دوره‌ی چهاردهم، شماره‌ی ۴
تابستان ۱۳۸۴، بها: ۲۵۰۰ ریال

سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

رشد برهان

مجله ریاضی

۴۶

www.roshdmag.org

آموزشی، تحلیلی، اطلاع رسانی

برای دانش‌آموزان دوره‌ی متوسطه

نظریه مقدماتی مجموعه ها

منطق ریاضی

یک مسأله از بهینه سازی و یک پارادوکس

روش ارشمیدس برای محاسبه عدد π

اصلا از اصل صاغان (= چغان، قریه ای از مرو و رود خراسان) بود و در بغداد می‌زیست و در ذیقعده ی سال ۳۷۹ در بغداد درگذشت.

وی از منجمان بزرگ و علمای ریاضی و در علم هندسه و هیأت از اساتید مسلّم عصر خود بود و در ساختن اسطرلاب و آلات رصد مهارتی بسزا داشت و در آنها و بخصوص در اسطرلاب تصرفات بدیع و نیکو کرد و به همین مناسبت به اسطرلابی مشهور بود. سال ها در بغداد به تدریس اشتغال داشت و شاگردانی تربیت کرد که هر یک به استفاده از درس وی افتخار می کردند. سلاطین آل بویه و خلفای عباسی وی را محترم می داشتند.

چون شرف الدوله (پسر عضدالدوله) که از ۳۷۶ تا ۳۷۹ حکومت کرد به بغداد رفت و رصدخانه ای بنا کرد و ویجن بن رستم کوهی را به رصدکواکب گماشت، صاغانی یکی از راصدان و علمایی بود که به درستی رصد کوهی شهادت دادند این رصدها به سال ۳۷۸ صورت گرفت.

ابونصر عراق مقاله ای دارد در باب منازعه ای که بین ابوحامد صاغانی و منجمان وی درباره ی اعمال اسطرلاب روی داده بود. در آن مقاله ابونصر نشان داده است که حق با صاغانی بوده است.

و نیز بنا به گفته ی بیرونی در کتاب تحدیدنهایات الاماکن، ابوحامد صاغانی در کتاب قوانین علم الهیئة آورده است که در سال ۳۷۴ با حلقه ای به قطر شش وجب و تقسیم شده به تقسیمات پنج دقیقه ای در محلّی واقع

مشاهیر ریاضی مسلمان

ابوحامد احمد بن محمد صاغانی اسطرلابی منجم و ریاضیدان ایرانی

بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

مجله ریاضی
رشد برهان متوسطه

دورهٔ چهاردهم، شماره ۴
تابستان ۱۳۸۴
بها: ۲۵۰۰ ریال
تیراژ: ۱۴۰۰۰ نسخه
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه

www.roshdmag.org

رشد برهان متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

- نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمهٔ مقاله‌های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش کامپیوتر و ...)

رشد برهان متوسطه، هر سه ماه یک شماره منتشر می‌شود.

- مجلّه در حک و اصلاح و حذف و اضافه مقاله‌ها آزاد است.
- مقاله‌های وارده، باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.
- مقاله‌های رسیده مسترد نمی‌شود.
- استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر با ذکر دقیق ماخذ بلامانع است.

نشانی دفتر مجلّه: صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله: ۹-۸۸۸۳۱۱۶۰ داخلی ۳۷۰
تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ ـ ۷۷۳۳۱۱۱۰

یادداشت سردبیر

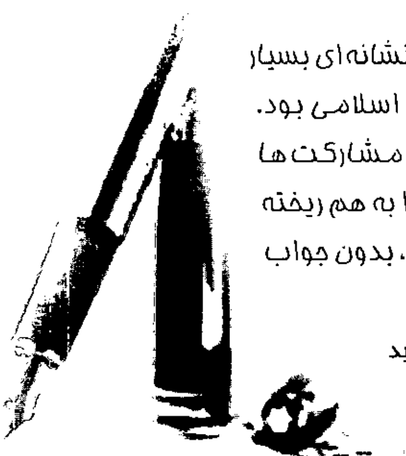
بارها از طرف مقام معظم رهبری و دست اندرکاران مسائل آموزشی و تربیتی بر لزوم توجه به مسائل سیاسی و اجتماعی دانش آموزان و دانش پژوهان ایران اسلامی تأکید شده است. این تأکیدات به این معنی است که شما دانش آموزان می بایست در کنار فعالیت های علمی خود، فعالیت های اجتماعی و سیاسی نیز داشته باشید و مجموعه ی این فعالیت ها را شکل دهنده و سازنده ی شخصیت فردی خود محسوب کنید.

رشد علمی، اگر بدون تهذیب نفس باشد، گرچه ممکن است فرد را به مدارج و مراتب دنیوی بالایی برساند، امّا میوه و ثمره ی آن لزوماً موجب کمال فردی و اجتماعی نخواهد بود.

کتاب آسمانی ما قرآن، پیامبر (ص) و معصومین ما (ع) به ما آموخته اند که فرد نباید فقط انبانی از معلومات و دانستنی ها باشد، بلکه در کنار این علوم و همسو با جامعه ی اسلامی، بایستی فردی مفید و تأثیرگذار در زمینه های اجتماعی و سیاسی باشد و برای سایر نیازهای فطری و روحی خود پاسخی شایسته داشته و بتوانیم اهداف خود را در آینده ترسیم کنیم.

شرکت شما دانش آموزان فهیم در فعالیت هایی همچون بسیج دانش آموزی، انجمن های اسلامی، راه پیمایی ها و بویژه انتخاب اخیر ریاست جمهوری، مبیّن این نکته ی مهّم است که جامعه ی ما، دانش آموزانی اندیشمند، متفکر و آینده نگر دارد.

حضور فراگیر و گسترده ی شما دانش آموزان در این انتخابات نشانه ای بسیار مثبت و تعیین کننده از مشارکت و هم بستگی امّت ایران اسلامی بود. دشمنان اسلام و نظام اسلامی ما روی تک تک این حرکت ها و مشارکت ها معادله ها می بندند و این حضور همه جانبه، معادله های آن ها را به هم ریخته و به آن ها ثابت کرد که دستگاه معادله ی تعدّی به نظام اسلامی، بدون جواب و ریشه است!



مؤید و پیروز باشید

از تاریخ بیاموزیم

مرحلهٔ بالای یگانگی دانش ریاضی
ساز و کار تکامل ریاضیات نظری

۱۷ ۱۹

پرویز شهریاری

اشاره

در شمارهٔ قبل دربارهٔ بحران بلوغ ریاضیات نظری و کشف اندازه ناپذیرها (اعداد گنگ) بحث شد، اینک ادامه مطلب را در پی می‌آوریم.

دگرگونی دانش نظری ریاضیات، نتیجه‌ای است از فعالیت نظری ذهنی؛ و به همین مناسبت تصادفی می‌باشد و نتیجه‌ای است از رابطهٔ بین دانشمندان و مکتب‌های علمی، علاقه‌ها و بی‌علاقگی‌های شخصی، به ذوق و عادت و به‌طور خلاصه، به انسان بستگی دارد. با وجود این، می‌توان سمت‌گیری لازم تکامل ریاضیات نظری، قانون‌مندی‌های کلی و ساز و کار تکامل شیوهٔ نظری سازماندهی دانش ریاضی را دنبال کرد. برای این‌که کردار این ساز و کار را کشف و میزان تأثیر و امکان عمل آن را مشخص کنیم، باید به تاریخ مراجعه کنیم.

ولی تاریخ در برابر گنجینه‌ای که در اختیار ما می‌گذارد، انتظار دارد به شرایط آن تن دهیم؛ شرایط مشخص کردن از هم‌پاشیدگی‌ها و مرحله‌های «سایدگی» ساز و کار تکامل در تاریخ هر روندی و هر جریانی به صورتی خاص فرامی‌رسد؛ به‌نحوی که به مکان و زمان خاصی مربوط است. جدا کردن حالت‌های عام و آن‌چه عمومیت دارد، این خطر را در بر دارد که حالت‌های خاص را از دست بدهیم و درنتیجه، تنوع اولیه را فراموش کنیم و در آرامش حالت‌های مشابه و بدون اختلاف فرورویم. بسیاری از بررسی‌های کلی نمونه‌ای و مشخصی وجود دارد که نمی‌توان آن‌ها را سرمشق قرار داد.

اگر طرح منطقی ساز و کار تفرق و تجمع دانش نظری ریاضیات را، بدون تطبیق و مقایسهٔ با تاریخ واقعی بدهیم، آن‌وقت، درک موضوع و روش‌های ریاضیات نظری که بر این ساز و کار تکیه دارد، «فربه» می‌شود و مضمون خود را از دست می‌دهد؛ یعنی مفهوم انتزاعی آن برای مطالعهٔ تکامل واقعی ریاضیات «لاغر» می‌شود و به این جا می‌رسد که یا به این انتزاع‌ها، اضافه‌هایی شبیه تصورهای تاریخی جذب شود و به خودش محدود شود. در حالت اول، تاریخ به صورت رشته‌ای از مثال‌ها درمی‌آید و به بیگانه‌ای آزاردهنده برای ما تبدیل می‌شود؛ و در حالت دوم، خودمان را اسیر مجموعه‌ای بی‌حاصل کرده‌ایم که مرزهای غیرقابل عبور خصلت‌های عمده، آن را محدود کرده است.

برای این‌که از صورت واقعی ریاضیات و دگرگونی‌های آن دور نشویم، باید در سطح تاریخ به‌عنوان یک واحد منطقی توقف کنیم. روش‌شناسی علمی در حوزهٔ تاریخ منطقی کار می‌کند و پژوهشگری که این حوزه را ترک کند و از حوادث واقعی تاریخی اجتناب ورزد و از آن‌ها جدا شود، مثل این است که در لبهٔ پرتگاه قدم می‌زند. ساز و کار دگرگونی شیوهٔ نظری سازماندهی، به این جهت

وجود دارد که طناب حوادث واقعی، آن را نگه می‌دارد و در بیرون آن، نمی‌توان دربارهٔ این ساز و کار حتی فکر کرد. این را هم یادآوری کنیم که، تاریخ منطقی کم‌تر از تاریخ واقعی و حادثه‌ای، واقعی نیست. درواقع؛ در این‌جا حوادث تاریخی را با دید دیگری نگاه می‌کند: حوادث را با توجه به ارزش روش‌شناختی آن‌ها و جنبهٔ منطقی آن‌ها می‌نگرد.

اهمیت ساز و کار تکامل روش نظری سازماندهی دانش ریاضی، در تأثیر متقابل دیالکتیکی روندها و جریان‌های تفرق و تجمع دانش است. ریاضیات نظری از راه اثبات و مناسب بودن درک آن، به نحوی که همهٔ بخش‌های دانش نظری در ارتباط متقابل باشند، تمامیت و یکپارچگی خود را تحقق می‌بخشد. اثبات، وسیلهٔ نیرومندی برای تجمع است، که به یاری آن، شباهت ساختارهای نظری، به طور دائم ظاهر می‌شود؛ به یاری اثبات است که نظریه‌های مختلف ریاضی، در درون یک ریاضیات واحد، تعبیری کلی به دست می‌آورند و به عنوان بخشی یا عنصری از یک ساختار عمیق‌تر فهمیده می‌شوند. با وجود این، همین استفاده از اثبات (و نه با نیروی کم‌تری) دلیلی برای تفرق دانش هم هست؛ آن را بغرنج‌تر می‌کند و گزاره‌ها و حکم‌های ریاضی را به شاخه‌های جداگانه تقسیم می‌کند و اثبات، چه به‌عنوان جمع‌کننده و چه به عنوان متفرق‌کننده، به‌طور دائم «بازسازی» و از تناقضات «پاک» می‌شود. تضاد روش‌شناختی، موجب حرکت روندهای تفرق و تجمع دانش ریاضی است و این وضع، تا وقتی این جریان‌ها در تعادل دینامیکی قرار دارند، تا وقتی «نیروهای محرک» تفرق و تجمع یکدیگر را خنثی می‌کنند، برقرار می‌ماند.

جریان‌های تفرق و تجمع، برعکس و به‌نوبهٔ خود، بر درک ماهیت اثبات اثر می‌گذارند؛ ماهیتی که بسیار «انعطاف‌پذیر» است. از جمله، اگر تفرق نیرو بگیرد، آن وقت اثبات به این معنا گرفته می‌شود که دانش و آگاهی، نوعی متمرکز و دور یک مرکز جمع شود. نظر اثبات بر قیاس قرار می‌گیرد و راه خود را از کلی به جزئی جست‌وجو می‌کند.

□

نخستین هدف ریاضیات نظری، با استفاده از بستگی‌های نظری (رابطه‌های منطقی) تأمین می‌شود. اثبات در آغاز از مفهوم‌های اولیه‌ای که مربوط به بستگی‌های نظری در صورت نخستین آن است، شروع می‌شود. با یاری گرفتن از این رابطه‌های «پایه» که از ریاضیات انتخاب شده است، نقطهٔ مربوط به «گُل‌زدن» نظری ریاضی انتخاب می‌شود. در جریان «بحران‌ها» و «تجدید سازمان‌های» بستگی‌های نظری این «گُل‌زدن»، راه اصلی خود را می‌نمایاند و ساز و کار واقعی تفرق و تجمع مفهوم‌های ریاضی روشن می‌شود و درنتیجه، ساز و کار بستگی‌های نظری را آشکار می‌کند.

آگاهی متفرق و جدا از هم، اغلب در آغاز به صورت به‌هم‌پیوسته، ظاهر می‌شوند. این برتری تفرق اولیه در ریاضیات نظری که یگانگی آن را نقض می‌کند، پیش‌تر کلی بودن خود را در ریاضیات نظری نشان می‌داد. برای نمونه، اگر تا پیش از بحران مربوط به محاسبهٔ بی‌نهایت کوچک‌ها، مفهوم‌های دیفرانسیل‌گیری و انتگرال‌گیری، براساس مشترکی قرار داشت که دلیل وجودی آن‌ها را با هم توجیه می‌کرد، بعد از بحران، به کمک قضیه‌های تازه، این دو بخش به هم پیوستند و کلی بودن نخستین خود را از دست داد. به‌عنوان مثال، عمل دیفرانسیل‌گیری در R^2، هیچ شباهتی با جست‌وجوی حالت‌ها، ضمن حل مسأله‌های «هم‌پیرامونی» ندارد؛ یعنی رابطهٔ منطقی بین «گسترش» ساختمانی وجود ندارد و به امکان تجدید بنا و استفاده از موضوع‌های تازه بستگی دارد. «خرابی» مفهوم کلی نخستین از نظر ارتباط‌های منطقی، به‌طور مستقیم از حرکت نظام‌های ریاضی بر یکدیگر به دست می‌آید.

این روند را اندکی مفصل‌تر روی نمونهٔ نظریه‌های هندسی بررسی می‌کنیم، که جدا از هم و به‌طور مستقل راه خود را پیش گرفتند تا به مرز خود رسیدند. پس از بحران‌های ریاضی، رابطه‌های منطقی هندسهٔ نظری که در بخش دیفرانسیل به‌وجود آمد (از نظر تاریخی، این روند، در همان محدودهٔ زمانی پیش آمد)؛ «در پایان سدهٔ هجدهم، هندسه به دوران شکوفایی خود افتاد... باید یادآوری کرد که در پیشرفت هندسه، تنها تکامل هندسه‌ای که پیش از آن وجود داشت، مورد نظر نبود، بلکه گسترش مستقل هندسه در جهتی که در نظر اول با هندسهٔ پیشین تفاوت داشت، مورد توجه قرار گرفت. به نظر می‌رسید که به جای «هندسه‌ای» دیگر، «هندسه‌ای» مورد توجه بود که با همان روش‌ها و تعریف‌های هندسی پاگرفته است.»[1] اختلاف نظریه‌های هندسی از یکدیگر، مربوط به مکتب‌های ذهنی

دانشمندان بود که تصورهای «خنده‌داری» از مکتب‌های هندسی داشتند؛ برخی برادران هندسهٔ ترکیبی، هندسه‌دانانی را که در استدلال‌های خود از هندسهٔ متری استفاده می‌کنند، به رسمیت نمی‌شناسند.[۲] تفرق در هندسه در میانه‌های سدهٔ نوزدهم به اوج خود رسید[۳] و فولیکس کلاین در «برنامهٔ ارلانگن» به آن اشاره می‌کند: «... هندسه در ذات خود یگانه است؛ ولی به دلیل پیشرفت تند خود در سال‌های اخیر، به شاخه‌های جدا از هم تقسیم شده است، که همچنان به پیشرفت خود، جدا از یکدیگر و به طور مستقل ادامه می‌دهند.»[۴]

اگر «از بیرون» به تفرق دانش ریاضی نظری بینداریم، لایه‌بندی‌شدن نظریهٔ دانش ریاضی و طبقه‌بندی شدن ساختمان آن را می‌بینیم؛ ولی اگر «از درون» به آن نگاه کنیم، تکامل این ساختمان دیده می‌شود. بنابراین کافی نیست به بررسی تفرق نظریهٔ ریاضی تنها از بیرون قناعت کنیم، لازم است به رشد نظریه‌های دانش ریاضی، همچون پیشرفت نظریه‌های ریاضی بنگریم. این روش را می‌توان روی نمونهٔ دانش ریاضی و به صورتی که با هندسهٔ مقدماتی برخورد داشتیم به‌کار برد (هندسه به صورتی که در «مقدمات» اقلیدس وجود دارد). به‌ویژه رشد این نظریهٔ ریاضی با نشان دادن اختلاف ریاضیات نظری جدید زمان ما ریاضیات نظری کلاسیک قابل لمس است.

تا پیش از بحران رابطه‌های منطقی ریاضیات نظری دوران ما، تنها روش قیاسی از کلی به طرف جزئی اقلیدس، به عنوان عاملی منفی، در راه پیشرفت ریاضیات کهن خودنمایی می‌کرد. تا پیش از بحران، می‌فهمیدند که تکیه‌گاه ارشمیدس کاستی‌هایی در زمینهٔ بررسی حرکت و پیوستگی دارد؛ ولی هنوز نمی‌توانستند تغییر مناسب را برای اصل موضوع‌های اقلیدس، به‌طور کامل پیشنهاد کنند. بعد از بحران روابط منطقی و مانعی که در سر راه اصل موضوعی کردن به صورت منفی جلوه می‌کرد، به مانعی مثبت تبدیل شد. انتقادهای کلی مربوط به کافی نبودن روابط نظری پیشین، جای بحث‌های مشخص مربوط به عدم استفاده از امکان‌های هندسهٔ مقدماتی را گرفت.

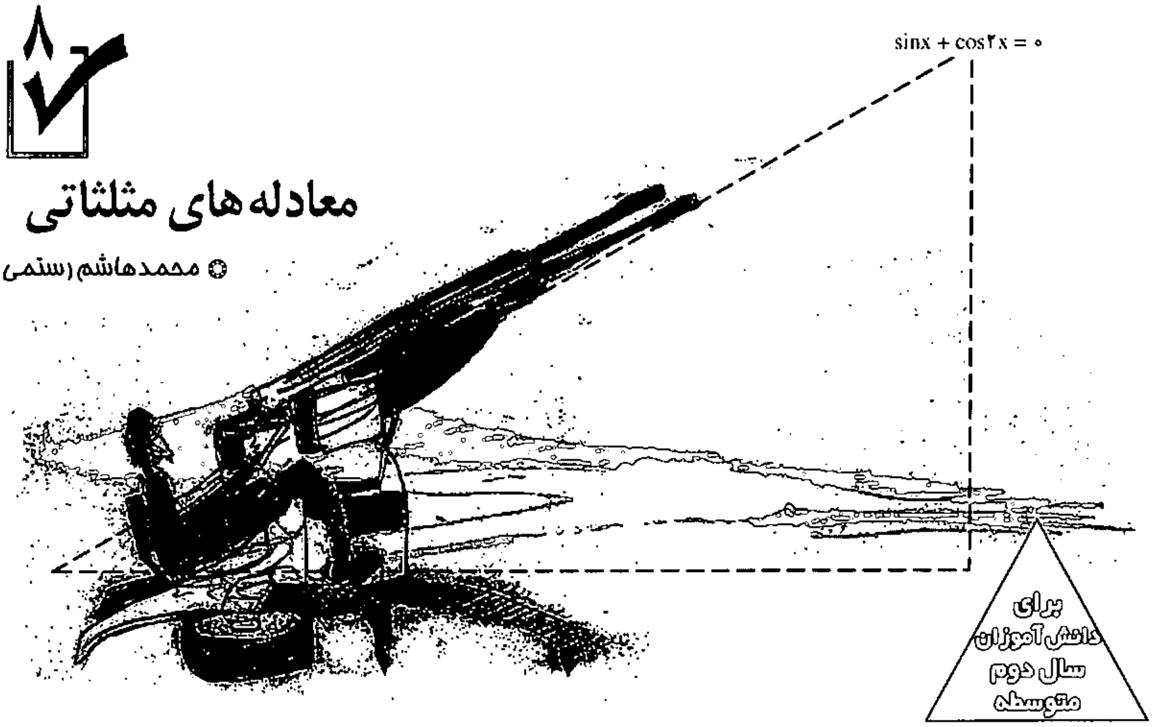
نیکلاس لباچوفسکی در سال ۱۸۲۹ نوشت: «در زمان نیوتن و دکارت، تمامی ریاضیات تحلیلی شده بود و چنان گام‌های تندی به جلو برمی‌داشت که دانشمندانی را که بدون آن می‌توانستند پیش بروند، به کلی عقب گذاشت و همهٔ آن‌هایی را که به «مقدمات» اقلیدس مشغول بودند، کنار زد. بنابراین با وجود قدیمی بودن و ژرف‌بودن آن‌ها، و با وجود موفقیت‌های درخشانی که در این زمینه پیدا شده بود، تاکنون همان اصل نخستین نگه داشته شده است.»[۵] دشواری اصلی هندسهٔ اقلیدسی، در این بود که به یاری روابط منطقی، نیاز به هندسهٔ هیپر بولیک (هذلولوی) داشت که جانشینی برای هندسهٔ اقلیدسی باشد.[۶] هندسهٔ مقدماتی تحت تأثیر رابطه‌های نظری، مرزهای بنیان‌های هندسهٔ قبلی را شکست و خود را بازسازی کرد. همه چیز برای اصل توازی اقلیدس متمرکز شد و دیدگاه تازه‌ای به ریاضیات رسمی افزوده شد.

زیرنویس ....

۱. دوسینگ (هـ. آ). «بنیان پیدایش گروه. بررسی تاریخی ریاضی».
۲. فولیکس کلاین. سخنرانی دربارهٔ پیشرفت ریاضیات در سدهٔ نوزدهم.
۳. ویژگین (و. پ). دربارهٔ برنامهٔ فولیکس کلاین. بررسی تاریخی- ریاضی.
۴. فولیکس کلاین. شرح کوتاهی از بررسی‌های هندسی تازه («برنامهٔ ارلانگن»).
۵. لباچوفسکی، میکل ایوانویچ، دربارهٔ «مقدمات» هندسه.
۶. ولی ساختن دستگاه اصل موضوع‌هایی که بتواند آکرناتیو اصل موضوع‌های اقلیدسی باشد، یعنی هندسهٔ هیپر بولیک، تنها بعدها و در جریان تحکیم منطقی رابطه‌ها و در جریان اصل موضوع‌های هیلبرت پدید آمد. هندسهٔ هیپر بولیک تنها در زمان کاربرد نظریهٔ توازی به‌وجود آمد. مفهوم حد هم با به کار گرفتن مفهوم حرکت، با استفاده از استقرای ریاضی پا گرفت.

۸ معادله های مثلثاتی

محمدهاشم رستمی



حل معادله های غیرسادهٔ مثلثاتی

اشاره: در شماره قبل راجع به معادله‌های غیر ساده مثلثاتی بحث کردیم و روش حل معادله‌هایی را بررسی کردیم که به صورت $A \times B \times C \times \ldots = 0$ قابل تبدیل به این صورت هستند و در آن‌ها $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ و... معادله های ساده مثلثاتی‌اند، اینک در ادامه مطلب داریم:

۲ . معادله‌های غیر سادهٔ مثلثاتی که بر حسب یک نسبت از یک زاویه به شکل معادله‌های جبری قابل حل، مانند معادلهٔ درجهٔ دوم ($ax^2 + bx + c = 0$)، معادلهٔ درجهٔ سوم ($ax^3+bx^2+cx+d=0$)، معادلهٔ دومجذوری ($ax^4 + bx^2 + c = 0$) و... هستند یا با انجام تغییرات مناسب و مجاز در معادلهٔ مثلثاتی داده شده، قابل تبدیل به معادله‌های جبری قابل حل هستند. برای حل این گونه معادله‌های مثلثاتی، پس از انتخاب مجهول کمکی مناسب و تبدیل آن‌ها به معادله‌های جبری قابل حل، این معادله‌های جبری را حل می‌کنیم، آن‌گاه جواب‌های قابل قبول به دست آمده برای این معادله‌ها را، به جای مجهول کمکی قرار می‌دهیم تا معادله‌های سادهٔ مثلثاتی به دست آیند. با حل این معادله‌های سادهٔ مثلثاتی، جواب‌های معادلهٔ داده شده مشخص می‌شوند. به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال۱ . معادلهٔ مثلثاتی $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ را حل کنید.

حل: به طوری که دیده می‌شود، معادلهٔ داده شده، معادله‌ای درجهٔ ۲ بر حسب $\cos x$ است. بنابراین با فرض $\cos x = y$ ، خواهیم داشت:

$$\cos x = y \Rightarrow 2y^2 + y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$\Rightarrow y = -1 \ , \ \ y = \frac{1}{2}$$

چون $-1 \le \cos x = y \le 1$ است، پس هر دو جواب به دست آمده، قابل قبول هستند و داریم:

$y=-1 \Rightarrow \cos x = -1 = \cos\pi \Rightarrow x = 2k\pi \pm \pi$ یا

$x = 2k\pi+\pi$ یا

$$y=\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2kn \pm \frac{\pi}{3}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی داده شده، عبارتند از:

$x=2k\pi+\pi$ و $x=2k\pi-\frac{\pi}{3}$ و $x=2k\pi+\frac{\pi}{3}$

مثال۲. معادله مثلثاتی $2\sin^2(x+\frac{5\pi}{8}) - \cos(x+\frac{\pi}{8}) - 3 = 0$ را حل کنید.

حل: چون $(x+\frac{5\pi}{8})-(x+\frac{\pi}{8}) = \frac{\pi}{2}$، یعنی تفاضل دو زاویه $\frac{\pi}{2}$ است، پس داریم:

$$\sin(x+\frac{5\pi}{8}) = \cos(x+\frac{\pi}{8})$$

از آن‌جا خواهیم داشت:

$$2\cos^2(x+\frac{\pi}{8}) - \cos(x+\frac{\pi}{8}) - 3 = 0$$

فرض می‌کنیم $\cos(x+\frac{\pi}{8})=y$ باشد، در این صورت داریم:

$$2y^2-y-3=0 \Rightarrow y = \frac{+1\pm\sqrt{1+24}}{4} = \frac{1\pm5}{4}$$

$\Rightarrow y=\frac{3}{2}>1$ و $y=-1$

تنها جواب $y=-1$ قابل است؛ بنابراین داریم:

$$\cos(x+\frac{\pi}{8}) = -1 = \cos\pi \Rightarrow x+\frac{\pi}{8} = 2kn\pm\pi$$

$$\Rightarrow x+\frac{\pi}{8} = 2kn+\pi \Rightarrow \boxed{x=2k\pi+\frac{7\pi}{8}}$$

پس معادله دارای ریشهٔ مضاعف $x=2k\pi+\frac{7\pi}{8}$ است.

مثال۳. معادله $tg\frac{x}{2}+\cot gx=1$ را حل کنید.

حل: می‌دانیم که $\cot gx = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{2tg\frac{x}{2}}$ است؛ بنابراین داریم:

$$tg\frac{x}{2} + \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{2tg\frac{x}{2}} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{2tg^2\frac{x}{2} + 1 - tg^2\frac{x}{2} - 2tg\frac{x}{2}}{2tg\frac{x}{2}} = 0$$

$$\Rightarrow tg^2\frac{x}{2} - 2tg\frac{x}{2} + 1 = 0 \Rightarrow (tg\frac{x}{2} -1)^2 = 0 \Rightarrow tg\frac{x}{2} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow tg\frac{x}{2} = 1 = tg\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{x}{2} = kn+\frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{x=2k\pi+\frac{\pi}{2}}$$

با توجه به این که دامنهٔ تعریف تابع $x\ne k\pi$ است، جواب بالا قابل قبول است.

مثال۴. معادله را حل کنید.

حل: می‌دانیم که $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ است؛ بنابراین داریم:

$$3\sin x - 4\sin^3 x + 2\sin x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$-4\sin^3 x+5\sin x - 1 = 0$$

فرض می‌کنیم $\sin x = y$ باشد، خواهیم داشت:

$$-4y^3+5y-1=0 \Rightarrow 4y^3-5y+1=0$$

چون مجموع ضریب‌های این معادله صفر است $(4-5+1=0)$، یکی از جواب‌های این معادله مساوی ۱ است، پس این معادله بر $y-1$ بخش‌پذیر است؛ از آن‌جا خواهیم داشت:

$$4y^3-5y+1 = (y-1)(4y^2+4y-1)=0\Rightarrow$$

$y-1=0\Rightarrow y=1$ و $4y^2+4y-1=0\Rightarrow$

$$y=\frac{-4\pm4\sqrt{2}}{8} = \frac{-1\pm\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{-1+\sqrt{2}}{2} & \text{ق ق} \\ y=\frac{-1-\sqrt{2}}{2} & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$y=1\Rightarrow \sin x = 1 = \sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{x=2k\pi+\frac{\pi}{2}}$$

$$y = \frac{-۱+\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \sin x = \frac{-۱+\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow x = \mathrm{Arc}\sin(\frac{-۱+\sqrt{۲}}{۲})$$

مثال۵ . معادلهٔ $\sin^۴ x + \cos^۴ x = \frac{۵}{۸}$ را حل کنید.

حل : می‌دانیم که $\cos^۲ x = ۱ - \sin^۲ x$ است، بنابراین داریم:

$$\sin^۴ x + (۱-\sin^۲ x)^۲ - \frac{۵}{۸} = ۰ \Rightarrow ۲\sin^۴ x - ۲\sin^۲ x + \frac{۳}{۸} = ۰$$

معادلهٔ بالا یک معادلهٔ دو مجذوری برحسب $\sin x$ است.

بافرض $\sin^۲ x = y$ خواهیم داشت:

$$۲y^۲ - ۲y + \frac{۳}{۸} = ۰ \Rightarrow y = \frac{۱ \pm \sqrt{۱-\frac{۳}{۴}}}{۲} = \frac{۱\pm\frac{۱}{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow y = \frac{۳}{۴} \text{ و } y = \frac{۱}{۴}$$

هر دو جواب قابل قبول‌اند، پس داریم:

$$y = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \sin^۲ x = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \sin x = \pm\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sin\frac{\pi}{۳} \Rightarrow \boxed{x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۳}}$$

$$\text{و } x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۳} \text{ یا } \boxed{x = ۲k\pi + \frac{۲\pi}{۳}}$$

$$\sin x = \frac{-\sqrt{۳}}{۲} = \sin(\frac{-\pi}{۳}) \Rightarrow \boxed{x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۳}}$$

$$\text{و } x = ۲k\pi + \pi - (\frac{-\pi}{۳}) \Rightarrow \boxed{x = ۲k\pi + \frac{۴\pi}{۳}}$$

$$y = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \sin^۲ x = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \sin x = \pm\frac{۱}{۲} \Rightarrow$$

$$\sin x = \frac{۱}{۲} = \sin\frac{\pi}{۶} \Rightarrow \boxed{x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶}}, \boxed{x = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶}}$$

$$\Rightarrow \sin x = -\frac{۱}{۲} = \sin(\frac{-\pi}{۶}) \Rightarrow \boxed{x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۶}}, \boxed{x = ۲k\pi + \frac{۷\pi}{۶}}$$

آزمون ۱ . جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $۲\cos^۲ x - \cos x - ۳ = ۰$ کدام است؟

۱) $k\pi$ ۲) $۲k\pi + \pi$ ۳) $۲k\pi - \frac{\pi}{۲}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{۲}$

کنکور سراسری رشتهٔ علوم تجربی ۱۳۸۱

حل : بافرض $\cos x = y$ داریم:

$$۲y^۲ - y - ۳ = ۰ \Rightarrow y = \frac{۱\pm\sqrt{۱+۲۴}}{۴} = \frac{۱\pm۵}{۴} \Rightarrow y = \frac{۳}{۲} \text{ و } y = -۱$$

جواب $y = \frac{۳}{۲}$ قابل قبول نیست؛ امّا $y = -۱$ قابل قبول است و داریم:

$$y=-۱ \Rightarrow \cos x = -۱ = \cos\pi \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \pi \text{ یا } \boxed{x = ۲k\pi + \pi}$$

پس گزینهٔ (۲) صحیح است.

آزمون ۲ . معادله $tg^۲x - ۲\cot g^۲x = ۱$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ چند ریشه دارد؟

۱)صفر

۲)۲

۳)۴

۴)۸

کنکور دانشگاه آزاد، ۱۳۸۲

حل : با جایگزینی $\cot gx = \frac{۱}{tgx}$ داریم:

$$tg^۲x - \frac{۲}{tg^۲x} = ۱ \Rightarrow tg^۴x - tg^۲x - ۲ = ۰$$

(معادلهٔ دو مجذوری)

فرض می‌کنیم $tg^۲x = y$ باشد، خواهیم داشت:

$$y^۲ - y - ۲ = ۰ \Rightarrow y = -۱ \text{ و } y = ۲$$

جواب $y = -۱$ قابل قبول نیست؛ (زیرا $tg^۲x \neq -۱$)

امّا $y = ۲$ قابل قبول است و داریم:

$$y = ۲ \Rightarrow tg^۲x = ۲ \Rightarrow tgx = \sqrt{۲} \text{ و } tgx = -\sqrt{۲}$$

هریک از معادله‌های $tgx = \sqrt{۲}$ و $tgx = -\sqrt{۲}$ دربازهٔ $[۰,۲\pi]$ دارای دو جواب‌اند، پس معادلهٔ داده شده دارای ۴ جواب متعلق به این بازه است. بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

آزمون ۳. معادله $\cos x+\cos 2x+\cos 3x=3+\sin^2 x$ در بازهٔ $[\pi,5\pi]$ چند ریشه دارد؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۱ ۴) ۲

کنکور دانشگاه آزاد ۱۳۸۱

حل: راه اول. طرف دوم این معادله، حداقل مساوی ۳ است و این در صورتی است که $\sin x=0$ یا $x=k\pi$ باشد؛ امّا در این صورت لازم است $\cos x=\cos 2x=\cos 3x=1$ باشد؛ یعنی داشته باشیم:

$$\begin{cases}\sin x=0\Rightarrow x=k\pi\\ \cos x=1\Rightarrow x=2k\pi\\ \cos 2x=1\Rightarrow 2x=2k\pi\Rightarrow x=k\pi\\ \cos 3x=1\Rightarrow 3x=2k\pi\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}\end{cases}$$

جواب‌های خصوصی مشترک دستگاه بالا در بازهٔ $[\pi\ ,\ 5\pi]$ تنها $x=2\pi$ و $x=4\pi$ است.

بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

راه دوم. می‌دانیم که $\cos 2x=2\cos^2 x-1$، $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$ و $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ است، بنابراین داریم:

$$\cos x+2\cos^2 x-1+4\cos^3 x-3\cos x=3+1-\cos^2 x$$

$$\Rightarrow 4\cos^3 x+3\cos^2 x-2\cos x-5=0$$

با فرض $\cos x=y$ داریم:

$$4y^3+3y^2-2y-5=0$$

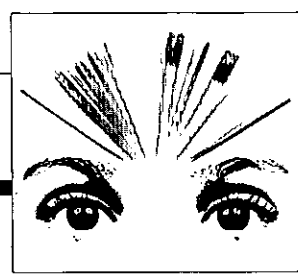
مجموع ضریب‌های این معادله برابر صفر است $(4+3-2-5=0)$؛ بنابراین، معادله بر $y-1$ قابل تقسیم است، از آن‌جا خواهیم داشت:

$$4y^3+3y^2-2y-5=(y-1)(4y^2+7y+5)=0$$

$$\Rightarrow y-1=0\Rightarrow y=1\Rightarrow \cos x=1=\cos 0\Rightarrow \boxed{x=2k\pi}$$

$4y^2+7y+5=0$ و $\Delta=49-80=-31<0$ ریشه ندارد

پس تنها جواب کلی قابل قبول $x=2k\pi$ است که جواب‌های خصوصی آن در بازهٔ $[\pi,5\pi]$ عبارتند از $2\pi,4\pi$؛ بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.



معماهای فکری و منطقی

در یک قضیهٔ جنایی، شش نفر C، F، G، H، M و W درگیرند. شش نفر مزبور، نه لزوماً به همین ترتیب، عبارت‌اند از قربانی، قاتل، شاهد، پلیس، قاضی و جلاّد. حقایق مربوط به قضیه ساده‌اند. قربانی بلافاصله از زخم‌تیری که از فاصلهٔ نزدیک شلیک شده، مُرده است. شاهد، صحنهٔ ارتکاب جنایت را ندیده، اما قسم می‌خورد که صدای مشاجره و سپس تیراندازی را شنیده است.

پس از محاکمه‌ای طولانی، قاتل محکوم به مرگ و به دار آویخته شد.

M هم قربانی، قاتل را می‌شناخته است.

در دادگاه، قاضی از M می‌خواهد ماجرای تیراندازی را تعریف کند.

W آخرین نفری بود که F را زنده دیده است.

پلیس گواهی داد که G را در نزدیکی محلی دستگیر کرده که جسد در آن‌جا پیدا شده است.

H و W هیچ‌گاه ملاقات نکرده‌اند.

نقش هریک در این ملودرام ناخوشایند چه بوده است؟

برای
دانش‌آموزان
دوره‌ی پیش‌دانشگاهی

سری ..+n

احمد قندهاری

۱. برخی از خاصیت‌های سیگما

1. $\sum_{i=m}^{n} a = (n-m+1)a$

2. $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

3. $\sum_{i=1}^{n} ka_i = k\sum_{i=1}^{n} a_i$

4. $\sum_{i=1}^{n} (ka_i + pb_i) = k\sum_{i=1}^{n} a_i + p\sum_{i=1}^{n} b_i$

۲. سری

دنباله‌ی $\{a_n\}: a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ را در نظر می‌گیریم، داریم:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= a_1\\
S_2 &= a_1 + a_2\\
S_3 &= a_1 + a_2 + a_3\\
&\vdots\\
S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n
\end{aligned}
$$

در این صورت، دنباله‌ی $\{S_n\}: S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$ حاصل از مجموع‌های جزئی را سری گوییم و S_n را مجموع جزئی nام سری یا به طور خلاصه مجموع سری می‌گوییم. اگر دنباله‌ی $\{S_n\}$ به عدد حقیقی s همگرا باشد، می‌گوییم سری همگراست و s حدّ دنباله $\{S_n\}$ را مجموع سری می‌نامیم و می‌نویسیم:

$$s = \lim_{n\to\infty} S_n$$

سری نامتناهی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همان $\lim_{n\to\infty} S_n$ است.

اگر دنباله‌ی $\{S_n\}$ به عدد حقیقی s همگرا باشد، می‌گوییم سری همگرا و $s = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

چنانچه دنباله‌ی $\{S_n\}$ واگرا باشد، می‌گوییم سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست.

تذکر: در سری‌ها آن‌چه که مهم است، همگرایی یا واگرایی سری است.

۳. قاعده‌ی ادغام (تلسکوپی)

$$\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(f(k) - f(k+1)\right) = f(1) - f(n+1)}$$

مثال. $f(k) = \frac{2}{k+1}$

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{k+1} - \frac{2}{k+2}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(f(k) - f(k+1)\right)\\
&= f(1) - f(n+1) = 1 - \frac{2}{n+2}
\end{aligned}
$$

۴. تجزیه کسرها

اگر کسری به صورت $\frac{P(x)}{(ax-b)(cx-d)}$ داشته باشیم و

$$\sum_{i=۱} i = ۱+۲+۳+۴+$$

بخواهیم آن را به کسرهای ساده‌تر تبدیل کنیم، می‌نویسیم:

$$\frac{P(x)}{(ax-b)(cx-d)}=\frac{A}{ax-b}+\frac{B}{cx-d}$$

پس از مخرج مشترک گیری در سمت راست تساوی بالا، صورت‌ها را متحد قرار می‌دهیم؛ یعنی:

ضریب x دو طرف مساوی با یکدیگر و عددهای ثابت دو طرف مساوی با یکدیگر قرار می‌دهیم.

مثال. کسر $\frac{۱}{(k+۲)(k+۳)}$ را تجزیه کنید.

$$\frac{۱}{(k+۲)(k+۳)}=\frac{A}{k+۲}+\frac{B}{k+۳}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{(k+۲)(k+۳)}=\frac{k(A+B)+۳A+۲B}{(k+۲)(k+۳)}$$

$$k(A+B)+۳A+۲B\equiv ۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=۰ \\ ۳A+۲B=۱ \end{cases} \Rightarrow A=۱ \;,\; B=-۱$$

پس:

$$\frac{۱}{(k+۲)(k+۳)}=\frac{۱}{k+۲}-\frac{۱}{k+۳}$$

راه کوتاه تجزیهٔ کسرها: دربارهٔ مثال بالا، راه کوتاه بیان می‌شود.

محاسبهٔ A: مخرج A را از سمت چپ تساوی بر می‌داریم و در بقیهٔ کسر به جای k، (۲-) را قرارمی‌دهیم.

محاسبهٔ B: مخرج B را از سمت چپ تساوی برمی‌داریم و در بقیهٔ کسر به جای k، (۳-) را قرار می‌دهیم.

۵. راه‌حل مسائل سری

معمولاً برای یافتن مقدار سری، مراحل زیر را انجام می‌دهیم.

۱. عبارت داخل $\sum$ را با استفاده از تجزیه کسرها به صورت تفاضل در می‌آوریم.

۲. S_n را تشکیل می‌دهیم.

۳. $f(k)$ و $f(k+۱)$ را می‌سازیم.

۴. قاعدهٔ ادغام را برای S_n به کار می‌بریم.

۵. حدّ S_n را وقتی $n\to\infty$ می‌یابیم.

مسألهٔ ۱. مقدار سری زیر را بیابید.

$$\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۲}{(۲k+۳)(۲k+۵)}$$

حل:

$$\frac{۲}{(۲k+۳)(۲k+۵)}=\frac{A}{۲k+۳}+\frac{B}{۲k+۵}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A=۱ \\ B=-۱ \end{cases}$$

$$\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۲}{(۲k+۳)(۲k+۵)}=\sum_{k=۱}^{\infty}\left(\frac{۱}{۲k+۳}-\frac{۱}{۲k+۵}\right),$$

$$S_n=\sum_{k=۱}^{\infty}\left(\frac{۱}{۲k+۳}-\frac{۱}{۲k+۵}\right)\;,\; f(k)=\frac{۱}{۲k+۳}$$

$$S_n=\sum_{k=۱}^{n}\left(f(k)-f(k+۱)\right)\overset{\text{قاعدهٔ ادغام}}{\Rightarrow} S_n=f(۱)-f(n+۱)$$

$$S_n=\left(\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۲n+۵}\right)$$

مقدار سری $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2n+5}\right)=\frac{1}{5}$

مسألهٔ ۲. مقدار سری زیر را بیابید.

$$A=\sum_{k=1}^{\infty}\log\frac{k^2+2k}{(k+1)^2}$$

حل:
$$A=\sum_{k=1}^{\infty}\log\frac{k(k+2)}{(k+1)(k+1)}=\sum_{k=1}^{\infty}\log\frac{\frac{k}{k+1}}{\frac{k+1}{k+2}}$$

$$A=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\log\frac{k}{k+1}-\log\frac{k+1}{k+2}\right)$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\log\frac{k}{k+1}-\log\frac{k+1}{k+2}\right),\quad f(k)=\log\frac{k}{k+1}$$

قاعده ادغام
$$S_n=\sum_{k=1}^{\infty}\big(f(k)-f(k+1)\big)=f(1)-f(n+1)$$

$$S_n=\left(\log\frac{1}{2}-\log\frac{n+1}{n+2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\log\frac{1}{2}-\log\frac{n+1}{n+2}\right)=\log\frac{1}{2}-0=\log\frac{1}{2}$$

مقدار سری

مسألهٔ ۳. مقدار سری زیر را بیابید.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(k+2)(k+3)(k+4)}$$

حل:
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+3}\left(\frac{2}{(k+2)(k+4)}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+3}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+4}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(k+2)(k+3)}-\frac{1}{(k+3)(k+4)}\right)$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(k+2)(k+3)}-\frac{1}{(k+3)(k+4)}\right),$$

$$f(k)=\frac{1}{(k+2)(k+3)}$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{\infty}\big(f(k)-f(k+1)\big)=f(1)-f(n+1)$$
$$=\frac{1}{12}-\frac{1}{(n+3)(n+4)}$$

مقدار سری $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{(n+3)(n+4)}\right)=\frac{1}{12}$

۶. سری هندسی

سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_1r^{n-1}=a_1+a_1r+a_1r^2+\ldots+a_1r^{n-1}+\ldots$ را سری هندسی گوییم.

در این سری داریم: $S_n=\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

الف. اگر $|r|<1$، سری همگرا و مقدار آن برابر است با:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{a_1}{1-r}}$$

ب. اگر $|r|\geq 1$، سری واگرا است.

مسألهٔ ۴. مقدار سری $A=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^{2n-1}}{2^{4n-1}}$ را بیابید.

حل:
$$A=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(\pi^{2n})}{\pi(2^{4n})}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\times\frac{(\pi^2)^n}{(2^4)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\times\frac{(\pi^2)^n}{16^n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\times\frac{\pi^2}{16}\times\left(\frac{\pi^2}{16}\right)^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{8}\left(\frac{\pi^2}{16}\right)^{n-1}$$

مقدار سری
$$=\frac{a_1}{1-r}=\frac{\frac{\pi}{8}}{1-\frac{\pi^2}{16}}=\frac{2\pi}{16-\pi^2}$$

۷. شرط لازم همگرایی سری

شرط لازم همگرایی سری $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ آن است که:

$$\lim_{k=\infty}a_k=0$$

مثال. سری‌های $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{100}$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{2n-1}$ واگرا می‌باشند؛ زیرا شرط لازم همگرایی در آن‌ها برقرار نیست.

۸. سری همساز (هارمونیک)

سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ را سری همساز (هارمونیک) گوییم.

با این‌که شرط لازم همگرایی برقرار است، ولی سری واگرا است.

۹. سری P

سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^P}$ را سری P گوییم.

اگر $P>1$، آن‌گاه سری همگرا و اگر $P\le 1$، آن‌گاه سری واگراست، مثال. سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ همگرا و سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ واگراست.

۱۰. نکات سری

۱. سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty}ka_n$، $k\in R$ هم‌رفتارند؛ یعنی هر دو همگرا یا هر دو واگرا هستند.

۲. مجموع دو سری همگرا، یک سری همگراست.

۳. مجموع یک سری همگرا و یک سری واگرا، یک سری واگرا است.

۴. داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=0!+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots=e\approx 2.72$$

مثال:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}=e-1 \quad , \quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}=e-2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}=e \quad , \quad \sum_{n=6}^{\infty}\frac{1}{(n-4)!}=e-2$$

۵. آزمون مقایسه

اگر سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ سری‌هایی با جمله‌های مثبت باشند و از (n)ای به بعد داشته باشیم: $0<a_n\le b_n$

الف. اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ همگرا باشد، آن‌گاه سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ نیز همگراست.

ب. اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ واگرا باشد، آن‌گاه سری $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ نیز واگرا است.

❖ **آزمون ۱.** سری $\sum_{n=3}^{\infty}\tan\frac{\pi}{n}$ ...

۱) به صفر همگراست. ۲) به ۱ همگراست.
۳) به tan۱ همگراست. ۴) واگراست.

حل: گزینهٔ (۴) صحیح است.

$$\forall n\in N, n\ge 3\ ;\ \tan\frac{\pi}{n}>\frac{\pi}{n}>0$$

سری $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\pi}{n}$ واگراست $\Rightarrow$ سری همساز $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\pi}{n}=\pi\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}$

در نتیجه بنا به قسمت (ب) نکتهٔ ۵ (نکات آزمون مقایسه) سری $\sum_{n=3}^{\infty}\tan\frac{\pi}{n}$ نیز واگراست.

❖ **آزمون ۲.** سری $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{2}{n})$ ...

۱) همگرا به صفر است. ۲) همگرا به (۱) است.
۳) فقط همگراست. ۴) واگراست.

حل: گزینهٔ (۳) صحیح است.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{2}{n})=\sum_{n=1}^{\infty}2\sin^2\frac{1}{n}=2\sum_{n=1}^{\infty}\sin^2\frac{1}{n}$$

$$\forall n\in N, 0<\sin\frac{1}{n}<\frac{1}{n}\ \Rightarrow\ 0<\sin^2\frac{1}{n}<\frac{1}{n^2}$$

سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ سری P است و همگراست پس سری $2\sum_{n=1}^{\infty}\sin^2\frac{1}{n}$ نیز همگراست؛ بنا به قسمت (الف) نکته ۵ (نکات آزمون مقایسه).

❖ **آزمون ۳**. حاصل $\sum_{10}^{15}\sum_{5}^{9}\sum_{2}^{7} a$ کدام است؟

۱) $132a$ ۲) $80a$

۳) $182a$ ۴) $184a$

حل: گزینهٔ (۲) صحیح است.

$$\sum_{10}^{15}\sum_{5}^{9}\sum_{2}^{7} a = \sum_{10}^{15}\sum_{5}^{9}(7-2+1)a = \sum_{10}^{15}\sum_{5}^{9} 6a =$$

$$\sum_{10}^{15}(9-5+1)(6a) = \sum_{10}^{15} 30a = (15-10+1)(30a) = 180a$$

❖ **آزمون ۴**. حاصل سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+2}{(n+3)!}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{48}$ ۲) $\frac{1}{36}$

۳) $\frac{1}{24}$ ۴) $\frac{1}{6}$

حل: گزینهٔ (۳) صحیح است.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n+3)-1}{(n+3)!} = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{(n+2)!}-\frac{1}{(n+3)!}\right)$$

$$f(k) = \frac{1}{(k+2)!}$$

$$S_n = \sum_{n=2}^{n}\left(\frac{1}{(n+2)!}-\frac{1}{(n+3)!}\right) = f(2)-f(n+1) = \frac{1}{4!}-\frac{1}{(n+3)!}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{(n+3)!}\right) = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$$

❖ **آزمون ۵**. مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)^2}$ به کدام عدد نزدیک‌تر است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) ۱

۳) ۲ ۴) ۳

حل: گزینهٔ (۱) صحیح است.

$$\forall n\in N \quad 0 < \frac{1}{(n+2)(n+3)^2} < \frac{1}{(n+2)(n+3)},$$

$$\frac{1}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}$$

با فرض $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$ داریم:

$$S_n = \sum_{n=1}^{n}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right) = f(1)-f(n+1)$$

$$S_n = \frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}, \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{3}$$

پس مقدار سری این آزمون از $\frac{1}{3}$ کم‌تر است؛ بنابراین مقدار آن با این گزینه‌ها به $\frac{1}{3}$ نزدیک‌تر است.

❖ **آزمون ۶**. حاصل سری $A = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

حل: گزینهٔ (۴) صحیح است.

$$A = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)+\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$

بنابر قاعده ادغام $= 1-0+\frac{1}{2}-0 = \frac{3}{2}$

❖ آزمون ۷. مقدار سری $\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{۱}{k}-\frac{۱}{k+۱}\right)}{\cos\frac{۱}{k}.\cos\frac{۱}{k+۱}}$ کدام است؟

۱) $\tan ۱$

۲) $\tan ۲$

۳) $\tan\frac{۱}{۲}$

۴) $\tan\frac{۲}{۳}$

حل: گزینهٔ (۱) صحیح است.

$$=\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{\sin\frac{۱}{k}\cos\frac{۱}{k+۱}-\cos\frac{۱}{k}.\sin\frac{۱}{k+۱}}{\cos\frac{۱}{k}.\cos\frac{۱}{k+۱}}$$

$$=\sum_{k=۱}^{\infty}\left(\tan\frac{۱}{k}-\tan\frac{۱}{k+۱}\right)=\tan ۱-۰=\tan ۱$$

از قاعدهٔ ادغام استفاده شده است.

❖ آزمون ۸. مقدار سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲^{n-۱}+۳^{n}}{۴^{n+۱}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۸}$

۲) $\frac{۵}{۸}$

۳) $\frac{۳}{۸}$

۴) $\frac{۱}{۸}$

حل: گزینهٔ (۱) صحیح است.

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲^{n-۱}}{۴^{n+۱}}+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۳^{n}}{۴^{n+۱}}=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{۱۶}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{n-۱}+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۳}{۱۶}\left(\frac{۳}{۴}\right)^{n-۱}$$

$$=\frac{\frac{۱}{۱۶}}{۱-\frac{۱}{۲}}+\frac{\frac{۳}{۱۶}}{۱-\frac{۳}{۴}}=\frac{۱}{۸}+\frac{۳}{۴}=\frac{۷}{۸}$$

❖ آزمون ۹. حاصل سری $\sum_{n=۰}^{\infty}x^{n}$ با شرط $|x|<۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{x}$

۲) $\frac{۱}{x-۱}$

۳) $x-۱$

۴) $\frac{۱}{۱-x}$

حل: گزینهٔ (۶) صحیح است. سری هندسی است با $|r|<۱$؛ پس:

$$\sum_{n=۰}^{\infty}x^{n}=۱+x+x^{۲}+\cdots+x^{n}+\cdots=\frac{a_{۱}}{۱-r}=\frac{۱}{۱-x}$$

❖آزمون ۱۰. حاصل سری $\sum_{n=۰}^{\infty}n\left(\frac{۱}{۳}\right)^{n-۱}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳n}{۲}$

۲) $\frac{۹}{۴}$

۳) $\frac{۷}{۴}$

۴) $\frac{۵}{۴}$

حل: گزینهٔ (۲) صحیح است. در آزمون (۹) داشتیم:

$$|x|<۱\ ،\ \sum_{n=۰}^{\infty}x^{n}=\frac{۱}{۱-x}$$

اگر از دو طرف تساوی نسبت به x مشتق بگیریم، خواهیم داشت:

$$\sum_{n=۰}^{\infty}nx^{n-۱}=\frac{۱}{(۱-x)^{۲}}\Rightarrow\sum_{n=۰}^{\infty}n\left(\frac{۱}{۳}\right)^{n-۱}=\frac{۱}{\left(۱-\frac{۱}{۳}\right)^{۲}}=\frac{۱}{\frac{۴}{۹}}=\frac{۹}{۴}$$

❖آزمون ۱۱. حاصل سری $\sum_{n=۱}^{\infty}(\sqrt{۵}+۲)(\sqrt{۵}-۲)^{n}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}$

۲) $\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}$

۳) $\frac{۳-\sqrt{۵}}{۴}$

۴) $\frac{۳+\sqrt{۵}}{۴}$

حل: گزینهٔ (۴) صحیح است.

$$\sum_{n=۱}^{\infty}(\sqrt{۵}-۲)(\sqrt{۵}+۲)(\sqrt{۵}-۲)^{n-۱}=\sum_{n=۱}^{\infty}(۱)(\sqrt{۵}-۲)^{n-۱}$$

سری هندسی است با $|r|<۱$،

$$= \frac{a_۱}{۱-r} = \frac{۱}{۱-\sqrt{۵}+۲} = \frac{۱}{۳-\sqrt{۵}}$$

$$= \frac{۱}{۳-\sqrt{۵}} \times \frac{۳+\sqrt{۵}}{۳+\sqrt{۵}} = \frac{۳+\sqrt{۵}}{۴}$$

❖آزمون ۱۲ . حاصل سری $\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{n^۲}{n!}$ کدام است؟

۱) $۲e-۱$ ۲) $۲e-۲$

۳) $۲e-۳$ ۴) $۲e-۵$

حل : گزینهٔ (۱) صحیح است.

$$\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{n^۲}{n!} = \sum_{n=۲}^{\infty} \frac{n}{(n-۱)!} = \sum_{n=۲}^{\infty} \frac{(n-۱)+۱}{(n-۱)!}$$

$$= \sum_{n=۲}^{\infty} \left(\frac{۱}{(n-۲)!} + \frac{۱}{(n-۱)!} \right)$$

$$= \sum_{n=۲}^{\infty} \frac{۱}{(n-۲)!} + \sum_{n=۲}^{\infty} \frac{۱}{(n-۱)!} = e + e - ۱ = ۲e - ۱$$

نکتهٔ (۴) را ببینید.

❖ آزمون ۱۳ . حاصل سری $A=\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n+۱}{(n+۲)!}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

حل : گزینهٔ (۲) صحیح است.

$$A=\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n+۱}{(n+۲)!} = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(n+۲)-۱}{(n+۲)!} = \sum_{n=۱}^{\infty} \left(\frac{۱}{(n+۱)!} - \frac{۱}{(n+۲)!} \right) ,$$

$$f(k) = \frac{۱}{(k+۱)!}$$

از قاعدهٔ ادغام استفاده شده است. $A = \frac{۱}{۲!} - ۰ = \frac{۱}{۲}$

❖ آزمون ۱۴ . اگر سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۵}{(۱-۳x)^k}$ همگرا باشد، حدود x کدام است؟

۱) $|x|<۱$ ۲) $۰<x<\frac{۲}{۳}$

۳) $x>\frac{۲}{۳}$ یا $x<۰$ ۴) $x>\frac{۱}{۲}$ یا $x<۰$

حل : گزینه (۳) صحیح است.

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۵}{(۱-۳x)^k} \; ; \; r = \frac{۱}{۱-۳x}$$

برای آن که سری همگرا باشد، باید $|r|<۱$ یا $\frac{۱}{|۱-۳x|}<۱$

$$\Rightarrow |۱-۳x|>۱ \Rightarrow |۳x-۱|>۱ \Rightarrow \begin{cases} ۳x-۱>۱ \Rightarrow x>\frac{۲}{۳} \\ \text{یا} \\ ۳x-۱<-۱ \Rightarrow x<۰ \end{cases}$$

❖ آزمون۱۵ . حاصل سری زیر کدام است؟

$$A=\sum_{k=۱}^{\infty} (-۱)^{k+۱} \left(\frac{۱}{k+۵} + \frac{۱}{k+۴} \right)$$

۱) $-\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$

۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $-\frac{۱}{۶}$

حل : گزینه (۲) صحیح است.

$$(-۱)^{k+۱} \left(\frac{۱}{k+۵} + \frac{۱}{k+۴} \right) = \frac{(-۱)^{k+۱}}{k+۵} + \frac{(-۱)^{k+۱}}{k+۴}$$

$$= \frac{(-۱)^{k+۱}}{k+۵} - \frac{(-۱)^{k}}{k+۴} = -\left(\frac{(-۱)^{k}}{k+۴} - \frac{(-۱)^{k+۱}}{k+۵} \right)$$

$$A=\sum_{k=۱}^{\infty} (-۱)^{k+۱} \left(\frac{۱}{k+۵} + \frac{۱}{k+۵} \right) = -\sum_{k=۱}^{\infty} \left(\frac{(-۱)^{k}}{k+۴} - \frac{(-۱)^{k+۱}}{k+۵} \right) ,$$

$$f(k) = \frac{(-۱)^k}{k+۴}$$

بنا به قاعدهٔ ادغام. $A = -\left(\frac{-۱}{۵} - ۰ \right) = \frac{۱}{۵}$

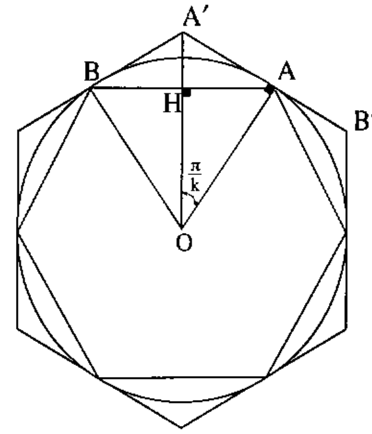
رحیم خیرالله‌زاده،
دبیر ریاضی از
ناحیه‌ی ۲ شهرری

روش ارشمیدس برای محاسبهٔ عدد π

محاسبهٔ منطقی و به روش هندسی برای محاسبهٔ عدد π، به وسیلهٔ ارشمیدس ریاضیدان بزرگ یونانی در حدود ۲۲۰۰ سال پیش ارائه شده است. این روش براساس چندضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی است. در واقع، محیط و مساحت دایره بین محیط و مساحت دو چند ضلعی منتظم قرار می‌گیرد و با افزایش تعداد اضلاع چندضلعی‌ها و محاسبهٔ محیط و مساحت آن‌ها می‌توان با تقریب دلخواه، عدد π را محاسبه کرد.

در این جا ضمن توضیح این روش به کمک یک برنامهٔ ساده به زبان Qbasic، مقدار π را تا ۶ رقم اعشار محاسبه می‌کنیم (در حالت معمولی در Qbasic اعداد اعشاری بین ۶ تا ۸ رقم محاسبه می‌شوند). مطابق (شکل ۱)، دایره‌ای به شعاع واحد در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که تعداد اضلاع این چندضلعی‌های منتظم محیطی و محاطی برابر k باشند، که در آن $k = 3 \times 2^{(n-1)}$ و n یک عدد طبیعی است. نصف محیط‌های دو چندضلعی منتظم محیطی و محاطی را به ترتیب با a_n و b_n نشان می‌دهیم. به ازای هر مقدار n یک مقدار برای k به دست می‌آید.

مطابق شکل، در مثلث می‌توان نوشت:



(شکل ۱)

$$\Delta OAA':\tan\left(\frac{\pi}{k}\right)=\frac{AA'}{OA}=AA'$$

$$\text{محیط } k \text{ ضلعی منتظم محیطی} = P'_n = k(2AA') = 2k\tan\left(\frac{\pi}{k}\right)$$

$$a_n=\frac{P'_n}{2}=k\tan\left(\frac{\pi}{k}\right)$$

$$\boxed{a_n=k\tan\left(\frac{\pi}{k}\right)} \qquad (1)$$

به همین ترتیب، در مثلث OAH داریم:

$$\Delta OAH:\sin\left(\frac{\pi}{k}\right)=\frac{AH}{OA}=AH$$

$$\text{محیط } k \text{ ضلعی منتظم محاطی} = P_n = (2AH)k = 2k\sin\left(\frac{\pi}{k}\right)$$

$$b_n=\frac{P_n}{2}\Rightarrow b_n=k\sin\left(\frac{\pi}{k}\right)$$

$$\boxed{b_n=k\sin\left(\frac{\pi}{k}\right)} \qquad (2)$$

حال نشان می‌دهیم: $b_n<\pi<a_n$، برای این کار می‌توان نوشت:

$$P_n < \text{محیط دایره} < P'_n$$

یا:

$$b_n < \text{نصف محیط دایره} < a_n$$

$$b_n<\pi R<a_n$$

و چون $R=1$، پس: $\boxed{b_n<\pi<a_n}$

حال به سادگی دیده می‌شود که با تبدیل n به n+1 در فرمول k، مقدار k به 2k تبدیل می‌شود؛ یعنی:

$$n\rightarrow n+1\equiv k\rightarrow 2k$$

که با اعمال این نکته در فرمول‌های (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$a_{(n+1)}=2k\tan\left(\frac{\pi}{2k}\right) \qquad (3)$$

و

$$b_{(n+1)}=2k\sin\left(\frac{\pi}{2k}\right) \qquad (4)$$

اکنون دو رابطهٔ بازگشتی زیر را که در واقع اساس محاسبهٔ عدد π در این روش است، ثابت می‌کنیم:

$$a_{(n+1)}=\frac{2(a_n)(b_n)}{(a_n+b_n)} \qquad (I)$$

$$b_{(n+1)}=\sqrt{(a_{(n+1)}b_n)} \qquad (II)$$

اثبات (I):

$$a_n=k\tan\left(\frac{\pi}{k}\right)\Rightarrow\frac{1}{a_n}=\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{k}\right)}$$

$$b_n=k\sin\left(\frac{\pi}{k}\right)\Rightarrow\frac{1}{b_n}=\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{k}\right)}$$

که اگر دو رابطهٔ اخیر را با هم جمع کرده و با استفاده از فرمول‌های مثلثاتی و رابطهٔ (۳)، به سادگی نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}=\frac{2}{a_{(n+1)}}$$

که پس از ساده کردن به فرمول (I) می‌رسیم.

اثبات (II): از ضرب دو رابطهٔ (۲) و (۳) خواهیم داشت:

$$(a_{(n+1)}\times b_n)=2k\tan\left(\frac{\pi}{2k}\right)\times k\sin\left(\frac{\pi}{k}\right)$$

$$\Rightarrow(a_{(n+1)}\times b_n)=4k^2\times\sin^2\frac{\pi}{2k}=(b_{(n+1)})^2$$

حال جدولی تشکیل داده و چهار مقدار n,k,a_n,b_n را محاسبه می‌کنیم.

برای این کار، از یک برنامهٔ ساده به زبان Qbasic استفاده می‌کنیم.

البته به ازای $n=1$ خواهیم داشت $k=3$ و نصف محیط‌های سه‌ضلعی منتظم (مثلث متساوی‌الاضلاع) محیطی

و محاطی به سادگی به دست می‌آیند، که در نوشتن برنامه به عنوان مقادیر اولیه برای شروع برنامه لازم است.

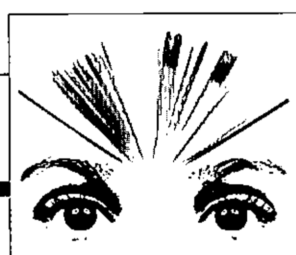
$$n=۱ \Rightarrow k=۳ \Rightarrow a_۱ = ۳\tan\left(\frac{\pi}{۳}\right) \Rightarrow a_۱ = ۳\sqrt{۳}$$

$$b_۱ = ۳\sin\left(\frac{\pi}{۳}\right) = ۳\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

```
DIM a(1000), b(1000)
a(1) = (3 * SQR(3))
b(1) = (0.5 * a(1))
CLS
FOR n = 1 TO 15
K = 3 * 2 ^ (n-1)
a(n+1) = (2 * a(n) * b(n))/(a(n)+b(n))
b(n+1) = SQR(a(n+1)*b(n))
PRINT "n ="; n, "k ="; K, "a(n) ="; (a(n)),
"b(n)="; (b(n))
LPRINT "K ="; K, "n ="; n, "a(n)="; (a(n)),
"b(n) ="; (b(n))
NEXT n
STOP
```

k = 3	n = 1	a(n) = 5.196152	b(n) = 2.598076
k = 6	n = 2	a(n) = 3.464102	b(n) = 3
k = 12	n = 3	a(n) = 3.21539	b(n) = 3.105829
k = 24	n = 4	a(n) = 3.15966	b(n) = 3.132629
k = 48	n = 5	a(n) = 3.146086	b(n) = 3.13935
k = 96	n = 6	a(n) = 3.142715	b(n) = 3.141032
k = 192	n = 7	a(n) = 3.141873	b(n) = 3.141453
k = 384	n = 8	a(n) = 3.141663	b(n) = 3.141558
k = 768	n = 9	a(n) = 3.14161	b(n) = 3.141584
k = 1536	n = 10	a(n) = 3.141597	b(n) = 3.14159
k = 3072	n = 11	a(n) = 3.141594	b(n) = 3.141592
k = 6144	n = 12	a(n) = 3.141593	b(n) = 3.141592
k = 12288	n = 13	a(n) = 3.141593	b(n) = 3.141592
k = 24576	n = 14	a(n) = 3.141592	b(n) = 3.141592
k = 49152	n = 15	a(n) = 3.141592	b(n) = 3.141592

معماهای فکری و منطقی



یک عصر زیبای بهاری B، E و T با همسرانشان، که نام‌هاشان نه لزوماً به همین ترتیب، عبارت‌اند از: C، H و M به زمین گلف رفتند و به اتفاق هجده سوراخ، گلف بازی کردند.

M، H، G و E به ترتیب، ۱۰۶، ۱۰۲، ۱۰۰ و ۹۴ ضربه زدند. B و T و ۹۸ و ۹۶ ضربه زدند؛ اما برای مدتی نتوانستند مشخص کنند کدام ضربه‌ها را زده‌اند؛ زیرا نام‌های خودشان را بر تابلوی امتیازات نگذاشته بودند.

زمانی که بازیکنان سرانجام کارت‌هاشان را بررسی کردند، مشخص شد دو زوج دارای امتیاز یکسان‌اند.

زن E، زن B را شکست داد.

۲

⚙ ترجمه:
غلامرضا یاسی‌پور

نظریهٔ مقدماتی مجموعه‌ها

روش‌های اثبات

بعضی از روش‌های اثبات

در شمارهٔ قبل مجله قسمت اول این مقاله با اظهاراتی روبه‌رو شدیم که به عنوان قضیه (یا لم[1] یا نتیجه[2]) توصیف شده‌بودند و پس از آن‌ها توضیحاتی است که مدعی «اثبات» بودن هستند. دراین مورد، درست همان‌گونه که رهیافتی شهودی را به مفهوم مجموعه پذیرفتیم، شهودمان را آزاد می‌گذاریم تا به این موضوع مهم که توضیح داده شده، منطقاً پذیرفتنی است یا خیر رهنمون شود. تنظیم مفهوم پذیرفتنی بودن به حوزهٔ بسیار دوری، موسوم به منطق‌نمادی[3] می‌کشد. از طرف دیگر، روش‌های معدودی موجودند که غالباً در تشکیل اثبات‌ها به کار می‌روند، و از آن‌جا که گاهی برای دانش‌آموز اشکال تولید می‌کنند، توجه به آن‌ها شاید سودمند باشد. این کار را از طریق چند مثال نقض[4]، که برای ملاحظهٔ اصل منطقی‌ای که در آن‌هاست، به قدر کفایت ساده‌اند، انجام می‌دهیم.

به عنوان نمونه، چگونگی اثبات اظهار زیر را درنظر می‌گیریم:

(۱) اگر x عددی صحیح و فرد باشد، آن‌گاه x^2 نیز عددی صحیح و فرد است.

احتمالاً خواهید گفت: «بافرض فرد بودن x به ازای $n \in Z$ مناسبی بنویسیم:

در این صورت: $x = 2n+1$

$$x^2 = (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$$

که واضحاً فرد است.»

در این‌جا مستقیماً از این فرض که x فرد است، به این نتیجه که x^2 فرد است، رفته‌ایم. چنین اثباتی را **اثبات مستقیم** می‌نامیم.

برای مثال دوم، اظهار زیر را درمورد عددهای صحیح x و y در نظر می‌گیریم:

(ii) اگر $x^2 \neq y^2$، آن‌گاه $x \neq y$ (۱)

اثبات مستقیم ممکن است: از $x^2 \neq y^2$، نتیجه می‌گیریم که:

$$(x-y)(x+y) \neq 0$$

نتیجه می‌شود که: $x-y \neq 0$ و دراین صورت $x \neq y$.

اما اثباتی که احتمالاً اغلب شما خواهید داد چنین است :

اگر $x = y$ ، آن‌گاه $x^2 = y^2$. (۲)، تناقض

و از آن نتیجهٔ مورد نظر به دست می‌آید .

رهیافت فوق، با استفاده از روش **اثبات غیر مستقیم**[5]، چند نکتهٔ منطقی را آشکار می‌کند . دو نکته‌ای که می‌خواهیم توجه شما را به آن‌ها جلب کنیم، به ساده‌ترین صورت بر حسب عبارت‌های منطقی بررسی می‌شوند . فرض می‌کنیم A و B ، به ترتیب، به جای «$x^2 \neq y^2$» و «$x \neq y$» قرار داشته باشند . باز فرض می‌کنیم $\sim A$ و $\sim B$ نقیض‌ها[6]ی آن‌ها را نمایش دهند . به این ترتیب $\sim A$ عبارت است از «$x^2 = y^2$» و $\sim B$ عبارت از «$x = y$» . در این صورت، (۱) اظهار زیر است :

اگر A ، آن‌گاه B . این اظهار را به طور مختصر به صورت $A \Rightarrow B$ نوشته به صورت «A مستلزم B است» می‌خوانیم . از طرف دیگر (۲)، که درظاهر منطقاً با (۱) هم ارز است، اظهار $\sim A \Rightarrow \sim B$ است . در واقع، درمنطق مقدماتی، نشان داده می‌شود که اظهارهای $A \Rightarrow B$ و $\sim B \Rightarrow \sim A$ نیز جفت $B \Rightarrow A$ و $\sim A \Rightarrow \sim B$ ، هم ارزند . آنچه که واضحاً (در حالت کلی) هم ارز نیستند، اظهارهای $A \Rightarrow B$ و $B \Rightarrow A$ اند . [اظهار اخیر، برحسب مثال ملموسمان به صورت $x \neq y \Rightarrow x^2 \neq y^2$ خوانده می‌شود، که آشکارا دروغ است؛ در حالی که (۱) (آشکارا) راست است .] اظهار $B \Rightarrow A$ به عکس[7] اظهار $A \Rightarrow B$ موسوم است .

به طور خلاصه : برای اثبات این که نتیجهٔ اظهار شدهٔ B از فرض A حاصل می‌شود، شخص می‌تواند مستقیماً عمل کند یا به طور هم ارز، ثابت کند $\sim A$ از فرض B استنتاج پذیر است . این نوع اثبات غیر مستقیم به **اثبات با استفاده از عکس نقیض**[8] موسوم است و $\sim B \Rightarrow \sim A$ **عکس نقیض**[9] $A \Rightarrow B$ است .

روش غالباً پذیرفته شدهٔ دیگر، **برهان خلف**[10] یا **اثبات بااستفاده از تناقض**[11] است . دراین مورد نشان می‌دهیم نقیض نتیجهٔ مورد نظر به تناقض (یا باطل بودن[12]) می‌انجامد . شاید اولین استفاده از این روش، در اثبات قضیهٔ زیر بوده باشد :

قضیه . اگر $x \in \mathbf{R}$ و $x^2 = 2$ ، آن‌گاه $x \notin \mathbf{Q}$ ؛ به عبارت دیگر، $\sqrt{2}$ عددی گویا نیست .

اثبات . فرض می‌کنیم $\sqrt{2} \in \mathbf{Q}$ ، بنابراین می‌توان نوشت $x=m/n$ ، که درآن $m, n \in \mathbf{Z}$ و $n \neq 0$.

واضحاً می‌توان فرض کرد m ، n در $\mathbf{Z}$ مقسوم علیه مشترک بزرگ‌تر از ۱ ندارند؛ مقسوم‌علیه مشترکی چنین را می‌توان پیش از آغاز کار حذف کرد . در این صورت از $x=m/n$ نتیجه می‌گیریم $m^2 / n^2 = 2$ ؛ یعنی :

$$m^2 = 2n^2$$

نتیجه می‌گیریم m^2 و درنتیجه m ، زوج است . با نوشتن $m = 2l$ به دست می‌آوریم :

$$4l^2 = 2n^2$$

یعنی $n^2 = 2l^2$. اما دراین صورت ـ و در نتیجه n ، زوج است . به این ترتیب، فرضمان، یعنی $\sqrt{2} = x = m / n \in \mathbf{Q}$ ، به این تناقض (باطل بودن) انجامیده است که عددهای m و n بدون مقسوم‌علیه مشترک بزرگ‌تر از ۱ ، هر دو، زوج‌اند . در نتیجه $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.

اکنون به بررسی دو اظهار زیر می‌پردازیم .

(i) هر عدد صحیح و مثبت، مجموع مربع‌های چهار عدد صحیح (مثبت) است .

(ii) هر عدد صحیح و مثبت، مجموع مکعب‌های هشت عدد صحیح و مثبت است .

بررسی این موضوع که(i) به طور قطع به ازای هر مثبت $n \leq 100$ برقرار است، خیلی مشکل نیست . به عنوان مثال :

$$75 = 8^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2$$

$$86 = 9^2 + 2^2 + 1^2 + 0^2$$

اما باید توجه داشته باشیم که (i) حتی اگر به ازای جمیع عددهای صحیح و مثبت، مثلاً تا 10^{50000} نیز بررسی شود، همچنان به **ازای هر عدد صحیح و مثبت** n به اثبات نرسیده است؛ در واقع، با توجه به تمام این اطلاعات، باز هم ممکن است (i) به ازای $n = 10^{50000} + 1$ برقرار نباشد . آری، برای

اثبات (i) باید اثباتی به دست دهیم که جمیع عددهای صحیح و مثبتn را بپوشاند.

درواقع، (i) راست است و برای اولین بار توسط **لاگرانژ**[13] در ۱۷۷۰ به اثبات رسید. از طرف دیگر (ii) دروغ است؛ چنین نیست که جمیع عددهای صحیح و مثبت را بتوان به صورت اظهار شده بیان کرد. به عنوان نمونه، ۲۳۹ نمی‌تواند چنین بیان شود و به این ترتیب ۲۳۹ **مثال نقض**[15] ی به اظهار (ii) است. در واقع، تنها یک عدد صحیح و مثبت دیگر وجود دارد که به صورت مجموع هشت مکعب بیان پذیرفت. آیا می‌توانید آن را بیابید؟ این عدد کوچک‌تر از ۵۰ است: نکته در این‌جاست که هر چند تنها دو عدد از بی‌نهایت عدد صحیح و مثبت در (ii) صدق نمی‌کنند، وجود **حتی یک** چنین عدد صحیح «ناجوری» برای از بین بردن درستی اظهار (ii) کفایت می‌کند. در این حالت، یافتن عدد صحیح «ناجور» دیگر چیزی را تغییر نمی‌دهد و مسأله مزبور تنها برای تفریح مطرح شد.

کار را با یکی، دو تبصره در مورد اصطلاحات ونمادنویسی خاتمه می‌دهیم. قبلاً ملاحظه کردیم اظهار «اگر A، آن‌گاه B» به صورت $A \Rightarrow B$ نوشته و «A مستلزم B است» خوانده می‌شود و نیز می‌گوییم «A **شرط کافی**[15] برای B است» (زیرا A، به خودی خود، برای استنتاج B کافی است) یا «B **شرط لازم**[16] برای A است» (زیرا B لزوماً ـ و خواهی نخواهی ـ از A نتیجه می‌شود). ریاضیدانان به طریق دیگر می‌گویند «B **اگر** A» یا «A **تنها اگر** B». اگر بدانیم $A \Rightarrow B$ و $B \Rightarrow A$، می‌گوییم «A **اگر وتنها اگر** B»؛ اظهاری که آن را به طور مختصر به صورت $A \Leftrightarrow B$ می‌نویسیم.

درمنطق نمادی، استفادهٔ زیادی از نشانه‌های $\exists$ (**وجود دارد**[17]) و $\forall$ (**به ازای هر**[18]) به عمل می‌آید؛ هر چند در این‌جا اغلب آن‌ها را به کار نمی‌بریم. به عنوان مثال، توجه داشته باشید که یکی از ویژگی‌های رابطهٔ برابری بر$\mathbf{Z}$، را می‌توان به ایجاز به صورت زیر بیان کرد:

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x = y \Rightarrow xz = yz)$$

سرانجام توجه کنید که نقیض $(\exists x)(p(x))$، یعنی $\sim((\exists x)(p(x)))$، عبارت است از $(\forall x)(\sim p(x))$ و مشابهاً؛

$$\sim((\forall x)(p(x))) \Rightarrow (\exists x)(\sim p(x))$$

تمرین‌ها

۱. کدام یک از اظهارات زیر راست است؟

(الف) $\frac{3}{5} \in \mathbf{Z}$؛ (ب) $(\pi+i)^2 \in \subseteq \setminus \underline{R}$

(پ) $e-\pi \notin \underline{R}^+$ (ت) $(e-\pi)^2 \in \underline{R} \setminus \underline{R}^+$

(ث) $\pi^e - e^\pi \in \underline{R}^+$

۲. فرض می‌کنیم: $A = \{\phi, \{\phi\}, 1, \{1, \phi\}, 7\}$

کدام یک از موارد زیر راست است؟

(i) $\phi \in A$ (ii) $\{\phi\} \in A$

(iii) $\{1\} \in A$ (iv) $\{7, \phi\} \subsetneq A$

(v) $7 \subseteq A$ (vi) $\{7\} \not\subseteq A$

(vii) $7 \subsetneq A$ (viii) $\{7, \{1\}\} \not\subseteq A$

(ix) $\{\phi, \{\phi\}, \{1, \phi\}\} \subseteq A$ (x) $\{\{\phi\}\} \subseteq A$

۳. فرض می‌کنیم: $A = \{x : x \in \underline{R}^+, x^2 > 7\}$

$B = \{1, 2, 3, 4\}$

C = {۳, لوئیز کارول }

موردهای زیر را بیابید:

$A \cap B, B \cap C, A \cap B \cap C, A \cup B, (A \cup B) \cap C,$
$(A \cap C) \cup (B \cap C)$

نمودار ونی شامل A، B و C را رسم کنید.

۴. فرض می‌کنیم:

$$A = \{(x, y) : x \in R, y \in R, x^2 + y^2 = 1\}$$

$$B = \{(x, y) : x \in R, y \in R, y^2 = 4x\}$$

$$C = \{(x, y) : x \in R, y \in R, y^2 = x^3\}$$

اشتراک‌ها واجتماع‌های سؤال شده در تمرین ۳ را بیابید.

۵. (الف) در مورد مجموعه‌های A و B نشان دهید $A \cup B = B$، اگر و تنها اگر $A \subseteq B$ و $A \cap B = A$، اگر و تنها اگر $A \subseteq B$.

ب) به ازای مجموعه‌های A، B و C ثابت کنید:

(i) $(A \cup B) \cap C \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C)$

(ii) $(A \cap C) \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap C$

نتیجه بگیرید که (iii) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

۶. به ازای هر $r \in R^+$ و هر $n \in Z^+$ قرار دهید:

$$T_r = \left\{x : x \in R, -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}\right\}$$

$$R_n = \left\{x : x \in R, -\frac{1}{n} < x \le n\right\}$$

و پیدا کنید: $\bigcap_{r \in R^+} T_r$ ، $\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$ ، $\bigcap_{n=1}^{\infty} R_n$.

۷. فرض می‌کنیم U مجموعه‌ای با زیر مجموعه‌های A و B باشد. تعریف می‌کنیم $A^C = U \setminus A$ و غیره. نشان دهید:

(i) $A^C \cap B^C \subseteq (A \cup B)^C$

(ii) $(A \cup B)^C \subseteq A^C \cap B^C$

(iii) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

(iv) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

((iii) و (iv) به **قوانین دمورگن**[19] موسوم‌اند.)

۸. [a,b] را به صورت مجموعهٔ $\{\{a\},\{a,b\}\}$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید $[a,b]=[c,d]$ اگر و تنها a=c و b=d .

۹. (i) نشان دهید اگر A و B ناتهی باشند، آن‌گاه $A \times B = B \times A$ ، اگر و تنها اگر A=B . (ii) فرض می‌کنیم $S \subseteq A \times B$. آیا نیاز هست که S به صورت $C \times D$ باشد، که در آن $C \subseteq A$ و $D \subseteq B$ ؟

۱۰. $p(A)$ چند عنصر دارد؛ اگر: (i) A دارای ۱۰ عنصر باشد؟ (ii) $A = \phi$ ؟

۱۱. فرض می‌کنیم $m \in Z$. ثابت کنید: اگر m^2 زوج باشد، آن‌گاه m زوج است.

۱۲. مثالی دیگر از اظهارات A و B به دست دهید که در آن‌ها $A \Rightarrow B$ راست؛ اما $B \Rightarrow A$ دروغ باشد.

۱۳. ثابت کنید: $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$

چنان‌که می‌آید، گنگ است. فرض می‌کنیم $e = \frac{m}{n}$ ،

آن‌گاه: $t = n!(e - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \ldots - \frac{1}{n!}) \in Z$

اما: $t = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots \le \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots = \frac{1}{n}$

که تناقض است. در این مورد چه نوع اثباتی به کار برده‌ایم؟

۱۴. در اثبات این‌که به ازای هر مجموعهٔ A ، $\phi \subseteq A$ چه نوع اثباتی به کار برده‌ایم؟

۱۵. فرض می‌کنیم: $x, y, z \in Z$

نشان دهید $x^2 + y^2 + z^2$ نمی‌تواند به صورت $8k+7$ باشد؛ وقتی که: (i) دقیقاً یکی از موارد x ، y و z فرد باشد؛ و (ii) هر سه مورد x ، y و z فرد باشند. نشان دهید هیچ عدد صحیح به صورت $8k+7$ به صورت مجموع مربعات سه عدد صحیح قابل بیان نیست. دراین جا از چه روش اثباتی استفاده کرده‌ایم؟

۱۶. اظهار زیر را، که در آن $x, y, z \in Z$ ، با استفاده از کلمات بنویسید: $(\forall x)(\forall y)(\exists x)(xy = z^2)$

آیا این اظهار راست است؟ به صورت نمادی بنویسید: به ازای هر x و y واقع در Z^+ که درمورد آن‌ها x<y ، zی چنان وجود دارد که x+z=y .

۱۷. اظهارهای زیر را، که در آن‌ها $x, y, z \in Z$ ، با استفاده از کلمات بنویسید:

(i) $(\forall x)(\exists x)(y > x)$ (ii) $(\exists x)(\forall x)(y > x)$

نتیجه بگیرید که بدون ایجاد خطر تغییر معنی، نمی‌توان لزوماً جای ∀ و ∃ را با هم عوض کرد.

زیرنویس ....

* R^+ مجموعهٔ عددهای حقیقی مثبت را نمایش می‌دهد.

* آگوستوس دمورگن، Augustus de Morgan (۲ ژوئن ۱۸۰۶ ـ ۱۸ مارس ۱۸۷۱)

1. Lemm
2. corollary
3. symbolic logic
4. counter example
5. indirect proof
6. negations
7. converse
8. proof by contraposition
9. contra positive
10. reductioad absurdum
11. proof by contradiction
12. absurscty
13. lagrange
14. counterexample
15. sufficient condition
16. necessary condition
17. there exists
18. for all
19. De morgan's Laws

منطق ریاضی

حمید رضا امیری

جبر گزاره‌ها

آیا تاکنون به کلمه و بهتر بگوییم ترکیب «منطق ریاضی» برخورده‌اید؟ چقدر راجع به این موضوع یا مبحث از ریاضیات تحقیق کرده‌اید؟ اگر ادعا کنیم که «ریاضیات یک زبان است و منطق ریاضی، دستور این زبان» آیا باور می‌کنید؟ در این صورت چگونه می‌توانیم زبانی (ریاضی) را یاد بگیریم، بدون آن که دستور آن زبان را آموخته باشیم؟ مگر آن که همچون زبان مادری، تنها با تکرار و تمرین، آن زبان را فقط در حد رفع نیازهای شفاهی و روزمره یاد بگیریم. در مورد ریاضی هم اگر بخواهیم بدون یادگیری منطق ریاضی به یادگیری علم ریاضی بپردازیم، ناچاریم خیلی از مفاهیم ریاضی را فقط حفظ کنیم و حتی روابط بین آنها، را از طریق حفظ کردن به خاطر بسپاریم. و این اتفاقی است که متأسفانه در آموزش ریاضی ما در کتاب‌های درسی رخ داده است و به دلیل این که منطق ریاضی [در نظام جدید آموزش متوسطه] به صورت رسمی از برنامه ی درسی حذف شده است، در مواردی ناچاریم مباحثی را مطرح نکنیم یا به صورتی مطرح کنیم که برای دانش‌آموز در حد دانسته‌هایش قابل درک باشد.

در این مقاله سعی می‌کنیم شما را با مبانی منطق ریاضی آشنا کنیم و کاربردهای آن را در مباحث ریاضی و کتاب‌های درسی به شما نشان دهیم تا عمق فهم شما از این مطالب بیشتر شده و سرانجام بتوانید مباحث خود را با استدلال منطقی همراه کنید. اکنون سعی کنید به هر یک از سؤال‌های زیر که در حوزه‌ی معلومات شماست با استدلال، منطقی پاسخ دهید:

I) آیا تُهی تابع است؟

II) اگر عضوی در اجتماع دو مجموعه نباشد چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

III) آیا گزاره‌ی شرطیِ «اگر ۲ عددی فرد است آن‌گاه شما ۱۰۰ سال دارید» درست است؟

IV) چرا برهان خلف را به عنوان یک اثبات ریاضی می‌پذیریم؟

V) اگر مجموعه‌ای از بالا کراندار نباشد، چگونه مجموعه‌ای است؟

VI) اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq L$، در این صورت تعریف حد در نقطه‌ی α به چه صورتی در می‌آید؟

VII) آیا رابطه‌ی $R = \{(۲,۴),(۶,۸)\}$ روی $A = \{۲,۴,۶,۸\}$ خاصیت تعدّی دارد؟

IIX) اگر A زیر مجموعه‌ی B نباشد، چه می‌توان گفت؟

جبر گزاره‌ها

معمولاً واژه‌ی «گزاره» با کلمه‌ی «خبر» یا «جمله‌ی خبری» در ذهن تداعی می‌شود که البته زیاد هم با تعریف گزاره در منطق ریاضی فاصله ندارد.

در منطق ریاضی، گزاره به **جمله‌ای خبری** گفته می‌شود که دارای فقط و فقط یکی از دو ارزش **درست** (راست) و یا **نادرست** (دروغ) است. به عنوان مثال، جمله‌های «آیا هوا آفتابی است؟» و «چه گُل زیبایی!» هیچ‌کدام خبری نبوده و گزاره محسوب نمی‌شوند؛ و نیز جمله‌ی «a^n عددی مثبت است» نمی‌تواند گزاره باشد زیرا ارزش آن گاهی درست و گاهی نادرست است.

در منطق ریاضی، معمولاً گزاره‌ها را با حروف کوچک، $p, q, r, s, \dots$ نشان می‌دهند. حال اگر دو گزاره‌ی p و q هم ارزش باشند (هر دو درست یا هر دو نادرست) می‌نویسند $p \equiv q$ و می‌خوانند p هم‌ارز با q است. اگر گزاره‌ای مانند p دارای ارزش درست باشد می‌نویسیم p؟T و اگر نادرست باشد می‌نویسیم p؟F.

اگر p یک گزاره باشد، نقیض آن گزاره‌ای است منحصر به‌فرد که با ($\sim p$) نشان داده می‌شود ($\sim p$ را نقیض p یا چنین نیست که p می‌خوانیم) چند گزاره و نقیض آنها را در این‌جا مشاهده می‌کنید:

۱) نقیض گزاره‌ی «$\sqrt{2}$ عددی مثبت است» به صورت «$\sqrt{2}$ عدد مثبتی نیست» بیان می‌شود. در واقع نمی‌توان گفت که نقیض این گزاره به صورت «$\sqrt{2}$ عددی منفی است» بیان می‌شود، چون می‌تواند عددی که مثبت نیست منفی و یا صفر باشد.

۲) نقیض گزاره‌ی «۲ عددی فرد است» به صورت «۲ عددی فرد نیست» بیان می‌شود (البته در اعداد صحیح اگر عددی فرد نباشد زوج است»

۳) نقیض گزاره‌ی «توکیو پایتخت ترکیه است» گزاره‌ی «توکیو پایتخت ترکیه نیست» خواهد بود.

۴) «۸ بر ۴ بخش‌پذیر است» گزاره‌ای است که نقیض آن به صورت «۸ بر ۴ بخش‌پذیر نیست» بیان می‌شود.

۵) اکنون بگویید نقیض گزاره‌ی «عدد ۱۰ زوج است و بر ۵ بخش‌پذیر است» چطور بیان می‌شود؟ کمی جلوتر با قانون نقیض کردن این گونه گزاره‌ها که آنها را **گزاره‌های مرکّب** می‌گویند آشنا خواهید شد ولی فعلاً همین را بدانید که نقیض گزاره‌ی فوق به صورت «عدد ۱۰ فرد است یا بر ۵ بخش‌پذیر نیست» بیان می‌شود.

همان‌طور که مشاهده کردید اگر p گزاره‌ی درست باشد آن‌گاه $\sim p$ نادرست و اگر p نادرست باشد آن‌گاه $\sim p$ درست است. باید به این نکته توجه داشته باشید که نقیض گزاره‌ی p گزاره‌ای منحصر به فرد است و مثلاً اگر p گزاره‌ای درست باشد، هر گزاره‌ی نادرست نمی‌تواند $\sim p$ باشد. در واقع هر گزاره‌ی مانند p دارای بی‌شمار گزاره‌ی متضاد (از نظر ارزشی) است ولی فقط یکی از آنها $\sim p$ (نقیض) محسوب می‌شود.

اکنون ببینیم ارزش دو گزاره یا سه گزاره یا ... یا n گزاره نسبت به هم چیست؟ باید دانست که در حالت کلّی، n گزاره نسبت به یکدیگر دارای 2^n حالت ارزشی هستند. در جدول‌های زیر برای ۲ و ۳ گزاره و همین‌طور برای هر گزاره و نقیضش حالت‌های ارزشی مشخص شده است:

p	~p
T	F
F	T

p	q	r
T	T	T
T	T	F
T	F	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F
F	F	T
F	F	F

p	q
T	T
T	F
F	T
F	F

(برای سه گزاره، $۸ = ۲^۳$ حالت ارزشی حاصل می‌شود که برای p به تعداد $۴ = \frac{۸}{۲}$ حالت T و ۴ حالت F و برای گزاره‌ی q، $۲ = \frac{۴}{۲}$ حالت T و ۲ حالت F و... و برای گزاره‌ی r، $۱ = \frac{۲}{۲}$ حالت T و ۱ حالت F و ... نوشته می‌شود که این قانون قابل تعمیم است.)

تعریف:

قرارداد: اگر جمله‌ای خبری دارای متغیر n باشد آن را گزاره‌نما می‌گوییم و با p(n) نمایش می‌دهیم. بنابراین وقتی می‌نویسیم p(x) یا p(x,y) یعنی گزاره‌نماهایی برحسب x یا برحسب x و y. (در شماره‌های بعدی به طور مفصل درباره‌ی گزاره‌نما بحث خواهیم کرد)

مثال. x عددی فرد است، گزاره‌نمایی برحسب x است، یا $y = x + ۱$ گزاره‌نمایی برحسب x و y است.

نکته: اگر p(x) یک گزاره‌نما باشد در این صورت: (M مجموعه‌ی جواب p(x) است)

$$k \in M \Leftrightarrow p(k) \equiv T$$

ترکیب گزاره‌ها

در منطق ریاضی و در جبر گزاره‌ها، به ۴ صورت یا توسط ۴ رابط می‌توان از گزاره‌های ساده، گزاره‌هایی مرکب تشکیل داد. در واقع به ۴ صورت می‌توان گزاره‌ها را با هم ترکیب کرد که عبارتند از:

۱ـ ترکیب فصلی (یا): هرگاه بخواهیم دو گزاره مانند p و q را با لفظ «یا» با هم ترکیب کنیم می‌نویسیم: $(p \vee q)$ و آن گزاره‌ای است که به شکل (p یا q) خوانده می‌شود. ترکیب فصلی دو گزاره فقط وقتی دارای ارزش نادرست است که هر دو گزاره نادرست باشند و در سه حالت دیگر درست است؛ مطابق جدول زیر:

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

به عنوان مثال گزاره‌های «عدد ۲ فرد است یا ۵ عدد اول است»، «$۱ < ۲$ یا $۴ > ۱$» و «۱۱ عدد اول است یا $\sqrt{۲}$ منفی است» همگی درست‌اند ولی گزاره‌ی «$\sqrt{۵} < \sqrt{۳}$ یا $۲^۵ = ۴^۲$» نادرست است.

۲ـ ترکیب عطفی (و): هرگاه بخواهیم دو گزاره مانند p و q را با لفظ (و) با هم ترکیب کنیم می‌نویسیم $(p \wedge q)$ و این گزاره‌ای است که به صورت (p و q) خوانده می‌شود. ترکیب عطفی دو گزاره فقط وقتی دارای ارزش درست است که هر دو گزاره‌ی p و q درست باشند؛ مطابق جدول زیر،

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

تمرین: ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

I) «۲ عددی زوج و $۴^۲ = ۲^۴$» ← درست

II) «۳ عددی زوج و توکیو پایتخت ژاپن است» ← نادرست

III) «$\frac{۱}{x^۲ + ۱} > ۰$ و $\frac{x^۲ + ۱}{x - ۱} \neq ۰$» ← درست.

ان‌شاءالله در شماره‌ی بعد با بقیه‌ی ترکیب‌ها آشنا می‌شویم و بلافاصله با یادگیری قوانین حاکم بر ترکیب گزاره‌ها وارد بحث جالب هم‌ارزی‌ها و کاربردهای آنها خواهیم شد.

برای
دانش آموزان
دوره‌ی پیش‌دانشگاهی
ریاضی و تجربی

بازتابندگی مقاطع مخروطی

میرشهرام صدر

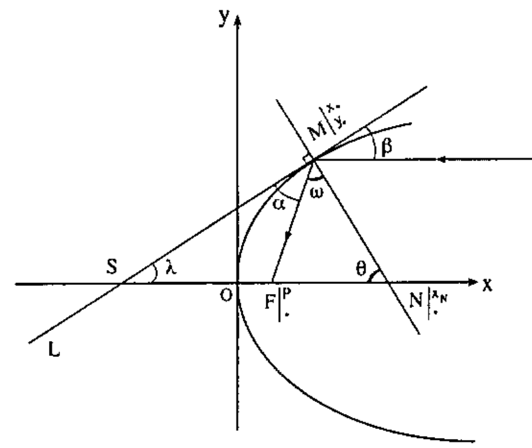
در دوره‌ی پیش‌دانشگاهی با هندسه تحلیلی و مقاطع مخروطی آشنا شده‌اید، از ویژگی‌های جالب و کاربردی مقاطع مخروطی، ویژگی‌های بازتابندگی سهمی‌ها، بیضی‌ها و هذلولی‌ها هستند. در این مقاله سعی داریم با اجتماع هندسه و جبر (یعنی به روش تحلیلی) این ویژگی‌ها را تجزیه و تحلیل و اثبات کنیم.

ویژگی بازتابندگی سهمی‌ها

در صورتی که یک سهمی را حول محور تقارنش دوران دهیم و سطح بیرونی آن را نقره‌اندود کنیم، یک آیینه سهمومی (شلجمی) پدید می‌آید.

هرگاه یک منبع نورانی را در کانون یک آیینه سهمومی (مانند چراغ قوه) قرار دهیم، پرتوهای نورانی که از کانون به سهمی می‌تابند، پس از شکست، موازی با محور تقارن سهمی منعکس می‌شوند و برعکس، پرتوهایی که موازی با محور تقارن به سطح سهمی می‌تابند پس از انعکاس در کانون سهمی جمع می‌شوند. به‌عنوان مثال از این ویژگی برای ساخت کوره‌های آفتابی استفاده می‌کنند.

در شکل ۱، پرتو نوری موازی با محور تقارن به سطح سهمی (آیینهٔ شلجمی) برخورد کرده است، می‌خواهیم ثابت کنیم که این پرتو نور پس از شکست از کانون سهمی عبور می‌کند. برای این منظور، فرض کنیم سهمی به معادله‌ی $y^2 = 4px$ باشد و خط L را در نقطه $M(x_0, y_0)$ بر سهمی مماس می‌کنیم، اکنون ثابت می‌کنیم که $\alpha = \beta$.



شکل ۱

ابتدا معادله خط قائم بر سهمی به معادله $y^2 = 4px$ را در نقطه $M\Big|^{x_0}_{y_0}$ واقع بر سهمی می‌نویسیم:

$$y^2 - 4px = 0 \Rightarrow y' = -\frac{-4p}{2y} = \frac{2p}{y}$$

$$\Rightarrow \underset{\text{مماس}}{m} = \frac{2p}{y_0} \Rightarrow \underset{\text{قائم}}{m'} = -\frac{y_0}{2p}$$

$$y - y_0 = -\frac{y_0}{2p}(x - x_0)$$ معادله خط قائم

با توجه به شکل ۱، ملاحظه می‌کنید که خط قائم محور xها را در نقطه N قطع می‌کند، بنابراین مختصات نقطه $N\Big|^{x_N}_{0}$ باید در معادله این خط صدق کند، پس داریم:

$$N\Big|^{x_N}_{0} \Rightarrow 0 - y_0 = -\frac{y_0}{2p}(x_N - x_0) \Rightarrow x_N = 2p + x_0$$

اکنون داریم: $N\Big|^{2p+x_0}_{0}$ و $F\Big|^{p}_{0}$ درنتیجه $FN = p + x_0$.

همچنین داریم: $M\Big|^{x_0}_{y_0}$ و $F\Big|^{p}_{0}$ و $y_0^2 = 4px_0$ درنتیجه:

$$MF = \sqrt{(x_0 - p)^2 + (y_0 - 0)^2} = \sqrt{(x_0 - p)^2 + y_0^2}$$

$$= \sqrt{(x_0 - p)^2 + 4px_0} = \sqrt{x_0^2 + p^2 + 2px_0}$$

$$= \sqrt{(x_0 + p)^2} = (x_0 + p) \Rightarrow MF = x_0 + p$$

در مثلث $\overset{\Delta}{FMN}$ داریم: $FN = MF = x_0 + p$، پس این مثلث متساوی‌الساقین است، درنتیجه داریم:

$$\omega = \theta$$

چون مثلث $\overset{\Delta}{SMN}$ در رأس M قائم‌الزاویه است، بنابراین داریم:

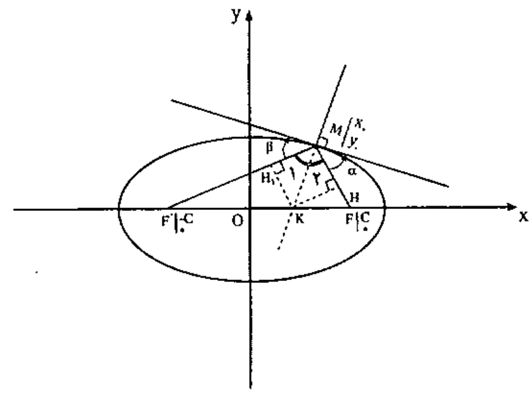
$$\left.\begin{array}{r} \lambda + \theta = 90°, \theta = \omega \Rightarrow \lambda + \omega = 90° \\ \alpha + \omega = 90° \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = \alpha$$

چون دو زاویه β و λ متبادل هستند درنتیجه: $\lambda = \beta$، از طرفی داریم:

$$\begin{cases} \lambda = \alpha \\ \lambda = \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta$$

ویژگی بازتابندگی بیضی

در صورتی که یک بیضی را حول قطر بزرگش دوران دهیم، یک بیضی‌وار پدید می‌آید. با نقره‌اندود کردن درون رویه‌ی بیضی‌وار یک آیینه بیضوی پدید می‌آید. در یک آیینه بیضوی، اگر منبع نوری را در یک کانون قرار دهیم؛ پرتو نوری که از آن منبع بر آیینه می‌تابد، در امتداد خطی که از کانون دیگر آن می‌گذرد، منعکس می‌شود. از این خاصیت بیضی‌ها در بعضی از سالن‌های سخنرانی یا سینما استفاده می‌کنند به طوری که سقف آن‌ها دارای مقاطعی به شکل قوس‌های بیضی با کانون‌های مشترک است. بنابراین، شخصی که در کانون F قرار دارد، می‌تواند صدای شخص دیگری را بشنود که در کانون F' صحبت می‌کند. چون امواج صدای شخص صحبت‌کننده در کانون F' به سقف برخورد می‌کنند، به وسیله سقف منعکس شده و به شنونده در کانون F می‌رسند. مطابق شکل ۲، نشان می‌دهیم که خطوط گذرنده از نقطه M (واقع بر بیضی) و دو کانون آن، با خط مماس بر بیضی در M زوایای برابر تشکیل می‌دهند؛ یعنی ثابت می‌کنیم که $\alpha = \beta$.



شکل ۲

حل. با توجه به شکل ۲، می‌دانیم که معادله این بیضی به صورت $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ است، اکنون در نقطه M خطی بر بیضی عمود می‌کنیم که معادله‌ی این خط عمود به صورت زیر است:

$$\frac{a^2x}{x_0}-\frac{b^2y}{y_0}=c^2$$

چون این خط محور xها را در نقطه K قطع می‌کند، بنابراین مختصات نقطه K به صورت زیر است:

$$y=0\to\frac{a^2x}{x_0}=c^2\Rightarrow x=\frac{c^2x_0}{a^2}\Rightarrow K\left|\begin{array}{l}\frac{c^2x_0}{a^2}\\0\end{array}\right.$$

می‌خواهیم ثابت کنیم که MK نیمساز زاویه $F'MF$ است، بنابراین ثابت می‌کنیم که: $KH_1=KH$.

$$MF: y-0=\frac{y_0-0}{x_0-c}(x-c)\Rightarrow(x_0-c)y-y_0x+cy_0=0$$

(معادله‌ی ضلع MF)

$$MF': y-0=\frac{y_0-0}{x_0+c}(x+c)\Rightarrow(x_0+c)y-y_0x-cy_0=0$$

(معادله‌ی ضلع MF')

برای این‌که ثابت کنیم $KH_1=KH$، از فرمول فاصله‌ی نقطه از خط، استفاده می‌کنیم:

$$KH=\frac{\left|-y_0\times\frac{c^2x_0}{a^2}+cy_0\right|}{\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}}\Rightarrow KH^2=\frac{c^2y_0^2(\frac{cx_0}{a^2}-1)^2}{(x_0-c)^2+y_0^2}\quad(1)$$

چون نقطه $M\left|\begin{array}{l}x_0\\y_0\end{array}\right.$ واقع بر بیضی است، پس مختصات M در معادله بیضی صدق می‌کند:

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1\Rightarrow y_0^2=b^2-\frac{b^2x_0^2}{a^2}\quad(2)$$

با جایگزینی رابطه (۲) در رابطه (۱) خواهیم داشت:

$$KH^2=\frac{c^2y_0^2\frac{(cx_0-a^2)^2}{a^4}}{x_0^2-2cx_0+c^2+b^2-\frac{b^2x_0^2}{a^2}}$$

$$=\frac{c^2y_0^2\frac{(cx_0-a^2)^2}{a^4}}{x_0^2(1-\frac{b^2}{a^2})+(b^2+c^2)-2cx_0}$$

می‌دانیم که در این بیضی: $a^2-c^2=b^2$، بنابراین داریم:

$$KH^2=\frac{c^2y_0^2\frac{(cx_0-a^2)^2}{a^4}}{\frac{c^2x_0^2}{a^2}+a^2-2cx_0}=\frac{c^2y_0^2\frac{(cx_0-a^2)^2}{a^4}}{\frac{(cx_0-a^2)^2}{a^2}}$$

$$=\frac{c^2y_0^2}{a^2}\Rightarrow\boxed{KH^2=\frac{c^2y_0^2}{a^2}}\quad(3)$$

به همین ترتیب می‌توان KH_1 را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$KH_1=\frac{\left|-y_0\times\frac{c^2x_0}{a^2}-cy_0\right|}{\sqrt{(x_0+c)^2+y_0^2}}$$

$$\Rightarrow KH_1^2=\frac{c^2y_0^2(\frac{cx_0}{a^2}+1)^2}{x_0^2+c^2+2cx_0+b^2-\frac{b^2x_0^2}{a^2}}$$

$$\Rightarrow KH_1^2=\frac{c^2y_0^2(\frac{cx_0}{a^2}+1)^2}{x_0^2(1-\frac{b^2}{a^2})+a^2+2cx_0}=\frac{c^2y_0^2\frac{(cx_0+a^2)^2}{a^4}}{\frac{c^2x_0^2}{a^2}+a^2+2cx_0}$$

حل. با توجه به شکل، ملاحظه می‌کنیم که معادله این هذلولی به صورت $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ است و خط PK بر هذلولی مماس است، معادله خط PK در صورتی که مختصات $P\begin{vmatrix}x_\circ\\y_\circ\end{vmatrix}$ (واقع بر هذلولی) باشد، به صورت زیر است:

$$\frac{xx_\circ}{a^2}-\frac{yy_\circ}{b^2}=1$$

چون این خط محور xها را در نقطه K قطع می‌کند، بنابراین مختصات K به صورت زیر است:

$$y=\circ\Rightarrow\frac{xx_\circ}{a^2}=1\Rightarrow x=\frac{a^2}{x_\circ}\Rightarrow K\begin{vmatrix}\frac{a^2}{x_\circ}\\ \circ\end{vmatrix}$$

می‌خواهیم ثابت کنیم که PK نیمساز زاویه $F'PF$ است، بنابراین ثابت می‌کنیم که: $KH_1=KH$

$$PF:\ y-\circ=\frac{y_\circ-\circ}{x_\circ-c}(x-c)\Rightarrow(x_\circ-c)y-y_\circ x+cy_\circ=\circ$$

(معادله خط PF)

$$PF':\ y-\circ=\frac{y_\circ-\circ}{x_\circ+c}(x+c)\Rightarrow(x_\circ+c)y-y_\circ x-cy_\circ=\circ$$

(معادله خط PF')

برای این‌که ثابت کنیم $KH_1=KH$؛ از فرمول فاصله نقطه از خط، استفاده می‌کنیم:

$$KH=\frac{\left|-y_\circ\times\frac{a^2}{x_\circ}+cy_\circ\right|}{\sqrt{(x_\circ-c)^2+y_\circ^2}}\Rightarrow KH^2=\frac{y_\circ^2\left(c-\frac{a^2}{x_\circ}\right)^2}{(x_\circ-c)^2+y_\circ^2}\quad(1)$$

چون نقطه $P\begin{vmatrix}x_\circ\\y_\circ\end{vmatrix}$ واقع بر هذلولی است، پس مختصات P در معادله‌ی هذلولی صدق می‌کند:

$$\frac{x_\circ^2}{a^2}-\frac{y_\circ^2}{b^2}=1\Rightarrow y_\circ^2=\frac{b^2x_\circ^2}{a^2}-b^2\qquad(2)$$

با جایگزینی رابطه (۲) در رابطه (۱) خواهیم داشت:

$$\Rightarrow KH_1^2=\frac{c^2y_\circ^2\frac{(cx_\circ+a^2)^2}{a^4}}{\frac{(cx_\circ+a^2)^2}{a^2}}=\frac{c^2y_\circ}{a^2}$$

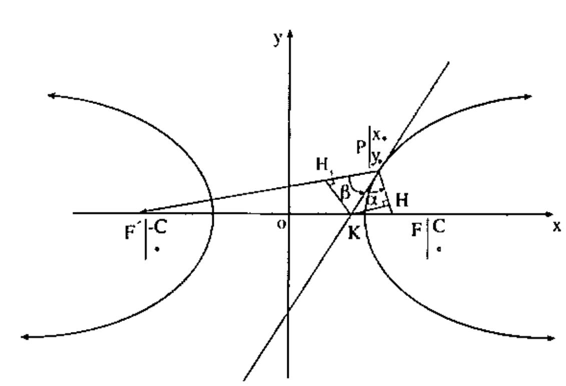
$$\Rightarrow\boxed{KH_1^2=\frac{c^2y_\circ}{a^2}}\qquad(4)$$

با مقایسه دو رابطه (۳) و (۴) ملاحظه می‌کنیم که $KH_1=KH$؛ در نتیجه نقطه K واقع بر نیمساز زاویه $F'MF$ است، بنابراین $\hat{M}_1=\hat{M}_2$؛ در نتیجه داریم:

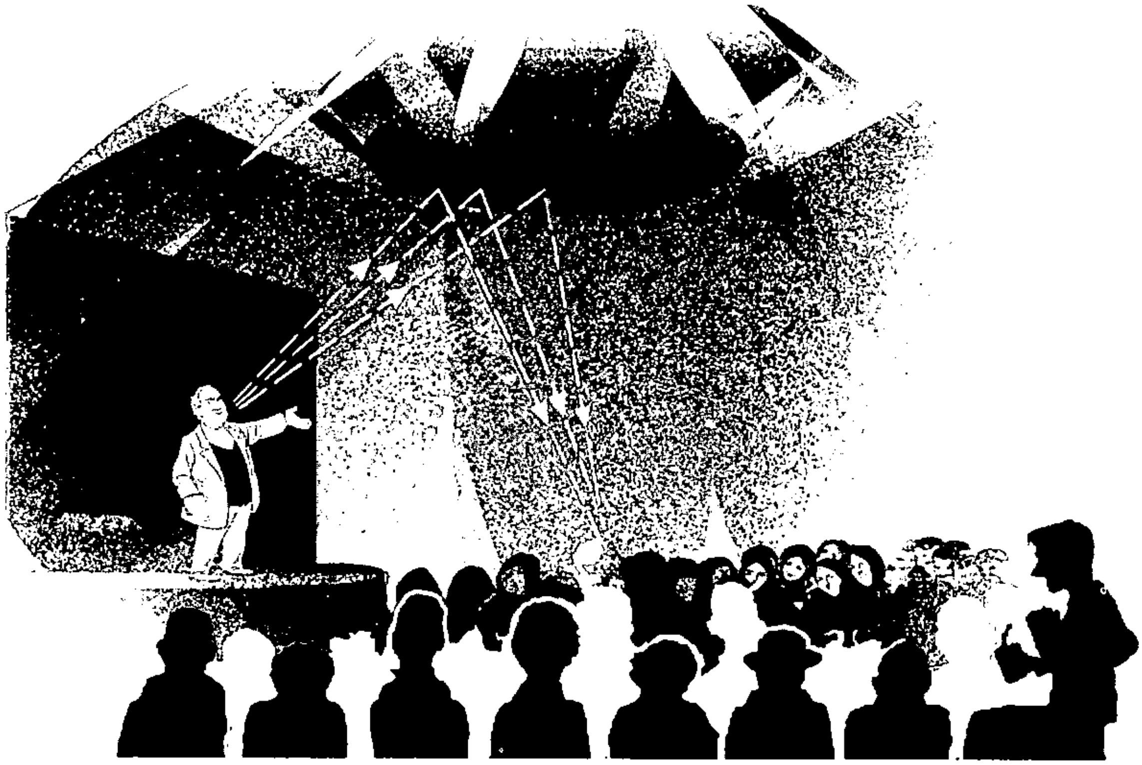
$$\begin{cases}\alpha+M_2=90^\circ\\ \beta+M_1=90^\circ\\ M_1=M_2\end{cases}\Rightarrow\alpha=\beta$$

ویژگی بازتابندگی هذلولی

در صورتی که یک هذلولی را حول قطر حقیقی آن دوران دهیم، یک هذلولی‌وار پدید می‌آید. با نقره اندود کردن درون رویه‌ی هذلولی‌وار، یک آینه‌ی هذلولی پدید می‌آید. در یک آینه هذلولوی، اگر منبع نوری را در یک کانون قرار دهیم؛ پرتو نوری که از آن منبع بر آینه می‌تابد، در امتداد خطی که از کانون دیگر می‌گذرد، منعکس می‌شود. از این خاصیت انعکاسی در طراحی برخی از تلسکوپ‌ها و سیستم‌های مهم دریانوردی استفاده می‌شود. در شکل شماره ۳ PF و PF' شعاع حامل‌های نقطه P و خط PK بر هذلولی مماس است. اکنون ثابت می‌کنیم که: $\alpha=\beta$.



شکل ۳



$$KH^2 = \frac{y_0^2 \frac{(cx_0 - a^2)^2}{x_0^2}}{x_0^2 - 2cx_0 + c^2 + \frac{b^2x_0^2}{a^2} - b^2}$$

$$= \frac{y_0^2 \frac{(cx_0 - a^2)^2}{x_0^2}}{x_0^2(1+\frac{b^2}{a^2}) + (c^2 - b^2) - 2cx_0}$$

می‌دانیم که در این هذلولی: $a^2 + b^2 = c^2$ ، پس داریم:

$$KH^2 = \frac{y_0^2 \frac{(cx_0 - a^2)^2}{x_0^2}}{\frac{c^2x_0^2}{a^2} + a^2 - 2cx_0} = \frac{y_0^2 \frac{(cx_0 - a^2)^2}{x_0^2}}{\frac{(cx_0 - a^2)^2}{a^2}} = \frac{y_0^2}{a^2x_0^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{KH^2 = \frac{y_0^2}{a^2x_0^2}} \qquad (۳)$$

به همین ترتیب می‌توان KH_1 را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$KH_1 = \frac{\left|-y_0 \times \frac{a^2}{x_0} - cy_0\right|}{\sqrt{(x_0 + c)^2 + y_0^2}} \Rightarrow KH_1^2 = \frac{y_0^2(\frac{a^2}{x_0} + c)^2}{(x_0 + c)^2 + y_0^2}$$

$$\Rightarrow KH_1 = \frac{y_0^2 \frac{(a^2 + cx_0)^2}{x_0^2}}{x_0^2 + 2cx_0 + c^2 + y_0^2}$$

$$= \frac{y_0^2 \frac{(a^2 + cx_0)^2}{x_0^2}}{x_0^2 + 2cx_0 + c^2 + \frac{b^2x_0^2}{a^2} - b^2}$$

$$\Rightarrow KH_1 = \frac{y_0^2 \frac{(a^2 + cx_0)^2}{x_0^2}}{x_0^2(1+\frac{b^2}{a^2}) + (c^2 - b^2) + 2cx_0}$$

$$= \frac{y_0^2 \frac{(a^2 + cx_0)^2}{x_0^2}}{\frac{c^2x_0^2}{a^2} + a^2 + 2cx_0}$$

$$\Rightarrow KH_1 = \frac{y_0^2 \frac{(a^2 + cx_0)^2}{x_0^2}}{\frac{(cx_0 + a^2)^2}{a^2}} = \frac{y_0^2}{a^2x_0^2}$$

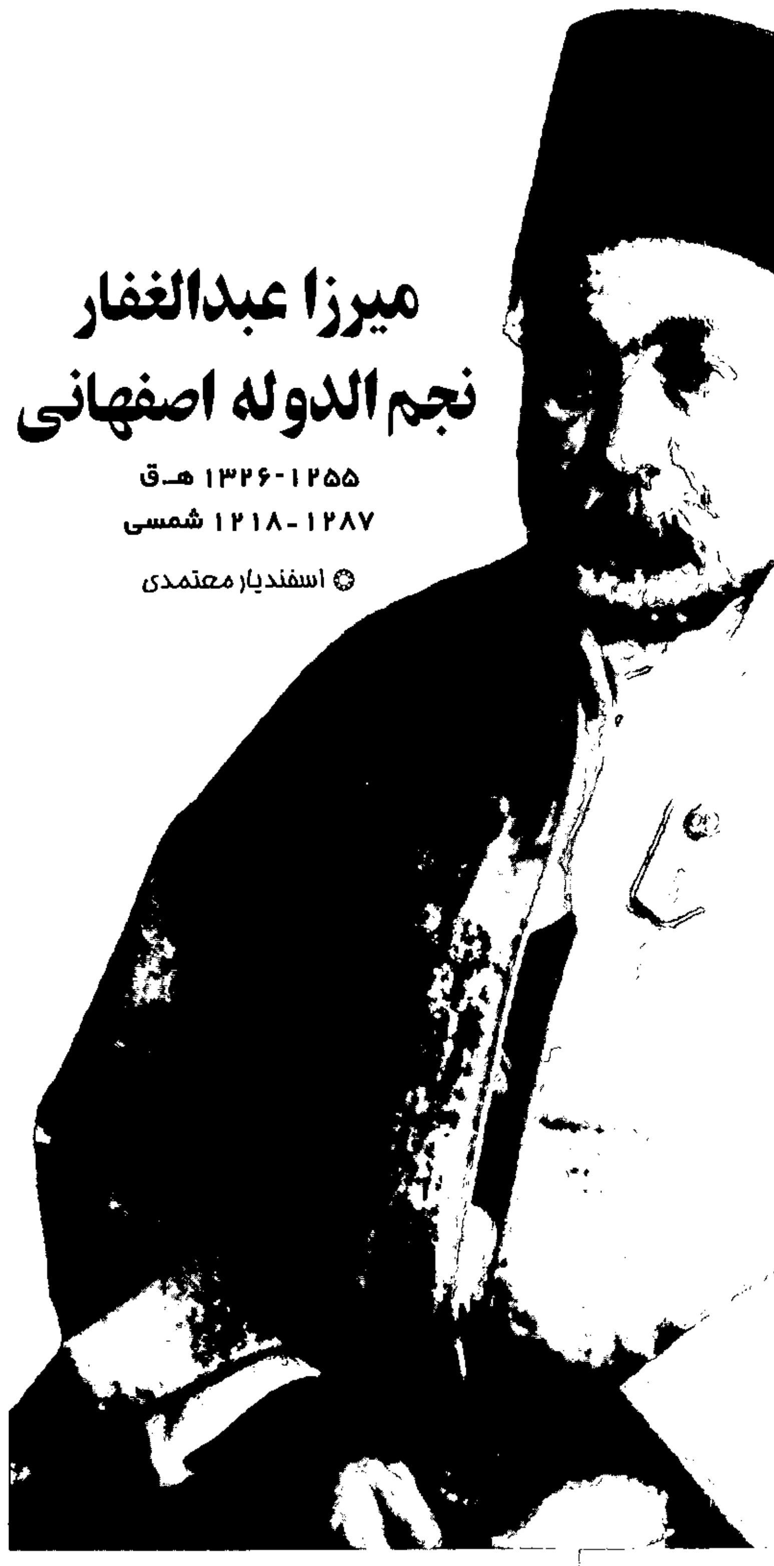
$$\Rightarrow \boxed{KH_1 = \frac{y_0^2}{a^2x_0^2}} \qquad (۴)$$

با مقایسه دو رابطه (۳) و (۴) ملاحظه می‌کنیم که $KH_1 = KH$ ؛ در نتیجه نقطه K واقع بر نیمساز زاویه $F'\hat{P}F$ است، بنابراین $\alpha = \beta$.

میرزا عبدالغفار نجم‌الدوله اصفهانی

۱۲۵۵-۱۳۲۶ هـ.ق
۱۲۱۸-۱۲۸۷ شمسی

اسفندیار معتمدی



میرزا عبدالغفار نجم‌الدوله معلم ریاضی دارالفنون، مولف، مترجم و تقویم‌نویس بود. او دومین پسر آخوندملاعلی محمد اصفهانی است.[۱] در ربیع‌الاول سال ۱۲۵۵ هـ. ق. در اصفهان به دنیا آمد. پدرش یکی از استادان بزرگ ریاضی زمان خود بود که در سال ۱۲۷۴ هـ. ق. به دعوت شاهزاده علی‌قلی میرزا اعتضادالسلطنه از اصفهان به تهران رفت و در دارالفنون به تدریس ریاضی و تألیف و ترجمه پرداخت.[۲] ملاعلی محمد در علوم قدیم صاحب‌نظر بود و با ریاضیات جدید هم آشنایی داشت.

عبدالغفار تحصیلات مقدماتی را در زادگاه و نزد پدر دانشمند خود آموخت و بر بسیاری از دانش‌های قدیم مسلط شد. پس از آن خانوادهٔ او به تهران منتقل شد و پدرش در دارالفنون مشغول به کار شد. او نیز نزد معلمان خارجی دارالفنون، به تحصیل زبان انگلیسی و فرانسه پرداخت و در ارتباط با آن‌ها علوم طبیعی، ریاضی و هیئت و نجوم را فرا گرفت؛ به‌طوری که در حدود سن بیست سالگی در دارالفنون، به رتبهٔ معلمی کل علوم ریاضی نائل شد.

میرزا عبدالغفار با تمام وجود به شغل معلمی عشق می‌ورزید و با مایه‌ای که از علوم قدیم و جدید داشت، توانست با سرعت خود را به عنوان یک معلم موفق معرفی کند.

به نوشته‌ی میرزا ابوالحسن خان فروغی، نجم‌الدوله «با همان اهتمام و

متانت که موروثی او بود، اوقات شریف خود را به مشاغل علمی شریف‌تر می‌نمود. روز و شب یا تدریس می‌کرد و یا تألیف می‌فرمود و چنان‌که اقتضای نظم این جهان و حکمت خداوند منّان است، از تخم‌ها که پدر والاگهر در مزرع عمل کشته بود، ثمرهای نیکو بر می‌داشت؛ یعنی هر روز در طریق عزت و آبرو قدمی تازه می‌گذاشت. گذشته از مقامات علمی و اعتبار در مدرسهٔ دارالفنون و دستگاه محترم وزارت علوم معروف پیشگاه ناصرالدین شاه بود، به عنوان منجمی مخصوص سلطنت اختصاص و در خدمت آن پادشاه منزلتی خاص داشت. به امرش ترجمه و تألیف کتب و رسایل می‌کرد و بی‌منّت وسائل به الطاف خسروی سرافراز می‌شد، بلکه چندی پادشاه ذیجاه‌رقبه‌ی شاگردی او قبول کرد و سر تاجدار به تمکین در حضرت علم فرود آورد. به این منوال در سال ۱۲۹۵ دانشمند به لقب نجم‌الملکی مفتخر شد و از آن پس در فنون فضائل چون آفتاب مشتهر گردید.»[۳]

میرزا عبدالغفار یک سال پس از دریافت لقب نجم‌الملکی، به زیارت مکه رفت و به حاج عبدالغفار نجم‌الملک شهرت یافت...

حاج عبدالغفار پسر نداشت و در عوض به تربیت برادرزاده‌اش **«میرزا محمودخان»** و خواهرزاده‌اش **میرزا علی‌خان** همت گماشت.[۴]

«آن مرد بزرگوار، تنها کسی بود که در دورهٔ خود، جامع علوم ریاضی، نجوم، هیئت قدیم و جدید و علوم طبیعی و غیره گردید. با قید آشنایی به اصطلاح ایرانی و اروپایی و چون به نظر آرند که جامعیت آن عالم ماهر در این نبوده که تنها اطلاعی سطحی از علوم مذکوره حاصل کرده باشد، بلکه اغلب فنون را به کمال می‌دانسته و در هر شعبه، دارای رسایل و تألیفات عالیه است، خواهند دانست که مقدار دانش دانشمند عظیم بوده و حضرتش را دارای مقامی منیع می‌نموده. بزرگ‌تر از همه آن که علم خود را بی‌حاصل و ثمر نگذاشته، حاصلی را از یکدست درو کرده و از دست دیگر کاشته، از یک جهت مدتی از عمر خویش را مصروف تدریس علوم ریاضی از مقدمات تا درجات عالیه آن نموده، به طوری که هر کس در این بلاد، اطلاعی مختصر یا مفصل از علوم ریاضی دارد، شاگرد با واسطه یا بی‌واسطه حاجی نجم‌الدوله می‌باشد.»[۵]

نجم‌الدوله و تقویم

حاج میرزا عبدالغفار در مقدمه‌ی کتاب بدایةالجبر که در سال ۱۳۱۹ قمری تألیف و منتشر کرده، می‌نویسد:

«از هفتاد سال قبل، هر کس در اصفهان یا تهران، فنون ریاضی و نجوم ایرانی و فرنگی و فنون غریبه آموخته باشد، منشأ و مولد و سرچشمه‌اش در خانوادهٔ مرحوم والد بوده و از این محل کسب نموده، بی‌واسطه یا با واسطه.»

نخستین کسی که از این خانواده به استخراج و تنظیم تقویم دست زد، میرزا عبدالوهاب منجم‌باشی، عموی نجم‌الدوله بود. او منجم مهدعلیا، مادر ناصرالدین شاه بود و تا سال ۱۲۸۹ که وفات یافت، به چاپ تقویم مشغول بود. پس از آن، این کار متوقف شد تا آن که میرزا عبدالغفار اقدام به استخراج و چاپ تقویم کرد و آن را به نام میرزامحمود منتشر کرد. ماه آخر در سال ۱۲۹۰ به لقب نجم‌الملکی و منصب منجم‌باشی‌گری مخصوص دربار همایون اعلی مفتخر شد. او امر تقویم را از ۱۲۸۹ تا ۱۳۳۷ قمری برابر ۱۲۵۱ تا ۱۲۹۸ خورشیدی (تا یازده سال پس از مرگ خود) استخراج کرد.[۵]

حاج میرزا عبدالغفار که با منابع خارجی آشنا بود، همه ساله در استخراج تقویم، نوآوری‌هایی می‌کرد و بر میزان دقت خود می‌افزود، به طوری که توانست حکم «اختصاص طبع تقویم» را از شاه به صورت زیر [خطاب به وزیر داخله] دریافت کند:

سواد دستخط مطاع مقدس
عین‌الدوله، وزیر داخله!

تقویم معمول قدیم با خود حاجی نجم‌الدوله است و تقویم تازه که خودمان دستورالعمل داده و پاره‌ای تصرفات در آن شده است، با نجم‌الملک است. شهر شعبان ۱۳۲۱»

دستخط فوق که از طرف مظفرالدین شاه صادر شد، به دنبال بعضی اعتراض‌ها بود که به تقویم نجم‌الدوله

می‌شد. در نمرهٔ ۲۹۳ روزنامهٔ تربیت به تاریخ پنجشنبه شانزدهم رجب ۱۳۲۱، چنین آمده است:

«زحمات و خدمات چهل سالهٔ جناب مستطاب معظّم، حاجی نجم‌الدوله، معلم کل علوم ریاضی که صاحب مؤلّفات جلیله کثیره می‌باشد، منظور نظر مهر اثر اعلیحضرت قوی شوکت اقدس همایون شاهنشاهی خلدالله ملکه و سلطانه شده. نیز نظم و انتظام عمل تقویم و سدباب اختلاف و اغتشاش آن را مهم دانسته. در این اوان، به اقتضای زمان، دستخط مطاع ملوکانه دربارهٔ آن جناب خطاب به نواب مستطاب اشرف ارفع والاعین‌الدوله، وزیر داخله و حکمران دارالخلافه باهره و مضافات ادام‌الله اجلاله العالی شرف صدور یافته و صورت آن از این قرار است:

صورت دستخط مطاع مقدس عین‌الدوله، وزیر داخله

تقویم‌های حاجی نجم‌الدوله به‌عرض رسید. امتیاز تقویم‌ها با خود حاجی نجم‌الدوله است و هیچ کس مداخله نخواهد کرد. فقط تقویم روزانه را حکم فرموده‌ایم که نجم‌الملک بدهد چاپ بکنند؛ والاّ تقویم معمولی باز با خود حاجی نجم‌الدوله است، لاغیر. فی شهر رجب ۱۳۲۱»

در شمارهٔ ۲۹۹ همین روزنامه آمده است:

«تقاویمی که جناب مستطاب حاجی نجم‌الدوله استخراج می‌کند و منتشر می‌سازد، پنج قسم است، اول، تقویم رمزی معمول، دوّم تقویم فارسی معمول، سیم تقویم وقت‌نامهٔ کوچک معروف به بغلی، چهارم تقویم توقیع نامه که دو، سه سال بود ترک شده بود و مجدداً برای سال نو طبع شده، پنجم تقویم دیوار کوب سیصد و شصت ورقی معروف به تقویم الخواص، و این هر پنج قسم در صحن مسجدشاه نزد حاج ابوالحسن به‌فروش می‌رسد و به‌علاوه بعضی کتب و رساله در تطبیق تاریخ هجری شمسی که برای دو هزار سال به‌طبع رسانیده و تجار و مترجمین و اجزای وزارت خارجه از آن ناگزیرند و مبلغی فایده می‌برند.»

میرزا عبدالغفار و جغرافیا

میرزا عبدالغفار، پیشقدم آموزش جغرافیا در دارالفنون است. او **نقشهٔ شهر تهران را تهیه و جمعیت تهران را** سرشماری کرد.[۶]

«نخستین بار در سال ۱۲۸۶ قمری بود که عبدالغفار و جعفرقلی‌خان نیّرالملک رئیس مدرسه دارالفنون به یاری ۲۰ نفر از شاگردان مهندسی، نقشهٔ اراضی جدید شهر را در مدت هشت ماه کشیدند و به‌طوری که روزنامهٔ دولت علّیهٔ ایران در ۲۶ محرم ۱۳۸۷ می‌نویسد، به شاه دادند و به سه هزار تومان انعام سرافراز شدند. از این پس، عبدالغفار کار نقشه‌برداری از تهران را همچنان ادامه داد تا در اواسط سال ۱۳۰۵ کار به انجام رسید و نقشه‌ای ساخته شد «خیلی صحیح و دقیق...که چنان دقیق است که می‌توان خانه‌ها و املاک را با کمال دقت بروی مساحت نمود.» با این حال، چون عمل به این‌جا رسید، ملاحظه نمودند که زمین شهر افقی نیست... مناسب دید که محیط شهر را تسویه نماید. (پس دور شهر را به دقت تسویه و تراز نمود و حاصل عمل را در نقشه نقل کرد... پس این نقشه مطابق است با وضع شهر دارالخلافه در تاریخ محرم سنه ۱۳۰۹.»[۷]

میرزا عبدالغفار به مدت ۲۳ سال روی نقشه تهران کار کرد و توانست راهنمای دقیقی از شهر تهران فراهم آورد.[۸]

در سال ۱۲۸۴ ناصرالدین شاه امر به سرشماری تهران می‌دهد و نجم‌الدوله را مأمور این کار می‌کند. نجم‌الدوله با کمک هشت تن از شاگردان بزرگ و معقول و مؤدّب و باهوش دارالفنون، از شانزده رمضان ۱۲۸۴ تا دوازدهم ذی‌قعده، همان سال، یعنی در مدت ۵۵ روز از جمعیت تهران سرشماری می‌کند. گزارش کامل این سرشماری را نجم‌الدوله در رساله‌ای به نام تشخیص نفوس دارالخلافه به اعتضادالسلطنه وزیر علوم داده است.

نجم‌الدوله جمعیت تهران را صدوپنجاه و پنجهزار و هفتصد و سه‌وشش (۱۵۵۷۳۶) نفر سرشماری کرده است. از این جمعیت ۱۴۷۲۵۶ نفر رعیت، ۸۴۸۰ نفر سپاهی (۵۵۰۸ سرباز، ۱۱۴۰ نفر غلام پیشخدمت، ۷۰۰ نفر توپچی، ۴۲۰ نفر سواره‌ی نصرت) ۳۰۰ نفر سواره نظام، ۱۵۰ نفر زنبورکچی، ۱۳۳ موزیکچی و ۱۲۰ نفر غلام مخصوص بوده است.

میرزا عبدالغفار نقشهٔ شهرهای قم،

کاشان، بروجرد، خرم‌آباد، شوشتر، دزفول و فلاحیه، و نقشهٔ توپوگرافی از طهران الی عراق و خوزستان و شط العرب و بختیاری و اصفهان را ضمن مأموریت‌هایی که از جانب شاه شهید ناصرالدین شاه داشته، برداشته است.[9]

میرزا عبدالغفار، مؤلّف و مترجم

نجم‌الدوله از معدود معلمانی است که برای پیشرفت ایران در همه زمینه‌های آموزشی و پرورشی قدم برداشته است. او مسؤولیت معلمی خود را خوب درک کرده و دانش‌آموزان را عملاً به کار و تلاش و فعالیت گروهی کشانده است. نمونهٔ موفق این کار را در تهیهٔ نقشهٔ تهران و سرشماری نفوس آن مشاهده می‌کنیم.

نجم‌الدوله در مقام مؤلّف و مترجم هم صاحب نام است. او به تألیف و ترجمه کتاب‌های ریاضی (هندسه، جبر، حساب، مثلثات) نجوم، فیزیک، شیمی، جغرافیا و عمران (پل‌سازی، راه‌سازی، قلعه‌سازی) دست زد و به همّت و پشتکار او کتاب‌هایی در موضوع‌های کشاورزی چاپ شد. علاوه بر آن، توجهی به آثار نظم و نثر گذشتگان داشت.[10] نجم‌الدوله در هر یک از کتاب‌ها، مقدمه‌های جامعی نوشته که معرّف علاقهٔ او به موضوع کتاب و پیشرفت علم و انتشار معارف و ترقی کشور بوده است.

زیرنویس ....

۱. برادر بزرگتر میرزا عبدالغفار موسوم به میرزا عبدالوهاب (۱۲۵۰-۱۲۸۹ ق) بوده و او نیز راه دانش نجوم و کواکب برفته؛ چنان‌که مشهور به «منجم‌باشی» شده و استخراج تقویم به او اختصاص یافته. لیکن میرزا عبدالوهاب منجم‌باشی در اواخر عمر پدر دانشور، یعنی در سال ۱۲۸۹ جهان فانی را وداع گفت و یادگار عزیزی از خود باقی گذاشت، و آن، پسر هوشیاری بود موسوم به میرزا محمودخان، که به حکم تقدیر، بایستی بعدها به همت عم خلیق تربیت یابد و به علت بدعهدی زمانه و تندی هوش و خیال به موقع هلاک شتابد.» فرهنگ ایران زمین جلد ۲۰، ۱۳۵۳ ص ۳۸۶

۲. از جمله کتاب‌های ترجمهٔ ملاعلی محمد اصفهانی، ترجمهٔ یک فصل از آثارالباقیه، تألیف ابوریحان بیرونی است. این فصل کتاب، با همکاری علی‌قلی میرزا اعتضادالسلطنه، نخستین وزیر علوم در ایران ترجمه شده و به کوشش استاد اکبر دانا سرشت جزو سلسله انتشارات انجمن آثار ملی در سال ۱۳۵۲ در تهران چاپ و منشر شده است.

۳. فرهنگ ایران زمین، جلد ۲۰، ص ۳۸۶، نوشتهٔ میرزا ابوالحسن خان [فروغی].

۴. میرزا محمودخان، پسر میرزا عبدالوهاب «منجم‌باشی» بود. او برای آن‌که به جانشینی پدر برگزیده شود، به علوم ریاضی و نجوم و هیئت روی نمود و چون استعداد کافی داشت، به‌زودی در مراتب علمی از مقام پدر بالاتر رفت و در علوم ریاضی، طبیعی و فن عکاسی به کمال رسید و در مدرسه دارالفنون به تدریس علوم ریاضی پرداخت. در سال ۱۳۱۳ لقب نجم‌الملکی از میرزا عبدالغفار به میرزا محمود منتقل شد و حاج عبدالغفار ملقب به نجم‌الدوله شد. میرزا محمودخان نجم‌الملک، فقط یک سال به استخراج تقویم پرداخت. لیکن نجم‌الدوله تقویم را استخراج و به نام برادرزاده خود منتشر می‌کرد.

میرزا علی‌خان به تشویق دایی خود به تحصیل علم طب پرداخت و در طب و جراحی مهارت یافت. «جناب مستطاب دکتر میرزا علی‌خان ناصرالحکما، امروز ملقب به اعلم‌الملک می‌باشد و نزد همه کس معروف است.» (مأخذ پیشین)

۵. فرهنگ ایران زمین، ج ۲۰، ص ۳۳۵.

۶. تدریس جغرافیا در دارالفنون به هر صورتی که آغاز شده باشد، مسلّم است که این علم از موقعی اهمیت و اعتبار پیدا کرده است که میرزا عبدالغفار نجم‌الدوله (نجم‌الملک) ستارهٔ درخشان دنیای علم ایران، به تدریس و ترویج آن در دارالفنون اهتمام ورزیده است.

جغرافیا در ایران، دکتر محمد حسن گنجی، انتشارات آستان قدس رضوی، چاپ دوم، ۱۳۸۰، ص ۲۶.

۷. فرهنگ ایران زمین، ج ۲۰، میرزا عبدالغفار نجم‌الدوله و تشخیص نفوس دارالخلافه به اهتمام ناصر پاکدامن، ص ۳۴۰.

۸. جغرافیدان بنام دیگری که از این زمان می‌شناسیم، مهندس عبدالرزاق بغایری است که در سال ۱۲۸۶ هـ. ق. در خراسان چشم به جهان گشوده و در ده سالگی به تهران آمده است و پس از فراگیری علوم اولی نزد پدرش، جهت تکمیل تحصیلات در سال ۱۳۰۴ هـ. ق. وارد دارالفنون شده و مدت شش سال در آن‌جا به تکمیل تحصیلات پرداخته است. او در ۱۳۰۸ هـ. ق. اقدام به ترسیم نقشهٔ ایران با استفاده از جمیع نقشه‌های انگلیسی، فرانسوی و روسی کرده است و آن چنان نقشه‌ای با اصول صحیح و تلفظهای کنترل شده فراهم ساخته که سال‌ها مورد استفادهٔ خاص و عام بوده است. جغرافیا در ایران، صفحهٔ ۲۹.

۹. فرهنگ ایران زمین، ج ۲۰، مختصری از ترجمهٔ حاجی نجم‌الدوله، نوشتهٔ میرزا ابوالحسن خان فروغی، ص ۳۹۳.

۱۰. به کتابشناسی میرزاعبدالغفار مراجعه شود.

کتابشناسی میرزا عبدالغفار نجم‌الدوله

تشخیص نفوس دارالخلافه

منابع و مآخذ ....

۱. آئین فرزانگی، ادارهٔ کل آموزش و پرورش استان اصفهان، زمستان ۱۳۷۴، ج سوم.

۲. اثرآفرینان، انجمن آثار و مفاخر فرهنگی، ج پنجم، ۱۳۸۰.

۳. تربیت، نخستین نشریهٔ روزانه و غیردولتی ایران به مدیریت محمدحسین فروغی (ذکاالملک)

۵. شرح حال رجال ایران، مهدی بامداد، انتشارات زوار، تهران.

۶. جغرافیا در ایران، دکتر محمدحسن گنجی، انتشارات آستان قدس رضوی، چاپ دوم، ۱۳۸۰.

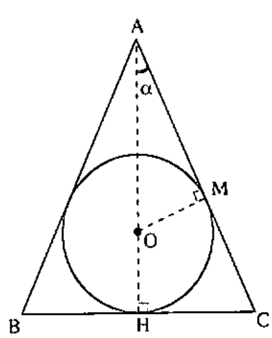
۷. فرهنگ ایران زمین، صاحب امتیاز و مدیر، ایرج افشار، جلد بیستم.

❂ هوشنگ شرقی

یک مسأله از بهینه سازی و یک پارادوکس*

دانش آموزان سال سوم ریاضی در کتاب حسابان، با مسائل بهینه سازی آشنایی دارند. در این جا می خواهیم با طرح یک مسألهٔ بهینه سازی، نکتهٔ جالبی را برای آنان و سایر علاقه مندان مطرح کنیم.

مسأله. از بین مثلث های متساوی الساقین محیط بر دایره ای ثابت، کدام یک حداقل (می نیمم) مساحت را دارند؟



حل: بدیهی است که بر دایرهٔ ثابت $C(O,R)$ بی شمار مثلث متساوی الساقین می توان محیط کرد (برای همهٔ آن ها دایرهٔ C دایرهٔ محاطی داخلی خواهد بود). یکی از این مثلث ها در شکل بالا رسم شده است. اگر AH=h و CH=a $(BC=2a)$ باشد، تابع هدف مساحت مثلث، یعنی S=ah است و a و h هر دو متغیرند. برای آن که این تابع هدف را یک متغیره کنیم، یک روش هندسی به کار می بریم. بدیهی است که O مرکز دایره روی ارتفاع AH است (چرا؟). اگر از O به نقطهٔ M (نقطهٔ تماس دایره و مثلث) وصل کنیم، $OM\perp AC$ و $\hat{M}=90^\circ$ است. حال می توانیم بنویسیم:

$$\Delta AOM: \sin\alpha = \frac{OM}{OA} = \frac{R}{h-R}$$

$$\Rightarrow h\sin\alpha - R\sin\alpha = R \Rightarrow h = \frac{R(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}$$

$$\Delta ACH:\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{CH}{AH} = \frac{a}{h} \Rightarrow a = h\operatorname{tg}\alpha$$

$$\Rightarrow a = \frac{R(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}\times\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{R(1+\sin\alpha)}{\cos\alpha}$$

$$S = ah \Rightarrow S = \frac{R(\sin\alpha+1)}{\cos\alpha}\times\frac{R(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow S = \frac{R(1+\sin\alpha)^2}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

و چون R مقدار ثابتی دارد، پس در واقع باید تابع هدف $f(\alpha) = \frac{(1+\sin\alpha)^2}{\sin\alpha\cos\alpha}$ را می نیمم کرد. برای این کار از مشتق استفاده می کنیم:

$$f'(\alpha) = \frac{2(1+\sin\alpha)\cos\alpha(\sin\alpha\cos\alpha) - (\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(1+\sin\alpha)^2}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = 0$$

$$\Rightarrow (1+\sin\alpha)[2\sin\alpha\cos^2\alpha - (\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(1+\sin\alpha)] = 0$$

$1+\sin\alpha \neq 0$ (چرا؟)

$$\Rightarrow \sin\alpha\cos^2\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha(1+\sin\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha(\sin\alpha-1) + \sin^2\alpha(1+\sin\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow -(1-\sin^2\alpha)(1-\sin\alpha) + \sin^2\alpha(1+\sin\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow -(1-\sin\alpha)^2(1+\sin\alpha) + \sin^2\alpha(1+\sin\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow (1+\sin\alpha)(-(1-\sin\alpha)^2 + \sin^2\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow -1 - \sin^2\alpha + 2\sin\alpha + \sin^2\alpha = 0$$

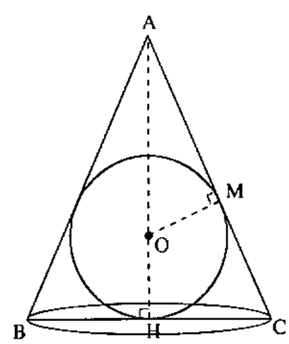
$$\Rightarrow 2\sin\alpha = 1 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2},\ \ \alpha = \frac{\pi}{6}$$

بنابراین باید $\alpha = 30^\circ$ و در نتیجه، $\hat{A} = 60^\circ$ باشد؛ یعنی: در بین مثلث های متساوی الساقین محیط بر دایرهٔ ثابت،

مثلث متساوی‌الاضلاع کم‌ترین مساحت را دارد.

تمرین: در مسألهٔ قبل نشان دهید اگر $\alpha = 45^\circ$ یا $\alpha = 15^\circ$ باشد، مساحت مثلث ABC بیش‌تر از مقدار آن به ازای $\alpha = 30^\circ$ است.

اکنون تصور کنید اگر تمام مجموعهٔ شکل را حول ارتفاع AH دوران دهیم، چه شکلی حاصل می‌شود؟



بله! یک کره که یک مخروط بر آن محیط شده است: حال آیا می‌توانید بگویید که از بین مخروط‌های محیط بر کره‌ای ثابت، کدام‌یک می‌نیمم حجم را دارند؟ احتمالاً می‌گویید همان مثلثی که کم‌ترین مساحت را دارد، با دوران حول ارتفاع خود، مخروطی با کم‌ترین حجم ایجاد می‌کند!

امّا ببینیم آیا حدس شما درست است؟

این‌بار تابع هدف حجم مخروط است:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi CH^2 . AH = \frac{1}{3}\pi a^2 h$$

با همان اطلاعات مسألهٔ قبل، می‌توان نوشت:

$$V = \frac{1}{3}\pi \times \frac{R^2(1+\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha} \times \frac{(1+\sin\alpha)R}{\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi R^3}{3} . \frac{(1+\sin\alpha)^3}{\cos^2\alpha \sin\alpha}$$

حال باید تابع هدف $f(\alpha) = \frac{(1+\sin\alpha)^3}{\cos^2\alpha\sin\alpha}$ را می‌نیمم کنیم:

$$f'(\alpha) = \frac{3(1+\sin\alpha)^2\cos\alpha(\cos^2\alpha\sin\alpha) - (\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\sin^2\alpha)(1+\sin\alpha)^3}{\cos^4\alpha\sin^2\alpha} = 0$$

$$\Rightarrow (1+\sin\alpha)^2\cos\alpha[3\cos^2\alpha\sin\alpha - (\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha)(1+\sin\alpha)] = 0$$

$$\Rightarrow 3\cos^2\alpha\sin\alpha - \cos^2\alpha - \cos^2\alpha\sin\alpha + 2\sin^2\alpha + 2\sin^3\alpha = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos^2\alpha\sin\alpha - \cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha(1+\sin\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha(2\sin\alpha - 1) + 2\sin^2\alpha(1+\sin\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow (1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)(2\sin\alpha - 1) + 2\sin^2\alpha(1+\sin\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow (1+\sin\alpha)((1-\sin\alpha)(2\sin\alpha - 1) + 2\sin^2\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow 3\sin\alpha - 1 - 2\sin^2\alpha + \sin\alpha + 2\sin^2\alpha = 0$$

$$\Rightarrow 3\sin\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = \mathrm{Arc}\sin\frac{1}{3}$$

پس حدس شما درست نبود! یعنی مثلث متساوی‌الساقین که زاویهٔ رأس آن $2\mathrm{Arc}\sin\frac{1}{3}$ است، با دوران خود، مخروطی با کم‌ترین حجم تولید می‌کند، در حالی که این مثلث می‌نیمم مساحت را ندارد! آیا عجیب نیست؟

تمرین. تحقیق کنید که حجم مخروطی که کم‌ترین حجم را در بین مخروط‌های محیط بر کرهٔ ثابت دارد، دو برابر حجم کره است.

زیرنویس ....

✽ باطل‌نما

مبناها

قضیهٔ ۱. اگر b عددی طبیعی و بزرگ‌تر از یک باشد، هر عدد طبیعی N را می‌توان به طریقی یکتا:

$$N = a_k b^k + a_{k-1}b^{k-1} + \dots + a_2 b^2 + a_1 b^1 + a_0 b^0 \qquad (1)$$

نمایش داد که در آن k یک عدد صحیح نامنفی و $a_i \in Z$ و $0 \le a_i \le b-1$ و $a_k \neq 0$ به عنوان مثال، برای عدد ۱۳۸۴ می‌توان نوشت:

$$b=10 \; : \; 1384 = 1\times 10^3 + 3\times 10^2 + 8\times 10^1 + 4\times 10^0$$

می‌دانیم عدد b در رابطهٔ (۱) که در واقع بسط عدد N را نشان می‌دهد، مبنا و عددهای a_i ضرایب بسط خوانده می‌شوند. واضح است که ضرایب بسط همیشه از مبنای مورد نظر کوچک‌ترند.

نتیجهٔ ۱. اگر $b \in N$ و $b>1$ و $k \in Z$ و $0 \le a_i \le b-1$ و $a_k \neq 0$، آن‌گاه:

$$N = a_k b^k + a_{k-1}b^{k-1} + \dots + a_1 b^1 + a_0 b^0 \Leftrightarrow$$

$$N = (\overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0})_b \qquad (2)$$

$$(\overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0})_b = a_k b^k + a_{k-1}b^{k-1} + \dots + a_1 b^1 + a_0 b^0$$

رابطهٔ (۲) بسط هر عدد دلخواه N را بر مبنای مورد نظر نشان می‌دهد. از رابطهٔ (۲) بسط عدد برای حالت $b=10$ به سادگی به دست می‌آید:

$$(\overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0})_{10} = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \dots + a_1(10) + a_0 = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0}$$

در صورتی که b عددی غیر ۱۰ باشد، ابتدا عدد را به صورت (۲) بسط می‌دهیم و سپس حاصل بسط را به دست می‌آوریم، که در این صورت، عدد حاصل بر مبنای ۱۰ خواهد بود.

مثال ۱. عدد $(345)_2$ را به مبنای ۳ بنویسید.

حل: برای نوشتن عددی بر مبنای دلخواه b، ابتدا عدد را بر مبنای ۱۰ برده و سپس با تقسیمات متوالی بر b، عدد را بر مبنای b می‌نویسیم.

$$(345)_2 = 3\times 2^2 + 4\times 2^1 + 5\times 2^0 = 12 + 8 + 5 = (25)_{10}$$

$$\begin{array}{r|l} 25 & 3 \\ \underline{24} & 8 \;|\; 3 \\ 1 & \underline{6} \quad 2 \\ & 2 \end{array} \qquad (345)_2 = (25)_{10} = (221)_3$$

مثال ۲. عدد x را تعیین کنید:

$$(۵۴۳)_۶ = (x)_۷$$

حل: ابتدا عدد ۵۴۳ را به مبنای ۱۰ برده و سپس با تقسیمات متوالی بر ۷ عدد را بر مبنای ۷ می‌نویسیم.

$$(۵۴۳)_۶ = ۳ + ۴ \times ۶ + ۵ \times ۶^۲ = ۳ + ۲۴ + ۱۸۰ = (۲۰۷)_{۱۰}$$

$$\begin{array}{r|l} ۲۰۷ & ۷ \\ \hline \underline{۱۴} & ۲۹ \;|\; ۷ \\ ۶۷ & \underline{۲۸} \;\; ۴ \\ \underline{۶۳} & ۱ \\ ۴ & \end{array} \quad (۵۴۳)_۶ = (۲۰۷)_{۱۰} = (۴۱۴)_۷ ; x = ۴۱۴$$

نتیجهٔ ۲. برای تبدیل عددی از مبنای غیر ۱۰ مانند b به مبنایی دلخواه مانند c، ابتدا عدد مورد نظر را به مبنای ۱۰ برده و سپس با تقسیمات متوالی بر c عدد را به مبنای c می‌نویسیم.

$$\overline{(a_k a_{k-۱} \dots a_۱ a_۰)}_b$$
$$= (a_۰ + a_۱ b^۱ + a_۲ b^۲ + \dots + a_{k-۱} b^{k-۱} + a_k b^k)_{۱۰} = N$$

$$\begin{array}{l} N \;|\; c \\ \underline{r_۰} \;\; q_۱ \;|\; c \\ \qquad \underline{r_۱} \;\; q_۲ \;|\; c \\ \qquad\qquad \underline{r_۲} \;\; q_۳ \;|\; c \\ \qquad\qquad\qquad q_۴ \;\; \cdots \;\; q_{m-۱} \;|\; c \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{r_{m-۱}} \;\; q_m \end{array}$$

$\frac{\sqrt{۳}}{۲} L^۲$

پس:

$$\overline{(a_k a_{k-۱} \dots a_۱ a_۰)}_b = \overline{(q_m r_{m-۱} \dots r_۲ r_۱ r_۰)}_c$$

توجه: بدیهی است که همهٔ اعداد $r_۰$، $r_۱$، $r_۲$، …، $r_{m-۱}$ و q_m از عدد c (مبنا) کوچک‌تر و غیرمنفی هستند.

مثال ۳. عدد x را در برابری تعیین کنید.

$$(۱۱۰۲۲۰۲)_۳ = \overline{(۱۳x۵)}_۹$$

حل: روش اوّل:

$$(۱۱۰۲۲۱۲)_۳$$
$$= \underbrace{۲ + ۳}_{۵} + \underbrace{۲ \times ۳^۲ + ۲ \times ۳^۳}_{۸(۹^۱)} + \underbrace{۰ + ۱ \times ۳^۵}_{۳(۹^۲)} + \underbrace{۱ \times ۳^۶}_{۱(۹^۳)}$$
$$= ۵ + ۸(۹) + ۳(۹^۲) + ۱(۹^۳)$$
$$= (۱۳۸۵)_۹ \quad ; \quad \boxed{x = ۸}$$

روش دوم:

$$(۱۱۰۲۲۱۲)_۳ = ۲ + ۳ + ۲ \times ۳^۲ + ۲ \times ۳^۳ + ۰ + ۱ \times ۳^۵ + ۱ \times ۳^۶$$
$$= ۵ + ۱۸ + ۵۴ + ۲۴۳ + ۷۲۹ = (۱۰۴۹)_{۱۰}$$

$$\overline{(۱۳x۵)}_۹ = ۵ + x(۹) + ۳(۹^۲) + ۱(۹^۳)$$
$$= ۹x + ۵ + ۲۴۳ + ۷۲۹ = (۹x + ۹۷۷)_{۱۰}$$
$$۹x + ۹۷۷ = ۱۰۴۹ \quad \Rightarrow$$
$$x = \frac{۱۰۴۹ - ۹۷۷}{۹} = \frac{۷۲}{۹} = ۸ \quad ;$$
$$\boxed{x = ۸}$$

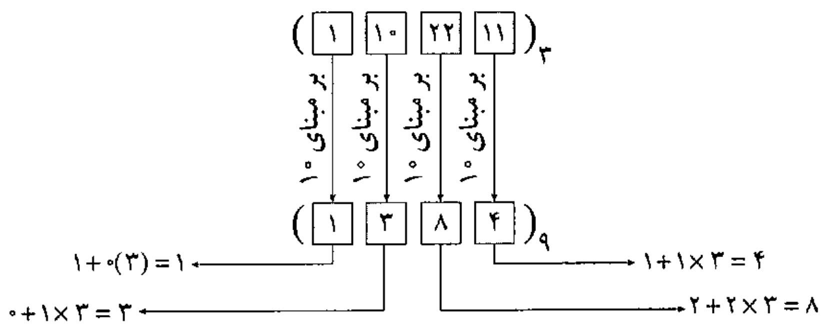
نکته: اگر عددی در مبنای b برابر x باشد و در مبنای b^n خواسته شود:

$$(x)_b = (y = ?)_{b^n}$$

در این صورت کافی است n رقم اول x را بر مبنای ۱۰ برده و حاصل را رقم اوّل y در نظر بگیریم، سپس n رقم بعدی را به مبنای ۱۰ ببریم و حاصل را رقم دوم y به حساب آوریم و به همین ترتیب، همهٔ ارقام y به دست خواهد آمد.

مثال ۴. عددی در مبنای ۹ به صورت $(۱۱۰۲۲۱۱)_۳$ است، آن را بیابید.

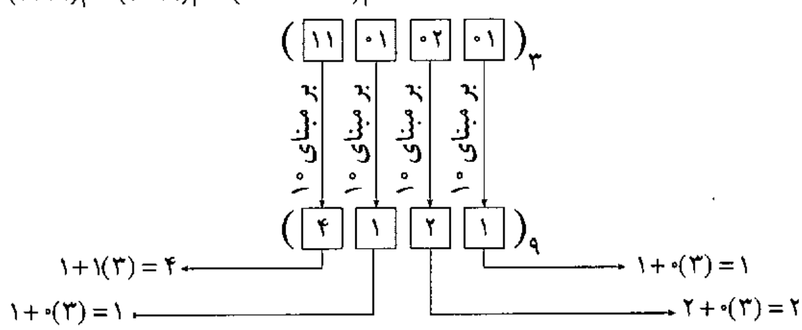
حل: در واقع باید x را در برابری $(110 2211)_3 = (x)_9$ تعیین کنیم؛ زیرا $9 = 3^2$ $(n = 2)$، بنابراین به سادگی می‌توان x را تعیین کرد:



مثال۵. حاصل عبارت $(1221)_3 \times (2011)_3$ را در مبنای ۹ بیابید.

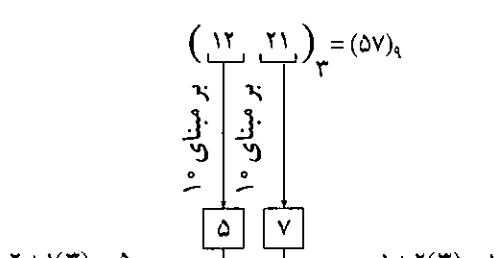
حل: روش اوّل:

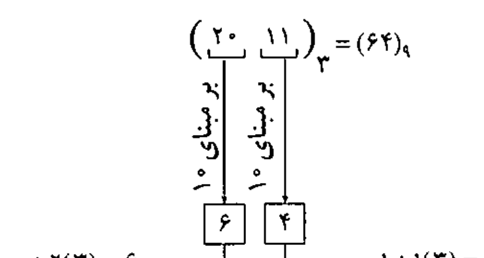
$$\begin{array}{r} 1221 \\ \times\ \ 2011 \\ \hline 1221 \\ 1221\ \\ 0000\ \ \\ 10212\ \ \ \\ \hline 11010201 \end{array} \rightarrow (1221)_3 \times (2011)_3 = (11010201)_3$$



$$(1221)_3 \times (2011)_3 = (11010201)_3 = (4121)_9$$

روش دوم:





$$(57)_9 \times (64)_9 = (?)_9 \rightarrow \begin{array}{r} 57 \\ \times\ 64 \\ \hline 261 \\ 376\ \\ \hline 4121 \end{array} \rightarrow (57)_9 \times (64)_9 = (4121)_9$$

روش سوم:

$(۱۲۲۱)_۳ = ۱+۲\times۳+۲\times۳^۲+۱\times۳^۳ = (۵۲)_{۱۰}$

$(۲۰۱۱)_۳ = ۱+۱\times۳+(۰)\times۳^۲+۲\times۳^۳ = (۵۸)_{۱۰}$

$(۵۲)_{۱۰}\times(۵۸)_{۱۰} = (۳۰۱۶)_{۱۰}$;

$(۳۰۱۶)_{۱۰} = (۴۱۲۱)_۹$

$$\begin{array}{r|l} ۳۰۱۶ & ۹ \\ \underline{۲۷} & ۳۳۵ \\ ۳۱ & \\ \underline{۲۷} & \\ ۴۶ & \\ \underline{۴۵} & \\ ۱ & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} ۳۳۵ & ۹ \\ \underline{۲۷} & ۳۷ \\ ۶۵ & \\ \underline{۶۳} & \\ ۲ & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} ۳۷ & ۹ \\ \underline{۳۶} & ۴ \\ ۱ & \end{array}$$

مثال ۶. از برابری $(۱۱۲۳)_x = (۳۱)_x \times (۱۳)_x$ ، حاصل $(A)_۵ = x^x$ را بیابید.

حل: $(۱۳)_x\times(۳۱)_x = (۱۱۲۳)x$;

$(۳+x)(۱+۳x) = ۳+۲x+x^۲+x^۳$;

$۳+۱۰x+۳x^۲ = ۳+۲x+x^۲+x^۳$;

$x^۳-۲x^۲-۸x=۰$; $x(x+۲)(x-۴)=۰$

$x=۰$; $x=-۲$; $\boxed{x=۴}$ $x^x=(۴)^۴=۲۵۶$;

$$\begin{array}{r|l} ۲۵۶ & ۵ \\ \underline{۲۵} & ۵۱ \\ ۰۶ & \\ \underline{۵} & \\ ۱ & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} ۵۱ & ۵ \\ \underline{۵۰} & ۱۰ \\ ۱ & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} ۱۰ & ۵ \\ \underline{۱۰} & ۲ \\ ۰ & \end{array}$$

$(۲۵۶)_{۱۰} = (۲۰۱۱)_۵$; $(A)_۵ = (۲۰۱۱)_۵$; $\boxed{A=۲۰۱۱}$

مثال ۷. از برابری $(۱۱۰)_x = (۳x)_{۲x}$ ، حاصل $(B)_۴ = \overline{xx}$ را بیابید.

حل: $(۳x)_{۲x} = (۱۱۰)_x$; $x+۳(۲x) = ۰+x+x^۲$;

$۷x = x^۲+x$; $x^۲-۶x=۰$; $x(x-۶)=۰$;

$x=۰$; $\boxed{x=۶}$; $\overline{xx}=(۶۶)_{۱۰}$

$(۶۶)_{۱۰} = (۱۰۰۲)_۴$; $(B)_۴ = (۱۰۰۲)_۴$; $\boxed{B=۱۰۰۲}$

$$\begin{array}{r|l} ۶۴ & ۴ \\ \underline{۶۴} & ۱۶ \\ ۲ & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} ۱۶ & ۴ \\ \underline{۱۶} & ۴ \\ ۰ & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} ۴ & ۴ \\ \underline{۴} & ۱ \\ ۰ & \end{array}$$

مثال۸. عددی در پایهٔ n به صورت ۴۷ و در پایهٔ m به صورت ۷۴ نوشته می‌شود، کم‌ترین مقدار m+n را بیابید.

حل: $(۴۷)_n = (۷۴)_m$; $۷+۴n = ۴+۷m$;

$$m=\frac{۴n+۳}{۷}\ ,\quad \begin{array}{c|c} n=۸ & m=۵ \\ \hline n=۱۵ & m=۹ \\ \hline n>۷ & m>۷ \end{array}$$

$m+n=۱۵+۹=۲۴$ (جواب قابل قبول)

مثال ۹. عددی در پایه ۷ به صورت $\overline{ab}$ و در پایهٔ ۹ به صورت $\overline{ba}$ است، مقدار $c=\sqrt{a^۲+b^۲}$ را بیابید.

حل: $(\overline{ab})_۷ = (\overline{ba})_۹$;

$$\begin{cases} a,b<۷ \\ ۷a+b=۹b+a \ ;\ ۸b=۶a \ ;\ b=\frac{۳}{۴}a \ ;\ \boxed{a=۴,b=۳} \end{cases}$$

$c=\sqrt{a^۲+b^۲}=\sqrt{۳^۲+۴^۲}=\sqrt{۲۵}=۵$

تمرین:

۱. عدد $(۳۳۴)_۵$ را به مبنای ۷ ببرید.

۲. از برابری $(x)_۳ = (۱۳۸۴)_۹$ ، مقدار x را بیابید.

۳. از برابری $(۱۱۰۲۲۰۲)_۳ = (\overline{۱x۸۵})_۹$ ، عدد x را بیابید.

۴. عددی در مبنای ۸ بیابید که معادل عدد $(۱۱۰۲۲۰۲)_۳$ باشد.

۵. حاصل عبارت $(۲۰۲۲)_۳ \times (۱۰۲۱)_۵$ را در مبنای ۶ بیابید (با سه روش).

۶. از برابری $(\overline{۱۱x۳})_{x^۲} = (۳۱)_{۲x}\times(۱۳)_{۲x}$ و $(A)_۲ = x^{x^x}$ مقدار A را بیابید.

۷. از برابری $(x۶)_{۴x} = (۱۱۰)_{۲x}$ و $(B)_۳ = \overline{xx}$ مقدار B را بیابید.

۸. عددی در پایهٔ m به صورت ۳۷ و در پایهٔ n به صورت ۷۳ است، کم‌ترین مقدار (m+n) را بیابید.

۹. عددی در پایهٔ ۵ به صورت $\overline{xy}$ و در پایهٔ ۷ به صورت $\overline{yx}$ است، مقدار (x+y) را بیابید.

۱۰. چند عدد چهار رقمی در مبنای ۵ وجود دارد؟

۱۱. چند عدد شش رقمی در مبنای ۷ با ارقام متمایز وجود دارد؟

۱۲. با توجه به برابری $(b)_۲ = ۱۳^۲ = (a)_۳$ ، مجموع تعداد صفرها در a و b را بیابید.

۱۳. هر عدد به صورت $\overline{aaaaaa}+\overline{aaa}$ بر چه اعدادی بخش‌پذیر است؟

۱۴. هر عدد به صورت $(\overline{aaaccc}+\overline{ccc})(\overline{aaabbb}+\overline{bbb})$ بر چه اعدادی بخش‌پذیر است؟

۲

نکاتی دربارهٔ اعداد گویا و گنگ

مرتضی بیات و مهدی حسنی
مرکز تحصیلات تکمیلی در علوم پایهٔ زنجان

اشاره

تفهیم اعداد گنگ به سادگی بیانشان نیست. بیان نمادهای صوری $\sqrt{2}$، e و π، به مراتب راحت‌تر از درک عمیق آن است که آنها چه نوع اعدادی هستند. در این مقالهٔ کوتاه، کوشش خواهد شد گامی هر چند کوچک در جهت درک بهتر اعداد گویا و گنگ برداشته شود. اکنون پس از نکاتی که در بخش اول این مقاله ذکر شد، حل چند مسأله به کمک اعداد گنگ و چند قضیه ساده دربارهٔ اعداد گنگ و همچنین بررسی قضیهٔ هالموس (صورت سادهٔ مسألهٔ هفتم هیلبرت) و قضیهٔ بیتی، پایان بخش این مقاله خواهد بود.

۳. حل چند مسأله به کمک اعداد گنگ

اینک با استفاده از گنگ بودن $\sqrt{2}$ مسألهٔ زیر را حل می‌کنیم:

مسألهٔ ۱. فرض کنیم نیم خطی از مبدأ مختصات رسم شده باشد. اگر این نیم خط از نقطهٔ گنگی مانند $(1, \sqrt{2})$، عبور کند، آیا این نیم خط، از نقطهٔ صحیح دیگری عبور می‌کند؟

حل: فرض کنیم که این نیم خط از نقطه‌ای بگذرد که هر دو مؤلفهٔ x و y اعداد صحیح p و q باشند. در این صورت، با توجه به مثلث های متشابه داریم:

$$\frac{\sqrt{2}}{q} = \frac{1}{p},$$

اما نتیجهٔ اخیر، غیرممکن است؛ زیرا $\sqrt{2}$ گنگ است.

مسألهٔ ۲ (مسابقهٔ ریاضی دانشجویی ۱۳۵۷). در صفحهٔ XOY نقطه‌ای را مُنطق (گویا) خوانیم که هر دو مختصاتش گویا باشند. ثابت کنید که اگر دایره‌ای در صفحه داده شده باشد که مرکزش مُنطق نباشد، در این صورت روی آن دایره، حداکثر دو نقطه مُنطق وجود دارد.

حل: مسأله را با برهان خلف حل می‌کنیم. فرض کنیم تعداد نقاط گویا روی محیط دایره بیش از سه نقطه باشد و فرض کنیم:

$A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2), C = (c_1, c_2)$

سه نقطه گویای روی محیط دایره باشند. معادلات خطوط عمود منصف وارد بر وترهای $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ را با l_2 و l_1 به شرح زیر نمایش می‌دهیم:

$$l_1 : y - \frac{b_2 + c_2}{2} = -\frac{b_1 - c_1}{b_2 - c_2}\left(x - \frac{c_1 + b_1}{2}\right)$$

$$l_2 : y - \frac{a_2 + b_2}{2} = -\frac{b_1 - a_1}{b_2 - a_2}\left(x - \frac{a_1 + b_1}{2}\right)$$

خطوط l_1 و l_2 همدیگر را در مرکز دایره قطع می‌کنند، لذا مرکز دایره دارای مختصات گویا می‌باشد که این مخالف

فرض است.

در مسألهٔ زیر نشان می‌دهیم که اعداد گویا و گنگ به طور بسیار پیچیده‌ای در هم آمیخته‌اند و نباید به اشتباه تصور کرد که آنها روی خط حقیقی به طور «متناوب» هستند.

اعداد گویا را می‌توان اعدادی دانست که بسط اعشاری آن‌ها به فواصل منظم تکرار می‌شود (از اثبات این مطلب صرف‌نظر می‌کنیم). با بیان دقیق‌تر، گوییم یک بسط اعشاری، تکراری است، هرگاه از رقمی به بعد، دنبالهٔ ثابتی از ارقام به طور نامتناهی تکرار شود. مثلاً:

$$۱/۵۴۳۲۱۷۴۱۷۴۱۷۴۱۷۴... = ۱/۵۴۳۲\overline{۱۷۴}$$

یک بسط اعشاری تکراری است.

مسألهٔ ۳ (مسابقهٔ ریاضی دانشجویی ۱۳۵۲). ثابت کنید عدد:

$$۰/۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰۱۱۱۲۱۳۱۴۱۵۱۶۱۷۱۸۱۹۲۰...$$

که در فرم اعشاری ارقامش، اعداد طبیعی پشت سر هم هستند، گنگ است.

حل: فرض کنیم که دورهٔ تناوب وجود داشته باشد و از n رقم تشکیل شود. در رشتهٔ طبیعی عددها، وقتی به اندازهٔ کافی جلو برویم، می‌توانیم به عددی برسیم که در آن n رقم متوالی مساوی صفر باشد؛ بنابراین دورهٔ تناوب باید از رقم‌های مساوی صفر تشکیل شده باشد. به همین ترتیب می‌توان استدلال کرد که دورهٔ تناوب باید از رقم‌های مساوی واحد تشکیل شده باشد و این دو نتیجه متناقض یکدیگرند. بنابراین x، یک عدد گنگ است.

مسألهٔ ۴: ثابت کنید در صفحهٔ مختصات دکارتی، مثلثی متساوی‌الاضلاع وجود ندارد که طول ضلعش عددی گویا باشد و مختصات سه رأسش هم اعدادی گویا باشند.

حل: فرض کنید مثلثی با ویژگی‌های مورد نظر وجود داشته باشد؛ طول ضلعش l باشد و مختصات سه رأسش:

$$(x_۱, y_۱), (x_۲, y_۲), (x_۳, y_۳)$$

باشند. در این صورت مساحت مثلث برابر است با:

$$\frac{۱}{۲}\left[x_۲y_۳ - x_۳y_۲ - x_۱y_۳ + x_۱y_۱ + y_۱x_۳ + y_۱x_۲\right],$$

که عددی گویاست. از طرف دیگر، مساحت مثلثی متساوی‌الاضلاع به طول ضلع L برابر با $\frac{\sqrt{۳}}{۴}L^۲$ است، که با توجه به گنگ بنودن $\sqrt{۳}$ و گویا بودن $\frac{L}{۲}$ عددی گنگ است (چرا؟). بنابراین به تناقض رسیده‌ایم و حکم مسأله درست است.

۴. چند قضیهٔ ساده دربارهٔ اعداد گنگ

همان‌طوری که دیدیم، عدد $\sqrt{۲}$ گنگ است. بسیاری از اعداد دیگر هم گنگ هستند. اثبات گنگ بودن یک عدد، همیشه ساده نیست (خواهیم دید برای e نسبتاً ساده است و برای π مشکل‌تر؛ اعداد جالب بسیاری هم وجود دارند که قرن‌هاست ریاضیدانان به گنگ بودنشان متقاعد هستند؛ ولی هرگز به اثباتشان دست نیافته‌اند). ولی تنها از این واقعیت که $\sqrt{۲}$ گنگ است، نتیجه می‌گیریم که بین هر دو عدد گویا، عددی گنگ وجود دارند. ابتدا به لم زیر نیاز داریم:

لم ۱. اگر $\frac{m}{n}$ و $\frac{r}{s}$ گویا باشند و $\frac{r}{s} \neq ۰$، آن‌گاه $\frac{m}{n}+\frac{r}{s}\sqrt{۲}$ گنگ است.

اثبات. فرض کنیم $\frac{m}{n}+\frac{r}{s}\sqrt{۲}$ عددی گویا و برابر با $\frac{p}{q}$ باشد که p و q اعداد صحیح هستند، آن‌گاه با معادلهٔ زیر برای $\sqrt{۲}$ داریم:

$$\sqrt{۲} = \frac{pn - mq}{qnr}$$

که گویاست و متناقض گنگ بودن $\sqrt{۲}$ است.

قضیهٔ ۲. بین هر دو عدد گویای متمایز، عددی گنگ وجود دارد.

اثبات. فرض کنیم اعداد گویای مفروض $\frac{m}{n}$ و $\frac{r}{s}$ باشند $\frac{m}{n} < \frac{r}{s}$ آن‌گاه:

$$\frac{m}{n} < \frac{m}{n} + \frac{\sqrt{۲}}{۲}\left(\frac{r}{s} - \frac{m}{n}\right) < \frac{r}{s}$$

$\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲} < ۱\right)$ و عدد میانی بنا به لم قبل گنگ است.

با تعویض «گویا» و «گنگ» قضیهٔ متناظر به دست می‌آید:

قضیهٔ ۳: بین هر دو عدد گنگ متمایز، عددی گویا وجود دارد.

اثبات. فرض کنیم اعداد گنگ مفروض a و b باشند و $a < b$. بسط آنها را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم n امین رقم اعشاری، اولین رقمی باشد که در این دو متفاوت است. آن‌گاه:

$$a = a_0.a_1 \dots a_{n-1}a_n \dots$$
$$b = a_0.a_1 \dots a_{n-1}b_n \dots$$

و $a_n \neq b_n$ ، فرض کنیم $x = a_0.a_1 \dots a_{n-1}b_n$ ، آن‌گاه x گویاست و باید داشته باشیم $a < x < b$. (واضح است که $a < x < b$ ، ولی چون b گنگ است، $x \neq b$).

قضیهٔ ۴ . عدد e گنگ است.

اثبات. بنا به تعریف داریم:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

فرض کنیم e گویا باشد؛ بنابراین داریم $e = \frac{a}{b}$ ، که در آن a و b اعداد صحیح هستند. اگر $k \geq b$ قرار می‌دهیم:

$$\alpha = k!\left(e - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - \dots - \frac{1}{k!}\right)$$

پس $b|k!$ و α عدد صحیح است. اما:

$$0 < \alpha = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \dots < \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} + \dots = \frac{1}{k}$$

در نتیجه $1 > \alpha > 0$ و این تناقض است.

۵. روش غیاث‌الدین جمشید کاشانی برای محاسبهٔ تقریبی عدد π

اگر P_n و P'_n به ترتیب محیط‌های n- ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی در دایره به شعاع واحد باشند، بدیهی است که:

$$P_n = 2n\sin(x) < 2\pi < P'_n = 2n\tan(x).$$

حال اگر n را برابر ۶ بگیریم، به دست می‌آید:

$$3 < \pi < 2\sqrt{3} \approx 3/46.$$

یعنی مقدار درست عدد π برابر با ۳ است، که اگر n را عددهای بزرگ‌تری بگیریم، به همین ترتیب، می‌توانیم با توجه به رقم‌های مشترک دو طرف نابرابری‌ها، مقدار π را تا هر چند رقم دلخواه به دست آوریم. به ازای n=۶۰، به دست می‌آید:

$$60\sin(3) < \pi < 60\tan(3)$$
$$3/1402 < \pi < 3/1445$$

بنابراین، $\pi \approx 3/14\dots$.

این شیوهٔ محاسبهٔ عدد π ، یعنی انتخاب چند ضلعی‌های محاطی و محیطی به جای دایره و افزایش تعداد ضلع‌های آنها، همان شیوه‌هایی است که غیاث‌الدین جمشیدکاشانی هم، مورد استفاده قرار داد و به کمک آن توانست برای نخستین بار، π را تا ۱۹ رقم اعشاری به‌دست آورد.

۶. قضیهٔ هالموس

همان‌طوری که دیدیم، π و e اعداد گنگ هستند؛ ولی دربارهٔ ماهیت اعدادی چون $3^{\sqrt{2}}$ یا $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ و ... اطلاع نداریم. همواره این حکم به طور نادرست در ذهن‌ها تداعی می‌شود که اگر «α و β اعداد گنگ باشند، آن‌گاه α^{β} نیز گنگ است». این موضوع در حالت کلی برقرار نیست. قضیه زیر که دارای اثباتی ساده و ظریف است، به این سؤال جواب خواهد داد.

قضیهٔ ۵ (هالموس)

۱) عدد گنگی به توان عدد گنگ، ممکن است حاصل عددی گویا باشد.

۲) عدد گنگ به توان عدد گنگ، ممکن است گنگ باشد.

۳) عدد گویا به توان عدد گنگ، ممکن است گنگ باشد.

اثبات (۱). اتّحاد زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 2,$$

اگر $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ گویا باشد، حکم تمام است و بنابراین $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ، مثالی از حالت مورد نظر ما خواهد بود.

(۲). اتّحاد $\sqrt{2}^{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}\sqrt{2}$ را در نظر می‌گیریم. اگر $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ گنگ باشد، برهان تمام است؛ در غیر این صورت، $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ گویاست؛ پس $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\sqrt{2}$ ، گنگ است و در نتیجه $\sqrt{2}^{\sqrt{2}+1}$ ، مثالی از حالت مورد بحث است.

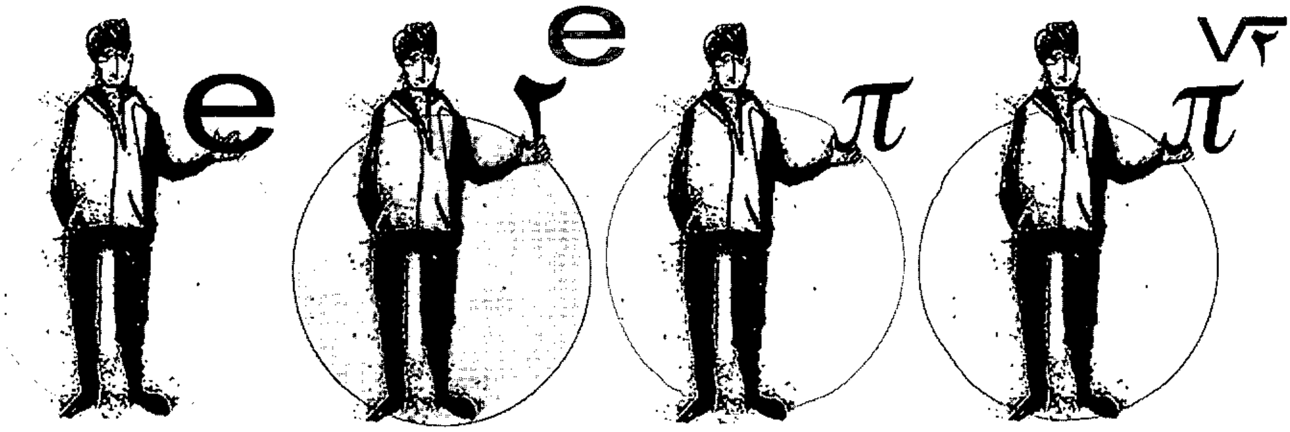
(۳). اگر $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ گنگ باشد، حکم تمام است و اگر گویا باشد، عدد $\left(2\sqrt{2}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{4}}$ را در نظر می‌گیریم. با توجه به این‌که:

$$\left(2^{\sqrt{2}}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{2}$$

پس $\left(2^{\sqrt{2}}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{4}}$ ، گنگ است.

۷. قضیهٔ بیتی

در سال ۱۹۲۶ م. سام بیتی از دانشگاه تورنتو کشف مهمی در مورد دنبالهٔ اعداد گنگ کرد. فرض کنیم X یک عدد گنگ مثبت،



مثلاً $\sqrt{۲}$ باشد. عکس X را Y می‌نامیم؛ در این صورت $Y = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \approx ۰/۷$. با افزودن ۱ به هر یک از X و Y به‌دست می‌آوریم:

$$۱+Y \approx ۱/۷ \qquad ۱+X \approx ۲/۴$$

حال جدولی از مضرب‌های تقریبی X+۱ و Y+۱ تشکیل می‌دهیم و این مضرب‌ها را در جدولی مطابق زیر مشخص می‌کنیم. اکنون می‌بینیم که در هر بازهٔ $]n, n+۱[$، یعنی بین هر جفت از اعداد صحیح مثبت متوالی، دقیقاً یکی از اعداد جدول وجود دارد.

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	...
n(۱+X)	۲/۴	۴/۸	۷/۲	۹/۶	۱۲	۱۴/۴	۱۶/۸	...
n(۱+Y)	۱/۷	۳/۴	۵/۱	۶/۸	۸/۵	۱۰/۲	۱۱/۹	...

به طور کلی، قضیهٔ زیر برقرار است:

قضیهٔ ۶ (بیتی). فرض کنیم X عدد گنگ مثبتی و Y عکس آن باشد؛ در این صورت دو دنبالهٔ:

$$۱+X,\quad ۲(۱+X),\quad ۳(۱+X),\dots$$
$$۱+Y,\quad ۲(۱+Y),\quad ۳(۱+Y),\dots$$

همراه با هم دقیقاً یک عدد در هر یک از بازه‌های $]n, n+۱[$ که $n = ۱, ۲, ۳, \dots$ قرار دارند.

در سال ۱۹۲۷ م. اثبات زیبایی از این قضیه را اوستروسکی و آتیکن انتشار دادند.

اثبات. ابتدا توجه می‌کنیم که، چون X و Y گنگ هستند، هر یک از جمله‌های دنباله‌های مورد نظر، گنگ است. این مطلب مخصوصاً به این معناست که هیچ جمله‌ای عدد صحیح نیست.

اکنون، محاسبهٔ تعداد مضرب‌های $۱+X$ که کوچک‌تر از یک عدد صحیح مثبت مفروض N هستند، بسیار آسان است. این تعداد که کوچک‌تر از N هستند، برابر است با $\left[\frac{N}{۱+X}\right]$ که در آن $[z]$ نشان دهندهٔ بزرگ‌ترین عدد صحیح نابیش‌تر از z است.

همین‌طور تعداد جمله‌هایی که در دنبالهٔ دوم (مضرب‌های $۱+Y$) بین ۱ و N واقع‌اند، برابر است با $\left[\frac{N}{۱+Y}\right]$.

پس روی همه رفته، $\left[\frac{N}{۱+X}\right]+\left[\frac{N}{۱+Y}\right]$ جمله از دنباله‌های ما بین ۱ و N قرار دارند. چون $\frac{N}{۱+X}$ و $\frac{N}{۱+Y}$ عدد صحیح نیستند، داریم:

$$\frac{N}{۱+X} - ۱ < \left[\frac{N}{۱+X}\right] < \frac{N}{۱+X}$$

و

$$\frac{N}{۱+Y} - ۱ < \left[\frac{N}{۱+Y}\right] < \frac{N}{۱+Y}$$

با جمع کردن طرفین نابرابری‌ها و ملاحظهٔ این که:

$$\frac{1}{1+X}+\frac{1}{1+Y}=\frac{1}{1+X}-\frac{1}{1+\frac{1}{X}}=1$$

به دست می‌آوریم:

$$N-2<\left[\frac{N}{1+X}\right]+\left[\frac{N}{1+Y}\right]<N$$

چون $\left[\frac{N}{1+X}\right]+\left[\frac{N}{1+Y}\right]$ عدد صحیح است، نتیجه می‌گیریم:

$$\left[\frac{N}{1+X}\right]+\left[\frac{N}{1+Y}\right]=N-1.$$

این مطلب بدین معناست که تعداد کل جمله‌های ما که کوچک‌تر از عدد صحیح N هستند، N-۱ است. همین طور، تعداد کل جمله‌ها تا N+۱ برابر با N است؛ یعنی اگر N را به اندازهٔ ۱ افزایش دهیم، جملهٔ دیگری از یکی از دنباله‌ها پذیرفته می‌شود و در نتیجه، دقیقاً یک جمله بین N و N+۱ واقع است.

از این قضیه نتیجه می‌شود که اگر قسمت‌های اعشاری جمله‌های این دنباله‌ها را کنار بگذاریم، هر جمله عدد صحیحی به‌دست می‌دهد و هر عدد طبیعی، دقیقاً یک بار ظاهر می‌شود.

نتیجه. دنباله‌های $[n(1+X)]$ و $[n(1+Y)]$، که به دنباله‌های بیتی متناظر با عدد گنگ X موسوم‌اند، همراه با هم، هر عدد طبیعی را دقیقاً یک بار در بردارند.

منابع

1. J.P.Toporowiskis, Irrational Numbers, Amer. Math. Monthly, **50** (1973) 423-424.
2. I. Stewart % D. Tall, The Foundations of Mathematics, Oxford University Prees, 1977.
3. G.H.Hardy % E.M. Wright, An Introduction to the Theory of Numbers, Fourth Edition, Clarandoon Prees, Oxford 1960.
4. I, Niven, A Simple Proof of the Irrationality of π ,Bulletin of the Amer. Math. Society, **53** (1947) 509.
5. D.M. Bloom, A One - Sentence Proof Taht $\sqrt{2}$ Is Irrational, Mat. Magazine **68** (1995)286.

۶. آدینه محمّد نارنجانی: *برهان‌هایی از اصمّیت* $\sqrt{2}$، مجلهٔ رشد ریاضی، ۴(۱۳۶۳)۴۳-۴۱.

۷. غلامحسین اخلاق نیا: *اعداد گنگ و گویا*، (تألیف: ایوان نیون)، مرکز نشر دانشگاهی، تهران (۱۳۶۷).

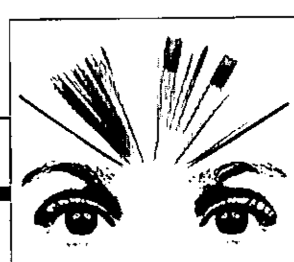
۸. بیژن کاووس: محاسبه عدد π، مجلهٔ آشنایی با ریاضیات، ۱۱(۱۳۶۵)-۴۶۹-۴۷۰.

۹. اسداله نیکنام و ابوالقاسم بزرگ‌نیا: *مبانی ریاضی* (تالیف: ک. جی. بین مور)، انتشارات بنیاد فرهنگی رضوی (۱۳۷۰).

۱۰. غلامحسین مصاحب: *آنالیز ریاضی جلد اول*، چاپ ششم، مؤسسهٔ انتشارات امیرکبیر تهران (۱۳۶۳).

۱۱. فریبرز آذرپناه و علی رضایی: *برآورد گنگ با گویا*، مجلهٔ فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، ۱۸ (۱۳۷۶)۲۸-۲۱.

۱۲. سیامک کاظمی: *ابتکارهایی در ریاضیات* (تألیف: راس هانسبرگ)، مرکز نشر دانشگاهی، تهران (۱۳۷۱).

معماهای فـ  ـکری و منطقی

در دانشکده S دروس اقتصاد، انگلیسی، فرانسه، تاریخ، لاتین و ریاضیات توسط خانم A، خانم B، خانم C، آقای D، آقای E و آقای F، نه لزوماً به این ترتیب، تدریس می‌شود.

معلم ریاضیات و معلم لاتین در دانشکده هم اتاق بوده‌اند.

E از F مسن‌تر است؛ اما به اندازهٔ معلم اقتصاد تدریس نکرده است.

خانم A و خانم B در دوران دبیرستان به یک مدرسه می‌رفته‌اند؛ در حالی که دبیرستان‌های دیگران مختلف بوده است.

F پدر معلم فرانسه است.

معلم انگلیسی چه در سن و چه در سال‌های خدمت، مسن‌ترین این شش نفر است. در واقع زمانی که آنان دانش‌آموز دبیرستان S بودند، وی معلم ریاضیات و تاریخ را در کلاس خود داشته است.

خانم A از معلم لاتین مسن‌تر است.

اتحاد و معادله ۷

پرویز شهریاری

اشاره

در شمارهٔ قبل دوازده مسأله را مطرح کردیم که حل آن‌ها منجر به حل معادله‌های نامتعارف شد، اینک ادامه آن مسائل و مسائلی را که منجر به نامعادله‌های نامتعارف می‌شوند، در پی می‌آوریم.

برخی معادله‌ها و نامعادله‌های نامتعارف

مسأله ۱۲. عدد سه رقمی $\overline{xyz}$، در دستگاه به مبنای ۱۰ را پیدا کنید؛ به شرطی که داشته باشیم:

$$\overline{xyz} = xyz(x+y+z)$$

$\overline{xyz}$ با پاره‌خط راستی بالای آن به معنای یک عدد سه رقمی است که z یکان آن، y دهگان آن و x صدگان آن باشد.

حل: باید این معادله را حل کنیم:

$$100x + 10y + z = xyz(x+y+z)$$

از دو طرف برابری $x+y+z$ را کم می‌کنیم:

$$9(11x+y) = (x+y+z)(xyz-1) \qquad (1)$$

با شرط x، y و z، مثبت و کوچک‌تر از ۱۰.

از معادله روشن می‌شود که $x+y+z$ و $(xyz-1)$ باید بر ۳ بخش‌پذیر باشند؛ ولی در این صورت (با آزمایش همهٔ حالت‌های ممکن) روشن می‌شود که x، y و z باید در تقسیم بر ۳ به باقی‌ماندهٔ ۱ برسند و آن‌وقت $11x+y$ هم بر ۳ بخش‌پذیر می‌شود. بنابراین باید یکی از دو عامل $x+y+z$ یا $xyz-1$ بر ۹ بخش‌پذیر باشند.

اگر $x+y+z > 17$ باشد، آن‌وقت:

$$xyz \geq 72 \ , \ xyz(x+y+z) > 1000$$

یعنی برابر یک عدد چهار رقمی می‌شود. به این ترتیب، اگر $x+y+z$ بر ۹ بخش‌پذیر باشد، باید داشته باشیم:

$$x+y+z = 9 \text{ و } 11x + y = xyz - 1$$

در این حالت داریم:

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3} = 3 \Rightarrow xyz \leq 27$$

و x می‌تواند برابر ۱ یا ۲ باشد؛ زیرا در غیر این صورت خواهیم داشت:

$$xyz = 11x + y + 1 > 27$$

در حالت $x = 2$، به این دستگاه می‌رسیم:

$$y+z = 8 \ , \ 2yz = y + 23$$

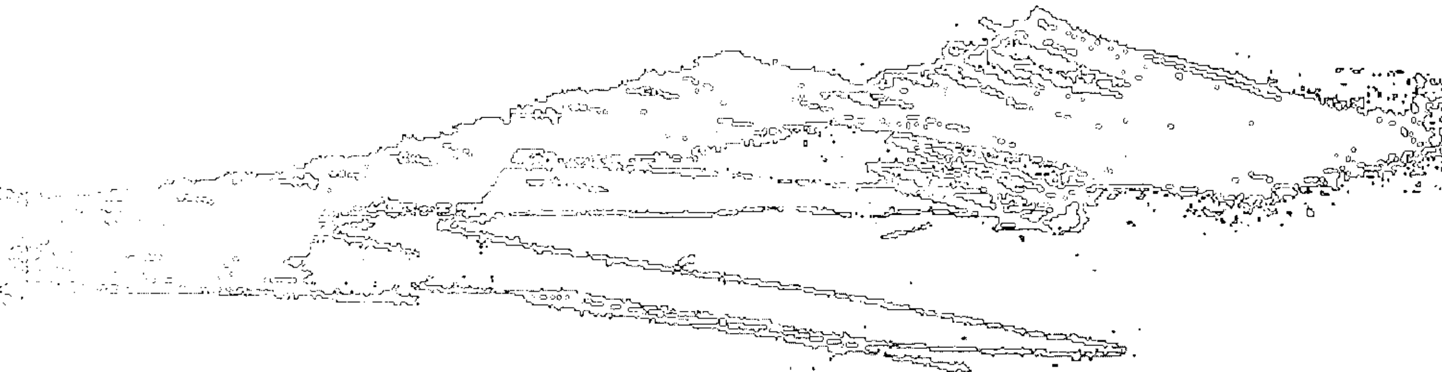
که برای y و z، عددهای درست به‌دست نمی‌آید. بنابراین باید فرض کرد: $x = 1$ و به این دستگاه می‌رسیم:

$$y+z = 8 \ , \ 11 + y = yz - 1$$

که از آن جواب به‌دست می‌آید: ۱۳۵ و ۱۴۴.

اکنون به حالتی می‌پردازیم که $(xyz-1)$ بر ۹ بخش‌پذیر باشد. اگر $xyz - 1 = 9$، آن‌وقت از (۱) به‌دست می‌آید $z = 10x$، که ممکن نیست؛ در حالت‌هایی هم که $xyz - 1$ برابر ۱۸، ۳۶، ۴۵، ۵۴، ۷۲، ۸۱ یا ۹۰ باشد، ممکن نیست؛ زیرا در این حالت‌ها xyz شامل عامل اولی بزرگ‌تر از ۱۰ می‌شود.

در حالت $xyz - 1 = 27$، به این دستگاه می‌رسیم:



$8x = 2y + z$ ، $xyz = 28$ ،

که جواب قابل قبولی برای مسأله ندارد.

در حالت $xyz - 1 = 36$ هم، به این دستگاه می‌رسیم:

$4x = 6y + 7z \;,\; xyz = 64$

که با هم جوابی نمی‌دهد، و سرانجام اگر (برای $m > 10$) داشته باشیم:

$xyz - 1 = 9m$

به‌دست می‌آید: $11x + y = m(x + y + z)$ ، که ممکن نیست.

پاسخ. ۱۳۵ ، ۱۴۴ .

مسألهٔ ۱۳ . معادلهٔ $[x[x]] = 1$ را حل کنید.

حل : این معادله با این نامعادله‌ها هم‌ارز است:

$1 \le x[x] < 2$

x را به صورت $x = k + \alpha$ می‌نویسیم، که در آن $k = [x]$ و $\alpha = x - [x]$. نابرابری به این صورت درمی‌آید:

$1 \le k^2 + \alpha k < 2 \qquad (1)$

اما نابرابری برای $k = 1$ و $0 \le \alpha < 1$ برقرار است و برای $k \ge 2$ و $k = 0$ برقرار نیست. برای $k = -1$ تنها به ازای $\alpha = 0$ برقرار است. در حالت $k = -2$ داریم $k^2 \ge 4$ و $\alpha k \le 0$ ؛ یعنی:

$k^2 + \alpha k \ge k^2 \ge 4$

و نابرابری (۱) برقرار نیست.

پاسخ. $1 \le x < 2$ و $x = -1$.

مسألهٔ ۱۵ . عددی چهار رقمی پیدا کنید که برابر مجذور عددی باشد که از دو رقم سمت راست عدد تشکیل شده است.

حل : باید داشته باشیم: $\overline{abcd} = (\overline{cd})^2$

$100(10a + b) + (10c + d) = (10c + d)^2$

یا

$100(10a + b) = (10c + d)(10c + d - 1)$

$10c + d$ را برابر k می‌گیریم. روشن است $a \ne 0$ (زیرا مجذور عدد یک رقمی برابر با عدد چهار رقمی نمی‌شود)؛ بنابراین k عددی دو رقمی است و در ضمن داریم:

$100(10a + b) = k(k - 1)$

حاصل‌ضرب $k(k - 1)$ باید بر ۱۰۰ بخش‌پذیر باشد؛ بنابراین یکی از آن‌ها بر ۴ و دیگری بر ۲۵ بخش‌پذیر است. تنها یکی از این دو حالت ممکن است:

1) $k = 25 \;,\; k - 1 = 24$

2) $k = 76 \;,\; k - 1 = 75$

در حالت اول به دست می‌آید $10a + b = 6$ که پذیرفتنی نیست (زیرا $a \ne 0$ است).

در حالت دوم به دست می‌آید:

$10a + b = 19 \times 3 = 57$

یعنی $a = 5$ و $b = 7$. در ضمن روشن است که از رابطهٔ:

$10c + d = 76$

به‌دست می‌آید: $c = 7$ و $d = 6$.

پاسخ : ۵۷۷۶ .

مسألهٔ ۱۶ . بخش درست این عبارت را پیدا کنید:

$$S_n = \sqrt{2} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \sqrt[4]{\frac{4}{3}} + \cdots + \sqrt[n]{\frac{n+1}{n}}$$

حل : روشن است که $S_n > n$. ثابت می‌کنیم $S_n < n + 1$. اگر از نابرابری کوشی برای میانگین‌های حسابی و هندسیِ $k + 1$ عدد:

$$1 + \frac{1}{k}, 1, 1, \cdots, 1$$

استفاده کنیم، به این نابرابری می‌رسیم:

$$\sqrt[k+1]{1 + \frac{1}{k}} < \frac{1 + \frac{1}{k} + k}{k + 1} \;,\; (k = 1, 2, \cdots, n)$$

یا

$$\sqrt[k+1]{1 + \frac{1}{k}} < 1 + \frac{1}{k(k + 1)} \;,\; (k = 1, 2, \cdots, n)$$

اگر k را به ترتیب برابر ۱ ، ۲ ، ... و n بگیریم و نابرابری‌های حاصل را با هم جمع کنیم، به دست می‌آید:

$$S_n < n + \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= n + (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + (\frac{1}{3}-\frac{1}{4}) + \cdots$$

$$\cdots + (\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}) = n+1-\frac{1}{n+1} < n+1$$

پس داریم: $n < S_n < n+1$ ، یعنی $[S_n] = n$.

مسألهٔ ۱۷ . جواب‌های درست این دستگاه معادله‌ها را پیدا کنید:

$$\begin{cases} 2x^3 - 7x^2 + 8x - 2 = y \\ 2y^3 - 7y^2 + 8y - 2 = z \\ 2z^3 - 7z^2 + 8z - 2 = x \end{cases}$$

حل: (a,b,c) را یکی از جواب‌های دستگاه می‌گیریم و در آغاز فرض می‌کنیم، این سه عدد مختلف باشند.

اگر فرض کنیم: $f(t) = 2t^3 - 7t^2 - 18t - 2$ ، به دست می‌آید:

$$f(a) = b \ , \ f(b) = c \ , \ f(c) = a$$

اگر u و v ، عددهایی درست باشند، $f(u) - f(v)$ بر $u - v$ بخش‌پذیر است. به این ترتیب $f(a) - f(b)$ ؛ یعنی $b - c$ بر $a - b$ و همچنین $c - a$ بر $b - c$ و $a - b$ بر $c - a$ بخش‌پذیر است. اگر m ، n و k را به ترتیب خارج قسمت‌ها بگیریم، باید داشته باشیم:

$$a - b = k(c - a) = kn(b - c) = knm(a - b)$$

(k و n و m عددهایی درست‌اند). از آن‌جا $knm = 1$.

اگر k یا m و یا n برابر ۱ - باشد، به دست می‌آید $a = b = c$

و اگر k ، n و m برابر یک باشند، به دست می‌آید:

$$2a = b + c \ , \ 2c = a + b \ , \ 2b = a + c$$

که باز هم به همان نتیجهٔ $a = b = c$ می‌رسیم؛ یعنی a ، b و c نمی‌توانند عددهای مختلفی باشند.

به این ترتیب، کافی است این معادله را حل کنیم:

$$2x^3 - 7x^2 + 8x - 2 = x$$

یکی از ریشه‌های این معادله، برابر واحد است؛ با در اختیار داشتن یکی از ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم، دو ریشهٔ دیگر آن به‌دست می‌آید. این دو ریشه ۲ و $\frac{1}{2}$ است. بنابراین جواب‌های دستگاه (۱و۱و۱) و (۲و۲و۲) است.

مسألهٔ ۱۸ . این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\sqrt{1+x_1} + \sqrt{1+x_2} + \cdots + \sqrt{1+x_{100}} = 100\sqrt{1+\frac{1}{100}} \ ,$$

$$\sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2} + \cdots + \sqrt{1-x_{100}} = 100\sqrt{1-\frac{1}{100}}$$

حل: بردار با مختصات $(\sqrt{1+x_i} \ , \ \sqrt{1-x_i})$ را a_i می‌نامیم $(i = 1,2,\ldots,100)$. دستگاه مفروض، به این معناست که:

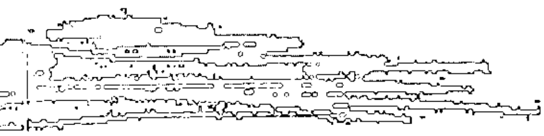
$$\sum_{i=1}^{100} a_i = (100\sqrt{1+\frac{1}{100}} \ , \ 100\sqrt{1-\frac{1}{100}}) \ ,$$

$$\left|\sum_{i=1}^{100} a_i\right| = 100\sqrt{2} = \sum_{i=1}^{100} |a_i|$$

در نتیجه، همهٔ بردارهای a_i هم‌جهت‌اند و طولی برابر دارند؛ یعنی بر هم منطبق‌اند. به این ترتیب، دستگاه تنها یک جواب دارد:

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{100} = \frac{1}{100}$$

مسألهٔ ۱۹ . چند مسافر در نقطهٔ A به قایقی سوار شدند و به طرف نقطهٔ B در جهت جریان آب رود حرکت کردند. آن‌ها نیمی از راه را پارو زدند، بعد موتور قایق را روشن کردند و ۴



ساعت بعد از آغاز حرکت به B رسیدند. اگر تمام راه را پارو می‌زدند، سفر آن‌ها ۵ ساعت و ۲۰ دقیقه طول می‌کشید. در برگشتن از B به A، یک چهارم راه را پارو زدند، سپس موتور قایق را روشن کردند و ۷ ساعت بعد از آغاز حرکت خود از B، به A رسیدند. اگر در برگشتن، تمام راه را با پارو زدن می‌رفتند، بعد از چه مدت به A می‌رسیدند؟

حل: سرعت جریان آب را u کیلومتر در ساعت، سرعت قایق را با پارو در آب ساکن v_1 کیلومتر در ساعت و سرعت قایق را با موتور روشن در آب ساکن v_2 کیلومتر در ساعت، و فاصلهٔ بین A و B را s کیلومتر می‌گیریم. با توجه به صورت مسأله، به سادگی به این دستگاه معادله‌ها می‌رسیم:

$$\begin{cases} \dfrac{s}{2(u+v_1)} + \dfrac{s}{2(u+v_2)} = 4 \ , \\ \dfrac{s}{u+v_1} = 5\dfrac{1}{3} \ , \\ \dfrac{s}{2(v_1-u)} + \dfrac{3s}{4(v_2-u)} = 7 \end{cases}$$

مسأله زمان t را از ما خواسته است که با توجه به نشانه‌گذاری‌ها، برابر است با $\frac{s}{v_1-u}$. اگر در دستگاه به جای $\frac{s}{v_1-u}$ مقدار t را قرار دهیم و آن را ساده کنیم، به دست می‌آید:

$$\begin{cases} 3t(v_1-u) = 16(v_1+u) \\ 3t(v_1-u) = 8(v_2+u) \\ t(v_2+3v_1-4u) = 28(v_2-u) \end{cases} \qquad (1)$$

به احتمال زیاد، بیش‌تر دانش‌آموزان تا این‌جا به درستی پیش می‌روند؛ ولی بسیارند کسانی که در حل این دستگاه سه معادله‌ی چهار مجهولی در می‌مانند. برخی ممکن است گمان کنند، این دستگاه سرانجام به یک معادلهٔ سیّال می‌رسد و نتیجه بگیرند که مسأله نامعین است. به‌ویژه برای حذف مجهول‌های v_1 و v_2، باید عمل‌های مفصلی را انجام داد که احتمال اشتباه را زیاد می‌کند.

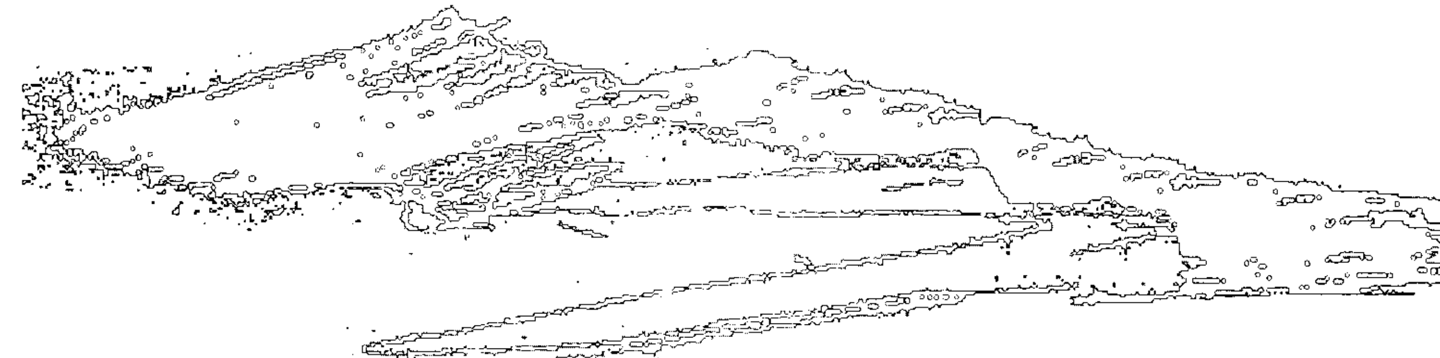
ساده‌ترین راه این است که مجهول t را حذف کنیم. معادلهٔ اول را بر معادلهٔ دوم و معادلهٔ دوم را بر معادلهٔ سوم تقسیم می‌کنیم، به این دستگاه می‌رسیم:

$$(2) \qquad \begin{cases} u = v_2 - 2v_1 \\ 2(v_2-u)(v_1-u) = 2(v_2+u)(v_2+3v_1-4u) \end{cases}$$

که اگر u را از معادلهٔ اول در معادلهٔ دوم قرار دهیم، به دست می‌آید:

$$6v_2^2 - 49v_1v_2 + 85v_1^2 = 0$$

این معادله، همگن (متجانس) است، بنابراین با فرض $v_2 = kv_1$، می‌توان مقدار k و درنتیجه $\frac{v_2}{v_1}$ را به‌دست آورد:



$$\frac{v_2}{v_1}=\frac{5}{2} \quad \text{یا} \quad \frac{v_2}{v_1}=\frac{17}{3}$$

اکنون با توجه به معادلهٔ اول دستگاه (۲)، به دست می‌آید:

$$u=\frac{1}{3}v_1 \quad \text{یا} \quad u=\frac{11}{3}v_1$$

با توجه به صورت مسأله، باید داشته باشیم $u < v_1$؛ بنابراین تنها جواب $u=\frac{1}{2}v_1$ است. اکنون با توجه به معادلهٔ اول دستگاه (۱)، به دست می‌آید: $t = 16$.

مسألهٔ ۲۰. این نامعادله را حل کنید:

$$4^{\sin^2 \pi x} + 3 \times 4^{\cos^2 \pi x} \le 8$$

حل: این گونه نامعادله‌ها، به طور معمول منجر به یک نامعادلهٔ سادهٔ مثلثاتی می‌شوند. ولی در حل نامعادلهٔ مثلثاتی، باید از یک اشتباه پرهیز کرد.

می‌دانیم جواب‌های معادلهٔ $\sin x = a \ (|a| \le 1)$ به این صورت است:

$$x = k\pi + (-1)^k \arcsin a$$

(k، عددی درست است). برخی با نوعی شبیه‌سازی نادرست، برای جواب‌های نامعادلهٔ $\sin x < a \ (|a| \le 1)$ می‌نویسند:

$$x < k\pi + (-1)^k \arcsin a$$

چنین جوابی، نه‌تنها درست نیست، بلکه بی‌معناست. اگر برای نمونه $a=\frac{1}{2}$ بگیرید و تنها یکی از جواب‌ها را برای $k=0$ در نظر بگیرید، به بی‌معنا بودن آن پی می‌برید.

برای حل نامعادله، $y = 4^{\sin^2 \pi x}$ می‌گیریم. در این صورت، با توجه به مثبت بودن y به نامعادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$y^2 - 8y + 12 \le 0$$

که از آن، به‌دست می‌آید $2 \le y \le 6$؛ بنابراین نامعادلهٔ مفروض به این صورت درمی‌آید:

$$2 \le 4^{\sin^2 12x} \le 6$$

نابرابری سمت راست برای همهٔ مقدارهای حقیقی x برقرار است: نامعادلهٔ سمت چپ را می‌توان چنین نوشت:

$$\log_2 \le 2\sin^2 12x \log_2 \Rightarrow \frac{1}{2} \le \sin^2 12x$$

$$\Rightarrow |\sin x| \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$$

و جواب‌های آن چنین است (برای عدد درست k):

$$k + \frac{1}{4} \le x \le k + \frac{1}{4}$$

مسألهٔ ۲۱. همهٔ مقدارهای پارامتر a را پیدا کنید؛ به نحوی که برای هر کدام از آن‌ها، دستگاه

$$\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2 + a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

تنها یک جواب داشته باشد (a، x و y عددهایی حقیقی‌اند).

حل. پیش از همه، به این نکته توجه می‌کنیم که اگر برای مقداری از a، (x_0, y_0) جوابی از دستگاه باشد، بی‌تردید $(-x_0, y_0)$ هم جواب دستگاه است. بنابراین، برای $x \neq 0$ یا دستگاه جوابی ندارد و یا دست‌کم دو جواب دارد؛ (x_0, y_0) و $(-x_0, y_0)$. بنابراین برای این که دستگاه مفروض، تنها یک جواب داشته باشد، باید داشته باشیم $x = 0$؛ یعنی در این حالت جواب دستگاه به صورت $(0, y)$ است.

از معادلهٔ دوم دستگاه، معلوم می‌شود که این جواب تنها به یکی از دو صورت $(0,1)$ یا $(0,-1)$ می‌تواند باشد. روشن می‌کنیم برای چه مقدارهایی از a، این زوج عددها می‌توانند جواب تمامی دستگاه باشند. به سادگی دیده می‌شود که $(0,1)$ برای $a = 0$ و $(0,-1)$ برای $a = 2$، در معادلهٔ اول دستگاه صدق می‌کند.

روشن است به ازای هیچ مقدار دیگری از a، نمی‌توانیم به جوابی برسیم که با شرط‌های مسأله سازگار باشد. ولی نباید گمان کرد که حل مسأله تمام شده است. در واقع، برای این مقدارهای a، دستگاه مفروض جوابی به صورت $(0, y_0)$ دارد؛ ولی هیچ ضمانتی وجود ندارد که به جز این جواب، جواب دیگری وجود نداشته باشد.

این بخش مسأله را نباید از یاد ببریم. باید تحقیق کرد، برای این مقدارهای a، دستگاه مفروض، چند جواب دارد.

۱) حالت $a = 0$. دستگاه به این صورت درمی‌آید:

$$\begin{cases} y = 2^{|x|} + |x|(1-|x|) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

از معادلهٔ دوم نتیجه می‌شود: $|x| \le 1$ و $|y| \le 1$. برای همهٔ مقدارهای $|x| \le 1$ داریم:

$$2^{|x|} + |x|(1-|x|) \ge 1$$

بنابراین، اگر (x_0, y_0) جوابی از دستگاه باشد، باید داشته باشیم: $y_0 = 1$؛ زیرا از معادلهٔ اول، نتیجه می‌شود: $y_0 \ge 1$ و از معادلهٔ دوم: $y_0 \le 1$. ولی برای $y_0 = 1$، به ناچار خواهیم داشت $x_0 = 0$. به این ترتیب، تنها جواب (۱ و ۰) در دستگاه صدق می‌کند.

۲) حالت $a = 2$. در این حالت، دستگاه به این صورت درمی‌آید:

$$\begin{cases} y = 2^{|x|} + |x|(1-|x|) - 2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

همان‌طور که پیش از این دیدیم، جواب (۱- و ۰) با این دستگاه سازگار است؛ ولی با اندکی دقت، روشن می‌شود که زوج عددهای (۰ و ۱) و (۰ و ۱-) هم جواب‌هایی از دستگاه هستند. بنابراین، این دستگاه برای $a = 2$، دست‌کم سه جواب دارد و با شرط مسأله سازگار نیست.

پاسخ: $a = 0$.

مسألهٔ ۲۲. این معادله را حل کنید:

$$x^2 - 8[x] + 7 = 0$$

حل: $n = [x]$ می‌گیریم:

$$x^2 + 7 = 8n, \quad n > 0$$

روشن است که $n \le x < n+1$؛ بنابراین

$$n^2 + 7 \le x^2 + 7 < (n+1)^2 + 7 = n^2 + 2n + 8$$

به جای $x^2 + 7$ مقدارش $8n$ را می‌گذاریم، به‌دست می‌آید:

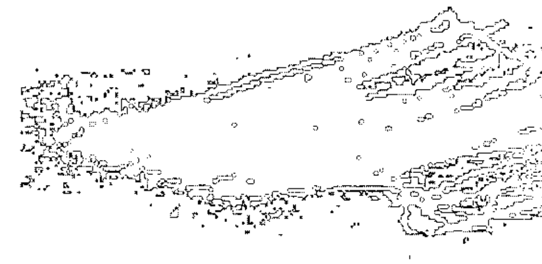
$$n^2 + 7 \le 8n < n^2 + 2n + 8$$

جواب‌های نامعادلهٔ $n^2 + 7 \le 8n$، عددهایی از بازهٔ بستهٔ $[1,7]$ است و نابرابری سمت راست برای $n < 2$ و $n > 4$ برقرار است؛ بنابراین:

$$1 \le n < 2, \quad 4 < n \le 7$$

چون n عددی درست است؛ بنابراین:

$$n = 1, 5, 6, 7$$



که برای این مقدارهای n، مقدار چنین می‌شود:

$x = 1, \sqrt{33}, \sqrt{41}, 7$

جواب‌های منفی پذیرفتنی نیستند؛ زیرا $n=[x]$ عددی مثبت است.

مسألهٔ ۲۳. مطلوب است حل دستگاه معادله‌های:

$x^2+y^2+z=a\ ,\ x^2+y+z^2=a\ ,\ x+y^2+z^2=a$

حل: اگر معادلهٔ دوم دستگاه را از معادلهٔ اول کم کنیم، به‌دست می‌آید:

$y^2-y=z^2-z \Rightarrow (y-z)(y+z-1)=0$

که از آن‌جا خواهیم داشت:

$y=z$ یا $y+z=1$

به همین ترتیب، از معادله‌های دوم و سوم دستگاه به‌دست می‌آید:

$x=y$ یا $x+y=1$

بنابراین، دستگاه مفروض، به مجموعهٔ این چهار دستگاه منجر می‌شود:

$$\begin{cases} y=z \\ x+y=1 \\ x^2+y^2+z=a \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} y=z \\ x=y \\ x^2+y^2+z=a \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+z=1 \\ x+y=1 \\ x+y^2+z^2=a \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} y+z=1 \\ x=y \\ x^2+y+z^2=a \end{cases}$$

معادله‌های اول و دوم دستگاه‌های سوم و چهارم را می‌توان به این ترتیب نوشت:

$x=y\ ,\ z+x=1\ ,\ z=x\ ,\ y+z=1$

که با تبدیل $(x,y,z)\rightarrow(z,x,y)$، از معادله‌های دستگاه دوم به‌دست می‌آیند. پس کافی است دستگاه دوم را حل کنیم و سپس در جواب‌ها، تبدیل‌ها را انجام دهیم.

معادلهٔ سوم، در دستگاه‌های اول و دوم، به ترتیب، به این صورت درمی‌آیند:

$2x^2+x-a=0\ ,\ 2y^2-y+1-a=0$

مبین این معادله‌ها به ترتیب $8a+1$ و $8a-7$ است؛ بنابراین، برای $a<\frac{1}{8}$ هیچ‌کدام از این دو دستگاه جواب ندارند. برای $-\frac{1}{8}<a<\frac{1}{8}$، دستگاه دوم جواب ندارد؛ ولی دستگاه اول دارای جواب است: (x_1,x_1,x_1) و (x_2,x_2,x_2)، که در آن

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{8a+1}}{4}$$

برای $a\geq\frac{1}{8}$ دستگاه اول دارای همان جواب‌هاست و برای دستگاه دوم جواب‌های:

$(x_3,x_3,x_3)\ ,\ (x_4,x_4,x_4)$

به دست می‌آید، که در آن:

$$y_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{8a-7}}{4}\ ,\ x_{3,4}=1-y_{3,4}=\frac{3\mp\sqrt{8a-7}}{4}$$

به این ترتیب، اگر فرض کنیم:

$$p=\frac{-1+\sqrt{8a+1}}{4}\ ,\quad q=\frac{-1-\sqrt{8a+1}}{4}\ ,$$

$$r=\frac{\sqrt{8a-7}}{4}\ ,\quad s=\frac{1-\sqrt{8a-7}}{4}\ ,$$

$$t=\frac{3-\sqrt{8a-7}}{4}\ ,\quad u=\frac{3+\sqrt{8a-7}}{4}$$

آن‌گاه برای $a<-\frac{1}{8}$ دستگاه جواب ندارد. و برای

$a=-\frac{1}{8}$: $(-\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$؛

و برای $-\frac{1}{8}<a<\frac{7}{8}$: (p,p,p) و (q,q,q)؛

و برای $a=\frac{7}{s}$: (p,p,p) و (q,q,q) و $(\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$ و $(\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{4})$ و $(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{3}{4})$؛

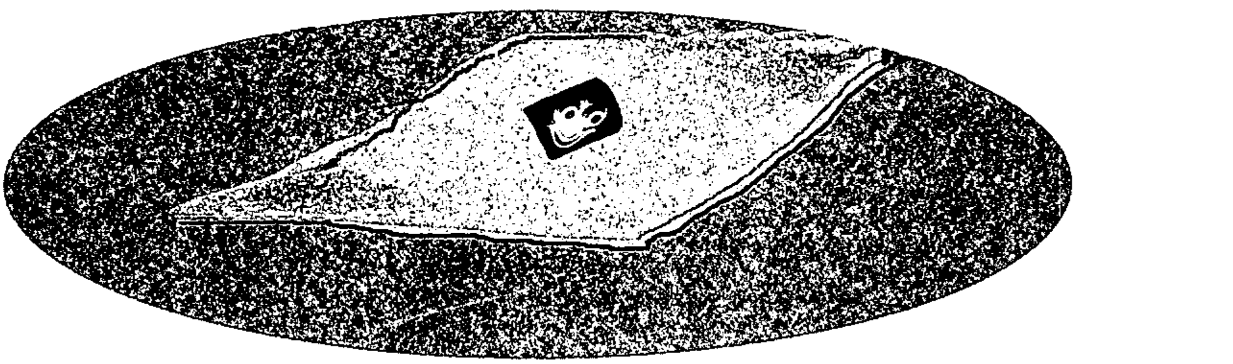
و برای $a>\frac{7}{8}$: (p,p,p) و (q,q,q) و (t,r,r) و (r,t,t) و (r,r,t) و (u,s,s) و (s,u,s) و (s,s,u).

ادامه دارد...

محمدهاشم رستمی

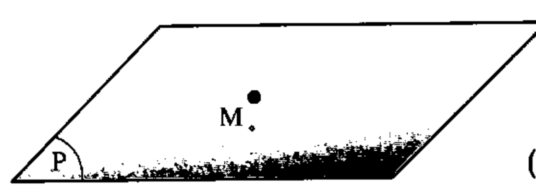
تعیین وضع نقطه و صفحه نسبت به هم

برای دانش‌آموزان دوره‌ی پیش‌دانشگاهی رشته ریاضی

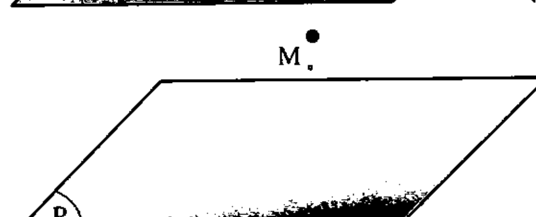


الف. تعیین وضع یک نقطه نسبت به یک صفحه

برای تعیین وضع نقطهٔ $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ نسبت به صفحهٔ $P(x, y, z) = 0$، مختصات این نقطه را در معادلهٔ صفحهٔ P قرار می‌دهیم. اگر مختصات M_0 در معادلهٔ صفحهٔ P صدق کند؛ یعنی $P(x_0, y_0, z_0) = 0$ باشد، نقطهٔ M_0 روی صفحهٔ P است (شکل الف)، و اگر مختصات M_0 در معادله صفحهٔ P صدق نکند؛ یعنی $P(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ باشد، نقطهٔ M_0 روی صفحهٔ P قرار ندارد (شکل ب).



(الف)



(ب)

مثال ۱. وضع نقطهٔ $M_0 = (2, -1, 3)$ نسبت به صفحهٔ $P: 3x - y - 4z + 5 = 0$ را تعیین کنید.

حل: داریم:

$$M_0 = (2, -1, 3) \xrightarrow{\text{در معادلهٔ صفحه}} 3(2) - (-1) - 4(3) + 5 = 0$$

$$\Rightarrow 6 + 1 - 12 + 5 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

مختصات نقطهٔ M_0 در معادلهٔ صفحهٔ P صدق کرده است، پس نقطهٔ M_0 روی صفحهٔ P است.

مثال ۲. وضع نقطهٔ $M_0 = (-1, 4, 5)$ نسبت به صفحهٔ $P: -2x + 3y - z + 1 = 0$ را تعیین کنید.

حل: داریم:

$$M_0 = (-1, 4, 5) \xrightarrow{\text{در معادلهٔ صفحهٔ P}} -2(-1) + 3(4) - (5) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow +10 \neq 0$$

مختصات نقطهٔ M_0 در معادلهٔ صفحهٔ P صدق نکرده

است، پس این نقطه روی صفحهٔ P نیست.

مثال۳. صفحهٔ $P:(m+1)x-2y+mz+m-2=0$ و نقطهٔ $M_0=(-1,m-2,3)$ داده شده است. مقدار m را چنان تعیین کنید که نقطهٔ M_0 روی صفحهٔ P باشد.

حل: مختصات نقطهٔ M_0 باید در معادلهٔ صفحهٔ P صدق کند، یعنی داشته باشیم:

$$A=(-1,m-2,3)\xrightarrow{\text{در معادلهٔ صفحهٔ P}}$$
$$(m+1)(-1)-2(m-2)+m(3)+m-2=0$$
$$\Rightarrow -m-1-2m+4+3m+m-2=0$$
$$\Rightarrow m+1=0\Rightarrow m=-1$$

مثال۴. حدود پارامتر m را چنان تعیین کنید که نقطهٔ $A=(m-1,3,2m)$ روی صفحهٔ $P:3x+2y-6z-12=0$ قرار نداشته باشد.

حل: مختصات نقطهٔ A در معادلهٔ صفحهٔ P نباید صدق کند.

$$A=(m-1,3,2m)\xrightarrow{\text{در معادلهٔ صفحهٔ P}}$$
$$3(m-1)+2(3)-6(2m)-12\neq0$$
$$\Rightarrow -9m-9\neq0\Rightarrow -9m\neq9\Rightarrow m\neq-1$$

مثال۵. صفحهٔ $P: ax+by-2z+1=0$ و نقطهٔ $A=(-3,1,-4)$ داده شده‌اند. چه رابطه‌ای بین ضریب‌های a و b برقرار باشد تا نقطهٔ A روی صفحهٔ P قرار داشته باشد؟

حل: مختصات نقطهٔ A باید در معادلهٔ صفحهٔ P صدق کند.

$$A=(-3,1,-4)\xrightarrow{\text{در معادلهٔ صفحه P}}$$
$$a(-3)+b(1)-2(-4)+1=0$$
$$\Rightarrow -3a+b+8+1=0\Rightarrow -3a+b+9=0$$

مثال۶. وضع دو نقطهٔ $A=(3,-4,2)$ و $B=(-3,0,5)$ را نسبت به صفحهٔ $P:2x+y+3z-1=0$ تعیین کنید.

حل: داریم:

$$A=(3,-4,2)\xrightarrow{\text{در معادلهٔ صفحه}}2(3)+(-4)+3(2)-1=-7\neq0$$

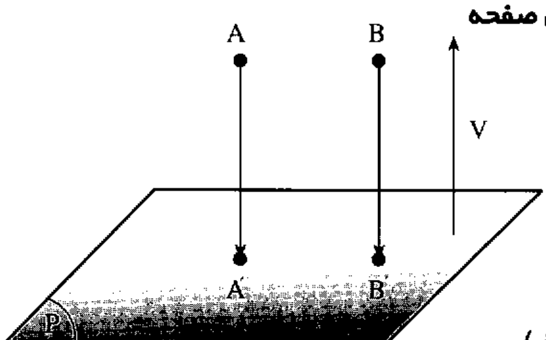
$$B=(-3,0,5)\xrightarrow{\text{در معادلهٔ صفحه}}2(-3)+(0)+3(5)-1=+8\neq0$$

به طوری که دیده می‌شود، هر دو نقطهٔ A و B روی صفحهٔ P قرار ندارند.

حال این سؤال پیش می‌آید که دو نقطهٔ A و B در یک طرف صفحهٔ P قرار دارند یا در دو طرف این صفحه هستند؟

مطلب زیر به این سؤال پاسخ می‌دهد:

تعیین وضع دو نقطهٔ غیرواقع بر یک صفحه نسبت به آن صفحه



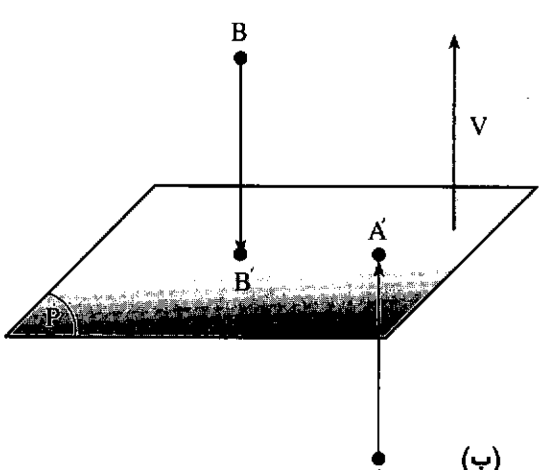
(الف)

برای تعیین وضع دو نقطهٔ $A=(x_1,y_1,z_1)$ و $B=(x_2,y_2,z_2)$ نسبت به صفحهٔ $P(x,y,z)=0$، اندازه‌های جبری فاصله‌های این دو نقطه از صفحهٔ P، یعنی

$$\overline{AA'}=\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{P(A)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$ و

$$\overline{BB'}=\frac{ax_2+by_2+cz_2+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{P(B)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

را تعیین می‌کنیم.



(ب)

اگر این اندازه‌های جبری هم‌علامت باشند، دو نقطه در یک طرف صفحهٔ P قرار دارند (شکل الف) و اگر مختلف العلامت باشند، دو نقطه در دو طرف صفحهٔ P واقع هستند (شکل ب).

نکته. با توجه به این که $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ همواره مثبت است، پس علامت اندازه‌های جبری $\overline{AA'}$ و $\overline{BB'}$، همان علامت اندازه‌های جبری $P(A)$ و $P(B)$ است. بنابراین برای تعیین وضع دو نقطهٔ A و B نسبت به صفحهٔ P، کافی است علامت اندازه‌های جبری $P(A)$ و $P(B)$ را تعیین کنیم.

مثال ۱. صفحهٔ $P: 2x-2y-z+4=0$ و دو نقطهٔ $A=(1,-4,2)$ و $B=(-2,3,-1)$ داده شده‌اند. وضع این دو نقطه نسبت به صفحهٔ P را تعیین کنید.

حل: $P(A)$ و $P(B)$ را محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$P(A)=P(1,-4,2)=2(1)-2(-4)-(2)+4=+12>0$$

$$P(B)=P(-2,3,-1)=2(-2)-2(3)-(-1)+4=-5<0$$

چون $P(A)>0$ و $P(B)<0$؛ یعنی مختلف العلامت‌اند، پس دو نقطهٔ A و B در دو طرف صفحهٔ P قرار دارند.

توجه. چون $P(A)\neq 0$ و $P(B)\neq 0$ است، پس دو نقطهٔ A و B روی صفحهٔ P قرار ندارند.

مثال ۲. وضع دو نقطهٔ $A=(4,0,-2)$ و $B=(-2,2,3)$ نسبت به صفحهٔ $P: x-2y+z-3=0$ را تعیین کنید.

حل: $P(A)$ و $P(B)$ را تعیین می‌کنیم. داریم:

$$P(A)=P(4,0,-2)=(4)-2(0)+(-2)-3=-1<0$$

$$P(B)=P(-2,2,3)=(-2)-2(2)+(3)-3=-6<0$$

چون $P(A)<0$ و $P(B)<0$؛ یعنی این دو مقدار هم‌علامت هستند، پس دو نقطهٔ A و B در یک طرف صفحهٔ P قرار دارند.

توجه. دو نقطهٔ A و B روی صفحهٔ P نیستند. (چرا؟).

مثال ۳. صفحهٔ $P: mx+(1-m)y+2z-1=0$ و دو نقطهٔ $A=(2,-1,0)$ و $B=(1,2,4)$ داده شده‌اند. حدود m را چنان تعیین کنید که این دو نقطه در دو طرف صفحهٔ P باشند.

حل: باید $P(A)$ و $P(B)$ مختلف‌العلامه، یعنی $P(A)P(B)<0$ باشند.

$$P(A)P(B)=(2m-1+m+0-1)(m+2-2m+8-1)<0$$

$$\Rightarrow P(A)P(B)=(3m-2)(-m+9)<0 \Rightarrow m<\frac{2}{3} \text{ و } m>9$$

نکته. برای تعیین وضع چند نقطهٔ A، B، C، D و ... نسبت به صفحهٔ $P(x,y,z)=0$، کافی است علامت اندازه‌های جبری $P(A)$، $P(B)$، $P(C)$، $P(D)$ و ... را تعیین کنیم. نقطه‌هایی که دارای اندازه‌های جبری هم علامت‌اند، در یک طرف صفحهٔ P قرار دارند و نقطه‌هایی که دارای اندازه‌های جبری مختلف‌العلامت‌اند، در دو طرف صفحهٔ P واقع‌اند.

مثال ۴. صفحهٔ $P: 2x+y-2z+4=0$ و نقطه‌های $A=(0,-1,1)$، $B=(2,4,-3)$، $C=(-5,-2,0)$ و $D=(1,-1,3)$ داده شده‌اند. وضع این نقطه‌ها نسبت به صفحهٔ P را تعیین کنید؛ یعنی مشخص کنید که کدام نقطه‌ها در یک طرف صفحهٔ P قرار دارند و کدام نقطه‌ها در طرف دیگر صفحهٔ P واقع‌اند.

حل: $P(A)$، $P(B)$، $P(C)$ و $P(D)$ را محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$P(A)=P(0,-1,1)=2(0)+(-1)-2(1)+4=+1>0$$

$$P(B)=P(2,4,-3)=2(2)+(4)-2(-3)+4=+18>0$$

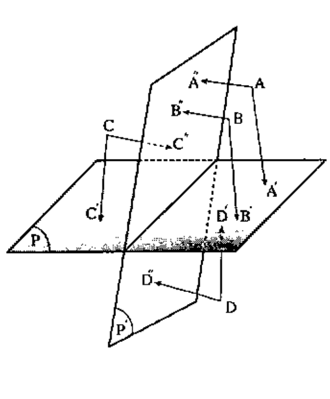
$$P(C)=P(-5,-2,0)=2(-5)+(-2)-2(0)+4=-8<0$$

$$P(D)=P(1,-1,3)=2(1)+(-1)-2(3)+4=-1<0$$

نقطه‌های A و B در یک طرف صفحهٔ P و دو نقطهٔ C و D در طرف دیگر صفحهٔ P قرار دارند.

توجه. بدیهی است که هیچ‌کدام از این نقطه‌ها روی صفحهٔ P قرار ندارند.

تعیین وضع دو یا چند نقطه نسبت به فرجه‌های مجاور و روبه‌روی حاصل از برخورد دو صفحه



با استفاده از علامت اندازه‌های جبری فاصله‌های دو یا چند نقطه مانند A ، B ، C و D از دو صفحهٔ $P=(x,y,z)=0$ و $P'(x,y,z)=0$ ، یعنی علامت اندازه‌های جبری $\overline{AA'}$ ، $\overline{BB'}$ ، $\overline{CC'}$ و $\overline{DD'}$ یا علامت اندازه‌های جبری $P(A)$ ، $P(B)$ ، $P(C)$ و $P(D)$ ، که به ترتیب هم‌علامت با $\overline{AA'}$ ، $\overline{BB'}$ ، $\overline{CC'}$ و $\overline{DD'}$ هستند، می‌توانیم جای این نقطه‌ها نسبت به فرجه‌های حاصل از برخورد دو صفحهٔ P و P' را تعیین کنیم؛ یعنی مشخص سازیم که این نقطه‌ها درون یک فرجهٔ حاصل از برخورد این دو صفحه قرار دارند یا درون دو فرجهٔ مجاور و یا درون دو فرجهٔ روبه‌رو (متقابل به یال). در شکل، دو نقطهٔ A و B درون یک فرجه واقع‌اند، نقطهٔ C با نقطهٔ D در دو فرجهٔ روبه‌رو قرار دارند و نقطه‌های C و D نسبت به هریک از دو نقطهٔ A و B، درون دو فرجهٔ مجاور هستند.

مثال ۱. دو صفحهٔ متقاطع $p: x+y-3z+2=0$ و $P': 2x-2y+z-3=0$ و دو نقطهٔ $A=(-3,2,4)$ و $B=(1,-3,5)$ داده شده‌اند. تعیین کنید که این دو نقطه درون یک فرجه حاصل از برخورد این دو صفحه قرار دارند یا در دو فرجهٔ مجاور یا در دو فرجهٔ روبه‌رو.

حل: اندازه‌های جبری $P(A)$ ، $P(B)$ ، $P'(A)$ و $P'(B)$ را تعیین می‌کنیم.

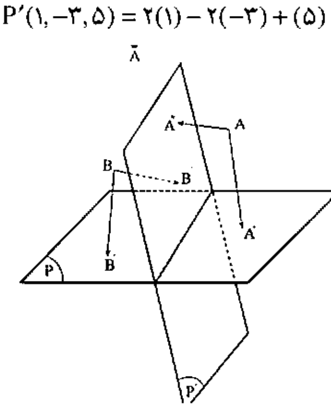
داریم:

$$P(A)=P(-3,2,4)=(-3)+(2)-3(4)+2=-11<0$$

$$P(B)=P(1,-3,5)=(1)+(-3)-3(5)+2=-15<0$$

$$P'(A)=P'(-3,2,4)=2(-3)-2(2)+(4)-3=-9<0$$

$$P'(B)=P'(1,-3,5)=2(1)-2(-3)+(5)-3=+10>0$$



چون $P(A)<0$, $P(B)<0$ است، پس دو نقطهٔ A و B در یک طرف صفحهٔ P قرار دارند. از طرفی $P'(A)<0$ و $P'(B)>0$ است؛ پس دو نقطهٔ A و B در دو طرف صفحهٔ P' واقع‌اند؛ بنابراین دو نقطهٔ A و B درون دو فرجهٔ مجاور حاصل از برخورد دو صفحهٔ P و P' قرار دارند.

مثال ۲. دو صفحهٔ $P: 2x-y+2z-6=0$ و $P': x+2y-2z+12=0$ و دو نقطهٔ $A=(-3,\frac{1}{2},4)$ و $B=(2,5,1)$ داده شده‌اند. تعیین کنید که این دو نقطه درون یک فرجهٔ حاصل از برخورد این دو صفحه قرار دارند یا درون دو فرجهٔ مجاور یا درون دو فرجهٔ روبه‌رو.

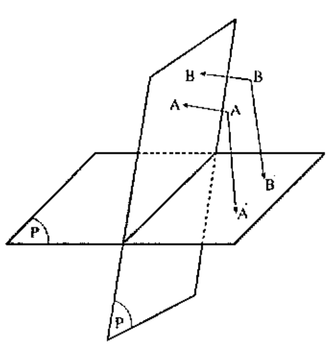
حل: دو صفحهٔ P و P' متوازی نیستند؛ زیرا $\frac{+2}{-2}\neq\frac{-1}{+2}\neq\frac{2}{1}$ ؛ یعنی $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ است، بنابراین دو صفحهٔ P و P' متقاطع‌اند. برای یافتن جواب مسأله، اندازه‌های جبری $P(A)$ ، $P(B)$ ، $P'(A)$ و $P'(B)$ را تعیین می‌کنیم. داریم:

$$P(A)=P(-3,\frac{1}{2},4)=2(-3)-(\frac{1}{2})+2(4)-6=-\frac{9}{2}<0$$

$$P(B)=P(2,5,1)=2(2)-(5)+2(1)-6=-5<0$$

$$P'(A)=P'(-3,\frac{1}{2},4)=(-3)+2(\frac{1}{2})-2(4)+12=+2>0$$

$$P'(B)=P'(2,5,1)=(2)+2(5)-2(1)+12=+2>0$$



چون $P(A)<0$ و $P(B)<0$ است، دو نقطهٔ A و B در یک طرف صفحهٔ P قرار دارند، از طرفی $P'(A)>0$ و $P'(B)>0$ است؛ بنابراین دو نقطهٔ A و B در یک طرف صفحهٔ P' قرار دارند. در نتیجه، دو نقطهٔ A و B درون یک فرجهٔ حاصل از برخورد دو صفحهٔ P و P' واقع‌اند.

مثال ۳. دو صفحهٔ $P: 2x+y+5=0$ و $P': x-2z+3=0$ و نقطه‌های $A=(0,3,1)$ ، $B=(2,0,4)$ و $C=(-1,-4,2)$ داده

شده‌اند. تعیین کنید که این نقطه‌ها درون یک فرجهٔ حاصل از برخورد این دو صفحه قرار دارند یا درون دو فرجهٔ مجاور و یا درون دو فرجهٔ روبه‌رو.

حل: صفحه‌های P و P' متوازی نیستند (چرا؟)؛ پس این دو صفحه متقاطع هستند. از طرفی هیچ‌یک از نقطه‌های A ، B و C روی صفحه‌های P و P' قرار ندارند (چرا؟). بنابراین برای حل مسأله، اندازه‌های جبری $P(A)$، $P(B)$، $P(C)$، $P'(A)$، $P'(B)$ و $P'(C)$ را تعیین می‌کنیم. داریم:

$P(A) = P(۰,۳,۱) = ۲(۰) + (۳) + ۵ = +۸ > ۰$

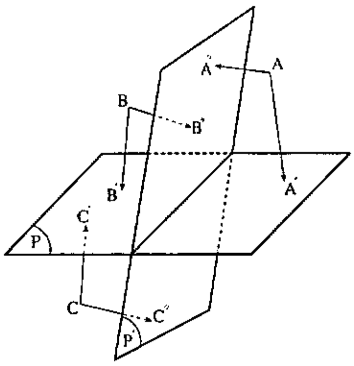
$P(B) = P(۲,۰,۴) = ۲(۲) + (۰) + ۵ = +۹ > ۰$

$P(C) = P(-۱,-۴,۲) = ۲(-۱) + (-۴) + ۵ = -۱ < ۰$

$P'(A) = P'(۰,۳,۱) = (۰) - ۲(۱) + (۳) = +۱ > ۰$

$P'(B) = P'(۲,۰,۴) = (۲) - ۲(۴) + ۳ = -۱ < ۰$

$P'(C) = P'(-۱,-۴,۲) = (-۱) - ۲(۲) + ۳ = -۲ < ۰$



با توجه به مقدارهای به دست آمده، نقطه‌های A و B در یک طرف صفحهٔ P قرار دارند و نقطهٔ C در طرف دیگر این صفحه است. از طرفی، نقطه‌های B و C در یک طرف صفحهٔ P' و نقطهٔ A در طرف دیگر این صفحه است؛ بنابراین نقطه‌های A و B درون دو فرجهٔ مجاور قرار دارند، نقطه‌های A و C درون دو فرجهٔ روبه‌رو (متقابل) و دو نقطهٔ B و C نیز درون دو فرجهٔ مجاور واقع هستند.

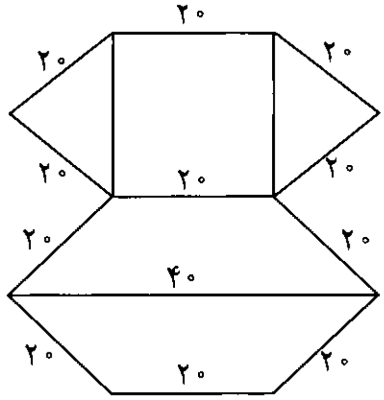
تفریح اندیشه ... تفریح اندیشه ... تفریح اندیشه ...

یک شکل پنج وجهی بسته دارای شرایط زیر است:

(الف) دو وجه که مثلث‌هایی متساوی‌الاضلاع به ضلع ۲۰ سانتیمترند.

(ب) دو وجه که ذوزنقه‌هایی متساوی‌الساقین به ضلع‌های ۲۰، ۲۰، ۲۰، ۴۰ سانتیمترند.

(ج) یک وجه که مربعی به ضلع ۲۰ سانتیمتر است؛ شکل را رسم کنید.



نهمین همایش ریاضی و تقدیر از استاد هندسه

عنایت‌الله راستی‌زاده

به همت جمعی از معلمین ریاضی ناحیه‌ی ۳ شیراز و حمایت گروه آموزش ریاضی، نهمین همایش ریاضی پژوهان جوان فارس در ۱۵ اردیبهشت ۸۴ برگزار شد. سنت حسنه‌ای که همه‌ساله در این همایش به آن عمل می‌شود نکوداشت یکی از اساتید به نام و پیش کسوت در ریاضیات بخصوص ریاضیات مدرسه‌ای است. در دوره‌های گذشته‌ی این همایش از استاد میرزاجلیلی با حضور این عزیزان تقدیر شد و امسال نیز در همایش نهم **نکوداشت استاد محمدهاشم رستمی** برگزار شد.

کمیته‌ی علمی همایش، که از همراهی تعداد زیادی از دبیران ریاضی با تجربه‌ی شهر شیراز و حمایت انجمن علمی-آموزشی دبیران ریاضی فارس و گروه آموزش ریاضی استان سود می‌برد، از میان ۴۳۶ مقاله‌ی رسیده از سوی دانش‌آموزان استان فارس، ۶۶ مقاله را در مرحله‌ی اول برتر دانست که از میان آن‌ها یازده مقاله به صورت سخنرانی ۲۰ دقیقه‌ای و ۵ مقاله در بخش پوستر به مرحله نهایی همایش راه یافتند. در این دوره برای نخستین بار در بخش دبیران ریاضی نیز اعلام فراخوان مقاله شد که از میان ۲۰ مقاله‌ی رسیده ۴ مقاله به مرحله‌ی نهایی رسید. به جز مراسم افتتاحیه و پایانی و سخنرانی‌های اصلی، قرائت مقالات در دو سالن به صورت موازی انجام گرفت. در همین مراسم بود که پس از افتتاح همایش با حضور مدیر آموزش و پرورش ناحیه‌ی ۳ شیراز، از عمری خدمت صادقانه‌ی استاد گرانقدر جناب آقای محمدهاشم رستمی مؤلف دایرةالمعارف هندسه (۲۰ جلدی) تقدیر شد. تقدیری که نه در خور ایشان، بلکه در حد وسع و بضاعت برگزار کنندگان بود.

در برنامه‌ی بعدازظهر همایش نیز استاد سخنرانی خود را پیرامون مسائلی هندسه‌ی دبیرستانی ایراد کرد که مورد استقبال حاضران قرار گرفت. لازم به ذکر است که آقای رستمی در حال حاضر عضو شورای ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی وزارت آموزش و پرورش، مسئول گروه پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی هندسه در همان دفتر، عضو گروه ریاضی انتشارات مدرسه و عضو هیئت تحریریه مجله ریاضی برهان متوسطه می‌باشند. در این مراسم، استاد از همراهی، صبر و پشتکار همسر خود تقدیر به عمل آوردند. در مراسم اختتامیه همایش به مقالات برتر هدایایی تعلق گرفت.

لازم به ذکر است که ریاضی پژوهان جوان استان فارس در موضوعات زیر مقاله‌های خود را قرائت کردند.

* علل افت دانش‌آموزان اول دبیرستان در درس ریاضی
* مبهم، بی‌نهایت و تعریف نشده!
* حل یک مسئله با حداقل ۵ روش متفاوت
* استقرای ریاضی در گذر تاریخ
* نقش کامپیوتر و اینترنت در ارتقای سطح آموزش ریاضی
* ساخت وسیله کمک‌آموزشی

موضوعات مقالات ویژه دبیران نیز به شرح زیر بود:

* نقش هندسه در تقویت قوه‌ی استدلال
* چگونگی آموزش تفکر خلاق حل مسئله به دانش‌آموز
* ساخت وسیله‌ی کمک‌آموزشی جهت تدریس یک مبحث درسی.

هم‌ارزی‌های جبری و کاربرد آن در محاسبه حدها

$$\sin x \approx x$$
$$x \longrightarrow 0$$

علی حسن‌زاده ماکویی

۱. تابع‌های هم‌ارز. اگر در تابع‌های $f(x)$ و $g(x)$ داشته باشیم:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1\ ,\ \ g(x_0) \neq 0 \qquad (2)$$

می‌گویند در ازای $x \to x_0$، دو بی‌نهایت کوچک $f(x)$ و $g(x)$ هم‌ارز هستند و با نماد $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$ نشان می‌دهند.

مثال:

۱) $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$ ۲) $x \underset{x\to 0}{\sim} \operatorname{tg} x$

۳) $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ ۴) $a^x - 1 \underset{x\to x_0}{\sim} x \ln a, (a>0)$

به همین ترتیب اگر $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$ و $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ باشند، می‌گویند در ازای $x \to x_0$ دو بی‌نهایت بزرگ $g(x)$ و $f(x)$ هم‌ارز هستند برای مثال داریم: $[x] \underset{x\to\infty}{\sim} x$

۲. نماد $(\sim)$ دارای ویژگی‌های زیر است:

۱. بازتابی یعنی، $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} f(x)$

۲. تقارن یعنی $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \Rightarrow g(x) \underset{x\to x_0}{\sim} f(x)$

۳. تعدّی، یعنی:

$$f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)\ ,\ \ g(x) \underset{x\to x_0}{\sim} h(x) \Rightarrow f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} h(x)$$

۴. الف.

$$f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \Rightarrow f^n(x) - g^n(x) \underset{x\to x_0}{\sim}$$
$$\sim nf^{n-1}(x)(f-g) \underset{x\to x_0}{\sim} ng^{n-1}(x)(f-g)$$

ب.

$$f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \Rightarrow \sqrt[n]{f} \underset{x\to x_0}{-} \sqrt[n]{g} \sim \frac{f-g}{n\sqrt[n]{f^{n-1}}} \underset{x\to x_0}{\sim} \frac{f-g}{n\sqrt[n]{g^{n-1}}}$$

درستی هم‌ارزی‌های را ثابت کنید. $(n \in \mathbb{N})$

۱. $(n>1)\ \ \sqrt[n]{1+ax} \underset{x\to 0}{-} 1 \sim \frac{ax}{n}$

۲. $(n>1)\ \ \sqrt[n]{x} - 1 \underset{x\to 1}{\sim} \frac{x-1}{n}$

۳. الف. $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt[8]{x}$

ب. $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} \underset{x\to +\infty}{\sim} \sqrt{x}$

۴. الف. $\operatorname{Arcsin} x - x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3}{6}$

ب. $\operatorname{Arcsin} x - x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3}{6}$

۵. $\operatorname{tg}x - \sin x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}\sin x^3$

۶. $\cos x - \cos 3x \underset{x\to 0}{\sim} 4x^2$

۷. $\sqrt{\cos 2x} \underset{x\to 0}{\sim} \cos x(1 - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x)$

۸. $\sqrt[3]{\cos 3x} \underset{x\to 0}{\sim} \cos x(1 - \operatorname{tg}^2 x)$

۹. $1 - \cos^n x \underset{x\to 0}{\sim} n(1-\cos x) \sim \frac{nx^2}{2}$

۱۰. $1 - \sin^n x \underset{x\to \frac{\pi}{2}}{\sim} n(1-\sin x) \sim \frac{n}{2}(x-\frac{\pi}{2})^2$

درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

۱۱. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1} = \frac{n}{m}$

۱۲. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x} = \frac{\alpha}{m} - \frac{\beta}{n}$

۱۳. $\lim_{x\to 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\dots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}} = \frac{1}{n!}$

۱۴. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{\sin x}}{x^2\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{18}$

۱۵. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}=\dfrac{1}{4}$

۱۶. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\operatorname{Arcsin}x)^5-x^5}{x^5(1-\cos x)}=\dfrac{5}{3}$

۱۷. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\,.\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}=3$

راهنمایی تمرین‌ها

۱. $\sqrt[n]{1+ax}=t\Rightarrow ax=t^n-1\ ,\ x\to0\Rightarrow t\to1$

$t\underset{t\to1}{\sim}1\Rightarrow t^n\underset{t\to1}{-}1\sim n(t-1)\Rightarrow\dfrac{ax}{n}\sim\sqrt[n]{1+ax}-1$

۲. $\sqrt[n]{x}\underset{x\to1}{-}1\sim\sqrt[n]{1+(x\underset{x\to1}{-}1)}-1\sim\dfrac{x-1}{n}$

۳. الف.

$x=t^8\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt[8]{x}}=\lim\limits_{t\to0}\sqrt{t^6+\sqrt{t^4+1}}=1$

ب.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x^3}}}}=1$

۴. الف. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{\frac{x^3}{6}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4\sin^2(\frac{x}{2})}{x^2}=1$

ب. $\operatorname{Arcsin}x=\varphi\ ,\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{Arcsin}x-x}{\frac{x^3}{6}}=$

$=\lim\limits_{\varphi\to0}\dfrac{\varphi-\sin\varphi}{\frac{1}{6}\sin^3\varphi}=1$

۵. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\frac{1}{2}\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to0}2\times\dfrac{1-\cos x}{\cos x\sin^2 x}=1$

۶. $\cos x-\cos 3x\underset{x\to0}{\sim}4\cos x.\sin^2 x\underset{x\to0}{\sim}4x^2$

۷. $\sqrt{\cos 2x}\underset{x\to0}{\sim}\cos x\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}\underset{x\to0}{\sim}\cos x(1-\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x)$

۱۰. $1-\sin x=(\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2})^2=\left[\sqrt{2}\sin(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2})\right]^2$

$\underset{x\to0}{\sim}\dfrac{1}{2}(x-\dfrac{\pi}{2})$

۱۱. $\sqrt[m]{x}\underset{x\to0}{-}1\sim\sqrt[m]{1+(x-1)}\underset{x\to1}{-}1\sim\dfrac{x-1}{m}$

۱۲. $\sqrt[m]{1+\alpha x}\underset{x\to0}{\sim}1+\dfrac{\alpha x}{m}$

۱۳. $1-\sqrt{x}\underset{x\to0}{\sim}1-\sqrt{1-(1\underset{x\to1}{-}x)}$

$\underset{x\to0}{\sim}\dfrac{1-x}{2},\cdots 1-\sqrt[n]{x}\underset{x\to1}{\sim}\dfrac{1-x}{n}$

۱۴. $\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{\sin x}\underset{x\to0}{\sim}\dfrac{x-\sin x}{3\sqrt[3]{x^2}}\underset{x\to0}{\sim}\dfrac{\frac{1}{6}x^3}{3\sqrt[3]{x^2}}$

۱۵. $\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-1\underset{x\to0}{\sim}\dfrac{\operatorname{tg}x}{2}\Rightarrow l=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{2x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^3 x}{4x^3}=\dfrac{1}{4}$

۱۶. $\operatorname{Arcsin}x\underset{x\to0}{\sim}x\Rightarrow(\operatorname{Arcsin}x)^5-x^5$

$\underset{x\to0}{\sim}5x^4(\operatorname{Arcsin}x\underset{x\to0}{-}x)\sim\dfrac{5x^7}{6}$

۱۷. $l=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^3 x(1-\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2x)(1-\operatorname{tg}^2x)}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^3 x(1-\frac{3}{2}\operatorname{tg}^2x+\frac{1}{2}\operatorname{tg}^4x)}{x^2}$

$\Rightarrow l=\lim\left[\dfrac{\cos^2 x(1-\cos x)}{x^2}+\dfrac{\sin^2 x}{x^2}+\dfrac{3\cos x\sin^2 x}{2x^2}\right.$

$\left.-\dfrac{\sin^4 x}{2x^2\cos x}\right]=1\times\dfrac{1}{2}+1+\dfrac{3}{2}=3$

سید محمدرضا هاشمی موسوی

محک‌هایی برای شناخت اعداد اول و دوقلوهای اول

قضیه ۱. اگر $N(p)$ بر p بخش‌پذیر و حاصل $\frac{N(p)}{p}$ عددی فرد باشد؛ آن‌گاه: ($\lfloor\ \rfloor$: قسمت درست عدد) $(p \neq ۰)$

$$N(p) = p\left(۲\left\lfloor \frac{N(p)}{۲p} \right\rfloor + ۱\right)$$

برهان. برای هر $N(p)$ و $p \neq ۰$، می‌توان نوشت:

$$\frac{N(p)}{p} = ۲\left(\frac{N(p)}{۲p} + \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲}\right)$$

$$= ۲\left(\frac{N(p)}{۲p} - \frac{۱}{۲}\right) + ۱ \qquad (۱)$$

با فرض فرد بودن $\frac{N(p)}{p}$ و با توجه به برابری زیر برای هر x فرد:

$$(x \text{ عدد فرد}); \frac{x}{۲} - \frac{۱}{۲} = \left\lfloor \frac{x}{۲} \right\rfloor$$

برابری (۱) را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\frac{N(p)}{p} = ۲\left\lfloor \frac{N(p)}{۲p} \right\rfloor + ۱$$

یا:

$$N(p) = p\left(۲\left\lfloor \frac{N(p)}{۲p} \right\rfloor + ۱\right) \qquad (۲)$$

مثال. اگر p عدد اول باشد، طبق قضیهٔ ویلسون، عبارت $N(p) = (p-۱)! + ۱$ بر p بخش‌پذیر است و بالعکس (اگر $N(p)$ بر p بخش‌پذیر باشد، p عددی اول است)؛

بنابراین اگر $N(p)$ به صورت رابطهٔ (۲) تجزیه شود، p عدد اول است:

$$N(p) = (p-۱)! + ۱ = p\left(۱ + ۲\left\lfloor \frac{(p-۱)! + ۱}{۲p} \right\rfloor\right) \qquad (۳)$$

به طور مثال:

$$p = ۷:\ ۶! + ۱ = ۷\left(۱ + ۲\left\lfloor \frac{۷۲۱}{۱۴} \right\rfloor\right) = ۷(۱ + ۲ \times ۵۱)$$
$$= ۷ \times ۱۰۳ = ۷۲۱$$

$$p = ۱۱:\ ۱۰! + ۱ = ۱۱\left(۱ + ۲\left\lfloor \frac{۳۶۲۸۸۰۱}{۲۲} \right\rfloor\right) = ۱۱(۱ + ۲ \times ۱۶۴۹۴۵)$$
$$= ۱۱ \times ۳۲۹۸۹۱ = ۳۶۲۸۸۰۱$$

در این جا، رابطهٔ (۳) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{(p-۱)! + ۱}{۲p} - \left\lfloor \frac{(p-۱)! + ۱}{۲p} \right\rfloor = \frac{۱}{۲} \qquad (۴)$$

یا:

$$\left\{ \frac{(p-۱)! + ۱}{۲p} \right\} = ۰/۵ \qquad (۵)$$

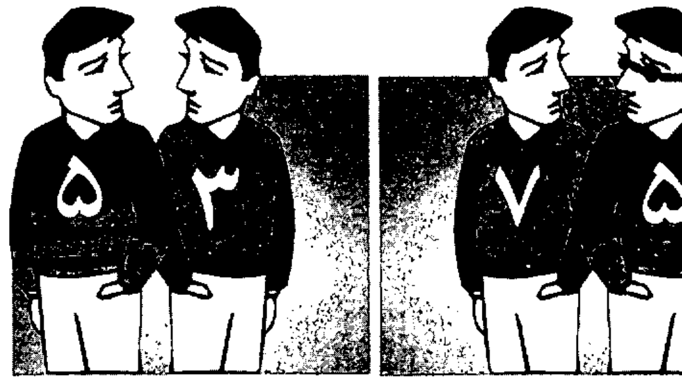
($\{\ \}$: قسمت ناصحیح (اعشاری) عدد)

در این جا از قضیهٔ (۱) می‌توان قضیهٔ زیر را نتیجه گرفت.

قضیهٔ ۲. اگر برابری زیر برقرار باشد، p عدد اول است و برعکس.

$$\left\{ \frac{(p-۱)! + ۱}{۲p} \right\} = ۰/۵$$

● **نتیجه**: هر عدد که در رابطهٔ (۵) صدق کند، عددی اول است و برعکس.



«رابطهٔ (۵) را می‌توان برای شناخت اعداد اول به کار برد .»

قضیهٔ ۳. اگر p و p + ۲ اعداد اول دوقلو (عددهای اولی که اختلاف آن‌ها دو واحد است) باشند : آن‌گاه در برابری زیر صدق می‌کنند . ({ } : قسمت اعشاری عدد)

$$\left\{\frac{(p-۱)!+۱}{۲p}\right\}=\left\{\frac{(p+۱)!+۱}{۲(p+۲)}\right\}$$

برهان . با توجه به قضیهٔ (۱) ، اگر a و p عددهایی اول باشند و a > p ، آن‌گاه :

$$\left\{\frac{(p-۱)!+۱}{۲p}\right\}=\left\{\frac{(a-۱)!+۱}{۲a}\right\} \qquad (۶)$$

اگر p عدد اول باشد ، با فرض a = p + ۲ ، عدد p و a ، جفت‌های اول دوقلو هستند . بنابراین ، با این فرض رابطهٔ (۶) تنها وقتی برقرار است که p و a = p + ۲ ، اول باشند . پس رابطهٔ (۶) اگر به‌ازای a = p + ۲ یک برابری درست باشد ، در این صورت p عددی اول و با p + ۲ یک جفت عدد دوقلو تشکیل می‌دهد . بنابراین برای یافتن عددهای دوقلو ، کافی است در رابطهٔ (۶) مقدار a = p + ۲ را جایگزین کنیم :

(محک اعداد دوقلوی اول)

$$a=p+۲:\left\{\frac{(p-۱)!+۱}{۲p}\right\}=\left\{\frac{(p+۱)!+۱}{۲(p+۲)}\right\}$$

مثال . می‌دانیم جفت‌های اول دوقلو چنین هستند :

♦ نشانی: تهران، خیابان ایرانشهرشمالی، ساختمان شماره۴ آموزش و پرورش، پلاک ۲۶۸، دفتر انتشارات کمک آموزشی.
تلفن و نمابر: ۸۸۳۰۱۴۷۸

برگ اشتراک مجله‌های رشد

شرایط

۱ـ واریز مبلغ ۲۰/۰۰۰ ریال به ازای هر عنوان مجله درخواستی، به صورت علی‌الحساب به حساب شمارهٔ ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت شعبه سه راه آزمایش (سرخه حصار) کد ۳۹۵ در وجه شرکت افست.

۲ـ ارسال اصل رسید بانکی به همراه برگ تکمیل شده اشتراک.

- **نام مجله :** ....
- **نام و نام خانوادگی:** ....
- **تاریخ تولد:** ....
- **میزان تحصیلات:** ....
- **تلفن:** ....
- **نشانی کامل پستی:**

استان: .... شهرستان: ....

خیابان: ....

....

پلاک: .... کدپستی: ....

- **مبلغ واریز شده:** ....
- **شماره و تاریخ رسید بانکی:** ....

امضا:

نشانی: تهران ـ صندوق پستی مشترکین ۱۶۵۹۵/۱۱۱
نشانی اینترنتی: www.roshdmag.org
پست الکترونیک: Email:info@roshdmag.org
☎ امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ـ۷۷۳۳۵۱۱۰
☎ پیام گیر مجلات رشد: ۸۸۳۰۱۴۸۲ ـ ۸۸۸۳۹۲۳۲

یادآوری:

- هزینه برگشت مجله در صورت خوانا و کامل نبودن نشانی، بر عهده مشترک است.
- مبنای شروع اشتراک مجله از زمان وصول برگ اشتراک است.
- برای هر عنوان مجله برگ اشتراک جداگانه تکمیل و ارسال کنید (تصویر برگ اشتراک نیز مورد قبول است).

«۱۷و۱۹» و «۱۱ و ۱۳» و «۵ و ۷» و «۳ و ۵» (۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۶۱ و ۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۶۳) و... و

با استفاده از رایانه‌های بسیار قوی و پیشرفته، تعداد ۱۵۲۹۸۲ زوج اعداد دوقلو کوچک‌تر از ۳×۱۰^{۷} و بین $۱۰^{۱۲}$ و $۱۰^{۱۲}+۱۰^{۴}$، تعداد ۲۰ جفت عدد دوقلو یافته‌اند. این، نشانگر رشدی افزایشی، ولی بسیار کُند در مجموعهٔ اعداد طبیعی است. وجود اعداد دوقلو در میان اعداد اول، نشانگر آن است که اعداد اول تا چه حد می‌توانند به هم نزدیک باشند. البته در میان اعداد اول، شکاف‌های عظیمی نیز یافت می‌شود. برای مثال، عددهای $(n+۱)!+۲$ ، $(n+۱)!+۳$ ، ... ، $(n+۱)!+(n+۱)$ همه مرکب هستند.

در این جا با رابطهٔ اخیر، اعداد دوقلوی اول «۳ و ۵» و «۵و۷» را محک می‌زنیم.

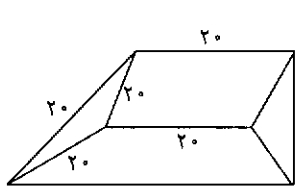
$$p=۳:\ \left\{\frac{۳}{۶}\right\}=\left\{\frac{۲۵}{۱۰}\right\};\quad \{۰/۵\}=\{۲/۵\};\ ۰/۵=۰/۵$$

$$p=۵:\ \left\{\frac{۴!+۱}{۱۰}\right\}=\left\{\frac{۶!+۱}{۱۴}\right\};\quad \{۲/۵\}=\{۵۱/۵\};\ ۰/۵=۰/۵$$

* **توجه:** محک‌های (۵) و (۶) توسط نرم‌افزارهای رایانه‌ای، قابل برنامه‌ریزی است.

تفریح اندیشه ... تفریح اندیشه ... تفریح اندیشه ... تفریح اندیشه

جواب: در زیر، نمودار مسطّحی را نشان داده‌ایم که باید برای به دست آوردن پنج وجهی مورد نظر بریده و تا شود و نیز منظری سه بعدی از شکل مورد نظر را به دست داده‌ایم:



در مغرب بغداد رصد کرده است و میل کلی خورشید را ۲۳ درجه و ۳۵ دقیقه و عرض بغداد را ۳۳ درجه و ۲۰ دقیقه یافته است.

سجزی در رساله ی تثلیث زاویه دو راه برای حل مسأله ی تثلیث زاویه از صاغانی نقل کرده است.

این بود مطالب پراکنده ای که ریاضیدانان معاصر صاغانی درباره ی بعضی کارهای وی نوشته اند.

آثار ریاضی موجود وی

۱ـ کتاب فی کیفیة تسطیح الکره علی سطح الاسطرلاب = کتاب فی تسطیح التام

موضوع این کتاب در واقع بحث در مسأله ی تصویر دوایر واقع بر سطح کره است روی یک صفحه در حالت کلی. یعنی بدون شرط اینکه صفحه ی دایره با صفحه ی تصویر موازی باشد، کتابی است بدیع که شایسته است مورد بررسی قرار گیرد.

علاوه بر نسخه های خطی که از این کتاب در دست است متن آن در سال ۱۹۴۸ م در حیدرآباد دکن در ۲۶ صفحه به طبع رسیده است (در الرسائل المتفرقه فی الهیئة). صاغانی این کتاب را برای کتابخانه ی عضدالدوله ی دیلمی نوشته است.

بیرونی در کتاب استیعاب الوجوه الممکنه فی صنعة الاسطرلاب مختصری از این کتاب را تحت عنوان «جوامع معانی کتاب ابی حامد الصغانی فی تسطیع التام» آورده است و نیز چنان که پیش از این گفته شد بیرونی طرز تسطیع این کتاب را «عجیب» توصیف کرده و نوشته است که این طرز پیش از صاغانی سابقه نداشته است.

۲ـ رسالة فی عمل ضلع المسبّع المتساوی الاضلاع فی الدائره

موضوع این رساله محاط کردن هفت ضلعی منتظم در دایره است. صاغانی این رساله را برای کتابخانه ی عضدالدوله نوشته است.

برگرفته از کتاب زندگی نامه ریاضی دانان دوره ی اسلامی / ابوالقاسم قربانی

تألیفات دیگر صاغانی که موجود است عبارتند از:

۱ـ رساله فی الساعات المعموله علی صفائح الاسطرلاب

۲ـ مقاله فی الابعاد و الاجرام

جشنواره کتاب های آموزشی رشد

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

راهی به سوی:

- استانداردسازی کتاب های آموزشی
- معرفی و تقدیر از کتاب های آموزشی برتر
- آسیب شناسی تولید کتاب های آموزشی

فراخوان معلمان و مدیران آموزشی برای پاسخ به دو سؤال:

۱

وضع کنونی انتشار کتاب های آموزشی در کشور چگونه است؟

۲

نقش وزارت آموزش و پرورش در فرآیند انتشار کتاب های آموزشی چه می‌تواند باشد؟

- مشخصات کامل و عکس خود را به همراه پاسخ برای درج درفصل نامه «جوانه»

به آدرس : تهران ـ صندوق پستی ۱۵۸۷۵ / ۳۳۳۱ ارسال نمایید.

دفتر انتشارات کمک آموزشی

دبیرخانه سامان بخشی کتاب های آموزشی ، تلفن : ۸۸۳۰۶۰۷۱ ، نمابر : ۸۸۳۰۱۴۷۸

www.samanketab.com