رشد

برهان ۳۸

سال دوازدهم، شمارهٔ دوم ۱۳۸۱، بها: ۲۰۰۰ ریال

برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه

www.roshdmag.org

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

دفتر انتشارات کمک آموزشی

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد برهان متوسطه ۲

❖ سال دوازدهم ،شمارهٔ دوم ❖ ۱۳۸۱

❖ بها: ۲۰۰۰ ریال ❖ تیراژ: ۱۰۰۰۰ نسخه

❖ برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه

www.roshdmag.org

سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

رشد برهان، تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

- **نگارش مقاله‌های کمک درسی** (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی متوسطه)
- **طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها** (برای دانش‌آموزان)
- **طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها** (برای دانش‌آموزان)
- **طرح معماهای ریاضی**
- **نگارش یا ترجمهٔ مقاله‌های عمومی ریاضی** (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

رشد برهان، هر سه ماه یک شماره منتشر می‌شود.

- مجلّه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافه مقاله‌ها آزاد است.
- مقاله‌های وارده باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.
- مقاله‌های رسیده مسترد نمی‌شود.
- استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر با ذکر دقیق ماخذ بلامانع است.

نشانی دفتر مجله: صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵

تلفن امور مشترکین: ۸۸۳۹۱۸۶

یادداشت سردبیر

مطالب درسی را چگونه باید یاد گرفت؟ ابزارهای یادگیری مطالب درسی کدام‌اند؟ از کجا باید شروع کرد؟ برای تثبیت مطالب فرا گرفته شده، چه باید کرد؟ از چه منابعی باید استفاده کرد؟ و...

سؤال‌های بالا برای هر دانش‌آموزی می‌تواند مطرح شود و جواب درست به هر کدام از آن‌ها، تأثیرگذار در وضعیت آموزشی هر فردی است. شاید شما هم درگیر پاسخ دادن به هریک از این سؤال‌ها باشید. ممکن است جواب صحیح را یافته یا در پی یافتن آن باشید. در هر صورت این‌ها پرسش‌هایی هستند که نمی‌توان به راحتی از کنار آن‌ها گذشت. اگر مطلب درسی را ریاضیات در نظر بگیریم، یافتن روش‌های صحیح مطالعه و یادگیری رابطه‌ای مستقیم با کتاب درسی، معلّم، فضای آموزشی، استعدادهای ذاتی، روحیه، علاقه، کتاب‌های کمک درسی، کتاب‌های کمک آموزشی و فرصت مناسب دارد که در بین این عامل‌ها برای شما دانش‌آموزِ علاقه‌مند به ریاضیات، کتاب درسی، کلاس درس و کتاب‌های کمک درسی و کمک آموزشی از اهمیت بیش‌تری برخوردارند و لذا باید هریک از این عامل‌ها که در واقع رکنی از ارکان فرآیند یادگیری را تشکیل می‌دهند به خوبی شناخته و روش صحیح استفاده از آن‌ها را بدانید.

راجع به کتاب درسی صحبت و بحث بسیار است، ولی آنچه مسلّم و قطعی به نظر می‌رسد، این است که کتاب درسی به تنهایی نمی‌تواند راهگشا باشد و کلیّات را در اختیار ما قرار می‌دهد. اولین عامل مؤثر در رسیدن به اهداف آموزشی هر کتاب درسی، معلّم و کلاس درس است. علاوه بر این، شما باید مطالعهٔ خارج از کتاب درسی داشته باشید که این مطلب، رابطه‌ای مستقیم با عامل‌هایی چون علاقه، فرصت مناسب، استفاده و شناخت صحیح و کافی از کتاب‌های کمک درسی و کمک آموزشی را دارد.

راستی یک کتاب جنبه درسی[1] خوب چه ویژگی‌هایی باید داشته باشد؟

سعی می‌کنیم کلیّاتی راجع به استانداردهای یک کتاب کمک درسی را در اختیار شما قرار دهیم که شما راحت‌تر بتوانید کتاب مناسب را، برای مطالعه بیشتر و در جهت تعمیق و تفهیم مطالب فرا گرفته، انتخاب و از آن استفاده کنید.

۱ـ با توجه به هدف‌های آموزشی هر کتاب درسی، کتاب کمک درسیِ مناسب، کتابی است که با این اهداف هم راستا باشد، برای مثال، کتابی که مسائل کتاب درسی را حل کرده باشد، نمی‌تواند با اهداف کتاب درسی هم جهت باشد. یادتان باشد که شما هیچ گاه نباید از این گونه کتاب‌ها استفاده کنید، زیرا مسائل کتاب درسی، با این هدف در کتاب گنجانده شده است که شما پی به اشکالات احتمالی خود برده و نقاط ضعف خود را پیدا کرده و در جهت رفع آن کوشش کنید.

۲ـ کتاب درسی با توجه به محدودیت‌هایی که دارد، ممکن است به بعضی مطالب به صورت عمیق و با تشریح کامل، نپرداخته باشد و یا در بعضی زمینه‌ها فاقد مثال‌ها و مسأله‌های کاربردی باشد که کتاب کمک درسیِ مناسب باید این زمینه را فراهم کند تا شما احساس کمبود نکرده و بتوانید با مطالعهٔ آن به بسیاری از پرسش‌های احتمالی خودتان پاسخ دهید.

۳ـ نحوهٔ ارائه مطالب و حتی رسم‌الخط (شیوه نگارش و بکار بردن نمادها و علامت‌ها) در کتاب کمک درسی که انتخاب می‌کنید، نباید با کتاب درسی تفاوتی داشته باشد.

۴ـ کتاب کمک درسی مناسب باید مطالب را به گونه‌ای بیان و مسائل را طوری مطرح کرده باشد که خلاقیّت لازم را در شما ایجاد کرده و باعث شود تا شما به مطلب درسی مورد نظر تسلط کامل پیدا کنید.

۵ـ اگر در کتاب درسی، قضیه‌هایی مطرح شده‌اند، کتاب کمک درسی باید کاربرد این قضیه‌ها را در حل مسائل و حتی اثبات قضیه‌های دیگر به خوبی آشکار کند و حتی اگر روش بهتر و کوتاه‌تری برای اثبات آن‌ها موجود است، آن روش‌ها را بیان کند.

خلاصهٔ مطلب این که، هر کتابی را نمی‌توان مطالعه کرد و قبل از مطالعه هر کتاب یا مطلب، باید ابتدا خودمان را آماده کنیم و شناخت کافی داشته باشیم تا مبادا منحرف شده و وقتمان هدر برود.

ان‌شاءالله سعی می‌کنیم این بحث را در شماره‌های بعدی ادامه دهیم و دیگر ارکان فرآیند یادگیری را نیز بررسی کنیم. شما هم می‌توانید پرسش‌های خود را برای ما ارسال کنید تا پاسخگو باشیم و همچنین از نظریات شما بهره‌مند شویم.

۱ـ منظور از کتاب جنبه درسی، کتاب کمک درسی و کمک آموزشی است.

از تاریخ بیاموزیم

● پرویز شهریاری

تاریخ چگونه به ما می‌آموزد؟

تاریخ به ما می‌آموزد... هیچ پژوهشگر علمی نمی‌تواند از «درس ریاضی» روگردان باشد. به یاری تاریخ است که می‌کوشیم قانونمندی‌های حاکم بر دانش، موقعیت کنونی، پیشرفت بعدی و گرایش‌های تکامل دانش را بیابیم.

در ریاضیات مجموعه‌ای از همزمانی‌ها دیده می‌شود که گواه قانونمندی‌های معینی از تاریخ تکامل ریاضیات است. **لباچوفسکی**، **بایای** و **گاوس** در یک زمان، بدون آگاهی از کارهای یکدیگر، هندسهٔ «هیپربولیک» را کشف کردند. مجادلهٔ هواداران **نیوتن** و **لایب‌نیتس** دربارهٔ پیشگامی هریک از آن‌ها در کشف «محاسبهٔ دیفرانسیلی»، مشهور است. همچنین می‌توان از همزمانی کارهای **فرما** و **دکارت** (در کشف هندسهٔ تحلیلی)، **بون تریاکین** و **کوراتوسکی** (در زمینهٔ بنیان‌گذاری و طرح‌ریزی گراف‌ها و بسیاری موردهای دیگر) نام برد.

پژوهشگران در یک زمان و مستقل از هم به یک کشف واحد می‌رسند. تعداد این همزمانی‌ها آن‌قدر زیاد است که به روشنی مسألهٔ «تصادف» را منتفی می‌کند. در این‌جا باید قانونی از تکامل ریاضیات نهفته باشد که به صورت «همزاد بودن» پیش‌آمدها ظاهر می‌شود.

این قانون تکامل به گونهٔ دیگری هم خود را نشان می‌دهد. گاه قانونی و یا رابطه‌ای در ریاضیات کشف می‌شود، اما مدت‌ها مورد استفاده پیدا نمی‌کند. بعد یک‌باره سر از خاک بیرون می‌آورد و وارد صحنهٔ عمل می‌شود. همه اطلاع دارند که **منخوس** و بعد **آپولونیوس** مقطع‌های مخروطی را کشف کردند و خواص و ویژگی‌های مخروطی را باز گفتند. ولی تا مدت‌ها (نزدیک به دو هزار سال)، کسی جز به ندرت سراغ این کتاب‌ها را نگرفت. این کتاب‌ها مدت دو هزار سال خاک قفسه‌ها را تحمل کردند تا زمان کپلر فرا رسید و معلوم شد سیاره‌ها روی مدار بیضی‌شکل حرکت می‌کنند. به‌جز آن گالیله ثابت کرد، سنگی که پرتاب می‌شود، روی سهمی حرکت می‌کند و این‌ها باعث شدند مقطع‌های

مخروطی بیاید و قانون‌های آن‌ها مورد بررسی قرار گیرد. یا وقتی که **جرج بول** قانون‌های منطق ریاضی را کشف کرد، فریادها برآمد که این، بازی با نمادهاست و دشمن هرگونه فکر و اندیشه است. ولی چیزی نگذشت که رایانه‌ها براساس منطق ریاضی طراحی شدند و این ناهمزمانی کشف و کاربرد دلیلی شد بر بحث کاربردی بودن ریاضیات و این که هرچه از ذهن بیرون آید، روزی به‌کار می‌رود.

در تاریخ، قانونمندی به عنوان سازوکار تکامل و منطق درونی تاریخ که ماهیت دگرگونی‌ها را روشن می‌کند، شناخته می‌شود. در این‌جا کلی‌ترین قانونمندی‌ها و یا سازوکارهای تکامل دانش ریاضی، در رابطه با پیشرفت روش تنظیم آن مورد بررسی قرار می‌گیرد. روشن می‌کنیم، دو روش اساسی برای سازمان دادن و تنظیم دانش ریاضی وجود دارد.

طبیعت منطقی سازوکارهای کلی تکامل دانش، ایجاب می‌کند که هیچ‌یک از این دو روش تنظیم، «جاودانی» نباشد، هریک از آن‌ها دچار تغییر شود و ضرورت جابه‌جایی آن‌ها را پیش آورد. ولی داوری انتزاعی دربارهٔ چنین ضرورتی، از نظر اصولی نادرست است. ضمن بررسی قانونمندی‌های تکامل دانش، نمی‌توان بخش‌های منطقی آن را جدا از تاریخ واقعی دانش در نظر گرفت. داوری نسبت به سازوکارهای تکامل، بدون توجه به تاریخ ناممکن است.

دو روش سازمان دادن دانش ریاضی به عنوان قانونمندی تکامل ریاضیات

در تاریخ ریاضیات، برای «تمامیت» دانش ریاضی، دو گونهٔ اصلی برخورد وجود دارد و برای «یک کاسه کردن» موضوع‌های ریاضی که می‌توان آن‌ها را، «ریاضیات کاربردی» و «ریاضیات نظری» نامید، دو روش در نظر گرفته می‌شود. این‌ها، در اساس با دو شیوهٔ متفاوت، دانش ریاضی را سازمان می‌دهند و برخوردهای متفاوتی نسبت به درک ماهیت ریاضیات و سرنوشت آن دارند. از نظر تاریخی، این شیوه‌های برخورد، به‌تناوب و در دوره‌های گوناگون تکامل ریاضیات، جای هم را گرفته‌اند. هریک از این دوره‌ها با «زنجیره»هایی به ساختارهای ریاضی زمان و فعالیت‌های عملی بشر مربوط می‌شود؛ به این که چگونه می‌شود همهٔ جنبه‌های کاربردی دانش ریاضی را در یک دوره، تحلیل کرد!

فصل اول

ریاضیات کاربردی

تاریخ فعالیت‌های علمی و پدیده‌های گوناگون فرهنگ بر جهت‌گیری تکامل ریاضیات، یکی از موضوع‌های عمیق و اصلی در فلسفهٔ ریاضی است. دوره‌های کاملی از تاریخ را می‌توان دید که در آن‌ها، پیشرفت ریاضیات به شدت تحت‌تأثیر قانونمندی‌های نظری و درونی این دانش بوده است. همچنین دوره‌هایی از تاریخ ریاضیات را می‌توان جدا کرد که عمل و زندگی، انگیزهٔ نیرومندی برای سمت‌گیری ریاضیات و پیدایش و ساختارهای نظری تازه بوده است. در این‌جا، روشی عملی پیش می‌آید که به یاری آن، همهٔ عنصرهای دانش ریاضی، به‌منظور برآورده شدن نیازهای عملی، به‌کار گرفته می‌شوند. ریاضیات در این میان، مسأله‌های عملی را در خود فرو می‌برد و آماده می‌شود تا در ساختارهای نظری خود، جنبه‌هایی از دنیای واقعی را، به‌عنوان تنها سرچشمهٔ شالوده‌های آن، منعکس کند. احساس «تأثیر غیرقابل درک ریاضیات در دانش‌های طبیعی» (ا. ویگنر) و گریز «معمایی» ساختارهای ریاضیات نظری به سمت کاربرد آن‌ها (**نیکلا بورباکی**) را، باید در سازوکار تکامل ریاضیات کاربردی، همچون سمت‌دهندهٔ دانش ریاضی، به‌طور کلی جست‌وجو کرد.

ریاضیات کاربردی، به عنوان نخستین روش تاریخی، در سازمان دادن آگاهی‌های ریاضی

از این تصور بسیار سخن رفته است که ریاضیات، همچون دستگاهی از آگاهی‌ها، در یونان باستان پدید آمد. درحالی که پیش از آن، تنها عنصرهایی از دستگاه آینده و نطفه‌هایی از بحث و استدلال نظری وجود داشت. از جمله **ک. ای. روزاوین** در اثر خود به نام «دربارهٔ طبیعت دانش ریاضی»

می‌نویسد: «

«در زمان‌های دور باستانی، مجموعه‌ای از آگاهی‌ها و نتیجه‌گیری‌های نخستین که به شمار، اندازه‌گیری سطح و حجم و غیره مربوط می‌شد، از راه تجربه پیدا شد. این آگاهی‌ها در آغاز به هم مربوط نبودند و به همین دلیل نمی‌شد نام «دانش» را بر آن‌ها گذاشت. به تدریج که این آگاهی‌ها از تصادفی بودن و از استثنا پاک می‌شدند، توانستند رابطهٔ بین خود را ظاهر سازند. برخی نتیجه‌ها که در آغاز از راه تجربه به دست آمده بودند، توانستند با استدلال منطقی از نتیجه‌گیری دیگری بیرون کشیده شوند.»

همان‌طور که دیده می‌شود ساختار نظری دانش ریاضی، به عنوان یکی از عامل‌های عبور ریاضیات به موقعیت علمی خود، در مقابل موقعیت غیرساختاری و «پیش علمی» قرار داده می‌شود. این عقیده کم و بیش عام شده است که در مصر باستان و میان دو رود، مصالح تجربی فراوانی روی هم جمع شده بودند. ولی تنها در یونان باستان بود که دانش ریاضی به عنوان دستگاهی مرتبط، موقعیت خود را به دست آورد. از جمله **و. ن. مولووشی** در رسالهٔ «مسأله‌های فلسفی ریاضیات» می‌نویسد:

ریاضیات، در آغاز پیدایش خود و در طول هزاران سال، دانشی سازمان‌یافته نبود و تنها از حقیقت‌های جداگانه‌ای تشکیل می‌شد که نتیجه‌ای از تجربه بودند. ریاضیات، به عنوان آگاهی‌هایی سازمان‌یافته و به عنوان یک دانش، به ظاهر در یونان باستان و در سده‌های چهارم و پنجم پیش از میلاد شکل گرفت.

درضمن، این امر هم بدیهی به حساب آمده است که تنها شیوهٔ تنظیم آگاهی‌های ریاضی و پیوند دادن مصالح گوناگون آن به یکدیگر، عبارت است از: روش نتیجه‌گیری منطقی برخی از حقیقت‌ها، از برخی دیگر. این گونه برخورد با دانش ریاضی را می‌توان، به عنوان عبور «از یک مجموعهٔ ناشی از تجربه، به دستگاه نظری» تعریف کرد. این تعریف، در ارزیابی **ن. بورباکی** هم، وجود دارد؛ ولی به صورت پنهانی. «... تمامی جبر بابلی را با شیوه‌های ظریف و سنجیدهٔ آن، نمی‌توان به عنوان مجموعهٔ ساده‌ای از مسأله‌ها که ضمن تجربه و کورمال کورمال می‌شده‌اند، در نظر گرفت». بورباکی جبر بابلی را که برای آن ارزش قائل است و آن را سازمان‌یافته و نظری می‌داند، در برابر مجموعه‌ای از مسأله‌های درهم‌جوش، جدا از هم و سازمان‌نیافته می‌گذارد. اگر در این‌جا، آگاهی‌های درهم‌جوشی که در اعماق تاریخ از راه تجربه به دست آمده‌اند، در مقابل دستگاهی قرار می‌گیرند که به عنوان دستگاه نظری پذیرفته شده است، به این دلیل است که درواقع حالت سومی وجود ندارد: به دنبال هر دوره‌ای که مجموعه‌ای از داده‌های تجربی رو هم جمع می‌شوند، دوره به سازمان درآمدن و نظری شدن مصالح فرامی‌رسد.

با وجود این، دلیل‌های زیادی وجود دارند که ریاضیات پیش از یونان، شکلی سازمان‌یافته داشته، گرچه روش سازمان دادن آن، به کلی غیر از تنظیم نظری آن است. وقتی که ریاضیات به عنوان راهنمای عمل و

برای یافتن نیازهای خاص اجتماعی در شرایط موجود، در نظر گرفته می‌شود، آن وقت سازمان‌دهی ریاضیات، به صورتی واحد و خاص خود انجام می‌گیرد. عبور از آگاهی‌های ریاضی به حالت نظری هم، عبور از ملقمه از آگاهی‌های جدا از هم به دستگاه نظری نیست، بلکه ویرانی یک گونه و به‌وجود آمدن گونهٔ دیگر به‌طور کامل است.

برای این که ماهیت تغییری را که رخ می‌دهد، روشن کنیم، جنبه‌های اصلی دانش «سازمان‌یافته و نظری» ریاضیات را مشخص می‌کنیم: وجود ارتباط‌های منطقی که به مفهوم‌هایی خاص مربوط می‌شود، استفاده از «ایده‌آل»های ریاضی و پیدایش تاریخی اختلاف بین ایده‌آل‌ها با جسم‌های فیزیکی دنیای واقع.

وقتی به یاری استدلال‌های منطقی، گزاره‌ای ریاضی را به گزارهٔ دیگری تبدیل می‌کنیم، ساده‌تر آن است که در ذهن خود روی «ایده‌آل‌ها» کار کنیم، و نه خود جسم‌های واقعی. می‌توان گفت که انتزاع‌های ریاضی «زندگی خاص خودشان را دارند» و در ضمن، به‌طور دائم به تکمیل ساختارهای نظری یاری می‌رسانند. قبل از حالت نظری آگاهی‌های ریاضی، خبری از این جنبه‌ها نیست، با وجودی که سازمان‌یافته‌اند.

برای این که ریاضیات به‌عنوان یک دانش نظری پدید آید، باید نیازهای فعالیت عملی، ضرورت وجود آن را تأیید کنند. ولی سازمان اجتماعی‌ـ تولیدی نخستین وقتی که هنوز تولید انفرادی رشد نکرده بود یا وجود نداشت، مستلزم عمل‌های اجتماعی مشترک بود. تقسیم جریان واحد کار به فضاهای جداگانه، هنوز در این زمان پیش نیامده بود. هر عضو جامعه ابزاری داشت که برای همهٔ فعالیت‌ها به‌کار می‌آمد و همه‌جا به یک شیوه از آن استفاده می‌شد. همه دستاوردهای مادی و معنوی، واحد غیرقابل تجربه به‌حساب می‌آمدند و دارایی مشترک همه بودند. همچنین، نتیجهٔ فعالیت‌های جامعه به هر فرد و نتیجهٔ کار هر فرد، به جامعه تعلق داشت و تقسیم طبیعی کار در خانواده، برای تغییر این وضع کافی نبود. تنها، رشد بعدی نیازها، موجب افزایش فعالیت‌ها شد و همین، دستاوردها را افزایش داد؛ به‌نحوی که دیگر درخور افراد جداگانه نبود.

همان‌طور که یکپارچگی فعالیت مادی، متناظر با یکپارچگی دستورهای آن است، تقسیم فعالیت به حوزه‌های جداگانه، یعنی پیدایش تخصص، به معنای تقسیم دستاوردها به حوزه‌های گوناگون است. بغرنج شدن فعالیت و تبدیل آن به دستگاهی از کارهای سودمند برای جامعه (تعاونی‌های نخستین)، به نوبهٔ خود نطفه‌های روابط اجتماعی را به‌وجود آورد. نیروی کار و ابزار کار، در رابطه با استعدادهای طبیعی، نیازها را تقسیم می‌کند و تنوع می‌پذیرد. درنتیجه به‌خاطر تقسیم دستاوردها به رشته‌های متعددی مربوط به فعالیت، تخصص‌های پیش از دانش و استنتاج‌های نزدیک به دانش به‌وجود می‌آیند. پیدایش تخصص‌ها، وسیلهٔ نیرومندی برای رشد و درضمن، تنوع بعدی دستاوردها و درنتیجه، تحکیم تخصص‌ها و همچنین دگرگونی ساختار فعالیت می‌شود.

شرایط لازم اولیه برای به‌وجود آمدن عنصرهای نخستین ریاضیات (پیش ریاضیات)، یعنی دستاوردهای قابل اندازه‌گیری و قابل مقایسه با یکدیگر، نیاز مبرم به محاسبه را به‌وجود آورد، تا بتوان دستاوردهای محصول فعالیت را به صورت کتبی ثبت کرد. در آغاز، برای ثبت نوشته‌ها، حداقل آمادگی کفایت می‌کرد و وجود کاتب، امری موقتی و گذرا به‌حساب می‌آمد. برای مثال در نوشته‌ای با خط هیروگلیفی بر دیوارهای مقبرهٔ «ابوسیر»، خدمتگذار دربار «مه‌چن» (در پایان سلسلهٔ سوم و آغاز سلسلهٔ چهارم در مصر باستان)، اطلاع داده می‌شود که این خدمتگذار «... در رأس کاتبان محل خوار و بار و رئیس آن‌جا بود. او حسابدار و پزشک بود...».

بعدها کار نوشتن کتاب و ثبت نوشته‌ها، به یک حرفه و یک وظیفهٔ تخصصی تبدیل شد. دلیل این حرفه‌ای شدن و دقیق‌تر شدن کار کتابت را باید در تکامل خط و نوشتن جست‌وجو کرد. از جمله در میان دو رود، در مرحلهٔ اول تکامل خط میخی، از کوتاه

شدهٔ واژه‌ها (لولوگرافی) استفاده می‌شد و نشانه‌های واژه‌ای (لولوگرام‌ها) که بیش‌تر به‌کار می‌رفتند، معنای خود را پیدا کردند.

بعدها برای نامگذاری چیزها و موردهای تازه و همچنین نام‌های خاص، سازندگان این دستگاه (دستگاه خط میخی)، با زیرکی از همان نشانه‌های واژه‌ای که پیش از آن قبول کرده بودند، استفاده کردند. از ترکیب آن‌ها «هجاها» را ساختند و به این ترتیب، «نشانه‌های صوتی» (فتوگرام‌ها) را به‌وجود آوردند. هجاها (به‌طور معمول واژه‌های یک سیلابی) را بدون در نظر گرفتن معنای نخستین آن‌ها که کوتاه شدهٔ یک واژه بود، می‌خواندند. درنتیجه اختلاطی عجیب پیدا شد: کاهنان که هنوز رسم قبلی را کنار نگذاشته بودند و از نشانه‌ها به‌عنوان کوتاه‌شدهٔ واژه‌ها (لولوگرام) استفاده می‌کردند، در جای دیگر از همان متن نوشتهٔ خود، نشانه‌ها را به‌عنوان نشانهٔ صدا (فتوگرام) به‌کار می‌بردند. درضمن هیچ اضافه‌ای چه از نظر رسم نشانه و چه از نظر دیگر، بین «مونوگرام» و «فتوگرام» دیده نمی‌شد. این اختلاط و درهمجوشی دستگاه و استفاده از یک نشانهٔ واحد، برای یادداشت‌های متفاوت، موجب دشواری‌های زیادی شد که کاتبان با آن روبه‌رو بودند و برای برطرف کردن آن‌ها، باید دوره‌های سخت و طولانی

آموزش را می‌گذراندند. [لئو اوپن‌هایم در کتاب «میان دو رود باستان»].

به این مناسبت، با این که بعدها از این روش ثبت‌نوشته‌ها صرف‌نظر کردند، به‌هرحال روش ساده‌ای که در آغاز برای ثبت دستاوردهای فعالیت وجود داشت، به‌طور جبران‌ناپذیری از بین رفت و «کاتبان به گروه متخصصان والامقامی تبدیل شدند» [همان‌جا]. شبیه همین تحول را در نوشته‌های مصر باستان هم می‌توان دید.

پیچیده‌تر شدن فعالیت، وجود تخصص را ضروری می‌کرد. گروه خاصی به‌وجود آمد که پاسخگوی فعالیت نوشتاری بود؛ گروه کاتبان. این حرفه در مصر، میان دو رود و چین، بدون این که افراد هیچ ارتباطی باهم داشته باشند، شکل گرفت. سرچشمه‌های ریاضیات را هم باید در همین نیاز اجتماعی جست‌وجو کرد. ریاضیات به‌عنوان آگاهی‌هایی که به کار عمل می‌خورند، درست درجهتی بود که نیازهای عملی گروه متخصصی از افراد را تأمین می‌کرد. و. بوبی نین، کاتبان مصری را این‌گونه معرفی می‌کند: «کاتبان... طبقهٔ سوم کاهنان مصری را تشکیل می‌دادند. در سلسله‌مراتب مذهبی کاتب مقام سوم را داشت؛ پَری بر سر و کتاب و خط‌کش و مرکب و قطعه چوبی برای نوشتن در دست‌هایٔ خود داشت. در ادارهٔ کاتبان، کسانی جمع بودند که به بخش ساختمانی معبد و دارایی‌های ارضی آن مربوط می‌شدند. به ظاهر مجموعهٔ آگاهی‌هایی که باید یاد می‌گرفتند و به‌کار می‌بستند، ارتباط دقیقی با وظیفهٔ آن‌ها داشت. در برنامهٔ درسی آن‌ها، این مواد وجود داشتند؛ دانش هیروگلیف و تزئین نمای بیرونی معبد، توانایی در تنظیم دقیق بخش‌های معبد در سمت معلوم افق؛ رسم «نیل»؛ اخترشناسی؛ هندسه، جغرافیای مصر و جغرافیای عمومی؛ شرح جهان هستی یا کیهان‌نگاری.

بنابراین آگاهی‌های مربوط به ریاضیات، اخترشناسی و جغرافیا از تخصص‌های مهم و اساسی کاهنان به‌شمار می‌رفتند. آنچه که یادگرفتن آن‌ها برای کاهنان اجباری بود، در «۱۰ کتاب بزرگ جمع کرده بودند که تعداد کل آن‌ها به ۴۳ می‌رسید. کتاب‌هایی هم وجود داشتند که به‌طور کلی، شامل همهٔ آگاهی‌های لازم برای هر شش طبقه از قشرهای کاهنان بود». [ریاضیات مصر قدیم از روی پاپیروس رنید].

جزء صحیح X

$$\lfloor X \rfloor$$

بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی x را جزء صحیح x گوییم و آن را با نماد $\lfloor x \rfloor$ نشان می‌دهیم. یعنی می‌توان نوشت:

$$\forall x \in R \ , \ n \in z \ ؛ \ n \le x < n+۱ \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor = n$$

مثال:

$$۲ \le x < ۳ \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor = ۲$$
$$\lfloor x \rfloor = -۱ \Leftrightarrow -۱ \le x < ۰$$
$$-۴ \le x < -۳ \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor = -۴$$
$$۲ < x < ۲/۳ \Rightarrow \lfloor x \rfloor = ۲$$
$$x = \sqrt{۲} \Rightarrow \lfloor x \rfloor = ۱$$

سؤال ۱. اگر $۲\left\lfloor \frac{x-۱}{۲} \right\rfloor - ۳\left\lfloor \frac{x-۱}{۲} \right\rfloor = ۲$، آن‌گاه حدود x کدام است؟

۱) $-۱ \le x < ۱$ ۲) $-۲ \le x < ۰$
۳) $-۳ \le x < -۱$ ۴) $-۴ \le x < -۲$

حل: گزینهٔ (۳)

$$۲\left\lfloor \frac{x-۱}{۲} \right\rfloor - ۳\left\lfloor \frac{x-۱}{۲} \right\rfloor = ۲ \Rightarrow$$
$$-\left\lfloor \frac{x-۱}{۲} \right\rfloor = ۲ \Rightarrow \left\lfloor \frac{x-۱}{۲} \right\rfloor = -۲ \Rightarrow -۲ \le \frac{x-۱}{۲} < -۱ \Rightarrow$$
$$-۴ \le x-۱ < -۲ \Rightarrow -۳ \le x < -۱$$

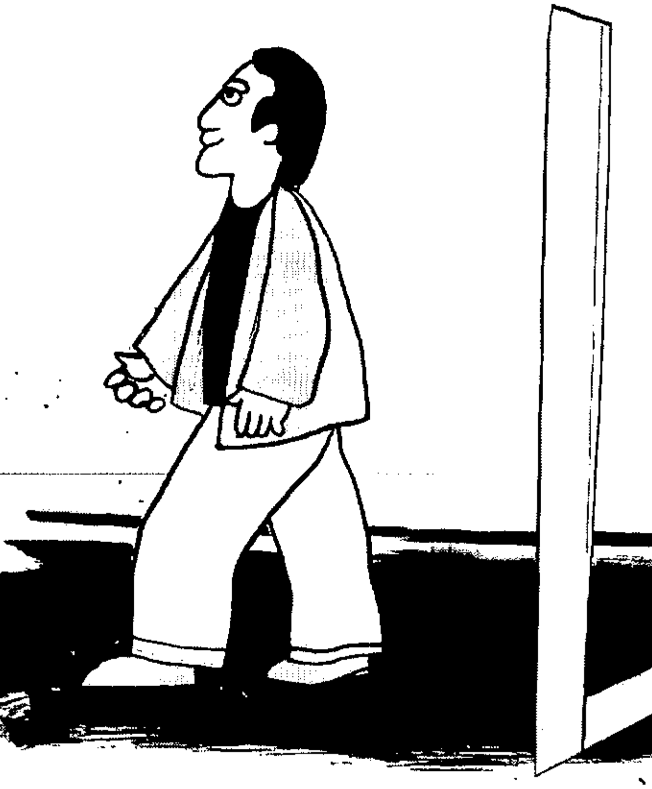
خاصیت (۱) $\forall n \in z \ ؛ \ \lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$

مثال:

$$\lfloor x+۵ \rfloor = \lfloor x \rfloor + ۵$$
$$\lfloor x-۲ \rfloor = \lfloor x \rfloor - ۲$$
$$\lfloor x + \lfloor x \rfloor \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x \rfloor = ۲\lfloor x \rfloor$$

سؤال ۲. جواب معادلهٔ $\lfloor ۳(\lfloor x \rfloor + ۲) + \lfloor x \rfloor \rfloor = ۲۲$ کدام است؟

۱) $۴ \le x < ۵$ ۲) $۳ \le x < ۴$
۳) $۲ \le x < ۳$ ۴) $۱ \le x < ۲$



احمد قندهاری

برای دانش‌آموزان سال سوم ریاضی

حل: گزینهٔ (۱)

$$\lfloor ۳\lfloor x\rfloor+۶+\lfloor x\rfloor\rfloor=۲۲\Rightarrow ۳\lfloor x\rfloor+۶+\lfloor x\rfloor=۲۲\Rightarrow$$
$$۴\lfloor x\rfloor=۱۶\Rightarrow\lfloor x\rfloor=۴\Rightarrow ۴\le x<۵$$

سؤال ۳. جواب معادلهٔ

$۲۲=۳\left\lfloor\frac{x+۵}{۲}\right\rfloor+۲\left\lfloor\frac{x+۷}{۲}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{x+۹}{۲}\right\rfloor$ کدام است؟

۱) $۲\le x<۴$ ۲) $۲\le x<۳$

۳) $۱\le x<۲$ ۴) $۱\le x<۳$

حل: گزینهٔ (۴)

$$۳\left\lfloor\frac{(x+۱)+۴}{۲}\right\rfloor+۲\left\lfloor\frac{(x+۱)+۶}{۲}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{(x+۱)+۸}{۲}\right\rfloor=۲۲$$

$$\Rightarrow ۳\left\lfloor\frac{x+۱}{۲}+۲\right\rfloor+۲\left\lfloor\frac{x+۱}{۲}+۳\right\rfloor+\left\lfloor\frac{x+۱}{۲}+۴\right\rfloor=۲۲\Rightarrow$$

$$۳\left\lfloor\frac{x+۱}{۲}\right\rfloor+۶+۲\left\lfloor\frac{x+۱}{۲}\right\rfloor+۶+\left\lfloor\frac{x+۱}{۲}\right\rfloor+۴=۲۲\Rightarrow$$

$$۶\left\lfloor\frac{x+۱}{۲}\right\rfloor=۶\Rightarrow\left\lfloor\frac{x+۱}{۲}\right\rfloor=۱\Rightarrow ۱\le\frac{x+۱}{۲}<۲\Rightarrow$$

$$۲\le x+۱<۴\Rightarrow ۱\le x<۳$$

سؤال ۴. اگر $x=\sqrt{۲}+۱$ و $\sqrt{۲}=۱/۴$ داشته باشیم، $\left\lfloor\frac{۲y-۱}{۲}\right\rfloor=\lfloor x\rfloor+\lfloor x^۲\rfloor+\lfloor x^۳\rfloor$، آن‌گاه حدود y کدام است؟

۱) $\frac{۴۱}{۲}\le y<۲۱$ ۲) $\frac{۴۱}{۲}\le y<\frac{۴۳}{۲}$

۳) $\frac{۳۹}{۲}\le y<\frac{۴۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳۹}{۲}\le y<۲۰$

حل: گزینهٔ (۲)

$$x=\sqrt{۲}+۱=۱/۴+۱=۲/۴\Rightarrow\lfloor x\rfloor=۲$$

$$x^۲=(۲/۴)^۲=۵/۸\Rightarrow\lfloor x^۲\rfloor=۵$$

$$x^۳=x(x^۲)=۲/۶(۵/۸)=۱۳/۸\Rightarrow\lfloor x^۳\rfloor=۱۳$$

$$\Rightarrow \left\lfloor \frac{2y-1}{2}\right\rfloor = 2+5+13 \Rightarrow \left\lfloor \frac{2y-1}{2}\right\rfloor = 20 \Rightarrow$$

$$20 \le \frac{2y-1}{2} < 21 \Rightarrow 40 \le 2y-1 < 42 \Rightarrow 41 < 2y < 43$$

$$\Rightarrow \frac{41}{2} \le y < \frac{43}{2}$$

سؤال ۵ .

اگر، $\lfloor x\rfloor = \lfloor \log 1\rfloor + \lfloor \log 2\rfloor + \lfloor \log 3\rfloor + \cdots \lfloor \log 100\rfloor$ ، آن‌گاه حدود x کدام است؟

۱) $100 \le x < 101$ ۲) $93 \le x < 94$

۳) $92 \le x < 93$ ۴) $91 \le x < 92$

حل: گزینهٔ (۳)

$$\lfloor \log 1\rfloor = \lfloor \log_2 \rfloor 2 = \lfloor \log 3\rfloor = \cdots = \lfloor \log 9\rfloor = 0$$

$$\underbrace{\lfloor \log 10\rfloor = \lfloor \log 11\rfloor = \lfloor \log 12\rfloor = \cdots = \lfloor \log 99\rfloor = 1}_{\text{تعداد آن‌ها } (99-10+1)=90}$$

$$\lfloor \log_1 ..\rfloor = 2$$

$$\lfloor x\rfloor = 90+2 = 92 \Rightarrow 92 \le x < 93$$

سؤال ۶ . معادلهٔ $(3-\lfloor x\rfloor)! = 1$ چند جواب عضو Z دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) بی‌شمار

حل: گزینهٔ (۲)

می‌دانیم: ۱ = !۰ و ۱ = !۱ در نتیجه:

الف) $\lfloor x\rfloor - 3 = 0 \Rightarrow \lfloor x\rfloor = 3 \Rightarrow 3 \le x < 4, x \in z \Rightarrow x = 3$

ب) $\lfloor x\rfloor - 3 = 1 \Rightarrow \lfloor x\rfloor = 4 \Rightarrow 4 \le x < 5, x \in z \Rightarrow x = 4$

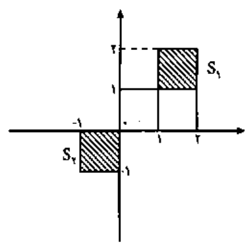
سؤال ۷ . اندازهٔ مساحت محدود به نمودار $\lfloor x\rfloor.\lfloor y\rfloor = 1$ ، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

حل: گزینهٔ (۲)

$$\lfloor x\rfloor.\lfloor y\rfloor = (1)(1) = (-1).(-1)$$



الف) $\begin{cases} \lfloor x\rfloor = 1 \Rightarrow 1 \le x < 2 \\ \lfloor y\rfloor = 1 \Rightarrow 1 \le y < 2 \end{cases}$

ب) $\begin{cases} \lfloor x\rfloor = -1 \Rightarrow -1 \le x < 0 \\ \lfloor y\rfloor = -1 \Rightarrow -1 \le y < 0 \end{cases}$

$$S = S_1 + S_2 = 1+1 = 2$$

مسأله: ثابت کنید: $\lfloor 2x\rfloor = \lfloor x\rfloor + \left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor$

حل: $x = n+p\ ,\ n \in z\ ,\ 0 < p < 1 \Rightarrow \lfloor x\rfloor = n$

$$\lfloor 2x\rfloor = \lfloor 2n+2p\rfloor = 2n + \lfloor 2p\rfloor$$

$$\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor = \left\lfloor n+p+\frac{1}{2}\right\rfloor = n + \left\lfloor p+\frac{1}{2}\right\rfloor$$

$$\lfloor 2x\rfloor = \lfloor x\rfloor + \left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor$$

می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$2n + \lfloor 2p\rfloor = n+n+\left\lfloor p+\frac{1}{2}\right\rfloor$$

باید ثابت کنیم:

$$2n + \lfloor 2p\rfloor = 2n + \left\lfloor p+\frac{1}{2}\right\rfloor$$

حال باید ثابت کنیم:

$$\lfloor 2p\rfloor = \left\lfloor p+\frac{1}{2}\right\rfloor$$

الف) $0 \le p \le \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le 2p < 1 \Rightarrow \lfloor 2p\rfloor = 0 \\ \frac{1}{2} \le p+\frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \left\lfloor p+\frac{1}{2}\right\rfloor = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \lfloor 2p\rfloor = \left\lfloor p+\frac{1}{2}\right\rfloor$$

ب)

$$\frac{1}{2} \le p < 1 \Rightarrow \begin{cases} 1 \le 2p < 2 \Rightarrow \lfloor 2p\rfloor = 1 \\ 1 \le p+\frac{1}{2} \le (\frac{3}{2} \Rightarrow \left\lfloor p+\frac{1}{2}\right\rfloor = 1 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\lfloor 2p\rfloor = \left\lfloor p+\frac{1}{2}\right\rfloor$$

خاصیت (۲): $\lfloor 2x\rfloor = \lfloor x\rfloor + \left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor$

سؤال ۸ . جواب معادلهٔ $\lfloor 2x\rfloor-\lfloor x\rfloor=-1$ کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}\le x<-\frac{1}{2}$ ‏ ۲) $-\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2}$

۳) $\frac{1}{2}\le x<\frac{3}{2}$ ‏ ۴) $\frac{3}{2}\le x<\frac{5}{2}$

حل: گزینهٔ (۱): در مسأله قبل، ثابت شد

$$\lfloor 2x\rfloor=\lfloor x\rfloor+\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor$$

پس: $\lfloor 2x\rfloor-\lfloor x\rfloor=-1\Rightarrow\lfloor x\rfloor+\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor-\lfloor x\rfloor=-1\Rightarrow$

$$\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor=-1\Rightarrow-1\le x+\frac{1}{2}<0\Rightarrow-\frac{3}{2}\le x<-\frac{1}{2}$$

سؤال ۹ . جواب معادلهٔ $2\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor+\left\lfloor x-\frac{1}{2}\right\rfloor=2$ کدام است؟

۱) $2\le x<3$ ‏ ۲) $1\le x<2$

۳) $\frac{3}{2}\le x<\frac{5}{2}$ ‏ ۴) $\frac{1}{2}\le x<\frac{3}{2}$

حل: گزینهٔ (۴)

$$\left\lfloor x-\frac{1}{2}\right\rfloor=\left\lfloor(x+\frac{1}{2})-1\right\rfloor=\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor-1$$

در معادله قرار می‌دهیم:

$$2\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor+\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor-1=2\Rightarrow$$
$$3\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor=3\Rightarrow$$
$$\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor=1\Rightarrow1\le x+\frac{1}{2}<2$$
$$\Rightarrow\frac{1}{2}\le x<\frac{3}{2}$$

خاصیت(۳) $x-1<\lfloor x\rfloor\le x$ ، $0\le x-\lfloor x\rfloor<1$ ؛ $\forall x\in R$

سؤال ۱۰ . اگر $x=4\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor+k$ ، آن‌گاه حدود k کدام است؟

۱) $-4\le k<0$ ‏ ۲) $-3\le k<1$

۳) $0\le k<4$ ‏ ۴) $0\le k<8$

حل: گزینهٔ (۳)؛ دو طرف را بر ۴ تقسیم می‌کنیم.

$$x=4\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor+k$$
$$\frac{x}{4}=\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor+\frac{k}{4}\Rightarrow\frac{x}{4}-\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor+\frac{k}{4}$$

بنا به خاصیت (۳)؛ داریم: $0\le\frac{x}{4}-\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor<1$

پس: $0\le\frac{k}{4}<1\Rightarrow0\le k<4$

سؤال ۱۱ . اگر $\frac{x}{2}=\left\lfloor\frac{x}{3}\right\rfloor$ ، آن‌گاه معادله چند جواب دارد؟

۱) ۴ ‏ ۲) ۳

۳) ۲ ‏ ۴) ۱

حل: گزینهٔ (۲):

$$\frac{x}{2}=k,k\in z\Rightarrow x=2k$$
$$\left\lfloor\frac{x}{3}\right\rfloor=k\Rightarrow k\le\frac{x}{3}<k+1\Rightarrow3k\le x<3k+3,x=2k$$
$$\Rightarrow3k\le2k<3k+3\Rightarrow\begin{cases}3k\le2k\Rightarrow k\le0\\3k+3>2k\Rightarrow k>-3\end{cases}$$
$$\Rightarrow-3<k\le0\Rightarrow k=-2,-1,0$$
$$x=2k\Rightarrow x=-4,-2,0$$

سؤال ۱۲ . معادلهٔ $4\lfloor x\rfloor=x^2+3$ چند جواب دارد:

۱) ۴ ‏ ۲) ۳

۳) ۲ ‏ ۴) ۱

حل: گزینهٔ (۲)

$$x^2+3>0\Rightarrow4\lfloor x\rfloor>0\Rightarrow x>0$$
$$\lfloor x\rfloor=k,k\in z^+\Rightarrow k\le x<k+1\Rightarrow$$
$$k^2\le x^2<(k+1)^2\Rightarrow k^2+3\le x^2+3<(k+1)^2+3$$

داشتیم: $x^2+3=4k$

$$\Rightarrow k^2+3\le 4k<k+2k+4\Rightarrow \begin{cases} k^2-2k+4>0 \\ k^2-4k+3\le 0 \end{cases}$$

همواره برقرار است. زیرا $\Delta<0, a>0$

$$k^2-4k+3=0\Rightarrow k=1,3,\ k^2-4k+3\le 0\Rightarrow 1\le k\le 3$$

$$\xrightarrow{k\in z} k=1,2,3$$

$$x^2+3=4k\xrightarrow{k=1}x^2=1\Rightarrow x=1$$

$$x^2+3=4k\xrightarrow{k=2}x^2=5\Rightarrow x=\sqrt{5}$$

$$x^2+3=4k\xrightarrow{k=3}x^2=9\Rightarrow x=3$$

خاصیت (۴) $\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor=\begin{cases} 0 & ,\ x\in z \\ -1 & ,\ x\in(R-z) \end{cases}$

سؤال ۱۳ . مجموعهٔ جواب معادلهٔ $2\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor=5$ کدام است؟

۱) $(4,5)\cup\{6\}$ ۲) $(6,7)\cup\{4\}$

۳) $(3,4)\cup\{5\}$ ۴) $(6,7)\cup\{5\}$

حل: گزینهٔ (۴)

الف) $x\in z$ ؛ $\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor=0\Rightarrow\lfloor -x\rfloor=-\lfloor x\rfloor$

در معادله قرار می‌دهیم:

$2\lfloor x\rfloor-\lfloor x\rfloor=5\Rightarrow\lfloor x\rfloor=5\Rightarrow 5\le x<6, x\in z\Rightarrow x=5$ ؛ ب)

$\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor=-1\Rightarrow\lfloor -x\rfloor=-1-\lfloor x\rfloor$ ؛

$x\in(R-z)$

در معادله قرار می‌دهیم:

$$2\lfloor x\rfloor-1-\lfloor x\rfloor=5\Rightarrow\lfloor x\rfloor=6\Rightarrow 6\le x<7, x\in(R-z)$$
$$\Rightarrow 6<x<7$$

مجموعهٔ جواب معادله: $(6,7)\cup\{5\}$

سؤال ۱۴ . اگر $k\in z^+, A=\left\{(x,y)|x,y\in R,\lfloor x^2+y^2\rfloor=k\right\}$ آن‌گاه مساحت شکل حاصل کدام است؟

۱) $k\pi$ ۲) $\frac{k\pi}{2}$

۳) $\frac{k\pi}{4}$ ۴) π

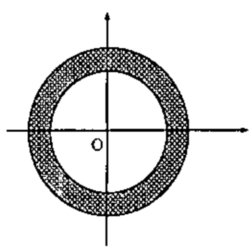
حل: گزینهٔ (۴) $\lfloor x^2+y^2\rfloor=k\Rightarrow k\le x^2+y^2<k+1$

$x^2+y^2=k$ دایره‌ای است به مرکز مبدأ مختصات و شعاع $R=\sqrt{k}$

$x^2+y^2=k+1$ دایره‌ای است به مرکز مبدأ مختصات و شعاع $R'=\sqrt{k+1}$

مساحت مورد نظر، سطح بین دو دایره است.

$$A=S_1-S_2=\pi R'^2-\pi R^2=(k+1)\pi-k\pi=\pi$$



سؤال ۱۵ . دنبالهٔ $\left\{\frac{\lfloor\sqrt{k}n\rfloor}{n}\right\}$ به کدام عدد زیر همگراست؟ $(k>0)$

۱) $\sqrt{k}$ ۲) $\sqrt{k-1}$

۳) $\lfloor\sqrt{k}\rfloor-1$ ۴) $\lfloor k\rfloor+1$

حل: گزینهٔ (۱) بنا به خاصیت ۳ داریم: $x-1<\lfloor x\rfloor\le x$

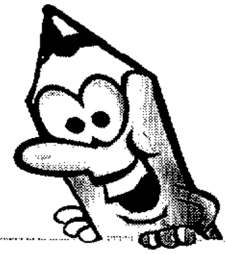
پس می‌توان نوشت: $\sqrt{k}n-1<\lfloor\sqrt{k}n\rfloor\le\sqrt{k}n$

نامساوی را بر $n\in N$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{k}n}{n}-\frac{1}{n}<\frac{\lfloor\sqrt{k}n\rfloor}{n}\le\frac{\sqrt{k}n}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{k}n}{n}-\frac{1}{n}\right)<\lim_{n\to\infty}\frac{\lfloor\sqrt{k}n\rfloor}{n}\le\lim_{n\to\infty}\sqrt{k}\Rightarrow$$

$$\sqrt{k}<\lim_{n\to\infty}\frac{\lfloor\sqrt{k}n\rfloor}{n}\le\sqrt{k}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{\lfloor\sqrt{k}n\rfloor}{n}=\sqrt{k}$$



پاسخ تفریح اندیشه ۱ و ۲

پاسخ ۱ :

$D=\{(۱۲,۸),\ (۸,۱۲),\ (-۸,-۱۲),\ (-۱۲,-۸)\}$

$x^۲+y^۲=۲۰۸ \qquad (۱)$

$xy=۹۶ \qquad (۲)$

از (۲) :

$۲xy=۱۹۲ \qquad (۳)$

افزودن (۳) به (۱) می‌دهد :

$x^۲+y^۲+۲xy=۲۰۸+۱۹۲$

$(x+y)^۲=۴۰۰,\ x+y=\pm ۲۰ \qquad (۴)$

با تفریق (۳) از (۱) داریم :

$x^۲+y^۲-۲xy=۲۰۸-۱۹۲$

$(x-y)^۲=۱۶,\ x-y=\pm ۴ \qquad (۵)$

از (۴) و (۵) دستگاه‌های زیر را حل می‌کنیم :

الف) $\begin{cases}x+y=۲۰\\x-y=۴\end{cases}$ ب) $\begin{cases}x+y=۲۰\\x-y=-۴\end{cases}$

ج) $\begin{cases}x+y=-۲۰\\x-y=۴\end{cases}$ د) $\begin{cases}x+y=-۲۰\\x-y=-۴\end{cases}$

جواب دستگاه (الف) عبارت است از : $y=۸$ ، $x=۱۲$

جواب دستگاه (ب) عبارت است از : $y=۱۲$ ، $x=۸$

جواب دستگاه (ج) عبارت است از : $y=-۱۲$ ، $x=-۸$

جواب دستگاه (د) عبارت است از : $y=-۸$ ، $x=-۱۲$

پاسخ ۲ : ۳۵° ، ۵۵° و ۱۴۵°

حل : مجموع زاویه‌های درونی یک n ضلعی $۱۸۰(n-۲)$ درجه است . با قرار دادن $n=۸$ ، به‌دست می‌آوریم :

$۱۸۰^\circ(۶)=۱۰۸۰^\circ$

در این صورت ، مجموع زاویه‌های باقیمانده عبارت است از :

$۱۰۸۰^\circ-۸۴۵^\circ=۲۳۵^\circ$

توجه داریم که سه زاویهٔ باقیمانده ، شامل دو زاویهٔ مکمل و دو زاویهٔ متمم هستند . در نتیجه ، یکی از این زاویه‌ها در این جفت مشترک است . فرض می‌کنیم اندازهٔ این زاویه x° باشد . در نتیجه ، اندازه‌های دو زاویهٔ دیگر ، به ترتیب $(۱۸۰-x)^\circ$ و $(۹۰-x)^\circ$ است :

$x+(۱۸۰-x)+(۹۰-x)=۲۳۵$

$x=۳۵$

در نتیجه :

$(۱۸۰-x)=۱۴۵$

$(۹۰-x)=۵۵$

به این ترتیب ، سه زاویهٔ مورد نظر ۳۵° ، ۵۵° و ۱۴۵° هستند .

اثبات چند قضیهٔ هندسه از راه‌های تازه و ساده

دکتر احمد شرف‌الدین

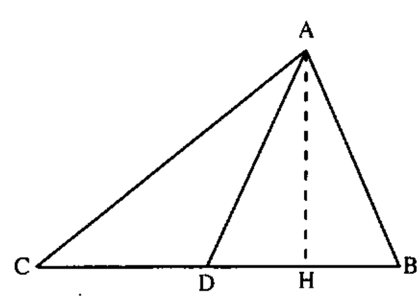
برای دانش‌آموزان سال سوم

در این مقاله، چند قضیهٔ هندسه را از راه‌های جدید و ساده اثبات می‌کنیم. ممکن است این اثبات‌ها تازگی داشته باشند.

۱. **قضیه**. در هر مثلث، سه میانه همرأسند.

برهان. برهان این قضیه را در چند مرحله انجام می‌دهیم:

الف) در هر مثلث، هر یک از میانه‌ها، آن مثلث را به دو مثلث هم مساحت بخش می‌کند. مثلث ABC را در نظر می‌گیریم و میانهٔ AD را رسم می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم مساحت‌های دو مثلث ABD و ACD برابرند.



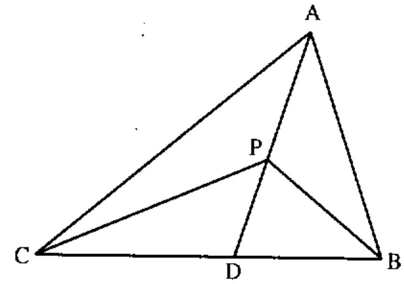
از نقطهٔ A عمود AH را بر خط BC فرود می‌آوریم. پاره‌خط AH، هم ارتفاع مثلث ABD است و هم ارتفاع مثلث ACD. پس می‌توان نوشت:

$$\text{ABD مساحت مثلث} = \frac{1}{2}\overline{BD}\ .\ \overline{AH}$$

$$\text{ACD مساحت مثلث} = \frac{1}{2}\overline{CD}\ .\ \overline{AH}$$

از مقایسهٔ دو رابطهٔ بالا، با رعایت آن‌که $\overline{BD} = \overline{CD}$ است (زیرا خط AD میانه مثلث است)، نتیجه می‌شود که دو مثلث ABD و ACD هم مساحت هستند.

ب) مثلث ABC و میانهٔ AD از آن را در نظر می‌گیریم. روی میانهٔ AD نقطهٔ دلخواه P را اختیار می‌کنیم. ادعا می‌کنیم که دو مثلث APB و APC هم مساحت هستند.

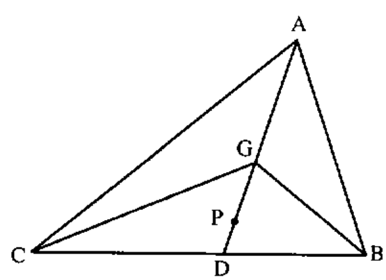


می‌گوییم چون خط AD میانهٔ مثلث ABC است، پس دو مثلث ABD و ACD هم مساحت هستند. همچنین چون خط PD میانهٔ مثلث PBC است، پس دو مثلث PBD و PCD هم مساحت هستند. نتیجه می‌شود که دو مثلث APB و ABC هم مساحت هستند.

پ) مثلث ABD و میانهٔ AD را در نظر می‌گیریم. ادعا می‌کنیم که روی میانهٔ AD نقطه‌ای چون G وجود دارد، به طوری که مساحت‌های سه مثلث GAB، GBC و GCA برابرند.

روی میانهٔ AD نقطه‌ای چون f نزدیک به نقطهٔ D در نظر می‌گیریم و آن نقطه را روی میانهٔ DA به سوی نقطهٔ A حرکت می‌دهیم تا به نقطه‌ای چون G برسیم؛ به طوری که مساحت مثلث GBD ثلث مساحت مثلث ABC باشد (هنگامی که نقطهٔ P از نزدیکی نقطهٔ D به سوی نقطهٔ A حرکت می‌کند، مساحت مثلث PBC از عددی نزدیک صفر زیاد می‌شود تا به مساحت مثلث ABC برسد. پس در لحظه‌ای مساحت مثلث PBC ثلث مساحت ABC می‌شود). در این لحظه، سه مثلث GAB، GBC و GCA دارای یک مساحت هستند.

پس روی میانهٔ AD یک نقطهٔ یکتا چون G وجود دارد؛ به طوری که مساحت‌های سه مثلث GAB، GBC و GCA برابرند.

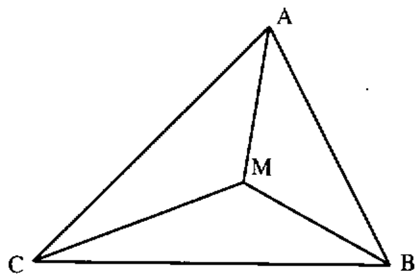


ت) از آنچه در (پ) شرح دادیم، نتیجه می‌شود که روی هریک از سه میانهٔ مثلث، نقطه‌ای وجود دارد که اگر از آن نقطه به سه رأس مثلث وصل کنیم، سه مثلث جزئی هم مساحت حاصل می‌شود.

ث) در داخل یک مثلث، فقط یک نقطه وجود دارد که اگر از آن نقطه به سه رأس مثلث وصل کنیم، سه مثلث جزئی حاصل، هم مساحت هستند.

مثلث ABC را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که نقطهٔ M، نقطه‌ای است از درون مثلث؛ به طوری که:

مساحت مثلث MCA = مساحت مثلث MBC = مساحت مثلث MAB



اگر نقطه‌ای چون P را داخل مثلث در نظر بگیریم که بر نقطهٔ M منطبق نباشد، این نقطهٔ P یا در درون یکی از سه مثلث‌های جزئی MAB، MBC و MCA قرار دارد و یا داخل یکی از سه پاره‌خط MA، MB و MC.

اگر نقطهٔ P داخل یکی از مثلث‌های جزئی مثلاً داخل مثلث MBC قرار گیرد، آن‌گاه مساحت مثلث PBC کم‌تر از مساحت مثلث MBC می‌شود و در نتیجه، مساحت مثلث PBC یک سوم مساحت مثلث ABC نمی‌شود. بنابراین مساحت‌های سه مثلث PAB، PBC و PCA برابر نمی‌شود.

اگر نقطهٔ P درون یکی از سه پاره‌خط MA، MB و MC، مثلاً درون پاره‌خط MA قرار گیرد، آن‌گاه مساحت مثلث PAB کمتر از مساحت مثلث MAB می‌شود و در نتیجه، مساحت مثلث PAB یک سوّم مساحت مثلث ABC نمی‌شود. بنابراین مساحت‌های سه مثلث PAB، PAB و PCA برابر نمی‌شوند.

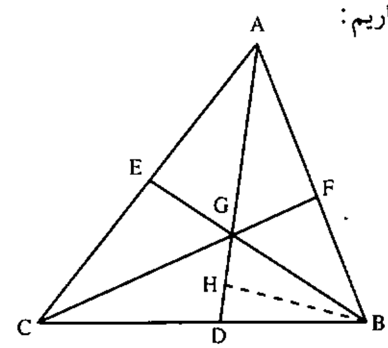
پس داخل یک مثلث، تنها یک نقطه وجود دارد که اگر از

آن نقطه به سه رأس وصل کنیم، سه مثلث جزئی حاصل، هم مساحت هستند.

ج) در بند (پ) ثابت کردیم که در درون مثلث یک نقطه وجود دارد که اگر از آن نقطه به سه رأس مثلث وصل کنیم، سه مثلثِ جزئی هم مساحت حاصل می‌شود. در بند (ث) ثابت کردیم که اگر چنین نقطه‌ای وجود داشته باشد، یکتاست.

چ) از آنچه داده شد، نتیجه می‌شود که سه میانهٔ یک مثلث، از یک نقطه می‌گذرند و اگر از این نقطه به سه رأس مثلث وصل کنیم، سه مثلث جزئی حاصل، هم مساحت می‌شوند.

ح) در هر مثلث، سه میانهٔ AD، BE و CF در یک نقطهٔ G و چنین داریم:



$$\begin{cases} \overline{GD} = \frac{1}{3}\overline{DA} \\ \overline{GE} = \frac{1}{3}\overline{EB} \\ \overline{GF} = \frac{1}{3}\overline{FC} \end{cases}$$

کافی است رابطهٔ $\overline{GD} = \frac{1}{3}\overline{DA}$ را ثابت کنیم. دو مثلث ABD و GBC را در نظر می‌گیریم. ثابت کردیم که مساحت مثلث GBC یک سوم مساحت مثلث ABD است. از نقطهٔ B عمود BH را بر خط AD فرود می‌آوریم. پاره‌خط BH هم ارتفاع مثلث CBD است و هم ارتفاع مثلث ABD.

ما چنین می‌نویسیم:

$$\text{ABD مساحت مثلث} = \frac{1}{2}\overline{AD}\,.\,\overline{BH}$$

$$\text{GBC مساحت مثلث} = \frac{1}{2}\overline{GD}\,.\,\overline{BH}$$

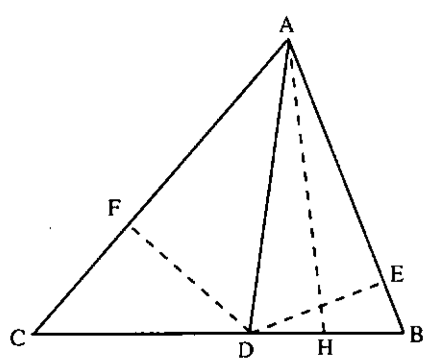
از مقایسه دو رابطهٔ اخیر، با رعایت آن که مساحت مثلث GBD یک سوم مساحت مثلث ABD است، نتیجه می‌شود که $\overline{GD} = \frac{1}{3}\overline{DA}$.

با همین شیوهٔ استدلال، نتیجه می‌شود که: $\overline{GE} = \frac{1}{3}\overline{EB}$ و $\overline{GF} = \frac{1}{3}\overline{FC}$.

۲. **قضیه**. در هر مثلث، نیمساز هر زاویه، ضلع روبه‌رو را به نسبت دو ضلع دیگر بخش می‌کند.

برهان. در مثلث ABC، خط AD نیمساز زاویهٔ A را رسم می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$$



از نقطهٔ D پای نیمساز AD عمود DE را بر خط AB و عمود DF را بر خط AC فرود می‌آوریم.

چنین داریم:

$$\text{(۱) ABC مساحت مثلث} = \frac{1}{2}\overline{AB}\,.\,\overline{DE}$$

$$\text{(۲) ACD مساحت مثلث} = \frac{1}{2}\overline{AC}\,.\,\overline{DF}$$

از مقایسهٔ دو رابطه (۱) و (۲) رابطهٔ (۳) حاصل می‌شود:

(۳) $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\text{مساحت مثلث } ABD}{\text{مساحت مثلث } ABD}$

زیرا $\overline{DE} = \overline{DF}$ (به دلیل آن که نقطهٔ D روی نیمساز AD است، لذا از دو ضلع زاویه BAC به یک فاصله است).

اکنون عمود AH را از نقطهٔ A بر خط BC فرود می‌آوریم. دو رابطهٔ زیر برقرار است:

(۴) مساحت مثلث ADB = $\frac{1}{2}\overline{DB} \cdot \overline{AH}$

(۵) مساحت مثلث ADC = $\frac{1}{2}\overline{DC} \cdot \overline{AH}$

از مقایسهٔ دو رابطهٔ (۴) و (۵) رابطهٔ زیر حاصل می‌شود:

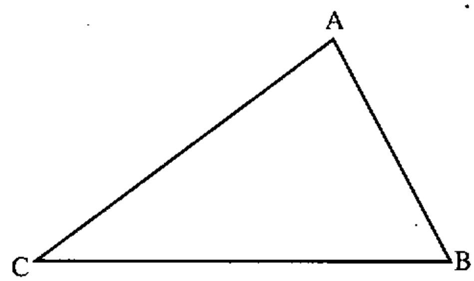
(۶) $\frac{\text{مساحت مثلث } ADB}{\text{مساحت مثلث } ADC} = \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}$

از مقایسهٔ دو رابطهٔ (۳) و (۶) رابطهٔ مطلوب زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

۳. **قضیه**. در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع وتر برابر است با مجموع مربع‌های دو ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه.

برهان. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را در نظر می‌گیریم که در آن BC وتر است. می‌خواهیم ثابت کنیم رابطهٔ زیر برقرار است:



(۱) $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$

برای اثبات رابطهٔ (۱)، تابع زیر را در نظر می‌گیریم:

(۲) $y = Sin^2x + Cos^2x$

مشتق تابع (۲) را حساب می‌کنیم؛ حاصل می‌شود:

(۳) $y' = 2Sinx.Cosx - 2Cos.Sinx$

پس $y' \equiv 0$، یعنی برای تمام مقادیر متغیر x، مقدار مشتق تابع (۲) برابر صفر است؛ پس تابع $(Sin^2x + Cos^2x)$ ثابت است. برای تعیین این مقدار ثابت، کافی است مقدار این تابع را برای یک مقدار دلخواه از متغیر x حساب کنیم. مثلاً مقدار تابع را برای $x = 0$ حساب می‌کنیم. می‌دانیم که:

(۴) $Sino = 0$ و $Coso = 1$

اگر مقادیر (۴) را در عبارت $(Sin^2x + Cos^2x)$ ببریم، حاصل می‌شود:

(۵) $(Sin^2o + Cos^2o) = 1$

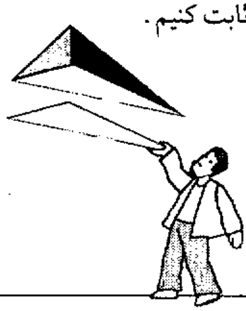
نتیجه می‌شود که عبارت $Sin^2x + Cos^2x$ برای تمام مقادیر x برابر (۱) است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC چنین داریم:

(۶) $SinB = \frac{AC}{BC}$ و $CosB = \frac{AB}{BC}$

از رابطه‌های (۶) رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$Sin^2B + Cos^2B = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}^2} + \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}^2} = \frac{\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2}{\overline{BC}^2}$$

و چون ثابت کردیم $Sin^2B + Cos^2B = 1$، پس $\frac{\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2}{\overline{BC}^2} = 1$ یا $\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$ و این همان است که می‌خواستیم ثابت کنیم.



تذکر: اتحاد $Sin^2x + Cos^2x \equiv 1$ به کمک قضیهٔ فیثاغورث ثابت می‌شود. آن را به کمک مشتق ثابت کردیم و سپس به کمک این اتحاد، قضیهٔ فیثاغورث را ثابت کردیم.

قسمت اول

ماتریس های تبدیل

برای دانش آموزان دورهٔ پیش دانشگاهی رشته ریاض

تبدیل در صفحه

اگر یک نقطه چون $A_1=(x_1,y_1)$ را با ماتری... $M_1=\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$ و دو نقطهٔ $A_1=(x_1,y_1)$ و $A_2=(x_2,y_2)$ را با ماتریس $M_2=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\y_1 & y_2\end{bmatrix}$ و طور کلی اگر، n نقطهٔ $A_1,A_2,\cdots,A_n$ را با ماتریس $2\times n$ مانند $M_n=\begin{bmatrix}x_1\ x_2\ \ldots x_n\\y_1\ y_2\ \ldots y_n\end{bmatrix}$ نمایش دهی...

ماتریس M_n را **ماتریس نقاط** می‌نامیم.

حال اگر مختصات رئوس یک n ضلعی در صفحه مفروض باشد، می‌توان یک ماتریس $2\times n$ تشکیل داد. تبدیل این nضلعی به یک nضلعی دیگر در صفحه، بحث اصلی ما در این بخش است و سپس تعمیم آن یعنی تبدیل بی‌شمار نقطه (مانند مجموعه نقاط روی یک خط یا یک منحنی) به نقاطی دیگر در صفحه یعنی در $\mathbb{R}^2$، اگر بخواهیم این عمل تبدیل توسط ماتریس‌ها صورت پذیرد، به دنبال ماتریسی چون T_n هستیم که با ضرب شدن در یک ماتریس نقاط، ماتریسی نقاط حاصل کند. یعنی باید

$$T_n\times\begin{bmatrix}x_1\ x_2\ \ldots x_n\\y_1\ y_2\ \ldots y_n\end{bmatrix}_{2\times n}=\begin{bmatrix}x'_1\ x'_2\ \ldots x'_n\\y'_1\ y'_2\ \ldots y'_n\end{bmatrix}_{2\times n}$$

که با توجه به تعریف ضرب در مجموعهٔ ماتریس‌ها، ماتریس T_n فقط می‌تواند 2×2 باشد تا تبدیل در صفحه را برای ما به انجام برساند و هر نقطه در صفحه را به نقطه‌ای در همان صفحه تبدیل کند. درواقع، هر ماتریس 2×2 به عنوان یک عملگر می‌تواند، روی هر نقطه از صفحهٔ $\mathbb{R}^2$ تأثیر کند و نقطهٔ جدیدی را در $\mathbb{R}^2$ تولید کند.

به هر ماتریس 2×2 یک **ماتریس تبدیل در صفحه** گفته می‌شود و اگر ماتریس 2×2 چون A روی نقطه‌ای چون B اثر کند و حاصل B' باشد، B' را تبدیل یافتهٔ نقطهٔ B تحت تأثیر ماتریس A می‌نامیم.

به عنوان مثال فرض کنید می‌خواهیم تبدیل یافتهٔ نقطهٔ $A\begin{vmatrix}2\\-1\end{vmatrix}$ را تحت تأثیر ماتریس $T=\begin{bmatrix}4 & -1\\0 & 2\end{bmatrix}$ بیابیم، بنابراین T را از چپ در ماتریس نقطهٔ A ضرب کنیم:

و کاربردهای آنها

حمیدرضا امیری

ماتریس تبدیل کلّ (تبدیلات متوالی)

فرض کنیم نقطهٔ A_1، تحت تأثیر ماتریس تبدیل T_1 به نقطهٔ A_2 تبدیل شده باشد و سپس ماتریس تبدیل T_2 روی A_2 اثر کرده و نقطهٔ A_3 حاصل شود و... و درنهایت ماتریس T_n روی نقطهٔ A_n اثر کرده و نقطهٔ A_{n+1} به دست آید، می‌خواهیم ماتریسی بیابیم که کار این n تبدیل را یک جا برای ما انجام دهد و با تأثیر روی A_1 مستقیماً به A_{n+1} برسیم. این ماتریس که به ماتریس تبدیل کلّ (در این n تبدیل متوالی) معروف است، از ضرب ماتریس‌های تبدیل به دست می‌آید که این ضرب از چپ به راست و از آخرین ماتریس تبدیل شروع و به اولین آنها ختم می‌شود:

$$\begin{aligned} T_1(A_1) &= A_2 \\ T_2(A_2) &= A_3 \\ &\vdots \\ T_{n-1}(A_{n-1}) &= A_n \\ T_n(A_n) &= A_{n+1} \end{aligned}$$

$$T_n(A_n) = A_{n+1} \Rightarrow T_n\Big(\underbrace{T_{n-1}(A_{n-1})}_{A_n}\Big) = A_{n+1}$$

$$\Rightarrow T_n\left(T_{n-1}\big(\underbrace{T_{n-2}(A_{n-2})}_{A_{n-1}}\big)\right) = A_{n+1}$$

$$T_n\Big(T_{n-1}\big(\dots(T_1(A_1))\dots\big)\Big) = A_{n+1}$$

$$\Rightarrow \underbrace{T_n T_{n-1}\dots T_1}_{T}(A_1) = A_{n+1} \Rightarrow T(A_1) = A_{n+1}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix}$$

مثال: مثلث ABC که $A\Big|\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}$ و $B\Big|\begin{smallmatrix}-1\\2\end{smallmatrix}$ و $C\Big|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}$ مفروض است اگر این مثلث تحت تأثیر ماتریس تبدیل $T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ به مثلث $A'B'C'$ تبدیل شود محیط مثلث $A'B'C'$ را بیابید.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A'\Big|\begin{matrix}4\\6\end{matrix},\ B'\Big|\begin{matrix}-2\\4\end{matrix},\ C'\Big|\begin{matrix}2\\2\end{matrix}$$

$$\left.\begin{aligned} A'B' &= \sqrt{36+4} = \sqrt{40} \\ A'C' &= \sqrt{4+16} = \sqrt{20} \\ B'C' &= \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \end{aligned}\right\} \Rightarrow P = \sqrt{40} + 2\sqrt{20}$$

(T همان ماتریس تبدیل کل است)

مثال: نقطهٔ $A\begin{vmatrix}1\\-2\end{vmatrix}$ را به ترتیب و متوالیاً تحت تأثیر ماتریس‌های تبدیل $T_1=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}$ و $T_2=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$ و $T_3=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}$ قرار داده‌ایم تا نقطهٔ B حاصل شود؛ ماتریس تبدیل کل را برای این سه تبدیل متوالی به دست آورده و توسط آن مختصات B را محاسبه کنید.

$$T=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\\0&-1\end{bmatrix}$$

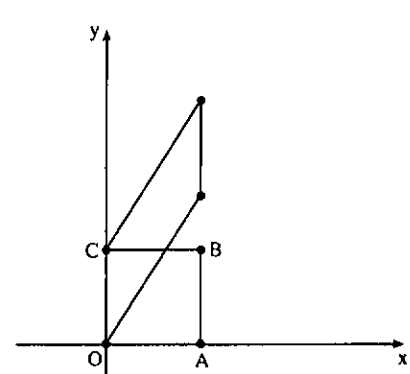
$$T(A)=B\Rightarrow\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}=B$$

تذکر: مربعی که طول هر ضلع آن برابر با یک واحد باشد و $O\begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix}$ و $A\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}1\\1\end{vmatrix}$ و $C\begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix}$ مختصات رئوس آن باشند **مربع واحد** نامیده می‌شود و ماتریس نقاط این مربع به صورت زیر است:

$$\text{ماتریس نقاط مربع واحد}=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

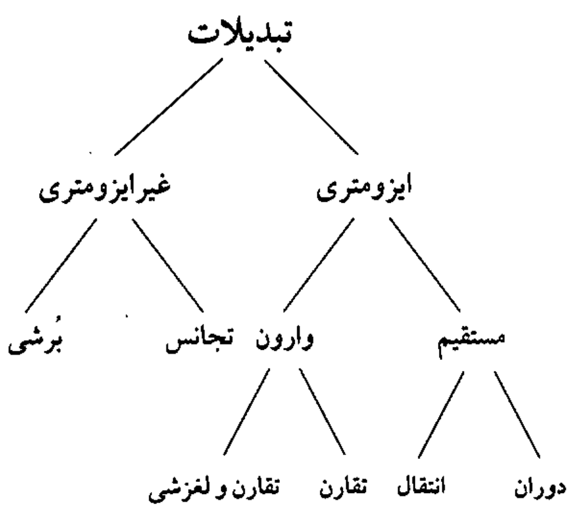
مثال: تبدیل یافتهٔ مربع واحد تحت تأثیر ماتریس تبدیل $\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}$ را تعیین کرده و هر دو را در یک دستگاه رسم کنید.

$$\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&2&3&1\end{bmatrix}$$



انواع تبدیل در صفحه

به طور کلّی تبدیلات مهّم را می‌توان طبق نمودار زیر دسته‌بندی کرد:



که تبدیلات **ایزومتری** به تبدیلاتی گفته می‌شود که با تأثیر آن‌ها، فاصلهٔ بین هر دو نقطه ثابت می‌ماند و یا به عبارت دیگر شکل تغییر نمی‌کند.

تبدیلات ماتریسی مهّم

۱ـ **ماتریس تجانس:** نقطهٔ $A'\begin{vmatrix}kx\\ky\end{vmatrix}$ را مجانس نقطهٔ $A\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}$ با نسبت تجانس k می‌نامیم و ماتریسی که می‌تواند A را به A' تبدیل کند، عبارت است از $T=\begin{bmatrix}k&0\\0&k\end{bmatrix}$ که به آن ماتریس تجانس می‌گوییم. اگر شکلی تحت تأثیر ماتریس تجانس تصویر شود (تبدیل شود) برحسب مقادیر مختلف k داریم:

الف) اگر $k=1$ باشد، ماتریس همان تبدیلِ همانی است و تصویر شکلی بر خودش قابل انطباق است.

ب) اگر $k>1$ باشد، شکل در جهت مثبت بزرگتر می‌شود.

ج) اگر $0<k<1$ باشد، شکل در جهت مثبت کوچک می‌شود.

د) اگر $k = -1$ باشد، تبدیل را تقارن مرکزی نامیده و در واقع شکل نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌شود و تصویر بر خودش قابل انطباق است.

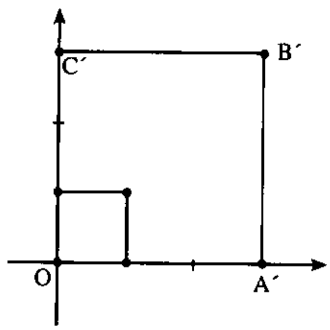
هـ) اگر $k < -1$ باشد، شکل حاصل در جهت منفی بزرگ می‌شود.

و) اگر $-1 < k < 0$ باشد، شکل حاصل در جهت منفی کوچک می‌شود.

تذکر مهّم: هر شکل تحت تأثیر ماتریس تجانس، مساحتش k^2 برابر می‌شود بنابراین تجانس یک تبدیل غیرایزومتری است، البته به شرطی که $k \neq \pm 1$ باشد.

مثال: مربع واحد تحت تأثیر ماتریس $T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ به چه شکلی تبدیل می‌شود؟

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} O & A' & B' & C' \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

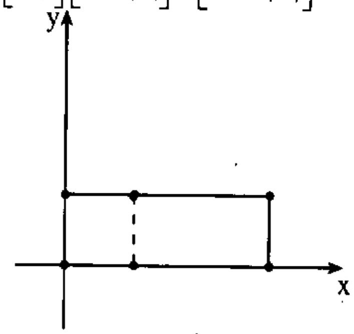


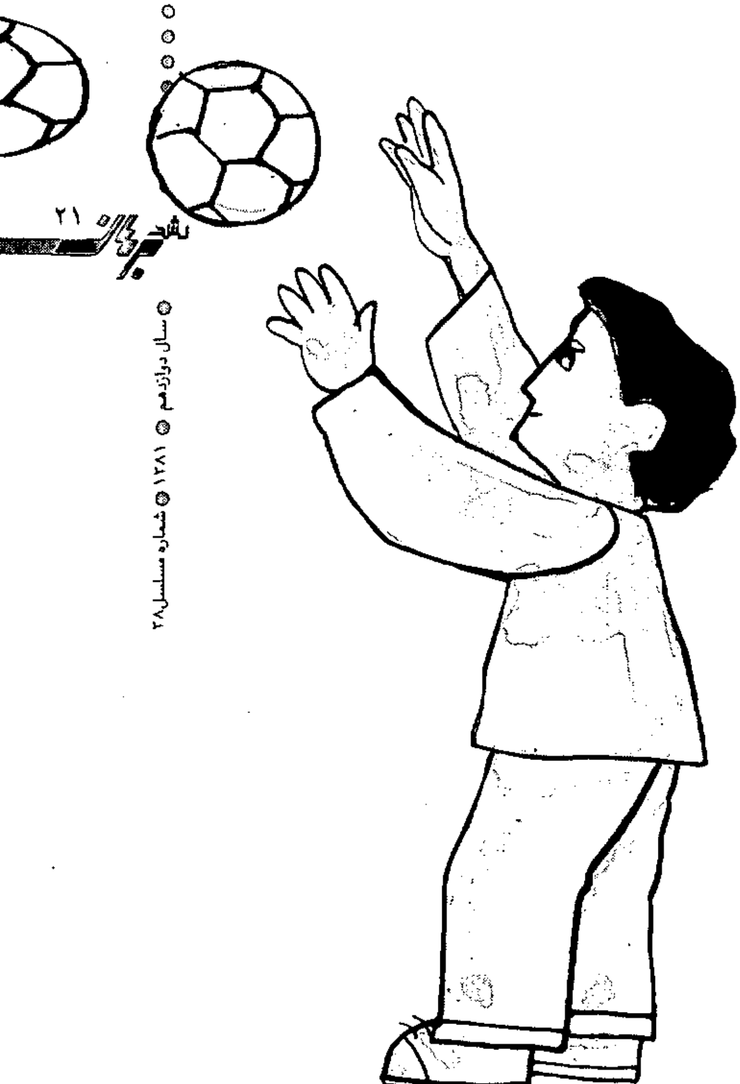
همان‌طور که مشاهده می‌کنید توسط ماتریس تجانس، شکل حاصل همواره با شکل اولیه متشابه هستند یعنی همهٔ ابعاد شکل به یک نسبت بزرگ یا کوچک شده و زاویه‌ها حفظ می‌شوند.

۲ـ ماتریس‌های کشش: ماتریس‌های $T_1 = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ به ترتیب ماتریس‌های کشش در امتداد محور xها و کشش در امتداد محور yها نامیده می‌شوند.

مثال: شکل حاصل از تبدیل مربع واحد تحت تأثیر ماتریس $T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ را رسم کنید.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$





همانطور که مشاهده می‌کنید مربع واحد در امتداد محور xها توسط ماتریس کشش در امتداد محور xها کشیده شده و به یک مستطیل تبدیل یافته است.

سؤال: منحنی به معادلهٔ $(x-1)^2+y^2=4$ مفروض است، شکل حاصل از تأثیر ماتریس $T=\begin{bmatrix}1&0\\0&3\end{bmatrix}$ روی این منحنی کدام است؟

۱ـ دایره ۲ـ بیضی قائم

۳ـ بیضی افقی ۴ـ هذلولی قائم

حل: منحنی داده شده یک دایره به مرکز $w\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix}$ و به شعاع $r=2$ است که اگر دایره در امتداد

محور yها کشیده شود (توسط ماتریس T این کار انجام می‌شود) به یک بیضی قائم تبدیل می‌شود پس گزینهٔ (۲) صحیح است.

تذکر مهم: هر شکل تحت تأثیر ماتریس کشش، مساحتش $|k|$ برابر می‌شود پس تبدیل‌های کششی در امتداد محورهای x و y از نوع غیرایزومتری هستند باز هم به شرط آن که $k\neq\pm1$ باشد.

نکته: در حالت کلّی اگر T یک ماتریس تبدیل باشد و دترمینان ماتریس T برابر با α باشد یعنی $|T|=\alpha$ در این صورت مساحت شکل تبدیل یافته تحت تأثیر T، $|\alpha|$ برابر مساحت اولیه است.

درواقع اگر فرض کنیم $T=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ ماتریس تبدیل دلخواهی در صفحه باشد و روی مربع واحد تأثیر کند، می‌بایست مساحت شکل حاصل $|ad-bc|\times 1$ باشد.

$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}A&B&C&D\end{array}\\\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}\end{array}=\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}A'&B'&C'&D'\end{array}\\\begin{bmatrix}0&a&a+b&b\\0&c&c+d&d\end{bmatrix}\end{array}$$

با توجه به اینکه رابطه‌های $x_{A'}+x_{C'}=x_{B'}+x_{D'}$ و $y_{A'}+y_{C'}=y_{B'}+y_{D'}$ برقرارند نتیجه می‌شود که چهارضلعی حاصل یک متوازی‌الاضلاع است که برای محاسبهٔ مساحت آن کافی است. نقاط B' و D' را در فضای $\mathbb{R}^3$ و روی صفحه xy درنظر بگیریم که در این صورت دو بردار $\vec{oB'}=(a,c,o)$ و $\vec{oD'}=(b,d,o)$ حاصل می‌شود که متوازی‌الاضلاع پدید آمده توسط این دو بردار همسان متوازی‌الاضلاع موردنظر بوده که مساحت آن از رابطهٔ $\left\|\vec{oB'}\times\vec{oD'}\right\|$ به دست می‌آید (خط های عمودی بیرونی نشانهٔ قدرمطلق است)

$$S=\|(a,c,o)\times(b,d,o)\|=\|(o,o,ad-bc)\|=\sqrt{(ad-bc)^2}$$
$$\Rightarrow S=|ad-bc|$$

نکته: در حالت کلّی $A=(x_1,y_1)$ و $B=(x_2,y_2)$ و $C=(x_3,y_3)$ سه رأس یک مثلث باشند مساحت مثلث از رابطهٔ $S=\left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_2-x_1&y_2-y_1\\x_3-x_1&y_3-y_1\end{vmatrix}\right|$ به دست می‌آید و مساحت متوازی‌الاضلاعی که سه نقطه فوق سه رأس آن باشند، دوبرابر مساحت فوق‌الذکر است. (خط‌های عمودی بیرونی نشانهٔ قدرمطلق است.)

با توجه به نکته قبل مساحت متوازی‌الاضلاع حاصل که نقاط $A'=(0,0)$ و $B'=(a,c)$ و $D'=(b,d)$ سه رأس آن هستند برابر است با:

$$S=\left|\begin{vmatrix}a-0&c-0\\b-0&d-0\end{vmatrix}\right|\Rightarrow S=|ad-bc|$$

تذکر: اگر T ماتریس تبدیل و دترمینان T یعنی $|T|$ برابر صفر باشد طبق نکتهٔ ذکر شده مساحت شکل حاصل صفر برابر مساحت شکل قبل بوده، یعنی مساحت شکل حاصل صفر می‌باشد درواقع نقاط تبدیل یافته همگی بر یک راستا واقعند و مساحتی تشکیل نمی‌شود.

قسمت اول

○ ترجمه غلامرضا یاسی‌پور

نظریهٔ تکامل از ۱۸۵۹ به بعد، یعنی زمانی که **چارلز داروین**[1] آن را در کتابش «دربارهٔ اصل انواع با استفاده از انتخاب طبیعی»[2] مطرح کرد، یکی از منابع دائمی جر و بحث و مناقشه بوده است. این وضعیت جای تعجب ندارد، زیرا نظریهٔ مزبور که به وقایعی بسیار دور اشاره دارد، جایگاه انسان‌ها را نه تنها به عنوان قله رفیع موجودات، بلکه به عنوان غایت آفرینش نیز زیر سؤال می‌برد و با بعضی از مذاهب این سیاره به بحث می‌نشیند.

بسیاری از فرقه‌ها، با در نظر گرفتن این نظریه به عنوان ساختاری که توسط خداوند برای خلقت انسان به کار رفته، با او به بحث پرداختند. اما دیگران ـ از قبیل «عالمان آفرینش»[3] در ایالات متحده ـ به سیاسی‌کاری پرداختند و نظریه‌های خود را به جای نظریهٔ داروین تبلیغ کردند.

در دههٔ ۱۹۸۰، ایالات «آرکانزاس» و «لوئیزیانا» قانونی گذراندند که خواستار برخورد برابر با تکامل و علم آفرینش در مدرسه‌ها بود، گرچه مورد اخیر به اندازهٔ نظریهٔ اول هدف تحقیق و تفحص علمی قرار نگرفته بود. قانون مزبور، پس از اعتراضاتی قابل ملاحظه، توسط دادگاه عالی، به عنوان ناقض جدایی قانونی کلیسا و دولت رد شد.

درک این موضوع مهم است که تکامل داروین تنها یک نظریهٔ علمی، و نه یک حقیقت قطعی است. اما این مطلب نیز دارای اهمیت است که نظریه‌های علمی عموماً سرافرازتر از حقایق ادعایی (بعضی) فیلسوفان از امتحان بیرون می‌آیند.

تحقیقات مربوط به تکامل همچنان ادامه دارد. اما همان طور که

به زودی ملاحظه خواهیم کرد، بسیاری از مسائل آن همچنان حل نشده باقی مانده‌اند. ایدهٔ اصلی داروین یعنی این که ترکیب جهش و دگرگونی تصادفی و رقابت بین تولید مثل افراد به گونه‌ای اجتناب ناپذیر به فرایندی تکاملی و تشکیل انواع مرتب پیچیده‌تر می انجامد سادگی با ظرافتی دارد. آن قدر ساده است که بعضی اشخاص آن را توضیح واضحات می دانند (که به یک معنی هست) و بنابراین توضیح آن را ناممکن می دانند (که در واقع چنین نیست).

اما دانش تنها با پذیرفتن ایده‌ها، فقط به این دلیل که ظریفند پیشرفت نمی کند؛ بلکه پیشرفتش از این جاست که آن‌ها را مورد دقیق‌ترین آزمون‌های ممکن قرار می دهد و پیش بینی هایش را با مشاهده‌های عملی مقایسه می کند.

البته این کار با تکامل آن قدرها هم آسان نیست، زیرا پیش بینی های مورد بحث به گذشته های دور ارجاع دارند و امتحان آن‌ها به مقدار نسبتاً زیادی از طریق مدارک فسیلی ای انجام می گیرد که تقریباً از بدترین انواع پایگاه های اطلاعاتی به شمار می روند که یک محقق مایل به کار کردن با آن هاست؛ یعنی، اسنادی غیر قابل اطمینان، صعب التفسیر، پر از رخنه، و مستعد تجدیدنظر و اصلاح در هر لحظه. این موضوع البته اوضاع را مضحک می سازد و آتش جر و بحث را برمی‌افروزد.

یکی از جروبحث هایی که اخیراً گسترش یافته ـ و تنها مورد است، زیرا موارد دیگر همه آمیخته با یکدیگرند ـ جر و بحث بین دو گروهی است که می توان آن ها را آداب گرایان[4] و تدرّج گرایان[5] نامید. تدرج گرایان که (با اندکی تساهل) می توان **ریچارد داوکینز**[6] را سخنگوی آنان دانست، بر این باورند که تکامل فرایندی پیوسته است و به صورت رشتهٔ طویلی از مراحلی بسیار ظریف رخ می دهد.

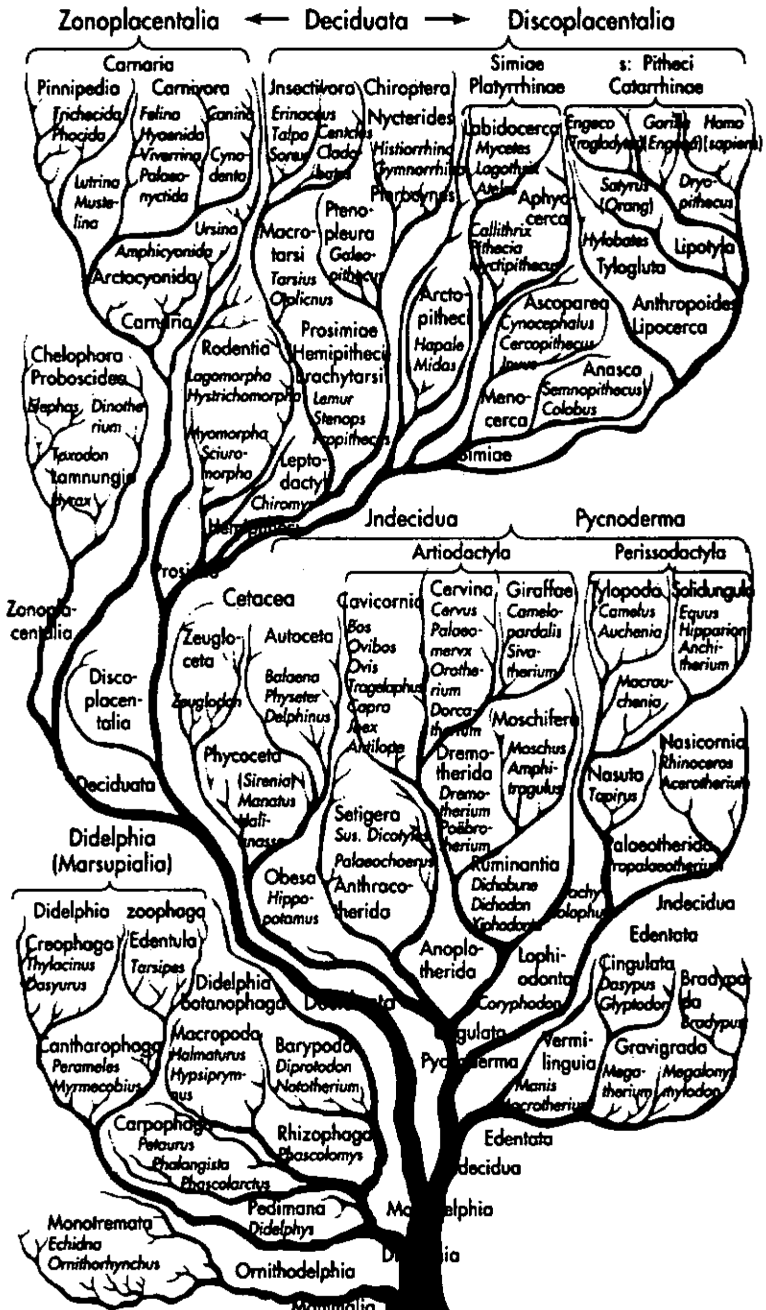
آداب گرایان، که معروف ترین آن ها **استیفن جی گولد**[7] است، بر این ادعا هستند که تکامل یک نوع جدید، تنها در انفجارهای سریع انجام می گیرد.

تمام ما شجره‌نامه های دقیق کتاب های درسی را دیده‌ایم (شکل ۱) که شاخه های دوشعبه‌ای آن‌ها شکوهمندانه به سوی آسمان سرکشیده تا در اوج، به بشر خردمند برسند؛ موجود خردمندی که پیروزمندانه بر بالای آن، مانند ستاره‌ای بر درخت کریسمس قرار گرفته است.

شجره های بازسازی شدهٔ مزبور بسیار مرتبند، در حالی که اسناد فسیلی مبتنی بر آن‌ها بسی سست و نامنظمند.

تدرج گرایان این گسستگی های ظاهری را به صورت رخنه هایی در ثبت فسیلی مطرح می کنند؛ رخنه هایی که شاید در کشفیات آینده از فسیل های جدید پر شوند، یا تقدیرشان چنان باشد که به علت طریق درهم و برهمی که صخره ها مطابق آن بنا شده‌اند، همچنان پر نشده باقی بمانند. در این مورد باید گفت که نظر مزبور نظری نامعقول نیست.

اما از طرف دیگر، آداب گرایان بر این اعتقادند که گسستگی های موجود در ثبت فسیل ها حقیقی‌اند،



شکل۱. شجره نامه تکامل،بابشریت در قله آن. این شجره نامه از منبع زیر است:
one from Generelle Morphologie by E.Haeckel, 1866

و در واقع تنها منبع انواع جدید به شمار می‌روند.

اینک حق با چه کسی است؟ آداب گرایان، یا تدرج گرایان یا هیچیک؟

***

یک روز عصر روی کاناپه نشسته بودم و در حالی که گربهٔ خانه، کنارم بود، با تنبلی به مسألهٔ تغییرات تدریجی و ناگهانی تکامل فکر می‌کردم که زنگ در خانه به صدا درآمد. پیام‌آوری با یک بسته بود. بسته با کاغذ قهوه‌ای ساده‌ای پوشیده شده بود، با برچسبی آبی با این نوشته: «شرکت ابزارهای بوم-ریاضی» و برچسب قرمزی با کلمهٔ «شکستنی!»

حیرت‌آور بود. چرا که من نه هیچگاه دربارهٔ شرکت ابزارهای بوم-ریاضی چیزی شنیده بودم، نه اصلاً چیزی از آن خواسته بودم. چون نمی‌شد حدس زد که درون بسته چیست، کاغذ روی آن را کناری زدم و جعبه‌ای مقوایی را مشاهده کردم که روی آن نوشته شده بود: «ماشین تکامل: نمونهٔ اصلی.»

تعجبم زیادتر شد. در جعبه را باز کردم و سربند عجیب و غریبی پیدا کردم که چیزی بین استریوی شخصی و عینک بود. جعبهٔ کنترل پر از عقربه، دکمه، پیچ، دسته، و چراغ‌های چشمک‌زن بود. بله، درست شبیه یک استریوی شخصی به نظر می‌رسید.

زیر آن نیز یک کتاب ضخیم با جلد پلاستیکی قرار داشت.

سربند را برداشتم و روی سرم گذاشتم. حس غریبی از گسسته شدن از اطراف به من دست داد. لحظه‌ای اتاق دور سرم گردید؛ آن وقت متمرکز شد، و تمام اشیا تفاوت کردند. به جای اتاق سطحی صاف قرار داشت. در واقع سطح نبود؛

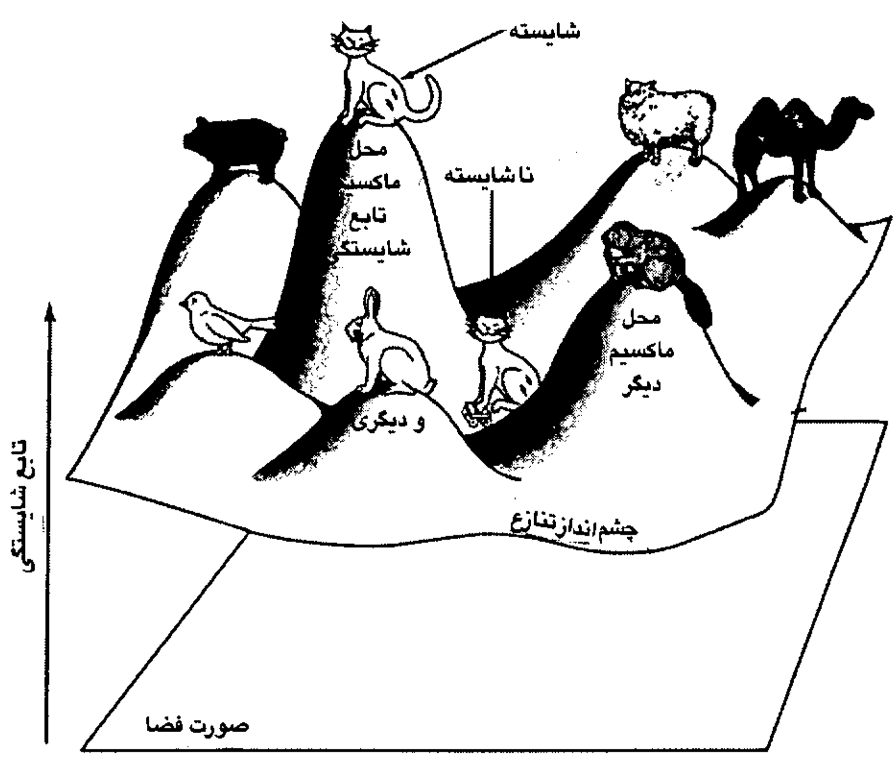
هرچه بیش‌تر تمرکز می‌کردم، بعدهای بیش‌تری می‌دیدم. صدها، هزارها، میلیون‌ها... اما من همچنان آن را به صورت سطح تصور می‌کردم.

اتاق پر از غریب‌ترین موجوداتی بود که تا آن زمان دیده بودم؛ موجوداتی که از سر و کول هم بالا می‌رفتند. به جایی نگاه کردم که قرار بود گربه‌ام باشد. در واقع گربه‌ام را دیدم، اما یک کپه موی قهوه‌ای خواب‌آلود. اما پهلوی او گربه‌ای دیگر بود، و یکی دیگر، و یکی دیگر. میلیون‌ها گربه، چسبیده به هم، چسبیده‌تر از ماهی‌های هر قوطی ساردینی... و با نظر دقیق‌تر، همه متفاوت از هم. بعضی خط‌دار بودند، بعضی سیاه و سفید؛ بعضی چاق، بعضی لاغر.

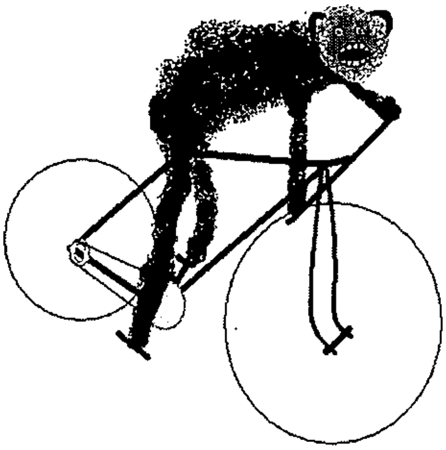
چون به دورتر نگاه کردم، گربه‌هایی را دیدم با دو دم، پنج پا، سه چشم؛ گربه‌ای سبز که به جای پا چرخ داشت، گربه‌ای شفاف؛ گربه‌ای کروی که روی زمین به دنبال موشی به همان اندازه کروی قل می‌خورد...

چه طور آن‌ها در فضایی به این کوچکی جا گرفته بودند!؟ شگفت‌زده، کتاب را به تندی باز کردم. کتاب تقریباً مثل تمام کتاب‌های دستی بود؛ یعنی، دیرفهم. با مقداری اِشکال، مدخلی را پیدا کردم که مربوط به نظر می‌رسید:

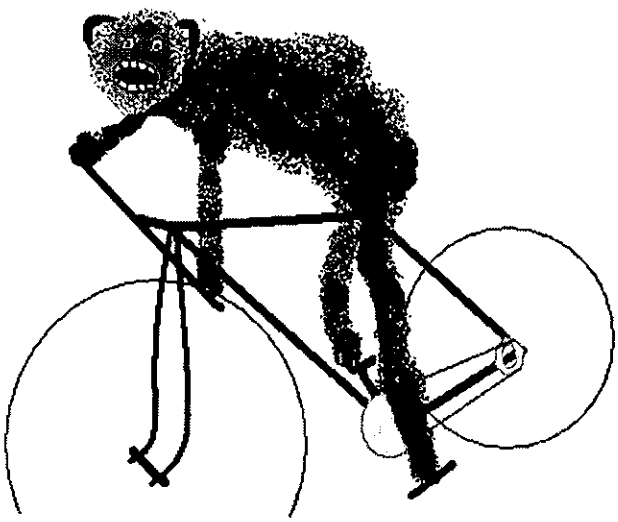
صورتْ فضا: شیوهٔ غیابی ماشین تکامل، ارائهٔ نمایی ایستا از صورتْ فضای حقیقی-زمان[۸] است. هر نقطه در این پیوستار چند بعدی[۹]، متناظر با صورت یک موجود درندهٔ بالقوه است. ماشین تکامل نه تنها مشاهدهٔ مستقیم فضا، بلکه ملاحظهٔ موجودات وابسته با هریک از نقاط آن را ممکن می‌کند. برای انتخاب صلاحیت بقا، دکمه‌ای را فشار دهید که بر واحد کنترل، با برچسب **تابع شایستگی**[۱۰] مشخص شده است.



شکل۲. چشم انداز تنازع. صورت هایی که مواضع ماکسیمم را اشغال کرده اند، شایسته رقابت و بقا هستند. صورت هایی که در دره ها قرار دارند، شایسته و نابود شدنی اند.



دکمه را پیدا کردم و فشار دادم. سطح مزبور شروع کرد به باد کردن و تبدیل شدن به چشم‌اندازی گرد و تپه‌ای (شکل ۲). گربه‌ام جلوی دماغم به حرکت درآمد و روی یک برآمدگی کوچک قرار گرفت. در فاصله‌ای دورتر، سگ‌ها بودند و یک گاو، یک زرافه، و یک کرم خاکی؛ هر یک نشسته بر تپهٔ خودش. موجودات عجیب و غریب دیگری هم بودند: یکی از آن‌ها را فیلوفون نامیدم؛ زیرا شبیه فیلی با تنه‌ای تلفن شکل بود. نیز لاک بز (بزی با لاکی حلزونی بر پشتش) و خفاشی جیرجیرکی (طبیعتاً، دورگه‌ای بین جیرجیرک و خفاش) وجود داشتند. گور میمون و قوگارو، و سوس باغه، و باله خرچنگ نیز حاضر بودند.



به جست‌وجوی گربهٔ پاچرخی برآمدم، اما موفق به دیدنش نشدم. خوب که نگاه کردم، او را در گوشه‌ای در دره‌ای عمیق پیدا کردم که در آن‌جا در وضعیت کمین، توسط گربه‌هایی از نوع خودش محاصره شده بود.

در واقع، به زودی متوجه شدم که به نظر می‌رسد که آشناترین موجودات تماماً قله‌های تپه‌ها را اشغال کرده‌اند، و حیوانات عجیب و غریب‌تر در ته دره‌ها سکنا گزیده‌اند.

موجودات چشم‌انداز، همچنان که چشمم شیب از ته دره‌ها تا نوک تپه‌ها را می‌پیمود، به تدریج آشناتر می‌شدند: در قلهٔ تپه‌ها، منحصراً حیواناتی ساکن بودند که توانستم آن‌ها را به صورت ساکنان سیارهٔ خودمان شناسایی کنم. اما چنین به نظر می‌رسید که بعضی از پشته‌ها هنوز اشغال نشده، مانده‌اند.

هرچه دست‌نوشته را بیش‌تر ورق می‌زدم، موضوع روشن‌تر می‌شد.

زیرنویس

1. Charles Darwin
2. On the Origin of Species by Means of Natural Selection
3. creation Scientists
4. punctualists
5. gradualists
6. Richard Dawkins
7. Stephen Jay Gould
8. real Time form space
9. multidimensional continuum
10. Fitness Function

مدل سازی مقدماتی ریاضی

تابع و مدل های ریاضی

برای دانش آموزان سال های دوم و سوم

ترجمه: میرشهرام صدر

ورود به مطلب

نمرهٔ درس تاریخ شما، تابعی از مدت زمانی است که مطالعه کرده اید. یا درآمد شما می تواند تابعی از سطح تحصیلاتتان باشد. درهریک از حالت های ذکر شده، متوجه می شویم که یک وابستگی بین کمیت اولی و دومی وجود دارد. در این مقاله، ابتدا با مفهوم ریاضی یک تابع آشنا می شویم. سپس تابع را به عنوان یک مدل ریاضی بین متغیرهای زندگی روزمره (دنیای واقعی) بررسی خواهیم کرد.

تابع ها و مدل های ریاضی

در یک رستوران، صبحانه شامل تخم مرغ، نان، مربا و پنیر است و قیمت صبحانه براساس تعداد تخم مرغ هایی که مشتری سفارش می دهد، محاسبه می شود. در زیر جدول قیمت گذاری صبحانه در این رستوران آمده است:

قیمت صبحانه	تعداد تخم مرغ ها
۱۲۴۰۰ ریال	۱
۱۶۰۰۰ ریال	۲
۱۸۸۰۰ ریال	۳
۲۱۲۰۰ ریال	۴

جدول (۱)

بیش‌تر کاربردهای ریاضی مستلزم استفاده از عددها و متغیرهاست. به طوری که آن‌ها کمیت‌های دنیای واقعی را بیان می‌کنند. با توجه به جدول بالا، فرض کنید n، تعداد تخم‌مرغ‌های سفارش داده شده و p قیمت صبحانه باشد. در این صورت، جدول (۱) رابطه‌ای را بین n و p بیان می‌کند. این رابطه، نمونه‌ای از توابع ریاضی است. زیرا برای هر n (تعداد تخم‌مرغ‌های سفارش داده شده) یک قیمت متناظر p وجود دارد که برای صرف صبحانه پرداخت می‌شود. در این جا، مفهوم کلیدی این است که هر تعداد تخم‌مرغ مشخص، **فقط یک قیمت** دارد. درحقیقت، فهرست (منوی) غذایی، قاعده‌ای برای مشخص کردن قیمت صبحانه در اختیار ما قرار می‌دهد. اگر شما تعداد تخم‌مرغ‌های صبحانهٔ خود را بدانید، در این صورت قیمت صبحانهٔ خود را می‌دانید. اگر شما و دوستتان هرکدام یک تخم‌مرغ سفارش دهید، در این صورت هر دوی شما توقع دارید که مبلغ یکسانی را پرداخت کنید. به راستی اگر به یکی از شما بگویند، برای صرف صبحانه بیش از ۱۲۴۰۰ ریال پرداخت کنید، به طور قطع اعتراض خواهید کرد.

تعریف تابع

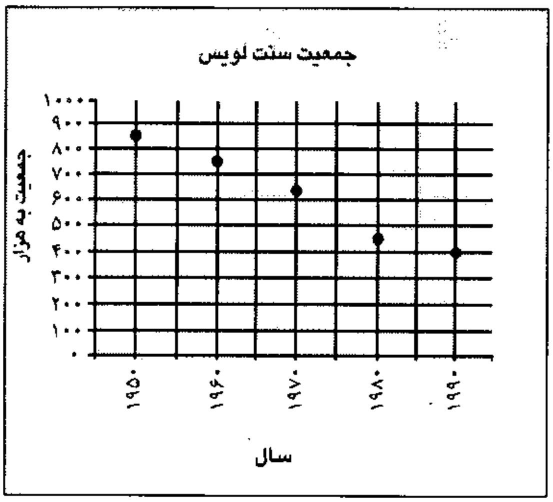
تابع f، قاعده‌ای است که روی مجموعهٔ D تعریف می‌شود؛ به طوری که به هر عدد $x \in D$، یک عدد مشخص f(x) را نسبت می‌دهد.

عدد f(x) که خوانده می‌شود: «اف x» ـ مقدار تابع f به ازای عدد x نامیده می‌شود. کلمهٔ «قاعده» که در تعریف تابع به آن اشاره شد، می‌تواند با یک جدول، یک فرمول یا نمودار یا حتی با یک جمله مشخص شود. به طوری که با استفاده از آن، مقدار f(x) به ازای عدد x داده شده مشخص می‌شود. معمولاً از x برای نشان دادن متغیر و از f برای نشان دادن تابع استفاده می‌کنیم. همچنین می‌توانیم، از حرف دیگری که دوست داریم یا در یک وضعیت خاص مناسب‌تر است، استفاده کنیم.

مثال ۱. در تابع رستوران که ذکر کردیم، مجموعهٔ D از همهٔ مقادیر ممکن برای تعداد تخم‌مرغ‌ها تشکیل شده است؛ مجموعهٔ اعداد: $\{۱,۲,۳,۴\}$. در این جا آن‌ها را با n (ترجیحاً با x) مشخص می‌کنیم. با معلوم بودن عدد n در ستون اول جدول، به راحتی قیمت متناظر p(n) را از ستون دوم جدول پیدا می‌کنیم. برای مثال: p(۳) = ۱۸۸۰۰؛ زیرا ۱۸۸۰۰ ریال قیمت صبحانه با ۳ تخم‌مرغ است.

مثال ۲. شکل ۱ جمعیت شهر سنت‌لویس را در سرشماری‌های بین سال‌های ۱۹۵۰ تا ۱۹۹۰ نشان می‌دهد. این نمودار (به طور تقریبی) تابع p را توصیف می‌کند که برای هریک از سال‌های ۱۹۵۰، ۱۹۶۰، ۱۹۷۰، ۱۹۸۰ و ۱۹۹۰ تعریف شده است. زیرا برای هریک از این سال‌ها، فقط یک جمعیت وجود دارد که با یک نقطه در نمودار مشخص شده است. برای مثال، واضح است که در سال ۱۹۹۰ جمعیت سنت‌لویس تقریباً ۴۰۰ هزار نفر بود. بنابراین داریم:

P(۱۹۹۰) = ۴۰۰ (هزارنفر)



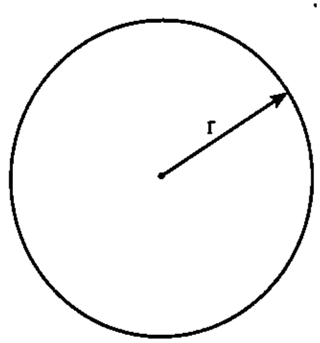
شکل ۱

مثال ۳. اگر در هرسال، سپردهٔ حساب پس‌انداز شما ۴٪ سود داشته باشد، منفعت I (سود سالیانه) از روی مبلغ A که در حساب پس‌انداز شما موجود است، به کمک فرمول I = ۰/۰۴A محاسبه می‌شود. این فرمول مشخص

می‌کند که I تابعی از A است. بنابراین اگر مبلغ حساب شما ۵۰۰۰۰ ریال باشد، در این صورت افزایش حساب شما پس از یک سال ۲۰۰۰ = (۵۰۰۰۰)(۰/۰۴) ریال خواهد بود.

مثال‌های ۱ تا ۳ نشان می‌دهند که توابع، رابطه‌هایی را بین متغیرهای زندگی روزمره (زندگی واقعی) نشان می‌دهند. ریاضیات، راه‌حلی برای تجزیه و تحلیل وضعیت‌های گوناگون زندگی روزمره در اختیار ما قرار می‌دهد که اغلب به شناسایی رابطه‌های بین متغیرهایی منجر می‌شود که وضعیت‌ها را توصیف می‌کنند. در زیر مثال‌هایی از توابعی آمده‌اند که با یک فرمول مشخص می‌شوند و ممکن است آن‌ها را در درس ریاضی یا فیزیک از قبل مطالعه کرده باشید.

مثال ۴. مساحت (A) دایره‌ای به شعاع r (شکل ۲) از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:



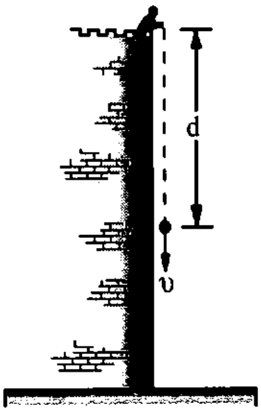
$A = \pi r^{۲}$

$(\pi \simeq ۳/۱۴۱۶)$

شکل ۲

به طور معمول این فرمول را با نماد تابعی به صورت $A(r) = \pi r^{۲}$ می‌نویسیم تا مشخص شود، مساحت یعنی A، وابسته به شعاع یعنی r است. r را متغیر مستقل و A را متغیر وابسته می‌گوییم.

مثال ۵. اگر یک سنگ‌ریزه از بالای یک برج (شکل ۳) به طرف پائین رها شود و شتاب جاذبهٔ زمین $۳۲\,ft/Sec^{۲}$ باشد، در این صورت سرعت (به طرف پائین) V بعد از t ثانیه و فاصلهٔ پیموده شدهٔ d از موقع رها شدن پس از t ثانیه، از رابطه‌های زیر به دست می‌آید:



$V(t) = ۳۲t$

$d(t) = ۱۶t^{۲}$

شکل ۳

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، V و d هر دو تابع‌هایی از t هستند. بنابراین در این دو تابع، t متغیر مستقل و V و d هر دو متغیرهای وابسته به t هستند.

مثال ۶. اگر دمای یک نمونهٔ ۳ گرمی دی‌اکسید کربن °۲۷ باشد، در این صورت، حجم آن (V) برحسب لیتر از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$V(p) = \frac{۱۶۸}{p}$$

که در آن p فشار گاز برحسب اتمسفر است. در این تابع، p متغیر مستقل و V متغیر وابسته است.

دامنه و برد تابع

وقتی تابع با یک رابطه بین متغیرها تعریف می‌شود، این مطلب خیلی مهم است که بدانیم، چه عددهایی می‌توانند جایگزین متغیرها شوند.

تعریف دامنه

مجموعهٔ همهٔ عددهایی را که به ازای آن‌ها f(x) تعریف می‌شود، دامنهٔ تعریف تابع f می‌نامیم و آن را با نماد D مشخص می‌کنیم.

مثال ۷. دامنهٔ تابع حجم V(p) در مثال ۶، مجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی مثبت است. زیرا فشار گاز می‌تواند هر عدد مثبتی برحسب اتمسفر باشد و این بی‌معنی است که

بگوییم، فشار عددی منفی یا حتی صفر است. (طبیعت با خلأ سنخیتی ندارد).

مثال ۸. دامنهٔ تابع معکوس $f(x)=\frac{1}{x}$ ، مجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی غیر صفر است؛ یعنی مجموعهٔ همهٔ عددها به غیر از صفر. چون با جایگزینی هر عدد غیر صفر به جای x، یک مقدار عددی برای $f(x)$ به دست می‌آید.

تعریف برد

مجموعهٔ همهٔ مقادیر ممکن برای $y=f(x)$، برد تابع f نامیده می‌شود که آن را با نماد R مشخص می‌کنیم.

مثال ۹. فرض کنید هزینهٔ کل چاپ (c) برای تولید n نسخه کتاب دیوان حافظ، ۴/۰۰۰/۰۰۰ ریال برای کار با ماشین چاپ به اضافهٔ ۱۵/۰۰۰ ریال برای چاپ هر کتاب باشد. در این صورت، c تابعی از n است که از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$C=۴۰۰۰۰۰۰+۱۵۰۰۰n$$

دامنهٔ تابع هزینهٔ C، مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,\dots\}$ از همهٔ عددهای صحیح مثبت است. زیرا این بی‌معنی است که بگوییم، تعداد کتاب‌های چاپ شده عددی منفی یا عددی گویا است.

آیا برد تابع C تمام عددهای مشخص شده در لیست زیر است؟

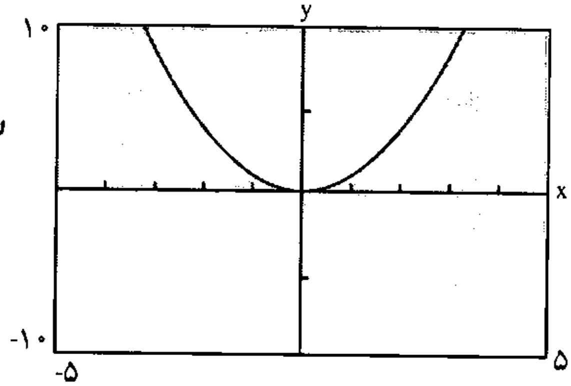
$$R=\{۴۰۱۵۰۰۰,۴۰۳۰۰۰۰,۴۰۴۵۰۰۰,۴۰۶۰۰۰۰,\dots\}$$

مثال ۱۰. برد تابع معکوس $f(x)=\frac{1}{x}$ (مانند دامنه‌اش) مجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی غیر صفر است. زیرا عبارت $\frac{1}{x}$ می‌تواند هر مقدار غیر از صفر را به خود بگیرد.

مثال ۱۱. تابع مجذور (مربع) با ضابطهٔ $f(x)=x^۲$ مشخص می‌شود.

این تابع به هر عدد x، مربع آن یعنی $x^۲$ را نسبت می‌دهد. زیرا هر عدد می‌تواند، مربع (مجذور) داشته باشد. دامنهٔ تابع f مجموعهٔ عددهای حقیقی $\mathbb{R}$ است؛ اما هر عدد غیرمنفی، مربع (مجذور) یک عدد حقیقی است. بنابراین، برد تابع f مجموعهٔ همهٔ عددهای غیرمنفی است. یعنی: $R=\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq ۰\}$

شکل ۴. نمودار تابع $y=x^۲$ را به وسیلهٔ ماشین حساب نشان می‌دهد. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، ماشین حساب فقط قسمتی از نمودار تابع را نشان می‌دهد که در نمایش پنجره‌ای استاندارد قرار دارد (روی محور xها بین ۵ و ۵- و روی محور yها بین ۱۰ و ۱۰- است). نمودار نشان می‌دهد که برد تابع f عددهای غیرمنفی هستند.



شکل ۴. نمودار تابع $f(x)=x^۲$ با ماشین حساب

مثال‌های ۹ تا ۱۱ روند پیدا کردن برد یک تابع را توضیح می‌دهند. با وجود این، اغلب، دامنهٔ تابع بیش‌تر از برد تابع موردنظر است. زیرا برای ما بسیار مهم است که بدانیم چه عددهایی را می‌توانیم جایگزین متغیر x کنیم تا به طور محسوس (شهودی) مقدار $f(x)$ را به دست آوریم.

تمرین

در تمرین‌های ۱ تا ۶، ضابطه‌های توابعی داده شده‌اند. متغیر وابسته و متغیر مستقل را در هرکدام از آن‌ها مشخص کنید:

۱. $y=x^۳-۸$

۲. $x=(t+1)^3$

۳. $V=8\sqrt{h}$

۴. $T=4u-7$

۵. $C=2\pi r$

۶. $V=S^3$

در تمرین‌های ۷ تا ۱۱، y تابعی از x تعریف شده است. این توابع را با ضابطهٔ (فرمول) یا جدول مشخص کنید.

۷. بالاترین درجهٔ حرارت (y) را در تهران برای هر ماه (x) از سال یادداشت کنید.

۸. قیمت درخت کریسمس (y) براساس طول قد (x) است. اگر:

الف) یک درخت ۶ فوتی باشد، قیمت آن بین ۲۰/۰۰۰ ریال و ۵۰/۰۰۰ ریال است.

ب) یک درخت ۸ فوتی باشد، قیمت آن بین ۲۵/۰۰۰ ریال و ۷۵/۰۰۰ ریال است.

ج) یک درخت ۱۱ فوتی باشد، قیمت آن بین ۱۰۰/۰۰۰ ریال و ۲۰۰/۰۰۰ ریال است.

د) یک درخت ۱۳ فوتی باشد، قیمت آن ۳۰۰/۰۰۰ ریال یا بیش‌تر است.

۹. $y=x^2$

۱۰. $x=y^2$

۱۱. $4x-3y=8$

در تمرین‌های ۱۲ تا ۱۵، مقدار ساده شدهٔ $f(-1)$، $f(0/5)$، $f(\sqrt{2})$، $f(a^2)$ و $f(2-a)$ را در هر یک از تابع‌های زیر به دست آورید.

۱۲. $f(x)=2x+3$

۱۳. $f(x)=x^2+1$

۱۴. $f(x)=\frac{1}{2x+1}$

۱۵. $f(x)=\sqrt{x^2+2}$

در تمرین‌های ۱۶ تا ۱۹، مقادیری از a را به دست آورید که در رابطهٔ $g(a)=13$ صدق می‌کنند.

۱۶. $g(x)=3x+4$

۱۷. $g(x)=\frac{12}{1-x}$

۱۸. $g(x)=\sqrt{5x+4}$

۱۹. $g(x)=x^2-36$

در تمرین‌های ۲۰ تا ۲۷، دامنهٔ توابع را بیابید (به یاد داشته باشید که زیر رادیکال با فرجه زوج نمی‌تواند عدد منفی قرار بگیرد و مخرج هر کسر، مخالف با صفر است).

۲۰. $f(x)=2x-7$

۲۱. $f(x)=x^2-7$

۲۲. $h(x)=\sqrt{x-3}$

۲۳. $h(x)=\sqrt{x+2}$

۲۴. $f(x)=\frac{1}{x-1}$

۲۵. $g(t)=\frac{1}{t^2+1}$

۲۶. $g(t)=\frac{1}{t^2-4}$

۲۷. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+5}}$

در تمرین‌های ۲۸ تا ۳۳ برد توابع داده شده را بیابید.

۲۸. تابع قیمت کل (C) برای چاپ n نسخه از کتاب به صورت $C(n)=2500000+195n$ است.

۲۹. مساحت دایره با شعاع r به صورت $A(r)=\pi r^2$ است.

۳۰. $f(x)=10-x$

۳۱. $f(x)=3x-1$

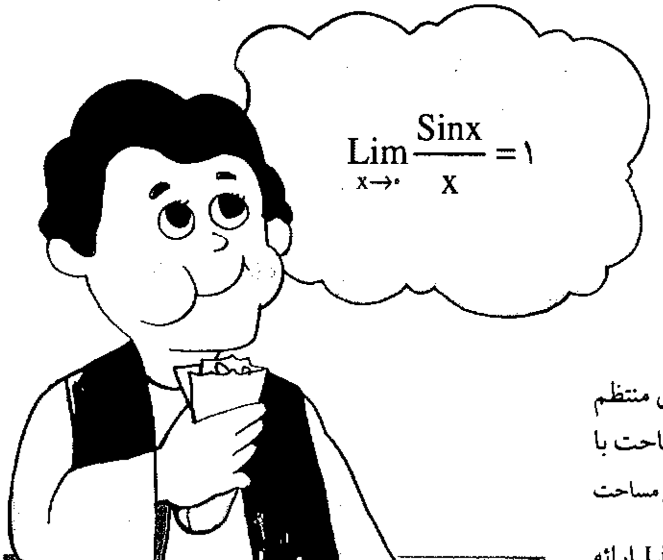
۳۲. $f(x)=8+x^2$

۳۳. $f(x)=\sqrt{x}-6$

منبع

Elementary Mathematical Modeling - Mary Ellen davis C.Henry Edwards/ university of Georgia

روشی برای اثبات $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$



محمد حسین پور سعید - گروه ریاضی دانشگاه لرستان

اگر با سیمی به طول «l» بتوان «n» ضلعی‌های منتظم ($n\in N, n\ge 3$) را ساخت، نشان می‌دهیم که مساحت با افزایش تعداد اضلاع افزایش می‌یابد (یا دایره بیش‌ترین مساحت را داراست) و سپس روشی برای اثبات $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ ارائه می‌شود.

الف) نظر به این‌که میزان مساحت، تابعی از تعداد اضلاع است، بنابراین با تعیین ضابطهٔ این تابع و مشتق‌گیری از آن نسبت به «n»، می‌توان اکسترمم تابع را تعیین کرد.

بدیهی است که محیط «n» ضلعی و هر ضلع آن به ترتیب برابر با «l» و «$\frac{l}{n}$» است، اگر «n» ضلعی را به «n» مثلث متساوی‌الساقین افراز کنیم، به‌طوری که رأس مشترک آن‌ها مرکز «n» ضلعی باشد، طول قاعدهٔ تمام مثلث‌ها برابر با «$\frac{l}{n}$» و اندازهٔ زاویهٔ روبه‌رو به قاعدهٔ آن‌ها برابر است با «$\frac{2\pi}{n}$». بنابراین، مساحت «n» ضلعی منتظم، «n» برابر مساحت هریک از مثلث‌ها خواهد بود. یعنی:

$$S=f(n)=n\left(\frac{l^2}{4n^2\tan(\frac{\pi}{n})}\right)=\frac{l^2}{4n}\ \frac{\cos(\frac{\pi}{n})}{\sin(\frac{\pi}{n})}$$

با وجودی که بنا به تعریف «n» عددی صحیح است، برای این‌که تابعی پیوسته و مشتق‌پذیر داشته باشیم، فرض می‌کنیم، «n» بتواند تمام اعداد حقیقی در بازهٔ $[3,\infty)$ را بپذیرد. بنابراین داریم:

$$\frac{df}{dn}=\frac{l^2}{4n^2}\times\frac{\frac{\pi}{n}-\sin(\frac{\pi}{n})\cos(\frac{\pi}{n})}{\sin^2(\frac{\pi}{n})}$$

$$=\frac{l^2}{8n^2\sin^2(\frac{\pi}{n})}\times\left(\frac{2\pi}{n}-\sin(\frac{2\pi}{n})\right)$$

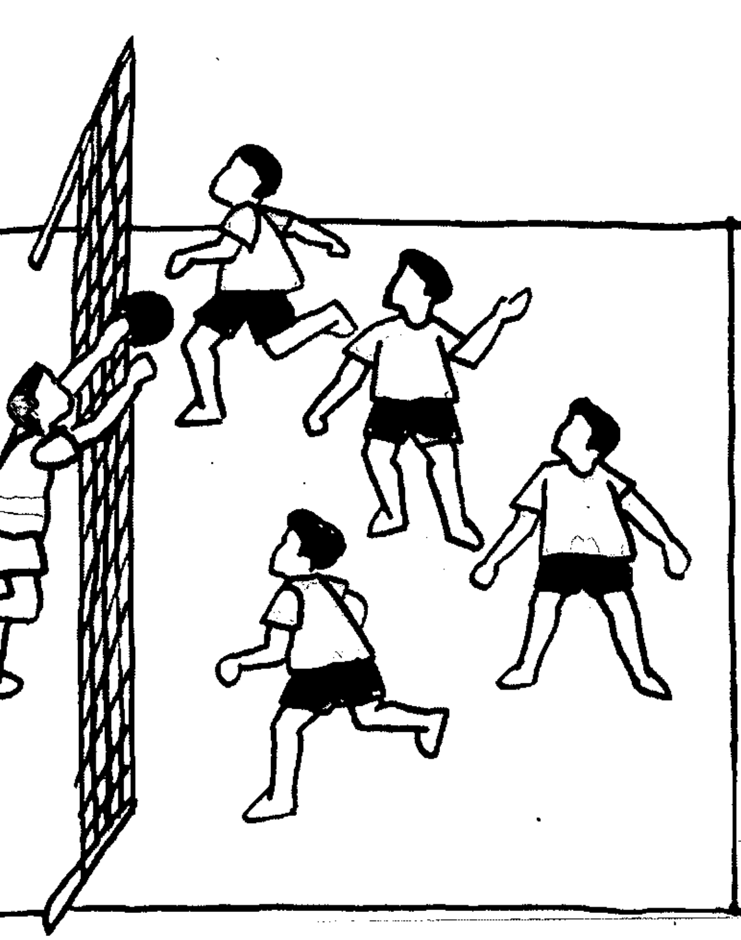
به آسانی می‌توان نشان داد که $t\ge \sin t : t\ge 0$. حال اگر تعریف کنیم $t=\frac{2\pi}{n}$ آن‌گاه با توجه به رابطهٔ فوق، $\frac{df}{dn}\ge 0$ را خواهیم داشت؛ یعنی مساحت، تابعی غیر نزولی از «n» است و با افزایش «n»، مساحت نیز افزایش می‌یابد یا به بیان معادل، دایره بیش‌ترین مساحت را دارد.

ب) برای اثبات $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$، می‌توان از قاعدهٔ هوپیتال، مبحث هم‌ارزی توابع یا از قضیهٔ فشار استفاده کرد. با این وجود با بهره‌گیری از مطالب فوق، روش مناسب زیر ارائه می‌شود:

می‌دانیم که مساحت دایره‌ای با محیط «l» برابر است با $\frac{l^2}{4\pi}$. بنابراین با توجه به قسمت الف داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{l^2}{4n\tan(\frac{\pi}{n})}=\frac{l^2}{4\pi}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{\tan(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$$

که با توجه به رابطهٔ $\frac{\sin x}{x}=\frac{\tan x}{x}\times\cos x$ و استفاده از قضایای «حد» به آسانی می‌توان درستی $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ را نشان داد.

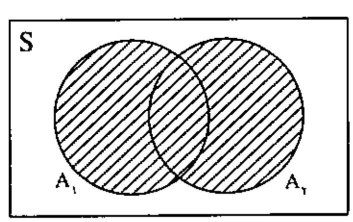


کاربردهایی از اصل شمول و عدم شمول

اصل شمول و عدم شمول، یکی از روش‌های حلّ مسائل شمارشی در ریاضیات ترکیباتی است که ابتدا به معرفی این روش می‌پردازیم و سپس آن‌را روی چند مثال پیاده می‌کنیم. فرض کنید $|A|$ به معنای تعداد اعضای مجموعهٔ متناهی A باشد.

گزارهٔ ۱: اصل شمول و عدم شمول برای دومجموعهٔ متناهی

فرض کنیم S مجموعه N عضوی و A_1 و A_2 دو زیرمجموعه از S باشند. در این صورت تعداد اعضای اجتماع این دو مجموعه از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید (شکل ۱):

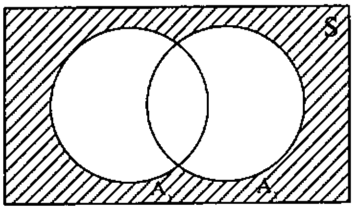


شکل ۱

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| \qquad (۱)$$

یعنی: تعداد اعضایی از S که حداقل به یکی از دو مجموعهٔ A_1 یا A_2 تعلق دارند، برابر است با تعداد اعضای دو مجموعهٔ A_1 و A_2 منهای تعداد اعضای مشترک این دو مجموعه (شکل ۱).

اگر A_1 و A_2 اشتراکی با یکدیگر نداشته باشند، ($|A_1 \cap A_2| = 0$) بنابراین از رابطهٔ (۱) داریم: $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2|$. علت نامگذاری «شمول و عدم شمول» روی این اصل، آن است که در محاسبهٔ $|A_1| + |A_2|$، اعضای مشترک بین دو مجموعهٔ A_1 و A_2 دوبار شمرده می‌شوند و این به معنای «شمول» دوبارهٔ این اعضاست. از این رو برای به دست آوردن تعداد کلّ اعضای اجتماع دو مجموعه، باید یکی از این دوبار را کنار گذاشت و این به معنای «عدم شمول» یک بار اعضای مشترک این دو مجموعه است و به این ترتیب، رابطهٔ (۱) حاصل می‌شود. حال اگر هدف، یافتن اعضایی از S باشد که در هیچ‌کدام از دو مجموعهٔ A_1 و A_2 نیستند، به صورت زیر عمل می‌کنیم (شکل ۲).

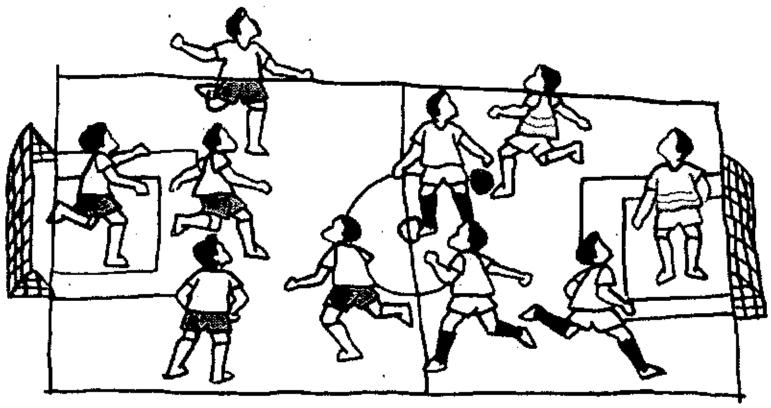


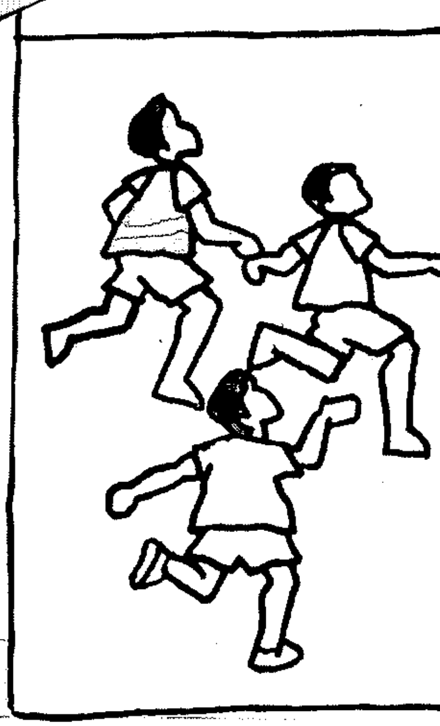
شکل ۲

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| = |\overline{A_1 \cup A_2}| = N - |A_1 \cup A_2| \qquad (۲)$$

قسمت اول

دکتر محمّد علی فریبرزی عراقی
عضو هیأت علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران





برای دانش‌آموزان دوره پیش دانشگاهی رشته ریاضی

مثال ۱ : در یک کلاس ۴۰ نفری، ۳۲ نفر در درس فیزیک و ۲۴ نفر در درس ریاضی افتاده‌اند و تنها ۴ نفر این دو درس را گذرانده‌اند؛ تعیین کنید چند نفر در هر دو درس افتاده‌اند؟

حل : اگر S مجموعهٔ دانش‌آموزان این کلاس باشد، آن‌گاه $|S| = ۴۰$ است. فرض کنیم A_1 و A_2 به ترتیب مجموعهٔ دانش‌آموزانی باشند که در درس فیزیک و درس ریاضی افتاده‌اند، در این صورت: $|A_1| = ۳۲, |A_2| = ۲۴$ و چون ۴ نفر در این کلاس، این دو درس را گذرانده‌اند، پس تعداد دانش‌آموزانی که حداقل دریکی از این دو درس افتاده‌اند، برابر است با :

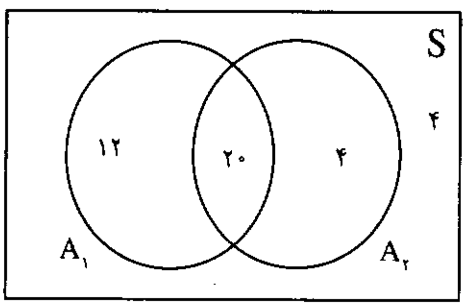
$$|A_1 \cup A_2| = ۴۰ - ۴ = ۳۶$$

حالا بنابر رابطهٔ (۱) داریم:

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cup A_2|$$
$$\Rightarrow |A_1 \cap A_2| = ۳۲ + ۲۴ - ۳۶ = ۲۰$$

بنابراین ۲۰ نفر در هر دو درس فوق افتاده‌اند. همان‌طوری که در شکل ۳ ملاحظه می‌شود، می‌توان نتیجه گرفت:

$۱۲ = |A_1| - |A_1 \cap A_2|$ = تعداد دانش‌آموزانی که فقط در درس فیزیک افتاده‌اند

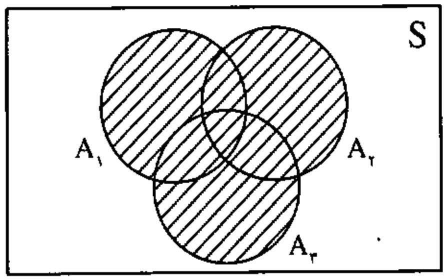


شکل ۳

$۴ = |A_2| - |A_1 \cap A_2|$ = تعداد دانش‌آموزانی که فقط در درس ریاضی افتاده‌اند

گزارهٔ ۲ : «اصل شمول و عدم شمول برای سه مجموعهٔ متناهی»

فرض کنیم S مجموعه‌ای N عضوی و A_1 و A_2 و A_3 سه زیر مجموعه از S باشند، در این صورت تعداد اعضای اجتماع این سه مجموعه، از رابطهٔ صفحه بعد به دست می‌آید :



شکل ۴

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1|+|A_2|+|A_3| - \big[|A_1\cap A_2| + |A_1\cap A_3| + |A_2\cap A_3|\big] + |A_1\cap A_2\cap A_3| \qquad (3)$$

برهان: با استفاده از گزارهٔ ۱ و قوانین مجموعه‌ها، رابطهٔ ۳ را ثابت می‌کنیم. فرض می‌کنیم $B_1 = A_2 \cup A_3$ در این صورت:

$$|A_1\cup A_2\cup A_3| = |A_1 \cup B_1| = |A_1|+|B_1|-|A_1\cap B_1| \qquad (4)$$

از طرفی:

$$|B_1| = |A_2\cup A_3| = |A_2|+|A_3|-|A_2\cap A_3|$$

و

$$|A_1\cap B_1| = |A_1 \cap (A_2\cup A_3)| = |(A_1\cap A_2)\cup(A_1\cap A_3)|$$
$$= |A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3| - |(A_1\cap A_2)\cap(A_1\cap A_3)|$$
$$= |A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|-|A_1\cap A_2\cap A_3|$$

با جایگذاری این نتایج در رابطهٔ (۴)، رابطهٔ (۳) به دست می‌آید.

نتیجه: اگر سه مجموعهٔ A_1، A_2 و A_3 با هم اشتراکی نداشته باشند، آن‌گاه:

$$|A_1\cup A_2\cup A_3| = |A_1|+|A_2|+|A_3| \qquad (5)$$

همچنین تعداد اعضایی از مجموعهٔ S که به هیچ کدام از سه مجموعهٔ A_1، A_2 و A_3 تعلّق ندارند، برابرند با:

$$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3| = |\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| = N - |A_1\cup A_2\cup A_3| \qquad (6)$$

به منظور حلّ مثال‌هایی از رابطه‌های (۳) و (۶)، ابتدا گزاره‌ای از بحث ترکیبات را یادآوری می‌کنیم:

گزارهٔ ۳: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+\dots+x_k=n$ برابر است با $\binom{n+k-1}{n}$. دو مثال زیر را برای آشنایی با گزارهٔ ۳ حل می‌کنیم:

مثال ۲: تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادلهٔ $x_1+x_2+x_3=20$ را به دست آورید.

حل: هدف، یافتن تعداد جواب‌های صحیح معادلهٔ $x_1+x_2+x_3=20$ با شرط $x_i>0$، $i=1,2,3$، است که معادل است با شرط $x_i \geq 1$، $i=1,2,3$. فرض می‌کنیم $y_i = x_i - 1$، با جایگذاری آن در معادله خواهیم داشت:

$$y_1+1+y_2+1+y_3+1=20$$
$$\Rightarrow y_1+y_2+y_3=17,\quad y_i\geq 0,\quad i=1,2,3$$

لذا مسأله منجر به یافتن تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $y_1+y_2+y_3=17$ می‌شود که بنا به گزارهٔ (۳) برابر است با:

$$\binom{17+3-1}{17}=\binom{19}{17}=\binom{19}{2}=\frac{19\times 18}{2}=171$$

مثال ۳: تعداد جواب‌های صحیح نامنفی $y_1+y_2+y_3=20$ را با شرط $x_1>2$ و $x_3>3$ به دست آورید.

حل: دو شرط فوق معادلند با $x_1\geq 3$ و $x_3 \geq 4$. فرض می‌کنیم $y_1=x_1-3$ و $y_3=x_3-4$، با جایگذاری آن‌ها در معادله خواهیم داشت:

$$y_1+3+x_2+y_3+4=20 \Rightarrow y_1+x_2+y_3=13$$

که در آن $x_2\geq 0$، $y_1 \geq 0$ و $y_3\geq 0$. بنابر گزارهٔ ۳ تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ اخیر برابر است با:

$$\binom{13+3-1}{13}=\binom{15}{13}=\binom{15}{2}=\frac{15\times 14}{2}=105$$

نتیجه: به منظور یافتن تعداد جواب‌های صحیح معادلهٔ $x_1+x_2+...+x_k=n$ با شرط $x_i \ge a_i$ و $i=1,...,k$ از تغییر متغیر $y_i=x_i-a_i$ استفاده می‌کنیم تا معادلهٔ فوق به معادلهٔ زیر تبدیل شود:

$$y_1+y_2+...+y_k=n-(a_1+a_2+...+a_k)$$

که در آن $y_i \ge 0$ است. حال اگر $l=a_1+a_2+...+a_k$ و $n \ge l$، مسأله منجر به یافتن تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $y_1+y_2+...+y_k=n-l$، می‌شود که بنابر گزاره ۳ برابر است با:

$$\binom{n-l+k-1}{n-l}$$

مثال ۴: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+x_3=20$ را با شرط‌های $x_i \le 10$ و $i=1,2,3$ به دست آورید.

حل: فرض می‌کنیم S مجموعهٔ جواب‌های صحیح و نامنفی این معادله باشد، بنابر گزارهٔ ۳ داریم:

$$|S|=\binom{20+3-1}{20}$$

$$\Rightarrow |S|=N=231$$

چون یافتن تعداد جواب‌های صحیح این معادله، با شروط داده شده، به طور مستقیم مقدور نیست، شروط مذکور را به گونه‌ای تغییر می‌دهیم که بتوان تعداد جواب‌های صحیح را به طور مستقیم و به شیوه‌ای که در نتیجهٔ فوق مطرح شده است، به دست آورد. به این منظور، نقیض سه شرط فوق را می‌آوریم و سه مجموعهٔ A_1، A_2 و A_3 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

شرط ۱ $x_1 \le 10 \xrightarrow{\text{نقیض}} x_1 > 10 \Rightarrow$

$A_1=\{(x_1,x_2,x_3)\in S \mid x_1>10\}$

شرط ۲ $x_2 \le 10 \xrightarrow{\text{نقیض}} x_2 > 10 \Rightarrow$

$A_2=\{(x_1,x_2,x_3)\in S \mid x_2>10\}$

شرط ۳ $x_3 \le 10 \xrightarrow{\text{نقیض}} x_3 > 10 \Rightarrow$

$A_3=\{(x_1,x_2,x_3)\in S \mid x_3>10\}$

بنابراین مجموعهٔ A_i، $i=1,2,3$ عبارت است از مجموعهٔ جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+x_3=20$ با شرط $x_i>10$ و $i=1,2,3$.

حال هدف، یافتن تعدادی از اعضای S است که در هیچ کدام از مجموعه‌های A_1، A_2 و A_3 قرار ندارند؛ یعنی محاسبهٔ $|\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}|$.

به منظور استفاده از رابطهٔ (۳) ابتدا $|A_1|$ را می‌یابیم که معادل است با یافتن تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+x_3=20$ با شرط $x_1 \ge 11$. با فرض $y_1=x_1-11$ این مسأله معادل است با یافتن تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $y_1+x_2+x_3=9$ که برابر است با $\binom{9+3-1}{9}=55$ لذا $|A_1|=55$ و به طور مشابه: $|A_2|=|A_3|=55$.

از طرفی چون سه مجموعهٔ A_1، A_2 و A_3 دو به دو با هم اشتراک ندارند، بنابر رابطهٔ (۵).

$$|A_1\cup A_2\cup A_3|=55+55+55=165$$

و بنابر رابطهٔ (۶) داریم:

$$|\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}|=231-165=66$$

یعنی این معادله دارای ۶۶ جواب با شرط $x_i \le 10$ و $i=1,2,3$ است.

مثال ۵: تعداد جواب‌های صحیح معادلهٔ $x_1+x_2+x_3=20$ را با شرط $2 \le x_1 \le 4$ و $3 \le x_2 \le 6$ و $4 \le x_3 \le 12$ بیابید.

حل: شروط داده شده در این مثال را به شروطی تبدیل می‌کنیم که منجر به یافتن تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ای می‌شود که بتوان به طور مستقیم تعداد جواب‌های آن را یافت.

شرط اول $2 \le x_1 \le 4 \Rightarrow 0 \le x_1-2 \le 2 \Rightarrow$

$y_1=x_1-2$ و $0 \le y_1 \le 2$

شرط دوم $3 \le x_2 \le 6 \Rightarrow 0 \le x_2 - 3 \le 3 \Rightarrow$

$y_2 = x_2 - 3$ و $0 \le y_2 \le 3$

شرط سوم $4 \le x_3 \le 12 \Rightarrow 0 \le x_3 - 4 \le 8 \Rightarrow$

$y_3 = x_3 - 4$ و $0 \le y_3 \le 8$

با جایگذاری در معادله خواهیم داشت:

$$y_1 + 2 + y_2 + 3 + y_3 + 4 = 20 \Rightarrow$$
$$y_1 + y_2 + y_3 = 11$$

لذا مسأله منجر به یافتن تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادلهٔ $y_1 + y_2 + y_3 = 11$ با شرط‌های $y_1 \le 2$ و $y_2 \le 3$ و $y_3 \le 8$ می‌شود. مشابه آنچه که در مثال قبل گفته شد، سه مجموعهٔ A_1، A_2 و A_3 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

شرط ۱ $y_1 \le 2 \xrightarrow{\text{نقیض}} y_1 > 2 \Rightarrow y_1 \ge 3 \Rightarrow$

$$A_1 = \{(y_1, y_2, y_3) \in S | y_1 \ge 3\}$$

شرط ۲ $y_2 \le 3 \xrightarrow{\text{نقیض}} y_2 > 3 \Rightarrow y_2 \ge 4 \Rightarrow$

$$A_2 = \{(y_1, y_2, y_3) \in S | y_2 \ge 4\}$$

شرط ۳ $y_3 \le 8 \xrightarrow{\text{نقیض}} y_3 > 8 \Rightarrow y_3 \ge 9 \Rightarrow$

$$A_3 = \{(y_1, y_2, y_3) \in S | y_3 \ge 9\}$$

که در آن S عبارت است از مجموعهٔ جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $y_1 + y_2 + y_3 = 11$ که بنا بر گزارهٔ ۳ $N = |S| = \binom{13}{11} = 78$ و هدف به دست آوردن $|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}|$ است. به این منظور، ابتدا $|A_1|$ را می‌یابیم؛ یعنی یافتن تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $y_1 + y_2 + y_3 = 11$ با شرط $y_1 \ge 3$ که با فرض $z_1 = y_1 - 3$، منجر به یافتن تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $z_1 + y_2 + y_3 = 8$ می‌شود و برابر است با $\binom{10}{8} = 45$، لذا $|A_1| = 45$ و به طور مشابه $|A_2| = \binom{7+3-1}{7} = 36$ و $|A_3| = \binom{4}{2} = 6$

همچنین $|A_1 \cap A_2|$ یعنی تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $y_1 + y_2 + y_3 = 11$ با شرط‌های $y_1 \ge 3$ و $y_2 \ge 4$ که با فرض $Z_1 = y_1 - 3, Z_2 = y_2 - 4$ مسأله منجر به یافتن تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادلهٔ $Z_1 + Z_2 + y_3 = 4$ می‌شود که برابر است با $\binom{6}{4} = 15$. لذا $|A_1 \cap A_2| = 15$. در ضمن چون A_1 و A_3 و همچنین A_2 و A_3 با هم اشتراکی ندارند،

$|A_1 \cap A_3| = 0$ و $|A_2 \cap A_3| = 0$ و

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$

بنابر رابطهٔ (۳):

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 45 + 36 + 6 - 15 = 72$$

در نتیجه بنابر رابطهٔ ۶ خواهیم داشت:

$$|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| = 78 - 72 = 6$$

این ۶ جواب عبارتند از: (۱۰ , ۶ , ۴) و (۱۱ , ۵ , ۴) و (۱۲ , ۴ , ۴) و (۱۱ , ۶ , ۳) و (۱۲ , ۵ , ۳) و (۱۲ , ۶ , ۲)

مثال ۶: مطلوب است تعیین تعداد اعداد صحیح و مثبت n به طوری که $n \le 600$ و n بر ۳ یا ۵ یا ۷ بخش‌پذیر نباشد.

حل: فرض کنیم $S = \{1, 2, 3, \dots, 600\}$ و A_1 و A_2 و A_3 به ترتیب مجموعهٔ اعضایی از S باشند که بر ۳، ۵ و ۷ بخش‌پذیرند. هدف، محاسبهٔ $|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}|$ است. می‌دانیم اگر x عدد صحیح و مثبتی باشد، تعداد اعداد صحیح و مثبت نابیشتر از n که بر x بخشپذیرند، برابر است با $\left[\frac{n}{x}\right]$ که در آن [ ] به معنای جزء صحیح عدد حاصل است. بنابراین:

$$A_1 = \{n \in s \mid 3 | n\} \Rightarrow |A_1| = \left[\frac{600}{3}\right] = 200$$

$$A_2 = \{n \in s \mid 5 | n\} \Rightarrow |A_2| = \left[\frac{600}{5}\right] = 120$$

$$A_3 = \{n \in s \mid 7 | n\} \Rightarrow |A_3| = \left[\frac{600}{7}\right] = 85$$

از طرفی $|A_1 \cap A_2|$ به معنای تعداد اعضایی از S است

که هم بر ۳ و هم بر ۵، یعنی بر ۱۵ بخش‌پذیرند؛ بنابراین: $|A_1 \cap A_2| = \left[\frac{600}{15}\right] = 40$ و به طور مشابه:

$$|A_1 \cap A_3| = \left[\frac{600}{21}\right] = 28 \text{ و } |A_2 \cap A_3| = \left[\frac{600}{35}\right] = 17$$

و در نهایت: $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left[\frac{600}{105}\right] = 5$، لذا بنابر رابطه (۳) داریم:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 200 + 120 + 85 - [40 + 17 + 28] + 5 = 325$$

و در نتیجه بنابر رابطهٔ (۶):

$$|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| = 600 - 325 = 275$$

یعنی ۲۷۵ عدد از اعضای S وجود دارند که بر ۳ یا ۵ و یا ۷ بخش‌پذیر نیستند.

مثال ۷: مطلوب است تعیین تعداد جایگشت‌های حروف الفبای فارسی؛ به طوری‌که در هیچ کدام از آن‌ها الگوهای «گراف» یا «دور» و یا «جهت» روی ندهد (تکرار حروف مجاز نیست)؟

حل: فرض کنیم S مجموعهٔ تمام جایگشت‌های ۳۲ حرف الفبای فارسی باشد؛ در این صورت:

$$|S| = 32!$$

همانند مثال‌های قبل، چون محاسبهٔ تعداد جایگشت‌های S با شرط مذکور به طور مستقیم مقدور نیست، ابتدا تعداد حالاتی را که حداقل یکی از این سه الگو در جایگشت‌های حروف به وجود می‌آیند، با استفاده از قوانین ترکیبات می‌یابیم. به این منظور، مجموعه‌های A_1 و A_2 و A_3 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$A_1 =$ مجموعهٔ جایگشت‌هایی از S که شامل الگوی «گراف» باشند.

$A_2 =$ مجموعهٔ جایگشت‌هایی از S که شامل الگوی «دور» باشند.

$A_3 =$ مجموعهٔ جایگشت‌هایی از S که شامل الگوی «جهت» باشند.

ابتدا به محاسبهٔ $|A_i|$، $i = 1, 2, 3$ می‌پردازیم. به عنوان مثال، برای محاسبهٔ $|A_1|$، تعداد جایگشت‌ها عبارتند از:

گ ر ا ف	ب پ ت ...
۱ شیء واحد	۲۸ حرف دیگر

$|A_1| =$ تعداد جایگشت‌های ۲۹ شیء متمایز $= 29!$

و به طور مشابه: $|A_2| = |A_3| = 30!$

حال به محاسبهٔ $|A_i \cap A_j|$، $1 \le i \ne j \le 3$، می‌پردازیم. به عنوان مثال، برای محاسبهٔ $|A_1 \cap A_3|$ تعداد جایگشت‌ها عبارتند از:

گ ر ا ف	ج ه ت	ب پ ت ...
۱ شیء واحد	۱ شیء واحد	۲۵ حرف دیگر

$|A_1 \cap A_3| =$ تعداد جایگشت‌های ۲۷ شیء متمایز $= 27!$

و به طور مشابه: $|A_2 \cap A_3| = 28!$ و $|A_1 \cap A_2| = 0$؛ زیرا بین حروف «گراف» و «دور»، حرف مشترک وجود دارد و این حالت در جایگشت‌های حروف روی نمی‌دهد. به همین علت: $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$ است. لذا بنابر رابطه‌های (۳) و (۶) داریم:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 29! + 30! + 30! - 28! - 27! = 49503 \times 27! \Rightarrow |\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| = 32! - 27! \times 49503 = 27! \times 24115617$$

این تعداد حالاتی است که هیچ کدام از این سه الگو در جایگشت‌های حروف فارسی روی نمی‌دهند.

اصل شمول و عدم شمول را می‌توان برای $K \ge 2$ مجموعه A_1، A_2، ... و A_K بیان نمود.

گزارهٔ ۴: صورت کلی اصل شمول و عدم شمول

فرض کنیم A_1، A_2، ... و A_K زیر مجموعه‌هایی متناهی از مجموعهٔ N عضوی مفروض S باشند؛ در این صورت تعداد اعضای اجتماع این k مجموعه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_K| = \sum_{i=1}^{K} |A_i| - \sum_{1 \le i \le j \le K} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i \le j < l \le K} |A_i \cap A_j \cap A_l| - \ldots + (-1)^{K-1} \cdot |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_K| \qquad (۷)$$

برهان: به منظور اثبات رابطهٔ (۷)، ثابت می‌کنیم هر عضو دلخواه $x \in S$ به تعداد مساوی در دو طرف این رابطه شمرده می‌شود. اگر x به هیچکدام از مجموعه‌های A_1 تا A_K تعلق نداشته باشد آن‌گاه x در دو طرف رابطهٔ (۷) صفر بار شمرده می‌شود. حال فرض کنیم x به t مجموعه از مجموعه‌های A_1 تا A_K تعلق داشته باشد $(1 \le t \le K)$. در این حالت x یک بار در طرف چپ رابطهٔ (۷) شمرده می‌شود. در طرف راست این رابطه؛ x به صورت زیر شمرده می‌شود:

$\binom{t}{1}$ بار در جملهٔ $\sum_{i=1}^{K} |A_i|$، (x یک بار در هریک از t مجموعه شمرده می‌شود.)

$\binom{t}{2}$ بار در جملهٔ $\sum_{1 \le i \le j \le K} |A_i \cap A_j|$ (x، یک بار در هر دو مجموعه‌ای که از بین این t مجموعه انتخاب می‌کنیم شمرده می‌شود).

$\binom{t}{3}$ بار در جملهٔ $\sum_{1 \le i \le j < l \le t} |A_i \cap A_j \cap A_l|$ (x، یک بار در هر سه مجموعه‌ای که از بین این t مجموعه انتخاب می‌کنیم شمرده می‌شود).

با ادامه این استدلال معلوم می‌شود که سهم x در طرف راست رابطهٔ (۷) برابر است با:

$$\binom{t}{1} - \binom{t}{2} + \binom{t}{3} - \ldots + (-1)^{t-1} \binom{t}{t} = 1$$

یعنی x یک بار نیز در طرف راست رابطه شمرده می‌شود.

می‌دانیم $\binom{t}{0} - \binom{t}{1} + \binom{t}{2} - \ldots + (-1)^t \binom{t}{t} = 0$ است. به این ترتیب در هر حالت سهم x در دو طرف رابطهٔ (۷) برابر است.

رابطهٔ (۷) تعداد آن دسته از اعضای S را که حداقل به یکی از مجموعه‌های A_1 تا A_K تعلق دارند مشخص می‌کند. به این ترتیب، تعداد اعضایی از مجموعه N عضوی S که به هیچ‌کدام از مجموعه‌های A_1 تا A_K تعلق ندارند به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$|\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_K}| = |\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_K| = N - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_K| \qquad (۸)$$

در حالت کلی، اعضای مجموعه‌های A_1 تا A_K ویژگی‌هایی دارند که بر اساس آن‌ها رابطهٔ (۷) تعداد اعضایی از S را که حداقل در یکی از این ویژگی‌ها صدق می‌کنند، را مشخص می‌کند و رابطهٔ (۸) تعداد اعضایی از S را که در هیچ‌کدام از این K ویژگی صدق نمی‌کنند، به دست می‌آورد.

اگر $k = 3$ باشد، رابطهٔ (۳) که صورت اصل شمول و عدم شمول برای سه مجموعهٔ A_1 و A_2 و A_3 است، حاصل می‌شود. اگر $K = 4$ باشد، رابطهٔ (۷) به صورت زیر بیان می‌شود که صورت اصل شمول و عدم شمول برای چهار مجموعهٔ A_1، A_2، A_3 و A_4 است.

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4|) + (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \qquad (۹)$$

ملاحظه می‌شود که در رابطهٔ (۹) تعداد جملات سمت راست برابرند با: ۱۵ = ۱ + ۴ + ۶ + ۴ و در حالت کلی، تعداد جملات سمت راست رابطهٔ (۷) برابرند با:

$$\binom{K}{1}+\binom{K}{2}+\binom{K}{3}+\dots+\binom{K}{K}=2^K-1\ ,\ K\ge 1$$

مثال ۸: به چند طریق می‌توان ۲۰ سیب را بین ۴ کودک طوری توزیع نمود که به هر کودک حداکثر ۷ سیب برسد؟

حل: مسأله منجر به یافتن تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4=20$ با شرط‌های $x_i\le 7$ و $1\le i\le 4$ می‌شود.

فرض می‌کنیم S مجموعهٔ جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4=20$ باشد.

لذا، $|S|=\binom{20+4-1}{20}=\binom{23}{20}=1771$. حال مجموعه‌های A_i، $1\le i\le 4$، را به صورت اعضایی از S که در شرط $x_i>7$ (یا $x_i\ge 8$) صدق می‌کنند، تعریف می‌کنیم. لذا هدف یافتن $\overline{A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4}=\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3\cap\bar{A}_4$ است.

به این منظور، ابتدا جملات سمت راست رابطهٔ (۹) را به دست می‌آوریم. برای یافتن $|A_1|$، تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4=20$ را با شرط $x_1\ge 8$ می‌یابیم. در این حالت کافی است تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1'+x_2+x_3+x_4=12$ را که در آن $x_1'=x_1-8\ge 0$ است، به دست آوریم. به این صورت:

$$\binom{12+4-1}{12}=\binom{15}{12}$$ و

چون $|A_1|=|A_2|=|A_3|=|A_4|$، لذا $\sum_{i=1}^{4}|A_i|=\binom{4}{1}\binom{15}{12}$. حال $|A_1\cap A_2|$ را می‌یابیم. به این منظور باید تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4=20$ را با شرط $x_1\ge 8$ و $x_2\ge 8$ به دست آوریم. برای این کار کافی است تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1'+x_2'+x_3+x_4=4$ را که در آن $x_1'=x_1-8\ge 0$ و $x_2'=x_2-8\ge 0$ است، بیابیم که برابر می‌شود با $\binom{4+4-1}{4}=\binom{7}{4}$. چون تعداد اعضای اشتراک‌های دوبه‌دوی مجموعه‌های A_i، $1\le i\le 4$، برابر هستند لذا داریم:

$$\sum_{1\le i\le j\le 4}|A_i\cap A_j|=\binom{4}{2}\binom{7}{4}$$

از طرفی $|A_1\cap A_2\cap A_3|=0$ است، زیرا تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ فوق با شرایط $x_1\ge 8$ و $x_2\ge 8$ و $x_3\ge 8$ برابر است با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1'+x_2'+x_3'+x_4=-4$، $x_i'=x_i-8$، $i=1,2,3$ که برابر صفر است.

به همین ترتیب:

$$|A_2\cap A_3\cap A_4|=|A_1\cap A_2\cap A_4|=$$
$$|A_1\cap A_3\cap A_4|=|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|=0$$

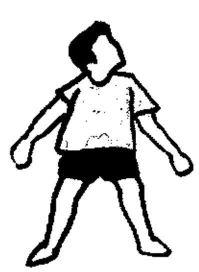
در نتیجه بنابر رابطهٔ (۹)، خواهیم داشت:

$$|A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4|=\binom{4}{1}\binom{15}{12}-\binom{4}{2}\binom{7}{4}+0-0=1610$$

لذا:

$$|\overline{A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4}|=|S|-|A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4|=1771-1610=161$$

در قسمت دوم مقاله به ادامهٔ کاربردهایی از اصل شمول و عدم شمول، از جمله به دست آوردن تعداد توابع پوشا از یک مجموعهٔ m عضوی به یک مجموعهٔ n عضوی، $m\ge n$، می‌پردازیم.



منابع

۱. ریاضیات گسسته و ترکیباتی رالف گریمالدی

۲. ریاضیات گسسته مقدماتی. و. ک. بالاکریشنان

اتحاد و معادله

پرویز شهریاری

دانش‌آموزی می‌خواهد این معادلهٔ مثلثاتی را حل کند:

$$\tan(x+\frac{\pi}{۴}) = ۲\mathrm{Cot}\, x - ۱ \qquad (۱)$$

او راه حلّ عادی را برای حل انتخاب می‌کند و از رابطهٔ مربوط به مجموع تانژانت دو کمان یاری می‌گیرد:

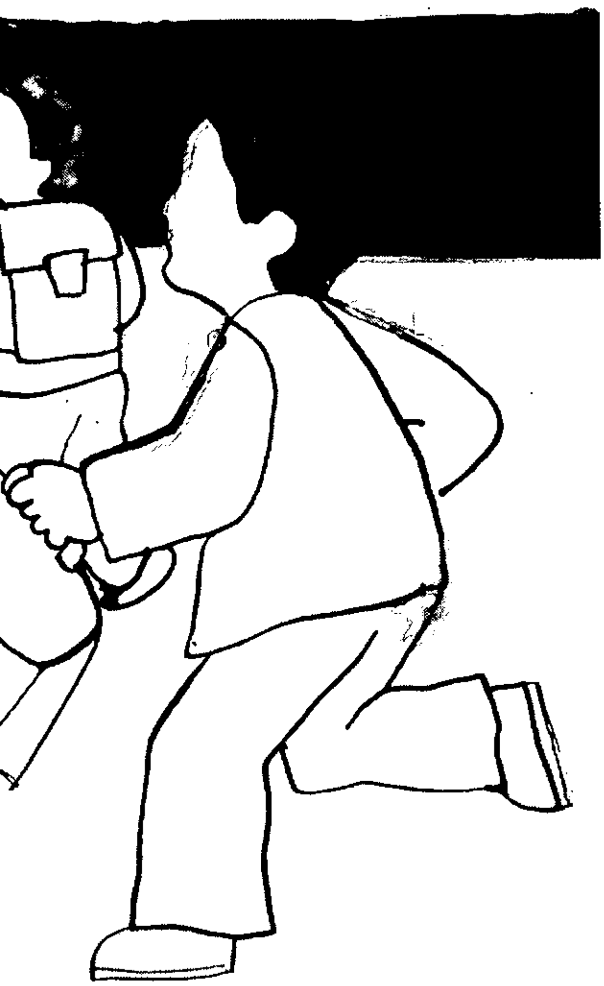
$$\frac{\tan x + ۱}{۱ - \tan x} = \frac{۲}{\tan x} - ۱ \qquad (۲)$$

دو سمت برابری را به یک مخرج تبدیل می‌کند و صورت‌ها را برابر قرار می‌دهد:

$$\tan x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x = \arctan\frac{۱}{۲} + k\pi$$

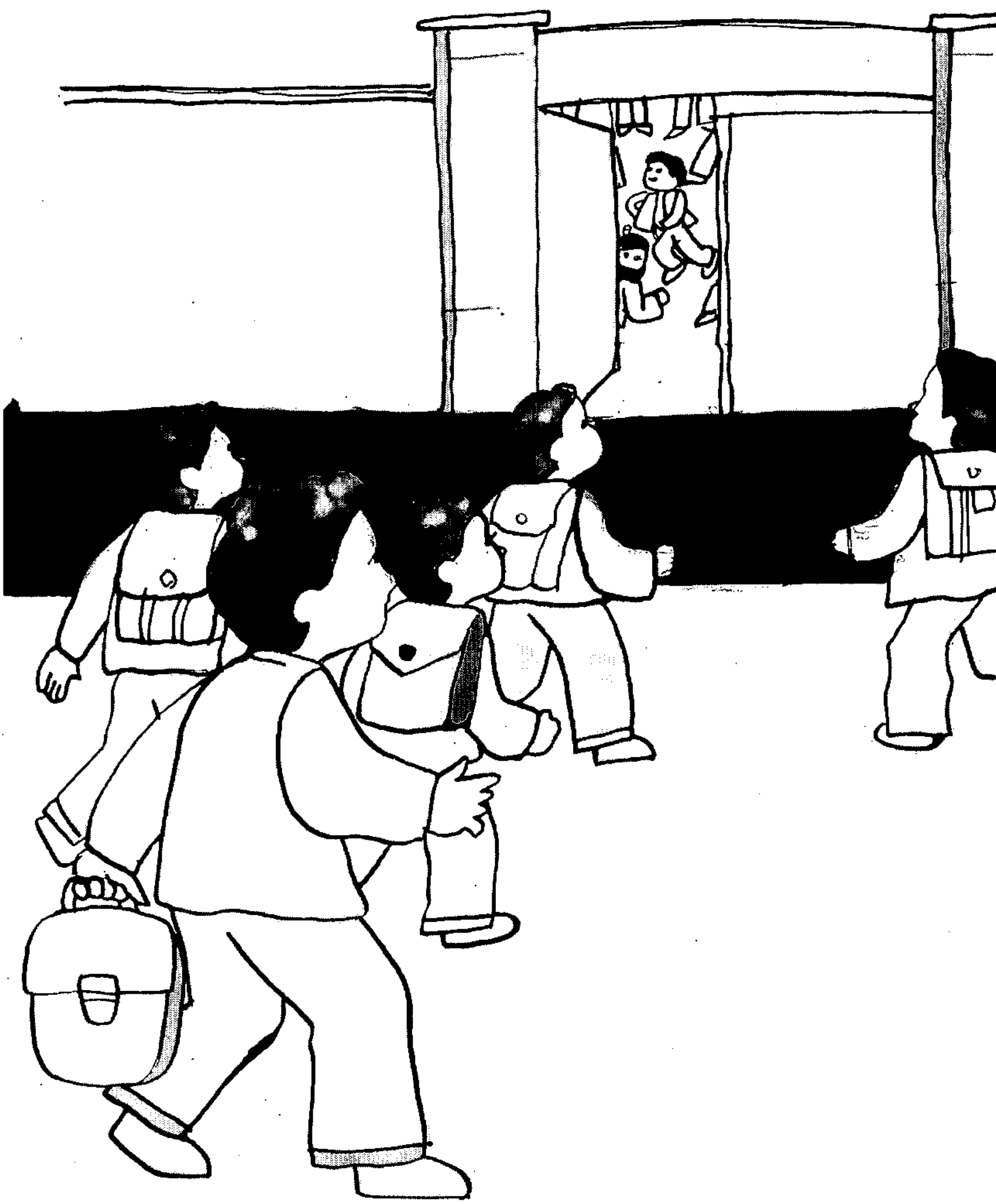
از آن‌جا که $\tan x$ برابر $\frac{۱}{۲}$ شده است، نه ۰ و نه ۱، در پاسخی که پیدا شده است، تردیدی وجود ندارد و ضمن آزمایش هم، درستی آن روشن می‌شود (درواقع، حتی آزمایش هم لازم نیست). به نظر می‌رسد که همه چیز مرتّب است. با وجود این، بهتر است در داوری شتاب نکنید.

در معادلهٔ اصلی، $x = \frac{\pi}{۲}$ یا هر یک از عددهای $x = \frac{(۲k+۱)\pi}{۲}$ را قرار دهید. متوجه می‌شوید که در معادله صدق می‌کند؛ یعنی این‌ها هم ریشهٔ معادله هستند. این ریشه‌ها را، ضمن عبور از معادلهٔ (۱) به معادلهٔ (۲) از دست داده‌ایم؛ زیرا $x = \frac{(۲k+۱)\pi}{۲}$ که در معادلهٔ (۱) صدق می‌کند، در معادلهٔ (۲) صادق نیست. مگر نه این است که $\tan x$ به ازای این مقدارها مفهوم خود را از دست می‌دهد؟ بنابراین همهٔ مطلب را باید در این تبدیل‌ها جست‌وجو کرد:



$$\tan(x+\frac{\pi}{۴}) = \frac{۱+\tan x}{۱-\tan x}, \quad \mathrm{Cot}\, x = \frac{۱}{\tan x}$$

سمت چپ برابری‌ها، به ازای $x = \frac{(۲k+۱)\pi}{۲}$ وجود دارند. در حالی که برای سمت راست، به دلیل وجود $\tan x$ استفاده از این مقدارهای x ممنوع است.



به طور طبیعی این پرسش پیش می‌آید: وقتی از رابطه‌هایی استفاده کرده‌ایم که نام اتحاد مثلثاتی را دارند، چگونه ممکن است چنین وضعی پیش آید؟ به ظاهر، باید به یاری اتحادها، تنها به تبدیل‌های اتحادی برسیم؛ یعنی تبدیل‌هایی که موجب به‌هم خوردن هم‌ارزی نشوند و اگر اعتماد ما در این زمینه متزلزل شود، در راه حل معادله‌ها، چه دشواری‌هایی که پدید نمی‌آید!

اما همه چیز را نمی‌شود از پیش و با تصور حل کرد. از تعریف اتحاد آغاز می‌کنیم. برخی از دانش‌آموزان، اتحاد را این طور تعریف می‌کنند: اتحاد، عبارت است از یک برابری که هر دو سمت آن به ازای هر مقدار دلخواه و قابل قبول حرف‌ها، به مقدارهای عددی برابر تبدیل شود.

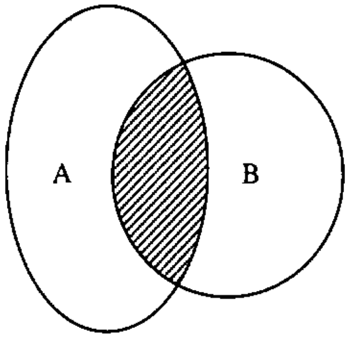
ولی این مقدارهای قابل قبول برای حرف‌ها کدامند؟ این‌ها، مقدارهایی از حرف‌ها هستند که به ازای آن‌ها هر دو سمت برابری، به طور هم‌زمان، دارای معنا باشند؛ یعنی به ازای آن‌ها، مقدارهای عدد مشخصی را بپذیرند.

به این ترتیب، اتحاد حالتی از برابری است. به‌عنوان مثال، $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ به‌ازای هر مقدار دلخواه x و $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$، برای هر مقدار دلخواه x و y برقرارند. اما آیا در این تعریف، همه چیز و برای همه‌جا درست است؟

اگر کسی بگوید برابری $\sqrt{x} = \sqrt{-x}$ یک اتحاد است، به احتمال زیاد کسی با او موافقت نخواهد کرد؛ درحالی که این برابری با تعریفی که از اتحاد کردیم، سازگار است. خودتان داوری کنید: سمت چپ برابری برای $x \geq 0$ و سمت راست آن برای $x \leq 0$ وجود دارد. بنابراین، مقدارهای قابل قبول برای x، تنها شامل یک عدد است: $x = 0$ و چون به ازای $x = 0$، دو سمت برابری مساوی می‌شوند، می‌توان حکم کرد: این برابری به ازای همهٔ مقدارهای قابل قبول x برقرار است. به این ترتیب، برابری $\sqrt{x} = \sqrt{-x}$ با تعریف اتحاد سازگار است.

اکنون ریاضیدانی را پیش خود مجسم کنید که بخواهد از این اتحاد برای حل معادله‌ای استفاده کند. اگر در جای دیگر، ضمن تبدیل‌ها، هم‌ارزی را به هم نزند، تنها می‌تواند یک ریشهٔ صفر را در نتیجهٔ عمل‌های خود به دست آورد (اگر چنین ریشه‌ای برای معادلهٔ مفروض وجود داشته باشد) و سایر ریشه‌های احتمالی معادلهٔ او گم می‌شوند.

به این ترتیب، نخستین کمبود این تعریف، آن است که ما را از مقایسهٔ دو سمت اتحاد با یکدیگر، محروم می‌کند و امکان این داوری را نمی‌دهد. دو سمت اتحاد، از نظر اتحادی، با هم تفاوت دارند. با این تعریف، نباید A و B را، که در شکل می‌بینید، از نظر اتحادی متفاوت بدانیم؛ تنها به این دلیل که بخش مشترکی دارند. باید دو تابعی را که یکی از آن‌ها در مجموعهٔ A و دیگری در مجموعهٔ B وجود دارد، متحد بنامیم؛ تنها به این خاطر که مقدارهای این دو تابع، در بخش خط‌خورده، بر هم منطبقند.



بنابراین، باید به چنان برابری اتحاد گفت که:

۱. حوزه‌های تعریف سمت چپ و راست برابری بر یکدیگر منطبق باشند.

۲. به ازای همهٔ مقدارهای قابل قبول حرف‌ها برقرار باشند.

چنین تعریفی، دیگر دربارهٔ برابری $\sqrt{x} = \sqrt{-x}$ صدق نمی‌کند. همچنین نمی‌توانیم برابری $a + b = \frac{a^2 - b^2}{a - b}$ را اتحاد بدانیم.

برای این که از اصطلاح‌های نامتعارف پرهیز کنیم، همهٔ اتحادها را به دو گروه «مطلق» و «غیرمطلق» تقسیم می‌کنیم. اتحاد مطلق به آن‌هایی می‌گوییم که استفاده از آن‌ها، هم‌ارزی را به‌هم نزند. بقیهٔ «اتحادها» را تنها می‌توان «اتحادهای مشروط» دانست که ما آن‌ها را «غیرمطلق» نامیده‌ایم. همهٔ ما عادت کرده‌ایم که از رابطه‌های زیر استفاده کنیم:

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}.\sqrt{y} \qquad (۳)$$

$$\mathrm{Log}_a(x.y) = \mathrm{Log}_a x + \mathrm{Log}_a y \qquad (۴)$$

ولی این اتحادها به‌هیچ‌وجه بی‌آزار نیستند. اگر در معادله‌ای، از این اتحادها استفاده کنیم و به‌جای سمت چپ، سمت راست را قرار دهیم، به معنای آن است که حوزهٔ تعریف را تنگ‌تر کرده‌ایم و درنتیجه، ممکن است جواب‌هایی را از دست بدهیم. این وضع را می‌توان به‌خوبی در این معادله ملاحظه کرد:

$$\mathrm{Log}[x(x+9)] + \mathrm{Log}\frac{x+9}{x} = 0 \qquad (۵)$$

اگر این معادله را با توجه به رابطهٔ (۴) تبدیل کنیم، به

این صورت درمی‌آید:

$$Log x + Log(x+9) + Log(x+9) - Log x = 0$$

که از آن‌جا به دست می‌آید:

$$Log(x+9) = 0 \Rightarrow x+9 = 1 \Rightarrow x = -8$$

ولی این جواب در معادلهٔ اصلی صدق نمی‌کند. زیرا لگاریتم عددهای منفی معنا ندارد. از طرف دیگر، $x = -10$ در معادله صدق می‌کند و ما ضمن تبدیلی که انجام دادیم، آن را گُم کرده‌ایم. بنابراین، برای حل معادله‌ها، از اتحادهای (۳) و (۴)، تنها می‌توانیم از راست به چپ استفاده کنیم؛ یعنی به جای سمت راست، مقدار سمت چپ را قرار دهیم. با این تبدیل، ممکن است جواب‌های بیگانه وارد معادله شوند که البته می‌توان آن‌ها را با آزمایش پیدا کرد. ولی اگر ناچار باشیم برای حلِّ معادله‌ای از رابطهٔ لگاریتمی استفاده کنیم، باید آن را به این صورت بنویسیم:

$$Log_a(x.y) = Log_a|x| + Log_a|y|$$

دربارهٔ ریشهٔ دوم هم باید به همین ترتیب بنویسیم؛ یعنی از قدرمطلق‌ها استفاده کنیم. معادلهٔ (۵) را باید به این صورت حل کرد:

$$Log|x| + Log|x+9| + Log|x+9| - Log|x| = 0$$

$$|x+9| = 1 \Rightarrow x_1 = -8,\ x_2 = -10$$

که بعد از آزمایش معلوم می‌شود: $x = -10$.

تشخیص اتحادهای مطلق از غیرمطلق در بین رابطه‌های مثلثاتی، اندکی دشوارتر است. ما به این رابطه‌ها عادت کرده‌ایم:

$$\tan x = \frac{Sin x}{Cos x},\ Cot x = \frac{Cos x}{Sin x},\ Sec x = \frac{1}{Cos x},$$

$$Cosec x = \frac{1}{Sin x}$$

اما آیا می‌توان تعریف Cot x را هم به صورت $\frac{1}{\tan x}$ داد؟ گمان می‌کنم همه روی این مطلب توافق داشته باشند که تعریف باید بر یک اتحاد مطلق متکی باشد. مفهوم اتحاد این است که ما حق داریم برای مفهومی، نام تازه‌ای

انتخاب کنیم که به وسیلهٔ واژه انتخاب شده است و یا این که به جای «سمت چپ»، «سمت راست» را در نظر بگیریم. اگر برای تعریف کتانژانت از رابطهٔ $Cot x = \frac{1}{\tan x}$ استفاده کنیم، آن وقت قبول کرده‌ایم که Cot x به ازای $x = k\pi$ (که مخرج را برابر صفر می‌کند) و به ازای $x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$ (که در آن‌جا، تانژانت معنای خود را از دست می‌دهد) وجود ندارد؛ درحالی که اگر کتانژانت را با رابطهٔ $Cot x = \frac{Cos x}{Sin x}$ تعریف کنیم، تنها مقدارهای $x = k\pi$ حذف می‌شوند. بنابراین برابری $Cot x = \frac{1}{\tan x}$ یک اتحاد مطلق نیست و اگر در معادله‌ای به جای Cot x، مقدار سمت راست، یعنی $\frac{1}{\tan x}$ را قرار دهیم، ممکن است ریشه‌هایی از دست بروند (همان‌گونه که دربارهٔ معادلهٔ (۱) ملاحظه کردید). از این شگفت‌آورتر، دو رابطهٔ مربوط به تانژانت، نصف کمان است:

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{Sin x}{1+Cos x},\quad \tan\frac{x}{2} = \frac{1-Cos x}{Sin x} \qquad (6)$$

در نگاه اوّل، این دو رابطه ارزشی برابر دارند و به سختی می‌توان یکی را بر دیگری ترجیح داد. ولی اگر آن‌ها را به این صورت بنویسیم:

$$\frac{Sin\frac{x}{2}}{Cos\frac{x}{2}} = \frac{Sin\frac{x}{2}\ Cos\frac{x}{2}}{Cos^2\frac{x}{2}},\qquad \frac{Sin\frac{x}{2}}{Cos\frac{x}{2}} = \frac{Sin^2\frac{x}{2}}{Sin\frac{x}{2}\ Cos\frac{x}{2}}$$

به روشنی معلوم می‌شود که هر دو طرف رابطهٔ اول، به ازای $\operatorname{Cos}\frac{x}{2}=0$، معنای خود را از دست می‌دهند؛ درحالی‌که رابطهٔ دوم به جز آن، به‌ازای $\operatorname{Sin}\frac{x}{2}=0$ هم بی‌معنا می‌شود. بنابراین رابطهٔ اول، یک اتحاد مطلق و رابطهٔ دوم یک اتحاد غیرمطلق است. اگر معادلهٔ:

$$\tan\frac{x}{2}+\tan x=0 \qquad (7)$$

را به کمک رابطهٔ دوم (۶) تبدیل کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{1-\operatorname{Cos}x}{\operatorname{Sin}x}+\frac{\operatorname{Sin}x}{\operatorname{Cos}x}=0 \qquad (8)$$

درنتیجه، معادلهٔ (۷) به معادلهٔ (۸) تبدیل می‌شود که هم‌ارز آن نیست؛ زیرا $x=2k\pi$ که در معادلهٔ (۷) صدق می‌کند، جزو ریشه‌های معادلهٔ (۸) نیست. با وجود این، اگر معادلهٔ (۸) را به‌طور صوری حل کنیم، این ریشه‌ها هم به دست می‌آیند و چون باید ریشه‌ها را در معادله آزمایش کنیم، همهٔ ریشه‌ها پیدا می‌شوند:

$$2\operatorname{Cos}^2x-\operatorname{Cos}x-1=0\Rightarrow \operatorname{Cos}x=1,\ -\frac{1}{2}$$

$$x_1=2k\pi,\ x_2=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

با برخی محدودیت‌های اضافی، می‌توان ثابت کرد: هر تبدیلی از تانژانت و کتانژانت به سینوس و کسینوس، حتی بدون توجه به این نکته، آیا اتحاد مورد استفاده مطلق است یا نه؟ در آخر کار، به همه جواب‌های معادله دست می‌یابیم؛ زیرا عمل‌های بینابینی، خودبه‌خود جواب از دست‌رفته را جبران می‌کنند.

وقتی برای معادله‌ای، از اتحاد غیرمطلق استفاده می‌کنید که درنتیجهٔ آن حوزهٔ تعریف تنگ‌تر می‌شود، دست‌کم باید تحقیق کرد، آیا ریشه‌ای از دست رفته است؟ با وجودی که در بسیاری حالت‌ها، این آزمایش به نتیجه‌ای منفی می‌رسد، نباید از آن غفلت کرد؛ چرا که بدون آن، مسأله از لحاظ منطقی، به‌طور کامل حل نشده است.

نمونه‌ای می‌آوریم که می‌تواند نکتهٔ ظریفی از تعریف معادله را روشن کند. می‌خواهیم این دستگاه معادله‌ها را حل کنیم:

$$\begin{cases}2\operatorname{Sin}x\ \operatorname{Cos}y=2-\operatorname{Sin}^2y\ \operatorname{Sin}z & (9)\\ (\operatorname{Sin}z)^{\operatorname{Cos}z}=\dfrac{1}{\operatorname{Sin}^2z} & (10)\end{cases}$$

برای حل، راحت‌تر است از معادلهٔ دوم آغاز کنیم. می‌دانیم اگر دو توان برابر دارای پایه‌های برابر باشند؛ به شرطی که این پایه مخالف ۰ و ۱± باشد، می‌توان نماها را برابر قرار داد، بنابراین با شرط:

$$\operatorname{Sin}z\neq 0,+1,-1$$

از معادلهٔ دوم نتیجه می‌شود $\operatorname{Cos}z=-2$ و این جواب ممکن نیست. اکنون باید حالت‌هایی را که استثنا کردیم، آزمایش کنیم.

$\operatorname{Sin}z=0$ در معادلهٔ دوم دستگاه صدق نمی‌کند. فرض می‌کنیم $\operatorname{Sin}z=1$ معادلهٔ اول دستگاه چنین می‌شود:

$$2\operatorname{Sin}x\ \operatorname{Cos}y=1+\operatorname{Cos}^2y \qquad (11)$$

به موقعیت نامناسبی می‌رسیم که ما را در همان جای نخست قرار داده است: تعداد معادله‌ها کم‌تر از تعداد مجهول‌هاست؛ ولی گاهی یک معادلهٔ دومجهولی، طوری تنظیم شده است که درون خود دو معادله دارد. نمونهٔ ساده‌ای از این نوع، معادلهٔ $x^2+y^2=0$ است که با دستگاه $x=y=0$، هم‌ارز است؛ زیرا مجموع دو عبارت غیرمنفی، تنها وقتی برابر صفر می‌شود که هرکدام از جمله‌های آن برابر صفر باشد. در این‌جا هم، همین وضع وجود دارد. برای این‌که مطلب روشن شود، کافی است معادلهٔ (۱۱) را به این صورت بنویسیم:

$$(\operatorname{Cos}y-\operatorname{Sin}x)^2+\operatorname{Cos}^2x=0$$

که از آن‌جا به این دستگاه می‌رسیم:

$$\operatorname{Cos}y=\operatorname{Sin}x,\ \operatorname{Cos}x=0$$

و درنتیجه، جواب پیدا می‌شود:

$$x_1=2k\pi+\frac{\pi}{2},\quad y_1=2m\pi,\quad z_1=2n\pi+\frac{\pi}{2};$$

$$x_2=2k\pi-\frac{\pi}{2},\quad y_2=(2m+1)\pi,\quad z_2=2n\pi+\frac{\pi}{2}$$

حالت $\sin z = -1$ را هم می‌توان به همین ترتیب بررسی کرد و به این جوابها رسید:

$$x_3 = 2k\pi + \frac{\pi}{2},\quad y_3 = 2m\pi,\quad z_3 = 2n\pi - \frac{\pi}{2};$$

$$x_4 = 2k\pi - \frac{\pi}{2},\quad y_4 = (2m+1)\pi,\quad z_4 = 2n\pi - \frac{\pi}{2}$$

به یک نکتهٔ جدّی توجه کنیم. معادله به طور معمول به صورت برابری دو تابع تعریف می‌شود؛ در این صورت، حوزهٔ تعریف معادله را می‌توان از روی تعریف تابع‌ها معین کرد. این تعریف تنها دربارهٔ معادله‌هایی از نوع (۱۰)، نامناسب به نظر می‌رسد. دشواری به این جا مربوط می‌شود که x^y تنها به ازای $x > 0$ معین است؛ درحالی‌که عبارت‌هایی از گونهٔ $(-1)^a$، به ازای همهٔ مقدارهای درست a معنا دارند. اگر این تعریف معادله، به طور سطحی در نظر گرفته شود، ممکن است به این جا منجر شود که جواب $\sin z = -1$ را در دستگاه (۹ و ۱۰) کنار بگذاریم، که درست نیست. اما اگر دستگاه (۹ و ۱۰) را بازتابی از یک روند فیزیکی واقعی بدانیم، می‌توان امید داشت که این جواب دوم هم، مثل جواب اول، معنای فیزیکی داشته باشد.

در زمان ما، معادله را به‌عنوان برابری دو عبارت تعریف نمی‌کنند؛ معادله را گزاره‌ای می‌دانند که به ازای بعضی از مقدارهای حرف‌ها به «گزاره‌ای درست» و به ازای بعضی مقدارها به «گزاره‌ای نادرست» تبدیل می‌شود. به این ترتیب، معادله صورتی «منطقی» به‌خود می‌گیرد. حلّ معادله، یعنی انتخاب مجهول‌ها، به‌نحوی که این صورت منطقی را به گزاره‌ای درست برساند. اگر معادله را به این صورت تعریف کنیم، دیگر تناقضی بین حوزهٔ تعریف تابع‌ها، با حوزهٔ تعریف معادله پیدا نمی‌شود.

در پایان، چند پرسش را به همراه پاسخ آن‌ها می‌آوریم:

۱ـ آیا می‌توان حکم کرد که در اتحاد مطلق، می‌توان جمله‌ها را از یک طرف، به طرف دیگر منتقل کرد؟

پاسخ: با انتقال جمله‌ها از یک طرف به طرف دیگر، ممکن است اتحاد مطلق بودن خود را از دست بدهد. برای نمونه، $\sqrt{x} = \sqrt{x}$ یک اتحاد مطلق است؛ در حالی که $\sqrt{x} - \sqrt{x} = 0$ غیر مطلق می‌شود.

۲ـ حلّ معادله در این جا آورده شده است. این راه‌حل را ارزیابی کنید:

$$\sin 2x + 7\cos 2x + 7 = 0$$

$\sin 2x$ و $\cos 2x$ را بر حسب $\tan x$ می‌نویسیم:

$$\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} + \frac{7(1-\tan^2 x)}{1+\tan^2 x} + 7 = 0$$

به یک مخرج تبدیل می‌کنیم و مخرج را که همیشه مخالف صفر است، از بین می‌بریم:

$$\tan x = -7 \Rightarrow x = k\pi + \arctan(-7)$$

پاسخ: درست نیست؛ زیرا با استفاده از اتحادهای غیرمطلق، جواب $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ را از دست داده‌ایم.

۳ـ این معادله را حل کنید.

$$\sqrt{\tan x + \sin x} + \sqrt{\tan x - \sin x} = 2\sqrt{\tan x}\,.\cos x$$

پاسخ: داریم: $\tan x \pm \sin x = \tan x(1 \pm \cos x)$. دو عامل $\tan x, 1 \pm \cos x$ غیرمنفی‌اند؛ بنابراین می‌توان از اتحاد غیرمطلق $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$ استفاده کرد و به برابری به این صورت می‌رسیم:

$$\sqrt{\tan x}\,(f(x)) = 0$$

جواب:

$$x_1 = 2k\pi + \frac{7\pi}{6},\quad x_2 = 2k\pi + \frac{\pi}{6},\quad x_3 = k\pi$$

اشاره

پارادوکس[1] یا شگفت‌نما، واژه‌ای یونانی است که از دو جزء «para» به معنای «فراتر» و «dox» به معنای «اعتقاد» تشکیل شده است. بنا به تعریفی عام، منظور از آن احکامی است که با عقل سلیم مغایرند و با اصول مقدماتی منطق تضاد دارند. در رشته مقاله های «پارادوکس های ریاضیات و علوم»، پارادوکس به مفهوم وسیعی گرفته شده است که در بر گیرنده هر نتیجه‌ای است که با عقل سلیم و شهود مغایرت دارد و بیدرنگ احساس شگفتی آدمی را برانگیزد.

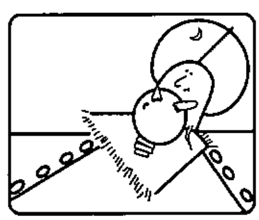
پارادوکس های ریاضیات مانند پارادوکس های علوم، ممکن است فراتر از لطیفه باشند و به پیدایش بینش‌های ژرف منجر شوند. برای اندیشمندان متقدم یونانی، یک پارادوکس مزاحم آن بود که قطر مربعی به ضلع واحد را نمی‌توان حتی با خط کش دارای درجه‌های بسیار ظریف، به درستی اندازه گرفت. این حقیقت دردسر آفرین، موجب گشودن حوزه پهناور نظریه اعداد گنگ شد. در نظر ریاضیدانان سده نوزدهم، آنچه بسیار متناقض می‌نمود، این بود که همهٔ عضوهای یک مجموعهٔ نامتناهی، ممکن است با عضوهای یکی از زیرمجموعه‌های خود در تناظر یک به یک قرار گیرند و دو مجموعهٔ نامتناهی ممکن است وجود داشته باشند که عضوهای آن‌ها را نتوان در وضعیت تناظر یک به یک نهاد.

این پارادوکس ها به پیدایش نظریه جدید مجموعه‌ها منجر شد و این نظریه نیز تأثیر زیادی بر فلسفه علوم گذاشت. پارادوکس ها می‌توانند بسیار آموزنده باشند. آن‌ها مانند حقه‌های ماهرانه شعبده‌بازی، چنان شگفت‌آورند که آدمی بیدرنگ می خواهد به چگونگی پدید آمدن آن‌ها پی ببرد. شعبده‌بازان هرگز چگونگی انجام کارهای خود را آشکار نمی کنند، اما ریاضیدانان هیچ نیازی به پنهان نگهداشتن کارهای خود ندارند.

در این سلسله مطالب، سعی بر آن است که سبب متناقض بودن هر پارادوکس، تا آن‌جا که ممکن است به زبانی غیر فنی و در نهایت اختصار، شرح داده شود. ـ م.

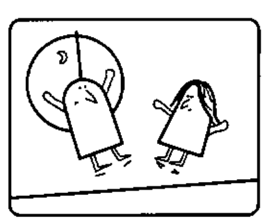
پارادوکس های ریاضیات و علوم
(سرگرمی برای اندیشه ورزی)

پیشگویی دانشمند برهمایی



آیا یک دانشمند برهمایی می تواند آینده را در گوی بلورین خود ببیند؟ پیشگویی های آینده ممکن است به نوعی پارادوکس منطقی جدید و عجیب منجر شوند.

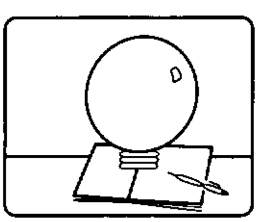
روزی این دانشمند برهمایی با دختر نوجوانش سو، بحث می کرد.



سو: شما کَلَک زَن بزرگی هستی پدر. واقعاً نمی توانی از آینده بگویی.

دانشمند برهمایی: یقیناً می توانم.

سو: نه شما نمی توانی. من می توانم این را ثابت کنم!



سو روی یک قطعهٔ کاغذ چیزی نوشت، آن را تا کرد و زیر گوی بلورین چسباند.

سو: من پیشامدی را که تا پیش از ساعت ۳ یا اتفاق می افتد یا اتفاق نمی افتد، شرح داده ام. اگر بتوانی پیشگویی کنی که این پیشامد کدام یک از این دو شِق خواهد بود، دیگر ناچار نخواهی بود اتومبیلی را که قول داده بودی به مناسبت پایان تحصیلاتم به من هدیه کنی، بخری.

این یک کارت سفید است. اگر فکر می کنی که پیشامد رخ خواهد داد، روی این بنویس «بله». اگر فکر می کنی رخ نخواهد داد، بنویس «نه». اگر اشتباه کردی، موافقی اتومبیلی را که قرار بود بعد بخری، حالا بخری؟

دانشمند برهمایی: باشد، سو. این یک معامله است.

دانشمند برهمایی نظر خود را

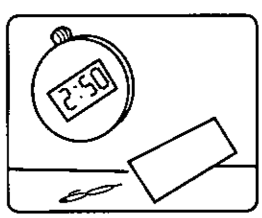
اثر دکتر مارتین گاردنر

ترجمهٔ حسن نصیرنیا

روی کارت نوشت. ساعت ۳، سو کاغذ را از زیر گوی بلورین برداشت و نوشته را با صدای بلند خواند: «پیش از ۳ بعدازظهر روی کارت خواهی نوشت نه.»

دانشمند برهمایی: تو به من کلک زدی. من نوشتم «بله»، پس من اشتباه کردم. اما اگر می‌نوشتم «نه»، باز هم اشتباه کرده بودم. هیچ راهی نیست که اگر آن را انتخاب می‌کردم، حق با من بشود.

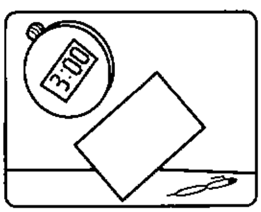
سو: من یک اتومبیل قرمز با صندلی‌های مخصوص می‌خواهم، پدر.



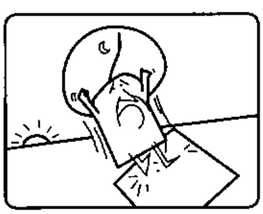
* * *

شکل اصلی این پارادوکس به رایانه‌ای مربوط می‌شود که فقط می‌تواند پاسخ «بله» یا «نه» بدهد. از رایانه می‌خواهند که پیش‌بینی کند، آیا پاسخ بعدی آن «نه» خواهد بود. آشکار است که از نظر منطقی ممکن نیست پیش‌بینی رایانه درست باشد.

این پارادوکس را می‌توان در نهایت به این صورت ساده کرد که از کسی پرسیده شود: «آیا کلمهٔ بعدی که بیان خواهی کرد، نه خواهد بود؟ لطفاً پاسخ بله یا نه بده.»



توجه داشته باشید، این سؤال که آیا کلمهٔ بعدی که بیان خواهی کرد، بله خواهد بود، به پارادوکس نمی‌انجامد. شخص می‌تواند یا پاسخ بله بدهد یا نه، بی‌آن‌که تناقضی به وجود آید. همین طور در مورد تمساح، اگر مادر بگوید: «تو کودک مرا پس خواهی داد»، تمساح می‌تواند کودک را یا بخورد یا پس بدهد، بی‌آن‌که تناقضی پیش بیاید.



زیرنویس

paradox

قسمت اول

تابع نمایی و تابع لگاریتمی

احمد قندهاری

برای دانش‌آموزان دورهٔ پیش دانشگاهی رشتهٔ تجربی

در ریاضی، تابع‌هایی وجود دارند که فرایند معمولی محاسبات جبری را بالا می‌برند. به عبارت دیگر، برای محاسبات ریاضی پهنهٔ وسیع‌تری را در اختیار ما می‌گذارند. برای مثال، محاسبهٔ عدد 2^{1000} که عددی ۳۰۲ رقمی است، بدون استفاده از لگاریتم، کاری طاقت‌فرسا و فوق‌العاده وقت‌گیر است؛ در صورتی که به کمک لگاریتم به سادگی قابل محاسبه است. به همین علت این تابع‌ها در ماشین حساب‌ها و رایانه‌ها به صورت برنامه‌ریزی شده وجود دارند.

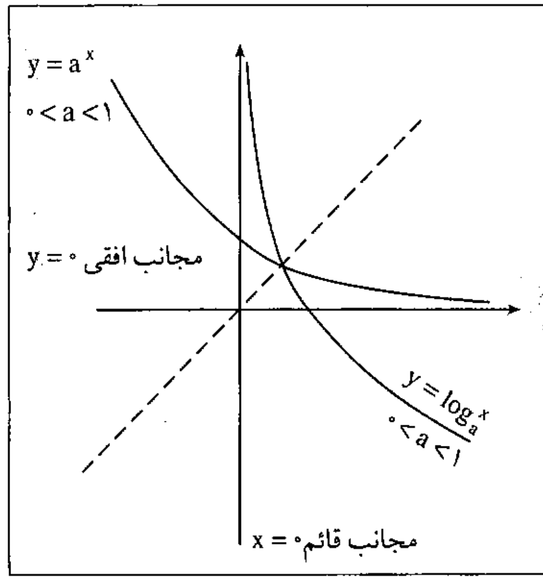
این گونه تابع‌ها به تابع‌های نمایی و معکوس آن‌ها به تابع‌های لگاریتمی معروفند که در این مقاله به بررسی آن‌ها می‌پردازیم.

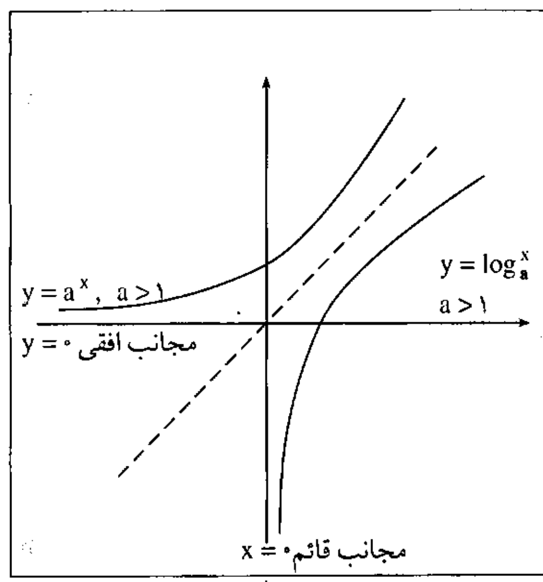
تابع لگاریتمی

تابع به معادلهٔ $f(x) = a^x$ تابعی است از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}^+$ که یک به یک هم هست؛ پس وارون‌پذیر است. وارون آن را تابع لگاریتم می‌نامیم و آن را به صورت: $y = f^{-1}(x) = \log_a x$ نشان می‌دهیم که در آن: $a > 0$ و $a \neq 1$ است.

نمودار تابع لگاریتم

نمودار تابع $y = \log_a x$، قرینهٔ نمودار تابع به معادله $y = a^x$ نسبت به خط $y = x$ است.





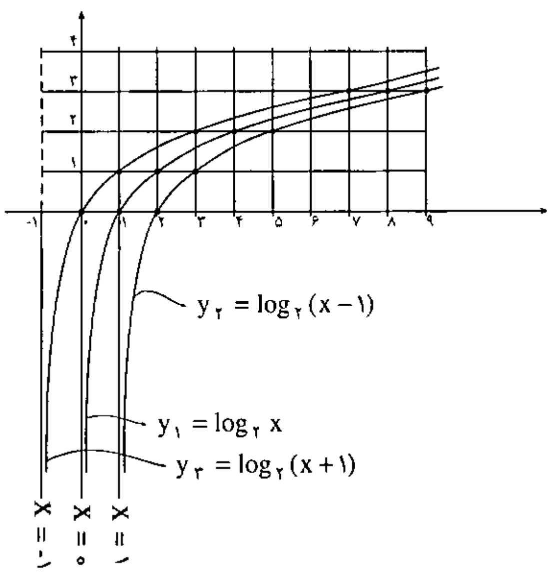
مثال ۱ : تابع‌های به معادله‌های $y_1 = \log_2 x$ و $y_2 = \log_2 (x-1)$ و $y_3 = \log_2 (x+1)$ را در یک شکل رسم کنید.

توجه : می‌توان تابع به معادلهٔ $y_1 = \log_2 x$ را رسم کرد، پس برای رسم تابع y_2 ، منحنی y_1 را یک واحد به سمت راست و برای رسم تابع y_3 ، منحنی y_1 را یک واحد به سمت چپ انتقال داد. ولی بهتر است هریک از سه تابع را به کمک جدول رسم کرد.

x	0^+		1		2		4		8		$+\infty$
$\log_2 x$	$-\infty$	↗	0	↗	1	↗	2	↗	3	↗	$+\infty$

x	1^+		2		3		5		9		$+\infty$
$\log_2 (x-1)$	$-\infty$	↗	0	↗	1	↗	2	↗	3	↗	$+\infty$

x	-1^+		0		1		3		7		$+\infty$
$\log_2 (x+1)$	$-\infty$	↗	0	↗	1	↗	2	↗	3	↗	$+\infty$



مجانب‌های قائم سه نمودار

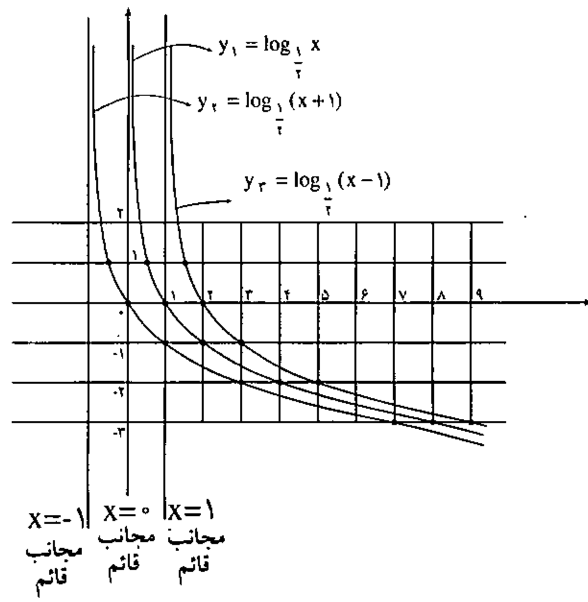
مثال ۲ : نمودار تابع‌های به معادله‌های $y_1 = \log_{\frac{1}{2}} x$ و $y_2 = \log_{\frac{1}{2}} (x-1)$ و $y_3 = \log_{\frac{1}{2}} (x+1)$ را در صفحه مختصات رسم کنید.

حل : مانند مثال قبل نمودارها را با نقطه‌یابی رسم می‌کنیم :

x	0^+		$\frac{1}{2}$		1		2		4		8		$+\infty$
$\log_{\frac{1}{2}} x$	$-\infty$	↘	1	↘	0	↘	-1	↘	-2	↘	-3	↘	$-\infty$

x	-1^+		$-\frac{1}{2}$		0		1		3		7		$+\infty$
$\log_{\frac{1}{2}} (x+1)$	$-\infty$	↘	1	↘	0	↘	-1	↘	-2	↘	-3	↘	$-\infty$

x	1^+		$\frac{3}{2}$		2		3		5		9		$+\infty$
$\log_{\frac{1}{2}} (x-1)$	$-\infty$	↘	1	↘	0	↘	-1	↘	-2	↘	-3	↘	$-\infty$



لگاریتم طبیعی

داشتیم: $\begin{cases} \text{Lin}(1+\frac{1}{n})^n = e \\ n \to +\infty \end{cases}$

اگر مبنای لگاریتم عدد e باشد، این لگاریتم را لگاریتم طبیعی گویند و آن را با نماد $\log_e$ یا Ln نشان می‌دهند.

$x = e^y \Leftrightarrow \text{Ln}x = y$ یا $y = \text{Ln}x$

توجه: تمام فرمول‌های $\log_a x$، $a > 0$ و $a \neq 1$ در مورد $\log_e x$ یا Lnx نیز صادق است.

مثال ۳: اگر $\text{Ln}2 = 0/693$ باشد، آن‌گاه $\text{Ln}4^{2\sqrt{2}}$ را بیابید.

حل:

$$\text{Ln}4^{2\sqrt{2}} = \text{Ln}(2^2)^{2\sqrt{2}} = \text{Ln}(2)^{4\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}\,\text{Ln}2 = 4\sqrt{2}(0/693) = 3/908$$

مثال ۴: دامنهٔ تعریف تابع به معادلهٔ $f(x) = \sqrt{\log_2 (x^2 - 3)}$ را بیابید.

حل:

$$\log_2 (x^2 - 3) \ge 0 \Rightarrow (x^2 - 3) \ge 2^0 \Rightarrow x^2 - 3 \ge 1$$

$$\Rightarrow x^2 \ge 4 \Rightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x \le -2 \end{cases} \Rightarrow D_f = (-\infty, -2] \cup [2 + \infty)$$

مثال ۵: دامنهٔ تعریف تابع به معادلهٔ $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 3)}$ را بیابید.

$$\log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 3) \ge 0 \xrightarrow{\text{مبنا کوچک‌تر از (1) است}} 0 < x^2 - 3 \le (\tfrac{1}{2})^0 \Rightarrow$$

$$0 < x^2 - 3 \le 1$$

$$\Rightarrow 3 < x^2 \le 4 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3} < x \le 2 \\ -2 \le x < -\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow D_f = [-2, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 2]$$

مثال ۶: ثابت کنید تابع به معادلهٔ $f(x) = \log(\sqrt{1 + 4x^2} - 2x)$ تابعی فرد است.

حل:

$$f(-x) = \log(\sqrt{1 + 4x^2} + 2x)$$

$$\Rightarrow f(x) + f(-x) = \log(\sqrt{1 + 4x^2} - 2x) + \log(\sqrt{1 + 4x^2} + 2x)$$

$$\Rightarrow f(x) + f(-x) = \log(\sqrt{1 + 4x^2} - 2x)(\sqrt{1 + 4x^2} + 2x)$$

$$\Rightarrow f(x) + f(-x) = \log(1 + 4x^2 - 4x^2)$$

$$\Rightarrow f(x) + f(-x) = \log 1$$

$$\Rightarrow f(x) + f(-x) = 0 \Rightarrow f(-x) = -f(x) \Rightarrow$$

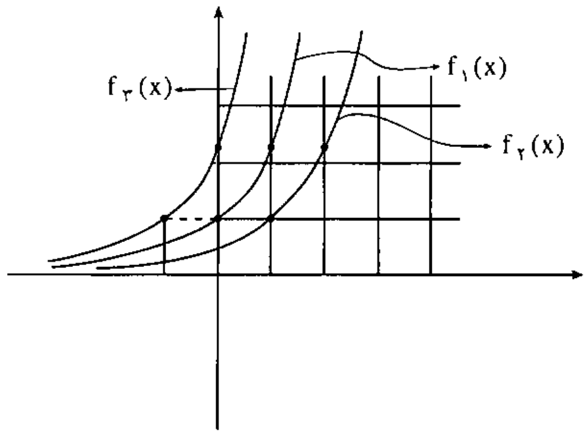
f تابعی فرد است.

مثال ۷: نمودار تابع‌های به معادله‌های $f_1(x) = e^x$ و $f_2(x) = e^{x-1}$ و $f_3(x) = e^{x+1}$ را در یک نمودار رسم کنید.

x	$-\infty$ ↗	0 ↗	1 ↗	$+\infty$
e^x	0^+	1	e	$+\infty$

x	$-\infty$ ↗	-1 ↗	0 ↗	$+\infty$
e^{x+1}	0^+	1	e	$+\infty$

x	$-\infty$ ↗	1 ↗	2 ↗	$+\infty$
e^{x-1}	0^+	1	e	$+\infty$

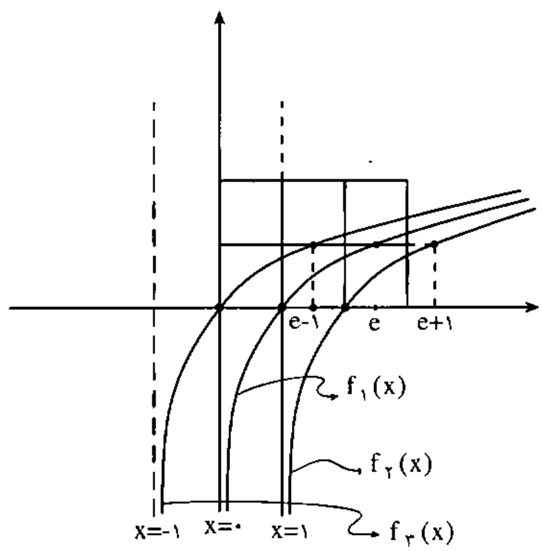


مثال ۸ : نمودار تابع‌های به معادله‌های $f_۱(x)=Ln(x)$ ، $f_۲(x)=Ln(x-۱)$ و $f_۳(x)=Ln(x+۱)$ را در یک شکل رسم کنید.

x	۰^+	↗	۱	↗	e	↗	$+\infty$
$L_n x$	$-\infty$		۰		۱		$+\infty$

x	۱^+	↗	۲	↗	e+۱	↗	$+\infty$
$L_n(x-۱)$	$-\infty$		۰		۱		$+\infty$

x	-۱^+	↗	۰	↗	e−۱	↗	$+\infty$
$L_n(x+۱)$	$-\infty$		۰		۱		$+\infty$



مثال ۹ : نامعادله $\log_{\frac{۱}{۸}}(x^۲-۵)\ge -\frac{۲}{۳}$ را حل کنید.

حل:

$$\log_{\frac{۱}{۸}}(x^۲-۵)\ge -\frac{۲}{۳} \Rightarrow \log_{۲^{-۳}}(x^۲-۵)\ge -\frac{۲}{۳}\Rightarrow$$

$$-\frac{۱}{۳}\log_۲(x^۲-۵)\ge -\frac{۲}{۳}$$

طرفین نامساوی را در (۳-) ضرب می‌کنیم، جهت نامساوی عوض می‌شود:

$$\Rightarrow \log_۲(x^۲-۵)\le ۲ \Rightarrow ۰<x^۲-۵\le ۲^۲ \Rightarrow ۰<x^۲-۵\le ۴$$

$$\Rightarrow ۵<x^۲\le ۹ \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{۵}<x\le ۳\\ -۳\le x<-\sqrt{۵}\end{cases}$$

مثال ۱۰ : برد تابع به معادلهٔ $f(x)=\log(۳\sin x-۲)$ را بیابید.

حل: $۳\sin x-۲$ را مساوی P می‌گیریم. پس $P=۳\sin x-۲$

$$\sin x=۱\Rightarrow P=۱$$

$$\sin x=\frac{۲^+}{۳}\Rightarrow P=۰^+ \Rightarrow ۰^+<P<۱\Rightarrow ۰^+<۳\sin x-۲<۱$$

$$\Rightarrow \log ۰^+\to -\infty,\ \log ۱=۰$$

چون تابع $f(x)=\log x$ اکیداً صعودی است، پس برد تابع: $(-\infty,\ ۰]$ است.

مشتق تابع لگاریتمی

$$y=\log_a x\Rightarrow y'_x=\frac{۱}{x}\log_a e$$

$$y=\log_a u\Rightarrow y'_x=\frac{u'}{u}\log_u e$$

مثال ۱۱ : مشتق تابع به معادلهٔ $y=f(x)=\log\sqrt[۳]{x^۲}$ را نسبت به x بیابید.

$$u=\sqrt[۳]{x^۲}\Rightarrow u'_x=\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}$$

$$y'_x = f'(x) = \frac{u'}{u}\log e$$

$$\Rightarrow y'_x = \frac{\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\log e = \frac{2}{3x}\log e$$

مثال ۱۲ : مشتق تابع به معادلهٔ $y = \log(\mathrm{Sin}x + \tan x)$ را نسبت به x بیابید.

$$u = \mathrm{Sin}x + \tan x \Rightarrow u'_x = \mathrm{Cos}x + (1 + \tan^2 x)$$

$$y = \log u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u}\log e$$

$$y'_x = \frac{u'}{u}\log e = \frac{\mathrm{Cos}x + 1 + \tan^2 x}{\mathrm{Sin}x + \tan x}\log e$$

$$y = L_n(x) \Rightarrow y'_x = \frac{1}{x}$$

$$y = L_n(u) \Rightarrow y'_x = \frac{u'_x}{u}$$

مثال ۱۳ : اگر $y = L_n(\tan x + \cot x)$ باشد، y'_x را بیابید.

$$u = \tan x + \mathrm{Cot}x$$
$$\Rightarrow u'_x = 1 + \tan^2 x - 1 - \mathrm{Cot}^2 x$$
$$= \tan^2 x - \mathrm{Cot}^2 x$$

$$y'_x = \frac{u'_x}{u} \Rightarrow y'_x = \frac{\tan^2 x - \mathrm{Cot}^2 x}{\tan x + \mathrm{Cot}x}$$

پاسخ تفریح اندیشه ۳

پاسخ ۳:

$$D = \left\{(6+\sqrt{29},\ 6-\sqrt{29}),\ (4,3)\right\}$$

حل: قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} x + y = w \\ xy = z \end{cases} \qquad (1)$$

در این صورت، دستگاه مفروض را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} w + z = 19 \\ zw = 84 \end{cases}$$

مجموع w و z ریشه‌های معادلهٔ $a^2 - 19a + 84 = 0$ هستند. ریشه‌های این معادله ۱۲ و ۷ هستند. در این صورت، $w = 12$ و $z = 7$ و $w = 7$ و $z = 12$.

بعد، این مقادیر را در (۱) قرار می‌دهیم و دستگاه‌های زیر را به دست می‌آوریم:

(ب) $\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 12 \end{cases}$ (الف) $\begin{cases} x + y = 12 \\ xy = 7 \end{cases}$

جواب دستگاه (الف) عبارت است از:

$x = 6 + \sqrt{29},\ y = 6 - \sqrt{29}$

جواب دستگاه (ب) عبارت است از:

$x = 4,\ y = 3$

* * *

گراف‌ها و کاربردهای آن

قسمت دوم

برای دانش‌آموزان دورهٔ پیش‌دانشگاهی رشتهٔ ریاضی

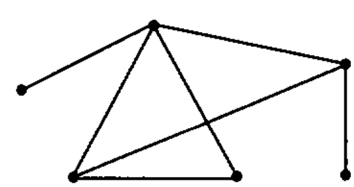
سهراب شریف‌زاده

دنبالهٔ درجات رأس‌های یک گراف

در گراف G با p رأس که $\deg v_i = d_i$، دنبالهٔ ناصعودی (نزولی) «$d_1, d_2, d_3, \dots, d_p$» را دنبالهٔ درجات رئوس گراف G یا دنباله گرافی G می‌نامیم که:

$$p-1 \ge d_1 \ge d_2 \ge \dots \ge d_p \ge 0$$

مثال: گراف G به صورت زیر است، دنبالهٔ گرافی G را بنویسید.



حل: چون دنبالهٔ گرافی، یک دنبالهٔ ناصعودی (نزولی) بر حسب درجات رأس‌هاست، پس دنباله گراف G به صورت زیر است: «۱ , ۱ , ۲ , ۳ , ۳ , ۴»

مثال: به دنبالهٔ درجات «۱ , ۱ , ۱ , ۱ , ۳ , ۳ , ۳ , ۳» یک گراف نسبت دهید.

حل:

نکتهٔ ۱: مجموع جملات دنباله، عددی زوج (دو برابر تعداد یال‌های گراف) است.

نکتهٔ ۲: تعداد درجات رأس‌های فرد (جملات فرد) در هر دنبالهٔ گرافی زوج است.

سؤال: آیا دنبالهٔ «۱ , ۲ , ۳ , ۵ , ۵ , ۶ , ۶ , ۶ , ۶ , ۷» می‌تواند دنبالهٔ درجات رأس‌های یک گراف باشد؟

پاسخ: خیر، تعداد رأس‌های با درجهٔ فرد، عددی فرد است.

نکتهٔ ۳: در گراف p رأسی، حداقل دو رأس با درجهٔ یکسان وجود دارد ($p \ge 2$).

نکتهٔ ۴: دنبالهٔ درجات رأس‌های یک گراف، همگی نمی‌توانند متمایز باشند.

سؤال: آیا دنبالهٔ «۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ , ۶ , ۶ , ۷» می‌تواند دنبالهٔ درجات رأس‌های یک گراف باشد؟

پاسخ: خیر. زیرا دنبالهٔ درجات همگی متمایزند و حداقل دارای دو درجهٔ یکسان نیستند، پس نمی‌تواند دنبالهٔ درجات رأس‌ها باشد.

سؤال: اگر در گرافی $\Delta = 4$ و $\delta = 1$، آیا در این گراف دنبالهٔ درجات رأس‌ها می‌توانند متمایز باشند؟

پاسخ: خیر، زیرا از آن‌جایی که $\Delta = ۴$، یعنی حداقل ۵ رأس داریم، و درجهٔ هر رأس فقط یکی از اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ می‌تواند باشد و چون تعداد رأس‌ها از تعداد درجات بیش‌تر است، پس بنابر اصل «لانهٔ کبوتری» یقیناً چنین گرافی حداقل دو رأس از درجهٔ یکسان خواهد داشت.

آزمون ۱۳: دنبالهٔ «$\alpha+۱, \alpha+۲, \alpha+۳, \alpha+۴, \alpha+۵$» به ازای چه مقداری از α دنبالهٔ درجات رأس‌های یک گراف است؟

۱) صفر　　۲) هیچ مقدار

۳) ۲　　۴) هر مقدار طبیعی α

حل: گزینهٔ (۲). چون درجات رأس‌ها نمی‌توانند متمایز باشند، پس هیچ مقداری برای α وجود ندارد که دنبالهٔ مزبور، دنبالهٔ درجات رأس‌های یک گراف باشد.

نکتهٔ ۵: گرافی که دو رأس از درجهٔ $(p-۱)$ دارد، رأس درجهٔ یک ندارد.

نکتهٔ ۶: گرافی که یک رأس از درجهٔ $(p-۱)$ دارد، رأس درجهٔ صفر ندارد.

سؤال: آیا دنبالهٔ «۰، ۲، ۳، ۳، ۳، ۵» می‌تواند دنبالهٔ درجات رأس‌های یک گراف باشد؟

پاسخ: خیر، اگر گراف از مرتبهٔ ۶ دارای رأس از درجهٔ ۵ باشد، رأس درجهٔ صفر نخواهد داشت؛ زیرا رأس درجهٔ ۵ با بقیهٔ رأس‌ها مجاور است.

نکتهٔ ۷: در گراف از مرتبه p، رأس درجهٔ p وجود ندارد.

آزمون ۱۴: دنبالهٔ درجه‌های رأس‌های یک گراف به صورت «a,a,a,a,a,a» است. a کدام عدد **نمی‌تواند** باشد؟

۱) ۰　　۲) ۱

۳) ۵　　۴) ۶

حل: گزینهٔ (۴). زیرا گراف از مرتبهٔ ۶ دارای رأس از درجه ۶ نیست.

سؤال: آیا دنبالهٔ «۱، ۲، ۴، ۴، ۵» می‌تواند دنبالهٔ درجات رأس‌های یک گراف باشد؟

پاسخ: خیر، زیرا تعداد جملات دنباله برابر ۵ است و هر گراف از مرتبهٔ ۵ دارای رأس درجهٔ ۵ نیست.

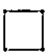
نکتهٔ ۸: در گراف با p رأس، ماکزیمم درجه در صورت وجود برابر $p-۱$ است.

نکتهٔ ۹: در گراف با p رأس که k رأس درجهٔ $(p-۱)$ دارد، آن‌گاه $\delta \geq k$ $(k < p-۱)$

سؤال: آیا دنبالهٔ «۳، ۳، ۵، ۵، ۵، ۵»، می‌تواند دنبالهٔ درجات رأس‌های یک گراف باشد؟

پاسخ: خیر، چون دنبالهٔ مزبور ۴ رأس درجهٔ ۵ دارد. پس باید $\delta \geq ۴$، که داریم: $\delta = ۳$.

نکتهٔ ۱۰: تعداد رأس‌های زوج در هر گراف ممکن است عددی زوج یا عددی فرد باشد.

مثال: در گراف  تعداد رأس‌های زوج، عددی زوج و در گراف  تعداد رئوس زوج، عددی فرد است.

آزمون ۱۵: کدام دنباله، دنبالهٔ درجات رأس‌های یک گراف ساده نیست؟

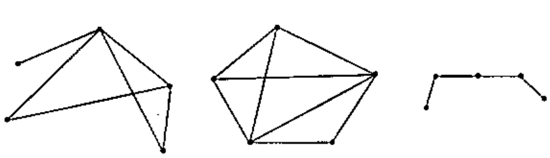
۱) «۱، ۲، ۲، ۳، ۴»

۲) «۰، ۱، ۲، ۳، ۴»

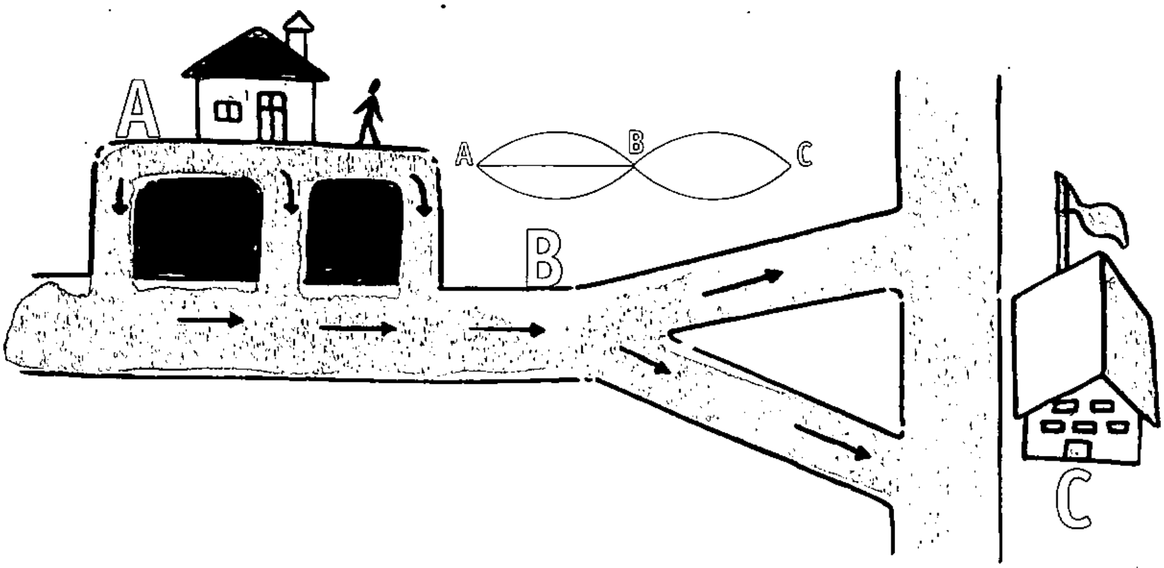
۳) «۲، ۳، ۳، ۴، ۴»

۴) «۱، ۱، ۲، ۲، ۲»

حل: گزینهٔ (۲). اگر گراف مرتبهٔ ۵ دارای رأس درجهٔ ۴ باشد، رأس درجهٔ صفر نباید داشته باشد. گراف‌های بقیهٔ دنباله‌ها به صورت زیر هستند.



(۴)　　(۳)　　(۱)



آزمون ۱۶ : کدامیک از عبارت‌های زیر درست است؟

۱) تعداد رأس‌های زوج در هر گراف فرد است.

۲) تعداد رأس‌های فرد در هر گراف زوج است.

۳) تعداد رأس‌های زوج در هر گراف زوج است.

۴) تعداد رأس‌های فرد در هر گراف فرد است.

حل : گزینهٔ (۲)

آزمون ۱۷ : گراف G دارای ۳۰ یال است. این گراف سه رأس از درجهٔ ۲ و سه رأس از درجهٔ ۶ دارد و بقیهٔ رئوس از درجهٔ ۳ هستند. تعداد رأس‌های G کدام است؟

۱) ۱۳	۲) ۱۵
۳) ۱۶	۴) ۱۸

حل : گزینهٔ (۴). فرض کنیم G دارای x رأس درجهٔ ۳ است، پس:

$$\sum \deg v_i = ۲q \rightarrow (۳\times۲)+(۳\times۶)+(x\times۳)=۲\times۳۰\rightarrow$$
$$۶+۱۸+۳x=۶۰\rightarrow ۳x=۳۶\Rightarrow x=۱۲$$

پس: $P=۳+۳+x=۱۸$

آزمون ۱۸ : اگر a و b و c رأس‌هایی از گراف ساده $G=(V,E)$ از مرتبهٔ ۷ باشند و $\deg a=\deg b=\deg c=۰$، آن‌گاه E حداکثر چند عضو دارد؟

۱) ۴	۲) ۶
۳) ۸	۴) ۵

حل : گزینهٔ (۲). چهار رأس باقی‌مانده، باعث به‌وجود آمدن یال می‌شوند. پس حداکثر تعداد یال‌های این گراف برابر است با: $\binom{۴}{۲}=۶$.

سؤال : آیا در گراف‌های ساده، دنبالهٔ درجات می‌توانند تصاعد حسابی تشکیل دهند؟ چرا؟

پاسخ : خیر، چون در گراف‌های ساده، دنبالهٔ درجات رأس‌ها نمی‌توانند متمایز باشند.

تذکر ۱ : دنبالهٔ درجات رأس‌های یک گراف زمانی می‌توانند، تشکیل یک تصاعد حسابی بدهند که تمام جملات دنباله با هم برابر باشند. پس قدر نسبت این تصاعد برابر صفر است.

تذکر ۲ : در گراف‌های ساده، دنبالهٔ درجات رأس‌ها نمی‌توانند تصاعد هندسی تشکیل دهند.

تذکر ۳ : دنبالهٔ درجات رأس‌های یک گراف، زمانی می‌تواند تصاعد هندسی تشکیل دهند که جملات دنباله با هم برابر باشند. پس قدر نسبت این تصاعد برابر یک است.

مسأله : اگر در گراف G از مرتبهٔ p و اندازهٔ q، میانگین درجات رأس‌ها بزرگ‌تر از ۲ باشد، ثابت کنید: $q>p$

حل : اگر $d_1, d_2, d_3, \dots, d_p$ درجه‌های رأس‌های گراف G باشند، آن‌گاه از فرض داریم:

$$\frac{d_1+d_2+\dots+d_p}{p} > ۲ \to \frac{۲q}{p} > ۲ \to ۲q > ۲p \to q > p$$

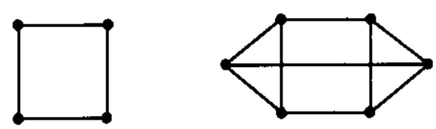
گراف منتظم

گرافی را که درجهٔ همهٔ رأس‌های آن یکسان باشد، گراف منتظم می‌نامند.

تعریف: گراف G از مرتبه p را r- منتظم می‌نامیم، هرگاه درجهٔ هر رأس G برابر با r باشد (توجه کنید، r عدد صحیح نامنفی است).

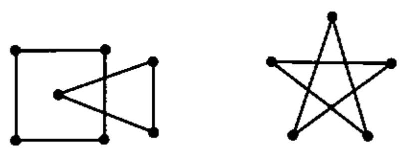
مثال ۱:

(۱ . منتظم مرتبهٔ ۲) (۰ . منتظم مرتبهٔ ۱)



(۳ . منتظم مرتبهٔ ۶) (۲ . منتظم مرتبهٔ ۴)

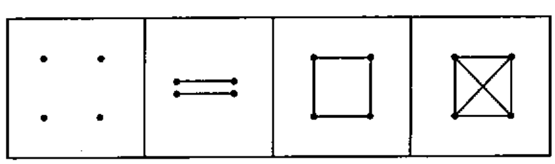
(۲ . منتظم مرتبهٔ ۳) (۱ . منتظم مرتبهٔ ۴)



(۲ . منتظم مرتبهٔ ۵) (۲ . منتظم مرتبهٔ ۷)

مثال ۲: همهٔ گراف‌های منتظم مرتبهٔ ۴ را رسم کنید.

حل: گراف‌های منتظم با ۴ رأس عبارتند از:



توجه کنید:

در هر گراف r- منتظم از مرتبه p و اندازهٔ q: $rp = ۲q$

تذکر: طبق رابطهٔ $rp = ۲q$ در گراف r- منتظم مرتبهٔ p، حداقل یکی از دو مقدار r یا p باید عددی زوج باشد.

نکتهٔ ۱: دنبالهٔ درجات رأس‌های گراف r- منتظم به صورت «$\underbrace{r,r,r,\dots,r}_{p \text{ تا}}$» است.

نکتهٔ ۲: در هر گراف r- منتظم: $\Delta = \delta = r$ (عکس مطلب برقرار است.)

نکته ۳: گراف فرد منتظم از مرتبهٔ فرد وجود ندارد.

مثال ۱: گراف ۳- منتظم مرتبهٔ ۷ وجود ندارد، زیرا برای $q = \frac{۱}{۲} \times ۷ \times ۳$، عدد صحیح نامنفی به دست نمی‌آید.

مثال ۲: تعداد یال‌های گراف ۷ منتظم مرتبهٔ ۱۲ را بیابید.

حل: $q = \frac{۱}{۲} rp = \frac{۱}{۲} \times ۷ \times ۱۲ = ۴۲$

گراف آشنایی

سؤال: آیا ممکن است در یک گروه ۱۳ نفری، هر شخص به تنهایی ۳ دوست داشته باشد؟ دلیل بیاورید.

پاسخ: خیر. اگر هریک از ۱۳ نفر را با یک نقطه (رأس) نمایش دهیم، دو نقطه را توسط یک یال به هم وصل می‌کنیم، اگر و فقط اگر افرادی که نقطه‌ها را نمایش می‌دهند، دوست باشند، بنابراین درجهٔ هریک از ۱۳ رأس برابر ۳ می‌شود و مجموع درجات رأس‌های گراف ۳۹ خواهد شد. این موضوع با این قضیه که مجموع درجات رئوس هر گراف زوج است، تناقض دارد. بنابراین جواب منفی است.

پاسخ دیگر: گراف این آشنایی یک گراف فرد منتظم از مرتبهٔ فرد خواهد بود که امکان ندارد. (۳ـ منتظم مرتبهٔ ۱۳)

مسأله: فرض کنید G یک گراف ساده از مرتبه p و اندازه $q = ۱۳$ باشد، اگر G یک گراف r- منتظم باشد و داشته باشیم: $۲r - p = ۲$، مقادیر p و r را بیابید؟ (امتحان هماهنگ کشوری ـ ۸۰)

حل:

$$\begin{cases} rp=۲q \to rp=۲\times ۱۲ \to rp=۲۴ \\ ۲r-p=۲ \xrightarrow[p\neq ۰]{\text{ضرب طرفین در}} ۲rp-p^{۲}=۲p \end{cases} \longrightarrow$$

$$۲\times ۲۴-p^{۲}=۲p \to p^{۲}+۲p-۴۸=۰$$

$$\to (p+۸)(p-۶)=۰ \to \begin{cases} p=-۸ & (\text{غ ق ق}) \\ p=۶ \end{cases}$$

بنابراین: $۶r=۲۴ \to r=۴$

آزمون ۱۹: دنبالهٔ درجات رأس‌های یک گراف ۳- منتظم به صورت «$\alpha-۲, \alpha-۲, \beta, \beta, \delta-۱, \delta-۱$» است. حاصل $\alpha+۲\beta+\delta$ کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۸

۳) ۱۶ ۴) ۱۵

حل: گزینهٔ (۴). چون گراف ۳- منتظم است، پس باید تمام جملات دنباله برابر ۳ باشند. بنابراین:

$$\begin{matrix} \alpha-۲=۳ \\ \beta=۳ \\ \delta-۱=۳ \end{matrix} \to \begin{matrix} \alpha=۵ \\ \beta=۳ \\ \delta=۴ \end{matrix} \to \alpha+۲\beta+\delta=۵+۶+۴=۱۵$$

آزمون ۲۰: گراف G یک گراف ۵- منتظم مرتبهٔ p است و $q=۴p-۲۷$، تعداد یال‌های این گراف کدام است؟

۱) ۴۵ ۲) ۵۷

۳) ۴۹ ۴) ۴۱

حل: گزینهٔ (۱) $۵p=۲q$

$$q=۴p-۲۷ \to ۲q=۸p-۵۴ \to ۵p-۸p=-۵۴ \to ۳p=۵۴ \to p=۱۸$$

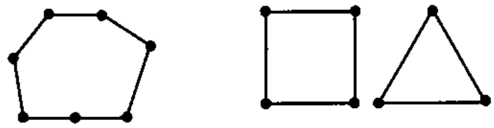
پس: $q=\dfrac{۵\times ۱۸}{۲}=۴۵$

آزمون ۲۱: تعداد گراف‌های ۲- منتظم مرتبهٔ ۷ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) هیچ

حل: گزینهٔ (۲). گراف‌های ۲- منتظم از مرتبهٔ ۷ عبارتند از:



نکته: در هر گراف ۲- منتظم از مرتبهٔ p و اندازهٔ q همواره داریم: $p=q$

آزمون ۲۲: گراف G، ۲- منتظم است که با افزودن ۳ یال به آن به گراف ۳- منتظم تبدیل می‌شود. مرتبه G کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶

۳) ۷ ۴) ۸

حل: گزینه (۲)

$$\left.\begin{matrix} p=q & : \text{در گراف ۲- منتظم} \\ ۳p=۲(q+۳) & \text{در گراف ۳ - منتظم} \end{matrix}\right\} \to p=۶$$

نکته: در گراف r- منتظم از مرتبهٔ p و اندازهٔ q: $p>r, p^{۲}>۲q$

آزمون ۲۳: کدام گراف وجود ندارد؟

۱) ۰ - منتظم از مرتبهٔ ۵

۲) ۴- منتظم از مرتبهٔ ۷

۳) ۷ - منتظم از مرتبهٔ ۸

۴) ۵ - منتظم از مرتبهٔ ۴

حل: گزینهٔ (۴). در گراف ۵ - منتظم مرتبهٔ ۴، درجهٔ هر رأس از تعداد رأس‌ها بیش‌تر است که امکان ندارد.

سؤال: آیا گراف منتظم با ۱۵ یال وجود دارد که درجهٔ تمام رأس‌های آن ۴ باشد؟

پاسخ: فرض می‌کنیم مرتبهٔ این گراف p باشد. بنابراین:

$$۴p=۲q \to p=\frac{۲\times ۱۵}{۴}=\frac{۳۰}{۴}$$

p عدد طبیعی نیست، بنابراین چنین گرافی

وجود ندارد.

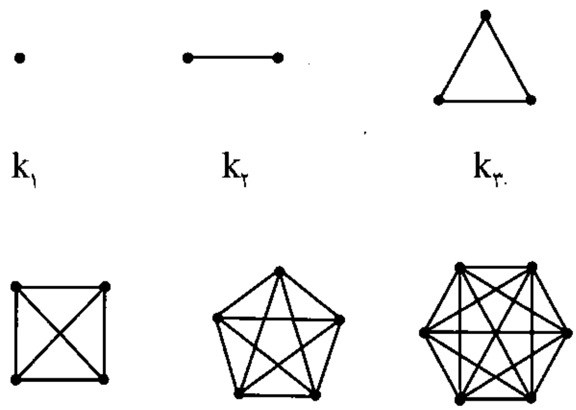
گراف کامل

گرافی را که تمام رأس‌های آن دو به دو با هم مجاور باشند، گراف کامل می‌نامند.

به عبارت دیگر: «گرافی که هر دو رأس متمایز آن با یک یال به هم وصل باشند، گراف کامل است.»

هر گراف کامل مرتبهٔ p را به k_p نمایش می‌دهند.

مثال:



k_1 k_2 k_3

k_4 k_5 k_6

تذکر ۱: گراف k_p، یک گراف $(p-1)$ منتظم است.

تذکر ۲: هر گراف کامل منتظم است ولی عکس آن درست نیست.

مثال: گراف  گراف منتظم است، ولی کامل نیست.

توجه کنید:

قضیه: در هر گراف کامل k_p با اندازهٔ q:

$$q = \frac{1}{2}p(p-1)$$

اثبات: چون گراف کامل است، درجات کلیهٔ رأس‌های آن برابر $(p-1)$ است. پس:

$$\underbrace{(p-1)+(p-1)+\cdots+(p-1)}_{p} = 2q \rightarrow p(p-1) = 2q \rightarrow$$

$$q = \frac{1}{2}p(p-1)$$

آزمون ۲۴: گراف کامل k_p دارای ۲۸ یال است. p کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷

۳) ۸ ۴) ۹

حل: گزینهٔ (۳)

$$q = \frac{1}{2}p(p-1) \Rightarrow p(p-1) = 28 \times 2 = 56 = 8 \times 7 \rightarrow p = 8$$

آزمون ۲۵: (سراسری، ریاضی، ۷۵): در گراف سادهٔ $G=(V,E)$، $V=\{a,b,c,d,e,f\}$ و $E(G)$ پانزده عضو دارد. از هر عضو V حداقل چند یال می‌گذرد؟

۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) ۵

حل: گزینهٔ (۴). با توجه به این‌که گراف کامل k_6 دارای ۱۵ یال است، پس گراف G همان گراف k_6 است که درجهٔ هر رأس آن $p-1=6-1=5$ است. بنابراین از هر عضو V حداقل ۵ یال می‌گذرد.

نکته: در هر گراف کامل با مرتبهٔ p و اندازهٔ q:

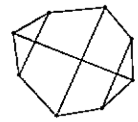
$$p+q = \frac{1}{2}p(p+1) = \binom{p+1}{2}$$

آزمون ۲۶: اگر G یک گراف کامل باشد، کدام عدد می‌تواند برابر مجموع مرتبه و اندازهٔ G باشد؟

۱) ۲ ۲) ۲۰

۳) ۱۸ ۴) ۲۴

حل: گزینهٔ (۱). با توجه به نکتهٔ بالا، دو برابر مجموع مرتبه و اندازهٔ یک گراف کامل به صورت حاصل ضرب دو عدد متوالی است که این قاعده بین گزینه‌ها فقط در مورد عدد ۲۱ صادق است؛ زیرا $6 \times 7 = 42 = 21 \times 2$

آزمون ۲۷: به گراف  چند یال اضافه کنیم تا کامل شود؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۴

۳) ۱۶ ۴) ۱۸

حل: گزینهٔ (۳). می‌دانیم که تعداد یال‌های گراف k_8 برابر $\frac{1}{2}\times 8\times 7 = 28$ است و گراف فوق ۱۲ یال دارد. پس باید تعداد ۱۶ = ۱۲ − ۲۸ یال به گراف مزبور افزود تا کامل شود.

نکته: در هر گراف کامل با q یال، مقدار $8q+1$ عددی مربع کامل است.

نکته: در گراف کامل مرتبهٔ p مقدار $\delta + \Delta$ ماکزیمم است.

آزمون ۲۸: اندازهٔ گراف‌ها داده شده‌اند. با کدام اندازه حاصل $\delta + \Delta$ ماکزیمم است؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۹

۳) ۲۰ ۴) ۲۱

حل: گزینهٔ (۴). همگی اعداد می‌توانند برابر تعداد یال‌های یک گراف مرتبه ۷ باشند، ولی چون گراف مرتبهٔ ۷ با ۲۱ یال یک گراف کامل است، حاصل $\delta + \Delta$ به ماکزیمم مقدار خود می‌رسد.

آزمون ۲۹: در گرافی از مرتبهٔ ۹ و اندازهٔ ۳۵، چند رأس درجهٔ ۸ وجود دارد؟

۱) ۵ ۲) ۶

۳) ۷ ۴) ۸

حل: گزینهٔ (۳). می‌دانیم گراف کامل k_9 دارای ۳۶ یال است و گراف مزبور یک یال از گراف k_9 کم دارد. بنابراین گراف دارای ۲ رأس از درجهٔ ۷ و ۷ رأس از درجهٔ ۸ است.

تفریح اندیشه ... تفریح اندیشه ... تفریح اندیشه ...

۱. دستگاه زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 208 \\ xy = 96 \end{cases}$$

❊ ❊ ❊

۲. مجموع پنج زاویه از زاویه‌های یک هشت‌ضلعی، °۸۴۵ است. از سه زاویهٔ باقیمانده، دو زاویه، متمم یکدیگر و دو زاویه، مکمل یکدیگرند. اندازهٔ این سه زاویه را بیابید.

۳. دستگاه زیر را که در آن $x > y$، حل کنید:

$$\begin{cases} x + y + xy = 19 \\ xy(x+y) = 84 \end{cases}$$

۴. مجموع دو عدد ۴۵ است. مجموع خارج قسمت‌های آن‌ها و معکوس آن ۲/۰۵ است. حاصل‌ضرب این دو عدد را بیابید.

پاسخ تفریح اندیشه در صفحه‌های ۱۳، ۵۴ و ۶۴ آمده است.

هنر تشکیل معادله

برای دانش آموزان سال اول

● علیرضا عین اللهی

درصورتی که دانش آموزان روش های حلّ یک معادله را فرا بگیرند، مطمئناً اغلب آنان در حل سایر معادلات، مشکلی ندارند؛ بلکه تبدیل یا تشکیل یک معادله با استفاده از مفروضات مسأله است که برای بسیاری از دانش آموزان مشکل ساز است. در فعالیت های زیر، سعی کرده ایم هنر تشکیل یک معادله را بیاموزیم؛ یعنی نحوهٔ تبدیل زبان جبری یک مسأله را به زبان معمولی آموزش دهیم. دانش آموزان عزیز، فعالیت نمونه را به صورت انفرادی مطالعه کنید و سپس به صورت گروهی به حل مسأله های ۶ تا ۱۲ بپردازید.

فعالیت نمونه

I) یک کلاس درس، ۲۷ دانش آموز دارد. هر دو نفر از آن ها روی یک نیمکت می نشینند و سه نفر هم روی صندلی های تک نفره. چند نیمکت در این کلاس وجود دارد؟

به جدول زیر توجه کنید:

زبان معمولی مسأله	زبان جبری مسأله
تعداد نیمکت ها	x
هر دو نفر روی یک نیمکت می نشینند	$2x$
سه نفر روی صندلی های تک نفره می نشینند	3
تعداد دانش آموزان کلاس درس، ۲۷ نفر است	$2x+3=27$

معادلهٔ $27 = 3 + 2x$ زبان جبری مسأله است.

II) یک بازرگان در سال اول کارش، یک میلیون تومان خرج کرد، یک سوم باقیماندهٔ پولش، به آنچه که برایش مانده بود، اضافه شد. در سال بعد، دوباره یک میلیون تومان خرج کرد و یک سوم باقیماندهٔ پولش به آنچه داشت، اضافه شد و این عمل ادامه داشت تا این که بازرگان پس از سه سال، دید که دو برابر سرمایهٔ اولیه اش، پول دارد؟

به جدول زیر توجه کنید:

زبان معمولی مسأله	زبان جبری مسأله
سرمایهٔ اولیهٔ بازرگان	x (برحسب میلیون تومان)
در سال اول، یک میلیون تومان خرج کرد	$x-1$
به آنچه برایش باقیمانده بود، یک سوم پولش اضافه شد	$(x-1)+\frac{x-1}{3}=\frac{4x-4}{3}$
در سال دوم، یک میلیون تومان خرج کرد	$\frac{4x-4}{3}-1=\frac{4x-7}{3}$
و یک سوم باقیماندهٔ پولش به آنچه داشت، اضافه شد	$\frac{4x-7}{3}+\frac{1}{3}(\frac{4x-7}{3})=\frac{16x-28}{9}$
در سال سوم، بازهم یک میلیون تومان خرج کرد	$\frac{16x-28}{9}-1=\frac{16x-37}{9}$
و یک سوم موجودی اش را به پولی که داشت، اضافه کرد	$\frac{16x-37}{9}+\frac{1}{3}(\frac{16x-37}{9})=\frac{64x-148}{27}$
پس از سه سال، پول بازرگانان دوبرابر شد.	$\frac{64x-148}{27}=2x$

معادلهٔ $\frac{64x-148}{27}=2x$ زبان جبری مسأله است.

III) کلاغی به دسته ای کبوتر که در حال پرواز بودند، رسید و از سر دستهٔ آنها پرسید: «شما چند تا هستید؟» کبوتر گفت: «ما و ما و نصف ما و نیمه ای از نصف ما، گر تو هم با ما شوی، ما جملگی ۱۰۰ می شویم».

به جدول زیر توجه کنید:

زبان معمولی مسأله	زبان جبری مسأله
تعداد کبوترها در دسته	x
ما و ما	$2x$
به اضافهٔ نصف ما	$2x+\frac{x}{2}=\frac{5x}{2}$
به اضافهٔ نیمه ای از نصف ما	$\frac{5x}{2}+\frac{1}{2}(\frac{x}{2})=\frac{11x}{4}$
گر تو هم با ما شوی	$\frac{11x}{4}+1$
جملگی ۱۰۰ می شویم	$\frac{11x}{4}+1=100$

معادلهٔ $\frac{11x}{4}+1=100$ زبان جبری مسأله است. کلیهٔ مراحل جدول بالا را می‌توان در تساوی زیر خلاصه کرد:

$$2x+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)+1=100$$

IV) حاصل ضرب دو عدد متوالی برابر ۶۳ است. این دو عدد را بیابید.

به جدول زیر توجه کنید:

زبان معمولی مسأله	زبان جبری مسأله
یک عدد صحیح نامشخص	n
دو عدد فرد متوالی داریم	$2n+1$ و $2n-1$
حاصلضرب دو عدد فرد متوالی	$(2n-1)(2n+1)=4n^2-1$
برابر ۶۳ است	$4n^2-1=63$

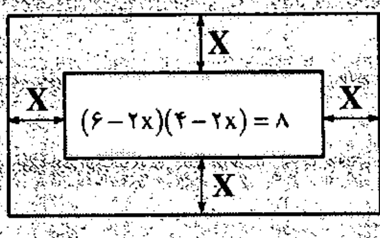
معادلهٔ $4n^2-1=63$ زبان جبری مسأله است. با به‌دست آوردن n و قرار دادن در $2n+1$ و $2n-1$، دو عدد فرد متوالی به دست می‌آیند.

V) یک قالی، در اتاقی به ابعاد ۶ و ۴ متر قرار دارد. فاصلهٔ هر طرف آن تا کنار دیوار اتاق یکسان است. اگر مساحت قالی ۸ مترمربع باشد، فاصلهٔ هر طرف قالی را تا دیوار حساب کنید:

به جدول زیر توجه کنید:

زبان معمولی مسأله	زبان جبری مسأله
فاصلهٔ قالی تا کنار دیوار اطاق	x
طول و عرض قالی	$6-2x$ ، $4-2x$
مساحت قالی	$(6-2x)(4-2x)=24-20x+4x^2$
مساحت قالی برابر ۸ است	$24-20x+4x^2=8$

شکل مقابل اطلاعات داخل جدول را به صورت هندسی بیان می‌کند:



■ مشابه با فعالیت

نمونه، زبان جبری مسائل ۶ تا ۱۲ را با رسم جدول بیابید.

۶. احمد برای خرید ۵ دفتر و یک خودکار ۳۰ تومانی، ۳۸۰ تومان پرداخت. قیمت هر دفتر چه قدر است؟

۷. هفت برابر عددی به اضافهٔ ۲، برابر ۵۸ است، آن عدد کدام است؟

۸. در یک مثلث متساوی الساقین که طول هر ساق آن برابر ۱۰ و طول قاعدهٔ آن برابر ۱۲ است، یک مربع محاط کنید (راهنمایی: باید ضلع مربع را محاسبه کرد.) این مسأله از خوارزمی است.

۹. تحقیق کنید، اگر عددی در تقسیم بر ۹ به باقیماندهٔ ۱ یا ۸ برسد، مجذور آن عدد در تقسیم بر ۹، باقیمانده‌ای برابر ۱ خواهد داشت. (از ابن سینا).

۱۰. می‌خواهیم عددی را پیدا کنیم که، اگر آن عدد را در خودش ضرب، سپس دو واحد به آن اضافه کنیم بعد بر ۵ تقسیم و بالاخره در ۱۰ ضرب کنیم، عدد ۵۰ به‌دست می‌آید. (از بهاءالدین عاملی).

۱۱. عددی پیدا کنید که اگر توان چهارم آن را بر نصف خودش تقسیم و سپس با ۱۴ جمع کنیم، عدد ۱۰۰ به‌دست می‌آید. (از اویلر).

۱۲. دو عدد صحیح زوج متوالی را چنان پیدا کنید که مجموع آن‌ها ۶۲ واحد از حاصل ضرب آن‌ها کم‌تر باشند.

معرفی منابع برای مطالعهٔ بیش‌تر

۱. چیستیاکوف، و. د. مساله‌های تاریخی ریاضیات. پ شهریاری. نشرنی.
۲. پرلمان، ی. ا. سرگرمی‌های جبر. نشر امیرکبیر.
۳. عین‌اللهی، ع. روش‌های استدلال در ریاضیات. نشر پیین.
۴. واردن، ب. ل. تاریخ جبر. م وحیدی اصل و ع جمالی. نشر متکران.

پاسخ تفریح اندیشه۴

پاسخ۴: ۵۰۰

حل: فرض می‌کنیم دو عدد مورد نظر x و y باشند:

$$x + y = 45 \qquad (1)$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2/05 \qquad (2)$$

معادلهٔ (۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{x^2 + y^2}{xy} = 2/05$$

بنابراین:

$$x^2 + y^2 = 2/05xy$$

$$x^2 + y^2 + 2xy = 4/05xy$$

$$(x + y)^2 = 4/05xy$$

از (۱) به دست می‌آوریم:

$$(45)^2 = 4/05xy$$

$$xy = \frac{2025}{4/05} = 500$$

شرایط و فرم اشتراک رشد برهان متوسطه

شرایط اشتراک:

۱. واریز حداقل مبلغ ۱۵۰۰۰ ریال به عنوان علی‌الحساب به حساب شماره ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارتِ شعبهٔ سه راه آزمایش(سرخه حصار)، کد ۳۹۵ در وجه شرکت افست و ارسال رسید بانکی به همراه فرم تکمیل شدهٔ اشتراک الزامی است.

۲. مبنای شروع اشتراک از زمان وصول فرم درخواست است.

* نام و نام خانوادگی: .... * تاریخ تولد: ....

* میزان تحصیلات: .... * تلفن: ....

* نشانی کامل پستی:

استان: .... شهرستان: .... خیابان: ....

کوچه: .... پلاک: .... کدپستی: ....

* مبلغ واریز شده: ....

* شمارهٔ و تاریخ رسید بانکی: .... * مجلهٔ درخواستی: ....

امضاء

نشانی: تهران-صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۳۳۳۱، امور مشترکین.
تلفن: ۸۸۳۹۱۸۶

* مشخصات و نشانی خود را کامل و خوانا بنویسید. هزینه برگشتِ مجله در صورت کامل نبودن نشانی، به‌عهدهٔ مشترک است.

* ارسال اصل رسید بانکی ضروری است.

آیا
با دیگر نشریات
دفتر انتشارات کمک آموزشی
آشنایی دارید؟
دفتر انتشارات کمک آموزشی،
این مجلات را نیز منتشر می کند:
رشد کودک
(ویژه ی پیش دبستان و دانش آموزان کلاس اوّل دبستان)
رشد نوآموز
(برای دانش آموزان دوم و سوم دبستان)
رشد دانش آموز
(برای دانش آموزان چهارم و پنجم دبستان)
رشد نوجوان
(برای دانش آموزان دوره ی راهنمایی)
رشد جوان
(برای دانش آموزان دوره ی متوسّطه)
و مجلات :
معلّم، تکنولوژی آموزشی، آموزش ابتدایی، آموزش قرآن، آموزش فیزیک، آموزش شیمی، آموزش زبان، آموزش راهنمایی تحصیلی، آموزش ریاضی، آموزش زیست شناسی، آموزش جغرافیا، آموزش زبان وادب فارسی، آموزش معارف اسلامی،آموزش تاریخ، آموزش هنر، و برهان راهنمایی
معلم
آموزش قرآن
آموزش زبان و ادب فارسی
جوان
آموزش زیست شناسی
تکنولوژی آموزشی
آموزش شیمی
استعدادیابی
و انتخاب در ورزش