{۵}{\equiv} -۱$

$\Rightarrow ۳^{۱۰} \overset{۵}{\equiv} - ۱ \Rightarrow ۵ \mid (۳^{۱۰}+۱) \Rightarrow (۳^{۱۰} + ۱) = ۵k$

$\xRightarrow{(۱)} A = ۵k_{۱}$

د) چون اعداد $(۳^{۵} - ۱)$ و $(۳^{۵} + ۱)$ و $(۳^{۱۰} + ۱)$ و $(۳^{۱۰} - ۱)$ همگی زوج می‌باشند پس:

$$\left.\begin{array}{l} ۳^{۵} - ۱ = ۲k_{۱} \\ ۳^{۵} + ۱ = ۲k_{۲} \\ ۳^{۱۰} - ۱۰ = ۲k_{۳} \\ ۳^{۱۰} + ۱۰ = ۲k_{۴} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{حاصل‌ضرب سمت چپ} = ۲^{۴}(k_{۱}k_{۲}k_{۳}k_{۴})$$

بنابراین A بر $۲^{۴}$ نیز بخش‌پذیر است و حکم ثابت می‌شود.

حل: در اکثر زبانهای برنامه‌نویسی اعداد صحیح به دو دستهٔ ۱ـ اعداد صحیحِ علامت‌دار، ۲ـ اعداد صحیح بدون علامت تقسیم می‌شوند که اعداد صحیح نوع اول را Integer و اعداد صحیح نوع دوم را unsigned integer می‌نامند.

۱ـ فرض می‌کنیم اعداد صحیح علامت‌دار به صورت علامت و قدر مطلق عدد (sign + magnitude) ذخیره می‌شود.

ابتدا یک حافظهٔ n بیتی رسم کرده و بیتها را از راست به چپ به صورت زیر شماره گذاری می‌کنیم:

n−۱	n−۲	n−۳		۴	۳	۲	۱	۰

بیت علامت   n بیت

بزرگترین عدد صحیح قابل ذخیره در یک حافظهٔ n بیتی، عددی است که تمام بیتهای خانهٔ حافظهٔ آن با ۱ پر شود و بیت علامت آن، علامتِ عدد مثبت یعنی ۰ باشد.

نمایش بیتی آن به صورت زیر است:

n-۱	n-۲	n-۳		۳	۲	۱	۰
۰	۱	۱	---	۱	۱	۱	۱

اکنون معادل عدد $(\underbrace{۱۱...۱۱۱۱}_{n-۱\text{ تا}})_۲$ را در مبنای ۱۰ به دست می‌آوریم. داریم:

$$(\underbrace{۱۱...۱۱۱۱}_{n-۱\text{ تا}})_۲ = ۱\times ۲^{n-۲} + ۱\times ۲^{n-۳} + ... + ۱\times ۲^۳ + ۱\times ۲^۲ + ۱\times ۲^۱ + ۱\times ۲^۰$$
$$= ۲^{n-۲} + ۲^{n-۳} + ... + ۲^۳ + ۲^۲ + ۲^۱ + ۱$$

مجموع طرف راست بالا، جمع $n-۱$ جملهٔ یک تصاعد هندسی نزولی است که در آن

جملهٔ اول $t_۱ = ۲^{n-۲}$ تعداد جملات $n' = n-۱$

قدر نسبت $q = \frac{۱}{۲}$

$$\text{مجموع جملات } s_n = \frac{t_۱(q^{n'}-۱)}{q-۱} = \frac{۲^{n-۲}\left(\left(\frac{۱}{۲}\right)^{n-۱}-۱\right)}{\frac{۱}{۲}-۱} = ۲^{n-۱}-۱$$

بدین ترتیب بزرگترین عدد صحیحِ قابل ذخیره در یک حافظهٔ n بیتی عدد $۲^{n-۱}-۱$ است. کوچکترین عدد صحیحِ قابل ذخیره در یک حافظهٔ n بیتی، عددی با مشخصات بالا است با این تفاوت که در بیت علامت آن، علامت عدد منفی یعنی ۱ ذخیره شود که در محاسبهٔ تبدیل مبنا شرکت نمی‌کند. بدین ترتیب عدد $-(۲^{n-۱}-۱)$ به‌دست می‌آید. با عملیات و استدلال مشابه، بزرگترین عدد صحیح علامت‌دارِ قابل ذخیره در یک خانهٔ حافظهٔ ۲n بیتی، عدد $\pm(۲^{۲n-۱}-۱)$ خواهد بود.

۲- در اعداد صحیح بدون علامت، تمام n خانهٔ حافظه به عدد اختصاص می‌یابد و بیت علامتی وجود ندارد. بنابراین نمایش بزرگترین عدد صحیح بدون علامتِ قابل ذخیره در خانهٔ حافظهٔ n بیتی به‌صورت زیر است:

n-۱	n-۲	n-۳		۳	۲	۱	۰
۱	۱	۱	---	۱	۱	۱	۱

حال لازم است عدد $(\underbrace{۱۱۱...۱۱۱۱}_{n\text{ تا}})_۲$ را به معادل آن در مبنای ۱۰ تبدیل کنیم.

با روش تصاعدی داریم:

$$(۱۱۱...۱۱۱۱)_۲ = ۲^{n-۱} + ۲^{n-۲} + ... + ۲^۳ + ۲^۲ + ۲^۱ + ۱$$

با فرض $x = ۲$ داریم: $x^{n-۱} + x^{n-۲} + ... + x^۳ + x^۲ + x + ۱ =$

$$= \frac{x^n-۱}{x-۱} = \frac{۲^n-۱}{۲-۱} = ۲^n-۱$$

کوچکترین عدد صحیح بدون علامت قابل ذخیره در خانهٔ حافظهٔ n بیتی عدد صفر است چون همهٔ خانهٔ حافظه را با صفر پر می‌کنیم.

با عملیات مشابه بزرگترین عدد صحیح بدون علامتِ قابل ذخیره در یک خانهٔ حافظهٔ ۲n بیتی عدد $۲^{۲n}-۱$ است و کوچکترینِ آن عدد صفر است.

بطور خلاصه اگر N یک عدد صحیح (علامت‌دار) باشد، در خانهٔ حافظهٔ n بیتی: $-(۲^{n-۱}-۱) \le N \le ۲^{n-۱}-۱$

و درخانهٔ حافظهٔ ۲n بیتی: $-(۲^{۲n-۱}-۱) \le N \le ۲^{۲n-۱}-۱$ است.

اگر N یک عدد صحیح بدون علامت باشد:

در خانهٔ حافظهٔ n بیتی: $۰ \le N \le ۲^n-۱$

و در خانهٔ حافظهٔ ۲n بیتی: $۰ \le N \le ۲^{۲n}-۱$ است.

اسامی افرادی که مسائل مسابقه‌ای شمارهٔ ۱ و ۲ مربوط به برهان ۱۱ را صحیح حل کرده‌اند:

الف) افرادی‌که هر دو مسأله را صحیح حل کرده‌اند:

۱- مهرزاد نیکخواهان و حمید مهرانی فرجاد (سال چهارم ریاضی) - تهران

۲- نادر مطیع (سال چهارم ریاضی) - تهران

۳- حسین سبزرو (دانشجو) - تهران

۴- سروش عباسپور (دوم دبیرستان) - ساری

۵- سبحان نظری (چهارم ریاضی) - نورآباد ممسنی

۶- محمدعلی مهتدی (سوم ریاضی) - بناب

۷- اکبر ترابی (چهارم‌ریاضی) - زنجان

۸- علیرضا خان تیموری (سوم‌ریاضی) - زنجان

۹- حامدمحمدپور (دوم ریاضی) - لنگرود

۱۰- علی بهرامی شریف (دوم ریاضی) - همدان

۱۱ـ رحمان آزادیخواه (سوم ریاضی) ـ سقز

۱۲ـ سمیّه هرجپور (سال دوم نظام‌جدید) ـ چالوس

ب) افرادی‌که یک مسأله را صحیح حل کرده‌اند:

۱ـ عبدا.. شعبانی (دانش‌آموز رشته ریاضی) ـ مراغه

۲ـ مجیدشهروی (سوم ریاضی) ـ تهران

۳ـ الههٔ شهپری (دانش‌آموز رشته ریاضی) ـ اسفراین

۴ـ حمیدمیرباقری (چهارم ریاضی) ـ لاهیجان

۵ـ بیژن صادقی (سوم ریاضی) ـ تهران

۶ـ علی انرجی (دوم ریاضی) ـ کرج

۷ـ زهرا یامی (سوم ریاضی نظام جدید) ـ مرند

۸ـ رضا رضازاده (دانش‌آموز رشته ریاضی) ـ ارومیه

۹ـ سیدجواد رسولی (چهارم ریاضی) ـ مشهد

اسامی افرادی که مسأله مسابقه‌ای کامپیوتری را صحیح حل کرده‌اند:

۱ـ محمدعلی مهتدی (سوم ریاضی) ـ بناب

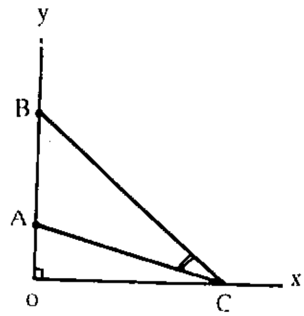
۲ـ حسین سبزرو (دانشجو) ـ تهران

۳ـ مانا سپهوند (چهارم ریاضی) ـ خرم‌آباد

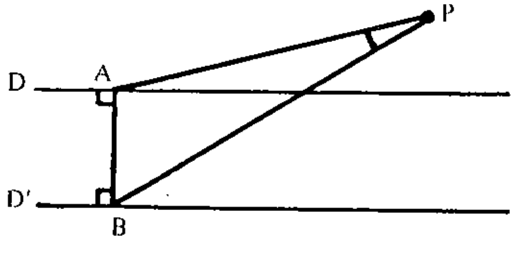
۴ـ سبحان نظری (چهارم ریاضی) ـ نورآباد ممسنی

مسائل مسابقه‌ای

۱ ـ زاویهٔ قائمه xoy و پاره‌خط ثابت AB واقع بر ضلع oy مفروض است. نقطهٔ c را روی ضلع ox چنان بیابید که از این نقطه پاره‌خط AB تحت بزرگترین زاویهٔ ممکن رؤیت شود.



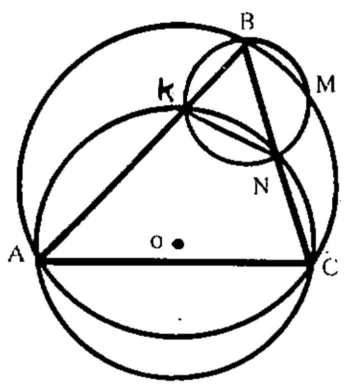
۲ ـ دو خط متوازی D و D′ و نقطهٔ P خارج این دو خط مفروض‌اند. پاره‌خط AB را محصور بین دو خط D و D′ و عمود بر این دو خط، چنان رسم کنید که زاویه APB بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.



مسأله‌ای از المپیادهای بین‌المللی ریاضی

دایره‌ای به مرکز o از رئوس A و C از مثلث ABC می‌گذرد و قطعات AB و BC را باردیگر به ترتیب در نقاط متمایز K و N قطع می‌کند. دوایر محیطی مثلثهای ABC و KBN دقیقاً در دو نقطهٔ متمایز B و M متقاطعند. ثابت کنید که زاویهٔ OMB زاویه‌ای قائمه است.

بیست و ششمین المپیاد بین‌المللی ریاضی ۱۹۸۵



اولاً: اندازهٔ قطر $D'B$ را محاسبه کنید.

ثانیاً: مساحت صفحهٔ $ABC'D'$ را به‌دست آورید و تعیین کنید که این صفحه حجم منشورمنتظم را به‌چه نسبتی تقسیم می‌کند.

ثالثاً: حجم هرم $D'-ABCD$ را محاسبه کنید.

۴ ـ ضریب زاویهٔ خط قائم بر منحنی نمایش تابع با ضابطهٔ $y = F(x) = 3x^2 - x^3$ را در نقطهٔ عطفش به‌دست آورید.

۵ ـ تابع با ضابطهٔ $y = x^3 - 3ax^2 + 3x$ به ازای چه مقادیری از a همواره صعودی یا صفر است؟

٦ ـ دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $F(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x^2}}$ را به‌دست آورید.

۷ ـ اگر $F(x) = \dfrac{2}{x}$ و $(fog)(x) = \sqrt{x^2+1}$ باشد، $g(2)$ را تعیین کنید.

عمومی

۸ ـ اگر تابع با قانون زیر در نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$ پیوسته باشد، مقدار عبارت $F(1)\ F''\left(\frac{-\pi}{2}\right)$ را حساب کنید:

$$F(x) = \begin{cases} \sin x + k - 1 & x < 0 \\ kx^3 + s & x \geq 0 \end{cases}$$

عمومی

۹ ـ فاصلهٔ مرکز تقارن تابع با ضابطهٔ $F(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ از خط به معادله $y = x + k$ برابر $\sqrt{2}$ است، مقادیر K را تعیین کنید.

۱۰ ـ حد زیر را حساب کنید:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 + \cos x - 2\cos^2 x}{x \operatorname{tg} x} = ?$$

(فرستنده: آقای یوسف خمسه دانش آموز رشته ریاضی کرج)

۱۱ ـ مقدار x را از رابطهٔ زیر به‌دست آورید:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\cos^2 10^\circ}{\cos 20^\circ \cos 30^\circ}$$

فرستنده: آقای اسماعیل مهدوی دانش آموز رشته تجربی آمل

۱۲ ـ مجموعهٔ جواب معادلهٔ زیر را حساب کنید:

$$(4x\cos^{73}x + 4x)(\sin^{74}x + |\sin x| + \sqrt{\sin x}) = 0$$

۱۳ ـ معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$48 \operatorname{Arcsin} \sqrt[3]{x} - 8 \operatorname{Arccos}(-x) = 8 \operatorname{Arccos}(x)$$

۱۴ ـ عبارات زیر را محاسبه کنید:

$$A = \operatorname{tg} 70^\circ \operatorname{cotg} 40^\circ \operatorname{cotg} 80^\circ$$
$$B = \sin 42^\circ - \cos 12^\circ + \sin 18^\circ$$

۱۵ ـ معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$\operatorname{tg} 7n^4x \operatorname{cotg} 5x = -1$$

۱٦ ـ هرگاه در مثلثی رابطهٔ $\dfrac{2a^3 + 2b^3 + 2c^3}{3a + 3b + 3c} = \dfrac{2a^2}{3}$ برقرار باشد، زاویه $\hat{A}$ را حساب کنید.

مسائل ریاضیات سال چهارم تجربی

تجربی

۱ ـ اگر $x^3 + y^3 = 3xy + x + y + 4$ باشد، مشتق y نسبت x را به‌دست آورید.

تجربی

۲ ـ اگر $y = 7u^3 + 7u^4 + 1$ و $u = \cos^2 2x$، مقدار مشتق y برحسب x در نقطه‌ای به‌طول $x = \frac{\pi}{8}$ را به‌دست آورید.

تجربی

۳ ـ معادلهٔ خط مماس بر منحنی نمایش تابع با ضابطهٔ $F(x) = \sqrt[3]{x^3 + 8}$ در نقطهٔ تقاطع خط $y + x + 2 = 0$ با محور طولها را به دست آورید.

تجربی

۴ ـ اگر تابع با ضابطهٔ مفروض $y = x^4 - 2x^3 + mx^2 - 1$ دارای سه اکسترمم (ماکزیمم یا می‌نیمم نسبی) باشد، حدود m را تعیین کنید.

تجربی

۵ ـ اندازهٔ مساحت دایرهٔ $4x^2 + 4y^2 - 8x + 8y = 8$ را حساب کنید.

۶ـ معادلهٔ بیضی را که قطرهای آن روی خطهای $2x - 6 = 0$ و $3y + 12 = 0$ واقع و بر محورهای مختصات مماس است بنویسید.

۷ـ خروج از مرکز هذلولی به معادلهٔ $18x^2 - 32y^2 - 36x + 64y - 302 = 0$ را حساب کنید.

۸ـ حجم حاصل از دوران سطح بین منحنی به‌معادلهٔ $y = x^2$ و خط $y = ax$ حول محور xها برابر $\frac{2\pi}{15}$ است، مقدار a را حساب کنید.

فرستنده: آقای یوسف خمسه دانش آموز رشته ریاضی کرج

۹ـ درستی اتحاد زیر را بررسی کنید:

$$\mathrm{tg}\frac{\pi}{16} + 2\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{8} + 4\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = \mathrm{cotg}\frac{\pi}{16}$$

فرستنده: آقای یوسف خمسه دانش آموز رشته ریاضی کرج

۱۰ـ معادلهٔ $4(\sin x \cos x + m \cos^2 x) = 1 + \sin^2 x$ به‌ازای چه مقادیری از m جواب ندارد.

۱۱ـ حدود m را چنان تعیین کنید که معادلهٔ زیر دارای جواب حقیقی باشد:

$$m \sin(x - \alpha) + \sin\alpha - \sin x = 0$$

فرستنده: آقای محمد معینی دانش‌آموز رشته ریاضی زنجان

۱۲ـ مقدار عبارت $A = 1 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x$ را به ازای $x = \frac{\pi}{9}$ حساب کنید.

۱۳ـ تابع با ضابطهٔ $y = \frac{\sin x + \cos^2 x \sin x}{2\cos^2 x + 2}$ را در یک دورهٔ تناوب رسم کنید.

ادب ریاضی

اولین مرحلهٔ نزدیک شدنمان به طبیعت وصف است. اما زمانی‌که در مورد آن بیشتر دانستیم و روابط بین اجزاء آن را درک کردیم، شروع به‌ساختن‌مدل‌ریاضی «mathematical model» طبیعت می‌کنیم. و این مرحلهٔ خلاقی است که به بصیرت و الهام بسیار احتیاج دارد. در انجام این عمل به معانی کلماتی که آنها را به‌کار می‌بریم تکیه می‌کنیم و آکسیومهایی را که اساس تئوری ریاضیمان را تشکیل می‌دهند گسترش می‌دهیم. شاید با این طرز عمل توسط معلومات هندسیتان، که در آن آکسیومها توضیحی مجرد از آنچه انسان زمانی‌که شروع به‌اندازه‌گیری زمین‌کرد‌مشاهده‌نمود، می‌دهند، آشنا باشید.

اصول ریاضی:

غلامرضا یاسی‌پور

ساختهای بسیاری موجودند که ریاضی نیستند. ریاضیات تنها مسأله ساختها نیست. فی‌المثل، چون به فیزیک می‌پردازید نیز، با عملیات ساختهای خاصی سروکار دارید. در واقع، کلمهٔ «ریاضیات» در زمینه‌های متفاوت بسیاری به‌کار رفته است. ریاضیاتی، چنان‌که در مدارس ابتدایی یا متوسطه به‌کار رفته دارید. ریاضیاتی کامپیوتری، که در مورد مسائل تبدیلات به‌کار می‌روند، دارید. اگر در کار شیمی یا فیزیکید، از ریاضیات برای توصیف جهان تجربی استفاده می‌کنید.

هنر ریاضی ورزیدن:

ترجمه غلامرضا یاسی‌پور

حل مسائل برهانِ شمارهٔ ۱۲

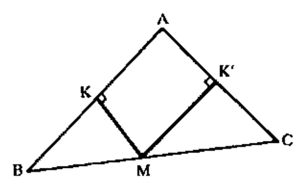
حل مسائل ریاضیات سال اوّل

۱ ـ (حل از آقای بهادر طالبی از تبریز). می‌دانیم که در هر مثلث قائم‌الزاویه، مجموع اندازه‌های اضلاع زاویهٔ قائمه برابر است با مجموع اندازه‌های قطرهای دوایر محیطی و محاطی داخلی مثلث. یعنی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) داریم: $AB + AC = 2R + 2r$ (۱) (مسألهٔ ۲ هندسه سال اول مندرج در برهان ۱۱). از طرفی پاره‌خطهای MK و MK' که از نقطهٔ M وسط وتر BC عمود بر اضلاع AB و AC رسم شده‌اند به‌ترتیب با AC و AB موازی‌اند. پس نصف این اضلاع‌اند. یعنی:

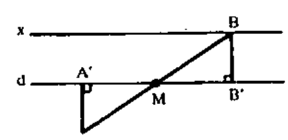
$$MK = \frac{AC}{2} \Rightarrow AC = 2MK \text{ و } MK' = \frac{AB}{2} \Rightarrow AB = 2MK'$$

با جایگزینی در رابطهٔ (۱) داریم:

$$2MK' + 2MK = 2R + 2r$$
$$\Rightarrow MK + MK' = R + r$$



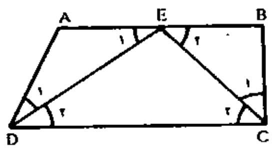
۲ ـ از نقطهٔ A خطی چنان رسم می‌کنیم که خط xy را در نقطهٔ B قطع کند. وسط پاره‌خط AB را M می‌نامیم و از این نقطه خط d را به‌موازات خط xy رسم می‌کنیم. این خط جواب مسأله است، زیرا اگر از نقاط A و B عمودهای AA' و BB' را بر خط d فرود آوریم دو مثلث قائم‌الزاویهٔ MAA' و MBB' به‌حالت تساوی وتر و یک زاویهٔ حاده برابرند. پس $AA' = BB'$ است.



۳ ـ اگر نقطهٔ تقاطع نیمساز زوایهٔ درونی D با قاعدهٔ AB را E بنامیم و از E به C وصل کنیم داریم: $\hat{D}_1 = \hat{D}_2 = \hat{E}_1$ پس مثلث ADE متساوی‌الساقین است و $AD = AE$ خواهد بود. امّا بنا به‌فرض:

$$AB = AE + EB = AD + BC$$

در نتیجه $EB = BC$ و مثلث EBC نیز متساوی‌الساقین است. از آن‌جا $\hat{E}_2 = \hat{C}_1$ و چون $\hat{E}_2 = \hat{C}_2$ است پس: $C_1 = C_2$ یعنی: CE نیمساز زاویهٔ C از ذوزنقه ABCD است. بنابراین نقطهٔ E محل برخورد نیمساز زاویهٔ درونی C با قاعدهٔ AB نیز هست.



۴ ـ چون طبق فرض گزارهٔ $(q \Rightarrow p) \Leftrightarrow q$ ارزش درست دارد بنابراین می‌بایست $(q \Rightarrow p) \equiv q$. حال اگر $q \equiv T$ در این‌صورت برای آن‌که $(q \Rightarrow p)$ درست باشد باید $p \equiv T$ که نتیجه می‌شود $(p \wedge q) \equiv T$ و اگر $q \equiv F$ در این‌صورت $(q \wedge p) \equiv T$ و این حالت ممکن نیست.

۵ ـ الف) یک ترکیب دو شرطی است که گزارهٔ سوريِ سمت چپ نادرست و گزارهٔ سوريِ سمت راست نیز نادرست است بنابراین ترکیب دو شرطی دارای ارزش درست می‌باشد.

ب) یک ترکیب شرطی است که گزارهٔ سوريِ سمت چپ (مقدم) به ازای $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ درست بوده و تالی آن به ازای $n = 1$ نادرست است و در نتیجه ترکیب شرطی دارای ارزش نادرست است.

۶ ـ تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعهٔ 2K عضوی 2^{2k} است و تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعهٔ 3K عضوی 2^{3k} بوده و طبق فرض داریم:

$$2^{2k} + 48 = 2^{3k} \Rightarrow (2^2)^k + 48 = (2^3)^k$$

$$\Rightarrow 4^k + 48 = 8^k \Rightarrow 8^k - 4^k = 48 \Rightarrow 4^k(2^k - 1) = 48$$

$$\Rightarrow 4^k = \frac{48}{2^k - 1} \qquad (1)$$

از طرفی $2^k - 1$ فرد است و باید ۴۸ بر آن بخش‌پذیر باشد و تنها اعداد فردی که ۴۸ بر آنها بخش‌پذیر است ۱ و ۳ می‌باشند پس:

$2^k - 1 = 1$ یا $2^k - 1 = 3$

اگر $2^k - 1 = 1 \Rightarrow 2^k = 2 \Rightarrow k = 1$

که $K = 1$ با توجه به رابطهٔ (۱) قابل قبول نیست پس:

$$2^k - 1 = 3 \Rightarrow 2^k = 4 \Rightarrow k = 2$$

۷ ـ ابتدا فرض کنیم $(B \cap C) = C$ و $(A \cap B) = B$ پس:

$$\left.\begin{array}{l}(A \cap B) = B \overset{\text{قضیهٔ اصلی}}{\Longrightarrow} B \subset A \\ (B \cap C) = C \overset{\text{قضیهٔ اصلی}}{\Longrightarrow} C \subset B\end{array}\right\} \Rightarrow C \subset B \subset A$$

حال فرض کنیم $C \subset B \subset A$ بنابراین طبق قضیهٔ اصلی اجتماع داریم:

$$C \subset B \Rightarrow (B \cap C) = C$$
$$B \subset A \Rightarrow (A \cap B) = B$$

۸ ـ

$$A - (B \cap C) = A \cap (B \cap C)' = A \cap (B' \cup C')$$
$$= (A \cap B') \cup (A \cap C') = (A - B) \cup (A - C)$$

حال اگر $(B \cap C) = \varnothing$ داریم:

$$(A-B) \cup (A-C) \cup (A-D) = [A - (B \cap C)] \cup (A-D)$$

$$= (A - \varnothing) \cup (A - D) = A \cup (A - D') \overset{\text{جذب}}{=} A$$

۹ ـ

$$xy = 1 \quad , \quad x + y = \sqrt{5}$$
$$x^4 + y^4 = (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2 = (x^2+y^2)^2 - 2$$
$$= [x^2 + y^2]^2 - 2$$
$$= \left[(x+y)^2 - 2xy\right]^2 - 2 = \left[(\sqrt{5})^2 - 2\right]^2 - 2$$
$$= [5 - 2]^2 - 2$$
$$= 9 - 2 = 7$$

۱۰ ـ

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2} = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$$

$$\frac{A(x+1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x+1)}{x(x+1)(x+2)} \equiv \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$$

$$\Rightarrow A(x^2 + 3x + 2) + B(x^2 + 2x) + C(x^2 + x) \equiv 1$$

$$\Rightarrow Ax^2 + 3Ax + 2A + Bx^2 + 2Bx + Cx^2 + Cx \equiv 1$$

$$(A + B + C)x^2 + (3A + 2B + C)x + 2A \equiv 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B + C = 0 \\ 3A + 2B + C = 0 \\ 2A = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B + C = 0 \\ 3A + 2B + C = 0 \end{cases} \Rightarrow -\begin{cases} \frac{1}{2} + B + C = 0 \\ \frac{3}{2} + 2B + C = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} - B - C = 0 \\ \frac{3}{2} + 2B + C = 0 \end{cases} \Rightarrow 1 + B = 0 \Rightarrow \boxed{B = -1}$$

$$\frac{1}{2} + B + C = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} - 1 + C = 0 \Rightarrow \boxed{C = \frac{1}{2}}$$

۱۱-

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+2\sqrt{2}+2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+2)+\sqrt{6}+2\sqrt{2}+2}$$
$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+2)+\sqrt{2}(\sqrt{3}+2+\sqrt{2})}$$
$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+2)(1+\sqrt{2})}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}\times\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}=\sqrt{2}-1$$

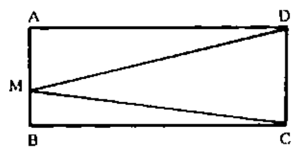
حل مسائل ریاضیات سال دوم ریاضی

۱ ـ (حل از آقای رضاشاه اکبری از نیشابور).
در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ AMD و BMC داریم:

$$MD^2 = MA^2 + AD^2 \quad و \quad MC^2 = MB^2 + BC^2$$
$$\Longrightarrow MD^2-MC^2=MA^2+AD^2-MB^2-BC^2 \quad و \quad AD=BC$$
$$\Longrightarrow MD^2 - MC^2 = MA^2 - MB^2$$

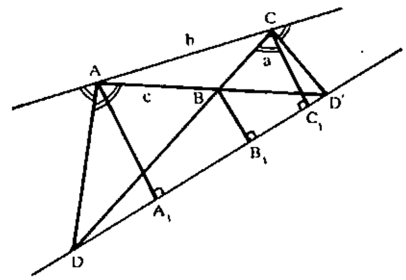
امّا بنا به فرض $MA^2 = AB \,.\, MB$ است پس:

$$MD^2 - MC^2 = AB \,.\, MB - MB^2 = MB\,(AB - MB)$$
$$= MB \,.\, MA$$



۲ ـ نیمسازهای زوایای خارجی A و C از مثلث ABC را رسم می‌کنیم تا اضلاع مقابل خود را در نقاط D و D' قطع کنند. خط DD' را رسم می‌کنیم و از نقاط A و B و C عمودهای AA_1 و BB_1 و CC_1 را بر خط DD' فرود می‌آوریم. با توجه به موازی بودن خطوط AA_1 و BB_1 و CC_1 داریم:

$$\frac{BB_1}{CC_1}=\frac{DB}{DC} \quad , \quad \frac{AA_1}{BB_1}=\frac{D'A}{D'B}$$



از طرفی بنا به خاصیت نیمساز می‌توان نوشت:

$$\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b} \quad و \quad \frac{D'A}{D'B}=\frac{AC}{BC}=\frac{b}{a}$$

پس: $\frac{BB_1}{CC_1}=\frac{c}{b}$ و $\frac{AA_1}{BB_1}=\frac{b}{a}$ است. از آن‌جا:

$$AA_1\times a= BB_1\times b=CC_1\times c \quad یا \quad \frac{AA_1}{\frac{1}{a}}=\frac{BB_1}{\frac{1}{b}}=\frac{CC_1}{\frac{1}{c}}$$

۳ ـ چون $A \neq \varnothing$ و $B \neq \varnothing$ و داریم $A \times B = B \times A$ پس باید $A = B$ بنابراین با توجه به مجموعه‌های A و B داریم:

$$\begin{cases}x - y = 1\\ x + y = 3\end{cases} \Rightarrow \quad x = 2 \;,\; y = 1$$

۴ ـ رابطهٔ R روی IR^2 به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$(a,b)\ R\ (c,d) \Longleftrightarrow (a - c)\,(b - d) = 0$$

$$1)\ \forall (a , b) \in IR^2 ;\ (a-a)(b-b) = 0 \Longrightarrow (a,b)\ R\ (a,b)$$

پس رابطه انعکاسی است.

۲) فرض کنیم $(a , b)\ R\ (c , d) \Longrightarrow (a - c)(b - d) = 0$

$$\Longrightarrow (c - a)\,(d - b) = 0 \Longrightarrow (c , d)\ R\ (a , b)$$

بنابراین خاصیت تقارنی نیز دارد.
۳) خاصیت تعدی یا تراگذاری ندارد زیرا مثلاً

$$(2 , 5)\ R\ (6 , 5) \quad و \quad (2 , 4)\ R\ (2 , 5)$$

ولی $(6 , 5) \not R\ (2 , 4)$ زیرا $(2 - 6)(4 - 5) \neq 0$.

۴) خاصیت پادتقارنی نیز ندارد زیرا مثلاً:

$$(2 , 1)\ R\ (2,2) \wedge (2 , 2)\ R\ (2 , 1) \quad ولی \quad (2 , 1) \neq (2 , 2)$$

۵ ـ این مسأله به‌طور کامل در مقالهٔ رابطه‌های هم‌ارزی و کلاسهای هم‌ارزی که در همین شماره چاپ شده، حل شده است.

۶ ـ تابع مفروض از IN به IN بوده و ضابطهٔ آن به شکل $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4}$ است، بنابراین داریم:

الف) $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \sqrt[3]{x_1^2 - 4} = \sqrt[3]{x_2^2 - 4}$ به‌توان ۳

$$x_1^2 - 4 = x_2^2 - 4$$
$$x_1 , x_2 \in IN$$
$$\Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \qquad \Rightarrow \ x_1 = x_2$$

تابع یک به یک است.

ب) فرض کنیم $y \in N ,\ y = \sqrt[3]{x^2 - 4} \Rightarrow y^3 = x^2 - 4$

$$\Rightarrow x^2 = y^3 + 4 \ \Rightarrow \ x = \pm\sqrt{y^3 + 4}$$

برای هر $y \in IN$ زیر رادیکال همواره مثبت است ولی ممکن است عدد حاصل یعنی x در N نباشد. مثلاً برای $y = 1$ داریم $x = \sqrt{5}$ که $\sqrt{5} \notin IN$ پس تابع پوشا نیست.

۷ ـ می‌دانیم اگر نقطه‌ای دلخواه در صفحه ابتدا به اندازهٔ α و مجدداً به اندازهٔ α دوران کند در کلّ به اندازهٔ 2α دوران کرده است. حال یک‌بار نقطهٔ دلخواهی را دوبار و هر بار به اندازهٔ α دوران می‌دهیم و بار دیگر آن نقطه را به اندازهٔ 2α دوران می‌دهیم و نتایج حاصل را مساوی یکدیگر قرار می‌دهیم. در این‌جا برای راحتی کار نقطهٔ دلخواه را نقطهٔ $P\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix}$ در نظر می‌گیریم:

دو دوران و هر بار به اندازهٔ α

$$\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\\ 2\sin\alpha\cos\alpha\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\cos 2\alpha & -\sin 2\alpha\\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 2\alpha\\ \sin 2\alpha\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\\ 2\sin\alpha\cos\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 2\alpha\\ \sin 2\alpha\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\\ \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\end{cases}$$

۸ـ

فرض $\frac{a-x}{x-b}=y \Rightarrow y^2=8y-15 \Rightarrow y^2-8y+15=0$

$$\Rightarrow (y-3)(y-5)=0 \Rightarrow y=3 \quad یا \quad y=5$$

الف) $\frac{a-x}{x-b}=3 \Rightarrow 3x-3b=a-x \Rightarrow 3x+x=a+3b$

$$\Rightarrow 4x=a+3b \Rightarrow \boxed{x=\frac{a+3b}{4}}$$

ب) $\frac{a-x}{x-b}=5 \Rightarrow 5x-5b=a-x \Rightarrow 5x+x=a+5b$

$$\Rightarrow 6x=a+5b \Rightarrow \boxed{x=\frac{a+5b}{6}}$$

۹ـ

$$m = \text{ضریب‌زاویه‌خط} \Rightarrow y-y_A=m(x-x_A)$$

$$y-10=m(x-5) \Rightarrow mx-y+10-5m$$

$$=0 \begin{cases}a=m\\ b=1\\ c=10-5m\end{cases}$$

$$OH=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \ \Rightarrow \ 10=\frac{|10-5m|}{\sqrt{m^2+1}} \ \Rightarrow$$
$$10\sqrt{m^2+1}=|10-5m|$$

طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم $\Rightarrow 100(m^2+1)=100+25m^2-100m$

$$\Rightarrow 100m^2+100=100+25m^2-100m$$
$$\Rightarrow 75m^2+10m=0$$
$$5m(15m+2)=0 \Rightarrow m=0 \quad یا \quad m=-\frac{2}{15}$$

۱۰ ـ مساحت مثلث $= \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2}$ و داریم: $b^2 = ac$

اگر اضلاع مثلث را a، b و c و سه ارتفاع را h_a و h_b و h_c بنامیم داریم:

$$2S = a \,.\, h_a = b \,.\, h_b = c \,.\, h_c$$

می‌توان نوشت:

$$4S^2 = 2S \times 2S$$
$$\Longrightarrow (b \,.\, h_b)^2 = a \,.\, h_a \times c \,.\, h_c$$

داریم: $b^2 = ac$

$$\Longrightarrow b^2 \,.\, h_b^2 = a \,.\, c \times h_a \,.\, h_c$$
$$\Longrightarrow h_b^2 = h_a \,.\, h_c$$

۱۱ ـ با توجه به اتحاد شرطی زیر:

$\forall a, b, c \in R : a+b+c=0 \Longrightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$

داریم:

$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0 \Longrightarrow$ (فرض)

$\cos^3\alpha+\cos^3\beta+\cos^3\gamma = 3\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

طرفین رابطهٔ اخیر را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$2\cos^3\alpha+2\cos^3\beta+2\cos^3\gamma = 6\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

$\Longrightarrow 2\cos^2\alpha\cos\alpha+2\cos^2\beta\cos\beta+2\cos^2\gamma\cos\gamma$

$= 6\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

با توجه به اتحاد: $1+\cos2\alpha = 2\cos^2\alpha$

داریم:

$(1+\cos2\alpha)\cos\alpha+(1+\cos2\beta)\cos\beta+(1+\cos2\gamma)\cos\gamma$

$= 6\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

$\underline{\cos\alpha}+\cos\alpha\cos2\alpha+\underline{\cos\beta}+\cos\beta\cos2\beta$

$+\underline{\cos\gamma}+\cos\gamma\cos2\gamma = 6\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

$\underbrace{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}_{\text{طبق فرض برابر صفر است}}+\cos\alpha\cos2\alpha+\cos\beta\cos2\beta+\cos\gamma\cos2\gamma$

$= 6\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

بنابراین داریم:

$\cos\alpha\cos2\alpha+\cos\beta+\cos2\beta+\cos\gamma\cos2\gamma$

$= 6\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

۱۲ ـ داریم:

$tg\frac{1}{2}(\operatorname{Arccos}(\frac{-2}{3})-\operatorname{Arcsin}(\frac{2}{3}))$

$= tg\frac{1}{2}(\pi-\operatorname{Arccos}(\frac{2}{3})-\operatorname{Arcsin}(\frac{2}{3}))$

$= tg\frac{1}{2}(\pi-(\operatorname{Arccos}(\frac{2}{3})+\operatorname{Arcsin}(\frac{2}{3})))$

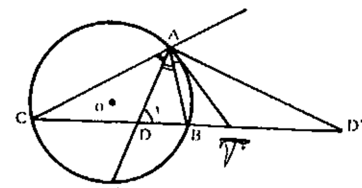
$= tg\frac{1}{2}(\pi-\frac{\pi}{2}) = tg\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}) = tg\frac{\pi}{4}=1$

توجه: از تساویهای مسلم $\operatorname{Arccos}(-\alpha)=\pi-\operatorname{Arccos}\alpha$ و $\operatorname{Arccos}\alpha+\operatorname{Arcsin}\alpha=\frac{\pi}{2}$ استفاده شد.

حل مسائل ریاضیات سال سوّم ریاضی

۱ ـ مثلث ADD' در رأس A قائم‌الزاویه است. و نقطهٔ T وسط وتر DD' است زیرا اگر امتداد نیمساز AD دایرهٔ محیطی مثلث را در نقطهٔ E قطع کند، داریم: $\widehat{CE}=\widehat{EB}$ و

$\hat{D}_1=\frac{\widehat{CE}+\widehat{AB}}{2}=\frac{\widehat{EB}+\widehat{AB}}{2}=\frac{\widehat{EBA}}{2}=E\hat{A}T \Longrightarrow TD=TA$



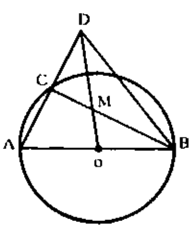
و $TA=TD'$. در نتیجه $TA=TD=TD'$ یعنی نقطهٔ T وسط وتر DD' است. حال اگر قوت نقطهٔ B را نسبت به دایره به قطر DD' (دایرهٔ محیطی مثلث ADD') بنویسیم، داریم:

$BD\cdot BD' = R^2-d^2$

و یا

$\boxed{BD\cdot BD' = TA^2-TB^2}$

۲ ـ از نقطهٔ B به نقطهٔ D وصل می‌کنیم. نقطهٔ M محل تلاقی میانه‌های مثلث ABD است. پس $\frac{BM}{BC}=\frac{2}{3}$. بنابراین مکان هندسی نقطهٔ M مجانس دایرهٔ O نسبت به مرکز تجانس B و با نسبت تجانس $\frac{2}{3}$ است.



۳ ـ این مجموعه نسبت به ضرب اسکالر (روی IR) بسته نیست زیرا، اگر فرض کنیم $(a_1,a_2,\dots,a_n)\in Q^n$ و $\sqrt{2}\in IR$ در این صورت

$\sqrt{2}(a_1,a_2,\dots,a_n)=(\sqrt{2}a_1,\sqrt{2}a_2,\dots,\sqrt{2}a_n)\notin Q^n$

۴ ـ طبق فرض بردارهای V_1 و V_2 و V_3 مستقل خطی هستند پس هر ترکیب خطی از این بردارها که مساوی با بردار صفر باشد، می‌بایست همگی ضرایب آن صفر باشند. حال اگر فرض کنیم:

$x(V_1-V_2-V_3)+y(2V_1+V_2-V_3)+z(3V_1-2V_3)=\vec{0}$

$\Rightarrow(x+2y+3z)V_1+(-x+y)V_2+(-x-y-2z)V_3=\vec{0}$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} 2 \\ \\ 3 \end{array}\begin{cases} x+2y+3z=0 & (1) \\ -x+y=0 & (2) \\ -x-y-2z=0 & (3) \end{cases}$$

$$(1),(3) \Rightarrow \begin{cases} 2x+4y+6z=0 \\ -3x-3y-6z=0 \end{cases} \Rightarrow -x+y=0$$

که معادلهٔ حاصل از معادلات (۱) و (۳) همان معادلهٔ (۲) است که برای آن بی‌نهایت جواب غیر صفر وجود دارد مثلاً اگر قرار دهیم $x=-1$ و $y=-1$ در این صورت داریم $z=1$ که جوابی غیر-صفر برای دستگاه می‌باشد. بنابراین بردارها وابستهٔ خطی‌اند.

$A=(a+b'+c')(a'+b)(a+bc)$

$=(\underbrace{aa'}_{\cdot}+ab+b'a'+\underbrace{b'b}_{\cdot}+c'a+c'b)(a+bc)$

$=(ab+a'b'+ac'+bc')(a+bc)$

$=(aba+abbc+\underbrace{a'b'a}_{\cdot}+\underbrace{a'b'bc}_{\cdot}+ac'a+\underbrace{ac'bc}_{\cdot}$

$+bc'a+\underbrace{bc'bc}_{\cdot})$

$=(ab+abc+ac'+abc')=ab(c+c')+ab+ac'$

$=ab+ab+ac'=ab+ac'=a(b+c')$

$B=(ab+c)'+a'c+\overset{b'c}{\widehat{cb'}}+b=[(a'+b').c']$

$+(a'+b').c+b$

$=(a'+b').(c'+c)+b=(a'+b')+b=a'+(b'+b)$

$=a'+1=1$

۶ ـ در بین اعداد ۱ تا ۲۰، ده عدد فرد و ده عدد زوج موجود است و می‌دانیم حاصل جمع دو عدد وقتی فرد است که یکی زوج و دیگری فرد باشد. پس جواب قسمت، اولاً ـ عبارت است از

$\binom{10}{1}\times\binom{10}{1}=100$ حال اگر بخواهیم مجموع سه عدد طبیعی فرد باشد، یا باید هر سه عدد فرد باشند و یا باید دو عدد زوج و سوّمی فرد باشد بنابراین جواب قسمت

ثانیاً ـ عبارت است از:

$\binom{10}{2}\times\binom{10}{1}+\binom{10}{3}=450+120=570$

۷ ـ به‌طور کلّی اگر $k\ge n$، تعداد اعداد k رقمی که با n رقم (هیچ‌کدام صفر نباشند) می‌توان ساخت عبارت است از n^k پس در این مسأله اعداد کوچکتر از یک میلیون می‌توانند دو یا سه یا ... یا شش رقمی باشند بنابراین:

$126=2^6+\dots+2^3+2^2+2^1=$ تعداداعدادکوچکترازیک‌میلیون

۸ ـ طبق فرضیات مسأله داریم:

$P(A_1)=\frac{1}{4}$ و $P(B_1)=\frac{2}{5}$

چون A_1 و B_1 دو پیشامد مستقل از هم هستند پس:

$P(A_1\cap B_1)=P(A_1)\times P(B_1)=\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$

$\Longrightarrow P(A_1\cup B_1)=P(A_1)+P(B_1)-P(A_1\cap B_1)$

$=\frac{1}{4}+\frac{2}{5}-\frac{1}{10}=\frac{13}{20}-\frac{1}{10}=\frac{11}{20}$

۹ ـ فرض می‌کنیم $2^6=64=x$

$2^{12n}-1=(2^6)^{2n}-1$

$\Longrightarrow(2^6)^{2n}-1=x^{2n}-1$

می‌توان گفت $(x^{2n}-1)$ بر $(x\pm1)$ بخش‌پذیر است.

زیرا: $(\pm1)^{2n}-1=1-1=0$

بنابراین عدد فوق بر (1 ± 64) یا بر (۶۳ و ۶۵) بخش‌پذیر است. بنابراین عدد فوق بر عوامل تجزیه ۶۳ و ۶۵ هم بخش‌پذیر است.

$63=3^2\times7$ و $65=5\times13$

بنابراین عدد فوق بر عضوهای مجموعه {۶۳، ۲۱، ۹، ۳، ۷، ۶۵، ۱۳، ۵} بخش‌پذیر است.

۱۰ ـ

$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!+(n-1)!+(n+1)!}{(n-2)!+(n+2)!+n!}=$

$$=\lim_{n\to+\infty} \frac{(n-۱)!\,[n+۱+n(n+۱)]}{(n-۲)!\,[۱+n(n-۱)(n+۱)(n+۲)\,n+(n-۱)]}$$

$$=\lim_{n\to+\infty} \frac{(n-۱)[n+۱+n^۲+n]}{۱+n(n^۲-۱)(n+۲)+n(n-۱)]} \sim \lim_{n\to+\infty} \frac{n^۳}{n^۴}=\lim_{n\to+\infty} \frac{۱}{n}=۰$$

۱۱ـ فرض می‌کنیم: $P \left| \begin{matrix} x_۱ \\ y_۱ \end{matrix} \right.$ یک نقطه از مکان باشد.

ضریب زاویهٔ مماس را هم m فرض می‌کنیم:

$$y - y_p = m(x - x_p)$$

$$y - y_۱ = m(x - x_۱) \Rightarrow y = mx + y_۱ - mx_۱$$

$$\begin{cases} y = mx + y_۱ - mx_۱ \\ y = \dfrac{x^۲+۱}{x} \end{cases} \Rightarrow \frac{mx + y_۱ + mx_۱}{۱} = \frac{x^۲+۱}{x}$$

$$\Rightarrow mx^۲ + y_۱x - mx_۱x = x^۲ + ۱$$

$$\Rightarrow (m-۱)x^۲ + (y_۱ - mx_۱)x - ۱ = ۰$$

شرط مماس بودن:

$$\Delta = ۰ \Rightarrow (y_۱ - mx_۱)^۲ + ۴(m-۱) = ۰$$

$$\Rightarrow y_۱^۲ + m^۲x_۱^۲ - ۲x_۱y_۱m + ۴m - ۴ = ۰$$

$$x_۱^۲m^۲ + (۴ - ۲x_۱y_۱)m + (y_۱^۲ - ۴) = ۰$$

ریشه‌های این معادله m' و m'' ضریب زاویه‌های مماسند.

چون دو مماس بر هم عمودند پس: $m'.m'' = -۱$ یا $\frac{c}{a} = -۱$

$$\Rightarrow \frac{c}{a} = -۱ \Rightarrow \frac{y_۱^۲-۴}{x_۱^۲} = -۱ \Rightarrow y_۱^۲ - ۴ = x_۱^۲$$

$$\Rightarrow \boxed{x_۱^۲ + y_۱^۲ = ۴}$$

۱۲ـ $$۶\cos^۲\left(\frac{\pi}{۴} - \frac{x}{۸}\right) + \cos\frac{x}{۲} = ۲$$

با توجه به اتحاد:

$$۲\cos^۲\alpha = ۱ + \cos ۲\alpha$$

می‌توان نوشت:

$$۳ + ۳\cos\left(\frac{\pi}{۲} - \frac{x}{۴}\right) + \cos\frac{x}{۲} = ۲$$

$$۳\cos\left(\frac{\pi}{۲} - \frac{x}{۴}\right) + ۱ + \cos\frac{x}{۲} = ۰$$

$$۳\sin\frac{x}{۴} + ۲\cos^۲\frac{x}{۴} = ۰$$

$$۳\sin\frac{x}{۴} + ۲ - ۲\sin^۲\frac{x}{۴} = ۰ \Longrightarrow ۲\sin^۲\frac{x}{۴} - ۳\sin\frac{x}{۴} - ۲ = ۰$$

$$(\Delta = ۹ + ۱۶ = ۲۵) \Rightarrow \sin\frac{x}{۴} = \frac{۳\pm۵}{۴} \rightarrow \begin{cases} \sin\frac{x}{۴} = ۲ > ۱ \text{ (قابل قبول نیست)} \\ \sin\frac{x}{۴} = -\frac{۱}{۲} = \sin\left(-\frac{\pi}{۶}\right) \end{cases}$$

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{x'}{۴} = ۲k\pi - \dfrac{\pi}{۶} \Longrightarrow x' = ۸k\pi - \dfrac{۲\pi}{۳} \\ \dfrac{x''}{۴} = ۲k\pi + \pi + \dfrac{\pi}{۶} \Longrightarrow x'' = ۸k\pi + \dfrac{۱۴\pi}{۳} \end{array} \right.$$

۱۳ـ داریم:

$$b^۳ + c^۳ = a^۲(b+c)$$

$$b^۳+c^۳=(b+c)(b^۲+c^۲-bc)=a^۲(b+c) \Longrightarrow b^۲+c^۲-bc=a^۲$$

از طرفی داریم:

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos\hat{A}$$

$$\Longrightarrow b^۲ + c^۲ - bc = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos\hat{A} \Longrightarrow \cos A = \frac{۱}{۲}$$

$$\Longrightarrow \cos\hat{A} = \cos ۶۰^\circ \Longrightarrow \hat{A} = ۶۰^\circ$$

حل مسائل کامپیوتر سال سوم ریاضی

۱ـ

```
10  LET SUM = 0
20  LET PROD = 1
30  FOR I = 1 TO 20
40    LET SUM = SQR( 2 + SUM )
50    LET PROD = PROD * SUM / 2
60  NEXT
70  PI = 2 / PROD
80  PRINT "VALUE OF PI = "; PI
90  END
```

اجرای برنامه:

```
VALUE OF PI =  3.141593
```

۲ـ

```
10  INPUT "ENTER NO.
OF TERMS OF SERIES";N
20  LET PI = 1 : LET A = -1
30  FOR I = 2 TO N
40     LET B = 2*I-1
50     LET PI = PI+A/B
60     LET A = -A
70  NEXT I
80  LET PI=4*PI
90  PRINT"VALUE OF PI EQUALS ";PI
100 END
```

اجرای برنامه:

```
ENTER NO. OF TERMS OF SERIES?5000
VALUE OF PI EQUALS  3.141313
```

۳ـ

```
10  LET EULER = 1
20  LET I = 1 : LET FACT = 1
30  LET K = 1 / FACT
40  WHILE K >= .000001
50     LET EULER = EULER + K
60     LET I = I+1 : LET FACT
         = I*FACT
70     LET K=1/FACT
80  WEND
90  PRINT"EULER'S NUMBER
    =";EULER
100 PRINT"EXP(1) ="; EXP(1)
110 PRINT"DIFFERENCE
    =";EXP(1)-EULER
120 END
```

اجرای برنامه:

```
EULER'S NUMBER = 2.718282
EXP(1) = 2.718282
DIFFERENCE = 0
```

۴ـ

```
10  LET EULER = 1
20  LET I = 1 : LET FACT = 1
30  LET K = 1 / FACT
40  WHILE K >= .000001
50          LET EULER
    = EULER + (-1)^I *K
60     LET I = I+1 : LET FACT
    = I*FACT
70     LET K=1/FACT
80  WEND
90  PRINT"EULER'S INVERSE NUMBER
    =";EULER
100 PRINT"EXP(-1) ="; EXP(-1)
110 PRINT"DIFFERENCE
    =";EXP(-1)-EULER
120 END
```

اجرای برنامه:

```
EULER'S INVERSE NUMBER = .3678791
EXP(-1) = .3678795
DIFFERENCE = 3.576279E-07
```

۵ـ بدون حلقهٔ FOR

```
10  INPUT " ENTER NO.
    OF TERMS " ; N
20  LET SUM = 0
30  LET I   = 0
40  LET SUM = SUM + 2 ^ I
50  LET I   = I + 1
60  IF I <> N THEN 40
70  PRINT"1+2^1+2^2+...+2^";N-1"
    =";SUM
80  END
```

با استفاده از حلقهٔ FOR

```
10  INPUT " ENTER NO.
    OF TERMS " ; N
20  LET SUM = 0
30  FOR I = 0 TO N-1
40     LET SUM = SUM + 2 ^ I
50  NEXT I
60  PRINT"1+2^1+2^2+...+2^";N-1"
    =";SUM
70  END
```

اجرای برنامه:

```
ENTER NO. OF TERMS ? 10
1+2^1+2^2+...+2^ 9 = 1023
```

حل مسائل ریاضیات سال چهارم ریاضی

۱ـ حل الف:

$$\vec{V}_۱ = ۳\vec{i} + \vec{j} - ۲\vec{k} \Rightarrow \vec{V}_۱(۳, ۱, -۲)$$

$$\vec{V}_۲ = -\vec{i} + \vec{k} \Rightarrow \vec{V}_۲(-۱, ۰, ۱)$$

$$(۳\vec{V}_۱).(-۲\vec{V}_۲) = -۶(\vec{V}_۱.\vec{V}_۲)$$

$$= -۶(x_۱x_۲ + y_۱y_۲ + z_۱z_۲)$$

$$= -۶(-۳ + ۰ - ۲) = +۳۰$$

حل ب:

$$\left(-\frac{۲}{۳}\vec{V}_۲, \frac{۳}{۵}\vec{V}_۱\right) = ۱۸۰ - (\vec{V}_۲, \vec{V}_۱)$$

$$\cos(\vec{V}_۲, \vec{V}_۱) = \frac{\vec{V}_۲.\vec{V}_۱}{|\vec{V}_۲|.|\vec{V}_۱|} =$$

$$\frac{-3+0-2}{\sqrt{9+1+4}\cdot\sqrt{1+1}} = \frac{-5}{2\sqrt{7}}$$

$$(\vec V_2, \vec V_1) = \operatorname{Arccos}\left(-\frac{5}{2\sqrt{7}}\right) \Rightarrow$$

$$\left(-\frac{2}{3}\vec V_2, \frac{3}{5}\vec V_1\right) = \operatorname{Arccos}\frac{5}{2\sqrt{7}}$$

حل ج:

$$\vec V = 2\vec V_1 + 3\vec V_2 (6-3, 2+0, -4+3) \Rightarrow$$
$$\vec V(3, 2, -1)$$
$$\vec V' = 3\vec V_1 - 4\vec V_2 (9+4, 3-0, -6-4) \Rightarrow$$
$$\vec V'(13, 3, -10)$$
$$Pr_{\vec V'}\vec V = \frac{\vec V\cdot \vec V'}{|\vec V'|} = \frac{39+6+10}{\sqrt{169+9+100}} = \frac{55}{\sqrt{278}}$$

حل د:

$$\vec V_1 - 2\vec V_2 \left|\begin{array}{l} 3+2=5 \\ 1-0=1 \\ -2-2=-4 \end{array}\right.$$

$$-\vec V_1 + \vec V_2 \left|\begin{array}{l} -3-1=-4 \\ -1+0=-1 \\ +2+1=3 \end{array}\right.$$

$$(\vec V_1 - 2\vec V_2)\wedge(-\vec V_1+\vec V_2) \left|\begin{array}{l} 3-4=-1 \\ 16-15=1 \\ -5+4=-1 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left|(\vec V_1 - 2\vec V_2)\wedge(-\vec V_1+\vec V_2)\right|$$
$$=\sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

۲- (حل از آقای م.ا. گیتی‌زاده دبیر ریاضی).

اولاً: اگر بردارهای هادی دو خط d و d' را به ترتیب $\vec v$ و $\vec v'$ بنامیم، آنگاه:

$$\vec v(2, 2b, 1),\ \vec v'\left(\frac{b}{2}, 2ab+a+2b, b\right)$$

$$d \perp d' \Rightarrow \vec v\cdot\vec v' = 0 \Rightarrow 2\times\frac{b}{2} + 2b(2ab+a+2b)+b=0$$

$$b\neq 0 \Rightarrow 2b(a+1)+a+1=0$$

تساوی بالا نسبت به b باید اتحاد باشد، بنابراین:

$$\begin{cases} a+1=0 \\ a+1=0 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{a=-1}$$

و به ازای $a=-1$ داریم:

$$d: \frac{x+2}{2} = \frac{y+2b-1}{2b} = z = t$$
$$d': \frac{2x-b}{b} = -y = \frac{z-b-1}{b} = t'$$

$$d: \begin{cases} x = 2t-2 \\ y = 2bt-2b+1 \\ z = t \end{cases},\quad d': \begin{cases} x = \frac12(bt'+b) \\ y = -t' \\ z = bt'+b+1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 2t-2 = \frac12(bt'+b) \\ 2bt-2b+1 = -t' \\ t = bt'+b+1 \end{cases}$$

از حل دستگاه بالا به ازای جمیع مقادیر b جواب متوافق $t=1$ و $t'=-1$ و از آنجا $A(0, 1, 1)$ به دست می‌آید.

ثانیاً:

$$\vec v(2, 2b, 1),\ \vec v'\left(\frac{b}{2}, -1, b\right),\ \vec v''(1, 0, 1)$$

طریقهٔ اوّل:

$$(\widehat{\vec v'', \vec v}) = (\widehat{\vec v'', \vec v'}) \Longrightarrow \cos(\widehat{\vec v'', \vec v}) = \cos(\widehat{\vec v'', \vec v'}) \Longrightarrow$$

$$\frac{3}{\sqrt{4b^2+5}\times\sqrt{2}} = \frac{3b}{\sqrt{5b^2+4}\times\sqrt{2}} \Longrightarrow \boxed{b=\pm1}$$

طریقهٔ دوم: چون دو خط d و d' برهم عمودند کافی است خط d'' با یکی از دو خط، مثلاً با خط d، زاویهٔ ۴۵° تشکیل دهد.

$$\cos(\vec v'', \vec v) = \frac{\sqrt2}{2} \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{4b^2+5}\times\sqrt2} = \frac{\sqrt2}{2}$$
$$\Longrightarrow \boxed{b=\pm1}$$

ثالثاً:

الف) $\vec v(2, 2, 1),\ \vec v'\left(\frac12, -1, 1\right)$

بردار نرمال صفحهٔ (d , d') عبارت است از:

$$\vec v\wedge\vec v'\left(3, -\frac32, -3\right) \Longrightarrow \vec w(2, -1, -2)$$
$$\vec w(2,-1,-2),\ A(0,1,1) \Longrightarrow \boxed{2x-y-2z+3=0}$$

چون خط d'' با بردار هادی $\vec v''(1,0,1)$ با صفحهٔ (d , d') با بردار نرمال $\vec w(2,-1,-2)$ موازی است، شرط انطباق آن بر این صفحه این است که یک نقطه‌اش در صفحه واقع باشد.

$$d'': \begin{cases} x = t'' \\ y = -1 \\ z = t''+c \end{cases} \text{ و } (d, d'): 2x-y-2z+3=0 \Longrightarrow$$

$$2t''+1-2(t''+c)+3=0 \Longrightarrow \boxed{c=2}$$

ب) محل تلاقی خط d'' با خط d نقطهٔ $B(-2,-1,0)$ و محل تلاقی خط d'' با خط d' نقطهٔ $C(1,-1,3)$ است و به آسانی معلوم می‌شود که در مثلث ABC، $\hat A = 90°$ و $AB = AC = 3$. مکان هندسی مطلوب خطی است که از نقطه همرسی عمودمنصفهای مثلث ABC بر صفحهٔ آن عمود می‌شود. چون مثلث ABC قائم‌الزاویه است این نقطه بر وسط وتر BC قرار دارد، یعنی $M\left(-\frac12, -1, \frac32\right)$ است و چون بردار نرمال صفحه مثلث $\vec w(2, -1, -2)$ است معادله مکان هندسی عبارت است از:

$$\delta: \frac{x+\frac12}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-\frac32}{-2}$$

ج) چون نقطهٔ S از سه رأس مثلث ABC به یک فاصله است بر خط δ قرار دارد. ضمناً، اگر h ارتفاع هرم باشد:

$$V = \frac13 S_{ABC}\cdot h$$

$$S_{ABC} = \frac{AB\times AC}{2} = \frac{3\times3}{2} = \frac92 \Longrightarrow 9 = \frac13\times\frac92 h \Longrightarrow h=6$$

یعنی، فاصلهٔ S از صفحهٔ مثلث که معادله‌اش $2x-y-2z+3=0$ است، برابر ۶ است، بنابراین:

$$\delta: \begin{cases} x = 2k-\frac12 \\ y = -k-1 \\ z = -2k+\frac32 \end{cases},\quad (d, d'): 2x-y-2z+3=0$$

$$6 = \frac{\left|2(2k-\frac12)-(-k-1)-2(-2k+\frac32)+3\right|}{\sqrt{4+1+4}}$$

$$\Rightarrow k=\pm2$$

چون ارتفاع رأس S منفی فرض شده، جواب قابل قبول به ازای $k=2$ به‌دست می‌آید:

$$S\left(\frac72, -3, -\frac52\right)$$

د) مقطع یک صفحه در یک چند وجهی محدب، که اقلاً سه یال آن را قطع کند، یک چند ضلعی محدب است که رأسهای آن از برخورد صفحه قاطع با یالهای چند وجهی به دست می‌آیند. به طور کلی، صفحه معلوم P در صورتی پاره‌خط معلوم AB را قطع می‌کند که دو نقطهٔ A و B در دوطرف آن واقع باشند. اگر $P: ax+by+cz+d=0$، $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ باشد، برای این منظور لازم و کافی است که داشته باشیم:

$$(ax_1+by_1+cz_1+d)(ax_2+by_2+cz_2+d)\le 0$$

در حالت خاصی که صفحه قاطع صفحه xoy است، این شرط تبدیل می‌شود به این که ارتفاعهای دو سر پاره‌خط مختلف‌العلامت باشند یا اقلاً یکی از آنها صفر باشد.

بدین ترتیب، در این مسأله، صفحهٔ xoy فقط سه یال SA و SB و SC را قطع می‌کند. نقطهٔ تلاقی با یال SB همان نقطهٔ $B(-2,-1,0)$ است. برای تعیین دو نقطهٔ تلاقی دیگر، باید معادلات دو خط SA و SC را نوشته؛ در هر یک $z=0$ قرار دهیم:

$$SA: \frac{x}{-7} = \frac{y-1}{8} = \frac{z-1}{7},\quad P: z=0 \Longrightarrow E\left(1, -\frac17, 0\right)$$

$$SC: \frac{x-1}{-5} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{11},\quad P: z=0 \Longrightarrow F\left(\frac{26}{11}, -\frac{23}{11}, 0\right)$$

و مقطع مثلث BEF می‌شود.

۳-

الف) $(p\vee q)\Rightarrow r \equiv \sim(p\vee q)\vee r \equiv (\sim p\wedge\sim q)\vee r$

$\equiv (\sim p\vee r)\wedge(\sim q\vee r) \equiv (p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)$

ب) $p\vee(q\Leftrightarrow r) \equiv p\vee[(q\Rightarrow r)\wedge(r\Rightarrow q)]$

$\equiv [p\vee(q\Rightarrow r)]\wedge[p\vee(r\Rightarrow q)]$

$\equiv [(p\vee q)\Rightarrow(p\vee r)]\wedge[(p\vee r)\Rightarrow(p\vee q)]$

$\equiv (p\vee q)\Leftrightarrow(p\vee r)$

۴-

۱) $p\wedge q\Rightarrow r$

۲) $(p\wedge\sim r)$

۳) $p\Rightarrow(q\Rightarrow r)$ از ۱ و قانون عطف مقدمات

۴) p از ۲ و قانون حذف عاطف

۵) $(q\Rightarrow r)$ از ۳ و ۴ و قانون انتزاع

۶) $\sim r$ از ۲ و قانون حذف عاطف

۷) $\sim q$ از ۵ و ۶ و قانون نقیض انتزاع

۸) $\therefore \sim q\vee s \equiv q\Rightarrow s$ از ۷ و ادخال فاصل

۵ـ طبق قضیه می‌دانیم که اگر در حلقهٔ R مقسوم‌علیه صفر وجود نداشته باشد، در آن حلقه قانون حذف برقرار است. حال، فرض کنیم معادلهٔ $ax = b$ در حلقهٔ R دارای جوابهای x_1 و x_2 باشد، ثابت می‌کنیم $x_1 = x_2$،

$$\begin{cases} ax_1 = b \\ ax_2 = b \end{cases} \Longrightarrow \cancel{a}x_1 = \cancel{a}x_2 \xRightarrow{\text{قانون حذف}} x_1 = x_2$$

۶ـ ابتدا تذکر می‌دهیم که اگر I_1 و I_2 دو ایده‌آل حلقهٔ R باشند، جمع این دو ایده‌آل یعنی: $I_1 + I_2$ که در صورت مسأله توضیح داده شده، نیز یک ایده‌آل حلقهٔ R است و نیز می‌دانیم کلّیهٔ ایده‌آلهای حلقهٔ Z به صورت kZ هستند.

حال فرض کنیم $(m , n) = d$ پس: $d \mid m$ و $d \mid n$ یا $m = dq_1$ و $n = dq_2$ اگر فرض کنیم: $x \in mZ + nZ$ پس $x = mt_1 + nt_2$ که با توجه به روابط فوق خواهیم داشت:

$$x = (dq_1)t_1 + (dq_2)t_2 \Longrightarrow x = d(q_1t_1 + q_2t_2)$$
$$\Longrightarrow x \in dZ \Longrightarrow (mZ + nZ) \subseteq dZ \quad (1)$$

حال نشان می‌دهیم $dZ \subseteq (mZ + nZ)$:
چون $(m , n) = d$ پس طبق قضیهٔ بزو، d را می‌توان برحسب ترکیبی خطی از m و n نوشت یعنی:

$$d = rm + sn$$

حال اگر $x \in dZ$ پس:

$$x = dt \Longrightarrow x = (rm + sn)t \Longrightarrow x = m(rt) + n(st)$$
$$\Longrightarrow x \in mZ + nZ \Longrightarrow dZ \subseteq (mZ + nZ) \quad (2)$$
$$(1),(2) \Longrightarrow mZ + nZ = dZ$$

۷ـ هرگاه عدد صحیح a را بر عدد صحیح $b \neq 0$ تقسیم کنیم طبق قضیهٔ تقسیم خواهیم داشت:

$$a = bq + r \qquad 0 \le r < |b|$$

الف) اگر مقسوم‌علیه را به مقسوم بیفزاییم (یا کم کنیم) خواهیم‌داشت:

$$a + b = bq + b + r \Longrightarrow a + b = b(q + 1) + r$$
$$a - b = bq - b + r \Longrightarrow a + b = b(q - 1) + r$$

پس با کم کردن مقسوم علیه از مقسوم ۱ واحد از خارج‌قسمت کم می‌شود و با اضافه کردن آن ۱ واحد به خارج‌قسمت اضافه می‌شود و در هر دو حالت باقی‌مانده تغییر نمی‌کند.

ب) $a+3b = bq+3b+r \Longrightarrow a+3b = b(q+3)+r$
با افزودن ۳ برابر مقسوم‌علیه به مقسوم، خارج‌قسمت ۳ واحد اضافه شده و باقی‌مانده تغییر نمی‌کند.

۸ـ چون ۷ عددی اول و $a \neq 7k$ پس $(a , 7) = 1$ بنابراین طبق قضیهٔ فرما داریم:

$$a^6 \overset{7}{\equiv} 1 \Longrightarrow 7 \mid (a^6 - 1) \Longrightarrow 7 \mid (a^3 - 1)(a^3 + 1)$$
$$\xRightarrow{\text{۷ اول است}} 7 \mid a^3 - 1 \quad \text{یا} \quad 7 \mid a^3 + 1$$
$$\Longrightarrow a^3 - 1 = 7k \quad \text{یا} \quad a^3 + 1 = 7k$$
$$\Longrightarrow a^3 = 7k + 1 \quad \text{یا} \quad a^3 = 7k - 1 \Longrightarrow a^3 = 7k \pm 1$$

۹ـ اگر فرض کنیم $(a , b) = d$ و $[a , b] = c$ در این صورت می‌دانیم:

$$a = a'd \quad \text{و} \quad b = b'd \quad \text{و} \quad c = a'b'd \quad \text{که} \quad (a' , b') = 1$$

$$a + b = 187 \Longrightarrow (a' + b')d = 187$$
$$c = 30d \Longrightarrow a'b'd = 30d \Longrightarrow a'b' = 30$$

$$\xRightarrow{(a',b')=1} \begin{cases} a'=6 \\ b'=5 \end{cases} \Longrightarrow a'+b'=11 \Longrightarrow d=\frac{187}{11}=17 \Longrightarrow a=6\times17=102 ,\ b=5\times17=85$$

یا
$$\begin{cases} a'=1 \\ b'=30 \end{cases} \Longrightarrow a'+b'=31 \Longrightarrow d=\frac{187}{31} \notin Z$$

یا
$$\begin{cases} a'=2 \\ b'=15 \end{cases} \Longrightarrow a'+b'=17 \Longrightarrow d=11 \Longrightarrow a=2\times11=22,\ b=15\times11=165$$

یا
$$\begin{cases} a'=3 \\ b'=10 \end{cases} \Longrightarrow a'+b'=13 \Longrightarrow d=\frac{187}{13} \notin Z$$

۱۰ـ

$$f(x) = \sqrt{x + 4 + 3\sqrt{x + 4}}$$
$$x + 4 \ge 0 \Rightarrow x \ge -4 \Rightarrow D_f = [-4 , +\infty)$$
$$\forall x_1 , x_2 \in D_f : \text{اگر}\ f(x_1) = f(x_2)$$
$$\Rightarrow \sqrt{x_1 + 4 + 3\sqrt{x_1 + 4}} = \sqrt{x_2 + 4 + 3\sqrt{x_2 + 4}}$$
$$\left.\begin{aligned} x_1 + 4 &= a \\ x_2 + 4 &= b \end{aligned}\right\} \text{فرض می‌کنیم:}$$
$$\Rightarrow \sqrt{a + 3\sqrt{a}} = \sqrt{b + 3\sqrt{b}} \quad \text{طرفین را به توان (۲) می‌رسانیم:}$$
$$a + 3\sqrt{a} = b + 3\sqrt{b}$$
$$\Rightarrow (a - b) + 3\sqrt{a} - 3\sqrt{b} = 0$$
$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) + 3(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = 0$$
$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})\underbrace{(\sqrt{a} + \sqrt{b} + 3)}_{\text{مثبت}} = 0$$
$$\Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} = 0 \Rightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b} \Rightarrow a = b$$
$$\Rightarrow x_1 + 4 = x_2 + 4 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow \text{تابع در دامنه‌اش یک‌به‌یک است}$$

۱۱ـ

$$y = \frac{x^2 - 4x + m}{x - 1} \Longrightarrow y' = \frac{x^2 - 2x + (4 - m)}{(x - 1)^2}$$
$$y' = 0 \Longrightarrow x^2 - 2x + (4 - m) = 0$$

ریشه‌های معادلهٔ $y' = 0$ ، x' و x'' طولهای نقاط اکسترمم منحنی تابع است.

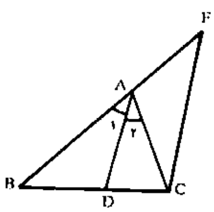
$$4x'x'' + 3(x' + x'') = 6$$
$$4\left(\frac{c}{a}\right) + 3\left(-\frac{b}{a}\right) = 6 \Longrightarrow 4(4 - m) + 3(2) = 6$$
$$4(4 - m) + 6 = 6 \Longrightarrow 4(4 - m) = 0 \Longrightarrow \boxed{m = 4}$$

۱۲ـ

$$I = \int \frac{4\sin x\cos x\,dx}{\sqrt{2\sin^2 x + \cos^2 x}} = \int \frac{2\sin 2x\,dx}{\sqrt{2\sin^2 x + 1 - \sin^2 x}}$$
$$= \int \frac{2\sin 2x\,dx}{\sqrt{\sin^2 x + 1}}$$
$$u = \sqrt{\sin^2 x + 1} \Rightarrow du = \frac{2\cos x\sin x\,dx}{2\sqrt{\sin^2 x + 1}}$$
$$= \frac{\sin 2x\,dx}{2\sqrt{\sin^2 x + 1}}$$
$$\Rightarrow I = 4\int \frac{\sin 2x\,dx}{2\sqrt{\sin^2 x + 1}} = 4\int du = 4u + c$$
$$= 4\sqrt{\sin^2 x + 1} + c$$

حل مسائل ریاضیات سال دوم تجربی

۱ـ در مثلث FBC ، $AD \parallel FC$ است.



پس داریم: $\frac{AD}{FC} = \frac{DB}{BC}$

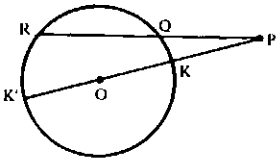
و از آنجا: $FC = \frac{AD.BC}{DB}$

امّا $AD = \frac{2}{b + c}\sqrt{pbc(p - a)}$ و $DB = \frac{a.c}{b + c}$ پس:

$$FC = \frac{2}{c}\sqrt{bcp(p - a)}$$

۲ـ (حل از آقای رضا نصیری از زنجان). دو سر قطر دایره گذرنده از نقطهٔ P را K و K' می‌نامیم. با توجه به داده‌های مسئله داریم:

$$PR = PQ + QR = 9 + 7 = 16$$



از طرفی بنا به روابط طولی در دایره، می‌توان نوشت:

$$PQ . PR = PK . PK'$$

و یا:

$$PQ . PR = (PO - R)(PO + R) \Longrightarrow$$
$$9 \times 16 = (13 - R)(13 + R) \Longrightarrow$$
$$144 = 169 - R^2 \Longrightarrow R^2 = 25 \Longrightarrow R = 5 \ \text{شعاع دایره}$$

۳ـ داریم: $\log_B^A = \frac{\log A}{\log B}$. پس می‌توان نوشت:

$$\log_5^x > \log_{25}^{(3x-2)} \Rightarrow \frac{\log x}{\log 5} > \frac{\log(3x - 2)}{\log 5^2}$$
$$\Rightarrow \frac{\log x}{\log 5} > \frac{\log(3x - 2)}{2\log 5} \Rightarrow 2\log x > \log(3x - 2)$$
$$\Rightarrow \log x^2 > \log(3x - 2) \Rightarrow \log x^2 - \log(3x - 2) > 0$$
$$\Rightarrow 3x - 2 > 0 \ ,\ \log\left(\frac{x^2}{3x - 2}\right) > 0 \Rightarrow \left|\begin{aligned} & x > \frac{2}{3} \\ & \frac{x^2}{3x - 2} > 1 \end{aligned}\right.$$

$$\begin{cases} x > \frac{2}{3} \\ \frac{x^3}{3x-2} - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{2}{3} \\ \frac{x^3 - 3x + 2}{3x - 2} > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > \frac{2}{3} \\ x^3 - 3x + 2 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > \frac{2}{3} \\ (x-1)^2 (x+2) > 0 \end{cases} \Longrightarrow \text{مجموعهٔ جواب} = \{x \mid x > \frac{2}{3}\}$$

-۴

$$x^4 + (-4y^2 + 4)\, x^2 + (16y^2 + 32y + 16)$$
$$= [x^4 + (16y^2 + 32y + 16)] + (-4y^2 + 4)\, x^2$$
$$= (x^2 + 4y + 4)^2 - (8x^2y + 8x^2) + (-4y^2 + 4)\, x^2$$
$$= (x^2 + 4y + 4)^2 - (8y + 8)\, x^2 + (-4y^2 + 4)\, x^2$$
$$= (x^2 + 4y + 4)^2 + (-4y^2 - 8y - 4)\, x^2$$
$$= (x^2 + 4y + 4)^2 - (2y + 2)^2 x^2$$
$$= [x^2 + 4y + 4 - (2y+2)x][x^2 + 4x + 4 + (2y+2)x]$$

۵- داریم:
$$\div \ldots, a, b, c, \ldots \Longrightarrow ac = b^2$$
$$\Longrightarrow a^3c^3 = b^6$$

$$\text{طرف دوم تساوی} = a^3b^3c^3 \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right)$$
$$= a^3b^3c^3\left(\frac{b^3c^3 + a^3c^3 + a^3b^3}{a^3b^3c^3}\right) = \frac{b^3c^3 + b^6 + a^3b^3}{acb}$$
$$= \frac{b^3(c^3 + b^3 + a^3)}{b^2.b} = \frac{b^3(a^3 + b^3 + c^3)}{b^3} = a^3 + b^3 + c^3$$

۶- (بر طبق واسطهٔ هندسی) $(\log_c^b)^2 = \log_a^c \cdot \log_b^a$

$$\Rightarrow (\log_c^b)^2 = \frac{\log c}{\cancel{\log a}} \times \frac{\cancel{\log a}}{\log b} \overset{(\log a \neq 0)}{=\!=\!=} \frac{1}{\frac{\log b}{\log c}}$$

$$\Rightarrow (\log_c^b)^2 = \frac{1}{\log_c^b} \Rightarrow (\log_c^b)^3 = 1 \Rightarrow \log_c^b = 1$$

$$\Rightarrow b = c, \begin{cases} \log_2^a + \log_2^b + \log_2^c = \log_2^{abc} = 10 \\ a = b + c = c + c = 2c \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} abc = 2^{10} \\ a = 2c \\ b = c \end{cases} \Rightarrow (2c)c^2 = 2^{10} \Rightarrow 2c^3 = 2^{10}$$

$$\Rightarrow c^3 = 2^9 = (2^3)^3 \Rightarrow c = 2^3 = 8$$
$$b = c = 8 \quad , \quad a = 2c = 2 \times 8 = 16$$

-۷
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 1 \\ x^2 + xz + z^2 = 4 \\ y^2 + yz + z^2 = 7 \end{cases}$$

برای حل دستگاه، ابتدا معادلهٔ دوم را از معادلهٔ سوم و معادلهٔ اوّل را از معادلهٔ دوم کم می‌کنیم:

$$\begin{cases} y^2 - x^2 + z(y-x) = 3 \\ z^2 - y^2 + x(z-y) = 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (y-x)(x+y+z) = 3 \\ (z-y)(x+y+z) = 3 \end{cases}$$

از معادلات اخیر نتیجه می‌شود: $y - x = z - y \quad (1)$

همچنین معادلات دستگاه را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{cases} (x-y)^2 = 1 - 3xy \\ (z-x)^2 = 4 - 3xz \\ (y-z)^2 = 7 - 3yz \end{cases}$$

با توجه به رابطهٔ (۱) نتیجه می‌شود:
$$1 - 3xy = 7 - 3yz \Longrightarrow z - x = \frac{2}{y} \quad (2)$$

رابطهٔ (۱) را چنین می‌توان نوشت: $z + x = 2y \quad (3)$

از معادلات (۲) و (۳) نتیجه می‌شود: $x = y - \frac{1}{y}\, , \, z = y + \frac{1}{y}$

مقادیر x و z را بر حسب y در معادلهٔ اوّل دستگاه قرار می‌دهیم:
$$3y^4 - 4y^2 + 1 = 0 \Longrightarrow (3y^2 - 1)(y - 1)(y + 1) = 0$$
$$\Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ یا } y = \frac{-\sqrt{3}}{3} \text{ یا } y = 1 \text{ یا } y = -1$$

و دستگاه دارای چهار دسته جواب است:

$$\text{مجموعه‌جواب} = \left\{ (x, y, z) \mid (0, \pm 1, \pm 2), \left(\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}, \mp\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm\frac{4\sqrt{3}}{3}\right) \right\}$$

۸- داریم:

روش اوّل:
$$S = a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{6}} \cdot a^{\frac{1}{12}} b^{\frac{1}{36}} \cdot a^{\frac{1}{72}} b^{\frac{1}{216}} \ldots$$
$$= (a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{12}} \cdot a^{\frac{1}{72}} \ldots)(b^{\frac{1}{6}} \cdot b^{\frac{1}{36}} \cdot b^{\frac{1}{216}} \ldots)$$
$$= a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{72} + \ldots} \cdot b^{\frac{1}{6} + \frac{1}{36} + \frac{1}{216} + \ldots} = a^{\frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{6}}} \cdot b^{\frac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{6}}}$$
$$S = a^{\frac{3}{5}} \cdot b^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{a^3 b}$$

روش دوم: طرفین عبارت را به توان ۶ می‌رسانیم:

$$S^6 = a^3 b \underbrace{\sqrt{a \sqrt[3]{b \sqrt{a \sqrt[3]{b \sqrt{\ldots}}}}}}_{S} = a^3 b S$$

$$S^6 = a^3 b S \Rightarrow S^6 - a^3 b S = 0 \Rightarrow S(S^5 - a^3 b) = 0$$
$$S \neq 0 \Rightarrow S^5 = a^3 b \Rightarrow S = \sqrt[5]{a^3 b}$$

-۹
$$S = \text{Arc sin} \frac{23}{26} - \text{Arc cos} \frac{11}{13}$$

بافرض $\beta = \text{Arc cos} \frac{11}{13}$ و $\alpha = \text{Arc sin} \frac{23}{26}$ داریم:

$$\sin\alpha = \frac{23}{26} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$$
$$= \sqrt{1 - \left(\frac{23}{26}\right)^2} = \frac{7\sqrt{3}}{26}$$
$$\cos\beta = \frac{11}{13} \Rightarrow \sin\beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta}$$
$$= \sqrt{1 - \left(\frac{11}{13}\right)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{13}$$
$$\sin S = \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$$

$$= \frac{23}{26} \times \frac{11}{13} - \frac{4\sqrt{3}}{13} \times \frac{7\sqrt{3}}{26}$$
$$= \frac{253 - 84}{13 \times 26} = \frac{169}{13 \times 2 \times 13} = \frac{1}{2}$$
$$\Longrightarrow \sin S = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ \Longrightarrow \boxed{S = 30^\circ}$$

-۱۰
$$\begin{cases} a \sin^2 x - b \cos^2 x = p \\ a \sin^4 x + b \cos^4 x = q \end{cases}$$

طرفین رابطهٔ اوّل را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$P^2 = a^2\sin^4 x + b^2\cos^4 x - 2ab \sin^2 x \cos^2 x$$
$$P^2 = a^2\sin^4 x + b^2\cos^4 x - 2ab \sin^2 x \cos^2 x + ab - ab$$
$$= a^2\sin^4 x + b^2\cos^4 x + ab\,(1 - 2\sin^2 x \cos^2 x) - ab$$
$$= a^2\sin^4 x + b^2\cos^4 x + ab\,(\sin^4 x + \cos^4 x) - ab$$
$$= a\sin^4 x\,(a + b) + b\cos^4 x\,(a + b) - ab$$
$$= (a + b)\,(a\sin^4 x + b\cos^4 x) - ab$$
$$= (a + b)\,q - ab \Longrightarrow \boxed{p^2 + ab = q\,(a + b)}$$

(رابطهٔ مستقل از x)

مسائل ریاضیات سال سوم تجربی

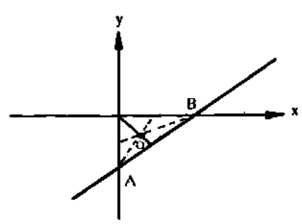
۱- ابتدا مختصات رؤوس مثلث و سپس مختصات مرکز ثقل آن را محاسبه می‌کنیم.

$$\Delta: 2x - 3y - 6 = 0 \Longrightarrow A \begin{vmatrix} 0 \\ -2 \end{vmatrix} ،\ B \begin{vmatrix} 3 \\ 0 \end{vmatrix} \text{ و } O \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\Longrightarrow G \begin{cases} x = \frac{x_A + x_B + x_O}{3} = \frac{0 + 3 + 0}{3} = 1 \\ y = \frac{y_A + y_B + y_O}{3} = \frac{-2 + 0 + 0}{3} = \frac{-2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مرکز ثقل مثلث } G(1, \frac{-2}{3}) \Rightarrow OG = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$= \sqrt{1 + \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{13}}{3} \Rightarrow OG = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

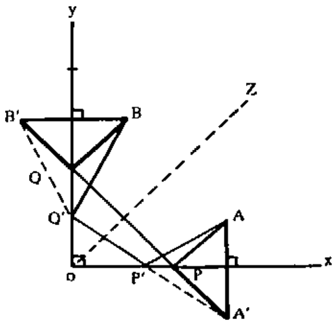
اندازهٔ بردار مکان مرکز ثقل مثلث



۲- قبلاً مشابه آن حل شده‌است.

۳- حالتی را در نظر می‌گیریم که دو نقطهٔ A و B در دو طرف oz نیمساز زاویهٔ xoy قرار دارند. قرینهٔ نقطهٔ A را نسبت به ox نقطهٔ A'، و قرینهٔ نقطهٔ B را نسبت به oy نقطهٔ B' می‌نامیم. از A' به B' وصل می‌کنیم و نقاط برخورد A'B' با ox و oy را به ترتیب P و Q می‌نامیم. این دو نقطه جواب مسأله‌اند یعنی: AP + PQ + QB کمترین مقدار ممکن را داراست. زیرا اگر دو نقطهٔ دلخواه P' و Q' را روی ox و oy در نظر بگیریم AP' + P'Q' + Q'B که همان A'P' + P'Q' + Q'B' است از AP + PQ + QB که همان پاره‌خط A'B' می‌باشد، بزرگتر است.

حالتی را که دو نقطهٔ A و B در یک‌طرف نیمساز oz قرار داشته باشند حل کنید و به نشانی مجلهٔ ریاضی برهان ارسال کنید.



۴ - می‌دانیم: $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin nx}{nx}\right) = 1$

پس می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x \sin 2x \sin 3x}{x^3}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin 2x}{x} \cdot \frac{\sin 3x}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right) \cdot \lim_{x\to 0}\left(\frac{2\sin 2x}{2x}\right) \cdot \lim_{x\to 0}\left(\frac{3\sin 3x}{3x}\right)$$

$$= 1 \times 2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right) \times 3\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)$$

$$= 1 \times 2 \times 3 = 6$$

۵ -

$$y = a\sin mx + b\cos mx$$

$$\Longrightarrow y' = am\cos mx - bm\sin mx$$

$$\Longrightarrow y'' = -am^2\sin mx - bm^2\cos mx = -m^2\underbrace{(a\sin mx + b\cos mx)}_{y}$$

$$\Longrightarrow y'' = -m^2 y \Longrightarrow y'' + m^2 y = 0$$

۶ - داریم:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dy = y'_x \cdot dx \Rightarrow \frac{dy}{d\alpha} = y'_x \cdot \frac{dx}{d\alpha}$$

$$\Rightarrow y'_\alpha = y'_x \cdot x'_\alpha \Rightarrow y'_x = \frac{y'_\alpha}{x'_\alpha} = \frac{6\cos 3\alpha}{6(1 + \mathrm{tg}^2 3\alpha)}$$

$$\Rightarrow y'_x = \frac{\cos 3\alpha}{1 + \mathrm{tg}^2 3\alpha} = \frac{\cos 3\alpha}{\frac{1}{\cos^2 3\alpha}} = \cos^3 3\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{y'_x = \cos^3 3\alpha}$$

۷ - داریم: $y = 2mx - 2mx^3 + x^3 \Longrightarrow y = x^3 + 2m(x - x^3)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x - x^3 = 0 \\ y = x^3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{یا} \\ x = -1 \\ \text{یا} \\ x = 1 \end{cases} \Longrightarrow$$

(نقاط ثابت) $\begin{cases} A(0, 0) \\ \text{یا} \\ B(-1, -1) \\ \text{یا} \\ C(1, 1) \end{cases}$

بنابراین منحنی از سه نقطهٔ ثابت می‌گذرد.

۸ - در توابع با ضابطهٔ عمومی $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ خط $cx + d = 0$ $(c \neq 0)$ مجانب قائم و خط $y = \frac{a}{c}$ مجانب افقی است، پس داریم:

$$\left(y = \frac{ax + b}{x + a}\right) : \begin{cases} x + a = 0 \\ x = -2 \end{cases} \Longrightarrow x = -a = -2 \quad \boxed{a = 2}$$

از طرفی چون منحنی محور xها را در $x = -1$ قطع می‌کند، پس نقطهٔ $A(-1, 0)$ متعلق به منحنی است:

$$x = -1 : \frac{2(-1) + b}{(-1) + 2} = 0 \Longrightarrow \boxed{b = 2}$$

۹ - داریم:

$$f(x) = 2x^3 - 3mx^2 \Longrightarrow f'(x) = 6x^2 - 6mx = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{یا} \\ x = m \end{cases} \quad \text{(طولهای اکسترمم)} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(m) = 2m^3 - 3m^3 = 8 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow -m^3 = 8 \Longrightarrow m^3 = -8 \Longrightarrow \boxed{m = -2}$$

۱۰ - $T = \sin^6 15^\circ + \cos^6 15^\circ + \sin^4 15^\circ + \cos^4 15^\circ$

داریم: $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

$$= 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$$

$$\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$$

با توجه به روابط اخیر داریم:

$$\sin^6 15^\circ + \cos^6 15^\circ = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 30^\circ = 1 - \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{13}{16}$$

$$\sin^4 15^\circ + \cos^4 15^\circ = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 30^\circ = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{8}$$

$$\Rightarrow S = \frac{13}{16} + \frac{7}{8} = \frac{13 + 14}{16} = \frac{27}{16} \Rightarrow \boxed{S = \frac{27}{16}}$$

۱۱ -

$$3(\sin x - \cos x) - 4(\sin^3 x - \cos^3 x) = \sqrt{2}\cos\frac{x}{2}$$

$$3\sin x - 3\cos x - 4\sin^3 x + 4\cos^3 x = \sqrt{2}\cos\frac{x}{2}$$

$$(3\sin x - 4\sin^3 x) + (4\cos^3 x - 3\cos x) = \sqrt{2}\cos\frac{x}{2}$$

می‌دانیم: $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$، $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

پس داریم:

$$\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2}\cos\frac{x}{2}$$

$$\sqrt{2}\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\frac{x}{2}$$

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{x}{2} \Rightarrow 3x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi \pm \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{4}{7}k\pi + \frac{\pi}{14} \\ x'' = \frac{4}{5}k\pi + \frac{\pi}{10} \end{cases}$$

حل مسائل ریاضیات سال چهارم تجربی

۱ - $y = \frac{-2}{3}x^3 + 2x^2 - 1 \Rightarrow y' = -2x^2 + 4x$

$$y'' = -4x + 4 \Rightarrow y'' = 0 \Rightarrow -4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1$$

(مختصات نقطهٔ عطف) $f(1) = \frac{-2}{3} + 2 - 1 = \frac{1}{3} \Rightarrow A\left(1, \frac{1}{3}\right)$ و

(معادلهٔ نیمساز ربع دوم و چهارم) $y = -x \Rightarrow x + y = 0$

$$d = \frac{\left|1 + \frac{1}{3}\right|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

۲ - تابع با ضابطهٔ $y = (x-1)^3 + (x-2)^3 + \dots + (x-10)^3$ را در نظر می‌گیریم:

بدیهی است تعداد محل تلاقی منحنی تابع با محور xها ریشه‌های معادله است. بنابراین کافی است مشتق را تعیین علامت کنیم:

$$y' = 3(x-1)^2 + 3(x-2)^2 + \dots + 3(x-10)^2 > 0$$

علامت مشتق همواره مثبت است، بنابراین تابع همواره صعودی است و محور xها را در یک نقطه قطع می‌کند و در نتیجه معادلهٔ موردنظر فقط دارای یک ریشهٔ حقیقی است.

۳ - تابع هموگرافیک با ضابطهٔ عمومی $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ وقتی ثابت است که مشتق آن صفر شود:

$$y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2} = 0 \Longrightarrow ad = bc$$

بنابراین برای تابع با ضابطهٔ مفروض $y = \frac{k + 2x}{kx + 8}$ داریم:

$$y = \frac{2x + k}{kx + 8} \Longrightarrow 2 \times 8 = k^2 \Longrightarrow k^2 = 16$$

$$\Longrightarrow k = \pm 4$$

۴ - برای تعیین وضع نقطهٔ $P(x_0, y_0)$ نسبت به دایره به معادلهٔ عمومی $C(x, y) = x^2 + y^2 + ax + by + c$ کافی است $C(x_0, y_0)$ را محاسبه کنیم. در این صورت سه حالت ممکن پیش می‌آید:

۱) اگر $C(x_0, y_0) > 0$ باشد، نقطهٔ P خارج دایره قرار دارد.

۲) اگر $C(x_0, y_0) = 0$ باشد، نقطهٔ P روی دایره واقع است.

۳) اگر $C(x_0, y_0) < 0$ باشد، نقطهٔ P داخل دایره است.

بنابراین پس از اختصار معادلهٔ دایره داریم:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + my = 9 \\ P(-2, 3) \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{l} C(-2,3) = (-2)^2 + 3^2 + m(3) - 9 < 0 \\ 4 + 3m < 0 \Rightarrow m < -\frac{4}{3} \end{array}$$

۵ - در صورتی که $d = o'M$ و R شعاع دایرهٔ مفروض باشد، طول مماس مرسوم از نقطهٔ $M(x_0, y_0)$ بر دایرهٔ مفروض از دستور زیر به دست می‌آید:

$$MT = \sqrt{(x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - \beta)^2 - R^2}$$

$$MT = \sqrt{d^2 - R^2}$$

$$3x^2 + 3y^2 - 6y = 9 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 - 4 = 0 \\ M(2, -3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow MT = \sqrt{2^2 + (-3-1)^2 - 4} = 4$$

۶ـ داریم:

$$\int_{\cdot}^{\frac{\pi}{m}} \sin(\frac{mx}{۲})dx = \frac{-۲}{m}\cos\frac{mx}{۲}\Big]_{\cdot}^{\frac{\pi}{m}}$$

$$= \frac{-۲}{m}\left[\cos\frac{m}{۲}(\frac{\pi}{m}) - \cos \cdot\right] = \frac{-۲}{m}(\cos\frac{\pi}{۲} - ۱)$$

$$= \frac{-۲}{m}(-۱) = \frac{۲}{m} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \boxed{m = ۴}$$

ـ۷

$$\cos x\,(۲\sin x + ۲\cos x) = \frac{۳}{۲}$$

$$۲(\cos x \sin x + \cos^۲ x) = \frac{۳}{۲} \Rightarrow ۲\cos x \sin x + ۲\cos^۲ x = ۱$$

$$\sin ۲x + \cos ۲x = \cdot \Rightarrow \cos ۲x = -\sin ۲x = \sin(-۲x)$$

$$\cos ۲x = \cos(\frac{\pi}{۲} + ۲x) \Rightarrow ۲x = ۲k\pi \pm (\frac{\pi}{۲} + ۲x)$$

$$۴x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \boxed{x = \frac{k\pi}{۲} - \frac{\pi}{۸}}$$

۸ـ از رابطهٔ $\cos^۲\hat{A} + \cos^۲\hat{B} - \cos^۲\hat{C} = ۱$ نتیجه می‌شود:

$$۱ - \sin^۲\hat{A} + ۱ - \sin^۲\hat{B} - (۱ - \sin^۲\hat{C}) = ۱$$

$$\Rightarrow \sin^۲\hat{A} + \sin^۲\hat{B} = \sin^۲\hat{C}$$

$$(\frac{a}{۲R})^۲ + (\frac{b}{۲R})^۲ = (\frac{c}{۲R})^۲$$

$$\Rightarrow \frac{a^۲}{۴R^۲} + \frac{b^۲}{۴R^۲} = \frac{c^۲}{۴R^۲} \Rightarrow a^۲ + b^۲ = c^۲$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{C} = ۹۰^\circ}$$

جوابهای تفریح اندیشه

✱ جواب ۶

حل: سن مهرداد، خواهر و پدرش را به ترتیب M و S و P می‌نامیم، می‌دانیم که:

$$M + S + P = ۱۰۰ \qquad (۱)$$

بنا به فرض اول داریم:

$$S + P - M = ۲S \Rightarrow P - S - M = \cdot \qquad (۲)$$

از جمع رابطه‌های (۱) و (۲) داریم: $۲P = ۱۰۰ \Rightarrow P = ۵۰$

با استفاده از فرض دوم داریم:

$$P + P - M = ۲(M + P - S) \Rightarrow ۳M - ۲S = \cdot$$

و چون $M + S = ۵۰$ است پس $M = ۲۰$ و $S = ۳۰$ است. یعنی در حال حاضر مهرداد ۲۰ سال، خواهرش ۳۰ سال و پدرش ۵۰ سال دارند.

✱ جواب ۷

حل: طول مسافت پیموده‌شده در هر قسمت را L می‌نامیم. موتورسوار برای پیمودن هر قسمت زمانهای زیر را صرف می‌کند.

اولین قسمت : $\frac{L}{۱۰}$ ساعت   سومین قسمت : $\frac{L}{۳۰}$ ساعت

دومین قسمت : $\frac{L}{۵}$ ساعت   چهارمین قسمت : $\frac{L}{۱۵}$ ساعت

مجموع زمان لازم برای پیمودن مسافت موردنظر برابر است با:

$$\frac{L}{۱۰} + \frac{L}{۵} + \frac{L}{۳۰} + \frac{L}{۱۵} = \frac{۱۲L}{۳۰} = \frac{۲L}{۵}$$

چون سرعت برابر است با مسافت پیموده شده ($۴L$) تقسیم بر زمان طی شده ($\frac{۲}{۵}L$) پس داریم:

سرعت‌متوسط $= ۴L : \frac{۲}{۵}L = \frac{۵ \times ۴}{۲} = ۱۰$ کیلومتر در ساعت

✱ جواب ۸

حل:

$(۸ \times ۸) + (۸ + ۸) = ۸۰$ $((۸ + ۸) : ۸) + ۸ = ۱۰$

$((۸ + ۸) \times ۸) - ۸ = ۱۲۰$ $(۸ + ۸) - (۸ : ۸) = ۱۵$

$(۸ + ۸ + ۸) \times ۸ = ۱۹۲$ $(۸ - (۸ : ۸)) \times ۸ = ۵۶$

$(۸ \times ۸ \times ۸) + ۸ = ۵۲۰$ $(۸ \times ۸) + (۸ : ۸) = ۶۵$

In the name of God

Borhān

VOL. 4. No. 3

Serial numbers ; 13

Spring 1995

Borhan is a mathematics journal published four times a year by Madrasse Publications. Each issue includes articles related to mathematics and its various topics specifically those concerning highschool education in Iran.

All communications should be sent to the editor at the following address:

Madrasse Publication - No. 36. Haghighat talab Street, Sepahbod gharany Ave, Tehran, Iran

Post code: 14155/1949

Contents:

ابوکامل ملقّب به «حاسِب مصری»

نویسنده‌ای که در نیمهٔ دوم قرنِ سوّم هجری فعّال بوده و اثر جبریِ وی شرحی است بر جبر خوارزمی. این کتاب به دلیل برخورداری از مباحث تازه علمی، در آن عصر رواج کامل یافت.

«کرجی» نویسنده مسلمان در قرن چهارم هجری و نیز نویسنده مشهور لاتین «لئوناردوپیا»، مشهور به «فیبوناتچی» در اواخر سدهٔ دوازدهم میلادی از مثالهای ابوکامل بهره فراوانی گرفتند.

اثرِ ابوکامل در ارائهٔ احکام کلیِ قواعدی که خوارزمی آنها را به‌وسیلهٔ مثال بیان می‌کند، از اثر خوارزمی فراتر می‌رود، مانند:

$$\left.\begin{aligned}(a \pm px)(b \pm qx) &= ab \pm bpx \pm aqx + pqx^2 \\ (a \pm px)(b \pm qx) &= ab \pm bpx \mp aqx - pqx^2\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

ابوکامل علاوه بر این‌که برای درستی حالتهای خاصِ (۱) براساس قانون توزیع‌پذیری و قواعد علامتها، برهانی جبری ارائه می‌دهد، برهانهایی هندسی نیز می‌آورد. به‌عنوان مثال، برهان هندسی ابوکامل برای حالتِ خاصِّ (۱) یعنی:

$(10 - x)(10 - x) = 100 + x^2 - 20x$ را در زیر می‌آوریم:

فرض‌کنید خط GA معرفِ عدد ۱۰ باشد و GB معرف «شیئی» x، اینک مربع (AD) (منظور مربعی که قطر آن AD است) را مطابق نمودار کامل کنید. در این صورت $AB=ED=10-x$، بنابراین مساحت مربع (ZH) برابراست با $(10 - x)^2$. همچنین $(GZ)=(GH)=10x$، بنابراین $(EH)=(GH)-(EB)=10x-x^2$. (منظور از EH، مستطیل به قطر EH است و ...) بنابراین $(GZ)+(EH)$ مساوی است با $20x-x^2$، و چون مساحت مربعِ بزرگتر ۱۰۰ است نتیجه می‌شود که

$$(10-x)^2 = (ZH)=100-(20x-x^2)=100+x^2-20x$$

(برگرفته از کتاب گوشه‌هایی از ریاضیات دورهٔ اسلامی تألیف جی. ال. برگرن ترجمهٔ دکتر محمد قاسم وحیدی و دکتر علیرضا جمالی)