مجلهٔ ریاضی

برهان

برای دانش آموزان دبیرستان

۱۱

سال چهارم، پاییز ۱۳۷۳، شمارهٔ اول، بها ۱۵۰۰ ریال

بسم الله الرحمن الرحیم

• صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه

• مدیر مسئول: محمود ابراهیمی • سردبیر: حمیدرضا امیری

(با تشکر از همکاری ارزندهٔ آقایان پرویز شهریاری و مهدی قمصری و با تشکر از آقای حسین ابراهیم زاده قُلزم در بخش کامپیوتر مجله)

• مسئول فنی: هوشنگ آشتیانی • صفحه‌آرا و رسام: احمد پیرحسینلو

• حروفچینی: یگانه

سال چهارم، پاییز ۱۳۷۳ ، شمارهٔ اول

برهان تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

۱ـ نگارش مقالات کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتب ریاضی دبیرستان)

۲ـ طرح مسائل کلیدی (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن

۳ـ طرح مسائل مسابقه‌ای (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن

۴ـ طرح معماهای ریاضی

۵ـ نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

• هیئت تحریریه درحکّ واصلاح وحذف و اضافهٔ مقالات آزاد است.

• مقالات وارده باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.

• مقالات رسیده مسترد نمی‌شود.

برهان هر ۳ ماه یک شماره منتشر می‌شود.

مطالب این شماره

■ نشانی: تهران، خیابان ایرانشهر شمالی، کوچه بهرام‌چوبینی، پلاک ۱۷ تلفن: ۸۸۲۵۹۶۴، ۸۸۲۳۱۴۹، ۵۲ ـ ۸۸۴۳۹۵۰، فاکس: ۸۸۲۰۵۹۹

حرف اوّل

با چاپ این شماره از مجله، وارد چهارمین سال انتشار فصلنامه ریاضی «برهان» شده‌ایم از روزی که تصمیم به انتشار این مجله گرفتیم، با امید به توفیقات الهی، هدفی جز خدمت به جامعه فرهنگی و علمی کشور و بالاخص ریاضیات دبیرستانی در سر نداشتیم. در این راه همیشه از پیشنهادات، انتقادات و دلگرمیها و تشویقهای شما عزیزان سود برده و آنها را توشهٔ راهمان ساخته‌ایم. در آغاز چهارمین سال انتشار «برهان» لازم می‌دانم نکاتی را به عرض شما خوانندگان عزیز و دانش‌آموزان گرامی برسانم.

۱ ـ نظر به اینکه از امسال بخش وسیعی از آموزش متوسطه (دبیرستانی) تحت پوشش نظام جدید آموزش و پرورش قرار می‌گیرد، تصمیم گرفته شد از این به بعد، بخش قابل توجهی از مقالات و مسائل مطرح شده به نظام جدید اختصاص داده شود و مقالات حتی‌الامکان از میان مباحث و موضوعهایی انتخاب شوند که در کتب نظام جدید و قدیم مشترک باشند.

۲ ـ نظر به درخواست و پیشنهاد شما عزیزان، بخش مسائل برای حل را گسترش داده و در هر مقطع تعداد مسائل مطرح شده را افزایش می‌دهیم.

۳ ـ تصمیم گرفته‌ایم که از این شماره، بخش کامپیوتر مجله را در زمینهٔ آموزش مبانی کامپیوتر فعالتر کنیم و مقالات بیشتری به چاپ برسانیم.

۴ ـ سعی بر این است که از این شماره، مقالات درسی و کمک درسی را افزایش داده و همچنین تعداد صفحات بیشتری را به بخش جواب نامه‌ها اختصاص دهیم.

در انتها و با توجه به فصل بازگشایی مدارس و شروع فعالیتهای تحصیلی شما عزیزان، موفقیت و کامیابی همهٔ شما آینده‌سازان ایرانِ اسلامی را از خداوند خواستاریم و توصیه می‌کنیم از همین امروز و از همین آغاز سالِ تحصیلی پایه‌های درسیِ خود را محکم کرده و در شیوهٔ مطالعات کتب درسی و کمک آموزشی، برنامه‌ریزیِ دقیق و مؤثری داشته باشید تا به موفقیت بیشتری دست یابید. إن شاءا...

والسلام. سردبیر

شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۱۱)

پرویز شهریاری

دربارهٔ روش انجام تکلیفها صحبت می‌کردیم. اهمیت موضوع، آن‌قدر زیاد است که نمی‌توان بسادگی آن را کنار گذاشت.

دو نوع مسأله وجود دارد: ۱) تمرینهای ساده و یکنواختی که برای به‌خاطر سپردن دستورها و تسلط بر قضیه‌ها، به‌طور معمول، در پایان هر فصل کتاب درسی آمده است و، راه حل آنها، کم و بیش از قبل معلوم است و ۲) مسأله‌هایی که برای حلِ آنها، باید دستورها و قضیه‌های لازم را خودمان و با توجه به داده‌های مسأله، کشف کنیم.

مسأله‌های نوع اوّل، مسأله‌هایی «بی مضمون» هستند و به تفسیر و توضیحی نیاز ندارند. هرجا، در این رشته مقاله‌ها، از مسأله نام می‌بریم منظورمان مسأله‌های نوع دوم، یعنی مسأله‌های «با مضمون» است.

البته، در نوع اوّل، یعنی در تمرینهای پایان هر بخش کتاب درسی هم، ممکن است مسأله‌هایی گذاشته شده باشد که «اندکی مضمونی» داشته باشند. سه مثال از این نوع می‌آوریم:

مثال ۱: در پایان بخش مربوط به معادلهٔ درجه دوم، برای تمرین در استفاده از دستور کلی حل معادلهٔ درجه دوم، این معادله، برای حل، داده شده است:

$$x^3 - ax^2 + x + a^2 - 3a + 2 = 0 \qquad (*)$$

که معادله‌ای درجه سوم است. ولی، چون در فصل مربوط به معادلهٔ درجه دوم آمده است، باید ارتباطی با آن داشته باشد ... چه رابطه‌ای؟ ... بله! این معادله، نسبت به پارامتر a، از درجهٔ دوم است. آن را نسبت به a منظم می‌کنیم:

$$a^2 - (x^2 + 3)a + x^3 + x + 2 = 0$$

بنابراین، می‌توان a را برحسب x به‌دست آورد؛ و اگر ریشه‌ها (نسبت به مجهول a) عبارتهایی گویا باشند؛ این راه حل، ما را به‌نتیجه می‌رساند. مبین معادله چنین است:

$$\Delta = (x^2 + 3)^2 - 4(x^3 + x + 2)$$
$$= x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = (x^2 - 2x + 1)^2$$

یعنی برای a، دو جواب گویا به‌دست می‌آید:

$$a = x + 1 \,,\; a = x^2 - x + 2$$

به این ترتیب $x_1 = a - 1$ و برای دو جواب دیگر، باید این معادلهٔ درجه دوم را حل کنیم:

$$x^2 - x + 2 - a = 0\,;$$

$$x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{4a - 7}}{2}$$

تکلیف ریشه‌های معادلهٔ درجه سوم (*) معلوم شد. این معادلهٔ درجه سوم به ازای $a < \frac{7}{4}$، تنها یک ریشهٔ حقیقی دارد: $x = a - 1$

به ازای $a = \frac{7}{4}$، یک ریشهٔ ساده و یک ریشهٔ مضاعف دارد:

$$x_1 = -\frac{11}{4}\,،\; x_2 = x_3 = \frac{1}{2}\,،$$

و به ازای $a > \frac{7}{4}$، سه ریشهٔ حقیقی متمایز دارد:

$$x_1 = a - 1 \,,\; x_2 = \frac{1}{2} + \sqrt{a - \frac{7}{4}} \;,\; x_3 = \frac{1}{2} - \sqrt{a - \frac{7}{4}}$$

مثال ۲: در پایان بخش مربوط به بخش‌پذیر بودن $a^n - b^n$ بر $a-b$ و $a^n + b^n$ بر $a+b$ (به شرط فرد بودن n)، این تمرین داده شده است:

چند جمله‌ای زیر را، به تفاضل مجذورهای دو چند جمله‌ای تبدیل کنید:

$$x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1$$

بی‌تردید به فکر می‌افتید؛ این تمرین، به چه مناسبت در این فصل داده شده است؟ ... چرا همهٔ توانها زوج است؟ ... خوب، با فرض $x^2 = y$، به عبارت ساده‌تری می‌رسیم:

$$y^4 + y^3 + y^2 + y + 1$$

و این، خارج قسمتِ $y^5 - 1$ بر $y - 1$ است. و دیگر، به خودی خود، حل مسأله دنبال می‌شود:

$$y^4 + y^3 + y^2 + y + 1 = \frac{y^5 - 1}{y - 1} = \frac{x^{10} - 1}{x^2 - 1}$$

$$= \frac{(x^5 - 1)(x^5 + 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{x^5 - 1}{x - 1} \cdot \frac{x^5 + 1}{x + 1}$$

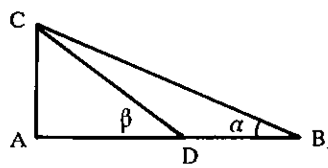
$$= (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$$

$$= (x^4 + x^2 + 1)^2 - (x^3 + x)^2$$

مثال ۳: در پایان بخش مربوط به تشابه مثلثها، این تمرین داده شده است:

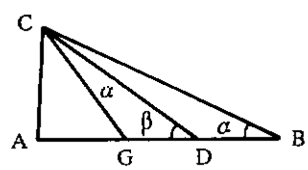
در مثلث قائم الزاویهٔ ABC ، می‌دانیم طول ضلع AB ، سه برابر طول ضلع AC و طول پاره‌خط راست DB ، یک سوم طول ضلع AB است (شکل را ببینید). ثابت کنید، مجموع دو زاویهٔ α و β برابر ۴۵ درجه است.

شکل ۱



کلید حلِ مسأله این است که از نقطهٔ C به وسط پاره‌خط راست AD وصل کنیم و ثابت کنیم، دو مثلث CED و BCE متشابه‌اند.

شکل ۲



این دو مثلث، در زاویهٔ E $(\hat{CEB})$ مشترکند؛ در ضمن داریم (طول ضلع AC را واحد گرفته‌ایم):

$$\frac{|CE|}{|ED|} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}\ ;$$

$$\frac{|EB|}{|CE|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

یعنی؛ مثلثها، در یک زاویه مشترکند و ضلعهایی از دو مثلث که مجاور این زاویه‌اند، طولهایی متناسب دارند، پس مثلثها متشابه‌اند. بنابراین، زاویه‌های نظیر در دو مثلث، با هم برابرند:

$$\hat{ECD} = \hat{EBC} = \alpha$$

اکنون، اگر به مثلث CEB توجه کنیم، روشن می‌شود:

$$\alpha + \beta = \hat{AEC} = 45°$$

ولی حتی در این‌گونه مسأله‌ها، که «بی مضمون» هم نیستند، همان‌طور که دیدید، خود درس می‌تواند راهنمایی برای یافتن راه حل باشد. مسأله‌های واقعی «مضمون دارد» ، آنهایی هستند که هیچ‌گونه دستور یا قضیّهٔ راهنما ، چه مستقیم و چه غیر مستقیم، به همراه نداشته باشند. قبول کنید که اغلب مسأله‌های زندگی هم، چنین‌اند.

□

دو راه برای پی بردن به حل مسأله وجود دارد: راه اوّل این است که کتاب حل مسأله‌ها را باز کنیم و راه حل آن را ببینیم، یا منتظر جلسهٔ بعدی کلاس بمانیم تا دبیر ریاضی (یا یکی از دانش‌آموزان) آن را حل کند و «کلید حل مسأله» را به ما بدهد (و دریغ، که اغلب همین راه را انتخاب می‌کنند). این، برخورد «غیرفعال» با مسأله است، شیوه‌ای که هرگز ما را برای حلِ مسأله‌های تازه (چه در ریاضیات و چه در زندگی) آماده نمی‌کند، استفاده از کتابهای حل مسأله یا رونویس کردن آنچه بر تختهٔ سیاه نوشته می‌شود، نقش دو «چوب دستی» را به‌عهده دارند که بخواهیم تنها به یاری آنها راه برویم و، طبیعی است، اگر به زیر بغل گرفتن «چوب دستیها» عادت کرده باشیم، بتدریج راه رفتن عادی را فراموش می‌کنیم و، بدون «چوب دستیها» به زمین می‌خوریم.

روش دوم؛ «برخورد فعال» با مسأله است. در آینده، دربارهٔ برخورد فعال با مسأله‌های ریاضی، با تفصیل بیشتری صحبت خواهیم کرد و در این‌جا، تنها به جنبه‌ای از آن ـ که برای همه، اهمیتی جدی دارد ـ اشاره می‌کنیم.

اندیشه یا تفکر، و بویژه اندیشهٔ علمی، تنها با آگاهیهای پراکنده‌ای که از این‌جا و آن‌جا به‌دست می‌آوریم، پدید نمی‌آید. اگر ذهن آدمی، فعالیت نداشته باشد و اگر، با تکیه بر آنچه در اختیار دارد و آنچه پیشتر یاد گرفته است، تلاش برای پیدا کردن بستگیهای

ممکن بین عنصرهای به‌ظاهر جدا از هم نکند؛ اگر با تجزیه و تحلیل داده‌ها، به‌تدریج و گام‌به‌گام، راه را برای رسیدن به مقصود نگشاید ... ، هرگز رشد نمی‌کند و استعداد رفع دشواریها را بدست نمی‌آورد.

اندیشه، بویژه اندیشهٔ ریاضی، ضمن جدا کردن و شناختن پدیده‌ها و حقیقتهای موجود (تجزیه)، جست و جوی بستگیهای بین آنها (ترکیب یا تحلیل) و عبور از حالتهای خاص به حالت کلی (تعمیم) پدید می‌آید و رشد می‌کند؛ و «برخورد فعال با مسأله» یعنی همین

تجزیه و تحلیل و تعمیم، خمیرمایه‌هایی هستند که «اندیشه» را بارور می‌کنند، موجب افزایش آگاهیها و بالا رفتن استعداد کار می‌شوند و به ما امکان می‌دهند تا، به کمک اندیشهٔ خود، حلقهٔ مجهول یک موقعیت (یعنی آنچه را که به‌طور مستقیم به ما نداده‌اند) پیدا کنیم.

اندیشه، نه از راه به‌خاطر سپردن و حفظ کردن بلکه از طریق تلاش ذهن و جست و جوی بستگیهای تازه به دست می‌آید.

اندیشه، از ساده‌ترین آگاهیها آغاز می‌شود و با فعالیت خود ـ و بر پایهٔ تجربه‌های پیشین ـ آگاهیهای مناسب دیگری را به یاد می‌آورد، آنها را به هم نزدیک می‌کند و با ارزیابی موردهای مشابه و توجه به حالت خاص، خود را از «بن‌بست» خارج می‌کند. با یکی دو مثال، مطلب را روشنتر می‌کنیم.

مثال ۱: n عدد طبیعی داریم که همهٔ آنها، با رقم a نوشته شده‌اند (a می‌تواند یکی از رقمهای ۱، ۲، ...، ۹ باشد). کوچکترین عدد، k رقم و، هر عدد بعدی، یک رقم بیشتر از عدد قبل از خود دارد. مجموع این n عدد را پیدا کنید.

مجموع مجهول را می‌توان این‌طور نوشت (عددها در عدد ـ شماری به مبنای ۱۰):

$$A=\underbrace{\overline{aa\ldots a}}_{k\ \text{مرتبه}}+\underbrace{\overline{aa\ldots a}}_{(k+1)\ \text{مرتبه}}+\ldots+\underbrace{\overline{aa\ldots a}}_{(k+n-1)\ \text{مرتبه}}$$

باید مجموع n جمله را پیدا کنیم. تنها برای مجموعهایی قاعدهٔ کلی داریم که، جمله‌های آنها، به تصاعد حسابی یا تصاعد هندسی باشند. ولی در این‌جا، با تصاعد سر و کار نداریم. چه باید کرد؟ ... ساده‌ترین حالت را، وقتی $a=1$ و $k=1$ باشد، درنظر بگیریم:

$$1+11+111+1111+\ldots+\underbrace{11\ldots1}_{n\ \text{مرتبه}}$$

باز هم نشد. اگر این مجموع به‌صورت:

$$1+11+101+1001+\ldots+\underbrace{100\ldots01}_{n\ \text{رقم}}$$

بود، می‌شد واحدها را جدا کرد، آن وقت بقیّه به‌صورت مجموعی از توانهای متوالی ۱۰، یعنی به‌صورت مجموعی از جمله‌های یک تصاعد هندسی، درمی‌آمد و مسأله حل می‌شد ... عجب! فهمیدم! در این‌جا، ساده‌ترین حالت، نمی‌تواند به ما کمک کند. ولی مجموع زیر، ساده‌تر ما را به هدف می‌رساند:

$$9+99+999+\ldots+\underbrace{99\ldots9}_{n\ \text{رقم}}$$

زیرا:

$$\underbrace{99\ldots9}_{n\ \text{رقم}}=10^n-1$$

به این ترتیب، برای مجموع مورد نظر داریم:

$$A=\frac{a}{9}\left(\underbrace{99\ldots9}_{k\ \text{رقم}}+\underbrace{99\ldots9}_{(k+1)\ \text{رقم}}+\ldots+\underbrace{99\ldots9}_{(k+n-1)\ \text{رقم}}\right)=$$

$$=\frac{a}{9}\left(10^k-1+10^{k+1}-1+\ldots+10^{k+n-1}-1\right)=$$

$$=\frac{a}{9}\left(10^k+10^{k+1}+\ldots+10^{k+n-1}-n\right)=$$

$$=\frac{a}{9}\left(\frac{10^{k+n}-10^k}{9}-n\right)$$

$$=\frac{a}{81}\left(10^{k+n}-10^k-9n\right)$$

به این ترتیب، برای حل مسأله، ابتدا مجموع مجهول را به‌صورت مجموع A نوشتیم، سپس به‌حالت خاص پرداختیم و در حالت خاص $a=9$ و $k=1$، کلید حل مسأله را به‌دست آوردیم؛ بعد این راه حل را تعمیم دادیم و، با استفاده از قانون مجموع در تصاعد هندسی، خود را به جواب مسأله در حالت کلی رساندیم.

اندیشهٔ ما، از حالت کلی مجموع A، متوجه تصاعد شد؛ سپس خود را به تصاعد هندسی با جمله‌های 10، 10^2، 10^3، ...، 10^k رساند و از آن جا، با این تجزیه و تحلیل و استفاده از مسأله‌های کمکی، راه را برای حل مسأله (که تعمیمی از مسأله‌های کمکی بود) باز کرد.

مثال ۲: روی ضلعهای مثلث قائم الزاویهٔ متساوی‌الساقینی، با ضلع مجاور به زاویهٔ قائمهٔ برابر a، مربعهای در بیرون مثلث ساخته‌ایم و مرکزهای این مربعها را، با پاره خطهای راست به هم وصل کرده‌ایم. مطلوب است مساحت مثلثی که به این ترتیب به‌دست می‌آید.

برای به حرکت درآوردن اندیشه، ابتدا عنصرهای صورت مسأله را، مشخص و تعریف هر یک از آنها را مرور می‌کنیم: «مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین»، «ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه»، «مربع»، «مرکز مربع». بعد شکل را رسم و داده‌های مسأله را یادداشت می‌کنیم.

پاره خطهای راست AB و AC، ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمه؛

$|AB| = |AC|$ ؛

AA_1B_1B، BB_2C_2C و AA_2C_1C مربع؛

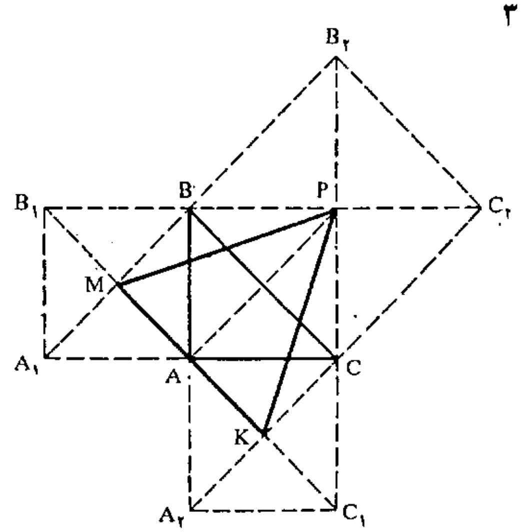
$|AA_1| = |A_1B_1| = |B_1B| = |AB|$ ؛

$|BB_2| = |B_2C_2| = |C_2C| = |BC|$ ؛

$|AC| = |CC_1| = |C_1A_2| = |A_2A|$ ؛

نقطه‌های M، P و K، مرکزهای مربعها.

شکل ۳



چون باید مساحت مثلث MPK را پیدا کنیم، به‌طور طبیعی اندیشهٔ ما، متوجه تعیین قاعدهٔ مثلث و ارتفاع وارد بر این قاعده می‌شود. برای این که حرکت اندیشه را در جست و جوی بستگیهایی که بین داده‌ها (ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمه در مثلث ABC) و مجهولها (قاعده و ارتفاع مثلث MPK) وجود دارد، ساده‌تر کنیم، باید آنها را در دستگاهی از بستگیها وارد کنیم که معرف ویژگی مورد نظر ما باشند. در این مسأله، تقارن تمامی شکل و بخشی از آن؛ یعنی مثلث MPK، نسبت به خط راست AP ثابت می‌شود.

حرکت بعدی اندیشه، برای تعیین طول پاره‌خطهای مجهول، دقت در ویژگیهایی است که شکلهای متقارن دارند (برابر بودن پاره‌خطهای راست متناظر، عمود بودن محور تقارن بر پاره خط راستی که دو نقطهٔ متناظر را به هم وصل می‌کند و نصف شدن این پاره‌خط راست به‌وسیلهٔ محور تقارن). در نتیجه:

$[MK] \perp [AP]$ و $|MK| = |BC| = |AP|$

سرانجام، با بررسی مساحت مربع و مثلث، به این نتیجه می‌رسیم که مربع ABPC و مثلث MPK هم ارزند (یعنی مساحتهای برابر دارند) که، از آن‌جا، مساحت مجهول، برابر a^2 واحد مربع می‌شود.

اشاره‌ای به یک نکتهٔ مهم: مسأله را کامل حل کنید.

وقتی معادلهٔ ساده‌ای مثل $mx = a$ روبه روی شماست، برای حل آن و پیدا کردن مقدار مجهول x چه می‌کنید؟ خیلی ساده است: می‌گویید دو طرف معادله را بر m تقسیم می‌کنیم، مقدار x به‌دست می‌آید:

$$x = \frac{a}{m}$$

آیا حل مسأله تمام شده است؟ نه! می‌دانید، دو طرف برابری را، تنها وقتی می‌توان بر m تقسیم کرد که، m، برابر صفر نباشد. پس جوابی که به‌دست آورده‌اید، همیشه قابل قبول نیست و باید آن را این‌طور نوشت:

اگر $m \neq 0$، آن‌گاه $x = \frac{a}{m}$

هنوز کار حل مسأله تمام نشده است؛ زیرا باید به این پرسش هم پاسخ داد که: اگر m برابر صفر باشد، تکلیف x چه می‌شود؟ پاسخ را می‌دانید. بنابراین، تنها وقتی می‌توان حل معادله را کامل دانست که به پرسش اخیر هم، پاسخ داده باشیم:

اگر $m \neq 0$، آن‌گاه $x = \frac{a}{m}$

اگر $m = 0$ و $a = 0$، آن‌گاه x می‌تواند هر عدد دلخواه باشد؛

اگر $m = 0$ و $a \neq 0$، آن‌گاه معادله ریشه‌ای ندارد.

در برخی متنها و به‌ویژه در برخی کتابهای سطحی «حل‌المسائل»، این روند کار را به دو بخش تقسیم کرده‌اند: ۱) حل مسأله؛ ۲) بحث. اغلب، درصورت مسأله هم، همین دو بخش را یادآوری می‌کنند:

«معادلهٔ $mx = a$ را حل و بحث کنید».

که برخوردی سطحی و حتی بی‌معنی با یک مسألهٔ ریاضی است. حل یک مسألهٔ ریاضی، و مثلاً حل یک معادله، به‌معنای آن است که جواب یا جوابهای ممکن را، در همهٔ حالتهایی که پیش می‌آید، پیدا

کنیم. «بحث» دربارهٔ جواب، جزو حل مسأله است، نه بخشی اضافی و بیرون از حل. اگر از شما بپرسند: x بزرگتر است یا x^2؟ چه پاسخی می‌دهید؟ چاره‌ای جز این ندارید که در پاسخ، از همهٔ حالتهای ممکن نام ببرید:

اگر $x = 0$ یا $x = 1$، آن‌گاه $x^2 = x$؛

اگر $x < 0$ یا $x > 1$، آن‌گاه $x^2 > x$؛

اگر $0 < x < 1$، آن‌گاه $x^2 < x$.

و روشن است، حذف هر کدام از این حالتها و توجه نکردن به آن، به‌معنای آن است که پاسخ را کامل نداده‌ایم.

حل یک مسأله در کجا تمام می‌شود؟ وقتی که به این پرسشها، پاسخ داده باشیم، آیا جوابی که به‌دست آورده‌ایم، قابل قبول است؟ از بین جوابهایی که به دست آورده‌ایم، کدام را باید پذیرفت و کدام را کنار گذاشت؟ آیا جوابی را از دست نداده‌ایم؟ موقعیت جواب، در حالتهای خاص چه می‌شود؟ ...

قبل از هر کار، باید عملها و استدلالها را بازبینی کرد. بازبینی درستی محاسبه‌ها و دقت در منطقی بودن استدلالها، از بسیاری اشتباهها جلوگیری می‌کند. ولی با گذشتن از این مرحله، باز هم ممکن است، جوابی که به دست آورده‌ایم، قابل قبول نباشد، یا نیاز به تفسیر داشته باشد و یا بجز آن، جواب یا جوابهای دیگری هم وجود داشته باشد و ...

مثل همیشه، موضوع را با مثال روشن می‌کنیم.

مثال ۱: معادلهٔ $x^{2x} = (2x)^x$ را حل کنید.

اگر از دو طرف معادله، در مبنای ۱۰ لگاریتم بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$2x\log x = x(\log 2 + \log x) \Rightarrow x\log x - x\log 2 = 0$$

از آن‌جا $x(\log x - \log 2) = 0$، یعنی $x = 0$ یا $x = 2$. ریشهٔ $x = 0$ قابل قبول نیست (دست کم برای ما).

$x = 0$ به‌شرطی قابل قبول است که بتوانیم ثابت کنیم:

$$\lim_{x \to 0} (x^{2x}) = \lim_{x \to 0} (2x)^x$$

و ما از عهدهٔ این محاسبه برنمی‌آییم. $x = 2$ ریشه‌ای از معادله است و در آن صدق می‌کند، زیرا $4^2 = 2^4$.

آیا مسأله حل شد؟ دوباره جزء‌به جزء حل را مورد بررسی قرار می‌دهیم ... از دو طرف لگاریتم گرفتیم ... آیا اگر دو عدد برابر باشند، همیشه لگاریتمهای آنها یکی است؟ ... نه! ممکن است دو عدد برابر، منفی باشند، آن‌وقت لگاریتم عدد منفی معنا ندارد ... پس عمل لگاریتم گرفتن به شرطی درست است که x، عددی مثبت باشد. ولی درصورت مسأله، شرطی برای مثبت بودن x وجود ندارد. در واقع $\log|x|$ معنا دارد، ولی $\log x$ ممکن است معنا نداشته باشد.

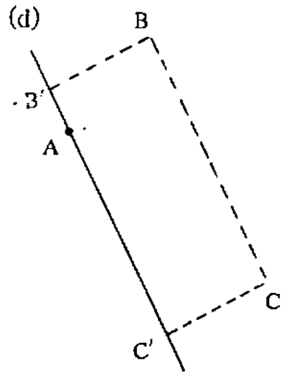
اگر $\log|x| = \log 2$، آن وقت به‌دست می‌آید $x = \pm 2$.

آیا $x = -2$ در معادله صدق می‌کند ... بله!

$$(-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16} \; ; \; (-4)^{-2} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16}$$

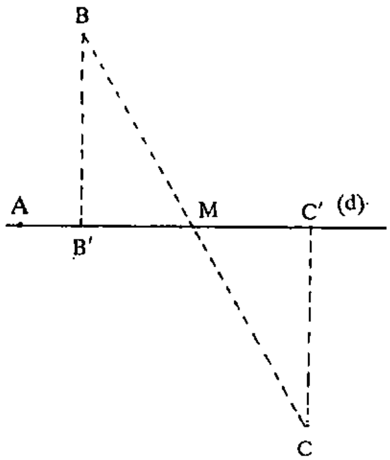
مثال ۲: سه نقطهٔ A، B و C روی یک صفحه واقعند. از نقطهٔ A خط راستی بگذرانید که، دو نقطهٔ B و C، از آن به یک فاصله باشند.

شکل ۴



مسألهٔ ساده‌ای است: اگر خط راست مجهول را که از A می‌گذرد، d بنامیم، چون طول عمودهای وارد از B و C بر d با هم برابرند، بنابراین d با خط راست BC موازی است. پس از نقطهٔ A، خط راستی موازی خط راست BC رسم می‌کنیم، خط راست مجهول به‌دست می‌آید ... در درستی این جواب شکی نیست. ولی مگر

شکل ۵



نمی‌شود دو نقطهٔ B و C در دو طرف خط راست d و، در ضمن، از آن به یک فاصله باشند؟...

... بله، درست است، اگر خط راست d را از نقطهٔ A و نقطهٔ M (وسط پاره‌خط راست BC) بگذرانیم، باز هم جوابی از مسأله، به‌دست می‌آید. پس مسأله دو جواب دارد: ۱) خط راستی که از A موازی BC رسم شود؛ ۲) خط راستی که از A و وسط پاره‌خط راست BC عبور کند.

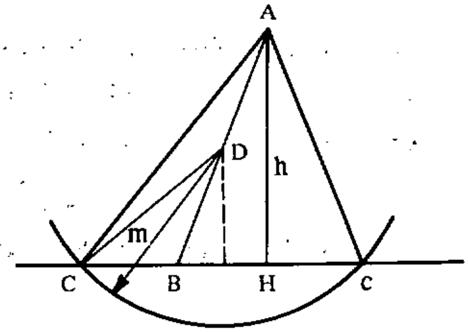
در ضمن، روشن می‌شود که، اگر A بر M منطبق باشد، مسأله بی‌نهایت جواب دارد، یعنی هر خط راستی که از M (یعنی A) بگذرد، جواب مسأله است. ولی اگر A روی خط راست BC و در جایی غیر از M باشد، آن‌وقت مسأله تنها یک جواب دارد: خود خط راست BC.. مسأله به‌طور کامل حل شد.

مثال ۳: مطلوب است رسم مثلث ABC ، به‌شرطی که از آن، طول ضلع AB ، طول میانهٔ CD و طول ارتفاع AH معلوم باشد:

$$|AH| = h\,,\ |CD| = m\,,\ |AB| = C\,.$$

ABC را مثلث مجهول می‌گیریم. خود مثلث ABC را، بلافاصله، نمی‌توان ساخت. ولی مثلث قائم الزاویهٔ AHB قابل رسم است، زیرا از آن، طولهای وتر AB و ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه AH معلوم است. نقطهٔ D ، وسط ضلع AB است و اگر به مرکز D و شعاع برابر

شکل ۶



m دایره‌ای رسم کنیم تا خط راست BH را قطع کند، نقطهٔ C ، رأس سوم مثلث ABC به‌دست می‌آید (شکل ۶). روی شکل دیده می‌شود که مسأله، در حالت کلی، دو جواب دارد.

مسأله را حل کردیم و جواب را به‌دست آوردیم، ولی هنوز حل مسأله کامل نیست. حل را از آغاز مورد بازبینی قرار می‌دهیم. اوّل مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH را رسم کردیم. ولی این مثلث، وقتی وجود دارد که داشته باشیم $c>h$. حالت $c = h$ هم قابل قبول است: در این حالت، نقطهٔ B بر نقطهٔ H منطبق و مثلث ABC قائم‌الزاویه می‌شود. دایرهٔ به مرکز D و شعاع برابر m ، وقتی خط راست BH (و در حالت انطباق B بر H ، خط راست عمود بر AH در نقطهٔ H) را قطع می‌کند که داشته باشیم: $m\geq\frac{1}{2}h$ ، یا $h<2m$. به این ترتیب، به حالتهای زیر برخورد می‌کنیم:

۱) در حالت $h>c$ ، مسأله جواب ندارد.

۲) در حالت $h<c$: الف) اگر $2m<h$ ، آن‌وقت مسأله جواب ندارد؛ ب) اگر $2m = h$ ، مسأله یک جواب دارد؛ ج) اگر $2m>h$ ، آن‌وقت دایرهٔ به مرکز D و شعاع برابر m ، با خط راست BH ، دو نقطهٔ مشترک دارد؛ با وجود این، ممکن است این نقطهٔ مشترک، مثلثی را مشخص نکند؛ این وضع، وقتی پیش می‌آید که نقطهٔ مشترک، منطبق بر B باشد. بنابراین، در این حالت، بازای $m>\frac{1}{2}c$ یا $m<\frac{1}{2}c$ ، مسأله دو جواب و به ازای $m = \frac{1}{2}c$ ، یک جواب دارد.

۳) $h = c$. در این حالت، نقطه‌های B و H بر هم منطبق می‌شوند. اگر $2m\leq h$ ، آن‌وقت مسأله جواب ندارد؛ اگر $2m>h$ مسأله یک جواب دارد (زیرا دو مثلثی که به‌دست می‌آید، با هم برابرند).

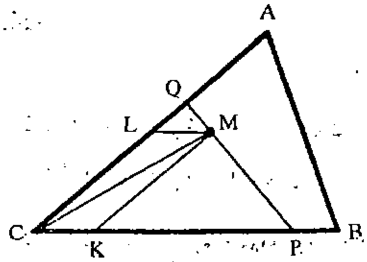
□

البته، مسأله‌هایی هستند که، گرچه می‌توان راه حل آنها را با روشهای مقدماتی دبیرستانی پیدا کرد، بحث دربارهٔ حالتهای مختلف و تعداد جوابها، از مرز ریاضیات دبیرستانی خارج می‌شود. در چنین صورتی، که برای شما کمتر پیش می‌آید (زیرا بی‌شک مسأله‌ای را به شما می‌دهند که از عهدهٔ حل کامل آن برآیید)، باید توضیح بدهید که حل مسأله ناتمام مانده است. ذکر جمله «ناتمام» در پایان حل مسأله، به‌معنای درک شما از مفهوم «حل مسأله» است.

برای آشنایی شما، نمونه‌ای از این‌گونه مسأله‌ها را می‌آوریم.

از نقطهٔ M واقع در درون مثلث ABC ، خط راستی رسم کنید که مثلث را به دو بخش هم ارز (با مساحتهای برابر) تقسیم کند.

شکل ۷



در این مسأله حتی پیدا کردن نمونه‌ای از جواب هم، کار چندان ساده‌ای نیست و باید از جبر و مثلثات کمک بگیریم.

خط راست مجهول را PQ فرض می‌کنیم (شکل ۷) که ضلعهای $|CA| = b$ و $|CB| = a$ را، به‌ترتیب، در نقطه‌های Q و P قطع کرده است. $|CP| = x$ و $|CQ| = y$ می‌گیریم. بنا بر فرض، باید داشته باشیم:

$$xy = \frac{1}{2}ab \qquad \text{(۱)}$$

برای به‌دست آوردن مقدارهای x و y، به معادلهٔ دیگری هم نیاز داریم. خطهای راست MK و ML را، به‌ترتیب، موازی ضلعهای CA و CB رسم و M را به C وصل می‌کنیم. $|CK| = k$ و $|CL| = l$ می‌گیریم (چون نقطهٔ M مفروض است، بنابراین طولهای k و l هم، مقدارهایی معلومند). روشن است که

$$S_{PCQ} = S_{CMQ} + S_{CMP}$$

از طرف دیگر، با توجه به شکل ۷، داریم:

$$S_{CMQ} = \frac{1}{2}|CQ|.|CK|\sin\hat{C} = \frac{1}{2}ky\sin\hat{C};$$

$$S_{CMP} = \frac{1}{2}lx\sin\hat{C} \quad ; \quad S_{PCQ} = \frac{1}{2}xy\sin\hat{C}$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$ky + lx = xy \qquad \text{(۲)}$$

اکنون باید، به کمک معادله‌های (۱) و (۲)، راهی برای رسم پاره‌خطهای راست x و y پیدا کرد. این رسم را می‌توان، مثلاً با روش زیر انجام داد. ابتدا، این پاره‌خط راست را می‌سازیم:

$$C = \sqrt{\frac{1}{2}ab}$$

سپس، مجهولهای کمکی u و v را، با توجه به تناسبهای

$$\frac{u}{k} = \frac{c}{x}; \frac{v}{l} = \frac{c}{y} \qquad \text{(۳)}$$

در نظر می‌گیریم. در این‌صورت، دستگاه معادله‌های (۱) و (۲)، منجر به این دستگاه می‌شود:

$$uv = kl \text{ و } u + v = c \qquad \text{(۴)}$$

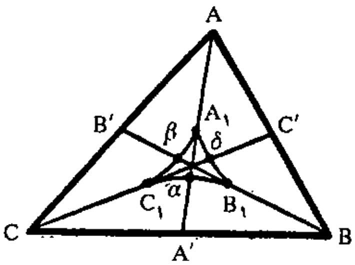
با توجه به معادله‌های (۴)، می‌توان پاره‌خطهای راست u و v و سپس، با توجه به معادله‌های (۳)، پاره خطهای راست x و y را ساخت.

اگر $a \le x$ و $y \le b$ باشد، آن‌وقت پاره خطهای راست $|CP| = x$ و $|CQ| = y$ را جدا می‌کنیم، خط راست مجهول به‌دست می‌آید.

جواب را با این فرض به دست آوردیم که، خط راست مجهول، ضلعهای CA و CB را قطع کرده باشد. به همین ترتیب، می‌توان دو حالت دیگر را درنظر گرفت و دو جواب دیگر به‌دست آورد. درنتیجه، در حالت کلی، سه جواب پیدا می‌شود.

همان‌طور که می‌بینیم، مسأله، با روشهای ریاضیات دبیرستانی به جواب رسید. ولی بحث دربارهٔ تعداد جوابها، چه از نظر کمّی و چه از نظر کیفی، نسبت به حل کلی مسأله، بغرنجتر است و از محدودهٔ ریاضیات دبیرستانی بیرون می‌رود. نتیجهٔ این بحث را، در این‌جا می‌آوریم.

شکل ۸



هذلولی $C_1\alpha B_1$ را (شکل ۸) مماس بر میانه‌های BB' و CC'، به‌ترتیب در نقطه‌های وسط آنها، یعنی B_1 و C_1 رسم می‌کنیم (این هذلولی، روی میانهٔ AA'، پارهٔ خط راست به طول $|A\alpha| = |AA'|\frac{\sqrt{2}}{2}$ را جدا می‌کند، مجانبهای این هذلولی، عبارتند از: خطهای راست AC و AB. به همین ترتیب، هذلولیهای A_1BC_1 و $A_1\delta B_1$ را رسم می‌کنیم. مسأله، وقتی سه جواب دارد که نقطهٔ M، در درون مثلث منحنی الضلع $A_1B_1C_1$ واقع باشد. اگر M روی محیط مثلث $A_1B_1C_1$ باشد، به‌شرطی بر یکی از رأسهای مثلث منطبق نشود، مسأله دو جواب دارد. مسأله، در همهٔ حالتهای دیگر، دارای یک جواب است.

تا بعد

یادداشت. اغلب، ضمن تعریف تابع نمایی به‌صورت

$$[f(x)]^{\varphi(x)} \qquad \text{(۴)}$$

شرط $f(x) > 0$ را می‌پذیرند، یعنی دامنهٔ مقدارهای قابل قبول x، با شرط $f(x) > 0$ به دست می‌آید. اگر این تعریف را برای تابع نمایی قبول داشته باشیم، آن‌وقت $x = -2$ نمی‌تواند به‌عنوان ریشه‌ای از معادلهٔ $(2x)^x = x^{2x}$ پذیرفته شود. با وجود این ضمن تعیین ریشه‌های این معادله، باید به این مطلب اشاره شود: اگر مقدارهای منفی x را جزو دامنهٔ معادله به‌حساب آوریم، معادله دو ریشه دارد: $x = \pm 2$؛ ولی اگر تنها مقدارهای مثبت به‌عنوان دامنهٔ مقدارهای قابل قبول x پذیرفته شود، آن‌وقت معادله تنها یک جواب دارد: $x = 2$.

معادله درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$

● احمد قندهاری

۱ - بررسی حالتهای ناقص معادله:

الف) اگر در معادله درجه دوّم $ax^۲ + bx + c = ۰$، $c = ۰$، آنگاه یک ریشه معادله صفر و ریشه دیگر $(-\frac{b}{a})$ است.

$c = ۰ \Rightarrow ax^۲ + bx = ۰ \Rightarrow x(ax+b) = ۰$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = -\frac{b}{a} \end{cases}$$

ب) اگر در معادله درجه دوّم $ax^۲ + bx + c = ۰$، b و c هر دو صفر باشد، آنگاه هر دو ریشه معادله صفر است.

$b = ۰, c = ۰ \Rightarrow ax^۲ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۰ \Rightarrow x.x = ۰$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۰ \end{cases}$$

ج) اگر در معادلهٔ درجه دوم $b = ۰$ و a و c مختلف‌العلامه باشد، آنگاه معادله دو ریشه قرینه دارد.

$b = ۰ \Rightarrow ax^۲+c = ۰ \Rightarrow x^۲ = -\frac{c}{a}$

چون a و c مختلف‌العلامه‌اند، پس کسر $(-\frac{c}{a})$ عددی است مثبت.

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

مسأله: معادلهٔ $mx^۲+(m-۱)(m+۱)x+(m-۳)(m+۱)=۰$ مفروض است.

m را چنان بیابید تا اوّلاً: یک ریشه معادله صفر باشد. ثانیاً: هر دو ریشه معادله صفر باشد. ثالثاً: معادله دو ریشه قرینه داشته باشد ضمناً در هر مورد ریشه‌ها را بیابید.

حل: اولاً: باید $c = ۰$ ولی باید توجه داشت که $b \neq ۰$ بنابراین:

$\boxed{m = ۳}$

اگر $m = ۳ \Rightarrow ۳x^۲ + (۳ - ۱)(۳ + ۱)x = ۰$

$$\Rightarrow ۳x^۲ + ۸x = ۰ \Rightarrow x(۳x + ۸) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = -\frac{۸}{۳} \end{cases}$$

ثانیا: برای آن که هر دو ریشه معادله صفر باشد، باید $b = ۰$ و $c = ۰$ پس: $\boxed{m = -۱}$

اگر $m = -۱ \Rightarrow -x^۲ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۰ \Rightarrow x.x = ۰$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۰ \end{cases}$$

ثالثا: برای آن که معادله دو ریشه قرینه داشته باشد، باید $b = ۰$ و a و c مختلف‌العلامه باشد، پس: $\boxed{m = ۱}$

اگر $m = ۱ \Rightarrow \begin{cases} a = +۱ \\ c = -۴ \end{cases}$

$\Rightarrow x^۲ - ۴ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۴ \Rightarrow \boxed{x = \pm ۲}$

۲ـ حل معادله درجهٔ دومِ کامل: $ax^۲ + bx + c = ۰$

طرفین معادله را بر a تقسیم می‌کنیم $(a \neq ۰)$.

$$\Rightarrow x^۲ + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = ۰ \Rightarrow x^۲ + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

به طرفین تساوی عبارت $\frac{b^۲}{۴a^۲}$ را اضافه می‌کنیم.

$$\Rightarrow x^۲ + \frac{b}{a}x + \frac{b^۲}{۴a^۲} = \frac{b^۲}{۴a^۲} - \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow (x + \frac{b}{۲a})^۲ = \frac{b^۲ - ۴ac}{۴a^۲}$$

از طرفین تساوی ریشهٔ دوم می‌گیریم.

$$\Rightarrow x + \frac{b}{۲a} = \pm\frac{\sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a} \Rightarrow x = -\frac{b}{۲a} \pm \frac{\sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a}} \Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{-b + \sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a} \\ x'' = \dfrac{-b - \sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a} \end{cases}$$

عبارت $(b^۲ - ۴ac)$ مبیّن معادله یا دلتای معادله گوییم و آن را با نماد (Δ) نشان می‌دهیم.

الف) اگر $\Delta > ۰$ یا $b^۲ - ۴ac > ۰$، آنگاه x' و x'' وجود دارد، در این‌صورت می‌گوییم معادله دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد.

ب) اگر $\Delta = ۰$ یا $b^۲ - ۴ac = ۰$، آنگاه x' و x'' مساویند، در این‌صورت می‌گوییم معادله دو ریشه حقیقی مساوی دارد.

$$\boxed{x' = x'' = \frac{-b}{۲a}}$$

ج) اگر $\Delta < ۰$ یا $b^۲ - ۴ac < ۰$، آنگاه معادله دو ریشهٔ غیر حقیقی دارد که از بحث ما خارج است.

مثال: معادلات زیر را حل کنید:

۱) $$۲x^۲ - ۵x + ۲ = ۰ \quad \begin{cases} a = ۲ \\ b = -۵ \\ c = ۲ \end{cases}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a} = \frac{۵ \pm \sqrt{۲۵ - ۴(۲)(۲)}}{۴}$$

$$= \frac{۵ \pm \sqrt{۲۵ - ۱۶}}{۴} = \frac{۵ \pm ۳}{۴}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'' = \dfrac{۵ + ۳}{۴} = ۲ \\ x' = \dfrac{۵ - ۳}{۴} = \dfrac{۱}{۲} \end{cases}$$

۲) $$x^۲ - (۳ - \sqrt{۳})x + ۲ - \sqrt{۳} = ۰ \begin{cases} a = ۱ \\ b = -(۳ - \sqrt{۳}) \\ c = ۲ - \sqrt{۳} \end{cases}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a}$$

$$= \frac{۳ - \sqrt{۳} \pm \sqrt{(۳ - \sqrt{۳})^۲ - ۴(۱)(۲ - \sqrt{۳})}}{۲}$$

$$x = \frac{۳ - \sqrt{۳} \pm \sqrt{۹ + ۳ - ۶\sqrt{۳} - ۸ + ۴\sqrt{۳}}}{۲}$$

$$= \frac{۳ - \sqrt{۳} \pm \sqrt{۴ - ۲\sqrt{۳}}}{۲}$$

$$x = \frac{۳ - \sqrt{۳} \pm \sqrt{۳ + ۱ - ۲\sqrt{۳}}}{۲}$$

$$= \frac{۳ - \sqrt{۳} \pm \sqrt{(\sqrt{۳} - ۱)^۲}}{۲}$$

$$= \frac{۳ - \sqrt{۳} \pm (\sqrt{۳} - ۱)}{۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{۳ - \sqrt{۳} + \sqrt{۳} - ۱}{۲} \\ x'' = \dfrac{۳ - \sqrt{۳} - \sqrt{۳} + ۱}{۲} \end{cases}$$

$$= \frac{۲}{۲} = ۱ \Rightarrow \boxed{x' = ۱}$$

$$\frac{۴ - ۲\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۲(۲ - \sqrt{۳})}{۲} = ۲ - \sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow \boxed{x'' = ۲ - \sqrt{۳}}$$

$$۳)\ x^2-2(m-1)x+(1-2m)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2(m-1) \\ c=1-2m \end{cases}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{2(m-1)\pm\sqrt{4(m-1)^2-4(1-2m)}}{2}$$

$$x=\frac{2(m-1)\pm\sqrt{4(m^2-2m+1)-4+8m}}{2}$$

$$=\frac{2(m-1)\pm\sqrt{4m^2-8m+4-4+8m}}{2}$$

$$x=\frac{2(m-1)\pm\sqrt{4m^2}}{2}=\frac{2(m-1)\pm 2m}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'=\dfrac{2(m-1)+2m}{2}=\dfrac{2(2m-1)}{2} \\ x''=\dfrac{2(m-1)-2m}{2}=\dfrac{-2}{2} \end{cases}$$

$$=2m-1 \Rightarrow \boxed{x'=2m-1}$$

$$=-1 \Rightarrow \boxed{x''=-1}$$

$$۴)\ m^2x^2-2m^2x+(m^2-n^2)=0 \quad \begin{cases} a=m^2 \\ b=-2m^2 \\ c=m^2-n^2 \end{cases}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{2m^2\pm\sqrt{4m^4-4m^2(m^2-n^2)}}{2m^2}$$

$$=\frac{2m^2\pm\sqrt{4m^4-4m^4+4m^2n^2}}{2m^2}$$

$$x=\frac{2m^2\pm 2mn}{2m^2} \Rightarrow \begin{cases} x'=\dfrac{2m^2+2mn}{2m^2} \\ x''=\dfrac{2m^2-2mn}{2m^2} \end{cases}$$

$$=\frac{2m(m+n)}{2m^2}=\frac{m+n}{m} \Rightarrow \boxed{x'=\frac{m+n}{m}}$$

$$=\frac{2m(m-n)}{2m^2}=\frac{m-n}{m} \Rightarrow \boxed{x''=\frac{m-n}{m}}$$

تذکر: اگر در معادله درجه دوّم $ax^2+bx+c=0$، b عدد زوج باشد، یا عبارتی شامل مضرب (۲) باشد، نصف آن را (b') می‌نامیم. در این صورت $b=2b'$.

$$\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b'\pm\sqrt{4b'^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-2b'\pm\sqrt{4\left(b'^2-ac\right)}}{2a} \Rightarrow x=\frac{-2b'\pm 2\sqrt{b'^2-ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow \boxed{x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}} \quad \text{فرمول } b'$$

نتیجه: اگر b زوج باشد و نصف آن را b' بنامیم، بهتر است معادله را از فرمول (b') حل کنیم.

عبارت b'^2-ac را مبین معادله گوییم و آن‌را با نماد(Δ') نشان می‌دهیم.

مثال: معادلهٔ $x^2-2\sqrt{3}x-(2\sqrt{3}+1)=0$ را حل کنید.

$$a=1 \quad b'=-\sqrt{3} \quad c=-(2\sqrt{3}+1)$$

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{3+(2\sqrt{3}+1)}}{1}$$

$$=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{3+1+2\sqrt{3}}}{1}$$

$$x=\sqrt{3}\pm\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}=\sqrt{3}\pm(\sqrt{3}+1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'=\sqrt{3}+\sqrt{3}+1=2\sqrt{3}+1 \\ x''=\sqrt{3}-\sqrt{3}-1=-1 \end{cases}$$

مسأله: به‌ازای چه‌مقادیر m معادله $mx^2+2(m-1)x+(m+1)=0$ دو ریشه حقیقی متمایز یا دو ریشه حقیقی مساوی دارد؟

حل: باید مبیّن معادله مثبت یا صفر باشد، یعنی:

$b'-ac\geq 0$ یا $b^2-4ac\geq 0$

$a=m$ ، $b'=m-1$ ، $c=m+1$

$$\Delta'\geq 0\Rightarrow b'^2-ac\geq 0\Rightarrow (m-1)^2-m(m+1)\geq 0$$

$$\Rightarrow m^2-2m+1-m^2-m\geq 0\Rightarrow -3m+1\geq 0$$

$$\Rightarrow -3m\geq -1\Rightarrow \boxed{m\leq\frac{1}{3}\ ,m\neq 0}$$

زیرا، اگر $m=0$ ، آنگاه معادله به معادله درجه اوّل تبدیل می‌شود.

۳ـ روابط بین‌ضرایب و ریشه‌ها در معادلهٔ درجه دوّم $ax^2+bx+c=0$

c و b و a را ضرایب معادله درجه دوم گوییم و x' و x'' ریشه‌های حقیقی معادله‌اند. روابط بین x'' و x' و c و b و a را روابط بین ریشه‌ها و ضرایب گوییم.

داریم: $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ یا $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

$$\Rightarrow x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ ,\ x''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

الف) $x'+x''=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

ب) $x'.x''=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\times\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$=\frac{(-b)^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow \boxed{x'+x''=-\frac{b}{a}}\ ,\ \boxed{x'.x''=\frac{c}{a}}$$

توجه: مجموع دو ریشه، یعنی؛ $(x'+x'')$ را با S و حاصل ضرب دو ریشه، یعنی؛ $x'.x''$ را با P هم نشان می‌دهیم.

$$\Rightarrow \boxed{x'+x''=-\frac{b}{a}=S}\ ,\ \boxed{x'.x''=\frac{c}{a}=P}$$

قدر مطلق: $|x|=\begin{cases} +x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$

مثال: $\begin{cases} |+5|=5 \\ |-5|=-(-5)=5 \end{cases}\Rightarrow |-5|=|5|$

$$|\sqrt{2}-1|=\sqrt{2}-1$$
$$|1-\sqrt{2}|=|\sqrt{2}-1|=\sqrt{2}-1$$

قدر مطلق هر عدد برابر است با مقدار مثبت آن عدد.

مثال:

$a=2,b=5\Rightarrow |a-b|=|2-5|=|-3|=3$

$x'=4,x''=6\Rightarrow |x'-x''|=|4-6|$

$=|-2|=2$

$x'=-2,x''=-5\Rightarrow |x'-x''|=|-2+5|$

$=|3|=3$

$x'=-1,x''=5\Rightarrow |x'-x''|=|-1-5|$

$=|-6|=6$

در سال سوم قدر مطلق را به‌طور کامل خواهید داشت.

۱) $x'+x''=-\dfrac{b}{a}=S$

۲) $x'.x''=\dfrac{c}{a}=P$

۳) $|x'-x''| = \left|\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} - \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right|$

$= \left|\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}+b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right| = \left|\dfrac{\sqrt{\Delta}}{a}\right| = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

۴) $x'^2+x''^2 = (x'+x'')^2 - 2x'x''$

$= (S)^2 - 2P = S^2-2P$

۵) $x'^{-2}+x''^{-2} = \dfrac{1}{x'^2}+\dfrac{1}{x''^2} = \dfrac{x''^2+x'^2}{x'^2.x''^2}$

$= \dfrac{x'^2+x''^2}{(x'x'')^2} = \dfrac{S^2-2P}{P^2}$

۶) $|x'^2-x''^2| = |(x'-x'')(x'+x'')|$

$= \left|\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}\times S\right|$

۷) $x'^3+x''^3 = (x'+x'')(x'^2+x''^2-x'x'')$

$= S(S^2-2P-P) = S^3-3PS$

۸) $x'^{-3}+x''^{-3} = \dfrac{1}{x'^3}+\dfrac{1}{x''^3} = \dfrac{x''^3+x'^3}{x'^3.x''^3} = \dfrac{S^3-3PS}{P^3}$

۹) $|x'^3-x''^3| = |(x'-x'')(x'^2+x''^2+x'x'')|$

$= \left|\left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}\right)(S^2-2P+P)\right|$

$= \left|\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}(S^2-P)\right|$

۱۰) $x'^4+x''^4 = (x'^2+x''^2)^2 - 2x'^2x''^2$

$= (S^2-2P)^2-2P^2$

۱۱) $x'^{-4}+x''^{-4} = \dfrac{1}{x'^4}+\dfrac{1}{x''^4} = \dfrac{x''^4+x'^4}{x'^4x''^4}$

$= \dfrac{(S^2-2P)^2-2P^2}{P^4}$

۱۲) $|x'^4-x''^4| = |(x'^2-x''^2)(x'^2+x''^2)|$

$= \left|\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}.S(S^2-2P)\right|$

۱۳) $\begin{cases} x'>0 \\ x''>0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x'}+\sqrt{x''}$

$= \sqrt{S+2\sqrt{P}} = \sqrt{x'+x''+2\sqrt{x'x''}}$

۱۴) $\begin{cases} x'>0 \\ x''>0 \end{cases} \Rightarrow |\sqrt{x'}-\sqrt{x''}|$

$= \sqrt{x'+x''-2\sqrt{x'x''}} = \sqrt{S-2\sqrt{P}}$

۱۵) $\begin{cases} x'>0 \\ x''>0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{x'}}{\sqrt{x''}}+\dfrac{\sqrt{x''}}{\sqrt{x'}} = \dfrac{x'+x''}{\sqrt{x'x''}} = \dfrac{S}{\sqrt{P}}$

مسأله: در معادله درجه دوم $x^2 - 3x + 1 = 0$ اگر x' و x'' ریشه‌های حقیقی معادله باشند، موارد پانزده رابطه‌های فوق را محاسبه کنید.

$a = 1 \quad b = -3 \quad c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 = 5$

$S = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{-3}{1} = 3$

$P = \dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{1} = 1$

۱) $x'+x'' = S = 3$ ۲) $x'.x'' = P = 1$

۳) $|x'-x''| = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \dfrac{\sqrt{5}}{|1|} = \sqrt{5}$

۴) $x'^{۲}+x''^{۲}=S^{۲}-۲P=(۳)^{۲}-۲=۹-۲=۷$

۵) $x'^{-۲}+x''^{-۲}=\frac{S^{۲}-۲P}{P^{۲}}=\frac{۷}{۱}=۷$

۶) $\left|x'^{۲}-x''^{۲}\right|=\left|\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}.S\right|=\left|\frac{\sqrt{۵}}{|۱|}\times ۳\right|$

$=۳\sqrt{۵}$

۷) $x'^{۳}+x''^{۳}=S^{۳}-۳PS=(۳)^{۳}-۳(۱)(۳)$

$=۲۷-۹=۱۸$

۸) $x'^{-۳}+x''^{-۳}=\frac{S^{۳}-۳PS}{P^{۳}}=\frac{۱۸}{۱}=۱۸$

۹) $\left|x'^{۳}-x''^{۳}\right|=\left|\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}.(S^{۲}-P)\right|$

$=\left|\frac{\sqrt{۵}}{|۱|}(۹-۱)\right|=۸\sqrt{۵}$

۱۰) $x'^{۴}+x''^{۴}=(S^{۲}-۲P)^{۲}-۲P^{۲}=(۹-۲)^{۲}-۲$

$=۴۹-۲=۴۷$

۱۱) $x'^{-۴}+x''^{-۴}=\frac{(S^{۲}-۲P)^{۲}-۲P^{۲}}{P^{۴}}=\frac{(۹-۲)^{۲}-۲}{(۱)^{۴}}$

$=\frac{۴۹-۲}{۱}=۴۷$

۱۲) $\left|x'^{۴}-x''^{۴}\right|=\left|\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}.S(S^{۲}-۲P)\right|$

$=\left|\frac{\sqrt{۵}}{|۱|}\times ۳(۹-۲)\right|=۲۱\sqrt{۵}$

۱۳) $\sqrt{x'}+\sqrt{x''}=\sqrt{S+۲\sqrt{P}}$

$=\sqrt{۳+۲\sqrt{۱}}=\sqrt{۵}$

۱۴) $\left|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}\right|=\sqrt{S-۲\sqrt{P}}$

$=\sqrt{۳-۲\sqrt{۱}}=۱$

۱۵) $\frac{\sqrt{x'}}{\sqrt{x''}}+\frac{\sqrt{x''}}{\sqrt{x'}}=\frac{S}{\sqrt{P}}=\frac{۳}{\sqrt{۱}}=۳$

مسأله: در معادلهٔ $x^{۲}-۵x+(m+۱)=۰$، m را چنان بیابید که داشته باشیم: $x'^{-۲}+x''^{-۲}=\frac{۱۷}{۱۶}$

حل:

$$\begin{cases} S=۵ \\ P=m+۱ \end{cases}$$

$$x'^{-۲}+x''^{-۲}=\frac{S^{۲}-۲P}{P^{۲}}=\frac{(۵)^{۲}-۲(m+۱)}{(m+۱)^{۲}}=\frac{۱۷}{۱۶}$$

$$\frac{۲۵-۲m-۲}{m^{۲}+۲m+۱}=\frac{۱۷}{۱۶}\Rightarrow ۱۷m^{۲}+۳۴m+۱۷$$

$$=۳۶۸-۳۲m \Rightarrow ۱۷m^{۲}+۶۶m-۳۵۱=۰$$

$$\Delta'=b'^{۲}-ac=(۳۳)^{۲}+۱۷(۳۵۱)$$

$$=۱۰۸۹+۵۹۶۷=(۷۰۵۶)=(۸۴)^{۲}$$

$$m=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^{۲}-ac}}{a}=\frac{-۳۳\pm ۸۴}{۱۷}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m'=۳ \\ m''=\frac{-۱۱۷}{۱۷} \end{cases}$$

۴ ـ چند نکته دربارهٔ ریشه‌های معادلهٔ درجه دوّم $ax^{۲}+bx+c=۰$

الف) اگر در معادلهٔ درجه دوم $ax^{۲}+bx+c=۰$، مجموع ضرایب صفر باشد، یعنی؛ $a+b+c=۰$ آنگاه‌یک ریشه عدد۱ و ریشه دیگر برابر $(\frac{c}{a})$ است.

اثبات: $a+b+c=۰ \Rightarrow c=-(a+b)$

$\Rightarrow ax^{۲}+bx-(a+b)=۰$

$\Delta=b^{۲}+۴a(a+b)=b^{۲}+۴a^{۲}+۴ab=(۲a+b)^{۲}$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-b\pm(۲a+b)}{۲a}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x'=\dfrac{-b+۲a+b}{۲a}=۱\\[2mm] x''=\dfrac{-b-۲a-b}{۲a}=\dfrac{-۲(a+b)}{۲a}=\dfrac{c}{a}\end{cases}$$

مثال: معادلهٔ $۲x^۲-(۲-\sqrt{۳})\,x-\sqrt{۳}=۰$ را حل کنید.

حل: در این معادله مجموع ضرایب صفر است، زیرا

$$۲-۲+\sqrt{۳}-\sqrt{۳}=۰$$

$$\Rightarrow \boxed{x'=۱}\ ,\ x''=\frac{c}{a}=\frac{-\sqrt{۳}}{۲}\quad\Rightarrow\boxed{x''=\frac{-\sqrt{۳}}{۲}}$$

ب) اگر در معادله درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$، $a+c=b$، آنگاه یک ریشه ۱− و ریشهٔ دیگر $(-\frac{c}{a})$ است.

اثبات: $c=b-a\Rightarrow ax^۲+bx+b-a=۰$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^۲-۴a(b-a)}}{۲a}$$

$$=\frac{-b\pm\sqrt{b^۲-۴ab+۴a^۲}}{۲a}=\frac{-b\pm\sqrt{(۲a-b)^۲}}{۲a}$$

$$x=\frac{-b\pm(۲a-b)}{۲a}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x'=\dfrac{-b-۲a+b}{۲a}=\dfrac{-۲a}{۲a}=-۱\\[2mm] x''=\dfrac{-b+۲a-b}{۲a}=\dfrac{-۲(b-a)}{۲a}\end{cases}$$

$$=\frac{-۲(c)}{۲a}=-\frac{c}{a}$$

مثال: معادلهٔ $(\sqrt{۲}-۱)\,x^۲+۲\sqrt{۲}x+(\sqrt{۲}+۱)=۰$ را حل کنید.

حل: در این معادله $a+c=b$ زیرا

$$\sqrt{۲}-۱+\sqrt{۲}+۱=۲\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow ۲\sqrt{۲}=۲\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x'=-۱\\[2mm] x''=-\dfrac{c}{a}=-\dfrac{\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۲}-۱}\end{cases}$$

ج) اگر در معادله درجه دوّم $ax^۲+bx+c=۰$، یک ریشه (k) برابر ریشه دیگر باشد داریم: $\frac{b^۲}{ac}=\frac{(k+۱)^۲}{k}$

اثبات:

$$\begin{cases}x''=kx'\\ x'+x''=-\dfrac{b}{a}\end{cases}\Rightarrow kx'+x'=-\frac{b}{a}\Rightarrow(k+۱)\ x'=-\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow x'=\frac{-b}{a(k+۱)}\quad ,\quad x''=\frac{-bk}{a(k+۱)}$$

$$x'.x''=\frac{c}{a}\Rightarrow\frac{-b}{a(k+۱)}\times\frac{-bk}{a(k+۱)}=\frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow\frac{b^۲k}{a^۲(k+۱)^۲}=\frac{c}{a}$$

$$ab^۲k=a^۲c(k+۱)^۲\Rightarrow b^۲k=ac(k+۱)^۲$$

$$\Rightarrow\boxed{\frac{b^۲}{ac}=\frac{(k+۱)^۲}{k}}$$

مثال: در معادله $x^۲-(m+۱)\,x+۲(m-۲)=۰$ اگر $x''=۴x'$ باشد، m را بیابید.

حل: $\frac{b^۲}{ac}=\frac{(k+۱)^۲}{k}\Rightarrow\frac{(m+۱)^۲}{۲(m-۲)}=\frac{(۴+۱)^۲}{۴}$

$$\Rightarrow ۲(m+۱)^۲=۲۵(m-۲)$$

$$\Rightarrow ۲m^۲ - ۲۱m + ۵۲ = ۰ \Rightarrow m = \frac{۲۱ \pm \sqrt{۲۵}}{۴}$$

$$\Rightarrow \boxed{m = \frac{۱۳}{۲}\ ,\ ۴}$$

د) اگر در معادله درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$، $\frac{c}{a} < ۰$، آنگاه (Δ) خود به خود مثبت و معادله دو ریشه مختلف‌العلامه دارد.

اثبات:

$\frac{c}{a} < ۰ \Rightarrow$ مختلف العلامه‌اند $c , a \Rightarrow ac < ۰ \Rightarrow -۴ac > ۰$

$\Delta = b^۲ - ۴ac$

$= b^۲ - ۴ac > ۰ \Rightarrow$ معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد.

$x'.x'' = \frac{c}{a} < ۰ \Rightarrow x' < ۰ < x''$

مسأله: حدود m را چنان بیابید تا معادله

$$\left(۲\sqrt{۲} + ۱\right) x^۲ - ۴mx + \left(۲m - ۶\right) = ۰$$

دو ریشه مختلف‌العلامه داشته باشد.

حل:

$$\frac{c}{a} < ۰ \Rightarrow \frac{۲m - ۶}{۲\sqrt{۲} + ۱} < ۰ \Rightarrow ۲m - ۶ < ۰$$

$$\Rightarrow ۲m < ۶ \Rightarrow m < ۳$$

۵ ـ بحث در تعداد و علامت ریشه‌های معادله درجه دوم

$ax^۲ + bx + c = ۰$

۱) Δ یا $\Delta' > ۰ \Rightarrow x' < x''$ معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{c}{a} > ۰ \Rightarrow & \text{۱) هر دو ریشه متحدالعلامه‌اند} \\ \frac{c}{a} < ۰ \Rightarrow & \text{۲) دو ریشه مختلف العلامه‌اند } x' < ۰ < x'' \\ \frac{c}{a} = ۰ \Rightarrow & \text{۳) یک ریشه صفر و ریشه‌دیگر } \left(-\frac{b}{a}\right) \text{ است.} \end{cases}$$

$$۱ \Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a} > ۰ \Rightarrow ۰ < x' < x'' & \text{هر دو ریشه مثبت} \\ -\frac{b}{a} < ۰ \Rightarrow x' < x'' < ۰ & \text{هر دو ریشه منفی} \end{cases}$$

$$۲ \Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a} > ۰ \Rightarrow \begin{cases} x' < ۰ < x'' \\ |x''| > |x'| \end{cases} \\ -\frac{b}{a} < ۰ \Rightarrow \begin{cases} x' < ۰ < x'' \\ |x'| > |x''| \end{cases} \\ -\frac{b}{a} = ۰ \Rightarrow x'' = -x' \end{cases}$$

$$۳ \Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a} > ۰ \Rightarrow x' = ۰ < x'' \\ -\frac{b}{a} < ۰ \Rightarrow x' < ۰ = x'' \end{cases}$$

۲) Δ یا $\Delta' = ۰ \Rightarrow x' = x'' = -\frac{b}{۲a}$

معادله دو ریشهٔ حقیقی مساوی دارد.

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a} > ۰ \Rightarrow -\frac{b}{۲a} > ۰ \Rightarrow ۰ < x' = x'' \\ -\frac{b}{a} < ۰ \Rightarrow -\frac{b}{۲a} < ۰ \Rightarrow x' = x'' < ۰ \\ -\frac{b}{a} = ۰ \Rightarrow -\frac{b}{۲a} = ۰ \Rightarrow x' = x'' = ۰ \end{cases}$$

مسأله: به ازای مقادیر مختلف m در تعداد ریشه‌ها و علامت ریشه‌های معادله زیر بحث کنید.

$$mx^۲ - ۲(m + ۱)x + (m - ۱) = ۰$$

$$\Delta' = b'^۲ - ac = (m + ۱)^۲ - m(m - ۱)$$

$$= m^۲ + ۲m + ۱ - m^۲ + m = ۳m + ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow \boxed{m = -\frac{۱}{۳}}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{m - ۱}{m} \begin{matrix} = ۰ \\ = ۰ \end{matrix} \Rightarrow \boxed{m = ۱ , ۰}$$

$$-\frac{b}{a} = \frac{۲(m + ۱)}{m} \begin{matrix} = ۰ \\ = ۰ \end{matrix} \Rightarrow \boxed{m = -۱ , ۰}$$

m	مقادیر کوچکتر از ۱−	۱−		$-\frac{۱}{۳}$		۰		۱	مقادیر بزرگتر از ۱
Δ	−		−	۰	+		+		+
$\frac{c}{a}$	+		+		+	تعریف‌نشده	−	۰	+
$-\frac{b}{a}$	+	۰	−		−	تعریف‌نشده	+		+
	معادله ریشه‌های حقیقی ندارد.				$x'<x''<۰$		$x'<۰<x''$ $\lvert x''\rvert>\lvert x'\rvert$		$۰<x'<x''$
				۱		۲		۳	

روی خط (۱):

$$\Delta=۰\Rightarrow x'=x''=-\frac{b}{۲a}=\frac{۲(m+۱)}{۲m}=\frac{-\frac{۱}{۳}+۱}{-\frac{۱}{۳}}=-۲$$

روی خط (۲):

$$m=۰\Rightarrow \text{معادلهٔ}: -۲x-۱=۰\Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}$$

روی خط (۳):

$$\frac{c}{a}=۰\Rightarrow c=۰\Rightarrow \begin{cases} x'=۰ \\ x''=-\frac{b}{a}>۰ \end{cases} \Rightarrow x'=۰<x''$$

تمرین: به ازای مقادیر مختلف m، در تعداد و علامت ریشه‌های معادلات زیر بحث کنید:

۱) $(m-۱)x^{۲}+۲mx+(m-۲)=۰$

۱) $(m-۱)x^{۲}-۲mx+(m-۴)=۰$

۱) $(m-۱)x^{۲}-۲mx+(m-۶)=۰$

۶ ـ تجزیه و تعیین علامت سه جمله‌ای درجه دوّم $f(x)+ax^{۲}+bx+c$

الف ـ تجزیه:

ریشه‌های معادله $ax^{۲}+bx+c=۰$ را صفرکننده‌های $f(x)$ می‌نامیم. و Δ یا مبیّن معادله $ax^{۲}+bx+c=۰$ را Δ یا مبیّن $f(x)$ می‌نامیم.

حالت اوّل: فرض می‌کنیم: $\Delta>۰$ پس معادله $ax^{۲}+bx+c=۰$ دو ریشه حقیقی متمایز x' و x'' است.

$$\Rightarrow f(x)=ax^{۲}+bx+c=a\left[x^{۲}+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]$$

$$=a\left[x^{۲}-(x'+x'')x+x'x''\right]$$

$\Rightarrow \boxed{f(x)=a(x-x')(x-x'')}$ این تجزیه را حاصل‌ضرب دو عامل درجه اوّل گوییم:

حالت دوّم: فرض می‌کنیم: $\Delta=۰$ پس معادلهٔ $ax^{۲}+bx+c=۰$، دو ریشهٔ حقیقی مساوی دارد.

$$x'=x''=-\frac{b}{۲a}$$

این تجزیه را مربع کامل گوییم.

$$\Rightarrow \boxed{f(x)=a(x-x')^{۲}=a(x-x'')^{۲}=a\left(x+\frac{b}{۲a}\right)^{۲}}$$

حالت سوّم: فرض می‌کنیم: $\Delta<۰$ پس معادله $ax^{۲}+bx+c=۰$، ریشه‌های حقیقی ندارد.

$$\Rightarrow f(x)=a\left[x^{۲}+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]$$

$$=a\left[x^{۲}+\frac{b}{a}x+\frac{b^{۲}}{۴a^{۲}}-\frac{b^{۲}}{۴a^{۲}}+\frac{c}{a}\right]$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{۲a}\right)^{۲}+\frac{c}{a}-\frac{b^{۲}}{۴a^{۲}}\right]$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{۲a}\right)^{۲}+\frac{۴ac-b^{۲}}{۴a^{۲}}\right]$$

این عبارت را مجموع مربعات دو عبارت گوییم.

$$\Rightarrow \boxed{f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{۲a}\right)^{۲}+\left(\frac{\sqrt{۴ac-b^{۲}}}{۲a}\right)^{۲}\right]}$$

ب ـ تعیین علامت

حالت اوّل: داریم: $\Delta>۰$ و $f(x)=a(x-x')(x-x'')$ فرض می‌کنیم:

$x'<x''$

$a(x-x')(x-x'')=(ax-ax')(x-x'')=۰$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{۱}=x' \\ x_{۲}=x'' \end{cases}$$

x	مقادیر کوچکتر از x'	x'		x''	مقادیر بزرگتر از x''
$ax - ax'$	مخالف علامت a	٠	موافق علامت a		موافق علامت a
$x - x''$	−		−	٠	+
f(x)	مخالف علامت a	٠	موافق علامت a	٠	موافق علامت a

حالت دوّم: $\Delta = 0$ و $f(x) = a(x - x')^2$.

عبارت $(x - x')^2$ به‌ازای $x = x'$ صفر و دربقیّه‌مواردمثبت است.

پس می‌توان گفت:

عبارتِ $f(x) = a(x - x')^2$ به‌ازای $x = x'$ صفر و در بقیّهٔ موارد موافق علامت a است.

x	مقادیر کوچکتر x'	x'	مقادیر بزرگتر از x'
f(x)	موافق علامت a	٠	موافق علامت a

حالت سوّم: $\Delta < 0$ و

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\right)^2\right]$$

عبارت داخل کروشه همواره مثبت است، پس علامت f(x) همواره موافق علامت (a) است.

سؤال: یک سه جمله‌ای درجه دوّم $f(x) = ax^2 + bx + c$ چه‌وقت همواره مثبت است.

جواب: وقتی که: $\Delta' < 0$ یا Δ و $a > 0$.

سؤال: یک سه جمله‌ای درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ چه‌وقت همواره منفی است.

جواب: وقتی که $\Delta' < 0$ یا Δ و $a < 0$.

مسأله: به ازای چه مقادیر m، سه جمله‌ای $f(x) = (m - 1)x^2 - 2mx + (m - 2)$ همواره منفی‌است.

حل:

$$\begin{cases} \Delta' < 0 \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow b'^2 - ac < 0 \Rightarrow m^2 - (m-1)(m-2) < 0$$

$$\Rightarrow 3m - 2 < 0 \Rightarrow m < \frac{2}{3} \quad m - 1 < 0 \Rightarrow m < 1$$

$$\begin{cases} m < \frac{2}{3} \\ m < 1 \end{cases} \Rightarrow \text{اشتراک جوابها} \Rightarrow \boxed{m < \frac{2}{3}}$$

مسأله: به ازای چه مقادیر m، سه جمله‌ای $f(x) = (m - 2)x^2 - 2mx + (m - 4)$ به صورت مجموع مربعات دو عبارت خواهدشد.

حل: باید $\Delta' < 0$ یا Δ.

$$\Delta' = b'^2 - ac < 0$$

$$\Rightarrow m^2 - (m-2)(m-4) < 0$$

$$\Rightarrow 6m - 8 < 0 \Rightarrow m < \frac{4}{3}$$

۷ـ تشکیل معادله:

الف) اگر مجموع دو عدد یعنی S و حاصل‌ضرب دو عدد یعنی P معلوم باشد و بخواهیم آن دو عدد را پیدا کنیم معادلهٔ درجه دومی تشکیل دهیم که ریشه‌هایش، آن دو عدد باشد:

طرفین معادله را بر a تقسیم می‌کنیم $\quad ax^2 + bx + c = 0$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad \begin{cases} S = -\frac{b}{a} \\ P = \frac{c}{a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2 - Sx + P = 0}$$

در معادله $x^2 - Sx + P = 0$، مقادیر P و S را قرار دهیم سپس معادله حاصل را حل می‌کنیم.

مسأله: مجموعه دو عدد حقیقی (-1) و حاصل‌ضرب آنها $(\sqrt{3} - 3)$ است. آن دو عدد را بیابید.

$$S = -1 \qquad P = \sqrt{3} - 3$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 + x + (\sqrt{3} - 3) = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\sqrt{3} + 12}}{2}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{(2\sqrt{3} - 1)^2}}{2} = \frac{-1 \pm (2\sqrt{3} - 1)}{2}$$

$$\begin{cases} x' = \dfrac{-1+2\sqrt{3}-1}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}-2}{2} = \boxed{\sqrt{3}-1} \\ x'' = \dfrac{-1-2\sqrt{3}+1}{2} = \dfrac{-2\sqrt{3}}{2} = \boxed{-\sqrt{3}} \end{cases}$$

ب) تشکیل معادله درجه دوم وقتی یک ریشه آن معلوم است.

آن ریشه را مساوی x قرار می‌دهیم، سپس طرفین را به‌توان (۲) می‌رسانیم.

مسأله: معادلهٔ درجه دوّمی با ضرایب گویا تشکیل دهید که یک ریشهٔ آن $(2-\sqrt{3})$ باشد.

راه‌اوّل:

طرفین‌رابه‌توان (۲)می‌رسانیم: $x = 2-\sqrt{3} \Rightarrow x-2 = -\sqrt{3}$

$$x^2-4x+4=3 \Rightarrow x^2-4x+1=0$$

راه دوّم: اگر بخواهیم معادلهٔ درجه دوّمی با ضرایب گویا تشکیل دهیم که یک ریشهٔ آن $(2-\sqrt{3})$ باشد، باید ریشهٔ دیگر $(2+\sqrt{3})$ باشد تا مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها، اعدادی گویا باشند.

بنابراین: $P=1 \ , \ S=4$

در نتیجه: $x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2-4x+1=0$

ج) تشکیل معادله درجه دوم جدید از روی معادله مفروض تحت شرایط مسأله

مسأله: معادلهٔ درجه‌دوم $x^2-5x-2=0$ مفروض‌است، اگر x' و x'' ریشه‌های حقیقی این معادله باشد؛ معادلهٔ درجه دوم جدیدی تشکیل دهید که ریشه‌های آن از نصف ریشه‌های این معادله (۲) واحد کمتر باشد.

$x =$ ریشه معادله مفروض

$y =$ ریشه معادله جدید

$$\Rightarrow y = \frac{x}{2} - 2 \Rightarrow x = 2y-4$$

در معادله مفروض به‌جای x، $(2y-4)$ را قرار می‌دهیم.

$$(2y-4)^2 - 5(2y-4) - 2 = 0 \Rightarrow 4y^2-26y+34=0$$

مسأله: معادلهٔ $x^2-4x-1=0$ مفروض است. اگر x' و x'' ریشه‌های حقیقی این معادله باشد، معادلهٔ درجه دوم جدیدی بسازید که ریشه‌هایش مکعب ریشه‌های این معادله باشد.

در معادله مفروض قرار می‌دهیم:

$x =$ ریشه معادله مفروض

$y =$ ریشه معادله جدید

$$\Rightarrow y = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y}$$

طرفین را به‌توان (۳) می‌رسانیم:

$$\sqrt[3]{y^2} - 4\sqrt[3]{y} - 1 = 0 \Rightarrow \underbrace{\sqrt[3]{y^2}}_{a} - \underbrace{4\sqrt[3]{y}}_{b} = 1$$

$$a - b = 1$$

$$a^3-b^3-3ab(a-b)=1$$

$$y^2-64y-3\sqrt[3]{y^2}(+4\sqrt[3]{y})(\overbrace{\sqrt[3]{y^2}-4\sqrt[3]{y}}^{1})=1$$

$$y^2-64y-12y(1)=1 \Rightarrow y^2-76y-1=0$$

مسأله: معادله $x^2-3x-1=0$ مفروض‌است. اگر x' و x'' ریشه‌های حقیقی معادله باشد، معادله درجه دوم جدیدی بسازید که ریشه‌هایش $2x'+3x''-4$ و $2x''+3x'-4$ باشد.

حل: یکی از روابط را مساوی y قرار می‌دهیم.

$$y=2x'+3x''-4 \Rightarrow y=2x'+2x''+x''-4$$

$$\Rightarrow y=2(x'+x'')+x''-4$$

$$y=2\left(-\frac{b}{a}\right)+x''-4 \Rightarrow y=2(3)+x''-4$$

$$= y=x''+2 \Rightarrow x''=y-2$$

در معادله مفروض قرار می‌دهیم.

$$(y-2)^2-3(y-2)-1=0 \Rightarrow y^2-y-3=0$$

۸ـ رابطه S ها در معادله درجه دوم:

معادله درجه دوّم $ax^2+bx+c=0$ را درنظر می‌گیریم و قرارداد می‌کنیم که

$$S_1=x'^1+x''^1, S_2=x'^2+x''^2, S_3=x'^3+x''^3, \dots,$$

$$S_n=x'^n+x''^n$$

طرفین معادله را در x^{n-2} ضرب می‌کنیم. $n \in N$

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}=0$$

در این معادله یکبار به‌جای x، x' و یکبار بـجای x، x'' را قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} ax'^{n} + bx'^{n-1} + cx'^{n-2} = 0 \\ ax''^{n} + bx''^{n-1} + cx''^{n-2} = 0 \end{cases}$$ جمع می‌کنیم

$$a(x'^{n}+x''^{n}) + b(x'^{n-1}+x''^{n-1}) + c(x'^{n-2}+x''^{n-2}) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{aS_n + bS_{n-1} + cS_{n-2} = 0}$$

مسأله: اگر در معادله $x^2 - 2x - 1 = 0$، $S_3 = 14$ و $S_4 = 34$ باشد S_5 را بیابید.

$$n = 5 \Rightarrow a\,S_5 + b\,S_4 + c\,S_3 = 0$$

$$S_5 - 2(34) - 1(14) = 0 \Rightarrow \boxed{S_5 = 82}$$

مسأله: اگر در معادله $x^2 - 3x - 1 = 0$، $S_{10} = k$، آنگاه S_{30} را بیابید.

حل: طرفین را به‌توان (۳) می‌رسانیم: $S_{10} = k \Rightarrow \underbrace{x'^{10}}_{a} + \underbrace{x''^{10}}_{b} = k \qquad a + b = k$

$$a^3 + b^3 + 3ab(a+b) = k^3$$

$$x'^{30} + x''^{30} + 3x'^{10}x''^{10}(x'^{10} + x''^{10}) = k^3$$

$$S_{30} + 3(x'x'')^{10}(k) = k^3$$

$$S_{30} + 3(-1)^{10}(k) = k^3 \Rightarrow \boxed{S_{30} = k^3 - 3k}$$

۹ـ معادلات تبدیل‌پذیر به معادله درجه دوم:

الف) معادله $(x^2 + x - 3)(x^2 + x - 5)$ را حل کنید.

حل: فرض می‌کنیم: $x^2 + x = A$

$$\Rightarrow (A - 5)(A - 3) = 8 \Rightarrow A^2 - 8A + 15 = 8$$

$$\Rightarrow A^2 - 8A + 7 = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ A = 7 \end{cases}$$

مجموع ضرایب صفر است

$$\Rightarrow \quad x^2 + x = 1 \qquad\qquad x^2 + x = 7$$

$$x^2 + x - 1 = 0 \qquad\qquad x^2 + x - 7 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \qquad\qquad x = \frac{-1 \pm \sqrt{29}}{2}$$

ب: هر معادله که به‌صورت $ax^{2n} + bx^n + c = 0$، $n \in N$ باشد، با فرض $x^n = y$ قابل حل است.

مسأله: معادله $16x^8 - 17x^4 + 1 = 0$ را حل کنید.

حل: فرض می‌شود: $x^4 = y$.

$$\Rightarrow 16y^2 - 17y + 1 = 0$$

مجموع ضرایب صفر است

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = \frac{1}{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^4 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ x^4 = \frac{1}{16} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2} \end{cases}$$

ج: معادله $(2-\sqrt{3})^{tgx} + (2+\sqrt{3})^{tgx} = 2$ را حل کنید.

حل: فرض می‌شود: $(2-\sqrt{3})^{tgx} = A$

$$(2+\sqrt{3})^{tgx} = \left(\frac{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{2-\sqrt{3}}\right)^{tgx}$$

$$= \left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)^{tgx} = \frac{1}{(2-\sqrt{3})^{tgx}} = \frac{1}{A}$$

$$\Rightarrow A + \frac{1}{A} = 2 \Rightarrow A^2 - 2A + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{A = 1}$$

می‌دانیم: $\Rightarrow (2-\sqrt{3})^{tgx} = 1 \,,\; (2-\sqrt{3})^0 = 1$

$$\Rightarrow tgx = 0 \Rightarrow \boxed{x = k\pi}$$

۱۰ـ نامعادله درجه دوم: $ax^2 + bx + c > 0$ یا $ax^2 + bx + c < 0$

باید اوّل معادله $ax^2 + bx + c = 0$ را حل کرد سپس آن را در جدولی تعیین علامت نمود، سپس محدوده جواب را پیدا کرد.

مسأله: نامعادله $2x^2 + 7x + 5 > 0$ را حل کنید.

$$f(x) = 2x^2 + 7x + 5 = 0$$

$$a + c = b \Rightarrow \begin{cases} x' = -1 \\ x'' = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

x	مقادیر کوچکتر از $-\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}$		-1	مقادیر بزرگتر از -1
$f(x)$	+		−		+
	جواب				جواب

$-1<x$ یا $x<-\frac{5}{2}$

مسأله: اگر $n \in N$ ، نامعادله $2n^2 - 27n + 25 < 0$ چند جواب دارد.

$$f(n)= 2n^2 - 27n + 25 = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 1 \\ n = \frac{25}{2} \end{cases}$$

n	مقادیر کوچکتر از ۱	۱		$\frac{25}{2}$	مقادیر بزرگتر از $\frac{25}{2}$
$f(n)$	+		−		+
			جواب		

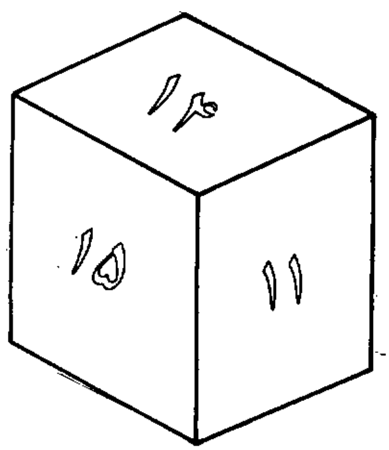
$1<n<\frac{25}{2}$

$n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$

پس این نامعادله (۱۱) جواب دارد.

تفریح اندیشه ۱

عددهای واقع بر وجه‌های مکعب زیر عددهای درست متوالی‌اند. مجموعهای دو عدد واقع بر هر یک از سه جفت وجه مقابل آن برابرند. مجموع شش عدد واقع بر این مکعب چه قدر است؟



جواب در صفحهٔ ۸۸

ادب ریاضی

ناسازگاری میان امور فنی و حکمت، همان گونه که اکنون وجود دارد، در گذشته نیز موجود بوده، و در آن گذشته نیز مانند امروز، گروه فراوانی از مردم نادان بوده‌اند که چیزهای اساسی را فدای چیزهای پیش‌پا افتاده و بی‌مقدار کرده‌اند.

تاریخ علم . جورج سارتن ، احمد آرام

آموزش ترجمه متون ریاضی (۷)

حمیدرضا امیری

The remainder theorem

When the polynomial $P(x)$ is divided by the polynomial $\varphi(x)$, it is clear that the remainder $R(x)$ must have degree less than that of $\varphi(x)$. (If this is not so, the division is not complete.)

In particular, if $P(x)$ is of degree n and we divide it by $(x - \alpha)$, then the quotient $Q(x)$ will be a polynomial of degree $(n - 1)$ and the remainder $R(x)$ will be a constant. Thus,

$$P(x) \equiv (x - \alpha)Q(x) + R. \qquad (2.3)$$

قضیهٔ باقیمانده

هرگاه چند جمله‌ای $P(x)$ را بر چند جمله‌ای $\varphi(x)$ تقسیم کنیم، واضح است که $R(x)$ باقیماندهٔ تقسیم می‌بایست دارای درجه‌ای کمتر از درجهٔ $\varphi(x)$ باشد. (در صورتی که چنین نباشد تقسیم تمام نمی‌شود.)

بویژه، اگر $P(x)$ ازدرجهٔ n وبر $(x - \alpha)$ تقسیم‌شود، دراین‌صورت $Q(x)$ خارجِ‌قسمت تقسیم از درجهٔ $(n - ۱)$ بوده و $R(x)$ باقیمانده تقسیم عددی ثابت خواهد بود. بنابراین:

$$P(x) \equiv (x - \alpha)\, Q(x) + R \qquad (۲.۳)$$

If we substitute $x = \alpha$, then we see that

$$P(\alpha) = R. \qquad (2.4)$$

اگر (دررابطهٔبالا) قراردهیم؛ $\alpha = x$، در این‌صورت خواهیم دید که:

$$P(\alpha) = R \qquad (۲.۴)$$

This result enables us to find the remainder without carrying out the division. It is known as the *remainder theorem*.

A slightly more general result is obtained by considering division by $(ax + b)$. Then

$$P_1(x) \equiv (ax + b)Q_1(x) + R_1. \qquad (2.5)$$
$$\Rightarrow P_1(-b/a) = R_1. \qquad (2.6)$$

(The value $(-b/a)$ is obtained by setting $ax + b = 0$.)

این نتیجه به ما این امکان را می‌دهد که باقیماندهٔ تقسیم را بدون انجام عمل تقسیم بیابیم و این همان قضیهٔ تقسیم است.

در صورتی که (به جای تقسیم $P(x)$ بر $(x - \alpha)$) این تقسیم را بر $(ax + b)$ درنظر بگیریم نتیجه‌ای تا حدودی کلّی تر به‌دست می‌آید. بنابراین (خواهیم داشت):

$$P_1(x) = (ax + b)\, Q_1(x) + R_1 \quad (۲.۵)$$
$$\Rightarrow P_1\left(-\frac{b}{a}\right) = R_1 \quad (۲.۶)$$

(مقدار $-\frac{b}{a}$ از حل معادلهٔ $ax + b = ۰$ حاصل شده است.)

Example 7 Find the remainder when $P(x)$, where $P(x) = 6x^3 - 7x^2 + 12x - 8$, is divided by (a) $(x - 1)$, (b) $(2x - 1)$.

(a) The remainder is $P(1) = 6 - 7 + 12 - 8 = 3$.

(b) The remainder is $P\left(\frac{1}{2}\right) = 6\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 7\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 12\left(\frac{1}{2}\right) - 8 = -3$.

مثال ۷:

باقیماندهٔ تقسیم $P(x) \equiv ۶x^۳ - ۷x^۲ + ۱۲x - ۸$ را بر (الف) $(x - ۱)$، (ب) $(۲x - ۱)$ پیدا کنید:

(الف) باقیمانده عبارت است از $\rightarrow P(۱) =$

$$٦ - ٧ + ١٢ - ٨ = ٣$$

(ب) باقیمانده عبارت است از → $P(\frac{١}{٢}) =$

$$٦(\frac{١}{٢})^{٣} - ٧(\frac{١}{٢})^{٢} + ١٢(\frac{١}{٢}) - ٨ = -٣$$

The factor theorem

From Equation (2.6) we see that, if $P_1(-b/a) = 0$, then $R_1 = 0$

$\Rightarrow$ there is no remainder when $P_1(x)$ is divided by $ax + b$

$\Rightarrow ax + b$ is a factor of $P_1(x)$.

This is known as the *factor theorem*.

From Equation (2.4) we see the result: 'If $P(\alpha) = 0$, then $(x - \alpha)$ is a factor of $P(x)$.'

قضیهٔ فاکتور (تجزیه)

با توجه به معادلهٔ (٢.٦) مشاهده می‌شود که اگر

$P_1 = (-\frac{b}{a}) = ٠$ ، دراین‌صورت $R_1 = ٠$.

⇐ وقتی‌که $P_1(x)$ بر $(ax + b)$ بخش‌پذیر باشد باقیمانده‌ای وجود ندارد.

⇐ $(ax + b)$ یک فاکتور یاعاملِ $P_1(x)$ می‌باشد.

این مطالب به قضیهٔ فاکتور (تجزیه) معروف است.

با توجه به معادلهٔ (٢.۴) این نتیجه‌را مشاهده‌می‌کنیم‌که: «اگر $P(\alpha) = ٠$ ، دراین‌صورت: $(x - \alpha)$ یک عامل یا فاکتورِ چندجمله‌ایِ $P(x)$ است.»

Example 8 Show that $(x - 3)$ is a factor of $P(x)$, where $P(x) \equiv 2x^3 - 6x^2 + 9x - 27$.

$$P(3) = 2.27 - 6.9 + 9.3 - 27 = 0.$$

Therefore, $(x - 3)$ is a factor.

مثال ٨:

درصورتی‌که $P(x) \equiv ٢x^{٣} - ٦x^{٢} + ٩x - ٢٧$ ، نشان دهید که $(x - ٣)$ یک عامل $P(x)$ است:

$$P(٣) = ٢ \times ٢٧ - ٦ \times ٩ + ٩ \times ٣ - ٢٧ = ٠$$

بنابراین؛ $(x - ٣)$ یک عامل $P(x)$ است.

Example 9 Show that $(3x + 1)$ is a factor of $P(x)$, where $P(x) \equiv 6x^3 - x^2 - 19x - 6$.

$$3x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}.$$

We consider, therefore, $P(-\frac{1}{3})$:

$$P\left(-\frac{1}{3}\right) = 6\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 19\left(-\frac{1}{3}\right) - 6$$
$$= -\frac{2}{9} - \frac{1}{9} + \frac{19}{3} - 6 = 0.$$

Therefore, $(3x + 1)$ is a factor.

مثال ٩:

درصورتی‌که $P(x) \equiv ٦x^{٣} - x^{٢} - ١٩x - ٦$ ، نشان دهید که $(٣x + ١)$ یک عاملِ $P(x)$ است:

$$٣x + ١ = ٠ \Rightarrow x = -\frac{١}{٣}$$

بنابراین؛ ما $P(\frac{-١}{٣})$ را درنظر می‌گیریم:

$$P(\frac{-١}{٣}) = ٦(-\frac{١}{٣})^{٣} - (-\frac{١}{٣})^{٢} - ١٩(-\frac{١}{٣}) - ٦$$
$$= -\frac{٢}{٩} - \frac{١}{٩} + \frac{١٩}{٣} - ٦ = ٠$$

پس؛ $(٣x + ١)$ یک عاملِ $P(x)$ است.

Example 10 For what value of k is $(x + 3)$ a factor of $P(x)$, where
$$P(x) \equiv x^4 - 3x^2 + k.$$

If $(x + 3)$ is a factor, $P(-3) = 0$.

$$P(-3) = 0 \Rightarrow 81 - 27 + k = 0$$
$$\Rightarrow k = -54.$$

مثال ١٠:

هرگاه داشته‌باشیم؛ $P(x) \equiv x^{۴} - ٣x^{٢} + k$ ، معین‌کنید به‌ازای چه‌مقداری برای k ، $(x + ٣)$ یک عاملِ $P(x)$ است.

اگر $(x + ٣)$ یک عامل $P(x)$ باشد، $P(-٣) = ٠$.

$$P(-٣) = ٠ \Rightarrow ٨١ - ٢٧ + k = ٠ \Rightarrow k = -٥۴$$

Example 11 Given that $(x + 1)$ and $(x - 2)$ are factors of $P(x)$, where
$$P(x) \equiv ax^3 - bx^2 + ax + 6,$$
find the constants a and b.

Since $(x + 1)$ is a factor, $P(-1) = 0$,

$$\Rightarrow -a - b - a + 6 = 0 \Rightarrow -2a - b + 6 = 0.$$

Since $(x - 2)$ is a factor, $P(2) = 0$,

$$\Rightarrow 8a - 4b + 2a + 6 = 0 \Rightarrow 10a - 4b + 6 = 0.$$

Solving these simultaneous equations, we obtain $a = 1$ and $b = 4$.

مثال ۱۱:

هرگاه $P(x) \equiv ax^{۳} - bx^{۲} + ax + ۶$، بافرض این‌که $(x + ۱)$ و $(x - ۲)$ عاملهای $P(x)$ می‌باشند ($P(x)$ بر $(x + ۱)$ و $(x - ۲)$ بخش‌پذیراست)، عددهای ثابت a و b را پیدا کنید.

چون: $(x + ۱)$ عاملِ $P(x)$ است، $P(-۱) = ۰$.

$$\Rightarrow -a - b - a + ۶ = ۰ \Rightarrow -۲a - b + ۶ = ۰ \quad (۱)$$

چون: $(x - ۲)$ عاملِ $P(x)$ است، $P(۲) = ۰$.

$$\Rightarrow ۸a - ۴b + ۲a + ۶ = ۰ \Rightarrow ۱۰a - ۴b + ۶ = ۰ \quad (۲)$$

(با توجه به معادلات (۱) و (۲) دستگاه معادلاتی تشکیل می‌شود که) از حلِ این دستگاه معادلات $a = ۱$ و $b = ۴$، به‌دست می‌آید.

Finding factors of polynomials

The factor theorem provides an important aid to finding factors of polynomials. To find linear factors, we seek values of λ such that $(x - \lambda)$ divides $P(x)$. As a consequence of the factor theorem, this is equivalent to finding values of λ for which $P(\lambda) = 0$.

If the polynomial is written in such a way that the coefficients are all integers, then it is suggested that one considers those values of λ which are a factor of the constant term a_0 in the polynomial.

تشخیص عاملهای چندجمله‌ایها

قضیهٔ عامل (تجزیه) جهتِ تشخیص عاملهای چندجمله‌ایها کمک مهمّی است. برای پیدا کردنِ عاملهای خطی، ما در جستجوی مقادیری برای λ هستیم به‌طوری که $P(x)$ بر $(x - \lambda)$ بخش‌پذیر باشد. یکی از نتایج حاصل از قضیهٔ عامل، معادل با تشخیص مقادیر λ است به‌طوری که $P(\lambda) = ۰$.

اگر یک چندجمله‌ای به شکلی نوشته‌شود که همهٔ ضرایب آن عددهای صحیح باشند، در این‌صورت پیشنهادمی‌شود مقادیری‌را برای λ درنظربگیریم‌که عدد ثابت چندجمله‌ای یعنی a_0 بر آنها بخش‌پذیر باشد.

Example 12 Find the factors of $P(x)$, where $P(x) \equiv x^3 - 4x^2 + x + 6$.

The only integer factors of 6 are ±1, ±2, ±3, ±6 and so these are the values of λ we consider.

Trial factor $(x - \lambda)$	$P(\lambda)$	Comment
(i) $(x - 1)$	$1 - 4 + 1 + 6 = 4$	Not zero, not a factor
(ii) $(x + 1)$	$-1 - 4 - 1 + 6 = 0$	$(x + 1)$ is a factor
(iii) $(x - 2)$	$8 - 16 + 2 + 6 = 0$	$(x - 2)$ is a factor
(iv) $(x + 2)$	$-8 - 16 - 2 + 6 = -10$	Not zero, not a factor
(v) $(x - 3)$	$27 - 36 + 3 + 6 = 0$	$(x - 3)$ is a factor
(vi) $(x + 3)$	$-27 - 36 - 3 + 6 = -60$	Not zero, not a factor

The factors are $(x + 1)$, $(x - 2)$ and $(x - 3)$ and the factorisation of $P(x)$ is

$$P(x) \equiv (x + 1)(x - 2)(x - 3).$$

At stage (ii), having found that $(x + 1)$ is a factor, we could, of course, divide $P(x)$ by $(x + 1)$ and deal with the remaining quadratic $x^2 - 5x + 6$, which immediately factorises into $(x - 2)(x - 3)$.

Also, at stage (iii) we have a factor $(x + 1)(x - 2)$ and the remaining factor can be obtained by dividing out or by inspection.

Stage (vi) is, of course, not necessary, as we have already found three factors of the cubic polynomial. For the same reason we need not consider $\lambda = \pm6$.

مثال ۱۲:

هرگاه $P(x) \equiv x^{۳} - ۴x^{۲} + x + ۶$، در این‌صورت عاملهای $P(x)$ را پیدا کنید.

تنها عاملهای صحیح عددِ ۶ عبارتند از: ۱± ، ۲± ، ۳± ، ۶± و بنابراین ما می‌بایست این مقادیر را برای λ درنظر بگیریم.

امتحان عامل $(x - \lambda)$	$P(\lambda)$	نتیجه
(۱) $(x - ۱)$	۱ - ۴ + ۱ + ۶ = ۴	مخالف صفر، عامل نمی‌باشد.
(۲) $(x + ۱)$	-۱ - ۴ - ۱ + ۶ = ۰	$(x + ۱)$ یک عامل است.
(۳) $(x - ۲)$	۸ - ۱۶ + ۲ + ۶ = ۰	$(x - ۲)$ یک عامل است.
(۴) $(x + ۲)$	-۸ - ۱۶ - ۲ + ۶ = -۱۰	مخالف صفر، عامل نمی‌باشد.
(۵) $(x - ۳)$	۲۷ - ۳۶ + ۳ + ۶ = ۰	$(x - ۳)$ یک عامل است.
(۶) $(x + ۳)$	-۲۷ - ۳۶ - ۳ + ۶ = -۶۰	مخالف صفر، عامل نمی‌باشد.

عاملهای $P(x)$ عبارتند از: $(x + ۱)$، $(x - ۲)$ و $(x - ۳)$ و تجزیهٔ $P(x)$ به‌صورت $P(x) \equiv (x + ۱)(x - ۲)(x - ۳)$ می‌باشد.

در مرحلهٔ (۲)، $(x + ۱)$ به‌عنوان یک عامل $P(x)$ یافت می‌شود، پس قطعاً، می‌توانیم $P(x)$ را بر $(x + ۱)$ تقسیم کنیم و خارج‌قسمت، عبارتِ درجهٔ دوم $x^{۲} - ۵x + ۶$ خواهدبود، که

بلافاصله به (x − ۳) (x − ۲) تجزیه می‌شود.

همچنین در مرحلهٔ (۳) ما یک عامل (x − ۲) (x + ۱) را داشته و عامل باقیمانده می‌تواند از طریق تقسیم خارج شود یا با یک بررسی دقیق این‌کار صورت گیرد.

البته، با توجه به این‌که ما سه عامل برای چندجمله‌ای درجهٔ سوم P(x) یافته‌ایم مرحلهٔ (۵) لزومی ندارد. به‌عنوان مثال: ما، نیازی برای درنظر گرفتن ۶± = λ نداریم.

The use of factors

There are several circumstances where it is advantageous to be able to write a polynomial $P(x)$ in terms of its factors. We will illustrate this by using the polynomial $P(x)$ considered in Example 12 above. We found that

$$P(x) \equiv x^3 - 4x^2 + x + 6 \equiv (x+1)(x-2)(x-3).$$

استفاده از عاملها

شرایط متعددی وجود دارد که توانایی نوشتن یک چندجمله‌ای مانند P(x) را برحسبِ عاملهایش، سودمند می‌سازد. این مطلب را با استفاده از چندجمله‌ای P(x) که در مثال ۱۲ درنظر گرفته شده است، توضیح می‌دهیم. ما یافتیم که:

$$P(x) \equiv (x^۳ - ۴x^۲ + x + ۶) \equiv (x + ۱)\ (x - ۲)\ (x - ۳)$$

ادب ریاضی

این فکر بسیار کودکانه است که انسان چنان تصور کند علم با یونان آغاز کرده است؛ بر «معجزهٔ» یونان هزاران سال کار مصر و بین‌النّهرین و احتمالاً سرزمینهای دیگر مقدم بوده است، و علم یونان بیشتر جنبهٔ تجدید حیات داشته است تا جنبهٔ اختراع.

تاریخ علم، جورج سارتن، احمد آرام

تاریخچه مجلات ریاضی در ایران (۱۰)

مجلهٔ «یکان» مجله‌ای ماهانه بود و در هر ماه، یک شماره از آن بر بساط روزنامه‌فروشان ظاهر می‌شد، اما مانند بعضی از مجله‌های علمی دیگر ویژه‌نامه هم داشت.

اوّلین ویژه‌نامهٔ «یکان» تحت عنوان **شمارهٔ فوق‌العادهٔ یکان مجلهٔ ریاضیات** در فروردین ۱۳۴۴ شمسی انتشار یافت.

در این شماره با نویسندگانی چون دکتر محسن هشترودی، احمد بیرشک، جهانگیر شمس‌آوری، جلیل قراگزلو، محمدعلی شیخان، مهدی مدغم، هوشنگ شریف‌زاده، محمدحسن رزّاقی خمسی و عبدالحسین مصحفی مواجه می‌شویم.

از کلاس پنجم ابتدایی به بعد شاگردان با استعداد و موفق را برای شرکت در کلوپهای ریاضی کلاسشان تشویق می‌کنند. کلوپ کلاس پنجم (سن ۱۱ و ۱۲) معمولاً به نام کلوپ ریاضی‌دانان شاد در حدود پانزده نفر عضو دارد و هفته یا دوهفته‌ای یکبار، عصرها، تشکیل می‌شود. در این کلوپها دانش‌آموزان نحوهٔ خواندن ریاضیات را به طور مستقل و منقدانه زیر نظر و راهنمایی معلمان فرا می‌گیرند.

موضوعات ریاضی را به زبان ریاضیات مورد بحث قرار می‌دهند و معلومات کلاسی خود را کامل می‌کنند و بتدریج به‌وسیلهٔ حل مسائل جالب و مشکل رابطهٔ فعالانه‌ای با ریاضیات برقرار می‌کنند. گرچه روش معمولی تدریس در شوروی تا اندازه‌ای خشک و بر طبق سنت دیرین است، اما فرضیه‌های جدید آموزشی در کلوپها تأثیر گذاشته و در آنها از روشی مبتنی بر تبادل آزادانهٔ افکار و بحث میان شرکت‌کنندگان پیروی می‌شود. در میان سایر فعالیتهای منظم فوق برنامه‌ای دانش‌آموزان شوروی می‌توان از کلاسهای ریاضی شب برای کلیهٔ دانش‌آموزان و نشریه و روزنامهٔ دیواری ریاضیات نام برد.

بیشتر از فعالیتهای فوق برنامه و بویژه کار در کلوپهای ریاضی براساس کتابهای آموزشی متنوع و فراوانی است که در دسترس شاگردان و معلمان قرار دارد. هرقدر که فعالیتهای فوق برنامه‌ای در ریاضیات زیادتر شود، دامنهٔ تهیهٔ مواد مکمل آموزش ریاضی نیز وسعت می‌یابد و استقبال جوانان شوروی از آن افزونتر می‌شود. تیراژِ یک میلیونی بعضی از کتابهای علمی عموم‌پسند مؤید این نظر می‌باشد.

برای معلمان نیز جزواتی دربارهٔ روش طرح‌ریزی و تشکیلات و اداره کردن کلوپهای ریاضیات و فعالیتهای فوق برنامه از قبیل کلاسهای ریاضیات در شب، چاپ شده در دسترسشان قرار می‌گیرد. ادارهٔ کل امور اداری مدارس در وزارت فرهنگ جمهوری سوسیالیستی روسیه که مرکز پژوهشهای تربیتی در شوروی است، در طرح‌ریزی فعالیتهای فوق برنامه تشریک مساعی می‌کند. یکی از اعضای برجستهٔ بخش ریاضیات انستیتوی روشهای تدریس این آکادمی در نشریه‌ای ضمن بیان مقصد و اهمیت کارهای فوق‌برنامهٔ ریاضی، هدف کار کلوپها را چنین تشریح می‌کند:

۱- بالا بردن معلومات ریاضی شاگردان به وسیلهٔ مطالعهٔ جدی و عمیق در رشته‌های مختلف ریاضیات و تاریخ آن و همچنین به وسیلهٔ آشنایی با بعضی از مسائل ریاضیات معاصر

و غیره.

۲ـ توسعه دادن استعدادهای منطقی و تصور فضایی شاگردان به‌وسیلهٔ حل مسائل و معماهای جالب توجه و تجزیه و تحلیل استدلالات سفسطی و قضایای ناصحیح و غیره.

۳ـ شناختن و جمع کردن گروهی از شاگردان با استعداد و هواخواه با حرارت و جدی ریاضیات به منظور کمک به معلم در کارهای روزانه از قبیل کار کردن با شاگردان کندآموز، تهیهٔ وسایل بصری متنوع، رهبری کارهای مربوط به طرحهای بزرگ، مانند نوشتن روزنامهٔ دیواری ریاضی در مدرسه و غیره.

۴ـ و بالاخره کشف استعدادهای ریاضی خارق‌العاده و استثنایی ضمن کار در کلوپ.

فعالیتهای این کلوپها برای کمک به دانش‌آموزان جهت بسط استعدادهای طبیعی و کسب مهارتهای لازم برای انجام کارهای جدی علمی درآتیه می‌باشد.

در سپتامبر ۱۹۵۹ میلادی انستیتوی تربیتی ایوانف یک باب مدرسهٔ ریاضی برای جوانان تأسیس کرده است. این مدرسه شامل سه کلاس مضاعف ۱۵ نفری است که شاگردان کلاسهای هشتم و نهم و دهم مدارس روزانه در آن شرکت می‌کنند. هر شاگرد باید دو شب در هفته و هر شب در دو کلاس شرکت کند. برنامهٔ این کلاسها شامل جبر، هندسه، مثلثات، هندسهٔ تحلیلی و محاسبات ریاضی (برای سال هشتم) و منطق ریاضی (برای سال دهم) می‌باشد. همچنین دروس تئوری و طرز کار با ماشینهای محاسبهٔ الکترونیکی نیز جزء برنامه این کلاسها منظور شده است.

برای تعیین کیفیت کار این مدرسه همین بس که گفته شود که منطق ریاضی در سال دهم به‌وسیلهٔ پروفسور ا.ای مالتف عضو آکادمی علوم شوروی و جبردان برجسته تدریس می‌شود. مطالب درسی در این مدرسه به طرز نوینی مورد بحث قرار می‌گیرد و ضمن کار، شاگردان با استعداد در ریاضیات شناخته و تربیت می‌شوند.

کارانستیتوی تربیتی ایوانف نمونهٔ خوبی برای «ادارهٔ مکانیک ـ ریاضی» دانشگاه مسکو قرار گرفت و این اداره با همکاری جامعهٔ ریاضیات مسکو و بخش تعلیم و تربیت ملی شهرداری مسکو در پاییز ۱۹۵۹ پنج دبیرستان شبانه برای ریاضی‌دانان جوان در ۵ ناحیهٔ مختلف مسکو تأسیس کرد.

برنامهٔ دو سالهٔ این دبیرستانها شامل جبر و هندسه و آنالیز ریاضی می‌باشد. هیأت اداره کنندهٔ این مدارس از ۵ نفر عضو آموزشی دانشگاه مسکو و ۲۰ داوطلب صلاحیتدار و ۲۰ شاگرد سال پنجم و ۱۶ شاگرد سال چهارم رشتهٔ ریاضی تشکیل یافته است. از میان ریاضی‌دانانی که در تدوین برنامه این مدارس و نظارت بر آن مستقیماً دست دارند می‌توان از پروفسور ای. ب. ودین. کین، وج. ای. شیلف، وای.م. یاگ لوم نام برد.

یکی از نتایج مستقیم فعالیت بخشهای انجمن ریاضیات به وجود آمدن یک دورهٔ کتاب متحدالشکل به عنوان «کتابخانهٔ انجمن ریاضیات» است. در کتابهای این دوره مطالب بحث شده در بخشها به تفصیل و استادانه نوشته شده است. شیوهٔ نگارش این کتابها همان شیوهٔ تدریس در بخشها است، به این معنی که پس از مقدمه‌ای بسیار مختصر تعاریف اصلی شرح داده شده و بعد به صورت مسائل مطرح شد.، و ضمن حل آنها مستنبط قضیه کشف گشته و تمرینهای متنوع و متعددی به دنبال آن آمده است.

هدف از به کار بردن این روش آن نیست که توجه خواننده منحصراً به نتیجهٔ نظریهٔ جدیدی که مطرح شده است معطوف شود، بلکه آن است که به رغم یک یکنواختیی که در بیان معمولی ریاضیات هست وی را به انجام کاری مستقل و ابتکاری تشجیع کند. این کتابها به این منظور تألیف شده که در خواننده مهارتهایی که لازمهٔ کار تولیدی است به وجود آید. مطالبی که برای تکلیف شاگرد در آنها جمع‌آوری شده به نحوی است که او را بیشتر از نتایج به دست آمده مجبور به دقت در روشهای به کار رفته می‌کند.

فکر اساسیی که سبب تهّیه و تدوین این کتابها گشته آن بوده است که درک واقعی ریاضیات زمانی حاصل می‌شود که شخص مستقلاً قادر به پاسخ دادن سؤالات ریاضی گردد؛ و هر مسأله و مجموعه مسائلی که مستقلاً حل شود گنجینهٔ روشهایی را که در دسترس خواننده است غنیتر می‌کند. حتی وقتی را که خواننده برای فکرکردن و یافتن راه حل مسأله‌ای صرف می‌کند، ولو موقعیتی به دست نیاورده هدر نداده است، چه درصدد فهم علل عدم موفقیت خود برمی‌آید و در

نتیجه توانایی این را خواهد یافت که استدلال مربوط به روش مخصوص آن مسأله را تشخیص دهد.

علاوه بر بخشهایی که در دانشگاه فعالیت دارند، در سال ۵۷ ـ ۱۹۵۶ پانزده انجمن به‌وسیلهٔ دانشگاه در دبیرستانهای نواحی مسکو تشکیل یافته است. و برحسب تقاضای دبیرستانها و دانشجویان رشتهٔ مکانیک ـ ریاضیات دانشگاه مسکو سخنرانیهای فراوانی در آن انجمنها ایراد و جلسات را رهبری کرده‌اند.

عناوین سخنرانیهایی که در آن سال ایراد گشته چنین بوده است.

چگونه علم، پدیده‌های اتفاقی را بررسی می‌کند.
تئوری اعداد صحیح.
هندسهٔ لباچفسکی.
سریعتر از فکر (دربارهٔ ماشینهای محاسبهٔ الکترونیکی).
زنان ریاضی‌دان.
دربارهٔ شغل ریاضی‌دان.
ادارهٔ مکانیک ـ ریاضیات (در دانشگاه مسکو).
تاریخ حل معادلات.

مقالهٔ ریاضیات و منطق این شماره از سر ادموند تیلور ویتیکر « Sir Edmond Taylor Whittaker » است با ترجمهٔ جهانگیر شمس‌آوری، که در آن ابتدا از نخستین ریاضی‌دانان یاد شده و از مقام منطق در هندسه ذکری به میان آمده و از کشف اعداد اصم توسط فیثاغورسیان و پارادکسهای زنون و پیدایش هندسهٔ فضایی در مکتب اتمی و اصل توازی و هندسهٔ فضای نجومی و نسبیت عمومی مطالبی آورده شده است.

در بخشهای **هندسه‌های غیراقلیدسی و توپولوژی** این مقاله چنین می‌خوانیم که:

ما اکنون بعضی از مشخصات هندسه های غیر اقلیدسی را که با انکار اصل توازی در هندسهٔ مسطحه به‌دست می آید شرح می‌دهیم:

اگر خط CD و نقطهٔ P را در خارج آن در نظر بگیریم دو اصل را می توانیم بپذیریم.

(۱) یا غیرممکن است که از نقطهٔ P خط مستقیمی بتوان کشید که CD را قطع نکند، که در این حال هندسه بیضوی است.

(۲) یا ممکن است که از نقطهٔ P تعداد خطوط نامحدودی کشید که CD را قطع نکند، که در این حال هندسه هیپربولیک است.

در میان این امکانات حالت میانه‌ای نیز وجود دارد که در آن ممکن است که از نقطهٔ P فقط یک خط کشید که CD را قطع نکند، این حالت با هندسهٔ اقلیدسی معمولی مطابقت دارد.

در هندسهٔ بیضوی مجموع زوایای یک مثلث همیشه بزرگتر از دو قائمهٔ است. هر خط مستقیمی را که امتداد دهیم، وقتی که به طول معینی رسید، مانند خط استوا، باز به نقطهٔ آغاز خود برمی‌گردد. بزرگترین فاصلهٔ ممکن میان دو نقطه در روی یک خط، نصف طول این خط است. عمودهایی که از نقاط مختلف یک خط بر آن اخراج می‌شوند، همه در یک نقطه متقاطعند.

در هندسهٔ هیپربولیک، مجموع سه زاویهٔ مثلث همیشه از دو قائمه کمتر است. به این معنی که هرقدر مساحت مثلث بیشتر باشد، مجموع زوایای آن کمتر است. اگر خط CD و نقطهٔ P را در خارج آن در نظر بگیریم، می‌توانیم دو خط مستقیم از نقطهٔ P رسم کنیم (PA و PB) که بر یک امتداد نباشند و: (۱) هر خط ماربر نقطهٔ P که تماماً خارج زاویهٔ APB است، خط CD را قطع نکند، (۲) هر خط ماربر نقطهٔ P که داخل زاویهٔ APB است، خط CD را در نقطه‌ای به فاصلهٔ محدود از P قطع کند، (۳) دو خط PA و PB ، مجانبی وار به یک انتهای خط CD میل کنند، در این حال می‌توان گفت که آنها در بی‌نهایت یکدیگر را قطع می‌کنند واین کم یا بیش شباهتی با موازیهای اقلیدس دارد. در حقیقت به PA و PB موازیهای مرسوم از نقطهٔ P به موازات خط CD گفته می‌شود. دو خط متوازی در همه‌جا متساوی‌الفاصله نیستند. فاصلهٔ بین آنها در سوی یک انتها به سمت صفر و در سوی انتهای دیگر به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

توپولوژی

همان طور که دیدید این عقیده که جهان مادی متشکل از اتمهایی است جاودانی و تغییرناپذیر، از طرف بسیاری از فلاسفهٔ یونان قدیم اظهار شده است. در قرن نوزدهم، این

عقیده به طور کلی مورد قبول فیزیک‌دانان قرار گرفت و برای توضیح ریاضی آن در ۱۸۸۷، کوششی از جانب ویلیام تامسون (William Thomson)، لردکلوین (Lord Kelvin) پس از مشاهدهٔ نمود حلقه‌های دود در آزمایشگاه، انجام گرفت. وی اظهار داشت که اگر اتمهای مادهٔ لازمهٔ حلقه‌های پیچدار در یک سیال کامل باشد، بقای ماده را بلادرنگ می‌توان توضیح و عمل متقابل مابین اتمها را نمایش داد. در ۱۸۷۶ پی.جی، تیت (Tait)، فیزیک و ریاضی‌دان اسکاتلندی، با این فکر که ممکن است انواع مختلف اتم مربوط به انواع مختلف حلقه‌های پیچدار گره خورده باشد. به مطالعهٔ گره‌ها به عنوان اشکال هندسی پرداخت، این نوع مسأله تازگی داشت. زیرا در این باره هرگز به تشریح دقیق نوع منحنی گرهٔ طناب توجه نمی‌شد و فقط به تعیین ممیزه‌های اصلی میان انواع گره‌ها اکتفا می‌شد. بخصوص تبدیلاتی که موجب تغییر منحنی طناب می‌شود ولی سیرت اصلی گره را تغییر نمی‌دهد مورد مطالعه قرار گرفت. روابطی از این نوع یعنی روابطی که با اصطلاحاتی از این قبیل بیان می‌شوند: «خارج آن»، «راست دست»، «متصل است با»، «مشترک است با»، «محصور است به»، «متصل است با یک راه» اصطلاحات توپولوژیکی هستند و مطالعهٔ این روابط توپولوژیکی، به طور کلی توپولوژی نامیده می‌شود.

مسألهٔ توپولوژیکی دیگری که در همان اوان عرضه شدن این شاخه از ریاضیات مطرح گشت مربوط به جاری شدن یک جریان الکتریکی به وسیلهٔ شبکهٔ خطی هادیها بود. شبکه عبارت است از مجموعه‌ای از نقاط (رؤوس) که دو به دو به یکدیگر به وسیلهٔ هادیها مربوطند. مسأله عبارت از این است که حداکثر تعداد هادیهایی را که می‌توان از شبکه‌ای برداشت و رأسهای شبکه به وسیلهٔ باقیماندهٔ هادیها در ارتباط خطی باشند چیست. عددی که به دست آمد، در مسألهٔ کلی جریان الکتریک در شبکه فوق‌العاده مهم است.

بخشهای دیگر این مقاله عبارتند از: **نظرهای تازه‌ای دربارهٔ اصول موضوعه، خطرات اشراق در ریاضیات، طرح یک هندسهٔ دقیق، اعداد، اعداد در ورای حد، تعداد نقاط در فضای سه بعدی، کمیتهای موهوم، دستگاه شمار، منطق علامتی، دستگاه علامات پئانو، پیشرفتهای مربوط به وایتهد و راسل، پارادوکس راسل، طرفداران اشراق، احتمالات، آمار، دستگاه حدسی، فلسفهٔ ریاضیات و فلسفهٔ علم.**

در قسمتی از مقالهٔ **بنیان ریاضیات جدید** از دکتر محسن هشترودی چنین آمده است که:

دسته‌بندی و اجتماع افرادی در یک طبقه‌همواره به صورت دلخواه ممکن است، اما مجموعه‌ای که به این صورت به دست می‌آید مجموعه‌ای نامشخص و کم یا بیش مبهم است. با تعریفی خاص که شامل کلّیهٔ افراد مجموعه گشته وافراد غیر عضو را خارج کند می‌توان مجموعه رامشخص ومعین کرد (توجه شود که در این باره تعریف منطقی جامع و مانع ضروری نیست، هر تعریفی که نتیجه را متضمن باشد کفایت می‌کند و چنین تعاریفی معادلند). پیدا است می‌توان مجموعه‌هایی تعریف کرد که به ظاهر خود مجموعه نیز از افراد مجموعه باشد.

مثلاً، اگر مجموعهٔ کلیهٔ نامهای زبان فارسی را تشکیل‌دهیم و به این مجموعه نامی دهیم چنین به نظر می‌رسد که خود مجموعه عضو مجموعه است. بیشتر تعارضات منطقی در نظریهٔ مجموعه‌ها از این نقطه شروع می‌شود. رفع چنین مشکلاتی برای ریاضی‌دانان بود که غلبهٔ بر آن ممتنع می‌نمود. بعدها روشن شد که این قبیل تعارضات به حوزهٔ ریاضی منحصر نیست و در حوزهٔ منطق نیز روی می‌دهد، من باب مثال چند مورد از این تعارضات در حوزهٔ منطق در این‌جا ذکر می‌شود:

اوّل تعارض حکم منفرد ـ این تعارض را از قدیم شناخته‌اند و از ارسطو منقول است:

غیاث‌الدین جمشید کاشانی می‌گوید که «کاشانیان دروغگویند». بدیهی است که این حکم موجب دور می‌شود، چه این‌قول از طرف یک کاشانی گفته شده است، پس مشمول خود حکم می‌شود و آن جمله صحیح نیست یعنی کاشانیان راستگویند. و چون گوینده کاشانی است حکم صحیح خواهد بود و دور بارز می‌شود.

باید متوجه بود که در حقیقت این حکم منفرد نیست و از دو حکم تشکیل شده است: الف ـ غیاث‌الدین جمشید اهل کاشان است. ب ـ او مدعی است که کاشانیان دروغگویند. تعارض از این جهت پیدا می‌شود و موجب دور می‌شود که

دروغ گروه تشکیل نمی‌دهد، چه دروغ دروغ معادل راست است نه دروغ، اگر غیاث‌الدین جمشید کاشانی می‌گفت «کاشانیان راستگویند» تعارضی رخ نمی‌داد، چه راست راست معادل راست است و گروه تشکیل می‌دهد.

دوم تعارض احکام مستند بر تعریف ـ برای هر عدد می‌توان هم تعریفی ریاضی ذکر کرد و هم تعریف دیگری داد که بی‌آن‌که ریاضی باشد آن عدد را مشخص کند. مثلاً عدد (الف) را چنین تعریف می‌کنیم: «کوچکترین عددی که تعریف آن کمتر از ده کلمه لازم داشته باشد» بدیهی است اعدادی که با کمتر از ده کلمه تعریف می‌شوند مجموعه‌ای تشکیل می‌دهند (محدود یا نامحدود) که بین آنها، با مقایسه، کوچکترینشان را تعیین می‌کنیم و عدد «الف» را مشخص می‌شود. فی‌المثل عدد π چنین تعریف می‌شود: «نسبت محیط دایره به قطر آن» این جمله یا (حکم) شش کلمه دارد، یعنی حکمی است که از ده کلمه کمتر است، پس عدد «پی» از این قبیل اعداد است. همچنین عدد ۹ (تعداد سیارات منظومهٔ شمسی) چون حکم «تعداد سیارات منظومهٔ شمسی» کمتر از ده کلمه دارد، از این احکام است. اگر به همین دو عدد قناعت شود، عدد «الف» عدد π خواهد بود که از دو عدد ۹ و π کوچکترین آنها است. به هر حال اگر تعاریف دیگری نیز برای اعدادی از این قبیل ذکر شود، همواره می‌توان عدد «الف» را مشخص ساخت. اکنون ملاحظه می‌کنیم که عدد «الف» خود با جملهٔ «کوچکترین عددی که تعریف آن کمتر از ده کلمه لازم داشته باشد» تعریف شده است که دوازده کلمه دارد. این‌جاست که تعارض رخ می‌دهد، زیرا عدد «الف» باید با جمله‌ای (یا حکمی) که کمتر از ده کلمه داشته باشد تعریف شود؛ یعنی بنا به مدلول تعریف فوق عدد «الف» وجود دارد و بنا بر صورت حکم این عدد جزء مجموعهٔ اعدادی که به موجب این تعریف مشخص می‌شوند نمی‌باشد. با کمی توجه می‌توان دریافت که مجموعهٔ اعدادی که تعریف آنها کمتر از ده کلمه لازم داشته باشد یک رشته عدد است (محدود یا نامحدود، از نظر تعداد) و تعریف عدد «الف» در واقع چنین است: «کوچکترین عدد این مجموعه» و در این صورت تعارضی در کار نخواهد بود، چه حکم اخیر کمتر از ده کلمه دارد.

در نظریهٔ مجموعه‌ها این تعارضها قبلاً مشهود شده بود و تعلق آنها به حوزهٔ منطق بعداً روشن شد. مبنا و پایهٔ منطق ریاضی براساس حساب احکام و قضایا و حساب طبقات است.

اگر بین افراد مجموعه‌ای (محدود یا نامحدود) روابطی به قسمی وجود داشته باشد که حاصل به کار بستن این روابط برای دو فرد آن مجموعه فرد دیگری از مجموعه را به دست دهد، آن مجموعه را یک سازمان «structure» می‌نامند.

مثلاً، اگر مجموعهٔ اعداد صحیح و عمل جمع را در نظر بگیریم، چون مجموع دو عدد صحیح نیز عددی صحیح است، مجموعهٔ اعداد صحیح را با عمل جمع یک سازمان می‌نامند. بی‌آن‌که بر کلیّات سازمان در ریاضیات اشاره‌ای شود، به همین مختصر اکتفا و به تعادل این سازمان با سازمان حاصل از مجموعهٔ اعداد صحیح با عمل ضرب قناعت می‌کنیم، چه مجموعهٔ اعداد صحیح باعمل ضرب نیز یک سازمان تشکیل می‌دهد. (در عمل جمع سازمان اوّل، عدد صفر عنوان واحد دارد، چه افزون آن به هر عددی آن عدد را محفوظ نگاه می‌دارد. اما در عمل ضرب سازمان دوم، همین عنوان را عدد یک دارد، چه ضرب کردن آن در هر عددی، آن عدد را محفوظ نگاه می‌دارد.) ممکن است در سازمانی دو رابطه بین افراد مجموعه، قابل تصور باشد (مانند مجموعهٔ اعداد صحیح و اعمال جمع و ضرب)، در این صورت چنین سازمانی را حلقه می‌نامند. تعادل بین حلقه‌ها با سازمان دوگانهٔ جمع و ضرب همواره محقق است. سازمان معادل با رابطهٔ جمع را مدول و سازمان معادل با عمل ضرب را گروه می‌نامند. به این ترتیب حلقه در حقیقت سازمانی است که هم مدول و هم گروه باشد. هیأت اعداد (Corps denombers) مجموعه‌ای است که حاصل اعمال چهارگانهٔ اصلی حساب دربارهٔ افراد آن، آن مجموعه را محفوظ نگاه دارد (جز عمل تقسیم بر صفر مدول که استثناء می‌شود). مثلاً، مجموعهٔ اعداد گویا یک هیأت اعدادتشکیل می‌دهد، چه حاصل چهار عمل اصلی دربارهٔ اعداد گویا عددی گویا است. مجموعهٔ اعداد موهوم نیز یک هیأت اعداد است. اگر عددی موهوم را که اجزای حقیقی و موهومی آن اعداد صحیحند عدد موهوم صحیح بنامیم، مشاهده می‌شود که مجموعهٔ اعداد موهوم

صحیح هیأت اعداد نیست و بلکه تنها حلقه است. بدین قسم سازمانهای اصلی نمونه‌بندی ریاضی عبارت است از:

۱ـ مدول (Module) که به آن گروه جمعی (Groupe additif) نیز گفته می‌شود و همچنین گروه که مراد گروه ضربی است (Groupe multiflicatif) و به‌طور خلاصه گروه نامیده می‌شود. در صورتی که در چنین سازمانی $a.b = b.a$ باشد، گروه را گروه آبلی Groupe abélien می‌نامند. تعادل بین مدول و گروه محقق است یعنی این دو سازمان در حقیقت متوازنند.

۲ـ حلقه (Anneou یا Ring) سازمانی است که هم مدول است و هم گروه، یعنی اعمال سه‌گانه جمع و تفریق و ضرب در آن میسر است.

۳ـ هیأت اعداد (Corps de nombres یا field) که اعمال چهارگانهٔ اصلی حساب در آن میسراست.

سازمانها به دو دسته اساسی، سازمانهای جبری (آنچه تاکنون اشاره شد سازمانهای جبری است) و سازمانهای منطقی (structure logique) تقسیم می‌شوند. برای هر سازمان منطقی محاسبهٔ خاصی جبری وجود دارد که سازمان متناظر آن نامیده می‌شود. مثلاً جبر بول Boole اصول محاسبهٔ سازمان منطقی ارسطو (یعنی منطق دو ارزشی) است.

اهمیت این سازمانها در ریاضیات جدید بسیار است و اصول ماشینهای الکترونیکی یا دستگاههای خودکار براین سازمانها است.

از جمله مطالبی که برای هر مجلهٔ علمی و در حالت خاص ریاضی لازم و واجب می‌نماید وجود معماها و چیستانهای ریاضی است.

این معماها طوری مطرح شده‌اند که در عین فرح‌انگیزی با استدلال سروکار دارند و چنان‌هستند که علاوه بر استدلال گاه‌گاه به هوش و سرعت انتقال نیز نیاز دارند.

مجلهٔ یکان، از آوردن این گونه معماها خودداری نکرده و جای جای از معماهای جالب و سروربار سخن به میان آورده است.

حل این معماها، همان گونه که مرسوم است به دانش ریاضی بسیار نیاز ندارد و بیش از آن‌که طالب معلومات ریاضی باشد در طلب دقت و فایده گرفتن از قوای ذهنی است. در این مورد باید شش دانگ حواس خود را جمع کنیم و به‌عبارت دیگر تمرکز حواس داشته‌باشیم.

در این‌جا به‌ذکر یکی از معماهای آن،که تحت عنوان چگونه فهمیده بود؟ در همین شمارهٔ مورد بحث آمده است، می‌پردازیم: برای دوستان خود چنین تعریف می‌کرد:

ـ راهی طولانی و خطرناک در پیش داشتیم. این راه در میان یکی از صحراهای خشک و بی‌آب عربستان بود. برای سلامت به پایان رساندن این راه ناچار بودیم که با خود آب و بنزین همراه داشته باشیم. در ماشین ما شش ظرف خالی به گنجایش یکی شانزده لیتر و دیگری هیجده لیتر و سومی بیست ودولیتر و بقیّه به ترتیب بیست و سه لیتر، بیست و چهار لیتر و سی‌وچهار لیتر بود. چند ظرف را از آب پر کردیم و چند ظرف را از بنزین و یکی از ظرفها را خالی نگاه داشتیم، عجیب این بود که مقدار بنزینی که خریدیم و در ظرفها ریختیم دوبرابر تعداد آبی بود که خریدیم و در ظرفها ریختیم.

یکی از مستمعان سخن گوینده را قطع کرد و گفت: ـ من که آن‌جا نبودم، ولی می‌توانم بگویم که شما کدام ظرف را خالی نگاه داشتید و کدامها را از آب و کدامها را از بنزین پر کردید. همه متعجب شدند و تصور کردند که او هم در این مسافرت بوده است و می‌خواهد با دیگران شوخی کند. ـ یکی پرسید راست می‌گوید؟ او با شما دراین مسافرت نبوده است؟ باور کنید که خیر. ـ پس ادعای او باورنکردنی است. اما وقتی که وی برای دیگران شرح داد که چگونه فهمیده است که کدام ظرف خالی و آب در کدامها و بنزین در کدامها بوده است و تعریف کننده هم حرف او را تصدیق کرد، همه دهانشان از تعجب باز ماند. آیا شما می‌توانید بگویید که چگونه فهمیده بود؟

پاسخ این معما در همین شماره و به صورت زیر است: چون بنزین دو برابر آب است، گنجایش مجموع ظرفهایی که پر شده باید بر ۳ قابل قسمت باشد. مجموع گنجایشهای شش ظرف عبارت است از: ۱۳۷ لیتر. این عدد ۲ واحد از مضربی از ۳ بیشتر است. تنها ظرفی که گنجایش آن دو واحد از مضربی از ۳ بیشتر است عبارت است از: ظرف به‌گنجایش ۲۳ لیتر. بنابراین، این ظرف باید خالی مانده باشد و بقیّهٔ ظرفها پر باشند. مجموع گنجایش ظرفهای پر عبارت است از ۱۱۴ لیتر. ثلث این مقدار گنجایش ظرفهای مملو از آب است. یعنی گنجایش آن ظرفها برابر ۳۸ لیتر است، بنابراین ظرفهای ۱۶ و ۱۸ لیتر از آب و بقیّه از بنزین پر شده‌اند.

اثبات درستی قوانین مقدماتی تسویر

غلامرضا یاسی‌پور

برای تشکیل دادن اثباتهای صوری درستی در مورد استدلالاتی که توسط سورها و توابع گزاره‌ای، علامتی شده‌اند، باید فهرست قوانین استنتاجمان را افزایش دهیم. برای این منظور چهار قانون حاکم بر تسویر را به فهرست اضافه می‌کنیم و گزارش مقدماتی بسیار ساده‌ای از آنان را در این بخش به دست می‌دهیم، و تنظیم کاملتر را برای بعد می‌گذاریم.

۱. تمثیل عمومی (توصیف مقدماتی) : به علت این که تسویر عمومی یک تابع گزاره‌ای اگر و فقط اگر تمام مثالهای جانشین آن تابع گزاره‌ای راست باشند، راست است، می‌توانیم به فهرست قوانین استنتاجمان این اصل را که هر مثال جانشین یک تابع گزاره‌ای را می‌توان به درستی از تسویر عمومیش استنتاج کرد، اضافه کنیم. این قانون را می‌توانیم به طور علامتی به صورت :

$(x)\ \varphi x$

$\therefore \varphi V$

که در آن V علامت فرد دلخواهی است، بیان کنیم. از آن جا که این قانون اجازه می‌دهد مثالهای جانشین از تسویرهای عمومی استنتاج شوند، به آن به عنوان «اصل تمثیل عمومی[1]» اشاره، و آن را به صورت «UI» خلاصه می‌کنیم[2]. به این ترتیب افزودن UI مجازمان می‌کند که اثبات صوری درستی استدلال : «تمام انسانها میرا هستند؛ سقراط انسان است؛ بنابراین سقراط میراست» ، را به ترتیب زیر به دست دهیم:

۱. $(x)\ [Hx \Rightarrow Mx]$

۲. Hs $\quad$ / $\therefore$ Ms

۳. $Hs \Rightarrow Ms$ $\quad$ ۱ ، UI

۴. Ms $\quad$ ۲ ، ۳ ،M.P.

۲. تعمیم عمومی (توصیف مقدماتی) : قانون بعدیمان را می‌توانیم با شباهتی که با روش ریاضی نسبتاً استاندارد زیر دارد توضیح دهیم. ممکن است هندسه‌دانی اثباتی را با گفتن این که «فرض می‌کنیم : ABC مثلث منتخب دلخواهی باشد» آغاز و بعد اثبات کند که مثلث ABC فلان صفت مشخص را دارد و در آخر نتیجه بگیرد که تمام مثلثها آن صفت را دارند. در این صورت نتیجهٔ نهاییش چگونه توجیه می‌شود؟ و چرا از مثلث ABC که خاصیت مشخصی را داراست نتیجه می‌شود که تمام مثلثها دارای آن خاصیت هستند؟ جواب این است که اگر هیچ فرضی جز مثلث بودن در مورد ABC در نظر گرفته نشده باشد، در این صورت عبارت «ABC» می‌تواند برای نمایش هر مثلثی که مایل باشیم در نظر گرفته شود و اگر استدلال بر این قرار باشد که هر مثلث باید دارای صفت مورد بحث باشد، در این صورت نتیجه می‌شود که تمام مثلثها دارای این صفت هستند. اکنون علامتی شبیه علامت این هندسه در اشاره به «هر مثلث منتخب دلخواه» معرفی می‌کنیم، و در این مورد حرف کوچک به کار نرفتهٔ «y» را برای نمایش دادن هر فرد به طور دلخواه انتخاب شده به کار خواهیم برد.

در این استعمال عبارتِ «φy» مثال جانشین تابع گزاره‌ای «φx» است، و ادعا می‌کند که هر فرد به طور دلخواه انتخاب شده دارای خاصیت φ است. واضح است که «φy» به درستی از «$(x)\ \varphi x$» توسط UI نتیجه می‌شود؛ زیرا آنچه که در مورد تمام افراد راست باشد در مورد هر فرد به دلخواه انتخاب شده نیز راست است. این استنتاج به طور مساوی در

جهت دیگر نیز درست است، زیرا آنچه که در مورد هر فرد به دلخواه انتخاب شده راست است باید در مورد تمام افراد راست باشد. باز هم فهرست قوانین استنتاجمان را، با افزودن این اصل که تسویر عمومی یک تابع گزاره‌ای را می‌توان بدرستی از مثال جانشینش نسبت به علامت «y» استنتاج کرد افزایش می‌دهیم. از آن جا که این قانون استنتاج قضایای کُلّیی که تسویرهای عمومی‌اند را مجاز می‌کند، به آن به عنوان «اصل تعمیم عمومی[3]» رجوع، و آن را به صورت «UG» مختصر می‌کنیم. عبارت علامتیمان در مورد این قانون تسویر دوم چنین است :

φ y

$\therefore$ (x) φ x

که در آن «y» نمایشگر هر فرد به دلخواه انتخاب شده‌ای است، می‌باشد.

می‌توانیم این علامت جدید و این قانون اضافه یعنی UG را در تشکیل اثبات صوری درستی استدلال زیر بکار بریم: «هیچ میرایی کامل نیست؛ تمام انسانها میرا هستند؛ بنابراین انسانها کامل نیستند.»

۱. (x) [Mx ⇒ ~Px]	
۲. (x) [Hx ⇒ Mx] /∴ (x) [Hx ⇒ ~Px]	
۳. Hy ⇒ My	۲ ، UI
۴. My ⇒ ~Py	۱ ، UI
۵. Hy ⇒ ~Py	۳ ، ۴ ، H . S .
٦. (x)[Hx ⇒ ~Px]	۵ ، UG

۳ . تعمیم وجودی (توصیف مقدماتی) : به این علت که تسویر وجودی یک تابع گزاره‌ای راست است اگر و تنها اگر آن تابع گزاره‌ای دارای حداقل یک مثال جانشین راست باشد، می‌توانیم به فهرست قوانین استنتاجمان این اصل را که تسویر وجودی یک تابع گزاره‌ای را می‌توان به درستی از هر مثال جانشین آن تابع گزاره‌ای استنتاج کرد، بیفزاییم. این قانون، استنتاج قضایای عمومیی را که به طور وجودی تسویر یافته‌اند، مجاز می‌کند، بنابراین آن را «اصل تعمیم وجودی[4]» می‌نامیم و به صورت «EG» مختصر می‌کنیم. تنظیم علامتی این اصل به صورت زیر است :

φ V

$\therefore$ (∃x) φ x

که در آن V هر علامت فردیی است.

۴ . تمثیل وجودی (توصیف مقدماتی) : به یک قانون تسویر دیگر نیاز است. تسویر وجودی یک تابع گزاره‌ای اظهار می‌کند که حداقل یک فرد موجود است که قرار دادن نام آن به جای متغیر «x» در آن تابع گزاره‌ای، مثال جانشین راستی از آن به دست می‌دهد. البته ممکن است که چیز دیگری در مورد آن فرد ندانیم، اما می‌توانیم ثابت فردی دیگری جز «y» ؛ مثلاً «W» ، که قبلاً در آن زمینه رخ نداده در نظر بگیریم، و آن را برای نمایش دادن آن فرد، یا یکی از افرادی که وجودش توسط آن تسویر وجودی اظهار شده، بکار بریم. با دانستن این که چنین فردی موجود است، و با موافقت کردن در نمایش آن با «W» ، می‌توانیم از تسویر وجودی یک تابع گزاره‌ای مثال جانشین آن تابع گزاره‌ای را نسبت به علامت فردی «W» استنتاج کنیم. به این ترتیب به عنوان آخرین قانون تسویرمان این اصل را بیفزاییم که از تسویر وجودی یک تابع گزاره‌ای، می‌توانیم راستی مثال جانشینش را نسبت به یک ثابت فردی که قبلاً در آن زمینه رخ نداده است، به درستی استنتاج کنیم. این قانون جدید را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

(∃ x) φ x

$\therefore$ φ V

که در آن V ثابتی فردی است، جز «y» ، که قبلاً در بحث ظاهر نشده است. به این قانون به عنوان «**اصل تمثیل وجودی**[5]» اشاره و آن را به صورت «EI» مختصر می‌کنیم.

از دو قانون تسویر اخیر در تشکیل اثبات صوری درستی استدلال: «تمام سگها گوشتخوارند؛ بعضی حیوانات سگ‌اند؛ بنابراین بعضی حیوانات گوشتخوارند» استفاده می‌کنیم.

[سگ : D ، گوشتخوار : C ، حیوان : A]

۱. (x) [Dx ⇒ Cx]	
۲. (∃x) [Ax ∧ Dx] /∴	(∃x) [Ax ∧ Cx]
۳. Aw ∧ Dw	۲ ، EI
۴. Dw ⇒ Cw	۱ ، UI
۵. Dw ∧ Aw	۳ ، com .
٦. Dw	۵ ، simp .
۷. Cw	۴ ، ٦ ، M . P .
۸. Aw	۳ ، simp.
۹. Aw ∧ Cw	۸ ، ۷ ، conj .
۱۰. (∃ x) [Ax ∧ Cx]	۹ ، EG

می‌توانیم لزوم محدودیت بیان شده در مورد استفاده از EI را با بررسی استدلال واضحاً نادرست زیر نشان دهیم: «بعضی گربه‌ها حیوان‌اند؛ بعضی سگها حیوان‌اند؛ بنابراین بعضی گربه‌ها سگ‌اند» . در این مورد اگر از محدودیت مربوط به EI که مثال جانشین حاصل از آن تنها می‌تواند شامل ثابت فردیی که قبلاً در زمینهٔ بحث رخ نداده باشد، صرف نظر کنیم، ممکن است به تشکیل «اثبات» زیر رهمنون شویم:

[گربه: C، حیوان: A، سگ: D]

۱. $(\exists x)\ [Cx \wedge Ax]$

۲. $(\exists x)\ [Dx \wedge Ax]$ / ∴ $(\exists x)\ [Cx \wedge Dx]$

۳. $Cw \wedge Aw$ — ۱، EI

۴. $Dw \wedge Aw$ — ۲، EI

۵. Cw — ۳، simp .

۶. Dw — ۴، simp .

۷. $Cw \wedge Dw$ — ۵، ۶، conj .

۸. $(\exists x)\ [Cx \wedge Dx]$ — ۷، EG

در اینجا اشتباه در سطر ۴ رخ داده است. مقدمهٔ دوم اطمینان می‌دهد که حداقل یک شیء موجود است که هم سگ و هم حیوان است. ولی ما مجاز نیستیم که از علامت «w» برای نمایش دادن آن شیء استفاده کنیم زیر قبلاً «w» را برای نمایش دادن یکی از اشیایی که در مقدمهٔ اوّل ادعا شده است که هم گربه و هم سگ حیوان‌اند به کار برده‌ایم. برای اجتناب از خطاهایی نظیر این خطا باید از محدودیت مقرر در کاربرد EI پیروی کنیم. باید توجه شود که هرگاه در اثباتی هم EI و هم UI در تمثیل نسبت به یک ثابت فردی به کار رود، باید اوّل EI را به کاربریم. (چنین پیشنهاد شده که می‌توانیم از لزوم به کار بردن EI قبل از UI با تغییر محدودیت روی EI به صورت «که در آن U ثابتی فردی، غیر از «y» ، است که در زمینهٔ بحث با هیچ یک از استفاده‌های قبلی از EI معرفی نشده است» اجتناب کنیم. اما حتی این صورت نیز جدا از دوری بودن آشکارش از تشکیل «اثبات صوری درستی» خطاآمیز در مورد استدلالی نادرست چون «بعضی انسانها زیبا هستند. سقراط انسان است. بنابراین سقراط زیباست» جلوگیری نمی‌کند.)

چهار قانون تسویر UI، UG، EG، و EI را مانند قوانین استنتاج نه گانهٔ قبلاً ذکر شده، می‌توان فقط در مورد سطرهای کامل اثبات به کاربرد.

هر فرض با برد محدود را می‌توان در یک اثبات شرطی درستی به کاربرد، و بخصوص در گرفتن فرضی به صورت «φy» آزادیم. بدین ترتیب درستی استدلال «تمام دانشجویان سال اوّل و دوم دانشگاه دعوت شده‌اند و از آنها پذیرایی می‌شود؛ بنابراین تمام دانشجویان سال اوّل دعوت شده‌اند» با استفاده از اثبات شرطی زیر ثابت می‌شود:

[F: دانشجوی سال اوّل، S: دانشجوی سال دوم، I: دعوت داشتن W: پذیرایی شدن]

۱. $(x)\ [(Fx \vee Sx) \Rightarrow (Ix \wedge Wx)]$ / ∴ $(x)\ [Fx \Rightarrow Ix]$

۲. Fy

۳. $(Fy \vee Sy) \Rightarrow (Iy \wedge Wy)$ — ۱، UI

۴. $Fy \vee Sy$ — ۲، Add .

۵. $Iy \wedge Wy$ — ۳، ۴، M . P .

۶. Fy — ۵، simp

۷. $Fy \Rightarrow Iy$ — ۲-۶، C . P .

۸. $(x)\ [Fx \Rightarrow Ix]$ — ۷، UG

در اثبات درستی استدلالات شامل تسویرات، همان طور که در مثال زیر ملاحظه می‌شود می‌توان بیش از یک فرض با برد محدود در نظر گرفت:

۱. $(x)[(Ax \vee Bx) \Rightarrow (Cx \wedge Dx)]$

۲. $(x)\ \{(Cx \vee Ex) \Rightarrow [(Fx \vee Gx) \Rightarrow Hx]\}$

/∴ $(x)\ [Ax \Rightarrow (Fx \Rightarrow Hx)]$

۳. $(Ay \vee By) \Rightarrow (Cy \wedge Dy)$ — ۱، UI

۴. $(Cy \vee Ey) \Rightarrow [(Fy \vee Gy) \Rightarrow Hy]$ — ۲، UI

۵. $Fy \Rightarrow Hy$

۶. $Ay \vee By$ — ۵، Add .

۷. $Cy \wedge Dy$ — ۳، ۶، M . P .

۸. Cy — ۷، simp .

۹. $Cy \vee Ey$ — ۸، Add .

۱۰. $(Fy \vee Gy) \Rightarrow Hy$ — ۴، ۹، M . P.

۱۱. Hy

۱۲. $Fy \vee Gy$ — ۱۱، Add .

۱۳. Fy — ۱۰، ۱۲، M . P.

۱۴. Ay — ۱۱-۱۳، C . P .

۱۵. $Ay \Rightarrow [Fy \Rightarrow Hy]$ — ۵-۱۴، C . P .

$16.\ (x)[Ax \Rightarrow (Fx \Rightarrow Hx)]$ ۱۵ ، UG

مرجع :

Symbolic Logic
Irving M. Copi

یادداشتها:

1 . Principle of Universal Instantiation

۲ . این قانون و سه قانونی که بعد می آیند قوانین مختلف «قیاس طبیعی» «natural deduction»اند که در سال ۱۹۳۴ میلادی توسط گرهارد گنتزن «Gerhard Gentzen» و مستقل از او استانیسلاو یا شکوفسکی «Stanislaw Jas´kowsky» طرح شده‌اند.

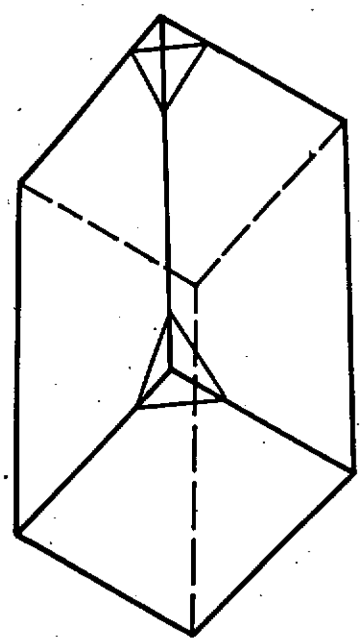
3. Principle of Universal Generalization

4. Principle of Existential Generalization

5. Principle of Existential Instantiation

تفریح اندیشه ۲

هر گوشهٔ منشور مربع‌القاعده‌ای را بریده‌ایم. دوبرش از هشت برش ممکن را نشان داده‌ایم. شکل جدید دارای چند یال است؟



جواب در صفحهٔ ۸۸

ادب ریاضی

عدد اصم [alogos] عددی است که نمی‌توان آن‌را به‌صورت صحیح به‌وسیلهٔ اعداد دیگر تعبیر کرد؛ ابتدای این اکتشاف به‌صورت هندسی در آن هنگام بود که دریافتند قطر مربع واحد را نمی‌توان با ضلع یا اجزای آن هر اندازه هم که کوچک اختیار شده باشد اندازه گرفت.

آیا راه اثبات این اصم بودن چگونه است؟ روایتی را که در این‌باره است ارسطو نقل می‌کند، و راه اثبات آن‌را برهان خلف [reductio ad absurdum] می‌داند، این برهان به اندازه‌یی کوتاه و ساده است که ما آن‌را عیناً در این‌جا نقل می‌کنیم:

اگر مربعی با ضلع a و قطر c در دست باشد، می‌خواهیم ثابت کنیم که c و a نسبت به یکدیگر اندازه ناپذیرند. فرض کنیم که چنین نباشد و نسبت c/a میان آنها را به ساده‌ترین صورت با γ/α نمایش دهیم، که بنابرآن $c^2/a^2 = \gamma^2/\alpha^2$ می‌شود؛ ولی $c^2 = 2a^2$ و در نتیجه $\gamma^2 = 2\alpha^2$ خواهد شد، به این ترتیب بایستی γ^2 و همچنین γ زوج و α فرد باشد. اگر γ زوج باشد می‌توان چنین نوشت: $\gamma = 2\beta$ و از آن‌رو: $2\alpha^2 = 4\beta^2$ و $\gamma^2 =$ و $\alpha^2 = 2\beta^2$ و نتیجه رابطهٔ اخیر آن است که α^2 و α باید زوج باشد. از این قرار α در آن واحد باید هم زوج باشد و هم فرد و این ممتنع و بالنتیجه فرضی که در ابتدا شده بود باطل است، یعنی c/a اندازه‌ناپذیر است.

تاریخ علم ـ احمد آرام

عمل حاصل‌ضرب دکارتی بین مجموعه‌ها

مورد استفاده دانش‌آموزان سال دوّم ریاضی و سوّم ریاضی نظام جدید

● حمیدرضا امیری

در ریاضیات جدید سال اول با سه عملِ اجتماع، اشتراک و تفاضل بین مجموعه‌ها آشنا شدید. در این مقاله عمل دیگری به نام حاصل ضرب دکارتی یا کارتزین بین هر دو مجموعهٔ دلخواه تعریف کرده و به بررسی خواص و نتایج آن می‌پردازیم ـ ان شاءَالله... ـ در مقاله‌های بعدی خواهید دید که براساس همین تعریف به تعریف رابطه و تابع خواهیم رسید.

ابتدا نیاز داریم زوج مرتب را تعریف کنیم، هر دو شیء مانند x و y تشکیل یک زوج می‌دهند و اگر برای این زوج ترتیب نیز قائل شویم به آنها یک زوج مرتب گفته و به صورت (x , y) نمایش می‌دهیم. بلافاصله از تعریف چنین برمی‌آید که در حالت کلّی ممکن است زوج مرتب (x , y) با (y , x) برابر نباشند (زیرا ترتیب قرار گرفتن آنها فرق دارد). لازم به تذکر است در هر مبحث اعضای آن مبحث، اشیای آن بحث می‌باشند مثلاً در مبحث حساب هر عدد یک شیء ریاضی است، یا در بحث مجموعه‌ها، هر مجموعه یک شیء محسوب می‌شود و نیز هر زوج مرتب می‌تواند یک شیء باشد. تذکر دیگر اینکه در زوج مرتب (x , y)، x را مؤلفهٔ اول و y را مؤلفهٔ دوم می‌نامیم.

تعریف تساوی بین دو زوج مرتب: دو زوج مرتب با یکدیگر مساوی‌اند اگر و فقط اگر مؤلفه به مؤلفه با هم برابر باشند (مؤلفه‌های نظیر با هم برابر باشند). یا به عبارت دیگر:

$$(x , y) = (z , t) \Leftrightarrow x = z \ \& \ y = t$$

مثال ۱: هرگاه داشته باشیم $(x - y, ۲x - ۲)=(۲y + ۳ , x + y)$ در این صورت مقادیر x و y را به دست آورید.

حل: با توجه به تعریف فوق و با توجه به تساوی بین دو زوج باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} x - y = ۲y + ۳ \\ ۲x - ۲ = x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - ۳y = ۳ \\ x - y = ۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{-۱}{۲} \quad , \quad x = \frac{۳}{۲}$$

مثال ۲: در صورتی که داشته باشیم:

$$(\{۱ , x , z - ۱\} , (y - ۴ , ۷)) = (\{۴ , ۱ , z\} , (۵ , t^۲))$$

مطلوب است محاسبهٔ مقادیر x ، y ، z و t .

حل: طبق تعریف می‌بایست مؤلفه‌های اول این دو زوج که هر کدام یک مجموعهٔ ۳ عضوی است با هم برابر باشند و چون همواره $z \neq z - ۱$ پس باید $x = z$ و $z - ۱ = ۴$ یا $z = ۵$ که نتیجه می‌دهد $x = z = ۵$ و نیز باید مؤلفه‌های دوم نیز برابر باشند یعنی باید $(y - ۴ , ۷) = (۵ , t^۲)$ که بلافاصله نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} y - ۴ = ۵ \Rightarrow y = ۹ \\ ۷ = t^۲ \Rightarrow t = \pm\sqrt{۷} \end{cases}$$

مثال ۳: مقادیر x و y را چنان تعیین کنید که دو زوج مرتبِ $(۳x^۲ + ۱ , ۲y^۲ - y)$ و $(۴x , y^۲ + ۶y + ۳۰)$ باهم برابر

باشند.

حل: شرط تساوی این دو زوج مرتب آن است که:

$$\begin{cases} ۳x^۲ + ۱ = ۴x \\ ۲y^۲ - y = y^۲ + ۶y + ۳۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۳x^۲ - ۴x + ۱ = ۰ \\ y^۲ - ۷y - ۳۰ = ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳(x - ۱)(x - \frac{۱}{۳}) = ۰ \\ (y + ۳)(y - ۱۰) = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \quad \text{یا}\ x = \frac{۱}{۳} \\ y = -۳ \quad \text{یا}\ y = ۱۰ \end{cases}$$

جوابهای فوق ۴ دسته جواب به صورت

$$\begin{cases} x = ۱ \\ y = -۳ \end{cases} \text{یا} \begin{cases} x = ۱ \\ y = ۱۰ \end{cases} \text{یا} \begin{cases} x = \frac{۱}{۳} \\ y = -۳ \end{cases} \text{یا} \begin{cases} x = \frac{۱}{۳} \\ y = ۱۰ \end{cases}$$

برای ما حاصل می‌کنند، که در هر حالت تساوی بین دو زوج برقرار است.

حال برمی‌گردیم و به سراغ حاصل ضرب دکارتی می‌رویم، $A\times B$ را حاصل ضرب دکارتی A در B نامیده که A و B دو مجموعهٔ دلخواه بوده و حاصلِ چنین عملی مجموعه‌ای است که به شکل زیر تعریف می‌شود:

$A \times B = \{(x , y) \mid x \in A \ \wedge y \in B\}$

همانطور که از تعریف مشخص است $(A \times B)$ مجموعه‌ای است متشکل از زوجهای مرتب که مؤلفهٔ اوّل همهٔ آنها متعلق به مجموعهٔ A و مؤلفهٔ دوم آنها متعلق به مجموعهٔ B است.

مثال ۴: اگر $A = \{a,b,c\}$ و $B = \{۲,۴,۶\}$ مطلوب است محاسبهٔ $(A \times B)$ و $(B \times A)$.

$A \times B = \{(a,۲),(a,۴),(a,۶),(b,۲) , (b,۴) , (b,۶),(c,۲) , (c,۴) , (c,۶)\}$

$B \times A = \{(۲,a),(۴,a),(۶,a),(۲,b) , (۴,b) , (۶,b),(۲,c) , (۴,c) , (۶,c)\}$

نکتهٔ ۱: می‌توان حاصل ضرب یک مجموعه را در خودش به صورت زیر نوشت:

$A \times A = A^۲ = \{(x , y) \mid x \in A \ \wedge y \in A\}$

در مثال ۴ داریم:

$A^۲ = A \times A = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a) , (c,b) , (c,c)\}$

نکتهٔ ۲: اگر A یک مجموعهٔ m عضوی و B یک مجموعهٔ k عضوی باشد در این صورت $(A \times B)$ دارای $m \times k$ عضو است، یا به بیان ریاضی،

$(n(A) = m \wedge n(B) = k) \implies n(A \times B) = mk$

نکتهٔ ۳: عمل حاصل ضرب را می‌توان به صورتهای زیر بین مجموعه‌های متفاوت تعریف کرده و تعمیم دهیم:

الف) $A\times(B\times C) = \{(x,(y,z)) \mid x \in A \wedge (y,x) \in (B\times C)\}$

ب) $(A \times B) \times (C \times D) = \{((x , y) , (z , t)) \mid (x , y)\in A \times B \wedge (z , t)\in C \times D\}$

ج) $A^۲ \times A^۲ = \{((x,y),(z,t)) \mid (x,y) \in A^۲ \wedge (z,t) \in A^۲\}$

نکتهٔ ۴: اگر زوج مرتب (x , y) متعلق به $(A \times B)$ باشد فقط می‌توان نتیجه گرفت که، $x \in A$ و $y \in B$ امّا، در صورتی که (x,y) در $(A \times B)$ نباشد، در سه حالت ممکن است این اتفاق رخ دهد و برعکس، هر کدام از این سه حالت پیش آید بلافاصله نتیجه می‌گیریم که (x , y) در $(A \times B)$ نیست، یعنی:

$$(x , y) \notin (A \times B) \iff \begin{cases} x \notin A \ \wedge y \in B \\ x \in A \ \wedge y \notin B \\ x \notin A \ \wedge y \notin B \end{cases}$$

به عنوان مثال اگر B مجموعهٔ دلخواهی باشد و $A = \{۲ , ۴\}$ در این صورت $(۳, x) \notin A \times B$ (به ازای هر x) زیرا $۳ \notin A$.

و اگر $(۲, t) \notin A \times B$ چون $۲ \in A$ پس باید $t \notin B$.

مسألهٔ ۱: ثابت کنید برای هر مجموعهٔ دلخواه مانند A،

$A \times \varnothing = \varnothing \times A = \varnothing$

اثبات: فرض کنیم $A \times \varnothing \neq \varnothing$ (فرض خُلف) بنابراین داریم:

$\exists (x , y) \in (A \times \varnothing) \implies x \in A \ \wedge y \in \varnothing$

و گزارهٔ $y \in \varnothing$ همواره نادرست بوده و تالیِ گزارهٔ شرطی فوق که از فرض خلف حاصل شده، ارزش نادرست داشته و کلِ گزارهٔ شرطی نادرست خواهد شد (مقدم را درست فرض کرده‌ایم)، یعنی نمی‌تواند (x , y) ای در $(A \times \varnothing)$ موجود باشد که با فرض تناقض

دارد، زیرا فرض کرده بودیم که $A \times \varnothing \neq \varnothing$ ، بنابراین همواره باید $A \times \varnothing = \varnothing$ و به همین ترتیب ثابت می‌شود $\varnothing \times A = \varnothing$.

نتیجهٔ ۱ : تنها مجموعه‌ای که حاصل ضرب دکارتی در خودش برابر با خودش خواهد شد، مجموعهٔ تُهی است یعنی: $\varnothing \times \varnothing = \varnothing$.

نتیجهٔ ۲ : همواره داریم:

$$(A \times B) = \varnothing \iff A = \varnothing \vee B = \varnothing$$

اثبات :

زیرا اگر $A \neq \varnothing$ و $B \neq \varnothing$ پس

$$\exists x \in A \wedge \exists y \in B \implies \exists (x , y) \in (A \times B)$$

وچنین مطلبی با فرض $A \times B = \varnothing$ تناقض دارد پس حکم ثابت است.

نتیجهٔ ۳ : همواره داریم:

$$n (A \times B) = 0 \iff A = \varnothing \vee B = \varnothing$$

مسألهٔ ۲ : ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آنکه $A \times B = B \times A$ آن است که $A = B$ یا $A = \varnothing$ یا $B = \varnothing$.

$$A \times B = B \times A \iff A = B \vee \underbrace{A = \varnothing \vee B = \varnothing}_{n (A\times B) = 0}$$

اثبات :

شرط لازم : اگر $A = B$ واضح است که $A \times B = B \times A$ (به جای A ، B قرار می‌دهیم) اگر $A = \varnothing$ پس:

$$\left.\begin{array}{l} A \times B = \varnothing \times B = \varnothing \\ B \times A = B \times \varnothing = \varnothing \end{array}\right\} \implies A \times B = B \times A$$

و به همین قیاس اگر $B = \varnothing$، حکم ثابت می‌شود.

شرط کافی : حال فرض کنیم $A \times B = B \times A$، اگر $A = \varnothing$ یا $B = \varnothing$ که حکم ثابت است (زیرا حکم گزاره‌ای با ترکیب فصلی است) پس فرض می‌کنیم $A \neq \varnothing$ و $B \neq \varnothing$ و ثابت می‌کنیم که باید $A = B$.

چون A و B ناتهی هستند لذا می‌توان x دلخواهی از A و y دلخواهی از B گرفته و ثابت می‌کنیم x در B و y در A بوده و برعکس.

$$\begin{aligned} &[x \in A \wedge y \in B \iff (x , y) \in (A \times B) \overset{(A\times B)=(B\times A)}{\iff} \\ &(x , y) \in (B \times A) \iff x \in B \wedge y \in A] \implies A = B \end{aligned}$$

مسألهٔ ۳ : ثابت کنید هرگاه $A \neq \varnothing$ آنگاه :

$$(A \times B) \subset (A \times C) \iff B \subset C$$

اثبات :

ابتدا فرض می‌کنیم $B \subset C$ بنابراین:

$$\begin{aligned} &[\text{اگر } (x , y) \in (A \times B) \implies x \in A \wedge y \in B \overset{B \subset C}{\implies} \\ &x \in A \wedge y \in C \implies (x , y) \in (A \times C)] \implies \\ &(A \times B) \subset (A \times C) \end{aligned}$$

حال فرض کنیم $(A \times B) \subset (A \times C)$، ثابت می‌کنیم $B \subset C$. برای نیل به این هدف عضو دلخواهی مانند y از B فرض کرده و ثابت می‌کنیم $y \in C$.

$$\begin{aligned} &A \neq \varnothing \implies \exists x \in A \implies x \in A \wedge \underline{y \in B} \overset{y \text{ دلخواه}}{\implies} \\ &(x,y) \in (A\times B) \overset{(A\times B)\subset(A\times C)}{\implies} (x,y) \in (A\times C) \implies x\in A \wedge \underline{y\in C} \end{aligned}$$

و چون $y \in B$ دلخواه بوده و ثابت شد $y \in C$ پس باید $B \subset C$.

مسألهٔ ۴ : ثابت کنید برای هر چهار مجموعهٔ دلخواه مانند A و B و C و D داریم:

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

اثبات :

$$\begin{aligned} &[\text{فرض کنیم } (x , y) \in (A \times B) \cap (C \times D) \overset{\text{تعریف } \cap}{\iff} \\ &(x , y) \in (A \times B) \wedge (x , y) \in (C \times D) \iff \\ &(x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in C \wedge y \in D) \overset{\text{جابجایی و شرکت‌پذیری}}{\iff} \\ &(x \in A \wedge x \in C) \wedge (y \in B \wedge y \in D) \iff \\ &x \in (A \cap C) \wedge y \in (B \cap D) \iff \\ &(x , y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)] \implies \\ &(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D) \end{aligned}$$

نتیجهٔ ۴ : با توجه به اینکه:

$$n (E \cup F) = n (E) + n (F) - n (E \cap F)$$

وباتوجه‌به‌این‌نکته‌که $n (A \times B) = n (B \times A)$ ومسألهٔ قبل داریم:

$$\begin{aligned} &n [(A \times B) \cup (B \times A)] = n (A \times B) + n (B \times A) - \\ &n [(A \times B) \cap (B \times A)] = n (A \times B) + n (A \times B) - \end{aligned}$$

$$n\,[(A\cap B)\times \underbrace{(B\cap A)}_{(A\cap B)}] = ۲n\,(A\times B) - n\,(A\cap B)^{۲}$$
$$= ۲n\,(A\times B) - n\,(A\cap B)\times n\,(A\cap B)$$
$$= ۲n\,(A\times B) - [n\,(A\cap B)]^{۲}$$

مثال ۵: اگر $A = \{۲, ۴, ٦, ۸\}$ و $B = \{۲, ٦, ۳, ۹\}$ در این صورت:

$$n[(A\times B)\cup(B\times A)] = ۲n(A\times B) - [n(A\cap B)]^{۲}$$
و $A\cap B = \{۲, ٦\} \Longrightarrow n\,(A\times B)\cup(B\times A)$
$$= (۲\times ۱٦) - ۲^{۲} = ۲۸$$

مسألهٔ ۵: هرگاه A و B هر دو زیرمجموعه‌های مجموعهٔ مرجع M باشند ثابت کنید:

$$(A\times B)' = (A'\times B)\cup(A\times B')\cup(A'\times B')$$

اثبات:

با توجه به نکته ۴ و به روش عضوگیری داریم:

فرض کنیم $(x, y)\in(A\times B)' \Longleftrightarrow (x, y)\notin(A\times B)$
$$\Longleftrightarrow (x\notin A \wedge y\in B)\vee(x\in A \wedge y\notin B)\vee(x\notin A \wedge y\notin B)$$
$$\Longleftrightarrow (x\in A' \wedge y\in B)\vee(x\in A \wedge y\in B')\vee(x\in A' \wedge y\in B')$$
$$\Longleftrightarrow (x,y)\in(A'\times B)\vee(x,y)\in(A\times B')\vee(x,y)\in(A'\times B')$$
$$\Longleftrightarrow (x, y)\in[(A'\times B)\cup(A\times B')\cup(A'\times B')]$$

و چون عضو دلخواهی را از سمت چپ به سمت راست رسانیدیم و برعکس، بنابراین تساوی برقرار است و اثبات تمام است.

مسألهٔ ٦: ثابت کنید برای هر ۳ مجموعهٔ دلخواه مانند A و B و C داریم:

الف) $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$

ب) $A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$

ج) $A\times(B-C) = (A\times B)-(A\times C)$

اثبات:

قسمت (ب) و (ج) را اثبات کرده و (الف) را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم:

ب) فرض می‌کنیم $(x,y)\in[A\times(B\cap C)] \Longleftrightarrow x\in A\wedge y\in(B\cap C)$
$$\Longleftrightarrow x\in A \wedge (y\in B \wedge y\in C)$$

چون همواره $P\wedge P\equiv P$ پس $(x\in A\wedge x\in A)\equiv x\in A$، بنابراین
$$\Longleftrightarrow (x\in A \wedge x\in A)\wedge(y\in B \wedge y\in C)$$

شرکت‌پذیری و جابجایی
$$\Longleftrightarrow (x\in A \wedge y\in B)\wedge(x\in A \wedge y\in C)$$
$$\Longleftrightarrow (x,y)\in(A\times B)\wedge(x,y)\in(A\times C)$$
$$\Longleftrightarrow (x,y)\in[(A\times B)\cap(A\times C)]$$

و چون روبط همگی دوطرفه هستند، تساوی برقرار است.

ج) فرض کنیم $(x,y)\in[A\times(B-C)] \Longleftrightarrow x\in A\wedge y\in(B-C)$
$$\Longleftrightarrow x\in A \wedge (y\in B \wedge y\notin C)$$
$$\Longleftrightarrow (x\in A \wedge x\in A)\wedge(y\in B \wedge y\notin C)$$

جابجایی وشرکت‌پذیری
$$\Longleftrightarrow (x\in A \wedge y\in B)\wedge(x\in A \wedge y\notin C)$$
$$\Longleftrightarrow (x,y)\in(A\times B)\wedge(x,y)\notin(A\times C)$$
$$\Longleftrightarrow (x, y)\in[(A\times B)-(A\times C)]$$

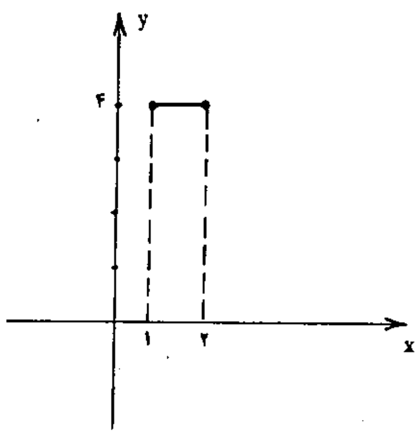
و چون روابط دوطرفه هستند، تساوی برقرار است.

مسألهٔ ۷: اگر $A = \{x\in IR \mid ۱\le x\le ۲\}$ و $B = \{۴\}$ در این صورت $(A\times B)$ چه شکلی را در صفحه مختصات دکارتی تولید می‌کند؟

حل:

$$A\times B = \{(x,y) \mid x\in A\wedge y\in B\}$$
$$= \{(x,y) \mid ۱\le x\le ۲ \wedge y = ۴\}$$
$$= \{(۱,۴),\dots,(۱/۱,۴),(۱/۰۱,۴),\dots,(۲,۴)\}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود مجموعهٔ $(A\times B)$ شامل همهٔ نقاطی از صفحهٔ مختصات دکارتی است که طول آن نقاط هر عدد حقیقی بین ۱ و ۲ می‌تواند باشد ولی عرض همهٔ نقاط ثابت و برابر ۴ می‌باشد پس شکل حاصل از وصل این بی‌نهایت نقطه به یکدیگر، پاره‌خطی است به طول ۱ و به عرض ۴، از مبدأ، مطابق شکل زیر:



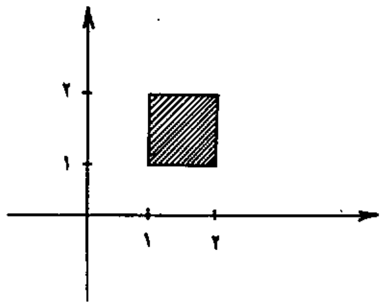
مسألهٔ ۸: با توجه به مسألهٔ ۷ نمودار $(A \times A)$ را مشخص کنید.

حل:

$A = \{x \in IR \mid ۱ \leq x \leq ۲\}$

$\Longrightarrow A \times A = \{(x,y) \mid ۱ \leq x \leq ۲ \wedge ۱ \leq y \leq ۲\}$

در واقع $(A \times A)$ مجموعهٔ نقاطی از صفحه است که طول و عرض این نقاط در داخل و روی مربعی به طول واحد و به شکل زیر، تغییر می‌کنند.



مسألهٔ ۹: اگر $A \subset E$ و $B \subset E$ ثابت کنید:

$(A \times E) \cap (E \times B) = (A \times B)$

اثبات:

با توجه به مسألهٔ ۴ داریم:

$(A \times E) \cap (E \times B) = (A \cap E) \times (E \cap B) = A \times B$

زیرا از $A \subset E$ نتیجه می‌گیریم $(A \cap E) = A$ و از $B \subset E$ نتیجه می‌شود $(E \cap B) = B$.

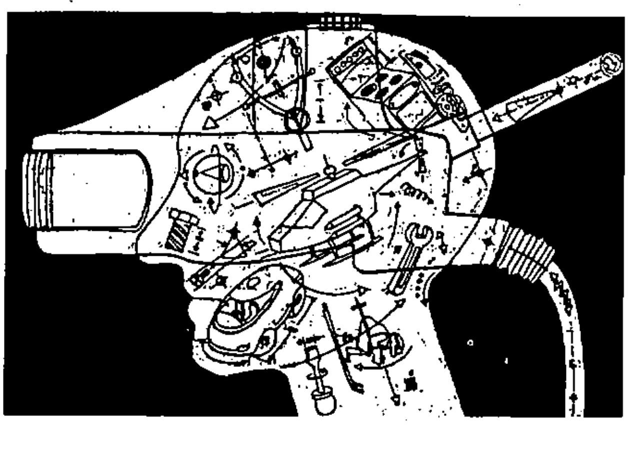
در شمارهٔ آیندهٔ مجله ـ ان‌شاءا... ـ راجع به رابطه‌ها و خواص رابطه‌ها نیز مطالبی خواهیم نوشت که امیدواریم مفید واقع شود.

والسلام

ادب ریاضی

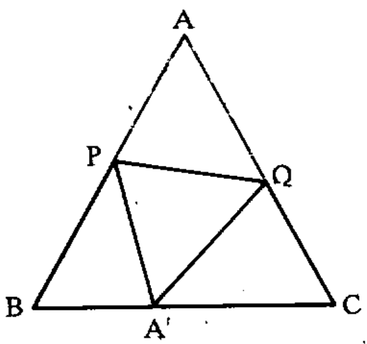
این که مردمی بی‌شعور قابلیت آن را دارند که بخوبی دستگاه‌های پیچ در پیچ صنعتی و فنی را بفهمند و آنها را به کار بیندازند، امری است که همیشه مایهٔ شگفتی من بوده است، و از آن بیشتر تعجب می‌کنم که چرا این گونه مردم نمی‌توانند مسائل بسیار ساده را درک کنند.

تاریخ علم . جورج سارتن ، احمد آرام



تفریح اندیشه ۳

مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را طوری تا کرده‌ایم که رأس A ی آن، چنان که در شکل نشان داده شده است، بر $\overline{BC}$ قرار گرفته است. اگر $BA' = ۱$ و $A'C = ۲$ ، آنگاه طول خط تا $\overline{PQ}$ ، چه قدر است؟



جواب در صفحهٔ ۸۸

طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روشهای مقدماتی (۹)

از کتاب:
Famous Problems

● ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور

مسألهٔ دلیان و تثلیث زاویه

۱. قضیهٔ کلی فصل پیشین[1] را در مورد مسألهٔ دلیان[2]، یعنی، مسألهٔ تضعیف مکعب[3] به کار می‌بریم. معادلهٔ این مسأله آشکارا به صورت زیر است:

$$x^3 = 2$$

این معادله تحویل‌ناپذیر است، زیرا در غیر این‌صورت $\sqrt[3]{2}$ دارای مقداری گویا خواهد شد. چه، معادلهٔ درجه سومی که تحویل‌پذیر است باید عامل خطی گویایی داشته باشد.

گذشته از این، درجهٔ معادله به صورت 2^n نیست؛ در نتیجه، معادلهٔ مورد بحث نمی‌تواند به کمک ریشه‌های دوم حل شود، و ترسیم هندسی آن با خط‌کش نامدرج و پرگار ناممکن است.

۲. بعد به بررسی معادلهٔ عمومیتر

$$x^3 = \lambda$$

می‌پردازیم، که λی آن پارامتری را، که ممکن است مقداری مختلط به صورت $a + ib$ نیز باشد، نشان می‌دهد. این معادله عبارتهای تحلیلی مربوط به مسأله‌های هندسی تضعیف مکعب و تثلیث زاویه[4]ای دلخواه را به دست می‌دهد.

این سؤال مطرح می‌شود که این معادله تحویل‌پذیر است، یعنی، یکی از ریشه‌های آن می‌تواند به صورت تابعی گویا از λ بیان شود یا خیر.

باید خاطرنشان کرد که تحویل‌ناپذیری یک عبارت همواره به مقادیر کمیتهایی بستگی دارد که طبق فرض معلومند.

در حالت $x^3 = 2$، با کمیتهای عددی سروکار داشتیم، و سؤال این بود که $\sqrt[3]{2}$ می‌تواند مقدار عددی گویایی را داشته باشد یا خیر.

در معادلهٔ $x^3 = \lambda$ می‌پرسیم که ریشه‌ای از آن می‌تواند با تابع گویایی از λ نمایش داده شود یا خیر. در حالت اوّل، حوزهٔ موسوم به حوزهٔ گویا بودن[5] جامع مجموعهٔ عددهای گویاست؛ در حالت دوم، از تابعهای گویای یک پارامتری تشکیل شده است.

اگر هیچ گونه محدودیتی بر این پارامتر قرار داده نشود بلافاصله ملاحظه می‌کنیم که هیچ عبارتی به صورت $\frac{\phi(\lambda)}{\psi(\lambda)}$، که $\phi(\lambda)$ و $\psi(\lambda)$ی آن چند جمله‌ای‌اند، نمی‌تواند در معادله‌مان صدق کند.

بنابراین، معادلهٔ مورد بحث، تحت فرضمان، تحویل‌ناپذیر است، و از آن‌جا که درجهٔ آن به صورت 2^n نیست، نمی‌تواند با استفاده از ریشه‌های دوم حل شود.

۳. اکنون تغییرپذیری λ را محدود می‌کنیم.

فرض می‌کنیم:

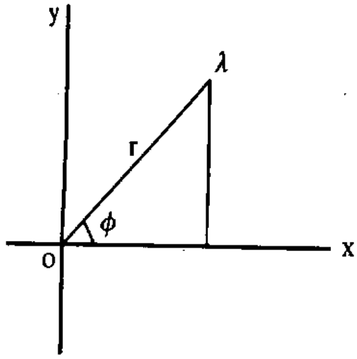
$$\lambda = r(\cos\phi + i\sin\phi)$$

و از آن

$$\sqrt[3]{\lambda} = \sqrt[3]{r}\,\sqrt[3]{\cos\phi + i\sin\phi}$$

مسأله‌مان خود را به دو قسمت تجزیه می‌کند، به استخراج ریشه‌های سوم یک عددی حقیقی، نیز استخراج عددی مختلط به

صورت $\cos\phi + i\sin\phi$، که هر دو عدد به صورت دلخواه در نظر گرفته شده‌اند. دو حالت مزبور را به طور جداگانه مورد بررسی قرار می‌دهیم.



I. ریشه‌های معادلهٔ $x^3 = r$ عبارتند از:

$$\sqrt[3]{r} \quad , \quad \varepsilon\sqrt[3]{r} \quad , \quad \varepsilon^2\sqrt[3]{r}$$

که توسط ε و ε^2 ریشه‌های سوم مختلط واحد:

$$\varepsilon = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \varepsilon^2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

نمایش داده شده‌اند.

با درنظر گرفتن مجموعهٔ تابعهای گویای r به عنوان حوزهٔ گویا بودن، بنا به استدلال پیشین می‌دانیم که $x^3 = 2r$ تحویل‌پذیر است.

در نتیجه مسألهٔ تضعیف مکعب، در حالت عمومی، ترسیم به کمک خط‌کش نامدرج و پرگار را نمی‌پذیرد.

II. ریشه‌های معادلهٔ $x^3 = \cos\phi + i\sin\phi$

بنابه فرمول دموآور[6] عبارتند از:

$$x_1 = \cos\frac{\phi}{3} + i\sin\frac{\phi}{3} \qquad x_2 = \cos\frac{\phi+2\pi}{3} + i\sin\frac{\phi+2\pi}{3}$$

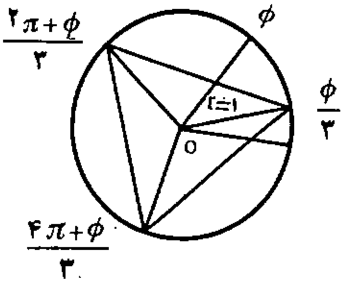
$$x_3 = \cos\frac{\phi+4\pi}{3} + i\sin\frac{\phi+4\pi}{3}$$

ریشه‌های مزبور از لحاظ هندسی توسط رأسهای مثلث متساوی‌الاضلاعی نمایش داده می‌شود که در دایره‌ای با شعاع واحد و مرکز در جای شکل مبدأ محاط است.

شکل بالا سمت چپ نشان می‌دهد که ریشهٔ x_1 متناظر با آرگومان $\frac{\phi}{3}$ است.

در نتیجه معادلهٔ: $x^3 = \cos\phi + i\sin\phi$

عبارت تحلیلی مسألهٔ تثلیث زاویه است.



اگر این معادله تحویل‌پذیر باشد، حداقل، یکی از ریشه‌های آن می‌تواند به صورت تابعی گویا از $\cos\phi$ و $\sin\phi$ نمایش داده شود، در حالی که مقدار آن با قرار دادن $2\pi + \phi$ به جای ϕ بی‌تغییر می‌ماند.

اما اگر تبدیل مورد بحث را، با تغییر پیوسته‌ای از زاویهٔ ϕ، انجام دهیم، ملاحظه می‌کنیم که ریشه‌های x_1، x_2، x_3 متحمل جایگشتی دوری[7] می‌شوند.

در نتیجه هیچ یک از ریشه‌ها نمی‌تواند به صورت تابعی گویا از $\cos\phi$ و $\sin\phi$ نمایش داده شود. معادلهٔ تحت بررسی تحویل‌ناپذیر است و بنابراین نمی‌تواند به کمک تعدادی متناهی از ریشه‌های دوم حل شود. در نتیجه تثلیث زاویه را نمی‌توان با خط کش نامدرج و پرگار انجام داد.

اثبات فوق و قضیّهٔ عمومی مورد بحث آشکارا تنها در حالتی که ϕ زاویه‌ای دلخواه است برقرارند؛ اما به ازای مقادیر خاصی از ϕ می‌توان اثبات کرد که ترسیم مورد نظر امکان‌پذیر است، فی‌المثل وقتی که، $\phi = \frac{\pi}{2}$.

یادداشتها

۱. این قضیّه عبارت است از: اگر x، کمیت مورد ترسیم، تنها به عبارات گویا و ریشه‌های دوم وابسته باشد، در این صورت ریشهٔ معادلهٔ تحویل‌ناپذیر $\phi(x)=0$ است، که درجهٔ آن همواره توانی از ۲ است.

2. Delian Problem   3. duplication of the cube

تضعیف مکعب یعنی ساختن مکعبی که حجم آن دقیقاً دوبرابر حجم مکعبی مفروض، و در حالت خاص مکعبی که طول ضلعش واحد باشد.

4. trisection of the angle

تثلیث زاویه یعنی تقسیم یک زاویه به سه قسمت برابر.

5. domain of rationality   6. De Moivre's formula

7. cyclic permutation

ادامه گزارش بیست و پنجمین

کنفرانس ریاضی کشور

قسمت دوم

در این روز از پنج تن از پیشکسوتان ریاضی کشور به نامهای استاد **احمد بیرشک**، استاد دکتر **علی افضلی پور**، استاد دکتر **اسدالله آل بویه**، استاد دکتر **بهمن مِهری**، استاد دکتر **مهدی بهزاد** تجلیلی شایسته و در خور به عمل آمد.

در **جزوهٔ تجلیل از پیشکسوتان کنفرانس**، که به همین مناسبت انتشار یافته است، با فرازهایی از زندگی استادان مزبور، که مختصری از آنها را در زیر آورده‌ایم، آشنا می‌شویم.

● **استاد احمد بیرشک** روز جمعه ۱۰ ذیحجهٔ ۱۳۲۴ هجری قمری مقارن با ۴ بهمن ۱۲۸۵ هجری شمسی متولد شد. پدر وی عضو گمرک بود و همهٔ عمر را در مرزهای کشور گذرانید؛ به همین علت پسر خانواده نتوانست تحصیلات آموزشگاهی منظمی به‌دست آورد و همین موجب کشیده شدنش به خودآموزی شد.

او دورهٔ شش سالهٔ دبیرستان را در دو سال و سه ماه (از تیر ۱۳۰۶ تا شهریور ۱۳۰۸) طی کرد و در شهریور ۱۳۰۸ در امتحان کلاس ششم قبول شد و در دارالمعلمین عالی ثبت نام کرد.

در ۱۳۱۱ در رشتهٔ ریاضی تحصیل را به پایان برد و وارد مشاغل دولتی شد. در ۱۳۱۵ به ریاست جامعهٔ لیسانسیه‌های دانشسرای عالی رسید و در ۱۳۲۱ به دانشگاه منتقل شد. در این سال از طرف دکتر **علی اکبر سیاسی**، رئیس دانشگاه و وزیر فرهنگ به تشکیل و گرداندن ادارهٔ کارگزینی دانشگاه منصوب شد و تا ۱۳۳۴ در این شغل باقی ماند.

از ۱۳۲۴ تا ۱۳۴۲ در رشتهٔ معماری دانشکدهٔ هنرهای زیبای تهران، و نیز از ۱۳۳۷ تا ۱۳۳۹ در دانشسرای عالی به تعلیم ریاضی پرداخت، و به سال ۱۳۴۲ بازنشسته شد.

در سال ۱۳۲۷ با همکاری بعضی از فرهنگیان، گروه فرهنگی هدف را تأسیس کرد. کار این گروه تا بدان جا رسید که ۱۳ مدرسهٔ روزانه پیدا کرد و تعداد دانش آموزانش متجاوز از ۱۴۰۰۰ نفر شد.

از ۱۳۲۷ تا ۱۳۵۶ در گروه فرهنگی هدف به کار پرداخت و از آن پس به ویراستاری کتابهای دانشگاهی و غیر دانشگاهی مشغول است و در فرصتهای مناسب دست به تألیف و ترجمه نیز می‌زند.

استاد بیرشک در حال حاضر مسؤول ادارهٔ بنیاد دانشنامهٔ بزرگ فارسی است. آثار ایشان عبارتند از: هشت جلد کتاب ریاضیات دبستانی، چهل و هشت جلد کتاب ریاضیات دبیرستانی، سه جلد کتاب ریاضیات دانشگاهی، و کتابهای ریاضیات عام دیگری از قبیل: ریاضیات نوین، فلسفهٔ ریاضی، فرض و اسطوره در فیزیک، هندسهٔ لباچفسکی، هندسهٔ نااقلیدسی، ریاضیات نو برای معلمان، ریاضیات برای خانمها، و ...

● در شرح حال استاد دکتر **علی افضلی پور** از قول خودشان چنین می‌خوانیم:

روز ۲۴ بهمن ۱۲۸۵ شمسی در تهران متولد شدم و در خرداد ۱۳۰۷ گواهینامهٔ دورهٔ دوم دبیرستان را با احراز رتبهٔ اول به‌دست آوردم.

در مهرماه همان سال، پس از پذیرفته شدن در مسابقه، جزو نخستین گروه دانشجویان ایرانی، برای آموختن ریاضی، به پاریس رفتم.

روز ۲۳ دی ۱۳۱۴ شمسی رسالهٔ دکتری خود را در دمگرافی ریاضی گذرانیدم و نخستین دانشجوی ایرانی بودم که به افتخار درجهٔ دکتری در ریاضی نائل شدم.

از بهمن ماه ۱۳۱۴ شمسی خدمت آموزشی خود را در دانشسرای عالی و دانشکدهٔ علوم دانشگاه در آن زمان نوبنیاد تهران آغاز کردم.

در سال ۱۳۲۶ شمسی بار دیگر به فرانسه رفتم و دورهٔ دو ساله انستیتوی آمار دانشگاه پاریس را در یک سال گذرانیده در خرداد ۱۳۲۷ دانشنامهٔ تخصص در آمار را به‌دست آوردم.

در مهرماه ۱۳۱۶ شمسی تدریس درس نظریهٔ احتمال و آمار و در مهر ماه ۱۳۱۷ شمسی تدریس درس نظریهٔ آنالیز مختلط به من محول شد.

و بدین سان خدمات آموزشی من در دانشگاه تهران چهل و سه سال از ۱۳۱۴ تا ۱۳۵۳ شمسی ادامه داشته است.

استاد شش بار نمایندهٔ رسمی ایران در کنفرانسهای علمی بین‌المللی بوده و تاکنون بیست کتاب (۵۵۰۰ صفحه) به زبانهای فارسی، فرانسوی، و انگلیسی تألیف یا ترجمه کرده که برخی از آنها شامل پژوهشهای ابتکاری خود ایشان در رشته‌های گوناگون ریاضی بوده است.

سی و دو بار در کنفرانسهای علمی ملی و بین‌المللی به فارسی، فرانسوی، و انگلیسی سخنرانی کرده‌اند. در آذر ماه ۱۳۵۳ شمسی به اخذ نشان فرهنگی درجه اوّل از وزارت آموزش و پرورش نایل، و در بهمن ماه ۱۳۵۶ شمسی به‌عنوان استاد ممتاز دانشگاه تهران برگزیده شده‌اند.

● استاد دکتر **اسدالله آل بویه** متولد چهارم آبان ۱۲۸۷ شمسی در دیلمان گیلان است.

به سال ۱۳۰۷ شمسی گواهینامهٔ متوسطه را دریافت کرد و در شهریور همان سال به فرانسه اعزام شد. از دانشکدهٔ علوم نانسی دانشنامهٔ ریاضیات عمومی و دانشنامهٔ محاسبات دیفرانسیل و انتگرال و دانشنامهٔ مکانیک استدلالی به‌دست آورد. از همین دانشکده دانشنامهٔ فوق لیسانس هندسهٔ عالی و از دانشگاه سوربون (پاریس) دکترای علوم ریاضی را اخذ می‌کند.

در بهمن ۱۳۱۴ شمسی به ایران بازگشت و در فروردین ۱۳۱۵ شمسی با رتبهٔ ۱ دانشیاری استخدام شد. استاد علاوه بر تدریس در دانشکدهٔ علوم و دانشسرای عالی و دانشکدهٔ فنی به خدمات اداری نیز پرداخت و چندی رئیس کل کارگزینی وزارت دارایی و مدیر کل دبیرخانهٔ دانشگاه و معاون کل وزارت فرهنگ نیز بود. تألیفات علمی استاد عبارتند از:

یک جلد هندسهٔ دیفرانسیل شبکه‌های مسطّح (رسالهٔ دکترای ریاضی)، چهار جلد هندسه برای سالهای ۴ ـ ۱ دبیرستان، دو جلد هندسه برای سالهای ۵ و ۶ دبیرستان، یک جلد هندسهٔ ترسیمی و رقومی برای سال ۶ دبیرستان، یک جلد هندسهٔ عالی برای دانشجویان دورهٔ لیسانس، دو جلد حسابهای هندسی برای دانشجویان دورهٔ لیسانس و فوق لیسانس، یک جلد هندسه‌های گوناگون برای دانشجویان دورهٔ فوق لیسانس، مقالات علمی و فلسفی.

علاوه بر اینها استاد دارای دیوانهای شعر، موسوم به دیوان بویه، مجموعاً هشت دفتر، نیز هستند.

● استاد دکتر **بهمن مهری** در ۲۶ فروردین ۱۳۱۵ هجری شمسی در خانواده‌ای گیلانی در اصفهان متولد شد. دورهٔ ابتدایی را در مدرسهٔ عنصری رشت و دورهٔ دوم را تا ششم متوسطه در دبیرستان البرز تهران در رشتهٔ ریاضی گذراند.

در سال ۱۳۳۶ شمسی مدرک لیسانس ریاضی و تعلیم و تربیت از دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه تهران دریافت کرد. به سال ۱۹۶۰ میلادی وارد دانشگاه مینه سوتا شده و به سال ۱۹۶۳ مدرک فوق لیسانس ریاضی خود را گرفت و بالاخره در سال ۱۹۶۷ با ارائه تزی در زمینهٔ معادلات دیفرانسیل دربارهٔ «Turning Point» از دانشگاه مدیسین ویسکانسین مدرک دکتری گرفت.

وی از سال ۱۳۴۵ شمسی تاکنون در دانشگاه صنعتی شریف به تدریس مشغول است. از مهمترین شاگردان ایشان؛ دکتر **حسام الدین ارفعی** و دکتر **حصارکی** (اساتید دانشگاه صنعتی شریف)، دکتر **پرویز خواجه خلیلی** (استاد یکی از دانشکده‌های آمریکا)، دکتر **عشرت ارجمندی** و دکتر **قائم مقامی** (استادان دانشگاه‌های کانادا) را می‌توان نام برد.

استاد مهری موفقیتهای خود را همواره مدیون پروفسور **تقی فاطمی**، مرحوم دکتر **محمد باقر هوشیار**، و پروفسور **رودین** می‌داند. تاکنون چهل و پنج مقاله در مجلات ریاضی آمریکا، شوروی، مجارستان، ایتالیا، ایران، و ... به چاپ رسانده است. در «تئوری کنترل» کار کرده است. استاد راهنمای نُه نفر در تز فوق لیسانس بوده است، و در حال حاضر با دو دانشجوی دکترای مکانیک کار می‌کنند.

پنجمین نفر از پیشکسوتان ریاضی منتخب بیست و پنجمین کنفرانس ریاضی کشور استاد دکتر **مهدی بهزاد** متولد ۲ اردیبهشت ۱۳۱۵ شمسی است. زندگینامهٔ استاد به‌طور خلاصه به‌صورت زیر است:

تحصیلات: لیسانس ریاضی دانشگاه تربیت معلم (۱۳۳۹)، فوق لیسانس ریاضی دانشگاه ایالتی میشیگان آمریکا (۱۳۴۱)، دکترای ریاضی دانشگاه ایالتی میشیگان آمریکا (۱۳۴۴).

سوابق استخدامی: از مربی دانشگاه تربیت معلم آغاز می‌شود و از استادیاری دانشگاه ایالتی وین و دانشیاری دانشگاه شیراز و میشیگان غربی و شهید بهشتی می‌گذرد و به استادی دانشگاه شریف می‌رسد. وی در حال حاضر استاد تمام وقت دانشگاه «شهید بهشتی» است.

سمتهای اداری ـ علمی: دبیر انجمن ریاضی ایران، سرپرست دانشکدهٔ ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه صنعتی شریف، دبیر کل فرهنگستان علوم ایران؛ قائم مقام و معاون آموزشی ـ پژوهشی دانشگاه مازندران، رئیس بخش علوم پایهٔ شورای پژوهشهای علمی کشور، عضو گروه ریاضی فرهنگستان زبان ایران.

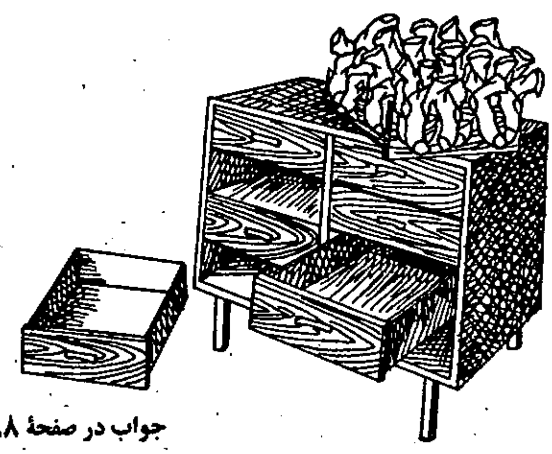
استاد عضو هیأت تحریریهٔ ژورنال نظریهٔ گراف چاپ آمریکا، عضو هیأت تحریریهٔ بولتن انجمن ریاضی ایران، مدیر مسؤول و ویراستار مجلهٔ نشر ریاضی، ویراستار کتابهای ریاضی نشر دانشگاهی، داور مقالات بسیار مجله‌های خارجی و ناقد مقالات بسیار نیز بوده است.

از جمله آثار ایشان عبارتند از: **آشنایی با نظریهٔ گرافها** (چاپ آمریکا، ۱۹۷۲)؛ **گرافها و دای گرافها** (چاپ آمریکا، ۱۹۷۹)؛ بیش از سی مقالهٔ اصیل ریاضی، ترجمهٔ کتاب **حساب دیفرانسیل و انتگرال** لیتلهلد، ترجمهٔ کتاب **حساب دیفرانسیل و انتگرال** تامس ـ فینی، که کتاب برندهٔ سال ۱۳۷۱ است.

و به این ترتیب کار تجلیل از استادان پیشکسوت ریاضی به پایان می‌رسد.

تفریح اندیشه ۴

در کشویی مخلوطی از جورابهای قرمز و آبی، حداکثر ۱۹۹۱ عدد کلاً داریم. چنین اتفاق افتاده است که هنگامی که ۲ جوراب به تصادف و بدون برگرداندن انتخاب می‌کنیم، احتمال این که هر دو قرمز یا هردو آبی باشند، دقیقاً یک دوم است. بزرگترین تعداد ممکن جورابهای قرمز واقع در کشو چیست؟



جواب در صفحهٔ ۸۸

ادب ریاضی

شما خود می‌دانید که در ریاضیات تا چه اندازه با اصطلاحاتی از قبیل برهان خلف، شرط لازم، شرط کافی، و غیره سروکار داریم. البته، بدون فهمیدن این گونه مطالب نباید انتظار داشته باشید که ریاضیات را بفهمید، چه رسد به این که بتوانید شخصاً تصرفی در بازیهای ریاضی بکنید. کسی که از منطق بی‌بهره است بین استدلال و مغالطه و تعریف و قضیه و نظایر آنها تمیز نمی‌گذارد، و به آسانی فریب می‌خورد. به عنوان مثال، شاید شما کسانی را دیده‌اید که هنوز، پس از تعریف کردن قوای طبیعی به وسیلهٔ ضرب، رابطهٔ $a^0 = 1$ را برای شاگردان خود ثابت می‌کنند! اینها کسانی‌اند که تعریف عمل ضرب و تفاوت تعریف و قضیه را نمی‌فهمند.

آنالیز ریاضی، غلامحسین مصاحب

تعیین علامت عبارتهای جبری و حل نامعادلات و دستگاه توأم

(مورد استفاده دانش آموزان سال اوّل و دوم ریاضیات ۴ نظام جدید)

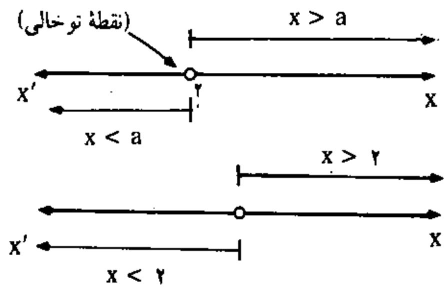
سید محمد رضا هاشمی موسوی

تعریف: هر رابطه با نماد « > یا < » در مجموعهٔ عددهای حقیقی را یک نامساوی می‌نامیم. مانند: $b < a$ یا $a > b$.

نامساوی و محور اعداد

به‌طور کلی می‌نویسیم $x > a$ یا $x < a$ و در این صورت روی محور چنین نمایش می‌دهیم:

(مثال:



قوانین و خواص نامساویها

اگر a ، b ، c و d اعداد حقیقی دلخواهی باشند:

$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$

داریم:

۱) $a < b$ و $b < c \implies a < c$

۲) $a < b \iff a \pm c < b \pm c$

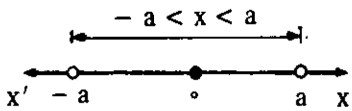
۳) $$a < b,\ \begin{cases} c > 0 \Rightarrow ac < bc \quad \text{یا} \quad \dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c} \\ c < 0 \Rightarrow ac > bc \quad \text{یا} \quad \dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c} \end{cases}$$

۴) $a < b$ و $c < d \implies a + c < b + d$

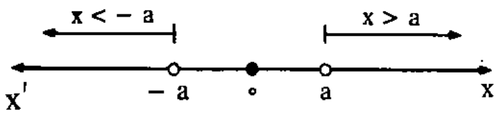
۵) $0 < a < b$ و $0 < c < d \implies ac < bd$

۶) $|a| < |b| \implies a^2 < b^2$

۷) $x^2 < a^2$ و $a > 0 \implies -a < x < a$



۸) $x^2 > a^2$ و $a > 0 \implies x > a$ یا $x < -a$



۹) $ab > 0 \implies (a > 0$ و $b > 0)$ یا $(a < 0$ و $b < 0)$

۱۰) $ab < 0 \implies (a > 0$ و $b < 0)$ یا $(a < 0$ و $b > 0)$

۱۱) $$a < b,\ \begin{cases} a > 0,\ b > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b} \\ a < 0,\ b < 0 \Rightarrow \dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b} \end{cases}$$

۱۲) $ab < 0$ و $a < b \implies \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$

تعیین علامت دو جمله‌ای درجهٔ اول

دو جمله‌ای درجهٔ اول را به حالت عمومی $(ax + b)$ نمایش

می‌دهیم. منظور از علامت دو جمله‌ای، تعیین مقادیری از x است که به ازای این مقادیر مقدار دو جمله‌ای مثبت یا منفی و در یک مورد صفر باشد.

مثال: برای دو جمله‌ای $(۲x - ۴)$ عددهای مختلف را طبق جدول زیر به x نسبت داده‌ایم و نظیر هر کدام از آنها را برای عبارت فوق حساب کرده‌ایم:

x	−۴	−۳	−۲	−۱	۰	۱	۲	۳	۴	۵
۲x − ۴	−۱۲	−۱۰	−۸	−۶	−۴	−۲	۰	۲	۴	۶

از این مثال متوجه می‌شویم که برای تعیین علامت یک دو جمله‌ای کافی‌است دوجمله‌ای‌را برابر صفر قرار دهیم، در این صورت با به دست آوردن ریشهٔ دو جمله‌ای (مقداری که عبارت را صفر می‌کند) مرز مقادیر منفی و مثبت دو جمله‌ای موردنظر به‌دست خواهد آمد. در نتیجه به ازای مقادیر بزرگتر از ریشه (مرز) دو جمله‌ای علامتش مثبت و به‌ازای مقادیر کوچکتر از ریشه، علامت دو جمله‌ای مفروض منفی خواهد بود. به‌طور کلی علامت دوجمله‌ای $(ax + b)$ در دو حالت $a > ۰$ و $a < ۰$ چنین است:

$$ax + b = ۰ \implies x = \frac{-b}{a}$$

$a > ۰$:

x	−∞		$\frac{-b}{a}$		+∞
ax+b		− (مخالف علامت a)	۰	+ (موافق علامت a)	

$a < ۰$:

x	−∞		$\frac{-b}{a}$		+∞
ax+b		+ (مخالف علامت a)	۰	− (موافق علامت a)	

به‌طور کلی اگر دو جمله‌ای $(ax + b)$ را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$ax + b = a\left(x + \frac{b}{a}\right) = a\left[x - \left(-\frac{b}{a}\right)\right]$$

ملاحظه می‌شود که برای $x > -\frac{b}{a}$ مقدار داخل کروشه مثبت و در این صورت علامت دو جمله‌ای با علامت a یکی بوده و اصطلاحاً گوییم علامت دو جمله‌ای موافق علامت a است. برای $x < -\frac{b}{a}$ مقدار داخل کروشه منفی است و در این صورت علامت دوجمله‌ای مخالف با علامت a است. بنابراین به‌طور خلاصه داریم:

مقادیر x	کوچکتر از $-\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	بزرگتر از $-\frac{b}{a}$
علامت ax+b	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a

مثال ۱ : عبارت $۳x + ۶$ را تعیین علامت کنید.

حل : ابتدا ریشهٔ عبارت را به‌دست می‌آوریم:

$$۳x + ۶ = ۰ \implies ۳x = -۶ \implies x = \frac{-۶}{۳} \implies x = -۲$$

x	−∞		−۲		+∞
۳x+۶		−	۰	+	

مثال ۲ : عبارت $\frac{۵x - ۱۰}{۳ - ۶x}$ را تعیین علامت کنید.

حل : ابتدا ریشهٔ هر یک از عبارتهای صورت و مخرج را به‌دست می‌آوریم:

$$۵x - ۱۰ = ۰ \implies ۵x = ۱۰ \implies x = \frac{۱۰}{۵} = ۲ \implies x = ۲$$

$$۳ - ۶x = ۰ \implies -۶x = -۳ \implies x = \frac{-۳}{-۶} = \frac{۱}{۲} \implies x = \frac{۱}{۲}$$

x	−∞		$\frac{۱}{۲}$		۲		+∞
۵x−۱۰		−		−	۰	+	
−۶x+۳		+	۰	−		−	
$\frac{۵x-۱۰}{۳-۶x}$		−	تعریف‌نشده	+	۰	−	

تعیین علامت عبارتهای متشکل از عاملهای درجهٔ اول

مثال ۳ : عبارت $P = \frac{-x\,(۳ - ۶x)\,(x + ۱)}{(x - ۱)\,(۲x - ۳)}$ را تعیین علامت کنید.

حل : برای تعیین عباراتی نظیر عبارت P ابتدا هر یک از عاملهای موجود را برابر صفر قرار می‌دهیم و ریشهٔ هر کدام از عاملها را به‌دست می‌آوریم. سپس جدولی رسم می‌کنیم و در سطر اول آن مقادیر جوابهای به‌دست آمده را به ترتیب صعودی از چپ به راست

می‌نویسیم و در هر یک از سطرهای دیگر آن علامت یکی از عاملهای عبارت P را تعیین می‌کنیم. در آخر علامت P برای هر فاصلهٔ عددی از ضرب علامتهای واقع در ستون نظیر آن به‌دست می‌آید.

$$x + ۱ = ۰ \Longrightarrow x = -۱$$

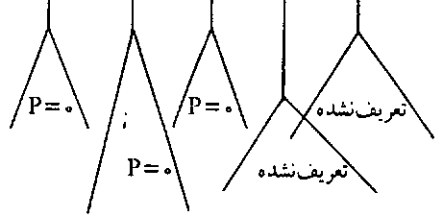
$$-x = ۰ \Longrightarrow x = ۰$$

$$۳ - ۶x = ۰ \Longrightarrow x = \frac{۱}{۲}$$

$$x - ۱ = ۰ \Longrightarrow x = ۱$$

$$۲x - ۳ = ۰ \Longrightarrow x = \frac{۳}{۲}$$

x	$-\infty$ تا -۱	-۱ تا ۰	۰ تا $\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$ تا ۱	۱ تا $\frac{۳}{۲}$	$\frac{۳}{۲}$ تا $+\infty$
$x+۱$	−	+	+	+	+	+
$-x$	+	+	−	−	−	−
$۳-۶x$	+	+	+	−	−	−
$x-۱$	−	−	−	−	+	+
$۲x-۳$	−	−	−	−	−	+
P	−	+	−	+	−	+



توجه: از آنجا که به ازای ریشه‌های مخرج عبارت P بی‌معنی است، بنابراین لازم است که در جدول ریشه‌های مخرج را تعریف نشده تلقی کنیم.

* تعیین علامت عبارتها کاربردهای بسیاری دارد که از آن جمله می‌توان حل نامعادلات را نام برد که در اینجا به حل و بحث نامعادلات می‌پردازیم.

نامعادلات

نامعادله: گزاره نمایی است به صورت نامساوی بین دو عبارت جبری شامل یک یا چند متغیر. مجموعه جواب نامعادله، مجموعهٔ مقادیری است که در ازای آنها نامعادله به گزارهٔ درست تبدیل می‌شود. ممکن است که در دامنهٔ معینی از متغیر یا متغیرها، مجموعهٔ جواب نامعادله تهی باشد. اگر برای نامعادله‌ای دامنهٔ متغیر مشخص نشده باشد، دامنهٔ آن را مجموعهٔ عددهای حقیقی (IR) اختیار می‌کنیم. نامعادله را یک مجهولی یا یک متغیری درجهٔ اول گوییم هرگاه پس از اختصار لازم به یکی از صورتهای زیر برسیم:

$ax + b > ۰$ یا $ax + b < ۰$ یا $ax + b \geq ۰$ یا $ax + b \leq ۰$

(در نامعادلات اخیر x متغیر و a و b پارامترهای حقیقی می‌باشند.)

حل نامعادلهٔ یک مجهولی درجهٔ اول

در حالت کلی نامعادلهٔ درجهٔ اول را به شکل $ax + b > ۰$ یا $ax + b < ۰$ در نظر می‌گیریم. حل یک نامعادله در واقع به دست آوردن مجموعهٔ جواب آن نامعادله است که ممکن است مجموعهٔ جواب آن دارای هیچ و یا تعداد محدودی و یا بی‌شمار عضو داشته باشد. به‌طور کلی حل نامعادلات فوق چنین است:

$$ax + b < ۰ \Longrightarrow ax + b - b < -b \Longrightarrow ax < -b$$

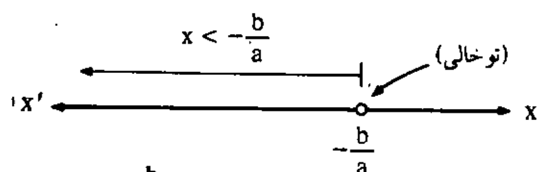
$$ax < -b, \begin{cases} a > ۰ \Rightarrow x < -\frac{b}{a} \Rightarrow \\ a < ۰ \Rightarrow x > -\frac{b}{a} \Rightarrow \end{cases}$$

$a > ۰: \{x \mid x < -\frac{b}{a}\}$ (مجموعه‌جواب)

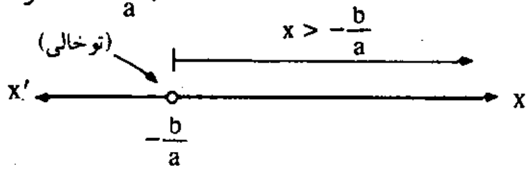
$a < ۰: \{x \mid x > -\frac{b}{a}\}$ (مجموعه‌جواب)

نمایش مجموعهٔ جواب روی محور اعداد

$a > ۰$ و $x < -\frac{b}{a}$:



$a < ۰$ و $x > -\frac{b}{a}$:



تبصره: اگر نامعادله دارای مساوی باشد خود ریشه نیز جزو مجموعهٔ جواب است و در این صورت نقطه را روی محور توپر نمایش

می‌دهیم.

مثال ۴ : نامعادلهٔ زیر را حل کنید و مجموعهٔ جواب آن را روی محور اعداد نمایش دهید:

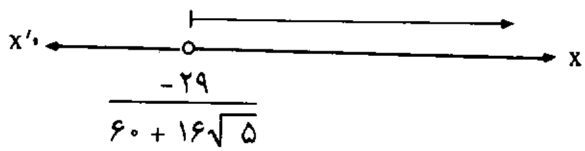
$$5(2x+3)^2 > 4(\sqrt{5}x-2)^2$$

حل :

$$5(4x^2+12x+9) > 4(5x^2-4\sqrt{5}x+4)$$
$$\Rightarrow 60x+45 > -16\sqrt{5}x+16$$
$$\Rightarrow (60+16\sqrt{5})x > 16-45 \Rightarrow x > \frac{-29}{60+16\sqrt{5}}$$

$$\text{مجموعهٔ جواب} = \left\{x \,\middle|\, x > \frac{-29}{60+16\sqrt{5}}\right\}$$

نمایش هندسی:



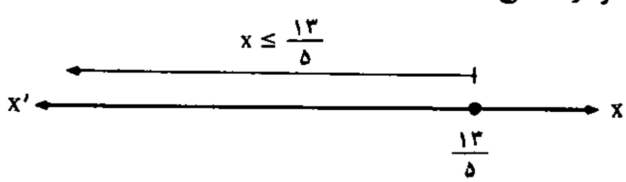
مثال ۵ : نامعادلهٔ زیر را حل کنید و نمودار هندسی مجموعهٔ جواب آن‌را رسم کنید:

$$-\frac{5+2x}{3} \le \frac{-3x+1}{2}$$

حل : برای حل نامعادله ابتدا طرفین نامعادله را در کوچکترین مضرب مشترک مخرج کسرها ضرب می‌کنیم و سپس مجهولات را به یک طرف و معلومات را به طرف دیگر (با تعویض علامت آنان) می‌بریم و از آنجا x را محاسبه می‌کنیم:

$$-2(5+2x) \le 3(-3x+1)$$
$$\Longrightarrow -10-4x \le -9x+3 \Longrightarrow -4x+9x \le 3+10$$
$$\Longrightarrow 5x \le 13 \Longrightarrow x \le \frac{13}{5}$$
$$\text{مجموعهٔ جواب} = \left\{x \,\middle|\, x \le \frac{13}{5}\right\}$$

نمودار هندسی:



مثال ٦ : نامعادلهٔ زیر را حل کنید:

$$\frac{-x(x+2)}{(x+1)(3x-6)} \ge 0$$

حل : طرف اول نامعادله را با P نمایش می‌دهیم:

$$P = \frac{-x(x+2)}{(x+1)(3x-6)}$$

اینک برای حل نامعادله کافی است عبارت P را تعیین علامت کنیم.

$$x+2=0 \Longrightarrow x=-2 \quad , \quad -x=0 \Longrightarrow x=0$$
$$x+1=0 \Longrightarrow x=-1 \quad , \quad 3x-6=0 \Longrightarrow x=2$$

x	$-\infty$ … -2	-2 … -1	-1 … 0	0 … 2	2 … $+\infty$
$x+2$	−	+	+	+	+
$x+1$	−	−	+	+	+
$-x$	+	+	+	−	−
$3x-6$	−	−	−	−	+
$P \ge 0$	−	+	−	+	−

تعریف‌نشده (در $x=-1$) ، تعریف‌نشده (در $x=2$)

توجه: قسمت هاشورخورده جزو جواب نیست.

با توجه به جدول و علامت نامعادله $P \ge 0$ مجموعهٔ جواب را تعیین می‌کنیم:

$$P \ge 0 \Longrightarrow \text{مجموعه جواب} = \{x \mid -2 \le x < -1 \text{ یا } 0 \le x < 2\}$$

مثال ۷ : نامعادلهٔ زیر را حل کنید:

$$\frac{2(x-3)}{x} < \frac{-3}{x}$$

حل : ابتدا عبارت سمت راست نامعادله را به سمت چپ آن (با تغییر علامت) می‌آوریم و پس از اختصار لازم طرف چپ را با P نمایش می‌دهیم و برای حل نامعادله کافی است عبارت P را تعیین علامت کنیم:

$$\frac{2(x-3)}{x} + \frac{3}{x} < 0 \Longrightarrow \frac{2x-6+3}{x} < 0 \Longrightarrow \frac{2x-3}{x} < 0$$

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x-3$		$-$		$-$		$+$	
x		$-$		$+$		$+$	
$P<0$		$+$	تعریف‌نشده	$-$		$+$	

$$P<0 \Longrightarrow \text{مجموعه‌جواب} = \left\{x \mid 0<x<\frac{3}{2}\right\}$$

توجه: قسمت هاشورخورده جزو جواب نیست.

تعیین علامت سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم ($P=ax^2+bx+c$)

ابتدا عبارت درجهٔ دوم را به‌شکل زیر می‌نویسیم:

$$P=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

$$=a\left[\underbrace{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

در اینجا اگر عبارت $\Delta=b^2-4ac$ منفی یا برابر صفر باشد، بدیهی است که علامت P هم‌علامت a می‌باشد. زیرا داخل کروشه در حالت $\Delta<0$ همواره مثبت و در حالت $\Delta=0$ $\left(x=-\frac{b}{2a}\right)$ صفر می‌شود. بنابراین P در حالت $\Delta<0$ هم‌علامت a و در حالت $\Delta=0$ برابر صفر می‌باشد. در حالتی که $\Delta>0$ باشد سه‌جمله‌ای؛ دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد که در این حالت می‌توان نوشت:

$$P=a\left[\left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]$$

در این‌صورت با تشکیل جدول نتیجه می‌شود که علامت P همواره بین دو ریشه مخالف علامت a است و به ازای مقادیر حقیقی x خارج دو ریشه موافق علامت a می‌باشد.

مثال ۸: عبارت درجهٔ دوم $P=x^2-3x+2$ را تعیین علامت کنید.

حل: ابتدا ریشه‌های معادلهٔ $P=0$ را تعیین می‌کنیم:

$$x^2-3x+2=0 \Longrightarrow (x-1)(x-2)=0 \Longrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \text{یا} \\ x=2 \end{cases}$$

اینک جدول تعیین علامت:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$P=x^2-3x+2$		$+$		$-$		$+$	

بنابراین علامت P بین دو ریشه (مخالف علامت $a=1$) منفی است.

مثال ۹: نامعادلهٔ $P=\dfrac{-x^2(x^2-1)}{x^2+x+1}\geq 0$ را حل کنید.

حل: ابتدا ریشهٔ تمام عاملهای صورت و عبارت مخرج را در صورت وجود به‌دست می‌آوریم و سپس جدول تعیین علامت عبارت P را رسم می‌کنیم:

$-x^2=0 \Longrightarrow \Delta=0$ و $x=0$ (ریشه مضاعف صفر)

$x^2-1=0 \Longrightarrow \Delta>0$ و $x=\pm 1$

$x^2+x+1=0 \Longrightarrow \Delta<0$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$-x^2$		$-$		$-$		$-$		$-$	
x^2-1		$+$		$-$		$-$		$+$	
x^2+x+1		$+$		$+$		$+$		$+$	
$P\geq 0$				$+$		$+$			

جواب

$$P\geq 0 \Longrightarrow \text{مجموعه‌جواب} = \left\{x \mid -1\leq x\leq 1\right\}$$

حل دستگاه نامعادلات (نامعادلات مضاعف یا توأم)

نامعادلات توأم عبارت است از دو یا چند نامعادله که باید در عین حال به ازای مقادیر مشترکی از مجهول برقرار باشند.

برای حل نامعادلات توأم کافی است هر یک را جداگانه حل کنیم و جوابهای مشترک را بین همگی آنها به‌دست آوریم.

مجموعهٔ جواب دو یا چند نامعادلهٔ توأم عبارت است از اشتراک مجموعه‌های جواب هر یک از آنها، به عبارت دیگر مجموعه جواب مجموعه‌ای است که برای تمام نامعادلات دستگاه صادق می‌باشد.

مثال ۱۰ : دستگاه دو نامعادلهٔ توأم زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} ۵x - ۳ > ۲x + ۳ \\ ۳ - ۴x < ۱ \end{cases}$$

حل:

$$\begin{cases} ۵x - ۳ > ۲x + ۳ \\ ۳ - ۴x < ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۵x - ۲x > ۳ + ۳ \\ -۴x < ۱ - ۳ \end{cases}$$

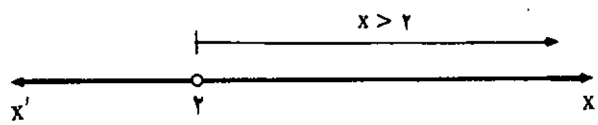
$$\Rightarrow \begin{cases} ۳x > ۶ \\ -۴x < -۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{۶}{۳} \\ x > \frac{-۲}{-۴} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > ۲ & (۱) \\ x > \frac{۱}{۲} & (۲) \end{cases}$$

مجموعه جواب نامعادلهٔ (۱) عبارت‌است از: $\{x \in IR \mid x > ۲\}$

مجموعه جواب نامعادلهٔ (۲) عبارت‌است از: $\{x \in IR \mid x > \frac{۱}{۲}\}$

مجموعه جواب دستگاه مفروض اشتراک دو مجموعهٔ فوق است:

مجموعه جواب دستگاه $= \{x \in IR \mid x > ۲\}$



مثال ۱۱ : دستگاه زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} \frac{۲x - ۱}{۳} + \frac{x - ۳}{۲} < \frac{۳x - ۲}{۶} & (۱) \\ \frac{x + ۱}{۲} - \frac{۳x + ۲}{۳} < \frac{x - ۱}{۴} & (۲) \end{cases}$$

حل: ابتدا طرفین نامعادلهٔ (۱) را در ۶ و طرفین نامعادلهٔ (۲) را در ۱۲ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۲(۲x - ۱) + ۳(x - ۳) < ۳x - ۲ \\ ۶(x + ۱) - ۴(۳x + ۲) < ۳(x - ۱) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۴x - ۲ + ۳x - ۹ - ۳x + ۲ < ۰ \\ ۶x + ۶ - ۱۲x - ۸ - ۳x + ۳ < ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۴x < ۹ \\ -۹x < -۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x < \frac{۹}{۴} \\ x > \frac{۱}{۹} \end{cases} \Rightarrow \text{مجموعه جواب دستگاه} = \left\{x \mid \frac{۱}{۹} < x < \frac{۹}{۴}\right\}$$

نامعادلات و قدرمطلق

می‌دانیم که قدر مطلق عدد حقیقی a عبارت است از $|a|$ به‌قسمی که:

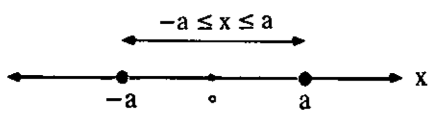
$$|a| = \begin{cases} a & a \geq ۰ \\ -a & a < ۰ \end{cases}$$

مثلاً: $|۵| = ۵$ و $|\pm ۳| = ۳$ و $|-\pi| = \pi$ و $\frac{۳}{۲} = |-\frac{۳}{۲}| = \sqrt{(-\frac{۳}{۲})^۲}$ و $|-\sqrt{۲}| = \sqrt{۲}$ و ...

بنابراین معادله‌ای مثل $|x| = a$ هم‌ارز است با:

$$\begin{cases} x < ۰ \\ x = -a \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} x \geq ۰ \\ x = a \end{cases} \iff x = \pm a \text{ (مجموعه‌نقاط)}$$

نمایش $|x| \leq a$ چنین است:



به‌طور کلی حل هر معادله و یا نامعادلهٔ شامل قدر مطلق مجهول به حل دو یا چند دستگاه از معادله‌ها و نامعادله‌ها تبدیل می‌شود.

مثال ۱۲ : معادلهٔ $۳x - |x - ۴| = ۱$ را حل کنید.

حل: برای حل معادلهٔ فوق دو حالت در نظر می‌گیریم:

$$(۱): \begin{cases} x - ۴ \geq ۰ \\ ۳x - (x - ۴) = ۱ \end{cases} \text{ یا } (۲): \begin{cases} x - ۴ < ۰ \\ ۳x + (x - ۴) = ۱ \end{cases}$$

پس از اختصار لازم داریم:

$$(۱): \begin{cases} x \geq ۴ \\ x = -\frac{۳}{۲} \end{cases} \text{ یا } (۲): \begin{cases} x < ۴ \\ x = \frac{۵}{۴} \end{cases}$$

مجموعهٔ جواب (۱) $= \{x \mid x \geq ۴ \text{ و } x = -\frac{۳}{۲}\} = \varnothing$

مجموعهٔ جواب (۲) $= \{x \mid x < ۴ \text{ و } x = \frac{۵}{۴}\} = \{\frac{۵}{۴}\}$

مجموعهٔ جواب معادله $= \{\frac{۵}{۴}\} \cup \varnothing = \{\frac{۵}{۴}\}$

بنابراین تنها جواب معادله $x = \frac{۵}{۴}$ است.

مثال ۱۳ : نامعادلهٔ $|x - ۲| \leq ۱$ را حل کنید.

حل: مانند مثال قبل (۱۱) برای حل نامعادلهٔ مفروض کافی است دو

حالت در نظر بگیریم:

$$(1): \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x - 2 \leq 1 \end{cases} \quad \text{یا} \quad (2): \begin{cases} x - 2 < 0 \\ -(x-2) \leq 1 \end{cases}$$

پس از اختصار لازم داریم:

$$(1): \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 3 \end{cases} \quad \text{یا} \quad (2): \begin{cases} x < 2 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{مجموعهٔ جواب (1)} = \{ x \mid 2 \leq x \leq 3 \}$$

$$\text{مجموعهٔ جواب (2)} = \{ x \mid 1 \leq x < 2 \}$$

$$\text{مجموعهٔ جواب نامعادله} = \{ x \mid 1 \leq x < 2 \ \text{یا}\ 2 \leq x \leq 3 \}$$

$$= \{ x \mid 1 \leq x \leq 3 \}$$

مثال ۱۴ : عبارت $P(x) = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt[4]{x^2 - 4}$ بـــه ازای چه مقادیری از x تعریف شده است.

حل : می‌دانیم زیر رادیکال با فرجهٔ زوج همواره باید مثبت یـا صـفر باشد بنابراین داریم:

$$\begin{cases} 4 - x^2 \geq 0 \\ x^2 - 4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \leq 4 \\ x^2 \geq 4 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{(ازاشتراک مجموعه جوابها)}} \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \geq 2 \quad \text{یا} \quad x \leq -2 \end{cases}$$

$$\text{مجموعهٔ جواب} = \{ 2 \ \text{و}\ -2 \}$$

بنابراین عبارت $P(x)$ فقط به ازای $x = -2$ و $x = 2$ تعریف شده است.

مثال ۱۵ : عبارت $\sqrt{\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt[5]{x^3 - 8}}}} + \sqrt[6]{32 - 2x^2}$ بـــه ازای چه مقادیری از x معین است.

حل : عبارت مفروض را می‌توان چنین نوشت :

$$\sqrt[150]{x^3 - 8} + \sqrt[6]{32 - 2x^2}$$

بنابراین عبارت‌فوق وقتی تعریف‌شده و معین است که زیر رادیکالهای با فرجهٔ زوج مثبت یا صفر باشد:

$$\begin{cases} x^3 - 8 \geq 0 \\ 32 - 2x^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 \geq 8 \\ 2x^2 \leq 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 \leq 16 \Rightarrow -4 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

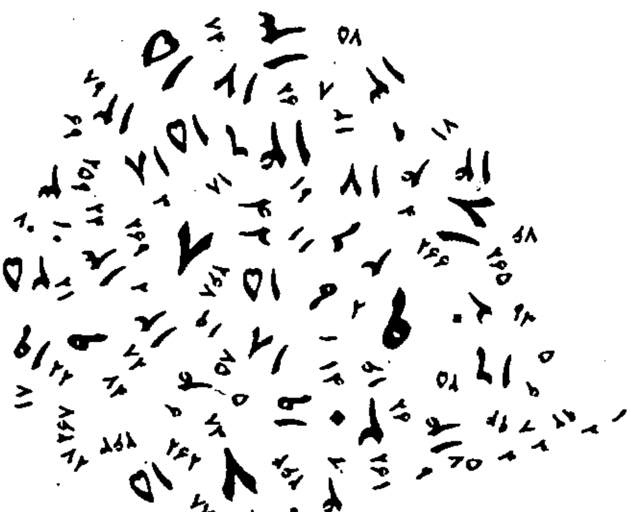
بنابراین از اشتراک مجموعهٔ جوابهای نامعادلات دستگاه داریم:

$$\text{مجموعهٔ جواب} = \{ x \mid 2 \leq x \leq 4 \}$$

ادب ریاضی

یکی از مفاهیم اساسی علوم ریاضی مفهوم عدد است که ساده‌ترین صورت آن را انسان باستانی هم می‌توانسته است تصور کند. شاید نخستین ریاضی‌دان ـ که بزرگترین نابغهٔ ناشناخته است ـ کسی است که این فکر و مفهوم را طرح ریخته.

تاریخ علم . جورج سارتن ، احمد آرام



مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان (۹)

William . Watkins and Joel Zeitlin

ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور

چند جمله‌ای مینیمال $\cos(۲\pi / n)$

نتیجه‌ای قدیمی است که ریشهٔ n ام اوّلیّه واحد، یعنی،

$$\zeta_n = \cos(۲\pi / n) + i \sin(۲\pi / n)$$

در چند جمله‌ای گویایی از درجهٔ $\phi(n)$ تعداد عددهای صحیح بین ۱ و n ی که نسبت به n اوّلند، صدق می‌کند.

معمولترین طریق محاسبهٔ چند جمله‌ای مینیمال ζ_n موسوم به چند جمله‌ای دایره بُری «*Cyclotomic Polynomial*» و نمایش داده شده به $(\phi_n(x))$ از اتحاد :

$$x^n - ۱ = \prod_{d|n} \phi_d(x) \qquad (۱)$$

استفاده می‌کند. در این صورت، به عنوان مثال؛ $\phi_۹(x)$ را می‌توان به طریق آشنای زیر محاسبه کرد:

$$x^۳ - ۱ = \phi_۱(x)\ \phi_۳(x) \qquad x^۹ - ۱ = \phi_۱(x)\ \phi_۳(x)\ \phi_۹(x)$$

بنابراین :

$$\phi_۹(x) = \frac{x^۹ - ۱}{x^۳ - ۱} = x^۶ + x^۳ + ۱$$

اکنون قسمتهای حقیقی و انگاری ζ_n را در نظر می‌گیریم؛ یعنی $\cos(۲\pi / n)$ و $\sin(۲\pi / n)$ را. اینها نیز عددهایی جبری هستند، امّا چگونه می‌توان چند جمله‌ایهای مینیمال آنها را محاسبه کرد؟

در ۱۹۳۳ لِمِر «D.H.Lehmer» [Leh] و [Niv] با استفاده از چند جمله‌ایهای دایره‌بری روشی را برای محاسبهٔ این چند جمله‌ایهای مینیمال مشخص کرد.

در این مقاله، اتحادهایی مشابه (۱)، برای چند جمله‌ای مینیمال $\psi_n(x)$ از $\cos(۲\pi / n)$ ارائه می‌دهیم، که روشی دیگر در محاسبه $\psi_n(x)$ به دست می‌دهد.

اتحادهای مزبور با چند جمله‌ایهای چبیشف «Chebychev Polynomial»، $T_s(x)$، سروکار دارند که به ازای عددهای صحیح و مثبت S و جمیع عددهای حقیقی θ، با

$$T_s(\cos \theta) = \cos(s\theta)$$

تعریف می‌شوند. درجهٔ $T_s(x)$ برابر S و ضریب اصلی مربوطه $۲^{s-۱}$ است.

قضیّه: فرض می‌کنیم $\psi_n(x)$ چند جمله‌ای مینیمال $\cos(۲\pi / n)$ باشد و $T_s(x)$ چند جمله‌ای چبیشف را نمایش دهد.

(a) اگر $n = ۲s + ۱$ فرد باشد، آنگاه

$$T_{s+۱}(x) - T_s(x) = ۲^s \prod_{d|n} \Psi_d(x) \qquad (۲)$$

و

(b) اگر $n = ۲s$ زوج باشد، آنگاه

$$T_{s+۱}(x) - T_{s-۱}(x) = ۲^s \prod_{d|n} \Psi_d(x) \qquad (۳)$$

پیش از اثبات قضیّهٔ فوق، نشان می‌دهیم که چگونه از (۲) و (۳) می‌توان به همان طریقی که اتحاد (۱) در محاسبهٔ $\phi_n(x)$ به کار رفته است، در محاسبهٔ $\psi_n(x)$ استفاده کرد. به عنوان مثال؛ در محاسبهٔ $\psi_۹(x)$ (چند جمله‌ای مینیمال $\cos(۲\pi / n)$)، در معادلهٔ (۲)، با فرض ۴ = S و بعد ۱ = S، به دست می‌آوریم:

$$T_۵(x) - T_۴(x) = ۱۶\, \psi_۱(x)\ \psi_۳(x)\ \psi_۹(x)$$

و :

$$T_۲(x) - T_۱(x) = ۲\psi_۱(x)\ \psi_۳(x)$$

در این صورت :

$$۸\, \psi_۹(x) = \frac{T_۵(x) - T_۴(x)}{T_۲(x) - T_۱(x)}$$

محاسبهٔ چهار چند جمله‌ای چبیشف فوق آسان است. به عنوان مثال:

$$T_5(\cos\theta) = \cos(5\theta)$$
$$= \mathrm{Re}\left[(\cos\theta + i\sin\theta)^5 \right] \qquad (\mathrm{Re} = \text{قسمت اصلی})$$
$$= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta$$
$$= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta(1-\cos^2\theta) + 5\cos\theta(1-\cos^2\theta)^2$$
$$= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$$

بنابراین :

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

به همین ترتیب :

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$
$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

و :

$$T_1(x) = x$$

به این ترتیب :

$$8\psi_9(x) = \frac{T_5(x) - T_4(x)}{T_2(x) - T_1(x)} = 8x^3 - 6x + 1$$

در ضمن قضیهٔ مورد نظر بر این است که یا :

$$T_{s+1}(x) - T_s(x) \qquad \text{یا} \qquad T_{s+1}(x) - T_{s-1}(x)$$

(بسته به این که n فرد یا زوج باشد) به ازای $\cos(2\pi/n)$ چند جمله‌ای گویایی نیست شونده است. امّا، چند جمله‌ای نیست شوندهٔ آشکارتری به ازای $\cos(2\pi/n)$ عبارت است از : $T_n(x) - 1$، زیرا :

$$T_n(\cos(2\pi/n)) = \cos(2\pi) = 1$$

چند جمله‌ایهای مورد بحث توسط اتحادهای زیر مرتبط هستند:
[Riv, P.5]

$$(x-1)(T_{2s+1}(x) - 1) = (T_{s+1}(x) - T_s(x))^2$$
$$2(x^2-1)(T_{2s}(x) - 1) = (T_{s+1}(x) - T_{s-1}(x))^2$$

به این ترتیب $\cos(2\pi/n)$، هنگامی که $n > 2$، ریشهٔ دوگانهٔ $T_n(x) - 1$ است.

برای آغاز اثبات قضیهٔ مورد نظر، به حقایقی چند در مورد درجه و مزدوجهای $\cos(2\pi/n)$ روی عددهای گویای Q نیازمندیم. از آن جا که

$$\cos(2\pi/n) = (\zeta_n + \zeta_n^{-1})/2$$

داریم :

$$Q(\zeta_n) \supseteq Q(\cos(2\pi/n)) \supseteq Q$$

برای محاسبهٔ درجهٔ بسط $Q(\cos(2\pi/n))$ روی Q، ملاحظه می‌کنیم که

$$[Q(\zeta_n) : Q] = \phi(n)$$

و :

$$[Q(\zeta_n) : Q(\cos(2\pi/n))] = 1 \text{ یا } 2$$

زیرا ζ_n ریشه‌ای از چند جمله‌ای درجه دوم زیر است :

$$x^2 - (2\cos(2\pi/n))x + 1$$

اکنون اگر $n \geq 3$، ζ_n حقیقی نیست و بنابراین :

$$[Q(\zeta_n) : Q(\cos(2\pi/n))] = 2$$

به این ترتیب داریم :

$$\deg \Psi_n(x) = \begin{cases} 1 & n = 1, 2 \quad \text{اگر} \\ \phi(n)/2 & n \geq 3 \quad \text{اگر} \end{cases}$$

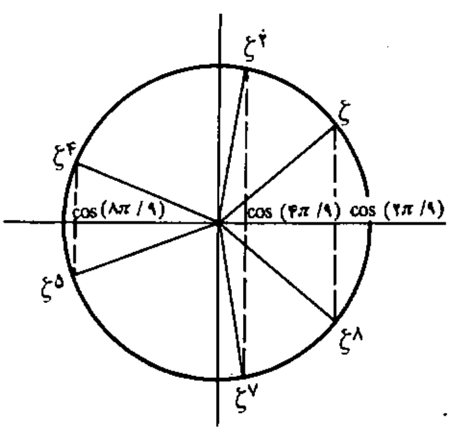
(deg = درجه)

برای پیشرفت بیشتر، نیاز به یافتن جمیع ریشه‌های $\psi_n(x)$، یعنی، مزدوجهای $\cos(2\pi/n)$ داریم. به ازای $n = 1, 2, 3, 4, 6$ $\cos(2\pi/n)$ گویا و بنابراین $\psi_n(x)$ خطی است و دقیقاً یک ریشه دارد.

اما به ازای مقدارهای دیگر n، $\phi(n)/2 \geq 2$ و به این ترتیب $\psi_n(x)$ بیش از یک ریشه دارد. این ریشه‌ها کدام هستند؟ برای به دست دادن مثالی خاص، ریشه‌های چند جمله‌ای درجه سوم زیر کدام هستند؟

$$8\psi_9(x) = 8x^3 - 6x + 1$$

البته ریشه‌های $\phi^9(x)$ عبارت است از که در آن $\xi = \xi^9$.



ریشه‌های مزبور در جفتهای :

$\cos(2\pi k/9) \pm i\sin(2\pi k/9)\quad k = 1, 2, 4$

تنها با سه جزء حقیقی متمایز :

$\cos(2\pi/9), \cos(4\pi/9), \cos(8\pi/9)$

رخ می‌دهند. سه کسینوس مزبور ریشه‌های $\psi_9(x)$، هستند. حالت عمومی مورد فوق عبارت است از :

لم. اگر $n \geq 3$، آنگاه ریشه های $\psi_n(x)$، عبارت است از $\cos(2\pi k/n)$، به ازای $0 \leq k \leq s$ و $(k, n) = 1$. (s چون در قضیهٔ مورد بحث تعریف شده است.)

لم فوق بسادگی از این حقیقت نتیجه می‌شود که Q− خود ریخت σ ی $Q(\zeta_n)$ داده شده توسط $\sigma(\zeta_n) = \zeta_n^k$، به ازای $(k,n)=1$، $\cos(2/n)\pi$ را به $\cos(2\pi k/n)$ می‌فرستد :

$$\sigma\left(\cos(2\pi/n)\right) = \sigma\left((\zeta_n + \zeta_n^{-1})/2\right) = \left(\zeta_n^k + \zeta_n^{-k}\right)/2 = \cos(2\pi k/n)$$

به این ترتیب :

$$0 = \sigma\left(\Psi_n(\cos(2\pi/n))\right) = \Psi_n\left(\sigma(\cos(2\pi/n))\right) = \Psi_n\left(\cos(2\pi k/n)\right)$$

و بنابراین : $\phi(n)/2$ عدد از $\cos(2\pi k/n)$ ها، که در آنها $(k, n) = 1$ و $0 \leq k \leq s$ ریشه‌های $\psi_n(x)$ هستند.

اکنون برای اثبات قسمت a ی قضیه ($n = 2s + 1$ فرد است)، کافی است که نشان دهیم دو طرف (۲) دارای ریشه‌های یکسان و ضریب اصلی یکسان هستند. درجهٔ سمت راست (۲) عبارت است از :

$$\sum_{d|n} \deg\left(\Psi_d(x)\right) = \deg\left(\Psi_1(x)\right) + \frac{1}{2}\sum_{d|n, d\neq 1}\phi(d) = 1 + \frac{1}{2}(n-1) = s + 1$$

که با درجهٔ سمت چپ (۲) سازگار است. سمت چپ و سمت راست (۲) دقیقاً دارای $s + 1$ ریشه است : $\cos(2\pi k/n)$، $0 \leq k \leq s$ که جمیع آنها متمایز هستند.

برای ملاحظهٔ این مطلب فرض می‌کنیم : $(k, n) = g$، بنابراین :

$k = k'g,\ n = dg,\ (k', d) = 1$

در این صورت از لم فوق :

$\cos(2\pi k/n) = \cos(2\pi k'/d)$

ریشه‌ای از $\psi_d(x)$ است، که عاملی از عبارت سمت راست (۲) است. در سمت چپ (۲)،

$$\begin{aligned} &T_{s+1}(\cos(2\pi k/n)) - T_s(\cos(2\pi k/n)) \\ &= \cos(2\pi k(s+1)/n) - \cos(2\pi ks/n) \\ &= \cos(\pi k(n+1)/n) - \cos(\pi k(n-1)/n) \\ &= \cos(\pi k + \pi k/n) - \cos(\pi k - \pi k/n) \\ &= 0 \end{aligned}$$

بنابراین، $\cos(2\pi k/n)$ نیز ریشه‌ای از سمت چپ (۲) است. اکنون از آن جا که ضریب اصلی $T_{s+1}(x)$ عبارت است از : 2^s، اتحاد (۲) به اثبات می‌رسد.

اثبات قسمت (b) به همین ترتیب است، اما در این حالت درجهٔ سمت راست (۳) به طریق زیر محاسبه می‌شود :

$$\sum_{d|n}\deg\left(\Psi_d(x)\right) = \deg\left(\Psi_1(x)\right) + \deg\left(\Psi_2(x)\right) + \frac{1}{2}\sum_{d|n, d>2}\phi(d) = 2 + \frac{1}{2}(n-2) = s + 1$$

که با درجهٔ سمت چپ (۳) در توافق است.

باز هم چندجمله‌ایهای واقع بر سمت راست و سمت چپ (۳) دقیقاً دارای $s + 1$ ریشه :

$\cos(2\pi k/n),\ 0 \leq k \leq s$

و ضریب اصلی یکسان هستند. برای ملاحظه این که $\cos(2\pi k/n)$ ریشهٔ سمت چپ (۳) است، به محاسبه‌های زیر می‌پردازیم :

$$\begin{aligned} &T_{s+1}(\cos(2\pi k/n)) - T_{s-1}(\cos(2\pi k/n)) \\ &= \cos(2\pi k(s+1)/n) - \cos(2\pi k(s-1)/n) \\ &= \cos(\pi k(n+2)/n) - \cos(\pi k(n-2)/n) \\ &= \cos(\pi k + 2\pi k/n) - \cos(\pi k - 2\pi k/n) \\ &= 0 \end{aligned}$$

تبصره. وگنر «K.W. Wegner» [Weg] فهرستی از چند جمله‌ایهای مینیمال (جمیعاً از درجه‌ای کمتر از هشت) را در مورد تابعهای مثلثاتی زاویه‌های مشخص به دست داده است، که ضریبهای گویای 2π هستند. نیون «I.Niven» در گزارش خود به نام عددهای گنگ «*Irrational Numbers [Niv , P.39]*»، فرمولی در مورد درجهٔ چند جمله‌ای مینیمال تانژانت هر مضرب گویای 2π به دست داده است.

مرجعها

[Leh] D.H. Lehmer , A note on trigonometric algebraic numbers , *American Mathematical Monthly , 40 (1933) 165 - 166.*

[Niv] Ivan Niven , *Irrational Numbers* , MAA , Washington ,D.C. , 1956.

[Riv] T.J. Rivlin , *Chebyshef Polynomials From Approximation Theory to Algebra and Number Theory* , 2nd ed. , Wiley , New York , 1990

[Van] B.L. Van der Waerden , Modern Algebra (English Translation) , 2nd ed. ,Ungar , New York , 1953.

[Weg] Kenneth W.Wegner Equations with trigonometric Values as roots , *American Mathematical Monthly* , 66 (1959) 52 - 53

Department of Mathematics
California State University , Northridge
Northridge , CA 91330

ادب ریاضی

بابلیان سالهای ۲۰۰۰ ـ ۲۲۰۰ پیش از میلاد می‌توانستند مربع و مستطیل و مثلث متساوی‌الساقین را مساحت کنند، اطلاعی دربارهٔ قضیهٔ فیثاغورس داشتند، و می‌دانستند که زاویهٔ حاوی نصف دایره زاویهٔ راست است.

می‌توانستند حجم متوازی‌السطوح و استوانهٔ قائم و مخروط ناقص و هرم ناقص مربع‌القاعده را پیدا کنند. راهی که برای تعیین حجم هرم ناقص مربع‌القاعده داشتند کمی با راه مصریان اختلاف داشت و آن‌را می‌توان چنین بیان کرد:

$$V = h\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right]$$

تاریخ علم . جورج سارتن ، احمد آرام

مکان هندسی

(قسمت سوم)

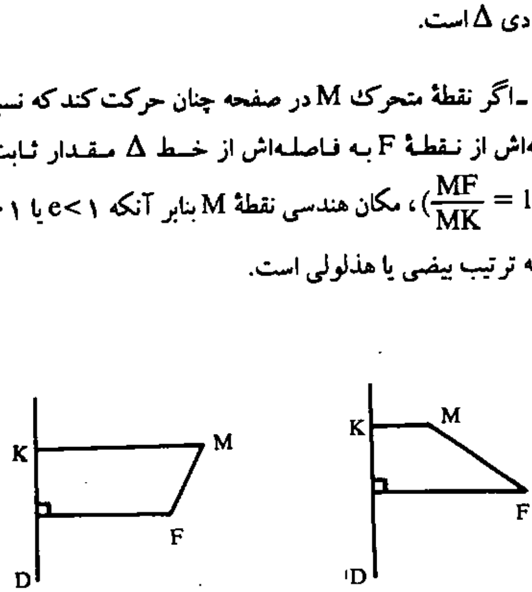
محمدهاشم رستمی

این مقاله، یک مقاله تحقیقی است. به این جهت از دانش‌آموزان و دانشجویان ارجمند، اساتید محترم دانشگاهها، و دیگر ریاضیدانان و صاحبنظران درخواست می‌شود، مطالب و نظریات خود را که برای تکمیل و یا تصحیح این مقاله می‌تواند مؤثر و مفید باشد، همچنین کتابی که در مورد مکان هندسی در اختیار دارند و یا مشخصات آن کتاب را به نشانی مجلهٔ ریاضی برهان ارسال فرمایند، که قبلاً از این لطف و همکاری، صمیمانه سپاسگزاری می‌شود.

۵ـ در مسأله یک نقطه ثابت مانند F و یک خط ثابت مانند D وجود دارد.

الف ـ اگر نقطهٔ متحرک M در صفحه چنان حرکت کند که فاصله‌اش از نقطهٔ ثابت F مساوی فاصله‌اش از خط ثابت Δ باشد، $(MF = MK)$ ، مکان هندسی نقطهٔ M یک سهمی به کانون F و خط هادی Δ است.

ب ـ اگر نقطهٔ متحرک M در صفحه چنان حرکت کند که نسبت فاصله‌اش از نقطهٔ F به فاصله‌اش از خط Δ مقدار ثابت l باشد $(\frac{MF}{MK} = l)$ ، مکان هندسی نقطهٔ M بنابر آنکه $e < ۱$ یا $e > ۱$ باشد، به ترتیب بیضی یا هذلولی است.

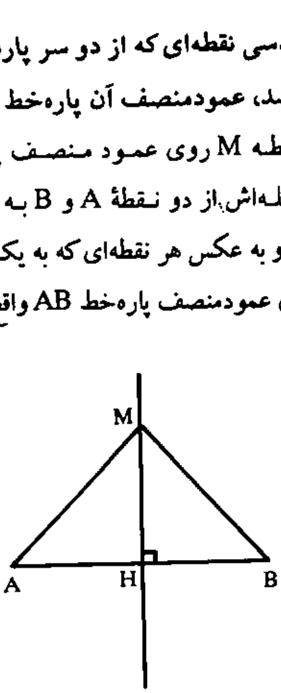


تبصره: در تعیین مکانهای هندسی حالتهای دیگری نیز وجود دارد مثلاً در مسأله سه نقطه ثابت وجود داشته باشد، و یا سه‌خط ثابت، و یا یک نقطه و یک صفحه ثابت و... که فعلاً از ذکر آنها خودداری می‌کنیم.

اینک به معرفی مکانهای هندسی مهم و ذکر کاربردهایی از آنها می‌پردازیم و مسأله‌هایی در ارتباط با مکانهای هندسی مطرح می‌کنیم.

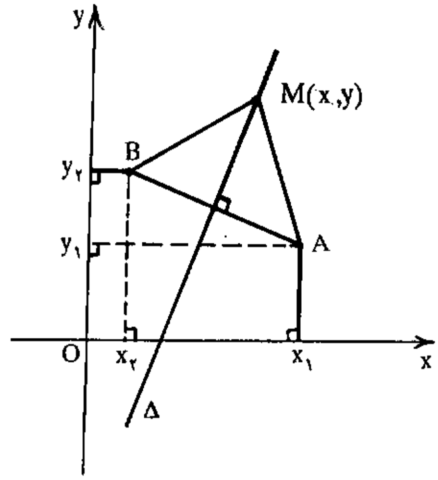
۱ـ مکان هندسی نقطه‌ای که از دو سر پاره‌خط مفروض AB به یک فاصله باشد، عمودمنصف آن پاره‌خط است.

یعنی: اگر نقطه M روی عمود منصف پاره‌خط AB قرار داشته باشد، فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B به یک اندازه است $(MA = MB)$. و به عکس هر نقطه‌ای که به یک فاصله از دو نقطهٔ A و B باشد، روی عمودمنصف پاره‌خط AB واقع است.



اثبات به روش تحلیلی:

فرض می‌کنیم $A(x_1 , y_1)$ و $B(x_2 , y_2)$ باشد. اگر $M(x , y)$ را یک نقطه از مکان‌هندسی‌فوق در نظر بگیریم، داریم: $MA = MB$



پس:

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$$

$$\Rightarrow 2(x_2-x_1)x+2(y_2-y_1)y$$

$$+x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2=0 \quad (1)$$

معادلهٔ بالا، معادلهٔ یک خط راست مانند Δ است که:

اولاً ـ از نقطهٔ $M\left(\frac{x_1+x_2}{2} \text{ و } \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ وسط پاره‌خط AB می‌گذرد زیرا مختصات نقطهٔ M در این معادله صدق می‌کند.

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right) \rightarrow (1) \Rightarrow$$

$$2(x_2-x_1)\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+2(y_2-y_1)\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)+$$

$$x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2=0$$

$$\Rightarrow x_2^2-x_1^2+y_2^2-y_1^2+x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2=0$$

$$\Rightarrow \boxed{0=0}$$

ثانیاً ـ بر خط AB عمود است، چون:

$$m/AB=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \quad \text{و} \quad m/\Delta=-\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1} \Longrightarrow$$

$$m/AB\cdot m/\Delta=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\times-\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}=-1 \Longrightarrow \Delta\perp AB$$

به‌عکس ثابت می‌شود هر نقطه‌ای که مختصاتش در معادلهٔ (۱) صدق می‌کند، از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله می‌باشد.

پس: مکان هندسی نقطه‌ای که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله است عمودمنصف پاره خط AB است.

تبصره: باید توجه داشت که کمترین فاصلهٔ نقطه‌های واقع بر عمود منصف یک پاره‌خط ، یا بر صفحهٔ عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط همواره برابر $\frac{AB}{2}$ است. یعنی برای هر نقطهٔ M از مکان فوق داریم $MA \geq \frac{AB}{2}$.

مثال ۱: پاره‌خط AB به طول ۸ سانتی‌متر مفروض است. چند نقطه روی عمود منصف پاره‌خط AB وجود دارد که:

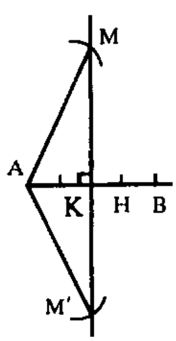
الف ـ از دو نقطهٔ A و B به فاصله ۶ سانتی‌متر باشد.

ب ـ از دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر باشد.

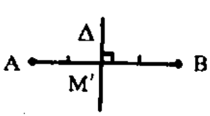
ج ـ از دو نقطهٔ A و B به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد.

حل ـ چون $4 = \frac{8}{2} = \frac{AB}{2}$ است. پس:

الف ـ چون $4 = \frac{AB}{2} < 6 = MA = MB$، پس دو نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط AB وجود دارد که از نقاط A و B به فاصلهٔ ۶ سانتی‌متر واقع‌اند.

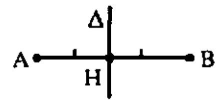


ب ـ چون $4 = \frac{AB}{2} = 4 = MA = MB$ است، پس فقط یک نقطه‌روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد که از نقاط A و

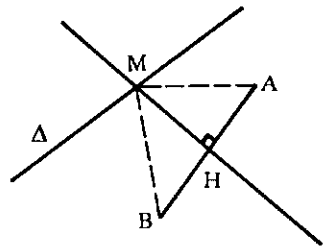


B به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر واقع است و این تنها نقطه، نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB است.

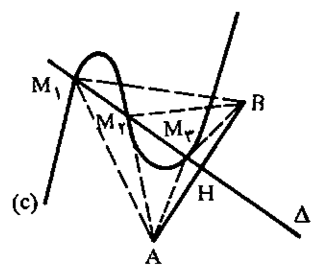
ج - چون $MA = MB = 3 < \frac{AB}{2} = 4$. پس هیچ نقطه‌ای روی عمودمنصف پاره‌خط AB وجود ندارد که از نقاط A و B به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد.



مثال ۲: خط Δ (یا منحنی C) و دو نقطه A و B در یک صفحه مفروضند. نقطه‌ای روی خط Δ (یا منحنی C) پیدا کنید که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد.

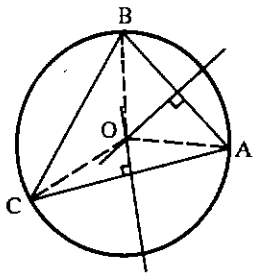


حل ـ عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. نقطه‌های تقاطع این عمودمنصف با خط Δ (یا منحنی C) جواب مسأله است. تعداد جوابهای مسأله بستگی به تعداد نقاط برخورد دارد.



مثال ۳: سه نقطهٔ A و B و C غیرواقع بر یک خط راست در یک صفحه مفروضند. نقطه‌ای تعیین کنید که از سه نقطه A و B و C به یک فاصله باشد.

حل ـ نقاط A و B و C را به هم وصل می‌کنیم آنگاه عمودمنصف پاره‌خط AB همچنین عمودمنصف پاره‌خط AC را رسم می‌نماییم، نقطه برخورد این دو عمودمنصف نقطه O جواب مسأله است زیرا داریم: $OA = OB = OC$. می‌دانیم که نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث است.



مثال ۴: دو نقطهٔ $A(-3 , 1)$ و $B(1 , +2)$ مفروضند. معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB را تعیین کنید.

حل: راه اول ـ اگر $M(x , y)$ نقطه‌ای از عمودمنصف پاره‌خط AB باشد، داریم:

$$MA = MB \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$$

$$\Rightarrow \cancel{x^2}+6x+9+\cancel{y^2}-2y+1=\cancel{x^2}-2x+1+\cancel{y^2}-4y+4 \Rightarrow$$

معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB $\boxed{8x + 2y + 5 = 0}$

راه دوم ـ

$$M\left(\frac{-3+1}{2} , \frac{1+2}{2}\right) \Rightarrow M\left(-1 , \frac{3}{2}\right)$$ وسط پاره‌خط AB

$$m/AB = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{2-1}{1+3} = \frac{1}{4} \Rightarrow$$ عمودمنصف AB $m = -4$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - \frac{3}{2} = -4(x+1) \Rightarrow$$

معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB $\boxed{8x + 2y + 5 = 0}$

مثال ۵: نقطه‌ای روی منحنی به معادلهٔ $y = x^2 - 2x - 3$ پیدا کنید که از دو نقطهٔ $A(0 , 4)$ و $B(-2 , 0)$ به یک فاصله باشد.

حل: نقطهٔ تقاطع عمودمنصف پاره‌خط AB با منحنی فوق را پیدا می‌کنیم.

$$M(x,y) , MA = MB \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-4)^2} = \sqrt{(x+2)^2+(y-0)^2}$$

$$\Rightarrow \cancel{x^2}+\cancel{y^2}+16-8y=\cancel{x^2}+4x+4+\cancel{y^2}\Rightarrow 4x+8y-12=0 \Rightarrow$$

معادلهٔ عمود منصف پاره‌خط AB $\quad x+2y-3=0$

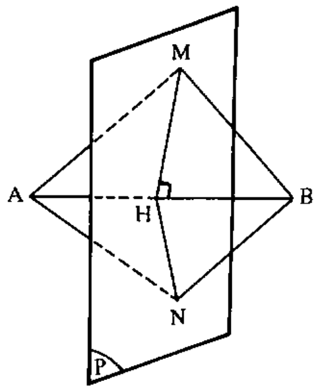
$$\begin{cases} y=x^2-2x-3 \\ x+2y-3=0 \end{cases}$$

$$x+2x^2-4x-6-3=0\Rightarrow 2x^2-3x-9=0 \Rightarrow x=3 \text{ و } x=\frac{-3}{2}$$

$$\Rightarrow x=3\Rightarrow y=0 \text{ و } x=\frac{-3}{2}\Rightarrow y=\frac{9}{4}\Rightarrow M_1(3 \text{ و } 0) \text{ و } M_2(\frac{-3}{2} \text{ و } \frac{9}{4})$$

نقاط جواب مسئله

۲ـ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از دو نقطه ثابت A و B به یک فاصله باشد، صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB است. (صفحه‌ای که از نقطهٔ H وسط پاره‌خط می‌گذرد و بر AB عمود است.)

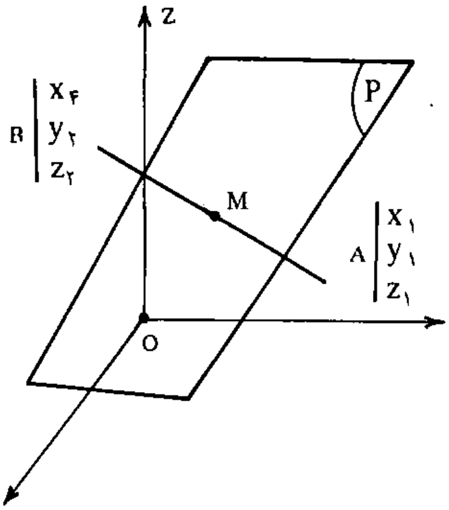


زیرا اگر M نقطه‌ای از صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB باشد و از M به نقاط A و B و H وصل کنیم، در مثلث MAB، پاره‌خط MH عمودمنصف پاره‌خط AB است پس مثلث MAB متساوی‌الساقین و در نتیجه $MA = MB$ است.

به عکس هر نقطه‌ای مانند N که به یک فاصله از دو نقطه A و B باشد، روی صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد. زیرا اگر از N به H وصل کنیم، در مثلث‌متساوی‌الساقین NAB، پاره‌خط NH میانهٔ نظیر قاعده است.پس عمودمنصف قاعده نیز می‌باشد. در نتیجه نقطهٔ N روی صفحه‌ای قرار دارد که در نقطه H بر پاره‌خط AB عمود گردیده است یعنی روی صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB واقع است.

اثبات به روش تحلیلی:

اگر $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ باشد، برای نوشتن معادلهٔ صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB، فرض می‌کنیم $M(x, y, z)$ باشد، در این‌صورت خواهیم داشت:



$$MA=MB\Rightarrow \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}$$

$$=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2}$$

$$\Rightarrow 2(x_2-x_1)x+2(y_2-y_1)y+2(z_2-z_1)z$$

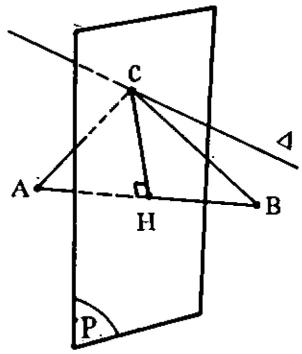
$$+x_1^2+y_1^2+z_1^2-(x_2^2+y_2^2+z_2^2)=0 \qquad (1)$$

معادلهٔ (۱) معادلهٔ صفحه‌ای است که از نقطهٔ $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$ وسط پاره خط AB می‌گذرد (مختصات نقطهٔ M در معادلهٔ (۱) صدق می‌کند) ، و بر بردار $\overrightarrow{AB}(x_2-x_1 \text{ و } y_2-y_1 \text{ و } z_2-z_1)$ عمود است. بنابراین معادلهٔ صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB است. به‌عکس به سادگی ثابت می‌شود هر نقطه‌ای که مختصاتش در رابطهٔ (۱) صدق کند از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله است.

مثال ۱:. دو نقطهٔ A و B و خط Δ غیرواقع در یک صفحه مفروضند. روی خط Δ نقطه‌ای مانند C چنان بیابید که مثلث ABC در رأس C متساوی‌الساقین باشد.

حل ـ چون $CA = CB$ است پس نقطهٔ O روی صفحهٔ

عمودمنصف پاره‌خط AB واقع است. بنابراین برای حل مسأله، صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. نقطه برخورد این صفحه با خط Δ ، نقطهٔ C جواب مسأله است.

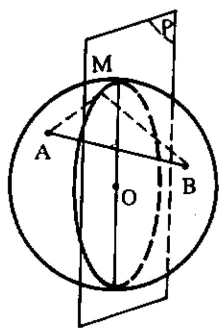


بحث: اگر صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB خط Δ را در یک نقطه‌قطع کند (و این در صورتی است که خط Δ عمود بر امتداد AB نباشد)، مسأله تنها یک جواب دارد. اگر صفحه عمودمنصف پاره‌خط AB موازی خط Δ باشد (و این در صورتی است که خط Δ عمود بر امتداد AB باشد)، مسأله جواب ندارد.

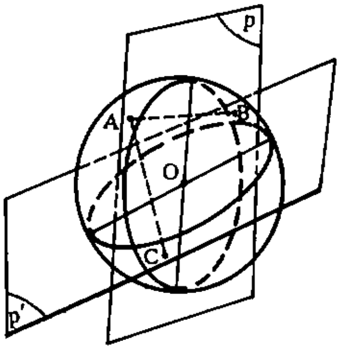
اگر صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB شامل خط Δ باشد (خط Δ روی صفحهٔ عمودمنصف واقع شود)، مسأله بیشمار جواب دارد.

مثال ۲: دو نقطهٔ A و B روی یک کره واقع‌اند. مکان هندسی نقاطی از سطح این کره را پیدا کنید که از دو نقطه A و B به یک فاصله باشند.

حل ـ صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. این صفحه از مرکز کره می‌گذرد و کره را در یک دایرهٔ عظیمه قطع می‌کند که این دایرهٔ عظیمه جواب مسأله است.



مسأله ۵ ـ سه نقطه A و B و C روی یک کره واقع‌اند. نقطه‌ای از این کره را بیابید که از سه نقطه A و B و C به یک فاصله باشد.



حل ـ صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. این صفحه کره را در دایرهٔ عظیمهٔ (C) قطع می‌کند. صفحه عمود منصف پاره‌خط AC را نیز رسم می‌کنیم. این صفحه کره را در دایرهٔ عظیمهٔ (C′) تلاقی می‌نماید. نقطه‌های برخورد این دو دایرهٔ (C) و (C′). جوابهای مسأله‌اند (دو جواب). اگر یکی از این دو نقطه را M بنامیم، داریم $MA = MB = MC$.

مثال ۴: اگر (۰ و ۲− و ۱) A و (۱− و ۱ و ۰) B باشد معادلهٔ صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB را بنویسید.

حل: راه اول ـ در معادلهٔ (۱) به جای مختصات نقاط A و B مقدار می‌گذاریم:

$$۲(۰ - ۱)x + ۲(۱ + ۲)y + ۲(-۱ - ۰)z + ۱ + ۴ + ۰ - (۰ + ۱ + ۱) = ۰ \Longrightarrow \boxed{-۲x + ۶y - ۲z + ۳ = ۰}$$

راه دوم ـ فرض می‌کنیم $M\ (x\ ,\ y\ ,\ z)$ یک نقطه از صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB باشد. در این صورت داریم:

$$MA = MB \Rightarrow \sqrt{(x-۱)^۲ + (y+۲)^۲ + (z-۰)^۲} = \sqrt{(x-۰)^۲ + (y-۱)^۲ + (z+۱)^۲}$$

$$\Rightarrow \cancel{x^۲} - ۲x + \cancel{۱} + \cancel{y^۲} + ۴y + ۴ + \cancel{z^۲} = \cancel{x^۲} + \cancel{y^۲} - ۲y + \cancel{۱} + \cancel{z^۲} + ۲z + \cancel{۱}$$

$\Rightarrow \boxed{-۲x + ۶y - ۲z + ۳ = ۰}$ معادلهٔ صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB

راه سوم ـ مختصات نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB $(x_۱$ و $y_۱$ و $z_۱)$

و تصاویر بردار نرمال صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB (c و b و a) راکه می‌تواند تصاویر بردار $\overrightarrow{AB}$ باشد به دست می‌آوریم و در معادلهٔ $a(x-x_۱)+b(y-y_۱)+c(z-z_۱)=۰$ قرار می‌دهیم.

$$M\left|\begin{array}{l} x=\dfrac{x_A+x_B}{۲}=\dfrac{۱+۰}{۲}=\dfrac{۱}{۲} \\ y=\dfrac{y_A+y_B}{۲}=\dfrac{-۲+۱}{۲}=-\dfrac{۱}{۲} \\ z=\dfrac{z_A+z_B}{۲}=\dfrac{۰-۱}{۲}=-\dfrac{۱}{۲} \end{array}\right.$$

$$\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} a=x_B-x_A=۰-۱=-۱ \\ b=y_B-y_A=۱+۲=۳ \\ c=z_B-z_A=-۱-۰=-۱ \end{array}\right.$$

$$a(x-x_۱)+b(y-y_۱)+c(z-z_۱)=۰$$

$$-۱\left(x-\frac{۱}{۲}\right)+۳\left(y+\frac{۱}{۲}\right)-۱\left(z+\frac{۱}{۲}\right)=۰ \Longrightarrow$$

$$-x+۳y-z+\frac{۳}{۲}=۰ \Longrightarrow \boxed{-۲x+۶y-۲z+۳=۰}$$

مثال ۵: روی خط $D: \dfrac{x-۱}{۲}=\dfrac{y+۲}{-۲}=\dfrac{z-۳}{۳}$ نقطه‌ای بیابید که از دو نقطهٔ (۱ و ۱ و ۲)A و (۲+ و ۱ و ۲−)B به یک فاصله باشد.

حل: معادلهٔ صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB را می‌نویسیم و نقطهٔ برخورد این صفحه با خط D را به دست می‌آوریم.

$$M(x,y,z),\ A(۲,۱,۱),\ B(-۲,۱,۲),\ MA=MB$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-۲)^۲+(y-۱)^۲+(z-۱)^۲}=$$

$$\sqrt{(x+۲)^۲+(y-۱)^۲+(z-۲)^۲}$$

$$\Longrightarrow (x+۲)^۲+(y-۱)^۲+(z-۱)^۲$$

$$=(x+۲)^۲+(y-۱)^۲+(z-۲)^۲$$

معادلهٔ صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB $\boxed{-۸x+۲z-۳=۰} \Longrightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{x-۱}{۲}=\dfrac{y+۲}{-۲}=\dfrac{z-۳}{۳}=t \Rightarrow \\ -۸x+۲z-۳=۰ \end{cases}$$

$$x=۲t+۱,\ y=-۲t-۲,\ z=۳t+۳ \Rightarrow$$

$$-۸(۲t+۱)+۲(۳t+۳)-۳=۰ \Longrightarrow -۱۰t-۵=۰ \Longrightarrow$$

$$t=-\frac{۱}{۲} \Longrightarrow M\left(x=۰ \ \text{و}\ y=-۱ \ \text{و}\ z=+\frac{۳}{۲}\right)$$

ادب ریاضی

با وجود نبوغ بارزی که داشت مقامات مدرسه‌ای او را آرام نمی‌گذاشتند تا بتواند از میدان وسیع و بارور اکتشافات خود بهره‌برداری کند. به عکس از به کار بردن هر وسیله‌ای برای خشمگین ساختن او خودداری نمی‌کردند. یا او را به کار و کوشش بیهوده وامی‌داشتند و یا با مواعظ حکیمانه و تنبیهات متوالی خود روح عصیان را در وی شدت می‌بخشیدند و با همهٔ احوال نمی‌توانستند هیچ‌گونه ایرادی بر او وارد آورند مگر عزت نفس بسیار و اراده‌ای آهنین برای این‌که ریاضی‌دانی بزرگ شود. در واقع در آن هنگام وی ریاضی‌دانی بزرگ بود اما آنان از این نکته غافل بوده‌اند. دو بدبختی دیگر که در سال هیجدهم زندگی برایش پیش آمد آخرین ضربات را بر خلق و خوی گالوا وارد آورد. در این سال برای بار دوم داوطلب امتحان ورودی پلی تکنیک شد و مردانی که حق لیاقت تراشیدن مدادهای او را نداشتند می‌بایست دربارهٔ کفایت او قضاوت کنند و نتیجه همان شد که می‌بایست انتظار داشت: گالوا بار دیگر رد شد و این آخرین شانس او بود و بعد از این درهای این مدرسه برای همیشه به روی او بسته می‌شد.

ریاضیدانهای نامی ـ حسن صفاری

مثلث ارتفاعیه

(قسمت دوم)

● ساسان اسماعیلی شاهرودی (دبیرستان سروش)

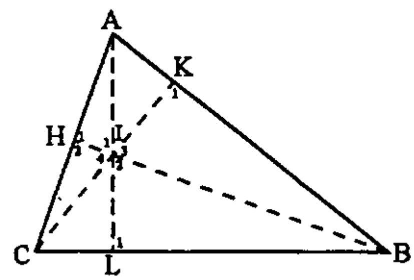
ویژگی هشتم:

در هر مثلث، حاصل ضرب دو قطعه‌ای که توسط مرکز ارتفاعیه بر روی ارتفاعها جدا می‌شوند با هم برابرند یعنی:

$$AI.LI = BI.HI = CI.KI$$

$$\begin{cases} \hat{H}_1 = \hat{L}_1 = \dfrac{\pi}{2} \\ I_1 = I_2 \end{cases} \Rightarrow A\hat{I}H \sim B\hat{I}L \Rightarrow \frac{AI}{BI} = \frac{HI}{LI}$$

$$\Rightarrow AI.LI = BI.HI \quad (I)$$



$$\begin{cases} \hat{K}_1 = \hat{H}_2 = \dfrac{\pi}{2} \\ \hat{I}_3 = \hat{I}_4 \end{cases} \Rightarrow H\hat{I}C \sim K\hat{I}B$$

$$\Rightarrow BI.HI = CI.KI \quad (II)$$

$$(I),(II) \Rightarrow AI.LI = BI.HI = CI.KI$$

ویژگی نهم:

طول اضلاع مثلث ارتفاعیه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

طبق قضیه سینوسها: $\dfrac{a}{\sin\hat{A}} = \dfrac{b}{\sin\hat{B}} = \dfrac{c}{\sin\hat{C}} = 2R$

R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC و R' شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ارتفاعیه است)

$$\frac{KL}{\sin\hat{H}} = \frac{HL}{\sin\hat{K}} = \frac{HK}{\sin\hat{L}} = 2R'$$

$$\Rightarrow \frac{KL}{\sin 2\hat{B}} = \frac{HL}{\sin 2\hat{C}} = \frac{HK}{\sin 2\hat{A}} = R$$

$$HK = R\sin 2\hat{A} \quad KL = R\sin 2\hat{B} \quad HL = R\sin 2\hat{C}$$

ویژگی دهم:

اگر S مساحت مثلث ABC و P_h نصف محیط مثلث ارتفاعیه باشد داریم: $P_h = \dfrac{S}{R}$

$$P_h = \frac{1}{2}(HK + LK + LH)$$

$$= \frac{R}{2}\left(\sin 2\hat{A} + \sin 2\hat{B} + \sin 2\hat{C}\right)$$

طبق رابطهٔ $\sin\hat{P} + \sin\hat{q} = 2\sin\left(\dfrac{\hat{p}+\hat{q}}{2}\right).\cos\left(\dfrac{\hat{p}-\hat{q}}{2}\right)$ خواهیم داشت:

$$\sin 2\hat{A} + \sin 2\hat{B} = 2\left(\frac{2\hat{A} + 2\hat{B}}{2}\right)\cos\left(\frac{2\hat{A} - 2\hat{B}}{2}\right)$$

$$= 2\sin\left(\hat{A} + \hat{B}\right)\cos\left(\hat{A} - \hat{B}\right)$$

لذا:

$$P_h=\frac{R}{2}\Big[2\sin\left(\hat{A}+\hat{B}\right)$$

$$\cos\left(\hat{A}-\hat{B}\right)+2\sin\hat{C}\cos\hat{C}\Big]$$

$$P_h=R\left[\sin\hat{C}\cos\left(\hat{A}-\hat{B}\right)+2\sin\hat{C}\cos\hat{C}\right]$$

طبق رابطهٔ:

$$\cos\hat{p}+\cos\hat{q}=2\cos\left(\frac{\hat{p}+\hat{q}}{2}\right).\cos\left(\frac{\hat{p}-\hat{q}}{2}\right)$$

خواهیم داشت:

$$P_h=R\sin\hat{C}\left[2\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}+\hat{C}}{2}.\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}-\hat{C}}{2}\right]$$

$$P_h=2R\sin\hat{C}\cos\left(\frac{\pi-2\hat{B}}{2}\right)\cos\left(\frac{2\hat{A}-\pi}{2}\right)$$

$$P_h=2R\sin\hat{A}\sin\hat{B}\sin\hat{C}\quad(\mathrm{I})$$

از طرفی در هر مثلث داریم:

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{abc}{4R}=\frac{8R^3\sin\hat{A}\sin\hat{B}\sin\hat{C}}{4R}$$

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}}=2R^2\sin\hat{A}\sin\hat{B}\sin\hat{C}\quad(\mathrm{II})$$

$$(\mathrm{I}),(\mathrm{II})\quad\Rightarrow\ P_h=\frac{S}{R}$$

از طرفی از رابطهٔ (I) می‌توان نتیجه گرفت:

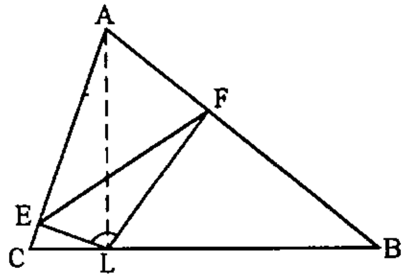
$2P_h=4R\sin\hat{A}\sin\hat{B}\sin\hat{C}$ (محیط مثلث ارتفاعیه)

ویژگی یازدهم:

اگر از یک رأس مثلث ارتفاعیه دو عمود بر دو ضلع مثلث *ABC* فرود آوریم آنگاه طول پاره‌خطی که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند برابر نصف محیط مثلث ارتفاعیه می‌باشد.

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{AL.BC}{2}=\frac{AL.2R\sin\hat{A}}{2}=R.AL.\sin\hat{A}$$

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{R}=AL.\sin\hat{A}$$



اگر R_1 شعاع دایره محیطی مثلث EFL باشد خواهیم داشت:

$$EF=2R_1\sin\hat{L}=2R_1\sin\left(\pi-\hat{A}\right)=2R_1\sin\hat{A}$$

از طرفی شعاع دایره محیطی چهارضلعی محاطی EAFL نیز R_1 می‌شود، پس خواهیم داشت:

$AL=2R_1\ \Rightarrow\ EF=AL.\sin\hat{A}$ (AL قطر دایرهٔ محیطی چهارضلعی محاطی EAFL است)

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{R}=AL.\sin\hat{A}\quad\Rightarrow\ EF=P_h$$

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{R}=P_h$$

اگر L را رأس مثلث ارتفاعیه درنظرنگیریم به‌عبارت دیگر AL بر BC عمود نباشد نیز رابطهٔ $EF = AL.\sin A$ صادق می‌باشد. حال چون $\sin\hat{A}$ عدد ثابتی است کمترین مقدار برای EF وقتی به‌دست می‌آید که AL عمود بر BC باشد پس با تغییر نقطهٔ L بر روی ضلع BC خواهیم داشت:

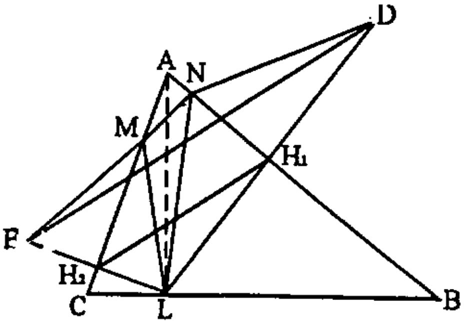
$$EF\geq P_h$$

ویژگی دوازدهم:

در هر مثلث حادّالزاویه بین تمامی مثلثهای محاط در آن، مثلث ارتفاعیه کمترین محیط را داراست.

مثلث دلخواه MNL را محاط در مثلث ABC درنظر می‌گیریم. E و D به‌ترتیب قرینهٔ نقطه L نسبت به اضلاع AC و AB می‌باشند. حال H_1 را به H_2 و E را به D وصل می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} EH_2 = LH_2 \\ DH_1 = LH_1 \end{array}\right. \Rightarrow H_1H_2 \parallel ED \ , \ H_1H_2 = \frac{ED}{2}$$



طول خط شکستهٔ EMND از طول خط ED بیشتر است، از طرفی طول خط شکستهٔ EMND برابر محیط مثلث MND است و همچنین:

ED وقتی به حداقل خود می‌رسد که H_1H_2 به حداقل خود برسد و در ویژگی قبل دیدیم وقتی H_1H_2 به حداقل خود می‌رسد که L پای عمود باشد پس حدّاقل اندازه ED می‌تواند برابر محیط مثلث ارتفاعیه باشد لذا اگر L پای عمود نباشد داریم: $ED > 2P_h$.

از طرفی داریم: $ED < P_{\overset{\triangle}{MND}}$ نتیجه می‌شود: $2P_h < P_{\overset{\triangle}{MND}}$

ویژگی سیزدهم:

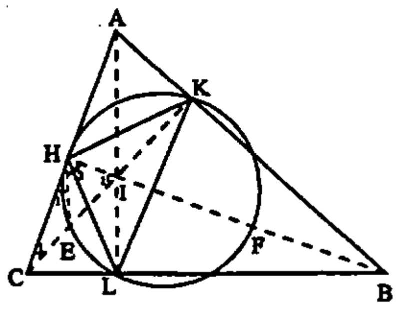
دایرهٔ محیطی مثلث ارتفاعیه از وسط *AI*، *BI* و *CI* می‌گذرد.

$$\hat{H}_2 = \frac{1}{2}(EL + LF) \quad (I)$$

$$\hat{I}_1 = \frac{1}{2}(HE + KF) \quad (II)$$

طبق ویژگی اوّل خواهیم داشت:

$KF = LF$ و $EL = HE$ (III)



$$(I),(II),(III) \Rightarrow \hat{H}_2 = \hat{I}_1 \Rightarrow EH = EI$$

$$\begin{cases} \hat{I}_1 + \hat{C}_1 = \frac{\pi}{2} \\ \hat{H}_1 + \hat{H}_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \hat{H}_1 = \hat{C}_1 \Rightarrow \\ \hat{H}_2 = \hat{I}_1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} EH = EC \\ EH = EI \end{array}\right. \Rightarrow EC = EI$$

یعنی نقطهٔ E وسط CI است.

برای دو حالت دیگر نیز به همین روش اثبات می‌کنیم.

(تذکر: دایرهٔ محیطی مثلث ارتفاعیه همان دایرهٔ نه نقطه مثلث ABC است.)

ویژگی چهاردهم:

مساحت مثلث ارتفاعیه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

در هر مثلث داریم:

$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{1}{2}$ (حاصل ضرب دو ضلع) . sin (زاویه بین دو ضلع)

$$S_{\overset{\triangle}{HKL}} = \frac{1}{2} R \sin 2\hat{B} R \sin 2\hat{C} \sin 2\hat{A}$$

$$S_{\overset{\triangle}{HKL}} = \frac{1}{2} R^2 \sin 2\hat{A} \sin 2\hat{B} \sin 2\hat{C}$$

ویژگی پانزدهم:

در هر مثلث حادّالزاویه مساحت مثلث ارتفاعیه از ربع مساحت مثلث *ABC* کوچکتر یا مساوی آن است.

در هر مثلث داریم:

$$\sin 2\hat{A} \sin 2\hat{B} \sin 2\hat{C} \le \sin\hat{A} \sin\hat{B} \sin\hat{C}$$

پس:

$$2R^2 \sin 2\hat{A} \sin 2\hat{B} \sin 2\hat{C} \le 2R^2 \sin\hat{A} \sin\hat{B} \sin\hat{C}$$

$$4S_{\overset{\triangle}{HKL}} \le S_{\overset{\triangle}{ABC}} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{HKL}} \le \frac{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{4}$$

حالت تساوی مربوط به وقتی است که: $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \frac{\pi}{3}$

ویژگی شانزدهم:

در هر مثلث حادّالزاویه، محیط مثلث ارتفاعیه از نصف محیط مثلث اصلی کوچکتر یا مساوی آن است.

در هر مثلث داریم:

$$\sin\hat{A}\sin\hat{B}+\sin\hat{B}\sin\hat{C}+\sin\hat{C}\sin\hat{A}\le\frac{۹}{۴}\quad (I)$$

و در بحث نامساویها داریم:

$$(a+b+c)\left(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}\right)\ge ۹\quad (II)$$

$$(I),(II)\Rightarrow \sin\hat{A}+\sin\hat{B}+\sin\hat{C}\ge ۴\sin\hat{A}\sin\hat{B}\sin\hat{C}$$

$$۲R\sin\hat{A}+۲R\sin\hat{B}+۲R\sin\hat{C}\ge ۲\times ۴R\sin\hat{A}\sin\hat{B}\sin\hat{C}$$

طبق ویژگی دهم خواهیم داشت:

$$P_{\overset{\Delta}{ABC}}\ge ۴P_h\Rightarrow ۲P_h\le\frac{P_{\overset{\Delta}{ABC}}}{۲}$$

تساوی مربوط به وقتی است که: $\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=\frac{\pi}{۳}$

ویژگی هفدهم:

در هر مثلث رابطه روبه‌رو برقرار است:

$$\frac{AI}{bc}+\frac{BI}{ac}+\frac{CI}{ab}=\frac{۱}{R}$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{abc}{۴R}\Rightarrow abc=۴R.S_{\overset{\Delta}{ABC}}$$

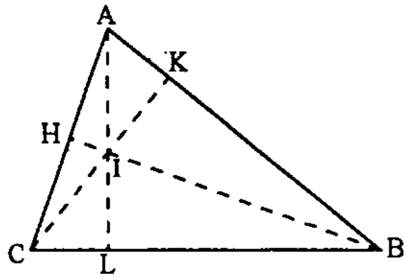
$$\frac{AI}{bc}+\frac{BI}{ac}+\frac{CI}{ab}$$

$$=\frac{a.AI+b.BI+c.CI}{abc}$$

$$=\frac{a(AL-IL)+b(BH-IH)+c(CK-IK)}{۴R.S_{\overset{\Delta}{ABC}}}$$

$$=\frac{۲S_{\overset{\Delta}{ABC}}-۲S_{\overset{\Delta}{IBC}}+۲S_{\overset{\Delta}{ABC}}-۲S_{\overset{\Delta}{IAC}}+۲S_{\overset{\Delta}{ABC}}-۲S_{\overset{\Delta}{IAB}}}{۴R.S_{\overset{\Delta}{ABC}}}$$

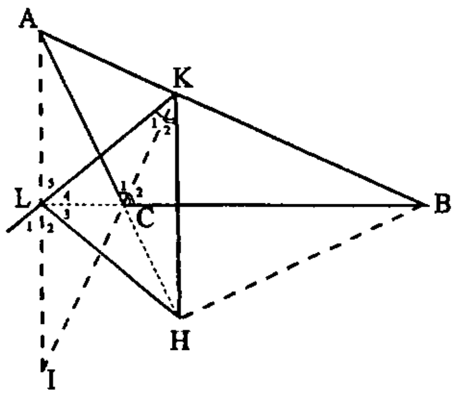
$$=\frac{۴S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{۴R.S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=\frac{۱}{R}$$



ویژگی هجدهم:

در هر مثلث با یک زاویه منفرجه مرکز ارتفاعیه بر مرکز یکی از دوایر محاطی خارجی مثلث ارتفاعیه منطبق است.

$$\begin{cases}\hat{L}_۳=\hat{L}_۴\\ \hat{L}_۴+\hat{L}_۵=\frac{\pi}{۲}\\ \hat{L}_۲+\hat{L}_۳=\frac{\pi}{۲}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\hat{L}_۵=\hat{L}_۲\\ \hat{L}_۵=\hat{L}_۱\end{cases}\Rightarrow\hat{L}_۱=\hat{L}_۲\,,\,\hat{K}_۱=\hat{K}_۲$$



پس محلّ تلاقی نیمساز خارجی زاویه L و نیمساز داخلی زاویه K که مرکز دایرهٔ محاطی خارجی مثلث $\overset{\Delta}{HKL}$ می‌باشد، بر مرکز ارتفاعیهٔ $\overset{\Delta}{ABC}$ منطبق است.

ویژگی نوزدهم:

شعاع دایره محاطی مثلث ارتفاعیه از رابطه روبه‌رو به‌دست می‌آید:

$$r'=۲R\cos\hat{A}\cos\hat{B}\cos\hat{C}$$

ابتدا ثابت می‌کنیم در هر مثلث رابطهٔ روبه‌رو صادق است:

$$r=\frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{P_{\overset{\Delta}{ABC}}}$$

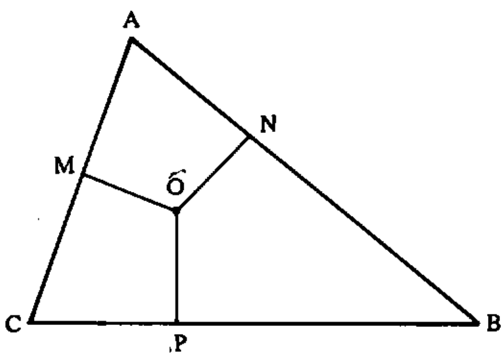
($P_{\overset{\Delta}{ABC}}$ را نصف محیط $\overset{\Delta}{ABC}$ می‌گیریم و r شعاع دایره محاطی داخلی مثلث ABC است.)

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=S_{\overset{\Delta}{OCB}}+S_{\overset{\Delta}{OAB}}+S_{\overset{\Delta}{OAC}}$$

$$=\frac{OM.AC+OP.BC+ON.AB}{2}$$

$$=\frac{r(BC+AC+AB)}{2}$$

$$=\frac{2r.P_{\overset{\Delta}{ABC}}}{2}$$



و در مثلث ارتفاعیه داریم:

$$r=\frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{P_{\overset{\Delta}{ABC}}}$$

$$r'=\frac{S_{\overset{\Delta}{HKL}}}{P_h}=\frac{\frac{1}{2}R^2\sin 2\hat{A}\sin 2\hat{B}\sin 2\hat{C}}{2R\sin\hat{A}\sin\hat{B}\sin\hat{C}}$$

$$=2R\cos\hat{A}\cos\hat{B}\cos\hat{C}$$

ویژگی بیستم:

الف) اگر l، h و k اضلاع مثلث ارتفاعیه باشند داریم:

$$\frac{l}{a^2}+\frac{h}{b^2}+\frac{k}{c^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$$

$$=\frac{R\sin 2\hat{A}}{4R^2\sin^2\hat{A}}+\frac{R\sin 2\hat{B}}{4R^2\sin^2\hat{B}}+\frac{R\sin 2\hat{C}}{4R^2\sin^2\hat{C}}$$

$$=\frac{\cos\hat{A}}{a}+\frac{\cos\hat{B}}{b}+\frac{\cos\hat{C}}{c}$$

با توجّه به رابطه کسینوسها در هر مثلث داریم:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}\Rightarrow bc\cos\hat{A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}$$

$$\frac{l}{a^2}+\frac{h}{b^2}+\frac{k}{c^2}=\frac{bc.\cos\hat{A}+ac.\cos\hat{B}+ab.\cos\hat{C}}{abc}$$

$$=\frac{(a^2+b^2-c^2)+(a^2+c^2-b^2)+(c^2+b^2-a^2)}{2abc}$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$$

ب)

$$\frac{(b^2-c^2)\,l}{a^2}+\frac{(c^2-a^2)\,h}{b^2}+\frac{(a^2-b^2)\,k}{c^2}=0$$

$$\frac{(b^2-c^2)\,l}{a^2}+\frac{(c^2-a^2)\,h}{b^2}+\frac{(a^2-b^2)\,k}{c^2}$$

$$=\frac{(b^2-c^2)\,R\sin 2\hat{A}}{4R^2\sin^2\hat{A}}+\frac{(c^2-a^2)\,R\sin 2\hat{B}}{4R^2\sin^2\hat{B}}$$

$$+\frac{(a^2-b^2)\,R\sin 2\hat{C}}{4R^2\sin^2\hat{C}}$$

$$= \frac{\left(b^{2}-c^{2}\right).bc.\cos\hat{A}+\left(c^{2}-a^{2}\right).ac.\cos\hat{B}+\left(a^{2}-b^{2}\right).ab.\cos\hat{C}}{abc}$$

با استفاده از رابطهٔ کسینوسها در مثلث نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{\left(b^{2}-c^{2}\right)l}{a^{2}}+\frac{\left(c^{2}-a^{2}\right)h}{b^{2}}+\frac{\left(a^{2}-b^{2}\right)k}{c^{2}}$$

$$= \frac{\left(b^{2}+c^{2}-a^{2}\right)\left(b^{2}-c^{2}\right)+\left(a^{2}+c^{2}-b^{2}\right)\left(c^{2}-a^{2}\right)+\left(a^{2}+b^{2}-c^{2}\right)\left(a^{2}-b^{2}\right)}{2abc}$$

$$= \frac{b^{4}+b^{2}c^{2}-a^{2}b^{2}-b^{2}c^{2}-c^{4}+a^{2}c^{2}+a^{2}c^{2}+c^{4}-b^{2}c^{2}-a^{4}-a^{2}c^{2}+a^{2}b^{2}+a^{4}+a^{2}b^{2}-a^{2}c^{2}-a^{2}b^{2}-b^{4}+b^{2}c^{2}}{2abc}$$

$$=0$$

منابع:

۱) پرویز شهریاری کتاب آشنایی با ریاضیات، ج ۲۷. (انتشارات فردوس.)
۲) هـ کوکس تیروس. گریتز بازآموزی و بازشناخت هندسه ـ ترجمه: عبدالحسین مصحفی. (انتشارات مدرسه.)
۳) جلیل‌الله قراگوزلو کتاب مثلثات پایه. (انتشارات فاطمی)
۴) مجله شمارهٔ هشت دوره چهارم از سری مجلات یکان.
۵) مجله شمارهٔ هشت دوره هفتم از سری مجلات یکان
۶) کتاب هندسه سال دوم ریاضی.
۷) کتاب مثلثات سال سوم ریاضی.

تفریح اندیشه ۵

بعد از سرقت، چهار کارمند بانک مشخصات سارق را به دست داده‌اند.

بنابه عقیدهٔ نگهبان بانک، سارق چشمانی آبی داشته، بلند بوده، و کلاه به سر و جلیقه به تن داشته است.

بنا به نظر مسؤول گیشه، چشمان سیاه داشته، کوتاه بوده و جلیقه و کلاه به تن و سر داشته است.

بنا به نظر منشی، چشمان سبز داشته، متوسط القامه بوده، و بارانی و کلاه داشته است.

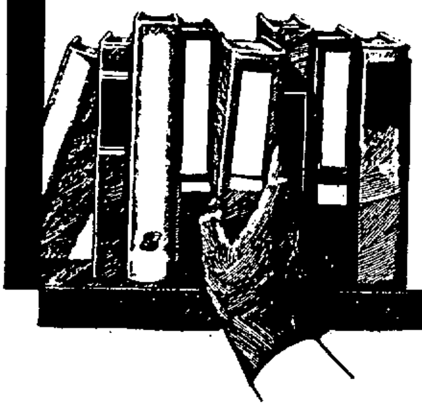
بنابه عقیدهٔ رئیس بانک، چشمان خاکستری داشته، بلند بوده، جلیقه به تن داشته، اما بی‌کلاه بوده است. بعداً مشخص شد که هر یک از گواهان تنها یکی از چهار توصیف را به‌طور صحیح بیان کرده است و هر یک از جزئیات توسط حداقل یک گواه به درستی توصیف شده است.

توصیفهای مربوطه را در جدولی می‌آوریم:

	چشم	قد	پوشش	کلاه
نگهبان	آبی	بلند	جلیقه	بله
مسؤول گیشه	سیاه	کوتاه	جلیقه	بله
منشی	سبز	متوسط	بارانی	بله
رئیس بانک	خاکستری	بلند	جلیقه	نه

جواب در صفحهٔ ۸۸

معرفی کتاب



■ **جبر و آنالیز**

تألیف: محمد رجبی طرخورانی، علی‌اکبر واحدی آملی

انتشارات مدرسه، چاپ اول، زمستان ۱۳۷۲

در مقدمهٔ کتاب چنین آمده است که: «مفاهیم تابع، حد، پیوستگی، مشتق و انتگرال، که در این کتاب مورد بحث قرار گرفته‌اند، از مفاهیم اساسی ریاضیات هستند، و توجه دقیق به آنها برای هرکسی که بخواهد ریاضی بخواند ضروری است. در این کتاب سعی شده تا آنجا که ممکن است مفاهیم و تعاریف و همچنین قضایا به‌طور دقیق بیان و اثبات شوند.»

فصلهای کتاب عبارتند از: توابع، حد توابع، پیوستگی توابع، مشتق و کاربردهای آن، رسم نمودار توابع حقیقی، معادلات درجه سوم و معادلات پارامتری، دیفرانسیل توابع، انتگرال نامعین یا تابع اولیه، انتگرال معین و کاربردهای آن.

مطالب کتاب چنان تنظیم شده‌اند که مفاهیم و تعاریف و قضایا را به‌طور دقیق بیان و اثبات کند، ولی این تنظیم بنا به مقدمهٔ کتاب چنان است که افرادی را که تمایل زیادی به اثبات قضایا ندارند و آنها را نمی‌خوانند از خواندن مثالها و تمرینهای کتاب ممانعت نمی‌کند.

بعضی از تمرینها و مسائل کتاب از مسائل امتحانات نهایی انتخاب شده‌اند و به این ترتیب خواننده را با این نوع مسائل نیز آشنایی می‌دهند.

دکتر محمد رجبی طرخورانی یکی از دو مؤلف کتاب است که متأسفانه در اسفند ماه ۱۳۷۲ دعوت حق را لبیک گفت و از سرای فانی به جهان باقی شتافت رحمة الله رحمةً واسعه. مرحوم دکتر رجبی استاد ریاضیات دانشگاه تهران و دارای تألیفات عدیده در زمینهٔ ریاضیات بودند. از استاد مرحوم دو فرزند پسر به‌جا مانده است که امیدواریم راه پدر را درپیش گیرند و در دنیای علم بارآور شوند.

مؤلف دیگر کتاب استاد ارجمند آقای **علی‌اکبر واحدی آملی** اند که ایشان نیز از اساتید ریاضی دانشگاه تهران و صاحب تألیفات متعدد می‌باشند، طول عمر استاد را از خداوند خواستاریم.

■ **معادله و نامعادله**

ترجمه: پرویز شهریاری

انتشارات مدرسه، چاپ اول، زمستان ۱۳۷۲

کتاب **معادله و نامعادله** کتابی‌است برای دانش‌آموزان و دبیران، که روشهای درست استدلال در حل مسأله‌های ریاضی را می‌آموزد و بنا به مقدمهٔ آن این ادعا را دارد که کسی که مثالها، تکلیفها و تمرینهای آن را دنبال کند، می‌تواند مطمئن شود که نه تنها بر موضوع مورد بحث کتاب مسلط شده است، بلکه روش درست اندیشیدن را نیز فرا گرفته است.

سه فصل کتاب، به‌ترتیب، عبارتند از: معادله‌ها و نامعادله‌های هم ارز، معادله‌های شامل یک مجهول، و نامعادله‌های با یک مجهول.

یکی از مثالهای فصل اول را در نظر می‌گیریم: اگر در معادلهٔ $\frac{x^2-1}{x-1} = 2$، صورت و مخرج کسر سمت چپ را به عامل مشترک $x - 1$ ساده کنیم، به معادلهٔ $x + 1 = 2$ می‌رسیم که هم ارز معادلهٔ مفروض نیست. در واقع، عدد ۱ تنها ریشهٔ معادلهٔ دوم (یعنی) نتیجه

است، درحالی که در معادلهٔ اصلی صدق نمی‌کند.

مثال دیگر: آیا این معادله‌ها هم ارزند؟

$$x^2 - 4 = 4x - 7 \quad \text{و} \quad \log(x^2 - 4) = \log(4x - 7)$$

مجموعهٔ همهٔ ریشه‌های معادلهٔ دوم، شامل دو عدد $x_1 = 3$ و $x_2 = 1$ است. ولی عدد ۱، ریشهٔ معادلهٔ اول نیست، بنابراین معادله‌های مفروض هم ارز نیستند.

مثالی دیگر: نامعادلهٔ $x^2 . 5^x - 5^{2+x} \le 0$ را حل کنید.

چون $5^{2+x} = 25 \times 5^x$، بنابراین نامعادلهٔ مفروض هم ارز است با نامعادلهٔ

$$(x^2 - 25) . 5^x \le 0$$

و چون $5^x > 0$، نامعادلهٔ اخیر، هم ارز است با نامعادلهٔ

$$x^2 - 25 \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad -5 \le x \le 5$$

بازهٔ $[-5 , 5]$ مجموعهٔ جوابهای نامعادلهٔ اصلی را تشکیل می‌دهد.

مثالهای فوق برای آشنا شدن خواننده با مطالب کتاب کافی است.

پاسخهای تکلیفها و تمرینهای کتاب در پایان کتاب آورده شده‌اند.

کتاب همانطور که قبلاً هم اشاره شد هم برای دانش‌آموزان و هم برای دبیران نوشته شده است و هر دو گروه را به‌کار می‌آید.

■ هندسه‌های جدید

جیمز ار. اسمارت، ترجمه: غلامرضا یاسی پور

انتشارات مدرسه، چاپ اول، زمستان ۱۳۷۲

کتاب هندسه‌های جدید چنان‌که از نامش برمی‌آید دربارهٔ هندسه‌های جدیدی است که تا سال ۱۹۸۸ ـ سال سومین پرداختهٔ آن ـ پا به عرصهٔ وجود نهاده‌اند. کتاب بنا به گواهی مقدمه‌اش بررسی هندسه‌های متفاوت به جای هندسه‌ای واحد است، و در سراسر خود، بر کاربردهای عملی و تازهٔ هندسه‌های جدید تأکید دارد، و از جدیدترین فصول آن فصل مهم **گرافیکهای کامپیوتری** است.

کتاب هم برای زیردستان و هم برای زبردستان ریاضی طرح شده است، و هم مناسب دانشجویانی است که از نظرگاه هنرهای آزاد به ریاضیات شوق می‌آورند و هم مناسب آنانی که سودای معلم ریاضیات شدن را در سر می‌دارند.

بعضی از بخشهای کتاب عبارت‌اند از:

هندسه‌های متناهی، هندسه‌های چهارخطی و چهار نقطه‌ای، هندسه‌های متناهی فانو و یانگ، هندسه‌های متناهی پاپوس و دزارگ، گروههای تبدیلات، موارد استعمال تبدیلات در گرافیکهای کامپیوتری، خواص گروه حرکات اقلیدسی، مجموعه‌های محدب و خطوط پشتیبان، پهنای مجموعه، دایرهٔ نه نقطه و هندسهٔ ترکیبی اوایل قرن نوزدهم، مزدوجهای هم زاویه، ترسیمات و اثباتهای عدم امکان هندسهٔ تحلیلی انعکاس، مبنای اصل موضوعی هندسهٔ تصویری، مخروطیات، تبدیلات توپولوژیک، مدخل توپولوژی سطوح، هندسهٔ هذلولوی، نقاط انگاری و مثلثهای امگا، هندسهٔ بیضوی.

کتاب دارای چند ضمیمه نیز هست که از آن جمله‌اند: آکسیومهای هیلبرت، اصول موضوع برکهوف، مفاهیمی منتخب از منطق.

کتاب هندسه‌های جدید کتابی است که خواننده را با مطالب قدیم و جدید هندسه آشنا می‌کند. از مطالب قدیم برای آماده کردن خواننده برای موضوعات جدید سخن به میان می‌آورد و همانگونه که قبلاً خاطرنشان شد از موارد کاربرد نیز غفلت ندارد.

دانش‌آموزی که قدم به عرصهٔ ریاضیات می‌گذارد و دبیری که میدانهایی از این عرصه را درنوردیده است، هر دو، از خواندن این کتاب ناگزیرند و به همین مناسبت است که خواندن آن به هر دو طایفه توصیه می‌شود.

ادب ریاضی

بدون تردید تمام توسعهٔ ریاضیات دارای ریشه‌هایی روانی درخواسته‌ها و فعالیتهای عملی بشر است امّا بعد از این که یکبار فشار ضرورت عملی موجب ایجاد آن شد به صورتی اجتناب ناپذیر از نفس خود فایده برمی‌گیرد و از حدود فواید بلافاصله عروج می‌کند.

ریاضیات چیست؟ ریچارد کورانت

ترجمه: حسن صفاری

جواب نامه‌ها

آقای ارشام برومند سعید (دانشگاه شهید باهنر کرمان)

با تشکر از شما به عرض می‌رسانیم که مطلب شما در حد یک مقاله نیست و برای اطلاع عموم نتایج آن را عیناً و به طور خلاصه در این‌جا می‌آوریم:

الف) مجموع ارقام عدد حاصل از ضرب هر عدد در ۹ برابر ۹ یا مضربی از ۹ است، مانند:

۴ × ۹ = ۳۶ و ۳ + ۶ = ۹

۱۲۷ × ۹ = ۱۱۴۳ و ۱ + ۱ + ۴ + ۳ = ۹

۷۸۶۳۲۹۱ × ۹ = ۷۰۷۶۹۶۱۹ و

۷ + ۰ + ۷ + ۶ + ۹ + ۶ + ۱ + ۹ = ۴۵ = ۵ × ۹

و ...

ب) تفاضل هر عدد از مجموع ارقام آن، مضربی از ۹ است، مانند:

۷۸۶۳۲۹۱ − (۷ + ۸ + ۶ + ۳ + ۲ + ۹ + ۱) =

۷۸۶۳۲۹۱ − ۳۶

۷۸۶۳۲۵۵ = ۸۷۳۶۹۵ × ۹

ج) اگر عددی در تقسیم بر ۹ به باقیماندهٔ ۱ یا ۸ برسد مجذور آن عدد در تقسیم بر ۹ باقیمانده‌ای برابر یک خواهد داشت.

اثبات:

فرض اوّل: $M = ۹n + ۱ \Rightarrow M \overset{۹}{\equiv} ۱$

$$M^۲ = ۸۱n^۲ + ۱۸n + ۱$$

$$= ۹(۹n^۲ + ۲n) + ۱ \overset{۹}{\equiv} ۱ \Rightarrow M^۲ \overset{۹}{\equiv} ۱$$

فرض دوّم: $M = ۹n + ۸ \Rightarrow M \overset{۹}{\equiv} ۸$

$$M^۲ = ۸۱n^۲ + ۱۴۴n + ۶۴$$

$$= ۹(۹n^۲ + ۱۶n + ۷) + ۱ \overset{۹}{\equiv} ۱ \Rightarrow M^۲ \overset{۹}{\equiv} ۱$$

آقای هادی جمشیدی کارگر؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (بجنورد)

از مسائل ارسالی شما متشکریم. در صورت لزوم و در جای مناسب از آنان استفاده خواهیم کرد.

خانم لیلا مدیری؛ دانش‌آموز رشتهٔ تجربی (کرج)

ضمن تشکر از شما، برای ارسال دو راه حل مسأله‌ای از برهان شمارهٔ ۵ به عرض می‌رسانیم که ارسال حل مسأله‌های مندرج در مجله برهان بجز مسائل مسابقه‌ای لزومی ندارد. زیرا حل تمام مسائل در انتهای شمارهٔ بعدی مجله آورده می‌شود. موفقیت روزافزون شما را خواستاریم.

آقای ناصر آذری؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (قائمشهر)

از مطلب شما در رابطه با لگاریتمی کردن یک عبارت متشکریم. امید است در شماره‌های آینده از آن استفاده شود. ضمناً متذکر می‌شویم که مسائل باید همراه با حل ارائه شوند.

آقای امید شکرایی؛ دانش آمور رشتهٔ ریاضی (پولادشهر)

ضمن تشکر از نامهٔ شما به عرض می‌رسانیم که مسائلی را که حل آنان را خواستار بودید می‌توانید حل آنان را در شماره‌های قبلی مجلهٔ برهان مشاهده کنید.

آقای مانا سپهوند؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (خرم آباد)
از مقالهٔ ارسالی شما متشکریم.

آقای یوسف خمسه؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (کرج)
با تشکر از مسائل ارسالی شما به عرض می‌رسانیم که در صورت لزوم از مسائل شما استفاده خواهد شد.

آقای کیانوش یزدی؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (لنگرود)
ضمن تشکر از مسائل ارسالی شما به عرض می‌رسانیم که مسائل باید با حلِّ کامل ارائه شوند.

آقای بختیار آبیار؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (اسد آباد)
ضمن تشکر از شما برای ارسال مسأله‌ای حل شده، به عرض می‌رسانیم؛ سعی کنید مسائل تکراری نباشند و همچنین در سطح مطلوبتر و جدیدتری ارائه شوند. مسألهٔ ارسالی شما در کتاب جبر و آنالیز سال چهارم ریاضی موجود است.

آقای رضا جعفرزاده؛ دانش‌آمور رشتهٔ ریاضی (بابل)
از تست ارسالی شما متشکریم. در جای مناسب و در صورت لزوم از آن استفاده خواهیم کرد.

آقای محمد مهدی ولی الهی (بابل)
ضمن تشکر از دو مسألهٔ حل شدهٔ ارسالی شما به عرض می‌رسانیم؛ مسائل جدیدتری در سطح مطلوب ارائه دهید.

آقای فریدون عبدی؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (کامیاران)
با تشکر از مطلب ارسالی شما، پیروزی و موفقیت بیشتر شما را آرزومندیم.

آقای علیرضا گلشاهی؛ دانش‌آموز (تهران)
با تشکر از مسألهٔ ارسالی شما، در صورت لزوم از آن استفاده خواهیم کرد.

آقای مهدی حبیبی معینی؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (لاهیجان)

ضمن تشکر از شما برای ارسال مطلبی در رابطه با «خاصیتهای جالب عدد ۷ در تقسیم» به عرض می‌رسانیم؛ در صورت امکان و در جای مناسب از آن استفاده خواهیم کرد.

آقای امیرهوشنگ فرهودی مقدم؛ دانش‌آموز رشتهٔ تجربی (تهران)
ضمن تشکر از مقالهٔ شما تحت عنوان «بررسی تابع قدرمطلق» به عرض می‌رسانیم؛ امید است از آن در جای مناسب استفاده کنیم.

آقای رضا بردباری؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (شیراز)
ضمن تشکر از ارسال یک مسألهٔ حل شدهٔ شما به عرض می‌رسانیم؛ در صورت لزوم و در جای مناسب از آن استفاده خواهیم کرد.

آقای امید قطره سامانی؛ دانش‌آموز (اصفهان)
از تستهای حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. در صورت لزوم و در جای مناسب از آنان استفاده خواهیم کرد.

خانم مرضیه اسکندری؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (تهران)
ضمن تشکر از مطلب ارسالی شما به عرض می رسانیم؛ اثبات رابطهٔ شرط ریشهٔ مشترک بین دو معادلهٔ درجهٔ دوم را می‌توانید در آخرین قسمت مقالهٔ مربوط به حل معادلات درجهٔ اوّل و دوم مندرج در برهان ۲ مشاهده کنید.

آقای فرهاد صنوبری کشی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (رامسر)
ضمن تشکر از مطالب و مسائل ارسالی شما به عرض می‌رسانیم؛ در صورت لزوم از آنان استفاده خواهیم کرد.

آقای امیر غفوری نژاد؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (بوکان)
از مسائل ارسالی شما متشکریم. در صورت لزوم از آنان استفاده خواهیم کرد.

آقای سیدرضا حسینی تهرانی؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (شهریار)
با تشکر از مقالهٔ شما تحت عنوان «چگونه زاویه‌های گوناگون را بسازیم و به نسبتهای مختلف تقسیم کنیم»؛ ان شاءاللّه در شماره‌های

بعدی از آن استفاده خواهیم کرد.

آقای احمدرضا صادقی‌نیا؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (تهران)

ضمن تشکر از شما برای ارسال چند مسأله همراه با حل آن؛ به عرض می‌رسانیم؛ سعی کنید مسائل را در سطح مطلوبتری ارائه دهید و همچنین تکراری نیز نباشند. برای دریافت مجله نیز فرم اشتراک را به طور کامل پرکنید و همراه با فیش بانکی ارسال کنید.

آقای محمدمهدی دیزج خلیلی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (تهران)

ضمن تشکر از مسائل و مقالهٔ ارسالی شما، تحت عنوان «حذف پارامترها در مثلثات» به عرض می‌رسانیم؛ امید است بتوانیم آن را در شماره‌های بعدی درج کنیم.

آقای پیمان عالیباف؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (مرند)

ضمن تشکر از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما به عرض می‌رسانیم که سعی کنید مسائل جدیدتر و در سطح مطلوبتری ارائه دهید. باید توجه داشته باشید که تنها مسائلی که همراه با حل کامل باشند و نیز تکراری نباشند برای ما ارسال کنید.

خانم ندا شهیدی؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (اراک)

ضمن تشکر از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما به عرض می‌رسانیم؛ امید است در شماره‌های آینده مجله از آنان استفاده کنیم.

آقای مهرداد ناصانژاد؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (آمل)

ضمن تشکر از نامهٔ شما به عرض می‌رسانیم؛ معادلهٔ سیال $x^n + y^n = z^n$ مربوط به آخرین حکم‌فرما است که برای توانهای خاصی امتناع آن در سیستم اعداد صحیح ثابت شده است و در رابطه با حلِ دستگاه $\begin{cases} x^2 - 5 = y^2 \\ x^2 + 5 = z^2 \end{cases}$ باید بگوییم که این یک مسألهٔ مسابقه‌ای تاریخی است که فیبوناچی نیز در آن مسابقه شرکت داشته است و حلِ آن را نیز ارائه داده است. برای اطلاع بیشتر می‌توانید به کتاب «اندیشه ریاضی»، ترجمهٔ آقای «پرویز شهریاری» مراجعه کنید.

آقای وحید عالی پور؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (مسجد سلیمان)

از مسائل ارسالی شما متشکریم. در صورت لزوم از آنان استفاده خواهیم کرد.

آقای خلیل دولتیاری؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (کرج)

ضمن تشکر از مقالهٔ ارسالی شما تحت عنوان «روشی برای محاسبهٔ مساحت بعضی از سطوح» به عرض می‌رسانیم که در صورت امکان و در جای مناسب از آن استفاده خواهیم کرد.

آقای سعیدرضا گودرزی؛ دانش‌آموز رشتهٔ تجربی (شیراز)

با تشکر از شما برای ارسال نامه‌ای محتوی «ساخت اعداد طبیعی فقط با ارقام ۱۳۷۲ و با استفاده از علائم ریاضی» به عرض می‌رسانیم، امید است که امکان درج آن در شماره‌های آینده در جای مناسب به وجود آید.

آقای برات قربانزاده؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (شیروان)

ضمن تشکر از شما برای ارسال مسائل و مقاله‌ای تحت عنوان «اثبات قضیهٔ اشتاینر ـ لموس» به عرض می‌رسانیم که در صورت تأیید، امید است در یکی از شماره‌های آتی به چاپ برسد.

آقای حسن اسماعیلی؛ دانشجوی رشتهٔ ریاضی (زنجان)

ضمن تشکر از شما جهت ارسال مقاله‌ای تحت عنوان «گذری چند بر زندگی ملامحمدباقر یزدی» و جدول تاریخی اسامی ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی ۸۰ تا ۹۶۰ شمسی (۷۱۰ تا ۱۵۸۰ میلادی) به عرض می‌رسانیم که در صورت امکان در جای مناسب از آنان استفاده خواهیم کرد.

آقای ابوالفضل والازاده (گرگان)

با تشکر از شما برای ارسال مقاله‌ای تحت عنوان «نکاتی از کتاب مراسم‌الانتساب فی علم‌الحساب» و مطالبی در رابطه با ادب ریاضی، در صورت لزوم از آنان در جای مناسب استفاده می‌کنیم.

آقای رسول شمشادی (رشت)

ضمن تشکر از تستهای ارسالی شما به عرض می‌رسانیم که مسائل

یا تستها باید همراه با جواب کامل ارائه شوند.

آقای رامین آموی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (مسجدسلیمان)

با تشکر از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما به عرض می‌رسانیم که در صورت نیاز از آن استفاده خواهد شد.

آقای علی حسین‌زاده؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (کاشان)

ضمن تشکر از مقالهٔ ارسالی شما تحت عنوان «تابع جزء کسری» به عرض می‌رسانیم که توابع جزء صحیح بنابر نیازی که موجود بوده است تعریف و ساخته شده‌اند، بدیهی است در صورتی که نیازی به توابع با جزء غیرصحیح (اعشاری یا کسری) نیز به وجود آید می‌توان آن را به شکلی عمومیتر از آن که شما به آن اشاره کرده‌اید، تعریف کرد و قوانین کلیتری در این مورد ارائه داد. در هر صورت توجه و حس نوآوری شمادر ریاضیات تحسین‌آمیز است.

آقای حسین سبزرو (تهران)

ضمن تشکر از مقالهٔ ارسالی شما تحت عنوان «معرفی فرمولی برای به دست آوردن سه‌تاییهای فیثاغورثی» به اطلاع می‌رسانیم که برای به دست آوردن تمام سه‌تاییهای فیثاغورثی از اتحاد زیر می‌توان استفاده کرد:

$$\forall K, U, V \in Z : a^2+b^2=c^2 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} a = K(U^2 - V^2) \\ b = 2KUV \\ c = K(U^2 + V^2) \end{array} \right.$$

بدیهی است به ازای $K = 1$ و با شرط $(U, V) = 1$ تمام سه‌تاییهای فیثاغورثی اصلی حاصل می‌شوند زیرا اتحاد زیر برقرار است:

$$(K(U^2 - V^2))^2 + (2KUV)^2 = (K(U^2 + V^2))^2$$

واضح است که فرمول $K = 4\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} i$ با شرط $K \geq 3$ و $(a = n, b = k, c = n + 1)$ راکه ارائه داده‌اید تمام سه‌تاییهای فیثاغورثی اصلی را به دست نمی‌دهد.

خانم سیدهٔ صدیقهٔ حسینی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (لنگرود)

ضمن تشکر از شما برای ارسال مسائلی حل شده؛ امید است از مسائل شما در شماره‌های بعدی مجله استفاده شود.

آقای رامتین آمویی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (مسجد سلیمان)

از ارسال مسائل حل شدهٔ شما متشکریم. درصورت لزوم از آنان استفاده خواهد شد.

آقای امید خاتین زاده؛ دانش آموز رشته ریاضی (اهواز)

از مطالب ارسالی شما تشکر می‌کنیم. درصورت امکان در جای مناسب از آن استفاده خواهد شد.

آقای محسن نجفی؛ دانش آموز رشته ریاضی (گناباد)

از نامهٔ ارسالی شما تشکر می‌کنیم.

آقای علی عمیدی؛ دانش آموز رشته ریاضی (گرمسار)

ضمن تشکر از شما برای ارسال مسائلی حل شده؛ درصورت لزوم از مسائل غیر تکراری آن استفاده خواهد شد.

ادب ریاضی

ریاضیات به عنوان یکی از تراوشات ضمیر آدمی منعکس کنندهٔ ارادهٔ فعال، سیر معنوی عقل و استدلال و علاقه‌مندی به کمال زیبایی است. عواملی که مبنای آن را تشکیل می‌دهند عبارتند از: منطق و اشراق، تحلیل و سازندگی، وحدت و کلیت. با وجود این‌که سنتهای متفاوت در ریاضیات ممکن است توجه خود را به جنبه‌های مختلف عوامل مزبور معطوف سازند باید گفت که فقط برخورد این نیروهای متخالف و کوشش در راه ترکیب آنهاست که حیات واقعی و فایدهٔ عملی و کمال ارزش دانش ریاضی را به وجود می‌آورد.

ریاضیات چیست؟ ریچارد کورانت

ترجمه: حسن صفاری

حل مسائل مسابقه‌ای برهان ۹

تعداد بسیاری از شما عزیزان دانش‌آموز جواب صحیح برای مسألهٔ مسابقه‌ای برهان ۹ ارسال داشته‌اید و اسامی نفراتی که دقیق‌تر و کامل‌تر پاسخ داده بودند در ذیل آمده است. در ضمن از بین این نفرات راه حل آقای حسین علمدار دانش‌آموز سال سوّم ریاضی از نیشابور انتخاب شده است.

صورت مسأله : آیا می‌توانید مجموعه‌ای همراه با دو عمل جمع و ضرب اسکالر روی $\mathbb{R}$ معرفی کنید که همهٔ شرایط فضای برداری به جز شرطِ $1.V = V$ را دارا باشد؟

حل : در مجموعهٔ $\mathbb{R}^2$ اعمال جمع و ضرب اسکالر را به صورتِ زیر تعریف می‌کنیم.

$$(x_1 , y_1) + (x_2 , y_2) = (x_1 + x_2 \,,\, y_1 + y_2)$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \,;\, \lambda . (x , y) = (\lambda x , 0)$$

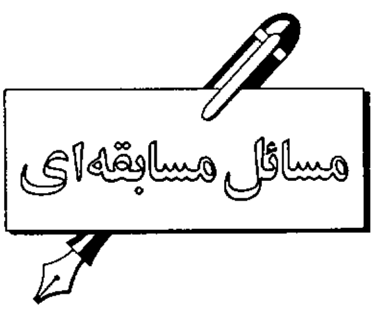
اولاً واضح است که $(\mathbb{R}^2 , +)$ یک گروه آبلی است و ثانیاً به راحتی قابل بررسی است که همهٔ شرایط فضای برداری به جز شرط مزبور برقرار است.

$$\forall (x , y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, 1.(x , y) = (1x , 0)$$

$$= (x , 0) \neq (x , y) \implies 1.V \neq V$$

■ اسامی نفراتی که پاسخ مسألهٔ مسابقه‌ای شمارهٔ ۹ را کامل و دقیق بیان کرده‌اند.

۱ ـ آقای علیرضا همایونفر
۲ ـ آقای ساسان کمیلی‌زاده
۳ ـ آقای آمر عبدالرّحیم
۴ ـ آقای محمد حسین حدّادی
۵ ـ آقای مصطفی صفوی
۶ ـ آقای علی میرهن کسمایی
۷ ـ آقای نادر مطیع
۸ ـ آقای مهدی نارنگی
۹ ـ آقای مرتضی بیات
۱۰ ـ آقای محسن علیجانیانزاده
۱۱ ـ آقای فرشاد داوودی فرد
۱۲ ـ آقای شهاب اردلان
۱۳ ـ آقای کامیار گردنیان
۱۴ ـ آقای ارسلان چوپانی
۱۵ ـ آقای امین سعیدفر
۱۶ ـ آقای مسعود معمارزاده زواره
۱۷ ـ آقای یدا... نیک بخت
۱۸ ـ آقای محمد صادق عبدی
۱۹ ـ آقای اکبر ترابی
۲۰ ـ آقای حمیدرضا داوریان
۲۱ ـ آقای محمدرضا ساطعی



۱ـ ثابت کنید اگر $K > 1$ باشد آنگاه عدد: $P = K^2(2K^4 + 3K^3 - K^2 - 3K - 1)$ بر ۳۶ بخش‌پذیر است.

۲ـ ثابت کنید عدد $A = 3^{20} - 1$ بر عدد $B = 296880$ بخش‌پذیر است.

۳ـ بزرگترین و کوچکترین عدد صحیحی را که می‌توان در یک حافظهٔ n بیتی و 2n بیتی ذخیره نمود با محاسبه به‌دست آورد.

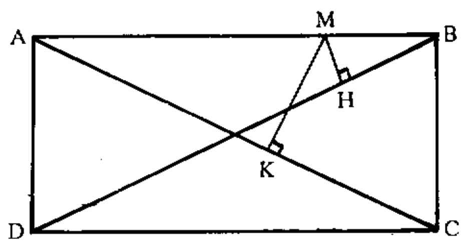
(این مسأله مسابقه‌ای، کامپیوتری است)

مسائل برای حل

● هندسه: محمدهاشم رستمی
● ریاضیات جدید: حمیدرضا امیری
● جبر و مثلثات: احمد قندهاری - محمدرضا هاشمی - مهدی قمصری

● مسائل ریاضیات سال اول

۱ - مستطیل ABCD مفروض است. اگر M نقطه‌ای دلخواه از ضلع AB باشد، ثابت کنید که مجموع فاصله‌های نقطهٔ M از قطرهای BD و AC $(MH + MK)$، مقدار ثابتی است.

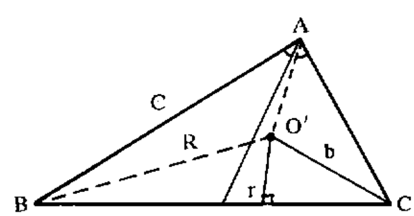


و این مقدار ثابت را تعیین کنید.

(فرستنده: آقای رضا نصیری دانش‌آموز دبیرستان نمونه روزبه زنجان.)

۲ - ثابت کنید که مجموع اضلاع مجاور به زاویهٔ قائمه در یک مثلث قائم‌الزاویه، برابر است با مجموع قطرهای دایره‌های محاطی داخلی و محیطی مثلث.

$\hat{A} = 90^\circ \Rightarrow b + c = 2R + 2r$



۳ - اگر ارزش گزارهٔ $P \vee (\sim p \wedge q)$ درست باشد، ارزش گزارهٔ $(p \vee q)$ را تعیین کنید. اگر گزارهٔ فوق نادرست باشد ارزش $(p \vee q)$ چه خواهد بود؟ در کل چه نتیجه‌ای می‌گیرید.

۴ - ارزش گزارهٔ سوری زیر را تعیین کنید:

$$\left(\forall x \in \mathbb{R} ، \frac{x+1}{2x-1} \in \mathbb{R}\right) \Leftrightarrow [(r \Rightarrow p) \Rightarrow (p \Rightarrow p)]$$

۵ - اگر $A_k = [-k, k]$ مطلوب است محاسبهٔ:

الف) $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \cap \ldots$

ب) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{15}$

ج) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$

توجه کنید که:

$A_k = [-k, k]$

$= \{x \in \mathbb{R} \mid -k \le x \le k\}$

$A_1 = [-1,1],\ \ A_2 = [-2, 2], \ldots$

۶ - اگر $(A \cup B) = \phi$ ثابت کنید $A = \phi$ و $B = \phi$ و با استفاده از آن ثابت کنید، اگر $(A \cap B) = M$ آنگاه $A = M$ و $B = M$

۷ - حاصل عبارت

$$\frac{(2)^{1/5}}{1 + \sqrt{2} + (3)^{\frac{1}{2}}} + 9^{0/25} - \frac{1}{2^{-\frac{1}{2}}}$$

را بیابید.

۸ـ از دستگاه مقابل مقدار m را بیابید.

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 29 \\ x + y + t = m + 4 \\ 4x + y + z = 15 \\ x + 3y + 2z = 19 \end{cases}$$

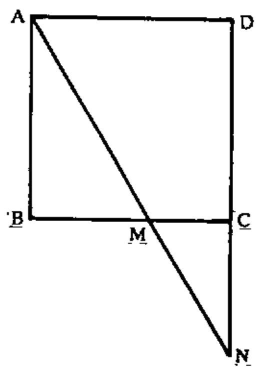
۹ـ ثابت کنید اگر $a , b , c \neq 0$ ، آنگاه

$$\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geq 9$$

● مسائل ریاضیات سال دوم ریاضی

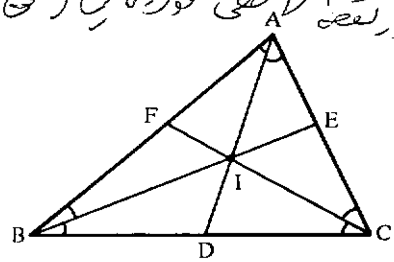
۱ـ از رأس A در مربع ABCD به ضلع a، خطی رسم می‌کنیم تا ضلع BC را در نقطهٔ M و امتداد ضلع CD را در نقطهٔ N قطع کند.

ثابت کنید که $\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{a^2}$.



(فرستنده: آقای رضا، شاه اکبری دانش‌آموز سوم ریاضی از نیشابور)

۲ـ اگر نقطهٔ I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC و خطهای AD، BE و CF نیمسازهای زوایای درونی مثلث باشند، تعیین کنید که نقطهٔ I پاره خطهای AD، BE و CF را به چه نسبتی (برحسب اضلاع مثلث) تقسیم می‌کند.



۳ـ روی مجموعهٔ $A = \{1 , 2 , 3\}$ رابطه‌ای بنویسید که الف) فقط خاصیت بازتابی داشته باشد ب) فقط خاصیت تعدی داشته باشد

۴ـ ثابت کنید، اگر $(A \times B) = (C \times D)$ آنگاه $B = D$ و $A = C$

۵ـ رابطهٔ زیر روی IR تعریف شده آیا این رابطه تراگذری است؟

$$xRy \iff 2x + 3y = 6$$

۶ـ تابعهایی از IR^2 به IR^2 مثال بزنید که:

الف) یک به یک و پوششی باشد.

ب) یک به یک باشد ولی پوششی نباشد.

ج) یک به یک نباشد ولی پوششی باشد.

د) نه یک به یک و نه پوششی باشد.

۷ـ فرض می‌کنیم $G = \{a_0 , a_1 , \dots , a_6\}$ و عمل * را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\forall a_i , a_j \in Q \ , \ a_i * a_j = \begin{cases} a_{i+j} & i + j < 7 \\ a_{i+j-7} & i + j \geq 7 \end{cases}$$

ثابت کنید (G و *) یک گروه آبلی است.

۸ـ معادله $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 35$ را حل کنید.

۹ـ چهار عدد تصاعد هندسی می‌سازند. مجموع دو عدد اولی و چهارمی $(\frac{35}{4})$ و مجموع دو عدد دوّمی و سوّمی $(\frac{15}{2})$ است. قدر نسبت این تصاعد را بیابید.

۱۰ـ از دستگاه مقابل x و y را بیابید.

$$\begin{cases} \log_y^x + \log_x^y = \frac{50}{7} \\ x \cdot y = 256 \end{cases} \qquad x > y > 1$$

۱۱ـ از معادلهٔ $a^{\cos^2 x} + a^{\sin^2 x} = a + 1$ مقدار x را حساب کنید.

۱۲ ـ شرط لازم برای آنکه دستگاه

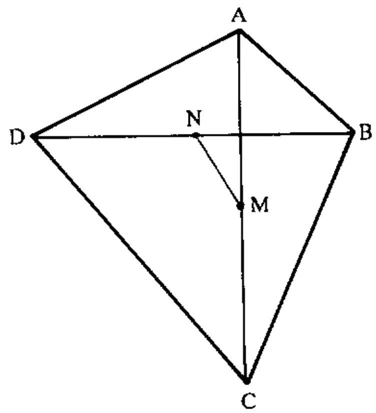
$$\begin{cases}\sqrt{2}\sin x=\sin y\\ b\cos x=\cos y\end{cases}$$

دارای جواب باشد، چیست؟

● مسائل ریاضیات سال سوّم ریاضی

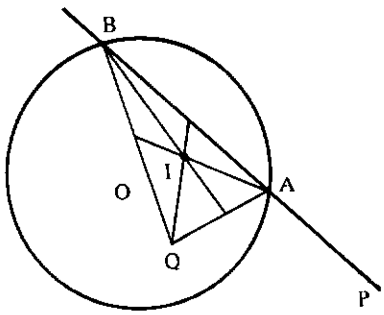
۱ ـ اگر l_1 اندازهٔ مجموع مربعات اضلاع یک چهار ضلعی و l_2 مجموع مربعهای قطرهای همان چهارضلعی، و نقاط M و N وسطهای قطرهای چهار ضلعی باشند، ثابت کنید که:

$$MN=\frac{1}{2}\sqrt{l_1-l_2}\qquad (l_1>l_2)$$



(فرستنده: آقای بهروز بیرامی دانش‌آموز سوم ریاضی از نقده)

۲ ـ دایره‌ای به مرکز O و دو نقطهٔ P و Q مفروضند. از نقطهٔ P خطی رسم می‌کنیم تا دایره را در نقاط A و B قطع کند. از نقطهٔ Q به نقاط A و B وصل می‌کنیم. مکان هندسی نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث QAB را وقتی قاطع AB حول نقطهٔ P حرکت می‌کند، تعیین کنید.



۳ ـ نشان دهید در یک فضای برداری جابجایی جمع را می‌توان از سایر اصول نتیجه گرفت.

۴ ـ فرض کنیم V_1 و V_2 و .... و V_n، n بردار در فضای برداری V باشند ثابت کنید، شرط لازم و کافی برای آنکه n بردار وابستهٔ خطی باشند آن است که، حداقل یکی از این بردارها را بتوان برحسب یک ترکیب خطی از بقیه بردارها نوشت.

۵ ـ ٦ نفر قرار است در یک کنفرانس سخنرانی کنند به چند طریق این امر امکان‌پذیر است، هرگاه بخواهیم:
الف) شخص B بعد از شخص A سخنرانی کند.
ب) شخص B بلافاصله بعد از A سخنرانی کند.

٦ ـ درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

$$xyz+x(x'+y)+y(x'+y')+xy'z+xz'=x+y$$

۷ ـ اگر باقیمانده تقسیم $P(x)$ بر $(x-1)$ و $(x-2)$ و $(x-3)$ به ترتیب ۳ و ۷ و ۱۳ باشد، باقیمانده تقسیم $P(x)$ را بر $(x-1)(x-2-)(x3)$ بیابید.

۸ ـ منحنی تابع به معادله $y=27-x^2$ مفروض است. خط $y=m>0$ منحنی این تابع را در نقاط B و A قطع می‌کند. ماکزیمم مساحت مستطیل ABCD را بیابید به‌طوریکه ضلع CD روی محور x ها باشد.

۹ ـ نمودارهای سه تابع به معادلات $y_1=x^2-2x$ و $y_2x=3-3x^2$ و $y=\frac{1}{x}$ را در یک دستگاه رسم کنید.

۱۰ ـ درستی تساوی زیر را اثبات کنید.

$$tg^2 20^\circ+tg^2 40^\circ+tg^2 80^\circ=33$$

۱۱ ـ حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$S_n=tg^2\frac{a}{2}\,tg\,a+2\,tg^2\frac{a}{2^2}\,tg\frac{a}{2}+\dots+2^{n-1}tg^2\frac{a}{2^n}\,tg\frac{a}{2^{n-1}}$$

سپس مقدار $\lim_{n\to\infty}S_n$ را حساب کنید.

(فرستنده‌مسائل ۱۰ و ۱۱: ایلیا پرچمی دانش‌آموز رشته‌ریاضی تبریز)

● مسائل ریاضیات چهارم ریاضی

۱ـ دو بردار $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ و بردار $\overrightarrow{OC}$، حاصل ضرب برونی آنها را در نظر می‌گیریم. اگر حجم متوازی‌السطوحی که سه پاره‌خط OA و OB و OC سه یال یک رأس آن می‌باشند ۳۶ سانتی‌متر مکعب باشد، اندازهٔ $|\overrightarrow{OC}|$ را حساب کنید.

(از آقای م ـ ا ـ گیتی‌زاده دبیر ریاضی)

۲ـ دو خط

$$D: \begin{cases} x = ۲t - ۱ \\ y = ۳ + t \\ z = ۵ - ۳t \end{cases}$$

و $D' = ax + ۱ = (b + ۱)\, y - ۲ = ۳z$ مفروضند. اگر $D \parallel D'$ باشد، مقادیر a و b را تعیین کنید.

۳ـ نقاط $A(۳ \text{ و } ۲ \text{ و } ۱-)$ و $B(۰ \text{ و } ۱ \text{ و } ۱)$ و $C(۱ \text{ و } ۰ \text{ و } ۲)$، رئوس مثلث ABC مفروضند. الف) ـ معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را که از سه رأس مثلث به یک فاصله می‌باشند تعیین کنید.

ب ـ مختصات نقطه‌هایی از کرهٔ به معادلهٔ $x^۲+(y-۱)^۲+z^۲=۱۲$ را که از سه نقطهٔ A و B و C به یک فاصله می‌باشند به دست آورید.

۴ـ آیا بحث زیر معتبر است (چرا؟)

$$\begin{array}{ll} [(p \Rightarrow q) \wedge r] \implies q & \wedge \\ \sim p & \wedge \\ q \Rightarrow s & \wedge \\ \sim s & \\ \hline \therefore\ r \Rightarrow p & \end{array}$$

۵ـ در میدان F هرگاه $x , y \in F$ و داشته باشیم، $x + y = ۱$ و $x^{-۱} + y^{-۱} = ۱$ ثابت کنید $x = y^{-۱}$.

۶ـ اگر a عددی صحیح باشد ثابت کنید: a و $(a + ۱)$ و $(۲a + ۱)$ دو به دو نسبت به هم اولند و سپس نشان دهید که اعداد $(۲a + ۱)$ و $\frac{a(a+۱)}{۲}$ نیز نسبت به هم اولند.

۷ـ مجموع دو عددِ صحیحِ مثبت ۳۲۴ و تعداد مقسوم علیه‌هایِ مثبت و مشترک آنها ۱۲ است مطلوب است محاسبهٔ آن دو عدد.

۸ـ اگر

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha + \sin\alpha & \sqrt{۲}\sin\alpha \\ -\sqrt{۲}\sin\alpha & \cos\alpha - \sin\alpha \end{bmatrix}$$

نشان دهید

$$A^n = \begin{bmatrix} \cos n\alpha + \sin n\alpha & \sqrt{۲}\sin n\alpha \\ -\sqrt{۲}\sin n\alpha & \cos n\alpha - \sin n\alpha \end{bmatrix}$$

۹ـ با توجه به آنکه هر ماتریس در معادلهٔ سرشتنمایی خود صدق می‌کند، ثابت کنید وارون هر ماتریس پایین مثلثی، ماتریسی پایین مثلثی است.

۱۰ـ تابع به معادلهٔ $y = x\sqrt{x} + ۳x + ۳\sqrt{x} - ۵$ مفروض است.

اولاً: بدون استفاده از مشتق ثابت کنید تابع در $x \geq ۰$ یک‌به‌یک است.

ثانیاً: معادله تابع معکوس را بیابید.

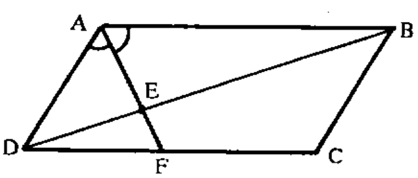
۱۱ـ معادلهٔ درجه سوّم $x^۳ - ۳\sqrt{۳}x^۲ - ۳x + \sqrt{۳} = ۰$ را حل کنید.

۱۲ـ با فرض $-\frac{\pi}{۲} < x < \frac{\pi}{۲}$ مطلوب است محاسبهٔ

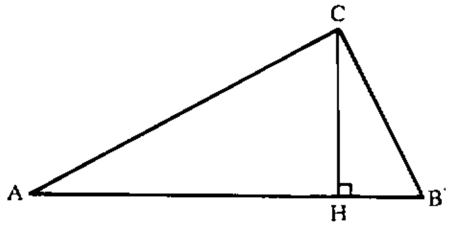
$$I = \int \frac{\sqrt{۲}\,dx}{\cos x\sqrt{\sin ۲x}}$$

● مسائل ریاضیات سال دوم تجربی

۱ـ متوازی الاضلاع ABCD مفروض است. نیمساز زاویهٔ درونی A را رسم می‌کنیم تا قطر BD را در نقطهٔ E و ضلع CD را در نقطهٔ F قطع کند. نسبت $\frac{EA}{EF}$ را بر حسب اضلاع متوازی‌الاضلاع محاسبه کنید.



۲ ـ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{C} = 90^\circ$) ارتفاع CH را رسم می‌کنیم. در صورتی که $AH = m + 4$ و $BH = m + 1$ و $CH = m + 2$ باشد. اندازهٔ اضلاع و مساحت مثلث را محاسبه کنید.



۳ ـ عبارت زیر را به حاصل ضرب عاملها تجزیه کنید.

$a^3 - a - a^2b - ab^2 - b + b^3$

(فرستنده : آقای کیوان شجاعی منش دانش‌آموز رشته تجربی اراک)

۴ ـ اگر m و n ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2 - ax + b = 0$ باشند که در آن $a > 0$ و $b > 0$ آنگاه حاصل عبارت $\sqrt[4]{m} + \sqrt[4]{n}$ را حساب کنید. ($m > 0$ و $n > 0$)

(فرستنده : آقای اسماعیل قیصری دیپلمهٔ ریاضی فیزیک سقز)

۵ ـ دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} \sqrt{x} + y = 11 \\ x + \sqrt{y} = 7 \end{cases}$$

(فرستنده : آقای عبدالجلیل توماج دانش‌آموز شهرستان بندر ترکمن)

۶ ـ قطر زمین مستطیل شکلی برابر ۱۳ متر و $\frac{3}{2}$ محیط این زمین برابر ۵۱ متر است، طول و عرض زمین را حساب کنید.

(فرستنده : آقای محسن چلویی دانش‌آموز رشته ریاضی قم)

۷ ـ مجموع زیر را حساب کنید.

$$S_n = 4 + 34 + 334 + 3334 + \dots + \underbrace{333\dots34}_{n\ \text{مرتبه}}$$

(فرستنده : آقای غلامرضا تهرانی دانش‌آموز رشته ریاضی الیگودرز)

۸ ـ اگر $9\log x^2 = 6\log 3$ باشد، مقدار $|x|$ را حساب کنید.

۹ ـ حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\frac{\sin^8x+\cos^8x}{1-4\sin^2x\cos^2x+2\sin^4x\cos^4x} - 2\sin^2x\cos^2x = ?$$

(فرستنده : آقای نیما شاهنده دانش‌آموز رشته ریاضی بابل)

۱۰ ـ معادلهٔ زیر را حل کنید.

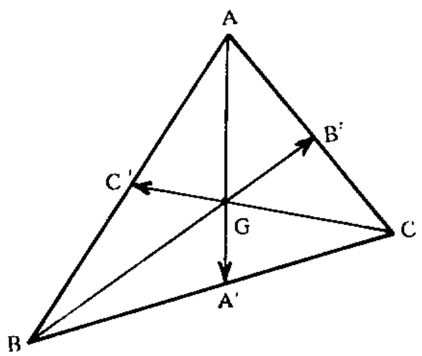
$\sin 2x - 12(\sin x - \cos x) + 12 = 0$

(فرستنده : میثم سباتی دانش‌آموز رشته ریاضی شادگان)

● مسائل ریاضیات سال سوّم تجربی

۱ ـ نقطهٔ G محل برخورد میانه‌های مثلث ABC و نقاط A′ و B′ و C′ به ترتیب وسطهای اضلاع BC و AC و AB می‌باشند.

مطلوب است محاسبهٔ : $\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'}$



۲ ـ مساحت صفحهٔ قطری مکعبی $16\sqrt{2}$ سانتیمتر مربع است. حجم این مکعب را حساب کنید.

۳ ـ حجم یک قاچ کروی به زاویهٔ 60° در کره‌ای را که اندازهٔ سطحش برابر 108π سانتی‌متر مربع است محاسبه کنید.

۴ ـ معادلهٔ زیر را حل کنید.

$|x - 2| + |x + 1| = 5$

(فرستنده: آقای امیرهوشنگ فرهودی‌مقدم دانش‌آموز رشته تجربی تهران)

۵- حد عبارت $\frac{x^n + x^3 + 73}{mx^7 + 2x^2 + 74}$ وقتی $x \to \pm\infty$ برابر $-\frac{3}{4}$ است، مقدار m و n را تعیین کنید.

۶- اگر تابع دو ضابطه‌ای $f(x) = \begin{cases} kx^3 + s & x < -1 \\ kx^2 + 4 & x \geq -1 \end{cases}$ در نقطهٔ $M(-1$ و $3)$ پیوسته باشد مقدار عبارت $\frac{f'(2)f''(-3)}{f(0)}$ را حساب کنید.

۷- تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + d}$ مفروض است، در صورتی که $f'(1) = 1$ مقادیر d را تعیین کنید.

۸- به ازای چه مقداری از a خط مماس بر منحنی تابع به معادلهٔ $f(x) = x^3 + ax + 5$ در نقطه‌ای به طول ۱- بر خط به معادلهٔ $9x + 3y + 2 = 0$ عمود است.

۹- ثابت کنید:

$$S = \cos\frac{\pi}{11}\cos\frac{2\pi}{11}\cos\frac{3\pi}{11}\cos\frac{4\pi}{11}\cos\frac{5\pi}{11} = \frac{1}{32}$$

(فرستنده: آقای قاسم اکسیری فرد دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی جهرم)

۱۰- اگر $\begin{cases} \cos\alpha + \cos\beta = m \\ \sin\alpha + \sin\beta = n \end{cases}$ و $mn \neq 0$ باشد،

ثابت کنید: $\operatorname{cosec}(\alpha + \beta) = \frac{m^2 + n^2}{2mn}$

(فرستنده: آقای بهروز بیرامی دانش‌آموز رشته ریاضی (نقده))

● مسائل ریاضیات سال چهارم تجربی

۱- فاصلهٔ نقطهٔ $A(-1$ و $2)$ از خط $2y - 4x - 2m = 0$ برابر $\frac{\sqrt{20}}{2m}$ است، مقدار مثبت m را تعیین کنید.

۲- به ازای چه مقادیری از m تابع با ضابطهٔ مفروض $y = \frac{3mx - 6}{m - 2x}$ همواره صعودی است؟

۳- به ازای چه مقداری از m خط مفروض $4mx + m^2y + 4 = 0$ قائم بر دایره به معادلهٔ $3x^2 + 3y^2 + 6x - 6y = 12$ است؟

۴- مطلوب است معادلهٔ بیضی که قطرهای آن روی خطهای $2x - 6 = 0$ و $3y + 12 = 0$ واقع و بر محورهای مختصات مماس باشد.

۵- معادلهٔ خط مماس بر هذلولی به معادلهٔ $8x^2 - 18y^2 = 72$ در نقطه‌ای به طول $x = 3$ واقع بر آن را بنویسید.

۶- مکان هندسی نقطهٔ $M(\sin\alpha$ و $\operatorname{tg}\alpha)$ را، تغییر α در صفحهٔ محورهای مختصات به دست آورید $(\alpha \neq k\pi)$

(فرستنده: آقای علی بلوکی دانش‌آموز رشته ریاضی تبریز)

۷- سطح محصور بین منحنی به معادلهٔ $y = 4\sin x$ و محور xها و دو خط $x = \frac{\pi}{2}$ و $x = \frac{-\pi}{2}$ را حول محور xها دوران می‌دهیم، حجم حادث را به دست آورید.

۸- به ازای چه مقادیری از m معادله زیر جواب حقیقی ندارد.

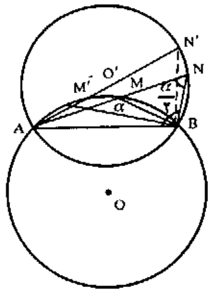
$$2m(\sin x + \cos x) = m(\sin x - \cos x) + \sqrt{5}$$

۹- در مثلث ABC، اگر یک زاویه α و زاویهٔ دیگر 2α و اضلاع روبرو به این زوایا به ترتیب c و b و ضلع سوم آن برابر a فرض شود، مقدار $\cos 2\alpha$ را به دست آورید.

حل مسائل برهانِ ۱۰

● حل مسائل ریاضیات سال اوّل

۱ ـ نقطهٔ دلخواه M را روی کمان $\overset{\frown}{AB}$ در نظر گرفته پاره‌خط AM را به اندازهٔ $MN = MB$ امتداد می‌دهیم و از N به B وصل می‌کنیم.
زاویهٔ $\hat{AMB}$، زاویهٔ خارجی مثلث متساوی الساقین MBN است. پس $\hat{AMB}=۲\hat{ANB}$. بنابراین اگر اندازهٔ زاویهٔ AMB را که مقدار ثابتی است به α نمایش دهیم، داریم $\hat{ANB}=\frac{۱}{۲}\alpha = Cte$. پس مکان هندسی نقطهٔ N کمان در خود زاویهٔ $\frac{\alpha}{۲}$ مقابل به پاره‌خط AB است از طرفی داریم $MA + MB = MA + MN = AN$. بنابراین $MA + MB$ وقتی ماگزیمم مقدار خود را داراست که AN ماگزیمم مقدار ممکن را داشته باشد. و ماگزیمم مقدار AN وقتی است که AN قطر دایرهٔ O' (مکان نقطهٔ N) باشد. در این صورت $\hat{ABN'}=۹۰°$ و نقطهٔ M' وسط پاره‌خط AN' و همچنین وسط کمان AB است. پس نقطهٔ M' وسط کمان AB جواب مسئله است.

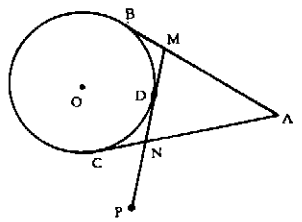


۲ ـ می‌دانیم که مماسهای مرسوم از یک نقطه بر یک دایره با هم برابرند بنابراین اگر نقطهٔ تماس MN با دایره را نقطهٔ D بنامیم داریم: $MB = MD$ و $ND = NC$ اما.

AMN محیط مثلث $= AM+MD+DN+AN \Longrightarrow$

AMN محیط مثلث $= AM+MB+NC+NA=AB+AC \Longrightarrow$

AMN محیط مثلث $= ۲AB = Cte$



۳ ـ گزارهٔ $[(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)]$ گزاره‌ای شرطی است که برای اثبات درستی آن دو حالت در نظر می‌گیریم.

I) اگر مقدم گزاره یعنی $(p \wedge q)$ نادرست باشد در این صورت کلّ گزاره به انتفای مقدم درست خواهد بود.

II) اگر مقدم گزاره یعنی $(p \wedge q)$ درست باشد، در این صورت گزاره‌های p و q هر دو درست بوده و در نتیجه $(p \vee q)$ که تالیِ گزارهٔ مزبور است، درست خواهد بود و بنابراین با درست بودنِ مقدم و تالی گزارهٔ داده شده درست است.

۴ ـ واضح است که مجموعهٔ $A = \{a , \{a\} , \{a , \{a\}\}\}$ دارای سه عضو و در نتیجه دارای $۸ = ۲^۳$ زیر مجموعه است. ثانیاً اگر مجموعهٔ $B = \{a , \{a\}\}$ را در نظر بگیریم $B \subset A$ بوده و داریم $\{a\} \in B$ و $\{a\} \subset B$.

۵ ـ طبق فرض داریم:

$$A-(B-C)=(A-B)-C \Rightarrow A\cap(B\cap C')'=(A\cap B')\cap C'$$
$$\Longrightarrow A \cap (B' \cup C) = (A \cap B') \cap C'$$
$$\Longrightarrow (A \cap B') \cup (A \cap C) = C' \cap (A \cap B')$$
$$\Longrightarrow (A\cap C)\cap[(A\cap B')\cup(A\cap C)]$$
$$=(A\cap C)\cap[C'\cap(A\cap B')]$$
$$\overset{\text{جذب}}{\Longrightarrow} (A\cap C)=[\underbrace{(A\cap C)\cap C'}_{\varnothing}]\cap(A\cap B')\Rightarrow(A\cap C)=\varnothing$$

۶ ـ داریم:

$$\left(x+\frac{۱}{x^۳}\right)\left(x^۴+\frac{۱}{x^۴}\right) = x^۷+\frac{۱}{x}+x+\frac{۱}{x^۷}$$
$$\Rightarrow x^۷+\frac{۱}{x^۷} = \left(x^۳+\frac{۱}{x^۳}\right)\left(x^۴+\frac{۱}{x^۴}\right) - \left(x+\frac{۱}{x}\right)$$
$$x^۳+\frac{۱}{x^۳}=\left(x+\frac{۱}{x}\right)^۳ - ۳x.\frac{۱}{x}\left(x+\frac{۱}{x}\right) = A^۳-۳A$$
$$x^۴+\frac{۱}{x^۴}=\left[x^۲+\frac{۱}{x^۲}\right]^۲-۲=\left[\left(x+\frac{۱}{x}\right)^۲-۲\right]^۲-۲$$
$$=(A^۲-۲)^۲-۲=A^۴-۴A^۲+۲$$
$$\Rightarrow x^۷+\frac{۱}{x^۷}=(A^۳-۳A)(A^۴-۴A^۲+۲)-A$$

۷ ـ

$$\sqrt{(\sqrt{۲}-۱)^۲}+\sqrt{(۲-\sqrt{۲})^۲}+\sqrt{۹}+$$
$$\sqrt{۰/۵۰}+\sqrt{۰/۱۰}$$
$$\sqrt{۲}-۱+۲-\sqrt{۲}+۳+۰/۷+۰/۳$$
$$-۱+۲+۳+۰/۷+۰/۳ \# ۵$$

۸ ـ

$$۲x + y = a , y + z = b , x + ۲z = c$$

$$\begin{cases}\frac{۱۴}{a}+\frac{۷}{b}=۳\\ \frac{۲۱}{b}+\frac{۲۰}{c}=۵\\ \frac{۱۰}{c}+\frac{۷}{a}=۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{۲۱}{b}+\frac{۲۰}{c}=۵\\ \frac{-۲۰}{c}-\frac{۱۴}{a}=-۴\end{cases}\Rightarrow\boxed{\frac{۲۱}{b}-\frac{۱۴}{a}=۱}$$

$$\begin{cases}\frac{۲۱}{b}-\frac{۱۴}{a}=۱\\ \frac{۱۴}{a}+\frac{۷}{b}=۳\end{cases}\Rightarrow\frac{۲۸}{b}=۴\Rightarrow ۴b=۲۸\Rightarrow\boxed{b=۷}$$

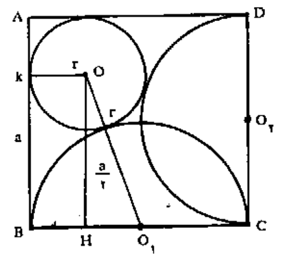
$$\frac{۱۴}{a}+\frac{۷}{۷}=۳\Rightarrow\frac{۱۴}{a}=۲\Rightarrow ۲a=۱۴\Rightarrow\boxed{a=۷}$$

$$\frac{۱۰}{c}+\frac{۷}{۷}=۲\Rightarrow\frac{۱۰}{c}=۱\Rightarrow\boxed{c=۱۰}$$

$$\begin{cases}۲x+y=۷\\ y+z=۷\\ x+۲z=۱۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-۲y-۲z=-۱۴\\ x+۲z=۱۰\end{cases}\Rightarrow\boxed{x-۲y=-۴}$$

● حل مسائل ریاضیات سال دوم ریاضی

۱ ـ مرکز دایرهٔ مورد نظر را O و شعاع آن را r و مرکز دایرهٔ به قطر BC را $O_۱$ می‌نامیم. از O عمود OH را بر ضلع BC فرود می‌آوریم. اگر ضلع مربع را a بنامیم داریم:



$OO_۱ = \frac{a}{۲} + r$ ، $OH = a - r$ ، $O_۱H = \frac{a}{۲} - r$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ $HOO_۱$ می‌توان نوشت:

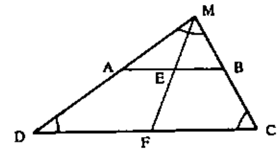
$$OO_۱^۲=OH^۲+O_۱H^۲ \Longrightarrow \left(\frac{a}{۲}+r\right)^۲=(a-r)^۲+\left(\frac{a}{۲}-r\right)^۲$$
$$\Rightarrow r^۲-۴ar+a^۲=۰\Rightarrow r=a\left(۲\pm\sqrt{۳}\right)$$

چون $r<a$ است، پس جواب قابل قبول $r=a\left(۲-\sqrt{۳}\right)$ است.

۲ ـ نقطهٔ تقاطع AD و BC را M می‌نامیم. مثلث MCD در رأس

M قائم‌الزاویه است زیرا $\hat{D}+\hat{C}=90^\circ$ است. بنابراین خط EF از نقطهٔ M می‌گذرد. در مثلثهای قائم‌الزاویه MAB و MCD، ME و MF میانه‌های وارد بر وترند. پس $ME=\frac{AB}{2}$ و $MF=\frac{CD}{2}$

لذا: $EF = MF - ME = \frac{CD}{2}-\frac{AB}{2}=\frac{CD-AB}{2}$



۳- به روش عضوگیری دلخواه مسأله را اثبات می‌کنیم:

$(x,y)\in[(A\times C)\cap(B\times D)]$

$\overset{\text{تعریف اشتراک}}{\iff} (x,y)\in(A\times C)\wedge(x,y)\in(B\times D)$

$\iff (x\in A\wedge y\in C)\wedge(x\in B\wedge y\in D)$

$\overset{\text{جابجایی و شرکت‌پذیری}}{\iff} (x\in A\wedge x\in B)\wedge(y\in C\wedge y\in D)$

$\iff x\in(A\cap B)\wedge y\in(C\cap D)$

$\iff (x,y)\in[(A\cap B)\times(C\cap D)]$

بنابراین چون روابط برگشت‌پذیر هستند، تساوی برقرار است.

۴- طبق فرض رابطه روی $\mathbb{R}^2$ به صورت زیر تعریف شده:

$(x,y)\,R\,(z,t)\iff(y-t)=3(x-z)$

۱) $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ \underbrace{(y-y)}_{0}=\underbrace{(x-x)}_{0}\Longrightarrow(y-y)=3(x-x)$

$\Longrightarrow(x,y)\,R\,(x,y)$ R بازتابی است

۲) فرض کنیم $(x,y)\,R\,(z,t)\Longrightarrow(y-t)=3(x-z)$

$\overset{\text{درمنفی ضرب می‌کنیم}}{\Longrightarrow}(t-y)=3(z-x)\Longrightarrow(z,t)\,R\,(x,y)$ تقارنی است

۳) فرض کنیم $(x,y)\,R\,(z,t)\wedge(z,t)\,R\,(e,f)$

$\Longrightarrow(y-t)=3(x-z)\wedge(t-f)=3(z-e)$

$\Longrightarrow(y-t)=(3x-3z)\wedge(t-f)=(3z-3e)$

$\overset{\text{طرفین باهم جمع شده}}{\Longrightarrow}(y-f)=(3x-3e)\Longrightarrow(y-f)=3(x-e)$

$\Longrightarrow(x,y)\,R\,(e,f)$ R خاصیت تعدی دارد

بنابراین R یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

برای تشکیل کلاس هم‌ارزی $[(2,1)]$ طبق تعریف داریم:

$[(2,1)]=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid(x,y)\,R\,(2,1)\}$

$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid(y-1)=3(x-2)\}$

$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid y=3x-5\}$

۵- به بررسی خواص گروه می‌پردازیم:

۱) $a*(b*c)=a*(bc+b+c)=a(bc+b+c)+(a+bc+b+c)$

$=abc+ab+ac+bc+a+b+c \qquad (1)$

$(a*b)*c=(ab+a+b)*c=(ab+a+b)c+(ab+a+b)+c$

$=abc+ac+bc+ab+a+b+c \qquad (2)$

شرکت‌پذیری برقرار است $\Longleftarrow$ (۲) و (۱)

۲) $a*e=e*a=a$

$a*e=a\Longrightarrow ae+a+e=a\Longrightarrow e(a+1)=0$

$\overset{a\neq-1}{\Longrightarrow} e=0$ عضو خنثی

۳) $a*a'=a'*a=e=0$

$a*a'=0\Longrightarrow aa'+a+a'=0\Longrightarrow a'(a+1)=-a$

$\Longrightarrow a'=\frac{-a}{a+1}$ ضابطه عضو متقابل

بنابراین مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{-1\}$ و عمل $*$ تشکیل یک گروه می‌دهند و چون داریم:

$a*b=ab+a+b=ba+b+a=b*a$

پس یک گروه آبلی است.

برای حل معادلهٔ $(3*2')=(4*x)'$ با استفاده از ضابطهٔ عضو متقابل داریم:

$2'=\frac{-2}{2+1}=\frac{-2}{3}$

$(3*2')=3*\frac{-2}{3}=3\times\frac{-2}{3}+3+(-\frac{2}{3})=-2+3+(-\frac{2}{3})$

$=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

$(4*x)'=(4x+4+x)'=\frac{-(4x+4+x)}{(4x+4+x)+1}=\frac{-4x-4-x}{5x+5}$

$=\frac{-5x-4}{5x+5}$

$(3*2')=(4*x)'\Longrightarrow\frac{1}{3}=\frac{-5x-4}{5x+5}$

$\Longrightarrow-15x-12=5x+5\Longrightarrow-20x=17\Longrightarrow x=\frac{-17}{20}$

۶-

معادله خطی که از مبدأ می‌گذرد: $y=mx$

$4=m(2)\Longrightarrow m=2$

$\Longrightarrow\boxed{y=2x \quad \text{معادله } OA}$

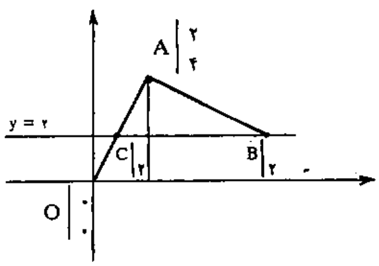
$y_c=2\Longrightarrow2=2x\Longrightarrow x=1\Longrightarrow\boxed{C\left|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right.}$

$A\left|\begin{matrix}2\\4\end{matrix}\right.$ و $m_{AB}=-\frac{1}{2}\Longrightarrow y-y_1=m(x-x_1)$

$\Longrightarrow y-4=-\frac{1}{2}(x-2)$ معادله AB

$y_B=2\Longrightarrow2-4=-\frac{1}{2}(x-2)\Longrightarrow-2=-\frac{1}{2}(x-2)$

$\Longrightarrow4=x-2\Longrightarrow x=6\Longrightarrow\boxed{B\left|\begin{matrix}6\\2\end{matrix}\right.}$



۷- ابتدا معادله درجه دوّم جدیدی تشکیل می‌دهیم که ریشه‌هایش مکعب ریشه‌های معادله $x^2-2x-1=0$؛ برای این کار کافی است $x\to\sqrt[3]{x}$ و در معادله قرار می‌دهیم.
طرفین را به توان (۳) می‌رسانیم:

$\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}-1=0\Rightarrow\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}=1$

$x^2-8x-6x\left(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}\right)=1$

$\Rightarrow x^2-8x-6x(1)=1$

$\Rightarrow x^2-14x-1=0$ ریشه‌های این معادله x'^3 و x''^3 است.

حال دوباره معادله جدیدی می‌سازیم که ریشه‌هایش مکعب ریشه‌های این معادله باشد.

$x\to\sqrt[3]{x}\Rightarrow\sqrt[3]{x^2}-14\sqrt[3]{x}-1=0$

$\sqrt[3]{x^2}-14\sqrt[3]{x}=1$ طرفین را به توان (۳) می‌رسانیم:

$x^2-2744x-42x\left(\sqrt[3]{x^2}-14\sqrt[3]{x}\right)=1$

$x^2-2744x-42x(1)=1$

$x^2-2786x-1=0$ ریشه‌های این معادله x'^9 و x''^9 است.

$x'^{18}+x''^{18}=\left(x'^9+x''^9\right)^2-2x'^9x''^9$

$=\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\times\frac{c}{a}$

$x'^{18}+x''^{18}=(2786)^2-2(-1)=7761798$

۸-

$tg_a\,tg_a\sqrt[a]{\sqrt[a]{\dots\sqrt[a]{a}}}=tg_a\,tg_a\sqrt[a^n]{a}$

$=tg_a\,tg_a(a)^{\frac{1}{a^n}}=\lg_a\frac{1}{a^n}\lg_a^a$

$=\lg_a\frac{1}{a^n}=\lg_a a^{-n}=-n\lg_a^a=-n$

۹- از فرض داریم:

$a\sin^2x-b\cos^2x=a-b\Rightarrow a(1-\cos^2x)-b\cos^2x=a-b$

$\Rightarrow a-a\cos^2x-b\cos^2x=a-b\Rightarrow\cos^2x=\frac{b}{a+b} \qquad (1)$

همچنین داریم:

$a\sin^2x-b(1-\sin^2x)=a-b\Rightarrow a\sin^2x-b+b\sin^2x=a-b$

$\Rightarrow\sin^2x=\frac{a}{a+b} \qquad (2)$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases}\sin^4x=\dfrac{a^2}{(a+b)^2}\\[2mm]\cos^4x=\dfrac{b^2}{(a+b)^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\sin^4x}{a}=\dfrac{a}{(a+b)^2} & (3)\\[2mm]\dfrac{\cos^4x}{b}=\dfrac{b}{(a+b)^2} & (4)\end{cases}$$

از جمع روابط (۳) و (۴) داریم:

$$\frac{\sin^4x}{a}+\frac{\cos^4x}{b}=\frac{a}{(a+b)^2}+\frac{b}{(a+b)^2}=\frac{a+b}{(a+b)^2}=\frac{1}{a+b}$$

۱۰- به ترتیب داریم:

$4^{\sin^2\alpha}-4^{\cos^2\alpha}=\sqrt{2}\Rightarrow4^{\sin^2\alpha}-4^{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{2}$

$\Rightarrow4^{\sin^2\alpha}-\frac{4}{4^{\sin^2\alpha}}=\sqrt{2}$

با فرض $x=4^{\sin^2\alpha}$ می‌توان نوشت:

$x-\frac{4}{x}=\sqrt{2}\Rightarrow x^2-\sqrt{2}x-4=0$

$\Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2+16}}{2}$

$x=\frac{\sqrt{2}\pm3\sqrt{2}}{2}\Rightarrow$

$$\left|\begin{array}{l}x_1=\dfrac{\sqrt{2}+3\sqrt{2}}{2}=\dfrac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}\\[2mm]x_2=\dfrac{\sqrt{2}-3\sqrt{2}}{2}=\dfrac{-2\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}\quad\text{(غیرقابل قبول)}\end{array}\right.$$

مقدار $4^{\sin^2\alpha}$ همواره مثبت است، لذا داریم:

$$\Rightarrow \quad x = 4^{\sin^2\alpha} = 2\sqrt{2}$$

● حل مسائل ریاضیات سال سوّم ریاضی

۱ ـ مساحت مثلثهای PBC_1 و PCB_1 را به ترتیب S_1 و S_2 و محیطهای این دو مثلث را $2P_1$ و $2P_2$ فرض می‌کنیم و ارتفاعهای نظیر رأس P در این دو مثلث را h_1 و h_2 و شعاع دایره‌های محاطی داخلی آنها را r_1 و r_2 می‌نامیم. بنا به فرض مسئله داریم:

$$\begin{cases} S_1 = S_2 \\ 2P_1 = 2P_2 \end{cases} \Rightarrow \quad r_1P_1 = r_2P_2 \quad \Rightarrow$$

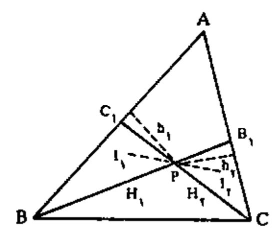
$$r_1 = r_2 \quad \Rightarrow \quad I_1H_1 = I_2H_2$$

بنابراین دو مثلث قائم‌الزاویهٔ PI_1H_1 و PI_2H_2 با هم برابرند. در نتیجه $PH_1 = PH_2$ است امّا:

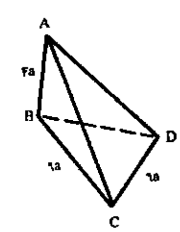
$$\begin{cases} PH_1 = P_1 - BC_1 \\ PH_2 = P_2 - B_1C \end{cases} \Rightarrow P_1 - BC_1 = P_2 - B_1C$$

$$P_1 = P_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{BC_1 = B_1C}$$

از طرفی: $S_2 = S_1$ و $S_2 = \frac{1}{2}B_1C \cdot h_2$ و $S_1 = \frac{1}{2}BC_1 \cdot h_1$ پس نتیجه می‌شود که $h_1 = h_2$. یعنی نقطهٔ P از دو ضلع AB و AC به یک فاصله است. لذا روی نیمساز زاویهٔ درونی A قرار دارد.



۲ ـ مثلثهای ABC و BCD هر کدام یک زاویهٔ قائمه دارند، زیرا $AB \perp BC$ و $BC \perp CD$ است. پس قائم‌الزاویه‌اند. مثلث ABD نیز در رأس B قائم‌الزاویه است زیرا $AB \perp BC$ و $AB \perp CD$ پس AB بر صفحه BCD و در نتیجه بر BD عمود است.



در این مثلثهای قائم‌الزاویه داریم: $AD = 2\sqrt{22}a$ و $AC = 2\sqrt{13}a$ و $BD = 6\sqrt{2}a$. پس مثلث ACD نیز در رأس C قائم‌الزاویه است چون $CD^2 = 36a^2$ و $AC^2 = 52a^2$ و $AD^2 = 88a^2$ بنابراین وجوه جانبی چهار وجهی همه مثلثهای قائم‌الزاویه‌اند. امّا حجم چهار وجهی برابر است با:

$$\text{حجم چهار وجهی} = \frac{1}{3}S_{BCD} \times AB = \frac{1}{3} \times \frac{36a^2}{2} \times 4a = 24a^3$$

۳ ـ برای اثبات زیر فضا بودنِ W کافی است ثابت کنیم مجموعهٔ W نسبت به جمع و ضرب اسکالر بسته است.

$$1)\quad f_1\ ,\ f_2 \in W \Longrightarrow f_1(5) = 0\ ,\ f_2(5) = 0$$

$$\Longrightarrow (f_1 + f_2)(5) = f_1(5) + f_2(5) = 0 + 0 = 0$$

$$\Longrightarrow (f_1 + f_2) \in W$$

۲) فرض کنیم $r \in \mathbb{R}\ ,\ f_1 \in W \Longrightarrow f_1(5) = 0$

$$\Longrightarrow (r.f_1)(5) = r.f_1(5) = r.0 = 0 \Longrightarrow (r.f_1) \in W$$

۴ ـ تعداد خودکارهای سالم برابر است با ۹ = ۶ − ۱۵، پس:

الف) $P(A) = \dfrac{\binom{9}{4}}{\binom{15}{4}}$

ب) $\dfrac{\binom{6}{1} \times \binom{9}{3} + \binom{6}{2} \times \binom{9}{2} + \binom{6}{3} \times \binom{9}{1} + \binom{6}{4}}{\binom{15}{4}}$

$= P(B)$ حداقل یکی خراب

ج) $\dfrac{\binom{6}{3} \times \binom{9}{1} + \binom{6}{2} \times \binom{9}{2} + \binom{6}{1} \times \binom{9}{3} + \binom{9}{4}}{\binom{15}{4}}$

$= P(C)$ حداکثر ۳ عدد خراب

۵ ـ وقتی سکه‌ای را ۶ بار پرتاب می‌کنیم در هر مرتبه پیشامد مستقل از دفعات بعدی یا قبلی‌اش می‌باشد بنابراین:

$$P(\text{پ ، پ ، پ ، ر ، ر ، ر}) = P(\text{پ}) \times \ldots \times P(\text{ر})$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$$

۶ ـ

$$\left[\frac{y+2}{2}\right] + \left[\frac{-x+2}{2}\right] = 0 \Rightarrow \left[\frac{y}{2}\right] + \left[\frac{-x}{2}\right] = -2$$

$$-2 \le \frac{-x}{2} < -1 \Rightarrow 1 < \frac{x}{2} \le 2 \Rightarrow 2 < x \le 4 \Rightarrow$$

$$\left[\frac{y}{2}\right] - 2 = -2 \Rightarrow \left[\frac{y}{2}\right] = 0$$

$$\Rightarrow 0 \le \frac{y}{2} < 1 \Rightarrow 0 \le y < 2$$

$$-1 \le -\frac{x}{2} < 0 \Rightarrow 0 < \frac{x}{2} \le 1 \Rightarrow 0 < x \le 2 \Rightarrow$$

$$\left[\frac{y}{2}\right] - 1 = -2 \Rightarrow \left[\frac{y}{2}\right] = -1 \Rightarrow -1 \le \frac{y}{2} < 0$$

$$\Rightarrow \quad -2 \le y < 0$$

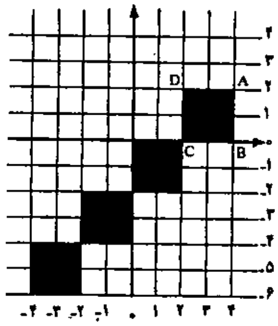
$$0 \le \frac{-x}{2} < 1 \Rightarrow -1 < \frac{x}{2} \le 0 \Rightarrow -2 < x \le 0 \Rightarrow$$

$$\left[\frac{y}{2}\right] = -2 \Rightarrow -2 \le \frac{y}{2} < -1 \Rightarrow -4 \le y < -2$$

$$1 < -\frac{x}{2} < 2 \Rightarrow -2 < \frac{x}{2} \le -1 \Rightarrow -4 < x \le 2 \Rightarrow$$

$$\left[\frac{y}{2}\right] = -3 \Rightarrow -3 \le \frac{y}{2} < -2 \Rightarrow -6 \le y < -4$$

دو شکل AD و DC شامل شکل نیستند و این مطلب در مورد سایر مربعها نیز صادق است.



۷ ـ

$$A = (2 \times 111)^{333} + (3 \times 111)^{222} =$$

$$(2^{333} \times 111^{333}) + (3^{222} \times 111^{222})$$

$$A = (2^3)^{111} \times 111^{111} \times 111^{222} + (3^2)^{111} \times 111^{222}$$

$$A = 111^{222}((8)^{111} \times 111^{111} + (9)^{111}) =$$

$$111^{222}\underbrace{(888^{111} + 9^{111})}_{\text{بسط می‌دهیم}}$$

$$A = 111^{222}(888+9)\underbrace{(888^{110} - 888^{109} \times 9 + \ldots + 9^{110})}_{k}$$

$$A = 111^{222}(897)k = (111)^{222}(13 \times 69)k$$

A بر (۱۳) بخش‌پذیر است ⇐

توجه: ضمناً این عدد بر ۲۳ و ۳۹ هم بخش‌پذیر است.

۸ ـ هر تابع هموگرافیکی را می‌توان به صورت مقابل نشان داد.

$$y = \frac{mx + n}{x + k}$$

مجانب قائم: $x + k = 0 \Longrightarrow 2 + k = 0 \Longrightarrow \boxed{k = -2}$

مجانب افقی: $y = \frac{m}{1} \Longrightarrow 1 = \frac{m}{1} \Longrightarrow \boxed{m = 1}$

$$A \left| \begin{matrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{matrix} \right. \Longrightarrow \frac{1}{4} = \frac{n}{k} \Longrightarrow \frac{1}{4} = \frac{n}{-2} \Longrightarrow \boxed{n = -\frac{1}{2}}$$

تابع مورد نظر $\Rightarrow \quad y = \dfrac{x - \frac{1}{2}}{x - 2} = \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{2x - 1}{2x - 4}$

۹ ـ با فرض $\cos\alpha = \frac{b}{a} < 1$ داریم:

$$p = \frac{a\left(1 + \frac{b}{a}\right)}{a\left(1 - \frac{b}{a}\right)} = \frac{1 + \frac{b}{a}}{1 - \frac{b}{a}} = \frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha} =$$

$$\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = tg^2\frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad p = tg^2\frac{\alpha}{2}$$

۱۰ ـ با توجه به اتحاد مثلثاتی

$tg3\alpha = tg\,\alpha\, tg(60 - \alpha)\, tg(60 + \alpha)$ داریم:

$$\alpha = 5^\circ : tg3 \times 5^\circ = tg5^\circ tg(60 - 5^\circ)\, tg(60 + 5^\circ)$$

$$\Longrightarrow tg15^\circ = tg5^\circ\, tg55^\circ\, tg65^\circ$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$tg5^\circ tg55^\circ tg65^\circ tg75^\circ = tg15^\circ tg75^\circ = tg15^\circ cotg15^\circ = 1$$

۱۱ ـ اگر در معادلهٔ فوق عبارت $\cos^2(\frac{\pi}{4}x)$ را بسط دهیم، معادله به یک معادلهٔ کلاسیک نوع سوم تبدیل می‌شود:

$$\cos^2 x + \cos^2(\frac{\pi}{3} x) = \frac{3}{2} \Longrightarrow$$
$$\cos^2 x + (\cos\frac{\pi}{3}\cos x + \sin\frac{\pi}{3}\sin x)^2 = \frac{3}{2}$$
$$\cos^2 x + \frac{1}{4}\cos^2 x + \frac{3}{4}\sin^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x = \frac{3}{2}$$
$$5\cos^2 x + 3\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x = 6$$

طرفین معادله را بر $\cos^2 x$ تقسیم می‌کنیم:

$$5 + 3tg^2 x + 2\sqrt{3}\,tgx = 6 + 6tg^2 x$$
$$\Rightarrow\ 3tg^2 x - 2\sqrt{3}\,tgx + 1 = 0$$
$$\Rightarrow\ (\sqrt{3}\,tgx - 1)^2 = 0\ \Rightarrow\ \sqrt{3}\,tgx - 1 = 0$$
$$\Rightarrow\ tgx = \frac{\sqrt{3}}{3} = tg\frac{\pi}{6}\ \Rightarrow\ \boxed{x = k\pi + \frac{\pi}{6}}$$

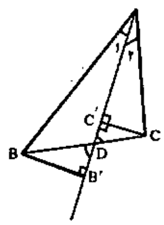
حل مسائل ریاضیات سال چهارم ریاضی

۱ـ مثلثهای قائم‌الزاویه ACC' و ABB' که یک زاویهٔ حاده برابر دارند، متشابهند. همچنین دو مثلث قائم‌الزاویه DBB' و DCC' نیز مشابه می‌باشند. پس:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'} = \frac{BB'}{CC'} \qquad (1)$$
$$\frac{DB}{DC} = \frac{DB'}{DC'} = \frac{BB'}{CC'} \qquad (2)$$

از مقایسه روابط (۱) و (۲) داریم:
$$\frac{AB'}{AC'} = \frac{DB'}{DC'}$$

و یا می‌توان نوشت $\frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{DB'}}{\overline{DC'}}$. بنابراین $(ADB'C')$ یک تقسیم توافقی است.



۲ـ معادلهٔ دسته صفحهٔ گذرنده بر فصل مشترک دو صفحه را می‌نویسیم و از صفحات این دسته، معادلهٔ صفحه‌ای را به دست می‌آوریم، که از نقطهٔ A بگذرد.

$$\alpha(x + 2y - z - 1) + \beta(2x - y + 3z + 2) = 0 \Longrightarrow$$
$$\boxed{(\alpha + 2\beta)x + (2\alpha - \beta)y + (3\beta - \alpha)z - \alpha + 2\beta = 0}$$

معادلهٔ دسته صفحه

$$A(2,-1,3) \xrightarrow{\text{در معادلهٔ دسته صفحه}} 2\alpha + 4\beta - 2\alpha + \beta + 9\beta - 3\alpha - \alpha + 2\beta = 0$$
$$\Longrightarrow -4\alpha + 16\beta = 0 \Longrightarrow \boxed{\alpha = 4\beta} \xrightarrow{\text{در معادله دسته صفحه}}$$
$$6\beta x + 7\beta y - \beta z - 2\beta = 0 \Longrightarrow \boxed{6x + 7y - z - 2 = 0}$$

معادله صفحه مطلوب

۳ـ نقطهٔ تقاطع محور اصلی دو دایره با بیضی، جواب مسأله است.

$$\begin{cases} C: x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0 \\ C': x^2 + y^2 + 4x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow C - C' = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

معادله محور اصلی دو دایره

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 - 8x + 4y + 4 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow y^2 + 4y + 4 = 0 \Longrightarrow (y+2)^2 = 0 \Longrightarrow$$
$$y = -2 \Longrightarrow M(0 - 2) \qquad \text{نقطهٔ مطلوب}$$

نکته ۱ـ از معادلهٔ دو دایرهٔ داده شده، مشخص است که محور اصلی دو دایره محور yها یعنی $x = 0$ است.

نکته ۲ـ چون معادلهٔ تلاقی محور اصلی دو دایره و بیضی ریشهٔ مضاعف دارد پس محور اصلی، بر بیضی مماس است.

۴ـ

۱) $p \Rightarrow (q \vee r)$ ∧

۲) $(q \vee s) \Rightarrow t$ ∧

۳) $\underline{(\sim t \wedge p)}$

۴) $\sim t$ از ۳ و حذف عاطف

۵) p از ۳ و حذف عاطف

۶) $(q \vee r)$ از ۱ و ۵ و انتزاع

۷) $\sim(q \vee s) \equiv (\sim q \wedge \sim s)$ از ۲ و ۴ و نقیض انتزاع

۸) $\sim q$ از ۷ و حذف عاطف

۹) $\therefore r$ از ۶ و ۸ و رفع مؤلفه

۵ـ مجموعهٔ $A = \{x, x+2, x+2^2, \dots, x+2^6\}$ تشکیل یک دسته کامل مانده‌ها به سنج ۷ را نداده و این را می‌توان با یک مثال نقض نشان داد. زیرا کافی است دو عضو A به پیمانهٔ ۷ با هم، هم‌نهشت باشند و داریم:

$$x + 2^3 \overset{7}{\equiv} x + 2^6$$

۶ـ ابتدا ماتریس تقارن نسبت به خط $y = 2x$ را یافته و سپس توسط آن قرینهٔ یک نقطهٔ دلخواه از خط داده شده را نسبت به خط $y = 2x$ محاسبه کرده و در معادلهٔ خط داده شده اعمال می‌کنیم.

$$y = 2x \Rightarrow tg\,\theta = 2 \Rightarrow \cos 2\theta = \frac{-3}{5}, \sin 2\theta = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$x = \frac{4Y - 3X}{5}, \quad y = \frac{4X + 3Y}{5}$$

$$y, x \xrightarrow[\text{داده شده}]{\text{در معادله}} 3\left(\frac{4Y - 3X}{5}\right) + 2\left(\frac{4X + 3Y}{5}\right) = 6$$

$$\Longrightarrow 18Y - X = 30 \longleftarrow \text{قرینهٔ خط مزبور}$$

۷ـ

$$\begin{vmatrix} a & x-t & ay+az \\ a & y-t & ax+az \\ a & z-t & ax+ay \end{vmatrix} = a \times a \begin{vmatrix} 1 & x-t & y+z \\ 1 & y-t & x+z \\ 1 & z-t & x+y \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{ستون دوم + ستون سوم}}{=} a^2 \begin{vmatrix} 1 & x-t & x+y+z-t \\ 1 & y-t & x+y+z-t \\ 1 & z-t & x+y+z-t \end{vmatrix} =$$

$$a^2 = (x+y+z-t) \begin{vmatrix} 1 & x-t & 1 \\ 1 & y-t & 1 \\ 1 & z-t & 1 \end{vmatrix} = 0$$

۸ـ

داریم
$$\begin{cases} 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} & n \in N \\ 1 + 2 + 3 + \dots + n^2 = \frac{n^2(n^2+1)}{2} & n \in N \end{cases}$$

$$\underset{n \to +\infty}{\text{حد}} \left(\frac{1}{n^4} + \frac{2}{n^4} + \frac{3}{n^4} + \dots + \frac{n^2}{n^4}\right) =$$
$$\underset{n \to +\infty}{\text{حد}} \left(\frac{1 + 2 + 3 + \dots + n^2}{n^4}\right) = \underset{n \to +\infty}{\text{حد}} \frac{\frac{n^2(n^2+1)}{2}}{n^4}$$

$$\sim \underset{n \to +\infty}{\text{حد}} \frac{\frac{n^4}{2}}{n^4} = \frac{1}{2}$$

۹ـ

$$y' = \frac{-x^2 + 3}{(x^2 + x + 3)^2} \Rightarrow y'' = \frac{x^3 - 9x - 3}{(x^2 + x + 3)^3}$$
$$y = 0 \Rightarrow x^3 - 9x - 3 = 0 \quad \Delta = 4p^3 + 27q^2$$
$$= 4(-9)^3 + 27(9) = -891 < 0$$

چون در معادله درجه سوم $y'' = 0$، $\Delta < 0$ پس این معادله سه ریشه حقیقی متمایز دارد و علامت y'' در طرفین هر یک از ریشه‌ها متفاوت است پس منحنی این تابع سه نقطه عطف دارد.

۱۰ـ

$$\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} = \int \frac{dx}{b^2\cos^2 x\left(1 + \frac{a^2}{b^2}tg^2 x\right)} =$$

$$\frac{1}{b^2}\int \frac{(1 + tg^2 x)dx}{1 + \frac{a^2}{b^2}tg^2 x}$$

$$U = \frac{a}{b}tgx \Rightarrow du = \frac{a}{b}(1 + tg^2 x)dx$$

$$\Rightarrow (1 + tg^2 x)dx = \frac{bdu}{a} \Rightarrow \frac{1}{b^2}\int \frac{\frac{bdu}{a}}{1 + u^2}$$

$$= \frac{1}{ab}\int \frac{du}{1 + u^2} = \frac{1}{ab}Arctg\,u + c$$

$$= \frac{1}{ab}Arctg\left(\frac{a}{b}tgx\right) + c$$

حل مسائل ریاضیات سال دوم تجربی

۱ـ در مثلث قائم‌الزاویه ABC $(\hat{A} = 90^\circ)$ داریم:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow$$

اما بنا به فرض مسأله، $4a = 5b$ است. پس $a = \frac{5}{4}b$، و از آنجا:

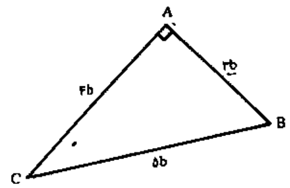
$$(\frac{5}{4}b)^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow \frac{9}{16}b^2 = c^2$$
$$\Longrightarrow \frac{3}{4}b = c \text{ یا } c = \frac{3}{4}b$$

لذا اضلاع مثلث بر حسب b برابرند با:

$$\frac{3}{4}b\ ,\ b\ ,\ \frac{5}{4}b$$

و یا $5b$ و $4b$ و $3b$ که تشکیل تصاعد عددی با قدر نسبت b

می‌دهند.



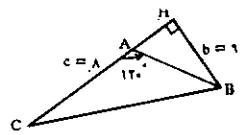
۲ـ می‌دانیم که اگر در مثلث ABC ، اندازهٔ زاویهٔ A برابر °۱۲۰ باشد، داریم :

$$a^2 = b^2 + c^2 + bc$$

پس : (۱

$$a^2 = 36 + 64 + 48 = 148 \implies a = 2\sqrt{37}$$

۲) در مثلث CAH زاویهٔ $\hat{CAH} = 60^\circ$ است لذا



$$CH = h_c = 6\sin 60 = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

۳) $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.CH = \frac{1}{2} \times 8 \times 3\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$

ـ۳

$$S = x' + x'' = \frac{-b}{a}\ ,\ P = x'x'' = \frac{c}{a}\ ,\ K = ?$$

$$3x'x'' = 2x' - 2x'' \Rightarrow 3P = 2(x' - x'') \Rightarrow x' - x'' = \frac{3}{2}P$$

$$x' - x'' = \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} = 1 \Rightarrow x' - x'' = 1$$

از طرفی داریم :

$$|x' - x''| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{K^2 - 24}}{3} = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{K^2 - 24} = 3 \Rightarrow K^2 - 24 = 9$$

$$\Rightarrow K^2 = 33 \Rightarrow K = \pm\sqrt{33}$$

۴ـ به ترتیب داریم :

$$x^4 + 2x^2\cos\alpha + 1 = x^4 + 2x^2(1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}) + 1$$

$$= x^4 + 2x^2 + 1 - 4x^2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

(می‌دانیم : $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$)

$$= (x^2 + 1)^2 - 4x^2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$= (x^2 + 1 - 2x\sin\frac{\alpha}{2})(x^2 + 1 + 2x\sin\frac{\alpha}{2})$$

۵ـ معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$4^{x + \sqrt{x^2 - 2}} - 5 \times 2^{x - 1 + \sqrt{x^2 - 2}} = 6$$

با فرض $2^{x + \sqrt{x^2 - 2}} = y$ داریم :

$$y^2 - \frac{5}{2}y - 6 = 0 \implies y = 4 \ \text{یا}\ y = \frac{-3}{2}$$

بنابراین حل معادلهٔ مفروض به حل معادلات زیر تحویل می‌یابد:

$$2^{x + \sqrt{x^2 - 2}} = 4 \quad \text{یا} \quad 2^{x + \sqrt{x^2 - 2}} = -\frac{3}{2}$$

از آنجا که همواره داریم : $2^{x + \sqrt{x^2 - 2}} > 0$ ، بنابراین معادلهٔ دوم فاقد جواب است. و از معادلهٔ اول داریم :

$$2^{x + \sqrt{x^2 - 2}} = 2^2 \Rightarrow x + \sqrt{x^2 - 2} = 2$$

$$\sqrt{x^2 - 2} = x - 2 \Rightarrow x^2 - 2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

ـ۶

$$\frac{1}{2}\mathrm{Arccos}(\frac{2}{3}) = \alpha \Rightarrow \mathrm{Arc\cos}(\frac{2}{3}) = 2\alpha \Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{2}{3}$$

$$tg^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{1 - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{1}{5} \Rightarrow$$

$$tg^2\alpha = \frac{1}{5} \Rightarrow tg^2\left[\frac{1}{2}\mathrm{Arc\cos}(\frac{2}{3})\right] = \frac{1}{5}$$

۷ـ به ترتیب داریم :

$$\cos^7 x \sin x = 1 \Rightarrow \cos^6 x \sin x\cos x = 1 \Rightarrow \cos^6 x(\frac{1}{2}\sin 2x) = 1$$

$$\cos^6 x \sin 2x = 2$$

از آنجا که طرف اول همواره عددی بین ۱− و ۱ یا مساوی آنان می‌باشد و طرف دوم عدد ثابت ۲ است تساوی فوق به ازای هیچ مقدار x ممکن نیست و در نتیجه معادله جواب ندارد.

حل مسائل ریاضیات سال سوّم تجربی

۱ ـ ابتدا مختصات مرکز ثقل مثلث را به دست می‌آوریم. می‌دانیم که:

$$G\left|\begin{array}{l} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{array}\right. \Rightarrow G\left|\begin{array}{l} x = \dfrac{-1 + 3 + 1}{3} = 1 \\ y = \dfrac{2 + 4 + 0}{3} = 2 \end{array}\right.$$

حال بردار مکان نقطه G یعنی اندازهٔ پاره‌خط OG را محاسبه‌می‌کنیم.

$$OG = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5} \Rightarrow \boxed{OG = \sqrt{5}}$$

۲ـ داریم : $(3\vec{AB}).(-4\vec{AC}) = -12(\vec{AB}.\vec{AC})$

$$|\vec{AB}| = 6 \quad \text{و} \quad |\vec{AC}| = 8 \quad \text{و} \quad \hat{BAC} = 60^\circ$$

پس :

$$-12(\vec{AB}.\vec{AC}) =$$

$$-12 \times |\vec{AB}|\ |\vec{AC}| \cos(\vec{AB} \text{ و } \vec{AC})$$

$$\Rightarrow -12(\vec{AB}.\vec{AC}) = -12 \times 6 \times 8 \times \cos 60^\circ = -288$$

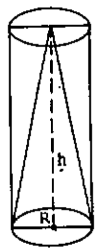
۳ـ با شرایط داده شده حجم استوانه ۳ برابر حجم مخروط است. زیرا اگر شعاع قاعده مشترک استوانه و مخروط را R و ارتفاع مشترک آنها را h بنامیم داریم :

حجم استوانه = سطح قاعده × ارتفاع = $\pi R^2 h$

حجم مخروط = $\frac{1}{3}$ سطح قاعده × ارتفاع = $\frac{1}{3}\pi R^2 h$

⇐ [حجم استوانه = ۳ × حجم مخروط] ⇐ حجم استوانه = $144\pi cm^3$

$$\Rightarrow 144\pi = \pi(4)^2 \times h = 16\pi h \Rightarrow \boxed{h = 9cm}$$



راه دیگر: ارتفاع مخروط را محاسبه می‌کنیم. همان مقدار ارتفاع استوانه است.

حجم مخروط = $\frac{1}{3}$ سطح قاعده × ارتفاع ⇐ $48\pi = \frac{1}{3} \times \pi(4)^2 h$

$$\Rightarrow 48\pi = \frac{16\pi h}{3} \Rightarrow \boxed{h = 9}$$

ـ۴

$$\lim_{x \to -y}\left(\frac{\sin x + \sin y}{tg x + tg y}\right) = \lim_{x \to -y}\left(\frac{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}{\frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}}\right)$$

$$= \lim_{x \to -y}\left(\frac{2\sin\frac{x+y}{2}\ \cos\frac{x-y}{2}}{\frac{2\sin\frac{x+y}{2}\ \cos\frac{x+y}{2}}{\cos x \cos y}}\right)$$

$$= \lim_{x \to -y}\left(\frac{\cos\frac{x-y}{2}}{\cos\frac{x+y}{2}} . \cos x \cos y\right)$$

$$= \frac{\cos\frac{-y-y}{2}}{\cos\frac{-y+y}{2}} . \cos(-y)\cos(y)$$

$$= \frac{\cos(-y)}{1} . \cos(-y)\cos y = \cos^2 y$$

ـ۵

$$y = \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \sqrt{\dots}}}$$

طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم :

$$y^2 = \sin x + \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \sqrt{\dots}}} \Rightarrow y^2 = \sin x + y$$

$$\implies y^2 - y = \sin x \implies 2yy' - y' = \cos x$$

$$\implies y'(2y - 1) = \cos x \implies y' = \frac{\cos x}{2y - 1}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{\cos x}{-1 + 2\sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \sqrt{\dots}}}}$$

۶ـ نقطهٔ تقاطع خط با محور طولها: $y + x = -1 \Rightarrow A(-1, 0)$

$$f'(x) = \frac{6x^2}{5\sqrt[5]{(2x^3 + 2)^4}} \Rightarrow m = f'(-1)$$

$$= tg\alpha \Rightarrow \alpha = 90^\circ$$

(خط بر محور طولها عمود است)

بنابراین خطی که عمود بر محور طولها است و از نقطهٔ A می‌گذرد، خط مطلوب است :

(معادله خط مماس) $x + 1 = 0$ یا $x = -1$

۷-

$$\sec 3\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=2$$

$$\frac{1}{\cos\left(\frac{3\pi}{4}-3x\right)}+\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{4}+3x\right)}+\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin\left(\frac{-\pi}{4}+3x\right)}+\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=2 \Rightarrow$$

$$\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=A \quad \text{و} \quad \frac{1}{A}+A=2$$

$$\Rightarrow A^2-2A+1=0$$

$$\Rightarrow (A-1)^2=0 \Rightarrow A=1$$

$$\Rightarrow \sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=1$$

$$\Rightarrow 3x-\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

$$3x=2k\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4} \Rightarrow 3x=2k\pi+\frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$$

۸-

$$P=\cos\frac{\pi}{48}\cos\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{12}$$

طرفین را در $\sin\frac{\pi}{48}$ ضرب می‌کنیم:

$$P\sin\frac{\pi}{48}=\underbrace{\cos\frac{\pi}{48}\sin\frac{\pi}{48}}\cos\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{12}$$

$$=\frac{1}{2}\underbrace{\sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24}}\cos\frac{\pi}{12}$$

$$=\frac{1}{4}\underbrace{\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}}$$

$$=\frac{1}{8}\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16} \Rightarrow P=\frac{1}{16\sin\frac{\pi}{48}}$$

۹- طرف اول تساوی را در $\sin\alpha$ ضرب و بر آن تقسیم می‌کنیم:

$$\text{طرف اول}=\frac{16\sin\alpha\cos\alpha\cos2\alpha\cos3\alpha\cos4\alpha}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{8\sin2\alpha\cos2\alpha\cos3\alpha\cos4\alpha}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{4\sin4\alpha\cos4\alpha\cos3\alpha}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{2\sin8\alpha\cos3\alpha}{\sin\alpha}\overset{(\alpha=\frac{\pi}{9})}{=}\frac{2\sin\frac{8\pi}{9}\cos\frac{3\alpha}{9}}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{2\sin\left(\pi-\frac{\pi}{9}\right)\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\alpha}=\frac{2\sin4\alpha\times\frac{1}{2}}{\sin\alpha}=1$$

حل مسائل ریاضیات سال چهارم تجربی

۱- به ترتیب داریم:

$$f(x)=x^3-3x^2+4 \Rightarrow f'(x)=3x^2-6x \Rightarrow f'(x)=6x-6=0$$

$$\Rightarrow 6x-6=0 \Rightarrow x=1 \text{ و } f(1)\overset{?}{=}2 \Rightarrow A(1,2)$$

(مختصات نقطه عطف)

$$m=f'(1)=-3 \Rightarrow m'=\frac{1}{3} \qquad \text{(ضریب زاویه خط قائم)}$$

۲- در توابع هموگرافیک با ضابطهٔ عمومی $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq0)$ خط $cx+d=0$ مجانب قائم و خط $y=\frac{a}{c}$ مجانب افقی است، پس داریم:

$$\left|\begin{array}{l} x+n=0 \\ x=-2 \end{array}\right. \Rightarrow -2+n=0 \Rightarrow \boxed{n=2}$$

از طرفی چون منحنی محور x ها را در $x=-1$ قطع می‌کند پس نقطهٔ $A(-1\,,\,0)$ متعلق به منحنی است:

$$y=\frac{nx+m}{x+n} \Rightarrow \frac{2(-1)+m}{(-1)+2}=0 \Rightarrow m-2=0 \Rightarrow \boxed{m=2}$$

۳- مختصات مرکز تقارن تابع هموگرافیک با ضابطهٔ عمومی $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ چنین است:

$$I\left|\begin{array}{l} \frac{-d}{c} \\ \frac{a}{c} \end{array}\right.$$

پس داریم:

$$y=\frac{x\sin^2t-2}{x-\cos^2t} \Rightarrow I\left|\begin{array}{l} x=\cos^2t \\ y=\sin^2t \end{array}\right. \Rightarrow x+y\overset{\text{(معادله‌مکان)}}{=}1$$

۴- در حالت عمومی $F(\alpha\,,\beta+c)$ و $F'(\alpha\,,\beta-c)$ مختصات کانونهای بیضی به معادلهٔ $\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}+\frac{(y-\beta)^2}{a^2}=1$ می‌باشند.
همچنین می‌دانیم:

$$b^2+c^2=a^2 \quad \text{و} \quad b=\frac{a}{2}$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$(\frac{a}{2})^2+c^2=a^2 \Rightarrow$$

$$c^2=a^2-\frac{a^2}{4}=\frac{3a^2}{4} \Rightarrow c=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{l} a=2\sqrt{5} \\ b=\sqrt{5} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \frac{(x-3)^2}{5}+\frac{(y-2)^2}{20}=1$$

۵- ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$F(x)=\frac{3x}{\sqrt{3x-1}}=\frac{3x-1+1}{\sqrt{3x-1}}$$

$$=\frac{3x-1}{\sqrt{3x-1}}+\frac{1}{\sqrt{3x-1}}$$

$$\Rightarrow F(x)=\sqrt{3x-1}+\frac{1}{\sqrt{3x-1}} \Rightarrow$$

$$F(x)=(3x-1)^{\frac{1}{2}}+(3x-1)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$F(x)=\frac{2}{9}(3x-1)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}(3x-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$F(x)=\frac{2}{9}\sqrt{(3x-1)^3}+\frac{2}{3}\sqrt{3x-1}$$

۶- ضابطهٔ تابع را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$f(x)=\cos x\left(3\mathrm{tg}x-\sqrt{3}\right)$$

$$\Rightarrow f(x)=3\sin x-\sqrt{3}\cos x \Rightarrow y=0 \Rightarrow$$

$$3\sin x-\sqrt{3}\cos x=0 \Rightarrow \mathrm{tg}x$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{6}$$

طولهای نقاط برخورد منحنی با محور x ها در فاصلهٔ $[0\,,\,2]$ چنین است:

$$x=\frac{\pi}{6} \quad \text{و} \quad x=\frac{7\pi}{6}$$

$$S_{\frac{\pi}{6}}^{7\frac{\pi}{6}}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{7\frac{\pi}{6}}\left(3\sin x-\sqrt{3}\cos x\right)=$$

$$\left(-3\cos x-\sqrt{3}\sin x\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}}$$

$$=\left(-3\cos\frac{7\pi}{6}-\sqrt{3}\sin\frac{7\pi}{6}\right)-\left(-3\cos\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=-3\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)-\sqrt{3}\left(\frac{-1}{2}\right)-\left(-3(\frac{\sqrt{3}}{2})-\sqrt{3}(\frac{1}{2})\right)$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{8\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}}=4\sqrt{3} \quad \text{(واحد سطح)}$$

۷- می‌دانیم: $\sin^3 70^\circ=\sin^3(90^\circ-20^\circ)=\cos^3 20^\circ$

لذا داریم:

$$\text{طرف اول}=4(\sin^3 70^\circ+\cos^3 40^\circ)=4(\cos^3 20^\circ+\cos^3 40^\circ)$$

$$=4(\cos20^\circ+\cos40^\circ)(\cos^2 20^\circ+\cos^2 40^\circ-\cos20^\circ\cos40^\circ)$$

$$=4(2\cos30^\circ\cos10^\circ)\left(\frac{1+\cos40^\circ}{2}+\frac{1+\cos80^\circ}{2}-\frac{1}{2}(\cos60^\circ+\cos20^\circ)\right)$$

$$=4\sqrt{3}\cos10^\circ\left(\frac{2+\cos40^\circ+\cos80^\circ}{2}-\frac{1+2\cos20^\circ}{4}\right)$$

$$=4\sqrt{3}\cos10^\circ\left(\frac{2+2\cos60^\circ\cos20^\circ}{2}-\frac{1+2\cos20^\circ}{4}\right)$$

$$=4\sqrt{3}\cos10^\circ\left(\frac{4+2\cos20^\circ-1-2\cos20^\circ}{4}\right)$$

$$=4\sqrt{3}\cos10^\circ\left(\frac{3}{4}\right)=3\sqrt{3}\cos10^\circ$$

۸ ـ الف) به ترتیب می‌توان نوشت:

$$(m+۱)\sin^۲x + m\sin ۲x + (m+۲)\cos^۲x = m-۲$$

$$(m+۱)\sin^۲x + ۲m\sin x\cos x + (m+۲)\cos^۲x = m-۲$$

طرفین معادله را بر $\cos^۲x$ تقسیم می‌کنیم:

$$(m+۱)tg^۲x + ۲m\,tgx + (m+۲) = (m-۲)(۱+tg^۲x)$$

$$\Rightarrow ۳tg^۲x + ۲m\,tgx + ۴ = ۰ \Rightarrow \Delta' = m^۲ - ۱۲ \geq ۰$$ (شرط جواب)

$$\Rightarrow m^۲ \geq ۱۲ \Rightarrow \left| \begin{array}{l} m \geq ۲\sqrt{۳} \\ \text{یا} \\ m \leq -۲\sqrt{۳} \end{array} \right.$$

بنابراین اگر $m \geq ۲\sqrt{۳}$ یا $m \leq -۲\sqrt{۳}$ باشد، معادله دارای جواب است:

ب) داریم: $\begin{cases} tgx' + tgx'' = \dfrac{-۲m}{۳} \\ tgx'\,tgx'' = \dfrac{۴}{۳} \end{cases}$ و $x' + x'' = Arctg(-۸)$

$$tg(x' + x'') = tg\left(Arc\,tg(-۸)\right) = -۸$$

$$\frac{tgx' + tgx''}{۱ - tgx'tgx''} = \frac{\frac{-۲m}{۳}}{۱ - \frac{۴}{۳}} = \frac{-۲m}{۳-۴} = \frac{-۲m}{-۱} = ۲m = -۸$$

$$\Rightarrow ۲m = -۸ \Rightarrow m = \frac{-۸}{۲} = -۴ \Rightarrow \boxed{m = -۴}$$

جوابهای تفریح اندیشه

جواب ۱

۸۱. زیرا ۱۱، ۱۲، ۱۳، و ۱۵ بر پنج وجه آن ظاهر می‌شوند، و عدد واقع بر وجه باقی مانده باید ۱۰ یا ۱۶ باشد.

در نمونهٔ اوّل، ۱۰ باید بر وجه مقابل وجه ۱۵ باشد، که غیر ممکن است زیرا ۲۵ = ۱۰ + ۱۵ اجبار می‌کند که ۱۴ و ۱۱ بر وجه‌های مقابل باشند.

بنابراین، ۱۶ مقابل ۱۱، ۱۲ مقابل ۱۵، و ۱۴ مقابل ۱۳ است. مجموع هر جفت وجه مقابل برابر ۲۷، و مجموع مطلوب ۸۱ = ۲۷ × ۳ است.

جواب ۲

۳۶. منشور اصلی دارای ۱۲ یال است. هر گوشهٔ بریده شده سه یال اضافی به دست می‌دهد، بنابراین شکل جدید مجموعاً ۳۶ ([۸ × ۳] + ۱۲) یال دارد.

جواب ۳

$\frac{۷}{۲۰}\sqrt{۲۱}$. از آن‌جا که:

$$\angle BA'P + \angle A'PB + ۶۰^\circ = ۱۸۰^\circ = \angle BA'P + ۶۰^\circ + \angle QA'C$$

نتیجه می‌شود که $\angle A'PB = \angle QA'C$ و به این ترتیب:

$$\Delta A'PB \sim \Delta QA'C$$

فرض می‌کنیم: $x = AP = A'P$ و $y = QA = QA'$، در این صورت:

$$\frac{A'P}{QA'} = \frac{A'B}{QC} = \frac{PB}{A'C}$$

یا:

$$\frac{x}{y} = \frac{۱}{۳-y} = \frac{۳-x}{۲}$$

که از حل آن $x = ۷/۵$ و $y = ۷/۴$ به دست می‌آید. بعد قانون کسینوسها را در ΔPAQ به کار می‌بریم:

$$PQ^۲ = x^۲ + y^۲ - ۲xy\cos ۶۰^\circ$$

$$= \frac{۴۹}{۲۵} + \frac{۴۹}{۱۶} - \frac{۴۹}{۲۰} = \frac{۴۹.۲۱}{۴۰۰}$$

که به $PQ = \left(\frac{۷}{۲۰}\right)\sqrt{۲۱}$ منجر می‌شود.

جواب ۴

۹۹۰. فرض می‌کنیم R و B، به ترتیب، تعداد جورابهای قرمز و آبی واقع در کشو را نشان دهند. از آن جا که احتمال به دست آوردن یک جفت جوراب ناجور یک دوم است، داریم:

$$\frac{RB}{\binom{R+B}{۲}} = \frac{۱}{۲}$$

برآمد فوق منجر به:

$$(R+B)(R+B-۱) = ۴RB$$

می‌شود، که می‌تواند به صورت $(R-B)^۲ = R+B$ نوشته شود، که نشان می‌دهد که تعداد کل جورابهای واقع در کشو مربع کامل است.

فرض می‌کنیم: $n = R - B$، بنابراین: $n^۲ = R + B$. در این صورت: $R = (n^۲ + n)/۲$.

از آن جا که $R + B \leq ۱۹۹۱$، باید داشته باشیم $|n| \leq \sqrt{۱۹۹۱} < ۴۵$. به این ترتیب ملاحظه می‌کنیم که بیشترین مقدار ممکن R هنگامی رخ می‌دهد که $n = ۴۴$، و به ازای این مقدار R برابر ۹۹۰ است.

جواب ۵

در مورد هر یک از جزئیات فوق بیش از یک گواه نمی‌تواند سخن درست گفته باشد، یا باید توصیفی که هیچ گواهی راجع به آن گواهی درست نداده موجود باشد. بنابراین سارق، کلاه بر سر نداشته است و رئیس بانک در این مورد راست گفته و در موارد دیگر به خطا بوده است، بنابراین سارق مورد بحث جلیقه نداشته، بلند نبوده و چشمان خاکستری نداشته است. تنها اطلاعی که نگهبان می‌تواند در مورد آن محق باشد چشمان آبی است. مورد صحیح مسؤول گیشه این است که سارق کوتاه بوده، و از آن منشی این که بارانی به تن داشته است.

بنابراین، سارق چشم آبی و کوتاه بوده، بارانی به تن داشته، و سربرهنه بوده است.

In the name of God

Borhān

VOL. 4. No. 1
Serial numbers ; 11
Autumn 1994

Borhan is a mathematics journal published four times a year by Madrasse Publications. Each issue includes articles related to mathematics and its various topics specifically those concerning highschool education in Iran.

All communications should be sent to the editor at the following address:
Madrasse Publication - No. 268 , Iranshahr - e - Shomali Ave. Tehran , Iran Post code: 15875

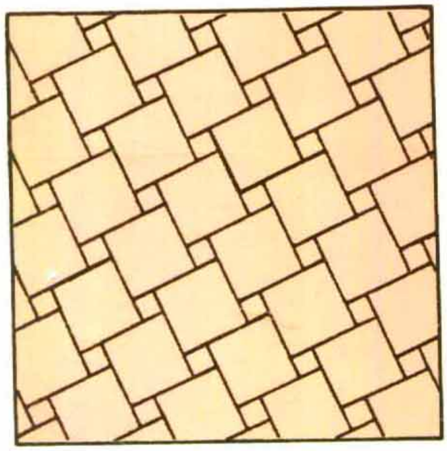
Contents:

پیکارجویی!

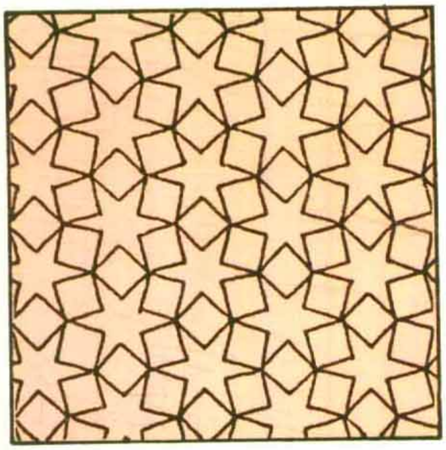
از مجله :

MICROMATH

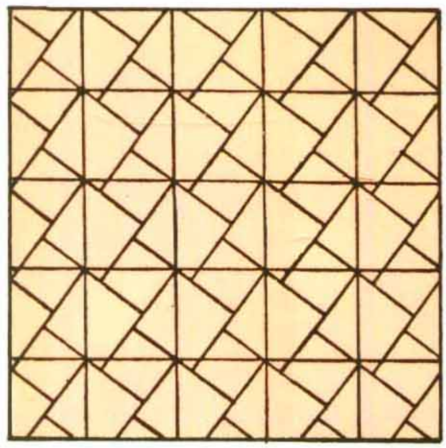
Summer 1992



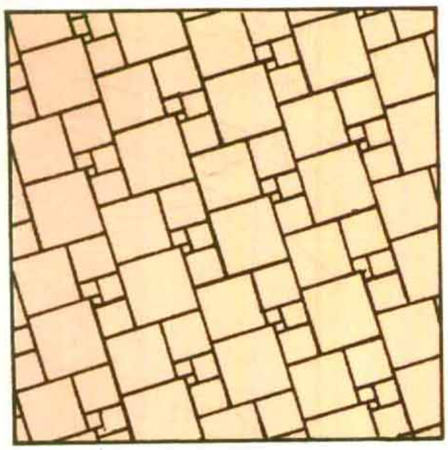
مربعها



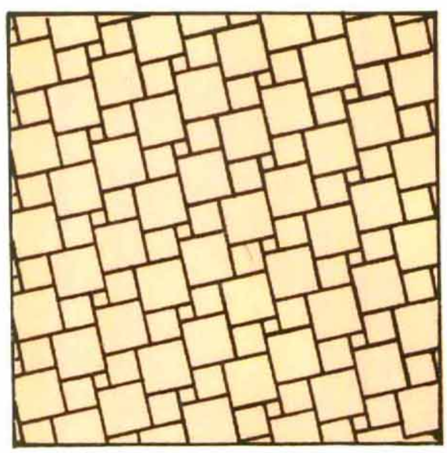
با مربعها می‌توان شکلهای جالبی ساخت ...



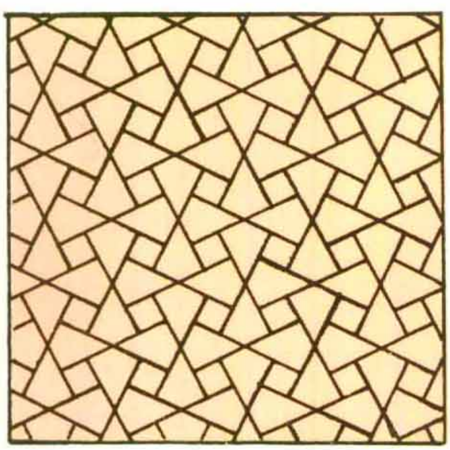
کاشیکاری فوق، اختراع نیریزی حدود ۹۰۰ میلادی، می‌تواند دراثبات قضیّهٔ فیثاغورس به‌کار رود.



کاشیکاری فوق از هفت مربع متفاوت استفاده کرده است. آیا می‌توانید با هشت مربع چنین کنید؟



طرح فوق سه مربع مختلف را به‌کار برده است. از کاشیکاریهایی چنین چند نوع موجودند؟



آیا می‌توانید با استفاده از شکلهای فوق آنها را بازسازی کنید؟
چه نمونه‌های مربعی دیگری را می‌توانید کشف کنید؟ در مورد چند ضلعیهای دیگر چه؟